

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

გამოყენებითი მათემატიკა და მექანიკა

შრომები

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ТРУДЫ

**APPLIED MATHEMATICS AND
MECHANICS**

TRANSACTIONS

თბილისი–Tbilisi-Tbilisi

2012

საორბანოზაციო კომიტეტი

ა. ფრანგიშვილი (თავმჯდომარე); მიტროპოლიტი, ანანია ჯაფარიძე; ნ. ბანიჩუკი;
თ. ბაციკაძე (თავმჯდომარის მოადგილე); ზ. გასიტაშვილი (თავმჯდომარის
მოადგილე); დ. გორდეზიანი; ვ. კვარაცხელია; ლ. კლიმიაშვილი; ნ. მახვილაძე;
ჰ. მელაძე; დ. ნატროშვილი (თავმჯდომარის მოადგილე); შ. ნაჭყებია; მ. სალუქვაძე;
ჯ. შარიქაძე; გ. ჯავახაძე; გ. ჯაიანი (თავმჯდომარის მოადგილე).

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

А. Прангишвили (Председатель); Митрополит Анания Джапаридзе; Н. Баничук; Т. Бацакдзе (зам.
председателя); З. Гаситашвили (зам. председателя); Д. Гордезиани; Г. Джавахадзе; Г. Джаиани
(зам. председателя); В. Кварацхелия; Л. Климиашвили; Н. Махвиладзе; Г. Меладзе; Д.
Натрошвили (зам. председателя); Ш. Начкебия; М. Салуквадзе; Дж. Шарикадзе.

ORGANIZING COMMITTEE

A. Prangishvili (Chair), Metropolitan Anania Japaridze, N. Banichuk, T. Batsikadze (Deputy
Chair), Z. Gasitashvili (Deputy Chair), D. Gordeziani, G. Javakhadze, G. Jaiani (Deputy Chair),
V. Kvaratskhelia, L. Klimiashvili, N. Makhviladze, H. Meladze, D. Natroshvili (Deputy Chair),
Sh. Nachkebia, M. Salukvadze, J. Sharikadze

სარედაქციო კოლეგია

ნ. ბანიჩუკი, თ. ბაციკაძე, დ. გორგიძე, დ. გორდეზიანი, მ. მაცაბერიძე, ნ. მახვილაძე,
დ. ნატროშვილი, თ. ობგაძე, ა. ჩიქოვანი, ჯ. შარიქაძე, გ. ჯავახაძე, გ. ჯაიანი.

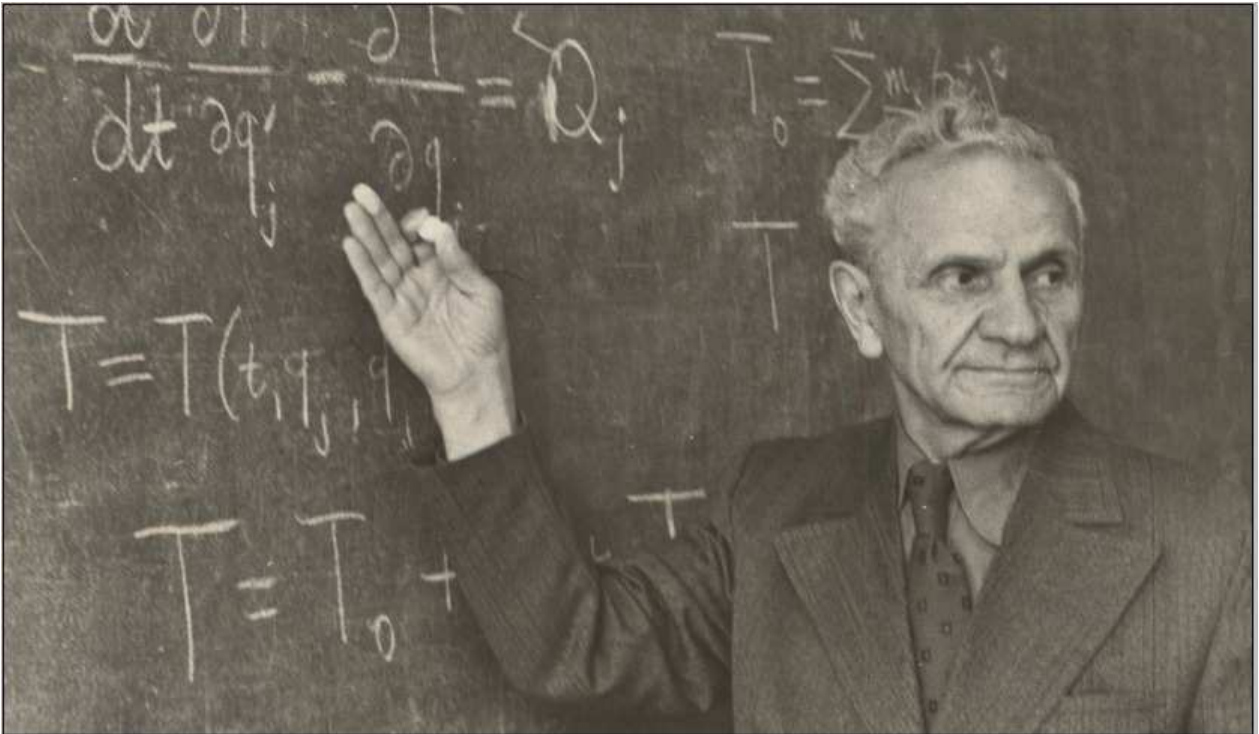
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н. Баничук, Т. Бацакдзе, Д. Горгидзе, Д. Гордезиани, Г. Джавахадзе, Г. Джаиани,
М. Мацаберидзе, Н. Махвиладзе, Д. Натрошвили, Т. Обгадзе, А. Чиковани, Д. Шарикадзе.

EDITORIAL BOARD

N. Banichuk, T. Batsikadze, A. Chikovani, D. Gorgidze, D. Gordeziani, G. Javakhadze, G. Jaiani,
M. Matsaberidze, N. Makhviladze, D. Natroshvili, T. Obgadze, D. Sharikadze.

ყველა შრომა დაბეჭდილია ავტორის მიერ წარმოდგენილი ფორმით
Все работы опубликованы в виде, представленном авторами
All articles are published as submitted by authors



*ალექსი გორგიძის დაბადებიდან 105 წლისთავისადმი მიძღვნილი
შრომთა კრებული*

*Сборник трудов посвященный к 105 летию со дня рождения
Алексея Горгидзе*

*The collection of works devoted to the 105th anniversary of the birth of **Alexi
Gorgidze***

მეცნიერი და მოქალაქე

დაბადებიდან 105 წელი შეუსრულდა გამოჩენილ ქართველ მეცნიერსა და პედაგოგს, მეცნიერების დამსახურებული მოღვაწეს, საქართველოს სახელმწიფო პრემიის ლაურეატს პროფესორ ალექსი გორგიძეს - პიროვნებას, რომელიც უშუალო მოწმე და მონაწილე იყო ქართულ საზოგადოებაში და განსაკუთრებით კი ქართულ მათემატიკურ საზოგადოებაში, მრავალი ისტორიული მოვლენისა.

ალექსი იასონის ძე გორგიძე ქუთაისში დაიბადა 1907 წლის 17 მაისს.

საშუალო განათლება ქუთაისის პირველ სოციალურ-ჰუმანიტარულ ტექნიკუმში მიიღო, რომელიც 1924 წელს დაამთავრა და იმავე წელს შევიდა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პედაგოგიური ფაკულტეტის ფიზიკა-მათემატიკის განყოფილებაზე.

1929 წელს სახელმწიფო უნივერსიტეტის დამთავრების შემდეგ, ა. გორგიძე ნ. მუსხელიშვილის მიწვევით საქართველოს პოლიტექნიკური ინსტიტუტის თეორიული მექანიკის კათედრაზე იწვებს მუშაობას.

მათემატიკოსთა ახალი თაობა, როგორც პერსპექტიული და იმედის მომცემი მკვლევარები, ნ.მუსხელიშვილის თაოსნობითა და ხელშეწყობით 1930 წლის შემოდგომიდან ასპირანტურის კურსის გასავლელად მოსკოვისა და ლენინგრადის სამეცნიერო დაწესებულებებში გაიგზავნენ. ლენინგრადის სახელმწიფო უნივერსიტეტში ჩაირიცხა ალექსი გორგიძე. მისი ხელმძღვანელები იყვნენ ვ. სმირნოვი და ს. მიხლინი.

1935 წელს ალექსი გორგიძემ წარმატებით დაამთავრა ასპირანტურის კურსი, თბილისში დაბრუნდა და მუშაობა განაგრძო სახელმწიფო უნივერსიტეტსა და პოლიტექნიკურ ინსტიტუტში. ა.გორგიძე მუშაობას იწყებს თბილისის მათემატიკის ინსტიტუტში.

ა.გორგიძე ეკუთვნის ახალგაზრდა ქართველ მათემატიკოსთა იმ თაობას, რომელიც ჯერ კიდევ 20-იანი წლების ბოლოდან მხარში ამოუდგა საქართველოში უმაღლესი მათემატიკური განათლების ფუძემდებლებს – ა.რაზმაძეს, გ.ნიკოლაძეს, ნ.მუსხელიშვილს, ა.ხარაძეს.

ამავე დროს ა.გორგიძე ეწეოდა ნაყოფიერ სამეცნიერო და საზოგადოებრივ მოღვაწეობას. განსაკუთრებული აღნიშვნის ღირსია მისი საქმიანობა საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის მათემატიკის ინსტიტუტში და აკადემიის პრეზიდიუმში. 1935 წლიდან ა.გორგიძე მუშაობს მათემატიკის ინსტიტუტში, რომლის დაარსებაში მან მიიღო აქტიური მონაწილეობა, ჯერ უფროსი მეცნიერ თანამშრომლის, შემდეგ სწავლული მდივნის, ხოლო 1940-954 წწ. დირექტორის მოადგილის თანამდებობებზე.

1941 წლის თებერვალში ჩამოყალიბდა საქართველოს მეცნიერებათა აკადემია, რომლის პირველ პრეზიდენტად არჩეულ იქნა აკადემიკოსი ნიკო მუსხელიშვილი, ხოლო პრეზიდენტის თანამშემწის მოვალეობას მრავალი წლის განმავლობაში (1941-1954 წლებში) ჩვეული ენერგიითა და მიზანდასახული მოღვაწეობით ასრულებდა ალექსი გორგიძე, რომელიც ეწეოდა დიდსა და ნაყოფიერ საორგანიზაციო მუშაობას.

აღბათ ამიტომ, თავის ერთ-ერთ მოგონებაში ბატონი ალექსი გორგიძე წერს: მინდა „აღვნიშნო ის უდიდესი ღვაწლი, რაც ბატონ ნიკოს ჩემი მეცნიერული გზის ჩამოყალიბებაში და

საერთოდ ჩემს ცხოვრებაში მიუძღვის. ჯერ იყო და სრულიად ახალგაზრდა კაცი ასისტენტად მიმიწვია თეორიული მექანიკის კათედრაზე პოლიტექნიკურ ინსტიტუტში, შემდგომ მისივე რეკომენდაციით მივლინება ლენინგრადში ასპირანტურაში და ბოლოს, დისერტაციის დაცვის შემდეგ 1938 წელს მან თავისი თეორიული მექანიკის კათედრა ჩამაბარა პოლიტექნიკურ ინსტიტუტში. ამის გარდა 14 წელიწადი მე ვიყავი მისი მოადგილე მათემატიკის ინსტიტუტში და მისი ხანგრძლივი მივლინებების დროს ფაქტობრივად წარმართავდი ინსტიტუტის საქმიანობას. ამასთანავე, დაწვებული ჩვენი აკადემიის შექმნის დღიდან პარალელურად მე ვასრულებდი პრეზიდენტის თანაშემწის ფუნქციას რიგი წლების განმავლობაში“.

ამ თანამდებობაზე ალექსი გორგიძის მოღვაწეობის შესახებ აკადემიკოსი **გიორგი ჭოლოშიელი** იხსენებს: „სრულიად შესანიშნავ, სრულიად უნიკალურ პიროვნებასთან გვაქვს საქმე ალიოშა გორგიძის სახით... ის იყო სამაგალითო მეგობარი და ადამიანი.. მათემატიკის ინსტიტუტის დირექტორის მოადგილის თანამდებობის დროს დირექტორის ნიკო მუსხელიშვილის არყოფნისას სხვადასხვა სხდომას ის უძღვებოდა ხოლმე და ამას აკეთებდა დაკვირვებით, ღინჯად, ტაქტიანად, მარჯვედ ახერხებდა კონფლიქტური სიტუაციების განმუხტვას“.

საზოგადოებრივ საქმიანობაში აქტიურ მონაწილეობასთან ერთად ალექსი გორგიძე ყოველთვის პოულობდა დროს შემოქმედებითი მეცნიერული მუშაობისათვის.

ალექსი გორგიძის სამეცნიერო მოღვაწეობის მთავარ თემატიკას წარმოადგენდა დრეკადობის მათემატიკური თეორიის საკითხები.

ა. გორგიძემ შეისწავლა სხვადასხვა სახის ერთგვაროვანი და შედგენილი ძელების გრეხის, გაჭიმვა-კუმშვისა და ღუნვის ამოცანები იმ შემთხვევისათვის, როცა შემადგენელ მასალას პუასონის ერთნაირი კოეფიციენტები აქვს. მასვე ეკუთვნის დრეკადობის კვადრატულ თეორიაში პრიზმულთან მახლობელი და ცილინდრული ძელების, აგრეთვე სხვადასხვა მასალისაგან შედგენილი პრიზმული ძელების გრეხის, გაჭიმვისა და ღუნვის ამოცანების ამოხსნა; ამ დეფორმაციათა, როგორც მეორადი ეფექტები, ასევე დეფორმაციების ურთიერთგავლენასთან დაკავშირებული წრფივი და არაწრფივი ამოცანების ამოხსნა იზოტროპული სხეულებისათვის (1943, 1955-1956 წლებში). ამ ამოცანების ამოხსნისას მან გამოიყენა ერთგვაროვანი ძელებისათვის სენ-ვენანის კარგად ცნობილი პრობლემის განზოგადება, ვინაიდან ამ ამოცანებში ჩნდება დეფორმაციების ისეთი ეფექტები, რომელთა განჭვრეტა არ შეუძლია სენ-ვენანის გამარტივებულ თეორიას. არაწრფივი ამოცანების ამოხსნისას დეფორმაციების როგორც მეორადი ეფექტი, ასევე დეფორმაციების ურთიერთგავლენასთან დაკავშირებული ეფექტი, ეს არის კვადრატული თეორიით ნაკარნახევი ეფექტი, რომელიც ემატება წრფივი თეორიით მიღებულ შედეგს.

ა. გორგიძემ 1941-1942 წლებში შეისწავლა მეორადი ეფექტები, რომლებსაც ადგილი აქვთ შედგენილი ცილინდრული ძელების ღუნვის ამოცანებში, ხოლო 1942-1946 წლებში შედგენილი ძელების გაჭიმვის, გრეხის და წყვილდალით ღუნვის მეორადი ეფექტები. დეკარტეს კოორდინატებში ამოხსნა დაგრეხილი ღეროს წყვილდალით ღუნვის ამოცანა.

1947-1960 წლებში ა. გორგიძის მეცნიერული მოღვაწეობის ძირითად თემატიკას წარმოადგენს პრიზმულთან მახლობელი, ასევე ოდნავ კონუსური და ბუნებრივად დაგრეხილი ძელების დეფორმაციის ამოცანების შესწავლა. მან გამოიკვლია პრიზმულთან მახლობელი შედგენილი ძელების გაჭიმვისა და გრეხის (1947), გრეხისა და ღუნვის (1948), წყვილდალით

ღუნვის (1948) ამოცანები; აგრეთვე ბუნებრივად დაგრეხილი ღერობისათვის გაჭიმვისა და წყვილძალით ღუნვის (1952), გაჭიმული ძელის განივი ძალით ღუნვის (1953), გაჭიმული ძელის გრეხის (1969), განივი ძალით ღუნვის (1955) და გრეხის (1958) მეორადი ეფექტების ამოცანები. შეისწავლა ოდნავ კონუსური ძელების დეფორმაციის ამოცანა ღუნვის მეორადი ეფექტების გათვალისწინებით (1960), გაჭიმული ძელის წყვილძალით ღუნვის (1961), გაჭიმული ძელის გრეხის (1963), გრეხისა და წყვილძალით ღუნვის (1970) ამოცანები.

შემდგომ კვლევებში მიღებული შედეგები უფრო დააზუსტა და განაზოგადა – გაართულა დატვირთვის სქემა და ისე შეისწავლა სხვადასხვა მასალისაგან დამზადებული ძელების დეფორმაციის მეორადი ეფექტები (1957-1963). აჩვენა, რომ სხვადასხვა დატვირთვითა ურთიერთმოქმედების ეფექტი არსებითია თხელი პროფილის (თვითმფრინავის ხრახნის პროფილის) გრძელი სხეულებისათვის.

„ამ განზოგადებული ამოცანების ამოხსნების ასაკებად ა. გორგიძემ ეფექტურად გამოიყენა უმცირეს პარამეტრთა მეთოდი, რაც მკვლევარისაგან ინტუიციას, ფართო ერუდიციას და დიდ გამოძვინებლობით ნიჭს მოითხოვს კერძო ამოხსნების მოხერხებულად ასაკებად.“

(6. მუსხელიშვილი).

ა. გორგიძის მიერ ამ დარგში მიღებულ შედეგებს აქვთ დიდი თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობა.

1960 წელს ა. გორგიძე მიწვეული იყო ინგლისის სამეფო საზოგადოების მექანიკის ინსტიტუტში.

1975-1983 წლებში თეორიული მექანიკის კათედრის სხვა წევრებთან ერთად ა. გორგიძემ განიხილა ანიზოტროპული დრეკადი მასალისაგან დამზადებული ცილინდრული ძელების სხვადასხვა დაძაბულობის როგორც მეორადი ეფექტის, ასევე დეფორმაციების ურთიერთგავლენასთან დაკავშირებული ამოცანები.

ა. გორგიძემ ორი და სამი განზომილების მრავლადბმული არეებისათვის ამოხსნა დრეკადობის თეორიის ძირითადი ამოცანები, რომლებშიც გამოიყენა შვარცის ნიშანცვლადი მეთოდი. მანვე განავითარა ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები. იგი აგრეთვე იკვლევდა დიდი სისტემების მართვის პრობლემებს.

1938 წელს ნიკო მუსხელიშვილის რეკომენდაციით ალექსი გორგიძე არჩეულ იქნა საქართველოს პოლიტექნიკური ინსტიტუტის თეორიული მექანიკის კათედრის გამგის თანამდებობაზე. სადაც იგი ნახევარ საუკუნეზე მეტი ხნის (52 წლის) განმავლობაში მოღვაწეობდა და ეწეოდა დაუღალავ და ნაყოფიერ სამეცნიერო, სამეცნიერო-მეთოდურ, პედაგოგიურ, საზოგადოებრივ და აღმზრდელობით მუშაობას. ბატონი ალექსი თავის პედაგოგიურ როლს ძირითადად იმაში ხედავდა, რომ უმაღლესმა ტექნიკურმა სასწავლებელმა უნდა გამოეშვას არა მარტო მცოდნე ინჟინერი, არამედ ღრმად და მეცნიერულად მოაზროვნე ინჟინერ-შემოქმედი.

ბატონი ალექსის ყოველდღიური ცხოვრებიდან ჩანდა, რომ ის პირველყოფლისა იყო ადამიანი, რომელიც თავის თავს დიდ მოთხოვნებს უყენებდა საკუთარი დისციპლინის, პატიოსნების, სამართლიანობის და უანგარობის თვალსაზრისით; მას ძალიან უყვარდა თავისი სამუშაო, თავისი კათედრა, თავისი საგანი, სტუდენტებით სავსე აუდიტორია.

სამაგალითო იყო ბატონ ალექსი გორგიძის პიროვნება. დიდბუნებოვნება, კაცთმოყვარეობა, უბრალოება და თავმდაბლობა ედო საფუძვლად მეგობრებთან, კოლეგებთან

და სტუდენტ ახალგაზრდობასთან მის ურთიერთობას; ყოველივე ამის ნიჭი ბუნებით ჰქონდა მომადლებული. მას შეეძლო ყველასთან ჰქონოდა ჯანსაღი ურთიერთობა. ის იყო ბევრისათვის სამაგალითო, როგორც ცხოვრებაში, ისე მეცნიერულ საქმიანობაში. მთელი თავისი საქმიანობით ბატონი ალექსი იყო ჭეშმარიტი ინტელიგენტის განსახიერება.

მეგობრებში უღალატო კაცის სახელი ჰქონდა. განსაკუთრებით თბილი და მეგობრული ურთიერთობა აკავშირებდა ჩვენი დროის გამოჩენილ მათემატიკოსებთან.

ა. გორგიძემ დიდი ღვაწლი დასდო უმაღლეს სკოლაში თეორიული მექანიკის სწავლების მეთოდურობას. ამ საკითხებზე იგი სპეციალურ კურსს კითხულობდა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტთან ჩამოყალიბებულ უმაღლესი სასწავლებლების მასწავლებელთა კვალიფიკაციის ამაღლების ფაკულტეტზე.

ბატონი ალექსი დიდი პედაგოგიური ოსტატობით და პასუხისმგებლობით კითხულობდა თეორიული მექანიკის ლექციების კურსს, რომლებიც პირდაპირი ეთერით გადაიცემოდა საქართველოს ტელევიზიის სასწავლო პროგრამების რედაქციის მიერ.

გასული საუკუნის 60-იანი წლებიდან თეორიული მექანიკის კათედრასთან მუშაობს მექანიკის საქალაქო სემინარი მექანიკაში, რომლის დაარსების ინიციატორი და მეცნიერი ხელმძღვანელი სამი ათეული წლის მანძილზე იყო პროფ. ალექსი გორგიძე. დღეს ეს სემინარი ა. გორგიძის სახელს ატარებს და აგრძელებს ძველ ტრადიციებს.

თეორიული მექანიკის კურსის შესაქმნელად სხვადასხვა დროს და სხვადასხვა ავტორის მიერ ქართულ ენაზე რამდენიმე სახელმძღვანელო და მეთოდური მითითება დაიწერა. მათ შორის პირველი იყო აკადემიკოსი ნიკო მუსხელიშვილი.

ალექსი გორგიძემ შესანიშნავად გამოიყენა თავისი მრავალწლიანი პედაგოგიური გამოცდილება და ქართულ ენაზე შექმნა ორიგინალური სახელმძღვანელოები თეორიულ მექანიკაში: „თეორიული მექანიკის კურსი“, წიგნი I (სტატიკა-კინემატიკა, 1959 წ.) და „თეორიული მექანიკის კურსი“, წიგნი II, (დინამიკა, 1965 წ.).

ა. გორგიძის, როგორც მეცნიერის მათემატიკურმა აზროვნებამ სრულად განსაზღვრა სახელმძღვანელოების აგების ფორმა და სტილი. ეს წიგნები დაწერილია მაღალ მეცნიერულ და პედაგოგიურ დონეზე; გამოირჩევა მასალის სიუხვით, სისრულითა და კომპაქტურობით, თხრობის სიმკაცრით. საჭიროა აღვნიშნოთ, რომ შეგვიძლია ვიამაყოთ ბატონი ალექსის ამ მემკვიდრეობით, რადგან მისი სახელმძღვანელოები სამართლიანად დგას ამ დარგში სხვადასხვა ენებზე დღემდე შექმნილი სახელმძღვანელოების გვერდით.

ზემოაღნიშნული ღირსებების დასტურია ის, რომ 1998 წელს ბატონ ალექსი გორგიძის სახელმძღვანელოებს „თეორიული მექანიკის კურსი“ (წიგნი I და II), მიენიჭა საქართველოს სახელმწიფო პრემია. დასანანია, რომ ამ მნიშვნელოვან აღიარებას თვით ბატონი ალექსი ვერ მოესწრო.

ა. გორგიძე ჩვეული ენერგიითა და მიზანდასახულად მუშაობდა, როგორც ყოფილი საკავშირო უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტროს თეორიული მექანიკის სამეცნიერო-მეთოდური საბჭოს პრეზიდიუმის (რომელსაც აკადემიკოსი ა. იშლინსკი თავმჯდომარეობდა) წევრი და თეორიულ მექანიკაში ამ დარგის კურატორი საქართველოში. პრეზიდიუმის სხდომებზე ალექსი გორგიძე ხშირად გამოდიოდა მოხსენებებით, სადაც დიდ ყურადღებას უთმობდა თეორიული მექანიკის, ამ ერთ-ერთი ფუნდამენტური დისციპლინის

სწავლების მეთოდის კარდინალურ საკითხებს უმაღლეს სასწავლებლებში. მის გამოსვლებს ყოველთვის მაღალ შეფასებას აძლევდნენ პრეზიდიუმის წევრები.

ქართული მათემატიკური სკოლის წარმატებულ აღმავლობას დიდად უწყობდა ხელს ბატონი ალექსის ურთიერთობა სხვადასხვა დარგის საქვეყნოდ გამოჩენილ მეცნიერებთან. ძალზე დიდია და მრავალფეროვანი, როგორც ქართველ, ისე უცხო ქვეყნების წარმომადგენელ ადამიანთა ის წრე, რომლებთანაც ალექსი გორგიძეს ჰქონდა ახლო მეცნიერული და მეგობრული კონტაქტები. ამ კონტაქტებს ის ძალიან უფრთხილდებოდა და ყოველთვის ცდილობდა ამ ადამიანებთან ურთიერთობა თავისი ერის სასიკეთო საქმეში გამოეყენებინა.

ბატონი ალექსი იყო საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიასთან არსებული მათემატიკისა და მექანიკის პრობლემების შემსწავლელი სამეცნიერო-მეთოდური საკოორდინაციო საბჭოს წევრი, ამიერკავკასიის ზონის სამეცნიერო მეთოდური საბჭოს ხელმძღვანელი; საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის გამგეობის წევრი და სხვ.

ბატონ ალექსის 1967 წელს მიენიჭა საქართველოს მეცნიერებისა და ტექნიკის დამსახურებული მოღვაწის საპატიო წოდება.

ბატონი ალექსი გარდაიცვალა 1992 წლის დეკემბერში.

1993 წელს დაწესდა საქართველოს საინჟინრო აკადემიის ალექსი გორგიძის სახელობის პრემია, ხოლო საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში კი ალექსი გორგიძის სახელობის სტიპენდია. ქუთაისის ერთ-ერთ ქუჩას მიენიჭა ა. გორგიძის სახელი.

ბუნებით კეთილი და უაღრესად განათლებული, საუკეთესო მოსაუბრე, გარშემომყოფებისადმი მუდამ კეთილგანწყობილი, დინჯი და გაწონასწორებული, ტაქტიანი ბატონი ალექსი გორგიძე იყო სამაგალითო პიროვნება, როგორც პირად ცხოვრებაში, ასევე საზოგადოებრივ საქმიანობაში.

Alexi Gorgidze was a prominent Georgian scientist- mathematician and specialist in mechanics, Honored Scientist (1962). State Prize Laureate (1997), Professor.

Alexi Gorgidze was born in Kutaisi on May 17, 1907. Even at Kutaisi Technical High School, he displayed a keen interest and talent in mathematics.

In 1924 A. Gorgidze entered the Department of Physics and Mathematics of the Education Faculty of Tbilisi State University. At that time there worked the founders of higher mathematical education in Georgia Andrea Razmadze, Niko Muskhelishvili, Giorgi Nikoladze and Archil Kharadze.

In 1929 A. Gorgidze began working at the Department of Theoretical Mechanics of the Georgian Polytechnic Institute on Niko Muskhelishvili's invitation.

In 1932 A. Gorgidze was offered a post-graduate studentship at Leningrad State University, where his supervisors of studies were outstanding scientists V. Smirnov and S. Mikhlin.

In 1935 A. Gorgidze finished his post-graduate studies and returned to Tbilisi. He began working at Tbilisi State University and the Georgian Polytechnic Institute. He participated energetically in the foundation of Tbilisi Institute of Mathematics.

In 1938 N. Muskhelishvili proposed that A. Gorgidze was appointed the Head of the Department of Theoretical Mechanics of the Georgian Polytechnic Institute, which he himself had been directing for 52 years. At the same time, A. Gorgidze continued working at the Institute of Mathematics: first as a junior scientific worker and then as a scientific secretary and a deputy director. After the establishment of the Georgian Academy of Sciences,

A. Gorgidze worked as an assistant president of the Academy over a period of years.

In the 60-ies of the last century, on A. Gorgidze's initiative Tbilisi Workshop on Theoretical and Applied Mechanics was established. A. Gorgidze directed this workshop till his death. Scientists from different countries took part in the Workshop.

A. Gorgidze was an author of many scientific works. The sphere of his scientific interest included various issues of the mathematical elasticity theory: approximated solutions to basic boundary problems of the elasticity theory; linear and nonlinear problems associated with tension, torsion and bending of continuous and complex, isotropic and anisotropic beams, which are not only of scientific significance, but also of practical importance for application to construction mechanics and for increasing the construction sustainability, etc.

A. Gorgidze was among the first to prepare and publish in Georgian a complete course of theoretical mechanics for the institutions of technical higher education, which became a handbook not only for Georgian intellectuals and students, but also for everybody who was interested in the issues of mechanics. He was awarded the State Prize of Georgia for this handbook.

In 1960 A. Gorgidze was invited to England for acquainting with the scientific work of the Institute of Mechanics of the Royal Society.

In the 60-ies of the XX century the Georgian television began broadcasting the educational lectures. A. Gorgidze was among organizers and delivered lectures in theoretical mechanics for years. Professor A. Gorgidze was a member of the Scientific-Methodological Coordination Council on studying the problems of mathematics and mechanics at the Georgian Academy of Sciences, a member of the presidium of the Scientific-Methodological Council of Theoretical Mechanics of the Higher and Special High Education Ministry of the USSR, a member of the Board of the Georgian Mathematical Society and the Chairman of Transcaucasia Scientific-Methodological Council of Theoretical Mechanics.

In 1993 Alexi Gorgidze Prize was established by the Georgian Engineering Academy; at the Georgian Technical University, A. Gorgidze grant was founded. One of the streets in the city of Kutaisi was called after A.Gorgidze.



Среди грузинских математиков достойное место занимает известный ученый математик-механик, лауреат Государственной премии Грузии, Заслуженный деятель науки Грузии, профессор Алексей Ясонович Горгидзе.

А. Я. Горгидзе родился 17 мая 1907 года в г. Кутаиси. В 1914 году он поступает в Первое Кутаисское реальное училище, преобразованное впоследствии в Социально-Гуманитарный техникум. Здесь он рано проявляет незаурядные способности к математике, чем обращает на себя внимание своих преподавателей. По окончании учебы в техникуме А.Я. Горгидзе в 1924 году поступает на физико-математическое отделение педагогического факультета Тбилисского государственного университета.

В те годы математические науки в университете преподавала великолепная четвёрка грузинских математиков – Андрей Размадзе, Нико Мухелишвили, Георгий Николадзе и Арчил Харадзе, благотворное влияние которых несомненно способствовало глубокому освоению фундаментальных основ высшей математики.

Именно из стен этого университета получила путевку в жизнь целая плеяда блестящих грузинских ученых - Илья Векуа, Виктор Купрадзе, Мате Мирианшвили, Владимир Челидзе, Давид Долидзе, Ясон Мецхваришвили, Дарья Вашакидзе и др. Тогда они были просто сокурсниками А. Я. Горгидзе.

С 1929 года, по приглашению Н. И. Мухелишвили, Алексей Горгидзе начал работать в Политехническом институте на кафедре теоретической механики, где он активно включается в работу семинаров, организованных заведующим тогда этой кафедрой Н. И. Мухелишвили. В 1932 году А.Я. Горгидзе вместе с группой молодых грузинских математиков направляется в аспирантуру Ленинградского государственного университета. Его научными руководителями были уже известный в ту пору математик В.И. Смирнов и молодой ученый С.Г. Михлин.

Здесь А.Я. Горгидзе активно участвует в университетских научных семинарах и публикует свои первые научные работы по теории упругости. В 1934 году он опубликовал в журнале “Доклады АН СССР” свою первую работу „Метод последовательных приближений в применении к плоской задаче теории упругости”.

В 1935 году Алексей Ясонович заканчивает учебу в аспирантуре и возвращается в Тбилиси, где одновременно начинает работать в Грузинском политехническом институте, Тбилисском государственном университете и в Институте математики АН Грузии, в организации и становлении которого он принял самое активное участие. В 1938 году А.Я. Горгидзе, по предложению Н.И. Мухелишвили, избирается на должность заведующего кафедрой теоретической механики ГПИ, которой он бессменно руководил в течение 52 лет (до 1990 г.).

Надо сказать, что А.Я. Горгидзе много сил и времени уделял Тбилисскому институту математики им. А.М. Размадзе АН Грузии, к которому он относился с большим вниманием. Здесь он работал научным секретарем, а затем заместителем директора института (1940-1954). Одновременно, он читает курсы лекций по ряду специальностей в ТГУ. В начальный период деятельности Академии наук Грузии, А.Я. Горгидзе работал также помощником Президента Академии. В то время, - время становления Академии, это было не только почетной должностью, но и весьма ответственной.

Интересно отметить, что еще в 1937 году Н.И. Мусхелишвили завершил серию великолепных статей по исследованию граничных интегральных уравнений для плоской задачи теории упругости, посвященной численному решению задач с помощью полученных им уравнений. Мощнейший научный потенциал этих работ вдохновил его прямых учеников – А.Я. Горгидзе и А.К. Рухадзе на реализацию численных решений этих задач, работа которых, опубликованная в 1940 году, содержит все компоненты метода, который именуется „методом граничных элементов“. Так, в 1940 году А.Я. Горгидзе публикует работы посвященные применению метода последовательных приближений интегральных уравнений плоской задачи теории упругости (в соавторстве с А. К. Рухадзе). В 1941-1944 годах он публикует в Сообщениях АН Грузии ряд работ, посвященных решению задач о вторичных эффектах и взаимных влияниях различных напряженных состояний цилиндрических брусьев, составленных из различных изотропных материалов. Задача рассматривалась в геометрически и физически нелинейной постановке, предполагая, что упругие свойства материалов, составляющих брус, характеризуются различными модулями Юнга, постоянными Ламе. Публикуются также работы (цикл работ), посвященные исследованию напряженно-деформированного состояния брусьев, близких к призматическим, составленных из различных упругих материалов.

А.Я. Горгидзе поставлены и решены задачи растяжения брусьев, брусьев со слабо изогнутыми осями, естественно закрученных брусьев. Все эти задачи, решенные в общем виде, сопровождаются наглядными примерами.

С 1954 года публикуются работы, в которых изучаются вторичные эффекты и взаимные влияния различных напряженных состояний цилиндрических брусьев, выполненные А.Я. Горгидзе. В 1973 году он приступил к решению задач о вторичных эффектах и взаимовлияниях различных напряженных состояний цилиндрических брусьев, составленных из различных анизотропных материалов. Полученные результаты имеют не только первостепенное теоретическое, но и большое практическое значение, используются при расчете различных сооружений и деталей в строительстве и машиностроении. С помощью этих данных достигнуто значительное облегчение конструктивных элементов и повышена их устойчивость.

В 1960 году А. Горгидзе был приглашен в Англию в институт Механики Королевского общества для ознакомления с научными направлениями.

В шестидесятых годах прошлого века по инициативе А.Я. Горгидзе был организован в Тбилиси общегородской научно-методической семинар по механике, которым он руководил бессменно в течение более 30 лет. В работе этого семинара принимали участие преподаватели теоретической механики различных городов СССР и других стран.

В 1959 году выходит в свет, написанный А.Я. Горгидзе на грузинском языке, учебник „Курс теоретической механики" (Статика), в 1961 году – вторая часть учебника (Кинематика), а в 1965 году – третья часть (Динамика), которые неоднократно переиздавались и стали настольными пособиями для инженеров и студентов.

За эти учебники А. Я. Горгидзе был удостоен Государственной премии Грузии в 1998 году (посмертно).

В 1979 году А.Я. Горгидзе издает „Краткий курс теоретической механики" совместно с А.Ф. Шарангия (на груз. языке) и совместно с В. Х. Мецуговым по заказу московского издательства „Высшая школа"(на русском яз.).

В 1986 году А.Я. Горгидзе, совместно с Д.К. Данелия, А.А. Лосаберидзе и А.Д. Цибекидзе, издает учебник по курсу „Техническая механика" (на груз. языке).

В 2001 году выходит монография (избранные труды) А.Я. Горгидзе - „Некоторые обобщения задач кручения и изгиба составных брусьев", в 2003 году монография - „К истории развития механики в Грузии".

А.Я. Горгидзе систематически, на протяжении многих лет читал курс теоретической механики в грузинских учебных телепередачах (со дня их основания).

Наряду с плодотворной научной и педагогической деятельностью, А.Я. Горгидзе большое внимание уделял научно-методическим вопросам преподавания: был членом президиума Научно-методического совета по теоретической механике Министерства высшего и среднего специального образования СССР (с 1970г.); возглавлял Научно-методический совет по теоретической механике Закавказья и Грузии; был членом правления математического общества Грузии и членом Совета ТГУ и ГТУ по присуждению учёных степеней и званий.

А.Я. Горгидзе является автором свыше 80 научных работ, посвященных в основном вопросам теории упругости. Это – приближенные решения основных задач теории упругости, решения задач растяжения, кручения и изгиба брусьев, взаимного влияния разных деформаций однородных и составных изотропных и анизотропных цилиндрических и близких к цилиндрическим и др. задач, с учетом линейной и нелинейной теории.

Академик И.Н. Векуа о значении этих задач писал: „Исследования А.Я. Горгидзе касаются большой важной проблематики теории упругости, имеющей значительный практический интерес. Они содержат многие важные результаты, которые имеют большую теоретическую и практическую ценность".

А.Я. Горгидзе внес весомый вклад в науку, практику и педагогику, который органически связан с насущными проблемами механики. Он пользовался большим уважением и любовью коллег, студентов и лиц, соприкасающихся с ним на деловой основе. Многие ученики А.Я. Горгидзе в настоящее время являются видными учёными и специалистами в различных областях науки и отраслях промышленности.

Научная, педагогическая и общественная деятельность А.Я. Горгидзе была высоко оценена – в 1969 году ему было присвоено звание „Заслуженный деятель науки Грузии", а в 1998 году его работы были отмечены Государственной премией Грузии (1998 г.).

В 1993 году Инженерной Академией Грузии учреждена премия им. А.Я. Горгидзе.

Именем А.Я. Горгидзе назван научно-методический семинар по механике Союза механиков Грузии.

В 2001 году одна из улиц г.Кутаиси названа именем А.Я. Горгидзе.

Алексей Ясонович Горгидзе скончался в 1992 году.

LOW RANK TENSOR APPROXIMATION IN SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS <i>Prangishvili A., Milnikov A.</i>	17
ბლანტი-დრეკადი ნახევარსიბრტყის დეფორმაციის ფლამანის ამოცანა <i>ნოდარ მახვილაძე</i>	24
ON THREE LAYER DIFFERENCE SCHEMES FOR SOLVING THE SYSTEMS OF MULTIDIMENSIONAL EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE WITH MIXED DERIVATIVES <i>Criado F., Davitashvili T., Meladze H.</i>	30
EVOLUTIONAL MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION OF LAYERED PLATES AGAINST PENETRATION OF STRIKERS <i>Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Makeev E.V., Sinitsin A.V.</i>	46
НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА УПРУГОЙ ПОЛУПОЛОСЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ <i>Баничук Н.В., Барсук А.А., Иванова С.Ю., Сеницын А.В.</i>	54
EXPLORATION OF CURRENT DYNAMICAL PROCESSES IN PNEUMATIC SYSTEMS <i>Bogvelishvili Z., Iosebidge J., Abramishvili G., Chkheidze A., Galashin V., Gustomiasov A.</i>	59
POSITIONAL CONTROL FOR MULTIDIMENSIONAL DYNAMIC SYSTEM UNDER UNCERTAIN INFLUENCE <i>Ivanova V., Sinitsyn A.</i>	65
სივრცითი, არამუშა რხევების ბავლენა უხვიერი ტვირთის ვიბრაციულ მოძრაობაზე <i>ზვიადაური ვ., გოგია გ., ჭელიძე მ., თუმანიშვილი გ., ნადირაძე თ.</i>	71
BONDARY AND BONDARY- CONTACT PROBLEMS OF THERMO-ELECTROELASTICITY IN A SPHERICAL COORDINATE SYSTEM <i>D.Gorgidze, I. Ramishvili, N. Ozbetelashvili</i>	79
A STRUCTURAL PRE-SHEAF OF C^*-ALGEBRAS <i>Mumladze M., Zerakidze Z.</i>	87
RELATIONSHIP BETWEEN QUALITATIVE AND QUANTITATIVE IMPORTANCE OF CRITERIA IN MULTICRITERIAL DECISION MAKING PROBLEMS <i>Nelyubin A.P., Podinovski V.V.</i>	92
ცხრილით მოცემული ორცვლადიანი ფუნქციის ანალიზური სახით ჩაწერის მათემატიკური მოდელების მეთოდი <i>გორჯოლაძე ი., გორჯოლაძე ნ., გორჯოლაძე ხ.</i>	104
НЕЧЕТКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ В ПРОЕКТИРОВАНИИ КОНСТРУКЦИЙ <i>Бараненко В.А.</i>	113

ОБОБЩЕННЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ РАБОТОСПОСОБНОСТИ МОТОРНОГО МАСЛА <i>Нигматуллин Р.Г, Костенков Д.М, Шмельков Д.А., Нигматуллин И.Р.</i>	121
ქართული ენის ლოგიკური გრამატიკის მიზნები, მეთოდები, შედეგები <i>ფხაკაძე კ., ჩიჩუა გ., ჩიქვინიძე მ., მასხარაშვილი ა.</i>	129
ВРАЩЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В КОЛЬЦЕВОМ ЗАЗОРЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОПЕРЕЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ <i>В. Н. Цуцкиридзе, Л. А. Джикидзе</i>	138
ტყიბულის მამფიდრებელი ფაბრიკა და მისი როლი ტყიბული-შაორის საბაღოს ქვანახშირის საქართველოს მრეწველობის სხვადასხვა დარბში გამოყენების შესაძლებლობის დადგენისათვის <i>მახარაძე ს.</i>	146
К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕСТОРАСПОЛОЖЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ НАСОСНЫХ СТАНЦИЙ В МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ ГИДРОТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМАХ, РАБОТАЮЩИХ БЕЗ РАЗРЫВА СПЛОШНОСТИ ПОТОКА <i>Махарадзе Л.И., Гелашвили В.Д., Стерякова С.И.</i>	159

LOW RANK TENSOR APPROXIMATION IN SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS

Archil Prangishvili, Alexander Milnikov,

Georgian Technical University

77 Kostava str., Tbilisi, 0175, Georgia

Abstract. An application of Singular Spectrum Analysis(SSA) Method, based on a new elaborated low rank tensorial approximation approach of computation of singular values and left and right singular vectors of arbitrary non-square matrices, for time series is presented. All necessary calculations of singular values and both types (left and right) singular vectors are performed on the base of elaborated tensorial approach. It is shown that non parametric SSA can be efficiently used as a universal filter to separate Low and High frequencies components in long signals and time series.

Keywords: Singular Values, Singular vectors, Singular Spectrum Analysis, Tensorial Approximation, Time Series.

1. INTRODUCTION

Separation of Low frequencies components from the High ones is one of the most important problems in signal processing and applied time series analysis. Among others the most usable methods applied to solve the problem are: Butterworth filters; Chebyshev filters; Elliptic filters, Bessel filters [1]. These are based on estimation of pseudo spectrums of analyzed signal. It is well known that this procedures frequently leads to some computational difficulties, which introduce additional errors in finally estimated components. Beside, the methods require detection of cut-off frequencies, which should be done on the base of visual observations of pseudo-spectrums. The latter means that these methods are parametric and efficient usage of them requires predetermination of main structure of mathematical model.

In the article we suggest alternative approach to solution of the separation problem – Singular Spectrum Analysis (SSA). The core of method is Singular Value Decomposition (SVD). Calculation of Singular Values represents independent computational problem, which becomes decisive for long arrays of time series, because of high (sometimes-extremely high!) dimensions of corresponding matrices. The latter limits using of SSA in the field of time series analysis. In [2] a new computational method of calculation of singular values and vectors was considered. The method showed computational simplicity and stability (even for ill-conditioned matrices). It makes usage of SSA for above mentioned problems efficient. We have to underline that SSA belongs to the class of nonparametric statistical methods, so it (unlike the MUSIC and Pisarenko methods[1]) does not require a priori specification of a model of a process. No doubts that this is considerable advantage of SSA.

All computation represented below were performed by means of Singular Values Computation Low-Rank Approximation method elaborated in [2,3].

2. BASIC PART

2.1 Theoretical part

Singular Spectrum Analysis(SSA) Method is based on a new elaborated tensorial approach. That is based on the conception of approximation by low rank tensors and Eckart-Young theorem [4,5].

The latter generates Eckart-Young problem[4] and a best r -rank approximation for tensor of order k . The problem is not solvable in general. But for matrices it was proved as Eckart-Young theorem.

So, by hankelization given any initial time series Y is transferred into a $p \times n$ matrix X of rank $r \leq n \leq p$, and its singular value decomposition, $U\Lambda V'$, with the singular values arranged in decreasing sequence

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \lambda_n \geq 0 ,$$

then there exists a $p \times n$ matrix B of rank s , $s \leq r$, which minimizes the sum of the squared error between the elements of A and the corresponding elements of B when

$$B = U\lambda_s V' ,$$

where the diagonal elements of Λ_s are

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_s > \lambda_{s+1} = \lambda_{s+2} = \dots = \lambda_n = 0.$$

The theorem states that the least squares approximation in s dimensions of a matrix X can be found by replacing the smallest $n-s$ roots of Λ with zeroes and remultiplying $U\Lambda V'$.

From the theorem follows that one can represent factorization of a $K \times L$ matrix X (with rank $r \leq \min(K,L)$) by means of Singular Value Decomposition as

$$X = \sum_{i=1}^r \lambda_i X_i = \sum_{i=1}^r H_i , \tag{1}$$

where X_i – 1-rank matrices, which can be represented as a Kronecker product $X_i = u_i \otimes v_i$ of left u_i and right v_i singular vectors, corresponded to the singular value λ_i (the latter means that both X_i matrices and therefore initial matrix X , are decomposable) and $H_i = \lambda_i X_i$ – also 1-rank matrices. Note that H_i also decomposable, so $H_i = a_i \otimes b_i$, where a_i and b_i are linearly independent vectors. They may be expressed via left u_i and right v_i singular vectors.

$$a_i = \sqrt{\lambda_i} u_i \text{ and } b_i = \sqrt{\lambda_i} v_i .$$

If singular values and both types of singular vectors are known, one may use decomposition (1). Now we are interested in inverse problem: define singular values and both types of singular vectors, using matrix X and decomposition (1). It can be done by means of consequent computation of matrices H_1 , by means of minimization of the sum of the squared errors between the elements of X and the corresponding elements of H_1 . The squared sum of errors can be represented as follows

$$S^2 = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^L (x_{ij} - h_{ij})^2 = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^L (x_{ij} - a_i b_j)^2 .$$

Clear, that it is a function of $(K+L)^2$ unknown variables $a_i^j (i, j = 1, \dots, K)$ and $b_i^j (i, j = 1, \dots, L)$. So, minimization of the S^2 leads to the system of equations

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^L x_{ij} b_j - a_i \sum_{j=1}^L (b_j)^2 &= 0; \quad (i = 1, \dots, K) \\ \sum_{m=1}^K x_{mn} a_m - b_n \sum_{m=1}^K (a_m)^2 &= 0. \quad (n = 1, \dots, L) \end{aligned} \quad (2)$$

Solution of the system gives vectors a and b , which define the best approximation of matrix X by 1-rank matrix H_1 . In fact, the matrix H_1 is the first term in decomposition (1). Then, applying the same procedure to matrix $X_2 = X - H_1$, we are getting the second term H_2 and so on.

Now, there is a problem – how to solve the system (2), because we have already reduced the problem of computation of (1) to the problem of solution of the system (2). Few analysis permits to conclude, that the system can't be solved analytically, so we elaborated numerical approach, which is the core of an algorithm of SVD by means of 1-rank tensors approximation. In [2,3] we represent full algorithm of the system (2) solution and SVD by means of approximation by 1-rank tensors, which is completely based on the above theoretical consideration.

So, the represented algorithm solves the inverse problem defined above: define singular values and both types of singular vectors, using matrix X and decomposition $X = \sum_{i=1}^r \lambda_i X_i = \sum_{i=1}^r H_i$. (3)

Then by using Hankelization process, initial time series Y is restored which is based on matrices H_i , $i=1, \dots, r$. The restored initial time series Y' is the filtered version of the initial time series Y .

Designing traditional filters require first of all determinations of corresponding cut off frequencies which in turn requires investigation of time series Fourier spectrum. But in some time series initial time series can contain trend so one needs to eliminate the trend first. Then next implementation of the filters need usage of mathematically complicated processes and methods. So that the result of filtering finally depends on such kind of personal experiences and opinions. It should be considered as significant disadvantages of the discussed approach.

On the other hand the SSA method from computational point of view is very efficient for filtering. Because the elaborated method filters time series directly without elimination of trend and also eliminates high frequency components without preliminary definition of cut-off frequency. It is very important because to provide filtration process one needs only to run elaborated algorithm and use ready results for purposes of interest. This approach doesn't require usage of mathematically complicated processes and methods which one needs to design and implement Butterworth (or any other) filter.

2.2 Example

We represent usage of Singular Spectrum Analysis (SSA) as a universal filter with the example of a time series of numbers of transactions for 463 daily observations. We also compare the results of applying of SSA to the results of analysis done by means of conventional filter design methods.

The plot is represented in in Figure 1. Visual analysis of the time series permits to conclude easily that it contains the following components: 1. trend which seems linear or slightly non-linear; 2. low-frequency very slow oscillation over this trend; 3. several components of comparatively higher frequency. The latter speaks that if it is necessary to separate these components (maybe not all of them: first and second from the third one, for example etc.) one has to design different type of band- pass filters. Designing such kinds of filter requires first of all determinations of corresponding cut off frequencies which in turn requires investigation of time series Fourier spectrum. But because initial time series contains trend and that is why it is not stationary so one needs to eliminate the trend first. We did it by means of standard procedure of linear regression analysis. Results of which are represented in Table 1. Regression equation of the trend is $y = 0.59 * t + 1396.08$, where $t = 1, \dots, 463$ discrete time movements of observations. The latter permits to eliminate trend by subtraction it from initial time series. The result is shown in the Figure 2. Now we can consider the transformed time series as a stationary one and apply FFT (Fast Fourier Transformation) to analyze spectrum of transformed time series. The resulted spectrum of stationary time series (see Figure 2) represented in Figure 3.

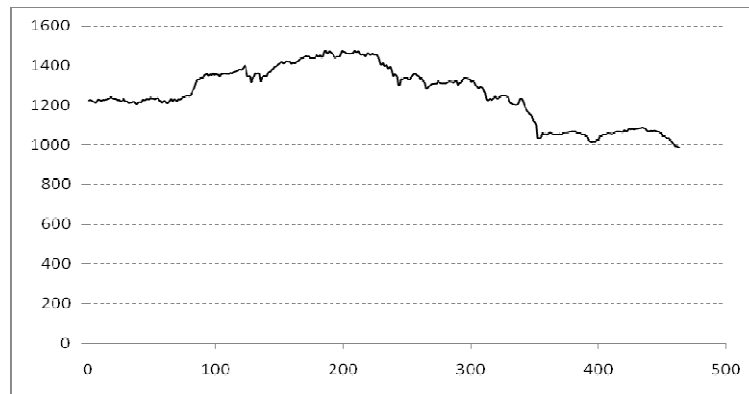


Figure 1. Time series of numbers of transactions (463 daily observations).

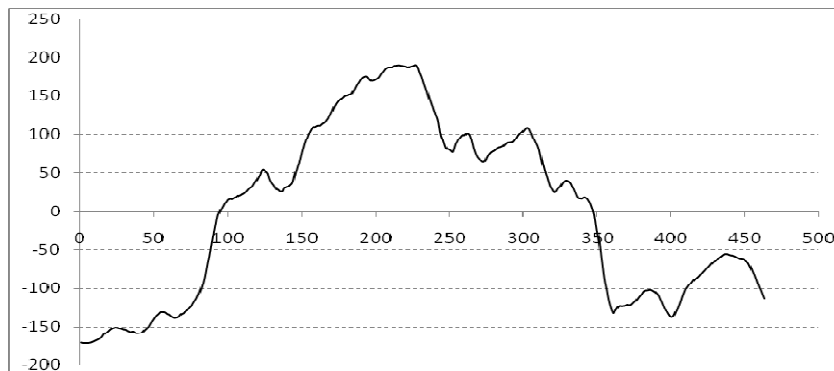


Figure 2. Time series after elimination of linear trend.

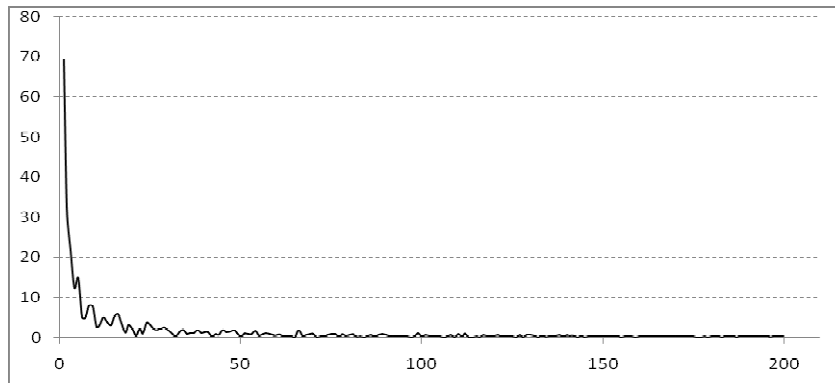


Figure 3. Fourier Spectrum of stationary time series (Figure 2).

Consideration of spectrum shows that the biggest energetic components fall within interval of frequencies $0 \div 20$ Hz (see Figure3). Components containing frequencies more than 25 can be eliminated because they represent noise. It means that cut off frequency for Low-Pass filter should be chosen as $f_c = 20$ Hz. We would like to outline that the latter is typical parametrical approach because choosing of f_c depends on investigator's personal opinion, so that the result of filtering finally depends on such kind of opinion. It should be considered as significant disadvantages of the discussed approach. Also important to outline that we have already eliminated trend, assuming that it is linear which is also typical parametrical approach, because choosing of polynomial order of trend (in general) also depends on researcher's personal opinion and experience. Further, choosing 5-order Butterworth low-pass filter and using MatLab functions mentioned in the beginning of the section we have separated initial time series (see Figure 2 **Error! Reference source not found.**) into low frequency and high frequency components (see Figure 4 and Figure 5).

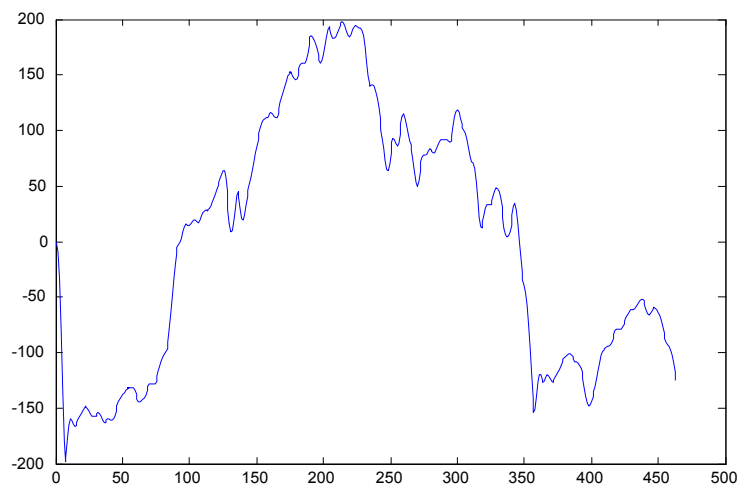


Figure 4. Low frequency component (filtered stationary time series Figure 2).

Below we represent solution of the same problem (filtering of time series Figure 1) by means of SSA based on our singular value and both singular vectors computation method.

In order to construct matrix X we chose the length of the windows $L = 10$. Application of elaborated method gives the decomposition of the initial time series into 10 H matrices and corresponding ten non-zero singular values(see Table 1).

Table 1

Singular	1	2	3	4	5
Values	85467.86	744.77	319.98	203.87	149.47
Cumulative Distribution	0.978	0.987	0.990	0.993	0.994
Singular	6	7	8	9	10
Values	133.31	109.69	92.82	81.32	74.20
Cumulative Distribution	0.996	0.997	0.998	0.999	1.000

Analyzing of data in 1 shows that the first singular value has the biggest weight (97.81% of total) permits to eliminate 9 rest singular values and corresponding matrixes H_i ($i=2,\dots,10$). Using Hankelization process we restored a component of initial time series which is based on matrix H_1 (Figure 5).

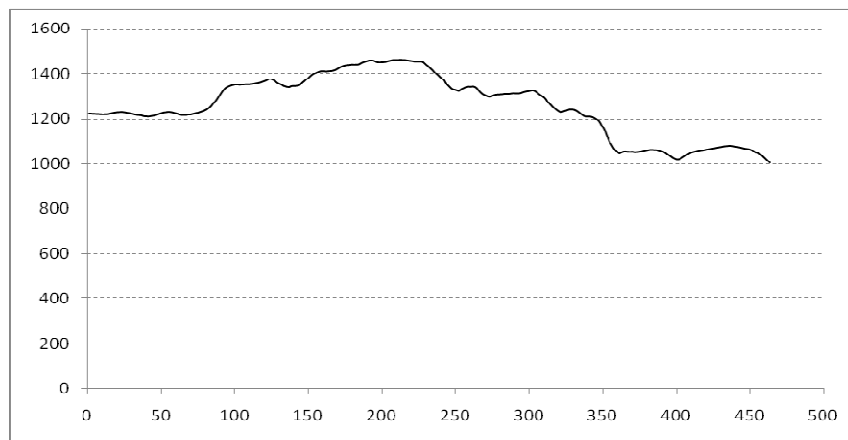


Figure 5. Time series restored by means of SSA on base of matrix H_1 .

We can see that the elaborated method has filtered time series directly without elimination of trend, because obviously that filtered component contains negative trend. Also high frequency component have been eliminated without preliminary definition of cut-off frequency. It is very important because to provide filtration process one needs only to run elaborated program and use ready results for purposes of interest. This approach doesn't require usage of mathematically complicate processes and methods which we used above in other to design and implement Butterworth (or any other) filter.

To check efficiency and accuracy of elaborated method we compare filtered components by means of Butterworth filter (Sum of filtered components and linear trend) to filtered components of Figure 5. According to the investigations of numerical data of the two components, it is very interesting to outline that differences don't exceed in majority of cases 1 percent.

3. CONCLUSION

In this paper we have compared existing filter design methods with SSA method. We showed that SSA method works effectively as a universal filter with some advantages with respect to mentioned methods: SSA method does not require preliminary division of the time series into linear trend and oscillatory component. When we designed Butterworth Low-Pass filter we assumed on the base of visual analysis the time series contains linear trend and then we eliminated it. It was mentioned above that this is aparametric approach when a researcher chooses type of trend. On the contrary non-parametric SSA method does not require the such operations, but gives directly smoothed function of the time series (Figure 5).

REFERENCES

- Butterworth S. 1930. *On the Theory of Filter Amplifiers*. Experimental Wireless and the Wireless Engineer, vol. 7: 536–541.
1. Hayes M. H. 1996. *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*. John Wiley & Sons, Inc.
 2. Mert C., Milnikov A. 2010. Heuristic Analyzing of Time Series Internal Structure, *IBSU Scientific Journal: 4(2), 149-155*.
 3. Mert C., Milnikov A. 2011. Low Rank Tensor Approximation Algorithm in Singular Value Decomposition Problem. *Problems of Mechanics: 1(42), 70-79*.
 4. Mc'Connell A.J. 1963. *Introduction in Tensor Analysis*. M., Physmathgiz.
 5. Postnikov M. M. 1988. *Smooth Varieties. Term III*. M., Nauka.

ბლანტი-დრეკადი ნახევარსიბრტყის დეფორმაციის ფლამანის ამოცანა

ნოდარ მახვილაძე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ბლანტი-დრეკადობის თეორიის ამოცანები განსხვავდება დრეკადი ამოცანებისაგან ფიზიკური დამოკიდებულებით – ჰუკის კანონის მაგივრად ბლანტი-დრეკადი ეწოდება სხეულს, რომლისთვისაც დამოკიდებულება ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის შეიცავს დროს. ასეთი სხეულებისათვის დამახასიათებელია დროის განმავლობაში ძაბვის ცვლა მუდმივი დეფორმაციის დროს – რელაქსაცია, და დეფორმაციის ცვლა მუდმივი ძაბვების შემთხვევაში – ცოცვალობა.

შემოდებულია ბოლცმანის კანონი [1; 2]. ბოლცმანმა შემოიღო მემკვიდრეობითობის თეორია, რომლის თანახმადაც დრეკადი ძალები დამოკიდებულნი არიან არა მარტო ახლად მიღებულ გადაადგილებებზე, არამედ წინამორბედ დეფორმაციებზეც. ეს თეორია აგებულია სუპერპოზიციის პრინციპის საფუძველზე (სხვადასხვა დროს მიღებული დეფორმაციების გაგლეჩა ჯამდება).

ბოლცმანის მეთოდის თანახმად, ბლანტი-დრეკადობის ამოცანის ამოხსნა შეიძლება მივიღოთ იმავე სახის დრეკადი ამოცანის ზუსტი ამოხსნისაგან, თუ დრეკად მუდმივებს შევცვლით შესაბამისი დროის ფუნქციებით.

წინამდებარე ნაშრომში განხილულია ბლანტი-დრეკადობის წრფივი თეორიის ამოცანა, სადაც ვიყენებთ აკადემიკოს ა. ილიუშინის აპროქსიმაციის მეთოდს [1], რომელიც დაფუძნებულია პირველყოფლისა დრეკადობის თეორიის ამოცანის ამოხსნის წარმოდგენაზე პუასონის ν კოეფიციენტის, ან მასთან დაკავშირებული $\omega = \frac{1-2\nu}{1+\nu}$ პარამეტრის საშუალებით რაციონალური ფუნქციის სახით.

დრეკადობის თეორიის ნებისმიერი სტატიკური ამოცანის ზუსტი ამოხსნა (ან მისი აპროქსიმაცია) ნებისმიერი საძებნი S სიდიდისათვის (S შეიძლება იყოს დაძაბულობა, გადაადგილება, მომენტი, სიმრუდე და სხვ.), ყოველთვის შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$S = f + \varphi \cdot \omega + \psi \cdot \frac{1}{\omega} + \sum_n \frac{1}{1 + \beta_n \omega} \cdot \chi_n. \quad (1)$$

აქ f, φ, ψ, χ_n - ცნობილი ფუნქციებია, რომლებიც გამოსახულნი არიან სხეულში ან მის ზედაპირზე მოცემული დატვირთვების, გადაადგილებების და კოორდინატების

საშუალებით და არ არიან დამოკიდებულნი პუასონის ν კოეფიციენტზე და მასთან დაკავშირებულ ω -ზე. β_n – რიცხვითი პარამეტრია, რომელიც განისაზღვრება დრეკადი ამოცანის ამოხსნიდან და არ არის დამოკიდებული ω -ზე.

თუ დავუშვებთ, რომ $S, f, \varphi, \psi, \chi_n$ ფუნქციებში შემავალი მოცემული დატვირთვები და გადაადგილებები წარმოადგენენ დროის ნელა ცვალებად (კვაზისტატიკურ) ფუნქციებს, მაშინ სხეულის მოცულობის დრეკადი ცვლილების შემთხვევაში ვსარგებლობთ ძაბვისა (σ_{ij}) და დეფორმაციის (ε_{ij}) დევიატორებს შორის ბოლცმანის დამოკიდებულებებით

$$\sigma_{ij} = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon_{ij}(\tau), \quad \varepsilon_{ij} = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma_{ij}(\tau), \quad (2)$$

სადაც $R(t)$ და $\Pi(t)$ არიან მასალის რელაქსაციისა და დამყოლობის (მოცულობითი – გრძივი ან განივი ცოცვადობის) ფუნქციები. დამყოლობის ფუნქცია - $\Pi(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_k}$

განისაზღვრება ცოცვადობაზე ცდით, ხოლო, რელაქსაციის ფუნქცია - $R(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_k}$

განისაზღვრება რელაქსაციაზე ცდით. აქ t დაკვირვების დროა, τ - დაკვირვების მომენტის წინარე დრო.

მაკავშირებელი ცოცვადობის ფუნქცია $\beta_n(t) = \frac{1}{1 + \beta_n \omega}$, რომელიც ერთდროულად

ასახავს ნიმუშში ცოცვადობისა და რელაქსაციის პროცესებს, აგრეთვე განისაზღვრება ექსპერიმენტით. შევნიშნავთ, რომ ფუნქცია $\beta_n(t)$ საზოგადოდ არ გამოისახება $\Pi(t)$ და $R(t)$ -ს საშუალებით.

დრეკადი ამოცანის შესაბამისი ბლანტი-დრეკადი იგივე ამოცანის ამოხსნა სხეულში და მის ზედაპირზე მოცემული იმავე დატვირთვებისა და გადაადგილებების შემთხვევაში დაფუძნებულია ბოლცმანის (2) დამოკიდებულებებზე და ვიყენებთ ლაპლას-კარსონის გარდაქმნებს [1, 2] ნამდვილი p პარამეტრით:

$$f^* = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt. \quad (3)$$

ასახვებში იგი ზუსტად ემთხვევა (1) გამოსახულებას:

$$S^* = f^* + \varphi^* \cdot \omega^* + \psi^* \cdot \frac{1}{\omega^*} + \sum_n \frac{1}{1 + \beta_n \omega^*} \chi_n^*, \quad (4)$$

სადაც ვარსკვლავი ნებისმიერ $S, f, \varphi, \psi, \chi_n$ სიდიდისათვის აღნიშნავს მის ასახვას, მაგალითად:

$$S^* = p \int_0^{\infty} e^{-pt} s(x,t) dt \quad \varphi^* = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(x,t) dt,$$

ხოლო ω^* და $\frac{1}{\omega^*}$ სიდიდეები რელაქსაციის $R(t)$ და ცოცვადობის $\Pi(t)$ გულების ასახვას, ანუ უგანზომილებო სიდიდეების ასახვას:

$$\omega(t) = \frac{R(t)}{3B}, \quad \frac{1}{\omega(t)} = \pi(t) = 3B \cdot \Pi(t). \quad (5)$$

$$\text{ანუ} \quad \omega^* = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \omega(t) dt, \quad \frac{1}{\omega^*} = \pi^* = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \pi(t) dt$$

აქ B - მოცულობითი გაფართოების მოდულია, რომელიც დაკავშირებულია გრძივი დრეკადობის E მოდულთან და პუასონის ν კოეფიციენტთან ფორმულით:

$$B = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

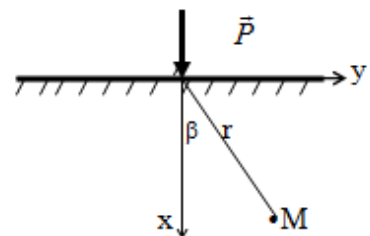
შებრუნებული გარდაქმნების (ანუ ინვერსიის) [1 - 4] შედეგად (4)-დან მიიღება ბლანტი-დრეკადობის შესაბამისი ამოცანის ამოხსნა ორიგინალში, რომელიც საზოგადოდ განისაზღვრება დრეკადი მუდმივების მნიშვნელობებით და შეიცავს დროზე დამოკიდებულ წევრებს შემდეგი სახის ფუნქციებით:

$$\int_0^t \Pi(t-\tau) dP(\tau); \quad \int_0^t R(t-\tau) dP(\tau); \quad \int_0^t g_{\beta}(t-\tau) dP(\tau),$$

მაგალითის სახით განვიხილოთ ბლანტი-დრეკადობის თეორიის ერთი სასაზღვრო ამოცანა - ფლამანის ამოცანა, როდესაც ცნობილია დრეკადობის თეორიის შესაბამისი ამოცანის ზუსტი ამოხსნა.

ამოცანა: განსაზღვრეთ ბლანტი დრეკადი ნახევარსიბრტყის ($x>0$) დეფორმაცია, რომელზეც მოქმედებს $x=0$ საზღვრის (0 წერტილზე) მართობული შეყურსული P ძალა.

ამოხსნა: დრეკადი ნახევარსიბრტყის ამ ამოცანის ამოხსნისას დეფორმაციის კომპონენტებს პოლარულ კოორდინატებში აქვთ ასეთი სახე:



$$U_r = - \frac{2(1-\nu^2)P}{\pi E} \left[\ln \frac{r}{h} \cos \beta + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \beta \sin \beta \right] \quad (7)$$

$$U_{\beta} = \frac{2(1-\nu^2)P}{\pi E} \left\{ \left[\ln \frac{r}{h} + \frac{1}{2(1-\nu)} \right] \sin \beta - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \beta \cos \beta \right\}.$$

აქ, r, β - ნახევარსიბრტყის ნებისმიერი M წერტილის პოლარული კოორდინატებია; h - r -ის მნიშვნელობა $0x$ ღერძის გასწვრივ.

სახლვარზე მდებარე წერტილისათვის ($\beta = \pm \frac{\pi}{2}$; $r = y$):

$$U_r = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)P}{\pi E}; \quad (8)$$

$$U_\beta = \pm \frac{2(1-\nu^2)P}{\pi E} \ln \frac{y}{h} \pm \frac{(1+\nu)P}{\pi E}.$$

ბანვინილოთ პირველი - (7) შემთხვევა: დეფორმაციის კომპონენტები ჩავწერთ ასე:

$$U_r = -\frac{2P}{\pi} \left[\frac{1-\nu^2}{E} \ln \frac{r}{h} \cos\beta + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2E} \beta \sin\beta \right], \quad (9)$$

$$U_\beta = \frac{2P}{\pi} \left[\frac{1-\nu^2}{E} \ln \frac{r}{h} \sin\beta + \frac{1+\nu}{2E} \sin\beta - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2E} \beta \cos\beta \right].$$

თუ გავიხსენებთ აღნიშვნას: $\omega = \frac{1-2\nu}{1+\nu}$, მაშინ $E = \frac{9B\omega}{2(1+\frac{1}{2}\omega)}$. ამიტომ:

$$\frac{1-\nu^2}{E} = \frac{1}{3B} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\omega} + \frac{3}{4} \frac{1}{1+\frac{1}{2}\omega} \right); \quad \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2E} = \frac{1}{4B} \frac{1}{1+\frac{1}{2}\omega}; \quad \frac{1+\nu}{2E} = \frac{1}{6B} \frac{1}{\omega}.$$

(9) ტოლობები ჩაიწერება ასე:

$$U_r = -\frac{2P}{\pi} \left[\frac{1}{6B} \frac{1}{\omega} \ln \frac{r}{h} \cos\beta + \frac{1}{4B} \frac{1}{1+\frac{1}{2}\omega} (\ln \frac{r}{h} \cos\beta + \beta \sin\beta) \right];$$

$$U_\beta = \frac{2P}{\pi} \left[\frac{1}{6B} \frac{1}{\omega} (\ln \frac{r}{h} + 1) \sin\beta + \frac{1}{4B} \frac{1}{1+\frac{1}{2}\omega} (\ln \frac{r}{h} \sin\beta - \beta \cos\beta) \right].$$

თუ აქ გამოვიყენებთ ლაპლას-კარსონის (2) გარდაქმნას, მივიღებთ ბლანტი-დრეკადი ამოცანის ამოხსნას ასახეებში, ხოლო, შემდგომი შებრუნებული გარდაქმნა (ინვერსია) მოგვცემს ნახევარსიბრტყის ნებისმიერ M წერტილში ბლანტი-დრეკადი ამოცანის ამოხსნას ორიგინალში:

$$U_r = -\frac{1}{\pi} \ln \frac{r}{h} \cos\beta \int_0^t \Pi(t-\tau) dP(\tau) - \frac{1}{2B\pi} (\ln \frac{r}{h} \cos\beta + \beta \sin\beta) \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dP(\tau);$$

$$U_\beta = \frac{1}{\pi} (\ln \frac{r}{h} + 1) \sin\beta \int_0^t \Pi(t-\tau) dP(\tau) + \frac{1}{2B\pi} (\ln \frac{r}{h} \sin\beta - \beta \cos\beta) \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dP(\tau).$$

ბანვინილოთ მეორე (8) შემთხვევა: სახლვარზე მდებარე წერტილისათვის ($\beta = \pm \frac{\pi}{2}$; $r = y$): დრეკადი დეფორმაციის კომპონენტებს აქვთ ასეთი სახე:

$$U_r = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)P}{\pi E};$$

$$U_\beta = \pm \frac{2(1-\nu^2)P}{\pi E} \ln \frac{y}{h} \pm \frac{(1+\nu)P}{\pi E}.$$

წინა ამოცანის ამოხსნისას ჩატარებული ოპერაციების მსგავსად ამ დრეკადი ამოცანის ანალოგიური ბლანტი-დრეკადი ნახევარსიბრტყის შესაბამისი ამოცანის ამოხსნას აქვს ასეთი სახე:

$$U_r = -\frac{1}{2B\pi} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dP(\tau);$$

$$U_\beta = \pm \left[\frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{r}{h} + 1 \right) \int_0^t \Pi(t-\tau) dP(\tau) + \frac{3}{2B\pi} \ln \frac{r}{h} \int_0^t g_{1/2}(t-\tau) dP(\tau) \right].$$

ბლანტი-დრეკადი ამ ამოცანების ამოხსნაში რომ მივიღოთ U_r , U_β -ს რიცხვითი მნიშვნელობა სხვადასხვა t და P -სათვის (მაგალითად $P = \text{const}$), საჭიროა ვიცოდეთ $\Pi(t)$ და $g_{1/2}(t)$ ფუნქციებისათვის ცდით მიღებული მნიშვნელობანი. ამ ფუნქციების განსაზღვრის მეთოდი მოცემულია [2,3] შრომაში.

საზოგადოდ, $\Pi(t)$, $R(t)$ და $g_{\beta n}(t)$ ფუნქციების განსასაზღვრად პრაქტიკულად არ არის საჭირო სამი ტიპის ცდის ჩატარება, ვინაიდან, ანალოგიურად დრეკად მუდმივებს შორის დამოკიდებულებებისა, სადაც ნებისმიერი დრეკადი მუდმივი განისაზღვრება დანარჩენების საშუალებით, ბლანტი-დრეკადობის წრფივი თეორიის ამოცანის ამოხსნის განმსაზღვრელი ნებისმიერი ფუნქციაც განისაზღვრება ერთი ან ორი სხვა ფუნქციით [1,2].

მაგალითად, რელაქსაციის $R(t)$ ფუნქციისა და ცოცვადობის $\Pi(t)$ ფუნქციის მოდულები დაკავშირებულები არიან დამოკიდებულებით: $R^*(p) \cdot \Pi^*(p) = 1$, სადაც (3)-ის თანახმად

$$R^* = p \int_0^\infty e^{-pt} R(t) dt, \quad \Pi^* = p \int_0^\infty e^{-pt} \Pi(t) dt,$$

ხოლო ამ ფუნქციების წარმოებულები $R'(t) = E \cdot T(t)$, $\Pi'(t) = \frac{1}{E} \cdot K(t)$, დაკავშირებულია განტოლებით:

$$T(t) - K(t) = \int_0^t K(t-\tau) T(\tau) d\tau \quad (10)$$

სადაც $T(t)$ - რელაქსაციის სიჩქარის ფუნქციაა, $K(t)$ - ცოცვადობის სიჩქარის ფუნქცია. ამასთანავე $R(0) = E$, $\Pi(0) = \frac{1}{E}$. (10) განტოლება საშუალებას იძლევა

ერთ-ერთი ცნობილი ფუნქციით, მაგალითად $T(t)$, განვსაზღვროთ მეორე - $K(t)$. ამ ფუნქციების საშუალებით განისაზღვრება აგრეთვე $g_{\beta}(t)$ ფუნქცია [2, 3].

მაშასადამე, ბლანტი-დრეკადობის წრფივ თეორიაში საკმარისია ცდის ერთი სერია, მაგალითად მხოლოდ ცოცვადობაზე, საიდანაც მიღებული შედეგებით განისაზღვრება ყველა სამი ფუნქცია $\Pi(t)$, $R(t)$, $g_{\beta n}(t)$.

РЕЗЮМЕ

ЗАДАЧА ФЛАМАНА О ДЕФОРМАЦИИ УПРУГО-ВЯЗКОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Н. Г. Махвиладзе

Метода аппроксимации А. Ильюшина применен для решения задачи Фламана о деформации вязко-упругой полуплоскости по точным известным решениям подобных упругих задач. Решение задачи выражено через функцию ползучести $\Pi(t)$ и связанной ползучести $g_{0,5}(t)$.

SUMMARY

FLAMAN'S PROBLEM OF THE DEFORMATION OF THE VISCOELASTIC SEMIPLANE

N.G. Makhviladze

The article deals with the application of approximation method, proposed by A. A. Ilyushin, to the solution of Flaman's problem of the deformation of the viscoelastic semiplane. The method of approximation is applied to the case when the exact solutions of similar elastic problems are known. The solution to the viscoelastic problem is expressed in terms of the function of creep $\Pi(t)$ and coherent creep $g_{0,5}(t)$.

ლიტერატურა

1. Ильюшин А.А. – Метод аппроксимации для расчета конструкций по линейной теории термовязкоупругости. „Механика полимеров“, 1962, N2.
2. Ильюшин А.А., Победря Б.Е.–Основы математической теорий термовязкоупругости. М.1970.
3. Колтунов М.А – Метод определения упруго- вязких характеристик. „Механика полимеров“. №4. 1969.
4. Колтунов М.А. – Ползучесть и релаксация, М. 1976.
5. Ляв А. –Математическая теория упругости. М.- Л. 1935.
6. Махвиладзе Н.Г. – Некоторые задачи Буссинеска и Черугги для вязко-упругих тел, Тр. ТГУ. N 30 (320), 1995. Тбилиси.
7. ბ. მახვილაძე – თანახრად დატვირთული ბლანტი-დრეკადი ფირფიტების ღუნვის ამოცანა. სტუ-ს შრომები, № 1 (447), 2003, თბილისი.

ON THREE LAYER DIFFERENCE SCHEMES FOR SOLVING THE SYSTEMS OF MULTIDIMENSIONAL EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE WITH MIXED DERIVATIVES

Francisco Criado, Malaga university, Malaga, Spain

Tinatín Davitashvili, Tbilisi state university, Tbilisi, Georgia

Hamlet Meladze, St. Andrew the First Called Georgian University, Tbilisi, Georgia

The mixed problem with first order boundary conditions for systems of equations of parabolic type is considered

$$B \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f,$$

where B - positively defined, symmetric and bounded matrix, L - strong elliptic operator with variable coefficients, containing the mixed derivatives, $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)})$, $f = (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)})$ - n -dimensional vectors. Constructed three-layer factorized scheme, whose solution requires no inversion of matrix B . The received algorithms can be effectively used for multiprocessing computing systems. For difference scheme the aprioristic estimation on layer in norm of mesh space $W_2^{(1)}$ is received, on which basis convergence of solution of the difference scheme to the solution of an initial problem is proved.

1. Introduction

As is known, the mathematical formulation of many scientific and engineering problems arise differential equations with partial derivatives of parabolic type. Such problems concern: distribution of heat to the continuous environment, transport processes of substances, diffusion, movement of ground waters, dissipative biological structures, dynamics of power distribution in the hierarchy and etc. [1,2].

The solution of such problems is one of challenges in numerical mathematics and demands, as a rule, a lot of computing resources. One way to reduce the time for solving such problems is the use of parallel computing on multiprocessor systems.

A new quality of the structure of parallel computing systems requires a completely new mathematical framework for solving complex problems on these systems. This base is adequate representation of the tasks in a form accessible to the parallel data processing. In computational mathematics is developed sufficiently large number of such methods. First of all, these are the

methods of splitting complex problems into the simpler systems, the feeding realizations on the parallel processors.

Starting point in the given work is the offered by A.A.Samarskii method of regularization of difference schemes [3,4]. This method opens up great possibilities for constructing economical difference schemes of a given quality, which can be efficiently implemented on parallel computing systems.

In the present work primary attention is paid to the following problems:

1. Getting the economic difference schemes with minimal requirements for a spatial operator. Requires only a strong ellipticity of the spatial operator.
2. Absolute stability at any $\tau < \infty$ (τ - a step on time) and $h < \infty$ (h_α - a step in a direction on x_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$).
3. Application of one-dimensional double-sweep algorithm for solution of received difference equations. These algorithms can be used for parallel computing systems.
4. Proof of convergence of difference schemes with less smoothness of the original system of differential equations, which is achieved by refraining from the local approximation.

Extensive literature is dedicated to the problems of construction of difference splitting schemes. We note several monographs [3,5,6]. In these monographs, one can find an extensive list of works in this direction.

We also mention some works on parallel algorithms for solving parabolic equations [7-11]. Naturally, this list is incomplete.

2. Basic concepts and some auxiliary information

2.1. Let

$$D_p = (0, \ell_1) \times (0, \ell_2) \times \dots \times (0, \ell_p) = \prod_{\alpha=1}^p (0, \ell_\alpha) = \\ = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p), \quad 0 < x_\alpha < \ell_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p\}$$

-- open p -dimensional parallelepiped in p -dimensional Euclid space E_p . Γ - surface of parallelepiped D_p and $\bar{D}_p = D_p \cup \Gamma$ -- is the D_p area's closure.

$G_T = D_p \times (0, T]$ -- cylinder in $(p+1)$ -dimensional Euclid space with basis E_p and (x, t) -- any point in G_T . $\bar{G}_T = \bar{D}_p \times [0, T]$ -- is the closure of the area G_T . $C^{\ell, k}(\bar{G}_T)$ -- the set of continuous in \bar{G}_T functions having in \bar{G}_T continuous derivatives up to order ℓ (inclusive) on x and up to order k (inclusive) on t .

In cylinder \bar{G}_T we introduce the difference grid and the construction of space-time grid in \bar{G}_T is carried out by using one-dimensional grids on the intervals $[0, \ell_\alpha]$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$ and $[0, T]$:

$$\bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \quad N_\alpha h_\alpha = \ell_\alpha\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

$$\omega_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 1, \dots, N_\alpha - 1, \quad N_\alpha h_\alpha = \ell_\alpha\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

The difference grid in parallelepiped \bar{D}_p is constructing in following way:

$$\bar{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^p \bar{\omega}_\alpha = \{x = (i_1 h_1, \dots, i_p h_p) \in \bar{D}_p, \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \quad N_\alpha h_\alpha = \ell_\alpha\}.$$

$$\omega_h = \prod_{\alpha=1}^p \omega_\alpha \text{ -- the set of internal points of difference grid in } D_p.$$

We denote by $\gamma_h = \bar{\omega}_h \setminus \omega_h \equiv \{x \in \Gamma\}$ the set of knots, belonging to the Γ boundary, which are called boundary knots. On interval $[0, T]$ we introduce the difference grid

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, k, \quad k\tau = T\}.$$

Let $\Omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$ be the partial-time grid of internal knots of cylinder G_T and (x, t_j) is any knot of $\Omega_{h\tau}$. $\Gamma_{h\tau} = \gamma_h \times \bar{\omega}_\tau$ be the set of knots of difference grid on lateral surface of the cylinder \bar{G}_T and (x', t_j) is knot, belonging to $\Gamma_{h\tau}$. Then

$$\bar{\Omega}_{h\tau} = \Omega_{h\tau} \cup \Gamma_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$$

is the partial-time grid in \bar{G}_T .

2.2. We will deal with functions of discrete argument, defined on knots of difference grid, called the grid functions.

We will consider a set of grid vector-functions $y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)})$, defined on $\bar{\Omega}_{h\tau}$. For them the symbol $y^{(j)}$ indicates the value of the grid vector-functions in the knots (x, t_j) .

We will use designations:

$$x^{(\pm 1_\alpha)} = (x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha \pm h_\alpha, x_{\alpha+1}, \dots, x_p),$$

$$y^{(\pm 1_\alpha)} = y(x^{(\pm 1_\alpha)}) = (y_1(x^{(\pm 1_\alpha)}), \dots, y_n(x^{(\pm 1_\alpha)})),$$

$$|h|^2 = \sum_{\beta=1}^p h_\beta^2.$$

We enter the difference relations:

$$y_{\bar{x}_\alpha} = \frac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha}, \quad y_{x_\alpha} = \frac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha},$$

$$\left(y_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\beta} = y_{\bar{x}_\alpha x_\beta} = \frac{y^{(-1_\alpha)} - 2y + y^{(+1_\alpha)}}{h_\alpha^2} = \Lambda_\alpha^0 y,$$

$$-\Lambda_\alpha^0 y = A_\alpha^0 y, \quad A^0 = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha^0.$$

For the grid vector-functions defined on $\bar{\Omega}_{h\tau}$, besides the specified designations, we will use still the following:

$$\hat{y} = y(x, t_{j+1}), \quad y = y(x, t_j), \quad \check{y} = y(x, t_{j-1}),$$

$$y_{\hat{t}} = \frac{y - \check{y}}{\tau}, \quad y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \quad y_{\hat{t}t} = \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2}, \quad y_{\hat{t}} = \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau}.$$

2.3. Set of the grid functions, defined on the grid $\bar{\omega}_p$, denoted by H , and its subset, consisting of grid functions, becoming zero (vanishing) on γ_p - through $\overset{\circ}{H}$.

On set $\overset{\circ}{H}$ we introduce the scalar product

$$(y, v) = \sum_{i=1}^n (y^i, v^i),$$

where

$$(y^i, v^i) = \sum_{x \in \omega_p} y^i(x) v^i(x) H, \quad H = \prod_{\alpha=1}^p h_\alpha.$$

It is obvious, that this scalar product induces the norm $\|y\|_0^2 = (y, y)$.

Denote by $\omega_p^{+\alpha} = \omega_p \cup \gamma_\alpha^+$, where γ_α^+ -- set of knots of γ_p border, at which $x_\alpha = l_\alpha$. $\gamma_{\alpha\beta}^+$ ($\alpha \neq \beta$) -- set of knots of γ_p border, at which $x_\alpha = l_\alpha$, $x_\beta = l_\beta$ and etc. Similarly, we will designate through γ_α^- -- set of knots of γ_p border, at which $x_\alpha = 0$ and etc.

We introduce the notation $\omega_p^+ = \omega_p \cup \gamma_{1,2,\dots,p}^+$. We also need the scalar product:

$$(y, v]_\alpha = \sum_{i=1}^n (y^i, v^i] \quad (y^i, v^i] = \sum_{x \in \omega_p^+} y^i(x) v^i(x) H.$$

Let's enter the mesh space of Sobolev $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\omega_p)$, consisting the functions from set $\overset{\circ}{H}$. The norm in this space is given by the following equality

$$\|u\|_1^2 = \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^{(1)}}^2 = \sum_{\alpha=1}^p \|u_{\bar{x}_\alpha}\|_0^2, \quad \|u_{\bar{x}_\alpha}\|_0^2 = \int_{\omega_p} (u_{\bar{x}_\alpha})^2 dx. \quad (1)$$

Note that $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}$ -- is full Hilbert space under the norm (1).

2.4. Let A -- the linear self-conjugate operator in Hilbert space H and $A > 0$. We define a new scalar product

$$(y, v)_A = (Ay, v).$$

By this definition H is transformed into a new Hilbert space, which we denote by H_A . Norm in the H_A will be denoted by $\|\cdot\|_A$:

$$\|u\|_A^2 = (Au, u).$$

3. The statement of problem

In cylinder \bar{G}_T we considered the following problem for system of equations of parabolic type with mixed derivatives:

Let's find continuous solution of system of the

Find a continuous solution in \bar{G}_T of the system of equations

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(x, t) \frac{\partial u^{(j)}}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha, \beta=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(K_{\alpha, \beta}^{i, j}(x, t) \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x_\beta} \right) + f^i(x, t), \quad (2)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

which satisfies the boundary conditions

$$u^{(i)}(x', t) = g^{(i)}(x', t), \quad \text{when } x' \in \Gamma \times [0, T] \quad (3)$$

and initial conditions

$$u^{(i)}(x, 0) = u_0^{(i)}(x), \quad \text{when } x \in \bar{D}_p, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

We assume that the following conditions are fulfilled:

I. Coefficients $K_{\alpha, \beta}^{i, j}(x, t)$ are Lipschitz-continuous with respect to t . Assume also, that matrixes from coefficients of the spatial operator $K_{\alpha\beta} = \left(K_{\alpha, \beta}^{i, j} \right)_{i, j=1}^n$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p$) are symmetric and that

the problem (2)-(4) has the unique solution $u \equiv u(x, t)$, continuous in \overline{G}_T and differentiable necessary number of times.

II. Spatial operator of system of equations (2) is the strong-elliptic, so that for any $t \in [0, T]$ the following inequality is true

$$\nu_1 \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=1}^n (\xi_{\alpha}^i)^2 \leq \sum_{\alpha, \beta}^{1:p} \sum_{i, j}^{1:n} K_{\alpha\beta}^{ij} \xi_{\beta}^j \xi_{\alpha}^i \leq \nu_2 \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=1}^n (\xi_{\alpha}^i)^2, \quad (5)$$

where $\{\xi_{\alpha}^i\}$ -- any real numbers, ν_1 and ν_2 -- positive constants.

III. Matrix $B = (b_{ij})$ positive-defined, symmetric and bounded

$$\|B\| \leq \nu_3, \quad B \geq \delta E,$$

where ν_3, δ -- positive constants and E - unit matrix.

4. Three-layer difference scheme for problem (2)-(4)

4.1. For problem (2)-(4) we consider three-layer difference scheme, which order of approximation in a class $C^{4,2}(\overline{G}_T)$ of solutions (2) is a quantity $O(\tau + |h|^2)$:

$$By_{\bar{t}} + \tau^2 Ry_{\bar{t}\bar{t}} + Ay = f, \quad (x, t) \in \Omega_{h\tau}, \quad (6)$$

where $y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)})$ - n -dimensional vector,

$$Ay = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta}^{1:p} \left[\left(K_{\alpha\beta}(x, t) y_{\bar{x}_{\beta}} \right)_{x_{\alpha}} + \left(K_{\alpha\beta}(x, t) y_{x_{\beta}} \right)_{\bar{x}_{\alpha}} \right], \quad (7)$$

R - operator-regularizer, the choice of which provides the absolute stability of difference scheme (6).

The vector function $y(x, t)$ satisfies the following boundary and initial conditions:

$$\left. \begin{array}{l} y(x', t) = g(x', t), \quad \text{если } x' \in \Gamma_{h\tau} \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad y(x, \tau) = u_1(x) \end{array} \right\}, \quad (8)$$

where the second initial condition on the layer $t = \tau$ can be approximated, for example, believing that $u_1(x) = u_0(x)$. The approximation error in this case is quantity of order $O(\tau)$.

We write the difference scheme (6) in canonical form [3]:

$$By_{\bar{t}} + \tau^2 \left(R - \frac{1}{2\tau} B \right) y_{\bar{t}\bar{t}} + Ay = f. \quad (9)$$

In work [4] is proved the fairness of following relations

$$\nu_1 (A^0 y, y) \leq (Ay, y) \leq \nu_2 (A^0 y, y),$$

or

$$\nu_1 A^0 \leq A \leq \nu_2 A^0$$

for any vector $y \in H_0$, where the operator A^0 is defined above, in 2.2.

Consequently, the operators A and A^0 in H_0 are energetically equivalent with constants ν_1 and ν_2 .

In paper [3] is proved, that the following three layer difference scheme

$$\begin{aligned} B y_{\bar{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + A y &= \varphi(t), \quad (x, t) \in \Omega_{h\tau}, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1, \\ 0 < t = n\tau < t_0, \quad n &= 1, 2, \dots, n_0 - 1, \quad t_0 = n_0\tau, \end{aligned}$$

is absolutely stable with respect to initial data and on the right side, provided that the given vectors y_0 and y_1 are the arbitrary vectors of finite-dimensional space H (H - Hilbert space), $\varphi(t)$ - given arbitrary abstract function, $t \in \bar{\omega}_\tau$, A, B, R are linear operators on H . In addition,

$$A = A(t) = A^*(t) > 0, \quad R = R(t) = R^*(t) > 0 \text{ - Lipschitz-continuous in } t,$$

$$B = B(t) > \delta E \text{ (where } \delta \text{ is a positive constant, and } E \text{ - identity operator),}$$

$$R(t) = \frac{1+\varepsilon}{4} A(t) \text{ for all } 0 < t = n\tau < t_0 \text{ (where } \varepsilon = \text{const does not depend on } \tau \text{ and } h \text{)}.$$

Based on this result we can conclude that the difference scheme (9) with regularizer

$$R = \sigma A^0 + \frac{\nu_3}{2\tau} E, \tag{10}$$

at $\sigma \geq \frac{1+\varepsilon}{4} \nu_2$ ($0 < \varepsilon \leq 1$) is absolutely stable in space H_0 (stable with respect to initial data and on the right part). So, we will assume that operator R is defined by means of equality (10).

4.2. Proceed to the construction of the economic factorized difference scheme, considering the scheme (6) as the initial.

We write the difference scheme (6) as follows:

$$B y_{\bar{t}} + \frac{\nu_3 \tau}{2} (E + \tau R^0) y_{\bar{t}t} + A y = f, \tag{11}$$

where

$$R^0 = \bar{\sigma} A^0 = \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha^0, \quad R_\alpha^0 = \bar{\sigma} A_\alpha^0, \quad \bar{\sigma} = \frac{2\sigma}{\nu_3}.$$

Equation (11) can be written as follows:

$$\frac{\nu_3 \tau}{2} (E + \tau R^0) y_{\bar{t}t} = f - A y - B y_{\bar{t}}. \tag{12}$$

Replacing the operator $E + \tau R^0 = E + \tau \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha^0$ with the factorized operator $\prod_{\alpha=1}^p (E + \tau R_\alpha^0)$, we receive the three-layer factorized scheme

$$\frac{\nu_3 \tau}{2} \prod_{\alpha=1}^p (E + \tau R_\alpha^0) y_{\bar{t}t} = f - Ay - By_{\bar{t}} . \quad (13)$$

We use the equality

$$\prod_{\alpha=1}^p (E + \tau R_\alpha^0) = E + \tau \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha^0 + \tau^2 Q_p ,$$

where

$$Q_p = \sum_{\alpha < \beta} R_\alpha^0 R_\beta^0 + \tau \sum_{\alpha < \beta < \gamma} R_\alpha^0 R_\beta^0 R_\gamma^0 + \dots + \tau^{p-2} \prod_{\alpha=1}^p R_\alpha^0 ,$$

then the difference scheme (12) can be written as follows

$$By_{\bar{t}} + \frac{\nu_3 \tau}{2} (E + \tau R^0 + \tau^2 Q_p) y_{\bar{t}t} + Ay = f , \quad (14)$$

or, in a canonical form,

$$By_{\bar{t}} + \tau^2 \tilde{R} y_{\bar{t}t} + Ay = f , \quad (15)$$

where

$$\tilde{R} = \frac{\nu_3}{2} R^0 + \frac{\nu_3}{2\tau} E - \frac{1}{2\tau} B + \frac{\nu_3 \tau}{2} Q_p .$$

It's evident, that if $\sigma \geq \frac{1+\varepsilon}{4} \nu_2$ ($0 < \varepsilon \leq 1$), then $\tilde{R} \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A$ and factorized scheme (15) will be absolutely stable in H_0 .

4.3. Note, that for difference schemes (13) we can construct an efficient numerical algorithm using the decomposition of the operator $\prod_{\alpha=1}^p (E + \tau R_\alpha^0)$.

The difference scheme (13) we rewrite as follows

$$\prod_{\alpha=1}^p B_\alpha y_{\bar{t}t} = F ,$$

where $B_\alpha = E + \tau \bar{\sigma} A_\alpha^0$, $F = \frac{2}{\nu_3 \tau} (f - Ay - By_{\bar{t}})$.

Such record of difference schemes gives the opportunity to construct the following computational algorithm

$$\begin{aligned} B_1 v_{(1)} = F, \quad B_\alpha v_{(\alpha)} = v_{(\alpha-1)} \quad (\alpha = 2, 3, \dots, p), \quad v_{(p)} = y_{tt}, \\ y^{j+1} = \tau^2 v_{(p)} + 2y^j - y^{j-1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

For definition the functions $v_{(\alpha)}$ at $x \in \Gamma_{h\tau}$ it is necessary to use the following formulas:

$$v_{(\alpha)} = B_{\alpha+1} \cdots B_p g_{tt}(x, t) \quad \text{при} \quad x \in \gamma_\alpha^+ \cup \gamma_\alpha^- \cup [0, T]. \quad (17)$$

The obtained problems (16)-(17) can be solved by applying one of the one-dimensional factorization algorithm (Thomas algorithm) [12]. This algorithm is particularly suitable for solving the considered problem in the case, when the function $g(x, t)$ does not depend on t . In this case we have homogeneous boundary conditions for functions $v_{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, p$).

Thus, the original problem (13) splits into several subtasks, each of which can be solved using parallel computing algorithms [13-15].

5. Convergence of difference scheme

5.1. During construction of initial difference scheme (6) we demanded that the solution of system of the differential equations (2) belong to the class $C^{4,2}(\overline{G_T})$. An approximation error of factorized scheme (15) we present in the form $\psi = \psi_0 + \psi_1$, where ψ_0 -- the error of approximation of the original scheme (6), the order of which in the considered class is equal to $O(\tau + |h|^2)$, and $\psi_1 = \tau^3 \frac{V_3}{2} Q_p u_{\bar{t}t}$.

It follows that if $p > 2$ the requirement $\psi_1 = O(\tau + |h|^2)$ imposes additional restrictions on the smoothness of solutions of the system of equations (2). However, the aprioristic estimation and the theorem of convergence in the norm of space $W_2^{(1)}$ can be obtained under weaker restrictions, than the condition of local approximation of the order $O(\tau + |h|^2)$.

5.2. To proof the convergence of factorized scheme (15) we consider the vector function $z = y - u$, $(x, t) \in \overline{\Omega}_{h\tau}$, where u -- the solution of initial problem (2)-(4), and y - the solution of the difference scheme (15), (8).

For grid function z we receive the following problem

$$\left. \begin{aligned} Bz_{\circ} + \tau^2 \tilde{R}z_{\bar{t}t} + Az = \psi, \\ z(0) = 0, \quad z(\tau) = \tau \mu, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

where $\psi = \psi_0 + \psi_1$ -- the error of approximation of difference scheme (15), and $|\mu(x)| \leq v_4 = \text{const}$.

We consider $z = z(t)$ as abstract function of time argument $t \in \bar{\omega}_\tau$ with values in H_0 , where H_0 – set of the vector functions defined on $\bar{\omega}_p$ and equal to zero on border γ_h of the grid $\bar{\omega}_p$.

To obtain a priori estimation it is convenient to split the problem (18) on two tasks:

$$\left. \begin{aligned} Bz_{\circ} + \tau^2 \tilde{R}z_{\bar{t}} + Az &= 0, \\ z(0) &= 0, \quad z(\tau) = \tau \mu, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

and

$$\left. \begin{aligned} Bz_{\circ} + \tau^2 \tilde{R}z_{\bar{t}} + Az &= \psi, \\ z(0) &= 0, \quad z(\tau) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Solution of the problem (18) can be represented as a sum $z = z_1 + z_2$, where z_1 -- solution of the problem (19) and z_2 -- solution of the problem (20). It's evident, that $z_1 \in H_0$ and $z_2 \in H_0$.

5.3. To obtain an a priori estimation we will use the energetic identity corresponding to factorized difference scheme (4.1). We will take the scalar product of both members of the equation (18) on $2\tau z_{\circ} = \tau(z_t + z_{\bar{t}}) = \hat{z} - \check{z}$. Taking into account the form of the operator \tilde{R} and the relation $\tau z_{\bar{t}} = z_t - z_{\bar{t}}$, we will receive:

$$\begin{aligned} & 2\tau \left(Bz_{\circ}, z_{\circ} \right)_t + \tau^2 \left(\left(\frac{\nu_3}{2\tau} E - \frac{1}{2\tau} B \right) (z_t - z_{\bar{t}}), (z_t + z_{\bar{t}}) \right) + \\ & + \tau^2 \left(\left(\frac{\nu_3}{2} R^0 + \frac{\nu_3}{2} \tau Q_p - \frac{1}{2} A \right) (z_t - z_{\bar{t}}), (z_t + z_{\bar{t}}) \right) + \\ & + \frac{1}{2} (A(\hat{z} + \check{z}), \hat{z} - \check{z}) = 2\tau \left(\psi, z_{\circ} \right)_t. \end{aligned}$$

After some simple transformations we obtain

$$\begin{aligned} & 2\tau \left(Bz_{\circ}, z_{\circ} \right)_t + \tau^2 \left(\left(\frac{\nu_3}{2\tau} E - \frac{1}{2\tau} B \right) (z_t - z_{\bar{t}}), z_t + z_{\bar{t}} \right) + \frac{1}{4} (A(\hat{z} + z), \hat{z} + z) + \\ & + \tau^2 \left(\left(\frac{\nu_3}{2} R^0 - \frac{1}{4} A \right) z_t, z_t \right) + \tau^3 \frac{\nu_3}{2} (Q_p z_t, z_t) = \\ & = \frac{1}{4} (A(z + \check{z}), z + \check{z}) + \tau^2 \left(\left(\frac{\nu_3}{2} R^0 - \frac{1}{4} A \right) z_{\bar{t}}, z_{\bar{t}} \right) + \\ & + \tau^3 \frac{\nu_3}{2} (Q_p z_{\bar{t}}, z_{\bar{t}}) + 2\tau \left(\psi, z_{\circ} \right)_t. \end{aligned}$$

The last equality allows us to obtain the energetic identity, which in the case of problem (18) has the form:

$$2\tau \left(B z_{\circ, t}, z_{\circ, t} \right) + \|\hat{z}\|_{(2)}^2 = \|z\|_{(2)}^2 + \tau F + 2\tau \left(\psi, z_{\circ, t} \right), \quad (21)$$

where

$$\|\hat{z}\|_{(2)}^2 = \|z(t+\tau)\|_{(2)}^2 = \frac{1}{4} \|\hat{z} + z\|_A^2 + \tau^2 \left(\left(\frac{\nu_3}{2} R^0 - \frac{1}{4} A \right) z_t, z_t \right) + \tau^3 \frac{\nu_3}{2} \left(Q_p z_t, z_t \right) + \tau^2 \left(\left(\frac{\nu_3}{2\tau} E - \frac{1}{2\tau} B \right) z_t, z_t \right),$$

$$\|z\|_{(2)}^2 = \|z(t)\|_{(2)}^2 = \frac{1}{4} \|z + \bar{z}\|_A^2 + \tau^2 \left(\left(\frac{\nu_3}{2} R^0 - \frac{1}{4} \bar{A} \right) z_{\bar{t}}, z_{\bar{t}} \right) + \tau^3 \frac{\nu_3}{2} \left(Q_p z_{\bar{t}}, z_{\bar{t}} \right) + \tau^2 \left(\left(\frac{\nu_3}{2\tau} E - \frac{1}{2\tau} B \right) z_{\bar{t}}, z_{\bar{t}} \right),$$

$$F = \frac{1}{4} (A_{\bar{t}}(z + \hat{z}), z + \bar{z}) + \tau^2 \left(\left(\frac{\nu_3}{2} R^0 - \frac{1}{4} A \right)_{\bar{t}} z_{\bar{t}}, z_t \right)$$

and $(Q_p)_{\bar{t}} = 0$, as the operator Q_p does not depend from t .

We use the condition of absolute stability of difference scheme in space H_0 , then

$$R = \sigma A^\circ + \frac{\nu_3}{2\tau} E \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A.$$

This condition is valid, if

$$R = \sigma A^\circ + \frac{\nu_3}{2\tau} E \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A \quad \text{or} \quad \frac{\nu_3}{2} R^0 \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A \quad \left(R^0 = \bar{\sigma} A^0, \bar{\sigma} = \frac{2\tau}{\nu_3} \right). \quad (22)$$

The operator $A = A(t)$ is self-conjugate, positive and Lipschitz-continuous with respect to t :

$$A^*(t) = A(t) > 0, \quad (23)$$

$$|(A_t y, y)| \leq \nu_5 |(\bar{A} y, y)| \quad \text{или} \quad |(A y, y)| \leq (1 + \nu_5 \tau) |(\bar{A} y, y), \quad \bar{A} = A(t - \tau),$$

where ν_5 -- the Lipschitz constant for the operator A .

Further, if we use a technique from [16] and relations (22), (23), we obtain the following estimation

$$|F| \leq \nu_5 \|z\|_{(2)}^2.$$

This allows us to write the energetic inequality

$$2\tau \left(B z_{\circ, t}, z_{\circ, t} \right) + \|\hat{z}\|_{(2)}^2 \leq (1 + \nu_5 \tau) \|z\|_{(2)}^2 + 2\tau \left(\psi, z_{\circ, t} \right), \quad (24)$$

based on which we can obtain the desired a priori estimate.

5.4. For further presentation is useful to introduce the following notations:

$$A_\alpha^0 = T_\alpha T_\alpha^* \quad \text{or} \quad A_\alpha^0 u = T_\alpha T_\alpha^* u = u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad T_\alpha u = u_{\bar{x}_\alpha}, \quad T_\alpha^* = u_{x_\alpha},$$

$$\|y\|_{q_2,p}^2 = \sum_{\alpha < \beta}^{1+p} \|T_\alpha T_\beta y\|_0^2, \quad \|y\|_{q_3,p}^2 = \sum_{\alpha < \beta < \gamma}^{1+p} \|T_\alpha T_\beta T_\gamma y\|_0^2, \dots, \quad \|y\|_{q_p,p}^2 = \sum_{\alpha < \beta}^{1+p} \|T_1 T_2 \dots T_p y\|_0^2. \quad (25)$$

Theorem 1. Let, conditions I-III are satisfied, regularizer R is defined by equality (10) and $\sigma \geq \frac{1+\varepsilon}{4} \nu_2$ ($\varepsilon = \text{const} > 0$). Then for the solution z_1 of the problem (19) on any sequence of grids $\overline{\Omega}_{h\tau}$ the aprioristic estimation is fair

$$\|z_1^{j+1}\|_{(2)} \leq M_1 \tau \left\{ \|\mu(x)\|_0^2 + \tau \|\mu(x)\|_{A^0}^2 + \sum_{s=2}^p \tau^s \|\mu(x)\|_{q_{s,p}}^2 \right\}^{1/2}, \quad (26)$$

where $M_1 > 0$ -- the constant number which is not dependent on the grid, and the norms $\|\mu(x)\|_{q_{s,p}}^2$ are defined by equalities (25).

The proof. Spending the reasoning, similar [16] (the theorem 1), we receive the inequality expressing stability of the factorized scheme (19) with respect to initial data

$$\|z_1^{j+1}\|_{(2)} \leq M'_1 \|z(\tau)\|_{(2)}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

where $M'_1 > 0$ -- constant which is not dependent on the mesh.

Let's transform the right part of the given inequality:

$$\begin{aligned} \|z(\tau)\|_{(2)}^2 &= \frac{1}{4} \|\tau \mu(x)\|_A^2 + \left(\left(\frac{\nu_3}{2} R^0 - \frac{1}{4} A \right) \tau \mu(x), \tau \mu(x) \right) + \\ &+ \frac{\tau^3 \nu_3}{2} (Q_p \mu(x), \mu(x)) + \tau^2 \left(\left(\frac{\nu_3}{2\tau} E - \frac{1}{2\tau} B \right) \mu(x), \mu(x) \right) \leq \\ &\leq \frac{\nu_3}{2} \tau^2 (R^0 \mu(x), \mu(x)) + \frac{\tau^3 \nu_3}{2} (Q_p \mu(x), \mu(x)) + \tau \frac{\nu_3}{2} (\mu(x), \mu(x)). \end{aligned}$$

Further, to convert an expression $(Q_p \mu(x), \mu(x))$ we use Green's first difference formula [3], considering that $\mu(x) \in H_0$. From this follows the fairness of inequality (26).

The theorem is proved.

Further is required the following

Lemma. If $a > 0$, $0 < b < \min\left(\frac{1}{T}, 1\right)$, $a = \text{const}$, $b = \text{const}$ and $0 \leq \tau \leq T$, then

$$\frac{1+a\tau}{1-b\tau} \leq 1+k\tau, \quad (27)$$

where

$$k \geq \frac{a+b}{1-b\tau}. \quad (28)$$

Proof. From inequality (27) can be obtained

$$k \geq \frac{a+b}{1-b\tau}.$$

The smallest value of the denominator of this fraction takes at $\tau = T$. Thus, $\max k$ is reached at $\tau = T$, and if k is defined by (28), the inequality (27) will be valid for any $0 < \tau \leq T$.

Theorem 2. Let, conditions I-III are satisfied. In addition, the regularizer R is defined as follows:

$$R = \sigma A_0 + \frac{\nu_3}{2\tau} E,$$

where $\sigma \geq \frac{1+\varepsilon}{4} \nu_2$, $0 < \varepsilon < \min\left(1, \frac{1}{T}\right)$, ε does not depend on the grid. Then on any sequence of grids for the solution z_2 of the problem (20) the aprioristic estimation is fair

$$\|z_2^{j+1}\|_2 \leq M_2 \max_{0 < t' \leq t_j} \|\psi_0(t')\|_0 + M_3 \tau \max_{0 < t' \leq t_j} \left\{ \sum_{s=2}^p \tau^{s-2} \|u_{\bar{t}}(t')\|_{q_{s,p}}^2 \right\}^{1/2}, \quad (29)$$

where $M_2 > 0$, $M_3 > 0$ -- constants, which depends only from $\varepsilon, \nu_1, \nu_2, \nu_5, T$ and area \bar{D}_p .

Proof. We rewrite the energetic inequality (4.9) in a form

$$2\tau \left(Bz_{\circ, z_{\circ}} \right) + \|\hat{z}\|_{(2)}^2 \leq (1 + \nu_5 \tau) \|z\|_{(2)}^2 + 2\tau \left(\psi_0, z_{\circ} \right) + 2\tau \left(\psi_1, z_{\circ} \right). \quad (30)$$

To obtain the aprioristic estimation we transform the expression $2\tau \left(\psi_1, z_{\circ} \right)$. Using the Green's

first difference formula and ε -inequality [3], we receive:

$$\begin{aligned} 2\tau \left(\psi_1, z_{\circ} \right) &= \frac{\nu_3}{2} \tau^4 \left\{ \left(Q_p u_{\bar{t}}, z_t \right) + \left(Q_p u_{\bar{t}}, z_{\bar{t}} \right) \right\} \leq \\ &\leq M_2'(\bar{\sigma}) \frac{\nu_3}{2} \tau^4 \frac{1}{2\varepsilon} \left(\sum_{s=2}^p \tau^{s-2} \|u_{\bar{t}}\|_{q_{s,p}}^2 \right) + \frac{\nu_3}{2} \tau^4 \varepsilon \left\{ \left(Q_p z_t, z_t \right) + \left(Q_p z_{\bar{t}}, z_{\bar{t}} \right) \right\} \leq \\ &\leq M_2'(\bar{\sigma}) \frac{\nu_3}{4\varepsilon} \tau^4 \left(\sum_{s=2}^p \tau^{s-2} \|u_{\bar{t}}\|_{q_{s,p}}^2 \right) + \varepsilon \tau \|\hat{z}\|_{(2)}^2 + \varepsilon \tau \|z\|_{(2)}^2 \leq \\ &\leq M_2'' \tau^3 \left(\sum_{s=2}^p \tau^{s-2} \|u_{\bar{t}}\|_{q_{s,p}}^2 \right) + \varepsilon \tau \|\hat{z}\|_{(2)}^2 + \varepsilon \tau \|z\|_{(2)}^2. \end{aligned} \quad (31)$$

where M_2'' is a constant and not depends on the grid.

On the other hand, the inequality is fair

$$2\tau \left(\psi_0, z_{\circ} \right) \leq 2\tau\delta \left\| z_{\circ} \right\|_0^2 + \frac{\tau}{2\delta} \left\| \psi_0 \right\|_0^2. \quad (32)$$

Substituting estimations (31), (32) in an inequality (30), we receive:

$$(1 - \varepsilon\tau) \left\| \hat{z}_2 \right\|_{(2)}^2 \leq (1 + (\nu_5 + \varepsilon)\tau) \left\| z \right\|_{(2)}^2 + \frac{\tau}{2\delta} \left\| \psi_0 \right\|_0^2 + M_2'' \tau^3 \sum_{s=2}^p \tau^{s-2} \left\| u_{\bar{t}}(t) \right\|_{q_{s,p}}^2. \quad (33)$$

Using Lemma, inequality (33) can be rewritten as follows:

$$\left\| \hat{z}_2 \right\|_{(2)}^2 \leq (1 + \nu_6\tau) \left\| z \right\|_{(2)}^2 + \tau\nu_7 \left\| \psi_0 \right\|_0^2 + \nu_8\tau^3 \sum_{s=2}^p \tau^{s-2} \left\| u_{\bar{t}}(t) \right\|_{q_{s,p}}^2,$$

where ν_6, ν_7, ν_8 -- the positive constants which are not dependent on the grid.

Sum the last inequality by $t' = 2\tau, 3\tau, \dots, T$ and apply the difference analogue of Grönwall's lemma [16], on which basis is obtained a priori estimation (29).

The theorem is proved.

Uniting results of theorems 1 and 2, we will convince that the following theorem is fair

Theorem 3. Let, conditions of the theorem 2 are satisfied. Then, on any sequence of grids $\overline{\Omega}_{h\tau}$ for solution of the problem (18) the aprioristic estimation is fair:

$$\begin{aligned} \left\| z^{j+1} \right\|_{(2)} &\leq M_1 \tau \left\{ \left\| \mu(x) \right\|_0^2 + \tau \left\| \mu(x) \right\|_{A^0}^2 + \sum_{s=2}^p \tau^s \left\| \mu(x) \right\|_{q_{s,p}}^2 \right\}^{1/2} + \\ &+ M_2 \max_{0 < t' \leq t_j} \left\| \psi_0(t') \right\|_0 + M_3 \tau \max_{0 < t' \leq t_j} \left\{ \sum_{s=2}^p \tau^{s-2} \left\| u_{\bar{t}}(t') \right\|_{q_{s,p}}^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

where M_1, M_2, M_3 -- positive constants, which are not depend on the grid.

Considering an estimation $\left\| z^{j+1} \right\|_{(2)} \geq \nu_9 \left\| z^{j+1} \right\|_1$, where $\nu_9 > 0$ -- constant, which is not dependent on grid, on the basis of the theorem 3 it is easily possible to receive an aprioristic estimation for the solution of the problem (18) in space W_2 .⁽¹⁾

Theorem 4. Let, conditions of the theorem 2 are satisfied. Then, on any sequence of meshes $\overline{\Omega}_{h\tau}$ for solution of the problem (18) the aprioristic estimation is fair:

$$\begin{aligned} \left\| z^{j+1} \right\|_{(1)} &\leq M_1' \tau \left\{ \left\| \mu(x) \right\|_0^2 + \tau \left\| \mu(x) \right\|_{A^0}^2 + \sum_{s=2}^p \tau^s \left\| \mu(x) \right\|_{q_{s,p}}^2 \right\}^{1/2} + \\ &+ M_2' \max_{0 < t' \leq t_j} \left\| \psi_0(t') \right\|_0 + M_3' \tau \max_{0 < t' \leq t_j} \left\{ \sum_{s=2}^p \tau^{s-2} \left\| u_{\bar{t}}(t') \right\|_{q_{s,p}}^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

where M'_1, M'_2, M'_3 -- positive constants, which are not depend on mesh.

Theorem 5. Let, conditions of the theorem 2 are satisfied, besides, let solutions of the system of the equations (2) $u \in C^{4,2}$, when $p \leq 4$, and $u \in C^{p,2}$ when $p \geq 4$. Then the solutions of difference problem (15), (8) converge in norm $W_2^{(1)}$ with speed $O(\tau + |h|^2)$ to the solution of the problem (2)-(4).

REFERENCES

1. A.A.Samarskii, A.N.Tikhonov. Equations of Mathematical Physics. Publisher: Dover Pubns, 1990, 766 p.
2. A.P.Mikhailov, A.A.Samarskii. Matematicheskoe modelirovanie: Idei, Metody, Primery (Russian). Publisher: Fiziko-matematicheskaja literatura, 2005, 316 p.
1. (A.P.Mikhailov, A.A.Samarskii. Principles of Mathematical Modeling: Ideas, Methods, Examples. Publisher: CRC Pr-ILIC, Numerical insights, 3, 2002)
2. A.A.Samarskii. The Theory of Difference Schemes. Publisher: Narcel Dekker inc., 2001, 761 p.
3. A.A.Samarskii. About regularization of difference schemes // J.comp.math. and math.phys. (A.A.Самарский. О регуляризации разностных схем. Ж. вычисл. матем. и матем. физ.), 1967,7, №1. pp.62-93.
4. G.I.Marchuk. Numerical Methods and Applications. Publ.: CRC Press, 1994, 288 p.
5. A.A.Samarskii, P.N.Vabishevich, P.P.Matus. Difference Schemes With Operator Factors. Publ.: Kluwer Academic Pub. , 2002, 396 c.
6. Wenrui Hao a; Shaohong Zhu a. Parallel iterative methods for parabolic equations // International Journal of Computer Mathematics, Volume 86, Issue 3 March 2009 , pages 431-440.
7. R. K. Mohanty, D. J. Evans. Alternating group explicit parallel algorithms for the solution of one-space dimensional non-linear singular parabolic equations using an $O(k^2 + h^4)$ difference method // International Journal of Computer Mathematics, Volume 82, Issue 2 February 2005 , pages 203-218.
8. A. Q. M. Khaliq, E. H. Twizell, D. A. Voss. On parallel algorithms for semidiscretized parabolic partial differential equations based on subdiagonal Padé approximations // Numerical Methods for Partial Differential Equations, Volume 9 Issue 2 (March 1993). Pages 107-116 (Published Online: 20 Jun 2005).
9. M. S. A. Taj; E. H. Twizell. A family of third-order parallel splitting methods for parabolic partial differential equations // International Journal of Computer Mathematics, 1029-0265, Volume 67, Issue 3, 1998, Pages 411-433.
10. G. Horton, S. Vandewalle, and P. Worley. An Algorithm with Polylog Parallel Complexity for Solving Parabolic Partial Differential Equations // SIAM J. Sci. Comput. Volume 16, Issue 3, pp. 531-541 (May 1995).

11. A.Quarteroni, R.Sacco, F.Saleri, Numerical Mathematics, Springer, 2007. p.669.
12. J. Verkaik, H.X. Lin. A class of novel parallel algorithms for the solution of tridiagonal systems // Parallel Computing, Volume 31, Issue 6, June 2005, Pages 563-587.
13. Xian-He Sun, Hong Zhang Sun, Lionel M. Ni. Parallel algorithms for solution of tridiagonal systems on multicomputers // Proceedings of the 3rd international conference on Supercomputing, Crete, Greece, 1989. Publisher: ACM, ISBN:0-89791-309-4, pp: 303 – 312.
14. Paul F. Fischer, Franco P. Preparata, John E. Savage. Generalized scans and tri-diagonal systems. Book Series “Lecture Notes in Computer Science”, Publisher: Springer Berlin / Heidelberg. Volume 900/1995, Book “STACS 95”, pp. 168-180.
15. A.A.Samarskii. The Classes of stabilized schemes // J.comp.math. and math.phys. (А.А.Самарский. Классы устойчивых схем. Ж. вычисл. матем. и матем. физ.), 1967,7, №5. pp.1096-1133.

OLUTIONAL MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION OF LAYERED PLATES AGAINST PENETRATION OF STRIKERS

N.V. Banichuk, S.Yu. Ivanova, E.V. Makeev, A.V. Sinitsin

Moscow, Russia

Abstract. The problem of penetration of rigid projectiles into deformable media and the problem of optimal design of protective layered system have significant practical and theoretical interest and studied previously in frame of classical approaches (see, for example , [1-5]) The proposed paper is devoted to optimal design of layered monolithic plates against penetration of strikers having supersonic entry velocities and based on such modern approaches as multiobjective statement of optimization problem and application of genetic algorithm for effective finding of global optimal protection system.

Normal Penetration of Rigid Striker into Deformable Layered Plate at Supersonic Entry Velocities. Dynamical high speed penetration (with entry velocities up to $2 \cdot 10^3$ m/s) of rigid striker into multi-layered monolithic plate is described by Newton's second law (written in the form of first order differential equation) and boundary (initial) condition at $x = 0$, characterizing the entry velocity

$$\frac{M}{2} \frac{dv^2}{dx} = -D, \quad v(0) = v_0 = v_{imp} \quad (1)$$

Here $v = v(x)$ - distribution of velocities, $v_{imp} > 0$ - given impact (entry) velocity, $D > 0$ - resistance of layers depending on layers material parameters, M - mass of the impactor. Considered multilayer structure consists of n homogeneous layers from r_m different materials (n, r_m - given numbers). These materials lie in the intervals $x_i \leq x < x_{i+1}$, corresponding to the layer with number $i+1$, and the axis x is oriented in normal direction to the plate. Its layers are placed between the coordinates

$$\begin{aligned} x_i &\leq x < x_{i+1} = x_i + \Delta_{i+1} \\ x_0 &= 0, \quad x_n = L, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2)$$

where L is the total thickness of the plate composed of n layers and Δ_{i+1} the thickness of $i+1$ layer ($x_i \leq x < x_{i+1}$). Assume that the striker has an axisymmetric shape of total length $l < L$ with a truncated conical shape of the nose part and cylindrical shape of the rear part (Fig. 1). Material properties of the layer with the number $i+1$ ($x_i \leq x < x_{i+1}$) are characterized by two constants: dynamical hardness A_0^{i+1} and material density A_2^{i+1} .

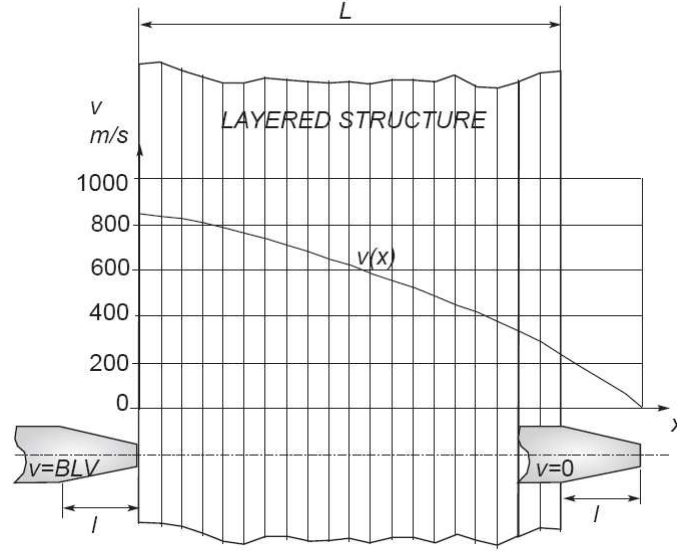


Fig. 1. Penetration process

Dynamics of high-speed penetration of absolute rigid striker is modeled with application of the following formula, relating the resistance force $D(x)$ (leading nose coordinate) with layer's material parameters A_0, A_2 , geometrical parameters Δ_i and also with the shape of the striker $y = y(x)$ and his length l . We have

$$D(x) = D_{nose}(x) + D_{lat}(x) = B_0(x) + B_2(x)v^2 \quad (3)$$

$$B_0(x) = \pi r^2 A_0(x) - 2\pi \int_{x_*}^{x_{**}} A_0(\eta) y y_\eta d\eta \quad (4)$$

$$B_2(x) = \pi r^2 A_2(x) - 2\pi \int_{x_*}^{x_{**}} \frac{A_2(\eta) y y_\eta^3}{1 + y_\eta^2} d\eta \quad (5)$$

Here $r > 0$ - radius of truncated nose part (Fig. 1). Independent variable x in the presented expressions (3)-(5) varies in limits $0 \leq x \leq L+l$ and describes the position of front nose part in the considered coordinate system, while the values x_* and x_{**} characterize the different stages of striker's penetration into the layered plate and sizes of domains of contact interaction between penetrator and layered media. Thus at initial stage (incomplete entre of striker) i.e. for $0 \leq x \leq l$ we have $x_* = 0$, $x_{**} = x$. At the second stage (complete penetration of striker), when $l \leq x \leq L$, we will have $x_* = x-l$ and $x_{**} = x$. At the third stage (incomplete exit of strike) i.e. for $L \leq x \leq L+l$, we assume $x_* = x-l$, $x_{**} = L$.

If the initial (entry) penetration velocity $v(0) = v_{imp}$ is such that

$$\begin{aligned} v(x) &> 0, \quad x \in [0, L+l) \\ (v)_{x=L+l} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

then the impact velocity is called “ballistic limit velocity”, i.e.

$$v(0) = v_{imp} = v_{BLV} \quad (7)$$

This velocity is taken as the main protective characteristic (criteria) of the layered structure.

For efficient evaluation of v_{BLV} it is convenient to introduce a new space variable ξ :

$$\xi = L - l - x, \quad d\xi = -dx \quad (8)$$

and transform the initial value problem (1), (3), (4), (5) to the following form

$$\frac{dv^2}{d\xi} = \beta(\alpha + v^2) \quad (9)$$

$$(v^2)_{\xi=0} = 0 \quad (10)$$

$$\alpha = \frac{B_0}{B_2}, \quad \beta = \frac{2B_2}{M} \quad (11)$$

Thus for given distribution of materials in the layered plate the distribution of strikers velocities and the ballistic limit velocity

$$v_{BLV} = (v)_{\xi=L+l} \quad (12)$$

are found from the solution of Cauchy problem (9)-(12).

Multiobjective Optimization of Layered Plate Structure with Application of Genetic Algorithm. Note that the properties of nongomogeneous layered plate are described by piece-wise constant functions

$$A_0(x) = A_0^{i+1}, \quad A_2(x) = A_2^{i+1}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}) \quad (13)$$

where A_0^{i+1} , A_2^{i+1} some given constants and $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. In what follows we use some discrete piece-wise constant functions $t(x) \in \Lambda_i$:

$$\Lambda_i = \{t: t = t(x), \quad x \in [0, L], \quad t \in \{t_i = i\}\} \quad (14)$$

to characterize the material properties of the layer $(x_i \leq x < x_{i+1})$ with number $i+1$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) by two constants: A_0^{i+1} (dynamical hardness) and A_2^{i+1} (density).

$$A_0^{i+1}, \quad A_2^{i+1} \in \{(A_0)_s, (A_2)_s\}, \quad s = 1, 2, \dots, r_m \quad (15)$$

which correspond to the material with number s . The number of considerate materials r_m is given. This function $t(x)$ will considered as a desired design variable.

In what follows $v_{BLV} > 0$ can be considered as a maximized positive value or, in equivalent form, the negative value $(-v_{BLV})$ will be considered as a minimized functional

$$J_v = -v_{BLV}(t) \quad (16)$$

To evaluate the “cost” or the mass of the designed multi-layered plate structure we will use the following integral functional

$$J_m = S \int_0^L k(t(x)) dx \quad (17)$$

where S - the area of the plate layers and $k = A_2$ in case of mass evaluation. In the frame of considered model, we will investigate the following multiobjective optimization problem of minimization of the vector-functional

$$J_{opt} = J(t_{opt}) = \min_{t \in \Lambda_t} \{J_v, J_m\}^T \quad (18)$$

Here Λ_t - the set of admissible design variables. The min operation in (18) is considered in Pareto sense. It means that

$$t_{opt} = \arg \min_{t \in \Lambda_t} J(t) \quad (19)$$

if there is no other design variable \tilde{t} such that

$$J_i(\tilde{t}) \leq J_i(t_{opt}), \quad i = V, m \quad (20)$$

and at most for one component criteria (scalar function J_j) the rigorous inequality is satisfied

$$J_j(\tilde{t}) < J_j(t_{opt}) \quad (21)$$

In what follows we apply the method of objective weighting that is one of the most effective methods of multiobjective optimization. In accordance with these methods we formulate the preference functional as the sum of single objective functional J_v, J_m singed with weighting factors C_v, C_m :

$$J_C = C_v J_v + C_m J_m \quad (22)$$

$$C_v \geq 0, \quad C_m \geq 0, \quad C_v + C_m = 1 \quad (23)$$

In frame of the method of objective weighting to solve the multiobjective optimization problem (18) and to find the Pareto-optimal solution (Pareto-front), it is required to solve the following substitute problem of minimization of the scalar functional

$$J_C^{opt} = J_C(t_{opt}) = \arg \min_{t \in \Lambda_t} J_C(t) \quad (24)$$

To find solution of multiobjective optimization problem (18), we apply evolutionary optimization algorithm - genetic algorithm [6]. Solution of the problem of the functional $J_C(t)$ minimization is performed for various given values of the problem parameters. For each subinterval $[\xi_i, \xi_{i+1})$ the parameters $(A_0)^{j+1}$ and $(A_2)^{j+1}$ take the values corresponding to the chosen materials. Populations under consideration consist of individuals, represented admissible piece-wise homogeneous plate structure. The number N is supposed to be even and is kept constant in the population renewal process. Each individual (i -number of individual) of the considered population is described by the set of values $t(i, j)$, representing the design variable for corresponding subinterval $\xi_{j-1} \leq \xi < \xi_j$. The best individual, i.e. the set $t(i, j)$ minimizing the preference functional $J_C(t)$ is sought by using the genetic algorithm.

At the first step of the algorithm we perform initialization of N individuals of initial population by assigning random values to each $t(i, j)$ element. Then at the second step we choose some natural number $N^T > N$ and from N^T individuals, selected by the random way, we preserve only one individual having the minimum value of J_C . Similarly we find the second individual and put together the first pair of individuals. All together we compose $N/2$ of such pairs. The third step consists in performing of crossover operator with some crossover probability p_{C0} , ($0 < p_{C0} < 1$) and obtaining of two new individuals from each pair of considered individuals. Obtaining N new individuals gives us new population. The last (fourth) step of the algorithm consists in mutation of obtained new population with probability of mutation p_m . This step is necessary not to stick at the local minimum. Note that, if the best individual is appeared to be worse than the best individual from previous population, then we replace it by old individual. Performing iterations that consist of pointed out four steps we realize the monotonic process of finding global minimum.

Optimal distributions of materials have been determined for the case, when

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = \frac{L}{n} \quad (n = 20) \quad (25)$$

and the minimized weighting function has the form

$$J_C = C_v J_v + C_m J_m = (1 - C_m) J_v + C_m J_m \rightarrow \min_{t \in \Lambda_t} \quad (26)$$

where $0 \leq C_m \leq 1$ and the set Λ_t of admissible piece-wise constant functions t includes corresponding constraints from (14). Parameters of genetic algorithm have been taken as $N = 10$, $N^T = 4$, $p_{C0} = 0.5$, $p_m = 0.05$. Calculation where completed after 500 of generations for

10 different initializations. Characteristics of materials considered as admissible for optimal design of layered plate structure were taken from [7], [8]:

$$s = 1 - \text{aluminum } (A_0)_1 = 350 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, (A_2)_1 = 2765 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3};$$

$$s = 2 - \text{soft steel } (A_0)_2 = 1850 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, (A_2)_2 = 7830 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$$s = 3 - \text{copper } (A_0)_3 = 910 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, (A_2)_3 = 8920 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$$s = 4 - \text{duraluminum } (A_0)_4 = 1330 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, (A_2)_4 = 2765 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

In Fig. 2 optimal materials distributions depending on layer number are presented for $C_m = 0.2$, $L = 0.1$ m. The variant a) is for cylindrical striker of radius $r = 0.005$ m, mass $M = 0.05$ Kg. The first 7 layers are made from copper ($s = 3$, black pieces), the other 13 – soft steel ($s = 2$, gray pieces). Variant b) illustrates the case of conical striker penetration (length of conical part - $l = 0.02$ m, radius of cylindrical part - $R = 0.005$ m, mass - $M = 0.05$ Kg). The first 15 layers – steel ($s = 2$, gray pieces), the other 5 layers – duraluminum ($s = 4$, white pieces). The variant c) corresponds the case of truncated conical striker penetration (length of conical part - $l = 0.02$ m, radius of cylindrical part - $R = 0.005$ m, radius of truncated nose $r = 0.002$ m, mass - $M = 0.05$ Kg). In this case the optimal structure is made from steel.

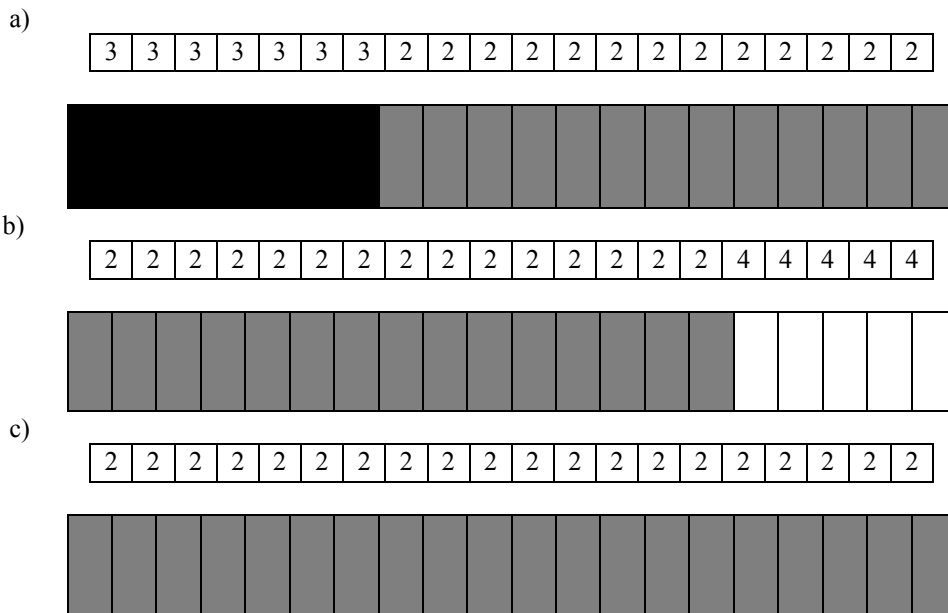


Fig. 2. Optimal layered structures

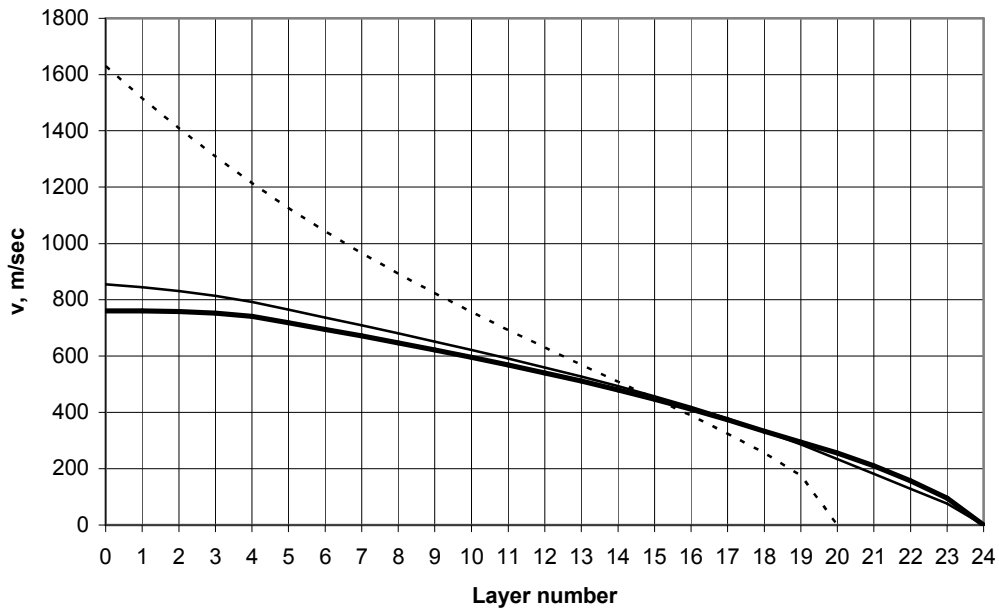


Fig.3. Striker velocity dependence on layer number

In Fig. 3 the dependence of penetration velocity on the layer number is presented for $C_m = 0$. Dashed line corresponds to cylindrical striker, thick solid line – conical striker and hare line – truncated conical impactor. The last four (21-24) layers showed in Fig. 3 are the additional layers (air layers) for realization of calculation process. In Fig. 4 the dependence of minimizing functional J_C on the weight coefficient C_m is presented for cylinder (dashed line), truncated cone (hare line) and thick solid line (cone).

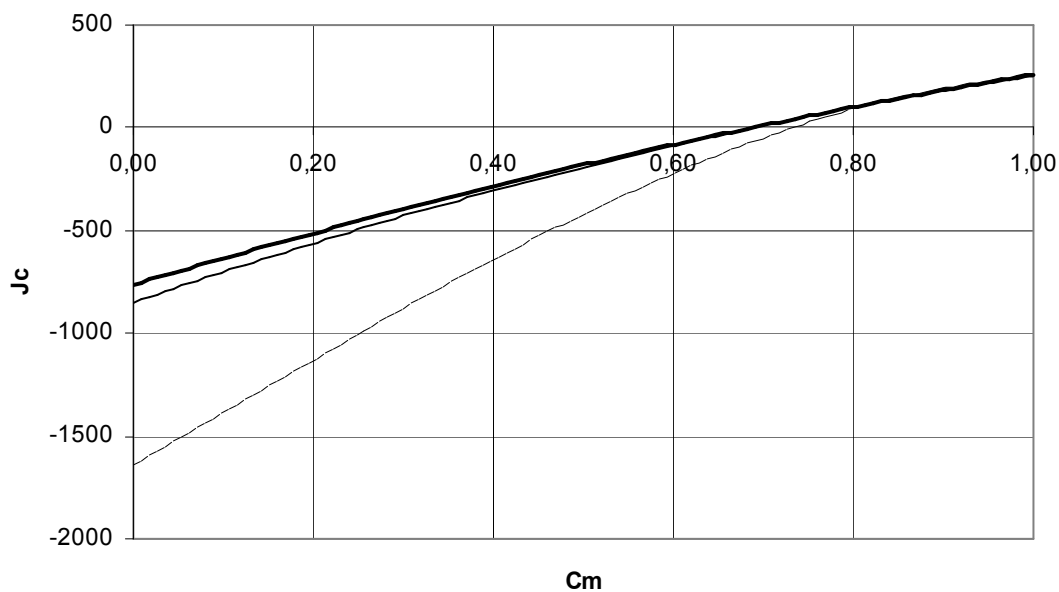


Fig.4. Dependence of minimizing functional J_C on weight coefficient C_m

Acknowledgement. The work is performed under support of RFBR (grant 11-08-00030-a), RAS Program 12, Program of Support of Leading Scientific Schools (grant 2611.2012.1).

REFERENCES

1. Backman M.E., Goldsmith W. The mechanics of penetration of projectiles into targets. *Internat. Engng. Sci.* 1978, Vol 16 , N.1, p. 1-99.
2. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. Shape optimization of rigid 3-D high speed impactor penetrating into concrete shield. *Mechanics based Design of Structures and Machines*, 2008, Vol36, N3, p.491-493
3. Banichuk N.V., Ragnedda F., Serra M. On body shapes providing maximum depth of penetration. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2009, Vol.38, N3, p.491-498.
4. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. *Applied High-Speed Penetration Dynamics*. Dordrecht, The Netherland, Springer, 2006, 357p.
5. Bivin Yu.K., Kolesnikov B.Ya. Determination of mechanical properties of medium by the method of dynamic insertion. *Izv. Akad. Nauk SSSR. MTT*, 1991, N.4, p.155-164.
6. Goldberg D.E. *Genetic Algorithms in Search. Optimization and Machine Learning*. Addison-Westley Publ. Comp..inc. 1989.
7. Vitman F.F., Stepanov V.A. Influence of deformation rate on the force for metals at striker velocities $10^2 - 10^3$ m/sec: In: *Some Problems of Rigid Body Strength*. Izd. Akad. Nauk. SSSR, Moscow-Leningrad, 1959, p.207-221 (in Russian).
8. Vitman F.F., Ioffe B.S. A simple method of determining the dynamical hardness of metals using double cone. *Zavodskaja Laboratorija*, 1948, Vol.14, N.6, p. 727-732 (in Russian).

**НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА УПРУГОЙ ПОЛУПОЛОСЫ,
ДОПУСКАЮЩИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ**

Н.В. Баничук, А.А. Барсук, С.Ю. Иванова, А.В. Сеницын

Москва, Россия и Кишинев, Молдова

Абстракт. Асимптотический анализ применен для решения бигармонической задачи изгиба тонкой упругой пластинки, имеющей в плане форму прямоугольной полуполосы при различных краевых условиях на торцах. Использовано представление рассматриваемой сингулярно возмущенной задачи в виде суммы регулярной части и погранслоя. Приведены новые представления для прогибов и полученные решения. Отметим, что различные решения задач изгиба содержатся в монографиях [1-4].

Изгиб шарнирно опертой вдоль кромок полуполосы поперечной нагрузкой.

Математическая формулировка обсуждаемой задачи об изгибе полуполосы описывается дифференциальным уравнением [1,4]

$$D\Delta^2 w = q, \quad (x \geq 0, 0 \leq y \leq b) \quad (1)$$

граничными условиями опирания кромок при $y = 0, b$

$$(w)_{y=0,b} = (Dw_{yy})_{y=0,b} = 0, \quad x \geq 0 \quad (2)$$

и условиями закрепления торца: шарнирным

$$(w)_{x=0} = (Dw_{xx})_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y \leq b \quad (3)$$

или жестким

$$(w)_{x=0} = (w_x)_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y \leq b \quad (4)$$

Дополнительно учитывается условие ограниченности прогибов

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w(x, y) = C(y) \neq \infty \quad (5)$$

В соответствии с представлениями асимптотического анализа решение $w(x, y)$ краевых задач (1)- (5) представляются в виде суммы регулярной $w_r(x, y)$ и нерегулярной $W^q(x, y)$ частей, т.е.

$$w(x, y) = w_r(x, y) + W^q(x, y) \quad (6)$$

где $w_r(x, y)$ дается выражением

$$w_r(x, y) = \frac{q}{24D} y(b-y)(b^2 + y(b-y)) \quad (7)$$

Нерегулярная часть представляет собой решение краевых задач для уравнений

$$\Delta^2 W^q = \left(\frac{\partial^4 W^q}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W^q}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W^q}{\partial y^4} \right) = 0 \quad (8)$$

с условием ограниченности решения

$$W^q(x, y) = C(y) \neq \infty \quad (9)$$

и краевыми условиями при $y = 0, b$

$$W^q(x, 0) = W_{yy}^q(x, 0) = W^q(x, b) = W_{yy}^q(x, b) = 0 \quad (10)$$

а также с условиями на границе $x = 0$ (торце), отвечающими, соответственно, опиранию и жесткому защемлению

$$W^q(0, y) = -\frac{q}{24D} y(b-y)(b^2 + y(b-y)), \quad W_{xx}^q(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b \quad (11)$$

$$W^q(0, y) = -\frac{q}{24D} y(b-y)(b^2 + y(b-y)), \quad W_x^q(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b \quad (12)$$

Отметим, что поскольку все соотношения сформулированных краевых задач инвариантны относительно операции $y \rightarrow b-y$, то решения $W^q(x, y)$ представляют собой четные относительно переменной y функции $W^q(x, y) \equiv W^q(x, b-y)$. В соответствии с этим, а также с условиями шарнирного опирания кромок решение $W^q(x, y)$ ищется в форме тригонометрического ряда

$$W^q(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n+1}(x) \sin \lambda_{2n+1} y, \quad u_{2n+1}(x) = \frac{2}{b} \int_0^b W^q(x, y) \sin \lambda_{2n+1} y dy \quad (13)$$

Здесь $\lambda_{2n+1} = (2n+1)\pi/b$, а Фурье-компоненты находятся из решения дифференциального уравнения

$$(u_{2n+1})_{xxxx} - 2\lambda_{2n+1}^2 (u_{2n+1})_{xx} + \lambda_{2n+1}^4 u_{2n+1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

с граничными условиями шарнирного опирания торца

$$u_{2n+1}(0) = \frac{2}{b} \int_0^b W^q(0, y) \sin \lambda_{2n+1} y dy = -\frac{4q}{bD\lambda_{2n+1}^5}, \quad ((u_{2n+1})_{xx})_{x=0} = 0, \quad u_{2n+1}(\infty) \neq \infty \quad (15)$$

и с условиями жесткого защемления торца

$$u_{2n+1}(0) = -\frac{4q}{bD\lambda_{2n+1}^5}, \quad ((u_{2n+1})_x)_{x=0} = 0, \quad u_{2n+1}(\infty) \neq \infty \quad (16)$$

Подчиняя общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (14) сформулированным граничным условиям, приходим в результате к представлениям для функции $W^q(x, y)$ соответственно для случаев шарнирного опирания торца и для жесткого защемления. Имеем

$$W^q(x, y) = -\frac{4q}{bD} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_{2n+1}x}{2}\right) e^{-\lambda_{2n+1}x} \frac{\sin \lambda_{2n+1}y}{\lambda_{2n+1}^5} \quad (17)$$

$$W^q(x, y) = -\frac{4q}{bD} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \lambda_{2n+1}x) e^{-\lambda_{2n+1}x} \frac{\sin \lambda_{2n+1}y}{\lambda_{2n+1}^5} \quad (18)$$

Из представлений (17), (18) следует, что нерегулярная часть решения $W^q(x, y)$ представляет собой локализованное в окрестности торца решение. При этом скорость убывания решения определяется значением $\lambda_1 = \pi/b$ и не зависит от условий закрепления торца, а определяется только условиями закрепления кромок полосы.

С использованием введенных в приложении обозначений для сумм с учетом $\alpha \rightarrow x$, $\beta \rightarrow y$, $d \rightarrow b$ представим (17), (18) в эквивалентном виде

$$W^q = -\frac{4q}{bD} \left(S_5(x, y) + \frac{x}{2} S_4(x, y) \right), \quad W^q = -\frac{4q}{bD} (S_5(x, y) + x S_4(x, y)) \quad (19)$$

Применяя конкретные выражения для сумм (см. Приложение), приходим к окончательным представлениям для $W^q(x, y)$ в форме квадратур соответственно для случаев опирания торца и его жесткого защемления:

$$W^q = -\frac{q}{\pi D} \int_0^{\infty} s^2 \left(\frac{s}{3} + \frac{x}{2} \right) \arctan \frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{\sinh \frac{\pi(x+s)}{b}} ds \quad (20)$$

$$W^q = -\frac{q}{\pi D} \int_0^{\infty} s^2 \left(\frac{s}{3} + x \right) \arctan \frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{\sinh \frac{\pi(x+s)}{b}} ds \quad (21)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №11-08-00030а), Программы фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН №12 и Программы поддержки ведущих научных школ (грант №2611.2012.1).

Приложение. (Вычисление тригонометрических сумм). Введем обозначение

$S_n(\alpha, \beta)$ для сумм тригонометрических рядов вида

$$S_n(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\gamma_{2k+1}\alpha} \left(\frac{\sin \gamma_{2k+1}\beta}{\gamma_{2k+1}^n} \right), \quad (П1)$$

$$\alpha > 0, \quad 0 \leq \beta \leq d, \quad \gamma_{2k+1} = \frac{(2k+1)\pi}{d}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для удобства вычислений представим $S_n(\alpha, \beta)$ в эквивалентной форме

$$S_n(\alpha, \beta) = \text{Im} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{2k+1}(\alpha-i\beta)}}{\gamma_{2k+1}^n} \quad (П2)$$

где Im - операция взятия мнимой части, а i - мнимая единица. Отметим вытекающие из (П1), (П2) зависимости между функциями $S_n(\alpha, \beta)$ при $\alpha > 0$

$$S_0(\alpha, \beta) = -\frac{\partial S_1(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 S_2(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} = \dots = (-1)^n \frac{\partial^n S_n(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^n} = \dots \quad (П3)$$

а также обращение в ноль $S_n(\alpha, \beta)$ при $\alpha \rightarrow \infty$, т.е.

$$S_n(\infty, \beta) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (П4)$$

С использованием дифференциальных свойств (П3) и граничных условий (П4) каждая из функций $S_k(\alpha, \beta)$ может быть выражена через функцию $S_0(\alpha, \beta)$ посредством решения следующих дифференциальных уравнений с граничными условиями

$$\frac{\partial^k S_k(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^k} = (-1)^k S_0(\alpha, \beta), \quad S_i(\infty, \beta) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k-1 \quad (П5)$$

Имеем

$$S_k(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\infty} d\alpha_1 \int_{\alpha_1}^{\infty} d\alpha_2 \dots \int_{\alpha_{k-1}}^{\infty} S_0(\tau, \beta) d\tau =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \int_{\alpha}^{\infty} (\tau - \alpha)^{k-1} S_0(\tau, \beta) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots \quad (П6)$$

Следовательно, вычисление сумм $S_n(\alpha, \beta)$ сводится к вычислению суммы

$$S_0(\alpha, \beta) = \text{Im} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\gamma_{2k+1}(\alpha-i\beta)} \quad (П7)$$

Введем обозначение $q = \exp(\pi(\alpha - i\beta)/d)$ и с учетом определения γ_{2k+1} представим сумму $S_0(\alpha, \beta)$ в виде

$$S_0(\alpha, \beta) = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k+1} \quad (\text{П8})$$

Поскольку для $\alpha > 0$ выполняется условие $|q| < 1$, то сумма (П8) представляет собой сумму сходящейся геометрической прогрессии, и, таким образом, будем иметь

$$S_0(\alpha, \beta) = \operatorname{Im} \frac{q}{1-q^2} = \frac{\cosh \frac{\pi\alpha}{d} \sin \frac{\pi\beta}{d}}{2 \left(\sinh^2 \frac{\pi\alpha}{d} + \sin^2 \frac{\pi\beta}{d} \right)} = -\frac{d}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\arctan \frac{\sin \frac{\pi\beta}{d}}{\sinh \frac{\pi\alpha}{d}} \right) \quad (\text{П9})$$

В результате использования (П6), (П9) получаем окончательное выражение для сумм

$$\begin{aligned} S_1(\alpha, \beta) &= \int_{\alpha}^{\infty} S_0(\tau, \beta) d\tau = \frac{d}{2\pi} \arctan \frac{\sin \frac{\pi\beta}{d}}{\sinh \frac{\pi\alpha}{d}} \\ S_k(\alpha, \beta) &= \frac{d}{2\pi(k-2)!} \int_{\alpha}^{\infty} (\tau - \alpha)^{k-2} \arctan \frac{\sin \frac{\pi\beta}{d}}{\sinh \frac{\pi\alpha}{d}} d\tau = \\ &= \frac{d}{2\pi(k-2)!} \int_0^{\infty} s^{k-2} \arctan \frac{\sin \frac{\pi\beta}{d}}{\sinh \frac{\pi(\alpha+s)}{d}} ds \end{aligned} \quad (10)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970, 940с.
2. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970, 512с.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1954, 648с.
4. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966, 636с.

EXPLORATION OF CURRENT DYNAMICAL PROCESSES IN PNEUMATIC SYSTEMS

Z. Bogvelishvili, J. Iosebidge, G. Abramishvili, A. Chkheidze, V. Galashin, A. Gustomiasov

Georgian Technical University, 77 M.Kostava str., 0175, Tbilisi, Georgia

Bauman Moscow State Technical University, 5 Baumanskaia II str., 105005, Moscow, Russia

Abstract: Mathematical model has been elaborated to explore pneumatic equalizing spring suspension dynamics, which represents system of differential equation and describes current processes of thermodynamical, thermal and mass transmission in research pneumatic systems.

Keywords: pneumatic systems, air spring suspension.

INTRODUCTION

Constructive and technological factors have an influence on the transport cars pneumatic springs loading characteristics and the air spring suspension working conditions. Exploitation regime of suspension work elasticity elements leads to important change of working gas. Analytical representation for the dynamic loading characteristics given in the first and second laws of thermodynamics and on the base of transmission of equation make possible to take into consideration these factors influence [1].

BASIC PART

Peculiarities of current thermodynamical processes taking place in pneumatic spring with suspension elements in contrast to the usual pneumatic spring processes, make us to consider: 1) gas mass variable; 2) energy, which leads to the pneumatic springs together with gas or rejected from them. Besides transport cars pneumatic springs improvement is connected with the growth of pressing level and statical gas pressure in pneumatic springs. That is why at the wide range of pressure and temperature changes heat exchange with atmosphere has a considerable influence on the system dynamic. For the description of current thermodynamical processes in transport cars equalizing pneumatic system, calculation energetic method based on thermodynamic equation of mass variable and technical thermodynamics is used to consider the influence of these factors [2,3].

While giving mathematical description of current dynamical processes in the researched air spring suspension the following fundamental assumptions are made: working body is an ideal gas; undulatory processes have no place in connecting tubes; the mass of gas in connecting tubes is smaller than the mass of gas in pneumatic spring volume. It is possible to neglect it. Heat exchange in connecting tube is too little.

To explore pneumatic equalizing air spring suspension dynamic, which represents system of differential equations and describes thermodynamical heat and mass exchange processes in

researched pneumatic system mathematical model was worked out. Analytical solutions of these equations in quadratures were received. As pressing and broadening processes pass in different ways, depending on pneumatic spring loading conditions and directions of air stream between them, two possible cases are considered:

1) $p_1 > p_2$ - corresponding to air direction from pneumatic spring 1 into pneumatic spring 2

$$p_1 = p_{01} \varepsilon_1^k \left(\frac{G_1}{G_{01}} \right)^k \exp(-S_1) \left[1 + A \int_0^t \frac{\alpha_1 H_1 V_1^{k-1}}{G_1^k} \exp(S_1) dt \right]; \quad (1)$$

$$p_2 = p_{02} \varepsilon_2^k \exp(-S_2) \left\{ 1 + B \int_0^t \alpha_2 H_2 V_2^{k-1} \exp(S_2) dt + \int_0^t \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{k-1} G_1^{k-1} \exp(S_2 - S_1) dG_2 \left[D + kB \int_0^t \frac{\alpha_1 H_1 V_1^{k-1}}{G_1^k} \exp(S_1) dt \right] \right\}. \quad (2)$$

2) $p_1 < p_2$ - corresponding to air direction from pneumatic spring 2 into pneumatic spring 1

$$p_1 = p_{01} \varepsilon_1^k \exp(-S_1) \left\{ 1 + E \int_0^t \alpha_1 H_1 V_1^{k-1} \exp(S_1) dt + \int_0^t \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{k-1} G_2^{k-1} \exp(S_1 - S_2) dG_1 \left[F + kE \int_0^t \frac{\alpha_2 H_2 V_2^{k-1}}{G_2^k} \exp(S_2) dt \right] \right\}; \quad (3)$$

$$p_2 = p_{02} \varepsilon_2^k \left(\frac{G_2}{G_{02}} \right)^k \exp(-S_2) \left[1 + L \int_0^t \frac{\alpha_2 H_2 V_2^{k-1}}{G_2^k} \exp(S_2) dt \right]. \quad (4)$$

Variable quantities with index "1" belong to the first pneumatic spring, with index "2" to the second pneumatic spring, index "0" shows, that parameter belongs to pressure and broadening start. p , V , T , G and ε are accordingly gas pressure, volume, temperature, mass and level of pressing; α - coefficient of thermal transmission; R - gas constant; H - surface area of pneumatic spring transmission; T' - temperature of the atmosphere; k - adiabatic exponent; t - time;

$$S_1 = \frac{k-1}{R} \int_0^t \frac{\alpha_1 H_1}{G_1} dt; \quad S_2 = \frac{k-1}{R} \int_0^t \frac{\alpha_2 H_2}{G_2} dt; \quad A = \frac{(k-1)T'}{p_{01}} \left(\frac{G_{01}}{V_{01}} \right)^k; \quad B = \frac{(k-1)T'}{p_{02} V_{02}^k};$$

$$D = \frac{kp_{01}}{p_{02} G_{01}^k} \left(\frac{V_{01}}{V_{02}} \right)^k; \quad E = \frac{(k-1)T'}{p_{01} V_{01}^k}; \quad F = \frac{kp_{02}}{p_{01} G_{02}^k} \left(\frac{V_{02}}{V_{01}} \right)^k; \quad L = \frac{(k-1)T'}{p_{02}} \left(\frac{G_{02}}{V_{02}} \right)^k.$$

Using the calculation dependences for p_1 and p_2 we can define dynamical loading characteristics. Herewith effective area changes dependence $F_{el,2}$ on the transference known.

Analytical dependences for temperatures to the T_1 and T_2 pneumatical spring 1 – and to the pneumatical spring 2 are received:

1) when $p_1 > p_2$:

$$T_1 = T_{01} \varepsilon_1^{k-1} \left(\frac{G_1}{G_{01}} \right)^{k-1} \exp(-S_1) \left[1 + A^* \int_0^t \frac{\alpha_1 H_1 V_1^{k-1}}{G_1^k} \exp(S_1) dt \right]; \quad (5)$$

$$T_{01} = T_{02} \varepsilon_2^{k-1} \frac{G_{02}}{G_2} \exp(-S_2) \left\{ 1 + B^* \int_0^t \alpha_2 H_2 V_2^{k-1} \exp(S_2) dt + \int_0^t \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{k-1} G_1^{k-1} \exp(S_2 - S_1) dG_2 \left[D^* + kB^* \int_0^t \frac{\alpha_1 H_1 V_1^{k-1}}{G_1^k} \exp(S_1) dt \right] \right\}; \quad (6)$$

where

$$A^* = \frac{(k-1)T'}{RT_{01}} \left(\frac{G_{01}}{V_{01}} \right)^{k-1}; \quad B^* = \frac{(k-1)T'}{RT_{02} V_{02}^{k-1} G_{02}}; \quad D^* = \frac{kT_{01}}{T_{02} G_{02} G_{01}^{k-1}} \left(\frac{V_{01}}{V_{02}} \right)^{k-1}.$$

2) when $p_1 < p_2$:

$$T_1 = T_{01} \varepsilon_1^{k-1} \frac{G_{01}}{G_1} \exp(-S_1) \left\{ 1 + E^* \int_0^t \alpha_1 H_1 V_1^{k-1} \exp(S_1) dt + \int_0^t \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{k-1} G_2^{k-1} \exp(S_1 - S_2) dG_1 \left[F^* + kE^* \int_0^t \frac{\alpha_2 H_2 V_2^{k-1}}{G_2^k} \exp(S_2) dt \right] \right\}; \quad (7)$$

$$T_2 = T_{02} \varepsilon_2^{k-1} \left(\frac{G_2}{G_{02}} \right)^{k-1} \exp(-S_2) \left[1 + L^* \int_0^t \frac{\alpha_2 H_2 V_2^{k-1}}{G_2^k} \exp(S_2) dt \right]; \quad (8)$$

where

$$E^* = \frac{(k-1)T'}{RT_{01} V_{01}^{k-1} G_{01}}; \quad F^* = \frac{kT_{02}}{T_{01} G_{01} G_{02}^{k-1}} \left(\frac{V_{02}}{V_{01}} \right)^{k-1}; \quad L^* = \frac{(k-1)T'}{RT_{02}} \left(\frac{G_{02}}{V_{02}} \right)^{k-1}.$$

The Accepted analytical dependences (1)...(8) give the chance to investigate work of a pneumatic system with the connected elastic elements. From these the equation as special cases, it is possible to get the equations describing work at dynamic loadings, systems the transport car with pneumatic elastic elements with additional volume (let's designate an index «'») and with individual elastic elements:

$$p = p_0 \varepsilon^k \left(\frac{G}{G_0} \right)^k \exp(-S^*) \left[1 + B \int_0^t \frac{\alpha H V^{k-1}}{G^k} \exp(S^*) dt \right]; \quad (9)$$

$$p'' = p_0'' \exp(-S'') \left\{ 1 + B'' \int_0^t \alpha'' H'' \exp(S'') dt + \int_0^t \left(\frac{G}{V} \right)^{k-1} \exp(S'' - S^*) dG'' [D'' + k B'' \int_0^t \frac{\alpha'' H V^{k-1}}{G^k} \exp(S^*) dt] \right\}; \quad (10)$$

and

$$p'' = p_0'' \left(\frac{G''}{G_0''} \right)^k \exp(-S'') \left[1 + B''^* \int_0^t \frac{\alpha'' H''}{G''^k} \exp(S'') dt \right]; \quad (11)$$

$$p = p_0 \varepsilon^k \exp(-S^*) \left\{ 1 + B^* \int_0^t \alpha H V^{k-1} \exp(S^*) dt + \int_0^t V^{k-1} G''^{k-1} \exp(S^* - S'') dG [D^* + k B^* \int_0^t \frac{\alpha'' H''}{G''^k} \exp(S'') dt] \right\}; \quad (12)$$

where $S^* = \frac{k-1}{R} \int_0^t \frac{\alpha H}{G} dt$; $S'' = \frac{k-1}{R} \int_0^t \frac{\alpha'' H''}{G''} dt$; $B = \frac{(k-1)T'}{p_0} \left(\frac{G_0}{V_0} \right)^k$; $B'' = \frac{(k-1)T'}{p_0'' V''}$;

$$D'' = \frac{k p_0}{p_0'' V''} \left(\frac{V_0}{G_0} \right)^k$$
; $B''^* = \frac{(k-1)T' G_0^k}{p_0'' V''}$; $B^* = \frac{(k-1)T'}{p_0 V_0^k}$; $D^* = \frac{k V_0 p_0''}{p_0 V_0^k G_0^k}$.

Accordingly for temperatures:

$$T = T_0 \varepsilon^{k-1} \left(\frac{G}{G_0} \right)^{k-1} \exp(-S^*) \left[1 + E \int_0^t \frac{\alpha H V^{k-1}}{G^k} \exp(S^*) dt \right]; \quad (13)$$

$$T'' = T_0'' \frac{G_0''}{G''} \exp(-S'') \left\{ 1 + E'' \int_0^t \alpha'' H'' \exp(S'') dt + \int_0^t \left(\frac{G}{V} \right)^{k-1} \exp(S'' - S^*) dG [F'' + k E'' \int_0^t \frac{\alpha H V^{k-1}}{G^k} \exp(S^*) dt] \right\}; \quad (14)$$

and

$$T = T_0 \varepsilon^{k-1} \frac{G_0}{G} \exp(-S^*) \left\{ 1 + E^* \int_0^t \alpha H V^{k-1} \exp(S^*) dt + \int_0^t V^{k-1} G''^{k-1} \exp(S^* - S'') dG [F^* + k E^* \int_0^t \frac{\alpha'' H''}{G''^k} \exp(S'') dt] \right\}; \quad (15)$$

$$T'' = T_0'' \left(\frac{G''}{G_0''} \right)^{k-1} \exp(-S'') \left[1 + E''^* \int_0^t \frac{\alpha'' H''}{G''^k} \exp(S'') dt \right]; \quad (16)$$

$$\text{where } E = \frac{(k-1)T'}{RT_0} \left(\frac{G_0}{V_0} \right)^{k-1}; \quad E'' = \frac{(k-1)T'}{RT_0''G_0''}; \quad F'' = \frac{kT_0}{T_0''G_0''} \left(\frac{V_0}{G_0} \right)^{k-1};$$

$$E^* = \frac{(k-1)T'}{RT_0V_0^{k-1}G_0}; \quad F^* = \frac{kT_0''}{T_0V_0^{k-1}G_0''^{k-1}}; \quad E''^* = \frac{(k-1)T'G_0''^{k-1}}{RT_0''}.$$

With individual elastic elements:

$$p = p_0 \varepsilon^k \exp(-S) \left[1 + A \int_0^t \alpha H V^{k-1} \exp(S) dt \right]; \quad (17)$$

$$T = T_0 \varepsilon^{k-1} \exp(-S) \left[1 + A^* \int_0^t \alpha H V^{k-1} \exp(S) dt \right]; \quad (18)$$

$$\text{where } S = \frac{k-1}{RG} \int_0^t \alpha H dt; \quad A = \frac{(k-1)T'}{p_0V_0^k}; \quad A^* = \frac{(k-1)T'}{RT_0V_0^{k-1}G_0}.$$

The received analytical dependences give the chance to investigate work at dynamic loadings of vehicles with the connected elastic pneumoelements, with additional volume and with individual pneumatic elastic elements, taking into account the thermodynamic processes of heat and mass transfer.

CONCLUSION

Mathematical model, which describes current thermodynamical processes in spring pneumosystem is true for any spring pneumatic system, in spite of its construction and elastic elements. From this model calculating dependences for air spring suspension with additional capacity and for individual pneumatic spring, are received.

The analysis for gas pressure changes in equalizing spring showed that pressure difference in pneumatic spring depends on the following parameters: statical pressure and pressing level, speed of pistons and connecting tube diameter moving. Analytical dependences helped to ascertain, that pressure changes while pressing in pneumatic spring less depends on the pressure changes in pneumatic spring, in which broadening process takes place. It makes possibility not to take into account ε value change in the pneumatic spring in which broadening process takes place.

Pressure differences in pneumatic equalizing spring were determined by means of analytical expressions, which showed that critical regime of gas stream in air spring suspension is not reached. Maximum pressure differences in air spring suspension little differ from the air spring suspension with additional capacity. It makes possible considerably simplify experimental exploration for the spring with connecting pneumatic spring. As calculations showed, mistake does not exceed 5...8%. With gas statistic pressure decrease the mistake will grow.

REFERENCES

1. Blaine W. Andersen. The Analysis and Design of Pneumatic Systems. – New York, Krieger Pub Co., 2001, 302 p.
2. Bogvelishvili Z., Iosebidge J. Exploration of Current Dynamical Processes in Automobile Pneumatic Suspension. – Information Technologies and Management. Yerevan, 2001, № 2, pp.74-77.
3. Galashin V.A., Bogvelishvili Z.V. Determining load characteristics of vehicle suspension with interconnected pneumatic elements. – Collection of scientific papers MADI "Investigation and calculation of all-terrain vehicles", Moscow, 2003, pp.24-28. (In Russ.).

РЕЗЮМЕ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРОТЕКАЮЩИХ В ПНЕВМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Богвелишвили З.В., Иосебидзе Дж.С., Абрамишвили Г.С., Чхеидзе А.П. Галашин В.А., Густомясов А.Н.

Грузинский технический университет, ул.М.Костава 77, 0175, Тбилиси, Грузия
МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2-я Бауманская ул.5, 105005, Москва, Россия

Разработана математическая модель описывающая работу пневматических систем поддрессирования транспортных машин со связанными упругими элементами, с дополнительными объемами и индивидуальными упругими элементами. Математическая модель представляет собой систему дифференциальных уравнений, описывающих протекающие в пневмоподвесках термодинамические, тепло- и массообменные процессы.

რეზიუმე

პნევმატიკურ სისტემაში მიმდინარე დინამიკური პროცესების ბამოკვლევა

ზ. ბოგველიშვილი, ჯ. იოსებიძე, გ. აბრამიშვილი, ა. ჩხეიძე, ვ. გალაშინი,
ა. გუსტომიასოვი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, მ.კოსტავას ქ.77, 0175, თბილისი,
საქართველო

მოსკოვის ნ.ე.ბაუმანის სახ. სახელმწიფო ტექნიკური უნივერსიტეტი, მე-2 ბაუმანის
ქ.5, 105005, მოსკოვი, რუსეთი

დამუშავებულია მათემატიკური მოდელი, რომელიც აღწერს სატრანსპორტო მანქანების ერთმანეთთან დაკავშირებულ, დამატებით ტევადობებიან და ინდივიდუალურ დრეკად ელემენტებიან შერეობების პნევმატიკური სისტემების მუშაობას. მათემატიკური მოდელი წარმოადგენს დიფერენციალური განტოლებების სისტემას, რომელიც აღწერს პნევმოსაკიდრებში მიმდინარე თერმოდინამიკურ, თბო- და მასის ცვლის პროცესებს.

POSITIONAL CONTROL FOR MULTIDIMENSIONAL DYNAMIC SYSTEM UNDER UNCERTAIN INFLUENCE

V. Ivanova, A. Sinitsyn

A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow

Abstract. The method of constructing a limited positional control of a multidimensional dynamic system with viscous friction, potential forces, a limited uncertain influence (interference) is offered. The built algorithm guarantees the coming of the system into the phase zero in a finite (not fixed) time at any admissible interference and any initial state from the particular bounded region of a phase space. The offered method is based on the use of the function similar to Lyapunov function and on the system decomposition. This way may be useful for control of a space design with viscous-elastic elements or a manipulation robot with viscous friction in hinges, for example.

Keywords: limited positional control, viscous friction, limited uncertain interference, multidimensional mechanical system.

Introduction. A multidimensional mechanical system with viscous friction, potential forces, an uncertain limited interference is considered in a bounded phase movement area. It's required to lead such system into the phase zero in a finite (not fixed) time by means of a limited positional control. The method of control constructing is offered. The built algorithm guarantees the fulfilment of the indicated task at any admissible interference and any initial state from the particular bounded region of a phase space. The presented way of solving may be useful for control of a space design with viscous-elastic elements or a manipulation robot with viscous friction in hinges, for example.

The assumed restrictions on system and movement parameters may be weaker, than the corresponding restrictions in the other methods [1-3] of solving the similar tasks, because inertia terms, viscous friction and a part of potential forces aren't included in an interference and aren't compensated by a control in the present research. It may help to reduce demanded modules of control components or to expand an acceptable area of movement. The offered method is based on the use of the function similar to Lyapunov function. This function helps to apply the system decomposition [4] and to find the multitude of acceptable initial phase values. The presented work generalizes the results of the author [5] on the case of a degenerate matrix of viscous friction.

Statement of the problem. The dynamic system movement, which is described by Lagrange equations

$$M(q)\ddot{q} + B\dot{q} = Q_*(q, \dot{q}) + U(q, \dot{q}) + Q, \quad t \geq 0, \quad (q, \dot{q}) \in \Omega, \quad (q_0, \dot{q}_0) \in \Omega_0, \quad O \in \Omega, \quad (1)$$

is considered, where q - n -dimensional vector of generalized coordinates, Ω - a given bounded phase movement area, Ω_0 - an unknown region of admissible initial values of the phase coordinates (q, \dot{q}) , O - the phase origin; $M(q)$ - a known mass matrix, $M^T = M > 0$ (symmetric), functions $M(q)$, $M^{-1}(q)$ satisfy Lipschitz condition in Ω ; $B \neq 0$ - a known constant matrix, $B^T = B \geq 0$; $Q_*(q, \dot{q})$ - a known continuous function; $U(q, \dot{q})$, $Q = Q(t, q, \dot{q}) = Q(t) = Q(t, q(t), \dot{q}(t))$ - a limited positional control and a bounded uncertain interference,

$$|U_i| \leq U_{0i} = \text{const}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$|Q_i(t)| \leq Q_{0i} = \text{const} = Q_{0i}(\Omega), \quad t \geq 0, \quad (q, \dot{q}) \in \Omega, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

U_{0i} - preassigned constants, Q_{0i} - known values.

It's required to choose the positional algorithm $U(q, \dot{q})$ (2), which leads the system (1) into the phase origin O in a finite (not fixed) time at any interference realization $Q(t)$ (3), and also to find some corresponding area Ω_0 .

Control choice and the arrival into phase zero. Let's compensate (annul) a part of the terms $Q_*(q, \dot{q})$ in (1) by means of some positional control $U^*(q, \dot{q})$.

Designations $U^+(q, \dot{q}) = U - U^*$, $m = \text{rank } B \leq n$, $E_{nm} = \text{diag}\{E_m, 0\}$ - $(n \times n)$ matrix, where E_m - the identity $(m \times m)$ matrix.

After the nondegenerate substitution

$$q = Pz, \quad \det P \neq 0, \quad P = \text{const}, \quad P^T B P = E_{nm}, \quad (4)$$

the equation (1) is multiplied at the left by the matrix $P^{-1}M^{-1}(q)$, the sum

$$U(q, \dot{q}) = U^* + U^+, \quad (5)$$

$$U^*(q, \dot{q}) = -Q_* - M P A P^{-1}q, \quad A = \text{const} = \text{diag} \geq 0, \quad (6)$$

is put into (1), where A - any expediently chosen matrix - the free parameter of the control constructing procedure. The result is

$$\ddot{z} + D_+(t)E_{nm}\dot{z} + Az = w(z, \dot{z}) + \zeta(t, z, \dot{z}), \quad (z, \dot{z}) \in \Omega_Z, \quad (z_0, \dot{z}_0) \in \Omega_{Z_0}, \quad (7)$$

where $D_+(t) = D_+^T = P^{-1}M^{-1}(q(t))P^{-1T} > 0$; Ω_Z, Ω_{Z_0} - the images of the regions Ω, Ω_0 ; (z_0, \dot{z}_0) - the image of the point (q_0, \dot{q}_0) ;

$$w(z, \dot{z}) = P^{-1}M^{-1}U^+, \quad (8)$$

$$\zeta(t) = \zeta(t, z(t), \dot{z}(t)) = P^{-1}M^{-1}Q \quad (9)$$

- the positional control and the uncertain interference.

Designations

$$U_{0i}^* = \sup_{\Omega} |U_i^*(q, \dot{q})|, \quad U_{0i}^+ = U_{0i} - U_{0i}^*, \quad V_{0i}^+ = \sup_{\Omega} |U_i^+(q, \dot{q})|, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Let the inequalities $U_{0i}^+ > 0$, $i = \overline{1, n}$, are true. According to (2), (10) it needs to subject the sought control U^+ to the limitation

$$V_{0i}^+ \leq U_{0i}^+, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

The following relations are gotten from (3), (9)

$$|\zeta_i(t)| \leq \zeta_{0i} = \text{const} = \zeta_{0i}(\Omega), \quad t \geq 0, \quad (z, \dot{z}) \in \Omega_Z, \quad i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

$$\zeta_{0i}(\Omega) = \sup_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left| (P^{-1}M^{-1})_{ij} \right| Q_{0j}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Let's select the sought control w in the kind

$$w_i = w_i(z_i, \dot{z}_i), \quad |w_i| \leq w_{0i} = \text{const}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (14)$$

$$\zeta_{0i} < w_{0i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

According to (8), (11), it needs to subject the sizes w_{0i} to the restriction

$$\sup_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left| (PM)_{ij} \right| w_{0j} \leq U_{0i}^+, \quad i = \overline{1, n}. \quad (16)$$

Let the system of the relations (15), (16), (13) has a solution $(w_{0i}, i = \overline{1, n})$, and let any such solution is fixed.

The block form of (7) is

$$\ddot{x} + D(t)\dot{x} + \Lambda x = u(x, \dot{x}) + \varepsilon(t, z, \dot{z}), \quad (x, \dot{x}) \in \Omega_X, \quad (x_0, \dot{x}_0) \in \Omega_{X0}, \quad (17)$$

$$\ddot{y} + D_1(t)\dot{y} + H y = h(y, \dot{y}) + \xi(t, z, \dot{z}), \quad (18)$$

where x - m -dimensional vector, $(x, y) = z$, $(u, h) = w$, $(\varepsilon, \xi) = \zeta$; $D(t) = D^T = D(z(t)) > 0$ as a diagonal block of the matrix D_+ ; Ω_X - a real movement area in the subspace (x, \dot{x}) ; Ω_{X0} - a projection of the region Ω_{Z0} on the subspace (x, \dot{x}) .

Designations $u_{0i} = w_{0i}$, $i = \overline{1, m}$; $\varepsilon_{0i} = \zeta_{0i}$, $i = \overline{1, m}$; $h_{0i} = w_{0, m+i}$, $i = \overline{1, n-m}$;

$\Delta w_{0i} = w_{0i} - \zeta_{0i}$, $\Delta u_{0i} = u_{0i} - \varepsilon_{0i}$; $\rho_i(z_i) = -(\text{sign } z_i) \sqrt{2 \Delta w_{0i} |z_i|}$, ρ_i - the corresponding curve

$\dot{z}_i = \rho_i(z_i)$ on the phase plane $Oz_i \dot{z}_i$ too;

$$g_i(z_i, \dot{z}_i) = \{-1, \dot{z}_i > \rho_i(z_i); 1, \dot{z}_i < \rho_i(z_i); \text{sign } z_i, \dot{z}_i = \rho_i(z_i)\}; \quad s_i(\dot{z}_i) = \text{sign } \dot{z}_i. \quad (19)$$

Let's choose the relay control $w = (u, h)$ (14), (15),

$$u_i = u_i(x_i, \dot{x}_i) = \Delta u_{0i} g_i(x_i, \dot{x}_i) - \varepsilon_{0i} s_i(\dot{x}_i), \quad i = \overline{1, m}, \quad (20)$$

$$h_i = h_i(y_i, \dot{y}_i) = h_{0i} g_{m+i}(y_i, \dot{y}_i), \quad i = \overline{1, n-m}. \quad (21)$$

The control switches lines are the curves ρ_i , $i = \overline{1, n}$, and the coordinate axis Ox_i , $i = \overline{1, m}$, on the phase planes $Oz_i \dot{z}_i$. It's disregarded a control delay in the paper. Therefore it's accepted that all values $|g_i| \leq 1$, $|s_i| \leq 1$ are possible on the switches lines in sliding regimes. Besides, it should consider the solution (17) - (21) as a continuous curve (z, \dot{z}) , which satisfies the equalities (17), (18) almost everywhere on the axis $t \geq 0$.

Let's introduce the continuous functions

$$S_i(x_i, \dot{x}_i) = (1/2)\dot{x}_i^2 + (1/2)\Lambda_i x_i^2 + \Delta u_{0i}|x_i|, \quad S(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^m S_i(x_i, \dot{x}_i) = S(t) = S(x(t), \dot{x}(t)),$$

$$S(x, \dot{x}) > 0 \text{ out of the point } x = \dot{x} = 0, \quad S(x, \dot{x}) \rightarrow \infty \text{ at } |x| + |\dot{x}| \rightarrow \infty.$$

The function $S(t)$ doesn't increase on any trajectory (17) - (21), (12), because

$$S(t) \leq S(\tau) - \int_{\tau}^t (D(q)\dot{x} \cdot \dot{x})|_s ds, \quad 0 \leq \tau \leq t, \quad (22)$$

where $(D\dot{x} \cdot \dot{x})$ - the scalar multiplication. This permits to select the set Ω_{Z_0} (7) in the kind

$$\Omega_{Z_0} = \overline{\Phi} \subseteq \Omega_Z, \quad \Phi = \cup \{(z(t), \dot{z}(t)), t \geq 0\}, \quad (23)$$

where $\overline{\Phi}$ - the closure of the set Φ , Φ - the union of all trajectories (z, \dot{z}) (17) - (21) at any realizations $\zeta(t)$ (12) with any beginnings from the multitude

$$\{(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega_{X_0}, y_0 = \dot{y}_0 = 0\}, \quad (24)$$

Ω_{X_0} (17), in turn, is chosen in the kind

$$\Omega_{X_0} = \Omega_X = \{S(x, \dot{x}) \leq S_* = \text{const}\}. \quad (25)$$

Such set $\Omega_{Z_0} \subseteq \Omega_Z$ exists, because the real area of the movement (17) - (21), (12) tightens into the point O at $S_* \rightarrow 0$ (25) [1]-[4] and coincides with Ω_{Z_0} at enough small values S_* in accordance with constructing.

So, any trajectory with a beginning in $\Omega_{Z_0} = \overline{\Phi} \subseteq \Omega_Z$ can't go from Ω_{Z_0} .

The consequence from (22) is the property

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{D(q(t))\dot{x}(t)\} = 0$$

[5] on any trajectory (17) - (21), (12). This property allows to decompose [4] the subsystem (17), (20), (12) into the one-dimensional independent equations after an enough big moment t_* , depending on a trajectory.

That to provide the coming of the decomposed subsystem (17), (20), (12), $t \geq t_*$, into the point $x = \dot{x} = 0$, it needs to enter the additional restriction on system and movement parameters

$$\varepsilon_{0i} < u_{0i}/3, \quad i = \overline{1, m}, \quad (26)$$

along with (15), (16), i.e. let the relations system (15), (16), (26), (13) has a solution $(w_{0i}, i = \overline{1, n})$, and let any such solution is fixed. Then the trajectory (x, \dot{x}) of the decomposed subsystem arrives into the point $x = \dot{x} = 0$ in a finite time ΔT , i.e. $x(t) = \dot{x}(t) = 0$ at $t \geq t_* + \Delta T$.

The friction disappears in (18) at $t \geq t_* + \Delta T$, consequently, the trajectory (y, \dot{y}) (18), (21), (12) comes into the point $y = \dot{y} = 0$ in a finite time too [1]-[4].

So, the system (17) - (21), (12) with a beginning in the built region Ω_{Z_0} (23) - (25) will arrive into the phase origin O in a finite time.

The formula of the corresponding positional control U (1), (2)

$$U(q, \dot{q}) = -Q_* - M P A P^{-1} q + U^+, \quad U^+(q, \dot{q}) = M P w(P^{-1} q, P^{-1} \dot{q}), \quad (27)$$

is gotten from (4) - (6), (8), where w - the relay algorithm (20), (21), (15), (16), (26), (13).

Example of constructing the solution. The horizontal movement of a two-link manipulation robot is considered. The design parameters and the limits on the controlling moments coincide with the data in the example from [2]. But the viscous friction in both hinges and the external limited uncertainty Q are added into the system. The assumed numerical data satisfy the relations $Q_{0i}/U_{0i} \leq 1/10$, $i = \overline{1, 2}$, where U_{0i} , Q_{0i} - the constants from (2), (3). The parameters of the procedure of constructing the control $w = u$ (20) were chosen on purpose to provide the comparatively simple form and the maximum sizes of the corresponding set $G = \Omega_0 \cap \{\dot{q} = 0\}$, where q - the relative angles of the rotation of the manipulator links, $\Omega_0 = \Omega = \{S \leq \text{const}\}$. The result is $G = \{|q_i| \leq 1,5 \text{ rad}, i = \overline{1, 2}; \dot{q} = 0\}$.

Conclusions. The limited positional control constructing procedure for a multidimensional dynamic system with viscous friction, potential forces, an uncertain limited interference is offered. It's proved that the built control (27) guarantees the impossibility of the system exit out of the given bounded phase movement area and the arrival of the system into the phase zero in a finite (not

fixed) time at any admissible interference and any initial state from the built particular bounded region (23) - (25) of a phase space. The presented work generalizes the results of the author [5] on the case of a degenerate matrix of viscous friction. The assumed restrictions on system and movement parameters may be weaker, than the corresponding restrictions in the other methods [1-3] of solving the similar tasks, because inertia terms, viscous friction and a part of potential forces aren't included in an interference and aren't compensated by a control in the given research. Therefore the presented way of solving may help to reduce demanded modules of control components or to expand an acceptable area of movement and may be useful for control of a space design with viscous-elastic elements or a manipulation robot with viscous friction in hinges, for example.

The given method of leading the mechanical system into the point O is offered for the case, when the dissipative matrix block $D(t)$ (17) is nondiagonal, $m \geq 2$. If $D(t)$ is diagonal, the presented method isn't necessary and the ways [1]-[4] should be implemented for positional control constructing.

Acknowledgement. The paper is supported by RFBR (grant 11-08-00030a).

REFERENCES

1. Chernousko F.L. Decomposition and synthesis of control in dynamical systems. Soviet J. of Computer and Systems Sciences **29(5)**, p. 126--144, 1991.
2. Chernousko F.L., Ananievski I.M., Reshmin S.A. Control of Nonlinear Dynamical Systems. Methods and Applications. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.
3. Krasovskii N.N. Game-theoretic Problems on the Encounter of Motions. Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
4. Pyatnitskiy Ye.S. A decoupling principle in control of mechanical systems. Reports of the Russian Academy of Sciences **300(2)**, p. 300--303, 1988 (in Russian).
5. Sokolov B.N. Constrained positional control of a mechanical system near an equilibrium. Mechanics of Solids. A J. of Russian Academy of Sciences **41(4)**, p. 83--86, 2006.

**სივრცითი, არამუშა რხევის გავლენა
ფხვიერი ტვირთის ვიბრაციულ მოძრაობაზე**

გ. ზვიდაური, გ. გოგია, მ. ჭელიძე, გ. თუმანიშვილი, თ. ნადირაძე

**საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
მანქანათა მექანიკის ინსტიტუტი**

რეზიუმე

განხილულია ვიბრომანქანაში არამუშა რხევების აღმოცენების მიზეზები; შედგენილია დატვირთული რეზონანსული ვიბრომკვებავის მათემატიკური მოდელი და მათემატიკური მოდელირების საშუალებით ნაჩვენებია არამუშა სივრცითი რხევების გავლენა ტვირთის ვიბრაციული მოძრაობის ხასიათზე. ნაჩვენებია, რომ ზოგიერთი არამუშა რხევის კომბინაციით ძირითად რეზონანსულ რხევასთან მიიღწევა მოძრაობის სიჩქარის და ინტენსივობის გაზრდა, რაც კონსტრუქციულად განხორციელებადი ამოცანაა.

საკვანძო სიტყვები: ვიბრაციული მკვებავი; ფხვიერი ტვირთი; დამზადების და აწყობის ცდომილებები; არამუშა რხევები; მათემატიკური მოდელი და მოდელირება; ცდომილებების გავლენა ტვირთის ვიბრაციულ მოძრაობაზე.

შესავალი

ვიბრაციული სატრანსპორტო - ტექნოლოგიური მანქანის მუშაობის პროცესზე მრავალი ფაქტორი ახდენს გავლენას [3], რომელთა შორის შეიძლება გამოიყოს:

1. ვიბრაციული მანქანის შემადგენელი ნაწილების დამზადების და აწყობის ცდომილებები;
2. დამზადების და აწყობის შედეგად აღმოცენებული არამუშა სივრცითი რხევები;
3. მუშა ორგანოს სიხისტე;
4. დასამუშავებელი მასალის თვისებები;
5. ვიბროამძრავის მახასიათებლები;
6. მუშა ორგანოს რხევის პარამეტრები.

აღნიშნული ფაქტორების გავლენის კვლევა ვიბრაციული სატრანსპორტო-ტექნოლოგიური მანქანის მუშა პროცესებზე ტრადიციულად ითვალისწინებს მოდელურ და ფიზიკურ ექსპერიმენტებს. პირველ შემთხვევაში იგულისხმება ურთიერთდაკავშირებული მათემატიკური განტოლებების კომპიუტერული მოდელირება და კვლევა, ხოლო მე-2 შემთხვევაში – შესაბამისი ფიზიკური ექსპერიმენტების ჩატარება და შემდგომში შედეგების შეჯერება და ანალიზი.

წარმოდგენილ ნაშრომში, კომპიუტერული მოდელირების საფუძველზე, განხილულია და გამოკვლეულია მანქანის ზოგიერთი უზუსტობების გავლენის

ხასიათი ვიბრაციულ ტექნოლოგიურ პროცესზე, მოყვანილია შედეგები და მათი ანალიზი.

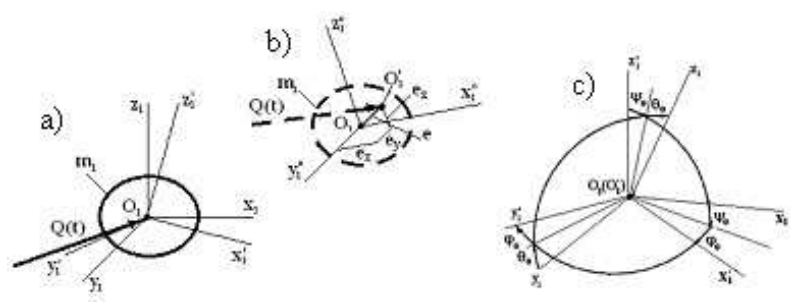
შესაძლო კონსტრუქციული ცდომილებები

ვიბრომანქანების მექანიკურ სისტემებში მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ დრეკადი კვანძები და მათთან დაკავშირებული ელემენტები. განსაკუთრებული როლი ენიჭება თვით დრეკადი ელემენტების, მაგალითად ზამბარის სპეციფიკას – იგი ირხევა არა მარტო იძულებითი ძალის მიმართულებით, არამედ ასრულებს ბრუნვით და განივი მიმართულების რხევებსაც. ჩვეულებრივად, არამუშა რხევები მცირე სიდიდისაა, არ გაითვალისწინებიან კვლევების დროს და ითვლება, რომ მნიშვნელოვნად არ მოქმედებენ ტექნოლოგიურ პროცესზე; მაგრამ დიდი რხევების დროს ასეთ უზუსტობას შეუძლია მოახდინოს საგრძნობი გავლენა მანქანის მუშა პროცესებზე.

მეორე მიზეზი არამუშა რხევების აღმოცენებისა არის დაშვებები დამუშავების სიზუსტეზე დრეკადი ელემენტების მასებთან შეერთების ზედაპირებზე; გადახრები დაშვების ზღვრებშიც კი რხევების დიდი ამლიტუდის დროს იწვევენ არამუშა რხევებს, რომლებიც გავლენას ახდენენ ტექნოლოგიური პროცესების ხარისხზე [1, 2].

შემდეგი ფაქტორი, რომელის არღვევს მუშაობის პროცესს, არის ძალის მუშა ორგანიზე გადაცემის უზუსტობა.

ამ შემთხვევაში უზუსტობის გამოწვევა შესაძლებელია როგორც აღმზნები ძალის მხრიდან, ასევე დრეკადი ელემენტების არასწორი განლაგების შედეგადაც. ნახ. 1-ზე სქემატურად არის ნაჩვენები ზემოთაღნიშნული გადახრების შედეგად მიღებული m_1 - მასის მდგომარეობა: ა) $O_1 x_1 y_1 z_1$ -საპროექტო (იდეალური) მდგომარეობაა, $O'_1 x'_1 y'_1 z'_1$ - ღერძების მდგომარეობა მონტაჟის უზუსტობების



ნახ. 1. m_1 - მასის მდგომარეობა ცდომილებების გათვალისწინებით

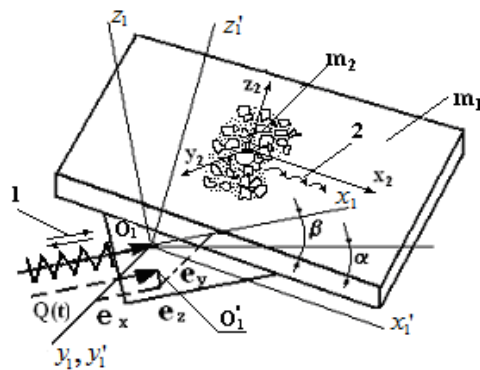
გათვალისწინებით; b) $O_1'x_1'y_1'z_1'$ - ძალის არასწორად გადაცემით გამოწვეული გადახრები; c) ღერძების განლაგების ცდომილებები ეილერის კუთხეებში.

კოორდინატა ღერძების გადახრები.

ნახ. 2-ზე ნახვენებია ელექტრომაგნიტური ვიბრომკვებავის სქემა მუშა ორგანოთი m_1 და ტვირთით m_2 . $O_1x_1y_1z_1$ კოორდინატა სისტემა შეესაბამება მანქანის იდეალურ მდგომარეობას. O_1x_1 ღერძი ემთხვევა ვიბროამძრავიდან მუშა ორგანოზე გადაცემული ელექტრომაგნიური ძალის მიმართულებას. ვიბრომანქანის დამზადების უზუსტობების და არასწორი მონტაჟის გამო ძალის მოდების რეალური წერტილი O_1' გადაადგილებულია O_1 -ის მიმართ e_x, e_y, e_z ექსცენტრისიტეტებით. ამასთანავე $O_1'x_1'y_1'z_1'$ ღერძები გადახრილია $O_1x_1y_1z_1$ ღერძების მიმართ კუთხეებით $\theta_0, \psi_0, \varphi_0$ (ნახ.1).

აღნიშნული კუთხური უზუსტობები იწვევს აღმგზნები ძალის $Q(t)$ გადახრებს, რომელთა გეგმილები კოორდინატა სისტემის $O_1'x_1'y_1'z_1'$ ღერძებზე განისაზღვრება მიმართველი კოსინუსების მეშვეობით:

$$Q_{x_1'} = Q(\psi_0 \sin \alpha_1 + \cos \alpha_1); Q_{y_1'} = Q(\varphi_0 \cos \alpha_1 + \theta_0 \sin \alpha_1); Q_{z_1'} = Q(\psi_0 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1); (1)$$



ნახ. 2. დატვირთული მუშა ორგანოს განლაგების ცდომილებები

სადაც $\alpha_1 = \alpha + \beta$; α - მუშა ორგანოს დახრის კუთხე; β - ვიბრაციის კუთხე; კუთხეების $\theta_0, \psi_0, \varphi_0$ მნიშვნელობები მცირეა და ამიტომ, მიმართველი კოსინუსების გაშლისას მწკრივში გაითვალისწინება მხოლოდ წრფივი შესაკრებები.

მოდრაობის მათემატიკური მოდელი.

მუშა ორგანოს სივრცითი მოძრაობის განტოლებები მიიღებენ სახეს:

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_x \dot{x}_1 + k_x x_1 - k'_x \theta_1 = Q_{x_1}; \quad m_1 \ddot{y}_1 + c_y \dot{y}_1 + k_y y_1 - k'_y \psi_1 = Q_{y_1};$$

$$m_1 \ddot{z}_1 + c_z \dot{z}_1 + k_z z_1 - k'_z \phi_1 = Q_{z_1}. \quad (2)$$

$$J_\theta \ddot{\theta}_1 + c_\theta \dot{\theta}_1 + k_\theta \theta_1 - k'_\theta x_1 = M_{x_1}; \quad J_\psi \ddot{\psi}_1 + c_\psi \dot{\psi}_1 + k_\psi \psi_1 - k'_\psi y_1 = M_{y_1};$$

$$J_\phi \ddot{\phi}_1 + c_\phi \dot{\phi}_1 + k_\phi \phi_1 - k'_\phi z_1 = M_{z_1}, \quad (3)$$

სადაც $M_{x_1}, M_{y_1}, M_{z_1}$ - მომენტების გეგმილები მიიღებიან გამოსახულებიდან $M = Q.e$;

$c_x, c_y, c_z, c_\theta, c_\psi, c_\phi$ - დრეკადი სისტემის დემპფირების კოეფიციენტები;

$k_x, k_y, k_z, k_\theta, k_\psi, k_\phi$ - სიხისტის კოეფიციენტები; $k'_x, k'_y, k'_z, k'_\theta, k'_\psi, k'_\phi$ - კოეფიციენტები,

რომლებიც აკავშირებენ განივ-ბრუნვით და ვრძივ-გრძობით რხევებს; $Q=Q_0 f(t)$, სადაც Q_0 აღმზნები ძალის კოეფიციენტია; $f(t)$ - აღმზნები ძალის ცვლილების კანონი; J_θ, J_ψ, J_ϕ - მასების ინერციის მომენტები საკუთარი ღერძების მიმართ. განტოლებების მარჯვენა ნაწილში (3), აღმზნები ძალის გეგმილებში, (1) და (2)-სგან განსხვავებით გათვალისწინებულია კოორდინატა ღერძების დინამიკური გადახრები θ_1, ψ_1, ϕ_1 .

ტვირთის სივრცითი ხაზოვანი მოძრაობის განტოლებებში შენარჩუნებულია მოძრაობის ურთიერთდამაკავშირებელი, ნამრავლების სახის მე-2 რიგის არაწრფივი წევრები [3]:

$$m_2 \ddot{x}_2 + (\ddot{x}_1 - \ddot{z}_1 \psi_1) \cos a_1 - (\ddot{z}_1 + \ddot{x}_1 \psi_1) \sin a_1 + z_2 \ddot{\psi}_1 + \phi_1 \ddot{y}_1 + 2\psi_1 \dot{z}_2 - 2\dot{y}_2 \dot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_1 y_2 -$$

$$- \ddot{\phi}_1 - \ddot{x}_1 \psi_0 \sin a_1 - \ddot{z}_1 \psi_0 \cos a_1 + \ddot{y}_1 \phi_0 + A \ddot{x}_1 + B \ddot{y}_2 + B_1 \ddot{x}_2 = -f(N_z - N_y) \text{sign}(x_2) - g \cos a,$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + \ddot{y}_1 + (\ddot{z}_1 \theta_1 - \ddot{x}_1 \phi_1) \cos a_1 + (\ddot{x}_1 \theta_1 + \ddot{z}_1 \phi_1) \sin a_1 - \theta_1 \dot{z}_2 - 2\theta_1 \dot{z}_2 + 2\phi_1 \dot{x}_2 -$$

$$- \ddot{x}_1 (\phi_0 \cos a_1 - \theta_0 \sin a_1) + \ddot{z}_1 (\theta_0 \cos a_1 + \phi_0 \sin a_1) + B \ddot{y}_2 - C' \ddot{y}_2 = -fN_z \text{sign}(y_2); \quad (4)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 + (\ddot{z}_1 + \ddot{x}_1 \psi_1) \cos a_1 + (\ddot{x}_1 - \ddot{z}_1 \psi_1) \sin a_1 - \theta_1 \dot{y}_1 + y_2 \ddot{\theta}_1 + 2\dot{y}_2 \dot{\theta}_1 - 2\dot{x}_2 \dot{\psi}_1 -$$

$$- \ddot{z}_1 \psi_0 \sin a_1 + \ddot{x}_1 \psi_0 \cos a_1 - \ddot{y}_1 \theta_0 + D_1 \ddot{z}_1 + E \ddot{x}_1 + E' \ddot{z}_2 + C z_2 = -fN_y \text{sign}(z_2) - g \cos a_1,$$

სადაც $A, B, B_1, C', D, E, E_1, C$ კოეფიციენტები ახასიათებენ ტვირთის მდებარეობას მუშა ორგანოს ზედაპირის მიმართ [2, 3] (მოძრაობა ზედაპირთან ერთად თუ მისგან მოწყვეტით - ჰაერში); N_y, N_z - ტვირთის ნორმალური რეაქციები მუშა ორგანოს ზედაპირების მიმართ; (14) განტოლებები განსხვავდებიან მასალის სივრცითი მოძრაობის ზოგადი განტოლებებისაგან წევრებით, რომლებიც წარმოიშობიან θ_0, ψ_0, ϕ_0 ცდომილებების შედეგად.

(3) და (4) განტოლებები ელექტრომაგნიტური ვიბროამძრავის აღმზნები ძალის გამოსახულებასთან ერთად ამოიხსნა უზუსტობების შემდეგი მნიშვნელობებისთვის:

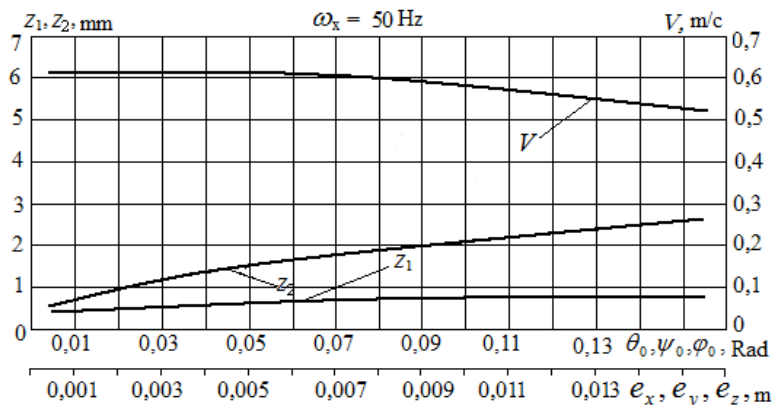
$$\theta_0, \psi_0, \varphi_0 = 0 \div 9^0; \quad e_x, e_y, e_z = 0 \div 0,015 \text{ რად.} \quad (5)$$

მათემატიკური მოდელირების ზოგიერთი შედეგი.

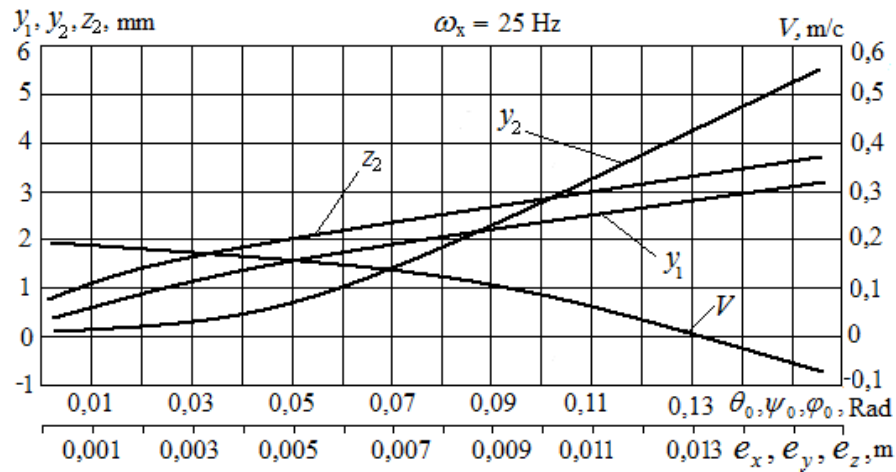
მათემატიკური მოდელირება ჩატარდა ელექტრომაგნიტური ვიბროამძრავის შემდეგი რეზონანსული მუშა რეჟიმებისთვის: ძირითადი (50 ჰც), სუბჰარმონიული (25 ჰც), სუპერჰარმონიული (100 ჰც). აღნიშნულიდან, ძირითადი და სუბჰარმონიული ელექტრომაგნიტური ვიბროამძრავების მოძრაობის განტოლებებში კოეფიციენტების სახით რეალური ფიზიკური მონაცემებია შეტანილი; სუპერჰარმონიული მანქანის მოძრაობის განტოლებებში – პირობითი.

ვიბრომანქანის ნორმალური მუშაობის დროს, როდესაც პარაზიტული სიხშირეები შორს არიან რეზონანსულიდან, უზუსტობები მოცემულ ზღვრებში არ ავლენენ საგრძნობ გავლენას ტრანსპორტირების პროცესზე. ამიტომ გამოყენებული იქნა ასეთი მიდგომა: ყოველი არამუშა სივრცითი მოძრაობის მიმართულებით რიცხვითი ექსპერიმენტის დროს, ვიბრომანქანის მათემატიკურ მოდელში მოხდა რეზონანსული რხევის გენერირება და მხოლოდ ამის შემდეგ უზუსტობების ზრდას შეედლოთ გამოიწვია ტრანსპორტირების პროცესის საგრძნობი დარღვევა.

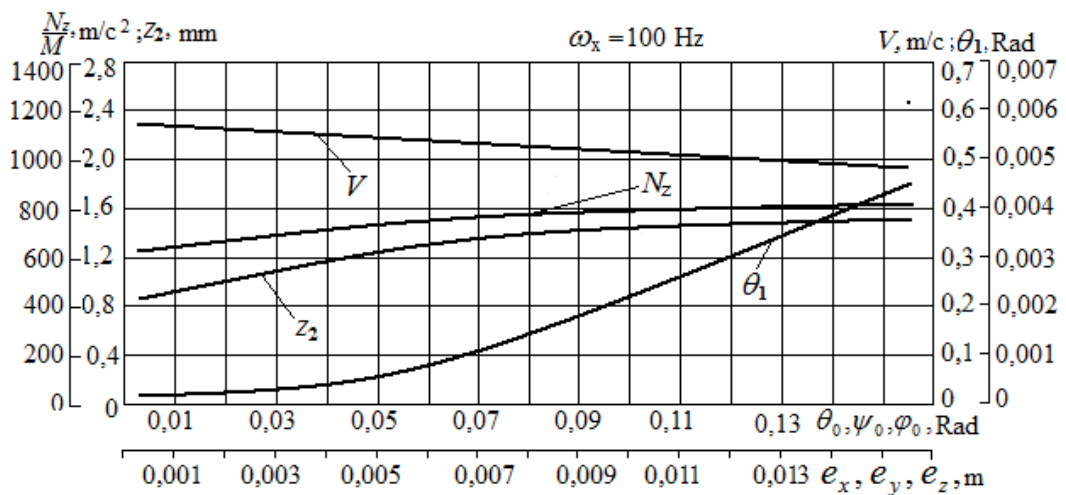
ნახ. 3-ზე მოყვანილია სიჩქარისა (V), ტრაექტორიის (z₂) და ნორმალური რეაქციის (N_z) დამოკიდებულება კოორდინატთა ღერძებისა და აღმზნები ძალის მიმართულების ცვლილებებისაგან $\theta_0, \psi_0, \varphi_0, e_x, e_y, e_z$. გრაფიკები აგებულია მუშა ორგანოს არამუშა θ_1 რხევის შეყვანით რეზონანსში უზუსტობების ერთდროული ცვლილებებით. მანქანის მუშა რეჟიმს წარმოადგენს რეზონანსული ვიბრაცია $O|x_1$ (ნახ.2) –ის მიმართულებით ($\omega_{exc} = \omega_x = 50$ ჰც), რომელიც მუდმივია ექსპერიმენტის პერიოდში;



ნახ. 3. მოძრაობის პარამეტრების (V, z₂) დამოკიდებულება ვერტიკალური რხევის (z₁) და ცვლილებებისაგან



ნახ. 4. მოძრაობის პარამეტრების (V, z_2, y_2) დამოკიდებულება განივი რხევის (y_1) და ცდომილებებისგან



ნახ. 5. მოძრაობის პარამეტრების (V, z_2) დამოკიდებულება ბრუნვითი რხევის (θ_1) და ცდომილებებისგან

სივრცითი რხევები, რომლებიც შედიან რეზონანსში მათი გაძლიერებისა და შესაბამისად, პროცესზე გავლენის გამოკვლევისათვის, ძირითადად არიან რეზონანსამდე რხევები; მათი ფაზები ან ემთხვევა, ან მცირედ განსხვავდებიან მუშა რეზონანსული რხევებისაგან.

ცხადია, რომ იგივე ახლორეზონანსული რხევები, რომელთა საკუთარი სიხშირეები მდებარეობენ რეზონანსის შემდეგ არეში, განსხვავებულ გავლენას მოახდენენ ვიბრომანქანის იგივე მუშა პროცესზე.

ნახ. 4-ზე ნაჩვენებია გრაფიკები, რომლებიც აღწერენ ფხვიერი მასალის მოძრაობის სიჩქარის (V) და ტრაექტორიების (z_2 , y_2) დამოკიდებულებას ვიბრომანქანის დამზადების ცდომილებების ცვლილებისაგან სუბჰარმონიული მუშა რეჟიმის პირობებში; გრაფიკები აგებულია მუშა ორგანოს არამუშა y_1 რხევის შეყვანით რეზონანსში უზუსტობების ერთდროული ცვლილებებით. ძირითად და სუბჰარმონიულ რეზონანსულ რეჟიმებში ტრანსპორტირების პროცესზე უზუსტობების გავლენის კანონზომიერებას აქვს არაერთგვაროვანი ხასიათი.

სუპერჰარმონიული რეზონანსული რეჟიმისთვის მსგავსი დამოკიდებულებები ნაჩვენებია ნახ. 5 – ზე. უნდა აღინიშნოს, რომ სუბჰარმონიული მანქანებისგან განსხვავებით, სუპერჰარმონიულმა რეზონანსულმა მანქანებმა აქამდე ვერ ჰპოვეს პრაქტიკული გამოყენება. ეს აიხსნება მათში დინამიკური დატვირთვების, ენერგოდანახარჯების, კონსტრუქციის მეტალოშემცველობის გაზრდით. ამიტომ სუპერჰარმონიულ რეჟიმში მუშაობისას ვიბროტრანსპორტირების პროცესის გამოკვლევას ჯერ-ჯერობით აქვს თეორიული ხასიათი, მიუხედავად იმისა, რომ არსებულ ელექტრომაგნიტურ ვიბრაციულ მანქანებში შესაძლებელია ასეთი რეჟიმების პრაქტიკული რეალიზება მათი კონსტრუქციის უმნიშვნელო ცვლილებების პირობებში.

ჩატარებულმა მოდელურმა გამოკვლევებმა აჩვენა, რომ მანქანის დამზადებისა და მონტაჟის ცდომილებები და მათ ნიადაგზე აღმოცენებული პარაზიტული რხევები არღვევენ ტექნოლოგიური პროცესების ნორმალურ (პროექტით გათვალისწინებულ) მიმდინარეობას და ხშირ შემთხვევაში იწვევენ ძირითადი დინამიკური და საექსპლოატაციო პარამეტრების გაუარესებას.

მაგრამ, ასევე აღსანიშნავია, რომ რიგ შემთხვევებში ტრანსპორტირების სიჩქარე ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას ან აქვს გაზრდის ტენდენცია; ეს იძლევა საფუძველს, ჩავთვალოთ, რომ ცალკეულ შემთხვევებში იმის ნაცვლად, რომ შევამციროთ დაშვებები ცდომილებებზე მინიმუმამდე (რაც წარმოადგენს საკმაოდ ძნელ ამოცანას), მიზანშეწონილია შეიქმნას ვიბროამძრავის ისეთი კონსტრუქცია, სადაც შესაძლებელი იქნება აღმზნები ძალისა და მომენტის მართვა; ასეთ შემთხვევაში მიზანშეწონილი იქნება მოძრაობის იმ რხევების გაძლიერება, რომელთა კომბინაცია ძირითად მუშა ვიბრაციასთან ხელს უწყობს ტექნოლოგიური პროცესის გაუმჯობესებას – ტვირთის მოძრაობის სიჩქარის და ინტენსივობის გაზრდას.

დასკვნები

განხილულია, ვიბრომანქანის დამზადებისა და აწყობის ცდომილებების შედეგად აღმგზნები ძალის მიმართულებისა და კოორდინატთა ღერძების გადახრები მათი საპროექტო მდგომარეობიდან. აღნიშნული გადახრები შეყვანილია მოძრაობის განტოლებათა სისტემაში, რაც საშუალებას იძლევა გამოკვლევულ იქნას სივრცითი არამუშა რხევების გავლენა სატრანსპორტო მასალის ქცევაზე. მათემატიკური მოდელირებით მიღებულია სიჩქარის ცვლილების გრაფიკები აღნიშნული უზუსტობების გარკვეულ ზღვრებში ცვლილების პირობებში.

დადგენილია, რომ ზოგიერთი პარაზიტული რხევა დადებით გავლენას ახდენს მასალის გადაადგილების სიჩქარეზე, რაც შეიძლება გახდეს არსებული მანქანის კონსტრუქციული მოდერნიზაციის საფუძველი.

ლიტერატურა

1. Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. Наука, М., 1964.
2. Гончаревич И.Ф. Динамика вибрационного транспортирования. Наука, М., 1992;
3. Звиадаური В.С. Динамика вибрационных транспортно-технологических машин. Монография, Тбилиси, Мецნიგერეა, 2001, 190 с.
4. Полницкий А. В. Некоторые вопросы теории динамических процессов, проходящих в Рабочих органах вибромашины. Сб. Проблемы вибрационной техники, Киев, Наукова думка, 1988, с. 112-118.

BONDARY AND BONDARY- CONTACT PROBLEMS OF THERMO-ELECTROELASTICITY IN A SPHERICAL COORDINATE SYSTEM

D.Gorgidze, I. Ramishvili, N. Ozbetelashvili

Department of engineering mechanics of Georgian Technical University,
77, Kostave st., Tbilisi 00175, Georgia

Abstract. By the method of separation of variables, the functional solution of a number of boundary and boundary-contact problems on the thermoelectric elasticity equilibrium of single and multi-layer bodies limited with coordinate surfaces of a spherical system of coordinates was constructed. The body is affected by stationary temperature and electric fields and surface perturbations. The elastic body is considered as transtropic (transversally isotropic) with surface isotropy $r=\text{const}$.

Keywords: elastic equilibrium; stress-strain state of a sphere; functional solution; basic equation of thermoelectroelastic equilibrium; transversally isotropic elastic body; shifts and deformations.

Introduction

The first work where the problem of elastic equilibrium of solid and hollow spheres in case of specified stresses and shifts on their surfaces are researched in detail is the work by Lamet (1).

In a number of works by Lamet the results were repeated or generalized. At present there is a vast literature dedicated to this problem. There stress-strain state of a sphere is investigated. In particular, papers 2 and 3 give detailed review of respective investigations. In these papers elastic equilibrium of homogeneous, isotropic bodies in the absence of temperature disturbance is mainly discussed. The given work presents the generalization of the problem of elastic equilibrium of a sphere in case of simplification of the method of its solution. Simplification is achieved by construction of functional solutions for the considered class of three-dimensional boundary problems of thermal electric elasticity and by substitution of classical conditions specified on boundary surfaces with equivalent conditions.

Main part

In a spherical system of coordinates r, α, β , ($0 < r < \infty$, $0 < \alpha < 2\pi$, $0 < \beta < \pi$), the elastic body in $\Omega = (0 < r < \infty, 0 < \alpha < 2\pi, 0 < \beta < \pi)$ domain is considered. It is supposed that elastic body is transversally isotropic (transtropic) for which surface $r = \text{const}$ is the surface of isotropy. The body is multilayer and layers are contacting on surfaces $r = \text{const}$. The body is affected with stationary temperature and electric fields. Mass forces are absent. The basic equations of thermo electro elastic equilibrium written in the spherical system of coordinates have the following form [1,2]:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial \tau_{r\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\beta}}{\partial \beta} + \frac{2\sigma_r - \sigma_\alpha - \sigma_\beta + \tau_{r\beta} \text{ctg} \beta}{r} = 0, \\
 b) \quad & \frac{\partial \tau_{\alpha r}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \frac{3\tau_{r\alpha} + 2\tau_{\alpha\beta} \text{ctg} \beta}{r} = 0, \\
 c) \quad & \frac{\partial \tau_{\beta r}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial \tau_{\beta\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\beta}{\partial \beta} + \frac{(\sigma_\beta - \sigma_\alpha) \text{ctg} \beta + 3\tau_{r\beta}}{r} = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{2}{r} D_r + \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial D_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial (D_\beta \sin \beta)}{\partial \beta} = 0. \tag{2}$$

Equations (1) are common equations of elastic equilibrium written in spherical system of coordinates. Equation (2) is the equation of electrostatics also written in the spherical system of coordinates.

In these equations $\sigma_r, \sigma_\alpha, \sigma_\beta$ are normal stresses, $\tau_{r\alpha} = \tau_{\alpha r}, \tau_{r\beta} = \tau_{\beta r}, \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$ are tangential stresses, D_r, D_α, D_β are the components of the vector of electric induction \vec{D} along coordinate lines r, α, β .

To these equations as generally the equations of state are added[1,2]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= C_2(\varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta}) + C_1\varepsilon_{rr} - e_2E_r - k_{10}T, \quad \tau_{r\alpha} = C_4\varepsilon_{r\alpha} - e_2E_\alpha, \\ \sigma_\alpha &= C_2\varepsilon_{\alpha\alpha} + (C_2 - 2C_5)\varepsilon_{\beta\beta} + C_3\varepsilon_{rr} - e_1E_r - k_{20}T, \quad \tau_{r\beta} = C_4\varepsilon_{r\beta} - e_3E_\beta, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\beta &= (C_2 - 2C_5)\varepsilon_{\alpha\alpha} + C_2\varepsilon_{\beta\beta} + C_3\varepsilon_{rr} - e_1E_r - k_{20}T, \quad \tau_{\alpha\beta} = C_5\varepsilon_{\alpha\beta}, \\ D_r &= e_1(\varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta}) + e_2\varepsilon_{rr} + \varepsilon_2E_r, \quad D_\alpha = e_3\varepsilon_{r\alpha} + \varepsilon_1E_\alpha, \quad D_\beta = e_3\varepsilon_{r\beta} + \varepsilon_1E_\beta. \end{aligned} \quad (4)$$

where $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{\beta\beta}, \varepsilon_{r\alpha} = \varepsilon_{\alpha r}, \varepsilon_{r\beta} = \varepsilon_{\beta r}, \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}$ are the components of deformation tensor, E_r, E_α, E_β are the components of stress vector of electric field E, which is expressed in terms of electrostatic potential φ by formula $E = -grad \varphi$; $c_i = c_i(r)$, ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) are elastic modules measured at direct electric field, $e_j = e_j(r)$ are piezoelectric constants, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(r)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(r)$ are dielectric constants of permeability measured at constant deformations, $k_{10} = c_1k_1 + c_1k_2$, $k_{20} = [2(c_2 - c_5)k_2 + c_3k_1]$, $k_1 = k_1(r)$ and $k_2 = k_2(r)$ are coefficients of linear thermal expansion along r and in the direction perpendicular to r ; T is temperature in electric elastic field. Shifts and deformations are connected between each other with equalities[2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{r} + \frac{w}{r} \operatorname{ctg} \beta, \quad \varepsilon_{r\alpha} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{u}{r}, \\ \varepsilon_{r\alpha} &= \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \beta, \\ \varepsilon_{r\beta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{aligned} \quad (5)$$

u, v, w are components of displacement vectors \vec{U} along lines tangential to coordinates r, α, β .

System (1) can be rewritten in the following form:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{c_2 + 2c_4}{c_2} r^2 K + \frac{c_2 c_2 - (c_5 + 2c_4)^2}{c_2} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2c_4'(c_2 + 2c_4)}{c_2} r^2 u + \left(\frac{(c_5 + 2c_4)k_{20}}{c_2} - k_{10} \right) r^2 T + \right. \\ \left. + \left(e_2 - \frac{(c_5 + 2c_4)e_2}{c_2} \right) r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] \\ + \frac{(c_4 + rc_4' + c_2 - c_5)}{c_2} rK + 2 \frac{(c_4 + rc_4' - c_5)(c_2 + 2c_4)}{c_2} r \frac{\partial u}{\partial r} + \\ + 4 \frac{(c_4 + rc_4' + c_2 - c_5)(c_2 + 2c_4)}{c_2} ru - \frac{(c_4 + rc_4' - c_5)k_{20}}{c_2} T + 2 \frac{(c_4 + rc_4' - c_5)e_2}{c_2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + e_3 \Delta_2 \varphi - \\ - \frac{r}{\sin \beta} \frac{\partial B_\beta}{\partial \beta} + \frac{r}{\sin \beta} \frac{\partial (B_\alpha \sin \beta)}{\partial \alpha} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\partial K}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial B_r}{\partial \beta} + \frac{\partial (rB_\beta \sin \beta)}{\partial r} + 2(c_4 - c_5) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - 2(c_4 + rc_4' - c_5) \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \beta + \\ + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\left(e_3' + \frac{2e_2}{r} \right) \varphi + e_3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{\partial K}{\partial \beta} - \frac{\partial (rB_\beta)}{\partial r} + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial B_r}{\partial \alpha} + 2(c_4 - c_5) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - 2(c_4 + rc_4' - c_5) \frac{w}{r} + \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\left(e_3' + \frac{2e_2}{r} \right) \varphi + e_3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{d) } \frac{1}{\sin \beta} \left[\frac{\partial (rB_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (rB_\beta \sin \beta)}{\partial \beta} \right] + c_4 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{c_5} r^2 B_r \right) = 0,$$

where

$$K = c_2 \left(\frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + 2 \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{w}{r} \operatorname{ctg} \beta \right) + (c_3 + 2c_4) \frac{\partial u}{\partial r} + 2c'_2 u - k_{20} T + e_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (7)$$

$$B_r = c_5 \frac{1}{r \sin \beta} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial v}{\partial \beta} - v \cos \beta \right), \quad B_\alpha = c_4 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - r \frac{\partial w}{\partial r} - w \right),$$

$$B_\beta = c_4 \frac{1}{r \sin \beta} \left(r \sin \beta \frac{\partial v}{\partial r} + v \sin \beta - \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right), \quad (8)$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}.$$

Further we suppose that the body is weakly transtropic and weakly heterogeneous, i.e.

$$c_4 = c_5 = \varepsilon = \text{const}, \quad c_1 c_2 - (c_3 + 2c_4)^2 = 0, \quad e_3 = \text{const}. \quad (9)$$

Considering (9), (6), (7) (8)

$$\text{a) } \frac{\partial}{\partial r} (e_3 \Delta_2 \varphi) - 2rK + \frac{r}{\sin \beta} \frac{\partial B_\beta}{\partial \beta} + \frac{r}{\sin \beta} \frac{\partial (B_\alpha \sin \beta)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(k_{10} - c_2 k_{20}) r^2 T + (c e_1 - e_2) r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] - e_3 \Delta_2 \varphi,$$

$$\text{b) } \frac{\partial K}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial B_r}{\partial \beta} + \frac{\partial (r B_\beta \sin \beta)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{2e_3}{r} \varphi + e_3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] = 0, \quad (10)$$

$$\text{c) } \frac{\partial K}{\partial \beta} - \frac{\partial (r B_\alpha)}{\partial r} + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial B_r}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{2e_3}{3r} \varphi + e_3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] = 0,$$

$$\text{d) } \frac{1}{\sin \beta} \left[\frac{\partial (r B_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (r B_\beta \sin \beta)}{\partial \beta} \right] + c_4 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{c_5} r^2 B_r \right) = 0.$$

$$K = c_2 \left(\frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + 2 \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{w}{r} \operatorname{ctg} \beta \right) + \sqrt{c_1 c_2} \frac{\partial u}{\partial r} - k_{20} T + e_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (11)$$

$$B_r = \varepsilon \frac{1}{r \sin \beta} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial v}{\partial \beta} - v \cos \beta \right), \quad B_\alpha = \varepsilon \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - r \frac{\partial w}{\partial r} - w \right), \quad (12)$$

$$B_\beta = \varepsilon \frac{1}{r \sin \beta} \left(r \sin \beta \frac{\partial v}{\partial r} + v \sin \beta - \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right),$$

$$c = c(r) = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \quad (c_1 > 0, c_2 > 0).$$

2. Consider transtropic multilayer spherical coordinate parallelepiped $\Omega = \bigcup_{k=1}^l \Omega_k$,

where $\Omega_k = (r_{k-1} < r < r_k, 0 < \alpha < \alpha_1, \beta_0 < \beta < \beta_1)$, as usual $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^l \bar{\Omega}_k$,

$\bar{\Omega}_k = (r_{k-1} \leq r \leq r_k, 0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1)$. Denote surface corresponding to coordinate surface $r = r_k$ as S_k ($k = 0, l$).

Boundary and contact conditions which appear at stating the corresponding problems have the following form.

On surface S_0 and S_l (or the same as when $r = r_0$ or $r = r_l$):

$$\text{a) } \sigma_r = F_{k1}(\alpha, \beta), \quad \tau_{r\alpha} = F_{k2}(\alpha, \beta), \quad \tau_{r\beta} = F_{k3}(\alpha, \beta); \quad (13)$$

$$\text{b) } u = f_{k1}(\alpha, \beta), \quad v = f_{k2}(\alpha, \beta), \quad w = f_{k3}(\alpha, \beta);$$

$$\text{c) } \sigma_r = F_{k1}(\alpha, \beta), \quad v = f_{k2}(\alpha, \beta), \quad w = f_{k3}(\alpha, \beta);$$

$$d) u = f_{k1}(\alpha, \beta), \quad \tau_{r\alpha} = F_{k2}(\alpha, \beta), \quad \tau_{r\beta} = F_{k3}(\alpha, \beta).$$

$$a) T = F_{k4}(\alpha, \beta); \quad b) \frac{\partial T}{\partial r} = F_{k5}(\alpha, \beta); \quad c) \frac{\partial T}{\partial r} + T = F_{k6}(\alpha, \beta). \quad (14)$$

$$a) \varphi = F_{k7}(\alpha, \beta); \quad b) \frac{\partial D_r}{\partial r} = F_{k8}(\alpha, \beta). \quad (15)$$

In each layer when $\alpha=0$ or $\alpha = \alpha_1$

$$\begin{aligned} a) \quad v &= 0, \quad \tau_{r\alpha} = 0, \quad \tau_{\alpha\beta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0, \quad D_r = 0; \\ b) \quad \sigma_r &= 0, \quad w = 0, \quad u = 0, \quad T = 0, \quad \varphi = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

when $\beta = \beta_0$ or $\beta = \beta_1$

$$\begin{aligned} a) \quad w &= 0, \quad \tau_{r\beta} = 0, \quad B_r = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \beta} = 0, \quad D_\beta = 0; \\ b) \quad K &= 0, \quad v = 0, \quad u = 0, \quad T = 0, \quad \varphi = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

On contact surfaces S_k ($k=1,2,\dots,l-1$; S_k is contact surface of layer number k contacting with layer $k+1$) are given conditions:

$$T^k - T^{k+1} = F_1(\alpha, \beta), \quad \frac{\partial T^k}{\partial r} - \frac{\partial T^{k+1}}{\partial r} = \tilde{F}_1(\alpha, \beta); \quad (18)$$

$$\varphi^k - \varphi^{k+1} = F_2(\alpha, \beta), \quad D_r^k - D_r^{k+1} = \tilde{F}_2(\alpha, \beta); \quad (19)$$

$$\begin{aligned} a) \quad u^k - u^{k+1} &= f_1(\alpha, \beta), \quad \sigma_r^k - \sigma_r^{k+1} = F_3(\alpha, \beta), \quad v^k - v^{k+1} = f_2(\alpha, \beta), \\ w^k - w^{k+1} &= f_3(\alpha, \beta), \quad \tau_{r\alpha}^k - \tau_{r\alpha}^{k+1} = F_4(\alpha, \beta), \quad \tau_{r\beta}^k - \tau_{r\beta}^{k+1} = F_5(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad u^k - u^{k+1} &= f_1(\alpha, \beta), \quad \sigma_r^k - \sigma_r^{k+1} = F_3(\alpha, \beta), \quad \tau_{r\alpha}^k = F_4(\alpha, \beta), \\ \tau_{r\alpha}^{k+1} &= F_5(\alpha, \beta), \quad \tau_{r\beta}^k = F_5(\alpha, \beta), \quad \tau_{r\beta}^{k+1} = F_6(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} c) \quad \sigma_r^k &= F_3(\alpha, \beta), \quad \sigma_r^{k+1} = F_4(\alpha, \beta), \quad v^k - v^{k+1} = f_2(\alpha, \beta), \\ w^k - w^{k+1} &= f_3(\alpha, \beta), \quad \tau_{r\alpha}^k - \tau_{r\alpha}^{k+1} = F_5(\alpha, \beta), \quad \tau_{r\beta}^k - \tau_{r\beta}^{k+1} = F_6(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

The conditions imposed on the stated functions shall be referred later, here we just note that these functions are such that on the edges of spherical coordinate parallelepiped the conditions of matching are satisfied. Technical interpretation of boundary conditions (16) and (17) is given in [3].

3. In this paragraph temperature problem in spherical system of coordinates is set forth. The statement of this problem is based on the results of [3]. In the first paragraph T indicates temperature in elastic body satisfying the equation:

$$\Delta_2 T + \frac{1}{\lambda_2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_1 r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (21)$$

and boundary conditions (14), (16) and (17). $\lambda_1 = \lambda_1(r)$ and $\lambda_2 = \lambda_2(r)$ are coefficients of heat conductance along r and β in the direction perpendicular to r .

If the medium is homogeneous, i.e. when $\lambda_1 = \text{const}$ and $\lambda_2 = \text{const}$, equation (21) takes the form:

$$\Delta_2 T + \lambda_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0, \quad (22)$$

where $\lambda_0 = \lambda_1 / \lambda_2$. Using Fourier method (method of variables separation), function T in the area $\Omega = \{ r_0 < r < r_1, 0 < \alpha < \alpha_1, \beta_0 < \beta < \beta_1 \}$ can be presented in the form:

$$T = t_0 + t_1 \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[A_{Tmn} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n_t+1} + B_{Tmn} \left(\frac{r}{r_2} \right)^{n_t+1} \right] \Psi_{mn}(\alpha, \beta). \quad (23)$$

Here $t_0, t_1, A_{Tmn}, B_{Tmn}, n_t$ are constants. $2\sqrt{\lambda_0 n_t} = \sqrt{\lambda_0 + 4\tilde{n}(\tilde{n} + 1)}$, $\tilde{n} = \tilde{n}(m, n)$ (when $\lambda_0 = 1$ and $n_t = \tilde{n}$). $\Psi_{mn}(\alpha, \beta)$ is nontrivial solution of Sturm-Liouville problem [4].

$$r^2 \Delta_2 \Psi_{mn} + \tilde{n}(\tilde{n} + 1) \Psi_{mn} = 0, \quad (24)$$

$$\text{when } \alpha = \alpha_i : \quad \text{a) } \Psi_{mn} = 0 \quad \text{or} \quad \text{b) } \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial \alpha} = 0, \quad (25)$$

$$\text{when } \beta = \beta_i : \quad \text{a) } \Psi_{mn} = 0 \quad \text{or} \quad \text{b) } \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial \beta} = 0. \quad (26)$$

4. For convenience of construction of solutions of boundary and boundary-contact problems, the conditions (13) and (20) are substituted with the following conditions:

$$\text{a) } \sigma_r = F_{k1}(\alpha, \beta), \quad \Gamma_1(\tau_{r\alpha}, \tau_{r\beta}) = \tilde{F}_{k2}(\alpha, \beta), \quad \Gamma_2(\tau_{r\alpha}, \tau_{r\beta}) = \tilde{F}_{k3}(\alpha, \beta);$$

$$\text{b) } u = f_{k1}(\alpha, \beta), \quad \Gamma_1(v, w) = \tilde{f}_{k2}(\alpha, \beta), \quad \Gamma_2(v, w) = \tilde{f}_{k3}(\alpha, \beta);$$

$$\text{c) } \sigma_r = F_{k1}(\alpha, \beta), \quad \Gamma_1(v, w) = \tilde{f}_{k2}(\alpha, \beta), \quad \Gamma_2(v, w) = \tilde{f}_{k3}(\alpha, \beta); \quad (27)$$

$$\text{d) } u = f_{k1}(\alpha, \beta), \quad \Gamma_1(\tau_{r\alpha}, \tau_{r\beta}) = \tilde{F}_{k2}(\alpha, \beta), \quad \Gamma_2(\tau_{r\alpha}, \tau_{r\beta}) = \tilde{F}_{k3}(\alpha, \beta)$$

$$\text{a) } u^k - u^{k+1} = f_1(\alpha, \beta), \quad \sigma_r^k - \sigma_r^{k+1} = F_3(\alpha, \beta), \quad \Gamma_1(v^k, w^k) - \Gamma_1(v^{k+1}, w^{k+1}) = \tilde{f}_2(\alpha, \beta),$$

$$\Gamma_2(v^k, w^k) - \Gamma_2(v^{k+1}, w^{k+1}) = \tilde{f}_3(\alpha, \beta), \quad \Gamma_1(\tau_{r\alpha}^k, \tau_{r\beta}^k) - \Gamma_1(\tau_{r\alpha}^{k+1}, \tau_{r\beta}^{k+1}) =$$

$$\tilde{F}_4(\alpha, \beta), \quad \Gamma_2(\tau_{r\alpha}^k, \tau_{r\beta}^k) - \Gamma_2(\tau_{r\alpha}^{k+1}, \tau_{r\beta}^{k+1}) = \tilde{F}_5(\alpha, \beta);$$

$$\text{b) } u^k - u^{k+1} = f_1(\alpha, \beta), \quad \sigma_r^k - \sigma_r^{k+1} = F_3(\alpha, \beta), \quad \Gamma_1(\tau_{r\alpha}^k, \tau_{r\beta}^k) = \tilde{F}_4(\alpha, \beta),$$

$$\Gamma_2(\tau_{r\alpha}^k, \tau_{r\beta}^k) = \tilde{F}_6(\alpha, \beta), \quad \Gamma_1(\tau_{r\alpha}^{k+1}, \tau_{r\beta}^{k+1}) = \tilde{F}_6(\alpha, \beta),$$

$$\Gamma_2(\tau_{r\alpha}^{k+1}, \tau_{r\beta}^{k+1}) = \tilde{F}_7(\alpha, \beta); \quad (27')$$

$$\text{c) } \sigma_r^k = F_3(\alpha, \beta), \quad \sigma_r^{k+1} = F_4(\alpha, \beta), \quad \Gamma_1(v^k, w^k) - \Gamma_1(v^{k+1}, w^{k+1}) = \tilde{f}_2(\alpha, \beta),$$

$$\Gamma_2(v^k, w^k) - \Gamma_2(v^{k+1}, w^{k+1}) = \tilde{f}_3(\alpha, \beta), \quad \Gamma_1(\tau_{r\alpha}^k, \tau_{r\beta}^k) - \Gamma_1(\tau_{r\alpha}^{k+1}, \tau_{r\beta}^{k+1}) = \tilde{F}_4(\alpha, \beta),$$

$$\Gamma_2(\tau_{r\alpha}^k, \tau_{r\beta}^k) - \Gamma_2(\tau_{r\alpha}^{k+1}, \tau_{r\beta}^{k+1}) = \tilde{F}_5(\alpha, \beta).$$

where

$$\Gamma_1(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{\sin \beta} \left[\frac{\partial \eta_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial(\eta_2 \sin \beta)}{\partial \beta} \right],$$

$$\Gamma_2(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{\sin \beta} \left[\frac{\partial \eta_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial(\eta_1 \sin \beta)}{\partial \beta} \right],$$

where $\eta_1 = \tau_{r\alpha}$ or $\eta_1 = v$, $\eta_2 = \tau_{r\beta}$ or $\eta_2 = w$. It is supposed that functions $F_1(\alpha, \beta)$, $F_2(\alpha, \beta)$, $F_3(\alpha, \beta)$, $F_4(\alpha, \beta)$, $F_5(\alpha, \beta)$, $F_6(\alpha, \beta)$, $F_7(\alpha, \beta)$, $F_{k2}(\alpha, \beta)$, $F_{k3}(\alpha, \beta)$ themselves, functions $F_{k1}(\alpha, \beta)$, $f_{k2}(\alpha, \beta)$, $f_{k3}(\alpha, \beta)$, $F_3(\alpha, \beta)$, $f_2(\alpha, \beta)$, $f_3(\alpha, \beta)$, $F_1(\alpha, \beta)$, $F_3(\alpha, \beta)$, together with their first and second derivatives and functions $f_{k1}(\alpha, \beta)$, $f_1(\alpha, \beta)$, together with their first and second derivatives, disintegrate into uniformly convergent Fourier series by their eigenfunctions of problems (24), (25) and (26). About equivalence of boundary conditions (13) and (27) we can say the following: equivalence of conditions (13) and (27) are studied analogously as was given in work [3].

5. From (10b,c,d) we have:

$$\Delta (rB_r) = 0, \quad (28)$$

where $\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right] = \Delta_r + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$. From boundary conditions (16) and (17) it follows that on lateral boundaries $\alpha=0$, $\alpha = \alpha_1$ and $\beta = \beta_0$, $\beta = \beta_1$ of coordinative parallelepiped or the function B_r or its normal derivative are equal to zero, while on surfaces $r = r_0$ or $r = r_1$, from (27) we get

$$\Gamma_2(\tau_{r\alpha}, \tau_{r\beta}) = r \frac{\partial B_r}{\partial r} \quad \text{or} \quad \Gamma_2(v, w) = \frac{r}{r} B_r.$$

Thus, for function B_r we get the following problem of mathematical physics: it is necessary to determine function B_r from equation (28) when on the surface of domain of its determination, the function itself or its normal derivative or on the part of the surface the function itself and on the other part its normal derivative are given.

Using Fourier method, represent function B_r in the following form:

$$B_r = a_{10} \frac{1}{r} + a_{11} \frac{1}{r^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{Bmn} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\tilde{n}_1+1} + B_{Bmn} \left(\frac{r}{r_1} \right)^{\tilde{n}_1} \right] \Psi_{mn}(\alpha, \beta), \quad (29)$$

where a_{10}, a_{11} are constants, $\Psi_{mn}(\alpha, \beta)$ is the solution of the following Sturm- Liouville problem [4].

$$r^2 \Delta_2 \Psi_{mn}(\alpha, \beta) + \tilde{n}(\tilde{n} + 1) \Psi_{mn}(\alpha, \beta) = 0;$$

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha_i: \quad a) \Psi_{mn}(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{or} \quad b) \frac{\partial \Psi_{mn}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0; \\ \beta = \beta_i: \quad a) \Psi_{mn}(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{or} \quad b) \frac{\partial \Psi_{mn}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0. \end{aligned}$$

If when $\alpha = 0$ and $\alpha = \alpha_1$ the conditions (16b) are given, while when $\beta = \beta_0$ and $\beta = \beta_1$, the conditions (17b) are constants and a_{10} and a_{11} cannot differ from zero (in all other cases a_{10} and a_{11} are equal to zero).

Indeed, if

$$\int_0^{\alpha_1} \int_{\beta_0}^{\beta_1} B_r r^2 \sin \beta \, d\alpha \, d\beta = 0$$

(this condition is easily verified) it follows that $a_{10} = 0$ and $a_{11} = 0$.

Finally, for the considered boundary-value problems

$$B_r = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{Bmn} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\tilde{n}_1+1} + B_{Bmn} \left(\frac{r}{r_1} \right)^{\tilde{n}_1} \right] \Psi_{mn}(\alpha, \beta). \quad (30)$$

From (25) follows that function, without limiting the generalities, can be presented in the following form:

$$B_r = \frac{\partial^2 (r\Psi_0)}{\partial r^2} \quad (31)$$

Ψ_0 is the solution of equation $\Delta \Psi_0 = 0$ and it can be presented:

$$\Psi_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{Bmn} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n_1+1} + B_{Bmn} \left(\frac{r}{r_1} \right)^{n_1} \right] \bar{\Psi}_{mn}(\alpha, \beta). \quad (32)$$

Theorem. If function $\Psi_0(r, \alpha, \beta)$, $\Psi_1(r, \alpha, \beta)$, $\Psi_2(r, \alpha, \beta)$ and φ represent the solution of the corresponding equation system:

$$a) \quad \Delta \Psi_0 = 0,$$

$$b) \frac{\partial}{\partial r} \left(cr^2 \frac{\partial(r\Psi_2)}{\partial r} \right) - 2r \frac{\partial(r\Psi_2)}{\partial r} + r^3 \Delta_2 \Psi_1 + 2e_3 \Delta_2 \varphi - \frac{\partial(c\varepsilon_3 r \varphi)}{\partial r} + 4e_3 \varphi - \frac{\partial}{\partial r} [(ce_1 - e_2)r^2 \varphi] = \frac{\partial}{\partial r} [(k_{10} - ck_{20})T], \quad (33)$$

$$c) c \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + \Delta_2 \Psi_2 + \frac{c\varepsilon_3 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial(r\Psi_2)}{\partial r} + \frac{2}{\varepsilon} \Psi_1 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial(\varepsilon_3 \varphi)}{\partial r} + \frac{c_2 + \varepsilon}{c_2 \varepsilon} \frac{2}{r} (e_3 \varphi) + e_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} k_{20} T,$$

$$d) \left(\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_3^2}{\varepsilon} \right) \Delta_2 \varphi + \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left[\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon} \frac{\partial(\varepsilon_3 \varphi)}{\partial r} - \frac{2\varepsilon_3}{\varepsilon} e_3 \varphi \right] \right] = \frac{\partial}{\partial r} (e_1 \Delta_2 \Psi_2) + 2e_3 \Delta_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(e_2 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial r^2} + 2e_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \right) \right] + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \Delta_2 \Psi_1 + \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2} + 2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \right) \right],$$

then for the proposed class of boundary-value problems of thermal electric elasticity the general solution in the class of regular functions is presented in the form:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + \frac{r}{\varepsilon} \Psi_1 + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon} \varphi, \\ v &= \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \beta}, \\ w &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \beta} - \frac{1}{\varepsilon \sin \beta} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (34)$$

Proof. If consider (31) then (10b,c,d) can be rewritten in the following form:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[K + \frac{2}{r} (e_3 \varphi) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[r B_\beta \sin \beta + \frac{\partial(\varepsilon_3 \varphi)}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial^2(r\Psi_0)}{\partial r \partial \beta} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left[K + \frac{2}{r} (e_3 \varphi) \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[r B_\alpha - \frac{\partial(\varepsilon_3 \varphi)}{\partial \beta} - \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial^2(r\Psi_0)}{\partial r \partial \beta} \right] = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r B_\beta \sin \beta + \frac{\partial(\varepsilon_3 \varphi)}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial^2(r\Psi_0)}{\partial r \partial \beta} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[r B_\alpha - \frac{\partial(\varepsilon_3 \varphi)}{\partial \beta} - \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial^2(r\Psi_0)}{\partial r \partial \beta} \right] = 0.$$

From (35) follows that there exists function Ψ_1 such that:

$$\begin{aligned} a) \quad K &= \frac{\partial(r\Psi_2)}{\partial r} - \frac{2}{r} (e_3 \varphi), \\ b) \quad B_\alpha &= \frac{\partial \Psi_2}{\partial \beta} + \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial^2(r\Psi_0)}{\partial r \partial \alpha} + \frac{\varepsilon_3}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \\ c) \quad B_\beta &= -\frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Psi_0)}{\partial r \partial \beta} + \frac{\varepsilon_3}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (36)$$

If (36) is introduced in (10a) we receive:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(cr^2 \frac{\partial(r\Psi_2)}{\partial r} \right) - 2r \frac{\partial(r\Psi_2)}{\partial r} + r^3 \Delta_2 \Psi_1 + 2e_3 \Delta_2 \varphi - \frac{\partial(c\varepsilon_3 r \varphi)}{\partial r} + 4e_3 \varphi - \\ - \frac{\partial}{\partial r} [(ce_1 - e_2)r^2 \varphi] = \frac{\partial}{\partial r} [(k_{10} - ck_{20})T]. \end{aligned} \quad (37)$$

Using (36) and (31), from (11) we get:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(u - \frac{r}{\sin \beta} \Psi_1 - \frac{e_3}{\sin \beta} \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(r w + \frac{r}{\sin \beta} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \alpha} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(u - \frac{r}{\sin \beta} \Psi_1 - \frac{e_3}{\sin \beta} \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(r v \sin \beta - \frac{r \sin \beta}{\sin \beta} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \beta} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(r w + \frac{r}{\sin \beta} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(r v \sin \beta - \frac{r \sin \beta}{\sin \beta} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \beta} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (38)$$

From (38) follows that there is function such that:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + \frac{r}{\sin \beta} \Psi_1 + \frac{e_3}{\sin \beta} \varphi \\ v &= \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \beta} \\ w &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \beta} - \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (39)$$

Substituting (39) and (36a) into (11) and (2), taking into account formulas (7), (8) we get:

$$c \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + \Delta_2 \Psi_2 + \frac{c e_3 - \alpha}{\sin \beta} \frac{\partial (r \Psi_1)}{\partial r} + \frac{2}{\sin \beta} \Psi_1 + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial (e_3 \varphi)}{\partial r} + \frac{c_2 + \alpha}{\sin \beta} \frac{2}{r} (e_3 \varphi) + e_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = k_{20} T,$$

Thus the theorem is proved as (39) coincides with (34) and (37), (39), (41) with (33b,c,d).

In the end one observation should be made. General temperature field can be presented as the superposition of two fields: solenoidal field when $\text{div}U=0$, $u=0$, $T=0$, $\varphi=0$ and thermo-electric elastic field with spherical rotor of shift vector when $\text{rot}_r U=0$.

REFERENCES

1. Nowacki W. Electromagnetic effect in solid bodies. Moskow, „Mir“, 1986.
2. Grinchenko W.T., Ulitko A.F., Shulga N.A. Electroelasticity. Kiev, „Naukova Dumka“ 1989.
3. Khomasuridze N. Thermoelastic equilibrium of multilayer spherical bodies. Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, 1997, Tbilisi, V. 23.
4. Tikhonov A.N., Samarski A.A., Equations of Mathematical Physics, Moskow, „Nauka“, 1986.

თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები სფერულ კოორდინატთა სისტემაში

დ. გორგიძე, ი. რამიშვილი, ნ. ოზბეთელაშვილი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

განხილულია თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები ერთ და მრავალფენიანი ტრანსვერსალურად იზოტროპული სხეულისათვის სფერულკოორდინატთა სისტემაში, როდესაც სხეულის სფერულ ზედაპირებზე მოცემულია ნებისმიერი სასაზღვრო პირობები, ხოლო დანარჩენ ზედაპირებზე მოცემულია III ან IV სასაზღვრო ამოცანების შესაბამისი სასაზღვრო პირობები. საკონტაქტო ზედაპირებზე მოცემულია ხისტი ან სრიალა კონტაქტის პირობები. ამ ამოცანებისათვის მიღებულია ზუსტი ამონახსნები.

A STRUCTURAL PRE-SHEAF OF C^* -ALGEBRAS

M. Mumladze, Z. Zerakidze

Gori University

Abstract. A structural pre-sheaf of C^* -algebras, which is also a co-pre-sheaf of C^* -algebras is constructed on the space $\text{Prim}U$ of primitive ideals of a C^* -algebra U . Also, co-chain and chain complexes with coefficients in a pre-sheaf and a co-pre-sheaf, respectively, are considered. A sheaf on $\text{Prim}U$ and pre-sheaves on PU and $\text{Spase}U$ are constructed from the obtained pre-sheaf by stanstand methods.

Let, U be a C^* -algebra, FU be s set of states on this algebra [1]. Consider the universal representation $\pi_U : U \rightarrow \mathfrak{Z}(H^U)$ of the algebra U [1], where $H^U = \bigoplus_{f \in FU} H^f$ and H^f is the Hilbert space associated with a state f . As we know, a universal representation is an exact one, it is an isometric embedding.

Let $U' \subset U$ be a subalgebra of the C^* -алгебры U . According to the Khan-Banach theorem, the mapping $Q : FU \rightarrow FU'$ defined by the formula $Q(f) = f|_{U'}$ is surjective.

Consider the Hilbert space $H^{U'} = \bigoplus_{f|_{U'} \in FU'} H^{f|_{U'}}$. Clearly, there exists an isometric embedding $I_{U'} : H^{U'} \rightarrow H^U$ and therefore it can be assumed that $H^{U'} \subset H^U$.

Consider the projector $P_{U'} : H^U \rightarrow H^{U'}$. Let $A \in \mathfrak{Z}(H^U)$, then $P_{U'} \circ A \circ I_{U'} \in \mathfrak{Z}(H^{U'})$ and we have the *-морфизм $T_U : \mathfrak{Z}(H^U) \rightarrow \mathfrak{Z}(H^{U'})$ defined by the formula $T_U(A) = P_{U'} \circ A \circ I_{U'}$.

If $\pi_{U'} : U' \rightarrow \mathfrak{Z}(H^{U'})$ is a universal representation, then we assume that $\tau_{U'} : U \rightarrow U'$ is the mapping defined by the formula $\tau_{U'} = \pi_{U'}^{-1} \circ T_U \circ \pi_U : U \rightarrow U'$. It is well-defined because if $A \in \pi_U(U)$, then from the construction of the universal representation it follows that $P_{U'} \circ A \circ I_{U'} \in \pi_{U'}(U')$, which means that $\tau_{U'} : U \rightarrow U'$ is well-defined.

Let $\text{Prim}U$ be the space of primitive ideals of the C^* -алгебры U . with Jacobson topology [1]. The elements of this space are the kernels of irreducible representations of the C^* -algebra U . It is obvious that these kernels are bilateral ideals. Assume that $U' \subset U'$. Consider those irreducible representation π^U which have the form $\pi^U = \pi^{U'} \circ \tau_{U'}$, where $\pi^{U'} : U' \rightarrow \mathfrak{Z}(H')$. The set of kernels of such representations is a subset of the space $\text{Prim}U$.

Let us now consider the space $\text{Prim}U'$ and the mapping $S : \text{Prim}U' \rightarrow \text{Prim}U$ defined by the formula $S(\beta) = \tau_{U'}^{-1}(\beta); \beta \in \text{Prim}U', \beta = \ker \pi^{U'}$. This mapping is an injection since if

$$\begin{aligned} \beta_1, \beta_2 \in \text{Prim}U'; \beta_1 \neq \beta_2, a \in \beta_1, a \notin \beta_2, \\ \tau_{U'}^{-1}(a) \in \tau_{U'}^{-1}(\beta_1) = \tau_{U'}^{-1}(\beta_2), \end{aligned}$$

then $a \in \beta_2$, which is impossible. Thus our assumption is not true, $\beta_1 = \beta_2$ and we can write

$\text{Prim}U' \subset \text{Prim}U$.

Assume that $O \in \text{Prim}U$ is an open set. It is a complement of the set F of primitive ideals which contain some fixed subset $M \subset U$.

Thus $O = \text{Prim}U \setminus F$ consists of primitive ideals U of the algebra which do not contain the subset $M \subset U$.

The closure \bar{O} is the set of primitive ideals which contain some subset $M' \subset U; M' \neq M$ of the algebra U . The set $P \cap \bar{O}$ consists of primitive ideals which contain both the set M and the set M' .

The set $\bar{O} \setminus (P \cap \bar{O}) = O$ consists of primitive ideals which contain the set M' and do not contain the set M .

Let $\alpha \in O$, then $\alpha = \ker \pi^U$, where $\pi^U : U \rightarrow \mathfrak{I}(H)$ is some irreducible representation. Consider the factor-algebra U/U' , where $U' = \bigcap_{\alpha \in O} \alpha$. If $p : U \rightarrow U/U'$ is a canonical projection and $\pi^{U/U'} : U/U' \rightarrow \mathfrak{I}(H)$ is some irreducible representation, then the surjectivity of p implies that the representation $\pi_{U'}^U = \pi^{U/U'} \circ p$ is irreducible. It is obvious that $M' \subset \ker \pi_{U'}^U$. Hence it follows that $\ker \pi_{U'}^U \in \bar{O}$.

Consider $\alpha \in O$ and the representation $\pi_\alpha \circ \bar{p} \circ p : U \rightarrow \mathfrak{I}(H^{U/\alpha})$, where $\bar{p} : U/U' \rightarrow U/\alpha$ is defined by the formula $\bar{p}([a]) = [[a]]$, the class $[[a]]$ is obtained by the equivalence relation $[a] \approx [b]$ if $a - b \in \alpha$, $\pi_\alpha : U/\alpha \rightarrow \mathfrak{I}(H^{U/\alpha})$ is the irreducible injective representation of the primitive algebra U/α .

Since $\bar{p} \circ p : U \rightarrow U/\alpha$ is a canonical projection, we have $\ker(\pi_\alpha \circ \bar{p} \circ p) = \alpha$. Therefore if $\pi^{U/U'} = \pi_\alpha \bar{p}$, then $\ker \pi_{U'}^U = \alpha$ and the set of primitive ideals of the algebra U/U' coincides with the set O .

Let $\pi^{U/U'} : U/U' \rightarrow \mathfrak{I}(H)$ be some irreducible representation. We consider the representation $\pi_{U'}^U = \pi^{U/U'} \circ p$ and the kernel of this representation $\ker \pi_{U'}^U = p^{-1}(\ker \pi^{U/U'})$.

The factor-algebra $U/p^{-1}(\ker \pi^{U/U'})$ is primitive. The $*$ -morphism

$\pi_{p^{-1}(\ker \pi^{U/U'})} : U/p^{-1}(\ker \pi^{U/U'}) \rightarrow \mathfrak{I}(H)$ defined by the formula $\pi_{p^{-1}(\ker \pi^{U/U'})}([[a]]) = \pi^{U/U'}([a])$ is an

irreducible injective representation. Thus $\pi_{U'}^U = \pi_{p^{-1}(\ker \pi^{U/U'})} \circ \bar{p} \circ p$ and hence it follows that each

representation $\pi_{U'}^U = \pi_{U'}^{U'} \circ p$ has the form $\pi_{U'}^U = \pi_\alpha \circ \bar{p} \circ p$ and its kernel is equal to $\alpha \in O$.

From the above reasoning we have $O = \text{Pr im } U/U'$, where $U' = \bigcap_{\alpha \in O} \alpha$.

Since U is a C^* -algebra, for each bilateral ideal $I \subset U$ the algebra U/I is a primitive module U [1]. Hence it follows that there exists a continuous $*$ -monomorphism $\varphi: U/I \rightarrow U$, for which the equality $p \circ \varphi = id_{U/I}$ is fulfilled. Therefore it can be assumed that $U/U' \subset U$.

As we see, to each set $O \subset \text{Pr im } U$ there corresponds a C^* -algebra $U_O \cong U/U'$; $U' = \bigcap_{\alpha \in O} \alpha$ such that $O = \text{Pr im } U_O$. If $O_1 \subset O_2 \subset \text{Pr im } U$, then $U'_1 \subset U'_2$ and there exists a C^* -morphism of the algebra $U_{O_2} \cong U/U'_2$; $U'_2 = \bigcap_{\alpha \in O_2} \alpha$ into the algebra $U_{O_1} \cong U/U'_1$; $U'_1 = \bigcap_{\alpha \in O_1} \alpha$. We denote this C^* -morphism as follows: $\rho_{O_1}^{O_2}: U_{O_2} \rightarrow U_{O_1}$.

Clearly, if $O_1 \subset O_2 \subset O_3 \subset \text{Pr im } U$, then $\rho_{O_1}^{O_2} \circ \rho_{O_2}^{O_3} = \rho_{O_1}^{O_3}$ and $\rho_O^O = Id_{U_O}$.

If, additionally, to the empty set $\Theta \subset \text{Pr im } U$ we put into correspondence a trivial C^* -algebra, then on the space $\text{Pr im } U$ we will define the structural pre-sheaf of C^* -algebras [2, 3]. We denote it by \mathfrak{F}_U .

The pre-sheaf \mathfrak{F}_U has the following property: for any open subsets $O' \subset O \subset \text{Pr im } U$ we have

$U_{O'} \subset U_O$. This means that \mathfrak{F}_U is a co-pre-sheaf too [2, 3]. We denote it by \mathfrak{F}_U^C .

Let us consider some open covering $\Omega = \{O_i\}$ of the space $\text{Pr im } U$. To this covering there correspond chain and co-chain complexes with coefficients in the co-pre-sheaf \mathfrak{F}_U^C and the pre-sheaf \mathfrak{F}_U . The modules of these chains and co-chains are respectively:

$$C_k(\Omega, \mathfrak{F}_U^C) = \prod_{j_0 j_1 \dots j_k} \Gamma_C(O_{j_0} \cap O_{j_1} \cap \dots \cap O_{j_k}); \partial_k: C_k(\Omega, \mathfrak{F}_U^C) \rightarrow C_{k-1}(\Omega, \mathfrak{F}_U^C);$$

$$(\partial_k f)_{j_0 j_1 \dots j_{k-1}} = \sum_{\omega} \sum_{s=0}^k (-1)^s r_{O_{j_0} \cap O_{j_1} \cap \dots \cap O_{j_{s-1}} \cap O_{j_s} \cap \dots \cap O_{j_{k-1}}}^{O_{j_0} \cap O_{j_1} \cap \dots \cap O_{j_{k-1}}} (f_{j_0 j_1 \dots j_{s-1} \omega j_s \dots j_{k-1}}),$$

$$C^k(\Omega, \mathfrak{F}_U) = \prod_{j_0 j_1 \dots j_k} \Gamma(O_{j_0} \cap O_{j_1} \cap \dots \cap O_{j_k}); \delta^k: C^k(\Omega, \mathfrak{F}_U) \rightarrow C^{k+1}(\Omega, \mathfrak{F}_U);$$

$$(\delta^k f)_{j_0 j_1 \dots j_{k+1}} = \sum_{s=0}^{k+1} (-1)^s \rho_{O_{j_0} \cap O_{j_1} \cap \dots \cap O_{j_{k+1}}}^{O_{j_0} \cap O_{j_1} \cap \dots \cap O_{j_{s-1}} \cap \hat{O}_{j_s} \cap O_{j_{s+1}} \cap \dots \cap O_{j_{k+1}}} (f_{j_0 j_1 \dots j_{s-1} \hat{j}_s j_{s+1} \dots j_{k+1}}).$$

where

$$O_\omega \subset \text{Pr im}; O_{j_0} \cap O_{j_1} \cap \dots \cap O_{j_{s-1}} \cap O_\omega \cap O_s \cap \dots \cap O_{j_{k-1}} \neq \Theta; r_O^W: \mathfrak{F}_U^C(O) \rightarrow \mathfrak{F}_U^C(W)$$

$\rho_O^W : \mathfrak{S}_U(W) \rightarrow \mathfrak{S}_U(O)$ when $O \subset W$; $j_0 j_1 \dots j_{j_k}$ is ordered totality;

$$f_{j_0 j_1 \dots j_k} \in \mathfrak{S}_U^C(O_{j_0} \cap O_{j_1} \cap \dots \cap O_{j_k}) \text{ or } f_{j_0 j_1 \dots j_k} \in \mathfrak{S}_U(O_{j_0} \cap O_{j_1} \cap \dots \cap O_{j_k}).$$

Let $\{\Omega\}$ be a set of all open coverings of the space $\text{Prim}U$ and let a covering $\Omega' = \{O'_l\}$ be inscribed into $\Omega = \{O_i\}$. Fix some mapping $\theta : \{O'_l\} \rightarrow \{O_i\}$, $\theta(O'_l) = O_i$ if $O'_l \subset O_i$.

Using this mapping we define the chain mapping $\theta_* : C_k(\Omega', \mathfrak{S}_U^C) \rightarrow C_k(\Omega, \mathfrak{S}_U^C)$ and the co-chain mapping $\theta^* : C^k(\Omega, \mathfrak{S}_U) \rightarrow C^k(\Omega', \mathfrak{S}_U)$ by the following formulas:

$$(\theta_* f)_{i_0 i_1 \dots i_k} = \sum_{O'_{i_0} \cap O'_{i_1} \cap \dots \cap O'_{i_k}} r_{O'_{i_0} \cap O'_{i_1} \cap \dots \cap O'_{i_k}}^{\theta(O'_{i_0}) \cap \theta(O'_{i_1}) \cap \dots \cap \theta(O'_{i_k})} (f_{i_0 i_1 \dots i_k});$$

$$(\theta^* f)_{i_0 i_1 \dots i_k} = \rho_{O_{i_0} \cap O_{i_1} \cap \dots \cap O_{i_k}}^{\theta(O_{i_0}) \cap \theta(O_{i_1}) \cap \dots \cap \theta(O_{i_k})} (f_{i_0 i_1 \dots i_k})$$

where $\theta(O_{i_0}) = O_{i_0}, \theta(O_{i_1}) = O_{i_1}, \dots, \theta(O_{i_k}) = O_{i_k}$ and $O_{i_0} \cap O_{i_1} \cap \dots \cap O_{i_k} \neq \emptyset$.

It is obvious that the inverse system of chain complexes and the direct system of co-chain complexes with coefficients in a co-pre-sheaf and a pre-sheaf, respectively, are defined by the set $\{\Omega\}$ of open coverings.

Note that $C_k(\Omega, \mathfrak{S}_U^C); C^k(\Omega, \mathfrak{S}_U)$ are considered here as modules over complex numbers but not as C^* -algebras.

Assume that $\Omega = \{O^\alpha\}; O^\alpha \subset \text{Prim}U$ is some family of open subsets, $\{\gamma^\alpha\}$ is some consistent Ω -family of elements $\gamma^\alpha \in U_{O^\alpha}$ [4]. Such a family always exists. The set of all such consistent Ω -families makes up a C^* -algebra. Denote it as follows: U_Ω .

Let the family $\Xi = \{G^\beta\}; G^\beta \in \text{Prim}U$ be inscribed into the family Ω . We denote a C^* -algebra of consistent Ξ families by U_Ξ . The morphism of C^* -algebras $\Gamma_\Xi^\Omega : U_\Omega \rightarrow U_\Xi$ is defined by the formula

$$\Gamma_\Xi^\Omega(\{\gamma^\alpha\}) = \{\rho_\Xi^\Omega(\gamma^\alpha)\}; G^\beta \subset O^\alpha, G^\beta \in \Xi, O^\alpha \in \Omega.$$

Since $\{\gamma^\alpha\}$ is a consistent Ω -family, Γ_Ξ^Ω is well-defined.

Let $\Omega_W = \{\Omega_W^\alpha\}$ be the family of all open coverings of the set $W \subset \text{Prim}U$, the $\{U_{\Omega_W^\alpha}; \Gamma_{\Omega_W^\alpha}^\Omega : U_{\Omega_W^\alpha} \rightarrow U_{\Omega_W^\alpha}, \Omega_W^{\alpha'} \prec \Omega_W^\alpha; \Omega_W^\alpha, \Omega_W^{\alpha'}\}$ is a direct spectrum of C^* algebras.

The limit $\hat{U}_W = \lim_{\rightarrow} \{U_{\Omega_W^\alpha}\}$ of this direct spectrum is also a C^* -algebra [5].

Let us consider the open set $W', W' \subset W$ and the open covering Ω_W^α of the set W . The family $\Omega_{W'}^\alpha = \{O \cap W' \mid O \in \Omega_W^\alpha\}$ is the covering of the set W' . The family $\Omega_{W'}^\alpha$ is also the covering of the set W' , therefore $\Omega_{W'}^\alpha$ is inscribed into Ω_W^α .

As shown above, there exist C^* -morphisms $\Gamma_{\Omega_{W'}}^{\Omega_W} : U_{\Omega_W} \rightarrow U_{\Omega_{W'}}$. The limit of the direct spectrum of these morphisms $\Gamma_{W'}^W : \hat{U}_W \rightarrow \hat{U}_{W'}$ is also a C^* -morphism.

It can be easily proved that the family $\{\hat{U}_W\}$ creates a sheaf on the space $\text{Prim}U$.

Let $\text{Spec}U$ be the spectrum of a C^* -algebra U . There exists a surjection $\phi : \text{Spec}U \rightarrow \text{Prim}U$ [6]. It defines a topology on the set $\text{Spec}U$. This is the weakest topology among such topologies on $\text{Spec}U$, for which ϕ is continuous.

Let now PU be the set of all pure states on U [1]. There exists a surjection $\varphi : PU \rightarrow \text{Spec}U$ [6] which also defines a topology on the set PU . This is the weakest topology among such topologies on PU , for which φ is continuous when on $\text{Spec}U$ we have the above-mentioned topology.

Topological structures on the spaces PU , $\text{Spec}U$ and $\text{Prim}U$ are not always good (in the sense of separability), but we think that the construction of such structures makes sense all the same

The mappings $\phi, \varphi, h = \varphi \circ \phi$ are open and therefore the structures of a pre-sheaf and a co-pre-sheaf can be extended from the space $\text{Prim}U$ to PU and $\text{Spec}U$.

REFERENCES

1. A. Ya. Khelemski. Banach and poly-normed algebras. General theory of homology representation. Nauka, Moscow, 1989. (On Russian)
2. R. Godeman. Algebraic topology and the theory of sheaves. Mir, Moscow, 1961. (On Russian)
3. V.D. Golovin. Homologies of analytic sheaves and the duality theory. Nauka, Moscow, 1986. (On Russian)
4. E. Spanier. Algebraic topology. Mir, Moscow, 1971. (On Russian)
5. T.K. Kandelaki. K -Theory of C^* -algebras. Proc. A. Razmadze Tbilisi Math. Inst. Collected Works on Topology. 3. Metsniereba, Tbilisi, 1982. (On georgian)
6. J. Dixmier. C^* -Algebras and their representations. Nauka, Moscow, 1974. (On Russian)

RELATIONSHIP BETWEEN QUALITATIVE AND QUANTITATIVE IMPORTANCE OF CRITERIA IN MULTICRITERIAL DECISION MAKING PROBLEMS

A.P. Nelyubin*, V.V. Podinovski**

* Institute of Machines Science of the RAS

** National Research University “Higher School of Economics”, DeCAAn Lab.

Influence of the assumption about the existence of cardinal coefficients of criteria importance, consistent with the importance ordering of criteria (according to the definitions in the criteria importance theory), on the preference relation, generated by this information, is investigated.

Keywords: multiple criteria decision making problems, criteria importance theory, ordering of criteria according to importance, coefficients of importance.

1. Introduction

The concept of the relative importance, or significance, of criteria is fundamental to most of the well-known methods of multiple criteria decision analysis. However, no rigorous definition of this concept has been introduced by the authors of such methods, who instead relied on an intuitive understanding of the concept [1, 2].

The mathematical theory of criteria importance [2 – 9] relies on strict definitions of the concepts of qualitative importance ‘one criterion is more important than the other’, ‘both criteria are equally important’, and quantitative importance ‘one criterion is so many times more important than the other’. In this theory decision rules were developed that induce the preference relations on the basis of the qualitative or quantitative information about the importance of criteria taking into account the information about the change of preferences along the criteria scale. However until recently there was an open question whether the preference relation induced by the qualitative importance information extends at the expense of assumption about the existence of the quantitative importance coefficients or not. This paper is devoted to answer this question representing both theoretical and practical interest.

2. The basic mathematical model

The further presentation is based on the following mathematical model:

$$\mathcal{M} = \langle \tau, X, f, Z, R \rangle,$$

where τ is the decision problem formulation (choose one or several best variants, sort all variants by preference etc.), X is the set of variants (in specific problems, these could be strategies, variants, outcomes, consequences), $f = (f_1, \dots, f_m)$ is the vector criterion, f_i are individual criteria ($m \geq 2$), Z – is

the set of estimates of the vector criterion, R is a non-strict preference relation of the decision maker (DM). Every variant x from *the set of all variants* X is characterized by its values on criteria f_i . Criterion f_i is a function defined on X and taking its values from set Z_i . This set is referred to as the scale, set of estimates, grades or values of criterion f_i . Below, it is assumed that all the criteria are homogeneous, i.e. have the same scale (which can be an ordinal scale) and, particularly, the same set of values $Z_0 = \{1, \dots, q\}$, where $q \geq 2$. Thus every variant x is characterized by the values $f_i(x)$ of all the criteria that together form the *vector estimate* $y = f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ of this variant. Therefore, the comparison of variants by preference is reduced to the comparison of their vector estimates. The set of all vector estimates is $Z = Z_0^m$.

The preferences of the DM are modeled using *the non-strict preference relation* R on set Z : yRz means that vector estimate y is not less preferable than z . Relation R induces the (strict) *preference relation* P and *indifference* I :

$$yIz \Leftrightarrow yRz \wedge zRy; yPz \Leftrightarrow yRz \wedge \neg zRy$$

($\neg zRy$ means that zRy is not true). The binary relation R is a (partial) quasi-order, i.e. it is reflexive and transitive: relation yRy holds for any vector estimate y , also, yRz and zRu implies yRu .

Relation R is constructed using the information about the preferences of the DM. It is assumed that preferences increase on the scale Z_0 so that the (unknown) values $v_0(k)$ of gradations k satisfy the inequalities:

$$v_0(1) < v_0(2) < \dots < v_0(q), \quad (2.1)$$

i.e. the value function v_0 is increasing on Z_0 . If there are no other restrictions on values of this function, then the scale of criteria is ordinal. Taking into account (2.1) the Pareto relation R^0 is defined on the set of vector estimates Z :

$$yR^0z \Leftrightarrow (y_i \geq z_i, i = 1, \dots, m).$$

Preferences of the DM are consistent with the Pareto relation: $P^0 \subset P$.

To solve the multiple criteria decision problem under given formulation only by means of the Pareto relation, as a rule, is not possible, therefore it is required to “expand” it taking into account additional information about the preferences of the DM. Below, we consider the case in which such information about the relative importance of criteria and the criteria scale is given.

3. Some facts from the criteria importance theory

For convenience, below we present basic definitions and some results from the criteria importance theory, first from the theory of qualitative importance [2 – 6]. Denote y^{ij} , the vector

obtained from vector $y = (y_1, \dots, y_m)$ by permuting its components y_i and y_j . For example, if $y = (2, 3, 5, 4)$, then $y^{13} = (5, 3, 2, 4)$.

Definition 1. The statement “criteria f_i and f_j are equally important”, which is denoted $i \approx j$, means that any two vector estimates y and y^{ij} are indifferent.

Definition 2. The statement “criterion f_i is more important than criterion f_j ”, which is denoted $i \succ j$, means that any vector estimate y , such that $y_i > y_j$, is preferred to y^{ij} .

Let Ω be the qualitative importance information, i.e. the set of all available statements of the form $i \approx j$ and $i \succ j$. According to the definitions 1 and 2, the statement $i \approx j$ induces the indifference relation $I^{i \approx j}$ on the set of vector estimates Z , and the statement $i \succ j$ induces the preference relation $P^{i \succ j}$ on the set Z , which are defined as follows:

$$y I^{i \approx j} z \Leftrightarrow (z = y^{ij}, y_i \neq y_j), \quad y P^{i \succ j} z \Leftrightarrow (z = y^{ij}, y_i > y_j).$$

The non-strict preference relation (quasi-order) R^Ω induced on Z by qualitative information about criteria preference Ω , is defined as the least transitive relation which contains the Pareto relation R^0 and relations R^ω for all $\omega \in \Omega$ (here $R^\omega = I^{i \approx j}$ if $\omega = i \approx j$, and $R^\omega = P^{i \succ j}$ if $\omega = i \succ j$):

$$R^\Omega = \text{TrCl}[(\bigcup_{\omega \in \Omega} R^\omega) \cup R^0],$$

where TrCl denotes the operation of transitive closure of a binary relation. According to this definition relation $y R^\Omega z$ holds if and only if there exists a sequence such that

$$y R^{\omega^1} u^1, u^1 R^{\omega^2} u^2, \dots, u^{r-1} R^{\omega^r} z, \quad (3.1)$$

here u^k – vector estimates, and ω^k is either information ω from Ω or the symbol 0.

Definition 2. The numbers β_1, \dots, β_m are called *importance index* of criteria, consistent with the information Ω , if they satisfy the conditions:

$$i \approx j \in \Omega \Rightarrow \beta_i = \beta_j, \quad i \succ j \in \Omega \Rightarrow \beta_i > \beta_j.$$

If the importance indexes are positive and in the total are equal to 1, then they are called *coefficients of importance* of criteria and denoted as α_i .

Information Ω is *complete* and *consistent* if it is sufficient for a complete ordering of all criteria according to their importance. Such information will be denoted Ω^* . The importance indexes and coefficients of importance of criteria, consistent with the information Ω^* , are called *ordinal*.

Below, we will use the following notations for vectors from Re^n ($n > 1$):

$$a \geq b \Leftrightarrow a_i \geq b_i, i = 1, \dots, n; \quad a \geq b \Leftrightarrow a \geq b, a \neq b; \quad a > b \Leftrightarrow a_i > b_i, i = 1, \dots, n;$$

$a_{\uparrow} = (a_{(1)}, \dots, a_{(n)})$ is the vector obtained by permuting the components of vector a in the non-increasing order, i.e. $a_{(1)} \geq \dots \geq a_{(n)}$.

For information Ω^* the relation R^{Ω^*} can be specified analytically. Denote

$$\alpha_{ik}(y) = \begin{cases} \alpha_i, & y_i = k, \\ 0, & y_i \neq k, \end{cases} \quad \sigma_i^k(y) = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij}(y), \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, q.$$

The following statement holds:

$$yR^{\Omega^*}z \Leftrightarrow \sigma_{\uparrow}^k(y) \leq \sigma_{\uparrow}^k(z), \quad k = 1, \dots, q-1. \quad (3.2)$$

If in (3.2) all the non-strict inequalities \leq are satisfied as equalities, then $yP^{\Omega^*}z$, and if at least one of the \leq is $<$, then $yP^{\Omega^*}z$.

Assume that $q > 2$ and there is an additional information D on that the rate of growth of preferences along the criteria scale slows down (so criteria have the first ordered metric scale [10]):

$$v_0(2) - v_0(1) > v_0(3) - v_0(2) > \dots > v_0(q) - v_0(q-1). \quad (3.3)$$

At the presence of information D statement $i \approx j$ also induces the preference relation $P^{i \approx j \& D}$ on the set of vector estimates Z , and statement $i > j$ induces the preference relation $P^{i > j \& D}$ on the set Z , which are defined as follows:

$$yP^{i \approx j \& D}z \Leftrightarrow (y = (z \parallel z_i + l, z_j - l), z_i + l \parallel z_j - l) \vee (y = (z \parallel z_j + l, z_i - l), z_j + l \parallel z_i - l), \quad (3.4)$$

$$yP^{i > j \& D}z \Leftrightarrow (y = (z \parallel z_i + l, z_j - l), z_i + l \parallel z_j - l), \quad (3.5)$$

where $l \in Z_0$, $(z \parallel z_i + l, z_j - l)$ is vector estimate, obtained from z by increasing the component z_i to $z_i + l$ and decreasing the component z_j to $z_j - l$. The sense of these relations is simple. Definition (3.4) states: if criteria f_i and f_j are equally important, then by increasing the lesser from components z_i and z_j by a natural number l and simultaneously decreasing the greater by the same number l , so that the increased component doesn't become greater than the decreased one, we will obtain a vector estimate which is more preferable than the initial vector estimate z . This definition is schematically illustrated in fig. 1.

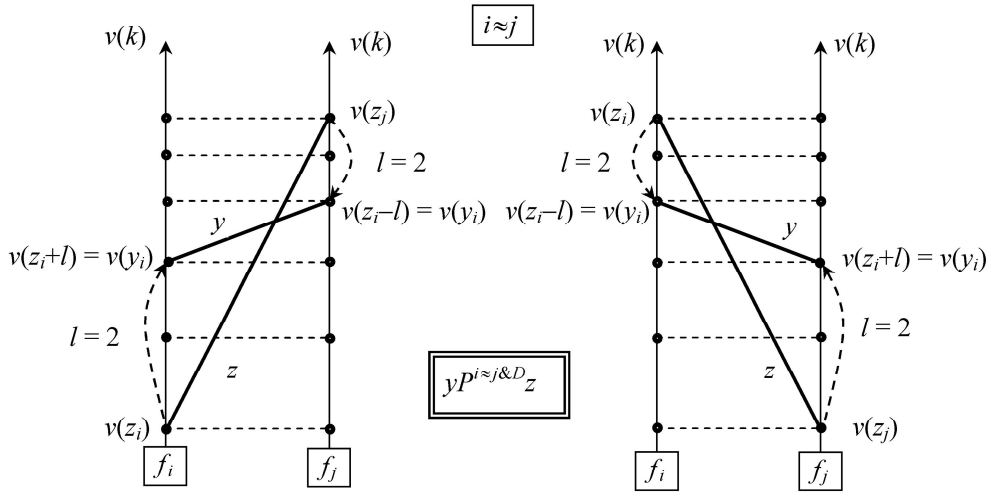


Fig. 1. Schematic illustration to the definition of the relation $P^{i \approx j \& D}$

Definition (3.4) states: if some criterion f_i is more important than f_j and the component z_i of a vector estimate z is less than the component z_j , then by increasing z_i by a natural number l and simultaneously decreasing z_j by the same number l , so that the increased component doesn't become greater than the decreased one, we will obtain a vector estimate which is more preferable than the initial vector estimate z . This definition is schematically illustrated in fig. 2.

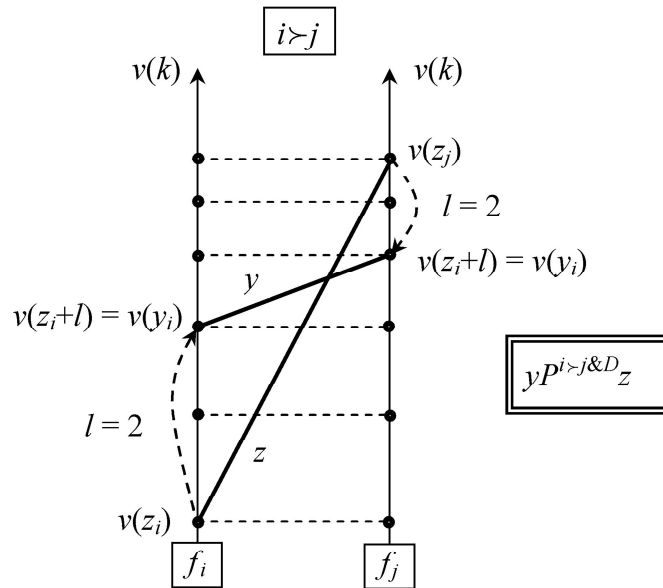


Fig. 2. Schematic illustration to the definition of the relation $P^{i > j \& D}$

In the scope of the problem under the study definitions (3.4) and (3.5) can also be considered as definition of the first ordered metric scale with slowdown of the rate of growth of preferences along the criteria scale without using inequalities (3.3).

The non-strict preference relation (quasi-order) $R^{\Omega \& D}$ induced on Z by the qualitative information about the criteria preference Ω and the information D is defined as follows:

$$R^{\Omega \& D} = \text{TrCl}[(\bigcup_{\omega \in \Omega} (R^\omega \cup P^{\omega \& D})) \cup R^0],$$

where $R^\omega = P^{i>j}$ and $P^{\omega \& D} = P^{i>j \& D}$ if ω is $i>j$; $R^\omega = P^{i \approx j}$ and $P^{\omega \& D} = P^{i \approx j \& D}$ if ω is $i \approx j$. According to this definition, $yR^{\Omega \& D}z$ holds if and only if there exists a sequence (3.1), in which u^k are vector estimates, and ω^k is ω or $\omega \& D$ (so that R^{ω^k} is either $P^{i>j}$ or $P^{i \approx j}$ subject to the sense of ω^k) or 0.

Now we present some information from the theory of quantitative importance [8, 9]. Quantitative information about criteria importance Θ contains statements like «Criterion f_i is h_{ij} times as important as criterion f_j » (this statement is denoted as $i \succ^{h_{ij}} j$) or estimates (e.g. interval) of values h_{ij} . We don't formulate the exact definition of the concept that one criterion is h times as important as the other, because we will not use it below. Quantitative information about criteria importance is called *complete and consistent* and denoted Θ^* , if it consists of statements $i \succ^{h_{ij}} j$ and induces *quantitative, or cardinal indexes of criteria importance* β_i – positive numbers satisfying the conditions:

$$h_{ij} = \frac{\beta_i}{\beta_j}, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

If the total of all β_i is equal to 1, then they are called *quantitative, or cardinal coefficients of importance* of criteria and denoted as α_i . These coefficients are determined explicitly by the information Θ^* , i.e. the vector $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ is single.

The decision rule which defines the non-strict relation R^{Θ^*} induced by information Θ^* can be stated in the following form:

$$yR^{\Theta^*}z \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \sigma_i^k(y) \geq \sum_{i=1}^m \sigma_i^k(z), \quad k = 1, \dots, q-1. \quad (3.6)$$

If in (3.6) all the non-strict inequalities are satisfied as equalities, then $yI^{\Theta^*}z$, and if at least one of the inequalities is strict, then $yP^{\Theta^*}z$.

If information Θ is incomplete and the exact values of criteria importance coefficients α_i are unknown (e.g. there are only interval estimates of these values), then we have only (nonempty) set A of possible values of vector $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. The relation R^A corresponding to such an information is defined as: relation yR^Az holds if and only if all of $q-1$ inequalities in (3.6) are satisfied for any $\alpha \in A$, or, which is equivalent,

$$yR^Az \Leftrightarrow \sup_{\alpha \in A} \sum_{i=1}^m (\sigma_i^k(y) - \sigma_i^k(z)) \geq 0, \quad k = 1, \dots, q-1, \quad (3.7)$$

Assume that there is an additional information D on that the rate of growth of preferences along the criteria scale slows down, so the inequalities (3.3) hold. The decision rule which defines the non-strict relation $R^{\Theta^* \& D}$ induced by information $\Theta^* \& D$ can be written as:

$$yR^{\Theta^* \& D}z \Leftrightarrow \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \sigma_i^j(y) \geq \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \sigma_i^j(z), \quad k = 1, \dots, q-1. \quad (3.8)$$

If in (3.8) all the non-strict inequalities are satisfied as equalities, then $yI^{\Theta^* \& D}z$, and if at least one of the inequalities is strict, then $yP^{\Theta^* \& D}z$.

If the information Θ allows to determine only a set A of possible values of α , then the relation $R^{A \& D}$ is defined in the following form: relation $yR^{A \& D}z$ holds if and only if all of $q-1$ inequalities in (3.8) are satisfied for any $\alpha \in A$, or, which is equivalent,

$$yR^{A \& D}z \Leftrightarrow \sup_{\alpha \in A} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m (\sigma_i^j(y) - \sigma_i^j(z)) \geq 0, \quad k = 1, \dots, q-1. \quad (3.9)$$

4. Correlation between qualitative and quantitative importance of criteria

Information about qualitative criteria importance Ω^* and information about quantitative criteria importance Θ (in particular Θ^*) are consistent if

$$\begin{aligned} i \approx j &\Rightarrow \forall \alpha \in A : \alpha_i = \alpha_j, \quad i \succ j \Rightarrow \forall \alpha \in A : \alpha_i > \alpha_j; \\ (i \approx j \in \Omega^* &\Rightarrow i \succ^1 j, \quad i \succ j \in \Omega^* \Rightarrow i \succ^{h_{ij}} j, h_{ij} > 1). \end{aligned}$$

Notice that for consistent Ω^* and Θ (in particular Θ^*) the following enclosures hold [2, 3, 8, 9]:

$$\begin{aligned} R^{\Omega^*} \subseteq R^A, I^{\Omega^*} \subseteq I^A, P^{\Omega^*} \subseteq P^A; R^{\Omega^* \& D} \subseteq R^{A \& D}, I^{\Omega^* \& D} \subseteq I^{A \& D}, P^{\Omega^* \& D} \subseteq P^{A \& D}. \quad (4.1) \\ (R^{\Omega^*} \subseteq R^{\Theta^*}, I^{\Omega^*} \subseteq I^{\Theta^*}, P^{\Omega^*} \subseteq P^{\Theta^*}; R^{\Omega^* \& D} \subseteq R^{\Theta^* \& D}, I^{\Omega^* \& D} \subseteq I^{\Theta^* \& D}, P^{\Omega^* \& D} \subseteq P^{\Theta^* \& D}). \end{aligned}$$

Consider the case when the set $A = A^*$, apart from constraints

$$\alpha_i > 0, i = 1, \dots, m; \alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1, \quad (4.2)$$

is determined by equalities and inequalities corresponding to the information Ω^* which sorts all the criteria by their importance:

$$i \approx j \in \Omega^* \Rightarrow \alpha_i = \alpha_j, \quad i \succ j \in \Omega^* \Rightarrow \alpha_i > \alpha_j. \quad (4.3)$$

In essence putting the set A^* into consideration means that in addition to qualitative information about criteria importance Ω^* we make an assumption about the existence of cardinal coefficients of criteria importance. Therefore the question whether the corresponding to A^* non-

strict enclosures (4.1) are satisfied as equalities represents both theoretical and practical interest. It was found that the answer to this question is positive for criteria with ordinal scale, but negative for criteria with first ordered metric scale!

Theorem 1. Equalities $R^{\Omega^*} = R^{A^*}$, $I^{\Omega^*} = I^{A^*}$, $P^{\Omega^*} = P^{A^*}$ hold.

Theorem 2. Enclosures $R^{\Omega^* \& D} \subseteq R^{A^* \& D}$, generally speaking, are strict.

The proofs of these theorems are given in the Appendix.

5. Conclusion

In this paper we have shown that non-strict relation induced by qualitative information about criteria importance on making additional assumption about the existence of quantitative coefficients of criteria importance doesn't expand in case of ordinal scale of criteria and, generally speaking, expands in case of first ordered metric scale.

This result should be taken into account when using the known approach to modeling of the preferences, based on usage of multiple estimations of values of importance coefficients at the incomplete information about criteria importance and character of change of preferences along their scale.

6. Appendix

Proof of Theorem 1.

Without loss of generality, we will assume that according to the information Ω^* all the criteria are arranged and indexed in descending order of their relative importance (the criterion f_1 is the most important one, and f_m is the least important).

Since the set A^* specified by (4.2) is not empty, instead of it in (3.7), we can use [11] convex polyhedron set \bar{A} , which is specified by the system

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_m \geq 0; \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1, \quad (6.1)$$

where $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ if $i \approx i+1 \in \Omega^*$. After such a transition we can use operator max instead of sup in the decision rule (3.7), which now can be written as follows:

$$y R^A z \Leftrightarrow \max_{\alpha \in \bar{A}} \sum_{i=1}^m (\sigma_i^k(y) - \sigma_i^k(z)) \alpha_i \geq 0, \quad k = 1, \dots, q-1. \quad (6.2)$$

Define the differences from (6.2) as functions of α :

$$\Delta_k(\alpha) = \sum_{i=1}^m (\sigma_i^k(y) - \sigma_i^k(z)) \alpha_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i c_{ik}(y, z), \quad k = 1, \dots, q-1, \quad (6.3)$$

where introduced numbers $c_{ik}(y, z) \in \{-1, 0, 1\}$ which are determined by the vector estimates to be compared.

Since the set \bar{A} is a convex polyhedron and functions (6.3) are linear, problems (6.2) of their maximization are linear programming problems. Hence, the maximum of each of these functions on \bar{A} is attained at one of extreme points of this polyhedron.

The extreme points can be described analytically. If (6.1) doesn't contain any equality like $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, then coordinates of an extreme point α^* are described as follows (see, e.g. [12]):

$$\alpha_1^* = \alpha_2^* = \dots = \alpha_i^* = \frac{1}{i}, \quad \alpha_{i+1}^* = \dots = \alpha_m^* = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.4)$$

Since the number of extreme points is equal to m , expression (6.4) describes one-to-one correspondence between the numbers $i \in \{1, \dots, m\}$ and the extreme points α^* , which can be denoted as $\alpha^*(i) = (\frac{1}{i}, \dots, \frac{1}{i}, 0, \dots, 0)$.

In case when constraints (6.1) contain one equality $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ the number of extreme points is reduced by one. And from two extreme points $\alpha^*(i)$ and $\alpha^*(i+1)$ only the second remains. It follows from the fact that from all m vectors described in (6.4) only in vector $\alpha^*(i)$ the corresponding components are not equal: $\alpha_i = \frac{1}{i} > \alpha_{i+1} = 0$. Analogously, if there are several equally important criteria, then from extreme points corresponding to their indexes remains only the last one, because for others the corresponding components are not equal. If all the criteria are equally important then all importance coefficients α_i are determined explicitly and the set \bar{A} consists of the single point $\alpha^*(m) = (\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$. Denote $I^* = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ the set of numbers $i \in \{1, \dots, m\}$, for which there exist corresponding extreme points $\alpha^*(i)$ in accordance with described mapping. It means that there are n groups of equally important criteria, and numbers $i_1 < i_2 < \dots < i_n = m$ are indexes of the last criteria in every group.

Assume that relation $yR^{A^*}z$ holds for given arbitrary vector estimates y and z . It means that at all extreme points (6.4) of polyhedron \bar{A} the values of the functions (6.3) don't exceed 0. In other words, for all numbers $i \in I^*$ and $k \in \{1, \dots, q-1\}$ the following conditions hold:

$$\Delta_k(\alpha^*(i)) = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i c_{jk}(y, z) \geq 0, \quad k = 1, \dots, q-1. \quad (6.5)$$

According to (6.3) the numbers $c_{ik}(y, z)$ are determined as follows:

1. if $\sigma_i^k(y) = \alpha_i$, $\sigma_i^k(z) = \alpha_i$, then $c_{ik}(y, z) = 0$;

2. if $\sigma_i^k(y) = \alpha_i$, $\sigma_i^k(z) = 0$, then $c_{ik}(y, z) = 1$;
3. if $\sigma_i^k(y) = 0$, $\sigma_i^k(z) = \alpha_i$, then $c_{ik}(y, z) = -1$;
4. if $\sigma_i^k(y) = 0$, $\sigma_i^k(z) = 0$, then $c_{ik}(y, z) = 0$.

Hence, the condition (6.5) means that for the first i elements of vectors $\sigma^k(y)$ and $\sigma^k(z)$ total occurs of the third case is not less than total occurs of the second case.

We will fix an arbitrary number $k \in \{1, \dots, q - 1\}$ and show that the following vector inequality holds (см. (3.2)):

$$\sigma_{\uparrow}^k(y) \leq \sigma_{\uparrow}^k(z). \quad (6.6)$$

Assume that this is not the case and there exists $i \in \{1, \dots, m\}$ such that $\sigma_{(i)}^k(y) > \sigma_{(i)}^k(z)$. It means that $\sigma_{(i)}^k(y) = \alpha_{i_p} > 0$, where $i_p \in I^*$, and $\sigma_{(i)}^k(z)$ is equal to either 0 or $\alpha_{i_r} > 0$, where $i_r \in I^*$ with requirement of $r > p$. The numbers p and r are the indexes of groups of equally important criteria. Consequently for the first i_p elements of vectors $\sigma^k(y)$ and $\sigma^k(z)$ total occurs of the third case is less than total occurs of the second case, but this result contradicts our assumption.

Hence, vector inequality (6.6) holds. Since the number $k \in \{1, \dots, q - 1\}$ was chosen arbitrary all conditions of decision rule (3.2) are satisfied. Therefore relation $yR^{\Omega^*}z$ holds.

If relation $yI^{A^*}z$ holds for vector estimates y and z , then $yR^{A^*}z$ and $zR^{A^*}y$. Therefore, as it was proved above, $yR^{\Omega^*}z$ and $zR^{\Omega^*}y$. Hence, $yI^{\Omega^*}z$ also holds.

If relation $yP^{A^*}z$ holds for vector estimates y and z , then $yR^{A^*}z$ is true and $zR^{A^*}y$ is false. Therefore, as it was proved above, $yR^{\Omega^*}z$. And $zR^{\Omega^*}y$ is not true because of enclosure $R^{\Omega^*} \subseteq R^{A^*}$ from (4.1). Hence, $yP^{\Omega^*}z$ also holds.

Enclosures from (4.1) together with derived enclosures

$$R^{A^*} \subseteq R^{\Omega^*}, \quad I^{A^*} \subseteq I^{\Omega^*}, \quad P^{A^*} \subseteq P^{\Omega^*}$$

complete the proof of Theorem 1.

Proof of Theorem 2.

Correctness of this theorem is shown by the following

Counterexample. Assume that $m = 4$, $q = 3$, $\Omega^* = \{1 \succ 2, 1 \succ 3, 1 \succ 4, 2 \succ 3, 2 \succ 4, 3 \succ 4\}$.

System of restrictions (4.2), (4.3), which specifies the set A^* , can be written in the compact form:

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1. \quad (6.7)$$

Consider the vector estimates $y = (2, 2, 3, 1)$, $z = (1, 3, 2, 2)$. Taking into account (6.7) it can be shown that conditions from (3.9) hold:

$$\sup_{\alpha \in A^*} \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^m (\sigma_i^j(y) - \sigma_i^j(z)) = \sup_{\alpha \in A^*} (\alpha_4 - \alpha_1) \setminus 0,$$

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha \in A^*} \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^m (\sigma_i^j(y) - \sigma_i^j(z)) &= \sup_{\alpha \in A^*} [(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4) - (2\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4)] = \\ &= \sup_{\alpha \in A^*} [(\alpha_2 - \alpha_1) + (\alpha_4 - \alpha_3)] \setminus 0. \end{aligned}$$

Hence, $yR^{A^* \& D} z$ is true.

Lets check now $yR^{\Omega^* \& D} z$. It can be shown that it is impossible to construct the required sequence (3.1). Really, when $P^{i \rightarrow j}$ or $P^{i \rightarrow j \& D}$ are ‘‘applied’’ to a vector estimate, the sum of it’s components doesn’t change, but in case of P^0 this sum decreases. Since $2 + 2 + 3 + 1 = 1 + 3 + 2 + 2 = 8$ the sequence from y to z can not contain any P^0 . The graph in fig. 3 shows how the vector estimate $y = (2, 2, 3, 1)$ can be sequentially made worse, and the graph in fig. 4 shows how the vector estimate $z = (1, 3, 2, 2)$ can be sequentially made better.

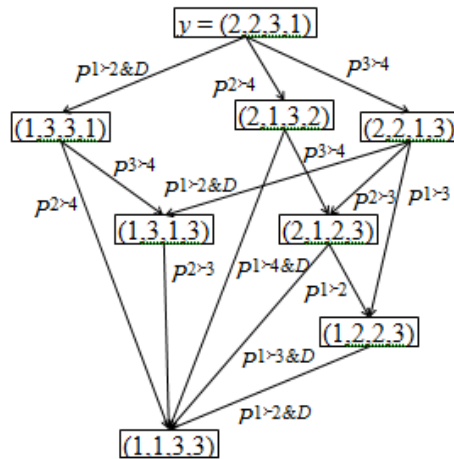


Fig. 3. Vector estimates that are less preferable than y , according to the information $\Omega^* \& D$

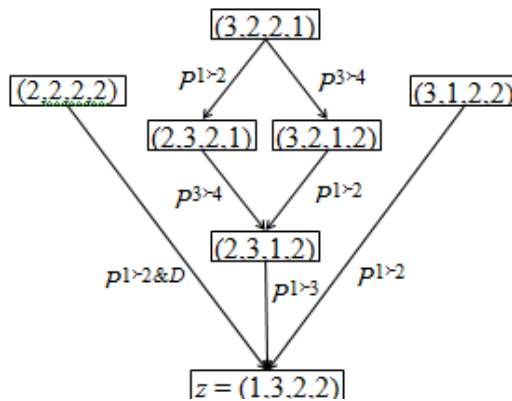


Fig. 4. Vector estimates that are more preferable than z , according to the information $\Omega^* \& D$

Since there is no equal vector estimates on these graphs it is impossible to “stick together” their elements to form the sequence from y to z . Hence, $R^{\Omega^* \& D}$ is false.

REFERENCES

1. Belton V., Gear T. On the meaning of relative importance. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*. 1997. V. 6. P. 335 – 338.
2. Podinovski V.V. An axiomatic solution of the problem of criteria importance in multicriterial problems. In: *Theory of Operations Research: State of the Art*. N.N. Moiseev (Ed.). Moscow: Nauka Publishing House. 1979. P. 117 –149 (in Russian).
3. Podinovskii V.V. Multicriterial problems with importance-ordered criteria. *Automation and Remote Control*. 1976. V. 37. No 11, part 2. P. 1728 – 1736.
4. Podinovskii V.V. Importance coefficients of criteria in decision making problems. Serial, or ordinal importance coefficients. *Automation and Remote Control*. 1978. V. 39. P. 1514 – 1524.
5. Podinovski V.V. Problems with importance-ordered criteria // *User-Oriented Methodology and Techniques of Decision Analysis and Support*. J. Wessels and A.P. Wierzbicki (Eds.). *Lecture Notes in Economics and Math. Systems*. V. 397. Berlin: Springer, 1993. P. 150 – 155
6. Podinovski V.V. Multicriteria optimization problems involving importance-ordered criteria // *Modern Mathematical Methods of Optimization*. Elster K.-H. (Ed.). Berlin: Akademie Verlag. 1993. P. 254 – 267.
7. Podinovski V.V. Criteria importance theory // *Mathematical Social Sciences*. 1994. V. 27. P. 237-252.
8. Podinovski V.V. The quantitative importance of criteria for MCDA // *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*. 2002. V. 11. P. 1 – 15.
9. Podinovski V.V. On the use of importance information in MCDA problems with criteria measured on the first ordered metric scale // *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*. 2009. V. 15. P. 163 – 174.
10. Fishburn P.C. *Decision and value theory*. New York: Wiley, 1964.
11. Podinovski V.V. Decision under multiple estimates for the importance coefficients of criteria and probabilities of values of uncertain factors in the aim function. *Automation and Remote Control*. 2004. V. 65. P. 1817 – 1833.
12. Claessens M. N. A. J., Lootsma F. A., Vogt F. J. An elementary proof of Poelinck's theorem on the convex hull of ranked criterion weights // *European Journal of Operational Research*. 1991. V. 52. P. 255 – 258.

**ცხრილით მოცემული ორცვლადიანი ფუნქციის ანალიზური
სახით ჩაწერის მათემატიკური მოდელების მეთოდი**

**ირაკლი გორჯოლაძე, ნათია გორჯოლაძე, ხატია გორჯოლაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი**

რეზიუმე: ნაშრომში ჩამოყალიბებულია ცხრილით მოცემული ორცვლადიანი ფუნქციის ანალიზური სახით ჩაწერის მეთოდი, რომელსაც ჩვენ **ცხრილით მოცემული ორცვლადიანი ფუნქციის ანალიზური სახით ჩაწერის მათემატიკური მოდელების მეთოდი** ვუწოდებთ. მეთოდი დაფუძნებულია ორცვლადიანი ფუნქციის რანგის ცნების შემოღებაზე.

საკვანძო სიტყვები: ფუნქცია, ცხრილი, რანგი, მოდელი, კრიტერიუმი, ანალიზური სახე.

1. შესავალი

ორცვლადიან ფუნქციას თავისი არგუმენტების მიმართ, საზოგადოდ, აქვს უამრავი სხვადასხვა აგებულების მათემატიკური მოდელი. მოდელი შეიძლება წარმოადგენდეს არგუმენტების ერთცვლადიან ფუნქციათა ნამრავლს, ჯამს, ხარისხს და მათ სხვადასხვა კომბინაციებს. ყოველი კონკრეტული მოდელი ფუნქციის მნიშვნელობებისაგან მოითხოვს მხოლოდ მისთვის დამახასიათებელი პირობების შესრულებას. ვუწოდოთ ამ პირობებს **ფუნქციის მათემატიკური მოდელის მამოწმებელი კრიტერიუმი**.

რაიმე პრობლემის გამოკვლევის მიზნით ხშირად გვიწევს ცდების ჩატარება, რომელთა შედეგები უმრავლეს შემთხვევაში წარმოადგენენ რამდენიმე ცვლადზე დამოკიდებულ რაიმე სიდიდის მნიშვნელობებს. თავდაპირველად ამ მნიშვნელობების მოცემის ყველაზე ხელსაყრელი ხერხია მათი ჩაწერა ცხრილის სახით. შემდგომში დგება საკითხი ცხრილით მოცემული სიდიდის ანალიზური სახით ჩაწერისა. ამ მიზნის მისაღწევად არსებობს სხვადასხვა მეთოდები. ამავე მიზნით გთავაზობთ ჩვენს მიერ ჩამოყალიბებულ მეთოდს, რომელიც მრავალცვლადიანი ფუნქციის რანგის ცნებაზეა დაფუძნებული.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: ვთქვათ, რაიმე u სიდიდე, რომელიც x და y დამოუკიდებელ ცვლადებზეა დამოკიდებული, მოცემულია ცხრილის სახით, რომლის მარცხენა სვეტსა და ზედა სტრიქონში შესაბამისად განლაგებულია x და y ცვლადების $x_i, y_j \in R (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; m \geq n)$ მნიშვნელობები, ხოლო სიდიდის u_{ij} მნიშვნელობა მდებარეობს i -ური სტრიქონისა და j -ური სვეტის

გადაკვეთაზე (იხ. ცხრ. 1). საჭიროა u_{ij} მნიშვნელობების საშუალებით დავადგინოთ R^2 -ზე განსაზღვრული ორ ცვლადზე დამოკიდებული სიდიდის მათემატიკური მოდელი (მმ), მისი მამოწმებელი კრიტერიუმი (მკ) და, თუ ეს მოვახერხეთ, ჩავწეროთ ანალიზური სახით.

ცხრილი 1

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	y_1	y_2	.	y_j	.	y_d	.	y_k	.	y_β	.	y_n
x_1	u_{11}	u_{12}	.	u_{1j}	.	u_{1d}	.	u_{1k}	.	$u_{1\beta}$.	u_{1n}
x_2	u_{21}	u_{22}	.	u_{2j}	.	u_{2d}	.	u_{2k}	.	$u_{2\beta}$.	u_{2n}
.
x_i	u_{i1}	u_{i2}	.	u_{ij}	.	u_{id}	.	u_{ik}	.	$u_{i\beta}$.	u_{in}
.
x_c	u_{c1}	u_{c2}	.	u_{cj}	.	u_{cd}	.	u_{ck}	.	$u_{c\beta}$.	u_{cn}
.
x_s	u_{s1}	u_{s2}	.	u_{sj}	.	u_{sd}	.	u_{sk}	.	$u_{s\beta}$.	u_{sn}
.
x_α	$u_{\alpha 1}$	$u_{\alpha 2}$.	$u_{\alpha j}$.	$u_{\alpha d}$.	$u_{\alpha k}$.	$u_{\alpha \beta}$.	$u_{\alpha n}$
.
x_m	u_{m1}	u_{m2}	.	u_{mj}	.	u_{md}	.	u_{mk}	.	$u_{m\beta}$.	u_{mn}

ცხრილის ელემენტებით შევადგინოთ $U = (u_{ij})_{i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n}$; $m \geq n$ მატრიცა, სადაც i სტრიქონის ნომერია, ხოლო j - სვეტის. ვუწოდოთ მას **ფუნქციის მნიშვნელობათა მატრიცა**. ამ მატრიცის ნებისმიერად შერჩეული სტრიქონებისა და სვეტების საშუალებით შევადგინოთ $r+1$ რიგის დეტერმინანტ:

$$\det U_{r+1} = \begin{vmatrix} u_{ij} & u_{id} & u_{ik} & \dots & u_{ir} & u_{i\alpha} \\ u_{cj} & u_{cd} & u_{ck} & \dots & u_{cr} & u_{c\alpha} \\ u_{sj} & u_{sd} & u_{sk} & \dots & u_{sr} & u_{s\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{rj} & u_{rd} & u_{rk} & \dots & u_{rr} & u_{r\alpha} \\ u_{\alpha j} & u_{\alpha d} & u_{\alpha k} & \dots & u_{\alpha r} & u_{\alpha \alpha} \end{vmatrix} \quad (r+1)(r+1)$$

მათემატიკიდან ცნობილია, რომ თუ $\det U_r \neq 0$ და $\det U_{r+1} = 0$, მაშინ r -ს ეწოდება U მატრიცის რანგი.

განსაზღვრა 1. ფუნქციის მნიშვნელობებით შედგენილი U მატრიცის რანგს ვუწოდოთ ორცვლადიანი ფუნქციის ჩვეულებრივი რანგი ან მოკლედ – ფუნქციის რანგი.

2. მთავარი ნაწილი

[1] ნაშრომში დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა: იმისათვის, რომ $u = u(x, y)$ ფუნქციას ჰქონდეს

$$u(x, y) = \sum_{\gamma=1}^r f_{\gamma}(x) \varphi_{\gamma}(y) \quad (1)$$

სახე, სადაც f_{γ} და φ_{γ} R -ზე განსაზღვრული ელემენტარული ფუნქციებია, აუცილებელია და საკმარისი ფუნქციის რანგი იყოს r -ის ტოლი, ე.ი. შესრულდეს შემდეგი პირობა:

$$\det U_r \neq 0, \det U_{r+1} = 0. \quad (2)$$

ეს თეორემა წარმოადგენს ძირითად თეორემას ცხრილით მოცემული ორცვლადიანი ფუნქციის ანალიზური სახით ჩაწერის მეთოდისა, რომელსაც ქვემოთ შემოგთავაზებთ.

(1) ფორმულას შეიძლება ჰქონდეს შემდეგი სახის კერძო შემთხვევები [2;3;4]:

$$u(x, y) = \sum_{\gamma=1}^{r-2} f_{\gamma}(x) \varphi_{\gamma}(y) + g(x) + \psi(y), \quad (3)$$

$$u(x, y) = \sum_{\gamma=1}^{r-1} f_{\gamma}(x) \varphi_{\gamma}(y) + g(x), \quad (4)$$

$$u(x, y) = \sum_{\gamma=1}^{r-1} f_{\gamma}(x) \varphi_{\gamma}(y) + \psi(y), \quad (5)$$

$$u(x, y) = \sum_{\gamma=1}^{r-1} f_{\gamma}(x) \varphi_{\gamma}(y) + a, \quad (6)$$

$$u(x, y) = \sum_{\gamma=1}^{r-2} f_{\gamma}(x) \varphi_{\gamma}(y) + g(x) \psi(y) + g(x) + \psi(y), \quad (7)$$

სადაც g და ψ ელემენტარული ფუნქციებია, $a = \text{const} \in R$, $r = 2, 3, \dots, n$.

პრაქტიკაში ძალიან ხშირად გვხვდება ზემოთ მოყვანილი მოდელების შემდეგი სახის უმარტივესი კერძო მოდელები:

$$u(x, y) = f(x) \varphi(y), \quad (r=1) \quad (8)$$

$$u(x, y) = f(x) \varphi(y) + g(x) \psi(y), \quad (r=2) \quad (9)$$

$$u(x, y) = f(x) + \varphi(y), \quad (r=2) \quad (10)$$

$$u(x, y) = f(x) \varphi(y) + g(x) + \psi(y), \quad (r=3) \quad (11)$$

$$u(x, y) = f(x) \varphi(y) + g(x), \quad (r=2) \quad (12)$$

$$u(x, y) = f(x) \varphi(y) + \psi(y), \quad (r=2) \quad (13)$$

$$u(x, y) = f(x) \varphi(y) + a, \quad a = \text{const} \in R, \quad (r=2) \quad (14)$$

$$u(x, y) = f(x) \varphi(y) + f(x) + \varphi(y), \quad (r=2) \quad (15)$$

ყველა კერძო შემთხვევას აქვს საკუთარი მკ და ფუნქციის ასდფ (ცხადია, ზოგადთან შედარებით უფრო მარტივი).

რასაკვირველია, უფრო მეტი კერძო შემთხვევები გვაქვს, როცა $r > 2$.

ძირითადი თეორემის დამტკიცების პოცესიდან გამომდინარეობს, რომ საძიებელი ფუნქციის ანალიზური სახის დამდგენი ფორმულა (ასდფ) ცხადი სახით არის $u(x, y)$ -ის მიმართ შემდეგი განტოლების ამონახსნი:

$$\begin{vmatrix} u(x, y) & u_d(x) & \dots & u_k(x) & \dots & u_\beta(x) & \dots & u_r(x) \\ u_c(y) & u_{cd} & \dots & u_{ck} & \dots & u_{c\beta} & \dots & u_{cr} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_s(y) & u_{sd} & \dots & u_{sk} & \dots & u_{s\beta} & \dots & u_{sr} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_\alpha(y) & u_{\alpha d} & \dots & u_{\alpha k} & \dots & u_{\alpha\beta} & \dots & u_{\alpha r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_r(y) & u_{rd} & \dots & u_{rk} & \dots & u_{r\beta} & \dots & u_{rr} \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

$(r+1)(r+1)$

სადაც $u_d(x)$, $u_k(x)$, $u_l(x)$, $u_c(y)$, $u_s(y)$, $u_h(y)$ ინდექსების შესაბამისი სვეტებისა და სტრიქონების ელემენტებით დადგენილი ფუნქციებია.

მაგალითის სახით მოგვყავს (9), (10) და (11) მოდულების შესაბამისი ფუნქციის ასდფ-ები:

$$u(x, y) = u_d(x) u_c(y) / u_{cd}, \quad (17)$$

$$u(x, y) = \{ u_d(x) [u_c(y) u_{sk} - u_s(y) u_{ck}] - u_k(x) [u_c(y) u_{sd} - u_s(y) u_{cd}] \} : (u_{cd} u_{sk} - u_{ck} u_{sd}), \quad (18)$$

$$u(x, y) = u_d(x) + u_c(y) - u_{cd}. \quad (19)$$

განვიხილოთ ერთცვლადიან ფუნქციათა ხარისხის შემცველი მმ თავისი კერძო შემთხვევებით [5]:

$$u(x, y) = \prod_{\gamma=1}^r [f_\gamma(x)]^{\varphi_\gamma(y)}, \quad (20)$$

$$u(x, y) = \prod_{\gamma=1}^{r-1} [f_\gamma(x)]^{\varphi_\gamma(y)} g(x), \quad (21)$$

$$u(x, y) = \prod_{\gamma=1}^{r-1} [f_\gamma(x)]^{\varphi_\gamma(y)} \psi(y), \quad (22)$$

$$u(x, y) = \prod_{\gamma=1}^{r-2} [f_\gamma(x)]^{\varphi_\gamma(y)} g(x) \psi(y), \quad (23)$$

$$u(x, y) = A \prod_{\gamma=1}^r [f_{\gamma}(x)]^{\varphi_{\gamma}(y)}, \quad A = \text{const} \in R, \quad (24)$$

$$u(x, y) = [f(x)]^{[\varphi(y)]^{g(x)}}, \quad (25)$$

სადაც r ($0 < r < n$) ცხრილის ელემენტების გალოგარითმებით მიღებული მატრიცის რანგია.

როცა $r=1$, მაშინ (20) ასეთ სახესღებულობს:

$$u(x, y) = [f(x)]^{\varphi(y)} \Rightarrow \quad (26)$$

$$\omega(x, y) = \lg[u(x, y)] = \varphi(y) \lg[f(x)]. \quad (27)$$

ამ შემთხვევაში ფუნქციის ლოგარითმული რანგი 1-ის ტოლია.

როცა $r=2$, მაშინ (20) გვაძლევს:

$$u(x, y) = [f(x)]^{\varphi(y)} [g(x)]^{\psi(y)} \Rightarrow \quad (28)$$

$$\omega(x, y) = \varphi(y) \lg[f(x)] + \psi(y) \lg[g(x)]. \quad (29)$$

ამ შემთხვევაში ფუნქციის ლოგარითმული რანგი 2-ის ტოლია.

შენიშვნა 2. თუ განვსაზღვრეთ $\omega(x, y)$, მაშინ

$$u(x, y) = 10^{\omega(x, y)}. \quad (30)$$

ცალკეა განხილული ის შემთხვევები, როცა (20)-(24) მოდელს ემატებათ $a = \text{const} \in R$ [6].

განსაზღვრა 2. ფუნქციის მნიშვნელობებით შედგენილი U მატრიცის ელემენტების გალოგარითმებით მიღებული მატრიცის რანგს ვუწოდოთ **ორცველადიანი ფუნქციის ლოგარითმული რანგი**.

შენიშვნა 1. ზოგ ფუნქციას ჩვეულებრივი რანგიც აქვს და ლოგარითმულიც.

მაგალითად, (9) სახის მოდელის მქონე ფუნქციის ჩვეულებრივი რანგი არის 1, ხოლო ლოგარითმული – 2; (20) მოდელის ლოგარითმული რანგი არის 1, მაგრამ ერთხელ გალოგარითმებულ U მატრიცას თუ კიდევ გავალოგარითმებთ, მივიღებთ (10) სახის მოდელს, რომლის რანგია 2; (25) მოდელის ლოგარითმული რანგი არის 2.

შესწავლილი გვაქვს ორცველადიანი ფუნქციის უფრო რთული მოდელებიც [7]:

$$u(x, y) = \left[\sum_{\gamma=1}^r f_{\gamma}(x) \varphi_{\gamma}(y) \right]^{\lambda}, \quad \lambda = \text{const} \in Q \quad (31)$$

და მისი ბევრი შესაძლო კერძო შემთხვევა [8]:

$$u(x, y) = \left[\sum_{\gamma=1}^r f_{\gamma}(x) \varphi_{\gamma}(y) \right]^{\lambda} + b, \quad \lambda = \text{const} \in Q, \quad b = \text{const} \in R. \quad (32)$$

[3] ნაშრომში ჩამოყალიბებთ ცხრილით მოცემული ორცვლადიანი ფუნქციის ანალიზური სახით ჩაწერის მეთოდი, რომელსაც ჩვენ **ცხრილით მოცემული ორცვლადიანი ფუნქციის ანალიზური სახით ჩაწერის მათემატიკური მოდელების მეთოდი (მმმ)** ვუწოდებთ. ეს მეთოდი შემდეგში მდგომარეობს:

1. ვსაზღვრავთ U მატრიცის რანგს;
2. თუ მატრიცის რანგი განვსაზღვრეთ, რაც ნიშნავს, რომ ცხრილით მოცემული სიდიდის დამოკიდებულება თავის არგუმენტებზე ფუნქციური ხასიათისაა, ვწერთ მის შესაბამის ფუნქციის ასდფ-ს.
3. რანგის სიდიდის ანუ ასდფ-ის გათვალისწინებით ნებისმიერად ვირჩევთ საჭირო ოდენობის სტრიქონებსა და სვეტებს, დავადგენთ მათ ანალიზურ სახეს და შევიტანთ ასდფ-ში; გარკვეული გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ ცხრილით მოცემულ სიდიდეს, ჩაწერილს ანალიზური სახით.
4. თუ მატრიცის რანგი ვერ გავიგეთ (ე.ი. $r=n$), მაშინ საძიებელი სიდიდის ანალიზური სახით ჩასაწერად უნდა გამოვიყენოთ სხვა მეთოდები.

ჩამოყალიბებული მეთოდიდან გამომდინარეობს, რომ რანგის გაგების შემთხვევაში, ცხრილით მოცემული ორცვლადიანი ფუნქციის ანალიზური სახით ჩაწერა მმმ-ის გამოყენებით ფაქტიურად ხდება ერთცვლადიანი ფუნქციების დადგენის სიზუსტით.

მმმ-ის გამოყენებით მივიღეთ ბევრი საინტერესო შედეგი. მოგვყავს რამდენიმე მათგანი:

1. მივიღეთ ცხრილი და მისი გამოყენების წესები მაცხოვრის ბრწყინვალე აღდგომის დღესთან დაკავშირებით შემდეგი ამოცანების ამოსახსნელად (მართმადიდებლური კალენდრის მიხედვით) [9]: ა) წლის ნომრის მიხედვით აღდგომის დღის დადგენა, ბ) აღდგომის დღის მიხედვით შესაძლებელი წლის ნომრის დადგენა.
2. მივიღეთ $\sin(x+y)$ ფუნქციის გამოსათვლელი ზოგადი ფორმულა [4]:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) = & \{ \sin(x+y_d) [\sin(x_c+y) \sin(x_s+y_k) - \sin(x_s+y) \sin(x_c+y_k)] - \\ & - \sin(x+y_k) [\sin(x_c+y) \sin(x_s+y_d) - \sin(x_s+y) \sin(x_c+y_d)] \} : \\ & : [\sin(x_c+y_d) \sin(x_s+y_k) - \sin(x_c+y_k) \sin(x_s+y_d)]. \end{aligned} \quad (33)$$

რომლის უმარტივესი კერძო შემთხვევაა ტრიგონომეტრიიდან კარგად ცნობილი $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ ფორმულა, თუ დავუშვებთ, რომ

$$x_c = y_d = 0, \quad x_s = y_k = 90^\circ$$

3. მივიღეთ $\lg xy$ ფუნქციის გამოსათვლელი ზოგადი ფორმულა [4]:

$$\lg xy = \lg(xy_d) + \lg(x_c y) - \lg(x_c y_d), \quad (34)$$

რომლის უმარტივესი კერძო შემთხვევაა ალგებრიდან კარგად ცნობილი $\lg xy = \lg x + \lg y$ ფორმულა, თუ დაუშვებთ, რომ $x_c = y_d = 1$

4. მივიღეთ $\lg(x/y) = \lg(x/y_d) + \lg(x_c/y) - \lg(x_c/y_d)$ ფუნქციის გამოსათვლელი ზოგადი ფორმულა [4]:

$$\lg xy = \lg(xy_d) + \lg(x_c y) - \lg(x_c y_d), \quad (35)$$

რომლის უმარტივესი კერძო შემთხვევაა ალგებრიდან კარგად ცნობილი $\lg(x/y) = \lg x -$

$-\lg y$ ფორმულა ($x_c = y_d = 1$).

5. დავამტკიცეთ [4]:

$$\lg x^y = y \lg x \quad (36)$$

ტოლობის მართებულობა.

6. განსაკუთრებით გვინდა გამოვიყენოთ $\lg(x+y)$ ფუნქცია. საზოგადოდ, ეს ფუნქცია, რანგის გაგების მხრივ, ძალიან რთული ფუნქციაა. მისი მნიშვნელობებით შედგენილი მატრიცის სხვადასხვა ნაწილს სხვადასხვა რანგი აქვს. არგუმენტების და მათი ჯამის ცვლილების $100 \leq x, y \leq 1500$, $200 \leq x+y \leq 3000$ შუალედებისთვის მივიღეთ $\lg(x+y)$ ფუნქციის გამოსათვლელი ფორმულა [10]:

$$\begin{aligned} \lg(x+y) = & \lg y_1 + 1,4275 \lg x_1 - 7,4125 \lg x_2 + 6,9750 \lg x_3 + \\ & + (91,750 \lg x_1 - 299,625 \lg x_2 + 207,875 \lg x_3) \lg y_2 - \\ & - (5,750 \lg x_1 - 182,625 \lg x_2 + 130,875 \lg x_3) \lg y_3, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\text{სადაც } x_1 = \frac{x+200}{400}, \quad x_2 = \frac{x+600}{800}, \quad x_3 = \frac{x+1000}{1200}, \quad (38)$$

$$y_1 = y+200, \quad y_2 = \frac{y+500}{y+200}, \quad y_3 = \frac{y+900}{y+200}. \quad (39)$$

ვაჩვენეთ, რომ წრფივი გარდასახვით ერთი შუალედისთვის გამოყვანილი ფორმულა შეგვიძლია გამოვიყენოთ სხვა შუალედებისთვისაც.

ახალ $A \leq x, B \leq y$ ($x \leq y$) შუალედზე ასე ხდება გადასვლა:

$$1. \text{ ვსაზღვრავთ } a = 0,75 A, \quad b = 1,25 B; \quad (40)$$

2. (26)-ში $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ სიდიდეებისთვის ახალ მნიშვნელობებს გამოვთვლით შემდეგი ფორმულებით:

$$x_1 = \frac{x-1,3a+0,3b}{0,4(b-a)}, \quad x_2 = \frac{x-1,7a+0,7b}{0,8(b-a)}, \quad x_3 = \frac{x-2,1a+1,1b}{1,3(b-a)}, \quad (41)$$

$$y_1 = y+0,9a+0,1b, \quad y_2 = \frac{y+0,6a+0,4b}{y+0,9a+0,1b}, \quad y_3 = \frac{y+0,2a+0,8b}{y+0,9a+0,1b}. \quad (42)$$

შენიშვნა 3. (37) ფორმულა გამოყვანილი გვაქვს $[a=100; b=1100]$ შუალედისთვის, რომლისთვისაც შესაბამის ფუნქციის მნიშვნელობათა მატრიცის რანგი არის 4. ადვილი მისახვედრია, რომ ამ ფორმულის მმ-ს აქვს შემდეგი სახე:

$$u(x, y) = f_1(x)\varphi_1(y) + f_2(x)\varphi_2(y) + f_3(x)\varphi_3(y) + f_4(x). \quad (43)$$

3. დასკვნა

ძირითადი თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ არსებობს U მატრიცის (ან მისი ელემენტების გალოგარიტმებით მიღებული მატრიცის) რანგი $r < n$, მაშინ ცხრილი 1-ით მოცემულია ფუნქციური დამოკიდებულება და მის ასდფ-ს აქვს (1) (ან მისი კერძო შემთხვევების გამომსახველ ფორმულებს (3)-(7)) სახე.

ჩვენი აზრით ცხრილი 1-ის სახის ნებისმიერი ცხრილის ელემენტებით მოცემულია ფუნქციური დამოკიდებულება, ე.ი. შესაბამისი რანგი $r < n$. მთავარია ცხრილში გვექონდეს საძიებელი სიდიდის მნიშვნელობების ისეთი ოდენობა, რომ შეიძლებოდეს რანგის განსაზღვრა.

ლიტერატურა

1. ნ. გორჯოლაძე, ი. გორჯოლაძე. ცხრილით მოცემული ორცვლადიანი ფუნქციის ზოგიერთი მათემატიკური მოდელის მამოწმებელი კრიტერიუმი // „მეცნიერება და ტექნოლოგიები“, № 7-9, 2003, თბილისი, გვ. 18-20.
2. ნ. გორჯოლაძე, ი. გორჯოლაძე. ცხრილით მოცემული ორცვლადიანი ფუნქციის მათემატიკური მოდელები და მათი მამოწმებელი კრიტერიუმები // „მეცნიერება და ტექნოლოგიები“, № 10-12, 2003, თბილისი, გვ. 27-31.
3. ნ. გორჯოლაძე, ი. გორჯოლაძე. ცხრილით მოცემული ორცვლადიანი ფუნქციის ანალიზური სახის დადგენის მეთოდი // სტუ-ს სამეცნიერო შრომები, № 3 (449), 2003, თბილისი, გვ. 24-29.
4. ი. გორჯოლაძე, ნ. გორჯოლაძე. ცხრილით მოცემული ერთ- და ორრანგიანი ორი ცვლადის ფუნქციების ანალიზური სახის დადგენის მეთოდი // „მექანიკის პრობლემები“, თბილისი, 2008, № 4(33), გვ. 39-43 (ინგლისურ ენაზე).

5. ი. გორჯოლაძე. ორცვლადიანი ფუნქციის ხარისხის შემცველი ზოგიერთი მათემატიკური მოდელი // „მეცნიერება და ტექნოლოგიები“, №7-9, თბილისი, 2004, გვ. 22-25.
6. ნ. გორჯოლაძე. ორცვლადიანი ფუნქციის მუდმივი შესაკრების შემცველი ზოგიერთი მათემატიკური მოდელი // „მეცნიერება და ტექნოლოგიები“, №10-12, თბილისი, 2004, გვ. 32-35.
7. ნ. გორჯოლაძე, ი. გორჯოლაძე. ორცვლადიანი ფუნქციის რაციონალურ მანვენებლიანი ხარისხის შემცველი მათემატიკური მოდელი // სტუ-ს სამეცნიერო შრომები, № 3 (457), 2005, თბილისი, გვ. 9-13.
8. ი. გორჯოლაძე, ნ. გორჯოლაძე. ორცვლადიანი ფუნქციის კომბინირებული მათემატიკური მოდელეები// სტუ-ს სამეცნიერო შრომები, № 1 (459), 2006, თბილისი, გვ. 137-141.
9. ნ. გორჯოლაძე, ი. გორჯოლაძე. მაცხოვრის ბრწყინვალე აღდგომის დღე მართლმადიდებლური კალენდრის მიხედვით // „მეცნიერება და ტექნოლოგიები“, №10-12, თბილისი, 2004, გვ. 36-39.
10. ნ. გორჯოლაძე, ი. გორჯოლაძე. ცხრილით მოცემული ორცვლადიანი ფუნქციის ანალიზური სახის დადგენის მათემატიკური მოდელეების მეთოდი ($\lg(x+y)$ ფუნქციის მაგალითზე) // საინფორმაციო ტექნოლოგიები და მართვა 6, „ენციკლოპედია-არმენიკა“, ერევანი, 2008, გვ. 17-22.

Метод математических моделей записи двухпеременной функции, заданной таблицей, в аналитическом виде

И.И. Горджоладзе, Н.И. Горджоладзе, Х.Ш. Горджоладзе

С учетом понятия ранга функции двух переменных, изложен метод установления аналитического вида двухпеременной функции, заданной таблицей. Рассмотрены примеры применения понятия ранга и изложенного метода

НЕЧЕТКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ В ПРОЕКТИРОВАНИИ КОНСТРУКЦИЙ

В.А. Бараненко

Днепропетровск, Украина

В конце прошлого столетия интенсивно отрабатывались методы расчета напряженно-деформируемого состояния конструкций, сооружений, а также на долговечность, устойчивость, колебания, усталость, надежность, оптимального проектирования, происходило внедрение новых материалов и применение способов и технологий использования современной вычислительной техники.

В теории проектирования конструкций, в том числе и оптимального, где доминирует детерминистский подход, вызывает интерес рассмотрение более общих задач, в которых были бы учтены неопределенности. Для формулировки и решения их необходим такой математический аппарат, который имел бы возможность априорно учитывать неопределенность [1].

Таким аппаратом при действии факторов случайной природы в механике стала теория вероятностей [2, 3]. Основная идея внедрения этого аппарата в механику состоит в следующем: величины, которые входят в уравнения прочности, жесткости, колебаний и др., геометрические характеристики элементов и самой конструкции, характеристики свойств материала, величины нагрузок, их местоприложение рассматриваются не детерминированными, а случайными величинами, имеющими изменчивость и со временем достаточно большую.

Источником неполноты информации об исходных данных, расчетных схемах функционирования технической системы и т.п. помимо факторов случайной природы может быть наличие иных факторов неопределенности.

Понятие неопределенности интуитивно понятно каждому человеку. Однако формализация ее всегда вызывала затруднения. Долгое время считалось, что все необходимое для работы с неопределенностью дает теория вероятностей. Но со временем в связи с изменением восприятия человеком окружающей его среды адекватность этой теории стала вызывать сомнения. В результате в конце 20-го столетия в математике возникло новое направление исследований - теория нечетких множеств (ТНМ) [4, 5]. Позже на ее основе была разработана теория возможностей [6].

В науке возникли такие информационные ситуации, когда некоторые исследования порождали огромный поток публикаций в различных областях применения. Так сложилось, например, с широко известным в механике конструкций методом конечных элементов. Американскому математику Л.А.Заде удалось создать подобную ситуацию. Катализатором

информационного взрыва стала его работа "Fuzzy sets" в журнале "Information and Control" (1965). Новаторские труды этого ученого и его учеников привели к смене концептуальных подходов, методов исследования во многих отраслях науки и техники. ТНМ представляет собой обобщение и переосмысливание важнейших направлений математики. У ее истоков лежат идеи и достижения многозначной логики, указавшей пути перехода от двух к произвольному числу значений истинности. Теория вероятностей и математическая статистика предоставили большое количество различных способов и методов обработки экспериментальных данных, открыли пути интерпретации функции принадлежности - основного понятия ТНМ - обобщение характеристической функции обычных множеств; дискретной математики, предложившей инструмент для формулирования адекватной модели при решении всевозможных практических задач [5].

Вначале слово "fuzzy" использовалось в узком смысле применительно к категориям языка или мышления, но не к описаниям природы естественных явлений. В настоящее время это слово используется в широком смысле для восприятия явлений и процессов, переменные которых имеют хорошо различимую границу тех множеств, к которым они принадлежат. Этот термин используется и в случаях, когда границы множеств плохо различимы и их можно выразить нечетким множеством.

ТНМ задумана как математический аппарат нечеткого вывода и работы с переменными лингвистического вида [7], что соответствует явлениям и процессам гуманистических систем. В механике этот аппарат не смог найти применение, хотя с помощью таких переменных, например, можно описать состояние конструкции в процессе ее функционирования. Публикаций об использовании ТНМ в механике конструкций довольно мало. Однако, последующее развитие ТНМ дало возможность сформулировать такие понятия теории, как нечеткие числа, их арифметику, операции α -уровней, декартово произведение, принципы обобщения, слияния и другие, позволившие работать с механистическими системами в условиях неопределенной информации и выявлять закономерности влияния этой информации на оценки и точность получаемых результатов.

В задачах строительной механики и проектирования конструкций имеют место случаи, когда параметры задаются неточным, неясным образом. Проектировщик обязан уточнить их с помощью коэффициентов надежности или запаса в соответствии с нормами проектирования. До сих пор в механике доминирует детерминистский подход. Здесь имеет место уважительное отношение ко всему точному, строгому и количественному. В этой связи приведем высказывания классиков:

- Галилео Галилей: "Надо измерять все измеримое и делать измеримым то, что пока не поддается измерению";

- Д.И.Менделеев: "Наука начинается с тех пор, как начинают измерять. Точная наука не мыслима без меры".

Отношение же ко всему неточному, нестрогому, случайному, качественному долгое время оставалось пренебрежительным. И только в конце 20 столетия к этой проблеме стали относиться иначе. Особенно с появлением аппарата теории вероятностей, статистики, теории нечетких множеств, теории возможностей, а также широкого использования средств вычислительной техники. Мысль о терпимости проектируемой системы к нечеткости заманчива. Здесь под терпимостью к нечеткому понимается способность системы переносить нечеткие, неточные данные в классические методы анализа и принятия решений. На основе такого подхода могут возникнуть новые методы исследования.

Цель настоящей работы - ознакомить с новым направлением исследований в оптимизации конструкций, показать возможные модели математического программирования в условиях нечеткой информации.

2. Технология нечеткого моделирования.

Под нечетким моделированием здесь понимается процесс выполнения следующих этапов исследования: фаззификации, нечеткого анализа и дефаззификации. Суть первого этапа состоит в описании начальной исходной информации в терминах нечетких множеств, то есть для нечетких параметров типа "приблизительно", "около", "близко к", "примерно", "в интервале" и т. п. вводятся соответствующие функции принадлежности. При решении практических задач они даются вне ТНМ и могут быть определены различными способами [5]. Например, в работе [8] на основе статистических данных для стального каната (небольшой выборки) получены соответствующие приближения модуля упругости в виде нечетких чисел треугольной и трапециoidalной формы.

Второй этап моделирования состоит в установлении соответствия между нечеткими данными и пространством отображения результатов. Этот этап выполняется на основе использования подхода α -уровней, принципа обобщения, декартова произведения, расчетных аналитических или численных методов механики, а также компьютерных программных комплексов.

Процедура сведения полученных нечетких результатов к четким выполняется в третьем этапе исследования [5, 9, 10].

3. Модели нечеткой оптимизации.

3.1 Стандартная задача ТНМ.

Сформулируем следующую задачу математического программирования

$$x^{opt} = \arg \{ \max_{x \in X} f(x) \mid g_i(x) \leq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m \} \quad (1)$$

где x - вектор решений;

$f(x)$ - целевая функция, $f : X \rightarrow R$;

$g_i(x)$ - функции ограничений $g_i : X \rightarrow R$.

Нечеткий вариант этой задачи получится, если : 1) "смягчить" в (1) ограничения, то есть допустить возможность их нарушения с той или иной степенью; 2) вместо максимизации функции $f(x)$ необходимо стремиться к достижению некоторого заданного значения этой функции с различным допустимым отклонением.

3.2 Нечеткая модель ожидаемого значения.

Нечеткое программирование представляет собой один из классов математических моделей. Запись задач нечеткого программирования соотношением (1) с введением нечеткой компоненты - вектора ξ , то есть

$$f(x, \xi) \rightarrow \max \quad \text{при} \quad g_i(x, \xi) \leq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

не имеет математического смысла, поскольку не имеет единственной интерпретации. Здесь нельзя максимизировать нечеткую целевую функцию $f(x, \xi)$, поскольку ограничения в (2) не порождают какого-либо четного множества допустимых значений.

Для того, чтобы строить точно выраженные модели нечеткого программирования, необходимо применить оператор ожидаемого значения. В литературе, где рассматривается стохастическое программирование, используется оператор математического ожидания. Оператор ожидаемого значения для нечетких величин представляет собой выражение

$$E(x) = \sum_{i=1}^n w_i(\mu) x_i, \quad (3)$$

где w_i - весовые коэффициенты, зависящие от значений функции принадлежности $\mu(x)$.

В работах [5, 9, 10] указываются способы определения коэффициентов w_i . Чтобы получить решение, обеспечивающее максимальное значение ожидаемого f , необходимо воспользоваться в случае однокритериальной постановки нечеткой EVM - моделью (expected value model):

$$\max E[f(x, \xi)] \quad \text{при ограничениях} \quad E[g_i(x, \xi)] \leq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

В случае многокритериальной задачи нечеткого программирования имеет место следующая EVM - модель с нечетким ожидаемым значением

$$\max \{ E[f_1(x, \xi)], E[f_2(x, \xi)], \dots, E[f_p(x, \xi)] \} \\ \text{при ограничениях} \quad (5)$$

$$E[g_j(x, \xi)] \leq 0; j = 1, 2, \dots, m.$$

Модель (4) использовалась для нахождения площади сечений элементов фермы при нечетком задании величин нагрузок [11].

В случае сложного описания неопределенной целевой функции и нелинейных ограничений их удобнее аппроксимировать нейронной сетью. Обученная сеть встраивается в генетическую процедуру, что позволяет получить мощный гибридный алгоритм решения оптимизационной задачи.

3.3 Нечеткое программирование с возможностными ограничениями.

Следуя идеям стохастического программирования с вероятностными ограничениями, изложенными в работе [12], при оптимизации оболочек из композиционного материала с учетом статистических факторов, предлагаются следующие модели нечеткого программирования

$$\begin{aligned} & \max \bar{f} \\ & \text{при ограничениях} \\ & \text{Pos} \{f(x, \xi) \geq \bar{f}\} \geq \beta; \text{ Pos} \{g_i(x, \xi) \leq 0; i = 1, 2, \dots, v\} \geq \alpha, \end{aligned} \quad (6)$$

где α, β - предопределенные заранее доверительные уровни. Модель (6) с возможностными ограничениями называется максимаксной, поскольку она эквивалентна следующей модели

$$\begin{aligned} & \max_x \max_f \bar{f} \\ & \text{при ограничениях} \\ & \text{Pos} \{f(x, \xi) \geq \bar{f}\} \geq \beta; \text{ Pos} \{g_i(x, \xi) \leq 0; i = 1, 2, \dots, m\} \geq \alpha, \end{aligned} \quad (7)$$

для которой $\max \bar{f}$ есть β - оптимистическое значение критериальной функции. Термин Pos означает possibility (возможность). Модель (6) в литературе [10] известна под названием ССР - модель (chance-constrained model), модель с ограничениями на шансы.

Рассматривая упрощенный вариант задачи (7), то есть

$$x^{opt} = \arg \{ \min_x f(x) | \text{Pos}(g(x, \xi) \leq 0) \geq \beta \}, \quad (8)$$

можно увидеть аналог задачи оптимального проектирования с заданным порогом надежности при случайном характере величины ξ . Только здесь вместо операции Pos должна быть операция Prob (вероятность). Модель (8) рассматривалась в работе (13) для проектирования прочной фермы минимального объема при предопределенном значении величины β и не-четком задании действующей нагрузки.

4. Модель максимальной достижимости нечетких критериев и ограничений.

Основными элементами процесса принятия решения являются: множество решений (альтернатив), множество ограничений, которые необходимо учитывать при выборе альтер-

нативы, функция предпочтительности (функция цели), определяющая переход из пространства альтернатив в некоторое другое пространство и ставящая каждому решению соответствующее значение целевой функции. Под нечеткой целью понимается цель, которую можно описать как нечеткое множество в соответствующем пространстве. Проблема принятия решения в нечетких условиях интерпретируется как комплексное влияние нечеткой цели G и нечеткого ограничения C на выбор альтернатив и характеризуется пересечением множеств, образуя при этом нечеткое множество решений D , то есть

$$D = G \cap C.$$

Функция принадлежности для множества решений задается соотношением

$$\mu_D(x) = \mu_G(x) \wedge \mu_C(x) = \min(\mu_G(x); \mu_C(x)) \quad (9)$$

а решение в виде

$$x^* = \arg \{ \sup_x \mu_D(x) \}. \quad (10)$$

Для задачи проектирования сечений элементов фермы в условиях нечетко поставленных целей и ограничений в работе [14] был применен указанный аппарат. Учет нечеткости ведет к увеличению значения целевой функции - "плата" за неопределенность.

5. Динамическое программирование.

На примере работы [15] проектирования n -элементной фермы с полной информацией о длинах элементов, материале, закреплении, нагрузках и неполной информации о площадях сечений рассматривается возможность применения динамического программирования. Цель G проектирования: "вертикальное перемещение характерного узла фермы должно быть близким к значению y_0 ". Величина y_0 - нечеткая и задается функцией принадлежности треугольного вида. Необходимо найти нечеткое распределение сечений элементов фермы, которое удовлетворяет поставленную цель. Нечетким решением $\mu_D^*(y); y \in Y$ задачи достижения цели G при ограничениях $C_i, i = 1, 2, \dots, n$ по прочности называется максимальное по отношению вложенности нечеткое множество D , обладающее свойствами: $D \subseteq Y$ (допустимость решения) и $\varphi(D) \subseteq G$ (достижение нечеткой цели), где $\varphi(D)$ - образ D при отображении φ

$$d_{i+1} = \varphi(d_i, u_i) = d_i - \frac{D_i}{u_i}; \quad D_i = N_i \bar{N}_i l_i / E. \quad (11)$$

Соотношения (11) следуют из формулы Мора $y = \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{u_i}$. Задача нечеткой оптимизации

может быть теперь сформулирована таким образом

$$(\mu_D^*, u^*) = \arg \{ \max_{u_1, u_2, \dots, u_n} \min(\mu_{C_1}(u_1); \mu_{C_2}(u_2); \dots; \mu_{C_n}(u_n); \mu_G(y, u)) \} \quad (12)$$

Применяя формализм метода динамического программирования к задаче (12), на основании подхода Беллмана-Заде [16] получим искомые рекуррентные соотношения

$$\mu_{G_i}(d_i) = \max_{u_i} \{ \min[\mu_{C_i}(u_i); \mu_{G_{i+1}}(d_{i+1})] \} \quad i = n-1, \dots, 2, 1; \quad d_1 = y_0.$$

6. Выводы.

Чего же можно ожидать от ТНМ в различных отраслях человеческих знаний?

В философском плане ТНМ примечательна тем, что открывает новый подход к решению проблем абстракции и образованию понятий, обладающих богатством всевозможных оттенков.

Применение ТНМ и ЭВМ в области техники сулит колоссальные преимущества в методах моделирования систем, которые настолько сложны, что не поддаются обычному количественному анализу. Применение нечетких алгоритмов стимулирует развитие ГАП и ГПС (гибких автоматизированных производств и производственных систем). Это дает толчок как к развитию управления с помощью нечетких инструкций, так и к созданию систем с повышенной автономностью.

В области строительной механики конструкций отметим следующие направления использования ТНМ:

- описание внешних воздействий, их местоположения, граничных условий, механических и геометрических характеристик, расчетных схем конструкций и т.п.;
- структурный анализ (статика, динамика, устойчивость);
- идентификация параметров конструкции и ее элементов;
- регулирование, управление;
- оптимальное проектирование конструкций (ОПК);
- оценки надежности и долговечности;
- формулировка оптимизационных моделей проектирования, отличных от известных и соответствующая разработка математического и алгоритмического обоснования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук В.В. Введение в оптимизацию конструкций. - М. : Наука. - 1986. - 302с.
2. Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений.- М.: Стройиздат. - 1982. - 351с.
3. Аугусти Г., Баратта А., Кошнати Ф. Вероятностные методы в строительном проектировании. - М.: Стройиздат. - 1988. - 544с.
4. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. - М.: Радио и связь. - 1982. - 432с.

5. Аверкин А.Н., Батыршин И.З., Блишун А.Ф., я Силов В.Б., Тарасов В.Б. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат.лит. - 1986. - 312с.
6. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. - М.: Радио и связь. - 1976. - 165с.
7. Л.Заде Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. - М.: Мир. - 1976. - 161с.
8. Дуліца І.П. Оцінка модуля пружності сталевих канатів на основі теорії нечітких множин // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. - Дніпропетровськ. - 2009. - №9. - с.25-31.
9. Рутковская Д., Пилинский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. - М.: Горячая линия - Телеком - 2008. - 383с.
10. Baoding Liu Theory and Practice of Uncertain Programming. Physica - Verlag - Heidelberg. - Spvinger - Verlag Company. - 2002. - 397pp.
11. Бараненко В., Войнаков А. Оптимальне проектування конструкцій при випадковій та нечіткій інформації про навантаження // В сб. Theoretical Foundations of Civil Engineering т. XV Polish - Ukrainian - Lithuanian Transactions. Warsaw. - 2007. - pp 25-32.
12. Тетерс Г.А., Рикардс Р.Б., Нарусберг О.Л. Оптимизация оболочек из слоистых композитов. - Рига: Зинанте. - 1978. - 238с.
13. Бараненко В., Дуліца І. Урахування можливісних обмежень в оптимальному проектуванні конструкцій // В сб. Theoretical Foundations of Civil Engineering, v.17, Polish - Ukrainian- Lithuanian. Warsaw. - 2009. - pp 37-42.
14. Бараненко В.О., Дуліца І.П. Оптимальне проектування конструкцій в умовах нечітко поставлених цілей та обмежень // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. - №6. - 2010. - с.56-59.
15. Бараненко В., Дуліца І., Чаплыгина С. Об одной модели достижения максимальной степени требованй жесткости в проектировании ферм // Theoretical Foundations of Civil Engineering, v.19, Warsaw. - 2011. - pp 25-28.
16. Орловский С.Ф. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. - М.: Наука. - 1991. - 206с.

ОБОБЩЕННЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ РАБОТОСПОСОБНОСТИ МОТОРНОГО МАСЛА

Нигматуллин Р.Г, Костенков Д.М, Шмельков Д.А., Нигматуллин И.Р.

ООО «Химмотолог», г. Уфа

Аннотация: Проведена экспресс-диагностика моторного синтетического масла SAE 5W40 и определены основные показатели его качества, сведенные в обобщенный показатель работоспособности масла. Разработан показатель динамики нагрева масла, позволяющий определить наличие основных загрязняющих примесей (воды, антифриза, бензина и сажи).

Ключевые слова: Анализ смазочных материалов, вязкость, износ, охлаждающая жидкость, электрическая емкость, коррозия, устройство для экспресс-анализа смазочных материалов.

Summary: Express diagnostics of engine SAE 5W40 synthetic oil is carried out and the main indicators of its quality reduced in the generalized indicator of operability of oil are defined. The indicator of dynamics of heating of the oil, allowing to define availability of the main polluting impurity (water, antifreeze, gasoline and soot) is developed.

Keywords: The analysis of lubricants, viscosity, the wear, cooling liquid, electric capacity, corrosion, the device for the express analysis of lubricants.

Введение

В моторном масле, находящемся в масляной системе двигателя внутреннего сгорания или редуктора происходят непрерывные количественные и качественные изменения, которые можно своевременно обнаружить и принять меры, а значит продлить ресурс машины.

Задачей данной работы является определение дефектов систем охлаждения, очистки воздуха от пыли, топливной аппаратуры, узлов трения двигателя внутреннего сгорания (ДВС) и редукторов (по наличию в масле топлива, охлаждающей жидкости, продуктов износа, коррозии) по обобщенному показателю работоспособности смазочного материала, учитывающего изменение его показателей качества:

- вязкости (времени заполнения ёмкости);
- степени износа узлов трения (по наличию и форме намагничиваемых металлических частиц);
- наличия охлаждающей жидкости (воды) в смазочном материале по изменению ёмкости конденсатора (диэлектрической проницаемости);
- коррозионного воздействия смазочного материала на медь.

Методика исследования

Исследования проводили на устройстве для экспресс-анализа масла [1] (рис.1), которое позволяет определить качество смазочного материала за короткий промежуток времени.

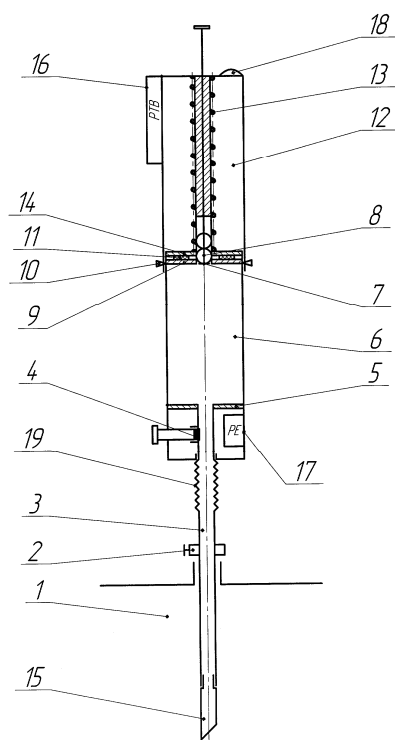


Рис. 1. Устройство для экспресс-анализа масла

Работа устройства заключается в том, что в результате создания вакуума поршнем, приводимым в движение пружиной, через трубку, в цилиндрическую ёмкость поступает смазочный материал, проходящий через магнит. По времени заполнения ёмкости, в зависимости от диаметра трубки, вакуума, температуры и плотности, определяют степень разжижения работающего смазочного материала продуктами неполного сгорания топлива, по наличию металлических включений на магните фиксируется процесс износа.

Устройство дополнительно содержит датчик ёмкости, расположенный в корпусе. По изменению ёмкости конденсатора судят о наличии охлаждающей жидкости в смазочном материале. Нижний конец термостатированной трубки имеет медное покрытие (или дополнительно закручивающуюся медную трубку) для определения коррозионного воздействия масла. Сравнивая потемнение поверхности медной трубки с эталоном, судят о коррозионной активности смазочного материала (1а-выдерживает, 2abc, 3abc, 4abc- не выдерживает)[2]. Трубка выполняет роль щупа, отградуирована от конца на 150 мм (для определения изменения уровня масла в картере) и имеет перемещающийся фиксатор.

В цилиндрической ёмкости установлены термопара, плотномеры и конденсатор, соединённые с регистратором температуры и времени заполнения ёмкости (10 мл), измеритель электрической ёмкости [3] смазочного материала и уровень, необходимый для установки ёмкости в вертикальном положении.

Устройство содержит термостойкую трубку 3, диаметром 1,5÷2,0 мм и длиной 550 мм, верхний конец которой представляет собой гофрированную гибкую (пластичную) трубку 19

размером 30 мм, для возможности фиксирования цилиндрической емкости в вертикальном положении. На нижний конец завернута медная трубка 15 длиной 30 мм такого же диаметра. Термостойкая трубка завернута в емкость 6, в которой размещен съемный магнит 4. На дне емкости располагается датчик электрической емкости 5. На рукоятке установлен уровнемер 18, поршень со штоком 9, на штоке которого рукоятка 12. Поршень приводится в движение пружиной 13, которая фиксируется и разжимается фиксатором рукоятки 10.

Устройство работает следующим образом. Вначале извлекают масломерную линейку из отверстия картера, определяют уровень масла, на основании чего устанавливают фиксатор 2 на термостойкой трубке 3. Маслотестер устанавливают в вертикальное положение с помощью уровня 18 на место обычного нахождения масломерной линейки (щупа). Нажимают рукоятку 12, фиксируют сжатую до упора пружину фиксатором рукоятки 10, приводят устройство в рабочее положение разжатием фиксатора 10. За счет создавшегося разрежения в емкость 6 (объемом 10 мл) поступает из картера 1 смазочный материал. Время заполнения (объема 10 мл), температура и электрическая емкость смазочного материала, фиксируются регистраторами времени и температуры 16 и электрической емкости 17 (коррозия на медь определяется по потемнению поверхности медной трубки по истечению 3-4 часов в картере работающего двигателя).

Полученные показатели измерений характеризуют работоспособность и процессы, проходящие в объекте диагностирования.

Причины, влияющие на показатели смазочного материала [4]:

I. Вязкость уменьшается:

- при попадании продуктов неполного сгорания топлива;
- при деструкции вязкостной присадки;
- при доливке масла с низкой вязкостью;

Вязкость увеличивается:

- при окислении масла;
- при загрязнении масла (отложениями, сажей);
- при угаре масла (перегрев двигателя);
- при доливке масла с высокой вязкостью;
- при попадании охлаждающей жидкости (воды);

II. Плотность понижается:

- при попадании продуктов неполного сгорания;
- при доливке масла с низкой плотностью;
- при деструкции высокомолекулярных углеводов;

Плотность повышается:

- при загрязнении масла продуктами отложений, сажей, пылью;
- при доливке масла с высокой плотностью;
- при попадании охлаждающей жидкости (воды);

III. Электрическая емкость повышается:

- при попадании охлаждающей жидкости (воды)
- незначительно при попадании продуктов неполного сгорания топлива;

IV. Продукты износа возникают

- при обкатке узла трения;
- при использовании некачественного масла;
- при коррозии;
- при попадании в масло продуктов неполного сгорания топлива;
- при попадании охлаждающей жидкости (воды);
- при попадании пыли через систему очистки от пыли воздуха, подаваемого на смешение с топливом;

V. Коррозия на медь возникает:

- при попадании в масло воды;
- при использовании в ДВС сернистого топлива;
- при разложении антикоррозийной присадки.

Вариантов изменения показателей качества масла может быть множество. Поэтому введён обобщенный показатель работоспособности масла (ОПРМ) [5] по пяти показателям качества масла, который позволяет судить о процессах происходящих в рассматриваемой системе: ДВС, редукторе, узле трения, масле. Идеальный случай когда все пять показателей не изменяются. Если принять неизменившийся показатель за единицу (1), то обобщенный показатель работоспособности равен 5 (1+1+1+1+1). Если один из показателей становится браковочным, а остальные изменились в худшую сторону, то сопоставив их можно определить причины их изменения.

Для удобства при расчете обобщенного показателя, ухудшения показателей качества масла минусуем от единицы. Так увеличение и уменьшение времени истечения масла через термостойкую трубку в емкость приняли 2 сек. за - 0,01, соответственно 4 сек за - 0,02 и т.д.

Изменение плотности масла определяется двумя плотномерами. Первый плавает в свежем масле, второй тонет в свежем масле. Так если плотность уменьшилась, то оба плотномера тонут, если плотность увеличилась, то первый по ходу поршня не тонет. Уменьшение и увеличение плотности работающего масла принимаем за - 0,01, значительное изменение плотности за - 0,02;

Изменение электрической емкости на 1 пф - 0,01, на 2 пф и более - 0,02;

Наличие продуктов износа на магните примем за 0,01, наличие 2-х и более частиц – 0,02;

Коррозию на медную часть термостойкой трубки принимаем за – 0,01 при балле 2с, за – 0,02 при балле 3с, 0,03 и т.д.:

Условно принято (на основе проведенных экспериментов), что при значении ОПРМ 4,98 и менее, следует масло заменить, предварительно устранив причины ухудшения масла. В случае уменьшения или повышения уровня масла в картере на 5 мм от ОПРМ минусуется 0,01.

Определение показателя динамики нагрева (подана заявка на изобретение) заключается в измерении времени, за которое жидкость нагреется до определенной температуры. Конец трубки с термистором для контроля температуры погружают в анализируемую жидкость, затем нагревают жидкость. По дисплею регистратора 16 (рис.1) контролируют время и температуру. Периодически фиксируют значения времени и температуры (например, каждые 5 °С), по полученным результатам строят кривую (примеры кривых нагрева приведены на рис. 2). Время изменения температуры в определенном диапазоне является показателем динамики нагрева жидкости. Определение показателя динамики нагрева можно проводить, например, для масла в картере автомобиля с целью установления наличия примесей (воды, сажи и др.). При этом время прогрева двигателя, например, с 30 до 90 °С, а также форма кривой нагрева, будут различными для чистого масла и масла с примесью воды. Для упрощения сравнения результатов измерений определение показателя динамики нагрева следует проводить в одинаковых условиях. Аналогично можно определить показатель динамики охлаждения жидкости.

Результаты экспериментов и их обсуждение

Рассмотрим конкретные случаи.

Пример 1. Моторное масло синтетическое SAE 5W40 (свежее) вязкостью при 100°С 13 сСт разбавляют 2, 4, 6 % продуктами неполного сгорания бензина АИ-95 (имеющего начало кипения 90 °С, а конец кипения 210°С) и используя предлагаемый способ и устройство определяют время заполнения цилиндрической емкости, объемом 10 мл за счет вакуума создаваемого поршнем при температуре 20°С. Результаты измерения времени заполнения образцов масел с продуктами неполного сгорания помещены в таблице 1.

Таблица 1

Содержание продуктов неполного сгорания бензина АИ-95 в моторном масле SAE 5W40, %(масс)	Время заполнения емкости, сек.
0	108
2	84
6	81

Электрическая емкость масла SAE 5W40 составляет 21,2 пф.

Пример 2. моторное синтетическое масло SAE 5W40 из картера автомобиля работающего на бензине АИ-95. С использованием способа и устройства определяют: время поступление масла в цилиндрическую емкость объемом 10 мл при вакууме создаваемом поршнем при температуре 20°C. Оно составило 83 сек., что соответствует согласно таблице 1 3,3 % продуктов неполного сгорания бензина АИ-95: баллы - 0,017. Наличие продуктов неполного сгорания в масле подтверждается также плотномерами (оба в виде шариков на проволоке) потонули: баллы- (1-0,02); Электрическая емкость повысилась на 0,5пф по сравнению со свежим маслом: баллы – 0,005; На магните обнаружен продукт износа (1 частица): баллы- (1- 0,01); Коррозии на медь нет: баллы- (1-0).

На основании полученных результатов рассчитываем обобщенный показатель работоспособности масла (ОПРМ), он составляет 4,948.

$$\text{ОПРМ} = (1-0,017)+(1-0,02)+(1-0,005)+(1-0,01)+1=4,948$$

Уровень масла в картере увеличился на 4 мм. Изменений в ОПРМ не вносим.

Масло следует заменить, предварительно устранив причину попадания топлива в масло (неисправности топливной аппаратуры или системы зажигания).

Пример 3. Дизельное минеральное масло М-10Г2К с вязкостью при 100°C 10,76 сСт разбавляют 4% и 6 % дизельного топлива (летнего) и, используя способ и устройство, определяют время поступления дизельного масла в цилиндрическую емкость объемом 10 мл под вакуумом при температуре 20°C. Результаты экспериментов помещены в таблице 2. Замеряем электрическую емкость масла М-10Г2К, она составляет 21,5 пф.

Таблица 2

Содержание дизельного топлива (летнего) в масле М-10Г ₂ К, % (мас)	Время заполнения емкости, сек
0	114
4	88,5
6	76
0,1 (сажи)	120

Пример 4. Дизельное масло М-10Г2К из картера двигателя работающего на дизельном топливе (летнее). С использованием предлагаемого способа и устройства определяют: время поступления 10 мл масла под вакуумом при температуре 20°C, которое составило 118 сек. Согласно таблицы 2 в работающем дизельном масле М-10Г2К топлива нет - это подтверждается всплыванием второго тяжелого поплавка (имеющего удельный вес превышающий удельный вес свежего масла); на магните обнаружен продукт износа (1 частица); электрическая емкость повысилась на 1,5 пф по сравнению со свежим маслом, баллы (1-0,015); Коррозия на медной трубке составила 3с, баллы (1-0,02); обобщенный показатель (ОПРМ) составляет:

$$\text{ОПРМ} = (1-0,02)+(1-0,02)+(1-0,01)+(1-0,015)+(1-0,02)=4,925.$$

Масло следует заменить, предварительно устранив причины сгорания топлива с образованием сажи, попадания охлаждающей жидкости из системы охлаждения (через нарушения герметичности, трещины и т.д.).

Пример 5. Выполнили исследования показателя динамики нагрева для чистого масла Nissan SAE 5W-40 и его смесей с основными загрязнителями: водой, бензином, антифризом и сажей. Образцы массой 60 г нагревали до 150 °С и с интервалом 5 °С фиксировали время нагрева. Результаты измерения показателя динамики нагрева масла Nissan SAE 5W-40 приведены на рис. 2.

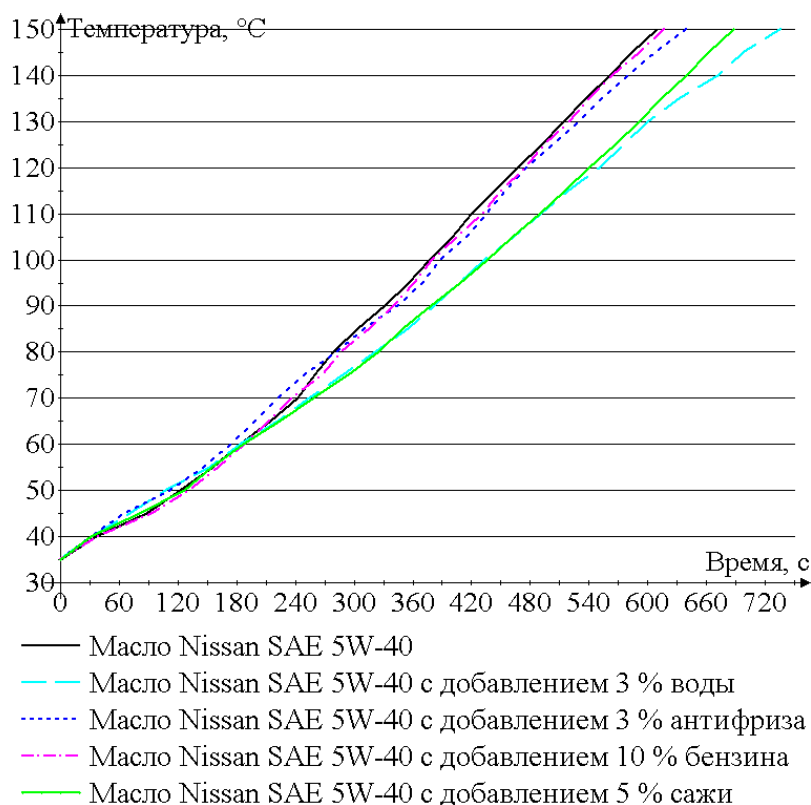


Рис. 2. Графики зависимости времени нагрева масла Nissan SAE 5W-40 от температуры

Из графиков видно, что на показатель динамики нагрева масла наибольшее влияние оказывает вода: масло с добавлением 3 % воды нагревается дольше других образцов (за счет большей теплоемкости воды и затрат на испарение воды). Также значительное влияние на время нагрева оказывает сажа. Небольшое увеличение времени нагрева наблюдается при добавлении в масло охлаждающей жидкости. Добавление большого количества бензина (10 %) практически не повлияло на время нагрева масла. Теплопроводность исследуемых веществ приведена в табл. 3.

Таблица 3

Наименование	Теплопроводность, Вт/(м·К)
Вода	0,6
Антифриз	0,4
Масло	0,2
Бензин	0,12
Сажа	0,1
Масло + 3% воды	0,212
Масло + 3% антифриза	0,206
Масло + 10 % бензина	0,192
Масло + 5 % сажи	0,195

Таким образом, увеличение времени нагрева моторного масла (по сравнению с начальным состоянием) свидетельствует о наличии в нем примесей (воды, сажи, антифриза).

Заключение

Рассмотренные обобщенный показатель работоспособности масла и показатель динамики его нагрева позволяют по изменению физико-химических показателей масла в процессе работы двигателя правильно определить работоспособность масла (момент его смены), а также своевременно выявить и устранить неполадки в работе двигателя, приводящие к обводнению масла, попадания в него топлива и увеличению прорыва газов в картер.

Полученные результаты исследования работающего моторного масла в ДВС экспресс-методом с помощью маслотестера разработанного в ООО «Химмотолог», подтверждают, что работающее масло является уникальным носителем достоверной информации о техническом состоянии узлов, агрегатов и систем двигателя автомобиля [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Патент на изобретение №23926072 «Способ и устройство для определения работоспособности смазочных материалов». Авторы: Нигматуллин Р.Г. и др.
2. Классификация эталонов коррозии // ГОСТ 2917-76. Масла и присадки. Метод определения коррозионного воздействия на металлы.
3. Фарзанае М.Г., Ильясов И.В., Азим-Заде А.Ю. «Технологические измерения и приборы», М., Высшая школа, 1989, с. 311.
4. Смазочные масла». Папок К.К. М., Воениздат, 1962 г. с.256.
5. Нигматуллин Р.Г. и др. Устройство для определения степени разжижения моторных масел топливом и выявления износа двигателя // Мир измерений. Выпуск № 4. 2011. С. 38-39.
6. Нигматуллин Р.Г., Костенков Д.М. Как предотвратить поломку машины // Авторынок. № 20. 2011. С. 5.

ქართული ენის ლოგიკური გრამატიკის მიზნები, მეთოდები, შედეგები

კონსტანტინე ფხაკაძე, გიორგი ჩიჩუა, მერაბ ჩიქვინიძე, ალექსანდრე მასხარაშვილი

სტუ ქართული ენის ტექნოლოგიების სასწავლო-სამეცნიერო ცენტრი

1. ქართული ენის ლოგიკური გრამატიკის მიზნების და მეთოდების მოკლე მიმოხილვა

ქართული ენის ლოგიკური გრამატიკა მიზნად ისახავს ქართული ენის მათემატიკური თეორიის [4] და ქართული ინტელექტუალური კომპიუტერული სისტემის აგებას [5].¹ კვლევის მეთოდთა ევრდნობა ხედვას ენის კანონების ბუნებრივ არსებობაზე. ანუ, ჩვენი კვლევის მეთოდია ჩვენში ქართული ენის ბუნებრივად და, შესაბამისად, ქვეცნობიერად არსებული კანონების გაცნობიერება და მათი მათემატიკური თეორიის ფარგლებში მოქცევა [4], [6], [7]. ამასთან, ევრდნობით რა მონტევიუს, ჩვენი მეთოდები განსხვავდება ინგლისურისთვის შემუშავებული მისი მეთოდებისგან [13]. ანუ, ლ-ადრიცხვის ნაცვლად ჩვენ ევრდნობით აღნიშნათა თეორიას [10]. ასევე, ჩვენ ვერ ვსარგებლობთ ჩომსკის იმ მეთოდებით, რომლებიც ინგლისურითაა ნაკარნახევი [13]. ანუ, უშუალო შემადგენელთა მეთოდის ნაცვლად ჩვენ ევრდნობით ქართული ენობრივი მასალის ფორმალურად განვითარებადი მათემატიკური ენის სიმბოლოებად გადააზრების მეთოდს, რომელსაც ენის პირდაპირი ფორმალურ-ლოგიკური ანუ ბუნებრივი მათემატიკური აღწერის მეთოდსაც ვუწოდებთ [8]. გარდა ამისა, ქართული ენის ბუნებრივი სამეტყველო თავისებურებების კვლევამ ანუ მათმა გაცნობიერებამ და ლოგიკურმა ანალიზმა ჩვენ გვბიძგა სამეტყველო ენის ანბანის ცნების განსაზღვრისკენ, რაც ამ ლინგვისტურ სფეროში დღეს არსებული ხედვებისგან [14] არსებითად განსხვავებული ხედვებს აყალიბებს.

2. ქართული ენის ლოგიკური გრამატიკის შედეგების მოკლე მიმოხილვა

ვიკვლევთ რა ენის ფონეტიკურ, მორფოლოგიურ, სინტაქსურ, სემანტიკურ, ლოგიკურ და საკომუნიკაციო სისტემებს ნაშრომში მიმოხილულია ახალი ხედვები

¹ ის, რომ ჯერ კიდევ არ არსებობს ქართული ენის სინტაქსური მართლმწერი, მაღალხარისხიანი ტექსტების მკითხველი და მეტყველების ამომცნობი და ხმიდან ხმაზე და ტექსტიდან ტექსტზე მთარგმნელი სისტემები, მაშინ როდესაც, დღეს, მთელი რიგი ენებისთვის, ასეთი სისტემები უკვე თითქმის ამოწურავი ფორმითაა შემუშავებული, განპირობებულია იმით, რომ დასავლეთში, ასეთი სისტემების ასაგებად ენების მათემატიკური გრამატიკების შემუშავება უკვე 50 წელია მიმდინარეობს, ქართულის მათემატიკური შესწავლა კი მხოლოდ ამ 12 წლის წინ დაიწყო და, თანაც, უკვე 7 წელია, ეს პროცესი მისთვის აუცილებელი მიზნობრივი დამოკიდებულების გარეშე დარჩა. - დასავლური გამოცდილება ცხადად გვიდასტურებს, რომ ქართული ენის, მეტყველებისა და აზროვნების მათემატიკური თეორიების შემუშავების გარეშე ვერცერთი ზემოაღნიშნული სახის სისტემა ვერ შეიქმნება, რაც, ახლო მომავალში, ქართულ ენის კულტურული ფუნქციონირების თითქმის სრული შეზღუდვის ობიექტურ მიზეზად იქცევა.

ქართული სამეტყველო ენის ანბანზე და, ასევე, ქართულ ენის მორფემებზე, ბრუნებაზე, უღლებაზე, თხრობით წინადადებებზე.

2. 1. სამეტყველო ენის ანბანის თაობაზე: ქართული ენის ლოგიკური გრამატიკის თანახმად, ენის არადაშლად, ანუ განუყოფელ ანუ მარტივ სამეტყველო ხმებს ამ სამეტყველო ენის სამეტყველო ერთეულებს ვუწოდებთ და ვამბობთ, რომ ნებისმიერი სამეტყველო ენის ანბანი უნდა შედგებოდეს ამ ენის სამეტყველო ერთეულებისგან. ანუ, ქართული სამეტყველო ენის ანბანი უნდა შედგებოდეს ქართული სამეტყველო ერთეულებისაგან, რომლებზედაც ჩვენ ხედვას ქვემოთ წარმოვადგენთ.

ქართულ სამწერლობო ენას GWL -ით, მის ანბანს კი - $GWLAlphabet$ -ით აღვნიშნავთ. $GWLAlphabet = GWLAlphabet(V) \cup (GWLAlphabet(C))$ (აქ $GWLAlphabet(V) = \{ა, ე, ი, ო, უ\}$ ხმოვნების სიმრავლეა, $GWLAlphabet(C) = \{ბ, გ, დ, ვ, ზ, თ, კ, ლ, მ, ნ, პ, ჟ, რ, ს, ტ, ფ, ქ, ღ, ყ, შ, ჩ, ც, ძ, წ, ჭ, ხ, ჯ, ჰ\}$ კი - თანხმოვნების). GSL -ით ქართულ სამეტყველო ენას, $GSLAlphabet$ -ით კი მის ანბანს აღვნიშნავთ. ამასთან, ჩვენ ვამტკიცებთ, რომ ქართულში ხმოვანი ასოს გამეტყველებით გვეძლევა ერთი ხმოვანი სამეტყველო ერთეული, რადგან არცერთი ქართული ხმოვნის შესაბამისი სამეტყველო ხმა არ იშლება უფრო მარტივ სამეტყველო ხმებად. ანუ, ქართულში არის $GSLAlphabet(V) = \{ა, ე, ი, ო, უ\}$ სიმრავლით მოცემული 5 ხმოვანი სამეტყველო ერთეული.² ქართული არახმოვანი სამეტყველო ერთეულების დადგენისას გამოვდივართ იქიდან, რომ არცერთი ქართული თანხმოვანი არ მეტყველდება ხმოვნისგან მოწყვეტით. ანუ, ჩვენ ვამტკიცებთ, რომ ქართული თანხმოვანი, ხმოვნისგან განსხვავებით, არ შეიძლება გაგებულ იქნას სამეტყველო ერთეულის აღმნიშვნელ ნიშნად და რომ მას სამეტყველო ენაში ებმება 10 სამეტყველო ერთეული, რომელთაგან 5 მასზედ მარჯვნიდან, 5 კი - მასზედ მარცხნიდან ხმოვნის მიდგმით მიღებული მარცვლის გამეტყველებით მიიღება. ანუ, ქართულში არის $GSLAlphabet(CV)$ და $GSLAlphabet(VC)$ სიმრავლეებით ქვემოთ მოცემული შემდეგი 280 მარცვლოვანი სამეტყველო ერთეული:

$GSLAlphabet(CV) = \{ ბა, გა, და, ვა, ზა, თა, კა, ლა, მა, ნა, პა, ჟა, რა, სა, ტა, ფა, ქა, ღა, ყა, შა, ჩა, ცა, ძა, წა, ჭა, ხა, ჯა, ჰა, ბე, გე, დე, ვე, ზე, თე, კე, ლე, მე, ნე, პე, ჟე, რე, სე, ტე, ფე, ქე, ღე, ყე, შე, ჩე, ცე, ძე, წე, ჭე, ხე, ჯე, ჰე, ბი, გი, დი, ვი, ზი, თი, კი, ლი, მი, ნი, პი, ჟი, რი, სი, ტი, ფი, ქი, ღი, ყი, ში, ჩი, ცი, ძი, წი, ჭი, ხი, ჯი, ჰი, ბო, გო, დო, ვო, ზო, თო, კო, ლო, მო, ნო, პო, ჟო, რო, სო, ტო, ფო, ქო,$

² ხაზგასმული ხმოვნით ამ ხმოვანზე მიბმული სამეტყველო ერთეულია აღნიშნული.

დღ, ყღ, შღ, ზღ, ცღ, ძღ, წღ, ჭღ, ხღ, ჯღ, ჰღ, ბჟ, გჟ, დჟ, ვჟ, ზჟ, თჟ, კჟ, ლჟ, ძჟ, ნჟ, პჟ, მჟ, რჟ, სჟ, ტჟ, ფჟ, ქჟ, ღჟ, ყჟ, შჟ, ხჟ, ცჟ, ძჟ, წჟ, ჭჟ, ხჟ, ჯჟ, ჰჟ}

$GSLAlphabet(VC)=\{ აბ, აგ, ად, ავ, აზ, ათ, აკ, აღ, ამ, ან, აპ, აჟ, არ, ას, ატ, აფ, აქ, აღ, აყ, აშ, აჩ, აც, აძ, აწ, აჭ, ახ, აჯ, აპ, ებ, ეგ, ედ, ევ, ეზ, ეთ, ეკ, ეღ, ემ, ენ, ეპ, ერ, ეს, ეტ, ეფ, ექ, ეღ, ეყ, ეშ, ეჩ, ეც, ეძ, ეწ, ეჭ, ეხ, ეჯ, ეპ, იბ, იგ, იდ, ივ, იზ, ით, იკ, იღ, იმ, ინ, იპ, იჟ, ირ, ის, იტ, იფ, იქ, იღ, იყ, იშ, იჩ, იც, იძ, იწ, იჭ, იხ, იჯ, იპ, თბ, თგ, თდ, თვ, თზ, თთ, თკ, თღ, თმ, თნ, თპ, თჟ, თრ, თს, თტ, თფ, თქ, თღ, თყ, თშ, თჩ, თც, თძ, თწ, თჭ, თხ, თჯ, თპ, უბ, უგ, უდ, უვ, უზ, უთ, უკ, უღ, უმ, უნ, უპ, ურ, უს, უტ, უფ, უქ, უღ, უყ, უშ, უჩ, უც, უძ, უწ, უჭ, უხ, უჯ, უპ}\}$ ³

ამგვარად, ჩვენ ვამტკიცებთ, რომ ქართული სამეტყველო ენის ანბანი შედგება მხოლოდ ხემოთ წარმოდგენილი 5 ხმოვანი და 280 მარცვლოვანი სამეტყველო ერთეულისგან და იგი შემდეგი 285 წევრიანი სიმრავლეა:

$$GSLAlphabet = GSLAlphabet(V) \cup GSLAlphabet(CV) \cup GSLAlphabet(VC).^4$$

სამეტყველო ენის ამ ანბანური ხედვით აგებული მკითხველი სისტემები, დღეს, ერთ-ერთი ყველაზე უფრო მაღალი ხარისხით მომუშავე ქართული მკითხველი სისტემებია [1]. ეს, იმის გათვალისწინებით, რომ ჯერ რეალიზებულია მეთოდის მხოლოდ 5-10%, ცალსახად გვეკარნახობს მის პერსპექტიულობაზე. ამას ამყარებს ისიც, რომ ამ მეთოდის საფუძველზე შემუშავებულია უკვე არსებული ქართული მეტყველების ამომცნობი სისტემის [3] გაუმჯობესების გზები. ამასთან, სამეტყველო ენის ანბანის ეს ხედვა იძლევა ახალ ხედვას მარცვალთა სტრუქტურაზე. კერძოდ, არსებული ხედვით, $CR_1 \dots CR_m VLC_1 \dots LC_m$ ტიპის მარცვლის ბირთვია V ხმოვანი [14], ჩვენი ხედვით კი, $CR_n \dots CR_1 VLC_1 \dots LC_n$ ტიპის მარცვლის ბირთვია ან $RC_1 V$ მარტივი მარჯვენა მარცვალი ან VLC_1 მარტივი მარცხენა მარცვალი.

2. 2. ქართული მორფემების, ბრუნების, უღლების და თხრობითი წინადადებების თაობაზე: ლოგიკური გრამატიკით ქართული განიხილება როგორც პირველადი მათემატიკური ენის გაფართოების შედეგი. ამიტომ, ჩვენ განუწყვეტლივ მხედველობაში გვაქვს ენის ქვედა შრის მათემატიკური ენა. ამდენად, ჩვენი ხედვა განსხვავდება იმ დღეს არსებული ხედვებისგან, რომელიც ქართულს ამ მათემატიკური ენის გარეშე იაზრებს [9], [11], [12]. ასე მაგალითად:

³ ხაზგასმული მარცვლებით ამ მარცვლებზე მიბმული სამეტყველო ერთეულებია აღნიშნული.

⁴ გასაგებია, რომ ქართული სამეტყველო ენის ანბანზე აქ წარმოდგენილი ხედვა შეიძლება ზოგმა არ გაიზიაროს. თუმცა, ასეთ შემთხვევაშიც, ცხადია, მათი მოსაზრებები წაადგება ამ მეტად მაღალი სამეცნიერო მნიშვნელობის მქონე საკითხის გასწვრივ საბოლოო ჭეშმარიტების დადგენას.

1. ენათმეცნიერებაში დღეს არსებული ხედვით მორფემა არის ან დერივაციული ან ფლექსიური. დერივაციული მორფემა მოქმედებს რა ძირზე იძლევა ან იმავე ან სხვა მეტყველების ნაწილის ახალ სიტყვას. ფლექსიური მორფემა მოქმედებს რა სიტყვაზე უცვლის მას გრამატიკულ მნიშვნელობას. ჩვენი კვლევით კი დგინდება, რომ მორფემათა ეს კლასიფიცირება არასრულია. მაგ., მორფემა *(-ლ)*, სიტყვაში *(წითელ)* არ არის ფლექსიური, რადგან *წითელს* არ არის *წითელ* ძირით მოცემული ზედსართავის ბრუნვა. ამასთან, იგი არც დერივაციულია, რადგან იგი არც სხვა რომელიმე მეტყველების ნაწილია. მართლაც, *წითელს* ამოკლებს *წითელ Nს*, რაც, ცხადია, ვერცერთი მეტყველების ნაწილის კუთვნილებად ვერ შეფასდება. ამგვარად, ჩვენ ვამტკიცებთ, რომ *(-ლ)* მორფემა სიტყვაში *წითელს* არც ფლექსიურია და არც დერივაციული და მას შემამოკლებელ მორფემას ვუწოდებთ. ამასთან, *წითელს* ჩვენთვის შიდაენობრივი შემამოკლებელი სიტყვაა, რადგან მისით შემოკლებული გამოსახლება სრულად იშლება ენაში. - ასეთი სიტყვები ქართულში მრავლადაა. კერძოდ, ზმნების დიდი ნაწილი სწორედ ასეთია. მაგ., ზმნა *წითელია*, რომელიც ამოკლებს *არის წითელი* გამოსახულებას. თუმცა, ქართულში, თუ არ ჩავთვლით ძირითადი სიმრავლეების დამსახელებელ სიტყვებს (როგორებიცაა: წითელი, ვაშლი, და. ა.შ.), უმეტესობა სიტყვებისა შემამოკლებელი სიტყვაა. მაგ., *წითელი-1* ჩვენი აღწერით მარჯვნივ 1-ადგილიანი ოპერაციაა და იგი ამოკლებს *{წითელი}∩-1* ფორმას, რომელიც აგებულია *{წითელი}*-ით აღნიშნული სიმრავლით⁵ და \cap თანაკვეთის მათემატიკური ოპერაციით. ამგვარად, *წითელი*, როგორც ზედსართავი, შემამოკლებელი სიტყვაა და მას გარეენობრივ შემამოკლებელ სიტყვას ვუწოდებთ, რადგან ის ენის ქვედა მათემატიკურ ანუ სააზროვნო შრეში იძლევა შესამოკლებელ ფორმას.

3. ქართული სასკოლო გრამატიკით *ვაშენებ* და *ვუშენებ* ზმნები ერთგვარად იუღლება. სამაგალითოდ ვნახოთ მათი უღლება მხ. რიცხვში: *ავაშენე მე ის / ავუშენე მე მას ის; ააშენე შენ ის / აუშენე შენ მას ის; ააშენა მან ის / აუშენა მან მას ის*. არადა, ლოგიკური გრამატიკით, ეს ორი ზმნა, რომელთაგან მეორე შიდაენობრივი შემამოკლებელი ფორმაა, პრინციპულად განსხვავებულ უღლებებს იძლევიან. კერძოდ, მხ. რიცხვში *ავუშენე* შემდგენაირად იუღლება: *ავუშენე მე მას ის; ავიშენე მე შენ ის; აუშენე შენ მას ის; ამიშენე შენ მე ის; აუშენა მან მას ის;*

⁵ {წითელი} აღნიშნავს წითლად მიხნეული საგნების ძირითად სიმრავლეს. ეს ნიშნავს, რომ ვერ ხერხდება მისი განსაზღვრა ვერც ელემენტების ჩამოთვლით, ვერც რეკურსულად და ვერც განმსაზღვრელი თვისების მინიშნებით. - აქ ისეთივე ვითარებაა, როგორიცაა ევლკლიდეს გეომეტრიაში *წერტილი* სიტყვით მოცემული სიმრავლის შემთხვევაში.

აგიშენა მან შენ ის; ამიშენა მან მე ის.⁶ საქმე ისაა, რომ, ქართულში, აეუშენე 2-ადგილიანი, ავაშენე კი - 1-ადგილიანი უღლებით იუღლება. უფრო მეტიც, ქართულში არის ცალკე კლასი ზმნებისა, რომლებიც 3-ადგილიანი უღლებით იუღლებიან. მაგ.: მივაბარე მე მას ის აღსაზრდელად; მოვაბარე მე შენ ის აღსაზრდელად; მივაბარე მე მას შენ აღსაზრდელად; მივაბარე შენ მას ის აღსაზრდელად; მომაბარე შენ მე ის აღსაზრდელად; მიმაბარე შენ მას მე აღსაზრდელად; მივაბარა მან მას ის აღსაზრდელად; მოვაბარა მან შენ ის აღსაზრდელად; მივაბარა მან მას შენ აღსაზრდელად; მომაბარა მან მე ის აღსაზრდელად; მიმაბარა მან მას მე აღსაზრდელად.⁷

2. ქართული სასკოლო გრამატიკით ქართულში 7 ბრუნვაა. ჩვენი ხედვით კი, სახელს იმდენი ბრუნვა აქვს, რამდენი ფორმითაც იგი შეიძლება წარმოდგინდეს მარტივ თხრობით წინადადებაში აუცილებელ წევრად. მარტივი თხრობითი წინადადება არის გამონათქვამი, რომელიც იგება თხრობითი კილოს ზმნით და ამ ზმნაზე აზროვნებაში ლოგიკური აუცილებლობით მიბმული სახელების იმ ფორმებით, რომლებსაც ჩვენ ბრუნვით ფორმებს ვუწოდებთ. მარტივი თხრობითი წინადადების აუცილებელ წევრს ვუწოდებთ მის ამგებ ზმნაზე ლოგიკური აუცილებლობით მიბმულ სახელს. ამასთან, თხრობითი კილოს ზმნის ადგილიანობა ისაზღვრება მასზედ აუცილებლობით მიბმული სახელთა რაოდენობით, ადგილის ტიპი კი - ამ ადგილის შემავსებელი სახელის ტიპით. - ამ ცნებების საფუძველზე წარმოებული კვლევებით დადგინდა, რომ არსებით ანუ N სახელს 14 ბრუნვა აქვს. მათ No, Nის, Nისკენ, Nისგან, Nისთვის, Nით, Nიდან, Nს. Nში, ზე, ად, ამდე, თან, მა ბრუნვებს ვუწოდებთ. ამასთან, ბრუნვების ამ სისტემას ჩვენ ლოგიკურ ბრუნვებს ვუწოდებთ.⁸ დადგინდა ისიც, რომ ქართულის ძირეულ ნაწილში ანუ მხოლოდობით შრეში გამოიყოფა m განსხვავებული სახის V_ფრაზა. ესენია: $[V^1(N_1)=t], \dots, [V^m(N_1, \dots, N_m)=t]$ ($N_k \in \{N_0, N_{ის}, N_{ისკენ}, N_{ისგან}, N_{ისთვის}, N_{ით}, N_{იდან}, N_{ს. Nში}, N_{ზე}, N_{ად}, N_{ამდე}, N_{თან}, N_{მა}, მე, შენ\}$, $k=1, \dots, m$). ამასთან, ჩვენ

⁶ აქ, მწკრივი არის არაფრით, გარდა თუ არა პირთა შორისი მიმართებით ერთმანეთისგან განსხვავებული ზმნური ფორმების ერთობლიობა. - ანუ, ვეყრდნობით რა მწკრივის ამ კლასიკურ გაგებას, ყოველგვარი ეჭვის გარეშე ვასაბუთებთ, რომ ჩვენს მიერ ზემოთ წარმოდგენილი 7 ფორმა არ შეიძლება არ იქნეს გაერთიანებული ერთ მთლიან მწკრივში.

⁷ ხაზგასასმელია, რომ იმ აშკარა პრინციპული განსხვავებების მიუხედავად, რაც ქართულ და ინდოევროპულ უღლებებს შორისაა, დღესაც კი, ქართული ენის სასკოლო გრამატიკის კურსში, ამის შესახებ არაფერია ნათქვამი.

⁸ სასკოლო გრამატიკით ქართულში არის 7 ბრუნვა [1]. მათგან 6 ჩვენთანაცაა. მე-7-ე ბრუნვაა - წოდებითი ჩვენთვის ბრუნვა არ არის, რადგან არ არსებობს ისეთი თხრობითი წინადადება, რომელშიც ო ფორმა აუცილებელ წევრს იძლევა.

V-ფრაზებს განვიხილავთ როგორც საოპერაციო გამონათქვამთა სიმრავლეს.⁹ კერძოდ, დადგინდა, რომ არსებითი სახელების მატრუნებელი მორფემებით რეალიზებულია ჩასმის ოპერატორები, რომლებიც მე და შენ ნაცვალსახელებზე უნიშნოდაა მიბმულნი. ეს უზრუნველყოფს იმას, რომ ნაცვალსახელები და N-ფრაზები მოქმედებენ რა V-ფრაზებზე მოქმედების შედეგად ისევე V-ფრაზას იძლევიან, რაც ამ მოქმედების მიმართ V-ფრაზათა ოპერაციულ ჩაკეტილობას უზრუნველყოფს.

ჩვენი ხედვით, ქართულში, ზედსართავ (განმაზოგადებელ) ანუ A (Q) სახელს აქვს 3 ბრუნვა. ესენია: A_i (Q_i), A- (Q-), A_{ma} (Q_{ma}) ბრუნვები. არაბრუნებადი A (Q) სახელები აღინიშნება A*-T_i (Q*-T_i). ამასთან, დადგინდა, რომ A (Q) სახელების ბრუნვის ნიშნებით მათი განსაზღვრის არეები მოგვეცემა. მაგ., A_i და Q_i ოპერაციების განსაზღვრის არეა {N_i, N_{is}, N_{ისკენ}, N_{ისგან}, N_{ისთვის}, N_{ით}, N_{იდან}}, A- და Q- ოპერაციების - {N_s, N_{ში}, N_{ზე}, N_{ად}, N_{ამდე}, N_{თან}}, A_{მა} და Q_{მა} ოპერაციების კი - {N_{მა}}. დადგინდა ისიც, რომ A_i, A-, A_{მა}, A* (Q_i, Q-, Q_{მა}, Q*) მოქმედებენ რა განსაზღვრის არეში შემავალ და მათ მარჯვნივ განთავსებულ N α -ტიპის რომელიმე AN α -ფრაზაზე შედეგად იძლევიან N α -ტიპის AN α -ფრაზას (QN α -ფრაზას), რაც უზრუნველყოფს ამ ოპერაციების მიმართ {N_i, N_{is}, N_{ისკენ}, N_{ისგან}, N_{ისთვის}, N_{ით}, N_{იდან}, N_s, N_{ში}, N_{ზე}, N_{ად}, N_{ამდე}, N_{თან}, N_{მა}} ტიპთა სიმრავლის ჩაკეტილობას.

ამგვარად, ჩვენი კვლევის კიდევ ერთ-ერთი ძირითადი შედეგი ისაა, რომ უკვე აგებულია ქართული ენის ძირეული ნაწილის იზომორფული მათემატიკური თეორია, რომლის აღფაბეგია:

1. N ტიპის სიტყვები: N_i; N_{is}; N_{ისკენ}; N_{ისგან}; N_{ისთვის}, N_{ით}, N_{იდან}, N_s, N_{ში}, N_{ზე}, N_{ად}, N_{ამდე}, N_{თან}, N_{მა};
2. A ტიპის სიტყვები: A-, A_i, A_{მა}, A*;
3. Q ტიპის სიტყვები: Q-, Q_i, Q_{მა}, Q*;
4. პირის ნაცვალსახელები: მე, შენ;

V ტიპის სიტყვები: [V^m(N₁,...,N_m)=t] (N_k∈{N_i, N_{is}, N_{ისკენ}, N_{ისგან}, N_{ისთვის}, N_{ით}, N_{იდან}, N_s, N_{ში}, N_{ზე}, N_{ად}, N_{ამდე}, N_{თან}, N_{მა}, მე, შენ}, ყოველი k=1-m)

ქართული ენის ძირეული ნაწილის ამ იზომორფულ მათემატიკურ თეორიას ჩვენ ქართული ენის ლოგიკური გრამატიკის საფუძვლად განვიხილავთ და მას

⁹ ეს სიმრავლე ლოგიკურ გრამატიკაში ისეთივე როლს თამაშობს, რა როლსაც მთელი რიცხვები ჩვეულებრივ არითმეტიკაში [2].

ბუნებრივი ქართული ენის ძირეული ნაწილის ბუნებრივ ლოგიკას ვუწოდებთ. - ამ შედეგის მნიშვნელობას უფრო თვალსაჩინოს ხდის ის, რომ ამ თეორიაზე დაყრდნობით განვითარებული მიდგომით სრული მოცულობით წყდება ქართული ენის ძირეული ნაწილის მათემატიკურ ენაზე ავტომატური თარგმნის პრობლემა, რაც თანამედროვე ლინგვისტიკის - ბუნებრივი ენების ლოგიკის და ბუნებრივი ენების დამუშავების საკვანძო საკითხია. კერძოდ, ამ მიდგომით უკვე აგებულია [2]:

1. მარტივი ქართული თხრობითი წინადადებების მათემატიკურ ენაზე ორმხრივ ავტომატურად მთარგმნელი საცდელი სისტემა;
2. ქართული ლოგიკური ამოცანების ამომხსნელი (შემმოწმებელი) საცდელი სისტემა, რომელიც ამოცანას ამუშავებს მისი წინასწარი მათემატიკური თარგმანის საფუძველზე;
3. ქართულ-ინგლისურ-გერმანული ორმხრივ ავტომატურად მთარგმნელი საცდელი სისტემა, რომელიც მათემატიკური ენის ანუ მათემატიკური თარგმანის საშუამავლო მონაწილეობით მარტივ თხრობით წინადადებებს თარგმნის ქართული, შესაბამისად ინგლისური, შესაბამისად გერმანული ენებიდან დანარჩენ ორში;
4. ქართული ენის ძირეული ნაწილის რთული და მარტივი თხრობითი წინადადებებით აგებული ტექსტების სინტაქსურად მაანალიზებელი და შემმოწმებელი საცდელი სისტემა, რომელიც, მიუხედავად იმისა, რომ ქართული სინტაქსური მართლმწერის აგების ამოცანა 40 წელზე მეტია აქტუალურ მდგომარეობაში იმყოფება, ამ ტიპის პირველი და ჯერჯერობით ერთადერთი სისტემაა.

ლიტერატურა

1. კ.ფხაკაძე, გ.ჩიჩუა, ბუნებრივი ქართული სამეტყველო ერთეულის ცნება და ქართული მრავალხმოვანი მკითხველი სისტემის ამგები მეთოდებისა და აგების მიზნების მიმოხილვა, ქართული ენის ტექნოლოგიების ცენტრის შრომების კრებული, გვ.21-40, 2011;
2. კ.ფხაკაძე, მ.ჩიქვინიძე, ქართული მარტივი და რთული წინადადებების ლოგიკური სინტაქსისა და ქართული მართლმწერის ამგები მეთოდების და აგების მიზნების მიმოხილვა, ქართული ენის ტექნოლოგიების ცენტრის შრომების კრებული, გვ.41-70, 2011;
3. Pkhakadze K., Chichua G., Vashalomidze A., Abzianidze L., Maskharashvili A., The Georgian Reader-Listener System with User's Possibility to Build in an Own Synthetic Voice, REPORTS of Enlarged Sessions of The Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, Volume 23, pp.100-104, 2009;

4. Pkhakadze K., Abzianidze L., Maskharashvili A., Georgian Language's Theses, Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics REPORTS, Vol. 34, pp. 108-121, 2008;
5. Pkhakadze K., Chichua G., Abzianidze L., Maskharashvili A., About 1-Stage Voice Managed Georgian Intellectual Computer System, I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Vol. 34, pp. 96-107, 2008;
6. კ.ფხაკაძე, ლოგიკური ბრუნებისა და ლინგვისტური მიმართებების საკითხისათვის ქართულში, „ქართული ენა და ლოგიკა“, N1, „უნივერსალი“, გვ.19-77, 2005;
7. კ.ფხაკაძე, წინარე ზმნური სემანტიკური ერთეულის ცნება, პირის ნიშანთა საკითხი, ინტეგრალური და არაინტეგრალური გაგების ზმნური სიტყვა-შინაარსები და ქართული ზმნის არასრული ანუ პირველი სემანტიკური კლასიფიკაცია, „უნივერსალი“, გვ.72-152, 2004;
8. Pkhakadze K., Chankvetadze G., Tibua L., Ivanishvili M., Lekiasvili L., Soselia E., About the Main Ideas of the Direct Formal-Logical Description of the Georgian Natural Language System Through the Examples, Proceedings of the V Tbilisi Symposium on Language, Logic and Computation, ILLC, pp.129-137, 2003;
9. არნ.ჩიქობავა, მარტივი წინადადების პრობლემა ქართულში, მეცნიერებათა აკადემია, 1961, გვ.1-295;
10. Пхакадзе Ш.С., Некоторые Вопросы Теории Обозначений, ТГУ, с.1-195, 1977;
11. ა.შანიძე, ქართული ენის გრამატიკის საფუძვლები, თსუ, 1980, გვ. 1-671;
12. Harris A.C., Georgian Syntax - A Study in Relational Grammar, Cambridge University Press, pp.327, 1981;
13. B. Partee, A. Meulen, R. Wall, Mathematical Methods in Linguistics, pp.1-663, , 1990;
14. Taylor P., Text-to-Speech Synthesis, Cambridge University Press, pp.627, 2009.

К.Пхакадзе, Г.Чичуа, М.Чиквинидзе, А.Масхарашвили

Наши Цели, Методы И Результаты По Пути Постраения Логической Граматики Грузинского
Языка

Резюме:

В статье кратко изложены наши цели, методы и результаты по пути построения логической грамматики Грузинского языка. При этом, построение современной математической грамматической теории Грузинского языка, т.е. полное построение логической грамматики Грузинского языка, намечена как наша основная научная цель, а осмысление нашего естественного, т.е. подсознательного знания Грузинского языка и его математическое описание с

помощью формально развивающего математического языка Ш.С.Пхакадзе наша основная методология. Кроме этого, в статье коротко описаны ряд наших основных результатов. В частности, представлены новые взгляды:

1. Об азбуке Грузинской устной речи и о структуре слог;
2. О существовании недеривационных и нефлективных морфем в Грузинском языке, которые классифицируются как сокращающие морфемы;
3. О спряжении глаголов и склонении имен Грузинского языка;
4. О математической структуре Грузинского декларативного предложения;
5. О математической теорий изоморфной основной части Грузинского языка.

Konstantine Pkhakadze, Giorgi Chichua, Merab Chikvinidze, Aleksandre Maskharashvili

Our Aims, Methods and Results To The Way Of Construction Logical Grammar Of The Georgian Language

Summary:

In the paper shortly, there is overviewed our aims, methods and results toward the construction Logical Grammar of the Georgian language. Herewith: the complete construction of the logical grammar of the Georgian language is declared as our main scientific aim; the understanding of in us naturally and unconsciously exiting knowledge of the Georgian language and its description by the help of the Sh.Pkhakadze's formally developable mathematical language is declared as our main methodology. In addition, in the paper, there are shortly overviewed some of our new views as the main results of our researches. They are related to:

1. The Georgian speech alphabet and syllable structure;
2. The existence of contracting morphemes which exist in the Georgian language and which are neither derivational nor inflectional ones;
3. The declination and conjunction in the Georgian language;
4. The mathematical structure Georgian declarative sentences;
5. The isomorphic mathematical theory of the core part of the Georgian language.

ВРАЩЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В КОЛЬЦЕВОМ ЗАЗОРЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОПЕРЕЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. Н. Цуцкиридзе, Л. А. Джикидзе
Грузинский технический университет
ул. Костава, 77, 0175, Тбилиси, Грузия

1. ВВЕДЕНИЕ

Кольцевая геометрия канала оказывается наиболее выгодной и удобной в эксплуатации различного рода МГД-устройств (дросселей, насосов и др.). Вопрос о течении электропроводной жидкости в кольцевом зазоре в магнитном поле рассматривался в работах [2,5,7,8,9]. Использование магнитного поля для описания упрощающих модельных функций может привести к значительному искажению истинного характера течения жидкости [1,3,6,10].

В данной работе рассматривается течение электропроводной жидкости в кольцевом зазоре в однородном магнитном поле, найденном из решения задачи с учетом индуцированных текущими в жидкости электрическими токами магнитных полей ($Rm \neq 0$).

2. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1. Постановка задачи. Рассмотрим установившееся движение вязкой проводящей несжимаемой жидкости в пространстве, заключенном между двумя бесконечными цилиндрами радиусов a и b ($a < b$).

Предположим, что непроводящий внутренний цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью ω , а внешний цилиндр неподвижен, причем имеется внешнее однородное магнитное поле \vec{H}_0 , перпендикулярное оси цилиндров.

При указанных условиях в жидкости возникают электрические поля и ток, направленные по оси системы, а также ponderomotorные силы, действующие в плоскости, перпендикулярной оси. Наряду с этим, токи создают индуцированное магнитное поле в той же плоскости. Таким образом, в рассматриваемой задаче неизвестными величинами являются составляющие векторов скорости $\vec{V}(r, \varphi)$ и магнитного поля $\vec{H}(r, \varphi)$, расположенных в плоскости, перпендикулярной оси z (r, φ, z -цилиндрические координаты).

Заметим, что из уравнения

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (1.1)$$

сразу вытекает, что $E = E_z = \text{const}$. В дальнейшем принимается $E_0 = 0$, что позволяет понизить порядок уравнений магнитной гидродинамики [1], и привести их к виду

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \vec{V} \times \vec{H}, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (1.2)$$

$$\rho \left(\vec{V} \nabla \right) \vec{V} = \eta \Delta \vec{V} - \nabla p + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{H}, \quad \vec{J} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{H},$$

где σ - проводимость жидкости, η - коэффициент вязкости, ρ - плотность, c - скорость света, \vec{J} - вектор плотности электрического тока, p - давление.

Введем безразмерные величины

$$\vec{h} = \frac{\vec{H}}{H_0}, \quad \vec{u} = \frac{\vec{V}}{v_0}, \quad q = \frac{p}{p_0}, \quad v_0 = \omega a, \quad p = \rho v_0^2, \quad (1.3)$$

$$R = \frac{\rho}{\eta} v_0 a, \quad R_m = \frac{4\pi\sigma}{c^2} v_0 a, \quad M = \frac{H_0 a}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}.$$

Здесь R - число Рейнольдса, R_m - магнитное число Рейнольдса, M - число Гартмана.

Используя соотношение

$$\vec{J} \times \vec{H} = \frac{\sigma}{c} \left[\left(\vec{V} \nabla \right) \vec{H} - H^2 \vec{V} \right]$$

уравнения (1.2) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{h} &= R m \vec{u} \times \vec{h}, \quad \operatorname{div} \vec{h} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0, \\ \Delta \vec{u} &= R \left[\left(\vec{u} \nabla \right) \vec{u} + \nabla q \right] + M^2 \left[h^2 \vec{u} - \left(\vec{u} \nabla \right) \vec{h} \right]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь дифференциальные операции производятся по безразмерной переменной $x = r/a$, меняющейся в пределах $1 \leq x \leq \lambda = b/a$.

Система (1.4) содержит четыре неизвестные функции $u_r(r, \varphi)$, $u_\varphi(r, \varphi)$, $h_r(r, \varphi)$, $h_\varphi(r, \varphi)$ и требует для своей разрешимости восьми граничных условий.

Четыре условия, связанные с прилипанием жидкости к стенкам, очевидны и имеют вид

$$u_r|_{x=1} = u_r|_{x=\lambda} = u_\varphi|_{x=\lambda} = 0, \quad u_\varphi|_{x=1} = 1. \quad (1.5)$$

Для получения остальных краевых условий следует разрешить уравнения электродинамики

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \operatorname{div} \vec{h} = 0, \quad (1.6)$$

в областях $x < 1$ и $x > \lambda$ и поставить условия непрерывности

$$h_r = h_r^{(a)}, \quad h_\varphi = h_\varphi^{(a)} \quad \text{при } x = 1, \quad h_r = h_r^{(b)}, \quad h_\varphi = h_\varphi^{(a)} \quad \text{при } x = \lambda. \quad (1.7)$$

Здесь $h^{(a)}$ и $h^{(b)}$ - магнитные поля в областях $r < a$ и $r > b$ соответственно.

Наконец, необходимо потребовать, чтобы вектор $\vec{h}^{(a)}$ оставался ограниченным при $r \rightarrow 0$, а вектор $\vec{h}^{(b)}$ при $r \rightarrow \infty$ и имели составляющие $h_r^{(b)} = \sin \varphi$, $h_\varphi^{(b)} = \cos \varphi$, соответствующие заданному однородному полю.

2. Приближенное решение при малых числах Рейнольдса и Гартмана. Будем предполагать, что параметры R , Rm , M^2 - малые величины одного и того же порядка. Это будет иметь место, например, в случае очень вязкой, но слабо проводящей жидкости и достаточно сильного поля H_0 . Положим

$$R_m = \varepsilon, \quad R = \alpha\varepsilon, \quad M^2 = \beta\varepsilon, \quad (2.1)$$

где ε - малая величина, α и β - конечные величины.

Будем разыскивать вектора \vec{h} и \vec{u} , а также величину q в виде разложений

$$\vec{h} = \vec{h}_0 + \varepsilon \vec{h}_1 + \dots, \quad \vec{u} = \vec{u}_0 + \varepsilon \vec{u}_1 + \dots, \quad q = q_0 + q_1 + \dots \quad (2.2)$$

Очевидно, что нулевое приближение для магнитного поля будет

$$h_{0r} = \sin \varphi, \quad h_{0\varphi} = \cos \varphi, \quad (2.3)$$

во всем пространстве. Далее, из уравнений

$$\left(\Delta \vec{u}_0 \right)_r = \Delta u_{0r} - \frac{u_{0r}}{x^2} - \frac{2}{x^2} \frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} = 0, \quad \left(\Delta \vec{u}_0 \right)_\varphi = \Delta u_{0\varphi} - \frac{u_{0\varphi}}{x^2} - \frac{2}{x^2} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \varphi} = 0, \quad (2.4)$$

вытекает нулевое приближение для скорости

$$v_{0r} = 0, \quad v_{0\varphi} = \frac{\lambda^2 - x^2}{x(\lambda^2 - 1)}, \quad (2.5)$$

удовлетворяющее всем граничным условиям и соответствующее чисто гидродинамическому режиму. Переходим к нахождению следующего приближения.

Чтобы определить в первом приближении влияние потока на магнитное поле, надо решить уравнения

$$\text{rot } \vec{h}_1 = \vec{u}_0 \times \vec{h}_0, \quad \text{div } \vec{h}_1 = 0, \quad (2.6)$$

или в проекциях

$$\frac{\partial}{\partial x} (x h_{1r}) + \frac{\partial h_{1\varphi}}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} (x h_{1\varphi}) - \frac{1}{x} \frac{\partial h_{1r}}{\partial \varphi} = \frac{x^2 - \lambda^2}{x(\lambda^2 - 1)} \sin \varphi. \quad (2.7)$$

Полагая

$$h_{1r} = A(x) \frac{\cos \varphi}{1 - \lambda^2}, \quad h_{1\varphi} = B(x) \frac{\sin \varphi}{1 - \lambda^2}, \quad (2.8)$$

находим из (2.7)

$$A(x) = \frac{x^2}{8} - \frac{\lambda^2}{2} \ln x + \frac{C}{x^2} + D, \quad B(x) = -\frac{3x^2}{8} + \frac{\lambda^2}{2} \ln x + \frac{C}{x^2} - D. \quad (2.9)$$

Для определения постоянных C и D используем решения однородной системы (2.7) в областях $x < 1$ и $x > \lambda$

$$h_{1r}^{(a)} = D^{(a)} \frac{\cos \varphi}{1 - \lambda^2}, \quad h_{1\varphi}^{(a)} = -D^{(a)} \frac{\sin \varphi}{1 - \lambda^2}, \quad h_{1r}^{(b)} = \frac{C^{(b)}}{x^2} \frac{\cos \varphi}{1 - \lambda^2}, \quad h_{1\varphi}^{(b)} = \frac{C^{(b)}}{x^2} \frac{\sin \varphi}{1 - \lambda^2}, \quad (2.10)$$

и найдем C , D , $C^{(b)}$ и $D^{(a)}$ из условий сопряжения (1.7).

В результате вычислений получим

$$A(x) = \frac{1}{8} \left[x^2 + \frac{1 - 2\lambda^2}{x^2} \right] + \frac{\lambda_2}{2} \ln \frac{\lambda}{x}, \quad B(x) = -\frac{1}{8} \left[3x^2 - \frac{1 - 2\lambda^2}{x^2} \right] + \frac{\lambda_2}{2} \left(1 - \ln \frac{\lambda}{x} \right), \quad (2.11)$$

чем и характеризуется первое приближение для магнитного поля.

Обратимся теперь к определению в первом приближении влияния магнитного поля на движение жидкости

Функций $u_{1r}(x, \varphi)$, $u_{1\varphi}(x, \varphi)$ и $q_0(x, \varphi)$ должны быть найдены из системы дифференциальных уравнений [4]

$$\Delta u_{1r} - \frac{u_{1r}}{x^3} - \frac{2}{x^2} \frac{\partial u_{1\varphi}}{\partial \varphi} = -\alpha \left(\frac{u_{0\varphi}^2}{x} - \frac{\partial q_0}{\partial x} \right) - \frac{\beta}{2} u_{0\varphi} \sin 2\varphi, \quad (2.12)$$

$$\Delta u_{1\varphi} - \frac{u_{1\varphi}}{x^2} + \frac{2}{x^2} \frac{\partial u_{1r}}{\partial \varphi} = \frac{\alpha}{x} \frac{\partial q_0}{\partial \varphi} + \frac{\beta}{2} u_{0\varphi} (1 - \cos 2\varphi) \frac{\partial}{\partial x} (x u_{1r}) + \frac{\partial u_{1\varphi}}{\partial \varphi} = 0,$$

при граничных условиях

$$u_{1r} = u_{1\varphi} = 0 \quad \text{при } x = 1 \text{ и } x = \lambda. \quad (2.13)$$

Решение системы (2.12) будем искать в виде

$$u_{1r} = \beta R(x, \varphi), \quad u_{1\varphi} = \beta \psi(x) + \beta \Phi(x, \varphi), \quad q_0 = \chi(x) + \frac{\beta}{\beta} f(x, \varphi). \quad (2.14)$$

Функции $\psi(x)$, $R(x, \varphi)$, $\Phi(x, \varphi)$ и $f(x, \varphi)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{x} (x\psi)' - \frac{\psi}{x^2} = \frac{u_{0\varphi}}{2}, \quad (2.15)$$

$$\Delta R - \frac{R}{x^2} - \frac{2}{x^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{u_{0\varphi}}{2} \sin 2\varphi,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (xR) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0, \quad (2.16)$$

$$\Delta \Phi - \frac{\Phi}{x^2} + \frac{2}{x^2} \frac{\partial R}{\partial \varphi} = \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{u_{0\varphi}}{2} \cos 2\varphi.$$

Функции ψ , R и Φ должны обращаться в нуль при $x=1$ и $\chi=\lambda$, а функция $\chi(x)$ определяется формулой:

$$\chi'(x) = \frac{u_{0\varphi}^2}{x}, \quad (2.17)$$

и очевидно, представляет собой часть давления, уравновешивающая центробежные силы, возникающие от скорости $u_{0\varphi}$.

Функция $\psi(x)$ находится без труда и имеет вид

$$\psi(x) = \frac{1}{16(\lambda^2 - 1)^2} \{ (4\lambda^2 [(\lambda^2 - 1)x^2 \ln x - (x^2 - 1)\lambda^2 \ln \lambda] + (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - x^2)(x^2 - 1) \}. \quad (2.18)$$

Дифференцируя первое из уравнений (2.16) по φ , умножая второе уравнение (2.16) на x и дифференцируя по x , вычитая из первого результата второй и присоединяя последнее уравнение (2.16), получаем систему двух уравнений с неизвестными функциями R и Φ . Если положить

$$R = y(x) \sin 2\varphi, \quad \Phi = Z(x) \cos 2\varphi, \quad (2.19)$$

выделить частное решение получаемой при этом системы обыкновенных дифференциальных уравнений и исключить Z , то для функции $t = xy$ получается уравнение

$$x^3 t^{(4)} + 2x^2 t''' - 9xt'' + 9t' = 0 \quad (2.20)$$

с общим интегралом

$$t = Ax^2 + Bx^4 + \frac{C}{x^2} + D. \quad (2.21)$$

Определение постоянных из граничных условий приводит после выкладок к следующим формулам:

$$y(x) = \frac{\lambda^2}{16x^3(\lambda^2 - 1)^4} \{ (2\lambda^2(x^2 - 1)^2 [\lambda^2(\lambda^2 + 1) - 2x^2] \ln \lambda - 2x^4(\lambda^2 - 1)^3 \ln x - (\lambda^2 - 1)(x^2 - 1)(\lambda^2 - x^2)[x^2(\lambda^2 + 1) - 2\lambda^2] \}, \quad (2.22)$$

$$Z(x) = \frac{\lambda^2}{8x^3(\lambda^2 - 1)^4} \{ (\lambda^2(x^2 - 1)[\lambda^2(\lambda^2 + 1)(x^2 + 1) - 4x^2] \ln \lambda - x^4(\lambda^2 - 1)^3 \ln x - (\lambda^2 - 1)(x^2 - 1)(\lambda^2 - x^2)[\lambda^2(x^2 + 1) + x^2] \}. \quad (2.23)$$

Остается из уравнений (2.16) определить составляющие $\partial f / \partial x$ и $x^{-1} \partial f / \partial \varphi$ градиента давления, чем и заканчивается решение задачи в первом приближении.

Аналогичным образом можно попытаться найти следующие приближения, однако, фактическое проведение выкладок оказывается достаточно сложным даже для второго приближения.

3. Вычисление вращающего момента. Используем полученные результаты для вычисления вращающего момента, который необходимо приложить к цилиндру, чтобы преодолеть силы вязкого трения и создать равномерное вращение.

Пользуясь выражением для напряжения трения F_a на поверхности вращающегося цилиндра

$$F_a = -\eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)_{r=a}, \quad (3.1)$$

находим

$$\frac{F_a}{F_a^{(0)}} = 1 - \frac{M^2}{2\lambda^2} (\lambda^2 - 1) [\psi'(1) + Z'(1) \cos 2\varphi]. \quad (3.2)$$

Здесь

$$F_a^{(0)} = \frac{\eta v_0}{a} \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 - 1}, \quad \psi'(1) = \frac{(3\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 1) - 4\lambda^2 \ln \lambda}{8(\lambda^2 - 1)^2}, \quad (3.3)$$

$$Z'(1) = \lambda^2 \frac{4\lambda^2(\lambda^2 + 2) \ln \lambda - (\lambda^2 - 1)(5\lambda^2 + 1)}{8(\lambda^2 - 1)^3}$$

причем $F_a^{(0)}$ есть напряжение трения при $r = a$ в соответствующей задаче обычной гидродинамики.

Можно показать, что для всех $\lambda > 1$ величина $\psi'(1) + z'(1) < 0$, причем $z'(1) > 0$.

Пользуясь (3.2), получаем формулу для вращающего момента:

$$\frac{L_a}{L_a^{(0)}} = 1 + M^2 f_a(\lambda), \quad L_a^{(0)} = 4\pi\eta v_0 a \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1}, \quad (3.4)$$

причем функция

$$f_a(\lambda) = \frac{4\lambda^4 \ln \lambda - (3\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 1)}{16\lambda^2(\lambda^2 - 1)}, \quad (3.5)$$

для всех $\lambda > 1$ остается положительной.

Приводим также формулы для напряжения и момента трения на неподвижной поверхности $r = b$

$$\frac{F_b}{F_b^{(0)}} = 1 - \frac{M^2}{2} (\lambda^2 - 1) [\psi'(\lambda) + z'(\lambda) \cos 2\varphi], \quad F_b^{(0)} = -\frac{\eta v_0}{a} \frac{2}{\lambda^2 - 1}, \quad (3.6)$$

$$\frac{L_b}{L_b^{(0)}} = 1 - M^2 f_b(\lambda), \quad f_b(\lambda) = \frac{\lambda^4 - 1 - 4\lambda^2 \ln \lambda}{16(\lambda^2 - 1)}, \quad L_b^{(0)} = -L_a^{(0)}.$$

Здесь величины $z'(\lambda)$, $\psi'(\lambda) - z'(\lambda)$ и $f_b(\lambda)$ будут положительными при всех значениях $\lambda > 1$. Это означает, что на неподвижной поверхности наличие магнитного поля вызывает уменьшение трения.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, магнитогидродинамические эффекты в данной задаче всегда вызывают увеличение трения на вращающейся поверхности, как и должно быть, так как в рассмотренном случае отсутствует электрическое поле.

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Ландау Л. А., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред. Гиттл, Москва, 1982. 620с.(In Russ.)
- [2]. V. N. Tsutskiridze, Flow between two co-axial tubes near the entry//Georgian engineering news, 2006, №2, p. 24 – 28.
- [3]. C. C. Chang and T. S. Lundgren, Duct flow in magnetohydrodynamics// Mathematik und Physik, vol. 12, 1966, pp.100-114.
- [4]. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Москва: Наука, 1974. – 542 с. (In Russ.)
- [5]. J. V. Sharikadze, An approximate solution of three dimensional boundary layer with strong suction. Transactions of the International Conference The Problems of Continuum Mechanics, Tbilisi, 2007, 78-82 (In Russ.)
- [6]. V. N. Tsutskiridze, Heat transfer with the flow of conducting fluid in circular pipes with finite conductivity under uniform transverse magnetic fields. AMIM(Applied Mathematics Informatics and Mechanics) Tbilisi, VOL. 12, No.2, 2007, 111 -114.
- [7]. L. Jikidze, V. Tsutskiridze, The steady MHD-flow of a low conductive fluid in the neighbourhood of an infinite porous plate at simultaneous rotation of a plate and fluid with strong magnetic field. Reports of enlarged sessions of I. Vekua institute of applied mathematics. Tbilisi, VOL. 22, 2008, 56-60.
- [8]. Jikidze L, A., Tsutskiridze V.N. Heat transfer at similar flow of a conducting fluid between two infinite porous disks with regard for a strong magnetic field//Georgian Technical University. International Scientific Conference, “Modern Issues of Applied Physics”. Proceedings, 2011, pp. 296-299, (In Russ.).

[9]. Tsutsikiridze V.N., Jikidze L, A. Heat transfer in tubes with porous walls under internal heat sources//Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, Vol. 154, 2010, pp.127-133.

[10]. Sharikadze J. V., Tsutsikiridze V.N., Jikidze L, A. The flow conducting liquid in magnetohydrodynamics tubes with heat transfer//International Scientific Journal IFToMM "Problems of Mechanics", Tbilisi, 2011, № 3(44), pp. 63--70.

РЕЗЮМЕ

ВРАЩЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В КОЛЬЦЕВОМ ЗАЗОРЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОПЕРЕЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. Н. Цуцкиридзе, Л. А. Джикидзе

В статье рассмотрено течение вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости в пространстве, заключенном между двумя бесконечными цилиндрами радиусов a и b ($a < b$), при наличии внешнего однородного магнитного поля. Получено точное решение задачи в общем виде и его предельный случай.

Ключевые слова: Вращение, зазор, проводимость, сжимаемость, однородное магнитное поле, жидкость.

SUMMARY

ROTATION OF THE CONDUCTING LIQUID IN THE CIRCULAR GAP IN THE PRESENCE OF THE CROSS MAGNETIC FIELD

Tsutsikiridze V.N. and Jikidze L.A.

The article deals with the flow of a viscous incompressible liquid in the space confined by two infinite cylinders of the a and b radii ($a < b$) in the presence of an external uniform magnetic field.

The exact solution to the problem in a general form and its extreme case were obtained.

Keywords: rotation, gap, conductance, compressibility, uniform magnetic field, liquid.

**ტყიბულის მამფიღრეხელი ფაბრიკა და მისი როლი ტყიბული-შაორის საბადოს
ქვანახშირის საქართველოს მრეწველობის სხვადასხვა დარგში გამოყენების
შესაძლებლობის დადგენისათვის**

ს. მახარაძე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

სათბობ რესურსებს უდიდესი მნიშვნელობა ენიჭება ქვეყნის ეკონომიკაში. მათი მარაგებით განისაზღვრება ამა თუ იმ სათბობი ნედლეულის გამოყენების მიზანშეწონილობა მრეწველობის სხვადასხვა დარგში, აგრეთვე რეალიზების ეფექტური ტექნოლოგიების დამუშავება ცალკეული მიმართულებით. ამდენად სათბობი რესურსების გარეშე წარმოუდგენელია მრეწველობის ისეთი დარგების როგორცაა თბოენერგეტიკა, შავი და ფერადი მეტალურგია, მჭიდა სამშენებლო მასალების წარმოება, აგრეთვე საყოფაცხოვრებო სექტორის განვითარება.

საქართველო ძალზე მწირი ქვეყანაა ნავთობისა და გაზის ბუნებრივი სათბობი რესურსებით, ამდენად ამ დანიშნულებისათვის გამოიყენება ძვირადღირებული იმპორტული ნედლეული, რაც უარყოფითად აისახება ქვეყნის ეკონომიკაზე. სწორედ აქედან გამომდინარე იქნა ქვეყნის ხელმძღვანელობის მიერ მიღებული გადაწყვეტილება თბოენერგეტიკაში და მრეწველობის ზოგიერთ დარგში შესაძლებლობებისდა მიხედვით ადგილობრივი მყარი სათბობის - ქვანახშირის გამოყენების შესახებ, რომლის სოლიდური მარაგები არსებობს საქართველოში. მყარი სათბობის დაძიებული მარაგების 80 % ტყიბული -შაორის საბადოს მიეკუთვნება. ამ გადაწყვეტილების რეალურად განხორციელება დაიწყო მხოლოდ მას შემდეგ, რაც ტყიბული-შაორის ქვანახშირის საბადო ექსპლუატაციისათვის გადაეცა შპს “საქართველოს ინდუსტრიულ ჯგუფს”[1, 4].

ადგილობრივი მყარი სათბობის - ტყიბული-შაორის საბადოს ქვანახშირის გამოყენებისათვის დასაწყისში განსაზღვრული იქნა სამი სფერო: თბოენერგეტიკა - მცირე სიმძლავრის თბოელექტროსადგურის მშენებლობა, ცემენტის წარმოების ობიექტები (კასპისა და რუსთავის ქარხნები) და ფერადი ლითონების წარმოება.

ტყიბული-შაორის საბადოს ქვანახშირი მიეკუთვნება საკმაოდ დაბალი ხარისხის სათბობ ნედლეულს. ამდენად მისი ეფექტურობის და კონკურენტუნარიანობის გაზრდის მიზნით აუცილებელია ახალი ტექნოლოგიური სქემის დამუშავება, რათა თბოელექტროსადგურის მიერ გამოძუშავებული ელექტრული ენერჯის თვითღირებულება მიუახლოვდეს სხვა საბადოების ქვანახშირის გამოყენების შემთხვევაში წარმოებულ ელექტრული ენერჯის

თვითღირებულებას. მხოლოდ ასეთი ტექნოლოგიის დამუშავების შემთხვევაში არის შესაძლებელი პრაქტიკულად ნებისმიერი, მათ შორის დაბალი ხარისხის მყარი სათბობის მრავალმიზნობრივი გამოყენება. მხოლოდ ნახშირების წვის პროგრესული ტექნოლოგიების დამუშავება და თბოელექტროსადგურებში მათი დანერგვა საჭიროებს ურთულესი სამეცნიერო და საინჟინრო ამოცანების გადაწყვეტას, რადგან ქვანახშირის გამოყენების პერსპექტივები თბოენერგეტიკაში დაკავშირებულია მისგან მაღალკალორიული და ეკოლოგიურად უსაფრთხო საწვავის ტრანსპორტირების და წვის ეფექტური ტექნოლოგიების, აგრეთვე წვის შედეგად წარმოქმნილი აირადი პროდუქტების გამწმენდი ურთულესი და ძვირადღირებული სისტემების შემუშავებასთან და რეალიზებასთან.

მყარი სათბობი ნედლეულიდან-ქვანახშირისაგან წარმოებული პროდუქტები - კოქსი და ნახევრად კოქსი აუცილებელი და საუკეთესო მასალაა მრეწველობის სხვადასხვა დარგისათვის, კერძოდ, ფერადი და შავი მეტალურგიის საწარმოებისათვის. დღევანდელი რეალობის გათვალისწინებით ამ პროდუქტების წარმოებისათვის საქართველოში პოტენციურ ნედლეულად ასევე ტყიბული-შაორის საბადოს ქვანახშირი მოიაზრება. ამის გამო, საკუთარი მოხმარების უზრუნველსაყოფად კოქსისა და ნახევრად კოქსის წარმოებისათვის, ქვეყანაში შექმნილი ეკონომიკური მდგომარეობის გამო, დღის წესრიგში დადგა აღნიშნული საბადოს გამდიდრებული ქვანახშირის გამოყენების შესაძლებლობის კვლევა, რათა დადგენილიყო ამ მიზნისათვის გამოყენებული ქვანახშირის და მისგან მიღებული პროდუქტების ფიზიკურ-მექანიკური და თბოენერგეტიკული თვისებები და ტექნიკურ-ეკონომიკური მაჩვენებლები [2].

მჭიდრა სამშენებლო მასალების, კერძოდ, ცემენტის წარმოების ხარისხი და ტექნიკურ-ეკონომიკური მაჩვენებლები მნიშვნელოვნად არის დამოკიდებული იმ სათბობის ხარისხზე და რაციონალურად გამოყენებაზე, რომელსაც იყენებენ კლინკერის გამოსაწვავ მბრუნავ ღუმელში, საშრობ და სხვა თბურ აპარატურაში. აქედან გამომდინარე, ძირითადი ტექნოლოგიური სათბობის შერჩევას და მის მახასიათებლებზე მორგებული აგრეგატული ნაწილის სწორად განსაზღვრას უმნიშვნელოვანესი როლი ენიჭება. ზემოაღნიშნული გარემოებების გამო, ამ მიმართულებითაც იქნა მიღებული გადაწყვეტილება, რომ საქართველოში ცემენტის წარმოებისათვის ძირითად ტექნოლოგიურ საწვავად გამოყენებულიყო ტყიბული-შაორის საბადოს გამდიდრებული ქვანახშირი. მაგრამ მისი შედარებით დაბალი ხარისხის გამო საჭირო იყო ამ დარგისათვის აუცილებელი ტექნოლოგიური სქემის

დამუშავება და გამოყენებული სათბობის ფიზიკურ-მექანიკური, თბოენერგეტიკული და ტექნიკურ-ეკონომიკური მანკვინებლების დადგენა [3].

ზემოთ განხილულ მრეწველობის სამი სფეროდან ორისათვის პრიორიტეტულია გამდიდრებული ქვანახშირის გამოყენება. ამის ცალსახად დამადასტურებელია ის ფაქტიც, რომ, როგორც ცნობილია, ქვანახშირის მაღალეფექტურ საწვავად მიზანშეწონილია არა რიგითი (ნედლი) ქვანახშირის გამოყენება, არამედ ნაწილობრივ ან სრულად გამდიდრების შედეგად მიღებული პროდუქტის, რომლის გამოყენების არიალი, ეჭვგარეშეა, მნიშვნელოვნად გაიზრდება მრეწველობის სხვადასხვა დარგში და საყოფაცხოვრებო სექტორში გამოყენებით უახლოეს მომავალში.

ზემოაღნიშნულიდან ნათელია თუ რა მნიშვნელობა გააჩნია ქვანახშირის გამდიდრების ყველაზე სრულყოფილ თანამედროვე მეთოდებზე დაფუძნებულ გამდიდრების ტექნოლოგიების დამუშავებას.

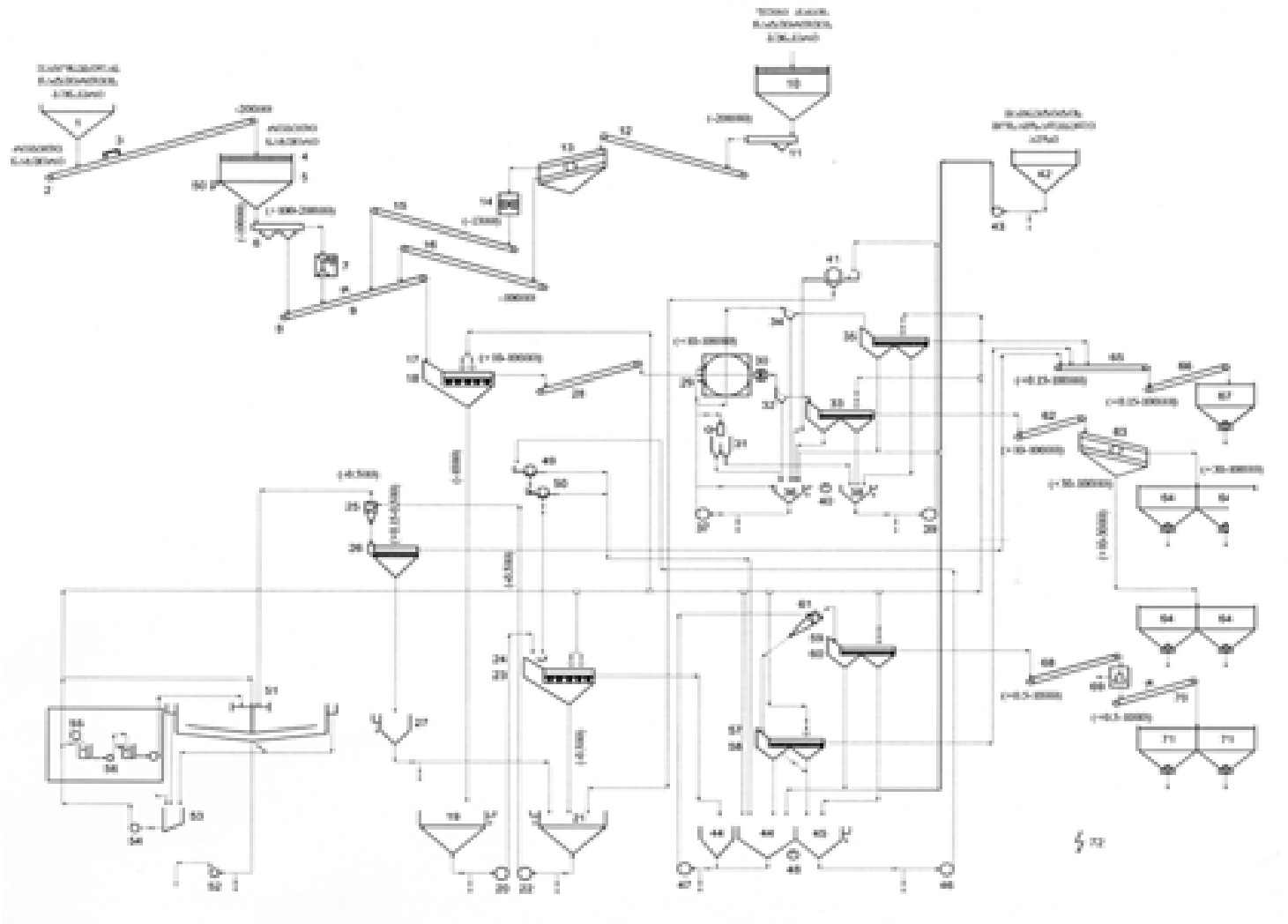
ამასთან დაკავშირებით ტყიბულის ქვანახშირის მამდიდრებელი ფაბრიკა, გადაუჭარბებლად შეიძლება მიჩნეული იქნეს მთავარ ექსპერიმენტულ დანადგარად, სადაც განსაზღვრული იქნა ტყიბული-შაორის საბადოს როგორც გაუმდიდრებელი, ასევე გამდიდრებული ქვანახშირის შესასწავლი საკითხების გადაჭრისათვის საჭირო პარამეტრები. ამის ცალსახად დამადასტურებელია ის გარემოება, რომ, როგორც ცნობილია, ქვანახშირი მაღალეფექტურ საწვავად

ყველაზე მეტად გავრცელებული მეთოდების განხორციელების შემთხვევაში მათი გამოყენებისათვის მიზანშეწონილია არა რიგითი (ნედლი) ქვანახშირის გამოყენება, არამედ ნაწილობრივ ან სრული გამდიდრების შედეგად მიღებული პროდუქტი. სწორედ ამ მიზნით იქნა შპს “საქართველოს ინდუსტრიული ჯგუფის” ხელმძღვანელობის მიერ მიღებული გადაწყვეტილება ტყიბულში დაპროექტებული და აშენებულიყო ახალი მამდიდრებელი ფაბრიკა, რომლის ტექნოლოგიური სქემა დამუშავებული და დაპროექტებულია თურქული კომპანიის “ქუჩუკ მაქინას” მიერ.

ტყიბულის ქვანახშირის მამდიდრებელი ფაბრიკის ტექნოლოგიური სქემა მოცემულია ნახაზზე 1, რომელზეც: 1 - ვაგონებიდან რიგითი ქვანახშირის ჩატვირთვის (მიმღები) ბუნკერი; 2 - კონვეიერი ქვანახშირის მისაწოდებლად; 3 - კონვეიერის მაგნიტი; 4 - რიგითი ქვანახშირს ბუნკერი; 5 - ქვანახშირის დოზირების სენსორები; 6 - მკვებავი; 7 - სამსხვრეველა; 8 - ბანანისებრი კლასიფიკატორის კონვეიერი რიგითი ქვანახშირისათვის; 9 - სენსორი; 10 - ფუჭი ქანის ბუნკერი (მეორე ხაზი); 11 - მკვებავი; 12 - ლენტური კონვეიერი; 13 - კლასიფიკატორი (მეორე ხაზი); 14 - სამსხვრეველა; 15 - ლენტური კონვეიერი; 16 - ლენტური კონვეიერი; 17 - ბანანისებრი

კლასიფიკატორის ცხავი; 18 - ბანანისებრი კლასიფიკატორი; 19 - ბანანისებრი კლასიფიკატორის ავზი; 20 - პირველადი გარეცხვის ცხავის მკვებავი ტუმბო; 21 - შლამის შემაგროვებელი ავზი; 22 - შლამის ტუმბო; 23 - უძრავი ცხავი; 24 - პირველადი გარეცხვის ცხავი; 25 - შლამის ჰიდროციკლონი; 26 - ვიბრაციული ცხავი; 27 სუსპენზიის ავზი; 28 - მსხვილი ქვანახშირის მიმწოდებელი დრივბოის მკვებავი კონვეიერი; 29 - დრივბოი; 30 - გამწვევი სატერფული (პელალი); 31 - სუსპენზიის მარეგულირებელი მექანიზმი (ყუთი); 32 - უძრავი ცხავი; 33 - გამდიდრებული ქვანახშირის ვიბრაციული ცხავი; 34 - ფუჭი ქანის უძრავი ცხავი; 35 - ფუჭი ქანის ვიბრაციული ცხავი; 36 - მძიმე სუსპენზიის ავზი; 37 - მძიმე სუსპენზიის ტუმბო; 38 - მსუბუქი სუსპენზიის ავზი; 39 - სუსპენზიის მიმწოდებელი ტუმბო; 40 - ავზები მძიმე და მსუბუქი სუსპენზიებისათვის; 41 - სუსპენზიის მაგნიტური სეპარატორი; 42 - მაგნეტიტის მოსამზადებელი ავზი; 43 - მაგნეტიტის მიმწოდებელი ტუმბო; 44 - მძიმე სუსპენზიის ავზი; 45 - მსუბუქი სუსპენზიის ავზი; 46 - ტუმბო წვრილი კლასის მსუბუქი სუსპენზიისათვის; 47 - მძიმე სუსპენზიის ტუმბო; 48 - ტუმბო სუსპენზიებისათვის; 49, 50 - მაგნიტური სეპარატორები; 51 - შემასქელებელი (სამდორე); 52 - ტუმბო სუფთა წყლისათვის; 53 - სუფთა წყლის ავზი; 54 - წყლის ტუმბო; 55 - ფლოკულანტის მოსამზადებელი ავზი; 56 - დოზირების ტუმბო; 57 - ფუჭი ქანის უძრავი ცხავი; 58 - ვიბრაციული ცხავი; 59 - გამდიდრებული ქვანახშირის უძრავი ცხავი; 60 - ვიბრაციული ცხავი; 61 - გამრეცხი ციკლონი; 62 - გამდიდრებული ქვანახშირის კონვეიერი; 63 - კლასიფიკატორი; 64 - მზა პროდუქციის ბუნკერი; 65, 66 - ფუჭი ქანის კონვეიერები; 67 - ფუჭი ქანის ბუნკერი; 68 - ცენტრიფუგას მკვებავი კონვეიერი; 69 - ცენტრიფუგა; 70 - ლენტური კონვეიერი; 71 - მზა პროდუქციის ბუნკერი; 72 - ელექტრული პანელი.

საბადოებზე მოპოვებული რიგითი ქვანახშირი ვაგონებიდან ჩაიტვირთება მიმდებ ბუნკერში 1, საიდანაც კონვეიერის 2 საშუალებით, რომელზეც დამაგრებულია მაგნიტი 3 ქვანახშირიდან რკინის ჩანართების მოსაცილებლად, გადაიტვირთება რიგითი ქვანახშირის ბუნკერში 4, სადაც ხდება ქვანახშირის დოზირება სენსორების 5 მეშვეობით. ბუნკერიდან 4 მკვებავის 6 მეშვეობით მსხვილი ქვანახშირი მიეწოდება სამსხვრეველას 7, შემდეგ კი ბანანისებრი კლასიფიკატორის კონვეიერს რიგითი ქვანახშირისათვის 8, ხოლო წვრილი ქვანახშირი-პირდაპირ ბანანისებრი კლასიფიკატორის მკვებავ კონვეიერს. ბანისებრი კლასიფიკატორის უძრავ ცხავზე 17 და ნაბაბისებრი კლასიფიკატორზე 18 კლასიფიკაციის შედეგად 0-10 მმ კლასის ქვანახშირი მიეწოდება ბანანისებრი კლასიფიკატორის ქვედა ავზს 19, ხოლო +10 მმ კლასის ქვანახშირი დრივბოის მკვებავი კონვეიერის 28 მეშვეობით - დრივბოის 29



ნახ. 1. ტყიბული-შაორის საბადოს ქვანახშირის მამდირებელი ფაბრიკის ტექნოლოგიური სქემა (სქემისა და გამდირების პროცესის აღწერა მოცემულია ტექსტში)

+10 - 100 მმ კლასის ქვანახშირი გამწვევი სატერფულის (პედალის) 30 საშუალებით გადადის ქვანახშირის ვიბრაციულ ცხავზე 33, სადაც ხდება საბოლოო გარეცხვა. ამის შემდეგ იგი გადაიტვირთება გამდიდრებული ქვანახშირის კონვეიერზე 62, რომლის საშუალებითაც მიეწოდება კლასიფიკატორს 63, სადაც ხდება კლასიფიკაცია +10 - 30 მმ და +30 - 100 მმ კლასებად. საბოლოოდ იგი იყრება მზა პროდუქციის ბუნკერში 64, საიდანაც ხდება შემდგომი რეალიზება. დრივბოიში გამოყოფილი ფუჭი ქანი გადადის უძრავ ცხავზე 34, შემდეგ ვიბრაციულ ცხავზე 35, ხდება მაგნეტიტის ჩამორეცხვა, შემდეგ მისი მიწოდება ფუჭი ქანის კონვეიერებზე 65, 66 და ფუჭი ქანის ბუნკერში 67, აქედან კი გადაიტვირთება სანაყაროზე.

0 - 10 მმ კლასის ქვანახშირი ბანანისებრი კლასიფიკატორის ქვედა ავზიდან 19 პირველადი გარეცხვის მკვებავი ტუმბოს 20 მეშვეობით მიეწოდება ჯერ უძრავ ცხავს 23, შემდეგ პირველადი გარეცხვის ცხავს 24, სადაც ხდება 0 - 0,5 მმ ფრაქციის შლამის მოცილება. ამის შემდეგ გადადის წვრილი კლასის ქვანახშირისა და მძიმე სუსპენზიის ავზში 44, საიდანაც ტუმბოს 47 მეშვეობით მიეწოდება გამრეცხ ციკლონს 61. ციკლონში მძიმე სუსპენზიის მეშვეობით გამდიდრებული ქვანახშირი გადადის უძრავ ცხავზე 59 და ვიბრაციულ ცხავზე 60, სადაც ხდება საბოლოო გარეცხვა, შემდეგ კონვეიერის 28 საშუალებით მიეწოდება ცენტრიფუგას 69, ხდება მისი გაუწყლოება და ლენტური კონვეიერის 70 საშუალებით მზა პროდუქციის ბუნკერში 71 მიწოდება და რეალიზება.

ამ კლასის ქვანახშირი ფუჭი ქანის ციკლონიდან გადადის ფუჭი ქანის უძრავ ცხავზე 57 და ვიბრაციულ ცხავზე 58, საბოლოო გადარეცხვისათვის ფუჭი ქანის კონვეიერებზე 65, 66, ბუნკერში 67 და სანაყაროზე.

0 - 0,5 კლასის შლამი პირველადი გარეცხვის ცხავიდან 24 გადადის შლამის შემაგროვებელ ავზში 21, საიდანაც ტუმბოს 22 მეშვეობით მიეწოდება შლამის ჰიდროციკლონს 25, სადაც ხდება მისი კლასიფიკაცია კლასებად - 0,150 მმ და 0,150 - 0,5 მმ. ჰიდროციკლონიდან 25 (0,150 - 0,5) მმ კლასის შლამი დადადის ვიბრაციულ ცხავზე 26 გაუწყლოების მიზნით, ხოლო შემდეგ ფუჭი ქანის კონვეიერებზე 65, 66, ან საჭიროების შემთხვევაში გამდიდრებული ქვანახშირის ლენტურ კონვეიერზე 70.

-0,150 მმ კლასი შლამის ჰიდროციკლონიდან 25 მიეწოდება შემასქელებელს (სამდორეს) 51, სადაც ხდება შლამის დალექვა და სუფთა წყლის ტუმბოს 52 მეშვეობით მიეწოდება სალექარს. სამდორედან გადმოსული წყალი გადის სუფთა წყლის ავზში 53 და ტუმბოს 54 მეშვეობით ბრუნდება სისტემაში.

ფლოკულანტის მომზადება ხდება მის მოსამზადებელ ორ ავზში 55. სატრანსფერო ტუმბოს მეშვეობით ერთი ავზიდან მეორეში მიეწოდება მზა

ფლოკულანტი, ხოლო შემდგომ თვითდინებით გადაედინება სამდორეში 51 წყლის გაწმენდის მიზნით.

მაგნეტიტის მომზადება ხდება მის მოსამზადებელ ავზში 42 და ტუმბოს 43 მეშვეობით მიეწოდება 0 - 10 მმ კლასის ქვანახშირის და მძიმე სუსპენზიის ავზს 44, ხოლო 10 - 100 კლასი-მძიმე სუსპენზიის ავზს 36.

ქვანახშირის მსხვილ ფრაქციაში მძიმე სუსპენზია ტუმბოს 37 მეშვეობით მიეწოდება სუსპენზიის მარეგულირებელ მექანიზმს 31 და დრივების 29. გამდიდრებისა და გარეცხვის შედეგად ჩამონარეცხი მაგნეტიტი გროვდება მსუბუქი სუსპენზიის ავზში 38, საიდანაც ტუმბოს 39 მეშვეობით მიეწოდება მაგნიტურ სეპარატორს 41, სადაც ხდება წყლიდან მაგნეტიტის ამოღება.

ცხრილი 1. ტყიბული-შაორის საბადოს გაუმდიდრებელი ქვანახშირის (რიგითი ქვანახშირის) ძირითადი მონაცემები

პარამეტრის დასახელება, რომელსაც შეიცავს ნედლი - გაუმდიდრებელი ქვანახშირი	განზომილების ერთეული	პარამეტრის რეალური შემცველობა
ნაცრიანობა	%	28 - 32
ტენიანობა	%	10 - 11
გოგირდი	%	0,8 - 1,3
აქროლადები	%	25 - 35
თბოუნარიანობა	კკალ/კგ	4300 ± 5%
ქვანახშირში შემავალი ელემენტები:		
ნახშირბადი - C	%	37 - 38
წყალბადი - H	%	5,5
აზოტი + ჟანგბადი - N + O	%	13,5
ქვანახშირის ნაცარში შემავალი ელემენტები:		
Fe ₂ O ₃	%	5,2
Al ₂ O ₃	%	33,06
SiO ₂	%	52,13
CaO	%	3,1
MgO	%	0,44
SO ₃	%	2,03
P ₂ O ₅	%	0,44
K ₂ O	%	0,46
TiO ₂	%	1,46
Na ₂ O	%	1,68

საბოლოოდ მაგნეტიტი ბრუნდება მძიმე სუსპენზიის ავზში 36, ხოლო წყალი - შლამის ავზში 21.

წვრილ ფრაქციაში მძიმე სუსპენზია ტუმბოს 47 მეშვეობით წვრილ ქვანახშირთან ერთად მიეწოდება გამრეცხ ციკლონს 61. გამდიდრების და გარეცხვის შედეგად ჩამონარეცხი მაგნეტიტი გროვდება მსუბუქი სუსპენზიის ავზში 45. ამ ავზიდან ტუმბოს 46 მეშვეობით მსუბუქი სუსპენზია მიეწოდება მაგნიტურ სეპარატორებს 49, 50, სადაც ხდება წყლიდან მაგნეტიტის ამოღება. ამის შემდეგ

მაგნეტიტი ბრუნდება მძიმე სუსპენზიის ავზში 44, ხოლო წყალი-წინასწარი გარეცხვის უძრავ ცხაფხე 23.

მეორე ხაზიდან ფუჭი ქანი იყრება ფუჭი ქანის ბუნკერში 10, მკვებავის 11 საშუალებით გადადის ლენტურ კონვეიერზე 12, საიდანაც მიეწოდება მეორე ხაზის კლასიფიკატორს 13, სადაც იყოფა + 13 და - 13 კლასებად. + 13 კლასი კლასიფიკატორიდან მიეწოდება სამსხვრეველას 14, სადაც ხდება ფუჭი ქანის დამსხვრევა. სამსხვრეველადან 14 ლენტური კონვეიერით 15 უერთდება საერთო ციკლს კონვეიერის 8 მეშვეობით. - 13 კლასი (ფრაქცია) კლასიფიკატორიდან 13 ლენტური კონვეიერის 16 მეშვეობით უერთდება საერთო ციკლის კონვეიერს 8 რიგითი ქვანახშირისათვის.

როგორც იყო აღნიშნული, ქვანახშირის სათბობ რესურსად გამოყენების შემთხვევაში მიზანშეწონილია არა რიგითი (ნედლი) ქვანახშირის მოხმარება, არამედ ნაწილობრივ ან სრული გამდიდრების შედეგად მიღებული პროდუქტისა. მაგრამ ცნობილია, რომ გამდიდრებული ქვანახშირის თვით-ღირებულება გაცილებით მეტია, ვიდრე ნედლი-გაუმდიდრებელისა.

ცხრილი 2. ტყიბული-შაორის საბადოს გამდიდრებული ქვანახშირის (მამდიდრებელი ფაბრიკის ტექნოლოგიური სქემა იხ. ნახ. 1) ძირითადი მონაცემები

პარამეტრის დასახელება, რომელსაც შეიცავს ტყიბულის მამდიდრებელ ფაბრიკაში გამდიდრებული ქვანახშირი	განზომილების ერთეული	პარამეტრის რეალური შემცველობა
ნაცრიანობა	%	17 - 22
ტენიანობა	%	8,5 - 11,5
გოგირდი	%	0,8 - 1,3
აქროლადები	%	30 - 36
თბოუნარიანობა	კკალ/კგ	5500 ± 5%
ქვანახშირში შემავალი ელემენტები:		
ნახშირბადი - C	%	45
წყალბადი - H	%	5,5
აზოტი + ჟანგბადი - N + O	%	13,5
ქვანახშირის ნაცარში შემავალი ელემენტები:		
Fe ₂ O ₃	%	4,76
Al ₂ O ₃	%	34,1
SiO ₂	%	52,35
CaO	%	2,8
MgO	%	0,41
SO ₃	%	1,97
P ₂ O ₅	%	0,45
K ₂ O	%	0,48
TiO ₂	%	1,31
Na ₂ O	%	1,37

საქართველოში თბოენერგეტიკისათვის (მცირე სიმძლავრის თბოელექტროსადგურისათვის), აგრეთვე მჭიდა სამშენებლო მასალების (ცემენტის) და ფერადი ლითონების (ფეროშენადნობების) წარმოებისათვის დღესდღეობით მყარი საწვავი ნედლეულის-ქვანახშირის საკმაოდ დიდი რაოდენობა - დაახლოებით 300 000 ტონაა საჭირო წელიწადში. ამასთან ცემენტისა და ფეროშენადნობების წარმოებისათვის ნედლი ქვანახშირი არ გამოყენება. ამ სფეროებში გამოიყენება მხოლოდ გამდიდრებული ქვანახშირი, რომელსაც გააჩნია მთელი რიგი უპირატესობები რიგით ქვანახშირთან შედარებით მისი შედგენილობის, ფიზიკურ-მექანიკური თვისებების, ტექნიკური მონაცემების, მათ შორის ნაცრიანობის შემცირების და თბოუნარიანობის გაუმჯობესების გამო, რაც ნათლად ჩანს ცხრილებიდან 1 და 2. სწორედ ამ აღნიშნული გარემოების გამო იქნა მიღებული გადაწყვეტილება ტყობულში აშენებულიყო ახალი მამდიდრებელი ფაბრიკა, რომლის მიერ გამოშვებული პროდუქტი დააკმაყოფილებდა ქვეყნის მოთხოვნილებას გამდიდრებულ ქვანახშირზე.

სამივე მიმართულებით (ქვანახშირზე მომუშავე თბოელექტროსადგური, ნახევარ კოქსზე მომუშავე ცემენტისა და ფეროშენადნობების მწარმოებელი ქარხნები) შესრულებული კვლევები აუცილებლად უნდა ითვალისწინებდეს მყარი სათბობის - ქვანახშირის ძირითადი ტექნოლოგიებისათვის აუცილებელი მაჩვენებლების: გრანულომეტრიული შედგენილობის (ქვანახშირის კლასების დადგენა), თბოუნარიანობის, აქროლადების, ტენიანობის, ნაცრიანობის, შემადგენელი კომპონენტების პროცენტული შემცველობის, სიმკვრივის განსაზღვრას.

თბოუნარიანობა და ნაცრიანობა მუდმივ ურთიერთკორელაციაშია, კერძოდ, ნაცრიანობის შემცირება ყოველთვის განაპირობებს თბოუნარიანობის კალორიულობის გაზრდას, რადგან ნაცარი წარმოადგენს წვის შედეგად მიღებულ ნარჩენს - “ბალასტს”. ამდენად მისი წილის (რაოდენობის) შემცირება ცხადია იწვევს თბოუნარიანობის ამაღლებას.

ნაცრიანობის შემცირების და შესაბამისად ქვანახშირის თბოუნარიანობის გაზრდის ერთ-ერთი ფაქტორია ქვანახშირიდან ფუჭი ქანების მოცილება. ეს პროცესი ერთ-ერთი მთავარია მამდიდრებელი ფაბრიკის ტექნოლოგიურ სქემაში (იხ. ნახ. 1) და ხორციელდება მაგნეტიტის არეში გამდიდრებით, ანუ ნაცრიანობის და შესაბამისად თბოუნარიანობის რეგულირება მაგნეტიტის სუსპენზიის სიმკვრივის გაზრდით ან შემცირებით. სწორედ ამ მიზნით იქნა მამდიდრებელ ფაბრიკაში შესრულებული ექსპერიმენტული კვლევები საძიებელი პარამეტრების

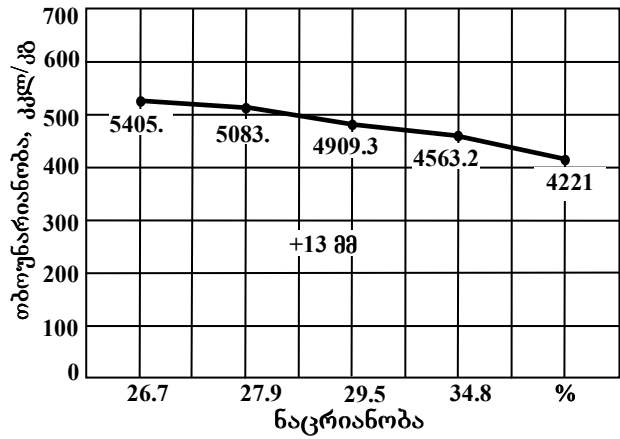
ურთიერთდამოკიდებულებების დადგენისათვის. ვინაიდან ქვანახშირის სხვადასხვა კლასების შემთხვევაში გამდიდრების პროცესი მიმდინარეობს ერთმანეთისაგან განსხვავებულად. ექსპერიმენტები ჩვენს მიერ ჩატარებული იქნა - 13 მმ და +13 მმ კლასის ქვანახშირებისათვის. კვლევის შედეგები ექსპერიმენტული მრუდების სახით წარმოდგენილია ნახაზებზე 2 - 9.

ქვანახშირის გამდიდრების პროცესის აუცილებლობის მიზანშეწონილობის შეფასებისათვის ჩვენს მიერ განსაზღვრული იქნა ქვანახშირის საბოლოო პროდუქციის გამოსავლიანობის დამოკიდებულება მაგნეტიტის სუსპენზიის სიმკვრივისაგან (იხ. ნახ. 8 და 9).

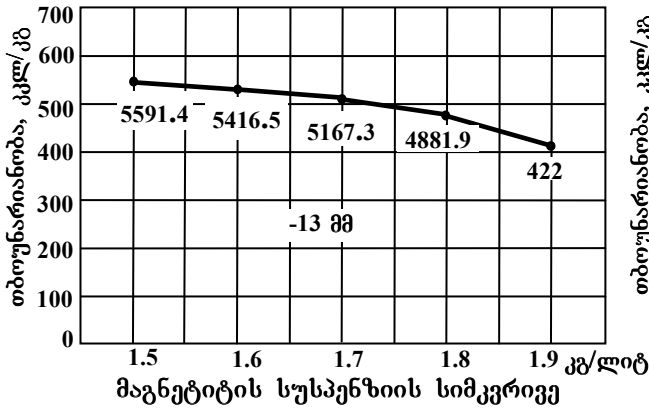
ჩატარებული ექსპერიმენტული კვლევების ანალიზის საფუძველზე ჩვენს მიერ აგებული იქნა ქვანახშირის თბოუნარიანობასა და ნაცრიანობას შორის დამოკიდებულების გრაფიკები (იხ. ნახ. 2 და 3), რომელთა მიხედვით შესაძლებელია დადგინდეს თუ გარკვეული ნაცრიანობის დროს რა თბოუნარიანობა გააჩნია ქვანახშირს, რასაც დიდი მნიშვნელობა აქვს მჭიდრა სამშენებლო მასალების (კერძოდ, ცემენტის) წარმოებისათვის. ცემენტის მწარმოებელი ქარხნებისათვის კლინკერის წარმოებისას ნაცირი მთლიანად გადადის კლინკერის შემადგენლობაში, ამდენად აუცილებელია იმის დადგენა თუ სხვადასხვა თბოუნარიანობის (კალორიულობის) ქვანახშირის შემთხვევაში რა რაოდენობის ნაცარი მიეწოდება ნედლეულის კაზმში და შესაბამისად როგორ შეიცვლება კლინკერის დაგეგმილი ქიმიური შედგენილობა. ცხრილების 1 და 2 მონაცემების, აგრეთვე ნახაზებზე 2 - 9 მოცემული დამოკიდებულების გრაფიკების გარდა, გამდიდრებული ქვანახშირის უპირატესობა გაუმდიდრებელთან შედარებით ნათლად დადსტურებულია სხვადასხვა დროს შესრულებული ექსპერიმენტული კვლევების შედეგებით, რომლებმაც დაადასტურეს, რომ ტყიბული-შაორის საბადოს ქვანახშირის მამდიდრებელ ფაბრიკაში გამდიდრების შედეგად მიღებული პროდუქტისაგან შესაძლებელია მიღებული იქნეს საკმაოდ მაღალი ხარისხის ნახევრად კოქსი, რომელიც წარმატებით შეიძლება გამოყენებული იქნეს ფეროშენადნობების (ზესტაფონის ფეროშენადნობების ქარხანაში და სხვა მცირე სიმძლავრის საწარმოებში) და ცემენტის (კასპის და რუსთავის ცემენტის ქარხნებში) წარმოებისათვის, რაც ასევე დამტკიცებულია მათი რეალიზებით აღნიშნულ საწარმოებში. მიღებულია საკმაოდ მნიშვნელოვანი ეკონომიკური ეფექტი. თბოენერგეტიკაში, კერძოდ, თბოელექტროსადგურებისათვის კი, სათბობ ნედლეულად რეკომენდებულია გამოყენებული იქნეს რიგითი ქვანახშირი მამდიდრებელი ფაბრიკის ნარჩენებთან და სალექარებიდან მიწოდებული შლამთან ნარევი [1, 4].



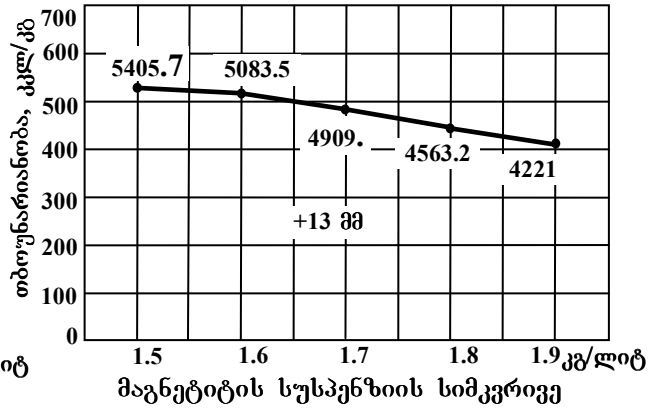
ნახ. 2. -13 მმ კლასის ქვანახშირის ტოლუნარიანობის დამოკიდებულება ნაცრიანობისაგან



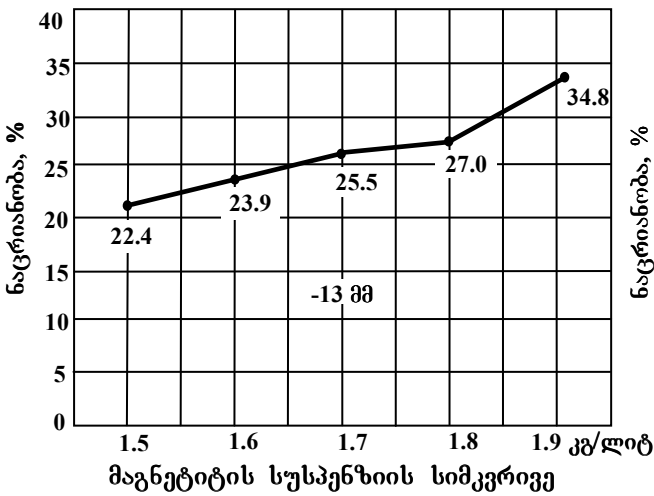
ნახ. 3. +13 მმ კლასის ქვანახშირის ტოლუნარიანობის დამოკიდებულება ნაცრიანობისაგან



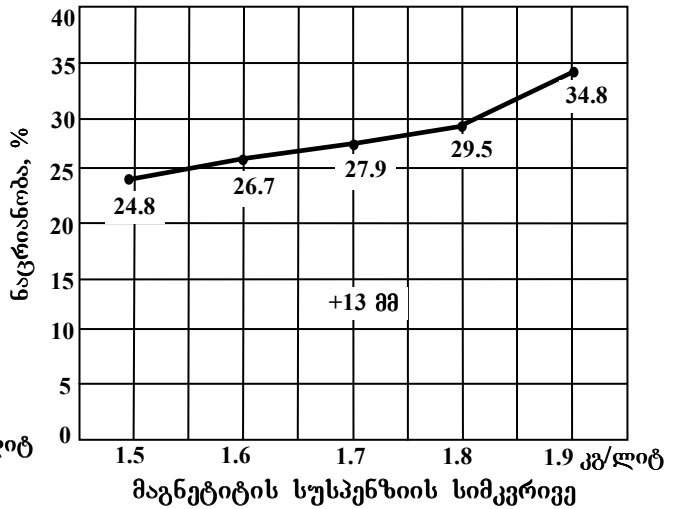
ნახ. 4. -13 მმ კლასის ქვანახშირის ტოლუნარიანობის დამოკიდებულება მაგნეტიტის სუსპენზიის სიმკვრივისაგან



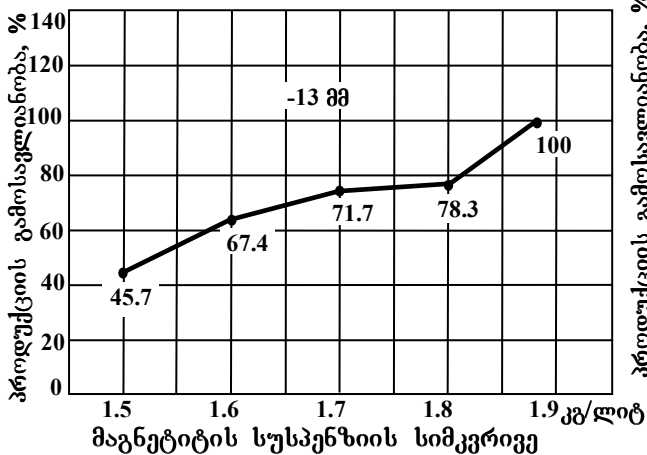
ნახ. 5. +13 მმ კლასის ქვანახშირის ტოლუნარიანობის დამოკიდებულება მაგნეტიტის სუსპენზიის სიმკვრივისაგან



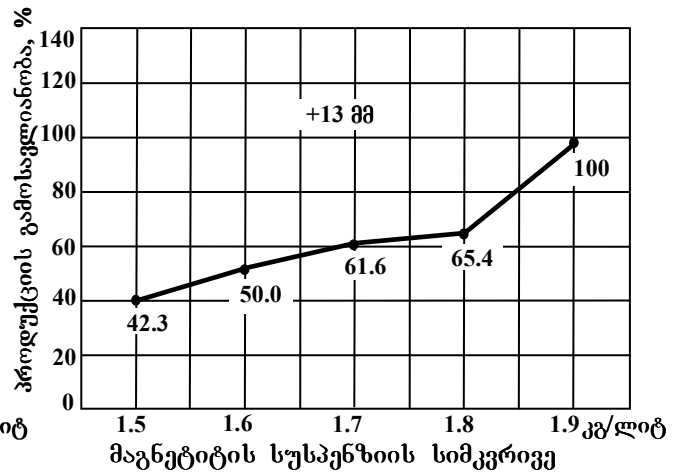
ნახ. 6. -13 მმ კლასის ქვანახშირის ნაცრიანობის დამოკიდებულება მაგნეტიტის სუსპენზიის სიმკვრივისაგან



ნახ. 7. +13 მმ კლასის ქვანახშირის ნაცრიანობის დამოკიდებულება მაგნეტიტის სუსპენზიის სიმკვრივისაგან



ნახ. 8. -13 მმ კლასის ქვანახშირის საბოლოო პროდუქტის გამოსავლიანობის დამოკიდებულება მაგნეტიტის სუსპენზიის სიმკვრივისაგან



ნახ. 9. +13 მმ კლასის ქვანახშირის საბოლოო პროდუქტის გამოსავლიანობის დამოკიდებულება მაგნეტიტის სუსპენზიის სიმკვრივისაგან

ლიტერატურა

1. Makharadze L., Gochitashvili T., Makharadze S. Possibility of production of water-coal suspension from coal of Tkibuli-Saori deposit and its utilization in power generation. Papers presented at the Fifteenth International Conference on Transport and Sedimentation of Solid Particles September 6-9, 2011, Wroclaw, Poland. pp. 233-240.
2. ს. მახარაძე. ტყიბული-შაორის საბადოს ქვანახშირის ნახევრად კოქსის წარმოებისათვის გამოყენების შესაძლებლობის კვლევა. "სამთო ჟურნალი", №2(23), თბილისი, 2009. გვ. 44-47.
3. ს. მახარაძე, ზ. სადუნიშვილი. ტყიბული-შაორის საბადოს ქვანახშირის ცემენტის წარმოებაში გამოყენების პერსპექტივების ანალიზი. "სამთო-ჟურნალი", №1(24), თბილისი, 2010. გვ. 94-99.
4. ს. მახარაძე. ტყიბული-შაორის საბადოს ქვანახშირის საქართველოს თბოენერგეტიკაში გამოყენების ასპექტები. "სამთო ჟურნალი", №2(27), თბილისი, 2011. გვ. 68-73.

რეზიუმე

ტყიბულის მამდიდრებელი ფაბრიკა და მისი როლი ტყიბული-შაორის საბადოს ქვანახშირის საქართველოს მრეწველობის სხვადასხვა დარგში გამოყენების შესაძლებლობის დადგენისათვის

ს. მახარაძე

ნაშრომში განხილულია ტყიბულის მამდიდრებელი ფაბრიკის ტექნოლოგიური სქემა; აღწერილია ტყიბული-შაორის საბადოს ქვანახშირის გამდიდრების პროცესი; მოცემულია ნედლი და გამდიდრებული ქვანახშირის ძირითადი ფიზიკურ-ქიმიური პარამეტრების და შემადგენელი ელემენტების, აგრეთვე გაუმდიდრებელი და გამდიდრებული ქვანახშირის წვის შედეგად მიღებული იმავე პარამეტრების და ელემენტების ექსპერიმენტულად განსაზღვრული მნიშვნელობები, რომელთა ანალიზის საფუძველზე გაკეთებულია დასკვნები და რეკომენდაციები გამდიდრებული ქვანახშირის, აგრეთვე “კუდების” (გამდიდრების ნარჩენების) საქართველოს მრეწველობის სხვადასხვა დარგში გამოყენების შესახებ.

SUMMARY

**TKIBULI COAL WASHING PLANT AND ITS ROLE IN DEFINING THE POSSIBILITY OF USING TKIBULI-SHAORI COAL IN DIFFERENT INDUSTRIAL FIELDS OF GEORGIA
MAKHARADZE S.**

Technological scheme of Tkibuli coal washing plant is discussed in the article; also Tkibuli-Shaori coal washing process is described in it; there are shown experimentally defined meanings of raw and washed coal main physical and chemical parameters and other contented elements, also the parameters of the elements received after burning of raw and washed coal. Based on the analyses of the above-mentioned, there are made conclusions and recommendations for using washed coal and also coal discard in different industrial fields of Georgia.

РЕЗЮМЕ

**ОБОГАТИТЕЛЬНАЯ ФАБРИКА ТКИБУЛИ И ЕЕ РОЛЬ В УСТАНОВЛЕНИИ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КАМЕННОГО УГЛЯ ТКИБУЛИ-ШАОРСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ В РАЗЛИЧНЫХ ОТРАСЛЯХ ПРОМЫШЛЕННОСТИ ГРУЗИИ
МАХАРАДЗЕ С.Д.**

Рассмотрена технологическая схема Ткибульской обогатительной фабрики; описан процесс обогащения каменного угля Ткибули-Шаорского месторождения; приведены результаты определения основных физико-механических параметров и составных элементов до и после обогащения сырого угля, а также тех же параметров в сыром состоянии и после сжигания, на основе анализа которых сделаны выводы и рекомендации по применению обогащенного угля, а также «хвостов» (остатков после обогащения) в различных отраслях в промышленности Грузии.

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕСТОРАСПОЛОЖЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ НАСОСНЫХ СТАНЦИЙ В МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ ГИДРОТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМАХ, РАБОТАЮЩИХ БЕЗ РАЗРЫВА СПЛОШНОСТИ ПОТОКА

Махарадзе Л.И., Гелашвили В.Д., Стерякова С.И.

**Грузинский технический университет
Горный институт им. Г. Цулукидзе**

Многоступенчатые гидротранспортные системы широко используются для транспортирования различных твердых сыпучих материалов посредством энергии потока жидкой несущей среды, как правило воды, во многих отраслях промышленности особенно в горной, горнорудной, строительной и энергетической. Многоступенчатость предопределена тем обстоятельством, что центробежные насосы (грунтовые насосы, землесосы, углесосы, песковые насосы), применяемые в основном для подачи гидросмесей, из-за особенностей своих конструктивных выполнений, являются низконапорными.

На практике, то есть в реальных промышленных условиях, функционируют многоступенчатые гидротранспортные системы с разрывом сплошности потока гидросмеси в местах размещения промежуточных насосных станций (ПНС) и без разрыва сплошности потока гидросмеси по схеме «насос в насос» (последовательное включение в трубопроводной магистрали нескольких насосов) [1-3].

В исключительных случаях, когда длина подачи гидросмеси значительная, применяют спаривание двух насосов на одной насосной станции (их включают последовательно по схеме «насос в насос») только лишь в случае получения разрешения на это завода изготовителя насосов.

Широкомасштабные исследования, проведенные нами на многоступенчатых гидротранспортных системах крупных промышленных объектов, функционирующих в различных отраслях промышленности различных регионов Советского Союза показали, что из-за многих неоспоримых преимуществ, наиболее перспективной является многоступенчатая гидротранспортная система, работающая без разрыва сплошности потока гидросмеси на ПНС, рассредоточенно (на определенных расстояниях друг от друга) расположенных по длине трубопроводной магистрали [1-4].

Однако, следует отметить, что все преимущества рассмотренной схемы в полном объеме можно достигнуть лишь в случае обеспечения нормальных режимов (имеются в виду переходные режимы и неустановившиеся процессы) за весь период эксплуатации. исходя из этого аспекта, эти системы в некоторой степени являются сложными для эксплуатации, что является их относительным недостатком. Для устранения этого относительного недостатка, необходимо обеспечить максимально плавное протекание переходных режимов при запуске головной насосной станции (ГНС) и всех ПНС, а также при возникновении по другим причинам

нестационарных процессов – прямых и непрямых гидравлических ударов и соответственно резких колебаний давления. Для этой цели необходимо внести коррективы в методологии расчета и проектирования многоступенчатых гидротранспортных систем, работающих без разрыва сплошности потока на ПНС. В противном случае даже при запланированных запусках и остановках, предусмотренных технологией эксплуатации, могут возникнуть значительные колебания давлений и следовательно нежелательные последствия, отрицательно влияющие на надежность и долговечность всей системы, в значительной степени ухудшающие их технико-экономические и экологические показатели.

Известен способ транспортирования многофазных гидроаэросмесей в напорных магистральных многоступенчатых гидротранспортных системах, который определяет оптимальную последовательность запусков и остановок последовательно включенных в магистраль центробежных грунтовых насосов, а также оптимальные интервалы между этими операциями [5]. Однако этот способ не учитывает: а) методику определения оптимального месторасположения ПНС по длине магистрального трубопровода; б) его осуществление целесообразно только лишь в случае заранее установленных по принятой технологии последовательностей запусков и остановок ГНС и ПНС. При остальных возможных случайных процессах (при внезапном прекращении электропитания последовательно включенных в магистраль насосов или за тем также внезапной подачи электропитания за короткий промежуток времени – до затухания волнового процесса) он не эффективен, так как не предотвращает возникновение резких колебаний давления.

Как было отмечено выше, в настоящее время методология расчета и проектирования многоступенчатых гидротранспортных систем последовательно включенными центробежными насосами основываются на теоретических и эмпирических выкладках и графо-аналитических методах определения необходимого напора для транспортирования гидроаэросмесей на данные расстояния, в соответствие которого устанавливается необходимое количество насосов и не учитывает влияние переходных режимов и нестационарных процессов [1, 2, 7].

Ниже рассматривается предложенная нами методика, комплексно учитывающая как параметры установившегося, так и неуставившегося режимов работы.

Как известно, по аспекту установившегося режима работы гидротранспортной системы, количество насосов, необходимых для подачи гидроаэросмесей на данном расстоянии определяется с учетом Q-H характеристик насосов, геодезической высоты подачи и потерь напора по длине трубопроводной магистрали, то есть

$$n_n = \frac{\Delta H}{H_n} = \frac{K_3 (\Delta h_1 + \Delta h_2 + H_r)}{H_n}, \quad (1)$$

где n_H – количество насосов, необходимых для транспортирования гидроаэросмесей на данной длине при конкретном условии; H_r – геометрическая высота подачи (подъема) гидроаэросмеси, м; H_H – напор, развиваемый (по рабочей Q-H характеристике) единичного насосного агрегата, м; ΔH – полная потеря напора по всей длине трубопроводной магистрали, необходимая для преодоления его гидравлического сопротивления, м; Δh_1 – потеря напора на прямолинейных частях трубопроводной магистрали, м;

$$\Delta h_1 = \lambda \frac{L_{п.тр}}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}, \quad (2)$$

D – внутренний диаметр магистрального трубопровода, м; $L_{п.тр}$ – суммарная (полная длина прямолинейных частей трубопроводной магистрали, м; λ – коэффициент гидравлического сопротивления прямолинейной частей трубопроводной магистрали; v – средняя скорость потока гидроаэросмеси в трубопроводной магистрали при установившемся движении, м/с; g – ускорение силы тяжести, м/с²; Δh_2 – полная (суммарная) потеря напора, необходимая для преодоления местных сопротивлений, включенных в трубопроводной магистрали, м;

$$\Delta h_2 = \sum \xi \frac{v^2}{2g}, \quad (3)$$

$\sum \xi$ – коэффициент местных сопротивлений, включенных в магистральный трубопровод.

Совместным решением (1) – (3) можно определить как полную длину трубопроводной магистрали (L), так и оптимальные расстояния между ПНС, рассредоточенных по трубопроводной магистрали, в частности полная длина

$$L = \frac{2gDK_3 (\Delta H - \sum \xi \frac{v^2}{2g} - H_r)}{\lambda v^2}, \quad (4)$$

K_3 – коэффициент запаса напора, учитывающий определенный подпор на всасывающих патрубках ПНС, необходимый для предотвращения разрыва сплошности потока гидроаэросмеси в этих частях (сечениях) при незначительных нарушениях их режимов работы.

Исходя из этого, для обеспечения устойчивости работы гидротранспортной системы при установившемся режиме, необходимо соблюдение условия

$$L \leq \frac{2gDK_3 (\Delta H - \sum \xi \frac{v^2}{2g} - H_r)}{\lambda v^2}, \quad (5)$$

Как было отмечено выше, при переходных режимах (запуск и остановка (последовательно включенных в магистраль центробежных насосов) и нестационарных процессах (прямые и непрямые гидравлические удары и другие колебательные процессы) место имеет изменение давлений в значительных пределах, что отрицательно влияет на

работу гидротранспортной системы в целом. Максимальные значения превышений давления (амплитуда) и частота колебаний зависят от причин, условий возникновения и скорости развития неустановившихся процессов. Эти причины и условия могут быть самые разные в зависимости от конкретных условий (структуры системы в целом, от схемы транспортирования, профиля трубопроводной магистрали, вида и количества трубопроводной арматуры, гидродинамических параметров транспортирования гидроаэроэсмеси и т.д.) [6, 7].

Исходя из природы протекания волновых процессов в трубопроводной магистрали, несмотря на то, что в каком сечении и по какой причине не возникали неустановившиеся процессы, импульс со скоростью a распространяются по обе стороны сечения его возникновения. В таком случае полная фаза колебательного процесса (изменения давления) определяется по зависимости

$$T = \frac{2L}{a} \quad \text{или} \quad L = \frac{a \cdot T}{2}, \quad (6)$$

a – скорость распространения импульса (колебательного процесса) в трубопроводной магистрали – скорость распространения волны, зависящая от: геометрических параметров трубопровода; гидродинамических параметров потока гидроаэроэсмеси; физико-механических свойств (параметров) гидроаэроэсмеси, твердых частиц, воздуха, материала из которого изготовлен трубопровод; концентраций составляющих гидроаэроэсмеси компонентов [1, 4], м/с; T – максимальная продолжительность фазы импульса (колебательного процесса), с; L – полная длина трубопроводной магистрали, в которой протекает волновой процесс (см. рис.1), м.

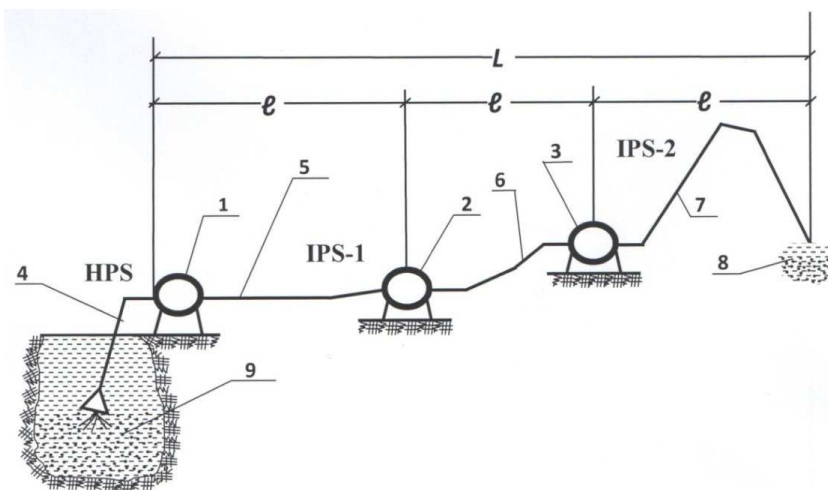


Рис. 1. Схема многоступенчатой гидротранспортной системы, работающей последовательно включенными в магистраль центробежными насосами по схеме «насос в насос». ГНС- головная (всасывающая) насосная станция; ПНС – промежуточные насосные станции: 1 – головная насосная станция (ГНС); 2 – первая промежуточная насосная станция (ПНС-1); 3 – вторая промежуточная насосная станция (ПНС-2); 4 – всасывающая труба; 5 – участок магистрального трубопровода между ГНС и ПНС-1; 6 – участок магистрального трубопровода между ПНС-1 и ПНС-2; 7 – участок магистрального трубопровода от ПНС-2 до места подачи гидроаэроэсмеси; 8 – место подачи гидроаэроэсмеси (место складирования твердых частиц сыпучего материала); 9 – приемный зумпф

Как видно из формулы (6), чем больше длина трубопроводной магистрали, тем больше продолжительность фазы колебательного процесса. Исходя из этого, при определении расстояний между последовательно включенных насосов, необходимо соблюдение условия $L \leq \frac{aT}{2}$, чтобы обеспечить устойчивость всей гидротранспортной системы при неустановившихся режимах работы при их возникновении в любом сечении. При соблюдении этого условия произойдет максимально быстрое затухание колебательного процесса и соответственно уменьшение значения превышения давлений. Будет исключена также возможность возникновения резонансных явлений, то есть накладывания (суммирования) волн и соответственно увеличения значений превышения давлений.

Однако из анализа зависимостей (1), (4) и (7) совершенно очевидно, что увеличение расстояний между ПНС и всей длины трубопроводной магистрали не допустимо однозначно исходя только из одного условия. Определение их оптимальных значений следует с учетом обоих условий, то есть параметров как установившегося, так и неустановившегося режимов. В таком случае

$$L \leq \frac{2gDK_3 (\Delta H - \sum \xi \frac{v^2}{2g} - H_{\Gamma})}{\lambda v^2} \geq \frac{T \cdot a}{2}. \quad (7)$$

В соответствии с оптимальной полной длины магистрального трубопровода, определенной из условия (7), по зависимости (4) следует определять оптимальные расстояния между ГНС и ПНС последовательно включенных в магистраль по схеме «насос в насос», в частности

$$l_1 \leq \frac{2gDK_3 (\Delta H - (\sum \xi \frac{v^2}{2g})_1 - H_{\Gamma 1})}{\lambda v^2}, \quad (8)$$

где ΔH_1 -суммарная (полная) потеря напора, необходимая для преодоления гидравлического сопротивления прямолинейной части l_1 трубопровода между ГНС и ПНС-1 (см.рис.1), м;

$(\sum \xi \frac{v^2}{2g})_1$ – суммарная потеря напора на этом же участке, необходимая для преодоления

местных сопротивлений, м; $H_{\Gamma 1}$ - геометрическая высота подачи гидроаэроэсмеси на этом же участке, то есть разница между геодезическими отметками размещения ГНС и ПНС-1, м.

Аналогичным методом определяются расстояния l_2 , l_3 и т.д. (в случае необходимости). В таком случае вся гидротранспортная система будет защищена от волновых процессов при любом случае их возникновения. Это объясняется тем обстоятельством, что при возникновении по любой причине нестационарного процесса,

импульс (волна) возмущения распространится по всей длине трубопроводной магистрали (в обе стороны от сечения его возникновения в зависимости от того в каком его сечении возникнет нестационарный процесс) и произойдет отражение волн в конце магистрального трубопровода 7, то есть в сечении, в котором происходит излив из него гидроаэросмеси в атмосферу, а также у приемного клапана всасывающей трубы 4, опущенной в приемный зумпф 9, то есть в сечении, в котором происходит поступление гидросмеси в гидротранспортную систему (во всасывающей трубе ГНС) или в приемном подпорном зумпфе, при работе головного насоса с подпором. Из-за того, что будут соблюдены условия (4) и (5), произойдет интенсивное затухание колебательного процесса и не произойдет превышение давления в значительных пределах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Махарадзе Л.И., Гочиташвили Т.Ш., Сулаберидзе Д.Г., Алехин Л.А. Надежность и долговечность напорных гидротранспортных систем. «Недра», Москва, 1984. 119 с.
2. Дзидзигури А.А., Махарадзе Л.И. Выбор оптимальной схемы многоступенчатой гидротранспортной системы с центробежными грунтовыми насосами. Научные труды Грузинского политехнического института им. В. И. Ленина, серия «Горная электро-механика и автоматика», №5 (287), Тбилиси, 1985. с.5-9.
3. Махарадзе Л.И. Классификация и анализ схем напорных гидротранспортных систем, функционирующих в горнорудной и строительной промышленности. Сб.трудов «Горная электромеханика и транспорт». «Мецниереба», Тбилиси, 1987. с.13-22.
4. Махарадзе Л.И., Кирмелашвили Г.И. Нестационарные процессы в напорных гидротранспортных системах и защита от гидравлических ударов. «Мецниереба», Тбилиси, 1986. 152 с.
5. Махарадзе Л.И., Сулаберидзе Д.Г., Турабелидзе В.Г. Способ транспортирования гидросмеси по трубопроводам. Авторское свидетельство СССР №770963. Бюллетень изобретений, №38, Москва, 1980.
6. Дмитриев Г.П., Махарадзе Л.И., Гочиташвили Т.Ш. Напорные гидротранспортные системы. Справочное пособие. «Недра», Москва, 1991. 304 с.
7. Махарадзе Л.И., Гочиташвили Т.Ш., Криль С.И., Смойловская Л.А. Трубопроводный гидротранспорт твердых сыпучих материалов. «Мецниереба», Тбилиси, 2006. 350 с.

რეზიუმე

ნაკადის ბაზუყვეტის გარეშე მომუშავე მრავალსაფეხურიან ჰიდროსატრანსპორტო სისტემებში შუალედი სატუმბი სადგურის განთავსების ოპტიმალური ადგილის განსაზღვრის საკითხი; დასაბუთებულია, რომ მრავალსაფეხურიან მაგისტრალურ ჰიდროსატრანსპორტო სისტემებში შუალედი სატუმბი სადგურების განთავსების ადგილის განსაზღვრისას აუცილებელია გათვალისწინებული იქნას ჰიდროდინამიკური პროცესების გავლენა, ანუ ანალოგიური სისტემების გაანგარიშების და დაპროექტების მეთოდოლოგიაში დღესდღეობით მიღებული დამყარებული (სტაციონარული) რეჟიმის პარამეტრებთან ერთად გაანგარიშებებისას გათვალისწინებული უნდა იქნეს დაუმყარებელი (არასტაციონარული) რეჟიმის პარამეტრები და საანგარიშო პარამეტრი გამოთვლილი უნდა იქნეს მათი შედარების საფუძველზე; ამ მეთოდოლოგიის სამართლიანობა და სისწორე დადგენილია მსხვილ სამრეწველო ობიექტების ჰიდროსატრანსპორტო სისტემებზე შესრულებული ფართომასშტაბიანი ექსპერიმენტული კვლევებით.

ლ. მახარაძე, ვ. გელაშვილი, ს. სტერიაკოვა

განხილულია ნაკადის გაწვევების გარეშე მომუშავე მრავალსაფეხურიან ჰიდროსატრანსპორტო სისტემებში შუალედი სატუმბი სადგურის განთავსების ოპტიმალური ადგილის განსაზღვრის საკითხი; დასაბუთებულია, რომ მრავალსაფეხურიან მაგისტრალურ ჰიდროსატრანსპორტო სისტემებში შუალედი სატუმბი სადგურების განთავსების ადგილის განსაზღვრისას აუცილებელია გათვალისწინებული იქნას ჰიდროდინამიკური პროცესების გავლენა, ანუ ანალოგიური სისტემების გაანგარიშების და დაპროექტების მეთოდოლოგიაში დღესდღეობით მიღებული დამყარებული (სტაციონარული) რეჟიმის პარამეტრებთან ერთად გაანგარიშებებისას გათვალისწინებული უნდა იქნეს დაუმყარებელი (არასტაციონარული) რეჟიმის პარამეტრები და საანგარიშო პარამეტრი გამოთვლილი უნდა იქნეს მათი შედარების საფუძველზე; ამ მეთოდოლოგიის სამართლიანობა და სისწორე დადგენილია მსხვილ სამრეწველო ობიექტების ჰიდროსატრანსპორტო სისტემებზე შესრულებული ფართომასშტაბიანი ექსპერიმენტული კვლევებით.

РЕЗЮМЕ

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕСТОРАСПОЛОЖЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ НАСОСНЫХ СТАНЦИЙ В МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ ГИДРОТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМАХ, РАБОТАЮЩИХ БЕЗ РАЗРЫВА СПЛОШНОСТИ ПОТОКА

Махарадзе Л.И., Гелашвили В.Д., Стерякова С.И.

Рассматривается вопрос определения оптимального месторасположения промежуточных насосных станций в многоступенчатых гидротранспортных системах, работающих без разрыва сплошности потока в местах их размещения по трубопроводной магистрали; обосновывается, что при определении месторасположения промежуточных насосных станций, необходимо учесть влияние гидродинамических процессов, то есть в методологии расчета и проектирования аналогичных систем, наряду принимаемых в настоящее время при расчетах основных параметров установившегося (стационарного) режима, следует учесть и параметры неустановившихся режимов и на основе их сравнения определить окончательное значение искомого параметра; правомерность этой методологии установлена широкомасштабными экспериментальными исследованиями, проведенными на крупных промышленных гидротранспортных системах.

SUMMARY

LOCATIONS OF INTERMEDIATE PUMP STATIONS IN MULTI-STAGE HYDROTRANSPORT SYSTEMS OPERATING WITHOUT FLOW BREAK

MAKHARADZE L., GELASHVILI V., STERYAKOVA S.

The problem of identification of optimal locations of intermediate pumping stations in multi-stage hydrotransport systems operating without flow break in their placements along main pipelines is considered; It is explained that when identifying locations of intermediate pumping stations, it is necessary to consider the influence of hydrodynamic processes, i.e., in the methodology of calculation and design of analogical systems, the parameters of non-steady (non-stationary) regimes should be kept in mind in line with the basic parameters of currently applied steady (stationary) regimes, while the final calculated parameter should be received on the ground of comparison thereof. Validity of this methodology is proved by the wide range of experimental studies conducted on major industrial hydrotransport systems.