

ემდგვნება  
ვ. ი. ლენინის დაბადების  
100 წლისთავს

*Посвящается  
100-летию со дня рождения  
В. И. Ленина*

პროფესორ-მასწავლებელთა და სააკოზღოთო და დაკომპიუტი  
დაგოკაზოკიების მასწავლარ მუშაკთა XV სამეცნიერო-ვაქნიკური  
კონფერენციის

# შ რ ტ მ ე ბ ი ტ რ უ დ ე რ

XV НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПРОФЕССОРСКО-  
ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОГО СОСТАВА И НАУЧНЫХ РАБОТНИКОВ  
ПРОБЛЕМНЫХ И ОТРАСЛЕВЫХ ЛАБОРАТОРИЙ

ნაკვეთი 10 Выпуск

მანქანათმშობლობის საქმია  
СЕКЦИЯ МАШИНОВЕДЕНИЯ

**სარედაქციო კოლეგია:**

საგ. მეცნ. აკად. წევრ-კორესპონდენტი. ტექნ. მეცნ. დოქტ., პროფ. დ. თაყაიშვილი  
(თავმჯდომარე),  
ტექნ. მეცნ. დოქტ., პროფ. გ. ჭაბუა, ტექნ. მეცნ. კანდ., ასისტ. ნ. კვიციანი.

**Редакционная коллегия:**

Чл. с.-к. АН ГССР, докт. техн. наук, проф. Д. С. Т а в х е л и д з е  
(председатель),  
докт. техн. наук, проф. Г. А. Д ж а б у а, канд. техн. наук, асс. Н. В. К в и л а д з е.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Р. Ш. Адамия, В. А. Красношанка. К исследованию автоколебаний в прокатных машинах с учетом нелинейности упругой характеристики звена	5
2. Р. Ш. Адамия, П. И. Лиховид. Об одном способе подавления переходного процесса в многомассовых системах	10
3. Р. Ш. Адамия, П. И. Лиховид. К вопросу расчета систем, оптимальных по коэффициенту динамичности	16
4. Ш. А. Арчвадзе. Определение минимального радиуса кулачка аналитическим методом	22
5. Р. Ш. Варсамашвили. Силы, действующие в зацеплении прямой зубой некруглой конической передачи	27
6. Р. Ш. Варсамашвили. Исследование некоторых схем дифференциальных механизмов с некруглыми зубчатыми колесами	
7. თ. ვაშაკიძე, ჯ. უფლისაშვილი. ტილბრედულწეილიანი ობბრგოლა სიერტიო მექანიზმის ანალიზი და სინთეზი	36
8. А. А. Гаглоев, М. Н. Махарадзе. К вопросу о распределении нагрузки между зубьями волновой зубчатой передачи	43
9. Р. С. Гогодзе. Уравнения низших кинематических пар	49
10. В. С. Готошия. К вопросу расчета зубчатого зацепления	55
11. В. С. Готошия, М. Н. Махарадзе. К вопросу выбора электродвигателя механизма поворота крана	65
12. Н. В. Квициадзе. Исследование системы навески часеборочной машины	67
13. В. Ш. Натбладзе. Некоторые вопросы динамики намоточного привода	75
14. А. И. Осипова. Некоторые вопросы синтеза шестизвездных шарнирно-рычажных механизмов с двумя двойными движениями ведомого звена за цикл	83
15. დ. ქათამაძე. ცვალებადი სტრუქტურის ბერკეტოვანი-კბილა მექანიზმების ანალიზის ზოგიერთი ამოცანა	
16. О. М. Хаиндрава, Н. Г. Бардзимов. Некоторые вопросы демпфирования вынужденных колебаний в подвижных соединениях смешанного трения	190

*Р. Ш. Адамия, В. А. Красношанка*

### К ИССЛЕДОВАНИЮ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ПРОКАТНЫХ МАШИНАХ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ УПРУГОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВЕНА

Во многих случаях работы прокатных машин наблюдается неустойчивый процесс прокатки, связанный с буксованием металла в валках.

В работе [4] показано, что изменение момента сил сопротивления при буксовании валков по металлу можно рассматривать как воздействие периодических нагрузок на упругую систему главной линии прокатного стана. Кроме того, наряду с действием внешних периодических нагрузок, неустойчивый процесс прокатки при пробуксовке сопровождается автоколебаниями, возникающими в упругой системе вследствие падающей характеристики сил трения.

Исследованию амплитуд автоколебаний в прокатных машинах при воздействии внешних периодических сил посвящены работы [2, 3]. В них показано, что зависимость моментов сил трения от относительной скорости валков может быть аппроксимирована полиномом третьей степени

$$M(\dot{\varphi}) = \alpha_0 - \alpha_1 \dot{\varphi} + \alpha_2 \dot{\varphi}^3, \quad (1)$$

где  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  — постоянные коэффициенты.

При исследовании амплитуд автоколебаний в отмеченных выше работах пренебрегают постоянной составляющей в выражении (1).

В данной работе будет показано, что пренебрежение постоянной составляющей  $\alpha_0$  не всегда справедливо, а в некоторых случаях может привести к ошибке в определении амплитуд автоколебаний.

Так, нельзя пренебрегать  $\alpha_0$  при нелинейности упругих характеристик звеньев машины.

Нелинейность упругой характеристики может вызываться различными причинами. Так, например, зачастую упругие звенья снабжаются приспособлениями, ограничивающими их деформацию (упоры, ограничители хода). Кроме того, одной из причин нелинейности упругой характеристики является наличие зазоров в соединениях деталей. Нелиней-

кая зависимость момента от деформации может определяться и конструкцией упругого элемента. Все перечисленные факторы приводят, как правило, к нелинейности упругих характеристик, причем, зависимость момента сил упругости от деформации может быть самой разнообразной.

В данной работе будет рассмотрен случай когда упругий момент от деформации зависит следующим образом:

$$M(\varphi) = c\varphi \pm \beta\varphi^3, \quad (2)$$

причем, если в выражении (2) учитывается знак плюс, имеем жесткую упругую характеристику, если знак минус—мягкую.

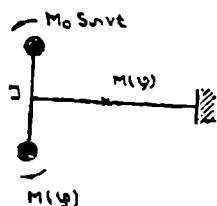


Рис. 1

Расчетные схемы многих прокатных машин ввиду того, что момент инерции ротора двигателя во много раз превышает момент инерции валков, могут быть представлены в виде механической системы, изображенной на рис. 1.

Дифференциальное уравнение, описывающее колебательный процесс в системе, представленной на рис. 1, запишем в виде

$$J\ddot{\varphi} + c\varphi \pm \beta\varphi^3 = -\alpha_0 + \alpha_1\dot{\varphi} - \alpha_2\dot{\varphi}^3 + M_0 \sin vt. \quad (3)$$

Вводя новую переменную

$$\psi = \varphi + \bar{\alpha}_0; \quad \bar{\alpha}_0 = \frac{\alpha}{c}, \quad (4)$$

запишем уравнение (3) следующим образом:

$$J\ddot{\psi} + c\psi = \alpha_1\dot{\psi} - \alpha_2\dot{\psi}^3 \mp \beta(\psi - \bar{\alpha}_1)^3 + M_0 \sin vt. \quad (5)$$

Переходя в уравнении (5) к безразмерному времени

$$\tau = kt; \quad k = \sqrt{\frac{c}{J}}, \quad (6)$$

получим

$$\ddot{\psi} + \psi = \bar{S}_1\dot{\psi} - \bar{S}_2\dot{\psi}^3 \mp \bar{S}_3(\psi - \bar{\alpha}_1)^3 + \bar{m}_0 \sin \bar{\omega}\tau, \quad (7)$$

где

$$\bar{S}_1 = \frac{\alpha_1}{Jk}; \quad \bar{S}_2 = \frac{\alpha_2\sqrt{c}}{J\sqrt{J}}; \quad \bar{S}_3 = \frac{\beta}{c}; \quad \bar{m}_0 = \frac{M_0}{c}; \quad \bar{\omega} = \frac{\nu}{k}. \quad (8)$$

Используя замену

$$\psi = \bar{\psi} + \bar{S}_4 \sin \bar{\omega}\tau; \quad \bar{S}_4 = \frac{\bar{m}_0}{1 - \bar{\omega}^2}, \quad (9)$$

приведем уравнение (7) к виду

$$\ddot{\bar{\psi}} + \bar{\psi} = \varepsilon f(\bar{\theta}, \bar{\psi}, \dot{\bar{\psi}}), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon f(\bar{\theta}, \bar{\psi}, \dot{\bar{\psi}}) = & \bar{S}_1 (\dot{\bar{\psi}} + \bar{S}_4 \bar{\omega} \cos \bar{\theta}) - \bar{S}_2 (\dot{\bar{\psi}} + \bar{S}_4 \bar{\omega} \cos \bar{\theta})^2 \mp \\ & \mp \bar{S}_3 (\bar{\psi} - \bar{\alpha}_0 + \bar{S}_4 \sin \bar{\theta})^2; \quad \bar{\theta} = \bar{\omega} \tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Решение уравнения (10), применяя асимптотический метод Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова [1], отыскиваем в виде

$$\bar{\psi} = \bar{b} \cos(\bar{\lambda} \tau + \bar{\gamma}), \quad (12)$$

где  $\bar{b}$  и  $\bar{\gamma} = \bar{\lambda} \tau + \bar{\gamma}$  определяются из уравнений первого приближения:

$$\frac{d\bar{b}}{d\tau} = \varepsilon A(\bar{b}); \quad \frac{d\bar{\gamma}}{d\tau} = \bar{\lambda}(\bar{b}), \quad (13)$$

причем,  $A(\bar{b})$  и  $\bar{\lambda}(\bar{b})$  находим из выражений

$$A(\bar{b}) = - \frac{1}{4\pi^2 \bar{\lambda}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\bar{\theta}, \bar{\psi}, \dot{\bar{\psi}}) \sin \bar{\eta} d\bar{\eta} d\bar{\theta}; \quad (14)$$

$$\bar{\lambda}(\bar{b}) = 1 - \frac{\varepsilon}{4\pi^2 \bar{b}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\bar{\theta}, \bar{\psi}, \dot{\bar{\psi}}) \cos \bar{\eta} d\bar{\eta} d\bar{\theta}. \quad (15)$$

Принимая во внимание выражение (11), определим  $A(\bar{b})$  и  $\bar{\lambda}(\bar{b})$ ; тогда имеем

$$\frac{d\bar{b}}{d\tau} = \frac{\bar{S}_1 \bar{b}}{2} - \frac{3\bar{S}_2 \bar{\lambda}^2 \bar{b}^3}{8} - \frac{3\bar{S}_2 \bar{b} \bar{S}_4^2 \bar{\omega}^2}{4}. \quad (16)$$

$$\bar{\lambda}(\bar{b}) = 1 \pm \bar{S}_3 \left( \frac{3\bar{b}^2}{8} + \frac{3\bar{S}_4^2}{4} + \frac{3\bar{\alpha}_0^2}{2} \right). \quad (17)$$

Приравнявая нулю правую часть уравнения (16), находим

$$\bar{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}} \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\bar{S}_1}{\bar{S}_2} - 2\bar{S}_4^2 \bar{\omega}^2}. \quad (18)$$

Поскольку  $\bar{\lambda}$  зависит от  $\bar{b}$ , а  $\bar{b}$  зависит от  $\bar{\lambda}$ , то совместно решая уравнения (17—18), определим амплитуду и частоту автоколебаний. Для получения количественных результатов рассмотрим в качестве

конкретного примера рилинг-стан ТПА-140РМЗ со следующим и параметрами:

$$J = 134 \text{ кг·см·сек}^2; \quad c = 0,16 \cdot 10^6 \text{ кг·см}; \quad \beta = 0,16 \cdot 10^8 \text{ кг·см}. \quad (19)$$

Численные значения других величин, входящих в уравнение (3), выбраны таким образом:

$$M_0 = 0,52 \cdot 10^4 \text{ кг·см}; \quad \alpha_0 = 0,48 \cdot 10^4 \text{ кг·см}; \quad \alpha_1 = 222,25 \text{ кг·см·сек}; \\ \alpha_2 = 124,09 \text{ кг·см·сек}^2; \quad \nu = 10,37 \text{ 1/сек}. \quad (20)$$

Совместное решение уравнений (17), (18) при численных значениях параметров (19), (20) приведено на рис. 2. Пересечение кривых  $\bar{\lambda}(\bar{b})$  и  $\bar{b}(\bar{\lambda})$  в точках  $A_1, A_2, B_1, B_2$  определяет амплитуды и частоты автоколебаний для различных случаев. Кривые  $\bar{\lambda}(\bar{b})$ , отклоняющиеся

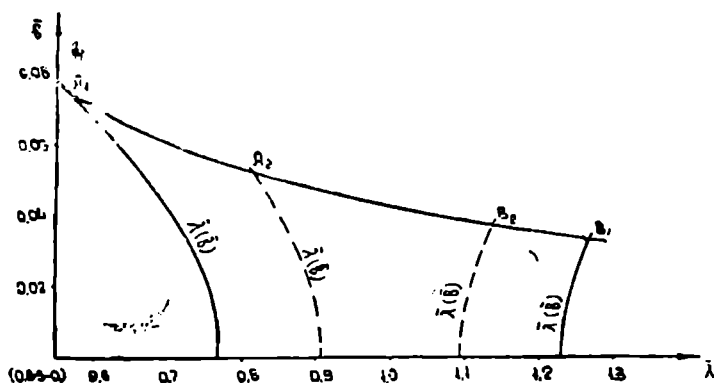


Рис. 2.

в сторону начала координат, соответствуют учету знака минус в выражении (2), а кривые  $\bar{\lambda}(\bar{b})$ , отклоняющиеся в сторону возрастания частоты, соответствуют учету знака плюс в выражении (2). Пунктиром проведены кривые  $\bar{\lambda}(\bar{b})$ , полученные при пренебрежении постоянной составляющей  $\alpha_0$  в выражении (1).

Таким образом, из сравнения на рис. 2 точек  $A_1, A_2$  и  $B_1, B_2$  следует, что пренебрежение постоянной составляющей в выражении момента сил трения может привести к существенной ошибке в определении амплитуды и частоты автоколебаний. При отсутствии в системе возмущающей периодической силы в выражениях (17—18)  $\bar{S}_4$  надо принять равным нулю.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Изд-во АН УССР, 1937.
  2. Иванченко Ф. К. К вопросу о колебаниях главной линии прокатных станов при неустойчивом процессе прокатки. «Известия высших учебных заведений». Черная металлургия, № 10, 1961.
  3. Иванченко Ф. К. Некогдашние вопросы динамики прокатных станов при буксировании валков. «Известия высших учебных заведений». Черная металлургия, № 9, 1965.
  4. Чекмарев А. П., Динник А. А. Динамика неустойчивого процесса прокатки (буксирования). Прокатное производство. Научные труды Института черной металлургии АН УССР, 1957.
-



*Р. Ш. Адамия, П. И. Лиховид*

## ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОДАВЛЕНИЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В МНОГОМАССОВЫХ СИСТЕМАХ

С целью повышения надежности и долговечности современных машин очень важным является подавление упругих свободных колебаний, возникающих в ответственных узлах во время переходных процессов. Гашение таких колебаний за счет диссипации энергии в линиях передач, даже при введении конструкционного демпфирования, не всегда представляется возможным.

Развитие систем автоматического регулирования, в частности, применение в схемах управления тяжелых машин разных видов электромашинных усилителей дает возможность поставить задачу динамического гашения колебаний переходного процесса за счет определенным образом подобранных дополнительных внешних нагрузок.

Рассмотрим динамику некоторой машины как механической системы, представляющей собой цепочку дискретных масс, соединенных между собой упругими звеньями. Свободное движение такой системы с учетом диссипативных сил описывается дифференциальными уравнениями второго порядка, записанными относительно упругих сил, развиваемых в ее звеньях во время переходного процесса:

$$\ddot{F}_{i, i+1} + p_{i, i+1}^2 \dot{F}_{i, i+1} + \omega_{i, i+1}^2 F_{i, i+1} - \frac{h_{i-1, i}}{m_i} \cdot \frac{c_{i, i+1}}{c_{i-1, i}} \dot{F}_{i-1, i} - \frac{h_{i+1, i+2}}{m_{i+1}} \cdot \frac{c_{i, i+1}}{c_{i+1, i+2}} \dot{F}_{i+1, i+2} - \frac{c_{i, i+1}}{m_i} F_{i-1, i} - \frac{c_{i, i+1}}{m_{i+1}} F_{i+1, i+2} = 0, \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1)$$

где

$$F_{i, i+1} = c_{i, i+1} (x_i - x_{i+1});$$

$$p_{i, i+1}^2 = h_{i, i+1} \frac{m_i + m_{i+1}}{m_i m_{i+1}}; \quad \omega_{i, i+1}^2 = c_{i, i+1} \frac{m_i + m_{i+1}}{m_i m_{i+1}}.$$

Величины, имеющие индексы 0, 1 и  $n, n+1$ , равны нулю.

В системе уравнений (1) приняты обозначения:  $i$ —номер узла, совпадающий с порядковым номером дискретной массы  $m_i$ ;  $x_i$ —перемещение каждой  $i$ -й массы;  $n$ —число обобщенных координат (масс) данной системы;  $F_{i, i+1}$ —упругая сила, развиваемая в звене, расположенном между  $i$ -й и  $i+1$ -й массами;  $c_{i, i+1}$ —жесткость упругого звена;  $h_{i, i+1}$ —коэффициент затухания.

Подчиним движение данной системы ненулевым начальным условиям общего вида:

$$F_{i, i+1}(t)|_{t=0} = F_{i, i+1}(0); \dot{F}_{i, i+1}(t)|_{t=0} = \dot{F}_{i, i+1}(0). \quad (2)$$

В этом случае в элементах машины возникает переходный процесс, характер которого определяется решением уравнений (1).

В целях определения общего решения уравнения (1) воспользуемся методом преобразования начальных условий движения в эквивалентную им внешнюю нагрузку, что возможно осуществить с использованием дельта-функции [2]. В этом случае решение уравнения (1) при начальных условиях (2) эквивалентно решению следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{F}_{i, i+1} + p_{i, i+1}^2 \dot{F}_{i, i+1} + \omega_{i, i+1}^2 F_{i, i+1} - \frac{h_{i-1, i}}{m_i} \frac{c_{i, i+1}}{c_{i-1, i}} \dot{F}_{i-1, i} - \\ - \frac{h_{i+1, i+2}}{m_{i+1}} \frac{c_{i, i+1}}{c_{i+1, i+2}} \dot{F}_{i+1, i+2} - \frac{c_{i, i+1}}{m_i} F_{i-1, i} - \frac{c_{i, i+1}}{m_{i+1}} F_{i+1, i+2} = \\ = F_{i, i+1}(0) \delta(t) + \dot{F}_{i, i+1}(0) \delta'(t), \end{aligned} \quad (3)$$

при нулевых начальных условиях, где  $\delta(t)$ —импульсивная функция Дирака.

Обычно в задачах о расчете переходных процессов в многомассовых системах принято сводить систему уравнений (3) к системе независимых дифференциальных уравнений высшего порядка. Выполняя такое приведение, например, с помощью символического метода, получаем [1]

$$L F_{i, i+1} = \sum_{p=0}^{r-1} \sum_{v=0}^{r-p-1} F_{i, i+1}^{(r-v-p-1)}(0) a_{p-1} \delta^{(v)}(t), \quad (4)$$

где  $a_{-1} = 1$ ;  $L$ —дифференциальный оператор  $r$ -го порядка, причем,  $r = 2(n-1)$ ;

$$L = \frac{d^r}{dt^r} + a_0 \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} + \dots + a_{r-2} \frac{d}{dt} + a_{r-1}.$$

Здесь  $a_0; a_1; \dots; a_{r-1}$  — постоянные коэффициенты, определяемые параметрами системы. Если элементы системы подвержены действию соответствующим образом подобранной внешней силы  $F_i(t)$ , которая сможет погасить возникшие в системе колебания, то уравнения движения в этом случае можно записать в виде

$$LF_{i, i+1} = F_i(t) + \sum_{p=0}^{r-1} \sum_{v=0}^{r-p-1} F_{i, i+1}^{(r-v-p-1)}(0) a_{p-1} \delta^{(v)}(t). \quad (5)$$

Решение этого уравнения будем искать в форме интеграла Коши:

$$F_{i, i+1}(t) = \int_0^t \left[ F_i(u) + \sum_{p=0}^{r-1} \sum_{v=0}^{r-p-1} F_{i, i+1}^{(r-v-p-1)}(0) a_{p-1} \delta^{(v)}(u) \right] B(t-u) du, \quad (6)$$

где  $B(t-u)$  — реакция системы на единичный импульс (ядро Коши), представляющая собой решение однородного уравнения (5) при начальном значении  $F_{i, i+1}^{(r-1)}(0) = 1$  и при всех остальных значениях, равных нулю.

В рассматриваемом случае она определяется следующим равенством [3]:

$$B(t-u) = \sum_{s=1}^r \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^r (\lambda_s - \lambda_i)} \cdot e^{\lambda_s(t-u)}, \quad (7)$$

где  $\lambda_s$  — корни характеристического уравнения.

Следует заметить, что если  $F_i(t)$  является возмущающей внешней силой, то, выполняя интегрирование в выражении (6), получим

$$F_{i, i+1}(t) = \int_0^t F_i(u) B(t-u) du + \sum_{p=0}^{r-1} \sum_{v=0}^{r-p-1} F_{i, i+1}^{(r-v-p-1)}(0) a_{p-1} B^{(v)}(t),$$

где  $B^{(\nu)}(t)$  —  $\nu$ -ая производная от реакции системы на единичный импульс (7). Это выражение представляет собой общее решение дифференциального уравнения переходного процесса, возникающего в линиях передач машины.

Следовательно, методика учета начальных условий и построение процесса при наличии реакции системы на единичный импульс (ядро Коши) является необходимым дополнением к аппарату анализа переходных процессов в многомассовых системах, позволяющая исключить операцию определения произвольных постоянных.

Далее, при полном отсутствии колебаний имеет место тождество  $F_{i, i+1}(t) \equiv 0$ , откуда из (6) имеем

$$\int_0^t \left[ F_i(u) + \sum_{\beta=0}^{r-1} \sum_{\nu=0}^{r-\beta-1} F_{i, i+1}^{(r-\nu-\beta-1)}(0) a_{i-1} \delta^{(\nu)}(u) \right] B(t-u) du \equiv 0. \quad (8)$$

Поскольку ядро Коши  $B(t-u)$  не обращается в нуль в каждой точке, то условие (8) выполняется в том случае, когда

$$F_i(t) = - \sum_{\beta=0}^{r-1} \sum_{\nu=0}^{r-\beta-1} F_{i, i+1}^{(r-\nu-\beta-1)}(0) a_{i-1} \delta^{(\nu)}(t). \quad (9)$$

Равенство (9) определяет характер внешней силы, действие которой приводит к устранению свободных колебаний системы, возникающих от действия начальных условий (2).

Если же практическое получение внешних нагрузок вида (9) по некоторым причинам невозможно осуществить, то тогда прибегают к определению внешних сил, действие которых приводит не к полному подавлению колебаний, а лишь к уменьшению их в несколько раз за некоторое время. Так, например, выбирая внешнюю силу  $F(t) = e^{-\alpha n \frac{t}{t_1}}$ , сможем уменьшить амплитуду свободных колебаний в  $\sqrt{\alpha}$  раз, где  $n$  — порядок дифференциального уравнения,  $\alpha$  — постоянное число, а  $t_1$  — время действия силы.

Если зададим внешнюю нагрузку, например, в виде  $F(t) = L \left[ F_{i, i+1; 0} \alpha^{-\frac{t}{t_1}} \right]$  (где  $F_{i, i+1; 0}(t)$  — свободные колебания, вызванные действием начальных условий, а  $L$  — дифференциальный оператор  $r$ -го порядка), то можно добиться уменьшения амплитуды свободных колебаний в  $\alpha$  раз.

В качестве примера рассмотрим свободное движение двухмассовой системы, описываемое дифференциальным уравнением

$$\ddot{M}_{12} + b_{12}\dot{M}_{12} + \beta_{12}^2 M_{12} = 0 \quad (10)$$

при следующих начальных условиях:

$$M_{12}(0) = M_0; \quad \dot{M}_{12}(0) = 0.$$

Численные значения параметров примем следующими:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 45 \cdot 10^2; & \theta_2 &= 4,6 \cdot 10^2; \\ c_{12} &= 3,9 \cdot 10^6; & b_{12} &= 7,8 \cdot 10^3. \end{aligned}$$

Характер изменения упругого момента  $M_{12}$  при этих параметрах приведен на рис. 1 (сплошная линия).

Задавая внешнюю силу в виде  $M(\tau) = e^{-\alpha\tau}$  (здесь принято, что  $\alpha = 4$ ,  $n = 2$ ,  $t_1 = 0,2$ ,  $\tau = 10^2 t$ ,  $\tau_1 = 20$ ), можно уменьшить упругий мо-

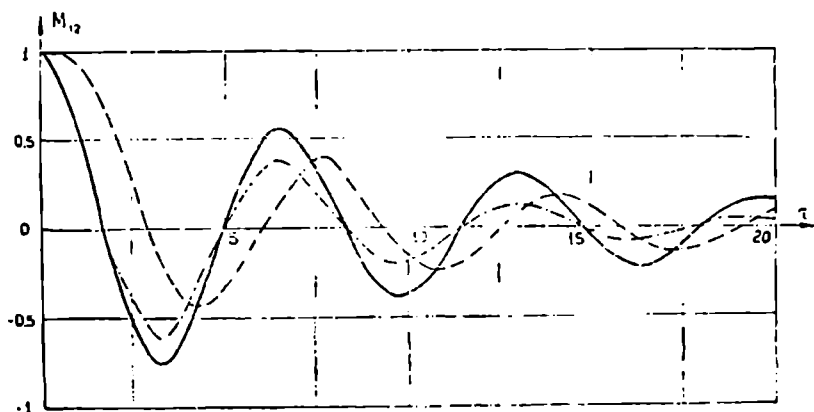


Рис. 1

мент  $M_{12}$  примерно в два раза. Характер изменения  $M_{12}$  при таком случае нагружения показан на рис. 1 пунктирной линией.

Если зададим внешнюю силу в виде

$$M(t) = \frac{\ln \alpha}{t_1^2 \alpha^{\frac{t}{t_1}}} [M_{(12)0}(t) (\ln \alpha - t_1) - 2t_1 \dot{M}_{(12)0}]$$

при тех же значениях  $\alpha$  и  $t_1$ , то добиваемся уменьшения упругого момента  $M_{12}$  в 4 раза. Кривая изменения  $M_{12}$  в этом случае изображена на рис. 1 штрих-пунктирной линией.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Голубенцев А. П. Динамика переходных процессов в машинах со многими массами. Машгиз, М.-К., 1959.
  2. Солодов А. В. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. Физматгиз, М., 1962.
  3. Лиховид П. П. О колебании упруго-пластических систем со многими степенями свободы. Сб. «Динамика и прочность машин», изд-во ХГУ, в. 4, 1966.
-

*Р. Ш. Адамия, П. И. Липовид*

## К ВОПРОСУ РАСЧЕТА СИСТЕМ, ОПТИМАЛЬНЫХ ПО КОЭФФИЦИЕНТУ ДИНАМИЧНОСТИ

При конструировании многих машин с нормальным технологическим режимом пуска, остановки и реверса (прокатные станы, шахтные подъемники, экскаваторы и др.) необходимо снизить динамические нагрузки, возникающие за счет упругих колебаний линий передач во время переходного процесса. В связи с этим возникает задача о таком

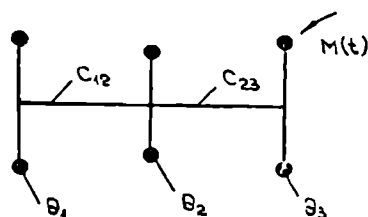


Рис. 1.

подборе параметров системы в пределах их допустимых значений, при назначении которых коэффициент динамичности, представляющий собой отношение наибольшей упругой силы, развиваемой в узле во время переходного процесса, к статической нагрузке для этого же узла, принимал бы наименьшее значение.

Покажем, как решается такая задача для систем с двумя степенями свободы.

Пусть происходит разгон машины, эквивалентная схема которой представлена на рис. 1, вхолостую моментом

$$M(t) = M_0 \frac{t}{T}, \quad (1)$$

где  $T$  — время нарастания силы.

Дифференциальные уравнения движения такой системы относительно упругих моментов в линиях передач имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{M}_{12} + \beta_{12}^s M_{12} - \frac{c_{12}}{\theta_2} M_{23} &= 0; \\ \ddot{M}_{23} + \beta_{23}^s M_{23} - \frac{c_{23}}{\theta_2} M_{12} &= \frac{c_{23}}{\theta_3} M_0 \frac{t}{T}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$M_{i, i+1} = c_{i, i+1} (\varphi_i - \varphi_{i+1}),$$

$$\beta_{i, i+1}^2 = c_{i, i+1} \frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{\theta_i \theta_{i+1}}, \quad (i=1, 2),$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ —приведенные моменты инерции маховых масс;

$c_{12}, c_{23}$ —приведенные крутильные жесткости линий передач;

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ —угловые перемещения маховых масс.

Начальные условия движения примем нулевыми, т. е. при  $t=0$

$$M_{12}(0) = M_{23}(0) = 0;$$

$$\dot{M}_{12}(0) = \dot{M}_{23}(0) = 0. \quad (3)$$

Обычно в задачах о расчете переходных процессов в динамике машин принято сводить систему уравнений (2) к системе независимых дифференциальных уравнений четвертого порядка. Выполняя такое приведение, получим:

$$M_{12}^{IV} + a_0 \dot{M}_{12} + a_1 M_{12} = M_0 \frac{c_{12} c_{23}}{\theta_2 \theta_3} \frac{t}{T};$$

$$M_{23}^{IV} + a_0 \dot{M}_{23} + a_1 M_{23} = M_0 \beta_{12}^2 \frac{c_{23}}{\theta_3} \frac{t}{T}, \quad (4)$$

где

$$a_0 = c_{12} \frac{\theta_1 + \theta_3}{\theta_1 \theta_2} + c_{23} \frac{\theta_2 + \theta_3}{\theta_2 \theta_3};$$

$$a_1 = c_{12} c_{23} \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{\theta_1 \theta_2 \theta_3}. \quad (5)$$

В силу конструктивных особенностей рассматриваемой системы постоянные коэффициенты  $a_0$  и  $a_1$ , определяемые параметрами системы, могут принимать значения только в некотором замкнутом интервале, т. е.

$$\alpha_k \leq a_k \leq \beta_k. \quad (k=0, 1)$$

Дополнительные начальные условия, которым подчинены уравнения (4), определяются из системы (2) с учетом (3) и равны при  $t=0$

$$\ddot{M}_{12}(0) = \ddot{M}_{23}(0) = \ddot{M}_{12}(0) = \ddot{M}_{23}(0) = 0;$$

$$\ddot{M}_{23}(0) = M_0 \frac{c_{23}}{\theta_3} \frac{1}{T}. \quad (6)$$



Пользуясь алгоритмами, приведенными в работе [1], запишем решение уравнений (4) при начальных условиях (3) и (6) в следующем виде:

$$M_{12} = M_0 \frac{\mu_1}{T_1} c_1 B^{(-2)}(\tau, c_1);$$

$$M_{13} = M_0 \frac{1}{T_1} \left[ \mu_2 c_1 B^{(-2)}(\tau, c_1) + \frac{c_{23}}{\theta_3 a_0} B(\tau, c_1) \right],$$
(7)

где

$$\tau = t \sqrt{a_0}; \quad c_1 = \frac{a_1}{a_0^2}; \quad T_1 = T \sqrt{a_0};$$

$$\mu_1 = \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}; \quad \mu_2 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}.$$
(8)

Функция  $B^{(-2)}(\tau, c_1)$  представляет собой второй интеграл в пределах от 0 до  $\tau$  от реакции системы на единичный импульс  $B(\tau, c_1)$ , определяемой [1] равенством:

$$B(\tau, c_1) = \frac{\tau^3}{3!} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} C_1^k \frac{\tau^{2m+2k+3}}{(2m+2k+3)!}.$$

Статические усилия, имеющие место при действии внешнего момента  $M_0 \frac{t}{T}$ , приложенного к третьей маховой массе, найдутся из системы уравнений (2) при  $\ddot{M}_{12} = 0$  и  $\ddot{M}_{23} = 0$ , т. е.

$$\beta_{12}^2 M_{12; \sigma\tau} - \frac{c_{12}}{\theta_2} M_{23; \sigma\tau} = 0;$$

$$- \frac{c_{23}}{\theta_2} M_{12; \sigma\tau} + \beta_{23}^2 M_{23; \sigma\tau} = \frac{c_{23}}{\theta_3} M_0.$$

Решая эту систему уравнений относительно  $M_{12; \sigma\tau}$  и  $M_{23; \sigma\tau}$ , получим

$$M_{12; \sigma\tau} = M_0 \mu_1; \quad M_{23; \sigma\tau} = M_0 \mu_2.$$
(9)

Вводя следующие обозначения:

$$\rho = \frac{c_{12}}{c_{23}}; \quad b_1 = \frac{\theta_3}{\theta_1}; \quad b_2 = \frac{\theta_3}{\theta_2},$$
(10)

выражения (8) перепишем в виде

$$c_1 = \frac{\rho(b_1 + b_2 + b_1 b_2)}{[1 + b_2 + \rho(b_1 + b_2)]^2}; \quad (11)$$

$$\mu_1 = \frac{b_2}{b_1 + b_2 + b_1 b_2}; \quad \mu_2 = \frac{b_1 + b_2}{b_1 + b_2 + b_1 b_2}.$$

Найдем коэффициент динамичности, зная, что

$$\lambda_{i, i+1} = \frac{M_{i, i+1; \max}}{M_{i, i+1; \text{cr}}}. \quad (i=1, 2, 3)$$

Тогда, учитывая (7), (9) и (11), будем иметь

$$\lambda_{12} = \frac{M_{12; \max}}{M_{12; \text{cr}}} = \frac{1}{T_1} c_1 B^{(-2)}(\tau, c_1);$$

$$\lambda_{23} = \frac{M_{23; \max}}{M_{23; \text{cr}}} = \frac{1}{T_1} c_1 B^{(-2)}(\tau, c_1) + \quad (12)$$

$$+ \frac{1}{T_1} \left[ 1 + \frac{1+b_2}{\rho(b_1+b_2)} \right] c_1 B(\tau, c_1).$$

Будем считать механическую систему оптимальной по коэффициенту динамичности в том случае, когда произведен такой выбор ее параметров, при котором максимальная величина выражений (12) принимает наименьшее значение.

Поскольку функции  $B^{(-2)}(\tau, c_1)$  и  $B(\tau, c_1)$ , входящие в выражения (12), содержат все коэффициенты дифференциальных уравнений (4) в определенных соотношениях, то выбирая наибольшие значения этих величин в функции параметра  $C_1$  в течение переходного процесса минимальными, получим те значения коэффициентов, которые соответствуют оптимальному режиму. По известным теперь коэффициентам дифференциального уравнения производится синтез колебательной системы, т. е. выбираются необходимые жесткости упругих связей при заданных массах конструкции и начальных условиях движения.

Так, например, как видно из (12), при заданном времени  $T$  и величинах  $b_i$  наименьшее значение коэффициента динамичности  $\lambda_{12}$  достигается при наименьшем максимальном значении функции  $c_1 B^{(-2)}(\tau, c_1)$ , т. е.

$$\left| \lambda_{12; \max} \right|_{\min} = \frac{1}{T_1} \left| [C_1 B^{(-2)}(\tau, c_1)]_{\max} \right|_{\min}. \quad (13)$$

Графики для этой функции, вычисленные по аргументу  $0 \leq \tau \leq 30$

и параметру  $0,05 \leq c_1 \leq 0,25$  с шагом 0,05, приведены на рис. 2. Как видно из этого рисунка, наименьшее максимальное значение функции

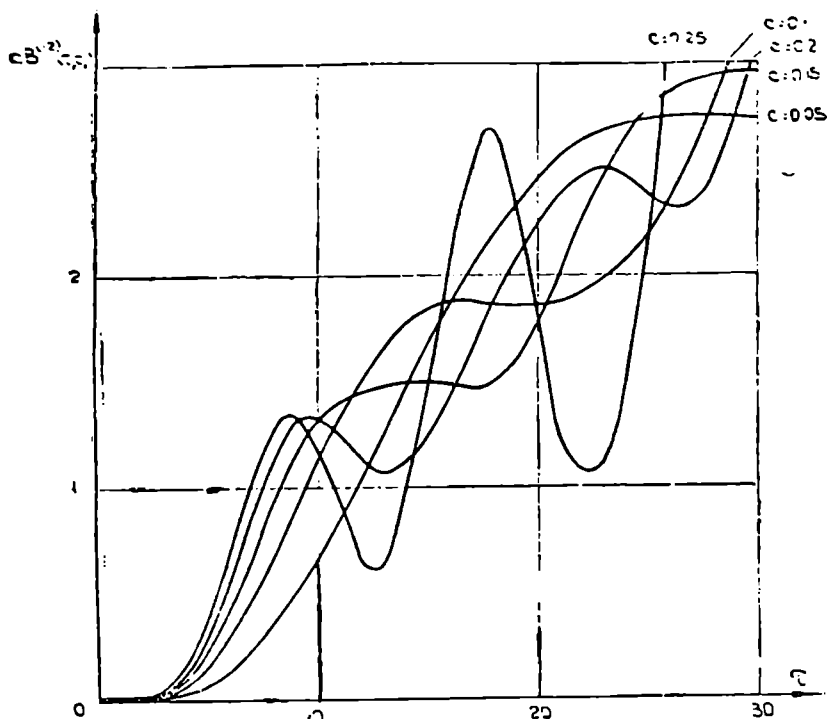


Рис. 2

$c_1 B^{(-2)}(\tau, c_1)$  в интервале изменения аргумента  $0 \leq \tau \leq 20$ , равному времени нарастания силы, достигается при параметре  $c_1$ , находящемся в замкнутом интервале

$$0,1 \leq c_1 \leq 0,15. \quad (14)$$

Эта область изменения параметра  $c_1$  и является оптимальной в данном случае.

В качестве примера рассмотрим листопрокатный стан одного из металлургических заводов со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 90; & c_{11} &= 4,35 \cdot 10^5; \\ \theta_2 &= 665; & c_{23} &= 2,7 \cdot 10^4, \\ \theta_3 &= 3,3; \\ I &= 0,17; \end{aligned}$$

При заданных параметрах

$$c_1 = \frac{a_1}{a_0^2} = \frac{0,451 \cdot 10^9}{1,88 \cdot 10^8} \approx 0,24.$$

Такое значение параметра  $c_1$  очень близко подходит к границе области устойчивости (для устойчивой системы  $0 < c_1 < 0,25$ ) и является плохим.

Характер изменения момента сил упругости  $M_{12}$  и  $M_{23}$ , вычисленных по формулам (7) при заданных параметрах, показан на рис. 3 сплошными линиями (кривые 1 и 2).

Исходя из выражений (5), (7), (8), (12) и оптимальной области (14), уменьшаем жесткость  $c_{12}$  примерно в 4 раза, т. е. назначаем  $c_{12} = 1,057 \cdot 10^6$ . Это дает возможность уменьшить

величину параметра  $c_1$  и заключить его в оптимальную область (14), т. е.

$$c_1 = \frac{a_1}{a_0^2} = \frac{0,11 \cdot 10^9}{0,913 \cdot 10^8} \approx 0,12.$$

Характер изменения упругого момента  $M_{12}$  и  $M_{23}$  в этом случае показан на рис. 3 пунктиром (кривые 3 и 4).

Из сравнения кривых, приведенных на рис. 3, следует, что уменьшение жесткости  $c_{12}$  приводит к уменьшению упругого момента, следовательно, и коэффициента динамичности примерно на 30%.

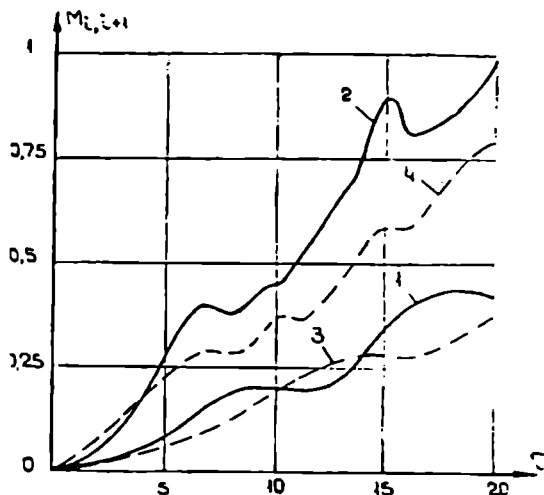


Рис. 3

#### ЛИТЕРАТУРА



Так как для заданного  $\alpha$  производная функции  $S' = S'(S)$  в точке  $C$  будет  $\operatorname{tg} \alpha$ , то можно написать, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{S''(\varphi)}{S'(\varphi)}. \quad (3)$$

Решением данного уравнения определяют величину  $\varphi$ , затем  $S$  и  $S'$  и, наконец, искомую величину  $R_0$  находят по формуле

$$R_0 = \frac{S'}{\operatorname{tg} \alpha} - S. \quad (4)$$

Нами изготовлено устройство для определения минимального радиуса кулачка косинусоидальным законом изменения ускорения ведомого звена,

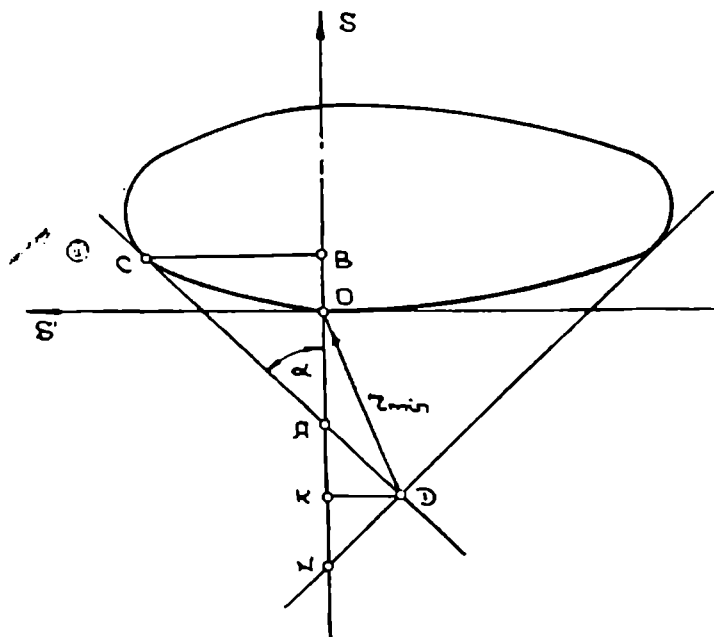


Рис. 1

мого звена, а для оценки результатов эксперимента выведена аналитическая формула для кулачковых механизмов с косинусоидальным законом изменения ускорения ведомого звена.

Данная задача нами решается несколько иным путем, чем это сде-

лани Ротбарт Г. А. [1] и Овакимов А. Г. [3], а результат получен одинаковый, что подтверждает правильность решения данной задачи.

Для косинусоидального закона кривая  $S' = S'(S)$  задана в параметрическом виде, где

$$S = \frac{h}{2} \left( 1 - \cos \frac{\pi\varphi}{\varphi_{\text{вд}}} \right) \quad (5)$$

и

$$S' = \frac{\pi h}{2\varphi_{\text{вд}}} \sin \frac{\pi\varphi}{\varphi_{\text{вд}}}. \quad (6)$$

Чтобы получить явное выражение функции  $S' = S'(S)$ , надо из уравнений (5) и (6) исключить параметр  $\varphi$ , а для этого определяем  $\cos k\varphi$  и  $\sin k\varphi$ , затем, возводя в квадрат и суммируя, получим

$$\frac{(2S-h)^2}{h^2} + \frac{4(S')^2}{h^2 k^2} = 1,$$

где

$$k = \frac{\pi}{\varphi_{\text{вд}}}.$$

Из данного уравнения определяем

$$S' = k \sqrt{S(h-S)}. \quad (7)$$

Как видно из графика, для заданного  $\alpha$  производная  $S'$  по  $S$  будет равна угловому коэффициенту функции  $S' = S'(S)$  в точке  $C$ , т. е.

$$(S')'_S = \operatorname{tg} \alpha.$$

Очевидно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k(h-2S)}{2\sqrt{Sh-S^2}}.$$

Из полученного уравнения необходимо определить  $S$ , для чего преобразуем его в квадратное уравнение

$$S^2 - hS + \frac{k^2 h^2}{4(k^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, подбираем знак минус, так как угол давления достигает своего максимума, не доходя до точки перегиба.

$$S = \frac{h}{2} - \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{k^2 h^2}{4(k^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}},$$

откуда

$$S = \frac{h}{2} - \frac{h}{2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{k^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}. \quad (8)$$

Зная значение  $S$ , по формуле (7) определяем  $S'$ :

$$\begin{aligned} S' &= k \sqrt{Sh - S^2} = k \sqrt{S(h - S)} = \\ &= k \sqrt{\left( \frac{h}{2} - \frac{h}{2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{k^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \right) \left( h - \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{k^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \right)} = \\ &= k \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{4} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{k^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{kh}{2} \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{k^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \\ S' &= \frac{k^2 h}{2 \sqrt{k^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}. \quad (9) \end{aligned}$$

Подставляя значения  $S$  и  $S'$  в уравнение (4), после некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned} R_0 = \frac{S'}{\operatorname{tg} \alpha} - S &= \frac{k^2 h}{2 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{k^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} - \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{k^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \\ &= \frac{h}{2} \left( \frac{k^2}{\operatorname{tg} \alpha \sqrt{k^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{k^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} - 1 \right) = \\ &= \frac{h}{2} \left( \frac{\sqrt{k^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha} - 1 \right). \end{aligned}$$

Формула для расчета минимального радиуса центрального кулачкового механизма принимает следующий вид:

$$R_0 = \frac{h}{2} \left( \frac{\sqrt{k^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha} - 1 \right). \quad (10)$$

Для определения минимального радиуса кулачков с эксцентриситетом достаточно знать минимальный радиус для центрального кулачкового механизма, с помощью которого можно рассчитать минимальный радиус кулачка для заданного эксцентриситета  $\epsilon$  по формуле

$$r_{\min} = \sqrt{\left( R_0 \pm \frac{\epsilon}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 + \epsilon^2}, \quad (11)$$

где  $\epsilon$  — эксцентриситет.

Знак подбирается согласно направлению смещения толкателя.



Формула (11) используется, когда  $\varphi_{yp} = \varphi_{np}$ , когда же  $\varphi_{yp} \neq \varphi_{np}$ ,

$$r_{\min} = \frac{1}{2} \sqrt{(R_{yp} + R_{np})^2 + (R_{yp} - R_{np})^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad (12)$$

где  $R_{yp}$ —минимальный радиус центрального кулачка для заданного угла удаления;

$R_{np}$ —минимальный радиус центрального кулачка для заданного угла приближения.

Кроме значения минимального радиуса, определяется также величина эксцентриситета по формуле

$$e = \frac{1}{2} (R_{yp} - R_{np}) \operatorname{tg} \alpha.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ротбарт Г. А. Кулачковые механизмы. Ленинград, 1960.
2. Левитский Н. И. Кулачковые механизмы. Машиностроение, 1964.
3. Овакимов А. Г. Аналитическое определение минимального радиуса кулачка. Известия высш. учебн. завсд., № 6, 1962.
4. Арчвадзе Ш. А., Гамрекели С. И. Устройство для определения минимального радиуса кулачковых механизмов. Труды ГПИ им. В. И. Ленина, № 1, 1968.
5. Арчвадзе Ш. А., Гамрекели С. И., Ленашвили Р. Г. Авторское свидетельство № 208280, 1967 г. «Устройство для выполнения математических операций».

### Р. Ш. Варсимашвили

## СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В ЗАЦЕПЛЕНИИ ПРЯМОЗУБОЙ НЕКРУГЛОЙ КОНИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАЧИ

При расчете или проверке на прочность зубьев, а также для расчета валов и подбора подшипников необходимо определить силы, действующие в зацеплении некруглых конических зубчатых колес.

Рассмотрим зацепление некруглых конических колес 1 и 2 (рис. 1).

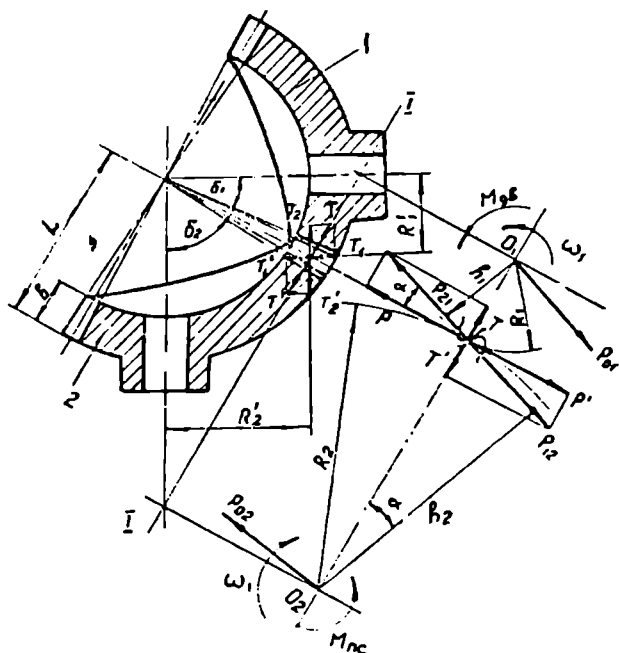


Рис. 1

Некруглые конические зубчатые колеса мысленно заменяем цилиндрическими некруглыми колесами, профили зубьев которых совпадают с профилями зубьев некруглых конических колес в плоскости I—I.

перпендикулярной к образующей. Допустим, что при определении усилий на зубья трение между ними отсутствует, давление от одного зуба на другой будет передаваться по нормали к соприкасающимся профилям. С достаточной степенью точности это давление, распределенное по ширине зуба, можно заменить сосредоточенной силой, приложенной к середине зуба.

На ведущее звено 1 действует движущий момент  $M_{дв}$ , нормальное давление  $P_{21}$  и реакция опоры  $P_{01}$ , а на ведомое звено 2—момент сил полезных сопротивлений  $M_{nc}$ , нормальное давление  $P_{12}$  и реакция опоры  $P_{02}$ .

Составим дифференциальное уравнение вращения звена 2 вокруг неподвижной оси  $O_2$ :

$$J_{0_2} \varepsilon_2 = M_{0_2}^E, \quad (1)$$

где  $J_{0_2}$  — момент инерции;

$\varepsilon_2$  — угловое ускорение звена 2;

$M_{0_2}^E$  — главный момент внешних сил, приложенных к звену 2, определяемый уравнением равновесия.

$$M_{0_2}^E = P_{12} h_2 - M_{nc}. \quad (2)$$

Приняв во внимание (2), из уравнения (1) определяем нормальное давление между зубьями:

$$P_{12} = \frac{M_{nc} + J_{0_2} \varepsilon_2}{h_2}. \quad (3)$$

Плечо  $h_2$  пары сил  $P_{12} - P_{02}$  определяется из условия

$$h_2 = R_2 \cos \alpha = \frac{R_2}{\sin \delta_1} \cos \alpha = (L - 0,5 \text{ в}) i_{12}(\psi_1) \cos \alpha. \quad (4)$$

Здесь  $i_{12}(\psi_1) = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}$  — заданное переменное передаточное отношение;

$\psi_1$  — угол поворота звена 1;

$\delta_1$  и  $\delta_2$  — переменные углы, образуемые мгновенной осью вращения между осями вращения колес;

$$\operatorname{ctg} \delta_1 = \frac{i_{12}(\psi_1) + \cos \delta}{\sin \delta}, \quad \operatorname{ctg} \delta_2 = \frac{i_{21}(\psi_1) + \cos \delta}{\sin \delta};$$

$\delta$  — угол между пересекающимися осями вращения колес;

$$i_{21}(\psi_1) = \frac{1}{i_{12}(\psi_1)};$$

$R'_2$  и  $R_2$  — текущие значения радиусов некруглых колес, соответственно конического и мысленно замененного цилиндрического;

$L$  — конусное расстояние;

$b$  — длина зуба;

$\alpha$  — угол зацепления.

Тогда нормальное давление определится формулой

$$P_{12} \approx \frac{M_{nc} + J_{0_2} \varepsilon_2}{(L - 0,5 \text{ в}) i_{12}(\psi_1) \cos \alpha}. \quad (5)$$

Разложим силу  $P_{12}$  на составляющие  $P'$  и  $T'$ , лежащие в нормальной плоскости к образующей некруглого колеса. Сила  $P'$ , перпендикулярная к плоскости осей зацепляющихся некруглых конических колес, является окружным усилием и определяется выражением

$$P = P_{12} \cos \alpha = \frac{M_{nc} + J_{0_2} \varepsilon_2}{(L - 0,5 \text{ в}) i_{12}(\psi_1)}. \quad (6)$$

Сила  $T'$ , действующая в плоскости осей вращения конических колес, является радиальной силой замененных цилиндрических некруглых колес. Она определится из следующей зависимости:

$$T' = P' \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_{nc} + J_{0_2} \varepsilon_2}{(L - 0,5 \text{ в}) i_{12}(\psi_1)} \operatorname{tg} \alpha. \quad (7)$$

Эту силу разложим на радиальную  $T'_1$  и осевую  $T'_2$  составляющие. Причем, эти составляющие равны:

$$T'_1 = T' \cos \delta_2 = \frac{M_{nc} + J_{0_2} \varepsilon_2}{(L - 0,5 \text{ в}) i_{12}(\psi_1)} \operatorname{tg} \alpha \sin \delta_2; \quad (8)$$

$$T'_2 = T' \sin \delta_2 = \frac{M_{nc} + J_{0_2} \varepsilon_2}{(L - 0,5 \text{ в}) i_{12}(\psi)} \operatorname{tg} \alpha \sin \delta_2. \quad (9)$$

Уравнениями (6), (8) и (9) определяются искомые усилия, действующие на зубья ведомого некруглого конического колеса.

Отметим, что на зубья ведущего колеса будут действовать усилия: окружное  $P = -|P'|$ , радиальное  $T_2 = -|T'_2|$  и осевое  $T'_1 = -|T'_1|$ .

Определим максимальные значения сил, действующих на звено 2

для частного случая, когда некруглые колеса эллиптические со средним передаточным отношением, равным единице. Допустим, что функция передаточного отношения эллиптических конических колес такая же, как и для цилиндрических некруглых колес [1]:

$$i_{12}(\psi_1) = \frac{1 - 2e \cos \psi_1 + e^2}{1 - e^2}. \quad (10)$$

Угловая скорость звена 2 определится как отношение

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{i_{12}(\psi_1)} = \omega_1 \frac{1 - e^2}{1 - 2e \cos \psi_1 + e^2},$$

где  $\omega_1$  — постоянная угловая скорость звена 1;

$e$  — эксцентриситет эллипса.

Имея  $\omega_2$ , нетрудно найти и угловое ускорение

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d\omega_2}{d\psi_1} \cdot \frac{d\psi_1}{dt}.$$

Учитывая, что  $\psi_1 = \omega_1 t$  ( $t$  — время поворота звена 1 на угол  $\psi_1$ ), угловое ускорение звена 2 примет вид

$$\varepsilon_2 = 2\omega_1^2 e (1 - e^2) \frac{\sin \psi_1}{(1 - 2e \cos \psi_1 + e^2)^2}. \quad (11)$$

Приняв во внимание (10) и (11), уравнения (6), (8) и (9), определяющие усилия, действующие в зацеплении эллиптических конических колес, примут соответственно следующий вид:

$$P' = \frac{[M_{nc}(1 - 2e \cos \psi_1 + e^2)^2 + 2J_{0_2} \omega_1^2 e (1 - e^2) \sin \psi_1] (1 - e^2)}{(L - 0,5 \text{ в}) (1 - 2e \cos \psi_1 + e^2)^2} \quad (12)$$

$$T' = P' \operatorname{tg} \alpha \frac{(1 - e^2) + (1 + e^2) \cos \delta - 2e \cos \psi_1 \cos \delta}{\sqrt{[(1 - e^2) + (1 + e^2) \cos \delta - 2e \cos \psi_1 \cos \delta]^2 + [(1 + e^2) \sin \delta - 2e \cos \psi_1 \sin \delta]^2}} \quad (13)$$

$$T'_2 = P' \operatorname{tg} \alpha \frac{(1 + e^2) \sin \delta - 2e \cos \psi_1 \sin \delta}{\sqrt{[(1 + e^2) \sin \delta - 2e \cos \psi_1 \sin \delta]^2 + [(1 - e^2) + (1 + e^2) \cos \delta - 2e \cos \psi_1 \cos \delta]^2}}. \quad (14)$$

По формулам (12), (13) и (14) аналитически можно найти максимальные значения сил. Однако этот метод дает довольно сложные ма-

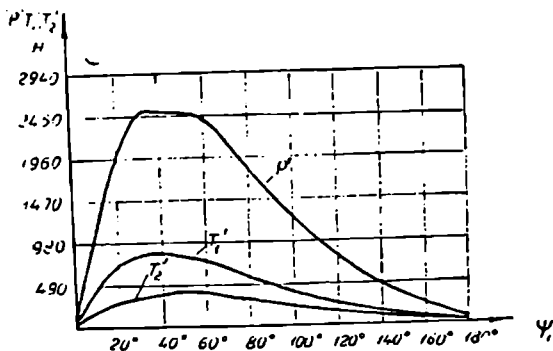


Рис. 2

тематические зависимости. Поэтому более целесообразно, в каждом конкретном случае по параметрам, характеризующим передачу, зависимости  $P'(\psi_1)$ ,  $T'_1(\psi_1)$  и  $T'_2(\psi_1)$  представить в виде таблицы (или же для наглядности построить графики зависимостей).

Из таблиц (графиков) легко найти максимальные значения действующих сил, по которым и следует вести прочностные расчеты передачи.

Например, для нашего конкретного случая имеем следующие параметры передачи:  $M_{ис} = 9,81$  нм;  $J_{o_2} = 0,0013$  кгм<sup>2</sup>;  $n_1 = 600$  об/мин;  $L = 0,12$  м;  $b = 0,01$  м;  $\alpha = 20^\circ$ ;  $\delta = 60^\circ$ . Построив зависимости сил от  $\psi_1$  (рис. 2), находим, что окружная и радиальная силы достигают максимума при  $\psi_1 = 30^\circ$ , а осевая при  $\psi_1 = 60^\circ$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Литвин Ф. Л. Некруглые зубчатые колеса. Машгиз, 1956.
2. Варсмашвили Р. Ш. Прямозубые некруглые конические зубчатые колеса с постоянной высотой ножки зубцов. Труды ГПИ, им. В. И. Ленина, № 3, 1967.
3. Варсмашвили Р. Ш. Аналитическое исследование прямозубых некруглых колес с постоянной высотой ножки зубцов. Труды ГПИ, им. В. И. Ленина, № 4, 1967.

*Р. Ш. Варсимашвили*

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СХЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ С НЕКРУГЛЫМИ ЗУБЧАТЫМИ КОЛЕСАМИ

Рассмотрим некоторые дифференциальные механизмы, обеспечивающие получение различных видов движения ведомого звена.

В дифференциальном механизме, представленном на рис. 1, движение от ведущего вала I—I передается по двум направлениям: на

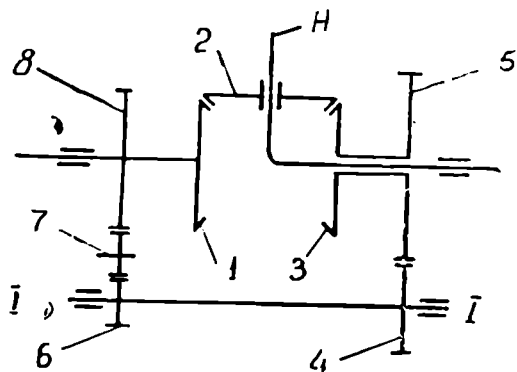


Рис. 1

центральное колесо 1 через простой ряд колес 6, 7 и 8 и на центральное колесо 3 через простой ряд колес 4 и 5. Движение снимается с водила *H*.

Рассмотрим некоторые возможные схемы механизма.

В механизме первой разновидности колеса 1, 2, 3, 6, 7 и 8 круглые, а 4 и 5—некруглые.

Функция положения ведомого звена данного конического дифференциального механизма выражается формулой

$$\varphi_{II} = \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2}, \quad (1)$$

где  $\varphi$ —угол поворота соответствующих звеньев механизма.

Функция положения центрального колеса 1 определяется равенством

$$\varphi_1 = \varphi_8 = i_{86} \varphi_1, \quad (2)$$

где  $i$ —передаточное отношение между звеньями, указанными соответствующими индексами.

Функция положения центрального колеса 3 выражается следующим образом:

$$\varphi_3 = \varphi_6 = -f_1(\varphi_1). \quad (3)$$

Тогда, учитывая (2) и (3), функцию положения дифференциального механизма можем выразить формулой

$$\varphi_H = \frac{i_{86}\varphi_1 - f_1(\varphi_1)}{2}. \quad (4)$$

Функция передаточного отношения, как производная от функции положения, примет вид:

$$i_{H1} = \frac{d\varphi_H}{d\varphi_1} = \frac{i_{86} - f'_1(\varphi_1)}{2}. \quad (5)$$

В том случае, когда в механизме применяются эллиптические некруглые зубчатые колеса со средним передаточным отношением, равным единице, функция положения механизма принимает следующий вид:

$$\varphi = \frac{i_{86}\varphi_1 - 2\arctg\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}\right)}{2}, \quad (6)$$

а функция передаточного отношения выразится формулой

$$i_{H1} = \frac{1}{2} \left( i_{86} - \frac{1-\varepsilon^2}{1-2\varepsilon \cos \varphi_1 + \varepsilon^2} \right). \quad (7)$$

В этих формулах  $\varepsilon$ —эксцентриситет эллипса.

В механизме второй разновидности колеса 1, 2, 3, 4 и 5—круглые, а колеса 6, 7 и 8—некруглые. Характерной особенностью некруглых колес является то, что они в механизме не могут служить в качестве паразитных; учитывая это, функцию положения конического колеса 1 представим в виде

$$\varphi_1 = \varphi_6 = f_2(\varphi_7) = f_2[f_3(\varphi_8)] = F(\varphi_1), \quad (8)$$

а функция положения колеса 3 выражается

$$\varphi_3 = \varphi_6 = -i_{84}\varphi_1. \quad (9)$$

Подставив значения (8) и (9) в (1), функцию положения дифференциального механизма выразим формулой

$$\varphi_H = \frac{F(\varphi_1) - i_{84}\varphi_1}{2}; \quad (10)$$



тогда функция передаточного отношения определится выражением

$$i_{II I} = \frac{F'(\varphi_I) - i_{34}}{2}. \quad (11)$$

Исследование дифференциального механизма показывает, что не меняя некруглые зубчатые колеса, а только изменяя передаточное отношение применяемых круглых колес, можно получить различные виды движения ведомого звена механизма, в частности:

1) если соблюдаются условия  $i_{36} > f'_1(\varphi_I)$  и  $i_{54} < F'(\varphi_I)$ , то ведомое звено механизма совершает вращательное движение в направлении вращения ведущего звена ( $i_{II I} > 0$ );

2) при  $i_{36} < f'_1(\varphi_I)$  и  $i_{54} > F'(\varphi_I)$  ведомое звено механизма совершает вращательное движение в направлении, противоположном направлению вращения ведущего звена ( $i_{II I} < 0$ );

3) когда  $i_{36} = f'_1(\varphi_I)$  и  $i_{54} = F'(\varphi_I)$ , ведомое звено совершает качательное движение ( $i_{II I} = 0$ );

4) при условии  $i_{36} = f'_1(\varphi_I)$  и  $i_{54} = F'(\varphi_I)$  ведомое звено механизма имеет выстой ( $i_{II I} = 0$ ).

Рассмотрим дифференциальный механизм, изображенный на рис. 2, в котором движение от ведущего вала 1—1 передается на водило  $H$  через простой ряд некруглых колес 1 и 2, а на колесо 5 тоже через простой ряд, но круглых колес 3 и 4. Ведомым звеном механизма является центральное колесо дифференциала 8.

Функция положения ведомого звена дифференциала определяется формулой

$$\varphi_N = \varphi_{II} (1 - i_{35}^{II}) + \varphi_5 i_{58}^{II}. \quad (12)$$

Функция положения водила  $H$  равна

$$\varphi_{II} = \varphi_2 = -f(\varphi_I),$$

а функция положения круглого колеса 5 выражается зависимостью

$$\varphi_5 = \varphi_4 = -i_{43} \varphi_I.$$

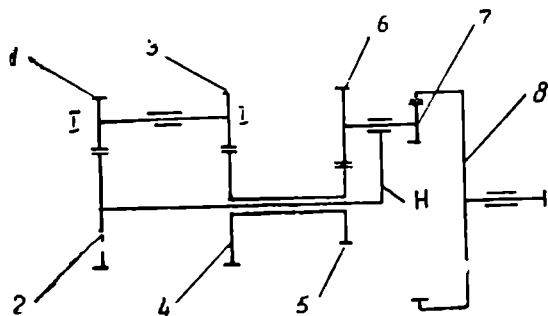


Рис. 2

Принимая во внимание значения  $\varphi_{II}$  и  $\varphi_8$ , формулу (12) можно представить в виде

$$\varphi_8 = i_{85}^{II} i_{43} \varphi_I - f(\varphi_I) (1 + i_{85}^{II}), \quad (13)$$

а функция передаточного отношения выразится, как

$$i_{8I} = \frac{d\varphi_8}{d\varphi_I} = i_{85}^{II} i_{43} - f'(\varphi_I) (1 + i_{85}^{II}). \quad (14)$$

Когда в дифференциальном механизме применяются овалы, некруглые зубчатые колеса со средним передаточным отношением, равным единице, функции положения и передаточного отношения механизма соответственно выразятся следующими зависимостями:

$$\varphi_8 = i_{85}^{II} i_{43} \varphi_I - \operatorname{arctg} \left( \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \varphi_I \right) (1 + i_{85}^{II}). \quad (15)$$

$$i_{8I} = i_{85}^{II} i_{43} - \frac{(1 + i_{85}^{II})(1 - e^2)}{1 - 2e \cos 2\varphi_I + e^2}. \quad (16)$$

Анализ полученных уравнений показывает, что изменяя передаточное отношение применяемых круглых колес, можно получить следующие различные движения ведомого звена механизма, в частности:

- 1) если соблюдается условие  $i_{85}^{II} i_{43} > f'(\varphi_I) (1 + i_{85}^{II})$ , то ведомое звено механизма совершает вращательное движение в направлении вращения ведущего звена ( $i_{8I} > 0$ );
- 2) при  $i_{85}^{II} i_{43} < f'(\varphi_I) (1 + i_{85}^{II})$  ведомое звено механизма совершает вращательное движение в направлении, противоположном направлению вращения ведущего звена ( $i_{8I} < 0$ );
- 3) когда  $i_{85}^{II} i_{43} \cong f'(\varphi_I) (1 + i_{85}^{II})$ , ведомое звено совершает качательное движение ( $i_{8I} \cong 0$ );
- 4) при условии  $i_{85}^{II} i_{43} = f'(\varphi_I) (1 + i_{85}^{II})$  ведомое звено механизма имеет выстой ( $i_{8I} = 0$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Литвин Ф. Л. Некруглые зубчатые колеса, Машгиз, 1956.
2. Езикашвили О. С., Варсимашвили Р. Ш. Дифференциальные механизмы с некруглыми колесами. Труды ГПИ им. В. И. Ленина, № 4, 1967.
3. Литвин Ф. Л., Яблонский П. С. Реверсивный симметричный механизм с некруглыми колесами. Известия высших учебных заведений, Машиностроение, № 1, 1968.
- Яблонский П. С. Дифференциальный механизм в сочетании с двумя парами некруглых колес. Известия высших учебных заведений, Машиностроение, № 11, 1964.

ო. ვაშაქიძე, ჯ. უფლისაშვილი

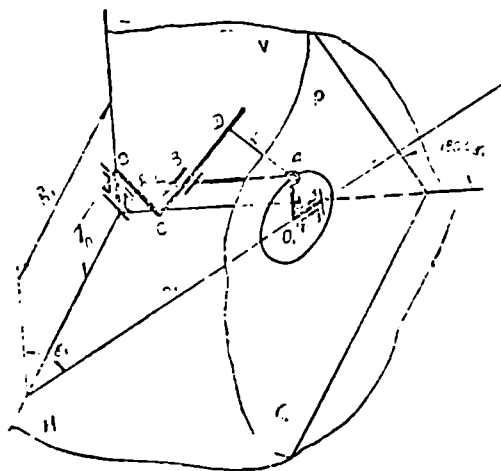
ცილინდრულფუცილიანი ოთხბოლა სივრცითი  
 მექანიზმის ანალიზი და სინთეზი

ბრტყელი მექანიზმების დაგეგმარება ამჟამად რგოლის სფერის საშუალო სიჩქარის ცვალებადობის კოეფიციენტის მიხედვით ცნობილია და მოცემულია ყველა სახელმძღვანელოში. ანალოგიური ამოცანა გადაწყვეტილია ზოგიერთი მოდიფიკაციის სივრცითი ოთხბოლა მექანიზმებისათვის, მაგრამ მათ [1—2] პრაქტიკაში გავრცელება ვერ ჰპოვეს დაგეგმარების მეთოდების სირთულის გამო.

სივრცითი ოთხბოლა სახსროვანი მექანიზმის რგოლების მდებარეობათა გეგმის აგება და მათი დაგეგმარება, ამჟამად რგოლის სფერის საშუალო სიჩქარის ცვალებადობის კოეფიციენტის მიხედვით, განვიხილოთ ისეთი მექანიზმის მაგალითზე, როდესაც საწყის მექანიზმს უერთდება რგოლები, შესაბამისად, (ნახ. 1) სფერული, ცილინდრული და

ბრუნვითი კინემატიკური წყვილებით (კ. წ.).

დაეუშვათ, რომ წამყვანი რგოლის ბრუნვის  $P$  სიბრტყე ადგენს ამჟამად რგოლის მოძრაობის ღერძის მართობ  $H$  სიბრტყესთან  $180^\circ - \gamma$ , კუთხეს, მაშინ წამყვანი რგოლის ბრუნვის ღერძის და  $O$  კ. წ. ღერძის გადაჯვარედინების კუთხე იქნება  $\gamma_1$ ; ამ ღერძებს შორის უმოკლესი მანძილი აღვნიშნოთ  $h_1$ -ით, ამჟამად რგოლის ბრუნვის ღერძისა და  $CB$



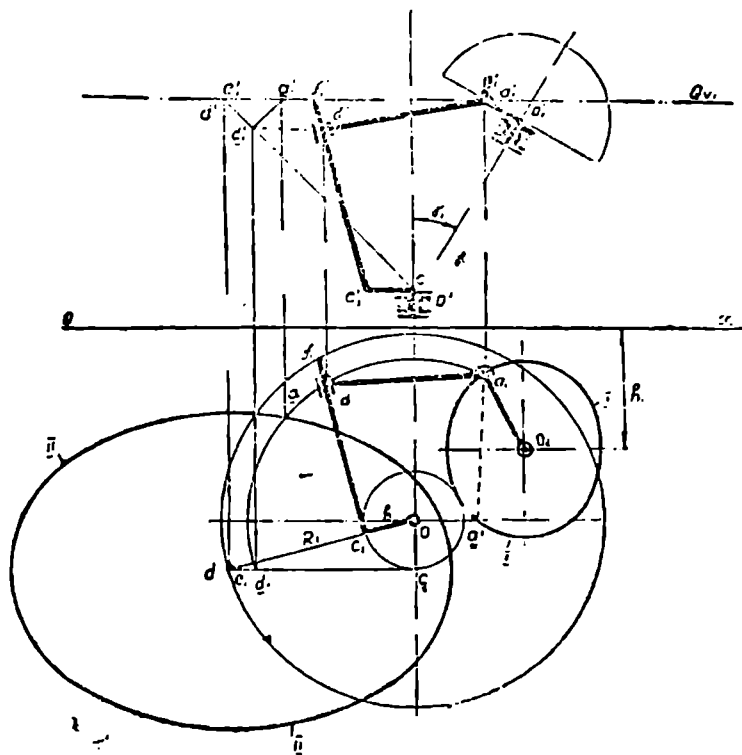
ნ.ბ. 1

ელემენტს შორის უმოკლესი მანძილი— $h_1$ -ით, მათი გადაჯვარედინების

კუთხე  $\gamma$ -თი, უმოკლესი მანძილი წამყვანი რგოლის  $A$  წერტილიდან ამჟოლი რგოლის  $CB$  ელემენტამდე  $L$ -ით. ( $L$  სიდიდე დამოკიდებული არ არის მექანიზმის რგოლების მდებარეობაზე).

შევარჩიოთ თარაზულ გეგმილთ სიბრტყედ  $H$  სიბრტყე, ხოლო შვეულ სიბრტყედ  $P$  და  $H$  სიბრტყეების მართობი  $V$  სიბრტყე. სიბრტყეების ასეთი განლაგებისას წამყვანი რგოლის  $A$  წერტილის ტრანეკტორია  $H$  სიბრტყეზე  $I-I$  ელიფსად დაგეგმილდება.

თუ წარმოვიდგენთ, რომ ამჟოლი რგოლი  $A$  კინემატიკურ წვეილში გადახსნილია, მაშინ  $UCD$  რგოლი სივრცეში აღწერს ბრუნვის ჰიპერბოლოიდს (ნახ. 2). რომ ავგაოთ წამყვანი რგოლის ნებისმიერი  $A_1$  მდე-



ნახ. 2

ბარეობისათვის მექანიზმის რგოლების მდებარეობათა გეგმა, საჭიროა  $a, a_1'$  წერტილზე გავატაროთ თარაზული გეგმილთ სიბრტყის პარალელ-

ლური  $Q_{\Sigma}$  სიბრტყე. აღნიშნული სიბრტყე იმ ცილინდრს, რომლის ზედაპირიც  $A$  წერტილის მოძრაობის გეომეტრიულ ადგილს წარმოადგენს (როდესაც  $A$  კ. წ. აზროვნებით გადახსნილია და  $DC$  რგოლი ფიქსირებული), განკვეთს II—II ელიფსზე, რომელიც თარაზულ გეგმილთ სიბრტყეზე თავისი ნამდვილი სახით დაგეგმილდება.

თუ დავუშვებთ  $Q_{\Sigma}$  კვალის  $c'd'$  ხაზთან განკვეთის  $e_1'$  წერტილიდან  $cd$  გეგმაზე მართობს, მივიღებთ II—II ელიფსის  $e_1$  ცენტრის მდებარეობას თარაზულ სიბრტყეზე. ამის შემდეგ შემოვბაზოთ  $O_1e_1 = R_1$ -რადიუსიანი წრეხაზი, რომელიც წარმოადგენს ბრუნვის ჰიპერბოლოიდის  $Q_{\Sigma}$  სიბრტყით კვეთის თარაზულ გეგმის. გამოვჭრათ ზემოხსენებული II—II ელიფსის თარგი და დავაბრუნოთ  $O$  ცენტრის გარშემო ისე, რომ ელიფსის ცენტრი  $R_1$  რადიუსის მქონე წრეხაზზე მოძრაობდეს, წამყვანი რგოლის  $A$  წერტილის ტრანექტორიის I—I ელიფსის  $a_1$  წერტილში გადაკვეთამდე. ამ მდგომარეობაში ელიფსის ცენტრი აღნიშნოთ  $f_1$ -ით, თუ  $f_1$  წერტილზე გავატარებთ მხებს  $h$  რადიუსის მქონე წრეხაზისადმი, მივიღებთ  $C$  წერტილს, ხოლო ამ უკანასკნელის შეერთება  $O$  ცენტრთან მოგვცემს ამჟოლი რგოლის თარაზულ გეგმის წამყვანი რგოლის  $O_1A$  მდებარეობისათვის.

შვეული გეგმილის მოსანახავად  $e_1$  და  $f_1$  წერტილებიდან აღმართოთ  $ax$  ღერძის მართობები შესაბამისად  $Q_{\Sigma}$  კვალის და ამჟოლი რგოლის  $h$  ელემენტის ბრუნვის სიბრტყის გადაკვეთამდე, მივიღებთ  $e_1'$  და  $f_1'$ .  $f_1'$ ,  $C_1'$ ,  $O'$  წარმოადგენს ამჟოლი რგოლის შვეულ გეგმის.  $D$  წერტილის შვეული და თარაზული გეგმილების საპოვნელად დავაბრუნოთ  $C_1f_1$  და დავამთხვიოთ  $cd$  საწყის მდგომარეობას. სათანადოდ მობრუნდება  $a_1x_1'$  წერტილიც და მიიღებს  $a_1a_1'$  მდებარეობას.  $a_1'$ -დან დავუშვებთ მართობს  $e_1'd_1'$ -ზე. მივიღებთ  $d_1'$ -ს, ამ უკანასკნელიდან  $cd$ -ზე მართობის დაშვებით მივიღებთ  $d_1$ -ს.  $d_1d_1'$ -ის სათანადოდ უკან დაბრუნებით მივიღებთ  $d_1d_1'$  წერტილს. ვიპოვიან რა  $D$  წერტილის მდებარეობას,  $B$  წერტილის გეგმილების პოვნა სიძნელეს არ წარმოადგენს, ვინაიდან  $B$  წერტილი  $D$ -დან  $DB$  მანძილით არის დაცილებული. ნახაზის გადატვირთვის თავიდან აცილების მიზნით, შესაძლებელია II—II ელიფსის ცალკე გამოხაზვა.

ამჟოლი რგოლის განაპირა მდებარეობები გვექნება მაშინ, როდესაც II—II ელიფსი  $O$  ცენტრის გარშემო ბრუნვის დროს (ნახ. 2) შეეხება I—I ელიფსს და გამოვა შეხებიდან. აღნიშნულ შემთხვევაში, როგორც წამყვანი რგოლის  $A$  წერტილის, ასევე  $AB$  რგოლის  $A$  წერტილის ტრანექტორიის თარაზულ გეგმილებს შესაბამისად I—I და II—II ელიფ-

სის საერთო მხებები ექნება. როგორც მდებარეობათა გეგმის აგების წესი-დან ჩანს, ყოველი  $Q_5$  სიბრტყე წამყვანი რგოლის ტრაექტორიის შვეულ გეგმილს გადაკვეთს  $a_1$  წერტილში, რასაც შეესაბამება წამყვანი რგოლის ტრაექტორიის თარაზული გეგმილის ორი  $a_1$  და  $\underline{a}_1$  წერტილები. წამყვანი რგოლის ტრაექტორიის  $a_1$  და  $\underline{a}_1$  წერტილისათვის მექანიზმების რგოლების მდებარეობათა გეგმის ასაგებად საჭიროა ერთი  $Q_{51}$  სიბრტყის გატარება, რაც ბრუნვით ჰიპერბოლოიდს  $R_1$  რადიუსის მქონე წრეხაზზე გადაკვეთს, ანუ რაც იგივეა, აღნიშნული წერტილებისათვის მექანიზმის რგოლების მდებარეობათა გეგმის ასაგებად II—II ელიფსი უნდა ვაბრუნოთ  $R_1$  რადიუსის მქონე წრეხაზზე.

დავუშვათ მოცემული გვაქვს  $\gamma_1$ ,  $\mu_1$  და  $r = O_1A$ , დავაგეგმაროთ ისეთი მექანიზმი, რომლის ამჟამინდელი რგოლის რხევის 'F' კუთხის დროს გვექნება  $K$  საშუალო კუთხური სიჩქარის ცვალებადობის კოეფიციენტი, განესაზღვროთ

$$Q = 180^\circ \frac{K-1}{K+1},$$

ავაგოთ მონაცემების მიხედვით წამყვანი რგოლის და ბრუნვის ჰიპერბოლოიდის ღერძის შვეული და თარაზული გეგმილები (ნახ. 3).

მექანიზმის დაგეგმარება რომ შედარებით მარტივად მოვახდინოთ, წამყვანი რგოლის ტრაექტორიის I—I ელიფსზე შევირჩიოთ ისეთი  $k$  და  $\underline{m}$  წერტილები, რომელთაც შვეულ გეგმილზე შეესაბამება ერთი  $k'$  და  $\underline{m}'$  წერტილი ან, რაც იგივეა, II—II ელიფსის ერთ და იგივე რადიუსის მქონე წრეხაზზე მოძრაობა. რა თქმა უნდა, კუთხის ნამდვილი სიდიდე  $k'$  და  $\underline{m}'$  წერტილების შესაბამის რადიუსებს შორის უნდა იყოს წინასწარ მოცემული  $Q$ -ს ტოლი. გავატაროთ  $k$  და  $\underline{m}$  წერტილებზე შესაბამისად 1—1 და 2—2 მხებები. მოვაბრუნოთ 2—2 მხები  $O$  ცენტრის გარშემო  $\varphi$  კუთხით ისე, რომ მან დაიკავოს 2—2 მდებარეობა. 1—1 და 2—2 მხების გადაკვეთა მოგვცემს  $n$  პოლუსს, ხოლო  $k$  და  $\underline{m}$  წერტილებზე გამავალი წრფე იქნება პოლარი. თუ  $n$  პოლუსზე და  $k$  და  $\underline{m}$  პოლარში ჩავხაზავთ ელიფსს ანუ  $AB$  რგოლის ტრაექტორიის  $Q_5$  სიბრტყით განკვეთის ელიფსის გეგმილს, ჩვენი ამოცანა გადაწყვეტილი იქნება, დავაგეგმარებთ მექანიზმს  $K$  სივრცის საშუალო სიჩქარის ცვალებადობის კოეფიციენტის მიხედვით, როდესაც ამჟამინდელი რგოლის რხევის კუთხე  $\varphi$  წინასწარ მოცემულია. ელიფსის აგების შემდეგ მარტივად განისაზღვრება  $h$ ,  $L$  და  $\gamma$  სიდიდეები.

მოცემულ პოლუსში და პოლარში შეიძლება ჩაიხაზოს უამრავი







*О. М. Вацакидзе, Д. М. Уфлисашвили*

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ЧЕТЫРЕХЗВЕННОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО  
МЕХАНИЗМА СО СКОЛЬЗЯЩЕЙ ПАРЫ

(Р е з ю м е)

На примере четырехзвеного пространственного механизма, звенья которого соединены между собой во вращательную, сферическую, скользящую и вращательную пары, рассмотрен вопрос построения плана положений звеньев этого механизма и проектирования его, когда дается величина хода ведомого звена, а также коэффициент изменения средней скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тавхелидзе Д. С. К вопросу кинематики и синтеза четырехзвенных пространственных механизмов. „Цодна“, 1961.
2. Лебедев П. А. Кинематика пространственных механизмов. „Машиностроение“, 1966.

*А. А. Гаглов, М. Н. Махарадзе*

## К ВОПРОСУ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАГРУЗКИ МЕЖДУ ЗУБЬЯМИ ВОЛНОВОЙ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ

Одним из важных качеств волновых зубчатых передач является большое количество пар зубьев, одновременно участвующих в передаче нагрузки [1]. Это делает передачу плавной и бесшумной в работе, а также увеличивает ее нагрузочную способность.

Вопрос о том, какой процент от общего количества зубьев находится в одновременном зацеплении и как распределяется нагрузка между ними, является сложным, зависящим от формы деформации, профиля зуба, разности чисел зубьев жесткого и гибкого колес и т. д.

Оптимальным законом распределения нагрузки по зубьям очевидно следует считать кривую, подобную, например, синусоиде при максимально нагруженных зубьях в зоне большой оси генератора. Это, во-первых, обеспечило бы плавность входа и выхода зуба; во-вторых, позволило бы воспринимать основную часть нагрузки зубьями, находящимися в полном зацеплении, и, следовательно, обладающими максимальной суммарной жесткостью; в-третьих, что весьма важно, обеспечило бы достижение наибольшего коэффициента полезного действия, так как в зоне большой оси генератора скорость радиального перемещения точек гибкого элемента, вызывающая трение скольжения, равна нулю или очень мала.

В настоящей работе дается решение вопроса распределения нагрузки по зубьям экспериментальным методом.

На рис. 1 изображен общий вид установки для проведения экспериментов. Движение от электродвигателя 1 через вал 2, на котором сидит маховик 3, обеспечивающий равномерность вращения, передается на вал генератора 4, находящегося в корпусе 5. Выходной конец вала гибкого колеса, являющегося ведомым звеном, соединен со шкивом ленточного тормоза 6, нагружаемого грузами 7. В теле маховика просверлены два отверстия, расположенные симметрично. Луч света, проходящий через них от источника 8 и попадающий на фотоэлемент 9,

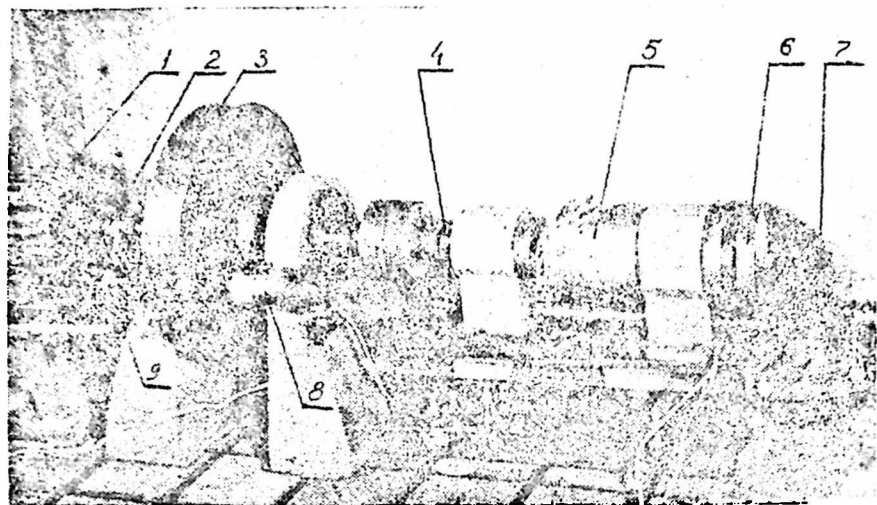


Рис. 1

возбуждает импульс тока, который отмечается на осциллограмме, фиксируя определенное положение генератора. Жесткое колесо неподвижно соединено с корпусом 5.

Измерение нагрузки на зуб осуществляется следующим образом.

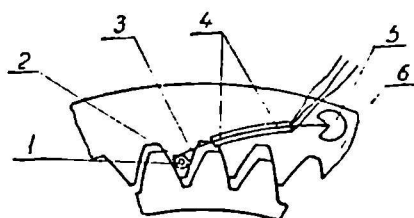


Рис. 2

Один из зубьев жесткого колеса просверлен у средней линии (рис. 2). В отверстие вставлен штифт 1, на который насажена втулка 2. К втулке припаяна стальная пружинная пластинка 3 с наклеенными на нее тензодатчиками сопротивления 4. Пластинка предварительно согнута (как показано на рис. 2) и упирается в упор 5, неподвижно соединенный с телом жесткого колеса 6.

Под действием нагрузки рабочие зубья как жесткого, так и гибкого колес получают изгибные деформации, пропорциональные величинам нагрузки.

Для нахождения закона распределения нагрузки по зубьям (при определенном передаваемом моменте) достаточно определить изменение

деформации одного зуба жесткого (или гибкого) колеса в разных фазах его зацепления, т. е. в зависимости от положения генератора. Для удобства измерения здесь использован зуб жесткого колеса.

Перемещение точек нагружаемого зуба от деформации изгиба, в том числе и штифта 1, создает дополнительный продольный изгиб пластинки 3 с тензодатчиками, фиксируемый на осциллограмме.

Для тарирования (рис. 3) в жесткое колесо 1 вставляется звено 2 с двумя диаметрально противоположными зубьями (остальные вырезаны). Причем, делительные диаметры звеньев 1 и 2 разны между собой. К звену 2 крепится рычаг 3, к концу которого прикладывается сила  $G$  разной величины, нагружающая исследуемый зуб жесткого колеса различными окружными силами  $P$ . Причем,

$$P = G \cdot \frac{l}{D}$$

Нагружение исследуемого зуба различными окружными силами вызывает различные отклонения шлейфа осциллографа, записываемые на осциллограмме. По тарировочным данным осциллограммы затем можно дать количественную оценку действующей нагрузки в разных фазах зацепления.

Описываемым методом можно исследовать распределение нагрузки по зубьям волновых передач любых вариантов, что дает возможность установить конструкцию передачи с наиболее выгодным распределением нагрузки.

В настоящей работе даются результаты экспериментальных исследований передач с конкретными параметрами. В одном случае исследовались передачи некорректированные (нулевые) при  $\alpha = 20^\circ$ ; модуль зацепления  $m = 1$  мм; число зубьев гибкого колеса  $z_g = 100$ ; число зубьев жесткого колеса  $z_{ж} = 102$ ; высота головки зуба  $h' = 0,8 m$ ; длина зуба  $12$  мм; генератор — двухроликковый свободной деформации.

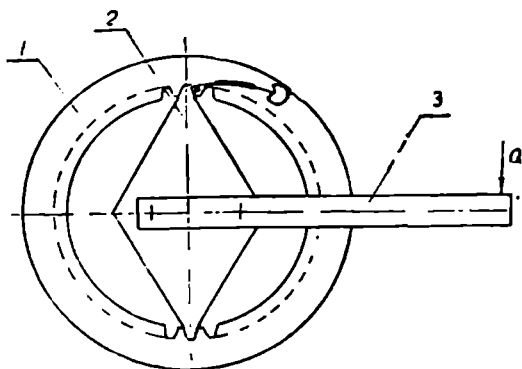


Рис. 3

При всех вышеуказанных равных параметрах испытывались колеса разных толщин обода—1,2 мм и 2,5 мм. При толщине обода 2,5 мм зуб гибкого элемента становится менее податливым изгибу, а сам обод—растяжению и перегибу, что как бы имитирует действие генератора принудительной деформации. Нагрузки прикладывались средние, расчетные удельные давления при которых на поверхностях зубьев составляли  $250 \text{ кг/см}^2$ . На рис. 4 показаны схемы нагрузок соот-

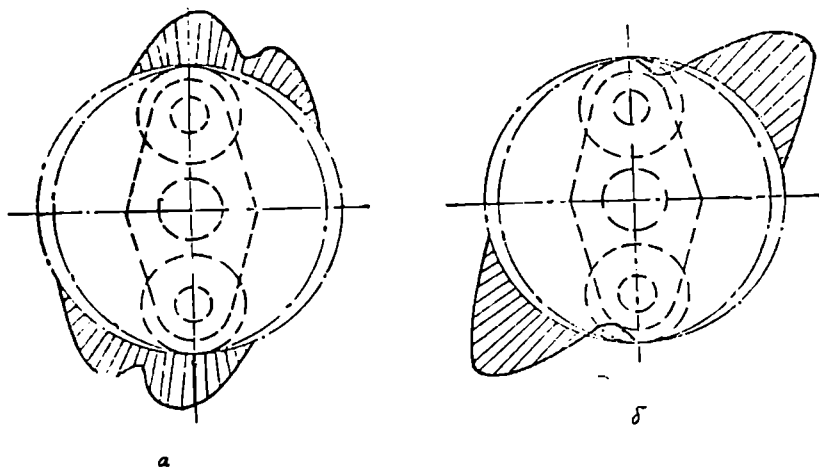


Рис. 4

ветствующих примеров исследования в зависимости от положения генератора, построенные в соответствии с полученными осциллограммами (а—для толщины обода 1,2 мм, б—для толщины обода 2,5 мм).

Как видно из вышеуказанных данных, при таких геометрических параметрах не получается рациональное распределение нагрузки.

В данной работе исследовалась также передача, геометрический расчет которой был произведен по методу Шувалова С. А. [2]. Параметры передачи составляли: числа зубьев гибкого и жесткого колеса соответственно  $z_f=100$  и  $z_k=102$ ; угол зацепления исходного контура  $\alpha=20^\circ$ . Коэффициенты коррекции: гибкого колеса  $\zeta_f=3,15$ ; жесткого колеса  $\zeta_k=3,0$ ; длина зуба = 12 мм.

Результат эксперимента, проведенного по вышеуказанной методике, показан на рис. 5. Причем, передача нагружалась той же нагрузкой, что и в предыдущих примерах. Следует учесть, что характер

распределения нагрузки в зависимости от скорости вращения генератора почти не меняется.

Как видно из рис. 5, распределение нагрузки для данной передачи близко к желаемому, а сам геометрический расчет по методу Шувалова С. А., на наш взгляд, можно считать наиболее правильным.

Приняв участок кривой в каждой зоне зацепления за синусоиду и аппроксимируя осциллограмму, по которой построена схема распределения нагрузки, показанная на рис. 5, получим

$$P_i = C \sin 2 \left( \theta - \frac{7\pi}{60} \right), \quad (1)$$

где  $P_i$ —нагрузка, приходящаяся на  $i$ -ый зуб;

$\theta$ —угловая координата  $i$ -ого зуба;

$C$ —постоянная, равная нагрузке максимально нагруженного зуба.

Очевидно,

$$P_{\text{окр}} = 2 \sum_{i=1}^{\frac{z}{4}} P_i, \quad (2)$$

где  $P_{\text{окр}}$ —окружная сила;

$z$ —число зубьев жесткого (или гибкого) колеса.

Как видно из рис. 5, одновременно в зацеплении участвует 50% от общего количества зубьев. Поэтому в зависимости (2) пределы суммирования (для каждой зоны зацепления) взяты от  $i=1$  до  $i=\frac{z}{4}$ .

Используя известную зависимость суммы последовательного ряда синусов:

$$\sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi = \frac{\cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{(2n+1)\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \quad (3)$$

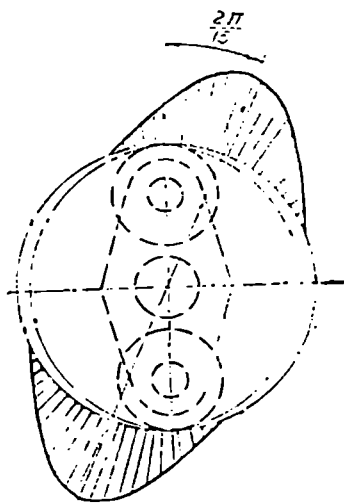


Рис. 5

и учитывая, что угловой шаг зубьев равен  $\frac{2\pi}{z}$ , получим

$$P_{\text{свр}} = 2C \frac{\cos \frac{2\pi}{z} - \cos \left( 2 \frac{z}{4} + 1 \right) \frac{2\pi}{z}}{2 \sin \frac{2\pi}{z}}.$$

Так как обычно  $z \gg 100$ , то  $\cos \frac{2\pi}{z} \approx 1$  и  $\cos \left( \frac{z}{2} + 1 \right) \frac{2\pi}{z} \approx -1$ .

Тогда

$$P_{\text{свр}} = 2C \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{z}}. \quad (4)$$

Но так как  $C = \frac{P_i}{\sin 2 \left( \theta - \frac{7\pi}{60} \right)}$ , то окончательно получим

$$P_i = \frac{1}{2} P_{\text{свр}} \sin \frac{2\pi}{z} \cdot \sin 2 \left( \theta - \frac{7\pi}{60} \right). \quad (5)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Цейтлин Н. И., Цукерман Э. М. Волновые передачи. „Вопросы ракетной техники“, № 8, 1965.
2. Шувалов С. А. Волновые редукторы. Атлас „Детали машин“ под ред. Д. Н. Реметова. Машиностроение, 1963.

*Р. С. Гогодзе*

### УРАВНЕНИЯ НИЗШИХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР

Кинематическая пара есть подвижное соединение двух твердых тел (звеньев), в которой обеспечено движение одного звена относительно другого. Она представляет собой совокупность условий связи, которыми и определяется относительное движение. Образование кинематической пары нужно рассмотреть, как результат ограничения свободного перемещения твердого тела, т. е. на свободное движение твердого тела наложены связи.

Положение твердого тела в пространстве вполне определяется в произвольной точке тела неизменно закрепленной системой координат. Если задана неизменная система координат  $OX_1X_2X_3$  базисом  $\vec{e}(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ , то положение произвольной системы координат  $O^iX_1^iX_2^iX_3^i$  базисом  $\vec{e}^i(\vec{e}_1^i; \vec{e}_2^i; \vec{e}_3^i)$  (рассматриваемой как твердое тело) определяется положением начала координат  $O^i$  и таблицей косинусов между базисами координатных осей  $OX_1X_2X_3$  и  $O^iX_1^iX_2^iX_3^i$  (рис. 1—1) [1].

Движение твердого тела в пространстве как непрерывный процесс, проходящий в течение некоторого промежутка времени, есть частный случай аффинного преобразования координат, т. е. ортогональное линейное преобразование

$$X_s = X^{0^i} + \sum_{k=1}^3 \alpha_{sk} X_k^i \quad s = 1, 2, 3 \quad (1)$$

можно трактовать как движение.

Свободное движение твердого тела можно записать шестью скалярными независимыми функциями времени, имеющими следующий вид:

$$\begin{aligned} X_1^{0^i} &= f_1(t); & \varphi &= f_4(t) \\ X_2^{0^i} &= f_2(t); & \psi &= f_5(t) \\ X_3^{0^i} &= f_3(t); & \theta &= f_6(t). \end{aligned} \quad (2)$$



Направляющие косинусы выражены через эйлеровы углы:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta; \\
 \alpha_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta; \\
 \alpha_{13} &= \sin \psi \sin \theta; \\
 \alpha_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta; \\
 \alpha_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta; \\
 \alpha_{23} &= -\cos \psi \sin \theta; \\
 \alpha_{31} &= \sin \varphi \sin \theta; \\
 \alpha_{32} &= \cos \varphi \sin \theta; \\
 \alpha_{33} &= \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Число независимых скалярных уравнений (2), характеризующих элементарное движение твердого тела (поступательное или вращательное), является степенью свободы твердого тела— $H=6$ . Уравнения движения (2) характеризуют не последовательность перемещений, следующих одно за другим, а сложное движение твердого тела в данный момент времени.

Допустим, что заданы два тела  $T_i$  и  $T_j$ , которым соответствуют координатные системы  $O^i X_1^i X_2^i X_3^i$  и  $O^j X_1^j X_2^j X_3^j$ . Соединяя тела  $T_i$  и  $T_j$  при помощи кинематической пары, на изменения уравнений движения накладываем ряд условий связи. Рассмотрим лишь низшие кинематические пары: вращательные, поступательные, цилиндрические, сферические с пальцем и сферические, т. е. кинематические пары с геометрическими связями.

В кинематической паре  $\Pi_{i,j}$ , полученной после соединения двух тел, мы будем изучать лишь их относительное движение.

Аналитически связи выражаются соотношением вида [2]:

$$f_k(X_1^{0j}; X_2^{0j}; X_3^{0j}; \psi; \varphi; \theta) = 0 \quad k=1 \dots s \tag{4}$$

и называются уравнениями связей, где для реальных кинематических пар  $1 < s < 6$ —число условий связей, определяющее структуру кинематической пары. Каждое условие связей в кинематической паре можно рассматривать как заданный параметр, определяющий положение звена.

Перейдем к последовательному рассмотрению каждой из указанных кинематических пар.

Вращательная пара (рис. 1—2). Параметры пары—ось пары и точка на ней, определяющая положение некоторой фиксиро-

ванной плоскости относительного движения звеньев [3]. Примем следующие параметры:  $l_{0^i-0_1}$  — длина кратчайшего общего перпендикуляра к оси вращения и оси  $O^i X_3^i$ ;  $l_{0_1-0_2}$  — аппликата основания общего перпендикуляра;  $l_{0_2-0^3}$  — длина по оси вращения;  $\psi$  — угол наклона перпендикуляра  $l_{0^i-0_1}$  к оси  $O^i X_1^i$ ;  $\theta$  — угол скрещивания.

Возьмем новую неподвижную систему координат  $O^3 x_1^3 x_2^3 x_3^3$ , ось которой совпадает с осью вращения.

Уравнения преобразования координат, рассматриваемые как параметры пары, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} X_1^i &= l_{0^i-0_1} \cos \psi + l_{0_2-0^3} \sin \psi \sin \theta + x_1^3 \cos \psi + x_2^3 \sin \psi; \\ X_2^i &= l_{0^i-0_1} \sin \psi - l_{0_2-0^3} \cos \psi \sin \theta - x_1^3 \sin \psi \cos \theta + \\ &\quad + x_2^3 \cos \psi \cos \theta + x_3^3 \sin \theta; \\ X_3^i &= l_{0_1-0_2} + l_{0_2-0^3} \cos \theta + x_1^3 \sin \psi \sin \theta - \\ &\quad - x_2^3 \cos \psi \sin \theta + x_3^3 \cos \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Условие вращения относительно оси  $O^3 x^3$ , допускаемое кинематической парой и заданное уравнением  $\varphi = \varphi(t)$ , представится в виде

$$\begin{aligned} x_1^3 &= X_1^j \cos \varphi + X_2^j \sin \varphi; \\ x_2^3 &= -X_1^j \sin \varphi + X_2^j \cos \varphi; \\ x_3^3 &= X_3^j. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения преобразования координат (5) и (6) являются уравнениями движения в координатной форме, допускаемого кинематической парой  $A^3 B^3$ .

Поступательная пара (рис. 1—3). Параметры пары — плоскость и прямая на ней. Примем следующие параметры:  $l_{0^i-0_1}$  — длина кратчайшего общего перпендикуляра к оси пары и оси  $O^i X_3^i$ ;  $l_{0_1-0_2}$  — аппликата основания общего перпендикуляра;  $\psi$  — угол наклона перпендикуляра  $l_{0^i-0_1}$  к оси  $O^i X_1^i$ ;  $\theta$  — угол скрещивания и  $\varphi$  — угол собственного вращения.

Возьмем новую неподвижную систему координат  $O^3 x_1^3 x_2^3 x_3^3$ , ось которой  $O^3 x^3$  совпадает с осью поступательного движения. Уравнения преобразования координат, рассматриваемые как параметры пары, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 X_1^i &= l_{0^i-0_1} \cos \psi + x_1^3 (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta) - \\
 &\quad - x_2^3 (\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta) + x_3^3 \sin \psi \sin \theta; \\
 X_2^i &= l_{0^i-0_1} \sin \psi + x_1^3 (\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta) - \\
 &\quad - x_2^3 (\sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \cos \varphi \cos \theta) - x_3^3 \cos \psi \sin \theta; \\
 X_3^i &= l_{0_1-0_2} + x_1^3 \sin \varphi \sin \theta + x_2^3 \cos \varphi \sin \theta + x_3^3 \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Поступательное движение по оси  $O^3x^3$ , допускаемое кинематической парой и заданное уравнением  $x_3^{0j} = f(t)$ , имеет вид:

$$\begin{aligned}
 x_1^3 &= X_1^j; \\
 x_2^3 &= X_2^j; \\
 x_3^3 &= X_3^j + x_3^{0j}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнения преобразования координат (7) и (8) есть уравнения движения в координатной форме, допускаемого кинематической парой „П“.

Цилиндрическая пара (рис. 1—4). Параметры пары—ось. Примем следующие параметры:  $l_{0^i-0_1}$  — длина кратчайшего общего перпендикуляра к оси пары и к оси  $O^iX^i_3$ ;  $l_{0_1-0_2}$  — аппликата общего перпендикуляра;  $\psi$ —угол наклона перпендикуляра  $l_{0_1-0_2}$  к оси  $O^iX^i_1$ ;  $\theta$ —угол скрещивания.

Возьмем новую неподвижную систему координат  $O^3x^3$ , ось которой совпадет с осью кинематической пары. Уравнения преобразования координат, рассматриваемых как параметры пары, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 X_1^i &= l_{0^i-0_1} \cos \psi + x_1^3 \cos \psi + x_2^3 \sin \psi; \\
 X_2^i &= l_{0^i-0_1} \sin \psi - x_1^3 \sin \psi \cos \theta + x_2^3 \cos \psi \cos \theta + x_3^3 \sin \theta; \\
 X_3^i &= l_{0_1-0_2} + x_1^3 \sin \psi \sin \theta - x_2^3 \cos \psi \sin \theta + x_3^3 \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Условия поступательного и вращательного движений по оси  $O^3x^3$ , допускаемых кинематической парой и заданных уравнениями  $\varphi = \varphi(t)$  и  $x_3^{0j} = f(t)$ , имеют вид:

$$\begin{aligned}
 x_1^3 &= X_1^j \cos \varphi + X_2^j \sin \varphi; \\
 x_2^3 &= -X_1^j \sin \varphi + X_2^j \cos \varphi; \\
 x_3^3 &= X_3^j + x_3^{0j}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Сферическая пара (рис. 1—5). Параметр пары — точка. Движение, допускаемое сферической парой, есть движение твердого

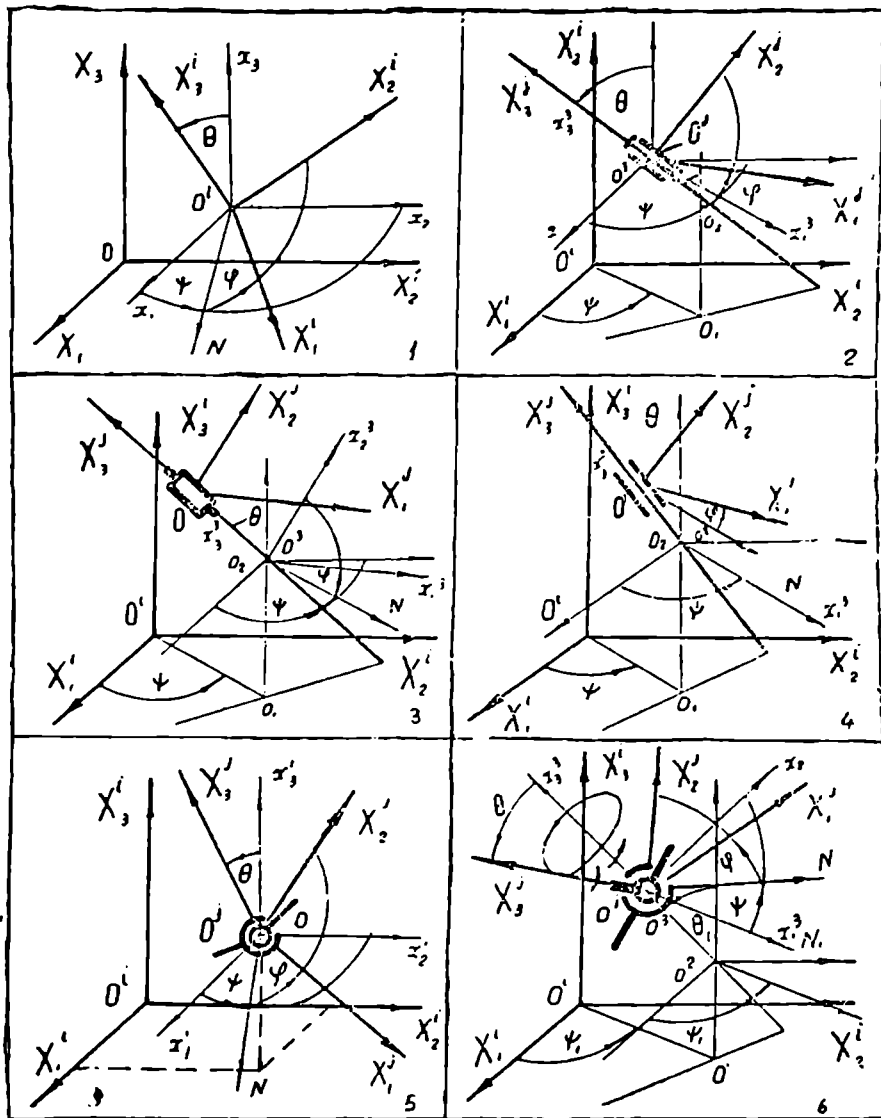


Рис. 1

тела с одной неподвижной закрепленной точкой. Ее координаты определяют параметры пары. Если возьмем новую неподвижную систему координат  $O^1x_1^1x_2^1x_3^1$  в точке  $O^j$ , то уравнения преобразования координат имеют вид:

$$\begin{aligned} X_1^i &= x_1^{0j} + x_1^1; \\ X_2^i &= x_2^{0j} + x_2^1; \\ X_3^i &= x_3^{0j} + x_3^1. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения движения, допускаемого кинематической парой и заданное уравнениями  $\psi = \psi(t)$ ;  $\varphi = \varphi(t)$  и  $\theta = \theta(t)$ , имеют вид:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \alpha_{11}X_1^j + \alpha_{12}X_2^j + \alpha_{13}X_3^j; \\ x_2^1 &= \alpha_{21}X_1^j + \alpha_{22}X_2^j + \alpha_{23}X_3^j; \\ x_3^1 &= \alpha_{31}X_1^j + \alpha_{32}X_2^j + \alpha_{33}X_3^j, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\alpha_{ij}$  определяется по формуле (3).

Сферическая пара с пальцем (рис. 1—6). Параметры пары—коническая поверхность с вершиной в центре пары и прямая с точкой на ней. Наличие пальца определяет возможность вращения одного звена относительно другого в двух различных плоскостях или по оси конуса  $O^3x^3$  и по прямой  $O^jX_3^j$ , лежащей на поверхности, которая вращается вокруг оси  $O^3x^3$ .

Если координатную систему  $O^3x_1^3x_2^3x_3^3$  возьмем так, чтобы  $O^3$  совпадала с центром кинематической пары и ось  $O^3x^3$  с осью конуса, тогда движение, допускаемое кинематической парой, рассматривается как частный случай сферической пары, а именно,  $\theta = \text{const}$ .

Рассмотрение движений, допускаемых кинематическими парами „В“, „II“, „Ц“, „С“ и „С\_п“ в вспомогательных координатных системах упрощает и приводит уравнение движения к виду, приведенному в технической литературе, и облегчает последующее исследование кинематических параметров звеньев кинематических пар.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г., Лурье А. Н. Курс теоретической механики, т. I, Гостехиздат, Москва, 1954.
2. Лурье А. Н. Аналитическая механика. Физмат, Москва, 1961.
3. Егоров В. В. Графический метод определения положений пространственных механизмов. Труды семинара по ТММ, т. VIII, вып. 25, Москва, 1949.

В. С. Готония

К ВОПРОСУ РАСЧЕТА ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ \*

При расчете зубчатого зацепления на изгиб в настоящее время исходят из соотношения, полученного на основе общих положений сопротивления материалов. Это соотношение, как известно, имеет вид:

$$P = ybt [\sigma]_{изг}, \quad (1)$$

где  $P$ —окружное усилие;

$b$ —длина зуба;

$t$ —шаг зацепления;

$y$ —коэффициент формы зуба, определяемый графически, путем вписывания в профиль зуба квадратичной параболы (рис. 1).

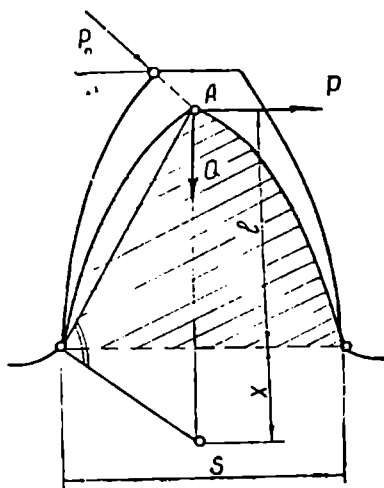


Рис. 1

Следует отметить, что графический способ определения коэффициента формы зуба путем вписывания параболы связан с большими трудностями и неудобствами технического характера (для каждого числа зубьев необходимо предварительно вычертить контур зуба, установить значение угла давления, провести через одну точку параболу и найти точки касания ветвей с профилем зуба), которые в обычных условиях работы могут привести к накоплению чувствительных ошибок при измерении длины отрезков, необходимых для получения коэффициента  $y$ . Кроме того, вписанная параболка будет касаться контура зуба лишь при больших числах зубьев; в остальных случаях ветви параболы касаются контура галтелей, следовательно, найденное сечение не будет являться опасным.

\* Статья печатается в порядке обсуждения.

Если же учесть и то, что вписанная парабола и реальный зуб не являются равнопрочными, придем к заключению, что значения коэффициентов формы зуба, полученные по вышеуказанному способу, могут оказаться не соответствующими действительности.

Исходя из вышеизложенного, считаем целесообразным определение коэффициента формы зуба производить аналитически, с учетом действительного положения опасного сечения.

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОПАСНОГО СЕЧЕНИЯ

Известно, что опасное сечение любого нагруженного тела находится там, где напряжение имеет наибольшее значение. При этом, если речь идет об изгибе консольной балки постоянного по высоте поперечного сечения, наибольшее напряжение и, следовательно, опасное сечение находятся на максимальном плече изгибающей нагрузки, т. е. у основания балки.

На максимальном плече будет находиться опасное сечение и тогда, когда сечение балки изменяется по высоте, но с уменьшением к основанию. Если же изменение поперечного сечения происходит резко и при этом с увеличением к месту заделки, то напряжение и опасное сечение могут оказаться у основания и выше.

Зубья зубчатого колеса представляют собой консольную балку с переменным по высоте поперечным сечением. При этом, в зависимости от числа зубьев, их боковые профили будут очерчены эвольвентой частично либо полностью. В первом случае, при малых числах зубьев, недостающая часть эвольвенты дополняется растянутой эвольвентой (при нарезании зубьев режущим инструментом). Таким образом, можно установить, что при малых числах зубьев опасное сечение будет находиться выше основания (рис. 2а) и определится размером ширины зуба  $S_{min}$ . Во втором случае, т. е. при больших числах зубьев, профиль зуба полностью очерчивается эвольвентой и, следовательно, сечение к месту перехода в закругление постепенно увеличивается (рис. 2б). Поэтому, в зависимости от числа зубьев, опасное сечение может оказаться и на расстоянии  $h=2r$  от вершины зуба, т. е. на плече  $h$ , и выше—на плече  $h_1$ .

Положение опасного сечения найдем следующим образом (рис. 3): соединим точку  $B$  с точкой  $B_0$  на начальной окружности (точка  $B$  является конечной точкой профиля зуба в месте перехода в закругле-

ние, т. е. точкой, отстоящей от вершины на расстоянии  $2m$ ), и ширину зуба на расстоянии  $y$  от начальной окружности заменим размером

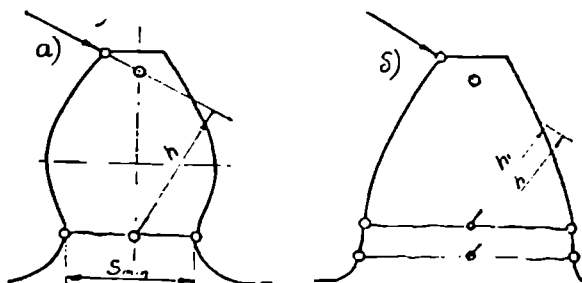


Рис. 2

$S_x$  между наклонными прямыми (такая замена на положение опасного сечения существенного влияния конечно, не окажет, но намного облегчит технику вычислений).

Имея значения  $B_0C_0 = S_1$ ,  $BC = S_2$  и определив постоянные расстояния  $a$  и  $a_0$ , можем написать

$$\frac{S_2 - S_1}{2} = \frac{a_0}{\operatorname{tg} \alpha_0}$$

и

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{2a_0}{S_2 - S_1}.$$

Тогда переменная ширина зуба будет равна

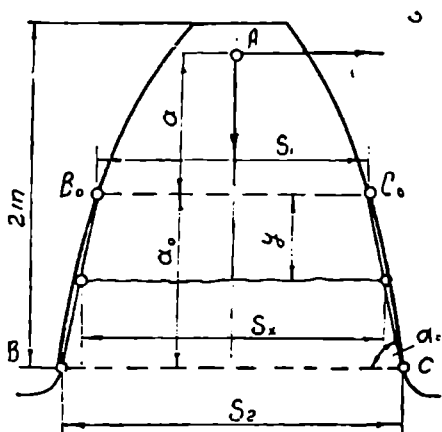


Рис. 3

$$S_x = S_1 + \frac{2y}{\operatorname{tg} \alpha_0} = S_1 + \frac{y(S_2 - S_1)}{a_0}.$$

Если  $P$ —изгибающая сила, то напряжение в рассматриваемом сечении будет:

$$\sigma_{из} = \frac{6P(a+y)}{S_x^2}.$$



Отсюда видно, что наибольшее напряжение получится в сечении, где отношение  $\frac{a+y}{S_2^2}$  имеет максимальное значение. Следовательно, для установления положения опасного сечения следует продифференцировать данное отношение и определить расстояние  $y$ , соответствующее опасному сечению. Получим

$$y = \frac{a_0 S_1}{S_2 - S_1} - 2a. \quad (2)$$

Подставив сюда соответствующие значения, определим положение опасного сечения для любого значения числа зубьев.

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШИРИНЫ ЗУБА В ОПАСНОМ СЕЧЕНИИ

Для определения ширины зуба в опасном сечении используем известные выражения и зависимости по определению элементов зубчатого зацепления. Так, для случая, когда нижняя часть зуба очерчена растянутой эвольвентой, ширина опасного сечения будет (см. Л. Н. Решетов „Корригирование эвольвентных зацеплений“, 1935 г.):

$$S_{min} = 2m \sqrt{0,5\tau(0,5\tau - 1 + \xi)} \cdot \sin \varphi = A \cdot m, \quad (3)$$

где  $m$ —модуль зацепления;

$\tau$ —число зубьев;

$\xi$ —коэффициент сдвига режущего инструмента;

$\varphi$ —центральный угол опасного сечения.

Значение угла  $\varphi$  получится из выражения

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\tau} - (\beta + \gamma),$$

где

$$\beta = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\xi}{0,5\tau-1+\xi} - \frac{360}{\pi\tau} \sqrt{(0,5\tau-1+\xi)(1-\xi)}},$$

$$\gamma = \frac{48,29}{\tau} \quad (\text{при угле зацепления } \alpha = 20^\circ).$$

При большом количестве зубьев радиус основной окружности меньше радиуса окружности ножек и, следовательно, опасное сечение будет находиться выше основной окружности. В этом случае хордальное значение ширины зуба в опасном сечении будет (рис. 4):

$$S_z = 2R_z \sin \frac{\varphi}{2} = 2(R-y) \sin \frac{\varphi}{2} = 2(0,5m\tau - y) \sin \frac{\varphi}{2},$$

где  $\varphi$ —центральный угол, определяемый по известной формуле

$$\varphi = \frac{180}{\pi} \left[ \frac{\pi \pm 4\xi \operatorname{tg} \alpha}{\tau} + 2(\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_x) \right],$$

угол  $\alpha_x$  имеет значение (при  $\alpha = 20^\circ$ ):

$$\alpha_x = \arccos \frac{R_0}{R_x} = \arccos \frac{R \cos \alpha}{R-y} = \arccos \frac{0,469845m\tau}{0,5m\tau - y}.$$

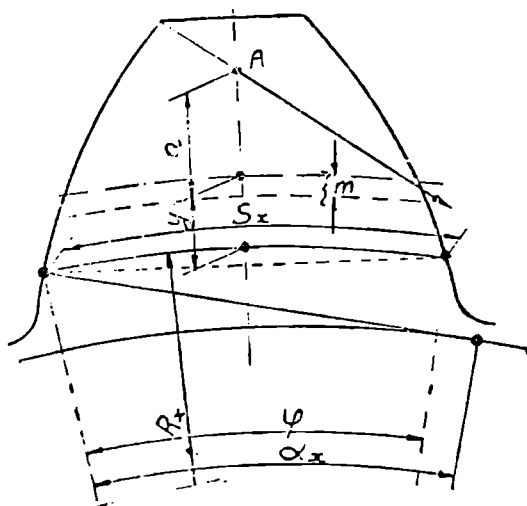


Рис. 4

Подставив значения  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $a$  и  $a_0 = m$  в выражение для расстояния  $y$ , получим:

$$y = m \left[ \frac{1}{(\tau-2) \left( \frac{1}{\tau} + \frac{\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_x}{0,5\pi \pm 2\xi \operatorname{tg} \alpha} \right) - 1} - \tau \left( \frac{0,93969}{\cos \beta} - 1 \right) \right] = B_0 m.$$

Тогда искомая ширина зуба будет:

$$S_z = m(\tau - 2B_0) \sin \frac{\varphi}{2} = B \cdot m. \quad (4)$$

Как показали подсчеты, для чисел зубьев  $z < 85$  расстояние  $u$  получается больше модуля, а свыше  $z = 85$  — постепенно уменьшается (см. табл.). Таким образом, для числа зубьев  $z \leq 85$  опасное сечение

Таблица

$z$	86	88	90	92	95	100	105	110	115
$B_0$	0,96	0,94	0,90	0,88	0,86	0,85	0,83	0,81	0,80
$z$	120	125	130	140	150	160	200	400	> 600
$B_0$	0,78	0,75	0,73	0,72	0,71	0,65	0,60	0,57	0,48

следует брать в месте перехода зуба в закругление, т. е. на расстоянии  $m$  от начальной окружности. В этом случае ширина зуба в опасном сечении будет  $S_2$ . При числе зубьев  $z > 85$  значение опасного сечения определится из выражения (4).

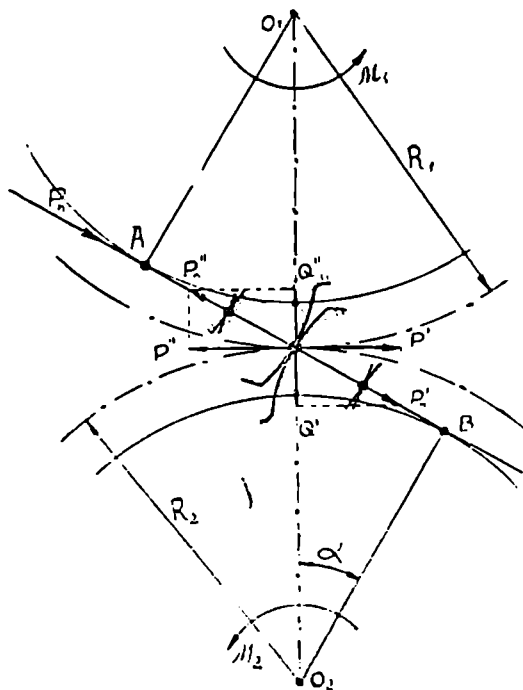
### 3. НАПРАВЛЕНИЕ И ВЕЛИЧИНА ДЕЙСТВУЮЩЕГО УСИЛИЯ

Существующий в настоящее время метод силового расчета зубчатого зацепления предусматривает направление действующего на зуб усилия нормально к профилю (без учета трения), т. е. по линии зацепления  $AB$  (рис. 5).

В любой точке контакта двух зубьев на линии зацепления величина усилия является постоянной и определяется выражением

Рис. 5

$$F_n = \frac{M_1}{O_1A} = \frac{M_2}{O_2B} = \frac{M_1}{R_1 \cos \alpha} = \frac{M_2}{R_2 \cos \alpha}.$$



Таким образом, прямая  $AB$  является линией действия нагрузки. К чему приводит такая общепринятая схема силового расчета? Рассмотрим следующие вопросы:

### а) о раздвижке центров колес

Нормальную силу  $P''$ , приложенную в точке  $A$  касательно к основной окружности, переносят в полюс зацепления (если  $AB$  является линией действия нагрузки, то такой перенос является законным) и раскладывают на составляющие  $P'$  и  $Q'$  (рис. 5). Раскладывают также и силу  $P''$ , действующую на зуб первого колеса со стороны зуба второго колеса. Из полученных составляющих  $P'$  и  $P''$  являются окружными силами, а  $Q'$  и  $Q''$ —радиальными. При этом, если первое колесо является ведущим, вращение колес будет осуществляться в сторону  $P'$  и, наоборот, в сторону  $P''$ , если ведущим является второе колесо. Радиальные составляющие вызовут раздвижку центров колес.

Что  $P'$  или  $P''$  является вращающим усилием, это не вызывает сомнения. Но что радиальные силы  $Q'$  и  $Q''$  являются распорными силами, вызывающими раздвижку колес, с этим, конечно, согласиться нельзя. Наоборот, эти силы будут способствовать сближению центров, что ясно видно из рис. 6, где действие одного зуба на другой представлено в иной форме (поверхности зубьев могут скользить без нарушения контакта, что может привести к сближению, а не к раздвижке центров).

Таким образом, получается, что центры колес в действительности расходятся, но существующей схемой силового расчета это не подтверждается.

### б) о величине нормального давления

Как известно, с увеличением угла зацепления увеличивается пологость боковой поверхности зуба (у основания зуб расширяется, а вершина, наоборот, суживается). При значении  $\alpha = 90^\circ$  боковой профиль зуба сольется с начальной окружностью и, таким образом, вместо зубчатого зацепления получим касание двух дисков. Такие диски, ко-

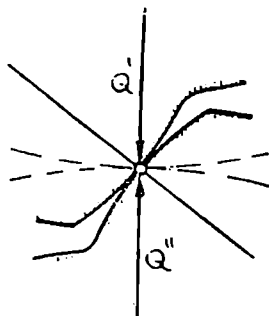


Рис. 6

нечно, не могут передать друг другу вращение, т. к. для этого по аналогии с фрикционной передачей необходимо наличие силы сцепления между дисками. Для создания же силы сцепления требуется наличие нормальных сил нажатия дисков друг на друга, а такие силы отсутствуют, так как к зубчатым колесам приложены только вращающие моменты, создающие лишь окружные усилия.

По существующей же схеме силового расчета, наоборот, получается, что один диск может передать движение другому, так как нормальные давления (т. е. силы нажатия дисков) приобретают даже бесконечно-большие значения и, следовательно, между дисками появятся силы сцепления больше чем достаточной (для передачи момента) величины.

### в) об отклонении усилия $P_n$

Принято утверждать, что при наличии трения полное усилие (давление, нормальная реакция) отклоняется от нормали на угол трения

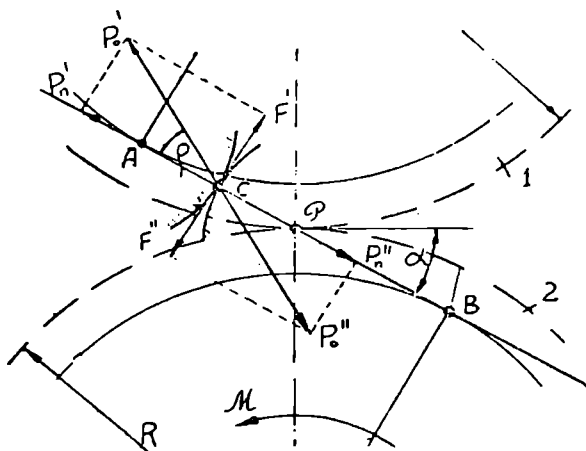


Рис. 7

$\rho$  и создает касательную силу трения  $F'$  (рис. 7). Здесь следует задать вопрос: что из себя представляет полное усилие и что именно отклоняется?

Если под усилием понимать внешнюю, действующую на зуб силу, то направление такой силы не зависит от силы трения и поэтому отклониться от своей линии действия не может. Если же под усилием

понимать давление или же нормальную реакцию, то, как известно, они всегда направлены нормально и никуда не отклоняются. Очевидно, речь идет о равнодействующей реакции  $P_0$ , которая является суммой нормальной реакции и силы трения (касательная реакция). Но откуда взялась сила трения? Где сдвигающая касательная сила, действие которой могло вызвать ее появление?

О действительном направлении усилия

Выше было отмечено, что давление одного зуба на другой определяется отношением действующего момента к радиусу основной окружности (рис. 5). Следовательно, полученное таким образом усилие  $P_n$  является окружным усилием, приложенным в точке  $A$  касательно к основной окружности, и если касание двух зубьев происходит именно в этой точке, то одновременно оно будет действующим на зуб (нормально) усилием.

В любой другой точке касания зубьев на линии зацепления будет приложена окружная сила, определяемая делением вращающего момента на расстояния  $O_1A_1$ ,  $O_1A_2$ , ..... и т. д. Эти усилия будут направлены касательно к окружностям соответствующих радиусов (рис. 8).

При такой схеме силового расчета налицо те касательные силы  $P_t$ , которые приводят к скольжению зубьев и тем самым создают силы трения (они направлены противоположно к соответствующим касательным силам). Эти же силы вызывают раздвижку центров колес (рис. 9).

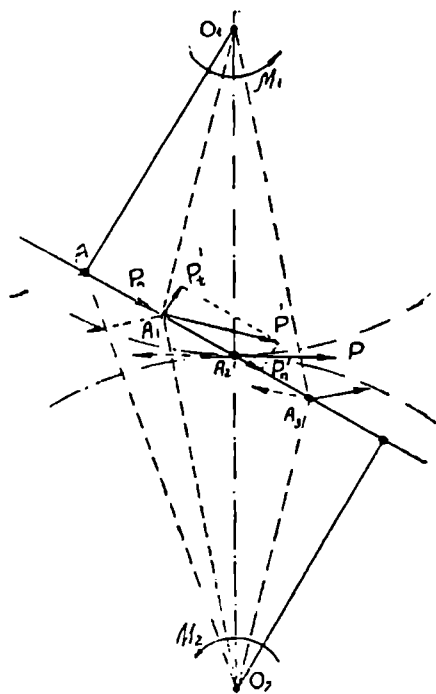


Рис. 8

При такой схеме значения сил определяются по выражениям:

$$P = \frac{M}{R}; \quad P_n = P \cos \alpha; \quad P_t = P \sin \alpha \quad \text{и} \quad A = P_t \cos \alpha.$$

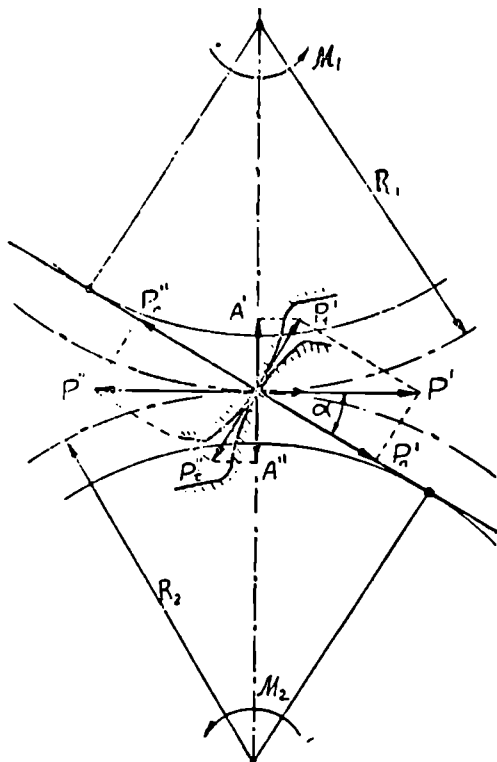


Рис. 9

Как видно из этой схемы силового расчета, линия по нормали к профилю (линия зацепления) является линией давления, но не линией действия сил взаимодействия зубьев.

*В. С. Готошя, М. Н. Махарадзе*

## К ВОПРОСУ ВЫБОРА ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ МЕХАНИЗМА ПОВОРОТА КРАНА

В механизмах подъема и перемещения статические усилия являются основными, поэтому расчет и выбор двигателя для этих механизмов производится с учетом лишь этих усилий.

Для механизма поворота, наоборот, статические усилия намного меньше динамических, а поэтому выбор двигателя должен производиться с учетом последних. При этом, мощность двигателя определяют или по статическому моменту сопротивления повороту крана от сил трения с последующей проверкой на перегрузку (по пусковому моменту) или же с учетом сил инерций от груза и поворотной части крана.

В первом случае по значению

$$N_{ст} = \frac{M_F \cdot n_{кр}}{975 \eta} \text{ квт,} \quad (1)$$

из каталогов выбирают электродвигатель, мощность которого в 2—3 раза больше мощности, полученной по формуле (1).

Во втором случае значение необходимой мощности электродвигателя определяется по формуле

$$N_{аб} = \frac{[M_F + (1,1 \div 1,3) M_{вн}] n_{кр}}{975 \eta \psi_{ср}} \text{ квт,} \quad (2)$$

где  $\psi_{ср} = 1,5—1,6$ —средний коэффициент перегрузки двигателя;

$M_F$ —статический момент сил сопротивления повороту;

$M_{вн}$ —динамический момент от веса груза и собственно  
го веса крана.

Известно, что выбранный двигатель должен обеспечивать разгон механизма; в то же время его мощность не должна быть чрезмерной, так как могут возникнуть большие ускорения, кроме того, двигатель повышенной мощности является экономически невыгодным.



Подсчеты показывают, что при выборе двигателя по первому способу может оказаться, что двигатель не в состоянии осуществить разгон механизма, в таких случаях приходится производить перерасчет до получения приемлемого результата. Это является существенным недостатком упомянутого метода выбора двигателя.

Более совершенным является второй способ выбора двигателя, однако в отличие от первого способа, здесь может оказаться, что выбранный двигатель будет иметь чрезмерный запас мощности.

Выбор двигателя, удовлетворяющего вышеотмеченным требованиям, считаем целесообразным производить по пусковому моменту, равному

$$M_{\text{пуск}} = \frac{M_F + 1,3 M_{\text{ин}}}{i \cdot \eta},$$

где коэффициент 1,3 учитывает увеличение динамического момента от веса груза и собственного веса крана, а с целью учета динамического момента вращающихся масс механизма (ротора, муфты и т. д.). При этом будем исходить не из среднего значения коэффициента перегрузки, а из табличных значений, как более точных и соответствующих условиям работы двигателя.

Из условия равенства пускового момента и максимального момента двигателя имеем

$$\frac{M_F + 1,3 M_{\text{ин}}}{i \cdot \eta} = \frac{(M_F + 1,3 M_{\text{ин}}) \cdot n_{\text{кр}}}{\eta \cdot n_{\text{ин}}} = M_{\text{мах}} = \psi M_{\text{ном}} = 975 \frac{N_{\text{дв}}}{n_{\text{ин}}},$$

откуда

$$\frac{(M_F + 1,3 M_{\text{ин}}) n_{\text{кр}}}{975 \cdot \eta} = \psi \cdot N_{\text{дв}}. \quad (3)$$

Определив значение левой части этой формулы и сравнив его со значением произведения  $\psi \cdot N_{\text{дв}}$ , подсчитанным для каждого двигателя (эти значения можно поместить в каталоге в виде дополнительного столбца), нетрудно выбрать двигатель соответствующей мощности.

В некоторых случаях (при больших мощностях порядка 40—50 квт и выше) полученную мощность следует проверить с учетом действительного значения динамических усилий от вращающихся масс механизма (в таких случаях маховые моменты ротора и муфты имеют большие значения).

Произведение  $\psi \cdot N_{\text{дв}}$  можно назвать характеристикой двигателя.

*Н. В. Кивиладзе*

## ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ НАВЕСКИ ЧАЕСБОРОЧНОЙ МАШИНЫ

От системы навески чаесборочной машины зависит оптимальное расположение рабочих органов относительно чайного куста, а также управление аппаратом по заранее заданному режиму.

Рассматриваемая система (рис. 1) состоит из звеньев 1 и 7, связанных с пружинами 8 и 9 вертикальных тяг 2 и 6, и силовых гидроцилиндров 3 и 5.

Штоки цилиндров приводятся в действие посредством специальной автоматической следящей системы, вследствие чего обеспечивается постоянное заглубление рабочих органов в чайный куст. При движении трактора на склоне центр тяжести аппарата выходит из плоскости симметрии куста  $Y-Y$  (рис. 1). Автоматическая следящая система получает сигнал от специального датчика, вследствие чего силовые гидроцилиндры устанавливают аппарат в новое положение относительно куста, сохраняя постоянство заглубления рабочих органов, при этом аппарат приводится в состояние равновесия, и гидроцилиндры запираются. Механизм получает одну степень свободы

$$W = 3n - 2P_b - P_f = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 = 1.$$

Цель нашей работы заключается в следующем:

- 1) определить реакции в кинематических парах;
- 2) опустить систему навески с целью уменьшения веса машины и улучшения условий обзора для тракториста;
- 3) подобрать оптимальные размеры звеньев системы навески с целью уменьшения несовпадения плоскостей симметрии куста и аппарата, приводящего к уменьшению необработанной поверхности куста и потери урожая.

Рассмотрим движение чаесборочной машины в двух случаях: 1) машина работает на  $10-15^\circ$ -ном склоне (рис. 1), 2) -плоскость симметрии аппарата смещена относительно плоскости симметрии куста на величину  $\Delta l$  (рис. 2) вследствие неточного управления трактором.

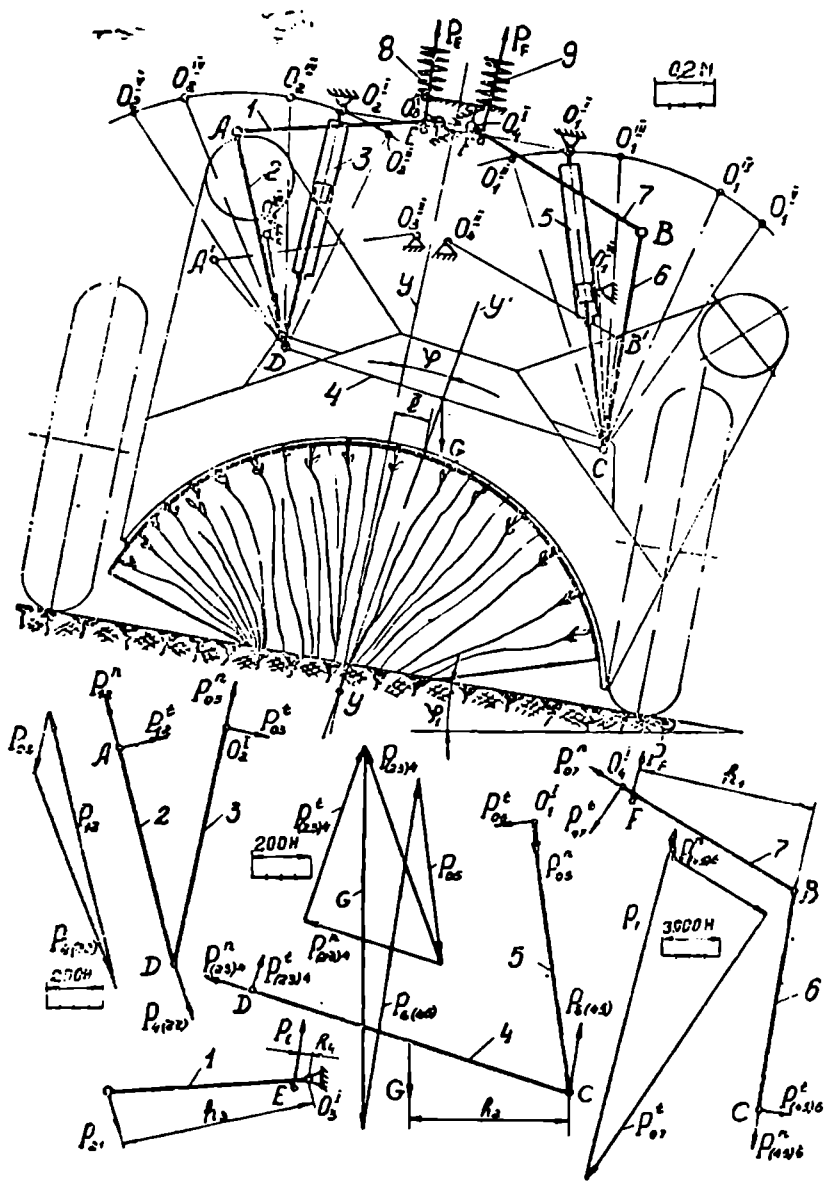


Рис. 1

В обоих случаях угол  $\varphi$  между плоскостью симметрии куста  $Y-Y'$  и плоскостью симметрии аппарата  $Y-Y'$  принимает различные значения. Аппарат примет состояние равновесия, когда приведенный

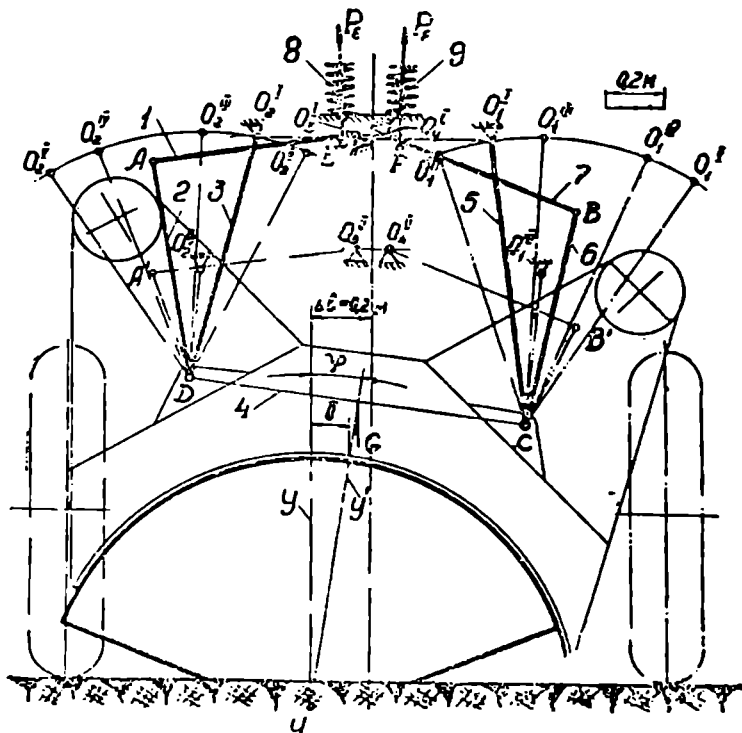


Рис. 2

к звену  $O_2^1 A$  момент от веса аппарата  $G$  и сил  $P_E$  и  $P_F$ , возникающих при сжатии пружин 8 и 9, окажется равным нулю.

В транспортном положении пружины поддерживают аппарат (на высоте 1,1 м от поверхности земли) массой 142 кг, которая соответствует силе 1400 н. Экспериментально было установлено, что для перемещения правильно отрегулированного аппарата, находящегося в верхнем положении (рис. 3), необходимо приложить к концу коромысла  $O_2^1 B$  (в точке  $B$ ) дополнительное усилие  $P_r = 150-200$  н. Тогда в начальном положении момент, развиваемый пружиной, составит

$$M_{пр} = P_E h = (P_r + G_1) h_1,$$

откуда

$$P_F = \frac{(P_0 + G_1) h_1}{h} = \frac{(200 + 720) 124}{12} = 9500 \text{ н},$$

где  $G_1$  — составляющая веса аппарата, действующая вдоль звена 6.

Следовательно, при верхнем положении аппарата каждая пружина должна развивать силу в 9500 н.

Соответствующая начальная деформация пружины равна

$$X_{0\text{пр}} = \frac{P_0 F}{K_{\text{пр}}},$$

где  $K_{\text{пр}}$  — коэффициент жесткости пружины;

$$K_{\text{пр}} = \frac{G d^4}{8 \pi D^3},$$

здесь  $G$  — модуль сдвига пружины;

$d$  — диаметр проволоки;

$n$  — число рабочих витков;

$D$  — средний диаметр;

Для существующих систем навески имеем

$$K_{\text{пр}} = \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,22^4}{8 \cdot 6 \cdot 0,118^3} = 252 \cdot 10^3 \frac{\text{н}}{\text{м}};$$

$$X_{0\text{пр}} = \frac{95 \cdot 10^3}{252 \cdot 10^3} = 0,38 \text{ м}.$$

Зависимость прироста дополнительной деформации пружины  $X_{\text{доп}}$  от угла поворота  $\alpha$  ( $\alpha$  на рисунках не указана) коромысла  $O_1 B$  приведена на рис. 4 (диаграмма построена с помощью графического исследования). Диаграмма соответствующих усилий  $P_F = (X_{0\text{пр}} + X_{\text{доп}}) K_{\text{пр}}$ , развиваемых пружинами, приведена на рис. 5.

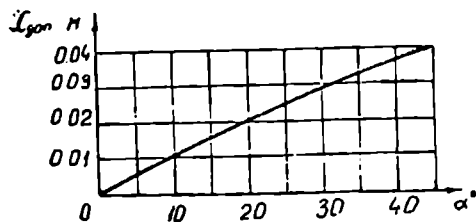


Рис. 4

При запертых цилиндрах система навески чаесборочной машины состоит (рис. 1, 2) из ведущего звена 1 и двухпроводковых групп Ассура (2—3, 4—5, 6—7).

Рассчитываем приведенный момент относительно точки  $O'_3$  (рис. 1) [1, 2]:

$$M_{np} = P_{12} \cdot h_3 - P_E h_4$$

для 4-х различных положений, при которых угол  $\varphi$  между плоскостями симметрии аппарата  $Y-Y'$  и кус-

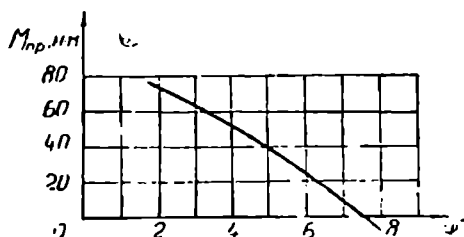


Рис. 6

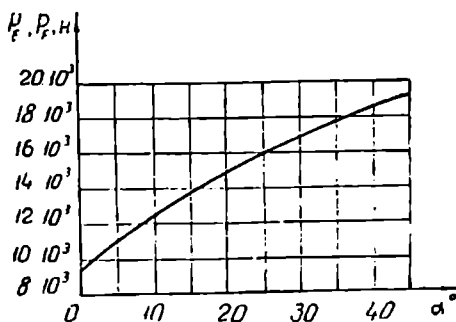


Рис. 5

та  $Y-Y'$  составляет 2, 4, 6 и 8 градусов.

Примем прямоугольную систему координат (рис. 6). По оси абсцисс будем откладывать угол поворота плоскости симметрии аппарата  $\varphi$ , а по оси ординат—значения величин приведенного момента  $M_{np}$ . По полученным точкам

строим кривую, пересечение которой с осью  $\varphi$  даст значение такого угла, при котором аппарат должен находиться в положении равновесия, т. е. в установившемся положении.

Для полученного значения угла строим схему системы навески и с помощью графоаналитического метода рассчитываем реакции в кинематических парах [1, 2]. Проверяем условие  $M_{np} = 0$  и устанавливаем величину смещения центрального пальца аппарата от центра симметрии куста. Вышеизложенным методом исследуем систему навески при различных положениях и сочетаниях длин звеньев (рис. 1, 2) и результаты заносим в таблицу.

Из полученных данных видно:

1. С увеличением угла между вертикальной тягой 6 и гидроцилиндром 5 поворот аппарата (смещение  $l$ ) относительно куста уменьшается.

Наименование варианта		Угол поворота звена, ° Об	Угол поворота $O_1A$ звена, ° ОА
Машина движется по 10°-му склопу	Существующая система не изменена $O_1^I AD O_2^I O_1^I CBO_4^I$	31°40'	23°10'
	Цилиндры установлены вертикально (положение $O_2^{III}; O_1^{III}$ )	30°10'	23°
	Верхние концы цилиндров повернуты к оси сим- метрии трактора (положение $O_2^{II}; O_1^{II}$ )	33°	23°20'
	Верхние концы цилиндров повернуты от оси сим- метрии трактора (положение $O_2^{IV}; O_1^{IV}$ )	29°	23°15'
	Верхние концы цилиндров повернуты от оси сим- метрии трактора (положение $O_2^V; O_1^V$ )	29°	23°15'
	Цилиндры установлены вертикально, уменьшено расстояние между точками сочленения на цилиндре и укорочены тяги (положение $O_3^{II} A^I DO_2^{VI} O_1^{VI} CB^I O_4^{II}$ )	26°30'	23°30'
Плоскость симметричной матрицы сме- щена относительно плоскости сим- метрии куста на расстояние 0,2 м	Существующая система не изменена $O_2^I AD O_2^I O_1 CBO_4^I$	32°	19°
	Верхние концы цилиндров повернуты к оси сим- метрии трактора (положение $O_2^{II}; O_1^{II}$ )	32°15'	19°
	Цилиндры установлены вертикально (положение $O_2^{III}; O_1^{III}$ )	33°	18°30'
	Верхние концы цилиндров повернуты от оси сим- метрии трактора (положение $O_2^{IV}; O_1^{IV}$ )	34°40'	18°
	Верхние концы цилиндров повернуты от оси сим- метрии трактора (положение $O_2^V; O_1^V$ )	33°30'	18°10'
	Цилиндры установлены вертикально, уменьшено расстояние между точками сочленения на цилиндре и укорочены тяги (положение $O_3^{II} A^I D O_2^{VI} O_1^{VI} CB^I O_4^{II}$ )	33°30'	20°
Машина движет- ся по 15°-му склопу	Существующая система не изменяется (положение $O_2^I A D O_2^I O_1^I CBO_4^I$ )	34°	23°20'
	Цилиндры установлены вертикально, уменьшено расстояние между точками сочленения на цилиндре и укорочены тяги (положение $O_3^{II} A^I D O_2^{VI} O_1^{VI} CB^I O_4^{II}$ )	27°	25°

Таблица

Усилие, развивае- мое пружиной, Р <sub>ФП</sub>	Угол поворота плоскостя сматриной аппаратуры относительно пл. см. куста, φ	Смещение центр. планки аппарата относ. плоскостя симметрич куста, l, мм	Усилие, развивае- мое пружиной, Р <sub>ФП</sub>	Силы реакций в пневматических портах, и.							
				R <sub>01</sub>	R <sub>02</sub>	R <sub>12</sub>	R <sub>0(24)</sub>	R <sub>04</sub>	R <sub>1(23)</sub>	R <sub>03</sub>	R <sub>13</sub>
17200	7°30'	0,118	15600	16100	700	128	1300	700	850	270	1120
17100	7°	0,11	15550	16000	638	125	1280	640	800	300	1100
17500	8°40'	0,183	15640	16500	800	1320	1320	800	930	240	1150
16800	5°20'	0,083	15620	15450	480	1240	1240	500	700	500	1130
16800	5°20'	0,083	15620	15300	670	1240	1240	680	920	560	1130
16150	3°20'	0,052	15670	15000	400	1100	1100	400	890	280	1180
17250	8°30'	0,133	14700	16250	420	1160	1260	420	790	350	1110
17300	8°35'	0,135	14700	16310	440	1170	1170	440	820	370	1100
17500	8°40'	0,138	14460	16350	410	1120	1120	410	760	330	1080
17800	9°30'	0,149	1440	16700	410	1040	1040	410	700	460	1120
17650	9°15'	0,144	14450	16470	420	1080	1080	420	720	380	1090
17650	2°30'	0,036	14900	16520	420	1070	1070	420	700	420	1100
17600	14°	0,220	15600	15850	600	1230	1230	600	880	350	1130
16300	9°	0,140	16000	15100	470	1120	1120	4700	960	290	1220



2. С поворотом верхних концов гидроцилиндров от вертикального положения вовнутрь поворот (смещение  $l$ ) аппарата увеличивается, а при повороте в обратную сторону—уменьшается.

3. С уменьшением расстояния между точками крепления цилиндра на раме и аппарате и укорочением длин вертикальных тяг угол между осью цилиндра и тягой увеличивается. Это позволяет укоротить раму навески, увеличить поле видимости тракториста и уменьшить поворот (смещение  $l$ ) аппарата. Наиболее оптимальной оказывается схема, при которой расстояние между точками крепления системы навески и аппарата на цилиндре будет минимальным, а длина вертикальных тяг окажется в пределах 350—450 мм.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин. Москва, 1953.
  2. Юдин В. А. Проектирование кинематических схем механизмов. Москва, 1963.
-

*В. Ш. Натобилдзе*

### НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ НАМОТОЧНОГО ПРИВОДА

Предметом нашего исследования является один из основных узлов проволоконамоточного привода (рис. 1) наиболее распространенного волоочильного станка С212М.

Для уменьшения обрывности привод должен обеспечивать постоянную скорость и одинаковое натяжение в процессе намотки проволоки на катушку. Это является довольно сложной задачей, поскольку в процессе намотки изменяются различные параметры, в частности, изменение диаметра намотки сопровождается изменением окружной скорости, массы, моментов инерции, координат центра тяжести и др. [1].

Большое влияние на постоянство скорости и натяжения оказывает электромагнитная муфта, встроенная в привод (рис. 1) и предназначенная для изменения чисел оборотов катушки в процессе намотки.

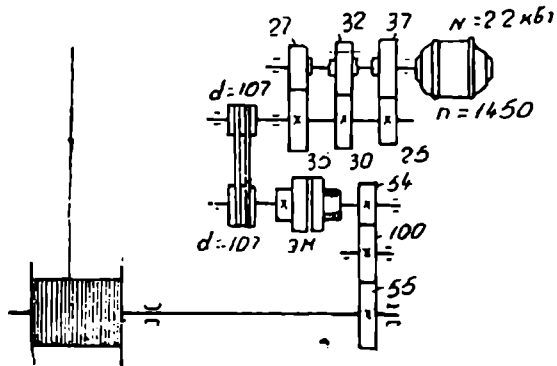


Рис. 1

При исследовании динамики проволоконамоточного привода, в первую очередь, необходимо определить основные характеристики муфты, а именно, зависимости числа оборотов и степени проскальзывания ведомой полумуфты от нагрузки. Для определения этих характеристик надо шпинделю катушки приложить тормозной момент различной величины.

Принципиальная схема экспериментального стенда для определения характеристик  $n=f_1(m)$  и  $S=f_2(m)$  представлена на рис. 2.

Полумуфта 1 от электродвигателя и трехступенчатой коробки скоростей получает три фиксированные скорости: 13 м/сек (1070 об/мин), 18 м/сек (1560 об/мин) и 25 м/сек (2080 об/мин).

Полумуфта 2, в зависимости от создаваемого грузом 4 тормозного момента на катушке 3 и от величины подаваемого напряжения к

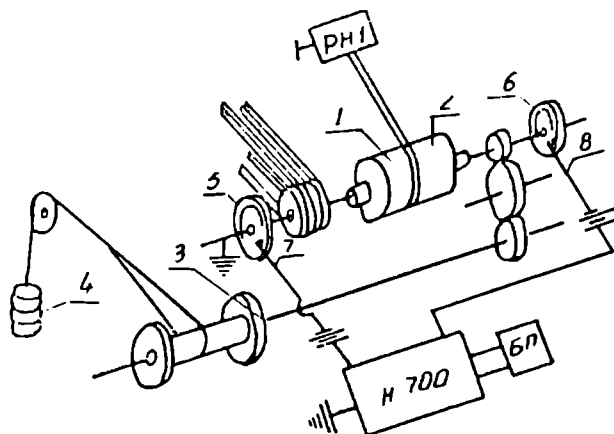


Рис. 2

электромагнитной муфте (напряжение меняется с помощью регулятора напряжения РН1), вращается с переменной скоростью.

С целью повышения точности подсчета числа оборотов полумуфт на резьбовых концах валов установлены два диска 5 и 6, на торцевых

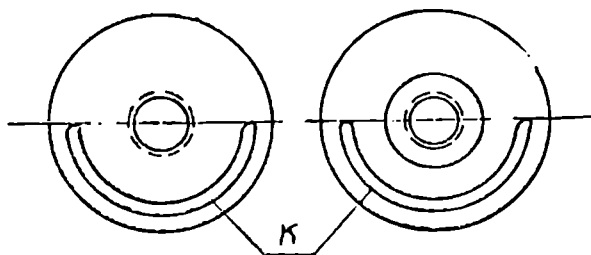


Рис. 3

поверхностях которых вырезаны канавки К (рис. 3) с углом обхвата в 180°. Электроконтакты 7 и 8, установленные от центров дисков на

расстоянии, равном радиусам канавок, и включенные в сеть осциллографа Н-700, дают возможность разрывать электрическую цепь на пол-обороте диска. Таким образом, можно вести отсчет с точностью 0,5 об/сек.

Как было отмечено, объектом испытания был выбран тонковолоочильный станок С212М. Скорость ленты осциллографа при записи была равна 16 м/сек.

Эксперименты проводились в следующей последовательности:

1. При постоянном (80 в) напряжении электромагнитной муфты нагрузка менялась в пределах 7,10÷17 кгм, а при каждой нагрузке скорость ведущей полушестерни составляла 13, 18 и 25 м/сек.

Результаты экспериментов сведены в табл. 1.

Таблица 1

Число оборотов, оцирующая скорость, и проскльзывание	Нагрузка, кгм								
	7			10			17		
	Окружная скорость полушестерни								
	13	18	25	13	18	25	13	18	25
$n_1$	1065	1500	2080	1065	1500	2080	1065	1500	2080
$\omega_1$	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7
$n_2$	1057	1489	2065	1050	1478	2050	1035	1458	2020
$\omega_2$	110,6	155,6	216,1	109,9	154,6	214,6	108,3	152,5	211,4
$S\%$	0,75	0,73	0,72	1,41	1,46	1,43	2,81	2,8	2,87

На рис. 4 приведена типовая осциллограмма, записанная для на-

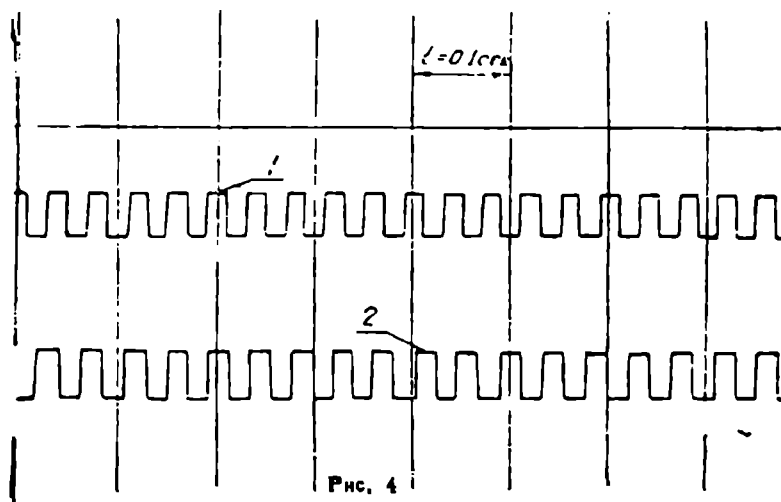


Рис. 4

грузки 7 кг при скорости ведущей полушестерни 13 м/сек. На осциллограмме прерывистые линии 1 и 2 показывают числа оборотов соответственно ведущей и ведомой полушестерни.

На рис. 5 изображен график зависимости числа оборотов  $n_2$  ведомой полушестерни от величины тормозного момента, построенный по данным табл. 1.

На рис. 6 изображена зависимость между проскальзыванием и нагрузкой  $S = f_2(m)$ .

Под проскальзыванием подразумевается

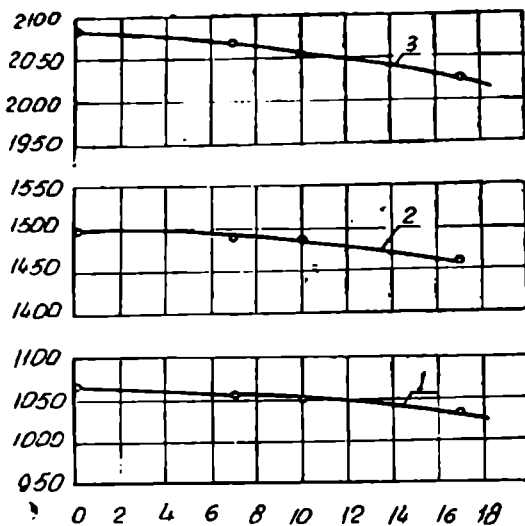


Рис. 5

$$S = \frac{n_1 - n_2}{n_1} 100\%,$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — числа оборотов ведущей и ведомой полушестерни в минуту.

Принято, что проскальзывание до нагрузки при холостом ходе равно нулю.

2. При последовательном изменении напряжения (60 в и 40 в) ступенчато в электромагнитной муфте нагрузка менялась в пределах 3, 5, 7, 9 и 12 кг при тех же значениях скоростей. Полученные данные приведены в табл. 2.

Достижение желаемого напряжения осуществлялось поворотом рычага регулятора вручную по заранее градуированной шкале. Изменения напряжения при экспериментах фиксировались вольтметром.

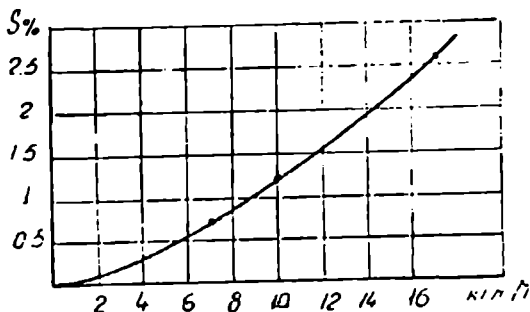


Рис. 6

Таблица 2

Число оборотов, угловая ско- рость и про- дуктивность	И д г р у з а к а, к г м											
	3			5			7			9		
	13	19	25	13	19	25	13	19	25	13	19	25
	Окружная скорость в д л м / ф т											
$\omega_1$	1065	1500	2080	1065	1500	2080	1065	1500	2080	1065	1500	2080
	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7
$\omega_2$	1062	1496	2075	1060	1493	2072	1057	1489	2065	1050	1478	2050
	111,2	156,5	217,1	110,9	156,2	216,8	110,6	155,6	216,1	109,9	154,6	214,6
$S_1$	0,28	0,26	0,24	0,46	0,46	0,4	0,75	0,73	0,72	1,41	1,46	1,43
	1050	1478	2050	1035	1458	2020	990	1394	1930	945	1332	1850
	109,9	151,6	214,6	108,3	152,5	211,4	103,6	145,8	202,6	98,9	139,3	193,7
$S_2$	1,41	1,46	1,43	2,81	2,8	2,87	7,09	7,03	7,1	11,26	11,2	11
	1035	1458	2020	1005	1415	1960	945	1332	1850	885	1250	1735
	108,3	152,5	211,4	105,2	148	205,1	98,9	139,3	193,7	92,6	130,7	181,6
$\omega_3$	2,81	2,8	2,87	5,61	5,66	5,7	11,26	11,2	11	16,88	16,6	16,54
	1065	1500	2080	1065	1500	2080	1065	1500	2080	1065	1500	2080
	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7
	1062	1496	2075	1060	1493	2072	1057	1489	2065	1050	1478	2050
	111,2	156,5	217,1	110,9	156,2	216,8	110,6	155,6	216,1	109,9	154,6	214,6
	0,28	0,26	0,24	0,46	0,46	0,4	0,75	0,73	0,72	1,41	1,46	1,43
	1050	1478	2050	1035	1458	2020	990	1394	1930	945	1332	1850
	109,9	151,6	214,6	108,3	152,5	211,4	103,6	145,8	202,6	98,9	139,3	193,7
	1,41	1,46	1,43	2,81	2,8	2,87	7,09	7,03	7,1	11,26	11,2	11
	1035	1458	2020	1005	1415	1960	945	1332	1850	885	1250	1735
	108,3	152,5	211,4	105,2	148	205,1	98,9	139,3	193,7	92,6	130,7	181,6
$S_3$	2,81	2,8	2,87	5,61	5,66	5,7	11,26	11,2	11	16,88	16,6	16,54
	1065	1500	2080	1065	1500	2080	1065	1500	2080	1065	1500	2080
	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7
	1062	1496	2075	1060	1493	2072	1057	1489	2065	1050	1478	2050
	111,2	156,5	217,1	110,9	156,2	216,8	110,6	155,6	216,1	109,9	154,6	214,6
	0,28	0,26	0,24	0,46	0,46	0,4	0,75	0,73	0,72	1,41	1,46	1,43
	1050	1478	2050	1035	1458	2020	990	1394	1930	945	1332	1850
	109,9	151,6	214,6	108,3	152,5	211,4	103,6	145,8	202,6	98,9	139,3	193,7
	1,41	1,46	1,43	2,81	2,8	2,87	7,09	7,03	7,1	11,26	11,2	11
	1035	1458	2020	1005	1415	1960	945	1332	1850	885	1250	1735
	108,3	152,5	211,4	105,2	148	205,1	98,9	139,3	193,7	92,6	130,7	181,6
	2,81	2,8	2,87	5,61	5,66	5,7	11,26	11,2	11	16,88	16,6	16,54
	1065	1500	2080	1065	1500	2080	1065	1500	2080	1065	1500	2080
	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7
	1062	1496	2075	1060	1493	2072	1057	1489	2065	1050	1478	2050
	111,2	156,5	217,1	110,9	156,2	216,8	110,6	155,6	216,1	109,9	154,6	214,6
	0,28	0,26	0,24	0,46	0,46	0,4	0,75	0,73	0,72	1,41	1,46	1,43
	1050	1478	2050	1035	1458	2020	990	1394	1930	945	1332	1850
	109,9	151,6	214,6	108,3	152,5	211,4	103,6	145,8	202,6	98,9	139,3	193,7
	1,41	1,46	1,43	2,81	2,8	2,87	7,09	7,03	7,1	11,26	11,2	11
	1035	1458	2020	1005	1415	1960	945	1332	1850	885	1250	1735
	108,3	152,5	211,4	105,2	148	205,1	98,9	139,3	193,7	92,6	130,7	181,6
	2,81	2,8	2,87	5,61	5,66	5,7	11,26	11,2	11	16,88	16,6	16,54
	1065	1500	2080	1065	1500	2080	1065	1500	2080	1065	1500	2080
	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7
	1062	1496	2075	1060	1493	2072	1057	1489	2065	1050	1478	2050
	111,2	156,5	217,1	110,9	156,2	216,8	110,6	155,6	216,1	109,9	154,6	214,6
	0,28	0,26	0,24	0,46	0,46	0,4	0,75	0,73	0,72	1,41	1,46	1,43
	1050	1478	2050	1035	1458	2020	990	1394	1930	945	1332	1850
	109,9	151,6	214,6	108,3	152,5	211,4	103,6	145,8	202,6	98,9	139,3	193,7
	1,41	1,46	1,43	2,81	2,8	2,87	7,09	7,03	7,1	11,26	11,2	11
	1035	1458	2020	1005	1415	1960	945	1332	1850	885	1250	1735
	108,3	152,5	211,4	105,2	148	205,1	98,9	139,3	193,7	92,6	130,7	181,6
	2,81	2,8	2,87	5,61	5,66	5,7	11,26	11,2	11	16,88	16,6	16,54
	1065	1500	2080	1065	1500	2080	1065	1500	2080	1065	1500	2080
	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7
	1062	1496	2075	1060	1493	2072	1057	1489	2065	1050	1478	2050
	111,2	156,5	217,1	110,9	156,2	216,8	110,6	155,6	216,1	109,9	154,6	214,6
	0,28	0,26	0,24	0,46	0,46	0,4	0,75	0,73	0,72	1,41	1,46	1,43
	1050	1478	2050	1035	1458	2020	990	1394	1930	945	1332	1850
	109,9	151,6	214,6	108,3	152,5	211,4	103,6	145,8	202,6	98,9	139,3	193,7
	1,41	1,46	1,43	2,81	2,8	2,87	7,09	7,03	7,1	11,26	11,2	11
	1035	1458	2020	1005	1415	1960	945	1332	1850	885	1250	1735
	108,3	152,5	211,4	105,2	148	205,1	98,9	139,3	193,7	92,6	130,7	181,6
	2,81	2,8	2,87	5,61	5,66	5,7	11,26	11,2	11	16,88	16,6	16,54
	1065	1500	2080	1065	1500	2080	1065	1500	2080	1065	1500	2080
	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7	111,5	157	217,7
	1062	1496	2075	1060	1493	2072	1057	1489	2065	1050	1478	2050
	111,2	156,5	217,1	110,9	156,2	216,8	110,6	155,6	216,1	109,9	154,6	214,6
	0,28	0,26	0,24	0,46	0,46	0,4	0,75	0,73	0,72	1,41	1,46	1,43
	1050	1478	2050	1035	1458	2020	990	1394	1930	945	1332	1850
	109,9	151,6	214,6	108,3	152,5	211,4	103,6	145,8	202,6	98,9	139,3	193,7
	1,41	1,46	1,43	2,81	2,8	2,87	7,09	7,03	7,1	11,26	11,2	11
	1035	1458	2020	1005	1415	1960	945	1332	1850	885	1250	1735
	108,3	152,5	211,4	105,2	148	205,1	98,9	139,3	193,7	92,6	130,7	181,6
	2,81	2,8	2,87	5,61	5,66	5,7	11,26	11,2	11	16,88	16,6	16,54

Примечание: 1. Индексом „1“ обозначены числа оборотов и угловая скорость ведущей полушестерни, а индексом „2“ — ведомой. 2.  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_1', \omega_2', \omega_3', \omega_1'', \omega_2'', \omega_3''$  — числа оборотов и угловые скорости ведомой полушестерни соответственно при напряжениях 80, 60 и 40 вольт. 3.  $S_1, S_2$  и  $S_3$  — соответствующие проскальзывания при напряжениях 80, 60 и 40 вольт.

Нагрузка на катушке, создаваемая грузом, представляется в виде тормозного момента

$$M_{\tau} = G L,$$

где  $G$  — вес груза;

$L = 1$  м — плечо действия груза.

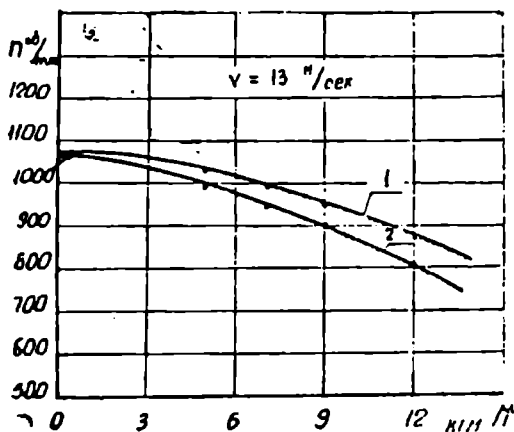


Рис. 7

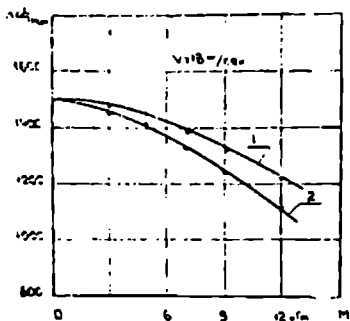


Рис. 8

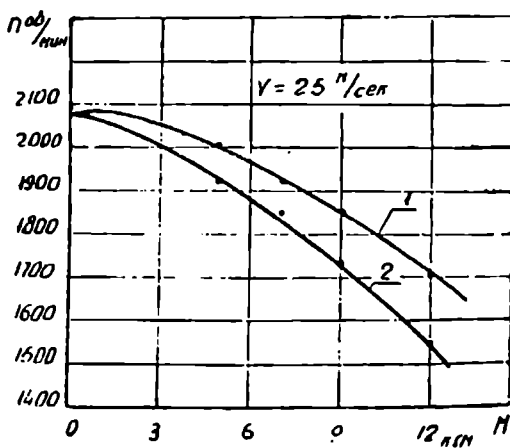


Рис. 9

Каждый этап экспериментов повторялся  $5 \div 6$  раз, а результаты брали как среднее арифметическое значение. Следует отметить, что расхождения замеров отличались друг от друга незначительно.

На рис. 7, 8 и 9 показаны зависимости между числами оборотов ведомой полумуфты и тормозным моментом при соответствующих скоростях и напряжениях.

Зависимость между проскальзыванием и тормозным моментом для трех значений напряжений и скоростей показана на рис. 10.

На рис. 7, 8, 9 и 10 кривые 1 записаны при напряжении  $U=60$  вольт, а кривые 2 при напряжении  $U=40$  вольт.

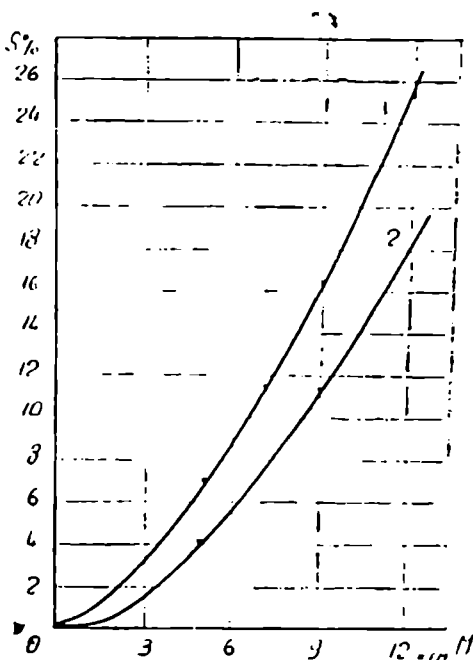


Рис. 10

## Выводы

1. Число оборотов ведомой полумуфты в зависимости от повышения приложенной нагрузки уменьшается по параболическому закону.
2. Увеличение нагрузки до 5 кг вызывает почти пропорциональное увеличение проскальзывания. Дальнейшее повышение нагрузки сопровождается мгновенным увеличением проскальзывания.
- Для данной муфты оптимальной можно считать нагрузку в 5-6 кг.
3. Окружная скорость ведущей полумуфты оказывает незначительное влияние на проскальзывание.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Езпкашвили О. С., Натбиладзе В. Ш. Определени переменных параметров приода намотки стапка С212М. Труды ГПИ им. В. И. Ленина, № 8, 1968.
  2. Бессонов А. П. Основы динамики механизмов с переменной массой зпепев. „Наука“, Москва, 1967.
-

*А. И. Осипова*

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СИНТЕЗА ШЕСТИЗВЕННЫХ ШАРНИРНО-РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ С ДВУМЯ ДВОЙНЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ ВЕДОМОГО ЗВЕНА ЗА ЦИКЛ

Простейшими механизмами, осуществляющими два двойных хода или качания ведомого звена за один оборот ведущего кривошипа, являются шестизвенные шарнирно-рычажные механизмы с шарнирным четырехзвенником в основе, к шарниру *B* и к стойке которого присоединяется вторая диада с одним или двумя ползунами (рис. 1) или с тремя вращательными парами (рис. 2).

В качестве основного четырехзвенника может быть использован кривошипно-коромысловый механизм, кривошипно-кулисный механизм с качающейся кулисой или кривошипно-ползунный механизм. При этом, для получения двух двойных движений ведомого звена за цикл в механизмах данного типа используется траектория точки *B* четырехзвенника, причем, для получения двух одинаковых двойных движений ведомого звена необходимое взаимное расположение звеньев показано на рис. 1, 2 с левой стороны, а взаимное расположение звеньев, необходимое для получения двух разных двойных ходов или качаний ведомого звена, соответствующих заданным положениям реверсирования, показано на рис. 1, 2 справа.

Решим для приведенных на рис. 1, 2 схем механизмов задачу определения размеров звеньев механизма по заданным величинам двойных ходов или углов качаний ведомого звена.

Рассмотрим сперва решение этой задачи для механизма с двумя одинаковыми двойными ходами ведомого ползуна, с величиной хода  $ll$  (рис. 1а), причем, добавочным требованием к механизму поставим условие равенства времени обоих двойных ходов ведомого звена. Наилучшим относительным расположением звеньев механизма (в смысле наиболее благоприятных углов передачи) является показанное на рис. 1а и 3 расположение, при котором линия движения ползуна  $U$

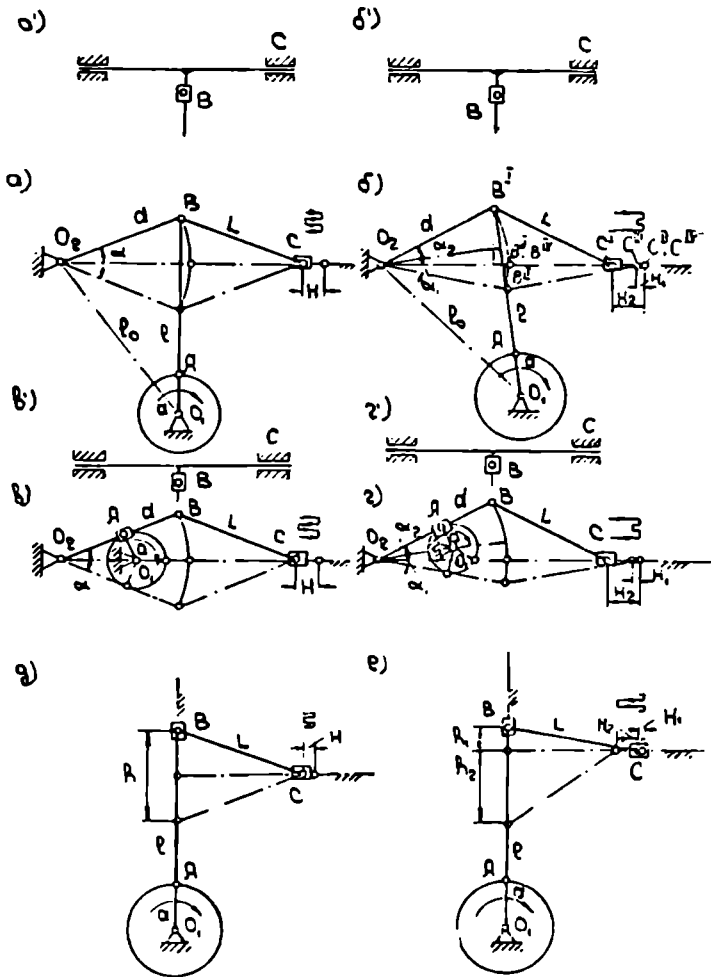


Рис. 1

проходит через центр вращения  $O_2$ , коромысла  $O_2B$  и является осью симметрии для его крайних положений.

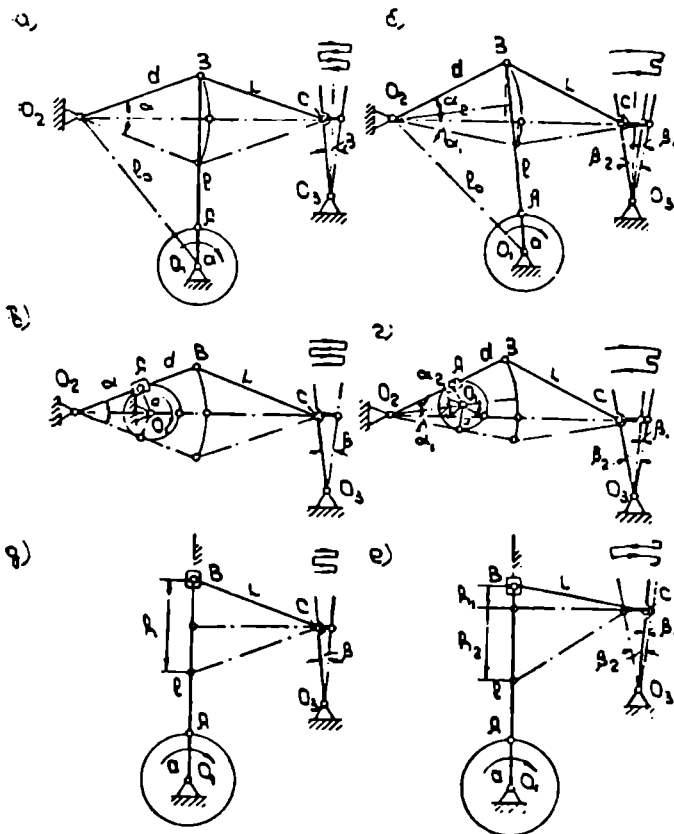


Рис. 2

Если задаться длиной  $d$  коромысла  $O_2B$  и длиной  $L$  шатуна  $BC$  в зависимости от конструктивных соображений или соображений полу-

чения наиболее благоприятного угла передачи  $\gamma_{15}$ , который тем больше, чем больше  $L$  при одних и тех же остальных размерах механизма,

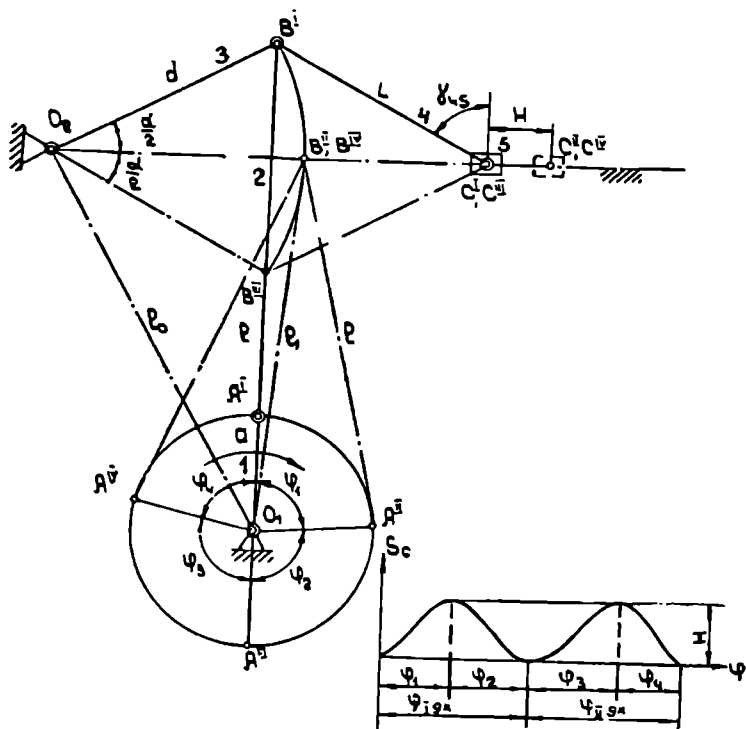


Рис. 3

то стойка  $O_2$  должна находиться на расстоянии  $O_2C^{II} = d + L$  от точки  $C^{II}$ , и угол качания коромысла  $\alpha$  может быть определен по формуле

$$\alpha = 2 \arcsin \cos \left[ 1 - \frac{H(2L-H)}{2d(d+L-H)} \right]. \quad (1)$$

В связи с тем, что в применяемых в нашем случае кривошипно-коромысловых механизмах угол качания коромысла  $\alpha$  должен быть больше  $0^\circ$  и меньше  $180^\circ$ , выбранные  $d$  и  $L$  при заданной  $H$  должны удовлетворять соотношению

$$1 > \frac{H(2L-H)}{2d(d+L-H)} > 0. \quad (2)$$

Дальнейшая задача проектирования размеров механизма сводится

к определению размеров звеньев кривошипно-коромыслового механизма по известной длине  $d$  коромысла  $O_2B$  и заданным его крайним положениям и решается обычным методом. Так как в нашем случае время обоих двойных ходов предполагается одинаковым, т. е.  $T_{I\rightarrow II} = T_{II\rightarrow I}$ , то центр вращения  $O_I$  кривошипа  $O_1A$  должен быть выбран на продолжении прямой  $B^I B^{III}$ ; при этом, длина кривошипа

$$a = d \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (3)$$

а длина стойки  $l_0$  при произвольно выбранной длине  $l$  шатуна  $AB$

$$l_0 = \sqrt{l^2 + d^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (4)$$

Если помимо равенств времени обоих двойных ходов, добавочным условием проектирования ставится задача выполнения обоих двойных ходов с наперед заданным и одинаковым коэффициентом  $k$  изменения средней скорости ведомого звена, т. е. если должно быть выдержано условие

$$k_I = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = k_{II} = \frac{\varphi_3}{\varphi_4} = \frac{90^\circ + \theta}{90^\circ - \theta} = k, \quad (5)$$

где через  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  и  $\varphi_4$  обозначены соответствующие углы поворота кривошипа  $O_1A$  (рис. 4), то в этом случае расположение звеньев, приведенное на рис. 3, невозможно, так как для выполнения условия (5) необходимо, чтобы  $\angle B^{II}O_1A^{II} = \angle B^{IV}O_1A^{IV} = 90^\circ$  (5'), что в данном случае возможно лишь при  $\alpha = 0$ . Поэтому для выполнения условий (5) и (5') необходимо линию  $O_2C^{II}$  наклонить относительно линии движения ползуна на такой угол  $\delta$  (рис. 4), при котором  $\angle C^I O_2 C^{II} = \angle B^I O_1 B^{III} = \theta$ .

Угол  $\delta$  определяется из  $\Delta O_2 C^I C^{II}$  с помощью соотношения

$$\sin(\delta + \theta) = \frac{d+L}{H} \sin \theta, \quad (6)$$

где

$$\theta = 90^\circ \frac{k-1}{k+1}. \quad (7)$$

Задача проектирования механизма в этом случае сводится к определению размеров звеньев по заданной величине хода  $H$  и коэффи-

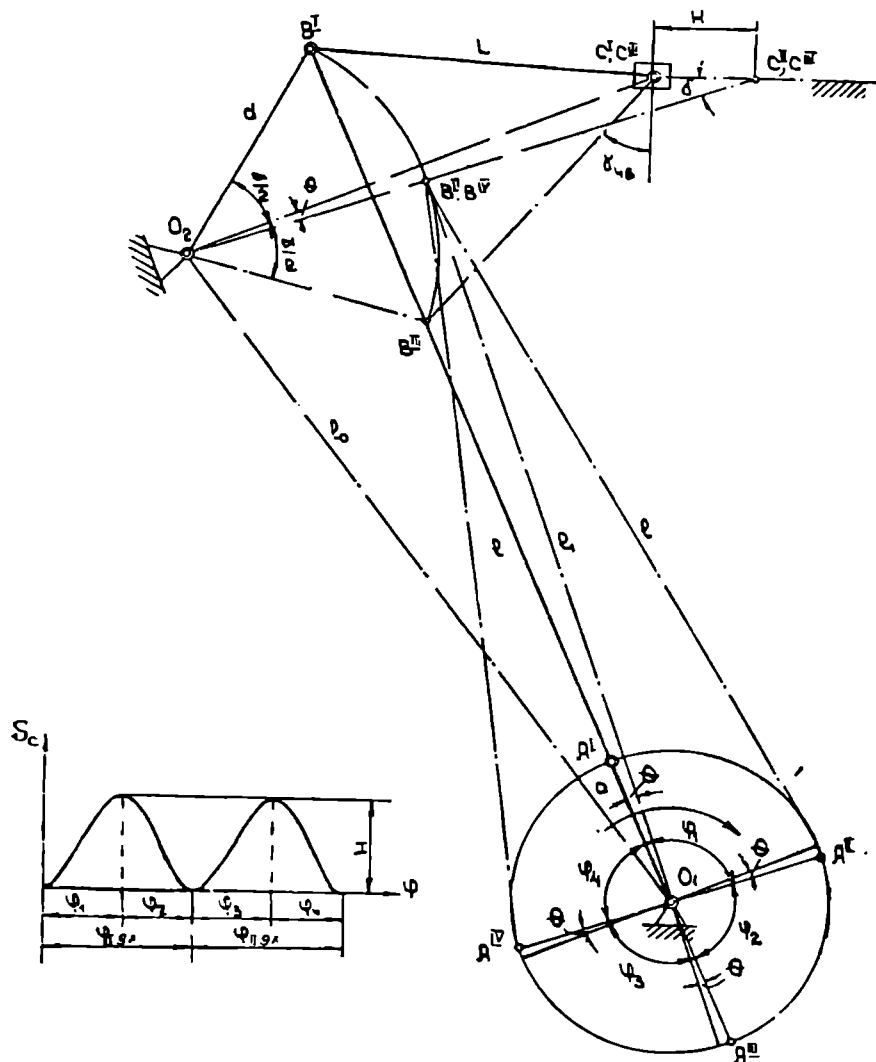


Рис. 4

циенту изменения средней скорости обоих двойных ходов  $k_I = k_{II} = k$ . Для ее решения по заданному  $k$  определяем по формуле (7) угол  $\theta$  и, задаваясь длинами  $d$  и  $L$ , находим угол наклона  $\delta$  прямой  $O_2C^{II}$  к линии движе-

ния ползуна по формуле (6). Далее рассчитываем угол качания  $\alpha$  коромысла  $O_2B$  по формуле

$$\alpha = 2 \arccos \frac{H^2 \sin^2 \delta - (L^2 - d^2) \sin^2 \theta}{2 d H \sin \delta \sin \theta}. \quad (8)$$

Выбранные длины  $d$  и  $L$  и полученные углы  $\delta$  и  $\alpha$  должны быть скорректированы в зависимости от величины предельного угла передачи для ведомого ползуна  $C$  в III положении механизма, а именно, должно быть выдержано условие  $\gamma_{45} > \gamma_{45 \min} \approx 40^\circ$ . Длина кривошипа  $a$  и стойки  $l_0$  определяются по формулам (3, 4), что же касается длины шатуна  $l$ , то ее, в отличие от предыдущего случая, нельзя брать произвольной, а необходимо определить из соотношения

$$l^2 = a^2 + l_1^2 = a^2 + \left( l - d \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \theta \right)^2 \cos^2 \theta,$$

которое после ряда математических преобразований приводится к формуле

$$l = \frac{-d \cos \frac{\alpha}{2} \cos \theta \pm \sqrt{d^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + a^2}}{\sin \theta}. \quad (9)$$

Коэффициент изменения средней скорости обоих ходов  $k$  не может быть взят особенно большим, так как его ограничивает предельное значение угла  $\theta$ , определяемое из условия

$$\theta \leq \arcsin \frac{H}{d+L}. \quad (10)$$

Соотношение (10) получается из (6), в котором принято  $\sin(\delta + \theta) \leq 1$ . Кроме этого, увеличение угла  $\delta$ , имеющее место при увеличении  $\theta$ , приводит к значительному уменьшению угла передачи  $\gamma_{45}$  в III положении механизма. Поэтому желательны небольшие  $k$  порядка  $k \approx 1,1$ .

В случае двух двойных ходов различной  $H_1$  и  $H_2$  величины и при прохождении линии движения ползуна через точку  $O_2$  (рис. 16) углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяются из соотношений

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \arccos \left[ 1 - \frac{H_1(2L - H_1)}{2d(d + L - H_1)} \right], \\ \alpha_2 &= \arccos \left[ 1 - \frac{H_2(2L - H_2)}{2d(d + L - H_2)} \right], \end{aligned} \right\} \quad (11)$$



а для  $a$  и  $l_0$  при расположении  $O_1$  на продолжении прямой  $B^I B^{II}$  и подобранном произвольно  $l$  имеем

$$a = d \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad (12)$$

$$l_0 = \sqrt{l^2 + d^2 \cos^2 \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}. \quad (13)$$

Выведенные выше формулы 1÷4, 11÷13 могут быть в принципе применены и для механизмов, приведенных на рис. 2а, б, у которых ведомое коромысло совершает два качательных движения за цикл, если предположить симметричное расположение крайних положений коромысла  $O_3C$  для углов  $\beta$  (рис. 2а) и  $\beta_2$  (рис. 2б) относительно прямой, проходящей через  $O_3$ , перпендикулярно  $O_2C$ . При этом имеем

$$\alpha = 2 \arccos \left[ 1 - \frac{2l_{O_3C} \left( L - l_{O_3C} \sin \frac{\beta}{2} \right) \sin \frac{\beta}{2}}{d \left( d + L - 2l_{O_3C} \sin \frac{\beta}{2} \right)} \right], \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &\approx \arccos \left[ 1 - \frac{l_{O_3C} \beta (2L - l_{O_3C} \beta)}{2d(d + L - l_{O_3C} \beta)} \right], \\ \alpha_2 &= \arccos \left[ 1 - \frac{2l_{O_3C} \left( L - l_{O_3C} \sin \frac{\beta_2}{2} \right) \sin \frac{\beta_2}{2}}{d \left( d + L - 2l_{O_3C} \sin \frac{\beta_2}{2} \right)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Соотношения 1, 11 и 14,15 могут быть применены и для схем 1в, г и 2в, г, в основе которых лежит кривошипно-кулисный механизм с качающейся кулисой.

Для схем 1д, е и 2д, е, у которых в качестве исходного четырехзвенника применен центральный кривошипно-ползунный механизм, имеем

$$a = \frac{h}{2} = \sqrt{H(2L - H)} \quad (\text{схема 1д}) \quad (16)$$

$$a = \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{\sqrt{H_1(2L - H_1)} + \sqrt{H_2(2L - H_2)}}{2} \quad (\text{схема 1е}) \quad (17)$$

$$a = \frac{h}{2} = 2 \sqrt{l_{O_3C} \left( L - l_{O_3C} \sin \frac{\beta}{2} \right) \sin \frac{\beta}{2}} \quad (\text{схема 2д}) \quad (18)$$

$$a = \frac{h_1 + h_2}{2} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\beta_1 l_{O_3C} (2L - \beta_1 l_{O_3C})} + \sqrt{l_{O_3C} \left( L - l_{O_3C} \sin \frac{\beta_2}{2} \right) \sin \frac{\beta_2}{2}}. \quad (\text{схема 2е}) \quad (19)$$

Длина шатуна  $l$  подбирается конструктивно в долях  $a$ .

Резюмируя сказанное, необходимо отметить, что в рассматриваемых в работе шарнирно-рычажных механизмах с двумя двойными движениями ведомого звена за цикл, основанных на использовании траектории коромысла, кулисы или ползуна исходного четырехзвенника, в отличие от шарнирно-рычажных механизмов с несколькими двойными движениями ведомого звена, основанных на использовании формы шатунных кривых, рассмотренных в ряде работ автора [2, 3], нет особенно больших возможностей для подбора соответствующих величин ходов и выполнения ряда кинематических и динамических требований. Однако в случае небольших величин двойных ходов или углов качаний они могут быть достаточно эффективно применены и проектирование их не представляет больших сложностей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник машиностроителя, Том I, Москва, 1955.
2. Осипова А. И. К вопросу исследования плоских шестизвенных шарнирно-рычажных механизмов с двумя двойными ходами ведомого звена. Труды ГПИ им. В. И. Ленина, 3, 1966.
3. Осипова А. И. Некоторые вопросы графического исследования плоских шестизвенных шарнирно-рычажных механизмов с двумя двойными ходами ведомого звена. Труды ГПИ им. В. И. Ленина, 6, 1968.

### დ. ქათამაძე

## ცვალებადი სტრუქტურის ბერკეტოვანი-კბილა მექანიზმების ანალიზის ზომიერითი ამოცანა

ბერკეტოვანი-კბილა მექანიზმების ანალიზისა და სინთეზის ამოცანები წარმოადგენენ თანამედროვე მექანიზმების და მანქანების თეორიის ერთ-ერთ აქტუალურ საკითხებს. სხვადასხვა მეცნიერების მიერ დღემდე შესწავლილი ბერკეტოვანი-კბილა მექანიზმები მიეკუთვნებიან უცვლელი სტრუქტურის მექანიზმებს. წინამდებარე ნაშრომში მოცემულია პირველი ცდა შესწავლილ იქნას ცვალებადი სტრუქტურის ბერკეტოვანი-კბილა მექანიზმები, რომელიც შედგენილია ცვალებადი სტრუქტურის ხუთგულიანი სახსროვანი მექანიზმისაგან და ოთხი ისეთი კბილანისაგან, რომელთა ღერძები ემთხვევა ხუთგოლიანი მექანიზმის სახსრების ღერძებს (ნახ. 1).

როგორც ვიცით [3, 4], საბაზისო მექანიზმად მიღებულ ხუთგოლიან  $OABCD$  მექანიზმში წინააღმდეგობა  $D$  ბრუნვით კინემატიკურ წყვილში მეტია, ეიდრე  $B$  და  $C$  კინემატიკურ წყვილებში ერთად აღებული, ე. ი.

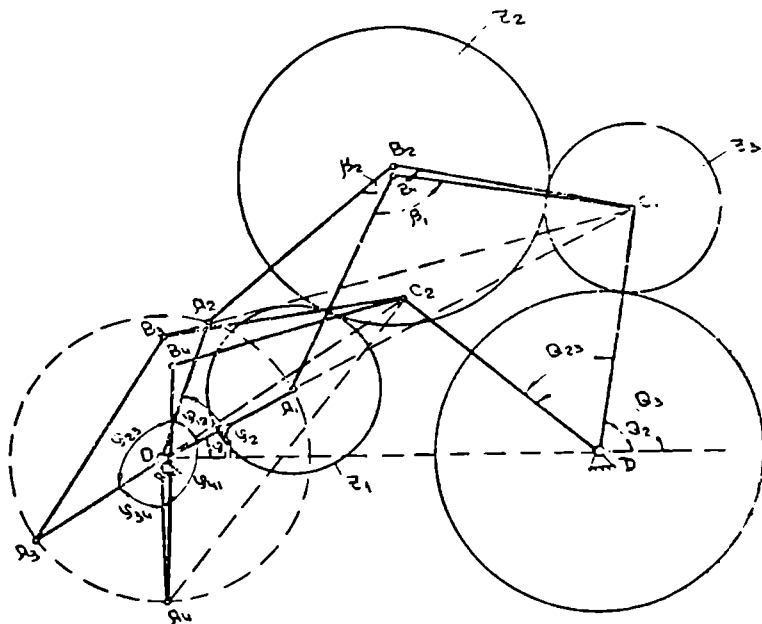
$$q_d > q_b + q_c.$$

გარდა ამისა,  $B$  ბრუნვით კინემატიკურ წყვილში  $AB$  და  $BC$  რგოლებს შორის კუთხე შეიძლება შეიცვალოს  $\beta_1 < \beta < \beta_2$  ზღვრებში.  $OABCD$  ცვალებადი სტრუქტურის ბერკეტოვანი-კბილა მექანიზმი შედგება  $OABCD$  ცვალებადი სტრუქტურის ხუთგოლიანი სახსროვანი მექანიზმისაგან და  $A, B, C$  და  $D$  სახსრების ღერძებზე მოთავსებული  $Z_1, Z_2, Z_3$  და  $Z_4$  კბილანებისაგან. ამ კბილანებიდან  $A$  სახსრის ღერძზე მოთავსებული  $Z_1$  კბილანა ხისტად არის დაკავშირებული  $OA$  რგოლთან, ხოლო დანარჩენები თავისუფლად ზიან  $B, C$  და  $D$  სახსრების ღერძებზე. ასეთი მექანიზმის მოძრაობის სრული ციკლი ( $OA$  მრუდმხარის  $360^\circ$  ით შემობრუნება) შეიძლება დავეოთ ოთხ პერიოდად. პირველი პერიოდი იქნება  $OA$  მრუდმხარას შემობრუნება  $\varphi_{12}$  კუთხით (ნახ. 1). ამ შემთხვევაში  $CD$  ამჟოლი რგოლი უძრავია,  $D$  ღერძზე მოთავსებული  $Z_4$  კბილანა შემობრუნდება გარკვეული კუთხით და  $\beta$  კუთხე გაიზრდება  $\beta_1$ -დან  $\beta_2$  მნიშვნელობამდე.

$OA$  მრუდმხარას  $\varphi_{23}$  კუთხით შემობრუნებისას  $\beta$  კუთხე უცვლელი

დარჩება,  $CD$  რგოლი შემობრუნდება  $C_1D$ -დან  $C_2D$  მდებარეობაში, ხოლო  $Z_4$  კბილანა—აგრეთვე გარკვეული კუთხით.

მრუდმხარას  $\varphi_{31}$  კუთხით შემობრუნებისას  $CD$  რგოლი უძრავი იქნება,  $\beta$  კუთხე შემცირდება  $\beta_2$ -დან  $\beta_1$  მნიშვნელობამდე და  $Z_4$  კბილანა შემობრუნდება გარკვეული სიდიდის კუთხით. და ბოლოს,  $OA$  რგოლის



ნ.ბ. 1

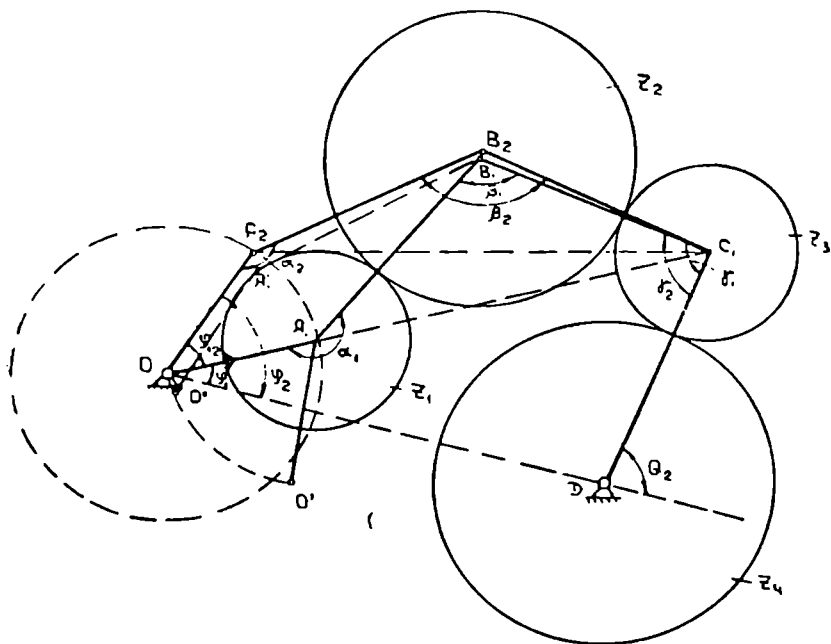
$\varphi_{41}$  კუთხით შემობრუნების დროს  $\beta$  კუთხე უცვლელი იქნება,  $CD$  რგოლი გადაადგილდება  $C_2D$ -დან  $C_1D$  მდებარეობაში და  $Z_4$  კბილანა შემობრუნდება აგრეთვე გარკვეული კუთხით.

ამრიგად, ცვალებადი სტრუქტურის ბერკეტოვანი-კბილა მექანიზმებში  $D$  სახსრის ღერძზე მოთავსებულ  $Z_4$  კბილანასა და  $CD$  მხრულისათვის ჩვენ ვიღებთ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ მოძრაობებს. ამ მოძრაობებიდან განსაკუთრებით უნდა აღინიშნოს  $CD$  მხრეულის მოძრაობა.  $CD$  მხრეულს კიღურ მდებარეობებში აქვს სასრულო სიდიდის გაჩერებები ( $OA$  მრუდმხარას განუწყვეტელი მოძრაობის დროს). ჩვენს მიზანს წარმოადგენს გამოვარკვიოთ  $Z_4$  კბილანას შემობრუნების კუთხე, როგორც

მექანიზმის ძირითადი კინემატიკური პარამეტრების ფუნქცია მოძრაობის ციკლის ოთხივე პერიოდისათვის.

აღვნიშნოთ  $\varphi$ -თი კუთხე, რომლითაც განისაზღვრება  $OA$  წამყვანი რგოლის მდებარეობა დგარის მიმართ, ხოლო  $\Psi$ -თი კუთხე, რომელიც განსაზღვრავს  $Z_4$  კბილანას მდებარეობას დგარის მიმართ. ასეთ შემთხვევაში  $\Psi = f(\varphi)$  იქნება მიმყოლი რგოლის მდებარეობის ფუნქცია.

I პერიოდი. მრუდმხარა შემობრუნდება  $OA_1$ -დან  $OA_2$ -მდებარეობაში  $\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1$  კუთხით. ამ დროს (ნახ. 2)  $\alpha$  კუთხე მიიღებს ნა-



ნახ. 2

ზრდს  $\alpha_{12} = \alpha_2 - \alpha_1 < 0$ ;  $\beta$  კუთხე  $\beta_{12} = \beta_2 - \beta_1$ , ხოლო  $\gamma$  კუთხე კი  $\gamma_{12} = \gamma_2 - \gamma_1$ .

$Z_4$  კბილანას  $\Psi_{12}$  შემობრუნების კუთხის გასაგებად შემდეგნაირად უნდა მოვიქცეთ.

წამყვანი რგოლი  $OA$  შემოვებრუნოთ  $A_1$  სახსრის ირგვლივ  $\alpha_{12} = \alpha_2 - \alpha_1$  კუთხით  $O'A_1$  მდებარეობაში.  $\beta_1$  და  $\gamma_1$  კუთხეები დარჩება

უცვლელი, ხოლო  $Z_4$  კბილანა შემობრუნდება ამ დროს —  $\frac{Z_1}{Z_4} \alpha_{12}$  კუთხით

საათის ისრის მიმართულებით (მივიჩნიოთ იგი დადებით მიმართულე-  
ბად). აქ (—) ნიშანი გვიჩვენებს რომ  $\alpha_{12} = \alpha_2 - \alpha_1 < 0$ . ეხლა  $O'A_1B_1$   
კინემატიკური ჯაჭვი შემოვებრუნოთ, როგორც ხისტი სისტემა  $B_1$  სახს-  
რის ირგვლივ  $\beta_{12} = \beta_2 - \beta_1$  კუთხით  $O'A_1B_1$  მდებარეობაში. ამ დროს  $Z_4$   
კბილანა შემობრუნდება  $\frac{Z_2}{Z_4} \beta_{12}$  კუთხით საათის ისრის მიმართულებით.

თუ  $O'A_1B_1C$  კინემატიკურ ჯაჭვს, როგორც ხისტ სისტემას შემოვებ-  
რუნებთ  $C$  სახსრის ირგვლივ  $\gamma_{12} = \gamma_2 - \gamma_1$  კუთხით, მაშინ  $Z_4$  ბორბალი  
შემობრუნდება —  $\frac{Z_3}{Z_4} \gamma_{12}$  კუთხით, საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმარ-  
თულებით. ამრიგად,  $OA$  წამყვანი რგოლის  $\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1$  კუთხით შემო-  
ბრუნებისას  $Z_4$  კბილანა შემობრუნდება კუთხით

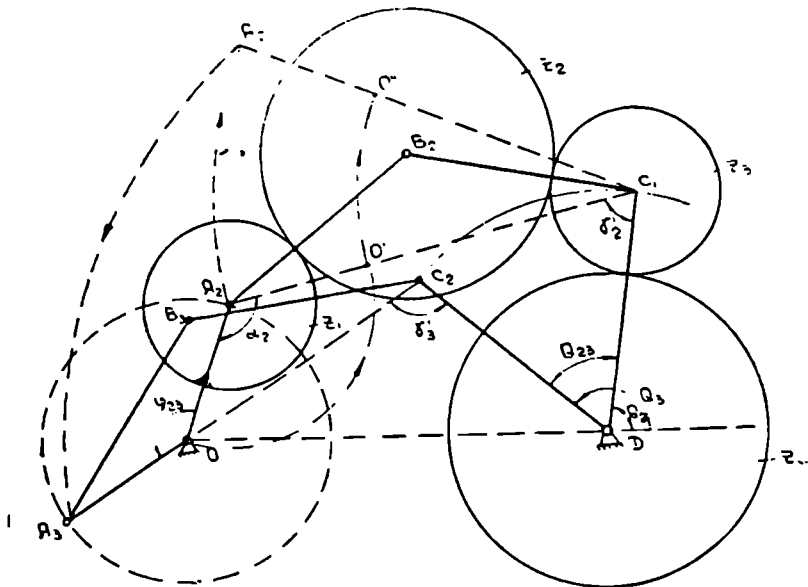
$$\Psi_{12} = -\frac{Z_1}{Z_4} \alpha_{12} + \frac{Z_2}{Z_4} \beta_{12} - \frac{Z_3}{Z_4} \gamma_{12}$$

II პერიოდი.  $OA$  წამყვანი რგოლი შემობრუნდება  $\varphi_{23} = \varphi_3 - \varphi_2$   
კუთხით (ნახ. 3).  $Z_4$  კბილანას  $\Psi_{23}$  შემობრუნების კუთხის გასაგებად  
საჭიროა შემდეგნაირად მოვიქცეთ: წამყვანი რგოლი შემოვებრუნოთ  
 $A_2$  სახსრის ირგვლივ  $\alpha_{23} = \alpha'_3 - \alpha'_2 = -\alpha'_2$  კუთხით (რადგან  $\alpha'_3 = 0$ )  
 $A_2O'$  მდებარეობაში. ამ დროს  $\gamma$  და  $Q$  კუთხეები უცვლელი დარჩება,  
ხოლო  $Z_4$  კბილანა შემობრუნდება —  $\frac{Z_1}{Z_4} \alpha_{23}$  კუთხით, საათის ისრის მი-

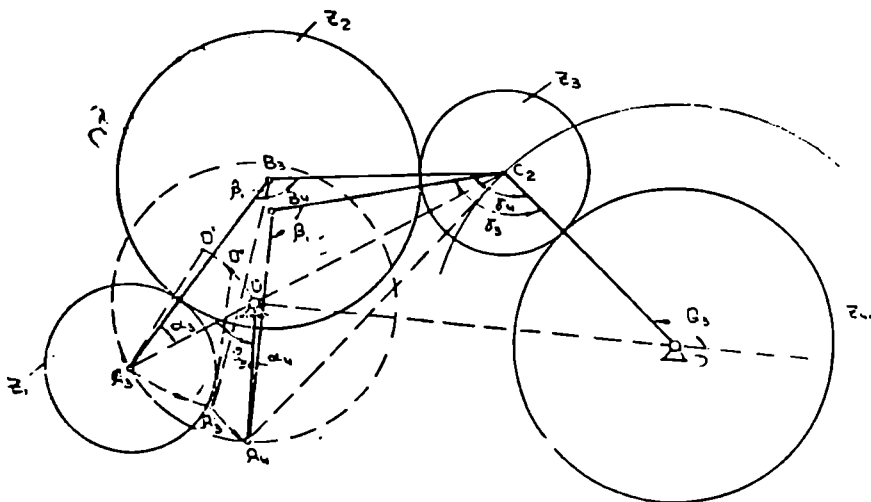
მართულებით. ნიშანი (—) გვიჩვენებს, რომ  $\alpha_{23} = \alpha'_3 - \alpha'_2 = -\alpha'_2 < 0$ .  
შემდეგ  $O'A_2C_1$  კინემატიკური ჯაჭვი, როგორც ხისტი სისტემა, შემოვებ-  
რუნოთ  $C_1$  სახსრის ირგვლივ  $\gamma_{23} = \gamma'_3 - \gamma'_2$  კუთხით  $O'A_2C_1$  მდებარე-  
ობაში. ამ დროს  $Z_4$  კბილანა შემობრუნდება —  $\frac{Z_2}{Z_4} \gamma_{23}$  კუთხით, საათის  
ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

$A_2'O'C_1D$  კინემატიკური ჯაჭვი, როგორც ხისტი სისტემა, შემო-  
ვებრუნოთ  $D$  სახსრის ირგვლივ  $Q_{23} = Q_3 - Q_2$  კუთხით  $A_2OC_1D$  მდებარე-  
ობაში. ამ დროს  $Z_4$  მიმყოლი კბილანა შემობრუნდება  $Q_{23}$  კუთხით,  
საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ამრიგად,  $OA$  რგოლის  
 $\varphi_{23} = \varphi_3 - \varphi_2$  კუთხით შემობრუნებისას  $Z_4$  კბილანა შემობრუნდება

$$\text{კუთხით } \Psi_{23} = -\frac{Z_1}{Z_4} \alpha_{23} - \frac{Z_2}{Z_4} \gamma_{23} - Q_{23}$$



Են. 3



Են. 4

III პერიოდი.  $OA$  მრუდმხარა შემობრუნდება  $\varphi_{34} = \varphi_4 - \varphi_3$  კუთხით.  $Z_4$  კბილანის შემობრუნების კუთხის გასაგებად შემდეგნაირად უნდა მოვიქცეთ:

შემოვებრუნოთ  $OA$  რგოლი  $A_3$ -ის ირგვლივ (ნახ. 4)  $\alpha_{34} = \alpha_4 - (-\alpha_2) = \alpha_4 + \alpha_2$  კუთხით. ამ დროს  $\beta$  და  $\gamma$  კუთხეები უცვლელი დარჩება, ხოლო

$Z_4$  კბილანა შემობრუნდება  $\frac{Z_1}{Z_4} \alpha_{34}$  კუთხით, საათის ისრის მიმართულდებით.

შემდეგ  $O'A_3B_2$  კინემატიკური ჯაჭვი, როგორც ხისტი სისტემა, შემოვებრუნოთ  $B_2$  სახსრის ირგვლივ  $\beta_{12} = \beta_1 - \beta_2$  კუთხით. ამ დროს  $Z_4$  კბილანა შემობრუნდება

$\frac{Z_2}{Z_4} \beta_{12}$  კუთხით, საათის ისრის მიმართულდებით.

შემდეგ კი  $O''A_3'B_3C_2$ , როგორც ხისტი სისტემა, შემოვებრუნოთ  $C_2$ -ის ირგვლივ  $\gamma_{34} = \gamma_4 - \gamma_2$  კუთხით. ამ დროს  $Z_4$  კბილანა შემობრუნდება

$\frac{Z_3}{Z_4} \gamma_{34}$  კუთხით, საათის ისრის მიმართულდებით. (—) ნიშანი გვიჩვენებს, რომ

$\gamma_{34} = \gamma_4 - \gamma_2 < 0$ .

ამრიგად,  $OA$  რგოლის  $\varphi_{34}$  კუთხით შემობრუნებისას  $Z_4$  კბილანა შემობრუნდება

$$\varphi_{34} = \frac{Z_1}{Z_4} \alpha_{34} + \frac{Z_2}{Z_4} \beta_{12} - \frac{Z_3}{Z_4} \gamma_{34} \text{ კუთხით.}$$

IV პერიოდი.  $OA$  რგოლი შემობრუნდება  $\varphi_{41}$  კუთხით.  $Z_4$  კბილანის შემობრუნების კუთხის გასაგებად შემდეგნაირად ვიქცევით: შემოვებრუნოთ  $A_1O$  რგოლი  $A_2$ -ს ირგვლივ  $\alpha_{41} = \alpha_1 - \alpha_2'$  კუთხით. მაშინ

$Z_4$  კბილანა შემობრუნდება  $\frac{Z_1}{Z_4} \alpha_{41}$  კუთხით, საათის ისრის მიმართულდებით.

შემდეგ  $O'A_1C_2$  კინემატიკური ჯაჭვი, როგორც ხისტი სისტემა, შემოვებრუნოთ  $C_2$  სახსრის ირგვლივ  $\gamma_{41} = \gamma_1' - \gamma_2'$  კუთხით, მაშინ  $Z_4$

კბილანა შემობრუნდება  $-\frac{Z_2}{Z_4} \gamma_{41}$  კუთხით, საათის ისრის მიმართულდებით.

ნიშანი (—) გვიჩვენებს, რომ  $\gamma_{41} = \gamma_1' - \gamma_2' < 0$ .

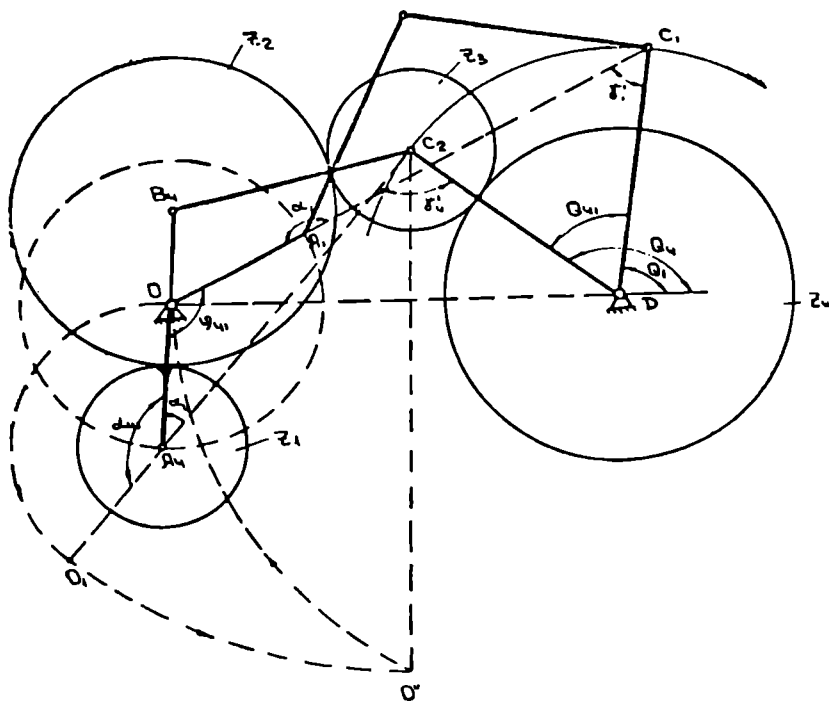
შემდეგ  $O''C_2D$  კინემატიკური ჯაჭვი შემოვებრუნოთ  $D$ -ს ირგვლივ  $Q_{41} = Q_1 - Q_2$  კუთხით, მაშინ  $Z_4$  კბილანა შემობრუნდება  $-Q_{41}$  კუთხით, საათის ისრის მიმართულდებით. ნიშანი (—) გვიჩვენებს, რომ

$$Q_{41} = Q_1 - Q_2 < 0.$$



ამრიგად,  $O_1$  რგოლის  $\varphi_{11}$  კუთხით შემობრუნებისას  $Z_1$  კბილანა შემობრუნდება

$$\varphi_{11} = \frac{Z_1}{Z_4} \alpha_{11} - \frac{Z_3}{Z_1} \gamma_{11} - Q_{11} \text{ კუთხით.}$$



ნ.ბ. 5

ამრიგად, ზემომოყვანილი მეთოდით ჩვენ შეგვიძლია გამოვარკვიოთ ამჟამინდელი კბილანას შემობრუნების კუთხე, წაშყვანი რგოლის ნებისმიერი კუთხით შემობრუნებისას.

*Д. И. Катамадзе*

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗУБЧАТО-РЫЧАЖНЫХ  
МЕХАНИЗМОВ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

(Р е з ю м е)

В работе рассматриваются задачи кинематического исследования зубчато-рычажных механизмов переменной структуры.

Цикл движения такого механизма имеет четыре характерных периода. Даются формулы для определения угла поворота ведомого колеса для каждого периода отдельно, в зависимости от угла поворота ведущего звена.

ლ ი ბ ნ რ ა ბ შ რ ა ბ

1. Черкудинов С. А., Майсюк Л. В. Синтез шарнирно-зубчатого механизма с остановкой. Труды Ин-та машиноведения. Том XXI, выпуск 81—82.
2. Никитина И. П. Методы анализа сложных зубчато-рычажных механизмов и некоторые вопросы их синтеза. Труды МАН, 1953.
3. Тахелидзе Д. С. Механизмы с изменяемыми размерами звеньев. Труды семинара по теории механизмов и машин. Том XII, выпуск 47.
4. Катамадзе Д. И. К вопросу проектирования пятизвенных плоских механизмов переменной структуры. Труды ГПИ им. В. И. Ленина № 26, 1952.
5. Катамадзе Д. И. К вопросу проектирования кривошипно-шатунных механизмов с изменяемыми размерами звеньев. Труды ГПИ им. В. И. Ленина № 31, 1954.

*О. М. Хаиндрава, Н. Г. Бардзиков*

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДЕМПФИРОВАНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПОДВИЖНЫХ СОЕДИНЕНИЯХ СМЕШАННОГО ТРЕНИЯ

Одним из основных требований, предъявляемых к подвижным соединениям, является их высокая демпфирующая способность.

Первостепенное значение в демпфировании вынужденных колебаний в соединениях имеет кулоново трение. Необходимо различать влияние трения в неподвижных и подвижных соединениях [1]. В неподвижных соединениях силы трения всегда демпфируют колебания, особенно эффективно в резонансных областях. Что касается подвижных соединений, роль трения в демпфировании колебаний иная. Теоретическими и экспериментальными исследованиями установлено, что кулоново трение в подвижных соединениях с поступательным относительным движением не только не демпфирует колебания в направлении заданного движения, но усиливает эффект действия внешних возмущающих сил. Отсюда следует, что уменьшение трения в подвижных соединениях существенно улучшает поведение системы при воздействии возмущающих сил. Особенно большую роль играет демпфирование колебаний в подвижных соединениях гидроцилиндров металлорежущих станков, в которых кулоново трение в заданном направлении можно уменьшить, если сообщить уплотнительному кольцу вращательное движение. Следовательно, демпфирующая способность подвижного соединения улучшится. В связи с этим возникает задача исследования демпфирующей способности подвижного соединения при суммировании поступательного и вращательного движений.

Рассматриваемая динамическая модель показана на рис. 1. Двигатель 1, имеющий постоянную скорость движения  $V_0$ , связан пружиной  $c$  с поршнем 3 массой  $m$ . Поршень скользит во вращающемся со скоростью  $V$  кольце 4 в условиях смешанного трения. Соблюдается условие  $V_0 < V$

Нами рассматривается устойчивая система. При отсутствии других внешних сил поршень находится под действием взаимноуравнове-

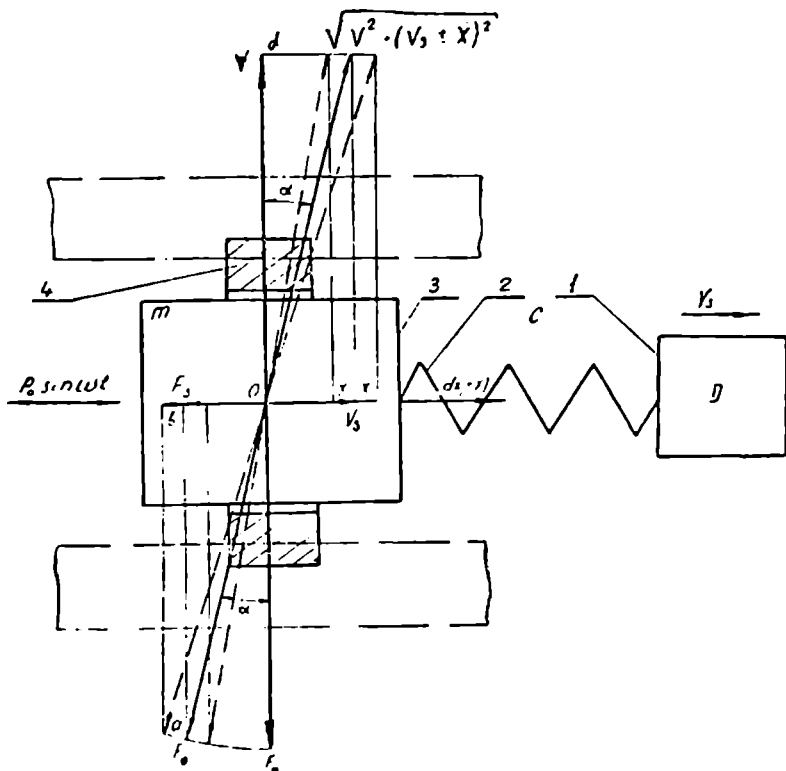


Рис. 1

шенных сил: упругой силы привода и силы смешанного трения. Это условие запишется в следующем виде:

$$cx_0 = F_s, \quad (1)$$

где  $x_0$  — начальная деформация привода, обусловленная силой смешанного трения  $F_s$  в продольном направлении,

$$F_s = F_x + F_c, \quad (2)$$

где  $F_x$  — сила жидкостного трения в осевом направлении, которая для случая поступательного осевого перемещения тела по вращающейся опоре определяется по формуле [2]:

$$F_x = \beta V_s, \quad (3)$$

где

$$\beta = \frac{\mu S}{\pi \delta \sqrt{1-\gamma^2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right),$$

где  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости смазочного слоя;

$\delta$  — радиальный зазор;

$S$  — площадь вязкого трения;

$\gamma$  — относительный эксцентриситет;

$F_0$  — сила кулонова трения в осевом направлении.

Поскольку в данном случае происходит одновременное движение в двух взаимно-перпендикулярных направлениях, результирующая скорость будет наклонена к оси подвижного соединения, а поэтому сила трения тоже будет наклонена к оси соединения.

Найдем выражение проекции силы кулонова трения в осевом направлении.

Из треугольников  $Oab$  и  $Odc$  (рис. 1) можно записать:

$$F_c = F_0 \frac{V_c}{\sqrt{V^2 + V_c^2}}, \quad (4)$$

где  $F_0 = fN$  — сила кулонова трения в соединении;

$f$  — коэффициент трения;

$N$  — нормальная нагрузка.

Допустим, что на поршень, кроме упругой силы и силы смешанного трения, действует еще внешняя возмущающая сила, изменяющаяся по закону синуса. Если она выражается более сложной функцией, то, разлагая в ряд Фурье, можно представить ее в виде суммы гармонических сил с различными периодами, и вынужденное колебательное движение суммируется из бесконечно большого количества отдельных вынужденных гармонических колебаний.

По схеме сил, изображенной на рис. 1, составляем дифференциальное уравнение колебаний поршня:

$$m\ddot{x} + \beta(\dot{x} \pm V_c) + F_0 \frac{(\dot{x} \pm V_c)}{\sqrt{V^2 + (\dot{x} \pm V_c)^2}} + c(x \mp x_0) = P_0 \sin \omega t, \quad (5)$$

где  $P_0$  — амплитуда возмущающей силы;

$\omega$  — частота возмущающей силы.

Раскладывая подрадикальное выражение в ряд по биному Ньютона

и ограничиваясь ввиду малости отношения  $\frac{\dot{x} \pm V_s}{V}$  первыми двумя членами ряда, будем иметь

$$F_0 \cdot \frac{(\dot{x} \pm V_s)}{\sqrt{V^2 + (\dot{x} \pm V_s)^2}} = F_0 \cdot \frac{(\dot{x} \pm V_s)}{V} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{x} \pm V_s}{V} \right)^2 + \dots \right]. \quad (6)$$

При малых скоростях продольного перемещения и больших скоростях вращения величина силы сухого трения линеаризуется [1] и демпфирует колебания как вязкая сила.

Подставляя выражение (6) в уравнение (5) и принимая во внимание условие (1), получаем

$$m\ddot{x} + \beta_1 \dot{x} + \beta_2 \dot{x}^2 + \beta_3 \dot{x}^3 + cx = P_0 \sin \omega t, \quad (7)$$

где введены следующие обозначения:

$$\beta_1 = \beta + \frac{F_0}{V} - \frac{3F_0 V_s^2}{2V^3},$$

$$\beta_2 = \frac{3F_0 V_s}{2V^3},$$

$$\beta_3 = \frac{F_0}{2V^3}.$$

Уравнение (7) является уравнением вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы при нелинейном затухании.

Исследуем, как влияет на вынужденные колебания системы нелинейное затухание. Ввиду сложности точного учета этого влияния, воспользуемся приближенным методом Бубнова—Галеркина.

Деля обе части уравнения (7) на массу  $m$  и вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{\beta_1}{m} \\ d &= \frac{\beta_2}{m} \\ n &= \frac{\beta_3}{m} \\ p^2 &= \frac{c}{m} \\ q &= \frac{P_0}{m}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

получим

$$\ddot{x} + kx \mp d\dot{x}^2 - n\dot{x}^3 + p^2x = q \sin \omega t. \quad (10)$$

В качестве первого приближения примем

$$x = A \sin(\omega t - \alpha) = a \sin \omega t - b \cos \omega t, \quad (11)$$

где  $A$  — амплитуда установившихся вынужденных колебаний;  $a$  и  $b$  — постоянные:

$$\left. \begin{aligned} a &= A \cos \alpha \\ b &= A \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

По Бубнову—Галеркину приравняется к нулю интеграл, взятый в пределах одного периода.

$$\int_0^T [\ddot{x} + k\dot{x} \mp d\dot{x}^2 - n\dot{x}^3 + p^2x - q \sin \omega t] x dt = 0. \quad (13)$$

Подставляя сюда выражение (11), получим два уравнения для определения двух постоянных  $a$  и  $b$ :

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T [-a\omega^3 \sin \omega t + b\omega^3 \cos \omega t + k(a\omega \cos \omega t + \\ + b\omega \sin \omega t) \mp d(a\omega \cos \omega t + b\omega \sin \omega t)^2 - \\ - n(a\omega \cos \omega t + b\omega \sin \omega t)^3 + p^2(a \sin \omega t - \\ - b \cos \omega t) - q \sin \omega t] \sin \omega t dt = 0, \\ \int_0^T [-a\omega^3 \sin \omega t + b\omega^3 \cos \omega t + k(a\omega \cos \omega t + \\ + b\omega \sin \omega t) \mp d(a\omega \cos \omega t + b\omega \sin \omega t)^2 - \\ - n(a\omega \cos \omega t + b\omega \sin \omega t)^3 + p^2(a \sin \omega t - \\ - b \cos \omega t) - q \sin \omega t] \cos \omega t dt = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Интегрируя, получим следующие два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} -a\omega^2 + kb\omega - \frac{3}{4}nb\omega^3A^2 + p^2a - q = 0, \\ +b\omega^2 + ka\omega - \frac{3}{4}na\omega^3A^2 - p^2b = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Подставляя значения  $a$  и  $b$  из формулы (12) и принимая во внимание обозначения (8) и (9), после несложных алгебраических преобразований получим уравнение для определения амплитуды вынужденных колебаний поршня:

$$\frac{9}{64} F_0^2 \left( \frac{\omega}{V} \right)^6 A^6 - \frac{3F_0 \omega^4}{4V^3} \left( \beta + \frac{F_0}{V} - \frac{3F_0 V_s^2}{2V^3} \right) A^4 + \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{p} \right)^2 \right]^2 c^2 + \left( \beta + \frac{F_0}{V} - \frac{3F_0 V_s^2}{2V^3} \right)^2 \omega^2 \right\} A^2 - P_0^2 = 0. \quad (16)$$

Вычисления амплитуды вынужденных колебаний для большого числа вариантов параметров механической системы, входящих в уравнение (16), были произведены вычислительным центром АН СССР.

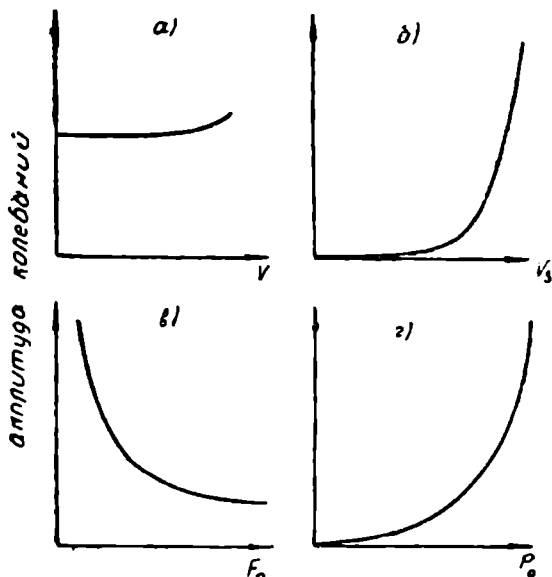


Рис. 2

Характерные зависимости амплитуды вынужденных колебаний поршня от различных параметров представлены на рис. 2, которым можно сделать следующие выводы:

1. Скорость продольного перемещения поршня  $V$ , по вращающемуся кольцу мало влияет на амплитуду вынужденных продольных колебаний (рис. 2 а).
2. С увеличением скорости вращения кольца  $V$  амплитуда вынужденных колебаний поршня увеличивается (рис. 2 б).
3. Увеличение силы кулонова трения  $F_0$  в подвижном соединении приводит к снижению амплитуды вынужденных колебаний поршня (рис. 2 в).
4. Увеличение амплитуды внешней возмущающей силы  $P_0$  приводит к росту амплитуды вынужденных колебаний поршня (рис. 2 г).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кудинов В. А. Динамика станков. М., Машгиз, 1967.
2. Езикашвили О. С., Бардзимова Н. Г. Определение сил трения при винтовом движении вала во втулке в гидродинамическом режиме. Труды ГПИ им. В. И. Ленина, № 1, 1966.



Редактор Л. Г. Кванталиани  
Техн. редактор Т. С. Махарадзе  
Корректор М. Г. Дзидзягури

Сдано в производство 29/1—1970 г. Подписано к печати 26/11—1970 г.  
Формат бумаги 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Печатных листов 6,75 Учетно-изд. листов 6,25

Цена 44 коп

Зак. № 309

УЭ 05423

Тираж 500

---

სპი-ს სტამბა, ლეონის ქ., 69.  
Типография ГПИ, ул. Ленина, 69.