სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ვახტანგ ცხადაია
ზაურ ჯაბუა

ტესტებისა და ამოცანების კრებული

მათემატიკაში

ერთიანი ეროვნული გამოცდებისათვის

მეთოდური მითითებებით და ამოხსნებით

თბილისი 2009

წიგნი წარმოადგენს დამხმარე სახელმძღვანელოს და მოიცავს საკითხებს, რომლებიც აბიტურიენტებს ეხმარება ზოგადი უნარების მათემატიკურ ნაწილსა და მათემატიკის გამოცდაზე. პარაგრაფების უმრავლესობა დაყოფილია ორ "ა" და "ბ" ჯგუფად. "ა" ჯგუფში მოცემულია საკითხები, რომლებიც ძირითადად შეესაბამება ზოგადი უნარების მათემატიკურ ნაწილს. "ბ" ჯგუფის საკითხები კი - მათემატიკის გამოცდის მოთხოვნებს. სახელმძღვანელოს ბოლოში მოყვანილია დიდი რაოდენობის ამოცანების დაწერილებითი ამოხსნა და მეთოდური მითითებები ამოხსნისათვის.

დამხმარე სახელმძღვანელო გარკვეულ სარგებლობას მოუტანს საჯარო სკოლის მოსწავლეებსაც. "ბ" ჯგუფის ზოგიერთი ამოცანა შეიძლება გამოყენებულ იქნას მოსწავლეების მოსამზადებლად მათემატიკურ ოლიმპიადებში მონაწილეობის მისაღებად.

რეცენზენტები: საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის პროფესორი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი
ს. თოფურია

საქართველოს ეროვნული მეცნიერებათა აკადემიის ა.რაზმაძის სახ. მათემატიკის ინსტიტუტის უფროსი მეცნიერ თანამშრომელი, სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი
ო. ჭკადუა

კომპიუტერული უზრუნველყოფა: მ. ჯაბუა, დ. ცხადაია

ISBN 978-9941-0-1116-0

სარჩევი

წინასიტყვაობა — 4

§1. არითმეტიკული გამოთვლები — 5

§2 ნატურალური რიცხვების წარმოდგენა სხვადასხვა პოზიციურ სისტემაში — 11

§3 სიმრავლეები. ოპერაციები სიმრავლეებზე — 15

§4. ერთწევრები და მრავალწევრები — 24

§5. მოქმედებები რადიკალებზე — 37

§6. წრფივი, კვადრატული და მოდულის შემცველი განტოლებები — 44

§7. ირაციონალური განტოლებები — 59

§8. განტოლებათა სისტემები — 63

§9. მიმდევრობები — 71

§10. კომბინატორიკის ელემენტები — 84

§11. ხარისხოვანი, მაჩვენებლიანი განტოლებები და განტოლებათა სისტემები — 90

§12. ლოგარითმები. ლოგარითმული განტოლებები და სისტემები — 98

§13. ამოცანები განტოლებების და განტოლებათა სისტემის შედგენაზე — 107

§14. რაციონალური და ირაციონალური უტოლობები — 115

§15. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული უტოლობები — 130

§16. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები, ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამოთვლა, ტრიგონომეტრიული განტოლებები და სისტემები — 138

§17. განტოლებების ამოხსნა მთელ და ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში — 157

§18. რიცხვითი სიმრავლეები — 158

§19. ფუნქციის განსაზღვრის არე. მნიშვნელობათა სიმრავლე. უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები — 168

§20. პლანიმეტრია — 178

§21. სტერეომეტრია — 224

§22. ვექტორები სიბრტყეზე და სივრცეში — 246

§23. მონაცემთა რიცხვითი მახასიათებლები — 250

§24. ალბათობის თეორიის ელემენტები — 254

§25. ლოგიკის ელემენტები — 262

საკონტროლო სამუშაოს ნიმუშები — 269

ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნები და მეთოდური მითითებები — 295

პასუხები — 424

საკონტროლო სამუშაოების პასუხები — 445

ზოგიერთი ხშირად გამოყენებული ფორმულები და ცნებები — 448

წინასიტყვაობა

წინამდებარე დამხმარე სახელმძღვანელოში მოცემულია ამოცანები რომელიც გათვალისწინებულია ერთიანი ეროვნული გამოცდების პროგრამით ზოგადი უნარების მათემატიკურ ნაწილსა და მათემატიკაში. ის შედგება 25 პარაგრაფისაგან. ზოგიერთ პარაგრაფში ამოცანები დაყოფილია "ა" და "ბ" ჯგუფად სირთულის მიხედვით. "ა" ჯგუფის საკითხები ძირითადად პასუხობს ზოგადი უნარების მათემატიკური ნაწილის მოთხოვნებს, ხოლო "ბ" ჯგუფის საკითხები შეესაბამება მათემატიკის გამოცდების მოთხოვნებს. ისეთი პარაგრაფების წინ როგორებიცაა: ნატურალური რიცხვის წარმოდგენა სხვადასხვა პოზიციურ სისტემაში, სიმრავლეები, ოპერაციები სიმრავლეებზე, მონაცემთა რიცხვითი მახასიათებლები, კომბინატორიკის, ალბათობისა და ლოგიკის ელემენტები საკმაოდ დაწვრილებით მოყვანილია თეორიული მასალა, რომელიც ავტორების აზრით ხელს შეუწყობს მკითხველს შესაბამისი მასალის უკეთ გააზრებასა და ამოცანების ამოხსნაში. სახელმძღვანელოს ბოლოში მოყვანილია საკმაოდ დიდი რაოდენობის ამოცანების დაწვრილებითი ამოხსნა და მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოხსნისათვის. მასალის ათვისების თვითშემოწმების მიზნით მოცემულია რვა საკონტროლო სამუშაო, რომელთაგან ერთი ამოხსნილია მთლიანად. მოყვანილია ასევე საცნობარო მასალა, რომელიც მოიცავს ძირითად ფორმულებსა და ცნებებს მათემატიკის მთელი კურსიდან.

ტესტებისა და ამოცანების კრებული სასარგებლოა არა მარტო უმაღლეს სასწავლებელში შემსვლელთათვის არამედ ის შეიძლება გამოყენებულ იქნას როგორც საკლასო ისე კლასგარეშე სამუშაოებისათვის სკოლებსა და უმაღლეს სასწავლებელში შემსვლელთა მოსამზადებელ კურსებზე. ის გარკვეულ სარგებლობას მოუტანს ყველა დაინტერესებულ პირს მათემატიკური ცოდნის გაღრმავებაში.

ავტორები მადლობას უხდიან წიგნის რეცენზენტებს: პროფესორებს ს. თოფურიასა და ო. ჭკადუას წიგნის ყურადღებით განხილვისა და სასარგებლო რჩევებისათვის.

ავტორები წინასწარ მადლობას უხდიან ყველას ვინც გამოგზავნის საქმიან შენიშვნებსა და სურვილებს.

ჩვენი ელექტრონული ფოსტის მისამართია: Z.Jabua@hotmail.com

§1. არითმეტიკული გამოთვლები

1. დაშალეთ მარტივ მამრავლებად:

78; 132; 256; 500; 1032; 2444; 2892.

2. იპოვეთ შემდეგი რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი:

1) 54; 420

ა) 6 ბ) 9 გ) 2 დ) 7

2) 252; 540

ა) 18 ბ) 24 გ) 36 დ) 14

3) 300; 315; 945

ა) 5 ბ) 25 გ) 15 დ) 35

3. იპოვეთ შემდეგი რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი:

1) 630; 504

ა) 2520 ბ) 2440 გ) 2720 დ) 2480

2) 420; 1800

ა) 12600 ბ) 12900 გ) 12800 დ) 12400

3) 45 ;84; 210

ა) 1820 ბ) 1440 გ) 1280 დ) 1260

4. იპოვეთ x და y რიცხვები თუ მათი უდიდესი საერთო გამყოფია 7, ხოლო უმცირესი საერთო ჯერადი – 693 და ამასთან მათი ჯამი მინიმალურია.
ა) 7; 93 ბ) 77; 63 გ) 7; 77 დ) 63; 7

5. იპოვეთ $x:13=y:17$ პროპორციის უცნობი წევრები, თუ მათი უდიდესი საერთო გამყოფია 3.
ა) 78; 102 ბ) 86; 78 გ) 39; 51 დ) 13; 17

6. x და y რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადია 595, ხოლო უდიდესი საერთო გამყოფი – 5. იპოვეთ ამ რიცხვების ჯამი თუ არცერთი მათგანი არ არის მეორე რიცხვის ჯერადი.
ა) 90 ბ) 140 გ) 100 დ)120

7. იპოვეთ შემდეგი გამოსახულების სიდიდე $\frac{x \cdot y}{a \cdot b}$, სადაც x და y რაღაც რიცხვებია, ხოლო a და b შესაბამისად მათი უდიდესი საერთო გამყოფი და უმცირესი საერთო ჯერადი.
ა) x ბ) y გ) 2 დ) 1

შეასრულეთ მოქმედებები (№№ 8 – 19):

8. 1) $\frac{3}{4}+\frac{5}{2}-\frac{7}{8}$

ა) $1\frac{5}{8}$ ბ) $3\frac{1}{8}$ გ) 2,375 დ) $2\frac{3}{4}$

2) $\frac{5}{3}+\frac{7}{6}-\frac{5}{12}$

ა) $2\frac{3}{4}$ ბ) $2\frac{5}{12}$ გ) $3\frac{1}{12}$ დ) $2\frac{7}{12}$

3) $1\frac{2}{3}-\frac{1}{5}+2\frac{1}{2}$

ა) $3\frac{29}{30}$ ბ) $3\frac{17}{30}$ გ) $3\frac{19}{30}$ დ) $3\frac{13}{30}$

4) $3\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{17}-4\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{15}+\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{18}{5}$

ა) 3 ბ) 1,5 გ) 2 დ) 1

5) $\left(2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{3}$

ა) 3 ბ) 1 გ) 2,5 დ) 2

6) $\left(3\frac{1}{4}-2\frac{5}{8}\right)\cdot 1\frac{3}{5}+\left(5\frac{1}{3}-3\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{3}{19}$

ა) $\frac{2}{5}$ ბ) $\frac{5}{4}$ გ) $\frac{3}{4}$ დ) $\frac{5}{6}$

7) $\left(5\frac{2}{3}-7\frac{1}{2}:\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}$

ა) 1 ბ) 2 გ) $\frac{1}{2}$ დ) 3

8) $\frac{5}{7}:\frac{2}{7}-3\frac{1}{2}\cdot 5+2\frac{3}{4}:1\frac{2}{9}+11\frac{3}{4}$

ა) -1 ბ) - 2 გ) -3 დ) $-\frac{1}{2}$

9. $$\left[\frac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\frac{3}{70}}+0{,}125\right]:2\frac{1}{2}+0{,}43$$

ა) 2 ბ) $\frac{1}{2}$ გ) $\frac{1}{3}$ დ) $\frac{2}{3}$

10. $\dfrac{\left(13{,}75+9\frac{1}{6}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}}+\dfrac{\left(6{,}8-3\frac{3}{5}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{\left(3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}\right)\cdot 56}-27\frac{1}{6}$

ა) 2 ბ) 3 გ) 1 დ) $\frac{1}{2}$

11. $\dfrac{\left[\left(\frac{1}{6}+0{,}1+\frac{1}{15}\right):\left(\frac{1}{6}+0{,}1-\frac{1}{15}\right)\right]\cdot 2.52}{\left[\left(0{,}5-\frac{1}{3}+0{,}25-\frac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\frac{1}{6}\right)\right]\cdot\frac{7}{13}}$

ა) 2 ბ) 1 გ) 4 დ) .3

12. $\dfrac{\left(5\frac{4}{45}-4\frac{1}{6}\right):5\frac{8}{15}}{\left(4\frac{2}{3}+0{,}75\right)\cdot 3\frac{9}{13}}\cdot 34\frac{2}{7}+\dfrac{0{,}3:0{,}01}{70}+\dfrac{2}{7}$

ა) 1 ბ) 3 გ) 2 დ) 4

13. $\dfrac{3\frac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0{,}16}:\dfrac{3{,}5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{0{,}5\left(1\frac{1}{20}+4{,}1\right)}$

ა) 1 ბ) 2 გ) 3 დ) 4

14. $\left(26\frac{2}{3}:6{,}4\right)\cdot\left(19{,}2:3\frac{5}{9}\right)-\dfrac{8\frac{4}{7}:2\frac{26}{77}}{\left(0{,}5:18\frac{2}{3}\right)\cdot 11}-\dfrac{1}{18}$

ა) 7 ბ) 8 გ) 10 დ) 9

15. $\dfrac{(3{,}4-1{,}275)\cdot\frac{16}{17}}{\frac{5}{18}\cdot\left(13\frac{27}{85}-6\frac{2}{17}\right)}+\dfrac{1}{2}\cdot\left(2+\dfrac{12{,}5}{5{,}75+\frac{1}{2}}\right)$

ა) 2 ბ) 4 გ). 3 დ). 5

16. $\dfrac{0{,}5+\frac{1}{4}+0{,}16666\cdots+0{,}125}{0,(3)+0{,}4+\frac{14}{15}}+\dfrac{(3{,}75-0{,}625)\cdot\frac{48}{125}}{12{,}8\cdot 0{,}25}$

ა) 2 ბ) 1 გ) 3 დ) 4

17. $\dfrac{\left(2\dfrac{38}{45}-\dfrac{1}{15}\right):13\dfrac{8}{9}+3\dfrac{3}{65}\cdot 0,(26)}{\left(18\dfrac{1}{2}-13,777\cdots\right)\cdot\dfrac{1}{85}}\cdot 0,5$

ა) 5 ბ) 7 გ) 9 დ) 8

18. $\dfrac{3,75:1\dfrac{1}{2}+\left(1,5:3\dfrac{3}{4}\right)\cdot 2\dfrac{1}{2}+\left(1\dfrac{1}{7}-\dfrac{23}{49}\right):\dfrac{22}{147}}{2:3\dfrac{1}{5}+\left(3\dfrac{1}{4}:13\right):\dfrac{2}{3}-\left(2\dfrac{5}{18}-\dfrac{17}{36}\right)\cdot\dfrac{18}{65}}$

ა) 13 ბ) 16 გ) 14 დ) 15

19. $\dfrac{\left[\left(4,625-\dfrac{13}{18}\cdot\dfrac{9}{26}\right):\dfrac{9}{4}+(2,5:1,25):6,75\right]:1\dfrac{53}{68}}{\left(\dfrac{1}{2}-0,375\right):0,125+\left(\dfrac{5}{6}-\dfrac{7}{12}\right):(0,358-1,4796:13,7)}$

ა) $\dfrac{13}{27}$ ბ) $\dfrac{16}{27}$ გ) $\dfrac{17}{27}$ დ) $\dfrac{19}{27}$

20. გამოთვალეთ პროპორციის უცნობი წევრი:

1) $\dfrac{\left(85\dfrac{7}{30}-83\dfrac{5}{18}\right):2\dfrac{2}{3}}{0,04}:X=\dfrac{5}{7}:\dfrac{3}{7}$

ა) 10 ბ) 8 გ) 5 დ) 11

2) $\left(7\dfrac{2}{3}-3\dfrac{5}{12}\right):\left(8\dfrac{3}{4}-5\dfrac{7}{16}\right)=X:\dfrac{53}{17}$

ა) 3 ბ) 5 გ) 4 დ) 6

3) $\left(4\dfrac{7}{8}-6\dfrac{1}{4}:3\dfrac{1}{8}\right):\left(3\dfrac{3}{5}:1\dfrac{11}{25}-1\dfrac{7}{8}\right)=\dfrac{46}{5}:X$

ა) 2 ბ) 1 გ) 3 დ). 4

4) $\left[\left(3\dfrac{1}{4}-2\dfrac{5}{6}\right):1\dfrac{1}{8}\right]:X=\left(3\dfrac{1}{2}:\dfrac{7}{5}\right):\left(3\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}:\dfrac{8}{15}\right)$

ა) $\dfrac{5}{9}$ ბ) $\dfrac{7}{9}$ გ) $\dfrac{8}{9}$ დ) $\dfrac{10}{9}$

5) $\left[\left(0,5:1,5-3\dfrac{1}{3}\cdot 0,6\right):\left(1-3\dfrac{1}{2}\right)\right]:X=$

$\left[\left(7,25-25,75:12\dfrac{7}{8}\right):3,5\right]:\left\{\left[\left(3\dfrac{4}{5}+1\dfrac{2}{3}\right):8\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{8}\right]\cdot\dfrac{6}{7}\right\}$

ა) $\dfrac{1}{8}$ ბ) $\dfrac{1}{7}$ გ) $\dfrac{1}{3}$ დ) $\dfrac{1}{9}$

21. მოცემული რიცხვები დაყავით მოცემული რიცხვების პროპორციულ ნაწილებად:

1) რიცხვი 120 დაყავით 5-ისა და 7-ის პროპორციულ ნაწილებად.
ა) 60; 70 ბ) 50; 70 გ) 50; 60 დ) 50; 80

2) 720 დაყავით 3-ის, 5-ის და 22-ის პროპორციულ ნაწილებად.
ა) 80; 120; 500 ბ) 90; 110; 490 გ) 100; 120; 480 დ) 72; 120; 528

3) 124 დაყავით $\frac{1}{3}$-ისა და $\frac{5}{3}$-ის პროპორციულ ნაწილებად.

ა) $\frac{62}{3};\frac{310}{3}$ ბ) $\frac{61}{3};\frac{313}{3}$ გ) $\frac{64}{3};\frac{314}{3}$ დ) $\frac{67}{3};\frac{315}{3}$

4) 144 დაყავით 0,1-ის, 2,3-ისა და 7,2-ის პროპორციულ ნაწილებად.
ა) 1,4; 35,6; 106 ბ) 1,5; 34,5; 108 გ) 2,5; 36,5; 106 დ) 1,5; 35,5; 98

5) 256 დაყავით 2,5-ის, 7,5-ისა და 6-ის პროპორციულ ნაწილებად.

ა) 30; 120; 106 ბ) 40; 120; 96 გ) 50; 110; 96 დ) 40; 130; 86

პროცენტები და ნაწილები:

22. 1) იპოვეთ 125-ის 20%.
ა) 20 ბ) 15 გ) 25 დ) 30

2) იპოვეთ 130-ის 5%.
ა) 13 ბ) 26 გ) 6,5 დ) 65

3) იპოვეთ 240-ის 80%.
ა) 30 ბ) 200 გ) 40 დ) 192

4) იპოვეთ 160-ის 20%-ის 20%.
ა) 64 ბ) 60 გ) 80 დ) 6,4

5) იპოვეთ რიცხვი თუ მისი 15% არის:

5.1) 20

ა) $\frac{400}{3}$ ბ) $\frac{200}{3}$ გ) $\frac{100}{3}$ დ) $\frac{500}{3}$

5.2) 35

ა) 200 ბ) $\frac{800}{3}$ გ) $\frac{500}{3}$ დ) $\frac{700}{3}$

5.3) 60

ა) 400 ბ) 9 გ) 18 დ) 450

5.4) 80

ა) $\frac{1700}{3}$ ბ) $\frac{1600}{3}$ გ) $\frac{75}{4}$ დ) 150

6) 240 –ის რამდენ პროცენტს შეადგენს

6.1) 30

ა) 18% ბ) 20% გ) 12,5% დ) 25%

6.2) 60

ა) 15 % ბ) 20 % გ) 40% დ) 25%

6.3) 80

ა) 33,(3) % ბ) 33% გ) 45% დ) 75%

6.4) 120

ა) 40% ბ) 50% გ) 45% დ) 60%

7) რა რიცხვის $\frac{5}{8}$ ნაწილია

7.1.) 25

ა) 60 ბ) 40 გ) 80 დ) 90

7.2) 30

ა) 32 ბ) 40 გ) 48 დ) 60

7.3) 75

ა) 80 ბ) 60 გ) 160 დ) 120

7.4) $\frac{15}{16}$

ა) $\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{7}{2}$ გ) $\frac{3}{2}$ დ) $\frac{5}{2}$

8) რა რიცხვის 21%-ის 2/7 ნაწილია

8.1) 3

ა) 50 ბ) 40 გ) 60 დ) 90

8.2) 9

ა) 140 ბ) 150 გ) 120 დ) 180

8.3) $\frac{6}{25}$

ა) 2 ბ) 3 გ) 6 დ) 4

8.4) $\frac{3}{20}$

ა) 1 ბ) 2,5 გ) $\frac{3}{2}$ დ) $\frac{1}{2}$

23. იპოვეთ 3^{27}-ის 7-ზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი.

ა) 3 ბ) 4 გ) 6 დ) 5

24. იპოვეთ 5^{32}-ის 9-ზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი.

ა) 8 ბ) 7 გ) 6 დ) 4

25. იპოვეთ $2^{32} + 3^{16}$-ის 7-ზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი.

ა) 0 ბ) 1 გ) 2 დ) 5

26. n-ის რა უდიდესი ორნიშნა მნიშვნელობისათვის მიიღება ნაშთი 1, 15^n რიცხვის 4-ზე გაყოფის შემდეგ.

ა) 99 ბ) 96 გ) 97 დ) 98

§2. ნატურალური რიცხვის წარმოდგენა სხვადასხვა პოზიციურ სისტემაში

არსებობს თვლის სხვადასხვა სისტემა, რომელთა შორის ყველაზე სრულყოფილი და ფართოდ გამოყენებული სისტემაა ე.წ. პოზიციური სისტემა.

თვლის პოზიციური სისტემა ეწოდება ისეთ სისტემას, როდესაც ნატურალური რიცხვის ჩანაწერში მნიშვნელობა აქვს არა მარტო ციფრებს არამედ იმასაც თუ რა ადგილი (პოზიცია) უკავიათ მოცემულ ციფრებს ჩანაწერში. ასე მაგალითად ერთ-ერთ ყველაზე გავრცელებულ ათობით პოზიციურ სისტემაში, რომელსაც ხშირად ინდურ სისტემას უწოდებენ, ერთიდაიგივე ციფრებით შეგვიძლია სხვადსხვა რიცხვები ჩავწეროთ: მაგ.: ციფრებით 6; 7; 9 შესაძლებელია შემდეგი რიცხვების ჩაწერა: 967; 976; 796; 769; 697; 679.

თვლის პოზიციურ სისტემებში გარკვეული რიცხვი წარმოადგენს წინა პოზიციის (თანრიგის) ერთეულს და ის გვევლინება თვლის მოცემული სისტემის ფუძედ. ზემოთ ნახსენებ ათობით სისტემაში სისტემის ფუძეა 10 და მას შესაბამისად ათობითი სისტემა ეწოდება, თუ სისტემის ფუძე იქნებოდა 2 მაშინ გვექნებოდა ორობითი სისტემა და ა.შ.

თვლის არაპოზიციურ, მაგალითად რომაულ სისტემაში არსებობს შვიდი ციფრი: I (შეესაბამება ციფრი 1), V (შეესაბამება ციფრი 5), X (შეესაბამება ციფრი 10), L (შეესაბამება ციფრი 50), C (შეესაბამება ციფრი 100), D (შეესაბამება ციფრი 500) და M (შეესაბამება ციფრი 1000). ამ ციფრებით რიცხვები ჩაიწერება შემდეგი პრინციპით: თუ დიდი ციფრი წინ უსწრებს პატარას ისინი იკრიბება, თუ დიდი ციფრი წერია მცირეს შემდეგ მაშინ დიდს აკლდება მცირე, თუ ციფრები ერთნაირია ისინი იკრიბება. მაგალითად: VI = 6; IV = 4; XLII = 42; XXX = 30.

არსებობს ძველი ქართული თვლის სისტემა, რომელშიც ციფრებს შეესაბამება მიმდევრობით აღებული ქართული ანჰანის ასოები: ა = 1; ბ = 2; გ = 3; ⋯; ი = 10.

გარდა ათობითი სისტემისა ძალიან ფართოდ გამოიყენება ორობითი სისტემა, მაგალითად კომპიუტერული პროგრამების შედგენისას. ორობით სისტემაში გამოიყენება ორი ციფრი: 0 და 1 (სამობით სისტემაში - სამი ციფრი 0; 1; 2 და ა.შ). განვიხილოთ მაგალითები, რომლებიც გვიჩვენებს თუ როგორ ხდება გადასვლა ათობითი სისტემიდან ორობითში და პირიქით.

ელემენტარული დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ ნატურალური რიცხვის ათობით ჩანაწერში მარჯვენა ბოლო ციფრი წარმოადგენს ამ რიცხვის 10-ზე გაყოფის შედეგად მიღებულ ნაშთს. მაგ.: 80372-ის 10-ზე გაყოფისას მიიღება ნაშთი 2; ჩამოვაშორებთ რა მოცემულ რიცხვს ბოლო ციფრს მიღებული რიცხვის 10-ზე გაყოფით მივიღებთ ნაშთ 7-ს და ა.შ. თუ ამის შემდეგ ყველა ნაშთს დავწერთ ერთად მიმდევრობით მარჯვენიდან მარცხნივ, მივიღებთ საწყის რიცხვს. ათობით სისტემაში ჩაწერილი რიცხვის ორობითში გადსაყვანად უნდა მოვიქცეთ ანალოგიურად, ოღონდ ცხადია მოცემული რიცხვი უნდა გავყოთ 2-ზე, განაყოფი ისევ უნდა გავყოთ 2-ზე და ა.შ. გაყოფა უნდა გავაგრძელოთ მანამ სანამ განაყოფში არ მივიღებთ 0-ს. ამის შემდეგ მიღებული ნაშთები უნდა დავწეროთ მიმდევრობით მარჯვენიდან მარცხნივ რაც მოგვცემს ორობით სისტემაში ჩაწერილ რიცხვს. განვიხილოთ მაგალითი: 392 გადავიყვანოთ ორობით სისტემაში, გვაქვს:

$392 : 2 = 196$	ნაშთი	0
$196 : 2 = 98$	"	0
$98 : 2 = 49$	"	0
$49 : 2 = 24\frac{1}{2}$		1

$24 : 2 = 12$ 0
$12 : 2 = 6$ 0
$6 : 2 = 3$ 0
$3 : 2 = 1\frac{1}{2}$ 1
$1 : 2 = \frac{1}{2}$ 1

საბოლოოდ გვაქვს: $392 = 110001000_2$

განვიხილოთ ორობით სისტემაში ჩაწერილი რიცხვის ათობითში ჩაწერის მაგალითი. მაგალითად ჩავწეროთ ათობით სისტემაში რიცხვი 1011111_2.

როგორც ცნობილია ათობით სისტემაში ჩაწერილი რიცხვი 10-ის ხარისხების გამოყენებით ასე ჩაიწერება:

მაგ.: $20679 = 2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$. ანალოგიურად $(1011111)_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 95$.

ჩავწეროთ სამობით სისტემაში რიცხვი 86. გვაქვს:

$86 : 3 = 28\frac{2}{3}$ ნაშთი 2
$28 : 3 = 9\frac{1}{3}$ " 1
$9 : 3 = 3$ 0
$3 : 3 = 1$ 0
$1 : 3 = \frac{1}{3}$ 1

$86 = (10012)_3$. მართლაც $1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 81 + 0 + 0 + 3 + 2 = 86$. ანალოგიურად ხდება 4-ობით, 5-ობით და სხვა სისტემებში გადასვლა.

ამოცანები

1. ორობით პოზიციურ სისტემაში ჩაწერეთ რიცხვები რომლებიც ჩაწერილია ათობით სისტემაში:

1) 13
ა) 1001_2 ბ) 1101_2 გ) 1100_2 დ) 1111_2

2) 20
ა) 10100_2 ბ) 11100_2 გ) 10110_2 დ) 10101_2

3) 45
ა) 111101_2 ბ) 101111_2 გ) 1111_2 დ) 101101_2

4) 60
ა) 111110_2 ბ) 101100_2 გ) 111100_2 დ) 111000_2

5) 128
ა) 10000000_2 ბ) 11000000_2 გ) 10001000_2 დ) 1110000_2

2. ათობით პოზიციურ სისტემაში ჩაწერეთ რიცხვები, რომლებიც ჩაწერილია ორობით სისტემაში:

1) 1011_2
ა) 11 ბ) 12 გ) 16 დ)15

2) 1101_2

ა) 9 ბ) 10 გ) 13 დ) 17

3) 1111_2
ა) 19 ბ) 15 გ) 21 დ) 18

4) 110011_2
ა) 49 ბ) 54 გ) 53 დ) 51

3. ჩაწერეთ რიცხვი 2^{n-1} ორობით სისტემაში.
ა) $n-1$-ცალი 1-იანი ბ) n-ცალი 1-იანი
გ) $n+1$-ცალი 1-იანი დ) $n+2$-ცალი 1-იანი

4. იპოვეთ ჯამი 1011101+1101, თუ რიცხვები ჩაწერილია ორობით სისტემაში.

ა) 1101010 ბ) 1011101 გ) 1111111 დ) 111101

5. შეასრულეთ მოქმედებები ორობით სისტემაში ჩაწერილ რიცხვებზე.

1) 1001101+10011
ა) 1100001 ბ) 1100000 გ) 1100011 დ) 1100100

2) (1111+1011)101
ა) 10011010 ბ) 10000110 გ) 10100010 დ) 10000010
3) $101^2+11\cdot110-101$
ა) 100111 ბ) 110110 გ) 111110 დ) 100110

4) $(1001+110)^2$
ა) 11100001 ბ) 11100011 გ) 11101111 დ) 11101001

6. შეასრულეთ მოქმედება, თუ რიცხვები ჩაწერილია ორობით სისტემაში.

1) 1100110011:11
ა) 10001011 ბ) 10001001 გ) 10001111 დ) 10101001

2) 1110011101:101
ა) 11101011 ბ) 10111111 გ) 10111001 დ) 11211011

7. ჩამოაყალიბეთ ორობით სისტემაში მოცემული რიცხვების 2-ზე გაყოფადობის პირობა.

1) იყოფა თუ არა 2-ზე რიცხვი 10010111?
ა) იყოფა ბ) არ იყოფა

2) იყოფა თუ არა 2-ზე რიცხვი 1011110111
ა) არ იყოფა ბ) იყოფა

8. იპოვეთ 1100111 რიცხვის 101 რიცხვზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი, თუ რიცხვები ჩაწერილია ორობით სისტემაში.
ა) 100 ბ) 1 გ) 10 დ) 11

9. იპოვეთ ორობით სისტემაში ჩაწერილი ისეთი უმცირესი ოთხნიშნა რიცხვი, რომელიც 3-ზე, 4-ზე და 5-ზე გაყოფისას ნაშთში იძლევა 2-ს.
ა) 100000001 ბ) 1111111110 გ) 1100000011 დ) 110000111

10. რიცხვი ჩაწერილია ორობით სისტემაში 11111011111110001. იყოფა თუ არა ეს რიცხვი 3-ზე?

ა) 1010100 ბ) 1110100 გ) 1010101 დ) 1111111

11. შეასრულეთ მოქმედება ორობით სისტემაში $1101 \cdot 110 + 1111000 : 1010$

ა) 1010100 ბ) 1110100 გ) 1010101 დ) 1111111

12. ხუთობით პოზიციურ სისტემაში ჩაწერეთ რიცხვები, რომლებიც ჩაწერილია ათობით სისტემაში:

1) 15

ა) 30_5 ბ) 31_5 გ) 301_5 დ) 20_5

2) 60

ა) 221_5 ბ) 220_5 გ) 222_5 დ) 225_5

3) 220

ა) 1344_5 ბ) 1440_5 გ) 1320_5 დ) 1340_5

4) 370

ა) 2230_5 ბ) 2140_5 გ) 2440_5 დ) 1240_5

13. შვიდობით პოზიციურ სისტემაში ჩაწერილი რიცხვები ჩაწერეთ ორობით სისტემაში:

1) 15_7

ა) 1110_2 ბ) 1100_2 გ) 1101_2 დ) 1000_2

2) 65_7

ა) 101111_2 ბ) 100111_2 გ) 101011_2 დ) 101110_2

3) 126_7

ა) 1001101_2 ბ) 1100101_2 გ) 1000101_2 დ) 1000111_2

4) 240_7

ა) 1111010_2 ბ) 1011110_2 გ) 1111110_2 დ) 1111100_2

14. შეასრულეთ მოქმედებები:

1) $102_7 + 24_7 - 12_7$

ა) 154_7 ბ) 114_7 გ) 113_7 დ) 124_7

2) $26_7 + 10_7 + 2_7$

ა) 42_7 ბ) 51_7 გ) 46_7 დ) 41_7

3) $11_7 \cdot 101_7$

ა) 211_7 ბ) 141_7 გ) 1111_7 დ) 3115_7

4) $(10_7 + 11_7)12_7$

ა) 252_7 ბ) 234_7 გ) 454_7 დ) 256_7

15. დაალაგეთ რიცხვები ზრდადობის მიხედვით:

$I - 15_9 \cdot 8_9$, $II - 101_2 \cdot 11_2$, $III - 12_3 \cdot 11_3$, $IV - 10_5 \cdot 2_5$

ა)) IV, III, II, I ბ)) I, II, III, I გ)) IV, II, I, III დ)) IV, II, III, I

16. მოცემულია ტოლობა $1207_a + 107_a = 1270_a + 62_a$. დაადგინეთ თვლის პოზიციური სისტემის ფუძე, რომლისთვისაც სამართლიანია ეს ტოლობა.

ა) 2 ბ) 3 გ) 10 დ) 12

17. შემდეგი რიცხვი 120111222101 ჩაწერილია თვლის სამობით პოზიციურ სისტემაში, იყოფა თუ არა ეს რიცხვი 2-ზე.

ა) არ იყოფა ბ) იყოფა

18. ჩამოაყალიბეთ ორობით პოზიციურ სისტემაში ჩაწერილი რიცხვის 3-ზე გაყოფადობის პირობა.

19. ჩამოაყალიბეთ სამობით პოზიციურ სისტემაში ჩაწერილი რიცხვის 2-ზე გაყოფადობის პირობა.

20. ჩამოაყალიბეთ a — ობით პოზიციურ სისტემაში ჩაწერილი რიცხვის $a-1$ —ზე გაყოფადობის პირობა.

§3. სიმრავლეები. ოპერაციები სიმრავლეებზე

მათემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა სიმრავლის ცნება. სიმრავლეთა თეორიის დამფუძნებლის გეორგ კანტორის განმარტებით „სიმრავლე არის ბევრი, რომელსაც მოვიაზრებთ როგორც მთლიანს". მაგალითად, ჩვენ ხშირად ვიყენებთ სიმრავლის ცნებას: როცა ვამბობთ „ფარა" - ცხვრების სიმრავლე, „ჯოგი" - ძროხების ერთობლიობა, „რემა" - ცხენების ერთობლიობა და ა.შ.

სიმრავლე შედგება ელემენტებისაგან. სიმრავლის ელემენტი ეწოდება ნებისმიერი ბუნების საგანს, რომელიც შედის მოცემულ სიმრავლეში. მაგალითად, შეიძლება ვილაპარაკოთ ჭიქაში მოთავსებული წყლის მოლეკულების სიმრავლეზე, ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლეზე, სპექტაკლზე დამსწრე მაყურებელთა სიმრავლეზე და ა. შ. სიმრავლის ელემენტების აღსანიშნავად იყენებენ ლათინური ანბანის პატარა ასოებს a, b, c და ა. შ., ხოლო თვით სიმრავლეებს აღნიშნავენ დიდი ასოებით A, B, C და ა.შ.

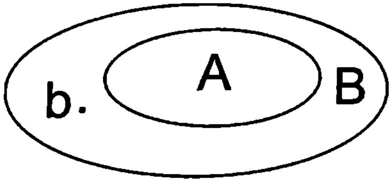
თუ a ელემენტი წარმოადგენს A სიმრავლის ელემენტს, მაშინ ეს ფაქტი ასე ჩაიწერება $a \in A$ (a ელემენტი ეკუთვნის A სიმრავლეს), ხოლო თუ a არ წარმოადგენს A სიმრავლის ელემენტს, ჩანაწერს აქვს სახე $a \notin A$.

თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი ამავე დროს B სიმრავლის ელემენტიცაა, მაშინ ვწერთ $A \subset B$ (A სიმრავლე B სიმრავლის ქვესიმრავლეა, ან A სიმრავლე შედის B-ში, ადგილი აქვს „ჩართვას" A შედის B-ში).

თუ A სიმრავლე არის B სიმრავლის ქვესიმრავლე, მაგრამ არსებობს B სიმრავლის ელემენტი b, რომელიც არ ეკუთვნის A სიმრავლეს, მაშინ ამბობენ, რომ A სიმრავლე არის B სიმრავლის საკუთრივი ქვესიმრავლე. მაგ.: ლუწ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს მთელ რიცხვთა საკუთრივ ქვესიმრავლეს, ვინაიდან არსებობს მთელი რიცხვი 3, რომელიც ლუწი არაა.

სქემატურად სიმრავლეებსა და მათ შორის მიმართებებს გამოსახავენ ეილერ-ვენის დიაგრამებით.

მაგ.: წინადადება A სიმრავლე არის B სიმრავლის საკუთრივი ქვესიმრავლე ეილერ-ვენის დიაგრამებით ასე გამოისახება:



$b \in B,\ b \notin A.$

თუ A სიმრავლე არის B სიმრავლის ქვესიმრავლე და ერთდროულად B სიმრავლე არის A სიმრავლის ქვესიმრავლე, მაშინ ამბობენ, რომ A და B ტოლი სიმრავლეებია და წერენ $A=B$.

თუ A სიმრავლეს ელემენტები არ გააჩნია, მაშინ მას ცარიელი სიმრავლე ეწოდება და აღინიშნება $\emptyset$ სიმბოლოთი.

სიმრავლეების ჩასაწერად ხშირად იყენებენ ფიგურულ ფრჩხილებს მათში ჩასმული ელემენტებით. მაგ.: $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

განვიხილოთ მოქმედებები სიმრავლეებზე.

1) სიმრავლეთა გაერთიანება

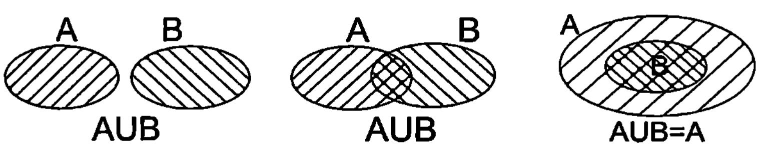
ვთქვათ, მოცემულია სამი სიმრავლე A, B და C. მათი გაერთიანება $A \cup B \cup C$ ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომლის ელემენტები მიეკუთვნება ან A ან B ან C სიმრავლეს. შევნიშნოთ, რომ გაერთიანებულ სიმრავლეში ელემენტები არ მეორდება.

განვიხილოთ სიმრავლეთა გაერთიანების მაგალითები:

ა) ვთქვათ $A=\{1, 2, 3, 4\}$, ხოლო $B=\{1, 3, 8, 10, 12\}$. ამ სიმრავლეების გაერთიანება იქნება: $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 8, 10, 12\}$.

ბ) ვთქვათ A ქართულად მოლაპარაკე სტუდენტების სიმრავლეა, ხოლო B - ინგლისურად მოლაპარაკე სტუდენტების, მაშინ $A \cup B$ იქნება იმ სტუდენტების სიმრავლე, რომლებიც ლაპარაკობენ ან ქართულად ან ინგლისურად.

ეილერ-ვენის დიაგრამებით A და B სიმრავლეების გაერთიანება გამოისახება შემდეგნაირად

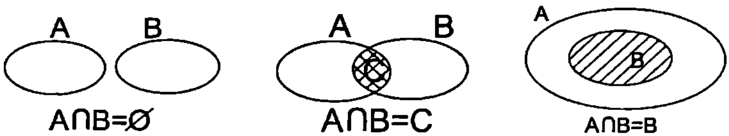


თუ ცნობილია, რომ $a \in A \cup B$, მაშინ ეს იმას ნიშნავს, რომ $a \in A$ ან $a \in B$, ხოლო თუ ცნობილია, რომ $a \notin A \cup B$ მაშინ $a \notin A$ და $a \notin B$.

2) სიმრავლეთა თანაკვეთა

ვთქვათ მოცემულია სიმრავლეები A, B და C. მათი თანაკვეთა $A \cap B \cap C$ ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომლის ელემენტები ერთდროულად ეკუთვნის, როგორც A სიმრავლეს, ისე B და C-ს. ჩანაწერი $A \cap B \cap C$ ასე იკითხება A-ს თანაკვეთა B-სთან და თანაკვეთა C-თან.

ორი A და B სიმრავლის თანაკვეთა ეილერ-ვენის დიაგრამებით შეიძლება ასე გამოისახოს:



შევნიშნოთ, რომ თუ $a \in A \cap B \cap C$, მაშინ $a \in A$, $a \in B$, $a \in C$, ხოლო თუ $a \notin A \cap B \cap C$, მაშინ ამ სამი სიმრაველიდან არსებობს ერთი მაინც, რომელიც არ შეიცავს a ელემენტს.

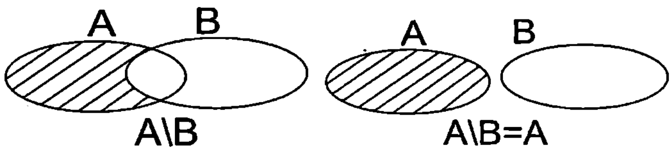
განვიხილოთ მაგალითები:

ა) $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 5, 7\}$. ცხადია $A \cap B = \{2, 5\}$.

ბ) A-ავი ძაღლების სიმრავლეა, B-გრძელბეწვიანი ძაღლების, მაშინ $A \cap B$-არის ყველა გრძელბეწვიანი ავი ძაღლი

3) სიმრავლეთა სხვაობა

ორი A და B სიმრავლის სხვაობა ეწოდება ისეთ C სიმრავლეს, რომლის ელემენტები ეკუთვნიან A სიმრავლეს და არ ეკუთვნიან B-ს. ეილერ-ვენის დიაგრამის გამოყენებით A და B სიმრავლეების სხვაობა ასე გამოისახება:

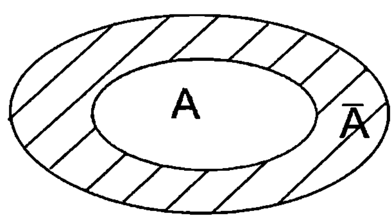


მაგ: ა) თუ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 8\}$, მაშინ $A \setminus B = \{2, 4\}$.

ბ) თუ A-ავი ძაღლების სიმრავლეა, ხოლო B - გრძელბეწვიანების, მაშინ $A \setminus B$-არის ყველა ავი ძაღლი, რომელსაც გრძელი ბეწვი არა აქვს.

4) დამატებითი სიმრავლე

მოცემული A სიმრავლის დამატებითი სიმრავლე ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომლის ელემენტები არ ეკუთვნის A სიმრავლეს, მაგრამ ამავე დროს არის წინასწარ მოცემული X სიმრავლის ელემენტები. მაგალითად, არადადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის დამატებას მთელ რიცხვთა სიმრავლემდე. A სიმრავლის დამატებითი სიმრავლე აღინიშნება $\overline{A}$, რაც ეილერ-ვენის დიაგრამით ასე გამოისახება



ცხადია, რომ $A \cup \overline{A} = X$.

განვიხილოთ მაგალითები:

ა) ვთქვათ $X=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, ხოლო $A=\{2, 4, 6, 8, 0\}$ ცხადია $\overline{A}=\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

ბ) ვათქვათ A ავი ძაღლების სიმრავლეა, ხოლო B-ყველა ძაღლების სიმრავლე, ცხადია $\overline{A}$ არის ყველა არა ავი ძაღლის სიმრავლე.

5) დეკარტული ნამრავლი

ორი A და B სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომლის ელემენტებს წარმოადგენს ყველა შესაძლო (x, y) წყვილების სიმრავლე, სადაც $x\in A$ და $y\in B$. დეკარტული ნამრავლი აღინიშნება ასე $A\times B$ (იკითხება A სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი B სიმრავლეზე).

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი:

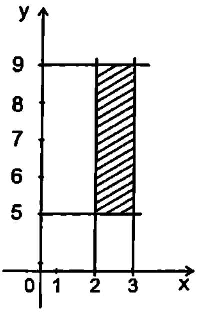
ა) ვთქვათ $A=\{1, 2\}$ და $B=\{1, 2, 3\}$. ამ ორი სიმრავლის დეკარტული ნამრავლია

$A\times B=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

ცხადია, საზოგადოდ $A\times B$ არაა ტოლი $B\times A$. მოყვანილ მაგალითში ელემენტი $(3, 1)$ არ არის $A\times B$ სიმრავლის ელემენტი, მაშინ როდესაც ის შედის $B\times A$ სიმრავლეში.

ბ) ვთქვათ $A=[2; 3]$, ამ სიმრავლეს ეწოდება $[2; 3]$ სეგმენტი, და შედგება ყველა რიცხვისგან 2-დან, 3-მდე მათი ჩათვლით, ხოლო $B=[5; 9]$. A და B სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი იქნება სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც გვაძლევენ მართკუთხედს.

ყოველივე ეს ნახაზზე გამოისახება შემდეგნაირად:



დაშტრიხული სიმრავლე შედგება (x, y) წყვილებისაგან, სადაც $x\in[2, 3]$, ხოლო $y\in[5, 9]$.

ბ) ვთქვათ, A არის იმ გზების სიმრავლე, რომელთა გავლითაც შეიძლება მოვხვდეთ პირველი ქალაქიდან მეორეში $A=\{a_1, a_2\}$, ხოლო $B=\{b_1, b_2, b_3\}$ იმ გზების სიმრავლე, რომელთა მეშვეობითაც შეიძლება ჩასვლა მეორე ქალაქიდან მესამე ქალაქში. პასუხს კითხვაზე, თუ რამდენი გზით შეიძლება მოვხვდეთ პირველი ქალაქიდან მესამეში იძლევა ამ ორი სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი.

$A\times B=\{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}$,

ე.ი. პირველი ქალაქიდან მესამეში შეგვიძლია ჩავიდეთ ექვსი სხვადასხვა მარშრუტით.

ორი სიმრავლის დეკარტული ნამრავლის ანალოგიურად შეგვიძლია განვიხილოთ სამი და მეტი სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი. ცხადია, სამი A, B, C სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი $A\times B\times C$ შედგება ყველა შესაძლო (x, y, z) სამეულებისაგან, სადაც $x\in A$, $y\in B$ და $z\in C$.

განვიხილოთ ზოგიერთი თანაფარდობები სასრულ სიმრავლეებს შორის. თუ A სასრული სიმრავლეა ე. ი. ის შეიცავს ელემენტების სასრულ რაოდენობას, მაშინ ეს რაოდენობა აღინიშნება $n(A)$სიმბოლოთი.

მაგ: თუ $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, მაშინ $n(A)=4$.

სამართლიანია შემდეგი ფორმულა $n(A\times B)=n(A)\cdot n(B)$ (1)

მართლაც, როგორც ენახეთ ზემოთ მოყვანილ მაგალითში, $n(A)=2$, $n(B)=3$ და $n(A\times B)=2\cdot 3=6$.

თუ A და B სიმრავლეებს საერთო ელემენტი არ გააჩნიათ, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B) \qquad (2)$$

თუ A და B სიმრავლეებს საერთო ელემენტები გააჩნიათ, მაშინ (2) მიიღებს სახეს:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \qquad (3)$$

თუ მოცემულია სამი A, B, C სიმრავლე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C) \quad (4)$$

ზემოთ მოყვანილ (1), (2), (3) და (4) ფორმულებს, რომლებიც ეხება სასრულ სიმრავლეებში ელემენტების რაოდენობის დათვლას, ეწოდებათ ნამრავლისა და ჯამის წესები. ისინი ფართოდ გამოიყენება კომბინატორული ამოცანების ამოხსნაში.

განვიხილოთ ამოცანა, რომელიც ამოიხსნება (3) ფორმულის გამოყენებით.

ა) კლასში 70 მოსწავლეა, მათგან 45 სწავლობს ინგლისურ ენას, ხოლო 50–გერმანულს. რამდენი მოსწავლე სწავლობს ორივე ენას?

A-თი აღვნიშნოთ იმ მოსწავლეების სიმრავლე, რომლებიც სწავლობენ ინგლისურ ენას, ხოლო B-თი იმ მოსწავლეების სიმრავლე, რომლებიც სწავლობენ გერმანულ ენას. ცხადია $A\cap B$ წარმოადგენს იმ მოსწავლეთა სიმრავლეს, რომლებიც სწავლობენ ორივე ენას ერთდროულად.

ამოცანის პირობის თანახმად: $n(A\cup B)=70$, $n(A)=45$ და $n(B)=50$ (3) ფორმულის თანახმად

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$70=45+50-n(A\cap B)$$
$$n(A\cap B)=45+50-70=25$$

ამრიგად ორივე ენას სწავლობს 25 მოსწავლე.

ზემოთ ჩვენ განვიხილეთ მოქმედებები სიმრავლეებზე. საკითხის უკეთ გააზრების მიზნით განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

ა) დავამტკიცოთ ტოლობა

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

სადაც A არის კლასში იმ მოსწავლეების სიმრავლე, რომლებმაც იციან გერმანული ენა, B-ინგლისური ენის მცოდნე მოსწავლეებია, ხოლო C-ფრანგული ენის.

დამტკიცება: სიმრავლეთა ტოლობის განმარტების თანახმად უნდა დავამტკიცოთ შემდეგი ორი ჩართვა:

$$A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$$

დავამტკიცოთ პირველი მათგანი. ვთქვათ $x\in A\cap(B\cup C)$ ე. ი. x არის ის მოსწავლე, რომელმაც იცის გერმანული ენა და ამასთანავე იცის ერთი ენა მაინც , ან ინგლისური ან ფრანგული. რადგანაც $A\cap B$ სიმრავლე არის იმ მოსწავლეების სიმრავლე რომლებმაც იციან ინგლისური და გერმანული ენა, ხოლო $A\cap C$ არის იმ მოსწავლეების სიმრავლე რომლებმაც იციან გერმანული ან ფრანგული ენა, ამიტომ $x\in A\cap C$ ან $x\in A\cap B$ (ცხადია x შეიძლება ეკუთვნოდეს ორივე სიმრავლეს) ამ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ე. ი. მივიღეთ ჩართვა

$$A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

ახლა დავამტკიცოთ შებრუნებული ჩართვა

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$$

ვთქვათ $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. ეს პირობა ნიშნავს რომ, x მოსწავლემ იცის გერმანული და ინგლისური ან გერმანული და ფრანგული ენა (ცხადია შეიძლება იცოდეს სამივე ენა).

პირველ შემთხვევაში $x\in A$ და $x\in B$ ე. ი. $x\in A$ და $x\in B\cup C$, საიდანაც მიიღება $x\in A\cap(B\cup C)$. მეორე შემთხვევაში გვექნება $x\in A$ და $x\in C$, საიდანაც მიიღება $x\in A$

და $x\in B\bigcup C$, რაც გეაძლევს $x\in A\bigcap(B\bigcup C)$. როგორც ვხედავთ ორივე შემთხვევის გათვალისწინებით მივიღებთ ჩართვას

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$$

საბოლოოდ მივიღებთ სიმრავლეთა ტოლობას

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

შევნიშნოთ, რომ დამტკიცებული ტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი ბუნების A, B, C სიმრავლეების შემთხვევაშიც. მისი დამტკიცება შეიძლება ზემოთ მოყვანილი დამტკიცების ანალოგიურად.

ბ) დავამტკიცოთ ტოლობა

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

ვთქვათ $a\in\overline{A\bigcup B}$ ე. ი. a ეკუთვნის $A\bigcup B$ სიმრავლის დამატებით სიმრავლეს, რაც იმას ნიშნავს, რომ $a\notin A\bigcup B$. მიღებულიდან გამომდინარეობს, რომ $a\notin A$ და $a\notin B$, მაგრამ, მაშინ $a\in\overline{A}$ და $a\in\overline{B}$ ე. ი. $a\in\overline{A}\bigcap\overline{B}$. ყოველივე ეს იძლევა ჩართვას

$$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a\in\overline{A}\bigcap\overline{B}$ ე. ი. a ელემენტი ეკუთვნის ორი $\overline{A}$ და $\overline{B}$ სიმრავლეების თანაკვეთას, რაც იმას ნიშნავს, რომ ის ეკუთვნის ორივე $\overline{A}$ და $\overline{B}$ სიმრავლეს. დამატებითი სიმრავლის განმარტების თანახმად $a\notin A$ და $a\notin B$ ე. ი. $a\notin A\bigcup B$, მაგრამ, მაშინ $a\in\overline{A\bigcup B}$. მიღებული ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს ჩართვას

$$\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$$

საბოლოოდ, ჩართვებიდან

$$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$$

და

$$\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$$

გამომდინარეობს ტოლობა

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

გ) განვიხილოთ მაგალითი, რომელიც შეეხება სიმრავლეთა ჩართვას.

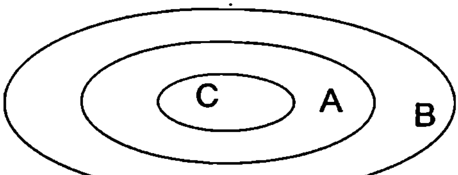
მოცემულია:

- თუ ოთხკუთხედში მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ტოლია, მაშინ ამ ოთხკუთხედში ჩაიხაზება წრეწირი
- რომბში მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ტოლია

A-თი აღვნიშნოთ იმ ოთხკუთხედების სიმრავლე, რომელშიც მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ტოლია.

B-თი აღვნიშნოთ იმ ოთხკუთხედების სიმრავლე, რომლებშიც ჩაიხაზება წრეწირი. C-თი აღვნიშნოთ რომბების სიმრავლე.

პირველი მოცემულობის თანახმად $A\subset B$. მართლაც, თუ $a\in A$, მაშინ $a\in B$. მეორე მოცემულობის თანახმად $C\subset A$, ყოველივე ეს ეილერ-ვენის დიაგრამით გამოისახება შემდეგნაირად:



ე. ი. საბოლოოდ გვექნება $C \subset B$, რაც იმას ნიშნავს, რომბში ჩაიხაზება წრეწირი (უფრო მეტიც A=B, ანუ ჩვენს შემთხვევაში თუ ოთხკუთხედში ჩაიხაზება წრეწირი, მაშინ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ტოლია).

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ ტოლობა

$$\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$$

2. დაამტკიცეთ ტოლობა

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

3. დაამტკიცეთ ტოლობა

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap (A \cup B)$$

4. დაამტკიცეთ ტოლობა

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$$

5. A ავი ძაღლების სიმრავლეა. B-გრძელბეწვიანი ძაღლების, ხოლო C-შავი ფერის ძაღლების სიმრავლეა. X საბაზისო სიმრაელე არის ძაღლების სიმრაელე.

1) რას ნიშნავს პირობა $a \in (A \setminus B) \cap C$?
   - ა) a არის შავი ფერის ავი ძაღლი, რომელსაც გრძელი ბეწვი არა აქვს
   - ბ) a არ არის ავი ძაღლი
   - გ) a გრძელბეწვიანი ავი ძაღლია
   - დ) a შავი ფერის ძაღლი არაა

2) რას ნიშნავს პირობა $a \in A \setminus C$?
   - ა) a არ არის ავი ძაღლი
   - ბ) a ავი ძაღლია, რომელიც არაა შავი ფერის
   - გ) a გრძელბეწვიანი ძაღლია
   - დ) a არ არის ავი ძაღლი

3) რას ნიშნავს პირობა $a \in \overline{A} \setminus B$?
   - ა) a გრძელბეწვიანი ძაღლია, რომელიც ავია
   - ბ) a შავი ფერის ძაღლია, რომელიც ავია
   - გ) a არ არის არც გრძელბეწვიანი ძაღლი და არც - ავი
   - დ) a შავი ფერის ძაღლია, რომელიც ავი არ არის

4) რას ნიშნავს პირობა $a \in B \setminus A$?
   - ა) a შავი ფერის ძაღლია, რომელიც ავი არ არის
   - ბ) a გრძელბეწვიანი ძაღლია, რომელიც ავია
   - გ) a შავი ფერის ძაღლია, რომელიც ავია
   - დ) a გრძელბეწვიანი ძაღლია, რომელიც ავი არ არის

5) რას ნიშნავს პირობა $a \in A \cup B$?
   - ა) a ავი და გრძელბეწვიანი ძაღლია
   - ბ) a ან ავი ან გრძელბეწვიანი ძაღლია
   - გ) a ავი ან შავი ფერის ძაღლია
   - დ) a გრძელბეწვიანი ან შავი ფერის ძაღლია

6) რას ნიშნავს პირობა $a \in A \cup B \cup C$?
   - ა) a ან ავი ან გრძელბეწვიანი ძაღლია
   - ბ) a ან ავი ან გრძელბეწვიანი ან შავი ფერის ძაღლია
   - გ) a ან გრძელბეწვიანი ან შავი ფერის ძაღლია
   - დ) a ავი ძაღლია, რომელსაც შავი ფერი აქვს

6. A ბავშვების სიმრავლეა, რომლებიც №1 სკოლაში დადიან. B ბავშვების სიმრავლეა, რომლებსაც მუსიკალური სმენა აქვთ, ხოლო C ეზოში ფეხბურთის მოთამაშე ბავშვების სიმრავლეა.

1) რას ნიშნავს პირობა $a \in A \cap B$?

ა) a ბავშვია, რომელსაც მუსიკალური სმენა აქვს
ბ) a ბავშვია, რომელიც №1 სკოლაში დადის
გ) a ბავშვია, რომელსაც მუსიკალური სმენა აქვს და №1 სკოლაში დადის
დ) a ბავშვია, რომელიც ეზოში ფეხბურთს თამაშობს და მუსიკალური სმენა აქვს.

2) რას ნიშნავს პირობა $a \in B \setminus C$?

ა) a ბავშვია, რომელსაც მუსიკალური სმენა აქვს და არ თამაშობს ეზოში
ბ) a ბავშვია, რომელიც თამაშობს ეზოში და მუსიკალური სმენა აქვს
გ) a ბავშვია, რომელიც არ თამაშობს ეზოში და არ აქვს მუსიკალური სმენა
დ) a ბავშვია, რომელიც თამაშობს ეზოში და არ აქვს მუსიკალური სმენა

3) რას ნიშნავს პირობა $a \in A \setminus B$?

ა) a ბავშვია, რომელიც №1 სკოლაში დადის და არ აქვს მუსიკალური სმენა
ბ) a ბავშვია, რომელიც ეზოში თამაშობს და №1 სკოლაში დადის
გ) a ბავშვია, რომელიც №1 სკოლაში დადის და მუსიკალური სმენა აქვს
დ) a ბავშვია, რომელიც ეზოში თამაშობს და მუსიკალური სმენა აქვს

4) რას ნიშნავს პირობა $a \in (A \cup B) \cap C$?

ა) a ბავშვია, რომელიც ეზოში თამაშობს და ან მუსიკალური სმენა აქვს ან №1 სკოლაში დადის
ბ) a ბავშვია, რომელიც ან №1 სკოლაში დადის ან მუსიკალური სმენა აქვს
გ) a ბავშვია, რომელიც ან №1 სკოლაში დადის ან ეზოში თამაშობს
დ) a ბავშვია, რომელიც ეზოში თამაშობს და მუსიკალური სმენა აქვს

5) რას ნიშნავს პირობა $a \in (A \setminus B) \cap C$?

ა) a ბავშვია, რომელიც №1 სკოლაში დადის და მუსიკალური სმენა აქვს
ბ) a ბავშვია, რომელიც ეზოში თამაშობს და მუსიკალური სმენა აქვს
გ) a ბავშვია, რომელიც ეზოში თამაშობს და №1 სკოლაში დადის
დ) a ბავშვია, რომელიც ეზოში თამაშობს დადის №1 სკოლაში და არა აქვს მუსიკალური სმენა

6) რას ნიშნავს პირობა $a \in (A \setminus B) \setminus C$?

ა) a ბავშვია, რომელიც ეზოში თამაშობს არ დადის №1 სკოლაში და მუსიკალური სმენა აქვს
ბ) a ბავშვია, რომელიც №1 სკოლაში დადის და არ აქვს მუსიკალური სმენა
გ) a ბავშვია, რომელიც №1 სკოლაში დადის და არ თამაშობს ეზოში
დ) a ბავშვია, რომელიც №1 სკოლაში დადის არ აქვს მუსიკალური სმენა და არ თამაშობს ეზოში

7. მოცემულია:

- ყველა კვადრატი, რომბია
- ყველა რომბი, პარალელოგრამია

რომელი დასკვნა გამომდინარეობს ამ ორი დებულებიდან?

ა) არსებობს პარალელოგრამი, რომელიც კვადრატი არაა
ბ) არსებობს პარალელოგრამი, რომელიც რომბი არაა
გ) არსებობს რომბი, რომელიც კვადრატი არაა
დ) ყველა კვადრატი არის პარალელოგრამი

8. მოცემულია:

- ტოლგვერდა სამკუთხედი მახვილკუთხაა

თუ სამკუთხედში ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირის ცენტრები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ სამკუთხედი ტოლგვერდაა

რომელი დასკვნა გამომდინარეობს ამ ორი დებულებიდან?

ა) არსებობს ისეთი მახვილკუთხა სამკუთხედი, რომელიც ტოლგვერდა სამკუთხედი არაა

ბ) არსებობს ისეთი ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომელშიც ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირის ცენტრები ერთმანეთს ემთხვევა

გ) თუ სამკუთხედში ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირის ცენტრები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ ის მახვილკუთხა სამკუთხედია

დ) თუ სამკუთხედი მახვილკუთხაა, მაშინ მასში ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირის ცენტრები ერთმანეთს ემთხვევა

9. მოცემულია:

- თუ ოთხკუთხედში მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი 180°-ია, მაშინ მასზე შემოიხაზება წრეწირი
- ტოლფერდა ტრაპეციაში მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი 180°-ია

რომელი დასკვნა გამომდინარეობს ამ ორი დებულებიდან?

ა) არსებობს ოთხკუთხედი, რომელშიც მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი არ არის 180°

ბ) არსებობს ოთხკუთხედი, რომელზეც შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა

გ) არსებობს ისეთი ოთხკუთხედი, რომელზეც შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა მაგრამ მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი არ არის 180°

დ) ტოლფერდა ტრაპეციაზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა

10. ვთქვათ სამართლიანია შემდეგი ორი დებულება:

- ყველა ბავშვს, რომელიც ფეხბურთელთა ახალგაზრდულ ნაკრებში თამაშობს კარგი მონაცემები აქვს
- ზურას მეგობრებს ფეხბურთში არა აქვთ კარგი მონაცემები

რომელი დასკვნა გამომდინარეობს მათგან აუცილებლად?

ა) ზურას ზოგიერთი მეგობარი თამაშობს ახალგაზრდულ ნაკრებში

ბ) ზურას არცერთი მეგობარი არ თამაშობს ახალგაზრდულ ნაკრებში

გ) ყველა ბავშვი ვისაც კარგი მონაცემები აქვს ახალგაზრდულ ნაკრებში თამაშობს

დ) ყველა ბავშვი ვისაც არ აქვთ მონაცემები ზურას მეგობარია

11. ვთქვათ სამართლიანია შემდეგი ორი დებულება:

- ვერცერთმა მოჭადრაკემ ვისაც აქვს მეორე თანრიგზე დაბალი თანრიგი ვერ მიიღო შეჯიბრებაში უმაღლესი ჯილდო

  ზოგმა მოჭადრაკემ ვისაც აქვს მეორე თანრიგზე დაბალი თანრიგი დაიკავა საპრიზო ადგილი

რომელი დასკვნა გამომდინარეობს მათგან აუცილებლად?

ა) ზოგმა მოჭადრაკემ, რომელმაც დაიკავა საპრიზო ადგილი ვერ მიიღო უმაღლესი ჯილდო

ბ) ვერცერთმა მოჭადრაკემ ვერ მიიღო უმაღლესი ჯილდო

გ) ყველა მოჭადრაკეს, რომელმაც დაიკავა საპრიზო ადგილი მეორე თანრიგზე მაღალი თანრიგი აქვს

დ) ყველა მოჭადრაკე ვისაც უმაღლესი ჯილდო მიუღია სპორტის ოსტატია

§4. ერთწევრები და მრავალწევრები. მოქმედებები ერთწევრებზე და მრავალწევრებზე

ა – ჯგუფი

1. დაასახელეთ მსგავსი ერთწევრები:

1) $5a^2b$(I), $5ab^2$(II), $7ab$(III), $7a^2b$(IV)

ა) III, IV ბ) II, III გ) I,II დ) I,IV

2) $15ab^2c$(I), abc^2(II), a^2bc(III), acb^2(IV)

ა) I, IV ბ) III, IV გ) II, III დ) III, II

2. დაადგინეთ ერთწევრის რიგი:

1) $2a^3b^2c$

ა) 7 ბ) 4 გ) 5 დ) 6

2) $3^2ab^2c^3$

ა) 8 ბ) 7 გ) 5 დ) 6

3. დაადგინეთ მრავალწევრის რიგი:

1) $a^3bc-3a^2b+5a^3bc^3$

ა) 12 ბ) 7 გ) 8 დ) 9

2) $abc+2ab^5-3c^2d^7$

ა) 6 ბ) 3 გ) 9 დ)15

4. რომელია ერთგვაროვანი მრავალწევრი?

1) $5a^2b+3ab^2+a^3$ (I); $ab+a^2b^2+a^3b^3$ (II); $ab+a^2b$(III); $a+b+c^2$ (IV)

ა) I ბ) II გ) III დ) IV

5. დაადგინეთ მრავალწევრის ერთგვაროვნების რიგი:

1) $a^3b+2a^4+3a^2b^2-b^4$

ა) 3 ბ) 4 გ) 2 დ) 5

შეასრულეთ მოქმედებები (№№ 6 – 17):

6. 1) $13b+3b-7b$

ა) 8b ბ) 9b გ) 10b დ) $7b$

2) $-2a+7a-3a-5a$

ა) -3 ბ) 3a; გ) $-3a$; დ) $-a$

3) $-3a-2a-5a$

ა) 2 ბ) $-10a$; გ) $-8a$; დ) $-9a$;

4) $-4ab+5ab-7ab-12ab$

ა) $-18ab$ ბ) $-17ab$ გ) $-19ab$ დ) $-20ab$

5) $-5ab^2-3ab^2+ab^2-2ab^2$

ა) $-11ab^2$ ბ) $-10ab^2$ გ) $-9b^2$ დ) $-9ab^2$

6) $\frac{2}{3}b^3-1\frac{1}{3}b^3+2\frac{2}{3}b^3$

ა) $\frac{5}{3}b^3$ ბ) b^3 გ) $2b^3$ დ) $3b^3$

7) $0{,}2ac^2+2{,}02ac^2-ac^2-0{,}9ac^2$

ა) $0{,}23ac^2$ ბ) $0{,}32ac^2$ გ) $0{,}3ac^2$ დ) $0{,}32a^2c$

8) $-\frac{1}{2}cb+0{,}3cb+\frac{1}{3}cb-0{,}4cb$

ა) $-\frac{5}{9}cb$ ბ) $-\frac{2}{15}cb$ გ) $-\frac{1}{3}cb$ დ) $-\frac{4}{15}cb$

7. 1) $2ab-3bc+4ab-\frac{1}{2}bc-\frac{1}{3}bc$

ა) $6ab-\frac{23}{6}bc$ ბ) $6ab-\frac{5}{6}bc$ გ) $6ab-\frac{7}{6}bc$ დ) $6ab-\frac{7}{6}bc$

2) $-2{,}1a+0{,}2b-2{,}3a+1{,}3ab-0{,}4b$

ა) $1{,}3ab-4{,}4a$; ბ) $-4{,}4a-0{,}2b$; გ) $1{,}3ab-4{,}4a-0{,}2b$; დ) $1{,}3ab-0{,}2b$

3) $-0{,}5ab+1{,}5ac+0{,}2bc-ab+1{,}6bc$

ა) $3a^2b^2+4a^2bc$ ბ) $1{,}8bc-1{,}5ab$ გ) $1{,}5ac-1{,}5ab$ დ) $1{,}8bc+1{,}5ac-1{,}5ab$

4) $\left(-2\frac{1}{3}ab\right)-(2{,}2bc)+(-2{,}4ac)-\left(-3\frac{1}{3}ab\right)+ac$

ა) $ab-2{,}2bc-1{,}4ac$ ბ) $ab+2{,}2bc+1{,}2ac$ გ) $ab-2{,}2bc+ac$ დ) $-ab+2{,}2bc-ac$

5) $-\left(-\frac{2}{5}a^2b\right)+\left(-\frac{1}{3}ab^2\right)-\left(-\frac{1}{2}ab^2\right)+\frac{3}{5}a^2b$

ა) $a^2b-\frac{1}{6}ab^2$ ბ) $-a^2b+\frac{1}{6}ab^2$ გ) $-a^2b-\frac{5}{6}ab^2$ დ) $a^2b+\frac{1}{6}ab^2$

6) $-\left(\frac{2}{3}a^2b-\frac{2}{5}ab^2\right)+\left(-\frac{1}{3}a^2b-\frac{4}{5}ab^2\right)-\left(a^2b-ab^2\right)$

ა) $-a^2b+\frac{1}{5}ab^2$ ბ) $-2a^2b+\frac{3}{5}ab^2$ გ) $2a^2b-\frac{3}{5}ab^2$ დ) $-2a^2b-\frac{3}{5}ab^2$

7) $(-3{,}5abc-2{,}2b^2c+bc)-(-2{,}3b^2c-bc-32abc)$

ა) $-0{,}3abc+0{,}1b^2c+2bc$ ბ) $-0{,}3abc+0{,}1b^2c$ გ) $0{,}3abc+2bc$ დ) $0{,}3abc-0{,}1b^2c-2bc$

8) $(-5{,}2a+3{,}2ab)-(-2{,}8a-1{,}4ab)+(3a-0{,}2ab)$

ა) $0{,}6a+4{,}6ab$ ბ) $0{,}6a+4{,}2ab$ გ) $0{,}6a+4{,}4ab$ დ) $-0{,}6a-4{,}4ab$

8. 1) $\left(-2a^2b\right)\cdot(-3ab)\cdot\left(-5b^3c\right)$

ა) $-30a^3b^4c$ ბ) $-30a^3b^5c$ გ) $30a^2b^4c$ დ) $30a^3b^4c^2$

2) $-\left(a^2b\right)\cdot\left(-a^3b\right)\cdot\left(7b^3c^2\right)$

ა) $7a^5b^4c^3$ ბ) $7a^4b^4c^3$ გ) $7a^5b^5c^2$ დ) $-7a^5b^4c^3$

3) $(2,5ac)\cdot(0,1ab)\cdot\left(-2b^2c^2\right)$

ა) $-0,5a^2b^3c^3$ ბ) $0,5ab^2c^2$ გ) $0,5a^2b^2c^2$ დ) $0,5ab^3c^2$

4) $\left(\frac{2}{5}ac^2\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}a^2b^2\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}a^3bc^2\right)$

ა) $\frac{1}{5}a^6c^2b^4$ ბ) $\frac{1}{5}a^6c^3b^4$ გ) $\frac{1}{5}a^6c^4b^3$ დ) $\frac{1}{5}a^5c^3b^4$

5) $\left(-\frac{2}{3}ab^n\right)\cdot\left(\frac{6}{7}bc\right)\cdot\left(\frac{7}{5}a^{n+1}c^2\right)$

ა) $-\frac{4}{5}a^{n+2}b^{n+1}c^3$ ბ) $-\frac{4}{5}a^nb^nc^5$ გ) $-\frac{4}{5}a^{n+1}b^nc^4$ დ) $-\frac{4}{5}a^nb^{n+1}c^4$

6) $\left(-1\frac{1}{3}a^2bc\right)\cdot\left(-\frac{3}{8}ab^2c^3\right)\cdot\left(\frac{6}{7}bc^{n-1}\right)$

ა) $\frac{3}{7}a^3b^3c^{n+3}$ ბ) $\frac{3}{7}a^4b^4c^{n+2}$ გ) $\frac{3}{7}a^2b^3c^{n+1}$ დ) $\frac{3}{7}a^3b^4c^{n+3}$

7) $-\left(-2\frac{1}{5}a^nbc^m\right)\cdot\left(\frac{25}{11}ab^kc^2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}a^kb^mc\right)$

ა) $\frac{5}{3}a^{n+k+1}b^3c^{m+1}$ ბ) $\frac{5}{3}a^{n+k+1}b^{m+k+1}c^{m+3}$

გ) $\frac{5}{3}a^{n+k}b^2c^3$ დ) $\frac{5}{3}a^{n+k+1}b^{m+k}c^{m+1}$

8) $\left(4\frac{1}{5}a^{2-n}b\right)\cdot\left(-\frac{3}{7}a^{n-1}b^{n-1}\right)\cdot\left(\frac{5}{9}ab^m\right)$

ა) $-a^2b^{n+m}$ ბ) $\frac{4}{5}a^2b^{n+m+1}$ გ) $-\frac{4}{5}ab^{n+m}$ დ) $-\frac{2}{5}a^2b^m$

9. 1) $\left(1\frac{5}{7}a^3b^2c\right):\left(\frac{3}{5}a^2bc\right)$

ა) $\frac{1}{7}a^3bc$ ბ) $\frac{13}{7}a^2b^2$ გ) $\frac{20}{7}ab$ დ) $\frac{12}{7}a^2b^m$

2) $\left(-0,7a^4b^5c^7\right):\left(-0,3a^4b^4c^3\right)$

ა) $\frac{3}{7}ac^4$ ბ) $\frac{7}{3}bc^4$ გ) $0,7abc^3$ დ) $0,3a^2bc$

3) $\left(2,4a^{12}b^5c^2\right):\left(-0,8a^{10}b^3c^2\right)$

ა) $-3a^2b^2$ ბ) $3ab^2$ გ) $3a^2b$ დ) $-3abc$

4) $\left(-2\frac{1}{5}a^5bc^8\right):\left(\frac{11}{12}a^3bc^6\right)$

ა) $-2,4a^2c^2$ ბ) $2,4ac$ გ) $2,4a^2b$ დ) $2,4ab^2$

5) $\left(32a^7b^8c^{12}\right):\left(-4a^5b^8c^9\right)$

ა) $-8a^2c^3$ ბ) $8a^2bc^2$ გ) $-8a^3c^2$ დ) $-8a^3bc$

6) $\left(-0{,}125b^8c^3\right):\left(4b^7c\right)$

ა) $-\frac{1}{8}bc^3$ ბ) $-\frac{1}{32}bc^2$ გ) $-\frac{1}{8}b^2c^2$ დ) $-\frac{1}{8}b^3c$

7) $\left(-0{,}25b^{n+1}c^{n-1}\right):\left(0{,}125b^mc^{n-5}\right)$

ა) $-2b^{m-1}c^{2n+4}$ ბ) $-2b^{m-n}c^4$ გ) $-2b^{n-m}c^3$ დ) $-2b^{n-m+1}c^4$

8) $\left(-0{,}4b^{m-1}a^{n+1}c^{p+3}\right):\left(-0{,}2b^5a^nc^q\right)$

ა) $2b^{m-n}a^2c^3$ ბ) $2b^{m-5}c^2c^{p-3}$ გ) $2b^{m-6}ac^{p-q+3}$ დ) $2b^mac^{p-q}$

10. 1) $2a(3b+5c)+b(a-3c)$

ა) $7ab+10ac-3bc$; ბ) $7ab+17ac$; გ) $7ab+13bc$; დ) $7ab-3bc$

2) $3a^2b(2a-5b)-3ab\left(a^2+3ab\right)$

ა) $3ab+24a^3$ ბ) $3ab-24b^3$ გ) $3ab^3-24ab^2$ დ) $3a^3b-24a^2b^2$

3) $5ac(0{,}5ab-2{,}1c)-2c^2(a+1{,}5b)$

ა) $5{,}5a^2bc-3bc^2$ ბ) $2{,}5a^2bc-12{,}5ac^2-3bc^2$ გ) $2{,}5a^2bc-3bc^2$ დ) $12{,}5ac^2-3bc^2$

4) $0{,}1a(0{,}2b-0{,}3a)+2ab(7c-1)$

ა) $14abc-ab$ ბ) $14abc-0{,}03a^2-1{,}98ab$ გ) $14abc-0{,}03a^2$ დ) $14abc-1{,}98ab$

5) $-(+ab)\left(a^2-3ab-4ac\right)+a^2(-3ab-2a-3ac)+3a^3c+2a^3$

ა) $4a^2bc-4a^3b$ ბ) $3a^3b^2+4a^2bc$ გ) $3a^2b^2+4a^2bc-4a^3b$ დ) $3a^2b^2+4a^2bc$

6) $2abc-3a(b+2a-3bc)+c(3a+4b-2abc)+2abc^2+6a^2+3ab$

ა) $11abc+3ac+4bc$; ბ) $abc+ac+bc$; გ) $9abc+2ac+bc$; დ) $9abc+4ac+2bc$

7) $7a^2bc^2-2(a+bc^2-b)(-2a^2)+3a(abc^2-a)-10a^2bc^2-4a^2bc^2+3a^2$

ა) $4a^3-4a^2b$ ბ) a^3-a^2b გ) $4a^3-a^2b$ დ) a^3-4a^2b

8) $-2ab^3+3b\left(a^2-2ab^2\right)-3b^2(2a-3ab)-ab^3+6ab^2$

ა) $3ab^2$ ბ) $3a^2b$ გ) $3a^2b^2$ დ) $3ab^3$

11. 1) $\left(a^2-3bc^2\right)\cdot\left(a-1\frac{1}{3}b\right)+4b\left(\frac{a^2}{3}-bc^2\right)$

ა) a^3-abc^2 ბ) a^3-3abc გ) a^3+3ac^2 დ) a^3-3abc^2

2) $(2a-3bc)\cdot\left(\frac{1}{2}b-\frac{1}{3}c-\frac{1}{5}d\right)+\frac{3}{2}b^2c-\frac{3}{5}bcd+\frac{2}{5}ad+\frac{2}{3}ac$

ა) $ab^2+b^2c^2$ ბ) $ab+bc^2$ გ) $ab+bc$ დ) ab^2+bc

3) $(ab-2cd^2)(2a-3bc+d)+3acb^2+4acd^2-6c^2d^2b+2cd^3$

ა) $2a^2b-\frac{2}{5}ad$ ბ) $2a^2b+bad$ გ) $2c^2b$ დ) $2a^2b^2$

4) $(2{,}5a^3-b^2c)(2{,}5a+2bc^2)-5a^3bc^2+2{,}5ab^2c$

ა) $6{,}25a^4+5a^3bc^2$ ბ) $6{,}25a^4$ გ) $6{,}25a^4-2b^3c^3$ დ) $6{,}25a^4+2b^3c^3$

5) $(2a^{n+1}b-c^m)(a^{n-1}b^m+c)+c^ma^{n-1}b^m-2a^{2n}b^{m+1}$

ა) $2a^{2n}b^{m+1}-c^{m+1}$ ბ) $2a^{2n}b^{m+1}-b^{m+1}$; გ) $c^ma^{n-1}b^m$ დ) $2bca^{n+1}-c^{m+1}$

6) $(5ab^m-a^nb)(2a^nb-3ab)+2a^{2n}b^2+15a^2b^{m+1}-10a^{n+1}b^{m+1}$

ა) $3a^{n+1}b^2$ ბ) $3a^nb$ გ) $3ab^{n+1}$ დ) $3a^{n+1}b^3$

7) $\left(1\frac{1}{2}a^2b^{m-1}-\frac{1}{3}b^2a^{m-1}\right)\left(\frac{2}{3}ab+3b\right)+\frac{2}{9}a^mb^3-a^2b^3\left(\frac{9}{2}b^{m-2}-a^{m-3}\right)$

ა) $-b^3a^{m-1}$ ბ) a^3b^m გ) a^2b^{m-1} დ) $\frac{9}{2}a^2b^{m+1}$

8) $(2a^nb^nc-3ac)(2a-3c)+3ac(2a+2a^{n-1}b^nc-3c)$

ა) $4ab^nc^n$ ბ) $4a^{n+1}b^nc$ გ) $4a^nbc^n$ დ) $4a^nb^n$

12. 1) $(a^4+a^3-a^2-1):(a-1)$

ა) a^3+2a^2+a+1 ბ) a^3+3a^2+2a+1 გ) a^3+a^2+2a+1 დ) a^3+a^2+a+1

2) $(a^4+3a^3+4a^2+5a+2):(a+2)$

ა) a^3+a^2+2a+1 ბ) a^3+a^2+a+1 გ) a^3+2a^2+2a+1 დ) a^3+a^2+3a+1

3) $(4a^5+10a^4+2a^3-6a^2-15a-3):(2a^2+5a+1)$

ა) $2a^3-1$ ბ) $2a^3-3$ გ) $2a^3-2$ დ) $2a^3-4$

4) $(2a^6-2a^5-4a^3+3a^4-a^2-3a-1):(a^3-a^2-1)$

ა) $2a^3+2a+1$ ბ) $2a^3+a+1$ გ) $2a^3+3a+2$ დ) $2a^3+3a+1$

5) $(10a^4+9a^3-10a^2-8a-1):(5a^2+7a+1)$

ა) $2a^2-a-2$ ბ) $2a^2-a$ გ) $2a^2-a-1$ დ) $2a^2-2a-1$

6) $(5a^5b+6a^3b+a^3b^2+ab^2+ab):(5a^2+b+1)$

ა) a^3b+a ბ) a^3b+3ab გ) a^3b+2ab დ) (a^3b+ab)

7) $(a^5b+2a^4b^2+3a^3b^3-3a^3b-6a^2b^2-9ab^3):(a^3b-3ab)$

ა) $a^2+2ab+3b^2$ ბ) $a^2+2ab+2b^2$ გ) $a^2+2ab+b^2$ დ) $a^2+2ab+4b^2$

8) $(4a^5b-6a^4-2a^3b^2+2a^2b^4+3a^2b-3ab^3):(2a^2b-3a)$

ა) $2a^3-ab+b^3$ ბ) $2a^3-ab+b$ გ) $2a^3-ab+b^2$ დ) $2a^3-ab+2b^3$

13. 1) $-2(-3a^2bc^3)^2+(-2abc^4)^3$

ა) $-18a^4b^2c^6-8a^3b^3c^{12}$ ბ) $36a^4b^2c^6$ გ) $36a^2bc^3$ დ) $-18a^2b^2c^6$

2) $\left(-0{,}1ab^3c^4\right)^3+\left(-2ab^2c\right)^4$

ა) $-0{,}1ab^3c^4+16a^4b^8c^4$ ბ) $-0{,}1a^3b^9c^{12}+16ab^8c^4$

გ) $-0{,}01a^3b^3c^4+16a^4b^2c^4$ დ) $-0{,}001a^3b^9c^{12}+16a^4b^8c^4$

3) $\left(1\frac{1}{2}a^{n+1}b^2c^m\right)^2+\left(2\frac{2}{3}abc^m\right)^2$

ა) $\frac{9}{4}a^{2n+2}b^4c^{2m}+\frac{64}{9}a^2b^2c^{2m}$ ბ) $\frac{9}{4}a^{n+1}b^2c^m+\frac{64}{9}abc^m$

გ) $\frac{9}{4}abc^{2m}+\frac{1}{8}abc^{2m}$ დ) $\frac{9}{4}a^2bc^m+\frac{64}{9}ab^3c^n$

4) $\left(\frac{5}{3}a^{-n}bc^n\right)^3-\left(1\frac{2}{3}abc^n\right)^2$

ა) $\frac{125}{27}a^{-3n}b^3c^{3n}-\frac{25}{9}a^2b^2c^{2n}$ ბ) $\frac{125}{27}a^{-n}b^3c^{3n}$

გ) $-\frac{25}{9}a^2b^2c^{2n}$ დ) $\frac{25}{9}a^{-3n}b^3c^{3n}+\frac{5}{3}abc^n$

5) $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a^m}{b^n}c\right)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{cb}{a}\right)^n$

ა) $\frac{8}{3}a^{3m-1}b^2c^{m-1}$ ბ) $\frac{8}{3}3^{n-3}a^{3m}b^{-n}c^3$

გ) $\frac{8}{5^n}3^{n-3}a^{3m-n}b^{-2n}c^{n+3}$ დ) $\frac{8}{3}a^{2m-n}\cdot b^{-2n}\cdot c^{n+3}$

6) $\left(\frac{a^2bc^3}{d}\right)^4\cdot\left(-\frac{ac^2d}{b}\right)^3$

ა) $-\frac{a^{11}c^{18}b}{d}$ ბ) $-\frac{a^{11}c^{12}b^2}{d}$ გ) $-\frac{a^{11}c^{12}b}{d^2}$ დ) $-\frac{a^{12}c^{18}b^3}{d^2}$

7) $\left(-3ab^nc^m\right)^2\cdot\left(abc^2\right)^n$

ა) $9a^{n+1}b^{2n}c^{2m+2}$ ბ) $9a^{n+2}b^{3n}c^{2m+2n}$ გ) $9a^nb^{2n}c^{m+n}$ დ) $9a^{2n}b^{2n}c^{m+2n}$

8) $\left(\frac{-ab^3}{c^2d}\right)^5\cdot\left(-\frac{2cd^2}{ab^2}\right)^4$

ა) $-\frac{16abd^3}{c^2}$ ბ) $-\frac{16a^2b^2d^3}{c}$ გ) $-\frac{16ab^3d^2}{c^4}$ დ) $-\frac{16ab^7d^3}{c^6}$

14. 1) $(2a-b)(2a+b)+\left(c^2-d\right)\left(c^2+d\right)$

ა) $4a^2-b^2+c^4-d^2$ ბ) $4a^2-d^2$ გ) c^4-d^4 დ) $-b^2+c^4-d^2$

2) $\left(1\frac{1}{2}ab-1\right)\cdot\left(1\frac{1}{2}ab+1\right)+(2a+1)(2a-1)$

ა) $2.25a^2b^2-2$ ბ) $2.25a^2b^2+4a^2-2$ გ) $4a^2-2$ დ) $2.25a^2b^2+4a^2$

3) $\left(\frac{2}{5}a^2b-c^2\right)\cdot\left(\frac{2}{5}a^2b+c^2\right)-(abc-1)(abc+1)$

ა) $0.16a^4b^2-c^4-a^2b^2c^2+1$ ბ) $0.16a^4b^4+1$ გ) $0.16a^4b^2-c^4+1$ დ) 0

4) $(-0{,}1a^2bc+2{,}1b)(-0{,}1a^2bc-2{,}1b)-(a^3+b)(a^3-b)$

ა) $-a^6+b^2$ ბ) $0.01a^{24}b^2-a^6$

გ) $0{,}01a^4b^2c^2-a^6-3{,}41b^2$ დ) $0.01a^4-a^6-3.4b^2$

5) $(0{,}2a^nb-0{,}3c^3)(0{,}2a^nb+0{,}3c^3)-(a^4+b^4)(a^4-b^4)$

ა) b^8-a^8 ბ) $0{,}04a^{2n}b^2-0{,}09c^6-a^8+b^8$

გ) $0.04a^{2n}b-a^4$ დ) $a^2-b^n+2cb+3.5a^n$

6) $(0{,}3ab^{n+1}c-4a^3c)(0{,}3ab^{n+1}c+4a^3c)-(a^2b+c^3)(a^2b-c^3)$

ა) $0{,}09a^2b^{2n+2}c^2-16a^6c^2-a^4b^2+c^6$ ბ) $0.09a^2b^{2n+2}-16a^6c^2-a^4b^2+c^6$

7) $\left(2\frac{1}{2}ac-5b^{n+1}\right)\cdot\left(2\frac{1}{2}ac+5b^{n+1}\right)+(0{,}7a-2{,}5)(0{,}7a+2{,}5)$

ა) $6.25a^2c^2-25b^{n+1}+0.49a^2-6.25$ ბ) $6.25a^2c^2-25b^{2n+2}+0.49a^2-6.25$

8) $\left(1\frac{1}{3}a^n-2\frac{1}{3}b^{m+1}\right)\cdot\left(1\frac{1}{3}a^n+2\frac{1}{3}b^{m+1}\right)+(a^k-b^m)(a^k+b^m)$

ა) $\frac{16}{9}a^n-\frac{49}{9}b^{2m+2}+a^{2k}-b^{2m}$ ბ) $\frac{16}{9}a^{2n}-\frac{49}{9}b^{2m+2}+a^{2k}-b^{2m}$

15. 1) $(2a^2-3b)^2+2(a+3b)^2$

ა) $4a^4-12a^2b+12ab+a^2+27b^2$ ბ) $4a^4-12a^2b+12ab+2a^2+27b^2$

2) $\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b\right)^2-3\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b\right)^2$

ა) $\frac{4}{3}ab-\frac{1}{12}a^2-\frac{23}{36}b^2$ ბ) $\frac{2}{3}ab-\frac{1}{12}a^2-\frac{25}{36}b^2$

3) $(0{,}5a+0{,}3bc)^2-(2{,}5ab-c)^2$

ა) $4a^4b^2c^2-12a^4bc^2+9a^4c^2+c^2b^4c^2-4ab^3c^2+4b^2c^2$

ბ) $0.25a^2+0.09b^2c^2+5.3abc-6.25a^2b^2-c^2$

4) $(2a^2bc-3a^2c)^2+(ab^2c-2bc)^2$

ა) $4a^4b^2c^2-12a^4bc^2+9a^4c^2+a^2b^4c^2-4ab^3c^2+4b^2c^2$

ბ) $4a^4b^2c^2-12a^4bc^2+9a^4c^2+2c^2b^4c^2-4ab^3c^2+4b^2c^2$

5) $\left(a^nb-3a^2b^3\right)^2-\left(ab^n-ab\right)^2$

ა) $a^{2n}b^2-6a^{n+2}b^4+9a^4b^6-a^2b^{2n}-a^2b^2+2a^2b^{n+1}$

ბ) $a^{2n}b-6a^{n+2}b^4+9a^4b^6-a^2b^n-a^2b^2+2ab^{m+2}-b^{2m+2}$

6) $\left(a^{n+1}b^m-2ab^n\right)^2-\left(ab-b^{m+1}\right)^2$

ა) $a^{2n}b^{2n}-4a^{n+2}b^{m+n}+4a^2b^{2n}-a^2b^2+2ab^{m+2}-b^{2m+2}$

ბ) $a^{2n+2}b^{2n}-4a^{n+2}b^{m+n}+4a^2b^{2n}-a^2b^2+2ab^{m+2}-b^{2m+2}$

7) $\left(ab^{n-1}+2a^nb\right)^2+\left(a^m+b^{n-1}\right)^2$

ა) $a^2b^{2n-2}+4a^{n+1}b^n+4a^{2n}b^2+a^{2m}+2a^mb^{n-1}+b^{2n-2}$

ბ) $a^2b^{2n-2}+4a^{n+1}b^n+4a^{2n}b\ \ +a^{2m}+2a^mb^{n-1}+b^{2n-2}$

8) $\left(\frac{1}{3}a^3b^{n-1}c-\frac{2}{3}ab^3c^{n-1}\right)^2+3\left(\frac{2}{3}ab^2-c\right)^2$

ა) $\frac{1}{9}a^6b^{2n-2}c^2-\frac{4}{9}a^4b^{n+2}c^n+\frac{4}{9}a^{2n}b^6c^{2n-2}+\frac{4}{3}a^2b^4-4ab^2c+3c^2$

ბ) $\frac{1}{9}a^6b^{2n-2}c^2-\frac{4}{9}a^4b^{n+2}c^n+\frac{4}{9}a^2b^6c^{2n-2}+\frac{4}{3}a^2b^4-4ab^2c+3c^2$

16. 1) $(2a-b)^3+\left(a^2-2b\right)^3$

ა) $8a^3-10a^2b+6ab^2-8b^3+a^6-6a^4b+12a^2b^2$

ბ) $8a^3-12a^2b+6ab^2-9b^3+a^6-6a^4b+12a^2b^2$

2) $\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}b^2\right)^3-\left(a+\frac{1}{2}b\right)^3$

ა) $\frac{1}{8}\ a^6-\frac{1}{4}a^4b^2+\frac{1}{6}a^2b^4-\frac{1}{27}b^6-a^3-\frac{3}{2}a^2b-\frac{3}{4}ab^2-\frac{1}{8}b^3$

ბ) $a^6-\frac{1}{4}a^4b^2+\frac{1}{3}a^2b^4-\frac{1}{8}b^6-a^3-\frac{3}{2}a^2b-\frac{3}{4}ab^2-\frac{1}{8}b^3$

3) $\left(\frac{2}{3}a^2b-3a^3\right)^3+\left(\frac{1}{5}ab^2-b\right)^3$

ა) $\frac{4}{27}a^6b^2-4a^7b^2+18a^b-27a^9+\frac{1}{25}a^3b^6-\frac{3}{25}a^2b^5+\frac{3}{5}ab-b^3$

ბ) $\frac{8}{27}a^6b^3-4a^7b^3+18a^8b-27a^9+\frac{1}{125}a^3b^6-\frac{3}{25}a^2b^5+\frac{3}{5}ab^4-b^3$

4) $\left(0{,}1a^nb-0{,}2ab^n\right)^3-\left(0{,}1ab^2+0{,}2a^2b\right)^3$

ა) $0{,}001a^{3n}b^3-0{,}006a^{2n+1}b^{n+2}+0{,}012a^{n+2}b^{2n}-0{,}008a^3b^{3n}-$
$0{,}001a^3b^6-0{,}006a^4b^5-0{,}012a^5b^4-0{,}008a^6b^3$

ბ) $0.01a^{3n}b^3-0.006a^{2n+1}b^{n+2}+0.02a^{n+2}b^{2n}-0.008a^3b^{3n}-0.001a^3b^6-$
$-0.006a^4b^6+0.012a^5b^2+0.008a^6b^3$

5) $\left(1\frac{1}{2}a^nb^m-1\frac{1}{3}a\right)^3+\left(a^2b^n-2b\right)^3$

ა) $\frac{27}{8}a^{3n}b^{3m}-9a^{2n+1}b^{2m}+8a^{n+2}b^m-\frac{64}{27}a^3+a^6b^{3n}-6a^4b^{2n+1}+$
$12a^2b^{n+2}-8b^3$

ბ) $\frac{27}{8}a^{3n}b^{3m}-9a^{2n}b^{2m}+8a^{n+2}b^{m}-\frac{64}{27}a^{3}+a^{4}b^{3m}-6a^{4}b^{2n+1}+12a^{2}b^{n+2}-8b^{3}$

6) $(a^3+3b^2)^3-(a^2-b^3)^3$

ა) $a^9+9a^6b^2+27a^3b^4+27b^6-a^6+3a^4b^3-3a^2b^6+b^9$

ბ) $a^6+9a^4b^2+27a^2b^4+16b^6-a^6+3a^4b^3-3a^2b^6+b^8$

7) $(2ab-3a^n)^3+(3a^2-2b^n)^3$

ა) $4a^3b^3-36a^{n+2}b^2-54a^{2n}b-27a^{3n}+16a^6-54a^2b^n+36a^2b^{2n}-8b^{3n}$

ბ) $8a^3b^3-36a^{n+2}b^2+54a^{2n+1}b-27a^{3n}+27a^6-54a^4b^n+36a^2b^{2n}-8b^{3n}$

8) $(a^nb^2+b^na^2)^3-(a^mb-a)^3$

ა) $a^{3n}b^6+3a^{2n+2}b^{n+4}+3a^{n+4}b^{2n+2}+b^{3n}a^6-a^{3m}b^3+3a^{2m+1}b^2-3a^{m+2}b+a^3$

ბ) $a^{3n}b^6+3a^{n+3}b^{n+4}+3a^{n+4}b^{2n+2}+b^{2n}a^4-a^{3m}b^3+3a^{2m}b^2-2a^{m+2}+a^3$

17. 1) $(2a-3b^2)(4a^2+6ab^2+9b^4)$

ა) $8a^3-27b^6$ ბ) $6a^3+16b^4$ გ) $12a^4-27b^6$ დ) $32a^3-16b^4$

2) $\left(\frac{1}{2}ab-\frac{3}{4}c\right)\cdot\left(\frac{a^2b^2}{4}+\frac{3}{8}abc+\frac{9}{16}c^2\right)$

ა) $\frac{a^3b^3}{8}-\frac{25c^3}{64}$ ბ) $\frac{a^3b^3}{8}-\frac{27c^3}{64}$ გ) $\frac{a^2b^2}{8}-\frac{25c^3}{64}$ დ) $\frac{a^3b^3}{8}+\frac{25c^3}{34}$

3) $(4a^4+10b^3)(16a^8-40a^4b^3+10b^6)$

ა) $64a^{12}+1000b^9$ ბ) $32a^8+1000b^9$ გ) $64a^{12}-1000b^9$ დ) $64a^9-100b^8$

4) $(a^4b^6+c^9)(a^8b^{12}-a^4b^6c^9+c^{18})$

ა) $a^6b^8+c^{27}$ ბ) $a^{12}b^{18}-c^{27}$ გ) $a^{12}b^{18}+c^{27}$ დ) $a^{12}b^{18}+c^{32}$

5) $(4+a^4b^3c)(16-4a^4b^3c+a^8b^6c^2)$

ა) $64+a^4b^9c^3$ ა) $32+a^8b^9c^2$ ა) $64-a^{12}b^9c^3$ ა) $64+a^{12}b^9c^3$

6) $\left(\frac{2}{3}a^n-1\right)\left(\frac{4}{9}a^{2n}+\frac{2}{3}a^n+1\right)$

ა) $\frac{8}{27}a^{3n}+1$ ბ) $\frac{8}{27}a^{3n}-1$ გ) $\frac{25}{27}a^{3n}-1$ დ) $\frac{8}{27}a^{3n}-2$

7) $(a^{n+1}b^m-c)(a^{2n+2}b^{2m}+a^{n+1}b^mc+c^2)$

ა) $a^{3n+3}b^{2m}-c^3$ ბ) $a^{3n+3}b^{3m}+c^3$ გ) $a^{3n+2}b^{3m}-c^3$ დ) $a^{3n+3}b^{3m}-c^3$

8) $(5a^{n-1}b^2+3a^2b^3)(25a^{2n-2}b^4-15a^{n+1}b^5+9a^4b^6)$

ა) $125a^{3n-3}b^6-27a^6b^9$ ბ) $125a^{3n-3}b^6+27a^6b^9$

გ) $125a^{3n-3}b^4+27a^6b^9$ დ) $125a^{3n-3}b^6-16a^6b^9$

დაშალეთ მრავალწევრები მამრავლებად (№№ 18– 22):

18. 1) $12x-8y$

2) $5xy-10y$

3) $3xy^2+6x^2y$

4) $5x^3y+10x^2y^2+15xy^2$

5) $3(x+y)+x(x+y)$

6) $y(x-y)+3(x-y)$

7) $xy(x+2y)-x(x+2y)$

8) $x(x+y)-y(x+y)-z(x+y)$

19. 1) $3x+xy+3y+y^2$

2) $5xy+10x^2y+5y+10xy$

3) $6x^2-15y^2-9xy+10xy$

4) $3xy-9xz+2yz-6z^2$

5) $2a^3-3ba^2+2axy-3bxy$

6) $5a^2+5ax-5ay-2ab-2bx+2by$

7) $6a^3-3a^2x+9a^2y-2ab^2+b^2x-3b^2y$

8) $3a^2bx+3a^2by-xz+bx-yz+by$

20. 1) $9-4x^2$

2) $\frac{16}{25}-9x^2y^2$

3) $4a^4b^2-25x^2y^4$

4) $0{,}25a^6-0{,}16b^8$

5) $(2a-b^2)^2-(b-2a)^2$

6) $(5a-3b)^2-(5b-3a)^2$

7) $(a+2x+b)^2-(a-1)^2$

8) $(2a-b)^2-(a+b-c)^2$

21. 1) $27a^3-8$

2) $8a^3b^3-27c^3$

3) $a^{3n}b^3-a^3b^{3n}$

4) $(2a+b)^3-8(a-2b)^3$

5) a^6+125b^6

6) $(a^3-b)^3+8(a-b)^3$

7) $(a+2b)^3-a^3$

8) $(a+b)^3-27(a-b)^3$

22. 1) $4a^2+4a+1-16$

2) $9a^2-12ab+4b^2-25$

3) $4a^2+12a+9-b^2$

4) $9b^2-a^2+c^2-6bc$

5) $\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{15}a^2b+\frac{2}{25}ab^2+\frac{b^3}{125}-1$

6) $\frac{a^3}{8}-\frac{a^2b}{4}+\frac{ab^2}{6}-\frac{b^3}{27}-8$

7) $8a^3-12a^2b^2+6ab^4-b^6-a^3$

8) $b^3-3a^2b^2+3ba^4-a^6-8b^3$

შეასრულეთ მოქმედებები რაციონალურ გამოსახულებებზე (№№23 – 26):

23. 1) $\left(\frac{a^2+4}{2a}-\frac{a^2}{2(a+2)}+\frac{4}{a^2-2a}\right)\cdot\frac{a-2}{a^2+4}$

2) $\left(\frac{a^3-a}{1-a^2}+\frac{1+a^2}{a}\right)^2\cdot\left(1+\frac{2}{a^2}+\frac{1}{a^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

3) $\left(3-\frac{12a}{a+3}+a\right)\cdot\left(\frac{a}{a+3}+\frac{9-3a}{a^2-9}\right)^{-1}$

4) $\left(\frac{a^2}{b^2-ab}-\frac{a^2}{b^2+ab}\right)\cdot\frac{b^2-a^2}{2ab}$

5) $\left(\frac{a}{a+3}+\frac{9-3a}{a^2-9}\right)\cdot\left(a-\frac{12a}{a+3}+3\right)^{-1}$

6) $a^2-4ab-\frac{a^4-ab^3}{(a-b)^2+3ab}$

7) $\frac{2\left(a^{-1}+b^{-1}\right)}{(a+b)^3}+\frac{a^{-2}+b^{-2}}{(a+b)^2}$

8) $\left(b-\frac{4b}{2-b}\right)\cdot\left(2b+\frac{b^3+4b}{b-2}\right)^{-1}$

24. 1) $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{a^2+2}{a^3+1}\right)\cdot\left(a+\frac{1}{a-1}\right)$

2) $\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b(a-b)^2}{a^4-b^4}\right)\cdot\left(a^{-1}+b^{-1}\right)$

3) $\left(\frac{4a^2}{2a-1}-2a\right)^{-1}\cdot\left(2a+1-\frac{1}{1-2a}\right)$

4) $\left(a-b+\frac{4b^2-a^2}{a+b}\right):\left(\frac{a}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}+\frac{2}{b-a}\right)$

5) $\left(\frac{a}{2}-\frac{a^3}{8b^2}\right)\cdot\left(\frac{2}{2b+a}-\frac{1}{2b-a}-\frac{3a}{a^2-4b^2}\right)$

6) $\frac{a^2b-25b^3}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{5a+b}{a^2-5ab}+\frac{5a-b}{a^2+5ab}\right)$

7) $\left(\frac{b}{ab^2-2a^2b+a^3}:(b-a)^{-1}+\frac{a}{ab-b^2}\right):\left(\frac{ab}{a^2-b^2}\right)^{-1}$

8) $\frac{1}{a-3}-\frac{a}{a^2-9}\left(\frac{a+3}{a}-a-3\right)$

25. 1) $\frac{(a+b)^2-4ab}{1+\frac{b}{a}}:\frac{(a+b)^2}{a^2+ab}$

2) $\left(\frac{ab-b^2}{a^2-b^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}\right):\frac{a}{a-b}$

3) $\left(1-\frac{1}{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{a^3-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\right)$

4) $\left(a-\frac{2a^2-1}{a^3}\right)\cdot\left(\frac{a^4+a^3}{a-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{a^2+1+2a}\right)$

5) $\left(\frac{3}{9a-6a^2+a^3}\cdot(3-a)+\frac{a}{3a+9}\right):\frac{(6a)^{-1}}{a^2-9}$

6) $\left[(a+b)^2-\frac{a^3-b^3}{a-b}\right]\cdot\frac{b^2}{a^2b}\cdot\left(\frac{b-a^3b}{1-a^2}-ab\right)^{-1}\cdot\frac{1-a}{b}$

7) $\left(a-\frac{a^2}{3+a}\right)\cdot\left(\frac{9+a^2}{3}+a\right)\cdot\left(\frac{27-a^3}{9-a^2}\right)^{-1}$

8) $a^3b^3\left(1-a^2b^2\right)-\frac{\left(1-a^6b^6\right)\left(a^2b^2-1\right)}{1+a^3b^3}+5a^2b^2$

26. 1) $\left(\frac{a+b}{a}-\frac{b-17}{b}\right)\cdot\frac{a^3b^2}{b^2+17a}$

2) $\left(\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)$

3) $\left(\frac{ab+b^2}{5a^2+5ab}+ab+b^2\right)\cdot\frac{5a}{a+b}-\frac{b}{a+b}$

4) $\left(\frac{2}{4a^2-b^2}+\frac{1}{(2a+b)^2}+\frac{1}{(2a-b)^2}\right)\cdot\frac{12a^2+12ab+3b^2}{16a}$

5) $\frac{a^3-b^3}{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}\cdot(a+b)\cdot\frac{a^2b^2}{\left(a^2-b^2\right)^2}$

6) $\left(1-\frac{2}{a}\right)^2\cdot\left(1+\frac{2}{a}+\frac{4}{a^2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{a^3-8}\right)^2$

7) $\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}\right)^2\cdot\left(\frac{a-1}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}\right)$

8) $\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}-ab\right)\cdot\left(\frac{a+b}{a^2-b^2}\right)^2$

ბ – ჯგუფი

27. დაშალეთ მამრავლებად

1) a^4-b^4
2) a^5-b^5
3) a^6+b^6
4) a^6-b^6
5) a^5+b^5
6) a^7+b^7
7) a^7-b^7
8) a^9+b^9

28. 1) დაამტკიცეთ, რომ რიცხვი $117^{15}-8^5$ იყოფა 23-ზე.

2) დაამტკიცეთ, რომ რიცხვი $95^{14}-49^7$ იყოფა 11-ზე.

3) დაამტკიცეთ, რომ რიცხვი $209^{21}+107^{21}$ იყოფა 79-ზე.

29. შემდეგი გამოსახულებები წარმოადგინეთ $a+b, a-b$ და ab გამოსახულებების კომბინაციებად

1) a^2+b^2
2) a^2-b^2
3) a^3+b^3
4) a^3-b^3
5) a^4+b^4
6) a^4-b^4
7) a^5+b^5
8) a^5-b^5

30. დაამტკიცეთ, რომ თუ a,b,c სამკუთხედის გვერდებია და სამართლიანია ტოლობები:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b-c}$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+c-b}$$
$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b+c-a}$$

მაშინ სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

31. დაამტკიცეთ ტოლობა

$$\frac{(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5}{5}=\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{3}\cdot\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}$$

32. დაამტკიცეთ, რომ ქვემოთ მოყვანილი გამოსახულება x – ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის დადებითია

$$\left(\frac{3}{2}x+1\right)\left(\frac{3}{2}x+2\right)\left(\frac{3}{2}x+3\right)\left(\frac{3}{2}x+4\right)+\frac{3}{2}$$

33. k-ის რა მნიშვნელობისათვის გაიყოფა x^7-1 მრავალწევრი x^k-1 მრავალწევრზე?

34. $\frac{x-2}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$ ტოლობიდან განსაზღვრეთ A, B, C პარამეტრები.

35. $\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+2}$ ტოლობიდან განსაზღვრეთ A, B, C პარამეტრები.

36. x^2+7x+3 კვადრატული სამწევრი წარმოადგინეთ კვადრატულ სამწევრად x -1 გამოსახულების მიმართ.

37. დაამტკიცეთ, რომ რიცხვი $6\cdot 113^{15}-16\cdot 27^5+26\cdot 19^9-36\cdot 64^3$ იყოფა 5-ზე

38. გამოთვალეთ $f(x,y,z)=z^2+2x^2+5y^2-2xz+4yz-4xy-6x-2y+9$ მრავალწევრის მინიმალური მნიშვნელობა

39. გამოთვალეთ $f(x,y)=5x^2+9y^2-12xy-2x+3$ მრავალწევრის მინიმალური მნიშვნელობა

40. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი სასრული რაოდენობის ხარისხის მაჩვენებლებისათვის რიცხვი

$$2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}-1$$ იყოფა 15-ზე

41. დაამტკიცეთ, რომ რიცხვი

$$2^{3^{4^{\cdot^{\cdot^{9}}}}}-1$$ იყოფა 73-ზე

42. ჩამოთვალეთ ყველა შესაძლო ნაშთი, რომელიც მიიღება 5^n-ის 7-ზე გაყოფისას.

43. რა ნაშთი არ მიიღება 4^n-ის 5-ზე და 5^n-ის 6-ზე გაყოფით.

§5. მოქმედებები რადიკალებზე.

ა – ჯგუფი

გაამარტივეთ და გამოთვალეთ (№№ 1 – 4):

1. 1) $3\sqrt[3]{27}-2\sqrt[3]{64}+\sqrt{81}$
ა) 9 ბ) 8 გ) 10 დ) 11

2) $\sqrt[3]{8\cdot 27}-3\sqrt[3]{125}+2\sqrt[3]{1}-3\sqrt[3]{0}$
ა) -9 ბ) 8 გ) -8 დ) -7

3) $\frac{2}{5}\sqrt[4]{16}-\frac{3}{2}\sqrt[4]{81}+\sqrt[4]{625}$
ა) 1,5 ბ) 1,3 გ) 1,2 დ) 1,4

4) $\frac{3}{7}\sqrt[3]{\frac{343}{8}}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{25}{9}}+3\sqrt{81}$

ა) 27 ბ) 24 გ) 25 დ) 26

5) $2\sqrt{50}-3\sqrt{32}+5\sqrt{200}-4\sqrt{18}$

ა) $16\sqrt{2}$ ბ) $46\sqrt{2}$ გ) $36\sqrt{2}$ დ) $34\sqrt{2}$

6) $7\sqrt[3]{24}-2\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{192}+\sqrt[3]{375}$

ა) $5\sqrt[3]{3}$ ბ) $2\sqrt[3]{3}$ გ) $7\sqrt[3]{3}$ დ) $6\sqrt[3]{3}$

7) $3\sqrt{20}+2\sqrt{80}-3\sqrt{28}-2\sqrt{175}$

ა) $14\sqrt{5}-18\sqrt{7}$ ბ) $13\sqrt{5}-16\sqrt{7}$ გ) $14\sqrt{5}-4\sqrt{7}$ დ) $14\sqrt{5}-16\sqrt{7}$

8) $12\sqrt[4]{32}-10\sqrt[3]{54}-5\sqrt[4]{162}+15\sqrt[3]{250}$

ა) $9\sqrt[4]{2}+45\sqrt[3]{2}$ ბ) $9\sqrt[4]{2}+35\sqrt[3]{2}$ გ) $8\sqrt[4]{2}+45\sqrt[3]{2}$ დ) $45\sqrt[3]{2}+7\sqrt[4]{2}$

2. 1) $5\sqrt{a^2b^4c^3}-2\sqrt{a^4b^2c^7}+3\sqrt{c}$, $a>0$, $b>0$, $c>0$

ა) $\sqrt{c}(5ab^2c-2a^2bc^3+3)$ ბ) $5ab^2c\sqrt{c}+3$ გ) $5ab^2c\sqrt{c}-2a^2bc\sqrt{c}$ დ) $3\sqrt{ab^2c^4+3}$

2) $\frac{2}{3}\sqrt[4]{a^5b^7c^{10}}-3\sqrt[4]{ab^{15}c^6}+\sqrt[4]{ab^3c^{14}}$, $a>0$, $b>0$, $c>0$

ა) $\sqrt[4]{ab^3c^2\left(\frac{2}{3}abc^2+c^3\right)}$ ბ) $\sqrt[4]{ab^3c^2}\left(c^3-3b^2c\right)$ გ) $\sqrt[4]{ab^3c^2}$ დ) $\sqrt[4]{ab^3c^2}\left(\frac{2}{3}abc^2-3b^3c+c^3\right)$

3) $2\sqrt[3]{\frac{a^5b^6}{c^4}}-3\sqrt[3]{\frac{a^8c^8}{b^9}}+2c\sqrt[3]{\frac{b^3}{ac}}$

ა) $\sqrt[3]{a^2c^2}\cdot\left(\frac{2b^3}{c^2}+\frac{2b}{a}\right)$ ბ) $\sqrt[3]{a^2c^2}\cdot\left(\frac{2b}{a}-\frac{3}{b^3}\right)$

გ) $\sqrt[3]{a^2c^2}\cdot\frac{2b^2}{c^2}$ დ) $\sqrt[3]{a^2c^2}\cdot\left(\frac{2ab^2}{c^2}-\frac{3a^2c^2}{b^3}+\frac{2b}{a}\right)$

4) $3a\sqrt[3]{-\frac{a^{3n+1}}{b^n}}+2b\sqrt[3]{\frac{a^4b^{2n}}{c^3}}-c\sqrt[3]{a^7c^9b^{2n+3}}$

ა) $\sqrt[3]{ab^{2n}}\left(\frac{2ab}{c}-a^2d\right)$ ბ) $\sqrt[3]{ab^{2n}}\left(\frac{2ab}{c}-\frac{3a^{n+1}}{b^n}-a^2c^4b\right)$

გ) $\sqrt[3]{ab^{2n}}$ დ) $\sqrt[3]{ab^{2n}}\left(\frac{2ab}{c}-a^2c^4b\right)$

5) $2\sqrt[n]{\frac{a^{n+1}b^{2n+1}}{c^{n-1}}}-3\sqrt[n]{\frac{a^{2n+1}\cdot c^{n+1}}{b^{2n-1}}}+5\sqrt[n]{ab^{n+1}c}$, $a>0$, $b>0$, $c>0$

ა) $\sqrt[n]{abc}\cdot\frac{5}{6}$ ბ) $\sqrt[n]{abc}\left(\frac{2ab^2}{c}+5b\right)$ გ) $\sqrt[n]{abc}\cdot\frac{2ab^2}{c}$ დ) $\sqrt[n]{abc}\left(\frac{2ab^2}{c}-\frac{3a^2c}{b^2}+5b\right)$

6) $c\sqrt[m]{\dfrac{b^{m+3}c}{a^{m-2}}}+3\sqrt[m]{\dfrac{b^{m}c^{m+1}a^{2}b^{3}}{a^{m}}}-a\sqrt[m]{a^{2}b^{3}c^{nm+1}},\ a>0,\ b>0,\ c>0$

ა) $\sqrt[m]{a^2b^3c}\left(\frac{4bc}{a}-ac^n\right)$ ბ) $\sqrt[m]{a^2b^3c}$ გ) $\sqrt[m]{a^2b^3c}\cdot\dfrac{bc}{a}$ დ) $\sqrt[m]{a^2b^3c}\left(\dfrac{bc}{a}-ac^n\right)$

7) $a\sqrt[m]{\dfrac{a^{mn+1}}{b^{2mn-1}}}-b\sqrt[m]{\dfrac{a^{mn+1}}{b^{m-1}}}+c\sqrt[m]{ab},\ a>0,\ b>0,\ c>0$

ა) $\sqrt[m]{ab}\left(\dfrac{a^{n+1}}{b}+c\right)$ ბ) $\sqrt[m]{ab}\left(\dfrac{a^{n+1}}{b^{2n}}-a^n+c\right)$ გ) $\sqrt[m]{ab}\left(c-a^n\right)$ დ) $\sqrt[m]{ab}\left(\dfrac{a^{n+1}}{b^{2n}}-a^n\right)$

8) $ab\sqrt[n]{\dfrac{a^{n+2}b^{2n+3}}{a^{3n-1}}}\cdot\sqrt[m]{\dfrac{b^{m+1}}{a^{m}b^{3m}}}-a\sqrt[n]{\dfrac{a^{2n+2}}{b^{3n-1}}},\ a>0,\ b>0,\ c>0$

ა) $\dfrac{b}{a^2}\sqrt[m]{b}-\dfrac{a^3}{b^3}\sqrt[n]{ab}$ ბ) $\dfrac{b}{a^2}\sqrt[n]{a^2}\cdot\sqrt[m]{b}-\dfrac{a^3}{b^3}$

გ) $\dfrac{b}{a^2}\sqrt[n]{a^3b^3}\cdot\sqrt[m]{b}$ დ) $\dfrac{b}{a^2}\sqrt[n]{a^3b^3}\cdot\sqrt[m]{b}-\dfrac{a^3}{b^3}\sqrt[n]{a^2b}$

3. 1) $\left(2\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{3}$

ა) $6+15\sqrt{2}-5\sqrt{3}$ ბ) $6+5\sqrt{6}-\sqrt{15}$ გ) $3+15\sqrt{2}-\sqrt{5}$ დ) $3+5\sqrt{3}-\sqrt{10}$

2) $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{5}$

ა) $3\sqrt{10}-10+\sqrt{15}$ ბ) $30-2\sqrt{5}+\sqrt{15}$ გ) $33\sqrt{10}-2\sqrt{40}$ დ) $3\sqrt{10}-2+\sqrt{15}$

3) $\left(a\sqrt{b}-b\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\cdot\sqrt{b}$

ა) $ab-a\sqrt{b}+\sqrt{bc}$ ბ) $ab-b^2\sqrt{a}+\sqrt{bc}$ გ) $ab-b\sqrt{ab}+\sqrt{bc}$ დ) $ab-b\sqrt{a}+\sqrt{c}$

4) $\left(\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}\right)\cdot\sqrt[3]{4}$

ა) $2-3\sqrt[3]{12}$ ბ) $2-3\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{20}$ გ) $\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{12}-2\sqrt[3]{5}$ დ) $2-\sqrt[3]{20}$

5) $\left(2\sqrt{50}+3\sqrt{72}-5\sqrt{18}\right):\sqrt{2}$

ა) 14 ბ) 11 გ) 12 დ) 13

6) $\dfrac{\sqrt{70}-\sqrt{21}}{\sqrt{30}-3}:\sqrt{\dfrac{7}{27}}$

ა) $\dfrac{3}{2}$ ბ) 5 გ) 4 დ) 3

7) $\dfrac{\sqrt{40}-\sqrt{15}}{\sqrt{56}-\sqrt{21}}:\sqrt{\dfrac{45}{7}}$

ა) $\dfrac{1}{3}$ ბ) $\dfrac{2}{3}$ გ) 1 დ) $\dfrac{3}{4}$

8) $\dfrac{\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{12}}:\sqrt[3]{\dfrac{1}{6}}$

ა) 3 ბ) 2 გ) 4 დ) $\frac{2}{5}$

4. 1) $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2$

ა) $30-12\sqrt{6}$ ბ) $30+12\sqrt{6}$ გ) $28-24\sqrt{3}$ დ) $30-24\sqrt{2}$

2) $\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$

ა) $23-2\sqrt{5}$ ბ) $23-4\sqrt{15}$ გ) $21-4\sqrt{15}$ დ) $23-2\sqrt{15}$

3) $\left(a\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2$

ა) $a^2b+c-2\sqrt{c}$ ბ) $a^2b+c+2a\sqrt{b}$ გ) $a^2b+c-2\sqrt{bc}$ დ) $a^2b+c-2a\sqrt{bc}$

4) $\left(\sqrt{\frac{b+\sqrt{b^2-a}}{2}}+\sqrt{\frac{b-\sqrt{b^2-a}}{2}}\right)^2$

ა) $b+2\sqrt{a}$ ბ) $\sqrt{b}+2\sqrt{a}$ გ) $b+\sqrt{a}$ დ) $\sqrt{b}+\sqrt{a}$

5) $\left(\sqrt{\frac{b+\sqrt{b^2-a}}{2}}-\sqrt{\frac{b-\sqrt{b^2-a}}{2}}\right)^2$

ა) $b-\sqrt{a}$ ბ) $b-2\sqrt{a}$ გ) $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ დ) $\sqrt{b}-2\sqrt{a}$

6) $\left(\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}\right)^3$

ა) $83+9\sqrt[3]{12}+27\sqrt[3]{18}$ ბ) $83+36\sqrt[3]{30}$ გ) $83+\sqrt[3]{30}$ დ) $83+34\sqrt[3]{18}$

7) $\left(3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)^3$

ა) $79-16\sqrt[3]{12}$ ბ) $79-27\sqrt[3]{18}+9\sqrt[3]{12}$ გ) $79-18\sqrt[3]{6}$ დ) $79-27\sqrt[3]{18}$

8) $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab}\right)^3\cdot(a-b)^{-2}\cdot\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^3$

ა) $2a-b$; ბ) $a-b$ გ) $a-2ab$ დ) $a+b$

5. დაალაგეთ რიცხვები ზრდადობის მიხედვით

1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{7}$, $3\sqrt{2}$

ა) I, II, III, IV ბ) I, III, II, IV გ) III, I, II, IV დ) IV, II, III, I

2) $2\sqrt[3]{3}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{100}$, $\sqrt[6]{16}$

ა) III, II, I, IV ბ) III, I, IV, II გ) I, II, III, IV დ) IV, III, I, II

3) $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, სადაც $0<a<1$

ა) I, II, III, IV ბ) IV, III, II, I გ) I, III, II, IV დ) I, II, IV, III

4) $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, როცა $a>1$

ა) II, I, IV, III ბ) II, IV, I, III გ) I, II, II, VI დ) I, IV, III, II

5) $\sqrt{2\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{3\sqrt{2}}$, $\sqrt[4]{81}$

ა) III, II, I, IV ბ) II, III, I, IV გ) III, I, II, IV დ) I, II, IV, III

6) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{4}}$, $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$, $\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}$, $\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$

ა) I, II, III, IV ბ) IV, III, II, I გ) II, III, I, IV დ) III, I, IV, II

7) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-2}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}$, $\frac{1}{2-\sqrt[3]{7}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{5}}$

ა) IV, III, I, II ბ) II, IV, III, I გ) I, II, IV, III დ) II, I, III, IV

8) $\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{5}-2}{3-2\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}$, $\frac{\sqrt{10}-3}{2-\sqrt{3}}$

ა) IV, I, III, II ბ) I, III, II, IV გ) III, II, I, IV დ) II, I, IV, III

6. დაშალეთ მამრავლებად

1) $\sqrt{15}+\sqrt{12}+\sqrt{21}$

ა) $\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{7}+2)$ ბ) $\sqrt{3}(\sqrt{12}+\sqrt{9}+\sqrt{18})$ გ) $\sqrt{3}(2+\sqrt{12})$ დ) $2\sqrt{3}$

2) $2\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{21}$

ა) $3\sqrt[3]{75}$ ბ) $2\sqrt[3]{96}-\sqrt[3]{21}$ გ) $\sqrt[3]{3}(6+\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7})$ დ) $\sqrt[3]{3}(6-\sqrt[3]{2})$

3) $3+\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

ა) $\sqrt{3}(1+\sqrt{2})$ ბ) $\sqrt{3}(\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1)$ გ) $\sqrt{3}(3+2\sqrt{2})$; დ) $\sqrt{3}(2+\sqrt{2})$

4) $a+\sqrt{ab}$

ა) $\sqrt{a}(a+\sqrt{b})$ ბ) $a(\sqrt{a}+b)$ გ) $a(1+b)$ დ) $\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

5) $a-b$

ა) $\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ ბ) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ გ) $\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ დ) $\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

6) $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}$

ა) $\sqrt{ab}(a+b)$ ბ) $\sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ გ) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ დ) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)$

7) $a\sqrt{a}-b\sqrt{b}$

ა) $\sqrt{ab}(a-b)$ ბ) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ გ) $\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ დ) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)$

8) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

ა) $\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a})$ ბ) $(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})$ გ) $(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^2$ დ) $\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})$

7. შეკვეცეთ წილადი:

1) $\frac{\sqrt[3]{2\sqrt{3}}-\sqrt[12]{36}}{\sqrt{9\sqrt[3]{2}}-\sqrt{9}}$

ა) $\frac{\sqrt[6]{6}}{6}$ ბ) $\frac{\sqrt[6]{6}}{2}$ გ) $\frac{\sqrt[6]{6}}{3}$ დ) $\sqrt[6]{6}$

2) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}-\sqrt{\sqrt{8}}-\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}{\sqrt{4\sqrt{2}}-2\sqrt{\sqrt[4]{2}}+\sqrt{2}}$

ა) $\dfrac{\sqrt[8]{2^6}-\sqrt[8]{2^5}-1}{\sqrt[8]{2^9}+\sqrt[8]{2^3}-2}$ ბ) $\dfrac{\sqrt[8]{2}-1}{\sqrt[8]{8}+\sqrt[8]{4}-2}$ გ) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{2}+1}$ დ) $\dfrac{\sqrt[8]{2}-1}{\sqrt[8]{2}+1}$

3) $\dfrac{9+3\sqrt{3}-3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{15+\sqrt{75}}$

ა) $\dfrac{9-\sqrt{2}}{3}$ ბ) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{5}$ გ) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{5}$ დ) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

4) $\dfrac{a\sqrt{a}+1}{a-\sqrt{a}+1}$

ა) $\sqrt[3]{a}-1$ ბ) $\sqrt{a}+1$ გ) $\sqrt[4]{a}+1$ დ) $\sqrt[3]{a}+1$

5) $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}-1}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1}$

ა) $\sqrt{a}-1$ ბ) $\sqrt[4]{a}-2$ გ) $\sqrt[4]{a}-1$ დ) $\sqrt[4]{a}+1$

6) $\dfrac{\sqrt{12-6\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

ა) $2-3\sqrt{3}$ ბ) $3\left(\sqrt{3}-1\right)$ გ) $\sqrt{3}+1$ დ) 3

7) $\dfrac{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}{2-\sqrt{5}}$

ა) -1 ბ) 1 გ) $\sqrt{5}$ დ) $2+\sqrt{5}$

8) $\dfrac{\sqrt{34-24\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$

ა) 2 ბ) $-\sqrt{2}$ გ) 1 დ) $2-\sqrt{2}$

8. გამოთვალეთ:

1) $\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{24}}-\sqrt{3}}{\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{3}}$

ა) $\sqrt{2}/3$ ბ) -0,5 გ) $-\sqrt{2}$ დ) $-\sqrt{2}/2$

2) $\dfrac{\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}{\sqrt{52-14\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$

ა) 0,25 ბ) 0,125 გ) 1/6 დ) 2/9

3) $\dfrac{\sqrt[3]{155+77\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{31+27\sqrt[3]{4}+18\sqrt[3]{2}}+\sqrt{4-4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}}}$

ა) 1,2 ბ) 1,6 გ) 1,4 დ) 1,8

ბ – ჯგუფი

გამოთვალეთ (№№ 9- 29):

9. $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{cd}}+\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\sqrt{c}\left(\sqrt{c}-\sqrt{d}\right)}+\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{d}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{d}\right)}{\sqrt{d}\left(\sqrt{d}-\sqrt{c}\right)}$

10. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}+\sqrt[6]{a^4b^2}}{\sqrt[6]{a^4}+2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[6]{b^4}}-\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2}}-2\sqrt[3]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)^{-1}$ თუ $a=729,\ b=64$

11. $\left[\dfrac{a\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^2b^3}}{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}}-\sqrt[4]{ab}\right]\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\sqrt[4]{a}$, თუ $a=12,\ b=16$

12. $\left[\dfrac{a^{-\frac{1}{6}}-\frac{5}{\sqrt[6]{b}}}{a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{5\left(a^{-\frac{1}{6}}-b^{-\frac{1}{6}}\right)}{\sqrt[3]{a^{-1}}-\sqrt[3]{b^{-1}}}\right]:\dfrac{6}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\sqrt[6]{a^{-1}}}$, თუ $a=7,\ b=8$

13. $\left(\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\cdot\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}+\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}-\sqrt{b}\cdot\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}\right)\cdot(a-b)^{-1}$, თუ $a=9,\ b=4$

14. $\dfrac{c\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^2}}{c^2-\sqrt[3]{b^2}}-\dfrac{c^2\sqrt[3]{b}-c\sqrt[3]{b^2}}{c^3+b}-\dfrac{\left(\frac{\sqrt[3]{b}}{c}-\frac{c}{\sqrt[3]{b}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{b^2}-c\sqrt[3]{b}+c^2\right)}{\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)\cdot\left(c^3+b\right)}$, თუ $b=7,\ c=\sqrt[3]{7}$

15. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{3\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}\right)$, თუ $y=\dfrac{2}{7},\ x=\dfrac{32}{7}$

16. $\left[\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{x+\sqrt{xy}+y}\right]\cdot\left[\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt[4]{xy}}-\dfrac{\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right]$, თუ $x=81,\ y=16$

17. $\dfrac{1}{1-2\sqrt[6]{\frac{b}{a}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-8a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}+2\sqrt[6]{ab}+4b^{\frac{1}{3}}}$, თუ $a=27,\ b=7$

18. $\left[\dfrac{\sqrt{b}+\frac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}{\sqrt{a}-\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-2}}\right]:\left(1+\dfrac{2\sqrt{ab}+2b}{a-b}\right)$, თუ $a=2,\ b=8$

19. $a^3\left[\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2+\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2}{a+\sqrt{ab}}\right]^5\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a}}{a^{-1}}}$, თუ $a=\dfrac{1}{8},\ b=7$

20. $\dfrac{8-a}{2+\sqrt[3]{a}}:\left(2+\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{2+\sqrt[3]{a}}\right)+\left(\sqrt[3]{a}+\dfrac{2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-2}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-4}{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}}$, თუ $a=3$

21. $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}{\left(a^{\frac{4}{3}}-8b\sqrt[3]{a}\right)\cdot\sqrt[3]{a^{-1}b^{-1}}}\cdot\left(2-\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}\right)$, თუ $a=23,\ b=17$

22. $\left(\dfrac{1}{a+\sqrt{2}}-\dfrac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right):\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{a}\right)^{-1}$, თუ $a=\sqrt{3}$

23. $\left[\sqrt{ab}-ab\left(a+\sqrt{ab}\right)^{-1}\right]:\left\{2\left[(ab)^{\frac{1}{2}}-b\right]\cdot(a-b)^{-1}\right\}$ თუ $a=6,\ b=11$

24. $\dfrac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}$, თუ $b=7$

25. $\dfrac{\sqrt{2a+\sqrt{4a^2-1}}}{2a+1+\sqrt{4a^2-1}}$, თუ $a=\dfrac{31}{2}$

26. $\dfrac{ab^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{b^2}-a+1}{\left(1-\sqrt[3]{a}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}+1\right)^2-\sqrt[3]{a}\right]\cdot\left(\sqrt[3]{b}+1\right)}+\sqrt[3]{ab}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}+b^{-\frac{1}{3}}\right)$, თუ $a=27,\ b=2$

27. $\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\dfrac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\cdot\left(\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-1}-\dfrac{1}{a}\right)$, თუ $a=\dfrac{1}{2}$

28. $\dfrac{\sqrt{a^2b^{-2}-ab^{-1}+\frac{1}{4}}}{2a^2-b^{\frac{3}{2}}-ab+2ab^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(ab^{-2}+b^{-1,5}\right)$ თუ $a=2,\ b=5$

29. $\dfrac{\left(ab^{-1}+1\right)^2}{ab^{-1}-a^{-1}b}\cdot\dfrac{a^3b^{-3}-1}{a^2b^{-2}+ab^{-1}+1}:\dfrac{a^3b^{-3}+1}{ab^{-1}+a^{-1}b-1}$, თუ $a=3,\ b=7$

§6. წრფივი, კვადრატული და მოდულის შემცველი განტოლებები

ა – ჯგუფი

ამოხსენით განტოლებები (№№ 1- 3):

1. 1) $x+3=-3$

ა) 1 ბ) -6 გ) 6 დ) 3

2) $7-x=5$

ა) -2 ბ) 12 გ) 2 დ) -12

3) $3+x=2x-4$

ა) 1 ბ) -7 გ) -1 დ) 7

4) $2\dfrac{1}{2}-3x=2x+\dfrac{7}{2}$

ა) $-\dfrac{1}{5}$ ბ) $\dfrac{1}{5}$ გ) $\dfrac{2}{5}$ დ) $\dfrac{7}{5}$

5) $3\frac{2}{3}+\frac{2}{5}x=5-\frac{1}{5}x$

ა) $\frac{13}{9}$ ბ) $\frac{20}{9}$ გ) $-\frac{20}{9}$ დ) $\frac{11}{9}$

6) $2\frac{1}{2}\cdot 3-\frac{2}{3}x=3+\frac{1}{4}x$

ა) $\frac{46}{11}$ ბ) $\frac{47}{11}$ გ) $\frac{50}{11}$ დ) $\frac{54}{11}$

2. 1) $2{,}3x+1{,}5=1{,}7x+7{,}5$

ა) 11 ბ) 8 გ) 9 დ) (10)

2) $4{,}5x+1{,}3=2{,}8x+8{,}1$

ა) 6 ბ) 5 გ) 3 დ) 4

3) $0{,}2x+3{,}1\cdot\frac{1}{31}=1{,}1x-0{,}7$

ა) $\frac{2}{9}$ ბ) $\frac{10}{9}$ გ) $\frac{8}{9}$ დ) $\frac{7}{9}$

4) $1{,}4x+\frac{0{,}2}{0{,}25}=0{,}6x+12$

ა) 13 ბ) 14 გ) 12 დ) 15

5) $0{,}2x+1{,}3+1{,}3x=1{,}6x-0{,}7\cdot 5$

ა) 49 ბ) 47 გ) 48 დ) 46

6) $1{,}3x+2{,}5+3{,}2x=2{,}1x-3{,}2\cdot\frac{1}{16}$

ა) $-\frac{9}{8}$ ბ) $\frac{7}{8}$ გ) $-\frac{8}{7}$ დ) $-\frac{8}{9}$;

3. 1) $(2{,}5x-1{,}2)0{,}1+(0{,}2x-2{,}5)\cdot 5=(0{,}2x-1)\cdot 3+2{,}3x$

ა) $-\frac{3}{5}$ ბ) -8 გ) $-\frac{17}{15}$ დ) $-\frac{962}{165}$

2) $(1{,}2x-2)3-(2{,}1x-4)5+0{,}1x\cdot 9=3\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}-1$

ა) $-\frac{13}{6}$ ბ) $\frac{11}{6}$ გ) $\frac{13}{6}$ დ) $\frac{5}{6}$

3) $\frac{3x+1}{2}+\frac{5x-1}{3}=\frac{4x-1}{6}-\frac{x+2}{4}$

ა) $\frac{12}{33}$ ბ) $-\frac{10}{33}$ გ) $\frac{10}{33}$ დ) $-\frac{11}{33}$

4) $3-\frac{2x+1}{5}+\frac{3x-1}{10}=\frac{5x-1}{5}+x-2$

ა) $\frac{7}{3}$ ბ) $\frac{9}{7}$ გ) $\frac{7}{4}$ დ) $\frac{9}{4}$

5) $x-\frac{x+1}{4}+\frac{3}{8}-\frac{x}{8}=\frac{4x-1}{2}-\frac{15}{4}$

ა) $\frac{32}{11}$ ბ) $\frac{34}{11}$ გ) $-\frac{35}{11}$ დ) $\frac{35}{11}$

6) $2x-\frac{x-1}{2}-\frac{2x+1}{4}=\frac{3x-1}{8}-2$

ა) $\frac{17}{5}$ ბ) $-\frac{19}{5}$ გ) $\frac{19}{5}$ დ) $\frac{13}{5}$

ამოხსენით განტოლებები x-ის მიმართ:

4. 1) $0{,}2(x+a)-0{,}3(x-b)=0{,}4(x+c)$

ა) $\frac{a+2b-3c}{5}$ ბ) $\frac{2a+b-5c}{5}$ გ) $\frac{a+b-c}{5}$ დ) $\frac{2a+3b-4c}{5}$

2) $\frac{3}{5}(x-b)+\frac{a}{5}=\left(\frac{1}{5}x-a\right)\cdot 3-\frac{1}{2}x+b$

ა) $\frac{14}{5}b+\frac{16}{5}a$ ბ) $\frac{7}{5}b-\frac{32}{5}a$ გ) $3{,}2b-6{,}4a$ დ) $\frac{16}{5}b+\frac{32}{5}a$

3) $\frac{2}{3}(x+a)-\frac{b}{2}=(x-b)\cdot 3+\frac{x}{2}-a$

ა) $\frac{15b+10a}{19}$ ბ) $\frac{15b+10a}{17}$ გ) $\frac{15b-10a}{13}$ დ) $\frac{5b-7a}{9}$

4) $\frac{2x-3}{5}\cdot a+\frac{b}{2}=\frac{x-1}{3}-\frac{a}{3}$, $a\neq 5/6$

ა) $\frac{8a+10}{12b-1}$ ბ) $\frac{8a-15b-10}{12a-10}$ გ) $\frac{8a+15b}{a-2}$ დ) $\frac{8a-15b+10}{12a-5}$

5) $-2(a-x)+3(x-b)=\frac{1}{5}c-\frac{x}{2}$

ა) $\frac{10a+15b+c}{55}$ ბ) $\frac{a+30b+c}{55}$ გ) $\frac{2a+3b+c}{11}$ დ) $\frac{20a+30b+2c}{55}$

6) $-3(a-x)-4(b-x)=5(c-x)+d$

ა) $\frac{3a+4b+5c+d}{12}$ ბ) $\frac{2a+3b+5c+d}{6}$ გ) $\frac{a+2b+5c+d}{6}$ დ) $\frac{2a+5b+3c+d}{3}$

ამოხსენით განტოლებები (№№ 5 – 8):

5. 1) $|x|=5$

ა) 3 ბ) ±5 გ) 5 დ) −5

2) $|x+1|=3$

ა) 4; -2 ბ) 4; -4 გ) 2; -4 დ) 2; -2

3) $|x-4|=5$

ა) 11 ბ) 9; -1 გ) -1; -9 დ) -1; 9

4) $|2x+1|=7$

ა) -4; 3 ბ) 4; -3 გ) -4; -3 დ) 4; 3

5) $|3x-1|=13$

ა) $\frac{14}{3}$; -4 ბ) $\frac{14}{3}$; 4 გ) $-\frac{14}{3}; -4$ დ) $-\frac{14}{3}; 4$

6) $|2x+1|=10$

ა) $\frac{9}{2}; -\frac{11}{2}$ ბ) $-\frac{9}{2}; \frac{11}{2}$ გ) $-\frac{9}{2}; \frac{11}{2}$ დ) $\frac{9}{2}; \frac{11}{2}$

7) $|5x-1|=9$

ა) $-2; -\frac{8}{5}$ ბ) $-2; \frac{8}{5}$ გ) $2; -\frac{8}{5}$ დ) $2; \frac{8}{5}$

8) $|3x-4|=16$

ა) $-4; -\frac{20}{3}$ ბ) $-4; \frac{20}{3}$ გ) $4; \frac{20}{3}$ დ) $4; -\frac{20}{3}$

6. 1) $|2x+1|=|3x+5|$

ა) $4; -\frac{7}{5}$ ბ) $-4; \frac{7}{5}$ გ) $4; \frac{7}{5}$ დ) $-4; -\frac{6}{5}$

2) $|5x+0{,}1|=|2x-3{,}1|$

ა) $-\frac{16}{15}; -\frac{3}{7}$ ბ) $\frac{16}{15}; -\frac{3}{7}$ გ) $-\frac{16}{15}; \frac{3}{7}$ დ) $\frac{16}{15}; \frac{3}{7}$

3) $|2x-0{,}5|=|6x-3{,}6|$

ა) $-\frac{31}{40}; -\frac{41}{80}$ ბ) $\frac{31}{40}; \frac{41}{80}$ გ) $-\frac{31}{40}; \frac{41}{80}$ დ) $\frac{31}{40}; -\frac{41}{80}$

4) $|0{,}1x-2{,}5|=|4{,}1x-8{,}4|$

ა) $\frac{59}{40}; \frac{109}{42}$ ბ) $\frac{59}{40}; -\frac{109}{42}$ გ) $-\frac{59}{40}; \frac{109}{42}$ დ) $-\frac{59}{40}; -\frac{109}{42}$

5) $|2{,}5x+3{,}1| = 2|1{,}5x-4{,}3|$

ა) $-\frac{117}{5}; -1$ ბ) $-\frac{117}{5}; 1$ გ) $\frac{117}{5}; -1$ დ) $\frac{117}{5}; 1$

6) $|5-3{,}2x|=4\cdot|1{,}2x-3|$

ა) $-\frac{17}{8}; -\frac{35}{8}$ ბ) $\frac{17}{8}; \frac{35}{8}$ გ) $-\frac{17}{8}; \frac{35}{8}$ დ) $\frac{17}{8}; -\frac{35}{8}$

7) $|0{,}3-1{,}2x|=|4{,}2x-3{,}3|$

ა) $-\frac{2}{3}; 1$ ბ) $-\frac{2}{3}; -1$ გ) $\frac{2}{3}; 1$ დ) $\frac{2}{3}; -1$

8) $2\cdot|2{,}5-3x|=3\cdot|1{,}5-6x|$

ა) $-\frac{1}{8}; -\frac{17}{48}$ ბ) $\frac{1}{8}; -\frac{17}{48}$ გ) $\frac{1}{8}; \frac{17}{48}$ დ) $\frac{19}{48}; -\frac{1}{24}$

ამოხსენით განტოლებები (№№ 7 -32):

7. $x^2=4$

ა) -2 ბ) 2 გ) 2, 2 დ) 2, -2

8. $x^2=\frac{4}{9}$

ა) $\frac{2}{3}$ ბ) $\frac{2}{3};-\frac{2}{3}$ გ) $-\frac{2}{3}$ დ) $\frac{2}{3};\frac{2}{3}$

9. $x^2=-\frac{1}{4}$

ა) $-\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$ გ) $\frac{1}{2}$ დ) ამონახსნი არა აქვს

10. $x^2=\frac{25}{16}$

ა) $\frac{5}{4}$ ბ) $-\frac{5}{4}$ გ) $\frac{5}{4};-\frac{5}{4}$ დ) $\frac{5}{4};\frac{5}{4}$

11. $x^2-49=0$

ა) 7 ბ) -7 გ) 7; -7 დ) -7; -7

12. $3x^2-9=0$

ა) $\sqrt{3}$ ბ) $-\sqrt{3}$ გ) $\sqrt{3};\ \sqrt{3}$ დ) $-\sqrt{3};\sqrt{3}$

13. $5x^2+20=0$

ა) 2 ბ) -2 გ) ამონახსნი არა აქვს დ) $2;-2$

14. $5x^2=2x$

ა) $\frac{2}{5}$ ბ) $-\frac{2}{5}$ გ) $0;\frac{2}{5}$ დ) $0;-\frac{2}{5}$

15. $2x^2=5x$

ა) $\frac{5}{2}$ ბ) $0;\ \frac{5}{2}$ გ) $0;\ \frac{2}{5}$ დ) $0;-\frac{2}{5}$

16. $3x^2-5x=0$

ა) $0;\ \frac{5}{3}$ ბ) $0;\ \frac{3}{5}$ გ) $0;-\frac{3}{5}$ დ) $0;-\frac{5}{3}$

17. $5x^2-5x=3x^2+7x$

ა) 0; 12 ბ) 0; 6 გ) 2; 6 დ) 0; -6

18. $3x-13x^2=5x-11x^2$

ა) 0; -1 ბ) 0; 1 გ) 2; -2 დ) 0; -2

19. $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-2}{x-1}=\frac{3}{x^2+x-2}$

ა) 2; -2 ბ) -2 გ) 2 დ) 1; -2

20. $\frac{x+3}{x+4}+\frac{x-4}{x-3}=\frac{9}{12-x-x^2}$

ა) $2\sqrt{2};0$ ბ) $2\sqrt{2};-2\sqrt{2}$ გ) $-2\sqrt{2};\ 0$ დ) $2\sqrt{2};2\sqrt{2}$

21. $x^2-6x+9=0$

ა) -3 ბ) $-3;\ -3$ გ) 3; 3 დ) $3;-3$

22. $4x^2+12x+9=0$

ა) $-\frac{3}{2}$ ბ) $-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}$ გ) $\frac{3}{2}$ დ) $-\frac{3}{2};\frac{3}{2}$

23. $9x^2+6x+1=0$

ა) $\frac{1}{3}$ ბ) $-\frac{1}{3}$ გ) $-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}$ დ) $-\frac{1}{3};\frac{1}{3}$

24. $4x^2-20x+25=0$

ა) 1,5; 1,5 ბ) $-2{,}5;\ -2{,}5$ გ) $2{,}5;\ -2{,}5$ დ) 2,5; 2,5

25. $x^2-6x+8=0$

ა) $-2;-4$ ბ) $-2;\ 4$ გ) 2; 4 დ) $2;-4$

26. $4x^2+12x+10=0$

ა) $2;-3$ ბ) ამონახსნი არა აქვს გ) $-5;-8$ დ) $-5;8$

27. $9x^2+5x-14=0$

ა) $1;-\frac{14}{9}$ ბ) $-1;\frac{14}{9}$ გ) $1;\frac{14}{9}$ დ) $-1;-\frac{14}{9}$

28. $4x^2-20x+16=0$

ა) $-1;\ -4$ ბ) $-1;\ 4$ გ) 1; 4 დ) $1;\ -4$

29. $\frac{x+3}{x-1}+\frac{2x+1}{x-3}=2$

ა) $\frac{-7\pm\sqrt{113}}{2}$ ბ) $\frac{7\pm\sqrt{113}}{2}$ გ) $\frac{-7\pm\sqrt{103}}{2}$ დ) $\frac{7\pm\sqrt{103}}{2}$

30. $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{2x+1}=3$

ა) $\frac{7\pm\sqrt{59}}{2}$ ბ) $\frac{-7\pm\sqrt{59}}{2}$ გ) $\frac{-7\pm\sqrt{69}}{2}$ დ) $\frac{7\pm\sqrt{69}}{2}$

31. $\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{2x-1}{2x+1}=4$

ა) $\frac{-5\pm\sqrt{7}}{6}$ ბ) $\frac{5\pm\sqrt{7}}{6}$ გ) $\frac{-5\pm\sqrt{28}}{6}$ დ) $\frac{5\pm\sqrt{28}}{6}$

32. $\frac{2x+5}{x-2}+\frac{2x-5}{x+3}=10$

ა) $\frac{4\pm\sqrt{526}}{6}$ ბ) $\frac{-4\pm\sqrt{526}}{6}$ გ) $\frac{-4\pm\sqrt{516}}{6}$ დ) $\frac{-4\pm\sqrt{516}}{6}$

შეადგინეთ კვადრატული განტოლება, თუ ცნობილია მათი ფესვები (№№ 33 – 37):

33. $x_1=2;\ x_2=4$

ა) $x^2+4x+2=0$ ბ) $x^2-6x+8=0$ გ) $x^2+6x+8=0$ დ) $x^2+6x-8=0$

34. $x_1=3;\ x_2=7$

ა) $x^2+7x+3=0$ ბ) $x^2-7x+21=0$

გ) $x^2-10x+21=0$ დ) $x^2+10x-21=0$

35. $x_1=\frac{2}{3};\ x_2=\frac{3}{2}$

ა) $6x^2-13x+6=0$ ბ) $x^2-13x+1=0$ გ) $x^2+13x+1=0$ დ) $x^2-13x-1=0$

36. $x_1=a;\ x_2=\frac{1}{a}$

ა) $x^2+ax+\frac{1}{a}$ ბ) $x^2+(a^2+1)x+\frac{1}{a}$

გ) $x^2(a^2+1)x+\frac{1}{a}$ დ) x^2+ax+a

37. $x_1=a+b;\ x_2=a-b$

ა) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$ ბ) $x^2-2bx+b^2-a^2=0$

გ) $x^2+(a+b)x-a-b=0$ დ) $x^2+(a-b)x+a+b=0$

განტოლებების ამოუხსნელად გამოთვალეთ x_1+x_2 და $x_1\cdot x_2$ სადაც x_1, x_2 განტოლების ფესვებია (№№ 38 - 40):

38. $x^2+5x-6=0$

ა) 5; −6 ბ) -5; -6 გ) 5; 6 დ) -5; 6

39. $x^2+ax+b=0$

ა) $a; b$ ბ) $a; -b$ გ) $-a; b$ დ) $-a; -b$

40. $3x^2+7x-10=0$

ა) −7;−10 ბ) 7; -10 გ) 7; 10 დ) $-\frac{7}{3}; -\frac{10}{3}$

განტოლების ამოუხსნელად დაადგინეთ ფესვების ნიშნები (№№ 41 – 46):

41. $2x^2+5x-9=0$

ა) + ; -   ბ) + ; +   გ) 0; +   დ) - ; -

42. $-3x^2+8x+10=0$

ა) +; +   ბ) +; −   გ) -; -   დ) 0; -

43. $x^2-12x+1=0$

ა) 0; +   ბ) 0; -   გ) +; +   დ) - ; −

44. $x^2+12x+1=0$

ა) - ; -   ბ) -; +   გ) + ; +   დ) 0; +

45. $-5x^2+7x-1=0$

ა) + ; +   ბ) + ; −   გ) 0 ; +   დ) 0 ; -

46. $5x^2+8x+13=0$

ა) - ; -   ბ) + ; -   გ) + ; +   დ) (ფესვები არ გააჩნია)

დაშალეთ კვადრატული სამწევრები ნამრავლად (№№ 47 -52):

47. $x^2+10x-11$

ა) $(x-1)(x+11)$ ბ) $(x+1)(x-11)$ გ) $(x-1)(x-11)$ დ) $(x+1)(x+11)$

48. $x^2-20x+36$

ა) $(x+2)(x+18)$ ბ) $(x+2)(x-18)$ გ) $(x-2)(x-18)$ დ) $(x-2)(x+18)$

49. $5x^2+3x-8$

ა) $5(x-1)\left(x+\frac{8}{5}\right)$ ბ) $5(x+1)\left(x-\frac{8}{5}\right)$ გ) $5(x-1)\left(x-\frac{8}{5}\right)$ დ) $5(x+1)\left(x+\frac{8}{5}\right)$

50. $5x^2-x-18$

ა) $5(x-2)(x+9)$ ბ) $5(x-2)\left(x+\frac{9}{5}\right)$ გ) $5(x+2)\left(x+\frac{9}{5}\right)$ დ) $(x+2)\left(x-\frac{9}{5}\right)$

51. $3x^2+x-2$

ა) $3(x+1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$ ბ) $3(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)$ გ) $3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$ დ) $3(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)$

52. $7x^2-3x-54$

ა) $7(x-3)\left(x+\frac{18}{7}\right)$ ბ) $7(x-3)\left(x-\frac{18}{7}\right)$

გ) $7(x+3)\left(x+\frac{18}{7}\right)$ დ) $7(x+3)\left(x-\frac{18}{7}\right)$

ამოხსენით განტოლებები (№№ 53 – 62):

53. $\frac{3}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{6}=\frac{11}{6}$

ა) ±1 ბ) $\pm2\sqrt{2}$ გ) $\pm1; \pm2\sqrt{2}$ დ) $1; 2\sqrt{2}$

54. $x^4+3x^2-4=0$

ა) $\pm 1;\ \pm 2$ ბ) ± 1 გ) ± 2 დ) $1;\ 2$

55. $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{2x^2-2}{x}=\dfrac{11}{3}$

ა) $2;\ -\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1\pm\sqrt{37}}{6}$ ბ) $2;\ -\dfrac{1}{2}$ გ) $\dfrac{1\pm\sqrt{37}}{6}$ დ) $\dfrac{1}{2};\ -2$

56. $\dfrac{5x}{x^2-x+2}+\dfrac{x^2-x+2}{x}=\dfrac{9}{2}$

ა) $1;\ 2$ ბ) $-1;\ -2$ გ) $\dfrac{7\pm\sqrt{17}}{4}$ დ) $1;\ 2;\ \dfrac{7\pm\sqrt{17}}{4}$

57. $\dfrac{1}{x(x-2)}+\dfrac{3}{(x-1)^2}=\dfrac{13}{12}$

ა) $3;\ -1$ ბ) $1;\ -3$ გ) $\dfrac{13\pm\sqrt{117}}{13}$ დ) $3;\ -1;\ \dfrac{13\pm\sqrt{117}}{13}$

58. $\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+3}+\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2-2x+5}=-\dfrac{3}{4}$

ა) ± 1 ბ) 1 გ) $1;\ 2$ დ) $\dfrac{2\pm\sqrt{113}}{4}$

59. $\dfrac{2}{x^2-x+3}+\dfrac{x^2-x+3}{5}=\dfrac{7}{5}$

ა) $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ ბ) $2;\ -1$ გ) $1;\ -2$ დ) $2;\ -1;\ \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

60. $\dfrac{x^2+3x-1}{x^2+3x+2}+\dfrac{2(x^2+3x)}{x^2+3x+1}=1$

ა) $\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$ ბ) $\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{2}$ გ) $-\dfrac{3}{2};\ \dfrac{3}{2}$ დ) $\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2};\ \dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{2}$

61. $\dfrac{3x^2-5x+2}{3x^2-5x+3}+\dfrac{3x^2-5x+4}{3x^2-5x+5}=\dfrac{22}{15}$

ა) $0;\ \dfrac{5}{3}$ ბ) $\dfrac{10\pm\sqrt{204}}{12}$ გ) $0;\ -\dfrac{5}{3}$ დ) $\dfrac{20\pm\sqrt{117}}{5}$

62. $\dfrac{x}{x^2+6x+9}+\dfrac{3(x+3)^2}{2x}=-\dfrac{35}{8}$

ა) $-\dfrac{9}{4};\ -4$ ბ) $\dfrac{-13\pm\sqrt{88}}{3}$ გ) $4;\ \dfrac{9}{4}$ დ) $\dfrac{-13\pm2\sqrt{22}}{3};\ -\dfrac{9}{4};\ -4$

ბ – ჯგუფი

ამოხსენით განტოლებები (№№ 63 – 77):

63. $|x+1|+3|x-2|=5$

64. $|2x-1|-3|x+3|=-5$

65. $\frac{|x+1|}{2}+\frac{x+1}{3}=\frac{|x+2|}{4}-1$

66. $\frac{|3x-1|}{3}-\frac{2x+1}{5}=\frac{|x-2|}{5}+1$

67. $|5x-1|+2x=|3x-1|+4$

68. $|3-x|-|2-x|=|x+1|+4$

69. $|x^2-3x|-5|x+1|=4$

70. $|3x^2-2x+7|+2|x+1|+x=13$

71. $|x^3+1|+x^3=-2x-3$

72. $|x^3-8|-x^3+3x=9$

73. $|x^3-5x^2+6x|=5x^2-6x-x^3$

74. $|x^3-5x+4|=4-5x+x^3$

75. $ax^2+5=0$

ა) $\sqrt{\frac{5}{a}}$ ბ) ამონახსნი არა აქვს გ) $\pm\sqrt{-\frac{5}{a}}$ დ) $\pm\sqrt{-\frac{5}{a}}$, თუ $a<0$

76. $ax^2+b=0$

ა) $\sqrt{-\frac{b}{a}}$ ბ) $\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$ გ) $\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$, თუ $ab<0$

დ) $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$, თუ $ab>0$, 0 თუ $b=0, a\neq 0$, $(-\infty;\ \infty)$ თუ $a=0,\ b=0$

77. $ax^2+bx=cx^2+dx$

ა) 0; $\frac{d-b}{a-c}$ ბ) 0; $\frac{d+b}{a+c}$ გ) 0; $\frac{d-b}{a-c}$, თუ $a\neq c$, $(-\infty;\infty)$ თუ $a=c$ და $b=d$

დ) ამონახსნი არა აქვს

ამოხსენით კვადრატული განტოლებები თუ ცნობილია, რომ ისინი არასრული კვადრატული განტოლებებია (№№ 78 – 81):

78. $\frac{ax+1}{x-2}+\frac{x+a}{x+2}=\frac{3-2x}{x^2-4}$

ა) $\frac{1}{3}$ ბ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ გ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{3}$ დ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

79. $\frac{2ax+a+1}{2x+1}=\frac{x-1}{2x-1}+\frac{2+a}{4x^2-1}$

ა) 0; -1 ბ) 0; $\frac{1}{2}$ გ) -1; $\frac{1}{2}$; დ) 0; $-\frac{1}{2}$

80. $\frac{ax+1}{2x-3}=\frac{3x+a}{2x+3}+\frac{3a-4}{4x^2-9}$

ა) $-11; 0$ ბ) $\frac{1}{2}$; 0 გ) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$ დ) $-\frac{1}{2}$; 0

81. $\frac{ax+b}{x-1}=\frac{bx+a}{x+1}+\frac{a+b}{x^2-1}$

ა) $-\frac{2b}{a-b}$; 0 ბ) $-\frac{2b}{a-b}$; 0, როცა $a \neq b$ გ) $\frac{2b}{a-b}$; 0

დ) $-\frac{2b}{a-b}$; 0, როცა $a \neq b$ და 0 როცა $a=b$

ამოხსენით განტოლებები (№№ 82 – 86):

82. $\frac{\sqrt{2}x+1}{\sqrt{2}x-1}+\frac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{3}x-1}=-2$

ა) 0; $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{12}$ ბ) 0; $\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{12}$ გ) 0; $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}$ დ) 0; $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$

83. $\frac{\sqrt{5}x+2}{\sqrt{3}x+1}+\frac{\sqrt{3}x-1}{\sqrt{2}x+1}=1$

ა) 0; $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}+3}$ ბ) 0; $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}+3}$ გ) 0; $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}+3}$ დ) 0; $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}+3}$

84. $\frac{2\sqrt{5}x}{x-\sqrt{3}}+\frac{3x-5\sqrt{5}x}{x(x^2-3)}=\frac{5\sqrt{15}-3\sqrt{3}}{x(x^2-3)}-\frac{3(\sqrt{5}-1)}{x-\sqrt{3}}$

ა) 1; $\frac{3-5\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ ბ) $\frac{3-5\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$; $\sqrt{5}$ გ) $\frac{3+5\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$; -1 დ) $\frac{2\sqrt{5}}{3+5\sqrt{5}}$; -1

85. $\frac{\sqrt{3}x}{x+\sqrt{2}}-\frac{2x-3\sqrt{6}}{x(x^2-2)}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{x+\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{3}x-2\sqrt{2}}{x(x^2-2)}$

ა) 1; $\frac{2-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ ბ) 1; $\frac{2+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ გ) -1; $\frac{2+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ დ) -1; $\frac{2-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

86. ამოხსენით კვადრატული განტოლებები თუ ცნობილია მათი ერთ-ერთი ფესვი:

1) $(4k+1)x^2-(2k+1)x-14=0, \quad x_1=2$

ა) 2; $-\frac{7}{5}$ ბ) 2; $\frac{7}{5}$ გ) 2; $-\frac{5}{7}$ დ) 2; $-\frac{5}{7}$

2) $(4k-5)x^2-7x-k-4=0, \quad x_1=3$

ა) $\frac{2}{3}$; 3 ბ) $-\frac{2}{3}$; 3 გ) $\frac{3}{2}$; 3 დ) $\frac{3}{2}$; -3

3) $\left(\frac{2k}{5}-1\right)x^2+\frac{3}{2}kx-19=0, \quad x_1=2$

ა) $2; 5$ ბ) $2; -2$ გ) 2; $-\frac{19}{2}$ დ) $\left(-2; \ -\frac{19}{2}\right)$

4) $\left(\frac{3}{4}k-1\right)x^2+\frac{5}{3}kx-9k-2=0,\quad x_1=3$

ა) 3; -19 ბ) 3; $-\frac{29}{2}$ გ) 3; $\frac{19}{2}$ დ) 3; $-\frac{19}{2}$

87. გამოთვალეთ $x_1^2+x_2^2$ და $x_1^3+x_2^3$, სადაც x_1, x_2 არის $x^2+x-1=0$ განტოლების ფესვები.

ა) 3; 4 ბ) 3; -4 გ) -3; 4 დ) -3; -4

88. გამოთვალეთ $x_1^4+x_2^4$ და $x_1^4-x_2^4$, სადაც x_1, x_2 არის $x^2-x-3=0$ განტოლების ფესვები. $(x_1>x_2)$

ა) 31; $7\sqrt{13}$ ბ) 31, $-7\sqrt{13}$ გ) -31, $7\sqrt{13}$ დ) 31, $-7\sqrt{13}$

89. გამოთვალეთ $x_1^6+x_2^6$, სადაც x_1, x_2 არის $x^2+2x-2=0$ განტოლების ფესვები.

ა) 64 ბ) 448 გ) 416 დ) 412

90. გამოთვალეთ $x_1^5+x_2^5$, სადაც x_1, x_2 არის $x^2+x-1=0$ განტოლების ფესვები.

ა) 9 ბ) -11 გ) -9 დ) 13

91. გამოთვალეთ $x_1^7+x_2^7$, სადაც x_1, x_2 არის $x^2+x-1=0$ განტოლების ფესვები.

ა) 29 ბ) -28 გ) -30 დ) -29

92. დაადგინეთ კვადრატული განტოლების ფესვების ნიშნები

$$2x^2-\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)x+2\sqrt[3]{3}-3\sqrt{2}=0$$

ა) + ; - ბ) + ; + გ) - ; - დ) (ფესვები არ გააჩნია)

93. $\sqrt{3}x^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{10}=0$

ა) + ; + ბ) (ფესვები არ გააჩნია); გ) + ; − დ) − ; −

94. $3x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{5})x+\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{10}=0$

ა) −;− ბ) +;− გ) (ფესვები არ გააჩნია); დ) +;+

95. $x^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)x+\sqrt{5}+\sqrt{3}-2=0$

ა) +; − ბ) +; + გ) (ფესვები არ გააჩნია); დ) −; −

96. იპოვეთ $x^2-7|x|-4=0$ განტოლების ფესვების ჯამი

ა) 7 ბ) -7 გ) 0 დ) -4

97. c პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის აქვს ტოლი ფესვები განტოლებას

$$x^2-(c+1)x+2c-1=0$$

ა) 1; 5 ბ) -1; -5 გ) 1; -5 დ) − 5; 1

98. c პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის აქვს ტოლი ფესვები განტოლებას

$$2x^2-(c-2)x+c=0$$

ა) $6\pm4\sqrt{3}$ ბ) $4\pm4\sqrt{2}$ გ) $6\pm4\sqrt{2}$ დ) $6\pm2\sqrt{3}$

99. c პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის არა აქვს ტოლი ფესვები განტოლებას

$$8cx^2+8(3c-1)x+8c+9=0$$

ა) $2;\ \frac{1}{10}$ ბ) $\left(-\infty;\ \frac{1}{10}\right)\cup\left(\frac{1}{10};\ 2\right)$

გ) $\left(-\infty;\ \frac{1}{10}\right)\cup(2;\ +\infty)$ დ) $\left(-\infty;\ \frac{1}{10}\right)\cup\left(\frac{1}{10};\ 2\right)\cup(2;\ +\infty)$

100. c პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის არა აქვს ტოლი ფესვები განტოლებას $4x^2+4(2c-1)x+4c+13=0$

ა) $-1;\ 3$ ბ) $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$

გ) $0;\ 4$ დ) $(-\infty;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$

101. c პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის ექნებათ $x^2+(10c+4)x-32=0$ და $x^2+(2c+1)x-10=0$ განტოლებებს საერთო ფესვი?

ა) $-1;\ \frac{115}{72}$ ბ) $1;\ \frac{115}{72}$ გ) $1;\ -\frac{115}{72}$ დ) $-1;\ -\frac{115}{72}$

102. c პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის ექნებათ $x^2+(c+2)x-c-3=0$ და $3x^2+(3c-4)x-2c-1=0$ განტოლებებს საერთო ფესვი?

ა) $-2;\ \frac{38}{11}$ ბ) $2;\ -\frac{38}{11}$ გ) $2;\frac{38}{11}$ დ) $-2;\ -\frac{38}{11}$

103. c პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის ექნებათ $x^2+(c-1)x-3c=0$ და $x^2+(2c-1)x-4c-2=0$ განტოლებებს საერთო ფესვი?

ა) 2 ბ) -2 გ) 2; 3 დ) 2; -3

104. c პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის ექნებათ $2x^2+(c-1)x-3=0$ და $5x^2+(4-c)x-7=0$ განტოლებებს საერთო ფესვი?

ა) $-2;\ -\frac{123}{70}$ ბ) $-2;\ \frac{123}{70}$ გ) $2;\ \frac{123}{70}$ დ) $2;\ -\frac{123}{70}$

ამოხსენით განტოლებები (№№ 103 – 107):

105. $5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$

106. $3x^4-2x^3-34x^2-2x+3=0$

107. $7(6x^2+x-1)^2-3(4x^2-1)(9x^2-1)-4(6x^2-x-1)^2=0$

108. $5(3x^2+4x+1)^2+3(x^2-1)(9x^2-1)-8(3x^2-4x+1)^2=0$

109. $2(6x^2-5x+1)^2+3(4x^2-1)(9x^2-1)-5(6x^2+5x+1)=0$

110. b პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის, გააჩნიათ საერთო ფესვი განტოლებებს $x^3-5x+3b=0$ და $x^3-6x+4b=0$?

111. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვისაა $x^3-ax^2+(a+5)x-6=0$ განტოლების ფესვების კუბების ჯამი 36-ის ტოლი?

112. b პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის, გააჩნიათ საერთო ფესვი განტოლებებს $6x^3-3x^2-2x+b=0$ და $2x^3-5x^2+6x-2b=0$?

113. ამოხსენით განტოლება $x^4-5x^2+2(a-3)x+6a-a^2-5=0$ თუ $a\in\left[\frac{3}{4};\ \frac{21}{4}\right]$

ამოხსენით განტოლებები (№№ 114 – 144):

114. $x^2+\frac{49x^2}{(x-7)^2}=15$

115. $x^3+\frac{27x^3}{(x-3)^3}+10=0$

116. $(x+a)^4+(x+b)^4=2c$ თუ $c\geq\frac{(a-b)^4}{64}$

117. $(x+3)^4+(x+5)^4+(x+7)^4+(x+9)^4=292$

118. $x^6+3x^5+5x^4-54x^3+5x^2+3x+1=0$

119. ცნობილია, რომ მთელკოეფიციენტებიანი $x^2-6mx+n=0$ კვადრატული განტოლების ფესვები მარტივი რიცხვებია. გამოთვალეთ n რიცხვის 6-ზე გაყოფით მიღებული ნაშთი.

120. იმისათვის, რომ $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ განტოლების ფესვები ადგენდნენ არითმეტიკულ პროგრესიას, აუცილებელია, რომ სრულდებოდეს ტოლობა $a^3-4ab+8c=0$ არის თუ არა ეს პირობა საკმარისი, იმისათვის რომ მოცემული განტოლების ფესვები ადგენდნენ არითმეტიკულ პროგრესიას.

121. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის არ გააჩნია ამონახსნი განტოლებას?

$$x^2-4x+8=|x-a|$$

122. b პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის იქნება $x^3-(b+5)x^2+(5b+4)x-4b=0$ განტოლების ფესვებს შორის სხვაობა 2-ის ტოლი?

123. ამოხსენით განტოლება

$$x^6+x^5-13x^4-10x^3+39x^2+9x-27=0$$

124. b პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის გააჩნია განტოლებას

$$4x^4+11x^2-(4+2b)x-b^2-4b+5=0$$

ა) ორი ნამდვილი ფესვი, ბ) არ გააჩნია ნამდვილი ფესვები, გ) გააჩნია ოთხი ნამდვილი ფესვი

125. ამოხსენით განტოლება

$$(2x-1)^4-8x^2(2x-1)^2+12x^4=0$$

126. შეიძლება თუ არა განტოლებებს $mx^3+nx^3+px+q=0$ და $sx^2+rx+k=0$ გააჩნდეს ერთი საერთო ფესვი, თუ ცნობილია, რომ m, n, p, q, s, r, k მთელი რიცხვებია და ამასთანავე $|s|, |r|, |k|$ ორისაგან განსხვავებული მარტივი რიცხვებია

127. $ax^4+bx^3+cx^2+dx+k=0$ განტოლებისათვის რომელსაც გააჩნია ოთხი ნამდვილი ფესვი, არსებობს თუ არა ისეთი m ნამდვილი რიცხვი, რომ

$$a(x-m)^4+b(x-m)^3+c(x-m)^2+d(x-m)+k=0$$ განტოლება

წარმოადგენდეს მეოთხე ხარისხის შექცეულ განტოლებას?

128. წარმოადგენს თუ არა გამოსახულება m^2-4pq სრულ კვადრატს, თუ $|m|, |p|, |q|$ 2-გან განსხვავებული მარტივი რიცხვებია

129. მოცემულია დადებით რიცხვთა ორი სამეული a, b, c და m, n, p. ცნობილია, რომ მათი საშუალო არითმეტიკულები, საშუალო გეომეტრიულები და საშუალო კვადრატულები

ერთმანეთს ემთხვევა. დაამტკიცეთ, რომ ეს სამეულები შედგება ერთი და იგივე რიცხვებისაგან.

130. ამოხსენით განტოლება $x^3-12x^2+bx-b-4=0$ თუ ცნობილია, რომ მისი ფესვები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას

131. დაამტკიცეთ, რომ თუ დაყვანილი სახის კუბურ განტოლებას გააჩნია სამი დადებითი ნამდვილი ფესვი და ამასთანავე მეორე კოეფიციენტი -3-ის ტოლია, მაშინ მისი მესამე კოეფიციენტი არ აღემატება 3-ს.

132.დაამტკიცეთ, რომ თუ $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ განტოლებაში კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ პირობას $a^2+b^2=\frac{3}{4}$, მაშინ მოცემულ განტოლებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არ გააჩნია.

ამოხსენით განტოლებები (№№ 133 – 137) ($[x]$ – ნიშნავს x–ის მთელ ნაწილს)

133. $x^5-[x]=5$
134. $[x]+[2x]=[3x]$
135. $[x]^3+3[x]^2+2[x]+3x+5=0$
136. $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\ldots+\left[\sqrt{x^2+1}\right]=324$
137. $\left[\frac{x+1}{2}\right]+\left[\frac{x+2}{4}\right]+\left[\frac{x+4}{8}\right]+\left[\frac{x+8}{16}\right]=3$

138.არსებობს თუ არა p პარამეტრის ისეთი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $x^2+5|x|+p=0$ განტოლების ფესვები ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას.

139. p პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის წარმოადგენენ $x^2-7|x|+p=0$ განტოლების ფესვები არითმეტიკულ პროგრესიას.

140. არსებობს თუ არა a პარამეტრის ისეთი მნიშვნელობები, რომლისთვისაც
$x^2-4x+3=(\sin 70°-1)(x-a)^2+\cos 20°\cdot(x-a)+\sin 70°-1$ განტოლებას
გააჩნია: ა) ერთი ფესვი, ბ) ორი ფესვი, გ) არცერთი ნამდვილი ფესვი არ გააჩნია

141. იპოვეთ $6x^3+9x^2-2=0$ განტოლების ერთი ფესვი მაინც.

142. ამოხსენით განტოლება $2x^3-3x^2-6x+1=0$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში

143. a პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის გააჩნია განტოლებას
$$\frac{|x-4|+|x-1|+4-\big||x-4|-|x-1|+2\big|}{2}=a$$
ა) ერთი ფესვი; ბ) ორი ფესვი; გ) სამი ფესვი; დ) ოთხი ფესვი

§7. ირაციონალური განტოლებები

ა –ჯგუფი

ამოხსენით განტოლებები (№№ 1 – 25):

1. $\sqrt{x+1}=3$

ა) -10 ბ) 8 გ) 26 დ) 9

2. $\sqrt{0{,}2x+3{,}1}=1{,}2$

ა) -7,3 ბ) -0,83 გ) -8,3 დ) -9,3

3. $\sqrt{0{,}1x+2{,}3}=\sqrt{x+1{,}2}$

ა) $\frac{11}{9}$ ბ) $\frac{8}{9}$ გ) $1\frac{1}{9}$ დ) $\frac{10}{9}$

4. $\sqrt{2-2{,}5x}=\sqrt{3-1{,}5x}$

ა) 1 ბ) 0,2 გ) 1,3 დ) -1

5. $\sqrt{2{,}3+1{,}2x}=\sqrt{3{,}1+0{,}3x}$

ა) $\frac{8}{9}$ ბ) $\frac{9}{8}$ გ) $\frac{10}{9}$ დ) $\frac{7}{9}$

6. $\sqrt{x^2-2{,}2x+3}=x+1$

ა) $\frac{11}{21}$ ბ) $\frac{10}{21}$ გ) $\frac{21}{10}$ დ) $\frac{9}{20}$

7. $\sqrt{9x^2+2x+7}=3x+1$

ა) $\frac{3}{2}$ ბ) -0,75 გ) 0,75 დ) $\frac{2}{3}$

8. $\sqrt{x+1}=\frac{x+2}{\sqrt{x+5}}$

ა) 2,5 ბ) -0,5 გ) 0,5 დ) -1,5

9. $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x+1}=\sqrt{2x^2+3x-9}$

ა) 2 ბ) 2,5 გ) 1,5 დ) 3

10. $\sqrt[3]{x^2+3x-10}=\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{x+3}$

ა) 4 ბ) 5 გ) 6 დ) 7

11. $\sqrt[3]{x^2-3x+1}=\sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{x+3}$

ა) $-\frac{5}{8}$ ბ) $-\frac{3}{4}$ გ) $-\frac{2}{5}$ დ) $\frac{2}{3}$

12. $\sqrt{2x+1}=x-1$

ა) 4; 0 ბ) 2; 3 გ) 4 დ) 3; 2

13. $\sqrt{3x^2+2x+1}=\sqrt{x+15}$

ა) $2;-\frac{7}{3}$ ბ) $\frac{7}{3};-2$ გ) $\frac{1}{3};-4$ დ) $\frac{2}{3};-3$

14. $\sqrt[3]{2x^2-3}=\sqrt[3]{(x+2)(4x-9)}$

ა) $-3;\frac{2}{5}$ ბ) 4; -3 გ) 2; -4 დ) $3;-\frac{5}{2}$

15. $\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}-2}=\frac{\sqrt{x+1}+6}{\sqrt{x+1}-4}$

ა) 1 ბ) -1 გ) 2 დ) 3

16. $\frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}=\frac{3\sqrt{x}+9}{3\sqrt{x}-1}$

ა) 4; 2 ბ) 4 გ) 3; 1 დ) 5; 2

17. $\frac{1}{\sqrt{2-x}}=\sqrt{2-x}-\frac{8}{3}$

ა) -4; 1 ბ) -2; 5 გ) -3; 4 დ) -7

18. $\frac{2}{3\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+1}-\frac{5}{3}$

ა) 2; 4 ბ) -3; 5 გ) 3 დ) 3; 2

19. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}=3$

ა) 1; 61 ბ) 1 გ) 1; 60 დ) 2; 15

20. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=1$

ა) 5; 9 ბ) 4; 2 გ) 5; 1 დ) 3; 4

21. $\sqrt{2x-1}+8=6\sqrt[4]{2x-1}$

ა) $\frac{15}{2};\frac{255}{2}$ ბ) $\frac{17}{2};\frac{257}{2}$ გ) $2;\frac{80}{3}$ დ) 1;59

22. $\sqrt{3x+1}+3=4\sqrt[4]{3x+1}$

ა) 5; 12 ბ) 3; 4 გ) $0;\frac{80}{3}$ დ) 2; 15

23. $\sqrt[3]{x+1}+5=6\sqrt[6]{x+1}$

ა) 0; 15624 ბ) 2; 25 გ) 3; 95 დ) 1; 120

24. $\sqrt{2x+1}-6=\sqrt[4]{2x+1}$

ა) $40;\frac{15}{2}$ ბ) $40;-\frac{15}{2}$ გ) 40 დ) 20 ;45

25. $x^2+\sqrt{x^2-9}=29$

ა) -5; 4 ბ) 5; -5 გ) 3; 5 დ) -3; -5

ბ – ჯგუფი

ამოხსენით განტოლებები (№№ 26 – 50):

26. $\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+16}=\dfrac{3(x-5)}{\sqrt{x+1}}$;

27. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{5x+5}=\dfrac{3(x+4)}{\sqrt{2x+1}}$;

28. $\sqrt{3x-2}+2\sqrt{x+8}=\dfrac{x+6}{\sqrt{3x-2}}$;

29. $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+2}=\dfrac{x+1}{\sqrt{5x-1}}$;

30. $\sqrt{\sqrt{x-1}+8}+2\sqrt{3\sqrt{x-1}+1}=\dfrac{7\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{\sqrt{\sqrt{x-1}+8}}$;

31. $\sqrt{x^2+3x+6}+\sqrt{x^2+3x-1}=7$;

32. $\sqrt{5\sqrt{2x+1}+10}-\sqrt{\sqrt{2x+1}+1}=3$;

33. $\sqrt{2+\sqrt[3]{x+1}}-\sqrt{3-\sqrt[3]{x+1}}=1$;

34. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}}+\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}}=\dfrac{5}{2}$;

35. $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{4\sqrt[3]{x}+1}}+\sqrt{\dfrac{4\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+2}}=\dfrac{13}{6}$;

36. $\sqrt[3]{2y+2}-\sqrt[3]{2y-17}=1$;

37. $\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{x+1}=2$;

38. $\sqrt[3]{2x+20}-\sqrt[3]{2x+12}=2$;

39. $\sqrt[3]{x+63}-\sqrt[3]{x+26}=1$;

40. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x+1}+7}-\sqrt[3]{\sqrt[3]{x+1}}=1$;

41. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{2x+1}$;

42. $\sqrt[3]{x+8}+\sqrt[3]{x-8}=\sqrt[3]{x}$;

43. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x-1}=\sqrt[3]{4x+12}$;

44. $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{x+4}=0$;

45. $\sqrt[3]{\dfrac{x}{3}}+\sqrt[3]{x+8}=\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}x+8}$;

46. $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{2x+6-2\sqrt{2x+5}}=9$;

47. $\sqrt{4x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{9x-17+6\sqrt{x-2}}=7$;

48. $\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}+\sqrt{3x+2-2\sqrt{3x+1}}=3$;

49. $\sqrt{x+5+4\sqrt{x+1}}+\sqrt{2x+12-6\sqrt{2x+3}}=4$;

50. $\sqrt{2-x-2\sqrt{1-x}}+\sqrt{7-x+2\sqrt{6-x}}=5;$

ამოხსენით განტოლებები (№№ 51 – 61):

51. $2x+2\sqrt{x^2+3x+2}=3\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)+1$

52. $3\sqrt{2x-1}-3\sqrt{x-1}-6=2\sqrt{2x^2-3x+1}-3x$

53. $5x+2\sqrt{4x^2+x-3}=4\sqrt{4x-3}+4\sqrt{x+1}+7$

54. $\sqrt{6-\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}=\sqrt{\sqrt[3]{x}+3}+\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}-1$

55. $3x^2+2\sqrt{2x^4-18x^2+16}=20+3\sqrt{x^2-8}+3\sqrt{2x^2-2}$

56. $\sqrt{x+3}+\dfrac{x^2+2x+1}{\sqrt{x+3}}=2x+2$

57. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}+\sqrt{x^2-2}=2\sqrt{x}$

58. $\sqrt[5]{16+\sqrt{x^2+x+254}}+\sqrt[5]{16-\sqrt{x^2+x+254}}=2$

59. $\sqrt[9]{4x^2+4x+1}+\sqrt[9]{4x^2-4x+1}=4\sqrt[9]{4x^2-1}$

60. $4x-3+2(x-1)\sqrt{2\left(2x^2-4x+3\right)}+(2x-1)\sqrt{4x^2-4x+3}=0$

61. $\sqrt{x+5}=x^2-5$

62. გააჩნია თუ არა განტოლებას $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x+2}=2\sqrt[4]{x+1}$ ამონახსნი?

63. ამოხსენით განტოლება $\sqrt{5-\sqrt{5+x}}=x$

64. ამოხსენით განტოლება $\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3-\sqrt{x}}}}=\sqrt{3-\sqrt{x}}$

65. არსებობს თუ არა ისეთი მთელკოეფიციენტებიანი წრფივი განტოლება რომლის ფესვი $x+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\dots}}}=\sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\dots}}}$ განტოლების ფესვის ტოლია?

66. ამოხსენით განტოლება $\sqrt{\dfrac{x}{x-3}}+2\sqrt{\dfrac{x-3}{x}}=\sqrt{\dfrac{2x}{x-1}}+2\sqrt{\dfrac{x-1}{2x}}$

67. ამოხსენით განტოლება $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}}+\sqrt{\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}}+\sqrt{\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}}}$

68. ამოხსენით განტოლება $\dfrac{\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{x-b}}{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}}=\dfrac{a+b}{2}-x,\quad a\neq b$

69. ამოხსენით განტოლება $x^2+\sqrt{1+x^2}+\dfrac{\left(1-\sqrt{6}\right)\sqrt{1+x^2}+\dfrac{15}{4}}{x^2-\sqrt{1+x^2}}=-1$

70. ამოხსენით განტოლება $\sqrt{x}+\sqrt{2+\sqrt{x}}+\dfrac{(1-\sqrt{10})\sqrt{2+\sqrt{x}}+\dfrac{27}{4}}{\sqrt{x}-\sqrt{2+\sqrt{x}}}+1=0$

§8. განტოლებათა სისტემები

ა – ჯგუფი

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები (№№ 1 – 20):

1. $\begin{cases}x+y=3\\2x-y=3\end{cases}$

ა) (1; 2) ბ) (2; 1) გ) (3; 1) დ) (1; 3)

2. $\begin{cases}2x+3y=5\\3x-y=2\end{cases}$

ა) (1; 2) ბ) (2; 2) გ) (1; 1) დ) (0; 2)

3. $\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y=2\\[2mm]\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{3}y=8\end{cases}$

ა) (3; 2) ბ) (4; 1) გ) (1; 3) დ) (2; 3)

4. $\begin{cases}\dfrac{2}{5}x+\dfrac{7}{3}y=9\\[2mm]\dfrac{5}{2}x+\dfrac{1}{3}y=\dfrac{27}{2}\end{cases}$

ა) (5; 3) ბ) (4; 3) გ) (4; 4) დ) (3; 5)

5. $\begin{cases}5(x-1)-3(y+2)=x-6\\2(x+y)-3(x+1)=y-4\end{cases}$

ა) (1; 2) ბ) (2; 1) გ) (3; 2) დ) (2; 3)

6. $\begin{cases}7(x-y)+3(x+1)=2y+15\\2(y-3)+3(x-4)=-5\end{cases}$

ა) (1; 3) ბ) (2; 3) გ) (3; 3) დ) (3; 2)

7. $\begin{cases}\dfrac{2}{3}(x-3)+\dfrac{5}{2}\left(y+\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{26}{3}\\[2mm]3\left(\dfrac{2}{3}x+2\right)-\dfrac{1}{2}\left(y+\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{97}{6}\end{cases}$

ა) (5; 2) ბ) (6; 2) გ) (2; 6) დ) (3; 4)

8. $\begin{cases}\dfrac{5}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{2}{3}\left(y+\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{35}{9}\\[2mm]\dfrac{3}{5}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{5}{3}\left(y+\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{59}{15}\end{cases}$

ა) $\left(\frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right)$; ბ) $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right)$; გ) $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right)$; დ) $\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{2}\right)$

9. $\begin{cases} \frac{2}{3}\left(x+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{5}\right)+\frac{2}{3}\left(y+\frac{1}{3}\right)=\frac{57}{60} \end{cases}$

ა) $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right)$; ბ) $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{5}\right)$; გ) $\left(\frac{1}{4}; \frac{2}{7}\right)$; დ) $\left(\frac{1}{4}; \frac{2}{3}\right)$

10. $\begin{cases} \frac{2}{5}\left(3x+\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{3}\left(y+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{15} \\ \frac{1}{5}\left(2x-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)=0,415 \end{cases}$

ა) $\left(\frac{1}{4}; \frac{2}{5}\right)$; ბ) $\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right)$; გ) $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right)$; დ) $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{3}\right)$

11. $\begin{cases} 1,2(0,2x-3,2)+5,2(y-1,2)=-2,64 \\ 0,3(0,5x+1,2)-2,5(y+2,4)=-6,89 \end{cases}$

ა) (5; 12) ბ) (6; 11) გ) (4; 12) დ) (3; 15)

12. $\begin{cases} 0,2(0,5x+1,5)+1,5(0,2y+2,2)=3,6 \\ 2,1(0,2x+3)+2,2(0,3y-3,5)=-2 \end{cases}$

ა) (-2; 2) ბ) (-3; 1) გ) (-3; 3) დ) (-2; 4)

13. $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases}$

ა) (2; 1), $\left(\frac{13}{11}; \frac{29}{11}\right)$ ბ) (1; 2); $\left(\frac{13}{9}; \frac{7}{11}\right)$ გ) (2; 3); $\left(\frac{11}{13}; \frac{11}{29}\right)$ დ) (1; 3); $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{7}\right)$

14. $\begin{cases} x+3y=4 \\ 2x^2-3y^2+2xy+y=2 \end{cases}$

ა) (4; 1), $\left(-3; \frac{2}{3}\right)$ ბ) (3; 1), $\left(-5; \frac{2}{3}\right)$ გ) (1; 1); $\left(-6; \frac{10}{3}\right)$ დ) (3; 2); $\left(-6; \frac{2}{3}\right)$

15. $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{5}{y}=19 \\ \frac{3}{x}-\frac{1}{y}=3 \end{cases}$

ა) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{5}\right)$; ბ) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$; გ) $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right)$; დ) $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$

16. $\begin{cases} \frac{3}{x}-\frac{5}{y}=\frac{1}{6} \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{7}{6} \end{cases}$

ა) (2; 4) ბ) (3; 5) გ) (2; 5) დ) (3; 6)

17. $\begin{cases} x^2+2xy-y^2+5=0 \\ (x+1)(y+2)=0 \end{cases}$

ა) $(1;2\pm\sqrt{3})(-1\pm\sqrt{7};3)$ ბ) $(2;3),(3;4)$ გ) $(-1;\ -1\pm\sqrt{7});\ (2\pm\sqrt{3};\ -2)$ დ) $(2;3),(1;2)$

18. $\begin{cases} 2x+3y+z=7 \\ x+2y+3z=9 \\ 3x+y+2z=8 \end{cases}$

ა) (1;1;2) ბ) (2;3;1) გ) (2;2;4) დ) (3;1;0)

19. $\begin{cases} 2x-y+3z=9 \\ x+2y-3z=-2 \\ 3x+y+2z=11 \end{cases}$

ა) (1;1;2) ბ) (2;2;2) გ) (1;3;2) დ) (2;1;2)

20. $\begin{cases} 2x+3y+5xy+4=0 \\ (x-1)(y+1)=0 \end{cases}$

ა) $\left(2;-\frac{1}{2}\right);\left(\frac{2}{3};-1\right)$ ბ) $\left(1;-\frac{5}{6}\right);\left(\frac{2}{3};-2\right)$ გ) $\left(1;-\frac{3}{4}\right);\left(\frac{1}{3};-1\right)$ დ) $\left(2;-\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{1}{3};4\right)$

ბ – ჯგუფი

იპოვეთ განტოლებათა სისტემების მთელი ამონახსნები (№№21 – 37):

21. $\begin{cases} \frac{2x}{y}+\frac{y}{3x}=\frac{5}{3} \\ x^2-xy+y^2=27 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x^2-2xy+y^2+x=19 \\ \frac{x+y}{y}+\frac{2y}{x}=\frac{56}{5} \end{cases}$

23. $\begin{cases} \frac{2x}{y}+\frac{3y}{x+y}=\frac{21}{5} \\ x^2+y^2+x=12 \end{cases}$

24. $\begin{cases} \frac{2x}{y}+\frac{y}{2x+3y}=\frac{29}{7} \\ 3x^2-5y^2+xy-9y=0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} \frac{x^2+3x+1}{y+2}+\frac{5y+10}{x^2+3x+1}=6 \\ 5x^2+3x-y=5 \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dfrac{x^2+3}{y^2-5y}-\dfrac{2y^2-10y}{x^2+3}=1 \\ 5y^2-3y+x^2=3 \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+x+y}+\dfrac{1}{x^2+x-y}=\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{x^2+x+y}-\dfrac{1}{x^2+x-y}=-\dfrac{1}{9} \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{2x}{x^2-x+2y}+\dfrac{y}{x^2-x-y}=2 \\ \dfrac{3y}{x^2-x-y}-\dfrac{x}{x^2-x+2y}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2+1}+\dfrac{3}{x^2-y^2+2}=\dfrac{9}{14} \\ \dfrac{5}{x^2-y^2+2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2+1}=\dfrac{2}{7} \end{cases}$

30. $\begin{cases} x^2+y^2+5xy=15 \\ x^4+xy^3+y^4+x^3y=27 \end{cases}$

31 . $\begin{cases} 5x^2+7xy-4y^2=3 \\ 4x^2-3xy+y^2=2 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 3x^2+2xy-y^2=15 \\ 5x^2-xy+2y^2=32 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x^2+5xy+2y^2=26 \\ 3x^2+xy-y^2=29 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x^2+y^2+3x+2y+\dfrac{13}{4}=0 \\ 5x^2+y^2+3xy=5 \end{cases}$

35. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{y}=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt[6]{x} \end{cases}$

36. $\begin{cases} \sqrt{x^2+2y+3}+x+y=12 \\ x^2+y-x=15 \end{cases}$

37. $\begin{cases}\sqrt{y^2-3xy+2x^2}+2x=y\\ \sqrt{3xy-2x^2-y^2}=2x-8\end{cases}$

38. იპოვეთ განტოლებათა სისტემის რაციონალური ფესვები

$$\begin{cases}x^4+y^4=17\\ (x^2+y^2)(x^6+y^6)=325\end{cases}$$

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები (№№ 39 -48):

39. $\begin{cases}x^2+y^2-3xy=-5\\ x^3+y^3=35\end{cases}$

40. $\begin{cases}x^4+y^4+3x^2y^2=20\\ x^2+y^2+x^4y^4=20\end{cases}$

41. $\begin{cases}3x^2-5x+y^2+3y-1=0\\ 2x^2+x-y^2-3y+1=0\end{cases}$

42. $\begin{cases}5y^3+8y^2x+8yx^2+3x^3=6\\ y^3+y^2x+2yx^2=1\end{cases}$

43. $\begin{cases}(x+2y)(x^3+xy^2)=25\\ 2x^2+y^2+2xy=10\end{cases}$

44. $\begin{cases}y^2+2y-xy-3x=3\\ x^2+2y^2=22\end{cases}$

45. $\begin{cases}x^3+x^2-xy+3x+3=y\\ 3x^4-4x^2y+x^2-4=0\end{cases}$

46. $\begin{cases}xy^2-2y^2+2x+2=x^2+x\\ 3y^4+2y^2x-3y^2=15\end{cases}$

47. $\begin{cases}x^4+y^4=2a^4+12a^2b^2+2b^4\\ x^2+y^2+xy=3a^2+b^2\end{cases}$

48. $\begin{cases}|x-1|+|y+1|=3\\ |2x+1|-|y-2|=5\end{cases}$

49. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 5x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}=22 \\ 2x\sqrt{x}+3y\sqrt{y}=26 \end{cases}$$

50. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 2x^2+y^2+4xy-4y-25=0 \\ 4x^2-y^2-2y-xy+1=0 \end{cases}$$

51. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x^2+2y^2+2z^2=2z+2xy+2yz+2 \\ x^2-y^2+z^2=11 \end{cases}$$

მთელ რიცხვთა სიმრავლეში

52. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x^3z+y^3z+xy^2z-3xz-xz^2=39 \\ xy+z+3=0 \end{cases}$$

მთელ რიცხვთა სიმრავლეში

53. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ 2z^2+3y^2-6xy-16z=-50 \end{cases}$$

ამოხსენით განტოლებათა სისტემა დადებით რიცხვთა სიმრავლეში (№№ 54 – 56):

54. $\begin{cases} x+y+z=9 \\ x^2+y^2+z^2=27 \end{cases}$

55. $\begin{cases} z^2+2x^2+3y^2=31 \\ x^3+y^3+z^3=36 \end{cases}$

56. $\begin{cases} xy^2+x^5y+1=3x^2y \\ x+y+z=4 \end{cases}$

57. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x+y=z^2 \\ x+z=y^2 \\ y+z=x^2 \end{cases}$$

58. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} z+xy=9 \\ x+yz=11 \\ y+xz=9 \end{cases}$$

59. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} xy+xz+yz=26 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{12} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{yz}=\dfrac{7}{12} \end{cases}$$

60. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x+yz+xyz=13 \\ y+xz+xyz=11 \\ z+xy+xyz=11 \end{cases}$$

მთელ რიცხვთა სიმრავლეში

61. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+x+y+z=6 \\ xy+xz+yz=3 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

62. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x^3+y^3=\dfrac{3}{2}xyz \\ y^3+z^3=\dfrac{35}{6}xyz \\ x^3+z^3=\dfrac{14}{3}xyz \end{cases}$$

63. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=x+y+\dfrac{1}{x+y+z} \\ \sqrt{\dfrac{7}{4}-z^2}=4\left(x^2+y^2\right)-14 \end{cases}$$

64. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x^3+y^3=z^3 \\ x^2+y^2=z^2 \\ x+y+z=6 \end{cases}$$

65. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x^3+x^2y+xy^2+y^3=175 \\ x^3+x^2z+xz^2+z^3=272 \\ z^3+z^2y+zy^2+y^3=369 \end{cases}$$

66. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x+y+z+xz+yz=\dfrac{11}{2} \\ x^2+y^2+z^2=\dfrac{81}{16} \\ xy=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში

67. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 3x^2-18y^2+3xy+2x+41y=21 \\ 3xy+x^2+y^2=11 \end{cases}$$

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში

68. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x^3+y^3+z^3=10 \\ xyz=2 \end{cases}$$

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში

69. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^4+y^4+z^4=98 \end{cases}$$

70. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x+y+z+t=5 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{t}=5 \\ xy+xz+xt+yz+yt+zt=8 \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{xt}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{yt}+\dfrac{1}{zt}=8 \end{cases}$$

71. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3=3 \\ x^4+y^4+z^4=3 \end{cases}$$

დადებით რიცხვთა სიმრავლეში

72. იპოვეთ განტოლებათა სისტემის

$$\begin{cases} x_2\cdot x_3\cdots x_n=x_1 \\ x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdots x_n=x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1\cdot x_2\cdots x_{n-1}=x_n \end{cases}$$

ფესვთა რაოდენობა

73. a პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის გააჩნია განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-8y+19=0 \\ x^2+y^2-6x-12y+45-a=0 \end{cases}$$

ერთადერთი ამონახსნი?

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები (№№74 - 75):

74. $$\begin{cases} u+v=3 \\ z+t=5 \\ z^2-u^2=5 \\ t^2-v^2=3 \end{cases}$$

75. $$\begin{cases} \sqrt{x+2}+\sqrt{y+5}=8 \\ \sqrt{2x-5}+\sqrt{2y+9}=10 \end{cases}$$

§9. მიმდევრობები

ა – ჯგუფი

1. მიმდევრობის n-ური წევრია $a_n=\dfrac{n}{n^2+1}$. გამოთვალეთ ამ მიმდევრობის წევრები:

1.) a_5, 2) a_8, 3) a_{12}

1.ა) $\dfrac{3}{26}$ ბ) $\dfrac{5}{23}$ გ) $\dfrac{5}{24}$ დ) $\dfrac{5}{26}$

2.ა) $\dfrac{8}{75}$ ბ) $\dfrac{8}{65}$ გ) $\dfrac{7}{65}$ დ) $\dfrac{7}{75}$

3.ა) $\dfrac{12}{145}$ ბ) $\dfrac{12}{147}$ გ) $\dfrac{13}{145}$ დ) $\dfrac{11}{145}$.

2. მიმდევრობის n-ური წევრია $a_n=\dfrac{0{,}1\cdot n}{n^2+0{,}3}$. გამოთვალეთ ამ მიმდევრობის წევრები:

1) a_5, 2) a_{12}, 3) a_{18}

1.ა) $\dfrac{5}{253}$ ბ) $\dfrac{3}{257}$ გ) $\dfrac{5}{257}$ დ) $\dfrac{7}{257}$

2.ა) $\dfrac{4}{483}$ ბ) $\dfrac{4}{487}$ გ) $\dfrac{4}{481}$ დ) $\dfrac{4}{381}$

3.ა) $\dfrac{6}{1083}$ ბ) $\dfrac{6}{1085}$ გ) $\dfrac{6}{1087}$ დ) $\dfrac{6}{1081}$

3. მიმდევრობის n-ური წევრია $a_n=\dfrac{\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}n-\frac{1}{2}}$. გამოთვალეთ ამ მიმდევრობის წევრები:

1) a_2, 2) a_5, 3) a_{12}

1.ა) $\dfrac{8}{17}$ ბ) $\dfrac{12}{19}$ გ) $\dfrac{12}{13}$ დ) $\dfrac{11}{17}$

2.ა) $\dfrac{13}{47}$ ბ) $\dfrac{14}{47}$ გ) $\dfrac{15}{47}$ დ) $\dfrac{13}{49}$

3.ა) $\frac{25}{117}$ ბ) $\frac{24}{117}$ გ) $\frac{28}{115}$ დ) $\frac{28}{117}$

4. მიმდევრობის n-ური წევრია $a_n = \frac{5n^2+0,7n-1}{0,4n-0,2}$. გამოთვალეთ ამ მიმდევრობის წევრები:

1) a_2, 2) a_5, 3) a_{12}

1.ა) 38) ბ) 36 გ) 28 დ) (48)

2.ა) $\frac{423}{6}$ ბ) $\frac{425}{6}$ გ) $\frac{428}{5}$ დ) $\frac{425}{8}$

3.ა) $\frac{3638}{23}$ ბ) $\frac{3837}{23}$ გ) $\frac{3637}{23}$ დ) $\frac{3637}{25}$

5. მიმდევრობის n-ური წევრია $a_n = \frac{1}{2}n + \frac{13}{3}$. ქვემოთ მოცემული რიცხვებიდან რომელია ამ მიმდევრობის წევრი? $\frac{53}{6}$; $\frac{55}{6}$; $\frac{105}{4}$; 105,3.

ა) $\frac{53}{6}$ ბ) $\frac{55}{6}$ გ) $\frac{105}{4}$ დ) 105,3

6. მიმდევრობის n-ური წევრია $a_n = \frac{2n+1}{\frac{2}{3}n+9}$. ქვემოთ მოცემული რიცხვებიდან რომელია ამ მიმდევრობის წევრი? $\frac{57}{28}$; $\frac{103}{48}$; $\frac{94}{27}$; $\frac{37}{21}$.

ა) $\frac{103}{48}$ ბ) $\frac{94}{27}$ გ) $\frac{57}{28}$ დ) $\frac{37}{21}$

7. მიმდევრობის n-ური წევრია $a_n = \frac{|3n-17|}{n+2}$. ქვემოთ მოცემული რიცხვებიდან რომელია ამ მიმდევრობის წევრი? $\frac{105}{37}$; $\frac{34}{19}$; $\frac{93}{17}$; $\frac{97}{43}$.

ა) $\frac{97}{43}$ ბ) $\frac{34}{19}$ გ) $\frac{93}{17}$ დ) $\frac{105}{37}$

8. მიმდევრობის n-ური წევრია $a_n = \frac{2n}{n^2+n+1}$. ქვემოთ მოცემული რიცხვებიდან რომელია ამ მიმდევრობის წევრი? $\frac{10}{31}$; $\frac{15}{17}$; $\frac{6}{13}$; $\frac{5}{8}$.

ა) $\frac{10}{31}$ ბ) $\frac{15}{17}$ გ) $\frac{6}{13}$ დ) $\frac{5}{8}$

9. მიმდევრობის n-ური წევრია $a_n = \frac{n+105}{n+12}$. რამდენი წევრია ამ მიმდევრობაში 5-ზე მეტი?

ა) 10 ბ) 11 გ) 12 დ) 13

10. მიმდევრობის n-ური წევრია $a_n = \frac{2n+15}{3n-105}$. რამდენი წევრია ამ მიმდევრობაში 4-ზე მეტი?

ა) 8 ბ) 9 გ) 7 დ) 10

11. მიმდევრობის n-ური წევრია $a_n = n^2 - 15n + 56$. რამდენი წევრია ამ მიმდევრობაში ისეთი, რომელიც 394-ზე ნაკლებია?

ა) 26 ბ) 28 გ) 29 დ) 27

12. დაასახელეთ მიმდევრობის მომდევნო წევრი:

1) $\frac{1}{4}; \frac{4}{7}; \frac{9}{12}; \frac{16}{19}; \frac{25}{28}; \ldots$

ა) $\frac{36}{35}$ ბ) $\frac{36}{37}$ გ) $\frac{36}{39}$ დ) $\frac{36}{41}$

2) $\frac{1}{2}; \frac{2}{9}; \frac{3}{28}; \frac{4}{65}; \frac{5}{126}; \ldots$

ა) $\frac{6}{219}$ ბ) $\frac{6}{217}$ გ) $\frac{6}{218}$ დ) $\frac{6}{205}$

13. დაასახელეთ იმ წევრის ნომერი, რომლის შემდეგაც მიმდევრობა $a_n = 3n^2 - 7n + 1$, ზრდადია.

ა) 2 ბ) 3 გ) 4 5

14. დაასახელეთ იმ წევრის ნომერი, რომლის შემდეგაც მიმდევრობა $a_n = -2n^2 + 10n - 3$ მკაცრად კლებადია.

ა) 2 ბ) 3 გ) 6 დ) 7

15. დაასახელეთ იმ წევრის ნომერი, რომლის შემდეგაც მიმდევრობა $a_n = \frac{5n+3}{n^2+2n+1}$ კლებადია.

ა) 2 ბ) 4 გ) 6 დ) 1

16. დაასახელეთ იმ წევრის ნომერი, რომლის შემდეგაც მიმდევრობა $a_n = \frac{-5n-1}{3n^2+n+1}$ ზრდადია.

ა) 3 ბ) 4 გ) 1 დ) 5

17. შემოსაზღვრულია თუ არა ზემოდან მიმდევრობა $a_n = \frac{2n+1}{5n-1}$?

ა) შემოსაზღვრულია ბ) არაა შემოსაზღვრული

18. შემოსაზღვრულია თუ არა ქვემოდან მიმდევრობა $a_n = \frac{3n+1}{7n-1}$?

ა) შემოსაზღვრულია ბ) არაა შემოსაზღვრული

19. შემოსაზღვრულია თუ არა ზემოდან მიმდევრობა $a_n = \frac{n+(-1)^{n+1} \cdot n}{4}$?

ა) შემოსაზღვრულია ბ) არაა შემოსაზღვრული

20. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ცნობილია, რომ

1) $a_1 = -2$, $d = -\frac{2}{3}$. გამოთვალეთ $a_{11} = ?$

ა) $-\frac{29}{3}$ ბ) $-\frac{22}{3}$ გ) $-\frac{25}{3}$ დ) $-\frac{26}{3}$

2) $a_1 = 5,\ d = \frac{1}{3}$. გამოთვალეთ $a_{12} = ?$

ა) $\frac{29}{3}$ ბ) $\frac{28}{3}$ გ) $\frac{26}{3}$ დ) $\frac{25}{3}$

3) $a_1 = 3,\ d = \frac{5}{7}$. გამოთვალეთ $a_{14} = ?$

ა) $\frac{86}{7}$ ბ) $\frac{85}{7}$ გ) $\frac{87}{7}$ დ) $\frac{88}{7}$

4). $a_1 = 7$, $d = -1$ გამოთვალეთ $a_{25} = ?$

ა) -16 ბ) -15 გ) -18 დ) -17

21. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$. ცნობილია, რომ

1). $a_1 = 0.5$, $d = 0,25$ გამოთვალეთ $S_{11} = ?$

ა) $\frac{77}{4}$ ბ) $\frac{37}{2}$ გ) $\frac{33}{2}$ დ) $\frac{39}{2}$

2). $a_1 = -3$, $d = 0.4$ გამოთვალეთ $S_{15} = ?$

ა) – 4 ბ) - 5 გ) - 3 დ) 7

3) $a_1 = 5,\ d = \frac{1}{3}$. გამოთვალეთ $S_{100} = ?$

. ა) 2350 ბ) 2250 გ) 2050 დ) 2150

4) $a_1 = -5,\ d = 2$. გამოთვალეთ $S_{19} = ?$

ა) 236 ბ) 247 გ) 238 დ) 235

22. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$. ცნობილია, რომ

1) $a_5 = 7,\ a_9 = 15$. გამოთვალეთ $a_{27} = ?$

ა) 52 ბ) 50 გ) 51 დ) 49

2) $a_7 = 9,\ a_{12} = 12$. გამოთვალეთ $a_{29} = ?$

ა) 22,1 ბ) 33,3 გ) 11,1 დ) 22,2

3) $a_{12} = 7,\ a_{15} = 15$. გამოთვალეთ $a_{31} = ?$

ა) $\frac{164}{3}$ ბ) $\frac{173}{3}$ გ) $\frac{174}{5}$ დ) $\frac{172}{3}$

4) $a_{11} = 18,\ a_{17} = 22$. გამოთვალეთ $a_{41} = ?$

ა)31 ბ)32 გ)34 დ) 38

23. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$. ცნობილია, რომ

1) $S_5 = 13,\ S_8 = 17$. გამოთვალეთ $S_{13} = ?$

ა) $\frac{49}{3}$ ბ) $\frac{54}{3}$ გ) $\frac{53}{3}$ დ) $\frac{52}{3}$

2) $S_4 = 8,\ S_9 = 16$. გამოთვალეთ $S_{13} = ?$

ა) $\frac{104}{5}$ ბ) $\frac{102}{5}$ გ) $\frac{106}{5}$ დ) $\frac{103}{5}$

3) $S_5 = 12,\ S_{10} = 15$. გამოთვალეთ $S_{15} = ?$

ა) 8 ბ) 9 გ) 7 დ) 10

4) $S_3 = 7,\ S_4 = 10$. გამოთვალეთ $S_7 = ?$

ა) 27 ბ) 24 გ) 21 დ) 28

24. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$. ცნობილია, რომ $a_1 \neq 0$, $S_{17} + S_{25} = S_{42}$. გამოთვალეთ $a_{25} : a_{27}$.

ა) $\frac{1}{2}$ ბ) 1 გ) 2 დ) 3

25. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$. ცნობილია, რომ $a_1 = \frac{1}{5}$; $d = \frac{2}{7}$ ჩამოთვლილი რიცხვებიდან $7\frac{2}{5}$; $4\frac{1}{5}$; $12\frac{1}{3}$; $5\frac{1}{13}$ რომელი წარმოადგენს პროგრესიის წევრს?

ა) $7\frac{2}{5}$ ბ) $4\frac{1}{5}$ გ) $12\frac{1}{3}$ დ) $5\frac{1}{13}$

26. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$. ცნობილია, რომ $a_1 = \frac{2}{3}$; $d = \frac{1}{5}$. ჩამოთვლილი რიცხვებიდან $15\frac{1}{7}$; $12\frac{2}{3}$; $10\frac{1}{4}$; $21\frac{1}{6}$ რომელი წარმოადგენს პროგრესიის წევრს?

ა) $15\frac{1}{7}$ ბ) $21\frac{1}{6}$ გ) $12\frac{2}{3}$ დ) $10\frac{1}{4}$

27. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$. ცნობილია, რომ $a_1 = \frac{2}{5}$; $d = \frac{1}{3}$. ჩამოთვლილი რიცხვებიდან $17\frac{1}{4}$; $5\frac{2}{3}$; $5\frac{2}{5}$; $13\frac{1}{3}$ რომელი წარმოადგენს მიმდევრობის წევრს?

ა) $17\frac{1}{4}$ ბ) $5\frac{2}{3}$ გ) $13\frac{1}{3}$ დ) $5\frac{2}{5}$

28. მოცემულია რიცხვები 10 და 12, მათ შორის ჩასვით ათი რიცხვი ისე, რომ მათ მოცემულ რიცხვებთან ერთად შეადგინონ არითმეტიკული პროგრესია. იპოვეთ ამ პროგრესიის მეშვიდე წევრი

ა)122/11 ბ) 123/11 გ)124/11 დ)120/11

29. მოცემულია რიცხვები 10, 48 და 64. შეიძლება თუ არა მათ შორის ჩავსვათ რამდენიმე რიცხვი ისე, რომ მათ მოცემულ რიცხვებთან ერთად შეადგინონ არითმეტიკული პროგრესია.

ა)შეიძლება ბ)არ შეიძლება

30. მოცემულია გეომეტრიული პროგრესია $b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots$. ცნობილია, რომ

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 3$. გამოთვალეთ $b_5 = ?$

ა) $\frac{81}{2}$ ბ) $\frac{83}{2}$ გ) $\frac{85}{2}$ დ) $\frac{79}{2}$

2) $b_1 = \frac{32}{3}$, $q = \frac{3}{4}$. გამოთვალეთ $b_7 = ?$

ა) $\frac{243}{64}$ ბ) $\frac{243}{128}$ გ) $\frac{243}{256}$ დ) $\frac{81}{128}$

31. მოცემულია გეომეტრიული პროგრესია $b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots$. ცნობილია, რომ

1) $b_1 = 2, b_3 = \frac{1}{2}$. გამოთვალეთ $S_4 = ?$

ა) $\frac{15}{4}$ ბ) $\frac{13}{4}$ გ) $\frac{15}{8}$ დ) $\frac{13}{8}$

2) $b_5 = 4, b_8 = 1$. გამოთვალეთ S_5

ა) $\frac{16\sqrt[3]{4}-20\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{16}-1}$ ბ) $\frac{80+16\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{16}-1}$ გ) $\frac{80}{\sqrt[3]{16}-1}$ დ) $\frac{32\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}-1}$

32. მოცემულია გეომეტრიული პროგრესია $b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots$. ცნობილია, რომ $b_1 = 2, b_3 = 18$. ჩამოთვლილი რიცხვებიდან 218, 410, 486, 506 რომელია პროგრესიის წევრი?

ა) 410 ბ) 506 გ) 486 დ) 218

33. მოცემულია გეომეტრიული პროგრესია $b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots$. ცნობილია, რომ $b_1 = 15, b_3 = \frac{27}{5}$.

ჩამოთვლილი რიცხვებიდან $\frac{2187}{3125}; \frac{243}{625}; \frac{729}{625}; \frac{243}{125}$ რომელი არაა პროგრესიის წევრი?

ა) $\frac{2187}{3125}$ ბ) $\frac{243}{625}$ გ) $\frac{729}{625}$ დ) $\frac{243}{125}$

34. მოცემულია რიცხვები 10 და 12, მათ შორის ჩასვით ათი რიცხვი ისე, რომ მათ მოცემულ რიცხვებთან ერთად შეადგინონ გეომეტრიული პროგრესია. იპოვეთ ამ პროგრესიის მეშვიდე წევრი

ა) $12\sqrt[11]{1{,}2^6}$ ბ) $10\sqrt[11]{1{,}2^6}$ გ) $10\sqrt[11]{1{,}2^5}$ დ) $8\sqrt[11]{1{,}2^6}$

35. არითმეტიკულ პროგრესიაში, რომლის პირველი წევრია $\frac{15}{8}$ და სხვაობა $-\frac{1}{15}$, რომელია პირველი უარყოფითი წევრი?

ა) 29 ბ) 31 გ) 28 დ) 30

36. არითმეტიკულ პროგრესიაში $a_1 = -5\frac{2}{3}$, $d = \frac{1}{3}$. იპოვეთ პირველი დადებითი წევრის ნომერი.

ა) 19 ბ) 18 გ) 20 დ) 17

37. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $a_1 = -10$; $d = \frac{1}{2}$. მიმდევრობის რა უმცირესი რაოდენობის წევრი უნდა ავიღოთ, რომ მისი ჯამი იყოს დადებითი რიცხვი?

ა) 39 ბ) 38 გ) 41 დ) 42

38. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $a_1 = 10$; $d = -\frac{1}{3}$. რა უმცირესი რაოდენობის წევრი უნდა ავიღოთ, რომ მათი ჯამი იყოს უარყოფითი რიცხვი?

ა) 60 ბ) 61 გ) 63 დ) 62

ბ – ჯგუფი

39. a_n მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული ფორმულით $a_{n+1} = a_n + 3n + 5$, $a_1 = 4$. ჩაწერეთ მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა.

40. გამოთვალეთ $a_n = \frac{(-1)^n + 3}{3n^2 - 7n + 5}$ მიმდევრობის უდიდესი წევრი.

41. გამოთვალეთ $a_n = \dfrac{(-1)^n + 2}{-3n^2 + 10n + 9}$, მიმდევრობის უმცირესი წევრი.

42. გამოთვალეთ $a_n = \dfrac{73 - 7\frac{2}{3}n - \left|1\frac{2}{3}n - 5\right| - \left|12\frac{1}{3}n - 35 - \left|\frac{5n}{3} - 5\right|\right|}{4}$ მიმდევრობის უდიდესი წევრი.

43. შემოსაზღვრულია თუ არა მიმდევრობა $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$?

44. შემოსაზღვრულია თუ არა მიმდევრობა $b_n = \sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n} + 3$?

45. გამოთვალეთ $a_n = \sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n+1} + 3$ მიმდევრობის უდიდესი წევრი.

46. გამოთვალეთ $a_n = \sqrt[6]{n+3} - \sqrt[6]{n+1} + \dfrac{n+1}{n}$ მიმდევრობის უდიდესი წევრი.

47. დაწერეთ 1, -1, 1, -1, ... მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა.

48. დაწერეთ $\dfrac{4}{9}, \dfrac{16}{25}, \dfrac{36}{49}, \cdots$ მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა.

49. დაწერეთ 2, 0, 2, 0, ... მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა.

50. დაწერეთ 1, 0, 1, 0, ... მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა.

51. დაწერეთ 0, 1, 0, 1, ... მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა.

52. დაწერეთ $\dfrac{2}{3}, 0, \dfrac{2}{3}, 0, \cdots$ მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა.

53. დაწერეთ $\dfrac{2}{3}, 3, \dfrac{2}{3}, 3, \cdots$ მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა.

54. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. სიბრტყეზე აღნიშნეთ წერტილები $M_1(1, a_1)$, $M_2(2, a_2)$, $M_3(3, a_3)$, ... რა შეიძლება ითქვას ამ წერტილების განლაგებაზე? (რომელი ფუნქციის გრაფიკზე მდებარეობენ ისინი?)

55. მოცემულია რიცხვები a, b და c შეიძლება თუ არა მათ შორის ჩაესვათ რამდენიმე რიცხვი ისე, რომ მათ მოცემულ რიცხვებთან ერთად შეადგინონ არითმეტიკული პროგრესია.

56. მოცემულია მიმდევრობა, რომლის n წევრის ჯამი S_n, გამოითვლება ფორმულით $S_n = 5n + 1$. არის თუ არა მოცემული მიმდევრობა არითმეტიკული პროგრესია?

57. მოცემულია მიმდევრობა, რომლის n წევრის ჯამი S_n, გამოითვლება ფორმულით $S_n = 3n^2 + 5n$. არის თუ არა მოცემული მიმდევრობა არითმეტიკული პროგრესია?

58. მოცემულია მიმდევრობა, რომლის n წევრის ჯამი S_n, გამოითვლება ფორმულით $S_n = n^3 + n^2 - 1$. არის თუ არა მოცემული მიმდევრობა არითმეტიკული პროგრესია?

59. მოცემულია მიმდევრობა, რომლის n წევრის ჯამი, გამოითვლება ფორმულით $S_n = 5 \cdot 2^n - 5$. არის თუ არა მოცემული მიმდევრობა გეომეტრიული პროგრესია?

60. მოცემულია მიმდევრობა, რომლის n წევრის ჯამი, გამოითვლება ფორმულით $S_n = 5 \cdot 2^n + 3^n - 1$. არის თუ არა მოცემული მიმდევრობა გეომეტრიული პროგრესია?

61. მოცემულია გეომეტრიული პროგრესია $b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots$. სიბრტყეზე აღებულია წერტილები $M_1(1, b_1)$, $M_2(2, b_2)$, რომელი ფუნქციის გრაფიკზეა ისინი განლაგებული?

62. არსებობს თუ არა სამ წევრიანი ორი არითმეტიკული პროგრესია, რომელთა ჯამი არის გეომეტრიული პროგრესია მნიშვნელით $q \neq 1, q \neq 0$.

63. არსებობს თუ არა სამ წევრიანი ორი გეომეტრიული პროგრესია, რომელთა სხვაობა არის არითმეტიკული პროგრესია სხვაობით $d \neq 0$.

64. არსებობს თუ არა ოთხ წევრიანი ორი გეომეტრიული პროგრესია, რომელთა ჯამი წარმოადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას სხვაობით $d \neq 0$.

65. მოცემულია რიცხვები a, b და c. შეიძლება თუ არა მათ შორის ჩავსვათ რამდენიმე რიცხვი ისე, რომ მათ მოცემულ რიცხვებთან ერთად შეადგინონ გეომეტრიული პროგრესია.

66. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეები, თუ მათი გვერდები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას.

67. მოცემულია ორი ზრდადი გეომეტრიული პროგრესია $b_1, b_2, \ldots$ და $c_1, c_2, \ldots$ შეიძლება თუ არა მათ გააჩნდეთ მხოლოდ ერთი საერთო წევრი, ხოლო დანარჩენი წევრები განსხვავებული იყოს?

68. მოცემულია ორი გეომეტრიული პროგრესია $b_1, b_2, \ldots$ და $c_1, c_2, \ldots$ შეიძლება თუ არა მათ გააჩნდეთ მხოლოდ ორი საერთო წევრი, ხოლო დანარჩენი წევრები განსხვავებული იყოს?

69. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. დაამტკიცეთ, იმისათვის, რომ $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ იყოს არითმეტიკული პროგრესია, აუცილებელია და საკმარისია $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ იყოს არითმეტიკული პროგრესია.

70. მოცემულია გეომეტრიული პროგრესია $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$. დაამტკიცეთ, იმისათვის, რომ $b_{n_1}, b_{n_2}, \ldots, b_{n_k}, \ldots$ იყოს გეომეტრიული პროგრესია, აუცილებელია და საკმარისია, მიმდევრობა $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ იყოს არითმეტიკული პროგრესია.

71. რამდენი არითმეტიკული პროგრესია არსებობს, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს: $a_1 = -7$, $a_n = 17$ და ამასთანავე დადებით წევრთა რაოდენობა 2-ჯერ მეტია უარყოფით წევრთა რაოდენობაზე.

72. რამდენი არითმეტიკული პროგრესია არსებობს, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს $a_1 = -30$, $a_n = 10$ და ამასთანავე უარყოფით წევრთა რაოდენობა 2-ჯერ მეტია დადებით წევრთა რაოდენობაზე.

73. ამოხსენით განტოლება $x^3 - 13x^2 + 39x + p = 0$ თუ ცნობილია, რომ მისი ფესვები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას.

74. უსასრულოა თუ არა ისეთი არითმეტიკული პროგრესიების რაოდენობა, რომელთა წევრთა რაოდენობა უსასრულოა, შედგება ნატურალური რიცხვებისაგან და ამასთანავე წყვილ-წყვილად საერთო წევრები არ გააჩნიათ?

75. არსებობს თუ არა ისეთი არითმეტიკული პროგრესია a, b, c, $(d \neq 0)$ რომლისთვისაც რიცხვები $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ ასევე ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას?

76. ამოხსენით განტოლება $x^3-18x^2+px-120=0$ თუ ცნობილია, რომ მისი ფესვები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას.

77. სიბრტყეზე მოცემულია სამი წრფე. არსებობს თუ არა ამ სიბრტყეში ისეთი წერტილი, რომ მანძილები ამ წერტილსა და წრფეებს შორის ადგენდნენ არითმეტიკულ პროგრესიას?

78. სიბრტყეზე მოცემულია ოთხი წრფე. არსებობს თუ არა ამ სიბრტყეში ისეთი წერტილი, რომ მანძილები ამ წერტილსა და წრფეებს შორის ადგენდნენ არითმეტიკულ პროგრესიას?

79. შეიძლება თუ არა უსასრულო წევრებიანი გეომეტრიული პროგრესიიდან არჩეულ იქნას ისეთი სამი წევრი, რომლებიც ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას?

80. შეიძლება თუ არა უსასრულო წევრებიანი არითმეტიკული პროგრესიიდან არჩეულ იქნას ისეთი სამი წევრი, რომლებიც ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას?

81. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორ უსასრულო წევრებიან არითმეტიკულ პროგრესიას გააჩნია საერთო წევრი, მაშინ პირობიდან $\frac{d_1}{d_2}$ რაციონალურია გამომდინარეობს, რომ მათი საერთო წევრების რაოდენობა უსასრულოა.

82. არსებობს თუ არა ისეთი პარალელოგრამი, რომლის ორი გვერდი და დიაგონალები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას?

83. შეიძლება თუ არა მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები და ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე ადგენდნენ გეომეტრიულ პროგრესიას?

84. შეიძლება თუ არა გეომეტრიული პროგრესიის არა მომდევნო რომელიმე ორი წევრი იყოს მარტივი რიცხვი, ხოლო პროგრესიის მნიშვნელი მთელ კოეფიციენტებიანი წრფივი განტოლების ამონახსნი?

85. შეიძლება თუ არა $ax^4+bx^2+c=0$ განტოლების ფესვები ადგენდნენ გეომეტრიულ პროგრესიას?

86. ნატურალური რიცხვები ჩამოწერილია შემდეგი სახით
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ...
შეგვეიძლია თუ არა ამ მიმდევრობაში დავსვათ მძიმეები ისე, რომ მივიღოთ არითმეტიკული პროგრესია? $(d\neq 1)$

გამოთვალეთ ჯამები (№№ 87 – 91):

87. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

88. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

89. $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

90. $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-1}}$

91. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}$

92. $a_1, a_2, \dots, a_n\dots$ არითმეტიკული პროგრესიაა, d პროგრესიის სხვაობა.

გამოთვალეთ ჯამი $\frac{1}{a_1a_2a_3}+\frac{1}{a_2a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$.

93. გამოთვალეთ ჯამი

$$(1\cdot2)^2+(2\cdot3)^2+\cdots+(99\cdot100)^2$$

94 გამოთვალეთ ჯამი $13+1313+131313+\cdots+1313...13$ ბოლო შესაკრებში 13 შედის n– ჯერ.

95. გამოთვალეთ ჯამი $12+1213+121312+\cdots+121312...13$. ბოლო შესაკრებში 12 შედის n – ჯერ.

96. გამოთვალეთ ჯამი $1\cdot3+4\cdot3^2+\cdots+n^2\cdot3^n$

97. გამოთვალეთ ჯამი ($[a]$ ნიშნავს a რიცხვის მთელ ნაწილს)

$$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+\left[\sqrt{n^2+13}\right]$$

98. გამოთვალეთ ჯამი $[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+\cdots\left[\sqrt[3]{n^3+1}\right]$ ($[a]$ ნიშნავს a რიცხვის მთელ ნაწილს)

99. გამოთვალეთ ისეთი პირველი n რიცხვის ჯამი, რომლებიც უნაშთოდ იყოფა 13-ზე და ამასთანავე ყოველი მათგანის ჩაწერაში მონაწილეობს ციფრი 1.

100. შემოსაზღვრულია თუ არა მიმდევრობა $a_n=\frac{(-1)^n\cdot n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

101. შემოსაზღვრულია თუ არა მიმდევრობა $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\left[\frac{n+(-1)^n\cdot n}{4}+\frac{n+1+(-1)^{n+1}(n+1)}{4}\right]$

102. დაწერეთ $a, b, a, b, \ldots$ მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა.

103. დაწერეთ 0, 1, 0, 2, 0, 3, ... მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა.

104. დაწერეთ 1, 1, 2, 2, 3, 3, ... მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა.

105. შემოსაზღვრულია თუ არა $a_n=n\cdot\sin n$ მიმდევრობა.

106. წარმოადგინეთ 1, 2, 1, 2, ... მიმდევრობა ორი მკაცრად ზრდადი მიმდევრობის სხვაობის სახით.

107. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი სასრული მიმდევრობა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც ორი ზრდადი მიმდევრობის სხვაობა.

108. განზოგადოებული მიმდევრობა ეუწოდოთ ფუნქციას განსაზღვრულს მთელ რიცხვთა Z სიმრავლეზე. განზოგადოებულ მიმდევრობას ეწოდება ლუწი, თუ სრულდება ტოლობა $a_{-n}=a_n$ ნებისმიერი n-სათვის და კენტი, თუ სრულდება ტოლობა $a_{-n}=-a_n$. ქვემოთ ჩამოთვლილი განზოგადოებული მიმდევრობებიდან, რომელია ლუწი და რომელი კენტი?

ა) $a_n=\frac{5n^2+1}{n^4+n^2-3}$; ბ) $b_n=\frac{5n\cdot\sin n}{n^2+1}$;

გ) $a_n=tg^2n-\cos2n+1$; დ) $b_n=\sin n+n^3$;

ე) $a_n=\cos n+\sin n+3$; ვ) $b_n=\cos n+|\sin n|-1$;

ზ) $a_n = \cos(\sin n)$; თ) $b_n = \sin(-1)^n \cdot n - \cos^2 n$

109. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი განზოგადოებული მიმდევრობის წარმოდგენა შეიძლება ლუწი და კენტი მიმდევრობების ჯამის სახით.

110. იპოვეთ მიმდევრობის 2; 6; 54.... ზოგადი წევრის ფორმულა, თუ მას გააჩნია შემდეგი თვისება: მიმდევრობის ყოველი წევრის (დაწყებული მეორიდან) შეფარდება წინა წევრთან იძლევა გეომეტრიულ პროგრესიას.

111. დაამტკიცეთ, თუ სამკუთხედების მედიანების კვადრატები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას, მაშინ ამ სამკუთხედის გაორკეცებული კუთხეების კოსინუსები ასევე ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას.

112. არსებობს თუ არა ისეთი მართკუთხა სამკუთხედი, რომლისთვისაც r, r_a, r_b, r_c რიცხვები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას (სადაც r ჩახაზული წრეწირის რადიუსია, ხოლო r_a, r_b, r_c - გარე ჩახაზული წრეწირის რადიუსები. წრეწირს ეწოდება სამკუთხედში გარე ჩახაზული თუ ის ეხება ერთ-ერთ გვერდს და დანარჩენი ორი გვერდის გაგრძელებას).

113. ცნობილია, რომ სამკუთხედში რიცხვები d, r, R ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას, სადაც d არის მანძილი ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირის ცენტრებს შორის, ხოლო r და R შესაბამისად ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირის რადიუსებია. სამკუთხედის პერიმეტრი 3-ის ტოლია. იპოვეთ პროგრესიის სხვაობა.

114. არსებობენ თუ არა ისეთი $\alpha, \beta, \gamma, \left(0 < \alpha < \beta < \gamma < 90^\circ\right)$ კუთხეები რომ, როგორც ამ კუთხეების სიდიდეები ასევე მათი კოსინუსები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას?

115. არსებობს თუ არა ისეთი კუთხეები $\alpha, \beta, \gamma, \left(0 < \alpha < \beta < \gamma < 90^\circ\right)$, რომ როგორც ამ კუთხეების სიდიდეები ასევე მათი ტანგენსები ადგენდნენ არითმეტიკულ პროგრესიას?

116. დაამტკიცეთ, სამკუთხედების სიმაღლეები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ სამკუთხედის კუთხეების სინუსების შებრუნებული სიდიდეები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას.

117. გამოთვალეთ მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეების სიდიდეები, თუ ცნობილია, რომ ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე, ბისექტრისა, მედიანა ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას.

118. არსებობს თუ არა ისეთი მართკუთხა სამკუთხედი, რომლისთვისაც სიდიდეები:

ა) r, R, r_a (სადაც r სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია, R - შემოხაზული წრეწირის რადიუსი, ხოლო r_a - წარმოადგენს a კათეტის მხებ, გარე ჩახაზული წრეწირის რადიუსს) ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას.

ბ) r, R, r_c - ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას(სადაც r_c-წარმოადგენს c ჰიპოტენუზის მხებ გარე ჩახაზული წრეწირის რადიუსს).

119. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის გვერდები წარმოადგენენ არითმეტიკული პროგრესიის წევრებს, ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირების რადიუსების შეფარდება მუდმივი სიდიდეა.

120. შეიძლება თუ არა მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები და ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე ადგენდნენ არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლის წევრები მთელი რიცხვებია?

121. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ დაამტკიცეთ ტოლობა

$$\frac{a_1}{a_2}+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\ddots\, 2-\cfrac{1}{2-\cfrac{a_n}{a_{n-1}}}}}}=2$$

122. შეიძლება თუ არა სამკუთხედის კუთხეების სინუსები ადგენდნენ არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლის სხვაობა განსხვავებულია ნულისაგან?

123. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები, რომ მედიანების კვადრატებმა შეადგინონ არითმეტიკული პროგრესია?

124. მოცემულია სამკუთხა პირამიდა $SABC$ რომლის წიბოები $AS=SB=SC=L$. დაამტკიცეთ, იმისათვის, რომ გვერდით წახნაგებზე დაშვებული სიმაღლეები ადგენდნენ გეომეტრიულ პროგრესიას აუცილებელია და საკმარისი: $\frac{1}{\sin\alpha}; \frac{1}{\sin\beta}; \frac{1}{\sin\gamma}$ რიცხვები ადგენდნენ გეომეტრიულ პროგრესიას სადაც $\angle ASB=\alpha$, $\angle ASC=\beta$, $\angle BSC=\gamma$.

125. იპოვეთ b პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $x^3+3x^2+bx+1=0$ განტოლების ფესვები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას.

126. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $x^4+ax^2+144=0$ განტოლების ფესვები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას.

127. სიბრტყეზე მოცემულია სამი წერტილი A, B, C. არსებობს თუ არა ამ სიბრტყეში ℓ წრფე, რომლისთვისაც მანძილები მოცემული წერტილებიდან ამ წრფემდე ადგენდნენ არითმეტიკულ პროგრესიას.

128. სიბრტყეზე მოცემულია სამი წერტილი A, B, C. არსებობს თუ არა ამ სიბრტყეში ℓ წრფე, რომლისთვისაც მანძილები მოცემული წერტილებიდან ამ წრფემდე ადგენდნენ გეომეტრიულ პროგრესიას.

129. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის სახე, თუ ცნობილია, რომ $b_n=f(a_n)$ მიმდევრობა წარმოადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას ნებისმიერი a_n არითმეტიკული პროგრესიისათვის.

130. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის სახე, თუ ცნობილია, რომ $b_n=f(a_n)$ მიმდევრობა წარმოადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას ნებისმიერი a_n გეომეტრიული პროგრესიისათვის.

131. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის სახე, თუ ცნობილია, რომ $b_n=f(a_n)$ მიმდევრობა წარმოადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას ნებისმიერი a_n გეომეტრიული პროგრესიისათვის.

132. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის სახე, თუ ცნობილია, რომ $b_n=f(a_n)$ მიმდევრობა წარმოადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას ნებისმიერი a_n არითმეტიკული პროგრესიისათვის.

133. არსებობს თუ არა ისეთი უსასრულო წევრებიანი გეომეტრიული პროგრესია, რომლის წევრებიდან არ შეიძლება აირჩეს სამი წევრი, რომლებიც შეადგენენ რომელიღაც არითმეტიკული პროგრესიის წევრებს (სავალდებულო არაა ეს წევრები ერთმანეთის მომდევნო იყოს).

134. არსებობს თუ არა ისეთი უსასრულო წევრებიანი არითმეტიკული პროგრესია, რომლის წევრებიდან არ შეიძლება აირჩეს სამი წევრი რომლებიც წარმოადგენენ რომელიღაც გეომეტრიული პროგრესიის წევრებს (ეს წევრები სავალდებულო არაა ადგენდნენ გეომეტრიულ პროგრესიას).

135. არსებობს თუ არა ერთი მაინც წყვილი გეომეტრიული პროგრესიისა უსასრულო რაოდენობა წევრებით, რომელთა სხვაობა წარმოადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას ნულისაგან განსხვავებული სხვაობით.

136. მოცემულია სასრული არითმეტიკული პროგრესია $a_1, a_2, \ldots, a_n$, რომლის წევრთა ჯამია S. პროგრესიიდან ამორჩეულია წევრთა ორი ჯგუფი, რომელთა ჯამებია შესაბამისად $Q_1 < \frac{S}{3}, Q_2 < \frac{S}{3}$. შეიძლება თუ არა პროგრესიის დარჩენილი წევრებიდან შეირჩეს ისეთი წევრები, რომელთა ჯამმა Q_3 და რიცხვებმა Q_1, Q_2 შეადგინონ არითმეტიკული პროგრესია: Q_1, Q_2, Q_3?

137. მოცემულია გეომეტრიული პროგრესია $b_1, b_2, \ldots, b_n$, რომელთა წევრთა ნამრავლია $Q \neq 0$. პროგრესიიდან ამორჩეულია წევრთა ორი ჯგუფი, რომელთა წევრთა ნამრავლებია შესაბამისად $S_1 < \sqrt[3]{Q}$ და $S_2 < \sqrt[3]{Q}$. შეიძლება თუ არა პროგრესიის დარჩენილი წევრებიდან შევარჩიოთ ისეთი წევრები, რომ მათი ნამრავლი S_3 და რიცხვები S_1, S_2 ადგენდნენ გეომეტრიულ პროგრესიას S_1, S_2, S_3.

138. სიბრტყეზე მოცემულია ოთხი წერტილი A, B, C, D. არსებობს თუ არა ამ სიბრტყეში ისეთი ℓ წრფე, რომლისთვისაც მანძილები ამ წერტილებიდან ℓ წრფემდე ადგენდნენ არითმეტიკულ პროგრესიას?

139. მოცემულია $0 < a < b$. დაამტკიცეთ, რომ თუ სრულდება უტოლობა

$$\left(\frac{b-a+1}{2}\right)^2 > b$$

მაშინ a და b რიცხვებს შორის არსებობს რომელიმე რიცხვის სრული კვადრატი.

140. მოცემულია $0 < a < b$. დაამტკიცეთ, რომ თუ სრულდება უტოლობა

$$\left(\frac{b-a+1}{2}\right)^2 < a$$

და a და b რიცხვებს შორის ერთ-ერთი არის სრული კვადრატი, მაშინ a და b-ს შორის არცერთი რიცხვის სრული კვადრატი არ არსებობს.

141. შეიძლება თუ არა 20 და 50 შორის ავიღოთ ისეთი სასრული არითმეტიკული პროგრესიების უსასრულო რაოდენობა, რომლებსაც საერთო წევრები არ გააჩნიათ.

142. შეიძლება თუ არა 20 და 50 შორის ავიღოთ ისეთი სასრული გეომეტრიული პროგრესიების უსასრულო რაოდენობა, რომლებსაც საერთო წევრები არ გააჩნიათ.

143. მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული ფორმულით: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$; $a_1 = 5$; $a_2 = 8$. ჩამოწერეთ მიმდევრობის მომდევნო ხუთი წევრი და იპოვეთ ზოგადი წევრის გამოსათვლელი ფორმულა.

§10.კომბინატორიკის ელემენტები

პრაქტიკაში ხშირად გეხედება ისეთი ამოცანები, რომლებშიც საჭიროა ყველა შესაძლო ვარიანტის დათვლა. ასეთი სახის ამოცანები ეხება სასრულ სიმრავლეებს.

სიმრავლეს ეწოდება სასრული თუ ის შეიცავს ელემენტების სასრულ რაოდენობას და უსასრულო თუ მისი ელემენტების რაოდენობა უსასრულოა.

სასრულ სიმრავლეს დალაგებული სიმრავლე ეწოდება, თუ ცნობილია რომელია პირველი ელემენტი, მეორე ელემენტი, მესამე ელემენტი და ა.შ.

მაგალითად, რუსთაველის პროსპექტზე სახლების სიმრავლე დალაგებული სიმრავლეა, ზღვაზე დამსვენებელთა სიმრავლე არაა დალაგებული სიმრავლე.

განვიხილოთ სიმრავლის სხვადასხვა კომბინაციებთან დაკავშირებული ძირითადი დებულებები და ცნებები.

წყობა. n ელემენტიანი წყობა m ელემენტისაგან ეწოდება მოცემული სასრული m სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილი n ელემენტიანი ჯგუფების რაოდენობას, რომლებშიც ჯგუფები ერთმანეთისაგან განსხვავდება ან ელემენტებით ან ელემენტების განლაგებით.

მაგალითად ვთქვათ გვაქვს სიმრავლე $\{a, b, c, \ldots, l, u, v\}$ რომლის ელემენტების რაოდენობაა m და მისგან შევადგინოთ ჯგუფები, რომელთაგან თითოეულში შედის ამ m რაოდენობის ელემენტებისაგან აღებული n რაოდენობის ელემენტები და რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან ან ელემენტების განლაგებით ჯგუფის შიგნით ან თვითონ ელემენტებით, ცხადია $n \le m$. სწორედ მიღებულ კომბინაციათა რაოდენობას ეწოდება n ელემენტიანი წყობა m ელემენტისაგან და აღინიშნება A_m^n სიმბოლოთი. ის ასე იკითხება: წყობა m ელემენტისაგან n ელემენტად.

მტკიცდება, რომ სამართლიანია ფორმულა: $A_m^n = m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots(m-n+1)$

განვიხილოთ მაგალითი. ვიპოვოთ წყობა ოთხი a, b, c, d ელემენტისაგან ორ ელემენტად. გვაქვს შემდეგი კომბინაციები: $ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc$ ე.ი. წყობაა 12. მართლაც $A_4^2 = 4(4-1) = 12$.

გადანაცვლება. გადანაცვლება ეწოდება m ელემენტისაგან შედგენილ m ელემენტიან წყობას. გადანაცვლებაში შემავალი ჯგუფები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ ელემენტების განლაგებით და არა შემადგენლობით. m ელემენტისაგან შემდგარი გადანაცვლება აღინიშნება სიმბოლოთი P_m და ასე იკითხება: m ელემენტიანი გადანაცვლება.

შეიძლება დამტკიცდეს ფორმულა: $P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = m!$. $m!$ სიმბოლო ასე იკითხება m-ის ფაქტორიალი და როგორც ვხედავთ ის ტოლია ყველა მთელი რიცხვის ნამრავლის 1-დან m-ის ჩათვლით.

მაგალითად ვიპოვოთ 3 ელემენტიანი a, b, c სიმრავლის გადანაცვლება. არსებობს შემდეგი კომბინაციები: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ ე.ი. გადანაცვლება 6-ის ტოლია, მართლაც $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$.

ჯუფთება. n ელემენტიანი ჯუფთება m ელემენტისაგან ეწოდება მოცემული სასრული m სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილ n ელემენტიანი ჯგუფების რაოდენობას, რომლებშიც ჯგუფები ერთმანეთისაგან განსხვავდება მხოლოდ ელემენტებით და ყურადღება არ ექცევა ელემენტების განლაგების მიმდევრობას. ჯუფთება აღინიშნება C_m^n სიმბოლოთი და ასე იკითხება: ჯუფთება m ელემენტისაგან n ელემენტად. როგორც განმარტებიდან ჩანს ჯუფთებაში შემავალი ჯგუფები სხვადასხვაა მხოლოდ იმ შემთხვევაში როდესაც ისინი ერთი ელემენტით მაინც განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

ჯუფთება იანგარიშება ფორმულით: $C_m^n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$. ამ ფორმულაში პირობითად მიღებულია, რომ $C_m^0 = 1$. ვიპოვოთ ორ ელემენტიანი ჯუფთება ოთხ ელემენტიან a, b, c, d სიმრავლიდან. გვაქვს შემდეგი კომბინაციები: ab, ac, ad, bc, bd, cd. ე.ი ჯუფთება ტოლია 6-ის. მართლაც გაანგარიშება გვაძლევს: $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 2!} = \frac{24}{2\cdot 2} = 6$

ამოცანები

1. გამოთვალეთ:

1) $\frac{10!}{8!}$

ა) 10 ბ) 90 გ) 1,25 დ) 80

2) $\frac{12!-10!}{10!-9!}$

ა) $\frac{132}{10}$ ბ) $\frac{131}{9}$ გ) $\frac{1310}{9}$ დ) $\frac{1320}{19}$

3) $\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!-(n-1)!}$

ა) $\frac{n}{(n+1)^2}$ ბ) $\frac{n+1}{n^2}$ გ) $\frac{n(n+1)}{n+2}$ დ) $\frac{n^2}{n^2+n-1}$

4) $\frac{n(n+1)!-n!}{n^2+n-1}$

ა) $n!$ ბ) $\frac{n+1}{n^2+n-1}$ გ) $\frac{n}{n^2+n-1}$ დ) $\frac{n!}{n+1}$

2. ამოხსენით განტოლებები:

1) $\frac{(x+1)!-x!}{(x+2)!-(x+1)!}=\frac{5}{6}$

ა) 4 ბ) 5 გ) 3 დ) 6

2) $\frac{2x!-(x+1)!}{3(x+1)!-(x+2)!}=\frac{1}{9}$

ა) 8 ბ) 5 გ) 9 დ) 6

3) $(2x)!-(2x-1)!=25(2x-2)!$

ა) 7 ბ) 6 გ) 3 დ) 5

4) $(x+2)!-x!=5{,}8(x+1)!$

ა) 5 ბ) 6 გ) 4 დ) 3

3. ამოხსენით განტოლებები:

1) $A_x^5-2A_x^4=0$

ა) 6 ბ) 5 გ) 4 დ) 7

2) $A_{x+2}^2-A_{x+1}^2=9$

ა) 6 ბ) 7 გ) 8 დ) 9

3) $A_{x+3}^5 : A_{x+4}^4=\frac{20}{9}$

ა) 4 ბ) 3 გ) 6 დ) 5

4) $(x+2)!=42A_x^{x-1}$

ა) 5 ბ) 4 გ) 6 დ) 8

4. გამოთვალეთ:

1) $C_5^3 \cdot C_4^2 \cdot P_2$

ა) 240 ბ) 120 გ) 280 დ) 200

2) $\frac{C_{2n}^{n}}{C_{2n}^{n-1}}$

ა) $\frac{n}{n+1}$ ბ) n გ) $\frac{n+1}{n}$ დ) $2n$

3) $\frac{C_n^{10}+C_n^9}{C_{n+1}^{10}}$

ა) 1 ბ) 0,5 გ) 2 დ) 8

4) $\frac{C_{n+2}^{n-1}+C_{n+2}^{n-2}}{C_{n+3}^{n-1}}$

ა) 2 ბ) $n-1$ გ) 0,5 დ) 1

5. ამოხსენით განტოლებები:

1) $A_{x+1}^2 \cdot C_{x+1}^x = 48$

ა) 2 ბ) 3 გ) 4 დ) 5

2) $A_{x+3}^3 + C_{x+3}^{x+1} = 14x + 42$

ა) 3 ბ) 5 გ) 2 დ) 6

3) $3A_x^2 + 5C_{x+2}^x = 6x + 87$

ა) 3 ბ) 5 გ) 4 დ) 6

4) $A_{x+1}^2 + \frac{1}{6}A_x^3 - C_{x+1}^3 = 3x$

ა) 4 ბ) 5 გ) 6 დ) 3

6. $a = C_n^m + C_n^{m+1}$, ხოლო $b = C_{n+1}^{m+1}$. შეადარეთ ერთმანეთს a და b რიცხვები.

ა) $a > b$ ბ) $b < a$ გ) $a = b$ დ) ვერ შევადარებთ

7. იპოვეთ $C_x^{x-1} < 9$ უტოლობის უდიდესი ამონახსნი.

ა) 6 ბ) 7 გ) 9 დ) 8

8. იპოვეთ $C_{x^2}^{x^2-1} < 26$ უტოლობის უდიდესი ამონახსნი.

ა) 5 ბ) 6 გ) 4 დ) 3

9. რამდენნაირად შეიძლება 5 მოსწავლე დავაყენოთ მწკრივში?

ა) 5 ბ) 10 გ) 100 დ) 120

10. ათი მოსწავლიდან უნდა აირჩიონ კრების თავმჯდომარე და მდივანი. რამდენნაირადაა ეს შესაძლებელი?

ა) 80 ბ) 90 გ) 70 დ) 100

11. რამდენნაირად შეიძლება ორშაბათის ცხრილის შედგენა, თუ 10 საგნიდან უნდა შეირჩეს 6 საგანი?

ა) 100 200 ბ) 150 000 გ) 151 200 დ) 16 200

12. რამდენი ორნიშნა რიცხვი შეიძლება დაიწეროს ციფრებით 1; 2; 3; 4; 5?

ა) 10 ბ) 12 გ) 18 დ) 20

13. რამდენი სამნიშნა რიცხვი შეიძლება დაიწეროს ციფრებით 1; 2; 3; 5; 9?
ა) 48 ბ) 72 გ) 60 დ) 30

14. კლასში ბიჭების რაოდენობაა 8. რა მაქსიმალური რაოდენობის საკალათბურთო გუნდების შედგენაა შესაძლებელი მათგან, თუ გუნდში ხუთი წევრია?
ა) 24 ბ) 56 გ) 42 დ) 72

15. რამდენი გამყოფი აქვს ხუთი მარტივი რიცხვის ნამრავლს?
ა) 10 ბ) 24 გ) 32 დ) 40

16. ექსკურსიაზე სტუდენტებმა უნდა მოიარონ 5 ტაძარი. რამდენი სხვადასხვა მარშრუტით შეიძლება ამის განხორციელება?
ა) 24 ბ) 48 გ) 120 დ) 72

17. მოსწავლეებმა უნდა მოინახულონ მეგობრები ათსართულიანი სახლის ყოველ სართულზე. რამდენნაირადაა ეს შესაძლებელი?
ა) 9! ბ) 10! გ) 11! დ) 8!

18. რამდენნაირად შეიძლება თაროზე მიყოლებით დავალაგოთ 6 სხვადასხვა ენოვანი წიგნი?
ა) 180 ბ) 360 გ) 720 დ) 540

19. წიგნის თაროზე დასალაგებულია 10 წიგნი, რომელთა შორის 2 წიგნი მათემატიკისაა. რამდენნაირად შეიძლება ამის გაკეთება, თუ მათემატიკის წიგნები ერთმანეთის გვერდიგვერდ არ უნდა განთავსდნენ?
ა) 10! ბ) 9! გ) 8·9! დ) 9·9!

20. მოსწავლეებმა უნდა დარგონ 12 ხე 2 დღის განმავლობაში. რამდენნაირადაა ეს შესაძლებელი, თუ დღეში უნდა დარგონ არანაკლებ ერთი ხისა?
ა) 12 ბ) 11 გ) 10 დ) 9

21. მოსწავლეებმა უნდა დარგონ 8 ხე 3 დღის განმავლობაში. რამდენნაირადაა ეს შესაძლებელი, თუ დღეში უნდა დარგონ არანაკლებ ერთი ხისა?
ა) 12 ბ) 21 გ) 10 დ) 20

22. რამდენი ორნიშნა რიცხვი შეიძლება დაიწეროს ციფრებით 1; 2; 3; 4; 5? (ციფრები არ მეორდება)
ა) 10 ბ) 12 გ) 18 დ) 20

23. რამდენი სამნიშნა რიცხვი შეიძლება დაიწეროს ციფრებით 1; 2; 3; 5; 9? (ციფრები არ მეორდება)

ა) 48 ბ) 72 გ) 60 დ) 30

24. რამდენი ხუთნიშნა ლუწი რიცხვის შედგენა შეიძლება ციფრებით 1; 2; 3; 5; 7?. (ციფრები არ მეორდება)
ა) 120 ბ) 24 გ) 18 დ) 36

25. რამდენი კენტი სამნიშნა რიცხვის დაწერა შეიძლება ციფრებით 1; 2; 3; 4; 5?
ა) 75 ბ) 72 გ) 80 დ) 96

26. რამდენი ლუწი ხუთნიშნა რიცხვი არსებობს?
ა) 40 000 ბ) 60 000 გ) 30 000 დ) 45 000

27. რამდენი ოთხნიშნა სამის ჯერადი რიცხვის დაწერა შეიძლება ციფრებით 1, 2, 3, 4, 5, თუ რიცხვებში ციფრები არ მეორდება.
ა) 64 ბ) 60 გ) 24 დ) 120

28. მწკრივში უნდა დააყენონ 10 ჯარისკაცი. რამდენნაირად შეიძლება მათი განლაგება?

29. რამდენი ოთხნიშნა რიცხვის დაწერა შეიძლება ციფრებით 0, 1, 2, 3, თუ რიცხვებში ციფრები არ მეორდება.

30. რამდენი ოთხნიშნა ლუწი რიცხვის დაწერა შეიძლება ციფრებით 1, 2, 3, 4, თუ რიცხვებში ციფრები არ მეორდება.

31. რამდენი ოთხნიშნა 5-ის ჯერადი რიცხვის დაწერა შეგეიძლია ციფრებით 1, 3, 5, 8, თუ რიცხვებში ციფრები არ მეორდება.

32. რამდენი 4-ის ჯერადი რიცხვის დაწერა შეიძლება ციფრებით 1, 2, 3, 4, 5, თუ რიცხვებში ციფრები არ მეორდება.

33. რამდენი ისეთი რიცხვი შეიძლება დაიწეროს ციფრებით 1; 2; 3; 4; 5 რომელთა გაყოფაც შეიძლება 9-ზე, თუ ცნობილია რომ ამ რიცხვებში ციფრები არ მეორდება.

34. მოცემულია ციფრები 1, 2, 3, 4, 6. რამდენი ისეთი ხუთნიშნა ლუწი რიცხვის დაწერა შეიძლება, რომელშიც პირველი ციფრის ბოლოში გადატანით მიიღება კენტი რიცხვი, თუ რიცხვებში ციფრები არ მეორდება.

35. მოცემულია ციფრები 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8. რამდენი ისეთი შვიდნიშნა რიცხვის დაწერა შეიძლება, რომელშიც პირველი ციფრის ბოლოში გადატანით მიიღება კენტი რიცხვი, თუ რიცხვებში ციფრები არ მეორდება.

36. მოცემულია ციფრები 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. რამდენი ისეთი კენტი ცხრანიშნა რიცხვის დაწერა შეიძლება, რომელშიც პირველი ციფრის ბოლოში გადატანით მიიღება ლუწი რიცხვი. თუ რიცხვებში ციფრები არ მეორდება.

37. რამდენნაირად შეიძლება ჭადრაკის დაფაზე 8 ეტლის განლაგება ისე, რომ ისინი ერთმანეთს არ კლავდნენ.

38. მწკრივში 8 მოსწავლეა, მათ შორის 3 გოგონაა. რამდენნაირად შეიძლება მოსწავლეების განლაგება მწკრივში ისე, რომ სამივე გოგონა ერთმანეთის გვერდით არ იდგეს.

39. მწკრივში 10 მოსწავლეა, მათ შორის 4 გოგონაა. რამდენნაირად შეიძლება მოსწავლეების განლაგება მწკრივში ისე, რომ ოთხივე გოგონა ერთმანეთის გვერდით არ იდგეს.

40. რამდენნაირად შეიძლება 3 ადამიანის დასმა მრგვალ მაგიდასთან?

41. რამდენნაირად შეიძლება 5 ადამიანის დასმა მრგვალ მაგიდასთან?

42. კრებას ესწრება 20 ადამიანი. რამდენნაირად შეიძლება თავმჯდომარისა და მდივნის არჩევა?

43. ტურნირში მონაწილეობს ფეხბურთელთა 15 გუნდი. ოქროს, ვერცხლის და ბრინჯაოს მედლებს იღებს შესაბამისად პირველ, მეორე და მესამე ადგილზე გასული თითო გუნდი. დაჯილდოების რამდენი ვარიანტი არსებობს?

44. სტუდენტმა 6 დღეში უნდა ჩააბაროს 4 გამოცდა. გამოცდის ჩაბარების მიმდევრობის რამდენი ვარიანტი არსებობს?

45. რამდენი რიცხვი შეიძლება დაიწეროს ციფრებით 1, 2, 3, 4 თუ რიცხვებში ციფრები არ მეორდება

46. რამდენი ნატურალური რიცხვი შეიძლება დაიწეროს ციფრებით 0, 1, 2, 3 თუ რიცხვებში ციფრები არ მეორდება.

47. რამდენი ლუწი ოთხნიშნა რიცხვი შეიძლება დაიწეროს ციფრებით 1, 2, 3, 4, 5, 6 თუ რიცხვებში ციფრები არ მეორდება.

48. რამდენი კენტი სამნიშნა რიცხვი შეიძლება დაიწეროს ციფრებით 0, 1, 2, 3, 4 თუ რიცხვებში ციფრები არ მეორდება.

49. 20 მოსწავლიდან საჭიროა კლასის 3 მორიგის დანიშვნა. რამდენნაირად შეიძლება ამის გაკეთება?

50. რკინის კარებზე აყენია 10 ღილაკიანი კოდიანი გასაღები. კარის გაღება შეიძლება მხოლოდ 2 ღილაკის ერთდროული დაჭერით. რამდენი ცდაა საჭირო, რომ კარი აუცილებლად გაიღოს?

51. რაღაც რიცხვი წარმოადგენს 5 მარტივი რიცხვის ნამრავლს. რამდენი გამყოფი აქვს ამ რიცხვს?

52. კლასში 10 ბიჭი და 8 გოგონაა. უნდა შეირჩეს ჯგუფი, რომელშიც იქნება 5 ბიჭი და 3 გოგონა. რამდენნაირად შეიძლება ასეთი ჯგუფის შედგენა?

53. სიბრტყეზე მოცემულია 50 წერტილი, რომელთაგან არცერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე. რამდენი ისეთი წრფის გავლება შეიძლება, რომელიც ამ წერტილებიდან ყოველ 2 წერტილზე გაივლის?

54. რამდენი დიაგონალი აქვს ამოზნექილ ათკუთხედს?

55. სიბრტყეზე მოცემულია 20 წერტილი, მათგან 8 წერტილი ერთ წრფეზე მდებარეობს, ხოლო არცერთი დანარჩენი სამი წერტილი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს. რამდენი სხვადასხვა წრფით შეიძლება ამ წერტილების შეერთება?

56. სიბრტყეზე მოცემულია 10 წერტილი, მათგან 4 წერტილი ერთ წრფეზე მდებარეობს, ხოლო არცერთი დანარჩენი სამი წერტილი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს. რამდენი ისეთი განსხვავებული სამკუთხედი არსებობს, რომელთა წვეროებიც ამ წერტილებს ემთხვევა.

57. რამდენნაირად შეიძლება გავანაწილოთ 11 წიგნი 6 გზავნილში, თუ ამ გზავნილებიდან 5 გზავნილში უნდა იყოს 2 - 2 წიგნი?

58. ფეხბურთელთა გუნდში ირიცხება 2 მეკარე, 8 მცველი, 6 ნახევარმცველი და 6 თავდამსხმელი. არჩევანის გაკეთების რამდენი ვარიანტი აქვს მწვრთნელს თუ მინდორზე უნდა იყოს 1 მეკარე, 4 მცველი, 2 ნახევარმცველი და 4 თავდამსხმელი?

59. რამდენი გამყოფი აქვს რიცხვს $2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^3$?

60. რა რაოდენობის ხუთნიშნა რიცხვი შეიძლება დაიწეროს ციფრებით 1, 1, 1, 2, 2?

61. 4 ქისაში რამდენნაირად შეიძლება განაწილდეს 10 მონეტა თუ არცერთი ქისა ცარიელი არ უნდა იყოს.

62. ყუთში დევს 8 თეთრი და 6 შავი ბურთი. რამდენნაირად შეიძლება ყუთიდან 4 ბურთის ამოღება ისე, რომ მათ შორის 2 მაინც იყოს თეთრი?

63. ორ პარალელურ წრფეზე, რომლებიც ერთმანეთს არ ემთხვევა განლაგებულია შესაბამისად 10 და 20 წერტილი. რამდენი სამკუთხედის შედგენა შეიძლება ამ წერტილების გამოყენებით, თუ სამკუთხედის წვეროები ემთხვევა ამ წერტილებს.

64. წრეწირზე განლაგებულია 100 წერტილი. რამდენი სამკუთხედი შეგვეიძლია ჩავხაზოთ წრეწირში, თუ მათი წვეროები ემთხვევა წრეწირის აღნიშნულ წერტილებს?

65. სამკუთხედის ყველა გვერდი წერტილებით დაყოფილია 10 ტოლ მონაკვეთად. რამდენი სამკუთხედის ჩახაზვა შეიძლება ამ სამკუთხედში, თუ მათი წვეროები დაემთხვევა აღნიშნულ წერტილებს?

§11. ხარისხოვანი, მაჩვენებლიანი განტოლებები და განტოლებათა სისტემები

ა - ჯგუფი

1. დაალაგეთ ზრდადობის მიხედვით რიცხვები $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{4}}, a^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{4}{5}}$, თუ $0<a<1$

ა) $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{3}{4}}, a^{\frac{4}{5}}$ ბ) $a^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{3}{4}}, a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{4}{5}}$ გ) $a^{\frac{4}{5}}, a^{\frac{3}{4}}, a^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{1}{2}}$ დ) $a^{\frac{3}{4}}, a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{4}{5}}$

2. დაალაგეთ კლებადობის მიხედვით რიცხვები $a^{\frac{5}{7}}, a^{\frac{3}{5}}, a^{\frac{7}{9}}, a^{\frac{9}{11}}$, თუ $a>1$

ა) $a^{\frac{7}{9}}, a^{\frac{5}{7}}, a^{\frac{3}{5}}, a^{\frac{9}{11}}$ ბ) $a^{\frac{9}{11}}, a^{\frac{7}{9}}, a^{\frac{5}{7}}, a^{\frac{3}{5}}$ გ) $a^{\frac{5}{7}}, a^{\frac{3}{5}}, a^{\frac{7}{9}}, a^{\frac{9}{11}}$ დ) $a^{\frac{3}{5}}, a^{\frac{5}{7}}, a^{\frac{9}{11}}, a^{\frac{7}{9}}$

წარმოადგინეთ მოცემული რიცხვები რაციონალური რიცხვების ხარისხის სახით (№№ 3 – 4):

3. 1) 19683

ა) 7^7 ბ) 3^9 გ) 13^4 დ) 4^7

2) 421875

ა) 15^5 ბ) 25^4 გ) 75^3 დ) 24^5

3) 0,002197

ა) $0{,}07^4$ ბ) $0{,}04^7$ გ) $0{,}13^3$ დ) $0{,}15^4$

4) 1419857

ა) 17^5 ბ) 19^4 გ) 13^6 დ) 15^6

4. 1) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{0{,}125}\cdot 0{,}5^{\frac{1}{3}}}$

ა) $2^{-\frac{1}{3}}$ ბ) $2^{-\frac{8}{3}}$ გ) 2^{-3} დ) $2^{-\frac{7}{24}}$

2) $\sqrt{3\sqrt[3]{9\sqrt[4]{27}}}$

ა) $3^{\frac{23}{24}}$ ბ) $3^{\frac{5}{2}}$ გ) $3^{\frac{23}{2}}$ დ) $3^{\frac{21}{24}}$

3) $\sqrt{0,(3)\cdot 3^{\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{9\sqrt{3}}}$

ა) $3^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$ ბ) $3^{\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{12}}$ გ) $3^{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{6}}$ დ) $3^{\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{6}}$

4) $\sqrt[7]{\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{81}{16}}}$

ა) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{42}}$ ბ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{25}}$ გ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{37}{42}}$ დ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{15}{43}}$

5) $\sqrt[3]{\frac{9}{16}\sqrt{0,75\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}}}$

ა) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$ ბ) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$ გ) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{5}{6}}$ დ) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$

6) $\sqrt[3]{10\sqrt{0,1\cdot\sqrt[3]{0,0001}}}$

ა) $10^{-\frac{1}{18}}$ ბ) $10^{-\frac{1}{9}}$ გ) $10^{\frac{1}{18}}$ დ) $10^{\frac{1}{9}}$

7) $\left(\sqrt[5]{8^{\sqrt{a}-1}}\right)^{\sqrt{a}+1}\cdot 0,125^{\sqrt{a}+1}$

ა) $2^{\frac{3\sqrt{a}}{5}}$ ბ) $2^{\frac{15a^2-5}{9a}}$ გ) $2^{\frac{3a-\sqrt{5}}{5}}$ დ) $2^{\frac{3a-15\sqrt{a}-18}{5}}$

8) $\sqrt[3]{0,6^a\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{25}{9}\right)^{a+1}}}$

ა) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{a-2}{3}}$ ბ) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{a}{9}}$ გ) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{a-2}{9}}$ დ) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{a-1}{9}}$

9) $\sqrt{2^a\cdot\sqrt[3]{4^a\cdot\sqrt[a]{0,25\cdot\sqrt[3]{2}}}}$

ა) $2^{\frac{15a^2-5}{18a}}$ ბ) $2^{\frac{15a^2-5}{9}}$ გ) $2^{\frac{15a^2-5}{3a}}$ დ) $2^{\frac{15a^2-5}{3}}$

10) $\dfrac{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}}}$

ა) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{8}{5}}$ ბ) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{5}{8}}$ გ) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{5}{4}}$ დ) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{4}{5}}$

ამოხსენით განტოლებები (№№ 5 – 7):

5. 1) $2^x = 8$

ა) 4 ბ) 3 გ) 2 დ) $\frac{5}{2}$

2) $3^x = \frac{1}{9}$

ა)-3 ბ)$\frac{1}{3}$ გ) -2 დ) 2

3) $5^x = \frac{1}{5}$

ა) -1 ბ) $\frac{1}{5}$ გ) $-\frac{1}{5}$ დ) -2

4) $4^{3x} = 32$

ა) $\frac{3}{5}$ ბ) $\frac{4}{5}$ გ) $\frac{7}{6}$ დ) $\frac{5}{6}$

5) $5^{2x} = 125$

ა) $\frac{3}{2}$ ბ) $\frac{3}{4}$ გ) $\frac{3}{5}$ დ) 3

6) $2^{2x+1} = 16$

ა) $\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{5}{2}$ გ) $\frac{3}{2}$ დ) $\frac{3}{4}$

7) $3^{2x-1} = 27$

ა)3 ბ)2 გ)-2 დ) 4

6. 1) $5^{x+\frac{1}{2}} = 25^{2x-\frac{7}{2}}$

ა) 1,5 ბ) 3,5 გ) 6,5 დ) 2,5

2) $5^{x+1} + 5^{x+2} = 150$

ა) -1 ბ) 3 გ) 1 დ) 2

3) $2^{x-2} + 3 \cdot 2^{x+1} = 100$

ა) 4 ბ) 3 გ) 1 დ) 2

4) $3^{x+1} + 4 \cdot 3^{x-1} = 39$

ა) 4 ბ) 1 გ) 2 დ) 3

5) $5^{x+1} + 2 \cdot 5^{x+2} + 3 \cdot 5^{x+3} = 86$

ა) -1 ბ)-2 გ) 1 დ) 2

7. 1) $2^x \cdot 4^x \cdot 8^x = 128$

ა) $\frac{5}{6}$ ბ) 3 გ) 4 დ) $\frac{7}{6}$.

2) $3^x \cdot 9^{x+1} \cdot 27^{x+2} = 81$

ა) $-\frac{5}{3}$ ბ) $-\frac{4}{3}$ გ) $-\frac{2}{3}$ დ) $-\frac{1}{3}$

3) $2^x \cdot 3^{x+1} = 108$

ა) 3 ბ) 2 გ) 4 დ) 5

4) $3^{x+1} \cdot 4^{x-1} = 108$

ა) 3 ბ) 1 გ) 2 დ) 4

5) $5^{x+1}\cdot 6^{x-1}\cdot 2^{x}=50$

ა) 1 ბ) -1 გ) 2 დ) 4

6) $\left(2^{3}\right)^{x+1}=4$

ა) $-\frac{2}{3}$ ბ) $-\frac{1}{3}$ გ) $\frac{5}{3}$ დ) $-\frac{5}{3}$

7) $\left(3^{2}\right)^{2x-1}=27$

ა) $\frac{1}{4}$ ბ) $-\frac{5}{4}$ გ) $\frac{1}{4}$ დ) $\frac{5}{4}$

8) $\left(4^{2}\right)^{3x-1}=2$

ა) $\frac{9}{4}$ ბ) $\frac{7}{12}$ გ) $\frac{5}{4}$ დ) $\frac{5}{12}$

ბ - ჯგუფი

ამოხსენით განტოლებები (№№ 1 – 37):

8. $\left(\sqrt[3]{81}\right)^{\frac{3}{4}\sqrt[3]{22+x}}=3^{3-\sqrt[3]{x-5}}$

9. $(0,6)^{\sqrt[3]{2x+4}}\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt[3]{x-3}}=\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$

10 $\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{2\sqrt{x}}\cdot 64^{\frac{x-1}{3}}=(0,5)^{\sqrt{x+4}}\cdot(0,25)^{-\sqrt{x(x+4)}}$

11. $(0,01)^{-\frac{1}{2}\sqrt{x-1}}\cdot 10^{5\sqrt[4]{x-1}}=100^{12}$

12. $72^{\sqrt{3x^{2}-2x-4}}=64\cdot(0,(3))^{-4}$

13. $\frac{3^{2\left(x^{2}-1\right)}}{3^{x^{2}}}\cdot\frac{9^{x^{2}-2}}{3^{x+1}}=[0,(3)]^{5}$

14. $(2,56)^{3\sqrt{x+1}-1}=\left(\frac{125}{512}\right)^{\sqrt{x+1}-2}$

15. $(3,24)^{x^{2}+3x-1}=\left(\frac{5}{9}\right)^{x^{2}-x-6}$

16. $(0,1(6))^{x^{2}+3}=216^{x-\frac{1}{3}}$

17. $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{\sqrt{x^{2}}}{4}}=\left(4\frac{17}{27}\right)^{\sqrt{x^{2}}-3,(6)}$

18. $3^{x^{2}}\cdot(0,(3))^{-x-2}=\left(\frac{1}{27}\right)^{x-\frac{7}{3}}$

19. $5^{\frac{x+1}{\sqrt{x+1}+2}}\cdot 0,2^{\frac{4}{\sqrt{x+1}+2}}=125^{x-3}\cdot(0,04)^{x-1}$

20. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x^2+5x+7}=\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}-1\right)^{x+\frac{23}{3}}$

21. $\left(\sqrt[7]{27^{\frac{|x+1|}{3}-\frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{4}}}\right)^{\frac{|x+1|}{3}+\frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{4}}=3^{\frac{3}{4}}$

22. $3^{\sqrt{x+1}+2}-3^{\sqrt{x+1}}=72$

23. $2^{\sqrt{x^2}+2}-5\cdot 2^{\sqrt{x^2}-3}=27$

24. $2\cdot 16^{x-3}-2^{4(x-3)}-4^{2x-8}=15$

25. $2^{3x}+\left(\sqrt{8}\right)^{0,(6)\cdot(3x+2)-2}-4^{1,5x-1}=10$

26. $3^{x+1}+(0,(3))^{-x-2}-(0,(1))^{-\frac{x}{2}}=99$

27. $5^{x^2+x+2}+4\cdot 5^{x^2+x-1}+5^{x^2+x-2}=0{,}04\cdot 646$

28. $5^{3\left(x^2-1\right)}-2\cdot 5^{3x^2-4}-3\cdot 5^{3x^2-5}=300$

29. $4\cdot 3^{2x+4}+5\cdot 9^{x+3}=3\cdot 3^{2x+5}-9^{x+\frac{13}{5}}$

30. $\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^{x^2+x+2}=\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^{-x^2+5x-14}$

31. $\sqrt[5]{2^{2x+1}}+3\sqrt[10]{2\cdot 4^x}=4$

32. $\dfrac{3^{x-1}}{\sqrt[3]{2^x}}+\dfrac{11}{3}=\dfrac{4\cdot\sqrt[3]{2^x}}{3^x}$

33. $\left(9^{\sqrt{x-3}}-3^{\sqrt{x-3}}\right)^2+5\left(9^{\sqrt{x-3}}-3^{\sqrt{x-3}}\right)-6=0$

34. $\left(\sqrt{6-\sqrt{35}}\right)^{x^2+x}+\left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^{x^2+x}=12$

35. $\left(\sqrt{32-\sqrt{1023}}\right)^{\frac{x-1}{2}}+\left(\sqrt{32+\sqrt{1023}}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\left(2\sqrt{2}\right)^{x-1}$

36. $64^x-3\cdot 2^{5x+1}+3\cdot 2^{4x+2}-2^{3x+3}+1=0$

37. $2^{3x}-3\cdot 2^{x+2}+3\cdot 2^{4-x}-2^{6-3x}-27=0$

38. $3^{\sqrt{x+1}+2}+3\cdot 5^{\sqrt{x+1}+1}-3^{\sqrt{x+1}+1}=3^{\sqrt{x+1}}+5^{\sqrt{x+1}+2}-7\cdot 5^{\sqrt{x+1}}$

39. $\dfrac{7}{7^x}+\dfrac{2}{2^x}=\dfrac{8}{2^x}+7^{-x}$

40. $3\cdot 4^x+\dfrac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=3\cdot 2^{2x+3}-\dfrac{1}{2}\cdot 3^{2x+2}$

41. $4^{\sqrt{x}}-\dfrac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{3}}=3^{\sqrt{x}+0,5}-\dfrac{2^{2\sqrt{x}}}{2}$

42. $7^{\sqrt{x}+1}-5^{\sqrt{x}+2}=3\cdot 5^{\sqrt{x}}-13\cdot 7^{\sqrt{x}}$

43. $2^{\sqrt{x+1}-1}-3^{\sqrt{x+1}}=3^{\sqrt{x+1}-1}-2^{\sqrt{x+1}+2}$

44. $5\cdot 4^x+\dfrac{1}{3}\cdot 9^{x+1}=2\cdot 4^x+7\cdot 9^{x+1}$

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები (№№ 45 – 54):

45. $\begin{cases} 4^{\frac{7x}{6y}} = 64\cdot 8^{\frac{y}{x}} \\ 3x-7y=2 \end{cases}$

46. $\begin{cases} \sqrt[x+3]{27}\cdot \sqrt[y-3]{625} = 15 \\ 5x+2y=14 \end{cases}$

47. $\begin{cases} 3^x - 5\cdot 2^y = -1 \\ 2^y + 4\cdot 3^x = 38 \end{cases}$

48. $\begin{cases} 2^x + 3^{y+1} = 29 \\ 4^x + 81^y = 6565 \end{cases}$

49. $\begin{cases} 2\cdot 5^{3x-1} - 3\cdot 2^{y+1} = 26 \\ 5\cdot 2^{y+1} + 3\cdot 5^{3x-1} = 115 \end{cases}$

50. $\begin{cases} \left(0,(3)\right)^{2x+1} = \left(0,(1)\right)^{y+1} \\ x^2 - \frac{2}{9}y^2 = \frac{7}{2} \end{cases}$

51. $\begin{cases} (0,6)^{x^2-5y^2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-11} \\ (0,2)^{5xy+y^2} = 5^{-21} \end{cases}$

52. $\begin{cases} 9^{y+1}\cdot 100^{\frac{1}{2x}} = 2,7 \\ 25^{y+1}\cdot 10^{\frac{2}{x}} = \frac{5}{4} \end{cases}$

53. $\begin{cases} 3^{y+1}\cdot 2^{\frac{4}{x+1}} = 36 \\ 5^{y}\cdot 2^{\frac{8}{x+1}} = 80 \end{cases}$

54. $\begin{cases} 2^{\frac{x+1}{3}}\cdot 3^{\frac{y+1}{5}} = 36 \\ 8^{x-4}\cdot 9^{\frac{y+6}{5}} = 5832 \end{cases}$

55. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის ექნება განტოლებას $a25^x + (2a+1)5^x - 3a - 1 = 0$ ერთი ფესვი?

ამოხსენით განტოლებები (№№ 56 – 73):

56. $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^x]{3}=\sqrt[32]{3^{31}}$

57. $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5}\cdot\sqrt[12]{5}\cdot\ldots\cdot\sqrt[x]{5}=\sqrt[48]{5^{31}}$

58. $2^{3x}+2^{3x-1}+2^{3x-2}+\ldots=(0{,}5)^{-7x-5}$

59. $5^{2x+1}+5^{2x}+5^{2x-1}+\ldots=\dfrac{1}{4}\cdot(0{,}2)^{x^2-5}$

60. $\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+1\right)^x=\left(\sqrt{31-12\sqrt{3}}+2\right)^{x-4}$

61. $\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}+1\right)^{x^2+2x+3}=\left(\sqrt{4\sqrt{2}+3}-1\right)^{3x+5}$

62. $\left(\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-1\right)^{2x+3}=\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+1\right)^{x+5}$

63. $15\cdot 8^x-6^{x+1}=\dfrac{7}{4}\cdot\left(4\sqrt{3}\right)^{x+1}$

64. $24\cdot 7^{x-1}-7\cdot 4^x=2\cdot 28^{\frac{x}{2}}$

65. $5\cdot 4^{2x^2-x+1}-6\cdot 6^{2x^2-x}=14\cdot 9^{2x^2-x}$

66. $3\cdot 5^{x-1}-14\cdot 2^{x-1}=4\cdot 10^{\frac{x-1}{2}}$

67. $2\cdot 4^{x+1}-50\cdot 10^x+50\cdot 25^x=0$

68. $2\cdot 7^{2x+4}-3\cdot 2^{2x+4}=6\dfrac{1}{7}\cdot 14^{x+2}$

69. $3\cdot 4^{3x+1}+18\cdot 9^{3x}=5\cdot 6^{3x+1}$

70. $5\cdot 4^{2x-1}+3\cdot 6^{2x-1}=8\cdot 9^{2x-1}$

71. $2^x-4^x+8^x=52$

72. $2^{4^x}+2^{9^x}=2^{6^x+1}$

73. $9\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^x+25\left(\dfrac{3}{5}\right)^x=90x-45x^2-15$

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები (№№ 74 -88):

74. $\begin{cases}3^{x+1}+4^y=43\\ 9^x-16^{y-1}=65\end{cases}$

75. $\begin{cases}5^{\sqrt{x}}\cdot 3^{\sqrt{y}}=75\\ 25^{\sqrt{x}}+9^{\sqrt{y}}=634\end{cases}$

76. $\begin{cases}10^{x^2}\cdot 3^{y^2-1}=27\\ 100^{x^2}+5\cdot 3^{y^2}=406\end{cases}$

77. $\begin{cases} 9^x - 2^{4y^2} = 77 \\ 3^x - 2^{2y^2} = 7 \end{cases}$

78. $\begin{cases} 7 \cdot 2^{4x-2} + 3^{6y-1} = 55 \\ \frac{5}{6} \cdot 4^x \cdot 27^y - 9^{3y-1} = 21 \end{cases}$

79. $\begin{cases} 4^{x-1} \cdot \left(x^2 + xy + 22\right) = 25 \\ \sqrt[\frac{1}{x}]{x^2 + xy + 22} = 25 \end{cases}$

80. $\begin{cases} (2x+y) \cdot (0{,}5)^{3x-y} = 8 \cdot 2^{y-3x} \\ (2x+y)^{\frac{3x-y}{3}} = 2 \end{cases}$

81. $\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}} + 2^{\frac{x+y}{6}} = 6 \\ 5^{\frac{3x-y}{5}} + 5^{\frac{3x-y}{10}} = 30 \end{cases}$

82. $\begin{cases} 144^{\frac{1}{2x-y}} = 16\left(4x^2 + 4xy + y^2\right) \\ (2x+y)^{2x-y} = 48 \end{cases}$

83. $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 8 \\ 5^{x+y-2\sqrt{xy}} = 10 \end{cases}$

84. $\begin{cases} \left|x^2 - 5x + 15\right|^{x+2y} = \left|x^2 - 5x + 15\right|^3 \\ \left|y^2 + y + 13\right|^{y-2x} = \left|y^2 - y + 13\right|^4 \end{cases}$

85. $\begin{cases} |x-2|^{x^2+3x+y} = |x-2|^3 \\ |y-2|^{x+y} = |y-2|^3 \end{cases}$

86. $\begin{cases} |x|^{x+y+1} = 1 \\ |y|^{2x-y} = 1 \end{cases}$

87. $\begin{cases} |x+y|^{x^2-y^2} = |x+y| \\ |x|^{x+y-2} = |x|^{2x-y+1} \end{cases}$

88. $\begin{cases} \sqrt{4^x - 16\cdot 2^x + 64} + 3\cdot\sqrt{4^y - 8\cdot 2^y + 16} = 12 \\ \sqrt{x^2 - 18x + 81} + y = 6 \end{cases}$

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები მთელ რიცხვთა სიმრავლეში. (№№ 89 – 90):

89. $\begin{cases} x^2 = y^3 \\ 2^x = y^y \end{cases}$

90. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2^x + 2^y + 2^z = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 12 \end{cases}$

§12. ლოგარითმები. ლოგარითმული განტოლებები და სისტემები

ა - ჯგუფი

გამოთვალეთ (№№ 1 – 6):

1. 1) $\log_2 8$

ა) 4 ბ) 2 გ) 8 დ) 3

2) $\log_2 \frac{1}{8}$

ა) $\frac{1}{4}$ ბ) -3 გ) $\frac{1}{3}$ დ) -4

3) $\log_2 32$

ა) 4 ბ) 16 გ) 5 დ) 2

4) $\log_3 \frac{1}{9}$

ა) -2 ბ) -3 გ) $\frac{1}{2}$ დ) $\frac{1}{3}$

5) $\log_9 \frac{1}{9}$

ა) -1 ბ) 1 გ) 0,5 დ) 3

6) $\log_{\frac{7}{5}} \frac{5}{7}$

ა) $\frac{1}{5}$ ბ) -1 გ) 7 დ) $\frac{5}{7}$

7) $\log_{81} 9$

ა) 9 ბ) $\frac{1}{2}$ გ) 3 დ) 2

8) $\log_{9^4} 3^4$

ა) $\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{1}{3}$ გ) 9 დ) 3

9) $\log_{25^3} 5^7$

ა) $\frac{7}{3}$ ბ) 2 გ) $\frac{7}{6}$ დ) 7

10) $\log_{9^b} 3^a$

ა) 2 ბ) $\frac{a}{2b}$ გ) $\frac{a}{b}$ დ) $\frac{a^2}{b}$

2. 1) $5^{\log_5 3}$

ა) 3 ბ) 5 გ) 15 დ) 25

2) $7^{\log_7 a}$

ა) 7 ბ) a გ) 49 დ) $7a$

3) $7^{\log_{49} 36}$

ა) 36 ბ) 6 გ) 7 დ) 49

4) $125^{\log_5 2}$

ა) 5 ბ) 3 გ) 8 დ) 10

5) $9^{1-\log_3 6}$

ა) 6 ბ) $\frac{9}{6}$ გ) 3 დ) $\frac{1}{4}$

6) $2^{\log_4 16+\log_2 3}$

ა) 12 ბ) 7 გ) 16 დ) 48

7) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\log_4 \frac{1}{3}}$

ა) $\frac{1}{3}$ ბ) 9 გ) 4 დ) $\frac{1}{27}$

8) $\log_{128} 64$

ა) $\frac{6}{7}$ ბ) 2 გ) $\frac{5}{6}$ დ) $\frac{4}{7}$

3. 1) $\log_{0,01} 100$

ა) 1 ბ) 100 გ) -1 დ) -2

2) $\log_{0,04} 125$

ა) $-\frac{3}{2}$ ბ) $\frac{2}{3}$ გ) $-\frac{1}{2}$ დ) 3

3) $\log_{\frac{2}{3}}\frac{9}{4}$

ა) $-\frac{3}{2}$ ბ) -2 გ) 2 დ) -3

4) $\log_{\frac{1}{49}}\left(\sqrt[5]{7^{-1}}\right)$

ა) $\frac{1}{10}$ ბ) $\frac{1}{5}$ გ) $-\frac{1}{10}$ დ) $-\frac{1}{5}$

5) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 7-1}$

ა) 7 ბ) 9 გ) $\frac{7}{9}$ დ) $\frac{9}{49}$

6) $36^{\frac{1}{2}-\log_{216}\sqrt{5^3}}$

ა) $\frac{1}{5}$ ბ) $-\frac{6}{5}$ გ) 6 დ) $\frac{6}{5}$

4. 1) $100^{3\lg 1}$

ა) 1 ბ) 3 გ) 100 დ) 0

2) $5\cdot 9^{\log_{\sqrt[3]{3}} 2}$

ა) 10 ბ) 300 გ) 320 დ) 25

3) $\log_{\sqrt[3]{2}}\sqrt{2}$

ა) $\frac{3}{2}$ ბ) $\frac{2}{3}$ გ) $\frac{1}{3}$ დ) $\frac{1}{2}$

4) $\log_{\sqrt{\frac{1}{5}}}\sqrt[4]{125}$

ა) $\frac{3}{2}$ ბ) $-\frac{3}{2}$ გ) 2 დ) 3

5) $0{,}5^{\log_2 7-\log_4 25}$

ა) $\frac{7}{2}$ ბ) -12 გ) $-\frac{1}{5}$ დ) $\frac{5}{7}$

6) $\sqrt{2}^{\log_{0{,}25} 3}$

ა) $\sqrt[4]{3}$ ბ) 3 გ) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ დ) 2

7) $\log_2\log_2 256$

ა) 8 ბ) 16 გ) 4 დ) 3

8) $\log_{\frac{1}{8}} \log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{4}$

ა) $-\frac{1}{3}$ ბ) $\frac{1}{8}$ გ) 3 დ) -3

5. 1) $\lg\lg 10^{10^{10}}$

ა) 100 ბ) 1 გ) 10 დ) 10^{10}

2) $5^{\frac{1}{2\log_{16} 5}}$

ა) $\frac{1}{4}$ ბ) 4 გ) 16 დ) 32

3) $7^{\frac{1}{3\log_8 7}}$

ა) 3 ბ) 8 გ) 2 დ) $\frac{3}{7}$

4) $\log_3 9^{\frac{1}{2}\log_3 36}$

ა) 2 ბ) 9 გ) 36 დ) $2+\log_3 4$

5) $3^{\log_4 7\cdot\log_7 4}$

ა) 3 ბ) 28 გ) 7 დ) 4

6) $5^{\log_8 7\cdot\log_5 8}$

ა) 7 ბ) 4 გ) 56 დ) 8

7) $4^{\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_8 125}$

ა) 3 ბ) 2; გ) 4 დ) 5

6. 1) $7^{\sqrt{\log_7 3}}-3^{\sqrt{\log_3 7}}$

ა) $\frac{3}{7}$ ბ) -4 გ) 0 დ) $\frac{7}{3}$

2) $49^{\frac{1}{\log_5 7}}+64^{\frac{1}{\log_4 8}}-100^{\frac{1}{\log_7 10}}$

ა) 8 ბ) 7 გ) -8 დ) -18

3) $\log_{\sqrt{3}}\frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{3}}+\log_{0,(3)}\frac{1}{11+4\sqrt{6}}$

ა) 3 ბ) 2 გ) 4 დ) $\frac{3}{2}$

4) $5^{\log_8 7}-7^{\log_8 5}$

ა) $\frac{7}{5}$ ბ) 2 გ) 0 დ) $\frac{5}{7}$

5) $8^{\log_8^2 2}+27^{\log_{27}^3 3}$

ა) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[9]{3}$ ბ) 2 გ) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ დ) 31

7. გამოთვალეთ $\log_{21}72$, თუ $\log_2 7=m$ და $\log_2 3=n$
8. გამოთვალეთ $\log_{45}600$, თუ $\lg 5=m$ და $\lg 3=n$
9. გამოთვალეთ $\log_{70}980$, თუ $\lg 2=m$ და $\lg 7=n$
10. გამოთვალეთ $\log_{25}12+\lg 64$, თუ $\log_5 3=m$ და $\log_4 125=n$
11. გამოთვალეთ $\log_5 6+\log_{12}25$, თუ $\lg 3=m$ და $\lg 5=n$
12. გამოთვალეთ $\log_9 245$, თუ $\log_5 7=m$ და $\log_3 5=n$

ამოხსენით განტოლებები (№№ 13 – 15):

13. 1) $\log_2 x=3$

ა) 9 ბ) 8 გ) 4 დ) 16

2) $\log_2(x-1)=5$

ა) 31 ბ) 30 გ) 33 დ) 32

3) $\log_5(2x+1)=3$

ა) 61 ბ) 124 გ) 125 დ) 62

4) $\log_{441}\left(x^2-2x-3\right)=\frac{1}{2}$

ა) 6; -4 ბ) 6; -8 გ) 8; 6 დ) -8; -6

5) $\log_{27}\left(2x^2+x\right)=\frac{1}{3}$

ა) 1; 3 ბ) -1; -3 გ) 1; -1,5 დ) -1;

6) $\log_2\log_2(x-1)=2$

ა) 15 ბ) 17 გ) 4 დ) 2

7) $\log_2\log_2\left(x^2-2x+8\right)=1$

ა) 2 ბ) 4 გ) ϕ დ) 1

8) $\log_x 3=2$

ა) 9 ბ) $\pm\sqrt{3}$; გ) $\sqrt{2}$; დ) $\sqrt{3}$

14. 1) $\log_{x-1}25=2$

ა) 6; -4 ბ) 6; გ) 4 დ) 3

2) $\log_{x^2-2x+1}4=1$

ა) 3 ბ) 3; -1 გ) -1 დ) ϕ

3) $\log_2 x=\log_3 x$

ა) 2 ბ) 3 გ) 1 დ) ϕ

4) $\log_2(x+1)=\log_3 5$

ა) 3 ბ) 4 გ) 5 დ) $2^{\log_3 5}-1$

5) $\log_{x^2+x}(x+1)=1$

ა) 1; -1   ბ) -1   გ) 1   დ) 2

6) $\log_{x+3}(x^2+2x+17)=2$
ა) 3   ბ) 2   გ) 4   დ) 1

7) $\log_{5x-x^2-6}(x^2-5x+4)=3$
ა) $\sqrt{3}+1$ ბ) $-\sqrt{3}+1$ გ) ამონახსნი არა აქვს   დ) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

8) $\log_{\frac{1-x}{x}}(x^2-2x-3)=2$

ა) ამონახსნი არა აქვს   ბ) $\sqrt{2}-1$ გ) $\frac{2}{3}$ დ) $\sqrt{3}+1$

15. 1) $\log_2(x+1)+\log_2(x-2)=\log_2(x+3)$
2) $\log_5(2x+1)+\log_{0,2}(x-1)=2\log_{25}(x+1)$
3) $\log_3(x-1)+\log_9(x-1)+\log_{27}(x-1)=\log_{81}(x-1)$
4) $\log_3(x^2+3x+2)+\log_9(x^2+3x+2)+\log_{27}(x^2+3x+2)=\log_{1/\sqrt{729}}(x^2+3x+2)$
5) $\lg(2x+1)-\lg 2=\lg(3x-1)+\lg 5$
6) $3\log_3(x+1)+\log_3(x^2-1)=\log_3(x-1)+4$
7) $4\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)+\log_3(4x^2-9)=\log_3(2x-3)-6$
8) $5\log_2(x+1)+\log_2(x^3+1)=\log_2(x^2-x+1)+3$

ბ - ჯგუფი

16. 1) გამოთვალეთ $\lg 45$, თუ $\log_5 3=m$ და $\log_5 2=n$
2) გამოთვალეთ $\log_{270}150$, თუ $\log_{270}2=m$ და $\log_{270}3=n$
3) გამოთვალეთ $\log_{140}7$, თუ $\log_{140}2=m$ და $\log_{140}5=n$
17. რომელია მეტი $a=\log_{72}108$ თუ $b=\log_{12}18$?
18. რომელია მეტი $a=\log_{135}675$ თუ $b=\log_{45}75$?
19. რომელია მეტი $a=\log_9 5$ თუ $b=\log_8 7$?
20. რომელია მეტი $a=\log_3 2$ თუ $b=\log_4 3$?
21. რომელია მეტი $a=\log_4 3$ თუ $b=\log_5 4$
22. რომელია მეტი $a=\log_{n+1}n$ თუ $b=\log_{n+2}(n+1)$
23. რომელია მეტი $a=\lg 5$ თუ b=0,7?
24. რომელია მეტი $a=\lg 2$ თუ b=0,3?

ამოხსენით განტოლებები (№№ 25 – 30):

25. 1) $\log_5(27x^3+8)+3\log_5(3x+2)=\log_5(9x^2-6x+4)+8$
2) $\log_2(8x^3+12x^2+6x+1)-\log_2(4x^2+4x+1)=\log_2 7$
3) $\log_3^2(x-3)+5\log_3(3-x)^2-11=0$
4) $\log_2^4(x^2-1)+3\log_2^2(1-x^2)^2-13=0$
5) $\log_5|x-2|+2\log_5^2\sqrt{4-4x+x^2}-3=0$
6) $\log_3|x-2|+2\log_3|2-x|-3\log_3 2=0$

7) $\lg\sqrt{x^2}-\lg^2(-x)+2\lg 5=0$

26. 1) $\lg\left(2^{\sqrt{x+1}}-4\right)-1=\lg\left(\sqrt{2^{\sqrt{x+1}-2}}+2\right)$

2) $\lg\left(5^{\sqrt{x-2}}+1\right)+2\lg 2-2=\lg\left(5^{1-\sqrt{x-2}}+5\right)$

3) $\log_2 182-2\log_2\sqrt{3-x}=\log_2(9-x)+\log_5^5$

4) $\lg\sqrt[3]{2}+0,(3)\lg\left(3x^2+10x+12\right)=\lg\sqrt[3]{x^2-2x+12}+\frac{1}{3}$

27. 1) $2\lg\sqrt{948-x}-0{,}5\lg(x+112)^2=2\lg 2$

2) $\lg\sqrt{4-x}+3\lg\sqrt{x-2}=\lg\sqrt{6x-x^2-8}+2$

3) $\lg\sqrt{7x+\frac{3}{2}}+\lg\sqrt{2x+2}=\frac{1}{2}(1+\lg 3{,}4)$

4) $1+0,(3)\lg\left(271+3^{\sqrt{2x^2+x-19}}\right)=2$

28. 1) $\lg\left(2^{x+1}+x-12\right)=x-x\lg 5+\lg 2$

2) $\lg\left(3^{x^2+x}+x^2+x-17\right)=\left(x^2+x\right)\lg 30-x^2-x$

3) $2(x+1)(\log_2 6-1)=\log_2\left(9^{x+1}+x-7\right)$

4) $(x+2)\lg 2+\lg\left(2+2^{x+2}\right)=1+3\lg 2$

5) $\dfrac{2}{7-3\lg x}+\dfrac{9}{11+3\lg x}=\dfrac{13}{12}$

6) $\log_2 2-\dfrac{1}{5-2\lg(x+1)}=\dfrac{2}{1+2\lg(x+1)}-\lg 1$

29. 1) $\frac{1}{3}\lg\left(271+3^{\sqrt{2(3x-9)}}\right)=\lg 10$

2) $\lg 10+\frac{1}{2}\cdot 0,(6)\lg\left(375+5^{\sqrt{2x+14}}\right)=\log_3 9$

3) $\lg\left(4^{x^2+x-6}+9\right)+\lg 2=\lg 10+\lg\left(2^{x^2+x-6}+1\right)$

4) $\lg\left(3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x+1}}\right)-\log_7 49=\lg 2-2\lg 2^{\sqrt{x+\frac{1}{4}}}$

30. 1) $\log_{\sqrt{5}}\left(4^{x+1}-6\right)-2\log_5\left(2^{x+1}-2\right)=2$

2) $\lg\left(\frac{1}{5}\sqrt{3^{x+3}}-50\right)=\lg\left(3^{\frac{x+1}{2}}+715\right)-1$

3) $\log_4\left(9^{3x+1}+7\right)=1+\log_4\left(3^{3x+1}+1\right)$

4) $x^{\log_x^2 5}+5^{\log_x 5}=6$

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები (№№ 31 – 36):

31. $\begin{cases} x+y=3 \\ \log_3(x+2y)+\log_{\frac{1}{3}}(x-y)=\log_3 2{,}5 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 3x+y=5 \\ \log_5(2x+4y)+\log_{0,2}(5x+y)=\log_{0,04}\dfrac{49}{100} \end{cases}$

33. $\begin{cases} x-2y=2 \\ \log_2(3x-2y)+2\log_4(x+3y)=3\log_{0,125}\dfrac{1}{70} \end{cases}$

34. $\begin{cases} \log_4(x-2)-\log_2(y+1)=0 \\ x^2-4y^2-4(x+y)=4y \end{cases}$

35. $\begin{cases} \log_{x-y}(x+y)+\log_{x+y}(x-y)=\dfrac{10}{3} \\ x^2+y^2=4+3x+3y-2xy \end{cases}$

36. $\begin{cases} \log_5(x-y)+\log_5\left(x^2+xy+y^2\right)=\log_5 7 \\ 2\log_{18}(x+y)=1-\log_{18}x \end{cases}$

ამოხსენით განტოლებები (№№ 37 – 45):

37. $\lg^2 x^2-5\lg(-x)+1=0$

38. $\log_{x+1}(125x+125)\cdot\log_{25}^2(x+1)=1$

39. $\dfrac{x^2}{2^{2\lg x}}=6\cdot 5^{\lg x+1}-125$

40. $5^{\lg\left(x^2+3\right)}+5^{\lg(x+5)}=5^{\frac{1}{2}\lg\left(x^3+5x^2+3x+15\right)+\log_5 2}$

41. $\log_2^3 x-\log_2 x^3=\dfrac{65}{8}$

42. $\log_5\left(12x-12x^2+2\right)\cdot\log_7\left(4x-4x^2+6\right)=1$

43. $\log_2\left(4x-x^2-2\right)\cdot\log_3\left(6x-x^2\right)=-2$

44. $2^{\lg x}+4^{\lg y}+8=3\cdot 2^{\sqrt[3]{6\lg x\cdot\lg y}}$

45. $6\sqrt{x-1}+3\cdot 2^x+2\cdot 3^x=6\cdot\log_2\left(2x-x^2+3\right)$

ამოხსენით განტოლებათა სისტემა (№№ 46 – 66):

46. $\begin{cases} \dfrac{\lg x^3}{\log_y 10}+\lg xy=9 \\ \lg x\cdot\lg y\cdot\lg xy=6 \end{cases}$ (დაკმაყოფილდით ორი ამონახსნის პოვნით)

47. $\begin{cases} 2\lg x+\log_y x+1=7\log_y 10 \\ \lg^2 x+\lg^2 y=5 \end{cases}$

48. $\begin{cases} \lg^2 x + \lg^2 y = 5 \\ \lg^3 x + \lg^3 y = 7 \end{cases}$ (დაკმაყოფილდით ორი ამონახსნის პოვნით)

49. $\begin{cases} y^{\lg x} + 3 \cdot x^{\lg y} = 400 \\ 2\lg x + 3\lg y = 8 \end{cases}$

50. $\begin{cases} x^{\lg y} + y^{\lg x} = 1 \\ x \cdot y = 5 \end{cases}$

51. $\begin{cases} \left(\sqrt[5]{x+1}\right)^{\lg(y+3)} = 2 \\ y + 3 = 20(x+1)^{-0.2} \end{cases}$

52. $\begin{cases} \log_y x - 3\log_x y = 2 \\ 3\lg x - 5\lg y = 4\lg 2 \end{cases}$

53. $\begin{cases} \log_{y+1} x + \log_x (y+1) = 2 \\ x^2 + 4y^2 + y = 9 \end{cases}$

54. $\begin{cases} \log_y \sqrt{x+3} - \log_{x+3} \sqrt[3]{y} = \frac{1}{6} \\ y^2 + x^2 = 17 \end{cases}$

55. $\begin{cases} \log_{\sqrt{x+1}} (y+2)\,(x+1) = 8 \\ \log_7 \left(\log_3 \frac{y+2}{y+1} - 1\right) = 0 \end{cases}$

56. $\begin{cases} 5^{x+1} \cdot 3^{y-2} = 675 \\ \log_{\sqrt{13}} |3x + 2y| = 2 \end{cases}$

57. $\begin{cases} 5^x \cdot 4^y = 20 \\ 7^x \cdot 3^y = 21 \end{cases}$

58. $\begin{cases} 3^{x+1} \cdot 2^{y+1} = 54 \\ 7^{x-1} \cdot 5^{y+4} = 174 \end{cases}$

59. $\begin{cases} \lg|x| + \lg y^2 = 2 \\ \lg x^2 + 3\lg y = 3 \end{cases}$

60. $\begin{cases} \log_{\sqrt{x^2+4y}} \sqrt{x^2 + 6x + 9} + \log_{(y+2)^2}(x+3) = 1{,}5 \\ |x+3| + 5\sqrt{y^2 + 4y + 4} = 30 \end{cases}$

61. $\begin{cases} \log_{\sqrt{x+3}}\left(5\sqrt{x+3} + 4\sqrt{y+1}\right) = 2 \\ \log_{\sqrt{y+1}}\left(4\sqrt{x+1} + 5\sqrt{y+1}\right) = 2 \end{cases}$

62. $\begin{cases}(2x+3y)\cdot 5^{3y-2x}=\dfrac{3}{5}\\ \log_3(2x+3y)=2x-3y\end{cases}$

63. $\begin{cases}y^{\log_x y}=x^9\\ x^y=y^x\end{cases}$

64. $\begin{cases}5^{\lg x}+5^{-\lg x}=7^{\lg y}+7^{-\lg y}\\ x\cdot y=35\end{cases}$

65. $\begin{cases}\lg x+\lg y+\lg z=0\\ 2^x+2^y+2^z=6\\ 3^{-x}+3^{-y}+3^{-z}=1\end{cases}$

66. $\begin{cases}x^{\lg y}+y^{\lg x}=20\\ x+y+2=2z\\ 2^x+2^y=2^z\end{cases}$

67. $\begin{cases}25^{\log_3(x+y)}-6\cdot(x+y)^{\log_3 5}+5=0\\ (x+y)^{(x-y)}=1\end{cases}$

§13. ამოცანები განტოლებათა შედგენაზე

ა - ჯგუფი

1. გიამ და ზურამ ერთად იყიდეს 60 რვეული, ამასთან გიამ იყიდა 4-ჯერ მეტ რვეული ვიდრე ზურამ. რამდენი რვეული იყიდა ზურამ?
ა) 10 ბ) 12 გ) 16 დ) 15

2. მოსწავლეებმა შეაგროვეს 60 კგ ალუმინი და სპილენძი. ალუმინი იყო შეგროვებული 3-ჯერ მეტი ვიდრე სპილენძი. რამდენი კილოგრამი სპილენძი შეაგროვეს მოსწავლეებმა?
ა) 10 ბ) 20 გ) 15 დ) 12

3. ორ ყუთში ერთად 85 ფანქარია. პირველ ყუთში ფანქრების რაოდენობა 31-ით მეტია ვიდრე მეორეში. რამდენი ფანქარია მეორე ყუთში?
ა) 54 ბ) 64 გ) 27 დ) 44

4. ორ კარადაში ერთად 150 წიგნია. თუ პირველი კარადიდან მეორეში გადავიტანთ 10 წიგნს, მაშინ ორივე კარადაში წიგნების რაოდენობა ტოლი იქნება. რამდენი წიგნი იყო მეორე კარადაში?
ა) 70 ბ) 75 გ) 85 დ) 65

5. ორ კარადაში ერთად 250 წიგნია. თუ პირველი კარადიდან გავიტანთ 15 წიგნს, ხოლო მეორიდან – 25 წიგნს, მაშინ კარადებში წიგნების რაოდენობა ტოლი იქნება. რამდენი წიგნი იყო მეორე კარადაში?
ა) 100 ბ) 115 გ) 105 დ) 110

6. პირველ ბიბლიოთეკაში არის 2500 წიგნი, ხოლო მეორეში – 3200. ყოველდღე პირველ ბიბლიოთეკაში შეჰქონდათ 50 წიგნი, ხოლო მეორეში – 40 წიგნი. რამდენი დღის შემდეგ იქნება ორივე ბიბლიოთეკაში წიგნების რაოდენობა ტოლი?

ა) 60 ბ) 70 გ) 50 დ) 80

7. პირველ საწყობში იყო 9600 კგ ცემენტი, მეორეში – 5700კგ. პირველი საწყობიდან ყოველდღე გაჰქონდათ 60 კგ ცემენტი, ხოლო მეორეში შეჰქონდათ 70 კგ. რამდენი დღის შემდეგ იქნება ორივე საწყობში ტოლი რაოდენობის ცემენტი?

ა) 25 ბ) 40 გ) 30 დ) 50

8. პირველ ავზში 3-ჯერ მეტი ბენზინია ვიდრე მეორეში. იმის შემდეგ, რაც პირველი ავზიდან მეორეში გადაასხეს 200 ლ ბენზინი, მათში ბენზინის რაოდენობა გათანაბრდა. რამდენი ლიტრი ბენზინი იყო თავდაპირველად პირველ ავზში?

ა) 400 ბ) 600 გ) 1800 დ) 200

9. მეორე ავზში ასხია პირველ ავზში ბენზინის რაოდენობის 80%. მას შემდეგ, რაც პირველი ავზიდან მეორეში გადაასხეს მასში არსებული ბენზინის რაოდენობის 20%, მეორეში 100 ლიტრით მეტი გახდა ვიდრე პირველში. რამდენი ლიტრი ბენზინი ესხა თავდაპირველად მეორე ავზში?

ა) 600 ბ) 800 გ) 900 დ) 400

10. მოსწავლემ შეიძინა საწერი კალმები და ფანქრები სულ 24 ცალი. ფანქრების რაოდენობა 3-ჯერ მეტი იყო ვიდრე საწერი კალმები. ერთი ფანქრის ღირებულება 5 თეთრით ნაკლებია ვიდრე ერთი კალმის ღირებულება. რა ღირს ერთი კალამი, თუ მოსწავლემ მთლიანად გადაიხადა 2 ლარი და 70 თეთრი?

ა) 15 თ ბ) 10 თ გ) 12 თ დ) 20 თ

11. კლასში მოსწავლეთა რაოდენობის 25% გოგონებია. მას შემდეგ, რაც სხვა სკოლაში გადავიდა 2 ბიჭი, გოგონების რაოდენობა გახდა მოსწავლეთა რაოდენობის 30%. რამდენი მოსწავლე იყო კლასში?

ა) 20 ბ) 18 გ) 15 დ) 12

12. სკოლისთვის შეიძინეს საწერი კალმები და ფანქრები, სულ 290 ცალი. საწერი კალმების რაოდენობა ტოლი იყო ფანქრების რაოდენობის 45%. ერთი საწერი კალამი ღირდა 10 თეთრით მეტი ვიდრე ფანქარი. რა თანხა გადაუხდიათ ფანქრებში, თუ მთლიანად გადაიხადეს 96 ლარი.

ა) 40 ლ ბ) 50 ლ გ) 60 ლ დ) 70 ლ

13. 3 რვეული იმდენი ღირს რამდენიც 13 ფანქარი. რვეულების რაოდენობა რვეულებისა და ფანქრების მთლიანი რაოდენობის $\frac{2}{3}$ ნაწილია. რა თანხა გადაიხადეს რვეულებში, თუ მთლიანად ფანქრებში გადაიხადეს 5 ლარი და 70 თეთრით ნაკლები ვიდრე ყველა რვეულში ერთად.

ა) 6 ლ ბ) 6 ლ. 60 თ. გ) 5 ლ. 80 თ. დ) 6 ლ. 90 თ.

14. საწყობში შეიტანეს ქერი, ხორბალი და შვრია, სულ 520 კგ. ქერის წონა შეადგენს ხორბლის წონის 60%, ხოლო შვრიის წონა ქერის წონის – 80%. რამდენი კილოგრამი ხორბალი შეიტანეს საწყობში?

ა) 200 ბ) 270 გ) 250 დ) 300

15. პირველ ავზში ასხია 1200 ლ წყალი, მეორეში კი – 900 ლ. ერთ საათში პირველი ავზიდან უშვებენ 60%-ით მეტ წყალს ვიდრე მეორიდან. რამდენი ლიტრი წყალი უნდა გამოუშვან პირველი ავზიდან, რომ ორივე ავზში დარჩეს წყლის ერთნაირი რაოდენობა?

ა) 600 ბ) 800 გ) 400 დ) 500

16. ორნიშნა რიცხვის ციფრთა ჯამია 15. თუ ამ რიცხვში ციფრებს ადგილებს შევუცვლით მივიღებთ თავდაპირველ რიცხვზე 9-ით მეტ რიცხვს. იპოვეთ ეს რიცხვი.

ა) 56 ბ) 96 გ) 87 დ) 78

17. სამნიშნა რიცხვის ციფრთა ჯამია 16. თუ ამ რიცხვის პირველ და მესამე ციფრებს ადგილებს შევუცვლით და ახლად მიღებულ რიცხვს გამოვაკლებთ მოცემულ სამნიშნა რიცხვს, მივიღებთ 198. იპოვეთ მოცემული რიცხვი, თუ მეორე ციფრია 2.

ა) 529 ბ) 628 გ) 727 დ) 426

18. პირველი მუშა მთელ სამუშაოს ასრულებს 5 საათში, ხოლო მეორე მუშა 3 საათში. რამდენ საათში შეასრულებს მთელ სამუშაოს ორივე მუშა ერთად?

ა) $\frac{5}{2}$ ბ) 2 გ) 3 დ) $\frac{15}{8}$

19. პირველი მუშა სამუშაოს ასრულებს 8 საათში. რამდენ საათში შეასრულებს სამუშაოს მეორე მუშა, თუ ორივე მუშა ერთად სამუშაოს ასრულებს 4 სთ და 48 წუთში.

ა) 10 სთ ბ) 6 სთ გ) 12 სთ დ) 14 სთ

20. პირველ ავზში 2-ჯერ მეტი ბენზინია ვიდრე მეორეში. რამდენი პროცენტი ბენზინი უნდა გადავასხათ პირველი ავზიდან მეორეში, რომ ორივე ავზში დარჩეს ტოლი რაოდენობის ბენზინი.

ა) 45% ბ) 25% გ) 20% დ) 40%

21. ორ ფერმერს მოსავალი უნდა აეღო საკუთარი ნაკვეთიდან. პირველი ფერმერის ნაკვეთის ფართობია 10 ჰა. რისი ტოლია მეორე ფერმერის ნაკვეთის ფართობი, თუ ცნობილია, რომ იგი დღეში $\frac{3}{2}$-ჯერ მეტ ფართობზე იღებდა მოსავალს ვიდრე პირველი და მათ ერთდროულად დაიწყეს და დაამთავრეს მოსავლის აღება.

ა) 5 ჰა ბ) 8 ჰა გ) 15 ჰა დ) 20 ჰა

22. როდესაც მართკუთხედის გვერდების სიდიდეები გაზარდეს ორ ორი მეტრით, მისი ფართობი გაიზარდა 20 $მ^2$-ით. რისი ტოლი იყო მართკუთხედის პერიმეტრი გაზრდამდე?

ა) 20 მ ბ) 18 მ გ) 14 მ დ) 16 მ

23. მართკუთხედის პერიმეტრია 40 მ. როდესაც მისი სიგანე და სიგრძე გაზარდეს შესაბამისად 2 მ და 3 მ-ით, მისი ფართობი გაიზარდა 64 $მ^2$-ით. იპოვეთ გვერდების ზომები მომატებამდე.

ა) 6 მ; 14 მ ბ) 8 მ; 12 მ გ) 7 მ; 13 მ დ) 9 მ; 11 მ

24. წილადის მრიცხველის 8% ტოლია მისი მნიშვნელის 5%-ის. გამოთვალეთ მოცემული წილადის 80%, თუ მრიცხველისა და მნიშვნელის ჯამია 13.

ა) $\frac{3}{4}$; ბ) $\frac{1}{2}$; გ) $\frac{2}{5}$; დ) $\frac{3}{7}$

25. პირველ ფერმერს დასათესი ჰქონდა 28 ჰა, ხოლო მეორეს – 30 ჰა. თუ პირველი ფერმერი დაეხმარება მეორეს 3 დღის განმავლობაში, მეორე ფერმერი სამუშაოს შეასრულებს 8 დღეში, ხოლო თუ მეორე ფერმერი დაეხმარება პირველს 4 დღის განმავლობაში მაშინ პირველი ფერმერი სამუშაოს შეასრულებს ასევე 8 დღეში. რამდენ ჰექტარს თესდა თითოეული ფერმერი დღეში?

ა) 2 ჰა; 3 ჰა ბ) 3 ჰა; 4 ჰა გ) 2 ჰა; 4 ჰა დ) 4 ჰა; 3 ჰა

26. მბეჭდავს ყოველდღიურად უნდა დაებეჭდა 60 ფურცელი. იგი ყოველდღიურად ბეჭდავდა 5 ფურცლით მეტს, ამიტომ ვადამდე 3 დღით ადრე არა მარტო შეასრულა სამუშაო, არამედ დაბეჭდა 20 ფურცლით მეტი. რამდენი ფურცელი დაბეჭდა მემანქანემ?

ა) 2720 ბ) 2400 გ) 2580 დ) 2600

27. ორ ფერმერს უნდა დაეთესა ორი ნაკვეთი, რომელთაგან თითოეულის ფართობი ტოლი იყო 144 ჰა. პირველი ფერმერი 12 ჰექტარის დათესვას ანდომებდა იმდენ დღეს რამდენსაც მეორე ფერმერი 10 ჰექტარის დათესვას. რამდენ ჰექტარს თესდა პირველი ფერმერი დღეში, თუ მან მთელი სამუშაო პირველ ფერმერზე 3 დღით ადრე დაასრულა.

ა) 9,6 ბ) 9 გ) 8,4 დ) 8

28. ტრაქტორმა უნდა მოხნას სამი ნაკვეთი. პირველი ნაკვეთის ფართობი შეადგენს სამივე ნაკვეთის ფართობის 60%, ხოლო მეორე ნაკვეთის ფართობი ისე შეეფარდება მესამე ნაკვეთის ფართობს, როგორც $5:6$. იპოვეთ სამივე ნაკვეთის ფართობი, თუ პირველი ნაკვეთის ფართობი მეტია მეორე ნაკვეთის ფართობზე 23 ჰა-თი.

ა) 50 ბ) 60 გ) 55 დ) 45

29. მიწის სამი ნაკვეთის ფართობები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $2:3:5$. იპოვეთ მესამე ნაკვეთის ფართობი, თუ პირველი ნაკვეთის ფართობი მეორე ნაკვეთის ფართობის 60%-ს აღემატება 2 ჰა-თი.

ა) 30 ბ) 20 გ) 40 დ) 50

30. მოცემული ოთხი რიცხვიდან პირველი სამი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $4:5:10$, ხოლო მეორე, მესამე, მეოთხე რიცხვები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $1:2:3$. იპოვეთ მეორე რიცხვი, თუ მათი საშუალო არითმეტიკული 17-ის ტოლია.

ა) 8 ბ) 10 გ) 12 დ) 15

31. მოსწავლემ გაიარა რა 10 წუთში 500 მ, გამოთვალა, რომ თუ ამ სიჩქარით ივლიდა სკოლაში დაიგვიანებდა 10 წუთით. მოუმატა რა სიჩქარეს, 8 წუთში გადიოდა 800 მეტრს, რის შემდეგაც სკოლაში მივიდა 5 წუთით ადრე. გამოთვალეთ მანძილი მოსწავლის სახლიდან სკოლამდე.

ა) 2,2 ბ) 2,5 გ) 3 დ) 2

32. ველოსიპედისტმა გაიარა გარკვეული მანძილი 25 კმ/სთ სიჩქარით და ამის შემდეგ გასავლელი დარჩა 40 კმ-ით მეტი მანძილი ვიდრე გაიარა. მან გაზარდა სიჩქარე და დარჩენილი მანძილი გაიარა 35 კმ/სთ სიჩქარით. იპოვეთ ველოსიპედისტის მიერ გავლილი მანძილი კილომეტრებში, თუ მისი საშუალო სიჩქარე მთელ გზაზე 30კმ/სთ ტოლია.

ა) 250 ბ) 240 გ) 220 დ) 300

33. მემანქანე საათში 6 ფურცელს ბეჭდავდა. გარკვეული დროის მუშაობის შემდეგ, დარჩა რა დასაბეჭდი 30 ფურცლით მეტი ვიდრე დაბეჭდა, შეცვალა ბეჭდვის სიჩქარე და ყოველ საათში ბეჭდავდა 12 ფურცელს. იპოვეთ დასაბეჭდი ფურცლების რაოდენობა, თუ მთელი მუშაობის განმავლობაში იგი საათში საშუალოდ 10 ფურცელს ბეჭდავდა.

ა) 50 ბ) 60 გ) 70 დ) 80

34. პირველ დღეს პირველმა ბრიგადამ 3 საათში, ხოლო მეორე ბრიგადამ 2 საათში ერთად აიღო 13 ტ. ხორბალი. მეორე დღეს, პირველმა ბრიგადამ 5 საათში, ხოლო მეორემ 3 საათში ერთად აიღო 21 ტ ხორბალი. რამდენ ტონა ხორბალს იღებდა ერთ საათში ორივე ბრიგადა ერთად?

ა) 4 ბ) 6 გ) 5 დ) 8

35. A და B პუნქტებს შორის მანძილი 80 კმ-ია. ერთდროულად A და B პუნქტებიდან ერთმანეთის შესახვედრად გამოვიდა ორი ველოსიპედისტი, რომლებიც ერთმანეთს შეხვდნენ 4 საათის შემდეგ. თუ პირველი ველოსიპედისტი იმოძრავებდა ორჯერ სწრაფად, ხოლო მეორე ორჯერ ნელა, მაშინ ისინი შეხვდებოდნენ $\frac{40}{11}$ საათის შემდეგ. იპოვეთ ველოსიპედისტების სიჩქარეები.

ა) 9; 11 ბ) 6; 14 გ) 8; 12 დ) 7; 13

36. წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელის ჯამია 13. თუ მრიცხველს გავზრდით 20%-ით, ხოლო მნიშვნელს შევამცირებთ 25%-ით წილადის სიდიდე გახდება ერთის ტოლი. იპოვეთ საწყისი წილადი.

ა) $\frac{3}{10}$; ბ) $\frac{5}{8}$; გ) $\frac{2}{11}$; დ) $\frac{4}{9}$

37. იპოვეთ წილადი რომლის მრიცხველისა და მნიშვნელის ჯამია 7, ხოლო გასამკეცებული მრიცხველი უდრის გაოთხკეცებულ მნიშვნელს.

ა) $\frac{3}{4}$; ბ) $\frac{4}{3}$; გ) $\frac{1}{6}$; დ) $\frac{2}{5}$

38. იპოვეთ წილადი რომლის მრიცხველისა და მნიშვნელის ჯამია 13, ხოლო მრიცხველის გაორკეცებული სიდიდე მნიშვნელს აღემატება მნიშვნელის 25%-ით.

ა) $\frac{3}{10}$; ბ) $\frac{4}{9}$; გ) $\frac{5}{8}$; დ) $\frac{6}{7}$

39. თუ გეგმით პირველ დღეს ფერმერს უნდა დაეთესა 50 ჰა, ხოლო მეორე დღეს – 60 ჰა, მაშინ ის სამუშაოს შეასრულებდა 16 საათში. თუ პირველ დღეს დასათესი ექნებოდა 40 ჰა, ხოლო მეორე დღეს – 30 ჰა, მაშინ ის თესვას დაამთავრებდა 11 საათში. რამდენ ჰექტარს თესდა ფერმერი ერთ საათში მეორე დღეს?

ა) 8 ბ) 15 გ) 12 დ) 10

40. თუ პირველ დღეს მბეჭდავი დაბეჭდავდა 60 გვერდს, ხოლო მეორე დღეს – 80 გვერდს მაშინ ის სამუშაოს შეასრულებდა 10 საათში, თუ პირველ დღეს დაბეჭდავდა 24 გვერდს, ხოლო მეორე დღეს – 32 გვერდს, მაშინ სამუშაოს შეასრულებდა 4 საათში. რამდენ გვერდს ბეჭდავდა მბეჭდავი მეორე დღეს ერთ საათში?

ა) 16 ბ) 12 გ) 15 დ) 10

41. სამი ავზიდან პირველი ავზი სავსეა. როცა ამ ავზიდან მეორეში გადაასხეს იმ რაოდენობის წყალი რომ ის აივსო, მაშინ პირველ ავზში დარჩა მასში არსებული წყლის 2/5 ნაწილი, მას შემდეგ რაც მესამე ავზი აავსეს მეორე ავზიდან გადასხმული წყლით, მეორეში დარჩა მასში არსებული წყლის 1/6 ნაწილი. ბოლოს მესამე ავზიდან გადაასხეს წყალი პირველ ავზში, ამ უკანასკნელის ასავსებად საჭირო გახდა დამატებით 50 ლ წყალი. რამდენ ლიტრ წყალს იტევს მეორე ავზი?

ა) 500 ლ ბ) 400 ლ გ) 300 ლ დ) 200 ლ

42. გამხმარი სოკო შეიცავს 10% წყალს. რამდენ პროცენტ წყალს შეიცავს ახალი სოკო, თუ 40 კგ ახალი სოკოსაგან მიიღება 4 კგ გამხმარი სოკო.

ა) 93% ბ) 91% გ) 81% დ) 79%

43. ახალი სოკო შეიცავს 90% წყალს. რამდენ პროცენტ წყალს შეიცავს გამხმარი სოკო, თუ 50 კგ ახალი სოკოსაგან მიიღება 5,5 კგ გამხმარი სოკო.

ა) $\frac{100}{11}$%; ბ) $\frac{100}{9}$%; გ) 9%; დ) 9,1%

44. რიცხვს გამოაკლეს მისი 20%. მიღებული რიცხვი გააორკეცეს, რის შემდეგ მას გამოაკლეს მისი 25%. რა რიცხვი იყო აღებული თავდაპირველად, თუ საბოლოოდ მიიღეს 144.

ა) 110 ბ) 80 გ) 160 დ) 120

45. 198-ის რა რიცხვზე გაყოფით მიიღება ნაშთში, განაყოფის 20%?

ა) 11 ბ) 15 გ) 13 დ) 17

46. *A* პუნქტიდან აღმოსავლეთისა და დასავლეთის მიმართულებით ერთდროულად გავიდა ორი ტურისტი. პირველმა ერთ საათში გადაუხვია სამხრეთის მიმართულებით და ამ მიმართულებით გაიარა 60 კმ. მეორემ იარა რა 5 სთ აღმოსავლეთის მიმართულებით ასევე გადაუხვია სამხრეთისაკენ და ამ მიმართულებით გაიარა 30 კმ. ამის შემდეგ მათ შორის მანძილი გახდა 50 კმ. იპოვეთ მეორე ველოსიპედისტის სიჩქარე.

ა) 5 კმ/სთ ბ) 8 კმ/სთ გ) 6 კმ/სთ დ) 7 კმ/სთ

47. 4 ფანქარი და 3 საერთო რვეული ღირს 3 ლარი და 60 თეთრი, ორი ფანქარი და ორი საერთო რვეული – 2 ლარი და 20 თეთრი. რა ღირს 8 ფანქარი და 7 საერთო რვეული?

ა) 5 ლარი და 40 თეთრი ბ) 7 ლარი და 25 თეთრი
გ) 8 ლარი და 50 თეთრი დ) 9 ლარი და 60 თეთრი.

48. ორანჟერეაში მოწყვეტეს ვარდები: თეთრი და ვარდისფერი – 400 ც, ვარდისფერი და წითელი – 300 ც, თეთრი და წითელი – 440 ც. რამდენი თეთრი, ვარდისფერი და წითელი ფერის ვარდები მოწყვიტეს?

ა) 270 ც თეთრი, 130 ც ვარდისფერი, 170 ც წითელი;
ბ) 260 ც თეთრი, 140 ც ვარდისფერი, 190 ც წითელი;
გ) 230 ც თეთრი, 100 ც ვარდისფერი, 150 ც წითელი;
დ) 290 ც თეთრი, 160 ც ვარდისფერი, 180 ც წითელი.

49. ორი მზარეული თლიდა კარტოფილს. პირველი მზარეული წუთში თლიდა 2 ცალ კარტოფილს, ხოლო მეორე – 3 ცალს. ერთად მათ გათალეს 400 ცალი კარტოფილი. რამდენი წუთი მუშაობდა თითოეული მათგანი თუ მეორემ იმუშავა 25 წუთით მეტი ვიდრე პირველმა?

ა) პირველმა – 55 წთ, მეორემ – 100 წთ ბ) პირველმა – 65 წთ, მეორემ – 90 წთ
გ) პირველმა – 70 წთ, მეორემ – 100 წთ დ) პირველმა – 80 წთ, მეორემ – 40 წთ

50. ხუთ ყუთში დევს ერთიდაიგივე რაოდენობის ვაშლი. თუ თითოეული ყუთიდან ამოვიღებთ 60 ვაშლს, მაშინ ყველა ყუთში დარჩება იმდენი ვაშლი რამდენიც იყო ორ ყუთში. რამდენი ვაშლი იყო თითოეულ ყუთში?

ა) 80 ბ) 90 გ) 100 დ) 110

ბ - ჯგუფი

51. მოსწავლემ ორ სახელმძღვანელოში გადაიხადა 16 ლარი. თუ პირველ სახელმძღვანელოში მოსწავლე გადაიხდიდა იმდენი პროცენტით მეტს, რამდენი პროცენტით ნაკლები გადაიხადა მეორე სახელმძღვანელოში, მაშინ იგი პირველ სახელმძღვანელოში გადაიხდიდა 15 ლარს, ხოლო მეორეში – 3 ლარს. რამდენი ლარი გადაიხადა მან პირველ სახელმძღვანელოში?

52. პირველი მბეჭდავი 50 გვერდს $1\frac{7}{18}$ საათით ნაკლებ დროში ბეჭდავს ვიდრე მეორე მბეჭდავი. რამდენ საათში დაბეჭდავს 60 გვერდს მეორე მბეჭდავი, თუ ერთად მუშაობით ისინი საათში ბეჭდავენ 30 გვერდს.

53. მოტორიანი ნავი და ტივი ერთდროულად გავიდა A პუნქტიდან B პუნქტისაკენ. გაიარა რა მდინარის დინების მიმართულებით 30 კმ ნავი დაბრუნდა უკან A პუნქტში და მთლიანად ამ მგზავრობას მოანდომა 8 სთ. იპოვეთ ნავის სიჩქარე მდგარ წყალში თუ ის ტივს შეხვდა A პუნქტიდან 12 კმ-ით დაშორებულ ადგილზე.

54. სამკერვალომ შეიძინა ორი ხარისხის ქსოვილი, სულ 180 მ და თითოეულ მათგანში გადაიხადა 1200 ლარი. პირველი ხარისხის ერთი მეტრი ქსოვილი ღირდა 10 ლარით მეტი ვიდრე მეორე ხარისხის. რამდენი მეტრი პირველი ხარისხის ქსოვილი შეიძინა სამკერვალომ?

55. A პუნქტიდან ჩრდილოეთის მიმართულებით გავიდა შიკრიკი, რომელსაც A პუნქტიდან 40 კმ-ით დაშორებულ B პუნქტში უნდა ჩაეტანა პაკეტი. იმავდროულად A პუნქტიდან გავიდა აღმოსავლეთის მიმართულებით ველოსიპედისტი, რომელმაც 5 საათის მოძრაობის შემდეგ გადაუხვია სამხრეთისაკენ და C პუნქტში მივიდა ზუსტად იმ დროს რა დროსაც შიკრიკი ჩავიდა B პუნქტში. გამოთვალეთ ველოსიპედისტის სიჩქარე, თუ მანძილი B და C პუნქტებს შორის 125 კმ–ია და ამასთან ველოსიპედისტი სამხრეთის მიმართულებით მოძრაობდა 20 კმ/სთ სიჩქარით, ხოლო შიკრიკი B პუნქტში ჩავიდა 8 საათში.

56. A პუნქტიდან გავიდა ორი ველოსიპედისტი, პირველი აღმოსავლეთისაკენ, ხოლო მეორე დასავლეთისაკენ. პირველი ველოსიპედისტის სიჩქარე 4 კმ/სთ-ით ნაკლებია მეორე ველოსიპედისტის სიჩქარეზე. ორი საათის შემდეგ მეორე ველოსიპედისტმა გადაუხვია სამხრეთის მიმართულებით და გაიარა 60 კმ ამ მიმართულებით. პირველმა

57. ველოსიპედისტმა იმოძრავა რა 5 საათი გადაუხვია ჩრდილოეთის მიმართულებით და გაიარა 30 კმ ამ მიმართულებით. იპოვეთ ველოსიპედისტების სიჩქარე, თუ მანძილი ბოლო პუნქტებს შორის ტოლი აღმოჩნდა 150 კმ.

57. A და B პუნქტებს შორის მანძილი 60 კმ-ია. თუ A პუნქტიდან პირველი ტურისტი გამოვა 2,5 სთ-ით უფრო გვიან, ვიდრე მეორე B პუნქტიდან, მაშინ ისინი შეხვდებიან ერთმანეთს იმ დროს როცა გავლილი ექნებათ გზის ნახევარი. თუ ისინი ერთდროულად გამოვლენ საწყისი პუნქტებიდან 5 საათის შემდეგ მათ შორის მანძილი ტოლი იქნებოდა 33 კმ-ის. იპოვეთ თითოეული ტურისტის სიჩქარე.

58. A- დან B პუნქტამდე მანძილი 180 კმ-ია. ერთდროულად A-დან გამოვიდა ველოსიპედისტი და B-დან ავტობუსი. 2 სთ-ის შემდეგ ისინი შეხვდნენ ერთმანეთს. ავტობუსმა გააგრძელა მოძრაობა ჩავიდა A პუნქტში და გამობრუნდა უკან. გაიარა რა შეხვედრიდან 320/7 კმ ის დაეწია ველოსიპედისტს. ამ დროისათვის ავტობუსმა მოასწრო ჩასვლა A პუნქტში და უკან დაბრუნება. იპოვეთ ველოსიპედისტისა და ავტობუსის სიჩქარეები.

59. A და B პუნქტებს შორის მანძილი 380 კმ-ია. გზის პირველი ნაწილი, რომლის სიგრძე 200 კმ-ია, ავტობუსმა გაიარა 40 კმ/სთ ნაკლები სიჩქარით, ვიდრე გზის მეორე ნაწილი. ცნობილია, რომ გზის პირველი ნაწილის გავლას დასჭირდა მთლიანად გასავლელი დროის ნახევარზე ერთი საათით მეტი. რა დროში ჩავიდა ავტობუსი B პუნქტში?

60. მოტორიანი ნავი A პუნქტიდან B-ში მიდის ტბით, ხოლო B პუნქტიდან C-ში მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით, რის შემდეგ ბრუნდება უკან. ნავის სიჩქარე ტბაზე ტოლია 20 კმ/სთ-ის. A პუნქტიდან C-ში ჩასვლას ნავმა მოანდომა 6 საათი, ხოლო უკან დაბრუნებას – 4 საათი, ამასთან C-დან B-ში ჩასასვლელად ნავს სჭირდება სამჯერ უფრო ნაკლები დრო ვიდრე – B-დან A-მდე. იპოვეთ A C მანძილი

61. ჭურჭელში ესხა 10 ლ ხსნარი, რომელიც შეიცავდა 20% სპირტს. ჭურჭლიდან გადაასხეს ხსნარის გარკვეული რაოდენობა და შეავსეს 30%-იანი ხსნარით. ეს პროცედურა გაიმეორეს, რის შემდეგ აღმოჩნდა, რომ ჭურჭელში არსებული ხსნარი შეიცავს 26,6% სპირტს. რამდენი ლიტრი ხსნარი გადაასხეს პირველად?

62. ჭურჭელში ესხა 20 ლ ხსნარი, რომელიც შეიცავდა 20% სპირტს. გადმოასხეს რა 5 ლ ხსნარი, ჭურჭელი შეავსეს ახალი ხსნარით. ეს პროცედურა გაიმეორეს, რის შემდეგ მიიღეს 25%-იანი ხსნარი. რამდენ პროცენტ სპირტს შეიცავდა ახალი ხსნარი?

63. ჭურჭელში ესხა 20 ლ ხსნარი, რომელიც შეიცავდა სპირტს. გადმოასხეს რა 5 ლ ხსნარი, ჭურჭელი შეავსეს 10%-იანი ხსნარით. ეს პროცედურა გაიმეორეს, რის შემდეგაც მიიღეს 20%-იანი ხსნარი. რამდენ პროცენტიანი ხსნარი ესხა ჭურჭელში თავდაპირველად?

64. იპოვეთ რა რიცხვზე უნდა გავყოთ 430 რომ ნაშთში მივიღოთ განაყოფის 20%?

65. მოტორიანმა ნავმა დინების მიმართულებით გაიარა 80 კმ, ხოლო საწინააღმდეგო მიმართულებით 50 კმ. ნავის სიჩქარე მდგარ წყალში შეადგენს 15 კმ/სთ. რა შუალედში უნდა მერყეობდეს საშუალოდ მდინარის დინების სიჩქარე, თუ ნავმა ამ მგზავრობას მოანდომა დრო 9-დან 10 საათამდე.

66. A და B პუნქტებიდან, რომელთა შორის მანძილი 35 კმ-ია ერთი და იგივე მიმართულებით გამოვიდა ორი ველოსიპედისტი. პირველმა ველოსიპედისტმა პირველ

საათში გაიარა 15 კმ, რის შემდეგ ყოველ მომდევნო საათში გადიოდა 1 კმ-ით მეტს. მეორე ველოსიპედისტმა პირველ საათში გაიარა 16 კმ, ხოლო ყოველ მომდევნო საათში გადიოდა 1 კმ-ით ნაკლებ მანძილს. რა დროში დაეწევა პირველი ველოსიპედისტი მეორეს?

67. *A* და *B* პუნქტებიდან, რომელთა შორის მანძილი 95 კმ-ია ერთმანეთის შესახვედრად გამოვიდა ორი ველოსიპედისტი. პირველმა ველოსიპედისტმა პირველ საათში გაიარა 8 კმ, ხოლო ყოველ შემდეგ საათში გადიოდა 2 კმ-ით მეტს. მეორე ველოსიპედისტმა პირველ საათში გაიარა 9 კმ, ხოლო ყოველ მომდევნო საათში გადიოდა 1 კმ-ით ნაკლებ მანძილს. რამდენი კილომეტრი გაიარა პირველმა ველოსიპედისტმა შეხვედრამდე?

68. *A B* მონაკვეთი დაყოფილია სამ ნაწილად. პირველი მონაკვეთის სიგრძე შეადგენს მეორე და მესამე მონაკვეთების სიგრძეების ჯამის $\frac{3}{7}$ ნაწილს. მეორე მონაკვეთის სიგრძე კი – პირველი და მესამე მონაკვეთების სიგრძეების ჯამის $\frac{5}{7}$ ნაწილს. იპოვეთ პირველი და მეორე მონაკვეთების სიგრძეების ჯამის რა ნაწილს შეადგენს მესამე მონაკვეთი?

69. ზოოპარკში ჰყავთ 12 მაიმუნი. ყოველ მათგანს, თუ ისინი არ ავადმყოფობენ ურიგებენ თითო-თითო ბანანს. ცნობილია, რომ ყოველდღე რომელიღაც 2 მათგანი ავადმყოფობს. რამდენ დღეს ურიგებდნენ მაიმუნებს ბანანებს, თუ ცნობილია, რომ ჩიკომ მიიღო ბანანების მაქსიმალური რაოდენობა 16 ცალი, ხოლო ჩაპამ მინიმალური რაოდენობა 13 ცალი.

70. *A* პუნქტიდან *B* პუნქტის მიმართულებით გამოვიდა ველოსიპედისტი. ერთი საათის შემდეგ *A*-დან გამოვიდა მეორე ველოსიპედისტი, რომლის სიჩქარეა 30 კმ/სთ. დაეწია რა იგი პირველ ველოსიპედისტს გადასცა ინფორმაცია და დაბრუნდა უკან. პირველი ველოსიპედისტი *B*-ში ჩასვლას, ხოლო მეორე *A*-ში დაბრუნებას ანდომებს ერთი და იგივე დროს. იპოვეთ პირველი ველოსიპედისტის სიჩქარე, თუ მანძილი პუნქტებს შორის 100 კმ-ია.

71. ორი პუნქტიდან, რომელთა შორის მ ანძილი 100 კმ-ია ერთმანეთის შესახვედრად ერთდროულად გამოვიდა ორი ველოსიპედისტი. ერთი მათგანის სიჩქარეა 15 კმ/სთ, მეორის – 10 კმ/სთ. პირველ ველოსიპედისტთან ერთად მეორისაკენ 20 კმ/სთ სიჩქარით გამოიქცა ძაღლი, რომელიც შეხვდა რა მეორე ველოსიპედისტს, მობრუნდა და გამოიქცა პირველისაკენ. შეხვდა რა პირველ ველოსიპედისტს ის ისევ მობრუნდა და გაიქცა მეორე ველოსიპედისტისაკენ. ძაღლი ველოსიპედისტებს შორის დარბოდა მანამ, სანამ ველოსიპედისტები არ შეხვდნენ ერთმანეთს. რამდენი კილომეტრი გაირბინა ძაღლმა?

72. რიცხვი 45 დაყავით ოთხ ნაწილად ისე, რომ თუ პირველს დაეუმატებთ 2, მეორეს გამოვაკლებთ 2, მესამე გავამრავლებთ 2-ზე, ხოლო მეოთხეს გავყოფთ 2-ზე, ყველა შედეგი ერთმანეთის ტოლი აღმოჩნდება. იპოვეთ ეს ნაწილები.

73. თუ ჩაფიქრებულ სამნიშნა რიცხვს გამოვაკლებთ 7, მიღებული რიცხვი გაიყოფა 7-ზე, თუ ჩაფიქრებულ რიცხვს გამოვაკლებთ 8, მაშინ მიღებული რიცხვი გაიყოფა 8-ზე, ხოლო თუ ჩაფიქრებულ რიცხვს გამოვაკლებთ 9-ს მაშინ შედეგი გაიყოფა 9-ზე. რა რიცხვი ყოფილა ჩაფიქრებული?

74. მრიცხველმა აჩვენა, რომ მანქანამ გაიარა 15 951 კმ, ორი საათის შემდეგ მრიცხველზე დაფიქსირდა რიცხვი, რომელიც ერთნაირად იკითხებოდა ორივე მიმართულებით. რა სიჩქარით მოძრაობდა მანქანა თუ მისი მაქსიმალური სიჩქარეა 150კმ/სთ.

§14. რაციონალური და ირაციონალური უტოლობები

ა - ჯგუფი

ამოხსენით უტოლობები (№№ 1 – 9):

1. $-x > -1$

ა) $(1; +\infty)$ ბ) $(-\infty; 1)$ გ) $(0; +\infty)$ დ) $(-\infty; 0)$

2. $-2x < 1$

ა) $(2; +\infty)$ ბ) $(1; +\infty)$ გ) $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ დ) $(-1; +\infty)$

3. $-2x + 4 > 0$

ა) $(-\infty; 2)$ ბ) $(-\infty; -2)$ გ) $(2; +\infty)$ დ) $(-2; +\infty)$

4. $-3x - 1 < 0$

ა) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ ბ) $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ გ) $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ დ) $(1; +\infty)$

5. $3x - 5 < 7$

ა) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ ბ) $(-\infty; 4)$ გ) $(4; +\infty)$ დ) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

6. $4x + 7 > 19$

ა) $(3; +\infty)$ ბ) $(-\infty; 3)$ გ) $\left(\frac{13}{2}; +\infty\right)$ დ) $\left(-\infty; \frac{13}{2}\right)$

7. $5x - 3 < 12x + 4$

ა) $(-\infty; -1)$ ბ) $(-\infty; 1)$ გ) $(-1; +\infty)$ დ) $(1; +\infty)$

8. $3x - 2 > 4x + 3$

ა) $(-\infty; -5)$ ბ) $(-5; +\infty)$ გ) $\left(\frac{5}{7}; +\infty\right)$ დ) $\left(-\infty; \frac{5}{7}\right)$

9. $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4} > \frac{1}{3}x + \frac{5}{2}$

ა) $\left(-\frac{39}{4}; +\infty\right)$ ბ) $\left(-\infty; \frac{39}{4}\right)$ გ) $\left(-\infty; -\frac{39}{4}\right)$ დ) $\left(\frac{39}{4}; +\infty\right)$

10. $\frac{5}{3}x + \frac{2}{3} < 2x - \frac{2}{3}$

ა) $(-\infty; 4)$ ბ) $(-\infty; -4)$ გ) $(4; +\infty)$ დ) $(-4; +\infty)$

11. $\frac{3}{4}x - \frac{3}{2} > \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}$

ა) $(-\infty; -16)$ ბ) $(-16; +\infty)$ გ) $(16; +\infty)$ დ) $(-\infty; 16)$

12. $\frac{13}{2}x+\frac{3}{4}<5x-4$

ა) $\left(-\infty;\ \frac{19}{6}\right)$ ბ) $\left(-\infty;\ -\frac{19}{6}\right)$ გ) $\left(\frac{19}{6};\ +\infty\right)$ დ) $\left(-\frac{19}{6};\ +\infty\right)$

13. $\frac{5}{7}x+\frac{3}{5}<\frac{2}{5}x+\frac{1}{2}$

ა) $\left(-\infty;\ \frac{-7}{22}\right)$ ბ) $\left(-\infty;\ \frac{7}{22}\right)$ გ) $\left(-\frac{7}{22};\ +\infty\right)$ დ) $\left(\frac{7}{22};\ +\infty\right)$

14. $2{,}3x+1{,}5<1{,}2x-3{,}2$

ა) $\left(-\frac{47}{11};\ +\infty\right)$ ბ) $\left(-\infty;\ \frac{-47}{11}\right)$ გ) $\left(\frac{47}{11};\ +\infty\right)$ დ) $\left(-\infty;\ \frac{47}{11}\right)$

15. $2{,}1(x-3)+1{,}1(x+2)>3{,}1(x-4)+2{,}5$

ა) $(-\infty;\ -5{,}8)$ ბ) $(-58;\ +\infty)$ გ) $(-5{,}8;\ +\infty)$ დ) $(-\infty;\ -58)$

16. $x^2+7x+1>x(x-1)+17$

ა) $(-\infty;\ 2)$ ბ) $\left(\frac{8}{3};\ +\infty\right)$ გ) $\left(-\infty;\ \frac{8}{3}\right)$ დ) $(2;\ +\infty)$

17. $x^2-1>2x(x+1)-(x+1)(x-2)$

ა) $(-\infty;\ -1)$ ბ) $(-1;\ +\infty)$ გ) $(-\infty;\ 1)$ დ) $(1;\ +\infty)$

18. $(x-1)^2+2(x+2)^2>3(x-2)(x+2)+2x-1$

ა) $\left(-\frac{11}{2};\ +\infty\right)$ ბ) $\left(-\infty;\ -\frac{11}{2}\right)$ გ) $\left(-\infty;\ \frac{11}{2}\right)$ დ) $\left(\frac{11}{2};\ +\infty\right)$

19. $(2x-1)^2+(3x+1)^2<5x^2+8x\left(x+\frac{1}{3}\right)$

ა) $(-\infty;\ 3)$ ბ) $(-\infty;\ -3)$ გ) $(3;\ +\infty)$ დ) $(-3;\ +\infty)$

20. $\frac{2}{3}(6x-1)(x+3)>(2x-0{,}2)^2+0{,}8x+12$

ა) $\left(\frac{2107}{1700};\ +\infty\right)$ ბ) $\left(\frac{1053}{850};\ +\infty\right)$ გ) $\left(-\infty;\ \frac{1053}{850}\right)$ დ) $\left(-\infty;\ \frac{2107}{1700}\right)$

21. $(0{,}6x-1)(2x+1)+2x-3<1{,}2x(x-2)+10$

ა) $\left(\frac{14}{3};\ +\infty\right)$ ბ) $\left(-\infty;\ \frac{14}{3}\right)$ გ) $\left(-\infty;\ \frac{-14}{3}\right)$ დ) $\left(-\frac{14}{3};\ +\infty\right)$

22. $(0{,}1x+1)(0{,}2x-3)+1{,}5x+0{,}2<2(0{,}1x+0{,}2)^2+9{,}2$

ა) $\left(-\infty;\ \frac{302}{33}\right)$ ბ) $\left(\frac{302}{33};\ +\infty\right)$ გ) $\left(-\frac{302}{33};\ +\infty\right)$ დ) $\left(-\infty;\ -\frac{302}{33}\right)$

23. $(0{,}2x-1)(0{,}4x-3)+2{,}1x-3{,}3>2(0{,}2x-0{,}5)^2+3{,}8$

ა) $\left(-\infty; \frac{37}{15}\right)$ ბ) $\left(-\infty; -\frac{72}{15}\right)$ გ) $\left(\frac{37}{15}; +\infty\right)$ დ) $\left(-\frac{37}{15}; +\infty\right)$

24. $\frac{5x-1}{8} < \frac{2x+1}{3} + 1$

ა) $(-35; +\infty)$ ბ) $(-\infty; -35)$ გ) $(-\infty; 35)$ დ) $(35; +\infty)$

25. $\frac{2x+4}{5} - 3 > \frac{x+1}{3}$

ა) $(-\infty; 38)$ ბ) $(-\infty; -38)$ გ) $(38; +\infty)$ დ) $(-38; +\infty)$

26. $\frac{2x}{7} - \frac{3}{5} > \frac{2x+1}{10}$

ა) $\left(-\frac{49}{6}; +\infty\right)$ ბ) $\left(\frac{49}{6}; +\infty\right)$ გ) $\left(-\infty; \frac{49}{6}\right)$ დ) $(-9{,}8; +\infty)$

27. $\frac{2x+1}{3} + \frac{x-1}{2} < 1 - \frac{x+1}{5}$

ა) $\left(-\infty; \frac{29}{41}\right)$ ბ) $\left(-\infty; -\frac{29}{41}\right)$ გ) $\left(-\frac{29}{41}; +\infty\right)$ დ) $\left(\frac{29}{41}; +\infty\right)$

28. $\frac{2x+5}{0{,}2} + \frac{0{,}3x-1}{0{,}3} > \frac{1}{0{,}4}$

ა) $\left(-\infty; -\frac{115}{66}\right)$ ბ) $\left(-\frac{115}{66}; +\infty\right)$ გ) $\left(\frac{115}{66}; +\infty\right)$ დ) $\left(-\infty; \frac{115}{66}\right)$

29. $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{5} > 1$

ა) $\left(-\infty; -\frac{23}{31}\right)$ ბ) $\left(-\infty; \frac{23}{31}\right)$ გ) $\left(\frac{23}{31}; +\infty\right)$ დ) $\left(-\frac{23}{31}; +\infty\right)$

30. $\frac{x-1}{2} + \frac{0{,}2x-3}{0{,}4} > \frac{2x+1}{3} - \frac{x+1}{4}$

ა) $\left(-\infty; \frac{97}{7}\right)$ ბ) $\left(-\infty; -\frac{97}{7}\right)$ გ) $\left(\frac{97}{7}; +\infty\right)$ დ) $\left(-\frac{97}{7}; +\infty\right)$

31. $\frac{0{,}2x-1}{3} + \frac{0{,}3x+0{,}1}{0{,}3} < \frac{x-0{,}5}{6} + \frac{2x-0{,}2}{0{,}8}$

ა) $\left(-\infty; \frac{5}{24}\right)$ ბ) $\left(\frac{5}{24}; +\infty\right)$ გ) $\left(-\infty; -\frac{5}{24}\right)$ დ) $\left(-\frac{5}{24}; +\infty\right)$

32. $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(x+2)^2}{4} > \frac{7}{12}x(x+3)$

ა) $\left(-\infty; \frac{16}{17}\right)$ ბ) $\left(-\infty; -\frac{16}{17}\right)$ გ) $\left(\frac{16}{17}; +\infty\right)$ დ) $\left(-\frac{16}{17}; +\infty\right)$

33. $\frac{(x+2)^2}{2} + \frac{(x-3)^2}{3} < \frac{5}{6}(x-1)(x+5)$

ა) $\left(-\infty; \frac{11}{4}\right)$; ბ) $\left(-\infty; -\frac{11}{4}\right)$; გ) $\left(\frac{11}{4}; +\infty\right)$; დ) $\left(-\frac{11}{4}; +\infty\right)$

34. $\frac{(2x-1)^2}{3}+\frac{(3x-1)^2}{2}>\frac{35}{6}(x+2)(x-1)+\frac{1}{3}x-1$

ა) $\left(-\infty; \frac{9}{7}\right)$; ბ) $\left(-\infty; -\frac{9}{7}\right)$; გ) $\left(\frac{9}{7}; +\infty\right)$; დ) $\left(-\frac{9}{7}; +\infty\right)$

35. $\frac{(3x+2)^2}{3}+\frac{(2x-1)^2}{2}<5(x+2)(x+3)-7x+3$

ა) $\left(-\infty; -\frac{187}{96}\right)$ ბ) $\left(-\infty; \frac{187}{96}\right)$ გ) $\left(-\frac{187}{96}; +\infty\right)$ დ) $\left(\frac{187}{96}; +\infty\right)$

36. $(x-1)^3+3(x+1)^2 \geq x(x+2)(x+3)-5(x+4)^2+25$

ა) $\left(-\infty; -\frac{57}{43}\right)$ ბ) $\left(\frac{-57}{43}; +\infty\right)$ გ) $\left[-\frac{57}{43};+\infty\right)$ დ) $\left(\frac{57}{43}; +\infty\right)$

37. $(x+1)^3-3(x-2)^2<x(x-1)(x-3)+(2x+1)^2+12$

ა) $(-\infty; 3)$ ბ) $(3; +\infty)$; გ) $(-\infty; -3)$; დ) $(-3; +\infty)$

38. $(0{,}1x-0{,}3)^3+0{,}009(x+0{,}2)^2 \geq x(0{,}01x+0{,}3)(0{,}1x+0{,}5)-0{,}035(x^2-100)-0{,}1194x$

ა) $(-\infty; +\infty)$; ბ) ამონახსნი არა აქვს გ) $(0; +\infty)$ დ) $(-\infty; 0)$

39. $(2x-0{,}3)^3+10(0{,}6x-0{,}1)^2 \leq x(2x+0{,}1)(4x-0{,}1)-0{,}2(x^2-0{,}3)+6{,}5$

ა) $\left(-\frac{6487}{65}; +\infty\right)$ ბ) $(-\infty; 0)$ გ) $(0; +\infty)$ დ) ამონახსნი არა აქვს

40. ამოხსენით წრფივ უტოლობათა სისტემები

1) $\begin{cases} x>3 \\ x>5 \end{cases}$

ა) $(3; +\infty)$ ბ) $(5; +\infty)$ გ) $(-\infty; 3)$ დ) $(-\infty; 5)$

2) $\begin{cases} x<5 \\ x>2 \end{cases}$

ა) $(2; 5)$ ბ) $(2; +\infty)$ გ) $(-\infty; 5)$ დ) $(5; +\infty)$

3) $\begin{cases} x<3 \\ x<-1 \end{cases}$

ა) $(-\infty; 3)$ ბ) $(-1; 3)$ გ) $(-\infty; -1)$ დ) $(3; +\infty)$

4) $\begin{cases} x<3 \\ x>5 \end{cases}$

ა) $(-\infty; 3)$ ბ) $(5; +\infty)$ გ) $(3; 5)$ დ) ამონახსნი არა აქვს

5) $\begin{cases} 2x+1>5 \\ 3x-1<13 \end{cases}$

ა) $\left(2;\frac{14}{3}\right)$ ბ) $(2;+\infty)$ გ) $\left(-\infty;\frac{14}{3}\right)$ დ) $\left(\frac{14}{3};+\infty\right)$

6) $\begin{cases}3x-1>x+9\\2x+1<x+10\end{cases}$

ა) $(5;+\infty)$ ბ) $(5;9)$ გ) $(9;+\infty)$ დ) $(-\infty;-9)$

7) $\begin{cases}2x-0,1<3x-5,1\\2x+3<x-2\end{cases}$

ა) $(-5;5)$ ბ) $(-\infty;-5)$ გ)ამონახსნი არა აქვს დ) $(5;+\infty)$

8) $\begin{cases}x>3\\x>7\\x<4\end{cases}$

ა) $(3;4)$ ბ) ამონახსნი არა აქვს გ) $(7;+\infty)$ დ) $(-\infty;4)$

9) $\begin{cases}x-1<0\\x+2>0\\2x-1<5\end{cases}$

ა) $(-2;1)$ ბ) $(-\infty;1)$ გ) $(-2;+\infty)$ დ) $(1;+\infty)$

10) $\begin{cases}2x+1>3x-7\\5x+2>3x+10\\5x+4<4x+10\end{cases}$

ა) $(-\infty;6)$ ბ) $(4;+\infty)$ გ) $(6;+\infty)$ დ) $(4;6)$

ბ - ჯგუფი

ამოხსენით წრფივ უტოლობათა სისტემები (№№4 1 –4 2):

41. 1) $\begin{cases}\frac{8-x}{2}+4<\frac{4x-1}{5}+3\\\frac{5(x-1)}{3}-2(5-x)<-5(5-x)\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{2x+1}{4}-\frac{3x+2}{4}<\frac{x-2}{3}-1\\\frac{5x+11}{4}-2x<\frac{3x-4}{5}+6\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x+9-\frac{2x+7}{2}>5+\frac{x+1}{3}-x-3\\\frac{5x+14}{3}-(x+2)>3x+9\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{10-3x}{5}-4>\frac{10-7x}{10}-\frac{x}{2}-3\\7(3x-9)+5(x-4)>11-4(18-x)\end{cases}$

42. 1) $\begin{cases} \dfrac{2x+0,1}{2,3}-2,1x<\dfrac{3x+0,2}{4,6}+3,2x \\ 2(x+0,3)-5(x-1,5)>0,2(x-5)+4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{0,3x-0,5}{1,2}-2,5x>\dfrac{0,1x+0,4}{0,6}-2,5x \\ 5(x+0,1)-2,3x<0,1(x-2,2)+3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{0,2x-1,2}{2,5}+\dfrac{0,3x+1,2}{10}<\dfrac{0,1x+3}{3}+\dfrac{x+1}{2} \\ 3(0,2x-2,5)+5>4(0,1x+3)-5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{0,2x+2,4}{2,5}-\dfrac{0,2x+1,1}{15}>\dfrac{0,5x-1}{3}+2,3x \\ 4(0,1x-2,2)+5>2(0,5x-1)-4 \end{cases}$

ამოხსენით რაციონალური უტოლობები (№№ 43 – 49):

43. 1) $(2x-1)(x+1)>0$
2) $(2x+1)(x-1)>0$
3) $(x-3)^2\le 0$
4) $(3x+1)(3x-4)>0$
5) $(x+3)(x-4)\le 0$
6) $(x-2)(x-7)\le 0$
7) $(2x-1)(5x+1)\ge 0$
8) $(x+1)(3x-1)<0$

44. 1) $x(x-1)(2x+1)\le 0$
2) $x(x+1)(3x-1)>0$
3) $x^2(x+1)(x-7)<0$
4) $(x+1)^2(x-1)(x+3)\ge 0$
5) $(x+1)(x-1)(x+3)<0$
6) $(2x-1)(x+3)(x-2)^2\le 0$
7) $(3-x)(2+x)x^2\le 0$
8) $(3-2x)(5-3x)(x-1)>0$

45. 1) $2x^2-7x+5\ge 0$
2) $3x^2-8x+5<0$
3) $2x^2+3x-14\ge 0$
4) $3x^2-x-24<0$
5) $3x^3-5x^2+3x-1\le 0$
6) $x^3+2x^2-4x-8\ge 0$
7) $x^3+x^2-5x-21<0$
8) $x^3-x^2+2x-24\ge 0$

46. 1) $\frac{x^2-5x+6}{2x^2+x-3}<0$

2) $\frac{2x^2+5x-18}{x^2+x-2}\geq 0$

3) $\frac{3x^2-5x-12}{2x^2+3x-2}<0$

4) $\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-7x+12}>0$

5) $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-9}<0$

6) $\frac{2x^3+x^2-7x-6}{x^3-27}\geq 0$

7) $\frac{x^3+2x^2+x-48}{x^3-64}\leq 0$

8) $\frac{x^3+1}{3x^3-2x^2-7x-2}>0$

47. 1) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}\geq\frac{x+1}{x+2}$

2) $\frac{x^2+3}{x^2-7x+10}<\frac{x+1}{x-2}$

3) $\frac{x+4}{x^2-5x+4}-\frac{2x-1}{x^2-4x+3}\geq\frac{x+1}{x^2-7x+12}$

4) $\frac{2x+1}{x^2-5x+6}+\frac{x+1}{x^2+x-12}<\frac{2x-1}{x^2+2x-8}$

48. 1) $\frac{x^4+x^2+3}{x^4-13x^2+36}<1$

2) $\frac{2x^4+2x-1}{x^4-3x^2+2}>2$

3) $\frac{3x^4+5x^2+x+15}{x^4-8x^2+15}\geq 3$

4) $\frac{x^4+5x^3+5x^2-4x-7}{x^3+2x^2-x-2}>x+3$

5) $\frac{2x^4+5x^3-7x^2-8x+17}{x^3+3x^2-4x-12}<2x-1$

6) $\frac{x^4-5x^3+3x^2-6x-1}{x^4-5x^3+2x^2-5x+1}<1$

49. 1) $3x+5a<ax+3$

2) $2{,}1x+5ax<1{,}9x-3a+2$

3) $\left(x^2+4x-2\right)\cdot\frac{a-2}{a^2-1}\geq 0$

4) $\left(x^2+13x-14\right)\cdot\frac{a+2}{a+1}\leq 0$

5) $(x+1)\cdot\frac{a^2+a-1}{a+3}\geq 0$

6) $(2x-1)\cdot\frac{a^2+3a-4}{a^2+a-2}\geq 0$

ამოხსენით მოდულის შემცველი უტოლობები (№№ 50 – 56):

50. 1) $|2x-1|\leq 5$

2) $|0{,}2x-3{,}5|\leq 1{,}5$

3) $|2{,}5x-3|<5{,}5$

4) $|2{,}2x-3{,}2|\geq 2$

5) $|2{,}1x+3{,}1|\geq 4{,}2$

6) $|3-2{,}5x|\geq 3{,}2$

51. 1) $|x^2-5x+4|\leq 10$

2) $|3x^2+5x-2|\leq 6$

3) $|5x^2-7x+2|\leq 0$

4) $|2x^2+3x+3|\geq 9$

5) $|3x^2+5x-12|\geq 10$

6) $|x^2-x-5|\geq 7$

52. 1) $|x-3|+2|x+1|\leq 5$

2) $|2x-1|-3|x-2|\leq 4$

3) $|2x+3|+3|x-1|\leq 2$

4) $|2x-3|+2|x+1|\leq 0$

5) $|x-0{,}5|+3{,}2|2{,}5x-1|\geq 1$

6) $|2{,}5x-3|-3|2x+1|\geq x-1$

53. 1) $|x^3-3x^2+2x|\leq x^3-3x^2+2x$

2) $|2x+1|+|x^2+3x+2|\leq 2$

3) $|x^2+2x+1|\geq|2x^2-5x+3|$

4) $|x^2-6x+5|\geq|x^2+x|$

54. 1) $\left|\frac{2x-1}{3x+1}\right|\leq 1$

2) $\left|\frac{x+2}{3x-1}\right|\leq 2$

3) $\left|\frac{2x+5}{x-3}\right|\leq 3$

4) $\left|\dfrac{x^2-2x}{3x+1}\right| \geq 2$

5) $\left|\dfrac{x^2-5x+1}{x^2+3}\right| \geq 1$

6) $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x}\right| \geq 1$

55. 1) $\left||x-2|-3\right| \leq 1$

2) $\left||2x-1|+2\right| \leq 3$

3) $\left||2x+3|-4\right| \geq 2$

4) $\left||x-2|-|2x-5|\right| \leq 2$

5) $\left||2x+1|+|2x-4|\right| \geq 5$

6) $\left||2x-3|+2|x+1|\right| \geq 2$

56. 1) $\left|3-|3x^2-x-2|\right| \leq 1$

2) $\left||x+1|-|2x+1|\right| \geq 2$

3) $\left||x^2-3x-4|-|x^2-2x|\right| \geq 3$

ამოხსენით ირაციონალური უტოლობები (№№ 57 – 60):

57. 1) $\sqrt[3]{x^2-5x+7} > 1$

2) $\sqrt[3]{x^3+x^2-3x+2} > x$

3) $\sqrt{2x+1} \geq x+1$

4) $\sqrt{x^2+5x-3} \leq x+3$

5) $\sqrt{3x^2+2x+7} \geq x-1$

6) $\sqrt{x^3-2x^2+1} \geq x+1$

58. 1) $\sqrt{2x+1} \geq \sqrt{3x-1}$

2) $\sqrt{5x+3} \leq \sqrt{2x+15}$

3) $(x+1)\sqrt{x^2-2x+1} > 0$

4) $\sqrt{3x^2-7x+4} \geq \sqrt{x^2-x-6}$

5) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3} < \sqrt{2x+5}$

6) $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+3} > \sqrt{x-10}$

59. 1) $\dfrac{5}{\sqrt{2x+1}}-\sqrt{2x+1} < 1$

2) $\dfrac{3}{\sqrt{x^2+x-2}}+\sqrt{x^2+x-2} \geq 1$

3) $(x+3)\sqrt{x^2+4x+5} > x^2+4x+3$

4) $\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{12-x^2+2x}} > x-2$

5) $\sqrt{5x^2+20x+16} \geq -4-x^2+4x$

6) $\dfrac{9x^2-18x+5}{\sqrt{5x^2-10x+4}} < 3x-5$

60. 1) $\sqrt{\dfrac{6z+6}{3z-8}} < \dfrac{8}{3}+\sqrt{\dfrac{3z-8}{6z+6}}$

2) $\sqrt{\dfrac{3x+3}{2x-24}}+6\sqrt{\dfrac{2x-24}{3x+3}}-5>0$

3) $\sqrt{1+\sqrt{x+1}}+\sqrt{1-\sqrt{x+1}} \leq 2$

4) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}+12\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}} \geq 4$

61. მოიყვანეთ წრფიეი უტოლობის მაგალითები, რომელთა ამონახსნია შუალედები:

ა) $[3; +\infty)$

ბ) $(-\infty; -2)$

62. მოიყვანეთ წრფივ უტოლობათა სისტემის მაგალითები, რომელთა ამონახსნია შუალედები:

ა) $[3; 5)$

ბ) $\{2\}$

63. მოიყვანეთ კვადრატული უტოლობის მაგალითები, რომელთა ამონახსნია შუალედები:

ა) $[-3; 2]$

ბ) $[2; 5]$

გ) $(-\infty; 1]\cup[3; +\infty)$

64. მოიყვანეთ კვადრატულ უტოლობათა სისტემის მაგალითები, რომელთა ამონახსნია შუალედები:

ა) $[10; 12]$

ბ) $(1; 2)\cup(3; 4)$

გ) $\{3\}$

დ) $\{3; 5\}$

65. მოიყვანეთ მოდულის შემცველი უტოლობის მაგალითები, რომელთა ამონახსნია შუალედები:

ა) $(-\infty; 3)\cup(7; +\infty)$

ბ) $(5; 8)$

66. მოიყვანეთ მოდულის შემცველი უტოლობის მაგალითები, რომელთა ამონახსნია შუალედები:

ა) $[1; 3]\cup[5; 9]$

ბ) $(-\infty; 3)\cup(5; 12)\cup(18; +\infty)$

67. მოიყვანეთ ირაციონალური უტოლობის მაგალითები, რომელთა ამონახსნია შუალედები:

ა) $(-\infty; 2]\cup[3; +\infty)$

ბ) $[0; 1)\cup(1; 3]$
გ) $[2; 3]\cup[4; 8]$

68. მოიყვანეთ კუბური უტოლობის მაგალითები, რომელთა ამონახსნია შუალედები:
ა) $[2; +\infty)$
ბ) $(-1; 0)\cup(3; +\infty)$

გ) $[1; 4)$

69. მოიყვანეთ ბიკვადრატული უტოლობის მაგალითები, რომელთა ამონახსნია შუალედები:
ა) $(-1; 0)\cup(0; 1)$
ბ) $[-4; -2]\cup[2; 4]$

70. მოიყვანეთ მეოთხე ხარისხის უტოლობის მაგალითები რომელთა ამონახსნია შუალედები:
ა) $(-\infty; -1]\cup[2; 3]\cup[4; +\infty)$
ბ) $(0; 3)\cup(5; 7)$

71. მოიყვანეთ რაციონალური უტოლობის მაგალითები, რომელთა ამონახსნია შუალედები:
ა) $(-\infty; -5)\cup[-2; 1]\cup[3; 4)$
ბ) $(-\infty; -2]\cup\{0\}\cup[1; 3)\cup(4; +\infty)$
გ) $[-3; -2]\cup\left[\frac{6}{5}; \frac{7}{5}\right]\cup\left(\frac{12}{5}; \frac{13}{5}\right)\cup(4; +\infty)\cup\{1; 2; 3\}$

72. მოიყვანეთ მოდულის შემცველი უტოლობის მაგალითები, რომელთა ამონახსნია შუალედები:
ა) $[-5; 0]\cup[5; 10]$
ბ) $(-\infty; -3)\cup(0; 3)\cup(6; +\infty)$

73. მოიყვანეთ ისეთი უტოლობის მაგალითი, რომლის ამონახსნია უსასრულო რაოდენობის შუალედების გაერთიანება, რომელთა სიგრძეები წარმოადგენენ მკაცრად ზრდადი გეომეტრიული პროგრესიის წევრებს.

74. მოიყვანეთ ისეთი უტოლობის მაგალითი, რომლის ამონახსნია უსასრულო რაოდენობის შუალედების გაერთიანება, რომელთა სიგრძეები მცირდება.

75. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებენ $(1+x_1)(1+x_2)<0$ პირობას $ax^2-(a+2)x+2a-1=0$ კვადრატული განტოლების ფესვები?

76. a პარამეტრის რა მნიშვნელობებისთვისაა $(a+1)x^2-ax+2a+3=0$ კვადრატული განტოლების ორივე ფესვი დადებითი ?

77. a პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვისაა $(a+1)x^2-ax-2=0$ კვადრატული განტოლების ორივე ფესვი უარყოფითი?

78. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებენ უტოლობას $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}<-2$ $(a+2)x^2+(5a-1)x+3a^2-4a+1=0$ კვადრატული განტოლების ფესვები ?

79. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის გააჩნია $ax^2-5ax+a+5=0$ კვადრატულ განტოლებას ნამდვილი ფესვები?

80. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის არ გააჩნია $(a+1)x^2-2ax+2a-3=0$ კვადრატულ განტოლებას ნამდვილი ფესვები?

81. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის გააჩნია $(a+2)x^2-3ax+5a+7=0$ კვადრატულ განტოლებას სხვადასხვა ნიშნის ფესვები?

82. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის გააჩნია $ax^2-(2a+1)x+a-3=0$ კვადრატულ განტოლებას დადებითი ფესვები?

83. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის გააჩნია $(a+1)x^2-(2a-1)x+a+3=0$ კვადრატულ განტოლებას უარყოფითი ფესვები?

84. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებენ პირობას $x_1^2+x_2^2\geq 13$ $x^2-(2a+1)x+a^2-3=0$ კვადრატული განტოლების ფესვები?

85. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებენ პირობას $x_1^3+x_2^3\leq 0$ $ax^2+(a-2)x+2a+1=0$ განტოლების ფესვები?

86. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებენ პირობას $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\geq 1$

$(a+1)x^2+(3a-1)x+a+2=0$ განტოლების ფესვები?

87. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის იქნება $x^2+(2a+1)x-a^2+a+1=0$ კვადრატული განტოლების ფესვები ერთზე მეტი?

88. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის იქნება $ax^2-(a-1)x+2a+3=0$ კვადრატული განტოლების ორივე ფესვი -2-ზე ნაკლები?

89. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის იქნება $x^2+(3a-1)x+2a-5=0$ კვადრატული განტოლების ერთი ფესვი -1-ზე მეტი, ხოლო მეორე -1-ზე ნაკლები?

90. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის იქნება $ax^2+(2a+1)x+a+3=0$ კვადრატული განტოლების ფესვები მოთავსებული -1 და 2 შორის ?

91. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის იქნება $(a-2)x^2-(2a+1)x+3a-3=0$ კვადრატული განტოლების ერთი ფესვი მოთავსებული 1 და 2-ს შორის, ხოლო მეორე ფესვი 2-ზე მეტი?

92. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვისაა მოთავსებული რიცხვები 1 და 2 $(a-2)x^2+(3a-11)x-a=0$ კვადრატული განტოლების ფესვებს შორის ?

93. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის ღებულობს კვადრატული სამწევრი $y=(a+2)x^2+(a-1)x+a$ უარყოფით მნიშვნელობებს თუ x ნებისმიერი დადებითი რიცხვია?

94. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის ღებულობს კვადრატული სამწევრი

$y=(a+3)x^2+(4a+1)x-3a$ დადებით მნიშვნელობებს, თუ x ნებისმიერი უარყოფითი რიცხვია.

95. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვისაა $\dfrac{(a+3)x^2+(a+6)x+a-8}{ax^2+(4a+7)x-2a-5}<0$ უტოლობის ამონახსნი ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი ?

96. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის დააკმაყოფილებს $ax+5>2x+9$ უტოლობას, $2x+3>0$ უტოლობის ამონახსნი.

97. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის დააკმაყოფილებს $2ax+3a>x+8$, უტოლობას, $3x+5<0$ უტოლობის ამონახსნი.

98. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის დააკმაყოფილებს $x^2+(a+1)x-a-3\ge 0$ უტოლობას, $2x-5\le 0$ უტოლობის ამონახსნი.

99. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის დააკმაყოფილებს $x^2+(2a+1)x+a-5<0$ უტოლობას $x^2-5x+4<0$ უტოლობის ამონახსნი.

100. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის დააკმაყოფილებს $x\ge 0$ პირობას $ax^2-(a+1)x+2a-3>0$ უტოლობის ამონახსნი.

101. ვიპოვოთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც განტოლებას $a\cdot 4^x+(a-1)2^x+a-8=0$ არ გააჩნია ამონახსნი.

102. ვიპოვოთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც განტოლებას $a\cdot 4^x+(2a-1)2^x+a+2=0$ გააჩნია ერთი ამონახსნი.

103. ვიპოვოთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც განტოლებას $a\sin^2 x+(a-1)\sin x+a+1=0$ არ გააჩნია ამონახსნი.

104. ვიპოვოთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც განტოლებას $(a+1)x-(2a-1)\sqrt{x}-a+3=0$ გააჩნია ერთი ამონახსნი.

105. ამოხსენით უტოლობა $ax+bc>3c$, თუ ცნობილია, რომ $ab>ac$ უტოლობიდან გამომდინარეობს $b<c$ უტოლობა.

106. ამოხსენით უტოლობა $a^2(x+1)>ax+3ab$, თუ ცნობილია, რომ $a^2<a$.

107. ამოხსენით უტოლობა $ax+3b>2a-x$, თუ ცნობილია, რომ $\sqrt{a^2+2a+1}=-a-1$.

108. ამოხსენით უტოლობა $2x+b>3c-ax$, თუ ცნობილია, რომ $(a+3)^{b-1}>(a+3)^2$, უტოლობიდან გამომდინარეობს, $b>3$ უტოლობა.

109. ამოხსენით უტოლობა $ax^2-7x+3<2a+1$, თუ ცნობილია, რომ $\sqrt{a^2}=-a$.

110. ამოხსენით უტოლობა $ax^2+3x+a>5$, თუ ცნობილია, რომ $a+\frac{1}{a}<-3$.

111. ამოხსენით უტოლობა $2x+a<3ax^2-4$, თუ ცნობილია, რომ $a+\frac{1}{a}>3$.

112. ამოხსენით უტოლობა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში
$[\sqrt[4]{1}]+[\sqrt[4]{2}]+[\sqrt[4]{3}]+\ldots+[\sqrt[4]{x+1}]<2000$ ($[x]$ ნიშნავს x -ის მთელ ნაწილს).

113. დაამტკიცეთ უტოლობა $\sqrt{30x+9}+\sqrt{30y+9}+\sqrt{30z+9}\le 14$ თუ ცნობილია, რომ $x\ge -0,3$; $y\ge -0,3$; $z\ge -0,3$ და $x+y+z=1$.

114. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას $n!\le\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

115. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას $\log_2 3+\log_2\frac{4}{3}+\ldots+\log_n\frac{n+2}{n+1}>\log_{n+1}(n+2)$

116. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნამდვილი $a_1, a_2, \ldots, a_n$ რიცხვებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას $|a_1a_n+a_2a_{n-1}+\ldots+a_na_1|\le a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$

117. დაამტკიცეთ უტოლობა $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+d}+\frac{d}{a+b}>1$ თუ $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$.

118. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი x და y ნამდვილი რიცხვებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას $ax^2+by^2\ge(ax+by)^2$ თუ $a\ge 0,\ b\ge 0,\ a+b=1$.

119. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი a, b, c რიცხვებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას
$a^3-c^3\ge 3ab(a-b)+3bc(b-c)$ თუ $a>b>c$.

120. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი დადებითი x, y, z რიცხვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\ge\frac{1}{ax+by+cz}$, თუ $a>0, b>0, c>0, a+b+c=1$.

121. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი დადებითი x, y, z რიცხვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას $ax^2+by^2+cz^2\ge(ax+by+cz)^2$, თუ $a>0,\ b>0,\ c>0,\ a+b+c=1$.

122. დაამტკიცეთ, რომ პირობიდან $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}>0$, $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}>0$ გამომდინარეობს, რომ რიცხვები a, b, c ერთი და იგივე ნიშნისაა.

123. დაამტკიცეთ უტოლობა $(1+a)^{100}\cdot(1+a^{100})\ge 2\cdot(2a)^{100}$ თუ $a>0$.

124. დაამტკიცეთ უტოლობა $[a]+[b]+[a+b]+[2a+2b]+\ldots+[2^{n-1}a+2^{n-1}b]\le[2^na]+[2^nb]$.

125. დაამტკიცეთ უტოლობა $a_1+a_2+\ldots+a_n\le a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n+n-1$, თუ $a_1\ge 1,\ a_2\ge 1, \ldots,\ a_n\ge 1$.

126. ასი რიცხვის ნამრავლი 200-ის ტოლია. ცნობილია, რომ ეს რიცხვები არაა ერთზე ნაკლები. რა მაქსიმალური მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს ამ რიცხვების ჯამმა?

127. დაამტკიცეთ უტოლობა $\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}} < \frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$

128. რომელია მეტი $a = \log_4 3$ თუ $b = \cos^2\frac{5\pi}{28}$

129. რომელია მეტი $a = \arcsin\frac{2}{5}$, თუ $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

130. რომელია მეტი $a = \log_2 5$, თუ $b = 1+\frac{1}{\cos^2 32^\circ}$

131. რომელია მეტი $a = \arcsin\frac{3}{4}\cdot\arccos\frac{4}{5}$, თუ $b = \left(arctg\frac{5}{4}\right)^2$

132. რომელია მეტი $a = \left(\arcsin\frac{3}{7}\right)^4 + \left(\arccos\frac{4}{7}\right)^4$, თუ $b = \frac{\pi^4}{34}$

133. რომელია მეტი $a = \arcsin\left(\sin\frac{4}{5}\pi\right) + \arccos\left(\cos\frac{17}{10}\pi\right)$, თუ $b = \log_5 11$

134. რომელია მეტი $a = 24^{\frac{\sqrt[3]{4}}{6\lg 2}}$, თუ $b = 10^{\sqrt[3]{\frac{\lg 3}{\lg 2}}}$

135. რომელია მეტი $a = sin\frac{\pi}{5} + sin\frac{4\pi}{7}$,თუ $b = \sin\frac{27\pi}{35}$

136. დაადგინეთ ქვემოთ მოყვანილი გამოსახულების ნიშანი

$$a = \left(\log_7^2 5 - \log_5^2 7\right)\cdot\sin^2\frac{\pi}{5} + \log_5^2 7 + \sin\frac{2\pi}{5}$$

137. დაამტკიცეთ, რომ შემდეგი რიცხვებიდან

$\arcsin\frac{2}{5}$, $arctg\frac{2}{5}$, $arcctg\frac{1}{3}$, $\arccos\frac{1}{5}$ ერთი მაინც მეტია $\frac{3}{4}$-ზე.

§15. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული უტოლობები

ა - ჯგუფი

ამოხსენით უტოლობები (№№ 1 – 25):

1. $3^x > \frac{1}{27}$

ა) $(0; -3)$ ბ) $(-\infty; -3)$ გ) $(-3; +\infty)$ დ) $(3; +\infty)$

2. $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} > \frac{4}{9}$

ა) $(0; -3)$ ბ) $(-3; +\infty)$ გ) $(-\infty; -3)$ დ) $(3; +\infty)$

3. $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x-1} < 6{,}25$

ა) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ ბ) $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ გ) $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ დ) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

4. $(0{,}3)^{x-1} > \frac{10}{3}$

ა) $(0; +\infty)$ ბ) $(-\infty; 0)$ გ) $(-2; +\infty)$ დ) $(-\infty; -2)$

5. $(1{,}1)^{20-x} < 1{,}21$

ა) $(-\infty; -18)$ ბ) $(-\infty; 18)$ გ) $(18; +\infty)$ დ) $(-18; +\infty)$

6. $(0{,}9)^{2x+1} \geq (0{,}9)^{3x+2}$

ა) $[-1; +\infty)$ ბ) $(-\infty; -1]$ გ) $[1; +\infty)$ დ) $(-1; +\infty)$

7. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{4}{9}\right)^{16-x}$

ა) $(4; -8)$ ბ) $(-\infty; -8)\cup(4; +\infty)$ გ) $(-\infty; -8)$ დ) $(4; +\infty)$

8. $(0{,}25)^{x^2-x} \geq \left(\frac{1}{16}\right)^{2x+3}$

ა) $(-\infty; -1]\cup[6; +\infty)$ ბ) $[-1; 6]$ გ) $[-1; +\infty)$ დ) $(-\infty; 6]$

9. $(0{,}5)^{x^2-3x+1} \geq 32$

ა) $(-\infty; +\infty)$ ბ) $(-\infty; 0)$ გ) $(0; +\infty)$ დ) არა აქვს ამონახსნი

10. $3^{\frac{x+1}{x-2}} > 27$

ა) $\left(2; \frac{7}{2}\right)$ ბ) $\left(-\infty; \frac{7}{2}\right)$ გ) $(2; +\infty)$ დ) $(-\infty; +\infty)$

11. $1{,}2^{x^2-2x+2} \ge 1{,}44$

ა) $(-\infty;\ 0]$ ბ) $[0;\ 2]$ გ) $[2;\ +\infty)$ დ) $(-\infty;\ 0]\cup[2;\ +\infty)$

12. $(0{,}3)^{\frac{2x-1}{3x+1}} \le \frac{100}{9}$

ა) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{5};+\infty\right)$ ბ) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup\left[-\frac{1}{5};+\infty\right)$

გ) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right)\cup\left[-\frac{1}{8};\ +\infty\right)$ დ) $\left[-\frac{1}{3};-\frac{1}{8}\right)$

13. $(2{,}5)^{\frac{x^2-3x+4}{x^2-3}} \le 0{,}4$

ა) $(-\infty;\ -\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};\ +\infty)$ ბ) $\left(-\sqrt{3};\ \frac{1}{2}\right]\cup[1;\ \sqrt{3})$

გ) $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]\cup(\sqrt{3};\ +\infty)$ დ) $(\sqrt{3};\ +\infty)$

14. $(0,(3))^{\frac{x^3-1}{x^2+x+3}} > 3^{-x}$

ა) $\left(-\infty;\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right)$ ბ) $\left(-\infty;\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$

გ) $\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right)$ დ) $\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$

15. $3^{1+3+5+\ldots+(2x+1)} \ge (0,(3))^{7+2x-x^2}$

ა) $[-2;\ +\infty)$ ბ) $(0;\ +\infty)$ გ) $[-2;\ 0)$ დ) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots\}$

16. $2\cdot 3^{x+1}+2\cdot 3^{x+2}-81\cdot 3^{x-3} \ge 7$

ა) $(-\infty;\ -1]$ ბ) $(-\infty;\ -1)$ გ) $[-1;\ +\infty)$ დ) $[0;\ +\infty)$

17. $5\cdot 2^{x^2+2x-1}+\frac{3}{8}\cdot 2^{x^2+2x+2}+\frac{7}{8}\cdot 2^{x^2+2x+3} \le 88$

ა) $(-\infty;\ -3]$ ბ) $(-\infty;\ 1]$ გ) $[-3;\ +\infty)$ დ) $[-3;\ 1]$

18. $3\cdot 5^{\frac{x+1}{x+2}}+4\cdot 5^{-\frac{1}{x+2}} \ge 475$

ა) $\left[-\frac{5}{2};\ -2\right]$ ბ) $\left[-\frac{5}{2};\ -2\right]$ გ) $\left(-\infty;\ -\frac{5}{2}\right]$ დ) $[-2;\ +\infty)$

19. $2^{\frac{2x+1}{x-1}}+3\cdot 2^{\frac{3x}{x-1}}+3\cdot 2^{\frac{4x-1}{x-1}} \le \frac{19}{8}$

ა) $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$ ბ) $(-\infty; 1)$ გ) $\left[\frac{2}{5}; 1\right)$ დ) $\left[\frac{2}{5}; 1\right]$

20. $3^{\frac{x+3}{x-1}} + 7\cdot 3^{\frac{4}{x-1}} - 2\cdot 3^{\frac{5-x}{x-1}} \le 28$

ა) $(-\infty; 1)$ ბ) $(1; 5]$ გ) $[5; +\infty)$ დ) $(-\infty; 1)\cup[5; +\infty)$

21. $4^{\frac{x-1}{2x+1}} + 5\cdot 2^{\frac{-3}{2x+1}} - \frac{3}{2}\cdot 2^{\frac{4x-1}{2x+1}} > 0,5$

ა) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)\cup(1; +\infty)$ ბ) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ გ) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ დ) $(1; +\infty)$

22. $\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right]^{\frac{x+1}{x-3}} > 1$

ა) $(-1; 3)$ ბ) $(-\infty; -1)\cup(3; +\infty)$ გ) $(-\infty; -1)$ დ) $(3; +\infty)$

23. $\left(\left[\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}\right]^{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)^{\frac{2x+1}{x-2}} < 1$

ა) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)\cup(2; +\infty)$ ბ) $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ გ) $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ დ) $(-\infty; 2)$

24. $\left[(\pi-3)^{2-\pi}\right]^{\frac{3x-1}{x^2+3}} \le 1$

ა) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$ ბ) $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ გ) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$ დ) $(-\infty; +\infty)$

25. $\left[\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{5}\right)^{\sqrt[3]{2}}\right]^{\frac{x^2-1}{x^2-4}} \ge 1$

ა) $(-\infty; -2)\cup[-1; 1]\cup(2; +\infty)$ ბ) $[-1; 1]$ გ) $(-2; -1]\cup[1; 2)$ დ) $(-2; 2)$

ამოხსენით უტოლობები (№№ 26 – 45):

26. $\log_2(x+1) < 3$

ა) $(-1; +\infty)$ ბ) $(-\infty; 7)$ გ) $(7; +\infty)$ დ) $(-1; 7)$

27. $\log_2(x-3) < 4$

ა) $(-\infty; 3)$ ბ) $(3; 19)$ გ) $(19; +\infty)$ დ) $(-\infty; 19)$

28. $\log_3|x-1| < 1$

ა) $(-2; 0)$ ბ) $(0; 4)$ გ) $(-2; 4)$ დ) $(0; +\infty)$

29. $\log_{0,5}(x+1)\geq -2$

ა) $[3;\ +\infty)$ ბ) $(-1;\ +\infty)$ გ) $(-\infty;\ 3)$ დ) $(-1;\ 3]$

30. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)\geq -1$

ა) $[3;\ +\infty)$ ბ) $\left(\frac{3}{2};\ 3\right]$ გ) $\left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$ დ) $\left[\frac{3}{2};\ 3\right)$

31. $\log_{\frac{5}{3}}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|>1$

ა) $\left(\frac{7}{8};\ 2\right)\cup\left(2;\ \frac{13}{2}\right)$ ბ) $\left(2;\ \frac{13}{2}\right)$ გ) $\left(\frac{7}{8};\ 2\right)$ დ) $(2;\ +\infty)$

32. $\log_2\left(x^2-2x\right)\geq \log_2(x+1)$

ა) $\left(-\infty;\ \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right]$ ბ) $\left(-1;\ \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{13}}{2};\ +\infty\right)$

გ) $(-1;\ +\infty)$ დ) $\left[\frac{3-\sqrt{13}}{2};\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$

33. $\log_{2,5}\frac{x-1}{x+1}\geq \log_{0,4}\frac{2x-1}{x+2}$

ა) $(-\infty;\ -1)\cup\left[3-\sqrt{10};\ \frac{1}{2}\right)$ ბ) $(-\infty;\ -2)\cup\left[3+\sqrt{10};\ +\infty\right)$

გ) $(-\infty;\ -1)$ დ) $\left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$

34. $\log_{1,3}\left(x^3-3x\right)\leq \log_{1,3}\left(x^2-x-2\right)$

ა) $\left(-\infty;\ \sqrt{2}\right)\cup\left[1;\ \sqrt{2}\right]$ ბ) $\left[-\sqrt{3};-\sqrt{2}\right]$ გ) $\left(1;\ \sqrt{2}\right)$ დ) $(2;\ +\infty)$

35. $\log_{\frac{4}{5}}\left(x^3+3x^2-2\right)>\log_{\frac{4}{5}}\left(x^2+x-2\right)$

ა) $(-1-\sqrt{3};\ -1-\sqrt{2})$ ბ) $\left(0;\ -1+\sqrt{2}\right)$ გ) $\left(-\infty;\ -1-\sqrt{2}\right)$ დ) $\left(-1-\sqrt{2};\ 0\right)$

36. $\log_3\left(5x-x^2\right)>\log_3(10-2x)$

ა) $(0;\ 5)$ ბ) $(2;\ 5)$ გ) $(5;\ +\infty)$ დ) $(-\infty;\ 0)$

37. $\log_{\frac{1}{2}}\left(3x^2+6x-9\right)>\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+2x+11\right)$

ა) $\left(-1-\sqrt{11};\ -1+\sqrt{11}\right)$ ბ) $(-\infty;\ -2]$ გ) $(1;\ +\infty)$ დ) $\left(-1-\sqrt{11};\ -3\right)\cup\left(1;\ -1+\sqrt{11}\right)$

38. $\log_2\left(9+4x-x^2\right)>2$

ა) $(-\infty;\ +\infty)$ ბ) $(-1;\ 5)$ გ) $\left(2+\sqrt{13};\ +\infty\right)$ დ) $(5;\ +\infty)$

39. $\lg\left(x^2+x+8\right)\geq 1$

ა) $(-2;\ 1)$ ბ) $(-\infty;\ -2]$ გ) $(-\infty;\ -2]\cup[1;\ +\infty)$ დ) $[1;\ +\infty)$

40. $\log_{0,3}\left(x^2+2x+2\right)<\log_{0,3}(2x-3)$

ა) $(-\infty;\ +\infty)$ ბ) $\left(-\infty;\ \frac{3}{2}\right)$ გ) $(-\infty;\ 0)$ დ) $\left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$

41. $\log_3\left(x^2-6x+10\right)<\log_3(2x-11)$

ა) $\left(\frac{11}{2};\ +\infty\right)$ ბ) $(-\infty;\ +\infty)$ გ) $\left(-\infty;\ \frac{11}{2}\right)$ დ) ამონახსნი არა აქვს

ბ - ჯგუფი

ამოხსენით უტოლობები (№№ 43 – 71):

42. $3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+2\geq 0$

43. $7\cdot\left(\frac{9}{49}\right)^x-10\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^x+3<0$

44. $5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}-7\cdot\frac{2^x}{5^x}+2\leq 0$

45. $9\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x-13\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+4>0$

46. $\left(\sqrt{25}\right)^x-\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}\right)^x+\sqrt{5}<0$

47. $\left(\sqrt{36}\right)^x-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{6^x}+\sqrt{6}\geq 0$

48. $25^{\sqrt{x+1}}-5^{\sqrt{x+1}+1}<5^{\sqrt{x+1}}-5$

49. $\frac{1}{2^{x-1}+3}-\frac{1}{2^{x+1}-1}\geq 0$

50. $\frac{1}{3^{2x-1}+5}-\frac{1}{3^{2x}-1}\leq 0$

51. $2^{2x+7}-\frac{21}{2^{2x+9}}+2<0$

52. $(x+3)^2 3^{x+3}-3^{x+5}>0$

53. $\frac{x+1}{2x-1}\cdot 2^{x+2}-\frac{x}{x-1}\cdot 2^x\leq 0$

54. $2^{\sqrt{x}-1}-3^{\sqrt{x}}\leq 3^{\sqrt{x}-1}-2^{\sqrt{x}+2}$

55. $3\cdot 4^{x^2+1}+\frac{1}{3}\cdot 9^{x^2+3}\leq 24\cdot 4^{x^2+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x^2+2}$

56. $13\cdot 7^{x^2-1}-5^{x^2+1}\geq 3\cdot 5^{x^2-1}-7^{x^2}$

57. $5^{2x+1}+2^{2x+2}<5^{2x+2}-2^{2x+4}$

58. $2^{\sqrt{x-1}+2}-3\cdot 2^{\sqrt{x-1}+3}\leq 5^{\sqrt{x-1}+1}-5^{\sqrt{x-1}+2}$

59. $9^{\left|x^2-x\right|}-10\cdot 3^{\left|x^2-x\right|}+9\leq 0$

60. $25^{\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+1}-650\cdot 5^{\left|\frac{x+1}{x+2}\right|}+625\geq 0$

61. $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x^2-3x-22}-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-23}-27\le 0$

62. $49^{\left|\frac{2x+3}{x-1}\right|-3}-\frac{8}{49}\cdot 7^{\left|\frac{2x+3}{x-1}\right|-1}+7<0$

63. $2^{\frac{x}{|x+1|}}-5\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{2|x+1|+x}{|x+1|}}+16\ge 0$

46 .$3^{\frac{3x-1}{|x+1|}-2}-28\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{3x-1}{|x+1|}-4}+3<0$

65. $\sqrt{3^x+1}-\sqrt{2\cdot 3^x+5}+\sqrt{3^x+3}<0$

66. $\sqrt{2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x-1}-\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^x+3}\ge\sqrt{(0,2)^x-10}$

67. $\sqrt{4\cdot(0,(3))^x-1}\le\sqrt{(0,(1))^x+2}$

68. $\sqrt{\frac{1}{2}\left(3^{\sqrt{x}}+8\right)}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(3^{\sqrt{x}}-8\right)}\le\sqrt{3^{\sqrt{x}}+15}$

69. $\sqrt{\frac{1}{2}\left(5^{\sqrt{x+1}}+9\right)}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(5^{\sqrt{x+1}}-9\right)}\le\sqrt{5^{\sqrt{x+1}}+12}$

70. $\frac{4\cdot 2^{2x}+7\cdot 2^x+1}{3\cdot 2^{2x}+2^{x+1}-5}\le 1$

71. $\frac{13-3\cdot 5^{2x}-7\cdot 5^x}{4\cdot 5^{2x}+5^x-5}>-1$

72. $\frac{9\cdot 5^{\sqrt{x+1}}-3\cdot 25^{\sqrt{x+1}}-2}{2\cdot 25^{\sqrt{x+1}}-8\cdot 5^{\sqrt{x+1}}+6}\ge -2$

73. $\frac{2^{2\sqrt{x}}+2^{\sqrt{x}+2}-9\cdot 2^{\sqrt{x}}}{4^{\sqrt{x}}-7\cdot 2^{\sqrt{x}}+6}\le 1$

74. $\frac{2\cdot 3^{3x+3}-7\cdot 9^{x+1}-5\cdot 3^{x+1}-8}{2\cdot 9^{x+1}-7\cdot 3^{x+1}+5}\le 3^{x+1}$

75. $\frac{2\cdot 4^{3x}+4^{2x}+5\cdot 4^x-9}{4^x+1}<4^{2x}+3$

ამოხსენით უტოლობები (№№ 76 – 99):

76. $\log_2\left|\frac{5x+1}{x-3}\right|>\log_2\left|\frac{2x+1}{x-2}\right|$

77. $\log_{\frac{4}{3}}\left|\frac{2x+1}{3x-1}\right|\le\log_{\frac{4}{3}}\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|$

78. $\log_{0,1}\frac{x^2-2x+3}{x+1}<0$

79. $\log_{0,1}\frac{x^2+5x-6}{x-4}\le 0$

80. $\frac{\log_{2,1}\left[\frac{5}{3}(\log_7 9-1)\right]}{(2x-1)\left(x^2+1\right)}\le 0$

81. $\dfrac{(3x^2-5x+2)\sqrt{x+10}}{\log_3\left[\frac{5}{3}(\log_7 9-1)\right]}\ge 0$

82. $\dfrac{\log_3\left[\frac{8}{9}(\log_3 5-1)\right]}{(x^2-4x+3)(2x-1)}<0$

83. $\dfrac{\sqrt{x^2-7x+6}\cdot\sqrt[3]{x+1}}{\log_3\left[\sqrt[10]{16}-\sqrt[9]{8}\right]}\ge 0$

84. $\dfrac{\log_{16}15-\log_{17}16}{\sqrt{x^3+7x-22}}\le 0$

85. $\dfrac{\lg\lg_5 4-\lg\lg_4 3}{\sqrt{2x^3+3x-5}}>0$

86. $\dfrac{\log_5 7+\log_7 5-2}{\sqrt{x^2+5x+6}\cdot\sqrt{1-x^2}}\ge 0$

87. $\dfrac{\log_{0,3}2+\log_2 0{,}3+2}{8x^3+27+54x+36x^2}\le 0$

88. $\dfrac{8x^3+125}{\log_3^2 5-3\log_3 5+2}\ge 0$

89. $\dfrac{8x^6-729}{\log_4^3 3-\log_5^2 4}>0$

90. $\left[\dfrac{1}{\log_4 5-\log_4 7}-\dfrac{1}{2(\log_{27}5-\log_{27}7)}\right]^{\frac{3-x}{x+1}}\le 1$

91. $\log_5(5^x-1)\cdot\log_{0,2}(5^{x+2}-25)+35<0$

92. $\log_7(7^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{7}}(7^{x+1}-7)+3>0$

93. $\log_2(4^x+1)\cdot\log_{0,5}(4^{x+3}+64)+7\le 0$

94. $\log_2(3^x-1)\cdot\log_2(3^{x+3}-27)\ge\log_2 54$

95. $|\log_3(x+1)-3|+|\log_9(x+1)-1|\le 1$

96. $|\log_2(2x+1)+1|+|\log_4(2x+1)-2|\le 5$

97. $\left|\log_4(x^2-1)-1\right|+\left|\log_2(x^2-1)+1\right|\le 2$

98. $|\log_3(x+3)|<\left|\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x+3}{27}\right|$

99. $\log_{\log_2\sqrt{3}+\log_3 2}\dfrac{3x-4}{2x+1}\ge 0$

ამოხსენით უტოლობები (№№ 100 – 113):

100. $\left(\sqrt{21-4\sqrt{5}}+1\right)^{\frac{-2^x-1}{4^x+1}}\ge 0{,}05$

101. $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}+1\right)^{\frac{6\cdot 3^x+3(\sqrt{3})^x-2}{3^x-3(\sqrt{3})^x}} \le 8$

102. $\left(7-\sqrt{2}\right)^{\frac{2^x+1}{2^{x+1}-1}} \ge \left(\frac{7+\sqrt{2}}{47}\right)^{\frac{2^x}{2^{x+1}+1}}$

103. $\left(5\sqrt{2}+7\right)^{\frac{-(1,5)^x+1}{2\cdot(1,5)^x-3}} \le \left(5\sqrt{2}-7\right)^{\frac{(1,5)^x+3}{2\cdot(1,5)^x+5}}$

104. $\left(x^2+2x-3\right)^{x^2+5x+5} \ge x^2+2x-3$

105. $|x-1|^{\frac{x+1}{2x-1}} > 1$

106. $|2x+1|^{\frac{3x-1}{2x-2}} < |2x+1|^{\frac{x}{3}}$

107. $\left(x^2-x+1\right)^{\frac{x+4}{x+3}} \ge \left(x^2-x+1\right)^3$

108. $\left(4x^2-6x+3\right)^{x^2-3x+2} > 1$

109. $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2+x-1} \le \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

110. $\left(\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{3}\right)^{\frac{x-1}{x+1}} \ge \sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}$

111. $\left|2x^2-5x+3\right|^{x^2+x-2} > 1$

112. $\left(a^2+3a-4\right)^{\frac{3x-1}{x+4}} > 1$

113. $\left(a^2+3|a-1|-7\right)^{\frac{x-3}{2x+1}} < 1$

ამოხსენით უტოლობები (№№ 114–130):

114. $\log_{\frac{1}{5}} \log_2 \frac{3x+1}{2x-1} > 1$

115. $\log_{0,2} \log_2 \log_{x+3} 9 > 0$

116. $\log_{3x+1} \frac{9x^2-24x+15}{4} < 1$

117. $\log_{0,5} \log_6 \frac{x^2+3x+2}{x+5} < 0$

118. $\log_5 \log_{0,2} \log_{32} \frac{x}{x+6} < 0$

119. $\log_5\left(2^x+1\right)+\log_{2^x+1} 5 > \frac{10}{3}$

120. $\log_x \log_5\left(25^x-20\right) < 1$

121. $log_{(2x+1)^2}(1-4x)\le 1$

122. $\log_{x^2+1}(8x^3-1)\cdot\log_{2x-1}(x^2+1)<2$

123. $\log_{x+1}\log_2(8^x-21)\le 1$

124. $\log_{\frac{1}{5}}\log_2(|x+3|-2)\le 0$

125. $\left|\log_{\frac{1}{3}}|x^2-x|+1\right|\le 2$

126. $\log_2(x^2+2x-3)-\log_3(x^2+2x-3)\ge 0$

127. $\log_5^2(2x+8-x^2)\cdot\left[\log_3(x^2-2x+3)^2-\log_4(x^2-2x-5)\right]\ge 0$

128. $\dfrac{\log_2\left(\sqrt{x^2+9x}+5\right)-\log_3(x^2+9x-1)}{\sqrt{30-37x-4x^2}}>0$

129. $\dfrac{\log_{15}(6x-x^2+6)-\log_{13}(x^2-6x+20)}{\sqrt{13x-2x^2-20}}\ge 0$

130. $\dfrac{\log_{12}(x^2-4x+11)-\log_{14}(4x-x^2+13)}{\sqrt{16x-4x^2-7}}\le 0$

§16. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები, ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამოთვლა, ტრიგონომეტრიული განტოლებები და სისტემები

ა - ჯგუფი

გამოთვალეთ (№№ 1 - 2):

1. 1) $\sin 2550^\circ$

ა) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ბ) $-\frac{1}{2}$ გ) $\frac{1}{2}$ დ) 1

2) $\sin 3390^\circ$

ა) $-\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ გ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ დ) $\frac{1}{2}$

3) $\cos 3120^\circ$

ა) $-\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{1}{2}$ გ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ დ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\cos 3930^\circ$

ა) $-\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ გ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ დ) $\frac{1}{2}$

5) $tg 4815^\circ$

ა) 0 ბ) -1 გ) 1 დ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6) $tg6060^\circ$

ა) $\sqrt{3}$; ბ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; გ) -1; დ) $-\sqrt{3}$

7) $ctg2490^\circ$

ა) $\sqrt{3}$ ბ) 1 გ) $-\sqrt{3}$ დ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

8) $ctg5625^\circ$

ა) 1 ბ) $\frac{1}{2}$ გ) $\sqrt{3}$ დ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. 1) $2\sin 45^\circ + 3\cos 30^\circ - \sin 0^\circ + tg60^\circ$

ა) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ბ) $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ გ) $7\sqrt{3}+\sqrt{2}$ დ) $\sqrt{2}+\frac{5}{2}\sqrt{3}$

2) $2ctg45^\circ - \sin 60^\circ - 3\cos 90^\circ - \cos 180^\circ$

ა) $3-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ბ) $2+\frac{\sqrt{3}}{2}$ გ) $\sqrt{3}+\frac{1}{2}$ დ) $\sqrt{3}-\frac{1}{2}$

3) $0{,}2\cdot\cos(-30^\circ)-0{,}3\cdot tg60^\circ + ctg225^\circ$

ა) $-\frac{\sqrt{3}}{7}-\frac{1}{5}$ ბ) $-\frac{\sqrt{3}}{4}+1$ გ) $\frac{-\sqrt{3}}{5}+1$ დ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-2$

4) $\frac{2}{5}\sin 45^\circ - \frac{3}{5}\cos 45^\circ + tg30^\circ + ctg30^\circ$

ა) $\frac{\sqrt{2}}{10}-\frac{4}{3}$ ბ) $\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{4}{3}$ გ) $-\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{4}{3}$ დ) $-\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{1}{3}$

5) $\frac{3}{5}tg45^\circ - \frac{2}{5}\cos 45^\circ + \frac{1}{5}\sin 45^\circ - ctg(-60^\circ)$

ა) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{30}$ ბ) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{10}$ გ) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+3}{10}$ დ) $\frac{18+10\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{30}$

6) $2{,}5\cdot\cos 60^\circ - \frac{5}{4}\cos 30^\circ + \frac{5}{2}tg60^\circ - 2ctg90^\circ$

ა) $\frac{5}{8}+\frac{7\sqrt{3}}{4}$ ბ) $\frac{5}{8}+\frac{5\sqrt{3}}{4}$ გ) $\frac{5}{4}+\frac{15\sqrt{3}}{8}$ დ) $\frac{1}{4}+\frac{5\sqrt{3}}{8}$

7) $\frac{3}{2}\sin 30^\circ - \frac{5}{2}tg30^\circ + \cos 90^\circ - \sin 270^\circ$

ა) $\frac{7}{4}-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ბ) $\frac{5}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ გ) $\frac{5}{4}+\frac{5\sqrt{3}}{6}$ დ) $\frac{7}{4}+\frac{5\sqrt{3}}{6}$

8) $3\cos 180^\circ - 2{,}5\cdot\sin 270^\circ + \cos(-30^\circ) + 3\sin(-30^\circ)$

ა) $\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ბ) $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ გ) $\frac{1}{2}-\sqrt{3}$ დ) $\frac{\sqrt{3}}{2}-2$

3. დაალაგეთ ზრდადობის მიხედვით

1) $\sin 35°$, $\sin 38°$, $\cos 40°$, $\cos 80°$

ა) IV, I, II, III ბ) I, II, IV, III გ) I, III, II, IV დ) IV, III, I, II

2) $\sin 80°$, $\sin 105°$, $\cos 60°$, $\cos 20°$

ა) I, II, IV, III ბ) II, I, III, IV გ) IV, III, II, I დ) III, IV, II, I

3) $tg35°$, $tg55°$, $ctg62°$, $ctg19°$

ა) I, II, III, IV ბ) III, I, II, IV გ) IV, III, I, II დ) II, I, III, IV

4) $tg160°, tg(-39°), tg225°, tg190°$

ა) II, I, III, IV ბ) I, II, III, IV გ) II, III, IV, I დ) IV, II, III, I

5) $\sin 220°$, $\sin 270°$, $\sin(-50°)$, $\sin(-20°)$

ა) IV, I, III, II ბ) II, III, I, IV გ) I, II, III, IV დ) III, IV, II, I

6) $ctg20°$, $ctg120°$, $ctg160°$, $ctg(-80°)$

ა) III, II, IV, I ბ) II, III, I, IV გ) IV, II, I, III დ) I, II, IV, III

7) $\sin 150°$, $\sin 70°$, $\cos 15°$, $\cos 27°$

ა) III, IV, II, I ბ) I, IV, II, III გ) IV, I, III, II დ) II, III, I, IV

8) $tg35°$, $ctg70°$, $tg190°$, $ctg265°$

ა) II, I, III, IV ბ) III, I, IV, II გ) IV, III, II, I დ) I, II, III, IV

4. განსაზღვრეთ შემდეგი ფუნქციების უმცირესი დადებითი პერიოდი

1) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

ა) $\frac{\pi}{6}$ ბ) $\frac{\pi}{2}$ გ) 2π დ) π

2) $y = 2\cos(x - 1)$

ა) 2π ბ) π გ) $\frac{\pi}{2}$ დ) 4π

3) $y = \sin(3x + \pi)$

ა) 2π ბ) $\frac{\pi}{2}$ გ) 6π დ) $\frac{2\pi}{3}$

4) $y = tg\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)$

ა) $\frac{\pi}{8}$ ბ) $\frac{\pi}{4}$ გ) $\frac{\pi}{2}$ დ) π

5) $y = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{3}{2}x\right)$

ა) 2π ბ) $\frac{2}{3}\pi$ გ) $\frac{3}{4}\pi$ დ) $\frac{4}{3}\pi$

6) $y=3\sin^2 x$

ა) 6π ბ) $\frac{\pi}{2}$ გ) π დ) 2π

7) $y=5\sin^2 x+5\cos^2 x$

ა) π ბ) 2π გ) $\frac{\pi}{2}$ დ) არ გააჩნია

8) $y=\cos^2 x$

ა) π ბ) 2π გ) $\frac{\pi}{2}$ დ) π^2

5. გამოთვალეთ α კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობები

1) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. გამოთვალეთ $\cos\alpha$, $tg\alpha$

ა) $\frac{2}{9};\frac{2}{3}$ ბ) $\frac{2\sqrt{2}}{3};\frac{\sqrt{2}}{4}$ გ) $\frac{2}{3};\frac{1}{4}$ დ) $\frac{1}{3};\frac{3}{4}$

2) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\alpha\in(-90°,0°)$. გამოთვალეთ $\sin\alpha$, $ctg\alpha$

ა) $\frac{\sqrt{5}}{3};-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ბ) $-\frac{\sqrt{5}}{3};\frac{2\sqrt{5}}{5}$ გ) $-\frac{\sqrt{5}}{3};-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ დ) $\frac{\sqrt{5}}{3};\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3) $tg\alpha=3$, $\alpha\in(180°,270°)$. გამოთვალეთ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$

ა) $-\frac{3\sqrt{10}}{10};-\frac{\sqrt{10}}{10}$ ბ) $\frac{3\sqrt{10}}{10};\frac{\sqrt{10}}{10}$ გ) $-\frac{3\sqrt{10}}{10};\frac{\sqrt{10}}{10}$ დ) $\frac{3\sqrt{10}}{10};-\frac{\sqrt{10}}{10}$

4) $ctg\alpha=2$, $\alpha\in(180°,270°)$. გამოთვალეთ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$

ა) $\frac{\sqrt{5}}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ბ) $-\frac{\sqrt{5}}{5};-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ გ) $-\frac{\sqrt{5}}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5}$ დ) $\frac{\sqrt{5}}{5};-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5) $\sin\alpha=\frac{1}{5}$, $\alpha\in(90°,180°)$. გამოთვალეთ $ctg\alpha$

ა) $-6\sqrt{2}$ ბ) $6\sqrt{2}$ გ) $-2\sqrt{6}$ დ) $2\sqrt{6}$

6) $\cos\alpha=\frac{2}{5}$, $\alpha\in(-90°,0°)$. გამოთვალეთ $tg\alpha$

ა) $-\frac{\sqrt{21}}{2}$ ბ) $\frac{\sqrt{21}}{2}$ გ) $\frac{\sqrt{21}}{5}$ დ) $-\frac{\sqrt{21}}{5}$

7) $tg\alpha=5$, $\alpha\in(0°,90°)$. გამოთვალეთ $\sin\alpha$

ა) ბ) გ) $-\frac{5\sqrt{26}}{26}$ დ) $\frac{5\sqrt{26}}{26}$

8) $ctg\alpha=3$, $\alpha\in(180°,270°)$. გამოთვალეთ $\cos\alpha$

ა) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ბ) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ გ) $\frac{3}{10}$ დ) $-\frac{3}{10}$

6. გამოთვალეთ:

1) $\sin(45^\circ+30^\circ)$

ა) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ ბ) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ გ) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ დ) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) $\cos(45^\circ+30^\circ)$

ა) $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$ ბ) $\frac{\sqrt{6}+1}{2}$ გ) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ დ) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3) $\sin(45^\circ-30^\circ)$

ა) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ბ) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ გ) $\frac{\sqrt{6}+1}{4}$ დ) $\frac{\sqrt{6}-1}{4}$

4) $\cos(45^\circ-30^\circ)$

ა) $\frac{\sqrt{6}-1}{4}$ ბ) $\frac{\sqrt{6}+1}{4}$ გ) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ დ) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5) $tg(45^\circ+30^\circ)$

ა) $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ ბ) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ გ) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ დ) $\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

6) $tg(45^\circ-30^\circ)$

ა) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ ბ) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ გ) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ დ) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

7) $ctg(45^\circ-30^\circ)$

ა) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ ბ) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ გ) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ დ) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

8) $ctg(45^\circ+30^\circ)$

ა) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ ბ) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ გ) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ დ) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

ორმაგი და ნახევარი კუთხის ფორმულების გამოყენებით გარდაქმენით გამოსახულება (№№ 7 – 8):

7. 1) $\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}$

ა) $\sin\frac{\alpha}{2}$ ბ) $\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$ გ) $\frac{1}{2}\sin\alpha$ დ) $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

2) $\cos^2\frac{\alpha}{8}-\sin^2\frac{\alpha}{8}$

ა) $\cos\frac{\alpha}{2}$ ბ) $2\cos\frac{\alpha}{2}$ გ) $\sin\frac{\alpha}{4}$ დ) $\cos\frac{\alpha}{4}$

3) $\sin 7\alpha\cdot\cos 7\alpha$

ა) $\frac{1}{2}\sin 6\alpha$ ბ) $\frac{1}{2}\sin 10\alpha$ გ) $\frac{1}{2}\sin 14\alpha$ დ) $\frac{1}{2}\sin 7\alpha$

4) $\cos^2 15\alpha-\sin^2 15\alpha$

ა) $\cos 20\alpha$ ბ) $\cos 30\alpha$ გ) $\sin 30\alpha$ დ) $\cos 15\alpha$

5) $\sin 3^\circ\cdot\cos 3^\circ$

ა) $\frac{1}{2}\sin 6^\circ$ ბ) $\cos 6^\circ$ გ) $2\sin 3^\circ$ დ) $2\cos 3^\circ$

6) $\cos^2 1^\circ-\sin^2 1^\circ$

ა) $\cos 1^\circ$ ბ) $\sin 2^\circ$ გ) $\cos 2^\circ$ დ) $\sin 2^\circ$

7) $\cos^2 25^\circ-\sin^2 25^\circ$

ა) $\cos 25^\circ$ ბ) $\sin 50^\circ$ გ) $\cos 50^\circ$ დ) $\sin 25^\circ$

8) $\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ$

ა) $\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{1}{4}$ გ) $\frac{1}{8}$ დ) $\frac{1}{3}$

8. 1) $\frac{2tg3^\circ}{1-tg^2 3^\circ}$

ა) $ctg3^\circ$ ბ) $ctg6^\circ$ გ) $tg6^\circ$ დ) $tg3^\circ$

2) $\frac{tg5^\circ}{1-tg^2 5^\circ}$

ა) $\frac{1}{2}ctg10^\circ$ ბ) $ctg10^\circ$ გ) $tg10^\circ$ დ) $\frac{1}{2}tg10^\circ$

3) $\frac{1-tg^2 15^\circ}{tg15^\circ}$

ა) $2\sqrt{3}$ ბ) $2ctg80^\circ$ გ) $tg40^\circ$ დ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4) $\frac{1-tg^2 4\alpha}{tg4\alpha}$

ა) $tg^2 4\alpha$ ბ) $2ctg8\alpha$ გ) $tg8\alpha$ დ) $2ctg4\alpha$

5) $1-\cos 70^\circ$

ა) $2\sin 35^\circ$ ბ) $2\cos^2 35^\circ$ გ) $\cos^2 35^\circ$ დ) $2\sin^2 35^\circ$

6) $1+\cos 20^\circ$

ა) $\sin^2 10°$ ბ) $2\sin^2 10°$ გ) $\cos^2 20°$ დ) $2\cos^2 10°$

7) $1-\cos 8\alpha$

ა) $2\sin^2 4\alpha$ ბ) $2\cos^2 4\alpha$ გ) $2\sin^2 2\alpha$ დ) $\cos 4\alpha$

8) $1+\cos 14\alpha$

ა) $\sin^2 7\alpha$ ბ) $2\cos^2 7\alpha$ გ) $2\sin^2 7\alpha$ დ) $2\cos^2 14\alpha$

9. ჯამი გარდაქმენით ნამრავლად

1) $\sin 18° + \sin 20°$

ა) $2\cos 1°\cos 19°$ ბ) $-2\sin 19°\sin 1°$ გ) $2\sin 1°\cos 19°$ დ) $2\sin 19°\cos 1°$

2) $\sin 20° - \sin 10°$

ა) $2\sin 5°\cos 15°$ ბ) $2\cos 5°\cos 15°$ გ) $2\cos 5°\sin 15°$ დ) $-2\sin 5°\sin 15°$

3) $\cos 40° + \cos 20°$

ა) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°$ ბ) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10°$ გ) $-\sqrt{3}\sin 10°$ დ) $\sqrt{3}\cos 10°$

4) $\cos 80° - \cos 20°$

ა) $\cos 60°$ ბ) $2\sin 50°$ გ) $-\sin 50°$ დ) $\cos 50°$

5) $\sin 80° + \cos 30°$

ა) $2\cos 20°\sin 10°$ ბ) $2\cos 20°\cos 10°$ გ) $2\sin 20°\sin 10°$ დ) $2\sin 20°\cos 10°$

6) $\cos 40° - \sin 10°$

ა) $\sqrt{3}\sin 20°$ ბ) $\sqrt{3}\cos 20°$ გ) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20°$ დ) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20°$

7) $\cos 4\alpha + \cos 6\alpha$

ა) $2\sin\alpha\cos 5\alpha$ ბ) $2\sin 5\alpha\cos\alpha$ გ) $2\sin 5\alpha\sin\alpha$ დ) $2\cos 5\alpha\cos\alpha$

8) $\sin 4\alpha - \cos 8\alpha$

ა) $2\sin(6a-45^0)\cos(2a-45^0)$ ბ) $2\sin 2\alpha\cos 6\alpha$

გ) $2\sin 6\alpha\cos 2\alpha$; დ) $2\sin 2\alpha\sin 6\alpha$

10. ნამრავლი გარდაქმენით ჯამად

1) $\sin 20°\cdot\sin 40°$

ა) $\frac{\sin 20° + \sin 60°}{2}$ ბ) $\frac{\sin 20° - \sin 60°}{2}$ გ) $\frac{\cos 20° - \cos 60°}{2}$ დ) $\frac{\cos 20° + \cos 60°}{2}$

2) $\cos 80°\cdot\sin 40°$

ა) $\frac{\sqrt{3}+2\cos 50^0}{4}$ ბ) $\frac{\sqrt{3}-2\cos 50^0}{4}$ გ) $\frac{\sqrt{3}+2\sin 50^0}{4}$ დ) $\frac{\sqrt{3}-2\sin 50^0}{4}$

3) $\cos 15°\cdot\cos 75°$

ა) $\cos 60° + \cos 10°$ ბ) $\frac{1}{4}$ გ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ დ) $\frac{\cos 10° + \cos 20°}{2}$

4) $\cos 20°\cdot\sin 80°$

ა) $\frac{1+2\cos 10^0}{4}$ ბ) $\frac{1-2\cos 10^0}{4}$ გ) $\frac{\sqrt{3}-2\cos 10^0}{4}$ დ)) $\frac{\sqrt{3}+2\cos 10^0}{4}$

5) $\sin 17^\circ \cdot \cos 43^\circ$

ა) $\frac{1-2\sin 26^0}{4}$ ბ) $\frac{\sqrt{3}-2\sin 26^0}{4}$ გ) $\frac{\sqrt{3}+2\sin 26^0}{4}$ დ) $\frac{1+2\sin 26^0}{4}$

6) $\sin\alpha \cdot \sin 3\alpha$

ა) $\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{2}$ ბ) $\frac{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{2}$ გ) $\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2}$ დ) $\frac{\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2}$

7) $\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{5}{2}\alpha$

ა) $\frac{\cos 3\alpha - \cos 2\alpha}{2}$ ბ) $\frac{\cos 3\alpha + \cos 2\alpha}{2}$ გ) $\frac{\sin 3\alpha - \sin 2\alpha}{2}$ დ) $\frac{\sin 3\alpha + \sin 2\alpha}{2}$

8) $\sin\frac{\alpha}{8} \cdot \cos\frac{15}{8}\alpha$

ა) $\frac{\sin 2\alpha - \sin\frac{7}{4}\alpha}{2}$ ბ) $\frac{\sin 2\alpha + \sin\frac{7}{4}\alpha}{2}$ გ) $\frac{\cos\alpha + \cos 2\alpha}{2}$ დ) $\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{2}$

11. გამოთვალეთ:

1) $\sin 19^\circ \cdot \cos 71^\circ + \sin 71^\circ \cdot \cos 19^\circ$

ა) 0 ბ) $\sin 62^\circ$ გ) 1 დ) $\cos 72^\circ$

2) $\cos 12^\circ \cdot \cos 78^\circ - \sin 12^\circ \cdot \sin 78^\circ$

ა) 1 ბ) $\frac{1}{2}$ გ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ დ) 0

3) $\cos 68^\circ \cdot \cos 23^\circ + \sin 68^\circ \cdot \sin 23^\circ$

ა) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; გ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $\frac{1}{2}$

4) $\sin 62^\circ \cdot \cos 17^\circ - \cos 62^\circ \cdot \sin 17^\circ$

ა) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ბ) $\frac{1}{2}$ გ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ დ) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

5) $\frac{tg18^\circ + ctg53^\circ}{1 - ctg72^\circ \cdot tg37^\circ}$

ა) $\sqrt{3}$ ბ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ გ) 1 დ) -1

6) $\frac{ctg5^\circ - tg25^\circ}{1 + ctg65^\circ \cdot tg85^\circ}$

ა) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ბ) $-\sqrt{3}$ გ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ დ) $\sqrt{3}$

7) $\sin 7{,}5^\circ \cdot \cos 7{,}5^\circ \cdot \cos 15^\circ$

ა) $\frac{1}{8}$ ბ) $\frac{1}{4}$ გ) $\frac{1}{2}$ დ) $\frac{1}{16}$

8) $tg2^\circ \cdot tg4^\circ \cdot tg6^\circ \cdot \ldots \cdot tg88^\circ$

ა) $\sqrt{3}$ ბ) 1 გ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ დ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ამოხსენით განტოლებები (№№ 12 – 13):

12. 1) $\sin x = 0$

ა) $2k\pi + \pi,\ k \in z$ ბ) $2k\pi,\ k \in z$ გ) $k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in z$ დ) $k\pi,\ k \in z$

2) $\cos x = 0$

ა) $k\pi,\ k \in z$ ბ) $k\pi - \frac{\pi}{2},\ k \in z$ გ) $k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in z$ დ) $2k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in z$

3) $tgx = 1$

ა) $k\pi - \frac{\pi}{4},\ k \in z$ ბ) $k\pi + \frac{\pi}{4},\ k \in z$ გ) $2k\pi + \frac{\pi}{4},\ k \in z$ დ) $2k\pi - \frac{\pi}{4},\ k \in z$

4) $\sin x = 1$

ა) $2k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in z$ ბ) $k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in z$ გ) $(-1)^k \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in z$ დ) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2},\ k \in z$

5) $\cos x = -1$

ა) $k\pi + \pi,\ k \in z$ ბ) $2k\pi + \pi,\ k \in z$ გ) $k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in z$ დ) $k\pi - \frac{\pi}{2},\ k \in z$

6) $\sin x = \frac{1}{2}$

ა) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in z$ ბ) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in z;$ გ) $(-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in z;$

დ) $(-1)^k \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in z$

7) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ა) $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in z$ ბ) $\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in z$ გ) $\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in z$ დ) $\pm\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in z$

8) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ა) $\pm 150^\circ + 2k\pi,\ k \in z$ ბ) $\pm 120^\circ + 2k\pi,\ k \in z$ გ) $\pm 60^\circ + 2k\pi,\ k \in z$

დ) $\pm 30^\circ + 2k\pi,\ k \in z$

9) $ctgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

ა) $150^\circ + k\pi,\ k \in z$ ბ) $120^\circ + k\pi,\ k \in z$ გ) $\pm 150^\circ + k\pi,\ k \in z$

დ) $\pm 120^\circ + k\pi,\ k \in z$

10) $\cos x=\sqrt{2}$

ა) $\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in z$ ბ) $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in z$ გ) ამონახსნი არა აქვს

დ) $\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in z$

13. 1) $3tgx-\sqrt{3}=0$

ა) $\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in z$ ბ) $-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in z$ გ) $\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in z;$ დ) $-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in$

2) $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$

ა) $2k\pi+\frac{\pi}{2};\ (-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in z$ ბ) $2k\pi+\frac{\pi}{2};\ k\in z$ გ) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi;\ k\in z$

დ) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in z$

3) $3\cos^2 x-2\cos x+\frac{1}{4}=0$

ა) $60^\circ\pm k\pi;\ k\in z$ ბ) $\pm 60^\circ+2k\pi;\ k\in z;\ \pm\arccos\frac{1}{6}+2k\pi;\ k\in z$

გ) $\pm 30^\circ+2k\pi;\ k\in z$ დ) $30^\circ\pm 2k\pi;\ k\in z$

4) $tg^2x-3tgx+2=0$

ა) $\frac{\pi}{4}+2k\pi;\ k\in z$ ბ) $\frac{\pi}{4}+k\pi;\ arctg2+k\pi;\ k\in z$ გ) $\frac{\pi}{3}+k\pi;\ k\in z;$

დ) $\frac{\pi}{6}+k\pi;\ k\in z$

5) $tg^2x+ctg^2x=2$

ა) $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi;\ k\in z$ ბ) $\frac{\pi}{3}+k\pi;\ k\in z$ გ) $\frac{\pi}{4}+k\pi;\ k\in z$ დ) $\frac{\pi}{6}+k\pi;\ k\in z$

6) $\sin^2 x+3\cos x-1=0$

ა) $k\pi;\ k\in z;$ ბ) $\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ k\in z$ გ) $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in z$ დ) $k\pi+\frac{\pi}{2};\ k\in z$

7) $\sin x\cdot\cos x+\sin^2 2x=0$

ა) $\frac{\pi}{6}+k\pi;\ k\in z$ ბ) $(2k+1)\pi;\ k\in z$ გ) $2k\pi;\ k\in z$ დ) $\frac{k\pi}{2};\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in z$

8) $\cos 2x+2\sin^2 x=1$

ა) $k\pi;\ k\in z$ ბ) $(-\infty;+\infty)$ გ) $2k\pi+\frac{\pi}{2};\ k\in z$ დ) $\frac{\pi}{3}+k\pi;\ k\in z$

ბ - ჯგუფი

გამოთვალეთ (№№ 14 – 16):

14. 1) $\sin(\alpha+\beta)$, თუ $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{5}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $-90^\circ<\beta<0^\circ$

2) $\cos(\alpha-\beta)$, თუ $tg\alpha=3$, $ctg\beta=2$, $180^\circ<\alpha<270^\circ$, $180^\circ<\beta<270^\circ$

3) $tg(\alpha+\beta)$, თუ $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{2}{3}$, $-90^\circ<\alpha<0^\circ$, $90^\circ<\beta<180^\circ$

4) $tg(\alpha-\beta)$, თუ $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $90^\circ<\alpha<180^\circ$, $-90^\circ<\beta<0^\circ$

5) $\sin(\alpha-\beta)$, თუ $tg\alpha=5$, $ctg\beta=3$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$

6) $ctg(\alpha+\beta)$, თუ $tg\alpha=2$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $180^\circ<\alpha<270^\circ$, $90^\circ<\beta<180^\circ$

7) $ctg(\alpha-\beta)$, თუ $\sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\cos\beta=\frac{1}{3}$, $90^\circ<\alpha<180^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$

8) $\cos(\alpha+\beta)$, თუ $tg\alpha=-2$, $ctg\beta=-3$, $90^0<\alpha<180^0, 90^0<\beta<180^0$

15. 1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$

2) $\cos\left(arctg\frac{1}{2}\right)$

3) $tg(arcctg3)$

4) $ctg\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$

5) $\sin(arctg2)$

6) $\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$

7) $tg\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$

8) $ctg(arctg4)$

16. 1) $\sin(2arctg3)$

2) $\cos(2arcctg4)$

3) $tg(2arctg2)$

4) $tg(2arcctg3)$

5) $\sin\left(2arctg3+2arcctg\frac{1}{2}\right)$

6) $\cos(2arcctg3+2arctg2)$

7) $\cos^2\left(\frac{1}{2}arctg\frac{1}{2}\right)$

8) $\sin^2\left(\frac{1}{2}arcctg5\right)$

17. დაალაგეთ ზრდადობის მიხედვით (მე - 7 და მე - 8 მაგალითებში კუთხეები მოცემულია რადიანებში):

1) $\arcsin(\sin 95^\circ)$, $\arcsin(\sin 100^\circ)$, $\arcsin(\sin 140^\circ)$, $\arcsin(\sin 160^\circ)$
2) $\arccos(\cos 92^\circ)$, $\arccos(\cos 97^\circ)$, $\arccos(\cos 107^\circ)$, $\arccos(\cos 118^\circ)$
3) $\arccos(\cos 115^\circ)$, $\arcsin(\sin 115^\circ)$, $\arcsin(\sin 100^\circ)$, $\arccos(\cos 140^\circ)$
4) $\arccos(\cos(-80)^\circ)$, $\arcsin(\sin(-20)^\circ)$, $\arcsin(\sin 89^\circ)$, $\arccos(\cos 70^\circ)$
5) $\arccos(\cos 2000^\circ)$, $\arcsin(\sin 4000^\circ)$, $\arccos(\cos 6000^\circ)$, $\arcsin(\cos 8000^\circ)$
6) $\arcsin(\cos 1445^0)$, $\arccos(\sin 1800^0)$, $\arcsin(\cos 2170^0)$, $\arccos(\sin 2306^0)$
7) $\arccos(\cos 3)$, $\arccos(\cos 6)$, $\arccos(\cos 8)$, $\arccos(\cos 10)$
8) $\arcsin(\cos 4)$, $\arccos(\sin 8)$, $\arcsin(\cos 12)$, $\arccos(\sin 18)$

18. 1) $\alpha+\beta$, თუ $tg\alpha=2$; $ctg\beta=\frac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-2}$, $180^\circ<\alpha\leq 270^\circ$, $90^\circ<\beta<180^\circ$

2) $\alpha+\beta$, თუ $tg\alpha=6, tg\beta=1{,}4$; $90^0<\alpha<180^0$, $-90^0<\beta<0^0$

3) $\alpha+\beta$, თუ $tg\beta=\sqrt{2}$; $tg\alpha=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{6}}$, $0^\circ<\beta<90^\circ$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$

4) $\alpha+\beta$, თუ $tg\alpha=5$; $tg\beta=-1$, $180^\circ<\alpha<270^\circ$, $90^\circ<\beta<180^\circ$

5) $\alpha-\beta$, თუ $tg\alpha=-3$; $tg\beta=-1$, $90^\circ<\alpha<180^\circ$, $90^\circ<\beta<180^\circ$

6) $2\alpha+\beta$, თუ $tg\alpha=\sqrt{3}$; $tg\beta=\frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$, $180^\circ<\alpha<270^\circ$, $90^\circ<\beta<180^\circ$

7) $\alpha-2\beta$, თუ $tg\alpha=\frac{3-4\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}}$; $tg\beta=2$, $-90^\circ<\alpha<0^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$

8) $2\alpha+\beta$, თუ $tg\alpha=3$, $tg\beta=-\frac{1}{7}$, $0^0<\alpha<90^0$, $90^0<\beta<180^0$

19. 1) $\frac{1-tg15^0\cdot tg240^0}{tg75^0+ctg210^0}$

2) $\frac{tg15^\circ+ctg15^\circ}{tg15^\circ-ctg15^\circ}$

3) $\sin^2 37{,}5^\circ-\sin^2 7{,}5^\circ$

4) $\frac{tg15^\circ}{tg30^\circ-tg15^\circ}$

5) $\frac{\sin15^0-2\sin30^0+\sin45^0}{\cos15^0-2\cos30^0+\cos45^0}$

6) $\frac{\sin 48^\circ+\sin 60^\circ+\sin 72^\circ}{\cos 48^\circ+\cos 60^\circ+\cos 72^\circ}$

7) $\frac{2\sin^2 4^0-1}{2ctg49^0\cdot\cos^2 221^0}$

8) $tg60^\circ - tg15^\circ + tg120^\circ - tg75^\circ$

დაადგინეთ უმცირესი დადებითი პერიოდი

20. 1) $\dfrac{ctg(270^\circ - 2\alpha) + tg(270^\circ + 2\alpha)}{\sin^2(90^\circ - 4\alpha)}$

2) $\dfrac{\sin\alpha \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{4}\right)\cdot\left(2\cos\dfrac{\alpha}{2} - \sin\alpha\right)}$

3) $\dfrac{1 + \cos4\alpha + \cos8\alpha + \cos12\alpha}{\cos4\alpha + 2\cos^2 4\alpha - 1}$

4) $2\cos^2 2\alpha + \sqrt{3}\sin4\alpha$

5) $\dfrac{1}{tg\alpha} - tg\alpha - 2tg2\alpha$

6) $\dfrac{1}{ctg\alpha} - ctg\alpha - 2ctg2\alpha$

7) $a\sin x + b\cos x$

8) $\dfrac{\sin6x + \sin7x + \sin8x + \sin9x}{\cos6x + \cos7x + \cos8x + \cos9x}$

დაამტკიცეთ იგივეობები (№№ 21 – 12):

21. 1) $\cos\alpha \cdot tg\dfrac{\alpha}{2} - \sin\alpha = \dfrac{2ctg\dfrac{\alpha}{4}}{1 - ctg^2\dfrac{\alpha}{4}}$

2) $\sin^2\left(\dfrac{57\pi}{8} + \dfrac{\alpha}{8}\right) - \sin^2\left(\dfrac{39\pi}{8} + \dfrac{\alpha}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{\alpha}{4}$

3) $\cos^2\left(2\alpha - \dfrac{11}{8}\pi\right) - \cos^2\left(\dfrac{33\pi}{8} - 2\alpha\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos4\alpha$

4) $\dfrac{3}{4} - \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

5) $\dfrac{2(1 + \cos\alpha)}{\sin\alpha} = \dfrac{1 - tg^2\dfrac{\alpha}{4}}{tg\dfrac{\alpha}{4}}$

6) $\cos2\alpha + \cos4\alpha + \cos12\alpha + \cos14\alpha = 4\cos\alpha\cos5\alpha\cos8\alpha$

7) $\cos4\alpha - \cos6\alpha - \cos8\alpha + \cos10\alpha = -4\sin\alpha\sin2\alpha\cos7\alpha$

8) $\sin8\alpha - \sin10\alpha - \sin12\alpha + \sin14\alpha = -4\sin\alpha\sin2\alpha\sin11\alpha$

22. 1) $\dfrac{\sin\alpha - \sin\dfrac{3}{2}\alpha + \sin2\alpha}{\cos\alpha - \cos\dfrac{3}{2}\alpha + \cos2\alpha} = tg\dfrac{3}{2}\alpha$

2) $\sin^2(3\alpha-5\pi)\cos^2(3\alpha+9\pi)=\dfrac{1-\sin\left(\frac{9}{2}\pi-12\alpha\right)}{8}$

3) $tg4\alpha\cdot(1-tg\alpha\cdot tg3\alpha)+\dfrac{ctg\alpha ctg3\alpha-1}{ctg4\alpha}=\dfrac{4(1+\cos4\alpha)}{\sin6\alpha}.$

4) $\dfrac{1+tg\alpha}{tg\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}$

5) $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha+1}{\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{4}}=\dfrac{2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}}{\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}$

6) $\dfrac{\cos^2\left(\frac{7}{2}\pi-2\alpha\right)}{tg^2(2\alpha-\pi)}-3\sin^2 2\alpha=4\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)$

7) $3-4\cos2\alpha+\cos4\alpha=8\sin^2\alpha-2\sin^2 2\alpha$

8) $3+4\cos2\alpha+\cos4\alpha=8\cos^2\alpha-2\sin^2 2\alpha$

23. 1) $\dfrac{\left(\sin\alpha-\cos\alpha\cdot tg\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2tg2\alpha+tg\alpha-ctg\alpha}{4ctg4\alpha}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin(-\alpha)}$

2) $tg3\alpha\cdot tg2\alpha\cdot tg\alpha=tg3\alpha-tg2\alpha-tg\alpha$

3) $\frac{5}{8}cos^2\alpha+\frac{3}{8}cos4\alpha cos^2\alpha-\frac{3}{4}cos2\alpha-\frac{1}{4}cos2\alpha cos4\alpha=sin^6\alpha$

4) $ctg\alpha-tg\alpha-2tg2\alpha-4tg4\alpha-8tg8\alpha-16tg16\alpha=32ctg32\alpha$

5) $tg(60^\circ+\alpha)\cdot tg(120^\circ+\alpha)\cdot\sin\alpha=\cos(180^\circ+\alpha)\cdot tg3\alpha$

6) $\sin^8\alpha+\cos^8\alpha=\cos^2 2\alpha+\frac{1}{8}\sin^4 2\alpha$

7) $\cos^6\alpha-\sin^6\alpha=\cos2\alpha-\frac{1}{8}\sin2\alpha\cdot\sin4\alpha$

8) $\cos^6\alpha=\dfrac{5\sin^2\alpha}{8}+\frac{3}{8}\cos4\alpha\cdot\sin^2\alpha+\frac{3}{4}\cos2\alpha+\frac{1}{4}\cos2\alpha\cdot\cos4\alpha$

გარდაქმენით ნამრავლად (№№ 24 – 25):

24. 1) $tg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\alpha}{2}$

2) $tg\frac{\alpha}{4}+ctg\frac{\alpha}{4}-2$

3) $3-4\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)$

4) $3-tg^2 2\alpha$

5) $3-4\cos\alpha+2\cos2\alpha$

6) $\sin^2(\alpha+\beta)-\cos^2(\alpha-\beta)$

7) $\sin^6\alpha-5\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^6\alpha$

8) $4\sin^2 2\alpha+2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\sin 2\alpha-\sqrt{6}$

25. 1) $\dfrac{tg^2(\alpha-45^\circ)+1}{tg^2(45^\circ-\alpha)-1}\cdot\dfrac{ctg^2(\alpha-45^\circ)-1}{ctg^2(45^\circ-\alpha)+1}$

2) $\dfrac{\sin 6\alpha}{\sin^4\frac{3}{2}\alpha-\cos^4\frac{3}{2}\alpha}-2$

3) $2\sin^2 3\alpha-3\cos 3\alpha-3$

4) $\sin 3\alpha-2\sqrt{3}\cos^2\frac{3}{2}\alpha+\sqrt{3}$

5) $1-ctg\alpha+\dfrac{1}{\cos\left(\frac{7}{2}\pi+\alpha\right)}$

6) $\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha+\sin^2(45^\circ-\alpha)$

7) $\dfrac{tg\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(2\alpha-\frac{7}{2}\pi\right)}{2\cos^2\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)}$

8) $\dfrac{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(5\pi-2\alpha)-\cos\left(\frac{9}{2}\pi+3\alpha\right)}{4\cos\alpha\cdot\cos\left(7\pi-\frac{3}{2}\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-4\pi\right)}$

ამოხსენით განტოლებები (№№ 26–31):

26. 1) $2\sin x+\cos x=1$

2) $3\sin x+2\cos x=3$

3) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$

4) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=\frac{1}{3}$

5) $\sin^2 x+3\sin x\cos x-4\cos^2 x=0$

6) $2\sin x\cos x+3\sin^2 x-\cos^2 x=0$

7) $4\sin^2 x+\sin x\cos x-4\cos^2 x=3$

8) $\sin^2 x+7\sin x\cos x-3\cos^2 x=2$

27. 1) $\sin 2x+\sin 6x=4\cos^3 2x$

2) $5ctg^2x+3\sin^2 x=\frac{13}{2}$

3) $3tg^2x-\sin^2 x=\frac{5}{2}$

4) $3ctg^2x+tgx-4=0$

5) $\sin 15x\cdot\sin 17x=\sin 3x\cdot\sin 5x$

6) $\cos 4x\cdot\cos 8x=\cos 2x\cdot\cos 6x$

7) $\sin x+\sin 2^\circ=\sin(x+2^\circ)$

8) $\cos 2x + \cos 30^\circ = \sin(2x + 30^\circ)$

28. 1) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 12x + \cos 14x = 0$

2) $\sin 3x + \sin 4x + \sin \frac{10}{3}x + \sin \frac{11}{3}x = 0$

3) $\sin x + \sin \frac{7}{4}x - \sin \frac{5}{4}x - \sin \frac{3}{2}x = 0$

4) $\cos x + \cos 3x + \sin x + \sin 3x = 0$

5) $\cos 3x + \cos x - \cos \frac{x}{3} - \cos \frac{7}{3}x = 0$

6) $\sin 4x - \sin x + \sin \frac{5}{2}x + \sin \frac{x}{2} = 0$

7) $\sin x + \sin \frac{x}{7} - \sin \frac{3}{7}x - \sin \frac{5}{7}x = 0$

8) $\sin^2 x - \sin^2 2x = \sin^2 \frac{5}{3}x - \sin^2 \frac{4}{3}x$

29. 1) $(\cos x - \sin x) \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \cos 2x$

2) $ctgx + 2 = \frac{-\sin x}{1 + \cos x}$

3) $\sin x - \sin 5x = \sqrt{2} \sin 2x$

4) $\sin 2x - \sin 6x = \sqrt{3} \sin 2x$

5) $1 + 2 \cdot (\sin x + \cos x)^2 = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{4(tgx + ctgx)^{-1}}$

6) $\cos(6x + 8^\circ) + 3\sin(3x + 4^\circ) = 2$

7) $\sqrt{2}(1 + \cos 3x) = ctg \frac{3}{2}x$

8) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$

30. 1) $\cos 3x - \cos^3 x = \sin 2x$

2) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \sin 3x = \frac{1}{8} \sin 6x$

3) $\cos \frac{x}{2} \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{32}$

4) $\sin 9x + 2\cos 6x = 2$

5) $\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{tg\frac{x}{2}} = \frac{3}{2}$

6) $\frac{3\sin x + 2\cos x}{\sin x + \cos x} + \frac{\sin x + \cos x}{3\sin x + 2\cos x} = 2$

7) $\frac{6\cos^2\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)}{1 - \sin x} + 2 \cdot \frac{1 + tg\frac{x}{2}}{1 - tg\frac{x}{2}} = 5$

8) $\frac{\sin^3 \frac{x}{2} + \cos^3 \frac{x}{2}}{2 - \sin x} = \frac{1}{3}\cos x$

31. 1) $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}=\frac{1}{\cos^2 x}-1$

2) $3tgx-\sin 2x=2$

3) $1-\frac{1}{2}\cos 4x=tg2x$

4) $\cos^3 2x\cdot\cos 6x+\sin^3 2x\cdot\sin 6x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

5) $\frac{1}{tgz}-tgz+\frac{4}{\cos 4z}=\frac{4tgz}{tg^2 z-1}$

6) $ctg^4 x+1=\cos^3 2x$

7) $ctg^4 3x=\cos^2 6x-1$

8) $tg^4 3x=\sin^2 6x-1$

32. $cosx+cosy-cos(x+y)=1{,}5$

33. $sin4x(cosx-2sin4x)+cos4x(1+sinx-2cos4x)=0$

გამოთვალეთ (№№ 34 – 39):

34. $\cos^2 8^\circ+\cos^2 3^\circ+\cos^2 11^\circ-2\cos 8^\circ\cdot\cos 3^\circ\cdot\cos 11^\circ$

35. $1-\sin^2 27^\circ-\sin^2 12^\circ+2\sin 27^\circ\cdot\sin 12^\circ\cdot\cos 15^\circ$

36. $ctg10^\circ\cdot ctg130^\circ\cdot ctg290^\circ$

37. $16\sin^5 12^\circ-20\sin^3 12^\circ+5\sin 12^\circ$

38. $tg15^0 tg\beta+ctg(15^0+\beta)tg\beta+tg15^0 tg(75^0-\beta)$

39. $arctg3+arctg5+arctg\frac{4}{7}$

40. გამოთვალეთ $f(\alpha)=8\sqrt{3}\sin\alpha\cos^3\alpha-8\sqrt{3}\cos\alpha\sin^3\alpha+2\cos^4\alpha+2\sin^4\alpha-12\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა.

41. გამოთვალეთ $f(\alpha)=a\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+b\cos^2\alpha$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა.

42. გამოთვალეთ $f(\alpha)=a\cos^4\alpha+b\sin^4\alpha,\ a>0,\ b>0$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა.

43. ცნობილია, რომ α კუთხისათვის $\sin\alpha$ ირაციონალური რიცხვია.

ა) იქნება თუ არა $\sin\frac{\alpha}{2n}$ რიცხვი ირაციონალური ნებისმიერი n-სათვის?

ბ) იქნება თუ არა რიცხვი $\sin\frac{\alpha}{2n+1}$ ირაციონალური ნებისმიერი n-სათვის?

44. $\cos 5\cdot 36^\circ=-1$ და $\sin 144^\circ=\sin 36^\circ$ ტოლობების გათვალისწინებით გამოთვალეთ $\cos 36^\circ$.

45. $\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ და $\cos 5\cdot 12^\circ=\frac{1}{2}$ ტოლობების გათვალისწინებით გამოთვალეთ $\cos 12^\circ$.

46. სასრულია, თუ უსასრულო იმ α კუთხეების რაოდენობა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $0\le\alpha\le 90^\circ$ და მათი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები გამოისახება რაციონალური რიცხვებით. მოიყვანეთ ზოგიერთი მათგანის მაგალითი.

47. რაციონალურია თუ ირაციონალური რიცხვები:

ა) $tg1^\circ$;

ბ) $\sin\frac{\pi}{18}$;

გ) $tg\frac{\pi}{16}$;

48. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$ და $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$, მაშინ $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\neq 0$.

49. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, $\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$, მაშინ $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\neq 1$.

50. დაამტკიცეთ იგივეობა:

$$\sin\alpha\left(2\sin^2\frac{\gamma}{2}-\cos\beta\right)+\sin\beta\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos\gamma\right)+\sin\gamma\left(2\sin^2\frac{\beta}{2}-\cos\alpha\right)=0$$

თუ $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

51. დაამტკიცეთ უტოლობა $8\cos^2\alpha-2\sin 2\alpha-2tg2\alpha\geq 3$, თუ $0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{12}$.

52. დაამტკიცეთ უტოლობა $tg^2\alpha+tg^2\beta+tg^2\gamma\geq 1$,თუ $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, $\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$.

53. დაამტკიცეთ უტოლობა $\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)\geq 4$, თუ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

54. დაამტკიცეთ უტოლობა:

ა) $\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{4}+\cdots+\sin\frac{\alpha}{2^n}<\frac{\pi}{2}\sin\alpha$, სადაც $0<\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ და n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია

ბ) $tg1^\circ+tg3^\circ+tg5^\circ+tg7^\circ+tg9^\circ+tg11^\circ+tg13^\circ+tg15^\circ>2\left(tg2^\circ+tg6^\circ+tg10^\circ+tg14^\circ\right)$

55. დაამტკიცეთ უტოლობა: $6\cos^2\alpha-\sqrt{3}\sin 2\alpha-3\sqrt{3}\cos\alpha+3\sin\alpha\geq 0$, თუ $0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{6}$.

56. დაამტკიცეთ უტოლობა:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)-\frac{1}{2}(\sin A+\sin B+\sin C)\geq 3\sqrt[3]{\sin 2A\cdot\sin 2B\cdot\sin 2C}$$

თუ $A>0,\ B>0,\ C>0$, $A+B+C=\frac{\pi}{3}$.

57. დაამტკიცეთ უტოლობა: $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\geq\sin A\cdot\sin B+\sin A\cdot\sin C+\sin B\cdot\sin C$

თუ $A+B+C=\pi$, $A>0,\ B>0,\ C>0$.

58. დაამტკიცეთ უტოლობა:

$$\sqrt{8\sin^2\alpha-4\sin\alpha+1}+\sqrt{8\cos^2\alpha-4\cos\alpha+1}\geq\sqrt{8|\cos 3\alpha|-4\cos^2 3\alpha}$$

59. დაამტკიცეთ უტოლობა: $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\leq\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}$, სადაც $0<\alpha,\beta,\gamma<180^\circ$.

60. ამოხსენით განტოლება: $4\sin^4 x+15(\sin x+\cos x-1)=2\sin 2x+4\sin^2 x$

61. ამოხსენით განტოლება:
$$(1+tg^2 2x)(1+2tgx-tg^2 x)+(1+tg^2 x)(1+2tg2x-tg^2 2x)=2\sqrt{2}(1+tg^2 x)(1+tg^2 2x)$$

62. ამოხსენით განტოლება: $\dfrac{\sin^3\frac{x}{2}-\cos^3\frac{x}{2}}{2-\sin x}=\dfrac{1}{3}\cos x$

63. ამოხსენით განტოლება: $\sin 2x-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}(\sin x+\cos x)+\dfrac{4+\sqrt{3}}{4}=0$

64. ამოხსენით განტოლება: $\sin^3 x+\cos^3 x-9\sin 2x+\dfrac{3}{2}(\sin x+\cos x)\cdot\sin 2x+26\sin x+26\cos x=33$

65. ამოხსენით განტოლება: $16\sin^5 x+16\sqrt{3}\cos^5 x-20\sin^3 x-20\sqrt{3}\cos^3 x+5\sin x+5\sqrt{3}\cos x=2$

66. ამოხსენით განტოლება: $16\sin^5 x-24\sin^3 x+8\sin x=2$

67. ამოხსენით განტოლება: $16\cos^5 x-16\cos^3 x+2\cos x=2$

68. იპოვეთ $tgx+tgx^2+tgx^3=3x^2$ განტოლების ფესვი, რომელიც მოთავსებულია შუალედში: $\left[0;\ \dfrac{\sqrt[3]{11}}{2}\right]$.

69. გააჩნია თუ არა განტოლებას $16\cos^4 x+16\cos^3 x+2=0$ ფესვი?

70. ამოხსენით განტოლება: $\dfrac{\sin^2 2x}{4}+\dfrac{5}{2}\sin 2x+\sqrt{2}\sin 2x\cdot\sin(x+45^\circ)+3\sqrt{2}\sin(x+45^\circ)-3=0$

71. ამოხსენით განტოლება: $19\sin^3 x-7\cos^3 x-7\sin x+\cos x=0$

72. გააჩნია თუ არა განტოლებას $5\sin^3 x+5\sin^2 x-5\sin x+1=0$ ამონახსნი?

73. ამოხსენით განტოლება: $\sqrt[3]{\sin^2 x}\cdot(3+\cos 2x+\cos 4x+\cos 8x)=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\sin^2 8x}$

74. ამოხსენით განტოლება: $\arcsin(|xyz|)+\arcsin\dfrac{|xz|+|xy|+|yz|}{3}=\pi$

75. ამოხსენით განტოლება: $\arcsin(tg(x+y))+\arccos(ctg(x-y))=\dfrac{3}{2}\pi$

76. ამოხსენით უტოლობა: $2^{|x|+1}-1\le\cos^7 x-\sin^7 x$

77. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა: $\begin{cases} tgx+tgy=2-\sqrt{\sin(x-45^\circ)} \\ ctgx+ctgy=2-\sqrt{\cos(y+45^\circ)} \end{cases}$

თუ, x და y მოთავსებულია შუალედში $\left[\pi;\ \dfrac{3}{2}\pi\right]$.

78. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases}\sin^3 x+\cos^3 y=1\\ \cos y\left(2-\cos^2 x\right)+\sin x\left(2-\sin^2 y\right)=1\end{cases}$$

79. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases}tgx\cdot tgy=-1\\ tgy\cdot tgz=3\\ x+y+z=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

§17. განტოლებების ამოხსნა მთელ და ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში

1. დეას დაავალეს 18 ამოცანის ამოხსნა. ყოველ სწორად ამოხსნილ ამოცანაში მას ეწერებოდა 7 ქულა, ხოლო ყოველ არასწორად ამოხსნილში აკლდებოდა 4 ქულა. თუ დეას ამოცანის ამოხსნის მცდელობა საერთოდ არ ექნებოდა მაშინ მას ქულა არ ეწერებოდა. რა მაქსიმალური რაოდენობის ამოცანები ამოუხსნია მას სწორად თუ დააგროვა 14 ქულა.

2. შეგვიძლია თუ არა დავახურდავოთ 30 ლარი, ათი 1, 2, 5 ლარიანი კუპიურებით თუ აუცილებლად გამოყენებულ უნდა იყოს ათივე კუპიურა 1, 2, 5 ლარიანი კუპიურა.

3. მოცემულია ხუთკუთხედები და ცამეტკუთხედები. მათ სულ გააჩნიათ 355 დიაგონალი. რა მაქსიმალური რაოდენობის ფიგურა შეიძლება გვქონდეს?

4. მოცემულია შვიდკუთხედები და თერთმეტკუთხედები. მათ სულ გააჩნიათ 202 დიაგონალი. რა მაქსიმალური რაოდენობის ფიგურა შეიძლება გვქონდეს?

5. ანას უნდა ეყიდა 4 ლარი და 37 თეთრი ღირებულების საერთო რვეულები და საწერკალმები. რა მაქსიმალური რაოდენობის საერთო რვეულები შეეძლო ეყიდა ანას, თუ 1 ცალი რვეული ღირდა 38 თეთრი, ხოლო 1 ცალი საწერკალამი 5 თეთრი.

6. ვახტანგის უნდა ეყიდა 3 ლარი და 25 თეთრი ღირებულების სახატავი რვეულები და ფანქრები. რა მაქსიმალური რაოდენობის ფანქარი შეეძლო ეყიდა ვახტანგის, თუ 1 ცალი რვეული ღირდა 15 თეთრი, ხოლო 1 ცალი ფანქარი 7 თეთრი?

7. აჩვენეთ, რომ $7x+13y=23z$ განტოლებას გააჩნია ამონახსნი მთელ რიცხვთა სიმრავლეში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მთელ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი გააჩნია $8x+5y=23z$ განტოლებას.

8. აჩვენეთ, რომ $5x+12y=19z$ განტოლებას, გააჩნია ამონახსნი მთელ რიცხვთა სიმრავლეში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მთელ რიცხვთა სიმრავლეში გააჩნია ამონახსნი განტოლებას $2x+y=19z$.

9. გააჩნია თუ არა ამონახსნი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში განტოლებას

$$7x^2=y^3+y^2+1$$

10. გააჩნია თუ არა განტოლებას

$$\overline{xxx\cdots x8} = 19y$$

ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში?

11. გააჩნია თუ არა განტოლებას

$$x^3 + y^3 = 2005$$

ამონახსნი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში?

12. გააჩნია თუ არა განტოლებას

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy = 105$$

ამონახსნი მთელ რიცხვთა სიმრავლეში?

13. გააჩნია თუ არა განტოლებას

$$x^2y^2 - 2x^2y + 2x^2 + y^2 - 20xy + 18x - 89 = 0$$

ამონახსნი მთელ რიცხვთა სიმრავლეში?

14. შეიძლება თუ არა $x^4 + y^4 + z^4 = 2\left(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2\right)$ განტოლების ფესვები წარმოადგენენ რომელიმე სამკუთხედის გვერდებს?

15. გააჩნია თუ არა ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა განტოლებას

$$\overline{128\underbrace{77\cdots7}_{x-\text{ჯერ}}} = 13y$$

16. გააჩნია თუ არა $x^3 + y^3 = 7z^3 + 3$ განტოლებას ამონახსნი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში?

17. გააჩნია თუ არა $3^x + 5^x + 7^x + 11^x = 13^y + 17^y$ განტოლებას ამონახსნი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში?

18. გააჩნია თუ არა $z^2 + 2x^2 + 3y^2 = 496$ განტოლებას ამონახსნი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში?

19. გააჩნია თუ არა $x^3 + 6x^2 + 12x + 14 - y^6 = 0$ განტოლებას ამონახსნი მთელ რიცხვთა სიმრავლეში?

20. გააჩნია თუ არა $x^3 + 3x^2 + 3x + 49 - y^3 = 0$ განტოლებას ამონახსნი მთელ რიცხვთა სიმრავლეში?

§18. რიცხვითი სიმრავლეები

ა – ჯგუფი

1. იპოვეთ შემდეგი რიცხვების: $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{4}$ საშუალო არითმეტიკული.

ა) $\frac{101}{36}$ ბ) $\frac{42}{23}$ გ) $\frac{121}{12}$ დ) $\frac{121}{36}$

2. იპოვეთ შემდეგი რიცხვების: 5,7; 2,03; 5,13; 7,904 საშუალო არითმეტიკული.

ა) 5,191 ბ) 5,181 გ) 5,291 დ) 5,281

3. ათი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული 5-ის ტოლია. ჩამოაშორეს რა მას ერთი რიცხვი, დარჩენილის საშუალო არითმეტიკული 4,5-ის ტოლი გახდა, რას უდრის ჩამოშორებული რიცხვი?

ა) 8,5 ბ) 9,5 გ) 4,5 დ) 10

4. ათი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული 5-ის ტოლია. ჩამოაშორეს რა მას ერთი რიცხვი, დანარჩენის საშუალო არითმეტიკული 8-ის ტოლი გახდა, რას უდრის ჩამოშორებული რიცხვი?

ა) 22 ბ) 22 გ) -22 დ) -24

5. მოცემული ათი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული 8-ის ტოლია. დაუმატეს რა მას ათი რიცხვი, მიღებული 20 რიცხვის საშუალო არითმეტიკული 12-ის ტოლი გახდა. რას უდრის დამატებული რიცხვების საშუალო არითმეტიკული?

ა) 16 ბ) 20 გ) 12 დ) 18

6. მოცემული ათი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული 15-ის ტოლია. ამ რიცხვებიდან ოთხი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული 5-ის ტოლია. რას უდრის დანარჩენი ექვსი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული?

ა) 21,(6) ბ) 21,6 გ) 20,(6) დ) 21,3

7. ათი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული 12-ის ტოლია. ცნობილია, რომ ერთი რიცხვის დამატებით მიღებული თერთმეტი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული ისევ 12-ის ტოლია. რისი ტოლია დამატებული რიცხვი?

ა) 14 ბ) 12 გ) 16 დ) 15

8. შეიძლება თუ არა ასი განსხვავებული ირაციონალური რიცხვის საშუალო არითმეტიკული იყოს მთელი რიცხვი?

ა) არ შეიძლება ბ) შეიძლება გ) ირაციონალური რიცხვია

დ) უარყოფითი რიცხვია.

9. მოცემულია რიცხვების სამი ჯგუფი, წევრების სხვადასხვა რაოდენობით. თითოეულ ჯგუფში შემავალი რიცხვების საშუალო არითმეტიკული a-ს ტოლია. რისი ტოლია ყველა რიცხვის საშუალო არითმეტიკული?

ა)$2a$ ბ)$3a$ გ) $\frac{a}{2}$ დ) a

10. მოცემულია რიცხვების ორი ჯგუფი სხვადასხვა რაოდენობის წევრებით. ამ ჯგუფში შემავალი რიცხვების საშუალო არითმეტიკული შესაბამისად a და b-ს ტოლია ($a \neq b$).იქნება თუ არა ყველა რიცხვის საშუალო არითმეტიკული $(a+b)/2$-ის ტოლი?

ა) ტოლია $(a+b)/2$ ბ) არ არის ტოლი $(a+b)/2$

გ) ტოლია $(a-b)/2$ დ) ტოლია $a+b$

11. დაასახელეთ ათი ისეთი რიცხვი, რომ მათი საშუალო არითმეტიკული ამ რიცხვებიდან უდიდესის 90% ტოლი იყოს.

ა) {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 24} ბ) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $\frac{45}{8}$}

გ) {1, 3, 5, 7, 9, 10,11, 12, 13, 18} დ) {-1, -2, -3, -4, 5, 6, 7, 15, 20, 35}

12. რიცხვით ღერძზე მოცემულია წერტილები A(2) და B(14). AB მონაკვეთზე აიღეთ ისეთი M წერტილი, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობას AM:MB=1:3

ა) M(8) ბ)M(6) გ)M(5) დ) M(3)

13. რიცხვით ღერძზე აიღეთ ისეთი M წერტილი, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობას AM:AB=7:5 თუ A და B წერტილების კოორდინატებია A(5) და B(15).

ა) M(12) ბ)M(10) გ) M(8) დ) $M\left(\frac{65}{6}\right)$

14. რიცხვით ღერძზე აიღეთ ისეთი წერტილი, რომელიც a და b წერტილებიდან თანაბრადაა დაშორებული.

ა) $M\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ ბ) $M\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ გ) $M\left(\dfrac{a+b}{3}\right)$ დ) $M\left(\dfrac{a-b}{3}\right)$

15. დაასახელეთ ნებისმიერი ხუთი წილადი, რომელიც მოთავსებულია 1 და 2 შორის.

ა) $1\frac{1}{2};3\frac{1}{2};3\frac{2}{3};3\frac{2}{4};1\frac{1}{4}$ ბ) $\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{5}{4};\frac{7}{3};\frac{2}{5}$

გ) $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6}$ დ) $1\frac{1}{2};1\frac{1}{3};1\frac{1}{4};1\frac{1}{5};1\frac{1}{6}$

16. დაასახელეთ ერთი რიცხვი მაინც, რომელიც მოთავსებულია $\frac{11}{7}$ და $\frac{12}{7}$ შორის

ა) $\frac{23}{15}$ ბ) $\frac{15}{8}$ გ) $\frac{23}{14}$ დ) $\frac{13}{9}$

17. დაასახელეთ უდიდესი წილადი, რომელიც მოთავსებულია $\frac{11}{17}$ და $\frac{12}{17}$ შორის და რომლის მნიშვნელია 323.

ა) $\frac{189}{323}$ ბ) $\frac{251}{323}$ გ) $\frac{221}{323}$ დ) $\frac{227}{323}$

18. გამოთვალეთ ყველა იმ უკვეცი წილადის ჯამი, რომელიც მოთავსებულია $2\frac{1}{5}$ და $3\frac{1}{5}$ შორის და რომელთა მნიშვნელია 15.

ა) $21\frac{2}{15}$ ბ) $23\frac{1}{15}$ გ) $20\frac{1}{15}$ დ) 22

19. გამოთვალეთ ყველა იმ უკვეცი წილადის ჯამი, რომელიც მოთავსებულია $3\frac{1}{3}$ და $3\frac{5}{7}$ შორის და რომელთა მნიშვნელია 21.

ა) 16 ბ) 14 გ) $17\frac{2}{21}$ დ) $15\frac{1}{21}$

20. დაასახელეთ უმცირესი სამნიშნა რიცხვი, · რომელიც 3-ზე, 4-ზე, 5-ზე და 6-ზე გაყოფისას ნაშთში იძლევა 1-ს.

ა) 119 ბ) 129 გ) 127 დ) 121

21. დაასახელეთ უდიდესი სამნიშნა რიცხვი, რომელიც 3-ზე, 4-ზე, 6-ზე და 7-ზე გაყოფისას ნაშთში იძლევა 1-ს.

ა) 935 ბ) 985 გ) 925 დ) 965

22. დაასახელეთ $M_0(7;9)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $y=-3$ წრფის მიმართ.

ა) (-7;-9) ბ) (7;-9) გ) (-7;9) დ) $M_1(7;-15)$

23. დაასახელეთ $M_0(3;5)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $y=-3$ წრფის მიმართ.

ა) (-3;5) ბ) (3;-5) გ) $M_1(3;-11)$ დ) (-3;15)

24. a რიცხვს გააჩნია სამი მარტივი გამყოფი. რამდენი გამყოფი გააჩნია a რიცხვს?

ა) 5 ბ) 3 გ) 6 დ) 8

25. a რიცხვს გააჩნია ზუსტად ხუთი მარტივი გამყოფი. რამდენი გამყოფი გააჩნია a რიცხვს?

ა) 24 ბ) 16 გ) 32 დ) 5

26. რამდენი ირაციონალური რიცხვი არსებობს შუალედში (2;5)

ა) 2 ბ) 4 გ) 100 დ) უსასრულო

27. რამდენი რაციონალური რიცხვი არსებობს შუალედში $(\sqrt{2};\sqrt{5})$.

ა) 2 ბ) 5 გ) 1000 დ) უსასრულო

28. გამოთვალეთ მანძილი A(2;3) და B(5;7) წერტილებს შორის.

ა) 3 ბ) 4 გ) 5 დ) 6

29. რომელ მეოთხედშია მოთავსებული AB მონაკვეთის შუაწერტილი თუ A-ს კოორდინატებია A(3;5), ხოლო B წერტილის – B(-2;-3).

ა) I ბ) II გ) III დ) IV

30. რომელ მეოთხედშია მოთავსებული AB მონაკვეთის შუაწერტილი თუ A-ს კოორდინატებია A(4;-3), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია B(-5;8).

ა) I ბ) II გ) III დ) IV

31. მოცემულია A(5;7) და B(-3;-1) წერტილები. M წერტილი AB მონაკვეთს ყოფს შეფარდებით 5:3, A წერტილის მხრიდან .რომელ მეოთხედშია M წერტილი?

ა) I ბ) II გ) III დ) IV

32. მოცემულია A(-4;2) და B(2;2) წერტილები. M წერტილი მდებარეობს AB მონაკვეთზე და A წერტილიდან დაშორებულია 1-ზე მეტი მანძილით ვიდრე B წერტილიდან. რომელ მეოთხედშია M წერტილი?

ა) I ბ) II გ) III დ) IV

33. დაასახელეთ $M_0(7;-3)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი კოორდინატთა სათავის მიმართ.

ა) (7;-7) ბ) (7;3) გ) (-7;-3) დ) $M_1(-7;3)$

34. სიბრტყის A წერტილის კოორდინატებია A(2;3), ხოლო AB მონაკვეთის სიგრძე 5-ის ტოლია. რამდენი ისეთი წერტილი არსებობს სიბრტყეზე, რომ AB მონაკვეთის გეგმილის სიგრძე OX ღერძზე გამოისახებოდეს ნატურალური რიცხვით?

ა) 15 ბ) 16 გ) 17 დ) 18

35. სიბრტყის A წერტილის კოორდინატებია A(3;5), ხოლო AB მონაკვეთის სიგრძე 3-ის ტოლია. რამდენი ისეთი წერტილი არსებობს სიბრტყეზე, რომ AB მონაკვეთის გეგმილის სიგრძე OX ან OY ღერძზე გამოისახებოდეს ნატურალური რიცხვით?

ა) 12 ბ) 13 გ) 14 დ) 15

36. რისი ტოლი არ შეიძლება იყოს ორი $[a+b]$ და $[a]+[b]$ რიცხვის სხვაობა ($[a]$ არის a-ს მთელი ნაწილი, ე.ი. უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება a-ს).

ა) 0 ბ) 1 გ) -1 დ) 2

37. რისი ტოლი არ შეიძლება იყოს ორი $\{a+b\}$ და $\{a\}+\{b\}$ რიცხვის სხვაობა (სადაც $\{a\}=a-[a]$ – ეწოდება a რიცხვის წილადი ნაწილი)

ა) 0 ბ) $\frac{1}{2}$ გ) $-\frac{1}{3}$ დ) 1

38. რა ციფრით მთავრდება ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 1-დან 75-ის ჩათვლით?

ა) 1 ბ) 5 გ) 3 დ) 0

39. რამდენი 0-ით ბოლოვდება ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 10 -დან 25-ის ჩათვლით?

ა) 2 ბ) 3 გ) 6 დ) 5

40. მარტივი რიცხვია თუ შედგენილი ოთხი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ჯამი?

ა) შედგენილი ბ) მარტივი

41. მოცემულია ორი სამნიშნა რიცხვი, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდება მხოლოდ ციფრთა განლაგებით. რა მაქსიმალური მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს მათმა სხვაობამ?

ა) 861 ბ) 702 გ) 792 დ) 801

42. დაამტკიცეთ,რომ თუ $a-b$ იყოფა 7-ზე მაშინ მოიძებნება ისეთი d რიცხვი, რომ $a+bd$ გაიყოფა ასევე 7-ზე.

43. a რიცხვის b-ზე გაყოფით ნაშთი მიიღება 7. რა უმცირესი რიცხვი უნდა დავუმატოთ a-ს, რომ მიღებული რიცხვის b-ზე გაყოფის შედეგად ნაშთი ტოლი იყოს 3.

44. a რიცხვის b-ზე გაყოფით მიიღება ნაშთი 5,ხოლო c რიცხვის b-ზე გაყოფით – 4. რისი ტოლი იქნება ნაშთი თუ $12a-15c$ გავყოფთ b-ზე?

45. დაამტკიცეთ, რომ რიცხვი

$2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}-1$ იყოფა 15-ზე, თუ ხარისხის მაჩვენებელთა რაოდენობა 1-ზე მეტი ნატურალური რიცხვია

46. დაამტკიცეთ, რომ რიცხვი

$2^{3^{4^{\cdot^{\cdot^{9}}}}}-1$ იყოფა 73-ზე

47. არსებობს თუ არა ისეთი სამნიშნა რიცხვი, რომლისთვისაც სრულდება პირობა
$\overline{abc}=\overline{ab}\cdot c$

48. არსებობენ თუ არა ისეთი a,b,c ციფრები, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას
$\overline{aa}\cdot\overline{bbb}=\overline{ccccc}$

49. რაღაც რიცხვი შედგენილია მხოლოდ სამიანებით,შეგეიძლია თუ არა მხოლოდ შვიდიანებით შეადგინოთ ისეთი რიცხვი 'რომელიც უნაშთოდ გაიყოფა სამიანებით შედგენილ მოცემ·ულ რიცხვზე

50. რაღაც რიცხვი შედგენილია მხოლოდ შვიდიანებით, შეგეიძლია თუ არა მხოლოდ სამიანებით შეადგინოთ ისეთი რიცხვი,რომელიც უნაშთოდ გაიყოფა შვიდიანებით შედგენილ მოცემულ რიცხვზე.

51. დაამტკიცეთ, რომ თუ რაიმე წრფეზე მდებარეობს ორი წერტილი, რომელთა კოორდინატები გამოისახება რაციონალური რიცხვებით, მაშინ ამ წრფეზე მდებარეობს წერტილების უსასრულო რაოდენობა რომლებსაც ასევე რაციონალური კოორდინატები გააჩნიათ.

ბ – ჯგუფი

52. a რიცხვი არის n რიცხვის საშუალო არითმეტიკული, ხოლო $b\ (a<b)$ - m რიცხვის საშუალო არითმეტიკული. რა შეფარდებით ყოფს $[a,b]$ შუალედს ამ ორივე რიცხვის საშუალო არითმეტიკული?

53. მოცემულია სასრული არითმეტიკული პროგრესია. $d\neq 0$. რა პირობებში იქნება მისი საშუალო არითმეტიკული ამ პროგრესიის წევრის ტოლი?

54. მოცემულია სასრული გეომეტრიული პროგრესია.$q\neq 1$.რა პირობებში იქნება მისი საშუალო გეომეტრიული ამ პროგრესიის წევრის ტოლი?

55. არსებობს თუ არა ისეთი ასი განსხვავებული რიცხვი, რომლებსაც გააჩნიათ შემდეგი თვისება: ამ რიცხვებიდან ნებისმიერი ორის საშუალო არითმეტიკული არ ემთხვევა მოცემული რიცხვებიდან არცერთს.

56. არსებობს თუ არა ასი ისეთი განსხვავებული რიცხვი, რომ ამ რიცხვებიდან ნებისმიერად აღებული ნაწილის საშუალო გეომეტრიული გამოისახება ნატურალური რიცხვით.

57. დაამტკიცეთ, რომ თუ რიცხვთა მიმდევრობა $a_1, a_2, ..., a_n$ ზრდადია, მაშინ მიმდევრობა $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2+a_3}{3}, ...$ ასევე ზრდადია.

58. არსებობს თუ არა რიცხვთა ისეთი ზრდადი მიმდევრობა $a_1, a_2, ..., a_n$, რომ სიმრავლეები $A_1, A_2, ..., A_m$ წარმოადგენდნენ $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ·სიმრავლის ქვესიმრავლეებს, ამასთანავე $A_1 \subset A_2 \subset ...A_m \subset A$ და მათში შემავალი რიცხვების საშუალო არითმეტიკულები ადგენდნენ: ა) კლებად მიმდევრობას, ბ) ზრდად მიმდევრობას?

59. იპოვეთ $M_0(2;4)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი S(0;-2) წერტილის მიმართ.

60. გამოთვალეთ მანძილი AB მონაკვეთისა და CD მონაკვეთის შუაწერტილებს შორის, თუ A და B წერტილების კოორდინატებია A(0;5),B(2;1) ხოლო C და D-სი - C(10;22),D(4;0).

61. დაასახელეთ სიბრტყეზე ისეთი ხუთი წერტილი რაციონალური კოორდინატებით, რომლებიც კოორდინატთა სათავიდან დაშორებულია 1-ის ტოლი მანძილით.

62. დაასახელეთ სიბრტყეზე ისეთი ექვსი წერტილი, რომლებიც $M_0(3;8)$ წერტილიდან დაშორებულია 1 სმ-ის ტოლი მანძილით.

63. იპოვეთ $M_0(1;5)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $S(-1;-2)$ წერტილის მიმართ.

64. *ABC* სამკუთხედის წვეროების კოორდინატებია *A*(2;0),*B*(0;3),*C*(1;4). იპოვეთ OY ღერძის მიმართ მისი სიმეტრიული სამკუთხედის წვეროს კოორდინატები.

65. *ABC* სამკუთხედის წვეროების კოორდინატებია A(1;2),B(2;4),C(5;3). იპოვეთ OY ღერძის მიმართ მისი სიმეტრიული სამკუთხედის წვეროს კოორდინატები.

66. *ABC* სამკუთხედის წვეროების კოორდინატებია *A*(1;2), *B*(2;4), *C*(5;3). იპოვეთ კოორდინატთა სათავის მიმართ მისი სიმეტრიული სამკუთხედის წვეროს კოორდინატები.

67. იპოვეთ $M_0(3;4)$ წერტილის, $y = 0,5x$ წრფის მიმართ სიმეტრიული წერტილის კოორდინატები.

68. *ABC* სამკუთხედის წვეროების კოორდინატებია A(2;1),B(10;5),C(3;9). როგორია ეს სამკუთხედი?

69. *ABC* სამკუთხედის წვეროების კოორდინატებია A(7;14),B(10;5),C(16;7). როგორია ეს სამკუთხედი?

70. არსებობს თუ არა ისეთი წრეწირი, რომელიც არ შეიცავს არცერთ რაციონალურ კოორდინატებიან წერტილს?

71. *ABC* სამკუთხედის წვეროების კოორდინატებია A(2;2),B(5;8),C(12;6).იპოვეთ სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

72. გამოთვალეთ კუთხის სიდიდე, თუ მისი წვეროს კოორდინატებია A(4;2), ხოლო წერტილები B(6;3) და C(5;7) მდებარეობენ მის გვერდებზე.

73. გამოთვალეთ კუთხის სიდიდე, თუ მისი წვეროს კოორდინატებია A(6;6), ხოლო წერტილები B(10;8) და C(8;10) მდებარეობენ მის გვერდებზე.

74. მოცემულია ABC სამკუთხედის წვეროების კოორდინატები: A(2;2),B(5;8),C(12;6). იპოვეთ სამკუთხედის ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილის (ჩახაზული წრეწირის ცენტრის) კოორდინატები.

75. მოცემულია ABC სამკუთხედის წვეროების კოორდინატები: A(2;2),B(5;8),C(12;6). იპოვეთ სამკუთხედის სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

76. არსებობს თუ არა ისეთი წრფივი ფუნქცია, რომლის გრაფიკი გადის წერტილზე: ა) $A(1;2)$ და მის გრაფიკზე, არ ძევს არცერთი წერტილი რაციონალური კოორდინატებით; ბ) $A(\sqrt{2};\ \sqrt{3})$ და მის გრაფიკზე, არ ძევს არცერთი წერტილი რაციონალური კოორდინატებით.

77. დაამტკიცეთ, რომ ქვემოთ წარმოდგენილი რიცხვები მთელი რიცხვებია:

ა) $\dfrac{8^{444}-4^{256}}{10}$ ბ) $\dfrac{7^{1980}-3^{424}}{10}$

78. დაამტკიცეთ, რომ რიცხვები n(n+1) და (3n+7)(27n+4), n-ის არცერთი მნიშვნელობისათვის არ მთავრდებიან ერთი და იგივე ციფრით.

79. არსებობს თუ არა ისეთი n ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც $32^{7n-2}-6^{n+1}$ რიცხვი იყოფა 10-ზე.

80. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის $169^n+36^n-2\cdot78^n$ რიცხვი იყოფა 49-ზე.

81. დაამტკიცეთ,რომ ნებისმიერი კენტი n რიცხვისთვის რიცხვი $6\cdot19^n-6^{n+2}+6\cdot7^{n+1}$ იყოფა 13-ზე.

82. დაამტკიცეთ რომ ნებისმიერი კენტი n რიცხვისათვის რიცხვი $4\cdot11^{n+1}-41\cdot4^n+3^{n+1}$ იყოფა 7-ზე.

83. რაციონალურია თუ ირაციონალური რიცხვი $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}$?

84. რაციონალურია თუ ირაციონალური რიცხვი $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}$?

85. რაციონალურია თუ ირაციონალური რიცხვი $\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{21}$?

86. არსებობს თუ არა მთელ კოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლება, რომლის ფესვია $\sqrt[3]{2}$?

87. ცხრილების გარეშე დაადგინეთ დადებითია თუ უარყოფითი რიცხვი $10+\sqrt[3]{4}-8\sqrt[3]{2}$

88. არსებობენ თუ არა ისეთი ირაციონალური α და β რიცხვები, რომელთათვისაც $\alpha\cdot\beta$; α/β; $\alpha+\beta\neq0$ რიცხვები რაციონალური რიცხვებია.

89. დაამტკიცეთ, რომ თუ რიცხვები $a^2-b^2, a^3+b^3, \dfrac{a\cdot b}{a-b}$ რაციონალურია, მაშინ რაციონალურია რიცხვიც a^4+b^4.

90. შეიძლება თუ არა:
ა) რაციონალური რიცხვის ირაციონალური ხარისხი იყოს რაციონალური რიცხვი?
ბ) ირაციონალური რიცხვის ირაციონალური ხარისხი იყოს რაციონალური რიცხვი?

91. დაამტკიცეთ, რომ თუ n,n+2,n+4 მარტივი რიცხვებია, მაშინ n^2+4n+2 რიცხვიც ასევე მარტივია.

92. დაამტკიცეთ, რომ n-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $5^n-4n+15$ რიცხვი იყოფა 16-ზე.

93. დაამტკიცეთ, რომ იმ ირაციონალური რიცხვების რაოდენობა, რომელთა შორის ნებისმიერი ორი რიცხვის შეფარდება არაა მთელი რიცხვი უსასრულოა.

94. ერთეულ რადიუსიან წრეში მოთავსებულია 17 წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ ამ წერტილებს შორის არსებობს ისეთი ორი წერტილი მაინც, რომელთა შორის მანძილი არ აღემატება $\sqrt{2}/2$.

95. მოცემულია n^2 რაოდენობის ნამდვილი რიცხვი. ცნობილია, რომ მათი ნამრავლი ერთის ტოლია. ამასთანავე, ამ რიცხვებიდან ნებისმიერი m რაოდენობის (m<n) რიცხვების ნამრავლი ერთი და იგივე რიცხვია. იპოვეთ ამ რიცხვების ჯამი.

96. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა მდებარეობს $0X$ ღერძზე,ხოლო სამკუთხედის წვეროს კოორდინატებია $A(3;0)$ და $B(8;0)$. იპოვეთ მართი კუთხის წვეროს კოორდინატები, თუ იგი მდებარეობს პირველ მეოთხედში და ცნობილია რომ სამკუთხედი ტოლფერდაა.

97. რომბის ერთი გვერდი ძევს $0X$ ღერძზე. მ ღერძზე მდებარე წვეროს კოორდინატებია $A(4;0)$ და $B(10;0)$. იპოვეთ რომბის დანარჩენი წვეროს კოორდინატები თუ ცნობილია, რომ ისინი მდებარეობენ პირველ მეოთხედში და რომბის A მახვილი კუთხე 60^o-ია.

98. რომელი რიცხვების რაოდენობაა მეტიხუთნიშნა რიცხვების რომელთა ყველა ციფრი ლუწია თუ ხუთნიშნა რიცხვების რომელთა ყველა ციფრი კენტია (ციფრები არ მეორდება)

99. იპოვეთ ისეთი უმცირესი რიცხვი, რომელიც 2-ზე, 3-ზე, 4-ზე, 5-ზე, 6-ზე, 8-ზე, 9-ზე გაყოფისას ნაშთში იძლევა 1-ს.

100. მოცემულია n რაოდენობის ერთმანეთისგან განსხვავებული რიცხვი. შეგვიძლია თუ არა ამ რიცხვებს დაემატოთ ამავე n რაოდენობის ახალი განსხვავებული რიცხვი ისე, რომ ამ $2n$ რიცხვის საშუალო არითმეტიკული უცვლელი დარჩეს.

101. მოცემულია n რიცხვი $a_1, a_2, \ldots, a_n$. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ამ რიცხვების ისეთი ორი ჯგუფი და a რიცხვი, რომ მანძილების ჯამი a რიცხვიდან პირველი ჯგუფის წვერებამდე ტოლია მანძილების ჯამისა a რიცხვიდან მეორე ჯგუფის წვერებამდე.

102. მოცემულია სამი რიცხვი $a<b<c$. არსებობს თუ არა რიცხვების ისეთი ორი ჯგუფი $a_1, a_2, \ldots, a_n$ და $b_1, b_2, \ldots, b_m$, რომ პირველი ჯგუფის საშუალო არითმეტიკული იყოს a, მეორე ჯგუფის – c, ხოლო ორივე ჯგუფის – b.

103. ნებისმიერი საკმარისად დიდი ნატურალური n რიცხვისათვის არსებობს თუ არა ისეთი ერთმანეთისაგან განსხვავებული n რიცხვი, რომ ამ რიცხვებიდან რამდენი რიცხვიც არ უნდა ავიღოთ მათი საშუალო არითმეტიკული ნატურალური რიცხვი იყოს.

104. მოცემულია რიცხვები $a<b<c$. არსებობს თუ არა რიცხვების ისეთი ორი ჯგუფი, რომ პირველი ჯგუფის საშუალო გეომეტრიული იყოს– a, მეორე ჯგუფის – c, ხოლო ორივე ჯგუფის – b.

105. არსებობს თუ არა რიცხვების ისეთი სამი ჯგუფი $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_m$; $c_1, c_2, \ldots, c_k$ რომელთა წევრების რაოდენობა ამ ჯგუფებში სხვადასხვაა, ამასთან მათი საშუალო არითმეტიკულები ტოლი არაა, ხოლო სამივე ჯგუფის საშუალო არითმეტიკული თითოეული მათგანის საშუალო არითმეტიკულების საშუალო არითმეტიკულის ტოლია.

106. მოცემულია განსხვავებული რაციონალური რიცხვები a, b, c. არსებობს თუ არა რიცხვების ისეთი ორი ჯგუფი , რომ მათი საშუალო არითმეტიკული და ერთად აღებული ყველა რიცხვის საშუალო არითმეტიკული წარმოადგენს მოცემულ რიცხვებს.

107. არსებობს თუ არა ისეთი ათასი რიცხვი , რომ ამ რიცხვებიდან ნებისმიერად აღებული ნაწილის, როგორც საშუალო არითმეტიკული, ასევე საშუალო გეომეტრიული განსხვავდება ამ რიცხვებისაგან.

108. მოცემულია სამკუთხა პირამიდა, რომლის წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხეები 90°-ის ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$Q \geq \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}$$

სადაც Q ფუძის ფართობია, ხოლო S_1, S_2, S_3 გვერდითი წახნაგების ფართობებია. რა შემთხვევაში აქვს ადგილი ტოლობას?

109. n რიცხვის რა მნიშვნელობებისათვის იყოფა 2^n+1 რიცხვი, 17-ზე?

110. n რიცხვის რა მნიშვნელობებისათვის იყოფა $3+3^2+\ldots+3^n$ რიცხვი 25-ზე?

111. დაამტკიცეთ რომ რიცხვი $14 \cdot 8^n + 5$ იყოფა 13-ზე n-ის უსასრულო რაოდენობისათვის.

112. n რიცხვის რა მნიშვნელობებისათვის იყოფა 13-ზე 3^n-1 რიცხვი?

113. დაამტკიცეთ, რომ რიცხვი 3^n+2^n იყოფა 5-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა n კენტია.

114. დაამტკიცეთ, რომ რიცხვი 3^n+2^n იყოფა 17-ზე n-ის უსასრულო რაოდენობისათვის.

115. გამოთვალეთ $10^{10^{10}}+10^{10^5}$ რიცხვის 7-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი.

116. გამოთვალეთ

$$5+5^5+5^{5^5}+\ldots+5^{5^{5^{\cdot^{\cdot^{5}}}}}$$

რიცხვის 13-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი, თუ ბოლო შესაკრებში ხარისხის მაჩვენებელთა რაოდენობაა 25.

117. დაამტკიცეთ, როგორიც არ უნდა იყოს მთელ რიცხვთა მიმდევრობა სადაც $a_1, a_2, \cdots a_k \neq 17m$, ყოველთვის მოიძებნება k რიცხვების ისეთი უსასრულო რაოდენობა რომ $a_1^{16}+a_2^{16}+\ldots+a_k^{16}$ რიცხვი გაიყოფა 17-ზე.

118. დაამტკიცეთ, რომ n ნატურალური რიცხვის არცერთი მნიშვნელობისათვის 3^n-7 რიცხვი არ იყოფა 13-ზე.

119. დაამტკიცეთ, რომ n ნატურალური რიცხვის არცერთი მნიშვნელობისათვის $48^n-7 \cdot 16^n-7 \cdot 3^n+10$ რიცხვი არ იყოფა 13-ზე.

120. შეიძლება თუ არა ოთხი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ნამრავლი წარმოადგენდეს სრულ კვადრატს.

121. შეიძლება თუ არა ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი, წარმოვადგინოთ როგორც 2^{n-1} სახის რიცხვების ჯამი? (n არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, რომელიც ამ წარმოდგენაში არ მეორდება).

122. შეიძლება თუ არა ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი, წარმოვადგინოთ, როგორც 3^{n-1} სახის რამდენიმე რიცხვის ჯამი და სხვაობა? (n არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, რომელიც ამ წარმოდგენაში არ მეორდება).

123. ა) a და b რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობას: $0 < a < b$. დაამტკიცეთ, რომ თუ სრულდება უტოლობა $\left(\frac{b-a+1}{2}\right)^2 > b$, მაშინ a და b რიცხვებს შორის არსებობს სრული კვადრატი; ბ) შეიძლება თუ არა რიცხვის კუბი იწყებოდეს ციფრების ნებისმიერი კომბინაციით?

124. დაამტკიცეთ, ნებისმიერი მარტივი რიცხვისათვის, რომელიც განსხვავებულია 2–სა და 5-საგან, არსებობს მისი ჯერადი რიცხვი, რომლის ჩაწერაში მონაწილეობს მხოლოდ ერთიანები.

125. მოცემულია $n+2$ ნატურალური რიცხვი. დაამტკიცეთ, რომ როგორიც არ უნდა იყოს $k \neq 0$ რიცხვი, რომელიც არ აღემატება $2n$-ს, მოცემული რიცხვებიდან ყოველთვის შეგვიძლია შევარჩიოთ ისეთი ორი რიცხვი, რომელთა ჯამი ან სხვაობა იყოფა k-ზე.

126. $[0, 1]$ სეგმენტის რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგინეთ ისეთი სამი სიმრავლის გაერთიანების სახით, რომლებსაც წყვილ-წყვილად საერთო ელემენტები არ გააჩნიათ და ამასთანავე $[0, 1]$ სეგმენტის ნებისმიერ ქვესეგმენტში არსებობს რიცხვები ამ სიმრავლიდან.

127. $[0, 1]$ სეგმენტის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგინეთ ისეთი უსასრულო რაოდენობის სიმრავლეების გაერთიანების სახით, რომლებსაც წყვილ-წყვილად საერთო ელემენტები არ გააჩნიათ და ამასთანავე $[0, 1]$ სეგმენტის ნებისმიერ ქვესეგმენტში არსებობს რიცხვები ამ სიმრავლეებიდან.

128. $[0, 1]$ სეგმენტის ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგინეთ ისეთი უსასრულო რაოდენობის სიმრავლეების გაერთიანების სახით, რომლებსაც წყვილ-წყვილად საერთო ელემენტები არ გააჩნიათ და ამასთანავე $[0, 1]$ სეგმენტის ნებისმიერ ქვესეგმენტში არსებობს ელემენტები ამ სიმრავლეებიდან.

129. სიბრტყეზე მოცემულია სამი წერტილი. მასშტაბის შერჩევის და კოორდინატთა სისტემის მოძრაობით (პარალელური გადატანა, მობრუნება) შეიძლება თუ არა ამ წერტილებისათვის რაციონალური კოორდინატების მიღება?

130. მოცემულია n რაოდენობის ჩამქრალი ნათურა.შესაძლებელია ჩავატაროთ ასეთი ცდები;ერთდროულად ავანთოთ $m<n/2$ ნათურა, შემდეგ ეს ცდები გავაგრძელოთ ზუსტად იმავე რაოდენობის ნათურებზე, ისე რომ შეიძლება უკვე ანთებული ნათურების ჩაქრობაც. რა არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ყველა ნათურა აინთოს.

§19. ფუნქციის განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები

ა – ჯგუფი

1. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების განსაზღვრის არე:

1) $y=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+3}$

ა) $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ ბ) $(-\infty;-3)\cup(-3;1)\cup(1;+\infty)$ გ) $(-3;1)$ დ) $(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$

2) $y=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$

ა) $[-1;1]$ ბ) $(-1;1)$ გ) $[1;+\infty)$ დ) $(-\infty;1)$

3) $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{(x-1)(x-2)}$

ა) $(1;2)$ ბ) $(2;+\infty)$ გ) $(-\infty;1)$ დ) $\left[-\dfrac{1}{2};1\right)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$

4) $y=\dfrac{\sqrt{1-5x}}{x-3}$

ა) $(-\infty;0{,}2]$ ბ) $(3;+\infty)$ გ) $(-\infty;3)$ დ) $(0{,}2;3)$

5) $y=\sqrt{0{,}2x-1{,}5}-\sqrt{3{,}2x-6{,}4}$

ა) $[2;5]$ ბ) $[2;7{,}5]$ გ) $[7{,}5;+\infty)$ დ) $[2;+\infty)$

6) $y=\sqrt[3]{3x-1}-\dfrac{\sqrt[3]{5x+1}}{x-1}$

ა) $\left(\dfrac{1}{3};1\right)\cup(1;+\infty)$ ბ) $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ გ) $\left[\dfrac{1}{3};1\right)$ დ) $\left(-\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$

7) $y=\sqrt[6]{2{,}5x-7{,}5}-\sqrt[3]{2{,}5x+7{,}5}$

ა) $[3;+\infty)$ ბ) $(3;+\infty)$ გ) $(5;+\infty)$ დ) $(-3;+\infty)$

8) $y=\dfrac{\sqrt{0{,}1x+3{,}2}}{\sqrt{4{,}6-2{,}3x}}$

ა) $(-\infty;0]$ ბ) $(-3{,}2;0]$ გ) $[-32;2]$ დ) $(-\infty;2)$

2. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების მნიშვნელობათა სიმრავლე აღნიშნული შუალედისათვის:

1) $y=\sqrt{1-x},\quad x\in\left[-10;\dfrac{1}{2}\right]$

ა) $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$ ბ) $[\sqrt{11};+\infty)$ გ) $[0;1]$ დ) $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{11}\right]$

2) $y=\sqrt{7-x},\quad x\in[-2;6]$

ა) $[1;+\infty)$ ბ) $[3;+\infty)$ გ) $[1;3]$ დ) $(1;3)$

3) $y=\sqrt{2x+5},\quad x\in[-2;10)$

ა) $[1;+\infty)$ ბ) $[1;5)$ გ) $[5;+\infty)$ დ) $(1;5)$

4) $y=\frac{2}{\sqrt{x-4}}$, $x\in[13;\ 21]$

ა) $\left[\frac{2}{3};\ +\infty\right)$ ბ) $\left[\frac{2\sqrt{17}}{17};\ +\infty\right)$ გ) $\left(\frac{2\sqrt{17}}{17};\ \frac{2}{3}\right)$ დ) $\left[\frac{2\sqrt{17}}{17};\ \frac{2}{3}\right]$

5) $y=\frac{3}{\sqrt{5+x}}-x$, $x\in[4;\ 11]$

ა) $\left[-10\frac{1}{4};\ -3\right]$ ბ) $\left[-10\frac{1}{4};\ +\infty\right)$ გ) $[-3;\ +\infty)$ დ) $\left(-10\frac{1}{4};\ -3\right)$

6) $y=\sqrt{x-3}+x+1$, $x\in[7;\ 28)$

ა) $[10;\ +\infty)$ ბ) $[10;\ 34]$ გ) $[3;\ +\infty)$ დ) $[34;\ +\infty)$

7) $y=\frac{5}{\sqrt{3-x}}+x$, $x\in[-6;\ 2)$

ა) $\left[-\frac{13}{3};\ 7\right]$ ბ) $\left[-\frac{13}{3};\ +\infty\right)$ გ) $[7;\ +\infty)$ დ) $\left(-\frac{13}{3};\ 7\right)$

8) $y=\frac{2}{\sqrt{5-x}}+x+3$, $x\in(-2;\ 4)$

ა) $[7;\ +\infty)$ ბ) $[2;\ +\infty)$ გ) $[9;\ +\infty)$ დ) $\left[\frac{2\sqrt{7}+7}{7};\ 9\right]$

3. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის მდებარეობს მოცემული წერტილი მოცემული ფუნქციის გრაფიკზე?

1) $y=\sqrt{x+5}+ax-1$, $M_0(4;\ 14)$

ა) 2 ბ) 3,7 გ) 3 დ) 9,1

2) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+20}}+(a-1)x$, $M_0\left(5;\ \frac{7}{5}\right)$

ა) 1/6 ბ) 7/6 გ) 11/6 დ) 6/5

3) $y=\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{6x+1}}+(a-2)x+a$, $M_0\left(4;\ \frac{1}{5}\right)$

ა) 1,52 ბ) 1,08 გ) 1,48 დ) 1,16

4) $y=\sqrt{3x^2-2x-40}+ax+3$, $M_0(5;\ 23)$

ა) 8,6 ბ) 3 გ) 5,7 დ) 4

5) $y=\sqrt{7x-x^2+12}+a(x+1)$, $M_0(3;\ 6\sqrt{6})$

ა) $\sqrt{5}$ ბ) $\sqrt{7}$ გ) $\sqrt{6}$ დ) $\sqrt{8}$

6) $y=\sqrt{8x+x^2-18}+3-ax$, $M_0(2;\ \sqrt{2})$

ა) 2,5 ბ) 2 გ) 3,5 დ) 1,5

4. ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები:

1) $y=x$

2) $y=x+1;$
3) $y=x+2;$
4) $y=2x+2$
5) $y=-2x$
6) $y=-x+1$
7) $y=-x+3$
8) $y=5$

5. 1) $y=|x|$
2) $y=|2x-1|$
3) $y=|-x+1|$
4) $y=-|2x|$
5) $y=-|x+1|$
6) $y=|-2x-1|$
7) $y=-|x+3|$
8) $y=5-|x+1|$

ბ – ჯგუფი

იპოვეთ მოცემული ფუნქციების განსაზღვრის არე:

6. 1) $y=\sqrt{5+x}+\sqrt{x^2+2x-3}+\dfrac{3x+1}{2x-10}$
2) $y=\dfrac{\sqrt{2x^2+5x-7}}{\sqrt{x^2+4x-12}}$
3) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x^2-3}}+\dfrac{1}{x^2-9}$
4) $y=\log_5(x^2-3x)+\dfrac{1}{\log_7(x+1)}$
5) $y=\log_2\log_3(x^2-5x+4)+\sqrt{x+10}$
6) $y=\log_{x+1}(x^2+5x-24)+\log_{x-1}(2x+3)$
7) $y=\log_{x^2-1}(5x-1)$
8) $y=\arcsin(x^2+5x+1)$

იპოვეთ მოცემული ფუნქციების მნიშვნელობათა სიმრავლე მითითებული შუალედისათვის (№№7-15):

7. $y=\sqrt{x^2+3x+1}, \quad x\in D(f)$
8. $y=\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}, \quad x\in D(f)$
9. $y=\sqrt{x^2+3x+4}, \quad x\in D(f)$
10. $y=\sqrt{x^2+5x+10}, \quad x\in[-3;\ 4]$
11. $y=|x-1|+|x+3|, \quad x\in[-7;\ 10]$
12. $y=|2-x|-|x+5|, \quad x\in[-5;\ 2]$
13. $y=||x+3|-5|, \quad x\in[-2;\ 4]$
14. $y=2x^2-|x|+5, \quad x\in[0;\ 4]$

15. $y=\left|2x^2-5|x|+1\right|-\frac{1}{2}, \quad x\in[-10;\ 10]$

ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები:

16. 1) $y=\frac{5x+1}{3x-1}$

2) $y=\frac{2x+3}{4x-1}$

3) $y=\frac{5x}{x+1}$

4) $y=\frac{|x|+1}{|x|-1}$

5) $y=\frac{2|x|-1}{3|x|+2}$

6) $y=\left|x^2+5x-6\right|+1$

7) $y=\left|x^2-3|x|+4\right|-2$

8) $y=\left|x^2+2|x|-1\right|+1$

17. ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები:

$$f(x)=\begin{cases}-5x+13; & \text{როცა } x\le 2\\ 2x-1; & \text{როცა } x>2\end{cases}$$

$$g(x)=\frac{12-3x+|7x-14|}{2}$$

18. k და b პარამეტრების რა მნიშვნელობებისათვის მდებარეობენ $A(1;\ 2)$ და $B(3;\ 5)$ წერტილები $y=kx+b$ ფუნქციის გრაფიკზე.

19. წარმოადგინეთ $f(x)=e^x$ ფუნქცია ლუწი და კენტი ფუნქციების ჯამის სახით.

20. არსებობს თუ არა ისეთი კვადრატული სამწევრი, რომლის გრაფიკსაც ეკუთვნის წერტილები:

ა) $A(1;\ 4)$; $B(2;\ 9)$

ბ) $A(1;\ 4)$; $B(2;\ 9)$; $C(-1;\ 6)$

გ) $A(1;-1)$; $B(2;-5)$; $C(-1;13)$; $D(-2;21)$

21. $f(x)=2x^2-5x+3$ პარაბოლას გრაფიკზე დაასახელეთ ისეთი ორი წერტილი, რომელთა შორის მანძილი 4-ის ტოლია.

22. $f(x)=x^2+1$ პარაბოლას გრაფიკზე დაასახელეთ ისეთი ორი წერტილი, რომელთა შორის მანძილი 3-ის ტოლია.

23. $y=x^2-3x+2$ კვადრატული ფუნქციის გრაფიკზე დაასახელეთ ისეთი ორი წერტილი, რომელთა შორის მანძილი 2-ის ტოლია.

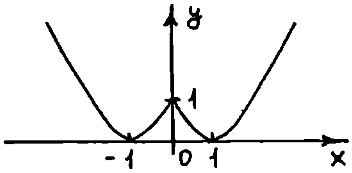
24. $y=2x+3$ წრფის გრაფიკზე იპოვეთ ორი ისეთი წერტილი, რომელთა შორის მანძილი 5-ის ტოლია.

25. $y=2x+5$ და $y=3x+3$ ფუნქციის გრაფიკებზე დაასახელეთ ისეთი ორი წერტილი, რომელთა შორის მანძილი 3-ის ტოლია.

26. გამოთვალეთ $y=ax^2+bx+c$ კვადრატული სამწევრის კოეფიციენტები, თუ ცნობილია, რომ $A(1;\ 4)$ და $B(-1;\ 2)$ წერტილები მდებარეობენ მის გრაფიკზე და გრაფიკი ეხება OX ღერძს.

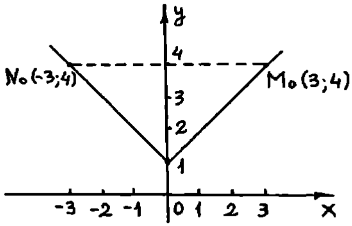
27. a და b პარამეტრების რა მნიშვნელობებისათვის იქნება $y=(x+a)^2-7(x+a)+b$ პარაბოლას წვერო მოთავსებული $M(1;\ 4)$ წერტილში.

28. $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს აქვს ფორმა, რომელიც გამოსახულია ნახაზზე



იპოვეთ ამ ფუნქციის ანალიზური სახე.

29. $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს აქვს ფორმა, რომელიც გამოსახულია ნახაზზე



იპოვეთ ამ ფუნქციის ანალიზური სახე.

30. მოცემულია კვადრატული სამწევრი $y=x^2-7x+6$. შეადგინეთ ისეთი კვადრატული სამწევრი, რომლის გრაფიკსაც მოცემული კვადრატული სამწევრის გრაფიკთან საერთო აქვს მხოლოდ პარაბოლას წვერო.

31. მოიყვანეთ ისეთი კვადრატული სამწევრის მაგალითი, რომლის გრაფიკი ეხება $y=2x+5$ წრფის გრაფიკს $M(1;\ 7)$ წერტილში.

32. მოიყვანეთ ისეთი კვადრატული სამწევრის მაგალითი, რომლის გრაფიკი ეხება $y=x^2-7x+6$ ფუნქციის გრაფიკს $M(0;\ 6)$ წერტილში.

33. იპოვეთ ისეთი $y=kx+b$ წრფივი ფუნქცია, რომლის გრაფიკი ეხება როგორც $y=x^2-4x+7$, ასევე $y=-x^2+10x-20$ ფუნქციის გრაფიკს.

34. ჩაწერეთ $y=f(x)$ ფუნქციის ანალიზური სახე, თუ ცნობილია, რომ მის გრაფიკს აქვს კუთხის სახე, რომლის გვერდებზეც მდებარეობენ $A(0;\ 2)$; $B(2;\ 4)$ და $B(2;\ 4)$; $C(3;\ 2)$ წერტილები (B კუთხის წვეროა).

35. ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x^2+x+6, & \text{როცა } x\le 0 \\ \dfrac{6}{3^x}, & \text{როცა } x>0 \end{cases}$$

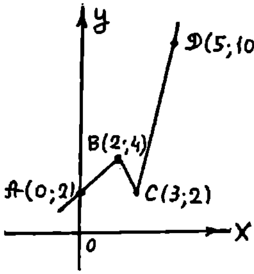
ჩაწერეთ ერთი ფორმულის სახით.

36. ფუნქცია

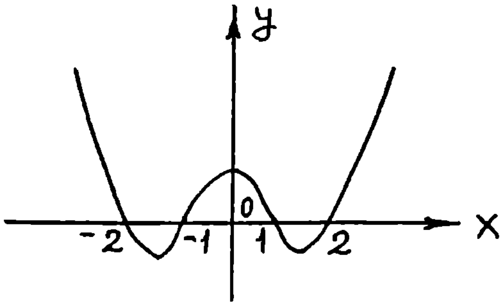
$$f(x)=\begin{cases} 2x+3, & \text{როცა } x\le -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{2}x+2, & \text{როცა } -\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{6}{5} \\ -2x+5, & \text{როცა } x\ge \dfrac{6}{5} \end{cases}$$

ჩაწერეთ ერთი ფორმულის სახით.

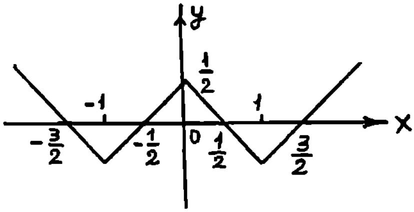
37. ჩაწერეთ $y=f(x)$ ფუნქცია ანალიზურად, თუ მის გრაფიკს აქვს ნახაზზე მოცემული ფორმა.



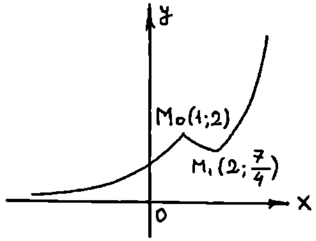
38. ჩაწერეთ ერთი ფუნქცია მაინც ანალიზურად თუ მის გრაფიკს აქვს ნახაზზე მოცემული ფორმა.



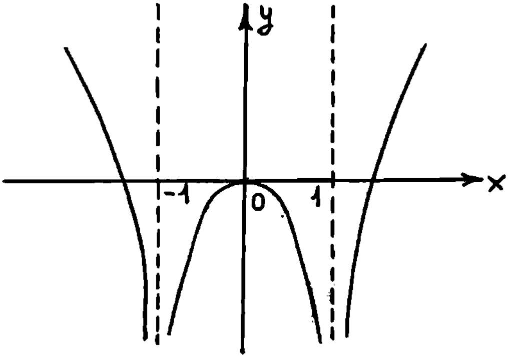
39. ჩაწერეთ ფუნქცია ანალიზურად, თუ მის გრაფიკს აქვს ნახაზზე მოცემული ფორმა



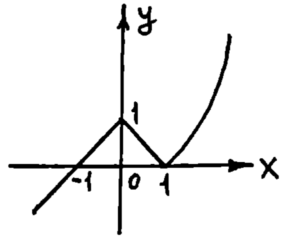
40. ჩაწერეთ $y=f(x)$ ფუნქცია ანალიზური სახით, თუ მის გრაფიკს აქვს ნახაზზე გამოსახული ფორმა (გრაფიკის თითოეული შტო მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკის ნაწილია).



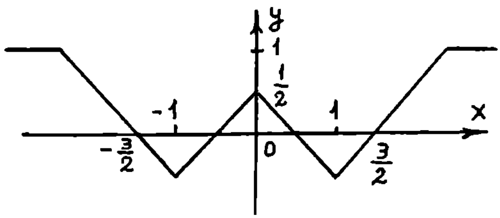
41. ჩაწერეთ $y=f(x)$ ფუნქცია ანალიზური სახით, თუ მის გრაფიკს აქვს ნახაზზე გამოსახული ფორმა



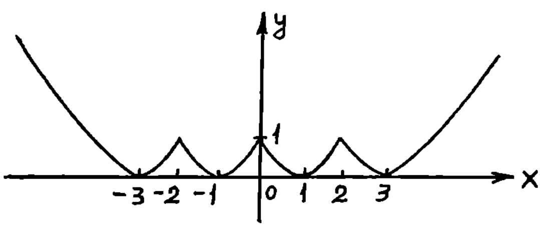
42. ჩაწერეთ $y=f(x)$ ფუნქცია ანალიზური სახით, თუ მის გრაფიკს აქვს ნახაზზე გამოსახული ფორმა (გრაფიკის შტო $[1;+\infty)$ შუალედში კუბური პარაბოლაა)



43. ჩაწერეთ ფუნქცია ანალიზურად, თუ მის გრაფიკს აქვს ნახაზზე გამოსახული ფორმა



44. ჩაწერეთ ფუნქცია ანალიზურად, თუ მის გრაფიკს აქვს ნახაზზე გამოსახული სახე



45. იპოვეთ $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{როცა } x\in(-\infty;\ 0] \\ -x, & \text{როცა } x\in(0;\ 2] \\ -x^3+6, & \text{როცა } x\in[2;\ +\infty) \end{cases}$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია.

46. იპოვეთ $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{როცა } x\in(-\infty;\ 0] \\ x^2, & \text{როცა } x\in(0;\ 1] \\ \lg x+1, & \text{როცა } x\in(1;\ +\infty) \end{cases}$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია.

47. არსებობს თუ არა ისეთი კვადრატული სამწევრი $y=ax^2+bx+c$, რომ მისი გრაფიკი შედგებოდეს მხოლოდ რაციონალურ კოორდინატებიანი წერტილებისგან?

48. არსებობს თუ არა ისეთი კვადრატული სამწევრი $y = ax^2 + bx + c$, რომ მისი გრაფიკის წერტილები შედგებოდეს მხოლოდ ირაციონალურ კოორდინატებიანი წერტილებისგან?

49. $y = ax^2 + bx + c$ სამწევრის გრაფიკის წერტილები არ შეიცავენ არცერთ წერტილს, რომლის აბსცისა რაციონალური რიცხეია, ხოლო ორდინატა – ირაციონალური რიცხეი. დაადგინეთ, რაციონალურია თუ ირაციონალური ნამრავლი $a \cdot b \cdot c$.

49. მოიყვანეთ ფუნქციის მაგალითი, რომლის განსაზღერის არეა ზუსტად $[0; 1)$ სიმრავლე, ხოლო მაქსიმალური მნიშვნელობაა 5.

50. პერიოდულია თუ არა ფუნქცია $f(x) = \left[x^2\right] - [x]^2$ (სადაც $[x]$ არის x-ის მთელი ნაწილი).

51. პერიოდულია თუ არა ფუნქცია $g(x) = \{x^2\} - \{x\}^2$ (სადაც $\{x\}$ არის x-ის წილადი ნაწილი).

52. $f(x)$ ფუნქციის პერიოდი რაციონალური რიცხეია. იქნება თუ არა ფუნქცია $f([x])$ პერიოდული?

53. $f(x)$ პერიოდული ფუნქციაა. იქნება თუ არა ფუნქცია $f([x])$ პერიოდული?

54. გამოთვალეთ $f(x, y) = \left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) \cdot \left(y + \sqrt{1 - y^2}\right)$

ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა სიმრავლეზე $0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1$.

55. უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია ნებისმიერი x, y, z რიცხვებისათვის აკმაყოფილებს პირობას $f(x) - f(y) = f(x + z) - f(y + z)$ დაადგინეთ $f(x)$ ფუნქციის სახე.

56. უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია დადებით რიცხვთა სიმრავლეზე და ნებისმიერი x, y, z რიცხვებისათვის აკმაყოფილებს პირობას $f(x) - f(y) = f(x \cdot z) - f(y \cdot z)$ დაადგინეთ $f(x)$ ფუნქციის სახე.

58. $f(x)$ ფუნქცია ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვისათვის აკმაყოფილებს პირობას $f(2x) = 2f(x)$. იქნება თუ არა $f(x)$ წრფივი ფუნქცია.

59. უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია ნებისმიერი x, y რიცხვებისათვის აკმაყოფილებს პირობას

$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x + y}{2}\right)$ დაადგინეთ $f(x)$ ფუნქციის სახე.

60. $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x_0 = 1$ წერტილში, ამასთან ნებისმიერი x რიცხვისათვის აკმაყოფილებს პირობას $f\left(x^3\right) = x^2 f(x)$ დაადგინეთ $f(x)$ ფუნქციის სახე.

61. $f(x)$ ფუნქცია ნებისმიერი x რიცხვისათვის აკმაყოფილებს პირობას $f(x) + f(2x) = f(3x)$ იქნება თუ არა ეს ფუნქცია წრფივი.

62. არსებობს თუ არა ისეთი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $[0; 1]$ სეგმენტზე, შემოსაზღვრულია, მაგრამ არცერთ $[\alpha; \beta] \subset (0; 1)$ სეგმენტზე არ ღებულობს არც მაქსიმალურ და არც მინიმალურ მნიშვნელობას.

63. არსებობს თუ არა ისეთი ფუნქცია $y=f(x)$, რომელიც განსაზღვრულია $[0;1]$ შუალედში, არაა მონოტონური, მაგრამ გააჩნია შექცეული ფუნქცია.

64. მოიყვანეთ მაგალითი ისეთი ფუნქციისა, რომელიც არცერთ შუალედში შემოსაზღვრული არაა.

65. არსებობს თუ არა ისეთი ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $[0;1]$ სეგმენტზე და ამასთანავე ეს სეგმენტი არ შეიძლება დაიყოს სასრულ რაოდენობა ქვესეგმენტებად, სადაც ფუნქცია მონოტონურია.

66. $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების პერიოდებია T_1 და T_2. შეიძლება თუ არა მათი ჯამი იყოს პერიოდული ფუნქცია პერიოდით T რომელიც ნაკლებია, როგორც T_1-ზე ასევე T_2-ზე.

67. $y=f(x)$ ფუნქციის პერიოდია ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი. იქნება თუ არა $f(x)$ ფუნქცია მუდმივი?

68. დაადგინეთ $f(x)$ ფუნქციის სახე, თუ ცნობილია, რომ ნებისმიერი x რიცხვისათვის და ნებისმიერი α ირაციონალური რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(x+\alpha)=f(x)$$

69. დაამტკიცეთ, თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების პერიოდებია T_1 და T_2, ამასთანავე $\frac{T_1}{T_2}$ რაციონალური რიცხვია, მაშინ ფუნქცია $f(x)+g(x)$ ასევე პერიოდულია.

70. პერიოდულია თუ არა ფუნქცია $f(x)=\sin x+\cos \pi x$.

71. არსებობს თუ არა $y=ax+b$ სახის ფუნქციების უსასრულო სიმრავლე, რომლებსაც გააჩნიათ შემდეგი თვისება: ნებისმიერი m ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს ამ სიმრავლეში ერთადერთი ფუნქცია, რომლისთვისაც განტოლებას $ax+b=m$ გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში.

72. არსებობს თუ არა $y = ab^x$ სახის ფუნქციების უსასრულო სიმრავლე, რომლებსაც გააჩნიათ შემდეგი თვისება: ნებისმიერი m ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს ამ სიმრავლეში ერთადერთი ფუნქცია, რომლისთვისაც განტოლებას $ab^x=m$ გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში.

73. მოიყვანეთ მაგალითი ფუნქციისა, რომლის ძირითადი პერიოდი არის 17.

74. პერიოდულ ფუნქციას გააჩნია თუ არა ძირითადი პერიოდი?

75. დაამტკიცეთ, თუ ფუნქციის ძირითადი პერიოდია T, მაშინ მისი ნებისმიერი პერიოდი იქნება nT-ს სახის რიცხვი, სადაც n ნატურალური რიცხვია

76. დაამტკიცეთ, რომ თუ ფუნქცია პერიოდულია, უწყვეტია და არაა მუდმივი მაშინ მას გააჩნია ძირითადი პერიოდი

77. b პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის გაივლის $y=2x+b$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციის გრაფიკი წერტილში კოორდინატებით $M(8;6)$.

78. b პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის გაივლის $[b;+\infty)$ შუალედზე განსაზღვრული $y=x^2-2bx+b$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციის გრაფიკი წერტილში კოორდინატებით $M(9;10)$.

79. b პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის გაივლის $y=b^{x+1}$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციის გრაფიკი წერტილში კოორდინატებით $M(7;6)$.

§20. პლანიმეტრია

1. იპოვეთ კუთხე, თუ ის თავის მოსაზღვრე კუთხეზე 50°-ით მეტია.
   ა) 130° ბ) 115° გ) 40° დ) 150°
2. იპოვეთ კუთხე თუ, ის თავის მოსაზღვრე კუთხეზე 1°-ით ნაკლებია.
   ა) 89.5° ბ) 89° გ) 91° დ) 79°
3. იპოვეთ კუთხე, თუ ის თავის მოსაზღვრე კუთხეზე 179°-ით ნაკლებია.
   ა) 1° ბ) 81° გ) 181° დ) 0.5°
4. იპოვეთ კუთხე, თუ ის თავის მოსაზღვრე კუთხის $\frac{2}{3}$ ნაწილის ტოლია.
   ა) 54° ბ) 36° გ) 72° დ) 108°
5. იპოვეთ კუთხე, თუ ის თავისი მოსაზღვრე კუთხის 20%-ის ტოლია.
   ა) 150° ბ) 36° გ) 30° დ) 72°
6. იპოვეთ კუთხე, თუ ის თავისი მოსაზღვრე ორი კუთხის ჯამის 40%-ის ტოლია.
   ა) 100° ბ) 40° გ) 60° დ) 80°
7. იპოვეთ კუთხე, თუ ის თავისი მოსაზღვრე ორი კუთხის ჯამის 11/14 ნაწილის ტოლია.
   ა) 140° ბ) 110° გ) 70° დ) 40°
8. იპოვეთ კუთხე მოსაზღვრე კუთხეების ბისექტრისებს შორის, თუ ერთ-ერთი მოსაზღვრე კუთხე 60°-ის ტოლია.
   ა) 90° ბ) 30° გ) 60° დ) 120°
9. იპოვეთ კუთხე, თუ მისი ორი მოსაზღვრე კუთხის ჯამი 140°-ის ტოლია.
   ა) 110° ბ) 50° გ) 40° დ) 70°
10. იპოვეთ კუთხე, თუ ის ისე შეეფარდება თავის მოსაზღვრე კუთხეს როგორც 7:8.
    ა) 78° ბ) 96° გ) 84° დ) 102°
11. იპოვეთ კუთხე, თუ მისი 1/5 ნაწილი ტოლია მისი მოსაზღვრე კუთხის 1/7 ნაწილის.
    ა) 75° ბ) 105° გ) 85° დ) 65°
12. იპოვეთ კუთხე, თუ მისი 14/145 ნაწილი ტოლია მოსაზღვრე კუთხის 2/5 ნაწილის.
    ა) 35° ბ) 45° გ) 75° დ) 145°

13. ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხიდან ერთ- ერთი კუთხე ტოლია მეორე კუთხის 60%. იპოვეთ ამ კუთხეებიდან უდიდესის სიდიდე.
    ა) 150° ბ) $112,5^\circ$ გ) 120° დ) 100°

14. ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხიდან ერთ-ერთი წარმოადგენს მეორე კუთხის 80%-ის 3/4 ნაწილს. იპოვეთ ამ კუთხეებიდან უმცირესის სიდიდე.
    ა) $67,5^\circ$ ბ) $112,5^\circ$ გ) 85° დ) 65°

15. ორი წრფის გადაკვეთით მიღებული სამი კუთხის ჯამი 285°-ის ტოლია. იპოვეთ ამ კუთხეებს შორის უდიდესის სიდიდე.
    ა) 115° ბ) 125° გ) 105° დ) 135°

16. ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიღებული სამი კუთხის ჯამი ტოლია ოთხივე კუთხის 80%-ის. იპოვეთ ამ კუთხეებს შორის უმცირესის სიდიდე.
    ა) 72° ბ) 82° გ) 62° დ) 78°

17. ორი წრფის გადაკვეთით მიღებული კუთხეებიდან ორი მათგანის ჯამი ტოლია დანარჩენი ორი კუთხის ჯამის 4/5 ნაწილის 25%-ის. იპოვეთ ამ კუთხეებიდან უმცირესის სიდიდე.
    ა) 60° ბ) 30° გ) 40° დ) 25°

18. ორ საერთო წვეროს მქონე 80°-იან და 70°-იან კუთხეს გააჩნია საერთო ნაწილი, ამასთან მათ გვერდებს შორის უდიდესი კუთხე 130°-ის ტოლია. იპოვეთ უმცირესი კუთხე ამ კუთხეების გვერდებს შორის.

ა) 20° ბ) 30° გ) 40° დ) 25°

19. ორ საერთო წვეროს მქონე 80°-იან და 90°-იან კუთხეს გააჩნია საერთო ნაწილი ამასთან მათ გვერდებს შორის უდიდესი კუთხე 120°-ის ტოლია. იპოვეთ უმცირესი კუთხე ამ კუთხეების გვერდებს შორის.

ა) 80° ბ) 40° გ) 30° დ) 50°

20. ორ საერთო წვეროს მქონე 50°-იან და 90°-იან კუთხეს გააჩნია საერთო ნაწილი, ამასთან მათ გვერდებს შორის უმცირესი კუთხე 20°-ის ტოლია. იპოვეთ უდიდესი კუთხე ამ კუთხეების გვერდებს შორის.

ა) 80° ბ) 100° გ) 120° დ) 130°

21. სამი წრფე იკვეთება ერთ წერტილში. მიღებული კუთხეებიდან ორი კუთხე შესაბამისად ტოლია 70°-ის და 50°-ის. იპოვეთ უმცირესი კუთხე მიღებული კუთხეების ბისექტრისებს შორის.

ა) 60° ბ) 55° გ) 45° დ) 50°

22. მოცემულია ორი პარალელურ გვერდებიანი კუთხე. ამ კუთხის სიდიდეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 1:3. იპოვეთ ამ კუთხეებიდან უმცირესის სიდიდე.

ა) 30° ბ) 40° გ) 45° დ) 50°

23. მოცემულია ორი კუთხე, რომელთა სიდიდეებია 60° და 100°. ცნობილია რომ ერთ-ერთი კუთხის გვერდი ძევს მეორე კუთხის გვერდზე. იპოვეთ უმცირესი კუთხე ამ კუთხეების ბისექტრისებს შორის.

ა) 20° ბ) 30° გ) 40° დ) 60°

24. მოცემულია ორი კუთხე, რომელთა სიდიდეებია 80° და 120° ამასთან მათ საერთო შიგა ნაწილი არ გააჩნიათ. ცნობილია რომ ერთ-ერთი კუთხის გვერდი ძევს მეორე კუთხის გვერდზე. იპოვეთ უდიდესი კუთხე ამ კუთხეების ბისექტრისების გაგრძელებებს შორის.

ა) 20° ბ) 30° გ) 100° დ) 60°

25. 80°-იანი კუთხის ბისექტრისაზე ძევს მეორე კუთხის გვერდი, რომლის სიდიდე ტოლია 70°-ის. იპოვეთ მოცემული კუთხეების გვერდებს შორის უმცირესი კუთხის სიდიდე.

ა) 20° ბ) 30° გ) 40° დ) 50°

26. 70°-იანი კუთხის ბისექტრისაზე ძევს მეორე 80°–იანი კუთხის გვერდი. იპოვეთ უმცირესი კუთხე მეორე კუთხის ბისექტრისასა და პირველი კუთხის გვერდს შორის.

ა) 40° ბ) 75° გ) 15° დ) 5°

27. ორი პარალელური წრფე გადაკვეთილია მესამეთი. ერთ-ერთი მიღებული კუთხე 130°-ია. მცირე შიდა კუთხის ბისექტრისის წრფესთან გადაკვეთის წერტილში გაელებულია მიღებული ახალი კუთხის ბისექტრისა. იპოვეთ უმცირესი კუთხე ამ ბისექტრისასა და პარალელურ წრფეებს შორის.

ა) 35° ბ) 10° გ) 25° დ) 12,5

28. მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხე 42°-ია. იპოვეთ კუთხე ჰიპოტენუზის მედიანასა და კათეტებს შორის.

ა) 45°; 45° ბ) 42°; 48° გ) 36°; 54° დ) 30°; 60°

29. მართკუთხა სამკუთხედში ერთი მახვილი კუთხე 5-ჯერ მეტია მეორე მახვილ კუთხეზე. იპოვეთ კუთხე ჰიპოტენუზაზე დაშვებულ სიმაღლესა და მედიანას შორის.

ა) 60° ბ) 45° გ) 30° დ) 75°

30. მართკუთხა სამკუთხედში ერთ-ერთი მახვილი კუთხე ტოლია მეორე მახვილი კუთხის 18%-ის. იპოვეთ კუთხე ჰიპოტენუზაზე დაშვებულ სიმაღლესა და ბისექტრისას შორის.

ა) $60°$ ბ) $68°$ გ) $1855^0/59$ დ) $1845^0/59$

31. მართკუთხა სამკუთხედში ერთ-ერთი მახვილი კუთხე მეორე მახვილი კუთხის ნახევრის 40%-ის ტოლია. იპოვეთ კუთხე ჰიპოტენუზაზე დაშვებულ მედიანასა და მართი კუთხის ბისექტრისას შორის.

ა) $42°$ ბ) $68°$ გ) $30°$ დ) $37°$

32. მართკუთხა სამკუთხედში მართი და მახვილი კუთხის ბისექტრისებს შორის კუთხე $100°$-ის ტოლია. იპოვეთ მცირე მახვილი კუთხე.

ა) $30°$ ბ) $40°$ გ) $35°$ დ) $20°$

33. მართკუთხა სამკუთხედის კუთხეები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას. იპოვეთ მახვილი კუთხეების სიდიდეები.

ა) $30°$; $60°$ ბ) $40°$; $50°$ გ) $20°$; $70°$ დ) $35°$; $45°$

34. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა ტოლია $\sqrt{63}$ სმ-ის, ხოლო კათეტი – 6 სმ-ის. იპოვეთ მეორე კათეტის სიგრძე.

ა) $4\sqrt{3}$ სმ ბ) $3\sqrt{2}$ სმ გ) $3\sqrt{3}$ სმ დ) $2\sqrt{3}$ სმ

35. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები ტოლია 5 სმ-ის და 12 სმ-ის. იპოვეთ ჰიპოტენუზის სიგრძე.

ა) 17 სმ ბ) 15 სმ გ) 14 სმ დ) 13 სმ

36. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები ტოლია 3 სმ-ის და 5 სმ-ის. იპოვეთ ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე.

ა) $15\sqrt{34}/34$ სმ ბ) 4 სმ გ) 6 სმ დ) $3\sqrt{5}/2$ სმ

37. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 6 სმ და 8 სმ. იპოვეთ კუთხე ჰიპოტენუზისა და დიდი კათეტის მედიანებს შორის.

ა) $\arcsin\frac{6}{4\sqrt{5}}$ ბ) $\arcsin\frac{6}{5\sqrt{5}}$ გ) $\arccos\frac{3}{5\sqrt{5}}$ დ) $\arccos\frac{2\sqrt{6}}{45}$

38. მართკუთხა სამკუთხედში უმცირესი სიმაღლე 60/13 სმ-ის ტოლია, ხოლო ჰიპოტენუზა– 13 სმ-ის. იპოვეთ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

ა) 2 სმ ბ) 3 სმ გ) 3.5 სმ დ) 1 სმ

39. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების სიგრძეებია 6 სმ და 8 სმ. იპოვეთ ჰიპოტენუზაზე მათი გეგმილები.

ა) 4 სმ; 6 სმ ბ) 3,6 სმ; 6,4 სმ გ) 3 სმ; 7 სმ დ) 2,4 სმ; 7,6 სმ

40. მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხე ტოლია $30°$. იპოვეთ შემოხაზული წრეწირის რადიუსის შეფარდება ჩახაზული წრეწირის რადიუსთან.

ა) $2(\sqrt{3}+1)$ სმ ბ) $2\sqrt{3}$ სმ გ) $\sqrt{3}+1$ სმ დ) $\sqrt{3}+2$ სმ

41. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების გეგმილები ჰიპოტენუზაზე ტოლია 2 სმ-ის და 8 სმ-ის. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

ა) 10 სმ^2 ბ) 18 სმ^2 გ) 40 სმ^2 დ) 20 სმ^2

42. მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზაზე ერთი კათეტის გეგმილი 3-ჯერ მეტია მეორე კათეტის გეგმილზე. იპოვეთ დიდი კათეტის სიგრძის შეფარდება მცირე კათეტის სიგრძესთან.

ა) 3 ბ) 2 გ) $\sqrt{3}$ დ) $\sqrt{2}$

43. მართკუთხა სამკუთხედში კათეტების გეგმილები ჰიპოტენუზაზე ტოლია 2 სმ-ის და 8 სმ-ის. იპოვეთ კათეტების სიგრძეები.

ა) $2\sqrt{3}$ სმ; $4\sqrt{3}$ სმ ბ) $2\sqrt{5}$ სმ; $4\sqrt{5}$ სმ გ) 4 სმ; 6 სმ დ) $4\sqrt{5}$ სმ; 3 სმ

44. მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზაზე ერთი კათეტის გეგმილი 3-ჯერ მეტია მეორე კათეტის გეგმილზე. იპოვეთ სამკუთხედის მახვილი კუთხეები.

ა) 30°; 60° ბ) 40°; 50° გ) 45°; 45° დ) 15°; 75°

45. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის სიგრძეა 4 სმ. რა უდიდესი მნიშვნელობა შეიძლება ჰქონდეს სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსს?

ა) $3(\sqrt{2}-2)$ სმ ბ) $\sqrt{2}-1$ სმ გ) $2\sqrt{2}$ სმ დ) $2(\sqrt{2}-1)$სმ

46. შეიძლება თუ არა, რომ მართკუთხა სამკუთხედში სიმაღლითა და ბისექტრისით შედგენილი სამკუთხედი მოცემული სამკუთხედის მსგავსი იყოს?

ა) შეიძლება ბ) არ შეიძლება

47. მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსის შეფარდება შემოხაზული წრეწირის რადიუსთან ტოლია $(\sqrt{3}-1)/2$. იპოვეთ დიდი კათეტის სიგრძის შეფარდება მცირე კათეტის სიგრძესთან.

ა) 2 ბ) $\sqrt{3}$ გ) $\sqrt{2}$ დ) 3

48. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების სიგრძეებია 6 სმ და 8 სმ. ჰიპოტენუზაზე აღებული წერტილიდან კათეტებზე დაშვებულია სიმაღლეები. იპოვეთ შექმნილ ოთხკუთხედებს შორის უდიდესის ფართობი.

ა) 6 სმ^2 ბ) 24 სმ^2 გ) 12 სმ^2 დ) 10 სმ^2

49. მართკუთხა სამკუთხედის ერთი კათეტი ტოლია 5 სმ-ის, ხოლო ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე – 4 სმ-ის. იპოვეთ მეორე კათეტის სიგრძე.

ა) 20/3 სმ ბ) 10/3 სმ გ) 8 სმ დ) 10 სმ

50. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეები, თუ ჰიპოტენუზაზე დაშვებულ სიმაღლე ტოლია 2 სმ-ის, ხოლო ჰიპოტენუზის მედიანა – 3 სმ-ის.

ა) $arccos\frac{2}{3}$; 60° ბ) $sin\frac{2}{3}$; 30° გ) 30°; 60° დ) $arctg\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $arctg\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

51. მართკუთხა სამკუთხედში კუთხე ჰიპოტენუზის მედიანასა და მასზე დაშვებულ ბისექტრისას შორის 20°-ია. იპოვეთ სამკუთხედის მახვილი კუთხეები.

ა) 25°; 65° ბ) 30°; 60° გ) 20°; 70° დ) 40°; 50°

52. მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზა ტოლია 2 სმ-ის. იპოვეთ კათეტების მედიანების კვადრატების ჯამი.

ა) 5 სმ^2 ბ) 4 სმ^2 გ) 8 სმ^2 დ) 6 სმ^2

53. ორი *A* და *B* წერტილი რაღაც წრფის ერთ მხარეს ძევს და მისგან დაშორებულია შესაბამისად 3 სმ-ით და 7 სმ-ით. ამ წერტილებს შორის მანძილი 8 სმ-ია. იპოვეთ ისეთი *ABC* სამკუთხედის პერიმეტრი, რომელიც უმცირესია ყველა იმ სამკუთხედის პერიმეტრებს შორის რომლის C წვერო ამ წრფეზე ძევს.

ა) 15 სმ ბ) 20 სმ გ) $8+2\sqrt{37}$ სმ დ) $6+3\sqrt{37}$ სმ

54. მართკუთხა სამკუთხედის გვერდები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას. იპოვეთ ამ სამკუთხედში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსების შეფარდება.

ა) 2 : 5 ბ) 3 : 5 გ) 1 : 5 დ) 4 : 5

55. მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზულია რომბი, ისე რომ მისი მახვილი კუთხე ემთხვევა სამკუთხედის მახვილ კუთხეს, ხოლო მოპირდაპირე წვერო მდებარეობს კათეტზე. იპოვეთ ამ მახვილი კუთხის სიდიდე, თუ რომბის ფართობი შეადგენს სამკუთხედის ფართობის 3/8 ნაწილს.

ა) $\arcsin\frac{1}{3}$ ბ) $\arccos\frac{1}{3}$ გ) $\arccos\frac{2}{3}$ დ) $\arcsin\frac{2}{3}$

56. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების ჯამი ტოლია 17 სმ-ის, ხოლო ჰიპოტენუზა – 13 სმ-ის. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

ა) 24 სმ^2 ბ) 28 სმ^2 გ) 30 სმ^2 დ) 32 სმ^2

57. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა ტოლია 5 სმ-ის, ხოლო ჩახაზული წრეწირის რადიუსი – 1 სმ-ის. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

ა) 6 სმ^2 ბ) 5 სმ^2 გ) 4 სმ^2 დ) სმ^2

58. მართკუთხა სამკუთხედის პერიმეტრი ტოლია 24 სმ-ის, ხოლო ფართობი – 24 სმ^2. იპოვეთ ჰიპოტენუზის სიგრძე.

ა) 12 სმ ბ) 10 სმ გ) 8 სმ დ) 14 სმ

59. მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხე ტოლია $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, ხოლო მასთან მიმდებარე გვერდი – 6 სმ-ის. იპოვეთ ჰიპოტენუზის იმ მონაკვეთების სიგრძეები, რომლებადაც ჰიპოტენუზა იყოფა ბისექტრისით.

ა) 30/7 სმ; 40/7 სმ ბ) 2 სმ; 8 სმ გ) 20/7 სმ; 50/7 სმ დ) 4 სმ; 6 სმ

60. შეიძლება თუ არა მართკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეწირების რადიუსების შეფარდება ტოლი იყოს 8-ის.

ა) არა ბ) შეიძლება ყოველთვის

გ) შეიძლება თუ ერთ-ერთი მახვილი კუთხე ტოლია 30°-ის

დ) შეიძლება თუ მახვილი კუთხეები ტოლია 45°-ის

61. მართკუთხა სამკუთხედში რა უმცირესი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს შემოხაზული წრეწირის რადიუსის შეფარდებამ ჩახაზული წრეწირის რადიუსთან?

ა) $\sqrt{2}+1$ ბ) $4(\sqrt{2}+1)$ გ) $2(\sqrt{2}+1)$ დ) $3(\sqrt{2}+1)$

62. მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან დაშვებული სიმაღლე ტოლია იმ მონაკვეთების საშუალო არითმეტიკულის, რომლებადაც ჰიპოტენუზა იყოფა სიმაღლით. გამოთვალეთ სამკუთხედის მახვილი კუთხეები.

ა) 40°; 50° ბ) 25°; 65° გ) 30°; 60° დ) 45°; 45°

63. მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან გავლებულ სიმაღლეს და მედიანას შორის კუთხე არის 10°. იპოვეთ სამკუთხედის მახვილი კუთხეები.

ა) 40°; 50° ბ) 30°; 60° გ) 45°; 45° დ) 35°; 35°

64. ABC მართკუთხა სამკუთხედში AB ჰიპოტენუზაზე აღებულია D წერტილი. ამ წერტილიდან სამკუთხედის კათეტებზე დაშვებულია სიმაღლეები DP და DQ. ცნობილია, რომ PQ პარალელურია AC-სი. გამოთვალეთ ΔDPQ-ს ფართობი, თუ ABC სამკუთხედის ფართობია 4 სმ^2

ა) 3 სმ^2 ბ) 0,5 სმ^2 გ) 1 სმ^2 დ) 2 სმ^2

65. ABC მართკუთხა სამკუთხედში, AB ჰიპოტენუზაზე აღებულია D წერტილი ისე, რომ მანძილი ამ წერტილიდან CA კათეტის შუაწერტილამდე ტოლია ამ კათეტის ნახევრის. იპოვეთ BD მონაკვეთის სიგრძე, თუ $BC=3$სმ. და $AC=4$სმ.

ა) 1,9 სმ ბ) 1,4 სმ გ) 1,6 სმ დ) 1,8 სმ

66. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები ტოლია 6სმ და 8სმ-ის. იპოვეთ მანძილები კათეტების შუაწერტილებიდან ჰიპოტენუზამდე.

ა) 2,4 სმ; 2,4 სმ ბ) 3 სმ; 4 სმ გ) 4,8 სმ; 2 სმ დ) 1 სმ; 3 სმ

67. ABC მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 2 სმ–ის ტოლია. გამოთვალეთ ამ სამკუთხედის უდიდესი მახვილი კუთხე, თუ ცნობილია, რომ მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლისა და მედიანის მიერ შედგენილი სამკუთხედის ფართობი 0.25 სმ^2–ის ტოლია.

ა) $arctg\left(\sqrt{2}+1\right)$ ბ) $arctg\left(\sqrt{2}-1\right)$ გ) 60^o დ) $arcctg\left(\sqrt{2}+1\right)$

68. მართკუთხა სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი მართი კუთხის გვერდებიდან დაშორებულია 2სმ და 3სმ ტოლი მანძილებით. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.

ა) 127 სმ ბ) $\sqrt{117}$ სმ გ) $\sqrt{123}$ სმ დ) 11 სმ

69. ABC მართკუთხა სამკუთხედში, მართი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლე ისე შეეფარდება ამავე წვეროდან გავლებულ მედიანას, როგორც 4:5. გამოთვალეთ ამ სამკუთხედის უმცირესი კუთხე.

ა) $arccos\,0.4$ ბ) $arcsin\,0.7$ გ) $arcctg\,0.5$ დ) $arctg\,0.5$

70. მართკუთხა სამკუთხედებს აქვთ საერთო ჰიპოტენუზა. იპოვეთ მაქსიმალური ფართობის მქონე სამკუთხედის მახვილი კუთხეები.

ა) 60^o; 30^o ბ) 45^o; 45^o გ) 25^o; 65^o დ) 20^o; 70^o

71. დაასახელეთ მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებზე ისეთი წერტილები საიდანაც წვეროებამდე მანძილების ჯამი მინიმალურია.

ა) მართი კუთხის წვერო ბ) ჰიპოტენუზის შუაწერტილი

გ) პატარა მახვილი კუთხის წვერო

დ) მართი კუთხის წვეროს გეგმილი ჰიპოტენუზაზე

72. მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე ტოლია 4 სმ-ის, ხოლო სამკუთხედის ფართობი – 24 სმ^2-ის. იპოვეთ კათეტები.

ა) $2\sqrt{6}$ სმ; ბ) 6 სმ; 3 სმ გ) 8 სმ; 12 სმ დ) $2\sqrt{6\left(3+\sqrt{5}\right)}$ სმ; $\sqrt{6\left(3-\sqrt{5}\right)}$ სმ

73. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები ტოლია 12 სმ-ის და 16 სმ-ის. ჰიპოტენუზაზე აღებულია რაღაც წერტილი ისე, რომ ამ წერტილის კათეტებზე გეგმილებს შორის მანძილი მინიმალურია. იპოვეთ იმ ოთხკუთხედის პერიმეტრი რომლის წვეროებია ჰიპოტენუზაზე აღებული წერტილი, ამ წერტილის გეგმილები კათეტებზე და მართი კუთხის წვერო.

ა) 19,21 სმ ბ) 18,64 სმ გ) 26,88 სმ დ) 19,95 სმ

74. ABC მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები ტოლია 3 სმ და 4 სმ –ის. ჰიპოტენუზაზე აღებულია M წერტილი ისე, რომ კათეტებამდე დაშორებათა ნამრავლი მაქსიმალურია. გამოთვალეთ ეს ნამრავლი.

ა) 4 სმ^2 ბ) 2 სმ^2 გ) 3 სმ^2 დ) 5 სმ^2

75. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის უმცირესი მახვილი კუთხე, თუ მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლით და მედიანით შედგენილი სამკუთხედის ფართობი მთელი სამკუთხედის ფართობის მეოთხედია.

ა) 30^o ბ) 25^o გ) 40^o დ) 20^o

76. ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდი ტოლია 6 სმ-ის. იპოვეთ სამკუთხედის სიმაღლე.

ა) $6\sqrt{3}$ სმ ბ) $3\sqrt{3}$ სმ გ) $2\sqrt{3}$ სმ დ) $\sqrt{3}$ სმ

77. ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდი ტოლია 8 სმ-ის. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.
ა) 8 სმ^2 ბ) $16\sqrt{3}$ სმ^2 გ) $2\sqrt{3}$ სმ^2 დ) $\sqrt{3}$ სმ^2

78. ტოლგვერდა სამკუთხედის ბისექტრისა ტოლია 5 სმ-ის. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდი.
ა) $10\sqrt{3}/3$ სმ ბ) $10\sqrt{3}$ სმ გ) $8\sqrt{3}$ სმ დ) $2{,}5\sqrt{3}$ სმ

79. ტოლგვერდა სამკუთხედის მედიანა ტოლია 8 სმ-ის. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.
ა) $64\sqrt{2}/3$ სმ^2 ბ) $32\sqrt{3}/3$ სმ^2 გ) $32\sqrt{3}/5$ სმ^2 დ) $64\sqrt{3}/3$ სმ^2

80. ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობი ტოლია 10 სმ^2-ის. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდი.
ა) $4\sqrt{5}$ სმ ბ) $3\sqrt{5}$ სმ გ) $2\sqrt[4]{2700}/3$ სმ დ) $2\sqrt[3]{78}/3$ სმ

81. ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობი ტოლია 8 სმ^2-ის. იპოვეთ ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.
ა) $2\sqrt[4]{12}/3$ სმ ბ) $2\sqrt[4]{2}/8$ სმ გ) $3\sqrt{6}$ სმ დ) $4\sqrt{2}$ სმ

82. ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობი ტოლია 12 სმ^2-ის. იპოვეთ შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.
ა) $2\sqrt[4]{18}/3$ სმ ბ) $4\sqrt[4]{27}/3$ სმ გ) $4\sqrt{29}/3$ სმ დ) $4\sqrt{29}$ სმ

83. ტოლგვერდა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი ტოლია 4 სმ-ის. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.
ა) $45\sqrt{3}$ სმ^2 ბ) $46\sqrt{3}$ სმ^2 გ) $56\sqrt{3}$ სმ^2 დ) $48\sqrt{3}$ სმ^2

84. ტოლგვერდა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი ტოლია 6 სმ-ის. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.
ა) $24\sqrt{3}$ სმ^2 ბ) $27\sqrt{3}$ სმ^2 გ) $9\sqrt{3}$ სმ^2 დ) $12\sqrt{3}$ სმ^2

85. ტოლგვერდა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი ტოლია 6 სმ-ის. იპოვეთ მედიანა.
ა) 12 სმ ბ) 8 სმ გ) 9 სმ დ) 10 სმ

86. ტოლგვერდა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი ტოლია 5 სმ-ის. იპოვეთ სამკუთხედის სიმაღლე.
ა) 15 სმ ბ) 10 სმ გ) 12 სმ დ) 16 სმ

87. ტოლფერდა საკუთხედში წვეროსთან მდებარე კუთხე ტოლია 84°-ის. იპოვეთ კუთხე ფერდის ბისექტრისასა და ამავე ფერდის სიმაღლეს შორის.
ა) 18° ბ) 24° გ) 36° დ) 28°

88. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი ტოლია 5 სმ-ის, ხოლო ფუძე – 6 სმ-ის. იპოვეთ ფერდზე დაშვებული სიმაღლე.
ა) 5 სმ ბ) 4,8 სმ გ) 2,4 სმ დ) 4 სმ

89. ტოლფერდა სამკუთხედში ფერდზე დაშვებული სიმაღლე ტოლია 8 სმ-ის, ხოლო ფუძე 10 სმ-ის. იპოვეთ ფერდის სიგრძე.
ა) 7/3 სმ ბ) 12 სმ გ) 12,5სმ დ) 25/3 სმ

90. ტოლფერდა სამკუთხედში ფერდის მედიანა ტოლია 5 სმ-ის, ხოლო ფუძე – 6 სმ-ის იპოვეთ ფერდის სიგრძე.
ა) 4 სმ ბ) $3\sqrt{7}$ სმ გ) $2\sqrt{7}$ სმ დ) $4\sqrt{7}$ სმ

91. მახვილკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი ტოლია 5 სმ-ის, ხოლო სამკუთხედის ფუძე – 4 სმ-ის. იპოვეთ ფერდის სიგრძე.

ა) $\sqrt{50+10\sqrt{21}}$ სმ ბ) $\sqrt{50+5\sqrt{21}}$ სმ გ) $\sqrt{25+2\sqrt{3}}$ სმ დ) $\sqrt{50+2\sqrt{21}}$ სმ

92. ტოლფერდა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი ტოლია 1 სმ-ის, სამკუთხედის ფუძე – 6 სმ-ის. იპოვეთ ფერდის სიგრძე.

ა) 8 სმ ბ) 3,75 სმ გ) 7,5 სმ დ) 7 სმ

93. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე ტოლია ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირების რადიუსების ჯამის. სამკუთხედის ფართობი ტოლია $16\sqrt{3}$ სმ^2-ის. იპოვეთ შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

ა) $8\sqrt{3}/3$ სმ ბ) $2\sqrt{3}$ სმ გ) $3\sqrt{3}$ სმ დ) 7 სმ

94. ტოლფერდა სამკუთხედის ფართობი ტოლია 12 სმ^2-ის, ხოლო პერიმეტრი 16 სმ-ის. იპოვეთ სამკუთხედის ფუძე თუ ის მთელი რიცხვია.

ა) 4 სმ ბ) 3 სმ გ) 5 სმ დ) 6 სმ

95. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძის ბისექტრისა ტოლია 8 სმ-ის,ხოლო ფუძე – 10 სმ-ის. იპოვეთ სამკუთხედის ფერდის სიგრძე.

ა) $6\sqrt{13}+2$ სმ ბ) $6\sqrt{13}$ სმ გ) $320/\left(5\sqrt{89}-7\right)$სმ დ) $160/\left(2\sqrt{29}-3\right)$სმ

96. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდის სიგრძე 2-ჯერ მეტია მასზე დაშვებულ სიმაღლეზე. რამდენჯერ მეტია ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე სამკუთხედის ფუძეზე?

ა) $2+\sqrt{3}$-ჯერ ბ) $\left(2\pm\sqrt{3}\right)/2$-ჯერ გ) 2-ჯერ დ) 4-ჯერ

97. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე ტოლია 12 სმ-ის, ხოლო ფერდზე დაშვებული სიმაღლე –8 სმ-ის. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

ა) $14{,}4\sqrt{5}$ სმ^2 ბ) $7{,}2\sqrt{5}$ სმ^2 გ) $28{,}8\sqrt{5}$ სმ^2 დ) $36\sqrt{5}$ სმ^2

98. არაბლაგვკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე ტოლია 10 სმ-ის. რა რიცხვითი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს ფერდზე დაშვებულმა სიმაღლემ?

ა) $h\in[5\sqrt{2};10)$სმ ბ) 6 სმ გ) $h\in[5\sqrt{2};18)$სმ დ) 10 სმ

99. *ABC* ტოლფერდა სამკუთხედში ფერდის ბისექტრისა ფერდს ყოფს შეფარდებით 1:2 (ფუძის მხრიდან). იპოვეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის ფარდობა ჩახაზული წრეწირის რადიუსთან.

ა) 2 ბ) 5/3 გ) 7/3 დ) 8/3

100. მოცემულია ორი ტოლი ტოლგვერდა სამკუთხედი. რომლებიც განლაგებულია შემდეგნაირად: პირველი სამკუთხედის წვერო ძევს მეორე სამკუთხედის ფუძის შუაწერტილში და პირიქით. იპოვეთ ამ სამკუთხედების საერთო ნაწილის ფართობი თუ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია 4 სმ.

ა) $2\sqrt{3}$ სმ^2 ბ) $\sqrt{3}$ სმ^2 გ) $4\sqrt{3}$ სმ^2 დ) $2\sqrt{2}$ სმ^2

101. სამკუთხედის გვერდები ტოლია 5 სმ-ის, 6 სმ-ის და 7 სმ-ის. იპოვეთ უდიდეს გვერდზე დაშვებული სიმაღლე.

ა) 12 სმ ბ) $12\sqrt{6}/7$ სმ გ) $1{,}4\sqrt{6}$ სმ დ $6\sqrt{6}/7$ სმ

102. სამკუთხედის გვერდები ტოლია 6 სმ-ის, 8 სმ-ის და 12 სმ-ის. იპოვეთ უდიდესი გვერდის პირდაპირ მდებარე კუთხის ბისექტრისა.

ა) $\sqrt{39}/7$ სმ ბ) $2\sqrt{39}/7$ სმ გ) $4\sqrt{39}/7$ სმ დ) $4\sqrt{39}$ სმ

103. სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეებია: 5 სმ და 6 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხე – 60^o-ია. იპოვეთ მესამე გვერდი.

ა) $\sqrt{30}$ სმ ბ) $\sqrt{29}$ სმ გ) $\sqrt{31}$ სმ დ) $2\sqrt{31}$ სმ

104. სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეებია: 6 სმ და 8 სმ, ხოლო მესამე გვერდის მედიანა – 5 სმ-ია. იპოვეთ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

ა) 5 სმ ბ) $2\sqrt{3}$ სმ გ) $3\sqrt{2}$ სმ დ)10 სმ

105. სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია: 4 სმ და 6 სმ. 6 სმ სიგრძის გვერდის მედიანა კი – 6 სმ. იპოვეთ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

ა) $\sqrt{455}/(2+\sqrt{3})$ სმ ბ) $8\sqrt{2}$ სმ გ) $\sqrt{74}$ სმ დ) $\sqrt{455}/(10+\sqrt{74})$ სმ

106. სამკუთხედის ერთი კუთხე ტოლია 30^o-ის, ხოლო მეორე – 45^o-ის. მესამე კუთხის წვეროდან დაშვებული სიმაღლე ტოლია 4 სმ-ის, იპოვეთ ამ წვეროდან გამომავალი მედიანის სიგრძე.

ა) $0{,}5\left(\sqrt{200-50\sqrt{3}}\right)$ სმ ბ) $0{,}5\sqrt{200-5\sqrt{3}}$ სმ გ) $0{,}5\sqrt{144-\sqrt{3}}$ სმ დ) $0{,}5\sqrt{100-\sqrt{3}}$ სმ

107. სამკუთხედის ერთი კუთხე ტოლია 30^o-ის, ხოლო მეორე – 45^o-ის. მესამე კუთხის ბისექტრისა ტოლია 6 სმ-ის. იპოვეთ ამ კუთხის მოპირდაპირე გვერდი.

ა) $3\sqrt{2}+3$ სმ ბ) $(3\sqrt{2}+3)\sqrt{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ სმ გ) $\sqrt{4+\sqrt{6}}$ სმ დ) 12 სმ

108. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ ამ საკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეებია 4 სმ და 6 სმ, ხოლო მათ შორის მდებარე კუთხე ტოლია 30^o-ის.

ა) 5 სმ^2 ბ) 4 სმ^2 გ) 6 სმ^2 დ) 8 სმ^2

109. სამკუთხედის გვერდებია 6 სმ, 8 სმ და 12 სმ. იპოვეთ სამკუთხედზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეწირების რადიუსების ნამრავლი.

ა) 148/13 სმ^2 ბ) 132/13 სმ^2 გ) 144/13 სმ^2 დ) 18 სმ^2

110. ABC სამკუთხედში $\angle A=30^o$,$\angle B=45^o$,ხოლო BC გვერდი ტოლია 8 სმ-ის. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

ა) $16(\sqrt{3}+1)$სმ ბ) $4(\sqrt{3}+1)$სმ გ) $8(\sqrt{3}+1)$სმ დ) $8\sqrt{3}$ სმ

111. სამკუთხედში ერთი გვერდის სიგრძეა 6 სმ, ხოლო მასთან მიმდებარე კუთხეები ტოლია 30^o-ის და 60^o-ის. იპოვეთ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

ა) 4 სმ ბ) 3 სმ გ) 3,6 სმ დ) 2 სმ

112. სამკუთხედის ფართობი ტოლია 30 სმ^2-ის, ხოლო ორი მედიანის სიგრძეებია 6 სმ და 9 სმ. იპოვეთ კუთხე ამ მედიანებს შორის.

ა) $arcsin\frac{2}{5}$ ბ) $arcsin\frac{1}{3}$ გ) $arcsin\frac{5}{6}$ დ) $arccos\frac{1}{6}$

113. სამკუთხედის ერთი კუთხე ტოლია 30^o-ის, ხოლო მისი მოპირდაპირე გვერდი – 6 სმ-ის. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ ცნობილია რომ სამკუთხედის ფართობი ტოლია 12 სმ^2-ის.

ა) $6+2\sqrt{33+12\sqrt{3}}$ სმ ბ) $6+2\sqrt{13}$ სმ გ) $6+2\sqrt{13+\sqrt{3}}$ სმ დ) $18+\sqrt{3}$ სმ

114. სამკუთხედის ორი მედიანის სიგრძე ერთმანეთის ტოლია და შეადგენს 3 სმ-ს, ხოლო მესამე მედიანა ტოლია 2 სმ-ის. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდების კვადრატების ჯამი.

ა) 66/5 სმ ბ) 72/5 სმ გ) 44/3 სმ დ) 88/3 სმ

115. *ABC* სამკუთხედში *A* და *B* წვეროებიდან დაშვებული სიმაღლეები შესაბამისად ტოლია 6 სმ-ის და 8 სმ-ის, ხოლო $\angle C=60°$. იპოვეთ სამკუთხედის მესამე გვერდის სიმაღლე.

ა) $8\sqrt{3}$ სმ ბ) $24\sqrt{13}/13$ სმ გ) $12\sqrt{3}/13$ სმ დ) $24\sqrt{2}$ სმ

116. *ABC* სამკუთხედის *A* წვეროდან გამოსული მედიანა ამ სამკუთხედს ყოფს ორ სამკუთხედად, რომლებშიც ჩახაზული წრეწირის რადიუსები ერთმანეთის ტოლია. იპოვეთ *AB* გვერდის შეფარდება *AC* გვერდთან.

ა) 1 ბ) 2 : 3 გ) 1 : 2 დ) 3 : 4

117. *ABC* სამკუთხედის *A* წვეროდან გამომავალი მედიანა ამ სამკუთხედს ყოფს ორ სამკუთხედად ისე, რომ მათზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსები ტილია. იპოვეთ სამკუთხედის *AB* გვერდის შეფარდება *AC* გვერდთან.

ა) 1 : 2 ბ) $1:\sqrt{2}$ გ) 1 დ) 2 : 3

118. *ABC* სამკუთხედში *AB* გვერდი *AC* გვერდის ტოლია. სამკუთხედის *A* წვეროდან გამოსული წრფე $\angle A$-ს ყოფს 30°-იან და 45°-იან ორ კუთხედ. რა შეფარდებით ყოფს ეს წრფე მოპირდაპირე გვერდს?

ა) 1 : 2 ბ) $1:\sqrt{2}$ გ) 1 : 3 დ) 2 : 3

119. *ABC* სამკუთხედის მედიანებია: *AM*=2 სმ და *BN*=*CK*= 3 სმ. იპოვეთ *BC* გვერდის სიგრძე.

ა) $8\sqrt{2}/3$ ბ) $8\sqrt{3}$ სმ გ) $4\sqrt{2}$ სმ დ) $6\sqrt{2}$ სმ

120. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ სამკუთხედის ერთი კუთხე ტოლია 45°-ის, ამ კუთხის შესაბამისი წვეროდან მოპირდაპირე გვერდზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძეა 5 სმ და ის გვერდს ყოფს ორ ნაწილად რომელთა შეფარდებაა 1 : 2.

ა) $4\sqrt{17}+5$ სმ^2 ბ) $8(\sqrt{17}+1)$სმ^2 გ) $75\sqrt{17}/8$ სმ^2 დ) $75(\sqrt{17}-3)/8$ სმ

121. *ABC* სამკუთხედში *B* კუთხის ბისექტრისა ტოლია 4 სმ-ის და ის მოპირდაპირე გვერდს ყოფს შეფარდებით 1 : 2. იპოვეთ *AB* გვერდის გეგმილი ამ ბისექტრისაზე.

ა) 4 სმ ბ) 3 სმ გ) 6 სმ დ) 2 სმ

122. *ABC* სამკუთხედის გვერდებია *AB*=3სმ, *BC*=4სმ, *AC*=6სმ.
გამოთვალეთ ამ სამკუთხედის ელემენტები:
ა) პერიმეტრი,
ბ) ფართობი,
გ) სიმაღლეები,
დ) მედიანები,
ე) ბისექტრისები,
ვ) კუთხეები,
ზ) შემოხაზული წრეწირის რადიუსი,
თ) ჩახაზული წრეწირის რადიუსი,
ი) გარე ჩახაზული წრეწირების რადიუსები.

123. *ABC* სამკუთხედის გვერდებია *AB*=4სმ., *BC*=5სმ., კუთხე, $\angle ABC = \arccos(-1/5)$
გამოთვალეთ ამ სამკუთხედის ელემენტები:
ა) პერიმეტრი,
ბ) ფართობი,
გ) სიმაღლეები,
დ) მედიანები,
ე) ბისექტრისები,
ვ) კუთხეები,
ზ) შემოხაზული წრეწირის რადიუსი,
თ) ჩახაზული წრეწირის რადიუსი,
ი) გარე ჩახაზული წრეწირის რადიუსები.

124. *ABC* სამკუთხედის გვერდია *AB*=4სმ., კუთხეები $\angle ABC=\arcsin¼$, $\angle BCA=30^0$. გამოთვალეთ ამ სამკუთხედის ელემენტები:

ა) პერიმეტრი,
ბ) ფართობი,
გ) სიმაღლეები,
დ) მედიანები,
ე) ბისექტრისები,
ე) კუთხეები,
ზ) შემოხაზული წრეწირის რადიუსი,
თ) ჩახაზული წრეწირის რადიუსი,
ი) გარე ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

125. სამკუთხედის გვერდებია $AC=6$სმ, $BC=8$სმ და $AB=10$სმ. *AB* გვერდზე აღებულია *D* წერტილი ისე, რომ $S_{\Delta ACD}\cdot S_{\Delta CBD}$ მაქსიმალურია. იპოვეთ *CD* მონაკვეთის სიგრძე.

ა) 6 სმ ბ) 4 სმ გ) 3 სმ დ) 5 სმ

126. *ABC* სამკუთხედის *AC* და *BC* გვერდებზე დაშვებული სიმაღლეები შესაბამისად ტოლია 6 სმ და 4 სმ –ის. კუთხე ამ სიმაღლეებს შორის არის 150^0-ია. იპოვეთ უმცირესი გვერდის სიგრძე.

ა) 6 სმ ბ) $7+\sqrt{206-5\sqrt{3}}$ სმ გ) 5 სმ დ) $\sqrt{208-96\sqrt{3}}$ სმ

127. *ABC* სამკუთხედის გვერდებია *AB*=3სმ, *BC*=5სმ, *AC*=6სმ. იპოვეთ მანძილი *M* და *N* წერტილებს შორის, თუ *AM* და *BN* წარმოადგენენ სამკუთხედის ბისექტრისებს.

ა) $\sqrt{107}/6$ სმ ბ) $\sqrt{503}/8$ სმ გ) $\sqrt{505}/12$ სმ დ) 2 სმ

128. *ABC* სამკუთხედის გვერდებია *AB*=10 სმ, *BC*=8 სმ, *AC*=6 სმ. C წვეროდან გავლებულია მედიანა. იპოვეთ მედიანის იმ ნაწილის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია სამკუთხედში ჩახაზული წრის შიგნით.

ა) $4\sqrt{6}/5$ სმ, ბ) $8\sqrt{6}/5$ სმ გ) $6\sqrt{6}/5$ სმ დ) $3\sqrt{6}/5$ სმ

129. *ABC* სამკუთხედის გვერდებია *AB*=4სმ, *BC*=5სმ, *AC*=6 სმ. *B* წვეროდან გავლებულია ბისექტრისა. იპოვეთ მისი იმ ნაწილის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია სამკუთხედში ჩახაზული წრის შიგნით.

ა) 4 სმ ბ) $3\sqrt{2}$ სმ გ) $\sqrt{5}$ სმ დ) $\sqrt{7}$ სმ

130. *ABC* სამკუთხედის გვერდებია *AB*= 4 სმ, *BC*= 3 სმ, AC= 4სმ. *C* წვეროდან გავლებულია სიმაღლე. იპოვეთ მისი იმ ნაწილის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია სამკუთხედში ჩახაზული წრის შიგნით.

ა) 3 სმ ბ) 3/7 სმ გ) $2\sqrt{6}/9$ სმ დ) $4\sqrt{6}/5$ სმ

131. *ABC* სამკუთხედის გვერდებია *AB*=4სმ, *BC*=6სმ, *AC*=8 სმ. მოცემულ სამკუთხედზე შემოხაზულია წრეწირი. *B* წვეროდან გავლებულია *BD* მედიანა, რომელიც გაგრძელებულია წრეწირის გადაკვეთამდე. გადაკვეთის წერტილი აღნიშნულია *E* –თი. იპოვეთ *DE* მონაკვეთის სიგრძე.

ა) $5\sqrt{10}$ სმ ბ) $1{,}6\sqrt{10}$ სმ გ) $2\sqrt{10}$ სმ დ) $1{,}2\sqrt{10}$ სმ

132. *ABC* სამკუთხედის კუთხეებია $\angle A=60^0, \angle B=75^0, \angle C=45^0$ სამკუთხედის ფართობი 2სმ²–ია. გამოთვალეთ სამკუთხედის უმცირესი გვერდი.

ა) $\dfrac{2\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3cos25^0}}$ სმ ბ) $\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3cos15^0}}$ სმ გ) $\dfrac{2\sqrt[4]{5}}{\sqrt{3cos15^0}}$ სმ დ) $\dfrac{2\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3cos15^0}}$ სმ

133. მოცემულია ABC სამკუთხედი, რომლის ფართობი 3 სმ^2 –ია. AB, BC და CA გვერდებზე აღებულია M, K და D წერტილები ისე, რომ $AM=1/3AB$, $BK=1/3BC$. $CD=1/3AC$ იპოვეთ KMD სამკუთხედის ფართობი.

ა) 1,2 სმ^2 ბ) 0,8 სმ^2 გ) 1 სმ^2 დ) 2 სმ^2

134. ABC სამკუთხედში BAC კუთხის ბისექტრისა მის ფართობს ჰყოფს შეფარდებით 2:3 – თან. გამოთვალეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ ცნობილია რომ $\angle BAC=75^0$

ა) $150^0 - arcsin\frac{5\sqrt{57}}{38}$; $30^0 + arcsin\frac{5\sqrt{57}}{38}$ ბ)40^0; 60^0 გ)50^0; 70^0

დ) $120^0 - arcsin\frac{5\sqrt{57}}{38}$; $60^0 + arcsin\frac{5\sqrt{57}}{38}$

135. ABC სამკუთხედში ერთ-ერთი კუთხის სიმაღლე და მედიანა მოცემულ კუთხეს ყოფენ სამ ტოლ კუთხეებად. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

ა) 30^0; 60^0; 90^0 ბ) 40^0; 50^0; 90^0 გ) 20^0; 70^0; 90^0 დ) 45^0; 45^0; 90^0

136. ABC სამკუთხედის გვერდებია $AB = 5$ სმ და $BC = 7$სმ. გამოთვალეთ $\frac{sin\angle ABD}{sin\angle DBC}$ თუ ცნობილია, რომ BD მონაკვეთი სამკუთხედის ფართობს შუაზე ჰყოფს.

ა) 5/7 ბ) 7/5 გ) 7/12 დ) 12/7

137. ABC სამკუთხედის AC გვერდზე აღებულია D წერტილი. შეადარეთ სიდიდეები $AB+BC$ და $AC+BD$.

ა) ტოლია ბ) $AB + BC > AC + BD$ გ)$AB + BC < AC + BD$ დ) ვერ შევადარებთ

138. ABC სამკუთხედის AC გვერდზე აღებულია ისეთი D წერტილი, რომ ნამრავლი $S_{ABD} \cdot S_{BCD}$ მაქსიმალურია. მაშინ D წერტილი ეკუთვნის:

ა) BD მედიანას ბ) BD ბისექტრისას გ) BD სიმაღლეს

დ) AD და CD მონაკვეთებს ისე,რომ $AD=2CD$

139. სამკუთხედი ABC მოიცავს სამკუთხედ DEF. რომელი სამკუთხედის პერიმეტრია მეტი?

ა) ვერ შევადარებთ ბ) ABC სამკუთხედის

140. ABC და ABD სამკუთხედებს გააჩნიათ საერთო AB გვერდი, ამასთან D წერტილი ძევს ABC სამკუთხედის შიგნით. რომელი სამკუთხედის პერიმეტრია მეტი?

ა) $P_{ABD} > P_{ABC}$ ბ) $P_{ABD} < P_{ABC}$ გ) $P_{ABD} = P_{ABC}$ დ) ვერ დავადგენთ

141. ABC სამკუთხედის AC გვერდის მედიანა ტოლია შემოხაზული წრეწირის რადიუსის. რომელია მეტი $\angle A$ თუ $\angle C$

ა) $\angle A > \angle C$ ბ) $\angle A < \angle C$ გ) $\angle A = \angle C$ დ) ვერ შევადარებთ

142. A წერტილის კოორდინატებია (2;1), B წერტილის $-(2+\sqrt{3};\ 2)$. იპოვეთ ისეთი C წერტილის კოორდინატები, რომლებიც დადებითია, $\angle ACB = 30^0$-ს და ABC სამკუთხედის ფართობი კი მაქსიმალურია.

ა) $C(1;3+3\sqrt{3}$ ბ) $C\left(1;2+\sqrt{3}\right)$ გ) $C\left(1;2\sqrt{6}+2\right)$ დ) $C\left(1;3+\sqrt{2}\right)$

143. სიბრტყეზე მოცემულია წერტილები $A(2;\cdot 0)$, $B(0;\ 3-\sqrt{5})$, $C(0;3+\sqrt{5}\ )$, $D(4;\ Y_0)$ იპოვეთ y_0 თუ ცნობილია, რომ ამ მოცემულ ოთხ წერტილზე გადის წრეწირი და ამასთან $y_0 > 3$.

ა)$2\sqrt{5}+3$ ბ) $3+\sqrt{5}$ გ)$2\sqrt{6}+2$ დ)$2\sqrt{6}+3$

144. იპოვეთ კვადრატის ფართობი თუ მისი დიაგონალი ტოლია $5\sqrt{2}$ სმ-ის.

ა) 20 სმ^2 ბ) 30 სმ^2 გ) 25 სმ^2 დ) 35 სმ^2

145. იპოვეთ კვადრატის პერიმეტრი თუ მისი ფართობი ტოლია 16 $სმ^2$-ის.

ა) 16 სმ ბ) 12 სმ გ) 20 სმ დ) 18 სმ

146. კვადრატის ფართობი რიცხობრივად ორჯერ მეტია მის პერიმეტრზე. იპოვეთ კვადრატის დიაგონალის სიგრძის შეფარდება გვერდის სიგრძესთან.

ა) 3 ბ) $\sqrt{3}$ გ) $\sqrt{2}$ დ) 2

147. კვადრატში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი ტოლია 4 სმ-ის. იპოვეთ კვადრატზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

ა) $4\sqrt{3}$ სმ ბ) $4\sqrt{2}$ სმ გ) $2\sqrt{2}$ სმ დ) $3\sqrt{2}$ სმ

148. კვადრატის პერიმეტრი შეამცირეს 20%-ით. რამდენი პროცენტით შემცირდა მისი ფართობი?

ა) 18% ბ) 26% გ) 36% დ) 40%

149. კვადრატის ფართობი შეამცირეს 75%-ით. რამდენი პროცენტით შემცირდა მისი პერიმეტრი?

ა) 25% ბ) 50% გ) 75% დ) 40%

150. კვადრატის ფართობის რა ნაწილს შეადგენს მისი გვერდების შუაწერტილების შეერთებით მიღებული ოთხკუთხედის ფართობი?

ა) 0,5 ბ) 0,25 გ) 1/3 დ) 1/5

151. კვადრატის გვერდი წერტილებით დაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. მიღებული წერტილები შეერთებულია თითოს გამოტოვებით. იპოვეთ კვადრატის ფართობის რა ნაწილს შეადგენს მიღებული ოთხკუთხედის ფართობი?

ა) 5/8 ბ) 3/4 გ) 2/3 დ) 5/9

152. კვადრატის გვერდი 1 სმ –ის ტოლია. გამოთვალეთ იმ წესიერი სამკუთხედის ფართობი, რომლის ერთ-ერთი წვერო ემთხვევა კვადრატის წვეროს, ხოლო დანარჩენი ორი მდებარეობს ამ წვეროს არაშემცველ გვერდებზე.

ა) $2\sqrt{3}+3$ $სმ^2$ ბ) $3\sqrt{3}-3$ $სმ^2$ გ) $2\sqrt{3}-4$ $სმ^2$ დ) $2\sqrt{3}-3$ $სმ^2$

153. სად მდებარეობს კვადრატის ის წერტილი საიდანაც ამ წერტილიდან კვადრატის წვეროებამდე მანძილების ჯამი მაქსიმალურია.

ა) კვადრატის წვეროში ბ) კვადრატის გვერდის შუაში
გ) დიაგონალების გადაკვეთის წერტილში დ) კვადრატის გვერდის ნებისმიერ წერტილში

154. მართკუთხედის დიაგონალებს შორის ერთ-ერთი კუთხე 60°-ია. იპოვეთ ამ მართკუთხედის დიდი გვერდის შეფარდება მცირე გვერდთან.

ა) 2 ბ) $\sqrt{2}$ გ) $\sqrt{3}$ დ) $\sqrt{5}$

155. მართკუთხედის გვერდების შუაწერტილების შეერთებით მიღებული ოთხკუთხედის ერთ-ერთი კუთხე 60°-ია. იპოვეთ მართკუთხედის დიდი გვერდის შეფარდება მცირე გვერდთან.

ა) $\sqrt{3}$ ბ) $\sqrt{2}$ გ) 2 დ) 3

156. მართკუთხედის წვეროებიდან დიაგონალზე დაშვებული სიმაღლეები ამ დიაგონალს ყოფენ სამ ტოლ ნაწილად. იპოვეთ მართკუთხედის დიდი გვერდის შეფარდება მცირე გვერდთან.

ა) $\sqrt{3}$ ბ) $\sqrt{2}$ გ) 2 დ) $\sqrt{7}$

157. მართკუთხედის წვეროებიდან დიაგონალზე დაშვებული სიმაღლეები ამ დიაგონალს ჰყოფენ შეფარდებით 1 : 2 : 1. იპოვეთ კუთხე მართკუთხედის დიაგონალებს შორის.

ა) 80° ბ) 50° გ) 60° დ) 70°

158. მართკუთხედის ერთი გვერდი 5 სმ-ით მეტია მეორეზე. მისი პერიმეტრი 22 სმ-ია. იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი.

ა) 18 სმ^2 ბ) 20 სმ^2 გ) 28 სმ^2 დ) 24 სმ^2

159. მართკუთხედის ერთი გვერდი 6 სმ-ით მეტია მეორეზე. მისი ფართობი ტოლია 40 სმ^2-ის. იპოვეთ მართკუთხედის დიაგონალი.

ა) $2\sqrt{22}$ სმ ბ) $2\sqrt{29}$ სმ გ) $\sqrt{31}$ სმ დ) $3\sqrt{19}$ სმ

160. მართკუთხედის გვერდები ტოლია 6 სმ-ის და 8 სმ-ის. დიაგონალის შუაწერტილიდან აღმართულია მართობი. რა სიგრძის მონაკვეთებად დაჰყოფს ეს მართობი მართკუთხედის გვერდს?

ა) 1,75 სმ; 6,25 სმ ბ) 4,5 სმ; 3,5 სმ გ) 2,5 სმ; 5,5 სმ დ)1,25 სმ; 5,75 სმ

161. მართკუთხედის გვერდები ტოლია 6 სმ-ის და 8 სმ-ის. მართკუთხედის დიდ გვერდზე აღებული წერტილი ამ გვერდს ყოფს შეფარდებით 1 : 3 მოცემული წვეროს მხრიდან. რა შეფარდებით ჰყოფს ამ წვეროდან გამოსულ დიაგონალს მასზე ამ წერტილის გეგმილი.

ა) 4 : 19 ბ) 1 : 5 გ) 4 : 21 დ) 4 : 25

162. მართკუთხედის გვერდები ტოლია 3 სმ-ის და 4 სმ-ის. იპოვეთ მანძილი მართკუთხედის წვეროდან მის დიაგონალამდე.

ა) 4 სმ ბ) 4,8 სმ გ) 2,4 სმ დ) 1,2 სმ

163. მართკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი ტოლია 5 სმ-ის. მანძილი მართკუთხედის წვეროდან მის დიაგონალამდე შეადგენს 4,8 სმ-ს. იპოვეთ მართკუთხედის პერიმეტრი.

ა) 28 სმ ბ) 24 სმ გ) 32 სმ დ) 40 სმ

164. მართკუთხედის ერთი გვერდი 25%-ით ნაკლებია მეორე გვერდზე. რამდენი პროცენტითაა ნაკლები მართკუთხედის წვეროდან დაშვებული სიმაღლე მართკუთხედის დიაგონალზე?

ა) 48% ბ) 40% გ) 70% დ) 52%

165. მართკუთხედის გვერდები ტოლია 5 სმ-ის და 12 სმ-ის. მცირე გვერდზე აღებული წერტილი ამ გვერდს ჰყოფს შეფარდებით 1 : 4. იპოვეთ უმცირესი მანძილი ამ წერტილიდან იმ დიაგონალამდე, რომელიც ამ წერტილის უახლოესი წვეროდან გამოდის.

ა) 7/9 სმ ბ) 9/13 სმ გ) 10/13 სმ დ) 12/13 სმ

166. მოცემულია ორი მართკუთხედი, რომელთა წვეროების კოორდინატებია:

1) $A(2;-1)$, $B(2;4)$, $C(10;-1)$, $D(10:4)$

2) $E(4;2)$; $F(4:5)$, $K(12;2)$, $M(12:5)$

იპოვეთ ამ მართკუთხედების საერთო ნაწილის ფართობი.

ა) 14 სმ^2 ბ) 12 სმ^2 გ) 16 სმ^2 დ) 10 სმ^2

167. მოცემულია ორი მართკუთხედი,რომელთა წვეროების კოორდინატებია:

1) $A\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$; $B\left(\frac{6}{5};\frac{12}{5}\right)$; $D\left(\frac{14}{5};\frac{8}{5}\right)$

2) $E\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$; $F\left(\frac{6}{5};\frac{12}{5}\right)$; $K\left(\frac{14}{5};\frac{8}{5}\right)$; $M(3;5$

იპოვეთ ამ მართკუთხედების საერთო ნაწილის ფართობი.

ა) 3/2 სმ^2 ბ) 5/4 სმ^2 გ) 121/84 სმ^2 დ) 431/320 სმ^2

168. ტოლფერდა სამკუთხედში ჩახაზულია მართკუთხედი ისე, რომ მისი დიდი გვერდი ძევს სამკუთხედის ფუძეზე, ხოლო მართკუთხედის ორი წვერო კი - სამკუთხედის ფერდებზე. იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი თუ მისი დიდი გვერდი ორჯერ გრძელია მცირე გვერდზე. სამკუთხედის ფერდები ტოლია 10 სმ-ის, ხოლო ფუძე – 12 სმ-ის.

ა) 1152/49 სმ^2 ბ) 1052/49 სმ^2 გ) 952/49 სმ^2 დ) 1252/49 სმ^2

169. რომბის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გვერდზე დაშვებული სიმაღლე გვერდს ჰყოფს შეფარდებით 1 : 2 მახვილი კუთხის წვეროს მხრიდან. იპოვეთ რომბის დიდი დიაგონალის სიგრძის შეფარდება მცირე დიაგონალის სიგრძესთან.

ა) $\sqrt{2}$ ბ) 2 გ) $\sqrt{3}$ დ) $\sqrt{5}$

170. მართკუთხედში, რომლის გვერდები ტოლია 6 სმ-ის და 8 სმ-ის ჩახაზულია რომბი ისე, რომ რომბის ორი გვერდი ძევს მართკუთხედის გვერდებზე, ხოლო რომბის მოპირდაპირე ორი წვერო მართკუთხედის წვეროებს ემთხვევა. იპოვეთ რომბის ფართობი.

ა) 40 სმ^2 ბ) 35 სმ^2 გ) 50 სმ^2 დ) 37,5 სმ^2

171. სამკუთხედში რომლის გვერდები ტოლია 6 სმ-ის,8 სმ-ის და 12 სმ-ის. ჩახაზულია რომბი ისე, რომ მისი ერთი კუთხე ემთხვევა სამკუთხედის იმ კუთხეს, რომელიც მოქცეულია 6 სმ-ის და 12 სმ-ის ტოლ გვერდებს შორის, ხოლო რომბის ერთი წვერო ძევს 8 სმ-ის ტოლ გვერდზე. იპოვეთ რომბის ფართობი.

ა) $80\sqrt{2}$ სმ^2 ბ) $4\sqrt{445}/9$ სმ^2 გ) 102 სმ^2 დ) $4\sqrt{455}/9$ სმ^2

172. მოცემულია რომბი, რომლის გვერდის სიგრძე ტოლია 6 სმ-ის. მისი გვერდის შუაწერტილები შეერთებულია თანმიმდევრობით. მიღებული ოთხკუთხედის შუაწერტილებიც ასევე მიმდევრობითაა შეერთებული. იპოვეთ ამ უკანასკნელი ოთხკუთხედის ფართობის შეფარდება რომბის ფართობთან.

ა) 3 : 10 ბ) 3 : 22 გ) 1 : 4 დ) 4 15

173. რომბის დიაგონალების ჯამი ტოლია 10 სმ-ის, ხოლო გვერდი – 3 სმ-ის. იპოვეთ რომბის ფართობი.

ა) 12 სმ^2 ბ) 16 სმ^2 გ) 15 სმ^2 დ) 24 სმ^2

174. რომბის დიაგონალების ჯამი ტოლია $6\sqrt{6}$ სმ-ის, ხოლო გვერდი 6 სმ-ის. იპოვეთ რომბის მახვილი კუთხე.

ა) 60° ბ) 45° გ) 30° დ) 40°

175. რომბის ყველა გვერდი დაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. დაყოფის წერტილები შეერთებულია თითოს გამოტოვებით. იპოვეთ რომბის ფართობის შეფარდება მიღებული ოთხკუთხედის ფართობთან.

ა) 9 : 5 ბ) 4 : 3 გ) 9 : 7 დ) 8 : 3

176. რომბის ყველა გვერდი დაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. დაყოფის წერტილები შეერთებულია თითოს გამოტოვებით. მიღებული ოთხკუთხედის დიაგონალების ჯამი 20 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ რომბის გვერდის სიგრძე.

ა) 4 სმ ბ) 3 სმ გ) 2 სმ დ) 6 სმ

177. რომბის შიგნით აღებულია წერტილი. მასზე გაელებულია ორი წრფე, რომლებიც რომბის გვერდების მართობულია. კუთხე ამ წრფეებს შორის 25^0-ია. იპოვეთ რომბის მახვილი კუთხე.

ა) 20° ბ) 15° გ) 25° დ) 35°

178. პარალელოგრამის გვერდები ტოლია 4 სმ-ის და 6 სმ-ის, ხოლო ერთ-ერთი დიაგონალი–8 სმ-ის. იპოვეთ მეორე დიაგონალი.

ა) $4\sqrt{5}$ სმ ბ) $2\sqrt{10}$ სმ გ) 5 სმ დ) 6 სმ

179. პარალელოგრამის დიაგონალები ტოლია 6 სმ-ის და 8 სმ-ის. მათ შორის კუთხე შეადგენს 60^0. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები.

ა) $\sqrt{13}$ სმ; $\sqrt{37}$ სმ ბ) 5 სმ; 8 სმ გ) 4 სმ; 12 სმ დ) 6 სმ; 10 სმ

180. *ABCD* პარალელოგრამში *B* ბლაგვი კუთხის წვეროდან დაშვებული სიმაღლე *AD* გვერდს ჰყოფს შეფარდებით 1 2 მახვილი კუთხის მხრიდან. მცირე დიაგონალი ტოლია 8 სმ-ის, ხოლო *AB* გვერდის სიგრძეა 7 სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის მეორე დიაგონალი.

ა) 7 სმ ბ) $2\sqrt{3}$ სმ გ) $2\sqrt{31}$ სმ დ) 5 სმ

181. პარალელოგრამის მცირე დიაგონალი ბლაგვ კუთხეს ჰყოფს შეფარდებით 1 2, ხოლო პარალელოგრამის გვერდების შეფარდებაა $\sqrt{2}:1$. იპოვეთ პარალელოგრამის კუთხეები.

ა) 45^o; 135^o ბ) 80^o; 100^o გ) 60^o; 120^o დ) 50^o; 130^o

182. პარალელოგრამის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 3 5. იპოვეთ მანძილი პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის წვეროდან მცირე გვერდამდე, თუ მანძილი ამ წვეროდან დიდ გვერდამდე 3 სმ-ის ტოლია.

ა) 8 სმ ბ) 5 სმ გ) 6 სმ დ) 4 სმ

183. პარალელოგრამის გვერდები ტოლია aსმ-ის და $2a$ სმ-ის. პარალელოგრამის ბისექტრისების გადაკვეთით მიღებული ოთხკუთხედის პერიმეტრი ტოლია P სმ-ის. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.

ა) P^2-2a^2 სმ ^{2} ბ) P^2-a სმ ^{2} გ) $(P-2a)/2$ სმ ^{2} დ) $(P^2-4a^2)/2$ სმ ^{2}

184. *ABCD* პარალელოგრამის გვერდებია 4 სმ. და 5 სმ. მახვილი კუთხის ბისექტრისა *AM*=6 სმ. (*M* წერტილი მდებარეობს *BC* გვერდზე). იპოვეთ პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხე და მცირე დიაგონალი.

ა) 135^0; 7 სმ ბ) $2arcsin\frac{\sqrt{7}}{2}$; 7 სმ გ) $2arccos\frac{\sqrt{7}}{4}$; 6 სმ დ) 120^0; 6 სმ

185. *ABCD* პარალელოგრამის *AB* და *CD* გვერდებზე აღებულია წერტილები $A_1, A_2, ...A_n$ და $B_1, B_2, ...B_m$. ყოველი A_k წერტილი აღებულია *AB* გვერდზე, ხოლო ყოველი B_k წერტილი – *CD* გვერდზე. ამასთანავე $AA_1=A_1A_2=...=A_nB$; $DB_1=B_1B_2=...=B_mC$; m>6; n>3. იპვეთ $A_1A_{n-2}B_{m-3}B_3$ ოთხკუთხედების ფართობი, თუ პარალელოგრამის ფართობია 1 სმ^2.

ა) $\frac{2mn-5n-2m-9}{2(m+1)(n+1)}$ სმ ^{2} ბ) $\frac{mn}{(m+1)(n+1)}$ სმ ^{2}

გ) $\frac{mn+6}{2(m+1)(n+1)}$ სმ ^{2} დ) $\frac{mn-3}{2(m+1)(n+1)}$ სმ ^{2}

186. პარალელოგრამის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანებს როგორც 2:3 მოცემულ პარალელოგრამში ჩახაზულია ორი წრეწირი ისე, რომ თითოეული მათგანი ეხება პარალელოგრამის სამ გვერდს და ასევე მეორე წრეწირს. გამოთვალეთ პარალელოგრამის კუთხეები.

ა) 30^0; 150^0 ბ) 35^0; 145^0 გ) 60^0; 120^0 დ) 65^0; 115^0

187. *ABC* სამკუთხედის გვერდებია *AB* = 5სმ, *BC* = 7სმ და *AC* = 8სმ. განვიხილოთ ყველა ისეთი პარალელოგრამი, რომელთა ერთ-ერთი კუთხე სამკუთხედის კუთხეს ემთხვევა, ხოლო მოპირდაპირე წვერო მოპირდაპირე გვერდზე მდებარეობს. გამოთვალეთ ამ პარალელოგრამებს შორის უდიდესი ფართობის მქონე პარალელოგრამის ფართობი.

ა) $4\sqrt{3}$ სმ^2 ბ) $6\sqrt{3}$ სმ^2 გ) $5\sqrt{3}$ სმ^2 დ) $7\sqrt{3}$ სმ^2

188. ABC სამკუთხედის ფართობი 6 სმ^2-ია. იპოვეთ უდიდესი ფართობის მქონე ისეთი პარალელოგრამი, რომლის ერთ-ერთი კუთხე ემთხვევა სამკუთხედის ერთ-ერთ კუთხეს, ხოლო მოპირდაპირე წვერო მდებარეობს სამკუთხედის გვერდზე.

ა) 2 სმ^2 ბ) 4 სმ^2 გ) 2,5 სმ^2 დ) 3 სმ^2

189. *ABC* სამკუთხედის გვერდებია $AB = 5$სმ, $BC = 7$სმ და $AC = 8$სმ. გამოთვალეთ იმ პარალელოგრამის გვერდები, რომლის კუთხე ემთხვევა სამკუთხედის $\angle BAC$ კუთხეს, ხოლო მოპირდაპირე წვერო *BC* გვერდზე მდებარეობს. პარალელოგრამის ფართობი $2\sqrt{3}$ სმ^2-ია.

ა) $\frac{20\pm2\sqrt{15}}{5}$ სმ, $\frac{20}{18\pm4\sqrt{15}}$ სმ ბ) $\frac{20\pm4\sqrt{15}}{5}$ სმ, $\frac{30}{20\pm4\sqrt{15}}$ სმ

გ) $\frac{10\pm4\sqrt{15}}{5}$ სმ, $\frac{15}{15\pm4\sqrt{5}}$ სმ დ) $\frac{20\pm4\sqrt{15}}{5}$ სმ, $\frac{20}{20\pm4\sqrt{15}}$სმ

190. *ABCD* მართკუთხედში *B* და *D* წვეროებიდან *AC* დიაგონალზე დაშვებულია *BM* და *DN* სიმაღლეები. იპოვეთ მანძილი *M* და *N* წერტილებს შორის, თუ *AB*=3 სმ, *AD*=4 სმ.

ა) 1,4 სმ ბ) 2,4 სმ გ) 2 სმ დ) 3 სმ

191. მართკუთხედსა და ტოლგვერდა სამკუთხედს გააჩნია საერთო გვერდი. ცნობილია, რომ მათი ფართობები ტოლია. რომელი ფიგურის პერიმეტრია მეტი?

ა) მართკუთხედის ბ) სამკუთხედის

გ) პერიმეტრები ტოლია დ) ვერ დავადგენთ

192. ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდი ტოლია 6 სმ-ის, ხოლო ფუძეები – 4 სმ-ის და 8 სმ-ის. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

ა) $24\sqrt{2}$ სმ^2 ბ) $12\sqrt{2}$ სმ^2 გ) 18 სმ^2 დ) $20\sqrt{2}$ სმ^2

193. ტოლფერდა ტრაპეციის ბლაგვი კუთხის შეფარდება მახვილ კუთხესთან ტოლია 5 – ის იპოვეთ ტრაპეციის გვერდები თუ მისი ფართობი ტოლია $12+9\sqrt{3}$ სმ^2-ის, ხოლო ზედა ფუძის სიგრძეა 4 სმ.

ა) 6 სმ; 6 სმ; 12 სმ ბ) 8 სმ; 8 სმ; 10 სმ

გ) 6 სმ; 6 სმ; $2+\sqrt{3}$ სმ, დ) 6 სმ,; 6 სმ; $4+6\sqrt{3}$ სმ

194. ტოლფერდა ტრაპეციის ბლაგვი კუთხის შეფარდება მახვილ კუთხესთან ტოლია 2-ის. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე ტოლია $3\sqrt{3}$ სმ-ის, ხოლო პერიმეტრი –38 სმ-ის.

ა) $19\sqrt{3}$ სმ^2 ბ) $39\sqrt{3}$ სმ^2 გ) $39\sqrt{2}$ სმ^2 დ) 39 სმ^2

195. ტოლფერდა ტრაპეციის ბლაგვი კუთხის შეფარდება მახვილ კუთხესთან ტოლია 3-ის. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი თუ მისი ფერდი ტოლია $3\sqrt{2}$ სმ-ის, ხოლო ზედა ფუძე –$\sqrt{2}$ სმ-ის.

ა) $12+\sqrt{2}$ სმ^2 ბ) 12 სმ^2 გ) $9+\sqrt{2}$ სმ^2 დ) $9+3\sqrt{2}$ სმ^2

196. *ABCD* ტრაპეციის ფერდები *AB*=*CD*=6 სმ-ს. *B* და *C* კუთხის ბისექტრისები დიდი ფუძის M წერტილში იკვეთებიან.$\angle BMC = 30^0$. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

ა) $36-9\sqrt{3}$ სმ^2 ბ) $36-7\sqrt{3}$ სმ^2 გ) 16 სმ^2 დ) 18 სმ^2

197. ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდი 6 სმ-ის ტოლია, დიდი ფუძე – 10 სმ-ის, ხოლო დიაგონალი – 8 სმ-ის. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

ა)24 სმ^2 ბ)20,56 სმ^2 გ)30,72 სმ^2 დ)24 სმ^2

198. მართკუთხა ტრაპეციის ფერდების სიგრძეებია 5 სმ და 7 სმ. ცნობილია, რომ ამ ტრაპეციაში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

ა) 10 სმ^2 ბ) 30 სმ^2 გ) 28 სმ^2 დ) 32 სმ^2

199. მართკუთხა ტრაპეციის ზედა ფუძე 3-ჯერ ნაკლებია ქვედა ფუძეზე. ფუძეების პარალელური წრფე ტრაპეციის სიმაღლეს ჰყოფს შეფარდებით 3 : 7 ზედა ფუძის მხრიდან. რა შეფარდებით ჰყოფს ეს წრფე ტრაპეციის ფართობს?

ა) 35 : 72 ბ) 37 : 84 გ) 49 : 120 დ) 39 : 161

200. მართკუთხა ტრაპეციაში მახვილი კუთხე ტოლია 60°-ის. ბლაგვი კუთხის წვეროდან დაშვებული სიმაღლე ფუძეს ყოფს შეფარდებით 1 : 3 მახვილი კუთხის წვეროს მხრიდან. იპოვეთ მანძილი დიდი ფერდის შუა წერტილიდან ქვედა ფუძესთან მდებარე მართი კუთხის წვერომდე, თუ ტრაპეციის ფართობი ტოლია $14\sqrt{3}$ სმ^2-ის.

ა) $2\sqrt{13}$ სმ ბ) $3\sqrt{7}$ სმ გ) $5\sqrt{3}$ სმ დ) $6\sqrt{3}$ სმ

201. მართკუთხა ტრაპეციის ფუძეები ტოლია 4 სმ-ის და 6 სმ-ის, ხოლო მცირე გვერდი– 10 სმ-ის. იპოვეთ მანძილი მცირე ფერდის შუაწერტილიდან დიდ ფერდამდე.

ა) $25\sqrt{6}/12$ სმ ბ) $25/12$ სმ გ) $5\sqrt{6}$ სმ დ) $25\sqrt{6}/3$ სმ

202. ტრაპეციის დიდი ფუძე 10 სმ-ით მეტია მცირე ფუძეზე. იპოვეთ მანძილი დიაგონალების შუაწერტილებს შორის.

ა) 4 სმ ბ) 5 სმ გ) 6 სმ დ) 8 სმ

203. ტრაპეციის ერთ-ერთი ფერდის შუა წერტილი შეერთებულია მოპირდაპირე ფერდის ბოლოებთან, ამ ფერდითა და შუაწეტილიდან გამომავალი მონაკვეთებით შექმნილი სამკუთხედის ფართობი ტოლია 8 სმ^2-ის. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

ა) 12 სმ^2 ბ) 14 სმ^2 გ) 16 სმ^2 დ) 18 სმ^2

204. ტრაპეციის ფუძეები ტოლია 4 სმ-ის და 6 სმ-ის, ხოლო სიმაღლე – 8 სმ-ის. იპოვეთ ტრაპეციის ფერდებს შორის მოქცეული ფუძეების პარალელური მონაკვეთის სიგრძე, თუ ცნობილია, რომ ის ტრაპეციის ფართობს შუაზე ჰყოფს.

ა) $4\sqrt{2}$ სმ ბ) $\sqrt{26}$ სმ გ) $2\sqrt{7}$ სმ დ) $\sqrt{30}$ სმ

205. ტრაპეციის დიაგონალების გადაკვეთით მიღებული ფუძეებთან მიმდებარე სამკუთხედების ფართობებია 25 სმ^2 და 36 სმ^2. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

ა) 81 სმ^2 ბ) 100 სმ^2 გ) 91 სმ^2 დ) 101 სმ^2

206. ტრაპეციის ფერდების გაგრძელებით მიღებული კუთხე მართია. ტრაპეციის ფუძეები შუაწერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი ტოლია 5 სმ-ის, ტრაპეციის სიმაღლე – 4 სმ-ის, ხოლო ფართობი – 28 სმ^2-ის. იპოვეთ ტრაპეციის ფერდები.

ა) $2\sqrt{5}$ სმ; $4\sqrt{5}$ სმ ბ) 4 სმ; 8 სმ გ) 5 სმ; 10 სმ დ) 4 სმ; 6 სმ

207. ტრაპეციის ფართობი შუაწრფით იყოფა შეფარდებით 2 3. რა შეფარდებით იყოფა ტრაპეციის ფართობი მისი დიაგონალით?

ა) 2 : 5 ბ) 3 : 7 გ) 3 : 5 დ) 5 : 8

208. ტრაპეციის ფუძეები ტოლია 4 სმ-ის და 6 სმ-ის. ფერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 2 5. იპოვეთ ტრაპეციის ფერდები თუ ცნობილია, რომ დიაგონალები ურთიერთმართობულია

ა) 4 სმ; 6 სმ ბ) $4\sqrt{2}$ სმ; 5 სმ გ) $4\sqrt{3}$ სმ; $2\sqrt{3}$ დ) $4\sqrt{13/29}$ სმ; $10\sqrt{13/29}$ სმ

209. ტრაპეციის ფუძეებია $2\sqrt{17}$ სმ და $3\sqrt{17}$ სმ. თრაპეციის დიაგონალები ერთმანეთის

მართობულია. გამოთვალეთ ტრაპეციის მცირე ფერდი, თუ ტრაპეციის ფართობი ტოლია 50 სმ^2-ის.

ა) $3\sqrt{3}$ სმ ბ) $4\sqrt{3}+2$ სმ გ) $\sqrt{127/3}$ სმ დ) $\sqrt{1241/17}$ სმ

210. ტრაპეციის ქვედა ფუძე 3-ჯერ მეტია ზედა ფუძეზე. ფერდების შუა წერტილები შეერთებულია ტრაპეციის წვეროებთან. იპოვეთ იმ ოთკუთხედის ფართობი, რომელიც შექმნილია ფერდების შუაწერტილებით და მათი წვეროებთან შემაერთებელი მონაკვეთების გადაკვეთის წერტილებით. თუ ტრაპეციის ფართობია 48 სმ^2

ა) $64/5$ სმ^2 ბ) $12\sqrt{2}$ სმ^2 გ) 24 სმ^2 დ) $10\sqrt{3}$ სმ^2

211. *ABCD* ტრაპეციაში *AC* და *BD* დიგონალები ფერდების მართობია. ტრაპეციის ფუძეებია 3 სმ და 5 სმ. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

ა) 6 სმ^2 ბ) 5 სმ^2 გ) 10 სმ^2 დ) 8 სმ^2

212. *ABCD* ტრაპეციის *AB* და *CD* ფერდებზე აღებულია წერტილები A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 პირველი ორი წერტილი *AB* ფერდზეა და $AA_1=A_1A_2=A_2B$, ხოლო ბოლო სამი წერტილი – *CD* ფერდზე და $CB_1=B_1B_2=B_2B_3=B_3D$. იპოვეთ $A_1A_2CB_2$ ფიგურის ფართობი, თუ ტრაპეციის ფუძეებია 3სმ და 8სმ, ხოლო ფერდებია AB=5სმ და CD=6სმ.

ა) 5 სმ^2 ბ) 9 სმ^2 გ) 10 სმ^2 დ) 8 სმ^2

213. *ABCD* ტრაპეციაში $AB=a$ სმ, $BC=d$ სმ, $CD=b$ სმ და $AD=c$ სმ. განიხილეთ ყველა ისეთი პარალელოგრამი, რომლის ერთ-ერთი კუთხე ემთხვევა *BAD* კუთხეს, ხოლო ამ კუთხის მოპირდაპირე წვერო ტრაპეციის *CD* ფერდზე ძევს. გამოთვალეთ ამ პარალელოგრამებს შორის უდიდესი ფართობის მქონე პარალელოგრამის ფართობი.

ა) $\frac{ac^2}{4(c-d)}\sqrt{1-\left(\frac{a^2+(c-d)^2-b^2}{2a(c-d)}\right)^2}$ სმ^2 ბ) $\frac{ac^2}{4(c+d)}\sqrt{1-\left(\frac{a^2+(c-d)^2-b^2}{a(c-d)}\right)^2}$ სმ^2

გ) $\frac{ac^2}{4(c+d)}\sqrt{1+\left(\frac{a^2+(c-d)^2-b^2}{2a(c-d)}\right)^2}$ სმ^2 დ) $\frac{c^2}{4(c-d)}\sqrt{1+\left(\frac{a^2+(c-d)^2-b^2}{2(c-d)}\right)^2}$ სმ^2

214. *ABCD* ტრაპეციის ფუძეებია 4სმ და 6სმ. გამოთვალეთ ფუძეების პარალელური მონაკვეთის სიდიდე, თუ ცნობილია, რომ იგი ტრაპეციის დიაგონალებით იყოფა სამ ტოლ ნაწილად.

ა) 31/7სმ ბ) 36/7 სმ გ) 34/7 სმ დ) 33/7 სმ

215. *ABCD* ტრაპეციაში *AD=a* სმ და *BC=b* სმ. ფუძეების პარალელური *MN* მონაკვეთი ტრაპეციის ფართობს ჰყოფს შეფარდებით *m:n*. (დიდი ფუძის მხრიდან). გამოთვალეთ *MN* მონაკვეთის სიდიდე.

ა) $\sqrt{\frac{a^2n+b^2m}{m-n}}$ სმ ბ) $\sqrt{\frac{a^2n-b^2m}{m+n}}$ სმ გ) $\sqrt{\frac{a^2+b^2m}{m-n}}$ სმ დ) $\sqrt{\frac{a^2n+b^2m}{m+n}}$ სმ

216. *ABCD* ოთხკუთხედის გვერდებია *AB*=1სმ, *BC*=2სმ, *DC*=3სმ, *AD*=4სმ. $\angle BAD=60^0$. იპოვეთ *BCD* კუთხის სიდიდე.

ა) 30^0 ბ) 60^0 გ) 90^0 დ) 45^0

217. *ABCD* ოთხკუთხედის გვერდებია *AB*=3სმ, *BC*=4სმ, *CD*=5სმ. $\angle ABC=150^0$, $\angle BCD=120^0$. იპოვეთ ოთხკუთხედის მეოთხე გვერდი.

ა) $60+12\sqrt{3}$ სმ ბ) $70+10\sqrt{3}$ სმ გ) $70+12\sqrt{2}$ სმ დ) $70+12\sqrt{3}$ სმ

218. ტრაპეციის სიმაღლე ტოლია 4 სმ-ის, ხოლო ერთ-ერთი დიაგონალი – 5 სმ-ის. კუთხე დიაგონალებს შორის 120^0-ია. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

ა) $\frac{8}{11}\cdot(24-7\sqrt{3})$ ბ) $\frac{8}{11}\cdot(24+7\sqrt{3})$ გ) $\frac{8}{11}\cdot(24-7\sqrt{2})$ დ) $\frac{9}{11}\cdot(24-7\sqrt{3})$

219. წრეწირის გარეთ მდებარე წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია ორი მხები. მათ შორის მოქცეული მცირე რკალის გრადუსული ზომა 60°-ია. იპოვეთ კუთხე მხებებს შორის

ა) 120° ბ) 60° გ) 90° დ) 150°

220. წრეწირის გარეთ აღებული წერტილიდან გავლებულია წრეწირის ორი მკვეთი, რომელთა შორის კუთხე ტოლია 30°-ის, ხოლო ამ მკვეთებს შორის მოქცეული უმცირესი რკალის გრადუსული ზომაა 15°. იპოვეთ მკვეთებს შორის მოქცეული მეორე რკალის გრადუსული ზომა.

ა) 60° ბ) 55° გ) 65° დ) 75°

221. წრეში გავლებული ორი *AB* და *CD* ქორდა იკვეთება *M* წერტილში. *AB* რკალის გრადუსული ზომაა 60°, ხოლო *AD* რკალის – 80°. იპოვეთ $\angle AMD$

ა) 75° ბ) 80° გ) 70° დ) 65°

222. რაღაც *M* წერტილიდან ორი არაურთიერთგადამკვეთი სხვადასხვა რადიუსიანი წრეწირეებისადმი გავლებულია ორი მკვეთი, რომლებიც წრეწირებს ჩამოკვეთენ ოთხ რკალს. მცირე რკალების გრადუსული ზომებია: 30°, 45° და 60°. იპოვეთ მეოთხე, ყველაზე დიდი რკალის გრადუსული ზომა.

ა) 60° ბ) 55° გ) 75° დ) 80°

223. წრეწირში, რომლის ცენტრია *O* ჩახაზულია. $\angle ACB$. ცნობილია, რომ $\angle CBO = 15^0$, ხოლო ცენტრალური *AOB* კუთხე ტოლია 70°-ის. იპოვეთ *CAO* კუთხის სიდიდე.

ა) 20° ბ) 30° გ) 40° დ) 50°

224. წრეწირის სიგრძე 16π სმ-ის ტოლია. იპოვეთ წრის ფართობი.

ა) 48π სმ^2 ბ) 64π სმ^2 გ) 32π სმ^2 დ) 60π

225. წრის ფართობი ტოლია 81π სმ^2-ის. იპოვეთ წრეწირის სიგრძე.

ა) 16π სმ ბ) 27π სმ გ) 9π სმ დ) 18π სმ

226. წრის ფართობი ტოლია 100π სმ^2-ის. იპოვეთ 30°-იანი რკალის სიგრძე.

ა) π სმ ბ) $7\pi/3$ სმ გ) $5\pi/3$ სმ დ) 2π სმ

227. წრეწირის 120°-იანი რკალის სიგრძეა 6π სმ. იპოვეთ წრის ფართობი.

ა) 72π სმ^2 ბ) 63π სმ^2 გ) 80π სმ^2 დ) 81π სმ^2

228. წრეწირის სიგრძე ტოლია 6π სმ-ის. იპოვეთ 45°-იანი სექტორის ფართობი.

ა) $9\pi/8$ სმ^2 ბ) $7\pi/8$ სმ^2 გ) $5\pi/8$ სმ^2 დ) $11\pi/8$ სმ^2

229. წრის 60°-იანი სექტორის ფართობი ტოლია 4π სმ^2-ის. იპოვეთ მოცემული სექტორის შესაბამისი რკალის სიგრძე.

ა) $\sqrt{6}\pi/3$ სმ ბ) $2\sqrt{6}\pi/3$ სმ გ) $2,5\sqrt{6}\pi$ სმ დ) $4\sqrt{6}\pi/3$ სმ

230. წრის 30°-იანი სექტორის ფართობი ტოლია 6π სმ^2-ის. იპოვეთ შესაბამისი სეგმენტის ფართობი.

ა) $6(\pi-3)$ სმ^2 ბ) $3(\pi-3)$ სმ^2 გ) $4(\pi-3)$ სმ^2 დ) $8(\pi-3)$ სმ^2

231. 120°-იანი ცენტრალური კუთხის შესაბამისი სეგმენტის ფართობი ტოლია 8π სმ^2-ის. იპოვეთ შესაბამისი რკალის სიგრძე.

ა) $\frac{2}{3}\pi\sqrt{2+\sqrt{3}}$ სმ ბ) $\frac{2}{3}\pi\sqrt{5+\sqrt{3}}$ სმ გ) $4\pi\sqrt{5}$ სმ დ) $2\frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{6\pi}{4\pi-3\sqrt{3}}}$ სმ

232. წრეში გავლებული ორი AB და CD ქორდა იკვეთება M წერტილში ისე, რომ MD=40 სმ-ს და MB=80 სმ-ს. AM მონაკვეთის სიგრძე შეადგენს MB მონაკვეთის სიგრძის 25%-ს. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი, თუ CD ქორდა წრეწირის ცენტრიდან დაშორებულია 30 სმ-ით.

ა) 40 სმ ბ) 50 სმ გ) 60 სმ დ) 80 სმ

233. წრეში გავლებული ორი ქორდა გადაკვეთის წერტილით იყოფა ოთხ მონაკვეთად რომელთა სიგრძეები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი თუ ერთ-ერთი ქორდის სიგრძეა 10 სმ.

ა) 4 სმ ბ) 6 სმ გ) 5 სმ დ) 8 სმ

234. წრეში გავლებული ორი AB და CD ქორდა იკვეთება M წერტილში ისე, რომ AM=6 სმ -ს და MB=8 სმ-ს. MC მონაკვეთის სიგრძე შეადგენს CD ქორდის სიგრძის 25%. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი, თუ ქორდებს შორის კუთხე 60^0-ის ტოლია.

ა) $8\sqrt{3}$ სმ ბ) 9 სმ გ) 4 სმ დ) $12\sqrt{19}/7$ სმ

235. წრეწირის რადიუსი 5 სმ-ის ტოლია. AB დიამეტრიც მართობული CD ქორდა დიამეტრს ყოფს შეფარდებით 1 : 4 (B წერტილის მხრიდან). იპოვეთ AC ქორდით შექმნილი მცირე სეგმენტის ფართობი.

ა) $\frac{5\pi}{36}$ სმ^2 ბ) $\frac{5\pi}{36}\left(2+\sqrt{5}\right)$სმ^2 გ) $\pi\left(3+\sqrt{5}\right)$სმ^2 დ) $\frac{5\pi}{16}\frac{2\sqrt{5}}{5}-10$ სმ^2

236. ერთი წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია მხები და მკვეთი. მხების სიგრძე ტოლია 8 სმ-ის. მკვეთის გარე ნაწილი 2-ჯერ მეტია მის შიგა ნაწილზე. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი თუ მკვეთი წრეწირის ცენტრიდან დაშორებულია $\sqrt{2}$ სმ-ით.

ა) 2 სმ ბ) 3 სმ გ) 4 სმ დ)1 სმ

237. წრეწირისადმი რომლის რადიუსიც 5 სმ-ის ტოლია, წრეწირის გარეთ აღებული წერტილიდან გავლებულია ორი მკვეთი, რომელთაგან ერთ-ერთი გადის წრეწირის ცენტრში. ცენტრზე გამავალი მკვეთის სიგრძე ტოლია 16 სმ-ის, ხოლო მეორე მკვეთის გარე ნაწილის სიგრძე ორჯერ მეტია მისივე შიგა ნაწილის სიგრძეზე. იპოვეთ იმ ფიგურის ფართობი რომელიც შექმნილია მკვეთების საერთო წერტილით და მკვეთების გარე ნაწილების წრეწირთან გადაკვეთის წერტილებითა და წრეწირის რკალით.

ა) $4\sqrt{21}$ სმ^2 ბ) $4\sqrt{21}-\frac{2\pi}{3}$ სმ^2 გ) $4\sqrt{21}-\frac{\pi}{2}$ სმ^2 დ) $4\sqrt{21}-\frac{5\pi}{72}arccos\frac{41}{55}$ სმ^2

238. R=2 სმ რადიუსიანი წრეწირისადმი გავლებულია მხები და მკვეთი, რომლებიც ერთმანეთთან ადგენენ 60^0-იან კუთხეს. იპოვეთ უმცირესი რადიუსის მქონე წრეწირის რადიუსი, რომელიც ჩახაზულია ამ კუთხეში და ეხება მოცემულ წრეწირს.

ა) $2\left(3-\sqrt{2}\right)/3$ სმ ბ) $3-\sqrt{2}$ სმ გ) $5-\sqrt{3}$ სმ დ) $6-2\sqrt{3}$ სმ

239. R=1 სმ რადიუსიან წრეწირზე აღებულია ოთხი A, B, C და D წერტილი. AB, BC, CD და AD რკალები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 1 : 3 : 4 : 4. იპოვეთ BM მონაკვეთის სიგრძე თუ M წარმოადგენს AC და BD ქორდების გადაკვეთის წერტილს.

ა) $\frac{2\sqrt{6}}{3}\sin 18°$სმ ბ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ სმ გ) $\sqrt{2}tg15^0$სმ დ) $2\sqrt{3}$ სმ

240. R=5 სმ რადიუსიან წრეში ჩახაზულია $\angle CAB$. იპოვეთ ამ კუთხეში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი, რომელიც მოცემულ წრეწირს ეხება შიგნიდან, თუ ქორდა AB=8 სმ-ს და $\angle CAB = 60^0$.

ა) $8\sqrt{3}-4$ სმ ბ) $2\sqrt{3}-2$ სმ გ) $4(2\sqrt{3}-1)/3$სმ დ) $2\left(2\sqrt{3}-2\right)/3$ სმ

241. წრეწირში, რომლის რადიუსი ტოლია 6 სმ-ის ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი.

იპოვეთ სამკუთხედის გვერდით და შესაბამისი რკალით შექმნილ მცირე სეგმენტში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

ა) 0,75 სმ ბ) 1,5 სმ გ) $\sqrt{3}$ სმ დ) $\sqrt{3}/2$ სმ

242. წრეწირში, რომლის რადიუსი ტოლია 8 სმ-ის ჩახაზულია კვადრატი. იპოვეთ ამ კვადრატის გვერდით და შესაბამისი რკალით შექმნილ მცირე სეგმენტში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

ა) $4-2\sqrt{2}$ სმ ბ) $2-\sqrt{2}$ სმ გ) $2+\sqrt{2}$ სმ დ) $6-3\sqrt{3}$ სმ

243. წრეწირში რომლის რადიუსი ტოლია 10 სმ-ის ჩახაზულია წესიერი ხუთკუთხედი. იპოვეთ ამ ხუთკუთხედის გვერდით და შესაბამისი რკალით შექმნილ მცირე სეგმენტში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

ა) $10\sin^2 18°$ ბ) $5\sin 36°$ გ) $10\cos 36°$ დ) $5\cos 18°$

244. წრეწირში რომლის რადიუსი ტოლია 6 სმ-ის ჩახაზულია წესიერი ექვსკუთხედი. იპოვეთ ამ ექვსკუთხედის გვერდით და შესაბამისი რკალით შექმნილ მცირე სეგმენტში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

ა) $6-\sqrt{3}$ სმ ბ) $4-2\sqrt{3}$ სმ გ) $6-\sqrt{3}$ სმ დ) $3-1.5\sqrt{3}$ სმ

245. წრეწირში რომლის რადიუსი ტოლია 10 სმ-ის ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი. იპოვეთ ამ სამკუთხედის გვერდით და შესაბამისი რკალით შექმნილ მცირე სეგმენტში ჩახაზული კვადრატის გვერდი.

ა) $5-\sqrt{3}$ სმ ბ) $\sqrt{19}-3$ სმ გ) $2\sqrt{19}-4$ სმ დ) $5-\sqrt{2}$ სმ

246. წრეწირში რომლის რადიუსიც ტოლია 12 სმ-ის ჩახაზულია კვადრატი. იპოვეთ იმ კვადრატის გვერდი, რომელიც ჩახაზულია დიდი კვადრატის გვერდით და შესაბამისი რკალით შექმნილ მცირე სეგმენტში.

ა) $6\sqrt{3}/5$ სმ ბ) $6\sqrt{2}/5$ სმ გ) $1,5\sqrt{2}$ სმ დ) $2\sqrt{3}/3$ სმ

247. წრეწირში რომლის რადიუსიც ტოლია 15 სმ-ის ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი. ამ სამკუთხედის გვერდით და შესაბამისი რკალით შექმნილ მცირე სეგმენტში ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი რომლის ერთი გვერდიც ძევს დიდი სამკუთხედის გვერდზე. იპოვეთ პატარა სამკუთხედის გვერდი.

ა) $5\sqrt{3}$ სმ ბ) 10 სმ გ) 7,5 სმ დ) $4\sqrt{3}$ სმ

248. წრეწირში რომლის რადიუსიც ტოლია 6 სმ-ის ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი ამ სამკუთხედის გვერდით და შესაბამისი რკალით შექმნილ მცირე სეგმენტში ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი ისე, რომ მისი ერთი წვერო დიდი სამკუთხედის გვერდზე ძევს. იპოვეთ პატარა სამკუთხედის გვერდი.

ა) $3\sqrt{2}+1$ სმ ბ) $6\sqrt{2}$ სმ გ) $(15-\sqrt{3})/2$ სმ დ) $(\sqrt{135}-3\sqrt{3})/2$ სმ

249. წრეწირზე მოცემულია სამი წერტილი A, B, C ცნობილია, რომ $AB=4$სმ, $BC=6$სმ, $AC=8$სმ. გამოთვალეთ იმ ოთხკუთხედის ფართობი რომლის წვეროებია A, B, C, D, სადაც D მდებარეობს აღნიშნულ წრეწირზე და ამასთანავე ცნობილია რომ ეს ფართობი მაქსიმალური სიდიდისაა.

ა) $25\sqrt{5}/3$ სმ^2 ბ) $20\sqrt{15}/3$ სმ^2 გ) $25\sqrt{15}/3$ სმ^2 დ) $25\sqrt{15}/4$ სმ^2

250. ABC მართკუთხა სამკუთხედის AB ჰიპოტენუზაზე აღებული D წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან შემოხაზულია წრეწირი, რომელიც ეხება მის კათეტებს და ჰიპოტენუზას კვეთს M და N წერტილებში. იპოვეთ იმ მონაკვეთის სიგრძეები, რომლებადაც ჰიპოტენუზა იყოფა ამ წრეწირით, თუ $AC=6$სმ და $BC=8$სმ.

ა) 6/7 სმ; 48/7 სმ; 16/7 სმ ბ) 5/7 სმ; 46/7 სმ; 16/7 სმ გ) 6/7 სმ; 48/9 სმ; 16/7 სმ დ) 6/7 სმ; 48/7 სმ; 15/7 სმ

251. ABC მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებზე როგორც დიამეტრებზე აგებულია წრეები. გამოთვალეთ ამ ორი წრის საერთო ნაწილის ფართობი თუ სამკუთხედის კათეტებია 6სმ და 8სმ.

ა) $\frac{8\pi}{5}arctg\frac{3}{4}+\frac{\pi}{10}arctg\frac{4}{3}-12$ სმ^2 ბ) $\frac{8\pi}{45}arctg\frac{3}{4}+\frac{3\pi}{10}arctg\frac{4}{3}-12$ სმ^2

გ) $\frac{8\pi}{45}arctg\frac{3}{4}+\frac{\pi}{10}arctg\frac{4}{3}-10$ სმ^2 დ) $\frac{8\pi}{45}arctg\frac{3}{4}+\frac{\pi}{10}arctg\frac{4}{3}-12$ სმ^2

252. AB მონაკვეთის სიგრძე 10 სმ-ის ტოლია. გამოთვალეთ მაქსიმალური მანძილი ისეთ C და D წერტილებს შორის, რომლებიდანაც AB მონაკვეთი მოსჩანს $90°$-იანი კუთხით.

ა) 8 სმ ბ) 9 სმ გ) 5 სმ დ) 10 სმ

253. AB მონაკვეთის სიგრძე 10 სმ-ის ტოლია. გამოთვალეთ მაქსიმალური მანძილი ისეთ C და D წერტილებს შორის, რომლებიდანაც AB მონაკვეთი მოსჩანს $45°$-იანი კუთხით.

ა) 20 სმ ბ) $10(1+\sqrt{2})$სმ გ) $20\sqrt{2}$ სმ დ) $5(\sqrt{2}+4)$სმ

254. AB მონაკვეთის სიგრძე 10 სმ-ის ტოლია. გამოთვალეთ მაქსიმალური მანძილი ისეთ C და D წერტილებს შორის, რომლებიდანაც AB მონაკვეთი მოსჩანს $30°$-იანი კუთხით.

ა) $20-5\sqrt{3}$ სმ ბ) $10(1+\sqrt{2})$სმ გ) $10(1+\sqrt{3})$სმ დ) $10(2+\sqrt{3})$სმ

255. AB მონაკვეთის სიგრძე 10 სმ-ის ტოლია. გამოთვალეთ მაქსიმალური მანძილი ისეთ C და D წერტილებს შორის, რომლებიდანაც AB მონაკვეთი მოსჩანს $60°$-იანი კუთხით.

ა) $20\sqrt{3}$ სმ ბ) $10\sqrt{3}$ სმ გ) $10+5\sqrt{3}$ სმ დ) $5+5\sqrt{3}$ სმ

256. $ABCD$ რომბის მცირე BD დიაგონალი 2 სმ-ის ტოლია. ABD სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი $r=1/3$ სმ. გამოთვალეთ რომბის გვერდი.

ა) 1.25 სმ ბ) 2.5 სმ გ) 2 სმ დ) 3 სმ

257. $ABCD$ რომბის დიდი დიაგონალი 8 სმ-ის ტოლია. ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი $R=5$სმ. გამოთვალეთ რომბის გვერდი.

ა) $35\sqrt{11}/3$ სმ ბ) $40\sqrt{7}/3$ სმ გ) $40\sqrt{5}/3$ სმ დ) $40\sqrt{11}/3$ სმ

258. გამოთვალეთ $ABCD$ რომბის კუთხეები, თუ ცნობილია, რომ ამ რომბში ჩახაზული წრეწირის რადიუსის შეფარდება ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსთან მაქსიმალურია.

ა) $2arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$ ბ) $arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$ გ) $2arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$ დ) $2arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$

259. $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციაში მცირე BC ფუძე AD ფუძის მესამედის ტოლია. ცნობილია, რომ ტრაპეციაში ჩაიხაზება წრეწირი. გამოთვალეთ ტრაპეციაზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის შეფარდება მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსთან.

ა) $5\sqrt{21}/3$ ბ) $2\sqrt{11}/3$ გ) $7\sqrt{21}/3$ დ) $2\sqrt{21}/3$

260. $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციაში მახვილი კუთხის AC დიაგონალი ფერდთან ქმნის 30^0 – იან კუთხეს, ფუძესთან კი – 45^0 – იან კუთხეს. გამოთვალეთ ტრაპეციის ფუძეები თუ მასზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი 2 სმ-ის ტოლია.

ა) 2 სმ; $2\sqrt{3}$ სმ ბ) 3 სმ; $2\sqrt{2}$ სმ გ) 4 სმ; $2\sqrt{3}$ სმ დ) 2 სმ; $3\sqrt{3}$ სმ

261. $ABCD$ ტრაპეციაში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი 5 სმ-ია. კუთხეები ფერდებსა და დიდ ფუძეს შორის შესაბამისად 60^0 და 45^0 ტოლია. გამოთვალეთ ტრაპეციის მცირე ფუძე.

ა) $5(\sqrt{2}+\sqrt{3}+3)/3$ სმ ბ) $5(\sqrt{2}+\sqrt{3}+4)/3$ სმ

გ) $5(\sqrt{2}+\sqrt{5}+3)/3$ სმ დ) $5(\sqrt{7}+\sqrt{3}+3)/3$ სმ

262. *ABCD* ტრაპეციის ფერდები 5 სმ და 7,5 სმ –ის ტოლია. ფუძეები 4 სმ და 9 სმ –ია. გამოთვალეთ იმ წრეწირის რადიუსი, რომელიც ეხება ტრაპეციის მცირე ფუძეს და მის ორივე ფერდს.

ა) $\sqrt{5}$ სმ   ბ) 11 სმ   გ) $\sqrt{3}$ სმ   დ) $\sqrt{7}$ სმ

263. *ABCD* ტრაპეციაში *AB* და *CD* ფერდების გაგრძელება იკვეთება *S* წერტილში. ტრაპეციის ფართობი 3 –ჯერ მეტია *BSC* სამკუთხედის ფართობზე. იპოვეთ *BSC* სამკუთხედის *SK* სიმაღლის შეფარდება ტრაპეციაში ჩახაზული წრეწირის რადიუსთან.

ა) 3   ბ) 2   გ) 1.5   დ) 2.5

264. *ABC* სამკუთხედის გვერდებია AB=5სმ, AC=5სმ, BC=6სმ. იპოვეთ $O_1O_2O_3$ სამკუთხედის ფართობი, სადაც O_1, O_2, O_3 არის ABC სამკუთხედში გარე ჩახაზული წრეწირის ცენტრები.

ა) 45 სმ^2 ბ) 35 სმ^2 გ) 40 სმ^2 დ) 50 სმ^2

265. *ABC* სამკუთხედში $\angle A = 60^0, \angle B = 45^0$. სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია 5სმ. გამოთვალეთ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

ა) $\frac{5(2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+6)}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}$ სმ   ბ) $\frac{6(2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+6)}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}$ სმ

გ) $\frac{5(2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+6)}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}$ სმ   . დ) $\frac{5(2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+6)}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}$ სმ

266. *ABC* სამკუთხედის გვერდებია AB=3სმ, BC=4სმ, AC=6სმ. *AB* და *BC* გვერდებზე აღებულია *N* და *M* წერტილები ისე, რომ $AB=3NB$ და $BC=2BM$. იპოვეთ *BMN* სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

ა) $\frac{\sqrt{2730}}{4(3\sqrt{6}-\sqrt{41})}$ სმ ბ) $\frac{\sqrt{2730}}{4(2\sqrt{6}+\sqrt{41})}$ სმ   გ) $\frac{\sqrt{2730}}{4(3\sqrt{6}+\sqrt{43})}$ სმ   დ) $\frac{\sqrt{2730}}{3(3\sqrt{6}+\sqrt{41})}$ სმ

267. მოცემულია ორი პარალელური მონაკვეთი AB=6 სმ და CD=8 სმ. მათ შუა წერტილებს შორის მანძილი 2 სმ–ია. იპოვეთ იმ წრეწირის რადიუსი, რომლისთვისაც ეს ორი მონაკვეთი ქორდებია (ცნობილია,რომ ასეთი წრეწირი არსებობს).

ა) $\sqrt{265}/4$ სმ   ბ) 7.5 სმ   გ) $\sqrt{251}/4$ სმ   დ) 6.7 სმ

268. *A* წერტილი R=4სმ რადიუსიანი წრეწირიდან დაშორებულია 1სმ–ით. მოცემული წრეწირის *M* წერტილი აღებულია ისე, რომ *AMO* სამკუთხედზე (*O* წრეწირის ცენტრია) შემოხაზული წრეწირის რადიუსი მინიმალურია. იპოვეთ *AMO* სამკუთხედის ფართობი.

ა) $\sqrt{61}/4$ სმ^2 ბ) $\sqrt{63}/4$ სმ^2 გ) $\sqrt{65}/4$ სმ^2 დ) $\sqrt{66}/4$ სმ^2

269. *ABCD* რომბის გვერდი 2სმ –ის ტოლია. *ABC* სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი დაშორებულია რომბის ბლაგვი *D* წვეროდან 2სმ ტოლი მანძილით. იპოვეთ რომბის ფართობი.

ა) $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ სმ^2 ბ) $\sqrt{10-2\sqrt{3}}$ სმ^2 გ) $\sqrt{8-2\sqrt{5}}$ სმ^2 დ) $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ სმ^2

270. R=5სმ რადიუსიანი წრის გარე *M* წერტილიდან წრეწირი მოჩანს 60^0–იანი კუთხით. ხოლო *N* წერტილიდან 90^0 კუთხით. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი M და N წერტილებს შორის.

ა) $10-5\sqrt{2}$ სმ   ბ) $10+5\sqrt{2}$ სმ   გ) $10-3\sqrt{2}$ სმ   დ) $9-5\sqrt{2}$ სმ

271. *ABC* სამკუთხედის გვერდებია AB=3სმ, AC=4სმ, BC=5სმ. იპოვეთ იმ სამკუთხედის პერიმეტრი რომლის წვეროები *ABC* სამკუთხედში გარე ჩახაზული წრეწირის ცენტრებს ემთხვევა.

ა) $5\sqrt{2}-4\sqrt{5}+3\sqrt{10}$ სმ   ბ) $5\sqrt{2}+4\sqrt{5}-3\sqrt{10}$ სმ

გ) $5\sqrt{2}+4\sqrt{5}+3\sqrt{7}$ სმ   დ) $5\sqrt{2}+4\sqrt{5}+3\sqrt{10}$ სმ

272. *ABCD* ტოლფერდა ტრაპეციის *AB* და *CD* გვერდებზე აღებულია შესაბამისად *M* და *N* წერტილები. *ABCD* ტრაპეციასა და *MBCN* ოთხკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირის ცენტრებს შორის მანძილი 25/8სმ-ია. იპოვეთ *MB* მონაკვეთის სიგრძე თუ ტრაპეციის ფერდი 10სმ – ია, ხოლო ფუძეები კი - 4 სმ და 16 სმ.

ა) 7 სმ   ბ) 6 სმ   გ) 4 სმ   დ) 5 სმ

273. იპოვეთ მანძილი *ABC* სამკუთხედში ჩახაზულ და ამ სამკუთხედში *AB* გვერდის მხებ გარე ჩახაზულ წრეწირის ცენტრებს შორის, თუ სამკუთხედის გვერდებია *AB*=4სმ, *BC*=6სმ და *CA*=8სმ.

ა) $\sqrt{135.6}$ სმ   ბ) $\sqrt{139.6}$ სმ   გ) $\sqrt{139}$ სმ   დ) 12 სმ

274. *R*=3სმ რადიუსიან წრეწირში ჩახაზულია სამი წრეწირი ისე, რომ ყოველი მათგანი ეხება ორ დანარჩენს და მოცემულ წრეწირს. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომლის

წვეროები ამ სამი წრეწირის ცენტრებშია მოთავსებული, თუ ცნობილია, რომ იგი ტოლგვერდა სამკუთხედია.

ა) $\frac{27}{8}(2\sqrt{3}+3)$ სმ   ბ) $\frac{29}{8}(2\sqrt{3}-3)$ სმ   გ) $\frac{27}{8}(2\sqrt{3}-3)$ სმ   დ) $\frac{27}{8}(2\sqrt{3}-5)$ სმ

275. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 3 სმ და 4 სმ. ჰიპოტენუზაზე აღებულია *M* წერტილი. გამოთვალეთ ამ წერტილის კათეტებიდან დაშორებების ნამრავლის მაქსიმალური მნიშვნელობა.

ა) 6   ბ) 8   გ) 4   დ) 10

276. კუთხეში რომლის სიდიდეა $\alpha \le 30^0$, ჩახაზულია R რადიუსიანი წრეწირი, რომელიც კუთხის გვერდებს ეხება M და N წერტილებში. მოცემულ წრეწირზე აღებულია P წერტილი ისე, რომ *AMPN* ოთხკუთხედში ჩაიხაზება წრეწირი. გამოთვალეთ ამ წრეწირის რადიუსი.

ა) თუ $\alpha = 30^0$ მაშინ $r = 0.55\,R$, თუ $\alpha < 30^0$ მაშინ $r = \dfrac{Rctg^2\alpha cos\frac{90^0+\alpha}{2}sin2\alpha}{ctg\alpha sin\frac{90^0-3\alpha}{2}+ctg\alpha cos\frac{90^0-\alpha}{2}+2cos^2\alpha}$

ბ) თუ $\alpha = 30^0$ მაშინ $r = 0.35\,R$, თუ $\alpha < 30^0$ მაშინ $r = \dfrac{Rctg^2\alpha cos\frac{60^0-\alpha}{2}sin2\alpha}{ctg\alpha sin6+ctg\alpha cos\frac{90^0-\alpha}{2}+2cos^2\alpha}$

გ) თუ $\alpha = 30^0$ მაშინ $r = 0.85\,R$, თუ $\alpha < 30^0$ მაშინ $r = \dfrac{Rctg^2\alpha cos\frac{90^0-\alpha}{2}sin2\alpha}{ctg\alpha sin\frac{90^0+3\alpha}{2}+ctg\alpha cos\frac{90^0-\alpha}{2}+2cos^2\alpha}$

დ) თუ $\alpha = 30^0$ მაშინ $r = 0.75\,R$, თუ $\alpha < 30^0$ მაშინ $r = \dfrac{Rctg^2\alpha cos\frac{90^0-\alpha}{2}sin2\alpha}{ctg\alpha sin\frac{90^0-3\alpha}{2}+ctg\alpha cos\frac{90^0-\alpha}{2}+2cos^2\alpha}$

277. *ABC* მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან დაშვებულია სიმაღლე. მიღებულ სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირების რადიუსების შეფარდება 2 –ის ტოლია. გამოთვალეთ სამკუთხედის კუთხეები.

ა) $arctg3;\ arcctg2$ ბ) $arctg2;\ arcctg3$ გ) $arctg2;\ arcctg2$ დ) $arctg4;\ arcctg3$

278. *ABC* სამკუთხედში $\angle BAC=45^0$, გვერდი $AB=2+2\sqrt{3}$. ჩახაზული წრეწირის რადიუსი $r=\sqrt{3}-\sqrt{2}+1$. გამოთვალეთ სამკუთხედის კუთხეები.

ა) $60^0;\ 75^0$ ბ) $50^0;\ 85^0$ გ) $65^0;\ 75^0$ დ) $60^0;\ 70^0$

279. *ABCD* რომბის გვერდი 1 სმ. ტოლია. მახვილი კუთხე 30^0-ია. იპოვეთ უდიდესი მანძილი იმ *M* წერტილიდან, რომბის წვერომდე, საიდანაც რომბის *AC* დიაგონალი მოჩანს 45^0- იანი კუთხით.

ა) $\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ სმ   ბ) $\frac{3\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ სმ   გ) $\frac{2\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ სმ   დ) $\frac{3\sqrt{6}+\sqrt{5}}{4}$ სმ

280. *ABCD* პარლელოგრამის მახვილი კუთხე 60^0-ია, ხოლო ფართობი 1 სმ^2. იპოვეთ იმ წრეწირის რადიუსი, რომელიც ჩაიხაზება მახვილი კუთხის ბისექტრისით მიღებულ ოთხკუთხედში. ცნობილია, რომ მიღებულ ოთხკუთხედში წრეწირი ჩაიხაზება.

ა) $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3+2\sqrt{3}}}$ სმ ბ) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3+2\sqrt{3}}}$ სმ გ) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3-2\sqrt{3}}}$ სმ დ) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2+2\sqrt{3}}}$ სმ

281. *ABC* ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდი 6სმ-ის ტოლია. *AC* გვერდზე აღებულია M და N წერტილები ისე, რომ *ABM*, *MBN* და *NBC* სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირის ცენტრებზე გამავალი წრფე AC გვერდის პარალელურია. იპოვეთ *AM* და *MN* მონაკვეთების სიგრძეები.

ა) $\frac{16+26\sqrt{3}}{15+8\sqrt{3}}$ სმ; $\frac{54}{14+8\sqrt{3}}$ სმ ბ) $\frac{18+25\sqrt{3}}{15+82}$ სმ; $\frac{54}{15+8\sqrt{3}}$ სმ

გ) $\frac{18+26\sqrt{3}}{15+8\sqrt{3}}$ სმ; $\frac{54}{15+8\sqrt{3}}$ სმ დ) $\frac{18+26\sqrt{3}}{15+8\sqrt{3}}$ სმ; $\frac{52}{15+8\sqrt{3}}$ სმ

282. *ABC* და *ADB* საერთო *AB* ჰიპოტენუზის მქონე მართკუთხა სამკუთხედების კათეტებია $AC = 6$ სმ, $BC = 8$ სმ, $BD = 5$ სმ. იპოვეთ ამ ორი სამკუთხედის საერთო ნაწილის ფართობი (ცნობილია, რომ ამ სამკუთხედების მართი კუთხის წვეროები ჰიპოტენუზის ერთ მხარეს მდებარეობენ).

ა) $\frac{150}{4+3\sqrt{3}}$ სმ^2 ბ) $\frac{160}{4+3\sqrt{3}}$ სმ^2 გ) $\frac{150}{5+3\sqrt{3}}$ სმ^2 დ) $\frac{180}{4+3\sqrt{3}}$ სმ^2

283. სამკუთხედის მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე ამ სამკუთხედს ყოფს ორ ნაწილად. იპოვეთ საწყისი სამკუთხედის უდიდესი მახვილი კუთხე, თუ ცნობილია, რომ მიღებული სამკუთხედებისა და საწყისი სამკუთხედის ფართობები ქმნიან გეომეტრიულ პროგრესიას.

ა) $arccos\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}$ ბ) $arcsin\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}$ გ) $arccos\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}$ დ) $arctg\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}$

284. მოცემულია *ABC* სამკუთხედი. $\angle ABC = 60^0$. ამ კუთხის ბისექტრისა მოპირდაპირე გვერდს ჰყოფს შეფარდებით 2 3. იპოვეთ ამ სამკუთხედის გვერდები, თუ მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი $r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}+5}$ სმ-ის ტოლია.

ა) 2/5 სმ; $\sqrt{7}/3$ სმ; 1 სმ ბ) 2/3 სმ; $\sqrt{7}/3$ სმ; 1 სმ
გ) 2/3 სმ; $\sqrt{7}/3$ სმ; 1.5 სმ დ) 2/3 სმ; 5 სმ; 1 სმ

285. *ABC* მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა და მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი აკმაყოფილებენ პირობას $4r^2+4rc-c^2=0$. გამოთვალეთ სამკუთხედის კუთხეები.

ა) 35^0; 55^0 ბ) 50^0; 40^0 გ) 45^0; 45^0 დ) 25^0; 65^0

286. *ABC* სამკუთხედის კუთხეები ტოლია 30^0, 45^0, 105^0. გამოთვალეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის R რადიუსის შეფარდება მასში ჩახაზული წრეწირის r რადიუსთან.

ა) $\frac{4+6\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ სმ ბ) $\frac{4+6\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ სმ გ) $\frac{4+6\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ სმ დ) $\frac{4+6\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ სმ

287. *ABCD* ოთკუთხედში $AB=5$ სმ, $BC=6$ სმ, $CD=7$ სმ და $AD=8$ სმ. $\angle BAD$ ტოლია 60^0-ის. იპოვეთ *ABD* და *BCD* სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირის ცენტრებს შორის მანძილი.

ა) $\sqrt{\frac{98-6\sqrt{130-20\sqrt{42}}}{5}}$ სმ   ბ) $\sqrt{\frac{98-6\sqrt{130+20\sqrt{42}}}{7}}$ სმ

გ) $\sqrt{\frac{96+6\sqrt{130-20\sqrt{42}}}{5}}$ სმ   დ) $\sqrt{\frac{98-6\sqrt{130-20\sqrt{52}}}{5}}$ სმ

288. $R=1$ სმ რადიუსიან წრეწირში ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი და კვადრატი, ისე, რომ მათ გააჩნიათ საერთო წვერო. იპოვეთ მათი საერთო ნაწილის ფართობი.

ა) $2\sqrt{3}+2{,}25$ სმ^2 ბ) $\sqrt{3}-2{,}25$ სმ^2 გ) $2\sqrt{3}-2{,}15$ სმ^2 დ) $2\sqrt{3}-2{,}25$ სმ^2

289. ABC სამკუთხედის გვერდებია AB=4სმ, BC=6სმ და AC=8სმ. ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირისადმი გავლებულია AC გვერდის პარალელური მხები. გამოთვალეთ მიღებულ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

ა) $\sqrt{13}/27$ სმ   ბ) $\sqrt{15}/27$ სმ   გ) 9 სმ   დ) 2/27 სმ

290. 60^0–იან კუთხეში ჩახაზულია ორი წრეწირი, რომელთა რადიუსებია r=1სმ და R. R-ის რა მნიშვნელობისათვის ჩაიხაზება ამ კუთხეში მესამე წრეწირი, რომელიც ეხება ამ ორივე წრეწირს. (წრეწირებს საერთო შიგა წერტილი არ გააჩნია).

ა) 10 სმ, 1/9 სმ   ბ) 9 სმ, 3 სმ   გ)9 სმ, 1/9 სმ დ) 3.7 სმ, 7 სმ

291. R=4 სმ რადიუსიან წრეწირში ჩახაზულია $ABCD$ ოთხკუთხედი, რომლის გვერდები ტოლია AB=1სმ, BC=2სმ და CD=3სმ. გამოთვალეთ AD გვერდის სიდიდე.

ა) $\frac{\sqrt{3682+465\sqrt{33}-21\sqrt{3465}}}{16}$ სმ   ბ) $\frac{\sqrt{3684+465\sqrt{33}-21\sqrt{3465}}}{18}$ სმ

გ) $\frac{\sqrt{3684+465\sqrt{33}+21\sqrt{3465}}}{16}$ სმ   დ) $\frac{\sqrt{3684+465\sqrt{33}-21\sqrt{3465}}}{16}$ სმ

292. R=5 სმ. რადიუსიან წრეწირში გავლებულია AB და BC ქორდები, რომლებიც შესაბამისად ტოლია 6სმ და 8სმ. გამოთვალეთ იმ წრეწირის რადიუსი, რომელიც ჩახაზულია ABC კუთხეში და შიგნიდან ეხება მოცემულ წრეწირს.

ა) 42/49 სმ ან 5 სმ ბ) 3 სმ ან 4 სმ გ) 40/49 სმ ან 4 სმ დ) 40/47 სმ ან 4 სმ

293. $ABCD$ ტრაპეციაში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი R –ის ტოლია. ფუძესთან მდებარე კუთხეებია $\angle BAD=60^0$ და $\angle CDA=90^0$. გამოთვალეთ ტრაპეციის ფართობი.

ა) $\frac{6+4\sqrt{3}}{5}R^2$ ბ) $\frac{6+4\sqrt{5}}{3}R^2$ გ) $\frac{7+4\sqrt{3}}{3}R^2$ დ) $\frac{6+4\sqrt{3}}{3}R^2$

294. ტოლი ფართობის მქონე ოთხკუთხედსა და ხუთკუთხედში ჩახაზული წრეწირების რადიუსები ტოლია. რომელი მრავალკუთხედის პერიმეტრია მეტი?

ა)ოთხკუთხედის ბ)ხუთკუთხედის გ) პერიმეტრები ტოლია დ) ვერ დავადგენთ

295. ABC სამკუთხედი მოიცავს DEF სამკუთხედს. შეადარეთ ამ სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირებით შექმნილი წრის ფართობები.

ა) ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ფართობი მეტია
ბ) DEF სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ფართობი მეტია
გ) წრის ფართობები ტოლია
დ) ვერ შევადარებთ

296. მოცემულ α კუთხეში ჩახაზულია ორი წრეწირი რომლებიც გარედან ეხებიან ერთმანეთს. მათი რადიუსების შეფარდება ტოლია 2 3 - ის. შეადარეთ ამ კუთხის სიდიდე 30^0-სს.

ა) $\alpha<30^0$ ბ) $\alpha>30^0$ გ) $\alpha=30^0$ დ) ვერ შევადარებთ

297. მოცემულ 30^0-იან კუთხეში ჩახაზულია ორი წრწეწირი, რომლებიც გარედან ეხებინ

ერთმანეთს. იპოვეთ ამ წრეწირების რადიუსების შეფარდება.

ა) 2 : 3 ბ) $\left(4+\sqrt{6}\right) : 2$ გ) $4:\left(2+\sqrt{2}\right)$ დ) $\left(4+\sqrt{6}-\sqrt{2}\right):\left(4-\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

298. წრის ფართობის შეფარდება მასში ჩახაზული მართკუთხედის ფართობთან ტოლია $\pi/2$. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდების შეფარდება.

ა) 1 : 2 ბ) 2 : 3 გ) 1 : 1 დ) 3 : 4

299. R=5 სმ-ს რადიუსიანი წრის შიგნით აღებულია P წერტილი, რომელიც ცენტრიდან დაშორებულია 3 სმ-ით. იპოვეთ უმცირესი ქორდის სიგრძე, რომელიც გადის P წერტილში.

ა) 4 სმ ბ) 6 სმ გ) 10 სმ დ) 8 სმ

300. მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხე ტოლია 30°. იპოვეთ შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსების შეფარდება.

ა) $2\left(\sqrt{3}+1\right)$ ბ) $2\sqrt{3}$ გ) $\sqrt{3}+1$ დ) $\sqrt{3}+2$

ბ – ჯგუფი

301. მოცემულია α კუთხე. მასში ჩახაზულია r რადიუსიანი წრეწირი. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც შექმნილია ამ კუთხის გვერდებითა და წრეწირის მხებით, თუ ცნობილია, რომ მიღებული სამკუთხედის ფართობი მინიმალურია.

302. მახვილკუთხა სამკუთხედის გვერდებია a,b,c ხოლო შესაბამისად მათი მოპირდაპირე კუთხეები - α,β,γ. ამ სამკუთხედზე შემოხაზულია R რადიუსიანი წრეწირი. დაამტკიცეთ, რომ ქვემოთ მოყვანილი უტოლობებიდან ერთ–ერთი მაინც ჭეშმარიტია: $ac \geq 6R^2cos\beta$, $ab \geq 6R^2cos\gamma$, $bc \geq 6R^2cos\alpha$.

303. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია $A\left(\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right)$ და $B\left(\frac{12}{5};\frac{16}{5}\right)$ წერტილები. იპოვეთ იმ C წერტილის კოორდინატები, რომელიც ძევს ox ღერძზე, თუ ცნობილია, რომ $\angle ACB$ მაქსიმალურია.

304. რაღაც სამკუთხედის მედიანებით შეადგინეს სამკუთხედი, რომელიც მსგავსი აღმოჩნდა მოცემული სამკუთხედის. დაადგინეთ მახვილკუთხაა თუ ბლაგვკუთხა მოცემული სამკუთხედი.

305. მოცემულია კვადრატი, რომლის წვეროების კოორდინატებია $A(0;0)$, $B(0;1)$, $C(1;1)$ და $D(1;0)$. იპოვეთ კვადრატის შიგნით ისეთი $E(x;y)$ წერტილი, რომ ამ წერტილიდან კვადრატის წვეროებამდე მანძილების ჯამი მინიმალური იყოს. იპოვეთ ეს ჯამი.

306. მოცემულია ABO სამკუთხედი B მართი კუთხით. O წერტილზე, როგორც წრეწირის ცენტრზე, შემოხაზულია BO რადიუსიანი წრეწირი. BO კათეტზე აღებულია D წერტილი, ისე რომ $\angle BAD=\alpha, \angle DAO=\beta$. აგებული წრეწირი AD მონაკვეთს კვეთს K წერტილში. იპოვეთ $\angle KOB$.

307. მოცემულია ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდის სიგრძეა 1 სმ. სამკუთხედის შიგნით სად მდებარეობს წერტილი საიდანაც სამკუთხედების წვეროებამდე მანძილების ჯამი მინიმალურია? იპოვეთ ეს ჯამი.

308. მართკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი R, კათეტი b და სამკუთხედის ფართობი S აკმაყოფილებენ პირობას: $4R^2+6S=11b^2$. გამოთვალეთ სამკუთხედის მახვილი კუთხეები.

309. C წერტილი მდებარეობს AB მონაკვეთზე, ამასთან $AC=1$ სმ და $CB=4$სმ-ს. B წერტილიდან გაელებულია სხივი, რომელიც AB მონაკვეთთან ადგენს 60°-იან კუთხეს. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი ამ სხივსა და ისეთ D წერტილს შორის, საიდანაც AC მონაკვეთი მოსჩანს 30°-იანი კუთხით.

310. მოცემულია α კუთხე. მასში ჩახაზულია r რადიუსიანი წრეწირი. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც შექმნილია ამ კუთხის გვერდებითა და წრეწირის მხებით, თუ ცნობილია, რომ მიღებული სამკუთხედის ფართობი მაქსიმალურია.

311. სამკუთხედში ჩახაზულია r რადიუსიანი წრეწირი და გაელებულია ამ წრეწირის სამი მხები, რომლებიც პარალელურია სამკუთხედის გვერდების. ჩამოჭრილ სამკუთხედებში ჩახაზულია წრეწირები, რომელთა რადიუსებიც ტოლია r_1,r_2,r_3. შეადგენენ თუ არა r,r_1,r_2,r_3 რიცხვები არითმეტიკული პროგრესიას.

312. ABC სამკუთხედში გაელებულია AM,BN,CK მედიანები, რომლებიც იკვეთებიან O წერტილში. ცნობილია, რომ $MONC$, $NOKA$, $KOMB$ ოთხკუთხედებზე შესაძლებელია წრეწირების შემოხაზვა. იპოვეთ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ მისი ფართობია $\sqrt{3}/4$ სმ^2.

313. არსებობს თუ არა ისეთი წესიერი ექვსკუთხედი რომლის წვეროების კოორდინატები რაციონალური რიცხვებით გამოისახება?

314. სამკუთხედისა და კვადრატის ფართობები ტოლია. მათზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსებს შორის რომლის რადიუსია მეტი?

315. C წერტილი მდებარეობს AB მონაკვეთზე, ამასთან $AC=1$სმ და $CB=4$სმ-ს. B წერტილიდან გავლებულია სხივი, რომელიც AB მონაკვეთთან ადგენს 60°-იან კუთხეს. იპოვეთ უდიდესი მანძილი ამ სხივსა და ისეთ D წერტილს შორის, საიდანაც AC მონაკვეთი მოსჩანს 30°-იანი კუთხით.

316. C წერტილი მდებარეობს AB მონაკვეთებზე, ამასთანავე $AC=2$სმ, $CB=6$სმ-ს. B წერტილიდან გაელებულია სხივი, რომელიც AB მონაკვეთთან ქმნის 30°-იან კუთხეს. იპოვეთ მაქსიმალური მანძილი ამ სხივსა და იმ D წერტილს შორის, საიდანაც AC მონაკვეთი მოსჩანს 60°-იანი კუთხით.

317. მოცემულია ტოლფერდა სამკუთხედი ABC, რომელშიც $AB=BC=6$ სმ, ხოლო $AC=8$სმ. სამკუთხედის ფუძეზე აღებულია D წერტილი. გამოთვალეთ BD მონაკვეთის სიგრძე, თუ D წერტილიდან ფერდებამდე მანძილების ნამრავლი მაქსიმალურია

318. ABC სამკუთხედში $AB=\sqrt{3}$ სმ, $AC=2$სმ, $\angle BAC=30^{\circ}$. ACD სამკუთხედში $AD=4$სმ, $\angle CAD=60^{\circ}$. იპოვეთ უდიდესი მანძილი ამ სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირის ცენტრებს შორის.

319. ABC სამკუთხედში AD ბისექტრისისა და BK მედიანის გადაკვეთის წერტილია 0. იპოვეთ BOD სამკუთხედის ფართობი, თუ $AB=10$სმ და $AC=8$სმ, ხოლო ABC სამკუთხედის ფართობია 9სმ^2.

320. $ABCD$ ტრაპეციაში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი r=3სმ. ტრაპეციის AB და CD ფერდები გადაიკვეთებიან M წერტილში და ქმნიან 90^0-იან კუთხეს. გამოთვალეთ BMC სამკუთხედის პერიმეტრი.

321. მოცემულია, რომ $AB=BC=1$სმ, ხოლო $\angle ABC=120^0$. გამოთვალეთ მანძილი M წერტილიდან AB და BC მონაკვეთებამდე, თუ ცნობილია რომ ამ წერტილიდან AB მონაკვეთი მოჩანს 60^0-იანი კუთხით, ხოლო BC მონაკვეთი 90^0-იანი კუთხით.

322. AB მონაკვეთის სიგრძე 1 სმ-ია. გამოთვალეთ უდიდესი მანძილი C და D წერტილებს შორის, თუ ცნობილია რომ AB მონაკვეთი მოჩანს C და D წერტილებიდან შესაბამისად 60^0 – იანი და 90^0-იანი კუთხით.

323. მოცემულია $ABCD$ მართკუთხა ტრაპეცია, რომლის ფერდებია $AB=3$სმ და $CD=5$სმ, ხოლო ფუძეებია $BC=2$ სმ და $AD=6$ სმ. ტრაპეციის AB ფერდზე აღებულია N წერტილი ისე, რომ NCD სამკუთხედის პერიმეტრი მინიმალურია. გამოთვალეთ ამ სამკუთხედის პერიმეტრი.

324. სამკუთხედის ფართობი 2სმ^2 –ია. ამ სამკუთხედის კუთხეებისათვის და ჩახაზული წრეწირის რადიუსისათვის სრულდება ტოლობა $sinA+sinB+sinC=\frac{1}{r^2}$ გამოთვალეთ სამკუთხედის პერიმეტრი.

325. ABC სამკუთხედში $BC=2$სმ, $AC=3$სმ, $\angle BCA=60^0$ გამოთვალეთ უდიდესი მანძილი C წერტილიდან იმ D წერტილამდე, საიდანაც AB მონაკვეთი მოჩანს 30^0-იანი კუთხით.

326. წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედის გვერდებია 5 სმ, 6 სმ, 7 სმ და $2\sqrt{3}$ სმ. გამოთვალეთ ოთხკუთხედის კუთხეები.

327. ABC სამკუთხედის ფართობია 1 სმ^2. $AC=2$ სმ. სამკუთხედის B წვეროდან გავლებულია ბისექტრისა. ცნობილია, რომ მიღებულ ორ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსები ტოლია. გამოთვალეთ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

328. ABC საკუთხედის ფართობია 1 სმ^2. 75^0-იანი B კუთხიდან გაელებულია ბისექტრისა. ცნობილია, რომ მიღებულ ორ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსები ტოლია. გამოთვალეთ ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

329. სამკუთხედის სიმაღლეებია $h_1, h_2 h_3$. გამოთვალეთ ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

330. სამკუთხედის გვერდები და კუთხეები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$a^3+b^3+c^3=4abc\left(sin^2\frac{A}{2}+sin^2\frac{B}{2}+sin^2\frac{C}{2}\right)$$

გამოთვალეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირის რადიუსების შეფარდება.

331. სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი 1 სმ-ის ტოლია. ამ სამკუთხედში გარე ჩახაზული წრეწირის რადიუსები აკმაყოფილებენ პირობას: $r_a r_b r_c \leq 27$. გამოთვალეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

332. ABC მახვილკუთხა სამკუთხედში AB და BC გვერდებზე დაშვებული სიმაღლეები შესაბამისად ტოლია 2 სმ და 3 სმ, ხოლო კუთხე ამ სიმაღლეებს შორის შეადგენს 30^0. გამოთვალეთ სამკუთხედის მესამე გვერდზე დაშვებული სიმაღლე.

333. ABC სამკუთხედში AB და BC გვერდებზე დაშვებულია მედიანები, რომლებიც შესაბამისად ტოლია 3 სმ და 4 სმ-ის, ხოლო კუთხე ამ მედიანებს შორის შეადგენს 60^0. გამოთვალეთ სამკუთხედის მესამე მედიანა.

334. ABC სამკუთხედში O ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია. BD წარმოადგენს სამკუთხედის ბისექტრისას. იქნება თუ არა AOC სამკუთხედის ბისექტრისა OD მონაკვეთი?

335. *ABC* სამკუთხედში $\angle ABC=30^0$. ამ კუთხის ბისექტრისა ტოლია 4სმ-ის და მოპირდაპირე გვერდს ყოფს შეფარდებით 2:1. გამოთვალეთ სამკუთხედის ფართობი.

336. *ABC* სამკუთხედის *BD* სიმაღლე კუთხეს ყოფს შეფარდებით $\angle ABD:\angle DBC=1/2$, ხოლო მოპირდაპირე გვერდს – შეფარდებით *AD:DC*=1:3. შემოხაზული წრეწირის რადიუსია 3 სმ. გამოთვალეთ ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

337. *ABC* სამკუთხედის გვერდებია *BC*=4სმ, *AB*=3სმ და *AC*=6სმ. *BD* ბისექტრისაა. გამოთვალეთ *ABD* და *BDC* სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრებს შორის მანძილი.

338. *ABC* სამკუთხედის გვერდებია *AB*=4სმ, *BC*=5სმ და AC=6სმ. *BD* სიმაღლეა. გამოთვალეთ *ABD* სამკუთხედზე შემოხაზული და *BDC* სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრებს შორის მანძილი.

339. *ABC* სამკუთხედის გვერდებია *AB*=7 სმ, *BC*=9 სმ და AC=14 სმ. *BD* მედიანაა. გამოთვალეთ *ABD* და *BDC* სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრებს შორის მანძილი.

340. *ABC* სამკუთხედში გვერდების ნამრავლი ტოლია 8. გამოთვალეთ სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ ცნობილია, რომ მისი ფართობი, მასში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსები აკმაყოფილებენ პირობას: $R\cdot S^2\le 6r$

341. *ABC* სამკუთხედის გვერდები და მასზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი აკმაყოფილებენ პირობას: $abc=\sqrt{3}\,R(2bc-a^2)$. გამოთვალეთ სამკუთხედის კუთხეები თუ ცნობილია, რომ $\angle BAC=60^0$

342. $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ სმ რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზულია ტრაპეცია, ტრაპეციაზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი *R*=1სმ. გამოთვალეთ ტრაპეციის ფართობი.

343. *ABCD* პარალელოგრამის გვერდებია 4 სმ და 6 სმ, ხოლო მახვილი კუთხე – 60^0, პარალელოგრამის წვეროებიდან გავლებულია ბისექტრისები, რომელთა გადაკვეთით მიიღება ოთხკუთხედი. გამოთვალეთ ამ ოთხკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

344. *ABCD* პარალელოგრამის გვერდებია 3სმ და 4სმ, ხოლო მახვილი კუთხე 60^0. *AC* დიაგონალზე *B* და *D* წერტილებიდან დაშვებულია სიმაღლეები *BM* და *DN*. გამოთვალეთ *BMDN* ოთხკუთხედის ფართობი.

345. *ABCD* ტრაპეციის ფუძეებია 3 სმ და 10 სმ. *B* და *C* წერტილებზე გავლებულია ფერდების პარალელური წრფეები. გამოთვალეთ ფუძეებთან მიღებულ სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირების რადიუსების შეფარდება.

346. *ABCD* პარალელოგრამის გვერდებია $AB=6(\sqrt{2}-1)$ სმ დ $BC=3$ სმ. *DM* მართობია *BC* გვერდის. ცნობილია, რომ *ABMD* ტრაპეციაში ჩაიხაზება წრეწირი. გამოთვალეთ პარალელოგრამის კუთხეები.

347. *ABCD* პარალელოგრამის გვერდებია $AB=1$ სმ და $BC=2$ სმ. $\angle BAD=60^0$. გამოთვალეთ მანძილი *ABD* და *BCD* სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირის ცენტრებს შორის.

348. *ABCD* კვადრატის გვერდია 1 სმ. *BC* და *CD* გვერდებზე აღებულია *M* და *N* წერტილები. ცნობილია, რომ *AMCN* ოთხკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი ტოლია 0,4 სმ. იპოვეთ *BAM, MAN, NAD* კუთხეები.

349. მოცემულია წესიერი ექვსკუთხედი, რომლის გვერდი ტოლია 2 სმ. იპოვეთ ამ ექვსკუთხედის შიგნით ისეთი წერტილი,საიდანაც გვერდებამდე მანძილების ნამრავლი მაქსიმალურია. გამოთვალეთ ეს ნამრავლი.

350. ABC სამკუთხედში AN და CM ბისექტრისებია. ცნობილია, რომ სამკუთხედი BMN მსგავსია ABC სამკუთხედის. გვერდი AC ტოლია 8 სმ, ხოლო სამკუთხედის ფართობია 24 სმ^2. გამოთვალეთ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

351. ABC სამკუთხედის გვერდებია: $AB = 6$ სმ, $BC = 8$ სმ, $AC = 12$ სმ. BD მედიანაზე აღებულია K წერტილი. წრფეები, რომლებიც გადიან A,K და C,K წერტილებზე სამკუთხედის BC და AB გვერდებს კვეთენ შესაბამისად M და N წერტილებში. ცნობილია, რომ $AN = 5$ სმ-ს. იპოვეთ NM მონაკვეთის სიგრძე.

352. $ABCD$ ამოზნექილი ოთხკუთხედის გვერდი $AD = 4$ სმ, $BC = \sqrt{2}$ სმ. ოთხკუთხედის კუთხეები A, B, C, D წვეროებთან შესაბამისად ტოლია 30^0, 140^0, 130^0, 60^0. გამოთვალეთ ოთხკუთხედის დანარჩენი ორი გვერდის სიგრძე.

353. $ABCD$ ამოზნექილი ოთხკუთხედის ფართობი ტოლია 6სმ^2 გვერდები AB, BC, CD, AD ისე შეეფარდება ერთმანეთს , როგორც 1:2:3:4. გამოთვალეთ ოთხკუთხედის გვერდები, თუ კუთხე BAD ტოლია 60^0.

354. მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის ფართობია S, ჩახაზული წრეწირის რადიუსია r, ხოლო შემოხაზული წრეწირის რადიუსი – R, ადგილი აქვს უტოლობას: $r^2 \geq 2R^2 + S - 2R\sqrt{2S}$. გამოთვალეთ სამკუთხედის მახვილი კუთხეები.

355. სამკუთხედში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსები ტოლია შესაბამისად 7 სმ და 3 სმ. გამოთვალეთ მანძილი ამ წრეწირის ცენტრებს შორის.

356. სამკუთხედის ფართობია $\sqrt{3}/2$ სმ^2. გამოთვალეთ სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ ამ სამკუთხედის გვერდები და კუთხეები აკმაყოფილებენ ტოლობას:

$$\sqrt{sin^2 A + sin^2 B + sin^2 c} = \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2}$$

357. სამკუთხედის კუთხეებისათვის სრულდება ტოლობა:

$sinAsinC + sinAsinB + sinBsinC = 3(sinAsinBsinC)^{\frac{2}{3}}$. გამოთვალეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეწირების რადიუსების შეფარდება.

358. ABC სამკუთხედის გვერდებია AB=5 სმ, BC=6 სმ, AC=7 სმ. AB გვერდზე აღებული M წერტილიდან BC და AC გვერდებზე დაშვებულია სიმაღლეები. იპოვეთ მიღებულ ოთხკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი. (ცნობილია, რომ ოთხკუთხედში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა).

359. 45^0-იან A კუთხეში ჩახაზულია r=5 სმ რადიუსის წრეწირი. კუთხის გვერდებზე აღებულია B და C წერტილები ისე, რომ ABC სამკუთხედის ფართობი მინიმალურია, ამასთანავე BC გვერდი ეხება მოცემულ წრეწირს, რომელიც ABC სამკუთხედის შიგნითაა მოთავსებული. გამოთვალეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

360. მართკუთხა სამკუთხედის პერიმეტრი და ჩახაზული წრეწირის რადიუსი გამოისახება რაციონალური რიცხვებით. რაციონალურია თუ ირაციონალური შემოხაზული წრეწირის რადიუსი?

361. ABC სამკუთხედში C_1, C_2, C_3, წარმოადგენენ A, B, C კუთხის ბისექტრისების სიგრძეებს. გამოთვალეთ სამკუთხედის კუთხეები თუ ცნობილია, რომ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$c_1 + c_2 + c_3 = \sqrt{bc}cos\frac{A}{2} + \sqrt{ac}cos\frac{B}{2} + \sqrt{ab}cos\frac{C}{2}$$

362. ABC სამკუთხედში გავებულია AD, BM, CN სიმაღლეები. იპოვეთ ნამრავლი: $\frac{AM}{MC} \cdot \frac{DC}{BD} \cdot \frac{NB}{AN}$.

363. $ABCD$ პარალელოგრამის გვერდებია $AB=3$ სმ. და $BC=5$ სმ. პარალელოგრამის მახვილი კუთხე 30^0-ია. იპოვეთ მანძილი იმ წრეწირის ცენტრებს შორის, რომლებიც გაივლიან შესაბამისად A, B, C და A, D, C წერტილებზე.

364. $ABCD$ ტრაპეციაში ჩახაზულია წრეწირი, რომლის რადიუსია r. ტრაპეციის AB და CD ფერდები გადაიკვეთებიან M წერტილში და ქმნიან 90^0-იან კუთხეს. გამოთვალეთ BMC სამკუთხედის პერიმეტრი.

365. $ABCD$ პარალელოგრამის გვერდები ტოლია $AB=3$ სმ და $BC=5$ სმ. მახვილი კუთხე 60^0-ის ტოლია. BC გვერდზე აღებულია M წერტილი, ისე რომ $ABMD$ ოთხკუთხედში შეიძლება ჩაიხაზოს წრეწირი. გამოთვალეთ BM მონაკვეთის სიგრძე.

366. ABC სამკუთხედის ფართობია 9 სმ^2, ხოლო შემოხაზული წრეწირის რადიუსი $2\sqrt[4]{3}$ სმ. გამოთვალეთ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

367. ABC სამკუთხედის გვერდებია $AB=2$ სმ, $BC=3$ სმ და $AC=4$ სმ. გამოთვალეთ იმ სამკუთხედის ფართობი რომელიც მიიღება A, B, C წერტილებზე მოპირდაპირე გვერდების პარალელური წრფეების გატარებით.

368. ABC სამკუთხედის AB გვერდია 6 სმ. სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი 3სმ.-ია. გამოთვალეთ ამ სამკუთხედში ჩახაზული იმ წრეწირის რადიუსი, რომელიც მაქსიმალურია.

369. მოცემულია $ABCD$ პარალელოგრამი, რომლის გვერდებია 4 სმ და 6სმ. ხოლო კუთხე მათ შორის 60^0-ია. BC გვერდზე შერჩეულია M წერტილი ისე რომ სამკუთხედ AMD –ში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი მაქსიმალურია. გამოთვალეთ ამ წრეწირის რადიუსი.

370. მოცემულია $ABCD$ პარალელოგრამი $AB=3$ სმ $BC=7$ სმ და $\angle BAD=60^0$. პარალელოგრამის BC გვერდზე აღებულია M წერტილი ისე რომ $AMCD$ ოთხკუთხედში შეიძლება ჩაიხაზოს წრეწირი. გამოთვალეთ AM მონაკვეთის სიგრძე

371. მოცემულია R რადიუსიანი წრეწირი. AB ქორდა წრეს ყოფს ორ წრიულ სეგმენტად, რომლებშიც ჩახაზულია წრეწირები. AB ქორდის რა მნიშვნელობისათვის იქნება ჩახაზული წრეწირების ფართობთა ჯამი მინიმალური? (სეგმენტში ჩახაზული წრეწირის ქვეშ იგულისხმება მაქსიმალური რადიუსის მქონე წრეწირი).

372. არსებობს თუ არა ისეთი ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის წვეროების კოორდინატები გამოისახება რაციონალური რიცხვებით.

373. ABC სამკუთხედის AC გვერდი M და N წერტილებით გაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. ცნობილია, რომ ABM და NBC სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირების რადიუსები ტოლია. იპოვეთ ეს რადიუსი, თუ $AC=6$ სმ, ხოლო ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია $r=1$ სმ.

374. მოცემულია ABC სამკუთხედი, რომლის გვერდებია $AB=3$ სმ და $BC=5$ სმ. AC გვერდზე შერჩეულია D წერტილი ისე, რომ ABD და BDC სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირების რადიუსების ჯამი მინიმალურია. გამოთვალეთ ამ რადიუსების შეფარდება.

375. ABC სამკუთხედის გვერდები ტოლია $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. ცნობილია, რომ მოცემული სამკუთხედისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $r_c=\frac{cP}{3R}$ სადაც r_c გარე ჩახაზული წრეწირის რადიუსია (რომელიც ეხება c გვერდს),

P-პერიმეტრის ნახევარია, R- შემოხაზული წრეწირის რადიუსი. გამოთვალეთ მახვილი კუთხე AD და BK ბისექტრისებს შორის.

376. მოცემულია ABC სამკუთხედი, რომლის გვერდებია: $AB = 6$ სმ, $BC = 8$ სმ, $AC = 12$ სმ. AC გვერდზე აღებულია M და N წერტილები ისე, რომ $AM = MN = NC$. A წერტილიდან გავლებულია ბისექტრისა, რომელიც BM და BN მონაკვეთებს კვეთს K და P წერტილებში. იპოვეთ KBP სამკუთხედის ფართობი.

377. შეიძლება თუ არა მართკუთხა სამკუთხედის წრფივი ელემენტები გამოისახებოდეს რაციონალური რიცხვებით?

378. მოცემულია ერთეულ რადიუსიანი წრეწირი. გამოთვალეთ ამ წრეწირზე შემოხაზული უმცირესი ფართობის მქონე სამკუთხედის ფართობი.

379. გამოთვალეთ ერთეულ რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზული მართკუთხა სამკუთხედების ფართობებს შორის უმცირესის ფართობი.

380. ორი r რადიუსის მქონე წრეწირები ჩახაზულია პარალელურ წრფეებს შორის. მანძილი მათ ცენტრებს შორის არის $a>2r$. გამოთვალეთ იმ ოთხკუთხედის ფართობი, რომლის BC და AD გვერდები მდებარეობენ მოცემულ პარალელურ წრფეებზე, ფართობი მაქსიმალურია და AB და CD გვერდები ეხება მოცემულ წრეწირებს; ოთხკუთხედს მოცემულ წრეებთან საერთო შიგა წერტილი არ გააჩნია.

381. ABC სამკუთხედის ფართობია 3 სმ². გამოთვალეთ სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ ცნობილია, რომ მოცემული სამკუთხედისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $\frac{4}{3}(h_a^2+h_b^2+h_c^2)=a^2+b^2+c^2$. სადაც h_a,h_b,h_c სამკუთხედის სიმაღლეებია, ხოლო a,b,c - გვერდები.

382. $ABCD$ ოთხკუთხედის გვერდები ტოლია $AB=2$ სმ, $BC=3$ სმ, $CD=4$ სმ დ $AD=5$ სმ, ამასთან $\angle BCD=120^0$. გამოთვალეთ იმ წრეწირის რადიუსი რომელიც მინიმალურია და მოიცავს მოცემულ ოთხკუთხედს. (პასუხი დაასაბუთეთ).

383. ABC სამკუთხედში A წვეროდან გამოსული სიმაღლე, B წვეროს მედიანა და C წვეროს ბისექტრისა ერთ წერტილში იკვეთებიან. იქნება თუ არა სამკუთხედი ტოლგვერდა?

384. ABC სამკუთხედში სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

ა) A წერტილიდან გავლებული სიმაღლე, B წერტილიდან გავლებული ბისექტრისა და C წერტილიდან გავლებული მედიანა ერთ წერტილში იკვეთებიან,

ბ) A წერტილიდან გავლებული მედიანა, B წერტილიდან გავლებული ბისექტრისა და C წერტილიდან გავლებული სიმაღლე ერთ წერტილში იკვეთებიან

იქნება თუ არა ABC სამკუთხედი ტოლგვერდა?

385. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის AC გვერდზე აღებულია D წერტილი ისე, რომ ABD და BCD სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირის ცენტრებს შორის მანძილი მინიმალურია. გამოთვალეთ ეს მანძილი, თუ სამკუთხედის გვერდი 2სმ -ის ტოლია.

386. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის AC გვერდზე აღებულია D წერტილი ისე, რომ ABD და BCD სამკუთხედებში შემოხაზული წრეწირის ცენტრებს შორის მანძილი მინიმალურია. გამოთვალეთ ეს მანძილი, თუ სამკუთხედის გვერდი 2სმ-ის ტოლია.

387. მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის გვერდებია a,b,c ჰიპოტენუზაზე აღებულია K წერტილი ისე, რომ ΔACK და ΔBCK-ზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრებს შორის მანძილი მინიმალურია. გამოთვალეთ ეს მანძილი.

388. ABC სამკუთხედის კუთხეები აკმაყოფილებენ პირობას, $sinA + sinB + sinC = 4sinAsinBsinC$. გამოთვალეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი პერიმეტრი ტოლია 3 სმ-ის.

389. ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი r =1სმ. ამასთან ცნობილია, რომ $h_a h_b h_c \le 27$, სადაც h_a, h_b, h_c სამკუთხედის სიმაღლეებია. გამოთვალეთ სამკუთხედის ფართობი.

390. ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი $r=1/18$ სმ-ია. სამკუთხედის a, b, c გვერდებისა და შემოხაზული წრეწირის რადიუსისათვის რიცხობრივად სამართლიანია ტოლობა $R=a^2+b^2+c^2$. გამოთვალეთ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

391. $ABCD$ ტრაპეციაში A წერტილი შეერთებულია DC ფერდის შუა F წერტილთან, ხოლო D წერტილი AB ფერდის შუა E წერტილთან. დაამტკიცეთ, რომ თუ $AF = DE$ მაშინ ტრაპეციაზე შეიძლება შემოიხაზოს წრეწირი.

392. ABC სამკუთხედის გვერდებია a,b,c. მასში ჩახაზულია წრეწირი და გავლებულია ამ წრეწირის სამკუთხედის გვერდების პარალელური სამი მხები. რომელთა სამკუთხედის გვერდებს შორის მდებარე მონაკვეთის სიგრძეებია შესაბამისად a_1, b_1, c_1. გამოთვალეთ სიდიდე $\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c}$.

393. ACB მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის C წვეროდან დაშვებული სიმაღლის, ბისექტრისის და მედიანის მეშვეობით შეგვიძლია, თუ არა ისეთი სამკუთხედის აგება, რომლის გვერდებიც მიცემული სამკუთხედის აღნიშნული ელემენტების ტოლია, თუ ცნობილია, რომ სამკუთხედის ერთ-ერთი კუთხე 60^0-ის ტოლია.

394. ტრაპეციაში ფუძეების შუა წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი ტოლია ფუძეების სხვაობის ნახევრის. იპოვეთ ტრაპეციის კუთხეები თუ ერთ-ერთი კუთხე 37^0-ის ტოლია.

395. $ABCD$ პარალელოგრამში AB =3 სმ, BC =5 სმ, $\angle ADC = 120^0$. A კუთხის ბისექტრისის გადაკვეთის წერტილი BC გვერდთან აღნიშნულია K-თი. DC გვერდზე იპოვეთ ისეთი M წერტილი, რომ AMK სამკუთხედის პერიმეტრი მინიმალური იყოს. იპოვეთ ეს პერიმეტრი.

396. ABC სამკუთხედის გვერდებია a, b, c. ამ სამკუთხედის შიგნით აღებულია M წერტილი ისე, რომ $S_{\Delta AMB} S_{\Delta BMC} S_{\Delta AMC}$ ნამრავლი მაქსიმალურია. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი M წერტილიდან A, B, C წერტილებამდე თუ ცნობილია რომ $a \ge b \ge c$.

397. შეიძლება თუ არა ტოლგვერდა სამკუთხედში ჩაიხაზოს სამი არატოლი რადიუსის მქონე წრეწირი, ისე რომ ყოველი ორი მათგანი ეხებოდეს ერთმანეთს და სამკუთხედის ორ გვერდს.

398. ამოზნექილი n-კუთხა მრავალკუთხედის ფართობი 1 სმ^2-ის ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ მრავალკუთხედის ნებისმიერი შიგა წერტილიდან მის წვეროებამდე მანძილების კვადრატების ჯამი არაა ნაკლები 2-ზე. n-ის რა მნიშვნელობისათვის ექნება ადგილი ტოლობას.

399. ABC სამკუთხედში AC=2სმ. ამ გვერდზე აღებულია D წერტილი ისე, რომ ΔABD მსგავსია ΔBDC-სი. გამოთვალეთ ΔABC-ზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი, თუ ცნობილია, რომ ეს სამკუთხედი ტოლფერდა არაა.

400. ABCD პარალელოგრამში $AB=2$ სმ, $AD=3$ სმ, $\angle BAD=60^0$. პარალელოგრამის ABC და ADC კუთხეებში ჩახაზულია წრეწირები ისე, რომ ისინი ერთმანეთს ეხებიან. გამოთვალეთ ამ წრეების ფართობთა ჯამი თუ ცნობილია, რომ ეს ჯამი მინიმალურია.

401. ABC სამკუთხედის სიმაღლეები ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის მნიშვნელი ნატურალური რიცხვია. იპოვეთ ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი, თუ შემოხაზული წრეწირის რადიუსი 2 სმ-ის ტოლია.

402. ABC სამკუთხედში $AB=3$ სმ, $BC=4$ სმ, B კუთხის მედიანასა და ბისექტრისას შორის კუთხე 30^0-ია. გამოთვალეთ სამკუთხედის მესამე გვერდი.

403. ABC სამკუთხედის გვერდებია $AB=2$ სმ, $AC=3$ სმ, კუთხე მათ შორის 60^0-ია. სამკუთხედის შიგნით აღებულია M წერტილი ისე, რომ $\angle AMB=90^\circ$. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის C წვერომდე

404. ABC სამკუთხედის გვერდებია $AB=2$ სმ, $AC=3\sqrt{3}$ სმ, კუთხე მათ შორის 60^0-ია. სამკუთხედის შიგნით აღებულია M წერტილი ისე, რომ $\angle AMB=90^0$; $\angle AMC=120^0$ იპოვეთ უდიდესი მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის გვერდებამდე.

405. ტრაპეციის დიაგონალებია 2 სმ და 3 სმ, ხოლო შუაწრფე 3/2 სმ-ის ტოლია. გამოთვალეთ ტრაპეციის ფართობი.

406. სამკუთხედის სიმაღლეებია: $\sqrt{15}$ სმ, $0{,}75\sqrt{15}$ სმ, $1{,}5\sqrt{15}$ სმ. გამოთვალეთ მისი ფართობი.

407. გამოთვალეთ სამკუთხედის გვერდები, თუ ცნობილია რომ ამ სამკუთხედში გარე ჩახაზული წრეწირის რადიუსებია $r_a=4$სმ, $r_b=5$სმ, $r_c=20$სმ.

408. ABC სამკუთხედის გვერდებია: $AC=9$სმ, $AB=6\sqrt{2}$ სმ და $BC=3\sqrt{5}$ სმ. BC გვერდზე აღებულია M და N წერტილები ისე, რომ $BM=MN=NC$. ეს წერტილები შეერთებულია სამკუთხედის A წვეროსთან. ანალოგიურად AC გვერდზე აღებულია P და Q წერტილები ისე, რომ $AP=PQ=QC$. ეს წერტილები შეერთებულია სამკუთხედის B წვეროსთან. AM, AN, PB და QB მონაკვეთების გადაკვეთის წერტილებია E_1, E_2, E_3, E_4. გამოთვალეთ $E_1E_2E_3E_4$ ოთხკუთხედის ფართობი.

409. ABC სამკუთხედის გვერდებია $AB=3$ სმ, $BC=5$ სმ, $AC=6$ სმ. ამ სამკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი, რომელზედაც შემოხაზულია ექვსკუთხედი შემდეგი პირობებით: ექვსკუთხედის სამი გვერდი მდებარეობს სამკუთხედის გვერდებზე, ხოლო დანარჩენი სამი, სამკუთხედის კუთხეებს ჩამოჭრის სამ სამკუთხედს. გამოთვალეთ ამ ექვსკუთხედის ფართობი, თუ ცნობილია, რომ იგი მინიმალურია ყველა ასეთ ექვსკუთხედის ფართობებს შორის.

410. $ABCD$ ამოზნექილ ოთხკუთხედში BD დიაგონალზე აღებულია O_1 და O_2 წერტილები (ისე, რომ $BO_1 < BO_2$). ამ წერტილებზე და ოთხკუთხედის A და C წვეროებზე გამავალი AO_1, AO_2, CO_1, CO_2 წრფეები ოთხკუთხედის გვერდებს კვეთენ შესაბამისად M_1, M_2, N_1, N_2 წეტილებში. გამოთვალეთ სიდიდე $\frac{CM_1}{M_1B}\cdot\frac{BN_1}{N_1A}\cdot\frac{AN_2}{N_2D}\cdot\frac{DM_2}{M_2C}$.

411. ABC სამკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი, რომელიც AB, AC, BC გვერდებს ეხება შესაბამისად M, P, N წერტილებში. სამკუთხედის ფართობია $\sqrt{3}/4$სმ^2, ამასთანავე სრულდება ტოლობა: $abc=8xyz$ სადაც a, b, c სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო $BN=x$, $AP=y$, $NC=z$ გამოთვალეთ სამკუთხედის პერიმეტრი.

412. მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული მედიანა სამკუთხედს ყოფს ორ სამკუთხედად. მიღებულ სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირის რადიუსები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 4:3. გამოთვალეთ მართკუთხა სამკუთხედის კუთხეები.

413. მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროს ბისექტრისა სამკუთხედს ყოფს ორ სამკუთხედად. მიღებულ სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირის რადიუსები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:4. გამოთვალეთ მართკუთხა სამკუთხედის კუთხეები.

414. ABC სამკუთხედში, $AB = 10$ სმ. ამ გვერდისადმი გავლებულ ბისექტისას, ჩახაზული წრეწირის ცენტრი ყოფს მონაკვეთებად რომელთა შეფარდებაა $5 : 3$ (წვეროს მხრიდან). გამოთვალეთ სამკუთხედის პერიმეტრი.

415. მართხკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი დაშორებულია მახვილი კუთხის წვეროდან 1სმ და $\sqrt{2}$ სმ-ით. გამოთვალეთ სამკუთხედის ფართობი.

416. $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციის სიმაღლე 2 სმ-ია. გამოთვალეთ იმ კუთხის სიდიდე, რა კუთხითაც მოჩანს ტრაპეციის ფერდი შემოხაზული წრეწირის ცენტრიდან, თუ ტრაპეციის ფართობი 3 სმ^2-ია.

417. გამოთვალეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ ცნობილია, რომ ერთ-ერთი კუთხის სიმაღლე, ბისექტრისა და მედიანა ამ კუთხეს ყოფს ოთხ ტოლ კუთხედ.

418. არსებობს თუ არა ისეთი სამკუთხედი, რომელშიც ერთ-ერთი კუთხეა 60^0, ხოლო ამ კუთხიდან დაშვებული სიმაღლე მოპირდაპირე გვერდის ტოლია.

419. ABC სამკუთხედში ადგილი აქვს ტოლობას $S=a^2\sqrt{3}/4$ სადაც S– სამკუთხედის ფართობია, $AB = a$ გვერდის მოპირდაპირე კუთხე 60^0-ის ტოლია. გამოთვალეთ სამკუთხედის პერიმეტრი.

420. სიბრტყეზე მოცემულია სამი წერტილი $A(1;3)$, $B(3;7)$, $C(5;1)$. გამოთვალეთ ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრის კორდინატები.

421. მოცემულია კვადრატი რომლის გვერდი 1სმ- ის ტოლია. გამოთვალეთ ამ კვადრატში ჩახაზული მაქსიმალური ფართობის მქონე სამკუთხედის ფართობი.

422. ABC სამკუთხედში სამართლიანია ტოლობა:

$\dfrac{a^6+b^6+c^6}{S^3}=\dfrac{96}{\sin A+\sin B+\sin C}$. სადაც a,b,c- სამკუთხედის გვერდებია S-ფართობი, ხოლო A, B, C-კუთხეები. გამოთვალეთ ამ სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი პერიმეტრი 3 სმ-ის ტოლია.

ამოცანები დამტკიცებაზე

423. სამკუთხედში ორი სიმაღლის შებრუნებულ სიდიდეთა კვადრატების ჯამი ნაკლებია მესამე სიმაღლის შებრუნებული სიდიდის კვადრტზე. მახვილკუთხაა თუ ბლაგვკუთხა ეს სამკუთხედი?

424. დაამტკიცეთ,რომ თუ სამკუთხედის ერთი სიმაღლე დანარჩენი ორის საშუალო არითმეტიკულია მაშინ ასეთივე თვისება აქვთ სამკუთხედის გვერდების შებრუნებულ სიდიდეებსაც.

425. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზაზე დაშვებულ სიმაღლესა და მედიანას შორის კუთხე ტოლია მახვილი კუთხეების სხვაობის.

426. *ABC* სამკუთხედში *AM* და *CN* ბისექტრისების ბოლო *M* და *N* წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი *AC* გვერდის პარალელურია. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედი ტოლფერდაა

427. ABC სამკუთხედში *AM, BK* და *CD* სიმაღლეები *O* წერტილში იკვეთებიან, ამასთანავე *OA:OM*=*OB:OK*=*OC:OD*=2:1. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედი *ABC* ტოლგვერდაა.

428. *ABC* სამკუთხედში *AM* და *CD* სიმაღლეების ბოლო *M* და *N* წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი *AC* გვერდის პარალელურია. დაამტკიცეთ რომ სამკუთხედი ტოლფერდაა

429. *ABCD* მართკუთხედში *B* და *D* წვეროებიდან *AC* დიაგონალზე დაშვებულია *BM* და *DN* სიმაღლეები. შესაძლებელია თუ არა *BMDN* ოთხკუთხედში წრეწირის ჩახაზვა?

430. *ABC* სამკუთხედში გავლებულია სამივე კუთხის მედიანა. მიღებულ ექვს სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირების რადიუსები ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

431. *ABC* სამკუთხედში გავლებულია *B* კუთხის *BD* სიმაღლე. *D* წერტილიდან *AB* და *BC* გვერდებზე დაშვებულია სიმაღლეები *DM* და *DN*. იქნება თუ არა სამკუთხედი *ABC* ტოლფერდა, თუ ცნობილია, რომ *MN* პარალელურია *AC*–სი.

432. *ABC* სამკუთხედში გავლებულია *B* კუთხის *BD* მედიანა. *D* წერტილიდან *AB* და *BC* გვერდებზე დაშვებულია *DM* და *DN* სიმაღლეები. ცნობილია, რომ *MN* პარალელურია *AC*–სი. იქნება თუ არა სამკუთხედი *ABC* ტოლფერდა?

433. არსებობს თუ არა ისეთი მართკუთხა სამკუთხედი, რომ მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე, მედიანა და ბისექტრისა აკმაყოფილებდეს პირობებს: სამკუთხედის ფართობი რომელიც შედგენილია მედიანითა და ბისექტრისით ტოლია სიმაღლითა და ბისექტრისით შედგენილი სამკუთხედის ფართობისა

434. ოთხკუთხედის დიაგონალები მის ფართობს შუაზე ჰყოფენ. რა შეიძლება ითქვას ამ ოთხკუთხედის შესახებ

435. პარალელოგრამის გვერდებია $\sqrt{2}$ სმ და $3\sqrt{2}$ სმ, ხოლო ერთ-ერთი კუთხე 45^0 –ია. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამის ნებისმიერი წერტილიდან მის გვერდებამდე მანძილების ნამრავლი არ აღემატება ერთს. იპოვეთ ამ ნამრავლის მაქსიმალური სიდიდე

436. დაამტკიცეთ, რომ ყველა მართკუთხა სამკუთხედებს შორის, რომელთა ფართობი ტოლია 2 სმ^2 –ის, მინიმალური პერიმეტრი ექნება ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედს.

437. ერთი სამკუთხედის კუთხეები და ფართობი ტოლია მეორე სამკუთხედის ფართობისა და კუთხეების, იქნება თუ არა ასეთი სამკუთხედები ტოლი?

438. სამკუთხედის გვერდებზე, როგორც დიამეტრებზე აგებულია ნახევარწრეწირები. შეიძლება თუ არა რომელიმე ნახევარწრეწირები იკვეთებოდნენ სამკუთხედის შიგნით. პასუხი დაასაბუთეთ.

439. მოცემულია მახვილკუთხა *ABC* სამკუთხედი. შეგვიძლია თუ არა ამ სამკუთხედის შიგნით ავიღოთ ისეთი *M* წერტილი, რომ $\angle AMB = 2\angle ACB$. არსებობს თუ არა ასეთი თვისების მქონე რამდენიმე წერტილი?

440. *ABCD* ტრაპეციაში ცნობილია, რომ $\angle ABD = \angle ACD$. დიდ ფუძეს წარმოადგენს *AD* მონაკვეთი. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეცია ტოლფერდაა.

441. *ABC* სამკუთხედში გავლებულია h_a სიმაღლე, რომელიც მოპირდაპირე გვერდს ჰყოფს *BD* და *DC* მონაკვეთებად. დაამტკიცეთ, რომ $\angle CAB = 90^0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ადგილი აქვს ტოლობას $AD^2 = BD \cdot DC$.

442. ABC სამკუთხედში გავლებულია BD მედიანა, დაამტკიცეთ, რომ თუ $AB > BC$ მაშინ $\angle ABD < \angle DBC$.

443. იქნება თუ არა ABC სამკუთხედი ტოლფერდა, თუ AB და BC გვერდების ა)სიმაღლეები ტოლია, ბ)მედიანები ტოლია, გ)ბისექტრისები ტოლია

444. შეიძლება თუ არა კვადრატის გვერდი დაიყოს n ტოლ ნაწილად, ისე რომ დაყოფის ყოველი პირველი წერტილის წვეროს მხრიდან საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით შეერთებით მიღებული ოთხკუთხედის პერიმეტრი ტოლი იყოს კვადრატის პერიმეტრის 2/5 ნაწილის?

445. შეიძლება თუ არა კვადრატის გვერდი დაიყოს n ტოლ ნაწილად ისე, რომ დაყოფის ყოველი წერტილის წვეროს მხრიდან საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით შეერთებით მიღებული ოთხკუთხედის ფართობი ტოლი იყოს კვადრატის ფართობის $P/(P+1))$ ნაწილის რომელიღაც P ნატურალური რიცხვისათვის.

446. ABC მართკუთხა სამკუთხედში, C მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებულია CD სიმაღლე. დაამტკიცეთ უტოლობა $AC \cdot BD + CB \cdot AD > 2S$.

447. დაამტკიცეთ უტოლობა $\cos A + \cos B + \cos C \geq 3 - \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc}$

სადაც A, B, C სამკუთხედის კუთხეებია, ხოლო a, b, c გვერდები

448. დაამტკიცეთ უტოლობა $\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}}{\sqrt{abc}} \geq 2(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2})$

სადაც A, B, C სამკუთხედის კუთხეებია, ხოლო a, b, c გვერდები.

449. დაამტკიცეთ უტოლობა $4r < P$ სადაც P-სამკუთხედის პერიმეტრია, ხოლო r ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

450. დაამტკიცეთ უტოლობა: $\frac{ab+ac+bc}{12} > r^2$ სადაც a, b, c სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო r - ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

451. დაამტკიცეთ უტოლობა:

$\frac{9S}{ctgA + ctgB + ctgC} \leq h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$ თუ h_1, h_2, h_3 სამკუთხედის სიმაღლეებია, S – ფართობი, ხოლო A, B, C - კუთხეები.

452. დაამტკიცეთ უტოლობა:

$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \geq \frac{\sqrt{bc} + \sqrt{ac} + \sqrt{ab}}{2R}$. სადაც a, b, c სამკუთხედის გვერდებია, A, B, C კუთხეები , ხოლო R შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

453. დაამტკიცეთ უტოლობა: $P \geq \sqrt[4]{27}\sqrt{S}$, სადაც S სამკუთხედის ფართობია, P-პერიმეტრის ნახევარი.

454. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედში სრულდება უტოლობა $P \geq 4\sqrt{S}$ სადაც P პერიმეტრია, ხოლო S სამკუთხედის ფართობი.

455. ABC სამკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი. დაამტკიცეთ ტოლობა: $S = \frac{1}{r}\sqrt{d_1 \cdot D_1 \cdot d_2 \cdot D_2 \cdot d_3 \cdot D_3}$. სადაც S სამკუთხედის ფართობია, r- ჩახაზული წრეწირის რადიუსი, d_1, d_2, d_3, უმოკლესი მანძილები სამკუთხედის წვეროებიდან ჩახაზულ

წრეწირამდე. $D_1D_2D_3$ მაქსიმალური მანძილია სამკუთხედის წვეროებიდან ჩახაზულ წრეწირამდე.

456. სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის 0 ცენტრი შეერთებულია სამკუთხედის წვეროებთან. დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:

$sin\frac{A}{2}+sin\frac{B}{2}+sin\frac{C}{2}=\frac{R_1+R_2+R_3}{2R}$. სადაც A, B, C, სამკუთხედის კუთხეებია, R, R_1, R_2, R_3 წარმოადგენენ შესაბამისად ABC, AOB, BOC, COA სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსებს.

457. დაამტკიცეთ, რომ ამოზნექილი ოთხკუთხედის გარე ჩახაზული წრეწირის ცენტრებზე შემოიხაზება წრეწირი.

458. დაამტკიცეთ უტოლობა $S\le\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ სადაც,. S სამკუთხედის ფართობია, ხოლო R შემოხაზული წრეწირის რადიუსი

459. $ABCD$ ამოზნექილი ოთხკუთხედის AB გვერდის A_1 შუაწერტილი შეერთებულია C და D წვეროებთან, ხოლო CD გვერდის C_1 შუაწერტილი შეერთებულია A და B წვეროებთან. BC_1 და A_1C მონაკვეთების გადაკვეთის წერტილია M, ხოლო AC_1 და A_1D მონაკვეთების გადაკვეთის – K წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ BMC და AKD სამკუთხედების ფართობთა ჯამი ტოლია A_1MC_1K ოთხკუთხედის ფართობის.

460. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედში ადგილი აქვს უტოლობას $l^2\le S$ სადაც l ჰიპოტენუზაზე დაშვებული ბისექტრისაა, ხოლო S სამკუთხედის ფართობი.

461. დაამტკიცეთ, რომ ABC სამკუთხედში ადგილი აქვს უტოლობას $l_1l_2l_3\le PS$ სადაც l_1, l_2, l_3 ბისექტრისების სიგრძეებია, P პერიმეტრის ნახევარი, ხოლო S ფართობი.

462. ოთხკუთხედის გვერდები ტოლია a, b, c, d–სი. დაამტკიცეთ $a^2+b^2+c^2+d^2\ \ge 4S$ უტოლობის სამართლიანობა, სადაც S ოთკუთხედის ფართობია.

463. მოცემულია $ABCD$ ოთხკუთხედი, რომლის მოპირდაპირე გვერდების ჯამი 2სმ-ია , ხოლო მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი 180^0 –ია. დაამტკიცეთ, რომ ოთხკუთხედის ფართობი არ აღემატება 1სმ^2-ს

464. დაამტკიცეთ, თუ A, B, C სამკუთხედის კუთხეებია, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{1}{2}(sin^2A+sin^2B+sin^2C)=sinBsinCcosA+sinAsinCcosB+sinAsinBcosC$$

465. ABC სამკუთხედის AC გვერდზე აღებულია K წერტილი. R_1, R_2, R წარმოადგენენ შესაბამისად ΔABK, ΔBKC და ΔABC-ზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსებს.
დაამტკიცეთ, იმისათვის, რომ R წარმოადგენდეს R_1, R_2-ის საშუალო გეომეტრიულს, აუცილებელია და საკმარისი BK წარმოადგენდეს AB და BC გვერდების სიგრძეების საშუალო გეომეტრიულს.

466. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის AK ბისექტრისა გამოითვლება ფორმულით:

$AK=\frac{bc}{b+c}\sqrt{\frac{2R+\sqrt{4R^2-a^2}}{R}}$, სადაც R შემოხაზული წრეწირის რადიუსია და $BC=a$, $AB=c$, $AC=b$.

467. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედში ადგილი აქვს ტოლობას $\frac{\cos\frac{A}{2}}{al_a}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{bl_b}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{cl_c}=\frac{2P}{abc}$, სადაც l_a, l_b, l_c წარმოადგენენ *A, B, C* კუთხეების ბისექტრისებს, ხოლო *P* – პერიმეტრის ნახევარია.

468. *ABC* სამკუთხედში გავლებულია *AL* და *CK* ბისექტრისები, რომლებიც *BC* და *AB* გვერდებს კვეთენ *L* და *K* წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ თუ *KBL* ტოლგვერდა სამკუთხედია, მაშინ $AK = CL$.

469. არსებობს თუ არა ისეთი სამკუთხედი, რომელშიც სრულდება ტოლობა $rp = 4R^2$, სადაც *r*, R ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირის რადიუსებია, *P* – პერიმეტრი.

470. *ABCD* პარალელოგრამში გვერდები $AB = a$ სმ, $AD = b$ სმ. BC გვერდის შუა *K* წერტილი შეერთებულია A და D წვეროებთან, $\angle AKD=90^0$. დაამტკიცეთ, რომ $b = 2a$.

471. *ABCD* ტრაპეციაში დიდი ფუძე უდრის *d*-ს, ხოლო მცირე ფუძე *c*-ს ტოლია. *AB* და *CD* ფერდების გაგრძელებები იკვეთებიან *K* წერტილში, ამასთანავე ტრაპეციაში შეიძლება ჩაიხაზოს წრეწირი. დაამტკიცეთ, რომ *AKD* სამკუთხედის პერიმეტრი ტოლია $\frac{2d^2}{d-c}$-სი.

472. *ABC* სამკუთხედში *AD* ბისექტრისა ტოლია ერთ-ერთი იმ მონაკვეთისა, რომელზედაც *BC* გვერდი იყოფა *D* წერტილით. დაამტკიცეთ, რომ $\angle A > 60^0$.

473. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედში ადგილი აქვს ტოლობას
$\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}=2(tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2})$. სადაც *a, b, c* სამკუთხედის გვერდებია, *A, B, C* – კუთხეები, ხოლო r_a, r_b, r_c – გარე ჩახაზული წრეწირის რადიუსები.

474. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედში ადგილი აქვს ტოლობას
$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$, სადაც h_a, h_b, h_c სიმაღლეებია, ხოლო *r* ჩახაზული წრეწირის რადიუსი

475. სამი წრეწირი, რომელთა სიგრძეებია l_1, l_2, l_3, იკვეთება *A* წერტილში. ამ წერტილიდან წრეწირებზე მოძრაობას იწყებენ წერტილები. შეიძლება თუ არა ამ წერტილებს მივანიჭოთ ისეთი სიჩქარეები, რომ რა დროც არ უნდა გაეიდეს ეს წერტილები ერთდროულად არასოდეს არ მოხვდნენ A წერტილში.

476. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედში ადგილი აქვს ტოლობას:

$\frac{P}{R}=\frac{\sin2A+\sin2B+\sin2C}{\cos A+\cos B+\cos C-1}$. სადაც *P* – პერიმეტრია, ხოლო *R* შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

477. მოცემულია *ABCD* ოთხკუთხედი, სადაც $AD = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$. იმ გარე ჩახაზული წრეწირის რადიუსები, რომლებიც ეხებიან შესაბამისად *a, b, c, d* გვერდებს და დანარჩენი ორი გვერდის გაგრძელებას აღნიშნულია r_a, r_b, r_c, r_d –თი. დაამტკიცეთ ტოლობა

$$\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}+\frac{d}{r_d}=2(tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}+tg\frac{D}{2})$$

478. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირში ჩახაზული *ABCD* ოთხკუთხედისათვის სრულდება ტოლობა $\frac{AD\cdot DC+BC\cdot AB}{BC\cdot DC+AB\cdot AD}=\frac{BD}{AC}$.

479. დაამტკიცეთ შემდეგი უტოლობის სამართლიანობა:
$\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}<\frac{2}{r}$, სადაც, l_a, l_b, l_c სამკუთხედის ბისექტრისებია, ხოლო r ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

480. $ABCD$ ოთხკუთხედში ჩახაზულია r რადიუსის მქონე წრეწირი. დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა: $\frac{S_{ABCD}}{tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}+tg\frac{D}{2}}=\frac{r^2}{tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}tg\frac{D}{2}}$

481. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედში ადგილი აქვს ტოლობას $\frac{P_a}{l_a}+\frac{P_b}{l_b}+\frac{P_c}{l_c}=2$. სადაც l_a, l_b, l_c წარმოადგენენ A, B, C კუთხის ბისექტრისებს, ხოლო P_a, P_b, P_c – თი აღნიშნულია მანძილები ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილიდან შესაბამისად A, B, C წვეროებამდე.

482. დაამტკიცეთ ტოლობა
$\frac{a-b}{b-c}=\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}}$. სადაც a, b, c სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო A, B, C – კუთხეები.

483. ABC სამკუთხედის გვერდებია a, b, c ხოლო კუთხეები A, B, C. დაამტკიცეთ, რომ თუ სამკუთხედის გვერდები ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას, მაშინ რიცხვები

$\frac{1}{ctgB+ctgC}$, $\frac{1}{ctgA+ctgC}$, $\frac{1}{ctgA+ctgB}$, ასევე ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას და ადგილი აქვს ტოლობას $\frac{ctgB+ctgC}{ctgA+ctgC}=\frac{b^2}{a^2}$.

484. R რადიუსიან წრეში ჩახაზულია $ABCD$ ოთხკუთხედი. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\angle A\neq\angle D$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას $S_{ABCD}=2R^2\sin A\sin D\sin(A+D)$.

485. დაამტკიცეთ ტოლობა $S^2=\frac{1}{2}abc(a+b+c)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, სადაც a, b, c სამკუთხედის გვერდებია, A,B,C-კუთხეები, S-ფართობი.

486. დაამტკიცეთ, რომ $ABCD$ ტრაპეციაში ადგილი აქვს ტოლობას $\frac{AB}{CD}=\frac{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$, სადაც AD ტრაპეციის დიდი ფუძეა.

487. სამკუთხედ ABC –ში გავლებულია AK_1, BK_2, CK_3 მედიანები. ამასთანავე $\angle CAK_1=\alpha$; $\angle K_1AB=\beta$; $\angle BCK_3=\alpha_1$; $\angle K_3CA=\beta_1$; $\angle ABK_2=\alpha_2$; $\angle K_2BC=\beta_2$. დაამტკიცეთ ტოლობა: $\sin\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha_2=\sin\beta\sin\beta_1\sin\beta_2$

488. დაამტკიცეთ, რომ ABC სამკუთხედში B კუთხის ბისექტრისასა და ამავე კუთხის მედიანას შორის მდებარე α კუთხე გამოითვლება ფორმულით: $\sin\alpha=\frac{b(\sin C-\sin A)}{4m_b\cos\frac{B}{2}}$

სადაც $\angle C>\angle A$.

489. $ABCD$ ტრაპეციაში გაგრძელებულია AC და BD დიაგონალები. ამ დიაგონალების გაგრძელება, დიდი ფუძის გაგრძელება და ფერდების მხები წრეწირის რადიუსები ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეცია ტოლფერდაა.

490. დაამტკიცეთ, როგორიც არ უნდა იყოს ABC სამკუთხედი, არსებობს ისეთი MNQ ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის წვეროები მდებარეობენ ABC სამკუთხედის სხვადასხვა გვერდზე.

491. ABC სამკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი, რომელიც AB, AC, BC გვერდებს ეხება შესაბამისად წერტილებში M, P, N. დაამტკიცეთ ტოლობა

$S=\sqrt[3]{x^2y^2z^2 ctg\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\beta}{2}ctg\frac{\gamma}{2}}$ სადაც $BN=x$, $MC=y$, $MA=z$, α, β, γ სამკუთხედის კუთხეებია, ხოლო S- ფართობი.

492. დაამტკიცეთ რომ სამკუთხედში ადგილი აქვს ტოლობას: $ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}=\frac{P}{r}$

სადაც A, B, C სამკუთხედის კუთხეებია, P-პერიმეტრის ნახევარი, r- ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

493. $ABCD$ ტრაპეციაში AC და BD დიაგონალები იკვეთებიან M წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ რიცხვები $S_{\Delta AMD}, S_{\Delta ABM}, S_{\Delta BMC}$ ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას.

494. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედში ჩახაზული და გარე ჩახაზული წრეწირების ცენტრების შემაერთებელი მონაკვეთი ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირთან გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა.

495. დაამტკიცეთ ტოლობა $S=\frac{a^2+b^2+c^2}{4(ctgA+ctgB+ctgC)}$ სადაც S- სამკუთხედის ფართობია. a, b, c – გვერდები, ხოლო A, B, C – სამკუთხედის კუთხეებია.

496. დაამტკიცეთ ტოლობა:

$l=\frac{2ac}{a+c}cos\frac{B}{2}$

სადაც l არის სამკუთხედის B კუთხის ბისექტრისა. a, c ამ კუთხესთან მიმდებარე გვერდები $a\neq c$.

497. ABC სამკუთხედში C_1, C_2, C_3, წარმოადგენენ A, B, C, კუთხის ბისექტრისების სიგრძეებს. დაამტკიცეთ ტოლობა:

$$\frac{2}{r}=\frac{1}{C_1\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{C_2\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{C_3\sin\frac{C}{2}}$$

სადაც, r ჩახაზული წრეწირის რადიუსია.

498. კვადრატში რომლის გვერდის სიგრძეა 10 სმ. მოცემულია 201 წერტილი ისე, რომ არცერთი სამი წერტილი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს. დაამტკიცეთ, რომ ამ წერტილებს შორის არსებობს ისეთი წერტილი, რომ მათ მიერ შედგენილი სამკუთხედის ფართობი არ აღემატება 1/2 სმ-ს.

499. ABC სამკუთხედის გვერდებია a, b, c და ამასთან $\angle ACB$ მახვილია. სამკუთხედის AB გვერდზე, როგორც დიამეტრზე აგებულია ნახევარწრე, რომელიც BC და AC გვერდებს კვეთს შესაბამისად M და N წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ ადგილი აქვს უტოლობას: $MN\geq c-\frac{c^3}{2ab}$.

500. ABC სამკუთხედში ჩახაზულია R რადიუსიანი წრეწირი. ამ სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე კუთხეში ჩახაზულია r რადიუსიანი წრეწირი, რომელიც ეხება R რადიუსიან წრეწირს. სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადისი იყოს R^*. დაამტკიცეთ, რომ თუ $R:r$ ფარდობა რაციონალური რიცხვია, მაშინ r, R, R^* სიდიდეები არ ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას.

ამოცანები აგებაზე

501. მოცემულია მართკუთხა სამკუთხედი ΔABC სადაც $AC=a$, $BC=b$, $AB=c$. ფარგლისა და სახაზავის დახმარებით ააგეთ მონაკვეთი, რომლის სიგრძე ტოლია $\frac{a^3}{c^2}$-ის.

502. მოცემულია მონაკვეთი, რომლის სიგრძე $\sqrt{3}$ სმ-ის ტოლია. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ მონაკვეთი რომლის სიგრძე 1 სმ –ია.

503. ნახაზზე მოცემულია *ABCD* ტრაპეცია. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ ამ ტრაპეციის ტოლდიდი კვადრატი.

504. მოცემულია სამი კუთხე $\angle A=\alpha+\beta$, $\angle B=\beta+\gamma$, $\angle C=\alpha+\gamma$ ცნობილია, რომ $\alpha+\beta+\gamma=180^0$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ სამკუთხედი, რომლის კუთხეებია α,β,γ.

505. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ ტრაპეცია, თუ ცნობილია, რომ *a, b, c, d* – წარმოადგენენ შესაბამისად ფერდებს, მცირე და დიდ ფუძეებს.

506. მოცემულია *ABC* სამკუთხედი 60^0 –იანი კუთხით. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ ტოლგვერდა სამკუთხედი ისე, რომ მისი წვეროები ABC სამკუთხედის სხვადასხვა გვერდზე მდებარეობდეს

507. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ სამკუთხედი თუ ცნობილია მისი ორი კუთხე და მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

508. მოცემულია სამკუთხედის a გვერდი, ამ გვერდზე დაშვებული h_a სიმაღლე და სამკუთხედის პერიმეტრი *P*. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებითა ააგეთ მონაკვეთი, რომლის სიგრძე ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსის ტოლია.

509. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ *ABC* სამკუთხედი, თუ ცნობილია მისი ერთ-ერთი კუთხე, $\angle BAM=\alpha$, სამკუთხედის პერიმეტრი P და h_b სიმაღლე.

510. მოცემულია სამკუთხედი *ABC*. ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით *AC* გვერდზე იპოვეთ ისეთი M წერტილი, რომ $AB+AM=BC+CM$.

511. მოცემულია მახვილკუთხა *ABC* სამკუთხედი. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ *ABC* სამკუთხედის შიგნით ისეთი *M* წერტილი, რომ სამკუთხედის გვერდები ამ წერტილიდან მოჩანდეს 120^0-იანი კუთხით.

512. მოცემულია *ABC* სამკუთხედი. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით სამკუთხედის შიგნით ააგეთ ისეთი 0 წერტილი, რომლისთვისაც სამართლიანია ტოლობები: $S_{\Delta AOB}=S_{\Delta BOC}=S_{\Delta COA}$

513. *R* რადიუსიანი წრეწირის შიგნით აღებული *M* წერტილი ცენტრიდან დაშორებულია $\frac{1}{3}R$–ზე მეტი მანძილით. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ *AB* ქორდა, ისე რომ ის *M* წერტილით იყოფოდეს შეფარდებით 2:1.

514. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ სამკუთხედი, თუ ცნობილია მისი:
ა) სამივე კუთხე და ერთ-ერთი კუთხის მედიანა,
ბ) სამივე კუთხე და ერთ-ერთი კუთხის ბისექტრისა,
გ) სამივე კუთხე და ერთ-ერთი კუთხის სიმაღლე.

515. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ α კუთხე, რომლისთვისაც

$cos\alpha = \frac{1-2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$.

516. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ სამკუთხედი, თუ ცნობილია მისი ორი კუთხე და პერიმეტრი.

517. მოცემულია კუთხე და ამ კუთხეში M წერტილი. ფარგლისა და სახაზავის დახმარებით M წერტილზე გაავლეთ ისეთი წრფე, რომ მან მოცემულ კუთხეს ჩამოაჭრას მინიმალური ფართობის მქონე სამკუთხედი.

518. მოცემულია სამკუთხედი ABC. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ წრფე, რომელიც AC გვერდის პარალელურია და სამკუთხედის ფართობს ყოფს ორ ტოლ ნაწილად.

519. მოცემულია სამკუთხედი ABC. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ წრფე, რომელიც AC გვერდის პარალელურია და სამკუთხედის ფართობს ყოფს შეფარდებით 3 : 1 წვეროს მხრიდან.

520. მოცემულია სამკუთხედი ABC. ცნობილია, რომ $\angle C=44^0$. ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით ააგეთ ისეთი M წერტილი,რომ $\angle AMB=11^0$.

521. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ მოცემული მართკუთხედის ტოლდიდი კვადრატი.

522. მოცემული 17^0 –იანი კუთხე ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით დაყავით 17 ტოლ ნაწილად.

523. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ სამკუთხედი, თუ ცნობილია მისი ერთ-ერთი გვერდი, ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე და დანარჩენი ორი გვერდის სხვაობა.

524. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ სამკუთხედი რომლის გვერდებია a, b ხოლო მათი მოპირდაპირე კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 3:1.

525. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ ისეთი სამკუთხედი, რომ მის $2C$ ტოლი სიგრძის გვერდზე დაშვებული სიმაღლე იყოს h, ხოლო ჩახაზული წრეწირის რადიუსი – r.

526. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით 360^0-იანი კუთხე დაყავით ისეთ ოთხ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, კუთხეებად რომ სრულდებოდეს ტოლობა:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta=\frac{3\sqrt{7}+\sqrt{15}}{4}$$

527. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით $ABCD$ ამოზნექილი ოთხკუთხედის ერთ-ერთ წვეროზე გაატარეთ წრფე, რომელიც ოთხკუთხედის ფართობს გაყოფს შუაზე.

528. მოცემულია წრეწირი და მის შიგნით M წერტილი. ააგეთ ამ წერტილზე გამავალი ისეთი AB ქორდა, რომ სრულდებოდეს პირობა: $BM-AM=a$, სადაც a წინასწარ მოცემული მონაკვეთია (იგულისხმება, რომ აგება შესაძლებელია).

529. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ სამკუთხედი, თუ მოცემულია სამკუთხედის მახვილი კუთხე, მისი მოპირდაპირე გვერდი და ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე.

530. წრეწირის გარეთ მდებარე M წერტილიდან გაატარეთ წრეწირის ისეთი მკვეთი, რომ მკვეთის გარე ნაწილის სიგრძე 2-ჯერ მეტი იყოს შიგა ნაწილის სიგრძეზე.

531. მოცემულია ორი ურთიერთგადამკვეთი წრეწირი. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ მათი საერთო მხები.

532. სიბრტყეზე მოცემულია სამი წერტილი A, O, O_1 ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ სამკუთხედი, რომლისთვისაც A სამკუთხედის წვეროა ხოლო O და O_1 შესაბამისად შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირის ცენტრებია.

533. სიბრტყეზე მოცემულია α კუთხე და მონაკვეთი AB. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით AB მონაკვეთზე იპოვეთ ისეთი C წერტილი, რომ სრულდებოდეს ტოლობა $AC = CB\sin\alpha$.

534. მოცემულია წრეწირი და მის გარეთ A წერტილი. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ A წერტილზე გამავალი წრეწირის მხები წრფე.

535. მოცემულია მანაკვეთი რომლის სიგრძეა a. მხოლოდ ფარგლის საშუალებით ააგეთ მონაკვეთი რომლის სიგრძეა $3a$.

536. მოცემულია კუთხე. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ეს კუთხე დაყავით ისეთ ორ კუთხედ, რომელთათვისაც სრულდება ტოლობა $\sin\alpha = 3\sin\beta$.

537. მოცემულია ორი კონცენტრული წრეწირი რადიუსებით r_1, r_2 $(r_1 < r_2)$ და მათ გარეთ მდებარე M წერტილი. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით M წერტილზე გაატარეთ წრფე ისე რომ $MA=AB$. წერტილები A და B მოცემულ წრეწირებზე მდებარეობს. (იგულისხმება, რომ აგება შესაძლებელია.)

538. დაამტკიცეთ, რომ როგორიც არ უნდა იყოს მონაკვეთი $a=\sqrt{m}$ (m-ნატურალური რიცხვია) ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით შეიძლება აიგოს მონაკვეთი რომლის სიგრძე 1 სმ-ის ტოლია.

539. ცნობილია, რომ h_a, h_b, h_c რაღაც სამკუთხედის სიმაღლეებია. შეიძლება, თუ არა ისეთი სამკუთხედის აგება, რომლის გვერდებიც ტოლია ამ სიმაღლეების სიგრძეების.

540. ცნობილია, რომ m_a, m_b, m_c რაღაც სამკუთხედის მედიანებია. შეიძლება, თუ არა ისეთი სამკუთხედის აგება, რომლის გვერდებიც ტოლია ამ მედიანების სიგრძეების..

541. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ 36^0 -იანი კუთხე.

542. წრეწირში ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ჩახაზეთ წესიერი ხუთკუთხედი.

543. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ სამკუთხედი, თუ ცნობილია მისი ერთ-ერთი კუთხე, ამ კუთხესთან მიმდებარე გვერდი და დანარჩენი ორი გვერდის სხვაობა.

544. მოცემულია a და b მონაკვეთი. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ მონაკვეთი, რომლის სიგრძეა $a^9 : b^8$.

545. მოცემულია l წრფე და მის ერთ მხარეს მდებარე ორი A და B წერტილი. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ წრეწირი, რომელიც გადის A და B წერტილებზე და ეხება მოცემულ წრფეს.

546. მოცემულია კუთხე და მის შიგნით M წერტილი ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ წრეწირი, რომელიც ეხება კუთხის გვერდებს და გადის მოცემულ წერტილზე.

§21. სტერეომეტრია

ა – ჯგუფი

1. A და B წერტილები P სიბრტყიდან დაშორებულია შესაბამისად 6 სმ-ით და 8 სმ-ით. იპოვეთ AB მონაკვეთის შუა წერტილის დაშორება ამ სიბრტყიდან.
ა) 7 სმ ბ) 1 სმ გ) 8 სმ დ) 7 სმ ან 1 სმ

2. A და B წერტილები განლაგებულია P სიბრტყის ერთ მხარეს. C წერტილი AB მონაკვეთს ყოფს შეფარდებით $AC:CB=1:4$. იპოვეთ C წერტილის დაშორება სიბრტყიდან, თუ A და B წერტილები სიბრტყიდან დაშორებულია შესაბამისად 6 სმ-ით და 8 სმ-ით.
ა) 6,4 სმ ბ) 5,2 სმ გ) 6 სმ დ) 7 სმ

3. A წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი AB და AC დახრილი, რომლებიც სიბრტყესთან ადგენენ შესაბამისად 30^o-იან და 45^o-იან კუთხეებს. ამ დახრილების გეგმილები ურთიერთმართობულია, ამასთან მანძილი დახრილების ფუძეებს შორის ტოლია 20 სმ-ის. იპოვეთ A წერტილის დაშორება სიბრტყიდან.
ა) 12 სმ ბ) 8 სმ გ) 14 სმ დ) 10 სმ

4. AB დახრილის სიგრძე ორჯერ მეტია სიბრტყეზე მის გეგმილზე. იპოვეთ კუთხე დახრილსა და მის გეგმილს შორის.
ა) 30^o ბ) 60^o გ) 45^o დ) 40^o

5. P სიბრტყის A წერტილიდან აღმართულია AB მართობი, რომელზედაც აღებულია C წერტილი. ცნობილია, რომ AB=20 სმ-ს, CD=15 სმ-ს და BC=7 სმ-ს (D წერტილი ძევს P სიბრტყეზე). იპოვეთ მანძილი B წერტილიდან P სიბრტყემდე.
ა) 8 სმ ბ) 16 სმ გ) 18 სმ დ) 12 სმ

6. A წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი: AB=8 სმ-ს და AC=10 სმ-ს. ერთ-ერთი დახრილის გეგმილის სიგრძე 4 სმ-ით მეტია მეორე დახრილის გეგმილის სიგრძეზე. გამოთვალეთ მანძილი A წერტილიდან სიბრტყემდე.
ა) 6 სმ ბ) 7 სმ გ) $3\sqrt{2}$ სმ დ) $\sqrt{231}/5$ სმ

7. A წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი, რომელთა შორის ერთ-ერთი 2 სმ-ით გრძელია მეორეზე, ხოლო მათი გეგმილები შესაბამისად ტოლია 9 სმ-ის და 5 სმ-ის. იპოვეთ A წერტილის დაშორება სიბრტყიდან.
ა) 13 სმ ბ) 12 სმ გ) 14 სმ დ) 10 სმ

8. AB და AC დახრილების გეგმილები სიბრტყეზე შესაბამისად ტოლია 5 სმ-ის და 9 სმ-ის. A წერტილი სიბრტყიდან დაშორებულია 12 სმ-ით. გამოთვალეთ მანძილი დახრილის ფუძეებს შორის, თუ ამ დახრილებს შორის კუთხე 60^o-ის ტოლია.
ა) $\sqrt{119}$ სმ ბ) $\sqrt{197}$ სმ გ) $\sqrt{199}$ სმ დ) $\sqrt{173}$ სმ

9. A წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი AB და AC დახრილი და AD მართობი. დახრილები მართობთან ადგენენ შესაბამისად 60^o-იან და 45^o-იან კუთხეებს. დახრილის ფუძეებს შორის მანძილი BC=4 სმ-ს, ხოლო კუთხე გეგმილებს შორის 30^o-ია. იპოვეთ მანძილი A წერტილიდან სიბრტყემდე.
ა) 4 სმ ბ) 5 სმ გ) 6 სმ დ) 3 ს

10. შეადარეთ კუთხის სიდიდე რომელიმე სიბრტყეზე ამ კუთხის გეგმილის სიდიდესთან.
ა) ტოლია ბ) გეგმილის სიდიდე არ აღემატება კუთხის სიდიდეს
გ) გეგმილის სიდიდე ნაკლებია კუთხის სიდიდეზე დ) ვერ დავადგენთ

11. P სიბრტყეში მდებარე სამკუთხედის გვერდებია AB=5 სმ, BC=6 სმ და AC=7 სმ. სამკუთხედის C წვეროდან სიბრტყისადმი აღმართულია CD მართობი, რომლის სიგრძეც

ტოლია $\sqrt{6}$ სმ-ის. გამოთვალეთ მანძილი D წერტილიდან სამკუთხედის AB გვერდამდე.

ა) $3\sqrt{6}$ სმ ბ) $13\sqrt{6}/5$ სმ გ) $5\sqrt{2}$ სმ დ) 8 სმ

12. A წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი AB და AC დახრილი და AD მართობი. დახრილები მართობთან შესაბამისად ადგენენ 60^0-იან და 30^0-იან კუთხეებს დახრილებს შორის კუთხე 30^0-ია.იპოვეთ კუთხე გეგმილებს შორის.

ა) 30^0 ბ) 45^0 გ) 0^0 დ) 60^0

13. ABC სამკუთხედის გვერდებია AB=5 სმ, AC=3 სმ და BC= 4 სმ. M წერტილი აღებულია ისე, რომ მანძილი ამ წერტილიდან სამკუთხედის გვერდებამდე ერთნაირია და ტოლია 13 სმ-ის. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე.

ა) $2\sqrt{42}$ სმ ბ) 12 სმ გ) $2\sqrt{41}$ სმ დ) 14 სმ

14. ABC სამკუთხედის წვეროები M წერტილიდან დაშორებულია 20 სმ-ის ტოლი მაძილებით, ამასთან ის არ მდებარეობს სამკუთხედის სიბრტყეში. გამოთვალეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე, თუ AB=12 სმ-ს და $\angle ACB=30^0$.

ა) 12 სმ ბ) 4 სმ გ) 16 სმ დ) 18 სმ

15. ABC სამკუთხედში $AB=5\sqrt{2}$ სმ-ს, $\angle ACB=45^0$. სამკუთხედის გარეთ აღებული M წერტილის წვეროებთან შემაერთებელი მონაკვეთები MA, MB და MC სამკუთხედის სიბრტყესთან ადგენენ 45^0-იან კუთხეებს. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე.

ა) 6 სმ ბ) 4 სმ გ) 3 სმ დ) 5 სმ

16. ABC სამკუთხედში $AB=8\sqrt{2}$ სმ-ს და $\angle ACB=45^0$. სამკუთხედის სიბრტყის გარეთ აღებული M წერტილიდან სამკუთხედის წვეროებამდე მანძილები ერთმანეთის ტოლია და უდრის 10 სმ-ს. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე.

ა) 8 სმ ბ) 6 სმ გ) 10 სმ დ) 7 სმ

17. A წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი AB და AC, რომლებიც შესაბამისად ტოლია 10 სმ-ს და 12 სმ-ს. BC მონაკვეთის სიგრძე 16 სმ-ია. ცნობილია, რომ ABC სამკუთხედის ფართობი ორჯერ მეტია ამ სიბრტყეზე სამკუთხედის გეგმილის ფართობზე. იპოვეთ კუთხე თითოეულ დახრილსა და სიბრტყეს შორის.

ა) $\arcsin\frac{9\sqrt{133}}{160}$; $\arcsin\frac{3\sqrt{133}}{64}$ ბ) $\arcsin\frac{1}{3}$; 30^0 გ) 45^0; 60^0 დ) 30^0; 45^0

18. A წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია AB და AC დახრილი, რომლებიც სიბრტყესთან ადგენენ შესაბამისად 30^0-იან და 45^0-იან კუთხეებს. A წერტილი სიბრტყიდან დაშორებულია AD=4 სმ-ის ტოლი მანძილით. გამოთვალეთ ABC სამკუთხედის ფართობის შეფარდება BCD სამკუთხედის ფართობთან თუ $BC=4\sqrt{2}$ სმ-ს.

ა) 2 ბ) $\sqrt{2}$ გ) $\sqrt{3}$ დ) $\sqrt{5}$

19. ABC სამკუთხედის გვერდებია: AB=5 სმ, AC=3 სმ და BC=4 სმ. M წერტილი ისეა შერჩეული, რომ AM, BM და CM დახრილები სიბრტყესთან ადგენენ 45^0-იან კუთხეებს. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან ABC სამკუთხედის სიბრტყემდე.

ა) 2.5 სმ ბ) 2 სმ გ) 3 სმ დ) 1.5 სმ

20. ABC სამკუთხედის გვერდებია: AB=6 სმ, BC=8 სმ და AC=6 სმ.სამკუთხედის სიბრტყეში აღებული M წერტილიდან აღმართულია MS მართობი ისე, რომ $AS=BS=CS$=15 სმ. გამოთვალეთ S წერტილის დაშორება სამკუთხედის სიბრტყიდან.

ა) $0{,}8\sqrt{45}$ სმ ბ) $0{,}6\sqrt{45}$ სმ გ) $2\sqrt{45}$ სმ დ) $1{,}2\sqrt{145}$ სმ

21. P სიბრტყეში მდებარე ABC სამკუთხედის გვერდებია AB=13 სმ, AC=12 სმ და BC=5 სმ. სიბრტყის გარეთ აღებული S წერტილი თანაბრადაა დაშორებული სამკუთხედის წვეროებიდან, ხოლო მისი დაშორება P სიბრტყიდან 6 სმ-ს ტოლია. იპოვეთ მანძილი S

წერტილიდან სამკუთხედის ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილამდე.

ა) $\sqrt{206}/2$ სმ ბ) $\sqrt{209}/2$ სმ გ) $\sqrt{207}/2$ სმ დ) $\sqrt{205}/2$ სმ

22. ABC სამკუთხედის გვერდებია: AB=3 სმ, AC=7 სმ და BC=6 სმ. სამკუთხედის ბისექტრისების გადაკვეთის M წერტილიდან აღმართულია MS მართობი, რომლის სიგრძეა 10 სმ. იპოვეთ მანძილი სამკუთხედის A წვეროდან S წერტილამდე.

ა) $\sqrt{423}/2$ სმ ბ) $\sqrt{421}/2$ სმ გ) $\sqrt{401}/2$ სმ დ) $\sqrt{431}/2$ სმ

23. $ABCD$ ოთხკუთხედში AB=6 სმ-ს და BC=8 სმ-ს, ხოლო $\angle ABC = 2\angle ADC$. M წერტილი ოთხკუთხედის სიბრტყის გარეთ ისეა აღებული, რომ MA, MB, MC, MD დახრილები ოთხკუთხედის სიბრტყესთან ადგენენ 60^o-იან კუთხეებს. გამოთვალეთ მანძილი M წერტილიდან ოთხკუთხედის სიბრტყემდე.

ა) $4\sqrt{37}$ სმ ბ) $2\sqrt{37}$ სმ გ) $3\sqrt{37}$ სმ დ) $6\sqrt{37}$ სმ

24. $ABCD$ ოთხკუთხედში AB=7 სმ-ს და BC=5 სმ-ს, ხოლო $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle ADC$. სიბრტყის გარეთ აღებული M წერტილიდან ოთხკუთხედის წვეროებამდე მანძილები ერთმანეთის ტოლია და შეადგენს 12 სმ-ს. გამოთვალეთ მანძილი M წერტილიდან ოთხკუთხედის სიბრტყემდე.

ა) 10 სმ ბ) 13 სმ გ) $\sqrt{157}$ სმ დ) $\sqrt{131}$ სმ

25. ორწახნაგა კუთხის P და Q წახნაგებზე აღებულია შესაბამისად A და B წერტილები. ცნობილია, რომ მანძილი A წერტილიდან წიბომდე 6 სმ-ია,ხოლო AB=8 სმ-ს. კუთხე Q წახნაგსა და AB მონაკვეთს შორის 45^o-ია. იპოვეთ ორწახნაგა კუთხის წრფივი კუთხე.

ა) 60^o ბ) $arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$ გ) 30^o დ) $arccos\frac{2\sqrt{3}}{3}$

26. ორწახნაგა კუთხის წრფივი კუთხე 60^o-ია. P წახნაგზე აღებულია A და B წერტილი ისე, რომ მათი დაშორება კუთხის წიბომდე შესაბამისად ტოლია AM=6 სმ-ის და BN=10 სმ-ის. იპოვეთ მანძილი ორწახნაგა კუთხის მეორე Q წახნაგზე A და B წერტილების გეგმილებს შორის თუ MN=3 სმ-ს.

ა) 4 სმ ბ) 5 სმ გ) $\sqrt{13}$ სმ დ) $\sqrt{5}$ სმ

27. ორწახნაგა კუთხე 60^o-ია. კუთხის P და Q წახნაგებზე აღებულია A და B წერტილები ისე, რომ მათი დაშორება წიბოდან შესაბამისად ტოლია AM=6 სმ-ის და BN=8 სმ-ის. გამოთვალეთ კუთხე AB მონაკვეთსა და Q წახნაგს შორის, თუ MN=12 სმ-ს.

ა) 45^o ბ) $arcsin\frac{3\sqrt{3}}{13}$ გ) $arccos\ \frac{3\sqrt{3}}{13}$ დ) $arctg\ \frac{3\sqrt{3}}{13}$

28. ABC სამკუთხედის წვეროები P სიბრტყიდან დაშორებულია 6 სმ-ის, 8 სმ-ის და 10 სმ-ის ტოლი მანძილებით. იპოვეთ სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილის დაშორება P სიბრტყიდან.

ა) 7 სმ ბ) 6,2 სმ გ) 6,9 სმ დ) 6,5 სმ

29. ABC სამკუთხედის გვერდებია AB=6 სმ, BC=9 სმ და AC=12 სმ. სამკუთხედის წვეროები სიბრტყიდან დაშორებულია $AA_1 = 10$ სმ-ით, $BB_1 = 12$ სმ-ით და $CC_1 = 14$ სმ-ით. იპოვეთ სამკუთხედის ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილის დაშორება სიბრტყიდან.

ა) 106/9 სმ ბ) 12 სმ გ) 107/9 სმ დ) 104/9 სმ

30. ABC სამკუთხედის გვერდებია AB=13 სმ, BC=14 სმ და AC=15 სმ. სამკუთხედის წვეროები P სიბრტყიდან დაშორებულია $AA_1 = 10$ სმ-ის, $BB_1 = 12$ სმ-ის და $CC_1 = 14$ სმ-ის ტოლი მანძილებით. იპოვეთ სამკუთხედის სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილის დაშორება სიბრტყიდან.

ა) 197/73 სმ ბ) 263/97 სმ გ) 183/37 სმ დ) 265/98 სმ

31. ABC სამკუთხედის გვერდებია AB=6 სმ, BC=10 სმ, AC=13 სმ. ამ სამკუთხედის A და C

წვეროები P სიბრტყიდან დაშორებულია შესაბამისად 15 სმ-ით და 2 სმ-ით. იპოვეთ სამკუთხედის B წვეროს დაშორება სიბრტყიდან.

ა) 275/26 სმ ბ) 275/18 სმ გ) 285/26 სმ დ) 280/29 სმ

32. კუბის წიბოს სიგრძე 5 სმ-ია. გამოთვალეთ კუბის დიაგონალი.

ა) $5\sqrt{2}$ სმ ბ) $5\sqrt{3}$ სმ გ) 10 სმ დ) $5\sqrt{5}$ სმ

33. კუბის წიბო 10 სმ-ია. ერთ-ერთი წვეროდან გამოსული წიბოების შუაწერტილები შეერთებულია მონაკვეთებით. გამოთვალეთ მიღებული სამკუთხედის ფართობი.

ა) $25\sqrt{2}$ სმ ბ) 12,5 სმ^2 გ) $25\sqrt{2}$ სმ^2 დ) $12{,}5\sqrt{3}$ სმ^2

34. კუბის ფუძეებია $ABCD$ და $A_1B_1C_1D_1$ კვადრატები. AD წიბოზე და BB_1 წიბოს შუაწერტილზე გაელებულია მკვეთი სიბრტყე. გამოთვალეთ კვეთაში მიღებული ფიგურის ფართობი,თუ კუბის წიბოს სიგრძეა 6 სმ.

ა) $18\sqrt{5}$ სმ^2 ბ) $18\sqrt{2}$ სმ^2 გ) $20\sqrt{5}$ სმ^2 დ) $20\sqrt{2}$ სმ^2

35. გამოთვალეთ კუბის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი დიაგონალი ტოლია $6\sqrt{3}$ სმ-ის.

ა) 136 სმ^2 ბ) 216 სმ^2 გ) 256 სმ^2 დ) 200 სმ^2

36. გამოთვალეთ კუბის მოცულობა, თუ მისი ზედაპირის ფართობი ტოლია 600 სმ^2.

ა) 1 5000 სმ^3 ბ) 10 000 სმ^3 გ) 1 000 სმ^3 დ) 100 სმ^3

37. კუბის ფუძეებია $ABCD$ და $A_1B_1C_1D_1$ კვადრატები. AA_1 და CC_1 წიბოების შუაწერტილები შეერთებულია D წვეროსთან. გამოთვალეთ $\angle MDN$.

ა) 45° ბ) $arccos\ \frac{1}{5}$ გ) $arcsin\frac{1}{5}$ დ) $arctg\ \frac{1}{5}$

38. კუბის ფუძეებია $ABCD$ და $A_1B_1C_1D_1$ კვადრატები. გამოთვალეთ კუთხე A_1D დიაგონალსა და DK მონაკვეთს შორის, სადაც K არის CC_1 წიბოს შუაწერტილი.

ა) $arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$ ბ) $arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$ გ) $arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$ დ)) $arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$

39. გამოთვალეთ კუთხე კუბის ორი მეზობელი გვერდითი წახნაგის დიაგონალებს შორის, თუ მათ საერთო წვერო გააჩნიათ.

ა) 90° ბ) 45° გ) 60° დ) 30°

40. კუბის ფუძეებია $ABCD$ და $A_1B_1C_1D_1$ კვადრატები, კუბის დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილი შეერთებულია A, B ფუძის ორ მეზობელ წვეროსთან. იპოვეთ კუთხე OA და OB მონაკვეთს შორის.

ა) 60° ბ) $arccos\frac{1}{3}$ გ) $arcsin\frac{1}{5}$ დ) 30°

41. მანძილი კუბის წვეროდან კუბის დიაგონალამდე, რომელიც ამ წვეროზე არ გადის 5 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ კუბის წიბოს სიგრძე.

ა) $2{,}5\sqrt{6}$ სმ ბ) $5\sqrt{6}$ სმ გ) $5\sqrt{3}$ სმ დ) 4 სმ

42. კუბის ფუძეებია $ABCD$ და $A_1B_1C_1D_1$ კვადრატები. მანძილი A წვეროდან BB_1C_1C წახნაგის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილამდე ტოლია 6 სმ-ის. გამოთვალეთ კუბის მოცულობა.

ა) $48\sqrt{6}$ სმ^3 ბ) $48\sqrt{3}$ სმ^3 გ) $48\sqrt{2}$ სმ^3 დ) $48\sqrt{5}$ სმ^3

43. კუბის ფუძეებია $ABCD$ და $A_1B_1C_1D_1$ კვადრატები. იპოვეთ მანძილი A წვეროდან B_1D_1C წვეროებზე გამავალ სიბრტყემდე, თუ კუბის წიბო ტოლია 3 სმ-ის.

ა) $2\sqrt{3}$ სმ ბ) $2\sqrt{2}$ სმ გ) 4 სმ დ) 5 სმ

44. კუბის წიბოს სიგრძე ტოლია 6 სმ-ის. კუბის ფუძეებია $ABCD$ და $A_1B_1C_1D_1$ კვადრატები. გამოთვალეთ მანძილი A_1, B, D და B_1, D_1, C წერტილებზე გამავალ სიბრტყეებს შორის.

ა) $2\sqrt{3}$ სმ ბ) $2\sqrt{2}$ სმ გ) $3\sqrt{3}$ სმ დ) $4\sqrt{3}$ სმ

45. კუბის ფუძეებია $ABCD$ და $A_1B_1C_1D_1$ კვადრატები. კუბის წიბოს სიგრძე 6 სმ-ია. გამოთვალეთ კუბის A წვეროზე, B_1C_1 და C_1D_1 წიბოების შუაწერტილებზე გამავალი კვეთის ფართობი.

ა) $7{,}5\sqrt{17}$ სმ ბ) $10{,}5\sqrt{17}$ სმ გ) $5.25\sqrt{17}$ სმ დ) $21\sqrt{17}$ სმ

46. A და B წერტილები მდებარეობენ სიბრტყის ერთ მხარეს და ამ სიბრტყიდან დაშორებული არიან შესაბამისად a და b მანძილებით ($b > a$). იპოვეთ იმ C წერტილის დაშორება სიბრტყიდან, რომელიც AB მონაკვეთს ყოფს შეფარდებით $AC : CB = 2 : 3$

ა) $\frac{b-a}{5}$ სმ ბ) $\frac{a+b}{5}$ სმ გ) $\frac{3a+2b}{5}$ სმ დ) $\frac{2a+3b}{5}$ სმ

47. A და B წერტილები მდებარეობენ სიბრტყის ერთ მხარეს და მისგან დაშორებული არიან შესაბამისად 2 სმ-ით და 3 სმ-ით. $\angle A_1CB_1 = 90^o$, სადაც A_1B_1 არის AB მონაკვეთის გეგმილი სიბრტყეზე, ხოლო C წერტილი მდებარეობს AB გვერდზე. იპოვეთ შეფარდება $AC : CB$.

ა) 4 : 5 ბ) 3 : 5 გ) 3 : 4 დ) 2 : 3

48. A და B წერტილები მდებარეობენ სიბრტყის ერთ მხარეს და ამ სიბრტყიდან დაშორებული არიან შესაბამისად a სმ და b სმ ტოლი მანძილებით. რა პირობებში იარსებებს AB მონაკვეთზე ისეთი C წერტილი, რომ $\angle A_1CB_1 = 90^o$, თუ A_1B_1 არის AB მონაკვეთის გეგმილი მოცემულ სიბრტყეზე.

ა) $AB = b+2a$ ბ) $AB = AB = a+b$ გ) $AB = a : b = 2 : 3$ დ) $AB = a = 2b$

49. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 8 სმ და 6 სმ, ხოლო სიმაღლე – 12 სმ. იპოვეთ მანძილი ფუძის წვეროდან ზედა ფუძის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილამდე.

ა) 13 სმ ბ) 16 სმ გ) 14 სმ დ) 17 სმ

50. მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოების სიგრძეებია 6 სმ, 8 სმ და 10 სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიაგონალის სიგრძე.

ა) $5\sqrt{3}$ სმ ბ) $10\sqrt{2}$ სმ გ) $10\sqrt{3}$ სმ დ) $5\sqrt{2}$ სმ

51. მართკუთხა პარალელეპიპედის სიმაღლე ტოლია 10 სმ-ის, ფუძის გვერდების სიგრძეებია: 6 სმ და 8 სმ. იპოვეთ მანძილები ზედა ფუძის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან გვერდითი წახნაგების დიაგონალების გადაკვეთის წერტილამდე.

ა) $\sqrt{41}$ სმ და $\sqrt{34}$ სმ ბ) 12 სმ და 9 სმ გ) $\sqrt{39}$ სმ და $\sqrt{27}$ სმ დ) $\sqrt{43}$ სმ და $\sqrt{35}$ სმ

52. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოები ტოლია: $AA_1 = 8$ სმ-ის, $AD = 4$ სმ-ის და $AB = 6$ სმ-ის. იპოვეთ მანძილი AA_1 წიბოს შუაწერტილიდან DC წიბოს შუაწერტილამდე.

ა) $\sqrt{39}$ სმ ბ) $\sqrt{41}$ სმ გ) $\sqrt{38}$ სმ დ) $\sqrt{43}$ სმ

53. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდების სიგრძეებია 10 სმ და 6 სმ, ხოლო სიმაღლეა 8 სმ. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი რომელიც მიიღება პარალელეპიპედის ერთი წვეროდან გამოსული სამი წიბოს შუაწერტილებზე გამავალი სიბრტყით.

ა) $\sqrt{725}/2$ სმ^2 ბ) $\sqrt{778}/2$ სმ^2 გ) 14,5 სმ^2 დ) $\sqrt{769}/2$ სმ^2

54. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდების სიგრძეებია 8 სმ და 6 სმ,ხოლო სიმაღლეა 12 სმ. გამოთვალეთ ქვედა ფუძის დიაგონალსა და ზედა ფუძის წვეროზე გამავალი კვეთის ფართობი, თუ იგი წარმოადგენს სამკუთხედს.

ა) 64 სმ^2 ბ) 60 სმ^2 გ) 65 სმ^2 დ) 68 სმ^2

55. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდების სიგრძეებია 3 სმ და $\sqrt{20}$ სმ, ხოლო სიმაღლეა 4 სმ. იპოვეთ კუთხეები პარალელეპიპედის დიაგონალსა და გვერდით წახნაგებს შორის.

ა) $\arcsin\frac{2}{3}$; $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$ ბ) $\arccos\frac{2}{3}$; $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$ გ) 30°; 45° დ) 60°; 45°

56. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდების სიგრძეებია 3 სმ და $\sqrt{20}$ სმ, ხოლო სიმაღლეა 4 სმ. იპოვეთ კუთხე პარალელეპიპედის ერთი წვეროდან გამომავალი წახნაგების დიაგონალებს შორის.

ა) $\arcsin\frac{4}{5}$ ბ) $\arccos\frac{3}{4}$ გ) $\arccos\frac{8}{15}$ დ) $\arcsin\frac{8}{15}$

57. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პარალელეპიპედის წიბოები შესაბამისად ტოლია: AB=6 სმ-ის, AD=8 სმ-ის და AA_1=12 სმ-ის,ხოლო $\angle BAD$ =60°. იპოვეთ მანძილი A წვეროდან B_1C_1 წიბოს შუაწერტილამდე.

ა) $\sqrt{215}$ სმ ბ) $\sqrt{210}$ სმ გ) $\sqrt{190}$ სმ დ) $\sqrt{185}$ სმ

58. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პარალელეპიპედის წიბოები ტოლია: AB=6 სმ-ის, AD= 4 სმ-ის და AA_1 =10 სმ-ის, ხოლო $\angle BAD$=60°. იპოვეთ მანძილი AA_1 წიბოს შუაწერტილიდან CD წიბოს შუაწერტილამდე.

ა) $4\sqrt{5}$ სმ ბ) $2\sqrt{15}$ სმ გ) $\sqrt{65}$ სმ დ) $\sqrt{62}$ სმ

59. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პარალელეპიპედის წიბოები ტოლია: AB= 9 სმ-ის, AD=5 სმ-ის და AA_1=12 სმ-ის, ხოლო $\angle BAD$=60°. იპოვეთ $\angle A_1DC_1$.

ა) $\arcsin\frac{23}{39}$ ბ) $\arccos\frac{25}{27}$ გ) $\arccos\frac{239}{390}$ დ) $\arcsin\frac{2}{3}$

60. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პარალელეპიპედის წიბოები ტოლია: AB=9 სმ-ის, AD=5 სმ-ის და AA_1=12 სმ-ის, ხოლო $\angle BAD$=60°. გამოთვალეთ კუთხე პარალელეპიპედის მცირე დიაგონალსა და ფუძის სიბრტყეს შორის.

ა) $\mathrm{arctg}\frac{12}{\sqrt{61}}$ ბ) $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{61}}{12}$ გ) $\arccos\frac{12}{\sqrt{161}}$ დ) $\arcsin\frac{12}{\sqrt{161}}$

61. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პარალელეპიპედის წიბოები ტოლია: AB=8 სმ-ის, AD=10 სმ-ის და AA_1=12 სმ-ის, ხოლო $\angle BAD$=60°. იპოვეთ AA_1, A_1B_1 და A_1D_1 წიბოების შუაწერტილების შეერთებით მიღებული სამკუთხედის ფართობი.

ა) $2\sqrt{67}$სმ^2 ბ) $2\sqrt{66}$ სმ^2 გ) $2\sqrt{65}$ სმ^2 დ) $2\sqrt{62}$ სმ^2

62. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პარალელეპიპედის წიბოები ტოლია: AB=6 სმ-ის, AD=8 სმ-ის და AA_1=10 სმ-ის, ხოლო $\angle BAD$=60°. იპოვეთ კუთხე A_1C_1D სამკუთხედის სიბრტყესა და ფუძის სიბრტყეს შორის.

ა) $\mathrm{arcctg}\frac{10}{\sqrt{13}}$ ბ) $\mathrm{arctg}\frac{10}{\sqrt{13}}$ გ) $\arcsin\frac{10}{\sqrt{221}}$ დ) $\mathrm{arctg}\frac{5}{\sqrt{13}}$

63. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პარალელეპიპედის წიბოები ტოლია: $AB=8$ სმ-ის, $AD=10$ სმ-ის და $AA_1=12$ სმ-ის, ხოლო $\angle BAD=60^\circ$-ის. იპოვეთ კუთხე AA_1, A_1B_1, A_1D_1 წიბოების შუაწერტილებზე გამავალ სიბრტყესა და ფუძის სიბრტყეს შორის.

ა) $arccos\frac{5\sqrt{5}}{3}$ ბ) $arccos\frac{5\sqrt{3}}{2}$ გ) $arccos\frac{\sqrt{3}}{5}$ დ) $arccos\frac{5\sqrt{22}}{44}$

64. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პარალელეპიპედის წიბოები ტოლია: $AB=4$ სმ-ის, $AD=4$ სმ-ის და $AA_1=6$ სმ-ის, ხოლო $\angle BAD=60^\circ$-ის. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ფუძის D წვეროზე და A_1B_1, B_1C_1 წიბოების შუაწერტილებზე.

ა) $5\sqrt{15}$ სმ^2 ბ) $4\sqrt{15}$ სმ^2 გ) $7\sqrt{15}$ სმ^2 დ) $6\sqrt{15}$ სმ^2

65. $ABCA_1B_1C_1$ წესიერი სამკუთხა პრიზმის წიბოები ტოლია: $AB=4$ სმ-ის და $AA_1=5$ სმ-ის. იპოვეთ მანძილი B_1 წვეროდან AC წიბომდე.

ა) $2\sqrt{6}$ სმ ბ) $2\sqrt{7}$ სმ გ) $2\sqrt{5}$ სმ დ) $4\sqrt{2}$ სმ

66. $ABCA_1B_1C_1$ წესიერი სამკუთხა პრიზმის წიბოებო ტოლია: $AB=6$ სმ-ის და $AA_1=8$ სმ-ის. იპოვეთ მანძილი AA_1 წობოს შუაწერტილიდან B_1C_1 წიბოს შუაწერტილამდე.

ა) $\sqrt{43}$ სმ ბ) $\sqrt{42}$ სმ გ) $\sqrt{46}$ სმ დ) $\sqrt{47}$ სმ

67. $ABCA_1B_1C_1$ წესიერი სამკუთხა პრიზმის წიბოები ტოლია: $AB=8$ სმ-ის და $AA_1=12$ სმ-ის. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი რომელიც გადის AC გვერდზე და B_1 წერტილზე.

ა) $32\sqrt{5}$ სმ^2 ბ) $30\sqrt{3}$ სმ^2 გ) $32\sqrt{3}$ სმ^2 დ) $32\sqrt{2}$ სმ^2

68. $ABCA_1B_1C_1$ წესიერი სამკუთხა პრიზმის წიბოები ტოლია: $AB=10$ სმ-ის და $AA_1=16$ სმ-ის. იპოვეთ კუთხე რომელსაც AA_1 და B_1C_1 წიბოების შემაერთებელი წრფე ადგენს ფუძის სიბრტყესთან.

ა) $arctg\frac{8}{5\sqrt{3}}$ ბ) $arctg\frac{5\sqrt{3}}{8}$ გ) $arcsin\frac{8}{5\sqrt{3}}$ ბ) $arccos\frac{8}{5\sqrt{3}}$

69. $ABCA_1B_1C_1$ წესიერი სამკუთხა პრიზმის AB_1C_1 კვეთის ფართობი ტოლია S სმ^2-ის, ხოლო გვერდითი ზედაპირის ფართობი შეადგენს Q სმ^2-ს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

ა) $\frac{\sqrt{3}}{12}Q\sqrt[4]{\frac{4(36S^2-Q^2)}{27}}$ სმ^3 ბ) $\frac{\sqrt{3}}{12}Q\sqrt[4]{S^2-Q^2}$ სმ^3 გ) $\sqrt{Q}-S$ სმ^3 დ) $\sqrt{S}-Q$ სმ^3

70. $ABCA_1B_1C_1$ მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია. პრიზმის წიბოები ტოლია: $AC=3$ სმ-ის, $BC=4$ სმ-ის და $AA_1=8$ სმ-ის ($\angle ACB=90^\circ$). იპოვეთ მანძილი AC წიბოს შუაწერტილიდან B_1 წვერომდე.

ა) $\sqrt{329}$ სმ ბ) $\sqrt{325}$ სმ გ) $\sqrt{325}/2$ სმ დ) $\sqrt{329}/2$ სმ

71. $ABCA_1B_1C_1$ მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია, რომლის კათეტებია: $AB=9$ სმ და $BC=12$ სმ, ხოლო AA_1 წიბო ტოლია 10 სმ-ის. გამოთვალეთ იმ კვეთის ფართობი რომელიც გადის AC ჰიპოტენუზასა და ზედა ფუძის C_1 წერტილზე.

ა) $2\sqrt{678}$ სმ^2 ბ) $3\sqrt{949}$ სმ^2 გ) $3\sqrt{937}$ სმ^2 დ) $3\sqrt{948}$ სმ^2

72. $ABCA_1B_1C_1$ მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძეა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტებია AC=9 სმ და BC=12 სმ, ხოლო წიბო AA_1=10 სმ-ს. იპოვეთ კუთხე ABC_1 კვეთის სიბრტყესა და ქვედა ფუძის სიბრტყეს შორის.

ა) $arctg\frac{9}{10}$ ბ) $arctg\frac{25}{18}$ გ) $arcsin\frac{25}{18}$ დ) $arccos\frac{25}{18}$

73. $ABCA_1B_1C_1$ მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია, რომლის ჰიპოტენუზა AB=6 სმ-ს, ხოლო $\angle BAC$=30°. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ ACB_1 სამკუთხედის ფართობია 18 სმ^2.

ა) $5{,}4\sqrt{3}$ სმ^3 ბ) $3{,}2\sqrt{2}$ სმ^3 გ) $27\sqrt{13}$ სმ^3 დ) $13{,}5\sqrt{13}$ სმ^3

74. $ABCA_1B_1C_1$ მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია, რომლის კათეტებია AC= 5 სმ და BC=12 სმ. AA_1 წიბო ტოლია 10 სმ-ის. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ფუძის AC გვერდზე და ზედა ფუძის A_1B_1 და B_1C_1 გვერდების შუაწერტილზე.

ა) $7{,}5\sqrt{34}$ სმ^2 ბ) $15\sqrt{34}/31$ სმ^2 გ) $3{,}75\sqrt{34}$ სმ^2 დ) $15\sqrt{34}$ სმ^2

75. მართი პრიზმის ფუძე მართკუთხა ტრაპეციაა, რომლის ფუძეებია: AD=9 სმ და BC=6 სმ, მართი კუთხის შემადგენელი ფერდი AB=4 სმ-ს ხოლო პრიზმის გვერდითი წიბო AA_1=10 სმ-ს იპოვეთ პრიზმის დიაგონალები.

ა) $\sqrt{155}$ სმ; $\sqrt{165}$ სმ ბ) $\sqrt{152}$ სმ; $\sqrt{197}$ სმ გ) $\sqrt{140}$ სმ; $\sqrt{177}$ სმ დ) $\sqrt{125}$ სმ; $\sqrt{124}$ სმ

76. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პრიზმის ფუძე მართკუთხა ტრაპეციაა, რომლის ფუძეებია: BC=7სმ-ს და AD=9 სმ-ს, ხოლო მართი კუთხის შემადგენელი გვერდი AB=6 სმ-ს. იპოვეთ მანძილი პრიზმის A წვეროდან ზედა ფუძის C_1D_1 გვერდის შუაწერტილამდე

ა) $\sqrt{215}$ სმ ბ) $\sqrt{214}$ სმ გ) $\sqrt{217}$ სმ დ) $\sqrt{275}$ სმ

77. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პრიზმის ფუძე მართკუთხა ტრაპეციაა, რომლის მცირე ფუძე BC=6 სმ-ს, მართი კუთხის შემადგენელი ფერდი AB= 8 სმ-ს, ხოლო პრიზმის წიბო AA_1 =12 სმ-ს. ტოლია. იპოვეთ მანძილი პრიზმის ქვედა ფუძის AD გვერდის შუაწერტილიდან ზედა ფუძის C_1D_1 გვერდის შუაწერტილამდე.

ა) 12 სმ ბ) 9 სმ გ) 10 სმ დ)13 სმ

78. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პრიზმის ფუძე მართკუთხა ტრაპეციაა, რომლის ფუძეებია BC=6 სმ და AD=8 სმ, ხოლო პრიზმის გვერდითი წიბო AA_1=12 სმ. იპოვეთ კუთხე ქვედა ფუძის AB და ზედა ფუძის C_1D_1 გვერდების შუაწერტილების შემაერთებელ წრფესა და ფუძის სიბრტყეს შორის.

ა) $arctg\frac{12}{7}$ ბ) $arctg\frac{7}{12}$ გ) $arcsin\frac{7}{12}$ ბ) $arccos\frac{7}{12}$

79. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პრიზმის ფუძე მართკუთხა ტრაპეციაა, რომლის ფუძეებია BC= 4 სმ-ს და AD=12 სმ-ს, მართი კუთხის შემადგენელი ფერდი AB=8 სმ-ს, ხოლო პრიზმის გვერდითი წიბო AA_1=12 სმ-ს. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ქვედა ფუძის AD წიბოსა და პრიზმის გვერდითი BB_1 წიბოს შუაწერტილზე.

ა) 90 სმ^2 ბ) 80 სმ^2 გ) 60 სმ^2 დ) 70 სმ^2

80. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პრიზმის ფუძე მართკუთხა ტრაპეციაა, რომლის ფუძეები ტოლია: BC=6 სმ-ს და AD=8 სმ-ს, მართი კუთხის შემადგენელი ფერდი AB=4 სმ-ს, ხოლო

პრიზმის გვერდითი წიბო $AA_1=12$ სმ-ს. იპოვეთ მანძილი ქვედა ფუძის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილსა და ზედა ფუძის B_1 წვეროს შორის.

ა) $\frac{15\sqrt{53}}{4}$ სმ ბ) $\frac{17\sqrt{53}}{2}$ სმ გ) $\frac{36\sqrt{6}}{7}$ სმ დ) $\frac{15\sqrt{53}}{7}$ სმ

81. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პრიზმის ფუძე მართკუთხა ტრაპეციაა, რომლის ფუძეებია $BC=5$ სმ-ს და $AD=8$ სმ-ს,მართი კუთხის შემადგენელი ფერდი $AB=6$ სმ-ს, ხოლო პრიზმის გვერდითი წიბო $AA_1=8$ სმ-ს. იპოვეთ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის BD დიაგონალსა და CC_1 გვერდითი წიბოს შუაწერტილზე.

ა) 25 სმ^2 ბ) 30 სმ^2 გ) 20 სმ^2 დ) 24 სმ^2

82. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პრიზმის ფუძე მართკუთხა ტრაპეციაა, რომლის ფუძეებია $BC=10$ სმ-ს და $AD=16$ სმ-ს, მართი კუთხის შემადგენელი ფერდი $AB=12$ სმ-ს, ხოლო გვერდითი წიბო $AA_1=16$ სმ-ს. იპოვეთ კუთხე ფუძის სიბრტყესა და BDM სამკუთხედის სიბრტყეს შორის, სადაც M არის პრიზმის CC_1 გვერდითი წიბოს შუაწერტილი.

ა) 40° ბ) 60° გ) 45° დ) 30°

83. მართი პრიზმის ფუძე ტოლფერდა ტრაპეციაა, რომლის ფერდი $AB=3$ სმ-ს, ხოლო ტრაპეციის დიაგონალი $AC=4$ სმ-ს. ტრაპეციაზე შემოხაზულია წრეწირი, რომლის ცენტრიც მდებარეობს მის ფუძეზე. გამოთვალეთ პრიზმის მოცულობა თუ მისი გვერდითი წიბოს სიგრძე $AA_1=25$ სმ-ს.

ა) 192 სმ^2 ბ) 188 სმ^2 გ) 190 სმ^2 დ) 200 სმ^2

84. მართი პრიზმის ფუძე ტოლფერდა ტრაპეციაა, რომლის ფერდი ტოლია $AB=5$ სმ-ის, ხოლო ფუძეებია $BC=6$ სმ-ს და $AD=12$ სმ-ს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ კვეთის ფართობი რომელიც გადის ქვედა ტრაპეციის დიდ ფუძესა და ზედა ტრაპეციის მცირე ფუძეზე ტოლია $36\sqrt{5}$ სმ^2.

ა) 264 სმ^2 ბ) 288 სმ^2 გ) 252 სმ^2 დ) 272 სმ^2

85. მართი პრიზმის ფუძე ტოლფერდა ტრაპეციაა, რომლის ფერდი $AB=5$ სმ-ს, ხოლო დიდი ფუძე $AD=13$ სმ-ს. ფუძეზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი ძევს AD-ზე. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის AD გვერდსა და ზედა ფუძის ფერდების შუაწერტილზე. თუ პრიზმის სიმაღლეა $3\sqrt{11}/13$.

ა) 6 სმ^2 ბ) $\frac{929\sqrt{101}}{167}$ სმ^2 გ) 406/125 სმ^2 დ) $\frac{432\sqrt{111}}{169}$ სმ

86. მართი პრიზმის ფუძე ტოლფერდა ტრაპეციაა, რომლის ფუძეები $BC=7$ სმ-ს და $AD=17$ სმ-ს, ფერდი $AB=13$ სმ-ს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა თუ კუთხე ფუძის სიბრტყესა და მის დიდ ფუძესა და ზედა ფუძის მცირე ფუძეზე გამავალ სიბრტყეს შორის 30°-ია.

ა) $576\sqrt{2}$ სმ^2 ბ) $576\sqrt{5}$ სმ^2 გ) $576\sqrt{3}$ სმ^2 დ) $576\sqrt{7}$ სმ^2

87. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართი პრიზმის ფუძე ტოლფერდა ტრაპეციაა (ფუძეებია BC და AD) რომლის შუაწრფე 12 სმ-ის ტოლია, ხოლო პრიზმის გვერდითი წიბოს სიგრძეა 10 სმ. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ პრიზმის ფუძის A წვეროზე და ფუძის ფერდის შუა წერტილზე გამავალი ფუძის სიბრტყის მართობული კვეთის ფართობი ტოლია 130 სმ^2-ის.

ა) 1200 სმ^3 ბ) 1500 სმ^3 გ) 1000 სმ^3 დ) 900 სმ^3

88. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის სიმაღლე 10 სმ-ია, ხოლო ფუძის გვერდი 3 სმ. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

ა) $125\sqrt{3}$ სმ^3 ბ) $135\sqrt{3}$ სმ^3 გ) $135\sqrt{2}$ სმ^3 დ) $145\sqrt{3}$ სმ^3

89. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის სიმაღლე 12 სმ-ია,ხოლო ფუძეში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი – $r=\sqrt{3}$ სმ. იპოვეთ პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი.

ა) $432+108\sqrt{3}$ სმ^2 ბ) $430+106\sqrt{3}$ სმ^2 გ) $525+100\sqrt{3}$ სმ^2 დ) $400+108\sqrt{3}$ სმ^2

90. წესიერი ექვსკუთხა $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ პრიზმის ფუძის ფართობი ტოლია $\frac{3\sqrt{3}}{2}$სმ^2-ის, ხოლო პრიზმის სიმაღლეა 8 სმ. იპოვეთ მანძილი AA_1 წიბოს შუაწერტილიდან C_1D_1 წიბოს შუაწერტილამდე.

ა) $6\sqrt{2}$ სმ ბ) $\sqrt{74}/2$ სმ გ) $\sqrt{77}$ სმ დ) $\sqrt{77}/2$ სმ

91. წესიერი ექვსკუთხა $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ პრიზმის ფუძეში ჩახაზული წრის ფართობი ტოლია 3π სმ^2-ის. კუთხე AC_1 დიაგონალსა და ფუძის სიბრტყეს შორის 30^0-ია. იპოვეთ პრიზმის უმცირესი და უდიდესი დიაგონალების სიგრძეები.

ა) 9 სმ; $6\sqrt{3}$ სმ ბ) 12 სმ; $6\sqrt{5}$ სმ გ) 10 სმ; $4\sqrt{5}$ სმ დ) 8 სმ; $5\sqrt{5}$ სმ

92. წესიერი ექვსკუთხა $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ პრიზმის სიმაღლე ტოლია 5 სმ-ის, AC_1 დიაგონალი 13 სმ-ია. გამოთვალეთ პრიზმის მოცულობა.

ა) $325\sqrt{5}$ სმ^3 ბ) $320\sqrt{3}$ სმ^3 გ) $360\sqrt{3}$ სმ^3 დ) $380\sqrt{2}$ სმ^3

93. წესიერ ექვსკუთხა $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ პრიზმაში AC_1 პრიზმის დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 45^0-იან კუთხეს, ფუძის AD დიაგონალი 12 სმ-ია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა და გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

ა) $8886/7\sqrt{7}$ სმ^3; $869\sqrt{2}/8$ სმ^2 ბ) $776/5\sqrt{7}$ სმ^3; 102 სმ^2

გ)1213 სმ^3; 112 სმ^2 დ) $7776/7\sqrt{7}$ სმ^3; $864\sqrt{3}/7$ სმ^2

94. წესიერი ექვსკუთხა $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ პრიზმის ფუძის გვერდი ტოლია $\sqrt{3}$ სმ-ის, ხოლო სიმაღლეა 4 სმ. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი რომელიც გადის ქვედა ფუძის AF და ზედა ფუძის C_1D_1 გვერდებზე.

ა) $60\sqrt{3}$ სმ^2 ბ) $45\sqrt{3}/2$ სმ^2 გ) $45\sqrt{3}$ სმ^2 დ) $45\sqrt{2}/3$ სმ^2

95. წესიერი ექვსკუთხა $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ პრიზმის ფუძის მცირე დიაგონალი ტოლია $\sqrt{3}$ სმ-ის, ხოლო პრიზმის სიმაღლეა 4 სმ. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი რომელიც გადის ფუძის AF გვერდსა და DD_1 გვერდითი წიბოს შუაწერტილზე.

ა) $1{,}5\sqrt{7}$ სმ^2 ბ) $3\sqrt{7}$ სმ^2 გ) $2\sqrt{7}$ სმ^2 დ) $5\sqrt{7}$ სმ^2

96. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი ტოლია 2 სმ-ის, ხოლო გვერდითი წიბო – $\sqrt{7}$ სმ-ის. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

ა) $7\sqrt{5}/3$ სმ^3 ბ) $6\sqrt{5}$ სმ^3 გ) $2\sqrt{5}$ სმ^3 დ) $4\sqrt{5}/3$ სმ^3

97. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის დიაგონალი ტოლია $5\sqrt{2}$ სმ-ის. პირამიდის წიბო ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია 30^0-იანი კუთხით. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

ა) $125\sqrt{6}/18$ სმ^3 ბ) $125\sqrt{6}/8$ სმ^3 გ) $125\sqrt{3}/3$ სმ^3 დ) $121\sqrt{2}/5$ სმ^3

98. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის აპოთემა ტოლია 12 სმ-ის, ხოლო ფუძის ფართობია 64 მ^2. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

ა) $248{,}5\sqrt{3}$ სმ^3 ბ) $500\sqrt{2}/3$ სმ^3 გ) $512\sqrt{2}/3$ სმ^3 დ) $98{,}4\sqrt{3}$ სმ

99. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობია 16 სმ^2,ხოლო კუთხე ფუძის სიბრტყესა და აპოთემას შორის შეადგენს 30°. იპოვეთ კუთხე პირამიდის გვერდით წიბოსა და ფუძის სიბრტყეს შორის.

ა) $arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$ ბ) $arctg\frac{\sqrt{6}}{6}$ გ) $arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$ დ) 60°

100. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა 6 სმ, ხოლო გვერდითი წიბოსი – $3\sqrt{2}$ სმ. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ფუძის გვერდზე და მისი მოპირდაპირე გვერდითი წიბოების შუაწერტილებზე.

ა) $9\sqrt{10}$ სმ^2 ბ) $10\sqrt{10}$ სმ^2 გ) $8\sqrt{10}$ სმ^2 დ) $12\sqrt{10}$ სმ^2

101. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი ტოლია 6 სმ-ის, ხოლო აპოთემა – 4 სმ-ის. გამოთვალეთ ფუძის სიბრტყის პარალელური იმ კვეთის ფართობი, რომელიც პირამიდის სიმაღლეს ყოფს შეფარდებით 1 : 3 პირამიდის წვეროს მხრიდან.

ა) 8 სმ^2 ბ) 9 სმ^2 გ) 10 სმ^2 დ) 12 სმ^2

102. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია 60°-იანი კუთხით. ფუძის გვერდი ტოლია 4 სმ–ის. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

ა) $16\sqrt{3}/3$ სმ^3 ბ) $18\sqrt{3}$ სმ^3 გ) $8\sqrt{3}$ სმ^3 დ) $4\sqrt{3}/3$ სმ^3

103. წესიერი სამკუთხა პირამიდის მოცულობა 36 სმ^3-ია, ხოლო ფუძეში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი – $2\sqrt{3}$ სმ. იპოვეთ კუთხე გვერდით წახნაგსა და ფუძის სიბრტყეს შორის.

ა) $arcsin\ \frac{1}{2}$ ბ) $arctg\frac{1}{2}$ გ) $arccos\ \frac{1}{2}$ დ) $arctg\frac{2}{3}$

104. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძეზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი ტოლია $2\sqrt{3}$ სმ-ის, ხოლო აპოთემა – 6 სმ-ის. იპოვეთ კუთხე ფუძის სიბრტყესა და იმ მონაკვეთს შორის რომელიც ფუძის წვეროს აერთებს მოპირდაპირე წიბოს შუაწერტილთან.

ა) $arctg\frac{\sqrt{77}}{14}$ ბ) $arccos\frac{\sqrt{77}}{14}$ გ) $arcctg\frac{\sqrt{77}}{14}$ გ) $arcsin\ \frac{\sqrt{77}}{14}$

105. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძეში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი ტოლია $\sqrt{3}$ სმ ის, ხოლო პირამიდის გვერდითი წიბო – 8 სმ-ის. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ფუძის AC გვერდსა და მოპირდაპირე წიბოს შუაწერტილზე.

ა) 16 სმ^2 ბ) 20 სმ^2 გ) 15 სმ^2 დ) 18 სმ^2

106. სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდები ტოლია 5 სმ-ის, 6 სმ-ის და 7 სმ-ის. პირამიდის წვეროს გეგმილი ემთხვევა ფუძეზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ მისი წიბოს სიგრძეა $45/(4\sqrt{6})$ სმ.

ა) $175\sqrt{2}/72$ სმ^3 ბ) $165\sqrt{2}/74$ სმ^3 გ) $175\sqrt{2}/54$ სმ^3 დ) $3\sqrt{2}$ სმ^3

107. სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდები ტოლია 5 სმ-ს, 6 სმ-ის და 7 სმ-ის. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე ტოლია 7 სმ-ის და პირამიდის წვეროს გეგმილი ემთხვევა ფუძეში ჩახაზული წრეწირის ცენტრს.

ა) $3\sqrt{467}$ სმ^2 ბ) $3\sqrt{465}$ სმ^2 გ) $3\sqrt{466}$ სმ^2 დ) $3\sqrt{445}$ სმ^2

108. სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოები ფუძის სიბრტყესთან ადგენენ 30°-იან კუთხეებს. პირამიდის წვეროს გეგმილი ძევს ფუძის ერთ-ერთ გვერდზე. პირამიდის

სიმაღლე ტოლია $5\sqrt{3}/3$ სმ-ის, ხოლო ფუძის ფართობია 24 სმ^2.იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

ა) $\frac{3\sqrt{73}+4\sqrt{52}+25}{\sqrt{3}}$ სმ^2 ბ) $\frac{3\sqrt{73}+4\sqrt{52}}{\sqrt{3}}$ სმ^2 გ) 125 სმ^2 დ) 96 სმ^2

109. სამკუთხა პირამიდის წახნაგები ფუძის სიბრტყესთან ადგენენ 60^o-იან კუთხეებს. პირამიდის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია, რომლის კათეტები ტოლია 6 სმ-ის და 8 სმ-ის. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ პირამიდის წვერო გეგმილდება სამკუთხედის შიგნით.

ა) $18\sqrt{3}$ სმ^3 ბ) $16\sqrt{3}$ სმ^3 გ) $14\sqrt{3}$ სმ^3 დ) $20\sqrt{3}$ სმ^3

110. სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წახნაგები ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია ტოლი კუთხეებით. ფუძის გვერდებია 5 სმ, 6 სმ და 7 სმ. პირამიდის მოცულობა შეადგენს $12\sqrt{6}$ სმ^3. იპოვეთ კუთხე პირამიდის გვერდით წახნაგსა და ფუძის სიბრტყეს შორის, თუ პირამიდის წვერო გეგმილდება სამკუთხედის შიგნით.

ა) $arcsin\ \frac{3\sqrt{6}}{2}$ ბ) $arccos\frac{3\sqrt{6}}{2}$ გ) $arctg\ \frac{3\sqrt{6}}{2}$ დ) 30^o

111. სამკუთხა პირამიდის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია, რომლის კათეტები ტოლია 5 სმ-ის და 12 სმ-ის. პირამიდის წვეროს გეგმილი ძევს ფუძის მართი კუთხის წვეროში. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა თუ პირამიდის ერთ-ერთი გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 30^o-იან კუთხეს.

ა) $400\sqrt{3}/13$ სმ^3 ბ) $200\sqrt{3}$ სმ^3 გ) $200\sqrt{3}/13$ სმ^3 დ) $150\sqrt{3}/13$ სმ^3

112. სამკუთხა პირამიდის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია, რომლის კათეტებია 3 სმ და 4 სმ. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ ერთ-ერთი წახნაგი ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია 45^o-იანი კუთხით და პირამიდის წვეროს გეგმილი ძევს ფუძის მართი კუთხის წვეროში.

ა) $10\sqrt{2}$ სმ^2 ბ) $(40+30\sqrt{2})/7$ სმ^2 გ) $(42+30\sqrt{3})/5$ სმ^2 დ) $(42+30\sqrt{2})/5$ სმ^2

113. სამკუთხა პირამიდის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედია, რომლის ფერდებია $AB=BC=5$ სმ, ხოლო ფუძე – $AC=4$ სმ-ს. პირამიდის წვეროს გეგმილი ემთხვევა ფუძეში ჩახაზული წრეწირის ცენტრს. პირამიდის წიბო AS ტოლია $\sqrt{742}/7$ სმ-ის. იპოვეთ კუთხე ფუძის სიბრტყესა და იმ სიბრტყეს შორის, რომელიც გაივლის ფუძის AC გვერდსა და პირამიდის სიმაღლის შუაწერტილზე.

ა) $arctg\ \frac{\sqrt{22}}{4}$ ბ) $arcsin\ \frac{5\sqrt{21}}{6}$ გ) $arccos\frac{5\sqrt{21}}{6}$ დ) $arctg\frac{5\sqrt{3}}{2}$

114. სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდებია $AB=10$ სმ, $BC=8$ სმ და $AC=6$ სმ. პირამიდის გვერდითი წახნაგები ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია 60^o-იანი კუთხეებით. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ფუძის AC გვერდზე და მართობულია პირამიდის გვერდითი წიბოსი. ცნობილია, რომ პირამიდის წვერო გეგმილდება ფუძის შიგნით.

ა) $\frac{3\sqrt{2599}}{13}$ სმ^2 ბ) $\frac{3\sqrt{2499}}{17}$ სმ^2 გ) $\frac{3\sqrt{499}}{13}$ სმ^2 დ) $\frac{8\sqrt{2599}}{13}$ სმ^2

115. სამკუთხა პირამიდის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედია, რომლის ფერდები $AB=BC=8$ სმ-ს, ხოლო ფუძე $AC=10$ სმ-ს. პირამიდის მოცულობა ტოლია $25\sqrt{39}$ სმ^3-ის. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ პირამიდის აპოთემები ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია ერთი და იგივე კუთხეებით, თუ ცნობილია, რომ პირამიდის წვერო გეგმილდება ფუძის შიგნით.

ა) $10\sqrt{390}$ სმ^2 ბ) $5\sqrt{390}$ სმ^2 გ) $20\sqrt{390}$ სმ^2 დ) $15\sqrt{390}$ სმ^2

116. წესიერი წაკვეთილი სამკუთხა პირამიდის ქვედა ფუძის გვერდებია $AB=BC=CA=4$ სმ, ხოლო ზედა ფუძის გვერდები – $A_1B_1=B_1C_1=C_1A_1=3$ სმ. პირამიდის სიმაღლე 6 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი B_1 წვეროდან AC გვერდამდე.

ა) $\sqrt{398}/3$ სმ   ბ) $\sqrt{399}/2$ სმ   გ) $\sqrt{399}/3$ სმ   დ) $\sqrt{399}$ სმ

117. წესიერი წაკვეთილი სამკუთხა $ABCA_1B_1C_1$ პირამიდის გვერდითი წიბო ტოლია $4\sqrt{7}$ სმ-ის. პირამიდის ფუძეებში ჩახაზული წრეწირის რადიუსებია $3\sqrt{3}$ სმ და $\sqrt{3}$ სმ. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის AC გვერდზე და ზედა ფუძის B_1 წერტილზე.

ა) $9\sqrt{138}$ სმ^2 ბ) $9\sqrt{139}$ სმ^2 გ) $7\sqrt{139}$ სმ^2 დ) $9\sqrt{137}$ სმ^2

118. წესიერი წაკვეთილი ოთხკუთხა $ABCDA_1B_1C_1D_1$ პირამიდის ფუძის გვერდები ტოლია 8 სმ-ის და 6 სმ-ის, ხოლო პირამიდის აპოთემა – $\sqrt{145}$ სმ-ის. იპოვეთ მანძილი ქვედა ფუძის A წვეროდან ზედა ფუძის B_1C_1 გვერდის შუაწერტილამდე.

ა) $\sqrt{209}$ სმ   ბ) $\sqrt{207}$ სმ   გ) $\sqrt{219}$ სმ   დ) $\sqrt{217}$ სმ

119. წესიერი წაკვეთილი ოთხკუთხა $ABCDA_1C_1D_1C_1$ პირამიდის ფუძის გვერდები ტოლია 12 სმ-ის და 8 სმ-ის, ხოლო აპოთემა – 10 სმ-ის. იპოვეთ კუთხე ფუძის სიბრტყესა და იმ სიბრტყეს შორის,რომელიც გადის ქვედა ფუძის A წვეროსა და ზედა ფუძის B_1C_1 და C_1D_1 გვერდების შუაწერტილებზე.

ა) $arctg\frac{\sqrt{3}}{4}$ ბ) $arcsin\ \frac{\sqrt{3}}{4}$ გ) $arctg\frac{4\sqrt{3}}{9}$ დ) $arccos\ \frac{\sqrt{3}}{3}$

120. ცილინდრის სიმაღლეა 5 სმ. ფუძის წრეწირის რადიუსია 3 სმ. იპოვეთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

ა) 20π სმ^2 ბ) 30π სმ^2 გ) 15π სმ^2 დ) 25π სმ^2

121. ცილინდრის სიმაღლეა 6 სმ, ხოლო გვერდითი ზედაპირის ფართობი – 14π სმ^2. იპოვეთ ფუძის წრეწირის რადიუსი.

ა) 1,5 სმ   ბ) 3 სმ   გ) 2 სმ   დ) 1 სმ

122. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობია 12π სმ^2,ხოლო ფუძის წრეწირის რადიუსია 3 სმ. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

ა) 18π სმ^3 ბ) 9π სმ^3 გ) 16π სმ^3 დ) 24π სმ^3

123. ცილინდრის მოცულობა ტოლია 48π სმ^3-ის, ხოლო გვერდითი ზედაპირის ფართობია 24π სმ^2. იპოვეთ ცილინდრის სიმაღლე და ფუძის წრეწირის რადიუსი.

ა) 5 სმ; 4სმ   ბ) 2 სმ; 6 სმ   გ) 4 სმ; 3 სმ   დ) 3 სმ; 6 სმ

124. ცილინდრის ფუძის ქორდაზე გაელებულია სიმაღლის პარალელური სიბრტყე. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ ფუძის წრეწირის რადიუსია 5 სმ, ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობია 10π სმ^2 და მკვეთი სიბრტყე ცილინდრის ღერძიდან დაშორებულია 3 სმ-ით.

ა) 10 სმ^2 ბ) 9 სმ^2 გ) 6 სმ^2 დ) 8 სმ^2

125. ცილინდრის ფუძის ქორდა, რომლის სიგრძეა 3 სმ, წრეწირს ყოფს რკალებად, რომელთა სიგრძეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 1 : 5. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა, თუ მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობია 12π სმ^2.

ა) 18π სმ^3 ბ) 24π სმ^3 გ) 28π სმ^3 დ) 16π სმ^3

126. ცილინდრის სიმაღლეა 4 სმ. ფუძის ქორდაზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც სიმაღლეს ყოფს შეფარდებით 1 : 3 ქვედა ფუძის მხრიდან. იპოვეთ კუთხე ამ სიბრტყესა და ფუძის სიბრტყეს შორის, თუ ფუძის ქორდის შესაბამისი რკალის სიგრძეა $3\pi/2$ სმ და ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობია 24π სმ^2

ა) 45° ბ) 30° გ) $arctg\ \frac{\sqrt{2}}{3}$ გ) $arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$

127. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობია 8π სმ^2. იპოვეთ ცილინდრის ღერძული კვეთის ფართობი.

ა) 8 სმ^2 ბ) 6 სმ^2 გ) 12 სმ^2 დ) 10 სმ^2

128. ცილინდრის მოცულობა ტოლია 16π სმ^3 იპოვეთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი ღერძული კვეთა წარმოადგენს კვადრატს.

ა) 9π სმ^2 ბ) 12π სმ^2 გ) 16π სმ^2 დ) 18π სმ^2

129. ცილინდრის ფუძის დიამეტრზე გავლებულია მკვეთი სიბრტყე, რომელიც ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია 60°-ით. გამოთვალეთ კვეთის ფართობი, თუ ცილინდრის სიმაღლე 8 სმ-ია, ხოლო ზედაპირის ფართობი ტოლია 66π სმ^2-ის.

ა) 8π სმ^2 ბ) 9π სმ^2 გ) 10π სმ^2 დ) 12π სმ^2

130. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობის შეფარდება ფუძის ფართობთან 3-ის ტოლია. იპოვეთ კუთხე, რომელსაც ზედა ფუძის ცენტრის ქვედა ფუძის წრეწირის წერტილთან შემაერთებელი მონაკვეთი ადგენს ფუძის სიბრტყესთან.

ა) $arcsin\ \frac{2}{3}$ ბ) $arctg\frac{3}{2}$ გ) $arctg\frac{2}{3}$ დ) $arcsin\ \frac{3}{4}$

131. კონუსის ღერძული კვეთა სამკუთხედია, რომლის გვერდები ტოლია 10 სმ-ის,10 სმ-ის და 16 სმ-ის. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

ა) 64π სმ^2; 126π სმ^3 ბ) 48π სმ^2; 140π სმ^3 გ) 80π სმ^2; 128π სმ^3 დ) 60π სმ^2; 120π სმ^3

132. კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობია 60π სმ^2, ხოლო სიმაღლე – 8 სმ. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

ა) 86π სმ^3 ბ) 92π სმ^3 გ) 98π სმ^3 დ) 96π სმ^3

133. კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობია $13\sqrt{69}\ \pi$ სმ^2, ხოლო სიმაღლე – 10 სმ. იპოვეთ კუთხე მსახველსა და ფუძის სიბრტყეს შორის.

ა) $arcsin\ \frac{10}{13}$ ბ) $arccos\ \frac{10}{13}$ გ) $arctg\frac{10}{13}$ დ) $arctg\ \frac{13}{10}$

134. კონუსის მსახველის სიგრძე 6 სმ-ია,ხოლო კუთხე მსახველსა და ფუძის სიბრტყეს შორის 60°-ია. იპოვეთ კონუსის მოცულიბა.

ა) $9\sqrt{3}\pi$ სმ^3 ბ) $8\sqrt{3}\pi$ სმ^3 გ) $6\sqrt{3}\pi$ სმ^3 დ) $12\sqrt{3}\pi$ სმ^3

135. კონუსის მსახველის სიგრძეა 12 სმ. ფუძეში გავლებულია ქორდა რომლის სიგრძეა 4 სმ და მის მიერ მოჭიმული რკალის სიგრძე შეადგენს წრეწირის სიგრძის ერთ მესამედს. იპოვეთ კუთხე რომელსაც ამ ქორდასა და კონუსის წვეროზე გამავალი სიბრტყე ადგენს ფუძის სიბრტყესთან.

ა) $arcctg\sqrt{26}$ ბ) $arctg\sqrt{26}$ გ) $arcsin\sqrt{26}$ დ) $arccos\sqrt{26}$

136. კონუსის ღერძული კვეთა მართკუთხა სამკუთხედია. გვერდითი ზედაპირის ფართობი 12π სმ^2-ია. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

ა) $9\sqrt[4]{288}\,\pi$ სმ^3 სმ^3 ბ) $\sqrt[4]{288}\,\pi$ სმ^3 სმ^3 გ) $2\sqrt[4]{588}\,\pi$ სმ^3 სმ^3 დ) $2\sqrt[4]{288}\,\pi$ სმ^3

137. კონუსის ღერძულ კვეთაში მიღებული სამკუთხედის ერთ-ერთი კუთხე 120°-ია. კონუსის მოცულობა ტოლია 64π სმ^3-ის. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

ა) $32\sqrt{3}\pi$ სმ^2 ბ) $32\sqrt{2}\pi$ სმ^2 გ) $16\sqrt{3}\pi$ სმ^2 დ) $24\sqrt{3}\pi$ სმ^2

138. კონუსის გვერდითი ზედაპირის შლილი წრიული სექტორია 120°-იანი ცენტრალური კუთხით. იპოვეთ კუთხე კონუსის მსახველსა და ფუძის სიბრტყეს შორის.

ა) $arcco\frac{1}{3}$ ბ) $arctg\frac{1}{3}$ გ) $arcsin\frac{1}{3}$ დ) $arccos\frac{2}{3}$

139. კონუსის მსახველსა და ფუძის სიბრტყეს შორის კუთხე ტოლია $arccos\frac{1}{6}$-ის. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის შლილის შესაბამისი წრიული სექტორის ცენტრალური კუთხე.

ა) $arccos\frac{1}{3}$ ბ) 60° გ) 30° დ) 45°

140. კონუსის ორ მსახველს შორის კუთხე 30°-ია. ამ მსახველებზე გამავალი კვეთის ფართობია 25 სმ^2. იპოვეთ კონუსის მოცულობა, თუ მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობია 60π სმ^2.

ა) 98π სმ^3 ბ) 92π სმ^3 გ) 96π სმ^3 დ) 84π სმ^3

141. კონუსის ორ მსახველს შორის კუთხე 60°-ია. ამ მსახველებზე გამავალი კვეთის ფართობია $\frac{36\sqrt{3}}{4}$ სმ^2 და ის ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 45°. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

ა) $\frac{49\sqrt{6}\pi}{4}$ სმ^3 ბ) $\frac{4\sqrt{6}\pi}{7}$ სმ^3 გ) $\frac{45\sqrt{6}\pi}{4}$ სმ^3 დ) $\frac{45\sqrt{6}\pi}{13}$ სმ^3

142. კონუსის ორ მსახველს შორის კუთხე 30°-ია. ამ მსახველებზე გამავალი კვეთის ფართობია 36 სმ^2. კუთხე კონუსის მსახველსა და სიმაღლეს შორის 30°-ია. იპოვეთ მანძილი ფუძის ცენტრიდან მკვეთ სიბრტყემდე.

ა) $0{,}75\sqrt{39}$ სმ ბ) $1{,}5\sqrt{39}$ სმ გ) $6\sqrt{13}$ სმ დ) $0{,}75\sqrt{13}$ სმ

143. წაკვეთილი კონუსის ზედა და ქვედა ფუძეების წრის რადიუსებია შესაბამისად 6 სმ და 8 სმ, ხოლო კონუსის სიმაღლეა $\sqrt{60}$ სმ. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

ა) 98π სმ^2; 96π სმ^3 ბ) 112π სმ^2; $296\sqrt{15}\pi/3$ სმ^3 გ) 92π სმ^2; $296\sqrt{5}\pi$ სმ^3

დ) 98π სმ^2; 102π სმ^3

144. წაკვეთილი კონუსის ფუძეების ფართობთა ჯამი ტოლია 20π სმ^2-ის, ღერძული კვეთის ფართობია $16\sqrt{3}$ სმ^2, ხოლო მსახველი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 60°-იან კუთხეს. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის მოცულობა.

ა) $52\sqrt{2}\pi$ სმ^3 ბ) $52\sqrt{3}\pi$ სმ^3 გ) $52\sqrt{6}\pi$ სმ^3 დ) $52\sqrt{6}\pi/3$ სმ^3

145. წაკვეთილი კონუსის ღერძული კვეთა ტრაპეციაა, რომლის ფუძესთან მდებარე კუთხე 30°-ია. ზედა ფუძის წრეწირის რადიუსი ტოლია 1 სმ-ის, ხოლო წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობია $20\sqrt{3}\,\pi$ სმ^2. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის მოცულობა.

ა) $\frac{31\sqrt{31}-1}{3\sqrt{3}}\pi$ სმ^3 ბ) $(31\sqrt{31}-1)\pi$ სმ^3 გ) $(\sqrt{31}-1)\pi$ სმ^3 დ) $5\sqrt{27\pi}$ სმ^3

146. წაკვეთილი კონუსის ღერძული კვეთა ტრაპეციაა, რომლის შუაწრფე ტოლია 10 სმ-ის. ამ ტრაპეციაში შესაძლებელია წრეწირის ჩახაზვა. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

ა) 120π სმ^2 ბ) 100π სმ^2 გ) 90π სმ^2 დ) 80π სმ^2

147. წაკვეთილი კონუსის ქვედა და ზედა ფუძეების რადიუსებია 8 სმ და 6 სმ, ხოლო მსახველი ტოლია 10 სმ-ის. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის გაშლით მიღებული წრიული სექტორის ნაწილის შესაბამისი სექტორის ცენტრალური კუთხე.

ა) 92° ბ) 60° გ) 70° დ) 72°

148. წაკვეთილ კონუსში სიმაღლის შუაწერტილზე გავლებული ფუძის პარალელური სიბრტყე კონუსის მოცულობას ყოფს შეფარდებით 19 : 37 ფუძის მხრიდან. გამოთვალეთ წაკვეთილი კონუსის დიდი ფუძის წრეწირის რადიუსის შეფარდება დიდი და პატარა ფუძის წრეწირის რადიუსთან.

ა) 3 ბ) 2 გ) 4 დ) 5

149. ბირთვის მკვეთი სიბრტყე ცენტრიდან დაშორებულია 3 სმ-ით, ხოლო კვეთის ფართობია 16π სმ^2. იპოვეთ ბირთვის მოცულობა.

ა) $250\pi/3$ სმ^3 ბ) $255\pi/3$ სმ^3 გ) 80π სმ^3 დ) $200\pi/3$

150. სფეროს ზედაპირის ფართობია 16π სმ^2. იპოვეთ ბირთვის მოცულობა.

ა) 18π სმ^3 ბ) $16\pi/3$ სმ^3 გ) 16π სმ^3 დ) 6π სმ^3

151. ბირთვის პარალელური კვეთის ფართობებია 16π სმ^2 და 9π სმ^2. კვეთებს შორის მანძილი ტოლია 5 სმ-ის. იპოვეთ ბირთვის მოცულობა.

ა) 72π სმ^3 ბ) 65π სმ^3 გ) $3\sqrt{481}\pi$ სმ^3 დ) $\frac{962\sqrt{481}}{375}\pi$ სმ^3

152. მკვეთი სიბრტყე სფეროს ზედაპირის ფართობს ყოფს შეფარდებით 1 5. კვეთის ფართობი ტოლია 100π სმ^2. იპოვეთ სფეროს ზედაპირის ფართობი.

ა) 780π სმ^2 ბ) 720π სმ^2 გ) 760π სმ^2 დ) 620π სმ^2

153. მკვეთი სიბრტყე სფეროს დიამეტრის მართობია და მას ყოფს შეფარდებით 1 3. კვეთის ფართობი ტოლია 25π სმ^2-ის. გამოთვალეთ სფეროს ზედაპირის ფართობი.

ა) 180π სმ^2 ბ) $200\pi/3$ სმ^2 გ) $400\pi/3$ სმ^2 დ) 400π სმ^2

154. სიბრტყე სფეროს ზედაპირის ფართობს ყოფს შეფარდებით 1 3. სფეროს ზედაპირის ფართობი ტოლია 36π სმ^2-ის. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

ა) $27\pi/4$ სმ^2 ბ) $13,5\pi$ სმ^2 გ) $27\pi/5$ სმ^2 დ) $27\pi/8$ სმ^2

155. მართკუთხა სამკუთხედის გვერდები ტოლია 5 სმ-ის, 12 სმ-ის და 13 სმ-ის. ბირთვი, რომლის რადიუსია 10 სმ, ეხება სამკუთხედის სამივე გვერდს. იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე.

ა) $5\sqrt{6}$ სმ ბ) $4\sqrt{6}$ სმ გ) $4\sqrt{3}$ სმ დ) $3\sqrt{6}$ სმ

156. ბირთვი ეხება სამკუთხედის სამ გვერდს, რომელთა სიგრძეები ტოლია 7 სმ-ის, 11 სმ-ის და 13 სმ-ის. იპოვეთ ბირთვის მოცულობა თუ მისი ცენტრი სამკუთხედის სიბრტყიდან დაშორებულია $\sqrt{14}/2$ სმ-ით.

ა) $9\sqrt{6}\pi$ სმ^3 ბ) $6\sqrt{6}\pi$ სმ^3 გ) $8\sqrt{6}\pi$ სმ^3 დ) $4\sqrt{6}\pi$ სმ^3

157. ბირთვის ზედაპირზე მდებარე სამ წერტილს შორის მანძილები ტოლია 5 სმ-ის, 6 სმ-ის და 9 სმ-ის. იპოვეთ ბირთვის მოცულობა, თუ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან ამ წერტილებზე გამავალ სიბრტყემდე ტოლია $\sqrt{462}/8$ სმ-ის.

ა) $25\sqrt{30}\pi$ სმ^3 ბ) $45\sqrt{30}\pi$ სმ^3 გ) $30\sqrt{30}\pi$ სმ^3 დ) $40\sqrt{30}\pi$ სმ^3

158. ბირთვის ზედაპირზე აღებულ სამ წერტილს შორის მანძილები ერთნაირია და ტოლია 6 სმ-ის. ბირთვის ზედაპირის ფართობია 100π სმ^2. იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან ამ წერტილებზე გამავალ სიბრტყემდე.

ა) $\sqrt{13}$ სმ ბ) $\sqrt{15}$ სმ გ) $\sqrt{17}$ სმ დ) $\sqrt{10}$ სმ

159. კონუსში, რომლის ფუძის რადიუსია 5 სმ და მოცულობა ტოლია 100π სმ^3-ის ჩახაზულია ბირთვი. იპოვეთ ბირთვის მოცულობა.

ა) $2777\pi/81$ სმ^3 ბ) $4000\pi/81$ სმ^3 გ) $3005\pi/81$ სმ^3 დ) $2721\pi/81$ სმ^3

160. კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ტოლია 20π სმ^2-ის. იპოვეთ ამ კონუსზე შემოხაზული სფეროს ზედაპირის ფართობი, თუ კონუსის სიმაღლე ტოლია 3 სმ-ის.

ა) 75π სმ^2 ბ) 70π სმ^2 გ) 625π სმ^2 დ) $625\pi/9$ სმ^2

161. მართკუთხა სამკუთხედი რომლის კათეტების სიგრძეებია 3 სმ და 4 სმ ბრუნავს ჰიპოტენუზის გარშემო. იპოვეთ მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

ა) $35\pi/12$ სმ^2; $125\pi/432$ სმ^3 ბ) 18π სმ^2; $5\pi/7$ სმ^3 გ) 2π სმ^2; $\pi/3$ სმ^3

დ) 4π სმ^2; $2\pi/3$ სმ^3

162. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის სიგრძეა 12 სმ. ჰიპოტენუზის გარშემო სამკუთხედის ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა ტოლია 64π სმ^3-ის. იპოვეთ მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

ა) $8\pi\left(2+\sqrt{26}\right)$სმ^2 ბ) $8\pi\left(2+\sqrt{31}\right)$სმ^2 გ) $4\pi\left(2+\sqrt{31}\right)$სმ^2 დ) $6\pi\left(2+\sqrt{31}\right)$სმ^2

163. სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია 5 სმ, 6 სმ და 7 სმ. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება ამ სამკუთხედის ბრუნვით უდიდესი გვერდის გარშემო.

ა) $6\pi/7$ სმ^3 ბ) 10π სმ^3 გ) $72/7$ სმ^3 დ) $72\pi/7$ სმ^3

164. სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია 5 სმ, 6 სმ და 10 სმ. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება სამკუთხედის ბრუნვით უმცირესი გვერდის გარშემო.

ა) $17{,}6\pi$ სმ^3 ბ) $17{,}4\pi$ სმ^3 გ) $17{,}8\pi$ სმ^3 დ) $17{,}5\pi$ სმ^3

165. ABC სამკუთხედის გვერდებია: AC=8 სმ-ს, BC=6 სმ-ს და AB=10 სმ-ს. ეს სამკუთხედი ბრუნავს წრფის გარშემო რომელიც გადის C წერტილში და პარალელურია AB გვერდის. იპოვეთ მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

ა) $173{,}2\pi$ სმ^2 ბ) $163{,}2\pi$ სმ^2 გ) $163{,}6\pi$ სმ^2 დ) $162{,}2\pi$ სმ^2

166. ABC სამკუთხედის გვერდებია: AC=4 სმ-ს, BC=3 სმ-ს და AB=5 სმ-ს. სამკუთხედი ბრუნავს წრფის გარშემო რომელიც გადის C წერტილზე და პარალელურია AB გვერდის. იპოვეთ მიღებული სხეულის მოცულობა.

ა) $19{,}4\pi$ სმ^3 ბ) $19{,}2\pi$ სმ^3 გ) $18{,}2\pi$ სმ^3 დ) $19{,}6\pi$ სმ^3

167. ABC სამკუთხედის გვერდებია: AC=5 სმ-ს, BC= 12 სმ-ს და AB=13 სმ-ს. სამკუთხედი ბრუნავს წრფის გარშემო რომელიც გადის C წერტილზე და AC გვერდთან ადგენს 30°-იან კუთხეს. იპოვეთ მიღებული სხეულის მოცულობა.

ა) $\frac{\pi}{6}\left(1911\sqrt{3}-531\right)$სმ^3 ბ) $\frac{\pi}{6}\left(1811\sqrt{3}-521\right)$სმ^3

გ) $\frac{\pi}{6}\left(1800\sqrt{3}-520\right)$სმ^3 დ) $\frac{\pi}{6}\left(1911\sqrt{3}-500\right)$სმ^3

168. ABC სამკუთხედის გვერდებია: AC=4 სმ-ს, BC=3 სმ-ს და AB= 5 სმ-ს. სამკუთხედი ბრუნავს წრფის გარშემო , რომელიც გადის C წერტილზე და AC გვერდთან ადგენს 30°-იან კუთხეს. იპოვეთ მიღებული სხეულის მოცულობა.

ა) $6\pi\left(3+2\sqrt{3}\right)$სმ^3 ბ) $6\pi\left(2+3\sqrt{2}\right)$სმ^3 გ) $6\pi\left(3+2\sqrt{2}\right)$სმ^3 დ) $6\pi\left(3+4\sqrt{3}\right)$სმ^3

169. *ABCD* მართკუთხა ტრაპეციის ფუძეებია *BC*=7 სმ და *AD*=10 სმ, ხოლო მართი კუთხის შემადგენელი ფერდია *AB*=4 სმ. ტრაპეცია ბრუნავს *BC* მცირე ფუძის გარშემო. იპოვეთ მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

ა) 124π სმ^2 ბ) 116π სმ^2 გ) 118π სმ^2 დ) 120π სმ^2

170. მოცემულია *ABCD* ტრაპეცია, რომლის მცირე *BC* ფუძის სიგრძე 2 სმ-ია, *AB* მცირე ფერდი რომლის სიგრძე 6 სმ-ია დიდ ფუძესთან ადგენს 60^0-იან კუთხეს ხოლო მეორე *CD* ფერდი ასევე დიდ ფუძესთან ადგენს 30^0-იან კუთხეს, ტრაპეცია ბრუნავს მცირე ფუძის გარშემო. იპოვეთ მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

ა) $6\sqrt{3}\left(17+\sqrt{3}\right)\pi$ სმ^2 ბ) $6\sqrt{3}\left(17+2\sqrt{3}\right)$სმ^2 გ) $6\sqrt{3}\left(17+3\sqrt{3}\right)\pi$ სმ^2 დ) $6\sqrt{3}\left(17+\sqrt{5}\right)$სმ^2

171. *ABCD* ტრაპეცია ბრუნავს მცირე *BC* ფუძის ირგვლივ, რომლის სიგრძეა 3 სმ. ტრაპეციის *AB* ფერდის სიგრძეა 8 სმ და ის ქვედა ფუძესთან ადგენს 60^0-იან კუთხეს, ხოლო მეორე *CD* ფერდი ფუძესთან ადგენს 30^0-იან კუთხეს. იპოვეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

ა) 665π სმ^3 ბ) 666π სმ^3 გ) 676π სმ^3 დ) 656π სმ^3

172. რომბი, რომლის გვერდია 4 სმ და მახვილი კუთხე - 30^0, ბრუნავს ერთ-ერთი გვერდის გარშემო. იპოვეთ მიღებული სხეულის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

ა) 32 სმ^2 ბ) 30π სმ^2 გ) 28π სმ^2 დ) 24π სმ^2

173. პარალელოგრამი, რომლის დიდი გვერდის სიგრძეა 8 სმ, პატარა გვერდის სიგრძე – 6 სმ და მახვილი კუთხე – 60^0, ბრუნავს დიდი გვერდის გარშემო. იპოვეთ მიღებული სხეულის მოცულობა.

ა) 216π სმ^3 ბ) 218π სმ^3 გ) 212π სმ^3 დ) 214π სმ^3

174. ტოლგვერდა სამკუთხედი,რომლის გვერდის სიგრძეა 4 სმ ბრუნავს წრფის გარშემო, რომელიც პარალელურია სამკუთხედის ერთი გვერდის და ამ გვერდის მოპირდაპირე წვეროდან დაშორებულია 2 სმ-ით. იპოვეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა, თუ წრფე და სამკუთხედი ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ.

ა) $12\pi\left(2+\sqrt{3}\right)$სმ^3 ბ) $24\pi\left(2+\sqrt{3}\right)$სმ^3 გ) $24\pi\left(1+\sqrt{3}\right)$სმ^3 დ) $24\pi\left(3+\sqrt{3}\right)$სმ^3

175. წესიერი ექვსკუთხედი რომლის გვერდის სიგრძეა 2 სმ ბრუნავს ერთ-ერთი გვერდის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

ა) $12\sqrt{3}\pi$ სმ^2 ბ) $24\sqrt{2}\pi$ სმ^2 გ) $24\sqrt{3}\pi$ სმ^2 დ) $24\sqrt{3}$ სმ^2

176. წესიერი ექვსკუთხედი რომლის გვერდის სიგრძეა 2 სმ, ბრუნავს წრფის გარშემო, რომელიც გადის ექვსკუთხედის წვეროზე და ამ წვეროს შემქმნელ გვერდებთან ადგენს 30^0-იან კუთხეებს. გამოთვალეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

ა) 46π სმ^2 ბ) 49π სმ^2 გ) 44π სმ^2 დ) 48π სმ^2

177. წესიერი ექვსკუთხედი, რომლის გვერდის სიგრძეა 3 სმ, ბრუნავს თავისი გვერდის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

ა) 242π სმ^3 ბ) $243\pi/4$ სმ^3 გ) 243π სმ^3 დ) $121{,}5\pi$ სმ^3

178. წესიერი სამკუთხედი, რომლის გვერდებიც წრფიდან დაშორებულია 2 სმ-ით, 5 სმ-ით და 8 სმ-ით ბრუნავს ამ წრფის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა, თუ წრფე და სამკუთხედი ერთ ნახევარ სიბრტყეში მდებარეობენ.

ა) $90\sqrt{3}\pi$ სმ^3 ბ) $90\sqrt{2}\pi$ სმ^3 გ) $80\sqrt{3}\pi$ სმ^3 დ) $60\sqrt{3}\pi$ სმ^3

ბ – ჯგუფი

179. სამკუთხა პირამიდის ოთხივე წახნაგის ფართობები ერთმანეთის ტოლია. იქნება თუ არა ამ პირამიდის ყველა წიბო ტოლი?

180. პირამიდის გვერდითი წიბოები ურთიერთ მართობულია და ტოლია 3 სმ-ის, 5 სმ-ის და 4 სმ-ის. იპოვეთ პირამიდაში ჩახაზული სფეროს რადიუსი.

181. პირამიდის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედია რომლის ფერდები ტოლია 5 სმ-ის, ხოლო ფუძე ტოლია 6 სმ-ის. იპოვეთ ამ ფუძეზე გამავალი მინიმალური კვეთის ფართობი, თუ პირამიდის სამივე აპოთემა ერთმანეთის ტოლია და თითოეული მათგანი შეადგენს 4 სმ-ს.

182. კონუსის სრული ზედაპირის ფართობია π სმ^2. იპოვეთ კონუსის ფუძის რადიუსი, თუ მისი მოცულობა მაქსიმალურია.

183. კუბის წიბოს სიგრძე 1 სმ-ს ტოლია. კუბის ფუძის ერთი წვეროდან გამოსულ სამ წიბოზე ამ წვეროდან გადაზომილია სამი მონაკვეთი რომელთა სიგრძეებია: 1/2 სმ, 1/3 სმ და 1/4 სმ. ამ მონაკვეთების ბოლოებზე გავლებულია სიბრტყე. იპოვეთ მანძილი კუბის აღნიშნული წვეროს მოპირდაპირე და იმავე ფუძეში მდებარე წვეროდან ამ სიბრტყემდე.

184. სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდების სიგრძეებია 6 სმ, 8 სმ და 10 სმ. იპოვეთ პირამიდაში გარე ჩახაზული სფეროს რადიუსი, რომელიც ეხება ფუძის სიბრტყეს და გვერდითი წახნაგების გაგრძელებას თუ ცნობილია, რომ წახნაგები ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია ტოლი კუთხეებით და პირამიდის სიმაღლე შეადგენს 12 სმ-ს. პირამიდის წვერო გეგმილდება ფუძეზე.

185. სამკუთხა პირამიდის ორი წიბოს სიგრძე ერთმანეთის ტოლია და შეადგენს 3 სმ-ს, დანარჩენი წიბოების სიგრძეებიც ერთნაირია და თითოეული ტოლია 2 სმ-ის. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

186. სამკუთხა პირამიდის ყველა წიბოს სიგრძე ერთმანეთის ტოლია და თითოეულის სიგრძე შეადგენს 3 სმ-ს. პირამიდის შიგნით აღებულია წერტილი საიდანაც პირამიდის თითოეულ წახნაგამდე მანძილების ნამრავლი მაქსიმალურია. იპოვეთ ეს ნამრავლი.

187. კონუსის ფუძის პარალელური სიბრტყე კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართს შუაზე ყოფს. იპოვეთ რა შეფარდებით ყოფს ეს სიბრტყე კონუსის მოცულობას წვეროს მხრიდან.

188. კონუსის ფუძის პარალელური სიბრტყე კონუსის მოცულობას შუაზე ყოფს. იპოვეთ რა შეფარდებით ყოფს კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართს ეს სიბრტყე წვეროს მხრიდან.

189. იპოვეთ კონუსის მოცულობა თუ ცნობილია, რომ მისი გვერდითი ზედაპირის ფართი ტოლია 2π სმ^2-ის, ხოლო ამ ზედაპირის შლილი წარმოადგენს ნახევარ წრეს.

190. 2 სმ-იანი რადიუსის წრიდან ამოჭრილია სექტორი რომლის ცენტრალური კუთხე ტოლია 30°-ის. დარჩენილი ფიგურიდან შეკრულია კონუსი, იპოვეთ მისი მოცულობა.

191. იპოვეთ კუთხე კონუსის მსახველსა და ფუძის სიბრტყეს შორის, თუ ცნობილია რომ ამ კონუსში ჩახაზული სფეროს ზედაპირის ფართი 4-ჯერ ნაკლებია კონუსის ფუძის ფართზე.

192. სამკუთხა პირამიდის ოთხივე წახნაგის ფართობი ერთმანეთის ტოლია.შეიძლება თუ არა, რომ ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხეების ჯამი ტოლი იყოს 180°. თუ პირამიდის წვეროს გეგმილი არ გამოდის პირამიდის ფუძის გარეთ.

193. $ABCDS$ პირამიდის ფუძეა ტოლფერდა $ABCD$ ტრაპეცია, რომლის ფუძეების სიგრძეებია $AD=6$ სმ-ს და $BC=4$ სმ-ს, ხოლო ფერდების – $AB=CD=3$ სმ-ს. პირამიდის S წვეროს გეგმილი ძევს ტრაპეციის BC გვერდის შუა E წერტილში ისე, რომ $SE=4$ სმ-ს. იპოვეთ პირამიდის იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ფუძის AD გვერდზე თუ ცნობილია, რომ კვეთაში მიღებულ ფიგურაში შესაძლებელია წრეწირის ჩახაზვა.

194. სამკუთხა პირამიდის ფუძე წესიერი სამკუთხედია, რომლის სიმაღლე 2-ჯერ მეტია პირამიდის სიმაღლეზე. იპოვეთ იმ კუთხეების კოტანგენსების ჯამი რომლებსაც ეს წახნაგები ქმნიან ფუძის სიბრტყესთან.

195. მოცემულია ცილინდრი, რომლის ფუძის რადიუსი ტოლია 5 სმ-ის. მასში ჩახაზულია სამი 4 სმ რადიუსის მქონე ტოლი სფერო ისე, რომ თითოეული მათგანი ეხება მეორე სფეროს და ცილინდრს. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა თუ იგი მინიმალურია ყველა შესაძლო ცილინდრის მოცულობებს შორის.

196. ცილინდრის სიმაღლე ტოლია 5 სმ-ის, ხოლო ფუძის რადიუსი – 3 სმ-ის. იპოვეთ ცილინდრში ჩახაზული ოთხკუთხა პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ ცნობილია რომ მისი მოცულობა უდიდესია ყველა ჩახაზული პრიზმის მოცულობებს შორის.

197. კონუსში ჩახაზული ცილინდრის მოცულობა უდიდესია ყველა შესაძლო ჩახაზულ ცილინდრის მოცულობებს შორის. იპოვეთ კონუსის ფუძის რადიუსის შეფარდება ცილინდრის ფუძის რადიუსთან.

198. $ABCS$ სამკუთხა პირამიდის ორი წახნაგი ACB და ASB წარმოადგენენ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედებს C და S მართი კუთხეებით (ACB წარმოადგენს ფუძეში მდებარე სამკუთხედს). AB წიბოსთან მდებარე ორწახნაგა კუთხის წრფივი კუთხე α-ს ტოლია. იპოვეთ CB წიბოსთან მდებარე ორწახნაგა კუთხის წრფივი კუთხე.

199. კონუსში რომლის სიმაღლეა 8 სმ და ფუძის წრეწირის რადიუსი – 6 სმ, ჩახაზულია წესიერი სამკუთხა პრიზმა, რომლის ფუძე ძევს კონუსის ფუძეში. იპოვეთ ამ პრიზმის მოცულობა, თუ ცნობილია, რომ ის მაქსიმალურია.

200. კონუსის ფუძის წრეწირის რადიუსი ტოლია 1 სმ-ის, ხოლო სიმაღლე – 2 სმ-ის. ნახევარსფეროში, რომლის რადიუსიც კონუსის ფუძის რადიუსის ტოლია ჩადგმულია კონუსი ისე, რომ მისი ფუძე ემთხვევა ნახევარსფეროს ფუძეს. იპოვეთ იმ წირის სიგრძე, რომელიც მიიღება კონუსის ზედაპირისა და სფეროს ზედაპირის კვეთით თუ ცნობილია, რომ ის მინიმალურია.

201. ცილინდრში ჩახაზულია წესიერი სამკუთხა პრიზმა, ხოლო პრიზმაში – სფერო, რომლის რადიუსია 5 სმ. იპოვეთ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი.

202. 6 სმ-ის ტოლი რადიუსის მქონე სფეროში ჩახაზულია კონუსი ისე, რომ კონუსის წვერო მდებარეობს სფეროს ცენტრში, ხოლო კონუსის ფუძის წრეწირი ძევს სფეროს ზედაპირზე. იპოვეთ ამ კონუსში ჩახაზული სფეროს რადიუსი თუ ცნობილია, რომ ის უდიდესია ყველა შესაძლო მნიშვნელობებს შორის.

203. წესიერი სამკუთხა პირამიდის თითოეული წიბოს სიგრძე 4 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ იმ სფეროს რადიუსი, რომელიც ეხება პირამიდის ყველა წიბოს.

204. $ABCS$ სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდების სიგრძეებია: $BC=\sqrt{2}$ სმ, $AB=\sqrt{5}$ სმ, $AC=\sqrt{7}$ სმ. პირამიდის გვერდითი წიბოების სიგრძეებია: $AS=2\sqrt{2}$ სმ, $BS=2\sqrt{2}$ სმ, $CS=\sqrt{6}$ სმ. იპოვეთ კუთხე AS და BC წიბოებს შორის.

205. ცილინდრი რომლის ფუძის რადიუსია 3 სმ და სიმაღლე – 4 სმ, ჩახაზულია კონუსში ისე, რომ მისი ფუძე ემთხვევა კონუსის ფუძეს. იპოვეთ კუთხე, რომელსაც

მსახველი ადგენს ფუძის სიბრტყესთან, თუ ცნობილია, რომ კონუსის მოცულობა მინიმალურია.

206. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი 3 სმ-ია, ხოლო გვერდითი წიბოების სიგრძეებია 6 სმ. პირამიდაში ჩახაზულია ცილინდრი ისე, რომ მისი ფუძე პირამიდის ფუძეში ძევს. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა, თუ ცნობილია, რომ ის უდიდესია ყველა ასეთი წესით ჩახაზული ცილინდრის მოცულობებს შორის.

207. პირამიდის ფუძე ისეთი მართკუთხა ტრაპეციაა, რომ მასში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა. პირამიდის წვეროს გეგმილი ემთხვევა ფუძის მართი კუთხის წვეროს. იპოვეთ იმ უდიდესი ცილინდრის მოცულობა, რომელიც ჩახაზულია პირამიდაში, თუ ცნობილია, რომ პირამიდის სიმაღლე 12 სმ-ია, ტრაპეციის დიდი ფუძე – 8 სმ-ია, ხოლო მცირე ფუძე კი – 8/3 სმ.

208. სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდები ტოლია 5 სმ-ის, 6 სმ-ის და 4 სმ-ის ხოლო პირამიდის გვერდითი წიბოები ტოლია 10 სმ-ის. 6 სმ-ის ტოლ ფუძის გვერდზე გავლებულია მკვეთი სიბრტყე ისე, რომ პირამიდის მოცულობა გაყოფილია შეფარდებით 2 : 1 (წვეროს მხრიდან). იპოვეთ კუთხე, რომელსაც ეს სიბრტყე ადგენს ფუძის სიბრტყესთან.

209. სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდებია 5 სმ, 7 სმ და 8 სმ. გვერდითი წახნაგები ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია 60^0-ინი კუთხით. იპოვეთ იმ უდიდესი მოცულობის მქონე პირამიდის მოცულობა, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ პირობებს.

210. მოცემულია სამკუთხა პირამიდა, რომლის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია კათეტებით: 3 სმ და 4 სმ. პირამიდის წვერო გეგმილდება ფუძის მართი კუთხის წვეროში. პირამიდის სიმაღლე 5 სმ-ია. გამოთვალეთ ამ პირამიდაში ჩახაზული კუბის წიბოს სიგრძე თუ მისი ფუძე ძევს პირამიდის ფუძეში ისე, რომ კუბის ერთ-ერთი წვერო ემთხვევა პირამიდის ფუძის მართი კუთხის წვეროს, ხოლო მოპირდაპირე წვერო ძევს პირამიდის გვერდით წახნაგზე.

211. იპოვეთ კონუსის მოცულობის შეფარდება მასში ჩახაზულ სფეროს მოცულობასთან, თუ ადგილი აქვს ტოლობას $2L^3=3\sqrt{3}RH^2$, სადაც L კონუსის მსახველია, R- ფუძის რადიუსი, ხოლო H- კონუსის სიმაღლე.

212. წესიერი $SABC$ ტეტრაედრის წიბო 5 სმ-ის ტოლია. მასში გავლებულია კვეთა, რომელიც პარალელურია ფუძის AC გვერდისა და SB გვერდითი წიბოსი. გამოთვალეთ კვეთის ფართობი თუ ცნობილია, რომ ის უდიდესია.

213. იპოვეთ წაკვეთილი კონუსის ფუძის პარალელური კვეთის ფართობი, თუ ცნობილია, რომ კვეთით მიღებულ წაკვეთილ კონუსებში შეიძლება სფეროების ჩახაზვა. წაკვეთილი კონუსის ქვედა ფუძის რადიუსია R, ხოლო ზედასი – r.

214. წაკვეთილი კონუსის ფუძის რადიუსებია 9 სმ და 4 სმ. იპოვეთ ამ წაკვეთილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ ცნობილია, რომ არსებობს ისეთი სიბრტყე, რომელიც ფუძის პარალელურია და კვეთით მიღებულ ორ წაკვეთილ კონუსში შესაძლებელია სფეროების ჩახაზვა.

215. კონუსში ჩახაზულია სფერო, ხოლო ამ სფეროზე შემოხაზულია ცილინდრი. შეიძლება თუ არა კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი ტოლი იყოს ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობის?

216. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი არ აღემატება 1 სმ-ს. მისი მოცულობა ტოლია $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ სმ^2-ის. იპოვეთ პარალელეპიპედის სრული ზედაპირის ფართობი.

217. სამკუთხა პირამიდისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\frac{36V^2}{P_1^2+P_2^2+P_3^2+P_4^2}=r^2(r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2)$$

სადაც V პირამიდის მოცულობაა, r - პირამიდაში ჩახაზული სფეროს რადიუსი, r_1, r_2, r_3, r_4 - გვერდით წახნაგებში ჩახაზული წრეწირების რადიუსები, ხოლო P_1, P_2, P_3, P_4 - შესაბამისი წახნაგების პერიმეტრები. დაამტკიცეთ, რომ პირამიდის წახნაგების ფართობები მათში ჩახაზული წრეების ფართობების პროპორციულია.

218. $SABC$ სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდებია: AB=4 სმ, AC=6 სმ და BC=5 სმ, ხოლო გვერდითი წიბოებია: SA= 7 სმ, SB=8 სმ და SC= 9 სმ. იპოვეთ პირამიდის ზედაპირზე გამავალი უმოკლესი მანძილი ASC და SBC გვერდით წახნაგებში ჩახაზული წრეწირის ცენტრებს შორის.

219. მოცემულია წესიერი ტეტრაედრი, რომლის წიბოს სიგრძეა $\sqrt[6]{72}$ სმ. მის ოთხივე წვეროში ძევს წერტილები, ხოლო ტეტრაედრის შიგნით მოთავსებულია 133 წერტილი, ამასთან არცერთი ოთხი წერტილი ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს. დაამტკიცეთ, რომ ამ წერტილებიდან შეიძლება შეირჩეს ისეთი ოთხი წერტილი, რომ მათ მიერ მონიშნული სამკუთხა პირამიდის მოცულობა არ აღემატება 1/400 სმ^3.

220. ცილინდრში გატარებულია სიბრტყე, რომელიც ცილინდრის გვერდით ზედაპირს კვეთს რაღაც წირზე. დაამტკიცეთ, რომ კვეთაში მიღებულ ფიგურაში არსებობს ისეთი ორი წერტილი, რომ ამ ორი წერტილიდან კვეთაში მიღებული წირის ნებისმიერ წერტილამდე მანძილების ჯამი მუდმივი სიდიდეა.

221. მოცემულია ორი წერტილი, რომელთა შორის მანძილი 4 სმ-ია. გამოთვალეთ ისეთი წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი, რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისება: ამ წერტილებიდან წირის ნებისმიერ წერტილამდე მანძილების ჯამი 6 სმ-ის ტოლია.

222. დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}=\frac{2}{r}$, სადაც, r პირამიდაში ჩახაზული სფეროს რადიუსია, ხოლო r_1, r_2, r_3, r_4 პირამიდაში გარე ჩახაზული სფეროს რადიუსებია.

223. მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა ტოლია 8 სმ^3-ის, ხოლო სრული ზედაპირის ფართობია 24 სმ^2. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიაგონალის სიგრძე.

224. სივრცეში მოცემულია სამი წერტილი. არსებობს თუ არა ისეთი მეოთხე წერტილი რომლის დაშორება ამ სამი წერტილიდან გამოისახება რაციონალური რიცხვებით.

225. სივრცეში მოცემულია ოთხი A, B, C, D წერტილი, რომელთაგან არცერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე. შეგვიძლია თუ არა შევარჩიოთ ისეთი მეხუთე M წერტილი, რომ AM, BM, CM, DM მონაკვეთების სიგრძეები გამოისახებოდეს რაციონალური რიცხვებით.

§22. ვექტორები სიბრტყეზე და სივრცეში

სიდიდეები ორი სახისაა - სკალარული და ვექტორული. სკალარული სიდიდეები ეწოდებათ ისეთ სიდიდეებს, რომლებიც ხასიათდებიან მხოლოდ რიცხვითი მნიშვნელობით, მაგალითად ტემპერატურა, მასა, სიმკვრივე და სხვა. ვექტორული სიდიდეები კი ეწოდებათ ისეთ სიდიდეებს, რომლებიც ხასიათდებიან როგორც რიცხვითი მნიშვნელობით ასევე მიმართულებით სივრცეში, მაგალითად: ძალა, სიჩქარე, გადაადგილება და სხვა. ვექტორი ეწოდება წრფის მიმართულ მონაკვეთს. ვექტორი აღინიშნება ან ორი დიდი ასოთი, რომელთაგან ერთი შეესაბამება დასაწყისს, ხოლო მეორე – ბოლოს, მაგალითად $\overrightarrow{AB}$, ან ერთი პატარა ასოთი, მაგალითად $\vec{a}$. თუ სივრცეში განთავსებული ვექტორის საწყისი წერტილის კოორდინატებია $(x_1; y_1; z_1)$ ხოლო ბოლო წერტილის – $(x_2; y_2; z_2)$, მაშინ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები ეწოდება $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ მნიშვნელობებს, ან თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $x_2 - x_1 = X$, $y_2 - y_1 = Y$, $z_2 - z_1 = Z$ მაშინ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები იქნება $(X; Y; Z)$. ანალოგიურად სიბრტყეზე მდებარე $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები იქნება $(X; Y)$. ორ ან მეტ ვექტორს ეწოდება კოლინეარული თუ ისინი ერთი წრფის პარალელურია და კომპლანარული თუ ისინი ერთი სიბრტყის პარალელურნი არიან.

ვექტორებს ეწოდებათ ტოლი თუ ისინი კოლინეარული არიან, გააჩნიათ ერთნაირი სიგრძე და მიმართულება.

ვექტორის სიგრძეს მისი მოდული ეწოდება და ასე ჩაიწერება $|\overrightarrow{AB}|$ ან $|\vec{a}|$. სივრცეში მდებარე ვექტორის სიგრძე ასე გამოითვლება: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ ხოლო სიბრტყეში მდებარე ვექტორის ასე: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{X^2 + Y^2}$. ნულოვანი ვექტორის მოდული ნულის ტოლია.

ვთქვათ მოცემულია $\overrightarrow{AB}(X; Y; Z)$ ვექტორი და λ რიცხვი (სკალარი), მაშინ λ სკალარის $\overrightarrow{AB}$ ვექტორზე ნამრავლი ასე ჩაიწერება $\lambda\overrightarrow{AB}$ და ის წარმოაგენს ვექტორს, რომელიც $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოლინეარულია, მისი სიგრძე ტოლია $|\lambda| \cdot |\overrightarrow{AB}|$ და გააჩნია $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის მიმართულება, თუ $\lambda > 0$ და საწინააღმდეგო თუ $\lambda < 0$. $\lambda\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია: $(\lambda X; \lambda Y; \lambda Z)$ თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი განთავსებულია სივრცეში და $(\lambda X; \lambda Y)$ თუ ის განთავსებულია სიბრტყეზე.

არსებობს ორი ვექტორის შეკრების პარალელოგრამის და სამკუთხედის წესი. ორი ვექტორის შესაკრებად პარალელოგრამის წესით საჭიროა ორივე ვექტორი მოვდოთ ერთ წერტილში, მათზე როგორც გვერდებზე ავაგოთ პარალელოგრამი და მოდების საერთო წერტილიდან გავატაროთ დიაგონალი, სწორედ ეს უკანასკნელი იქნება ამ ორი ვექტორის ჯამი. ვექტორების შესაკრებად სამკუთხედის წესით საჭიროა პირველი ვექტორის ბოლოს მოვდოთ მეორის დასაწყისი და პირველი ვექტორის დასაწყისი შევაერთოთ მეორის ბოლოსთან, რომელიც იქნება ამ ორი ვექტორის ჯამი. ორზე მეტი ვექტორის შეკრების ზოგადი წესი ასეთია პირველი ვექტორის ბოლოს მოვდოთ მეორის დასაწყისი, მეორის ბოლოს მესამის დასაწყისი და ა.შ. ამის შემდეგ პირველი ვექტორის დასაწყისი შევაერთოთ ბოლო ვექტორის ბოლოსთან და სწორედ ეს ვექტორი იქნება ჯამური ვექტორი, ამ წესს ზოგჯერ ვექტორების შეკრების მრავალკუთხედის წესს უწოდებენ.

სივრცეში მდებარე ორი $\overrightarrow{AB}(X_1; Y_1; Z_1)$ და $\overrightarrow{CD}(X_2; Y_2; Z_2)$ ვექტორის ჯამის კოორდინატებია $(X_1 + X_2; Y_1 + Y_2; Z_1 + Z_2)$, ხოლო სიბრტყეზე მდებარე $\overrightarrow{AB}(X_1; Y_1)$ და $\overrightarrow{CD}(X_2; Y_2)$ ვექტორების - $(X_1 + X_2; Y_1 + Y_2)$.

$\overrightarrow{AB}$ ვექტორს, რომ გამოვაკლოთ $\overrightarrow{CD}$ ვექტორი საჭიროა $\overrightarrow{AB}$ ვექტორს ზემოთ მოყვანილი წესით დავუმატოთ $\overrightarrow{CD}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი (ორ ვექტორს ეწოდება მოპირდაპირე თუ ისინი კოლინეარულია და საწინააღმდეგოდ მიმართული. მათი კოორდინატები გამოისახება ურთიერთმოპირდაპირე რიცხვებით).

ვთქვათ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ვექტორებია, რომელთა სიგრძეები 1-ის ტოლია და ისინი შესაბამისად მდებარეობენ ox, oy და oz ღერძებზე მაშინ სამართლიანია ტოლობა $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j} + \gamma\vec{k}$ სადაც

$\lambda\vec{i}=\overrightarrow{AB_x}$ არის $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის გეგმილი ox ღერძზე, $\mu\vec{j}=\overrightarrow{AB_y}$ არის $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის გეგმილი oy ღერძზე, ხოლო $\gamma\vec{k}=\overrightarrow{AB_z}$ კი $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის გეგმილი oz ღერძზე. ანალოგიურია ფორმულა სიბრტყეზე მდებარე ვექტორისთვისაც - $\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{i}+\mu\vec{j}$.

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება რიცხვს, რომელიც ტოლია ამ ვექტორების მოდულების ნამრავლისა მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსზე და ასე ჩაიწერება: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|\cos\alpha$. თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია $((X_1;Y_1;Z_1)$ ხოლო $\overrightarrow{CD}$-სი $-(X_2;Y_2;Z_2)$ მაშინ კუთხე ამ ვექტორებს შორის გამოითვლება ფორმულით $\cos\alpha=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}$, თუ ვექტორები განთავსებულია სიბრტყეზე მაშინ ფორმულები ანალოგიურია ოღონდ ცხადია არ ფიგურირებს მესამე კოორდინატი $\cos\alpha=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2}}$.

ორი $\overrightarrow{AB}\,(X_1;\,Y_1:\,Z_1)$ და $\overrightarrow{BC}\ (X_2;\,Y_2;\,Z_2)$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი $\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right]$ ეწოდება $\overrightarrow{EF}\ (Y_1Z_2-Z_1Y_2;\ Z_1X_2-X_1Z_2;\ X_1Y_2-Y_1X_2)$ ვექტორს, რომელიც ხასიათდება შემდეგი სამი თვისებით:

1) მისი სიგრძე ტოლია მოცემული ვექტორების მოდულების ნამრავლისა მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსზე ე.ი. $\left|\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right]\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|\sin\alpha$;

2) $\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right]$ ვექტორი მართობულია თითოეული $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ვექტორის;

3) $\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right]$ ვექტორი $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ვექტორების მიმართ ორიენტირებულია ისევე როგორც oz ღერძი ox და oy ღერძების მიმართ (მარცხენა ორიენტაცია).

ამოცანები

1. A , B, C, D წერტილის კოორდინატებია: A(1;2), B(2;4), C(4;3), D(6;7). იპოვეთ $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}$ ვექტორის სიგრძე.

2. A,B,C,D წერტილების კოორდინატებია: A(1;2;2), B(2;4;3), C(4;4;4), D(6;7;9) იპოვეთ $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CD}$ ვექტორის სიგრძე.

3. დაშალეთ საკოორდინატო ღერძების მიმართ ვექტორი, რომლის საწყისი და ბოლო წერტილებია 1) A(2; 5), B(3;7) 2) A(2; 3; 4), B(4; 4; 9).

4. კოსინუსების თეორემის გამოყენებით იპოვეთ კუთხეები შემდეგ ვექტორებს შორის:
1) $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ და $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$
2) $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}$ და $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}$
3) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$ და $\vec{b}=6\vec{i}+3\vec{j}$
4) $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$ და $\vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}$

5. იპოვეთ ერთეულოვანი ვექტორი, რომლის საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია:
1) $3\vec{i}+2\vec{j}$, 2) $-2\vec{i}+\vec{j}$, 3) $2\vec{i}-3\vec{j}$, 4) $-\vec{i}+3\vec{j}$

6. იპოვეთ $\vec{a}$ ვექტორი, თუ ცნობილია, რომ მისი სიგრძე 1-ის ტოლია, $\vec{b}(3;4)$ ვექტორის კოლინეარულია და მის საწინააღმდეგოდაა მიმართული.
ა) $\vec{a}\left(\frac{5}{13};\frac{12}{13}\right)$ ბ) $\vec{a}\left(-\frac{5}{13};-\frac{12}{13}\right)$ გ) $\vec{a}\left(-\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)$ დ) $\vec{a}\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$

7. იპოვეთ $\vec{a}(5;12)$ ვექტორის თანამიმართული $\vec{b}$ ვექტორი თუ მისი სიგრძე 1-ის ტოლია.
ა) $\vec{b}\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ ბ) $\vec{b}\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ გ) $\vec{b}\left(-\frac{5}{13};\frac{12}{13}\right)$ დ) $\vec{b}\left(\frac{5}{13};\frac{12}{13}\right)$

8. იპოვეთ $\vec{a}(3;-4)$ ვექტორის საწინააღმდეგოდ მიმართული $\vec{b}$ ვექტორი თუ მისი სიგრძე 2-ის ტოლია.

ა) $\vec{b}\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)$ ბ) $\vec{b}\left(-\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right)$ გ) $\vec{b}\left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5}\right)$ დ) $\vec{b}\left(-\frac{6}{5};-1\frac{3}{5}\right)$

9. მოცემულია $\vec{a}(2;-1)$ და $\vec{b}(3;2)$ ვექტორები, იპოვეთ $2\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე.

ა) $\sqrt{15}$ ბ) $\sqrt{17}$ გ) $\sqrt{19}$ დ) $\sqrt{11}$

10. მოცემულია $\vec{a}(4;5)$ და $\vec{b}(2;x)$ ვექტორები, იპოვეთ x, თუ $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$

ა) 2,5 ბ) $\sqrt{5}$ გ) $\sqrt{10}$ დ) $0{,}3\sqrt{11}$

11. მოცემულია $\vec{a}(1;2)$, $\vec{b}(2;5)$ და $\vec{c}(2;3)$ ვექტორები. იპოვეთ λ –ს მნიშვნელობა, თუ $2\vec{a}+\lambda\vec{b}$ ვექტორი მართობულია $\vec{c}$ ვექტორის.

ა) $\frac{16}{19}$ ბ) $-\frac{16}{19}$ გ) $-\frac{15}{19}$ დ) $-\frac{17}{19}$

12. დაშალეთ $\vec{c}(3;4)$ ვექტორი ორი $\vec{a}(1;2)$ და $\vec{b}(2;6)$ ვექტორების კოლინეარული ვექტორების ჯამის სახით.

ა) $\vec{a}+5\vec{b}$ ბ) $\vec{a}-5\vec{b}$ გ) $5\vec{a}-\vec{b}$ დ) $\overrightarrow{5a}+\vec{b}$

13. მოცემულია $\vec{a}(1;1)$, $\vec{b}(2;3)$, $c(-2;4)$, $\vec{d}(1;5)$ ვექტორები. იპოვეთ λ-ს მნიშვნელობა, თუ $2\vec{a}+\lambda\vec{b}$ ვექტორი მართობულია $\vec{c}+2\vec{d}$ ვექტორის.

ა) 1,5 ბ) −1,5 გ) $\frac{2}{3}$ დ) $-\frac{2}{3}$

14. A წერტილის კოორდინატებია (3; 5), ხოლო B წერტილის – (7; 9). იპოვეთ AB მონაკვეთზე ისეთი M წერტილის კოორდინატები, რომ $|AM|:|MB|=\gamma$, სადაც $\gamma>0$.

15. A და B წერტილების კოორდინატებია (a_1,a_2,a_3) და (b_1,b_2,b_3). AB მონაკვეთზე იპოვეთ ისეთი M წერტილის კოორდინატები, რომ სრულდებოდეს ტოლობა: $|AM|:|MB|=\gamma$.

16. მოცემულია $ABCD$ პარალელოგრამი. იპოვეთ D წერტილის კოორდინატები, თუ A,B,C წერტილების კოორდინატები შესაბამისად ტოლია (3; 2), (4; 4), (10; 6).

17. მოცემულია $ABCD$ რომბი. მისი მოპირდაპირე A და C წვეროს კოორდინატებია შესაბამისად (2; 2) და (10; 6). იპოვეთ დანარჩენი წვეროს კოორდინატები თუ რომბის გვერდი ტოლია 5 სმ-ის.

18. იპოვეთ D წერტილის კოორდინატები, თუ ცნობილია, რომ $A(3;2), B(-3;11), C(3;15), D(x;y)$ წერტილები წარმოადგენენ მართკუთხედის წვეროებს.

ა) $D(8;6)$ ბ) $D(9;6)$ გ) $D(9;7)$ დ) $D(8;7)$

19. რომბის წვეროს კოორდინატებია: $A(3;1), B(1;7)$, $D(8;\sqrt{15}+1)$. იპოვეთ C წვეროს კოორდინატები.

ა) $C(6;7+\sqrt{15})$ ბ) $C(6;7-\sqrt{15})$ გ) $C(6;6+\sqrt{15})$ დ) $C(5{,}5;8-\sqrt{15})$

20. ABC სამკუთხედის წვეროების კოორდინატებია: $A(2;2), B(4;6), C(8;3)$. იპოვეთ კუთხე AD მედიანასა და AC გვერდს შორის.

ა) $arccos\frac{53}{\sqrt{3293}}$ ბ) $arccos\frac{47}{\sqrt{3193}}$ გ) $arcsin\frac{53}{\sqrt{3293}}$ დ) $arctg\frac{23}{\sqrt{2247}}$

21. ცნობილია, რომ $|\vec{a}|=|\vec{b}|\neq 0$, $\vec{a}\neq\vec{b}$ დაამტკიცეთ, რომ $\vec{a}+\vec{b}$ მართობულია $\vec{a}-\vec{b}$.

22. სიბრტყეზე მოცემულია ოთხი წერტილი: $A(2;1), B(1;4), C(4;6), D(6;3)$. იპოვეთ კუთხე $ABCD$ ოთხკუთხედის დიაგონალებს შორის.

23. არის თუ არა $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ვექტორები მართობული, თუ მათი წვეროების კოორდინატებია: $A(2;3), B(5;7), C(6;6), D(3;\ 8)$.

24. m-ის რა მნიშვნელობისათვის იქნება ვექტორები $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ მართობული თუ მათი წვეროების კოორდინატებია $A(m;2)$, $B(4;6)$, $C(m+1;12)$, $D(5;8)$.

25. არის თუ არა $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ვექტორები კოლინეარული თუ მათი წვეროების კოორდინატებია: $A(3;4), B(7;9), C(6;5), D(14;15)$.

26. m-ის რა მნიშვნელობისათვის იქნება ვექტორები $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ კოლინეარული თუ მათი წვეროების კოორდინატებია $A(2;m), B(8;3m+2), C(3;2), D(m+3;12)$.

27. მოცემულია $A(2;3)$ და $C(4;5)$ წერტილები. დაასახელეთ ისეთი ერთი წერტილი მაინც, რომ ABC სამკუთხედი მართკუთხა იყოს C მართი კუთხით.

28. ამოხსენით ვექტორული ტოლობა $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{c}$ სადაც $\vec{a}=\vec{a}(2;\ 3)$; $\vec{b}=\vec{b}(3;\ 4)$; $\vec{c}=\vec{c}(10;14)$.

29. ამოხსენით ვექტორული ტოლობა $2\vec{a}+3\vec{x}=\vec{b}$ სადაც $\vec{a}=\vec{a}(3;\ 4)$; $\vec{b}=\vec{b}(9;17)$.

30. იპოვეთ კუთხე $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ვექტორებს შორის, თუ მათი წვეროების კოორდინატებია: $A(2;\ \sqrt{7})$, $B(5;2\sqrt{7}), C(1;2), D(4;6)$.

31. წრფივად დამოკიდებულია თუ დამოუკიდებელი ვექტორები $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(2;\ 3;\ 4)$. $\vec{c}(3;4;5)$.

32. წრფივად დამოკიდებულია თუ დამოუკიდებელი ვექტორები $\vec{a}(1;0;2)$, $\vec{b}(3;\ 1;\ 4)$, $\vec{c}(5;3;7)$.

33. იპოვეთ ერთეულოვანი ვექტორი, რომლის თანამიმართული ვექტორია: 1) $\vec{a}(4;8)$ 2) $\vec{b}(5;-2)$ 3) $\vec{c}(2;3)$ 4) $\vec{d}(-2;-3)$.

34. იპოვეთ ერთეულოვანი ვექტორი, რომლის საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორია: 1) $\vec{a}(5;12)$ 2) $\vec{b}(9;12)$ 3) $\vec{c}(3;3)$ 4) $\vec{d}(-3;4)$.

35. იპოვეთ $\vec{b}(5;12)$ ვექტორის თანამიმართული ვექტორი, რომლის სიგრძე $\vec{a}(3;4)$ ვექტორის სიგრძის ტოლია.

36. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არაკოლინეარული ვექტორებია და მათ გააჩნიათ საერთო საწყისი წერტილი. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდნენ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები, რომ $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორი იყოს $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხის ბისექტრისის თანამიმართული?

37. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების კოორდინატები შესაბამისად ტოლია (3; 4) და (5; 12). მათ გააჩნიათ საერთო წერტილი. იპოვეთ ერთეულოვანი $\vec{c}$ ვექტორი რომელიც მოცემული ვექტორების მიერ შექმნილი კუთხის ბისექტრისის საწინააღმდეგოდაა მიმართული.

38. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(1;5)$ წერტილში და პარალელურია $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის, ამასთან A წერტილის კოორდინატებია (5; 7), ხოლო B-სი – (7; 10).

39. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(1;5)$ წერტილში და მართობულია $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის, ამასთან A წერტილის კოორდინატებია (5; 8), ხოლო B-სი –(7; 10).

40. $\overrightarrow{OA}$ და $\overrightarrow{OB}$ ვექტორების კოორდინატები შესაბამისად ტოლია (3; 4) და $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. O წერტილი კოორდინატთა სათავეა. დაწერეთ ამ ვექტორებით შექმნილი კუთხის ბისექტრისის განტოლება.

41. იპოვეთ $A(2;5)$ და $B(5;9)$ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება.

42. ABC სამკუთხედის AB და BC გვერდებზე აღებულია M და N წერტილები ისე, რომ $|AM|:|MB| = |CN|:|NB| = 4$. ვექტორების გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ $|AC|:|MN| = 5$ და MN პარალელურია AC.

43. $ABCD$ ტრაპეციის ზედა და ქვედა ფუძეებზე აღებულია M და N წერტილები ისე, რომ $|MB|:|MC| = |AN|:|ND| = 5$. დაამტკიცეთ, რომ M და N წერტილებზე გავლებული წრფე გადის AB და CD ფერდების გაგრძელების გადაკვეთის S წერტილზე.

44. x ცვლადის რა მნიშვნელობისათვის მიიღებს $f(x) = \frac{-3x^2+6x+3}{1+x^2}$ ფუნქცია უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს?

45. ორი არანულოვანი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი ტოლია მათი ვექტორული ნამრავლის სიგრძის. იპოვეთ კუთხე ამ ვექტორებს შორის.

46. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}(2; -1; 3)$ და $\vec{b}(1; 2; 0)$. იპოვეთ ამ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი და მისი სიგრძე.

47. მოცემულია საერთო სათავის მქონე ორი ვექტორი $\vec{a}(2; -1; 3)$ და $\vec{b}(1; 2; 0)$. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც მიიღება ამ ვექტორების ბოლოების შეერთებით.

48. მოცემულია, რომ $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 8$. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$. გამოთვალეთ ამ ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლის სიგრძე.

49. გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{c} - 2\vec{b})$, თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ერთმანეთთან ადგენენ 30^0-ის კუთხეს, ხოლო $\vec{c}$ მართობულია $\vec{a}$ და $\vec{b}$. ამასთან $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 3$.

50. ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორის სიგრძეებია: $|\vec{a}| = 3$,. $|\vec{b}| = 2$ ხოლო მათ შორის კუთხეა 60^0. გამოთვალეთ $\left[(\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})\right]$ ვექტორის კვადრატი (ვექტორის კვადრატის ქვეშ იგულისხმება მოცემული ვექტორის თავის თავზე სკალარული ნამრავლი).

51. დაწერეთ $M_0(x_0; y_0; z_0)$ წერტილზე გამავალი და $\vec{a}(2; 3; 2)$ ვექტორის პარალელური წრფის განტოლება.

52. მდებარეობს თუ არა $M_1(4; 1; 2)$ წერტილი· წრფეზე, რომელიც გადის $M_0(1; 2; 3)$ წერტილზე და $\vec{a}(2; 4; 1)$ ვექტორის პარალელურია.

53. დაწერეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(1; 3; 2)$ წერტილზე და $\vec{a}(2; 3; 4)$ ვექტორის მართობულია.

§ 23. მონაცემთა რიცხვითი მახასიათებლები

სხვადასხვა ცდის, დაკვირვების ან მოვლენის შესწავლა ხდება მათი შესაბამისი რიცხვითი მონაცემების შეგროვებით და ანალიზით. მოკლედ გავეცნოთ შეგროვებულ მონაცემთა დამუშავების ზოგიერთ ფართოდ გავრცელებულ მეთოდს.

ცხრილ I-ში მოყვანილია თბილისში მაისში 20 დღის განმავლობაში დღის 12 საათზე ცელსიუსის სკალით ტემპერატურის გაზომვის შედეგები: 20,1; 20,2; 20,4; 20,3; 20,6; 20,0; 21,3; 19,6; 19,8; 22,5; 21,9; 21,0; 18,7; 19,2; 20,6; 20,3; 20,6, 19,9; 20,5; 21,2.

ცხრილ II-ში მოყვანილია 27 დღის განმავლობაში ერთ-ერთი მაღაზიის მიერ გაყიდული მობილური ტელეფონების რაოდენობა: 51; 72; 81; 37; 41; 75; 41; 57; 80; 78; 76; 61; 57; 41; 92; 91; 70; 58; 61; 69; 50; 62; 71; 41; 58; 63; 82.

ამ ცხრილების გასაანალიზებლად ხელსაყრელია მონაცემები დავალაგოთ ზრდადობის მიხედვით.

ცხრილი I. 18,7; 19,2; 19,6; 19,8; 19,9; 20,0; 20,1; 20,2; 20,3; 20,3; 20,4; 20,5; 20,6; 20,6; 20,6; 21,0; 21,2; 21,3; 21,9; 22,5.

ცხრილი II. 37; 41; 41; 41; 41; 50; 51; 57; 57; 58; 60; 61; 61; 62; 63; 69; 70; 71; 71; 72; 75; 76; 78; 81; 86; 91; 92.

ცხრილი I-დან ჩანს, რომ უმცირესი რიცხვია 18,7 ხოლო უდიდესი – 22,5. მათ შორის სხვაობა შეადგენს: 22,5 – 18,7 = 3,8.

ცხრილ II-ში უმცირესი რიცხვია 41, ხოლო უდიდესი – 91 და მათ შორის სხვაობაა 91 – 41 = 50.

ცხრილის უდიდესი რიცხვისა და უმცირესი რიცხვის სხვაობას გაბნევის დიაპაზონი ეწოდება და იგი გვიჩვენებს თუ რამდენად გაფანტულია მონაცემები. ცხრილი I-ის გაბნევის დიაპაზონია 3,8 ხოლო ცხრილი II-ის – 50.

შემოვიტანოთ სიხშირისა და ფარდობითი სიხშირის ცნება. ცხრილის ამათუიმ მონაცემის სიხშირე გვიჩვენებს თუ რამდენჯერ გვხვდება ამ ცხრილში ეს მონაცემი. მაგ.: ცხრილ I-ში 20,3-ის სიხშირეა 2, 20,6-ის - 3 და ა.შ.. ცხრილ II-ში 41 –ის სიხშირეა 4, ხოლო 78-ის 1 და ა.შ.

რაიმე მონაცემის ფარდობითი სიხშირე მოცემულ ცხრილში ეწოდება ამ მონაცემის სიხშირის შეფარდებას ცხრილის მონაცემთა საერთო რაოდენობასთან. მაგ.: ცხრილ I-ში 20,3=ის ფარდობითი სიხშირეა $\frac{2}{20}=0,1$ ან 10%. 20,6-ის $\frac{3}{20}=0,15$ ან 15%. ცხრილ II-ში 41-ის ფარდობითი სიხშირეა: $\frac{4}{27}$ ან $\approx 11,8\%$, 92-ის $\frac{1}{27}$ ან $\approx 3,7\%$.

ზოგჯერ ცხრილის მონაცემებს ყოფენ ტოლი სიგრძის მონაკვეთებად და შესაბამისად ანგარიშობენ სიხშირესა და ფარდობით სიხშირეს. მაგ.: ცხრილი I დავყოთ 4 ინტერვალად: ა) $[19;20)$, ბ) $[20;21)$, გ) $[21;22)$, დ) $[22;23)$ (18,7 დავამრგვალეთ 19-მდე და მივაკუთვნეთ ა) ინტერვალს, ასევე 22,5 დავამრგვალეთ 23-მდე და მივაკუთვნეთ დ) ინტერვალს). ა) ინტერვალის სიხშირეა 5, ბ)-სი 10, გ) –სი 4 ხოლო დ) –სი 1. ა) ინტერვალის ფარდობითი სიხშირეა $\frac{5}{20}=0,25$ ან 25%, ბ) ინტერვალის ფარდობითი სიხშირეა $\frac{10}{20}=0.5$ ან 50%, გ) ინტერვალის ფარდობითი სიხშირეა $\frac{4}{20}=0,2$ ან 20%, დ) ინტერვალის ფარდობითი სიხშირეა $\frac{1}{20}=0,05$ ან 5%.

ცხრილის მონაცემთა მედიანა ეწოდება ცხრილის შუაში მდგარ რიცხვს თუ მონაცემთა რაოდენობა კენტია და ორი "შუა რიცხვის" საშუალო არითმეტიკულს თუ მონაცემთა რაოდენობა ლუწია. მაგ.: ცხრილი I-ის მედიანაა $\frac{20,3+20,4}{2}=20,35$, ხოლო ცხრილ II-ის კი – 63.

მონაცემთა ერთობლიობის მოდა ეწოდება რიცხვს, რომელიც ყველაზე ხშირად გვხვდება მოცემულ მონაცემებში. ცხრილ I-ის მოდაა 20,3, ცხრილ II-ის – 41. თუ ყველა მონაცემი განსხვავებულია ან თანაბარი სიხშირითაა წარმოდგენილი, ამბობენ, რომ მოცემულ მონაცემთა ერთობლიობას მოდა არა აქვს. მაგ.: მონაცემში 11; 3; 5; 13; 9; 1; 7; 15 ყველა მონაცემი განცხვავებულია და მოდა არ გააჩნია. მონაცემში 7; 7; 7; 7; 7; 2; 2; 2; 2; 2; 11; 11; 11; 11; 11; 35; 35; 35; 35; 35 ყველა მონაცემი ერთნაირი სიხშირითაა წარმოდგენილი და მასაც მოდა არ გააჩნია. ზოგიერთ მონაცემს შეიძლება გააჩნდეს ერთზე მეტი მოდა, ეს მოხდება მაშინ როდესაც რამდენიმე მონაცემს ტოლი სიხშირე აქვს და დანარჩენი მონაცემები განსხვავებული სიხშირითაა მოცემული. მაგ.: მონაცემს 9; 11; 15; 9; 32; 14; 9; 22; 19; 34; 22; 104; 22; 76 ორი მოდა აქვს 9 და 22, ხოლო მონაცემს 10; 8; 5; 8; 11; 45; 14; 67; 12; 34; 67; 105; 39; 41; 24; 98; 34 – სამი მოდა 8; 67 და 34.

მოცემული ცხრილის არითმეტიკული საშუალო ან სხვანაირად საშუალო ეწოდება ყველა მონაცემის ჯამის შეფარდებას მონაცემების მთლიან რაოდენობასთან. ვთქვათ ცხრილის მონაცემებია $a_1; a_2; a_3; \cdots; a_n$, n –მონაცემების რაოდენობაა, მონაცემების

არითმეტიკული საშუალო იყოს $\bar{a}$. მაშინ ზემოთ მოყვანილი განმარტების თანახმად გვექნება: $\bar{a} = \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$. მაგ.: ცხრილ I არითმეტიკული საშუალო იქნება: $\frac{18,7+19,2+19,6+\cdots+22,5}{20} = 20,41$, ხოლო ცხრილ II-ის - $\frac{37+41+41+\cdots+92}{27} \approx 63.4$.

ცხრილის მონაცემების არითმეტიკული საშუალოს მიმართ გაფანტულობის ზომის შესაფასებლად შემოღებულ იქნა ე.წ. საშუალო კვადრატული გადახრა.

საშუალო კვადრატული გადახრა ან სხვანაირად სტანდარტული გადახრა ეწოდება კვადრატულ ფესვს ცხრილის მონაცემების არითმეტიკულ საშუალოსა და თითოეული მონაცემის სხვაობის კვადრატების ჯამის არითმეტიკული საშუალოდან.

ვთქვათ ცხრილის მონაცემებია $a_1; a_2; a_3; \cdots; a_n$, ამ მონაცემების არითმეტიკული საშუალო იყოს $\bar{a}$. საშუალო კვადრატული გადახრა აღვნიშნოთ δ-თი. მაშინ სამართლიანია ფორმულა: $\delta = \sqrt{\frac{(\bar{a}-a_1)^2+(\bar{a}-a_2)^2+(\bar{a}-a_3)^2+\cdots+(\bar{a}-a_n)^2}{n}}$. მაგ.: გამოვთვალოთ ცხრილი II-ის საშუალო კვადრატული გადახრა. გვაქვს: $\bar{a} \approx 63,4$. ვიპოვოთ სხვაობა არითმეტიკულ საშუალოსა და თითოეულ მონაცემს შორის გვექნება: $63,4-37=26,4$; $63,4-41=22,4$; $63,4-50=13,4$; $63,4-51=12,4$; $63,4-57=6,4$; $63,4-58=5,4$; $63,4-60=3,4$; $63,4-61=2,4$; $63,4-62=1,4$; $63,4-63=0,4$; $63,4-69=-5,6$; $63,4-70=-6,6$; $63,4-71=-7,6$; $63,4-72=-8,6$; $63,4-75=-11,6$; $63,4-76=-12,6$; $63,4-78=-14,6$; $63,4-81=-17,6$; $63,4-86=-22,6$; $63,4-91=-27,6$; $63,4-92=-28,6$. მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ ზემოთ მოყვანილ ფორმულაში, მივიღებთ:

$$\delta = \sqrt{\frac{26,4^2+22,4^2+22,4^2+\cdots+(-28,6)^2}{27}} \approx \sqrt{\frac{6338,0}{27}} \approx \sqrt{234,7} \approx 15,3.$$

სასარგებლოა ვიცოდეთ, რომ ცხრილის მონაცემების შესახებ ზოგადად მეტ ინფორმაციას იძლევა არითმეტიკული საშუალო ვიდრე მედიანა. არითმეტიკული საშუალო იძლევა იმ რიცხვს, რომელიც შეიძლება ყოფილიყო ცხრილის თითოეული მონაცემი მათი ერთმანეთთან ტოლობის შემთხვევაში, საშუალო კვადრატული გადახრა კი გვაძლევს ინფორმაციას თუ რამდენად გაფანტულია ცხრილის მონაცემები არითმეტიკული საშუალოს მიმართ. ერთიდაიგივე არითმეტიკული საშუალოს მქონე ცხრილები შეიძლება სხვადასხვა გაფანტვით ხასიათდებოდნენ. ეს კარგად ჩანს ქვემოთ მოყვანილი რიცხვთა ორი მწკრივისათვის: ა) 2; 5; 8; 10; 15; 26 და ბ) 6; 8; 11; 12; 14; 15. ორივე მათგანის არითმეტიკული საშუალოა 11. ა) მწკრივის საშუალო კვადრატული გადახრა $\delta \approx 7,8$, ხოლო ბ) მწკრივის – 3,1. ე.ი. ა) მწკრივის მონაცემები არითმეტიკული საშუალოს მიმართ უფრო გაფანტულია.

რიცხვითი მონაცემების დამუშავებისას სასრგებლოა ვიცოდეთ რიცხვების დამრგვალების წესი, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში: თუ პირველი უკუგდებული ციფრი ნაკლებია 5-ზე მაშინ ბოლო დატოვებულ ციფრს არ ვცვლით. თუ პირველი უკუგდებული ციფრი 5-ზე მეტია ან ტოლი, მაგრამ მომდევნო ციფრებიდან ზოგიერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ ბოლო დატოვებულ ციფრს ერთი ერთეულით ვზრდით. თუ უკუგდებული ციფრი 5-ის ტოლია და შემდეგი ციფრი კი ნულებია მაშინ დატოვებულ ციფრს არ ვცლით, თუ ის ლუწია და ვზრდით ერთი ერთეულით თუ ის კენტია. ეს წესი კარგად ჩანს ქვემოთ მოყვანილ მაგალითებზე. 7,364≈ 7,36; 7,365108≈ 7,37; 7,36500≈ 7,36; 7,31500≈ 7,32.

ამოცანები

1. მოცემულია წინადადება: " ყველა კვადრატი მართკუთხედია". იპოვეთ ასო "ა"-ს სიხშირე და ფარდობითი სიხშირე.

ა) 5; $\frac{1}{5}$ ბ) 6; $\frac{2}{5}$ გ) 5; $\frac{1}{4}$ დ) 3; $\frac{3}{4}$

2. სამარშრუტო ტაქსის მიერ ერთი კვირის განმავლობაში ყოველდღიურად გადაყვანილ მგზავრთა რაოდენობებია: 120; 100; 150; 180; 90; 130; 125. იპოვეთ:

1) კიდურა წევრები

ა) 120 და 125 ბ) 90 და 180 გ) 100 და 125 დ) 130 და 125

2) გაბნევის დიაპაზონი

ა) 90 ბ) 75 გ) 115 დ) 100

3) მოდა
ა) 80 ბ) 150 გ) არ გააჩნია დ) 180
3) მედიანა
ა) 100 ბ) 130 გ) 180 დ) 125

4) არითმეტიკული საშუალო
ა) 126,5 ბ) 141,3 გ) 127,9 დ) 132,7

5) საშუალო კვადრატული გადახრა
ა) 29,5 ბ) 28,1 გ) 27,6 დ) 26,4

3. მანქანების ბაზრობაზე ზაფხულის სამი თვის განმაცლობაში გაიყიდა 58 "მერსედესი", 46 "ოპელი" , 58 "ფოლქსვაგენი, 20 "ფორდი", 18 "პეჟო", 31 "რენო", 47 "ნივა", 22" მიცუბიში". იპოვეთ:

1) კიდურა წევრები
ა) 58 და 22 ბ) 18 და 58 გ) 20 და 31 დ) 22 და 47

2) გაბნევის დიაპაზონი
ა) 40 ბ) 30 გ) 41 დ) 38

3) მოდა
ა) 46 ბ) 47 გ) 58 დ) არ გააჩნია

4) მედიანა
ა) 36,8 ბ) 38,5 გ) 39 დ) 40,1

5) არითმეტიკული საშუალო
ა) 23, 6 ბ) 42 გ) 58 დ) 24,5

6) საშუალო კვადრატული გადახრა
ა) 22,1 ბ) 23 გ) 21,8 დ) 20,9

4. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია 1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22; 25. იპოვეთ:
1) კიდურა წევრები
ა) 1 და 25 ბ) 25 და 4 გ) 22 და 4 დ) 10 და 13

2) გაბნევის დიაპაზონი
ა) 18 ბ) 12 გ) 24 დ) 26

3) მოდა
ა) 13 ბ) არ გააჩნია გ) 16 დ) 25

4) მედიანა
ა) 10 ბ) 13 გ) 16 დ) 11,5

5) არითმეტიკული საშუალო
ა) 12 ბ) 11 გ) 13 დ) 10

6) საშუალო კვადრატული გადახრა
ა) 7,7 ბ) 7,9 გ) 8,0 დ) 7,6

5. მოცემულია გეომეტრიული პროგრესია 200; 100; 50; 25; 12,5; 6,25; 3,125. იპოვეთ:
1) კიდურა წევრები
ა) 25 და 12,5 ბ) 200 და 3,125 გ) 25 და 6,25 დ) 100 და 12,5

2) გაბნევის დიაპაზონი

ა) 196,9 ბ) 196,3 გ) 195,9 დ) 195,8

3) მოდა
ა) არ გაჩნია ბ) 25 გ) 12,5 დ) 18,75

4) მედიანა
ა) არ გააჩნია ბ) 25 გ) 18,75 დ) 6,25

5) არითმეტიკული საშუალო
ა) 54,153 ბ) 51,725 გ) 55,642 დ) 56,696

6) საშუალო კვადრატული გადახრა
ა) 65,125 ბ) 66,363 გ) 67,342 დ) 68.053

6. მოცემულია k; x; x; y; z; l; m; n; a; b; y; c; d; y; l; f; g; l. იპოვეთ ამ მონაცემთა მოდა.
ა) არ გააჩნია ბ) z და l გ) y და l დ) l და m

§24. ალბათობის თეორიის ელემენტები

ხდომილობა ეწოდება რაიმე მოვლენას, რომელიც შეიძლება მოხდეს ან არა.ზოგადად ხდომილობა სამი სახისაა: აუცილებელი, შეუძლებელი და შემთხვევითი.

ხდომილობას ეწოდება აუცილებელი თუ ცდის ჩატარების მოცემულ პირობებში ის აუცილებლად მოხდება. მაგ.: თუ ყუთში დევს ხუთი შავი ბურთი, იქიდან ამოღებული ერთი ბურთი აუცილებლად შავი იქნება.

ხდომილობას ეწოდება შეუძლებელი თუ ცდის ჩატარების მოცემულ პირობებში ის ვერ მოხდება. მაგ.: თუ ყუთში დევს ხუთი შავი ბურთი, იქიდან თეთრი ბურთის ამოღება შეუძლებელია.

ხდომილობას ეწოდება შემთხვევითი თუ ცდის მოცემულ პირობებში ის შეიძლება მოხდეს ან არ მოხდეს. მაგ.: თუ ყუთში დევს ერთი შავი და ერთი თეთრი ბურთი, იქიდან შემთხვევით ამოღებული ერთი ბურთი ან შავი იქნება ან არა.

შევნიშნოთ, რომ ზოგჯერ შემთხვევით და აუცილებელ ხდომილობებს შორის მკვეთრი ზღვარის გავლება შეუძლებელია. მაგალითად ბათუმი-თბილისი მატარებლის ჩამოსვლა თბილისში აუცილებელი ხდომილობაა და ამ მატარებლის თბილისის სადგურში შემოსვლა განრიგში ნაჩვენებია საათებში და წუთებში. ცხადია შემთხვევითი არაა რომ ეს მატარებელი თბილისის სადგურში შემოდის დილის 9 სთ-სა და 25 წთ-ზე. მაგრამ თუ უფრო ზუსტად მივადევნებთ თვალყურს მატარებლის შემოსვლას სხვადასხვა დღეს ის შეიძლება მოხდეს სხვადასხვა დროს, მაგ. დღეს 9 სთ. 25 წთ. და 15 წმ-ზე, გუშინ 9 სთ. 25 წთ. და 28 წმ-ზე და ა.შ. ამიტომ ვთქვათ წამების სიზუსტით მატარებლის სადგურში შემოსვლა შემთხვევითი ხდომილებაა, ხოლო ვთქვათ წუთების სიზუსტით გაზომილი – აუცილებელი.

მიღებულია, რომ ისევე როგორც სიმრავლეები, ხდომილობები აღინიშნოს ლათინური ანბანის დიდი ასოებით. მაგ.: ხდომილობა იმისა, რომ ერთი კამათელის გაგორებისას ამოვა 3 წერტილი ასე ჩაიწერება $A=\{3\}$, ხდომილობა იმისა, რომ ორი კამათელის გაგორებისას პირველზე ამოვა 1 წერტილი, ხოლო მეორეზე – 5, ასე ჩაიწერება: $B=\{1;5\}$.

პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით განსაკუთრებულ ინტერესს წარმოადგენს შემთხვევითი ხდომილებები, მათი გააზრება თვალსაჩინოა ისეთი თამაშების ან სპეციალურად განხორციელებული ცდების მეშვეობით, როგორიცაა: კამათლების გაგორება, მონეტის აგდება, დომინო, ლოტო, ყუთში ჩაყრილი სხვადასხვა ფერის ბურთების ამოღება და მრავალი სხვა.

სპეციალურად ჩატარებული გამეორებადი ცდები თავიანთი შედეგების მიხედვით შეიძლება იყოს კანონზომიერი ან შემთხვევითი.

ცდას ეწოდება კანონზომიერი, თუ ცდის ჩატარებამდე შესაძლებელია მისი შედეგის ცალსახად წინასწარმეტყველება და მას არ გააჩნია ურთიერთგამომრიცხავი (არათავსებადი) შედეგები. მაგ.: მაგიდიდან რამდენჯერაც არ უნდა გადმოვაგდოთ ბურთი ის ყოველთვის ქვემოთ იმოძრავებს. შევნიშნოთ, რომ ურთიერთგამომრიცხავი ხდომილებები ეწოდებათ ისეთ ხდომილებებს, როდესაც ერთი მათგანის განხორციელების შემთხვევაში

სხეა ხდომილობები გამოირიცხება. მაგ.: ერთი კამათლის გაგორებისას 3 წერტილის ამოსვლა გამორიცხავს დანარჩენი წერტილების ამოსვლას. არაურთიერთგამომრიცხავი (თავსებადი) ხდომილობების განხორციელების შემთხვევაში ერთი ხდომილობის განხორციელება ხელს არ უშლის მეორე ხდომილობის განხორციელებას. მაგ.: ვთქვათ ვაგორებთ ორ კამათელს, A ხდომილობა იყოს პირველ კამათელზე 6 წერტილის ამოსვლა, ხოლო B მეორეზე ლუწი რაოდენობის წერტილების ამოსვლა. ცხადია მეორე ხდომილობა პირველს ხელს არ უშლის და პირიქით.

ცდას ეწოდება შემთხვევითი, თუ ცდის ჩატარებამდე შეუძლებელია მისი შედეგის ცალსახად წინასწარმეტყველება, მაგრამ შესაძლებელია ჩასატარებელი ცდის ყველა ურთიერთგამომრიცხავი ხდომილობის დასახელება. შემთხვევითი ცდის მარტივი მაგალითია ერთი კამათლის გაგორება. ცხადია ამ შემთხვევაში შეიძლება ამოვიდეს 1, 2, 3, 4, 5, 6 წერტილი. ე.ი. სულ შესაძლებელია ექვსი ურთიერთ გამომრიცხავი ხდომილობა, თითოეული მათგანი ელემენტარულ ხდომილობას წარმოადგენს. მაშასადამე ელემენტარული ხდომილობა ეწოდება მოცემული ცდის ყველა ცალკეულ შედეგს, თუ ის ამავე ცდის სხვა შედეგებთან წყვილ-წყვილად არათავსებადია. ყველა ელემენტარული ხდომილობის ერთობლიობას ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე ეწოდება. ხშირად ელემენტარული ხდომილობას ბერძნული ანბანის პატარა ω ასოთი აღნიშნავენ, ხოლო ხდომილობათა სივრცეს ამავე დიდი ასოთი – Ω. ზემოთ მოყვანილ მაგალითში ელემენტარული ხდომილობებია $\omega = (1),(2),(3).(4),(5),(6)$, ხოლო ხდომილობათა სივრცეა $\Omega = \{(1),(2),(3).(4),(5),(6)\}$. ორი კამათლის გაგორების შემთხვევაში ელემენტარული ხდომილობები იქნება:

$\omega =$(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6). ხოლო ხდომილობათა სივრცე - $\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5), (2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4), (5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$.

რაიმე A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობა ეწოდება ისეთ ელემენტარულ ხდომილობათა ერთობლიობას, რომელთა განხორციელების შემთხვევაში ადგილი არა აქვს A ხდომილობის განხორციელებას და აღინიშნება სიმბოლოთი $\bar{A}$. მაგ.: ვთქვათ A ხდომილობაა ერთ კამათელზე კენტი რაოდენობის წერტილების ამოსვლა ანუ $A = \{1,3,5\}$ მაშინ მისი საწინააღმდეგო ხდომილობა $\bar{A}$ იქნება $\bar{A} = \{2,4,6\}$. მოყვანილი განმარტებიდან ჩანს, რომ საწინააღმდეგო $\bar{A}$ ხდომილობა ძირითადი A ხდომილობის დამატებას წარმოადგენს ხდომილობათა სივრცემდე.

ორი A და B ხდომილობის სხვაობა ეწოდება ისეთ C ხდომილობას, რომელიც შედგება A ხდომილობაში შემავალი ყველა იმ ელემენტარული ხდომილობისაგან, რომელთა განხორციელების შემთხვევაში ადგილი არა აქვს B ხდომილობის განხორციელებას და შესაბამისი თანაფარდობა ასე ჩაიწერება: $A \setminus B = C$.

ორი A და B ხდომილობის თანაკვეთა ეწოდება ისეთ C ხდომილობას რომლის შემადგენელი ერთი ელემენტარული ხდომილობაც მაინც ერთდროულად წარმოადგენს როგორც A ხდომილობის ისე B ხდომილობის ელემენტარულ ხდომილობას, ამ შემთხვევაში

A და B ხდომილობებს თავსებად ხდომილობებს უწოდებენ. თუ A და B ხდომილობების თანაკვეთა არ ხდება მაშინ მათ არათავსებად ხდომილობებს უწოდებენ.

ორ ხდომილობას დამოუკიდებელი ეწოდება, თუ ერთი მათგანის განხორციელება ან არ განხორციელება არანაირ გავლენას არ ახდენს მეორე ხდომილობის განხორციელებაზე ან არ განხორციელებაზე. მაგ.: როცა ვაგორებთ ორ კამათელს მაშინ პირველ კამათელზე ამოსული წერტილების რაოდენობა არავითარ გავლენას არ ახდენს მეორე კამათელზე ამოსული წერტილების რაოდენობაზე.

მოკლედ განვიხილოთ ისეთი ცნებები როგორებიცაა: ფარდობითი სიხშირე და ალბათობა. ვთქვათ ვაგდებთ მონეტას და გვაინტერესებს "საფასურის" ან "ბორჯღალის" მოსვლა როგორ არის დაკავშირებული მონეტის აგდების რაოდენობასთან. ვთქვათ 100 აგდებისას "საფასური" ამოვიდა 44-ჯერ, "ბორჯღალი" – 56-ჯერ. მაშინ ვიტყვით, რომ "საფასურის" ამოსვლის ფარდობითი სიხშირეა $\frac{44}{100} = 0,44$ ან 44%, ხოლო "ბორჯღალის " ამოსვლის ფარდობითი სიხშირეა $\frac{56}{100} = 0,56$ ან 56%. ვთქვათ 200 ცდის შემდეგ შესაბამისად

"საფასური" ამოვიდა 108-ჯერ, ხოლო "ბორჯღალი" – 92-ჯერ, მაშინ ვიტყვით, რომ პირველი ხდომილობის ("საფასურის" ამოსვლა) ფარდობითი სიხშირეა $\frac{108}{200}=0{,}54$ ან 54%, ხოლო მეორე ხდომილობის ("ბორჯღალის " ამოსვლა) ფარდობითი სიხშირეა $\frac{92}{100}=0{,}46$ ან 46%. როგორც სპეციალურად ჩატარებულმა ცდებმა აჩვენეს ცდების რიცხვის შემდგომი ზრდისას როგორც "საფასურის" ასევე "ბორჯღალის" ამოსვლის ფარდობითი სიხშირე მერყეობს 50% -ის ფარგლებში.

მოცემულ ცდაში რომელიმე შემთხვევითი ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე ეწოდება განხორციელებული ხდომილობების რაოდენობის შეფარდებას ცდების მთლიან რაოდენობასთან.

სანამ შემოვიღებდეთ ალბათობის ცნებას საჭიროა ვიცოდეთ, რომ რამდენიმე ხდომილობას ტოლშესაძლო ეწოდება თუ მათი განხორციელების შანსი მოცემულ ცდაში ერთნაირია. მაგ.: ერთი კამათელის გაგორებისას 1, 2, 3, 4, 5, 6 წერტილების ამოსავლის შანსი ერთნაირია და თითოეული მათგანის ამოსვლა ტოლშესაძლოა. რაღაც A ხდომილობის ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობა ვუწოდოთ იმ ხდომილობას რომლის განხორციელებაც გვსურს მოცემულ ცდაში. მაგ.: თუ ვაგორებთ ერთ კამათელს და ვაკვირდებით ლუწი რაოდენობის წერტილების ამოსვლას, მაშინ ამ ცდის ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობები იქნება 2, 4, 6 რაოდენობის წერტილების ამოსვლა.

რაიმე ტოლშესაძლო ელემენტარული ხდომილობებისაგან შემდგარი A ხდომილობის ალბათობა ეწოდება რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს A ხდომილობის შემადგენელი ელემენტარული ხდომილობების რა ნაწილია ამ A ხდომილობის ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა. თუ n-ით აღვნიშნავთ A ხდომილობის შემადგენელ ყველა ელემენტარული ხდომილობების რაოდენობას, ხოლო m-ით ხელშემწყობ ხდომილობათა რაოდენობას, მაშინ A ხდომილობის $P(A)$ ალბათობა გამოითვლება ფორმულით: $P(A)=\frac{m}{n}$

(ამ ფორმულით წარმოდგენილ ალბათობას ხშირად კლასიკურ ალბათობას უწოდებენ).

ალბათობათა თეორიის ძირითადი კანონის (რომელსაც დიდი რიცხვების კანონსაც უწოდებენ) თანახმად ჩატარებული ცდების საკამაოდ დიდი რაოდენობის შემთხვევაში რაიმე შემთხვევითი ხდომილობის ალბათობა გარკვეული მიახლოებით ამავე ხდომილობის ფარდობითი სიხშირის ტოლია.

თუ A შეუძლებელი ხდომილობაა, ცხადია $m=0$ და $P(A)=0$ ე.ი. შეუძლებელი ხდომილობის ალბათობა ნულის ტოლია. თუ A აუცილებელი ხდომილობაა, ცხადია $m=n$ და $P(A)=1$ ე.ი. აუცილებელი ხდომილობის ალბათობა ერთის ტოლია. ზოგადად შეგვიძლია დავწეროთ $0\le P(A)\le 1$.

ხდომილობათა ჯამის ალბათობის გამოთვლა. ვთქვათ A ხდომილობის შემადგენელი ელემენტარული ხდომილობების რაოდენობა a, ხოლო B ხდომილობის -b. დავუშვათ, რომ A და B ხდომილობები არათავსებადია ე.ი. მათ საერთო ელემენტარული ხდომილობა არ გააჩნიათ, მაშინ ცხადია $A+B$ ხდომილობის ხელშემწყობ ხდომილობათა რაოდენობა იქნება $a+b$ ანუ ის ხდომილობები, რომლებიც ან A ხდომილობას უწყობენ ხელს ან B-ს (გაიხსენეთ ორი სიმრავლის გაერთიანება). თუ n-ით აღვნიშნავთ $A+B$ ჯამური ხდომილობის შემადგენელ ყველა ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობას მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ $P(A\cup B)=\frac{a+b}{n}=P(A)+P(B)$ ან სხვანაირად $P(A+B)=\frac{a+b}{n}=P(A)+P(B)$ მაშასადამე არათავსებადი ხდომილობების ჯამის ალბათობა შემადგენელი ხდომილობების ალბათობათა ჯამის ტოლია. თუ A და B ხდომილობები თავსებადია, მაშინ ხდომილობათა ჯამის ფორმულას აქვს სახე: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ ან სხვანაირად $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$. (შეადარე ფორმულას $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$)

საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობის გამოთვლა. ვთქვათ $\bar{A}$ ხდომილობა წარმოადგენს A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობას. თუ n-ით აღვნიშნავთ A ხდომილობის შემადგენელ ყველა ელემენტარული ხდომილობების რაოდენობას, ხოლო m-ით ხელშემწყობ ხდომილობათა რაოდენობას, მაშინ $\bar{A}$ ხდომილობის ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა იქნება $n-m$ და $P(\bar{A})=\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=1-P(A)$. მაშასადამე რაღაც A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობა ტოლია ერთს

გამოკლებული A ხდომილობის ალბათობა. ცხადია მოცემული ხდომილობისა და მისი საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობათა ჯამი ერთის ტოლია. ვინაიდან მოცემული ხდომილობისა და მისი საწინააღმდეგო ხდომილობის ჯამი აუცილებელი ხდომილობაა, ხოლო აუცილებელი ხდომილობის ალბათობა 1-ის ტოლია, შეგვიძლია დავწეროთ: $P(A+\bar{A})=1$.

დამოუკიდებელ ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის გამოთვლა. ვთქვათ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, ხოლო C იყოს ხდომილობა, რომელიც ხორციელდება მხოლოდ მაშინ როდესაც ერთდროულად ხორციელდება A და B ხდომილობები, მაშინ ამბობენ რომ C ხდომილობა წარმოადგენს A და B ხდომილობების ნამრავლს ან სხვანაირად თანაკვეთას (გაიხსენეთ ორი სიმრავლის თანაკვეთა). მტკიცდება, რომ ორი დამოუკიდებელი ხდომილობების ნამრავლის ალბათობა, თანამამრავლი ხდომილობების ალბათობათა ნამრავლის ტოლია. ე.ი. $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ ან სხვანაირად $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$. ორ A და B ხდომილობას ეწოდება დამოუკიდებელი თუ მათი ნამრავლის ალბათობა ამ ხდომილობათა ალბათობების ნამრავლის ტოლია.

გეომეტრიული ალბათობა (მონაკვეთზე და ბრტყელ ფიგურაზე). ვთქვათ მოცემულია რაღაც n სიგრძის AB მონაკვეთი და მის შიგნით ნებისმიერად აღებულია m სიგრძის $(m<n)$ მონაკვეთი. დავსვათ კითხვა რისი ტოლი იქნება ალბათობა იმისა, რომ AB მონაკვეთზე შემთხვევით დასმული წერტილი მოხვდება m სიგრძის მონაკვეთზე. ლოგიკურია ვივარაუდოთ, რომ ეს ალბათობა პირდაპირ პროპორციული იქნება m-ის და არ იქნება დამოკიდებული იმაზე თუ სად იქნება განთავსებული ეს მონაკვეთი AB მონაკვეთის შიგნით. საძებნი ალბათობა კი იანგარიშება ფორმულით $P=\frac{m}{n}$.
ანალოგიურად ვთქვათ მოცემულია რაღაც n ფართობის ბრტყელი ფიგურა და მის შიგნით ნებისმიერად აღებულია m ფართობის ფიგურა, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ საწყის ბრტყელ ფიგურაზე ნებისმიერად
აღებული წერტილი მოხვდება m ფართობის ფიგურაზე ტოლია $P=\frac{m}{n}$. მოყვანილი ფორმულები და მსჯელობები სამართლიანია სივრცული სხეულებისთვისაც.

მოკლედ შევეხოთ ე.წ. პირობით ალბათობას. ვთქვათ A და B ხდომილობებია, რომელთა ალბათობები დადებითი რიცხვებია. A ხდომილობის ალბათობას იმ პირობით, რომ მოხდა B ხდომილობა ეწოდება პირობითი ხდომილობა, აღინიშნება სიმბოლოთი $P_B(A)$ ან $P(A|B)$ და ასე იკითხება A-ს ალბათობა B პირობით. სამართლიანია ტოლობა $P_B(A)=P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას $P(A|B)=P(A)$, ე.ი. A-ს მოხდენა არ არის დამოკიდებული იმაზე მოხდა თუ არა B. ვთქვათ მოცემულია ხდომილობათა Ω სივრცე. $A_1;A_2;A_3;\cdots;A_n$ ეწოდება ხდომილობათა სრული სისტემა თუ ისინი აკმაყოფილებენ შემდეგ სამ პირობას:
1) მათი ჯამი Ω სივრცის ტოლია. $\Omega=A_1+A_2+A_3+\cdots+A_n$
2) ისინი წყვილწყვილად არათავსებადი ხდომილობებია: $A_1\cap A_2=\emptyset$; $A_2\cap A_3=\emptyset$ და ა.შ.
3) თითოეული მათგანის ალბათობა დადებითია $P(A_i)>0$ ნებისმიერი i-თვის.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ ვაგორებთ ერთ კამათელს, A_1-იყოს 1 ან 2 წერტილის ამოსვლის ალბათობა ე.ი. $A_1=\{1;2\}$, $A_2=\{3;4;5;\}$, $A_3=\{6\}$. ცხადია A_1,A_2,A_3 ხდომილობათა სრული სისტემაა. $A_1\cup A_2\cup A_3=\{1;2;3;4;5;6\}$. $A_1\cap A_2=A_1\cap A_3=A_1\cap A_3=\emptyset$. $P(A_1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $P(A_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(A_3)=\frac{1}{6}$. განვიხილოთ რაიმე B დადებითი ხდომილობა. $A_1\cap B, A_2\cap B, A_3\cap B,\cdots,A_n\cap B$ ასევე არათავსებადი ხდომილობებია და მათი ჯამი არის B ხდომილობა. $B=(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup(A_3\cap B)\cup\cdots\cup(A_n\cap B)$. როგორც ცნობილია $P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+P(A_3\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)$. გავითვალისწინებთ, რა პირობითი ალბათობის ფორმულებს მივიღებთ: $P(B|A_1)=\frac{P(A_1\cap B)}{P(A_1)}$, $P(B|A_2)=\frac{P(A_2\cap B)}{P(A_2)}$, და ა.შ., $P(A_n\cap B)=\frac{P(n\cap B)}{P(A_n)}$. საიდანაც მიიღება $P(A_1\cap B)=P(B|A_1)P(A_1)$, $P(A_2\cap B)=P(B|A_2)P(A_2)$, და ა.შ. $P(A_n\cap B)=P(B|A_n)P(A_n)$. ან შესაბამის ფორმულაში ჩასმა გვაძლევს:
$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+\cdots+P(B|A_n)P(A_n)$. ამ ფორმულას ეწოდება სრული ალბათობის ფორმულა. განვიხილოთ მაგალითი: B იყოს ერთი კამათელის გაგორებისას ლუწი რაოდენობის წერტილების ამოსვლის ხდომილობა, ე.ი. $B=\{2;4;6\}$, $A_1=\{1;2\}$, $A_2=\{3;4;5\}$, $A_3=\{6\}$. ცხადია $A_1\cap B=\{2\}$, $A_2\cap B=\{4\}$, $A_3\cap B=\{6\}$. $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

$P(A_1 \cap B) = \frac{1}{6}$, $P(A_2 \cap B) = \frac{1}{6}$, $P(A_3 \cap B) = \frac{1}{6}$. ე.ი. $\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

განვიხილოთ ამოცანა: ვთქვათ პირველ ყუთში ძევს 2 თეთრი და 3 შავი ბურთულა, მეორეში -3 თეთრი და 4 შავი, ხოლო მესამეში – 4 თეთრი და 1 შავი. ცდა მდგომარეობს შემდეგში: შემთხვევით ირჩევენ ყუთს და მისგან ამოაქვთ ერთი ბურთულა. იპოვეთ თეთრი ბურთულას ამოღების ალბათობა.

ამოხსნა: A_1 იყოს ხდომილობა იმისა, რომ ბურთულა პირველი ყუთიადან ამოვიდა, A_2 - რომ ბურთულა მეორე ყუთიდან ამოვიდა, ხოლო A_3- რომ ბურთულა მესამე ყუთიდან ამოვიდა. ცხადია $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$ (შევნიშნოთ ყუთების რაოდენობაა 3 და მათი არჩევა ტოლალბათურია). B-თი აღვნიშნოთ იმის ალბათობა, რომ ამოღებული ბურთულა თეთრია. $B \cap A_1$ არის ხდომილობა იმისა, რომ ამორჩეული ბურთულა თეთრია და ის ამოღებულია პირველი ყუთიდან. ვინაიდან პირველ ყუთში სულ დევს 5 ბურთულა და მათ შორის თეთრია 2. ამიტომ $P(B \mid A_1) = \frac{2}{5}$, ანალოგიურად $P(B \mid A_2) = \frac{3}{7}$ და $P(B \mid A_3) = \frac{4}{5}$. გამოვიყენოთ სრული ალბათობის ფორმულა. მივიღებთ: $P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{57}{105} = \frac{19}{25}$. ე.ი. ამოცანის მოცემულ პირობებში თეთრი ბურთულას ამოღების ალბათობაა $\frac{19}{25}$.

სრული ალბათობის ფორმულიდან გამომდინარეობს ფორმულა, რომელსაც ბაიესის ფორმულა ეწოდება. პირობითი ალბათობის ფორმულის თანახმად გვაქვს:
$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$. სადაც A_i წარმოადგენს ხდომილობას, ხდომილობათა $A_1; A_2; A_3; \cdots; A_n$ სისტემიდან. ვინაიდან $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n)$, ამიტომ
$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+\cdots+P(B|A_n)P(A_n)}$ და ბაიესის ფორმულას აქვს შემდეგი სახე: $P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+\cdots+P(B|A_n)P(A_n)}$.

განვიხილოთ ზემოთ მოყვანილი ამოცანა. დავსვათ კითხვა: რისი ტოლი იქნება, ამოცანის მოცემულ პირობებში ალბათობა იმისა, რომ თეთრი ბურთულა ამოღებული იქნება პირველი ყუთიდან? ამოხსნა. ე.ი. ჩვენ უნდა ვიპოვოთ $P(A_1|B)$.

$P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{2}{5}}{\frac{19}{35}} = \frac{14}{57}$. ე.ი. პირველი ყუთიდან თეთრი ბურთულას ამოღების ალბათობაა $\frac{14}{57}$.

ამოცანები

1. ყუთში მოთავსებულია 8 შავი და 6 თეთრი ბურთულა. რისი ტოლია იმის ალბათობა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბურთულა იქნება შავი?

2. სამი მეგობარი აბარებს მისაღებ გამოცდებს უმაღლეს სასწავლებელში. პირველი აბიტურიენტის ჩარიცხვის ალბათობაა $\frac{1}{2}$, მეორის – $\frac{2}{3}$, ხოლო მესამის – $\frac{3}{4}$. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამივე აბიტურიენტი სტუდენტი გახდება?

3. ყუთში ძევს 5 წითელი, 8 შავი და 6 თეთრი ბურთულა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბურთულა იქნება ან წითელი ან თეთრი?

4. ყუთში ძევს 17 თეთრი და 12 შავი ბურთულა. ყუთიდან თითო თითოდ ამოაქვთ ბურთულები. რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ ბოლოს ამოღებული ბურთულა იქნება შავი?

5. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მოსწავლემ, რომელმაც 20 საგამოცდო საკითხიდან იცის 18, მასწავლებლის მიერ მიცემული ორი საკითხიდან ორივეს უპასუხოს სწორად?

6. ყუთში მოთავსებულია 6 შავი და 4 თეთრი ბურთულა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამი ამოღებული ბურთულიდან სამივე იქნება თეთრი?

7. ყუთში მოთავსებულია 7 შავი და 5 წითელი ბურთულა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამი ამოღებული ბურთულიდან 2 იქნება შავი და 1 წითელი?

8. ბიბლიოთეკას გააჩნია 20 მათემატიკის წიგნი, რომელთა შორისაც 4 ინგლისურენოვანია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 6 გაცემული წიგნიდან 2 ინგლისურენოვანი იქნება?

9. ყუთში მოთავსებულია 6 თეთრი, 5 შავი და 4 წითელი ბურთულა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 4 ამოღებული ბურთულიდან 2 იქნება თეთრი და თითო-თითო შავი და წითელი?

10. მოცემულია ხუთი მონაკვეთი, რომელთა სიგრძეებია 1 სმ, 3 სმ, 5 სმ, 6 სმ, 8 სმ. შემთხვევით ირჩევენ სამ მონაკვეთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შერჩეულმა მონაკვეთებმა შეადგინონ სამკუთხედი?

11. მოცემულია ექვსი მონაკვეთი, რომელთა სიგრძეებია 2 სმ, 3 სმ, 6 სმ, 8 სმ, 10 სმ, 14 სმ. შემთხვევით ირჩევენ სამ მონაკვეთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შერჩეულმა მონაკვეთებმა შეადგინონ სამკუთხედი?

12. პირველ ყუთში მოთავსებულია 4 თეთრი და 8 შავი ბურთულა, ხოლო მეორეში – 3 თეთრი და 9 შავი. თითოეული ყუთიდან იღებენ ერთ ბურთულას. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თითოეული ყუთიდან ამოღებული ბურთულები ორივე თეთრი ფერის იქნება?

13. ყუთში სულ 12 ბურთულაა, მათ შორის 8 თეთრია. შემთხვევით იღებენ ორ ბურთულას. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბურთულა თეთრი იქნება?

14. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ კამათელის გაგორებით მოსულ ციფრთა ჯამი არ აღემატება 9-ს?

15. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათელის გაგორებით მოსულ ციფრთა ჯამი არ არის 10-ზე ნაკლები?

16. მოცემულია ნატურალური რიცხვები 1-დან 25-ის ჩათვლით. წინასწარ მონიშნულია ხუთი მათგანი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით დასახელებული ხუთი რიცხვიდან ზუსტად ოთხი დაემთხვეს ამ მონიშნულ რიცხვებს.

17. მოცემულია ნატურალური რიცხვები 1-დან 25-ის ჩათვლით. წინასწარ მონიშნულია ხუთი მათგანი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით დასახელებული ხუთი რიცხვიდან მონიშნულ რიცხვებს დაემთხვევა არა ნაკლებ ორი რიცხვისა.

18. ორი ერთნაირი სიძლიერის მოჭადრაკე თამაშობს ჭადრაკს. რისი ალბათობაა მეტი 5 პარტიიდან 4 პარტიის მოგების, თუ 9 პარტიიდან 6 პარტიის მოგების?

19. ორი ერთნაირი სიძლიერის მოჭადრაკე თამაშობს ჭადრაკს. რისი ალბათობაა მეტი 4 პარტიიდან 3 პარტიის მოგების, თუ 9 პარტიიდან 6 პარტიის მოგების?

20. მოცემულია ქაღალდის 6 ფურცელი, რომლებზეც წერია ასოები ე, მ, გ, ე, ზ, ე. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული სამი ფურცლიდან შევძლოთ სიტყვა "მზე"-ს დაწერა.

21. მოცემულია ქაღალდის 6 ფურცელი, რომლებზეც წერია ასოები ე, მ, გ, ე, ზ, ე. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული სამი ფურცლიდან თანმიმდევრობის შეუცვლელად მივიღოთ სიტყვა "მზე".

22. პირველ ყუთში ძევს 2 თეთრი და 3 შავი ბურთულა, მეორეში – 3 თეთრი და 4 შავი, მესამეში – 4 თეთრი და 1 შავი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული ბურთულა თეთრია, თუ ყუთის შერჩევა ტოლალბათურია.

23. პირველ ყუთში ძევს 2 თეთრი და 3 შავი ბურთულა, მეორეში – 3 თეთრი და 5 შავი, მესამეში – 5 თეთრი და 1 შავი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ბურთულა თეთრი ფერისაა და ამოღებულია პირველი ყუთიდან? თუ ყუთის შერჩევა ტოლალბათურია.

24. საწყობში მოიტანეს სამ საამქროში დამზადებული დეტალები. პირველ საამქროში დამზადებულ იქნა დეტალების 40%, მეორეში – 35%, ხოლო მესამეში – 25%. ამასთან ცნობილია, რომ უმაღლესი ხარისხისაა პირველ საამქროში დამზადებული დეტალების 90%, მეორე საამქროში დამზადებული დეტალების 80% და მესამე საამქროში დამზადებული დეტალების 70%. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული დეტალი უმაღლესი ხარისხისაა.

25. თოფიდან ერთი გასროლით ნადირის მოკვლის ალბათობა პირველი მონადირისათვის 0.8-ის ტოლია, ხოლო მეორე მონადირისათვის კი – 0.7. ორივე მონადირემ ერთდროულად გაისროლა, რის შედეგადაც მხოლოდ ერთი ტყვიით მოკლულ იქნა 380 კგ წონის ნადირი. როგორ უნდა განაწილდეს მონადირეებს შორის ნადავლი?

26. ერთსა და იმავე დროში ხარატი ამზადებს 100 დეტალს, ხოლო შეგირდი – 80. ხარატისა და შეგირდის მიერ სატანდარტული დეტალების დამზადების ალბათობებია შესაბამისად 0.8 და 0.6. შემთხვევით აღებული დეტალის შემოწმებისას აღმოჩნდა, რომ ის წუნდებულია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს დეტალი დამზადებულია ხარატის მიერ?

27. ყუთში დევს 20 შაშახანა, რომელთაგან 8-ს გააჩნია ოპტიკური სამიზნე. ოპტიკურ სამიზნიანი შაშხანიდან სამიზნის დაზიანების ალბათობაა 0.95, ხოლო არაოპტიკურიდან – 0.8. მსროლელმა შემთხვევით აირჩია შაშხანა და დააზიანა სამიზნე. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დაზიანება მოხდა არაოპტიკურ სამიზნიანი შაშხანით.

28. ABC სამკუთხედის გვერდებია $AB=5$ სმ $AC=10$ სმ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ სამკუთხედში შემთხვევით აღებული რაღაც წერტილი მოთავსდეს ABD სამკუთხედში,სადაც AD წარმოადგენს A კუთხის ბისექტრისას.

29. მოცემულია შუალედი (1; 6). რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ შუალედიდან შემთხვევით ამორჩეულ $[a;b]$ მონაკვეთს, რომლის სიგრძე 1-ის ტოლია, გააჩნდეს საერთო წერტილი $[2;5]$ მონაკვეთთან.

30. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მოცემული სამკუთხედიდან შემთხვევით არჩეული წერტილი მიეკუთვნება ერთ-ერთს იმ ექვსი სამკუთხედიდან რომლებიც მიიღება ამ სამკუთხედში სამივე მედიანის გავლებით.

31. $ABCD$ კვადრატის ყველა გვერდი დაყოფილია სამი წერტილით ოთხ ტოლ ნაწილად, რომელთა სიგრძე a-ს ტოლია. აღებულია დაყოფის ყოველი პირველი წერტილი კვადრატის წვეროებიდან საათის ისრის მიმართულებით და შეერთებულია თანმიმდევრობით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოცემული კვადრატიდან შემთხვევით არჩეული წერტილი ეკუთვნის მიღებულ ოთხკუთხედს.

32. $ABCD$ ტრაპეციის ზედა და ქვედა ფუძეები შესაბამისად ტოლია 5 სმ და 8 სმ-ის. ტრაპეციიის დიაგონალებით ის დაყოფილია ოთხ სამკუთხედად ABO, BCO, COD, AOD. სადაც O არის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ტრაპეციიდან შემთხვევით აღებული წერტილი მიეკუთვნება 1) BOC სამკუთხედს, 2) AOD სამკუთხედს, 3) ABO სამკუთხედს.

33. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მონაკვეთს რომლის სიგრძეა 5 ერთეული და აღებულია $[0;50]$ შუალედიდან, არ გააჩნია საერთო წერტილი $[10;20]$ მონაკვეთთან

34. A და B წერტილები წრეწირის დიამეტრის ბოლო წერტილებია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წრეწირზე შემთხვევით არჩეული C წერტილისათვის ABC სამკუთხედი მართკუთხაა?

35. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ $y=x^2-x+2$ ფუნქციის გრაფიკზე შემთხვევით არჩეული წერტილიდან ox ღერძამდე მანძილი ნაკლები იყოს $7/4$-ზე.

36. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ $f(x) = x^2 - 6x + 11$ და $g(x) = x^2 + 8x - 15$ ფუნქციის გრაფიკებზე შემთხვევით არჩეულ წერტილებს შორის მანძილი ერთზე ნაკლებია.

37. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წრეწირზე შემთხვევით შერჩეული სამი წერტილი ადგენდეს არამახვილკუთხა სამკუთხედს?

38. x და y $[0;2]$ შუალედიდან შემთხვევით აღებული რიცხვებია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ $(x;y)$ წარმოადგენდეს შემდეგი $\begin{cases} x + 2y > 2 \\ 2x + y < 2 \end{cases}$ სისტემის ამონახსნს.

39. x და y ნამდვილი რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობას $|x| \le 1$, $|y| \le 1$. რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული $(x;y)$ წყვილი წარმოადგენდეს $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 1 \\ x^2 + y^2 \le 2 \end{cases}$ სისტემის ამონახსნს.

40. მოცემულია განტოლება $ax = b + 3$. სადაც $a \in [0;5]$ და $b \in [0;7]$. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ განტოლების ფესვი ნაკლები იყოს 1-ზე.

41. ოთახს გააჩნია მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმა, რომლის ზომებია 5 მ, 6 მ, 8 მ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ოთახში მყოფი ჩიტი კუთხის წვეროებიდან დაშორებული იყოს არაუმეტეს 1 მ-ით.

42. ვთქვათ x, y, z $[0;1]$ შუალედიდან შემთხვევით შერჩეული სამი რიცხვია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთი რიცხვი მაინც ამ შუალედის ბოლოდან დაშორებულია არა უმეტეს 0.2 ერთეულით.

43. M წერტილი მდებარეობს კვადრატის გარეთ და მისი მოპირდაპირე წვეროებიდან თანაბრადაა დაშორებული. მანძილი M წერტილიდან კვადრატის უახლოეს წვერომდე d – ს ტოლია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ M წერტილზე გამავალი წრფე გადაკვეთს კვადრატის გვერდს, თუ კვადრატის გვერდის სიგრძეა a.

44. M წერტილი მდებარეობს კვადრატის გარეთ და მისი მოპირდაპირე წვეროებიდან თანაბრადაა დაშორებული. მანძილი M წერტილიდან კვადრატის უახლოეს წვერომდე d – ს ტოლია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სხივი, რომლის სათავეა M წერტილი გადაკვეთს კვადრატის გვერდს, თუ კვადრატის გვერდის სიგრძეა a.

45. კუბში ჩახაზულია ბირთვი, ხოლო ბირთვში კუბი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ კუბიდან შემთხვევით შერჩეული წერტილი არ ეკუთვნოდეს ჩახაზულ კუბს?

46. ბირთვში ჩახაზულია კუბი, ხოლო კუბში ბირთვი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ბირთვიდან შემთხვევით შერჩეული წერტილი არ ეკუთვნოდეს ჩახაზულ ბირთვს?

47. შემთხვევით ირჩევენ წერტილს ბირთვიდან, რომელშიც ჩახაზულია ტეტრაედრი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წერტილი არ არის აღებული ტეტრაედრიდან?

48. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 1; 2; 3; 4; 5 ციფრებით შედგენილი რიცხვები იყოფა 6-ზე.
თუ რიცხვებში ეს ციფრები არ მეორდება და მონაწილეობს ყველა მოცემული ციფრი.

49. მოცემულია $y = x^2 - 4x + 7$ და $y = -x^2 + 10x - 24$ ფუნქციების გრაფიკები. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფე არ გადაკვეთს ამ ფუნქციების გრაფიკებს.

50. მოცემულია $y = x^2 - 2x + \frac{7+4\sqrt{3}}{4}$ და $y = -(x-4)^2 + 28\frac{1}{4}$ ფუნქციების გრაფიკები. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფე არ გადაკვეთს ამ ფუნქციების გრაფიკებს.

§25. ლოგიკის ელემენტები

გამონათქვამი ეწოდება წინადადებას, რომელიც შეიძლება იყოს ჭეშმარიტი ან ყალბი. მაგალითად „თორმეტი ნატურალური რიცხეია", „ზურა სკოლაში წავიდა", „დედამიწას კუბის ფორმა აქვს".

მოწოდება, განმარტება, კითხვა, გამონათქვამებს არ წარმოადგენენ. გამონათქვამებს არ წარმოადგენენ აგრეთვე წინადადებები, რომლებიც შეიცავენ ერთ ან რამდენიმე ცვლადს. მაგალთად, გამონათქვამი არ არის: „ $x>5$ ", „ $x^2-2y+5=0$ ", „ $x^2+x=30$ ". მაგრამ ეს წინადადებები გადაიქცევიან გამონათქვამებად თუ ცვლადის ნაცვლად ჩავსვამთ მათ რაიმე მნიშვნელობას. ასე მაგალითად, თუ პირველ წინადადებაში x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ 7-ს, მივიღებთ ჭეშმარიტ გამონათქვამს, ხოლო თუ – 3-ს მივიღებთ ყალბს. თუ მესამე წინადადებაში x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ 5-ს ან -6-ს მივიღებთ ჭეშმარიტ გამონათქვამს, სხვა ნებისმიერი რიცხვი ამ წინადადებას გადააქცევს ყალბ გამონათქვამად და ა. შ.

რთული გამონათქვამები (დებულებები) მიიღება გამონათქვამებიდან ლოგიკური კავშირების: „ან", „და", „თუ A, მაშინ B ", „მაშინ და მხოლოდ მაშინ"–გამოყენებით.

რთული გამონათქვამების მაგალითებია: „ხვალ წავალ ბიბლიოთეკაში ან სახლში ვიმეცადინებ", „კვირას პარკში გავისეირნებ და წიგნს წავიკითხავ", „თუ ეროვნულ გამოცდებზე მაღალ ქულებს მივიღებ, მაშინ უნივერსიტეტში ჩავირიცხები", „თბილისის დინამო ჩემპიონი გახდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ ბოლო მატჩს არა ნაკლებ სამი ბურთის სხვაობით მოიგებს".

გამონათქვამებს შეერთებულს „ან" კავშირით გამონათქვამთა ჯამი (დიზუნქცია) ეწოდება. ორი A და B გამონათქვამების ჯამი ასე ჩაიწერება $A+B$ (ან $A\vee B$). გამონათქვამთა ჯამი ჭეშმარიტია მაშინ როცა მასში ერთი გამონათქვამი მაინც ან A ან B ჭეშმარიტია (შეადარე პირობას $a\in A\bigcup B$). გამონათქვამთა ჯამი ყალბია თუ ორივე გამონათქვამი ყალბია. მაგალითად „$12:5=3$ ან $2<5$" ჭეშმარიტი გამონათქვამია, ხოლო დებულება „$12:5=3$ ან $2>5$ " ყალბია. შემოვიღოთ აღნიშვნები: თუ A გამონათქვამი ჭეშმარიტია დავწეროთ A = 1, ხოლო თუ მცდარია – A = 0. ამ აღნიშვნებით გამონათქვამი A + B = 1 ნიშნავს, რომ A = 1 ან B = 1 (ცხადია შესაძლებელია ვარიანტიც A = 1 და B = 1). გამონათქვამი A + B = 0 ნიშნავს, რომ A= 0 და B = 0 ე.ი. ორივე გამონათქვამი მცდარია. მაგალითად გამონათქვამი მეცადინეობაზე წიგნს მოიტანს ანა ან ნინო ჩაიწერება შემდეგნაირად: A + B = 1 (სხვანაირად A ∨ B=1), სადაც A არის გამონათქვამი წიგნს მოიტანს ანა, B არის გამონათქვამი წიგნს მოიტანს ნინო. გამონათქვამთა დასახასიათებლად გამოიყენება ე.წ. ჭეშმარიტების ცხრილი, რომელსაც გამონათქვამთა ჯამისათვის შემდეგი სახე აქვს:

A	B	A+B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

გამონათქვამებს შეერთებულს „და" კავშირით. გამონათქვამების ნამრავლი (კონუნქცია) ეწოდება. A და B გამონათქვამების ნამრავლი ასე ჩაიწერება $A\cdot B$ (ან $A\wedge B$). გამონათქვამთა ნამრავლი ჭეშმარიტია მაშინ, როდესაც ორივე A და B გამონათქვამი ჭეშმარიტია, და ყალბია, როცა A და B გამონათქვამებიდან ერთი მაინც ყალბია. მაგალითად, დებულება „$12:4=3$ და $2<5$" ჭეშმარიტია, ხოლო „$12:5=3$ და $2<5$ "–ყალბია. (შეადარე პირობას: $a\in A\bigcap B$ და $a\notin A\bigcap B$). ე.ი. თუ A·B = 1 (A ∧B=1) მაშინ A =

1, B=1, ხოლო თუ A·B = 0 (A ∧B=0) მაშინ A = 0 ანდა B = 0 (ცხადია შესაძლებელია ვარიანტიც (A = 0 , B = 0). გამონათქვამი ხვალ მეცადინეობაზე წიგნებს მოიტანს ანაც და ნინოც ასე ჩაიწერება A·B = 1 (A ∧B = 1) სადაც A არის გამონათქვამი წიგნს მოიტანს ანა, ხოლო B არის გამონათქვამი წიგნს მოიტანს ნინო. გამონათქვამთა ჭეშმარიტების ცხრილს გამონათქვამთა ნამრავლისათვის შემდეგი სახე აქვს.

A	B	A·B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

გამონათქეამის უარყოფა მიიღება "არ" ნაწილაკის გამოყენებით. A გამონათქეამის უარყოფა ასე აღინიშნება $\bar{A}$. მაგალითად, თუ A არის გამონათქეამი – "ხვალ მეცადინეობაზე ქეთინო მოიტანს წიგნს" მისი უარყოფა იქნება გამონათქეამი "ხვალ მეცადინეობაზე ქეთინო წიგნს არ მოიტანს". მოცემული A გამონათქეამის უარყოფა მცდარია თუ A გამონათქვამი ჭეშმარიტია და ჭეშმარიტია, თუ A გამონათქეამი მცდარია. უარყოფის ჭეშმარიტების ცხრილს შემდეგი სახე აქეს;

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

იმპლიკაცია (გამომდინარეობს) ეწოდება ისეთ რთულ გამონათქეამს (დებულებას), რომელსაც აქეს სახე „თუ A მაშინ B“ და ასე ჩაიწერება $A \Rightarrow B$ (იკითხება A-დან გამომდინარეობს B). მაგალითად, თუ A-გამონათქეამია „სამკუთხედი მართკუთხაა“, ხოლო B გამონათქეამია „სამკუთხედის ორი გვერდის კვადრატების ჯამი ტოლია მესამე გვერდის კვადრატის“. ამ ორი გამონათქეამის იმპლიკაცია იქნება „თუ სამკუთხედი მართკუთხაა, მაშინ მისი ორი გვერდის კვადრატების ჯამი ტოლია მესამე გვერდის კვადრატის“.

გამონათქეამების იმპლიკაცია მცდარია მაშინ, როცა A ჭეშმარიტია, ხოლო B მცდარი.

იმპლიკაციის ჭეშმარიტების ცხრილს შემდეგი სახე აქეს:

A	B	A⇒B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ეთქეათ მოცემულია იმპლიკაცია, $A \Rightarrow B$ ამ დებულებასთან დაკავშირებით განიხილება რამდენიმე ახალი დებულება, მაგალითად $A \Rightarrow B$ გამონათქეამის შებრუნებული (კონვერსია) გამონათქეამი ეწოდება გამონათქეამს $B \Rightarrow A$. მაგალითად: თუ აღმოსავლეთ საქართველოში ქარია, მაშინ დასავლეთ საქართველოში წვიმს. ამ გამონათქეამის შებრუნებული გამონათქეამია (კონვერსია) თუ დასავლეთ საქართველოში წვიმს, აღმოსავლეთ საქართველოში ქარია.

რაც შეეხება გამონათქეამს $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$, მას ეწოდება $A \Rightarrow B$ გამონათქეამის საწინააღმდეგო (ინვერსია) გამონათქეამი. მაგალითად: თუ აღმოსავლეთ საქართველოში ქარია, მაშინ დასავლეთ საქართველოში წვიმს. ამ გამონათქეამის საწინააღმდეგო გამონათქეამია (ინვერსია), თუ აღმოსავლეთ საქართველოში ქარი არაა, მაშინ დასავლეთ საქართველოში არ წვიმს.

მოცემული $A \Rightarrow B$ გამონათქეამის კონტრაპოზიცია ეწოდება გამონათქეამს $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$. თუ აღმოსავლეთ საქართველოში ქარია, მაშინ დასავლეთ საქართველოში წვიმს. ამ გამონათქეამის კონტრაპოზიციაა - თუ დასავლეთ საქართველოში არ წვიმს, მაშინ აღმოსავლეთ საქართველოში ქარი არაა.

ორ A და B გამონათქვამს ეწოდება ექვივალენტური (ტოლფასი) გამონათქეამი და დაეწერთ $A \Leftrightarrow B$ ან $A = B$, თუ ისინი ერთდროულად ჭეშმარიტია ან ერთდროულად

მცდარი. მაგალითად: სამკუთხედი მართკუთხაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ერთი გვერდის კვადრატი ტოლია დანარჩენი გვერდების კვადრატების ჯამის.

ექვივალენტური გამონათქვამების ჭეშმარიტების ცხრილს აქვს შემდეგი სახე:

A	B	$A \Leftrightarrow B, A = B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ ორი გამონათქვამის ექვივალენტურობა საჭიროა შევადგინოთ მათი ჭეშმარიტების ცხრილი და დავრწმუნდეთ, რომ ეს ცხრილები ერთმანეთს ემთხვევა.

განვიხილოთ ექვივალენტობის რამდენიმე მაგალითი:

მაგ. 1. $((A \Rightarrow B) = (\overline{A} + B)$. შევადგინოთ ჭეშმარიტების ცხრილი ორივე დებულებისათვის

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

A	B	$\overline{A} + B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

როგორც ეხედავთ ეს ცხრილები ერთმანეთს ემთხვევა.

მაგ.2. თუ გამოვიყენებთ წინა მაგალითის ტოლობას და შემდეგ ტოლობას თუ $A = B$ მაშინ $\overline{A} = \overline{B}$, მივიღებთ $A \Rightarrow B = \overline{A} + B \Rightarrow$ $\overline{A \Rightarrow B} = \overline{\overline{A} + B} = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{B} = A \cdot \overline{B}$ საბოლოოდ გვექნება $\overline{A \Rightarrow B} = A \cdot \overline{B}$. მიღებული ტოლობა ნიშნავს, რომ თუ ჩვენ გვინდა ვაჩვენოთ $\overline{A \Rightarrow B}$ გამონათქვამის ჭეშმარიტობა ე.ი. რომ A-დან არ გამომდინარეობს B საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ A ჭეშმარიტია, ხოლო B მცდარი.

ტავტოლოგია ეწოდება ისეთ გამონათქვამს, რომელიც ყოველთვის ჭეშმარიტია მასში შემავალი ელემენტარული გამონათქვამების მნიშვნელობათა მიუხედავად. მაგალითად ტავტოლოგიებია:

$$A + B \Leftrightarrow B + A$$
$$(A+B)+C \Leftrightarrow A+(B+C)$$

ჭეშმარიტების ცხრილის გამოყენებით მარტივად მტკიცდება შემდეგი ტოლობები:

1. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
2. $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$
3. $\left(\overline{\overline{A}}\right) = A$
4. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
5. $(A + B) \cdot (A + C) = A + B \cdot C$

დავამტკიცოთ პირველი ტოლობა. შევადგინოთ შესაბამისი გამონათქვამების ჭეშმარიტების ცხრილი

A	B	$\overline{A+B}$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

	B	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
	1	0
	0	0
	1	0
	0	1

როგორც ცხრილებიდან ჩანს $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

განსაკუთრებული ყურადღება მივაქციოთ ტოლობას:

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

ამ ტოლობის გამოყენებით მიიღება შემდეგი ტოლობა

$$(A+B)\cdot(C+D)=A\cdot C+A\cdot D+B\cdot C+B\cdot D$$

მიღებული ტოლობა იმას ნიშნავს, რომ თუ გვაქვს ორი გამონათქვამი $A+B=1$ და $C+D=1$ შეგვიძლია მივიღოთ ახალი გამონათქამი ამ ტოლობების გამრავლებით $(A+B)\cdot(C+D)=1$ ან რაც იგივეა $A\cdot C+A\cdot D+B\cdot C+B\cdot D=1$. ე.ი. ჭეშმარიტ გამონათქვამთა ნამრავლი ჭეშმარიტია. ამ მეთოდს ჩვენ გამოვიყენებთ ზოგიერთი ლოგიკური ამოცანის ამოსახსნელად.

ჩამოვწეროთ ზოგიერთი ცნობილი ტოლობა:

$$A+\overline{A}=1$$

$$A\cdot\overline{A}=0$$

$$\overbrace{A+A+A+\cdots+A}^{n}=nA=A$$

$$\overbrace{A\cdot A\cdot A\cdots A}^{n}=A^n=A$$

$$1+1+1+\cdots+1=1$$

$$0+0+0+\cdots+0=0$$

$$1+0=1$$

განვიხილოთ ზოგიერთი ლოგიკური ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები:

ამოცანა 1. ნიკამ, ბექამ, დათომ და გიორგიმ შეჯიბრების შედეგად გაინაწილეს პირველი ოთხი ადგილი. კითხვაზე, თუ რომელმა ბიჭმა რომელი ადგილი დაიკავა სამმა მათგანმა ასეთი პასუხი გასცა:

1. ნიკამ არც პირველი ადგილი დაიკავა და არც ბოლო
2. ბექამ მეორე ადგილი დაიკავა
3. დათო ბოლო არ იყო

რომელმა ბიჭმა რომელი ადგილი დაიკავა?

ამოხსნა. პირობიდან ჩანს, რომ ნიკამ ან მეორე ადგილი დაიკავა ან მესამე. ეს ფაქტი ასე ჩავწეროთ: $N_2+N_3=1$ დანარჩენი პირობები ასე ჩაიწერება

$$B_2=1$$

$$D_1+D_2+D_3=1$$

მივიღეთ ლოგიკურ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} N_2+N_3=1 \\ B_2=1 \\ D_1+D_2+D_3=1 \end{cases}$$

პირველი ტოლობა გავამრავლოთ მეორეზე. მივიღებთ

$$N_2\cdot B_2+N_3\cdot B_2=1$$

ვინაიდან $N_2\cdot B_2=0$ რადგანაც ნიკამ და ბექამ არ შეიძლება ერთდროულად აილოს მეორე ადგილი, ამიტომ მივიღებთ $N_3\cdot B_2=1$. გავამრავლოთ ეს ტოლობა სისტემის მესამე განტოლებაზე, მივიღებთ

$$D_1\cdot N_3\cdot B_2+D_2\cdot N_3\cdot B_2+D_3\cdot N_3\cdot B_2=1$$

ვინაიდან $D_2\cdot B_2\cdot N_3=0$, $D_3\cdot N_3\cdot B_2=0$ მივიღებთ $D_1\cdot N_3\cdot B_2=1$ ე.ი. დათომ აილო პირველი ადგილი, ნიკამ – მეორე, ბექამ – მესამე და გოირგიმ – მეოთხე.

ამოცანა 2. ერთი ექსპერტი ამბობს, რომ ეკლესია ააშენეს ბიზანტიელებმა IX საუკუნეში, მეორე ამტკიცებს, რომ – ქართველებმა VIII საუკუნეში, ხოლო მესამის აზრით ეკლესია ბიზანტიელებს არ აუშენებიათ და ის აშენებულია X საუკუნეში. დამოუკიდებელმა ექსპერტებმა აჩვენეს, რომ თითოეული ექსპერტი სანახევროდ არის მართალი (ანუ ცდება ან თარიღში ან მშენებლის ეროვნებაში). ვინ და როდის ააშენა ეკლესია?

ამოხსნა: შემოვიღოთ აღნიშვნები

1). B გამონათქვამი იყოს ეკლესია ააშენეს ბიზანტიელებმა
2). Q გამონათქვამი იყოს ეკლესია ააშენეს ქართველებმა
3) $\overline{B}$ გამონათქვამი იყოს ეკლესია არ აუშენებიათ ბიზანტიელებს
4). IX გამონათქვამი იყოს ეკლესია აშენდა IX საუკუნეში
5) X გამონათქვამი იყოს ეკლესია აშენდა X საუკუნეში
6) VIII გამონათქვამი იყოს ეკლესია აშენდა VIII საუკუნეში

ამოცანის პირობის თანახმად B + IX = 1

$$Q+VIII=1$$

$$\overline{B}+X=1$$

გადავამრავლოთ პირველი და მეორე ტოლობები, მივიღებთ

$$B\cdot Q+B\cdot VIII+Q\cdot IX+IX\cdot VIII=1$$

ვინაიდან $B\cdot Q = 0$ და $IX\cdot VIII = 0$ გვექნება $B\cdot VIII+Q\cdot IX=1$. მიღებული ტოლობა გადავამრავლოთ მესამე განტოლებაზე. მივიღებთ

$$\overline{B}\cdot B\cdot VIII+\overline{B}\cdot Q\cdot IX+B\cdot VIII\cdot X+Q\cdot IX\cdot X=1$$

ვინაიდან $\overline{B}\cdot B\cdot VIII=0;$ $B\cdot VIII\cdot X=0$ და $Q\cdot IX\cdot X=0$ ამიტომ $\overline{B}\cdot Q\cdot IX=1$ ე.ი. ეკლესია არ აუშენებიათ ბიზანტიელებს,ააშენეს ქართველებმა IX საუკუნეში.

ამოცანები

1. მოცემულია ორი დებულება
   - ზურამ იცის ჭადრაკის თამაში
   - გიამ იცის შაშის თამაში

   რომელია ამ დებულების დიზუნქცია (ჯამი)?
   ა) ზურამ იცის ჭადრაკის თამაში ან გიამ იცის შაშის თამაში
   ბ)ზურამ არ იცის ჭადრაკის თამაში და გიამ არ იცის შაშის თამაში
   გ) ზურამ იცის ჭადრაკის თამაში ან გიამ არ იცის შაშის თამაში
   დ) ზურამ არ იცის ჭადრაკის თამაში და გიამ იცის შაშის თამაში

2. მოცემულია დებულება:
   - ზურას მეგობრებიდან ზოგიერთმა იცის ჭადრაკის თამაში.

   რომელია ამ დებულების უარყოფა?
   ა) ზურას მეგობრებიდან ყველამ იცის ჭადრაკის თამაში
   ბ) ზურას მეგობრებიდან არცერთმა არ იცის ჭადრაკის თამაში
   გ) ზურას მეგობრებიდან ზოგიერთმა არ იცის ჭადრაკის თამაში
   დ) არსებობს ადამიანი ვინც იცის ჭადრაკის თამაში

3. სამართლიანია შემდეგი დებულება
   - ზურას კლასში არის მოსწავლე, რომელსაც არ უყვარს ფეხბურთის თამაში.

   რომელია ამ დებულების უარყოფა?
   ა) ზურას კლასში არცერთ ბავშვს არ უყვარს ფეხბურთის თამაში
   ბ) ზურას კლასში არის ბავშვი რომელსაც უყვარს ფეხბურთის თამაში
   გ) არცერთ ზურას კლასელს არ უყვარს ფეხბურთის თამაში
   დ) ზურას კლასში ყველა ბავშვს უყვარს ფეხბურთის თამაში

4. სამართლიანია შემდეგი ორი დებულება.
   - „მერსედესი" შავი ფერისაა
   - „ოპელი" თეთრი ფერისაა

   რომელია ამ დებულებების კონუნქცია (ნამრავლი)?
   ა) „მერსედესი" შავი ფერისაა და „ოპელი" თეთრია
   ბ) „მერსედესი" შავი ფერისაა ან „ოპელი" თეთრია
   გ) „მერსედესი" შავი ფერის არაა და „ოპელი" არაა თეთრი
   დ) „მერსედესი" შავი ფერის არაა ან „ოპელი" არაა თეთრი

5. სამართლიანია ორი დებულება
   - „მერსედესი" შავი ფერისაა
   - „ოპელი" თეთრი ფერისაა

რომელია ამ ორი დებულების დიზუნქციის უარყოფა?

ა) „მერსედესი“ არაა შავი ფერის ან „ოპელი“ არაა თეთრი ფერის

ბ) „მერსედესი“ შავი ფერისაა და „ოპელი“ თეთრი ფერის

გ) „მერსედესი“ არაა შავი ფერის და „ოპელი“ არაა თეთრი

დ) „მერსედესი“ თეთრი ფერისაა და „ოპელი“ შავი ფერის

6. სამართლიანია ორი დებულება

- ლია ლამაზი გოგოა
- მზია მაღალია

რომელია ამ ორი დებულების კონუნქციის უარყოფა?

ა) ლია ლამაზი არაა ან მზია არაა მაღალი

ბ) ლია ლამაზია ან მზია მაღალია

გ) ლია ლამაზი არაა და მზია მაღალი არაა

დ) ლია მაღალია და მზია ლამაზია

7. მოცემულია დებულება: „რიცხვი იყოფა 2-ზე“ და „ან a მეტია b-ზე ან b მეტია c-ზე“.

რომელია ამ დებულების უარყოფა?

ა) „რიცხვი არ იყოფა 2-ზე“ და „ b მეტია a-ზე ან c მეტია b-ზე“

ბ) „რიცხვი არ იყოფა 2-ზე“ ან „ a არაა მეტი b-ზე და b არაა მეტი c-ზე“

გ) „რიცხვი იყოფა 2-ზე“ და „ b მეტია a-ზე და c ნაკლებია b-ზე“

დ) „რიცხვი არ იყოფა 2-ზე“ და „ b ნაკლებია a-ზე და c ნაკლებია b-ზე“

8. მოცემულია დებულება: “ „ზურას ჰყავს „მერსედესი““ ან „დათოს შავი - „ოპელი“ და გიას - თეთრი „ბმე“““

რომელია ამ დებულების უარყოფა?

ა) „ზურას არ ჰყავს „მერსედესი““ და „დათოს ჰყავს შავი „ოპელი““, ასევე “გიასაც ჰყავს თეთრი „ბმვ.“““

ბ „ზურას ჰყავს „მერსედესი“ და „დათოს არ ჰყავს თეთრი „ოპელი“ ან “გიას არ ჰყავს შავი „ბმვ“““

გ) „ზურას არ ჰყავს „მერსედესი““ და „დათოს ჰყავს „ბმვ““ ან “გიას ჰყავს „ოპელი“.“

დ) „ზურას არ ჰყავს „მერსედესი““და „ან გიას არ ჰყავს შავი „ოპელი““ან “გიას არ ჰყავს თეთრი „ბმე“““

9.მოცემულია დებულება: „თუ რიცხვი იყიოფა 4-ზე მაშინ ის იყოფა 2-ზე.“

რომელია ამ დებულების საწინააღმდეგო დებულება?

ა) თუ რიცხვი იყიფა 4-ზე, მაშინ ის არ იყოფა 2-ზე

ბ) თუ რიცხვი არ იყოფა 4-ზე, მაშინ ის არ იყოფა 2-ზე

გ) თუ რიცხვი არ იყოფა 4-ზე, მაშინ ის იყოფა 2-ზე

დ) თუ რიცხვი იყოფა 2-ზე, მაშინ ის იყოფა 4-ზე

10. მოცემულია დებულება: „თუ სამკუთხედში სიმაღლე დაემთხვა მედიანას, მაშინ ის ტოლფერდაა.“

რომელია ამ დებულების საწინააღმდეგო დებულება?

ა) თუ სამკუთხედში სიმაღლე არ დაემთხვა მედიანას ის ტოლფერდაა

ბ) თუ სამკუთხედში სიმაღლე დაემთხვა მედიანას მაშინ ის ტოლფერდა არაა

გ) თუ სამკუთხედში სიმაღლე არ დაემთხვა მედიანას მაშინ ის ტოლფერდა არაა

დ) თუ სამკუთხედი ტოლფერდა არაა, მაშინ შეიძლება სიმაღლე დაემთხვას მედიანას

11. მოცემულია დებულება: „თუ სამკუთხედში ორი კუთხე ტოლია, მაშინ მისი ერთ-ერთი სიმაღლე დაემთხვევა ბისექტრისას. რომელია ამ დებულების შებრუნებული დებულება?

ა) შეიძლება სამკუთხედში სიმაღლე დაემთხვეს ბისექტრისას და მისი ორი კუთხე არ იყო ტოლი

ბ) არსებობს ისეთი სამკუთხედი, რომლის სამივე კუთხე ტოლია და მასში სიმაღლე არ დაემთხვეს ბისექტრისას

გ) თუ სამკუთხედში სიმაღლე დაემთხვა ბისექტრისას მაშინ მასში ორი კუთხე ტოლია

დ) არსებობს ისეთი სამკუთხედი, რომელშიც სიმაღლე დაემთხვა ბისექტრისას და მისი კუთხეები ტოლია $30°;50°;100°$

12. იტალიის, ბრაზილიის, ინგლისის და არგენტინის ნაკრებებმა მსოფლიო საფეხბურთო ჩემპიონატში პირველი ოთხი ადგილი დაიკავეს. კითხვაზე, თუ რომელმა გუნდმა რომელი ადგილი დაიკავა სამმა გულშემატკივარმა ასე უპასუხა:

ა) პირველმა თქვა, რომ იტალიის ნაკრები არც პირველი იყო და არც მეოთხე

ბ) მეორემ თქვა, რომ ბრაზილიის ნაკრებმა მეორე ადგილი დაიკავა

გ) მესამემ თქვა, რომ არგენტინის ნაკრები მეოთხე არ იყო

დაადგინეთ რომელმა ნაკრებმა, რომელი ადგილი დაიკავა, თუ ცნობილია რომ სამივე გულშემატკივრის პასუხი სწორია.

13. კითხვაზე თუ რა ფორმით (მაისურები და ბუცები) თამაშობდნენ მსოფლიო ჩემპიონატზე ფეხბურთში ერთ-ერთი ნაკრების ფეხბურთელები სამმა გულშემატკივარმა ასე უპასუხა:

ა) პირველმა თქვა: ლურჯი მაისურებით და ადიდასის ბუცებით

ბ) მეორემ თქვა: ზოლებიანი მაისურებით და პუმას ბუცებით

გ) მესამემ თქვა: თეთრი მაისურებით და არა პუმას ბუცებით

რა ფორმით თამაშობდა ნაკრები თუ ცნობილია, რომ ყოველი პასუხი სანახევროდ სწორია.

14. დედის შეკითხვაზე ვინ ჩაამტვრია ფანჯარა ბავშვებმა ასე უპასუხეს:

გია: " დათომ ჩაამტვრია"

დათო: " ზურამ ჩაამტვრია"

ზურა: " დათო ტყუის, როცა ამბობს, რომ ფანჯარა მე ჩავამტვრიე"

გია: "ფანჯარა მე არ ჩამიმტვრევია"

ცნობილია, რომ ამ ბავშვებიდან მხოლოდ ერთმა თქვა სიმართლე. ვინ ჩაამტვრია ფანჯარა?

15. სამ მეგობარს ზურას, დათოს და გიას ყავს სხვადასხვა მარკის მანქანა: ფორდი, ოპელი და მერსედესი. მათმა ნაცნობმა თქვა:

ა) ზურას ჰყავს მერსედესი

ბ) დათოს არა ჰყავს მერსედესი

გ) გას არა ჰყავს ოპელი

ცნობილია, რომ ამ სამი წინადადებიდან ერთი ჭეშმარიტია ორი კი მცდარი. დაადგინეთ ვის რომელი მარკის მანქანა ყავს.

16. ხუთი მეგობარი სანადიროდ წავიდა. ნადირობიდან დაბრუნების შემდეგ თითოეულმა თქვა:

თემური: " დათომ მოკლა იხვი, მე კი დათვი"

ზურა: "მე მოვკალი მელა გიამ, კი იხვი"

დათო: " მე მოვკალი მელა, თემურმა კი მოკლა კურდღელი"

გია: " მე მოვკალი იხვი, კახამ კი მგელი"

კახა: " მე მოვკალი მგელი, ზურამ კი დათვი"

ცნობილია, რომ თითოეული პასუხი სანახევროდ სწორია. დაადგინეთ ვინ რა მოინადირა.

17. ოთხი მოსწავლე ლია, ლევანი, დათო და დალი ერთმანეთს უზიარებენ შთაბეჭდილებას მათემატიკის საკონტროლო წერის შემდეგ, რომელზედაც ყველა მოსწავლეს ერთიდაიგივე ამოცანა მისცეს. ლიამ თქვა: მე შემხვდა ამოცანა ხუთკუთხედებზე, ლევანმა თქვა მე – ფიგურაზე, რომელსაც გააჩნია 9 დიაგონალი, დათომ თქვა მე – სამკუთხედზე, ხოლო დალიმ გაიხსენა, რომ მას შეხვდა ამოცანა ექვსკუთხედზე. დაადგინეთ რა ფიგურას ეხებოდა ამოცანა თუ ცნობილია, რომ ისევე როგორც ორი ბიჭიდან ასევე ორი გოგონადან მხოლოდ ერთი ამბობს სიმართლეს.

18. ოთხ მოსწავლეს დაავალეს ბარათის მიტანა ერთიდაიგივე ადრესატთან, მაგრამ ოთხივეს დაავიწყდა მისამართი. I მოსაწავლემ თქვა, რომ სახლის ნომერია 9, II თქვა: მე

მახსოვს, რომ სახლის ნომერი მარტივი რიცხვია, III თქვა: სახლის ნომერი ლუწი რიცხვია, ხოლო IV-ის აზრით სახლის ნომერია 15. დაადგინეთ სახლის ნომერი თუ ცნობილია, რომ I და II მოსწავლიდან ისევე როგორც III და IV მოსწავლიდან მხოლოდ ერთი იხსენებს ნომერს სწორად.

19. ლელამ თქვა: ვახტანგს ჰყავს "ოპელი", ხოლო დათოს – ველოსიპედი, ვახტანგმა თქვა: ლელას ჰყავს "ბმვ", ხოლო მე – "ოპელი", ლევანმა თქვა: დათოს ჰყავს "აუდი", ხოლო ლელას -"ბმვ", ნინომ თქვა მე მყავს "ბმვ", ხოლო ლელას – "მერსედესი", დათომ თქვა ლევანს ჰყავს "ბმვ", ხოლო ვახტანგს – " ველოსიპედი. დაადგინეთ ვის ჰყავს "მერსედესი" თუ ცნობილია, რომ ყველა პასუხში მხოლოდ ერთია სწორი.

20. ხუთმა მეგობარმა გადაწყვიტა კონცერტზე წასასვლელად ფულის შეგროვება. I მეგობარმა თქვა: მეორე მეგობარს აქვს 6 ლარი და მეოთხეს – 8 ლარი, II მეგობარმა თქვა: პირველს აქვს 20 ლარი და მესამეს 6, III მეგობარმა თქვა: მეორეს აქვს 6 ლარი და პირველს - 2, IV მეგობარმა თქვა: მე მაქვს 2 ლარი და მეხუთეს - 20, V მეგობარმა თქვა: მესამეს აქვს 4 ლარი და მეოთხეს – 8. დაადგინეთ ვის რამდენი ლარი აქვს, თუ ცნობილია, რომ თითოეული მეგობრის ორი პასუხიდან მხოლოდ ერთია სწორი.

საკონტროლო სამუშაოს ნიმუშები

სამუშაო №1

1. გამოთვალეთ $\frac{2,(3)+3,(12)}{2,(01)}\cdot\frac{163}{180}-\left(2\frac{1}{9}-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{9}{119}$

ა) 3 ბ) 4 გ) 6 დ) 7

2. ჩაწერეთ ორობით პოზიციურ სისტემაში ათობით პოზიციურ სისტემაში ჩაწერილი რიცხვი 95.

ა) 1111101 ბ) 1011111 გ) 1101111 დ) 1010111

3. გამოთვალეთ

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}$$

ა) 3 ბ) $2\sqrt{2}$ გ) $2\sqrt{2}-1$ დ) 2

4. დაალაგეთ ზრდადობის მიხედვით

$\sin 65^\circ, \cos 20^\circ, \frac{\sqrt{3}}{2}, tg 60^\circ$

ა) III,I,II,IV ბ) I,III,IV,II გ) I,II,III,IV დ) IV,II,I,III

5. ცნობილია, რომ x და y-ს აქვთ საპირისპირო ნიშნები. ამასთან $x^2+3xy-4y^2=0$.

გამოთვალეთ $\frac{7x-3y}{2x-23y}$

ა) 2 ბ) 3 გ) 1 დ) 0.5

6. ამოხსენით განტოლება $5x^2-7\sqrt{x^2}+2=0$

ა) ±1;±0.4 ბ) ±1 გ) ±0.4 დ) 1; 0.4

7. გამოთვალეთ $a^{50}+\frac{1}{a^{50}}$, თუ $a^{25}+\frac{1}{a^{25}}=7$

ა) 49 ბ) 47 გ) 14 დ) 26

8. პირველმა მგზავრმა პირველ საათში გაიარა 10 კმ, ხოლო ყოველ შემდეგ საათში გადიოდა 0.2 კმ-ით ნაკლებს. მეორე მგზავრმა პირველ საათში გაიარა 6 კმ, ხოლო ყოველ შემდეგ საათში გადიოდა 0.1 კმ-ით მეტს. რამდენ საათში იქნება მეორე მგზავრის სიჩქარე მეტი პირველი მგზავრის სიჩქარეზე?

ა) 16 სთ ბ) 14 სთ გ) 15 სთ დ) 10 სთ

9. შეასრულეთ მოქმედება $\frac{A_{10}^2+A_{10}^3}{C_{10}^2}$.

ა) 42 ბ) 18 გ) 30 დ) 48

10. შემდეგი სამი რიცხვი $1+\lg x$, $3\lg x+1$ და 11, მოყვანილი თანმიმდევრობით ადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას. იპოვეთ ამ პროგრესიის სხვაობა.

ა) 3 ბ) 5 გ) 10 დ) 6

11. შემდეგი სამი რიცხვი $\left(\sqrt{2}\right)^{x+1}$, $3\cdot 4^{x-2}$ და 6^{x-1} მოყვანილი თანმიმდევრობით ადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას. იპოვეთ ამ რიცხვების ჯამი.

ა) 50 ბ) 52 გ) 56 დ) 60

12. იპოვეთ x და y თუ სამართლიანია ტოლობა $2\vec{a}+3\vec{b}=5\vec{c}$, სადაც $\vec{a}(2;3)$, $\vec{b}(5;y)$, $\vec{c}(x;4)$.

ა) 3,8 და $4\frac{2}{3}$ ბ) 2,8 და $2\frac{2}{3}$ გ) 3,8 და $2\frac{2}{3}$ დ) 3,6 და $4\frac{2}{3}$

13. გამოთვალეთ $\log_{200}5$, თუ $\lg 2=m$

ა) $\frac{1-m}{2+m}$ ბ) $\frac{2+m}{1-m}$ გ) $\frac{m+1}{m-2}$ დ) $\frac{m-1}{m-2}$

14. $R=\frac{150}{\pi}$ მ რადიუსიან წრეწირზე ერთიდაიგივე წერტილიდან ერთიდაიგივე მიმართულებით მოძრაობას იწყებს ორი სხეული. პირველი მათგანის სიჩქარეა 35 მ/წთ, ხოლო მეორის – 20 მ/წთ. რამდენ წუთში დაეწევა პირველი სხეული მეორეს?

ა) 25 წთ ბ) 30 წთ გ) 15 წთ დ) 20 წთ

15. გამოთვალეთ მანძილი $y-4x-3=0$ და $y-3x+2=0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილიდან ამ წერტილის კოორდინატთა სისტემის სათავის მიმართ სიმეტრიულ წერტილამდე.

ა) $2\sqrt{401}$ ბ) $2\sqrt{305}$ გ) $2\sqrt{314}$ დ) $2\sqrt{159}$

16. ამოხსენით განტოლება $\log_5\left(x^2-4x-7\right)-\log_5\left(2x-15\right)=0$

ა) 2; 4 ბ) ამონახსნი არა აქვს გ) 10; 12 დ) 10; 8

17. მართკუთხედის გვერდები გაზარდეს 20 % -ით. რამდენი პროცენტით გაიზარდა მისი პერიმეტრი?

ა) 40 % ბ) 20 % გ) 80 % დ) 60 %

18. $\frac{117}{20}$ სმ^3 მოცულობის ნედლეული იწონის 12 გ-ს. რამდენ გრამს აიწონის 19.5 სმ^3 მოცულობის იგივე ნედლეული?

ა) 40 გ ბ) 36 გ გ) 42 გ დ) 38 გ

19. მე და შენ ერთად 90 წლის ვართ. ახლა მე სამჯერ მეტი წლისა ვარ, ვიდრე შენ იყავი მაშინ, როცა მე ვიყავი იმდენი წლის რამდენი წლისაც ახლა ხარ შენ. რამდენი წლისა ვარ მე?

ა) 48 წ ბ) 54 წ გ) 52 წ დ) 56 წ

20. იპოვეთ $|x-1|-|x+5|<0$ უტოლობის უმცირესი მთელი ამონახსნი

ა) 2 ბ) 1 გ) -2 დ) -1

21. 60^0-იან კუთხეში ჩახაზულია წრეწირები ისე, რომ ისინი ეხებიან როგორც კუთხის გვერდებს ასევე წყვილწყვილად ერთმანეთს. ერთ-ერთი წრეწირის რადიუსი ტოლია 1 სმ-ის. რამდენი წრეწირია ჩახაზული კუთხეში, თუ მათი რადიუსების ჯამი ტოლია $40\frac{4}{9}$ სმ-ის.

ა) 8 ბ) 7 გ) 6 დ) 10

22. ამოხსენით განტოლება $|x-1|^{|x+1|}-(x-1)^2=0$

ა) -3; 1; 2 ბ) -3; 0; 1; 2 გ) -3. დ) -3; 2

23. იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე $y=\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}\cdot\sqrt{2x-x^2}$

ა) $[0;2]$ ბ) $(-\infty;-1)\cup[3;+\infty)$ გ) განსაზღვრის არე არ გააჩნია დ) $[3;+\infty)$

24. კონუსის მსახველი 10 სმ-ის ტოლია, ხოლო ფუძის წრეწირის რადიუსი – 6 სმ-ის. ფუძის სიბრტყიდან რა მანძილზე უნდა გავატაროთ მკვეთი სიბრტყე, რომ მან შუაზე გაყოს კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

ა) $8-4\sqrt{2}$ სმ ბ) $8-2\sqrt{2}$ სმ გ) $8-3\sqrt{2}$ სმ დ) 4 სმ

25. შეასრულეთ მოქმედება ორობით სისტემაში $1011\cdot1001$.

ა) 100011 ბ) 1010011 გ) 1000011 დ) 1100011

26. წესიერი სამკუთხედის ფუძეზე, როგორც გვერდზე სამკუთხედის მხარეს აგებულია მართკუთხედი, რომლის სიგანე ორჯერ ნაკლებია სამკუთხედის გვერდზე. იპოვეთ სამკუთხედის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია მართკუთხედის გარეთ, თუ სამკუთხედის გვერდის სიგრძე 2 სმ.

ა) $5\sqrt{3}-8$ სმ^2 ბ) $3\sqrt{3}-3$ სმ^2 გ) $4\sqrt{3}-6$ სმ^2 დ) $2\sqrt{3}-3$ სმ^2

27. გამოთვალეთ ტრაპეციაზე შემოხაზული წრეწირის ფართობის შეფარდება ტრაპეციის ფართობთან თუ ცნობილია, რომ ტრაპეციის დიაგონალები წარმოადგენენ მისი ფუძის კუთხეების ბისექტრისებს, ხოლო ტრაპეციის ერთ ერთი კუთხე 60^0 -ის ტოლია.

ა) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ ბ) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ გ) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ დ) $\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$

28. წესიერი ექვსკუთხედის გვერდი ტოლია $3\sqrt{3}$ სმ-ის. ამ ექვსკუთხედის შიგნით აღებული წერტილიდან მის ხუთ გვერდამდე მანძილების ჯამი 22 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან მეექვსე გვერდამდე (მანძილი წერტილიდან გვერდამდე ეწოდება უმოკლეს მანძილს ამ გვერდამდე ან მის გაგრძელებამდე).

ა) 7 სმ ბ) 6 სმ გ) 5 სმ დ) 4 სმ

29. იპოვეთ $2x+1$, თუ x წარმოადგენს $C_{2x+5}^{x+2}=C_{2x+5}^{2x+1}$ განტოლების მაქსიმალურ ფესვს.

ა) 6 ბ) 4 გ) 5 დ) 3

30. რგოლი შექმნილია 3 სმ და 1 სმ რადიუსიანი კონცენტრული წრეებით. შემთხვევით ირჩევენ წერტილს დიდი წრიდან. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წერტილი მოხვდება რგოლში.

ა) $\frac{7}{9}$ ბ) $\frac{8}{9}$ გ) $\frac{5}{9}$ დ)) $\frac{4}{9}$

31. წიგნის თაროზე დასალაგებელია 20 წიგნი, რომელთა შორის 2 წიგნი მათემატიკურია. რამდენნაირად შეიძლება ამის გაკეთება, თუ მათემატიკის წიგნები უნდა განლაგდნენ ერთმანეთის გვერდიგვერდ?

ა) 19! ბ) 20! გ) 20!-19! დ) 2·19!

32. ამოხენით განტოლება $2\sin x+3\cos x=3$

33. ABC სამკუთხედში $AB = 8$ სმ, $BC = 6$ სმ და $AC = 10$ სმ. იპოვეთ მანძილი სამკუთხედის A წვეროდან მასში ჩახაზული წრეწირის ცენტრამდე.

34. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი $M_0(3;4)$ წერტილიდან $2y-3x+4=0$ წრფემდე.

35. ამოხსენით უტოლობა $\left|3-|3\cdot 2^x-1|\right| \le 1$.

36. ამოხსენით უტოლობა $\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x+8\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x-6<0$

37. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი 3 სმ-ია. გვერდითი ზედაპირის ფართობი კი – 18 სმ^2-ია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი წიბოს დახრის კუთხე ფუძის სიბრტყისადმი.

38. ABC სამკუთხედში გავლებულია BK მედიანა და AD ბისექტრისა, რომლებიც იკვეთებიან M

წერტილში. $KMDC$ ოთხკუთხედის ფართობის შეფარდება სამკუთხედის ფართობთან ტოლია $\frac{1}{3}$. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AC = 10$ სმ.

39. A და B წერტილები მდებარეობენ შესაბამისად 60^0-იანი ორწახნაგა კუთხის P და Q წახნაგებზე. A წერტილი ამ კუთხის წიბოდან დაშორებულია სამჯერ მეტი მანძილით ვიდრე B წერტილი. მანძილი ამ წერტილების გეგმილებს შორის აღნიშნულ წიბოზე 1 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ A და B წერტილების დაშორებები ორწახნაგა კუთხის წიბოდან, თუ AB მონაკვეთი დახრილია Q სიბრტყისადმი $\alpha = arctg9$ კუთხით.

40. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის წიბო ტოლია 4 სმ-ის. ფუძის AC დიაგონალის A და C ბოლოებიდან გამომავალ AD, AB, AA_1 და $CD, CB; CC_1$ წიბოებზე გადაზომილია $AP = AQ = AM = 1$ სმ-ს და $CE = CF = CG = 1$ სმ-ს მონაკვეთები. იპოვეთ კუთხე P, Q, M და E, F, G წერტილებზე გამავალ სიბრტყეებს შორის.

სამუშაო № 2

1. რაღაც რიცხვის 7-ზე გაყოფით მიიღება ნაშთი 3. რა ნაშთი მიიღება ამ რიცხვის კვადრატის 7-ზე გაყოფით?
ა) 3   ბ) 6   გ) 4   დ) 2

2. რა ციფრით ბოლოვდება რიცხვები

$$3^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}} \quad \text{და} \quad 2^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}$$

თუ ხარისხის მაჩვენებელში 2 –ანების და 3-ანების რაოდენობაა ათ-ათი.
ა) 3 და 8   ბ) 1 და 4   გ) 7 და 6   დ) 1 და 8

3. გადაიყვანეთ ათობით პოზიციურ სისტემაში ორობით პოზიციურ სისტემაში ჩაწერილი რიცხვი 1100101.
ა) 101   ბ) 110   გ) 101   დ) 1101

4. გამოთვალეთ $\left(\frac{x^2+y^2}{xy}-\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{x+y}{2x-y}$ თუ $x=\sqrt{2}+1$ და $y=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

ა) 3   ბ) $2\sqrt{2}$ გ) 2   დ) $3\sqrt{2}$

5. დაალაგეთ ზრდადობის მიხედვით $\sqrt[5]{5}; \sqrt[6]{6}; \sqrt[3]{3}; \sqrt{2}$.
ა) II ,I, IV ,III   ბ) I, II ,IV ,III   გ) IV, III, I, II   დ) IV, II, III, I

6. შეასრულეთ მოქმედება $\frac{101-91}{81}-80$.

ა) 1 ბ) 4 გ) 3 დ) 7

7. გამოთვალეთ a^3+b^3 თუ $a+b=4$ და $ab=2\sqrt{3}$

ა) $20+\sqrt{3}$ ბ) $64-24\sqrt{3}$ გ) $10+8\sqrt{3}$ დ) $6+4\sqrt{3}$

8. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $7;6\frac{1}{3};5\frac{2}{3};\cdots$ იპოვეთ პირველი -10 –ზე ნაკლები წევრის ნომერი

ა) 26 ბ) 29 გ) 27 დ) 28

9. იპოვეთ y, თუ ცნობილია, რომ $\vec{a}(5;\ 10)$ და $\vec{b}(1;y)$ ვექტორები კოლინეარულია.

ა) 3 ბ) 4 გ) 5 დ) 2

10. ამოხსენით განტოლება $3|x+1|=\sqrt{x^2+2x+1}+2$.

ა) 0; 1 ბ) 0; -2 გ) 0; -1 დ) 0; -3

11. ამოხსენით განტოლება $\left(\sqrt[x]{2\sqrt[x]{4}}\right)^{x-1}=0.25$

ა) -1; $-\frac{2}{3}$ ბ) -2; $-\frac{1}{3}$ გ) -1; $\frac{2}{3}$ დ) -3; $-\frac{1}{2}$

12. იპოვეთ $y=-4x^2+6x+3$ ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა $\left[-\sqrt{2};\sqrt{5}\right]$ შუალედში.

ა) $-5-6\sqrt{2}$ ბ) $-17+6\sqrt{2}$ გ) $-6-6\sqrt{2}$ დ) $-10-\sqrt{2}$

13. გამოთვალეთ $\cos 2^\circ$ თუ $\cos 1^\circ=m$.

ა) $2m$ ბ) $2m^2-1$ გ) $2m-1$ დ) m^2-1

14. გამოთვალეთ $\log_{\sqrt{2}}7+\log_{\sqrt{2}}6-\log_2 441$

ა) 1 ბ) 4 გ) 2 დ) 3

15. $R=\frac{100}{\pi}$ მ რადიუსიან წრეწირზე ერთი წერტილიდან ერთდროულად ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებით მოძრაობა დაიწყო ორმა სხეულმა. პირველის სიჩქარე იყო 28 მ/წთ, ხოლო მეორის – 12 მ/წთ. რამდენ წუთში შეხვდებიან ეს სხეულები ერთმანეთს?

ა) 8 წთ ბ) 6 წთ გ) 5 წთ დ) 10 წთ

16. იპოვეთ მანძილი $M_0(4;5)$ წერტილიდან ორი $y=2x+1$ და $y=3x-1$ წრფეების გადაკვეთის წერტილამდე.

ა) 4 ბ) 2 3) 3 დ)

17. ამოხსენით განტოლება $\sqrt{x^2-5x-2}=\sqrt{x-10}$.

ა) 2; 4 ბ) 2; 10 გ) 4; 10 დ) ამონახსნი არა აქვს

18. მართკუთხედის გვერდები გაზარდეს 20 %-ით, რამდენი პროცენტით გაიზრდება მართკუთხედის ფართობი?

ა) 44 % ბ) 40 % გ) 20 % დ) 30 %

19. წრეწირში ჩახაზულია მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის მახვილი კუთხე 30° -ია. უდიდესი კათეტის მიერ შექმნილ მცირე სეგმენტში ჩახაზულია უდიდესი წრეწირი.

იპოვეთ მოცემული წრეწირის რადიუსის შეფარდება სეგმენტში ჩახაზული წრეწირის რადიუსთან.

ა) 5 ბ) 3 გ) 4 დ) 2

21. გამოთვალეთ $3\sin 2\alpha - 5\cos 2\alpha$, თუ $tg\alpha = \frac{1}{2}$

ა) -0.6 ბ) -0.8 გ) −0.4 დ) 0.2

22. აგორებენ ერთ კამათელს. იპოვეთ მარტივი რიცხვების ამოსვლის ალბათობა.

ა) $\frac{1}{3}$ ბ) $\frac{1}{2}$ გ) $\frac{1}{4}$ დ) $\frac{1}{6}$

23. ამოხსენით განტოლება $\sqrt[3]{(x-2)^{2x+1}} = x-2$

ა) 1; 2; 3 ბ) 1 გ) 2; 3 დ) 4

24. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი კოორდინატთა სათავიდან $y = x^2 - 3x + 7$ და $y = 4x + 1$

ფუნქციების გრაფიკების გადაკვეთის წერტილამდე.

ა) $3\sqrt{3}$ ბ) $2\sqrt{6}$ გ) $\sqrt{23}$ დ) $\sqrt{26}$

25. იპოვეთ $y = \frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{x-3}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ა) $(1;3)\cup(3;+\infty)$ ბ) $(1;3)\cup(3;6)$ გ) $(1;6)$ დ) $(-\infty;1)\cup(6;+\infty)$

26. კონუსის მსახველი ტოლია 13 სმ-ის, ხოლო ფუძის წრეწირის რადიუსი 5 სმ-ია. ფუძის სიბრტყიდან რა მანძილზე უნდა გავავლოთ ფუძის პარალელური მკვეთი სიბრტყე, თუ ცნობილია, რომ იგი კონუსის მოცულობას შუაზე ყოფს.

ა) $12-8\sqrt[3]{2}$ სმ ბ) $12-3\sqrt[3]{2}$ სმ გ) $12-6\sqrt[3]{4}$ სმ დ) $6-3\sqrt[3]{4}$ სმ

27. 60^0- იან კუთხეში ჩახაზულია ორი ტოლი, R = 3 სმ რადიუსიანი წრეწირი ისე, რომ თითოეული მათგანი ეხება კუთხის ერთ გვერდს და ასევე ერთმანეთს გარედან. მათ ცენტრებზე გამავალი წრფე კუთხიდან ჩამოჭრის ტოლფერდა სამკუთხედს. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი რომელიც უმცირესია იმ წრეწირებს შორის რომლებიც ეხება აღნიშნულ წრეწირებს და კუთხის გვერდებს.

ა) 2 სმ ბ) $\sqrt{3}+1$ სმ გ) $\sqrt{3}$ სმ დ) 3 სმ

28. წესიერი სამკუთხედის გვერდი ტოლია $4\sqrt{3}$ სმ-ის. სამკუთხედის შიგნით აღებულია M წერტილი, რომლიდანაც მანძილები სამკუთხედის ორ გვერდამდე ტოლია შესაბამისად 1.5 სმ-ის და 2.5 სმ-ის. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან სამკუთხედის მესამე გვერდამდე.

ა) 3.5 სმ ბ) 2 სმ გ) 2.5 სმ დ) 3 სმ.

30. ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს. მათ ცენტრებზე გამავალი წრფე ამ წრეწირების საერთო გარე მხებთან ადგენს 60^0-იან კუთხეს. იპოვეთ დიდი წრეწირის რადიუსის შეფარდება პატარა წრეწირის რადიუსთან.

ა) $3+5\sqrt{3}$ ბ) $5+4\sqrt{3}$ გ) $7+4\sqrt{3}$ დ) $6+2\sqrt{3}$

31. გვაქეს 1 ლარიანი, 2 ლარიანი და 5 ლარიანი, სულ 8 ცალი კუპიურა. შეგვიძლია თუ არა ყველა ამ კუპიურის გამოყენებით დავახურდავოთ 28 ლარი.

32. არის თუ არა $3\sqrt{2}x^2 - \left(\sqrt[3]{3}+1\right)\sqrt{2}x - \sqrt[6]{6} = 0$ განტოლების უდიდესი ფესვი მეტი $\frac{\sqrt[5]{5}+1}{6}$ რიცხვზე?

33. ABC სამკუთხედის გვერდებია $AB = 2+2\sqrt{3}$ სმ., $BC = 6+2\sqrt{3}$ სმ. და $AC = 4+4\sqrt{3}$ სმ. იპოვეთ A წვეროსთან მდებარე სამკუთხედის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის გარეთ.

34. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი $M_0(4;5)$ წერტილიდან $y = \frac{1}{2}x$ წრფემდე.

35. ამოხსენით უტოლობა $log^2{}_2\, 2x - 4 log_4 x - 4 < 0$

36. მოცემულია ABC სამკუთხედი, რომლის გვერდებია $AB = 5$ სმ, $BC = 8$ სმ, $AC = 6$ სმ. A წვეროდან გავლებულია AD სიმაღლე, რომლის გაგრძელებაზე შერჩეულია M წერტილი ისე, რომ ამ წერტილზე გავლებული წრფის მიერ ამ სამკუთხედის გადაკვეთის ალბათობა 0,5 ტოლია. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის BC გვერდამდე.

37. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი 2 სმ-ის ტოლია. გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია 60^o-იანი კუთხით. იპოვეთ მანძილი ფუძის წვეროდან პირამიდის წახნაგამდე.

38. ABC სამკუთხედში გავლებულია BK მედიანა და AD ბისექტრისა, რომლებიც იკვეთებიან M წერტილში. იპოვეთ $KMDC$ ოთხკუთხედის ფართობის შეფარდება ABC სამკუთხედის ფართობთან, თუ $AB = 4$ სმ-ს და $AC = 6$ სმ-ს.

39. A და B წერტილები მდებარეობენ 30^o-იანი ორწახნაგა კუთხის P და Q წახნაგებზე. მანძილი ამ წერტილებიდან კუთხის წიბომდე შესაბამისად ტოლია $AA_1 = \frac{10\sqrt{2}}{3}$ სმ - ის, $BB_1 = 2$ სმ-ის. იპოვეთ კუთხე AB მონაკვეთსა და Q წახნაგს შორის, თუ $A_1B_1 = 4$ სმ-ს.

40. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის წიბო ტოლია 2 სმ-ის. კუბის AC დიაგონალის A და C ბოლოებიდან გამომავალ AD, AB, AA_1 და C_1B_1, C_1D_1, C_1C წიბოებზე გადაზომილია $AP = AQ = AM = 1$ სმ-ს და $C_1E = C_1F = C_1G = 1$ სმ-ს მონაკვეთები. იპოვეთ მანძილი P, Q, M და E, F, G წერტილებზე გამავალ სიბრტყეებს შორის.

სამუშაო №3

1. რას უდრის სხვაობა უდიდეს სამნიშნა რიცხვსა და უმცირეს სამნიშნა რიცხვს შორის, თუ პირველი 7-ის ჯერადია, ხოლო მეორე 6-ის.

ა) 892 ბ) 890 გ) 902 დ) 906

2. შეადარეთ ორობით პოზიციურ სისტემაში ჩაწერილი რიცხვები: $a = 11001$ და $b = 101111$.

ა) $a < b$ ბ) $a = b$ გ) $a > b$ დ) ვერ შევადარებთ

3. გამოთვალეთ $x^3 + y^3$, თუ $x + y = 7$ და $xy = 5$

ა) 85 ბ) 75 გ) 105 დ) 238

4. დაალაგეთ რიცხვები ზრდადობის მიხედვით $\sqrt{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{4}; \sqrt[3]{3}$

ა) I; II; IV; III ბ) II; I; III; IV გ) IV; I; II; III დ) III; I; IV; II

5. a და b ურთიერთმარტივი რიცხვებია. a რიცხვს გააჩნია 10 გამყოფი, ხოლო b-ს -6 გამყოფი. რამდენი გამყოფი გააჩნია ab-ს.

ა) 10 ბ) 16 გ) 30 დ) 60

6. საქონლის ფასი გაიზარდა 20%-ით, შემდეგ კიდევ 40%-ით. რამდენი პროცენტით უნდა დაიკლოს საქონლის ფასმა, რომ ის გაუტოლდეს პირვანდელ ფასს?

ა) $\frac{740}{21}\%$ ბ) $\frac{850}{21}\%$ გ) 60% დ) 50%

7. ამოხსენით განტოლება $A_x^2 = 56$.
ა) 7 ბ) 8; -7 გ) 8 დ) -7

8. მოცემულია R რადიუსიანი წრეწირი O ცენტრით. რამდენ ტოლ ნაწილად უნდა დაიყოს რადიუსი, თუ იმ წრეწირების სიგრძეთა ჯამი რომელთა ცენტრიც O წერტილშია და გაივლიან დაყოფის წერტილებზე 5-ჯერ მეტია მოცემული წრეწირის სიგრძეზე.
ა) 12 ბ) 11 გ) 10 დ) 14

9. მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან დაშვებულ სიმაღლესა და მედიანას შორის კუთხე 30^0-ია. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის ფართობის შეფარდება სიმაღლითა და მედიანით შედგენილი სამკუთხედის ფართობთან.
ა) 2 ბ) 3 გ) 4 დ) 3

10. ამოხსენით უტოლობა $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^{x^2-1} \geq 1$

ა) $[-1;+\infty)$ ბ) $(-\infty;1)$ გ) $[-1;1]$ დ) $(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$

11. ამოხსენით განტოლება $lg^2 x^2 - 7lg(-x) + 3 = 0$
ა) -10; $-\sqrt[4]{1000}$ ბ) -10; $-\sqrt[3]{10^4}$ გ) 10; $\sqrt[4]{1000}$ დ) 10; $\sqrt[3]{10^4}$

12. იპოვეთ $(x;y)$ წყვილის გეომეტრიული ადგილი, თუ $\vec{a}(x;4)$ და $\vec{b}(1;y)$ ვექტორები კოლინეარულია.
ა) $y = x^2$ პარაბოლას წერტილებია ბ) $y = 4x$ წრფის წერტილებია
გ) $y = \frac{4}{x}$ ჰიპერბოლას წერტილებია დ) $y = \frac{1}{4}x$ წრფის წერტილებია

13. ამოხსენით უტოლობა $\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{2x-1} \leq \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{3x-1}$

ა) $[1;2]$ ბ) $(1/3;1/2)$ გ) $(1/3;1]$ დ) $(-\infty;0]\cup\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$

14. ამოხსენით უტოლობა $\sqrt{x-5} < x-2$
ა) $[10;20)$ ბ) $[10;+\infty)$ გ) $[5;+\infty)$ დ) $(-2;+\infty)$

15. ამოხსენით განტოლება $9^x - 5\cdot 4^x + 4\cdot 6^x = 0$
ა) 1,5 ბ) 0 გ) 0,5 დ) 1

16. გიამ ერთ ხეზე დაკრიფა 29 კგ ვაშლი, მეორეზე - 22, მესამეზე – 34, მეოთხეზე – 32 კგ, მეხუთეზე – 30, მეექვსეზე – 27 კგ. საშუალოდ რამდენი კილოგრამი ვაშლი დაკრიფა მან თითო ხეზე?
ა) 29 ბ) 32 გ) 29 დ) 27

17. ამოხსენით განტოლება $3\sin x + \cos x = 1$

ა) $2\pi K; 2arctg3 + 2\pi K, K\in z$ ბ) $2\pi K; K\in z$ გ) $2\pi K + \frac{\pi}{2}; K\in z$

გ) $K\pi; K\pi + \frac{\pi}{4}; K\in z$

18. a,b,c რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობებს: $a\in[2;4]$; $b\in[5;8]$; $c\in[20;22]$ რა შუალედს გეაძლევს $|a+b-c|$ სიდიდის მნიშვნელობათა სიმრავლე?

ა) $[8;15]$ ბ) $[2;22]$ ბ) $[4;20]$ დ) $[4;20]$

19. ABC სამკუთხედის წვეროების კოორდინატებია A (2;6), B(8;4), C(2;4). იპოვეთ მანძილი სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილიდან ამ სამკუთხედის კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიული სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილამდე.

ა) $2\sqrt{37}$ ბ) $2\sqrt{51}$ გ) $2\sqrt{39}$ დ) $\frac{4\sqrt{85}}{3}$

20. აგორებენ ორ კამათელს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოსული წერტილების რაოდენობა 10- ზე მეტია.

ა) $\frac{5}{12}$ ბ) $\frac{1}{12}$ გ) $\frac{1}{6}$ დ) $\frac{1}{2}$

21. მოცემულია ფუნქციები $f(x)=x^2-5x+6$ და $g(x)=(x-a)^2+7(x-a)+3$. იპოვეთ a პარამეტრის ისეთი მნიშვნელობა, რომ ფუნქციამ f(x) +g(x) მიიღოს ყველა შესაძლო მნიშვნელობებს შორის უმცირესი მნიშვნელობა.

ა) 2,5 ბ) 3 გ) 5 დ) 6

22. იპოვეთ $f(x)=2|x-1|-|x+1|$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა $[-2;2]$ შუალედში.

ა) 5 ბ) 4 გ) 6 დ) 3 $\frac{1}{12}$

23. $f(x)=x^2-5|x|+10$ ფუნქციის გრაფიკზე დაასახელეთ ისეთი წერტილების ერთი წყვილი მაინც, რომელთა შორის მანძილი 4-ის ტოლია.

ა) A(2;4); B(-2; 4) ბ) A(4;2);B(6;2) გ) A(3;6); B(4;6) დ) A(5;3);B(7;-4)

24. 6 სმ რადიუსიან წრეწირში ჩახაზულია 3 სმ რადიუსის მქონე ორი ტოლი წრეწირი, რომლებიც ეხება ერთმანეთს. იპოვეთ იმ წრეწირის რადიუსი , რომელიც ჩახაზულია დიდ წრეწირში და ეხება როგორც მას ასევე მასში ჩახაზულ ორ წრეწირს.

ა) 2 სმ ბ) 2,5სმ გ) 2,75 სმ დ) 3 სმ

25. ტოლფერდა სამკუთხედის გვერდებია 6 სმ, 6 სმ და 8 სმ. იპოვეთ მანძილი ამ სამკუთხედის ბისექტრისებისა და მედიანების გადაკვეთის წერტილებს შორის.

ა) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ სმ ბ) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ სმ გ) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ სმ დ) $\frac{5\sqrt{5}}{5}$ სმ

26. მოცემულია უჯრედებიანი ფურცელი. *A* წერტილის კოორდინატებია (5;2), ხოლო *B* წერტილის – (8;4). *A* წერტილიდან ემოძრაობთ *B* წერტილისაკენ ისე, რომ გადავაადგილდებით მხოლოდ უჯრედების გვერდებზე, ამასთანავე ემოძრაობთ მხოლოდ მარჯვნივ ან ზევით. რამდენი სხვადასხვა გზით შეგვეიძლია მივაღწიოთ B წერტილს?

ა) 11 ბ) 9 გ) 10 დ) 8

27. რომბის გვერდი ტოლია 5 სმ-ის, ხოლო მისი სიმაღლეა 4,8 სმ. იპოვეთ რომბის დიდი დიგონალის სიგრძე.

ა) 8 სმ ბ)6 სმ გ) 10 სმ დ) 7 სმ

28. მაიას ჰქონდა ნინოზე 20%-ით მეტი წიგნი, ხოლო ეკას ნინოს წიგნების რაოდენობის $\frac{4}{5}$ ნაწილი. რამდენი წიგნი ჰქონდა მაიას, თუ ყველას ერთად ჰქონდა 75 წიგნი.

ა) 25 ბ) 30 გ) 20 დ) 35

29. 1,5 $მ^2$ ფართობის შეღებვას სჭირდება 200 გ საღებავი. რამდენი კილოგრამი საღებავი დასჭირდება კონუსის ფორმის სხეულის ზედაპირის შეღებვას, თუ კონუსის სიმაღლეა 4 მ, ხოლო ფუძის რადიუსი 3 მ-ია.

ა) 1,8π კგ ბ) 3,2π კგ გ) 2,2π კგ დ) 1,6π კგ

30. ცილინდრისა და კონუსის ფორმის თუთიის სხეულები გადაადნეს და ჩამოასხეს ბირთვის ფორმის სხეული. იპოვეთ ამ ბირთვის რადიუსი თუ ცნობილია, რომ ცილინდრსა და კონუსს გააჩნია 3 სმ-ის ტოლი სიმაღლეები და 1 სმ-ის ტოლი რადიუსის მქონე ფუძეები.

ა) $\sqrt[3]{3}$ სმ ბ) $\sqrt[3]{2}$ სმ გ) $\sqrt[3]{4}$ სმ დ) 1 სმ

31. მოცემულია სამი რიცხვი 15, 27 და 40. რა მინიმალური რაოდენობის რიცხვები უნდა ჩავწეროთ 15-სა და 27-ს შორის, რომ ყველა ჩამოწერილი რიცხვი (მოცემულ სამ რიცხვთან ერთად) წარმოადგენდეს არითმეტიკული პროგრესიის წევრებს.

32. სამკუთხედის სიმაღლეები ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას. ადგენენ თუ არა ამ სამკუთხედის გვერდები გეომეტრიულ პროგრესიას?

33. ABC მართკუთხა სამკუთხედში გავლებულია მახვილი კუთხეების ბისექტრისები AM და BN. ცნობილია, რომ $CM \cdot AN = BM \cdot CN$. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეები.

34. მოცემულია ABC სამკუთხედი, რომლის გვერდებია $AB=4$ სმ, $BC=8$ სმ-ს, $AC=6$ სმ. AD მედიანის გაგრძელებაზე შერჩეულია M წერტილი ისე, რომ ამ წერტილზე გამავალი სხივის სამკუთხედთან გადაკვეთის ალბათობა 0,25 ტოლია. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის BC გვერდამდე.

35. ABC სამკუთხედის AC გვერდი დაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად M და N წერტილებით A წვეროს მხრიდან. CK წარმოადგენს სამკუთხედის მედიანას, რომელიც BM მონაკვეთს კვეთს P წერტილში. იპოვეთ $KP:PC$ ფარდობა.

36. მოცემულია კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა 2 სმ. დიაგონალების გადაკვეთის წერტილში მოთავსებულია წესიერი სამკუთხედის წვერო, რომლის გვერდის სიგრძეა $\sqrt{2}$ სმ. იპოვეთ სამკუთხედისა და კვადრატის საერთო ფართობის მაქსიმალური მნიშვნელობა. (პასუხი დაასაბუთეთ)

37. იპოვეთ მანძილი კუბის A წვეროდან, ამ წვეროდან გამოსული სამივე წიბოს ბოლოებზე გავლებულ მკვეთ სიბრტყემდე, თუ კუბის წიბოს სიგრძე ტოლია $\sqrt{3}$ სმ-ის.

38. ამოხსენით უტოლობა $\lg x + 5\sqrt{\lg x} - 6 > 0$

39. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის ექნება განტოლებას $a4^x - (a+1)2^{x+2} - a + 1 = 0$ ერთი ამონახსნი?

40. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 9 სმ და 12 სმ. იპოვეთ მანძილი მართი კუთხის წვეროდან სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილამდე.

სამუშაო №4

1. რას უდრის სხვაობა უმცირეს ოთხნიშნა რიცხვსა და უდიდეს სამნიშნა რიცხვს შორის, თუ პირველი 7-ის ჯერადია, ხოლო მეორე – 8 –ის ჯერადი?

ა)7 ბ)11 გ)9 დ)13

2. გამოთვალეთ $\dfrac{3x^3-12xy^2}{4y^3-x^3}$, თუ $\dfrac{x^2-2xy}{y^2}=-1$

ა) -3 ბ) -4 გ) -2 დ) -5

3. იპოვეთ ნაშთი, რომელიც მიიღება ორობით პოზიციურ სისტემაში ჩაწერილი რიცხვის 11011 5-ზე გაყოფისას.

ა) 2 ბ) 3 4) 4 დ) 1

4. დაალაგეთ რიცხვები ზრდადობის მიხედვით $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; cos 32°; ctg 66°; sin 46°

ა) I; II; IV; III ბ) II;IV; III; I გ) IV ;I; II; III დ) III; I; IV ;II

6. მცენარის სიმაღლე დარგვის დროს იყო 1 მ. ყოველწლიურად ის იზრდება 20%-ით. მერამდენე წელს მიაღწევს მისი სიმაღლე 3 მეტრს?

ა) მე-6 ბ) მე-5 გ) მე-7 დ) მე-8

7. პარალელოგრამის ზედა ფუძესთან მდებარე კუთხეების ბისექტრისები მოპირდაპირე გვერდს ჰყოფენ სამ ტოლ ნაწილად. რისი ტოლი არ შეიძლება იყოს პარალელოგრამის პერიმეტრი, თუ მისი ერთი გვერდი a-ს ტოლია?

ა) $8a$ ბ) $3\frac{1}{3}a$ გ) $5a$ დ) $6a$

8. A და B პუნქტებიდან ერთმანეთის შესახვედრად გამოვიდა ორი ტურისტი. პირველმა ტურისტმა 10 წუთში გაიარა 1 კმ, ხოლო ყოველ შემდეგ 10 წუთში გადიოდა 50 მეტრით ნაკლებს. მეორე ტურისტმა პირველ 10 წუთში გაიარა 0,5 კმ, ხოლო ყოველ შემდეგ 10 წუთში გადიოდა 50 მეტრით მეტს. რა დროში შეხვდებიან ტურისტები ერთმანეთს, თუ მანძილი ამ პუნქტებს შორის 15 კმ-ია.

ა) 2 სთ ბ) 1 სთ 40წთ გ) 1 სთ 30წთ დ) 2 სთ 10 წთ

9. იპოვეთ b და c პარამეტრების მნიშვნელობები, თუ ცნობილია, რომ $y=x^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკი ეხება $y=|x-1|$ ფუნქციის გრაფიკს ორ წერტილში.

ა) -2; 1.5 ბ) -2; 1.25 გ) -1; 1.25 დ) -1; 1.5

10. ამოხსენით უტოლობა $\left(\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[3]{3}}\right)^{2x^2-1}\le 1$

ა) $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ ბ) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$ გ) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ დ) $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$

11. იპოვეთ $lg^2(10x)-3lg100x+5=0$ განტოლების ფესვთა ჯამი.

ა) 10 ბ) 9 გ) 12 დ) 11

12. 18; 10; 25; 15; 27; 29; 31; 8; 7; 10 მოცემული ციფრები გვიჩვენებენ 10 დღის განმავლობაში მაღაზიაში გაყიდული წიგნების რაოდენობას. საშუალოდ რამდენი წიგნი გაყიდა დღეში მაღაზიამ?

ა) 15 ბ) 17 გ) 18 დ) 19

13. ამოხსენით უტოლობა $\frac{log_{0.5}(3-log_3 5)}{x^2-5x+6}>\frac{log_{0.5}(3-log_3 5)}{x^2-5x+4}$

ა) $(1;2)\cup(3;4)$ ბ) $(2;3)\cup(4;+\infty)$ გ) $(-\infty;1)\cup(2;3)\cup(4;+\infty)$ დ) $(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$

14. ამოხსენით უტოლობა $\sqrt{x^2-3x+2}>x-2$

ა) $(-\infty;1)$ ბ) $(-\infty;1]\cup(2;+\infty)$ გ) $(2;+\infty)$ დ) $(1;2]$

15. იპოვეთ x თუ ცნობილია, რომ $\vec{a}(2;\,3)$ და $\vec{b}(x;4)$ ვექტორები მართობულია.

ა) - 4 ბ) – 6 პას გ) 4 დ) 6

16. მართკუთხედის გვერდები შესაბამისად ტოლია 4 სმ-ის და 6 სმ-ის. მცირე გვერდების შიგა მხარეს აგებულია ამ გვერდების ტოლი გვერდის მქონე ორი ტოლგვერდა სამკუთხედი. იპოვეთ ამ სამკუთხედების საერთო ნაწილის ფართობი.

ა) $2(4\sqrt{3}-10)$ სმ^2 ბ) $2(3\sqrt{3}-10)$ სმ^2 გ) $7\sqrt{3}-12$ სმ^2 დ) $2(7\sqrt{3}-12)$ სმ^2

17. იპოვეთ $3\sin^2 x-5\sin 2x+7\cos^2 x=0$ განტოლების $(45°;90°)$ შუალედში მოთავსებული ფესვი

ა) 45° ბ) $\operatorname{arc} \operatorname{tg}\frac{7}{3}$ გ) $\operatorname{arc} \operatorname{tg}\frac{2}{3}$ დ) $\operatorname{arc} \operatorname{tg}\frac{7}{4}$

18. a,b,c რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობებს $a\in[7;12]$; $b\in[3;7]$; $c\in[4;8]$ რა შუალედს გვაძლევს $\sqrt{(a-b-c)^2}$ სიდიდის მნიშვნელობათა სიმრავლე?

ა) $[1;8]$ ბ) $[3;8]$ გ) $[0;8]$ დ) $[4;7]$

19. ABCD მართკუთხედის წვეროს კოორდინატებია $A(2;3)$; $B(6;3)$; $C(6;5)$; $D(2;5)$ იპოვეთ მანძილი ამ მართკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიული მართკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილამდე.

ა) $4\sqrt{2}$ ბ) $8\sqrt{2}$ გ) $10\sqrt{2}$ დ) $12\sqrt{2}$

20. იპოვეთ $y=\dfrac{4}{2+\sin x+\cos x}$ ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა.

ა) $2(2-\sqrt{2})$ ბ) $2-\sqrt{2}$ გ) $2+\sqrt{2}$ დ) $3(2-\sqrt{2})$

21. მოცემულია ფუნქციები $f(x)=-x^2+3x-2$ და $g(x)=-(x+a)^2-7(x+a)+3$.იპოვეთ a პარამეტრის ისეთი მნიშვნელობა, რომ ფუნქციამ $f(x)+g(x)$ მიიღოს ყველა შესაძლო მნიშვნელობებს შორის უდიდესი მნიშვნელობა.

ა) 3 ბ) -5 გ) 1.5 დ) 4

22. იპოვეთ $f(x)=|x^2-5x+6|-|x+1|$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა $[-2;2]$ შუალედში

ა) 15 ბ) 14 გ) 16 დ) 19

23. $f(x)=2^{|x|}$ ფუნქციის გრაფიკზე აიღეთ ისეთი წერტილების ერთი წყვილი მაინც, რომელთა შორის მანძილი 3 სმ-ის ტოლია.

ა) A(1;2); B(3;8) ბ) A(1.5; $2\sqrt{2}$); B($-1.5;2\sqrt{2}$ გ) A(-1;2); B(3;8) დ) A(-1;2); B(-3;8)

24. წრეში ჩახაზულია ორი ტოლრადიუსიანი წრეწირი, რომელთა დიამეტრები დიდი წრეწირის რადიუსის ტოლია და ერთმანეთს ეხება. იპოვეთ იმ წრეწირის რადიუსის შეფარდება მოცემული დიდი წრეწირის რადიუსთან, რომელიც ჩახაზულია დიდ წრეწირში და ეხება როგორც ჩახაზულ ორ წრეწირს ასევე დიდ წრეწირს.

ა) 0.5 ბ) 1/3 გ) 2/3 დ) 0.1

25. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხის კოსინუსი ტოლია 2/3-ის. ამ სამკუთხედში მედიანებისა და ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილებს შორის მანძილი 3 სმ-ია. იპოვეთ სამკუთხედის ფერდის სიგრძე.

ა) $18\sqrt{5}$ სმ ბ) 28 სმ გ) $27\sqrt{5}$ სმ დ) $19\sqrt{5}$ სმ

26. მოცემულია უჯრედებიანი ფურცელი. მასზე აღებულია წერტილები A(3;7) და B(6;10). A წერტილიდან ვმოძრაობთ B წერტილისაკენ ისე, რომ გადაეაადგილდებით მხოლოდ უჯრედების გვერდებზე, თანაც მხოლოდ მარჯვნივ და ზემოთ. რამდენი სხვადასხვა გზით შეიძლება მივაღწიოთ B წერტილს?

ა) 20 ბ) 18 გ) 16 დ) 12

27. ყუთში აწყვია 5 თეთრი და 7 შავი ბურთი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ერთი ბურთი იქნება შავი.

ა) $\frac{5}{12}$ ბ) $\frac{3}{12}$ გ) $\frac{7}{12}$ დ) $\frac{1}{4}$

28. სამ საწყობში ერთად 46 ტ შაქარი იყო. პირველ საწყობში იყო 40%-ით ნაკლები ვიდრე მეორეში, ხოლო მესამეში იყო პირველ საწყობში არსებული შაქრის 2/5 ნაწილი. რამდენი ტონა შაქარი იყო მესამე საწყობში.

ა) 8 ტ ბ) 4 ტ გ) 6 ტ დ) 10 ტ

29. 2.5 $მ^2$ ფართობის შეღებვას სჭირდება 500 გ საღებავი. რამდენი კგ საღებავი დასჭირდება ცილინდრის ფორმის სხეულის ზედაპირის შეღებვას თუ ცილინდრის სიმაღლეა 4 მ, ხოლო ფუძის წრეწირის რადიუსია 3 მ.

ა) 7.6π კგ ბ) 8.2π კგ გ) 8.4π კგ დ) 5.6π კგ

30. კონუსისა და ბირთვის ფორმის თუთიის სხეულები, რომელთა ზომებია: კონუსის სიმაღლე – 4 სმ, ფუძის წრეწირის რადიუსი 2 სმ, ბირთვის რადიუსი 2 სმ, გადაადნეს და ჩამოასხეს კუბის ფორმის სხეული. იპოვეთ ამ კუბის წიბოს სიგრძე.

ა) $3\sqrt[3]{2\pi}$ სმ ბ) $3\sqrt[3]{\pi}$ სმ გ) $2\sqrt[3]{2\pi}$ სმ დ) $\sqrt[3]{2\pi}$ სმ

31. მოცემულია სამი რიცხვი: $\frac{1}{15}, \frac{9}{40}, \frac{2187}{1280}$. რა მინიმალური რაოდენობის რიცხვები უნდა ჩავწეროთ $\frac{1}{15}$ და $\frac{9}{40}$ -ს შორის ისე, რომ ყველა რიცხვი, მოცემულ სამ რიცხვთან ერთად წარმოადგენდეს გეომეტრიული პროგრესიის წევრებს.

32. სამკუთხედის სიმაღლეები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას, ხოლო ამავე სამკუთხედის გვერდები – გეომეტრიულ პროგრესიას. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი თუ ერთ ერთი სიმაღლე 2 სმ–ის ტოლია.

33. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 9 სმ და 12 სმ. იპოვეთ მანძილი ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილიდან სამკუთხედის მართი კუთხის წვერომდე.

34. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა დადებით რიცხვთა სიმრავლეში.

$$\begin{cases} 3x^2 - 5xy - 12y^2 = 0 \\ x^3 - y^3 = 28 \end{cases}$$

35. 6 სმ რადიუსიან წრეში ჩახაზულია 2 სმ რადიუსის მქონე ორი წრეწირი ისე, რომ ისინი ეხება როგორც ერთმანეთს ასევე დიდ წრეწირს. იპოვეთ იმ წრეწირის რადიუსი, რომელიც უდიდესია და ეხება როგორც დიდ წრეწირს ასევე ორ პატარა წრეწირსაც.

36. მოცემულია კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა 2 სმ. დიაგონალების გადაკვეთის წერტილს ემთხვევა სამკუთხედის წვერო, რომელთანაც მდებარე კუთხე 30^o-ია, ხოლო ამ კუთხის შემადგენელი გვერდის სიგრძეები აღემატება $\sqrt{2}$ სმ-ს. იპოვეთ ამ კვადრატის და სამკუთხედის საერთო ფართობის მაქსიმალური სიდიდე.

37. გამოთვალეთ მანძილი მართკუთხა პარალელეპიპედის A წვეროდან ამ პარალელეპიპედის მკვეთ სიბრტყემდე, რომელიც გადის ამ წვეროდან გამომავალი სამივე წიბოს ბოლო წერტილებზე, თუ წიბოების სიგრძეებია 4 სმ, 6 სმ, 6 სმ.

38. მოცემულია უტოლობათა სისტემა $\begin{cases} y - x + 1 \geq 0 \\ 10y - x - 50 \leq 0 \end{cases}$. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ წერტილთა წყვილი $(x; y)$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $x \in [2; 6], y \in [3; 8]$ დააკმაყოფილებს ასევე მოცემულ სისტემას?

39. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის ექნება განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} ax + (a+2)y = 5 \\ (a+2)x + ay = 3 \end{cases}$$ ერთი ამონახსნი?

40. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია AC=3 სმ და BC=4 სმ. იპოვეთ მანძილი ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლისა და B კუთხის ბისექტრისის გადაკვეთის წერტილიდან სამკუთხედის მართი კუთხის წვერომდე.

სამუშაო №5

1. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ცნობილია, რომ რიცხვები $lg\,a_1, lg\,a_2, lg\,a_3, ..., lg\,a_n$ ასევე ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას. იპოვეთ შეფარდება $a_{15} : a_{10}$.

ა) 2 ბ) 3 გ) 1,5 დ) 1

2. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$. ამ პროგრესიის წევრებს დაუმატეს 3n-3 რაოდენობის რიცხვები, რომლებიც მოთავსებულია b_1-დან b_n – მდე შუალედში და მიიღეს ისევ არითმეტიკული პროგრესია. იპოვეთ მიღებული პროგრესიის სხვაობა, თუ მოცემული პროგრესიის სხვაობაა d.

ა) d ბ) $d/4$ გ) $d/3$ დ) $d/2$

3. კინოთეატრში ორი კვირის განმავლობაში მოსულ მაყურებელთა რაოდენობა დღეების მიხედვით შემდეგია: 498; 480; 355; 396; 462; 491; 496;; 399; 415; 428; 411; 421; 462; 468. იპოვეთ ამ მონაცემების მედიანა.

ა) 445 ბ) 428 გ) 462 დ) 355

4. $a \neq 1$ რიცხვის გამყოფთა რაოდენობა n-ის ტოლია. $b \neq 1$ რიცხვის კი – m-ის. გამყოფების რა მინიმალური რაოდენობა შეიძლება გააჩნდეს ნამრავლს $a \cdot b$

ა) $m+n$ ბ) $m-n$ გ) $max\{m;n\}+1$ დ) $max\{m;n\}-1$

5. სამკუთხედის წვეროს კოორდინატებია A(2;1) და B(8;2). იპოვეთ სამკუთხედის მესამე C წვეროს კოორდინატები, თუ მისი მედიანების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებია M(4;5).

ა) C(5;10) ბ) C(5;12) გ) C(6;11) დ) C (6;12)

6. სამკუთხედის წვეროს კოორდინატებია A(2;3) და B(7;5). იპოვეთ მესამე C წვეროს კოორდინატები, თუ მისი კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიული სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებია M(-4; -7).

ა) C(4;12) ბ) C(3;12) გ) C(3;13) დ) C (4;11)

7. მოსწავლემ ოთხნიშნა რიცხვს გამოაკლო მისი ციფრთა ჯამი. რა რიცხვის მიღება არ შეეძლო მას?

ა) 5211 ბ) 7326 გ) 5301 დ) 7235

8. $a = 110011$ და $b = 101$ ორობით პოზიციურ სისტემაში ჩაწერილი რიცხვებია. იპოვეთ a-ს b-ზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი.

ა) 2 ბ) 1 გ) 3 დ) 4

9. მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლითა და მედიანით შედგენილი სამკუთხედის ფართობი $4\sqrt{3}/3$-ჯერ ნაკლებია მართკუთხა სამკუთხედის ფართობზე. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეები.

ა) 15°; 75° ბ) 30°; 60° გ) 45°; 45° დ) 40°; 50°

10. იპოვეთ b და c პარამეტრის მნიშვნელობები, თუ ცნობილია, რომ $y=-ax^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკი ეხება $y=-2|x-2|$ ფუნქციის გრაფიკს ორ წერტილში.

ა) 4; -6   ბ) 2; -5   გ) 4; -5   დ) -4; 5

11. ამოხსენით განტოლება: $\sqrt{C_{x+5}^2 + C_{x+6}^2} = 36$.

ა) 4   ბ) 2   გ) 1   დ) 3

12. $M_0(3;\ 4)$ და $N_0(-1;\ 1)$ წერტილები მდებარეობენ წრფეებზე, რომლებიც სიმეტრიულია კოორდინატთა სისტემის oy ღერძის მიმართ. იპოვეთ მახვილი კუთხე ამ წრფეებს შორის.

ა) $arcsin\frac{12}{5}$ ბ) $arccos\frac{12}{5}$ გ) $arctg\frac{12}{5}$ დ) $arcctg\frac{5}{12}$

13. დაშალეთ $\vec{c}(6;\ 8)$ ვექტორი ორი $\vec{a}(2;\ 2)$ და $\vec{b}(3;5)$ ვექტორების კოლინეარული ვექტორების ჯამის სახით.

ა) $\vec{a} + 1{,}5\vec{b}$ ბ) $2\vec{a} + 3\vec{b}$ გ) $1{,}5\vec{a} + \vec{b}$ დ) $\vec{a} + 0{,}75\vec{b}$

14. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(0;\ 5)$ წერტილზე და მანძილი ამ წრფის წერტილებსა და კოორდინატთა სისტემის მიმართ მისი სიმეტრიული წრფის წერტილებს შორის 6-ის ტოლია.

ა) $y = 0.75x + 5$ ბ) $y = \pm\frac{4}{3}x + 5$ გ) $y = -0.75x + 5$ დ) $y = 0.5x - 5$

15. მოცემულია მართკუთხედი. მის მცირე გვერდებზე ოთხკუთხედის შიგა მხარეს აგებულია ტოლგვერდა სამკუთხედები, რომელთა გვერდები მართკუთხედის მცირე გვერდის ტოლია. ამ სამკუთხედების ფართობთა ჯამი წარმოადგენს ოთხკუთხედის დარჩენილი ნაწილის 4/5 ნაწილს. იპოვეთ ოთხკუთხედის გვერდების შეფარდება.

ა) $\frac{9\sqrt{3}}{8}$ ბ) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ გ) $3\sqrt{3}$ დ) $4\sqrt{3}$

16. ამოხსენით განტოლება $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 3$

ა) 1; 25   ბ) 1; 22   გ) 1; 23   დ) 1

17. იპოვეთ ერთი კამათელის გაგორების დროს ლუწი რაოდენობის წერტილების ამოსვლის ალბათობა.

ა) $\frac{1}{3}$ ბ) $\frac{1}{2}$ გ) $\frac{1}{4}$ დ) $\frac{5}{6}$

18. ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდზე, როგორც დიამეტრზე აგებულია ნახევარწრე სამკუთხედის მხარეს. გამოთვალეთ ამ ნახევარწრის რადიუსის შეფარდება იმ წრეწირის რადიუსთან, რომელიც ჩახაზულია სამკუთხედის წვეროსთან მიღებულ ფიგურაში.

ა) $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$ ბ) $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$ გ) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ დ) $\frac{\sqrt{3}-2}{3}$

19. P პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის იქნებიან $\vec{a}(P,-3)$ და $\vec{b}(-3,\ P)$ ვექტორები საწინააღმდეგოდ მიმართული?

ა) 5   ბ) -3   გ) 3   დ) -5

20. იპოვეთ $y = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{tg15^0 - ctg85^0}{\log_{0,5}3}\log_{0,2}(2x-1)}}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ა) $(1;+\infty)$ ბ) $[1;+\infty)$ გ) $(0.5;+\infty)$ დ) $(0.5;1)$

21. სამკუთხედის პერიმეტრი 20 სმ-ია. მედიანების გადაკვეთის წერტილიდან სამკუთხედის გვერდებამდე მანძილები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2   3   4. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

ა) $\frac{100}{169}\sqrt{455}$ სმ^2 ბ) $3\sqrt{15}$ სმ^2 გ) $\frac{85}{96}\sqrt{15}$ სმ^2 დ) $5\sqrt{15}$ სმ^2

22. სამკუთხედის გვერდებია: AB=7 სმ, BC=5 სმ და AC=3 სმ. ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი რა შეფარდებით ყოფს AD ბისექტრისას A წვეროს მხრიდან?

ა) 3 1 ბ) 2 : 1 გ) 3 : 2 დ) 4 : 3

23. იპოვეთ $y = x - 1 - |5x - 3|$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა.

ა) -1 ბ) -4 გ) 0.2 დ) -0.4

24. ჩამოთვლილი ფუნქციებიდან შეარჩიეთ ის ფუნქცია, რომელიც იღებს უდიდეს მნიშვნელობას x = 2 წერტილში.

I. $y=x^2-4x+3$

II. $y=-x^2+4x-12$

III. $y=-x^2+6x+25$

IV. $y=x^2-4x+10$

ა) I ბ) II გ) IV დ) II

25. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია რომლის პირველი წევრია $a=3$, ხოლო სხვაობა– $d=1/3$. ამ პროგრესიის რამდენი წევრის ჯამი იქნება მოთავსებული (14; 28) შუალედში?

ა) n≤4 ბ) 5; 6 გ) 4; 5; 6; 7 დ) n≥7

27. იპოვეთ $y=2x^2-5x+3+|2x-1|$ ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა [-1; 3] შუალედში.

ა) -2 ბ) 0.5 გ) $-17/8$ დ) 0.75

28. შვიდი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული 6-ის ტოლია, მათგან სამის საშუალო არითმეტიკული ტოლია 5-ის. იპოვეთ დანარჩენი ოთხი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული.

ა) 6, 05 ბ) 6,25 გ) 6,75 დ) 6,5

29. იპოვეთ $6log_7{}^2 2-5log_7 2+1$ გამოსახულების ნიშანი.

ა) უარყოფითი ბ) დადებითი გ) ვერ დავადგენთ დ) ნოლის ტოლია

30. იპოვეთ $\cos\frac{x}{2}\cos x\cos 2x\cos 4x=\frac{1}{16}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{16}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$ განტოლების ფესვი, რომელიც მოთავსებულია $(0;30^0)$ შუალედში.

ა) $\frac{\pi}{15}$ ბ) $\frac{\pi}{16}$ გ) $\frac{\pi}{18}$ დ) $\frac{\pi}{30}$

31. იპოვეთ $\frac{3sin^2x-4sinx\,cosx+7cos^2x}{1+3cos^2x}$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $x=arctg2$.

32. *ABC* სამკუთხედის გვერდებია $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. სამკუთხედის *AC* გვერდზე აღებულია *M* წერტილი. ამ წერტილზე გავლებულია *MK* და *MN* მონაკვეთები, რომლებიც შესაბამისად *BC* და *AB* გვერდების პარალელურია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამკუთხედიდან შემთხვევით შერჩეული წერტილი მოხვდება *MKBN* ოთხკუთხედში, თუ ცნობილია, რომ ეს ალბათობა მაქსიმალურია.

33. ამოხსენით უტოლობა $log_{|a|}(x+3)>2$ თუ, ცნობილია, რომ $6a^2x^2+5ax+1<0$ უტოლობის ერთ-ერთი ფესვია $x=-1$.

34. მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი რომლის წიბოს სიგრძე ტოლია 3 სმ-ის. კუბის AA_1DD_1 და DD_1C_1C გვერდით წახნაგებზე აღებულია M და N წერტილები ისე, რომ M წერტილი მდებარეობს AD_1 დიაგონალზე და დაშორებულია A წერტილიდან $\sqrt{2}$ სმ-ის ტოლი მანძილით. N წერტილი მდებარეობს C_1D დიაგონალზე და დაშორებულია C_1 წერტილიდან ასევე $\sqrt{2}$ სმ-ის ტოლი მანძილით. რა მინიმალური მანძილი უნდა გაიაროს ჭიანჭველამ, რომელიც მოძრაობს კუბის წახნაგებზე, რომ M წერტილიდან მიეიდეს N წერტილამდე.

35. კონუსისა და ცილინდრის სიმაღლეები და ფუძის წრეწირის რადიუსები ერთმანეთის ტოლია. იპოვეთ კუთხე კონუსის მსახველსა და მის ფუძეს შორის, თუ კონუსის გვერდითი ზედაპირის შესაღებად საჭიროა 2-ჯერ მეტი საღებავი ვიდრე ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის შესაღებად.

36. მოსწავლეს უნდა ამოეხსნა კვადრატული განტოლებები $n(n+1)x^2 - x - n(n+1) = 0$, n-ის ყველა მნიშვნელობისათვის 1–დან 999-ის ჩათვლით, ხოლო შემდეგ ყველა მიღებული ფესვი შეეკრიბა. რა რიცხვი მიიღო მოსწავლემ?

37. იპოვეთ $8\sin^2 15^\circ - 6\sin 15^\circ + 1$ გამოსახულების ნიშანი.

38. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის გააჩნია $a \cdot 4^{x-1} + (a-1) \cdot 2^x + 2 - a = 0$ განტოლებას ერთი ფესვი?

39. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ სამკუთხედში ადგილი აქვს უტოლობას $h_1 + h_2 + h_3 \geq 9r$ სადაც
h_1, h_2, h_3 სამკუთხედის სიმაღლეებია, ხოლო r ჩახაზული წრეწირის რადიუსია.

40. კვადრატში, რომლის გვერდის სიგრძე a სმ-ის ტოლია ჩახაზულია კვადრატი ისე, რომ მისი წვეროები მოცემული კვადრატის გვერდებზე მდებარეობს. იპოვეთ მიღებულ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირების რადიუსებს შორის მაქსიმალური რადიუსის სიდიდე.

სამუშაო №6

1. რამდენი ნატურალური რიცხვი არსებობს შუალედში $[n+7;\ m+12]$
   ა) 5 ბ) $m-n+4$ გ) $m-n$ დ) $m-n+5$

2. რამდენი 6-ის ჯერადი გამყოფი აქვს რიცხვს $a = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^9$?
   ა) 480 ბ) 315 გ) 350 დ) 35

3. კლიენტმა წლის დასაწყისში ბანკში შეიტანა გარკვეული რაოდენობის თანხა. წლის ბოლოს სარგებლის სახით მას დაერიცხა 120 ლარი. მას რომ 500 ლარით მეტი თანხა შეეტანა დანარიცხი იქნებოდა 200 ლარი. რამდენ პროცენტიან სარგებელს იძლევა ბანკი?
   ა) 10% ბ) 15% გ) 18% დ) 16%

4. რა ციფრით ბოლოვდება რიცხვი

$$7^{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}$$

თუ ხარისხის მაჩვენებელში 2-ანების რაოდენობაა 10.
   ა) 7 ბ) 9 გ) 3 დ) 1

5. გამოთვალეთ $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$ თუ $tg\alpha = 2$
   ა) $\frac{9}{25}$ ბ) $\frac{17}{25}$ გ) $\frac{18}{25}$ დ) $\frac{19}{25}$

6. ათობით პოზიციურ სისტემაში ჩაწერილი რიცხვი 927 ჩაწერეთ ორობით სისტემაში.
ა) 1011111111 ბ) 1110011111 გ) 1010111111 დ) 1111100111

7. შეიძლება თუ არა სხვადასხვაგვერდა სამკუთხედში ერთი წვეროდან გამოსული ბისექტრისა და მედიანა სამკუთხედის სიმაღლის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობდეს?
ა) არ შეიძლება ბ) შეიძლება გ) შეიძლება თუ სიმაღლე ორჯერ მეტია მედიანის სიგრძეზე დ) შეიძლება თუ სიმაღლე ორჯერ მეტია ბისექტრისაზე

8. გაამარტივეთ გამოსახულება $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}$
ა) $\sqrt{10}$ ბ) 3 გ) 1 დ) 2

9. სხვადასხვაგვერდა სამკუთხედის ერთ-ერთი წვეროდან გაელებულია მედიანა და ბისექტრისა. რომელი მათგანია მეორეზე მეტი?
ა) მედიანა მეტია ბ) ბისექტრისა მეტია გ) ტოლია დ) ვერ შევადარებთ

10. იპოვეთ n-ის უდიდესი ორნიშნა მნიშვნელობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობას: $A_{100}^{n}\cdot(100-n)!=100\cdot 99!$
ა) 80 ბ) 99 გ) 98 დ) 90

11. რომელია მეტი $a=tg25^0$ თუ $b=ctg25^0$?
ა) $a>b$ ბ) $a<b$ გ) $a=b$ დ) ვერ შევადარებთ

12. სამართლიანია ტოლობა $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}}=2^{\frac{1023}{1024}}$. რამდენი ფესვის ნიშანია ტოლობაში?
ა) 8 ბ) 10 გ) 9 დ) 11

13. ცნობილია, რომ $x^2+bx+c=0$ განტოლების ფესვებია $x_1=3-\sqrt{2}$ და $x_2=1+\sqrt{2}$. p პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის იქნება $(x+p)^2+a(x+p)x+b=0$ განტოლების ფესვები მოდულით ტოლი სიდიდეები?
ა) $2\sqrt{2}$ ბ) $\sqrt{2}$ გ) 1 დ) 2

14. გამოთვალეთ $\frac{a}{b}$, თუ ცნობილია, რომ $\frac{a^2+b^2}{2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
ა) 1 ბ) 2 გ) 0,5 დ) 3

15. ამოხსენით განტოლება $\sqrt{12+2\sqrt{11}}=\sqrt{11}+x^2-x-1$.
ა) 1; 2 ბ) 2; -1 გ) 2 დ) 1

16. აგორებენ ორ კამათელს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამოსულ წერტილთა რაოდენობის ჯამი ნაკლები იყოს 5-ზე.
ა) $\frac{1}{8}$ ბ) $\frac{1}{6}$ გ) $\frac{1}{5}$ დ) $\frac{1}{9}$

17. P პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის არ გააჩნია ამონახსნი განტოლებათა სისტემას
$$\begin{cases}2x-5y=7\\Px-10y=8\end{cases}$$
ა) 6 ბ) 4 გ) 2 დ) 8

18. მოცემულია ABC მახვილკუთხა სამკუთხედი. სამკუთხედის შიგნით რამდენი ისეთი წერტილი არსებობს, რომ სამართლიანი იყოს ტოლობა $\angle AMC=2\angle ABC$.
ა) 1 ბ) არცერთი გ) უსასრულო რაოდენობის დ) 2

19. იპოვეთ $y=\sqrt{\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}{\cos 78^\circ-\sin 17^\circ}\cdot \log_{0.2}(x+1)}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ა) $(-1;1]$ ბ) $(-1;+\infty)$ გ) $[0;+\infty)$ დ) $(-1;0]$

20. წესიერი პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი 2-ჯერ მეტია ფუძის ფართობზე. იპოვეთ კუთხე ფუძესა და გვერდით წახნაგს შორის.

ა) 30^0 ბ) 60^0 გ) 45^0 დ) 75^0

21. დაშალეთ $\vec{c}(4;5)$ ვექტორი ორი $\vec{a}(2;1)$ და $\vec{b}(3;6)$ ვექტორების კოლინეარული ვექტორების ჯამის სახით.

ა) $\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$ ბ) $\overrightarrow{\frac{2}{3}a}+3\vec{b}$ გ) $\vec{a}+2\vec{b}$ დ) $2\vec{a}+\vec{b}$

22. რომელია მეტი $\sin 2$ თუ $\sin 7$ (კუთხეები მოცემულია რადიანებში).

ა) $\sin 2>\sin 7$ ბ) $\sin 2=\sin 7$ გ) $\sin 2<\sin 7$ დ) ვერ შევადარებთ

23. მოცემულია სამი რიცხვი, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას: $a<b<c$. შეგვეიძლია თუ არა მათ შორის ჩავსვათ რამდენიმე რიცხვი ისე, რომ ყველა ამ რიცხვმა ერთად შეადგინოს არითმეტიკული პროგრესია?

ა) ყოველთვის შეიძლება ბ) საზოგადოდ არ შეიძლება გ) შეიძლება თუ $c=3a$

დ) შეიძლება თუ $c=3b$

24. ლევანმა ტირში სროლისას დააგროვა შემდეგი ქულები 6; 10; 9; 8; 7; 6; 9; 7; 5; 8; 7; 9; 6; 4; 7; 9; 10. იპოვეთ ამ მონაცემთა მოდა.

ა) 9 ბ) 7 გ) 9 და 7 დ) 10

25. გამოთვალეთ $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+9}$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა.

ა) $\frac{11}{4}$ ბ) $\frac{4}{11}$ გ) $\frac{5}{11}$ დ) 2

26. გამოთვალეთ $f(x)=\frac{1}{3\sin x+4\cos x+7}$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა.

ა) $\frac{1}{2}$ ბ) $\frac{1}{10}$ გ) $\frac{1}{11}$ დ) $\frac{1}{14}$

27. ამოხსენით განტოლება $\sqrt{x^2-4x+4}=2-x$.

ა) $\{0;2\}$ ბ) $(-\infty;+\infty)$ გ) $(-\infty;2]$ დ) $[2;+\infty)$

28. იპოვეთ $y=-x^2+7x-6+|x-2|$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა [0; 10] შუალედში.

ა) 9 ბ) 5 გ) 6 დ) 8

29. რომელია მეტი $a=\log_2^5$ თუ $b=\sqrt{3}$.

ა) $a<b$ ბ) $a=b$ გ) ვერ შევადარებთ დ) $a>b$

30. ამოხსენით უტოლობა $\log_{0,5}x<\log_x 0,5$

ა) $(0,5;1)\cup(2;+\infty)$ ბ) $(0,5;1)$ გ) $(2;+\infty)$ დ) $(0;1)\cup(2;+\infty)$

31. მოცემულია $\vec{a}(2;3)$ ვექტორი. დაასახელეთ ერთი ვექტორი მაინც, რომელიც ამ ვექტორთან ადგენს 90^0 — იან კუთხეს.

32. a რიცხვს გააჩნია ექვსი გამყოფი, b-ს – რვა, ხოლო a და b გააჩნია ორი საერთო გამყოფი. რა მაქსიმალური რაოდენობის გამყოფები შეიძლება გააჩნდეს $a\cdot b$ ნამრავლს?

33. ამოხსენით განტოლება $A_{x+3}^3-C_{x+3}^3=4$.

34. ამოხსენით განტოლება $C_{x^2+3x+1}^{2x}=C_{x^2+3x+1}^{x^2+2}$.

35. M წერტილი 1 სმ. რადიუსის მქონე სფეროს ცენტრიდან დაშორებულია 5 სმ-ის ტოლი მანძილით. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ M წერტილიდან გამოსული სხივი კვეთდეს სფეროს ზედაპირს?

36. რა მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს შეფარდებამ $\frac{a^2+b^2}{ab}$, თუ $a \in [1;4]$ და $b \in [2;6]$.

37. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს მართკუთხა სამკუთხედის უდიდესი მახვილი კუთხე, რომ ამ სამკუთხედის სიმაღლეები წარმოადგენდნენ რომელიღაც სამკუთხედის გვერდებს?

38. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეები, თუ ცნობილია რომ სამკუთხედიდან შემთხვევით არჩეული წერტილის, მართი კუთხის წვეროდან დაშვებული სიმაღლით შექმნილ ერთ-ერთ სამკუთხედში მოხვედრის ალბათობა ტოლია 0,25.

39. ამოხსენით განტოლება: $\left(2^{x+1}+\frac{1}{2^{x-1}}\right)\left(1+cos2x+\frac{2}{1-sin^2x}\right)=16$.

40. ABC სამკუთხედის კუთხეებია: $\angle BAC=\alpha$, $\angle CBA=\beta$, $\angle BCA=\gamma$, ამასთან $\beta \geq \alpha$. იპოვეთ C წვეროდან გამოსული მედიანისა და ბისექტრისის მიერ შედგენილი სამკუთხედის ფართობის შეფარდება ABC სამკუთხედის ფართობთან.

სამუშაო № 7

1. a რიცხვის 7-ზე გაყოფით მიიღება ნაშთი 5. რა ნაშთი მიიღება $3a$ რიცხვის 7-ზე გაყოფით.
   ა) 3   ბ) 1   გ) 4   დ) 5

2. a დადებით რიცხვს დაუმატეს მისი 17 % და მიღებულ ჯამს გამოაკლეს მისი 17 %, რის შედეგადაც მიიღეს b რიცხვი. რომელია მეტი a თუ b.
   ა) $a<b$ ბ) $a>b$ გ) $a=b$ დ) $a \leq b$

3. გამოთვალეთ $\frac{5xy-3y^2}{2x^2-7y^2}$, თუ $\frac{2x-3y}{5x+2y}=\frac{1}{12}$
   ა) 5   ბ) 7   გ) 4   დ) 8

4. გამოთვალეთ $\left|x^3-y^3\right|$, თუ $x+y=7$ და $xy=5$
   ა) $24\sqrt{29}$ ბ) $44\sqrt{19}$ გ) $44\sqrt{29}$ დ) $24\sqrt{31}$

5. მოსწავლემ ოთხნიშნა რიცხვს გამოაკლო იმავე ციფრებით ოღონდ შებრუნებული მიმდევრობით დაწერილი რიცხვი. რა რიცხვის მიღება არ შეეძლო მას?
   ა) 1998   ბ) 1089   გ) 1504   დ) 180

6. იპოვეთ x და y თუ სამართლიანია ვექტორული ტოლობა: $2\vec{a}(x;2)+3\vec{b}(x+1;y)=4\vec{c}\,(5;2y-1)$
   ა) 4,6 ; 1,4   ბ) 3,4; 1,6   გ) 7,6 ; 2,4   დ) 4,8 ; 1,4

7. დაალაგეთ ზრდადობის მიხედვით: $a=sin(\arcsin 0{,}4)$, $b=cos(arcsin0{,}8)$, $c=tg(arcctg5)$, $d=ctg(arccos0{,}5)$
   ა) c,d,a,b ბ) $c,a,d\ b$ გ) c,a,b,d დ) a,b,d,c

8. იპოვეთ $2|x-1|<5$ უტოლობის მთელ ამონახსნთა ჯამი
   ა) 6   ბ) 7   გ) 3   დ) 5

9. ამოხსენით განტოლება $\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt[3]{2x-1}=1$

ა) 2 ბ) 2; 3 გ) 1 დ) 1; -3.5

10. მოყვანილი რიცხვები გვიჩვენებს ფეხბურთელის მიერ სხვადასხვა სეზონის განმავლობაში გატანილი ბურთების რაოდენობას 18; 23; 11; 6; 22; 19; 23; 12; 17; 16; 20; 19; 24; 21; 19; 19. იპოვეთ ამ მონაცემების გაბნევის დიაპაზონი.

ა) 18 ბ) 5 გ) 12 დ) 7

11. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \\ y+\dfrac{1}{x}=3 \end{cases}$$

ა) (1; 2), (3;4) ბ) (1; 2), (2; 1) გ) (1; 2), (0.5; 1) დ) (0.5; 1), (2; 3)

12. ორი წრეწირი რომელთა რადიუსების შეფარდებაა $\sqrt{3}$, გარედან ეხება ერთმანეთს. იპოვეთ კუთხე ამ წრეწირების ცენტრებზე გამავალ წრფესა და მათ საერთო გარე მხებს შორის.

ა) $arcsin(2-\sqrt{3})$ ბ) $arccos(2-\sqrt{3})$ გ) $arccos\dfrac{2}{3}$ დ)) $arccos\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

13. იპოვეთ განტოლებათა სისტემის მთელი ამონახსნები

$$\begin{cases} 2x^2-2xy+y^2=8 \\ 3x^2+2y^2=44 \end{cases}$$

ა) $(-3;-4),(3;4)$ ბ) $(2;4),(-2;-4)$ გ) $(-1;-2),(1;2)$ დ) $(2;3),(-2;-3)$

14. იპოვეთ $y=\dfrac{4}{2+\sin x+\cos x}$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა.

ა) $2+\sqrt{2}$ ბ) $2(2+\sqrt{2})$ ბ) $2-\sqrt{2}$ დ) $3(2+\sqrt{2})$

15. რომბის დიაგონალები ტოლია 6 სმ-ის და 8 სმ-ის. იპოვეთ რომბის სიმაღლე.

ა) 4 სმ ბ) 4.8 სმ გ) 5 სმ დ) 3სმ

16. გამოთვალეთ $lg2\cdot log_2^3\cdot log_3^4\cdot log_4^5\cdot log_5^6\cdot log_6^7\cdot log_7^8\cdot log_8^9\cdot log_9^{10}$

ა) 1 ბ) 2 გ) $lg2$ დ) log_{11}^{144}

17. მოცემულია გეომეტრიული პროგრესია, რომლის პირველი წევრია 2, ხოლო მნიშვნელია -3. იპოვეთ პირველი იმ წევრის ნომერი, რომლის მოდულიც მეტია 486-ზე.

ა) 6 ბ) 9 გ) 8 დ) 7

18. ამოხსენით განტოლება $5^{2x+1}-7\cdot15^x+2\cdot9^x=0$

ა) 0; $log_{\frac{5}{3}}\dfrac{2}{5}$ ბ) 0; $log_5{}^2$ გ) 0; $log_3\dfrac{2}{5}$ დ) 0; $log_{\frac{3}{5}}\dfrac{2}{5}$

19. შეიძლება, თუ არა I) – ნატურალურ რიცხვს გააჩნდეს 113 გამყოფი და ამავე დროს იყოფოდეს 6-ზე, II) – გააჩნდეს 107 გამყოფი?

ა) I – შეიძლება, II – შეიძლება ბ) I – არ შეიძლება, II – შეიძლება

გ) I – შეიძლება, II – არ შეიძლება დ) I – არ შეიძლება, II – არ შეიძლება

20. 60°- ინ კუთხეში ჩახაზულია ორი ტოლი, $R = 3$ სმ რადიუსიანი წრეწირი ისე, რომ თითოეული მათგანი ეხება კუთხის ერთ გვერდს და ასევე ერთმანეთს გარედან. მათ

ცენტრებზე გამავალი წრფე კუთხიდან ჩამოჭრის ტოლფერდა სამკუთხედს. იპოვეთ იმ წრეწირის რადიუსი რომელიც უდიდესია იმ წრეწირებს შორის რომლებიც ეხება აღნიშნულ წრეწირებს და კუთხის გვერდებს.

ა) $\left(3\sqrt{3}+2\right)^2$ სმ ბ) 6 სმ გ) $\left(1+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$ სმ დ) $\left(1+\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2$ სმ

21. გაამარტივეთ გამოსახულება $\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

ა) $\sqrt{3}$ ბ) $2+\sqrt{3}$ გ) 1 დ) 2

22. იპოვეთ $M(3;4)$ წერტილის $y=\frac{1}{5}x$ წრფის მიმართ სიმეტრიული წერტილის კოორდინატები.

ა) $\left(\frac{54}{13};-\frac{32}{13}\right)$ ბ) $\left(\frac{57}{13};-\frac{32}{13}\right)$ გ) $\left(\frac{55}{13};-\frac{34}{13}\right)$ დ) $\left(\frac{56}{13};-\frac{33}{13}\right)$

23. რომელია მეტი $7x^2+7x\log_3 4-\log_3 13=0$ განტოლების უდიდესი ფესვი თუ $\log_{\frac{1}{3}} 5$

ა) ფესვი მეტია ბ) ფესვი ნაკლებია გ) ტოლია დ) ვერ შევადარებთ

24. იპოვეთ იმ რომბებს შორის უდიდესის ფართობი, რომელთა დიაგონალების ჯამი მუდმივი სიდიდეა და ტოლია 10 სმ-ის.

ა) 36 სმ^2 ბ) 30 სმ^2 გ) 25 სმ^2 დ) 20 სმ^2

25. რომელია მეტი $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ თუ $b=2\sin 50^0-\sin 40^0$?

ა) $b=a$ ბ) $b>a$ გ) $b<a$ დ) ვერ შევადარებთ

26. მოცემულია $y=2x+5$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ იმ წირის განტოლება, რომლის გრაფიკი სიმეტრიულია მოცემული ფუნქციის გრაფიკისა კოორდინატთა სისტემის oy ღერძის მიმართ.

ა) $y=2x+6$ ბ) $y=2x-5$ გ) ა) $y=-2x+2$ დ) $y=-2x+5$

27. ამოხსენით უტოლობა $lg_a\left(x^2+3x+3\right)\geq 0$, თუ მისი ერთ ერთი ამონახსნია x=1,5

ა) $[0;2]$ ბ) $[-1;2]$ გ) $[1;2]$ დ) $(-\infty;-2]\cup[-1;+\infty)$

28. ამოხსენით განტოლება $\sqrt{2x+1}+\sqrt{8x-7}=8$

ა) 4 ბ) 4; $38\frac{4}{9}$ გ) 4; $38\frac{7}{9}$ დ) 4; $38\frac{6}{9}$

29. a და b რიცხვების გამყოფთა რაოდენობა შესაბამისად ტოლია p და q-სი. რისი ტოლი არ შეიძლება იყოს მათი ნამრავლის გამყოფთა რაოდენობა?

ა) 15 ბ) 48 გ) 43 დ) 26

30. ამოხსენით უტოლობა $\log_a\left(2x^2-5x+4\right)\leq 0$, თუ მისი ერთ ერთი ამონახსნია x=1.2

ა) $[1;1.5]$ ბ) $[0;1.5]$ გ) $[-1;2]$ დ) $[-2;2]$

31. მოცემულია კვადრატულ განტოლებათა სიმრავლე, რომელთა ფესვებია ყველა ნატურალური რიცხვი სიმრავლიდან $[1;n]$. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ კვადრატული განტოლების შემთხვევით შერჩეულ ფესვებს შორის მანძილი ერთი ერთეულის ტოლია.

32. ამოხსენით უტოლობა $8^x+7\left(2\sqrt{2}\right)^x-8<0$

33. ამოხსენით უტოლობა $ax+7>0$, თუ ცნობილია,რომ $\frac{ax}{a+5}+2x>0$ უტოლობის ერთ ერთი ფესვია $x=-1$.

34. მოცემულია $y=x^2-2x+\frac{7+4\sqrt{3}}{4}$ და $y=-(x-4)^2+28\frac{1}{4}$ ფუნქციების გრაფიკები. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფე არ გადაკვეთს ამ ფუნქციების გრაფიკებს.

35. $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციაში ზედა BC ფუძე ტოლია a სმ-ის, ხოლო ქვედა AD ფუძე კი – b სმ-ის. ფუძესათან მდებარე α კუთხის რა მნიშვნელობებისათვის გადაკვეთს ფუძესთან მდებარე კუთხის ბისექტრისა ტრაპეციის ფერდს?

36. მოცემულია ათი ნამდვილი რიცხვი. რამდენი ისეთი კუბური განტოლება არსებობს, რომლის ფესვებიც ეკუთვნის ამ რიცხვთა სიმრავლეს?

37. ABC მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია $AC=8$ სმ-ს და $BC=6$ სმ-ს. ჰიპოტენუზის შუა D წერტილიდან აღმართულია მართობი, რომელიც AC კათეტს გადაკვეთს E წერტილში. იპოვეთ $BCED$ ოთხკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

38. კონუსში ჩახაზულია სამკუთხა პირამიდა ისე, რომ მათი წვეროები ერთმანეთს ემთხვევა, ხოლო პირამიდის ფუძე ჩახაზულია კონუსის ფუძის წრეწირში. კონუსის მოცულობაა 10π სმ^3. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ პირამიდის წვეროში მდებარე ბრტყელი კუთხეების სიდიდეებია: $60^0, 60^0, 90^0$.

39. მოიყვანეთ ერთი მაგალითი მაინც ისეთი ფუნქციისა, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლეა
$(0;+\infty)$ შუალედი და ამასთანავე, ყოველ თავის მნიშვნელობას ღებულობს ოთხჯერ (ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty;+\infty)$ შუალედი).

40. ცილინდრში, რომლის ფუძის წრეწირის რადიუსია 1 სმ. გავლებულია მკვეთი სიბრტყე, რომელიც გადის ცილინდრის სიმაღლის შუა წერტილზე, არ კვეთს ფუძის სიბრტყეებს და მათთან ადგენს 30^0-იანი კუთხეებს. მიღებულ ორ სხეულში ჩახაზულია სფეროები. იპოვეთ მანძილი სფეროების ცენტრებს შორის.

სამუშაო №8

1. a რიცხვის 7-ზე გაყოფით მიიღება ნაშთი 4, ხოლო b რიცხვის 7-ზე გაყოფით მიიღება ნაშთი 2. რა ნაშთი მიიღება $3a+5b$ რიცხვის 7-ზე გაყოფით.
   ა) 1 ბ) 2 გ) 4 დ) 3

2. კვადრატის გვერდი 2 სმ-ის ტოლია. ყოველ გვერდზე კვადრატის შიგა მხარეს , როგორც დიამეტრებზე აგებულია ნახევარწრეები. იპოვეთ ამ ნახევარწრეების საერთო ფართობი.
   ა) $\pi-2$ სმ^2 ბ) $2\pi-1$ სმ^2 გ) $2(\pi-1)$ სმ^2 დ) $2(\pi-2)$ სმ^2

3. იპოვეთ $M_0(8;10)$ წერტილიდან გამოსული ერთი მაინც ისეთი ვექტორის ბოლო N_0 წერტილის კოორდინატები, თუ ცნობილია, რომ ის $\vec{a}(2;\ 3)$ და $\vec{b}(3;4)$ ვექტორების ჯამის მართობულია.
   ა) $N_0(1;15)$ ბ) $N_0(2;15)$ გ) $N_0(1;16)$ დ) $N_0(1;14)$

4. რაღაც რიცხვს ყოფენ 17-ზე. რა სიგრძის პერიოდი არ შეიძლება ჰქონდეს მიღებულ პერიოდულ ათწილადს.
   ა) 18 ბ) 16 გ) 12 დ) 10

5. შეასრულეთ მოქმედება ორობით სისტემაში $101 \cdot 1011 + 1101$.
   ა) 1001100 ბ) 1000100 გ) 1001010 დ) 1101010

6. ხარატმა გამოჩარხა რვა ცალი ერთნაირი ლილვი. გაზომვებმა აჩვენეს, რომ ლილვის დიამეტრები ტოლი იყო შემდეგი რიცხვების: 5,2 სმ; 4,8 სმ; 4,9 სმ; 5,3 სმ; 5,4 სმ, 5,2 სმ; 5,1 სმ 5,0 სმ. იპოვეთ ამ მონაცემების საშუალო კვადრატული გადახრა.

ა) 0,4 სმ ბ) 0,3 სმ გ) 0,2 სმ დ) 0,5 სმ

7. იპოვეთ x-ის უდიდესი სამნიშნა მნიშვნელობა რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა: $C_x^{17}+C_x^{15}+2C_x^{16}=C_{x+2}^{17}$.

ა) 899 ბ) 990 გ) 900 დ) 999

8. მოცემულია გეომეტრიული პროგრესია, რომლის პირველი წევრია $b=10$, ხოლო მნიშვნელი $-q=0.8$. პროგრესიის რამდენი წევრის ჯამი იქნება მოთავსებული (10; 24.4) შუალედში?

ა) 1 ბ) 2 გ) 3 დ) {1; 2; 3}

9. კვადრატის შიგნით ჩახაზულია წრეწირი. კვადრატის კუთხესა და წრეწირის რკალში ასევე ჩახაზულია წრეწირი. იპოვეთ დიდი წრეწირის რადიუსის შეფარდება მცირე წრეწირის რადიუსთან.

ა) $3+2\sqrt{2}$ ბ) $2+\sqrt{2}$ გ) $3+\sqrt{2}$ დ) $3\sqrt{2}+4$

10. x და y რიცხვის ნამრავლია 240, ხოლო მათი უმცირესი საერთო ჯერადი – 60. იპოვეთ ამ რიცხვების ჯამი, თუ ცნობილია, რომ არცერთი მათგანი არაა მეორის ჯერადი.

ა) 34 ბ) 32 გ) 43 დ) 52

11. ABC სამკუთხედის წვეროების კოორდინატებია: $A(2;2), B(6;8), C(10;4)$. იპოვეთ მახვილი კუთხე AD და BK მედიანებს შორის.

ა) $arcsin\frac{2\sqrt{5}}{17}$ ბ) $arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$ პას გ) $arctg\frac{2}{13}$ დ) $arcctg\frac{21}{29}$

12. იპოვეთ D წერტილის კოორდინატები, თუ ცნობილია, რომ $A(4;2), B(2;8), C(8;11), D(x;y)$ წერტილები წარმოადგენენ პარალელოგრამის წვეროებს მოყვანილი მიმდევრობით.

ა) $D(5;10)$ ბ) $D(10;6)$ გ) $D(10;4)$ დ) $D(10;5)$

13. მოყვანილი რიცხვები გვიჩვენებს მოსწავლის მიერ 19 დღის განმავლობაში წაკითხული წიგნის გვერდების რაოდენობას დღეების მიხედვით: 27; 21; 29; 43; 39; 34; 31; 34; 45; 51; 34; 43; 45; 18; 41; 34; 43; 41; 42. იპოვეთ:

1) 43 გვერდის წაკითხვის სიხშირე და ფარდობითი სიხშირე

ა) 4 და $\frac{1}{5}$ ბ) 3 და $\frac{3}{20}$ გ) 3 და $\frac{3}{19}$ დ) 4 და $\frac{4}{19}$

2) მოდა

ა) 34 ბ) 51 გ) 40 დ) 18

3) მედიანა

ა) 40 ბ) 34 გ) 43 დ) 51

4) გაბნევის დიაპაზონი

ა) 31 ბ) 33 გ) 34 დ) 36

14. იპოვეთ x-ის მნიშვნელობა, თუ ცნობილია რომ ვექტორები $2\vec{a}(x;2)-\vec{b}(1;9)$ და $2\vec{c}(5;7)$ კოლინეარულია.

ა) $-1\frac{2}{7}$ ბ) $1\frac{2}{7}$ გ) $\frac{7}{9}$ დ) $-\frac{7}{9}$

15. იპოვეთ $2|x-1|+|x+1|\le 5$ უტოლობის მთელ ამონახსნთა ჯამი.

ა) 3 ბ) 1 გ) 2 დ) 4

16. დაალაგეთ რიცხვები კლებადობის მიხედვით: $a=sin\left(arccos\frac{2}{3}\right), b=cos\left(arctg\frac{1}{2}\right)$, $c=tg(arcctg3), d=sin\left(arctg\frac{2}{3}\right)$.

ა) a,b,c,d ბ) b,a,d,c გ) b,d,a,c დ) b,a,c,d

17. გამოთვალეთ $lg420$ თუ $lg7 = a, lg9 = b, lg8 = c$.

ა) $\frac{6a+3b+2c+6}{6}$ ბ) $\frac{5a+3b+2c+6}{6}$ გ) $\frac{6a+3b+2c+6}{7}$ დ) $\frac{6a+3b+2c+5}{6}$

18. ამოხსენით განტოლება: $2sinx + 3cosx = \sqrt{13}$.

ა) $\frac{\pi}{2} - arccos\frac{2}{\sqrt{13}} + 2\pi k,\ k \in Z$ ბ) $\pi + arccos\frac{2}{\sqrt{13}} + 2\pi k,\ k \in Z$

ბ) $\pi - arcsin\frac{2}{\sqrt{13}} + 2\pi k,\ k \in Z$ დ) $\frac{\pi}{2} - arccos\frac{3}{\sqrt{13}} + 2\pi k,\ k \in Z$

19. k პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის იქნება $y = 5x - 1$ და $y = kx + 5$ წრფეები ურთიერთმართობული.

ა) -0,1 ბ) -0,2 გ) 0,2 დ) -5

20. იპოვეთ $y = x + 5$ წრფის მიმართ $M_0(4{,}5;\ 19{,}5)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილის კოორდინატები.

ა) $N_0(8{,}2;\ 5{,}6)$ ბ) $N_0(14{,}5;\ 9{,}5)$ დ) $N_0(8{,}5;\ 13{,}5)$ გ) $N_0(15{,}5;\ 5{,}8)$

21. p პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის $|2x - 6| + 4 = x + P$ განტოლებას გააჩნია ორი ფესვი.

ა) $(1;\ +\infty)$ ბ) $(-\infty;\ 1)$ გ) $(1; 2)$ დ) $(-1; 1)$

22. მანძილი ორი წრის ცენტრებს შორის 5 სმ-ია. მათ რადიუსებია შესაბამისად 4 სმ და 3 სმ. იპოვეთ ამ წრეების საერთო ნაწილის ფართობი.

ა) $9arcsin0{,}8 + 16arcsin0{,}6 - 12$ ბ) $6arcsin0{,}8 - 16arcsin0{,}6 - 12$

გ) $9arcsin0{,}8 + 12arcsin0{,}6 + 12$ დ) $8arcsin0{,}8 + 16arcsin0{,}6 - 10$

23. ამოხსენით განტოლება $x^{lgx} - \sqrt[10]{10} = 0$

ა) $10^{\pm\frac{1}{5}}$ ბ) $10^{\pm\frac{1}{\sqrt{10}}}$ გ) $10^{\frac{2}{5}}$ დ) 10

24. იპოვეთ ორობით სისტემაში ჩაწერილი 1100111101100 რიცხვის 4-ზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი ათობით სისტემაში

ა) 1 ბ) 2 გ) 0 დ) 3

25. რომელია მეტი $a = \sqrt[3]{3}$ თუ $b = lg12$

ა) $a > b$ ბ) $a < b$ გ) $a = b$ დ) ვერ შევადარებთ

26. გაამარტივეთ $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{4} + 1} - \sqrt[3]{2}$

ა) $\sqrt[3]{2}$ ბ) -1 გ) 1 დ) $\sqrt[3]{4}$

27. იპოვეთ კუთხე ოთხკუთხედის დიგონალებს შორის, თუ ცნობილია, რომ ისინი წარმოადგენენ კუთხის ბისექტრისებს.

ა) 30^0 ბ) 45^0 გ) 90^0 დ) 60^0

28. ცნობილია, რომ ოთხკუთხედის შიგნით არსებობს ისეთი წერტილი საიდანაც ოთხკუთხედის გვერდებამდე მანძილები ტოლია. იპოვეთ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ჯამის შეფარდება.

ა) 2 ბ) 0,5 გ) 1,5 დ) 1

29. იპოვეთ კონუსის მოცულობა, თუ მისი გვერდითი ზედაპირის შლილი წარმოადგენს 60^0-იან სექტორს, რომლის ფართობია 6π სმ^2.

ა) $\frac{\sqrt{35}}{5}\pi$ სმ^3 ბ) $\frac{\sqrt{35}}{4}\pi$ სმ^3 გ) $\frac{\sqrt{35}}{3}\pi$ სმ^3 დ) $\frac{\sqrt{35}}{6}\pi$ სმ^3

30. სამკუთხა პირამიდის ოთხივე წახნაგი ტოლგვერდა სამკუთხედია. იპოვეთ კუთხე ფუძის სიბრტყესა და გვერდით წახნაგს შორის.

ა) $arcsin\frac{1}{3}$ ბ) $arccos\frac{1}{3}$ გ) 60^0 დ) 30^0

31. წესიერი სამკუთხედის ორი წვეროს კოორდინატებია: $A(2;1)$ და $B(8;3)$. იპოვეთ მესამე C წვეროს კოორდინატები, თუ ცნობილია, რომ ის პირველ მეოთხედში მდებარეობს.

32. ამოხსენით უტოლობა $27\cdot4^{x+1}+27\cdot6^{x+2}-40\cdot3^{2x+3}<0$

33. მოცემულია კუბური განტოლებები, რომელთა ფესვების სიმრავლეა ნატურალური რიცხვები $[1;n]$ შუალედიდან. იპოვეთ ალბათობა ხდომილობისა, რომ შემთხვევით არჩეული კუბური განტოლების ფესვებს შორის მანძილი ერთი ერთეულის ტოლია.

34. ტოლფერდა ტრაპეციის ფართობია S სმ^2, ხოლო სიმაღლე - h სმ. დიდ ფუძესთან მდებარე α კუთხის რა მნიშვნელობებისათვის გადაკვეთს ქვედა ფუძესთან მიმდებარე კუთხის ბისექტრისა ტრაპეციის ზედა ფუძეს?

35. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა: $\begin{cases}x+\sqrt{y}=1\\ y+\sqrt{x}=1\end{cases}$

36. ABC სამკუთხედის გვერდებია $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. სამკუთხედის AC გვერდზე აღებულია M წერტილი. ამ წერტილზე გავლებულია MK და MN მონაკვეთები, რომლებიც შესაბამისად BC და AB გვერდების პარალელურია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამკუთხედიდან შემთხვევით შერჩეული წერტილი მოხვდება $MKBN$ ოთხკუთხედში, თუ ცნობილია, რომ ეს ალბათობა მაქსიმალურია.

37. ცნობილია, რომ $a^{x+1}>1$ უტოლობის ერთ-ერთი ფესვია $x=-3$. ამოხსენით უტოლობა $a^{x^2-2x+3}<a^6$.

38. k პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის გააჩნია ოთხი ფესვი $a^{||x|-1|}=k$, $a>1$ განტოლებას.

39. გამოთვალეთ ნამრავლი abc, თუ ცნობილია, რომ $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკზე განლაგებულია წერტილები: $A(n;\,a_n)$, $B(m;\,a_m)$, $C(k;\,a_k)$. სადაც a_n, a_m, a_k რომელიღაც არითმეტიკული პროგრესიის წევრებია.

40. k პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის გააჩნია $sin^2x-2sinx+k=0$ განტოლებას ერთი ამონახსნი, რომელიც მოთავსებულია შუალედში $\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)$.

ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნები და მეთოდური მითითებები

§4.ერთწევრები და მრავალწევრები. მოქმედებები ერთწევრებზე და მრავალწევრებზე

28. ასეთი სახის ამოცანების ამოსახსნელად საჭიროა გამოვიყენოთ კუბების ჯამისა და კუბების სხვაობის ანალოგიური ფორმულები ხარისხის უფრო მაღალი მაჩვენებლებისათვის:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^{n-1}) = (a-b)A$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \cdots - ab^{2n-1} + b^{2n}) = (a+b)B$$

შევნიშნოთ, რომ ხარისხების ჯამის შემთხვევაში ხარისხის მაჩვენებელი უნდა იყოს კენტი. დავუბრუნდეთ ამოცანების ამოხსნას

1) $117^{15} - 8^5 = (117-2)A = 115A$ ვინაიდან 115 იყოფა 23-ზე ამიტომ მოცემული რიცხვიც იყოფა 23-ზე.

2) $95^{14} - 7^{14} = (95-7)A = 88A$ ვინაიდან 88 იყოფა 11-ზე ამიტომ მოცემული რიცხვიც იყოფა 11-ზე.

3) $209^{21} + 107^{21} = (209+107)B = 316B$ ვინაიდან 316 იყოფა 79-ზე ამიტომ მოცემული რიცხვიც იყოფა 79-ზე.

30. მოცემული ტოლობების გამარტივებით შესაბამისად მივიღებთ:

$(a+b)(a-c)(b-c)=0$

$(a-b)(a+c)(b-c)=0$

$(a-b)(a-c)(b+c)=0$

პირველი ტოლობიდან მიიღება $a=c$ ან $b=c$, მეორე ტოლობიდან - $a=b$ ან $b=c$, ხოლო მესამე ტოლობიდან - $a=c$ ან $a=b$, ყველა ამ ვარიანტის განხილვით მიიღება $a=b=c$, ე.ი. სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

31. მოცემულ საწყის გამოსახულებაში შემოვიღოთ აღნიშვნები: $a-b=x; b-c=y; c-a=z$ ცხადია $x+y+z=0$ ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $x+y=-z$ თუ ამ ტოლობას ავიყვანთ კვადრატში მივიღებთ:

$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} = z^2 - xy$ (1). თუ იგივე ტოლობას ავიყვანთ კუბში მივიღებთ:

$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} = xyz$ (2). თუ ავიყვანთ მეხუთე ხარისხში მივიღებთ:

$\frac{x^5+y^5+z^5}{5} = xyz(z^2-xy)$ (3). როგორც ვხედავთ მესამე ტოლობა წარმოადგენს პირველი ტოლობის ნამრავლს მეორეზე და თუ დავუბრუნდებით a, b, c მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

32. საწყის გამოსახულებაში ფრჩხილებში მოთავსებული სიდიდეების გადამრავლებით მიიღება შემდეგი გამოსახულება. $\left[\left(\frac{3}{2}x\right)^2+5\cdot\frac{3}{2}x+5\right]^2+\frac{1}{2}>0$

34. მოცემული ტოლობა გადავწეროთ ასე: $x-2=A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$ ან $x-2=(A+B+C)x^2+(B-C)x-A$. თუ ორი მრავალწევრი იგივურად ტოლია, მაშინ უცნობის ერთნაირი ხარისხების წინ მდგომი კოეფიციენტები ტოლია. ე.ი. გვაქვს:

$\begin{cases}A+B+C=0\\ B-C=1\\ A=2\end{cases}$ აქედან $\begin{cases}B+C=-2\\ B-C=1\\ A=2\end{cases}$ ან $A=2; B=-\frac{1}{2}; C=-\frac{3}{2}$.

36. x^2+7x+3 კვადრატული სამწევრი წარმოვადგინოთ კვადრატულ სამწევრად x -1 გამოსახულების მიმართ. ვთქვათ სამართლიანია ტოლობა $x^2+7x+3=A(x-1)^2+B(x-1)+C$ ან $x^2+7x+3=Ax^2-(2A-B)x+A-B+C$ №34 მაგალითის ანალოგიურად, მივიღებთ

$\begin{cases}A=1\\ -2A+B=7\\ A-B+C=3\end{cases}$ ამ სისტემის ამონახსნია $A=1; B=9; C=11$.

37. მოცემული რიცხვი ასე გადავწეროთ:

$(5+1)\cdot113^{15}-(15+1)\cdot27^5+(25+1)\cdot19^9-(35+1)\cdot64^3=5A+113^{15}-3^{15}+19^9-4^9=$

$=5A+(110+3)^{15}-3^{15}+(19-4)C=5A+110B+15C$ ეს უკანასნელი იყოფა 5-ზე. =

38. საწყისი მრავალწევრი ასე გადავწეროთ: f(x,y,z)=

$z^2+x^2+4y^2-2xz+4yz-4xy+x^2-6x+9+y^2-2y+1-1=(z+2y-x)^2+(x-3)^2+(y-1)^2-1$.

ვინაიდან პირველი სამი შესაკრებიდან თითოეული დადებითია ან ნულის ტოლი, მათი ჯამი მინიმალური იქნება, მაშინ როდესაც თითოეული მათგანი 0-ის ტოლია, ე.ი. $x=3; y=1; z=1$ და მრავალწევრის მინიმალური მნიშვნელობა ტოლია -1-ის.

40. მარცხენა მხარე წარმოვადგინოთ ასე: $2^{4n}-1=16^n-1=(16-1)A=15A$, აქედან ჩანს, რომ ის იყოფა 15-ზე.

41. მარცხენა მხარე წარმოვადგინოთ ასე: $2^{9n}-1=512^n-1=(512-1)A=511A$, აქედან ჩანს, რომ ის იყოფა 73-ზე.

§6.წრფივი, კვადრატული და მოდულის შემცველი განტოლებები

114. განტოლება ასე გადავწეროთ: $\left(x+\frac{7x}{(x-7)}\right)^2-\frac{14x^2}{x-7}=15$ ან რაც იგივეა:

$\left(\frac{x^2}{x-7}\right)^2-\frac{14x^2}{x-7}=15$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{x^2}{x-7}=y$ რის შემდეგაც განტოლება მარტივად ამოიხსნება.

115. განტოლება ასე გადავწეროთ: $x^3+\left(\frac{3x}{x-3}\right)^3+10=0$. მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ

$\left(x+\frac{3x}{x-3}\right)\left(x^2-\frac{3x^2}{x-3}+\frac{9x^2}{(x-3)^2}\right)+10=0$ ან $\frac{x^2}{x-3}\left[\left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2-\frac{9x^2}{x-3}\right]+10=0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{x^2}{x-3}=y$ მივიღებთ განტოლებას $y(y^2-9y)+10=0$ ან $y^3-9y^2+10=0$ ან

$y^3+y^2-10y^2+10=0$, საიდანაც $y^2(y+1)-10(y-1)(y+1)=0$ ან $(y+1)(y^2-10y+10)=0$. რის შემდეგაც განტოლება ადვილად ამოიხსნება.

116. შემოვიღოთ აღნიშვნა $x+\frac{a+b}{2}=t$ რის შემდეგაც განტოლება დადის ბიკვადრატული განტოლების ამოხსნამდე.

117. შემოვიღოთ აღნიშვნა $x+6=y$ მივიღებთ ბიკვადრატულ განტოლებას $y^4+30y^2-32=0$.

118. განტოლების ორივე მხარე გავყოთ x^3-ზე, მივიღებთ შემდეგი სახის განტოლებას: $x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-54=0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $x+\frac{1}{x}=y$ მაშინ $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ და $x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$. საბოლოოდ განტოლება მიიღებს სახეს $t^3+3t^2+2t-60=0$ ან რაც იგივეა $(t-3)(t^2+6t+20)=0$. მიღებული განტოლების ფესვია $t=3$ და $x+\frac{1}{x}=3$.

119. განვიხილოთ შემდეგი სახის რიცხვები: $6k+1$; $6k+2$; $6k+3$; $6k+4$; $6k+5$. ვინაიდან კვადრატული განტოლების ფესვები მარტივი რიცხვებია, ამიტომ მის ფესვებს აუცილებლად უნდა ჰქონდეს შემდეგი სახე $6k+1$ ან $6P+5$. ვიეტის თეორემის თანახმად ფესვების ჯამი ტოლია $6m$ ე.ი. ერთი ფესვი $6k+1$ სახისაა, ხოლო მეორე – $6P+5$-ის. როგორც ცნობილია $n=x_1\cdot x_2=(6k+1)(6P+5)=36kP+6P+30k+5$. როგორც ვხედავთ n-ის 6-ზე გაყოფით მიიღება ნაშთი 5.

120. თუ მეოთხე ხარისხის განტოლების ოთხი ფესვი ადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ რიცხვით ღერძზე ფესვებს გადავიტანთ მარჯვნივ ან მარცხნივ რაიმე მონაკვეთზე შეგვიძლია მივიღოთ ოთხი რიცხვი, რომელთაგან ორი მათგანი სიმეტრიული იქნება დანარჩენი ორისა სათავის მიმართ. ე.ი. უნდა მივიღოთ ბიკვადრატული განტოლება $(x+m)^4+a(x+m)^3+b(x+m)^2+c(x+m)+d=0$, x^3-ის კოეფიციენტი იქნება $4m+a$, ხოლო x-ის – $4m^3+3am^2+2bm+c$ და შესაბამისად მივიღებთ განტოლებათა სისტემას $\begin{cases}4m+a=0\\4m^3+3am^2+2bm+c=0\end{cases}$ საიდანაც გვექნება

$a^3-4ab+8c=0$. რაც შეეხება ამოცანის მეორე ნაწილს, ცხადია პირობა $a^3-4ab+8c=0$ არაა საკმარისი იმისათვის, რომ განტოლებათა ფესვები ადგენდნენ არითმეტიკულ პროგრესიას, უფრო მეტიც შესაძლებელია განტოლებას საერთოდ არ გაჩნდეს ფესვი. საკმარისია d იყოს საკმარისად დიდი რიცხვი.

121. ავაგოთ $y=x^2-4x+8$ და $y=|x-a|$ ფუნქციების გრაფიკები. a-ს ცვლილებით $y=|x-a|$ ფუნქციის გრაფიკი ისრიალებს OX ღერძის გასწვრივ. პირობის თანახმად განტოლებას ფესვი არ უნდა გააჩნდეს ე.ი. აღნიშნული ფუნქციის გრაფიკები არ უნდა იკვეთებოდნენ. მარტივად შეგვიძლია დავადგინოთ, რომ ამისათვის საჭიროა a იცვლებოდეს $\left(-\frac{7}{4};\frac{23}{4}\right)$ შუალედში.

122. განტოლება ასე გადავწეროთ $(x-1)(x-4)(x-b)=0$. მისი ფესვებია $x=1; x=4; x=b$. ცხადია ამ ფესვებს შორის სხვაობა 2-ის ტოლი რომ იყოს, საჭიროა b ტოლი იყოს ერთ-ერთი რიცხვის შემდეგი რიცხვებიდან: -1; 2; 3; 6.

123. განტოლება გავყოთ x^3-ზე, რის შემდეგაც მას მივცეთ შემდეგი სახე: $x^3-\frac{27}{x^3}+x^2+\frac{9}{x^2}-13\left(x-\frac{3}{x}\right)-10=0$ ან მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ $\left(x-\frac{3}{x}\right)\left[\left(x-\frac{3}{x}\right)^2+9\right]+\left(x-\frac{3}{x}\right)^2+6-13\left(x-\frac{3}{x}\right)-10=0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $x-\frac{3}{x}=y$. მივიღებთ $y^3+9y+y^2+6-13y-10=0$ და საბოლოოდ $y^3+y^2-4y-4=0$ საიდანაც მიიღება: $(y+1)(y^2-4)=0$. ყოველივე ამის შემდეგ ამოხსნა მარტივად დასრულდება.

124. საწყისი განტოლება განვიხილოთ როგორც კვადრატული განტოლება b-ს მიმართ. განტოლების ამონახსნი იქნება: $b=2x^2-x+1$ და $b=-2x^2-x-5$. ამოვხსნათ ეს განტოლებები x-ის მიმართ. მივიღებთ $x=\frac{1\pm\sqrt{1-8(1-b)}}{4}$; $x=\frac{1\pm\sqrt{1-8(b+5)}}{4}$. განვიხილოთ უტოლობები $1-8(1-b)\geq 0; 1-8(b+5)\geq 0$. პირველი უტოლობის ამონახსნია $b\geq\frac{7}{8}$, ხოლო მეორესი – $b\leq-\frac{39}{8}$. ამის შემდეგ ამოხსნა მარტივად დასრულდება.

125. შემოვიღოთ აღნიშვნა $(2x-1)^2=t$, განტოლება მიიღებს სახეს $t^2-8x^2t+12x^4=0$. ამოვხსნათ განტოლება t მიმართ. გვექნება $t=2x^2; t=6x^2$ ე.ი. $2x^2=(2x-1)^2; 6x^2=(2x-1)^2$. ამის შემდეგ განტოლებების ამოხსნა მარტივია.

126. ვთქვათ განტოლებებს საერთო ფესვი გააჩნიათ და $x=\alpha$. ცხადია $\alpha\neq 0$. ვინაიდან $k\neq 0$, ქვემოთ მოყვანილ $smx^3+nsx^2+psx+qs=0$ და $smx^3+rsx^2+kmx=0$ განტოლებებს, საერთო ფესვი გააჩნიათ და მისი მნიშვნელობაა: $x=\alpha$. ამ განტოლებების სხვაობასაც გააჩნია იგივე ფესვი. მიღებულ კვადრატულ განტოლებას და თავიდან აღებულ კვადრატულ განტოლებასაც გააჩნია საერთო ფესვი $x=\alpha$. ცხადია მათ სხვაობასაც გააჩნია საერთო ფესვი - იგივე რიცხვი α. მაგრამ ეს რიცხვი რაციონალური უნდა იყოს, რადგანაც მიღებულია მთელ კოეფიციენტებიანი წრფივი განტოლება. ახლა დავამტკიცოთ, რომ თავიდან მოცემულ კვადრატულ განტოლებას არ შეიძლება გააჩნდეს რაციონალური ფესვი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $x=\frac{a}{b}$ წარმოადგენს აღნიშნული განტოლების ფესვს (ვიგულისხმოთ, რომ $\frac{a}{b}$ უკვეცი წილადია). ფესვის განმარტების თანახმად გვაქვს

$s\cdot\frac{a^2}{b^2}+r\cdot\frac{a}{b}+k=0$, საიდანაც $sa^2=b(-ra-kb)$ და ამ უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $s=b$ ან $b=1$. ვინაიდან a და b უკვეცი რიცხვებია s უნდა გაიყოს b-ზე, მაგრამ s მარტივი რიცხვია საიდანაც გამოდის, რომ აღნიშნული ტოლობებისათვის $b=1$ და მივიღებთ, რომ $x=a$ ე.ი. $a^2s+ra+k=0$ საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $k=a$ ან $a=1$. თუ $a=1$ მაშინ გვექნება: $s+r+k=0$. ეს ტოლობა კი შეუძლებელია, ვინაიდან სამი კენტი რიცხვის ჯამი არ შეიძლება იყოს 0-ის ტოლი. თუ $a\neq1$ მაშინ $k^2s+rk+k=0$ ან $ks+r+1=0$. არც ეს ტოლობაა შესაძლებელი რადგანაც $ks+r$ ლუწი რიცხვია. მივიღეთ, რომ $b=1$. ეს შემთხვევაც შეუძლებელია, ე.ი. $b\neq1$. განსახილველი დაგვრჩა $b=s$ შემთხვევა. ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ ეს შემთხვევაც შეუძლებელია ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ამოცანაში მოცემულ განტოლებებს საერთო ფესვი არ გააჩნიათ.

127. საზოგადოდ არა. მაგალითად განტოლებისათვის $(x-1)(x-2)(x-10)(x-14)=0$ ასეთი m რიცხვი არ იარსებებს. როგორც არ უნდა ვამოძრაოთ $f(x)=(x-1)(x-2)(x-10)(x-14)=0$ ფუნქციის გრაფიკი იგი არ გადაკვეთს OX ღერძს წერტილებში $-a;-b;b;a$. აქვე შევენიშნოთ, რომ განტოლების ფესვები დააკმაყოფილებდნენ ტოლობას $x_4-x_3=x_2-x_1$ მაშინ ასეთი m იარსებებს და ის ტოლია $\frac{x_2+x_3}{2}$ (იგულისხმება, რომ $x_1<x_2<x_3<x_4$).

128. განვიხილოთ კვადრატული განტოლება $px^2+mx+q=0$ როგორც №126 ამოცანაში ენახეთ მას რაციონალური ფესვი არ გააჩნია, ე.ი. m^2-4pq არ შეიძლება იყოს სრული კვადრატი.

129. საშუალო არითმეტიკულის, საშუალო გეომეტრიულის და საშუალო კვადრატულის შესაბამისი ტოლობების გამოყენებით დავადგენთ, რომ ეს სამეულები არის ერთიდაიგივე კუბური განტოლებების ფესვები, რაც იმას ნიშნავს, რომ a,b,c და m,n,n სამეულები ერთმანეთს დაემთხვა.

130. ვთქვათ მოცემული განტოლებების ფესვებია $x_1=a-d; x_2=a; x_3=a+d$. ვიეტის თეორემის ძალით $x_1+x_2+x_3=12$ ე.ი. $a-d+a+a+d=12$. საიდანაც მივიღებთ, რომ განტოლების ერთ-ერთი ფესვია 4. რადგანაც $\begin{cases}x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b\\ x_1x_2x_3=b+4\end{cases}$ ამიტომ მივიღებთ სისტემას $\begin{cases}4(4-d)+4(4+d)+16-d^2=b\\ 4(4-d)(4+d)=b+4\end{cases}$ ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ $d=2$ ე.ი. განტოლების ფესვებია 2; 4; 6.

131. პირობის თანახმად მოცემულ განტოლებას გააჩნია სამი ნამდვილი ფესვი $x_1>0$, $x_2>0$ და $x_3>0$. ვიეტის თეორემის თანახმად $x_1+x_2+x_3=3$. ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\le3$. ცნობილია უტოლობა $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}}\ge\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ ე.ი. $x_1^2+x_2^2+x_3^2\ge3$. მაგრამ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$ და მივიღეთ, რომ $3^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\ge3$ და საბოლოოდ გვექნება $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\le3$.

132. განტოლება ასე გადავწეროთ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b-2=0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $x+\frac{1}{x}=t$. მივიღებთ განტოლებას $t^2+at+b-2=0$. პირობიდან $a^2+b^2=\frac{3}{4}$ გამომდინარეობს, რომ $b-2<0$, ე.ი. მიღებულ კვადრატულ განტოლებას გააჩნია ერთი დადებითი და ერთი უარყოფითი ფესვი. დავამტკიცოთ, რომ მიღებული განტოლების ფესვები აკმაყოფილებენ პირობას: $-2<t_1<0<t_2<2$. ვაჩვენოთ, რომ t_1 არ არის ნაკლები -2-ზე. მართლაც თუ $t_1<-2$-ზე მაშინ განტოლებას $(t-2)^2+a(t-2)+b-2=0$ უნდა გააჩნდეს უარყოფითი ფესვი, მაგრამ $t^2+(a-4)t+b-2a-a=0$ განტოლების ორივე ფესვი დადებითია. $a^2+b^2=\frac{3}{4}$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $a-4<0$ და $b-2a+2>0$. მართლაც $a^2+b^2=\frac{3}{4}$ ტოლობას აკმაყოფილებს $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$ რადიუსიანი წრეწირის წერტილები, რომლის ცენტრიც კოორდინატთა სათავეშია. მარტივად მტკიცდება, რომ ეს წერტილები განლაგებულია $b=2a-2$ წრფის ზემოთ. მივიღეთ წინააღმდეგობა პირობასთან $t_1<-2$. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ შეუძლებელია პირობა $t_2>2$, მართლაც თუ განვიხილავთ განტოლებას $(t+2)^2+a(t+2)+b-2=0$ ანალოგიური მსჯელობით გვექნება $2a+b+2>0; a+4>0$ ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ორივე ფესვი უარყოფითია. ყოველივე აქედან გამომდინარეობს, რომ $t_1\in(-2;0); t_2\in(0;2)$ და ე.ი. განტოლებას $x+\frac{1}{x}=t$ ფესვი არ გააჩნია. გავიხსენოთ, რომ შებრუნებულ სიდიდეთა ჯამი ან 2-ზე მეტია ან -2-ზე ნაკლებია. ყოველივე აქედან კი ვასკვნით, რომ თუ $a^2+b^2=\frac{3}{4}$ მაშინ განტოლებას $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ ამონახსნი არ გააჩნია.

133. ცხადია განტოლებას ამონახსნი უარყოფით რიცხვთა სიმრავლეში არ გააჩნია. ასევე არ გააჩნია ამონახსნი შუალედში $[2;+\infty)$. განვიხილოთ დარჩენილი ორი შუალედი $x\in[0;1)$ და $x\in[0;2)$. პირველ შემთხვევაში $[x]=0$ და მივიღებთ $x^5=5$ ე.ი. $x=\sqrt[5]{5}$. რადგანაც $\sqrt[5]{5}\notin[0;1)$ ამიტომ ის არ წარმოადგენს განტოლების ფესვს. როდესაც $x\in[1;2)$ მივიღებთ $x^5-1=5; x^5=6; x=\sqrt[5]{6}\in[1;2)$ და განტოლების ფესვია $\sqrt[5]{6}$.

134. ცხადია თუ განტოლების ამონახსნია $x=\alpha$, სადაც $\alpha\in[0;1)$ შუალედს, მაშინ ამ განტოლების ამონახსნი იქნება ნებისმიერი რიცხვი, რომელსაც აქვს სახე $n+\alpha$ სადაც n მთელი რიცხვია. ყოველივე აქედან გამომდინარეობს, რომ განტოლების ფესვი უნდა ვეძებოთ $[0;1)$ შუალედში. ეს შუალედი დავყოთ შემდეგ შუალედებად $\left[0;\frac{1}{3}\right)$, $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$, $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$, $\left[\frac{2}{3};1\right)$. თითოეული ეს შუალედი განვიხილოთ ცალ-ცალკე. თუ $x\in\left[0;\frac{1}{3}\right)$ მაშინ ცხადია $[x]+[2x]=[3x]$; $0+0=0$ ე.ი. აღებული შუალედიდან განტოლების ამონახსნია ნებისმიერი რიცხვი. ასევე მარტივად დადგინდება, რომ განტოლების ამონახსნია

ნებისმიერი რიცხვი შუალედიდან $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$. საბოლოოდ მივიღებთ, რომ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა $\left[n;n+\frac{1}{3}\right)\cup\left[n+\frac{1}{2};n+\frac{2}{3}\right)$ სადაც n მთელი რიცხვია.

135. სამართლიანია ტოლობა $x=[x]+\alpha$, სადაც $\alpha\in(0;1)$. განტოლება შეიძლება ასე გადავწეროთ $[x]^3+3[x]^2+5[x]+3\alpha+5=0$. საიდანაც მივიღებთ $3\alpha=-[x]^3-3[x]^2-5[x]+5$. მარჯვენა მხარე მთელი რიცხვია ე.ი. მთელი რიცხვია 3α-ც ეს კი შესაძლებელია მაშინ როდესაც $\alpha=\frac{1}{3}$ ან $\alpha=\frac{2}{3}$. განვიხილოთ ცალ-ცალკე ორივე შემთხვევა. ვთქვათ $\alpha=\frac{1}{3}$, $[x]^3+3[x]^2+5[x]+6=0$ განტოლებას მთელ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი გააჩნია და ის ტოლია $[x]=-2$ ე.ი. თავდაპირველად მოცემული განტოლების ამონახსნია $x=-2+\frac{1}{3}=-\frac{5}{3}$. თუ $\alpha=\frac{2}{3}$ მაშინ განტოლებას ამონახსნი არ გააჩნია.

136. ცხადია $[1]$; $[\sqrt{2}]$; $[\sqrt{3}]$ რიცხვები ტოლია 1-ის, რიცხვები $[\sqrt{4}]$;…;$[\sqrt{8}]$ ტოლია 2-ის. მათი რაოდენობა შეადგენს 5-ს. რიცხვები $\left[\sqrt{(n-1)^2}\right]$; $\left[\sqrt{(n-1)^2+1}\right]$;…;$\left[\sqrt{n^2-1}\right]$ ტოლია $n-1$ და მათი რაოდენობაა $2n-1$. ყოველივე ამის გათვალისწინებით მოცემული განტოლება ასე გადაიწერება: $1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\dots+(x+1)(2x-1)+x+x=324$ და მიღებული განტოლების ამონახსნია $x=8$.

137. ჯერ დავამტკიცოთ ტოლობა $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$. ვთქვათ $x=y+\alpha$, სადაც $0\le\alpha<\frac{1}{2}$, ხოლო y მთელია, მაშინ $\left[x+\frac{1}{2}\right]=\left[y+\frac{1}{2}+\alpha\right]=y$, $[2x]=[2y+2\alpha]=2y$, $[x]=y$ ე.ი. ტოლობა $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$ სამართლიანია მაშინ როდესაც $x=y+\frac{1}{2}+\alpha$, $0\le\alpha<\frac{1}{2}$. ასევე მივიღებთ ტოლობებს: $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[y+1+\alpha]=y+1$; $[2x]=2y+1$; $[x]=y$ ე.ი. ტოლობა $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$ სამართლიანია ამ შემთხვევაშიც. გამოვიყენოთ ეს ტოლობები, მივიღებთ:

$\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right]=[x]-\left[\frac{x}{2}\right]$; $\left[\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{x}{2}\right]-\left[\frac{x}{4}\right]$; $\left[\frac{x}{8}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{x}{4}\right]-\left[\frac{x}{8}\right]$; $\left[\frac{x}{16}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{x}{8}\right]-\left[\frac{x}{16}\right]$. მათი შეკრება მოგვცემს: $\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{x}{8}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{x}{16}+\frac{1}{2}\right]=[x]-\left[\frac{x}{16}\right]$ და განტოლება ასე გადაიწერება $[x]-\left[\frac{x}{16}\right]=3$, ცხადია მისი ამონახსნია $x\in[3;4)$.

138. განტოლების ფესვებმა, რომ შეადგინონ გეომეტრიული პროგრესია მათ უნდა ჰქონდეთ შემდეგი სახე: 1) $-a;0;a$ ან 2) $-a;-b;b;a$. გეომეტრიული პროგრესიის განმარტების თანახმად ეს შემთხვევები შეუძლებელია.

139. განტოლების ფესვებმა, რომ შეადგინონ არითმეტიკული პროგრესია მათ უნდა ჰქონდეთ შემდეგი სახე: 1) -7; 0; 7 ეს ის შემთხვევაა, როცა $P=0$ და ცხადია ეს ფესვები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას; 2) $-a;-b;b;a$ ამ შემთხვევაში ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას $a-b=2b$ და ე.ი.$a=3b$. ვიეტის თეორემის თანახმად გვექნება $b+3b=7$ ე.ი. $b=\frac{7}{4}$. ცხადია $P=\frac{147}{16}$. მივიღეთ P-ს ორი მნიშვნელობა: $p\in\left\{0;\ \frac{147}{16}\right\}$

140. ავაგოთ $f(x)=x^2-4x+3$ და $g(x)=(\sin 70^0-1)(x-a)^2+\cos 20^0(x-a)+\sin 70^0-1$ ფუნქციების გრაფიკები. $f(x)$ ფუნქციას მინიმუმი გააჩნია $x=2$ წერტილში და ის -1-ის ტოლია – $f(2)=-1$. რაც შეეხება $y=g(x)$ ფუნქციას მისი მაქსიმუმი მეტია -1-ზე, ხოლო პარაბოლას წვეროს აბსცისა იცვლება a-სთან ერთად. ცხადია a-ს ცვლილებით აღნიშნული პარაბოლები შეიძლება შეეხონ ერთმანეთს, გადაიკვეთონ ორ წერტილში ან საერთო წერტილი არ ჰქონდეთ. ე.ი. შესაძლებელია სამი შემთხვევა.

141. შემოვიღოთ აღნიშვნა $x=y+\alpha$. მაშინ განტოლება ასე გადაიწერება: $6(y+\alpha)^3+$ $+9(y+\alpha)^2-2=0$ საიდანაც მიიღება $6y^3+(18\alpha+9)y^2+18y\alpha^2+18y\alpha+6\alpha^3+9\alpha^2-2=0$. შევარჩიოთ α ისე, რომ y^2-ის კოეფიციენტი 0-ის ტოლი იყოს. ცხადია $\alpha=-\frac{1}{2}$ და განტოლება მიიღებს სახეს: $12y^3-9y-1=0$ ან $4y^3-3y=\frac{1}{3}$. ვთქვათ $y=\cos z$, მივიღებთ განტოლებას $co3z=\frac{1}{3}$ და ამოცანა მარტივად ამოიხსნება.

142. განტოლება ასე გადავწეროთ $1-3x^2=2(3x-x^3)$ ან $\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\frac{1}{2}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $x=tgy$, განტოლება მიიღებს სახეს: $\frac{3tgy-tg^3y}{1-3tg^2y}=\frac{1}{2}$, ის შეიძლება ასე გადავწეროთ $tg3y=\frac{1}{2}$ და ამოცანის ამოხსნა მარტივად დასრულდება.

144. ავაგოთ $f(x)=|x-1|+1$ და $g(x)=|x-4|+3$ ფუნქციის გრაფიკები. როგორც ცნობილია სამართლიანია ტოლობა: $min\{f(x),g(y)\}=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$ ამ ტოლობის გათვალისწინებით მარტივად აიგება $h(x)=\frac{|x-4|+|x-1|+4-||x-4|-|x-1|+2|}{2}$ ფუნქციის გრაფიკი. $h(x)=a$ განტოლების ფესვების რაოდენობა მარტივად დადგინდება a პარამეტრის ცვლილებით.

§7. ირაციონალური განტოლებები

46. საწყისი განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:
$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2x+5}-1\right)^2}=9$ აქედან $\sqrt{x-1}+2+\left|\sqrt{2x+5}-1\right|=9$ მიღებული განტოლების ამოხსნა მარტივია.

47. საწყისი განტოლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად: $\left|2\sqrt{x+1}-1\right|+\left|3\sqrt{x-2}+1\right|=7$ ან რაც იგივეა $\left|2\sqrt{x+1}-1\right|+3\sqrt{x-2}=6$. მიღებული განტოლება ადვილად ამოიხსნება

51. $2x+2\sqrt{x^2+3x+2}=3\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)+1$ შემოვიღოთ აღნიშნა $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=y$ მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას $y^2-3y-4=0$, საბოლოოდ გვექნება $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=4$ ეს განტოლება კი მარტივად ამოიხსნება.

52. $3\sqrt{2x-1}-3\sqrt{x-1}-6=2\sqrt{2x^2-3x+1}-3x$. შემოვიღოთ აღნიშნა $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=y$. მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას.

54. $\sqrt{6-\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}=\sqrt{\sqrt[3]{x}+3}+\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}-1$. შემოვიღოთ აღნიშნა $\sqrt{\sqrt[3]{x}+3}+\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}=y$ მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას $y^2-2y-3=0$, რომლის ამონახსნია $y=3$, მეორე ფესვი უვარგისია. დავუბრუნდეთ აღნიშნას $\sqrt{\sqrt[3]{x}+3}+\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}=3$. თუ ავიყვანთ განტოლების ორივე მხარეს კვადრატში, გავამარტივებთ და ისევ ავიყვანთ კვადრატში მივიღებთ მარტივ განტოლებას.

56. $\sqrt{x+3}+\dfrac{x^2+2x+1}{\sqrt{x+3}}=2x+2$ განტოლება გადავწეროთ ასე: $\left(\sqrt[4]{x+3}-\frac{x+1}{\sqrt[4]{x+3}}\right)^2=0$ ე.ი. $\sqrt[4]{x+3}=\dfrac{x+1}{\sqrt[4]{x+3}}$. ამ უკანასკნელის ორივე მხარის კვადრატში აყვანით მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას, რომელიც ადვილად ამოიხსნება.

57. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}+\sqrt{x^2-2}=2\sqrt{x}$ განტოლება ასე გადავწეროთ: $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2-2}}-\sqrt[4]{x^2-2}\right)^2=0$ აქედან მიიღება განტოლება $\sqrt{x}=\sqrt{x^2-2}$, რომელიც ადვილი ამოსახსნელია.

58. $\sqrt[5]{16+\sqrt{x^2+x+254}}+\sqrt[5]{16-\sqrt{x^2+x+254}}=2$. შემოვიღოთ აღნიშნა $\sqrt{x^2+x+254}=y$ რის შემდეგაც განტოლება მიიღებს სახეს: $\sqrt[5]{16+y}+\sqrt[5]{16-y}=2$. ახალი აღნიშნების: $\sqrt[5]{16+y}=z$ და $\sqrt[5]{16-y}=t$ შემოღების შემდეგ გვექნება შემდეგი სისტემა: $\begin{cases} z+t=2 \\ z^5+t^5=32 \end{cases}$

პირველი განტოლებიდან $z=2-t$, მისი ჩასმით მეორე განტოლებაში მივიღებთ განტოლებას, რომელიც ადვილად ამოიხსნება.

59. $\sqrt[9]{(2x+1)^2}+\sqrt[9]{(2x-1)^2}=4\sqrt[9]{(2x-1)(2x+1)}$ განტოლების ორივე მხარის $\sqrt[9]{(2x+1)^2}$ გამოსახულებაზე გაყოფის შემდეგ მივიღებთ განტოლებას:

$\sqrt[9]{\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^2}-\sqrt[9]{\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^2}+1=0$. შემოვიღოთ აღნიშნა $\sqrt[9]{\dfrac{2x+1}{2x-1}}=y$. მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას.

60. $4x-3+2(x-1)\sqrt{2(2x^2-4x+3)}+(2x-1)\sqrt{4x^2-4x+3}=0$. განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად: $2x-2+(2x-2)\sqrt{(2x-2)^2+2}+2x-1+(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2+2}=0$ ცხადია ამ განტოლების ფესვები უნდა ვეძებოთ შუალედში $\left[\frac{1}{2};1\right]$, რადგანაც $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ და $(1;+\infty)$ შუალედებში მარცხენა მხარე შეუძლებელია იყოს 0-ის ტოლი. პირველ შუალედში ის უარყოფითია მეორეში კი - დადებითი. შემოვიღოთ აღნიშვნა $x=y+\frac{3}{4}$, მაშინ განტოლება ასე გადაიწერება: $2y-\frac{1}{2}+\left(2y-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(2y-\frac{1}{2}\right)^2+2}+2y+\frac{1}{2}+\left(2y+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(2y+\frac{1}{2}\right)^2+2}=0$ მარცხენა მხარე იყოს $f(y)$ ფუნქცია. .უშუალო შემოწმებით ვრწმუნდებით, რომ იგი კენტი ფუნქციაა $\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]$ შუალედში და ამასთან ზრდადი. მარტივად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ზრდადი კენტი ფუნქცია 0-ის ტოლ მნიშვნელობას იღებს მხოლოდ არგუმენტის 0-ის ტოლი მნიშვნელობისათვის, ე.ი. $y=0$ და ვინაიდან $x=y+\frac{3}{4}$ ამიტომ $x=\frac{3}{4}$.

61. $\sqrt{x+5}=x^2-5$. ავიყვანოთ რა განტოლების ორივე მხარეს კვადრატში მივიღებთ განტოლებას $x^4-10x^2-x+20=0$. მარცხენა მხარე წარმოვადგინოთ ნამრავლის სახით $(x^2-x-5)(x^2+x-4)=0$ ამის შემდეგ განტოლება მარტივად ამოიხსნება.

62. $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x+2}=2\sqrt[4]{x+1}$. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}$. მარტივად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ იგი მკაცრად კლებადი ფუნქციაა, ამიტომ $\sqrt[4]{x+2}-\sqrt[4]{x+1}<\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}$ ანუ $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x+2}<2\sqrt[4]{x+1}$. მიღებული უტოლობიდან ჩანს, რომ განტოლებას მთელ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არ გააჩნია.

63. $\sqrt{5-\sqrt{5+x}}=x$. ავიყვანოთ რა განტოლების ორივე მხარეს კვადრატში ორჯერ, მივიღებთ განტოლებას $x^4-10x^2-x+20=0$. მარცხენა მხარე წარმოვადგინოთ ნამრავლის სახით: $(x^2-x-5)(x^2+x-4)=0$. ამის შემდეგ განტოლება მარტივად ამოიხსნება. აუცილებელია მიღებული ამონახსნების შემოწმება გარეშე ფესვის აღმოჩენის მიზნით.

64. $\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3-\sqrt{x}}}}=\sqrt{3-\sqrt{x}}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $y=\sqrt{3-\sqrt{x}}$. მივიღებთ: $y=\sqrt{3-\sqrt{3+y}}$, ავიყვანოთ ეს უკანასკნელი ტოლობა ორჯერ კვადრატში, მივიღებთ განტოლებას: $(y-1)(y^3+y^2-5y-6)=0$, აქედან $y=1$. დავუბრუნდებით რა აღნიშვნას მივიღებთ $x=4$. განვიხილოთ განტოლება $y^3+y^2-5y-6=0$ მას გააჩნია ერთადერთი ნამდვილი ამონახსნი, რომელიც ერთზე მეტია. ფუნქცია $g(y)=y^3+y^2-5y-6$ ზრდადია $(1;+\infty)$ შუალედში. აღნიშვნიდან გამომდინარეობს, რომ $y\le\sqrt{3}$. ვინაიდან $g(\sqrt{3})<0$ ამიტომ, $y^3+y^2-5y-6=0$ განტოლების ამონახსნის აღნიშვნაში ჩასმისა და $\sqrt{3-\sqrt{x}}=y$ განტოლების განხილვის შემდეგ ვნახავთ, რომ მას ამონახსნი არ გააჩნია. ე.ი განტოლების ერთადერთი ფესვია $x=4$.

65. $x+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots}}=\sqrt{4+\sqrt{4+\cdots}}$. ვთქვათ $\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots}}=z$. მაშინ $\sqrt{3+z}=z$ და $z^2-z-3=0$ ან $z=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. თუ $\sqrt{4+\sqrt{4+\cdots}}=t$ მაშინ $\sqrt{4+t}=t$ და $t^2-t-4=0$ ან $t=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$. $x=\frac{1+\sqrt{17}}{2}-\frac{1+\sqrt{13}}{2}=\frac{\sqrt{17}-\sqrt{13}}{2}$. მიღებული რიცხვი ირაციონალურია, რაც იმას ნიშნავს, რომ იგი არ შეიძლება იყოს წრფივი მთელკოეფიციენტებიანი განტოლების ამონახსნი.

66. $\sqrt{\frac{x}{x-3}}+2\sqrt{\frac{x-3}{x}}=\sqrt{\frac{2x}{x-1}}+2\sqrt{\frac{x-1}{2x}}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\sqrt{\frac{x}{x-3}}=z$ და $\sqrt{\frac{2x}{x-1}}=t$ მივიღებთ $z+\frac{2}{z}=t+\frac{2}{t}$ ან $z^2t+2t=t^2z+2z$ აქედან $(zt-1)(z-t)=0$ ე.ი. $z=t$ ან $zt=2$. მივიღებთ განტოლებებს $\sqrt{\frac{x}{x-3}}=\sqrt{\frac{2x}{x-1}}$ და $\sqrt{\frac{x}{x-3}}\cdot\sqrt{\frac{2x}{x-1}}=1$ ეს განტოლებები კი ადვილად ამოიხსნება.

67. $\sqrt{\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}}+\sqrt{\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}}}$. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\sqrt{\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}}=z$ და $\sqrt{\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}}=t$. მივიღებთ: $z+\frac{1}{t}=t+\frac{1}{t}$ ან $z^2t+t=t^2z+z$ აქედან $(z-t)(zt-1)=0$ ე.ი. $z=t$ ან $zt=1$. ამის შემდეგ განტოლების ამოხსნა მარტივია.

68. $\frac{\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{x-b}}{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}}=\frac{a+b}{2}-x$, $a\neq b$. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\sqrt[3]{a-x}=u$ და $\sqrt[3]{x-b}=v$ მაშინ განტოლება ასე გადაიწერება: $\frac{u-v}{u+v}=\frac{1}{2}\left(u^3-v^3\right)$ ე.ი $2(u-v)=(u+v)(u-v)\left(u^2+uv+v^2\right)$, $u-v=0$ ან $2=(u+v)\left(u^2+uv+v^2\right)$. პირველი განტოლების ამონახსნია $\sqrt[3]{a-x}=3\sqrt{x-b}$ ე.ი. $x=\frac{a+b}{2}$. ამოვხსნათ მეორე განტოლება, ცხადია $u^3+v^3=a-b$ ასე, რომ მივიღებთ განტოლებათა სისტემას: $\begin{cases}2=(u+v)\left(u^2+uv+v^2\right)\\ a-b=(u+v)\left(u^2-uv+v^2\right)\end{cases}$. მეორე განტოლება გავყოთ პირველზე და მიღებულს მივცეთ სახე: $\frac{a-b}{2}=\frac{1+\frac{v}{u}+\left(\frac{v}{u}\right)^2}{1-\frac{v}{u}+\left(\frac{v}{u}\right)^2}$. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\frac{v}{u}=z$ მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას.

69. $x^2+\sqrt{1+x^2}+\frac{\left(1-\sqrt{6}\right)\sqrt{1+x^2}+\frac{15}{4}}{x^2-\sqrt{1+x^2}}=-1$. ეს განტოლება ასე გადავწეროთ:
$x^4-x^2-1+x^2-\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}-\sqrt{6}\sqrt{x^2+1}+\frac{15}{4}=0$. ან რაც იგივეა:

$$\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2=0$$ ე.ი. $$\begin{cases} x^2=\frac{1}{2} \\ \sqrt{x^2+1}=\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$. ამ სისტემის ამონახსნია $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

§8. განტოლებათა სისტემები

იპოვეთ განტოლებათა სისტემის მთელი ამონახსნები (№№21, 22, 24, 25, 27, 30, 31, 34, 35, 36, 37)

21. $\begin{cases} \frac{2x}{y}+\frac{y}{3x}=\frac{5}{3} \\ x^2-xy+y^2=27 \end{cases}$ შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{x}{y}=z$. სისტემის პირველი განტოლება ასე გადაიწერება: $2z+\frac{1}{3z}=\frac{5}{3}$ და განტოლება მარტივად ამოიხსნება.

22. $\begin{cases} 3x^2-2xy+y^2+x=19 \\ \frac{x+y}{y}+\frac{2y}{x}=\frac{56}{5} \end{cases}$ სისტემის მეორე განტოლება ასე გადავწეროთ: $\frac{x}{y}+1+\frac{2y}{x}=\frac{56}{5}$, შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\frac{x}{y}=z$, მივიღებთ მარტივ განტოლებას $z+1+\frac{1}{z}=\frac{56}{5}$.

24. $\begin{cases} \frac{2x}{y}+\frac{y}{2x+3y}=\frac{29}{7} \\ 3x^2-5y^2+xy-9y=0 \end{cases}$ სისტემის პირველი განტოლება ასე გადავწეროთ: $\frac{2x}{y}+\frac{1}{\frac{2x}{y}+3}=\frac{29}{7}$ შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{2x}{y}=z$ მივიღებთ განტოლებას: $z+\frac{1}{z+3}=\frac{29}{7}$

25. $\begin{cases} \frac{x^2+3x+1}{y+2}+\frac{5y+10}{x^2+3x+1}=6 \\ 5x^2+3x-y=5 \end{cases}$ შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\frac{x^2+3x+1}{y+2}=z$, რის შემდეგაც სისტემის პირველი განტოლება მიიღებს მარტივ სახეს.

27. $\begin{cases} \frac{3}{x^2+x+y}+\frac{1}{x^2+x-y}=\frac{2}{3} \\ \frac{2}{x^2+x+y}-\frac{1}{x^2+x-y}=-\frac{1}{9} \end{cases}$ შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\frac{1}{x^2+x+y}=z$ და $\frac{1}{x^2+x-y}=t$ რის შემდეგაც სისტემა ასე გადაიწერება: $\begin{cases} 3z+t=\frac{2}{3} \\ 2z-t=-\frac{1}{9} \end{cases}$. მიღებული სისტემა მარტივად ამოიხსნება.

30. $\begin{cases} x^2+y^2+5xy=15 \\ x^4+xy^3+y^4+x^3y=27 \end{cases}$. ეს სისტემა გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$\begin{cases} x^2+y^2+5xy=15 \\ \left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2+xy\left(x^2+y^2\right)=27 \end{cases}$. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $x^2+y^2=z$ და $xy=t$

სისტემა მიიღებს სახე მარტივ სახეს: $\begin{cases} z+5t=15 \\ z^2-2t^2+zt=25 \end{cases}$

31 . $\begin{cases} 5x^2+7xy-4y^2=3 \\ 4x^2-3xy+y^2=2 \end{cases}$ ეს სისტემა წარმოადგენს ე.წ. ერთგვაროვან სისტემას. გავყოთ პირველი განტოლება მეორეზე და მიღებული ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ y^2-ზე. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{x}{y}=z$ მივიღებთ z-ის მიმართ კვადრატულ განტოლებას.

34. $\begin{cases} x^2+y^2+3x+2y+\frac{13}{4}=0 \\ 5x^2+y^2+3xy=5 \end{cases}$ სისტემის პირველი განტოლებიდან მივიღებთ:

$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2=0$ რომლის ამონახსნებია: $x=-\frac{3}{2}$ და $y=-1$. ვინაიდან უცნობის ეს მნიშვნელობები არ აკმაყოფილებენ სისტემის მეორე განტოლებას, ამიტომ სისტემას ამონახსნი არ გააჩნია.

35. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{y}=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt[6]{x} \end{cases}$. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\sqrt[6]{x}=z$ და $\sqrt[4]{y}=t$ სისტემა გადაიწერება ასე:

$\begin{cases} z^2-t=1 \\ z^3+t^2=z \end{cases}$. პირველი განტოლების გათვალისწინებით მეორე განტოლება ასე გადაიწერება: $z\left(z^2-1\right)+t^2=0$ ან $zt+t^2=0$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $t=0$ და $z+t=0$. მეორე ტოლობა შეუძლებელია და საბოლოოდ გვექნება $t=0$ ე.ი. $y=0$ და $x=1$.

36. $\begin{cases} \sqrt{x^2+2y+3}+x+y=12 \\ x^2+y-x=15 \end{cases}$ შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\sqrt{x^2+2y+3}=z$ და $x+y=t$. სისტემა მიიღებს სახეს: $\begin{cases} z+t=12 \\ z^2-t=18 \end{cases}$ რომელიც მარტივად ამოიხსნება.

37. $\begin{cases} \sqrt{y^2-3xy+2x^2}+2x=y \\ \sqrt{3xy-2x^2-y^2}=2x-8 \end{cases}$ ფესქვეშა გამოსახულებები განსხვავდებიან ნიშნით რაც იმას ნიშნავს, რომ ისინი 0-ის ტოლია, ამიტომ $2x-8=0$ აქედან $x=4$. პირველი განტოლებიდან მივიღებთ $y=8$.

38. იპოვეთ განტოლებათა სისტემის რაციონალური ფესვები:

$\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ (x^2+y^2)(x^6+y^6)=325 \end{cases}$. განტოლებათა სისტემა ასე გადავწეროთ:

$\begin{cases} (x^2+y^2)^2-2x^2y^2=17 \\ (x^2+y^2)\left[(x^2+y^2)^3-3x^2y^2(x^2+y^2)\right]=325 \end{cases}$ შემოვიღოთ აღნიშვნები: $x^2+y^2=z$ და

$x^2y^2=t$. სისტემა მიიღებს სახეს: $\begin{cases} z^2-2t=17 \\ z(z^3-3zt)=325 \end{cases}$. პირველი განტოლებიდან t გამოვსახოთ z-ით და ჩავსვათ მეორეში, მივიღებთ ბიკვადრატულ განტოლებას.

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები (№№ 39 -48):

39. $\begin{cases} x^2+y^2-3xy=-5 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$ სისტემა გადავწეროთ შემდეგნაირად: $\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2-xy)=35 \\ x^2+y^2-xy=2xy-5 \end{cases}$

საიდანაც მიიღება: $\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2-xy)=35 \\ x^2+y^2-3xy=-5 \end{cases}$. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $x+y=u$ და $xy=v$. მივიღებთ სისტემას: $\begin{cases} 2uv-5u=35 \\ u^2-5v=-5 \end{cases}$ ეს სისტემა დადის განტოლებაზე $2u^3-15u-175=0$, მისი ფესვია u=5 და ჩასმა მეორე განტოლებაში გვაძლევს v = 6. მიიღება სისტემა: $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$, რომელიც ადვილად ამოიხსნება.

40. $\begin{cases} x^4+y^4+3x^2y^2=20 \\ x^2+y^2+x^4y^4=20 \end{cases}$ სისტემა გადავწეროთ ასე: $\begin{cases} (x^2+y^2)^2+x^2y^2=20 \\ x^2+y^2+(x^2y^2)^2=20 \end{cases}$ შემოვიღოთ აღნიშვნები: $x^2+y^2=z$ და $x^2y^2=t$ მივიღებთ: $\begin{cases} z^2+t=20 \\ z+t^2=20 \end{cases}$. პირველ განტოლებას გამოვაკლოთ მეორე, მივიღებთ: $z^2-t^2+t-z=0$ ან $(z-t)(z+t-1)=0$. განვიხილოთ ცალ-ცალკე შემთხვევები: $z=t$ და $z+t=1$, რის შემდეგაც ამოხსნის დასრულება მარტივია.

41. $\begin{cases} 3x^2-5x+y^2+3y-1=0 \\ 2x^2+x-y^2-3y+1=0 \end{cases}$ შევკრიბოთ ეს განტოლებები, მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას.

42. $\begin{cases} 5y^3+8y^2x+8yx^2+3x^3=6 \\ y^3+y^2x+2yx^2=1 \end{cases}$ სისტემა წარმოადგენს ე.წ. ერთგვაროვან სისტემას. პირველი განტოლება გავყოთ მეორეზე, მიღებული შედეგი კი – x^3-ზე. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\frac{x}{y}=z$. მივიღებთ განტოლებას: $z^3-2z^2+4z-3=0$, მისი ამონახსნია z = 1. ე.ი. x = y ამის შემდეგ ამოხსნის დასრულება მარტივია.

43. $\begin{cases}(x+2y)(x^3+xy^2)=25\\ 2x^2+y^2+2xy=10\end{cases}$ შემოვიღოთ აღნიშვნები: $x^2+2xy=z$ და $x^2+y^2=t$, სისტემა ასე გადაიწერება: $\begin{cases}zt=25\\ z+t=10\end{cases}$, საიდანაც მივიღებთ სისტემას: $\begin{cases}x^2+2xy=5\\ x^2+y^2=5\end{cases}$. მიღებული სისტემა ერთგვაროვანია და მარტივად ამოიხსნება.

44. $\begin{cases}y^2+2y-xy-3x=3\\ x^2+2y^2=22\end{cases}$. სისტემის პირველი განტოლება ასე გადავწეროთ: $(y+3)(y-x-1)=0$ საიდანაც მივიღებთ: $y=-3$ ან $y=x+1$. გავითვალისწინებთ რა მიღებული სისტემის მეორე განტოლებას, გვექნება: $\begin{cases}y=-3\\ x^2+2y^2=22\end{cases}$ და $\begin{cases}y=x+1\\ x^2+2y^2=22\end{cases}$ და მათი ამოხსნა მარტივია.

45. $\begin{cases}x^3+x^2-xy+3x+3=y\\ 3x^4-4x^2y+x^2-4=0\end{cases}$ სისტემის პირველი განტოლება ასე გადავწეროთ: $(x+1)(x^2-y+3)=0$, საიდანაც მივიღებთ: $x=-1$ ან $y=x^2+3$. გავითვალისწინებთ რა მიღებული სისტემის მეორე განტოლებას, გვექნება: $\begin{cases}x=-1\\ 3x^4-4x^2y+x^2-4=0\end{cases}$ და $\begin{cases}y=x^2+3\\ 3x^4-4x^2y+x^2-4=0\end{cases}$ მათი ამოხსნა მარტივია.

46. $\begin{cases}xy^2-2y^2+2x+2=x^2+x\\ 3y^4+2y^2x-3y^2=15\end{cases}$ სისტემის პირველი განტოლება ასე გადავწეროთ: $(x-2)(y^2-x-1)=0$, საიდანაც მივიღებთ: $x=2$ ან $x=y^2-1$ და მათი გათვალისწინებით მივიღებთ: $\begin{cases}x=2\\ 3y^4+2y^2x-3y^2=15\end{cases}$ და $\begin{cases}x=y^2-1\\ 3y^4+2y^2x-3y^2=15\end{cases}$. მათი ამოხსნა მარტივია.

47. $\begin{cases}x^4+y^4=2a^4+12a^2b^2+2b^4\\ x^2+y^2+xy=3a^2+b^2\end{cases}$ სისტემა ასე გადავწეროთ:

$\begin{cases}(x^2+y^2)^2-2(xy)^2=2a^4+12a^2b^2+2b^4\\ x^2+y^2+xy=3a^2+b^2\end{cases}$. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $x^2+y^2=z$ და $xy=t$

მივიღებთ სისტემას: $\begin{cases}z+t=3a^2+b^2\\ z^2-2t^2=2a^4+12a^2b^2+2b^4\end{cases}$ სისტემის პირველი განტოლებიდან z გამოვსახოთ t უცნობით. მიღებული ჩავსვათ მეორე განტოლებაში, მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას, რომლის ფესვებია: $t_1=a^2-b^2$; $t_2=-7a^2-b^2$. მათი გამოყენებით მივიღებთ: $z_1=2a^2+2b^2$; $z_2=10a^2+2b^2$. დავუბრუნდებით რა x და y უცნობებს მივიღებთ სისტემებს:

$\begin{cases}x^2+y^2=2a^2+2b^2\\ xy=a^2-b^2\end{cases}$ და $\begin{cases}x^2+y^2=10a^2+2b^2\\ xy=a^2-b^2\end{cases}$, რომლებიც ადვილად ამოიხსნება.

48. საწყისი სისტემა დადის წრფივ განტოლებათა სისტემებზე: 1) $\begin{cases} x \le -0.5 \\ y \le -1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \le -0.5 \\ y \in (-1;2] \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \le -0.5 \\ y > 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \in (-0.5;1] \\ y \le -1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x \le (-0.5;1] \\ y \in (-1;2] \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x \le (-0.5;1] \\ y > 2 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x > 1 \\ y \le -1 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x > 1 \\ y \in (-1;2] \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x > 1 \\ y > 2 \end{cases}$, რომლებიც მარტივად ამოიხსნება.

49. სისტემის პირველი განტოლება გავყოთ მეორეზე, მიღებული ტოლობის ორივე მხარე კი გავყოთ $x\sqrt{x}$-ზე და შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\sqrt{\dfrac{y}{x}} = z$. მივიღებთ განტოლებას რომელიც ასე ჩაიწერება: $(z-2)(33z^2+27z-11)=0$ საიდანაც $z=2$ და ეს ერთადერთი ფესვი გამოგვადგება სისტემის ამოხსნის დასრულებაში.

50. სისტემაში შემავალი განტოლებები შევკრიბოთ, მივიღებთ $6x^2+3xy-6y+12=0$. ეს უკანასკნელი ასე გადავწეროთ: $(x-2)(3y+6x+12)=0$ ე.ი. $x=2$ ან $y=-2x-4$

51. სისტემის პირველი განტოლება ასე გადავწეროთ: $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-1)^2=3$. ვინაიდან ამონახსნებს ვეძებთ მთელ რიცხვთა სიმრავლეში ამიტომ z შეიძლება იყოს ან 0 ან 2. განვიხილოთ ცალ-ცალკე შემთხვევები: z = 0 და z = 2. პირველი განტოლებიდან ჩანს, რომ ამონახსნები შეიძლება იყოს შემდეგი სამეულები (0; 1; 0), (2; 1; 0), (0;-1; 0), (-2; -1; 0), (0; 1; 2), (2; 1; 2), (4; 3; 2), (2; 3; 2) ამ ამონახსნებიდან შევარჩიოთ ის სამეულები, რომლებიც აკმაყოფილებენ მეორე განტოლებას.

52. მეორე განტოლებიდან გვექნება $xy=-3-z$, პირველი განტოლება კი ასე ჩავწეროთ: $x^3z+y^3z+xy^2z-zx(z+3)=39$ ან $x^3z+y^3z+xy^2z+x^2yz=39$, ეს უკანასკნელი ტოლობა ასე გადავწეროთ: $z(x+y)(x^2+y^2)=39$ ვინაიდან $z, x+y, x^2+y^2$ მთელი რიცხვებია, ხოლო 39 ჯერადია ±1; ±3; ±13; ±39 რიცხვების. ე.ი. z ტოლია ამ რიცხვებიდან რომელიმე მათგანის. მივიღებთ განტოლებათა სისტემებს, რომლებიც ადვილად ამოიხსნება.

53. სისტემის პირველი განტოლებიდან მიიღება $(x+y)^2=(7-z)^2$ ე.ი. $x^2+2xy+y^2=49-14z+z^2$. მიღებული გამოსახულება მივუმატოთ სისტემის მეორე განტოლებას, მივიღებთ გატოლებას $(x-2y)^2+(z-1)^2=0$. საბოლოოდ მივიღებთ $z=1$ და $x=2y$.

ამოხსენით განტოლებათა სისტემა დადებით რიცხვთა სიმრავლეში (№№ 54 – 56):

54. მოცემული განტოლებების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$2xy+2xz+2yz=(x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2=81-27=54$$

$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz=54-54=0$. საიდანაც მიიღება $x=y=z$, საბოლოოდ გვექნება, სისტემის ამონახსნთა სამეული $(3;3;3)$.

55. სისტემის პირველი განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ y–მა შეიძლება მიიღოს მნიშვნელობები მხოლოდ სიმრავლიდან $\{0;\pm1;\pm2;\pm3\}$. განვიხილოთ ყველა ეს შემთხვევა ცალ-ცალკე. ვთქვათ y = 0, მივიღებთ სისტემას: $\begin{cases} z^2+2x^2=31 \\ x^3+z^3=36 \end{cases}$ თუ სისტემას გააჩნია ამონახსნი ის უნდა იყოს აუცილებლად კენტი რიცხვი, $z\in\{1;3;5\}$ არცერთი ეს მნიშვნელობა არ გამოდგება, ე.ი. სისტემას ამონახსნი არ გააჩნია. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ერთადერთი ამონახსნი (3;2;1) მიიღება მაშინ როდესაც y = 2.

56. ვინაიდან $\frac{xy^2+x^5y+1}{3}=\sqrt[3]{x^6y^3}=x^2y$, მივიღეთ რომ საშუალო არითმეტიკული ტოლია საშუალო გეომეტრიულის ე.ი. x = y = z. სისტემის მეორე განტოლებიდან მიიღება ამონახსნი (2; 2; 2).

57. გამოვაკლოთ სისტემის პირველ განტოლებას მეორე. მივიღებთ $(y-z)(1+z+y)=0$ ე.ი. y = z ან z+ y = -1. მეორე ტოლობა ეწინააღმდეგება სისტემის მესამე განტოლებას . ე. ი. y = z და სისტემა ასე გადაიწერება: $\begin{cases} x+z=z^2 \\ z+z=x^2 \end{cases}$ პირველ განტოლებას გამოვაკლოთ მეორე, მივიღებთ x – z = z^2 - x^2 ე.ი. $(x-z)(x+z+1)=0$ აქედან x = z ან x + z =-1. მეორე ტოლობა შეუძლებელია საწყისი სისტემის მეორე განტოლების გამო. მივიღეთ x = y = z. საბოლოოდ მიიღება ამონახსნები (0; 0; 0), (2; 2; 2).

58. სისტემის პირველ განტოლებას გამოვაკლოთ მესამე განტოლება, მივიღებთ

$(z-y)(1-x)=0$ განვიხილოთ შემთხვევა, x = 1 მივიღებთ სისტემას: $\begin{cases} y+z=9 \\ yz=10 \end{cases}$ მისი ამოხსნა მარტივია. განვიხილოთ მეორე შემთხვევა x = z. სისტემა ასე გადაიწერება: $\begin{cases} x+y^2=11 \\ y+xy=9 \end{cases}$ საიდანაც მიიღება განტოლება: $y^3-12y+9=0$. ან $(y-3)(y^2+3y-3)=0$ ამის შემდეგ ამოხსნა მარტივია.

59. სისტემა გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} x(y+z)+yz=26 \\ \frac{y+z}{yz}=\frac{7}{12} \\ \frac{1}{x}=\frac{7}{12}-\frac{1}{yz} \end{cases}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები $y+z=u; yz=v$ სისტემა ასე გადაიწერება:

$$\begin{cases} xu+v=26 \\ \frac{u}{v}=\frac{7}{12} \\ \frac{1}{x}=\frac{7}{12}-\frac{1}{v} \end{cases}$$

სისტემის პირველი განტოლებიდან x გამოვსახოთ u და v ცვლადებით:

$u=(26-v)\left(\frac{7}{12}-\frac{1}{v}\right)$, მეორე განტოლების გათვალისწინებით მივიღებთ $7v^2=(26-v)(7v-12)$

ეიპოვეით რა u და v მნიშვნელობებს მივიღებთ: $\begin{cases} y+z=7 \\ yz=12 \end{cases}$ და $\begin{cases} y+z=\frac{12}{13} \\ yz=\frac{13}{7} \end{cases}$ მეორე სისტემას ამონახსნი არ გააჩნია. პირველი სისტემა მოგვეცემს შემდეგ ფესვებს (2; 3; 4), (2; 4; 3).

60. სისტემის მეორე და მესამე განტოლებებიდან მივიღებთ: $(y-z)(1-x)=0$ ე.ი. y = z ან x = 1. განვიხილოთ პირველი შემთხვევა. სისტემა გადაიწერება ასე: $\begin{cases} x+y^2+xy^2=13 \\ xy+y+xy^2=11 \end{cases}$ პირველი განტოლებიდან x გამოვსახოთ y–ით და ჩავსვათ მეორე განტოლებაში, მივიღებთ $y^4-2y^2-14y+11=0$. მიღებულ განტოლებას მთელ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არ გააჩნია. განვიხილოთ მეორე შემთხვევა x = 1, მივიღებთ: $\begin{cases} yz=6 \\ y+z=5 \end{cases}$ და სისტემა მარტივად ამოიხსნება.

61. სისტემის მეორე განტოლება გავამრავლოთ 2-ზე და დავუმატოთ პირველ განტოლებას, გვექნება $(x+y+z)^2+(x+y+z)-12=0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა x + y + z =t. $t^2+t-12=0$ განტოლების ფესვებია -4 და 3. განვიხილოთ შემთხვევა: $x+y+z=3$. მიღებული განტოლებებისა და მესამე განტოლების გათვალისწინებით მივიღებთ z =1. საბოლოოდ გვექნება სისტემა: $\begin{cases} xy=1 \\ x+y=2 \end{cases}$. ანალოგიურად განიხილება შემთხვევაც $x+y+z=-4$.

62.შევკრიბოთ სამივე განტოლება, მივიღებთ $x^3+y^3+z^3=6xyz$. გავითვალისწინებთ, რა მიღებულს ცალ-ცალკე სისტემის სამივე განტოლებასთან ერთად გვექნება

$\begin{cases} x^3=\frac{1}{6}xyz \\ y^3=\frac{4}{3}xyz \\ z^3=\frac{9}{2}xyz \end{cases}$. ცხადია ამ სისტემის ამონახსნია (0; 0; 0). განვიხილოთ სხვა შემთხვევა.

სისტემა ასე გადავწეროთ: $\begin{cases} x^2=\frac{1}{6}yz \\ y^2=\frac{4}{3}xz \\ z^2=\frac{9}{2}xy \end{cases}$.სისტემიდან ჩანს, რომ თუ უცნობის რომელიმე მნიშვნელობა დადებითია, მაშინ დანარჩენი უცნობის მნიშვნელობებიც დადებითია, ხოლო თუ რომელიმე ერთი უცნობი მაინც უარყოფითია, მაშინ უარყოფითია დანარჩენი უცნობებიც. ცხადია ასევე, თუ ერთ-ერთი ამონახსნია $(a,\ b,\ c)$ მაშინ ამონახსნი იქნება ასევე $(-a,\ -b,\ -c)$ ეიპოვოთ სისტემის დადებითი ამონახსნი. მესამე განტოლებიდან გვაქვს: $z=\sqrt{\frac{9}{2}xy}$ და მიღებულის ჩასმა მეორე და მესამე განტოლებაში გვაძლევს:

$$\begin{cases} 6x^2 = y\sqrt{\frac{9}{2}xy} \\ 3y^2 = 4x\sqrt{\frac{9}{2}xy} \end{cases}$$ საიდანაც მიიღება y = 2x. მესამე უცნობი z –თვის გვექნება z = 3x.

ყოველივე აქედან მიიღება, რომ სისტემის ამონახსნია $(a;2a;3a)$ როცა $a > 0$. მაგრამ მისი ამონახსნია ასევე $(-a;-2a;-3a), a \in R$.

63. სისტემის პირველი განტოლებიდან მიიღება: $z^2 + \frac{1}{4} = x + y + z + \frac{1}{x+y+z}$. ვინაიდან $z^2 + \frac{1}{4} > 0$ ამიტომ $x + y + z > 0$. რადგანაც $x + y + z + \frac{1}{x+y+z} \geq 2$, გვექნება: $z^2 + \frac{1}{4} \geq 2$ საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $z^2 \geq \frac{7}{4}$. სისტემის მეორე განტოლებიდან მიიღება $z^2 \leq \frac{7}{4}$ ე.ი. $z = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$ და $x + y + z + \frac{1}{x+y+z} = 2$ საიდანაც გამომდინარეობს, რომ x + y + z = 1. საბოლოოდ მიიღება მარტივი განტოლებათა სისტემა.

64. პირველი განტოლება ასე გადავწეროთ $(x+y)(x^2+y^2-xy) = z^3$. გავითვალისწინოთ მეორე და მესამე განტოლებები, მივიღებთ: $(6-z)(z^2-xy) = z^3$ ვინაიდან $(x+y)^2 - 2xy = z^2$ ამიტომ $xy = \frac{(6-z)^2 - z^2}{2}$ ან $xy = 18 - 6z$. ზემოთ მოცემული განტოლება ასე გადაიწერება: $(6-z)(z^2 - 18 + 6z) = z^3$. საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $z^3 - 27z + 54 = 0$ ან $(z-3)^2(z+6) = 0$ მივიღებთ z = 3, z = −6. თუ განვიხილავთ შემთხვევებს ცალ-ცალკე მივიღებთ განტოლებათა სისტემებს: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ და $\begin{cases} x + y = 12 \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases}$. მათი ამოხსნა მარტივია.

65. სისტემაში შემავალი განტოლებები გავამრავლოთ შესაბამისად x − y, z − x და y − z –ზე. მივიღებთ განტოლებათა სისტემას, რომელთა შეკრებაც გვაძლევს $x + z - 2y = 0$. გამოვსახოთ x ცვლადი y და z ცვლადებით და მიღებული შედეგები ჩავსვათ თავიდან მოცემული სისტემის პირველ და მესამე განტოლებებში. მივიღებთ ერთგვაროვან სისტემას. გავყოთ პირველი განტოლება მეორეზე, მიღებული ტოლობა გავყოთ z^3-ზე, შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{y}{z} = t$, საბოლოოდ გვექნება: $\left(t - \frac{4}{5}\right)\left(670t^2 - 270t + 85\right) = 0$ მიღებული განტოლების ერთადერთი ამონახსნია $t = \frac{4}{5}$ ე.ი. $y = \frac{4}{5}z$ ჩავსვათ მიღებული მესამე განტოლებაში მივიღებთ განტოლებას, რომლის ამონახსნია z =5, საბოლოოდ გვექნება $x = 3, y = 4, z = 5$.

66. შემოვიღოთ აღნიშვნები: x + y = u და z = v. სისტემის პირველი და მეორე განტოლებებიდან მიიღება: $\begin{cases} u + v + uv = \frac{11}{2} \\ u^2 + v^2 = \frac{97}{16} \end{cases}$ ან $\begin{cases} u + v + uv = \frac{11}{2} \\ (u+v)^2 - 2uv = \frac{97}{16} \end{cases}$ და სისტემის ამოხსნა მარტივად დასრულდება.

67. სისტემის პირველი განტოლება ასე გადავწეროთ: $3x^2+(3y+2)x+41y-18y^2-21=0$ ამოვხსნათ ის x ცვლადის მიმართ. გვექნება: $x=2y-3$ ან $x=-3y+\frac{7}{3}$. მოცემული სისტემა ტოლფასია შემდეგი ორი სისტემის: $\begin{cases} x=2y-3 \\ 3xy+x^2+y^2=11 \end{cases}$ და $\begin{cases} x=-3y+\frac{7}{3} \\ 3xy+x^2+y^2=11 \end{cases}$

რომლებიც ადვილად ამოიხსნება.

68. სამართლიანია ტოლობები:

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)+3xyz$ და

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)$ შემოვიღოთ აღნიშვნები: $x+y+z=u$ და

$xy+xz+yz=v$. მივიღებთ სისტემას: $\begin{cases} u^3-3uv=4 \\ u^2-2v=6 \end{cases}$ პირველი განტოლება ასე ჩავწეროთ

$u(u^2-3v)=4$ ე.ი. $u(u^2-2v-v)=6$ ან $u(6-v)=4$ საიდანაც $u=\frac{4}{6-v}$. მეორე განტოლება ასე

გადაიწერება: $\left(\frac{4}{6-v}\right)^2-2v=6$ მისი ნამდვილი ამონახსნია v = 5. მეორე უცნობი u = 4.

ყოველივე ამის გათვალისწინებით მივიღებთ სისტემას: $\begin{cases} x+y+z=4 \\ xy+xz+yz=5 \\ xyz=2 \end{cases}$ მისი ამონახსნია

$t^3-4t^2+5t-2=0$ განტოლების ფესვები, ანუ $t_1=1; t_2=1; t_3=2$. საწყისი სისტემის ამონახსნი კი იქნება ამ ფესვების ყველა შესაძლო კომბინაცია.

69. სამართლიანია ტოლობები:

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)+3xyz$ და

$x^4+y^4+z^4=\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-2\left[(xy+xz+yz)^2-2xyz(x+y+z)\right]$. სისტემაში შემავალი პირველი და მეორე განტოლებების გადამრავლებით და ზემოთ მოცემული პირველი ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ $xy+xz+yz=11$. მეორე ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$xyz=6$. საბოლოოდ გვექნება: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+xz+yz=11 \\ xyz=6 \end{cases}$. ამ სისტემის ამონახსნს წარმოადგენს

ქვემოთ მოყვანილი განტოლების $(t-1)(t-2)(t-3)=0$

ამონახსნთა 1; 2; 3 კომბინაციები ციფრების გამეორების გარეშე.

70. მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას სისტემას:

$\begin{cases} x+y+z+t=5 \\ xy+xz+xt+yz+yt+zt=8 \\ xyz+xyt+xzt+yzt=5 \\ xyzt=1 \end{cases}$ ცხადია სისტემის ამონახსნი დაკავშირებულია შემდეგი

მეოთხე ხარისხის განტოლების ფესვებთან: $u^4-5u^3+8u^2-5u+1=0$ ის სიმეტრიული

განტოლებაა, გადავწეროთ ასეთი სახით $\left(u^2+\frac{1}{u^2}\right)-5\left(u+\frac{1}{u}\right)+8=0$ და შემოვიღოთ აღნიშვნა: $u+\frac{1}{u}=z$ ამის შემდეგ ამოხსნა მარტივია.

71. ალგებრის კურსიდან ცნობილია უტოლობა $\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3+z^3}{3}}\le\sqrt[4]{\frac{x^4+y^4+z^4}{4}}$ მასში ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ, როდესაც $x=y=z$ და გავითვალისწინებთ რა სისტემაში შემავალ განტოლებებს, მივიღებთ, რომ საწყისი განტოლებათა სისტემის ამონახსნია $x=y=z=1$.

72. სისტემაში შემავალი განტოლებები გადავამრავლოთ, მივიღებთ:

$(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n)^{n-1}=x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n$ საიდანაც გვაქვს:

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n\left[(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n)^{n-2}-1\right]=0,$$

ე.ი. $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n=0$ ან $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n=\pm1$.

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n=0$ მისი ერთ-ერთი ამონახსნია $x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n=0$. იმ შემთხვევაში, როცა რომელიმე თანამამრავლი ნულია, ხოლო თუ არსებობს ნულისაგან განსხვავებული თანამამრავლი ის ცხადია სისტემის ამონახსნი ვერ იქნება რადგან ეწინააღმდეგება ტოლობას $x_1\cdot x_2\cdots x_{k-1}\cdot x_{k+1}\cdots x_n=x_k$ სადაც $x_k\neq0$. განვიხილოთ მეორე შემთხვევა: $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n=\pm1$. თუ გავითვალისწინებთ სისტემაში შემავალ ტოლობებს, გვექნება: $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n=x_k^2$ და $x_k=\pm1$, ე.ი. უცნობების მნიშვნელობებია ან 1 ან -1. ამასთან შეუძლებელია ტოლობა $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n=-1$, ამიტომ საბოლოოდ განსახილველი დაგვრჩა შემდეგი შემთხვევა: $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n=1$. სისტემის ამონახსნს არ წარმოადგენს უცნობის ის მნიშვნელობები სადაც -1 გეხვდება კენტ რიცხვჯერ, ვინაიდან ის ეწინააღმდეგება სისტემაში შემავალ ტოლობებს. ამის შემდეგ განსახილველი დაგვრჩა ის ვარიანტები სადაც -1-ის რაოდენობა ლუწია, ანუ 2^{n-1}. რადგანაც ამონახსნებს ასევე წარმოადგენენ $x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n=0$ მნიშვნელობები, ამიტომ ამონახსნთა რაოდენობა იქნება $2^{n-1}+1$.

73. განტოლებათა სისტემა გადავწეროთ ასე: $\begin{cases}(x-2)^2+(y-4)^2=1\\(x-3)^2+(y-6)^2=a\end{cases}$ ამ სისტემის ამონახსნი განლაგებულია სისტემაში შემავალი განტოლებების შესაბამისი წრეწირების გადაკვეთის წერტილებში. ამ წრეწირების ცენტრები მდებარეობენ წერტილებში (2; 4) და (3; 6) ხოლო რადიუსები შესაბამისად ტოლია 1 და $\sqrt{a}$. ამოცანის პირობის ძალით სისტემას უნდა გააჩნდეს ერთადერთი ამონახსნი. ეს კი შესაძლებელია მაშინ როდესაც მოცემული წრეწირები ეხება ერთმანეთს ან გარედან ან შიგნიდან. ამ მოსაზრებების გამოყენებით მივიღებთ, რომ a-ს საძებნი მნიშვნელობებია $a=\sqrt{\sqrt{5}\pm1}$

74. $u=3-v$; $z=5-t$. სისტემის მესამე განტოლების გათვალისწინებით მივიღებთ: $z^2-u^2=(5-t)^2-(3-v)^2=25-10t+t^2-9+6v-v^2=5$ ვინაიდან $t^2-v^2=3$ ამიტომ მივიღებთ $14-10t+6v=0$ საიდანაც $t=\frac{7+3v}{5}$. ჩავსვათ ეს სისტემის მეოთხე განტოლებაში, რის შემდეგაც სისტემა მარტივად ამოიხსნება.

75. შემოვიტანოთ აღნიშვნები: $\sqrt{x+2}=u$; $\sqrt{y+5}=v$; $\sqrt{2x-5}=z$; $\sqrt{2y+9}=t$. გავითვალისწინებთ რა მოცემულ განტოლებათა სისტემას, შეგვიძლია დავწეროთ: ახალი სისტემა u,v,z,t უცნობების მიმართ: $\begin{cases} u+v=8 \\ z+t=10 \\ 2u^2-z^2=9 \\ 2v^2-t^2=1 \end{cases}$. მიღებული სისტემა ამოიხსნება №74 ამოცანის ანალოგიურად.

§9. მიმდევრობები

39. $a_{n+1}=a_n+3n+5$; $a_1=4$. ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$a_n=a_{n-1}+3(n-1)+5$$

$$a_{n-1}=a_{n-2}+3(n-2)+5$$

$$a_3=a_2+3\cdot 2+5$$

$$a_2=a_1+3\cdot 1+5$$

შევკრიბოთ მოცემული ტოლობები, მივიღებთ:

$$a_n=a_1+3[1+2+3+\cdots+(n-1)]+5(n-1) \text{ ე.ი.}$$

$$a_n=4+\frac{3n(n-1)}{2}+5n-5$$

$$a_n=\frac{10n+3n^2-3n-2}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left(3n^2+7n-2\right)$$

40. ზოგადი წევრის გამომსახველ ფორმულაში წილადის მრიცხველი ან 2-ის ტოლია ან 4-ის. გამოვთვალოთ მნიშვნელის (კვადრატული სამწევრის) წვეროს კოორდინატები. ამით დავადგენთ მნიშვნელის მინიმალურ მნიშვნელობას. ავიღებთ n-ის ორ მნიშვნელობას წვეროს აბსცისის სიახლოვეს და შევადარებთ რა მიმდევრობის ამ წევრებს მივიღებთ მიმდევრობის უდიდეს წევრს.

42. იმ შემთხვევაში, როცა $n\geq 3$ მიმდევრობის ზოგადი წევრი გადაიწერება შემდეგნაირად: $a_n=-5n+27$. $\max a_n=a_3=12$. a_1 და a_2 ნაკლებია 12-ზე ე.ი. მიმდევრობის უდიდესი წევრია 12.

43. ზოგადი წევრის ფორმულა ჩავწეროთ შემდეგნაირად: $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ეს მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და მისი წევრები მოთავსებლია შუალედში $\left[0;\sqrt{2}-1\right]$

46. ზოგადი წევრის ფორმულა გადავწეროთ ასე:

$$a_n = \frac{2}{\left(\sqrt[6]{n+3}+\sqrt[6]{n+1}\right)\left(\sqrt[3]{(n+3)^2}+\sqrt[3]{(n+3)(n+1)}+\sqrt[3]{(n+1)^2}\right)}+\frac{n+1}{n}.$$ ეს მიმდევრობა კლებადია.

მისი უდიდესი წევრია a_1, ე.ი. $2+\sqrt[3]{2}-\sqrt[6]{2}$

47. მოცემული მიმდევრობის წევრები მიიღება 0; 0; 0; , მიმდევრობისაგან თუ მის წევრებს თანმიმდევრობით მივუმატებთ 1-ს ან −1-ს. ე.ი. $a_n = 0+(-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}$

50. მოცემული მიმდევრობის წევრები მიიღება $\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2};\cdots$, მიმდევრობისაგან თუ მის წევრებს თანმიმდევრობით მივუმატებთ $\frac{1}{2}$ ან $-\frac{1}{2}$. ე.ი. $a_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-)^{n+1} = \frac{1}{2}\left[1+(-1)^{n+1}\right]$.

53. ავაგოთ ორი მიმდევრობა b_n და c_n. პირველი მიმდევრობაა $\frac{2}{3};0;\frac{2}{3}0;\cdots$ ხოლო მეორე – 0; 3; 0; 3; ... $b_n = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}\left(1+(-1)^{n+1}\right)\right]$. $c_n = 3\left[\frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right)\right]$. საძებნი მიმდევრობის სახეა:

$$a_n = b_n + c_n = \frac{1}{3}\left[\left(1+(-1)^{n+1}\right)\right]+\frac{3}{2}\left[1+(-1)^n\right].$$

56. ვთქვათ მოცემული მიმდევრობის ზოგადი წევრია a_n. თუ $n \ge 2$ მაშინ ცხადია, რომ

$$S_n - S_{n-1} = a_n = 5n+1-\left[5(n-1)+1\right] = 5n+1-5n+4 = 5 \quad \text{და} \quad a_n - a_{n-1} = 5-5,$$

$a_1 = 6; a_2 = 5$ მოცემული მიმდევრობა 6; 5;5; ... არ არის არითმეტიკული პროგრესია.

58. განვიხილოთ სხვაობა $S_n - S_{n-1} = a_n$ და შემდეგ $a_n - a_{n-1}$. მეორე სხვაობა დამოკიდებულია n-ზე ე.ი. მოცემული ჯამები არ წარმოადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიის კერძო ჯამთა მიმდევრობას.

62. ვთქვათ ასეთი პროგრესიები არსებობს $a, a+p, a+2p, \ldots$ $b, b+r, b+2r, \ldots$
ამოცანის პირობის თანახმად $a+b; a+b+p+r; a+b+2p+2r$
რიცხვები ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას, ე.ი.

$(a+b)(a+b+2p+2q) = (a+b+p+r)^2$

$(a+b)^2+(a+b)(2p+2q) = (a+b)^2+2(a+b)(p+r)+(p+r)^2$. მიღებული ტოლობიდან გამომდინარეობს $(a+b)(p+r)+(p+r)^2 = 0$. ვთქვათ $p+r=0$ ე.ი. $p=-r$, მივიღებთ პროგრესიებს $a; a+p; a+2p;\cdots$ და $b; b-p; b-2p;\cdots$, მათი ჯამია $a+b; a+b; a+b;\cdots$ ე.ი. $q=1$ ეს ვარიანტი არ გამოგვადგება.

განვიხილოთ შემთხვევა $a+b+p+r=0$. მივიღეთ გეომეტრიული პროგრესია, რომლის მეორე წევრია 0, ცხადია მესამე წევრიც იქნება 0, მაშინ $p=0; r=0$, რაც გვეუბნება, რომ არითმეტიკული პროგრესიები ყოფილა $a; a; a;\cdots$ და $-a; -a; -a;\cdots$. ვინაიდან $q \ne 0$ არც ეს ვარიანტი გამოდგება. მივიღეთ წინააღმდეგობა ე.ი. ასეთი პროგრესიები არ არსებობს.

63. ავიღოთ რაიმე გეომეტრიული პროგრესია, მაგალითად 2; 6; 18. არითმეტიკულ პროგრესესიას ადგენს შემდეგი სამი რიცხვი $a; a+d; a+2d$. ამოცანის პირობის ძალით რიცხვები $a+2; a+d+6; a+2d+18$ უნდა ადგენდნენ გეომეტრიულ პროგრესიას ე.ი.

$(a+d+6)^2=(a+2)(a+2d+18)$ საიდანაც მიიღება ტოლობა $d^2+8d=8a$. მიღებული განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია $d=4$ და $a=6$. ყოველივე აქედან მიიღება, რომ რიცხვები 2; 6; 8 და 8; 16; 32 წარმოადგენენ გეომეტრულ პროგრესიას, რომელთა სხვაობა არითმეტიკული პროგრესიაა.

67. ვთქვათ $a_1=b_1=1$. თუ პროგრესიის მნიშვნელებია $q_1=2$ და $q_2=3$ მაშინ არ არსებობს ისეთი ნატურალური m და n რიცხვები, რომ $2^m=3^n$ ე.ი. პროგრესიის წევრები გარდა ერთი შემთხვევისა არ დაემთხვევა ერთმანეთს.

71. მარტივად დავადგენთ, რომ მოცემულ პირობებში არ მონაწილეობს რიცხვი 0. პროგრესიის წევრთა რაოდენობა აღვნიშნოთ $3k$-თი. ამოცანის პირობის ძალით $17=-7+d(3k-1)$ და $-7+d(k-1)<0$. მივიღებთ $k=\frac{24+d}{3d}$, უტოლობიდან გვექნება $k<\frac{7+d}{d}$ ე.ი. $\frac{24+d}{3d}<\frac{d+7}{d}$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $d>\frac{3}{2}$. ვინაიდან $a_1=-7; d>\frac{3}{2}$, ამიტომ უარყოფით წევრთა რაოდენობა არ აღემატება 5-ს. განვიხილოთ შემთხვევები $k=1; k=2; k=3; k=4; k=5$. ცალ-ცალკე. ვნახავთ, რომ არსებობს ხუთი ასეთი არითმეტიკული პროგრესია.

73. განვიხილოთ ორი არითმეტიკული პროგრესია, მათი ზოგადი წევრები იყოს: $a_n=a_1+d_1(n-1)$ და $b_m=b_1+d_2(m-1)$. დავუშვათ $a_n=b_m$ მაშინ მივიღებთ: $a_1+d_1(n-1)=b_1+d_2(m-1)$ ე.ი. $a_1-b_1=d_2(m-1)-d_1(n-1)$. საკმარისია ავიღოთ d_1 და d_2 ლუწი რიცხვები, ხოლო პროგრესიის პირველ წევრებს შორის სხვაობა კენტი რიცხვი, რომ პროგრესიის წევრები არ დაემთხვევიან.

74. განვიხილოთ არითმეტიკული პროგრესიები:

1; 3; 5; 7;...

$2\cdot1; 2\cdot3; 2\cdot5; \cdots$

$4\cdot1; 4\cdot3; 4\cdot5; \cdots$

ჩვენ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე დავყავით უსასრულო რაოდენობის ისეთ მიმდევრობად, რომლებიც ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიებს.

75. ვთქვათ მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $1; 1+d; 1+2d$ განვიხილოთ რიცხვები, $1; \frac{1}{(1+d)^2}; \frac{1}{(1+2d)^2}$. პირობის თანახმად რადგანაც ეს სამი რიცხვი ადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას, სამართლიანია განტოლება: $1+\frac{1}{(1+2d)^2}=\frac{2}{(1+d)^2}$. ამოვხსნით რა ამ განტოლებას ვნახავთ, რომ შესაძლებელია ისეთი $a; b; c$ არითმეტიკული პროგრესიის შედგენა, რომ $\frac{1}{a^2}; \frac{1}{b^2}; \frac{1}{c^2}$ ასევე არითმეტიკული პროგრესია იქნება.

79. საზოგადოდ არ შეიძლება. განვიხილოთ პროგრესია:

2; 4; 8; 16; - - -

დავუშვათ, რომ შევარჩიეთ არითმეტიკული პროგრესიის სამი წევრი, მათ ექნებათ სახე

$2^n; 2^m; 2^k$

ტოლობა $2^n+2^k=2\cdot2^m$ შეუძლებელია ვინაიდან შეუძლებელია ტოლობა $1=2^{m-n+1}-2^{k-n}$.

80. განვიხილოთ არითმეტიკული პროგრესია $a_1=\sqrt{2}; d=1$. დავუშვათ, რომ არსებობს ამ მიმდევრობის სამი წევრი, რომლებიც ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას, ე.ი.

$$\left(\sqrt{2}+n\right)\left(\sqrt{2}+k\right)=\left(\sqrt{2}+m\right)^2$$

საიდანაც მიიღება $\sqrt{2}(n+k-2m)=\left(\sqrt{2}+m\right)^2$, $n+k-2m\neq 0$, მართლაც თუ იგი 0-ის ტოლია, მაშინ გვექნება:

$$\begin{cases} m^2-nk=0 \\ n+k-2m=0 \end{cases}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\frac{n+k}{2}=\sqrt{nk}$, აქედან კი მიიღება $n=k$. ვინაიდან $n+k-2m\neq 0$, ამიტომ მივიღებთ $\sqrt{2}=\frac{m^2-nk}{n+k-2m}$ ეს ტოლობა კი შეუძლებელია ვინაიდან მარცხენა მხარე ირაციონალური რიცხვია, ხოლო მარჯვენა – რაციონალური. ე.ი. ჩვენი დაშვება სამართლიანი არაა.

81. დავუშვათ, რომ $d_1:d_2=p:q$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ პროგრესიის პირველი წევრები ემთხვევა ერთმანეთს. ცხადია ამ პროგრესიების $p\cdot n+1$ და $q\cdot n+1$ წევრებიც დაემთხვევა ერთმანეთს ნებისმიერი n-სათვისაც.

82. ვთქვათ ასეთი პარალელოგრამი არსებობს, მაშინ პარალელოგრამის დიაგონალების ერთ-ერთი თვისების გამოყენებით მივიღებთ ტოლობას:

$$2a^2+2(a+d)^2=(a+2d)^2+(a+3d)^2$$

დავუშვათ $a=1$ და ამოვხსნათ ეს განტოლება d-ს მიმართ. მივიღებთ საძებნ პარალელოგრამს.

83. ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე იყოს a. მაშინ ამოცანის პირობის თანახმად კათეტები იქნება: aq და aq^2. ცნობილია, რომ ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე საშუალო გეომეტრიულია ჰიპოტენუზაზე კათეტების გეგმილებისა ე.ი. $a^2=\sqrt{a^2q^2-a^2}\sqrt{a^2q^4-a^2}$. ამოვხსნით რა ამ განტოლებას q-ს მიმართ, მივიღებთ: $q=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. ყოველივე აქედან გამომდინარეობს, რომ მართკუთხა სამკუთხედი, რომელიც აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს არსებობს.

84. შევნიშნოთ, რომ მთელკოეფიციენტებიანი წრფივი განტოლების ფესვი რაციონალური რიცხვია. დავუშვათ, რომ არსებობს ასეთი გეომეტრიული პროგრესია. მივიღებთ ტოლობას: $r=b_1q^{n-1}; S=b_1q^{m-1}$ ე.ი. $r=Sq^k$. მიღებული ტოლობა შეუძლებელია თუ $k\neq 1$ და q რაციონალური რიცხვია, ხოლო r,S – მარტივი რიცხვები.

გამოთვალეთ ჯამები (№№ 88 - 91):

88. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{n}{2(3n+2)}.$$

91. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=$

$\frac{\sqrt[3]{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{3-2}+\cdots+\frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{n+1-n}=\sqrt[3]{n+1}-1.$

92. $a_1, a_2, \ldots, a_n\ldots$ არითმეტიკული პროგრესიაა, d პროგრესიის სხვაობა. გამოთვალეთ ჯამი $\frac{1}{a_1a_2a_3}+\frac{1}{a_2a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$. ბოლო შესაკრები წარმოვადგინოთ როგორც სხვაობა: $\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}a_n}=\frac{1}{d}\cdot\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-2}a_{n-1}a_n}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}a_n}\right)=\frac{1}{d}\cdot\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}-\frac{1}{d}\cdot\frac{1}{a_{n-2}a_n}$

ასეთი რიცხვების შეკრება სწარმოებს ზემოთ მოყვანილი მაგალითის ანალოგიურად.

94. გამოთვალეთ ჯამი:

$13+1313+131313+\cdots+1313\ldots13$ ბოლო შესაკრებში 13 შედის n − ჯერ

$$S_n=13+1313+131313+\cdots\underbrace{131313\cdots13}_{n}=13(1+101+1001+\cdots+101\cdots1)=\frac{13}{11}\left(11+1111+111111+\cdots+\underbrace{111\cdots1}_{2n}\right)=$$

$$=\frac{13}{99}\left(10^2-1+10^4-1+10^6-1+\cdots+10^{2n}-1\right)=\frac{13}{99}\left(\frac{10^{2n+2}-100}{99}-n\right).$$

95. გამოთვალეთ ჯამი:

$12+1213+121312+\cdots+121312\ldots13$ ბოლო შესაკრებში 12 შედის n - ჯერ

$$S_n=12+(1213+12131213+121312131213+\cdots+1213\cdots13)+(121312+1213121312+\cdots+1213\cdots12)=$$

$$=12+1213(1+100001+100010001+\cdots+10001\cdots10001)+12(n-1)+100(1213+12131213+\cdots+12\cdots13)=$$

$$=12+\frac{1213}{9999}(9999+99999999+\cdots+9\cdots9)+12(n-1)+100\cdot1213(1+\cdots10001)=$$

$$12+\frac{1213}{9999}\left(\frac{10^{4n+4}-10^4}{9999}-n\right)+12(n-1)+|100\cdot\frac{1213}{9999}\left(\frac{10^{4n}-10^4}{9999}-n+1\right).$$

97. $[a]$ ნიშნავს a რიცხვის მთელ ნაწილს

$$\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\cdots+\left[\sqrt{n^2+13}\right]=1+1+1+2+2+2++3+3+3+$$

$$\cdots+\underbrace{(n-1)+(n-1)+(n-1)}_{2n}+\underbrace{n+n+n}_{14}=1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots+(n-1)(2n-1)+14n=\frac{n(n+1)(4n-7)}{6}+15n.$$

99. პირველი ასეთი რიცხვი, რომელიც იყოფა 13-ზე და ჩაწერილია 1-ანებით არის 111 111. მარტივად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ შემდეგი ასეთი რიცხვი ჩაიწერება 12 1 −ანებით. მართლაც თუ გამოყენებული იქნებოდა 1 −ანების ნაკლები რაოდენობა, მაშინ განვიხილავდით რა სხვაობას ამ რიცხვსა და 111 111 შორის მიეიღებდით, რომ პირველი რიცხვი, რომელიც იყოფა 13-ზე და ჩაწერილია 1 −ანებით წარმოადგენს პირველ რიცხვზე ნაკლებ რიცხვს. ყოველივე აქედან მიიღება, რომ

$$S=111111+\cdots+\underbrace{111\cdots1}_{6n}=\frac{1}{9}\left(\frac{10^{6n+6}-10^{6}}{10^{6}-1}\right).$$

104. მიმდევრობა 0; 1; 0; 2; 0; 3; . ჩაიწერება ფორმულით $b_n=\frac{n+(-1)^n n}{4}$. მიმდევრობა 1; 0; 2; 0; 3; 0; ჩაიწერება ფორმულით $c_n=b_{n+1}=\frac{n+1+(-1)^{n+1}(n+1)}{4}$. მოცემული მიმდევრობა კი იქნება $b_n+c_n=\frac{n+(-1)^n n}{4}+\frac{n+1+(-1)^{n+1}(n+1)}{4}=\frac{2n+1+(-1)^{n+1}}{4}$.

105. დავუშვათ, რომ $a_n=n\sin n$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ შემოსაზღვრული იქნება მიმდევრობაც $(n+1)\sin(n+1)$ ვინაიდან ეს უკანასკნელი იგივეა რაც საწყისი მიმდევრობა პირველი წევრის გარეშე. რადგანაც $(n+1)\sin(n+1)=n\sin(n+1)+\sin(n+1)$, ამიტომ შემოსაზღვრულია მიმდევრობა $n\sin(n+1)$, ის ტოლია $n\sin n\cos 1+n\cos n\sin 1$.აქედან ჩანს, რომ $n\cos n$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. ყოველივე აქედან გამომდინარეობს, რომ მიმდევრობები $n^2\sin^2 n$ და $n^2\cos^2 n$ შემოსაზღვრულია. ცხადია მათი ჯამიც შემოსაზღვრული იქნება, მაგრამ ეს ჯამი ტოლია n^2-ის. n^2 კი შემოსაზღვრული არაა ე.ი. მივიღეთ წინააღმდეგობა, რაც იმას ნიშნავს, რომ ჩვენი დაშვება არაა სამართლიანი.

107. ვთქვათ მოცემულია მიმდევრობა $a_1;a_2;a_3;\cdots;a_n$. განვიხილოთ ორი მიმდევრობა:

$$b_1=|a_1|-a_1;\ b_2=|a_1|+|a_2-a_1|;\ \cdots;b_k=|a_1|+\cdots+|a_k-a_{k-1}|$$

$$c_1=|a_1|-a_1;c_2=|a_1|+|a_2-a_1|-a_2;\cdots;c_k=|a_1|+\cdots+|a_k-a_{k-1}|-a_k.$$

ცხადია b_k და c_k ზრდადი მიმდევრობებია და ამასთან $a_k=b_k-c_k$.

109. როგორც ვიცით ნებისმიერი ფუნქცია შეიძლება წარმოვიდგინოთ ლუწი და კენტი ფუნქციების ჯამის სახით:

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

ანალოგიურად განზოგადოებული მიმდევრობისათვის გვექნება:

$$a_n=\frac{a_n+a_{-n}}{2}+\frac{a_n-a_{-n}}{2}.$$

110. სამართლიანია ტოლობები: $\frac{a_2}{a_1}=3;\frac{a_3}{a_2}=9;\frac{a_4}{a_3}=27;\cdots;\frac{a_n}{a_{n-1}}=3^{n-1}$ მიღებული ტოლობები გადავამრავლოთ, მივიღებთ $\frac{a_n}{a_1}=3\cdot3^2\cdot3^3\cdots3^{n-1}=3^{1+2+3+\cdots+(n-1)}=3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ საბოლოოდ მივიღებთ $a_n=2\cdot3^{\frac{n(n-1)}{2}}$

111. ვთქვათ a,b,c სამკუთხედის გვერდებია, $A,B,C-$ შესაბამისად ამ გვერდების პირდაპირ მდებარე კუთხეები, m_a,m_b,m_c კი – შესაბამისი გვერდების მედიანები. ამოცანის პირობით $m_a^2+m_c^2=2m_b^2$. მედიანების გამოსათვლელი ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ $2b^2=a^2+c^2$ ე.ი. $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2=2$. სინუსების თეორემის გამოყენებით უკანასკნელი ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}+\frac{\sin^2 C}{\sin^2 B}=2 \text{ ან } \frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}=\frac{2(1-\cos 2B)}{2} \text{ საიდანაც}$$

$\cos 2A+\cos 2C=2\cos 2B$ ე.ი. $\cos 2A;\cos 2B;\cos 2C$ ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას.

113. როგორც ცნობილია მანძილი სამკუთხედზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეწირის ცენტრებს შორის გამოითვლება ფორმულით $d=\sqrt{R^2-2rR}$. პირობის ძალით $d+r=2r$ ე.ი. $\sqrt{R(R-2r)}=2r-R$. მიღებული ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $R=2r$ ე.ი. სამკუთხედი ტოლგვერდაა. მისი გვერდი 1-ის ტოლია. ცხადია პროგრესიის სხვაობაა $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

116. ვთქვათ, a,b,c სამკუთხედის გვერდებია, $A,B,C-$ შესაბამისად ამ გვერდების პირდაპირ მდებარე კუთხეები, h_a,h_b,h_c კი შესაბამის გვერდებზე დაშვებული სიმაღლეები. დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. რადგანაც $h_a+h_b=2h_c$ ამიტომ $\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}=\frac{2\cdot 2S}{c}$ ე.ი. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c}$. სინუსების თეორემის გამოყენებით გვექნება $\frac{1}{2R\sin A}+\frac{1}{2R\sin B}=\frac{2}{2R\sin C}$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ რიცხვები $\frac{1}{\sin A},\frac{1}{\sin B},\frac{1}{\sin C}$ ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას. ანალოგიურად მტკიცდება პირობის საკმარისობა.

117. ვთქვათ $h_c;m_c;l_c$ შესაბამისად ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე, ჰიპოტენუზის მედიანა და ბისექტრისაა, A და B შესაბამისად a და b კათეტების პირდაპირ მდებარე კუთხეებია. როგორც ცნობილია სამართლიანია ტოლობები: $h_c=a\sin A; m_c=\frac{a}{2\cos A}; l_c=\frac{a\sin A}{\sin(45^0+A)}$. ამოცანის პირობის ძალით $h_c\cdot m_c=l_c^2$. მიღებული განტოლებების ამოხსნა გვაძლევს: $A=B=45^0$.

119. ვთქვათ R და r შესაბამისად მართკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეწირების რადიუსებია, ხოლო a ერთ-ერთი კათეტია. ამოცანის პირობის თანახმად $a^2+(a+d)^2=(a+2d)^2$ და $\frac{R}{r}=\frac{3}{2}\left(1+\frac{2d}{a}\right)^2$ გავითვალისწინებთ რა ფორმულებს $2R=a+2d$ და $r=\frac{a(a+d)}{3(a+d)}=\frac{a}{3}$, პირველი ტოლობიდან მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას $\frac{d}{a}$ სიდიდის მიმართ. საბოლოოდ გვექნება $\frac{d}{a}=\frac{1}{3};\frac{R}{r}=\frac{5}{2}$.

120. დავუშვათ ასეთი მართკუთხა სამკუთხედი არსებობს. მისი კათეტები იყოს $a+d$ და $a+2d$, ხოლო ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე – a. ადგილი აქვს ტოლობას

$(a+d)(a+2d)=a\sqrt{(a+d)^2+(a+2d)^2}$ საიდანაც მიიღება განტოლობა:

$a^4=4d^2\left(3ad+2a^2+d^2\right)$ აქვს თუ არა ამ განტოლებას ამონახსნი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში? დავუშვათ ეს ამონახსნებია a_0 და d_0, მაშინ ტოლობიდან: $a_0{}^4=4d_0{}^2\left(3a_0d_0+2a_0{}^2+d_0{}^2\right)$ გამოდის, რომ a_0 ლუწია, ვთქვათ $a_0=2x_0$, ე.ი. d_0-ც ლუწია ($d_0=2y_0$) ჩავსვამთ რა მიღებულს ამ უკანასკნელ ტოლობაში, გვექნება:

$$4x_0^4=4y_0^2\left(12x_0y_0+8x_0^2+4y_0^2\right) \text{ ან}$$

$$x_0^4=4y_0^2\left(3x_0y_0+2x_0^2+4y_0^2\right)$$

მსჯელობის გამეორება გვაძლევს, რომ x_0 ისევ იყოფა 2-ზე და ა.შ. რაც უსასრულოდ შეუძლებელია, მივიღეთ წინააღმდეგობა რაც, იმას ნიშნავს, რომ განტოლებას ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არა აქვს.

121. ამოცანის პირობის თანახმად $a_1+a_3=2a_2$ ე.ი. $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_3}{a_2}=2$. ცხადია სამართლიანია ტოლობა: $a_2+a_4=2a_3$ ე.ი. $\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_4}{a_3}=2$, საიდანაც მიიღება ტოლობა: $\frac{a_3}{a_2}=\frac{1}{2-\frac{a_4}{a_3}}$.

გავითვალისწინებთ, რა წინა ტოლობას გვექნება $\frac{a_1}{a_2}+\frac{1}{2-\frac{a_4}{a_3}}=2$. თუ ამ პროცესს გავიმეორებთ, მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

129. ამოცანის პირობის თანახმად არითმეტიკული a_n პროგრესიის სახე f გადასახვით უნდა იყოს არითმეტიკული b_n პროგრესია. ე.ი. $b_1+d_1(n-1)=f(a_1+d(n-1))$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $a_1+d(n-1)=x$. მივიღებთ $\frac{x-a}{d}=n-1$. ე.ი $f(x)=b_1+\frac{d_1}{d}(x-a)$. როგორც ვხედავთ $f(x)$ წრფივი ფუნქციაა.

133. განვიხილოთ გეომეტრიული პროგრესია, რომლის პირველი წევრია 1, ხოლო მნიშვნელი კი x. დავუშვათ, რომ ჩვენ ავირჩიეთ ამ პროგრესიის სამი წევრი , რომლებიც რომელიღაც არითმეტიკული პროგრესიის წევრებია. მაშინ ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$x^n=a+sd$$
$$x^m=a+ud$$
$$x^k=a+vd \text{ საიდანაც მიიღება } \frac{x^m-x^n}{x^k-x^m}=\frac{u-s}{v-u}.$$

როგორც ვხედავთ x უნდა იყოს რომელიღაც ხარისხოვანი განტოლების ამონახსნი, რომლის კოეფიციენტები მთელი რიცხვებია. როგორც ცნობილია არ არსებობს ისეთი მთელკოეფიციენტებიანი ხარისხოვანი განტოლება, რომლის ამონახსნია π. ე.ი. თუ x-ის როლში ავიღებთ π, მაშინ მივიღებთ პროგრესიას 1; π; π^2;…მისგან ვერ აირჩევა არითმეტიკული პროგრესიის ვერცერთი სამი წევრი.

134. ვთქვათ საძებნი არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრია 1, ხოლო სხვაობა ტოლია x-ის. დავუშვათ, რომ ჩვენ ავირჩიეთ ამ მიმდევრობიდან სამი წევრი $a_{n+1}; a_{m+1}; a_{k+1}$, რომლებიც ერთდროულად არიან რომელიღაც გეომეტრიული პროგრესიის წევრები (არაა სავალდებულო ისინი გეომეტრიულ პროგრესიას ადგენდნენ), მივიღეთ: $a_{n+1} = b_{s+1}; a_{m+1} = b_{u+1}; a_{k+1} = b_{v+1}$. სამართლიანია ტოლობები:

$$\begin{cases} x+n = b_1 q^s \\ x+m = b_1 q^u \\ x+k = b_1 q^v \end{cases} \text{ ე.ი. } \begin{cases} \dfrac{(x+n)^u}{(x+m)^s} = \dfrac{b_1^u}{b_1^s} \\ \dfrac{(x+m)^v}{(x+k)^u} = \dfrac{b_1^v}{b_1^u} \end{cases} \text{ ან } \begin{cases} \dfrac{(x+n)^u}{(x+m)^s} = b_1^{u-s} \\ \dfrac{(x+m)^v}{(x+k)^u} = b_1^{v-u} \end{cases} \text{ და საბოლოოდ გვექნება}$$

$(x+n)^{u(v-u)} \cdot (x+k)^{u(u-s)} = (x+m)^{uv-su}$. ე.ი. x წარმოადგენს მთელკოეფიციენტებიანი ხარისხოვანი განტოლების ფესვს. თუ x-ის როლში ავიღებთ რიცხვს $x = \pi$, მაშინ ცხადია მიმდევრობიდან $1; 1+\pi; 1+2\pi; \cdots$ ვერ შეირჩევა ვერცერთი გეომეტრიული პროგრესიის სამი წევრი.

136. ვთქვათ მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $a_1; a_2; a_3; \cdots; a_n$ ისე რომ $n \geq 10$. მისი პირველი წევრი $a_1 = \sqrt{2}$, ხოლო სხვაობა – $d = 1$. განვიხილოთ ორი ქვესიმრავლე $\{a_1; a_2; a_3; \cdots; a_{2k}\}$ და $\{a_{2k+1}; a_{2k+2}; a_{2k+3}; \cdots; a_{3k}\}$. $Q_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2k}$ და $Q_2 = a_{2k+1} + a_{2k+2} + a_{2k+3} + \cdots + a_{3k}$. დავუშვათ, რომ $Q_3 = a_{m_1} + a_{m_2} + \cdots + a_{m_p}$. განვიხილოთ ტოლობა $Q_1 + Q_3 = 2Q_2$ საიდანაც მიიღება $Q_3 = 2Q_2 - Q_1$. ცხადია ეს ტოლობა შეუძლებელია, რადგანაც მარჯვენა მხარეში $\sqrt{2}$-ის რაოდენობა მეტია, ვიდრე მარცხენაში. ყოველივე აქედან მიიღება, რომ მესამე ჯგუფის შერჩევა შეუძლებელია.

139. მოცემული უტოლობის სამართლიანობა გამომდინარეობს იმ მოსაზრებიდან, რომ სრულ კვადრატებს შორის სხვაობა წარმოადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$. სიდიდე $b-a$ წარმოადგენს მანძილს a და b რიცხვებს შორის. ცხადია თუ კვადრატებს შორის სხვაობა ნაკლებია $b-a$ სიდიდეზე, მაშინ a და b-ს შორის აუცილებლად არსებობს რიცხვი, რომელიც წარმოადგენს სრულ კვადრატს

§10. კომბინატორიკის ელემენტები

28. $P_{10} = 10! = 362\,880$

29. თუ არ გავითვალისწინებთ, რომ 0 არ შეიძლება ეწეროს რიცხვის დასაწყისში, მაშინ ასეთი რიცხვების რაოდენობაა $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. იმ რიცხვების რაოდენობა რომლებიც იწყება 0-ით ტოლია $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. საბოლოოდ მივიღებთ, რომ იმ ოთხნიშნა რიცხვების რაოდენობა რომლებიც ჩაწერილია ციფრებით 0, 1, 2, 3 ტოლია $24 - 6 = 18$. შევნიშნოთ, რომ ციფრები რიცხვებში არ მეორდება

30. თუ ბოლო ადგილზე ეწერება ციფრი 2, მაშინ წინა სამ ადგილს დაიკავებენ ციფრები 1, 3, 4. მათი ჯგუფა შესაძლო რაოდენობაა $3! = 6$. იმდენივე რიცხვი იქნება ისეთი, რომელთა ბოლოს წერია ციფრი 4. ე.ი. სულ გვექნება $6 + 6 = 12$ რიცხვი

31. როგორც ვიცით 5-ის ჯერადი რიცხვები ჩვენს შემთხვევაში დაბოლოვდება 5-ით, ეს ის შემთხვევაა როცა დარჩენილი სამი ციფრი 1, 3, 8 წერია 5-ის წინ. ასეთი რიცხვების რაოდენობაა $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

32. როგორც ვიცით რიცხვი რომ გაიყოს 4-ზე საჭიროა ბოლო ორი ციფრით შედგენილი რიცხვი გაიყოს 4-ზე. ჩვენს შემთხვევაში ეს მოხდება მაშინ, როდესაც რიცხვის ბოლოში ეწერება რიცხვები 12, 32, 24, 52, ე.ი. არსებობს 4 ასეთი ვარიანტი. ყოველი ასეთი რიცხვის წინ შესაძლებელია სამი ციფრის ცვლა, მათი რაოდენობა იქნება $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. საბოლოოდ მივიღებთ, რომ 4-ის ჯერადი ხუთნიშნა რიცხვების რაოდენობა, რომლებიც შედგენილია ციფრებით 1, 2, 3, 4, 5 ტოლია $4 \cdot 3! = 24$

34. საძებნ რიცხვებს უნდა ჰქონდეთ შემდეგი სახე $\overline{abcde}$ სადაც a იღებს მნიშვნელობებს 1, 3, ხოლო e ღებულობს მნიშვნელობებს 2, 4, 6. გამოვიყენოთ ე.წ. ნამრავლის წესი. დავაფიქსირებთ, რა პირველ და ბოლო ციფრებს დაგვრჩება სამი ციფრი და მათი დახმარებით მიიღება $3! = 6$ რაოდენობის სამნიშნა რიცხვი. ვინაიდან a –მ შეიძლება მიიღოს ორი მნიშვნელობა, e –მ კი – სამი მნიშვნელობა, ამიტომ შესაძლო რიცხვების საძებნი რაოდენობა იქნება $2 \cdot 3 \cdot 3! = 36$

36. საძებნ რიცხვებს ექნება შემდეგი სახე $\overline{abc\cdots m}$. სადაც m იღებს მნიშვნელობებს $\{1,3,5,7\}$. a იღებს მნიშვნელობებს სიმრავლიდან $\{2,4,6,8\}$. ფიქსირდება ორი რიცხვი. დარჩა შვიდი ციფრი. მათი ადგილების შეცვლით მიღებული რიცხვების რაოდენობაა 7!. შევნიშნოთ, რომ მათში უკვე შესაძლებელია წინ დაიწეროს ციფრი 0. საბოლოოდ საძებნი რაოდენობა იქნება $4 \cdot 4 \cdot 7! = 80\,640$.

37. ჭადრაკის დაფის უჯრებს დავაკრათ მათი ადგილმდებარეობის აღმნიშვნელი რიცხვები. ამისათვის გამოვიყენოთ $(x;y)$ წყვილები, სადაც x და y იღებს მნიშვნელობებს სიმრავლიდან $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. მაგალითად წყვილი $(2;5)$ ნიშნავს, რომ ეტლი მდებარეობს მეორე ჰორიზონტალის და მეხუთე ვერტიკალის გადაკვეთის უჯრაზე. ცხადია ეტლი, რომ არ კლავდეს მეორე ეტლს საჭიროა მეორე ეტლის შესაბამისი ჰორიზონტალისა და ვერტიკალების ნომრები განსხვავდებოდეს პირველი ეტლის ჰორიზონტალისა და ვერტიკალის ნომრებისაგან, სხვა სიტყვებით ეტლი რომლის კოორდინატებია $(x_1;y_1)$ არ კლავს ეტლს, რომლის კოორდინატებია $(x_2;y_2)$ ნიშნავს, რომ $x_1 \neq x_2$ და $y_1 \neq y_2$. ეტლები ჩვენ შეგვეძლია განვალაგოთ შემდეგი წყვილების შესაბამისად $(1;y_1),(2;y_2),(3;y_3),\cdots,(8;y_8)$ სადაც $y_1,y_2,y_3,\cdots,y_8$ წარმადგენს $1,2,3,\cdots,8$ რიცხვების ყველა შესაძლო გადანაცვლებას. როგორც ვიცით მათი რაოდენობა ტოლია $8! = 40\,320$

38. იმ შემთხვევების რაოდენობა, როცა გოგონები დაიკავებენ ადგილებს 1, 2, 3 ტოლია $3! \cdot 5!$. იმ შემთხვევების რაოდენობა, როცა გოგონები დაიკავებენ ადგილებს 2, 3, 4 ისევ ტოლია $3! \cdot 5!$ და ბოლოს, როცა დაიკავებენ ადგილებს ნომრებით 6, 7, 8 ისევ ტოლია $3! \cdot 5!$. სულ გვაქვს ექვსი ასეთი ვარიანტი. მივიღეთ, რომ იმ ვარიანტების რაოდენობა როცა გოგონები განლაგებული იქნებიან ერთმანეთის გვერდიგვერდ იქნება $3! \cdot 5! + 3! \cdot 5! + 3! \cdot 5! + 3! \cdot 5! + 3! \cdot 5! + 3! \cdot 5! = 3! \cdot 6!$. რვა მოსწავლის რიგში ჩაყენების ყველა შესაძლო ვარიანტია 8!. ცხადია იმ ვარიანტების რაოდენობა როცა გოგონები არ იქნებიან განლაგებული ერთმანეთის გვერდიგვერდ ტოლი იქნება $8! - 3! \cdot 6! = 36\,000$

39. წინა ამოცანის ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ $10! - 4! \cdot 7! = 3\,507\,840$.

40. თუ მაგიდასთან დავაფიქსირებთ ერთ ადამიანს მაშინ ცხადია შესაძლებელია დანარჩენების განლაგების ორი შემთხვევა, ერთ-ერთი დარჩენილი ორი ადამიანიდან ზის

ან მარჯვნივ ან მარცხნივ. ე.ი. სამი ადამიანი მრგვალ მაგიდასთან შეგვიძლია დავსვათ ორი ვარიანტით

41. თუ დავაფიქსირებთ ერთ ადამიანს ის იქნება პირველი ნომერი, მეორე ადამიანი მეორე ნომერი და ა.შ. მეხუთე ადამიანი მეხუთე ნომერი. ვინაიდან ვიხილავთ ხუთი ადამიანის განლაგებას სულ შესაძლო განლაგებათა რაოდენობა იქნება $\frac{5!}{5} = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

42. ვინაიდან ოცი მოსწავლიდან შესარჩევია ყველა შესაძლო დალაგებული წყვილების რაოდენობა საძებნი რიცხვი ტოლი იქნება 2-ელემენტიანი წყობისა 20 ელემენტისაგან ე.ი. $A_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380$

44. ექვსი დღიდან ასარჩევია ყველა შესაძლო დალაგებული ოთხეული. ეს რიცხვი წარმოადგენს 4 ელემენტიან წყობას 6 ელემენტისაგან, ე.ი. $A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

45. ყველა შესაძლო ოთხნიშნა რიცხვების რაოდენობა ტოლი იქნება $A_4^4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. ამ ოთხი ციფრისაგან შედგენილი ყველა შესაძლო სამნიშნა რიცხვების რაოდენობა ტოლი იქნება $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. ორნიშნა რიცხვების რაოდენობა იქნება $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$ და ბოლოს ერთნიშნა რიცხვების რაოდენობა იქნება $A_4^1 = 4$. მთლიანად 1, 2, 3, 4 ციფრებით შეიძლება დაიწეროს $A_4^4 + A_4^3 + A_4^2 + 4 = 24 + 24 + 12 + 4 = 64$ რიცხვი.

46. ოთხნიშნა რიცხვები რაოდენობა ამ ციფრების გამოყენებით შეგვიძლია ვიანგარიშოთ ფორმულით $A_4^4 - A_3^3 = 4! - 3!$. ამ ციფრებით ჩაწერილი სამნიშნა რიცხვების რაოდენობა თუ ყურადღებას არ მივაქცევთ იმას წერია თუ არა პირველ ადგილზე 0, ტოლი იქნება A_4^3, მას უნდა გამოვაკლოთ იმ რიცხვების რაოდენობა, რომლებშიც პირველ ადგილზე დგას 0, ხოლო მეორე და მესამე ადგილზე დგას რომელიღაც ციფრები 1, 2, 3-დან, ამ რიცხვების რაოდენობაა A_3^2. მაშასადამე 0, 1, 2, 3 ციფრებით ჩაწერილი რიცხვების რაოდენობაა $A_4^3 - A_3^2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 18$. ანალოგიური მსჯელობით ორნიშნა რიცხვების რაოდენობა ტოლი იქნება $A_4^2 - A_3^1 = 4 \cdot 3 - 3 = 12 - 3 = 9$. დასასრულ უნდა აღვნიშნოთ რომ ერთნიშნა ნატურალური რიცხვების რაოდენობაა 3. ე.ი. მთლიანად მივიღებთ $18 + 18 + 9 + 3 = 48$ რიცხვს.

47. რიცხვი ლუწია თუ ჩანაწერში ბოლო ციფრია ლუწი. ჩვენს შემთხვევაში ბოლოში შეიძლება ეწეროს 2, 4 ან 6 ანუ არსებობს სამი შესაძლებლობა. ახლა დარჩენილი ხუთი ციფრიდან შესარჩევია ყველა შესაძლო სამეული, ამ ვარიანტების რაოდენობაა A_5^3. გამოვიყენებთ რა ნამრავლის წესს მივიღებთ საძებნ რაოდენობას $A_5^3 \cdot 3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 180$

48. საძებნ რიცხვებს აქვთ შემდეგი სახე $\overline{ab1}$ ან $\overline{ab3}$, სადაც $a \neq 0$. განვიხილოთ პირველი შემთხვევა. ვინაიდან დაფიქსირდა ციფრი 1, ამიტომ დარჩენილი ოთხი ციფრიდან ამოსარჩევია ორი ციფრი, ეს კი შესაძლებელია გაკეთდეს $A_4^2 = 12$ ვარიანტით, თუ ყურადღებას არ მივაქცევთ იმ შემთხვევას როცა პირველ ადგილზე წერია ციფრი 0. იმ რიცხვების რაოდენობა, რომლებშიც პირველ ადგილზე არ წერია 0 იქნება $12 - 3 = 9$. თუ გამოვიყენებთ ნამრავლის წესს, მივიღებთ, რომ რიცხვების საძებნი რაოდენობაა $2 \cdot 9 = 18$

49. ამოცანის პირობის თანახმად უნდა ვიპოვოთ 3 ელემენტიანი ჯუფთება 20 ელემენტისაგან ე.ი. $C_{20}^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$

50. ამოცანის პირობის თანახმად უნდა ვიპოვოთ 2 ელემენტიანი ჯუფთება 10 ელემენტისაგან ე.ი. $C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$

51. ამ რიცხვის გამყოფია რიცხვი 1. ცხადია ამ რიცხვის გამყოფია თითოეული თანამამრავლი. მათი რაოდენობაა 5. თუ განვიხილავთ ყველა შესაძლო ორ-ორი რიცხვის

ნამრაველს მათი რაოდენობა იქნება 2 ელემენტიანი ჯუფდება 5 ელემენტისაგან ანუ $C_5^2 = \frac{5\cdot4}{1\cdot2} = 10$. თუ განვიხილავთ ყველა შესაძლო სამ-სამი რიცხვის ნამრაველს ამ ხუთი რიცხვიდან, მათი რაოდენობა ტოლი იქნება 3 ელემენტიანი ჯუფთება 5 ელემენტისაგან ანუ $C_5^3 = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10$. მოცემული რიცხვის გამყოფია ყველა შესაძლო ოთხეულის ნამრაველი. მათი რაოდენობაა $C_5^4 = 5$. დასასრულს აღვნიშნოთ, რომ ამ რიცხვის გამყოფი არის თვით ეს რიცხვი და როგორც ეხედავთ გამყოფთა სრული რაოდენობაა $1 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + 1 = 32$

52. ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ ნამრაველის წესი. ცხადია 10 ბიჭიდან 5 ბიჭის არჩევა შეიძლება C_{10}^5 ვარიანტით. 8 გოგონასაგან 3 გოგონას არჩევა შესაძლებელია C_8^3 ვარიანტით. საბოლოოდ გვექნება, რომ საძებნი რიცხვი ტოლია $C_{10}^5 \cdot C_8^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 =2\ 016$.

53. წრფეების რაოდენობა ტოლია 2 ელემენტიანი ჯუფთებისა 50 ელემენტისაგან $C_{50}^2 = \frac{50\cdot49}{2} = 1\ 225$.

54. დიაგონალების რაოდენობა იანგარიშება ფორმულით $C_{10}^2 - 10 = 35$. შევნიშნოთ, რომ n კუთხედისათვის ეს რაოდენობა იანგარიშება ფორმულით $C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$

55. დავაფიქსიროთ ამ 8 წერტილიდან ერთი. ამ წერტილსა და დანარჩენ 12 წერტილზე გამავალ წრფეთა რაოდენობა ტოლი იქნება 12-ის. გამოვიყენებთ რა ნამრაველის წესს მივიღებთ $8\cdot 12 = 96$. აქედან ერთი წრფე ის წრფეა რომელიც გადის მოცემულ 8 წერტილზე. რაც შეეხება დარჩენილ 12 წერტილზე (რომელთაგან არცერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე) გამავალ წრფეების რაოდენობას, ის იანგარიშება ფორმულით $C_{12}^2 = \frac{12\cdot11}{1\cdot2} = 66$. ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ სულ გვაქვს $96 + 1 + 66 = 163$ წრფე.

56. იმ შემთხვევაში როდესაც არცერთი სამი წერტილი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე, ათ წერტილიან სიმრავლეში იმ სამკუთხედების რაოდენობა, რომელთა წვეროებიც ამ წერტილებზე ძევს ტოლია $C_{10}^3 = \frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3} = 120$. ამოცანის პირობის ძალით ოთხი წერტილი ერთ წრფეზე მდებარეობს, ამ წერტილების გამოყენებით მიიღებოდა C_4^3 რაოდენობის არ შემდგარი სამკუთხედი, რომელთა რაოდენობაც 4-ის ტოლია. ყოველივე ზემოთ თქმულიდან მიიღება, რომ საძებნი რიცხვია $120 - 4 = 116$.

57. მოცემული ექვსი გზავნილი გადავნომროთ. ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ გამრავლების წესი. ვინაიდან სულ გვაქვს 11 წიგნი და 5 გზავნილში არის ორ-ორი წიგნი ამიტომ ერთ გზავნილში არის ერთი წიგნი. ეს იყოს პირველი გზავნილი. წიგნის არჩევა ამ გზით შესაძლებელია 11 ვარიანტით. დარჩა 10 წიგნი. თუ დავაფიქსირებთ ერთ მათგანს ასარჩევი დარჩება 9 წიგნიდან ერთ-ერთი და სულ ასეთი ვარიანტია 9. ე.ი. მეორე გზავნილის არჩევა შეგვეიძლია 9 ვარიანტად. დაგვრჩა 8 წიგნი. თუ დავაფიქსირებთ ერთ მათგანს ასარჩევი დაგვრჩება 7 წიგნი, ეს კი შეიძლება გაკეთდეს 7 ვარიანტად. ამ პროცესის გაგრძელებით მივიღებთ საძებნ რიცხვს. ის ტოლია $11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 10\ 395$.

58. ამოცანის ამოხსნა ვაწარმოოთ ნამრაველის წესით. ორი მეკარიდან ერთი მეკარის არჩევა შეგვეიძლია 2 ვარიანტით. 8 მცველიდან 4-ის შერჩევა შეგვეიძლია C_8^4 ვარიანტით. 6 ნახევარმცველიდან 2-ის შერჩევა შეგვეიძლია C_6^2 ვარიანტით. ბოლოს 6 თავდამსხმელიდან 4-ის შერჩევა შეგვეიძლია C_6^4 ვარიანტით. ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ საძებნი რიცხვი ტოლია $2 \cdot C_8^4 \cdot C_6^2 \cdot C_6^4 = 2 \cdot \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4} \cdot \frac{6\cdot5}{1\cdot2} \cdot \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 31\ 500$

59. მოცემული რიცხვების გამყოფებს აქვთ შემდეგი სახე $d = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}$, სადაც α ღებულობს მნიშვნელობებს სიმრავლიდან $\{0,1,2,3,4,5\}$, β ღებულობს მნიშვნელობებს სიმრავლიდან $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, ხოლო γ ღებულობს მნიშვნელობებს სიმრავლიდან $\{0,1,2,3\}$. როგორც ეხედავთ ამ სიმრავლეებში ელემენტების რაოდენობა შესაბამისად ტოლია 6, 8, 4 – ის. ყოველივე აქედან გამომდინარეობს, რომ საძებნი რიცხვი ტოლია $6 \cdot 8 \cdot 4 = 192$

60. იმ შემთხვევაში როდესაც ხუთივე ციფრი განსხვავებულია გვექნება $5! = 120$ ვარიანტი. ჩვენს შემთხვევაში განმეორდება 3! და 2! რაოდენობის რიცხვები, ე.ი. სულ $3! \cdot 2!$ რაოდენობის რიცხვები. ამ მოსაზრების გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ სულ შეგვიძლია დავწეროთ $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$ რაოდენობის რიცხვი

61. რიცხვი 10 ოთხი შესაკრების სახით შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად: 1) $1+1+1+7$, 2) $1+1+2+6$, 3) $1+1+3+5$, 4) $1+1+4+4$, 5) $1+2+2+5$, 6) $1+2+3+4$, 7) $1+3+3+3$. პირველი ვარიანტი შეიძლება ჩაიწეროს ოთხნაირად. ეს ის შემთხვევებია, როდესაც 7 მონეტა ძევს ერთ-ერთში მოცემული ოთხი ქისიდან. მეორე ვარიანტი შესაძლებელია თორმეტნაირად, ეს ის შემთხვევაა როდესაც 6 მონეტა ძევს ოთხი ქისიდან ერთ-ერთში, ასეთი ვარიანტი 4-ია. 2 მონეტა რომ იდოს სამი ქისიდან რომელიმეში ასეთი ვარიანტი 3-ია. მივიღეთ, რომ მეორე შემთხვევა შესაძლებელია განხორციელდეს $3 \cdot 4 = 12$ ვარიანტად. ანალოგიური მსჯელობით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ მესამე შემთხვევაშიც გვაქვს 12 ვარიანტი. მეოთხე შემთხვევა გვაქვს 6 ვარიანტად, მეხუთე - 12 ვარიანტად, მეექვსე – 24 ვარიანტად და ბოლოს მეშვიდე – 4 ვარიანტად. მაშასადამე სულ გვაქვს $4 + 12 + 12 + 6 + 12 + 24 + 4 = 74$ ვარიანტი.

ეს ამოცანა სხვანაირად ასედაც ამოიხსნება:

პირველი ვარიანტის რაოდენობაა $\frac{4!}{3!} = 4$.

მეორე ვარიანტის რაოდენობაა $\frac{4!}{2!} = 12$.

მესამე ვარიანტის რაოდენობაა $\frac{4!}{2!} = 12$.

მეოთხე ვარიანტის რაოდენობაა $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$.

მეხუთე ვარიანტის რაოდენობაა $\frac{4!}{2!} = 12$.

მეექვსე ვარიანტის რაოდენობაა $4! = 24$.

მეშვიდე ვარიანტის რაოდენობაა $\frac{4!}{3!} = 4$.

ე.ი. სულ გვაქვს $4 + 12 + 12 + 6 + 12 + 24 + 4 = 74$ ვარიანტი

62. ამოცანის პირობიდან ჩანს, რომ ჩვენ გვაინტერესებს ის შემთხვევები როდესაც ამოვიღეთ 2, 3 ან 4 თეთრი ბურთები. ვინაიდან 8 თეთრი ბურთიდან 2 ბურთი შეგვიძლია ავარჩიოთ C_8^2 ვარიანტად, ხოლო 6 შავი ბურთიდან 2 ბურთი (შევნიშნოთ, რომ სულ ამოსაღებია 4 ბურთი) ამოირჩევა C_6^2 ვარიანტად და სულ პირველ შემთხვევაში გვაქვს $C_8^2 \cdot C_6^2$ ვარიანტი. მეორე შემთხვევაში გვექნება $C_8^3 \cdot C_6^1$ ვარიანტი, ხოლო მესამე შემთხვევაში $C_8^4 \cdot C_6^0$ ვარიანტი. მთლიანად ვარიანტების რაოდენობაა $C_8^2 \cdot C_6^2 + C_8^3 \cdot C_6^1 + C_8^4 \cdot C_6^0 = 826$

§11. ხარისხოვანი, მაჩვენებლიანი განტოლებები და განტოლებათა სისტემები

30. გაეითვალისწინებთ რა ტოლობას $\sqrt{5-\sqrt{24}}=\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{24}}}$ მიეიღებთ $-x^2-x-2=-x^2+5x-14$ ამ უკანასკნელის ამოხსნით მიეიღებთ პასუხს.

35. საწყისი განტოლების ორივე მხარე გავყოთ $8^{\frac{x-1}{2}}$ -ზე მიეიღებთ:

$\left(\frac{\sqrt{32-\sqrt{1023}}}{8}\right)^{\frac{x-1}{2}}+\left(\frac{\sqrt{32+\sqrt{1023}}}{8}\right)^{\frac{x-1}{2}}=1$ შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{\sqrt{32-\sqrt{1023}}}{8}=\sin\alpha$ მაშინ $\frac{\sqrt{32+\sqrt{1023}}}{8}=\cos\alpha$ და განტოლება ასე გადაიწერება $(\sin\alpha)^{\frac{x-1}{2}}+(\cos\alpha)^{\frac{x-1}{2}}=1$ ე.ი. $\frac{x-1}{2}=2$ და $x=5$.

36. განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად: $[2^x(2^x-2)]^3+1=0$ ამის შემდეგ მიღებული განტოლება მარტივად ამოიხსნება.

37. განტოლების პირველი ოთხი წევრი წარმოადგენს გამოსახულების კუბს.

46. სისტემის მეორე განტოლებიდან გვაქვს: $y=\frac{14-5x}{2}$ მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ პირველ განტოლებაში და ის გადავწეროთ ასე: $3^{\frac{3}{x+3}}\cdot5^{\frac{8}{8-5x}}=15$ ე.ი. $\left(3^{-\frac{1}{x+3}}\cdot5^{\frac{5}{8-5x}}\right)^x=1$ აქედან ვღებულობთ $x=0$ ან $3^{\frac{-1}{x+3}}\cdot5^{\frac{5}{8-5x}}=1$. იმ შემთხვევაში, როდესაც $x=0$ მიეიღებთ $y=7$, ხოლო როცა სამართლიანია ტოლობა $3^{\frac{-1}{x+3}}\cdot5^{\frac{5}{8-5x}}=1$ ამ უკანასკნელის გალოგარითმებით მიეიღებთ სისტემის მეორე ამონახსნს.

53. საწყისი განტოლებათა სისტემა ასე გადავწეროთ: $\begin{cases}3^{y-1}\cdot4^{\frac{1-x}{x+1}}=1\\5^{y-1}\cdot4^{\frac{2(1-x)}{x+1}}=1\end{cases}$ პირველი განტოლება აეიყვანოთ კვადრატში და გავყოთ მეორე განტოლებაზე. მიეიღებთ $y=1$ და ადვილად ვიპოვით მეორე უცნობს.

54. საწყისი განტოლებათა სისტემა ასე გადავწეროთ: $\begin{cases}2^{\frac{x-5}{3}}\cdot3^{\frac{y-9}{5}}=1\\8^{x-5}\cdot9^{\frac{y-9}{5}}=1\end{cases}$. ამის შემდეგ მოცემული სისტემა ამოიხსნება წინა ამოცანის მსგავსად.

55. თუ $a=0$ მაშინ განტოლებათა სისტემას გააჩნია ერთი ფესვი. თუ $a\neq0$, მაშინ შემოვიღოთ აღნიშვნა $y=5^x$. მიეიღებთ კვადრატულ განტოლებას, რომელსაც გააჩნია ერთი ფესვი თუ დისკრიმინანტი ნულის ტოლია. განიხილება ასევე ის შემთხვევა როდესაც განტოლებას გააჩნია ორი სხვადასხვა ნიშნის ფესვი. რადგანაც თუ დავუბრუნდებით აღნიშვნას მიეიღებთ განტოლებას, რომლისთვისაც უარყოფითი ფესვი უვარგისია ე.ი. დავუბრუნდებით ისევ საწყის განტოლებას და ვასკვნით, რომ მოცემულ განტოლებას ერთი ფესვი აქვს.

59. განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს უსასრულოდ კლებად გეომეტრიულ პროგრესიის წევრთა ჯამს, ამიტომ ის შეიძლება ასე გადავწეროთ: $\frac{5^{2x+1}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-5}$ და

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ $2x+2=5-x^2$, რომლის ამოხსნაც გვაძლევს $x_1=-3$ და $x_2=1$.

60. საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ: $\left(\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+1}\right)^x=\left(\sqrt{(3\sqrt{3}-2)^2+2}\right)^{x-4}$ ან $(\sqrt{3})^x=(3\sqrt{3})^{x-4}$ საიდანაც $x=3(x-4)$ და საბოლოოდ $x=6$.

61. განტოლება მარტივად ამოიხსნება თუ გავითვალისწინებთ ტოლობებს: $5\sqrt{2}-7=(\sqrt{2}-1)^3$ და $4\sqrt{2}+3=(\sqrt{2}+1)^3$.

63. განტოლების ორივე მხარე გავყოთ 8^x-ზე, მივიღებთ: 15 $6\left(\frac{3}{4}\right)^x=\frac{7}{4}4\sqrt{3}\left(\frac{4\sqrt{3}}{8}\right)^x$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x=y$. მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას $6y^2+7\sqrt{3}y-15=0$ ან $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ და $x=1$.

71. შემოვიღოთ აღნიშვნა $2^x=y$ მივიღებთ განტოლებას: $y^3-y^2+y-52=0$ ან $(y-4)(y^2+3y+13)=0$ და $y=4$, საიდანაც $2^x=4$ და $x=2$.

72. საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ $\frac{2^{4^x}+2^{9^x}}{2}=2^{6^x}$ გამოვიყენებთ რა კავშირს საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო გეომეტრიულს შორის მივიღებთ: $2^{6^x}=\frac{2^{4^x}+2^{9^x}}{2}\geq\sqrt{2^{4^x+9^x}}=2^{\frac{4^x+9^x}{2}}\geq2^{\sqrt{4^x9^x}}=2^{6^x}$. ე.ი. მივიღეთ რომ საშუალო არითმეტიკული საშუალო გეომეტრიულის ტოლია ეს კი შესაძლებელია მაშინ როცა $2^{4^x}=2^{9^x}$ აქედან მიიღება ტოლობები: $4^x=9^x$, $\left(\frac{4}{9}\right)^x=1$ და $x=0$.

73. საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ: $\frac{9}{15}\left(\frac{5}{3}\right)^x+\frac{25}{15}\left(\frac{3}{5}\right)^x=-3x^2+6x-1$. ამ ტოლობის მარცხენა მხარე მეტია ან ტოლი 2-ის, ხოლო მარჯვენა ნაკლებია ან ტოლი -2ის, ე.ი. $-3x^2+6x-1=2$ საიდანაც $x=1$.

76. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $10^{x^2}=z$ და $3^{y^2}=t$. ამის შემდეგ საწყისი სისტემა ასე გადაიწერება: $\begin{cases}zt=81\\z^2+5t=406\end{cases}$, $t=\frac{81}{z}$ და მეორე განტოლება ასე გადაიწერება: $z^3-z+405-405z=0$ ან $(z-1)(z^2-405)=0$ საიდანაც მიიღება, რომ $z_1=1$, $z_2=-\sqrt{405}, z_3=\sqrt{405}$. თუ $z_1=1$ მაშინ $t_1=81$, როცა $z_3=9\sqrt{5}$ მაშინ $t_3=\frac{9\sqrt{5}}{5}$. დავუბრუნდეთ საწყის x,y უცნობებს. მივიღებთ: $\begin{cases}10^{x^2}=1\\3^{y^2}=81\end{cases}$ ან $\begin{cases}10^{x^2}=9\sqrt{5}\\3^{y^2}=\frac{9\sqrt{5}}{5}\end{cases}$ პირველი სისტემის ამონახსნია $(0;2)$, $(0;-2)$, მეორესი - $x\in A, y\in B$ სადაც $A=\left\{\mp\sqrt{lg9\sqrt{5}}\right\}, B=\left\{\mp\sqrt{\log_3\frac{9\sqrt{5}}{5}}\right\}$

78. შემოვიღოთ აღნიშვნები $4^x=z$, $3^{3y}=t$ რის შემდეგ მივიღებთ ერთგვაროვან სისტემას

$\begin{cases}\frac{7}{4}z^2+\frac{1}{3}t^2=55\\\frac{5}{6}zt-\frac{1}{9}t^2=21\end{cases}$. მიღებული სისტემა მარტივად ამოიხსნება.

79. საწყისი სისტემის მეორე განტოლების გათვალისწინებით პირველი განტოლება ასე ჩაიწერება: $4^{x-1}\cdot 25^{\frac{1}{x}}=25$ ან $\left(4\cdot 15^{\frac{1}{x}}\right)^{x-1}=1$. საიდანაც საბოლოოდ მივიღებთ $x=1, y=2$.

82. საწყისი სისტემა ასე გადავწეროთ: $\begin{cases}144^{\frac{1}{2x-y}}=16(2x+y)^2\\(2x+y)^{2(2x-y)}=48^2\end{cases}$

ან $\begin{cases}144=16^{2x-y}\cdot(2x+y)^{2(2x-y)}\\(2x+y)^{2(2x-y)}=48^2\end{cases}$ საბოლოოდ $144=48\cdot 48\cdot 16^{2x-y}$ საიდანაც, გვექნება $16^{-1}=16^{2x-y}$ ან $2x-y=-1$. სისტემის მეორე განტოლებიდან მიიღება $2x+y=\frac{1}{48}$.

მიღებული სისტემა $\begin{cases}2x-y=-1\\2x+y=\frac{1}{48}\end{cases}$ ადვილად ამოიხსნება.

83. საწყისი სისტემის განტოლებები გავალოგარითმოთ, მივიღებთ: $\begin{cases}2\sqrt{x}-\sqrt{y}=\log_3 8\\\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=\log_5 10\end{cases}$ ან

$\begin{cases}2\sqrt{x}-\sqrt{y}=\log_3 8\\\sqrt{x}-\sqrt{y}=\pm\sqrt{log_5^{10}}\end{cases}$.მიღებული სისტემა ადვილად ამოიხსნება.

88. საწყისი სისტემა ასე გადავწეროთ: $\begin{cases}|2^x-8|+3|2^y-4|=12\\|x-9|+y=6\end{cases}$. ამ სისტემის ამოსახსნელად საჭიროა განვიხილოთ ის შემთხვევები, როცა x ეკუთვნის შუალედებს $(-\infty;3)$; $[3;9]$; $(9;\ +\infty)$ ხოლო y კი - შუალედებს $(-\infty;2)$ ან $[2;+\infty)$. სულ მივიღებთ 6 განტოლებათა სისტემას, რომლებიც მარტივად ამოიხსნება.

89. განტოლებიდან $x^2=y^3$ გამომდინარეობს, რომ $y\geq 0$. რადგანაც $y\neq 0$ ამიტომ $y\geq 1$. მივიღეთ, რომ $x>0$. ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი უნდა ვეძებოთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში. ტოლობიდან $2^x=y^y$ მიიღება, რომ $y=2^k$ ან $2^x=(2^k)^{2^k}$. საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $x=k\cdot 2^k$. რადგანაც $x^2=y^3$ ამიტომ $k^2\cdot 2^{2k}=2^{3k}$ ე.ი. $k^2=2^k$. მიღებული ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $k=2^p$. საიდანაც წინა ტოლობის გათვალისწინებით მიიღება $p=2^{p-1}$, ეს ტოლობა კი სამართლიანია მაშინ როდესაც $p=1$ ან $p=2$ და სისტემის ამონახსნი ამ შემთხვევაში იქნება $(8;4)$ და $(64;16)$.

90. საწყისი სისტემიდან გამომდინარეობს, შემდეგი უტოლობის სამართლიანობა: $2=\frac{2^x+2^y+2^z}{3}\geq\sqrt[3]{2^x2^y2^z}=\sqrt[3]{2^{x+y+z}}=2$ ე.ი. საშუალო არითმეტიკული ტოლია საშუალო გეომეტრიულის ეს კი შესაძლებელია მაშინ, როდესაც $2^x=2^y=2^z$ ე.ი. $x=y=z=1$. მიღებული ფესვები არ აკმაყოფილებენ სისტემის მესამე განტოლებას, ე.ი. სისტემას ამონახსნი არ გააჩნია.

§12. ლოგარითმები. ლოგარითმული განტოლებები და სისტემები

17. დავუშვათ $a<b$ სამართლიანია ტოლობები: $\frac{\log_{12}108}{\log_{12}72}<\log_{12}18$;

$\log_{12}108<\log_{12}72\cdot\log_{12}18$; $\log_{12}(12\cdot 9)<\frac{\log_3 18}{\log_3 12}\cdot\frac{\log_3 72}{\log_3 12}$; $1+\frac{log_3^9}{log_3^{12}}<\frac{log_3^{18}log_3^{72}}{\left(log_3^{12}\right)^2}$; $(\log_3 12)^2+$

$2\log_3 12<\log_3(9\cdot 2)\log_3(9\cdot 8)$; $\left(log_3^{(4\cdot 3)}\right)^2+2log_3^{(4\cdot 3)}<\left(2+log_3^2\right)\left(2+3log_3^2\right)$

$\left(2log_3^2+1\right)^2+2log_3^4+2<4+8log_3^2+3log^2{}_3^2$; $4log^2{}_3^2+4log_3^2+1+4log_3^2+2<4+8log_3^2+3log^2{}_3^2$

ან $(\log_3 2)^2<1$, მივიღეთ ჭეშმარიტი უტოლობა ე.ი. ჩვენი დაშვება სწორია.

20. გვაქვს $2lg3 > lg8 = lg(2\cdot4) = lg2 + lg4$, ე.ი. $\lg3 > \frac{\lg2+\lg4}{2} > \sqrt{\lg2\cdot\lg4}$ საბოლოოდ გვექნება: $\lg^2 3 > \lg2\cdot\lg4$ ან $\frac{lg3}{lg4} > \frac{lg2}{lg3}$, ე.ი. $lg_4^3 > lg_3^2$

22. ცხადია, $2lg(n+1) > lg\,n(n+2) = lg\,n + lg(n+2)$. გამოვიყენებთ რა კავშირს საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო გეომეტრიულს შორის, მივიღებთ: $lg(n+1) > \frac{lg\,n + lg(n+2)}{2} > \sqrt{lg\,n\cdot lg(n+2)}$ ან $lg^2(n+1) > lg\,n\cdot lg(n+2)$ საბოლოოდ გვექნება: $\frac{lg(n+1)}{lg(n+2)} > \frac{lg\,n}{lg(n+2)}$ ე.ი $log_{n+2}^{(n+1)} > log_{n+1}^{n}$

ამოხსენით განტოლებები (№№ 25 – 45):

25. 5). შემოვიღოთ აღნიშვნა: $log_5^{|x-2|} = y$, მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას: $y^2 + 2y - 3 = 0$ საიდანაც, გამომდინარეობს, რომ $log_5^{|x-2|} = 1$ და $log_5^{|x-2|} = -3$. საბოლოოდ გვექნება: $|x-2| = 5; |x-2| = \frac{1}{125}$ ან $x = -3;\ x = 7;\ x = \frac{249}{125};\ x = \frac{251}{125}$.

30. 4). განტოლება გადავწეროთ ასე: $\left(x^{log_x^5}\right)^{log_x^5} + 5^{log_x^5} = 6$ ე.ი. $5^{log_x^5} + 5^{log_x^5} = 6$. საიდანაც მიიღება: $5^{log_x^5} = 3$ ან $log_x^5 = log_5^3$ და საბოლოოდ გვექნება: $log_5^x = log\,5_3$ ან $x = 5^{log_3^5}$.

38. განტოლება ასე გადავწეროთ: $log_{x+1}^{125(x+1)}\,log^2{}_{25}^{(x+1)} = 1$ ან $\left(log_{x+1}^{125} + 1\right)\cdot log^2{}_{25}^{(x+1)} = 1$, აქედან $\left(3\log_{x+1}^5 + 1\right)\cdot \log^2{}_5^{(x+1)} = 4$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $log_5^{(x+1)} = y$, მივიღებთ: $\left(\frac{3}{y} + 1\right)\cdot y^2 = 4$ ან $3y + y^2 = 4$ აქედან $y = 1; y = -4$ და $log_5^{(x+1)} = 1; log_5^{(x+1)} = -4$ და საბოლოოდ $x = 4; x = -\frac{624}{625}$.

39. განტოლება ასე გადავწეროთ: $\frac{10^{lg\,x^2}}{4^{lg\,x}} - 30\cdot5^{lg\,x} + 125 = 0$ ან $25^{lg\,x} - 30\cdot5^{lg\,x} + 125 = 0$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $y^2 - 30y + 125 = 0$ ე.ი. $5^{lg\,x} = 5$ და $5^{lg\,x} = 25$. საბოლოოდ გვაქვს: $x = 10; x = 100$.

40. განტოლება ასე გადავწეროთ: $5^{lg\left(x^2+3\right)} + 5^{lg(x+5)} = 2\cdot5^{\frac{lg\left(x^2+3\right)(x+5)}{2}}$. მისი ორივე მხარე გავყოთ $5^{lg\left(x^2+3\right)}$-ზე, მივიღებთ: $1 + 5^{lg\frac{x+5}{x^2+3}} = 2\cdot5^{\frac{1}{2}lg\frac{x+5}{x^2+3}}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $5^{\frac{1}{2}lg\frac{x+5}{x^2+3}} = y$. განტოლება გადაიწერება ასე: $y^2 - 2y + 1 = 0$ აქედან $y = 1$ და შესაბამისად: $lg\frac{x+5}{x^2+3} = 0$ ან $x + 5 = x^2 + 3$, საიდანაც $x = -1; x = 2$.

41. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $log_2^x = y$, მაშინ განტოლება მიიღებს სახეს: $y^3-3y=\frac{65}{8}$, ან $8y^3-24y-65=0$. ამ განტოლების ფესვია $y=\frac{5}{2}$, ე.ი. $log_2^x=\frac{5}{2}$ აქედან $x=4\sqrt{2}$.

42. მარტივად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ $y=12x-12x^2+2$ კვადრატული სამწევრის მაქსიმალური სიდიდეა 5, ხოლო $y=4x-4x^2+6$ კვადრატული სამწევრის – 7. ე.ი. $log_5\left(12x-12x^2+2\right)\le 1$ და $log_7\left(4x-4x^2+6\right)\le 1$. ვინაიდან განტოლებაში მათი ნამრავლი 1-ის ტოლია ამიტომ $\begin{cases}12x-12x^2+2=5\\ 4x-4x^2+6=7\end{cases}$ და ამონახსნია $x=0.5$.

43. ვინაიდან $4x-x^2-2\le 2$, ხოლო $6x-x^2\le 9$ მივიღებთ სისტემას: $\begin{cases}4x-x^2+2=2\\ 6x-x^2=9\end{cases}$ მიღებულ სისტემას კი ამონახსნი არ გააჩნია.

44. როგორც ცნობილია საშუალო არითმეტიკული არაა ნაკლები საშუალო გეომეტრიულზე, ე. ი. $\frac{2^{lg\,x}+4^{lg\,y}+8}{3}\ge\sqrt[3]{2^{lg\,x}\cdot 2^{2lg\,y}\cdot 2^3}=\sqrt[3]{2^{3+lg\,x+2lg\,y}}=2^{\frac{3+lg\,x+2lg\,y}{3}}\ge 2^{\sqrt[3]{6lg\,x\cdot lg\,y}}$ მოცემული განტოლებიდან ჩანს, რომ საშუალო არითმეტიკული ტოლია საშუალო გეომეტრიულის, ეს კი შესაძლებელია მაშინ როდესაც შესაკრებები ტოლია ე.ი. $2^{lg\,x}=2^{2lg\,y}=2^3$, საიდანაც მიიღება $x=1000$ და $y=10\sqrt{10}$.

45. განტოლება ასე გადავწეროთ: $\sqrt{x-1}+2^{x-1}+3^{x-1}=\log_2\left(2x-x^2+3\right)$. განვიხილოთ ფუნქციები: $f(x)=\sqrt{x-1}+2^{x-1}+3^{x-1}$ და $g(x)=log_2\left(2x-x^2+3\right)$. პირველი ფუნქცია განსაზღვრულია შუალედზე $[1;+\infty)$ და ამ შუალედზე ის ზრდადია. მისი მინიმალური მნიშვნელობა ტოლია 2-ის. რაც შეეხება $g(x)$ ფუნქციას მისი მაქსიმალური მნიშვნელობაა 2. მივიღეთ ტოლობა ე.ი $f(x)$-ს მინიმალური მნიშვნელობა დაემთხვა $g(x)$ ფუნქციის მაქსიმალურ მნიშვნელობას და ეს მოხდა არგუმენტის 1-ის ტოლი მნიშვნელობისათვის ე.ი. საწყისი განტოლების ფესვია 1.

ამოხსენით განტოლებათა სისტემა და დაკმაყოფილდით რაციონალური ფესვებით (№№ 46 – 66):

46. განტოლება გადავწეროთ ასე: $\begin{cases}3lg\,x\cdot lg\,y+lg\,xy=9\\ lg\,x\cdot lg\,y\cdot lg\,xy=6\end{cases}$ შემოვიღოთ აღნიშვნები: $lg\,x\,lg\,y=z$ და $lg\,xy=t$, მივიღებთ $\begin{cases}3z+t=9\\ z\cdot t=6\end{cases}$. საიდანაც მივიღებთ $z=1;t=6$ ან $z=2;t=3$.

განვიხილოთ სისტემები: $\begin{cases}lg\,x\cdot lg\,y=1\\ lg\,x+lg\,y=6\end{cases}$ და $\begin{cases}lg\,x\cdot lg\,y=2\\ lg\,x+lg\,y=3\end{cases}$ მეორე სისტემის ამონახსნია (10; 100) და (100; 10).

47. განტოლებათა სისტემა ასე გადავწეროთ: $\begin{cases} 2\lg x+\dfrac{\lg x}{\lg y}+1=\dfrac{7}{\lg y} \\ \lg^2 x+\lg^2 y=5 \end{cases}$. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $lg\,x=z; lg\,y=t$. სისტემა ასე გადაიწერება: $\begin{cases} z+t+2zt=7 \\ (z+t)^2-2zt=5 \end{cases}$ რის შემდეგაც ის ადვილად ამოიხსნება.

48. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $lg\,x=z; lg\,y=t$. სისტემა ასე გადაიწერება: $\begin{cases} (z+t)^2-2zt=5 \\ (z+t)\left[(z+t)^2-3zt\right]=7 \end{cases}$, კიდევ ერთხელ შემოვიღოთ აღნიშვნები: $z+t=u; zt=v$, მაშინ გვაქვს: $\begin{cases} u^2-2v=5 \\ u\left(u^2-3v\right)=7 \end{cases}$. პირველი განტოლებიდან გვექნება: $v=\dfrac{u^2-5}{2}$, მეორე განტოლება ასე გადაიწერება: $u^3-15u+14=0$, ე.ი. $u^3-u-14u+14=0$ ან $u(u-1)(u+1)-14(u-1)=0$; $(u-1)\left(u^2+u-14\right)=0$. მივიღეთ $u=1; v=-2$. შევნიშნოთ, რომ განტოლება $u^2+u-14=0$ არ ამოგვიხსნია ვინაიდან გვჭირდება ორი ამონახსნის პოვნა. დავუბრუნდებით რა z და t, ხოლო შემდეგ x და y უცნობებს მივიღებთ: $x=0.1; y=100$ და $x=100; y=0.1$.

49. პირველი განტოლება ასე გადავწეროთ: $x^{lg\,y}+3x^{lg\,y}=400$, ე.ი. $x^{lg\,y}=100$. მიღებულ ტოლობათა ·გალოგარითმებით მივიღებთ: $\begin{cases} lg\,x\cdot lg\,y=2 \\ 2\,lg\,x+3\,lg\,y=8 \end{cases}$, აქედან კი მიიღება: $lg\,x=1; lg\,y=2$ ან $lg\,x=3; lg\,y=\dfrac{2}{3}$ და შესაბამისად პასუხებია: (10; 1000) და ($1000;\sqrt[3]{100}$).

50. პირველი განტოლება გადავწეროთ ასე: $x^{lg\,y}+x^{lg\,y}=1$ ე.ი. $x^{lg\,y}=\dfrac{1}{2}$, რის შემდეგ სისტემის ორივე განტოლება გავალოგარითმოთ და შემოვიღოთ აღნიშვნები: $lg\,x=z; lg\,y=t$. მივიღებთ $\begin{cases} zt=-lg\,2 \\ z+t=lg\,5 \end{cases}$. მეორე განტოლებიდან გამოვთვალოთ z-ის მნიშვნელობა და ჩავსვათ პირველში, მივიღებთ $t(lg\,5-t)=-lg\,2$ ე.ი. $t^2-lg\,5\cdot t-lg\,2=0$. მიღებული განტოლების ამონახსნია $t_1=\dfrac{lg\,5+\sqrt{lg^2\,5+4\,lg\,2}}{2}$ და $t_2=\dfrac{lg\,5-\sqrt{lg^2\,5+4\,lg\,2}}{2}$. ვინაიდან ფესქვეშა გამოსახულება ტოლია შემდეგი სიდიდის $lg^2\,5-4\,lg\,2=lg^2\,5+4\,lg\dfrac{10}{5}=lg^2\,5-4\,lg\,5+4=(lg\,5-2)^2$, ამიტომ გვექნება: $t_1=\dfrac{lg\,5+2-lg\,5}{2}=1$ და $t_2=\dfrac{2\,lg\,5-2}{2}=-lg\,2$ და ამის შემდეგ ამოხსნა მარტივია.

51. სისტემაში შემავალი განტოლებები გავალოგარითმოთ, ხოლო შემდეგ შემოვიღოთ აღნიშვნები: $lg(y+3)=z; lg(x+1)=t$, მივიღებთ სისტემას: $\begin{cases} zt=5\,lg\,2 \\ z=lg\,2+1-0.5t \end{cases}$. ჩავსვამთ რა პირველ განტოლებაში z-ის მნიშვნელობას მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას, რომლის ამოხსნაც მარტივია (შევნიშნოთ რომ ფესქვეშა გამოსახულება სრული კვადრატია).

52. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $log_y x = z$. პირველი განტოლება გადავწეროთ ასე: $z - \frac{3}{z} = 2$ ე.ი.

$z^2 - 2z - 3 = 0$, აქედან $z_1 = 3$ და $z_2 = -1$ ან $log_y x = 3$ და $log_y x = -1$. საბოლოოდ გვექნება

$x = y^3$ და $x = \frac{1}{y}$. მიიღება ორი სისტემა: $\begin{cases} x = y^3 \\ 3\lg x - 5\lg y = 4\lg 2 \end{cases}$ და $\begin{cases} x = \frac{1}{y} \\ 3\lg x - 5\lg y = 4\lg 2 \end{cases}$, ეს

სისტემები მარტივად ამოიხსნება.

55. სისტემაში შემავალი განტოლებები ასე გადავწეროთ; $\begin{cases} log_{x+1}(y+2) + 1 = 4 \\ log_3 \frac{y+2}{x+1} = 1 \end{cases}$ საიდანაც

მიიღება $\begin{cases} y + 2 = (x+1)^3 \\ \frac{y+2}{x+1} = 9 \end{cases}$ საბოლოოდ გვექნება $x = 2; y = 25$.

56. სისტემა ასე გადავწეროთ: $\begin{cases} (x+1)\lg 5 + (y-2)\lg 3 = \lg 675 \\ |3x + 2y| = 13 \end{cases}$. მივიღეთ წრფივი განტოლებათა

სისტემები: $\begin{cases} (x+1)\lg 5 + (y-2)\lg 3 = 675 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$ და $\begin{cases} (x+1)\lg 5 + (y-2)\lg 3 = 675 \\ 3x + 2y = -13 \end{cases}$, რომლებიც მარტივად

ამოიხსნება.

59. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\lg|x| = z$ და $\lg y = t$. მივიღებთ სისტემას: $\begin{cases} z + 2t = 2 \\ 2z + 3t = 3 \end{cases}$, რომელიც

ადვილად ამოიხსნება.

60. სისტემა ასე გადავწეროთ: $\begin{cases} \log_{|y+2|}(x+2) + \log_{(y+2)^2}|x+3| = \frac{3}{2} \\ |x+3| + 5|y+2| = 30 \end{cases}$ ან

$\begin{cases} \log_{|y+2|}(x+3) = 1 \\ x + 3 + 5|y+2| = 30 \end{cases}$, საიდანაც მიიღება $\begin{cases} x + 3 = |y+2| \\ x + 3 + 5|y+2| = 30 \end{cases}$. მიღებული სისტემები ადვილად

ამოიხსნება.

64. შემოვიტანოთ აღნიშვნები: $5^{\lg x} = z; 7^{\lg y} = t$. მივიღებთ: $z + \frac{1}{z} = t + \frac{1}{t}$ ან $(z-t)(zt-1) = 0$

საიდანაც მიიღება: $z = t$ და $zt = 1$. სისტემის მეორე განტოლების გალოგარითმებით

მივიღებთ $\lg x + \lg y = \lg 35$. საბოლოოდ გვექნება შემდეგი სისტემები:

$\begin{cases} 5^{\lg x} = 7^{\lg y} \\ \lg x + \lg y = \lg 35 \end{cases}$ და $\begin{cases} 5^{\lg x} \cdot 7^{\lg y} = 1 \\ \lg x + \lg y = \lg 35 \end{cases}$. პირველი სისტემიდან მიიღება

$\begin{cases} 5^{\lg x}\cdot 5^{\lg y}=5^{\lg 35} \\ 5^{\lg x}=7^{\lg y} \end{cases}$ ე.ი. $7^{\lg y}\cdot 5^{\lg y}=35^{\lg 5}$ ან $35^{\lg y}=35^{\lg 5}$ ე.ი. $y=5; x=7$. რაც შეეხება

სისტემას $\begin{cases} 5^{\lg x}\cdot 7^{\lg y}=1 \\ \lg x+\lg y=\lg 35 \end{cases}$ ან $\begin{cases} 5^{\lg x}\cdot 7^{\lg y}=1 \\ 5^{\lg x}\cdot 5^{\lg y}=5^{\lg 35} \end{cases}$, მათი ამონახსნებია $x=35^{\frac{-\log_5 7}{7}}$ და

$y=35^{\frac{\log_5 5}{7}}$

65. როგორც ცნობილია $\dfrac{2^x+2^y+2^z}{3}\geq\sqrt[3]{2^x\cdot 2^y\cdot 2^z}=\sqrt[3]{2^{x+y+z}}=2^{\frac{x+y+z}{3}}\geq 2^{\sqrt[3]{xyz}}$. სისტემის პირველი განტოლებიდან გვაქვს: $xyz=1$, ე.ი $\dfrac{2^x+2^y+2^z}{3}\geq 2$. ვინაიდან $2^x+2^y+2^z=6$ გამოდის, რომ საშუალო არითმეტიკული დაემთხვა საშუალო გეომეტრიულს, რაც შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ როცა $2^x=2^y=2^z$. სისტემაში შემავალი მესამე განტოლების გათვალისწინებით, საბოლოოდ მიიღება $x=y=z=1$.

66. სამართლიანია თანაფარდობა: $\dfrac{2^x+2^y}{2}\geq\sqrt{2^x\cdot 2^y}=2^{\frac{x+y}{2}}$ გაეითვალისწინებთ რა სისტემის მეორე განტოლებას გვექნება: $2^x+2^y\geq 2^{\frac{x+y+z}{2}}=2^{\frac{2z}{2}}=2^z$. სისტემის მესამე განტოლების გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ საშუალო არითმეტიკული ტოლია საშუალო გეომეტრიულის ე.ი. $2^x=2^y$ აქედან $x=y$. გაეითვალისწინებთ, რა სისტემის პირველ განტოლებას გვექნება $\lg^2 x=1$ აქედან $x=10$ ან $x=0.1$. როცა $x=10$ მაშინ $y=10$ და $z=11$. ხოლო როცა $x=0.1$ მაშინ $y=0.1$ და $z=1.1$.

67. სისტემის პირველი განტოლება ასე გადავწეროთ: $5^{2\log_3(x+y)}-6\cdot 5^{\log_3(x+y)}+5=0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $5^{\log_3(x+y)}=z$. მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას: $z^2-6z+5=0$, რომლის ფესვებია $z=1$, $z=5$. როცა $z=5$ მივიღებთ $x=y=1{,}5$. როცა $z=1$ მივიღებთ $x+y=1$. ამ შემთხვევაში სისტემის ამონახსნია $x=a$, $y=1-a$, სადაც a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

§14. რაციონალური და ირაციონალური უტოლობები

112. ადგილი აქვს ტოლობებს: $[\sqrt[4]{1}] = [\sqrt[4]{2}] = \cdots = [\sqrt[4]{15}] = 1$ ე.ი. ჯამში გვაქვს 15 ერთიანი. $[\sqrt[4]{16}] = [\sqrt[4]{17}] = \cdots = [\sqrt[4]{80}] = 2$, ე.ი. სულ ჯამში არსებობს 65 ორიანი. $[\sqrt[4]{81}] = [\sqrt[4]{82}] = \cdots = [\sqrt[4]{255}] = 3$, მაშასადამე სულ ჯამში შედის 175 სამიანი. დარჩა შესაკრებები რომელთა რაოდენობა უცნობია, მაგრამ ყოველი მათგანი 4-ის ტოლია. მივიღეთ უტოლობა: $15+2\cdot 65 + 3\cdot 175 + 4\cdot z < 2000$ ე.ი. $z < 332$. მთლიანად $1-$ანების, $2-$ანების და $3-$ანების რაოდენობაა 255 ამიტომ სამართლიანია უტოლობა: $x + 1 \leq 256 + 332$. $x \leq 587$ და უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა: $\{1, 2, 3, \ldots, 587\}$.

113. სამართლიანია უტოლობები: $0< 30x + 9 \leq (5x+3)^2$, $0< 30y + 9 \leq (5y+3)^2$, $0< 30z + 9 \leq (5z+3)^2$. საიდანაც გამომდინარეობს $0< \sqrt{30x+9} \leq 5x+3$, $0< \sqrt{30y+9} \leq 5y+3$, $0< \sqrt{30z+9} \leq 5z+3$. შევკრიბოთ მიღებული უტოლობები, მივიღებთ: $0< \sqrt{30x+9} + \sqrt{30y+9} + \sqrt{30z+3} \leq 5(x+y+z) + 9 = 14$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

114. როგორც ცნობილია ნებისმიერი ნატურალური k რიცხვისათვის ($k \leq n$) ადგილი აქვს უტოლობას: $k(n-k+1) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$. ამ უტოლობაში k-ს მივცეთ მნიშვნელობები $1, 2, 3, \cdots, n$ რის შემდეგაც ყველა მიღებული უტოლობა გადავამრავლოთ, ამით მივიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას.

115. ცხადია $\log_{m+1}(m+2) < \log_m(m+2)$ ე.ი. $\log_{m+1}(m+2) - \log_m(m+1) < \log_m(m+2) - \log_m(m+1)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\log_3 4 - \log_2 3 < \log_2 \frac{4}{3}$, $\log_4 5 - \log_3 4 < \log_3 \frac{5}{4}$ და ა.შ. $\log_{n+1}(n+2) - \log_n(n+1) < \log_n \frac{n+2}{n+1}$. მიღებული უტოლობების შეკრება გვაძლევს: $\log_{n+1}(n+2) - \log_2 3 < \log_2 \frac{4}{3} + \log_3 \frac{5}{4} + \log_4 \frac{6}{5} + \cdots + \log_n \frac{n+2}{n+1}$. საბოლოოდ კი მივიღებთ: $\log_2 3 + \log_2 \frac{4}{3} + \log_3 \frac{5}{4} + \log_4 \frac{6}{5} + \cdots + \log_n \frac{n+2}{n+1} > \log_{n+1}(n+2)$.

116. სამართლიანია უტოლობები: $(a_1x + a_n)^2 \geq 0$, $(a_2x + a_{n-1})^2 \geq 0$ და ა.შ. $(a_nx + a_1)^2 \geq 0$. ამ უტოლობების შეკრება გვაძლევს. $(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)x^2 + 2(a_1a_n + a_2a_{n-1} + \cdots + a_na_1)x + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$. კვადრატული სამწევრი $Ax^2 + 2Bx + A \geq 0$ არაუარყოფითია ყველა x-თვის. ე.ი. მისი დისკრიმინანტი არაა დადებითი. მივიღეთ, რომ $B^2 - A^2 \leq 0$ ე.ი. $(a_1a_n + a_2a_{n-1} + \cdots + a_na_1)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^2$ და საბოლოოდ გვექნება: $|a_1a_n + a_2a_{n-1} + \cdots + a_na_1| \leq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

117. სამართლიანია უტოლობები: $\frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c+d}$, $\frac{b}{c+d} > \frac{b}{a+b+c+d}$, $\frac{c}{a+d} > \frac{c}{a+b+c+d}$, $\frac{d}{a+b} > \frac{d}{a+b+c+d}$. ამ უტოლობების შეკრებით მივიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას.

118. სამართლიანია უტოლობა $(1-b)(x-y)^2 \geq 0$ ე.ი. $x^2 - 2xy + y^2 - bx^2 + 2bxy - by^2 \geq 0$, ეს უტოლობა ასე გადავწეროთ: $-x^2 + y^2 \geq -2x^2 + bx^2 + 2xy - 2bxy + by^2$ ან $-bx^2 + by^2 \geq -2bx^2 + b^2x^2 + 2bxy - 2b^2xy + b^2y^2$. საბოლოოდ გვექნება: $x^2 - bx^2 + by^2 \geq x^2 - 2bx^2 + b^2x^2 + 2bxy - 2b^2xy + b^2y^2$ ე.ი. $(1-b)x^2 + by^2 \geq (1-b)^2x^2 + 2(1-b)bxy + b^2y^2$ და რადგანაც $1-b = a$, ამიტომ გვექნება $ax^2 + by^2 \geq (ax+by)^2$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

119. სამართლიანია უტოლობები: $a^2 + ab + b^2 \geq 3ab$, $b^2 + bc + c^2 \geq 3bc$. პირველი უტოლობა გავამრავლოთ $(a-b)$ -ზე, ხოლო მეორე კი – $(b-c)$-ზე. მივიღებთ $a^3 - b^3 \geq$

$3ab(a-b)$, $b^3-c^3 \ge 3bc(b-c)$. მიღებული უტოლობების შეკრება გვაძლევს დასამტკიცებელ უტოლობას.

120. ჯერ დავამტკიცოთ უტოლობა $\frac{a}{x}+\frac{b}{y} \ge \frac{1}{ax+by}$, თუ $a>0$, $b>0, a+b=1, x>0, y>0$. რადგანაც $ab(x-y)^2 \ge 0$ ამიტომ გვექნება: $\frac{a}{x}+\frac{b}{y} \ge \frac{1}{ax+by}$. დავუბრუნდეთ დასამტკიცებელ უტოლობას. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x+\frac{\beta}{\alpha+\beta}y=t$. სადაც α, β ნებისმიერი დადებითი რიცხვებია. დამტკიცებული უტოლობის თანახმად $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{1}{x}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{1}{y} \ge \frac{1}{\frac{\alpha x}{\alpha+\beta}+\frac{\beta y}{\alpha+\beta}}$. ე.ი. $\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y} \ge (\alpha+\beta)^2\cdot\frac{1}{\alpha x+\beta y}$. ვთქვათ $\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$. იმავე უტოლობის თანახმად $(\alpha+\beta)\cdot\frac{1}{t}+\frac{\gamma}{z} \ge \frac{1}{(\alpha+\beta)t+\gamma z}=\frac{1}{\alpha x+\beta y+\gamma z}$. განვიხილოთ სიდიდე $\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}$, ცხადია $\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z} \ge (\alpha+\beta)^2\cdot\frac{1}{\alpha x+\beta y}+\frac{\gamma}{z}=\frac{\alpha+\beta}{t}+\frac{\gamma}{z} \ge \frac{1}{\alpha x+\beta y+\gamma z}$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

121. როგორც ცნობილია ადგილი აქვს უტოლობას $ax^2+by^2 \ge (ax+by)^2$, $a+b=1, a \ge 0, b \ge 0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\frac{px}{p+q}+\frac{qy}{p+q}=t$. ცნობილი უტოლობის თანახმად გვექნება: $\frac{p}{p+q}x^2+\frac{q}{p+q}y^2 \ge \left(\frac{p}{p+q}x+\frac{q}{p+q}y\right)^2$, რადგანაც $\frac{p}{p+q}+\frac{q}{p+q}=1$, მივიღებთ: $px^2+qy^2 \ge (p+q)t^2$. იგივე უტოლობის თანახმად გვექნება: $(p+q)t^2+rz^2 \ge [(p+q)t+rz]^2$. სამართლიანია უტოლობები: $px^2+qy^2+rz^2 \ge (p+q)t^2+rz^2 \quad \ge \quad [(p+q)t+rz]^2$
$\ge \quad [(p+q)t+rz]^2 \quad = \left[(p+q)\frac{px}{p+q}+(p+q)\frac{qy}{p+q}+rz\right]^2=(px+qy+rz)^2$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

122. შემოვიღოთ აღნიშვნები $\frac{a}{b}=x$, $\frac{b}{c}=y$, $\frac{c}{a}=z$. მოცემული უტოლობები ნიშნავს $\begin{cases} x+y+z>0 \\ xy+xz+yz>0 \\ xyz>0 \end{cases}$. ე.ი. კუბურ განტოლებას $t^3-(x+y+z)t^2+(xy+xz+yz)t-xyz=0$ აქვს დადებითი ფესვები, ცხადია ეს რიცხვებია x,y,z. ფუნქცია $f(t)=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+xz+yz)t-xyz$ ზრდადია $(-\infty;0)$ შუალედში. პირობიდან $x>0$, $y>0, z>0$ გამომდინარეობს, რომ $\frac{a}{b}>o$, $\frac{b}{c}>0$ ე.ი. a, b, c რიცხვებს გააჩნიათ ერთიდაიგივე ნიშნები.

123. საწყისი უტოლობა ასე გადავწეროთ: $(1+a)^{100}+(1+a)^{100}a^{100} \ge 2^{101}a^{100}$ ე.ი. $\left(\frac{1}{a}+1\right)^{100}+(1+a)^{100} \ge 2^{101}$. ავიყვანთ რა ორწევრებს მეასე ხარისხში და გავითვალისწინებთ, რომ შებრუნებული სიდიდეების ჯამი მეტია ან ტოლი 2-ის, ამასთანავე, რადგანაც $(1+a)^{100}$ მრავალწევრში კოეფიციენტების ჯამი ტოლია 2^{100}-ის, საბოლოოდ გვექნება: $\left(\frac{1}{a}+1\right)^{100}+(1+a)^{100} \ge 2\cdot 2^{100}=2^{101}$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

124. სამართლიანია უტოლობა $[a]+[b]+[a+b] \le [2a]+[2b]$, მისი გამოყენებით მივიღებთ: $[a]+[b]+[a+b]+[2a+2b] \le [2a]+[2b]+[2a+2b] \le [2^2a]+[2^2b]$ და მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით მარტივად მიიღება დასამტკიცებელი უტოლობა.

125. მტკიცება ვაწარმოოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. ცხადია $(a_1-1)(a_2-1)\ge 0$ ე.ი. $a_1+a_2\le a_1a_2+1$. ვთქვათ $a_1+a_2+a_3+\dots+a_k\le a_1a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k+k-1$. დავამტკიცოთ, რომ $a_1+a_2+a_3+\dots+a_k+a_{k+1}\le a_1a_2a_3\cdots a_{k+1}+k$, მართლაც $a_1+a_2+a_3+\dots+a_k+a_{k+1}\le a_1a_2a_3\cdots a_k+k-1+a_{k+1}=(a_1a_2a_3\cdots a_k+a_{k+1})+k-1\le a_1a_2a_3\cdots a_ka_{k+1}+1+k-1=a_1a_2a_3\cdots a_{k+1}+k$. ყოველივე აქედან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი უტოლობის სამართლიანობა.

126. წინა ამოცანის თანახმად $a_1a_2a_3\cdots a_{100}+99\ge a_1+a_2+a_3+\dots+a_{100}$ ე.ი. $a_1+a_2+a_3+\dots+a_{100}\le 99+a_1a_2a_3\cdots a_{100}=299$ ან $a_1+a_2+a_3+\dots+a_{100}=299$. თუ $a_1=200$ ხოლო დანარჩენი რიცხვები ტოლია 1-ის.

127. სამართლიანია უტოლობა: $\sqrt{2+\sqrt{3+\dots+\sqrt{n}}}<\sqrt{2^{2^0}+\sqrt{2^{2^1}+\dots+\sqrt{2^{2^{n-1}}}}}$. ვინაიდან $n\le 2^{2^{n-1}}$, გვაქვს: $\sqrt{2^{2^0}+\sqrt{2^{2^1}+\dots+\sqrt{2^{2^{n-1}}}}}=\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{1+\dots+\sqrt{1}}}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $a_k=\sqrt{1+\sqrt{1+\dots+\sqrt{1}}}$ სადაც ფესვის ნიშანი აღებულია n-ჯერ. ადგილი აქვს ტოლობას $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$ ე.ი. $a_{n+1}^2=a_n+1$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $a_n<\frac{1+\sqrt5}{2}$ და საბოლოოდ მივიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას: $\sqrt{2+\sqrt{3+\dots+\sqrt{n}}}<\sqrt2\,\frac{1+\sqrt5}{2}=\frac{\sqrt2+\sqrt{10}}{2}$.

128. $\log_4 3=\frac12\log_2 3>\frac12\log_2\sqrt8=\frac34$. $\cos^2\frac{5\pi}{28}=\frac12\left(1+\cos\frac{5\pi}{14}\right)=\frac12\left(1+\sin\frac{2\pi}{14}\right)=\frac12\left(1+\sin\frac{\pi}{7}\right)<\frac12\left(1+\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac12\left(1+\frac12\right)=\frac34$. მივიღეთ $\cos^2\frac{5\pi}{28}<\frac34<\log_4 3$.

129. სამართლიანია უტოლობები: $\arcsin\frac25<\arcsin\frac24=\frac{\pi}{6}<\frac{2\sqrt3}{6}=\frac{1}{\sqrt3}$.

130. სამართლიანია უტოლობა: $2^7>5^3$ ე.ი. $\log_2 2^7>\log_2 5^3$ საიდანაც მიიღება: $\log_2 5<\frac73$ ან $\log_2 5<2+\frac13$. ვინაიდან $1+\frac13<1+tg^2 32^0=\frac{1}{\cos^2 32^0}$ ამიტომ $2+\frac13<1+\frac{1}{\cos^2 32^0}$ და საბოლოოდ გვექნება: $\log_2 5<1+\frac{1}{\cos^2 32^0}$.

131. სამართლიანია უტოლობები: $\sqrt{\arcsin\frac34\arccos\frac45}<\sqrt{\arcsin\frac45\arccos\frac45}<\frac{\arcsin\frac45+\arccos\frac45}{2}=\frac{\pi}{4}=arctg1<arctg\frac54$ მივიღეთ $\arcsin\frac34\arccos\frac45<\left(arctg\frac54\right)^2$.

132. $\left(\arcsin\frac37\right)^4+\left(\arccos\frac47\right)^4<\left(\arcsin\frac47\right)^4+\left(\arccos\frac47\right)^4=-2\left(\arcsin\frac47\right)^2\cdot\left(\arccos\frac47\right)^2=\left(\frac{\pi^2}{4}-2\arcsin\frac47\arccos\frac47\right)^2-2\left(\arcsin\frac47\right)^2\left(\arccos\frac47\right)^2=-\pi^2\arcsin\frac47\arccos\frac47+2\left(\arcsin\frac47\right)^2\left(\arccos\frac47\right)^2=\frac{\pi^4}{16}+2\left(\sqrt{\arcsin\frac47\arccos\frac47}\right)^4-\pi^2\arcsin\frac47\arccos\frac47\le\frac{\pi^4}{16}+2\left(\frac{\arcsin\frac47+\arccos\frac47}{2}\right)^4-\arcsin\frac12\arccos\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\pi^4}{16}+2\frac{\pi^4}{4^4}-\frac{\pi^4}{24}=\frac{11\pi^4}{384}<\frac{\pi^4}{34}$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

133. $arcsin\left(sin\frac{4}{5}\pi\right) + arccos\left(cos\frac{17}{10}\pi\right) = \frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} > \frac{3}{2} = \log_5\sqrt{5^3} > \log_5\sqrt{121} = \log_5 11.$ ე.ი. $arcsin\left(sin\frac{4}{5}\pi\right) + arccos\left(cos\frac{17}{10}\pi\right) > \log_5 11.$

134. $\frac{lg2+lg3+lg4}{3} \geq \sqrt[3]{lg2lg3lg4}$, საიდანაც მიიღება, რომ $lg\sqrt[3]{24} > \sqrt[3]{lg2lg3lg4}$ ან $\sqrt[3]{24} > 10^{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{lg^2 2lg3}}$ ან $24^{\frac{1}{3}} > 10^{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{lg^2 2}\sqrt[3]{lg3}}24^{\frac{1}{3}} > 10^{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{lg^2 2}\sqrt[3]{lg3}}$, საიდანაც მიიღება უტოლობა $24^{\frac{1}{3lg2}} > 10^{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\frac{lg3}{lg2}}}$ და $24^{\frac{\sqrt[3]{4}}{lg2}} > 10^{\sqrt[3]{\frac{lg3}{lg2}}}$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

135. სამართლიანია ტოლობები: $sin\frac{27\pi}{35} = sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{7}\right) = sin\frac{\pi}{5}cos\frac{4\pi}{7} + cos\frac{\pi}{5}sin\frac{4\pi}{7} < sin\frac{\pi}{5} + sin\frac{4\pi}{7}$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

136. ადგილი აქვს ტოლობას: $\left(log^2{}_7^5 - log^2{}_5^7\right)sin^2\frac{\pi}{5} + log^2{}_5^7 + sin\frac{2\pi}{5} = \left(\log_7 5\,sin\frac{\pi}{5} + \log_5 7cos\frac{\pi}{5}\right)^2 \geq 0$ ე.ი. გამოსახულება არაუარყოფითია.

137. $arcsin\frac{2}{5} + arctg\frac{2}{5} + arcctg\frac{1}{3} + arccos\frac{1}{5} > arcsin\frac{1}{5} + arctg\frac{1}{3} + arcctg\frac{1}{3} + arccos\frac{1}{5} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$ ე.ი. ოთხი რიცხვის ჯამი მეტია π-ზე ე.ი. სამზე, მაშასადამე ცხადია ამ რიცხვებიდან რომელიმე მეტია $\frac{3}{4}$-ზე.

§15. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული უტოლობები

42. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$. მივიღებთ კვადრატულ უტოლობას: $3y^2 - 5y + 2 \geq 0$. მისი ამონახსნია $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup [1; +\infty)$. ე.ი. $\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^1$ საიდანაც მიიღება, რომ $x \geq 1$. ასევე გვაქვს $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \geq \left(\frac{2}{3}\right)^0$, ე.ი. $x \leq 0$.

47. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\sqrt{6^x} = y$. მივიღებთ კვადრატულ უტოლობას: $y^2 - \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)y + \sqrt{6} \geq 0$, რომლის ამონახსნია $y \in \left(-\infty; \sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{3}; +\infty\right)$. ე.ი. $\sqrt{6^x} \leq \sqrt{2}$ საიდანაც მიიღება, რომ $x \leq \log_6 2$. ასევე გვაქვს: $\sqrt{6^x} \geq \sqrt{3}$ ე.ი. $x \geq \log_6 3$. ყოველივე აქედან მიიღება, რომ $x \in (-\infty; \log_6 2] \cup [\log_6 3; +\infty)$.

52. საწყისი უტოლობა ასე გადავწეროთ: $3^{x+3}\left[(x+3)^2 - 9\right] > 0$ ე.ი. $(x+3)^2 - 9 > 0$ საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$.

54. საწყისი უტოლობა ასე გადაეწეროთ: $2^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2} + 4\right) \leq \left(\frac{1}{3} + 1\right)3^{\sqrt{x}}$ ან $2^{\sqrt{x}}\frac{9}{2} \leq \frac{4}{3}3^{\sqrt{x}}$ და საბოლოოდ მიიღება $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{x}} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3$ ან $\sqrt{x} \geq 3$ და $x \geq 9$ ე.ი. უტოლობის ამონახსნია $[9; +\infty)$.

63. საწყისი უტოლობა ასე გადაეწეროთ $2^{\frac{x}{|x+1|}} - 5\left(\sqrt{2}\right)^{2+\frac{x}{|x+1|}} + 16 \geq 0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{x+1}} = y$. მივიღებთ კვადრატულ უტოლობას, რომელიც მარტივად ამოიხსნება.

65. საწყისი უტოლობა ასე გადავწეროთ: $\sqrt{3^x+1}+\sqrt{3^x+3}<\sqrt{2\cdot 3^x+5}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $3^x+1=y$. უტოლობა ასე გადაიწერება: $\sqrt{y}+\sqrt{y+2}<\sqrt{2y+3}$. ავიყვანოთ ორივე მხარე კვადრატში, მივიღებთ: $y+y+2+2\sqrt{y(y+2)}<2y+3$ ან $2\sqrt{y(y+2)}<1$. მიღებული უტოლობის კვადრატში აყვანა მოგვცემს ისეე კვადრატულ უტოლობას, რომელიც მარტივად ამოიხსნება.

70. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $2^x=y$ რის შემდეგაც საწყისი უტოლობა ასე გადაიწერება: $\frac{4y^2+7y+1}{3y^2+2y-5}\le 1$ ან $\frac{y^2+5y+6}{3y^2+2y-5}\le 0$ აქედან $\frac{(y+2)(y+3)}{(y-1)\left(y+\frac{5}{2}\right)}\le 0$. საბოლოოდ გვექნება: $0<2^x<1$ და $x\in(-\infty;0)$.

80. დავადგინოთ მრიცხველის ნიშანი. დავუშვათ $\log_{2.1}\left[\frac{5}{3}\left(\log_7 9-1\right)\right]<0$, მაშინ $\frac{5}{3}\left(\log_7 9-1\right)<1$ ე.ი $\log_7 9<\frac{8}{5}$, საიდანაც მიიღება $9^5<7^8$, ეს უტოლობა ჭეშმარიტია და მაშასადამე ჩვენი დაშვება სამართლიანია. ამის შემდეგ უტოლობა ასე გადაიწერება: $2x-1>0$, ვინაიდან $x^2+1>0$ სამართლიანია ნებისმიერი x-თვის. საბოლოოდ გვექნება: $x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

83. მარტივად შეგვიძლია დავადგინოთ, რომ $\log_3\left[\sqrt[10]{16}-\sqrt[5]{8}\right]<0$. უტოლობა ასე გადაიწერება: $\sqrt{x^2-7x+6}\,\sqrt[3]{x+1}\le 0$. ფესქვეშა გამოსახულება არაუარყოფითი უნდა იყოს. ცხადია $x\in(-\infty;1]\cup[6;+\infty)$. საბოლოოდ მივიღებთ: $\sqrt[3]{x+1}\le 0$ ე.ი. $x\le -1$ და ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე: $(-\infty;-1]\cup\{1;6\}$.

85. სამართლიანია უტოლობა: $\log_5 4>\log_4 3$ ან $\frac{\log_5 4}{\log_4 3}>1$. მიღებული უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $lg\log_5 4-lg\log_4 3>0$ და საწყისი უტოლობა ასე გადაიწერება: $\sqrt{2x^3+3x-5}>0$ ე.ი. მისი ამონახსნია $x\in(1;+\infty)$.

86. როგორც ცნობილია დადებითი შებრუნებული რიცხვების ჯამი არაა ორზე ნაკლები. ვინაიდან $\log_5 7\ne 1$, ამიტომ წილადის მრიცხველი დადებითია და უტოლობის ამონახსნს წარმოადგენს შემდეგი სისტემის ამონახსნი: $\begin{cases}x^2+5x+6>0\\1-x^2>0\end{cases}$. საბოლოოდ, ამონახსნს აქვს სახე $x\in(-1;+1)$.

87. როგორც ცნობილია უარყოფით შებრუნებულ რიცხვთა ჯამი არ აღემატება -2-ს. ე.ი. მოცემული წილადის მრიცხველი უარყოფითია და უტოლობა ასე გადაიწერება: $8x^3+27+54x+36x^2<0$ ან $(2x+3)^3<0$. მისი ამონახსნია $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$.

88. განვიხილოთ კვადრატული სამწევრი: $y=x^2-3x+2$ ის უარყოფითია $(1;2)$ შუალედში. ვინაიდან $1<\log_3 5<2$ ამიტომ წილადის მრიცხველი უარყოფითია და უტოლობას ექნება სახე: $8x^3+125\le 0$. მისი ამონახსნია $(-\infty;-2.5]$.

89. როგორც ცნობილია $\log_4 3<\log_5 4$. საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\left(\log_4 3\right)^2<\left(\log_5 4\right)^2$. რადგანაც $\log_4 3<1$, ამიტომ მივიღებთ, რომ $\left(\log_4 3\right)^3<\left(\log_5 4\right)^2$, რაც იმას ნიშნავს, რომ წილადის მნიშვნელი უნდა იყოს უარყოფითი. უტოლობა ასე გადაიწერება: $2x^2-9<0$ და საბოლოოდ ამონახსნს აქვს სახე $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

90. განვიხილავთ რა ხარისხის ფუძეს და გავამარტივებთ მივიღებთ სიდიდეს, რომელიც ერთზე ნაკლებია. ტოლობა ასე გადაიწერება: $\frac{3-x}{x+1}\ge 0$. მისი ამონახსნია $(-1;3]$.

91. საწყისი უტოლობა ასე გადავწეროთ: $-\log_5(5^x-1)\log_5 25(5^x-1)+35<0$ ან $-\log_5(5^x-1)\,[2+\log_5(5^x-1)]+35<0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\log_5(5^x-1)=y$. მივიღებთ კვადრატულ უტოლობას: $-2y-y^2+35<0$, ან $y^2+2y-35>0$, მისი ამონახსნია $(-\infty;-7)\cup(5;+\infty)$. საბოლოოდ გვექნება: $\log_5(5^x-1)<-7$ ან $\log_5(5^x-1)>5$ და ამ უტოლობების ამონახსნია $\left(0;\log_5(1+5^{-7})\right)\cup\left(\log_5(1+5^5);+\infty\right)$.

98. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\log_3(x+3)=y$, რის შემდეგაც საწყისი უტოლობა ასე გადაიწერება: $|y|<|y-3|$ და ამ უტოლობის ამოხსნა მარტივია.

99. განვიხილოთ ლოგარითმის ფუძე. ვაჩვენოთ, რომ იგი ერთზე მეტია, მართლაც $\log_2\sqrt{3}+\log_3 2=\frac{1}{2}\log_2 3+\log_3 2=\frac{\log_2 3+2\log_3 2}{2}=\frac{\log_2 3+\log_3 2+\log_3 2}{2}=\frac{\log_2 3+\log_3 2}{2}+\frac{1}{2}\log_3 2$. ვინაიდან შებრუნებულ დადებით რიცხვთა ჯამი მეტია 2-ზე, ხოლო $\log_3 2$ დადებითია, ამიტომ მივიღებთ, რომ $\frac{\log_2 3+\log_3 2}{2}+\frac{1}{2}\log_3 2>1$. უტოლობა ასე გადაიწერება $\frac{3x-4}{2x+1}\geq 1$ ან $\frac{x-5}{2x+1}\geq 0$ და მისი ამონახსნია $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup[5;+\infty)$.

100. ვინაიდან $21-4\sqrt{5}=\left(2\sqrt{5}-1\right)^2$, ამიტომ უტოლობა ასე გადაიწერება: $\left(2\sqrt{5}\right)^{\frac{-2^x-1}{4^x+1}}\geq\left(2\sqrt{5}\right)^{-2}$ საიდანაც მიიღება უტოლობა: $\frac{-2^x-1}{4^x+1}\geq-2$, შემოვიღებთ რა აღნიშვნას $2^x=y$ უტოლობის ამოხსნა მარტივია.

102. გავითვალისწინებთ რა ტოლობას $\left(7-\sqrt{2}\right)^{-1}=\frac{7+\sqrt{2}}{47}$ და $\frac{7+\sqrt{2}}{47}<1$, საწყისი უტოლობა ასე გადაიწერება: $-\frac{2^x+1}{2^x-1}\leq\frac{2^x}{2^{x+1}+1}$ და $2^x=y$ აღნიშვნის შემოტანის შემდეგ მიიღება უტოლობა, რომელიც მარტივად ამოიხსნება.

109. უტოლობის მარჯვენა მხარის გარდაქმნის შემდეგ მიიღება: $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-5}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}$ და რადგანაც $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}>\frac{1+1+1}{2}>1$ ამიტომ $x^2+x-1\leq-1$ ან $x^2+x\leq 0$. მისი ამონახსნია $[-1;0]$.

110. ვინაიდან $\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}=\frac{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}=\left(\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{3}\right)^{-1}$ და $\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{3}<1$ ამიტომ გვექნება, $\frac{x-1}{x+1}\leq-1$ ან $\frac{2x}{x+1}\leq 0$ და საბოლოოდ ამონახსნია $x\in(-1;0]$.

112. უტოლობის ამოხსნა გამარტივდება თუ ცალცალკე განვიხილავთ პარამეტრის იმ მნიშვნელობებს, როცა $a^2+3a-4>1$ და $0<a^2+3a-4<1$. პარამეტრის აღნიშნული მნიშვნელობებისათვის უტოლობა ასე გადაიწერება: $\frac{3x-1}{x+4}>0$ ან $\frac{3x-1}{x+4}<0$, რომელთა ამოხსნაც მარტივია.

122. საწყისი უტოლობა ასე გადავწეროთ $\log_{x^2+1}(2x+1)(4x^2+2x+1)\log_{2x-1}(x^2+1)<2$ ან $\left[\log_{x^2+1}(2x-1)+\log_{x^2+1}(4x^2+2x+1)\right]\log_{2x-1}(x^2+1)<2$ საიდანაც მიიღება: $1+\log_{2x-1}(x^2+1)\log_{x^2+1}(4x^2+2x+1)<2$. გვაქვს $\frac{\log_{x^2+1}(4x^2+2x+1)}{\log_{x^2+1}(2x-1)}<1$ ან $\log_{2x-1}(4x^2+2x+1)<1$. განვიხილავთ რა ცალ-ცალკე $2x-1>1$ და $0<2x-1<1$ შემთხვევებს, საწყისი უტოლობა მიიღებს სახეს: $4x^2+2x+1<2x-1$ ან $4x^2+2x+1>2x-1$. ორივე ეს უტოლობა მარტივად ამოიხსნება.

127. ვიპოვოთ უტოლობაში უცნობის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე. ცხადია იგი წარმოადგენს: $\begin{cases} x^2 - 2x - 5 > 0 \\ 2x + 8 - x^2 > 0 \\ x^2 - 2x + 3 \neq 0 \end{cases}$ უტოლობათა სისტემის ამონახსნს, რომელიც შეადგენს შუალედს: $(-2; 1 - \sqrt{6}) \cup (1 + \sqrt{6}; 4)$. უტოლობაში პირველი თანამამრავლი არაა უარყოფითი, ამიტომ დავამტკიცებთ, რა მეორე თანამამრავლისათვის პირობა: $\log_3(x^2 - 2x + 3) - \log_4(x^2 - 2x - 5) > 0$ მივიღებთ, რომ უტოლობის ამონახსნია ზემოთ მოყვანილი უცნობის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე. მარტივი გამოთვლებით დავრწმუნდებით, რომ აღნიშნულ სიმრავლეზე $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობაა 2, ხოლო $g(x) = x^2 - 2x - 5$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა აღნიშნულ შუალედზე იქნება 3. ვინაიდან $\log_3 4 > \log_4 3$ ამიტომ სამართლიანია უტოლობა: $\log_3(x^2 - 2x + 3)^2 - \log_4(x^2 - 2x - 5 > 0)$ ნებისმიერი x-თვის შუალედიდან $(-2; 1 - \sqrt{6}) \cup (1 + \sqrt{6}; 4)$. ყოველივე აქედან გამომდინარეობს, რომ მოცემული უტოლობის ამონახსნია უცნობის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე.

130. №127 ამოცანის ანალოგიურად ჯერ უნდა ვიპოვოთ $f(x) = 4x - x^2 + 13$ ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა $\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$ შუალედში და $g(x) = x^2 - 4x + 11$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა იმავე შუალედში. ამის შემდეგ გავითვალისწინებთ, რა უტოლობებს: $\log_{14} \frac{59}{4} > 1$ და $\log_{12} \frac{37}{4} < 1$, დავადგენთ, რომ $\log_{14} \frac{59}{4} - \log_{12} \frac{37}{4} > 0$ რაც მოგვცემს შემდეგი უტოლობის სამართლიანობას: $\log_{14}(4x - x^2 + 13) - \log_{12}(x^2 - 4x + 11) > 0$

§16. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები, ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამოთვლა, ტრიგონომეტრიული განტოლებები და სისტემები

15. 1). უნდა გამოვთვალოთ $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$ კუთხის სინუსი. რაც შეეხება α კუთხეს ის მოთავსებულია პირველ მეოთხედში, რადგანაც $\frac{1}{3} > 0$ და ამ კუთხის კოსინუსი ტოლია $\frac{1}{3}$-ის. ამოცანა შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ: $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\alpha = ?$ როგორც ცნობილია $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ და საბოლოოდ $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

15. 2). ამოცანა შეიძლება ასე ჩავწეროთ: $\alpha = \operatorname{arctg}2 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{tg}\alpha = 2, \sin\alpha = ?$ ცხადია, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$, ვინაიდან $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + ctg^2\alpha$, ამიტომ გვექნება: $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, ე.ი. $\sin^2\alpha = \frac{4}{5}$ და $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

16. 1). ამოცანა შეიძლება ასე ჩავწეროთ: $\alpha = \operatorname{arct}g3 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), tg\alpha = 3, \sin 2\alpha = ?$ როგორც ცნობილია ადგილი აქვს ტოლობას: $\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{2\cdot 3}{1+9} = \frac{3}{5}$ ე.ი. $\sin(2\operatorname{arctg}3) = \frac{3}{5}$.

16. 5). ამოცანა შეიძლება ასე ჩავწეროთ: $\alpha = \operatorname{arctg}3 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{tg}\alpha = 3, \beta = \operatorname{arcctg}\frac{1}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{2}$, $\sin(2\alpha + 2\beta) = ?$ სამართლიანია ტოლობები: $\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta =$

$$= \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} \cdot \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} \cdot \frac{2tg\beta}{1+tg^2\beta} = \frac{2\cdot 3}{1+9} \cdot \frac{1-4}{1+4} + \frac{1-9}{1+9} \cdot \frac{2\cdot 2}{1+4} = -1.$$

16. 7). ამოცანა შეიძლება ასე ჩავწეროთ: $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}, \cos^2\frac{\alpha}{2} = ?$ სამართლიანია ტოლობები: $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\alpha}{2}, \cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$, ე.ი. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ და $cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{5+2\sqrt{5}}{10}$, საბოლოოდ გვაქვს $\cos^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \frac{5+2\sqrt{5}}{10}$.

17. 1). ვინაიდან 95^0-იანი კუთხე მოთავსებულია მეორე მეოთხედში, ხოლო კუთხე $arcsin\alpha$ მოთავსებულია $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში, ამიტომ პირველი მეოთხედიდან შევარჩიოთ ისეთი კუთხე, რომ $sin95^0 = sin\alpha$. ცხადია ასეთი კუთხეა 85^0 და პირველი რიცხვი ასე ჩავწეროთ:

$\arcsin 85^0$. ანალოგიური მსჯელობით აღნიშნული კუთხეები შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ: $\arcsin(sin80^0), \arcsin(\sin 40^0), \arcsin(\sin 20^0)$. რადგანაც $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$, როცა $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ ამიტომ აღნიშნული რიცხვებია $85^0, 80^0, 40^0, 20^0$ ეს რიცხვები ზრდადობის მიხედვით ასე ჩაიწერება IV, III, II, I.

18. 1). გამოვთვალოთ ჯერ საძებნი კუთხის ტანგენსი: $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}$. რადგანაც $180^0 < \alpha < 270^0, 90^0 < \beta < 180^0$, ამიტომ $\alpha+\beta$ მოთავსებულია შუალედში $270^0 < \alpha+\beta < 450^0$. კუთხე, რომელიც მოთავსებულია ამ შუალედში და რომლისთვისაც $tg(\alpha+\beta) = \sqrt{3}$ ტოლია 420^0-ის.

18. 5). გამოვთვალოთ ჯერ საძებნი კუთხის ტანგენსი $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta} = \frac{-3+1}{1+3} = -\frac{1}{2}$. ვინაიდან $90^0 < \alpha < 180^0$ და $-180^0 < -\beta < -90^0$, ამ უტოლობების შეკრება გვაძლევს $-90^0 < \alpha-\beta < 90^0$. კუთხე, რომლისთვისაც $tg(\alpha-\beta) = -\frac{1}{2}$ ტოლია $-arctg\frac{1}{2}$.

20. 1). საწყისი გამოსახულება ასე გარდავქმნათ: $\frac{ctg(270^0-2\alpha)+tg(270^0+\alpha)}{sin^2(90^0-4\alpha)} = \frac{tg2\alpha-ctg2\alpha}{cos^2 4\alpha} =$
$\frac{\frac{sin2\alpha}{cos2\alpha}-\frac{cos2\alpha}{sin2\alpha}}{cos^2 4\alpha} = \frac{\frac{sin^2 2\alpha-cos^2 2\alpha}{cos2\alpha sin2\alpha}}{cos^2 4\alpha} = -\frac{cos^2 2\alpha-sin^2 2\alpha}{sin2\alpha cos2\alpha cos^2 4\alpha} = -\frac{1}{sin2\alpha cos2\alpha cos4\alpha} = \frac{-4}{2sin4\alpha co4\alpha} = -\frac{4}{sin8\alpha}$.
ფუნქციის ძირითადი პერიოდია $\frac{\pi}{4}$. პერიოდული ფუნქციის განმარტების თანახმად ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას $f(x+T) = f(x)$ ნებისმიერი x-თვის, სადაც T პერიოდია. ვთქვათ $y = sin8x$ ფუნქციის პერიოდია T, მაშინ ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას $sin8(\alpha+T) = sin8\alpha$, ან $sin(8\alpha+8T) - sin8\alpha = 0$ და $2sin4Tcos(8\alpha+4T) = 0$. ვინაიდან ეს ტოლობა სამართლიანი უნდა იყოს ნებისმიერი α-თვის, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ $sin4T = 0$ და აქედან მიიღება, რომ უმცირესი დადებითი პერიოდი T გამოითვლება თანაფარდობიდან $4T = \pi$ და $T = \frac{\pi}{4}$.

20. 7). სამართლიანია ტოლობა: $y = asinx + bsinx = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}sinx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}cosx\right)\sqrt{a^2+b^2} =$ $= \sqrt{a^2+b^2}(sin\alpha sinx + cos\alpha cosx) = \sqrt{a^2+b^2}sin(\alpha+x)$, სადაც $\alpha = arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. ცხადია თუ $y = f(x)$ და $y = f(x+c)$ ფუნქციებიდან რომელიმე პერიოდულია რაიმე პერიოდით, მაშინ პერიოდული იქნება მეორე ფუნქციაც იმავე პერიოდით. ვინაიდან $y = sinx$ ფუნქციის პერიოდია 2π, $y = sin(x+\alpha)$ ფუნქციის პერიოდიც იქნება 2π.

20. 8). საწყისი ფუნქციის მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ: $y = \frac{2sin7xcosx+2sin8xcosx}{2cos7xcosx+2cos8xcosx} =$ $\frac{sin7x+sin8x}{cos7x+cos8x} = \frac{2sin\frac{15x}{2}cos\frac{x}{2}}{2cos\frac{15x}{2}cos\frac{x}{2}} = tg\,\frac{15x}{2}$, ე.ი. $y = tg\frac{15x}{2}$. შევნიშნოთ, რომ თუ $y = f(x)$ ფუნქციის პერიოდია T მაშინ $y = f(kx)$ ფუნქციის პერიოდია $\frac{T}{k}$, ჩვენს შემთხვევაში $y = tgx$ ფუნქციის პერიოდია π, ე.ი. $y = tg\frac{15x}{2}$ ფუნქციის პერიოდია $\frac{2\pi}{15}$.

24. 5). სამართლიანია ტოლობები: $3 - 4cos\alpha + cos2\alpha = 4 - 1 - 4cos\alpha + cos2\alpha = 4(1-cos\alpha) - (1-cos2\alpha) = 8sin^2\frac{\alpha}{2} - 2sin^2\alpha = 8sin^2\frac{\alpha}{2} - 8sin^2\frac{\alpha}{2}cos^2\frac{\alpha}{2} = 8sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1-cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = 8sin^4\frac{\alpha}{2}$.

25. 2). საწყისი გამოსახულება შეიძლება ასე ჩავწეროთ: $\frac{sin6\alpha}{\left(sin^2\frac{3\alpha}{2}-cos^2\frac{3\alpha}{2}\right)\left(sin^2\frac{3\alpha}{2}+cos^2\frac{3\alpha}{2}\right)}-2=\frac{2sin3\alpha cos3\alpha}{-cos3\alpha}-2=-2(1+sin3\alpha)=-2\left(cos\frac{3\alpha}{2}+sin\frac{3\alpha}{2}\right)=-4sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\alpha\right).$

26. 2). როგორც ცნობილია $sinx=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ და $cosx=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ და საწყისი განტოლება ასე გადაიწერება: $\frac{6tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{2\left(1-tg^2\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\frac{x}{2}}=3.$ შემოვიღოთ აღნიშვნა: $tg\frac{x}{2}=y$, მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას $5y^2-6y+1=0$. რომელიც მარტივად ამოიხსნება.

27. 5). საწყისი განტოლების ორივე მხარე გარდავქმნათ ჯამად, მივიღებთ: $cos2x-cos32x=cos2x-cos8x$ ან $cos32x-cos8x=0$. სხვაობა გარდავქმნათ ნამრავლად $2sin20xsin12x=0$. ე.ი. $sin20x=0, sin12x=0$. ეს განტოლებები კი მარტივად ამოიხსნება.

30. 1). საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ: $4cos^3x-3cosx-cos^3x=2sinxcosx$ ან $cosx(3cos^2x-2sinx-3)=0$, ე.ი. $cosx(3sin^2x+2sinx)=0$ და საბოლოოდ გვექნება: $cosx=0$, $sinx=0$, $sinx=-\frac{2}{3}$. მიღებული განტოლებები მარტივად ამოიხსნება.

30. 4). გამოვიყენებთ რა სამმაგი და ორმაგი არგუმენტების ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ფორმულებს, მივიღებთ: $4sin^33x-4sin^23x-3sin3x=0$ და ამის შემდეგ ამოხსნა მარტივია.

31. 4). განტოლება ასე გადავწეროთ: $2cos^22xcos2xcos6x+2sin^22xsin2xsin6x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, ან $(1+4xcos)cos2xcos6x+(1-cos4x)sin2xsin6x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ და საბოლოოდ გვექნება: $2cos^34x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. ეს განტოლება კი მარტივად ამოხსნება.

31. 6). საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ: $1+ctg^4x=cos^32x$. ვინაიდან განტოლების მარცხენა მხარე არაა 1-ზე ნაკლები, ხოლო მარჯვენა – 1-ზე მეტი, შესაძლებელია შემთხვევა, როცა ორივე მხარე 1-ის ტოლია, მაგრამ მაშინ როდესაც კოსინუსი 1-ის ტოლია, კოტანგენსი არ არსებობს და არც ეს ვარიანტია შესაძლებელი, მაშასადამე განტოლებას ამონახსნი არა აქვს.

34. სამართლიანია ტოლობები: $cos^28^0+cos^23+cos^21^0-2cos8^0cos3^0cos11^0=\frac{1}{2}(1+cos16^0+1+cos6^0)+cos^211^0-2cos8^0cos3^0cos11^0=1+cos11^0cos5^0+cos^211^0-2cos8^0cos3^0cos11^0=1+cos11^0(cos5^0+cos11^0)-2cos8^0cos3^0cos11^0=1+2cos8^0cos11^0cos3^0-2cos8^0cos11^0cos3^0=1.$

39. მოცემული კუთხეები მოთავსებულია შუალედში $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. ცხადია მათი ჯამი არ აღემატება $\frac{3\pi}{2}$. გამოვთვალოთ მოცემული კუთხის ტანგენსი. სამართლიანია ტოლობები $tg\left[(arctg3+arctg5)+arctg\frac{4}{7}\right]=\frac{tg(arctg3+arctg5)+tg\left(arctg\frac{4}{7}\right)}{1-tg(arctg3+arctg5)tg\left(arctg\frac{4}{7}\right)}=\frac{\frac{3+5}{1-3\cdot5}+\frac{4}{7}}{1-\frac{3+5}{1-3\cdot5}\frac{4}{7}}=0.$
როგორც ვხედავთ მოცემული კუთხის ტანგენსი 0-ის ტოლია, შესაბამისი კუთხე კი 180^0-ის ტოლია, ვინაიდან როგორც აღვნიშნეთ ის მოთავსებულია $(0;270^0)$ შუალედში.

41. $f(x) = acos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + bcos^2\alpha$. სამართლიანია ტოლობები: $f(\alpha) = \frac{1}{2}\left[a\left(1 + cos(90^0 - 2\alpha) + b(1 + cos2\alpha)\right)\right] = \frac{1}{2}[a + b + asin2\alpha + bcos2\alpha] = \frac{a+b+asin2\alpha+bcos2\alpha}{2} = \frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}sin(2\alpha+\beta)}{2}$ სადაც $\beta = arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. მიღებული ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობაა $\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

42. სამართლიანია ტოლობები: $f(x) = acos^4x + bsin^4x = acos^4x + b(1 - cos^2x)^2 = (a + b)cos^4x + -2bcos^2x + b$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $cos^2x = z$, მივიღებთ $f(x) = (a + b)z^2 - 2bz + b$. ამ კვადრატული სამწევრის მინიმუმის წერტილია $z_0 = \frac{b}{a+b}$, $o < \frac{b}{a+b} < b$ და $f(x)$ ფუნქციის მინიმუმია $f(z_0) = \frac{ab}{a+b}$.

43. ა) საზოგადოდ არა. მართლაც, თუ $\alpha = 60^0$ და $n = 1$, მივიღებთ, რომ $sin\alpha$ ირაციონალურია, ხოლო $sin\frac{\alpha}{2}$ რაციონალური. ბ) მოცემულობის თანახმად $sin\alpha$ ირაციონალურია. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით მარტივად დავამტკიცებთ, რომ $sin(2n + 1)\alpha$ წარმოადგენს $sin\alpha$-ს ხარისხების ჯამს, ე.ი. $sin\alpha$ წარმოადგენს $sin\frac{\alpha}{2n+1}$ სიდიდეების ხარისხების ჯამს ეს კი შეუძლებელია იმის გამო, რომ $sin\alpha$ ირაციონალურია, მივიღეთ, რომ $sin\frac{\alpha}{2n+1}$, ირაციონალურია ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის.

44. სამართლიანია ტოლობები: $cos5 \cdot 36^0 = -1$ ე.ი. $16z^5 - 20z^2 + 5z + 1 = 0$, სადაც $z = cos36^0$ (ჩვენ გამოვიყენეთ $cos5\alpha = 16cos^5\alpha - 20cos^3\alpha + 5cos\alpha + 1$ ფორმულა). ტოლობიდან $sin144^0 = sin36^0$ გამომდინარეობს, რომ $2sin72^0cos72^0 = sin36^0$ და ე.ი. $4cos36^0cos2 \cdot 36^0 = 1$ ან $4z(2z^2 - 1) = 1$ და საბოლოოდ მივიღებთ $\begin{cases} 16z^5 - 20z^3 + 5z + 1 = 0 \\ 8z^3 - 4z - 1 = 0 \end{cases}$. მოცემულ სისტემაში შემავალ განტოლებებს გააჩნია საერთო ამონახსნი. მეორე განტოლება გავამრავლოთ $2z^2$-ზე და მიღებული გამოვაკლოთ პირველ განტოლებას, გვექნება $-12z^3 + 2z^2 + 5z + 1 = 0$ და შეგვიძლია დავწეროთ. $\begin{cases} -12z^3 + 2z^2 + 5z + 1 = 0 \\ 8z^3 - 4z - 1 = 0 \end{cases}$. პირველი განტოლება გავამრავლოთ 2-ზე, ხოლო მეორე განტოლება გავამრავლოთ 3-ზე და ისინი შევკრიბოთ, გვექნება $4z^2 - 2z - 1 = 0$. მიღებული განტოლების ამონახსნია $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$ და ვინაიდან $cos36^0 > 0$ ამიტომ საბოლოოდ გვექნება $cos36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

45. სამართლიანია ტოლობები: $\begin{cases} cos36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \\ cos60^0 = \frac{1}{2} \end{cases}$ საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$\begin{cases} 4cos^3 12^0 - 3cos12^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \\ 16cos^5 12^0 - 20cos^3 12^0 + 5cos12^0 = \frac{1}{2} \end{cases}$ შემოვიღოთ აღნიშვნა $cos12^0 = z$, მივიღებთ

განტოლებათა სისტემას: $\begin{cases} 4z^3 - 3z = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \\ 16z^5 - 20z^3 + 5z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4z^5 - 3z^3 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}z^2 \\ 16z^5 - 20z^3 + 5z = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 16z^5 - 12z^3 = (1 + \sqrt{5})z^2 \\ 16z^5 - 20z^3 + 5z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 8z^3 - 5z = (1 + \sqrt{5})z^2 - \frac{1}{2}$

$\begin{cases} 8z^3 - 5z = (1 + \sqrt{5})z^2 - \frac{1}{2} \\ 8z^3 - 6z = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow (1 + \sqrt{5})z^2 - \frac{1}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = z$. განტოლების დადებითი ფესვია $cos12^0$ და $cos12^0 = \frac{1+\sqrt{15+6\sqrt{5}}}{2(1+\sqrt{5})}$.

46. ამოცანა დავსვათ ასეთი ფორმით. არსებობს თუ არა ისეთი მართკუთხა სამკუთხედების უსასრულო რაოდენობა, რომელთა გვერდები გამოისახება რაციონალური რიცხვებით. ცხადია ასეთი სამკუთხედების კათეტები გამოისახება ტოლობებით $a = \frac{2mn}{m^2+n^2}$, $b = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$. შევნიშნოთ, რომ $a^2+b^2=1$, $sina = \frac{2mn}{m^2+n^2}$. დანარჩენი ფუნქციების მნიშვნელობებიც რაციონალურია.

47. ა) დავუშვათ, რომ $tg1^0$ რაციონალურია, მაშინ რაციონალური იქნება $tg2^0 = \frac{2tg1^0}{1+tg^21}$. რაციონალური იქნება ასევე $tg3^0 = \frac{tg2^0+tg1^0}{1-tg2^0tg1^0}$ და ა.შ. რაციონალური იქნება $tg30^0$-იც, მაგრამ $tg30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. მივიღეთ წინააღმდეგობა ე.ი. $tg1^0$ ირაციონალურია. ბ) $sin3a = \frac{1}{2}$ განტოლების ამონახსნია $a = \frac{\pi}{18}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $sina = y$. ვინაიდან $sin3a = 3sina - 4sin^3a$, ამიტომ გვექნება: $3y - 4y^3 = \frac{1}{2}$ ან $8y^3 - 6y + 1 = 0$. როგორც აღვნიშნეთ ამ განტოლების ამონახსნია $sin\frac{\pi}{18}$. მაგრამ მეორეს მხრივ თუ მოცემულ განტოლებას ექნებოდა რაციონალური ფესვი ის მოთავსებული უნდა ყოფილიყო შემდეგ რიცხვებს შორის $\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$. შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ ეს რიცხვები არაა მოცემული კუბური განტოლების ფესვები. საბოლოოდ დავასკვნით, რომ $sin\frac{\pi}{18}$ ირაციონალური რიცხვია. გ) სამართლიანია ტოლობა $\frac{4tga-4tg^3a}{1-6tg^2a+tg^4a} = tg4a$ თუ $a = \frac{\pi}{16}$, მაშინ მივიღებთ: $\frac{4tg\frac{\pi}{16}-4tg^3\frac{\pi}{16}}{1-6tg^2\frac{\pi}{16}+tg^4\frac{\pi}{16}} = 1$ ე.ი. $tg\frac{\pi}{16}$ არის $z^4 - 6z^2 + 4z^3 - 4z + 1 = 0$ განტოლების ფესვი. რადგანაც მოცემული მეოთხე ხარისხის განტოლებას არ გააჩნია რაციონალური ფესვი, ამიტომ $tg\frac{\pi}{16}$ ირაციონალური რიცხვია.

49. დავუშვათ საწინააღმდეგო ე.ი. $cosa + cos\beta + cos\gamma = 1$. ვინაიდან a, β, γ სამკუთხედის კუთხეებია, კოსინუსების თეორემის გამოყენება გვაძლევს: $cosa + cos\beta + cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = 1$. მიღებული ტოლობის გარდაქმნით მივიღებთ: $(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) = 0$. ცხადია ეს ტოლობა შეუძლებელია რადგანაც არცერთი თანამამრავლი არ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი. სამკუთხედის ორი გვერდის ჯამი არ შეიძლება იყოს მესამე გვერდის ტოლი.

50. ტოლობიდან $a + \beta + \gamma = \pi$ გამომდინარეობს, რომ $\sin(a + \beta) = sin\gamma$ ე.ი. $sinacos\beta + cosasin\beta = sin\gamma$, $sin\gamma cosa + cos\gamma sina = sin\beta$, $sinacos\beta + cosasin\beta = sina$. მიღებული სამი ტოლობის შეკრება გვაძლევს: $sina(1 - cos\beta - cos\gamma) + sin\beta(1 - cosa - cos\gamma) + sin\gamma(1 - cosa - cos\beta) = 0$ და ამ ტოლობიდან მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა.

51. განვიხილოთ ფუნქცია $f(a) = 8cos^2a - 2sin2a - 2tg2a$, ის კლებადია $[0; \frac{\pi}{12}]$ შუალედში. ფუნქციის მნიშვნელობა შუალედის ბოლო $\frac{\pi}{12}$ წერტილში $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3$. რადგანაც $f(a) \geq f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3$ ამიტომ საბოლოოდ გვექნება $8cos^2a - 2sin2a - 2tg2a \geq 3$.

52. ამოცანის პირობით $a + \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$, საიდანაც მიიღება ტოლობა $\frac{tga+tg\beta}{1-tgatg\beta} = \frac{1}{tg\gamma}$ ან რაც იგივეა $tgatg\beta + tg\beta tg\gamma + tgatg\gamma = 1$. როგორც ცნობილია სამართლიანია შემდეგი უტოლობა: $|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$. თუ გამოვიყენებთ ამ უტოლობას, როცა $a_1 = b_3 = tga$, $a_2 = b_1 = tg\beta$, $a_3 = b_2 = tg\gamma, b_1 = tg\gamma$, მივიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას.

53. სამართლიანია უტოლობები: $tga+\frac{1}{tga}+cosa+\frac{1}{cosa}\geq 2, tga+\frac{1}{tga}+sina+\frac{1}{sina}\geq 2$ ან რაც იგივეა $\left(tga+\frac{1}{cosa}\right)+\left(\frac{1}{tga}+cosa\right)\geq 2, (tga+sina)+\left(\frac{1}{tga}+\frac{1}{sina}\right)\geq 2$ და საბოლოოდ გვექნება $(1+sina)(ctga+seca)\geq 4$, $(1+cosa)(tga+cosseca)\geq 4$. ამ უტოლობების გადამრავლებით მივიღებთ: $(1+sina)(1+cosa)(1+secatga+ctgacoseca+secacoseca)\geq 16$ და ამ უკანასკნელის გამარტივებით მიიღება დასამტკიცებელი უტოლობა.

54. ა) როგორც ვიცით სამართლიანია უტოლობა $\frac{2a}{\pi}<sina<\alpha$. მოცემული უტოლობის მარცხენა მხარის გარდაქმნით მივიღებთ: $sin\frac{\alpha}{2}+sin\frac{\alpha}{4}+\cdots+sin\frac{\alpha}{2^n}<\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{4}+\cdots+\frac{\alpha}{2^n}=$ $\alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)=\alpha\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\alpha<<\frac{\pi}{2}sina$ და საბოლოოდ გვექნება: $sin\frac{\alpha}{2}+sin\frac{\alpha}{4}+\cdots+sin\frac{\alpha}{2^n}<\frac{\pi}{2}sina$.

ბ) დავამტკიცოთ, რომ $tg1^0+tg3^0>2tg2^0$. მართლაც $tg3^0-tg2^0=tg1^0(1+tg2^0tg3^0)>tg1^0(1+tg2^0tg1^0)=tg2^0-tg1^0$. ანალოგიურად დამტკიცდება უტოლობებიც $tg5^0+tg7^0<2tg6^0$, $tg9+tg11^0<2tg10^0$, ამასთანავე $tg13+tg15^0<2tg14^0$. მიღებული უტოლობების შეკრებით დამტკიცდება ამოცანაში მოცემული პირობა.

55. განვიხილოთ ფუნქცია $f(\alpha)=6sin^2\alpha-\sqrt{3}sin2\alpha-3\sqrt{3}cosa+3sina, \alpha\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$. ცხადია $f(\alpha)>0$. გარდაქმნებით მივიღებთ, როცა $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right]$ მაშინ $f(\alpha)=6sin\left[\frac{cos^2\alpha}{sina}-\frac{\sqrt{3}}{6}2cosa-\frac{3\sqrt{3}}{6}ctga+\frac{3}{6}\right]=6sina\left[cosactga-\frac{\sqrt{3}}{3}cosa-\frac{\sqrt{3}}{2}ctga+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=6sina[cosa(ctga-ctg30^0)-cos30^0(ctga-ctg30^0)]=6sina(ctga-ctg30^0)(cosa-cos30^0)$. რადგანაც $ctga-ctg30^0\geq 0, cosa-cos30^0\geq 0$ როდესაც $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right]$, ამიტომ გვექნება: $f(\alpha)\geq 0$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

56. ამოცანის პირობის თანახმად $A+B=60^0-C$. ავიღებთ რა ორივე მხარის სინუსს გვექნება: $sinAcosB+cosAsinB=\frac{\sqrt{3}}{2}cosC-\frac{1}{2}sinC$. ანალოგიურად: $sinAcosC+cosAsinC=\frac{\sqrt{3}}{2}cosB-\frac{1}{2}sinB$, $sinBcosC+cosBsinC=\frac{\sqrt{3}}{2}cosA-\frac{1}{2}sinA$. შევკრიბოთ მიღებული ტოლობები, მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას: $\frac{\sqrt{3}}{2}(cosA+cosB+cosC)-\frac{1}{2}(sinA+sinB+sinC)\geq sinAcosB+cosAsinB+sinAsinC+cosAsinC+sinBcosC+cosBsinC\geq$
$6\sqrt[6]{sin^2Acos^2Asin^2Bcos^2Bsin^2Ccos^2C}=6\sqrt[3]{sinAcosAsinBcosBsinCcosC}=3\sqrt[3]{sin2Asin2Bsin2C}$
მივიღეთ დასამტკიცებელი ტოლობა.

57. A,B,C კუთხეები რაღაც სამკუთხედის კუთხეებია, რომლის გვერდებია a,b,c. კოსინუსების თეორემის ძალით $a^2=b^2+c^2-2bccosA$ ე.ი. $\frac{a^2}{bc}=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2cosA$. გამოვიყენებთ რა სინუსების თეორემას და უტოლობას $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$ მივიღებთ: $\frac{sin^2A}{sinBsinC}\geq 2-2cosA=4sin^2\frac{A}{2}$ ან $cos^2\frac{A}{2}\geq sinBsinC$. დავწერთ რა ანალოგიურ ფორმულებს b და c გვერდების მიმართ მივიღებთ უტოლობებს: $cos^2\frac{B}{2}\geq sinAsinC$, $cos^2\frac{C}{2}\geq sinAsinB$. მიღებული უტოლობების შეკრებით დამტკიცდება ამოცანაში მიღებული უტოლობის სამართლიანობა.

58. სამართლიანია

უტოლობები: $\sqrt{2sin^2\alpha-sina+\frac{1}{4}}+\sqrt{2cos^2\alpha-cosa+\frac{1}{4}}=$

$\sqrt{sin^2\alpha+\left(sina-\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{cos^2\alpha+\left(cosa-\frac{1}{2}\right)^2}\geq|sina|+|cosa|\geq 1$ მეორეს მხრივ გვაქვს:

$1\geq\sqrt{1-(|cos3a|-1)^2}=\sqrt{2|cos3a|-cos^23a}$ ე.ი. $\sqrt{2cos^2\alpha-cosa+\frac{1}{4}}+\sqrt{2sin^2\alpha-sina+\frac{1}{4}}\geq$

$\sqrt{2|cos3\alpha| - cos^2 3\alpha}$. მიღებული უტოლობიდან 2-ზე გამრავლებით მიიღება დასამტკიცებელი უტოლობა.

59. როგორც ცნობილია სამართლიანია უტოლობა: $\sqrt{sin\alpha sin\beta} \leq \frac{sin\alpha + sin\beta}{2} = sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ე.ი. $sin\alpha sin\beta \leq sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \leq sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}$ რადგანაც $sin\alpha sin\beta sin\gamma \leq sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}sin\gamma \leq sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\gamma$ და $sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\gamma \leq sin^2\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{4}$. საბოლოოდ გვექნება $sin\alpha sin\beta sin\gamma \leq sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin^2\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{4}$.

60. საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ: $4sin^2x - 4sin^4x + 2sin2x - 15(sinx + cosx) + 15 = 0$ ან$4sin^2xsin^4x + 2sin2x - 15(sinx + cosx) + 15 = 0$. შემოვიღოთ აღნიშნა $sinx + cosx = u$. ცხადია $sin2x = u^2 - 1$ და მოცემული განტოლება ასე გადაიწერება: $u^4 - 15u + 14 = 0$ ან სხვანაირად $(u-1)(u-2)(u^2 + 3u + 7) = 0$. საბოლოოდ გვექნება: $u - 1 = 0$ და $u - 2 = 0$. $sinx + cosx = 2$ განტოლებას ამონახსნი არ გააჩნია, ხოლო $sinx + cosx = 1$ განტოლება მარტივად ამოიხსნება.

61. საწყისი განტოლების ორივე მხარე გავყოთ $(1+tg^2x)(1 + tg^2 2x)$-ზე. მივიღებთ: $\frac{2tgx}{1+tg^2x} + \frac{1-tg^2x}{1+tg^2x} + \frac{2tg2x}{1+tg^2 2x} + \frac{1-tg^2 2x}{1+tg^2 2x} = 2\sqrt{2}$ ან $sin2x + cos2x + sin4x + cos4x = 2\sqrt{2}$, საიდანაც მიიღება განტოლება $cos(45^0 - 2x) + cos(45^0 - 4x) = 2$. მიღებული განტოლების ამონახსნია შემდეგი სისტემის ამონახსნი: $\begin{cases} cos(45^0 - 2x) = 1 \\ cos(45^0 - 4x) = 1 \end{cases}$. პირველი განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა $\left\{k\pi + \frac{\pi}{8}; k \in z\right\}$, ხოლო მეორე განტოლების - $\left\{\frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{16}; m \in z\right\}$, სადაც z მთელი რიცხვია. ამ სიმრაველეებს არ გააჩნიათ საერთო ელემენტები, მართლაც შეუძლებელია რომ $k\pi + \frac{\pi}{8} = \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{16}$, ვინაიდან მივიღებდით, რომ $16k = 8m + 1$ ე.ი. ლუწი რიცხვი ტოლია კენტი რიცხვის. ყოველივე აქედან გამომდინარეობს, რომ საწყის განტოლებას ამონახსნი არა აქვს.

62. საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ: $\frac{\left(sin\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2}\right)\left(sin^2\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2}\right)}{2 - sinx} = \frac{1}{3}\left(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right)\left(cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}\right)$ ან $sin\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2} = 0$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $x = 2\pi k + \frac{\pi}{2}, k \in z$ ან განტოლება $\frac{1 + \frac{sinx}{2}}{2 - sinx} = -\frac{1}{3}\left(cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}\right)$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $sin\frac{x}{2} + cos\frac{x}{2} = z$. მივიღებთ განტოლებას: $\frac{4}{1+z^2} = \frac{-3+z}{z}$ ან $4z = z^3 - 3z^2 + z - 3$. საბოლოოდ გვექნება $z^3 - 3z^2 - 3z - 3 = 0$. ფუნქცია $y = z^3 - 3z^2 - 3z - 3$ ზრდადია $(-\infty; 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}; +\infty)$ შუალედში. რადგანაც ფუნქციის მნიშვნელობა $1 - \sqrt{2}$ წერტილში უარყოფითია, ამიტომ $z^3 - 3z^2 - 3z - 3 = 0$ განტოლებას გააჩნია ერთი ნამდვილი ფესვი, რომელიც მეტია $1 + \sqrt{2}$-ზე. როგორც ვიცით $z = sin\frac{x}{2} + cos\frac{x}{2} < \sqrt{2}$. ასე, რომ $sin\frac{x}{2} + cos\frac{x}{2} = 1 + \sqrt{2}$ განტოლებას ამონახსნი არ გააჩნია. საბოლოოდ გვექნება, რომ მოცემული განტოლების ამონახსნია $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in z$.

63. საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ: $(sinx + cosx)^2 - \frac{1+\sqrt{3}}{2}(sinx + cosx) + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$. შემოვიღოთ აღნიშნა: $sinx + cosx = t$. მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას $t^2 - \frac{1+\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$, მისი ამონახსნებია: $t_1 = \frac{1}{2}$ და $t_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ და მივიღებთ განტოლებებს: $sinx + cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $sinx + cosx = \frac{1}{2}$ ან სხვანაირად $cos(x - 45^2) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $cos(x - 45^2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ შესაბამისად მათი ამონახსნებია: $x = 45^0 \pm arccos\frac{\sqrt{6}}{4} + 2\pi k, k \in z$ და $x = 45^0 \pm arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi k, k \in z$.

64. საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ: $(sinx + cosx)^3 - 9(sinx + cosx)^2 + 26(sinx + cosx) - 24 = 0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $sinx + cosx = u$. მივიღებთ განტოლებას: $u^3 - 9u^2 + 26u - 24 = 0$ ან სხვანაირად $(u-2)(u-3)(u-4) = 0$ და საბოლოოდ გვექნება: $sinx + cosx = 2, sinx + cosx = 3, sinx + cosx = 4$, მათ ცხადია ამონახსნი არ გააჩნიათ.

65. საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ: $sin5x + \sqrt{3}cos5x = 2$ ე.ი. $sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ საიდანაც გვექნება $x = \frac{\pi}{30}(12k + 1), k = z$.

66. საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ: $16sin^5x - 20sin^3x + 5sinx + 3sinx - 4sin^3x = 2$ ან $sin5x + sin3x = 2$ ეს კი შესაძლებელია მაშინ როდესაც $sin5x = 1$ და $sin3x = 1$. ამ ორ განტოლებას საერთო ფესვი არ გაჩნია და ე.ი. არც მოცემულ განტოლებას აქვს ფესვი.

67. საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ: $16cos^5x - 20cos^3x + 5cosx - 3cosx + 4cos^3x = 2$ ან $cos5x + cos3x = 2$ მოცემული განტოლების ფესვები ამავე დროს არის შემდეგი სისტემის ამონახსნი$\begin{cases} cos5x = 1 \\ cos3x = 1 \end{cases}$. მარტივად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ამ სისტემის ამონახსნია $x = 2\pi k, k \in z$ და მოცემული განტოლების ამონახსნიც იგივეა $2\pi k, k \in z$.

68. რადგანაც $x \in \left[0; \sqrt[3]{\frac{11}{8}}\right]$, ამიტომ $tgx \geq 0, tgx^2 \geq 0, tgx^3 \geq 0$. როგორც ცნობილია, სამართლიანია უტოლობა $tgx + tgx^2 + tgx^3 \geq 3x^2$. მართლაც, $tgx \geq x$, $tg^2x \geq x^2$, $tg^3x \geq x^3$ და $tgx + tg^2x + tg^3x \geq \sqrt[3]{tgx\ tg^2x\ tg^3x} \geq 3x^2$. რადგანაც $tgx + tgx^2 + tgx^3 = 3x^2$ ამიტომ მივიღებთ $tgx = tgx^2 = tgx^3 = x^2$ და მიღებული განტოლების ფესვია $x = 0$.

69. შემოწმებით ერწმუნდებით, რომ მოცემული განტოლების ფესვი არაა $2\pi k$. ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $1 - cosx$-ზე, მივიღებთ: $(1 - cosx)(16cos^4x + 16cos^3x + 2) = 0$ ან $16cos^5x - 16cos^3x + 2cosx = 2$ როგორც ვნახეთ №67 ამოცანაში ამ განტოლების ერთადერთი ამონახსნია $x = 2\pi k, k \in z$ და მაშასადამე მოცემულ განტოლებას ამონახსნი არა აქვს.

70. საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ: $sin^2xcos^2x + 5cosxsinx + 2sinxcosx(sinx + cosx) + 3(cosx + sinx) - 3 = 0$. ან $sin^2xcos^2x + 2cosxsinx + 2sinxcosx(sinx + cosx) + 3(sinx + cosx + sinxcosx) - 3 = 0$. $(sinx + cosx)^2 + sin^2xcos^2x + 2sinxcosx(sinx + cosx) + 3(sinx + cosx + sinxcosx) - 4 = 0$. მიღებული განტოლება ასე გადაიწერება $(sinx + cosx + sinxcosx)^2 + 3(sinx + cosx + sinxcosx) - 4 = 0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $sinx + cosx + sinxcosx = y$ მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას $y^2 + 3y - 4 = 0$, მისი ფესვებია $y_1 = -4, y_2 = 1$. განტოლებას $sinx + cosx + sinxcosx = -4$ ამონახსნი არა აქვს, ხოლო $sinx + cosx + sinxcosx = 1$ განტოლების ამონახსნია $x = 2\pi k, k \in z$ და $x = 2\pi k + \frac{\pi}{2}, k \in z$.

71. საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ: $19sin^3x - 7cos^3x - (7sinx - cosx)(sin^2x + cos^2x) = 0$. გავხსნათ ფრჩხილები და ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ cos^2x-ზე. შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $y = tgx$. მივიღებთ განტოლებას $(y - 1)(12y^2 + 13y + 6) = 0$ საიდანაც მიიღება ერთადერთი ამონახსნი $x = \pi k + \frac{\pi}{4}, k \in z$.

72. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $sinx = t$, მივიღებთ განტოლებას: $5t^3 + 5t^2 - 5t + 1 = 0$. დავამტკიცებთ რა, რომ მიღებულ განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ნამდვილი ფესვი, რომელიც ნაკლებია -1-ზე, დავასკვნით, რომ საწყის განტოლებას ამონახსნი არა აქვს.

73. ცხადია განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია $x = k\pi$, $k \in z$. ამ შენიშვნის შემდეგ საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ: $2cos^2x + 2cos^22x + 2cos^24x = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{sin^28x}{sin^2x}}$ ან სხვანაირად: $cos^2x + cos^22x + cos^24x = 3\sqrt[3]{cos^2xcos^22xcos^24x}$. ვინაიდან სამართლიანია

შემდეგი ტოლობა $cos^2x + cos^2 2x + cos^2 4x \geq 3\sqrt[3]{cos^2xcos^2 2xcos^2 4x}$ ამიტომ $cos^2x = cos^2 2x = cos^2 4x$ და მიიღება განტოლებათა სისტემა: $\begin{cases} cos^2x = cos^2 2x \\ cos^2 2x = cos^2 4x \end{cases}$ საიდანაც მიიღება $cosx = cos2x$ ან $cosx = -cos2x$. ცხადია მათი ამონახსნებია $x = 2\pi k, k \in z; x = 2\pi k \pm 120^0, k \in z; x = 2\pi k + \pi, k \in z; x = \frac{2k+1}{3}\pi, k \in z$. ანალოგიურად მარტივად ამოიხსნება სისტემის მეორე განტოლებაც და მოცემული განტოლების ამოხსნაც მარტივად დასრულდება. განტოლების ამონახსნებია დასაწყისში აღნიშნული ფესვები.

74. სამართლიანია უტოლობები: $arcsin|xyz| \leq \frac{\pi}{2}; arcsin\frac{|xy|+|xz|+|yz|}{3} \leq \frac{\pi}{2}$. რადგანაც სამართლიანია თანაფარდობა $\pi = arcsin(x+y) + arcsin\frac{|xy|+|xz|+|yz|}{3} \leq \pi$, ამიტომ გვექნება $arcsin|xyz| = arcsin\frac{|xy|+|xz|+|yz|}{3} = \frac{\pi}{2}$. მიღებული ტოლობიდან გვექნება: $\begin{cases} |xyz| = 1 \\ |xy| + |xz| + |yz| = 3 \end{cases}$. ეინაიდან სამართლიანია თანაფარდობა $|xy|+|xz| + |yz| \geq 3$ ამიტომ მივიღებთ: $|xyz| = 1, |xy|=|xz| = |yz| = 1$ და საბოლოოდ გვექნება, რომ მოცემული განტოლების ამონახსნია x, y, z სამეულის ნებისმიერი შესაძლო ვარიანტი, რომლებშიც ისინი ღებულობენ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელ მნიშვნელობებს 1 ან -1.

75. სამართლიანია უტოლობები: $arcsin\big(tg(x+y)\big) \leq \frac{\pi}{2}, arccos\big(tg(x-y)\big) \leq \pi$. რადგანაც გვაქვს $arcsin\big(tg(x+y)\big) + arccos\big(tg(x-y)\big) \leq \frac{3\pi}{2}$, ამიტომ გვექნება $arcsin\big(tg(x+y)\big) = \frac{\pi}{2}$ და $arccos\big(ctg(x-y)\big) = \pi$ საიდანაც მიიღება სისტემა: $\begin{cases} tg(x+y) = 1 \\ ctg(x-y) = -1 \end{cases}$. პირველი განტოლებიდან გვექნება $x + y = \pi m + \frac{\pi}{4}$, $m \in z$, ხოლო მეორე განტოლებიდან $x - y = \pi n - \frac{\pi}{4}$, $n \in z$. ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ $x = \frac{m+n}{2}\pi$, $y = \frac{n-m}{2}\pi + \frac{\pi}{4}$, სადაც $m, n \in Z$.

76. სამართლიანია უტოლობები: $2^{|x|+1}$-1≥ 1, ამასთან $cos^7x - sin^7x \leq |cosx|^7 + |sin|^7 \leq cos^2x + sin^2x = 1$ ე.ი. $cos^7x - sin^7x \leq 1 \leq 2^{|x|+1}$-1. რადგანაც ამოცანის პირობის თანახმად $cos^7x - sin^7x \geq 2^{|x|+1}$-1 ამიტომ გვექნება $2^{|x|+1} - 1 = 1$ საიდან მიიღება $|x| = 0$ ე.ი. $x = 0$.

77. საწყის სისტემაში შემავალი განტოლებების შეკრებით მივიღებთ: $tgx + tgy + ctgx + ctgy = 4 - \sqrt{sin(x - 45^0)} - \sqrt{cos(y + 45^0)}$. ეინაიდან $tgx + tgy + ctgx + ctgy \geq 4$ საბოლოოდ მივიღებთ $sin(x - 45^0) = 0, cos(y + 45^0) = 0$. მიღებული განტოლებების ამონახსნია $x = \pi k + \frac{\pi}{4}, k \in z, y = \pi n + \frac{\pi}{4}$, $n \in z$. გავითვალისწინებთ რა პირობებს $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right], y \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ მივიღებთ, რომ განტოლების ამონახსნია $x = \frac{5\pi}{4}, y = \frac{5\pi}{4}$.

78. სისტემის მეორე განტოლება ასე გადავწეროთ: $cosy(1 + sin^2x) + sinx(1 + cos^2y) = 1$ ან $sinx + cosy + sin^2xcosy + sinxcos^2y = 1$ მიღებული ტოლობა გავამრავლოთ 3-ზე და მივუმატოთ პირველ განტოლებას, გვექნება $(sin + cosy)^3 + 3(sinx + cosy) = 4$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $sinx + cosy = u$ ე.ი. განტოლება ასე გადაიწერება $u^3 + 3u - 4 = 0$, მისი ერთადერთი ამონახსნია $u = 1$ და შესაბამისად $sinx + cosy = 1$. გავითვალისწინებთ რა ტოლობას $sin^3x + cos^3y = (sinx + cosy)(sin^2x - sinxcosy + cos^2y) = 1$. გვექნება: $sin^2x - sinxcosy + cos^2y = 1$. საბოლოოდ გვაქვს $\begin{cases} sinx + cosy = 1 \\ sin^2x - sinxcosy + cos^2y = 1 \end{cases}$. ცხადია $sinx \geq o, cosy \geq 0$ (ეს გამომდინარეობს პირველი განტოლებიდან). ბოლო სისტემა ასე გადაიწერება: $\begin{cases} sin^2x + 2sinxcosy + cos^2y = 1 \\ sin^2x - sinxcosy + cos^2y = 1 \end{cases}$ ან $\begin{cases} sinx + cosy = 1 \\ sinxcosy = 0 \end{cases}$ და მიღებული სისტემის ამონახსნებია: $x = 2\pi m + \frac{\pi}{2}$, $y = \pi k + \frac{\pi}{2}, m \in z, k \in z$ ან $x = \pi m, y = 2\pi k, m \in z, k \in z$.

79. საწყისი სისტემის მესამე განტოლებიდან მიიღება: $x + y = \frac{\pi}{2} - z$ საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $tg(x+z) = tg\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ ან $(tgx + tgz)tgy = 1 - tgxtgz$ ე.ი. $tgxtgy +$

$tgytgz = 1 - tgxtgz$. გავითვალისწინებთ რა სისტემის პირველ და მეორე განტოლებას გვექნება $tgxtgz = -1$, რომელიც დაემატება საწყისი სისტემის სამ განტოლებას და ამ უკანასკნელის ამონახსნები იქნება $tgy = tgz = \sqrt{3}, tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ან $tgy = tgz = -\sqrt{3}, tgx = \frac{1}{\sqrt{3}}$ და მთლიანად სისტემის ამოხსნა მარტივად დასრულდება.

§17. განტოლებების ამოხსნა მთელ და ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში

4. ვთქვათ მოცემულია x ცალი შეიდკუთხედი და y ცალი თერთმეტკუთხედი. შეგვიძლია დავწეროთ განტოლება: $14x + 44y = 202$ ან $7x + 22y = 101$. განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც x და y კენტი რიცხვებია, ე.ი. $x = 2z + 1$ და $y = 2k + 1$. შესაბამისად საწყისი განტოლება მიიღებს სახეს: $7z + 22k = 36$. რადგანაც $22k$ ლუწი რიცხვია, ასევე ლუწი რიცხვი უნდა იყოს $7z$. ვთქვათ $z = 2t$ და გვაქვს: $7t + 11k = 18$, ცხადია აქედან გამომდინარეობს, რომ $t = 1$ და $k = 1$ და $x = 5$ და $y = 3$. ყველა სხვა შემთხვევაში (x და y ორივე ლუწია, ან x ლუწია, ხოლო $-y$ კენტი ან პირიქით y ლუწია, ხოლო x – კენტი) განტოლებას ამონახსნი არ გააჩნია.

5. ვთქვათ ანას უნადა ეყიდა x ცალი საწერკალამი და y ცალი რვეული. ამოცანის პირობის თანახმად გვექნება განტოლება: $5x + 38y = 437$. ვინაიდან 38 და 437 იყოფა 19-ზე, ამიტომ x უნდა იყოფოდეს 19-ზე და შეგვიძლია დავწეროთ $x = 19t$. საწყისი განტოლება მიიღებს სახეს: $95t + 38y = 437$, საიდანაც მიიღება: $5t + 2y = 23$. ამ განტოლების ამონახსნებია $y = 4$, $t = 3$ ან $y = 9$, $t = 1$. საბოლოოდ გვექნება $x = 19$, $y = 9$ ან $x = 57$, $y = 4$პასუხი იქნება $y = 9$.

7. სამართლიანია ტოლობა: $2(8x + 5y) + 7x + 13y = 23(x + y)$. თუ $8x + 5y$ იყოფა 23-ზე მაშინ აუცილებლად $7x + 13y$-იც გაიყოფა 23-ზე და პირიქით, თუ $7x + 13y$ გაიყოფა 23-ზე მაშინ $8x + 5y$-იც გაიყოფა 23-ზე.

8. ამოცანის ამოხსნა გამომდინარეობს ტოლობიდან $21(2x + y) + 3(5x + 12y) = 57(x + y)$.

9. თუ საწყის განტოლებას გააჩნია ამონახსნი მაშინ y შეიძლება იყოს შემდეგ რეიცხვთაგან ერთერთი $7k, 7k + 1, 7k + 2, 7k + 3, 7k + 4, 7k + 5, 7k + 6$. მარტივად დაერწმუნდებით, რომ არცერთი ამ რიცხვთაგან არ არის მოცემული განტოლების ამონახსნი.

10. როგორც ცნობილია არსებობს 3-ანებისაგან შედგენილი რიცხვი რომელიც იყოფა 19-ზე. ვთქვათ ეს რიცხვია $\overline{3\cdots3}$, რომელშიც სამიანების რაოდენობაა n. მაშინ ცხადია რიცხვი $\overline{3\cdots38}$, სადაც 3-იანების რაოდენობაა $n+1$ გაიყოფა 19-ზე. ის შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი ჯამის სახით $\overline{3\cdots3} + 38$, რომლის პირველ შესაკრებში შედის n რაოდენობის სამიანი. საწყისი განტოლების ამონახსნი იქნებოდა $(3; y_0)$. თუ ავიღებთ რიცხვს $\overline{3\cdots3}$ სადაც 3-იანების რაოდენობაა $2n$ მაშინ რიცხვი $\overline{3\cdots38}$, რომელშიც 3-იანების რაოდენობაა $2n + 1$ ასევე გაიყოფა 19-ზე. მივიღეთ მეორე ამონახსნი $(3; y_0)$ და ა.შ.

11. განტოლება ასე გადავწეროთ: $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 2005 = 5 \cdot 401$. რადგანაც სისტემას: $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 401 \end{cases}$ ამონახსნი არ გააჩნია, ამიტომ ამონახსნი არ გააჩნია არც საწყის განტოლებას.

12. საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ: $(xy + 1)^2 + (x + y)^2 = 106$. რიცხვი 106 ერთადერთი სახით როგორც კვადრატების ჯამი ასე წარმოდგინდება $106 = 25 + 81$. მივიღებთ რვა განტოლებათა სისტემას $\begin{cases} xy + 1 = a \\ x + y = b \end{cases}$, სადაც a და b ღებულობს

მნიშვნელობებს ან ±5 ან ±9 ისე, რომ $|a| \neq |b|$. არცერთ ამ სისტემას მთელ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არა აქვს.

13. საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ: $(xy-x-9)^2+(x-y)^2=170$. ვინაიდან 170 წარმოდგენა ორი რიცხვის კვადრატების ჯამად შესაძლებელია მხოლოდ ორი ვარიანტით $170=121+49$ და $170=169+1$ ამიტომ მივიღებთ შემდეგი სახის სისტემებს: $\begin{cases} xy-x-9=11 \\ x-y=7 \end{cases}$ და ა.შ. სულ მიიღება 16 ასეთი სისტემა. მათი ამონახსნია (10; 3), (-2; -9). დანარჩენ სისტემას ამონახსნი არა აქვს.

14. საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ: $(x^2-y^2-z^2)^2-4y^2z^2=0$ ან რაც იგივეა: $(x^2-y^2-z^2-2yz)(x^2-y^2-z^2+2yz)=0$ ე.ი. $(x-y-z)(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)=0$. მისი ამონახსნია $x=y+z,\ x+y+x=0,\ y=x+z,\ z=x+y$. ცხადია x, y, z არ შეიძლება იყოს სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები.

15. ცხადია არსებობს 7-იანების რაღაც რაოდენობა, რომელიც იყოფა 13-ზე. ვთქვათ ეს რაოდენობაა n (შევნიშნოთ, რომ n-ის პოვნა მარტივია, $n \leq 13$). ცხადია არსებობს ისეთი რიცხვი $\overline{1287\cdots7}$ რომელიც იყოფა 13-ზე, მაგალითად 1287. რიცხვები $\overline{12877\cdots7}$ იყოფა 13-ზე, თუ 7-იანების რაოდენობაა $n+1,\ 2n+1,\ 3n+1,\ldots$ რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემულ განტოლებას გააჩნია ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა, უფრო მეტიც განტოლებას $\overline{abcdd\cdots d}=py$ სადაც p 2 და 5-საგან განსხვავებული მარტივი რიცხვია, გააჩნია ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე.

16. განტოლების მარჯვენა მხარის 7-ზე გაყოფით მიიღება ნაშთი 3. შევისწავლოთ მარცხენა მხარის 7-ზე გაყოფით მიღებული ნაშთები. განვიხილოთ ყველა შესაძლო შემთხვევა. $x \in \{7k,;\ 7k+1;\ 7k+2;\ 7k+3; 7k+4; 7k+5; 7k+6\}$, $y \in \{7k; 7k+1; 7k+2; 7k+3; 7k+4; 7k+5,; 7k+6\}$. x^3+y^3 რიცხვის 7-ზე გაყოფით მიიღება ნაშთები $0; 1; 2$. ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ განტოლებას ამონახსნი არ გაჩნია.

17. ტოლობის მარცხენა მხარეში მყოფი რიცხვები ბოლოვდება ციფრებით 6; 4; 6; 8; 6; 4;..., ხოლო მარჯვენა მხარეში მყოფი რიცხვები კი – ციფრებით 0; 8; 0; 2; 0; 8; 0; 2;... როგორც ვხედავთ თუ განტოლებას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ $x=4k$ და $y=4s+2$. მივიღებთ ტოლობა $3^{4k}+5^{4k}+7^{4k}+11^{4k}=13^{4s+2}+17^{4S+2}$, ის ასე გადავწეროთ: $(8+1)^{2k}+(24+1)^{2k}+(48+1)^{2k}+(120+1)^{2k}=(168+1)^{2s+1}+(288+1)^{2s+1}$. მიღებული ტოლობა შეუძლებელია, ვინაიდან მარცხენა მხარე იყოფა 4-ზე, ხოლო მარჯვენა არ იყოფა და მაშასადამე განტოლებას ამონახსნი არა აქვს.

18. ვთქვათ $x=3k+1$, მაშინ განტოლება მიიღებს სახეს $z^2+2(9k^2+6k+1)+3y^2=496$ საიდანაც გვექნება $18k^2+12k+3y^2=494-z^2$. მარცხენა მხარე იყოფა 3-ზე, ე.ი. მარჯვენა მხარეც უნდა გაიყოს 3-ზე. ყველა შესაძლო შემთხვევის $z=3p;\ z=3p+1;\ z=3p+2$ განხილვით დავრწმუნდებით, რომ საწყის განტოლებას ამონახსნი არა აქვს ე.ი. $x \neq 3k+1$. თუ $x=3k+2$ წინა შემთხვევის ანალოგიურად არც ამ შემთხვევაში გააჩნია ამონახსნი განტოლებას. ვთქვათ $x=3k$. განტოლება მიიღებს სახეს $z^2+18k^2+3y^2=496$. თუ ამ განტოლებას გააჩნია ამონახსნი ის უნდა ვეძებოთ k შემდეგ მნიშვნელობებში: $k=1;\ k=2;\ k=3;\ k=4;\ k=5$. თუ $k=1$ ან $k=5$ მივიღებთ განტოლებებს: $z^2+3y^2=478$ და $z^2+3y^2=46$. მათი ამონახსნი უნდა იყოს ან ორივე ლუწი ან ორივე კენტი. შემოწმებით ვრწმუნდებით, რომ ამ განტოლებებს ამონახსნი არა აქვთ. შევამოწმოთ ის შემთხვევები როდესაც $k=2;\ k=3;\ k=4$, ვნახავთ, რომ განტოლებას ამონახსნი გააჩნია მხოლოდ მაშინ, როდესაც $k=4$.

19. თუ $x \in (-\infty;-4) \cup (-1;+\infty)$ მაშინ ადგილი აქვს უტოლობებს: $(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8<x^3+6x^2+12x+8<x^3+6x^2+12x+14<x^3+9x^2+27x+27=(x+3)^3$ ე.ი. $(x+2)^3<y^6<(x+3)^3$. არ არსებობს ისეთი მთელი რიცხვი რომელიც მოთავსებულია $x+2$ და $x+3$-ს შორის და ამდენად აღნიშნულ შუალედში განტოლებას ამონახსნი არ

გააჩნია. დაგერჩა განსახილველი შემთხვევები $x=-4; x=-3; x=-2$. ანალიზი გვიჩვენებს, რომ არც ამ შემთხვევებში გააჩნია ამონახსნი განტოლებას.

20. თუ $x\in(-\infty;-6)\cup(2;+\infty)$ მაშინ სამართლიანია უტოლობები: $(x+1)^3<x^3+3x^2+3x+49=y^3<x^3+6x^2+12x+8=(x+2)^3$ და მივიღეთ, რომ $(x+1)^3<y^3<(x+2)^3$ ე.ი. $x+1<y<x+2$. ვინაიდან $x+1$ და $x+2$ მთელ რიცხვებს შორის შუალედში მთელი რიცხვი არ არსებობს, ამიტომ აღნიშნულ შუალედში განტოლებას ამონსხსნი არ გააჩნია. უშუალო შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ არც $x\in\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$ შემთხვევისათვის გააჩნია განტოლებას ამონახსნი.

§18. რიცხვითი სიმრავლეები

83. დავუშვათ, რომ რიცხვი $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}$ რაციონალურია, ე.ი. $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}=\frac{m}{n}$. ტოლობის ორივე მხარე ავიყვანოთ კუბში, გვექნება: $\left(\sqrt[3]{3}\right)^3+3\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{5}\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}\right)+\left(\sqrt[3]{5}\right)^3=\frac{m^3}{n^3}$ ან $8+3\sqrt[3]{15}\cdot\frac{m}{n}=\frac{m^3}{n^3}$. საიდანაც მიიღება $\sqrt[3]{15}=\frac{3\left(m^3-8n^3\right)}{n^2}$. ტოლობის მარცხენა მხარეში გვაქვს ირაციონალური რიცხვი, ხოლო მარჯვენაში რაციონალური ეს კი შეუძლებელია. მიღებული იმას ნიშნავს, რომ ჩვენი დაშვება სამართლიანი არაა. ე.ი. რიცხვი $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}$ ირაციონალურია.

84. დავუშვათ,. რომ რიცხვი $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}$ რაციონალურია, ე.ი. ადგილი აქვს ტოლობას $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}=\frac{m}{n}$ ან $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}=\frac{m}{n}-\sqrt[3]{3}$. ტოლობის ორივე მხარე ავიყვანოთ კუბში, მივიღებთ $6+6\left(\frac{m}{n}-\sqrt[3]{3}\right)=\left(\frac{m}{n}-\sqrt[3]{3}\right)^3$ საიდანაც გვექნება $k\sqrt[3]{9}+s\sqrt[3]{3}=p$, სადაც $k,\ s,\ p$. გარკვეული მთელი რიცხვებია. ვიგულისხმოთ, რომი ისინი არ იკვეცებიან. ზემოთ მიღებული უკანასკნელი ტოლობა ავიყვანოთ კუბში, მივიღებთ $9k^3+3s^3+9ksp=p^3$. ტოლობის მარცხენა მხარე იყოფა 3-ზე, ე.ი. p^3 იყოფა სამზე საიდანაც გამომდინარეობს, რომ p -ს აქვს შემდეგი სახე $p^3=3q$. ამიტომ გვაქვს $9k^3+3s^3+27ksq=27q^3$, ან $s^3=9q^3-3k^3-9ksq$. ტოლობის მარჯვენა მხარე იყოფა 3-ზე, ე.ი. s აქვს სახე $s=3r$ ამ ტოლობის გათვალისწინებით, ანალოგიური მსჯელობა გვაძლევს, რომ k-ც იყოფა 3-ზე.

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ რიცხვები k,s,p იყოფა 3-ზე, რაც ეწინააღმდეგება ზემოთ მოყვანილ ერთ-ერთ პირობას და საბოლოოდ შეიძლება დავასკვნათ, რომ რიცხვი $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}$ ირაციონალურია.

86. დავუშვათ, რომ $\sqrt[3]{2}$ არის მთელკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლების ფესვი, მაშინ არსებობს ისეთი a და b რაციონალური რიცხვები, რომ ადგილი აქვს ტოლობას $\sqrt[3]{4}+a\sqrt[3]{2}=b$. ამ ტოლობის ორივე მხარის კვადრატში აყვანა მოგვცემს შემდეგ ტოლობას: $\sqrt[3]{16}+2a\sqrt[3]{8}+a^2\sqrt[3]{4}=b^2$ ან $2\sqrt[3]{2}+a^2\sqrt[3]{4}+4a=b^2$. მეორეს მხრივ გვაქვს $\sqrt[3]{4}+a\sqrt[3]{2}=b$ და წინა ორი ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ: $\left(2\sqrt[3]{2}+4a+a^2\sqrt[3]{4}\right)-\left(a^2\sqrt[3]{4}+a^3\sqrt[3]{2}\right)=b^2-ba^2$ ან $\sqrt[3]{2}\left(2-a^3\right)=b^2-ba^2-4a$, საიდანაც გამომდინარეობს $\sqrt[3]{2}=\frac{b^2-ba^2-4a}{2-a^3}$. შევნიშნოთ, რომ $2-a^3\neq 0$ ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებდით, რომ $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}=b$ რაც შეუძლებელია (რიცხვი $\sqrt[3]{4}$ ირაციონალურია). დავუბრუნდეთ ტოლობას $\sqrt[3]{2}=\frac{b^2-ba^2-4a}{2-a^3}$ ის შეუძლებელია, ვინაიდან მარცხენა მხარეში წერია ირაციონალური რიცხვი, ხოლო მარჯვენაში რაციონალური.

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ $\sqrt[3]{2}$ არ წარმოადგენს მთელკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლების ფესვს.

88. დავუშვათ არსებობენ ისეთი α და β ირაციონალური რიცხვები, რომ რიცხვები $\alpha\cdot\beta$ და $\frac{\alpha}{\beta}$ რაციონალური რიცხვებია და $\alpha+\beta\neq 0$. ვინაიდან $\alpha\cdot\beta$ და $\frac{\alpha}{\beta}$ რაციონალური რიცხვებია ამიტომ ასევე რაციონალური რიცხვებია მათი ნამრავლი და შეფარდებაც: $\alpha\cdot\beta\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\alpha^2$ და $\alpha\cdot\beta\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\beta^2$. რაციონალურ რიცხვთა სხვაობაც რაციონალურია ე.ი. რაციონალურია რიცხვი $\alpha^2-\beta^2$. რადგანაც $\alpha+\beta\neq 0$, ამიტომ რიცხვი $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta}=\alpha-\beta$ რაციონალურია. გამოვიყენებთ, რა $\alpha+\beta$ და $\alpha-\beta$ რიცხვების რაციონალურობას, მივიღებთ, რომ მათი ჯამიც და სხვაობაც რაციონალურია, ე.ი. რაციონალურია რიცხვები α და β, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ აღნიშნული თვისების მქონე ირაციონალური რიცხვები არ არსებობენ.

91. განვიხილოთ რიცხვთა შემდეგი ხუთეული: $n;n+1;n+2;n+3;n+4$. ამოცანის პირობის ძალით პირველი, მესამე და მეხუთე რიცხვები მარტივია. ვთქვათ $n>3$. ცხადია $n;n+1;n+2$ რიცხვებიდან ერთ-ერთი იყოფა 3-ზე და ეს რიცხვია $n+1$ (ვინაიდან $n;n+2$ რიცხვები მარტივი რიცხვებია). ასევე ცხადია $n+2;n+3;n+4$ რიცხვებიდან რიცხვი $n+3$ იყოფა 3-ზე. ყოველივე აქედან კი გამომდინარეობს, რომ რიცხვებიდან $n+1;n+2;n+3$ პირველი და მესამე იყოფა სამზე, ეს კი შეუძლებელია ვინაიდან სამი მომდევნო რიცხვიდან მხოლოდ ერთი მათგანი იყოფა სამზე.

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ n სამზე მეტი არაა. თუ $n=3$ მაშინ მივიღებთ, რომ მოცემულია რიცხვები 3; 5; 7, რომლებიც მარტივია და ასევე მარტივია რიცხვიც $n^2+4n+2=23$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

92. სამართლიანია შემდეგი ტოლობები: $5^n-4n+15=(5^n-1)+16-4n=(5-1)(5^{n-1}+5^{n-2}+5^{n-3}+\cdots+5+1)+16-4n=$
$=4\left[\left(5^{n-1}-1\right)+\left(5^{n-2}-1\right)+\left(5^{n-3}-1\right)+\cdots+\left(5-1\right)\right]+16=16\left[\left(5^{n-2}-1\right)+\left(5^{n-3}-1\right)+\cdots+\left(5-1\right)\right]+16$ და საბოლოოდ გვექნება: $5^n-4n+15=16\cdot a$. როგორც ვხედავთ რიცხვი $5^n-4n+15$ ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის იყოფა 16-ზე, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

109. ვთქვათ $n=8k+p$ სადაც p იღებს მნიშვნელობებს სიმრავლიდან $\{1,2,3,4,5,6,7,0\}$. სამართლიანია ტოლობები: $2^n+1=2^{8k+p}+1=2^p\cdot 2^{8k}+1=2^p\cdot 16^{2k}+1=2^p(17-1)^{2k}+1=$ $=2^p\cdot 17\cdot A+2^p+1$ და საბოლოოდ გვექნება $2^n+1=2^p\cdot 17\cdot A+2^p+1$. ცხადია 2^n+1, რომ გაიყოს 17-ზე აუცილებელია და საკმარისი 2^p+1 გაიყოს 17-ზე. უშუალო შემოწმებით ვრწმუნდებით, რომ $p=4$. ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ როდესაც $n=8k-4$, რიცხვი 2^n+1 იყოფა 17-ზე.

111. ვთქვათ $n=4k+1$, $k\in N$. სამართლიანია ტოლობები: $A=14\cdot 8^{4k+1}+5=13\cdot 8^{4k+1}+$

$+8^{4k+1}+5=13\cdot 8^{4k+1}+8\left[\left[(65-1)^2\right]^k-1\right]+13=13\cdot 8^{4k+1}+8\left[(65-1)^2-1\right]\cdot c+13=13\cdot b$. საბოლოოდ გვექნება $14\cdot 8^n+5=13\cdot b$. როგორც ვხედავთ, როცა $n=4k+1$, რიცხვი $14\cdot 8^n+5$ იყოფა 13-ზე. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

112. ვთქვათ $n=3k+p$, სადაც p ღებულობს მნიშვნელობებს სიმრავლიდან $\{0,1,2\}$. სამართლიანია შემდეგი ტოლობები: $3^n-1=3^{3k+p}-1=3^p(26+1)^k-1=3^p\cdot 26\cdot A+3^p-1$. როგორც ვხედავთ, იმისათვის რომ 3^n-1 გაიყოს 13-ზე აუცილებელია და საკმარისი, რომ

3^p-1 გაიყოს 13-ზე.

უშუალო შემოწმებით მივიღებთ, რომ 3^p-1 იყოფა 13-ზე როცა $p=0$. ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ 3^n-1 იყოფა 13-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც $n=3k; k\in N$.

113. დავუშვათ n კენტი რიცხვია, სამართლიანია ტოლობა: $3^n+2^n=$
$=(3+2)(3^{n-1}-3^{n-2}\cdot 2+\cdots+2^{n-1})$ ე.ი. 3^n+2^n იყოფა 5-ზე. ახლა ვაჩვენოთ, რომ როცა n ლუწი რიცხვია 3^n+2^n არ იყოფა 5-ზე. მართლაც თუ $n=2k$, გვექნება $3^n+2^n=9^k+4^k=$
$=9^k-4^k+2\cdot 4^k=(9-4)(9^{k-1}+\cdots+4^{k-1})+2^{2k+1}$ და ვინაიდან 2^{2k+1} არ იყოფა 5-ზე ამიტომ 3^n+2^n არ იყოფა 5-ზე. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

114. განვიხილოთ 3^n და 2^n სახის რიცხვების 17-ზე გაყოფით მიღებული ნაშთები. მარტივად შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ რიცხვი3^n+2^n იყოფა 17-ზე, მაგალითად მაშინ როდესაც $n=8$. ვთქვათ $n=8(2k+1), k\in N$ და დავამტკიცოთ, რომ n-ის ყველა მნიშვნელობისათვის რიცხვი 3^n+2^n იყოფა 17-ზე. სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:
$3^{8(2k+1)}+2^{8(2k+1)}=(3^8+2^8)\cdot A$ შევნიშნოთ, რომ გამოყენებულია ტოლობა: $a^{2k+1}+b^{2k+1}=$
$=(a+b)(a^{2k}-a^{2k-1}b+\cdots+b^{2k})$. რადგანაც 3^8+2^8 იყოფა 17-ზე, ამიტომ 3^n+2^n იყოფა 17-ზე, როცა $m=8(2k+1), k\in N$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

115. ცხადია სამართლიანია ტოლობები: $10^{10^{10}}+10^{10^5}=10^{10^{10}}-10^4+10^{10^5}-10^4+2\cdot 10^4=$
$=10^4\left(10^{10^{10}-4}-1\right)+10^4\left(10^{10^5-4}-1\right)+2(7+3)^4$ ვინაიდან $10^{10}-4$ და 10^5-4 იყოფა 6-ზე,

ამიტომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები: $10^{10}-4=6n$ და $10^{10}-4=6m$. ყოველივე ამის გათვალისწინება გვაძლევს: $10^{10^{10}}+10^{10^5}=10^4[(10^6)^n-1]+10^4[(10^6)^m-1]+$
$2(7+3)^4$. ტოლობიდან $(10^6)^n-1=(10^6-1)(10^{6(n-1)}+\cdots+1)=(10^6-1)\cdot A$ გამომდინარეობს, რომ
$10^{10^{10}}+10^{10^5}=10^4(10^6-1)\cdot A+10^4(10^6-1)\cdot B+2(7^4+4\cdot 7^3\cdot 3+6\cdot 7^2\cdot 3^2+4\cdot 7\cdot 3^3+3^4)$ და
საბოლოოდ მივიღებთ $10^{10^{10}}+10^{10^5}=10^4\cdot 1001\cdot 999\cdot A+10^4\cdot 1001\cdot 999\cdot B+7\cdot c+162$. ვინაიდან 162-ის 7-ზე გაყოფით მიიღება ნაშთი 1, ამიტომ $10^{10^{10}}+10^{10^5}$ რიცხვის 7-ზე გაყოფით ნაშთი ისევ ტოლი იქნება 1-ის.

116. სამართლიანია შემდეგი ტოლობები: $A=5+5^5+5^{5^5}+\cdots+5^{5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$

$$=5+5^5+5^{5^5}+\cdots+5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^5}}}}+125-125=(5^5-5)+\left(5^{5^5}-5\right)+\cdots+\left(5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^5}}}}-5\right)+130=$$

$$=5(5^{5-1}-5)+5\left(5^{5^5-1}-5\right)+\cdots+5\left(5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}-1}-5\right)+130$$ (შევნიშნოთ,რომ $5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$ ჩანაწერში ხარისხის

მაჩვენებელში 5 აღებულია 25-ჯერ). ვინაიდან ადგილი აქვს ტოლობას

$5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}-1=5^{5n}-1=(5^5)^n-1=(5^5-1)(5^{5(n-1)}+\cdots+1)$, ამიტომ გვექნება $5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}-1=4\cdot C$ სადაც 5 აღებულია k-ჯერ. ახლა ვაჩვენოთ, რომ რიცხვი $5^{4C}-1$ იყოფა 13-ზე, მართლაც
$5^{4C}-1=(5^4)^C-1=(5^4-1)\cdot B=(5^2-1)(5^2+1)\cdot B=24\cdot 26\cdot B$ დავუბრუნდეთ ტოლობას

$A=5\left(5^{5-1}-5\right)+5\left(5^{5^5-1}-5\right)+\cdots+5\left(5^{5^{5^{\cdot^{\cdot}}}-1}-5\right)+130$ რადგანაც, ფრჩხილებში მყოფი რიცხვები იყოფა 13-ზე ამიტომ რიცხვი A იყოფა 13-ზე და ნაშთი ნულის ტოლია.

124. განვიხილოთ რიცხვთა მიმდევრობა 1; 11; 111; $\underbrace{111...11}_{p\text{-ჯერ}}$. თუ მიმდევრობის ყოველ წევრს გავყოფთ p მარტივ რიცხვზე, მივიღებთ ნაშთებისაგან შედგენილ მიმდევრობას. ამ მიმდევრობის წევრები არ აღემატება P-1-ს. ცხადია მიღებულ მიმდევრობაში რომელიღაც რიცხვი გამეორდება. ვთქვათ P-ზე გაყოფისას გამეორებას ადგილი ჰქონდა შემდეგი რიცხვებისათვის $\underbrace{11...111}_{n\text{-ჯერ}}$ და $\underbrace{11...111}_{m\text{-ჯერ}}$ სადაც $n>m$. განვიხილოთ შემდეგი სხვაობა: $\underbrace{11...111}_{n\text{-ჯერ}}-\underbrace{11...111}_{m\text{-ჯერ}}=\underbrace{111...1}_{m\text{-ჯერ}}\underbrace{100...0}_{n\text{-ჯერ}}$, ცხადია ის გაიყოფა P-ზე. რადგანაც P არ არის 2-ის და 5-ის ტოლი, ამიტომ რიცხვი $\underbrace{10...00}_{n-m\text{-ჯერ}}$ არ იყოფა P-ზე. ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს რიცხვი, რომელიც ჩაწერილია მხოლოდ ერთიანებით და ის იყოფა P- ზე. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

§19. ფუნქციის განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე. უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები

6. 1) მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა შემდეგი უტოლობათა სისტემის ამონახსნი: $\begin{cases}5+x\geq 0\\ x^2+2x-3\geq 0\\ 2x-10\neq 0\end{cases}$

3) მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა შემდეგი უტოლობათა სისტემის ამონახსნი:
$\begin{cases}x^2-3>0\\ x^2-9\neq 0\end{cases}$

6) მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა შემდეგი ექვსი უტოლობისაგან შემდგარი სისტემის ამონახსნი: $\begin{cases}x^2+5x+24>0\\ 2x+3>0\\ y+1>0\\ x-1>0\\ x+1\neq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$

8) მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა შემდეგი უტოლობათა სისტემის ამონახსნი: $\begin{cases}x^2+5x+1\leq 1\\ x^2+5x+1\geq -1\end{cases}$

7. ფუნქცია $f(x)=x^2+3x+1$ ღებულობს ყველა მნიშვნელობას $[y_0;+\infty)$ შუალედიდან, სადაც y_0 წარმოადგენს მოცემული პარაბოლის წვეროს ორდინატას. ვინაიდან $y_0=-\frac{5}{4}$ და ფესვქვეშა გამოსახულება არ შეიძლება იყოს უარყოფითი, ამიტომ მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა შუალედი $[0;+\infty)$. პასუხის სისწორეში შეიძლება დავრწმუნდეთ შემდეგი მოსაზრებითაც: როგორი რიცხვიც არ უნდა ავიღოთ შუალედიდან $[0;+\infty)$ ე.ი. $y_1\in[0;+\infty)$ განტოლებას $y_1=\sqrt{x^2+y^2}$ გააჩნია ამონახსნი.

10. ჯერ ვიპოვოთ $f(x) = x^2 + 5x + 10$ ფუნქციის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობები $x \in [-3; 4]$ შუალედისათვის. ამისათვის საჭიროა ვიპოვოთ რიცხვები $f(-3)$, $f(4)$, $f(x_0) = y_0$, სადაც $(x_0; y_0)$ არის პარაბოლის წვეროს კოორდინატები. შევნიშნოთ, რომ მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა – $(\infty; +\infty)$. მარტივი გამოთვლებით დავადგენთ, რომ მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\left[\frac{\sqrt{15}}{2}; \sqrt{46}\right]$.

11. [-7;-3] შუალედში მოცემული ფუნქცია კლებადია. [-3;1] შუალედში კი ფუნქცია მუდმივია და მისი მნიშვნელობა ტოლია 4-ის. [1; 10] შუალედში ფუნქცია ზრდადია და ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა [4; 22]. შევნიშნოთ , რომ 22 არის ფუნქციის მნიშვნელობა $x = 10$ წერტილში.

15. ცხადია მოცემული ფუნქცია ლუწია, ამიტომ საკმარისია ვიპოვოთ მისი მინიმალური და მაქსიმალური მნიშვნელობები შუალედისათვის $x \in [0; 10]$. ფუნქცია მიიღებს სახეს: $y = |2x^2 - 5x + 1| - \frac{1}{2}$. რადგანაც $f(x) = |2x^2 - 5x + 1|$ ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა 0-ის ტოლია, ხოლო მაქსიმალური მნიშვნელობა [0;10] შუალედში ტოლია 151-ის, ამიტომ მოცემული $y = |2x^2 - 5x + 1| - \frac{1}{2}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა [-0.5; 150.5] შუალედი.

16. 1). $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს, როგორც ცნობილია, წარმოადგენს ჰიპერბოლა. კოორდინატთა სათავე წარმოადგენს ამ გრაფიკის სიმეტრიის ცენტრს, ხოლო კოორდინატთა ღერძები – ასიმპტოტებს. იმისათვის, რომ სიბრტყის რაიმე წერტილში გავაელოთ ჰიპერბოლის მსგავსი ფიგურა ცხადია უნდა ვიცოდეთ ამ წერტილის კოორდინატები, სიმეტრიის ცენტრი და ასიმპტოტები. ამ შენიშვნების შემდეგ მოცემული ფუნქცია მიიღებს სახეს: $y = \frac{5x+1}{3x-1} = \frac{5}{3}\frac{3x+\frac{3}{5}}{3x-1} = \frac{5}{3}\frac{3x-1+\frac{8}{5}}{3x-1} = \frac{5}{3} + \frac{\frac{8}{5}}{3x-1} = \frac{5}{3} + \frac{\frac{8}{5}}{x-\frac{1}{3}}$ ამ ფუნქციის გრაფიკის აგება მარტივია: მისი სიმეტრიის ცენტრია $\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$ წერტილი, ხოლო ასიმპტოტებია $x = \frac{1}{3}$ და $y = \frac{5}{3}$ წრფეები.

16. 5). ცხადია მოცემული ფუნქცია ლუწია, ამიტომ ავაგოთ მისი გრაფიკი ჯერ [0;+∞) შუალედში, ხოლო შემდეგ ავიღოთ უკვე აგებულის სიმეტრიული გრაფიკი oy ღერძის მიმართ. [0;+∞) შუალედში ფუნქციის გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე: $y = \frac{2x-1}{3x+2}$. გარდავქმნათ მოცემული ფუნქცია $y = \frac{2}{3}\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\frac{x+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{x+\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} + \frac{-\frac{5}{6}}{x+\frac{2}{3}}$. როგორც ვხედავთ სიმეტრიის ცენტრია $M_0\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ წერტილი, ხოლო ასიმპტოტებია წრფეები– $x = -\frac{2}{3}, y = \frac{2}{3}$. შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან რიცხვი $-\frac{5}{6}$ უარყოფითია ამიტომ მოცემული გრაფიკი, $y = -\frac{1}{x}$ გრაფიკის ანალოგიურად განთავსებული იქნება მეორე და მეოთხე მეოთხედებში. ამ შენიშვნების შემდეგ გრაფიკი ადვილად აიგება.

17. ავაგებთ რა მოცემული ფუნქციის გრაფიკებს ვნახავთ, რომ ისინი ერთმანეთს ემთხვევიან. დავუკვირდეთ ამ გარემოებას, ვინაიდან ის დაგვეხმარება მომდევნო ამოცანების ამოხსნაში. ყველაფერი რაზედაც ზემოთ იყო ლაპარაკი მიიღება შემდეგი ტოლობის მეშვეობით $\frac{(-5x+13)+(2x-1)+|(-5x+13)-(2x-1|}{2} = \frac{12-3x+|7x-14|}{2}$. დავუკვირდეთ ტოლობის მარცხენა მხარეს და $f(x)$ ფუნქციას (იხ. ამოცანა №35).

19. მარტივად შემოწმდება, რომ როგორიც არ უნდა იყოს $f(x)$ ფუნქცია, ქვემოთ მოყვანილი ფუნქციები $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ და $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ შესაბამისად ლუწი და კენტი ფუნქციებია. ცხადია $f(x)=g(x)+h(x)$ და ჩვენს შემთხვევაში $e^x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

21. ამოცანა ამოეხსნათ ორი გზით: 1) ვიპოვოთ პარაბოლას წვეროს აბსცისა x_0, ცხადია $x_0=\frac{5}{4}$. ამ რიცხვს დაეუმატოთ და გამოვაკლოთ 2. მივიღებთ წერტილებს $x_1=\frac{13}{4};x_2=-\frac{3}{4}$. პარაბოლაზე საძებნი წერტილები იქნება $M_1\left(-\frac{3}{4};f(-\frac{3}{4})\right)$ და $M_2\left(\frac{13}{4};f(\frac{13}{4})\right)$ ე.ი. $M_1\left(-\frac{3}{4};\frac{63}{8}\right)$ და $M_2\left(\frac{13}{4};\frac{63}{8}\right)$.

2) განვიხილოთ განტოლება $2x^2-5x+3=C$. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ C-ს ისეთი მნიშვნელობა, რომ ამ განტოლების ფესვებს შორის სხვაობა იყოს 4-ის ტოლი. ვიეტის თეორემის თანახმად $x_1+x_2=\frac{5}{2}$ და გვაქვს სისტემა $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{5}{2},\\x_1-x_2=4\end{cases}$ რომლის ამონახსნია $x_1=\frac{13}{4},x_2=-\frac{3}{4}$. საბოლოოდ საძებნი წერტილებია: $M_1\left(-\frac{3}{4};\frac{63}{8}\right)$ და $M_2\left(\frac{13}{4};\frac{63}{8}\right)$.

25. ამოცანის პირობის თანახმად მოცემული ფუნქციის გრაფიკებზე უნდა ვიპოვოთ წერტილების ერთი წყვილი მაინც რომელთა შორის მანძილი 3-ის ტოლია. ცხადია ასეთი წერტილების საპოვნელად საკმარისია $(3x+3)-(2x+5)=3$ განტოლებას გააჩნდეს ამონახსნი. რადგანაც ამ განტოლების ამონახსნია $x=5$ ამიტომ საძებნი წერტილებია (5; 18) და (5; 15). შევნიშნოთ, რომ $(2x+5)-(3x+3)=3$ განტოლების განხილვის შემთხვევაში მივიღებდით წერტილებს (-1;3) და (-1;0).

28. $f(x)$ ლუწი ფუნქციაა, ასე რომ საკმარისია ვიპოვოთ გრაფიკის იმ ნაწილის ანალიზური სახე რომელიც მოთავსებულია OX ღერძის დადებით მხარეს. როგორც ვხედავთ ამ ნაწილში ფუნქცია წარმოადგენს კვადრატულ სამწევრს, რომლის წვეროს კოორდინატებია (1;0). ეს ფუნქციაა $y=(x-1)^2$. რაც შეეხება ასაგებ ფუნქციას მას ექნება შემდეგი სახე: $f(x)=(|x|-1)^2$

29. ცხადია ფუნქცია ლუწია. $M_0(0;1)$ და $M_1(3;4)$ წერტილებზე გამავალ წრფეს აქვს შემდეგი სახე $y=x+1$, ხოლო ჩვენს მიერ ასაგებ ფუნქციას კი აქვს სახე: $f(x)=|x|+1$.

31. ასაგები კვადრატული სამწევრი ვეძებოთ $y=-x^2+px+q$ სახით. რადგანაც ის გადის $M(1;7)$ წერტილში, ამიტომ როცა $x=1$, $y=7$. მივიღებთ ტოლობას $7=-1+p+q$. ე.ი. $p+q=8$. მეორეს მხრივ თუ განვიხილავთ განტოლებას $2x+5=-x^2+px+q$ მას უნდა გაჩნდეს ერთადერთი ფესვი. განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად: $x^2+(2-p)x+5-q=0$. ამ განტოლების დისკრიმინანტი უნდა იყოს ნულის ტოლი, ე.ი. $(p-2)^2-4(5-q)=0$. რადგანაც $p=8-q$ მივიღებთ $(6-q)^2-4(5-q)=0$ ან $q^2-8q+16=0$, $q=4$, $p=8-4=4$. საძებნ კვადრატულ სამწევრს აქვს სახე: $y=-x^2+4x+4$. აქვე შევნიშნოთ, რომ არსებობენ სხვა კვადრატული სამწევრებიც, რომლებიც ასევე აკმაყოფილებენ ამოცანის პირობებს.

34. ავაგოთ წრფის განტოლებები, რომლებიც გადიან A,B და B,C წერტილებზე. ცხადია ამ წრფეთა განტოლებებია: $y=x+2,y=-2x+8$. ამ ორი ფუნქციის დახმარებით აიგება

საძებნი ფუნქციის ანალიზური სახე. $f(x) = min\{x+2; -2x+8\} = \frac{x+2-2x+8-|x+2+2x-8|}{2} = \frac{10-x-3|x-2|}{2}$. ამ ბოლო აგებასთან დაკავშირებით იხილე №35 ამოცანის ამოხსნა.

35. სამართლიანია ფორმულები: 1) ორ a და b რიცხვებს შორის მაქსიმალური რიცხვი გამოითვლება ფორმულით: $max\{a; b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$; 2) ორ a და b რიცხვებს შორის მინიმალური რიცხვი გამოითვლება ფორმულით: $min\{a; b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$.

თუ მოცემულია ორი $f_1(x)$ და $g_1(x)$ ფუნქციების გრაფიკები და ჩვენ მაგალითად, ანალიზურად უნდა ჩავწეროთ ის ფუნქცია, რომელიც მიიღება ამ ორი ფუნქციის დახმარებით ისე, რომ სადაც მეტია $f_1(x)$ დავწერთ $g_1(x)$, ხოლო სადაც მეტია $g_1(x)$ დავწერთ $f_1(x)$. ცხადია ეს ფუნქცია ჩაიწერება შემდეგნაირად: $f(x) = \frac{f_1(x)+g_1(x)-|f_1(x)-g_1(x)|}{2} = \frac{x^3+x^2+x+6+\frac{6}{3x}-\left|x^3+x^2+x+6+\frac{6}{3x}\right|}{2}$.

38. მოცემული ფუნქცია $y = f(x)$ დაკავშირებულია განტოლებასთან $f(x) = 0$. მას გააჩნია ოთხი ფესვი -2; -1; 1; 2, ე.ი. ის ბიკვადრატული განტოლებაა. ასე, რომ $f(x) = (x^2-1)(x^2-4) = x^4 - 5x^2 + 4$.

39. ასაგები ფუნქცია დაკავშირებულია $y = |x|$ ფუნქციის გრაფიკთან. ავიღოთ ამ ფუნქციის გრაფიკი და გადავწიოთ მარჯვნივ ერთი ერთეულით, მივიღებთ $y = |x-1|$ ფუნქციის გრაფიკს. ამის შემდეგ ეს გრაფიკი ჩამოვწიოთ ქვევით $\frac{1}{2}$ ერთეულით მივიღებთ $y = |x-1| - \frac{1}{2}$ ფუნქციის გრაფიკს. ვინაიდან ასაგები ფუნქცია ლუწია, ამიტომ მიღებულ ფუნქციაში x შევცვალოთ $|x|$-ით და საბოლოოდ მივიღებთ $y = \left||x|-1\right| - \frac{1}{2}$.

49. რადგანაც მოცემული ფუნქციის გრაფიკი არ შეიცავს წერტილებს, რომლის აბსცისა რაციონალურია და ორდინატა ირაციონალური, ამიტომ როცა $x = 0$, y უნდა იყოს რაციონალური, როცა $x = 1$ და $x = -1$ ასევე y უნდა იყოს რაციონალური. ყოველივე აქედან გამომდინარეობს, რომ, როცა $x = 0$ მაშინ c რაციონალურია, ხოლო როცა $x = 1$, $a+b+c$ რაციონალურია, როცა $x = -1$, $a-b+c$ რაციონალურია. რადგანაც c რაციონალურია ამიტომ $a+b+c-c$ და $a-b+c-c$ რაციონალურია. მივიღეთ, რომ $a+b, a-b$ რიცხვები რაციონალურია ე.ი. მათი ჯამი და სხვაობა რაციონალურია და საბოლოოდ a, b, c რაციონალურებია.

51. დავუშვათ, რომ $f(x) = [x^2] - [x]^2$ პერიოდულია პერიოდით T. მოცემული ფუნქცია $[0; T]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრულია და $|f(x)| < T^2$. გამოვთვალოთ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები $x = n + \frac{1}{n+1}$ წერტილებში. სამართლიანია უტოლობა $f\left(n + \frac{n}{n+1}\right) = \left[\left(n + \frac{1}{n+1}\right)^2\right] - \left[n + \frac{1}{n+1}\right]^2 = \left[n^2 + \frac{2n^2}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)^2}\right] - n^2 > n$ ე.ი. $f\left(n + \frac{n}{n+1}\right) > n$. მივიღეთ წინააღმდეგობა იმ დაშვებასთან, რომ $f(x)$ შემოსაზღვრულია, აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ პერიოდული არაა.

52. დავუშვათ, რომ $g(x)$ პერიოდული ფუნქციაა T პერიოდით. ცხადია $g(x) \equiv 0$, როცა $x \in [0; 1]$. ვაჩვენოთ, რომ $g(x)$ ფუნქცია ნებისმიერ $[kT; kT+1]$ შუალედში, სადაც $k > 1$, ღებულობს ნულისაგან განსხვავებულ მნიშვნელობებს. მართლაც, აღნიშნულ შუალედში

მოიძებნება ნატურალური n რიცხვი. განვიხილოთ $n+\frac{1}{3n}$ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა. მივიღებთ $g\left(n+\frac{1}{3n}\right)=\left\{\left(n+\frac{1}{3n}\right)^2\right\}-\left\{n+\frac{1}{3n}\right\}^2=\left\{n^2+\frac{2}{3}+\frac{1}{9n^2}\right\}-\frac{1}{9n^2}=\frac{2}{3}$ ე.ი. $g\left(n+\frac{1}{3n}\right)=\frac{2}{3}\neq 0$. მეორეს მხრივ $g(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა აღნიშნულ შუალედში 0-ის ტოლი უნდა იყოს. მივიღეთ წინააღმდეგობა ე.ი. $g(x)$ ფუნქცია პერიოდული არაა.

53. $f(x)$ ფუნქციის პერიოდია $T=\frac{m}{n}$ რიცხვი. ცხადია $f(x)$ ფუნქციის პერიოდი იქნება ასევე $T_1=\frac{m}{n}\cdot n=m$ რიცხვი. განვიხილოთ ფუნქცია $H(x)=f([x])$. დავამტკიცოთ, რომ მისი პერიოდია m. სამართლიანია ტოლობები: $H(x+m)=f([x+m]=f([x]+m)=f([x])]=f([x])$ და საბოლოოდ გვექნება $H(x+m)=H(x)$ და ე.ი. $f([x])$ ფუნქცია პერიოდულია.

54. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=|sinx|$. ცხადია ის პერიოდულია და მისი პერიოდია $T=\pi$. დავუშვათ, რომ $f([x])$ ფუნქცია პერიოდულია და მისი პერიოდია T_1. თუ $[T_1]=0$, მაშინ განვიხილავთ ისეთ k ნატურალურ რიცხვს, რომლისთვისაც $[kT_1]>0$. ცხადია $H(x)=f([x])$ ფუნქციის პერიოდი იქნება kT_1. დაშვების თანახმად $f([x])$ პერიოდულია, გვაქვს ტოლობა $f([x])=H(X)=H(x+kT_1)=f([x+kT_1])$. ვთქვათ $x=0$, მივიღებთ $f([0])=f([0+kT_1])=f(n_0)$, $n_0>0$. საბოლოოდ გვექნება $f(n_0)=0$ რადგანაც $f(x)=|sinx|$ ფუნქცია ღებულობს 0-ის ტოლ მნიშვნელობებს წერტილში $x=k\pi$, ამიტომ ტოლობა $f(n_0)=0$ შეუძლებელია. $n_0\neq k\pi$ არცერთი n_0 და $k-$სთვის. ყოველივე აქედან გამომდინარეობს, რომ $sin([x])$ პერიოდული არაა.

55. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $x=sin\alpha, y=cos\beta$. რადგანაც $x\in[0;1], y\in[0;1]$ მოცემული ფუნქცია ასე გადავწეროთ: $f(x,y)=(sin\alpha+cos\alpha)(sin\beta+cos\beta)=2\sin(45^0+\alpha)\sin(45^0+\beta)$ ე.ი. $f(x,y)=2\sin(45^0+\alpha)\sin(45^0+\beta)$. ცხადია $f(x,y)$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა ტოლია 2-ის და იგი მიიღწევა მაშინ, როდესაც $\alpha=\beta=45^0$ ან რაც იგივეა როცა $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ე.ი. $max f(x,y)=2$.

56. ამოცანის პირობის თანახმად სამართლიანია ტოლობა: $f(x)-f(y)=f(x+y)-f(y+z)$ ნებისმიერი x,y,z ნამდვილი რიცხვისათვის. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა $x=0$ წერტილში ტოლია 0-ის. მართლაც წინააღმდეგ შემთხვევაში განვიხილავდით ფუნქციას $g(x)=f(x)-f(0)$. ვთქვათ ტოლობაში $f(x)-f(y)=f(x+y)-f(y+z)$ $z=-y$, მივიღებთ, რომ $f(x)-f(y)=f(x-y)$ ან $f(x)=f(y)+f(x-y)$. თუ $x=u+v$ და $y=v$ მივიღებთ $f(u+v)=f(u)+f(v)$. ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ ფუნქციას აქვს შემდეგი თვისება: $f(u+v)=f(u)+f(v)$ ნებისმიერი u და v რიცხვისათვის. ახლა ვთქვათ $u=v$, გვექნება $f(2u)=2f(u)$. ცხადია სამართლიანია შემდეგი ტოლობებიც: $f(3u)=f(2u+u)=f(2u)+f(u)=3f(u)$ და ზოგადად $f(nu)=nf(u)$ სამართლიანია ტოლობაც $f(u)=f\left(\frac{nu}{n}\right)=nf\left(\frac{u}{n}\right)$ ე.ი. $f\left(\frac{u}{n}\right)=\frac{1}{n}f(u)$ და წინა ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ: $f\left(\frac{m}{n}u\right)=\frac{m}{n}f(u)$ მაშასადამე $f(x)$ ფუნქცია გააჩნია შემდეგი თვისება: ფუნქციის ნიშნის გარეთ გადის ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი.

ვთქვათ α ირაციონალური რიცხვია. ცხადია იგი წარმოადგენს რომელიღაც რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობის ზღვარს, ე.ი $\alpha=\lim_{n\to+\infty}r_n$. თუ გამოვიყენებთ ფუნქციის უწყვეტობას,მივიღებთ: $f(\alpha,x)=f[\lim_{n\to+\infty}r_n x]=\lim_{n\to+\infty}f(r_n x)=\lim_{n\to+\infty}r_n f(x)=\alpha f(x)$ ე.ი როგორც ვხედავთ $f(x)$ ფუნქციის ნიშნის გარეთ გადის ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი. გამოვიყენებთ, რა ამ თვისებას, მივიღებთ $f(x)=f(x\cdot 1)=xf(1)=ax$. ყოველივე

ზემოთქმულიდან ვღებულობთ, რომ ამოცანის პირობაში მოცემულ მოთხოვნებს აკმაყოფილებს მხოლოდ წრფივი ფუნქცია $y = ax + b$.

57. ამოცანის პირობის თანახმად $f(x) - f(y) = f(xz) - f(yz)$. ნებისმიერი x, y, z ნამდვილი რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f(1) = 0$, რადგანაც წინააღმდეგ შემთხვევაში განვიხილავდით ფუნქციას $g(x) = f(x) - f(1)$. ამოცანის პირობაში მოცემული ტოლობიდან, თუ ჩავსვამთ y-ის ნაცვლად რიცხვ 1-ს, მივიღებთ $f(x) = f(xz) - f(z)$ ან $f(x) + f(z) = f(xz)$. ამ ტოლობაში ვიგულისხმოთ, რომ $x = z$, გვექნება $f(x^2) = 2f(x)$. ვთქვათ $z = x^2$, მივიღებთ $f(x^3) = 3f(x)$. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით შეგვიძლია დავამტკიცოთ ტოლობა: $f(x^n) = nf(x)$. თუ გამოვიყენებთ მიღებულ ტოლობას, გვექნება $f(x) = f\left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^n\right) = nf\left(\sqrt[n]{x}\right)$ ე.ი. $f\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}f(x)$ და ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ $f\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n}f(x)$. ვთქვათ α ირაციონალური რიცხვია და რაციონალურ რიცხვთა r_n მიმდევრობა კრებადია α რიცხვისაკენ. გამოვიყენებთ რა $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის თვისებას, მივიღებთ $f(x^\alpha) = f\left(x^{\lim_{n\to+\infty} r_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} f(x^{r_n}) = \lim_{n\to+\infty} r_n f(x) = \alpha f(x)$ ე.ი. $f(x^\alpha) = \alpha f(x)$. როგორც ვხედავთ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია თვისება: ფუნქციის ნიშნის გარეთ გადის არგუმენტის ნებისმიერი ხარისხის მაჩვენებელი. თუ გამოვიყენებთ ამ თვისებას, მივიღებთ $f(x) = f\left(a^{\log_a x}\right) = \log_a x f(a) = b\log_a x$ ე.ი. $f(x) = b\log_a x$. თუ გავითვალისწინებთ ამოხსნის დასაწყისში მიღებულ დაშვებას, საბოლოოდ გვექნება $f(x) = b\log_a x + c$.

58. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) = \begin{cases} ax, & \text{როცა } x \text{ რაციონალური რიცხვია} \\ bx, & \text{როცა } x \text{ ირაციონალური რიცხვია} \end{cases}$ რადგანაც x რიცხვის რაციონალურობიდან გამომდინარეობს $2x$ რაციონალურობა, ხოლო მისი ირაციონალურობიდან $2x$-ის ირაციონალურობა, ამიტომ სამართლიანია ტოლობა $f(2x) = \begin{cases} ax, & \text{როცა } x \text{ რაციონალური რიცხვია} \\ bx, & \text{როცა } x \text{ ირაციონალური რიცხვია} \end{cases}$. როგორც ვხედავთ სამართლიოანია ტოლობა $f(2x) = 2f(x)$ მაგრამ $f(x)$ არაა წრფივი ფუნქცია და პასუხია საზოგადოდ არა.

59. ამოცანის პირობის თანახმად სამართლიანია ტოლობა: $f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$. ავიღოთ ნებისმიერად წერტილები a და b. ცხადია სამართლიანია ტოლობა $f(a) + f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. მოცემული ტოლობა ნიშნავს, რომ ფუნქციის მნიშვნელობა $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ მდებარეობს მონაკვეთზე, რომლის ბოლო წერტილების კოორდინატებია $(a; f(a))$ და $(b; f(b))$. ცხადია თუ განვიხილავთ წერტილებს a და $\frac{a+b}{2}$ ან $\frac{a+b}{2}$ და b მივიღებთ, რომ მათ შუა წერტილებში ფუნქციის მნიშვნელობა მდებარეობს იგივე მონაკვეთზე.

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები განლაგებულია $(a;\ f(a))$ და $(b;\ f(b))$ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის უსასრულო რაოდენობის წერტილებში. თუ გამოვიყენებთ $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობას, მივიღებთ, რომ აღნიშნულ მონაკვეთზე მდებარეობს ფუნქციის ყველა მნიშვნელობა $[a; b]$ სეგმენტიდან. რადგანაც $[a; b]$ სეგმენტი აღებული იყო ნებისმიერად, ამიტომ მოცემული თვისების ფუნქცია წრფივია და საბოლოოდ გვექნება: $f(x) = ax + b$.

60. ამოცანის პირობის თანახმად სამართლიანია ტოლობები: $f(x) = f\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3\right) =$
$\sqrt[3]{x^2}\sqrt[9]{x^2}f\left(\sqrt[9]{x}\right) = \dots = \sqrt[3]{x^2}\sqrt[9]{x^2}\dots\sqrt[3^n]{x^2}f\left(\sqrt[3^n]{x}\right) = x^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\dots+\frac{2}{3^n}}f\left(\sqrt[3^n]{x}\right)$. ვთქვათ $x \neq 0$.
როგორც ცნობილია $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3^n]{x} = 1$ და ამასთან $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{2}{3^n}\right) = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} =$

1 თუ ტოლობაში $f(x) = x^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\dots+\frac{2}{3^n}} \cdot f\left(\sqrt[3^n]{x}\right)$ გადავალთ ზღვარზე და გამოვიყენებთ $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობას, მივიღებთ $f(x) = xf(1) = ax$, სადაც $a = f(1)$. მეორეს მხრივ ცხადია $f(0) = 0$. ყოველივე ზემოთქმულიდან მიიღება, რომ $f(x)$ ფუნქციას აქვს სახე $f(x) = ax$.

61. განვიხილოთ ფუნქცია $g(x) = \begin{cases} x, \textit{როცა } x \textit{ რაციონალური რიცხვია} \\ 0, \textit{როცა } x \textit{ ირაციონალური რიცხვია} \end{cases}$. შევამოწმოთ ამოცანის პირობა მოცემული ფუნქციისათვის. ვთქვათ x ირაციონალური რიცხვია, მაშინ $2x, 3x$ ასევე ირაციონალური რიცხვებია, ე.ი $g(x) = g(2x) = g(3x) = 0$. ყოველივე აქედან გამომდინარეობს, რომ $g(x) + g(2x) = g(3x)$. ვთქვათ ახლა x რაციონალური რიცხვია. ცხადია რიცხვები $2x$, $3x$ასევე რაციონალური რიცხვებია, ე.ი. ადგილი აქვს ტოლობებს $g(x) = x$, $g(2x) = 2x$, $g(3x) = 3x$ საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $g(x) + g(2x) = g(3x)$. საბოლოოდ გვექნება, რომ $g(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ამოცანის პირობაში მოცემულ ტოლობას, მაგრამ იგი წრფივი არაა. ამრიგად პასუხია საზოგადოდ არა.

62. ეს ამოცანა ამოიხსნება №65 ამოცანის ანალოგიურად.

63. განვიხილოთ ფუნქცია, რომელიც მოცემულია შემდეგი ფორმულით:

$$f(x) = \begin{cases} x, \textit{როცა } x \textit{ ირაციონალური რიცხვია და } x \in [0; 1] \\ 0{,}5x, \textit{როცა } x \textit{ რაციონალური რიცხვია და } x \in [0; 0{,}25] \\ 1{,}5x - 0{,}5, \textit{როცა } x \textit{ რაციონალური რიცხვია და } x \in (0{,}25; 1] \end{cases}.$$

ცხადია მოცემული ფუნქცია არცერთ შუალედში არაა მონოტონური, მიუხედავად ამისა მას გააჩნია შექცეული ფუნქცია.

65. განვიხილოთ სიმრავლეები [0; 1] სეგმენტიდან რომლებიც განსაზღვრულია ტოლობებით $E_n = \left\{\frac{m}{P_n^k} : m \in N; k \in N;\ P_n \textit{ მარტივი რიცხვია}\right\}$, $F_n = \left\{\frac{m}{k}\sqrt{P_n} : m \in N; k \in N;\ P_n \textit{ მარტივი რიცხვია}\right\}$. სადაც m, k, P_n ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ღებულობენ მნიშვნელობებს m და k ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლიდან, ხოლო P_n-მარტივ რიცხვთა სიმრავლიდან C-თი აღვნიშნოთ [0; 1] სეგმენტის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც არ მოხვდნენ არც E_n და არც F_n სიმრავლეებში, მაგალითად ასეთი რიცხვებია $\frac{m}{k}, \pi$. განვიხილოთ შემდეგი ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია: $\begin{cases} \frac{n}{n+1} : \textit{როცა } x \in E_n \\ 0; \textit{როცა } x \in C \\ -\frac{n}{n+1} \textit{ როცა } x \in F_n \end{cases}$

ცხადია $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს და პასუხია – არსებობს.

66. განვიხილოთ ფუნქციები $f(x) = sin2x - cosx$ და $g(x) = cos2x + cosx$ ვაჩვენოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის ძირითადი პერიოდია $T_1 = 2\pi$. მართლაც, ვთქვათ $sin2(x + T_1) - \cos(x + T_1) = sin2x - cosx$, საიდანაც მიიღება: $sin2(x + T_1) - \cos(x + T_1) - sin2x + cosx$ ან შესაბამისი ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ: $2\cos(2x + T_1)\, sinT_1 + 2sin\left(x + \frac{T_1}{2}\right) sin\frac{T_1}{2} = 0$ და საბოლოოდ გვაქვს შემდეგი გამოსახულება: $sin\frac{T_1}{2}\left[2\cos(2x + T_1)\, cos\frac{T_1}{2} + sin\left(x + \frac{T}{2}\right)\right] = 0$. პირობიდან $sin\frac{T_1}{2} = 0$ გამომდინარეობს, რომ $T_1 = 2\pi$. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $g(x)$ ფუნქციის ძირითადი პერიოდია 2π. განვიხილოთ ამ ორი ფუნქციის ჯამი $h(x) = f(x) + g(x) = sin2x + cos2x$. რადგანაც $h(x) = 2cos45^0\cos(45^0 - 2x)$ საკმარისია ვიპოვოთ $y = \cos(45^0 - 2x)$ ფუნქციის პერიოდი. $cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x - 2T\right) - cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 2sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x - T\right)sinT$. მიღებული ტოლობა ადასტურებს, რომ $f(x)$ ფუნქციის პერიოდია π.

67. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) = 0$, როცა x რაციონალურია და $f(x) = 1$, როცა x ირაციონალურია. ცხადია $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს, ამასთან $f(x) \neq const$.

68. ამოცანის პირობით ნებისმიერი ირაციონალური α რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას: $f(x + \alpha) = f(x)$. ვთქვათ $x = 0$. მივიღებთ $f(\alpha) = f(0)$. ე.ი. ნებისმიერი x ირაციონალური რიცხვისათვის $f(x) = f(0)$. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა x რაციონალური რიცხვია. ამოცანის პირობის თანახმად $f(x + \alpha) = f(x)$. ვთქვათ $\alpha = \beta - x$, სადაც β ირაციონალური რიცხვია, მივიღებთ $f(\beta) = f(x)$ ე.ი. ფუნქციის მნიშვნელობა რაციონალურ რიცხვებში იგივეა რაც ფუნქციის მნიშვნელობა ირაციონალურ რიცხვებში, ყოველივე აქედან ვასკვნით, რომ $f(x) = c$.

69. ვთქვათ $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$ ე.ი. $nT_1 = mT_2$. რადგანაც $f(x)$ ფუნქციის პერიოდია T_1, ამიტომ მისი პერიოდი იქნება ასევე nT, ცხადია $g(x)$ ფუნქციის პერიოდი იქნება mT_2. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) + g(x)$. ვაჩვენოთ რომ იგი პერიოდული ფუნქციაა და მისი პერიოდია $T = nT_1$. მართლაც $f(x + nT_1) + g(x + nT_1) = f(x) + g(x + mT_2) = f(x) + g(x)$ რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

70. დავუშვათ, რომ $f(x)$ ფუნქცია პერიოდულია T პერიოდით. პერიოდულობის განმარტების თანახმად $f(x + T) = f(x)$ ნებისმიერი x-თვის. $\sin(x + T) + \cos\pi(x + T) = sinx + cos\pi x$ ნებისმიერი x-თვის. ვთქვათ $x = 0$, მივიღებთ $sinxT + cos\pi T = 1$. ვთქვათ ახლა $x = -T$. მივიღებთ $-sinT + cos\pi T = 1$. როგორც ვხედავთ T აკმაყოფილებს პირობებს $sinT + cos\pi T = 1$ და $-sinT + cos\pi T = 1$. მიღებული ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $cos\pi T = 1$ ე.ი. $T = 2k_0$ რომელიღაც ნატურალური k_0 რიცხვისათვის. ვინაიდან $sinT + cos\pi T = 1$, ამიტომ გვექნება $sin2k_0 = 0$ ე.ი. $2k_0 = \pi n$ მიღებული ტოლობა კი შეუძლებელია და ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ არაა პერიოდული

71. ამოცანა შეგვიძლია ასე ჩამოვაყალიბოთ: არსებობს თუ არა წრფივ ფუნქციათა ისეთი უსასრულო რაოდენობა, რომ როგორი მუდმივი $y = m$ ფუნქციაც არ უნდა ავიღოთ ის მოცემული ფუნქციებიდან გადაკვეთს მხოლოდ ერთ ფუნქციას ისეთ წერტილში, რომლის აბსცისაც იქნება ნატურალური რიცხვი. ეს ამოცანა დაკავშირებულია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის დაყოფასთან უსასრულო რაოდენობის ქვესიმრავლეებად, რომლებსაც საერთო წერტილები არ გააჩნიათ. ერთ-ერთი ასეთი დაშლა იქნება $E_1 = \{2 \cdot 1;\ 2 \cdot 3;\ 2 \cdot 5;\ 2 \cdot 7; \cdots\}$ ე.ი. რიცხვი 2 მრავლდება ყველა კენტ რიცხვზე. $E_2 = \{2^1 \cdot 1;\ 2^2 \cdot 3;\ 2^2 \cdot 5; 2^2 \cdot 7; \cdots\}$, $E_3 = \{2^3 \cdot 1;\ 2^3 \cdot 3;\ 2^3 \cdot 5;\ 2^3 \cdot 7; \cdots\}$ და ა.შ. ცხადია ამ სიმრავლეებს საერთო ელემენტები არ გააჩნიათ. ასევე ყველა ამ სიმრავლის გაერთიანება გვაძლევს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს, რადგანაც ყველა რიცხვი ერთადერთი სახით წარმოიდგინება კენტი რიცხვისა და ორიანის რაღაც ხარისხის ნამრავლის სახით. განვიხილოთ ფუნქციები $y = 2^{k+1}x - 2^k; k \in \{o; 1; 2; 3; \cdots\}$. ცხადია განტოლებას $m = 2^{k+1}x - 2^k$ ნებისმიერი m-თვის გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $x = n \in N$.

72. შეგვიძლია დავწეროთ: $f(x) = (2k + 1)2^{x-1}$, $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$. ცხადია $m = (2k + 1)2^{x-1}$ განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი ნებისმიერი ნატურალური m რიცხვისათვის.

73. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) = sin\frac{2\pi}{17}x$. დავამტკიცოთ, რომ ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს. ვთქვათ $sin\frac{2\pi}{17}(x+T) = sin\frac{2\pi}{17}x$. ნებისმიერი x -თვის $sin\frac{2\pi}{17}(x+T) - sin\frac{2\pi}{17}x = 0$, ე.ი. $2cos\left[\frac{\pi}{17}(x+T) + \frac{\pi}{17}x\right] sin\frac{\pi T}{17} = 0$ საიდანაც გვექნება $T = 17$.

75. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციის, რომელიმე პერიოდია $T_1 \neq nT$, ცხადია არსებობს ისეთი ნატურალური n_1 რიცხვი, რომ $n_1T < T_1 < (n_1+1)T$. ცხადია n_1T წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის პერიოდს, ასე რომ $T_1 - n_1T$ ასევე წარმოადგენს პერიოდს. ვინაიდან $T_1 - n_1T > T$, მივიღებთ $T_1 > (n_1+1)T$ რაც ეწინააღმდეგება პირობას $T_1 < (n_1+1)T$. ყოველივე აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ ფუნქციის პერიოდია nT. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

76. ამოცანის პირობის თანახმად $f(x)$ ფუნქცია პერიოდულია. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ მას არ გააჩნია ძირითადი პერიოდი ე.ი. პერიოდების სიმრავლეში არ არსებობს უმცირესი რიცხვი. ამ სიტუაციაში ჩვენ მივიღებდით, რომ პერიოდების სიმრაველიდან შეგვეძლია შევარჩიოთ მიმდევრობა $T_1, T_2, T_3, \cdots, T_n, \cdots$ რომლის ზღვარი ნულის ტოლია. მართლაც თუ ამ მიმდევრობის ზღვარი არ იქნებოდა ნულის ტოლი, მაშინ განვიხილავდით სხვაობებს $T_2 - T_1$, $T_3 - T_2, \cdots$ მივიღებდით ისევ პერიოდების მიმდევრობას, რომლის ზღვარი იქნებოდა ნულის ტოლი. მარტივად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ნებისმიერი x რიცხვისათვის $T_1, T_2, T_3, \cdots, T_n, \cdots$ მიმდევრობიდან, შეგვეძლია გამოვყოთ ისეთი ქვემიმდევრობა, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას $x = n_1T_{m_1} + n_2T_{m_2} + n_3T_{m_3} + \cdots + n_kT_{m_k} \cdots$ ვინაიდან მარჯვენა მხარეში ყველა შესაკრები პერიოდია, ხოლო ფუნქცია უწყვეტია ამიტომ ადგილი აქვს ტოლობას $f(x) = f(n_1T_{m_1} + n_2T_{m_2} + n_3T_{m_3} + \cdots + n_kT_{m_k}) = \lim_{k\to+\infty} f(n_1T_{m_1} + n_2T_{m_2} + n_3T_{m_3} + \cdots + n_kT_{m_k}) = \lim_{k\to+\infty} f(0) = f(0)$. ე.ი. $f(x)$ მუდმივი ფუნქციაა. მივიღეთ წინააღმდეგობა, რაც იმას ნიშნავს, რომ $f(x)$ გააჩნია ძირითადი პერიოდი.

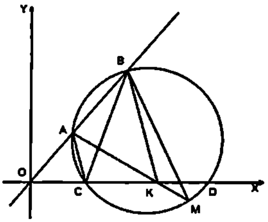
77. მოცემული ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა $y = \frac{1}{2}x - \frac{b}{2}$. პირობის ძალით $M(8;6)$ წერტილი მდებარეობს აღნიშნულ წრფეზე ე.ი. $6 = \frac{1}{2}\cdot 8 - \frac{b}{2}$ საიდანაც $b = -4$.

79. მოცემული ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა $y = \log_b x - 1$. ამოცანის პირობის თანახმად იგი გადის $M(7;6)$ წერტილში ე.ი $6 = \log_b 7 - 1$ საიდანაც მიიღება $b^7 = 7$ ან $b = \sqrt[7]{7}$.

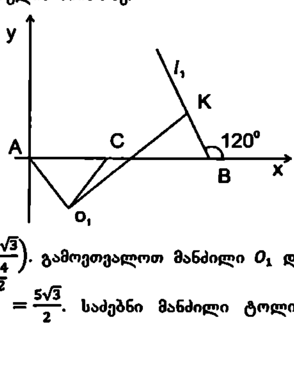
§20. პლანიმეტრია

ამოცანების ამოხსნისას გამოყენებულია შემდეგი აღნიშვნები: m_a, m_b, m_c - შესაბამისად სამკუთხედის a, b, c გვერდების მედიანებია, h_a, h_b, h_c სიმაღლეები, l_a, l_b, l_c - ბისექტრისები, R - სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი, r - სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი. r_a, r_b, r_c - შესაბამისად სამკუთხედის a, b, c გვერდებთან გარე ჩახაზული წრეწირის რადიუსები.

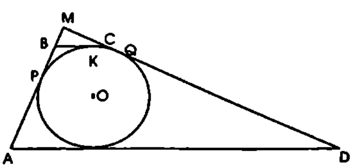
303. ცხადია A და B წერტილები მდებარეობენ $y=\frac{4}{3}x$ ფუნქციის გრაფიკზე და მათი დაშორება კოორდინატთა სათავემდე შესაბამისად ტოლია 2 და 4 სმ-ის. ვთქვათ ვიპოვეთ საძებნი C წერტილი. A, B, C წერტილებზე გავატაროთ წრეწირი. შესაძლებელია ორი შემთხვევა: ა) წრეწირი კვეთს აბსცისთა ღერძს რაღაც D წერტილში და ბ) წრეწირი ეხება აბსცისთა ღერძს. განვიხილოთ პირველი შემთხვევა: ავიღოთ წრეწირზე რაიმე M წერტილი, რომელიც მოთავსებულია CD რკალზე. M წერტილი შევაერთოთ A და B წერტილებთან. ვთქვათ AM მონაკვეთი x ღერძს კვეთს K წერტილში. $\angle AKB >$ $\angle AMB=\angle ACB$. ეს იმას ნიშნავს, რომ C წერტილი არ წარმოადგენს საძებნი კუთხის წვეროს. ე.ი. ა) ვარიანტი შეუძლებელია. მაშასადამე წრეწირი უნდა ეხებოდეს ox ღერძს. გამოვიყენებთ, რა მხების თვისებას შეგვიძლია დავწეროთ: $OC^2 = OB\cdot OA$ საიდანაც მიიღება C წერტილის კოორდინატები: $C(2\sqrt{2};0)$.



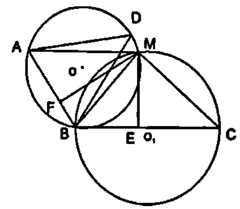
315. AB მონაკვეთი განვალაგოთ ისე, როგორც ეს მოცემულია ნახაზზე. $AC=AO_1=O_1C=1$ სმ. O_1 წერტილის კოორდინატებია $\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, l_1 წრფის განტოლებაა $y=-\sqrt{3}(x-5)$. რადგანაც $tg120^0=-\sqrt{3}$ ამიტომ O_1 წერტილზე გამავალი და l_1 წრფის მართობული წრფის განტოლება იქნება: $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$. ვიპოვოთ ამ წრფეების გადაკვეთის K წრტილის კოორდინატები. ამისათვის საკმარისია ამოვხსნათ განტოლება: $-\sqrt{3}(x-5)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$. მივიღებთ $x=\frac{17}{4}$ და $y=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ე.ი. K წერტილის კოორდინატებია $\left(\frac{17}{4};\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$. გამოვთვალოთ მანძილი O_1 და K წერტილებს შორის. $K=\sqrt{\left(\frac{17}{4}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$. საძებნი მანძილი ტოლია $\frac{5\sqrt{3}}{2}+1$.



320. ტრაპეციაში ჩახაზული წრეწირი AB, BC, CD გვერდებს ეხება შესაბამისად P, K, Q წერტილებში. O წერტილი წარმოადგენს ჩახაზული წრეწირის ცენტრს. ოთხკუთხედი $PMQO$ წარმოადგენს კვადრატს, რომლის გვერდი 3 სმ-ის ტოლია. BMC სამკუთხედის პერიმეტრი ტოლია $BM+MC+CK+KB$. რადგანაც $BK=PB$, ხოლო $KC=CQ$, ამიტომ სამკუთხედის პერიმეტრი ტოლია $PM+MQ=3+3=6$ სმ-ის.

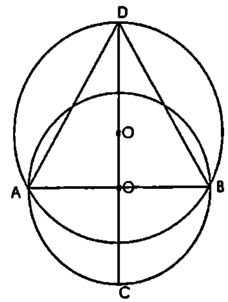


321. ამოცანის პირობის თანახმად, M წერტილი მდებარეობს ერთის მხრივ წესიერ ABD სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირისა და მეორეს მხრივ იმ წრეწირის გადაკვეთის წერტილში, რომლისთვისაც BC წარმოადგენს დიამეტრს. E და F-ით აღვნიშნოთ M წერტილიდან BC და AB მონაკვეთებზე დაშვებული სიმაღლეებისა და ამ მონაკვეთების გადაკვეთის წერტილები. ვთქვათ $\angle MBC = \alpha$. სამკუთხედ BMC-დან გვაქვს $BM = BC\cos\alpha$ ე.ი. $BM = \cos\alpha$. გამოვთვალოთ BM მონაკვეთის სიგრძე. AMB სამკუთხედიდან გვაქვს: $\angle ABM = 120^0 - \alpha$, $\angle AMB = 60^0$.

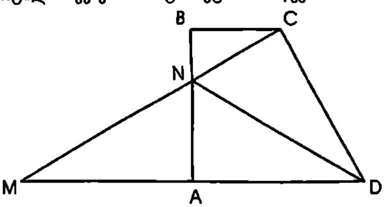


ყოველივე აქედან გამომდინარეობს, რომ $\angle MAB = 180^0 - (180^0 - \alpha) = \alpha$. სინუსების თეორემის თანახმად ABM სამკუთხედიდან გვაქვს $\frac{BM}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin 60^0}$. რადგანაც $BM = \cos\alpha$, ამიტომ გვექნება $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha$ ან $tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. საბოლოოდ კი მივიღებთ $\alpha = arctg\frac{\sqrt{3}}{2}$. BME სამკუთხედიდან მივიღებთ $ME = BM\sin\alpha$ ე.ი. $ME = \sin\alpha\cos\alpha = \frac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2\left(1+\frac{3}{4}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{7}$. განვიხილოთ ახლა ABM სამკუთხედი. სამკუთხედ MFB-დან გვექნება: $MF = BM\sin(120^0 - \alpha) = \cos\alpha\sin(120^0 - \alpha)$ და გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:
$MF = \frac{3\sqrt{3}}{7}$ სმ.

322. ამოცანის პირობის თანახმად AB მონაკვეთი წარმოადგენს იმ ორი წრეწირის ქორდებს, რომელთაგან ერთ-ერთისათვის ის ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის გვერდია, ხოლო მეორეს მხრივ მეორე წრეწირის დიამეტრია. C და D წერტილებს შორის მაქსიმალური მანძილი ტოლია ორი მონაკვეთის ჯამისა, რომელთაგან ერთ-ერთი ერთი წრეწირის რადიუსის ტოლია, ხოლო მეორე წარმოადგენს მეორე წრეწირში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის სიმაღლეს.



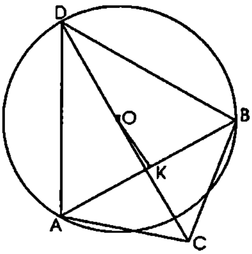
323. ტრაპეციის DA ფუძე გავაგრძელოთ და მასზე გადავზომოთ AM მონაკვეთი, რომლის სიგრძეც DA ფუძის სიგრძის ტოლია. M წერტილი შევაერთოთ ტრაპეციის C წვეროსთან. აგებული მონაკვეთი AB გვერდს გადაკვეთს იმ N წერტილში, რომლისთვისაც CND სამკუთხედის პერიმეტრი მინიმალურია. შევნიშნოთ, რომ $DN = MN$. სამკუთხედის პერიმეტრი ტოლი იქნება სიდიდის: $CD + CN + ND = 5 + MC$. სამკუთხედები NBC და MNA მსგავსია, ამიტომ $\frac{2}{6} = \frac{BN}{3-BN}$ ე.ი. $BN = \frac{3}{4}$. $NC = \sqrt{4+\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{73}}{4}$. რადგანაც $AN = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$



ამიტომ $ND = \sqrt{\frac{81}{16} + 36} = \frac{\sqrt{657}}{4}$ და NCD სამკუთხედის პერიმეტრი ტოლია $\frac{20+\sqrt{73}+\sqrt{657}}{4}$ სმ-ის.

324. სინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R}$. პროპორციის თვისების ძალით $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{a+b+c} = \frac{1}{2R}$ და ე.ი. $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{P}{2R}$. ამოცანის პირობის

მიხედვით $sinA + sinB + sinC = \frac{1}{r^2}$ და წინა პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ $\frac{P}{2R} = \frac{1}{r^2}$ საიდანაც გვაქვს $\frac{Pr}{2} = \frac{R}{r}$. რადგანაც $\frac{1}{2}Pr = S = 2$, ამიტომ $\frac{R}{r} = 2$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი ორჯერ მეტია ჩახაზული წრეწირის რადიუსზე. ცნობილია, რომ ამ შემთხვევაში სამკუთხედი ტოლგვერდაა. რადგანაც სამკუთხედის ფართობი 2 სმ^2-ის ტოლია, ამიტომ $2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. საიდანაც მარტივად გამოითვლება სამკუთხედის გვერდი, ხოლო შემდეგ მისი პერიმეტრი.



325. კოსინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს $AB^2 = 4 + 9 - 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 7$ ე.ი. $AB = \sqrt{7}$. რადგანაც D წერტილიდან AB მონაკვეთი მოჩანს 30^0-იანი კუთხით, ამიტომ D წერტილი განლაგებულია ისეთ წრეწირზე, რომლისთვისაც AB ჩახაზული წესიერი ექვსკუთხედის გვერდია. ამოცანის პირობის თანახმად უნდა ვიპოვოთ მაქსიმალური მანძილი C და D წერტილებს შორის. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ D წერტილი მდებარეობს C წერტილსა და წრეწირის ცენტრზე გამავალი წრფისა და წრეწირის გადაკვეთის წერტილში. წრეწირის ცენტრიდან AB მონაკვეთზე დავუშვათ OK მართობი. ცხადია $OK = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{2}$ სმ. ABC სამკუთხედში KC წარმოადგენს მედიანას. $KC = \frac{\sqrt{19}}{2}$ სმ. გამოსათვლელი მანძილი იანგარიშება ფორმულით $DC = OC + OD$; მაგრამ $OC^2 = OK^2 + KC^2 - 2KO \cdot KCcos\angle OKC$ ე.ი. $OC^2 = 10 + \frac{\sqrt{21}\sqrt{19}}{2}sin\angle BKC$. სამკუთხედ BKC-დან გვაქვს $BC^2 = KB^2 + KC^2 - 2KB \cdot KCcos\angle BKC$ ე.ი. $cos\angle BKC = \frac{5}{\sqrt{133}}$ საიდანაც მიიღება, რომ $sin\angle BKC = \sqrt{\frac{108}{133}}$. ყოველივე აქედან კი გვაქვს $DC = \sqrt{7} + \sqrt{19}$ სმ.

328. ამოცანის პირობის თანახმად $r_1 = r_2$, ე.ი. $\frac{S_{\Delta ABD}}{AB+AD+BD} = \frac{S_{\Delta BDC}}{BC+DC+BD}$. ვინაიდან $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ ამიტომ სამართლიანია ტოლობა $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta BDC}} = \frac{AB}{BC}$. წინა ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ $\frac{AB}{BC} = \frac{AB+AD+BD}{BC+DC+BD}$. ბისექტრისების თვისების თანახმად გვაქვს $AB \cdot DC = BC \cdot AD$. წინა ტოლობის გამარტივებით მიიღება $AB = BC$. ე.ი. სამკუთხედი ტოლფერდაა. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB^2 sin75^0$. ე.ი. $AB^2 = \frac{2}{sin75^0}$. გამოვიყენებთ რა კოსინუსების თეორემას· ვიპოვით სამკუთხედის BC გვერდის სიგრძეს და შემდეგ ჩახაზული წრეწირის რადიუსი მარტივად გამოითვლება.

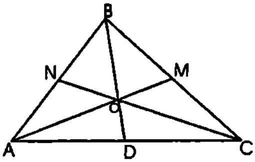
330. ამოცანის პირობის თანახმად $a^3 + b^3 + c^3 = 4abc\left(sin^2\frac{A}{2} + sin^2\frac{B}{2} + sin^2\frac{C}{2}\right)$. სამკუთხედის სამივე გვერდისათვის დავწეროთ კოსინუსების თეორემა. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$ ან რაც იგივეა $a^2 - (b-c)^2 = 2bc(1 - cosA)$, $b^2 - (a-c)^2 = 2ac(1 - cosB)$, $c^2 - (a-b)^2 = 2ab(1 - cosC)$. საიდანაც მიიღება ტოლობა $\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} + \frac{b^2-(a-c)^2}{2bc} + \frac{c^2-(a-b)^2}{2bc} = 2\left(sin^2\frac{A}{2} + sin^2\frac{B}{2} + sin^2\frac{C}{2}\right)$, გავითვალისწინებთ რა ამოცანის პირობას მივიღებთ $\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} + \frac{b^2-(a-c)^2}{2bc} + \frac{c^2-(a-b)^2}{2bc}$. ეს ტოლობა ასე გადავწეროთ: $a(b-c)^2 + b(a-c)^2 + c(a-b)^2 = 0$ საიდანაც მიიღება $a = b = c$ ე.ი. სამკუთხედი ტოლგვერდაა და მისთვის სამართლიანია ტოლობა $R : r = 2$.

331. სამკუთხედში გარე ჩახაზული წრეწირების რადიუსები გამოითვლება ფორმულებით:

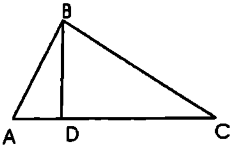
$r_1 = \frac{S}{P-a}, r_2 = \frac{S}{P-b}, r_3 = \frac{S}{P-c}$. სადაც S სამკუთხედის ფართობია, ხოლო P სამკუთხედის პერიმეტრის ნახევარი. როგორც ცნობილია სამართლიანია ტოლობა $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \sqrt[3]{abc}$ (კავშირი სამი რიცხვის საშუალო ჰარმონიულსა და საშუალო გეომეტრიულს შორის). ავიღებთ რა r_1, r_2, r_3 რიცხვებს, უტოლობა მიიღებს სახეს $\sqrt[3]{\frac{S}{p-a} \cdot \frac{S}{p-b} \cdot \frac{S}{p-c}} \ge \frac{3}{\frac{P-a}{S}+\frac{P-b}{S}+\frac{P-c}{S}} = \frac{3S}{P} = 3r = 3$ ე.ი. $\sqrt[3]{r_1 r_2 r_3} \ge 3$ ან $r_1 r_2 r_3 \ge 27$. ამოცანის პირობის თანახმად $r_1 r_2 r_3 \le 27$ და გვექნება $r_1 r_2 r_3 = 27$, $r_1 = r_2 = r_3 = 3$. ე.ი. $\frac{S}{P-a} = 3, \frac{S}{P-b} = 3, \frac{S}{P-c} = 3$ და საბოლოოდ გვექნება $a = b = c$ ე.ი. სამკუთხედი ტოლგვერდაა, მასში კი $R = 2r$ და $R = 2$ სმ-ს.

332. ვინაიდან მოცემულ სიმაღლეებს, შორის კუთხე 30^0-ის ტოლია, ამიტომ მარტივად დავასკვნით, რომ სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე კუთხეც 30^0-ია. რაც თავის მხრივ შესაძლებლობას გვაძლევს გამოვთვალოთ სამკუთხედის ორი გვერდი. ისინი ტოლია 4 სმ-ის და 6 სმ-ის. ამ შენიშვნების შემდეგ ამოცანა მარტივად ამოიხსნება.

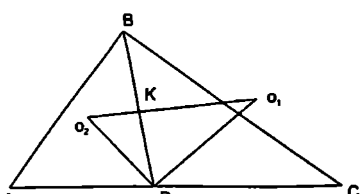
333. მედიანების გადაკვეთის წერტილი იყოს O. AM და CN წარმოადგენდნენ სამკუთხედის მედიანებს. როგორც ცნობილია გადაკვეთის წერტილით მედიანები იყოფა შეფარდებით 1 : 2, ფუძის მხრიდან. გამოვიყენებთ რა ამ თვისებას და მედიანებს შორის კუთხისათვის დავწერთ კოსინუსების თეორემას, მარტივად გამოითვლება ჯერ სამკუთხედის ორი გვერდის ნახევრები, ხოლო შემდეგ მთელი გვერდებიც. დასასრულს დავწერთ მედიანების გამოსათვლელ ორ ფორმულას და მიღებული სისტემის ამოხსნა მოგვცემს მესამე მედიანასაც.



336. AC წარმოადგენს სამკუთხედის ფუძეს. B წვეროდან დაშვებულია BD სიმაღლე. ამოცანის პირობის თანახმად $AD = z$, $DC = 3z$, $\angle ABD = x$, $\angle CBD = 2x$. მიღებული ორი მართკუთხა სამკუთხედიდან გვაქვს $BD = zctgx$, $BD = 3zctg2x$ ე.ი. $zctgx = 3zctg2x$, მივიღეთ ტრიგონომეტრიული განტოლება $tg2x = 3tgx$, ის ასე გადაიწერება $3 = \frac{2}{1-tg^2x}$, შევნიშნოთ, რომ $tgx \ne 0$. ამ განტოლების ამონახსნია $x = 30^0$. ე.ი. $\beta = 90^0$. მაშასადამე სამკუთხედი მართკუთხაა, მასზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი კი ჰიპოტენუზის ნახევრის ტოლია. რადგანაც $R = 3$ სმ-ს, ამიტომ ჰიპოტენუზა ტოლია 6 სმ-ის. ცხადია $AB = 3$ სმ-ს, $Bc = 3\sqrt{3}$ სმ-ს. სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი გამოითვლება ფორმულით $r = S/P$.



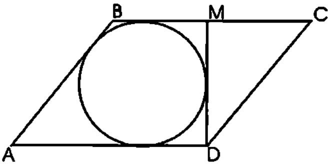
337. ABC სამკუთხედში BD ბისექტრისაა. ვინაიდან მოცემულია სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები ადვილად გამოითვლება BD ბისექტრისას სიგრძე. K წარმოადგენს BD მონაკვეთის შუა წერტილს. $BK = BD/2$. ABD და BCD სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრები შესაბამიასდ იყოს O_1 და O_2. DK წარმოადგენს O_1O_2D სამკუთხედის სიმაღლეს. სამართლიანია ტოლობა $O_1O_2 = \sqrt{O_1D^2 - KD^2} + \sqrt{O_2D^2 - KD^2}$, სადაც $O_1D = R_1$ და $O_2D = R_2$. ვიპოვით რა რადიუსებს მივიღებთ ცენტრებს შორის მანძილს.



340. როგორც ცნობილია $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{2S}{P}$, $\frac{R}{r} = \frac{abc(a+b+c)}{8S^2}$. რადგანაც $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$,

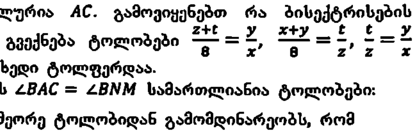
ამიტომ $\frac{R}{r} \geq \frac{3abc\sqrt[3]{abc}}{8S^2}$. ამოცანის პირობის თანახმად $abc=8$, ე.ი. $\frac{R}{r}\geq\frac{6}{S^2}$, ვინაიდან $RS^2 \leq 6r$ ამიტომ საბოლოოდ გვექნება $RS^2=6r$. ეს ტოლობა კი შესაძლებელია მაშინ, როდესაც $a=b=c$. რადგანაც $abc=8$, ამიტომ $a=b=c=2$ და სამკუთხედის პერიმეტრი ტოლია 6 სმ-ის.

341. სინუსებისა და კოსინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს $\frac{a}{2R}=sin60^0, cos60^0 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, საიდანაც მიიღება $tg60^0=\frac{abc}{R(b^2+c^2-a^2)}$ ე.ი. $abc=\sqrt{3}R(b^2+c^2-a^2)$. გამოვიყენებთ რა ამოცანის პირობაში მოცემულ ტოლობას, მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას: $\sqrt{3}R(2bc-a^2)=\sqrt{3}R(b^2+c^2-a^2)$, საიდანაც გამომდინარეობს $2bc-a^2=b^2+c^2-a^2$ ან $(b-c)^2=0$, საბოლოოდ გვექნება $b=c$, ე.ი მოცემული სამკუთხედი ტოლფერდაა. ვინაიდან წვეროსთან მდებარე კუთხე ტოლია 60^0-ის, ამიტომ დანარჩენი კუთხეებიც 60^0-ის ტოლია.



346. ამოცანის პირობის თანახმად $AB=CD=6(\sqrt{2}-1)$ სმ-ს. DM წარმოადგენს BC გვერდზე დაშვებულ სიმაღლეს. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\angle BAD=\angle BCD=x$. DMC სამკუთხედიდან გვაქვს $DM=6(\sqrt{2}-1)sinx, MC=6(\sqrt{2}-1)cosx$. ვინაიდან $ABMD$ ოთხკუთხედში ჩაიხაზება წრეწირი, ამიტომ $AB+MD=BM+AD$. თუ გავითვალისწინებთ მიღებულ ტოლობებს, გვექნება $6(\sqrt{2}-1)+6(\sqrt{2}-1)sinx=3+3-6(\sqrt{2}-1)cosx$ ან რაც იგივეა $6(\sqrt{2}-1)(sinx+cosx)=6(2-\sqrt{2})$ ე.ი. $sinx+cosx=\sqrt{2}$ და აქედან გვაქვს $x=45^0$ და პარალელოგრამის კუთხეებია $45^0, 135^0$.

349. წესიერი ექვსკუთხედის შიგნით ავიღოთ ნებისმიერი M წერტილი. შევაერთოთ ის ექვსკუთხედის წვეროებთან, მივიღებთ 6 სამკუთხედს, რომელთა ფართობების ჯამი ტოლია ექვსკუთხედის ფართობის. მივიღებთ $S=\frac{1}{2}2(h_1+h_2+h_3+h_4+h_5+h_6)$. როგორც ვხედავთ სიმაღლეების ჯამი მუდმივი სიდიდეა. ცნობილია, რომ თუ რაღაც სიდიდეების ჯამი მუდმივი სიდიდეა მაშინ მათი ნამრავლი მაქსიმალურია მაშინ როდესაც ეს სიდიდეები ერთმანეთისი ტოლია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ M წერტილი უნდა მდებარეობდეს წესიერ ექვსკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრში. რაც შეეხება გამოსათვლელ ნამრავლს ის ტოლია 27-ის.

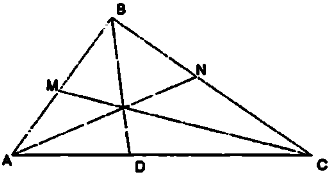


350. ამოცანის პირობის თანახმად AN და CM ბისექტრისებია და ABC სამკუთხედი მსგავსია MBN სამკუთხედის. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ ABC სამკუთხედი ტოლფერდაა. შემოვიღოთ აღნიშვნები $AM=z, MB=t, BN=y, NC=x$. შესაძლებელია ორი შემთხვევა. განვიხილოთ პირველი შემთხვევა: ეს იყოს ის ვარიანტი როცა MN პარალელურია AC. გამოვიყენებთ რა ბისექტრისების თვისებას და სამკუთხედების მსგავსებას გვექნება ტოლობები $\frac{z+t}{8}=\frac{y}{x}$, $\frac{x+y}{8}=\frac{t}{z}$, $\frac{t}{z}=\frac{y}{x}$ საიდანაც მიიღება $z+t=x+y$ ე.ი. სამკუთხედი ტოლფერდაა.

განვიხილოთ მეორე შემთხვევა: ამ დროს $\angle BAC=\angle BNM$ სამართლიანია ტოლობები: $\frac{z+t}{8}=\frac{y}{x}$, $\frac{x+y}{8}=\frac{t}{z}$, $\frac{y}{t}=\frac{z+t}{x+y}$. პირველი და მეორე ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\frac{z+t}{x+y}=\frac{yz}{xt}$, თუ გავითვალისწინებთ მესამე ტოლობას გვექნება $\frac{y}{x}=\frac{yz}{xt}$ ე.ი. $z=x$. მიღებულის გათვალისწინებით $\frac{y}{t}=\frac{yz}{xt}$ ტოლობიდან გვექნება $\frac{y}{t}=\frac{z+t}{x+y}$. ე.ი. $xt+t^2=xy+y^2$ ან $(t-y)(x+t+y)=0$ და საბოლოოდ გვექნება $t=y$ რაც ამტკიცებს, რომ სამკუთხედი

ტოლფერდაა. ყოველივე ამის შემდეგ ამოცანა მარტივად ამოიხსნება: გაიგებთ, რა ფერდის სიგრძეს იპოვით შემოხაზული წრეწირის რადიუსს.

351. ჩევის თეორემის თანახმად, თუ სამკუთხედის წვეროებიდან გამომავალი მონაკვეთები იკვეთებიან სამკუთხედის შიგნით რაღაც ერთ წერტილში და გვერდებს კვეთენ D, N, M წერტილებში (სადაც $D \in AC,\ N \in BC,\ M \in AB$), მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:
$\frac{AD}{DC} \cdot \frac{CN}{BN} \cdot \frac{BM}{AM} = 1$. გამოვიყენებთ რა ამ ტოლობას მივიღებთ: $\frac{x}{8-x} \cdot \frac{1}{5} = 1$. სადაც $NC = x$.



შევნიშნოთ, რომ $AD = DC,\ MB = 6-5 = 1,\ BN = 8-x$. მიღებული ტოლობიდან გამოითვლება BN მონაკვეთის სიგრძე, ის ტოლია $\frac{4}{3}$-ის. კოსინუსების თეორემის გამოყენებით ABC სამკუთხედში ვიპოვით, რომ $\cos\angle ABC = -\frac{11}{24}$. ასევე კოსინუსების თეორემის გამოყენებით MBN სამკუთხედში ვიპოვით MN-ის მნიშვნელობას ის ტოლია 2 სმ-ის.

355. სამკუთხედში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრებს შორის მანძილი გამოითვლება ფორმულით $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ და ამოცანის პირობის გათვალისწინებით გვექნება $d = \sqrt{49 - 14 \cdot 3} = \sqrt{7}$ სმ.

356. ამოცანის პირობის თანახმად $\sqrt{\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C} = \frac{9}{a^2+b^2+c^2}$ ე.ი. გვაქვს ტოლობა $(a^2+b^2+c^2)^2(\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C) = 81$. $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$სმ^2, ამიტომ წინა ტოლობა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ $(a^2+b^2+c^2)^2\left(\frac{\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C}{4S^2}\right) = 27$. რადგანაც $\sin A = \frac{2S}{bc}, \sin B = \frac{2S}{ac}, \sin C = \frac{2S}{ab}$, წინა ტოლობა ასე გადაიწერება $(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}\right) = 27$ საიდანაც მიიღება $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} = \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, ე.ი. $a = b = c$, ვინაიდან სამკუთხედის ფართობი ტოლია $\frac{\sqrt{3}}{2}$ სმ^2-ის, ამიტომ მივიღებთ $a = b = c = 1$ და პერიმეტრი ტოლია 3 სმ-ის.

357. ამოცანის პირობის თანახმად $\sin A\sin C + \sin A\sin B + \sin B\sin C = 3(\sin A\sin B\sin C)^{\frac{2}{3}}$ და ეს ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ $27\sin^2A = \sin B\sin C\left(\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin A}{\sin C} + 1\right)^3$ ან სხვანაირად $27\frac{\sin A}{\sin B} \cdot \frac{\sin A}{\sin C} = \left(\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin A}{\sin C} + 1\right)^3$ გამოვიყენებთ რა სინუსების თეორემას მივიღებთ: $\frac{27a^2}{bc} = \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + 1\right)^3$ ან სახვანაირად $\frac{27}{abc} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^3$ და $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \sqrt[3]{abc}$. მიღებული ტოლობა შესაძლებელია მაშინ როდესაც $a = b = c$, ე.ი. როცა სამკუთხედი ტოლგვერდაა, ასეთ სამკუთხედში კი $R : r = 2$.

358. AB გვერდზე აღებული M წერტილიდან სამკუთხედის AC და BC გვერდებზე შესაბამისად დავუშვათ MP და MQ სიმაღლეები. D წერტილი წარმოადგენს BC გვერდისა და MP მონაკვეთების გაგრძელებების გადაკვეთის წერტილს. პირობის თანახმად $MQCP$ ოთხკუთხედში ჩაიხაზება წრეწირი, ამიტომ CM წარმოადგენს ABC სამკუთხედის ბისექტრისას. ბისექტრისის თეორემის გამოყენებით მარტივად გამოითვლება $AM = \frac{35}{13}$ სმ. კოსინუსების თეორემის თანახმად $\cos\angle BAC = \frac{19}{35}$, სამკუთხედ AMP-დან გვაქვს $AP = AM\cos\angle BAC = \frac{19}{13}$ სმ-ს. ე.ი. $PC = 7 - \frac{19}{13} = \frac{72}{13}$ სმ-ს. სამკუთხედ ABC-დან კოსინუსების

თეორემის თანახმად გვაქვს $cos\angle BCA = \frac{5}{7}$. მართკუთხა სამკუთხედ DCP-დან $DC = \frac{504}{65}$ სმ-ს, $DP = \frac{72}{65}\sqrt{24}$ სმ-ს. გამოსათვლელი წრეწირის რადიუსი $r = \frac{PC+DP-DC}{2} = \frac{72\sqrt{6}-72}{65} = \frac{72(\sqrt{6}-1)}{65}$ სმ.

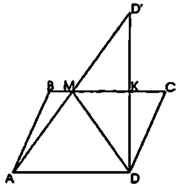
359. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\angle ABC = x$, $\angle ACB = y$ ამოცანის პირობის თანახმად $\angle BAC = 45^0$, $r = 5$ სმ. ჩახაზული წრეწირის ცენტრი აღვნიშნოთ O-თი, ხოლო ამ წერტილიდან BC გვერდზე დაშვებული სიმაღლე – OD-თი. ცხადია სამართლიანია ტოლობა $BC = r\left(ctg\frac{x}{2} + ctg\frac{y}{2}\right) = r\frac{sin\frac{x+y}{2}}{sin\frac{x}{2}sin\frac{y}{2}} = \frac{5sin\frac{135^0}{2}}{sin\frac{x}{2}cos\frac{y}{2}}$. ABC სამკუთხედის ფართობი მინიმალურია მაშინ, როდესაც მაქსიმალურია სიდიდე $sin\frac{x}{2}sin\frac{y}{2}$. სამართლიანია ტოლობები $2sin\frac{x}{2}sin\frac{y}{2} = cos\frac{x-y}{2} - cos\frac{135^0}{2}$, ვინაიდან $cos\frac{x-y}{2}$ მაქსიმალურია, როცა $x = y$ ე.ი. $AB = AC$. რადგანაც $BC = 10\frac{sin\frac{135^0}{2}}{1-cos\frac{135^0}{2}}$ და სინუსების თეორემის თანახმად $\frac{BC}{sin45^0} = 2R$ საბოლოოდ გვექნება $R = \frac{5}{2sin\frac{45^0}{2}\left(1-sin\frac{45^0}{2}\right)}$ სმ.

361. სამართლიანია ტოლობა: $\frac{1}{2}bc_1sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}cc_1sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}bcsinA$ ე.ი. $c_1 = \frac{2bc}{b+c}cos\frac{A}{2}$. რადგანაც $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$ ამიტომ გვექნება $c_1 \leq \sqrt{bc}cos\frac{A}{2}$. ანალოგიურად მივიღებთ $c_2 \leq \sqrt{ac}cos\frac{B}{2}$ და $c_3 \leq \sqrt{ab}cos\frac{C}{2}$. საბოლოოდ $c_1 + c_2 + c_3 \leq \sqrt{bc}cos\frac{A}{2} + \sqrt{ac}cos\frac{B}{2} + \sqrt{ab}cos\frac{C}{2}$. გავითვალისწინებთ, რა ამოცანის პირობაში მოცემულ ტოლობას, მივიღებთ რომ საშუალო არითმეტიკული ტოლია საშუალო გეომეტრიულის: $\frac{b+c}{2} = \sqrt{bc}$, $\frac{a+c}{2} = \sqrt{ac}$ ეს კი შესაძლებელია მაშინ როდესაც $a = b = c$ ე.ი. სამკუთხედი ტოლგვერდაა და ამიტომ $\angle A = \angle B = \angle C = 60^0$.

366. გავიხსენოთ, რომ სამკუთხედის ფართობსა და მასზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსს შორის არსებობს შემდეგი თანაფარდობა: $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R$. რადგანაც $S = \frac{1}{2}absinC = 2R^2sinAsinBsinC$, გვექნება $S^2 = 4R^4sin^2Asin^2Bsin^2C \leq 4R^4\left(\frac{sin^2A+sin^2B+sin^2C}{3}\right)^3$ ცნობილია, რომ $sin^2A + sin^2B + sin^2C \leq \frac{9}{4}$. საბოლოოდ გვექნება $S^2 \leq 4R^4\left(\frac{3}{4}\right)^3$ ან $S^2 \leq \frac{27}{16}R^4$ ე.ი. $S \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$დავუბრუნდეთ ამოცანის პირობას. $S = 9$ სმ^2, $R = 2\sqrt[4]{3}$ სმ. გვაქვს $9 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \cdot \sqrt{3}$ ე.ი. $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. მივიღეთ, რომ ზემოთ მოყვანილ უტოლობაში ადგილი აქვს ტოლობას, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ საშუალო არითმეტიკული ტოლია საშუალო გეომეტრიულის, მაშასადამე სამკუთხედი ტოლგვერდაა და ამიტომ $r = \frac{1}{2}R$ საიდანაც მიიღება, რომ $r = \sqrt[4]{3}$ სმ.

368. ვინაიდან სამკუთხედის გვერდი ორჯერ მეტია შემოხაზული წრეწირის რადიუსზე, ამიტომ სამკუთხედი მართკუთხაა და მისი ჰიპოტენუზა $2R$-ის ანუ 6 სმ-ის ტოლია. მახვილი კუთხეები აღვნიშნოთ α და β-თი. ჩახაზული წრეწირის რადიუსი იყოს r, ხოლო მისი ცენტრი O წერტილი. ჰიპოტენუზაზე დავუშვათ OD სიმაღლე. მივიღებთ ორ მართკუთხა სამკუთხედს AOD და ODB. სამართლიანია ტოლობა $AB = r\left(ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\beta}{2}\right)$. გარდაქმნით მივიღებთ $r = \frac{3\left(cos\frac{\alpha-\beta}{2} - cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = 3\sqrt{2}\left(cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. მიღებული ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ r მაქსიმალურია მაშინ, როდესაც $\alpha = \beta = 45^0$ და საბოლოოდ $r = 3(\sqrt{2} - 1)$სმ.

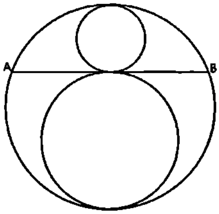
369. ამოცანის პირობის თანახმად $ABCD$ პარალელოგრამის AB გვერდზე აღებულია M წერტილი ისე, რომ AMD სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი მაქსიმალურია. ეს რადიუსი გამოითვლება ფორმულით $r = \frac{2S_{\Delta AMD}}{AM+MD+AD}$. რადგანაც M წერტილის შერჩევაზე არ არის დამოკიდებული არც AD მონაკვეთის სიგრძე და არც აღნიშნული სამკუთხედის ფართობი, ამიტომ ცხადია ეს ფართობი ყოველთვის ტოლია პარალელოგრამის ფართობის ნახევრის, ამიტომ r მაქსიმალურია როცა მინიმალურია ჯამი $AM + MD + AD$. ამ ჯამის მინიმალური მნიშვნელობის საპოვნელად



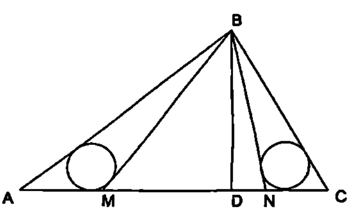
მოვიქცეთ შემდეგნაირად: პარალელოგრამის D წერტილიდან აღვმართოთ მართობი, რომლის სიგრძე ორჯერ მეტია პარალელოგრამის სიმაღლეზე. მიღებული წერტილი შევაერთოთ პარალელოგრამის A წვეროსთან. M წერტილი იქნება ამ აგებული მონაკვეთისა და პარალელოგრამის გადაკვეთის წერტილი. ამის შემდეგ ამოცანა მარტივად ამოიხსნება.

370. შემოვიღოთ აღნიშვნები $\angle BMA = \gamma$, $AM = x$. სინუსების თეორემის თანახმად ΔBMA-დან გვაქვს $\frac{x}{sin120^0} = \frac{3}{sin\gamma}$, ე.ი. $sin\gamma = \frac{3\sqrt{3}}{2x}$. მეორეს მხრივ, რადგანაც $AMCD$ ოთხკუთხედში შეიძლება ჩაიხაზოს წრეწირი, ამიტომ $x + 3 = 7 + 7 - BM$, საიდანაც მიიღება ტოლობა $x = 11 - BM$. სინუსების თეორემის თანახმად AMB სამკუთხედიდან გვექნება $\frac{BM}{sin(60^0 - \gamma)} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$. გავითვალისწინებთ რა წინა ტოლობას მივიღებთ $x = 11 - \frac{2x}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cos\gamma - \frac{1}{2}sin\gamma\right)$. ცხადია $cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{27}{4x^2}} = \frac{\sqrt{4x^2-27}}{2x}$ და საბოლოოდ გვექნება $x = 11 - \frac{\sqrt{4x^2-27}}{2x} + \frac{3}{2}$, ე.ი.$x = 3,26$ სმ.

371. ამოცანის პირობის თანახმად $\pi r_1^2 + \pi r_2^2$ მინიმალურია, ე.ი. $\pi(r_1 + r_2)^2 - 2\pi r_1 r_2$ მინიმალურია. ვინაიდან $r_1 + r_2 = R$ და ის მუდმივია, ამიტომ აღნიშნული სიდიდე მინიმალურია, როცა $r_1 r_2$ მაქსიმალურია. ეს კი მოხდება იმ შემთხვევაში, როდესაც $r_1 = r_2 = \frac{R}{2}$ ე.ი. ქორდა დიამეტრის ტოლია.



373. ამოცანის პირობის თანახმად $r_1 = r_2$. ამ ტოლობის გამოყენებით მარტივად დავამტკიცებთ, რომ $AB = BC$ ე.ი. სამკუთხედი ტოლფერდაა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $AB = x$. სამკუთხედის BD სიმაღლე აღვნიშნოთ h-ით. რადგანაც $r = \frac{S}{p}$, ამიტომ გვექნება $\frac{3h}{x+3} = 1$. ე.ი. $3h = x + 3$. ABD სამკუთხედიდან გვაქვს: $x^2 = h^2 + 9$. გავითვალისწინებთ რა მიღებულ ტოლობას, გვექნება $9h^2 - 18h + 9 = h^2 + 9$, ე.ი. $h = \frac{9}{4}$ სმ. მარტივად გამოითვლება $BM = \frac{\sqrt{37}}{4}$სმ, $AB = \frac{15}{4}$სმ, $AM = 2$სმ და საბოლოოდ მიიღება $r_1 = \frac{23-\sqrt{97}}{24}$ სმ.



374. სამკუთხედის AC გვერდზე ავიღოთ D წერტილი. განვიხილოთ ABD და DBC სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირის R_1 და R_2 რადიუსები. რადგანაც AB და BC წარმოადგენენ ამ წრეწირების ქორდებს, ამიტომ ისინი არ აღემატებიან მათ დიამეტრებს. ე.ი. $AB \leq 2R_1, BC \leq 2R_2$. საიდანაც გვექნება $2R_1 + 2R_2 \geq 3 + 5 = 8$. მივიღეთ რომ

$R_1 + R_2 \geq 4$. პირობის თანახმად $R_1 + R_2$ მნიმალურია, ე.ი. $R_1 + R_2 = 4$. ეს მოხდება მაშინ როდესაც BD იქნება სამკუთხედის სიმაღლე. ცხადია ამ შემთხვევაში AB და BC წარმოადგენენ აღნიშნული წრეწირების დიამეტრებს. ცხადია $R_1 : R_2 = 3:5$.

375. ვინაიდან AD და BK წარმოადგენენ სამკუთხედის ბისექტრისებს, ამიტომ ამ ბისექტრისებს შორის მახვილი კუთხე ტოლია $90^0 - \frac{1}{2}\angle ACB$. ამოცანის პირობის ძალით $3Rr_c = cp$. რადგანაც $R = \frac{abc}{4S}$, ხოლო $r_c = \frac{S}{p-c}$, ამიტომ გვექნება $3abc = 4pc(p-c)$ ან $3ab = 4\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}$. ე. ი. $3ab = (a+b)^2 - c^2$. საბოლოოდ გვექნება $c^2 = a^2 + b^2 - ab$.

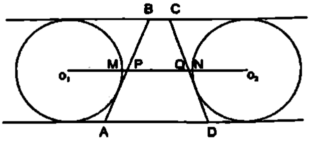
კოსინუსების თეორემის თანახმად $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$. გავითვალისწინებთ რა წინა ტოლობას მივიღებთ $cosC = 0.5$ და ე.ი. $\angle C = 60^0$. რაც შეეხება ბისექტრისებს შორის კუთხეს ის ტოლია $90^0 - 0.5 \cdot 60^0 = 60^0$.

377. ვაჩვენოთ, რომ თუ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები გამოისახება რაციონალური რიცხვებით, მაშინ მართი კუთხის ბისექტრისის სიგრძე ირაციონალური რიცხვია. მართლაც, ვთქვათ C კუთხის ბისექტისაა CD მონაკვეთი, ხოლო D წერტილიდან AC კათეტზე დაშვებული სიმაღლეა DK. გამოვიყენებთ, რა ბისექტრისის თვისებას მივიღებთ, რომ $AD = \frac{bc}{a+b}$. სადაც a, b კათეტებია ხოლო c ჰიპოტენუზაა. სამკუთხედი ABC მსგავსია ADK სამკუთხედის და ამიტომ გვექნება $AD:DK = AB:BC$. ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ DK მონაკვეთის სიგრძე გამოისახება რაციონალური რიცხვით. მართკუთხა KDC სამკუთხედიდან $DC = \frac{DK}{sin45^0}$, ე.ი. DC გამოისახება ირაციონალური რიცხვით.

378. ამოცანის პირობის თანახმად $r = 1$ სმ და ერთის მხრივ რადგანაც $S = pr$ და მეორეს მხრივ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ამიტომ გვექნება $pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ე.ი. $p = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. გამოვიყენებთ, რა კავშირს საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო გეომეტრიულს შორის, მივიღებთ $\frac{p-a+p-b+p-c}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$. რადგანაც $a+b+c = 2p$. საბოლოოდ გვექნება $\frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{p}$ ან $\frac{p^3}{27} \geq p$. საიდანაც მიიღება $p \geq 3\sqrt{3}$. რადგანაც $S = p$, ამიტომ საძებნი ფართობი არაა ნაკლები $3\sqrt{3}$ სმ^2-ზე. მარტივად შეგვიძლია გამოვთვალოთ, რომ ამ წრეწირზე შემოხაზული ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობი $3\sqrt{3}$ სმ^2-ია. ე.ი. S-ის მინიმალური მნიშვნელობაა $3\sqrt{3}$ სმ^2.

379. ABC სამკუთხედი მართკუთხაა C მართი კუთხით. შემოვიღოთ აღნიშვნები $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$. O წარმოადგენს ჩახაზული წრეწირის ცენტრს. M და N ამ ცენტრის გეგმილებია AC და BC კათეტებზე. ცხადია $S = \frac{1}{2}AC \cdot BC$. სამკუთხედ AOM და BOM-დან გვაქვს $AM = ctg\frac{\alpha}{2}$, $NB = ctg\frac{\beta}{2}$, $MC = NC = 1$. ე.ი. $S = \frac{1}{2}\left(1 + ctg\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + ctg\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\left(sin\frac{\alpha}{2}+cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(sin\frac{\beta}{2}+cos\frac{\beta}{2}\right)}{2sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}} = \frac{cos\frac{\alpha-\beta}{2}+sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{cos\frac{\alpha-\beta}{2}-sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}}{cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}$. ცხადია S მინიმალურია მაშინ როდესაც $cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ მაქსიმალურია, ე.ი. $\alpha = \beta$. მივიღეთ, რომ სამკუთხედი ტოლფერდაა და მარტივად გამოითვლება ფართობი ის ტოლია $3 + 2\sqrt{2}$ სმ^2-ის.

380. ვთქვათ საძებნი ოთხკუთხედია $ABCD$, სადაც AD არის ქვედა წრფეზე მდებარე გვერდი, ხოლო BC – მის პარალელურ წრფეზე მდებარე გვერდი. წრეწირის ცენტრები აღვნიშნოთ O_1 და O_2-ით. მათი შემაერთებელი მონაკვეთი წრეწირებს კვეთს M და N წერტილებში, ხოლო AB და CD გვერდებს P და Q წერტილებში. ცხადია $MN \geq PQ$ და ოთხკუთხედი წარმოადგენს ტრაპეციას. მისი ფართობი გამოითვლება ფორმულით: $S = \frac{BC+AD}{2}2r = r(BC+AD)$. ცხადია ფართობი

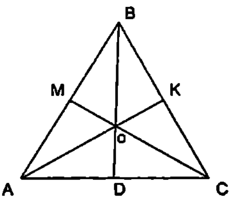


მაქსიმალურია მაშინ, როდესაც $BC + AD = 2PQ$ მაქსიმალურია. მაგრამ PQ მაქსიმალური მნიშვნელობაა MN. ეს ის შემთხვევაა, როდესაც AB პარალელურია CD-სი და მოცემული წრფეების მართობულია, ე.ი. როდესაც ოთხკუთხედი წარმოადგენს მართკუთხედს, რომლის ერთი გვერდია $a - 2r$, ხოლო მეორე გვერდი - $2r$ და საძებნი ფართობია $2r(a - 2r)$.

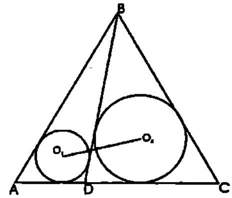
381. როგორც ცნობილია სამკუთხედისათვის სამართლიანია ტოლობა: $\frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = a^2 + b^2 + c^2$, სადაც m_a, m_b, m_c სამკუთხედის მედიანებია. მეორეს მხრივ გავითვალისწინებთ, რა ამოცანის პირობას გვექნება $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = h_a^2 + h_b^2 + h_c^2$, სადაც h_a, h_b, h_c სამკუთხედის სიმაღლეებია. ვინაიდან $m_a \geq h_a$, $m_b \geq h_b$, $m_c \geq h_c$ ამიტომ წინა ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება $m_a = h_a$, $m_b = h_b$, $m_c = h_c$ ე.ი. სამკუთხედი ტოლგვერდაა. რადგანაც სამკუთხედის ფართობი ტოლია 3 სმ^2-ის ამიტომ გვერდის სიგრძე იქნება $2\sqrt[4]{3}$ სმ და პერიმეტრი - $6\sqrt[4]{3}$ სმ.

382. სამკუთხედ BCD-დან კოსინუსების თეორემის თანახმად გვექნება ტოლობა: $BD^2 = 9 + 16 - 24cos120^0 = 37$. ე.ი. $BD = \sqrt{37}$ სმ-ს. სამკუთხედ ABD-დან მივიღებთ $37 = BD^2 = 4 + 25 - 20cos\angle BAD$, ე.ი. სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა. წრეწირი, რომელიც შეიცავს ოთხკუთხედს უნდა შეიცავდეს B და D წერტილებს. ამ წრეწირის რადიუსი მინიმალურია როცა $BD = 2R$ და $R = 0{,}5\sqrt{37}$ სმ-ს.

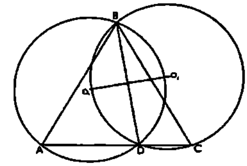
383. ავიღოთ რაიმე A წვეროს მქონე 45^0-იანი კუთხე. გავატაროთ ამ კუთხის ბისექტრისა. კუთხის ერთ-ერთ გვერდზე ავიღოთ M წერტილი და აღემართოთ ამ გვერდის მართობი, რომელიც მეორე გვერდს გადაკვეთს C წერტილში, ხოლო აღნიშნულ ბისექტრისას – O წერტილში. AC მონაკვეთი გავყოთ შუაზე N წერტილით. N და O წერტილები შევაერთოთ წრფით, რომელიც AM გვერდს კვეთს B წერტილში. ცხადია ABC სამკუთხედი არაა ტოლგვერდა, მაგრამ სხვადასხვა წვეროდან გავლებული ბისექტრისა, სიმაღლე და მედიანა ერთ წერტილში იკვეთება.



384. A წერტილიდან გავლებული სიმაღლეა AK, B წერტილიდან გაელებული ბისექტისა - BD, ხოლო C წერტილიდან გავლებული მედიანაა CM. ამოცანის პირობის თანახმად ისინი იკვეთებიან O წერტილში. კუთხე ABC აღენიშნოთ 2α-თი, AB და BC გვერდები კი -შესაბამისად $2a$ და $2b$-თი. ცხადია $BK = 2acos2\alpha, BO = \frac{2acos2\alpha}{cos\alpha}$. MBO და BOC სამკუთხედებიდან კოსინუსების თეორემის გამოყენებით გვექნება: $MO^2 = a^2 + \frac{4a^2cos^2 2\alpha}{cos^2\alpha} - 2a\frac{2acos2\alpha}{cos\alpha}cos\alpha$, $OC^2 = 4b^2 + \frac{4a^2cos^2 2\alpha}{cos^2\alpha} - 2 \cdot 2b\frac{2acos2\alpha}{cos\alpha}cos\alpha$. სამკუთხედ MBC-დან ბისექტრისების თვისების თანახმად გვექნება შემდეგი ტოლობა: $\frac{a^2}{4b^2} = \frac{a^2\cos^2\alpha + 4a^2\cos^2 2\alpha - 4a^2\cos2\alpha\cos^2\alpha}{4b^2\cos^2\alpha + 4a^2\cos^2 2\alpha - 8ab\cos2\alpha\cos^2\alpha}$, ე.ი. $(a^2 - 4b^2)cos2\alpha = (2ab - 4b^2)cos^2\alpha$ და გამარტივებით მივიღებთ $cos2\alpha = \frac{b}{a+b}$. თუ გამოვიყენებთ ამოცანის მეორე პირობას, ანალოგიურად მივიღებთ $cos2\alpha = \frac{a}{a+b}$. მიღებული ორი ტოლობიდან გვექნება $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$ და აქედან მივიღებთ $a = b$. ხოლო $cos2\alpha = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$. ყოველივე ზემოთ მოყვანილიდან მიიღება, რომ სამკუთხედი ტოლფერდაა და წვეროსთან მდებარე კუთხე ტოლია 60^0-ის, ე.ი. სამკუთხედი ტოლგვერდაა.



385. შემოვიღოთ აღნიშვნა $AD = x$, მაშინ $DC = 2 - x$. სამართლიანია ტოლობები: $S_{\Delta ABD} = \frac{\sqrt{3}}{2}x, S_{\Delta BCD} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2-x)$. კოსინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს $BD = \sqrt{x^2+4-2x}$. ABD და BCD სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირის რადიუსები გამოითვლება ფორმულებით $r_1 = \frac{x\sqrt{3}}{2+x+\sqrt{x^2-2x+4}}$ და $r_2 = \frac{\sqrt{3}(2-x)}{4-x+\sqrt{x^2-2x+4}}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{r_1+r_2}{\sqrt{3}} = \frac{x}{2+x+\sqrt{x^2-2x+4}} + \frac{2-x}{4-x+\sqrt{x^2-2x+4}} = f(x)$. გამოვთვლით რა ამ ფუნქციის მინიმუმს, თუ $x \in (0;2)$ მივიღებთ, რომ ეს მინიმუმი მიიღწევა მაშინ როდესაც $x = 1$, ეს კი ის შემთხვევაა, როდესაც BD წარმოადგენს სამკუთხედის სიმაღლეს. $O_1O_2 = \sqrt{3} - 1$ სმ.



386. D წერტილი მდებარეობს AC გვერდზე. შემოვიღოთ აღნიშვნა $AD = x$ და გამოვიყენოთ კოსინუსების თეორემა, გვექნება $BD^2 = x^2 + 2^2 - 4x\cos 60^0 = x^2 + 4 - 2x$, ე.ი. $BD = \sqrt{x^2+4-2x}$. ABD და DBC სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსები O_1D და O_2D ერთმანეთის ტოლია $O_1D = O_2D$ ვინაიდან სინუსების თეორემის თანახმად $O_1D = \frac{BD}{2\sin 60^0} = O_2D$. K-თი აღვნიშნოთ O_1O_2 ცენტრების შემაერთებელი მონაკვეთისა და BD მონაკვეთის გადაკვეთის წერტილი. ცხადია DO_1O_2 სამკუთხედი ტოლფერდაა, DK წარმოადგენს ამ სამკუთხედის სიმაღლეს და ის ტოლია BD მონაკვეთის ნახევრის (შევნიშნოთ, რომ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირს ცენტრი მდებარეობს გვერდების შუამართობების გადაკვეთის წერტილში). $O_1O_2 = 2O_1K$, მაგრამ $O_1K = \sqrt{O_1D^2 - DK^2}$. ვინაიდან $O_1D = \frac{\sqrt{x^2-2x+4}}{\sqrt{3}}$, ხოლო $DK = \frac{\sqrt{x^2-2x+4}}{2}$, ამიტომ გვექნება $O_1K = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(x-1)^2+3}}{\sqrt{3}}$. O_1O_2 მინიმალურია მაშინ როდესაც $x = 1$ სმ-ს, ე.ი. $O_1K = \frac{1}{2}$ სმ-ს და საბოლოოდ $O_1O_2 = 1$ სმ.

387. შემოვიღოთ აღნიშვნები $AC = b, BC = a, AB = c$, C მართი კუთხის წვეროა. O_1 და O_2 იყოს ACK და BCK სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრები. სინუსების თეორემის თანახმად აღნიშნული სამკუთხედებისათვის გვექნება $O_1K = R_1 = \frac{KC}{2\sin A} = \frac{c\cdot KC}{2a}$ და $O_2K = R_2 = \frac{c\cdot KC}{2b}$. სამკუთხედ O_1O_2K-დან კოსინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს $O_1O_2^{\,2} = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos(\alpha_1+\alpha_2)$, სადაც $\alpha_1 = \angle O_1KB$, ხოლო $\alpha_2 = \angle O_2KB$. რადგანაც $\alpha_1+\alpha_2 = 90^0$, ზემოთ მოყვანილი ტოლობის თანახმად გვექნება $O_1O_2^{\,2} = R_1^2 + R_2^2 = \frac{c^4KC^2}{2a^2b^2}$, ცხადია O_1O_2 მინიმალურია მაშინ, როდესაც KC წარმოადგენს ჰიპოტენუზაზე დაშვებულ სიმაღლეს და ის ტოლია $\frac{ab}{c}$. ყოველივე აქედან მიიღება, რომ $O_1O_2 = \frac{c}{2}$.

389. სამართლიანია ტოლობები $\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}$, $\frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}$. $\frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}$ საიდანაც მიიღება $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{1}{r} = 1$. როგორც ცნობილი ადგილი აქვს უტოლობას: $1 = \frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c} \ge \sqrt[3]{\frac{1}{h_ah_bh_c}}$ და $\sqrt[3]{h_ah_bh_c} \ge 3$. საიდანაც გამომდინარეობს უტოლობა: $h_ah_bh_c \ge 27$, ამოცანის პირობის თანახმა კი $h_ah_bh_c \le 27$ ე.ი. საშუალო არითმეტიკული ტოლია საშუალო გეომეტრიულის და მაშასადამე $a = b = c$, სამკუთხედი ტოლგვერდაა და ვინაიდან $r = 1$ სმ-ს, ამიტომ $a = 2\sqrt{3}$ სმ-ს, ხოლო $S = 3\sqrt{3}$ სმ^2.

390. როგორც ცნობილია $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{p}$ ამ ტოლობების გადამრავლებით მივიღებთ

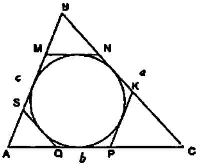
$Rr = \frac{abc}{4P} = \frac{abc}{2(a+b+c)}$. გამოვიყენებთ რა ორჯერ საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო გეომეტრიულს შორის დამოკიდებულებას მიეიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$Rr = \frac{abc}{2(a+b+c)} \leq \frac{abc}{6\sqrt[3]{abc}} = \frac{1}{6}\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq \frac{1}{6}\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$, რადგანაც $r = \frac{1}{18}$, ხოლო R-ის რიცხვითი მნიშვნელობა ტოლია $a^2+b^2+c^2$ სიდიდის რიცხვითი მნიშვნელობის, ამიტომ გვექნება $Rr = \frac{a^2+b^2+c^2}{18}$ რაც თავის მხრივ იმას ნიშნავს, რომ სამკუთხედი ტოლგვერდაა (გვერდების სიგრძეთა საშუალო არითმეტიკული ტოლია საშუალო გეომეტრიულის). რადგანაც $a = b = c$, ამოტომ $R = 2r$ და საბოლოოდ მიეიღებთ, რომ $R = 1/9$ სმ-ს.

391. ტრაპეციის ქვედა ფუძეა AD, ხოლო ზედა – BC. F წარმოადგენს CD ფერდის შუა წერტილს, E კი AB ფერდის შუაწერტილს. პირობის თანახმად $AF = DE$. O-თი აღენიშნოთ AF და DE მონაკვეთების გადაკვეთის წერტილს. რადგანაც EF პარალელურია AD ამიტომ სამკუთხედები EOF და AOD მსგავსია და ამიტომ სამართლიანია ტოლობა:

$\frac{OE}{OD} = \frac{OF}{AO}$ ან $\frac{OE+OD}{OD} = \frac{OF+AO}{AO}$. რადგანაც ამოცანის პირობის თანახმად $OE + OD = OF + AO$ ამიტომ $OD = AO$, აქედან კი თავის მხრივ მიიღება, რომ $OE = OF$. ცხადია AOE და OFD სამკუთხედები ტოლია, ამიტომ $AE = FD$. მაშასადამე ტრაპეცია ტოლფერდაა და მასზე კი შესაძლებელია წრეწირის შემოხაზვა.

392. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $MN = b_1$, $KP = c_1$, $SQ = a_1$. სამკუთხედების მსგავსების პირობების გამოყენებით მიეიღებთ: $\frac{a_1}{a} = \frac{P_{\Delta ASQ}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{P_1}{P}$, $\frac{b_1}{b} = \frac{P_{\Delta MBN}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{P_2}{P}$, $\frac{c_1}{c} = \frac{P_{\Delta SQP}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{P_3}{P}$. მიღებული ტოლობების შეკრებით მიეიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.



395. K წერტილიდან DC გვერდზე დავუშვათ KS მართობი, რომელიც გავაგრძელოთ და მასზე გადავზომოთ $KS = SQ$ მონაკვეთი. ABK სამკუთხედიდან გვაქვს $AK = 3\sqrt{3}$ სმ. რადგანაც $CS = 1$ სმ-ს და $KS = \sqrt{3}$ სმ-ს, ამიტომ $KQ = 2\sqrt{3}$ სმ-ს. AKQ სამკუთხედიდან გვაქვს $AQ^2 = 27 + 12 - 2 \cdot 2\sqrt{3}\sqrt{27}cos120^0 = 57$. ე.ი. $AQ = \sqrt{57}$. AKM სამკუთხედის პერიმეტრი მინიმალურია მაშინ, როდესაც M წერტილი წარმოადგენს AQ და DC გვერდების გადაკვეთის წერტილს, ამ პერიმეტრის მნიშვნელობა ტოლია სიდიდის $AK + KM + AM = AK + AQ = 3\sqrt{3} + \sqrt{57}$. შევნიშნოთ, რომ $KM = QM$. მაშასადამე სამკუთხედის მინიმალური პერიმეტრია $3\sqrt{3} + \sqrt{57}$ სმ.

396. ამოცანის პირობის თანახმად M წერტილითა და სამკუთხედის წვეროებით შექმნილი სამკუთხედის ფართობების ნამრავლი მაქსიმალურია. ვინაიდან ამ სამკუთხედის ფართობების ჯამი მუდმივი სიდიდეა და ის ტოლია საწყისი სამკუთხედის ფართობის, ამიტომ მოცემული სამკუთხედების ფართობები ტოლია და თითოეული მათგანი შეადგენს საწყისი სამკუთხედის ფართობის მესამედს. M წერტილი AB გვერდიდან დაშორებულია $\frac{1}{3}h_c$ მანძილით, სადაც h_c არის AB გვერდზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე. ანალოგიურად M წერტილი დანარჩენი ორი გვერდიდან დაშორებული იქნება შესაბამისად $\frac{1}{3}h_b$ და $\frac{1}{3}h_c$ მანძილებით. ცხადია ასეთი წერტილია მედიანების გადაკვეთის წერტილი. რადგანაც უდიდესი გვერდი a-ს ტოლია, ამიტომ მისადმი გავლებული მედიანა იქნება უმცირესი და მისი სიგრძე იქნება $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$. საძებნი მინიმალური მანძილი იქნება $\frac{2}{3}m_a$ ე.ი. $\frac{1}{3}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

397. დავუშვათ, რომ ტოლგვერდა სამკუთხედში შესაძლებელია სამი არატოლი რადიუსების მქონე წრეწირის ჩახაზვა. ვთქვათ $r_1 < r_2 < r_3$. ამასთან A წვეროსთან მდებარე წრეწირის

ცენტრი იყოს O_1, B წვეროსთან მდებარე - O_2 და C წვეროსთან მდებარე - O_3. A_1 და B_1-ით აღვნიშნოთ O_1 ცენტრის გეგმილები შესაბამისად AC და AB გვერდებზე. A_2 და C_1-ით აღვნიშნოთ O_3 ცენტრის გეგმილები შესაბამისად AC და BC გვერდებზე, ხოლო C_2 და B_2-ით აღვნიშნოთ O_2 ცენტრის გეგმილები შესაბამისად CB და AB გვერდებზე. O_3M იყოს O_3 წერტილიდან O_1A_1 მონაკვეთზე დაშვებული მართობი. ცხადია სამართლიანია ტოლობები: $AA_1 = r_1\sqrt{3}$, $CA_2 = r_3\sqrt{3}$, $BC_2 = r_2\sqrt{3}$, $A_1A_2 = \sqrt{(r_1 + r_3)^2 - (r_3 - r_1)^2} = 2\sqrt{r_1r_3}$, $C_1C_2 = 2\sqrt{r_2r_3}$, $B_1B_2 = 2\sqrt{r_1r_2}$. ამოცანის პირობის თანახმად $AB = BC = AC$ ე.ი. $r_1\sqrt{3} + 2\sqrt{r_1r_2} + \dot{r}_2\sqrt{3} = r_2\sqrt{3} + 2\sqrt{r_2r_3} + r_3\sqrt{3}$ და ასევე $r_1\sqrt{3} + 2\sqrt{r_1r_3} + r_3\sqrt{3} = r_2\sqrt{3} + 2\sqrt{r_2r_3} + r_3\sqrt{3}$. ამ ორი ტოლობიდან თუ მათ წარმოვადგენთ ნამრავლის სახით მივიღებთ: $(r_1 - r_3)\sqrt{3} + 2\sqrt{r_2}(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_3}) = 0$ და $(r_1 - r_2)\sqrt{3} + 2\sqrt{r_2}(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}) = 0$ და საბოლოოდ გვაქვს: $r_1 = r_2 = r_3$, ე.ი. მივიღეთ წინააღმდეგობა, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ აღნიშნული პირობებით შეუძლებელია ტოლგვერდა სამკუთხედში წრეწირის ჩახაზვა.

398. განვიხილოთ სიდიდე $OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2 + \cdots + OA_n^2$, სამართლიანია შემდეგი უტოლობები $OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2 + \cdots + OA_n^2 = \frac{1}{2}(OA_1^2 + OA_2^2) + \cdots + \frac{1}{2}(OA_n^2 + OA_1^2) \geq OA_1OA_2 + \cdots + OA_n \cdot OA_1 \geq OA_1 \cdot OA_2 sin\alpha_1 + \cdots + OA_n \cdot OA_1 sin\alpha_n = 2(S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n) = 2S = 2$. შევნიშნოთ , რომ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ არის კუთხეები შესაბამისად $OA_1, OA_2, OA_3, \dots, OA_n, O A_1$ მონაკვეთებს შორის. საბოლოოდ გვექნება $OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2 + \cdots + OA_n^2 \geq 2$. ცხადია ამ ტოლობას ადგილი ექნება მაშინ როდესაც $OA_1 = OA_2 = \cdots = OA_n$ და როდესაც $\alpha_k = 90^0$ ნებისმიერი $k = 1, 2, 3, \dots, n$-თვის. ეს კი შესაძლებელია მაშინ როდესაც $n = 4$ და O წერტილი მდებარეობს კვადრატის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილში.

399. ცხადია BD მართობულია AC, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში ABD და BDC სამკუთხედები არ იქნებოდნენ მსგავსი. მარტივად შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ $\angle BAD = \angle CBD$, $\angle ABD = \angle BCD$. რადგანაც $\angle DAB + \angle ABD + \angle DBC + \angle BCD = 180^0$ ამიტომ $\angle ABD + \angle DBC = 90^0$ და სამკუთხედი მართკუთხაა. მისი ჰიპოტენუზა ტოლია 2 სმ-ია და $R = 1$ სმ-ს.

400. პარალელოგრამის ბლაგვ ABC კუთხეში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი იყოს O წერტილი, ხოლო რადიუსი – x. მეორე ბლაგვ CDA კუთხეში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი იყოს O_1 წერტილი, ხოლო რადიუსი – y. O წერტილზე BC და AD გვერდების მართობული წრფე ამ გვერდებს კვეთს შესაბამისად M და N წერტილებში. B წერტილიდან AD გვერდზე დაშვებული სიმაღლე იყოს BS. O_1 წერტილიდან AD გვერდზე დაშვებული მართობია O_1P, ხოლო O_1 წერტილიდან MN მონაკვეთზე დაშვებული მართობია O_1Q. ცხადია სამართლიანია ტოლობები $O_1Q = PN = 3 - PD - AS - SN = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y)$ და $OQ = BS - MO - QN = \sqrt{3} - x - y$. OO_1Q სამკუთხედიდან პითაგორას თეორემის თანახმად გვაქვს $(x + y)^2 = \left[2 - \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y)\right]^2 + \left[\sqrt{3} - (x + y)\right]^2$ ე.ი. $\frac{1}{3}(x + y)^2 - \left[\frac{4}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}\right](x + y) + 7 = 0$. მიღებული განტოლებიდან გვაქვს შემდეგი ტოლობა: $x + y = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$, $x + y = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{6}$. ცხადია პირველი ფესვი უვარგისია ამიტომ $x + y = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{6}$. გვაქვს $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \left(5\sqrt{3} - 3\sqrt{6}\right)^2 - 2xy$ და $(x^2 + y^2)\pi = \left(5\sqrt{3} - 3\sqrt{6}\right)^2\pi - 2xy\pi$. ცხადია $\pi x^2 + \pi y^2$ მინიმალურია, როცა xy მაქსიმალურია. ეს კი · შესაძლებელია მაშინ, როდესაც $x = y$. საბოლოოდ გვექნება $min\{S_1 + S_2\} = \frac{\pi}{2}\left(129 - 90\sqrt{2}\right)$ სმ^2.

401. ადგილი აქვს ტოლობებს $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$. რადგანაც h_a, h_b, h_c გეომეტრიული პროგრესიის წევრებია, ამიტომ ამ ფორმულების გამოყენებით ვადგენთ, რომ სამკუთხედის გვერდებიც ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას. ეს პროგრესიაა c, cq, cq^2. ვინაიდან სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძის ჯამი მეტია მესამე გვერდზე, ამიტომ $c + cq > cq^2$. ამ უტოლობის ამონახსნია $q \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. რადგანაც q ნატურალურია, ამიტომ $q = 1$, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ სამკუთხედი ტოლგვერდაა და რადგანაც $R = 2$ სმ-ს, ამიტომ $r = 1$ სმ.

402. BM წარმოადგენს სამკუთხედის ბისექტრისას, ამიტომ მისი თვისების თანახმად გვექნება: $\frac{AB}{AM}=\frac{BC}{MC}$. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს $AM=c-z$, $MC=z$ მივიღებთ: $\frac{3}{c-z}=\frac{4}{z}$ ე.ი. $c-z=\frac{3z}{4}$, ან $AC=\frac{3}{4}z+z=\frac{7}{4}Z, CN=AN=\frac{7}{8}z$, $MN=MC-NC=z-\frac{7}{8}z=\frac{z}{8}$. $BM^2=3\cdot 4-\frac{3}{4}z^2=12-\frac{3}{4}z^2$, $4BN^2=18+32-\frac{49}{16}z^2$ და BND სამკუთხედიდან კოსინუსების თეორემის თანახმად გვექნება შემდეგი ტოლობა:

$\left(\frac{z}{8}\right)^2=12-\frac{3}{4}z^2+\frac{50}{4}-\frac{49z^2}{64}-\sqrt{3}\sqrt{12-\frac{3}{4}z^2}\sqrt{\frac{50}{4}-\frac{49}{64}z^2}$, მისი გამარტივებით მივიღებთ:

$49^2(16-z^2)=36(800-49z^2)$ ამ განტოლების ამონახსნია $z=\frac{4}{7}\sqrt{\frac{601}{13}}$, ე.ი. $AC=\frac{7}{4}\cdot z=$

$\sqrt{\frac{601}{13}}$ სმ.

403. ცხადია M წერტილი მდებარეობს წრეწირზე, რომლის ცენტრი AB გვერდის შუაწერტილია, ხოლო რადიუსი ტოლია 1 სმ-ის. უმოკლესი მანძილი C წერტილიდან M წერტილამდე ტოლია მანძილისა, რომელიც შეესაბამება მანძილს C წერტილიდან გამოსული მედიანისა და აღნიშნული წრეწირის გადაკვეთის წერტილს შორის. $MC=OC-OM$. O წერტილი არის წრეწირის ცენტრი. ვინაიდან $OM=1$, ხოლო $BC^2=4+9-12\cdot\frac{1}{2}=7$, ამიტომ $AC=\sqrt{7}$ და $OC^2=\frac{1}{4}(18+14-4)=7$. საბოლოოდ გვაქვს $MC=\sqrt{7}-1$სმ.

404. ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ M წერტილი მდებარეობს ერთის მხრივ იმ წრეწირზე, რომლის დიამეტრია სამკუთხედის AB გვერდი, ხოლო მეორეს მხრივ იმ წრეწირზე რომლისთვისაც AC გვერდი წარმოადგენს მასში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის გვერდს. O_1 იყოს პირველი წრეწირის ცენტრი, ხოლო O_1- მეორე წრეწირის ცენტრი. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\angle BAM=\alpha_1$, მარტივად გამოითვლება, რომ $AM=2cos\alpha_1$, ხოლო მეორეს მხრივ $AM=3\cos(90^0-\alpha_1)=3sin\alpha_1$. შევნიშნოთ, რომ მეორე წრეწირის რადიუსი ტოლია 3 სმ-ის. მიღებული ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $2cos\alpha_1=3sin\alpha_1$ ან $tg\alpha_1=\frac{2}{3}$. ამასთან $cos\alpha_1=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $sin\alpha_1=\frac{2}{\sqrt{13}}$. მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის ორ გვერდამდე გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:
$MM_1=AMsin\alpha_1$, $MM_2=AMsin(60^0-\alpha_1)$. მარტივად მტკიცდება, რომ $MM_1>MM_2$, ასევე დამტკიცდება, რომ $MM_1>MM_3$. ე.ი. მაქსიმალური მანძილია MM_1 და ცხადია ის ტოლია $2sin\alpha_1cos\alpha_1=\frac{12}{13}$.

405. ტრაპეციის ზედა ფუძის წვეროებიდან ქვედა ფუძეზე დავუშვათ მართობები BM და CN სიმაღლეები. პითაგორას თეორემის თანახმად გვაქვს $MD=\sqrt{9-BM^2}, AN=\sqrt{4-BM^2}$. რადგანაც $\frac{MD+AN}{2}=\frac{3}{2}$, მივიღებთ განტოლებას $\sqrt{9-BM^2}+\sqrt{4-BM^2}=3$, საიდანაც გვექნება $BM=\frac{4\sqrt{2}}{3}$, ხოლო $S=\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{2}=2\sqrt{2}$ სმ².

407. სამართლიანია ფორმულები $r_a=\frac{2S}{b+c-a}$, $r_b=\frac{2S}{a+c-b}$, $r_c=\frac{2S}{a+b-c}$, $r=\frac{2S}{a+b\_+c}$. ცნობილია ფორმულა: $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$. მარტივი გამოთვლებით გვექნება $r=2$. ვინაიდან $\frac{r_a}{r}=\frac{a+b+c}{b+c-a}$, $\frac{r_b}{r}=\frac{a+b+c}{b+c-a}$, $\frac{r_c}{r}=\frac{a+b+c}{a+c-b}$. ე.ი. მივიღეთ განტოლებათა შემდეგი სისტემა: $\begin{cases} b-c-3a=0 \\ 3a+3c-7b=0 \\ 9a+9b-11c=0 \end{cases}$, მისი ამოხსნით მიიღება, რომ სამკუთხედის გვერდებია $\frac{5}{6}b$, b, $\frac{3}{2}b$. გამოვსახავთ რა ამ გვერდების მეშვეობით სამკუთხედის ფართობს, პერიმეტრს და ჩახაზული წრეწირის რადიუსს, მივიღებთ, რომ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები: $5\sqrt{2}$ სმ, $6\sqrt{2}$ სმ, $9\sqrt{2}$ სმ.

408. მოცემული ABC სამკუთხედი მართკუთხა კოორდინატთა სიბრტყეზე ისე განვალაგოთ, რომ A წვერო ემთხვეოდეს კოორდინატთა სათავეს ე.ი. მისი კოორდინატები იყოს (9; 0), B

წვეროს კოორდინატები იყოს (6; 6), ხოლო C წვეროსი – (0; 0). მარტივად შეგვიძლია დავადგინოთ, რომ M,N,P,Q წერტილების კოორდინატები შესაბამისად იქნება: (7; 4). (8; 2), (3; 0), (6; 0). AM წრფის განტოლებაა $y=\frac{4}{7}x$, ხოლო AN წრფის – $y=\frac{1}{4}x$. BP და BQ წრფის განტოლებებია შესაბამისად $y=2x-6$ და $x=6$. გამოვთვალოთ E_1,E_2,E_3,E_4 წერტილების კოორდინატები. ცხადია E_3 და E_4 წერტილების კოორდინატებია $\left(6;\frac{24}{7}\right)$ და $\left(6;\frac{3}{2}\right)$. E_2 წერტილის კოორდინატები წარმოადგენს შემდეგი სისტემის ამონახსნს: $\begin{cases} y=2x-6 \\ y=\frac{4}{7}x \end{cases}$ ანუ $\left(\frac{21}{5};\frac{12}{5}\right)$. E_1 წერტილის კოორდინატები კი წარმოადგენს შემდეგი სისტემის ამონახსნს: $\begin{cases} y=2x-6 \\ y=\frac{1}{4}x \end{cases}$ ანუ $\left(\frac{24}{7};\frac{6}{7}\right)$.

გამოვთვალოთ $sin\angle E_2E_1E_4$. ვინაიდან $\angle E_2E_1E_4=\angle BPQ-\angle NAP$ და $tg\angle BPQ=2, tg\angle NAP=\frac{1}{4}$ ამიტომ $tg\angle E_2E_1E_4=\frac{2-\frac{1}{4}}{1+2\frac{1}{4}}=\frac{7}{6}$ და საბოლოოდ გვექნება $sin\angle E_2E_1E_4=\frac{7}{\sqrt{85}}$. $sin\angle BE_3M=cos\angle MAP$. რადგანაც $tg\angle MAP=\frac{4}{7}$ ამიტომ $sin\angle BE_3M=\frac{7}{\sqrt{65}}$ ყოველივე ამის შემდეგ გამოვიყენებთ რა ფორმულას $S_{E_1E_2E_3E_4}=\frac{1}{2}E_1E_2\cdot E_1E_4sin\angle E_2E_1E_4+\frac{1}{2}E_2E_3\cdot E_3E_4sin\angle BE_3M$ და ტოლობებს $E_1E_2=\frac{27}{35}\sqrt{5}$, $E_1E_4=\frac{9}{14}\sqrt{17}$, $E_2E_3=\frac{9}{35}\sqrt{65}$, $E_3E_4=\frac{27}{14}$ საბოლოოდ მივიღებთ: $S_{E_1E_2E_3E_4}=\frac{243}{70}$ სმ^2.

409. აღნიშნული ექსკუთხედის ფართობი მინიმალური იქნება მაშინ, როდესაც სამკუთხედის წვეროებიდან ჩამოჭრილი სამკუთხედის ფართობები იქნება მაქსიმალური. ვინაიდან აღნიშნული სამკუთხედების პერიმეტრის სიდიდეები დამოკიდებული არაა ექსკუთხედის გვერდების სიდიდეზე, ამიტომ ექსკუთხედის ფართობი მინიმალურია მაშინ, როდესაც ჩახაზული წრეწირის რადიუსი მაქსიმალურია. ეს ის შემთხვევაა, როდესაც ჩამოჭრილი სამკუთხედები ტოლფერდაა და ამ სამკუთხედებში ჩახაზული თითოეული წრეწირი ეხება დიდ სამკუთხედში ჩახაზულ წრეწირს. გამოვიყენებთ, რა კოსინუსების თეორემას გამოვთვლით მოცემული სამკუთხედის კუთხეებს, რის შემდეგაც მარტივად შეგვიძლია გამოვთვალოთ ჩამოჭრილი ტოლფერდა სამკუთხედების გვერდები და სიმაღლეები. ამის შემდეგ ძნელი არაა ჩამოჭრილი სამკუთხედების ფართობთა მაქსიმალური ჯამისა და ექსკუთხედის მინიმალური ფართობის გამოთვლა.

410. გავატაროთ ოთხკუთხედის AC დიაგონალი. მისი გადაკვეთის წერტილი BD დიაგონალთან აღვნიშნოთ O-თი. გამოვიყენოთ ჩევის თეორემა ABC და ACD სამკუთხედებისათვის. გვექნება: $\frac{AO}{OC}\cdot\frac{CM_1}{BM_1}\cdot\frac{BN_1}{AN_1}=1$, $\frac{AN_2}{DN_2}\cdot\frac{DM_2}{CM_2}\cdot\frac{CO}{OA}=1$ და ამ ტოლობების გადამრავლებით მივიღებთ $\frac{CM_1}{BM_1}\cdot\frac{BN_1}{AN_1}\cdot\frac{AN_2}{DN_2}\cdot\frac{DM_2}{CM_2}=1$

411. გამოვიკვლიოთ სიდიდე zyz. თუ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსს აღვნიშნავთ r-ით. მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს: $y=rctg\frac{A}{2}$, $x=rctg\frac{B}{2}$, $z=rctg\frac{C}{2}$ და სამართლიანია ტოლობა $xyz=r^3ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}=r^3\left(ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}\right)=r^2\left(rctg\frac{A}{2}+rctg\frac{B}{2}+rctg\frac{C}{2}\right)=r^2P$, სადაც P პერიმეტრის ნახევრის ტოლია. ცნობილია, რომ $rP=S$ და საბოლოოდ გვექნება $xyz=rS$. ვინაიდან $abc=4RS$ ამიტომ ამოცანის პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ: $\frac{abc}{xyz}=\frac{4RS}{rS}=8$. ე.ი. $R=2r$. მიღებული ტოლობა სამართლიანია მხოლოდ ტოლგვერდა სამკუთხედისათვის რადგანაც სამკუთხედის ფართობი ტოლია $S=\frac{\sqrt{3}}{4}$ სმ^2-ამიტომ სამკუთხედის გვერდი ტოლია 1-სმ-ის და პერიმეტრის სიდიდეა 3 სმ.

412. მოცემული მართკუთხა სამკუთხედის AC და BC კათეტები შესაბამისად აღვნიშნოთ a და b-თი, ხოლო ჰიპოტენუზა - $2c$-თი. CD იყოს მართი კუთხიდან გამოსული მედიანა. პირობის თანახმად ACD სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის r_1 რადიუსის შეფარდება CBD სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის r_2 რადიუსთან ტოლია $4:3$. ვინაიდან $r_1=\frac{2S_{\triangle ACD}}{a+c+c}$ და $r_2=\frac{2S_{\triangle CBD}}{b+c+c}$ პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ $\frac{r_1}{r_2}=\frac{b+2c}{a+2c}=\frac{4}{3}$. ე.ი. $3b-4a=2c$ ეს

ტოლობა ავიყვანოთ კვადრატში, გვექნება: $9b^2-24ab+16a^2=4c^2$. რადგანაც $4c^2=a^2+b^2$, ამიტომ გვექნება: $8b^2-24ab+15a^2=0$. ეს ტოლობა გავყოთ a^2-ზე და შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{b}{a}=x$. $8x^2-24x+15=0$ განტოლების ფესვებია $x=\frac{12\pm\sqrt{144-120}}{8}$, ე.ი. $x=\frac{12\pm\sqrt{24}}{8}$ და $x_1=\frac{6-\sqrt6}{4}$; $x_2=\frac{6+\sqrt6}{4}$. პირობიდან ჩანს, რომ $b>a$ ე.ი. $x>1$, რაც იმას

ნიშნავს, რომ $\frac{b}{a}=\frac{6+\sqrt6}{4}$. რადგანაც $\frac{b}{a}=tg\angle CAB$ ამიტომ ერთ-ერთი მახვილი კუთხის სიდიდე ტოლია $arctg\frac{6+\sqrt6}{4}$.

413. შემოვიღოთ აღნიშვნები $AB=b, BC=a, BD=l$. AC ჰიპოტენუზაა, BD მართი კუთხის ბისექტრისა. თუ $DC=x$ მაშინ ბისექტრისის თვისების თანახმად გვექნება $AD=\frac{b}{a}x$. როგორც ცნობილია ჩახაზული წრეწირის რადიუსი გამოითვლება ფორმულით $r=\frac{S}{p}$, სადაც P ნახევარპერიმეტრია, ხოლო S სამკუთხედის ფართობი. ABD და BCD სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირის რადიუსებისათვის გვაქვს შესაბამისად შემდეგი ტოლობები: $r_1=\frac{bl\sin45^0}{b+l+\frac{b}{a}x}$, $r_2=\frac{al\sin45^0}{a+l+x}$. ამოცანის პირობის თანახმად: $r_1:r_2=3:4$. ე.ი. $3\quad 4=\frac{bl\sin45^0}{b+l+\frac{b}{a}x}:\frac{al\sin45^0}{a+l+x}$. საიდანაც მიიღება $x=\frac{3al-4bl-ab}{b}$. სინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს: $\sin\alpha=\frac{l}{\sqrt2x}$, ამიტომ $\sqrt2\sin\alpha\frac{3a}{b}-4\sqrt2\sin\alpha-\sqrt2\frac{a}{l}\sin\alpha=1$. სამართლიანია ტოლობები: $ctg\alpha=\frac{a}{b}$; $\frac{a}{l}=\frac{\sin(45^0-\alpha)}{\sin\alpha}$ ამ უკანასკნელი ტოლობების გამოყენებით წინა ტოლობა ასე გადაიწერება $3\sqrt2\cos\alpha-4\sqrt2\sin\alpha-\sqrt2\cos(45^0-\alpha)=1$. მიღებული განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას შემდეგი სახისაა: $\alpha=\arcsin\frac{1-4\sqrt2+\sqrt{945-268\sqrt2}}{52-2\sqrt2}$.

414. სამკუთხედის C წვეროდან AB გვერდზე დაშვებული სიმაღლე და ბისექტრისა შესაბამისად ტოლი იყოს CD და CM, ხოლო სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი აღვნიშნოთ O-თი. ცენტრიდან ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე აღვნიშნოთ OE-თი. ამოცანის პირობის თანახმად $OC:OM=5;3$. ე.ი. $CM:OM=8:3$. ვინაიდან სამკუთხედები MOE და MCD მსგავსია, ამიტომ $CD;OE=8:3$. $OE=r$ და გვექნება $CD=\frac{8}{3}r$, სადაც r ჩახაზული წრეწირის რადიუსია. რადგანაც $S=\frac{1}{2}AB\cdot CD=5\cdot CD=\frac{40}{3}r$, ამიტომ გვექნება $\frac{S}{r}=\frac{40}{3}$. მაგრამ $\frac{S}{r}=P$, სადაც P პერიმეტრის ნახევარია. ყოველივე ზემოთქმულიდან მიიღება $P=\frac{40}{3}$ და სამკუთხედის პერიმეტრია $\frac{80}{3}$ სმ.

415. მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხე იყოს C, ხოლო ჩახაზული წრეწირის ცენტრი – O. ვინაიდან O წერტილი მდებარეობს ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილში, ამიტომ $\angle AOB=135^0$ და კოსინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს: $AB^2=1+2-2\sqrt2\cos135^0=5$. ე.ი. $AB=\sqrt5$. სინუსების თეორემის თანახმად: $\frac{1}{\sin\angle ABO}=\frac{\sqrt5}{\sin135^0}$. $\sin\angle ABO=\frac{\sqrt{10}}{10}$, ცხადია $\cos\angle ABO=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ და საბოლოოდ მივიღებთ: $\sin\angle ABC=2\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{3}{5}$, $\cos\angle ABC=\frac{4}{5}$. სამკუთხედების კათეტები ტოლია $\frac{3\sqrt5}{5}$ და $\frac{4\sqrt5}{5}$ და სამკუთხედის ფართობია $\frac{6}{5}$ სმ^2.

416. ამოცანის პირობის თანახმად ტრაპეცია ტოლფერდაა $AB=CD$. ქვედა ფუძეა AD, ხოლო ზედა – BC. M და N არის ზედა და ქვედა ფუძის შუა წერტილები. O არის შემოხაზული წრეწირის ცენტრი. ცხადია ის მდებარეობს MN მონაკვეთზე. შემოვიღოთ აღნიშვნები $\angle MOC=\alpha, \angle COD=x$, $OC=R=OD$. სამკუთხედ MOC-დან გვაქვს $OM=R\cos\alpha, MC=R\sin\alpha$. სამკუთხედ NOD-დან გვაქვს $ON=R\cos[180^0-(\alpha+x)], OD=R\sin[180^0-(\alpha+x)]$. ამოცანის პირობის თანახმად $MN=2$ სმ-ს, ხოლო $MC+ND=\frac{S}{h}=\frac{3}{2}$.

მიღებული ორი ტოლობა, წინა ტოლობების გამოყენებით გვაძლევს: $R[cos\alpha + cos(180^0 - \alpha - x)] = 2$ და $R[sin\alpha + sin(180^0 - \alpha - x)] = \frac{3}{2}$. ამ ორი ტოლობის შეფარდებით მიიღება $\frac{cos\alpha - cos(x+\alpha)}{sin\alpha + sin(x+\alpha)} = \frac{4}{3}$, ე.ი. $tg\frac{x}{2} = \frac{4}{3}$ საიდანაც მიიღება $x = 2arctg\frac{4}{3}$.

417. სამკუთხედში BD სიმაღლეა, BM მედიანა, ხოლო BN ბისექტრისა. $\angle CBD = \alpha$. ვთქვათ $BC = 1$. სამკუთხედ BCD-დან გვექნება $DC = sin\alpha, BD = cos\alpha, AB = \frac{cos\alpha}{cos3\alpha}, BM = 1$. რადგანაც BD არის MBC სამკუთხედში სიმაღლეც ბისექტრისაც, ამიტომ $MD = DC = sin\alpha$. ეინაიდან BM წარმოადგენს ბისექტრისას ABC სამკუთხედში, ამიტომ $AB{:}\,BC = AM{:}\,MC$. ე.ი. $AM = \frac{sin2\alpha}{sin3\alpha}$. AN წარმოადგენს მედიანას ABC სამკუთხედში, ამიტომ $AN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(AM + MC) = \frac{sin2\alpha + 2sin\alpha cos3\alpha}{2cos3\alpha}$. ცხადია $MN = Nc - 2sin\alpha = AN - 2sin\alpha = \frac{sin2\alpha - 2sin\alpha cos3\alpha}{2cos3\alpha}$. სამკუთხედ ABM-ში BN ბისექტრისაა. სამართლიანია ტოლობა $AB{:}\,BM = AN{:}\,NM$. ე.ი. $\frac{cos\alpha}{cos3\alpha} = \frac{sin2\alpha + 2sin\alpha cos3\alpha}{sin2\alpha - 2sin\alpha cos3\alpha}$ ან $\frac{cos\alpha}{cos3\alpha} = \frac{cos\alpha + cos3\alpha}{cos\alpha - cos3\alpha}$. მივიღეთ შემდეგი განტოლება: $8cos^4\alpha - 8cos^2\alpha + 1 = 0$. მისი ამონახსნია $cos\alpha = \frac{\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}{2}$, საიდანაც გვაქვს: $cos\alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} < cos30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ აღნიშნული ფესვი უვარგისია. მივიღეთ $cos\alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ე.ი. $\alpha = \frac{45^0}{2}$. დარჩენი კუთხეების სიდიდეები მარტივად გამოითვლება. შევნიშნოთ, რომ მიღებული მონაცემებით სამკუთხედი მართკუთხაა.

418. დავუშვათ, რომ ამოცანის პირობაში მოცემული პირობების შესაბამისი სამკუთხედი არსებობს. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $BD = h$ სიმაღლეა, $AD = x, \angle ABD = \alpha_1, \angle DBC = \alpha_2$. ცხადია სამართლიანია ტოლობები: $tg\alpha_1 = \frac{x}{h}$, $tg\alpha_2 = \frac{h-x}{h}$. შევნიშნოთ, რომ პირობის თანახმად $AC = BD = h$ ე.ი. $DC = h - x$. რადგანაც $tg(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{tg\alpha_1 + tg\alpha_2}{1 - tg\alpha_1 tg\alpha_2}$ ამიტომ გვექნება: $\sqrt{3} = \frac{\frac{x}{h} + \frac{h-x}{h}}{1 - \frac{x}{h} + \frac{x^2}{h^2}} = \frac{h^2}{h^2 - xh + x^2}$. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) = \frac{h^2}{h^2 - xh + x^2}$. ცხადია მისი მაქსიმალური მნიშვნელობა მიიღწევა მაშინ როდესაც $h^2 - xh + x^2$ სამწევრი მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას, ეს კი ხდება $x = \frac{h}{2}$ წერტილში და ის ტოლია $\frac{4}{3}$-ის. ყოველივე აქედან გამომდინარეობს, რომ ტოლობა $\sqrt{3} = \frac{h^2}{h^2 - xh + x^2}$ შეუძლებელია, რადგანაც $\sqrt{3} > \frac{4}{3}$. ე.ი. ასეთი სამკუთხედი არ არსებობს.

419. ვთქვათ სამკუთხედის დანარჩენი ორი გვერდი ტოლია b და c. სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით $S = \frac{1}{2}bcsin60^0 = \frac{bc\sqrt{3}}{4}$. ამოცანის პირობის თანახმად $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, ამიტომ მივიღებთ $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{bc\sqrt{3}}{4}$. ე.ი. $a^2 = bc$. დავწეროთ კოსინუსების თეორემა a გვერდის მიმართ. მივიღებთ: $a^2 = b^2 + c^2 - bc$. რადგანაც $a^2 = bc$ გვექნება $bc = b^2 + c^2 - bc$ ან $(b - c)^2 = 0$ ან რაც იგივეა $b = c$. რადგანაც $a^2 = bc = b^2$ საბოლოოდ გვექნება $a = b = c$ ე.ი. სამკუთხედი ტოლგვერდაა და მისი პერიმეტრი იქნება $3a$.

420. (x_1, x_2) და (y_1, y_2) წერტილებს შორის მანძილი გამოითვლება ფორმულით: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. სამართლიანია ტოლობები: $AB = \sqrt{(3-1)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{20}$, $AC = \sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{20}$, $BC = \sqrt{(5-3)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{40}$. როგორც ვხედავთ სამკუთხედი მართკუთხაა. $(\sqrt{20})^2 + (\sqrt{20})^2 = (\sqrt{40})^2$. BC ჰიპოტენუზაა. შემოხაზული წრეწირის ცენტრი მდებარეობს BC მონაკვეთის შუა წერტილში, ე.ი. ამ წერტილის კოორდინატები წარმოადგენენ B და C წერტილების კოორდინატების საშუალო არითმეტიკულს, ე.ი. $\left(\frac{3+5}{2}; \frac{7+1}{2}\right) = (4; 4)$. მივიღეთ, რომ O წერტილის კოორდინატებია $(4;\ 4)$.

421. თუ სამკუთხედის ორი წვერო მდებარეობს კვადრატის რომელიმე ერთ გვერდზე, მაშინ ჩახაზული მაქსიმალური ფართობის მქონე სამკუთხედის ფართობი ცხადია ტოლია $\frac{1}{2}$ სმ²-ის. ეს ის შემთხვევაა, როცა მესამე წვერო მდებარეობს კვადრატის მოცემული გვერდის პარალელურ გვერდზე. ვთქვათ ახლა P და Q წერტილები მდებარეობენ კვადრატის მოსაზღვრე გვერდებზე. ასეთ შემთხვევაში მაქსიმალური ფართობის მქონე სამკუთხედის წვერო მდებარეობს კვადრატის წვეროში. გამოვთვალოთ ამ სამკუთხედის ფართობი. ვთქვათ P წერტილი მდებარეობს კვადრატის AB გვერდზე, ხოლო Q წერტილი – BC გვერდზე. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $AP=x, BQ=y, BP=1-x,\ QC=1-y$. გვაქვს $S_{\Delta PQD}=S_{ABCD}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y(1-x)-\frac{1}{2}(1-y)=\frac{x(y-1)+1}{2}$. რადგანაც $y-1\le 0$, ამიტომ $S_{\Delta PQD}\le\frac{1}{2}$. ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ საძებნი ფართობი ტოლია $\frac{1}{2}$ სმ²-ის.

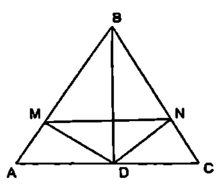
422. როგორც ცნობილია სამართლიანია ფორმულა $R^2-2Rr\ge 0$. სადაც R, r შესაბამისად შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსებია. რადგანაც $R=\frac{abc}{4S}$, ამიტომ $\frac{a^2b^2c^2}{16S^2}\ge 2Rr$, ფორმულიდან $r=\frac{S}{p}=\frac{2S}{a+b+c}$ გამოვიყენებთ რა სინუსების თეორემას: $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin 2C$ მივიღებთ: $r=\frac{S}{R(\sin A+\sin B+\sin C)}$ ე.ი. $Rr=\frac{S}{\sin A+\sin B+\sin C}$ და წინა ტოლობის გამოყენებით გვექნება: $\frac{a^2b^2c^2}{16S^2}\ge\frac{2S}{\sin A+\sin B+\sin C}$, გამოვიყენოთ კავშირი საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო გეომეტრიულს შორის $\frac{a^6+b^6+c^6}{3}\ge a^2b^2c^2$ გვექნება: $\frac{a^6+b^6+c^6}{3}\ge\frac{32S^3}{\sin A+\sin B+\sin C}$. ამოცანის პირობის თანახმად ეს თანაფარდობა გვაძლევს, რომ $a=b=c$. რადგანაც $p=3$ სმ-ს, ამიტომ $a=1$ სმ-ს და საბოლოოდ გვექნება $S=\frac{\sqrt{3}}{4}$ სმ².

423. ამოცანის პირობის თანახმად $\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}<\frac{1}{h_c^2}$. ეს უტოლობა გავამრავლოთ $4S^2$-ზე, სადაც S სამკუთხედის ფართობია, მივიღებთ $\frac{4S^2}{h_a^2}+\frac{4S^2}{h_b^2}<\frac{4S^2}{h_c^2}$. ვინაიდან $4S^2=h_a^2a^2$, $4S^2=h_b^2b^2$, $4S^2=hc^2$. ამიტომ მივიღებთ $a^2+b^2<c^2$, მიღებული უტოლობა ნიშნავს, რომ სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა.

424. ამოცანის პირობის თანახმად $h_a=\frac{1}{2}(h_b+h_c)$ ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ $2S$-ზე, მივიღებთ $\frac{h_a}{2S}=\frac{1}{2}\left(\frac{h_b}{2S}+\frac{h_c}{2S}\right)$. რადგანაც $\frac{h_a}{2S}=\frac{1}{a}$, $\frac{h_b}{2S}=\frac{1}{b}$, $\frac{h_c}{2S}=\frac{1}{c}$, ამიტომ გვექნება $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

426. ვთქვათ AC სამკუთხედის ფუძეა, ხოლო AM და CN ბისექტრისებია. ამოცანის პირობის თანახმად MN პარალელურია AC. ბისექტრისების თვისების თანახმად ადგილი აქვს ტოლობებს: $\frac{BC}{AC}=\frac{BN}{AN}$, $\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{MC}$. გამოვიყენებთ, რა ზემოთ მოყვანილ ტოლობებს მივიღებთ: $\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{AC}$, ე.ი. $AB=BC$.

431. ΔABD-დან გვაქვს: $BD^2=MB\cdot AB$, რადგანაც $\angle BDA=\angle BMD=90^0$. ანალოგიურად ΔBDC-დან გვაქვს $BD^2=BN\cdot BC$ ე.ი. $MB\cdot AB=BN\cdot BC$. ამოცანის პირობის თანახმად MN პარალელურია AC, რაც იმას ნიშნავს, რომ სამკუთხედები MBN და ABC მსგავსია და ამიტომ $AB:MB=BC:BN$ საიდანაც $MB=\frac{AB\cdot BN}{BC}$. გავითვალისწინებთ რა ერთ-ერთ წინა ტოლობას მივიღებთ: $\frac{AB\cdot BN}{BC}\cdot AB=BN\cdot BC$ ე.ი.



$AB^2=BC^2$ რაც იმას ნიშნავს, რომ ΔABC ტოლფერდაა.

434. ოთხკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი იყოს O. B და D წერტილებიდან AC დიაგონალზე დავუშვათ BN და DM მართობები. ვინაიდან $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ACD}$ ამიტომ $\frac{1}{2}BN\cdot AC=\frac{1}{2}DM\cdot AC$ ე.ი. $BN=DM$. მართკუთხა სამკუთხედები BON და DOM ტოლია, ამიტომ $BO=OD$ ე.ი. BD დიგონალი O წერტილით გაიყო ორ ტოლ მონაკვეთად. თუ ჩავატარებთ ანალოგიურ მსჯელობებს მივიღებთ, რომ მეორე დიგონალიც O წერტილით შუაზე გაიყოფა. $\Delta AOB=\Delta OCD$ ე.ი. $AB=CD$ ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $AD=BC$. შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს ტოლობა $\angle BAC=\angle ACD$. ყოველივე ზემოთქმული ნიშნავს, რომ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

435. ავილოთ პარალელოგრამის შიგნით რაიმე M წერტილი. ვთქვათ ამ წერტილის დაშორება პარალელოგრამის გვერდებამდე ან მათ გაგრძელებამდე ტოლია x, y, z, t.
x და y იყოს შესაბამისად დაშორებები BC და AD გვერდებამდე. M წერტილი შევაერთოთ პარალელოგრამის ოთხივე წვეროსთან. პარალელოგრამის ფართობი ერთის მხრივ ტოლია $3\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y$ ხოლო მეორეს მხრივ $z\sqrt{2}+t\sqrt{2}$. ვინაიდან პარალელოგრამის მახვილი კუთხე ტოლია 45^0-ის, ხოლო გვერდი $\sqrt{2}$-ია, ამიტომ $x+y=1$. ფართობების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $(x+y)3\sqrt{2}=(z+t)\sqrt{2}$ ე.ი. $x+y=1$, $z+t=3$. სამართლიანია უტოლობა $\frac{x+y+z+t}{4}\geq\sqrt[4]{xyzt}$ საიდანაც მიიღება, რომ $\sqrt[4]{xyzy}\leq 1$ ე.ი. $xyzt\leq 1$. რადგანაც xy ნამრავლი მაქსიმალურია, მაშინ როდესაც $x=y$ და zt ნამრავლი მაქსიმალურია როცა $z=t$ მივიღებთ, რომ $xyzt$ სიდიდის მაქსიმალური მნიშვნელობაა $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{16}$.

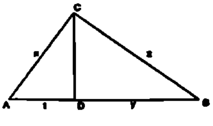
436. განვიხილოთ $y=\frac{1}{x}$ ფუნქციის, გრაფიკი, როცა $x>0$, ყველა ის მართკუთხა სამკუთხედი, რომელთა ფართობია 2 სმ^2 მიიღება მოცემული ფუნქციის გრაფიკის მხებითა და ამ მხების მიერ საკოორდინატო ღერძებზე მოკვეთილი მონაკვეთებით.

მარტივად შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ ასეთ მართკუთხა სამკუთხედებს შორის მინიმალური ჰიპოტენუზა ექნება იმ სამკუთხედს, რომელიც მიიღება $M_0(1;\ 1)$ წერტილში გამავალი მხებით. ცხადია თუ ჰიპოტენუზის სიგრძე მინიმალურია, მაშინ მინიმალურია a^2+b^2-იც, სადაც a, b არის მხების მიერ ღეძებზე მოკვეთილი მონაკვეთები. თუ მინიმალურია a^2+b^2, მაშინ მინიმალურია $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$, ე.ი. მინიმალურია $a+b$ (შევნიშნოთ, რომ ab მუდმივია), თუ მინიმალურია $a+b$ და c მაშინ მინიმალურია პერიმეტრიც. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

440. O წერტილი იყოს დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. $\angle AOB=\angle COD$ და $\angle ABD=\angle OCD$ ე.ი. AOB და COD სამკუთხედები მსგავსია. ვინაიდან მათი ფართობები ტოლია (სამართლიანია ტოლობა $S_{\Delta ABO}+S_{\Delta BOC}=S_{\Delta BOC}+S_{\Delta COD}$), ამიტომ ისინი ტოლი სამკუთხედებია, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $AB=CD$.

441. ცხადია თუ AD წარმადგენს მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზაზე დაშვებულ მართობს, გამოვიყენებთ რა ABD და ADC სამკუთხედების მსგავსობას მივიღებთ ტოლობებს: $\frac{AD}{BD}=\frac{DC}{AD}$ ე.ი. $AD^2=BD\cdot DC$. დავამტკიცოთ ახლა პირობის აუცილებლობა. ამოცანის პირობის თანახმად $AD^2=BD\cdot DC$ ე.ი. $\frac{AD}{BD}=\frac{CD}{AD}$ ვინაიდან $tg\angle ABD=\frac{AD}{BD}=\frac{CD}{AD}=ctg\angle ACD$, ამიტომ გვექნება $tg\angle ABD=ctg\angle ACD$ საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\cos(\angle ABD+\angle ACD)=0$, $\angle ABD+\angle ACD=90^0$ ე.ი. სამკუთხედი მართკუთხაა.

442. ვინაიდან სამკუთხედის მედიანა მის ფართობს შუაზე ყოფს სამართლიანია ტოლობა: $\frac{1}{2}AB\cdot BD\sin\angle ABD=\frac{1}{2}BC\cdot BD\sin\angle DBC$ ე.ი. $AB\sin\angle ABD=BC\sin\angle DBC$ და რადგან $AB>AC$ ამიტომ $\sin\angle ABD<\sin\angle DBC$ ე.ი. $\angle ABD<\angle DBC$.



446. შემოვილოთ აღნიშვნები: $AC=x$, $CB=z$, $AD=t$, $DB=y$. ვთქვათ $z\geq x$, ცხადია $t+y>z$. ე.ი. $xt+xy>xz$

საიდანაც $zt+xy>xz$ და საბოლოოდ გვექნება: $AD\cdot CB+AC\cdot DB>AC\cdot CB=2S$.

447. კოსინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს შემდეგი ტოლობები: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ საიდანაც გვაქვს $\cos A=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)-\frac{a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)-\frac{b^2}{2ac}$, $\cos C=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-\frac{c^2}{2ab}$. რადგანაც $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge 2$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$ ამიტომ გვექნება $\cos A+\cos B+\cos C\ge 3-\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}$.

448. კოსინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ აქედან მიიღება ტოლობა $\frac{a^2}{bc}=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\cos A$ ან $\frac{a^2}{bc}\ge 2-2\cos A$ საიდანაც გვაქვს $\frac{a^2}{bc}\ge 2\cdot 2\sin^2\frac{A}{2}$. მიღებული ტოლობა ასე გადავწეროთ $\frac{a}{\sqrt{bc}}\ge 2\sin\frac{A}{2}$ ან $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{abc}}\ge 2\sin\frac{A}{2}$ ანალოგიურად მივიღებთ $\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{abc}}\ge 2\sin\frac{B}{2}$ და $\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{abc}}\ge 2\sin\frac{C}{2}$. ამ უტოლობების შეკრებით მივიღებთ $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}}{\sqrt{abc}}\ge 2\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$.

450. სამართლიანია ტოლობა $\frac{1}{2}ab\sin C+\frac{1}{2}bc\sin A+\frac{1}{2}ac\sin B=3S$ ე.ი. $ab+ac+bc>6S$. რადგანაც $S=P\cdot r$ სადაც $P=\frac{a+b+c}{2}$ ამიტომ $ab+ac+bc>3r(a+b+c)$. მარტივად შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ $a+b+c>4r$. საბოლოოდ გვექნება $ab+ac+bc>12r^2$.

451.კოსინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$, საიდანაც მიიღება $a^2+b^2+c^2=2bc\cos A+2ac\cos B+2ab\cos C$, სამართლიანია ტოლობები $bc\sin A=ac\sin B=ab\sin C=2S$ და წინა ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება $a^2+b^2+c^2=4S(ctgA+ctgB+ctgC)$ როგორც ცნობილია ადგილი აქვს უტოლობას $h_1b+h_2a+h_3c\le\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ რადგანაც $h_1b+h_2a+h_3c=6S$ ამიტომ მივიღებთ $6S\le\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ გამოვიყენებთ რა ზემოთ მოყვანილ ერთ-ერთ ტოლობას მივიღებთ $6S\le\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}\le$ $\le\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}\cdot 2\sqrt{S}\sqrt{ctgA+ctgB+ctgC}$ და საბოლოოდ გვექნება $h_1^2+h_2^2+h_3^2\ge\frac{9S}{ctgA+ctgB+ctgC}$.

452. კოსინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, საიდანაც მიიღება $\frac{a^2}{bc}=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\cos A\ge 2-2\cos A=4\sin^2\frac{A}{2}$. სინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$, $\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}$. წინა უტოლობა ასე გადაიწერება $\frac{\sin^2 A}{\sin B\sin C}\ge 4\sin^2\frac{A}{2}$ ე.ი.

$cos^2\frac{A}{2}\geq \sin B\sin C$ ან $a^2b^2c^2\sin B\sin C\leq a^2b^2c^2\cos^2\frac{A}{2}$ რადგანაც $ab\sin C=ac\sin B=2S$ ამიტომ $a^2bc\sin B\sin C=4S^2$ და წინა უტოლობა ასე გადაიწერება $4bcS^2\leq a^2b^2c^2\cos^2\frac{A}{2}$ ან

$bc\leq 4\cos^2\frac{A}{2}\left(\frac{abc}{4S}\right)^2$ საიდანაც მიიღება $\sqrt{bc}\leq 2R\cos\frac{A}{2}$ ანალოგიურად $\sqrt{ac}\leq 2R\cos\frac{B}{2}$, $\sqrt{ab}\leq 2R\cos\frac{C}{2}$. მიღებული უტოლობების შეკრებით დასრულდება ამოცანის ამოხსნა.

453. თუ R სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია, ხოლო r ჩახაზული – მაშინ $R\geq 2r$. მეორეს მხრივ ცნობილია, რომ $R=\frac{abc}{4S}$ და $r=\frac{S}{P}$ ე.ი. $\frac{abc}{4S}\geq\frac{2S}{P}$ ან $abc\geq\frac{8S^2}{P}$. სამართლიანია უტოლობა $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\geq abc$ ე.ი. $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\geq\frac{8S^2}{P}$ ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს $\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{(a+b+c)^3}{27}\geq 8S^2$ ან $\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^4\geq 27S^2$ საიდანაც მიიღება, რომ $P\geq\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{S}$.

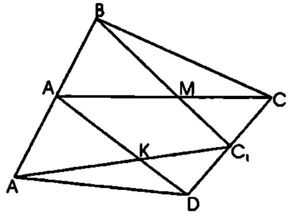
455. სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი იყოს O, ხოლო მისი გეგმილები AB,BC და AC გვერდებზე შესაბამისად N,P და M წერტილები. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\angle BAC=\alpha,\angle ABC=\beta,\angle BCA=\gamma, AM=x, BN=y, MC=z$. სამართლიანია ტოლობა $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$ ე.ი. $\frac{tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}}{1-tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{tg\frac{\gamma}{2}}$ ან $tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}=1$ მიღებული ტოლობა ასე გადავწეროთ $\frac{1}{ctg\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\gamma}{2}}+\frac{1}{ctg\frac{\beta}{2}ctg\frac{\gamma}{2}}+\frac{1}{ctg\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\beta}{2}}=1$. AOM,MOC,BNO სამკუთხედებიდან გვაქვს $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{x}{r},ctg\frac{\gamma}{2}=\frac{z}{r},ctg\frac{\beta}{2}=\frac{y}{r}$. ამ ტოლობების გათვალისწინებით წინა ტოლობა ასე გადაიწერება $\frac{r^2}{xy}+\frac{r^2}{xz}+\frac{r^2}{yz}=1$ ან $\frac{1}{r^2}=\frac{x+y+z}{xyz}$. მხებისა და მკვეთის თვისების თანახმად გვაქვს $x^2=d_1\cdot D_1, y^2=d_2\cdot D_2, z^2=d_3\cdot D_3$ ე.ი. $xyz=\sqrt{d_1\cdot D_1\cdot d_2\cdot D_2\cdot d_3\cdot D_3}$ ან $\frac{1}{r^2}=\frac{P}{xyz}$ საიდანაც მიიღება $\frac{1}{r}xyz=Pr=S$ და საბოლოოდ გვაქვს $S=\frac{1}{r}\sqrt{d_1\cdot D_1\cdot d_2\cdot D_2\cdot d_3\cdot D_3}$.

456. სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის O ცენტრი შევაერთოთ A,B,C წვეროებთან. შემოვიღოთ აღნიშვნები $AB=c,BC=a,AC=b$. R,R_1,R_2,R_3 აღვნიშნოთ $ABC,AOB,$ BOC,AOC სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსები. BOC და ABC სამკუთხედებისათვის სინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს შემდეგი ტოლობა $\frac{a}{\sin\left(180^0-\frac{C+B}{2}\right)}=2R_2,\ \frac{a}{\sin A}=2R$. ანალოგიურად მივიღებთ ტოლობებს გვაქვს $\frac{b}{\sin\left(180^0-\frac{A+C}{2}\right)}=2R_3,\ \frac{b}{\sin B}=2R$ და $\frac{c}{\sin\left(180^0-\frac{A+B}{2}\right)}=2R_1,\ \frac{c}{\sin C}=2R$ საიდანაც გვექნება

$$\frac{a}{\cos\frac{A}{2}}=2R_2,\ \frac{b}{\cos\frac{B}{2}}=2R_3,\ \frac{c}{\cos\frac{C}{2}}=2R_1.$$ ე.ი. $\frac{R_2}{R}=2\sin\frac{A}{2}, \frac{R_3}{R}=2\sin\frac{B}{2}, \quad \frac{R_1}{R}=2\sin\frac{C}{2}$. მიღებული ტოლობების შეკრება მოგვცემს დასამტკიცებელ ტოლობას.

458. იხილე № 366 ამოცანის ამოხსნა.

459. ოთხკუთხედის AB და DC გვერდების შუაწერტილები A_1 და C_1 შევაერთოთ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე წვეროებთან. A_1C და BC_1 მონაკვეთების გადაკვეთის წერტილი იყოს M, ხოლო AC_1 და A_1D მონაკვეთების გადაკვეთის წერტილი $-K$. რადგანაც მედიანები სამკუთხედების ფართობებს შუაზე ყოფს, ადგილი ექნება ტოლობებს:



$$S_{\Delta A_1BC}+S_{\Delta AC_1D}=\frac{1}{2}S_{ABCD},\ S_{\Delta A_1BD}+S_{\Delta BC_1D}=\frac{1}{2}S_{ABCD},$$

$$S_{\Delta A_1BC}+S_{\Delta AC_1D}=S_{\Delta A_1BD}+S_{\Delta BC_1D}.$$

ამ ტოლობებიდან მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა.

460. როგორც ცნობილია სამკუთხედის ბისექტრისა გვერდების საშუალებით გამოითვლება ფორმულით $l^2=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}$ ე.ი. $l^2=\frac{ab}{(a+b)^2}\cdot\left[(a+b)^2-c^2\right]$. მართკუთხა სამკუთხედში $a^2+b^2=c^2$ ე.ი. გვაქვს $l^2=\frac{2a^2b^2}{(a+b)^2}$. ვინაიდან $4ab\le(a+b)^2$ ნებისმიერი a და b დადებითი რიცხვებისათვის ამიტომ გვექნება $l^2\le\frac{1}{2}ab=S$ და საბოლოოდ გვაქვს $l^2\le S$.

461. ბისექტრისებისათვის სამართლიანია ტოლობები $l_1=\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{(a+b)^2-c^2}$,

$l_2=\frac{\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{(b+c)^2-a^2}$, $l_3=\frac{\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{(a+c)^2-b^2}$. მათი გადამრავლებით მივიღებთ

$l_1l_2l_3=\frac{abcP}{(a+b)(a+c)(b+c)}\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ ე.ი. $l_1l_2l_3=\frac{8abcP}{(a+b)(a+c)(b+c)}\cdot S$. რადგანაც $2\sqrt{ab}\le a+b,\ 2\sqrt{ac}\le a+c,\ 2\sqrt{bc}\le b+c$ საბოლოოდ გვექნება $l_1l_2l_3\le p\cdot S$.

462. სამართლიანია უტოლობები $\frac{a^2+c^2}{4}\ge\frac{1}{2}ac\ge\frac{1}{2}ac\sin A$ და $\frac{d^2+b^2}{4}\ge\frac{1}{2}db\ge\frac{1}{2}db\sin B$. სადაც A და B კუთხეებია შესაბამისად a,c და b,d გვერდებს შორის. ამ უტოლობების შეკრება გვაძლევს $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}\ge\frac{1}{2}ac\sin A+\frac{1}{2}bd\sin B=S$ და საბოლოოდ მივიღებთ $a^2+b^2+c^2+d^2\ge 4S$.

463. ვინაიდან მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ერთმანეთის ტოლია, ხოლო მოპირდაპირე კუთხეების ჯამია 180^0, ამიტომ მოცემულ ოთხკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა. როგორც ცნობილია წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედის ფართობი გამოითვლება

ფორმულით $S=\sqrt{(P-a)(P-b)(P-c)(P-d)}$, რადგანაც ადგილი აქვს უტოლობებს $\sqrt{(P-a)(P-c)}\le\frac{2P-a-c}{2}=\frac{b+d}{2}=1$, $\sqrt{(P-b)(P-d)}\le\frac{2P-b-d}{2}=\frac{a+c}{2}=1$ მიღებული უტოლობების გადამრავლებით მივიღებთ $\sqrt{(P-a)(P-c)(P-c)(P-d)}\le1$ ე.ი. $S\le1$.

464. სინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს: $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$. კოსინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$. მათი შეკრებით მივიღებთ $a^2+b^2+c^2=2bc\cos A+2ac\cos B+$ $2ab\cos C$. მეორეს მხრივ გვაქვს $a^2+b^2+c^2=4R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)=2bc\cos A+$ $+2ac\cos B+2ab\cos C=8R^2\sin B\sin C\cos A+8R^2\sin A\sin C\cos B+8R^2\sin A\sin B\cos C$ და საბოლოოდ $\frac{1}{2}(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)=\sin A\sin B\cos C+\sin A\sin C\cos B+\sin B\sin C\cos A$.

465. შემოვიღოთ აღნიშვნები $AB=c, BC=a, AC=b$. R_1, R_2 იყოს შესაბამისად ABK და BKC სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსები. სამართლიანია ტოლობები $S=\frac{1}{2}bc\sin A, S=\frac{1}{2}ab\sin C$ ე.ი. $S^2=\frac{1}{4}acb^2\sin A\sin C$. სინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს $\frac{BK}{\sin A}=2R_1, \frac{BK}{\sin C}=2R_2$ საიდანაც მიიღება $BK^2=4R_1R_2\sin A\sin C$ გავითვალისწინებთ, რა წინა ტოლობას მივიღებთ $S^2=\frac{ab^2c}{4}\cdot\frac{BK^2}{4R_1R_2}$. რადგანაც $R=\frac{abc}{4S}$ ამიტომ $BK^2=\frac{16R_1R_2}{acb^2}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{16R^2}$ ე.ი. $BK^2=\frac{R_1R_2}{R^2}ac$ მიღებული ტოლობიდან გვაქვს, რომ $R^2=R_1R_2$ მაშინ როდესაც $BK^2=ac$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

466. სამკუთხედის გვერდებისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები $BC=a, AB=c, AC=b$ და შემოხაზული წრეწირის რადიუსი იყოს R. AK წარმოადგენს ბისექტრისას. სინუსების თეორემის ძალით $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$, $\frac{KC}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{AK}{\sin C}$. საიდანაც მიიღება ტოლობა

$\frac{a}{c}\cdot\frac{AK}{KC}=\frac{\sin A}{\sin C}\cdot\frac{\sin C}{\sin\frac{A}{2}}=2\cos\frac{A}{2}$. ბისექტრისის თვისების თანახმად გვაქვს $BK:KC=c:b$ ან $a:KC=(b+c):b$ ამ ტოლობის გათვალისწინებით წინა ტოლობა ასე გადაიწერება

$\frac{AK}{c}\cdot\frac{b+c}{b}=2\cos\frac{A}{2}$ ე.ი. $AK=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ და ვინაიდან $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\sin^2A}}{2}}=$

$=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{a}{2R}\right)^2}}{2}}$ ამიტომ საბოლოოდ გვექნება $AK=\frac{bc}{b+c}\sqrt{\frac{2R+\sqrt{4R^2-a^2}}{R}}$ რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

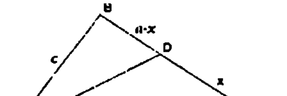
468. CK და AL ბისექტრისებია ამიტომ ადგილი აქვს ტოლობებს $\frac{AK}{KB}=\frac{AC}{CB}, \frac{CL}{BL}=\frac{AC}{AB}$. ამოცანის პირობის თანახმად $KB=BL=KL$ და $CB=CL+BL=CL+KL$ აგრეთვე $AB=AK+KB=AK+KL$ მიღებული ტოლობებიდან გამომდინარეობს $\frac{AK}{KL}=\frac{AC}{CL+KL}$, $\frac{CL}{KL}=\frac{AC}{AK+KL}$, $\frac{AK}{CL}=\frac{AK+KL}{CL+KL}$ ე.ი. $AK=CL$ რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

469. დაეუშვათ არსებობს ისეთი სამკუთხედი რომლისთვისაც სამართლიანია ტოლობა $r \cdot P = 4R^2$, სადაც r ჩახაზული წრეწირის რადიუსია, R შემოხაზული წრეწირის რადიუსი, ხოლო $P-$ პერიმეტრი. როგორც ცნობილია ადგილია აქვს ტოლობას $rP = 2S$. თუ გავითვალისწინებთ დაშვებულ ტოლობას, გვექნება $2S = 4R^2$ ან $S = 2R^2$. შემოხაზული წრეწირის ცენტრი აღვნიშნოთ O. შევაერთოთ ეს წერტილი სამკუთხედის წვეროებთან. მივიღებთ სამ სამკუთხედს მათი ფართობების ჯამი ტოლია მიღებული სამკუთხედის ფართობის ე.ი. $\frac{1}{2}R^2 \sin\alpha + \frac{1}{2}R^2 \sin\beta + \frac{1}{2}R^2 \sin\gamma = 2R^2$ ან $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4$. ვინაიდან მიღებული ტოლობა შეუძლებელია, ამიტომ ჩვენი დაშვება სამართლიანი არაა.

470. შემოვიღოთ აღნიშვნები $AB = a, BC = b$. ამოცანის პირობის თანახმად ΔAKD მართკუთხაა. პითაგორას თეორემის ძალით $AK^2 + KD^2 = AD^2 = b^2$. ΔABK და ΔKCD-დან კოსინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს $AK^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} - 2a\frac{b}{2}\cos B$, $KD^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} - 2a\frac{b}{2}\cos C$. წინა ტოლობის გათვალისწინებით გვაქვს $\cos B = -\cos C$, მიღებული ტოლობების შეკრებით მივიღებთ $AK^2 + KD^2 = 2a^2 + \frac{b^2}{2}$. მაგრამ $AK^2 + KD^2 = b^2$ ყოველივე ამის შემდეგ მიიღება ტოლობა $2a^2 + \frac{b^2}{2} = b^2$ ან $4a^2 = b^2$ ე.ი. $b = 2a$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

471. ტრაპეციის ქვედა ფუძეა AD, ხოლო ზედა $-BC$. K წერტილი წარმოადგენს ტრაპეციის ფერდების გადაკვეთის წერტილს. K წერტილიდან AD ფუძეზე დავუშვათ KF მართობი, რომელიც BC გვერდს გადაკვეთს E წერტილში. სამკუთხედი BKC მსგავსია AKD სამკუთხედის, ამიტომ $\frac{c}{KE} = \frac{d}{KF}$ ე.ი. $\frac{EF}{KE} = \frac{d-c}{c}$ საიდანაც მიიღება ტოლობა $KE = \frac{c \cdot EF}{d-c}$. AKD სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი გამოითვლება ფორმულით $r = \frac{S_{\Delta AKD}}{P}$ ან $r = \frac{KF \cdot d}{2P}$. რადგანაც $KF = EF + \frac{c \cdot EF}{d-c} = \frac{d \cdot EF}{d-c}$ ამიტომ გვექნება $r = \frac{EF \cdot d^2}{2P(d-c)}$ ან $\frac{EF}{2} = \frac{EF \cdot d^2}{2P(d-c)}$. შევნიშნოთ, რომ ტრაპეციაში ჩაიხაზება წრეწირი და მისი რადიუსი $r = \frac{EF}{2}$. მიღებული ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $2P = \frac{2d^2}{d-c}$ რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

472. ამოცანის პირობის თანახმად $AD = DC$. გამოვიყენებთ, რა ბისექტრისის გამოსათვლელ ფორმულას გვექნება: $AD^2 = bc - x(a-x)$, $\frac{b}{c} = \frac{x}{a-x}$, $cb = (c+b)x$ და $x = \frac{ab}{c+b}$, $a - x = \frac{ac}{b+c}$. პირობის თანახმად $AD = x$, ე.ი. $\frac{a^2b^2}{(c+b)^2} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$ ან $a^2b = c(b+c)^2 - a^2c$ აქედან მიიღება $(a^2 - bc - c^2)(b-c) = 0$. მიღებული ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $b = c$ ან $a^2 = bc + c^2$. პირველ შემთხვევაში $\angle A = 90^0$ და ცხადია ის მეტია 60^0-ზე. ახლა ვთქვათ $a^2 = bc + c^2$. კოსინუსების თეორემის ძალით გვაქვს $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$. უკანასკნელი ორი ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ: $bc + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$ ან $c = b - a\cos\angle A$ ე.ი. $b = c(1 - \cos\angle A)$ და $1 - \cos\angle A > 0$ ან $\cos\angle A < \frac{1}{2}$ ე.ი. $\angle A > 60^0$ რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.



473. O იყოს AB გვერდის მხები გარე ჩახაზული წრეწირის რადიუსი, ხოლო K იყოს O წერტილის გეგმილი AB გვერდზე. AOK და OKB სამკუთხედებიდან გვაქვს $r_c = AKctg\frac{A}{2}$ და $r_c = BKctg\frac{B}{2}$. ამ ტოლობების შეკრებით მივიღებთ $\frac{r_c}{ctg\frac{A}{2}}+\frac{r_c}{ctg\frac{B}{2}}=c$ ე.ი.

$\frac{c}{r_c}=tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}$ ანალოგიურად მიიღება შემდეგი ორი ტოლობაც $\frac{a}{r_a}=tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}$ და

$\frac{b}{r_b}=tg\frac{A}{2}+tg\frac{C}{2}$. ამ სამ ტოლობის შეკრება მოგვეცემს დასამტკიცებელ ტოლობას.

476. სამართლიანია ტოლობები $b=c\cos A+a\cos C$, $a=b\cos C+c\cos B$, $c=b\cos A+a\cos B$. ამ ტოლობების შეკრებით მივიღებთ $P=P(\cos A+\cos B+\cos C)-a\cos A-b\cos B-c\cos C$.

სადაც P სამკუთხედის პერიმეტრია. ვინაიდან $\cos A=\frac{\sin 2A}{2\sin A}$, $\cos B=\frac{\sin 2B}{2\sin B}$, $\cos C=\frac{\sin 2C}{2\sin C}$

წინა ტოლობა ასე გადაიწერება $P=\dfrac{\frac{a\sin 2A}{2\sin A}+\frac{b\sin 2B}{\sin B}+\frac{c\sin 2C}{2\sin C}}{\cos A+\cos B+\cos C-1}$. სინუსების თეორემის გამოყენებით მიიღებთ $P=\frac{R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)}{\cos A+\cos B+\cos C-1}$. აქედან მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა.

478. შემოვიღოთ აღნიშვნები $\angle DAC=\angle DBC=\alpha$, $\angle ADB=\angle ACB=\beta$. სამართლიანია ტოლობები $\frac{1}{2}AD\cdot AC\sin\alpha=S_{\Delta ACD}$, $\frac{1}{2}BC\cdot AC\sin\beta=S_{\Delta ABC}$, $\frac{1}{2}BC\cdot BD\sin\alpha=S_{\Delta DBC}$,

$\frac{1}{2}AD\cdot BD\sin\beta=S_{\Delta ADB}$. ამ ტოლობების შეკრებით მივიღებთ:

$(AD\sin\alpha+BC\sin\beta)AC=2S_{ABCD}$ და $(BC\sin\alpha+AD\sin\beta)BD=2S_{ABCD}$ ან

$(AD\sin\alpha+BC\sin\beta)AC=(BC\sin\alpha+AD\sin\beta)BD$. $(AD\cdot AC-BC\cdot BD)\sin\alpha=$

$(AD\cdot BD-BC\cdot AC)\sin\beta$. მიღებული ტოლობა ასე გადაიწერება:

$\frac{AD\cdot AC-BC\cdot BD}{AD\cdot BD-BC\cdot AC}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. სინუსების თეორემის თანახმად სამართლიანია ტოლობები

$DC=2R\sin\alpha$, $AB=2R\sin\beta$ აქედან გვაქვს $\frac{AB}{DC}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ და წინა ტოლო ასე გადაიწერება

$\frac{AD\cdot AC-BC\cdot BD}{AD\cdot BD-BC\cdot AC}=\frac{AB}{DC}$ საბოლოოდ გვექნება $\frac{AD\cdot DC+AB\cdot BC}{BC\cdot DC+AB\cdot AD}=\frac{DB}{AC}$ რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

479. შემოვიღოთ აღნიშვნები AC გვერდზე დაშვებული ბისექტრისა იყოს $BK=l_b$, $AB=c, BC=a$. ABK და KBC სამკუთხედების ფართობები შესაბამისად ტოლია $c\cdot l_b\sin\frac{B}{2}=2S_{\Delta ABK}$, $a\cdot l_b\sin\frac{B}{2}=2S_{\Delta KBC}$. მათი შეკრებით მივიღებთ $l_b\sin\frac{B}{2}(a+c)=2S_{\Delta ABC}$ ან

$\frac{1}{l_b}<\frac{a+c}{2S}$. ანალოგიურად მივიღებთ, $\frac{1}{l_a}<\frac{b+c}{2S}$ და $\frac{1}{l_c}<\frac{a+c}{2S}$. ამ უტოლობების შეკრება გვაძლევს $\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_c}<\frac{2(a+b+c)}{2S}=\frac{2}{r}$. საბოლოოდ გვექნება $\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}<\frac{2}{r}$ რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

480. ოთხკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით $S=\frac{1}{2}r\cdot P$. სადაც P ოთხკუთხედის პერიმეტრია, ხოლო $S-$ მისი ფართობი. ვინაიდან ოთხკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი მდებარეობს ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილში, ამიტომ სამართლიანია ტოლობა $P=2r\left(ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}+ctg\frac{D}{2}\right)$,თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას $S=\frac{1}{2}r\cdot P$, მივიღებთ $S=r^2\left(ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}+ctg\frac{D}{2}\right)$. რადგანაც $A+B+C+D=2\pi$ ამიტომ გვექნება $\frac{A+B}{2}=\pi-\frac{C+D}{2}$ საიდანაც მიიღება

$$\frac{ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{B}{2}}{ctg\frac{A}{2}\cdot ctg\frac{B}{2}-1}=\frac{ctg\frac{C}{2}+ctg\frac{D}{2}}{1-ctg\frac{C}{2}ctg\frac{D}{2}},\quad ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}+ctg\frac{D}{2}=\frac{tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}+tg\frac{D}{2}}{tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}tg\frac{D}{2}}$$

და მარტივად დამტკიცდება ტოლობა.

481. შემოვიღოთ აღნიშვნები $AB=c, BC=a, AC=b$. სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი იყოს O, ხოლო l_a, l_b, l_c- შესაბამისად სამკუთხედის A, B, C წვეროებიდან გამოსული ბისექტრისები. O წერტილის დაშორება შესაბამისად A, B, C წვეროებიდან ტოლი იყოს P_a, P_b, P_c-სი და $AK_1=l_a, BK_2=l_b, CK_3=l_c$. ABK_1 სამკუთხედიდან BO ბისექტრისის თვისების თანახმად გვაქვს $\frac{c}{BK_1}=\frac{P_a}{OK_1}$, ABC სამკუთხედიდან AK_1 ბისექტრისის თვისების თანახმად გვაქვს $\frac{b}{c}=\frac{K_1C}{K_1B}$ ან $\frac{b+c}{c}=\frac{a}{K_1B}$. წინა ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ $\frac{b+c}{a}=\frac{P_a}{OK_1}$ ე.ი. $\frac{OK_1}{P_a}=\frac{a}{b+c}$ ან $\frac{l_a}{P_a}=\frac{a+b+c}{b+c}=\frac{P}{b+c}$.

ანალოგიურად მიიღება ტოლობები $\frac{P_b}{l_b}=\frac{a+c}{P}$ $\frac{P_c}{l_c}=\frac{a+b}{P}$. მიღებული სამივე ტოლობის შეკრება გვაძლევს $\frac{l_a}{P_a}+\frac{l_b}{P_b}+\frac{l_c}{P_c}=2$.

482. სინუსების თეორემის თანახმად ადგილი აქვს ტოლობებს $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$ და $c=2R\sin C$. ე.ი. $\frac{a-b}{b-c}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin B-\sin C}=\frac{\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}$. ვინაიდან $cos\frac{A+B}{2}=sin\frac{C}{2}$ და $cos\frac{B+C}{2}=sin\frac{A}{2}$ საბოლოოდ გვექნება $\frac{a-b}{b-c}=\frac{sin\frac{C}{2}sin\frac{A-B}{2}}{sin\frac{A}{2}sin\frac{B-C}{2}}$.

483. შემოვიღოთ აღნიშვნები $AB=c, BC=a, AC=b$. BK წარმოადგენს AC გვერდზე დაშვებულ სიმაღლეს. ABK და BKC სამკუთხედებიდან გვაქვს $BKctgA+BKctgC=b$, ე.

$BK=\frac{b}{ctgA+ctgC}$. რადგანაც $2S=b\cdot BK$ ამიტომ $2S=\frac{b^2}{ctgA+ctgC}$ ანალოგიურად $2S=\frac{a^2}{ctgB+ctgC}$, $2S=\frac{c^2}{ctgA+ctgB}$ მიღებული ტოლობებიდან ვღებულობთ: $\frac{a^2}{ctgB+ctgC}=$

$\frac{b^2}{ctgA+ctgC}=\frac{c^2}{ctgA+ctgB}$ ვინაიდან a,b,c რიცხვები ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას ასევე გეომეტრიულ პროგრესიას შეადგენენ რიცხვები a^2,b^2,c^2. განვიხილოთ რიცხვთა სამეული $\frac{1}{ctgB+ctgC},\frac{1}{ctgA+ctgC},\frac{1}{ctgA+ctgB}$. ცხადია $\frac{1}{ctgA+ctgC}:\frac{1}{ctgB+ctgC}=\frac{1}{ctgA+ctgB}:\frac{1}{ctgA+ctgC}$. მართლაც $\frac{ctgB+ctgC}{ctgA+ctgC}=\frac{b^2}{a^2}$ და $\frac{ctgA+ctgC}{ctgA+ctgB}=\frac{c^2}{b^2}$. $\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2}{b^2}$. ყოველივე აქედან გამომდინარეობს, რომ რიცხვები $\frac{1}{ctgB+ctgC},\frac{1}{ctgA+ctgC},\frac{1}{ctgA+ctgB}$ ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას და მისი მნიშვნელია $\frac{ctgB+ctgC}{ctgA+ctgC}$.

484. კოსინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს $AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cos D$, $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$, $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A$, $BD^2=BC^2+DC^2-2BC\cdot DC\cos C$. პირველი და მეორე ტოლობის შეკრება გვაძლევს: $2AC^2=AD^2+DC^2+AB^2+BC^2-2\cos D(AD\cdot DC+AB\cdot BC)$. მესამე და მეოთხე ტოლობების შეკრებით კი მივიღებთ: $2BD^2=AD^2+DC^2+AB^2+BC^2-2\cos A(AD\cdot AB+BC\cdot DC)$. უკანასკნელი ტოლობების გამოკლებით მიიღება $AC^2-BD^2=\cos A(AD\cdot AB+BC\cdot DC)$ $-\cos D(AD\cdot DC+AB\cdot BC)$ და რადგანაც $\frac{1}{2}\sin A(AD\cdot AB+BC\cdot DC)=$ $\frac{1}{2}\sin D(AD\cdot DC+AB\cdot BC)=S$ ამიტომ გვექნება $AC^2-AD^2=2S(ctgA-ctgD)$. ამოცანის პირობის თანახმად $A\neq D$ ე.ი. $S=\frac{AC^2-AD^2}{2(ctgA-ctgD)}$. სინუსების თეორემის თანახმად $AC=2R\sin D, BD=2R\sin A$. წინა ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ:

$$S=2R^2\cdot\frac{\sin^2 D-\sin^2 A}{ctgA-ctgD}=R^2\cdot\frac{\cos 2A-\cos 2D}{ctgA-ctgD}=2R^2\sin A\sin D\sin(A+D)$$ და

საბოლოოდ გვექნება $S=2R^2 sinAsinDsin(A+D)$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

485. სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი იყოს O, ხოლო რადიუსი – r. AOK და OKC სამკუთხედებიდან გვაქვს: $AK=rctg\frac{A}{2}, KC=rctg\frac{C}{2}$ ე.ი. $AK+KC=r\left(ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{C}{2}\right)$ საიდანაც მიიღება $b=r\left(ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{C}{2}\right)$. $S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}\cdot b\cdot r=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{C}{2}}$ ანალოგიურად

$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{B}{2}}$, $S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}}$. ამ ტოლობების შეკრება გვაძლევს

$$2S_{\Delta ABC}=\frac{b^2}{ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{C}{2}}+\frac{c^2}{ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{B}{2}}+\frac{a^2}{ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}}.$$ ვინაიდან სამართლიანია ტოლობები:

$$ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{\sin B}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}},\quad ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{B}{2}=\frac{\sin C}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}=\frac{sin\,A}{2\,sin\frac{A}{2}\,sin\frac{B}{2}\,sin\frac{C}{2}}$. ამიტომ გვექნება:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{b^2}{\sin B}+\frac{c^2}{\sin C}+\frac{a^2}{\sin A}=$$

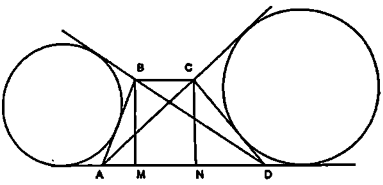
$=2R\cdot b+2R\cdot c+2R\cdot a=2R(a+b+c)=2\cdot\frac{abc}{4S}(a+b+c)$ სადაც R შემოხაზული წრეწირის რადიუსია. საბოლოოდ გვექნება $S^2=\frac{1}{2}abc(a+b+c)sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}$ რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

486. ტრაპეციის ზედა BC ფუძის B და C წერტილებიდან დაეუშვათ BM და CN სიმაღლეები. ABM და NCD სამკუთხედებიდან გვაქვს ტოლობები $AB=\frac{BM}{sin\,A}$, $CD=\frac{CN}{sin\,D}$.

მათი შეფარდებით მივიღებთ $\frac{AB}{CD}=\frac{sin\,D}{sin\,A}=\frac{2\,sin\frac{D}{2}\,cos\frac{D}{2}}{2\,sin\frac{A}{2}\,cos\frac{A}{2}}$. ვინაიდან $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=90^0$ და $\frac{C}{2}+\frac{D}{2}=90^0$ ამიტომ $\sin\frac{D}{2}=\cos\frac{C}{2}$ და $sin\frac{A}{2}=cos\frac{B}{2}$ ამ ტოლობების გათვალისწინებით წინა ტოლობა ასე გადაიწერება $\frac{AB}{CD}=\frac{cos\frac{C}{2}\,cos\frac{D}{2}}{cos\frac{A}{2}\,cos\frac{B}{2}}$ რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

487. ვთქვათ სამკუთხედის მედიანებია AK_1, BK_2, CK_3 და $\angle CAK_1=\alpha$, $\angle K_1AB=\beta$, $\angle BCK_3=\alpha_1$, $\angle K_3CA=\beta_1$, $\angle ABK_2=\alpha_2$, $\angle K_2BC=\beta_2$. AK_1C და AK_1B სამკუთხედებიდან გვაქვს $\frac{1}{2}AK_1b\,sin\,\alpha=\frac{1}{2}S$, $\frac{1}{2}AK_1c\,sin\,\beta=\frac{1}{2}S$ ამ ტოლობების შეფარდებით მივიღებთ $\frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta}=\frac{c}{b}$ ანალოგიურად გვექნება $\frac{sin\,\alpha_1}{sin\,\beta_1}=\frac{b}{a}$, $\frac{sin\,\alpha_2}{sin\,\beta_2}=\frac{a}{c}$. ამ ტოლობების გადამრავლება გვაძლევს $\frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta}\cdot\frac{sin\,\alpha_1}{sin\,\alpha_2}\cdot\frac{sin\,\alpha_2}{sin\,\beta_2}=1$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

489. ტრაპეციის ზედა ფუძის B და C წერტილიდან ქვედა AD ფუძეზე დაეუშვათ BM და CN მართობები. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $CD=AB$. დავუშვათ, რომ ეს ასე არაა. ვთქვათ $CD>AB$. მაშინ CDN და ABM სამკუთხედებიდან მივიღებთ, რომ $ND>AM$, აქედან კი თავის მხრივ გვექნება, რომ $MD>AN$.



საბოლოოდ განვიხილავთ რა MDB და ACN სამკუთხედებს მივიღებთ $BD>AC$, ყოველივე აქედან გამომდინარეობს, რომ $CD+BD>AB+AC$. ამოცანის პირობის თანახმად ჩახაზული წრეწირის რადიუსები ტოლია $\frac{S_{\Delta ACD}}{\frac{AC+CD+AD}{2}-CD}=\frac{S_{\Delta ABD}}{\frac{AB+BD+AD}{2}-AB}$.

ვინაიდან $S_{\Delta ACD}=S_{\Delta ABD}$, ამიტომ გვექნება $AC+AD-CD=AD+BD-AB$ და მაშასადამე

$AC-CD=AD-AB$. საბოლოოდ კი გვექნება $AC+AB=CD+BD$. მივიღეთ წინააღმდეგობა, ვინაიდან $CD+BD>AB+AC$ აქედან გამომდინარეობს, რომ $AB=CD$ ე.ი. ტრაპეცია ტოლფერდაა.

490. გავატაროთ სამკუთხედის B კუთხის მედიანა. ვთქვათ MN წარმოადგენს AC გვერდის პარალელურ მონაკვეთს, რომელიც მედიანას კვეთს P წერტილში. ამ წერტილიდან დავუშვათ მართობი, რომელიც სამკუთხედის AC ფუძეს კვეთს Q წერტილში. განვიხილოთ სამკუთხედი MNQ. იგი ტოლფერდაა $MQ=NQ$. ცხადია MN მონაკვეთის პარალელური მოძრაობით, ზევით აწევით ან ქვევით ჩამოწევით შეგვიძლია მივაღწიოთ იმ შემთხვევას, როდესაც $MQ=NQ=MN$ ე.ი სამკუთხედი MNQ ტოლგვერდაა.

491. როგორც ცნობილია $S=\frac{xyz}{r}$ (იხ. ამოცანა №411). ვინაიდან $y=rctg\frac{\alpha}{2}$, $z=rctg\frac{\gamma}{2}$, $x=rctg\frac{\beta}{2}$. ამიტომ წინა ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება $S=xzctg\frac{\alpha}{2}, S=xyctg\frac{\gamma}{2}$, $S=yzctg\frac{\beta}{2}$ ამ უკანასკნელი ტოლობების გადამრავლებით მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

492. მარტივად მტკიცდება, რომ $P=rctg\frac{A}{2}+rctg\frac{B}{2}+rctg\frac{C}{2}$ ე.ი. $\frac{P}{r}=ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}$, რადგანაც $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$ ამიტომ მარტივად შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი ტოლობა $ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}=ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}$ და საბოლოოდ მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას $ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}=\frac{P}{r}$.

493. შემოვიღოთ აღნიშვნები $BM=a, MC=b, AM=d, MD=c, \angle BMC=\alpha$.
სამართლიანია ტოლობები: $S_{\Delta AMD}=\frac{1}{2}dc\sin\alpha$, $S_{\Delta BMC}=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$,
$S_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}ad\sin(180^0-\alpha)=\frac{1}{2}ad\sin\alpha$. რადგანაც $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta BCD}$ ამიტომ $S_{\Delta ABM}=S_{\Delta MCD}$. წინა ტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ
$S_{\Delta AMD}\cdot S_{\Delta BMC}=\frac{1}{2}dc\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}ab\sin\alpha=\frac{1}{2}ad\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}bc\sin\alpha=S_{\Delta ABM}\cdot S_{\Delta MCD}=S_{\Delta ABM}\cdot S_{\Delta ABM}=$
$=(S_{\Delta ABM})^2$ და საბოლოოდ გვექნება $S_{\Delta AMD}\cdot S_{\Delta BMC}=(S_{\Delta ABM})^2$. მიღებული ტოლობა კი იმას ნიშნავს, რომ აღნიშნული ფართობები ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას.

494. შემოვიღოთ აღნიშვნები $\angle A=2\alpha, \angle B=2\beta$, O_1 იყოს სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი, $O-$ სამკუთხედში გარე ჩახაზული წრეწირის ცენტრი, $K-$ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი, $M-$ OO_1 მონაკვეთისა და სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის გადაკვეთის წერტილი. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $O_1M=OM$.

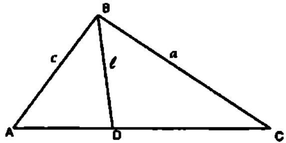
ABM სამკუთხედიდან სინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს $BM=2R\sin\alpha$. O_1BO სამკუთხედი მართკუთხაა. $\angle O_1BO=90^0$, ვინაიდან ის ტოლია მოსაზღვრე კუთხეების ბისექტრისებს შორის კუთხის. $O_1B=OO_1\cos\angle BO_1O=OO_1\cos(\alpha+\beta)$. ABO_1 სამკუთხედიდან სინუსების თეორემის ძალით გვაქვს $\frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{O_1B}{\sin\alpha}$. განვიხილოთ ფარდობა

$$\frac{OO_1}{MB}=\frac{O_1B}{\cos(\alpha+\beta)2R\sin\alpha}=\frac{AB\sin\alpha}{2R\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}=\frac{AB}{R\sin(2\alpha+2\beta)}=$$

$=\frac{2R\sin 2\gamma}{R\sin(2\alpha+2\beta)}=2$ და საბოლოოდ მივიღებთ $O_1O=2MB$ მიღებული კი იმას ნიშნავს, რომ $O_1M=MO$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

495. კოსინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle A$, $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\angle B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle C$. ამ ტოლობების შეკრებით მივიღებთ $a^2+b^2+c^2=2bc\cos\angle A+2ac\cos\angle B+2ab\cos\angle C$. რადგანაც $bc\sin\angle A=2S$, $ac\sin\angle B=2S$, $a\ b\sin\angle C=2S$ ამიტომ $a^2+b^2+c^2=4S(ctg\angle A+ctg\angle B+ctg\angle C)$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

496. BD წარმოადგენს B კუთხის ბისექტრისას. კოსინუსების თეორემის თანახმად გვექნება: $AD^2=l^2+c^2-2lc\cos\frac{\angle B}{2}$ და $DC^2=l^2+a^2-2al\cos\frac{\angle B}{2}$ ამ ტოლობებიდან მიიღება: $\left(\frac{AD}{DC}\right)^2=\frac{l^2+c^2-2lc\cos\frac{\angle B}{2}}{l^2+a^2-2al\cos\frac{\angle B}{2}}$. ვინაიდან $\frac{AD}{DC}=\frac{c}{a}$ ამიტომ $\frac{c^2}{a^2}=\frac{l^2+c^2-2lc\cos\frac{\angle B}{2}}{l^2+a^2-2al\cos\frac{\angle B}{2}}$ საიდანაც გვექნება:



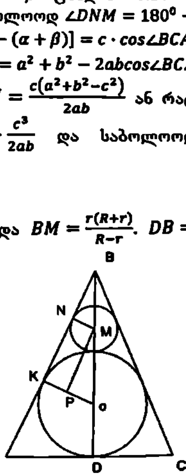
$a^2c^2+c^2l^2-2alc^2\cos\frac{\angle B}{2}=a^2l^2+a^2c^2-2lca^2\cos\frac{\angle B}{2}$ ან $(c-a)\left[l(a+c)-2ac\cos\frac{\angle B}{2}\right]=0$ და რადგანაც $a\neq c$ ამიტომ $l(a+c)-2ac\cos\frac{\angle B}{2}=0$ და საბოლოოდ $l=\frac{2ac\cos\frac{\angle B}{2}}{a+c}$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

497. სამკუთხედის l_a ბისექტრისა სამკუთხედს ყოფს ორ სამკუთხედად, რომელთა ფართობების ჯამი ტოლია მოცემული სამკუთხედის ფართობის, ე.ი. სამართლიანია ტოლობა: $\frac{1}{2}cl_a\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}bl_a\sin\frac{A}{2}=S$. ანალოგიურად მივიღებთ: $l_b\sin\frac{B}{2}=\frac{2S}{a+c}$, $l_c\sin\frac{C}{2}=\frac{2S}{b+a}$. ზემოთ მოყვანილი სამი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\frac{1}{l_a\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{l_b\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{l_c\sin\frac{C}{2}}=\frac{a+b+c}{S}=\frac{2}{r}$, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

499. D იყოს AB გვერდის შუაწერტილი. ის წარმოადგენს წრეწირის ცენტრს, რომლის დიამეტრია სამკუთხედის AB გვერდი. ვთქვათ $\angle BAC=\alpha$ და $\angle ABC=\beta$. ცხადია $\angle ADN=180^0-2\alpha$, $\angle BDM=180^0-2\beta$. ე.ი. $\angle MDN=2(\alpha+\beta)-180^0$ და საბოლოოდ $\angle DNM=180^0-(\alpha+\beta)$. სამკუთხედ DNM- დან გვაქვს $MN=2\cdot\frac{c}{2}\cos[180^0-(\alpha+\beta)]=c\cdot\cos\angle BCA$. კოსინუსების თეორემის თანახმად ABC სამკუთხედიდან გვაქვს $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle BCA$ ე.ი. $\cos\angle BCA=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. რადგანაც $MN=c\cdot\cos\angle BCA$ ამიტომ $MN=\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2ab}$ ან რაც იგივეა $MN=\frac{c}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{c^2}{ab}\right)=\frac{c}{a}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{c^2}{ab}\right)\geq\frac{c}{2}\left(2-\frac{c^2}{ab}\right)=c-\frac{c^3}{2ab}$ და საბოლოოდ გვექნება $MN\geq c-\frac{c^3}{2ab}$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

500. $\angle MBN=\alpha$, $MN=r$, $OK=R$. $\Delta MNB\sim\Delta OMP$ ამიტომ $\frac{BM}{OM}=\frac{r}{R-r}$ და $BM=\frac{r(R+r)}{R-r}$. $DB=R+R+r+\frac{r(R+r)}{R-r}=\frac{2R^2}{R-r}$. $DC=BDtg\alpha=\frac{2R^2\sin\alpha}{(R-r)\cos\alpha}$, $AC=\frac{4R^2\sin\alpha}{(R-r)\cos\alpha}$. $\frac{AC}{\sin2\alpha}=2R^*$. $R^*=\frac{AC}{4\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{4R^2\sin\alpha}{(R-r)\cos\alpha4\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{R^2}{(R-r)\cos^2\alpha}=\frac{R^2}{(R-r)\left[1-\frac{(R-r)^2}{(R+r)^2}\right]}=\frac{R^2(R+r)^2}{(R-r)4Rr}$. $R^*=\frac{R^2(R+r)^2}{4Rr(R-r)}$. $rR^*=R^2$. $\frac{rR^2(R+r)^2}{4Rr(R-r)}=R^2$,

$(R+r)^2=4R(R-r)$, $R^2+2Rr+r^2=4R^2-4Rr$, $3R^2-6Rr-r^2=0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\frac{R}{r}=x$, გვექნება $3x^2-6x-1=0$ და



$x=\frac{3\pm\sqrt{9+3}}{3}$. მიეიღეთ, რომ $\frac{R}{r}$ ირაციონალური რიცხეია და მაშინ რიცხვები r, R, R^* არ ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას.

501. მართი კუთხის C წვეროდან დაეუშვათ CD სიმაღლე. მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული მართობის თეისების გამოყენებით მიეიღებთ: $a^2=c\cdot AD$, ე.ი. $AD=a^2/c$. ეინაიდან $\frac{a^3}{c^2}=\frac{a^2}{c}\cdot\frac{a}{c}=AD\cos\angle A$ მიღებული ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ საძებნი მონაკვეთია AK, სადაც K არის D წერტილის გეგმილი AC კათეტზე.

503. მოცემული ტრაპეციის ფუძეებია b და d, ავაგოთ მონაკვეთი $b+d$ და მონაკვეთი $\frac{b+d}{2}$. ტრაპეციის ზედა წვეროდან ქვედა ფუძეზე დაეუშვათ h სიმაღლე. ავაგოთ მონაკვეთები რომელთა სიგრძეები ტოლი იყოს $MN=\frac{b+d}{2}+h$, $MK=\frac{b+d}{2}$, $KN=h$. MN მონაკვეთის შუაწერტილიდან შემოეხაზოთ $\frac{1}{2}MN$ რადიუსიანი წრეწირი. K წერტილიდან აღემართოთ MN მონაკვეთის მართობი, რომელიც აგებულ წრეწირს გადაკვეთს P წერტილში. KP მონაკვეთი წარმოადგენს ასაგები კვადრატის გვერდს. ცხადია აგებული კვადრატი მოცემული ტრაპეციის ტოლდიდია.

504. ამოცანის პირობის თანახმად მოცემულია კუთხე $\angle A=\alpha+\beta$, მისი გვერდები იყოს AM და AN ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით მარტივად აიგება $\angle B$, ისე, რომ მისი წვერო დაემთხვეს პირველი კუთხის A წვეროს, ხოლო ერთ-ერთი გვერდი პირველი კუთხის AM გვერდს. ეს კუთხეები ავაგოთ ისე, რომ მათ გააჩნდეთ საერთო ნაწილი. მეორე კუთხეა MAP, იგი ტოლია $\beta+\gamma$. ვთქვათ $\beta+\gamma>\alpha+\beta$ მაშინ NAP კუთხე ტოლია $\gamma-\alpha$, ამის შემდეგ მესამე კუთხე განეალაგოთ ისე, რომ მისი წვერო დაემთხვეს აგებულ A წვეროს, ხოლო გვერდი – AP გვერდს, ამასთან მას არა აქვს საერთო ნაწილი აგებულ კუთხეებთან. აგებული კუთხე NAS ტოლია $\gamma-\alpha+\alpha+\gamma=2\gamma$. მიღებული კუთხე ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით გაეყოთ შუაზე. ამით აიგება γ კუთხე. ამის შემდეგ მარტივად ავაგებთ α და β კუთხეებს და მასთან ერთად სამკუთხედსაც, რომლის კუთხეებია α,β,γ.

505. l წრფეზე მოენიშნოთ AD მონაკვეთი. D წერტილიდან A წერტილის მიმართულებით გადაეზომოთ DK მონაკვეთი რომლის სიგრძე ზედა ფუძის სიგრძის ტოლია. A და K წერტილებიდან როგორც ცენტრებიდან შემოეხაზოთ წრეწირები $AB=a$ და $CD=b$ ტოლი რადიუსებით. ამ წრეწირების გადაკვეთის წერტილზე გავატაროთ AB ფუძის პარალელური წრფე. ამ წრფეზე მოვზომოთ ზედა ფუძის ტოლი მონაკვეთი. ამ მონაკვეთის ბოლო წერტილი შევაერთოთ D წერტილთან. ამით ტრაპეცია აგებული იქნება.

507 აეიღოთ B_1CA_1 კუთხე, რომელიც ტოლია $180^0-\alpha-\beta$, მისი CA_1 გვერდის პარალელურად მისგან r მანძილზე გაეატაროთ l წრფე. ფარგლისა და სახაზავის მეშვეობით ავაგოთ ამ კუთხის ბისექტრისა და მან l წრფე გადაკვეთა O წერტილში. ცხადია ეს წერტილი იქნება სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი. ამ წერტილიდან შემოეხაზოთ r რადიუსიანი წრეწირი. ვთქვათ ეს წრეწირი ეხება CA_1 გვერდს M წერტილში. აეიღოთ ამ გვერდზე რაიმე D წერტილი, რომელიც განთავსებული იყოს M წერტილის მარჯვნივ. ავაგოთ β ტოლი CDK კუთხე. ვთქვათ D წერტილი ისეა შერჩეული, რომ DK მონაკვეთი აგებულ წრეწირს კვეთს P და Q წერტილებში. PQ მონაკვეთი შუაზე გაეყოთ E წერტილით. ამ წერტილში აღემართოთ PQ მართობი, რომელიც წრეწირს გადაკვეთს F წერტილში. ამ წერტილში გავაელოთ წრეწირის მხები წრეფე. ამ წრფისა და B_1CA_1 კუთხის გვერდების გადაკვეთის წერტილები აღენიშნოთ A და B. ამით სამკუთხედი ABC აგებული იქნება.

508. ავიღოთ რაიმე l წრფე და მასზე M წერტილი. ამ წერტილის სხვადასხვა მხარეს გადავზომოთ MA და MB მონაკვეთები, ისე რომ $MA=a$ და $MB=h_a$. მოცემულ M წერტილზე გავატაროთ l_1 წრფე და მასზე მოვზომოთ $MN=P$ სიგრძის მონაკვეთი. სამ A,B,N წერტილებზე შემოვხაზოთ წრეწირი რომლის გადაკვეთის წერტილი l_1 წრფესთან იყოს Q. ცხადია MQ წარმოადგენს საძებნი მონაკვეთის სიგრძეს. $MQ=r$. მართლაც $AM\cdot MB=MQ\cdot MN$ ვინაიდან $2S=a\cdot h_a=P\cdot r$.

510. ვთქვათ $AB>BC$-ზე. B წერტილიდან AB გვერდზე მოვზომოთ BC მონაკვეთის ტოლი BN მონაკვეთი. AN მონაკვეთი K წერტილით გავყოთ შუაზე. სამკუთხედის AC გვერდი Q წერტილით გავყოთ შუაზე. Q წერტილიდან გადავზომოთ KN სიგრძის QM მონაკვეთი Q წერტილიდან მარცხნივ. ნაპოვნი M წერტილი აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას.

511. სამკუთხედის გარეთ AC და BC გვერდებზე ავაგოთ ტოლგვერდა ACD და BCN სამკუთხედები. ამ ტოლგვერდა სამკუთხედებზე შემოვხაზოთ წრეწირები. მათი გადაკვეთის წერტილი, რომელიც განთავსებული იქნება ABC სამკუთხედში აღვნიშნოთ M ცხადია $\angle AMC=\angle CMB=\angle BMA=120^0$.

512. სამკუთხედის B და C წერტილებიდან დავუშვათ სიმაღლეები BM და CK და ისინი დავყოთ სამ ტოლ ნაწილად. ფუძეების მხრიდა ამ სიმაღლეებზე მოვზომოთ სიმაღლეების მესამედების ტოლი მონაკვეთები. მიღებულ წერტილებზე გავატაროთ AB და AC გვერდების პარალელური წრფეები. მათი გადაკვეთის წერტილი იქნება საძებნი O წერტილი.

513. M წერტილსა და წრეწირის ცენტრზე გავატაროთ l წრფე, რომელიც წრეწირს გადაკვეთს P და Q წერტილებში. მარტივად შეგვიძლია ავაგოთ $c=\sqrt{PM\cdot MQ}$, $c\sqrt{2}$ და $\frac{c\sqrt{2}}{2}$ სიგრძის მონაკვეთები. M წერტილიდან როგორც ცენტრიდან შემოვხაზოთ $\frac{c\sqrt{2}}{2}$ რადიუსიანი წრეწირი. ვთქვათ ეს წრეწირი მოცემულ წრეწირს გადაკვეთს A წერტილში. წრფე რომელიც გაივლის A და M წერტილებში მოცემულ წრეწირს გადაკვეთს B წერტილში. AB ქორდა საძებნი ქორდაა, ვინაიდან $AM\cdot MB=PM\cdot MQ$.

515. ავაგოთ ჯერ β კუთხე, რომლისთვისაც $cos\,\alpha=\dfrac{1-2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$. ავიღოთ რაიმე $AB=a$ სიგრძის მონაკვეთი. B წერტილში აღვმართოთ მართობი. A წერტილიდან შემოვხაზოთ $r=3a$ რადიუსის მქონე წრეწირი. C-თი აღვნიშნოთ ამ წრეწირისა და მართობის გადაკვეთის წერტილი. ცხადია $BC=\sqrt{9a^2-a^2}=2\sqrt{2}a$. ავაგოთ ახლა $MN=2\sqrt{2}a-a$ სიგრძის მონაკვეთი. მარტივად შეგვიძლია ავაგოთ $NK=\sqrt{16a^2-a^2}=\sqrt{15a^2}$ სიგრძის მონაკვეთიც. ავაგოთ ახლა მართკუთხა სამკუთხედი რომლის კათეტი ტოლია $2\sqrt{2}a-a$, ხოლო ჰიპოტენუზა $-\sqrt{15}a$. ცხადია ამ კათეტთან მიმდებარე კუთხის კოსინუსი ტოლია $\dfrac{2\sqrt{2}a-a}{\sqrt{15}a}$. ასაგები კუთხე წარმოადგენს ამ აგებული კუთხის მოსაზღვრე კუთხეს.

516. მარტივად შეიძლება ავაგოთ სამკუთხედი რომლის კუთხეებია α და β. ცხადია ასაგები სამკუთხედი აგებულის მსგავსი იქნება. აგებული სამკუთხედის პერიმეტრი იყოს P_1 ხოლო გვერდი a_1. ასაგები სამკუთხედის P პერიმეტრის საშუალებით ავაგოთ ასაგები

სამკუთხედის a გვერდი, ამისათვის გამოვიყენოთ ტოლობა $P_1:a_1=P:a$ ამ ტოლობიდან მიიღება $a\cdot P_1=a_1\cdot P$. ავიღოთ AC მონაკვეთი, რომელიც AB და BC მონაკვეთების ჯამის ტოლია, სადაც $AB=a_1$ და $BC=P$. B წერტილში გავატაროთ რაიმე l წრფე და ამ წრფეზე გადავზომოთ $BD=P_1$ სიგრძის მონაკვეთი. სამ A,C,D წერტილზე ავაგოთ

სამკუთხედი და მასზე შემოვხაზოთ წრეწირი. ამ წრეწირის გადაკვეთის წერტილი l წრფესთან აღვნიშნოთ S-ით. ცხადია $BS=a$. გავიხსენოთ წრეწირის ორი გადამკვეთი ქორდის თვისება. სამკუთხედის a გვერდის ასაგებად, მოვიქცეთ შემდეგნაირად, აგებული სამკუთხედის a_1 გვერდზე ან მის გაგრძელებაზე მოვზომოთ a სიგრძის მონაკვეთი. მონაკვეთის ბოლო წერტილზე გავატაროთ სამკუთხედის გვერდის პარალელური წრფე, ამის შემდეგ მიიღება ასაგები სამკუთხედი.

517. ABC კუთხის შიგნით ავიღოთ რაიმე M წერტილი და მასზე გავატაროთ AC გვერდის პარალელური წრფე, რომელიც AB გვერდს გადაკვეთს D წერტილში. D წერტილიდან AB გვერდზე გადავზომოთ $DE=AD$ მონაკვეთი. E და M წერტილებზე გამავალი და კუთხის გვერდის K წერტილში გადამკვეთი წრფე წარმოადგენს ასაგებ წრფეს. მართლაც ვთქვათ M წერტილზე გადის მეორე წრფე, რომელიც კუთხის გვერდს გადაკვეთს F და G წერტილებში. მარტივად შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ $S_{\Delta AFG} > S_{\Delta ABK}$.

518. ვთქვათ მოცემულია ABC სამკუთხედი. როგორც ცნობილია მსგავსი სამკუთხედების ფართობები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც შესაბამისი გვერდების კვადრატები, ე.ი. შეგვიძლია დავწეროთ $\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2$ ვინაიდან $\frac{S_1}{S_2}=2$ ამიტომ $\frac{a_1}{a_2}=\sqrt{2}$. სამკუთხედის BC გვერდზე, რომლის სიგრძე a ტოლია, ავიღოთ K შუაწერტილი და აღვმართოთ KM მართობი, რომლის სიგრძე ტოლია $\frac{a}{2}$. ცხადია სამკუთხედი BMC ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედია და $BM=\frac{a}{\sqrt{2}}$. სამკუთხედის BC გვერდზე B წვეროდან მოვზომოთ BM მონაკვეთის ტოლი BM_1 მონაკვეთი. M_1 წერტილზე გავაელოთ AC გერედის პარალელური წრფე, ცხადია ის სამკუთხედის ფართობს შუაზე გაყოფს.

520. სამკუთხედის AC გვერდი გავაგრძელოთ და მასზე C წერტილიდან მოვზომოთ BC მონაკვეთის ტოლი CK მონაკვეთი. მივიღებთ BCK ტოლფერდა სამკუთხედს. ცხადია $\angle AKB=\angle CBK=\frac{1}{2}\cdot 44^0=22^0$. ანალოგიურად გავაგრძელოთ AK გვერდი და მასზე K წერტილიდან გადავზომოთ KB-ს ტოლი KM მონაკვეთი. ცხადია $\angle AMB=\frac{1}{2}\cdot 22^0=11^0$.

522. მოცემული AOB კუთხის წვეროდან შემოვხაზოთ ნებისმიერი რადიუსიანი წრეწირი. ამ კუთხის წრეწირთან გადაკვეთის წერტილები იყოს A და B. წვეროდან აღვმართოთ AO გვერდის მართობი – OC. AC 90^0-იანი რკალი გავყოთ შუაზე D წერტილით. A წერტილიდან წრეწირზე ორჯერ გადავზომოთ 17^0-იანი კუთხე. მივიღებთ AE რკალს. ცხადია ED რკალის გრადუსული ზომაა 11^0.
17^0 და 11^0-იანი რკალებით მივიღებთ 6^0 –იან რკალს. 11^0 და 6^0-იანი რკალებით 5^0 –იანს და ბოლოს 6^0-იანი და 5^0 –იანი რკალებით მიიღება 1^0-იანი რკალი და შესაბამისად 1^0 –იანი კუთხე.

523. ამოცანის პირობის თანახმად მოცემულია სამკუთხედის გვერდი $AB=2c$, ამ გვერდზე დაშვებული h სიმაღლე და დანარჩენი AC და BC გვერდების სხვაობა $2a$. მარტივად შეგვიძლია ავაგოთ მონაკვეთი $b=\sqrt{c^2-a^2}$ (ის წარმოადგენს მართკუთხა სამკუთხედის კათეტს რომლის ჰიპოტენუზაა c, ხოლო მეორე კათეტია a). ავიღოთ ახლა l_1 წრფე და მასზე მოვნიშნოთ AB მონაკვეთი. ამ მონაკვეთის შუა წერტილი იყოს O. ამ წერტილიდან მარჯვნივ მოვზომოთ OP მონაკვეთი, რომლის სიგრზე იყოს b. აგებული P წერტილიდან აღვმართოთ AB მონაკვეთის მართობი და მასზე გადავზომოთ $PM=h$ მონაკვეთი და ამ მონაკვეთის M წერტილზე გავატაროთ l_1 წფის პარალელური l_2 წრფე. O წერტილიდან l_1 წრფეზე მარჯვნივ მოვზომოთ $OQ=a$ მონაკვეთი. Q წერტილზე აღვმართოთ l_1 წრფის მართობი, რომელიც OM მონაკვეთს ან მის გაგრძელებას გადაკვეთს N წერტილში. O წერტილიდან მარჯვნივ l_1 წრფეზე გადავზომოთ მონაკვეთი $OE=ON$. მიღებული E

წერტილიდან აღემართოთ მართობი, რომელიც l_1 წრფეს გადაკვეთს C წერტილში. დავამტკიცოთ, რომ ABC სამკუთხედი წარმოადგენს სწორედ ასაგებ სამკუთხედს. აგების თანახმად სამკუთხედები OPM და OQN ერთმანეთის მსგავსია, ამიტომ სამართლიანია ტოლობა $\frac{ON}{OM}=\frac{OQ}{OP}$. რადგანაც $OM=\sqrt{b^2+h^2}$, $OQ=a$, $OP=b$, მივიღებთ $ON=\frac{a\sqrt{b^2+h^2}}{b}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $ON=x$. გვექნება: $x^2=\frac{a^2(b^2+h^2)}{b^2}$. შევნიშნოთ, რომ აღნიშვნის თანახმად ასევე გვაქვს $c^2=a^2+b^2$, ამ ტოლობიდან მიიღება შემდეგი ტოლობები: $a^2c^2h^2=a^4h^2+a^2b^2h^2$, $a^2b^2c^2+a^2c^2h^2+a^4b^2=a^2b^2h^2+a^2c^2b^2+a^4b^2+a^4h^2$. ეს ტოლობა ასე გადავწეროთ: $c^2\cdot\frac{a^2b^2+a^2h^2}{b^2}+a^4=a^2h^2+a^2c^2+a^2\cdot\frac{a^2b^2+a^2h^2}{b^2}$.

ე.ი. $c^2x^2+a^4=a^2h^2+a^2c^2+a^2x^2$ საიდანაც მიიღება: $c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2h^2+a^2c^2-2a^2cx+a^2x^2$ ან $(cx-a^2)^2=a^2[h^2+(x-c)^2]$. ე.ი. $cx-a^2=a\sqrt{h^2+(x-c)^2}$ ან რაც იგივეა: $h^2+c^2+2cx+x^2=4a^2+h^2+c^2-2cx+x^2+4a\sqrt{h^2+(c-x)^2}$. მიღებული ტოლობა ასე გადაიწერება: $\sqrt{h^2+(x+c)^2}=2a+\sqrt{h^2+(x-c)^2}$ ე.ი. $\sqrt{h^2+(x+c)^2}-\sqrt{h^2+(x-c)^2}=2a$. რადგანაც $AC=\sqrt{h^2+(x+c)^2}$, $BC=\sqrt{h^2+(x-c)^2}$, ამიტომ $AC-BC=2a$. რაც იმას ნიშნავს, რომ აგებული ACB სამკუთხედი აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს.

524. ავიღოთ რაიმე $AC=a$ სიგრძის მონაკვეთი და A წერტილიდან როგორც ცენტრიდან შემოვხაზოთ $R=b$ რადიუსის წრეწირი. ეს წრეწირი AC მონაკვეთს გადაკვეთს M წერტილში. $MC=a-b$. M წერტილიდან როგორც ცენტრიდან შემოვხაზოთ $r=a-b$ რადიუსიანი წრეწირი. ამ წრეწირის პირველ წრეწირთან გადაკვეთის ერთ-ერთი წერტილი აღვნიშნოთ B. ცხადია მიღებული ABC სამკუთხედი წარმოადგენს ასაგებ სამკუთხედს. მართლაც გვაქვს ორი ტოლფერდა სამკუთხედი ABM და BMC, ამიტომ $\angle ABM=\angle BMA, \angle MBC=\angle BCA$. მაგრამ ცხადია $\angle AMB=\angle MCB+\angle CBM=2\angle MCB. \angle ABC=$
$\angle ABM+\angle MBC=2\angle MCB+\angle MCB=3\angle ACB$.

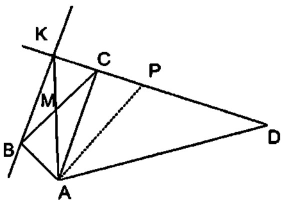
525. მოცემულია სამი მონაკვეთი $2c, h, r$, სადაც $2c$ სამკუთხედის გვერდია, h მასზე დაშვებული სიმაღლე, ხოლო r - ჩახაზული წრეწირის რადიუსი. ცნობილია ტოლობა $S=ch=rP$, ამიტომ მარტივად შეგვიძლია ავაგოთ მონაკვეთი, რომლის სიგრძე P, აკმაყოფილებს პირობას: $P=ch/r$ (P წარმოადგენს წრეში გადამკვეთი ქორდებით მიღებული ოთხი მონაკვეთიდან ერთ-ერთს). ამის შემდეგ მარტივად აიგება მონაკვეთი, რომლის სიგრძეც სამკუთხედის პერიმეტრის ტოლია ($2P$). ვიცით რა სამკუთხედის ერთი გვერდი, შეგვიძლია ავაგოთ ისეთი მონაკვეთი, რომლის სიგრძე ტოლია დანარჩენი ორი გვერდის ჯამის. აღვნიშნოთ ის $2a$-თი. ცხადია მარტივად აიგება მონაკვეთი რომლის სიგრძეა $b=\sqrt{a^2-c^2}$. ავაგოთ ახლა სამკუთხედი ABC. ავიღოთ რაიმე l წრფე და მასზე გადავზომოთ $AB=2c$ სიგრძის მონაკვეთი. მონაკვეთის შუაწერტილი იყოს O. გავატაროთ l წრფის პარალელური l_1 წრფე, რომელიც მისგან დაშორებულია h მანძილით. O წერტილიდან როგორც ცენტრიდან შემოვხაზოთ b რადიუსიანი წრეწირი, რომლის გადაკვეთის წერტილი l_1 წრფესთან იყოს M. O წერტილიდან როგორც ცენტრიდან შემოვხაზოთ a რადიუსიანი წრეწირი და გავატაროთ ისეთი l_2 წრფე, რომელიც გაივლის O და M წერტილებზე და აგებულ წრეწირს გადაკვეთს N წერტილში. ამ წერტილიდან l წრფეზე დავუშვათ NP მართობი, რომელიც l_1 წრფეს გადაკვეთს C წერტილში. დავამტკიცოთ, რომ ACB ასაგები სამკუთხედია. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $AC+CB=2a$. ცხადია, რომ სამკუთხედები OMD და ONP მსგავსია, ამიტომ ადგილი აქვს ტოლობას: $\frac{ON}{OP}=\frac{OM}{OD}$ ე.ი. $\frac{a}{OP}=\frac{b}{\sqrt{b^2-h^2}}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $OP=x$, მივიღებთ $x=\frac{a\sqrt{b^2-h^2}}{b}$ სამკუთხედებიდან ACP და BCP გვაქვს ტოლობები:$AC=\sqrt{h^2+(x+c)^2}$, $BC=\sqrt{h^2+(x-c)^2}$. განვიხილოთ ჯამი $AC+BC$. დავამტკიცოთ, რომ ის ტოლია $2a$-სი. მართლაც თუ

$\sqrt{h^2+(x+c)^2}+\sqrt{h^2+(x-c)^2}=2a$, მაშინ $h^2+(x+c)^2=4a^2-4a\sqrt{h^2+(x+c)^2}+h^2+(x-c)^2$ ან $4a\sqrt{h^2+(x+c)^2}=4a^2-4xc$ საიდანაც მიიღება:
$a^2h^2+a^2x^2+a^2c^2=a^4+x^2c^2$. რადგანაც $x^2=\frac{a^2(b^2-h^2)}{b^2}$ მივიღებთ: $a^2h^2+a^2\cdot\frac{a^2(b^2-h^2)}{b^2}+a^2c^2=a^4+c^2\cdot\frac{a^2(b^2-h^2)}{b^2}$, $b^2=a^2-c^2$ ე.ი. ტოლობა ჭეშმარიტია და საბოლოოდ გვექნება,

რომ ტოლობა $AC+CB=2a$ სამართლიანია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ACB ასაგები სამკუთხედია.

526. ავიღოთ $4R$ სიგრძის AB მონაკვეთი, სადაც R წინასწარ აღებული რაიმე მონაკვეთია. AB მონაკვეთის შუა წერტილიდან როგორც ცენტრიდან შემოეხაზოთ $2R$ რადიუსიანი წრეწირი. A წერტილიდან მასზე გამავალ წრეწირზე მოეზომოთ R და $3R$ სიგრძის მონაკვეთები ორივე მხარეს. წრეწირზე მივიღებთ C და D წერტილებს და $ABCD$ ოთხკუთხედს. AB მონაკვეთის შუაწერტილი იყოს O. ცხადია სამართლიანია ტოლობები: $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot CB+\frac{1}{2}BD\cdot AD$ ვინაიდან $\angle C=\angle D=90^0$ გვექნება: $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot 4R^2 sin\angle COA+\frac{1}{2}\cdot 4R^2 sin\angle COB+\frac{1}{2}\cdot 4R^2 sin\angle BOD+\frac{1}{2}\cdot 4R^2 sin\angle DOA$. ამ ტოლობებიდან მიიღება $AC\cdot BD+BD\cdot AD=(sin\angle COA+sin\angle COB+sin\angle BOD+sin\angle DOA)4R^2$. მონაკვეთები AC, CB, BD, AD გამოითვლება მართკუთხა სამკუთხედებიდან. $AC=R$, $BC=R\sqrt{15}, BD=R\sqrt{7}, AD=3R$. ყოველივე ამის შემდეგ წინა ტოლობა ასე გადაიწერება $sin\alpha+sin\beta+sin\gamma+sin\delta=\frac{\sqrt{15}+3\sqrt{7}}{4}$. როგორც ვხედავთ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ წარმოადგენენ კუთხეებს რომელთა წვეროა O წერტილი.

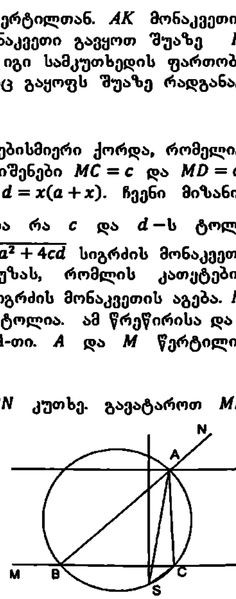
527. ამოცანის პირობის თანახმად საჭიროა მოცემული ამოზნექილი ოთხკუთხედის ფართობი გავყოთ შუაზე A წერტილზე გამავალი წრფით. გავატაროთ AC დიაგონალის პარალელური l წრფე. (ამას გავაკეთებთ იმ შემთხვევაში თუ $S_{\Delta ABC}<S_{\Delta ACD}$-ზე. ამის გაგება კი მარტივია, რადგან საკმარისია ერთმანეთს შევადაროთ AC გვერდზე დაშვებული სიმაღლეები. თუ სამკუთხედის ფართობებს შორის ასეთი თანაფარდობა არაა მაშინ AC პარალელურ წრფეს გავატარებთ D წერტილში). DC გვერდი გავაგრძელოთ და ეთქვათ მან l წრფე



გადაკვეთა K წერტილში. შევაერთოთ A წერტილი K წერტილთან. AK მონაკვეთის გადაკვეთა BC მონაკვეთთან აღვნიშნოთ M-ით. KD მონაკვეთი გავყოთ შუაზე P წერტილით. AP წარმოადგენს AKD სამკუთხედის მედიანს იგი სამკუთხედის ფართობს შუაზე გაყოფს შუაზე. ცხადია იგი ოთხკუთხედის ფართობსაც გაყოფს შუაზე რადგანაც $S_{\Delta MKC}=S_{\Delta ABM}$ (BK პარალელურია AC).

528. წრეწირის შიგნით მდებარე M წერტილზე გავატაროთ ნებისმიერი ქორდა, რომელიც წრეწირს გადაკვეთს C და D წერტილებში. შემოვიღოთ აღნიშვნები $MC=c$ და $MD=d$. ქორდების თვისების თანახმად სამართლიანია ტოლობა $c\cdot d=x(a+x)$. ჩვენი მიზანია გამოვთვალოთ x, ის ტოლია $x=\frac{-a+\sqrt{a^2+4cd}}{2}$. მოცემულია რა c და d-ს ტოლი მონაკვეთები, ადვილად ავაგებთ $2\sqrt{cd}$ სიგრძის მონაკვეთს. $\sqrt{a^2+4cd}$ სიგრძის მონაკვეთი კი წარმოადგენს იმ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზას, რომლის კათეტების სიგრძეებია a და $2\sqrt{cd}$. ამის შემდეგ ადვილია x-ის ტოლი სიგრძის მონაკვეთის აგება. M წერტილიდან შემოეხაზოთ წრეწირი, რომლის რადიუსიც x-ის ტოლია. ამ წრეწირისა და მოცემული წრეწირის გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ A-თი. A და M წერტილის შემაერთებელი ქორდა იქნება ასაგები ქორდა.

529. ავიღოთ მოცემული მახვილი კუთხის მოსაზღვრე MBN კუთხე. გავატაროთ MB გვერდის პარალელური წრფე, რომელიც მისგან a მანძილითაა დაშორებული (a ასაგები სამკუთხედის გვერდის სიგრძეა). ეთქვათ ამ წრფემ BN გვერდი გადაკვეთა A წერტილში. მიღებული წერტილიდან BM გვერდის გაგრძელებაზე დავუშვათ AC მართობი. ABC წერტილებზე გავატაროთ წრეწირი. გავატაროთ წრფე, რომელიც პარალელურია AC-სი და მისგან დაშორებულია სამკუთხედის სიმაღლის ტოლი მანძილით. ამ წრფის წრეწირთან გადაკვეთის წერტილი იყოს S. ACS ასაგები სამკუთხედია.



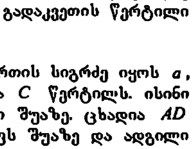
530. გავატაროთ წრეწირის მხები წრფე. C იყოს მანძილი M წერტილიდან შეხების N წერტილამდე. ცნობილია, რა MN მონაკვეთის სიგრძე ავაგოთ მონაკვეთი, რომლის სიგრძეა $x = \frac{C\sqrt{6}}{6}$. საკმარისია ჯერ ავაგოთ $2C$ სიგრძის მონაკვეთი, შემდეგ კი - $C\sqrt{2}$ სიგრძის. ამ ორი მონაეეთის დახმარებით ავაგოთ $C\sqrt{6}$ სიგრძის მონაკვეთი. ის წარმოადგენს მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზას, რომლის კათეტების სიგრძეება $2C$ და $C\sqrt{2}$. ამის შემდეგ აგებული მონაკვეთი დავყოთ 6 ტოლ ნაწილად. ავაგებთ, რა მონაკვეთს, რომლის სიგრძეა $x = \frac{C\sqrt{6}}{6}$, M წერტილიდან შემოვხაზოთ წრეწირი, რომლის რადიუსი $2x$-ის ტოლია. აგებული წრეწირისა და მოცემული წრეწირის გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ K-თი. MK მკვეთი წარმოადგენს ასაგებ მონაკვეთს.

531. ვთქვათ მოცემულია ორი წრეწირი რადიუსებით $R > r$. მოცემული წრეწირების O_1 და O_2 (O_1 მცირე რადიუსიანი წრეწირის ცენტრია) ცენტრებზე გავატაროთ l წრფე O_2O_1 მონაკვეთის გაგრძელებაზე ავიღოთ A წერტილი ისე, რომ $AO_1 = \frac{O_2O_1 \cdot r}{R-r}$. ცხადია ასეთი მონაკვეთის აგება მარტივია ვინაიდან ის წარმოადგენს წრეში ურთიერთგადამკვეთი ორი ქორდით მიღებული მონაკვეთებიდან ერთ-ერთს (დანარჩენი სამი მონაკვეთის O_2O_1, r, $R-r$ სიგრძე ჩვენთვის ცნობილია). გავატარებთ, რა A წერტილიდან მცირე წრეწირის მხებ წრფეს ის ცხადია ამავე დროს იქნება მეორე წრეწირის მხებიც. იმ შემთხვევაში, როდესაც $R = r$ მხების გავლება მარტივია.

534. მოცემულ A წერტილზე და წრეწირის O ცენტრზე გავატაროთ l წრფე. ვთქვათ ეს წრფე წრეწირს კვეთს B და C წერტილებში (B წერტილი მოთავსებულია A და C წერტილებს შორის). ავაგოთ მეორე წრეწირი, რომლისთვისაც AC წარმოადგენს დიამეტრს. B წერტილიდან აღვმართოთ AC მონაკვეთის მართობი წრფე. ამ წრფის მეორე წრეწირთან გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ N-ით. A წერტილიდან შემოვხაზოთ მესამე წრეწირი, რომლის რადიუსი ტოლია AN მონაკვეთის სიგრძის. ამ მესამე წრეწირის, პირველ წრეწირთან გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ D-თი. ცხადია AD წარმოადგენს ასაგებ მხებს, რადგანაც $AD^2 = AB \cdot AC$.

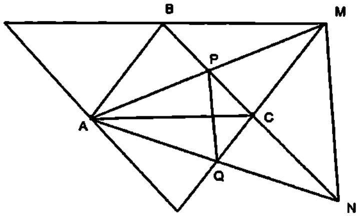
535. რაიმე A წერტილზე, როგორც ცენტრზე შემოვხაზოთ a რადიუსიანი წრეწირი. ავიღოთ ამ წრეწირზე B წერტილი და როგორც ცენტრზე შემოვხაზოთ a რადიუსიანი წრეწირი. ამ წრეწირის გადაკვეთის წერტილი პირველ წრეწირთან იყოს C. ამ წერტილზე როგორც ცენტრზე შემოვხაზოთ მესამე ისევ a რადიუსიანი წრეწირი, რომლის გადაკვეთის წერტილი მეორე წრეწირთან იყოს D. ამ წერტილზე როგორც ცენტრზე შემოვხაზოთ ისევ a რადიუსიანი წრეწირი, რომლის გადაკვეთის წერტილი მესამე წრეწირთან იყოს K წერტილი. ამ წერტილზე როგორც ცენტრზე შემოვხაზოთ ისევ a რადიუსიანი წრეწირი და ვთქვათ მისი მეოთხე წრეწირთან გადაკვეთის წერტილი იყოს M. ამ წერტილზე როგორც ცენტრზე შემოვხაზოთ a რადიუსიანი წრეწირი, რომლის გადაკვეთის წერტილი მეხუთე წრეწირთან იყოს N წერტილი. ცხადია $AN = 3a$.

536. მოცემული კუთხის გვერდებზე გადავზომოთ ორი მონაკვეთი, ერთის სიგრძე იყოს a, ხოლო მეორის – $3a$. ამ კუთხის გვერდებზე მივიღებთ ორ B და C წერტილს. ისინი შევაერთოთ და მიღებული BC მონაკვეთი D წერტილით გავყოთ შუაზე. ცხადია AD იქნება ABC სამკუთხედის მედიანა, რომელიც მის ფართობს გაყოფს შუაზე და ადგილი ექნება ტოლობას $\frac{1}{2}AB \cdot AD \sin\angle BAD = \frac{1}{2}AD \cdot AC \sin\angle DAC$ ე.ი. $AB \sin\angle BAD = AC \sin\angle DAC$. აგების თანახმად $AB = a; AC = 3a$. მივიღებთ $a \sin\angle BAD = 3a \sin\angle DAC$. როგორც ვხედავთ $\sin\alpha = 3\sin\beta$ და კუთხეები α და β აგებულია.



537. ამოცანის პირობის თანახმად მოცემული გვაქვს სამი მონაკვეთი OM, r_1, r_2. ავაგოთ ისეთი ორი სამკუთხედი, რომლის ორი გვერდი ტოლია OM და r_1, ხოლო მათი საერთო წვეროს მედიანა ტოლი იქნება r_2-ის. სამკუთხედის მესამე გვერდი იყოს x. სამართლიანია ტოლობა $2OM^2 + 2r_1^2 = 4r_2^2 + x^2$. ავაგოთ ჯერ

მონაკვეთი, რომლის სიგრძეა $y=\sqrt{OM^2+r_1^2}$ მისი აგება მარტივია, იგი წარმოადგენს მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზას, რომლის კათეტებია OM და r_1. ამის შემდეგ ავაგოთ $y\sqrt{2}$ სიგრძის მონაკვეთი. აგება მარტივია ვინაიდან იგი წარმოადგენს მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზას რომლის კათეტების სიგრძეა y. ამის შემდეგ ავაგოთ $\sqrt{\left(\sqrt{2}y\right)^2-(2r_2)^2}$ ტოლი მონაკვეთი, რომელიც წარმოადგენს ისეთი მართკუთხა სამკუთხედის კათეტს რომლის ჰიპოტენუზაა $\sqrt{2}y$ ხოლო მეორე კათეტი $2r_2$. აგებული მონაკვეთი ცხადია წარმოადგენს ზემოთ მოყვანილ ტოლობაში x-ის ტოლ სიდიდეს. ახლა M წერტილიდან შემოვხაზოთ წრეწირი, რომლის რადიუსია x. ამ წრეწირის r_1 რადიუსიან წრეწირთან გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ B-თი და ის შევაერთოთ M წერტილთან. შემაერთებელი მონაკვეთი დიდ წრეწირს გადაკვეთს A წერტილში. ცხადია OA წარმოადგენს MOB სამკუთხედის მედიანას და $AM=MB$.



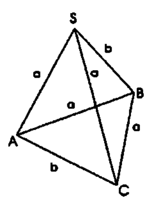
540. განვიხილოთ ABC სამკუთხედი, რომლის წვეროებზე გავავლოთ მოპირდაპირე გვერდების პარალელური წრფეები. სამკუთხედის BC გვერდი გავაგრძელოთ და მასზე გადავზომოთ CN მონაკვეთი, რომლის სიგრძეც ტოლია BC გვერდის სიგრძის. ნახაზზე მიღებული AMN სამკუთხედის გვერდებია $2m_a=AM$, $2m_c=AN$, $2m_b=MN$. ჩვენ ავაგეთ სამკუთხედი, რომლის გვერდებია $2m_a$, $2m_b$, $2m_c$. გავატარებთ, რა ამ სამკუთხედში შუაწრფეს მივიღებთ ასაგებ APQ სამკუთხედს, რომლის გვერდებია: m_a, m_b, m_c.

541. კუთხის ასაგებად გამოიყენეთ ტოლობა: $cos36^0=\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{15}}$.

542. ხუთკუთხედის ასაგებად გამოიყენეთ მონაკვეთი, რომლის სიგრძეც გამოისახება $cos36^0$ –ის მეშვეობით.

543. ავაგოთ მოცემული კუთხე $\angle MAN=\alpha$. მის AN გვერდზე გადავზომოთ მოცემული გვერდის ტოლი მონაკვეთი $AC=a$. კუთხის მეორე გვერდზე გადავზომოთ AD მონაკვეთი, რომელიც სიდიდით ტოლია სამკუთხედის დანარჩენი ორი გვერდის სხვაობის. D და C წერტილები შევაერთოთ. DC მონაკვეთი E წერტილით გავყოთ შუაზე და E წერტილში აღვმართოთ DC მონაკვეთის მართობი, რომელიც AM სხივს გადაკვეთს B წერტილში. ABC სამკუთხედი წარმოადგენს ასაგებ სამკუთხედს, ვინაიდან $AB-BC=b-a$..

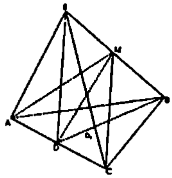
§ 21. სტერეომეტრია



179. განვიხილოთ პირამიდა $SABC$, სადაც S პირამიდის წვეროა, ხოლო SA, SB, SC გვრდითი წიბოები. $SA=SC=AB=BC=a$, ხოლო $BS=AC=b$ $(a\neq b)$. წახნაგების ფართობები ტოლია, ხოლო წიბოები ტოლი არ არის.

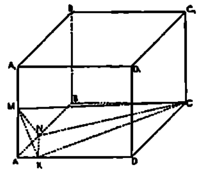
180. სამკუთხა პირამიდაში ჩახაზული სფეროს რადიუსი ტოლია, $r = \frac{3V}{S_1+S_2+S_3+S_4}$ სადაც V მოცულობაა, ხოლო S_1, S_2, S_3, S_4 წახნაგების ფართობებია.

181. $SABC$ პირამიდაში AC წიბოზე გამავალი კვეთის ფართობი მინიმალურია თუ ეს კვეთა SB წიბოს მართობულია. ე.ი. საკმარისია გამოვთვალოთ მანძილი AC წიბოს შუაწერტილიდან SB წიბომდე.



182. აღვნიშნოთ ფუძის რადიუსის სიგრძე x-ით, მაშინ კონუსის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით $V = \frac{1}{3}\pi x\sqrt{1-2x^2}$ და მისი მაქსიმალური სიდიდე მიიღწევა მაშინ როდესაც $x = 1/2$.

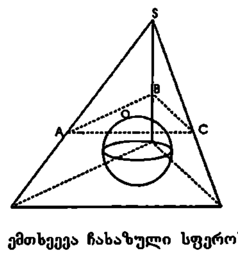
183. კვეთაში მიღებული სამკუთხედითა და C წვეროთი შექმნილი პირამიდის მოცულობა გამოთვალეთ ორი ფორმულით. პირველი ის შემთხვევაა როცა პირამიდის ფუძეა ΔNKC, მეორე შემთხვევაში ფუძეა ΔMNK. მიღებული სიდიდეები გაუტოლეთ ერთმანეთს და განსაზღვრეთ საძებნი მანძილი. ის იქნება მეორე პირამიდის სიმაღლე.



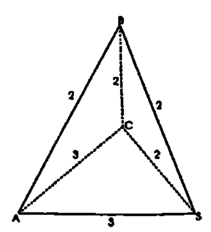
184. სამკუთხა პირამიდაში გარე ჩახაზული სფეროს რადიუსი გამოითვლება ფორმულით:

$$r^* = \frac{3V}{S_1+S_2+S_3-S_4}$$

სადაც V პირამიდის მოცულობაა. S_1, S_2, S_3, S_4 წახნაგების ფართობებია. S_4 ის წახნაგია, რომელსაც ეხება გარედან ჩახაზული სფერო. შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მოყვანილი ტოლობა მიიღება შემდეგი თანაფარდობიდან: $V = \frac{1}{3}S_1 r^* + \frac{1}{3}S_2 r^* + \frac{1}{3}S_3 r^* - \frac{1}{3}S_4 r^* = V_1 + V_2 + V_3 - V_4$. სადაც V_1, V_2, V_3, V_4 იმ პირამიდების მოცულობებია, რომელთა წვერო ემთხვევა ჩახაზული სფეროს ცენტრს, ხოლო ფუძეებია პირამიდის წახნაგები.



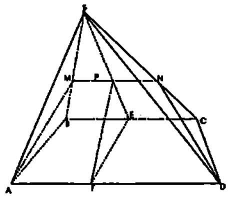
185. პირამიდის ფუძედ აირჩიეთ ის წახნაგი, რომლის წიბოების სიგრძეებია 3 სმ, 3 სმ, 2 სმ. ცხადია პირამიდის წვერო დაგეგმილდება ფუძეზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრში. გამოვთვლით, რა ფუძეზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსს, ხოლო შემდეგ პირამიდის სიმაღლეს გამოვთვლით პირამიდის მოცულობასაც.



186. თუ რიცხვების ჯამი მუდმივი სიდიდეა, მაშინ ნამრავლი მაქსიმალური იქნება მაშინ, როდესაც ყველა შესაკრები ერთმანეთის ტოლია (ეს გამომდინარეობს საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო გეომეტრიულს შორის თანაფარდობიდან). რაც შეეხება მოცემულ ამოცანას მარტივად შეგვიძლია დავადგინოთ, რომ პირამიდის შიგნით ნებისმიერი წერტილიდან წახნაგებამდე მანძილების ჯამი მუდმივი სიდიდეა. ის მიიღება ტოლობიდან $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$ სადაც V პირამიდის მოცულობაა, ხოლო V_1, V_2, V_3, V_4 იმ პირამიდების მოცულობები, რომელთა წვერო მოცემული წერტილია, ხოლო ფუძეები პირამიდის წახნაგები.

187. ამოცანის პირობისა და სამკუთხედების მსგავსობის ნიშნის - $R : r = L : l$ გამოყენებით მიიღება ტოლობა $R : r = \sqrt{2}$. რაც შეეხება მოცულობების შეფარდებას იგი გამოისახება შეფარდებით $R : r$. მარტივად მიიღება $V_1 : V_2 = 1 : (2\sqrt{2} - 1)$.

192. სამართლიანია ტოლობა $S = S_1 \cos\alpha + S_2 \cos\beta + S_3 \cos\gamma$. სადაც S ფუძის ფართობია, S_1, S_2, S_3 წახნაგების ფართობებია, ხოლო α, β, γ შესაბამისად მოცემული წახნაგების დახრის კუთხეები ფუძის სიბრტყისადმი. პირობის თანახმად $S_1 = S_2 = S_3 = S$ ე.ი. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$. მიღებული ტოლობა კი შეუძლებელია როცა $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. (იხ. ამოცანა №49, §16).



193. თუ ოთხკუთხედში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა მაშინ მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ერთმანეთის ·ტოლია. გამოვიყენებთ რა ამ წინადადების სამართლიანობას მარტივად გამოითვლება კვეთაში მიღებული ტოლფერდა ტრაპეციის გვერდები და შემდეგ ფართობი.

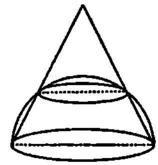
194. ვთქვათ პირამიდის წვერო გეგმილდება ფუძის M წერტილში. h_1, h_2, h_3 მანძილებია ამ წერტილიდან ფუძის გვერდებამდე. ცნობილია, რომ $h_1 + h_2 + h_3$ მუდმივია და ტოლია ფუძეში მდებარე ტოლგვერდა სამკუთხედის სიმაღლის. სამართლიანია ტოლობა
$h = h_1 + h_2 + h_3 = H(ctg\alpha + ctg\beta + ctg\gamma)$ (H პირამიდის სიმაღლეა). სამართლიანია ტოლობა
$ctg\alpha + ctg\beta + ctg\gamma = 2$.

196. ჯერ დავამტკიცოთ დებულება, რომ პრიზმას მაქსიმალური მოცულობა გააჩნია მაშინ როდესაც მისი ფუძე წარმოადგენს ცილინდრის ფუძეში ჩახაზულ კვადრატს. მართლაც, წრეში ჩახაზული ოთხკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin\alpha$, სადაც d_1, d_2 ოთხკუთხედის დიაგონალებია, ხოლო α - მათ შორის კუთხე. S მაქსიმალურია მაშინ როდესაც $d_1 = d_2 = 2R$ და $\alpha = 90^0$. ე.ი. ოთხკუთხედი კვადრატია. ამ შენიშვნების შემდეგ ამოცანა მარტივად ამოიხსნება.

197. ცილინდრის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით $V = \frac{\pi R^2}{H^2}(x^3 - 2Hx^2 + H^2 x)$, სადაც x ცილინდრის სიმაღლეა, $R-$ კონუსის ფუძის რადიუსი, ხოლო $H-$ კონუსის სიმაღლე. V მაქსიმალურია მაშინ როდესაც $f(x) = x^3 - 2Hx + H^2 x$ მაქსიმალურია, ე.ი როცა მაქსიმალურია ნამრავლი $2x(H-x)(H-x)$, ამას კი ადგილი ექნება მაშინ როდესაც $2x = H - x = H - x$ ე.ი. როდესაც $x = \frac{H}{3}$. ამის შემდეგ ამოცანა მარტივად ამოიხსნება.

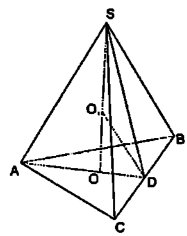
199. პრიზმის სიმაღლე აღვნიშნოთ x-ით, მაშინ მისი მოცულობა გამოითვლება ფორმულით $V(x) = \left(\frac{24 - 3x}{4}\right)^2 \frac{3\sqrt{3}}{4} x$. $V(x)$ მაქსიმალურია მაშინ, როდესაც $f(x) = x(8 - x)^2$ ფუნქციის მნიშვნელობა მაქსიმალურია. ე.ი. მაქსიმალურია ნამრავლი $2x(8 - x)(8 - x)$. ეს კი

მოხდება მაშინ როდესაც თანამამრავლები ტოლია ე.ი. $2x=8-x$ საიდანაც მიიღება, რომ $x=\frac{8}{3}$ ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა გამოვთვალოთ სიდიდე $V\left(\frac{8}{3}\right)$.

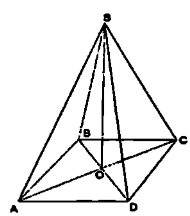


200. ამოცანის პირობის შესაბამისად შეიძლება გაკეთდეს მოყვანილი ნახაზი. როგორც ნახაზიდან ჩანს საძებნი წრის სიგრძე წარმოადგენს წაკვეთილი კონუსის მცირე ფუძის წრეწირის სიგრძეს. ამ წრეწირის რადიუსის პოვნა მარტივია.

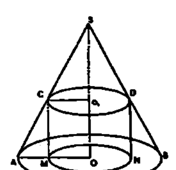
202. თუ x-ით აღვნიშნავთ კუთხეს კონუსის ფუძესა და იმ მონაკვეთს შორის, რომელიც კონუსში ჩახაზული სფეროს ცენტრს აერთებს კონუსის ფუძის წრეწირის რაიმე წერტილთან, მაშინ სფეროს რადიუსი გამოითვლება ფორმულით $r=5\cos x\, tg\frac{x}{2}$. მისი მაქსიმალური მნიშვნელობის გასაგებად გამოვიყენოთ წარმოებულის ცნება $\left(5\cos x\, tg\frac{x}{2}\right)'=0$. განტოლებიდან $\cos^2 x+\cos x-1=0$ მივიღებთ $\cos x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ და გამოითვლება r-ის მნიშვნელობა.



203. O_1-ით აღვნიშნოთ იმ სფეროს ცენტრი, რომელიც ეხება პირამიდის ყველა წიბოს. ვთქვათ ერთ-ერთი ასეთი წერტილია D. ცხადია O_1D არის SOD სამკუთხედში $\angle ODS$ კუთხის ბისექტრისა და ის ამავე დროს წარმოადგენს აღნიშნული სფეროს რადიუსს. რადგანაც $O_1D=\frac{OD}{\cos\angle ODO_1}$, ხოლო $\cos 2\angle ODO_1=\frac{OD}{DS}$, ამიტომ მივიღებთ: $O_1D=\frac{DS\cos 2\angle ODO_1}{\cos\angle ODO_1}$. $DS=2\sqrt{3}$, $\cos 2\angle ODS=\frac{1}{3}$. რადგანაც $1+\cos 2\angle ODS=1+\frac{1}{3}=2\cos^2\angle ODO_1$ ამიტომ მივიღებთ: $\cos\angle ODO_1=\sqrt{\frac{2}{3}}$.
საბოლოოდ გვექნება: $O_1D=2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ ე.ი. აღნიშნული წრეწირის რადიუსია $\sqrt{2}$ სმ.



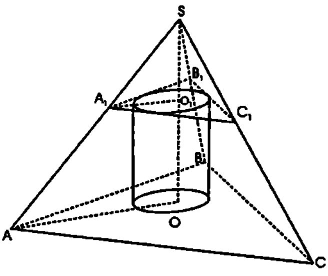
204. ABC სამკუთხედი შევავსოთ $ABCD$ პარალელოგრამამდე. SO წარმოადგენს, როგორც ASC ასევე SBD სამკუთხედებში მედიანას. გამოვიყენებთ, რა მედიანის გამოსათვლელ ფორმულას, ამ ორი სამკუთხედიდან, მივიღებთ SD მონაკვეთის სიგრძეს. ASD სამკუთხედში ცნობილია სამივე გვერდი, ამიტომ ადვილად გამოვითვლით კუთხეს AS და AD გვერდებს შორის. ცხადია ეს არის კუთხე, რომლის პოვნაც გვინდოდა.



205. კონუსის მსახველის დახრის კუთხე ფუძის სიბრტყისადმი აღვნიშნოთ x-ით. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ კონუსის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით $V=\frac{1}{3}\pi(3+4ctgx)^2\left(\frac{3}{ctgx}+4\right)$.

$V'(x)=0$ განტოლების ამოხსნით დავადგენთ საძებნი კუთხის სიდიდეს.

206 თუ ცილინდრის სიმაღლეს აღვნიშნავთ x-ით, მისი მოცულობა გამოითვლება ფორმულით $V(x)=\frac{\pi}{44}x(\sqrt{33}-x)^2$. სიდიდე $x(\sqrt{33}-x)(\sqrt{33}-x)$ მაქსიმალურია მაშინ, როდესაც მაქსიმალურია $2x(\sqrt{33}-x)(\sqrt{33}-x)$. მაგრამ ამ თანამამრავლთა ჯამი მუდმივი სიდიდეა $2x+\sqrt{33}-x+\sqrt{33}-x=2\sqrt{33}$, ამიტომ ნამრავლი მაქსიმალური იქნება მაშინ როდესაც თანამამრავლები ტოლია. მივიღეთ $x=\frac{\sqrt{33}}{3}$ და ცილინდრის მაქსიმალური მოცულობაა $V\left(\frac{\sqrt{33}}{3}\right)=\frac{\pi}{44}\cdot\frac{\sqrt{33}}{3}\left(\sqrt{33}-\frac{\sqrt{33}}{3}\right)^2=$ $\frac{\pi\sqrt{33}}{9}$ სმ^3.



207. თუ ცილინდრის ფუძის რადიუსს აღვნიშნავთ y-ით, მისი მოცულობა გამოითვლება ფორმულით $V=6\pi y^2(2-y)$. ცხადია V მაქსიმალურია მაშინ როდესაც მაქსიმალურია რიცხვი $3\pi\cdot y\cdot y(4-2y)$, მაგრამ $y\cdot y(4-2y)$ მაქსიმალურია მაშინ, როდესაც $y=4-2y$ (შევნიშნოთ, რომ ამ თანამამრავლთა ჯამი მუდმივია). მივიღეთ, რომ $y=\frac{4}{3}$ ე.ი. ცილინდრის მაქსიმალური მოცულობაა $\frac{64\pi}{9}$ სმ^3.

211. α იყოს კუთხე მსახველსა და ფუძის სიბრტყეს შორის, მაშინ ამოცანის პირობის თანახმად $2l^3=3\sqrt{3}RH^2$. ე.ი. $2=3\sqrt{3}\frac{R}{l}\left(\frac{H}{l}\right)^2$, საიდანაც მივიღებთ. $2=3\sqrt{3}cos\alpha(1-cos^2\alpha)$. ამოვხსნით რა განტოლებას $\left(cos\alpha-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(3\sqrt{3}\,cos^2\alpha+3cos\alpha-2\sqrt{3}\right)=0$, გვექნება $cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

გამოსათვლელია $V_1:V_2$ ე.ი. $\left(\frac{1}{3}\pi R^2H\right):\frac{4}{3}\pi\left(\frac{RH}{R+l}\right)^3$ მარტივი გარდაქმნებით საბოლოოდ მივიღებთ $\frac{1}{4}ctg^2\alpha+\frac{3}{4}\cdot\frac{cos\alpha}{1-cos^2\alpha}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-cos^2\alpha}+\frac{3\sqrt{3}}{8}=\frac{9+5\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$.

212. კვეთაში მიღებულია მართკუთხედი, რომლის პერიმეტრი მუდმივი სიდიდეა და ტოლია 10 სმ-ის. ცნობილია, რომ ნამრავლი მაქსიმალური იქნება მაშინ, როდესაც მართკუთხედის გვერდები ტოლია ე.ი. $a=2.5$ სმ-ს და კვადრატის ფართობი იქნება 6.25 სმ^2.

213. გამოვიყენებთ, რა სამკუთხედების მსგავსებას და იმ ფაქტს, რომ ტოლფერდა ტრაპეციაში შესაძლებელია წრეწირის ჩახაზვა მაშინ როდესაც ფერდი ტოლია შუაწრფის, ამოცანა მარტივად ამოიხსნება.

215. კონუსის ფუძის რადიუსი იყოს R, ხოლო კუთხე მსახველსა და ფუძის სიბრტყეს შორის – α. ამოცანის პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ განტოლებას α მიმართ: $19cos^2\alpha-16cos\alpha+1=0$ ე.ი. $cos\alpha\neq\frac{8+3\sqrt{5}}{13}$ ან $cos\alpha=\frac{8-3\sqrt{5}}{13}$ და ადგილი ექნება იმ ტოლობას, რომელიც მოითხოვება ამოცანაში.

216. თუ მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოებს აღვნიშნავთ x, y, z-ით მაშინ ამოცანის პირობის თანახმად გვაქვს $x^2+y^2+z^2 \le 1$. როგორც ცნობილია სამართლიანია უტოლობები $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$ (სამი რიცხვის საშუალო გეომეტრიული ნაკლებია ან ტოლი მათი საშუალო არითმეტიკულის, ხოლო საშუალო არითმეტიკული ნაკლებია ან ტოლი საშუალო კვადრატულის). ვინაიდან $xyz = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ და $\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$, მივიღებთ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$, როგორც ცნობილია ეს შესაძლებელია მაშინ როდესაც $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ და საბოლოოდ სრული ზედაპირის ფართობი ტოლია 2 სმ^2.

217. პირამიდის წახნაგების ფართობებისათვის გვაქვს ტოლობები $S_1 = \frac{1}{2}P_1r_1, S_2 = \frac{1}{2}P_2r_2$, $S_3 = \frac{1}{2}P_3r_3$, $S_4 = \frac{1}{2}P_4r_4$, ხოლო მოცულობისათვის სამართლიანია ფორმულა $V = \frac{1}{3}r(S_1+S_2+S_3+S_4) = \frac{1}{6}r(P_1r_1+P_2r_2+P_3r_3+P_4r_4)$ ამოცანის პირობის თანახმად $\frac{36V^2}{r^2} = \left(r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2\right)\left(P_1^2+P_2^2+P_3^2+P_4^4\right)$. ე.ი. $\left(P_1r_1+P_2r_2+P_3r_3+P_4r_4\right)^2 = \left(r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2\right)\left(P_1^2+P_2^2+P_3^2+P_4^4\right)$. მაგრამ ალგებრის კურსიდან ცნობილია თანაფარდობა:
$\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4\right)^2 \le \left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^4\right)$, და თუ ადგილი აქვს ტოლობას, მაშინ a_1, a_2, a_3, a_4 სიდიდეები პროპორციულია b_1, b_2, b_3, b_4 სიდიდეების. ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი წინადადების სამართლიანობა.

218. O_1 და O_2 იყოს წახნაგებში ჩახაზული წრეწირის ცენტრები. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ამ წერტილებს შორის უმოკლესი მანძილი ზედაპირის გაყოლებით საჭიროა გავშალოთ პირამიდის წახნაგები, განვათავსოთ ორი მეზობელი წახნაგი ერთ სიბრტყეში და აღნიშნული ცენტრები შევაერთოთ O_1O_2 მონაკვეთით. ამ მონაკვეთის სიგრძის გამოთვლა შეიძლება კოსინუსების თეორემის გამოყენებით. რაც შეეხება კუთხის სიდიდეს უნდა გავითვალისწინოთ, რომ მითითებული ცენტრები მდებარეობენ შესაბამისი წახნაგების ბისექტრისებზე.

220. მოცემულ ცილინდრში ჩავხაზოთ ორი სფერო რომელთა რადიუსები ტოლია ცილინდრის ფუძის რადიუსის. ამასთანავე ამ ორი სფეროდან ერთი ეხება მკვეთი სიბრტყის ერთ მხარეს, ხოლო მეორე - მეორე მხარეს. შეხების წერტილები იყოს M და N. გამოვიყენებთ, რა წრეწირის მხები მონაკვეთების ტოლობის პირობას მივიღებთ, რომ კვეთაში მიღებული წირის ნებისმიერი წერტილიდან მოცემულ M და N წერტილებამდე მანძილების ჯამი მუდმივი სიდიდეა და ტოლია სფეროების ცენტრებს შორის მანძილის.

221. ამ ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა გამოყენებულ იქნას წინა ამოცანის ამოხსნისას ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიური მსჯელობა. აღნიშნული ფიგურა მიიღება ცილინდრული ზედაპირის გადაკვეთით რომელიღაც სიბრტყით. თუ მკვეთი სიბრტყე ცილინდრული ზედაპირის მართობ სიბრტყესთან ადგენს α კუთხეს მაშინ როგორც ცნობილია კვეთის ფართობი გამოითვლება ფორმულით $Q = S/\cos\alpha$, სადაც Q კვეთის ფართობია, ხოლო S ცილინდრული ზედაპირის მსახველის მართობი სიბრტყით კვეთაში მიღებული წრეწირის შესაბამისი წრის ფართობი.

222. გარე ჩახაზული სფეროების რადიუსებისათვის სამართლიანია ტოლობები: $r_1 = \frac{3V}{S_4 + S_2 + S_3 - S_1}$, $r_2 = \frac{3V}{S_1 + S_3 + S_4 - S_2}$, $r_3 = \frac{3V}{S_1 + S_2 + S_4 - S_3}$, $r_4 = \frac{3V}{S_1 + S_2 + S_3 - S_4}$. ე.ი $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = 2 \cdot \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{3V} = \frac{2}{r}$.

223. მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოები აღვნიშნოთ x, y, z. ამოცანის პირობის თანახმად გვაქვს $xy + xz + yz = 12; xyz = 8$. მოცემული ტოლობებიდან მივიღებთ $4 = \frac{xy+xz+yz}{3} = \sqrt[3]{xy \cdot xz \cdot yz} = \sqrt[3]{64} = 4$ ე.ი. საშუალო არითმეტიკული ტოლი აღმოჩნდა საშუალო გეომეტრიულის, ეს კი შესაძლებელია მაშინ როდესაც $x = y = z = 2$ და საბოლოოდ გვექნება, რომ $d = 2\sqrt{3}$ სმ.

224. ვთქვათ ეს სამი წერტილი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე. ცხადია ამ შემთხვევაში მეოთხე წერტილი შეგვიძლია ავიღოთ ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრზე, ამ სამკუთხედის სიბრტყისადმი გავლებულ მართობზე ისე, რომ მანძილი ერთ რომელიმე წერტილამდე და მაშასადამე დანარჩენ წერტილებამდეც გამოისახება რაციონალური რიცხვებით.

განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესა A, B, C წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ და სრულდება პირობა, რომ მანძილი A წერტილიდან B-მდე 1-ის ტოლია, ხოლო B-დან C-მდე - $\sqrt{2}$ -ის ტოლია. ცხადია ამ შემთხვევაში D წერტილი, რომელიც აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს არ არსებობს. მართლაც დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ ასეთი D წერტილი არსებობს. დაშვების თანახმად $AB = 1$ სმ-ს, $BM = x$ სმ-ს, $MC = \sqrt{2} - x$ სმ-ს. დაშვების თანახმად AD, BD, DC - გამოისახება რაციონალური რიცხვებით. პითაგორას თეორემის თანახმად $AD^2 - (x+1)^2 = BD^2 - x^2$. ამ ტოლობიდან მივიღებთ, რომ x რაციონალური რიცხვია. გამოვიყენებთ, რა ისევ პითაგორას თეორემას მივიღებთ: $BD^2 - x^2 = DC^2 - (\sqrt{2} - x)^2$. საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\sqrt{2}$ რაციონალური რიცხვია. მივიღეთ წინააღმდეგობა, რაც ამტკიცებს, რომ საზოგადოდ A, B, C წრტილებისათვის არ არსებობს ისეთი მეოთხე D წერტილი, რომლისთვისაც მონაკვეთების სიგრძეები AD, BD, CD გამოისახება რაციონალური რიცხვებით. შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაშიც, როდესაც D წერტილი ძევს AC წრფეზე AD, BD, CD მონაკვეთების სიგრძეები რაციონალური რიცხვებით არ გამოისახება.

225. განვიხილოთ წერტილები: $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(\sqrt[3]{2};\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 1;\ 0)$, $D(0;\ 0;\ 1)$. ვაჩვენოთ, რომ ამ ოთხი წერტილისათვის არ არსებობს ისეთი $M(\alpha; \beta; \gamma)$ წერტილი, რომ მანძილები AM, BM, CM, DM გამოისახებოდეს რაციონალური რიცხვებით. მართლაც გამოვიყენებთ რა მანძილის გამოსათვლელ ფორმულებს, მივიღებთ $AM^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2$, $BM^2 = (\alpha - \sqrt[3]{2})^2 + \beta^2 + \gamma^2 = b^2$, $CM^2 = \alpha^2 + (\beta - 1)^2 + \gamma^2 = c^2$, $DM^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (\gamma - 1)^2 = d^2$. პირველი და მესამე ტოლობიდან გამოდინარეობს, რომ β რაციონალური რიცხვია. პირველი და მეოთხე ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ γ რაციონალური რიცხვია. ყოველივე ამის შემდეგ მეორე ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\sqrt[3]{2}$ წარმოადგენს რაციონალურ კოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლების ამონახსნს, რაც შეუძლებელია.

§22. ვექტორები

1. $\overrightarrow{AB}$ კოორდინატებია $\overrightarrow{AB}(2-1; 4-2)$ ე.ი. გვაქვს $\overrightarrow{AB}(1; 2)$, $\overrightarrow{CD}(2; 4)$. $2\overrightarrow{AB}$ კოორდინატებია (2;4), ხოლო $3\overrightarrow{CD}$-სი (6;12). $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$ კოორდინატებია (8;16), ამიტომ $|2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}| = \sqrt{64 + 256} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$.

2. $\overrightarrow{AB}$ კოორდინატებია (1;2;1), ხოლო $\overrightarrow{CD}$-სი – (2;3;5). $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CD}$ ვექტორის კოორდინატები იქნება (2-6; 4-9; 2-15) ე.ი. (-4; -5; -13) და $\left|2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{16+25+169} = \sqrt{210}.$

3. 1) $\overrightarrow{AB}$ კოორდინატებია (1; 2) და საძიებელი დაშლაა $\vec{i}+2\vec{j}$,

2) $\overrightarrow{AB}$ კოორდინატებია (2; 1; 5) და საძიებელი დაშლაა $2\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}$

4. 1) $\vec{b}-\vec{a} = -\vec{i}+5\vec{j}$, $|\vec{a}| = \sqrt{13}$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}-\vec{a}| = \cos\alpha = \frac{13+5-26}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}} = -\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}} = -\frac{4\sqrt{65}}{65}$ და $\alpha = \pi - arccos\frac{4\sqrt{65}}{65}$

2) ანალოგიურად $\cos\alpha = \frac{10+5-2}{2\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{50}} = \frac{13\sqrt{2}}{20}$ და $\alpha = arccos\frac{13\sqrt{2}}{20}$.

3) ანალოგიურად $\cos\alpha = \frac{13+45-16}{2\sqrt{13}\cdot\sqrt{45}} = \frac{42}{2\cdot3\sqrt{65}} = \frac{7\sqrt{65}}{65}$ და $\alpha = arccos\frac{7\sqrt{65}}{65}$.

4) ანალოგიურად $\cos\alpha = \frac{25+41-2}{2\cdot5\sqrt{41}} = \frac{32}{5\sqrt{41}}$ და $\alpha = arccos\frac{32\sqrt{41}}{205}$.

5. 1) $\left|3\vec{i}+2\vec{j}\right| = \sqrt{13}$. მოცემული ვექტორის საწინააღმდეგოდ მიმართული ერთეულოვანი ვექტორია: $\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j}.-\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i}$, 2) $\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$, 3) $-\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}$. 4) $\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{i}$ $-\frac{3}{\sqrt{10}}\vec{j}$.

14. ამოცანის პირობის თანახმად $\overrightarrow{AM}$ და $\overrightarrow{MB}$ ვექტორები კოლინეარულია და ამასთან $\overrightarrow{AM}=\gamma\overrightarrow{MB}$. ვთქვათ M წერტილის კოორდინატებია (x; y) მაშინ $\overrightarrow{AM}$ ვექტორის კოორდინატები იქნება $(x-3; y-5)$, $\overrightarrow{MB}$-სი – $(7-x; 9-y)$ და $\gamma\overrightarrow{MB}$ ვექტორის კოორდინატები იქნება $(7\gamma-\gamma x; 9\gamma-y\gamma)$. ვექტორების ტოლობის პირობის თანახმად გვაქვს: $x-3 = 7\gamma - x\gamma$ და $y-5 = 9\gamma - y\gamma$ აქედან $x = \frac{3+7\gamma}{1+\gamma}$ და $y = \frac{5+9\gamma}{1+\gamma}$.

15. $\overrightarrow{AM}$ და $\overrightarrow{MB}$ ვექტორები კოლინეარულია და ამასთან $\overrightarrow{AM}=\gamma\overrightarrow{MB}$ ამიტომ სამართლიანია ტოლობები: $x-a_1 = \gamma b_1 - \gamma$, $y-a_2 = \gamma b_2 - \gamma y$, $z-a_3 = \gamma b_3 - \gamma z$ საბოლოოდ გვექნება $x = \frac{a_1+\gamma b_1}{1+\gamma}$; $y = \frac{a_2+\gamma b_2}{1+\gamma}$; $z = \frac{a_3+\gamma b_3}{1+\gamma}$.

16. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ვინაიდან $\overrightarrow{AB}$ კოორდინატებია (1; 2) და $\overrightarrow{DC}$ კოორდინატებია (1; 2) ამიტომ $10-x=1$ და $6-y=2$ საიდანაც მიიღება, რომ $x=9$ და $y=4$.

17. AC დიაგონალის შუაწერტილის კოორდინატებია $M(7;4)$. ვინაიდან $\overrightarrow{AM}$ მართობულია $\overrightarrow{MD}$, ამიტომ $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MD} = 0$ ე.ი. $\overrightarrow{AM}(4;\ 2)$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი $\overrightarrow{MD}(x-6; y-4)$ ვექტორზე ნულის ტოლია $4(x-6)+2(y-4) = 0$ პირობის თანახმად $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$=5 და განტოლებათა სისტემის $\begin{cases} 2x+y-16=0 \\ \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} = 5 \end{cases}$ ამოხსნით მიიღება D და B წერტილების კოორდინატები: $D(7;2), B(5;\ 6)$

21. $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2+(\vec{b}\cdot\vec{a}) - (\vec{a}\cdot\vec{b}) - \left|\vec{b}\right|^2 = 0$ ე.ი. $\vec{a}+\vec{b}$ მართობულია $\vec{a}-\vec{b}$.

22. $\overrightarrow{AC}$ ვექტორის კოორდინატებია (2; 5), ხოლო $\overrightarrow{BD}$ ვექტორის – (5; -1). საძებნი კუთხე გამოითვლება ფორმულით $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|} = \frac{10-5}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{757}}$, $\varphi = arccos\frac{5}{\sqrt{754}}$.

23. $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია $\overrightarrow{AB}(3;4)$, ხოლო $\overrightarrow{CD}(-3;\ 2)$. განვიხილოთ სკალარული ნამრავლი $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$=3$\cdot(-3)+4\cdot2 = -1 \neq 0$ ე.ი. ვექტორები მართობული არაა.

24. $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია $(4-m;4)$, ხოლო $\overrightarrow{CD}$ ვექტორის – $(4-m;\ -4)$. პირობის თანახმად $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ ე.ი. $(4-m)^2-16=0$ აქედან $4-m=\mp4$ და $m=0, m=8$.

25. $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია $(4;5)$, ხოლო $\overrightarrow{CD}$ ვექტორის – $(8;\ 10)$. ვინაიდან $8/4=10/5$ ამიტომ ეს ვექტორები კოლინეარულია $\overrightarrow{CD}$=$2\overrightarrow{AB}$.

26. $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია $(6;2m+2)$, ხოლო $\overrightarrow{CD}$ ვექტორის – $(m;\ 10)$. ვინაიდან $6/m=(2m+2)/10$ ამიტომ $m=5, m=-6$.

27. ვთქვათ B წერტილის კოორდინატებია $(3;y)$. $\overrightarrow{AC}$ ვექტორის კოორდინატებია $(2;\ 2)$, ხოლო $\overrightarrow{CB}$ ვექტორის – $(-1;\ y-5)$. პირობის თანახმად $\overrightarrow{AC}$ მართობია $\overrightarrow{CB}$ და მაშასადამე მათი სკალარული ნამრავლი 0-ის ტოლია. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=-2+2(y-5)=0$ საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $y=6$ და B წერტილის კოორდინატებია $(3;\ 6)$.

28. $\lambda\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $(2\lambda;\ 3\lambda)$, ხოლო $\mu\vec{b}$-სი $(3\mu;\ 4\mu)$. თუ გავითვალისწინებთ ვექტორების ჯამისა და ტოლობის პირობების განმარტებებს, გვექნება $\begin{cases}2\lambda+3\mu=10\\3\lambda+4\mu=14\end{cases}$ აქედან $\lambda=2, \mu=2$.

29. თუ გავითვალისწინებთ ვექტორების ჯამისა და ტოლობის პირობების განმარტებებს, გვექნება $\begin{cases}6+3x_1=9\\8+3y_1=17\end{cases}$ აქედან $x_1=1, y_1=3$. ე.ი. საძებნი ვექტორის კოორდინატებია $(1;3)$.

30. გვაქვს $\overrightarrow{AB}(3;\ \sqrt{7})$, $\overrightarrow{CD}(3;\ 4)$, $|\overrightarrow{AB}|=4, |\overrightarrow{CD}|=5$ და $\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\frac{9+4\sqrt{7}}{4\cdot5}$ საბოლოოდ $\varphi=arccos\frac{9+4\sqrt{7}}{20}$.

31. განვიხილოთ ტოლობა $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}=0$ ე.ი. $\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0\\2\lambda_1+3\lambda_2+4\lambda_3=0\\3\lambda_1+4\lambda_2+5\lambda_3=0\end{cases}$ ამ სიტემის ერთ-ერთი არანულოვანი ამონახსნია $\lambda_1=1;\ \lambda_2=-2;\ \lambda_3=1$ ე.ი. ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია.

32. განვიხილოთ ტოლობა $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}=0$ ე.ი. $\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2+5\lambda_3=0\\\lambda_2+3\lambda_3=0\\2\lambda_1+4\lambda_2+7\lambda_3=0\end{cases}$ რადგანაც ამ სიტემის ერთადერთი ამონახსნია $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ ამიტომ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებულია.

33. 1) $\vec{k}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\vec{k}\left(\frac{4}{4\sqrt{5}};\frac{8}{4\sqrt{5}}\right)=\vec{k}\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.
2) $\vec{k}=\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}=\vec{k}\left(\frac{5}{\sqrt{29}};\frac{-2}{\sqrt{29}}\right)$.
3) $\vec{k}=\frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}=\vec{k}\left(\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$.
4) $\vec{k}=\frac{1}{|\vec{d}|}\vec{d}=\vec{k}\left(\frac{-2}{\sqrt{13}};\frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$.

34. 1) $\vec{k}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\vec{k}\left(\frac{-5}{13};\frac{-12}{13}\right)$.
2) $\vec{k}=\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}=\vec{k}\left(\frac{-3}{5};\frac{-4}{5}\right)$.

3) $\vec{k} = \frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c} = \vec{k}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

4) $\vec{k} = \frac{1}{|\vec{d}|}\vec{d} = \vec{k}\left(\frac{-3}{5}; \frac{-4}{5}\right)$.

35. $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 13$ და საძებნი ვექტორია $\vec{c}\left(5 \cdot \frac{5}{13}; 5 \cdot \frac{12}{13}\right) = \vec{c}\left(\frac{25}{13}; \frac{60}{13}\right)$

36. გავითვალისწინებთ, რა ვექტორების შეკრების პარალელოგრამის წესს, მივალთ იმ დასკვნამდე, რომ მოცემულმა ვექტორებმა უნდა შექმნან რომბი ე.ი. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

37. $\vec{d}\left(\frac{25}{13}; \frac{60}{13}\right)$ ვექტორი $\vec{b}$ ვექტორის თანამიმართული. $|\vec{d}| = |\vec{a}|$. $\vec{k} = \vec{d} + \vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $\vec{k}\left(3 + \frac{25}{13}; 4 + \frac{60}{13}\right) = \vec{k}\left(\frac{64}{13}; \frac{112}{13}\right)$. მის საწინააღმდეგოდ მიმართული ერთეულოვანი ვექტორია $\vec{c}\left(-\frac{1}{|\vec{k}|} \cdot \frac{64}{13}; -\frac{1}{|\vec{k}|} \cdot \frac{112}{13}\right)$.

38. $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია (2; 3). $M(x; y)$ წერტილი მდებარეობს ასაგებ წრფეზე თუ $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორი პარალელურია $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის ე.ი. მათი კოორდინატები პროპორციული უნდა იყოს $\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{3}$ საიდანაც მიიღება, რომ $y = 5 + \frac{3}{2}(x-1)$ ან $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$.

39. $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია (2; 2). მისი მართობული ვექტორის კოორდინატებია (-2; 2) (შევნიშნოთ, რომ მათი სკალარული ნამრავლი 0-ის ტოლია). M_0 წერტილზე გამავალი და $\vec{c}(-2; 2)$ ვექტორის პარალელურ წრფის განტოლებას აქვს სახე $\frac{x-1}{y-5} = \frac{-2}{2}$ ე.ი. $y = -x + 6$.

40. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. $\vec{c} = |\vec{a}| \cdot \frac{1}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}$ ვექტორი წარმოადგენს $\vec{a}$ ვექტორის თანამიმართულს და ამასთან მისი სიგრძე ტოლია $|\vec{a}|$. ცხადია $\vec{a} + \vec{b}$ წარმოადგენს ვექტორს, რომელიც თანამიმართულია $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით შექმნილი კუთხის ბისექტრისის. ვიპოვოთ $\vec{c}$ კოორდინატები. $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 1$ ე.ი. $\vec{c}$ კოორდინატები იქნება $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}; \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$. $\vec{a} + \vec{c}$ კოორდინატები იქნება $\left(3 + \frac{5}{\sqrt{2}}; 4 + \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$. ბისექტრისის განტოლება კი იქნება $\frac{x-0}{3+\frac{5}{\sqrt{2}}} = \frac{y-0}{4+\frac{5}{\sqrt{2}}}$ ე.ი. $y = \frac{4\sqrt{2}+5}{3\sqrt{2}+5}x$.

41. ვთქვათ M წერტილი რომლის კოორდინატებია $(x; y)$ მდებარეობს საძებნ წრფეზე, მაშინ $\overrightarrow{AM}$ და $\overrightarrow{AB}$ ვექტორები კოლინეარულია, მათი კოორდინატები პროპორციულია და მივიღებთ $\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-5}{9-5}$ ან $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$.

42. $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NB} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$. მივიღეთ, რომ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{NB} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{CB}$ ე.ი. $\overrightarrow{CB} = 5\overrightarrow{MN}$. მიღებული ტოლობა ნიშნავს, რომ $\overrightarrow{CB}$ და $\overrightarrow{MN}$ ვექტორები კოლინეარულია და მათი სიგრძეების შეფარდება ტოლია 5-ის. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

43. $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CM}$ აქედან მიიღება $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BM}$ და $5\overrightarrow{MS} = 5\overrightarrow{SC} + 5\overrightarrow{CM}$. ამ ტოლობების შეკრებით მივიღებთ $6\overrightarrow{MS} = 5\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BM} + 5\overrightarrow{CM}$. რადგანაც $\overrightarrow{MM} + 5\overrightarrow{CM} = 0$ საბოლოოდ მივიღებთ $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{6} \cdot \left(5\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SB}\right)$. ანალოგიურად მიიღება ტოლობა

$\overrightarrow{NS}=\frac{1}{6}\cdot\left(5\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{SA}\right)$. რადგანაც სამკუთხედები BSC და ASD მსგავსია ამიტომ $\overrightarrow{SC}=K\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{SB}=K\overrightarrow{SA}$. გაეითვალისწინებთ, რა ამ ტოლობებს წინა ტოლობა ასე გადაიწერება $\overrightarrow{MS}=\frac{k}{6}\cdot\left(5\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{SA}\right)$ და $\overrightarrow{NS}=\frac{1}{6}\cdot\left(5\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{SA}\right)$. მიღებული ტოლობა იმას ნიშნავს, რომ $\overrightarrow{MS}$ და $\overrightarrow{NS}$ ვექტორები კოლინეარულია, ე.ი. ისინი ერთ წრფეზე მდებარეობენ. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

44. მოცემული ფუნქცია ჩავწეროთ შემდეგი სახით $f(x)=3\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}+3\cdot\frac{2x}{1+x^2}$. განვიხილოთ ვექტორები $\vec{a}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2};\frac{2x}{1+x^2}\right)$ და $\vec{b}(3;3)$. ცხადია $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$. სკალარული ნამრავლი მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობებს მიიღებს, მაშინ როდესაც ეს ვექტორები კოლინეარულია ე.ი. მათი კოორდინატები პროპორციული. მივიღეთ ტოლობა $\frac{1-x^2}{3(1+x^2)}=\frac{2x}{(1+x^2)3}$ საიდანაც გვექნება $1-x^2=2x$ და მისი ამონახსნია $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

45. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right|$ ე.ი. $|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$ მივიღეთ, რომ $\cos\varphi=\sin\varphi$ და აქედან გვექნება $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

46. $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}=(-1\cdot0-3\cdot2)\vec{i}+(3\cdot1-2\cdot0)\vec{j}+(2\cdot2+1\cdot1)\vec{k}=-6\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$ და საბოლოოდ გვაქვს $\left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right|=\sqrt{36+25+9}=\sqrt{70}$.

47. $S=\frac{1}{2}|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}\cdot1=\frac{\sqrt{70}}{2}$

48. $12=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\alpha=3\cdot8\cdot\cos\alpha$ ე.ი. $\cos\alpha=0.5,\ \alpha=60^0$. $\left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right|=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\alpha=3\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$.

49. $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{c}-2\vec{b}\right)=2\vec{a}\cdot\vec{c}-4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}-2\left|\vec{b}\right|^2=4\cdot2\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-2=-4\sqrt{3}-2.$

50. $\left[\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\right]=2[\vec{a}\cdot\vec{a}]-6\left[\vec{b}\cdot\vec{a}\right]+\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]-3\left[\vec{b}\cdot\vec{b}\right]=6\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]+[\vec{a}\cdot b]=\left(7\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right)^2=49\left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right|^2=49|\vec{a}|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2 sin^2\varphi=49\cdot9\cdot4\cdot\frac{3}{4}=1323.$

51. ცხადია $\vec{a}$ და $\overrightarrow{MM_0}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ ვექტორები კოლინეარული უნდა იყვნენ, ე.ი. $\frac{x-x_0}{2}=\frac{y-y_0}{3}=\frac{z-z_0}{2}$ ან $\begin{cases}x=x_0+t\\ y=y_0+3t.\\ z=z_0+2t\end{cases}$

52. წრფის განტოლება $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{1}$ ამ ტოლობაში $x;y;z$ ნაცვლად ჩავსვათ $x=4;y=1;z=2$ მაგრამ $\frac{4-1}{2}\neq\frac{1-2}{4}\neq\frac{2-3}{1}$ ე.ი. M_1 წერტილი არ მდებარეობს მითითებულ წრფეზე.

53. ცხადია $\overrightarrow{MM_0}(x-1;\ y-3;z-2)$ ვექტორი მართობული უნდა იყოს $\vec{a}$ ვექტორის, ე.ი. მათი სკალარული ნამრავლი 0-ის ტოლი უნდა იყოს. $2(x-1)+3(y-3)+4(z-2)=0$ და $2x+3y+4z-19=0$.

§24. ალბათობის თეორიის ელემენტები

1. $P(A)=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$.

2. A, B, C – იყოს აბიტურიენტთა ჩაბარების ხდომილებები, ცხადია ისინი დამოუკიდებელი ხდომილებებია. ე.ი. $P(A, B, C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

3. $P(A) = \frac{5+6}{19} = \frac{11}{19}$.

4. შავი ბურთულას ამოღების ალბათობაა $P(A) = \frac{12}{29}$. ბოლოს შავი ბურთულის ამოღების ალბათობა იქნება $P(B) = 1 - \frac{12}{29} = \frac{17}{29}$.

5. პირველ საკითხზე სწორად პასუხის გაცემის ალბათობაა $\frac{18}{20}$, ხოლო მეორეზე – $\frac{17}{19}$. ვინაიდან ისინი დამოუკიდებელი ხდომილებებია გვაქვს $P(A) = \frac{18}{20} \cdot \frac{17}{19} = \frac{153}{190}$.

6. 10 ბურთულიდან 3-ის შერჩევის ალბათობაა C_{10}^3, ხოლო 4 ბურთულიდან 3-ის შერჩევის ალბათობა – C_4^3, ამიტომ $P(A) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$.

7. $P(A) = \frac{C_7^2 \cdot C_5^1}{C_{12}^3} = \frac{21}{44}$.

8. $P(A) = \frac{C_{16}^4 \cdot C_5^1}{C_{12}^6} = \frac{91}{323}$.

9. $P(A) = \frac{C_6^2 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1}{C_{15}^4} = \frac{20}{91}$.

10. 5 დან 3 მონაკვეთის შერჩევის ალბათობა შეადგენს $C_5^3 = 10$ ვარიანტს. სამკუთხედი შეიძლება შედგეს შემდეგი მონაკვეთებით 3; 5; 6 ან 3; 6; 8 ან 5; 6; 8 ე.ი. სულ დასაშვებია 3 ვარიანტი 10-დან. ამიტომ $P(A) = \frac{3}{10} = 0.3$.

11. $P(A) = \frac{4}{C_6^3} = \frac{1}{5}$.

12. დამოუკიდებელი ალბათობების ნამრავლის თანახმად $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. სადაც $P(A)$ არის პირველი ყუთიდან თეთრი ბურთულას ამოღების ალბათობა, ხოლო $P(B)$ მეორე ყუთიდან ასევე თეთრი ბურთულას ამოღების ალბათობა. $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ და საბოლოოდ გვაქვს $P(AB) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

13. A იყოს პირველი ცდით თეთრი ბურთულის ამოღების ხდომილება, ხოლო B მეორე ცდით ასევე თეთრი ბურთულას ამოღების ხდომილება. ხდომილობათა ნამრავლის ფორმულის თანახმად გვექნება $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33}$.

14. ორი კამათელის გაგორებით მიღებული ვარიანტებია:
(1; 1), (1; 2), . . . , (1; 6)
(2; 1), (2; 2), . . . , (2; 6)
. . . .
(6; 1), (6; 2), , (6; 6). სულ არსებობს 36 ვარიანტი, რომელთა შორის 30 ისეთი წყვილია, რომ ციფრთა ჯამი არ აღემატება 9-ს. ე.ი. $P(A) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

15. $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ ან $P(A) = 1 - \frac{30}{36} = \frac{1}{6}$.

16. $P(A) = \frac{20 \cdot C_5^4}{C_{25}^5} = \frac{10}{5313}$.

17. $P(A) = \frac{1+20 \cdot C_5^4 + C_{20}^2 \cdot C_5^3}{C_{25}^5} = \frac{29}{92400}$.

18. $2^5 = 32, C_5^4 = 5,\ P(A) = \frac{5}{32}$, 2^9=512, $C_9^6 = 84$, $P(B) = \frac{84}{512} = \frac{21}{128}$, $P(B) > P(A)$ ე.ი. 9 პარტიიდან 6-ის მოგების ალბათობა მეტია.

19. წაგება აღვნიშნოთ 0-ით, ხოლო მოგება 1-ით. სულ შესაძლო ვარიანტებია (0; 0; 0; 0), (1; 0; 0; 0), (0; 1; 0; 0), (0; 0; 1; 0), (0; 0; 0; 1), . ,(1; 1; 1; 1) და მთლიანი რაოდენობაა $2^4 = 16$.მაშინ პარტიის მოგების ვარიანტების რაოდენობაა 4 – (0; 1; 1; 1), (1; 0; 1; 1), (1; 1; 0; 1), (1; 1; 1; 0). $P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. 9 პარტიიდან 6 პარტიის მოგების ალბათობაა $P(B) = \frac{C_9^6}{2^9} = \frac{21}{128} < \frac{1}{4} = P(A)$ ე.ი 4 პარტიიდან 6 პარტიის მოგების ალბათობა მეტია.

20. სამი ფურცლის არჩევის ყველა შესაძლო ვარიანტის რაოდენობაა $C_6^3 = 20$ აქედან ხელსაყრელი ვარიანტია სამი. არჩეულია რა ასოები "მ" და "ზ" სამი ფურცლიდან შეგვიძლია ავარჩიოთ ერთი რომელიმე, ე.ი. $P(A) = \frac{3}{20}$.

21. ჩვენ გვაინტერესებს ყველა შესაძლო დალაგებული სამეული. მათი რაოდენობაა $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. ხელსაყრელი ვარიანტების რაოდენობაა 3, ამიტომ $P(A) = \frac{3}{120} = \frac{1}{40}$

22. B იყოს თეთრი ბურთულას შერჩევის ხდომილება. A_k იყოს k-ური ყუთიდან თეთრი ბურთულის შერჩევის ალბათობა. $k = 1; 2; 3; \ldots P(B/A_1) = \frac{2}{5}$; $P(B/A_2) = \frac{3}{7}$; $P(B/A_3) = \frac{4}{5}$; $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$. $P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{3}\frac{14+15+28}{35} = \frac{57}{105}$

23. B იყოს თეთრი ბურთულას შერჩევის ხდომილება. A_k იყოს k-ური ყუთიდან თეთრი ბურთულის შერჩევის ხდომილობა. $k = 1; 2; 3; \ldots$. ადგილი აქვს ტოლობას $P(A_1/B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B/A_1)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A_3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{21}{57} = \frac{14}{57}$

24. B_1 იყოს ხდომილება იმისა, რომ დეტალი დამზადებულია პირველ საამქროში,
B_2 იყოს ხდომილება იმისა, რომ დეტალი დამზადებულია მეორე საამქროში,
B_3 იყოს ხდომილება იმისა, რომ დეტალი დამზადებულია მესამე საამქროში,
A იყოს ხდომილება იმისა, რომ დეტალი უმაღლესი ხარისხისაა.
სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობები: $P(B_1) = 0.4$; $P(B_2) = 0.35$; $P(B_3) = 0.25$. $P(A/B_1) = 0.9$; $P(A/B_2) = 0.8$; $P(A/B_3) = 0.7$ და საბოლოოდ სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად გვაქვს. $P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + P(B_3) \cdot P(A/B_3) = 0.815$.

25. A_1 იყოს პირველი მონადირის მიერ ნადირის მოკვლის ხდომილება როცა გასროლა მოხდა ორივე მონადირის მიერ ერთდროულად, ხოლო A_2 – მეორე მონადირის ხდომილება იგივე პირობებით. B-თი აღვნიშნოთ ხდომილება, რომელიც შეესაბამება იმ შემთხვევას, როცა გაისროლა ორივე მონადირემ ერთდროულად და ნადირი მოკლულ იქნა ერთი ტყვიით.
$P(A_1/B) = \frac{0.3 \cdot 0.8}{0.3 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.7} = \frac{12}{19}$, $P(A_2/B) = \frac{0.2 \cdot 0.7}{0.3 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.7} = \frac{7}{19}$. პირველ მონადირეს ეკუთვნის $\frac{12}{19} \cdot 380 = 240$ კგ, ხოლო მეორე მონადირეს – $\frac{7}{19} \cdot 380 = 140$ კგ.

26. A_1 იყოს ხდომილება იმისა, რომ დეტალი დამზადებულია ხარატის მიერ, ხოლო $-A_2$, რომ დეტალი დამზადებულია შეგირდის მიერ. B იყოს ხდომილება იმისა, რომ დეტალი წუნდებულია. ცხადია, რომ $P(A_1)=\frac{100}{100+80}=\frac{100}{180}=\frac{5}{9}$; $P(A_2)=\frac{80}{100+80}=\frac{80}{180}=\frac{4}{9}$. A_1, A_2 – ხდომილებათა სრული სისტემაა. $P(B/A_1)$– არის იმის ალბათობა, რომ დეტალი დაამზადა ოსტატმა და იგი არის წუნდებული. ის ტოლია 1–0.8=0.2. ანალოგიურად შეგირდისათვის $P(B/A_2)=1-0.6=0.4$. ბაიესის ფორმულის თანახმად $P(A_1/B)=\frac{P(A_1)\cdot P(B/A_1)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)}=\left(\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{10}\right):\left(\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{10}+\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{10}\right)=\frac{5}{13}$.

27. A_1 იყოს ოპტიკურ სამიზნიანი შაშხანის არჩევის ხდომილება, ხოლო A_2 – არაოპტიკურ სამიზნიანის. B იყოს სამიზნის დაზიანების ალბათობა. სამართლიანია შემდეგი ფორმულა:
$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2)\cdot P(B/A_2)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)}=\left(\frac{13}{20}\cdot 0.8\right):\left(\frac{8}{20}\cdot 0.95+\frac{13}{20}\cdot 0.8\right)=\frac{24}{43}$$

28. $S_{\Delta ABD}=S$, $S_{\Delta ADc}=2S$. $P(A)=\frac{S}{3S}=\frac{1}{3}$.

29. მოცემული ხდომილება წარმოადგენს აუცილებელ ხდომილებას, ე.ი $P(A)=1$.

30. ვინაიდან ექვსივე სამკუთხედის ფართობი ერთმანეთის ტოლია ამიტომ სამართლიანია ტოლობა: $P(A)=\frac{1}{6}$.

31. კვადრატის ფართობი ტოლი იქნება $16a^2$, ხოლო ერთი ოთხკუთხედის ფართობი – $16a^2-6a^2=10a^2$ და $P(A)=10/16=5/8$.

32. $S_{ABCD}=\frac{5+8}{2}\cdot H$, სადაც H ტრაპეციის სიმაღლეა, $S_{\Delta BCO}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot h_1$, სადაც h_1 BCO სამკუთხედის სიმაღლეა, $S_{\Delta AOD}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot h_2$, სადაც h_2 AOD სამკუთხედის სიმაღლეა. $\Delta BOC\sim\Delta AOD$ ე.ი. $h_2:h_1=8:5$.

1) $P(A_1)=\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{ABCD}}=\frac{5}{13}\cdot\frac{1}{1+0.4}=\frac{25}{169}$.

2) $P(A_2)=\frac{64}{169}$.

3) $P(A_3)=\frac{40}{169}$.

33. ალბათობა იმისა, რომ a წერტილი მოთავსდება $[0;5]$ შუალედში ტოლია $\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$. ალბათობა იმისა, რომ b წერტილი მოთავსდება $[25;50]$ შუალედში ტოლია $\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$. საძებნი ხდომილების ალბათობაა $\frac{1}{10}+\frac{1}{2}=\frac{1}{10}+\frac{5}{10}=\frac{6}{10}=0.6$

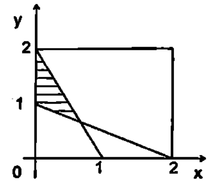
34. P ხდომილება აუცილებელია, ე.ი. მისი ალბათობა 1-ის ტოლია.

35. $min(x^2-x+2)>7/4$. ხდომილება შეუძლებელია, ე.ი. მისი ალბათობა 0-ის ტოლია.

36. ვიპოვით რა $f(x)$ ფუნქციის მინიმუმსა და $g(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმს, დავრწმუნდებით, რომ ამოცანაში მოცემული ხდომილება შეუძლებელია, ე.ი. მისი ალბათობა 0-ის ტოლია

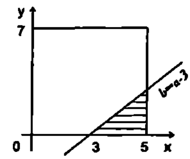
37. მახვილკუთხა სამკუთხედის შედგენის ალბათობა ტოლია $\frac{1}{4}$ და ამიტომ არამახვილკუთხა სამკუთხედის შექნის ალბათობა იქნება $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

38. ავაგოთ $x+2y=2$ და $2x+y=2$ წრფეების გრაფიკები. მათი გადაკვეთის წერტილია $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. $S_\Delta=\frac{1}{3}$, $S_{კვ}=4$. $P(A)=\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{12}$.



39. $P(A)=\frac{4-\pi}{4}$.

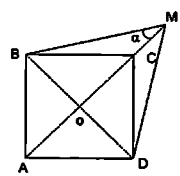
40. $x=\frac{b+3}{a}$, $a\neq 0$, $x<1$ ე.ი. $\frac{b+3}{a}<1$, $b<a-3$. სამკუთხედის ფართობი ტოლია $S_1=2$, ხოლო მართკუთხედის ფართობი ტოლია $S_2=35$ და $P(A)=\frac{2}{35}$.



41. ოთახის მოცულობა ტოლია $V=5\cdot 6\cdot 8$ მ$^3=240$მ^3. 8 ერთნაირი 1 მ რადიუსიანი ბირთვების მერვედების ჯამი ტოლია $\frac{4\pi}{3}$. $P(A)=\frac{\pi}{180}$.

42. კუბში ჩადგმული შიდა კუბის წიბოს ზომაა 0.6. ე.ი.
$P(A)=(1-0.6^3)/1=1-0.216=0.784$.

43. $BO=a\sqrt{2}/2$; $OM=a\sqrt{2}/2+d$; $tg\alpha=a\sqrt{2}/(a\sqrt{2}+2d)$, $2\alpha=2arctg\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+2d}$; $P(A)=2d/\pi=2arctg\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+2d}/\pi$.



44. $BO=a\sqrt{2}/2$; $OM=a\sqrt{2}/2+d$; $tg\alpha=a\sqrt{2}/(a\sqrt{2}+2d)$, $2\alpha=2arctg\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+2d}$; $P(A)=d/\pi=arctg\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+2d}/\pi$.

45. მოცემული კუბის გვერდი იყოს a, მაშინ მასში ჩახაზული ბირთვის რადიუსი ტოლი იქნება $a/2$, ხოლო ამ ბირთვში ჩახაზული კუბის გვერდი $a\sqrt{3}/3$ და $P(A)=\left(a^3-\frac{a^3\sqrt{3}\cdot 3}{a^3}\right)/a^3=1-\frac{\sqrt{3}}{9}$.

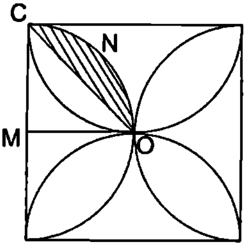
46. ვთქვათ ბირთვის რადიუსის სიგრძე R. მაშინ მასში ჩახაზული კუბის გვერდის სიგრძე იქნება $2\sqrt{3}R/3$, ხოლო ამ კუბში ჩახაზული ბირთვის რადიუსის სიგრძე $\sqrt{3}R/3$ და $P(A)=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{4}{3}\pi\frac{3\sqrt{3}}{27}R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=1-\frac{\sqrt{3}}{9}$.

47. ვთქვათ ტეტრაედრის წიბოს სიგრძე a, მაშინ ბირთვის რადიუსი ტოლი იქნება $R=3a/2\sqrt{6}$ და $P(A)=\left(\frac{4}{3}\pi\frac{27a^3}{48\sqrt{6}}-\frac{a^3 3\sqrt{2}}{3\cdot 12}\right)/\left(\frac{4}{3}\pi\frac{27a^3}{48\sqrt{6}}\right)=1-\frac{2\sqrt{3}}{9\pi}$

№8 საკონტროლო სამუშაოს ამოცანების ამოხსნა

1. პირობის თანახმად a რიცხვის 7-ზე გაყოფისას მიიღება ნაშთი 4. თუ n-ით აღვნიშნავთ განაყოფს შეგვეიძლია დავწეროთ $a = 7n + 4$. ანალოგიურად ვინაიდან b რიცხვის ასევე 7-ზე გაყოფისას მიიღება ნაშთი 2, თუ განაყოფს აღვნიშნავთ m-ით მივიღებთ $b = 7m + 2$. რიცხვი $3a + 5b$ ზემოთ მოყვანილი ტოლობების გათვალისწინებით ასე ჩაიწერება: $3a + 5b = 3(7n + 4) + 5(7m + 2) = 21n + 12 + 35m + 10 = 7(3n + 5m + 3) + 1$. ვინაიადან $3n + 5m + 3$ მთელი რიცხვია, მიღებული გამოსახულებიდან ჩანს, რომ $3a + 5b$-ს 7-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთია 1.

2. ამოცანის პირობის თანახმად გვაქვს შემდეგი ნახაზი:



საძებნი ფიგურის ფართობის საპოვნელად ჯერ ვიპოვოთ დაშტრიხული ფიგურის ფართობი და შემდეგ მიღებული სიდიდე გავამრავლოთ 8-ზე. დაშტრიხული ფიგურა წარმოადგენს წრიულ სეგმენტს. როგორც ნახაზიდან ჩანს მისი ფართობი ტოლია $MCNOM$ წრიული სექტორის ფართობს გამოკლებული COM სამკუთხედის ფართობი. ვინაიდან აგებული წრეწირების რადიუსები 1 სმ-ის ტოლია, ამიტომ აღნიშნული წრიული სექტორის ფართობი ტოლი იქნება წრის ფართობის მეოთხედის ე.ი. $\frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi}{4}$ სმ²-ის. ΔCON მართკუთხაა, მისი კათეტები წრეწირის რადიუსის ტოლია ამიტომ, ამ სამკუთხედის ფართობი ტოლია $\frac{1}{2}$ სმ²-ის. დაშტრიხული სეგმენტის ფართობი ტოლი იქნება $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ სმ²-ის, ხოლო საძებნი ფიგურის ფართობი იქნება $8\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2(\pi - 2)$ სმ².

3. საძებნი N_0 წერტილის კოორდინატები აღვნიშნოთ x და y-ით. ცხადია $\overrightarrow{M_0N_0}$ ვექტორის კოორდინატები იქნება $(x - 8; y - 10)$. ამოცანის პირობის თანახმად $\vec{a}(2;3) + \vec{b}(3;4)$ ვექტორი მართობია $\overrightarrow{M_0N_0}(x - 8; y - 10)$ ვექტორის, ე.ი. $\vec{a}(2;3) + \vec{b}(3;4) = \vec{c}(5;7)$ ვექტორი მართობია $\overrightarrow{M_0N_0}(x - 8; y - 10)$ ვექტორის. ვინაიდან ურთიერთმართობი ვექტორების სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია გვექნება: $5(x - 8) + 7(y - 10) = 0$. მოცემულ ორუცნობიან განტოლებას ჩამოთვლილი პასუხებიდან აკმაყოფილებს $x = 1$ და $y = 15$ წყვილი და ამიტომ საძებნი წერტილია $N_0(1; 15)$.

4. როგორც ვიცით 17-ზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთები შეიძლება იყოს შემდეგი რიცხვები: 1; 2; 3; $\cdots$; 16. თუ გავაგრძელებთ გაყოფას ნაშთები აუცილებლად გამეორდება და ცხადია რომ მიღებულ პერიოდული ათწილადის პერიოდში ვერ იქნება 18 ციფრი.

5.
```
   1011          110111
 x  101         + 1101
   1011         1000100
  1011
  110111
```

ეს ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას სხვა გზითაც. ორობით სისტემაში ჩაწერილი რიცხვები ჯერ ჩავწეროთ ათობით სისტემაში:

$(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 11$, $(101)_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5$,

$(1101)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13$.

ჩავატაროთ შესაბამისი მოქმედებები მიღებულ ათობით სისტემაში ჩაწერილ რიცხვებზე: $11 \cdot 5 + 13 = 55 + 13 = 68$. მიღებული რიცხვი ჩავწეროთ ორობით სისტემაში:

$68 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (1000100)_2$.

6. საშუალო კვადრატული გადახრა გამოითვლება ფორმულით: $\delta = \sqrt{\frac{(\bar{a}-a_1)^2+(\bar{a}-a_2)^2+(\bar{a}-a_3)^2+\cdots+(\bar{a}-a_n)^2}{n}}$, სადაც $\bar{a}$ მოცემულ მონაცემთა

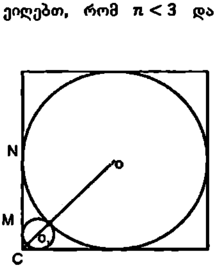
საშუალო არითმეტიკულია, ხოლო $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ თითოეული მონაცემი. ამოცანის პირობით $a_1 = 5{,}2$ სმ, $a_2 = 4{,}8$ სმ, $a_3 = 4{,}9$ სმ, $a_4 = 5{,}3$ სმ, $a_5 = 5{,}4$ სმ, $a_6 = 5{,}2$ სმ, $a_7 = 5{,}2$ სმ, $a_8 = 5{,}2$ სმ. $\bar{a} = \frac{5{,}2+4{,}8+4{,}9+5{,}3+5{,}4+5{,}2+5{,}1+5{,}1+5{,}0}{8} = \frac{40{,}9}{8} \cong 5{,}1$. ვიპოვოთ სხვაობა არითმეტიკულ საშუალოსა და თითოეულ მონაცემს შორის: $5{,}1 - 5{,}2 = -0{,}1$ სმ, $5{,}1 - 4{,}8 = 0{,}3$ სმ, $5{,}1 - 4{,}9 = 0{,}2$ სმ, $5{,}1 - 5{,}3 = -0{,}2$ სმ, $5{,}1 - 5{,}4 = -0{,}3$ სმ, $5{,}1 - 5{,}2 = -0{,}1$ სმ, $5{,}1 - 5{,}1 = 0$ სმ, $5{,}1 - 5{,}0 = 0{,}1$ სმ. ვიპოვოთ თითოეული სხვაობის კვადრატი: $(-0{,}1)^2 = 0{,}01$ სმ^2, $0{,}3^2 = 0{,}09$ სმ^2, $0{,}2^2 = 0{,}04$ სმ^2, $(-0{,}2)^2 = 0{,}04$ სმ^2, $(-0{,}3)^2 = 0{,}09$ სმ^2, $(-0{,}1)^2 = 0{,}01$ სმ^2, $0^2 = 0$ სმ^2, $0{,}1^2 = 0{,}01$ სმ^2. მოყვანილი მონაცემები ჩავსვათ საწყის ფორმულაში, მივიღებთ: $\delta = \sqrt{\frac{0{,}01+0{,}09+0{,}04+0{,}04+0{,}09+0{,}01+0+0{,}01}{8}} =$

$$\sqrt{\frac{0{,}29}{8}} = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$$

7. გავითვალისწინებთ რა ჯუფთების გამოსათვლელ ფორმულებს, მივიღებთ: $\frac{x!}{17!(x-17)!} + \frac{x!}{15!(x-15)!} + \frac{2x!}{16!(x-16)!} = \frac{(x+2)!}{17!(x-15)!}$ ეს ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ: $\frac{1}{17\cdot16} + \frac{x!}{(x-16)(x-15)} + \frac{2}{16(x-16)} = \frac{(x+1)(x+2)}{17\cdot16}$. მიღებული ტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი x-სათვის, რომელიც მეტია 17-ზე. ცხადია საძებნი რიცხვი რომელიც აკმაყოფილებს პირობას არის 999.

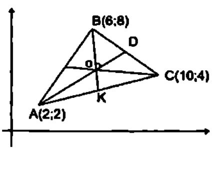
8. ამოცანის პირობის თანახმად $b = 10$ და $q = 0{,}8$. გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი როგორც ცნობილია გამოითვლება ფორმულით: $S_n = \frac{b-bq^n}{1-q} = \frac{10-10\cdot0{,}8^n}{1-0{,}8} = \frac{10}{0{,}2}(1-0{,}8^n) = 50\cdot(1-0{,}8^n)$. ამოცანის პირობის თანახმად გვაქვს: $10 < 50(1-0{,}8^n) < 24{,}4$. ამოვხსნათ მიღებული უტოლობები: $10 < 50(1-0{,}8^n)$ და $50(1-0{,}8^n) < 2{,}44$. მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ: პირველი უტოლობიდან გვაქვს: $1 - 0{,}8^n > \frac{1}{5}$ ან $0{,}8^n < \frac{4}{5}$ ე.ი. $n > 1$. მეორე უტოლობიდან მივიღებთ: $50\cdot(1-0{,}8^n) < 24{,}4$ ან $0{,}8^n > 0{,}512$ ე.ი. $0{,}2^{3n} > 0{,}2^9$ საიდანაც ვიღებთ, რომ $n < 3$ და საბოლოოდ $n = 2$.

9. ამოცანის პირობის თანახმად გვაქვს შემდეგი ნახაზი: (O დიდი წრის ცენტრია, ხოლო O_1- მცირე წრეწირის ცენტრი)



შემოვიღოთ აღნიშვნები: $ON = R$, $O_1M = r$. ΔOCN-დან პითაგორას თეორემის ძალით გვექნება $OC = R\sqrt{2}$. ანალოგიურად ΔO_1CN-დან გვექნება $O_1C = r\sqrt{2}$. ცხადია $OC = R + r + O_1C$ ე.ი. $R\sqrt{2} = R + r + r\sqrt{2}$. ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ r-ზე, მივიღებთ $\frac{R\sqrt{2}}{r} = \frac{R}{r} + 1 + \sqrt{2}$ საიდანაც გვექნება $\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$.

10. ამოცანის პირობის თანახმად $x \cdot y = 240$ ხოლო x და y რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადია 60, ამიტომ ცხადია ამ რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი იქნება 4.
ე.ი. $x = 4n$ და $y = 4m$ სადაც n და m ურთიერთმარტივი რიცხვებია. ვინაიდან $x \cdot y = 240$ ამიტომ $4n \cdot 4m = 240$, საიდანაც $n \cdot m = 15$. რადგანაც არცერთი ეს რიცხვი არ არის მეორის ჯერადი შეუძლებელია, რომ $n = 1$ ან $m = 1$. ტოლობიდან $n \cdot m = 15$ გამომდინარეობს, რომ $n = 3$ და $m = 5$. საბოლოოდ გვექნება $x = 12$, $y = 20$ და $x + y = 32$.



11. ამოცანის პირობის თანახმად უნდა ვიპოვოთ კუთხე AD და BK მედიანებს შორის. ცხადია D წერტილი წარმოადგენს BC გვერდის შუა წერტილს, ამიტომ მისი კოორდინატებია $D(8;6)$. რაც შეეხება K წერტილს, მისი კოორდინატებია $K(6;3)$. ჩვენ

უნდა ვიპოვოთ კუთხე $\overrightarrow{AD}(6;4)$ და $\overrightarrow{BK}(0;-5)$ ვექტორებს შორის, რომელიც როგორც ცნობილია გამოითვლება ფორმულით: $cos\alpha = \frac{X_1X_2+Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2}} = \frac{6\cdot 0-4\cdot(-4)}{\sqrt{36+16}\sqrt{0+25}} = \frac{20}{5\sqrt{52}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ და $\alpha = arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

12. ამოცანის პირობის თანახმად $\overrightarrow{AD}$ ვექტორი კოლინეარულია $\overrightarrow{BC}$, ხოლო $\overrightarrow{AB}$ კოლინეარულია $\overrightarrow{CD}$-სი. ვინაიდან კოლინეარული ვექტორების კოორდინატები პროპორციულია, საკმარისია ვიპოვოთ აღნიშნული ვექტორების კოორდინატები და დავწეროთ კოლინერულობის პირობა. $\overrightarrow{AD}(x-4;y-2)$, $\overrightarrow{BC}(6;3)$, $\overrightarrow{AB}(-2;6)$, $\overrightarrow{CD}(x-8;y-11)$. მივიღეთ სისტემა $\begin{cases}\frac{x-4}{6}=\frac{y-2}{3}\\ \frac{x-8}{-2}=\frac{y-11}{6}\end{cases}$ ე.ი. $\begin{cases}x-4=2y-4\\ 24-3x=y-11\end{cases}$ საიდანაც მიიღება $x=10$ და $y=5$.

13. დავალაგოთ მონაცემები ზრდის მიხედვით: 18; 21; 27; 29; 31; 34; 34; 34; 34; 39; 41; 41; 42; 43; 43; 43; 45; 45; 51.

1) 43 მონაცემებში გვხვდება 3-ჯერ ამიტომ მისი სიხშირე იქნება 3, ხოლოროგორც ცნობილია ფარდობითი სიხშირე ტოლია სიხშირის შეფარდებისა მონაცემთა მთლიან რაოდენობასთან ე.ი. 43-ის ფარდობითი სიხშირეა $\frac{3}{19}$.

2) როგორც ცნობილია მოდა ეწოდება იმ მონაცემს, რომელიც ყველაზე ხშირად გვხვდება მოცემულ მონაცემებში, ე.ი. მოდაა 34, რომელიც ყველაზე მეტჯერ – 4-ჯერ გვხვდება.

3) ვინაიდან მონაცემთა რაოდენობა კენტია მედიანა იქნება შუა - მეათე მონაცემი ე.ი. 39.

4) გაბნევის დიაპაზონი განმარტების თანახმად ეწოდება ზრდის მიხედვით დალაგებულ მონაცემებში უდიდესისა და უმცირესის სხვაობას ე.ი. ის ტოლია $51-18=33$.

14. როგორც ცნობილია კოლინეარული ვექტორების კოორდინატები პროპორციულია ე.ი. $2\vec{a}(x;2)-\vec{b}(1;9)$ და $2\vec{c}(5;7)$ ვექტორების კოორდინატები პროპორციულია. პირველი ვექტორის კოორდინატებია $(2x-1;-5)$, ხოლო მეორესი – $(10;14)$. მათი პროპორციულობიდან მიიღება განტოლება $\frac{2x-1}{10}=\frac{-5}{14}$ ე.ი. $14x-7=-25$ საიდანაც $x=-1\frac{2}{7}$.

15. რიცხვითი ღერძი დავყოთ შუალედებად $(-\infty;-1)$, $[-1;1]$, $(1;+\infty)$. პირველ შუალედში მოცემული უტოლობა ასე გადაიწერება: $-2(x-1)-(x+1)\le 5$ ან $-3x\le 4$ და $x\ge -\frac{4}{3}$. ვინაიდან $x\in(-\infty;-1)$ მოცემულ უტოლობას ამ შუალედში ამონახსნი არა აქვს.

მეორე შუალედში უტოლობა ასე გადაიწერება: $-2(x-1)+x+1\le 5$ ან $-x\le 2$ და $x\ge -2$. ამ შემთხვევაში უტოლობის ამონახსნი იქნება $x=$-1; 0; 1.

მესამე შუალედში უტოლობა ასე გადაიწერება: $2(x-1)+x+1\le 5$ ან $3x\le 6$ და $x\le 2$. ამ შემთხვევაში უტოლობის მთელი ამონახსნი იქნება $x=2$.

საბოლოოდ უტოლობის მთელ ამონახსნთა ჯამი იქნება $-1+0+1+2=2$.

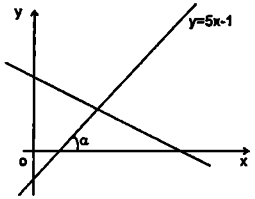
16. ვინაიდან $\alpha = arccos\frac{2}{3}$ კუთხე მოთავსებულია პირველ მეოთხედში და $cos\alpha=\frac{2}{3}$, ამიტომ $sin\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$. ანალოგიურად $\beta=arctg\frac{1}{2}$, $tg\beta=\frac{1}{2}$. ვიპოვოთ $cos\beta$. რადგანაც $1+tg^2\beta=\frac{1}{cos^2\beta}$ ამიტომ გვექნება: $cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. $\gamma=arcctg3, ctg\gamma=3$, ე.ი. $tg\gamma=\frac{1}{3}$. $\delta=arctg\frac{2}{3}$, $tg\delta=\frac{2}{3}$. $sin^2\delta=\frac{1}{1+ctg^2\delta}$, $sin\delta=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{4}}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$. $a=\frac{\sqrt{5}}{3}$; $b=\frac{2\sqrt{5}}{5}, c=\frac{1}{3}$, $d=\frac{2\sqrt{13}}{13}$. ცხადია $b>a>d>c$.

17. ამოცანის პირობის თანახმად $lg7=a$; $lg9=b$; $lg8=c$, ე.ი. $lg7=a$; $lg3=\frac{b}{2}$; $lg2=\frac{c}{3}$.

რადგანაც $420 = 7\cdot 60 = 7\cdot 3\cdot 5\cdot 2^2 = 7\cdot 3\cdot 10\cdot 2$ ამიტომ $lg420 = lg7 + lg3 + lg10 + lg2 = a + \frac{b}{2} + 1 + \frac{c}{3} = \frac{6a+3b+2c+6}{6}$.

18. მოცემული განტოლება ასე გადავწეროთ: $\frac{2}{\sqrt{13}}sinx + \frac{3}{\sqrt{13}}cosx = 1$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$. განტოლება ასე გადაიწერება: $cos\alpha sinx + sin\alpha cosx = 1$ ან $sin(x+\alpha) = 1$ საიდანაც მივიღებთ $x + \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in z$ და საბოლოოდ $x = \frac{\pi}{2} - arccos\frac{2}{\sqrt{13}} + 2\pi k, k \in z$.

19. ამოხსნის პირველი გზა. თუ რაიმე წრფის საკუთხო კოეფიციენტია p, მისი მართობი წრფის საკუთხო კოეფიციენტი იქნება $-\frac{1}{p}$. მართლაც სიბრტყეზე დავხაზოთ ორი ურთიერმართობი წრფე. ვინაიდან $\beta = 90^0 + \alpha$ ამიტომ $tg\beta = tg(90^0 + \alpha) = -ctg\alpha = -\frac{1}{tg\alpha} = -\frac{1}{p}$. ჩვენს შემთხვევაში $k = -\frac{1}{5}$.

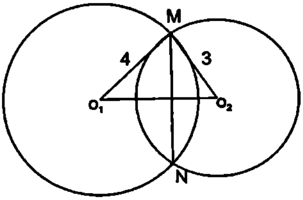


ამოხსნის მეორე გზა. აღნიშნულ წფეებზე ავიღოთ ორ-ორი წერტილი $A(1;4); B(2;9)$ და $C(1;k+5); D(2;2k+5)$. დაწეროთ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ვექტორების მართობულობის პირობა (სკალარული ნამრავლი 0-ის ტოლია) მივიღებთ განტოლებას k-ს მიმართ. საიდანაც მივიღებთ, რომ $k = -\frac{1}{5}$.

20. $y = x + 5$ წრფის მართობული წრფის განტოლებაა $y = -x + b$. ვინაიდან ის გადის $M_0(4,5;\ 19,5)$ წერტილზე, ამიტომ მივიღებთ: $19,5 = -4,5 + b$ და $b = 24$. მოცემული წრფის მართობული წრფის განტოლება იქნება $y = -x + 24$. ამ ორი წრფის გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები წარმოადგენენ შემდეგი სისტემის ამონახსნს: $\begin{cases} y = x + 5 \\ y = -x + 24 \end{cases}$
ე.ი. $x = 9,5$ და $y = 14,5$. მიღებული $k(9,5;\ 14,5)$ წერტილი წარმოადგენს M_0N_0 მონაკვეთის შუა წერტილს. ე.ი. $9,5 = \frac{x^*+4,5}{2}$; $14,5 = \frac{y^*+19,5}{2}$ საიდანაც მიიღება $x^* = 14,5$ და $y^* = 9,5$.

21. ამოცანა შეგვიძლია ამოვხსნათ გრაფიკულად. ავაგოთ $y = |2x - 6| + 4$ და $y = x + p$ ფუნქციების გრაფიკები. პირველი ფუნქციის გრაფიკი იქნება კუთხე რომლის წვეროს კოორდინატებია $M_0(3;4)$. ცხადია მეორე წრფე გაივლის ამ წრტილში, როცა $p = 1$. მივიღეთ ორი გრაფიკის შეხება. თუ $p > 1$-ზე, მაშინ გრაფიკები გადაიკვეთება ორ წერტილში, რაც იმას ნიშნავს, რომ განტოლებას გააჩნია ორი ამონახსნი.

22. ამოცანის პირობის თანახმად გვაქვს ნახაზი მოცემული ორი წრის გადაკვეთით მიღებული ფიგურა შედგენილია ორი წრიული სეგმენტით, აღვნიშნოთ მისი ფართობი S-ით. მის საპოვნელად საჭიროა წინასწარ ვიპოვოთ MO_1N და MO_2N კუთხეები. ცხადია ΔO_1MO_2 მართკუთხაა და $O_1M = 4$ სმ-ს, $O_2M = 3$ სმ-ს, $O_1O_2 = 5$ სმ-ს, $\angle MO_1O_2 = arcsin\frac{3}{5}$, $\angle MO_2O_1 = arcsin\frac{4}{5}$. O_1MO_2N ოთხკუთხედის ფართობი ტოლია 0,5 სმ² –ის. MO_1N და MO_2N სექტორების ფართობთა ჯამია $16arcsin\frac{4}{5} + 9arcsin\frac{3}{5}$ სმ²-ის. გამოსათვლელი ფიგურის ფართობია $16arcsin\frac{4}{5} + 9arcsin\frac{3}{5} - 12$ სმ².



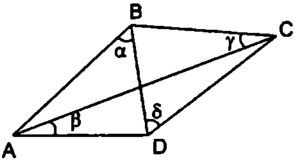
23. საწყისი განტოლება ასე გადავწეროთ $x^{lgx} = 10^{\frac{1}{10}}$. გავალოგარითმოთ ეს ტოლობა, გვექნება $lg^2x = \frac{1}{10}$ და $lgx = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ საიდანაც მიიღება $x = 10^{\pm\frac{1}{\sqrt{10}}}$.

24. ვინაიდან რიცხვში ბოლო ორი ციფრი ნულის ტოლია, ამიტომ მის დაშლაში ყველგან გვექნება 2-ის ხარისხები და უმცირესი ხარისხის მაჩვენებელი იქნება 2. რაც იმას ნიშნავს, რომ რიცხვი გაიყოფა 4-ზე.

25. დავამტკიცოთ, რომ $a > \frac{4}{3}$ და $\frac{4}{3} > b$. სამართლიანია უტოლობა $\sqrt[3]{3} > \frac{4}{3}$, მართლაც თუ მის ორივე მხარეს ავიყვანთ კუბში გვექნება $3 > \frac{4^3}{3^3}$ ან $3^4 > 4^3$. ვაჩვენოთ, რომ $\frac{4}{3} > lg12$, ე.ი. $10^{\frac{4}{3}} > 12$ მართლაც $10^4 > 12^3$ და საბოლოოდ გვაქვს $a > b$.

26. საწყისი გამოსახულება ასე გადავწეროთ: $\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^3} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} - 1 - \sqrt[3]{2} = -1$.

27. ავაგოთ ოთხკუთხედი და გავატაროთ დიაგონალები. ვინაიდან დიაგონალები ამავე დროს ბისექტრისებიცაა, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:



$\angle ABD = \angle CBD = \alpha$,
$\angle BCA = \angle ACD = \gamma$,
$\angle BAC = \angle CAD = \beta$,
$\angle ADB = \angle BDC = \delta$.

ოთხკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამია $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^0$ ან $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^0$. ვინაიდან $\beta + \gamma + 2\alpha = 180^0$, ბოლო ორი ტოლობიდან მიიღება, რომ $\alpha = \delta$, ე.ი. სამკუთხედი ABD ტოლფერდაა და $AB = AD$. AD ბისექტრისა ამავე დროს სიმაღლეცაა, რაც იმას ნიშნავს რომ დიაგონალები ურთიერთმართობულია.

28. ამოცანის პირობის თანახმად ოთხკუთხედში არსებობს წერტილი, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული მისი გვერდებიდან ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ოთხკუთხედში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა. როგორც ცნობილია წრეწირზე შემოხაზული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ერთმანეთის ტოლია და ცხადია მათი შეფარდება 1-ის ტოლია.

29. კონუსის მსახველი სიგრძე იყოს R სმ, ხოლო ფუძის რადიუსი r სმ. ამოცანის პირობის თანახმად შლილის ფართობი ტოლია 6π სმ^2-ის. მივიღეთ ტოლობა $\frac{\pi R^2}{6} = 6\pi$ ან $R = 6$ სმ-ს. მეორეს მხრივ შლილი წარმოადგენს წრიულ სექტორს რომლის რადიუსია კონუსის მსახველი, ხოლო რკალი კონუსის ფუძის წრეწირი. ე.ი. შლილის რკალის სიგრძე $\frac{2\pi R}{6}$ სმ-ის ტოლია, ხოლო ფუძის წრეწირის სიგრძე $2\pi r$ სმ-ის. ე.ი. $\frac{2\pi R}{6} = 2\pi r$ საიდან გვაქვს, $R = 6r$. მივიღეთ, რომ $r = 1$ სმ-ს. კონუსის სიმაღლე გამოითვლება ფორმულით: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{36 - 1} = \sqrt{35}$ სმ და საბოლოოდ კონუსის მოცულობა იქნება $V = \frac{1}{3}\pi\sqrt{35}$ სმ^3.

30. როგორც ცნობილია ფიგურის Q ფართობი, მისი გეგმილის S ფართობი და მათ შორის α კუთხე დაკავშირებულია ფორმულით $S = Qcos\alpha$. ამოცანის პირობის თანახმად $S = 3Scos\alpha$ ე.ი. $cos\alpha = \frac{1}{3}$ და $\alpha = arccos\frac{1}{3}$.

31. AB მონაკვეთის შუაწერტილია $D(5;2)$. A და B წერტილებზე გამავალი წრფის საკუთხო კოეფიციენტია $tg\alpha = \frac{1}{3}$ და AB წრფის მართობი წრფის საკუთხო კოეფიციენტი იქნება -3. საძებნი სამკუთხედის C წვერო მდებარეობს $y = 2 - 3(x - 5)$ წრფეზე ე.ი. $y = -3x + 17$. ვინაიდან სამკუთხედი ტოლფერდაა ამიტომ $AB = AC$ და $AB = \sqrt{(8-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{40}$, ხოლო $AC = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$. მივიღეთ სისტემა: $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 40 \\ y = -3x + 17 \end{cases}$. რადგანაც C წერტილი მდებარეობს პირველ მეოთხედში, ამიტომ ამის გათვალისწინებით გვექნება $x = 5 - \sqrt{3}$ და $y = 3\sqrt{3} + 2$.

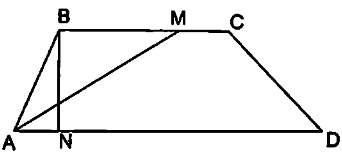
32. საწყისი უტოლობა ასე გადავწეროთ $27 \cdot 4^{x+1} + 27 \cdot 6 \cdot 6^{x+1} - 120 \cdot 3^{2x+2} < 0$ ან

$27\cdot4^{x+1}+162\cdot6^{x+1}-120\cdot9^{x+1}<0$. უტოლობის ორივე მხარე გავყოთ 6^{x+1}-ზე, მივიღებთ $27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+162-120\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}<0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}=y$. მივიღებთ კვადრატულ უტოლობას: $9y^2+54y-40<0$. მისი ამონახსნია $y\in\left(-\frac{20}{3};\frac{2}{3}\right)$. ვინაიდან $y>0$ ამიტომ $0<\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}<\frac{2}{3}$ ე.ი. $x+1>1$ და საბოლოოდ $x\in(0;+\infty)$.

33. ამოცანის პირობის თანახმად მოცემული კუბური განტოლების ფესვები ნამდვილი რიცხვებია $\{1;2;3;\cdots;n\}$ სიმრავლიდან. იმ შემთხვევაში როცა ამ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი რომლის ჯერადობაა სამი, მათ ექნებათ შემდეგი სახე: $(x-1)^3=0$; $(x-2)^3=0$; $\cdots;(x-n)^3=0$. ასეთი განტოლებების რაოდენობაა n. იმ განტოლებათა რაოდენობა, რომელთა ფესვებია სამი განსხვავებული რიცხვია $\{1;2;3;\cdots;n\}$ სიმრავლიდან ტოლია C_n^3. რაც შეეხება იმ განტოლებების რაოდენობებს, რომელთაც აქვთ ორი ფესვი, ხოლო მესამე ემთხვევა , რომელიმე ერთს ამ ორი ფესვიდან ტოლიაA_n^2.

საბოლოოდ ყველა კუბური განტოლების რაოდენობა იქნება $n+C_n^3+A_n^2=$ $=n+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+n(n-1)=\frac{6n+n^3-3n^2+2n+n^2-n}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. ყველა იმ კუბური განტოლების, რაოდენობა რომელთა ფესვებს შორის მანძილი ერთი ერთეულის ტოლია იქნება $n-2$. ყოველივე ამის შემდეგ მივიღებთ, რომ საძებნი ალბათობაა $\frac{6(n-2)}{n(n+1)(n+2)}$.

34. ამოცანის პირობის თანახმად გვაქვს ნახაზი: თუ AM ბისექტრისა კვეთს ზედა BC ფუძეს, გვექნება უტოლობა $AB<BC$ და რადგანაც $\angle BAM=\angle BMA$ გამოდის, რომ ΔABM ტოლფერდაა. .

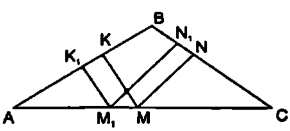


შემოვიღოთ აღნიშვნები $AD=a, BC=b$, $BN=h, \angle BAN=\alpha$. მაშინ ტრაპეციის ფართობი ასე ჩაიწერება: $\frac{a+b}{2}\cdot h=S$ აქედან $a+b=\frac{2S}{h}$. $AN=\frac{b-a}{2}=hctg\alpha$ და მივიღებთ $b-a=2hctg\alpha$ ე.ი. $b=\frac{S-h^2ctg\alpha}{h}$ და $AB=\frac{h}{sin\alpha}$. უტოლობა $AB<BC$ ასე ჩაიწერება $\frac{h}{sin\alpha}<\frac{S-h^2ctg\alpha}{h}$ საიდანაც მიიღება $Ssin\alpha-h^2cos\alpha>h^2$ ან $Ssin\alpha>h^2(1+cos\alpha)$ და საბოლოოდ მივიღებთ: $\frac{h^2}{S}<\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}=tg\frac{\alpha}{2}$ ე.ი. $\alpha>2arctg\frac{h^2}{S}$.

35. სისტემაში შემავალ პირველ განტოლებას გამოვაკლოთ მეორე განტოლება, მივიღებთ: $(x-y)-(\sqrt{x}-\sqrt{y})=0$, ე.ი. $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1)=0$. აქედან გვაქვს: $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ ან $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$. პირველი შემთხვევის განხილვით მივიღებთ განტოლებას: $x+\sqrt{x}=1$ და მისი ამონახსნია $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ ე.ი. $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ და $x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. ცხადია $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ამონახსნი არ ვარგა ვინაიდან განტოლებათა სისტემიდან ჩანს, რომ $x\geq0$. ამ შემთხვევაში სისტემის ამონახსნია $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

განვიხილოთ მეორე შემთხვევა $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$. ვინაიდან საწყისი განტოლებების შეკრებით მივიღებდით $x+y+\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ აქედან გამომდინარეობს, რომ $x+y=1$ ამიტომ სისტემიდან $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\\ x+y=1\end{cases}$ თუ პირველ განტოლებას ავიყვანთ კვადრატში და მოვახდენთ გამარტივებებს, მივიღებთ: $\sqrt{xy}=0$ საიდანაც მიიღება $x=0$ და $y=1$ ან $x=1$ და $y=0$. საბოლოოდ სისტემის ამონახსნი იქნება: $(1;\ 0),(0;\ 1),\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

36. ამოცანის პირობის თანახმად ალბათობა უნდა იყოს მაქსიმალური, რაც იმას ნიშნავს, რომ ოთხკუთხედის ფართობი უნდა იყოს მაქსიმალური. ვაჩვენოთ, რომ ეს მოხდება მაშინ როდესაც M



წერტილი წარმოადგენს AC გვერდის შუაწერტილს. გვაქვს შემდეგი ნახაზი: ვინაიდან M წერტილი წარმოადგენს AC გვერდის შუაწერტილია, ამიტომ K და N შესაბამისად AB და BC გვერდების შუაწერტილებია.

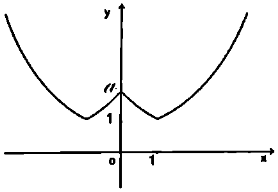
$AK = \frac{c}{2} = KB$, $BN = y$ მაშინ $BN = \frac{a}{2}$, $AM = \frac{b}{2}$. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $NN_1 = x, KK_1 = y$ მაშინ $BN_1 = \frac{a}{2} - x$, $K_1B = \frac{c}{2} + y$. $S_{MKBN} = \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{2} sin\angle ABC$, $S_{M_1K_1BN_1} = \left(\frac{a}{2} - x\right)\left(\frac{c}{2} + y\right) sin\angle ABC$.

$S_{MKBN} - S_{M_1K_1BN_1} = \left(-\frac{a}{2}y + \frac{c}{2}x + xy\right) sin\angle ABC$. ვინაიდან $\Delta ABC \sim \Delta AK_1M_1$ ამიტომ გვაქვს:

$\frac{c}{a} = \frac{\frac{c}{2} - y}{\frac{a}{2} - x}$ საიდანაც მიიღება $ay = cx$. მიღებულის გათვალისწინებით წინა ტოლობაში გვექნება: $S_{MKBN} - S_{M_1K_1BN_1} = xysin\angle ABC > 0$. მიღებული უტოლობა იმას ნიშნავს, რომ მაქსიმალური ფართობი მიიღება მაშინ როდესაც M წერტილი წარმოადგენს AC მონაკვეთის შუა წერტილს. ამ შემთხვევაში ოთხკუთხედის ფართობი წარმოადგენს სამკუთხედის ფართობის ნახევარს, რაც იმას ნიშნავს, რომ საძებნი ალბათობა ტოლია 0,5-ის.

37. ამოცანის პირობის თანახმად $x = -3$ წარმოადგენს $a^{x+1} > 1$ უტოლობის ამონახსნს ამიტომ გვაქვს $a^{-2} > 1$ საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $0 < a < 1$. ამ პირობის გათვალისწინებით, უტოლობიდან $a^{x^2-2x+3} < a^6$ მიიღება $x^2 - 2x + 3 > 6$ და მისი ამონახსნია $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

38. ავაგოთ $f(x) = a^{||x|-1|}$ ფუნქციის გრაფიკი. რადგანაც $a > 1$, გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე:



ნახაზიდან უშუალოდ ჩანს, რომ $a^{||x|-1|} = k, a > 1$ განტოლებას გააჩნია ოთხი ამონახსნი იმ შემთხვევაში როდესაც $k \in (1;\ a)$.

39. რადგანაც ნებისმიერი არითმეტიკული პროგრესიის წევრები განლაგებულია წრფივი ფუნქციის გრაფიკზე, ამიტომ ამოცანის პირობიდან გამომდინარე $a = 0$. ე.ი. $a \cdot b \cdot c = 0$.

40. ამოცანის ამოხსნის მიზნით შემოვიღოთ აღნიშვნა: $sinx = y$, მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას: $y^2 - 2y + k = 0$. ვინაიდან ამოცანის პირობის თანახმად განტოლებას უნდა ჰქონდეს ერთი ფესვი, ამიტომ პირველ რიგში უნდა განვიხილოთ შემთხვევა როცა მიღებული კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი ტოლია 0-ის. ე.ი. $1 - k = 0$ საიდანაც $k = 1$. ამ შემთხვევაში გვექნება შემდეგი განტოლება $sin^2x - 2sinx + 1 = 0$ ან $(sinx - 1)^2 = 0$, $sinx = 1$ და $x = 90^0 \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. ე.ი. ეს შემთხვევა არ გამოგვადგება.

მეორე შემთხვევაში $y^2 - 2y + k = 0$ კვადრატულ განტოლებას გააჩნია ერთი ფესვი შუალედიდან $y \in (0;\ 1)$. ვინაიდან $y = 1 \pm \sqrt{1-k}$ ამიტომ $1 > 1 - \sqrt{1-k} > 0$. (მეორე ფესვი არ აკმაყოფილებს პირობას $y \in (0;\ 1)$). ამოვხსნათ უტოლობა $1 > 1 - \sqrt{1-k} > 0$ ცხადია $0 < k < 1$ ე.ი. $k \in (0; 1)$.

პასუხები

§1 არითმეტიკული გამოთვლები

2. 1) ა), 2) გ), 3) გ) 3. 1) ა), 2) ა), 3) დ) 4. ბ) 5. გ) 6. დ) 7. ა) 8. 1) გ), 2) ბ) 3) ა), 4) დ), 5) დ) 6) გ), 7) ბ) 8) ა) 9. ბ) 10. გ) 11. დ) 12. ა) 13. დ) 14. გ) 15. გ) 16. ბ) 17. გ) 18. ბ) 19. გ) 20. 1) დ), 2) გ), 3) ა), 4) ბ), 5) დ) 21. 1) ბ), 2) დ), 3) ა), 4) ბ), 5) ბ) 22. 1) გ), 2) გ), 3) დ), 4) დ), 5) 5.1) ა), 5.2) დ), 5.3) ა), 5.4) ბ) 6) 6.1) გ), 6.2) დ), 6.3) ა), 6.4) ბ) 7) 7.1) ბ), 7.2) გ), 7.3) დ), 7.4) გ) 8) 8.1) ა), 8.2) ბ), 8.3) დ) 8.4) ბ) 23. გ) 24. ბ) 25. ბ) 26. ა)

§2. ნატურალური რიცხვის წარმოდგენა სხვადასხვა პოზიციურ სისტემაში

1. 1) ბ), 2) ა), 3) დ), 4) გ), 5) ა) 2. 1) ა), 2) გ), 3) ბ), 4) დ) 3. ბ) 4. ა) 5. 1) ბ), 2) დ), 3) დ), 4) ა) 6. 1) ბ), 2) გ) 7. 1) ბ), 2) ა) 8. დ) 9. ბ) 10. ბ) 11. 1010100 12. 1) ა), 2) ბ), 3) დ), 4) გ) 13. 1) ბ), 2) ა), 3) გ), 4) გ) 14. 1) ბ), 2) დ), 3) გ), 4) ა) 15. დ) 16. დ) 17. ბ) 18. ჩანაწერში ერთიანების რაოდენობა უნდა იყოს ლუწი რიცხვი 19. ჩანაწერში კენტ ადგილზე მდგომი ციფრების ჯამი ტოლი უნდა იყოს ლუწ ადგილზე მდგომი ციფრების ჯამის 20. ჩანაწერში ციფრების ჯამი უნდა იყოფოდეს $a-1$-ზე 21. დ)

§3.სიმრავლეები. ოპერაციები სიმრავლეებზე

5. 1) ა 2) ბ 3) გ 4) დ 5) ბ 6) ბ 6. 1) გ 2) ა 3) ა 4) ა 5) დ 6) დ 7. დ 8. გ 9. დ 10. ბ 11. ა

§4. ერთწევრები და მრავალწევრები

ა – ჯგუფი

1. 1) დ), 2) ა) 2. 1) დ), 2) დ) 3. 1) ბ), 2) გ) 4. ა) 5. ბ) 6. 1) ბ), 2) გ), 3) ბ), 4) ა), 5) დ), 6) გ), 7) ბ), 8) დ) 7. 1) ა), 2) გ), 3) დ), 4) ა), 5) დ), 6) ბ), 7) ა), 8) გ) 8. 1) ბ), 2) გ), 3) ა), 4) გ), 5) ა), 6) დ), 7) ბ), 8) ა) 9. 1) გ), 2) ბ), 3) ა), 4) ა), 5) ა), 6) ბ), 7) დ), 8) გ) 10. 1) ა), 2) დ), 3) ბ), 4) ბ), 5) გ), 6) ა), 7) ა), 8) ბ) 11. 1) დ), 2) ბ), 3) ბ), 4) გ), 5) დ), 6) ა), 7) ბ), 8) ბ) 12. 1) ა), 2) ა), 3) ბ), 4) დ), 5) გ), 6) დ), 7) ა), 8) ა) 13. 1) ა), 2) დ), 3) ა), 4) ა), 5) გ), 6) ა), 7) ბ), 8) დ) 14. 1) $4a^2-b^2+c^4-d^2$, 2) $\frac{9}{4}a^2b^2+4a^2-2$,

3) $\frac{4}{25}a^4b^2-c^4-a^2b^2c^2+1$, 4) $0.01a^4b^2c^2-3.41b^2-a^6$,

5) $0.04a^{2n}b^2-0.09c^6-a^8+b^8$, 6) $0.09a^2b^{2n+2}c^2-16a^6c^2-a^4b^2+c^6$,

7) $\frac{25}{4}a^2c^2-25b^{2n+2}+0.49a^2-6.25$, 8) $\frac{16}{9}a^{2n}-\frac{49}{9}b^{2m+2}+a^{2k}-b^{2m}$

15. 1) $4a^4-12a^2b+12ab+2a^2+27b^2$, 2) $\frac{2}{3}ab-\frac{1}{12}a^2-\frac{23}{36}b^2$,

3) $0.25a^2+0.09b^2c^2+5.3abc-6.25a^2b^2-c^2$,

4) $4a^4b^2c^2-12a^4bc^2+9a^4c^2+a^2b^4c^2-4ab^3c^2+4b^2c^2$,

5) $a^{2n}b^2-6a^{n+2}b^4+9a^4b^6-a^2b^{2n}+2a^2b^{n+1}-a^2b^2$,

6) $a^{2n+2}b^{2m}-4a^{n+2}b^{m+n}+4a^2b^{2n}-a^2b^2+2ab^{m+2}-b^{2m+2}$,

7) $a^2b^{2n-2}+4a^{n+1}b^n+4a^{2n}b^2+a^{2m}+2a^mb^{n-1}+b^{2n-2}$,

8) $\frac{1}{9}a^6b^{2n-2}c^2-\frac{4}{9}a^4b^{n+2}c^n+\frac{4}{9}a^2b^6c^{2n-2}+\frac{4}{3}a^2b^4-4ab^2c+3c^2$,

16. 1) $8a^3-12a^2b+6ab^2-9b^3+a^6-6a^4b+12a^2b^2$,

2) $\frac{1}{8}a^6-\frac{1}{4}a^4b^2+\frac{1}{6}a^2b^4-\frac{1}{27}b^6-a^3-\frac{3}{2}a^2b-\frac{3}{4}ab^2-\frac{1}{8}b^3$,

3) $\frac{8}{27}a^6b^3-4a^7b^2+18a^8b-27a^9+\frac{1}{125}a^3b^6-\frac{3}{25}a^2b^5+\frac{3}{5}ab^4-b^3$,

4) $0.001a^{3n}b^3-0.006a^{2n+1}b^{n+2}+0.012a^{n+2}b^{2n+1}-0.008a^3b^{3n}-$
$-0.001a^3b^6-0.006a^4b^6+0.012a^5b^4+0.008a^6b^3$,

5) $\frac{27}{8}a^{3n}b^{3m}-9a^{2n+1}b^{2m}+8a^{n+2}b^m-\frac{64}{27}a^3+a^6b^{3n}-6a^4b^{2n+1}+12a^2b^{n+2}-8b^3$,

6) $a^9+9a^6b^2+27a^3b^4+27b^6-a^6+3a^4b^3-3a^2b^6+b^9$

7) $8a^3b^3-36a^{n+2}b^2-54a^{2n+1}b-27a^{3n}+27a^6-54a^4b^n+36a^2b^{2n}-8b^{3n}$,

8) $a^{3n}b^6+3a^{2n+2}b^{n+4}+$
$+3a^{n+4}b^{2n+2}+b^{3n}a^6-a^{3m}b^3+3a^{2m+1}b^2-3a^{m+2}b+a^3$

17. 1) $8a^3-27b^6$, 2) $\frac{a^3b^3}{8}-\frac{27c^3}{64}$, 3) $64a^{12}+1000b^9$, 4) $a^{12}b^{18}+c^{27}$, 5) $64+a^{12}b^9c^3$,

6) $\frac{8}{27}a^{3n}-1$, 7) $a^{3n+3}b^{3m}-c^3$,

8) $125a^{3n-3}b^6+27a^6b^9$ 18. 1) $4(3x-2y)$, 2) $5y(x-2)$, 3) $3xy(y+2x)$, 4) $5xy(x^2+2xy+3y)$

5) $(x+y)(x+3)$, 6) $(x-y)(y+3)$, 7) $x(x+2y)(y-1)$, 8) $(x+y)(x-y-z)$ 19. 1) $(x+y)(3+y)$,

2) $5y(x+1)(2x+1)$, 3) $(2x-3y)(3x+5y)$, 4) $(y-3z)(3x+2z)$, 5) $(2a-3b)(a^2+xy)$,

6). $(a+x-y)(5a-2b)$, 7) $(2a-x+3y)(3a^2-b^2)$, 8) $(x+y)(3a^2b-z+b)$ 20. 1) $(3-2x)(3+2x)$

2) $(0.8-3xy)(0.8+3xy)$, 3) $(2a^2b-5xy^2)(2a^2b+5xy^2)$, 4) $(0.5a^3-0.4b^4)(0.5a^3+0.4b^4)$,

5), $b(4a-b^2-b)(1-b)$, 6) $16(a-b)(a+b)$, 7) $(2x+b+1)(2x+2a+b+1)$, 8) $(a-2b+c)(3a-c)$

21. 1) $(3a-2)(9a^2+6a+4)$, 2) $(2ab-3c)(4a^2b^2+6abc+9c^2)$, 3)
$(a^nb-ab^n)(a^{2n}b^2+a^{n+1}b^{n+1}+a^2b^{2n})$, 4) $5b(12a^2-18ab+13b^2)$, 5) $(a^2+5b^2)(a^4-5a^2b^2+25b^4)$,
6) $(a^3+2a-3b)(a^6-2a^4+3b^2+4a^2-6ab)$, 7) $2b(3a^2+6ab+4b^2)$, 8) $2(2b-a)(13a^2-16ab+7b^2)$

22. 1) $(2a-3)(2a+5)$, 2) $(3a-2b-5)(3a-2b+5)$, 3) $(2a-b+3)(2a+b+3)$,

4) $(3b-c-a)(3b-c+a)$,

5) $\left(\frac{2}{3}a+\frac{b}{5}-1\right)\left(\frac{4}{9}a^2+\frac{4ab}{15}+\frac{b^2}{25}+\frac{2}{3}a+\frac{b}{5}+1\right)$, 6) $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}-2\right)\left(\frac{a^2}{4}-\frac{ab}{3}+\frac{b^2}{9}+a-\frac{2b}{3}+4\right)$,

7 $(a-b^2)(7a^2-5ab^2+b^4)$, 8) $(-a^2-b)(a^4-4a^2b+7b^2)$ 23. 1) $\frac{1}{a+2}$, 2) $\frac{1}{a^2+1}$, 3) $a-3$,

4) $\frac{a^2}{b^2}$, 5) $\frac{1}{a-3}$, 6) $-3ab$, 7) $\frac{1}{a^2b^2}$, 8) $\frac{1}{b}$ 24. 1) $\frac{a+1}{1-a^2}$, 2) $\frac{1}{ab}$, 3) $2a$, 4) $b(b-a)$,

5) $\frac{a}{4b}$, 6) $\frac{10b}{a}$, 7) $\frac{1}{a-b}$, 8) $\frac{a}{a-3}$ 25. 1) $\frac{a^2(a-b)^2}{(a+b)^2}$, 2) $\frac{a-b}{a+b}$, 3) $\frac{1}{a^3}$, 4) a^2-1,

5) $2a^3-6a^2-18a-54$, 6) $\frac{1-a^2}{a}$, 7) a, 8) $4a^2b^2+1$ 26. 1) a^2b, 2) $a+b$, 3) $5ab$,

4) $\frac{3a}{(2a-b)^2}$, 5) $\frac{ab}{a^2-b^2}$, 6) $\frac{9}{a^6}$, 7) $\frac{1-a^2}{a}$, 8) 1

ბ – ჯგუფი

27. 1) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$, 2) $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$, 3) $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$,
4) $(a-b)(a+b)(a^4+a^2b^2+b^4)$, 5) $(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$,
6) $(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$,
7) $(a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)$, 8) $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^6-a^3b^3+b^6)$
29. 1) $(a+b)^2-2ab$, 2) $(a-b)(a+b)$,
3) $(a+b)[(a+b)^2-3ab]$, 4) $(a-b)[(a+b)^2-ab]$, 5) $[(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2$,
6) $(a+b)(a-b)[(a+b)^2-2ab]$, 7) $(a+b)[(a+b)^4-5ab(a+b)^2+5a^2b^2]$,
8) $(a-b)[(a+b)^4-3ab(a+b)^2+a^2b^2]$ 33 1; 7 34. $A=2$, $B=-0{,}5$, $C=-1{,}5$ 35. $A=B=0{,}5$, $C=0$ 36. $(x-1)^2-9(x-1)+11$ 38. - 1 39. 2 42. 1; 2; 3; 4; 5; 6 43. 0

§5. მოქმედებები რადიკალებზე

ა – ჯგუფი

1. 1) გ), 2) დ), 3) ბ), 4) დ), 5) გ), 6) ა), 7) დ), 8) ა) 2. 1) ა), 2) დ), 3) დ), 4) ბ), 5) დ), 6) ა), 7) ბ), 8) დ) 3. 1) ბ), 2) ა), 3) გ), 4) ბ), 5) დ), 6) დ), 7) ა), 8) ბ) 4. 1) ა), 2) ბ), 3) დ), 4) გ), 5) ა), 6) ა), 7) ბ), 8) ბ) 5. 1) გ), 2) დ), 3) ა), 4) ბ), 5) გ), 6) ა), . 7) ბ), 8) ა) 6. 1) ა), 2) გ), 3) ბ), 4) დ), 5) ბ), 6) დ), 7) დ), 8) ბ) 7. 1) გ), 2) ა), 3) ბ), 4) ბ), 5) გ), 6) დ), 7) ა), 8) ბ) 8. 1) დ), 2) გ), 3) ბ)

ბ – ჯგუფი

9. 1 10. 1 11. -2 12. 4/3 13. 2 14. -0,5 15. 1 16. 3,6
17. 3 18. – 0,75 19. 4 20. 2 21. -1 22. - $\sqrt{6}/6$ 23. 3 24. 1/3
25. 1/8 26. 4 27. -1 28. -1/250 29. 1

§6. წრფივი, კვადრატული და მოდულის შემცველი განტოლებები

ა - ჯგუფი

1. 1) ბ), 2) გ), 3) დ), 4) ა), 5) ბ), 6) დ) 2. 1) დ), 2) დ), 3) გ), 4) ბ), 5) გ), 6) ა) 3. 1) დ), 2) გ), 3) ბ), 4) ა), 5) დ), 6) ბ) 4. 1) დ), 2) გ), 3) ბ), 4) ბ), 5) დ), 6) ა) 5. 1) ბ), 2) გ), 3) დ), 4) ა), 5) ა), 6) ა), 7) გ), 8) ბ) 6. 1) დ), 2) გ), 3) ბ), 4) ა), 5) დ), 6) ბ), 7) გ), 8) დ) 7. დ) 8. ბ) 9. დ) 10. გ) 11. გ) 12. დ) 13. გ) 14. გ) 15. ბ) 16. ა) 17. ბ) 18. ა) 19. ა) 20. ბ) 21. ბ) 22. ბ) 23. გ) 24. დ) 25. გ) 26. ბ) 27. ა) 28. გ) 29. ა) 30. დ) 31. ა) 32. ბ) 33. ბ) 34. გ) 35. ა) 36. გ) 37. ა) 38. ბ) 39. გ) 40. დ) 41. ა) 42. ბ) 43. გ) 44. ა) 45. ა) 46. დ) 47. ა) 48. გ) 49. ა) 50. ბ) 51. დ) 52. ა) 53. გ) 54. ბ) 55. ა) 56. დ) 57. დ) 58. ბ) 59. ბ) 60. დ) 61. ა) 62. დ)

ბ – ჯგუფი

63. 1; 2.5 64. -15; -0.6 65. -16 66. $-19/18$; $17/6$ 67. 1 68. ამონახსნი არა აქვს 69. -1; 9 70. 1; $\frac{3-\sqrt{105}}{6}$ 71. -1 72. 1; $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; $\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$; $\frac{17}{3}$

73. $(-\infty;0]\cup[2;3]$ 74. $\left[\frac{-1-\sqrt{17}}{2};1\right]\cup\left[\frac{\sqrt{17}-1}{2};+\infty\right)$ 75. $\pm\sqrt{-\frac{5}{a}}$, თუ $a<0$

76. $\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$, თუ $ab>0$; თუ $b=0$ და $a\neq 0$ მაშინ $x=0$; თუ $b=0$ და $a=0$ მაშინ $x\in(-\infty;+\infty)$ 77. 0; $\frac{d-b}{a-c}$, თუ $a\neq c$; თუ $a=c$ და $b=d$ მაშინ $x\in(-\infty;+\infty)$

78 $\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 79. 0; 0.5 80. 0.5; -0.5 81. $-\frac{2b}{a-b}$; 0, როცა $a\neq b$; თუ $a=b\neq 0$ მაშინ $x=0$; თუ $a=b=0$ მაშინ $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$ 82. 0; $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{12}$

83. 0; $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}+3}$ 84. 1; $\frac{3-5\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ 85. -1; $\frac{2+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ 86. 1) 2; -1.4 2) $-\frac{2}{3}$;3 3) 2; -9.5 4) 3; $-9{,}5$ 87. 3; -4 88. $7\sqrt{13}$; 31 89. 416 90. -11 91 .-29

92. + ; - 93. + ; – 94. + ; – 95. – ; – 96. 0 97. 1 ; 5

98. $6\pm4\sqrt{2}$ 99. $(-\infty;0.1)\cup(0.1;2)\cup(2;+\infty)$ 100. $(-\infty;-1)\cup(-1;3)\cup(3;+\infty)$

101. 1; $-\frac{115}{72}$ 102 2; $-\frac{38}{11}$ 103. 2 104. 2; $\frac{123}{70}$ 105. 1 106. -3; $-\frac{1}{3}$;$2\pm\sqrt{3}$

107. 0; $\frac{-3\pm\sqrt{2913}}{132}$ 108. 0 109. 0 110. 0; $\sqrt{2}$;$-\sqrt{2}$ 111. 6

112. 0; 1; $-\frac{21460}{3087}$ 113. $\frac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$;$\frac{1\pm\sqrt{21-4a}}{2}$ 114. $\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$ 115. $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

116. $\pm\sqrt{-3\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+\sqrt{8\left(\frac{a-b}{2}\right)^4+4c}}$ 117. $\pm\sqrt{-30+\sqrt{1028}}$ 118. $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 119. 5

120. არაა საკმარისი 121. $a\in(-1{,}75;5{,}75)$ 122. -1, 2, 3, 6 123. ±1;±3;$\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

124. ა) $b\in\left(-\infty;-\frac{39}{8}\right)\cup\left(\frac{7}{8};+\infty\right)$ ბ) $b\in\left(-\frac{39}{8};\frac{7}{8}\right)$ გ) $b\in\emptyset$ 125. $\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$;$\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$

126. არა 127. საზოგადოდ არა 128. არა 130. 2; 4; 6 133. $\sqrt[5]{6}$

134. $\left[n;n+\frac{1}{3}\right)\cup\left[n+\frac{1}{2};n+\frac{2}{3}\right)$; სადაც n მთელი რიცხვია 135. $-\frac{5}{3}$ 136. 8 137. $[3;4)$

138. არა 139. 0;$\frac{147}{16}$ 140. არსებობს 141. $\frac{2\sqrt{\cos 70^\circ}}{\sqrt{3}\sin 70^\circ}-\frac{3}{2}$ 142. $\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}$

143. $tg\left(\frac{1}{3}arctg\frac{1}{2}\right)$ 144. ა) $a=1$ ბ) $a\in(1;3)\cup(3.5;+\infty)$ გ) $a=3; a=3.5$ დ) $a\in(3;3.5)$

§7. ირაციონალური განტოლებები

ა – ჯგუფი

1. ბ) 2. გ) 3. ა) 4. დ) 5. ა) 6. ბ) 7. ა) 8. ბ) 9. ა) 10. დ)
11. ა) 12. გ) 13. ა) 14. დ) 15. ბ) 16. ბ) 17. დ) 18. გ) 19. ბ)

20. გ) 21. ბ) 22. გ) 23. ა) 24. გ) 25. ბ)

ბ - ჯგუფი

26. 3 27. 4 28. 1 29. 2 30. 2; $\frac{37}{36}$ 31 2; -5 32. 4 33. 7 34. $\frac{49}{9}$

35. $\frac{64}{125}; -\frac{1}{1000}$ 36. 12.5; -5 37. -9; - 1 38. -10; -6 39. 1; -90 40. 0; -513

41. 0; -1; -0.5 42. 0; $\frac{\pm 12\sqrt{21}}{7}$ 43. 1 44. -3 45. 0; -6; -8 46. 10 47. 3

48. 1 49. -1; 3 50. -5 51. $\frac{161}{64}$ 52. 5; 1; $48\pm 8\sqrt{31}$ 53. 3; $\frac{247}{9}$ 54. 1; -8

55. 3; -3 56. 1 57. 2 58. -2; 1 59. $\frac{1\pm\left(2\pm\sqrt{3}\right)^9}{2\left[\left(2\pm\sqrt{3}\right)^9-1\right]}$ 60. 0.75

61. $\frac{1+\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ 62. არა 63. $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ 64. 4 65. არა 66. 5; $4+\sqrt{10}$

67. 3 68. $\frac{a+b}{2}$ 69. $\pm 0.5\sqrt{2}$ 70. 0.25

§8. განტოლებათა სისტემები

ა - ჯგუფი

1. ბ) 2. გ) 3. დ) 4. ა) 5. ბ) 6. დ) 7. ბ) 8. ა) 9. დ)
10. გ) 11. ა) 12. ბ) 13. ა) 14. გ) 15. ბ) 16. დ) 17. გ) 18. ა)
19. დ) 20. გ)

ბ - ჯგუფი

21. (3; 6), (-3; -6) 22. (1; 5) 23. (3; 2) 24. (2; 1) 25. (1; 3) 26. (1; 1)
27. (2; 3) 28. (2; 1) 29. (3; 2), (3; -2) 30. (2;1), (1; 2), (-2; -1), (-1;-2) 31. (1; 2), (-1; -2)
32. (2;3), (-2;-3) 33. (3;1), (-3;-1) 34. ამონახსნი არა აქვს 35. (1; 0) 36. (4; 3), (-2;9)
37. (4; 8) 38. (1; 2), (2; 1), (-1; -2), (-1; 2), (1;- 2), (-2; -1), (2; -1), (-2; 1) 39. (2; 3), (3;2)

40. $\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ 41. $\left(0;\frac{-3\pm\sqrt{13}}{10}\right)\left(\frac{4}{5};\frac{-13\pm\sqrt{533}}{10}\right)$ 42. $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2};\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)$ 43. $\left(\sqrt{5};0\right)\left(-\sqrt{5};0\right)(1;2)(-1;-2)$ 44. $(2;-3)(-2;-3)(2;3)\left(-\frac{10}{3};-\frac{7}{3}\right)$ 45. (-1; 0) 46. $\left(2;\pm\sqrt{\frac{\sqrt{181}-1}{6}}\right)\left(\frac{\sqrt{445}-9}{14};\pm\sqrt{\frac{\sqrt{445}+5}{14}}\right)$

47. $(a+b;a-b)(a-b;a+b)(-a-b;-a+b)(-a+b;-a-b)$, 48. $\left(-\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)(0;3)\left(\frac{11}{3};-\frac{4}{3}\right)$ 49. (1;4)

50. $\left(2;-2+\sqrt{21}\right)\left(2;-2-\sqrt{21}\right)$ 51. (4; 3; 2) 52. (-2; 3; 3), (3;-2;3) 53. (4;2;1) 54. (3; 3; 3) 55. (3; 2; 1) 56. (1; 1; 2) 57. (0; 0; 0), (2; 2; 2) 58. $\left(1;\frac{9+\sqrt{41}}{2};\frac{9-\sqrt{41}}{2}\right)\left(1;\frac{9-\sqrt{41}}{2};\frac{9+\sqrt{41}}{2}\right)(2;3;3)\left(\frac{7+3\sqrt{21}}{2};\frac{-3+\sqrt{21}}{2};\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right)$.

$\left(\frac{7-\sqrt{21}}{2};\frac{-3-\sqrt{21}}{2};\frac{-3-\sqrt{21}}{2}\right)$ **59.** (2; 3; 4), (2; 4; 3) **60.** (1; 2; 3), (1; 3; 2)

61. (1; 1; 1), $\left(\frac{-3+\sqrt{21}}{4};\frac{-3-\sqrt{21}}{4};-\frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{-3-\sqrt{21}}{4};\frac{-3+\sqrt{21}}{4};-\frac{5}{2}\right)$ **62.** $(a;2a;3a)$, a ნამდვილი რიცხვია **63.** $\left(\frac{-3-\frac{3\sqrt{7}}{2}-\sqrt{7\sqrt{7}}-\frac{35}{4}}{4};\frac{1-\frac{\sqrt{7}}{2}+\sqrt{7\sqrt{7}}+\sqrt{7\sqrt{7}}+\frac{35}{4}}{4};\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ **64.** (0; 3; 3), (3; 0; 3)

65. (3; 4; 5) **66.** $\left(2;\frac{1}{4};1\right)\left(\frac{1}{4};2;1\right)$ **67.** (1; 2),$\left(-\frac{35}{11};-\frac{1}{11}\right)$ **68.** (1; 1; 2), (1; 2; 1), (2; 1; 1)

69. (1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2); (3; 2;1) **70.** 1;1 ; $\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, რიცხვების ყველა ოთხეული გამეორების გარეშე **71.** (1; 1; 1) **72.** $2^{n-1}+1$ **73.** $\sqrt{\sqrt{5}\pm 1}$

74. $u_1=2,\ v_1=1,\ t_1=2, z_1=3;\ \ u_2=\frac{11}{8},\ v_2=\frac{13}{8},\ t_2=\frac{19}{8}, z_2=\frac{21}{8};$ **75.** (7; 20), $\left(\frac{2503}{49};-\frac{220}{49}\right)$

§9. მიმდევრობები

ა - ჯგუფი

1. 1) დ), 2) ბ), 3) ა) **2.** 1) ა), 2) გ), 3) დ) **3.** 1) ა), 2) ბ), 3) დ) **4.** 1) ა), 2) ბ), 3) გ) **5.** ა) **6.** დ) **7.** ბ) **8.** გ) **9.** ბ) **10.** ა) **11.** დ) **12.** 1) გ), 2) ბ) **13.** ა) **14.** ბ) **15.** დ) **16.** გ) **17.** ა) **18.** ა) **19.** ბ) **20.** 1) დ), 2) გ), 3) ა), 4) დ) **21.** 1) ა), 2) გ), 3) დ), 4) ბ) **22.** 1) გ), 2) დ), 3) ბ), 4) დ) **23.** 1) დ), 2) ა), 3) ბ), 4) გ) **24.** ბ) **25.** ბ) **26.** გ) **27.** დ) **28.** ა) **29.** ა) **30.** 1) ა), 2) ბ) **31.** 1) ა), 2) დ) **32.** გ) **33.** ბ) **34.** ბ) **35.** დ) **36.** ა) **37.** დ) **38.** დ)

ბ - ჯგუფი

39. $0.5\left(3n^2+7n-2\right)$ **40.** 2 **41.** $-\frac{1}{13}$ **42.** 12 **43.** შემოსაზღვრულია

44. შემოსაზღვრულია **45.** $3+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$ **46.** $2+\sqrt[3]{2}-\sqrt[6]{2}$ **47.** $a_n=(-1)^{n+1}$

48. $a_n=\frac{4n^2}{(2n+1)^2}$ **49.** $a_n=1+(-1)^{n+1}$ **50.** $a_n=\frac{1}{2}\left[1+(-1)^{n+1}\right]$ **51.** $a_n=\frac{1}{2}\left[1+(-1)^n\right]$

52. $a_n=\frac{1}{3}\left[1+(-1)^{n+1}\right]$ **53.** $a_n=\frac{1}{3}\left[1+(-1)^{n+1}\right]+\frac{3}{2}\left[1+(-1)^n\right]$ **54.** $y=a_1+(a_2-a_1)(x-1)$

55. საზოგადოდ არა **56.** არ არის **57.** არის, $a_n=6n+2$ **58.** არა **59.** არის, $b_n=5\cdot 2^{n-1}$ **60.** არა **61.** $y=b_1\cdot q^{x-1}$ **62.** არა **63.** არის, მაგალითად 2; 6; 18 და 8; 16; 32 **64.** არა **65.** საზოგადოდ არა **66.** $arctg\frac{3}{4}$; $arctg\frac{4}{3}$ **67.** შეიძლება, მაგალითად $a_1=b_1=1; q_1=\sqrt{2}, q_2=\sqrt[3]{3}$ **68.** არა **71.** ხუთი **72.** ორი **73.** 2; 6; 10 **74.** უსასრულოა **75.** არსებობს **76.** 1; 3; 9 **77.** არსებობს **78.** საზოგადოდ არა **79.** საზოგადოდ არა, $b_n=2^{n+1}$ **80.** საზოგადოდ არა **82.** არსებობს **83.** შეიძლება

84. არა **85.** არა **86.** არა **87.** $\frac{n}{2n+1}$ **88.** $\frac{n}{2(3n+2)}$ **89.** $\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$

90. $\frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2}}{3}$ 91. $\sqrt[3]{n+1}-1$ 92. $\frac{a_n \cdot a_{n-1}-a_1 \cdot a_2}{2da_1a_2a_na_{n-1}}$ 93. 2 099 044 750

94. $\frac{13}{99}\left(\frac{10^{2n+2}-100}{99}-n\right)$ 95. $\frac{1213}{9999}\left(\frac{10^{4n+4}-10^4}{9999}-n\right)+1200(n-1)\frac{1213}{9999}\left(\frac{10^{4n}-10^n}{9999}-n+1\right)+12$

96. $\frac{1}{2}\left[3^{n+1}\left(n^2-n+1\right)-3\right]$ 97. $\frac{n(n+1)(4n-7)}{6}+15n$ 98. $\frac{n}{4}\left[3n(n+1)^2-4\left(2n^2+n-2\right)\right]$

99. $\frac{1}{9}\left(\frac{10^{6n+6}-10^6}{10^6-1}-n\right)$ 100. შემოსაზღვრულია 101. არა

102. $a\cdot\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}+b\cdot\frac{1-(-1)^{n+1}}{2}$ 103. $\frac{n+(-1)^n n}{4}$ 104. $\frac{2n+1+(-1)^n n+(-1)^{n+1}(n+1)}{4}$

105. არა 108. ა) ბ) გ) ე) ზ) ლუწია დ) კენტია, თ) ე) არც ლუწია და არც კენტი

109. $a_n=\frac{a_n+a_{-n}}{2}+\frac{a_n-a_{-n}}{2}$ 110. $2\cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 112. არა 113. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 114. არა 115. არა

117. 45°, 45° 118. ა) არა, ბ) არსებობს 120. არა 122. შეიძლება 123. $b=a\sqrt{2}$ 125. 3

126. - 40 127. არსებობს 128. არსებობს 129. $f(x)=px+q$ 130. $f(x)=c\cdot x^{\alpha}$

131. $f(x)=a\log_b x+c$ 132. $f(x)=aq^x$ 133. არსებობს 134. არსებობს 135. არა

136. არა 137. არა 138. საზოგადოდ არა 141. შეიძლება 142. შეიძლება

143. 3n+2

§10. კომბინატორიკის ელემენტები

1. 1) ბ), 2) გ), 3) დ), 4) ა) 2. 1) ბ), 2) ა), 3) გ), 4) გ) 3. 1) ა), 2) ა), 3) დ), 4) ა) 4. 1) ბ), 2) გ), 3) ა), 4) დ) 5. 1) ბ), 2) გ), 3) გ), 4) დ) 6. გ) 7. დ) 8. ა) 9. დ) 10. ბ) 11. გ) 12. დ) 13. გ) 14. ბ) 15. გ) 16. გ) 17. ბ) 18. გ) 19. გ) 20. ბ) 21. გ) 22. დ) 23. გ) 24. ბ) 25. ა) 26. დ) 27. 24 28. 10! 29. 18 30. 12 31. 6 32. 24 33. 14 34. 36 35. 2 160 36. 80 640 37. 40 320 38. 36 000 39. 3 507 840 40. 2 41. 24 42. 380 43. 2 730 44. 360 45. 64 46. 48 47. 180 48. 18 49. 1 140 50. 45 51. 32 52. 2 016 53. 1 225 54. 35 55. 163 56. 116 57. 10 395 58. 31 500 59. 192 60. 10 61. 74 62. 826 63. 2 800 64. 161 700 65. 729

§11. ხარისხოვანი, მაჩვენებლიანი განტოლებები და განტოლებათა სისტემები

ა - ჯგუფი

1. გ) 2. ბ) 3. 1) ბ), 2) გ), 3) გ), 4) ა) 4. 1) დ), 2) ა), 3) ბ), 4) გ), 5) ა), 6) ა), 7) დ), 8) გ), 9) ა), 10) ბ) 5. 1) ბ), 2) გ), 3) ა), 4) დ), 5) ა), 6) გ), 7) ბ) 6. 1) დ), 2) გ), 3) ა), 4) გ), 5) ა) 7. 1) დ), 2) გ), 3) ბ), 4) გ), 5) ა), 6) ბ), 7) დ), 8) დ)

ბ - ჯგუფი

8. 5 9. 30 10. 0.25 11. 82 12. 2; $-\frac{4}{3}$ 13. 1; $-\frac{2}{3}$ 14. $-\frac{17}{81}$ 15. 1; $-2\frac{2}{3}$ 16. -1; -2 17. 4; -4 18. 1; -5 19. 8 20. 1; -4.5 21. 5; -7 22. 3

23. ±3 24. 4 25. 1 26. 2 27. 0; -1 28. $\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$ 29. ამონახსნი არა აქვს

30. 2 31. -0.5 32. 0 33. $\log^2_3\frac{1+\sqrt{5}}{2}+3$ 34. 1; -2 35. 5 36. 0 37. 2

38. 0 39. 0 40. -0.5 41. 2.25 42. 1 43. 8 44. $\log_{\frac{4}{9}} 20$ 45. (3; 1)

46. (0; 7), $\left(\frac{8\log 3-15\log 5}{5\log 15}; 7-\frac{40\log 3-75\log 5}{10\log 15}\right)$ 47. (2; 1) 48. (1; 2) 49. (1; 2) 50. (2; 1.5) 51. (4; 1) 52. (-1; 0.5) 53. (1; 1) 54. (5; 9) 55. $\{-0.25\}\cup\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup[0;+\infty)$

56. 5 57. 48 58. -1 59. 1; -3 60. 6 61. 2; -1 62. 2 63. 1 64. 2

65. 0; 0.5 66. $1+\log_{2,5}\frac{50+4\sqrt{46}}{9}$ 67. $\log_{\frac{2}{5}} 2-1; -\log_{\frac{2}{5}} 2-1$ 68. -1 69. 0; $-\frac{1}{3}$

70. 0.5 71. 2 72. 0 73. 1 74. (2; 2) 75. (4; 1) 76. (0; 2), (0; -2), $\left(\sqrt{\log 9\sqrt{5}}; \sqrt{\log_3 3\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\sqrt{\log 9\sqrt{5}}; \sqrt{\log_3 3\sqrt{5}}\right)$, $\left(\sqrt{\log 9\sqrt{5}}; -\sqrt{\log_3 3\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\sqrt{\log 9\sqrt{5}}; -\sqrt{\log_3 3\sqrt{5}}\right)$

77. $\left(2;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(2;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 78. $\left(1;\frac{2}{3}\right)$ 79. (1; 2) 80. (1.8; 4.4) 81. (4; 2)

82. $\left(-\frac{47}{192}; \frac{49}{96}\right)$ 83. $\left(\left(\log_3 8+\sqrt{\log_5 10}\right)^2; \left(\log_3 8+2\sqrt{\log_5 10}\right)^2\right)$ 84. (-1; 2) 85. (1; 2), (3; 0), (0; 3), (-3; 3), $\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2};1\right)$, $\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2};1\right)$, (-2; 5), (3; 3), (3; 1), (1; 3), (1; 1), (3; 2), (2; 3), (2; 1), (2; 2), $\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}; 2\right)$ 86. (1; 1), (1; -1), (-1; 1), (-1; -1), (1; 2), (-1; -2), (-2; 1), $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

87. (1; 0), (-1; 0), (1; -2), (-1; 2), $\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{6+2\sqrt{3}}{3}; \frac{3+4\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3}; \frac{3-4\sqrt{3}}{3}\right)$

88. $\left(3+\log_2\frac{8}{5}; \log_2\frac{8}{5}\right)$, $\left(3+\log_2\frac{8}{11}; \log_2\frac{8}{11}\right)$ 89. (8; 4), (64; 16) 90. ამონახსნი არა აქვს

§12. ლოგარითმები. ლოგარითმული განტოლებები და სისტემები

ა - ჯგუფი

1. 1) დ), 2) ბ), 3) გ), 4) ა), 5) ა), 6) ბ), 7) ბ), 8) ა), 9) გ), 10) ბ) 2. 1) ა), 2) ბ), 3) ბ), 4) გ), 5) დ), 6) ა), 7) ბ), 8) ა) 3. 1) გ), 2) ა), 3) ბ), 4) ა), 5) დ), 6) დ) 4. 1) ა), 2) გ), 3) ა), 4) ბ), 5) დ), 6) გ), 7) დ), 8) ა) 5. 1) გ), 2) ბ), 3) გ), 4) დ) 5) ა), 6) ა), 7) დ) 6. 1) გ), 2) გ), 3) ბ), 4) გ), 5) ა) 7. $\frac{3+2n}{m+n}$ 8. $\frac{3+n-m}{m+2n}$

9. $\frac{2n+m+1}{n+1}$ 10. $\frac{mn+3}{2n}+\frac{18}{2n+3}$ 11. $\frac{1-n+m}{n}+\frac{2n}{2-2n+m}$ 12. $n\left(m+\frac{1}{2}\right)$

13. 1) ბ), 2) გ), 3) დ), 4) ა), 5) გ), 6) ბ), 7) გ), 8) დ) 14. 1) ბ), 2) ბ), 3) გ), 4) დ), 5) გ), 6) ბ), 7) გ), 8) ა) 15. 1) $1+\sqrt{6}$, 2) $1+\sqrt{3}$, 3) 2, 4) $(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$ 5) $\frac{11}{28}$, 6) 2, 7) 3; 8) $\sqrt{2}-1$

ბ – ჯგუფი

16. 1) $\frac{2m+1}{n+1}$, 2) $2-m-5n$, 3) $1-2m-n$ 17. $b>a$ 18. $b<a$ 19. $b>a$ 20. $b>a$

21. $b>a$ 22. $b>a$ 23. $b>a$ 24. $b<a$ 25. 1) $\frac{23}{3}$, 2) 3, 3) 6; $3+\frac{1}{3^{11}}$, 4) $\pm\sqrt{3};\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, 5) -3; 7; $\frac{251}{125};\frac{249}{125}$, 6) 0; 4, 7) $-10^{\frac{1\pm\sqrt{1+8lg5}}{2}}$ 26. 1) 35, 2) 11, 3) -4, 4) 4; 6 27. 1) 100, 2) ამონახსნი არა აქვს, 3) 1, 4) 5; -5.5, 28. 1) 12, 2) $\frac{-1\pm\sqrt{69}}{2}$, 3) 7, 4) 1, 5) $\sqrt[3]{10};\sqrt[39]{10^{19}}$, 6) 9; $10\sqrt{10}-1$ 29. 1) 9, 2) 1, 3) $\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2};2;-3$, 4) 2

30. 1) 1, 2) 9, 3) $-\frac{1}{3}$; 0 4) $5^{log_3 5}$ 31. (2,25; 0,75)

32. (1; 2) 33. (4; 1) 34. (6; 1) 35. $\left(2+\frac{1}{\sqrt[3]{2}};2-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)(34;-30)$

36. (2; 1) 37. -10; $-\sqrt[4]{10}$ 38. 4; $-\frac{624}{625}$ 39. 10; 100 40. 2; -1 41. $4\sqrt{2}$

42. 0.5 43. ამონახსნი არა აქვს 44. 1000; $10\sqrt{10}$ 45. 1 46. (10; 100) და (100; 10)

47. (100; 10) და (10; 100) 48. (0.1; 100); (100; 0.1) 49. (100; 10); (1000; $\sqrt[3]{100}$)
50. (0.5; 10); (10; 0.5) 51. (31; 7) 52. (8; 2) 53. (2; 1) 54. (1; 4) 55. (2; 25)
56. (1; 5);
$\frac{-9lg3-58lg5}{9lg3-6lg5};\frac{16lg5-15lg3}{3lg3-2lg5}$ 57. (1; 1) 58. (2; -2) 59. (1; 10);(-1; 10)

60. (2; 3); (2; -7) 61. (78; 80); $\left(\frac{\sqrt{17}+3}{2};\frac{\sqrt{17}+7}{2}\right)$ 62. $\left(1;\frac{1}{3}\right)$ 63. $\left(\sqrt{3};3\sqrt{3}\right)$ 64. (7; 5); $\left(35^{\frac{-log_5 7}{7}};35^{\frac{log_5 5}{7}}\right)$ 65. (1; 1; 1) 66. (10; 10; 11);(0.1; 0.1; 0.1)

67. $(1.5;1.5);(\alpha;1-\alpha)$ ნებისმიერი α ნამდვილი დადებითი რიცხვისათვის

§13. ამოცანები განტოლებების და განტოლებათა სისტემის შედგენაზე

ა – ჯგუფი

1. ბ) 2. გ) 3. გ) 4. დ) 5. გ) 6. ბ) 7. გ) 8. ბ) 9. დ) 10. ბ)
11. დ) 12. გ) 13. ბ) 14. გ) 15. ბ) 16. დ) 17. ბ) 18. დ) 19. გ)
20. ბ) 21. გ) 22. დ) 23. ბ) 24. ბ) 25. ა) 26. დ) 27. ა) 28. გ)
29. დ) 30. ბ) 31. დ) 32. ბ) 33. ა) 34. გ) 35. გ) 36. ბ) 37. ბ)
38. გ) 39. დ) 40. ა) 41. გ) 42. ბ) 43. ა) 44. დ) 45. გ) 46. გ)
47. გ) 48. ა) 49. ბ) 50. გ)

ბ – ჯგუფი

51. 12 ლ 52. 5 სთ 53. 8 კმ /სთ 54. 60 მ 55. 15 კმ /სთ 56. 16 კმ /სთ და 20 კმ /სთ 57. 3 კმ/სთ და 2.4 კმ/სთ 58. 3 კმ/სთ და 48 კმ/სთ 59. 6 სთ

60. 90 კმ 61. 4 ლ 62. $31\frac{3}{7}$% 63. 27,(7) % 64. 17 65. $\left[5;\frac{3+\sqrt{129}}{2}\right]$ კმ/სთ

66. 7 სთ 67. 60 კმ 68. 17/43 69. 17 70. 20 კმ/სთ 71. 80 კმ 72. 8; 12; 5; 20 73. 504 74. 55 კმ/სთ; 105 კმ/სთ

§14. რაციონალური და ირაციონალური უტოლობები

ა - ჯგუფი

1. ბ) 2. გ) 3. ა) 4. ბ) 5. ბ) 6. ა) 7. გ) 8. ა) 9. დ) 10. გ)
11. ა) 12. ბ) 13. ა) 14. ბ) 15. ბ) 16. დ) 17. ა) 18. ა) 19. გ)
20. ა) 21. ბ) 22. ა) 23. გ) 24. ა) 25. გ) 26. ბ) 27. ა) 28. ბ)
29. დ) 30. გ) 31. ბ) 32. ა) 33. გ) 34. ა) 35. გ) 36. გ) 37. ა)
38. ბ) 39. ა) 40. 1) ბ), 2.) ა), 3) გ), 4) დ), 5) ა), 6) ბ), 7) გ), 8) ბ), 9) ა), 10) დ),

ბ - ჯგუფი

41. 1) $(10;+\infty)$, 2) $\left(\frac{17}{7};\ +\infty\right)$ 3) ამონახსნი არა აქვს, 4) $(1;+\infty)$ 42. 1) $\left(0;\frac{51}{32}\right)$,

2) ამონახსნი არა აქვს, 3) $(47.5;+\infty)$ 4) $\left(-\infty;\frac{61}{120}\right)$ 43. 1) $(-\infty;-1)\cup(0.5;+\infty)$,

2) $(-\infty;-0.5)\cup(1;+\infty)$, 3) $\{3\}$, 4) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$, 5) $[-3;4]$, 6) $[2;7]$,

7) $(-\infty;-0.2)\cup(0.5;+\infty)$, 8) $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$ 44. 1) $(-\infty;-0.5]\cup[0;1]$ 2) $(-1;0)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$,

3) $(-1;0)\cup(0;7)$, 4) $(-\infty;-3]\cup\{-1\}\cup[1;+\infty)$, 5) $(-\infty;-3)\cup(-1;1)$, 6) $[-3;0.5]\cup\{2\}$

7) $(-\infty;-2]\cup\{0\}\cup[3;+\infty)$, 8) $(1;1.5)\cup\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$ 45. 1) $(-\infty;1]\cup[2.5;+\infty)$, 2) $\left(1;\frac{5}{3}\right)$,

3) $(-\infty;-3.5]\cup[2;+\infty)$, 4) $\left(-2\frac{2}{3};3\right)$, 5) $(-\infty;1]$, 6) $\{-2\}\cup[2;+\infty)$, 7) $(-\infty;3)$, 8) $[3;+\infty)$

46. 1) $(-1.5;1)\cup(2;3)$; 2) $(-\infty;-4.5]\cup(-2;1)\cup[2;+\infty)$ 3) $\left(-2;-1\frac{1}{3}\right)\cup(0.5;3)$4) $(0;1)\cup(2;3)\cup(4;+\infty)$

5) $(-\infty;-3)\cup(-2;-1)\cup(1;3)$, 6)$(-\infty;\ -1{,}5)\cup[-1;2]\cup(3;+\infty)$, 7) $[3;4)$,

8) $(-\infty;-1)\cup\left(-1;-\frac{1}{3}\right)\cup(2;+\infty)$ 47. 1) $(-\infty;-5]\cup(-2;1)$, 2) $(-\infty;-2)\cup(2;5)$

3) $(-\infty;1)\cup(3;4)$, 4) $\left(-\infty;\frac{-15-\sqrt{229}}{2}\right)\cup\left(-4;\frac{-15+\sqrt{229}}{2}\right)\cup(2;3)$,

48. 1) $(-3;-2)\cup\left(-\sqrt{\frac{33}{14}};\sqrt{\frac{33}{14}}\right)\cup(2;3)$, 2) $(-\infty;-\sqrt{2})\cup\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{6};-1\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{31}}{6};1\right)\cup(\sqrt{2};+\infty)$

3) $(-\infty;-\sqrt{5})\cup\left(-\sqrt{3};-\frac{30}{29}\right]\cup[1;\sqrt{3})\cup(\sqrt{5};+\infty)$, 4) $(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$

5) $(-\infty;-3)\cup(-2.5;-2)\cup(-0.5;2)$, 6) $\left(-1;\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)\cup\left(2;\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$

49. 1) $\begin{cases}(-\infty;+\infty), \text{როცა } a=3\\ \left(-\infty;\frac{3-5a}{3-a}\right), \text{როცა } a<3\\ \left(\frac{3-5a}{3-a};+\infty\right), \text{როცა } a>3\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(-\infty;+\infty), \text{როცა } a=-0.04\\ \left(-\infty;\frac{2-3a}{5a+0.2}\right), \text{როცა } a>-0.04\\ \left(\frac{2-3a}{5a+0.2};+\infty\right), \text{როცა } a<-0.04\end{cases}$

3) $\begin{cases} (-\infty;\,-2-\sqrt{6}] \cup [-2+\sqrt{6};\,+\infty),\ \text{როცა } a \in (-1;1) \cup (2;\,+\infty) \\ [-2-\sqrt{6};\,-2+\sqrt{6}]\ \text{როცა } a \in (-\infty;-1) \cup (1;\,2) \\ (-\infty;\,+\infty),\ \text{როცა } a = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \text{როცა } a \in (-\infty;-2) \cup (-1;+\infty), \text{მაშინ } (-14;-1) \\ \text{როცა } a \in (-2;-1), \text{ მაშინ } (-\infty;-14) \cup (1;+\infty) \\ \text{როცა } a = -2 \text{მაშინ } (-\infty;+\infty) \end{cases}$

5) $\begin{cases} [-1;\,+\infty),\ \text{როცა } a \in \left(-3;\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right) \\ (-\infty;\,-1),\ \text{როცა } a \in (-\infty;-3) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ (-\infty;\,+\infty),\ \text{როცა } a \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\} \end{cases}$

6)) $\begin{cases} [0{,}5;\,+\infty),\ \text{როცა } a \in (-\infty;\,-4) \cup (-2;\,+1) \cup (1;\,+\infty) \\ (-\infty;\,-0{,}5),\ \text{როცა } a \in (-4;-2) \\ (-\infty;\,+\infty),\ \text{როცა } a = -4 \end{cases}$

50. 1) $[-2;3]$, 2) $[10;25]$, 3) $(-1;3.4)$, 4) $\left(-\infty;\frac{6}{11}\right] \cup \left[\frac{26}{11};+\infty\right)$, 5) $\left(-\infty;\,-\frac{73}{21}\right] \cup \left[\frac{11}{21};\,+\infty\right)$ 6) $\left(-\infty;\,-\frac{2}{25}\right] \cup \left[\frac{62}{25};\,+\infty\right)$ **51.** 1) $[-1;6]$, 2) $\left[-\frac{8}{3};1\right]$, 3) $\{1;0.4\}$, 4) $\left(-\infty;\ \frac{-3-\sqrt{57}}{4}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{57}}{4};\,+\infty\right)$ 5) $\left(-\infty;\,-\frac{11}{3}\right) \cup \left[-2;\,\frac{1}{3}\right] \cup (2;\,+\infty)$ 6) $(-\infty;-3] \cup [4;+\infty)$ **52** 1) $\left[-\frac{4}{3};0\right]$ 2) $(-\infty;+\infty)$, 3) ამონახსნი არა აქვს, 4) ამონახსნი არა აქვს, 5) $(-\infty;0.3] \cup \left[\frac{47}{90};+\infty\right)$ 6) $\left[-2.8;\frac{2}{19}\right]$ **53.** 1) $[0;1] \cup [2;+\infty)$, 2) $\left[\frac{-5+\sqrt{5}}{2};\ \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\right]$ 3) $\left[\frac{7-\sqrt{41}}{2};\frac{7+\sqrt{41}}{2}\right]$, 4) $\left(-\infty;\frac{5}{7}\right]$

54. 1) $(-\infty;-2] \cup [0;+\infty)$, 2) $(-\infty;0] \cup [0.8;+\infty)$, 3) $(-\infty;0.8] \cup [14;+\infty)$,
4) $(-\infty;\,-2-\sqrt{2}] \cup \left[-2+\sqrt{2};\,-\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3};4-\sqrt{18}\right) \cup [4+\sqrt{18};+\infty)$ 5) $(-\infty;-0.4]$,
6) $\left[-\frac{2}{3};0\right) \cup \left(0;\frac{9-\sqrt{65}}{4}\right] \cup \left[\frac{9+\sqrt{65}}{4};6\right) \cup (6;+\infty)$ **55.** 1) $[-2;0] \cup [4;6]$, 2) $[0;1]$,
3) $(-\infty;-4.5] \cup [-2.5;-0.5] \cup [1.5;+\infty)$, 4) $[1;5]$, 5) $(-\infty;+\infty)$, 6) $(-\infty;+\infty)$
56. 1) $\left[\frac{1-\sqrt{73}}{6};-1\right] \cup \left[0;\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{4}{3};\frac{1+\sqrt{73}}{6}\right]$, 2) $(-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$
3) $(-\infty;-7) \cup \{-1\} \cup \left[\frac{5-\sqrt{33}}{4};\frac{5+\sqrt{33}}{4}\right] \cup [3.5;+\infty)$.**57.** 1) ,$(-\infty;2) \cup (3;+\infty)$, 2) $(-\infty;1) \cup (2;+\infty)$,
3) $\{0\}$, 4) $\left[\frac{-5+\sqrt{37}}{2};\,+\infty\right)$, 5) $(-\infty;+\infty)$, 6) $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2};0\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{17}}{2};\,+\infty\right)$ **58.** 1) $\left[\frac{1}{3};2\right]$,
2) $[-0.6;4]$, 3) $(-1;1) \cup (1;+\infty)$, 4) $(-\infty;-2] \cup [3;+\infty)$, 5) $\left[-1;\frac{-4+\sqrt{5}}{2}\right)$, 6) $\left[10;\frac{7+\sqrt{205}}{2}\right)$

59. 1) $\left(\frac{9-\sqrt{21}}{4};+\infty\right)$, 2) $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$, 3) $(-2;+\infty)$, 4) $(1-\sqrt{13};2)\cup(3;1+\sqrt{13})$, 5) $\left(-\infty;\frac{-10-\sqrt{20}}{5}\right]\cup\left[\frac{-10+\sqrt{20}}{5};+\infty\right)$, 6) $\left(0.5;\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{5}}{5};\frac{5}{3}\right)$ 60. 1) $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{26}{7};+\infty\right)$, 2) $(-\infty;-1)\cup(12;14.6)\cup(19.8;+\infty)$, 3) $[-1;0]$, 4) $(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$ 61. 1) $x-3\geq 0$, 2) $x+2<0$ 62. 1) $\begin{cases}x-3\geq 0\\ x-5<0\end{cases}$, 2) $\begin{cases}x-2\geq 0\\ x-2\leq 0\end{cases}$, 63. 1) $x^2+x-6\leq 0$, 2) $x^2-7x+10\leq 0$, 3) $x^2-4x+3\geq 0$ 64. 1) $\begin{cases}x^2-22x+120\leq 0\\ x^2+5x+10\geq 0\end{cases}$, 2) $\begin{cases}x^2-5x+4<0\\ x^2-5x+6>0\end{cases}$, 3) $\begin{cases}x^2-6x+9\leq 0\\ x^2-5x+4<0\end{cases}$, 4) $\begin{cases}x^2-8x+15\geq 0\\ x^2-8x+15\leq 0\end{cases}$ 65. 1) $|x-5|>2$, 2) $|x-6.5|<1.5$ 66. 1) $\big||x-2|-|x-7|+1\big|\geq|x-2|+|x-7|-3$, 2) $|x-4|+|x-15|-4>\big||x-4|-|x-15|+2\big|$ 67. 1) $\sqrt{x^2-5x+10}\geq 2$, 2) $\frac{\sqrt{3x-x^2}}{\sqrt{x^2-2x+1}}\geq 0$, 3) $\sqrt{10x-x^2-16}\cdot\sqrt{x^2-7x+12}\geq 0$ 68. 1) $x^3-8\geq 0$, 2) $x^3-2x^2-3x>0$, 3) ასეთი უტოლობა არ არსებობს 69. 1) $x^4-x^2<0$, 2) $x^4-20x^2+64\leq 0$ 70. 1) $(x+1)(x-2)(x-3)(x-4)\geq 0$, 2) $x(x-3)(x-5)(x-7)<0$ 71. 1) $\frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x-4)(x+5)}\leq 0$, 2) $\frac{x^2(x+2)(x-1)}{(x-3)(x-4)}\geq 0$ 3) $\frac{(x+3)(x+2)(x-1.2)(x-1.4)(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2}{(x-2.4)(x-2.6)(x-4)}\geq 0$ 72. 1) $\big||x-2.5|-5\big|-2.5\leq 0$, 2) $\big||x-1.5|-3\big|-1.5>0$ 73. $\sin(\log_2 x)\pi>0$ 74. $\sin(2^x\pi)>0$

75. $a\in(-0.25;0)$ 76. $[-2;-1.5)$ 77. $\emptyset$ 78. $(-\infty;-2)\cup\left(\frac{1}{3};1\right)$ 79. $(-\infty;0)\cup\left[\frac{20}{21};+\infty\right)$

80. $\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$ 81. $(-2;-1.4)$ 82 $(3;\ +\infty)$ 83. $[-1;\ -0{,}55]$

84. $(-3.25;-3]\cup[1;+\infty)$ 85. $\left[\frac{-2\sqrt{11}-4}{7};0\right)$ 86. $\left[-2;\ \frac{9-2\sqrt{29}}{5}\right]$ 87. ამონახსნი არა აქვს

88. $\left(0;\frac{\sqrt{56}-7}{7}\right]$ 89. $(-3;+\infty)$ 90. ამონახსნი არა აქვს 91. $\left(3;\ \frac{13}{3}\right)$

92. $\left(2;\frac{10}{3}\right)$ 93. $(-\infty;\ -2)$ 94. $(-3;-0{,}25)$ 95. ამონახსნი არა აქვს

96. $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup(2;+\infty)$ 97. $(-19;0{,}5)$ 98. ამონახსნი არა აქვს 99. $\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)$

100. $\emptyset$ 101. $(-\infty;\ 0]\cup(8;\ +\infty)$ 102. $(-2;0]\cup\left\{\frac{1}{12}\right\}$ 103. $(-\infty;\ -1)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{12}}{2};\ +\infty\right)$

104. $(-\infty;\ -1)\cup(3;\ +\infty)$ 105. $\left(-\infty;\frac{3c-bc}{a}\right)$ 106. $\left(-\infty;\ \frac{3b-a}{a-1}\right)$ 107. $\left(-\infty;\ \frac{3a-3b}{a+1}\right)$

108. $\left(\frac{3c-b}{a+2};+\infty\right)$ 109. $\begin{cases}\text{თუ } a=0, \text{ მაშინ } \left(\frac{2}{7};+\infty\right)\\ \text{თუ } a<0, \text{ მაშინ } \left(-\infty;\frac{7-\sqrt{8a^2-8a+49}}{2a}\right)\cup\left(\frac{7+\sqrt{8a^2+48a+4}}{2a}\right)\end{cases}$

110. თუ $a\in\left[\frac{-5-\sqrt{34}}{2};0\right)$, მაშინ $\left(\frac{-3-\sqrt{-4a^2+20a+9}}{2a};\frac{-3+\sqrt{-4a^2+20a+9}}{2a}\right)$

111. თუ $a\in\left(0;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$, მაშინ $\left(-\infty;\ \frac{1-\sqrt{3a^2+12a+1}}{3a}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{3a^2+12a+1}}{3a};\ +\infty\right)$

112. $\{1,2,3,\dots,587\}$ 126. 299 128. $a > b$ 129. $a < b$ 130. $a < b$ 131. $a < b$
132. $a < b$ 133. $a > b$ 134. $a > b$ 135. $a < b$ 136. დადებითია

137. ოთხივეს ჯამი მეტია 3-ზე ე.ი.ერთ-ერთი მაინც მეტია $\frac{3}{4}$

§15. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული უტოლობები

ა - ჯგუფი

1. გ)	2. ბ)	3. გ)	4. ბ)	5. გ)	6. ა)	7. ბ)	8. ბ)	9. დ)	10. ა)
11. დ)	12. გ)	13. ბ)	14. ა)	15. დ)	16. გ)	17. დ)	18. ა)	19. გ)	
20. დ)	21. ა)	22. ბ)	23. ა)	24. ა)	25. ა)	26. დ)	27. ბ)	28. გ)	
29. დ)	30. ბ)	31. ა)	32. ბ)	33. ბ)	34. ბ)	35. ა)	36. ბ)	37. დ)	
38. ბ)	39. გ)	40. დ)	41. დ)						

ბ – ჯგუფი

42. გ) 43. გ) 44. ა) 45. ბ) 46. დ) 47. $(-\infty;log_6 2]\cup[log_6 3;+\infty)$ 48. გ)
49. დ) 50. გ) 51. გ) 52. დ) 53. ბ) 54. $[9;+\infty)$ 55. ამონახსნი არა აქვს

56. $(-\infty;\ -\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};\ +\infty)$ 57. $(0;+\infty)$ 58. 1 59. $[-1;2]$ 60. $(-3;-2)\cup\left(-2;-\frac{5}{3}\right)\cup\{-1\}$

61. $(-\infty;-2.5]\cup[4;+\infty)$ 62. $(0;1)\cup(3{,}5;\ 6)$ 63. $(-\infty;-1)\cup(-1+\infty)$ 64. $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$ 65. ამონახსნი არა აქვს 66. $\left[\frac{7-\sqrt{205}}{2};-log_5 10\right]$ 67. $(-\infty;\ -1)\cup(0;\ \log_3 4]$ 68. $[log_3{}^2 8;log_3{}^2 17]$

69. $[log_5{}^2 9-1;log_5{}^2 15-1]$ 70. $(-\infty;0)$ 71. $(0;\ \log_5 2)\cup(\log_5 4;\ +\infty)$ 72. $[log_5^2 2-1;\ log_5^2 3-1)\cup[0;\ +\infty)$ 73. $[log_2^2 3;\ log_2^2 6)$ 74 $(-1;log_3 2.5-1)$ 75. $(-\infty;0.5)$

76. $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{7-2\sqrt{21}}{7}\right)\cup\left(\frac{1}{3};1\right)\cup\left(\frac{7+2\sqrt{21}}{7};3\right)\cup(3;\ +\infty)$ 77. $(-8;-0.5)\cup(-0.5;0)$ 78. $(-1;1)\cup(2;+\infty)$

79. $[-2-\sqrt{6};\ -2+\sqrt{6}]\cup(4;\ +\infty)$ 80. $(0.5;+\infty)$ 81. $\left[\frac{2}{3};1\right]\cup\{-10\}$ 82. $(0.5;1)\cup(3;+\infty)$

83. $(-\infty;\ -1]\cup\{1;\ 6\}$ 84. $(2;+\infty)$ 85. $(1;+\infty)$ 86. $(-1;\ 1)$ 87. $(-\infty;-1.5)$ 88. $(-\infty;-2.5]$

89. $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 90. $(-1;3]$ 91. $\left(0;\log_5\left(1+5^{-7}\right)\right)\cup\left(log_5\left(5^5+1\right);+\infty\right)$

92. $\left(log_7\left(7^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}}+1\right);log_7\left(7^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}}+1\right)\right)$ 93. $[0;+\infty)$

94. $\left(0;\ \log_3\left(2^{\frac{-\log_2 27-\sqrt{log_2^2 27+4\log_2 54}}{2}}+1\right)\right)\cup\left[\log_3\left(2^{\frac{-\log_2 27+\sqrt{log_2^2 27+4\log_2 54}}{2}}+1\right);\ +\infty\right)$

95. $\left[8;27\sqrt[3]{3}-1\right]$ 96. $\left[0.5\left(2^{-\frac{8}{3}}-1\right);7.5\right]$ 97. $\left[-\sqrt{2};-\sqrt{2^{-\frac{4}{3}}+1}\right]\cup\left[\sqrt{2^{-\frac{4}{3}}+1};\sqrt{2}\right]$

98. $\left(-3;3\sqrt{3}-3\right)$ 99. $(-\infty;-0.5)\cup[5;+\infty)$ 100. $(-\infty;+\infty)$ 101. $\left[\log_{\sqrt{3}}\frac{2}{21};2\right)$

102. $(-1;\ +\infty)$ 103. $(1:\ +\infty)$ 104. $(-\infty;\ -4]\cup(-1-\sqrt{5};\ -3]\cup[1;\ +\infty)$

105. $(-\infty;\ -1)\cup[0;\ 0{,}5)\cup[2;\ +\infty)$ 106. $\left(1;\ \frac{11-\sqrt{97}}{4}\right)\cup\left(\frac{11+\sqrt{97}}{4};\ +\infty\right)$

107. $(-3;\ -2{,}5]\cup[0;1]$ 108. $(-\infty;0.5)\cup(2;+\infty)$ 109. $[-1;0]$ 110. $(-1;0]$ 111. $(-\infty;\ -2)\cup(0{,}5;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$ 112. $(-\infty;-4)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$, როცა $a\in\left(-\infty;\frac{-3-\sqrt{29}}{2}\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{29}}{2};+\infty\right)$ და $\left(-4;\frac{1}{3}\right)$, როცა $a\in\left(\frac{-3-\sqrt{29}}{2};-4\right)\cup\left(1;\frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right)$

113. $(-0.5;3)$, როცა $a\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{53}}{2};+\infty\right)$ და $(-\infty;-0.5)\cup(3;+\infty)$, როცა $a\in\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2};-1\right)\cup\left(2;\frac{-3+\sqrt{53}}{2}\right)$ 114. ამონახსნი არა აქვს 115. $(0;6)$ 116. $\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup\left(\frac{1}{3};1\right)\cup\left(\frac{5}{3};\ \frac{11}{3}\right)$ 117. $(-5;-4)\cup(7;+\infty)$ 118. $\left(-12;\ -6\frac{6}{31}\right)$ 119. $(-\infty;\ \log_2(\sqrt[3]{5}-1))\cup(\log_2 124;\ +\infty)$ 120. ამონახსნი არა აქვს 121. $(-\infty;\ -2]\cup(-1;-0{,}5)\cup(-0{,}5;0)\cup(0;0{,}25)$ 122. $(0.5;1)$ 123. $(\log_2\sqrt[3]{22};\ \log_2 3]$ 124. $(-\infty;-7]\cup[1;+\infty)$

125. $\left[\frac{1-\sqrt{109}}{2};\ \frac{3-\sqrt{21}}{6}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{21}}{6};\ \frac{1+\sqrt{109}}{2}\right]$ 126. $\left(-\infty;-1-\sqrt{5}\right)\cup\left(-1+\sqrt{5};+\infty\right)$

127. $\left(-2;1-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6}+1;4\right)$ 128. $\left(-10;\frac{-9-\sqrt{85}}{2}\right)\cup\left(\frac{-9+\sqrt{85}}{2};\frac{3}{4}\right)$ 129. $(2.5;4)$ 130. $\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$

§16. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები, ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამოთვლა, ტრიგონომეტრიული განტოლებები და სისტემები

ა – ჯგუფი

1. 1) გ), 2) დ), 3) ა), 4) ბ), 5) ბ), 6) დ), 7) გ), 8) ა) 2. 1) დ), 2) ა), 3) გ), 4) გ), 5) დ), 6) გ), 7) ა), 8) დ) 3. 1) ა), 2) დ), 3) ბ), 4) ა), 5) ბ), 6) ა), 7) ბ), 8) გ), 4. 1) გ), 2) ა), 3) დ), 4) ბ), 5) დ), 6) გ), 7) დ), 8) ა) 5. 1) ბ), 2) გ), 3) ა), 4) ბ), 5) გ), 6) ა), 7) დ), 8) ა) 6. 1) დ), 2) დ), 3) ა), 4) გ), 5) ბ), 6) დ), 7) ბ), 8) ა) 7. 1) ბ), 2) დ), 3) გ), 4) ბ), 5) ა), 6) გ), 7) გ), 8) ბ) 8. 1) გ), 2) დ), 3) ა), 4) ბ), 5) დ), 6) დ), 7) ა), 8) ბ) 9. 1) დ), 2) ა), 3) დ), 4) გ), 5) ბ), 6) ა), 7) დ), 8) ა) 10. 1) გ), 2) ბ), 3) ბ), 4) დ), 5) ბ), 6) ა), 7) დ), 8) ა) 11. 1) გ), 2) დ), 3) ბ), 4) ა), 5) გ), 6) დ), 7) ა), 8) ბ) 12. 1) დ), 2) გ), 3) ბ), 4) ა), 5) ბ), 6) ა), 7) ბ), 8) ა), 9) ბ), 10) გ) 13. 1) ა), 2) ა), 3) ბ), 4) ბ), 5) გ), 6) დ), 7) დ), 8) ბ)

ბ – ჯგუფი

14. 1) $\frac{4-\sqrt{105}}{15}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 3) $\frac{2-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}$ 4) 0, 5) $\frac{7}{\sqrt{65}}$, 6) 3, 7) $\frac{7-2\sqrt{14}}{\sqrt{7}+14\sqrt{2}}$ 8) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ 15. 1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 3) $\frac{1}{3}$, 4) $\frac{\sqrt{15}}{15}$, 5) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 6) $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 7) $2\sqrt{2}$, 8) 0,25 16. 1) 0,6, 2) $\frac{15}{16}$, 3) $-\frac{4}{3}$,

4) 0,75, 5) -1, 6) -0,96, 7) $\frac{5+2\sqrt{5}}{10}$, 8) $\frac{26-5\sqrt{26}}{52}$ 17. 1) IV, III, II, I 2) I, II, III, IV 3) II, III, I, IV 4) II, IV, I, III 5) IV, II, III, I 6) IV, III, I, II 7) II, III, IV, I 8) I, II, III, IV

18. 1) $420°$, 2) $135°$, 3) $60°$, 4) $2\pi+arctg\frac{2}{3}$ 5) $-arctg\frac{1}{2}$, 6) $675°$, 7) $-150°$, 8) $315°$ 19. 1) $2-\sqrt{3}$, 2) $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$, 3) $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 5) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 6) $\sqrt{3}$, 7) -1, 8) -4 20. 1) $\frac{\pi}{4}$, 2) 2π, 3) $\frac{\pi}{2}$, 4) $\frac{\pi}{2}$, 5) $\frac{\pi}{4}$, 6) $\frac{\pi}{4}$, 7) 2π, 8) $\frac{2\pi}{15}$ 24. 1) $\frac{2}{\sin\alpha}$, 2) $\frac{4\sin^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ 3) $4\sin\left(\frac{11\pi}{24}+\alpha\right)\sin\left(\frac{5\pi}{24}-\alpha\right)$, 4) $\frac{2\sin 6\alpha}{\sin 4\alpha\cos 2\alpha}$, 5) $8\sin^4\frac{\alpha}{4}$, 6) $-\cos 2\alpha\cos 2\beta$, 7) $\cos 4\alpha$, 8) $16\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$ 25. 1) -1, 2) $-4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\alpha\right)$ 3) $-8\cos^2\frac{3\alpha}{2}\cos\left(\frac{3\alpha}{2}+30°\right)\cos\left(\frac{3\alpha}{2}-30°\right)$, 4) $2\sin\left(3\alpha-60°\right)$, 5) $\frac{\sqrt{2}\sin\left(45^0+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ 6) $\frac{1}{2}\cos 2\alpha$, 7) 1, 8) $-tg\frac{3\alpha}{2}$

26. 1) $2\pi k; 2arctg2+2\pi k, k\in Z$ 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k; 2arctg\frac{1}{5}+2\pi k, k\in Z$

3) $(-1)^K arcsin\frac{1}{10}-\frac{\pi}{6}+\pi k; k\in Z$ 4) $\pm arccos\frac{1}{6}-\frac{\pi}{3}+2\pi k; k\in Z$ 5) $\frac{\pi}{4}+\pi k; -arctg4+\pi k; k\in Z$

6) $-\frac{\pi}{4}+\pi k; arctg\frac{1}{3}+\pi k; k\in Z$ 7) $arctg\left(\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}\right)+\pi k; k\in Z$ 8) $arctg\left(\frac{7\pm\sqrt{29}}{2}\right)+\pi k; k\in Z$

27. 1) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}; \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}, k\in z$ 2) $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4}; k\in Z$, 3) $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4}; k\in Z$,

4) $\frac{\pi}{4}+\pi k; arctg\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}+\pi k; k\in Z$ 5) $\frac{\pi k}{20}; \frac{\pi k}{12}; k\in Z$, 6) $\frac{\pi k}{10}; k\in Z$, 7) $2\pi k-2°; 2\pi k; k\in Z$,

8) $\pi k+75°; \pi k+\frac{\pi}{4}; k\in Z$ 28. 1) $\pi k+\frac{\pi}{2}; \frac{\pi k}{8}+\frac{\pi}{16}; \frac{\pi k}{5}+\frac{\pi}{10}; k\in Z$,

2) $\frac{2\pi k}{7}; 6\pi k+3\pi; 3\pi k+\frac{3\pi}{2}; k\in Z$ 3) $\frac{8\pi k}{11}; 4\pi k; k\in Z$, 4) $\pi k+\frac{\pi}{2}; \frac{\pi k}{2}-\frac{\pi}{8}; k\in Z$,

5) $\frac{\pi}{2}(2k+1); \frac{3\pi k}{5}; k\in Z$, 6) $\frac{2k\pi}{3}; \frac{2\pi}{7}(2k+1); \frac{2\pi}{3}(2k+1); k\in z$ 7) $\frac{7\pi k}{4}; k\in Z$ 8) $\frac{3\pi k}{2}; \frac{\pi k}{3}; k\in Z$

29. 1) $\frac{\pi}{4}(4k+1); \frac{\pi}{6}(12k+1); \frac{\pi}{3}(6k+1); k\in z$ 2) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k; k\in Z$ 3) $\frac{\pi k}{2}; \pm\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}; k\in Z$,

4) $\frac{\pi k}{2}; \pm\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}; k\in Z$, 5) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}; k\in Z$, 6). $\frac{2\pi k}{3}+\frac{86°}{3}$; $(-1)^k 10°+\frac{\pi k}{3}-\frac{4°}{3}; k\in Z$,

7) $\frac{2\pi k}{3}+\frac{\pi}{3}; (-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}; k\in Z$, 8) $\frac{\pi k}{4}+\frac{\pi}{8}; k\in Z$

30. 1) $\frac{\pi k}{2}; (-1)^{k+1} arcsin\frac{2}{3}+\pi k; k\in Z$, 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi k}{3}; \pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}; k\in Z$, 3) $\frac{4\pi k}{31}; \frac{4\pi k}{33}+\frac{2\pi}{33}; k\in Z$,

4) $\frac{\pi k}{3}; (-1)^{k+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}; k\in Z$, 5) $\frac{\pi}{2}+2\pi k; k\in Z$, 6) $-arctg\frac{1}{2}+\pi k; k\in Z$, 7) $2\pi k; 2arctg4+2\pi k; k\in Z$ 8) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k; k\in Z$ 31. 1) $2\pi k; \pm arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}+2\pi k; k\in Z$,

2) $\frac{\pi}{4}(4k+1); k\in Z$, 3) $\frac{\pi}{8}(4k+1); k\in Z$ 4) $\frac{\pi}{16}(8k\pm 1); k\in Z$, 5) $\frac{\pi}{16}(4k-1); k\in Z$, 6) ამონახსნი არა აქვს, 7) $\frac{\pi}{6}(2k+1); k\in Z$ 8) ამონახსნი არა აქვს 32. $x=2\pi k\pm\frac{\pi}{3}, k\in Z$, $y=2\pi n\pm\frac{\pi}{3}, n\in Z$ 33. $x=\frac{\pi}{2}(4k+1), k\in Z$ 34. 1 35. $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ 36. $\sqrt{3}$ 37. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 38. 1 39. $180°$

40. 4 41. $\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ 42. $\frac{ab}{a+b}$ 43. 1) საზოგადოდ არა, 2) ირაციონალური რიცხვია

44. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ 45. $\frac{1+\sqrt{15+6\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5}+1)}$ 46. $\arcsin\frac{2mn}{m^2+n^2}; m,n\in N$ 47. 1) ირაციონალურია, 2) ირაციონალურია, 3) ირაციონალურია 60. $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k-\frac{\pi}{4}; k\in Z$ 61. ამონახსნია არა აქვს 62. $\frac{\pi}{2}+2\pi k; k\in Z$ 63. $2\,arctg\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}+2\pi k;\ 2arctg\frac{2\pm\sqrt{5}}{2+\sqrt{3}}+2\pi k; k\in Z$ 64. ამონახსნი არა აქვს 65. $\frac{\pi}{30}(12k+1); k\in Z$ 66. ამონახსნი არა აქვს 67. $2\pi k; k\in Z$ 68. 0

69. არ გააჩნია 70. $2\pi k; 2\pi k+\frac{\pi}{2}; k\in Z$ 71. $\frac{\pi}{4}+\pi k; k\in Z$ 72. არ გააჩნია 73. $\pi k, k\in Z$

74. ყველა შესაძლო სამეული (a,b,c) სადაც a,b,c ღებულობს მნიშვნელობებს ± 1

75. $\left(\frac{\pi m}{2};\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$, სადაც $m+n$ ლუწი რიცხვია და $m,n\in Z$ 76. 0 77. $x=y=\frac{5\pi}{4}$

78. $\left(2\pi m+\frac{\pi}{2};\pi n+\frac{\pi}{2}\right);(\pi m;2\pi n); m,n\in Z$

79. $\left(\pi n-\frac{\pi}{6};\pi k+\frac{\pi}{3};\pi m+\frac{\pi}{3}\right), m+n+k=0, m,n,k\in Z$ $\left(\pi n+\frac{\pi}{6};\ \pi k-\frac{\pi}{3};\ \pi m-\frac{\pi}{3}\right), n+m+k=1;\ m,n,k\in Z$ 80. $(\pi m;2\pi n);\left(2\pi m+\frac{\pi}{2};\pi n+\frac{\pi}{2}\right), m,n\in Z$

§17. განტოლებების ამოხსნა მთელ და ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში

1. 6 2. 2 ცალი 1 ლარიანი, 4 ცალი 2 ლარიანი და 4 ცალი ხუთლარიანი 3. 59 4. 8 5. 9 6. 40 7. $2(8x+5y)+(7x+13y)=23(x+y)$ 8. $21(2x+y)+3(5x+12y)=57(x+y)$ 9. არა 10. გააჩნია 11. არა 12. არა 13. $(10;3);(-2;-9)$ 14. არა 15. გააჩნია 16. არა 17. არა 18. $(12,8,4);(12.6,10);(12,2,14)$ 19. არა 20. არა

§18. რიცხვითი სიმრავლეები

ა - ჯგუფი

1. დ) 2. ა) 3. ბ) 4. გ) 5. ა) 6. ა) 7. ბ) 8. ბ) 9. დ) 10. ბ)
11. ბ) 12. გ) 13. დ) 14. ა) 15. დ) 16. გ) 17. დ) 18. დ) 19. ბ) 20. დ)
21. გ) 22. დ) 23. გ) 24. დ) 25. გ) 26. დ) 27. დ) 28. გ) 29. ა)
30. ბ) 31. ბ) 32. ბ) 33. დ) 34. დ) 35. ა) 36. დ) 37. დ) 38. დ)
39. დ) 40. ა) 41. გ)

ბ - ჯგუფი

42. მაგალითად $d=6$ 43. b-4 44. 0 47. არა 48. არა 49. შეიძლება 50. შეიძლება 52. m და n-ის პროპორციულ ნაწილებად 53. წვეროთა რაოდენობა კენტია 54. წვეროთა რაოდენობა კენტია 55. არსებობს 56. არსებობს 58. ა) არსებობს ბ) არსებობს 59. $M(-2;-8)$ 60. 10 61. $(1;0),(0;1),(-1;0),(0;-1),(0.6;0.8)$

62. $(3;9),(3;7),(4;8),(2;8),\left(\frac{18}{5};\frac{60}{7}\right),\left(\frac{12}{5};\frac{52}{7}\right)$ 63. $(-3;-9)$ 64. $(-1;4),(0;3),(-2;0)$

65. $A_1(-1;2),B_1(-2;4),C_1(-5;3)$ 66. $A_1(-1;-2),B_1(-2;-4),C_1(-5;-3)$ 67. $M_0(5;0)$ 68. ტოლფერდა

69. მართკუთხა 70. არსებობს. მაგალითად $x^2+y^2=\sqrt{13}$ 71. $M_0\left(\frac{19}{3};\frac{16}{3}\right)$ 72. $arctg\frac{9}{7}$

73. $arctg\frac{3}{4}$ 74. $O\left(\frac{59}{8};\frac{61}{16}\right)$ 75. $M\left(\frac{17}{4};\frac{79}{8}\right)$ 76. ა) არსებობს ბ)არსებობს 79. არსებობს. მაგალითად $n=2$ 83. ირაციონალურია 84. ირაციონალურია 85. ირაციონალურია 86. არა 87. დადებითია 88. არა 90. 1) შეიძლება, 2) შეიძლება 95. n^2 96. საზოგადოდ ვერ მივიღებთ 97. $n=km+r$, $r-$ ლუწი რიცხვია 98. კენტები 99. 361 100. შეიძლება 101. a არის ამ რიცხვების საშუალო არითმეტიკული 102. საზოგადოდ არა 103. არსებობს 104. საზოგადოდ არა 105. არსებობს 106. არსებობს 107. არსებობს 108. წიბოები ტოლია 109. $n=8k-4;k\in N$ 110. $n=20k;k\in Z$ 111. n=4k+1, $k\in N$ 112. $n=3k;k\in Z$ 115. 1 116. 0 120. არ შეიძლება 121. შეიძლება 122 შეიძლება 123. შეიძლება 126. $A=\{x:x=\sqrt{2}+r,r\in Q\}\cap Q$ $B=\{x:x=\sqrt{3}+r,r\in Q\}\cap Q$, $C=[0,1]\setminus(A\cup B)$, სადაც Q რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეა 127. $E_s=\left\{x:x=\frac{m^k}{P_s},m\in Q,k\in N\right\}\cap(0,1)$ s=1,2,3,..... . P_s- მე-s-ე მარტივი რიცხვია $E_0=Q\setminus\cup E_k;k\in N$ 128. $E_k=\{x:x=\sqrt{P_k}+b,b\in E_s\}\cap(0,1)$ k=1,2,3,... . P_k- მარტივი რიცხვია, $E_0=I\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ ირაციონალური რიცხვთა სიმრავლეა (0;1) შუალედიდან 129. $M_0(5.5;2,5)$ 130. $C(7;3\sqrt{3})$, $D(13;3\sqrt{3})$

§19. ფუნქციის განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე. უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები

ა - ჯგუფი

1. 1) ბ), 2) გ), 3) დ), 4) ა), 5) გ), 6) ბ), 7) ა), 8) გ) 2. 1) დ), 2) გ), 3) ბ), 4) დ), 5) ა), 6) ბ), 7) ა), 8) დ) 3. 1) გ), 2) დ), 3) ა), 4) ბ), 5) გ), 6) დ)

ბ – ჯგუფი

6. 1) $[-5;-3]\cup[1;5)\cup(5;+\infty)$, 2) $(-\infty;-6)\cup(2;+\infty)$, 3) $(-\infty;-3)\cup(-3;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};3)\cup(3;+\infty)$, 4) $(-1;0)\cup(3;+\infty)$, 5) $\left[-10;\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$, 6) $(3;+\infty)$, 7) $(1;\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$, 8) $\left[-5;\frac{-5-\sqrt{17}}{2}\right]\cup\left[\frac{-5+\sqrt{17}}{2};0\right]$ 7. $[0;+\infty)$ 8. $[-\sqrt{8};\sqrt{8}]$ 9. $\left[\frac{\sqrt{7}}{2};+\infty\right)$ 10. $[0.5\sqrt{15};\sqrt{46}]$ 11. $[4;22]$ 12. $[-7;7]$ 13. $[0;4]$ 14. $\left[\frac{39}{8};33\right]$ 15. $[-0.5;150.5]$

18. $k=1.5;b=0.5$ 19. $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 20. 1) არსებობს $y=\frac{5c+1}{2}x^2+\frac{7-3c}{2}x+c$ 2) $y=2x^2-x+3$ 3) არ არსებობს 21. $M_0\left(-\frac{3}{4};\frac{63}{8}\right);M_1\left(\frac{13}{4};\frac{63}{8}\right)$ 22. $M_0\left(-\frac{3}{2};\frac{13}{4}\right);M_1\left(\frac{3}{2};\frac{13}{4}\right)$ 23. $M_0\left(\frac{5}{2};\frac{3}{4}\right);M_1\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ 24. $M_0(0;3);M_1(\sqrt{5};2\sqrt{5}+3)$ 25. $M_0(-1;0);M_1(-1;3)$ 26. $a=\frac{3+2\sqrt{2}}{2};b=1;c=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ ან $a=\frac{3-2\sqrt{2}}{2};b=1;c=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ 27. $a=2.5;b=16.25$

28. $y=(|x|-1)^2$ 29. $y=|x|+1$ 30. $y=2x^2-15x+6$ 31. $y=-x^2+4x+4$ 32. $y=-x^2-7x+6$

33. $k=3+\sqrt{5};\ b=\dfrac{13-7\sqrt{5}}{2}$ ან $k=3-\sqrt{5};\ b=\dfrac{-13+7\sqrt{5}}{2}$ 34. $y=\dfrac{10-x-3|x-2|}{2}$

35. $y=\dfrac{x^3+x^2+x+6+\dfrac{6}{3^x}-\left|x^3+x^2+x+6-\dfrac{6}{3^x}\right|}{2}$

36. $y=\dfrac{15-1.5x-|1.5x+1|-|6.5x-5|1.5x+1||}{4}$ 37. $y=\dfrac{7x-10-3|x-2|}{4}+\dfrac{|30-9x-3|x-2||}{4}$

38. $y=(x^2-1)(x^2-4)$ 39. $y=||x|-1|-0.5$ 40. $y=\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$, სადაც

$f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}+1.5-|2^x-2^{-x}-1.5|}{2}$ და $g(x)=4^x-14.25$ 41 . $y=lg||x|-1|$

42. $y=\dfrac{(x-1)^3-|x|+1+|(x-1)^3+|x|-1|}{2}$ 43. $y=\dfrac{1+||x|-1|-0.5}{2}+\dfrac{|1-||x|-1|+0.5|}{2}$

44. $y=(||x|-2|-1)^2$ 45. $y(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{6-x}, \text{ როცა } x<-2\\ -x, \text{ როცა } -2\le x<0\\ -\sqrt{x}, \text{ როცა } x\ge 0\end{cases}$ 46. $y(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, \text{ როცა } x\in(-\infty;0]\\ \sqrt{x}, \text{ როცა } x\in(0;1]\\ 10^{x-1}, \text{ როცა } x\in(1;+\infty)\end{cases}$

47. არ არსებობს 48. არ არსებობს 49. რაციონალურია 50. $y=5-\dfrac{\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{1-x}}$

51. არაა პერიოდული 52. არაა პერიოდული 53. პერიოდულია 54. საზოგადოდ არა 55. 2 56. $y=ax+b$ 57. $y=b\log_a x+c$ 58. საზოგადოდ არა

59. $f(x)=ax$ 60. $f(x)=ax$ 61. საზოგადოდ არა

62. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{n+1}, \text{თუ } x\in E_n;\ E_n=\left\{\dfrac{m}{P_{2n}^k},\ k\in N,\ m\in N,\ n\in N,\ P_n \text{ მარტივი რიცხვია}\right\}\cap(0;1)\\ -\dfrac{n}{n+1}, \text{თუ } x\in F_n;\ F_n=\left\{\dfrac{m}{P_{2n+1}^k},\ k\in N,\ m\in N,\ n\in N,\ P_n \text{ მარტივი რიცხვია}\right\}\cap(0;1)\\ 0, \text{ დანარჩენ წერტილებში } [0;1] \text{ შუალედიდან}\end{cases}$

63. არსებობს $f(x)=\begin{cases}x, \text{როცა } x \text{ რაციონალური რიცხვია } [0;1] \text{ შუალედიდან}\\ 1.5x, \text{როცა } x \text{ ირაციონალურია } (0;0.5] \text{შუალედიდან}\\ \dfrac{x+1}{2}, \text{როცა } x \text{ ირაციონალურია } (0.5;1) \text{ შუალედიდან}\end{cases}$

64. $f(x)=\begin{cases}n, \text{ თუ } x\in E_n;\ E_n=\left\{\dfrac{m}{P_{2n}^k},\ k\in N,\ m\in N,\ n\in N,\ P_n \text{ მარტივი რიცხვია}\right\}\cap(0;1)\\ -n, \text{ თუ } x\in F_n;\ F_n=\left\{\dfrac{m}{P_{2n+1}^k},\ k\in N,\ m\in N,\ n\in N,\ P_n \text{ მარტივი რიცხვია}\right\}\cap(0;1)\\ 0, \text{ დანარჩენ წერტილებში } [0;1] \text{ შუალედიდან}\end{cases}$

65. არსებობს $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, x\in(0;1]\\ 0, \text{ როცა } x=0\end{cases}$

66. არსებობს $f(x)=\sin 2x-\cos x,\ g(x)=\cos 2x+\cos x,\ T_1=T_2=2\pi;\ T=\pi$

67. საზოგადოდ არა, მაგალითად $f(x)=\begin{cases}1;\text{როცა } x \text{ ირაციონალურია}\\ 0;\text{ როცა } x \text{ რაციონალურია}\end{cases}$ 68. $f(x)=c$

70. არ არის პერიოდული 71. არსებობს 72. არსებობს 73. $y=\sin\frac{2\pi x}{17}$ 77. -4

78. 7 79. $\sqrt[7]{7}$

§20. პლანიმეტრია

ა – ჯგუფი

1. ბ) 2. ა) 3. დ) 4. დ) 5. გ) 6. დ) 7. ბ) 8. ა) 9. ა) 10. გ) 11. ა) 12. დ)
13. ბ) 14. ა) 15. გ) 16. ა) 17. ბ) 18. ა) 19. გ) 20. ბ) 21. ბ) 22. გ) 23) ა)
24. გ) 25. ბ) 26. დ) 27. დ) 28. ბ) 29. ა) 30. დ) 31. გ) 32. დ) 33. ა)
34. ბ) 35. დ) 36. ა) 37. დ) 38. ა) 40. ა) 41. ბ) 42. გ) 43. დ) 44. ა)
45. დ) 46. ა) 47. ბ) 48. გ) 49. ა) 50. დ) 51.ა) 52. ა) 53. გ)
54. ა) 55. ბ) 56. გ) 57. ა) 58. ბ) 59. ა) 60. ა) 61. ბ) 62. დ)
63. ა) 64. გ) 65. დ) 66. ა) 67. ა) 68. ბ) 69. გ) 70. ბ) 71. ა)
72. დ) 73. გ) 74. გ) 75. ა) 76. ბ) 77 გ) 78. ა) 79. დ) 80. გ)
81. ა) 82. ბ) 83. დ) 84. ბ) 85. გ) 86. ა) 87. ა) 88. ბ) 89. დ)
90. გ) 91. ა) 92. ბ) 93. ა) 94. დ) 95. ბ) 96. ბ) 97. ა) 98. ა)
99. დ) 100. ა) 101.ბ) 102. გ) 103. გ) 104. ა) 105. დ) 106.ა) 107. ბ)
108. ა) 109.გ) 110. ა) 111. ბ) 112. გ) 113.ა) 114. ა) 115. ბ) 116. ა)
117. გ) 118. ბ) 119. ა) 120. დ) 121. ბ) 125. დ) 126. დ) 127. გ)
128.ბ) 129. ბ) 130. დ) 131.ბ) 132.დ) 133. გ) 134. დ) 135. ა) 136. ბ)
137. დ) 138.ა) 139. დ) 140. ბ) 141. დ) 142.ა) 143.გ) 144. გ) 145. ა)
146. ბ) 147. ბ) 148. გ) 149. ბ) 150.ა) 151.დ) 152. დ) 153. ა) 154.
გ) 155. ა) 156. ბ) 157. გ) 158. დ) 159.ბ) 160.ა) 161. ბ) 162.გ)
163.ა) 164.დ) 165.დ) 166. ბ) 167. დ) 168. ა) 169. ა) 170. დ) 171. დ)
172. გ) 173. ბ) 174. გ) 175. ა) 176.ბ) 177.გ) 178.ბ) 179.ა)
180.ბ) 181.ა) 182. ბ) 183.დ) 184. გ) 185. ა) 186. ა) 187. გ) 188. დ)
189.დ) 190. ა) 191.ბ) 192.ა) 193.დ) 194.ბ) 195.დ) 196.ა)
197.გ) 198.ბ) 199. დ) 200.ა) 201.ა) 202.ბ) 203.ა) 204.ბ) 205.
დ) 206.ა) 207.ბ) 208.დ) 209.დ) 210.ა) 211. დ) 212. გ) 213. ა)
214. ბ) 215. დ) 216.გ) 217. დ) 218. ა) 219. ა) 220. დ) 221. გ) 222.
გ) 223. ა) 224. ბ) 225. დ) 226. გ) 227. დ) 228 ა) 229. ბ) 230. ა)
231. დ) 232 ბ) 233. გ) 234. დ) 235. დ) 236. ა) 237. დ) 238. ა) 239. ა)
240. გ) 241. ბ) 242. ა) 243. ა) 244. დ) 245. გ) 246. ბ) 247. ა) 248. დ)
249. გ) 250. ა) 251. დ) 252. დ) 253. ბ) 254. დ) 255. ბ) 256. ა) 257. დ)
258. გ) 259. დ) 260. ა) 261. დ) 262. დ) 263. ბ) 264. გ) 265. დ) 266. გ)
267. ა) 268. ბ) 269. დ) 270. ა) 271. დ) 272. ბ) 273. ბ) 274. გ) 275. ა) 276. დ)
277. გ) 278. ა) 279. ბ) 280. ბ) 281.დ) 282. ა) 283. ა) 284. ბ) 285. გ)
286. დ) 287. ა) 288. დ) 289. ბ) 290. გ) 291. დ) 292. გ) 293. დ) 294. გ) 295. დ)
296. ა) 297. დ) 298. გ) 299. დ) 300. გ)

ბ - ჯგუფი

301. $S=\frac{2r^2\cos^2\left(45^0-\frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^0-\frac{\alpha}{4}\right)}$ 303. $2\sqrt{2}$ 304. მახვილკუთხაა 305. 2 სმ

306. $\arcsin\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}-\alpha$ 307. $\sqrt{3}$ სმ 308. $arctg2;\ 90^0-arctg2$ 309. $2\sqrt{3}-1$სმ

310. $S=0,25r^2ctg\frac{\alpha}{2}ctg\left(45^0+\frac{\alpha}{4}\right)$ 311. არა 312. 3 სმ 313. არ არსებობს

314. ა) სამკუთხედზე შემოხაზულის

315. $2,5\sqrt{3}+1$სმ 316. $\frac{12+2\sqrt{3}}{3}$ სმ 317. $2\sqrt{13}$სმ 318. $\sqrt{22-12\sqrt{3}}$ 319. $1\frac{11}{14}$ სმ^2 320. 6 სმ

321. $\frac{2\sqrt{3}}{7}$სმ; $\frac{3\sqrt{3}}{7}$სმ 322. $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$სმ 323. $\frac{20+\sqrt{73}+\sqrt{657}}{4}$სმ 324. $\sqrt[4]{1728}$სმ 325. $\sqrt{19}+\sqrt{7}$სმ

326. $arctg\frac{6}{5}+arctg\frac{7\sqrt{3}}{6}$; 90^0; 90^0; $180^0-arctg\frac{6}{5}-arctg\frac{7\sqrt{3}}{6}$ 327. 1სმ 328. $\frac{\sqrt[4]{2}-\sqrt{\sqrt{3}+1}}{2\sqrt{2}-\sqrt{4+\sqrt{2}-\sqrt{6}}}$ სმ

329. $\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_1}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_2}\right)}}$ 330. 2 331. 2სმ 332. $\frac{6}{\sqrt{13-6\sqrt{3}}}$სმ

333. $\sqrt{13}$სმ 334.საზოგადოდ არა 335. $18(2-\sqrt{3})$სმ^2 336. $\frac{(3-\sqrt{3})\sqrt{3}}{2}$ სმ 337. $\frac{1}{7}\left(\sqrt{\frac{2523}{35}}+\sqrt{\frac{61503}{215}}\right)$სმ 338. $\frac{\sqrt{456-50\sqrt{7}-220\sqrt{2}+70\sqrt{14}}}{8}$ სმ 339. $\frac{49\sqrt{5}}{15}$სმ 340. 6სმ 341. 60^0; 60^0; 60^0

342. $\frac{\sqrt{6}\sqrt{\sqrt{57}-3}}{2}$სმ 343. 1სმ 344. $\frac{42\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$სმ^2 345. 3 4 346. 45^0; 135^0 347. $5-2\sqrt{3}$სმ

348. $\left(45^0-arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$; $2arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$; $\left(45^0-arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ 349. 27 350. $4\frac{1}{3}$სმ 351. 2 სმ

352. $2\sqrt{3}-\sqrt{2}cos50^0$სმ; $2-\sqrt{2}sin50^0$ 353. $\sqrt{3-\sqrt{3}}$სმ; $2\sqrt{3-\sqrt{3}}$სმ; $3\sqrt{3-\sqrt{3}}$სმ; $4\sqrt{3-\sqrt{3}}$სმ 354. 45^0; 45^0 355. $\sqrt{7}$სმ 356. 3სმ 357. 2 358. $\frac{72\sqrt{6}-72}{65}$სმ

359. $\frac{5}{2sin\frac{45^0}{2}\left(1-sin\frac{45^0}{2}\right)}$სმ 360. რაციონალურია 361. 60^0; 60^0; 60^0 362. 1

363. $\sqrt{102+45\sqrt{3}}$სმ 364. $2r$ 365. $1\frac{4}{11}$სმ 366. $\sqrt[4]{3}$სმ 367. $3\sqrt{15}$სმ 368. $3(\sqrt{2}-1)$სმ

369. $\frac{\sqrt{21}-3}{2}$სმ 370. 3.26სმ 371. $2R$ 372. არ არსებობს 373. $\frac{23-\sqrt{97}}{24}$სმ 374. 0.6 375. 60^0

376. $\frac{3\sqrt{455}}{35}$სმ^2 377. არა 378. $3\sqrt{3}$ სმ^2 379. $3+2\sqrt{2}$ სმ^2 380. $2r(a-2r)$ 381. $6\sqrt[4]{3}$სმ

382. $0.5\sqrt{37}$სმ 383. $9\left(\frac{sin^2 40^0}{sin20^0 sin80^0}-\frac{sin^2 20^0}{cos10^0 sin100^0}\right)$ 384. ტოლგვერდაა 385. $\sqrt{3}-1$სმ 386. 1სმ 387. $c/2$ 388. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ სმ^2 389. $3\sqrt{3}$სმ^2 390. 1/9სმ 392. 1 393. შეიძლება

394. 53^0; 127^0; 143^0 395. $\sqrt{27}+\sqrt{57}$სმ 396. $\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{3}$ 397. ვერ წაიხაზება 398. 4

399. 1სმ 400. ??? 401. 1სმ 402. $\sqrt{\frac{601}{13}}$ სმ 403. $\sqrt{7}-1$სმ 404. 12/13სმ

405. $2\sqrt{2}$სმ^2 406. $3\sqrt{15}$ სმ 407. $5\sqrt{2}$სმ; $6\sqrt{2}$სმ; $9\sqrt{2}$სმ 408. 243/70 სმ^2

409. $\frac{56}{18}(8\sqrt{30}+8\sqrt{15}+24\sqrt{2}-56)$სმ^2 410. 1 411. 3სმ 412. $arctg\frac{6+\sqrt{6}}{4}$

413. $arcsin\frac{1+4\sqrt{2}+\sqrt{945-268\sqrt{2}}}{52+2\sqrt{2}}$ 414. 80/3სმ 415. 1.2სმ^2 416. $2arctg\frac{4}{3}$

417. 90^0; 22.5^0; 67.5^0 418. არა 419. $3a$ 420. (4; 4) 421. 0.5 სმ^2 422. $\sqrt{3}/4$ სმ^2

432. ტოლფერდაა 433. რა 446. შეიძლება

§21. სტერეომეტრია

ა - ჯგუფი

1. დ) 2. ა) 3. დ) 4. ბ) 5. ბ) 6. დ) 7. ბ) 8.გ) 9. ა) 10. ბ)
11. ბ) 12. გ) 13. ა) 14. გ) 15. დ) 16. ბ) 17. ა) 18. ბ) 19. ა)
20. დ) 21. ბ) 22. ბ) 23. ბ) 24. დ) 25. ბ) 26. გ) 27. დ) 28. ა)
29. ა) 30. ბ) 31. გ) 32. ბ) 33. დ) 34. ა) 35. ბ) 36. გ) 37. ბ)
38. ბ) 39. გ) 40. ბ) 41. ა) 42. ა) 43. ა) 44. ა) 45. ბ) 46. გ)
47. დ) 48. ბ) 49. ა) 50. ბ) 51. ა) 52. ბ) 53. დ) 54. გ) 55. ა)
56. გ) 57. ბ) 58. დ) 59. გ) 60. ა) 61. ბ) 62.ბ) 63. დ) 64. გ)
65. ბ) 66. ა) 67. გ) 68. ა) 69. ა) 70. დ) 71. ბ) 72. ბ) 73. დ)
74. ა) 75. ბ) 76. გ) 77. დ) 78. ა) 79. ბ) 80. გ) 81. ა) 82. გ)
83. ა) 84. ბ) 85. დ) 86. გ) 87. ა) 88. ბ) 89. ა) 90. დ) 91. ბ)

92. გ) 93. დ) 94. ბ) 95. ა) 96. დ) 97. ა) 98. გ) 99. ბ) 100. ა)
101. ბ) 102. ა) 103. ბ) 104. ა) 105. გ) 106. ა) 107. ბ) 108. ა)
109. ბ) 110. გ) 111. გ) 112. დ) 113. ა) 114. ა) 115. ა) 116. გ)
117. ბ) 118. ა) 119. გ) 120. ბ) 121. დ) 122. ა) 123. გ) 124. დ)
125. ა) 126. გ) 127. ა) 128. გ) 129. ბ) 130. ბ) 131. გ) 132. დ)
133. გ) 134. ა) 135. ბ) 136. დ) 137. ა) 138. ა) 139. ბ) 140. გ)
141. გ) 142. ა) 143. ბ) 144. დ) 145. ა) 146. ბ) 147. დ) 148. ბ)
149. ა) 150. ბ) 151. დ) 152. ბ) 153. გ) 154. ა) 155. ბ) 156. გ)
157. დ) 158. ა) 159. ბ) 160. დ) 161. ა) 162. ბ) 163. დ) 164. ა)
165. ბ) 166. ბ) 167. ა) 168. ა) 169. ბ) 170. გ) 171. დ) 172. ა) 173. ა)
174. ბ) 175. გ) 176. დ) 177. დ) 178. ა)

ბ - ჯგუფი

179. საზოგადად არა 180. $\frac{60}{47+\sqrt{769}}$ სმ 181. $3\sqrt{11}$ სმ^2 182. 0.5 სმ

183. $6\sqrt{7}/7$ სმ 184. $\frac{12\sqrt{35}}{35}$ სმ 185. $\frac{\sqrt{47}}{6}$ სმ^3 186. $\frac{9}{64}$ 187. $1:\left(2\sqrt{2}-1\right)$ 188. $1:\left(\sqrt[3]{4}-1\right)$

189. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ სმ^3 190. $\frac{121\sqrt{23}\pi}{648}$ სმ^3 191. $arctg\frac{8}{15}$ 192. არა 193. $0.5\left(13-\sqrt{17}\right)\sqrt{34-6\sqrt{17}}$ სმ^2 194. 2 195. $100\left(2+\sqrt{15}\right)\pi$ სმ^2 196. $60\sqrt{2}$ 197. 15 198. $arctg\left(\sqrt{2}ctg\frac{\alpha}{2}\right)$ 199. $16\left(2\sqrt{3}-3\right)$ სმ^3 200. $1{,}2\pi$ სმ 201. 400π სმ^2 202. $\frac{10\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$ სმ 203. $\sqrt{2}$ სმ 204. 60^0

205. $arctg\frac{3}{8}$ 206. $\frac{\sqrt{33}}{9}\pi$ სმ^3 207. $\frac{64\pi}{9}$ სმ^3 208. $arctg\frac{8\sqrt{159}}{63-\sqrt{177}}$ 209. $50\sqrt{3}$ სმ^3

210. $60/47$ სმ 211. $\frac{5+3\sqrt{3}}{4}$ 212. 6.25 სმ 213. πRr სმ^2 214. 325π სმ^3

215. შეიძლება 216. 2 სმ^2 218. $\frac{795-134\sqrt{10}}{121}$ სმ 221. $3\sqrt{5}\pi$ სმ^2 223. $2\sqrt{3}$ სმ 224. არა
225. არა

§22. ვექტორები

1. $2\sqrt{55}$ 2. $\sqrt{266}$ 3. 1) $\vec{i}+2\vec{j}$; 2) $2\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}$ 4. 1) $a = arccos\left(\frac{-4}{\sqrt{65}}\right)$, 2) $a = 45^0$ 3) $a = arccos\frac{7\sqrt{65}}{65}$ 4) $a = arccos\frac{32}{5\sqrt{41}}$ 5. 1) $\left|3\vec{i}+2\vec{j}\right| = \sqrt{13}$ საწინააღმდეგოდ მიმართული ერთეულოვანი ვექტორია $-\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i}-\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j}$. 2) ანალოგიურად $\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$; 3) ანალოგიურად $-\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}$; 4) ანალოგიურად $\frac{1}{10}\vec{i}-\frac{3}{10}\vec{j}$. 6. გ) 7. დ) 8. ბ) 9. ბ) 10. ა) 11. ბ) 12. გ) 13. დ) 14. $M\left(\frac{3+7\gamma}{1+\gamma};\frac{5+9\gamma}{1+\gamma}\right)$ 15. $M\left(\frac{a_1+\gamma b_1}{1+\gamma};\ \frac{a_2+\gamma b_2}{1+\gamma};\ \frac{a_3+\gamma b_3}{1+\gamma}\right)$ 16. D (9;4) 17. $D(7;2), B(5;6)$ 18. ბ) 19. ა) 20. $\arccos\frac{53}{\sqrt{3293}}$ 22. $arccos\frac{5}{\sqrt{754}}$ 23. ვექტორები მართობული არაა. 24. $m = 0, m = 8$. 25. ვექტორები კოლინეარულია 26. $m = 5, m = -6$. 27. (3; 6) 28. $\lambda = 2, \mu = 2$ 29. $x_1 = 1, y_1 = 3$ 30. $\varphi = arccos\frac{9+4\sqrt{7}}{20}$ 31. მოცემული ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია. 32. მოცემული ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია 33. 1) $\vec{a}\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ 2) $\vec{b}\left(\frac{5}{\sqrt{29}};\frac{-2}{\sqrt{29}}\right)$ 3) $\vec{c}\left(\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ 4) $\vec{d}\left(\frac{-2}{\sqrt{13}};\frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$
34. 1) $\vec{a}\left(\frac{-5}{13};\frac{-12}{13}\right)$ 2) $\vec{b}\left(\frac{-3}{5};\frac{-4}{5}\right)$ 3) $\vec{c}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ 4) $\vec{d}\left(\frac{3}{5};\frac{-4}{5}\right)$ 35. $\vec{c}\left(\frac{25}{13};\frac{60}{13}\right)$
36. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 37. $\vec{c}\left(\frac{-4}{\sqrt{65}};\frac{-7}{\sqrt{65}}\right)$ 38. $y = \frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$ 39. $y = -x+6$

40. $y = \frac{4\sqrt{2}+5}{2\sqrt{2}+5} \cdot x$. 41. $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$. 44. $\vec{c}\ (3; -7; -1), |\vec{c}| = \sqrt{59}$ 45. $\varphi = 45^0$

46. $-6\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ და $\sqrt{70}$ 47. $\frac{\sqrt{78}}{2}$ 48. $12\sqrt{3}$. 49. $-4\sqrt{3} - 2$ 50. 1323.

51. $\begin{cases} x = x_0 + 2t \\ y = y_0 + 3t \\ z = z_0 + 2t \end{cases}$. 52. M_1 წერტილი არ მდებარეობს მითითებულ წრფეზე 53. $2x+3y+4z-19=0$

§23. მონაცემთა რიცხვითი მახასიათებლები

1. ა), 2. 1) ბ) 2) ა), 3) ბ), 4) დ), 5) გ) 6) ბ) 3. 1) ბ), 2) ა), 3) გ), 4) ბ), 5) დ), 6) ა) 4. 1) ა), 2) გ), 3) ა), 4) ბ), 5) გ), 6) ა) 5. 1) ბ), 2) ა), 3) ა), 4) დ), 4) ბ), 5) დ), 6) ბ) 6. გ)

§24. ალბათობის თეორია

1. $\frac{4}{7}$ 2. $\frac{1}{4}$ 3. $\frac{11}{19}$ 4. $\frac{17}{29}$ 5. $\frac{153}{190}$ 6. $\frac{1}{30}$ 7. $\frac{21}{44}$ 8. $\frac{91}{323}$ 9. $\frac{20}{91}$ 10. 0.3 11. $\frac{1}{5}$ 12. $\frac{1}{12}$
13. $\frac{14}{33}$ 14. $\frac{5}{6}$ 15. $\frac{1}{6}$ 16. $\frac{10}{5313}$ 17. $\frac{29}{92400}$ 18. 9 პარტიიდან 6-ის მოგების ალბათობა მეტია
19. 4 პარტიიდან 3 პარტიის მოგების ალბათობა მეტია 20. $\frac{3}{20}$ 21. $\frac{1}{40}$ 22. $\frac{57}{105}$ 23. $\frac{14}{57}$
24. 0.815 25. პირველ მონადირეს ეკუთვნის 240 კგ, მეორეს – 140 კგ 26. $\frac{5}{12}P(B/A_1)$ 27. $\frac{24}{43}$
28. $\frac{1}{3}$ 29. 1 30. $\frac{1}{6}$ 31. $\frac{5}{8}$ 32. ა) $\frac{25}{169}$, ბ) $\frac{64}{169}$, გ) $\frac{40}{169}$ 33. 0.6 34. 1 35. 0 36. 0 37. $\frac{3}{4}$
38. $\frac{1}{12}$ 39. $\frac{4-\pi}{4}$ 40. $\frac{2}{35}$ 41. $\frac{\pi}{180}$ 42. 0.784 43. $P(A) = 2arctg\frac{a\sqrt{3}}{c\sqrt{3}+2d}/\pi$
44. $P(A) = arctg\frac{c\sqrt{2}}{c\sqrt{2}+2d}/\pi$ 45. $1 - \frac{\sqrt{3}}{9}$ 46. $1 - \frac{\sqrt{3}}{9}$ 47. $1 - \frac{2\sqrt{3}}{9\pi}$ 48. 0.4
49. $\frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt{7}+4\sqrt{6}-14}{20\sqrt{7}+16\sqrt{6}-8\sqrt{42}-39}$ 50. $\frac{1}{24}$

§25. ლოგიკის ელემენტები

1. ა) 2. ბ) 3. დ) 4. ა) 5. გ) 6. ა) 7. ბ) 8. დ) 9. ბ) 10. გ) 11. გ) 12. არგენტინა, ბრაზილია, იტალია, ინგლისი 13. ზოლიანი მაისურით, ადიდასის ბუცებით 14. გია 15. დათოს მერსედესი, გიას ფორდი, ზურას ოპელი 16. დათომ იხვი, ზურამ მელა, თემურიმ კურდღელი, კახამ მგელი, გიამ დათვი 17. ექვსკუთხედი 18. 2 19. ლელას 20. I – 2, II – 4, III – 6, IV – 8, V – 20

საკონტროლო სამუშაოების პასუხები

სამუშაო № 1

1. ბ) 2. ბ) 3. დ) 4. ა) 5. გ) 6. ა) 7. ბ) 8. გ) 9. ბ) 10. გ) 11. ბ) 12. ა) 13. ა) 14. დ) 15. გ) 16. ბ) 17. ბ) 18 ა). 19. ბ) 20. დ) 21. გ) 22. ბ) 23. გ) 24. ა) 25. დ) 26. გ) 27. დ) 28. გ).
29. გ) 30. ბ) 31. $2 \cdot 9!$ 32. $2\pi k; 2arctg\frac{2}{3} + \pi k,\ k \in Z$ 33. $2\sqrt{10}$ სმ 34. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1514}{13}}$

35. $\left(0; log_2\frac{5}{3}\right)$ 36. $\left(2log_{\sqrt{5-\sqrt{24}}}2; log_{\sqrt{5-\sqrt{24}}}2\right)$ 37. $arctg\frac{\sqrt{183}}{6}$ 38. $2\sqrt{10}$ 9. $\sqrt{2}$ სმ; $3\sqrt{2}$ სმ
40. 2

სამუშაო № 2

1. დ) 2. დ) 3. გ) 4. ა) 5. ა) 6. ა) 7. ბ) 8. გ) 9. დ) 10. ბ) 11. გ) 12. ა) 13. ბ) 14. გ) 15. გ) 16. ბ) 17. დ) 18 ა).

19. გ) 20. ბ) 21. ა) 22. ბ) 23. ა) 24. დ) 25. ბ) 26. გ) 27. ა)
28. ბ) 29. დ) 30. გ) 31. არა 32. მეტია $\left(\frac{\sqrt[5]{5}+1}{6}<\frac{\sqrt[3]{3}+1}{6}\right)<x_2$ 33. $\frac{4}{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$ სმ^2

34. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ სმ 35. $\left(2^{-\sqrt{3}};2^{\sqrt{3}}\right)$ 36. $\frac{5}{16}\sqrt{159}$ სმ 37. $\frac{6\sqrt{13}}{6}$ სმ 38. $\frac{27}{70}$ სმ 39. 60° 40. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ სმ

სამუშაო № 3

1. ა) 2. გ) 3. დ) 4) დ) 5) დ) 6) ბ) 7. გ) 8) ბ) 9. გ)
10. გ) 11. ა) 12. გ) 13. დ) 14. გ) 15. ბ) 16. გ) 17. ა) 18. ა)
19. დ) 20. ბ) 21. დ) 22. ა) 23. ა) 24. ა) 25. ა) 26. გ)
27. ა) 28. ბ) 29. ბ) 30. ა) 31. 11 32. ადგენენ 33. 45^0; 45^0
34. $\frac{\sqrt{22}}{2}$ სმ 35. 0.25 36. $\sqrt{3}-1$ სმ^2 37. 1 სმ 38. $(10;+\infty)$ 39. $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$
40. 5 სმ

სამუშაო № 4

1. გ) 2. ა) 3. ა) 4) დ) 5) ა) 6) გ) 7. დ) 8) ბ) 9. ბ) 10. დ)
11. დ) 12. გ) 13. გ) 14. ბ) 15. ბ) 16. დ) 17. ბ) 18. გ) 19. ბ)
20. ა) 21. ბ) 22. დ) 23.ბ) 24. გ) 25. გ) 26. ა) 27. გ) 28. გ)
29. გ) 30. გ) 31. 2 32. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ სმ^2 33. $3\sqrt{2}$ სმ 34. (3; 1) 35. $\frac{30+12\sqrt{3}}{13}$
სმ 36. $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ სმ^2 37. $\frac{12\sqrt{17}}{17}$ სმ 38. 0,38 39. $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$ 40. $1\frac{7}{9}$ სმ

სამუშაო № 5

1. დ) 2. ბ) 3. ა) 4. გ) 5. ბ) 6. გ) 7. დ) 8. ბ) 9. ა) 10. გ)
11. გ) 12. გ) 13. გ) 14. ბ) 15. ა) 16. დ) 17. ბ) 18. ბ) 19. გ)
20. ა) 21. ა) 22. ბ) 23. დ) 24. დ) 25. ბ) 26. ბ) 27. გ)
28. დ) 29.ა) 30. ბ) 31. 1 32 $\frac{1}{2}$ $\left(-\infty;-\frac{7}{a}\right)$ 33. $\left(-3;a^2-3\right)$ 34. $\sqrt{17}$ ს

35. $arcctg\sqrt{15}$ 36. 0.999 37. უარყოფითი 38. $\{-0.25\}\cup[0;2)$ 40. $\frac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}$

სამუშაო № 6

1. ბ) 2. გ) 3. დ) 4. გ) 5. ა) 6. დ) 7. ა) 8. დ) 9. ა) 10. ბ)
11. ბ) 12. ბ) 13. დ) 14. ა) 15. ბ) 16. ა) 17. ბ) 18. გ) 19. დ)
20. ბ) 21. ა) 22. ა) 23. ბ) 24. გ) 25. ბ) 26. ა) 27. გ)
28. გ) 29.დ) 30. ა) 31. $\vec{b}(3;-2)$ 32. 36 33. $\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6\pi}$ 34. 135. $\frac{arcsin\frac{1}{6}}{\pi}$
36. $\left[2;6\frac{1}{6}\right]$ 37. $\alpha\in\left(\frac{1}{2}arcsin2\left(\sqrt{2}-1\right);45^0\right)$ 38. $30^0;60^0$ 39. 0 40. $tg\frac{\beta-\alpha}{2}tg\frac{\gamma}{2}$

სამუშაო № 7

1. ბ) 2. ბ) 3. ბ) 4. გ) 5. გ) 6. ბ) 7. ბ) 8. დ) 9. გ) 10. ა)
11. გ) 12. ა) 13. ბ) 14. ბ) 15. ბ) 16. ა) 17. დ) 18. ა) 19. ბ)
20. დ) 21. გ) 22. დ) 23. ა) 24. გ) 25. ბ) 26. დ) 27. დ) 28. ა)

29. ა) 30. ა) 31. $\frac{2(n-1)}{n(n+1)}$ 32. $(-\infty; 0)$ 33. 3,125 სმ ?? 34. 0.5 35. $\alpha \in \left(o; arccos\frac{b-a}{2a}\right)$ 36. 220 37. 3,125 38. 10 სმ³ 39. $\frac{1}{|lg|x||}$ 40. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ სმ

სამუშაო №8

1. ა) 2. დ) 3. ა) 4. ა) 5. ბ) 6. ბ) 7. დ) 8. ბ) 9. ა) 10. ბ)
11. ბ) 12. დ) 13. 1) გ); 2) ა); 3) გ); 4) ა) 14. ა) 15. გ) 16. ბ) 17. ა)
18. ა) 19. ბ) 20. ბ) 21. ა) 22. ა) 23. ბ) 24. გ) 25. ა)
26. ბ) 27. გ) 28. დ) 29. გ) 30. ბ) 31. $C(5-\sqrt{3};\ 2+3\sqrt{3})$
32. $(0;\ +\infty)$ 33. $\frac{6(n-2)}{n(n+1)(n+2)}$ 34. $\alpha \in \left(2arctg\frac{h^2}{S};\ 90^0\right)$ 35. (0;1), (1; 0), $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{1}; \frac{\sqrt{5}-1}{1}\right)$
36. 0,5 37. $(-\infty; -1) \cup (3;\ +\infty)$ 38. $k \in (1; a)$ 39. 0 40. $k \in (0;\ 1)$

ზოგიერთი ხშირად გამოყენებული ფორმულები და ცნებები

I.ალგებრა

შემოკლებული გამრავლების ფორმულები

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ორი რიცხვის ჯამის კვადრატი
2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ორი რიცხვის სხვაობის კვადრატი
3. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ორი რიცხვის კვადრატების სხვაობა
4. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ორი რიცხვის ჯამის კუბი
5. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ ორი რიცხვის სხვაობის კუბი
6. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ ორი რიცხვის კუბების ჯამი
7. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ ორი რიცხვის კუბების სხვაობა

პროპორცია

ორი ფარდობის ტოლობას პროპორცია ეწოდება

1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ პროპორციის ძირითადი თვისება: კიდური წევრების ნამრავლი ტოლია შუა წევრების ნამრავლის $a\cdot d=b\cdot c$

პროცენტი

რიცხვის მეასედ ნაწილს პროცენტი ეწოდება

1. a რიცხვის m პროცენტი იანგარიშება ფორმულით $\frac{am}{100}$

2. თუ რაღაც რიცხვის m პროცენტი ტოლია b-სი მაშინ ეს რიცხვი იანგარიშება ფორმულით $\frac{b100}{m}$

3. თუ გვინდა ვიპოვოთ a რიცხვის რამდენი პროცენტია b უნდა ვისარგებლოთ ფორმულით

$$\frac{100b}{a}$$

ხარისხი და მათზე მოქმედებები

1. ტოლ თანამამრავლთა ნამრავლს ხარისხი ეწოდება

$a^n=\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}^{n}$ სადაც n ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვია.

2. $a^0=1$ სადაც $a\neq 0$ $a^1=a$. 3.$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ სადაც $a\neq 0$ და n ნატურალური რიცხვია.

3. $a^{\frac{k}{p}}=\sqrt[p]{a^k}$ სადაც a დადებითი რიცხვია, p-ნატურალური რიცხვია, k–მთელი რიცხვია.

4. $(ab)^n = a^n b^n$; 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ როცა $b \neq 0$; 6. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 7. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ როცა $a \neq 0$

8. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

მოქმედებები ფესვებზე

ვთქვათ $a>0$ და ფესვი არითმეტიკულია, მაშინ სამართლიანია ფორმულები:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; 2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; 3. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$; 4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$; 5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

საშუალო არითმეტიკული და საშუალო გეომეტრიული. კავშირი მათ შორის

1. n რაოდენობის ნამდვილი $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ რიცხვების საშუალო არითმეტიკული ეწოდება ამ რიცხვების ჯამს გაყოფილს მათ რაოდენობაზე

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$$

თუ $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ რიცხვები არაუარყოფითია მაშინ საშუალო გეომეტრიული იანგარიშება ფორმულით $\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}$

2. საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო გეომეტრიულს შორის არსებობს შემდეგი თანაფარდობა $\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$

შევნიშნოთ, რომ ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ყველა რიცხვი ერთმანეთის ტოლია

ნამდვილი რიცხვის მოდული

1. დადებითი რიცხვის მოდული ისევ ამ რიცხვის ტოლია: $|a| = a$
2. უარყოფითი რიცხვის მოდული მისი მოპირდაპირე რიცხვის ტოლია: $|a| = -a$
3. 0-ის მოდული ისევ 0-ის ტოლია: $|0| = 0$

კვადრატული განტოლების ფესვები

ვთქვათ მოცემულია კვადრატული განტოლება $ax^2 + bx + c = 0$ და დისკრიმინანტი $D = b^2 - 4ac \geq 0$ მაშინ მისი ფესვები იანგარიშება ფორმულით $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ და $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ვიეტის თეორემა

თუ x_1 და x_2 კვადრატული განტოლების ფესვებია მაშინ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, ხოლო $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

კადრატული სამწევრის დაშლა მამრავლებლად

ეთქვათ x_1 და x_2 წარმოადგენს ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრის ფესვებს მაშინ ეს სამწევერი იშლება წრფივ მამრავლებად შემდეგნაირად: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

კვადრატული უტოლობის ამოხსნა

ეთქვათ $ax^2+bx+c>0$ მაშინ შეიძლება გვქონდეს შემდეგი სამი შემთხვევა:

1. თუ $b^2-4ac>0$ და ax^2+bx+c სამწევრის ფესვებია x_1 და x_2, ამასთან $x_1<x_2$ მაშინ მოცემული კვადრატული უტოლობის ამონახსნია $(x_1;x_2)$ მონაკვეთის ყოველი გარე წერტილი თუ $a>0$ და ყოველი შიგა წერტილი, თუ $a<0$.
2. თუ $b^2-4ac<0$ მაშინ მოცემული კვადრატული უტოლობის ამონახსნია ნებისმიერი რიცხვი, თუ $a>0$ და ამონახსნი არა აქვს, თუ $a<0$.
3. თუ $b^2-4ac=0$ მაშინ მოცემული კვადრატული უტოლობის ამონახსნია ნებისმიერი რიცხვი გარდა $-\frac{b}{2a}$ თუ $a>0$ და ამონახსნი არა აქვს, თუ $a<0$.

არითმეტიკული პროგრესია

1. არითმეტიკული პროგრესიის ყოველი წევრი დაწყებული მეორიდან იანგარიშება ფორმულით

$$a_n=a_1+d(n-1)$$

2. სასრული არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა ჯამი იანგარიშება ფორმულით

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{[2a_1+d(n-1)]n}{2}$$

3. არითმეტიკული პროგრესიის ყოველი წევრი დაწყებული მეორიდან საშუალო არითმეტიკულია წინა და მომდევნო წევრების: $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$

გეომეტრიული პროგრესია

1. გეომეტრიული პროგრესიის ყოველი წევრი დაწყებული მეორიდან იანგარიშება ფორმულით

$$b_n=b_1q^{n-1}$$

2. გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამი იანგარიშება ფორმულით

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{b_nq-b_1}{q-1}$$ თუ პროგრესიის მნიშვნელი $q\neq 1$

3. უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამი იანგარიშება ფორმულით

$$S=\frac{a_1}{1-q},\qquad |q|<1$$

4. გეომეტრიული პროგრესიის ყოველი წევრის მოდული საშუალო გეომეტრიულია წინა და მომდევნო წევრების მოდულების $|a_n|=\sqrt{|a_{n-1}|\cdot|a_{n+1}|}$

ლოგარითმები

1. $log_a N = x$ ნიშნავს $a^x = N$, თუ N და a დადებითი რიცხვებია, ამასთან $a \neq 1$.
2. $a^{\log_a N} = N$ 3. $log_a a = 1$ 4. $log_a 1 = 0$
3. $log_a (N_1 \cdot N_2) = log_a N_1 + log_a N_2$ 5. $log_a \frac{N_1}{N_2} = log_a N_1 - log_a N_2$
6. $log_a N^m = m\, log_a N$

7. ლოგარითმის ერთი ფუძიდან მეორეზე გადასვლა: ვთქვათ გვაქვს $log_a N$ და გვინდა ვიპოვოთ იგივე N რიცხვის ლოგარითმი ახალი b ფუძით. სამართლიანია ფორმულა:

$$log_b N = \frac{log_a N}{log_a b}$$

II. ტრიგონომეტრია

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნიშნები

1. I მეოთხედში ყველა ტრიგონომეტრიული ფუნქცია დადებითია.
2. II მეოთხედში სინუსი დადებითია,ხოლო ყველა დანარჩენი ფუნქცია უარყოფითია.
3. III მეოთხედში სინუსი და კოსინუსი უარყოფითია, ხოლო ტანგენსი და კოტანგენსი დადებითია.
4. IV მეოთხედში სინუსი,ტანგენსი და კოტანგენსი უარყოფითია,ხოლო კოსინუსი დადებითია.

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ლუწობა და კენტობა

1. კოსინუსი ლუწი ფუნქციაა: cos (-x) = cos x.
2. სინუსი, ტანგენსი და კოტანგენსი კენტი ფუნქციებია:
   sin (-x) = - sin x; tg (-x) = - tg x; ctg (-x) = -ctg x

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ზრდადობა და კლებადობა

1. I მეოთხედში სინუსი ზრდადია, კოსინუსი კი კლებადი.
2. II მეოთხედში სინუსიც და კოსინუსიც კლებადია.
3. III მეოთხედში სინუსი კლებადია, კოსინუსი კი ზრდადი
4. IV მეოთხედში სინუსიც და კოსინუსიც ზრდადია.
5, ტანგენსი ყველა მეოთხედში ზრდადია, ხოლო კოტანგენსი ყველა მეოთხედში კლებადია.

ზოგიერთი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები

1. $sin 30° = \frac{1}{2}$ $cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $tg 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $ctg 30° = \sqrt{3}$

2. $sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $cos 60° = \frac{1}{2}$ $tg 60° = \sqrt{3}$ $ctg 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3. $sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $tg 45° = 1$ $ctg 45° = 1$

დამოკიდებულება ერთი და იგივე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის

1. $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ 2. $tg a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$ 3. $ctg a = \dfrac{\cos a}{\sin a}$ 4. $tg a \cdot ctg a = 1$

ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ფორმულები

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\beta$
4. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\beta\sin\beta$
5. $tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$
6. $tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}$

ორმაგი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ 2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ 3. $tg 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

ნახევარი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

1. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ 2. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ 3. $tg\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნამრავლის გარდაქმნა ჯამად

1. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$
2. $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$
3. $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ჯამის გარდაქმნა ნამრავლად

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$
3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
5. $tg\alpha + tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

6. $tg\alpha - tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

1. თუ $\sin x = a$, $-1 \le a \le 1$ და $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ მაშინ $x = \arcsin a$
2. თუ $\cos x = a$, $-1 \le a \le 1$ და $0 \le x \le \pi$ მაშინ $x = \arccos a$
3. თუ $tgx = a$ $-\infty < a < +\infty$ და $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ მაშინ $x = arctga$
4. თუ $ctgx = a$ $-\infty < a < +\infty$ და $0 < \alpha < \pi$ მაშინ $x = arcctga$
5. $\arcsin(-a) = -\arcsin a$
6. $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$
7. $arctg(-a) = -arctga$
8. $arcctg(-a) = \pi - arcctga$
9. $\arcsin a + \arccos a = \dfrac{\pi}{2}$
10. $arctga + arcctga = \dfrac{\pi}{2}$
11. $\arcsin a = \arccos\sqrt{1-a^2} = arctg\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}} = arcctg\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$
12. $\arccos a = \arcsin\sqrt{1-a^2} = arctg\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a} = arcctg\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$
13. $arctga = \arcsin\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} = arcctg\dfrac{1}{a}$
14. $arcctga = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \arccos\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} = arcctg\dfrac{1}{a}$

უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების ფესვები

1. თუ $\sin x = a$ $-1 \le a \le 1$ მაშინ $x = (1-)^k \arcsin a + \pi k$ სადაც k მთელი რიცხვია

   თუ $\sin x = 0$, $x = \pi k$

   თუ $\sin x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$

   თუ $\sin x = -1$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$

2. თუ $\cos x = a$ $-1 \le a \le 1$ მაშინ $x = \pm\arccos a + 2\pi k$ სადაც k მთელი რიცხვია

   თუ $\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$

   თუ $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$

   თუ $\cos x = -1$, $x = (2k+1)\pi$

3. თუ $tgx = a$ $-\infty < a < +\infty$ მაშინ $x = arctga + \pi k$ სადაც k მთელი რიცხვია

   თუ $tgx = 0$, $x = \pi k$

   თუ $tgx = 1$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$

თუ $tgx=-1$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$

4. თუ $ctgx=a$ $-\infty<a<+\infty$ მაშინ $x=arcctga+\pi k$ სადაც k მთელი რიცხვია

თუ $ctgx=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

თუ $ctgx=1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$

თუ $ctgx=-1$, $x=\frac{3\pi}{4}+\pi k$

გეომეტრია

პლანიმეტრია

1. სამკუთხედში ერთი გვერდი ნაკლებია დანარჩენი გვერდების ჯამზე და მეტია მათ სხვაობაზე, ე.ი. თუ a,b,c სამკუთხედის გვერდებია, მაშინ სამართლიანია უტოლობები

$$a<b+c \qquad b<a+c \qquad c<a+b$$
$$a>b-c \qquad b>a-c \qquad c>a-b$$

2. სამკუთხედში უდიდესი კუთხის პირდაპირ უდიდესი გვერდი ძევს.

3. სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 180° -ის ტოლია, ე.ი. თუ α,β,γ სამკუთხედის კუთხეებია, მაშინ $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$.

4. ამოზნექილი მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი გამოითვლება ფორმულით: $180^\circ(n-2)$ სადაც n მრავალკუთხედის გვერდების რიცხვია.

5. პითაგორას თეორემა: მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზის კვადრატი ტოლია კათეტების კვადრატების ჯამის. $c^2=a^2+b^2$ სადაც c ჰიპოტენუზაა, ხოლო a და b კი კათეტები.

6. სამკუთხედის ფართობი:

ა) სამკუთხედის ფართობი ტოლია ფუძისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევრის $S=\frac{1}{2}ah$ სადაც a ფუძეა, ხოლო h კი სიმაღლე.

ბ) სამკუთხედის ფართობი ტოლია მისი ორი გვერდისა და მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსის ნამრავლის ნახევრის. $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, სადაც a და b სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო
γ კი მათ შორის მდებარე კუთხე.

გ) სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით (ჰერონის ფორმულა):

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

სადაც a,b,c სამკუთხედის გვერდებია და $p=\frac{a+b+c}{2}$, მას ნახევარპერიმეტრი ეწოდება.

7. პარალელოგრამის ფართობი ტოლია მისი გვერდისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის $S=ah$, სადაც a გვერდია, ხოლო h კი ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე.

8. მართკუთხედის ფართობი ტოლია მისი ორი განზომილების ნამრავლის. $S = ab$ სადაც a მართკუთხედის სიგრძეა, ხოლო b კი სიგანე.

9. რომბის ფართობი ტოლია დიაგონალების ნამრავლის ნახევრის $S = \frac{d_1 d_2}{2}$

10. კვადრატის ფართობი ტოლია მისი გვერდის კვადრატის $S = a^2$

11. ტრაპეციის ფართობი ტოლია ფუძეების ნახევარჯამისა და სიმაღლის ნამრავლის

$$S = \frac{(a+b)h}{2}$$

სადაც a და b ფუძეებია, ხოლო h კი სიმაღლე.

12. ამოზნექილი ოთხკუთხედის ფართობი ტოლია დიაგონალებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსის ნამრავლის ნახევრის

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}$$

სადაც d_1, d_2 დიაგონალებია, ხოლო α მათ შორის მდებარე კუთხე

13. წრეწირის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით $L = 2\pi R$ სადაც R წრეწირის რადიუსია.

14. წრის ფართობი გამოითვლება ფორმულით $S = \pi R^2$

15. წრის სექტორის ფართობი ტოლია სექტორის შესაბამისი რკალის სიგრძისა და რადიუსის ნამრავლის ნახევრის $S = \frac{1}{2} sR$ სადაც S რკალის სიგრძეა, R რადიუსი.

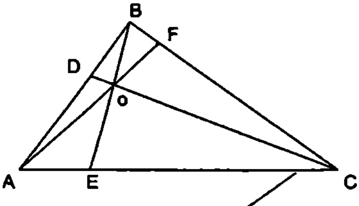
16. სინუსების თეორემა: სამკუთხედში გვერდები მოპირდაპირე კუთხეების სინუსების პროპორციულია: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. a, b, c სამკუთხედის გვერდებია, α, β, γ - შესაბამისად ამ გვერდების მოპირდაპირე კუთხეები

17. კოსინუსების თეორემა: სამკუთხედში ნებისმიერი გვერდის კვადრატი ტოლია დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამს გამოკლებული გაორკეცებული ნამრავლი ამ გვერდებისა მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსზე

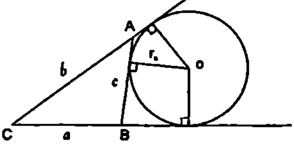
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

სადაც a, b, c სამკუთხედის გვერდებია, γ კი c გვერდის მოპირდაპირე კუთხე.

18. ჩევის თეორემა: (სამკუთხედებში ჩევიანები ეწოდებათ მონაკვეთებს, რომლებიც გამოდიან სამკუთხედის წვეროებიდან და იკვეთებიან ერთ წერტილში. ცხადია ჩევიანებია სამკუთხედის სიმაღლე, მედიანა და ბისექტრისა). ვთქვათ ABC სამკუთხედში AF, BE, CD ჩევიანებია მაშინ ჩევის თეორემა ასე ჩაიწერება: $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CF}{FB} \cdot \frac{BD}{DA} = 1$.



19. სამკუთხედში გარე ჩახაზული წრეწირი ეწოდება ისეთ წრეწირს, რომელიც ეხება სამკუთხედის ორი გვერდის გაგრძელებას და მესამე გვერდს. ვთქვათ სამკუთხედის გვერდებია a, b, c მაშინ c გვერდთან



გარე ჩახაზული წრეწირის რადიუსი r_c გამოითვლება ფორმულით: $r_c=\frac{S}{P-c}$, სადაც S სამკუთხედის ფართობია, ხოლო P – ნახევარპერიმეტრი.

20. თუ a და b მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია, c- ჰიპოტენუზა, ხოლო α და β შესაბამისად a და b კათეტების პირდაპირ მდებარე კუთხეებია, მაშინ სამართლიანია ფორმულები;

ა) $a=c\sin\alpha$ ბ) $a=c\cos\beta$

გ) $b=c\sin\beta$ დ) $b=c\cos\alpha$

ე) $a=btg\alpha$ ვ) $a=bctg\beta$

ზ) $b=atg\beta$ თ) $b=actg\alpha$

ე.ი. მართკუთხა სამკუთხედში კათეტი ტოლია ჰიპოტენუზა გამრავლებული ამ კათეტის პირდაპირ მდებარე კუთხის სინუსზე ან ამ კათეტთან მიმდებარე კუთხის კოსინუსზე, ან კათეტი ტოლია მეორე კათეტი გამრავლებული პირველი კათეტის პირდაპირ მდებარე კუთხის ტანგენსზე ან პირველ კათეტთან მიმდებარე კუთხის კოტანგენსზე.

სტერეომეტრია

1. მართი პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ტოლია ფუძის პერიმეტრისა და პრიზმის სიმაღლის ნამრავლის

$$S=PH$$

2. მართი პრიზმის მოცულობა ტოლია ფუძის ფართობისა და პრიზმის სიმაღლის ნამრავლის

$$V=S_{\text{ფ}}H$$

3. თუ მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალია d, ხოლო მისი განზომილებებია a,b,c (შესაბამისად სიგრძე,სიგანე,სიმაღლე) მაშინ სამართლიანია ფორმულა

$$d^2=a^2+b^2+c^2$$

ე.ი. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალის კვადრატი ტოლია მისი სამი განზომილების კვადრატების ჯამის.

4. მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა ტოლია მისი სამი განზომილების ნამრავლის.

$$V=abc$$

5. კუბის სრული ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S=6a^2$$

სადაც a კუბის წიბოს სიგრძეა

6. კუბის მოცულობა ტოლია მისი წიბოს სიგრძის კუბის

$$S=a^3$$

7. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ტოლია ფუძის წრეწირის სიგრძისა და სიმაღლის ნამრავლის

$$S=2\pi RH$$

სადაც R ფუძის წრეწირის რადიუსია, ხოლო H კი - ცილინდრის სიმაღლე.

8. ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი იანგარიშება ფორმულით

$$S_{\text{სრ}}=2\pi RH+2\pi R^2=2\pi R(H+R)$$

9 წესიერი პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ტოლია ფუძის პერიმეტრისა და აპოთემის ნამრავლის ნახევრის

$$S_{გვ} = \frac{1}{2} Ph$$

სადაც P ფუძის პერიმეტრია, ხოლო h კი - აპოთემა

10. პირამიდის მოცულობა ტოლია ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის მესამედის

$$V = \frac{1}{3} SH$$

სადაც S ფუძის ფართობია,ხოლო H კი – სიმაღლე.

11. კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ტოლია ფუძის წრეწირის სიგრძისა და მსახველის ნამრავლის ნახევრის

$$S_{გვ} = \frac{1}{2} 2\pi RL = \pi RL$$

სადაც R ფუძის წრეწირის რადიუსია, ხოლო L კი – მსახველი.

12. კონუსის მოცულობა ტოლია ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის მესამედის

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

სადაც R ფუძის წრეწირის რადიუსია,ხოლო H კი – სიმაღლე.

13. სფეროს ზედაპირის ფართობი იანგარიშება ფორმულით

$$S = 4\pi R^2$$

სადაც R სფეროს რადიუსია.

14. ბირთვის მოცულობა იანგარიშება ფორმულით

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$