

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ლაშა იაშვილი

ქარის დატვირთვების ანგარიში  
Comsol Multiphysics გარემოში

თბილისი  
2015

საცხოვრებელი თუ სამრეწველო მაღლივი შენობა-ნაგებობის ასაგებად, საჭიროა, გაანგარიშებული იქნას ქარის დატვირთვებიც, ასეთი ამოცანის უყურადღებოდ დატოვება არაა სასურველი, რადგან სხვა ფაქტორებთან ერთად ნაგებობათა უსაფრთხოება ქარის დატვირთვებზეცაა დამოკიდებული, დღეს-დღეისობით შემოუშავებულია პროგრამული პაკეტი რომლითაც შესაძლებელია მისი ანგარიში და სხვადასხვა განზომილებაში მოდელი.

აქედან გამომდინარე, საჭირო იყო დაიხვეწილიყო და განვითარებულიყო კომპიუტერული მეთოდები და პროგრამული უზრუნველყოფა, ქარის დატვირთვებთან მიმართებაში. გამოვიყენეთ *COMSOL Multiphysics* პროგრამული პაკეტით გამოვთვალეთ ქარის დატვირთვა სხვადასხვა, რთული გეომეტრიული შენობა-ნაგებობების პროექტირებისას.

.მონოგრაფია განკუთვნილია ბაკალავრებისთვის, მაგისტრებისათვის დოქტურანტებისთვის და ამ დარგში მომუშავე სპეციალისტებისა და ფართო პროფილის მეცნიერებისთვის.

რეცენზენტი: ასოცირებული პროფესორი გონა დალაქიშვილი

ISBN: 978-9941-0-7367-0

## შინაარსი

შესავალი .....	5
თავი I. გამოთვლითი ჰიდროაეროდინამიკის ამოცანების ამოხსნა და საინჟინრო ნაგებობებზე ქარისაგან წარმოებული დატვირთვების განსაზღვრა .....	16
1.1. ლიუვილის მათემატიკური მოდელი .....	20
1.2. ბოლცმანის მათემატიკური მოდელი .....	21
1.3. ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები .....	26
1.4. სიმბოლური აღნიშვნები .....	36
1.5. ოპერატორები ტენზორებზე. მეტრიკული ტენზორები .....	40
1.6 მეორე რანგის ტენზორის ინვარიანტები. ჰამილტონ-კელის თეორემა .....	45
1.7. ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორები .....	51
1.8. ჰუკის განზოგადოებული კანონი და მუდმივათა მატრიცები, დრეკადი სხეულის თვისებების სიმეტრიის ხარისხის მიხედვით .....	58
1.9. ნიუტონის განზოგადოებული კანონი სითხეებისათვის .....	62
1.10 ნავიე-სტოქს-დიუგემის მოდელი. განტოლებათა ჩაწერა უგანზომილებო ფორმით. ნავიე-სტოქსისა და ეილერის მათემატიკური მოდელები. ....	65
1.11. ვარიაციული მეთოდების გამოყენება ქარის ნაკადის დინების მოდელირებისათვის .....	74
1.12 მათემატიკური მოდელირება და ქარის დატვირთვების საანგარიშო ფორმულები .....	75
1.13 ქარის განმსაზღვრელი პარამეტრების პოვნის	

რიცხვითი ალგორითმი ..... 79

1.14. სასრული-სხვაობის მეთოდის გამოყენება ქარის ნაკადის დინების მოდელირებისათვის..... 81

1.15. რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის საინჟინრო ნაგებობებზე და ნაგებობათა კომპლექსებზე ქარის დატვირთვების გათვლის შედეგები .....83

**თავი II. რთული გეომეტრიის საინჟინრო ნაგებობებზე მოქმედი, ქარის დატვირთვების განსაზღვრის არსებული ლიტერატურის მიმოხილვა..... 97**

2.1 ქარის დატვირთვების განსაზღვრის ნორმები და მეთოდები ამერიკის შეერთებულ შტატებში..97

2.2. ქარის დატვირთვების განსაზღვრის ნორმები და მეთოდები რუსეთში..... 107

2.3. ქარის დატვირთვების განსაზღვრის ნორმები და მეთოდები ბელორუსიაში..... ..109

2.4 ქარის დატვირთვების განსაზღვრის ნორმები და მეთოდები ევროპის ქვეყნებში.....117

2.5 ქარის აეროდინამიკური მოდელირება *COMSOL Multiphysics* -სის ბაზაზე.....131

## შესავალი

თემის აქტუალობა. საცხოვრებელი თუ სამრეწველო მაღლივი შენობა-ნაგებობის ასაგებად, საჭიროა, გაანგარიშებული იქნას ქარის დატვირთვებიც, ასეთი ამოცანის უწყურადღებოდ დატოვება არაა სასურველი, რადგან სხვა ფაქტორებთან ერთად ნაგებობათა უსაფრთხოება ქარის დატვირთვებზეცაა დამოკიდებული.

ტრადიციულად, ეს პრობლემა საქართველოში წყდებოდა ქარის დინამიკის განსაზღვრის ნახევრადემპირიული ფორმულებით, რომლებიც მოცემულია სამშენებლო ნორმებში (СНиП 2.01.07-85), ან, ხდებოდა შენობის ან შენობათა მასივი მაკეტის დამზადება და აეროდინამიკურ მილში ჰაერის დაბერვა, რაც საშუალებას იძლევა ექსპერიმენტულად შევისწავლოთ შენობებზე ქარის მოსალოდნელი დატვირთვები, რეგიონების გათვალისწინებით.

ქარის დატვირთვების СНиП-ით გაანგარიშება მეტად უხეშია და მიახლოებული, განსაკუთრებით, როდესაც საქმე გვაქვს რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის ნაგებობებთან. ასე, რომ ნორმების გამოყენების არეალი მეტად შეზღუდულია.

ხოლო, აეროდინამიკურ მილში ქარის ბერვის ექსპერიმენტი იწვევს დიდ ენერგეტიკულ ხარჯებს, ამიტომაც, მას იშვიათად იყენებენ.

შესაბამისი დინამიკის განტოლებების არსებული ანალიზური ამონახსნები, არ იძლევიან ქარის დატვირთვების გათვლის საშუალებას, რადგან ანალიზური ამონახსნები არსებობს ძირითადად, გაწვრივებული ამოცანებისათვის, რაც ქარისათვის მეტად უხეში მიახლოებაა.

თუმცადა, არსებობს ქარის დატვირთვების საანგარიშო არაწრიფივი მათემატიკური მოდელების რიცხვითი ამონახსნების პოვნის პროგრამული პაკეტები, მაგრამ მათაც გააჩნიათ რიგი ნაკლოვანებები:

- 1) არ იძლევიან საკმარისად ზუსტ ინფორმაციას, რომელიც დააკმაყოფილებს მშენებლებს რთული გეომეტრიის ნაგებობათა შემთხვევაში;
- 2) არ არიან უნივერსალური და თითოეულ მათგანს გააჩნია გამოყენების ვიწრო არეალი;
- 3) არ იძლევიან საშუალებას გავთვალთ ნაგებობათა მასივები.

აქედან გამომდინარე, საჭირო იყო დაიხვეწილიყო და განვითარებულიყო კომპიუტერული მეთოდები და პროგრამული უზრუნველყოფა, ქარის დატვირთვებთან მიმართებაში. პროგრამული პაკეტით უნდა გამოვთვალოთ ქარის დატვირთვა სხვადასხვა, რთული გეომეტრიული შენობა-ნაგებობების პროექტირებისას. გასათვალისწინებელია, არამარტო ჯამური მოქმედი ძალა, არამედ, შენობის ზედაპირის გასწვრივ წნევებისა და

სინქარეთა ველის გადაწილების სურათიც, რაც საშუალებას იძლევა გავთვალთ, როგორც ჯამური გადამტრიალებელი ძალის სიდიდე, ასევე, ქარის ინფილტრაცია ნაგებობათა კონსტრუქციის ზედაპირის გასწვრივ.

სამუშაოს მიზანია, შემუშავებული იქნას რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის სამშენებლო ნაგებობებზე, ქარის დატვირთვების გამოსათვლელი მათემატიკური მოდელი და შესაბამისი რიცხვითი ამონახსნების პოვნის ალგორითმები, რაც საშუალებას მოგვცემს დაზუსტებულ იქნას ნახევრადემპირიული ანალიზის შედეგები და შემუშავებული იქნას დატვირთვების გამოანგარიშების შესაბამისი მეთოდიკა. დასმულია შემდეგი ამოცანები:

- 1) გამოთვლითი ჰიდროდინამიკის მეთოდებზე დაყრდნობით, შემუშავებული იქნას, რთული გეომეტრიის საანჟინრო ნაგებობებზე, აეროდინამიკური დატვირთვების გაანგარიშების ალგორითმები;
- 2) შესწავლილ იქნას ნაგებობათა აეროდინამიკის ორგანზომილებიანი და სამგანზომილებიანი ამოცანები. გათვლის შედეგების შედარება სხვა, ცნობილი საინჟინრო მეთოდებით გათვლის შედეგებსა და აეროდინამიკური ექსპერიმენტების შედეგებთან;
- 3) ჩამოყალიბდეს რვანოვ-ობგადის ფუნქციების გამოყენების ალგორითმი, რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის ნაგებობების ზედაპირის გასწვრივ სასაზღვრო-მიკერის პირობების გათვალისწინებისათვის;

- 4) შემუშავებული ალგორითმები, გამოყენებული იქნას ნაგებობათა და ნაგებობათა კომპლექსების ქარის დატვირთვებზე გაანგარიშებისათვის.

მეცნიერული სიახლე მდომარეობს შემდეგში:

- 1) შემუშავებულ იქნა ქარის დატვირთვების გათვლის ახალი ალგორითმები, რისთვისაც გამოყენებულ იქნა ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემისათვის:
  - ა) გეომეტრიული კოდირების რვაჩოვ-ობგაძის მეთოდი,
  - ბ) სასრულ-სხვაობათა და ვარიაციული მეთოდები;
  - გ) ობგაძე-გაბრიჩიძის რეგულარულ წყაროთა მეთოდი;
- 2) შემუშავებულ იქნა ახალი ალგორითმების შესაბამისი პროგრამები *Mathcad*-ის და *Comsol* ბაზაზე;
- 3) გათვლილ იქნა ორგანზომილებიანი და სამგანზომილებიანი, რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის საინჟინრო ნაგებობების, ქარით გარსდენის ამოცანები და შესწავლილ იქნა შესაბამისი დატვირთვები;
- 4) გათვლილ იქნა ნაგებობათა კომპლექსების გარსდენა ქარის ტურბულენტური ნაკადით.  
შემუშავებული იქნა კომპიუტერული პროგრამები *Comsol*-ის ბაზაზე, რომლებიც საშუალებას იძლევიან გამოვთვალოთ



აეროდინამიკური დატვირთვები შემდეგი ტიპის  
შენობა-ნაგებობაზე;

- მართკუთხა პარალელიპედის ფორმების  
შენობები;
- ცილინდრული ფორმის ნაგებობები:  
კოშკები, საკვამური მილები, ანძები;
- შენობათა მასივები რთული რელიეფის  
გავლენის გათვალისწინებით.

რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის  
ფიგურათა ანალიზური გამოსახვა და  
ფუნქციონალური სიმრავლეები, განხილულია  
პრედიკატებისა და გეომეტრიული კოდირების  
თეორიის გამოყენება რთული გეომეტრიული  
კონფიგურაციის გეომეტრიული ფიგურების  
საზღვრის მათემატიკური ფორმულებით  
აღსაწერად. განხილულია ბულის ალგებრების  
კატეგორია, სადაც მორფიზმები ინდუცირებულია  
ჰომომორფიზმებით. რაც საშუალებას იძლევა,  
რვაჩოვ-ობგადის ჰომომორფიზმების გამოყენებით  
ავაგოთ რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის  
ნაგებობათა საზღვრის ანალიზური  
გამოსახულებები, რომლებიც ნულის ტოლ  
მნიშვნელობას მიიღებენ მხოლოდ ამ საზღვრის  
წერტილებისათვის. გეომეტრიული კოდირების  
მეთოდი პირველადაა გამოყენებული მაღლივი  
ნაგებობების მასივისათვის, რაც საშუალებას  
იძლევა, მარტივად გავითვალისწინოთ ბლანტი  
სითხის ნაგებობის კედლებზე მიკვრის  
სასაზღვრო პირობები. სიმარტივისათვის,  
განხილულია ორი სხვადასხვა დიამეტრის  
საკვამური მილის, ჰორიზონტული კვეთისათვის

(მიიღება ორი წრეწირი) შესაბამისი RO - ფუნქციის აგების ალგორითმი:

$$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_r, \quad (1)$$

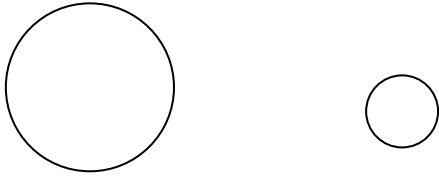
სადაც  $L_1$  - არის სიმრავლეებზე აგებული ბულის ალგებრა,

$L_2$  - არის პრედიკატებზე აგებული ბულის ალგებრა,

$L_r$  - არის რვაჩოვის ფუნქციების ბულის ალგებრა.

ისრებით აღნიშნულია ბუნებრივი ჰომომორფიზმები.

ეს ალგორითმი განიხილება კონკრეტულ მაგალითზე. ვთქვათ, გვსურს ავაგოთ რთული წირის განტოლება, მაშინ როცა ვიცით თუ, მისი ნაწილები რომელი ფუნქციების გრაფიკებია(ნახ.1). სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ გვაქვს ორი სხვადასხვა დიამეტრის მილი, მაშინ შეგვიძლია სიბრტყეზე მათი კვეთი გამოვსახოთ ერთი ანალიზური ფორმულით.



ნახ.1. ორი წრეწირი R და r რადიუსებით

ჩვენი ამოცანაა შევადგინოთ ისეთი ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება, რომელიც ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს ამ ორი წრეწირის საზღვარზე და სხვა წერტილებში არაა ნული.

(1) დიაგრამიდან გამომდინარე, ჯერ  $L_1$  სიმრავლეთა ბულის აღგებრაში ვაგებთ საყრდენ სიმრავლეებს, ანუ იმ სიმრავლეებს, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელია სიმრავლეთა ბულის აღგებრაში აღვწეროთ საძებნი სიმრავლე.

$$\Omega_1 = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 \geq 0\}, \quad (2)$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) | R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2 \geq 0\}, \quad (3)$$

$$\Omega_3 = \{(x, y) | (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 \geq 0\}, \quad (4)$$

$$\Omega_4 = \{(x, y) | r^2 - (x-c)^2 - (y-d)^2 \geq 0\}. \quad (5)$$

ეს ის სიმრავლეებია, რომელთა საშუალებითაც შეიძლება ავაგოთ საძებნი ფუნქციის სიმრავლური განტოლება:

$$\Omega = (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup (\Omega_3 \cap \Omega_4) \quad (6)$$

საყრდენი სიმრავლეების აგებისას, ჩვენ ვიყენებთ შესაბამისობას “მეტია ან ტოლი ნულზე”, რაც ამ შემთხვევაში საჭიროა რათა შეგვეძლოს ადვილად გადასვლა ჰომომორფიზმების საშუალებით

$L_2$ -ში. მართლაც, ბუნებრივი ჰომომორფიზმის საშუალებით  $L_2$ -ში მივიღებთ წირის პრედიკატულ განტოლებას :

$$P = (P_1 \wedge P_2) \vee (P_3 \wedge P_4), \quad (7)$$

სადაც  $P_1$  - არის გამონათქვამი  $x_1 \geq 0$ ,  
 $P_2$  - არის გამონათქვამი  $x_2 \geq 0$ ,  
 $P_3$  - არის გამონათქვამი  $x_3 \geq 0$ ,  
 $P_4$  - არის გამონათქვამი  $x_4 \geq 0$ ,

$$x_1 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2$$

$$x_2 = R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2;$$

$$x_3 = (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2; \quad (8)$$

$$x_4 = r^2 - (x-c)^2 - (y-d)^2.$$

ესეა, გადავიდეთ  $L_r$  - ში რეაზონის ჰომომორფიზმის მეშვეობით :

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i + x_j + \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i + x_j - \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ \neg P_i \Leftrightarrow -x_i \end{cases} \quad (9)$$

მივიღებთ  $R$  - ფუნქციას :

$$R = (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \vee (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2}) \equiv x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{x_3^2 + x_4^2} + \sqrt{(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2})^2} \quad (10)$$

სადაც გათვალისწინებული უნდა იყოს (9) თანადობები.

ისეთ შემთხვევებში, როცა ზუსტად ცნობილია ბმის რამდენიმე ელემენტის მქონე წირის შემადგენელი ელემენტების განტოლებები,

უფრო მიზანშეწონილია ობგადის ჰომომორფიზმი სტრუქტურებს შორის :

$$K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow K_{ro}, \quad (11)$$

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i \cdot x_j \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i^2 + x_j^2 \end{cases} \quad (12)$$

სადაც არის შესაბამისობა: “ჭეშმარიტი”  $\Leftrightarrow$  “უდრის ნულს”;

“მცდარი”  $\Leftrightarrow$  “არ უდრის ნულს”.

განხილული მაგალითის შემთხვევაში, საყრდენი სიმრავლეები იქნებიან :

$$\Omega_1 = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0\} \quad (13)$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) | (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0\}. \quad (14)$$

მაშინ,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 ; \quad (15)$$

ე.ი.  $P = P_1 \vee P_2 ; \quad (16)$

სადაც

$P_1$  - არის გამონათქვამი

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0, \quad (17)$$

$P_2$  - არის გამონათქვამი

$$(x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0 ; \quad (18)$$

ე.ი.

$$RO = [(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2] \cdot [(x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2] \quad (19)$$

როგორც ვხედავთ, ობგადის ჰომომორფიზმები საგრძნობლად ამარტივებენ საძიებელი წირის განტოლებას, რომელიც თავის

მხრივ მრავლადბმული გეომეტრიული სიმრავლეების კოდირების საშუალებას იძლევა უწყვეტი ფუნქციების საშუალებით.

ასევე, რიგ შემთხვევებში მნიშვნელოვნად მარტივდება  $R$  – ფუნქციის ანალიზური სახეც. ამიტომ, მიღებულ ალგორითმს სშირად, რეაჩოვ-ობგადის  $RO$ –მეთოდს ეძახიან. აქვე, განხილულია ფუნქციონალური სიმრავლეების კონსტრუქციული აგების ალგორითმიც. აგებულია  $L_2$  ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე და სობოლევის  $W_2^k$  სივრცე, რომლებიც საშუალებას იძლევიან, ავაგოთ ქარის ნაკადის მათემატიკური მოდელის რიცხვითი ამონახსნის პოვნის შესაბამისი ალგორითმები ვარიაციული და სასრულ-სხვაობიანი მეთოდების ბაზაზე.

გამოთვლითი ჰიდროაეროდინამიკის ამოცანების ამოხსნა და საინჟინრო ნაგებობებზე, ქარისაგან წარმოებული დატვირთვების განსაზღვრა, გადმოცემულია ჰიდროაეროდინამიკის ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმებისა და საინჟინრო ნაგებობებზე ქარის დატვირთვების განსაზღვრის ისტორიული მიმოხილვა. განხილულია ლიუვილისა და ბოლცმანის განტოლებები სტატისტიკური აეროდინამიკის ამოცანებისათვის. გამოყვანილია ნავიე-სტოქსისა და ეილერის განტოლებები ქარის ნაკადისათვის. აგებულია დინამიკის განტოლებების ამოხსნის ვარიაციული მეთოდი, რომელიც ემყარება კუპრაძე-ბრეზობიას შებრუნებულ ვარიაციულ ფორმულირებასა და რეაჩოვ-ობგადის გეომეტრიული კოდირების მეთოდს. აგებულია ასევე, ქარის დინამიკის

შესწავლის სასრულ-სხვაობიანი სქემები და გათვლილია როგორც ორგანოზომილებიანი, ასევე, სამგანზომილებიანი ამოცანები.

გამოყვანილია ქარის დატვირთვების განსაზღვრის საინჟინრო ფორმულების დამაზუსტებელი ფორმულები და შემუშავებულია, რთული გეომეტრიული ფორმის ნაგებობების ქარის დატვირთვებზე გათვლის ალგორითმები, რომლებიც რეალიზებულია MathCad და **COMSOL Multiphysics** გარემოში

**თავი I. გამოთვლითი ჰიდროაეროდინამიკის  
ამოცანების ამოხსნა და საინჟინრო ნაგებობებზე  
ქარისაგან წარმოებული დატვირთვების  
განსაზღვრა**

1910 წელს რიჩარდსონმა თავისი ნაშრომით [18], საფუძველი ჩაუყარა კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნების პოვნის სასრულ სხვაობიან მეთოდებს. რიჩარდსონმა შეიმუშავა ლაპლასის განტოლების, ბიჰარმონიული განტოლების, ჰიპერბოლური და ელიფსური განტოლებების ამოხსნის იტერაციული მეთოდები. მან, პირველმა შეძლო აეგო ქვის დამბის ანგარიშის სასრულ სხვაობიანი სქემა [18] და გაეთვალა დამბა.

1918 წელს ლიბმანმა შეძლო აეგო, უფრო სწრაფად კრებადი იტერაციული სქემა. კრებადობის პირველი დამტკიცება და იტერაციული პროცესის ცდომილების შეფასება ლიბმანის იტერაციული სქემისათვის, გააკეთეს ფილიპსმა და ვინერმა 1923 წელს [19] ელიფსური ტიპის განტოლებების ამოსახსნელად.

ჰიდროაეროდინამიკის განტოლებათა სისტემისათვის, სასრულ-სხვაობიანი მეთოდით რიცხვითი ამონახსნი, პირველად იპოვა ტომმა 1933 წელს [20]. 1955 წელს საუსველმა და ალენმა შეიმუშავეს, საუსველის რელაქსაციის მეთოდით, წრიული ცილინდრის ბლანტი, უკუმში სითხით გარსდენის ამოცანის ამოსახსნელად



შესაბამისი ალგორითმი. ეს იყო პიონერული ნაშრომი ამ მიმართულებით. აღმოჩნდა, რომ რეინოლდსის რიცხვის გაზრდით 100-ს ზემოთ, ადგილი აქვს ფიზიკურ არამდგრადობას, რაც კარგად შეესაბამება არსებულ ექსპერიმენტებს[21]. გათვლები, ჩატარებული იქნა რეინოლდსის რიცხვის ზრდადი მნიშვნელობებისათვის: 0, 1, 10, 100, 200, ...,1000.

სასრულ სხვაობათა მეთოდის განვითარებაში, დიდი წვლილი შეიტანეს რიხტმაიერმა და მორტონმა [22], ვაზოვმა და ფორსაიტმა[23], სამარსკიმ[24], , ჰემელაძემ, დ.გრდუხიანმა, თ.ვაშაყმაძემ და სხვ.

სასრულ სხვაობათა მეთოდის არსი მდგომარეობს იმაში, რომ დიფერენციალურ განტოლებებში, წარმოებულები იცვლებიან შესაბამისი სასრული სხვაობებით, რაც ემყარება ფუნქციების ტეილორის მწკრივად გაშლის ფორმულებს:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(\zeta_1),$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(\zeta_2),$$

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(\zeta_3).$$

სადაც

$$\zeta_1 \in [x, x+h], \zeta_2 \in [x-h, x], \zeta_3 \in [x, x+h]. \quad \text{ამ}$$

ფორმულებიდან მივიღებთ, რომ

$$\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} = u'(x) + \frac{h^2}{12}[u'''(\zeta_1) + u'''(\zeta_2)],$$

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{2h} = u'(x) + \frac{h}{2}u''(\zeta_3),$$

$$\frac{u(x)-u(x-h)}{h} = u'(x) - \frac{h}{2}u''(\zeta_4),$$

სადაც  $\zeta_4 \in [x - h, x]$ .

ქარის დატვირთვების საპონენელად, პირველად, ეიფელმა გამოიყენა აეროდინამიკურ მილში დაბერვის ექსპერიმენტი ეიფელის კოშკის დაპროექტებისას. მოუწესრიგებლად იყენებდნენ, აეროდინამიკურ მილში შენობების დაბერვის ექსპერიმენტებს 1930 წლიდან 1960 წლამდე, რასაც ნეგატიური მხარეებიც ქონდა. რადგან აეროდინამიკური ექსპერიმენტები, იმ დროისათვის წარმატებით გამოიყენებოდა საფრენი აპარატების ფრთის აეროდინამიკის შესასწავლად, ჩაითვადა რომ აქ დაგროვილი გამოცდილება შეიძლებოდა პირდაპირ გადატანილიყო სამშენებლო აეროდინამიკაშიც, თუმცა, აღმოჩნდა დრადინისა და ხილის ექსპერიმენტების შედეგად, რომ მიღებული შედეგები არ შეესაბამებოდა ნატურულ ექსპერიმენტებს. ვინაიდან, თვითმფრინავები დიდი სიჩქარით მოძრაობენ ფარდობით, უძრავი ჰაერის მიმართ და მათზე მოქმედებენ შედარებით მუდმივი ძალები, ნაგებობები კი განლაგებულია დედამიწის ზედაპირზე და მათ ირგვლივ ადგილი აქვს ქარის რთულ, ტურბულენტურ დინებას, რომელზედაც გავლენას ახდენს დედამიწის ზედაპირი, სხვა ნაგებობები და ქარის არათანაბარი, რხევითი მოძრაობა, ასევე, სიმაღლის მიხედვით ქარის სიჩქარეებიც და წნევის განაწილებაც იცვლება. 1943 წელს ბეილისა და ვინსენტის [39-41] მიერ შემუშავებული იქნა სამშენებლო ნაგებობების გამოსაცდელი აეროდინამიკური მილის ახალი კონსტრუქცია, სადაც გათვალისწინებული იქნა

დამბერავი ქარის დედამიწის ზედაპირიდან დაშორების მიხედვით სიჩქარეების ცვლილების კანონზომიერებები. შესაბამისი მსგავსების კრიტერიუმები შეადგინა ჯენკინსმა 1954 წელს.

1963 წელს ლონდონში, პირველად ჩატარდა ნაგებობებზე ქარის დატვირთვების განსაზღვრის პრობლემებისადმი მიძღვნილი საერთაშორისო კონფერენცია. შრომები მოიცავდნენ, როგორც ექსპერიმენტულ, ასევე, თეორიულ საკითხებს. განხილული იყო როგორც დეტერმინირებული მოდელები, ასევე, სტატისტიკური აეროდინამიკური მიდგომით აგებული მოდელები. ფრანკმა წარმოადგინა ჯენსენის მასშტაბირების კანონები, დევენპორტმა შეიმუშავა დატვირთვების სტატისტიკურად გათვლის წესი და ნიუბერრიმ შეიმუშავა ნატურული ექსპერიმენტებით სამშენებლო ნორმების დადგენის საწყისები. 1975 წელს მეოთხე საერთაშორისო კონფერენციაზე, ჩამოყალიბებულ იქნა სამშენებლო აეროდინამიკის ასოციაცია.

როგორც კონფერენციათა მასალები გვიჩვენებენ, პარალელურად ვითარდება როგორც ექსპერიმენტული მიდგომები, ასევე, თეორიული გათვლის მეთოდები: სასრულ-სხვაობათა და პირდაპირი, ვარიაციული მეთოდები სამშენებლო აეროდინამიკის ამოცანების ამოსახსნელად. ამიტომ, ჩვენ განვიხილავთ როგორც სტატისტიკურ(ლიუვილისა და ბოლცმანის) მიდგომას, ასევე, ჰიდროაეროდინამიკურ ნავიე-სტოქსის მიდგომას.

## 1.1. ლიუვილის მათემატიკური მოდელი

იმ შემთხვევაში, როცა სისტემა შედგება მეტად მრავალრიცხოვანი ნაწილაკებისაგან, თითოეული ნაწილაკისათვის ლაგრანჟის განტოლების ჩაწერა, ან მოძრაობის განტოლების რომელიმე სხვა ფორმით ჩაწერა, არ გვაძლევს საიმედო შედეგს, რადგან კომპიუტერის ოპერატიულ მეხსიერებაც შემოფარგლულია, ამასთან შეუძლებელია საწყისი პირობების ზუსტი ცოდნაც.

ასეთ შემთხვევაში, მაგალითად, თუ საქმე გვაქვს გაზთან, სითხესთან, ან დეფორმირებად სხეულთან, რომლებიც უამრავი მოლეკულებისაგან შედგება, ჩვენ ვერ გამოვიყენებთ პირდაპირ, თეორიული მექანიკის ცნობილ მოდელებს, ამიტომ, უნდა ვეძიოთ სხვა მახასიათებლები და განმსაზღვრელი პარამეტრები, რომლებიც შესასწავლ გარემოს არა მოლეკულურ დონეზე, არამედ უფრო გლობალური – საშუალო მახასიათებლების დონეზე წარმოადგენენ [25-38]. ან, განვიხილოთ სისტემის ალბათური, სტატისტიკური მახასიათებლები.

სისტემის, ალბათური, სტატისტიკური მახასიათებლებით მოდელირებას ახდენენ სტატისტიკურ მექანიკასა და კვანტურ ფიზიკაში. განვიხილოთ, ჰამილტონის განტოლებები

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} . \quad (1.1)$$

n-მატერიალური წერტილისათვის, როდესაც n-იმდენად დიდია, რომ წერტილთა საწყისი განლაგებანი  $q_i(0)$  და მათი საწყისი იმპულსები  $p_i(0)$  - განისაზღვრებიან მხოლოდ გარკვეული ალბათობით, გარკვეულ საზღვრებში მაგალითად, 1სმ<sup>3</sup> გაზი ნორმალურ პირობებში შეიცავს დაახლოებით  $10^{23}$  მოლეკულას, ამიტომ ცხადია, რომ შეუძლებელია მათი ზუსტი განლაგებისა და იმპულსების დადგენა.

თუ  $f_N(\vec{p}, \vec{q}, \vec{t}) = C$ -არის (1.1) სისტემის პირველი ინტეგრალი ანუ თუ ის შეესაბამება, მოცემული სისტემის რეალურ მოძრაობას, მაშინ სისტემის მოძრაობისას ის რჩება მუდმივი, ე.ი.

$$\frac{df_N}{dt} = 0 . \quad (1.2)$$

მაგრამ, თუ გავშლით (1.2) ტოლობას სრული წარმოებულის ფორმულით, მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{df_N}{dt} + \sum_i \left( \frac{\partial f_N}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f_N}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0 . \quad (1.3)$$

ამ განტოლებაში, თუ შევიტანთ (1.1) ფორმულებს, მივიღებთ

$$\frac{df_N}{dt} + \sum_i \left( \frac{\partial f_N}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f_N}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0 . \quad (1.4)$$

ამ განტოლებას **ლიუვილის** განტოლებას უწოდებენ. თუ გამოვიყენებთ პუასონის

ფრჩხილების ცნებას, ლიუვილის (1.4) განტოლება გადაიწერება სახით:

$$\frac{df_N}{dt} + \{H \cdot f\} = 0. \quad (1.5)$$

თუ, გავითვალისწინებთ სისტემის სტატისტიკურ განხილვას და  $f_N$ -ფუნქციას განვიხილავთ, როგორც შესაძლო საწყისი მონაცემების განაწილების სიმკვრივეს, მაშინ (1.5) ლიუვილის მოდელი, სწორედ ის მოდელია, რომელიც საფუძვლად უდევს მთელ სტატისტიკურ მექანიკას.

(1.5)-მოდელი აღწერს,  $(p,q) \rightarrow (p+dp, q+dq)$  ფაზურ სივრცეში, სისტემის ყოფნის

$f_N$ -აღბათობის სიმკვრივის განაწილებას დროის მიხედვით, თუ, არ ხდება სხვა-დასხვა ნაწილაკების ურთიერთშეჯახება. ხოლო, თუ გვინდა გავითვალისწინოთ სისტემაში შემავალი მატერიალური წერტილების შეჯახებებიც, მაშინ უნდა მივმართოთ **ბოლცმანის** მათემატიკურ მოდელს.

## 1.2. ბოლცმანის მათემატიკური მოდელი

განვიხილოთ გაზი, რომელიც შეიცავს  $N$ -ერთნაირ მოლეკულას, რომლებიც მოთავსებული არიან  $V$  მოცულობის ჭურჭელში. დაუშვათ, რომ მოლეკულები წარმოადგენენ იდეალურად დრეკად ბურთულებს. შეჯახებისას, მოლეკულების სრული ენერჯია და იმპულსი ინახება (არ იცვლება). გაზის სიმკვრივე იმდენად მცირეა, რომ

ორი მოლეკულის შეჯახებაზე, მეზობელი მოლეკულები არ მოქმედებენ. ამასთან, ჩვენ შემოვიფარგლებით თითქმის იდეალური გაზით.

ავღნიშნოთ  $f_N(\vec{v})d\vec{v}$ -იმ მოლეკულების რაოდენობა ( $\leq N$ ) რომელთა სიჩქარეების კომპონენტებიც მოთავსებული არიან  $v_x$  და  $v_x + dv_x$ ,  $v_y$  და  $v_y + dv_y$ ,  $v_z$  და  $v_z + dv_z$ -ს შორის.

$f_N(\vec{v})$ - ფუნქციას უწოდებენ სიჩქარეების განაწილების ფუნქციას. განვიხილოთ ერთგვაროვანი და იზოტროპიული გაზი და უგულვებელ-ყოთ გარეშე მოქმედი ძალები. ასეთ შემთხვევაში, განაწილების ფუნქცია არაა დამოკიდებული სივრცით კოორდინატებზე და დამოკიდებულია, მხოლოდ სიჩქარის სიდიდეზე, ე.ი.  $f_N(\vec{v}) = f_N(v^2)$ . განაწილების ფუნქციის ნორმირების პირობას აქვს სახე:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_N(\vec{v})d\vec{v} = N. \quad (1.6)$$

ცხადია, რომ უსასრულო სიჩქარეები არ არსებობს, ამიტომ  $f_N$ -ფუნქცია უნდა ქრებოდეს  $\pm\infty$ -საკენ ( $\vec{v}$ )-ს მისწრაფებისას. გაზი იმყოფება მოლეკულური ქაოსის მდგომარეობაში. განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ შემთხვევას, როცა ეჯახება ორი მოლეკულა. (ე.ი. სამი მოლეკულის ან მეტის ერთდროული დაჯახება არ განიხილება). ვთქვათ, დაჯახებამდე მოლეკულებს ჰქონდათ  $\vec{v}$  და  $\vec{v}_1$  სიჩქარეები. დაჯახების შემდეგ, მათი სიჩქარეებია  $\vec{v}'$  და  $\vec{v}'_1$ .

ვეულისხმობთ, რომ მაშინ ერთ-ერთი უახლოვდება მეორეს  $\vec{g} = \vec{v}_1 - \vec{v}$  ფარდობითი სიჩქარით და სცილდება მას  $\vec{g}' = \vec{v}_1 - \vec{v}'$  სიჩქარით. დაჯახების მიმართულება ავლნიშნოთ ერთეულოვანი  $\vec{n}$ -ვექტორით, მიმართულია  $\vec{g}$  და  $\vec{g}'$ -ს შორის კუთხის ბისექტრისის გასწვრივ. მაშინ,

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{g}) ; \quad |g| = |g'| ; \quad (1.7)$$

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{g}) . \quad (1.8)$$

თუ, გამოვთვლით (1.7) და (1.8) გარდაქმნის იაკობიანს მოცემული  $\vec{n}$  და  $\vec{g}$  ვექტორებისათვის, მივიღებთ რომ

$$d\vec{v}d\vec{v}_1 = d\vec{v}'d\vec{v}'_1 . \quad (1.9)$$

ასე, რომ სიჩქარეების ფაზურ სივრცეში ელემენტარული მოცულობა დაჯახების მიმართ ინვარიანტულია.

განვიხილოთ ნაწილაკ-სამიზნის ზედაპირის კონცენტრული სფერო რომლის რადიუსიცაა  $\mu$  და ავაგოთ შეჯახების ცილინდრი, რომლის ფუძეც მდებარეობს სფეროს ზედაპირზე და ცენტრების ხაზზე. ცილინდრის მსახველი პარალელურია პირველი ნაწილაკის სიჩქარისა დაჯახებამდე. ვთქვათ, დახრილი ცილინდრის ფუძის ფართობია  $a^2 \sin \Psi d\Psi d\Phi$  , ხოლო მსახველის სიგრძეა  $l \sin \Psi \times g$  . დროის ერთეულის განმავლობაში სამიზნეს დაეჯახებიან ყველა ნაწილაკები, რომელთა სიჩქარეებიც მოთავსებულია  $(\vec{v}_1, \vec{v}_1 + d\vec{v}_1)$  შუალედში, ხოლო ცენტრები ვარდებიან ამ ცილინდრში. ასეთი ნაწილაკების



რაოდენობაა  $f_N(\vec{v})d\vec{v}$  გამრავლებული ცილინდრის მოცულობაზე:

$$f_N(\vec{v})d\vec{v} \cdot (g \sin \Psi) a^2 \cos \Psi d\Psi d\Phi = f_N(\vec{v})d\vec{v} \cdot gI(\theta, g)d\Omega \quad (1.10)$$

სადაც

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\Phi; \quad (1.11)$$

$\theta$ -გაბნევის კუთხეა,

$\pi \cdot I(\theta, g)$  - გაბნევის კვეთია, რომელიც

ჩვენს შემთხვევაში უდრის  $\frac{\pi a^2}{4}$

ასეთი გაბნევის ცენტრების რაოდენობა, ანუ იმ მოლეკულების რაოდენობა, რომელთა სიჩქარეებიც მოთავსებულია  $(\vec{v}_1, \vec{v}_1 + d\vec{v}_1)$

შუალედში, უდრის  $f_N(\vec{v})d\vec{v}$ . ამიტომ, აღნიშნული ტიპის დაჯახებათა რაოდენობა დროის ერთეულში იქნება:

$$A = f_N(\vec{v})f_N(\vec{v}_1)d\vec{v}d\vec{v}_1 \cdot gI(\theta, g)d\Omega. \quad (1.12)$$

არსებობენ, აგრეთვე მოცემული დაჯახებების შექცევული დაჯახებებიც, რომელთა რაოდენობა:

$$B = f_N(\vec{v}')f_N(\vec{v}'_1)d\vec{v}'d\vec{v}'_1 \cdot gI(\theta, g)d\Omega. \quad (1.13)$$

განაწილების ფუნქციის სრული ცვლილება

$\frac{df_N}{dt}d\vec{v}$  იქნება B-A სხვაობის ინტეგრალი  $\vec{v}_1, \vec{v}'_1$

და კუთხეების მიხედვით:

$$\frac{df_N}{dt} = \int (f'_N f'_{1N} - f_N f_{1N}) gI(\theta, g) d\vec{v}_1 d\Omega. \quad (1.14)$$

$$\text{სადაც } f_N = f_N(\vec{v}), f_{1N} = f_N(\vec{v}_1), f'_N = f_N(\vec{v}'),$$

$$f'_{1N} = f_N(\vec{v}'_1). \quad (1.15)$$

(1.14) განტოლებას **ბოლცმანის** განტოლებას უწოდებენ.

სტატიკური მექანიკის ძირითადი ამოცანაა, გამოსახოს მაკროსკოპული სიდიდეები: T-ტემპერატურა, p-წნევა,  $\rho$ -სიმკვრივე და ა.შ. განაწილების აღბათობათა  $f_N$  სიმკვრივის მეშვეობით ფაზურ სივრცეში. უწყვეტ ტანთა მექანიკის მოდელების შესადგენად გამოიყენება ტენზორული აღრიცხვა და შენახვის კანონები.

### 1.3. ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები

ტენზორული აღგებრა არის ვექტორული აღრიცხვის განზოგადოება მრუდწირული კოორდინატების შემთხვევაში. ტენზორული აღნიშვნები საშუალებას გვაძლევენ გავამარტივოთ უწყვეტ ტანთა მათემატიკური მოდელები.

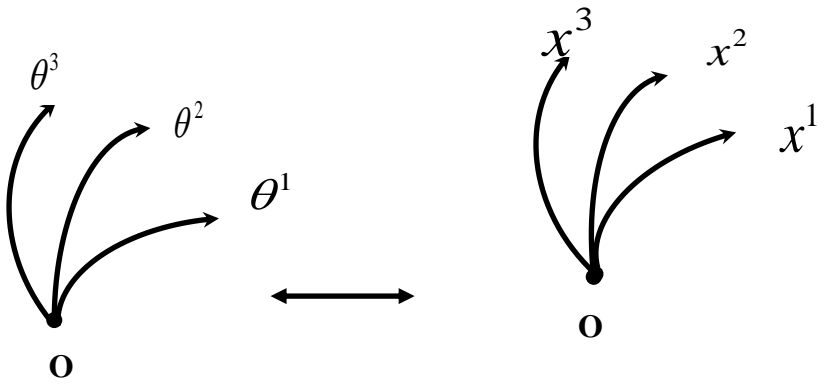
ტენზორულ აღგებრაში  $\vec{a}$  - ვექტორის კომპონენტების აღსაწერად გამოიყენებენ სიმბოლურ აღნიშვნებს:

$$a_i \text{ და } a^i ; \quad (1.16)$$

თუ ინდექსები ჩაწერილია ზემოთ – მაშინ მათ უწოდებენ  $\vec{a}$ -ვექტორის

$a^i$ -კონტრავარიანტულ კომპონენტებს, ხოლო თუ ინდექსები ჩაწერილია ქვემოთ, მაშინ მათ უწოდებენ  $\vec{a}$ -ვექტორის  $a_i$ -კოვარიანტულ კომპონენტებს.

ტენზორის, კონტრავარიანტი და კოვარიანტი კომპონენტების განსასაზღვრად, განვიხილოთ ერთი  $\theta^i$ -მრუდწირული კოორდინატა სისტემიდან მეორე  $x^i$ -კოორდინატა სისტემაზე გადასვლის ფორმულები.



ნახ. 1.1.  $\theta^i$  და  $x^i$  მრუდწირული კოორდინატა სისტემებია

ვთქვათ, გარდაქმნის ფორმულებს აქვს სახე:

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= x^1(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ x^2 &= x^2(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ x^3 &= x^3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \end{aligned} \right\}. \quad (1.17)$$

ეს სამი ფორმულა სიმბოლური აღნიშვნებით  
ჩაიწერება ერთ სტრიქონში:

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (1.18)$$

ჩავთვალოთ, რომ (1.8) გარდაქმნები არიან, ურთიერთცალსახა და ორმხრივ უწყვეტნი (ჰომეომორფიზმი),  $P$ -წერტილის მიდამოში. მაშინ, ცხადია რომ გარდაქმნის იაკობიანი ამ წერტილში განსხვავდება ნულისაგან, ანუ

$$J = \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \theta^i} \right\|, \quad \det J \neq 0. \quad (1.19)$$

ამ შემთხვევაში, არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემის ძალით, (1.8) ფორმულები შეიძლება შევაბრუნოთ  $P$ -წერტილის მიდამოში, ანუ ამოვხსნათ  $\theta^i$ -კოორდინატების მიმართ,

$$\theta^i = \theta^i(x^1, x^2, x^3) \quad (1.20)$$

(1.8) ფორმულების ბაზაზე, დავადგინოთ თუ როგორ გარდაიქმნებიან შესაბამისი კოორდინატების დიფერენციალები.

$P \in IR^3$  წერტილის მიდამოში, (1.18)-დან მივიღებთ:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^1} d\theta^1 + \frac{\partial x^i}{\partial \theta^2} d\theta^2 + \frac{\partial x^i}{\partial \theta^3} d\theta^3. \quad (1.21)$$

სიმბოლური აღნიშვნების მეშვეობით (1.21)  
გადაიწერება მოკლედ:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} d\theta^j. \quad (1.22)$$

ამ ფორმულაში გამოყენებულია აინშტაინის შეთანხმება შეჯამების შესახებ, ე.ი. როცა რომელიმე ჩანაწერის ერთ წევრში, ორჯერ მეორდება რომელიმე ინდექსი, მაშინ იგულისხმება რომ ამ  $j$ -ინდექსით ხდება შეჯამება  $j = 1, 3$ .

**განსაზღვრება:** იმ  $j$ -ინდექსს, რომლითაც ხდება შეჯამება – **ყრუ ინდექსი** ეწოდება.

ზოგალობის შეუზღუდავად, ყრუ ინდექსი შეიძლება შეიცვალოს ნებისმიერი სხვა ინდექსით, რომელიც არ გვხვდება მოცემულ ჩანაწერში.

**განსაზღვრება:** იმ ინდექსს, რომელიც ერთწევრში არ მეორდება **თავისუფალი ინდექსი** ეწოდება.

(1.22)-ჩანაწერში  $i$ -არის თავისუფალი ინდექსი,  $j$ -ყრუ ინდექსია.

**განსაზღვრება:** ტენზორის კომპონენტების თავისუფალ ინდექსთა რიცხვს – ტენზორის **რანგი** ეწოდება.

**მაგალითად:**  $a_i$  და  $a^i$  - პირველი რანგის ტენზორის (რანგის) კომპონენტებია;

$a_{ij}, a^{ij}, a_i^j$  -მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტებია  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ -სკალარული ფუნქცია, ანუ, ნულ-რანგის ტენზორია.

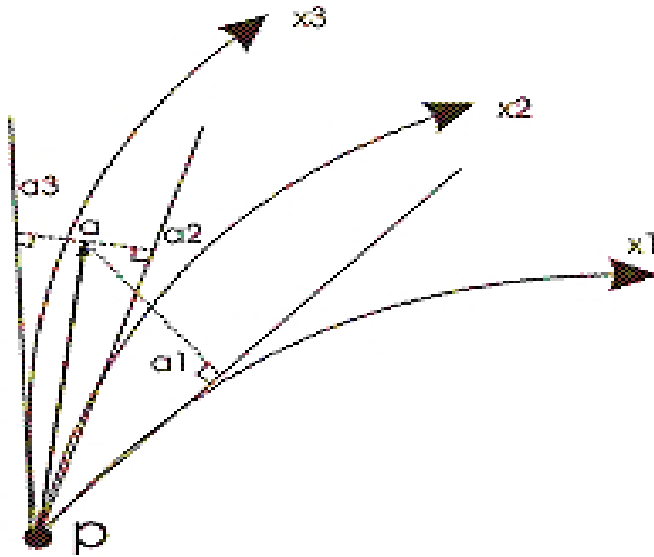
განსაზღვრება: P-წერტილში განსაზღვრულ

$a^i$ -სიდიდეებს ეწოდებათ პირველი რანგის ტენზორის (ვექტორის) კონტრავარიანტული კომპონენტები, თუ კოორდინატთა სისტემის შეცვლისას, ისინი გარდაიქმნიებიან, ისევე, როგორც გარდაქმნის ფორმულების (2.22)

დიფერენციალები, ანუ, თუ ძველ სისტემაში  $a^j$  და ახალ სისტემაში  $a'^i$ -კომპონენტები დაკავშირებული არიან თანადობით:

$$a'^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} a^j . \quad (1.23)$$

იმისათვის, რომ გავიგოთ კონტრავარიანტული კომპონენტების არსი, ავაგოთ მრუდწირული კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 1.2) P-წერტილში, სადაც მოდებულია  $\vec{a}$ -ვექტორი.



ნახ. 1.2.  $\vec{a}$ -ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

გავავლოთ მრუდწირული  $x^i$ -ღერძების მხეებები  $P$ -წერტილში. მაშინ  $\vec{a}$ -ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტები წარმოადგენენ ამ ვექტორის ორთოგონალურ პროექციებს  $a^i$ , შესაბამისი მრუდწირული ღერძების მხეების მიმართულებებზე, რომლებიც გავლებულები არიან  $P$ -წერტილში.

მეორე რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტებიც გარდაიქმნებიან (1.23) ფორმულების ანალოგიურად.

განსაზღვრება: P-წერტილში განსაზღვრულ

$\sigma^{ij}$  -სიდიდეებს ეწოდებათ მეორე რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტები, თუ კოორდინატთა შეცვლისას, ისინი გარდაიქმნებიან ფორმულებით:

$$\sigma'^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^m} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \theta^n} \sigma^{mn} \quad (1.24)$$

ამ ფორმულებში აინშტაინის შეთანხმების თანახმად, იგულისხმება ორმაგი შეჯამება m და n ყრუ ინდექსებით, ხოლო i და j – თავისუფალი ინდექსებია.

უფრო მაღალი რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტები განისაზღვრებიან ანალოგიურად.

ეხლა განვიხილოთ ტენზორების კოვარიანტული კომპონენტები. ამისათვის, დაგვჭირდება  $\varphi$  -ფუნქციის გრადიენტის გარდაქმნის ფორმულების შესწავლა. თუ, მოცემული გვაქვს  $\varphi(x^1, x^2, x^3)$  - სკალარული ფუნქცია, მაშინ მისი გრადიენტი სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \quad (1.25)$$

ცხადია რომ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} \quad (1.26)$$



(1.26) – ფორმულაში იგულისხმება შეჯამება  $j$ -  
 ყრუ ინდექსით (ეს არის რთული ფუნქციის  
 წარმოებული),  $i$ -თავისუფალი ინდექსია.

**განსაზღვრება:** P-წერტილში განსაზღვრულ  $a_i$  -  
 სიდიდეებს ეწოდებათ **პირველი რანგის  
 ტენზორის (ვექტორის) კოვარიანტული  
 კომპონენტები**, თუ კოორდინატთა მრუდწირული  
 ღერძების გარდაქმნისას, ძველ კოორდინატთა  
 სისტემაში  $a_j$  და ახალ კოორდინატთა სისტემაში  
 $a'_i$  დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან  
 სკალარული ფუნქციის გრადიენტის გარდაქმნის  
 (1.26) ფორმულების მსგავსად:

$$a'_i = \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} a_j. \quad (1.27)$$

ამ ფორმულებში  $j$ -ყრუ ინდექსია (ხდება შეჯამება  
 ამ ინდექსით),  $i$ -თავისუფალი ინდექსია.

**მეორე რანგის ტენზორის კოვარიანტული  
 კომპონენტების განსაზღვრისთვის გამოიყენება**  
 (2.27) ფორმულების მსგავსი გარდაქმნები.

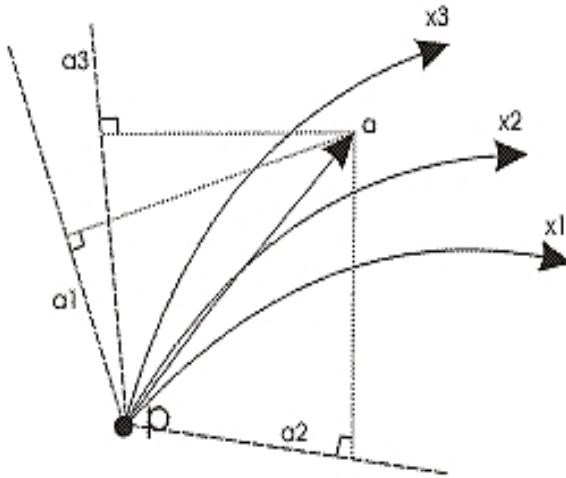
**განსაზღვრება:** P-წერტილში განსაზღვრული  $\sigma_{ij}$   
 სიდიდეებს ეწოდებათ **მეორე რანგის  
 კოვარიანტული კომპონენტები**, თუ კოორდინატთა  
 გარდაქმნისას ისინი გარდაიქმნებიან  
 ფორმულებით:

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial \theta^i} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \theta^j} \sigma_{mn} . \quad (1.28)$$

ამ ფორმულებში  $m$  და  $n$  ყრუ ინდექსებია (ორმაგი ჯამია), ხოლო  $i$  და  $j$  – თავისუფალი ინდექსებია.

პირველი რანგის ტენზორის (ვექტორის) კოვარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული აზრის ასახსნელად, განვიხილოთ ნახ.1.3 პირველი რანგის ტენზორი, ანუ,

$\vec{a}$ -ვექტორი მოდებულია  $P$ -წერტილში.



ნახ. 1.2.  $\vec{a}$ -ვექტორის კოვარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

$\vec{a}$ -ვექტორის  $a_1$  - კოვარიანტული კომპონენტა წარმოადგენს  $\vec{a}$ -ვექტორის ორთაგონალურ

პროექციას  $x^2$  და  $x^3$  ღერძებზე მოჭიმული მინიმალური ზედაპირის P-წერტილში აღმართულ დადებით ნორმალურ (პერპენდიკულარ) მიმართულებაზე,

$$\hat{e}_1 = \frac{\hat{e}^2 \times \hat{e}^3}{[\hat{e}^1 \hat{e}^2 \hat{e}^3]}; \quad (1.29)$$

აქ  $\hat{e}^1, \hat{e}^2, \hat{e}^3$  - P-წერტილში განსაზღვრული კონტრავარიანტული ბაზისია  $Ox^1, x^2, x^3$  მრუდწირული კოორდინატთა სისტემისათვის, რომელთაც აქვს ღერძებისადმი მხები მიმართულება,  $\hat{e}^1, \hat{e}^2, \hat{e}^3$  - შესაბამისი კოვარიანტული ბაზისია, სადაც

$$\hat{e}_2 = \frac{\hat{e}^3 \times \hat{e}^1}{[\hat{e}^1 \hat{e}^2 \hat{e}^3]}, \quad \hat{e}_3 = \frac{\hat{e}^1 \times \hat{e}^2}{[\hat{e}^1 \hat{e}^2 \hat{e}^3]}. \quad (1.30)$$

ხოლო  $[\hat{e}^1 \hat{e}^2 \hat{e}^3]$  - კონტრავარიანტული ბაზისის ვექტორების შერეული ნამრავლია.

მაშასადამე, საბოლოოდ შეგვიძლია ვთქავთ, რომ  $\vec{a}$ -ვექტორის,  $a_i$ -კოვარიანტული კომპონენტები წარმოადგენენ  $\vec{a}$ -ვექტორის ორთოგონალურ პროექციებს, შესაბამისი

$\hat{e}_i$ - კოვარიანტული ბაზისის ვექტორის მიმართულებაზე.

**P.S.** თუ გამოვიყენებთ (1.28) გარდაქმნის ფორმულების ანალოგიურ ფორმულებს,

შეგვიძლია შემოვიყვანოთ უფრო მაღალი რანგის ტენზორების კოვარიანტული კომპონენტების ცნებაც.

ზოგჯერ, განიხილავენ ტენზორის შერეულ კომპონენტებს, ე.ი. ისეთ კომპონენტებს, რომლებსაც ზოგიერთი ინდექსი აქვთ კოვარიანტული და ზოგიც კონტრავარიანტული.

განვიხილოთ მესამე რანგის ტენზორის შერეული კომპონენტები.

**განსაზღვრება:** P-წერტილში განსაზღვრული

$T_{.nq}^{m..}$  -სიდიდეებს ეწოდებათ მესამე რანგის ტენზორის შერეული კომპონენტები, თუ კოორდინატთა გარდაქმნისას, ისინი გარდაიქმნებიან ფორმულებით:

$$T_{.sp}^{r..} = \frac{\partial \theta^r}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \theta^s} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial \theta^p} \cdot T_{.nq}^{m..} \quad (1.31)$$

**შენიშვნა:** ამ კომპონენტებში s და p – კოვარიანტული ინდექსებია, r- კონტრავარიანტული. მარჯვენა მხარეში, იგულისხმება შეჯამება სამი ინდექსით (სამმაგი ჯამი) m, n და q.

#### 1.4. სიმბოლური აღნიშვნები

მათემატიკური მოდელების კომპაქტურად ჩასაწერად იყენებენ სიმბოლურ აღნიშვნებს (ხშირად განიხილავენ დეკარტულ ტენზორებს).

განვიხილოთ **ველის თეორიის ოპერატორები** (როგორც დეკარტული ტენზორები,

სადაც არ ანსხვავებენ კონტრავარიანტულ და კოვარიანტულ კომპონენტებს):

**სკალარული ველის გრადიენტი**

$$\text{grad}\varphi(x^1, x^2, x^3) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^3} \right). \quad (1.32)$$

სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება

შემდეგნაირად:

$$\varphi_{,i} \quad (1.33)$$

მაშასადამე,

$$\varphi_{,1} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}; \quad \varphi_{,2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}; \quad \varphi_{,3} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}. \quad (1.34)$$

ანალოგიურად,  $\vec{v}$  -**ვექტორული ველის**

**დივერგენცია,**

$$\text{div}\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3} \right). \quad (1.35)$$

სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება ასე:

$$v^i_{,i} \quad (1.36)$$

აქ  $i$ -ყრუ ინდექსია (იგულისხმება შეჯამება  $i$ -ინდექსით).

**ვექტორული  $\vec{v}$  -ველის როტორი,** როგორც ვიციით გამოითვლება დეტერმინანტით:

$$\text{rot}\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \hat{e}^1 & \hat{e}^2 & \hat{e}^3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix}. \quad (1.37)$$

ამ ოპერატორის ჩასაწერად სიმბოლური ფორმით, უნდა განვიხილოთ **ლევე-ჩივიტას**

**ფსევდოტენზორი**, რომლის კოვარიანტული  $\mathcal{E}_{ijk}$  - კომპონენტებიც განისაზღვრებიან ფორმულით:

$$\mathcal{E}_{ijk} = \begin{cases} 1, \\ -1, \\ 0, \end{cases} \quad \text{შესაბამისად,} \quad (1.38)$$

თუ, (i,j,k) ლუწი ჩასმია (გადანაცვლება) (1,2,3)-დან;

თუ, (i,j,k) კენტი ჩასმია (გადანაცვლება) (1,2,3)-დან;

თუ, (i,j,k)-ში, რომელიმე ორი ან სამივე ინდექსი ერთმანეთის ტოლია.

**მაგალითად:**  $\mathcal{E}_{312} = 1$ ,  $\mathcal{E}_{132} = -1$ ,  $\mathcal{E}_{122} = 0$  და ა.შ.

ლევე-ჩივიტას ფსევდოტენზორის  $\mathcal{E}_{ijk}$  - კომპონენტები, საშუალებას გვაძლევს კომპაქტურად ჩავწეროთ ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი. მაგალითად, თუ

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}; \quad (1.39)$$

მაშინ

$$c_i = \mathcal{E}_{ijk} a_j b_k. \quad (1.40)$$

ასევე, სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი,

$$\lambda = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \varepsilon_{ijk} a_j b_k c_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (1.41)$$

მაშასადამე, ლევი-ჩივიტას ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტების მეშვეობით, მოკლედ ჩაიწერება ვექტორული ნამრავლი, შერეული ნამრავლი და ასევე დეტერმინანტიც.

რადგან ვექტორული  $\vec{v}$ -ველის როტორი წარმოადგენს ნაბლა

$\vec{V}$ -ოპერატორისა და  $\vec{v}$ -ვექტორის, ვექტორულ ნამრავლს

$$\text{rot} \vec{v} = \vec{v} \times \vec{v}$$

(2.42)

სიმბოლურად, ველის როტორის კომპონენტები ჩაიწერებიან ფორმულით:

$$(\text{rot} \vec{v})_i = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}. \quad (1.43)$$

განვიხილოთ ესლა, ლაპლასის  $\Delta$ -ოპერატორი:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}. \quad (1.44)$$

სიმბოლურად, ჩაიწერება ფორმით  $\Delta \varphi = \varphi_{,ii}$ .

(1.45)

აქ  $i$ -ყრუ (მუნჯი) ინდექსია ე.ი. იგულისხმება შეჯამება.

სიმბოლურ აღნიშვნებში გაწარმოების ოპერატორი აღინიშნება მძიმეთი, ყველა ინდექსი რომელიც მძიმეს მოყვება, წარმოადგენს იმ ცვლადის ინდექსს, რომლითაც ხდება გაწარმოება. მაგალითად:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = T_{,ij} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_m \partial x_n} = \sigma_{ij, mn} . \quad (1.46)$$

### 1.5. ოპერატორები ტენზორებზე. მეტრიკული ტენზორები

**განსაზღვრება:** ორი ტენზორის გარე ნამრავლი ეწოდება ისეთ ტენზორს, რომლის კომპონენტებიც წარმოადგენენ თანამამრავლი ტენზორების კომპონენტების ყველა შესაძლო ნამრავლს. მაგალითად:

$$a_i \cdot b_j = T_{ij} \quad v_i \cdot T_{jk} = T_{ijk} .$$

**P.S.** გარე ნამრავლის რანგი წარმოადგენს თანამამრავლთა რანგების ჯამს.

$$\text{rang} T_{ij} = \text{ranga}_i + \text{rang} b_j = 1 + 1 = 2$$

**განსაზღვრება:** ტენზორის ნახვევის ოპერაცია, ეწოდება ისეთ ოპერაციას, როცა ერთმანეთს უტოლდება რომელიმე ორი ინდექსი და ხდება შეჯამება ამ ინდექსით.

**მაგალითად:**  $\varepsilon_{ijk}$ -ტენზორის კომპონენტებზე ნახვევის ოპერაცია მოგვცემს:  $\varepsilon_{iik} \vee \varepsilon_{iji} \vee \varepsilon_{ijj}$ .

**P.S.** ნახვევის ოპერაციის შედეგად, ტენზორის რანგი მცირდება ორით.



**მაგალითად:** მეორე რანგის ტენზორის ნახვევი – სკალარული ფუნქციაა,  $\sigma_{ij}$ -ს ნახვევია  $\sigma_{ii}$ -სკალარი.

**განსაზღვრება:** ორი ტენზორის შიგა ნამრავლი, ეწოდება ისეთ ნამრავლს, რომელზედაც მოქმედებს ისეთი ნახვევის ოპერაცია, რომ უტოლდებიან რომელიმე ორი ინდექსი სხვადასხვა თანამამრავლებიდან.

**მაგალითად:** თუ გვაქვს ორი ვექტორი (პირველი რანგის ტენზორები)  $\vec{a}$  და  $\vec{b}$ , მაშინ მათი გარე ნამრავლია  $a_i b_j$ , ხოლო შიგა ნამრავლი იქნება:  $a_i b_i$ -ე.ი. სკალარული ნამრავლი.

მაღალი რანგის ტენზორებს გააჩნიათ რამოდენიმე შიგა ნამრავლი.

**მაგალითად:** ძაბვის-  $\sigma_{ij}$  ტენზორისა და დეფორმაციის  $\epsilon_{mn}$  ტენზორებისათვის, გვაქვს შიგა ნამრავლები:

$$\sigma_{ij} \epsilon_{in} ; \sigma_{ij} \epsilon_{mi} ; \sigma_{ij} \epsilon_{jn} ; \sigma_{ij} \epsilon_{mj} .$$

(2.47)

**მეტრიკული ტენზორის შემოსატანად,** განვიხილოთ  $IR^3$ -ში მახლობელი წერტილები  $P(x)$  და  $Q(x+dx)$ . ამ ორ წერტილს შორის მანძილის დიფერენციალის კვადრატი, დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში არის:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 . \quad (1.48)$$

სიმბოლურ აღნიშვნებში გვაქვს ჩანაწერი:

$$ds^2 = dx^i dx^i. \quad (1.49)$$

თუ, გადავალთ მრუდწირული კოორდინატთა სისტემაში

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} d\theta^q \quad \text{და} \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} d\theta^p \quad (1.50)$$

მაშინ (4.49) მიიღებს სახეს:

$$ds^2 = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} d\theta^q \cdot \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} d\theta^p = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} d\theta^q d\theta^p \quad (1.51)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$g_{qp} = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p}. \quad (1.52)$$

$g_{qp}$ -წარმოადგენენ მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტებს, რომელსაც მეტრიკულ ტენზორს უწოდებენ.

ორ მახლობელ წერტილს შორის მანძილის (2.51) კვადრატს, (2.52)-მეტრიკული ტენზორის მეშვეობით მოიცემა მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემაში:

$$ds^2 = g_{ij} d\theta^i d\theta^j. \quad (1.53)$$

**განსაზღვრება:** მრავალსახეობას, სადაც მეტრიკა (მანძილი) განისაზღვრება დადებითად-განსაზღვრული (1.53) კვადრატული დიფერენციალური ფორმით-რიმანის მრავალსახეობა ეწოდება.

რიმანის მრავალსახეობაში არ არსებობს ერთიანი დეკარტის კოორდინატთა სისტემა მთელი სივრცისათვის და ეს არის სივრცის შინაგანი თვისება. ორ წერტილს შორის

უმოკლესი მანძილი, რიმანის მრავლსახეობაში შეიძლება იყოს რაღაც მრუდი (და არა წრფის მონაკვეთი), რომელსაც გეოდეზიურ წირს უწოდებენ. ეს ცნება შემოიღო გაუსმა, რომელიც სწავლობდა სფეროს ზედაპირზე მანძილების გამოთვლის ამოცანას (დედამიწისთვის).

ზოგად შემთხვევაში მეტრიკული ტენზორის  $g_{ij}$  კომპონენტები დამოკიდებული არიან სივრცით კოორდინატებზე. თუ, მეტრიკული ტენზორი არ არის დამოკიდებული სივრცით ცვლადებზე, მაშინ ასეთ სივრცეს **ერთგვაროვან რიმანის მრავლსახეობას უწოდებენ.**

იმის მიუხედავად, რომ რიმანის სივრცეში, საზოგადოდ, შეუძლებელია ერთიანი დეკარტული კოორდინატთა სისტემის შემოტანა, ამ სივრცის ნებისმიერი წერტილისათვის შეგვიძლია შემოვიღოთ ლოკალური(ადგილობრივი) დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, რომელიც მოგვცემს საშუალებას შევისწავლოთ ამ წერტილის მახლობელი არეების გეომეტრია. ასეთ არეებს – **რუქებს უწოდებენ, ხოლო რუქების ერთობლიობას უწოდებენ რიმანის სივრცის ატლასს.**

მეტრიკული ტენზორის  $g^{kj}$  - კონტრავარიანტული კომპონენტები განისაზღვრებიან ფორმულით:

$$g_{ij} g^{kj} = g_{ji} g^{jk} = \delta_i^k. \quad (1.54)$$

სადაც  $\delta_i^k$  – კრონეკერის ტენზორის შერეული კომპონენტებია. (1.54) ტოლობიდან ჩანს, რომ მეტრიკული ტენზორის კონტრავარიანტული

კომპონენტების  $g^{kj}$ -მატრიცა, წარმოადგენს მისი  $g_{ij}$ -კოვარიანტული კომპონენტების მატრიცის შებრუნებულ მატრიცას.

მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები საშუალებას გვაძლევენ შემოვიღოთ ინდექსთა ჟონგლირების ოპერაცია, ანუ მათი აწევ-დაწევის ოპერაცია.

**მაგალითად:**

$$g^{ij}T_{kj} = T_k^i ; \quad (1.55)$$

$$g_{ij}T_{mn}^i = T_{jmn} . \quad (1.56)$$

**განსაზღვრება:** ისეთ ტენზორებს, რომელთათვისაც განიხილება კოორდინატთა სისტემის მხოლოდ ერთოგონალური გარდაქმნები, **დეკარტული ტენზორები ეწოდებათ.**

დეკარტული ტენზორებისათვის, მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები ემთხვევიან კრონეკერის ტენზორის კომპონენტებს:

$$g_{ij} = \delta_{ij} ; \quad (1.57)$$

სადაც

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

შესაბამისად,

$$\text{თუ, } i=j ;$$

$$\text{თუ, } i \neq j.$$

ანუ  $\delta_{ij}$ -კომპონენტები აღგენენ ერთეულოვან მატრიცას.

**შენიშვნა:** დეკარტული ტენზორებისათვის კონტრავარიანტული და კოვარიანტული კომპონენტები ერთმანეთს ემთხვევიან.

### 1.6 მეორე რანგის ტენზორის ინვარიანტები. ჰამილტონ-კელის თეორემა

განვიხილოთ, მეორე რანგის  $T$  ტენზორის შიგა ნამრავლი, პირველი რანგის  $n$  ტენზორზე:

$$\vec{v} = T \cdot \vec{n}; \quad (1.58)$$

ეს ტოლობა კომპონენტებში მიიღებს სახეს:

$$v_i = T_{ij} \cdot n_j; \quad (1.59)$$

მეორე რანგის  $T$  ტენზორს შეიძლება შევხედოთ, როგორც წრფივ ოპერატორს, რომელიც მოქმედებს  $\vec{n}$  ვექტორულ ველზე და გვაძლევს ახალ  $\vec{v}$  ვექტორულ ველს.

**ისმის კითხვა:** არსებობენ, თუ არა ისეთი  $\vec{n}$  ვექტორები, რომლებიც წრფივი  $T$  ოპერატორის მოქმედების შემდეგ, არ იცვლიან მოქმედების წრფეს, ანუ

$\lambda$ -**ინვარიანტულნი** არიან  $T$  ოპერატორის მიმართ?

**პასუხი:** თუ  $\vec{n}$  ვექტორი ინვარიანტულია  $T$  ოპერატორის მიმართ, მაშინ  $\vec{v} \updownarrow \vec{n}$  ანუ

$$v_i = \lambda \cdot n_j; \quad (1.60)$$

სადაც  $\lambda$ -ნულისგან განსხვავებული რიცხვია, მაშინ

$$T_{ij} n_j = \lambda \cdot n_j. \quad (1.61)$$

ასეთ, ინვარიანტულ მიმართულებებს, მეორე რანგის  $T$  ტენზორის მთავარ მიმართულებებს უწოდებენ, ხოლო შესაბამის  $\lambda$ -რიცხვებს, მთავარი მიმართულების შესაბამის საკუთრივ რიცხვებს (მნიშვნელობებს) ეძახიან. ცხადია, რომ

$$n_i = \delta_{ij} \cdot n_j ; \quad (1.62)$$

ამიტომ, თუ შევიტანთ (1.61)-ში, გადავიტანთ მარცხენა მხარეში და ფრჩხილებს გარეთ გავიტანთ  $n_j$ -ს, მივიღებთ წრფივ განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას  $n_j$ -ის მიმართ:

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij})n_j = 0 . \quad (1.63)$$

ეს არის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემა. იმისათვის, რომ მას ჰქონდეს არანულოვანი  $n_j$  ამონახსნი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს განტოლებას:

$$|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0 . \quad (1.64)$$

ამ განტოლებას საუკუნოვან(მახასიათებელ) განტოლებას უწოდებენ, რადგან ის შემოვიდა განხილვაში ცის მექანიკის ამოცანებიდან (პლანეტათა ორბიტების საუკუნოვანი ცვლილებების შესწავლიდან). გაშლილად (1.64) განტოლება ჩაიწერება ასე:

$$\lambda^3 - I_T \cdot \lambda^2 + II_T \cdot \lambda - III_T = 0 . \quad (1.65)$$

ამ განტოლებას, მახასიათებელ განტოლებას უწოდებენ, ხოლო სკალარული კოეფიციენტები  $I_T$ ,  $II_T$  და  $III_T$  წარმოადგენენ  $T_{ij}$ -მეორე რანგის ტენზორის ინვარიანტებს.

$$I_T = T_{ij} = tr T_{ij} \quad (\text{მატრიცის კვალი}) \quad (2.66)$$

$$II_T = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ij}) \quad (\text{მეორე ინვარიანტი}) \quad (2.67)$$

$$III_T = |T_{ij}| = \det T_{ij} \quad (\text{მესამე ინვარიანტი}) \quad (2.68)$$

(2.65) განტოლების  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  - ფესვებს,  $T_{ij}$ -ტენზორის მთავარი (საკუთრივი) მნიშვნელობები ეწოდებათ.

სიმეტრიულ ტენზორებს (ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს ზემოთ), ყოველთვის აქვს ნამდვილი საკუთრივი მნიშვნელობები. თუ, ისინი, ყველა განსხვავებულია ერთმანეთისაგან, მაშინ, მათი შესაბამისი მთავარი მიმართულებები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

მთავარ ღერძებში, მეორე რანგის ტენზორს აქვს სახე:

$$T^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (1.69)$$

თუ,  $\lambda_1 = \lambda_2$ , მაშინ ტენზორის დიაგონალური სახე არაა დამოკიდებული მათი შესაბამისი მიმართულებების არჩევაზე და დამოკიდებულია მხოლოდ  $\lambda_3$ -ის შესაბამის

მიმართულებაზე. თუ  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  მაშინ ყველა მიმართულება მთავარი მიმართულებაა.

$Ox_1x_2x_3$ -დან, მთავარ  $Ox_1^*x_2^*x_3^*$  ღერძებზე, გადასვლის მატრიცას აქვს სახე:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x_1^*$	$a_{11} = n_1^{(1)}$	$a_{12} = n_2^{(1)}$	$a_{13} = n_3^{(1)}$
$x_2^*$	$a_{21} = n_1^{(2)}$	$a_{22} = n_2^{(2)}$	$a_{23} = n_3^{(2)}$
$x_3^*$	$a_{31} = n_1^{(3)}$	$a_{32} = n_2^{(3)}$	$a_{33} = n_3^{(3)}$

სადაც  $n_i^{(j)}$  არის  $j$ -იური მთავარი მიმართულების მიმართული კოსინუსები.

იმისათვის, რომ  $T_{ij}$ -მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტები გადავიყვანოთ მთავარ მიმართულებებში  $T^*$ , საჭიროა გამოვიყენოთ გარდაქმნა:

$$T^* = A \cdot T \cdot A^T . \quad (1.70)$$

სადაც

$$A = \begin{pmatrix} n_1^{(1)} & n_2^{(1)} & n_3^{(1)} \\ n_1^{(2)} & n_2^{(2)} & n_3^{(2)} \\ n_1^{(3)} & n_2^{(3)} & n_3^{(3)} \end{pmatrix} . \quad (1.71)$$

გადასვლის მატრიცაა, ხოლო  $A^T$ -მისი ტრანსპონირებული მატრიცა. პირველ სტრიქონში (2.71) გვაქვს პირველი  $\lambda_1$  საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორის კომპონენტები,



მეორეში  $\lambda_2$ -ის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორის კომპონენტები, ხოლო მესამეში,  $\lambda_3$ -ის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორის კომპონენტები.

**ჰამილტონ-კელის თეორემა:** მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების მატრიცა აკმაყოფილებს თავის საუკუნოვან (მახასიათებელ) განტოლებას.

**დამტკიცება:** მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების მატრიცა გადავიყვანოთ მთავარ ღერძებში, მაშინ მას ექნება სახე:

$$T^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (1.72)$$

განვიხილოთ მისი კვადრატი, მაშინ მივიღებთ

$T^{*2} = T^* \cdot T^*$  და მაშასადამე,

$$(T^*)^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}. \quad (1.73)$$

ასევე ვპოულობთ, რომ  $(T^*)^3 = (T^*)^2 \cdot T^*$  და

$$(T^*)^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 \end{pmatrix}. \quad (1.74)$$

თუ, შევადარებთ (1.69), (1.72), (1.73), (1.74) დავინახავთ, რომ ტენზორს და მის ხარისხებს ერთნაირი საკუთრივი (მთავარი) მიმართულებები აქვთ. ყველა საკუთრივი მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ (1.65) მახასიათებელ

განტოლებას, ამიტომ თვით  $T$  ტენზორიც აკმაყოფილებს მახასიათებელ განტოლებას

$$T_{ij}^3 - I_T \cdot T_{ij}^2 - II_T \cdot T_{ij} + III_T \cdot E = 0. \quad (1.75)$$

სადაც  $E$ -ერთეულოვანი მატრიცაა.

ამ თანადობას ჰამილტონ-კელის თანადობა ეწოდება.

**შედეგი:** (1.75)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$(T_{ij})^3 = I_T \cdot T_{ij}^2 - II_T \cdot T_{ij} + III_T \cdot E; \quad (1.76)$$

თუ, გავამრავლებთ (1.76) ტოლობას  $T_{ij}$ -ზე,

მივიღებთ

$$\begin{aligned} (T_{ij})^4 &= I_T \cdot T_{ij}^3 - II_T \cdot T_{ij}^2 + III_T \cdot T_{ij} = I_T \cdot (I_T \cdot T_{ij}^2 - II_T \cdot T_{ij} + III_T \cdot E) - II_T \cdot T_{ij}^2 + III_T \cdot T_{ij} = \\ &= (I_T^2 - II_T)T_{ij}^2 + (III_T - I_T \cdot II_T)T_{ij} + I_T \cdot III_T \cdot E \end{aligned} \quad (1.77)$$

კიდევ ერთხელ თუ გავამრავლებთ (1.77)

ტოლობას  $T_{ij}$ -ზე მივიღებთ  $(T_{ij})^5$ -ს

გამოსახულებას, თუ გამოვიყენებთ წინა ფორმულებს მივიღებთ საბოლოოდ, რომ მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების მატრიცის ნებისმიერ ხარისხს აქვს სახე:

$$(T_{ij})^n = \varphi_0(I_T, II_T, III_T) \cdot E + \varphi_1(I_T, II_T, III_T) \cdot T_{ij} + \varphi_2(I_T, II_T, III_T) (T_{ij})^2. \quad (1.78)$$

სიმბოლური აღნიშვნებით ინტეგრალური

ფორმულები ჩაიწერება შემდეგნაირად:

**სტოქსის თეორემა:**

$$\oint_c F_i dx_i = \iint_s n_i \varepsilon_{ijk} F_{k,j} ds \quad (1.79)$$

**გაუსის თეორემა:**

$$\int_{\Omega} v_{i,i} d\omega = \int_{\partial\Omega} v_i \cdot n_i ds \quad (1.80)$$

### 1.7. ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორები

უწყვეტ ტანთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები ემყარებიან ისეთ ძირითად ცნებებს, როგორცაა ძაბვა და დეფორმაცია.

ძაბვის  $\sigma$ -ტენზორი – მეორე რანგის ტენზორია, ანუ მას გააჩნია კომპონენტებისაგან შემდგარი მატრიცა:

$$\sigma = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (181)$$

ამ მატრიცაში, დიაგონალურ  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ -კომპონენტებს ნორმალური ძაბვები ეწოდებათ, რადგან ისინი იწვევენ **გაჭიმვა-შეკუმშვის** დეფორმაციას.

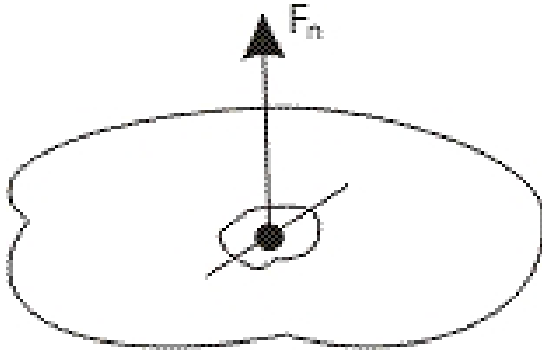
ძაბვის ტენზორის დანარჩენ კომპონენტებს, **მხებ ძაბვებს** უწოდებენ და ისინი იწვევენ **სხეულის ფორმის ცვლილებას**.

ძაბვის ტენზორის ცნება – განაზოგადოებს, მექანიკური ძაბვის ცნებას სივრცითი სხეულისათვის. ამიტომ, ჯერ განვიხილოთ მექანიკური ძაბვის ცნება:

**განსაზღვრება:** მექანიკური ძაბვა  $\sigma$ -არის სიდიდე, რომელიც იზომება ზედაპირის  $\vec{n}$

ნორმალის მიმართულებით S-ფართის ერთეულზე მოქმედი  $F_n$ -ძალის სიდიდით.

$$\sigma = \frac{F_n}{S}. \quad (1.82)$$

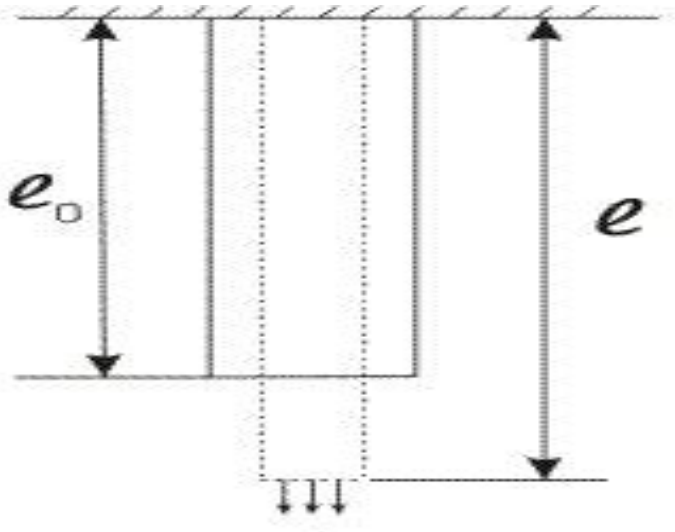


ნახ. 14. მექანიკური ძაბვა

სრულიად ანალოგიურად, დეფორმაციის ( $\varepsilon$ )-ტენზორის ცნება წარმოადგენს, ძელის ფარდობითი  $\varepsilon$ -წაგრძელების ცნების სივრცულ განზოგადობას.

**განსაზღვრება:** ძელის ფარდობით  $\varepsilon$ -წაგრძელებას დეფორმაცია ეწოდება. დეფორმაცია ძელის გაჭიმვისას გამოითვლება ფორმულით:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}. \quad (2.86)$$



დეფორმაციის ტენზორს  $IR^3$ -ში შეესაბამება კომპონენტების მატრიცა

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.84)$$

აქ, ისევე როგორც ძაბვის ტენზორის შემთხვევაში,  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$  ნორმალური დეფორმაციაა, ანუ გაჭიმვა-შეკუმშვის დეფორმაცია, ხოლო დანარჩენი კომპონენტები შეესაბამებიან ფორმის ცვლილებას, მათ მხები დეფორმაციები, ზოგჯერ ძვრის დეფორმაციები ეწოდებათ.

როგორც ცნობილია, მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში ( $\varepsilon \ll 1$ ) დრეკადი სხეულები ემორჩილებიან ჰუკის კანონს:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon; \quad (1.85)$$

სადაც  $E$ -იუნგის მოდულია. იუნგის მოდული იმ  
 ძაბვის ტოლია, რომელიც იწვევს ერთეულოვან  
 დეფორმაციას, ანუ სიგრძის გაორმაგებას

$$(\varepsilon = 1 \Leftrightarrow e = 2l_0)$$

ჰუკის კანონს ზოგჯერ ჩაწერენ ასე:

$$\frac{F_n}{S} = E \cdot \frac{l - l_0}{S}; \quad (1.86)$$

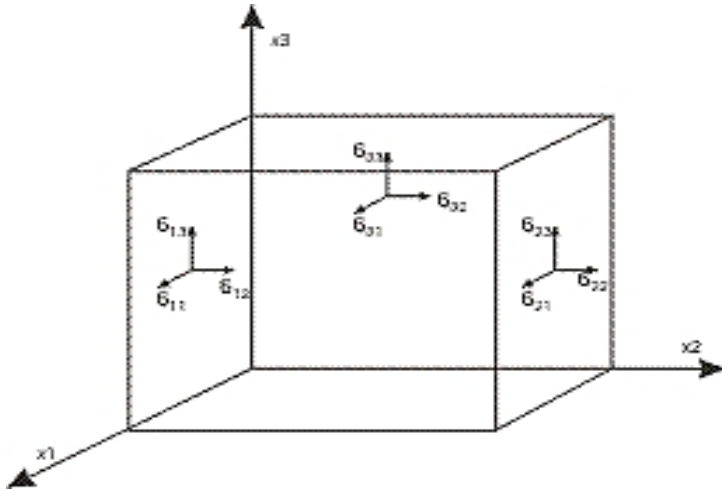
თუ, ჩვენ გვინდა განვაზოგადოთ ჰუკის  
 კანონი სივრცული შემთხვევისათვის, უნდა  
 ჩაწეროთ წრფივი დამოკიდებულება ძაბვისა და  
 დეფორმაციის ტენზორებს შორის:

$$\sigma_{ij} = A_{ijmn} \varepsilon_{mn}. \quad (1.87)$$

(1.85)-ტოლობიდან განსხვავებით, სადაც  
 საკმარისი იყო მასალის თვისებებიდან  
 გამომდინარე, გვეპოვა ერთი  $E$ -მუდმივი  
 (ექსპერიმენტებით), სივრცულ (1.87) შემთხვევაში  
 გვაქვს 81 მუდმივი (თუ მასალა ერთგვაროვანია,  
 თუ არადა, საზოგადოდ, 81-ფუნქცია  
 კოორდინატებზე და დროზე დამოკიდებული),  
 რომელთა რაოდენობაც იზოტროპული  
 მასალებისათვის (როცა მასალის თვისება არაა  
 დამოკიდებული მიმართულებაზე) დადის 2  
 მუდმივამდე, ასე რომ გვაქვს  $\lambda$  და  $\mu$   
 ეგრეთწოდებული **ლამეს მუდმივები**. ამ მუდმივებს  
 აქვთ სხვადასხვა მნიშვნელობა, სხვადასხვა  
 მასალისათვის და მაშასადამე, დამოკიდებულია  
 მასალის გვარობაზე.

ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების  
 კომპონენტების ფიზიკური აზრის ასახსნელად,

განვიხილოთ დრეკადი მასალიდან ამოჭრილი კუბი ნახ. 1.5.



ნახ. 1.5. ძაბვის ტენზორის კომპონენტების მექანიკური აზრის ინტერპრეტაცია

ამ ნახაზიდან ჩანს, რომ  $\sigma_{ij}$ -არის ძაბვის კომპონენტი, რომელიც მოქმედებს  $i$ -ური დერძების ნორმალურ ფართზე,  $j$ -ური დერძის მიმართულებით. ასეთივეა დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების მექანიკური აზრიც.

ზოგჯერ, ცდილობენ გამოეყონ საშუალო ნორმალური ძაბვები და მხები ძაბვები. ამ მიზნით, ძაბვის ტენზორს წარმოადგენენ **სფერული და დევიატორული ნაწილების** ჯამის სახით.

**განსაზღვრება:** ძაბვის ტენზორის სფერული ნაწილი ეწოდება ტენზორს, რომლის კომპონენტებიც მოიცემა მატრიცით:

$$\sigma_{cp.} \cdot E = \begin{pmatrix} \sigma_{cp.} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp.} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp.} \end{pmatrix}; \quad (1.88)$$

სადაც  $\sigma_{cp.} = -p = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$  - საშუალო

ნორმალური ძაბვაა.

**განსაზღვრება:** ძაბვის ტენზორის დევიატორული ნაწილი ეწოდება ტენზორს, რომელიც ავსებს სფერულ ტენზორს, ძაბვის სრულ ტენზორამდე, ანუ

$$(S_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{cp.} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_{cp.} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_{cp.} \end{pmatrix}; \quad (1.89)$$

ასე, რომ ძაბვის ტენზორი სიმბოლურ აღნიშვნებში შეიძლება ჩავწეროთ ფორმით:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_{kk}}{3} \cdot \delta_{ij} + S_{ij}. \quad (1.90)$$

ადვილად დასამტკიცებელია, რომ ძაბვის ტენზორის დევიატორის პირველი ინვარიანტი ნულის ტოლია (მართლაც (1.89)-ის მთავარ დიაგონალზე მდგარი წევრების ჯამი ნულის ტოლია).

ანალოგიურად, დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტებიც შეიძლება წარმოვადგინოთ



სფერული და დევიატორული ნაწილების ჯამის სახით.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \cdot \delta_{ij} + e_{ij}. \quad (1.91)$$

სადაც  $e_{ij}$ -დეფორმაციის ტენზორის დევიატორის კომპონენტებია.

თუ, გამოვიყენებთ (1.91) ფორმულას ჰუკის კანონისთვის იზოტროპული მასალი შემთხვევაში, მაშინ (1.87) გადაიწერება ფორმით:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (1.92)$$

მცირე დეფორმაციის შემთხვევაში, ე.ი. როცა გადაადგილების გრადიენტები გაცილებით მცირეა ერთზე, დეფორმაციის ტენზორისა და გადაადგილების გრადიენტის კომპონენტები დაკავშირებული არიან თანადობით:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (1.93)$$

სადაც  $u_i$ -გადაადგილების ვექტორის კომპონენტია. ხოლო თუ, დეფორმაციები არაა მცირე, ანუ გვაქვს სასრული დეფორმაციები, მაშინ (1.93)-ის მაგივრად გვაქვს ფიზიკურად არაწრფივი დეფორმაციები. (ეილერის დეფორმაციის ტენზორი)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} \cdot u_{k,j}). \quad (1.94)$$

თუ, დრეკადობის თეორიას ავაგებთ ჰუკის (1.92) კანონზე და დეფორმაციის (1.93) ტენზორზე მივიღებთ წრფივ მათემატიკურ მოდელს, ხოლო

თუ გამოვიყენებთ ეილერის არაწრფივი დეფორმაციის ტენზორს, მივიღებთ არაწრფივი დრეკადობის მათემატიკურ მოდელს, მიუხედავად ჰუკის კანონის წრფივი ხასიათისა. სინამდვილეში, მასალათა უმრავლესობას აქვს თავისი დეფორმაციის წესი (დამოკიდებულება ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის), რომელსაც რეოლოგიას უწოდებენ ზოგჯერ. მასალათა რეოლოგიის დასადგენად საჭიროა ექსპერიმენტების ჩატარება და შედეგების სტატისტიკური დამუშავება.

### 1.8. ჰუკის განზოგადოებული კანონი და მუდმივათა მატრიცები, დრეკადი სხეულის თვისებების სიმეტრიის ხარისხის მიხედვით

წრფივად-დრეკადი მასალებისათვის ჰუკის განზოგადოებული კანონი გვაძლევს კავშირს ძაბვის ტენზორის  $\sigma_{ij}$  კომპონენტებსა და დეფორმაციის ტენზორის  $\epsilon_{ij}$  კომპონენტებს შორის:

$$\sigma_{ij} = A_{ijmn} \epsilon_{mn} . \quad (1.95)$$

ერთგვაროვანი მასალებისათვის  $A_{ijmn}$  მუდმივებისაგან შემდგარი მატრიცის კომპონენტები არ არიან დამოკიდებული სივრცით ცვლადებზე. მათი რაოდენობაა 81. თუ,

გავითვალისწინებთ ძაბვის ტენზორისა და დეფორმაციის ტენზორის სიმეტრიულობას:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{და} \quad \varepsilon_{mn} = \varepsilon_{nm}; \quad (1.96)$$

მივიღებთ, რომ

$$A_{ijmn} = A_{jimn} \quad \text{და} \quad A_{ijmn} = A_{jinm} \quad (1.97)$$

ე.ი. დამოკიდებულ მუდმივათა რიცხვი 81-დან მცირდება 36-მდე.

თუ არსებობს დეფორმაციის  $W$  ენერგიის ფუნქცია, ანუ

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad (1.98)$$

სადაც

$$W = \frac{1}{2} A_{ijmn} \varepsilon_{ji} \varepsilon_{mn}; \quad (1.99)$$

მაშინ, კოეფიციენტების  $A_{ijmn}$ -მატრიცას მოეთხოვება სიმეტრიის უფრო მაღალი ხარისხი, ე.ი.

$$A_{ijmn} = A_{jinm}. \quad (1.100)$$

ამ ტოლობის (1.100) გათვალისწინებით, დამოუკიდებელ მუდმივათა რაოდენობა  $A_{ijmn}$ -მატრიცაში მცირდება და ხდება 12.

**განსაზღვრება:** დრეკად მასალას, რომლის ელასტიურობის თვისებებიც სიმეტრიულია რომელიმე სამი ურთიერთმართობული სიბრტყეების მიმართ **ორთოტროპიული** მასალა (სხეული) ეწოდება.

ორთოტროპიული მასალისათვის დამოუკიდებელ მუდმივათა რიცხვი არის 12. ხოლო თუ, ორთოტროპიული მასალისათვის არსებობს დეფორმაციის ენერჯის (1.99) ფუნქცია, მაშინ მუდმივათა რიცხვია 9.

ცხადია, რომ რაც მეტია არანულოვან დამოუკიდებელ მუდმივათა რაოდენობა  $A_{ijmn}$  მატრიცაში, მით უფრო რთული იქნება შესაბამისი მასალის მუშაობის მათემატიკური მოდელი.

მუდმივათა დიდი რაოდენობა დამახასიათებელია კომპოზიტური მასალებისათვის. ამიტომ, კომპოზიტთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები უფრო რთულია, ვიდრე იზოტროპიული მასალების მექანიკა.

იზოტროპიული, დრეკადი მასალებისათვის  $A_{ijmn}$  მატრიცა შეიცავს მხოლოდ ორ მუდმივ ელემენტს, რომელთაც  $\lambda$  და  $\mu$  ლამეს მუდმივებს უწოდებენ.

ჰუკის კანონს იზოტროპული მასალისათვის აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} . \quad (1.101)$$

ამ ფორმულის გადასაწერად იუნგისა E და პუასონის  $\nu$  მუდმივების მეშვეობით, განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი ძელის გაჭიმვის ამოცანა  $Ox_1$ -ღერძის გასწვრივ, მაშინ იუნგის E-მოლული და პუასონის  $\nu$ -კოეფიციენტი წარმოადგენენ პროპორციულობის კოეფიციენტებს, E-სიგრძივი დეფორმაციისას და  $\nu$ -განივი დეფორმაციისას:

$$\sigma_{11} = E \cdot \varepsilon_{11} \wedge \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11} . \quad (1.102)$$

ამ ტოლობებისა და (1.01)-ის გათვალისწინებით, ზოგადი იზოტროპიული მასალისათვის მივიღებთ ჰუკის კანონს შემდეგი სახით:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{\nu + 1} (\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \cdot \varepsilon_{kk} \delta_{ij}) . \quad (1.103)$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ ადრე, ჰუკის კანონი ახასიათებს წრფივად-დრეკადი იზოტროპიული მასალის ელასტიურ თვისებებს, ამიტომ მას ზოგჯერ ელასტიური (დრეკადი) მასალის რეოლოგიურ განტოლებასაც უწოდებენ მცირე დეფორმაციების ( $\varepsilon \ll 1$ ) შემთხვევაში. ელასტიური (დრეკადი) მასალის მუშაობის მათემატიკური მოდელის შესაქმნელად რეოლოგიური განტოლება, ის ძირითადი განტოლებაა, რომელიც აღწერს შესასწავლი მასალის ელასტიურ თვისებებს და რომელიც დგინდება, ექსპერიმენტული მასალების სტატისტიკური გადამუშავების შედეგად.

უმეტესწილად, მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში, რეოლოგიურ განტოლებას აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}) ; \quad (1.104)$$

სადაც  $f$ -ფუნქციის კონკრეტული სახე დგინდება ფიზიკური ექსპერიმენტების შედეგად.

უფრო ზოგად შემთხვევაში, როცა განიხილება რთული რეოლოგიის მქონე მასალები, გამოიყენება ზოგადი სახის რეოლოგიური კანონი:

$$F(\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}, \ddot{\sigma}_{ij}, \dots, \varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \ddot{\varepsilon}_{ij}, \dots, x_1, x_2, x_3, t) = 0 \quad (1.105)$$

F-ფუნქციის კონკრეტული სახე დამოკიდებულია შესასწავლი მასალის ელასტიურ და ბლანტ-პლასტიკურ თვისებებზე.

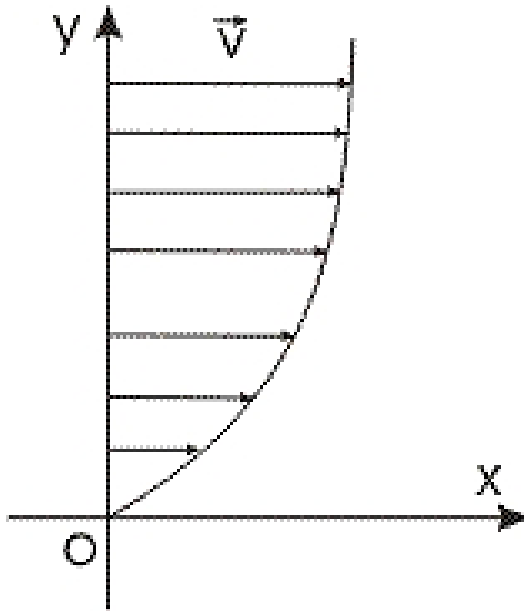
ამ ფუნქციის კონკრეტული სახის დასადგენად იყენებენ ფიზიკურ ექსპერიმენტებს და მიღებული შედეგების სტატისტიკური დამუშავებით ადგენენ უმარტივესი პროცესების შემთხვევისათვის (1.105) ტიპის თანადობას და შემდეგ ხდება ამ თანადობათა განზოგადლება და მიღებული რთული მოდელით ტესტური ამოცანების შესწავლა მოდელის ადეკვატურობის დასადგენად.

### 1.9. ნიუტონის განზოგადოებული კანონი სითხეებისათვის

წყლისა და სხვა ბლანტი სითხეებისათვის, ნიუტონმა ცდებით დაადგინა კანონი:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}; \quad (1.106)$$

სადაც  $\tau$ -ძერის მხები ძაბვაა სითხის ფენებს შორის, რომელსაც ადგილი აქვს სითხის სიბლანტის გამო;  $\mu$ -სიბლანტის კოეფიციენტი,  $\nu$ -სითხის სიჩქარე ნახ. 1.6.



ნახ. 1.6. ბლანტი სითხის მოძრაობის სიჩქარის ეპიურა

როგორც (1.106) ფორმულიდან ჩანს, მხებ ძაბვებსა და სიჩქარის გრადიენტს შორის დამოკიდებულება არის წრფივი. (1.106) არის ჰუკის კანონის ანალოგი:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1.107)$$

თუმცა, ჰუკის კანონი იძლევა რეოლოგიურ თანადობას წრფივად-დრეკადი მასალებისათვის, ხოლო (1.106) აღწერს უკუმშვადი ნიუტონური ბლანტი სითხის რეოლოგიას.

ნიუტონის განზოგადოებულ კანონს ბლანტი სითხეებისათვის აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = B_{ijmn} D_{mn}; \quad (1.108)$$

სადაც  $D_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}$ -დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის კომპონენტებია,

$B_{ijmn}$ -სითხის თვისებებზე დამოკიდებული მუდმივათა მატრიცა 81 კომპონენტით. დამოუკიდებელ მუდმივათა რაოდენობა, დამოკიდებულია, ისევე როგორც დრეკადი მასალის შემთხვევაში, სითხის შინაგანი, ფიზიკური თვისებების სიმეტრიის ხარისხზე.

იზოტროპული, ბლანტი უკუმშვადი სითხისათვის  $B_{ijmn}$ -მატრიცაში გვაქვს მხოლოდ ორი  $\lambda^*$  და  $\mu^*$  დამოუკიდებელი მუდმივა (სიბლანტის კოეფიციენტი) და (4.108) ნიუტონის რეოლოგიური კანონი, ამ შემთხვევაში, ჩაიწერება ფორმით:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu^* \cdot D_{ij} \quad (1.109)$$

სადაც  $p$ -ჰიდროსტატიკური წნევაა,

$D_{ij}$ -დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის კომპონენტებია, რომლებიც მიიღებიან შესაბამისი დეფორმაციის ტენზორის გაწარმოებით დროით, მაშასადამე

$$D_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}); \quad (1.110)$$

სადაც  $v_i$ -სითხის ნაკადის სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია



**1.10. ნავიე-სტოქს-დიუგემის მოდელი.  
განტოლებათა ჩაწერა უგანზომილებო ფორმით.  
ნავიე-სტოქსისა და ეილერის მათემატიკური  
მოდელები.**

სითხეთა დინამიკას შეისწავლის ჰიდროაერომექანიკა. ისევე, როგორც დრეკადი(ელასტიური) მასალების შემთხვევაში, ჰიდროაერომექანიკაშიც, სითხისა და გაზის დინამიკის მათემატიკური მოდელირება იწყება ექსპერიმენტებით, მოცემული სითხის(გაზის ანუ აირის) რეოლოგიური კანონის დასადგენად.

ნიუტონური სითხეებისათვის გვაქვს ნიუტონის განზოგადოებული რეოლოგიური კანონი:

$$\sigma_{ij} = B_{ijmn} D_{mn} ; \quad (1.111)$$

სადაც

$D_{mn} = \dot{\varepsilon}_{mn}$  დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის კომპონენტებია.

თუ სითხე ერთგვაროვანია, მაშინ  $B_{ijmn}$  - მუდმივი სიდიდეებისაგან შედგება, რომლებიც ახასიათებენ მოცემული სითხის ბლანტ თვისებებს.

თუ, განვიხილავთ იზოტროპიულ ნიუტონურ სითხეს, მაშინ მუდმივათა მატრიცაში 81 კომპონენტიდან მხოლოდ ორია  $\lambda^*$  და  $\mu^*$  დამოუკიდებელი.

შესაბამის რეოლოგიურ კანონს აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu^* D_{ij} ; \quad (1.112)$$

სადაც

$\lambda^*$  და  $\mu^*$  - სითხის სიბლანტის დინამიური კოეფიციენტებია.

საშუალო ნორმალური ძაბვა იქნება:

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -p + \frac{1}{3}(3\lambda^* + 2\mu^*)D_{ii} = -p + \chi^* D_{ii} \quad (1.113)$$

სადაც  $\chi^*$  - სიბლანტის სივრცული კოეფიციენტი.

თუ, მივიღებთ სტოქსის პირობას და დავუშვებთ, რომ

$$\chi^* = 0, \quad (1.114)$$

მაშინ, მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -p, \quad (1.115)$$

ანუ, ჰიდროსტატიკური წნევა ბლანტ სითხეში, წონასწორობის პირობებში, საშუალო ნორმალური ძაბვის ტოლია და მიმართულია სითხის შიგნით.

ამით აიხსნება სითხის წვეთის წონასწორობა სიბრტყეზე. ასეთ შემთხვევაში, თერმოდინამიკური წნევა - მთლიანად განისაზღვრება მექანიკური სიდიდეებით.

გარდა რეოლოგიური (1.111) კანონისა, მათემატიკური მოდელის ასაგებად იზოტროპიული ნიუტონური სითხეებისათვის, საჭიროა: მოძრაობის განტოლებები კოშის ფორმით, მასის შენახვის(უწყვეტობის) განტოლება, ენერჯიის შენახვის კანონი და მდგომარეობის განტოლება.

მოძრაობის განტოლებას კოშის ფორმით აქვს სახე

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho v_i; \quad (1.116)$$

სადაც  $v_i$  - სითხის ნაწილაკების მოძრაობის სინქარის ვექტორის კომპონენტებია.

უწყვეტობის განტოლება ჩაიწერება ფორმით:

$$\rho + \rho v_{i,i} = 0. \quad (1.117)$$

ენერჯიის შენახვის კანონს აქვს ფორმა:

$$U = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} - \frac{1}{\rho} C_{i,i} + Z; \quad (1.118)$$

სადაც

$U$  - შინაგანი ენერჯიაა,  $C_i$  - სითბური ნაკადის ვექტორის კომპონენტებია, რომელიც გადის სითბოგამტარობის ხარჯზე, დროის ერთეულში, ერთეულ ფართში,  $Z$  - ერთეულ დროში გამოსხივებული სითბოს მუდმივაა, გაანგარიშებული მასის ერთეულზე.

მდგომარეობის განტოლება(ექსპერიმენტებიდან) ჩაიწერება ასე:

$$p = p(\rho, T). \quad (1.119)$$

თუ, საჭიროა სითბური ეფექტების გათვალისწინებაც, რაც ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში, მაშინ (1.112), (1.116) – (1.118) განტოლებათა სისტემას უნდა მივუერთოთ ფურიეს სითბოგამტარობის განტოლება და კალორიული განტოლება.

ფურიეს სითბოგამტარობის განტოლებას ჩაწერენ მოკლედ:

$$C_i = -kT_i \quad (1.120)$$

სადაც  $k$  – სითბოგამტარობის კოეფიციენტია.  
**კალორიული განტოლება** ჩაიწერება  
 ექსპერიმენტებზე დაყრდნობით

$$U = U(\rho, T). \quad (1.121)$$

მიიღება 16 განტოლება 16 უცნობით, ანუ სისტემა არის ჩაკეტილი. ამ განტოლებათა სისტემას მიუერთებენ სასაზღვრო და საწყის პირობებს.

ჰიდროდინამიკაში, ბლანტი სითხისათვის გამოიყენება სპეციფიკური სასაზღვრო პირობები, რომელთაც **სითხის მიკერის პირობებს** უწოდებენ:

$$(v_i)_{\text{ღ}} = 0. \quad (1.122)$$

ა) ნავიე – სტოქს – დიუგემის განტოლება.

განვიხილოთ ბლანტი სითხის მათემატიკური მოდელი იმ შემთხვევისათვის, როცა სითხური ეფექტები იმდენად უმნიშვნელოა, რომ შეიძლება უგულებელვყოთ.

თუ, კინემატიკურ თანადობებს:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}); \quad (1.123)$$

შევიტანთ ნიუტონის (1.112) რეოლოგიურ განტოლებაში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \lambda^* \frac{1}{2}(v_{k,k} + v_{k,k}) + 2\mu^* \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = \\ &= -p\delta_{ij} + \lambda^* v_{k,k} \delta_{ij} + \mu^* (v_{i,j} + v_{j,i}). \end{aligned} \quad (1.124)$$

შემდეგ, (1.124) განტოლებას თუ შევიტანთ მოძრაობის (1.116) განტოლებაში, გვექნება:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \lambda^* v_{k,kj} \delta_{ij} + \mu^* (v_{i,jj} + v_{j,ji}) + \rho b_i \quad (1.125)$$

ანუ, საბოლოოდ

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + (\lambda^* + \mu^*) v_{j,ji} + \mu^* v_{i,jj} + \rho b_i; \quad (1.126)$$

ამ (1.126) განტოლებას ნავიე – სტოქს – დიუგემის განტოლება ეწოდება ბლანტი სითხეებისათვის.

**P.S.** თუ სითხე უკუმშავია (როგორც წყალი), მაშინ

$$v_{i,i} = 0. \quad (1.127)$$

ბ) ნავიე – სტოქსის განტოლება უკუმში სითხეებისათვის.

თუ, განვიხილავთ უკუმში სითხეებს, მაშინ სითხის უკუმშვადობის (1.127) პირობის გათვალისწინებით (1.126) – დან მივიღებთ ნავიე – სტოქსის მათემატიკურ მოდელს:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \mu^* v_{i,jj} + \rho b_i; \quad (1.128)$$

$$v_{i,i} = 0; \quad (1.129)$$

$$(v_i)_{\partial\Omega} = 0; \quad (1.130)$$

$$(v_i)_{t=0} = v_{i0}. \quad (1.131)$$

მიღებული (1.128) – (1.131) მათემატიკური მოდელი აღწერს ბლანტი, უკუმში სითხის მოძრაობას  $\Omega$  - არეში,  $\partial\Omega$ - საზღვრით.

გ) ნავიე - სტოქსის განტოლება გაზებისათვის.

თუ ნავიე - სტოქს - დიუგემის მოდელში, გაავითვალისწინებთ სტოქსის პირობას

$$\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu^* \quad (1.132)$$

მაშინ, მივიღებთ ნავიე - სტოქსის განტოლებას გაზებისათვის:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \mu^* v_{i,jj} + \frac{1}{3}\mu^* v_{j,ji} + \rho b_i. \quad (1.133)$$

დ) განტოლებათა ჩაწერა უგანზომილებო სახით.

სიმარტივისათვის, განვიხილოთ ორგანზომილებიანი, ბლანტი, უკუმში სითხის დინება. შესაბამისი მათემატიკური მოდელი გადავწეროთ უგანზომილებო სახით და დავადგინოთ მსგავსების კრიტერიუმები, დინებათა ფიზიკური მოდელების შესადგენად (ექსპერიმენტების ჩასატარებლად).

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = b_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu^*}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) \quad (1.134)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = b_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\mu^*}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) \quad (1.135)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0; \quad (1.136)$$

$$(v_i)_{\infty} = 0; \quad (1.137)$$

$$(v_i)_{t=0} = v_{i0}. \quad (1.138)$$

თუ, (1.134) – (1.138) განტოლებებში გადავადო უგანზომილებო შტრიხიან ცვლადებზე ფორმულებით:

$$x_i = l_0 x'_i; \quad v_i = v_0 v'_i; \quad t = \frac{l_0}{v_0} t'; \quad p = \rho v_0^2 p'; \quad b_i = g b'_i. \quad (1.139)$$

მაშინ, მივიღებთ ამოცანას:

$$\frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial v'_1}{\partial t'} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_1 \frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_2 \frac{\partial v'_1}{\partial x'_2} = g b'_1 - \frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial p'}{\partial x'_1} + \frac{\mu^* v_0}{\rho l_0^2} \Delta v'_1; \quad (1.140)$$

$$\frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial v'_2}{\partial t'} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_1 \frac{\partial v'_2}{\partial x'_1} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_2 \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} = g b'_2 - \frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial p'}{\partial x'_2} + \frac{\mu^* v_0}{\rho l_0^2} \Delta v'_2 \quad (1.141)$$

$$\frac{v_0}{l_0} \left( \frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} \right) = 0; \quad (1.142)$$

$$(v'_1)_{t=0} = v'_{10}; \quad (v'_2)_{t=0} = v'_{20}; \quad (1.143)$$

$$(v'_1)_{\partial\Omega} = 0; \quad (v'_2)_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.144)$$

თუ, (1.140) – (1.144) განტოლებებში შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\text{Re} = \frac{v_0 l_0 \rho}{\mu^*}; \quad \text{Fr} = \frac{v_0}{\sqrt{g l_0}}; \quad (1.145)$$

და აღარ დავწერთ შტრიხებს, მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს უგანზომილებო ფორმით:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{b_1}{\text{Fr}^2} - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v_1; \quad (1.146)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{b_2}{\text{Fr}^2} - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v_2 \quad (1.147)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0; \quad (1.148)$$

$$(v_1)_{t=0} = v_{10}; \quad (v_2)_{t=0} = v_{20}; \quad (1.149)$$

$$(v_i)_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.150)$$

მუდმივ კოეფიციენტს  $Re$  – რეინოლდსის რიცხვი ეწოდება, ხოლო

$Fr$  – ფრუდის რიცხვია.

იმისათვის რომ, სხვადასხვა მასშტაბის ორი მოდელი იყოს ექვივალენტური, მათ შორის უნდა არსებობდეს მსგავსება. ცხადია, რომ ორი მოდელი მსგავსი იქნება, თუ მოდელის რეჟიმის განმსაზღვრელი მუდმივი კოეფიციენტები

( $Re$  და  $Fr$ ), იქნებიან შესაბამისად ტოლები, ანუ, თუ

$$Re_1 = Re_2; \quad Fr_1 = Fr_2. \quad (1.151)$$

ამ პირობების ერთდროულად დაცვა კი ძალზედ რთულია, განსაკუთრებით იმ ამოცანებში, სადაც მნიშვნელობა აქვს სიმძიმის ძალის გავლენას.

მოდელების მატემატიკურად გამოსაკვლევად, მათ როგორც წესი, გადაწერენ უგანზომილებო ფორმით. გათვლების შედეგების პრაქტიკაში გადასატანად იყენებენ შესაბამისი გადასვლის ფორმულებს (1.139)

ე) ეილერის მათემატიკური მოდელი იდეალური სითხეებისათვის.

განვიხილოთ ბლანტი, უკუმშვადი სითხის დინამიკა იმ შემთხვევაში, როცა რეინოლდსის



რიცხვი იზრდება. ექსპერიმენტებით დადგენილია, რომ მოცემული ამოცანის პირობებში, არსებობს რეინოლდსის რიცხვის კრიტიკული მნიშვნელობა, ისე რომ, თუ  $Re \leq Re_{kr}$  გვაქვს ლამინარული(ფენოვანი) დინება, ხოლო, თუ  $Re \geq Re_{kr}$  გვაქვს ფენების შერევა-დიფუზია, ამ რეჟიმს ტურბულენტური დინება ეწოდება.

თუ განვიხილავთ დინებას, რომლის დროსაც  $Re \rightarrow \infty$ , მივიღებთ ისეთ ტურბულენტურ დინებას, რომლის დროსაც განვითარებული დიფუზიის გამო, სიბლანტის თვისებას აღარ აქვს ფიზიკური გავლენა, ანუ დინება შეიძლება განხილული იყოს, როგორც ისეთი სითხის დინება, რომლის ფენებს შორისაც არა გვაქვს ხახუნის ძალა(ასეთ სითხეებს იდეალურს უწოდებენ).

იდეალური სითხის დინამიკის მათემატიკური მოდელი შეიძლება მივიღოთ ბლანტი სითხის მოდელიდან, თუ მოვახდენთ შესაბამის ზღვარზე გადასვლას იმ პირობით, რომ  $Re \rightarrow \infty$ . მაშინ, მათემატიკური მოდელი მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{b_1}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x_1}; \quad (1.152)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{b_2}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x_2}; \quad (1.153)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0; \quad (1.154)$$

$$(v_i)_{t=0} = v_{i0}; \quad (1.155)$$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial n}\right)_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.156)$$

მათემატიკურ მოდელს, რომელიც მოიცემა (1.152) – (1.156) სახით ეილერის მოდელი ეწოდება.

### 1.11 ვარიაციული მეთოდების გამოყენება ქარის ნაკადის დინების მოდელირებისათვის

მრავალსართულიანი საცხოვრებელი სახლებისა და კომპლექსების პროექტირებისას, აუცილებელია, მოსალოდნელი ქარის დატვირთვების წინასწარი გათვალისწინება. თუმცა, ეს საკითხი არაა ბოლომდე გათავისებული, რამაც გამოიწვია თბილისის ვაკე-საბურთალოს რაიონში, ნუცუბიძის პლატოზე დაპროექტებული ბინების არაკომფორტული ხასიათი. ქარის დატვირთვების სწორ ანგარიშზეცაა დამოკიდებული, არამარტო საცხოვრებელი სახლების კომფორტულობა, არამედ, მათი მშენებლობის ფასიც. სამშენებლო კონსტრუქციების გეომეტრიული კონფიგურაცია, საკმაოდ მრავალფეროვანია და რთული; არის როგორც მართკუთხა პარალელეპიპედის, ასევე, სხვა ფორმის მაღლივი შენობები, ვანტური ხიდები და მაღლივი ანძები.

ტრადიციულად, ცივილიზებულ ქვეყნებში, ამოცანები ქარის დატვირთვების განსაზღვრის შესახებ, იხსნება სამშენებლო ნორმებისა და

წესების ბაზაზე [42-44], ან შესაბამისი შენობების მაკეტის აეროდინამიკურ მიღში დაბერვით და დატვირთვების გადათვლით ნატურული ნაგებობისათვის. თუმცა, არსებული ნორმებით გათვლილი დატვირთვები, ხშირად, მეტად უხეშია სიზუსტის თვალსაზრისით. ასევე, აეროდინამიკურ მიღში დაბერვა საკმაოდ ძვირია და გადათვლის მასშტაბობაც არაა სათანადო სიზუსტის.

ქარის დატვირთვების შესაბამისი ამოცანების ზუსტი ანალიზური ამოხსნა ჯერ-ჯერობით არაა ცნობილი, ამიტომ დიდი მნიშვნელობა ენიჭება პროცესის კომპიუტერულ მოდელირებასა და გათვლებს. სწორედ ამ ამოცანას ისახავს ჩვენი ნაშრომი.

## 1.12 მათემატიკური მოდელირება და ქარის დატვირთვების საანგარიშო ფორმულები

ნაგებობებზე ქარის დატვირთვების საპოვნელად, გამოვიყენოთ საქართველოს “ქარის ვარდის” ცნობილი რუკები. სადაც, მეტეოროლოგიური დაკვირვების შედეგების სტატისტიკური დამუშავების შედეგად, შედგენილია, საქართველოს მოცემულ რაიონებში, ქარის ყველაზე ალბათური მნიშვნელობები და მიმართულებები; რაც საშუალებას გვაძლევს, ამოცანის დასმისას, შენობასთან შემხვედრი ნაკადი აღვწეროთ

ფუნქციონალურად კინემატიკური პირობების საშუალებით.

ქარს განვიხილავთ, როგორც ბლანტ, უკუმშ სითხეს. ამიტომ მის აღსაწერად გამოვიყენებთ დინამიკის განტოლებას კოშის ფორმით

$$\rho \dot{V}_i = \sigma_{ji,j} + \rho b_i; \quad (1.157)$$

უწყვეტობის განტოლებას

$$\rho + (\rho V_i)_{,i} = 0; \quad (1.158)$$

და რეოლოგიურ თანადობას

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}; \quad D_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i}) \quad (1.159)$$

ცხადია, რომ (1.157),(1.158),(1.159) ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემას, უნდა მიეუერთოთ კედლებთან მიკერის პირობები (1.160)

$$V_i /_{\partial\Omega} = 0; \quad (1.160)$$

და საწყისი პირობები (1.161)

$$V_i /_{t=0} = 0, \quad (1.162)$$

პირობა (1.162) სრულდება, თუ,  $x \neq x_0$ . ხოლო იმ შემთხვევაში, როცა  $x = x_0$  გვექნება კინემატიკური პირობები ქარისათვის, რომელსაც ვიღებთ ქარის ვარდის ცნობილი მონაცემების ბაზაზე (1.163), (1.164):

$$V_1(x_0, y, t) = V_{10}(y, t); \quad (1.163)$$

$$V_2(x_0, y, t) = V_{20}(y, t). \quad (1.164)$$

ამრიგად, გვაქვს (1.157)-(1.164) ამოცანის დასმა ქარის პარამეტრების გასათვლელად. აქ

შეიძლება გამოვიყენოთ სხვადასხვა რიცხვითი მეთოდები და პაკეტები [45-47].

ქარის დატვირთვების საპოვნელად ვისარგებლოთ ფორმულით

$$F_i = \oint \sigma_{ij} n_j, \quad (1.165)$$

სადაც  $F_i$  - ნაგებობაზე მოქმედი სრული ძალაა, ინტეგრება ხდება მთელი ნაგებობის  $\partial\Omega$  ზედაპირის გასწვრივ,  $n_j$  - ნაგებობის გარე ნორმალია.

დავშალოთ ძაბვის ტენზორი სფერულ და დეკარტოვულ ნაწილებად

$$\sigma_{ij} = \sigma_s \delta_{ij} + \tau_{ij}. \quad (1.166)$$

მაშინ ნაგებობაზე მოქმედი სრული ძალა, წარმოდგება ორ მდგენელად, ესენია: წნევის ძალა და ხახუნის ძალა

$$F_i = \oint \sigma_s n_i ds + \oint n_j \tau_{ij} ds, \quad (1.167)$$

სადაც, ინტეგრება ვრცელდება შესასწავლი ნაგებობის ზედაპირის გასწვრივ.

თუ, ფორმულებში (1.167) დავუბრუნდებით განზომილებიან განმსაზღვრელ პარამეტრებს, მივიღებთ

$$F_i = \frac{\rho V^2}{2} S_0 \left( \oint \frac{2\sigma_s n_i}{\rho_0 V_0^2} ds + \oint \frac{2\tau_{ij} n_j}{\rho_0 V_0^2} ds \right), \quad (1.68)$$

სადაც  $S_0$  - გარსდენადი ნაგებობის მიდევური კვეთის ფართობია. მაღლივი შენობების გარსდენისას ხახუნის ძალისაგან გამოწვეული სინაღობის ძალის მდგენელი გაცილებით მცირეა წნევის წინაღობის ძალასთან შედარებით, ამიტომ ინჟინრულ გამოთვლებში (1.68) ფორმულის მეორე

შესაკრებს უგულვებელყოფენ ხოლმე და წინაღობის ძალას ჩაწერენ ფორმულით

$$F_i = \frac{\rho v^2}{2} \cdot S_0 \cdot C_p, \quad (1.69)$$

სადაც  $C_p$  - წნევის აეროდინამიკური კოეფიციენტი, რომლისთვისაც საინჟინრო პრაქტიკაში შემუშავებულია ნორმები და მოცემულია ცხრილები მის გამოსათვლელად სხვადასხვა ტიპის ნაგებობებისათვის. ჩვენ კი შეგვიძლია მისი დაზუსტებული მნიშვნელობების გამოთვლა (1.68) ფორმულების ბაზაზე.

ამრიგად, მივიღეთ მათემატიკური მოდელი, ქარის დატვირთვების თეორიული გაანგარიშებისათვის, რაც საშუალებას მოგვცემს დავაზუსტოთ მაღლივი შენობებისა და ანძების დატვირთვების საანგარიშო ნახევრადემპირიული ფორმულები.

ამოცანა (1.57)-(1.64), სიჩქარე - წნევის ცვლადებში შეგვიძლია გადავწეროთ სახით

$$-\frac{1}{\text{Re}} V_{j,ii} + V_i V_{j,i} + p_{,i} = f_j - \dot{V}_j \quad \Omega, \quad (1.70)$$

$$V_{j,j} = 0 \quad \Omega, \quad (1.71)$$

$$V_{j|t=0} = V_j^o \quad \Omega, \quad (1.72)$$

$$V_{j|\partial\Omega} = 0 \quad \partial\Omega. \quad (1.73)$$

სადაც  $\text{Re}$ -რეინოლდსის რიცხვია.

ასევე, უნდა მივუერთოთ დამბერი ქარის კინემატიკური პირობები (1.63),(1.64).

### 1.13 ქარის განმსაზღვრელი პარამეტრების პოვნის რიცხვითი ალგორითმი

თუ, (1.70) დინამიკის განტოლებებში სინქარების დროით წარმოებულებს შევცვლით სასრული სხვაობებით, მივიღებთ

$$-\frac{1}{\operatorname{Re}} V_{j,ii} + V_i V_{j,i} + P_j = f_j - \frac{V_j^{\tau+\delta\tau} - V_j^\tau}{\delta\tau}. \quad (1.74)$$

განვიხილოთ სოლენოიდალური ფუნქციების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ სასაზღვრო – მიკერის პირობებს რვაჩოვ – ობჰაძის RO – ფუნქციების მეშვეობით. მაშინ კუპრაძე – ბრებიას მეთოდის მიხედვით[45-46], გაგამრავლოთ (1.74) განტოლების ორივე მხარე  $\forall W_j \in L_2(\Omega)$  სკალარულად  $L_2(\Omega)$  აზრით და გამოვიყენოთ გრინის ფორმულა. მაშინ მივიღებთ ლიონს – ტემაძის სუსტ ფორმულირებას [47]

$$\frac{1}{\operatorname{Re}} ((V^{\tau+\delta\tau}, W)) + b(V^{\tau+\delta\tau}, V^{\tau+\delta\tau}, W) = (f - \frac{V^{\tau+\delta\tau} - V^\tau}{\delta\tau}, W) \quad (1.75)$$

სადაც

$$V_j \in D_{NS}(\Omega),$$

$$(f - \frac{V^{\tau+\delta\tau} - V^\tau}{\delta\tau}, W) = \int_{\Omega} (f_j - \frac{V_j^{\tau+\delta\tau} - V_j^\tau}{\delta\tau}) W_j dx, \quad (1.76)$$

$$b(V^{\tau+\delta\tau}, V^{\tau+\delta\tau}, W) = \int_{\Omega} V_i^{\tau+\delta\tau} V_{j,i}^{\tau+\delta\tau} W_j dx, \quad (1.77)$$

$$((V^{\tau+\delta\tau}, W)) = \int_{\Omega} V_{i,j}^{\tau+\delta\tau} W_{i,j} dx. \quad (1.78)$$

თუ, (1.78) ფორმულებისათვის კვლავ გამოვიყენებთ გრინის ფორმულას, მივიღებთ

კუპრაძე - ბრეზიას შებრუნებულ ვარიაციულ ფორმულირებას [48-49]

$$((V^{\tau+\delta\tau}, W)) = \int_{\Omega} V_i^{\tau+\delta\tau} W_{i,j} dx \quad (1.79)$$

ვიპოვოთ  $V_j \in D_{NS}(\Omega)$ -რომელიც დააკმაყოფილებს (1.75) განტოლებებს (1.76)-(1.79) პირობებში  $\forall W_j \in L_2(\Omega)$  ფუნქციებისათვის. ასეთ ფუნქციებად, ჩვენ ვირჩევთ ლაპლასის ოპერატორის ფუნდამენტალურ ამონახსნებს და (1.75) განტოლებათა ამონახსნებს ვეძებთ სახით

$$V_i = \varepsilon_{ijk} \phi_{k,j} \quad (1.80)$$

$$W_i = W_i^* \quad (1.81)$$

სადაც  $\varepsilon_{ijk}$  ლევი-ჩივიტას ფსევდოტენზორის კომპონენტებია.

$$\phi_k = RO \alpha_{ki} \Psi_i \quad (1.82)$$

$$W_{i,j}^* = \Delta_i \quad .83$$

სადაც  $\Psi_i$  - სრულ ფუნქციათა სისტემაა  $L_2(\Omega)$  ახრით, ხოლო  $RO$  - რეაჩოვ-ობგადის [9-11] ფუნქციებია, რომლებიც ნულის ტოლ მნიშვნელობებს იღებენ საზღვრის წერტილებში  $\partial\Omega$ ,  $\Delta_i$  დირაკის ფუნქციაა.

მოყვანილი ალგორითმის მეშვეობით ქარის განმსაზღვრელი პარამეტრების პოვნის ამოცანა დაიყვანება კვადრატულ განტოლებათა სისტემის



ამოსხნამდე  $\alpha_{ki}$  გაშლის კოეფიციენტების მიმართ.

### 1.14. სასრული-სხვაობის მეთოდის გამოყენება ქარის ნაკადის დინების მოდელირებისათვის

ნაგებობებზე ქარის დატვირთვების საპოვნელად, გამოვიყენოთ საქართველოს “ქარის ვარდის” ცნობილი რუკები. სადაც, მეტეოროლოგიური დაკვირვების შედეგების სტატისტიკური დამუშავების შედეგად, შედგენილია, საქართველოს მოცემულ რაიონებში, ქარის ყველაზე ალბათური მნიშვნელობები და მიმართულებები; რაც საშუალებას გვაძლევს, ამოცანის დასმისას, შენობასთან შემხვედრი ნაკადი აღვწეროთ ფუნქციონალურად კინემატიკური პირობების საშუალებით.

ქარს განვიხილავთ, როგორც ბლანტ, უკუმშ სითხეს. ამიტომ მის აღსაწერად გამოვიყენებთ დინამიკის განტოლებას კოშის ფორმით

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho b_i + \sigma_{ij}$$

და რეოლოგიურ თანადობას  $\dot{\rho} + (\rho V_i)_{,i} = 0$

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i}) \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

ხოლო იმ შემთხვევაში,

როცა გვექნება კინემატიკური პირობები  
ქარისათვის, რომელსაც ვიღებთ ქარის ვარდის  
ცნობილი

მონაცემების ბაზაზე

$$V_2(x_0, y, t) = V_{20}(y, t) \quad x = x_0$$

$$V_1(x_0, y, t) = V_{10}(y, t) \quad x \neq x_0$$

ამრიგად, გვაქვს ამოცანის დასმა ქარის  
პარამეტრების გასათვლელად.

აქ შეიძლება გამოვიყენოთ სხვადასხვა  
რიცხვითი მეთოდები და პაკეტები  
ქარის დატვირთვების საპოვნელად ვისარგებლოთ  
ფორმულით

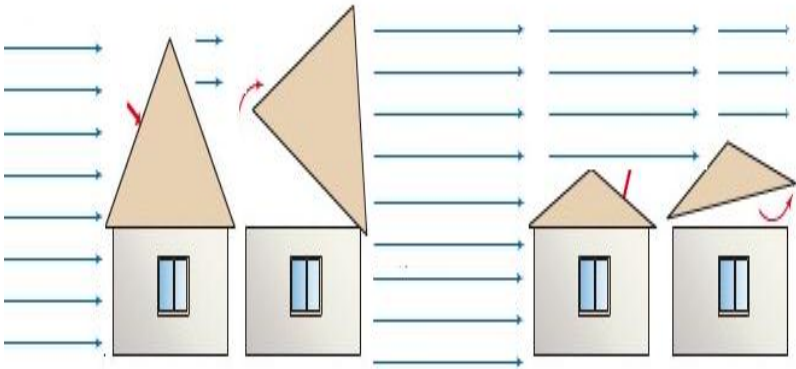
$$F_i = \oint \sigma_{ij} n_j \quad \sigma_{ij} = \sigma_s \delta_{ij} + \tau_{ij}$$

ნაგებობაზე მოქმედი სრული ძალა, წარმოდგება  
ორ მდგენელად, ესენია: წნევის ძალა და ხახუნის  
ძალა

$$F_i = \oint \sigma_s n_i ds + \oint n_j \tau_{ij} ds,$$

## 1.15. რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის საინჟინრო ნაგებობებზე და ნაგებობათა კომპლექსებზე ქარის დატვირთვების გათვლის შედეგები

ამოცანის შესწავლისას, განვსაზღვროთ ქარის დატვირთები საინჟინრო ნაგებობებისთვის, მნიშვნელოვან ფაქტორს წარმოადგენს ქარის გარსმდენი ნაკადი რომელიც წარმოდგენილია ქარის ნაკადის ნახაზზე, ქარის ნაკადის აღწერისას ვიყენებთ ბლანტი სითხის „ნავიესტოქსის“ მოდელს. ამ შემთხვევაში ტურბულენტური ნაკადი რომელიც ითვალსწინებს სხვადასხვა ემპირიულ ცვლილებებს და გამოვიყენოთ ფენომენალური განტოლებების საფუძველზე გარკვეული მოსაზრებები იქნა მიღებული. ჩვენ გამოვიყენეთ „ნავია სტოქსის“ განტოლებას ტურბულენტური ნაკადის შესწავლისას, ამ მოდელით შევისწავლით ეპიური ქარის სიჩქარის გარსმდენ ნაკადს და ქარის ნაკადის ზემოქმედება შენობაზე ნაჩვენებია ნახ2.7-ზე



ნახ2.7 ნახაზე ნახვენებია ქარის ნაკადი შენობაზე

შემთხვევითი პოლემპირიულ თეორიით, შესაბამება СНИП-ს ნორმებს, მიღებულია რომ შენობაზე ქარის დატვირთვა დამოკიდებულია შენობის z სიმაღლის მიხედვით, სადაც ქარის დატვირთვა განისაზღვრება  $W_p = W \times k(z) \times c$  სადაც W არის ქარის ნაკადი, k-კოეფიციენტი ქარის ზეწოლისას, ხოლო z -ი არის სიმაღლე რომელიც მოცემულია ცხრილ 2.8-ში, ხოლო c- აეროდინამიკური კოეფიციენტი, ქარის ძალის ზეწოლისას დამოკიდებულია იმაზე თუ რომელ მხარეს უბერავს ქარი, c-კოეფიციენტი ქარის მხარეს მოცემულა ნახ 1.-ზე k(z) კოეფიციენტი ადგილების მიხედვით

სიმაღლე z მ	A	B	C
არა უმეტეს 5	0,75	0,5	0,4
10	1,0	0,65	0,4
20	1,25	0,85	0,55
<p>A- გახსნილი ადგილები ზღვების, ტბების და წყალსაცავების, უდაბნოები</p> <p>B- ქალაქები, ტყეების და სხვა რეგულარული დაბრკოლებები არ აღემატებება სიმაღლე 10 მ-ს;</p> <p>C- ქალაქები, ტაუერები რომელიც 25-მ-ზე მაღლაა</p>			

ცხრილი 1. აეროდინამიკური კოეფიციენტების სიდიდეები მოცემულია

შევადგინეთ ქარის ნაკადის მათემატიკური მოდელი და ქარის ნაკადი განვიხილოთ როგორც მკვრივი ბლანტი სითხე, შესაბამისად დგება დინამიკური ნაგვი-სტოქსის განტოლებათა ქარის ნაკადისთვის, რადგან ბგერამდე დინების რეჟიმის შემთხვევაში, შეიძლება უგულებლვყოთ ჰაერის კუმშვალობა, ქარის ნაკადი შეგვიძლია განვიხილოთ  $\Omega$ -არეში როგორც უკუმში ბლანტი სითხე, რომლის  $\partial\Omega$  საზღვარი აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობებს, მაშინ ქარის მოდელი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ სახით:

$$-\frac{1}{\text{Re}} V_{j,ii} + V_i V_{j,i} + p_{,i} = f_j - \dot{V}_j \quad \Omega, \quad (1.84)$$

$$V_{j,j} = 0 \quad \Omega, \quad (1.85)$$

$$V_{j|t=0} = V_j^o \quad \Omega, \quad (1.86)$$

$$V_{j|\partial\Omega} = 0 \quad \partial\Omega. \quad (1.87)$$

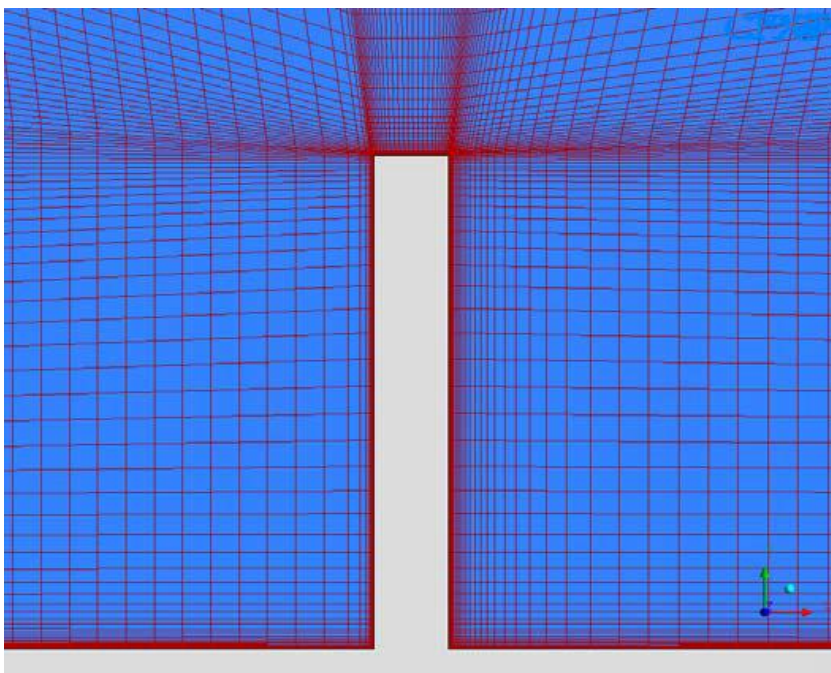
სადაც  $\text{Re}$ - არის რეინოლდსის რიცხვი დასაწყისთვის განვიხილოთ ქარის ნაკადით მართკუთხა წინააღმდეგობის გარსდების ამოცანას, სადაც ქარის საწყისი ტურბულენტური ნაკადი მოიცემა ნახევრადემპირიული მონაცემების საფუძველზე

$$-\frac{1}{\text{Re}} V_{j,ii} + V_i V_{j,i} + P_{,j} = 0, \quad (1.88)$$

$$V_{j,j} = 0 \quad \Omega, \quad (1.89)$$

$$V_{j|\partial\Omega} = 0 \quad \partial\Omega, \quad (1.89)$$

გარდა ამისა, გათვალისწინება გარსმდენი ნაკადის კინემატიკური პირობებიც რომელიც მოცემულია ნახ 1.9



ნახ.1.9 მართკუთხედის გარსდენის გათვლის  
სქემა

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{X} := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -0.8 \\ -0.6 \\ -0.4 \\ -0.2 \\ 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad
 \mathbf{Y} := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0.8 \\ 0.6 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad
 \boldsymbol{\xi} := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \\ 1.2 \\ 1.4 \\ 1.6 \\ 1.8 \\ 2 \\ 2.2 \\ 2.4 \\ 2.6 \\ 2.8 \\ 3 \\ 3.2 \end{pmatrix} \\
 \\
 \text{Re} := 3000 \\
 n := 2 \\
 m := 18 \\
 k := 15
 \end{array}$$

$$u(x, y, a) := 1 + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n [a_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^{j+1}]$$

$$v(x, y, b) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n [b_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^{j+1}]$$

$$p(x, y, c) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (c_{i,j} \cdot x^i \cdot y^j)$$

$$\text{IGR}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \sum_{i=0}^m (u(X_i, Y_i, \mathbf{a})^2 + v(X_i, Y_i, \mathbf{b})^2)$$

$$\text{IKIN1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \sum_{i=0}^k [(u(-5, \xi_i, \mathbf{a}) - 1)^2 + v(-5, \xi_i, \mathbf{b})^2]$$



$$Dux(x, y, a) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[ (i+1) \cdot a_{i,j} \cdot (x+5)^i \cdot (4-y)^{j+1} \right]$$

$$Duy(x, y, a) := - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[ (j+1) \cdot a_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^j \right]$$

$$Dvx(x, y, b) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[ (i+1) \cdot b_{i,j} \cdot (x+5)^i \cdot (4-y)^{j+1} \right]$$

$$Dvy(x, y, b) := - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[ (j+1) \cdot b_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^j \right]$$

$$Duxx(x, y, a) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n \left[ i \cdot (i+1) \cdot a_{i,j} \cdot (x+5)^{i-1} \cdot y^{j+1} \right]$$

$$Duyy(x, y, a) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n \left[ (j+1) \cdot j \cdot a_{i,j} \cdot (x+5)^i \cdot (4-y)^{j-1} \right]$$

$$Dvxx(x, y, b) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n \left[ i \cdot (i+1) \cdot b_{i,j} \cdot (x+5)^{i-1} \cdot (4-y)^{j+1} \right]$$

$$Dvyy(x, y, b) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n \left[ (j+1) \cdot j \cdot b_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^{j-1} \right]$$

$$Dpx(x, y, c) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n \left( i \cdot c_{i,j} \cdot x^{i-1} \cdot y^j \right)$$

$$Dpy(x, y, c) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n \left( j \cdot c_{i,j} \cdot x^i \cdot y^{j-1} \right)$$

$$UDINO(a, b, c, x, y) := u(x, y, a) \cdot Dux(x, y, a) + v(x, y, b) \cdot Duy(x, y, a) + Dpx(x, y, c)$$

$$UDIN(a, b, c, x, y) := \left[ UDINO(a, b, c, x, y) - \frac{1}{\text{Re}} \cdot (Duxx(x, y, a) + Duyy(x, y, a)) \right]^2$$

$$VDINO(a, b, c, x, y) := u(x, y, a) \cdot Dvx(x, y, b) + v(x, y, b) \cdot Dvy(x, y, b) + Dpy(x, y, c)$$

$$\text{VDIN}(a, b, c, x, y) := \left[ \text{VDIN0}(a, b, c, x, y) - \frac{1}{\text{Re}} \cdot (\text{Dvxx}(x, y, b) + \text{Dvyy}(x, y, b)) \right]^2$$

$$\text{CONTN}(a, b, x, y) := (\text{Dux}(x, y, a) + \text{Dvy}(x, y, b))^2$$

$$\text{DINAMIC01}(a, b, c) := \int_{-5}^{-1} \int_0^{\xi_k} \text{UDIN}(a, b, c, x, y) \, dy \, dx + \int_{-1}^1 \int_1^{\xi_k} \text{UDIN}(a, b, c, x, y) \, dy \, dx$$

$$\text{DINAMIC1}(a, b, c) := \text{DINAMIC01}(a, b, c) + \int_1^{10} \int_0^{\xi_k} \text{UDIN}(a, b, c, x, y) \, dy \, dx$$

$$\text{DINAMIC02}(a, b, c) := \int_{-5}^{-1} \int_0^{\xi_k} \text{VDIN}(a, b, c, x, y) \, dy \, dx + \int_{-1}^1 \int_1^{\xi_k} \text{VDIN}(a, b, c, x, y) \, dy \, dx$$

$$\text{DINAMIC2}(a, b, c) := \text{DINAMIC02}(a, b, c) + \int_1^{10} \int_0^{\xi_k} \text{VDIN}(a, b, c, x, y) \, dy \, dx$$

$$\text{CONTQ}(a, b) := \int_{-5}^{-1} \int_0^{\xi_k} \text{CONTN}(a, b, x, y) \, dy \, dx + \int_{-1}^1 \int_1^{\xi_k} \text{CONTN}(a, b, x, y) \, dy \, dx$$

$$\text{CONT}(a, b) := \text{CONTQ}(a, b) + \int_1^{10} \int_0^{\xi_k} \text{CONTN}(a, b, x, y) \, dy \, dx$$

$$f1(a, b, c) := 8 \cdot \text{IGR}(a, b) + \text{IKIN1}(a, b) + \text{DINAMIC1}(a, b, c) + \text{DINAMIC2}(a, b, c)$$

$$f(a, b, c) := f1(a, b, c) + \text{CONT}(a, b)$$

$$i := 0..n$$

$$j := 0..n$$

$$a_{i,j} := -0.1 + \text{rnd}(0.1)$$

$$b_{i,j} := -0.01 + \text{rnd}(0.02)$$

$$c_{i,j} := -0.1 + \text{rnd}(0.1)$$

$$a = \begin{pmatrix} -0.039 & -0.093 & -0.035 \\ -0.09 & -0.077 & -0.008 \\ -0.034 & -0.051 & -0.05 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0.004 & 0.002 \\ -0.01 & -0.008 & 0.007 \\ 0.005 & -0.002 & 0.001 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} -0.004 & -0.082 & -0.087 \\ -0.005 & -0.097 & -0.094 \\ -0.087 & -0.014 & -0.028 \end{pmatrix}$$

Given  $u(8, 3, a) > 0$

$$\begin{array}{llll} u(-2, 3, a) > 0 & u(-1, 3, a) > 0 & u(1, 3, a) > 0 & u(3, 3, a) > 0 \\ u(-4, 3, a) > 0 & u(-3, 3, a) > 0 & u(2, 3, a) > 0 & u(4, 3, a) > 0 \end{array}$$

$\underline{S}_x := \text{Minimize } (f, a, b, c)$

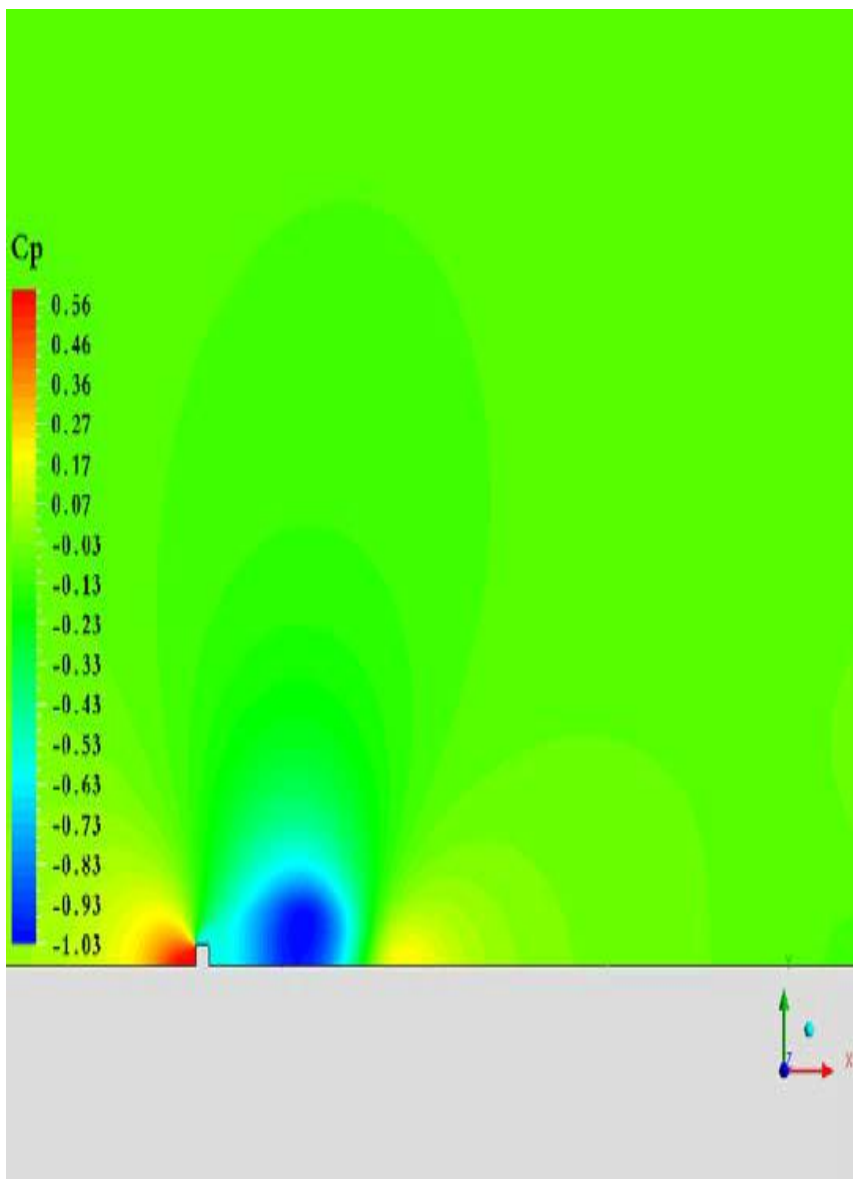
$$S = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.009 & -0.04 & -0.008 \\ -0.02 & -0.015 & -0.004 \\ -0.004 & 0.007 & 0.001 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.001 & 0.001 \\ -0.002 & -0.004 & 0.002 \\ 0.002 & -0.001 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.001 & -0.041 & -0.022 \\ -0.002 & -0.024 & -0.047 \\ -0.022 & -0.007 & -0.007 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$a := -(S)_0 \quad b := S_1 \quad c := -S_2$$

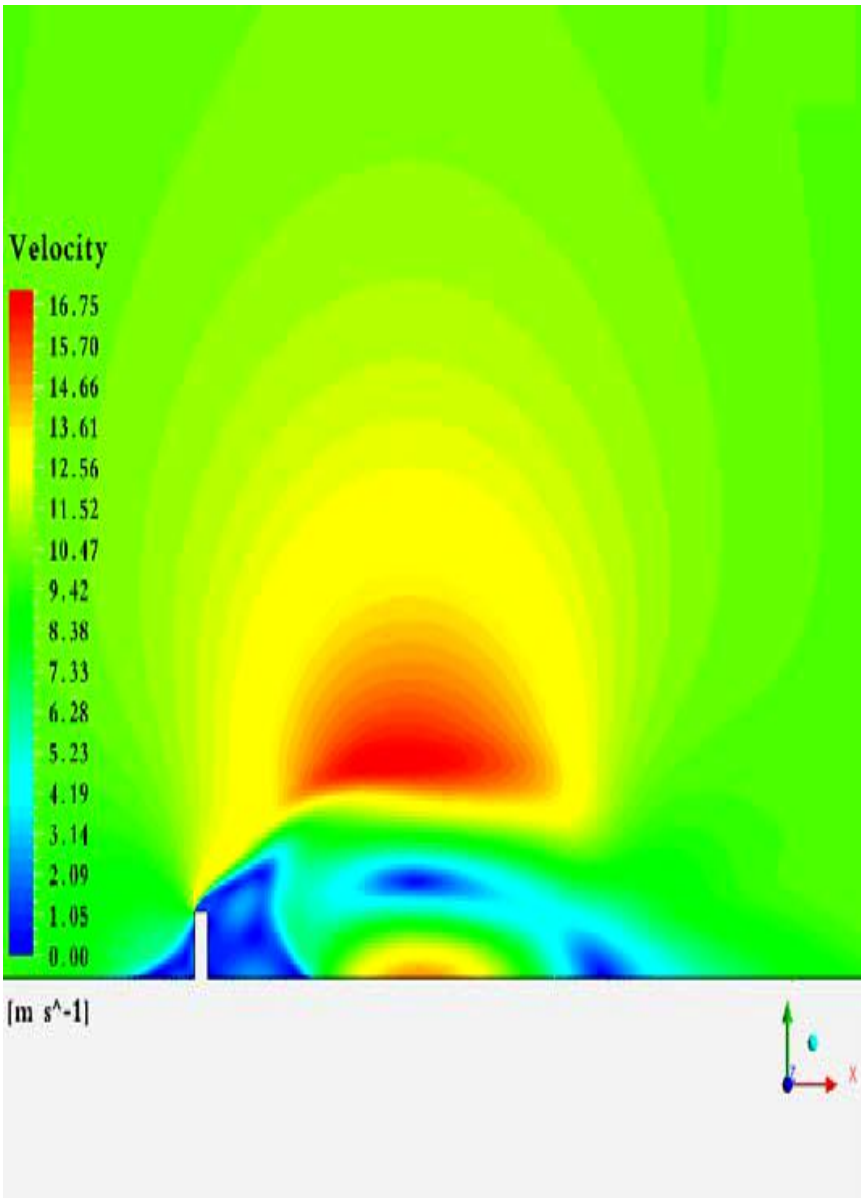
$$u(x, y, a) := 1 + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n [a_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^{j+1}]$$

$$v(x, y, b) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n [b_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^{j+1}]$$

$$p(x, y, c) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (c_{i,j} \cdot x^i \cdot y^j)$$



წნევის კოეფიციენტი

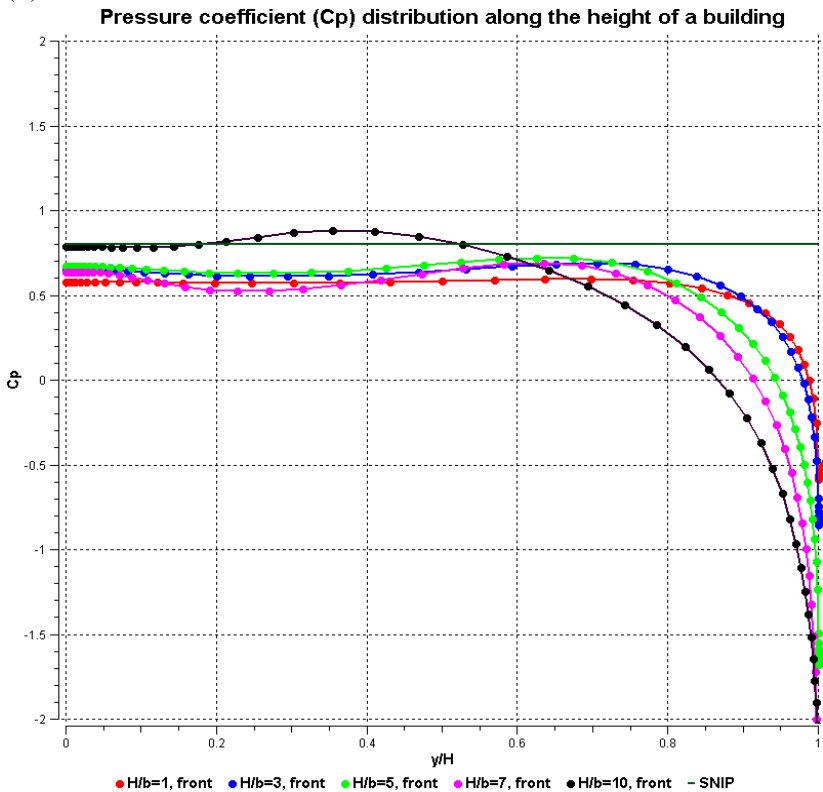


სიქარეთა ველი

რთული ფორმის ნაგებობების გათვლა ხდება ანალოგიურად, იცვლება მხოლოდ X და Y მასივები.

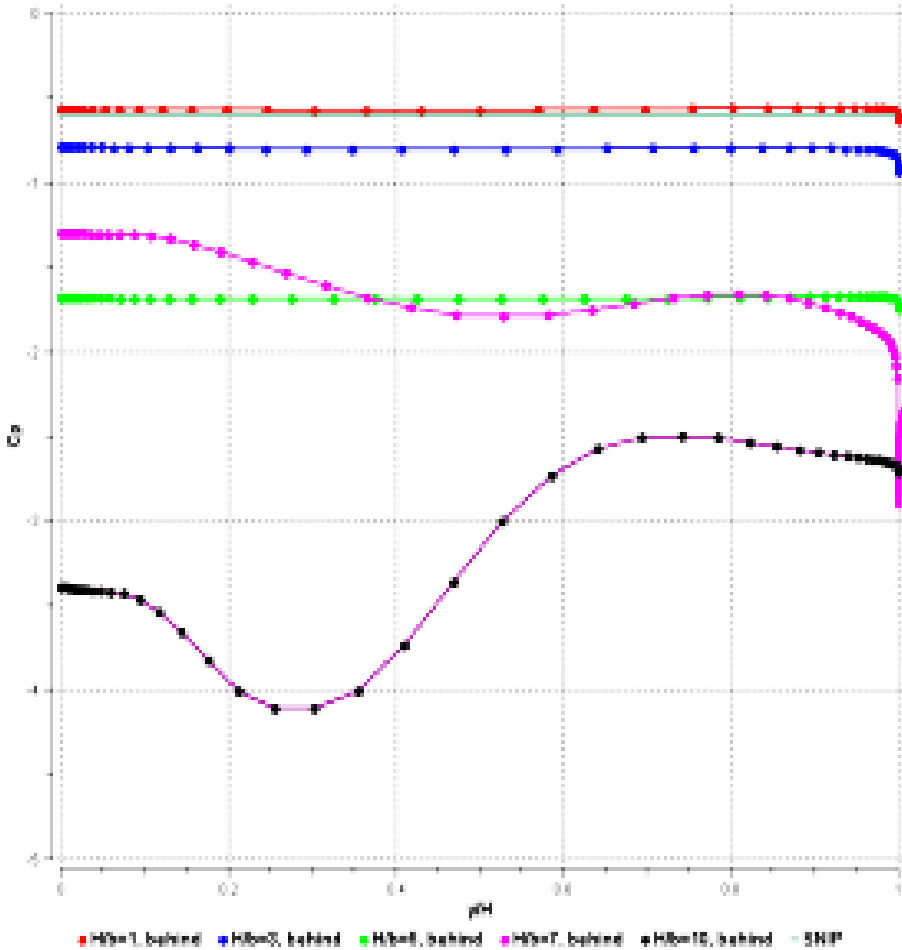
აეროდინამიკური კოეფიციენტების მნიშვნელობები შენობებისათვის, რომლებიც მიღებულია თეორიულ საფუძველზე მოცემულია ნახ.1.1 (ა) და ნახ.1.1(ბ)

(ა)



(ბ)

Pressure coefficient ( $C_p$ ) distribution along the height of a building



ნახ1.0 (ა) და (ბ) ეროდინამიკური კოეფიციენტების მნიშვნელობები შენობებისათვის

ნახ.1.1 მოცემულია წნევა  $C_p$  კოეფიციენტის მნიშვნელობების განაწილების გრაფიკები შენობის სიმაღლის მიხედვით ქარის ბერვის მხრიდან (შენობის წინა ფასადი, მარცხნიდან) და საწინააღმდეგო მხრიდან (შენობის უკანა კედლის მხრიდან, მარჯვნიდან). ფერადი წირები წერტილებით შეესაბამება შენობის სხვადასხვა ფარდობით სიმაღლეს, მუქი-მწვანე ჰორიზონტული წრფეები СНИП 2.0.07-85 გათვლილ მნიშვნელობებს.

თეორიული გათვლების შედეგები შედარება საერთაშორისო ნორმატიული გათვლის სტანდარტებთან გვაძლევს კარგ თანხვედრას, ერთულოვანი ნაგებობებისათვის, თუმცა, შენობათა მასივების გარსდენის ამოცანების შესწავლისას, ნორმატიული დოკუმენტებისაგან, თეორიული გათვლის შედეგები საკმაოდ განსხვავებულია, რადგან ნორმატიული დოკუმენტებს არ შეუძლიათ გაითვალისწინონ გარსდენის რეალური სურათი. ჩვენი შედეგები, კი უფრო რიალურად ასახავს წარმოქმნილ დატვირთვებს, რაც კარგად ჩანს ნატურალ ექსპერიმენტებთან შედარებისას.



**თავი II. რთული გეომეტრიის საინჟინრო  
ნაგებობებზე მოქმედი, ქარის დატვირთვების  
განსაზღვრის არსებული ლიტერატურის  
მიმოხილვა**

**2.1 ქარის დატვირთვების განსაზღვრის  
ნორმები და მეთოდები ამერიკის შეერთებულ  
შტატებში**

ბევრ ქვეყნაში, მათ შორის ამერიკის შეერთებულ შტატებში შენობა-ნაგებობების უსაფრთხოებისათვის შემუშავებული იქნა უსაფრთხოების ზომები ქარის დატვირთვებისთვის.

ქარის სიჩქარით გამოწვეული ზეწოლა ( $q_z$ , რომელიც დამოკიდებულია z-სიმაღლეზე, გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$q_z = 0.00256K_z K_d V^2 I_W \quad (2.1)$$

სადაც:

$q_z$  – სიჩქარის ზეწოლაა z-სიმაღლაზე.

$K_z$  – სიჩქარის ზეწოლისას გამოწვეული ზემოქმედების კოეფიციენტი z-სიმაღლაზე, ზემოქმედება B, C და D (ცხრილი 2.1)

$K_d$  – ქარის მიმართულების ფაქტორი. სპექტრში 0.85(შენობის)→0.95 (საკვამური მილი)

$v$  – სიჩქარე MPH (MPH (Miles per hour – მილ საათში) = 0.44704 მ/წ) 3-წამიანი ნაკადით 33 ფუტი (1 ფუტი=30.48 სმ, 33\*30.48=1005,48სმ, 1005,48/100=10მ ანუ შენობა-ნაგებობა არის 10 მეტრის სიმაღლის) მიწის ზემოდან, ცხრილ 2.1-

ში ნაჩვენებია C კატეგორიაში.  
 $I_w$  – მნიშვნელოვანი ფაქტორები ქარის  
 დატვირთვებისას

სიჩქარის ზეწოლის კოეფიციენტი  $K_z$

სიმაღლე მიწის ზედაპირიდან Z		ადგილმდებარეობა			
		B		C	D
ft	(m)	შემოსევა 1	შემოსევა 2	შემოსევა 1&2	შემოსევა 1&2
0-15	(0-4.6)	0.70	0.57	0.85	1.03
20	(6.1)	0.70	0.62	0.90	1.08
25	(7.6)	0.70	0.66	0.94	1.12
30	(9.1)	0.70	0.70	0.98	1.16
40	(12.2)	0.76	0.76	1.04	1.22
50	(15.2)	0.81	0.81	1.09	1.27
60	(18)	0.85	0.85	1.13	1.31
70	(21.3)	0.89	0.89	1.17	1.34
80	(24.4)	0.93	0.93	1.21	1.38
90	(27.4)	0.96	0.96	1.24	1.40
100	(30.5)	0.99	0.99	1.26	1.43
120	(36.6)	1.04	1.04	1.31	1.48
140	(42.7)	1.09	1.09	1.36	1.52
160	(48.8)	1.13	1.13	1.39	1.55
180	(54.9)	1.17	1.17	1.43	1.58
200	(61.0)	1.20	1.20	1.46	1.61
250	(76.2)	1.28	1.28	1.53	1.68
300	(91.4)	1.35	1.35	1.59	1.73
350	(106.7)	1.41	1.41	1.64	1.78
400	(121.9)	1.47	1.47	1.69	1.82
450	(137.2)	1.52	1.52	1.73	1.86
500	(152.4)	1.56	1.56	1.77	1.89

ცხრილი.2.1 შენობაზე სიჩქარის ზეწოლისას  
 მასზე

შენობის გარე ნაწილზე ქარის ზეწოლა არის p,  
 რომელიც ანგარიშდება შემდეგნაირად:

$$p = q_z G C_p - q_z (G C_{pi}) \quad (2.2)$$

სადაც:

$p$  – ქარის ზეწოლა, ქარის ძალა-წინაღობის მეთოდი, psf(psf-force per square foot-ძალის ზეწოლა თითოეულ ფუტზე და  $1 \text{ psf} = 0.047880258906 \text{ კპ}$ )

$q_z$  – სიჩქარის ზეწოლა  $z$ -ი სიმაღლეზე

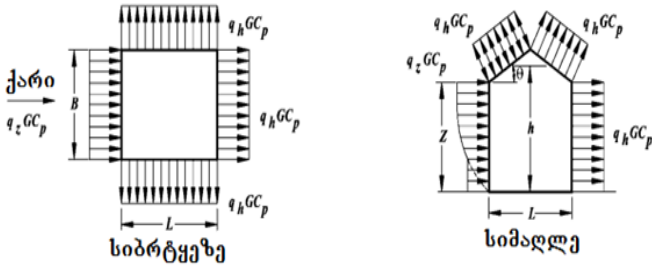
$G$  –0.85 (C-კატეგორიიდან)

$C_p$  – სხვა ზეწოლის კოეფიციენტი (ცხრილი 2.2)

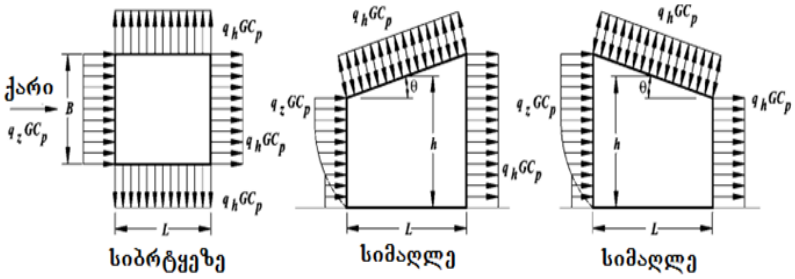
$G C_{pi} =$

$\begin{cases} -0.0 & \text{ღია შენობისთვის} \\ +0.55 \text{ ან } -0.55 & \text{ნაწილობრივ დახურული შენობისთვის} \\ +0.18 \text{ ან } -0.18 & \text{დახურული შენობა} \end{cases}$

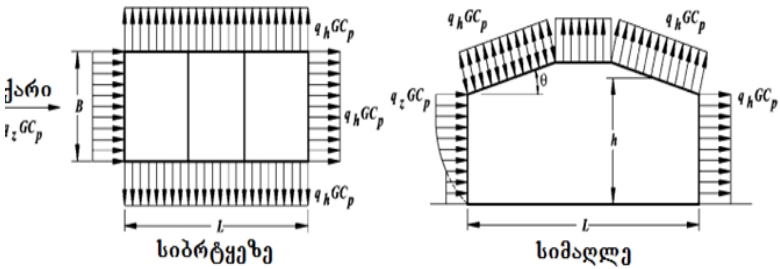
წვეტიანი სახურავი



ფურღიანი სახურავი



მანსარდი

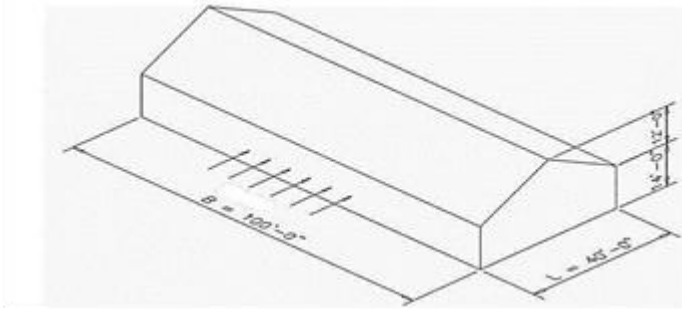


ნახ.2.2 ქარის ძალის ზემოქმედება შენობაზე ზემოქმედების აეროდინამიკური კოეფიციენტი  $C_p$

კედელზე ზემოქმედების აეროდინამიკური კოეფიციენტი $C_p$			
ზედაპირი	L/B	$C_p$	გამოყენება
ქარის მხარე (კედელი)	ყველა სიდიდე	0.8	$q_z$
საქარე კედელი	0-1	-0.5	$q_h$
	2	-0.3	
	$\geq 4$	-0.2	
გვერდითი კედელი	ყველა სიდიდე	-0.7	$q_h$

კედელზე ზემოქმედების აეროდინამიკური კოეფიციენტი გამოყენებით $q_h$												
ქარის მიმართულება	ქარისმხარე									საქარე		
	კუთხე $\theta$ (გრადუსულად)											
	h/L	10	15	20	25	30	35	45	$\geq 60^\circ$	10	15	$\geq 20$
კედელზე ხორმა $\theta \geq 10^\circ$	$\leq 0.25$	-0.7 -0.18	-0.5 0.0*	-0.3 0.2	-0.2 0.3	-0.2 0.3	0.0* 0.4	0.4	0.01 $\theta$	-0.3	-0.5	-0.6
	0.5	-0.9 -0.18	-0.7 -0.18	-0.4 0.0*	-0.3 0.2	-0.2 0.2	-0.2 0.3	0.0* 0.4	0.01 $\theta$	-0.5	-0.5	-0.6
	$\geq 1.0$	-1.3** -0.18	-1.0 -0.18	-0.7 -0.18	-0.5 0.0*	-0.3 0.2	-0.2 0.2	0.0* 0.3	0.01 $\theta$	-0.7	-0.6	-0.6
კედელზე ხორმა $\theta < 10^\circ$ და ყველა პარალელური კედლები $\theta$	$\leq 0.5$	პირი ზონატლური და შორებით საქარე მხარის პირას			$C_p$		ღირებულება გათვალისწინებულია ინტერპოლაციით					
		0 . h/2			-0.9, -0.18		სიდიდე შეიძლება შემცირდეს ერთიდა იმავე ტერიტორიაზე მუისიერად ამიტომ					
		h/2 . h			-0.9, -0.18							
		h . 2 h			-0.5, -0.18							
	> 2h			-0.3, -0.18								
$\geq 1.0$	0 h/2			-1.3**, -0.18		ფართი (ფტ)			შემც. ფაქტორი			
				-0.7, -0.18		$\leq 100$ (9.3 sq m)			1.0			
						200 (23.2 sq m)			0.9			
				-0.7, -0.18		$\geq 1000$ (92.9 sq m)			0.8			

განვიხილოთ მაგალითი, სადაც გათვლილია შენობაზე ქარის დატვირთვები

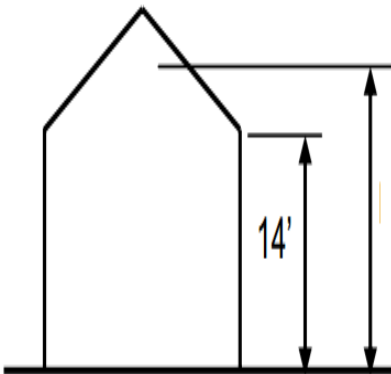


ნახ2.3 მოცემულია შენობა

ჯერ განისაზღვრება ქარის ზეწოლა კედელზე ქარის მხრიდან

- ა) კედელი, საქარე მხრიდან(საითკენაც ნაკლებად დუბერავს)
- ბ) სახურავი, ქარის მხრიდან;
- ც) თავხეები;

1) სახურავის სიმაღლის განსაზღვრა მიწის ზედაპირიდან



$$\begin{aligned} \text{სახურავი "h"} &= 14' + \frac{1}{2}(12') \\ &= 20' \end{aligned}$$

2) ქარის ზეწოლის განსაზღვრება

$$q_z = 0.00256K_zK_dV^2I_W$$

სადაც:

$k_z$  - 0.90 მოცემულია (სიმაღლე ht=20მ, რომელიც აღებულია ცხრილიდან 2.1( C- ადგილმდებარეობიდან))

$k_d$  - 0.85 (შენობის სტრუქტურა)

$V$  - 150MPH (150\*0,44704=67,056 მ/წ)

$$q_z = 0.00256(0.90)(0.85)(150MPH)^2(2.15) = 50psf \approx 2,4კპ$$

3) ქარის ხეწოლის განსაზღვრა კედელის, ქარის მხრიდან

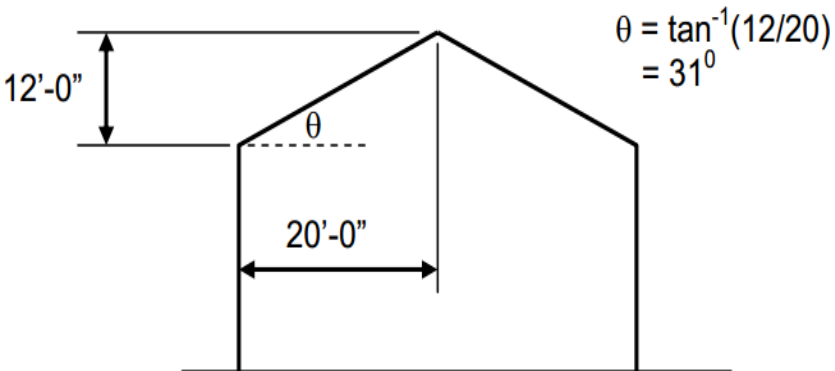
$$p = q_zGC_p - q_z(GC_{pi})$$

სადაც:

$$q_z = 50.7 psf \approx 2.42კპ$$

$$G = 0.85$$

$C_p = 0.8$  ცხრილ2.2-შია მოცემული



$(GC_{pi}) = \pm 0.18$  რადგან არის დახურული შენობა

$$p = 50.7 \text{psf}(0.85)(-0.5) - 50.7(\pm 0.18)$$

$$p = 43.6 \text{ psf} = 2.42 \text{ კპ ან } 25.4 \text{psf} = 2.21 \text{ კპ}$$

4) ქარის ზეწოლის განსაზღვრება ქარის კედელზე: მოცემულია იგივე სიდიდეები, როგორც ზემოთ უგულებელყოფილია  $C_p$

$$\text{განსაზღვროთ } L/B = 40/100 = 0.4$$

გამოვიყენოთ  $C_p = 0.5 L/B$  - სთვის (ცხრილ 2.2-დან)

$$p = q_z GC_p - q_z (GC)_{pi}$$

$$p = 50.7 \text{psf}(0.85)(-0.5) - 50.7(\pm 0.18)$$

$$p = -0.5 \text{ psf} = -0.023 \text{ კპ ან } -12.4 \text{psf} = -0.59 \text{ კპ}$$

სახეგასმული აღნიშნავს რომ უარყოფითი ძალა რომელიც შთაინთქმება

5) ქარის ზეწოლის სახურავზე განსაზღვრული ქარის მხარეს

იგივე სიდიდეები გვაქვს ზემოთ, გარდა  $C_p$

პირველად განისაზღვრება  $h/L$  ფართი =  $20/40 = 0.5$

განისაზღვრება სახურავის კუთხე  $\theta$  რომელიც გაზომილია ჰორიზონტალურად

$C_p$  განსაზღვრულია ცხრილ 2.2-დან “კიდევზე ქარის ნორმა”  $\theta \geq 10^\circ$

$C_p = -0.2$  და  $0.3$  (ინტერპოლაცია  $h/L = 0.5$  და  $31^\circ$ )

განსაზღვროთ ქარის ზეწოლა  $P$  იქნება:

$$p = q_z GC_p - q_z (GC)_{pi}$$

$$p = 50.7 \text{psf}(0.85)(-0.2) - 50 \text{psf}(\pm 0.18)$$

$$p = -17.7 \text{ psf} = 0.85 \text{ კპ ან } +0.5 \text{psf} = 0.02 \text{ კპ}$$

ან

$$p = 50.7 \text{psf}(0.85)(0.03) - 50 \text{psf}(+0.18)$$

$$p = 22.1 \text{ psf} = 1.58 \text{ კპ ან } 3.8 \text{psf} = 0.18 \text{ კპ}$$



6) ქარის ზეწოლის განსაზღვრა სახურავის  
 საქარე ხარეს(საითკენაც ნაკლებად უბერავს)  
 იგივე სიდიდეები გვაქვს ზემოთ, გარდა  $C_p$   
 $C_p$  განსაზღვრულია ცხრილი 2.2-დან “კიდევზე  
 ქარის ნორმა”  $\theta \geq 10^\circ$   
 $C_p = -0.6 \theta > 20^\circ$

განვსაზღვროთ ქარის ზეწოლა P იქნება:

$$p = q_z G C_p - q_z (G C_{pi})$$

$$p = 50.7 \text{ psf} (0.85) (-0.6) - 50.7 \text{ psf} (+0.18)$$

$$p = -35 \text{ psf} = 1,67 \text{ კპ ან} - 16.7 \text{ psf} = -0,79 \text{ კპ}$$

7) ქარის ზეწოლის განსაზღვრა გვერდით  
 კედლებზე

იგივე სიდიდეები გვაქვს ზემოთ, გარდა  $C_p$

$C_p$  განსაზღვრულია ცხრილი 2.2-დან გვერდით

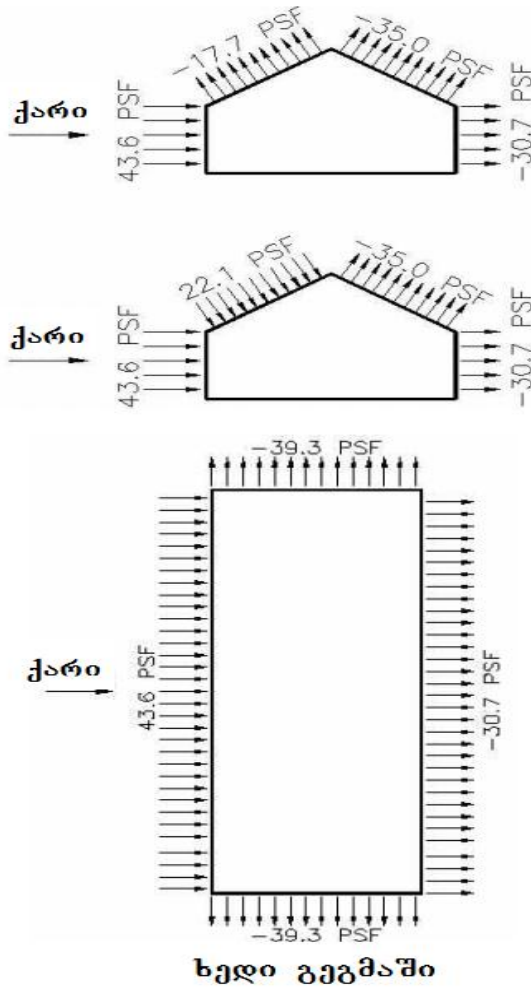
“კედლები”  $C_p = -0.7$  ყველა სიდიდეებისთვის L/B

განვსაზღვროთ ქარის ზეწოლა P იქნება:

$$p = q_z G C_p - q_z (G C_{pi})$$

$$p = 50.7 \text{ psf} (0.85) (-0.7) - 50.7 \text{ psf} (\pm 0.18)$$

ნახაზე ნაჩვენებია ყველაზე ცუდი დატვირთვა



ნახ2.4 შენობის გეგმილი ქარის დატვირთვებისას

## 2.2. ქარის დატვირთვების განსაზღვრის ნორმები და მეთოდები რუსეთში

ქარის დატვირთვებისას (p) გაითვალისწინება შენობის სიმაღლე (z) უნდა გავითვალისწინოთ. მოცემული გვაქვს ფორმულა:

$$P=qkc_n \quad (2.3)$$

სადაც q არის ქარის ზეწოლა, ვიღებთ მონაცემებს ცხრილი 2.3 დან

ქარის დატვირთვების მაჩვენებლები	რაიონები სსრკ						
	I	II	III	IV	V	VI	VII
ქარის სიჩქარე v, მ/წ	21	24	27	30	33	37	40
დინამიკური ნაკადი q	270	350	450	550	700	850	1000

ცხრილი.2.3 ქარის ზეწოლა

k-არის კოეფიციენტი რომელიც აღნიშნავს ქარის ცვლილებას სიმაღლის მიხედვით

C-აეროდინამიკული ძალა

n-გადატვირთვის კოეფიციენტი

ქარის დინამიკური ბერვა q დაკავშირებულია ქარის სიმკვრივესთან v ფორმულა:

$$q = \frac{\rho v^2}{2} \quad (2.4)$$

v-ქარის სიჩქარე მ/წ

ქარის დატვირთვა კედელზე F, რომლის ფორმულა გვაქვს:

$$F=pA \quad (2.5)$$

A-აეროდინამიკული კოეფიციენტი

ქარის ძალის საწინააღმდეგოდ, ნაკადის მრგვალ ღერძზე, მისი დიამეტრიც განისაზღვრება

ცხრილი 2.3-დან დამოკიდებული  $qkd^2$  პარამეტრზე

$$A=ld \quad (2.6)$$

l-გრძელი ღერძი

d-დიამეტრი ღერძის

ღერძის საშუალოდ მრგვალი კვეთის დიამეტრიც მნიშვნელობა d განისაზღვრება ფორმულით:

$$d_{\varphi} = \frac{d_1+d_2}{2} \quad (2.7)$$

სადაც  $d_1$  და  $d_2$  არის საწყისი და ბოლო ღერძის.

სიმაღლე მიწიდან M	10	20	40	60	100	200	350
k	1,00	1,25	1,55	1,75	2,10	2,60	3,10

ცხრილი 2.4 ღერძის დიამეტრი და შენობის სიმაღლე

### 2.3. ქარის დატვირთვების განსაზღვრის ნორმები და მეთოდები ბელორუსიაში

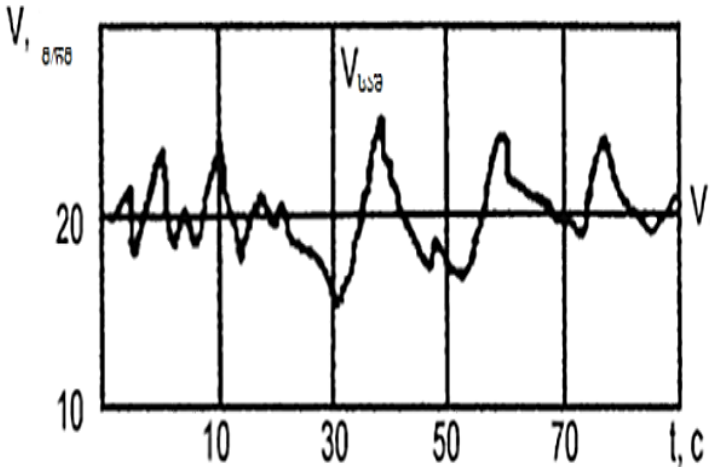
ცნობილია, რომ მაღლივი ნაგებობებისათვის ძირითად დატვირთვას წარმოადგენს ქარი. განვიხილოთ, მოკლედ, მოცემული ნაგებობების ქარის დატვირთვაზე ინჟინრული გათვლის ინჟინრული საფუძვლები

$$q = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (2.8)$$

$V$  - ქარის სიჩქარე მ/წ;

$\rho$  - ჰაერის სიმკვრივე, კგ/მ<sup>3</sup> დამოკიდებულია მის სინესტეზე, ტემპერატურაზე და ატმოსფერულ წნევაზე

მოცემულ წერტილში სიჩქარე და ქარის მიმართულება ითვლება, დროზე დამოკიდებულად. ნახაზზე მონაცემებით გამოსახულია ქარის სიჩქარის დროსთან დამოკიდებულების გრაფიკი, საიდანაც ჩანს, რომ ქარის სიჩქარე ოსცილირებს, ანუ, პულსირებს  $V_{საშ}$  საშუალო მნიშვნელობის მახლობლობაში. ყოფაცხოვრებაში ამ მოვლენას ქარის ბერვას უწოდებენ. უნდა აღინიშნოს რომ ქარის სიჩქარის რხევა საშუალო მნიშვნელობებთან ახლოს, არ იწვევს ძაბვისა და დაძაბულობის ნიშნის ცვლილებას ნაგებობების უმრავლესი ელემენტებისთვის



ნახ.2.5 მონაცემებით გამოსახულია ქარის სიჩქარის დროსთან დამოკიდებულების გრაფიკი

ქარის დატვირთვას ნორმებში  $\omega_e$  ნაგებობაზე წარმოადგენენ სტატიკური მდგენელის  $\omega_m$  სახით, რომელიც შეესაბამება ქარის საშუალო სიჩქარეს  $V_{საშ}$  და დინამიკურ დანამატის  $\omega_p$  (პულსირებული მდგენელი, რომელიც შეესაბამება ქარის სხვაობას საშუალო და ჭეშმარიტ სიჩქარეებს შორის).

$$\omega_e = \alpha_f (\omega_m + \omega_p)$$

$\alpha_f$ -საიმედობის კოეფიციენტი ქარის დატვირთვაზე,  $\approx 2.4$

$\omega_m$  ქარის დატვირთვის საშუალო ნორმატიული მნიშვნელობაა  $z$  სიმაღლეზე დედმიწის ზედაპირიდან;

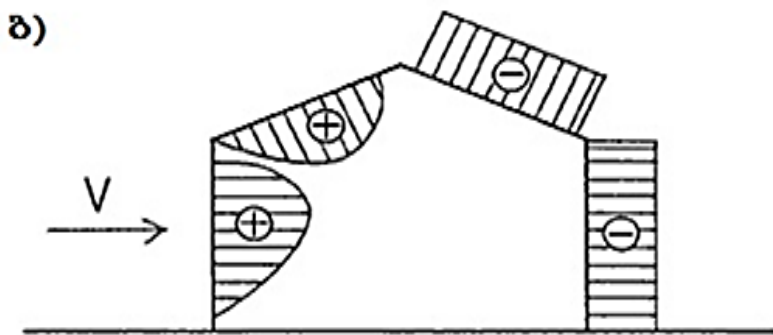
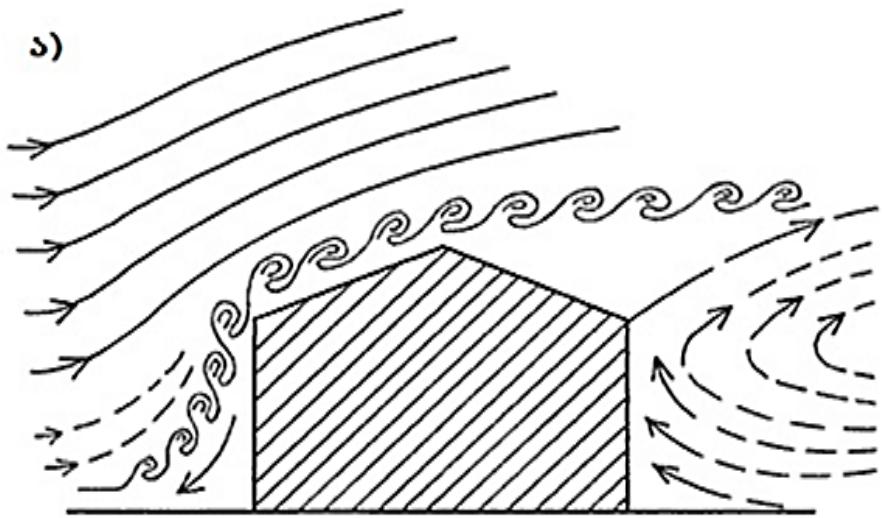
**$\omega_p$** -ქარის დატვირთვის პულსაციური მდგენელის ნორმატიული მნიშვნელობაა  $z$  სიმაღლეზე (დინამიკური დანამატი, გამოწვეული ჰაერის პულსაციით) სიდიდე

**$\omega_m$**  ნორმატივების გათვალისწინებით გამოითვლება ფორმულით;

$$\omega_m = \omega_0 * k * c \quad (2.10)$$

**$\omega_0$** -ქარის წნევის ნორმატიული მნიშვნელობაა მიიღება იმისდა მიხედვით, თუ რომელ რაიონში შენდება ნაგებობა.

C-აეროდინამიკური კოეფიციენტი-ფიზიკურ არსზე უფრო დაწვრილებით გავჩერდეთ K-კოეფიციენტი ქარის ცვლილება სიმაღლის მიხედვით თითოეული შენობა აეროდინამიკიდან გამომდინარე წარმოადგენს ცუდად გარსდენად დაბრკოლებას.



ნახ2.6(ა). გამოსახულია შენობის ქარის ნაკადით გარსდენის სურათი, სადაც ნათლად ჩანს გრიგალის წარმოქმნის ზონები, ტურბულენტური ზონა, ხოლო ნახ.2.6(ბ) -ქარის წნევის განაწილება ამ შენობის გარე ზედაპირზე. ავლნიშნოთ, რომ ქარის სიჩქარის, ჰაერის სიმკვრივიდან, შენობის ფორმის და მისი გარე კედლების ხაოიანიებიდან გამომდინარე, წნევის სურათი შეიძლება იყოს განსხვავებული.



ვინაიდან ქარის წნევის ალბათობითი მახასიათებლები დროთა განმავლობაში არ იცვლება, ქარის სიჩქარის პულსაცია, ტურბულენტური ნაკადის წერტილში, განიხილება როგორც სტაციონარული შემთხვევითი პროცესი. დგინდება რა ტურბულენტური ქარის ნაკადის კორელაციური ფუნქციები ექსპერიმენტული მონაცემების დამუშავების საფუძვლებზე, ვპოულობთ სპექტრულ სიმკვირვეს და რეაქციის საშუალო კვადრატულ მნიშვნელობას ნაგებობისათვის. ეს იძლევა საშუალებას, განისაზღვროს ნაგებობის საშუალო გადაადგილებების დინამიურობის კოეფიციენტი. შემდეგ, იგება ნორმატიული დინამიური კოეფიციენტის გრაფიკი იმ მასალის გათვალისწინებით, რისგანაცაა შესრულებულია ნაგებობა

**აპ** -ის მიხედვით ნაგებობის დინამიკურ მახასიათებლებზე დამოკიდებულებით (საკუთრივ სიხშირე, თავისუფლების ხარისხი და შინაგანი ხახუნის კოეფიციენტი), რომელზედაც მოქმედებს ქარის დატვირთვა. ქარის წნევა წარმოადგენს არსებითად დინამიურ დატვირთვას, ვინაიდან მისი მოქმედებისას შესაძლოა შეიცვალოს დატვირთვის სიდიდე, მისი მოდების წერტილი და მიმართულება. ქარის მოქმედებით ნაგებობა ირხევა, რხევების დროს ნაგებობების ელემენტებში წარმოიქმნება ინერციის ძალები, რომლებიც გავლენას ახდენენ ნაგებობის დაძაბულ-დეფორმირებულ მდგომარეობაზე. ნაგებობის საკუთრივი რხევების სიხშირისა და ქარის პულსაციების სიხშირემ, შეიძლება გამოიწვიოს რეზონანსი. ამიტომ, ნორმებში სეზონის მიხედვითაა მოყვანილია რეაქციის ძალების ზღვრული

მნიშვნელობები  $f_1$ , ნაგებობის საკუთრივ რხევების სისშირეების ქარიანი რაიონების და ნაგებობის მასალისაგან დამოკიდებულებით, როდესაც დაშვებულია ქარის დატვირთვის პულსაციური მდგენელის არ გათვალისწინება. თუ  $f_1$  იმყოფება ნაგებობების საკუთრივ სისშირის ქვედა ნაწილის სპექტრში, მაშინ ნორმები რეკომენდაციას უწევენ განხილული იქნას სამი შემთხვევა.

**შემთხვევა ა)**

$f_e < f_1$  მაშინ  $\omega_f = \omega_{m0} * \zeta * v$  ხოლო  $\zeta$ -ქარის წნევის პულსაციის კოეფიციენტი  $v$ -ქარის წნევის პულსაციის სივრცობრივი კორელაციის კოეფიციენტი. ვინაიდან ქარის დატვირთვა განისაზღვრება გარკვეული ალბათობით (შემთხვევითი ხასიათისაა), სიდიდე განისაზღვრება მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდების საფუძველზე.

**შემთხვევა ბ)**

$$f_1 < f_l \quad \omega_p = \omega_m \xi * \zeta * v \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{3f w_0}}{940 f_1}$$

წინამიურობის კოეფიციენტია ერთი თავისუფლების ხარისხის სისტემებისათვის (წყალდაწნევის კოშკი, ქარენერგეტიკული დანადგარები, რეტრანსლიატორები და სხვა ანძიანი ნაგებობები).

**შემთხვევა გ)**

$$f_1 < f_l < f_2$$

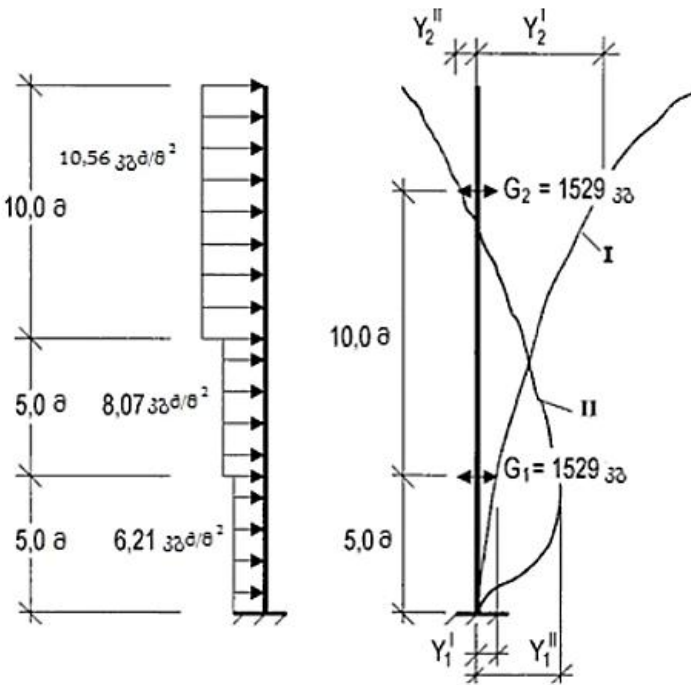
გეგმაში სიმეტრიული ნაგებობისათვის  $f_1 < f_e$

$$\omega_p = \omega_m \xi * \psi * \gamma$$

$m$ -ნაგებობის მასაა  $z$  დონეზე, რომელიც შეფარდებულია ამ ზედაპირის ფართობთან, რომელზედაც მოდებულია ქარის დატვირთვა;

$\gamma$  -პირობითი კორიხონტალური გადაადგილება  $z$ -ის დონეზე საკუთრივი რხევების პირველი ფორმით.

$\psi$ -კოეფიციენტი, რომელიც განისაზღვრება ნაგებობის დაყოფით ნაწილებათ, რომელთა კვეთებშიც, ქარის დატვირთვა მუდმივადაა



მიზნული.

მოვიყვანოთ მაგალითი მილის გოსტზე და შემოვიღოთ საწყისი მონაცემები

-მილი გოსტი 1074-76 cdH= 630 მმ და  
dB= 610 მმ

6-მილის სიმაღლე-20მ

-ქარიანი რაიონი-I, ადგილმდებარეობის ტიპი- ;  
-საკუთრივი რხევის სიხშირის ზღვრული მნიშვნელობა  $f=2,9$  ჰც ქარის დატვირთვების განსაზღვრამდე, ჯერ ვპოულობთ მილის საკუთრივი რხევების სიხშირებს  $f_1$  და  $f_2$ , ასევე საკუთრივი რხევების ფორმებს.

ა)საკუთრივი რხევების სიხშირე:  $f_1= 1,6672$  ჰც;  $f_2= 13,8748$  ჰც

ბ)მასების ჰორიზონტალური გადაადგილება საკუთრივი რხევების ფორმით შესაბამისად ქარის დატვირთვების განსაზღვრამდე, ჯერ ვპოულობთ მილის საკუთრივი რხევების სიხშირებს  $f_1$  და  $f_2$ , ასევე საკუთრივი რხევების ფორმებს.

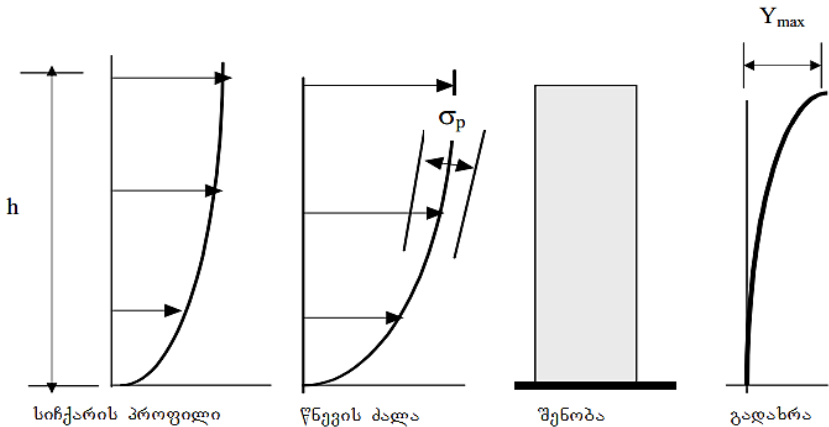
ა)საკუთრივი რხევების სიხშირე:  $f_1=1,6672$ ჰც;  
 $f_2=13,8748$ ჰც

ბ)მასების ჰორიზონტალური გადაადგილება საკუთრივი რხევების ფორმით შესაბამისად

- ფორმა I — II= 100 მმ; 2I= 667 მმ;
  - ფორმა II — III= 674 მმ; 2II= -101 მმ.
- აეროდინამიკური კოეფიციენტი C განისაზღვრება  
 $c = \kappa \times cxh = 0,91 \times 0,59 = 0,54$

## 2.4 ქარის დატვირთვების განსაზღვრის ნორმები და მეთოდები ევროპის ქვეყნებში

ევროპის ქვეყნებში განიხილება შენობა-ნაგებობებზე ქარის დატვირთვები არსებობს CEN -ს დოკუმენტი რომელშიც აღწერილია ქარის დატვირთვები, ამ დოკუმენტს ასევე მოიხსენიებენ ევროკოდით, უნდა აღინიშნოს რომ თითოეული ქვეყნებისთვის თუ რეგიონებისთვის საჭიროებს დამატებითი კვლევებს.



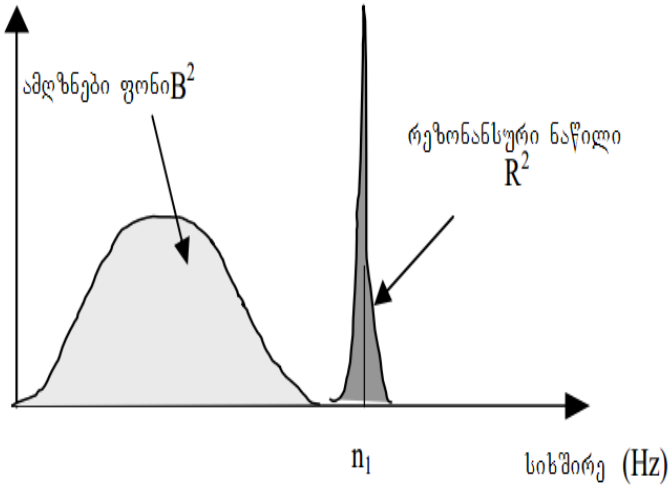
ნახ2.7 ქარის ზემოქმედება შენობაზე

დამოკიდებულია სიმაღლისა და შენობის ღიზიანზე, ქარის ძალამ შეიძლება გამოწვიოს შენობის რხევა ხოლო ტურბელენტობის დონე გვეხმარება, რომ ავლწეროთ დინამიკურად, შენობაზე ქარის ზემოქმედება.

ქარის ძალის ნაკადის შემთხვევითი მახასიათებლიდან გამომდინარე, შენობის ზემოთა ნაწილი მაქსიმალურად გადაირხევა და ვადგენთ შენობის სტანდარტულ გადახრას და პიკ ფაქტორს აქედან გამომდინარე გვაქვს მოცემულობა:

$$X_{max}(h) = x_m(h) + k_p \sigma_x(h) \quad (2.11)$$

სტანდარტული გადახრა  $\sigma_x$  მიღებულია  $B^2$  ნაწილში, ხოლო დინამიკური ნაწილი (რეზონანსური ნაწილი  $R^2$ ) ნაჩვენებია ნახაზ 2.8.-ზე.  $k_p$ -პიკ ფაქტორი რომელიც დაკავშირებულია სტანდარტულ გადახრასთან.  $B^2$ - არის ამღზნები ფონი, რომელიც გამოწვეულია ქარის ბერვის მოქმედებით და რომელიც მოქმედებს შენობა-ნაგებობაზე როგორც სტატიკური ძალა. რეზონანსური  $R^2$ -წარმოდგება ინტერაქტიური შენობის დინამიკის პარამეტრებსა და ქარის ბერვის შორის.



ნახ.2.8 სტანდარტული გადახრა და პიკ ფაქტორი

განტოლება (2.11) მოცემულია ქარის აქტივობის შესახებ, ნაჩვენებია მაქსიმალური დატვირთვისას:

$$F_w(z) = f_m(z) [1 + 2k_p I_v(z) \sqrt{B^2 + R^2}] \quad (2.12)$$

$$f_m(z) = \frac{1}{2} \rho v_m^2(z) c_f A_{ref} \quad (2.13)$$

განტოლებები (2.12) და (2.13) დაფუძნებულია ევროკოდის და შვედეთის კოდის საფუძველზე (BSV 97)

### ევროკოდი EN 1991-1-4 ქარის აქტივობა

ევროკოდის ჩანაწერებიდან, ქარის დატვირთვა შენობის ბჯენებზე ვიბრაციისას გვაქვს:

$$F_w = c_s c_d c_f q_p(z_s) A_{ref} \quad (2.14)$$

$c_s$  არის განმსაზღვრელი ფაქტორი:

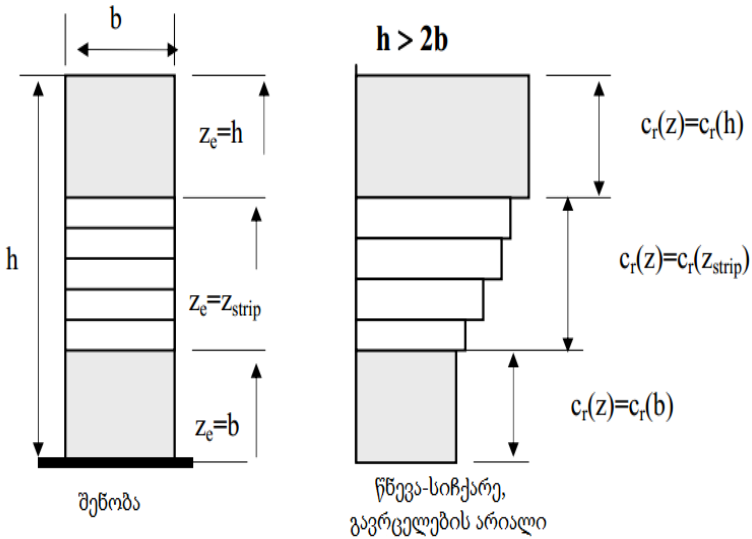
$$c_s = \frac{1+7I_p(z_s)\sqrt{B^2}}{1+7I_p(z_s)} \quad (2.15)$$

$c_d$  არის დინამიკური ფაქტორი რომელიც შედგება სტატიკური და რეზონანსური ნაწილებისგან და განისაზღვრება როგორც:

$$c_d = \frac{1+7I_p(z_s)\sqrt{B^2+R^2}}{1+7I_p(z_s)\sqrt{B^2}} \quad (2.16)$$

სტატიკური ქარის დატვირთვისთვის რეზონანსური ნაწილი  $R^2 = 0$  და განტოლება (2.17) ჩაიწერება როგორც:

$$c_d = \frac{1+7I_p(z_s)\sqrt{B^2}}{1+7I_p(z_s)\sqrt{B^2}} \quad (2.17)$$



ნახ2.9 სიმაღლის  $z_s$  გამოთვლა  $c_s c_d$ -ით



მაქსიმალური წნევის სიჩქარე  $q_p(z_\varepsilon)$  რითაც განისაზღვრება საშუალო სიჩქარე, უსწორმასწორო ზედაპირი და ტურბულენტობის ინტესივობა, მოცემულობა გვაქვს:

$$q_p(z_\varepsilon) = [1 + 7I_v(z_\varepsilon)] \frac{1}{2} p v_m^2(z_\varepsilon) = q_b c_r(z_\varepsilon)^2 [1 + 7I_v(z_\varepsilon)] \quad (2.18)$$

ტურბულენტობის ინტესივობა  $I_v$  განისაზღვრება როგორც:

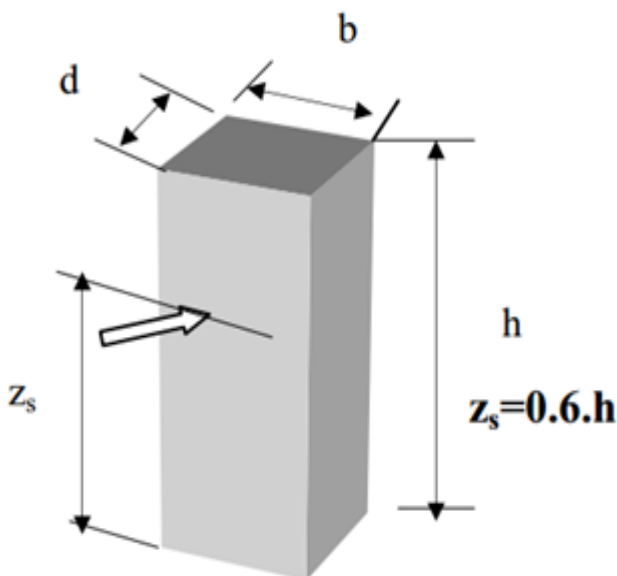
$$I_v(z_\varepsilon) = \frac{1}{\ln(z_\varepsilon/z_0)} \quad (2.19)$$

დაუცველობის ფაქტორი  $c_r$  განისაზღვრება ზედაპირის სიუხიშესა მიხედვით და განისაზღვრება:

$$c_r(z_\varepsilon) = k_r \ln\left[\frac{z_\varepsilon}{z_0}\right] \quad (2.20)$$

$q_b$  არის ძირითადი წნევის სიჩქარე საშუალო 10 წუთიანი და 10 მეტრიანი სიმაღლის მახასიათებლებით ღია ადგილზე ( $z_0 = 0.05$ ) პირობისთვის

$$q_b = \frac{1}{2} p v_b^2 \quad (2.21)$$



ნახაზი.2.10  $z_s$  სიმაღლის დამოკიდებულება  $h$  და  $b$  და წნევის სიჩქარის პარამეტრი

შეცვალთ განტოლება (2.17) განტოლება (2.21)-ით და მივიღებთ (2.22):

$$F_w = [1 + 2k_p I_v \sqrt{B^2 + R^2}] \sum_{strip} c_f q_b c_r (z_s)^2 b \quad (2.22)$$

შეედური კოდი BSV 97

BSV97 ასევე გამოვიყენებთ განტოლება (2.23)-ს, მაგრამ წინასწარ უნდა გამოვითვალოთ ცოტა ქარის დატვირთვა, გადავწეროთ განტოლება (2.23) და განვსაზღვროთ დინამიკური ფაქტორი:

$$F_w(z) = f_m(z) [1 + 2k_p I_v(z) \sqrt{B^2 + R^2}] \quad (2.23)$$

$$f_m(z) = \frac{1}{2} \rho v_m^2(z) c_f A_{ref} \quad (2.24)$$

ვიღებთ:

$$C_{\text{დათ}} = [1 + 2k_p I_v(h) \sqrt{B^2 + R^2}] \quad (2.25)$$

$$F_w(z) = C_{\text{დათ}} c_f c_r q_p(z)^2 A_{ref} \quad (2.26)$$

$k_p$  არის პიკ ფაქტორი და დაახლოებით ტოლია დატვირთვა 3-ს სტატიკური სტრუქტურაზე.

განტოლება (2.25) არავიბრაციული შენობა შეიძლება ჩაიწეროს:

$$C_{\text{დათ}} = 1 + 6I_v(h) \quad (2.27)$$

$z_0$  ნაჩვენებია რელიეფური ზედაპირის სიუხიშე და ნაჩვენებია ცხრილ2.5-ში.

	უხეში ადგილები	$k_r$	$z_0$	$Z_{\text{მინ}}^{\text{ევროკოდი}}$	$Z_{\text{მინ}}^{\text{BSV 97}}$
0	სანაპირო ადგილები	0.16	0.003	1	
1	ტბები	0.17	0.01	1	2
2	ღია	0.19	0.05	2	4
3	აშენებული ადგილები	0.22	0.3	5	8
4	ქალაქის ცენტრები	0.24	2.0	10	16

ცხრილი2.5 პარამეტრები სხვადასხვა უხეში ზედაპირის

**გამოთვლა  $B^2$  და  $R^2$**

სტატიკური ნაწილი  $B^2$  და რეზონანსული ნაწილი  $R^2$  არის აღებული BSV97-დან და მოიცავს NAD-s, ევროკოდი დანართში იმყოფება B და C

$$1. B^2 = \exp \left[ -0.05 \left( \frac{h}{h_{ref}} \right) + \left\{ 1 - \frac{b}{h} \right\} \left\{ 0.04 + 0.01 \left( \frac{h}{h_{ref}} \right) \right\} \right]$$

2. რეზონანსური ნაწილი

$$R^2 = \frac{2\pi F \varphi_b \varphi_h}{\delta_s + \delta_a}$$

3. პიკ ფაქტორი

$$k_p = \sqrt{2 \ln(600\nu)} + \frac{0.58}{\sqrt{2 \ln(600\nu)}}$$

4. ტურბულენტობის ინტენსივობა

$$I_v = \frac{1}{\ln(h/z_0)}$$

5. ქარის ენერჯია

$$F = \frac{4C}{[1+70.8(x)^2]^{5/6}}$$

$$C = \frac{L_c n_{1,x}}{v_m(h)} \quad L_c = 150m$$

6. ზომის ეფექტი (შენობის სიგანე)

$$\varphi_b = \frac{1}{1 + \left[ \frac{5.2 n_{1,x} b^2}{v_m(h)} \right]}$$

7. ზომის ეფექტი (შენობის სიმაღლე)

$$\varphi_b = \frac{1}{1 + \left[ \frac{W n_{1,x} h^2}{v_m(h)} \right]}$$

8. აეროდინამიკული ბიძგები

$$\delta_a = \frac{p c_f b v_m(h)}{n_{1,x} M_s}$$

$M_s$  - მასის ექვივალანტი

$m$  - მასა სივრცულ ერთეულზე (კგ/მ)

$\varphi(z)$  - მოდების ზომა

მაქსიმალური აჩქარება შენობის ბჯენის ვიბრაციისას პირველი წარმოებლიდან ვიღებთ:

$$\ddot{X}_{max}(z) = k_p \sigma_{\ddot{x}}(z)$$

$\sigma_{\bar{x}}(z)$ - არის სტანდარტული გადახრა ქარის აჩქარება და ჩაიწერება როგორც:

$$\sigma_{\bar{x}}(z) = (2\pi n_{1,x})^2 \sigma_x(z) \quad (2.28)$$

$\sigma_x(z)$ -არის რხევისას სტანდარტული გადახრა და ჩაიწერება როგორც:

$$\sigma_x(z)^2 = \sigma_{x,B}(z)^2 + \sigma_{x,R}(z)^2 \quad (2.29)$$

$\sigma_{x,B}(z)^2$  და  $\sigma_{x,R}(z)^2$  არიან სტატიკური და რეზონანსური ნაწილები რომელიც ნაჩვენებია ნახაზ 2.7-ზე, აჩქარების გამომწვევ მიზეზად შეიძლება მივიხნით რეზონანსური ნაწილი და სტატიკური ნაწილი რომელიც შეიძლება უგულებლყოთ გამოთვლებისას. სტანდარტული გადახრა მოძრაობისას რეზონანსულია და ჩაიწერება მე-2.23 განტოლებაში ასე:

$$\sigma_B(z) = 0.0 \quad (2.40)$$

$$\sigma_R(z) = 2I_v R x_m(z) \quad (2.41)$$

რეზონანსული ნაწილი R გვაქვს მოცემულ განტოლება (2.43)

$x_m(z)$  არის საშუალო გადახრა და მოცემული გვაქვს:

$$x_m(z) = \varphi_1(z) \gamma_1 \left[ \frac{P_1}{(2\pi n_{1,x})^2 M_2} \right] \quad (2.42)$$

$P_1$  არის განზოგადებული ძალა და განისაზღვრება როგორც:

$$P_1 = q_b b c_f \frac{\int_0^h c_r(z)^2 \varphi_1(z) dz}{\int_0^h \varphi_1(z) dz} \quad (2.43)$$

$\gamma_1$  არის კონსტანტა და განისაზღვრება:

$$\gamma_1 = \frac{\int_0^h \varphi_1(z) dz}{\int_0^h \varphi_1(z)^2 dz} \quad (2.44)$$

$\varphi_1(z)$ -პირველ წარმოებული ბრჯუნის. ქარის სიჩქარე 1 წლის  $T_a$  განმავლობაში და მოცემულობა გვაქვს:

$$v_{T_a} = 0.75 v_{50} \sqrt{\left\{1 - 0.2 \ln \left( -\ln \left( 1 - \frac{1}{T_a} \right) \right)\right\}} \quad (2.45)$$

სადაც  $T_a$  არის წლის რიცხვი, 10 წლის შემთხვევაში გვაქვს:

$$v_{T_a} = 0.75 v_{50} \quad (2.46)$$

### რეინოლდსის რიცხვი

რეინოლდსის რიცხვისა, სიჩქარის და შენობის ზომას შორის გვექნება მოცემულობა:

$$Re = \frac{v_{cr} b}{14.5 \times 10^{-6}} \quad (2.47)$$

რეინოლდსის რიცხვის მეშვეობით შეგვიძლია განვსაზღვროთ და გამოვყოთ რეგულაური სიჩქარე, პერიოდული და სხვა ცვლადი მახასიათებლები. წრიული ცილინდრული, სამი მახასიათებლები რეინოლდსის რიცხვი განისაზღვრება:

$$Re < 3 * 10^5$$

$$3 * 10^5 < 3.5 * 10^6$$

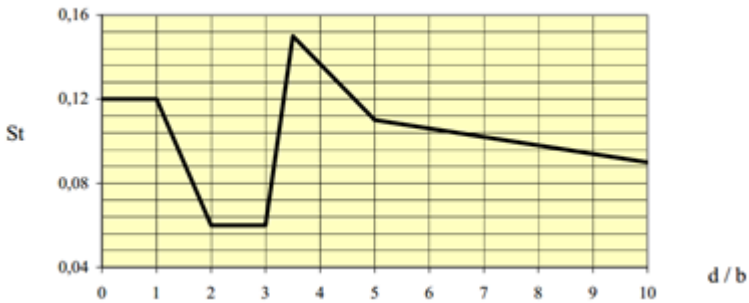
$$Re > 3.5 * 10^6$$

### სტრუხალის რიცხვი და წვევის კოეფიციენტი

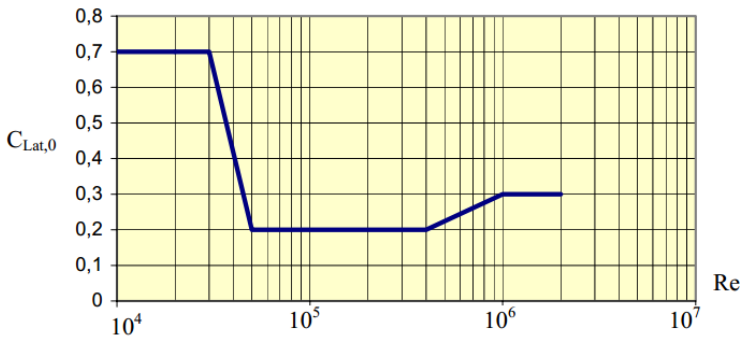
სტრუხალის რიცხვი ჩაიწერება ასე:

$$St = \frac{n_{st} b}{v_{cr}} \quad (2.48)$$

სადაც  $n_{st}$  წარმოადგენს ვორტეკსის სიხშირეს და რეზონანსი ხდება, როდესაც ფიზიკური და ვორტეკსის სიხშირეები არიან ახლოს.



ნახ.2.12. სტრუხალის რიცხვი მართკუთხედის კვეთისას



ნახ.2.12 წვევის კოეფიციენტი წრიული ცილინდრისთვის

**წვევის კოეფიციენტი და რეინოლდსის რიცხვი აეროდინამიკური სტაბილურობა:**

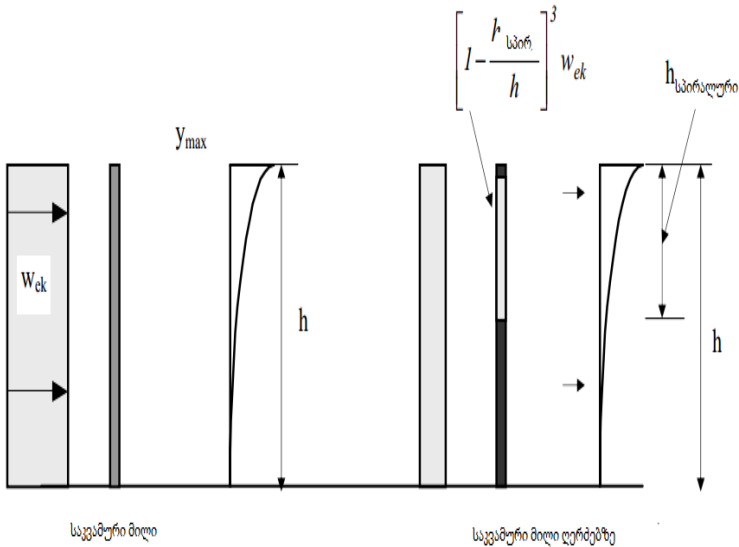
თუ მაქსიმალურად შემცირდა რხევა 0.06-მდე, და შევადარებთ საკვამური მილის აეროდინამიკურ სტაბილურობას და:

$$\frac{y_d(h)}{b} \leq 0.06 \quad (2.49)$$

მარტო მყოფი დიდი მილის რადიუსის ამპლიდა არის  $\frac{(h)y_d}{b} \geq 0.06$ , თანდათანობით ხვეული ღერძები მცირდება მისაღებ დონემდე, ქარის დატვირთვა ხდება:

$$w_{ek} = p_m(h) \left( \frac{\pi}{\delta_{\text{ფქ}}} \right) \left[ 1 - \frac{h_{\text{სპორ}}}{h} \right] \quad (2.50)$$

რამეთუ საკვამური შენობების ტერიტორიაზე, ხვეული მილი არ არის ეფექტური და არ შეამცირებს ამპლიტუდას



ნახ.2.14 დატვირთვის ჩვენება ხვეული და არახვეული ღერძების შემთხვევაში

ციკლური დატვირთვები ვორტექსის ძალების გამო არის გამოწვეული

საერთო რაოდენობა ციკლები  $N$ , ხდება  $T$  წლის პერიოდში



$$N = 365 \times 24 \times 60 \times 60 \times T \times n_1 \times P(v) \quad (c/s)$$

(2.51)

T-შენობის სიცოცხლის უნარიანობა (წლები)  
 P(v)-აღბათობა ქარის სიჩქარის ხდება დროის  
 ინტერვალით  $v_{cr}$  და  $\varepsilon v_{cr}$

P(v)-სავარაუდოთ მოცემულია წნევის განაწილება  
 და ჩაიწერება:

$$P(v) = \left[ \exp \left[ - \left\{ \frac{v_{cr}}{v(z)} \right\}^2 \right] \right] - \exp \left[ - \left\{ \frac{\varepsilon v_{cr}}{v(z)} \right\}^2 \right] \quad (2.52)$$

კოეფიციენტი  $\varepsilon$  არის აღებული 2.25,  
 მინიმალური ინტერვალი  $v_{cr}$  და  $\varepsilon v_{cr}$ -ს შორის  
 არის 2მ/წ.

v(z) გვაჩვენებს წლების განმავლობაში საშუალო  
 ქარის სიჩქარეს, Z სიმაღლეზე და მოცემული  
 სიუხეშეთი მიღებულია განტოლება (2.42)

$$v(z) = 5.5 c_r(z) \quad (2.53)$$

ევროკოდისა შეგვიძლია გამოვეყოთ ორი  
 მნიშვნელოვანი ფაქტორი.

1. განიხილება ნაკადების დატვირთვისას
2. განიხილება ვორტექსის შემცველი ძალა.

მომცემული ორი მეთოდინდან ქარის  
 ნაკადის დატვირთვისას ევროკოდები, რომელიც  
 არ გვაძლევს ზუსტ და საკმარისს ინფორმაციას  
 და ითხოვს დამატებით ინფორმაციას სხვადასხვა  
 ქვეყნებისა თუ რეგიონებისთვის. პრაქტიკულად  
 პიკური სიდიდეებისთვის აღმოჩნდა  
 რეკომენდირებული ნაკადის დატვირთვის  
 განტოლები. აქედან გამომდინარე BSV97 უნდა  
 იქნას გამოყენებული ნაკადების დატვირთვისას.

ევროკოდი მოიცავს ასევე ვორტექსის ძალას, და გაყოფილია 2 სხვადასხვა ნაწილად. ამ ორი მეთოდის გამოყენებამ აჩვენა აქტუალურ რკინის მილის დიზაინზე, რომელიც სტრუქტურის შეუფასებლად შეუძლია დეფორმაცია მიიღოს.

## 2.5 ქარის აეროდინამიკური მოდელირება COMSOL Multiphysics –ის ბაზაზე

COMSOL Multiphysics კომპანია დაარსდა 1986 წელს შვედეთში, კომპიუტერის ევოლუციასთან ერთად იხვეწებოდა არც თუ ისე, ცნობილი პროგრამული პაკეტი, რომელიც თავიდან მოგვევლინა როგორც MATLAB-ის დამხმარე ხელსაწყო. დღეს უკვე, ორგანოზომილებიანი და სამგანზომილებიანი საინჟინრო პროექტების შექმნა შეიძლება. 2010 წლიდან ის აქტიურად გამოიყენება სხვადასხვა ქვეყნებში. ნელნელა ინერგება **COMSOL Multiphysics** ევროპის ქვეყნებში და იხსნება კომპანიის ფილიალები.

COMSOL Multiphysics არის პროგრამული პაკეტი რომელიც უზრუნველყოფს, მათამეტიკური და ფიზიკური მოდელების მარტივ მოდელრებას სხვადასხვა განზომილებაში, პროგრამულ პაკეტში ჩადებულა ყველა ის მათემატიკური ფორმულა, რომელიც დღეს-დღეისობით აქტულაურია სხვადასხვა სამეცნიერო კვლევებისათვის. პროგრამა განკუთვნილია ფიზიკოსებისთვის, ინჟინრებისთვის, მათემატიკოსებისთვის.

*COMSOL Multiphysics*-ის პროგრამაში თავიდან შევადგინეთ გარსმდენი ქარის დინამიკის პროექტი.

გავთვალეთ ქარის ნაკადის დინებები, ტურბულენტური ზონები და შევადგინეთ მისი ორ და სამგანზომილებიანი მოდელები

ქარის სიჩქარე - 4მ/წმ;

წნევა - 102.02 კპს.

შევადგინეთ ნახ. 2 - ზე მოცემული სახლის გარსდენის მოდელირება ორ განზომილებაში.

ვხედავთ, რომ სახლის გარშემო წამროიქმნა ნაკადის ტურბულენტური ზონა, გრაფიკი შექმნილია 2D განზომილებაში

რეინოლდსის რიცხვი  $Re$  ჰიდროდინამიკაში არის უგანზომილებო რიცხვი, რომელიც ახასიათებს დინების ხასიათს, რეინოლდსის რიცხვი ხშირად ჩნდება ჰიდროდინამიკური პრობლემების განზომილებითი ანალიზის დროს. რეინოლდსის რიცხვი, ასევე, გამოიყენება დინების სხვადასხვა რეჟიმების დახასიათებისას, როგორცაა ტურბულენტური და ლამინარული რეჟიმები. ლამინარული დინებები გვხვდება შედარებით დაბალი რეინოლდსის რიცხვების დროს, როდესაც სიბლანტის ძალების გავლენა ძლიერია, ხოლო ტურბულენტური ნაკადები შეინიშნება მაღალი რეინოლდსის რიცხვების დროს, როდესაც სითხის მოძრაობა ძირითადად განისაზღვრება ინერციული ძალების მოქმედებით.

- ინერციის ძალა ( $\rho u L$ )
- სიბლანტის კოეფიციენტი ( $\mu$ )

თანაფარდობა არის

- დინამიკური ძალასთან ( $\rho u^2$ )
- წნევაზე ( $\mu u / L$ )

და შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად

$$\begin{aligned}
 Re &= (\rho u^2) / (\mu u / L) \\
 &= \rho u L / \mu
 \end{aligned}
 \tag{2.54}$$

$$= u L / \nu$$

სადაც:

$Re$  = რეინოლდსის რიცხვი (უგანზომილებო რიცხვი)

$\rho$  = სითხის სიმკვრივე (კგ/მ<sup>3</sup>)

$u$  = სითხის საშუალო სიქარე (მ/წ)

$\mu$  = დინამიკური სიბლანტე (ნწ/მ<sup>2</sup>)

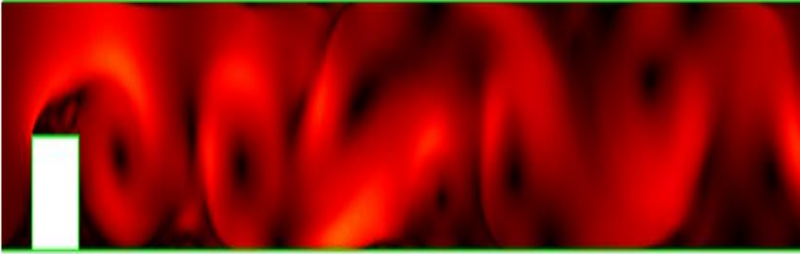
$L$  = სივრდის მახასიათებელი ზომა (მ)

$\nu$  = კინემატიკური სიბლანტე (მ<sup>2</sup>/წ)

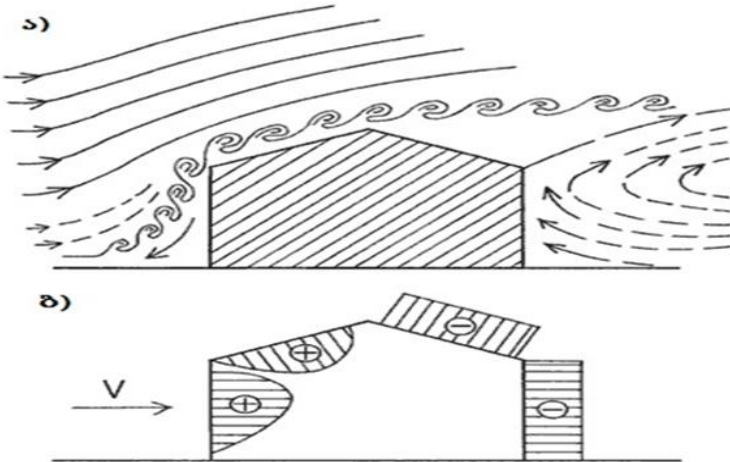
რეინოლდის რიცხვით, შეიძლება განისაზღვროს დინების ხასიათი

- ლამინარული, როცა  $Re < 2300$

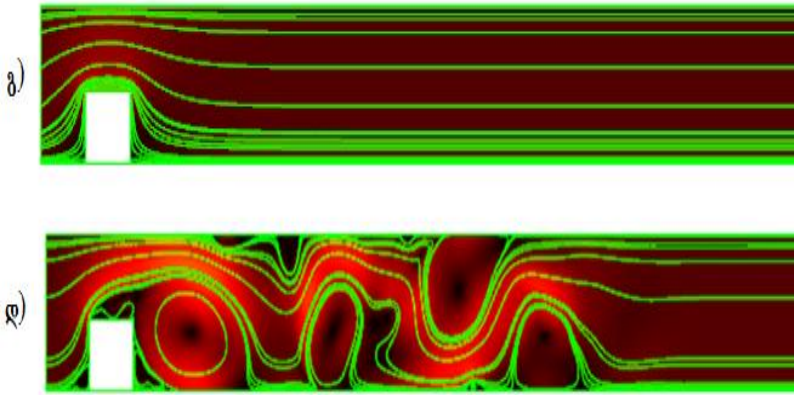
- ტრანზიტული, როცა  $2300 < Re < 4000$
- ტურბულენტი, როცა  $Re > 4000$



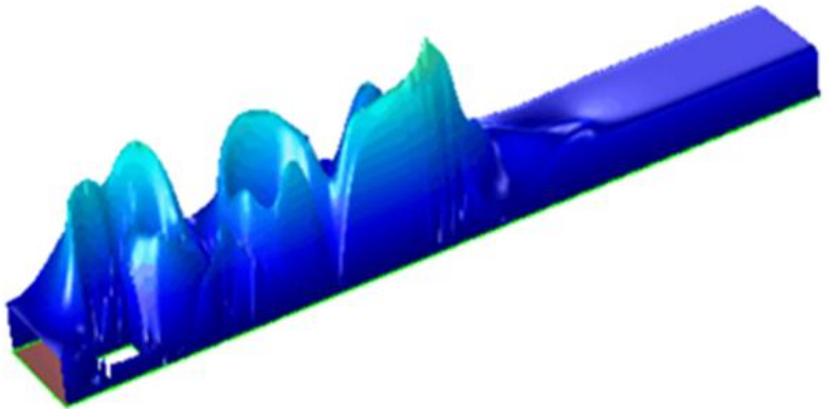
ნახ.2.14 ქარის ნაკადის მოდელირება COMSOL Multiphysics -სის გარემოში



ნახ.2.15. შენობის გარსდენის სქემა

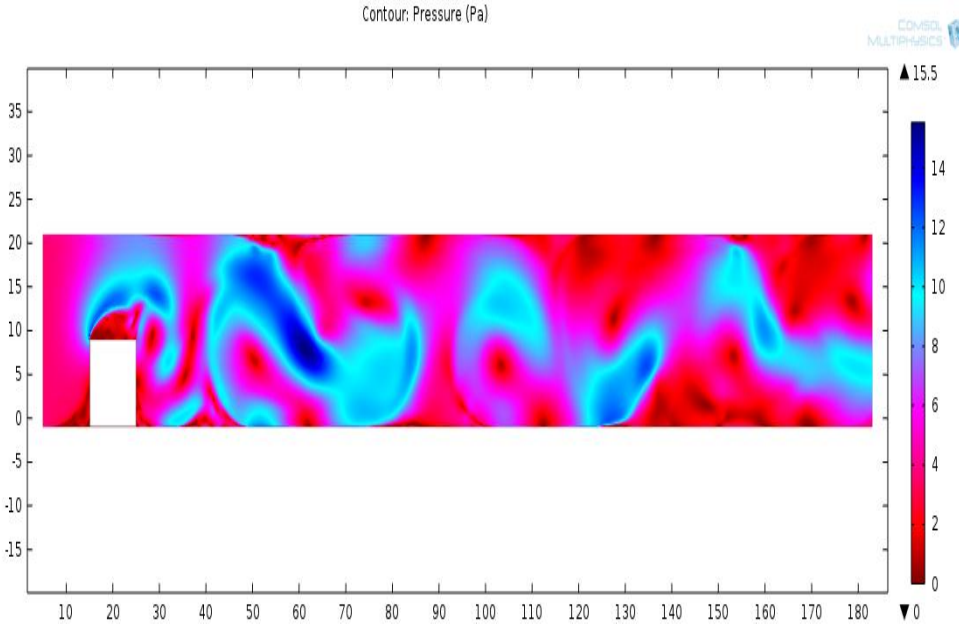


ნახ.2.16. ქარის ნაკადის დენების წირების ანგარიში COMSOL Multiphysics –სის გარემოში



ნახ.2.17. მოცემულია სამგანზომილებაში ქარის ტურბულენტური დინება

ჰიდროლოგიური მონაცემების დაყრდნობით  
 ავევთ მოდელი სადაც:  
 ქარის სიჩქარე-2.6მ/წ  
 წნევა-104 კპს

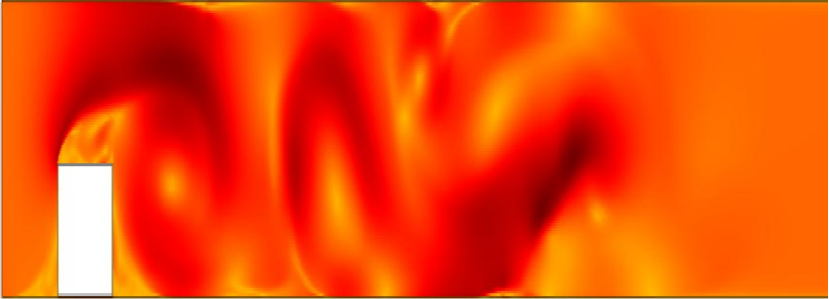


ნახ.2.18 წნევის გრაფიკი მოცემულია

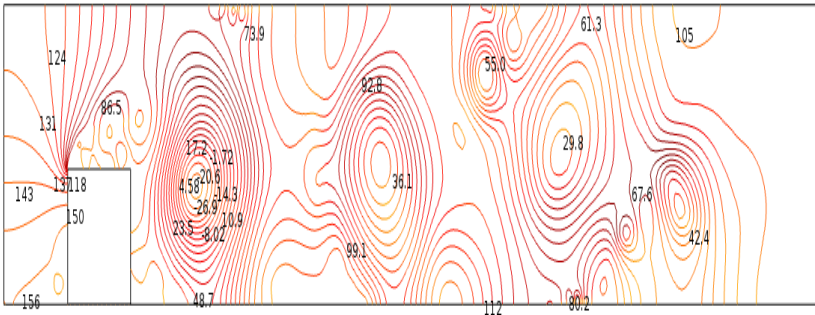
გრაფიკზე მოცემულია წნევის ზემოქმედება  
 შენობა ნაგებობაზე (ნახ.2.20) წნევა არის 102.02  
 კპს, და გრაფიკზე კი ნაჩვენებია შენობაზე  
 წეზოლის შედეგად როგორ ხდება ზემოქმედება  
 180კილომეტრის სიგრძე (თუ ხელმშეშლელი  
 პირობები არაა)



ნახ.2.19 და ნახ.2.20 -ზე არის წარმოდგენილი წნევის ზემოქმედება და მნიშვნელობები თუ როგორ მოქმედებს



ნახ.2.19 წნევის ზემომქედება შენობა ნაგებობაზე



ნახ 2.20 აღნიშნულია წნევის ფაქტორები სხვადასხვა წერტილებში თუ როგორც იცვლება წნევა

როგორც ვხედავთ კედლის მიდამოებში წნევა მოქმედებს 132.18კპს და 150 კპს-ით, ხოლო რეინოლდსის რიცხვი არის:

$$\rho = 1 \text{ (კგ/მ}^3\text{)}$$

$$u = 2.6111 \text{ (მ/წ)}$$

$$\mu = 1 \text{ (მწ/მ}^2\text{)}$$

$$L = 12 \text{ მ}$$

$$v = 1 \text{ (მ}^2\text{/წ)}$$

$$Re = 43$$

როგორც ვხედავთ ასეთი დინება არის ლამინარული, შენობა ნაგებობაზე ურთერთქმედებისას, წარმოიქმნება ტურბულენტური ზონები

შემდეგ რიალურ მონაცემებზე დაყრდნობით და რიალური მაშტაბის სახლის პირობებში შევისწავლეთ ქარის დინება, რომლის მონაცემებია:

სიმაღლე-5მ;  
 სიგრძე-12მ;  
 სიგანე-11მმ.

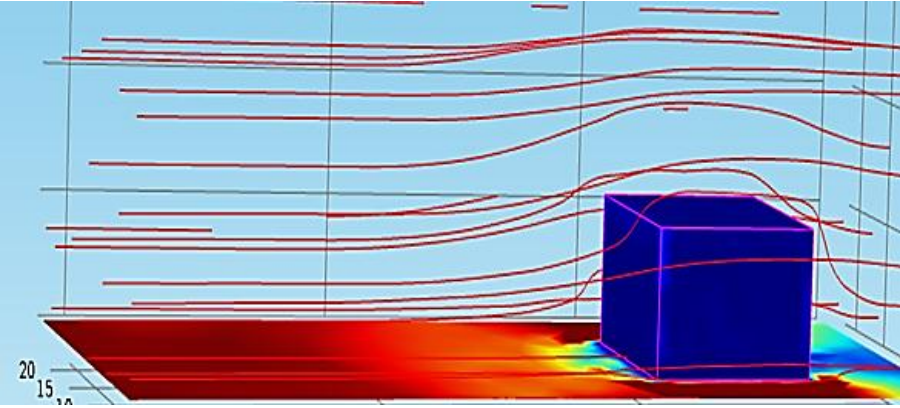
სახლი არის ბანური გადახურვის ამიტომაც 3D განზომილებაში აღწერილი მაქსიმალური სიზუსტით, სახლის წინა მხარეს 15 მეტრის მანძილზე ხელმშეშლელი პირობები არ არის, ქარის სიჩქარე და წნევა აღებულია ჰიდროლოგიური მონაცემებზე დაყრდნობით.

მოდელის აგებისას გათვალისწინებულია ზემოქმედების პარამეტრები ქარი, წნევა და ტემპერატურა:

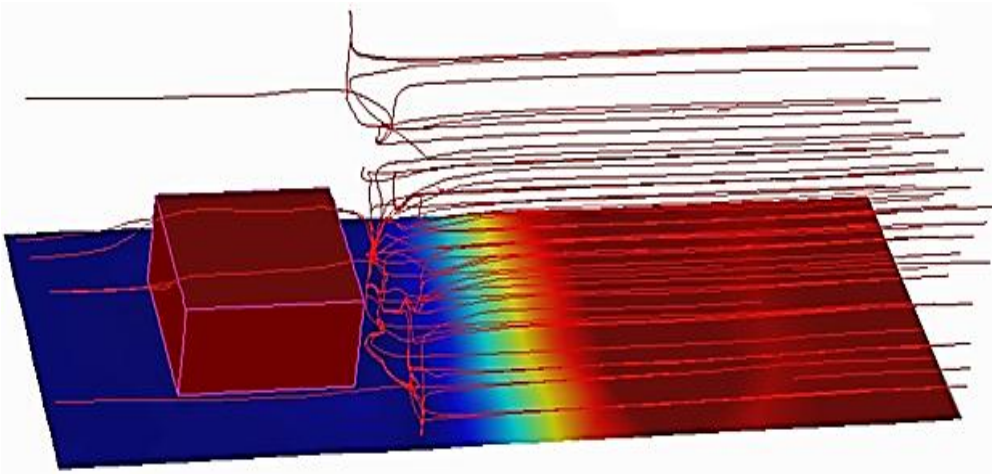
$$U_0 = 15 \text{ მ/წ}$$

$$P = 106.02 \text{ კპს}$$

$$T = 20^\circ C$$



ნახ.2.21 შენობის სადაც ხდება ქარის გარსდენის მოდელირება



ნახ.2.22 ნახვევებია ქარის ნაკადის ძვრა

ქარის ნაკადი დაძვრა და ურთერთქმედება შენობასთან და მიწის ზედაპირთან

**Fluid Properties** (სიბლანტის პარამეტრი) მოცემულია განტოლება და სხვა პარამეტრები რომელიც დამოკიდებულია დროზე

$$\begin{aligned}
 & p \frac{du}{dt} + p(u * \nabla)u = \\
 & = \nabla * \left[ -pl + (u + u_T)(\nabla u + (\nabla u)^T) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2}{3}(u + u_T)(\nabla * u)l - \frac{2}{3}pkl \right] + F \\
 & \frac{dp}{dt} + \nabla * (pu) = 0 \tag{2.55}
 \end{aligned}$$

$$p \frac{dk}{dt} + p(u * \nabla)k = \nabla * \left[ \left( u + \frac{u_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + p_k - p\varepsilon$$

$$\begin{aligned}
 & p \frac{d\varepsilon}{dt} + p(u * \nabla)\varepsilon = \nabla * \left[ \left( u + \frac{u_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + C_{c1} \frac{\varepsilon}{k} p_k - \\
 & C_{c2} \frac{\varepsilon^2}{k},
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon = ep$$

აქვე არის **Wall**-კედლის ფუქციაც რომელიც განსაზღვრავს ძირითად ზეწოლას კედელზე და ჩაიწერება ფორმულით

$$\begin{aligned}
 & u * n = 0 \\
 & \left[ (u + u_T)(\nabla u + (\nabla u)^T) - \frac{2}{3}(u + u_T)(\nabla * u)l - \frac{2}{3}pkl \right] n \\
 & = -p \frac{U_\tau}{\delta_w^+} U_{tang} \\
 & U_{tang} = u * (u * n)n \\
 & \nabla k * n = 0 \tag{2.56}
 \end{aligned}$$

$$\epsilon = p \frac{C_u k^2}{K \delta_w^+ u}$$

**Inlet**-ქარის საიდანაც უბერავს ანუ ე.წ. დამბერავი და მისი ფორმულები და პარამეტრები,

$$\underline{\mathbf{u}} = -U_0 \mathbf{n}$$

$$k = \frac{3}{2} (U_0 / L_T)^2, \quad \epsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{L_T}$$

(2.58)

რომელიც დამოკიდებულია დროზე

ტურბულენტური ინტენსივობა და სიგრძე  
ტურბულენტობის ინტენსივობა

$$I_T = 0.05$$

ტურბულენტობის დამახასიათებელი სიგრძე

$$L_T = 0.01 \text{ მ}$$

**Outlet**-ბერვა ანუ საითკენაც უბერავს და მისი განტოლება

ხოლო წნევის განტოლება რომელიც რომელიც არ წარმოადგენს დაძაბულობას გვექნება შემდეგი ფორმულა

$$\underline{\mathbf{p}} = p_0, \quad \left[ (\mu + \mu_T) (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) - \frac{2}{3} (\mu + \mu_T) (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} - \frac{2}{3} \rho k \mathbf{I} \right] \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$$\nabla k \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \nabla \epsilon \cdot \mathbf{n} = 0$$

(2.59)

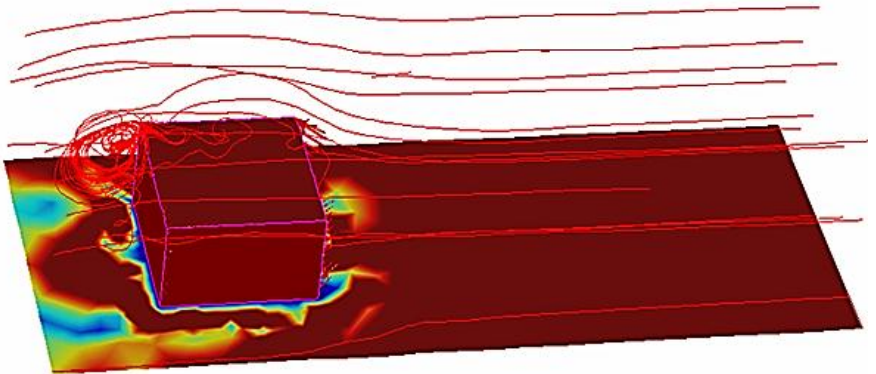
ხოლო თუ გვსურს ჩვენს შემთხვევაში წნევის განსაზღვრაც იქნება შემდეგი

$$\begin{aligned} \underline{\underline{p}} &= p_0 \\ \nabla k \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \nabla \epsilon \cdot \mathbf{n} = 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

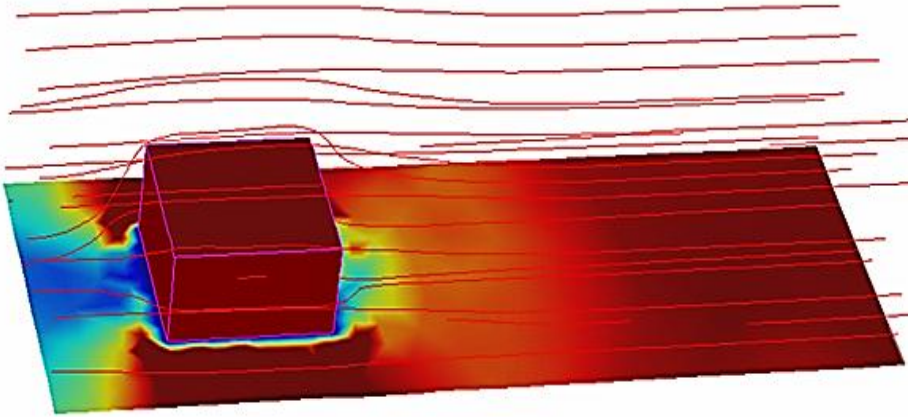
წნევა  $P=106.02$  კპა  
სასაზღვრო პირობები და სიმეტრიულობა

$$\begin{aligned} \underline{\underline{u}} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \mathbf{K} - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} &= 0, \quad \mathbf{K} = \left[ (\mu + \mu_T)(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) - \frac{2}{3} \rho k \mathbf{I} \right] \mathbf{n} \\ \nabla k \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \nabla \epsilon \cdot \mathbf{n} = 0 \end{aligned} \quad (2.61)$$

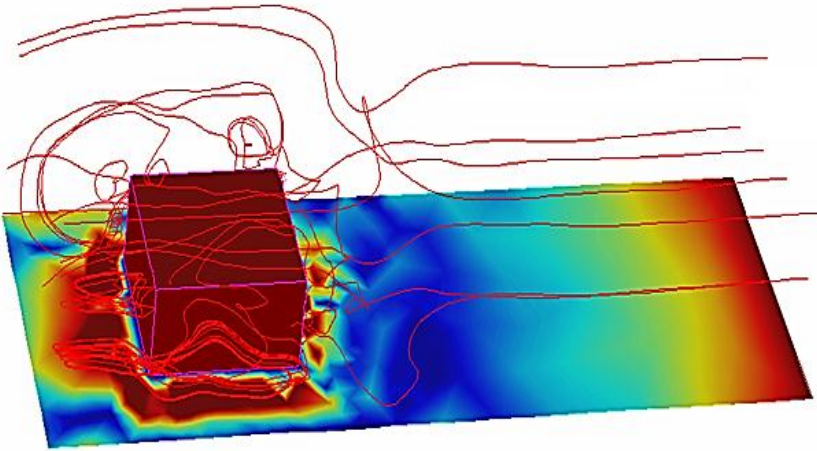
უნდა აღინიშნოს რომ დათვლისას, ანიმაციის მოდელის დროის ინტერვალი 30 წამია, კომპიუტერი ითვლიდა 0.01წმ ინტერვალით, და მაქსიმალური სიზუსტით, თავიდან შენობის გარსდენა ხდება ბოლოს კი ტურბულენტობა წარმოიქმნება.



ნახ.2.23 წარმოქმნება ტურბულენტობა

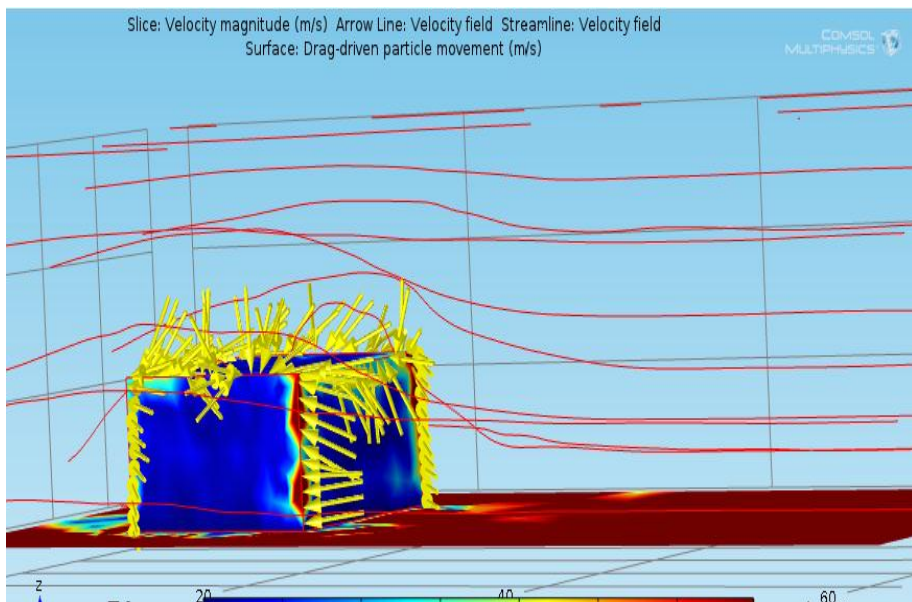


ნახ.2.24 სახლის ქარის ნაკადით გარსდენა



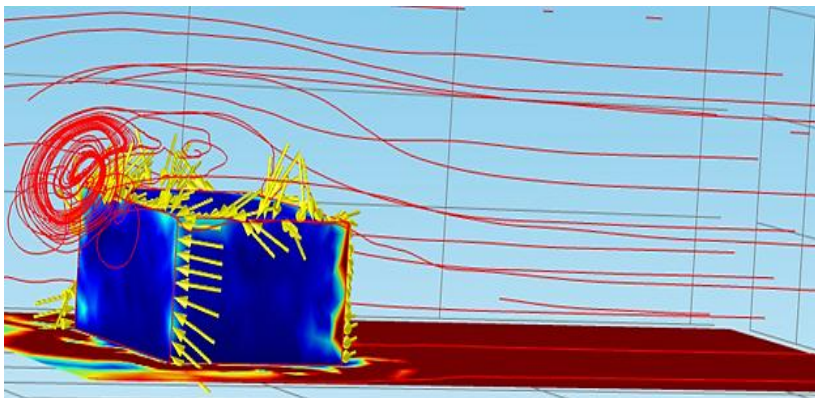
ნახ.2.25 სახლის გარშემო ხდება ტურბულენტური ზონების წარმოქმნა

ისრებით აღნიშნულია ის ზედაპირი სადაც ხდება ზეწოლა შენობა ნეგებობაზე, რომელიც მოცემულია ნახ.2.25-ზე

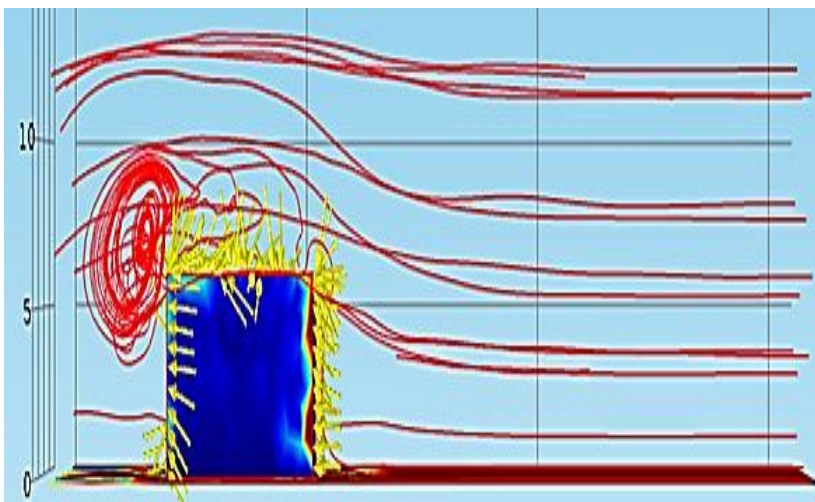


ნახ.2.26 შენობაზე ზემოქმედება აღნიშნულია ისრებით





ნახ.2.27 შენობის უკან წარმოიქმნება ტურბულენტობა



ნახ.2.28 გვერდითა ხედიდან წარმოდგენილი ზეწოლა და ტურბულენტობა

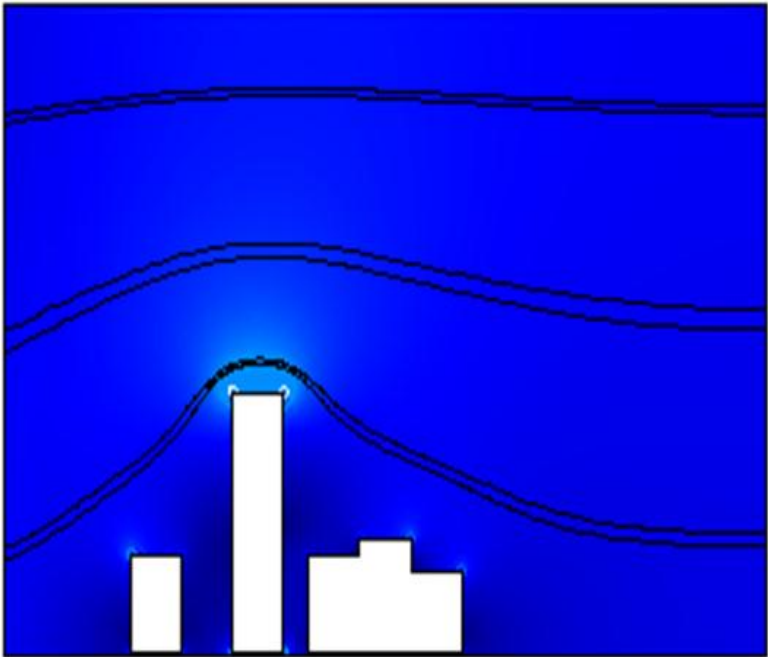
$$\rho = 2000 \text{ (კგ/მ}^3 \text{)}$$

$$u = 3 \text{ (მ/წ)}$$

$$\mu = 100 \text{ (ნწ/წ)}$$

$$L = 11 \text{ (მ)}$$

$$Re = 660$$



ნახ.2.29 მოცემულია ქარის დინებები შენობა ნაგებობის გარშემო

სადაც ხაზები აღწერს ქარის დენის წირებს, ვხედავთ რომ  $2\text{მ/წ}$  სიჩქარისთვის არ

წარმორქნება დაძაბულობას კომპლექსური  
შენიშვნებისთვის.

პარამეტრების აგებისას გამოვიყენეთ ნავია-  
სტოქსის განტოლება, გამოვიყენებუი იქნა  
შემდეგი პარამეტრები:

**Fluid Properties**

**Wall**

**Initial Values**

**Inlet**

**Outlet**

განვიხილოთ ცალ-ცალკე თითოეული  
კომპონენტის მნიშვნელობა

**Fluid Properties** (სიბლანტის პარამეტრი)

განტოლება:

$$p \frac{du}{dt} + p(u * \nabla)u = \nabla * \left[ -pl + u(\nabla u + (\nabla u)^T) - \frac{2}{3}u(\nabla * u)l \right] + F$$

(2.62)

$$\frac{dp}{dt} + \nabla * (pu) = 0$$

ხოლო  $p$  ( წნევა კგ/მ<sup>2</sup> -ზე) და  $\mu$   
(სიბლანტის კოეფიციენტი)

$\mu=100$ კპა

$p=1$  კგ/მ<sup>2</sup>

**Wall**-კედლის ფუქცია რომელიც  
ცალკეულად მოიცავას **Inlet** და **Outlet**  
კომპონენტებს, უნდა აღინიშნოს რომ კედელი  
გლუვია არა გლუვია და ა.შ მისი ფორმულაც

იცვლება მაგალითად ჩვენს შემთხვევაში კედელი უხეშია ამიტომაც და არეკლვა არ ხდება

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

**Initial Values**–საწყისი სიდიდეები სადაც მოცემულია **Fluid Properties** (სიბლანტის პარამეტრები)

**Inlet**-შემშვები, მოდელის აგებისას ენიშვით პარამეტრებს საიდან ხდება ქარის დაბერვა რა სიჩქარით და რა წნევით ხდება შენობა ნაგებობაზე.

**Wall** ფუნქცია ანუ კედლის ფუნქცია, ითვალისწინებს იმ მხარეს სადაც ხდება შენობა ნაგებობაზე ძირითადი ზეწოლა.

ხოლო განტოლება:

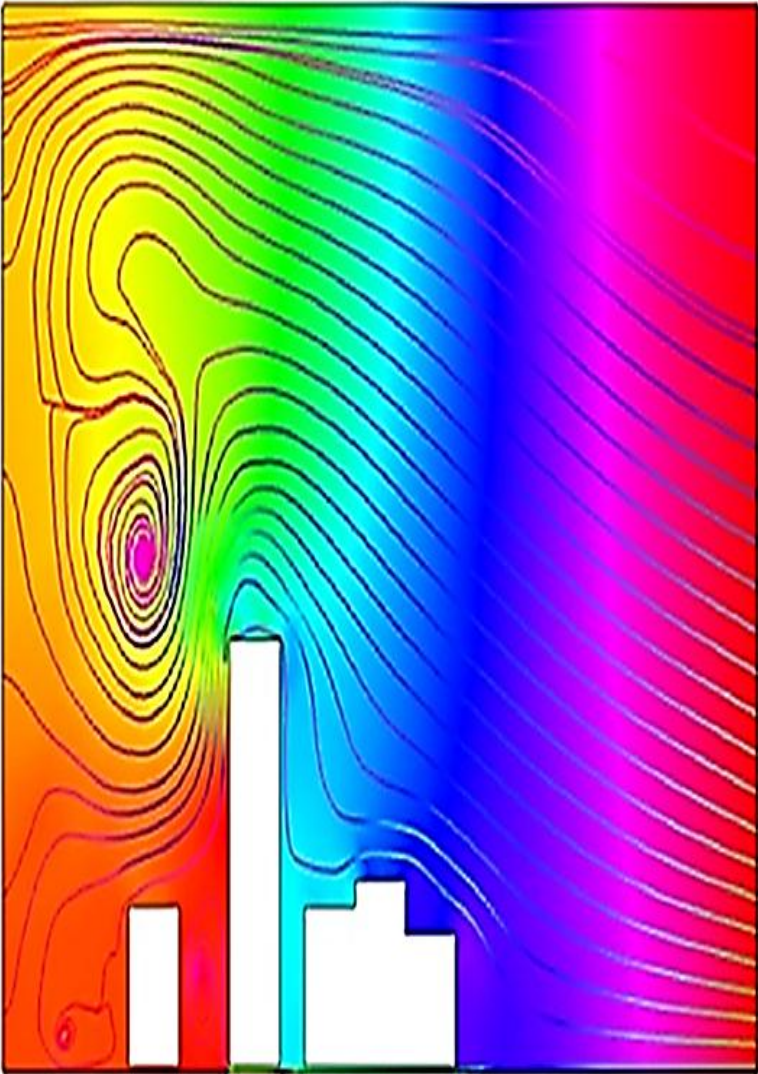
$$\mathbf{u} = U_0 \mathbf{n} \tag{2.63}$$

სადაც  $U_0 = 2.6$  მ/წმ

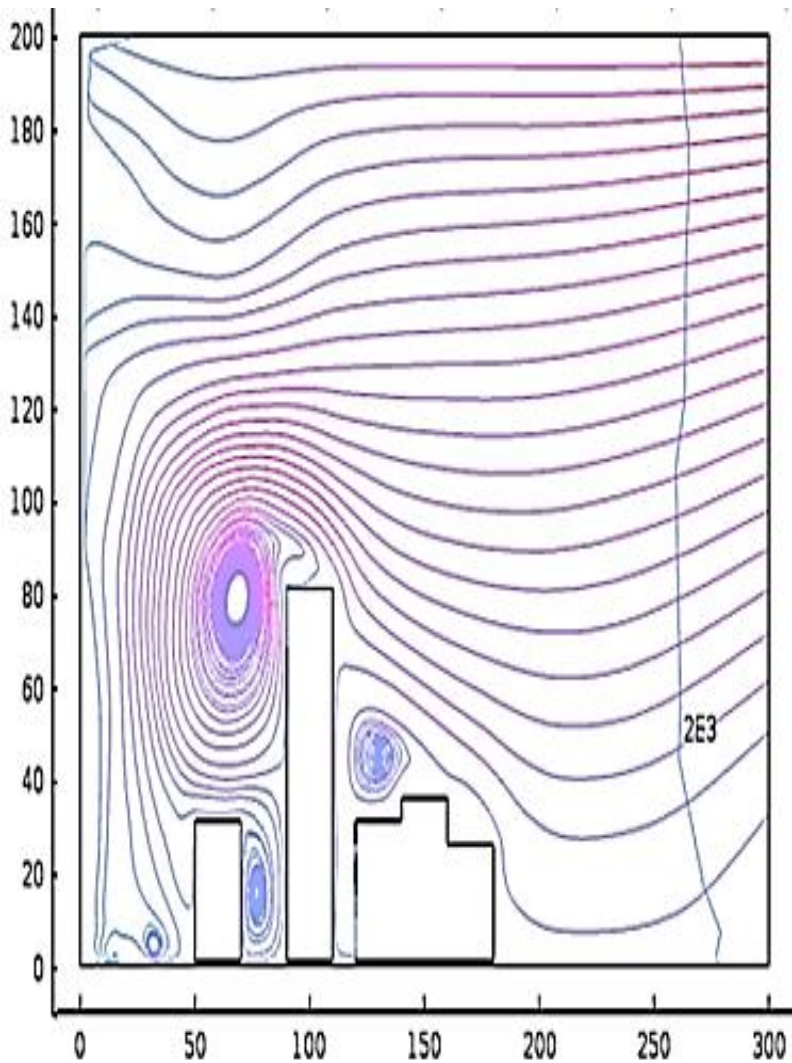
2.6 მ/წმ –ზე წარმოიქმნება ტურბულენტობა.

**Outlet** -გამომავალი, საითკენაც გამოედინება ქარის ნაკადი ფორმულა წნევის და ზეწოლის გვექნება:

$$\underline{\underline{p}} = p_0, \left[ \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) - \frac{2}{3} \mu(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right] \mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{2.64}$$

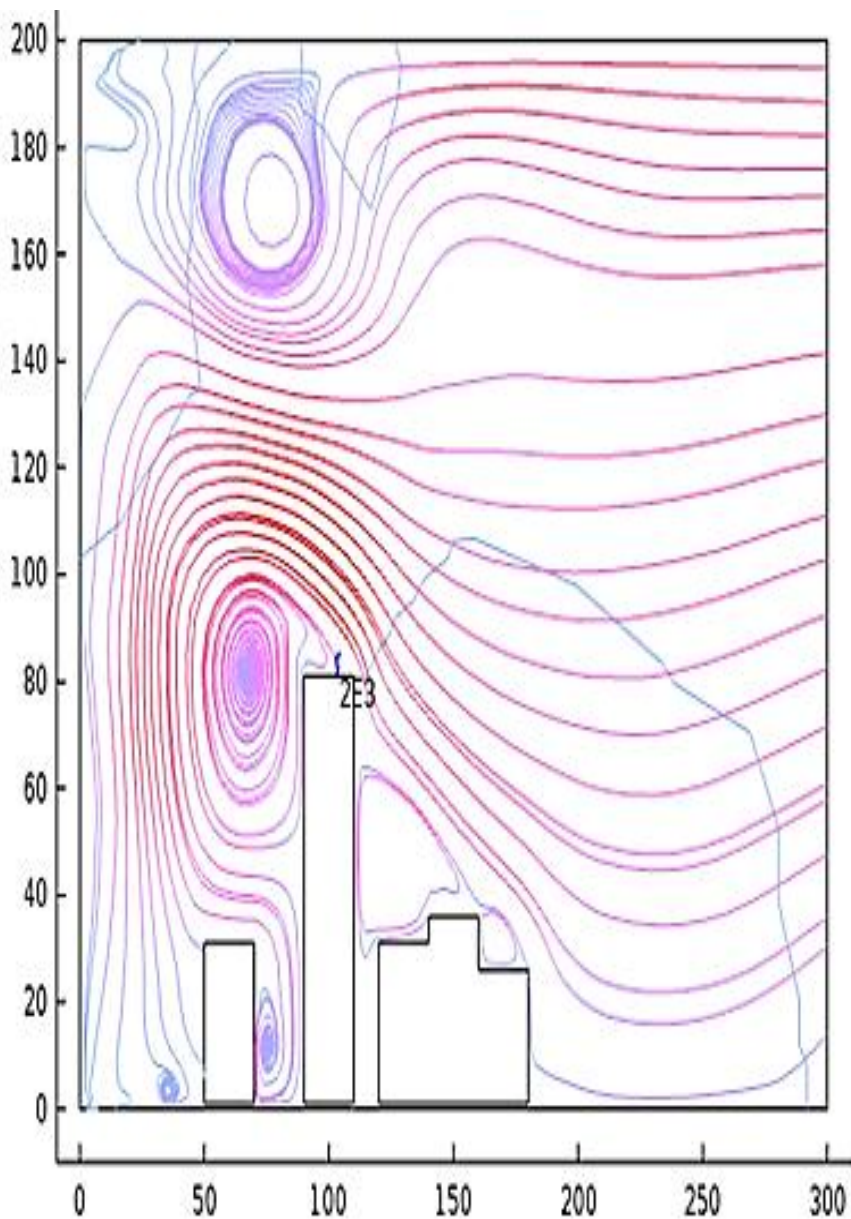


ნახ.2.30 მოცემულია წნევის ზემოქმედება შენობა ნაგებობებზე

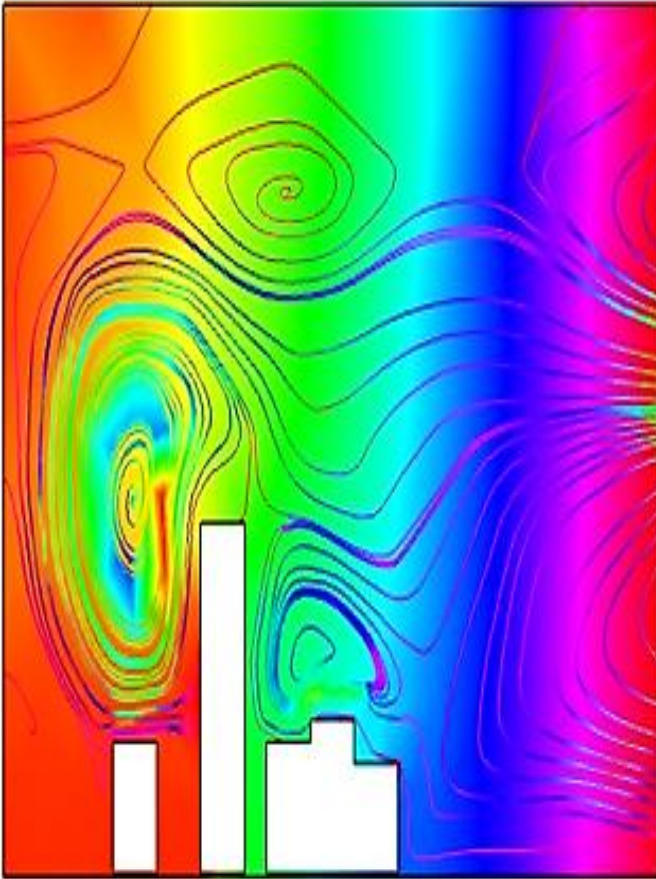


ნახ2.31 როგორც ვხედავთ შენობის მაქსიმალური სიმაღლე 80 მეტრია





ნახ.2.32 ქარის დინებისა და წნევის ზემოქმედება  
შენობა-ნაგებობაზე



ნახ2.33 ქარის სიქარე 3მ/წ წნევა 108კპს  
 $L = 20$  (მ)  
 $v = 1$  (მ/წ)  $Re = 60$

$\rho = 1$  (კგ/მ<sup>3</sup>)  
 $u = 3$  (მ/წ)  
 $\mu = 1$  (მწ/მ<sup>2</sup>)



## მონოგრაფიაში აგებული იქნა:

1. აგებული იქნა ქარის ორგანზომილებიანი და სამგანზომილებიანი მათემატიკური მოდელები;
2. შემუშავებული იქნა რეაჩოვ-ობგადის RO - გეომეტრიული კოდირების მეთოდის გამოყენების ალგორითმი, რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის ნაგებობათა საზღვრის მოდელირებისათვის;
2. ქარის ნაკადის ნაგებობებზე მიკვრის პირობების გასათვალისწინებლად RO - ფუნქციებზე დაყრდნობით, აგებული იქნა ფუნქციათა კონის განტოლებები, რომლებიც ავტომატურად აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს;
4. ქარის ნაკადის დინამიკური მოდელისათვის, აგებულ იქნა ლიონს-ტემამის სუსტი ფორმულირება და კუპრადე-ბრებობას შებრუნებული ვარიაციული ფორმულირების ამოცანები;
5. შემუშავებული იქნა შესაბამისი ამოხსნის ალგორითმი და პროგრამა MathCAD გარემოში;
6. გათვლილი იქნა მართკუთხედის ფორმის ნაგებობის გარსდენა სასრულ-სხვაობათა მეთოდით და ვარიაციული მეთოდით. განსაზღვრული იქნა შესაბამისი აეროდინამიკური პარამეტრები და წინაღობის კოეფიციენტები რეინოლდსის რიცხვის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის;
7. გათვლილი იქნა მაღლივი მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ნაგებობის გარსდენის ამოცანა. განსაზღვრული იქნა შესაბამისი

აეროდინამიკური კოეფიციენტები ქარის სიჩქარის  
სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის;

8.გათვლილი იქნა მაღლივი საკვამურის  
გარსდენის ამოცანა და განსაზღვრული იქნა  
გარსდენის შესაბამისი განმსაზღვრელი  
პარამეტრები;

9.შესწავლილი იქნა ნაგებობათა კომპლექსების  
გარსდენის ამოცანები;

10.დაზუსტებული იქნა ქარის დატვირთვებზე  
ნაგებობათა გათვლის ნახევრადემპირიული  
ფორმულები;

11.გათვლებმა აჩვენა, რომ ნორმატიული,  
ნახევრადემპირიული ფორმულები ნაგებობათა  
კომპლექსების შემთხვევაში ცუდად  
ითვალისწინებენ ბაფტინგის პრობლემას და  
საჭიროებენ შემდგომ დაზუსტებას.

## გამოყენებული ლიტერატურა

1. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств, пер. с англ., Мир, Москва, 1970
2. Halmos R. Lecturs on Boolean algebras, Prinston, 1963
2. Тарский А. Некоторые проблемы и результаты, связанные с основаниями теории множеств, сб. «Математическая логика и её применения», пер. с англ., Мир, Москва, 1965
4. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем, пер. с англ., Москва, 1983
5. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику, Наука, Москва, 1986
6. Timothy J. Ross. Fuzzy Logic with Engineering Applications, [McGraw-Hill](#), Inc., New York. 1995.
7. Heyting A. Intuitionism An introduction, Amsterdam, 1956
8. Kantor G. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, J.Reine Angew. Math., 73 1951
9. Рвачёв В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения, Киев, Наукова думка, 1982
10. Обгадзе Т.А. Элементы математического моделирования, Министерство народного образования ГССР, Груз. политехн. инст, учеб. пос., Тбилиси, 1989
11. Обгадзе Т.А., Прокошев В.Г. Вычислительная физика, Мин. общ. и проф. образ. РФ, ВлГУ, учеб. пос., Владимир, 1999

12. Пескова М.В. Применение метода регулярных источников ОГ для расчета течения в пограничном слое над уличными каньонами, Тезисы докладов Воронежского симпозиума “Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках” Воронеж, 20-27 января 2000
12. Аракелян С.М., Папонов В.С., Дроган Ю.Е., Пигарина А.А., Прокошев В.Г., Обгадзе Т.А. Исследование гидродинамической устойчивости течения смеси топливо-газ в нагнетательных трубопроводах дизеля, Материалы международного Школа семинара “Нелинейные задачи гидродинамической теории устойчивости и турбулентность “ 12-20 февраля, Москва, 2000
14. Obgadze T.A., Barinov V.V., Fedotova O.I. Numerical modeling of heat and mass transfer in rheological systems, 4-th Minsk International heat and Mass Transfer Forum, Volume 7, 2000
15. Obgadze T.A., Prokoshev V.G., Parfionov S.D. Mathematical modeling of the temperature fields induced under the laser processing material, Edited by M. Geiger, A. Otto for CIRP, WGP and WLT Laser Assisted Net Shape Engineering 3, Proceedings of the 3<sup>rd</sup> LANE, Erlangen, August 28-31, 2001
16. Обгадзе Т.А., Прангишвили А.И., Цвераидзе З.Н., Матиашвили И.Г. Математическое моделирование лавинообразных потоков и расчет определяющих параметров на основе обратной вариационной постановки Купрадзе – Бреббия, Международный научный журнал. Проблемы прикладной механики, Тбилиси, № 4(21), 2005
17. Обгадзе Т.А., Прангишвили А.И., Цвераидзе З.Н., Матиашвили И.Г. Математическое

- моделирование грязевых селевых потоков, Международный научный журнал, Проблемы прикладной механики. Тбилиси, № 4(21), 2005
18. Richardson. L.F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry DAM. – Trans. Roy. Soc. London, ser.A., v. 210, 1910, p. 307-357
  19. Philips H., Wiener N. Nets and the Dirichlet program. – J. Math. And Phys., v. 2, p. 105-124
  20. Thom A. The flow past circular cylinders at low speeds. – Proc. Roy. Soc., London, ser. A, v. 141, 1933, p. 651-666
  21. Роуч П. Вычислительная гидродинамика, пер. С англ., Мир, Москва, 1980, 616с.
  22. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач, пер. С англ., Мир, Москва, 1972
  22. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, пер. С англ., Мир, Москва, 1963
  24. Самарский А.А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области, ЖВМ и МФ, т. 2, № 5, с. 787-811
  25. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред, пер. с англ., Мир, Москва, 1974.
  26. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред, пер. с англ., ИЛ, Москва, 1954.

27. Жермен С. Механика сплошных сред, пер. с франц., Мир, Москва, 1965.
28. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика, Наука, Москва, 1986.
29. Eirich F.R. Rheology, Theory and Applications, v.1., Academic Press, New York, 1956.
30. Гасанов А.Б. Реакция механических систем на нестационарные внешние воздействия, Баку-ЭЛМ, 2004.
31. Roahe P.J. Computational fluid dynamics, Albuquerque, New Mexico, 1976.
32. Cebeci T., Bradshaw P. Physical and computational aspects of convective heat transfer, New York, 1984.
32. Коул Дж., Кук Л. Трансзвуковая фэродинамика, пер. с англ., Мир, Москва, 1989.
34. Хемш М., Нилсен Дж. Аэродинамика ракет, том 1, том 2, пер. с англ., Мир, Москва, 1989.
35. Краснов Н.Ф., Кошевой В.Н., Данилов А.Н. и др. Аэродинамика в вопросах и задачах: учеб. пос., Москва, 1985.
36. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости, Москва, 1976.
37. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости, Москва, 1979.
38. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. Введение в аэроавтоупругость, Москва, 1980.
39. Горлин С.М. Экспериментальная аэродинамика. Учеб. пособие для вузов. — М.: "Высшая школа", 1970. 423 с,
40. Горохов Е.В., Кузнецов С.Г. Ветровые нагрузки на низких зданиях в застройке с высотным зданием

- /Современное промышленное и гражданское строительство, том 2. — № 1. — 2006С. 28&38.
41. Dyrbye C., Hansen S.O. Wind loads on structures. New York: John Wiley & Sons. 1999, 229 p.
- 42.СНиП 2.01.07-85\*. Нагрузки и воздействия, Москва, 1986
- 42.Савицкий Г.А. Ветровая нагрузка на сооружения, Стройиздат, Москва,, 1972
- 44.Симиу Э., Сканлан Р. Воздействие ветра на здания и сооружения, пер. с англ., Стройиздат, Москва, 1978
- 45.Kupradze V. D. Potential Methods in the Theory of elasticity. Daniel Davey & Co.,New York , 1965
- 46.Brebbia C.A. The bondary element method for engineers. Pentech Press , London , Holstead press, New York , 1978
- 47.Temam R. Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis . St. in Math. And its Applic., v.2, 1979
- 48.ლ.იაშვილი,რთული ფორმის საინჟინრო ნაგებობათა აეროდინამიკური დატვირთვების მათემატიკური მოდელირება
49. თ.ობგაძე მათემატიკის მოდელირების კურსი

