საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

თეონა ბიბილაშვილი

სასაზღვრო ამოცანები კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა და სისტემების ზოგიერთი კლასისათვის

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

წარდგენილი დისერტაციის

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

სადოქტორო პროგრამა „მათემატიკა“, შიფრი 0541

თბილისი 2025 წ.

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი სერგო ხარიბეგაშვილი

რეცენზენტი: ----------------------------

რეცენზენტი: ----------------------------

დაცვა შედგება ------ წლის ------ -----------, -------- საათზე საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო ნაშრომის დაცვის კოლეგიის სხდომაზე, კორპუსი -----, აუდიტორია ---- მისამართი: 0160, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში, ხოლო ავტორეფერატისა – ფაკულტეტის ვებგვერდზე.

ფაკულტეტის სწავლული მდივანი პროფესორი ო. ხუციშვილი

რეზიუმე

სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებათა და სისტემების ზოგიერთი კლასისათვის დარბუს და გურსას ტიპის ამოცანების გამოკვლევას, როგორც სიბრტყის ისე სივრცის გარკვეული დროითი თუ სივრცითი ორიენტაციის მქონე კუთხოვან თუ კონუსურ არეებში. კერძოდ, ნაშრომის ძირითადი მიზანია ამ განტოლებებისა და სისტემებისათვის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა კუთხოვან თუ კონუსურ არეში, როცა საზღვრის სხვადასხვა ნაწილში მოცემულია დირიხლეს, ნეიმანის ან სხვა სახის დიფერენციალური პირობები და დასმული ამოცანებისათვის ამონახსნის არსებობის, არარსებობის და ერთადერთობის საკითხების შესწავლა. ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში წრფივი მეორე რიგის ჰიპერბოლური განტოლებისათვის სასაზღვრო ამოცანები კუთხოვან არეში, როცა ერთი საერთო წერტილიდან გამომავალ გვერდებზე დასახელებულია დირიხლეს ან ნეიმანის პირობები კარგად არის შესწავლილი მრავალი ავტორის მიერ (გურსას, დარბუს, სობოლევის, მიხაილოვის, მელცერის, გომანის, ტროიცკაიას, ფირმანის და სხვათა შრომებში) და დამტკიცებულია მათი კორექტულობა. არაწრფივ შემთხვევაში კი ამ ამოცანების გამოკვლევა დამატებით აწყდება არსებით სირთულეებს. ზოგ შემთხვევაში ახალ ეფექტებს აქვს ადგილი, განსაკუთრებით, როცა განტოლებაში შემავალი საძიებელი ამონახსნის მიმართ ხარისხოვანი არაწრფივობის რიგი მეტია ერთზე. არაწრფივ შემთხვევაში სიახლე, რაც შეიძლება წარმოიშვას, გლობალური ამოხსნადობის დარღვევაში მდგომარეობს. ამასთან, როცა განტოლებაში შემავალი საძიებელი ამონახსნის მიმართ ხარისხოვანი არაწრფივობის რიგი ერთზე ნაკლებია სასაზღვრო ამოცანა შეიძლება გლობალურად იყოს ამოხსნადი, მაგრამ ამავე დროს დარღვეული იყოს ამონახსნის ერთადერთობა, მას შეიძლება გააჩნდეს კონტინიუმ სიმრავლე წრფივად დამოუკიდებული ამონახსნებისა. ამ ამოცანებით აღიწერება სიმის რხევა ბლანტ სითხეში, სორბენტის მიერ აირის შთანთქმის პროცესი, სოლის ჰარმონიული რხევა ზებგერით ნაკადში და სხვა. ორგანზომილებიან შემთხვევაში მეოთხე რიგის სკალარული არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებათა ერთი კლასისათვის ახალი უცნობი ფუნქციის შემოღებით ხდება დასმული ამოცანის რედუცირება შესაბამის მეორე რიგის

არაწრფივ ჰიპერბოლური სისტემისათვის დასმულ სასაზღვრო ამოცანაზე. მიღებული სასაზღვრო ამოცანისათვის შემოდის განზოგადებული ამონახსნის ცნება უწყვეტ ფუნქციათა კლასში. ეს ამოცანა მახასიათებელთა მეთოდის გამოყენებით უწყვეტ ფუნქციათა კლასში ეკვივალენტურად რედუცირდება სპეციალური სახის არაწრფივ ვოლტერას ტიპის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე, რომელშიც ინტეგრალური ოპერატორი წარმოადგენს არაწრფივ უწყვეტ და კომპაქტურ ოპერატორს. არაწრფივ წევრებზე დადებულ გარკვეულ პირობებში მტკიცდება აპრიორული შეფასება ვოლტერას ტიპის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნისათვის, საიდანაც ლერე–შაუდერის თეორემიდან გამომდინარეობს განზოგადებული ამონახსნის არსებობა უწყვეტ ფუნქციათა კლასში. უფრო მეტიც, სასაზღვრო ამოცანის მონაცემებზე გარკვეული სიგლუვის მოთხოვნის შემთხვევაში მტკიცდება, რომ განზოგადებული ამონახსნი არის ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი კუთხოვან არეში, საიდანაც თავის მხრივ გამომდინარეობს, რომ ამ ამონახსნის ერთერთი კომპონენტი წარმოადგენს საწყისი სასაზღვრო ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს. განიხილება აგრეთვე ამ ამოცანის ამონახსნის არარსებობის და ერთადერთობის საკითხებიც. ორგანზომილებიან შემთხვევაში იმავე კუთხოვანი არის შემთხვევაში განიხილება სასაზღვრო ამოცანა მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ სისტემათა ერთი კლასისათვის, სადაც განსხვავებით სკალარული შემთხვევისა კუთხოვანი არის მთელი საზღვარია დაკავებული. ამ შემთხვევაში, რადგან დასმული ამოცანის გამოკვლევა მახასიათებელთა მეთოდით აწყდება დიდ სირთულეებს შემოთავაზებულია სხვა მიდგომა. ეს ამოცანა არა უწყვეტ ფუნქციათა კლასში, არამედ სობოლევის სივრცეში ეკვივალენტურად დაიყვანება არაწრფივ ფუნქციონალურ განტოლებაზე. არაწრფივ წევრებზე დადებული გარკვეული პირობების შესრულების შემთხვევაში მიღებულია ფუნქციონალური განტოლების ამონახსნისათვის აპრიორული შეფასება სობოლევის სივრცეში, საიდანაც გამომდინარეობს სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობა. ამასთან განხილულია დასმული ამოცანის ამონახსნის არარსებობის და ერთადერთობის საკითხებიც. დისერტაციაში განხილულია აგრეთვე ორგანზომილებიანი ამოცანის ერთი მრავალგანზომილებიანი ვარიანტი მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებათა ერთი კლასისათვის.

სობოლევის სივრცეში ფუნქციონალური მეთოდების გამოყენებით ეს ამოცანა ეკვივალენტურად დაიყვანება არაწრფივ ფუნქციონალურ განტოლებაზე. განტოლების არაწრფივ წევრებზე დადებული გარკვეული პირობების შესრულების შემთხვევაში მისი ამონახსნისათვის დამტკიცებულია აპრიორული შეფასება, საიდანაც გამომდინარეობს სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობა. განხილულია აგრეთვე ის შემთხვევები, როცა სასაზღვრო ამოცანას ამონახსნი არ გააჩნია, ან ადგილი აქვს მის ერთადერთობას. აღსანიშნავია, რომ განსხვავებით ორგანზომილებიანი შემთხვევისა, როცა განტოლებაში შემავალი საძიებელი ამონახსნის მიმართ ხარისხოვანი არაწრფივობის რიგი შეიძლება იყოს რა გინდ დიდი, მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში ეს რიგი უნდა იყოს ნაკლები ე.წ. კატოს რიცხვზე, რაც დაკავშირებულია ჩართვის თეორემებთან სობოლევის სივრცეში.

SUMMARY

Boundary value problems for some classes of partial differential equations and systems

The dissertation is devoted to the investigation of Goursat and Darboux type problems for certain classes of nonlinear hyperbolic equations and fourth–order systems both on the plane and in the space, respectively, in angular and conical domains with a certain temporal or spatial orientation. In particular, the main goal of the work is to investigate the boundary value problems for these equations and systems in the angular or conical domain, when Dirichlet, Neumann or other differential conditions are given in different parts of the boundary, and to study the questions of existence, non–existence and uniqueness of solutions for the problems. In the case of two independent variables, boundary value problems for a linear hyperbolic equation of the second order in the angular domain, when the Dirichlet or Neumann conditions are given on the sides coming out from a common point, have been well studied by many authors (in the works of Goursat, Darboux, Sobolev, Mikhailov, Mel'tser, Goman, Troitskaya, Firmani and others) and their correctness has been proved. In the nonlinear case, the study of these problems additionally faces significant difficulties. In some cases, new effects appear, especially when the order of the degree of nonlinearity included in the equation with respect to the solution is greater than one. The novelty that can arise in the nonlinear case lies, in particular, in the violation of global solvability. However, when the degree of nonlinearity of the equation with respect to the searched solution is less than one, the boundary value problem can be globally solvable, but at the same time the uniqueness of the solution is violated, it can have a continuum set of linearly independent solutions. These problems describe harmonic vibrations of a wedge in a supersonic flow, the process of gas absorption by a sorbent, vibrations of a string in a viscous liquid, and others. In the two–dimensional case, by introducing a new unknown function for one class of scalar nonlinear hyperbolic equations of the fourth order, the problem is reduced to a boundary value problem for the corresponding nonlinear hyperbolic system of the second order. For the obtained boundary value problem, the concept of a generalized solution in the class of continuous functions is introduced. Using the method of characteristics in the class of

continuous functions, this problem is equivalently reduced to a system of integral equations of a special kind of Volterra type, in which the included integral operator is a non–linear continuous and compact operator. Under certain conditions imposed on the nonlinear terms, an a priori estimate for the solution of a system of integral equations of Volterra type is proved, from which, according to the Leray–Schauder theorem, the existence of a generalized solution in the class of continuous functions follows. Moreover, if a certain smoothness is required from the data of the boundary value problem, then the generalized solution will be twice continuously differentiable in the angular domain, from which, in turn, it follows that one of the components of this solution is a classical solution to the boundary value problem. The questions of non–existence and uniqueness of a solution to this problem are also discussed. In the two–dimensional case, the boundary value problem for one class of fourth–order nonlinear hyperbolic systems is considered in the same angular domain, where, in contrast to the scalar case, the entire boundary is occupied by boundary conditions. In this case, since the study of this problem by the method of characteristics faces great difficulties, another approach is proposed. This problem is equivalently reduced to a nonlinear functional equation not in the class of continuous functions, but in the Sobolev space. If certain conditions imposed on the nonlinear terms are fulfilled, an a priori estimate for the solution of the functional equation in Sobolev space is proved, from which the existence of a solution to the boundary value problem follows. In addition, the questions of absence and uniqueness of a solution to this problem are considered. The dissertation also considers one multidimensional version of a two–dimensional problem for one class of fourth–order nonlinear hyperbolic equations. Using functional methods in Sobolev space, this problem is equivalently reduced to a nonlinear functional equation. If certain conditions imposed on the nonlinear terms of the equation are satisfied, an a priori estimate of its solution is proved, from which the existence of a solution to the boundary value problem follows. Cases are also considered when the boundary value problem has no solution or its uniqueness takes place. It should be noted that, in contrast to the two−dimensional case, when the order of degree of nonlinearity included in the equation with respect to the solution can be arbitrarily large, in the multidimension case this order must be less than the so–called Kato number, which is related to the embedding theorems in Sobolev space.

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

თემის აქტუალობა

სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება მაღალი რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლური ტიპის კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებისა და სისტემების ზოგიერთი კლასისათვის დასმულ სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევას კუთხოვან არეებში. ამ ამოცანების ნაწილი გარკვეული აზრით წარმოადგენს მეორე რიგის ჰიპერბოლური ტიპის კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებისათვის დასმულ გურსასა და დარბუს კლასიკური ამოცანების ბუნებრივ ანალოგებს, როგორც ორი, ისე მრავალი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში. მეორე რიგიდან მაღალ რიგზე გადასვლისას ჰიპერბოლური ტიპის კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებისა და სისტემებისათვის დასმულ სასაზღვრო ამოცანების კვლევაში წარმოიშვება ახალი ეფექტები და დამატებითი სირთულეები, რომლებიც ეხება ამონახსნის არსებობის, არარსებობის და ერთადერთობის საკითხებს. აგრეთვე აღსანიშნავია, რომ ეს განტოლებები და სისტემები და მათთვის დასმული სასაზღვრო ამოცანები წარმოიშვება ფიზიკასა და ტექნიკაში მიმდინარე პროცესების მათემატიკური მოდელირებისას. ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები არაწრფივ ჰიპერბოლური ტიპის კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებისა და სისტემებისათვის დიდ ინტერესს იწვევს ტალღის გავრცელების თეორიაში.

სამუშაოს მიზანი

სადისერტაციო ნაშრომის ძირითადი მიზანია მეოთხე რიგის ჰიპერბოლური ტიპის კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებისა და სისტემების ზოგიერთი კლასისათვის გურსასა და დარბუს ტიპის და სხვა სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა კუთხოვან არეებში, როგორც ორი, ისე მრავალი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში. დასმული სასაზღვრო ამოცანების შესწავლა ამონახსნის არსებობის, ერთადერთობის და არარსებობის თვალსაზრისით.

კვლევის ობიექტი და მეთოდები

სამეცნიერო კვლევის ძირითადი ობიექტია მეოთხე რიგის ჰიპერბოლური ტიპის კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებისა და სისტემების ზოგიერთი კლასისათვის გურსასა და დარბუს ტიპის და სხვა სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა კუთხოვან არეებში, როგორც ორი, ისე მრავალი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში. ამ ამოცანების შესწავლისას გამოიყენება: ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში მახასიათებელთა მეთოდი, რომლის საშუალებით განხილული ამოცანა ეკვივალენტურად დაიყვანება ვოლტერას ტიპის არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე; აპრიორულ შეფასებათა მეთოდი; ფუნქციონალური ანალიზის მეთოდები; ტესტურ ფუნქციათა მეთოდი; კუმშვადი ასახვის, შაუდერისა და ლერე—შაუდერის უძრავი წერტილის მეთოდები.

ნაშრომის ძირითადი შედეგები და მეცნიერული სიახლე

სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებათა და სისტემების ზოგიერთი კლასისათვის დარბუს და გურსას ტიპის ამოცანების გამოკვლევას, როგორც სიბრტყის ისე სივრცის გარკვეული დროითი თუ სივრცითი ორიენტაციის მქონე კუთხოვან არეებში. კერძოდ, ნაშრომის ძირითადი მიზანია კუთხოვან არეში ამ განტოლებებისა და სისტემებისათვის სასაზღვრო ამოცანების შესწავლა, როდესაც საზღვრის სხვადასხვა ნაწილში მოცემულია ნეიმანის, დირიხლეს ან სხვა სახის დიფერენციალური პირობები. კერძოდ, განტოლებასა, თუ სისტემაში შემავალი არაწრფივი წევრების სტრუქტურის მიხედვით დასმული სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის არსებობის, არარსებობის და ერთადერთობის საკითხების შესწავლა. ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში წრფივი მეორე რიგის ჰიპერბოლური განტოლებისათვის სასაზღვრო ამოცანები კუთხოვან არეში, როცა ერთი საერთო წერტილიდან გამომავალ გვერდებზე დასახელებულია დირიხლეს ან ნეიმანის პირობები კარგად

არის შესწავლილი მრავალი ავტორის მიერ (გურსას, დარბუს, სობოლევის, მიხაილოვის, მელცერის, გომანის, ტროიცკაიას, ფირმანის და სხვათა შრომებში) და დამტკიცებულია მათი კორექტულობა. არაწრფივ შემთხვევაში კი ამ ამოცანების გამოკვლევა დამატებით აწყდება არსებით სირთულეებს. ზოგ შემთხვევაში ახალ ეფექტებს აქვს ადგილი, განსაკუთრებით, როცა განტოლებაში შემავალი საძიებელი ამონახსნის მიმართ ხარისხოვანი არაწრფივობის რიგი მეტია ერთზე. არაწრფივ შემთხვევაში სიახლე, რაც შეიძლება წარმოიშვას, გლობალური ამოხსნადობის დარღვევაში მდგომარეობს. ამასთან, როცა განტოლებაში შემავალი საძიებელი ამონახსნის მიმართ ხარისხოვანი არაწრფივობის რიგი ერთზე ნაკლებია სასაზღვრო ამოცანა შეიძლება გლობალურად იყოს ამოხსნადი, მაგრამ ამავე დროს დარღვეული იყოს ამონახსნის ერთადერთობა, მას შეიძლება გააჩნდეს კონტინიუმ სიმრავლე წრფივად დამოუკიდებული ამონახსნებისა. ამ ამოცანებით აღიწერება ზებგერით ნაკადში სოლის ჰარმონიული რხევა, აირის შთანთქმის პროცესი სორბენტის მიერ, სიმის რხევა ბლანტ სითხეში და სხვა. თუ წრფივ შემთხვევაში კარგად არის შესწავლილი დარბუსა და გურსას ტიპის ამოცანები ერთი სკალარული ჰიპერბოლური განტოლებისათვის, სისტემებზე გადასვლისას დამატებითი სირთულეები წარმოიშვება ტექნიკური და შინაარსობრივი ხასიათის და ახალი ეფექტები. პირველად ეს ა. ბიწაძემ შენიშნა თავის ნაშრომში, რომელშიც ააგო წრფივი მეორე რიგის ჰიპერბოლური სისტემები, რომლებისთვისაც შესაბამის ერთგვაროვან სასაზღვრო ამოცანას სასრული და ზოგჯერ უსასრულო რაოდენობა წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები გააჩნია. შემდგომში ეს საკითხები კვლევის საგანი გახდა ს. ხარიბეგაშვილისა და ზ. მელნიკის ნაშრომებში. აღსანიშნავია ამ მიმართულებით აგრეთვე ა. ბიწაძის ნაშრომი, რომელშიც ჰიპერბოლურ სისტემათა მარტივ მაგალითებზე ნაჩვენებია გურსას ამოცანის კორექტულობაზე უმცროსი წევრების გავლენის ეფექტი. ამ მიმართულებით მიღებულ შედეგებს ენიჭება დიდი მნიშვნელობა ტალღის გავრცელების თეორიაში, განსაკუთრებით არაწრფივი ჰიპერბოლური განტოლებებისა და სისტემებისათვის. აღსანიშნავია, რომ მაღალი რიგის ჰიპერბოლური განტოლებები, კერძოდ, მიიღება ჰიპერბოლური სისტემებიდან უცნობთა გამორიცხვის მეთოდით.

დისერტაციის პირველ თავში სიბრტყეში მდებარე კუთხოვან არეში მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებათა ერთი კლასისათვის განხილულია სასაზვრო ამოცანა, სადაც სასაზღვრო პირობები მოცემულია მხოლოდ საზღვრის ნაწილზე, რომლებიც წარმოადგენენ ერთი საერთო წერტილიდან გამომავალ მახასიათებელ და დროითი ორიენტაციის მონაკვეთებს. ახალი უცნობი ფუნქციის შემოღებით ხდება დასმული ამოცანის რედუცირება შესაბამის სასაზღვრო ამოცანაზე გარკვეული სტრუქტურის მქონე არაწრფივი მეორე რიგის ჰიპერბოლური სისტემისათვის, რომლის გამოკვლევა მახასიათებელთა და აპრიორულ შეფასებათა მეთოდების გამოყენებით გაცილებით ადვილად ხერხდება. ამ ამოცანის შესწავლა ხორციელდება ეტაპობრივად. ჯერ შემოდის ამ ამოცანის განზოგადებული ამონახსნის ცნება უწყვეტ ფუნქციათა კლასში, რომლის არსებობა განტოლებაში შემავალ არაწრფივ წევრებზე დადებული გარკვეული პირობების შესრულების შემთხვევაში მტკიცდება მახასიათებელთა და აპრიორულ შეფასებათა მეთოდების გამოყენებით. შემდეგ მტკიცდება, რომ ეს ამონახსნი არის ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი, რაც საშუალებას იძლევა იმის დადგენას, რომ ამონახსნის ერთერთი კომპონენტი არის საწყისი ამოცანის კლასიკური ამონახსნი. აგრეთვე განიხილება დასმული ამოცანის ამონახსნის არარსებობის და ერთადერთობის საკითხები.

დისერტაციის მეორე თავში განხილულია პირველ თავში დასმული ამოცანის ერთი მრავალგანზომილებიანი ვარიანტი კონუსურ არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია მახასიათებელი კონუსის ნაწილით, დროითი ორიენტაციის და სივრცითი ორიენტაციის სიბრტყეებით. ამ შემთხვევაში დასმული ამოცანის გამოსაკვლევად კლასიკური მიდგომები არ მუშაობს, კერძოდ, მახასიათებელთა მეთოდი უწყვეტ ფუნქციათა კლასში. ამ შემთხვევაში ამოცანა განიხილება სობოლევის სივრცეში, რომელშიც დაიყვანება არაწრფივ ფუნქციონალურ განტოლებაზე. განტოლებაში შემავალ არაწრფივ წევრებზე დადებულ გარკვეულ პირობებში მიღებულია ფუნქციონალური განტოლების ამონახსნისათვის აპრიორული შეფასება, საიდანაც ლერე–შაუდერის თეორემის თანახმად გამომდინარეობს მისი არსებობა. ამ თავში განხილულია აგრეთვე ამონახსნის არარსებობის და ერთადერთობის საკითხები. აქ აღსანიშნავია შემდეგი გარემოება,

თუ პირველ თავში განტოლებაში შემავალი საძიებელი ამონახსნის მიმართ ხარისხოვანი არაწრფივობის რიგი შეიძლება იყოს რა გინდ დიდი, მეორე თავში ეს რიგი ნაკლები უნდა იყოს ე.წ. კატოს რიცხვზე, რაც სობოლევის სივრცეში ჩართვის თეორემებთან არის დაკავშირებული და რაც უზრუნველყოფს ფუნქციონალურ განტოლებაში შემავალი არაწრფივი ოპერატორის კომპაქტურობას, რომელიც მოითხოვება ლერე–შაუდერის თეორემაში.

დისერტაციის მესამე თავში არაწრფივ ჰიპერბოლურ სისტემათა ერთი კლასისათვის განიხილება სასაზღვრო ამოცანა პირველ თავში მოყვანილი სიბრტყეში მდებარე კუთხოვან არეში. განსხვავებით პირველ თავში მოყვანილი ამოცანისა აქ კუთხოვანი არის მთელი საზღვარი არის დატვირთული სასაზღვრო პირობებით. ამ შემთხვევაში სხვა მიდგომით, კერძოდ, ფუნქციონალური მეთოდების გამოყენებით განიხილება დასმული ამოცანის სუსტი განზოგადებული ამონახსნი, რომელიც თავის მხრივ აკმაყოფილებს არაწრფივ ფუნქციონალურ განტოლებას სობოლევის სივრცეში. არაწრფივ წევრებზე დადებულ გარკვეულ პირობებში მტკიცდება სუსტი განზოგადებული ამონახსნისათვის აპრიორული შეფასება, საიდანაც ლერე–შაუდერის თეორემის თანახმად გამომდინარეობს მისი არსებობა სობოლევის სივრცეში. აქაც განიხილება სუსტი განზოგადებული ამონახსნის არარსებობის და ერთადერთობის საკითხები.

შედეგების გამოყენების სფერო

სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული შედეგები ეხება მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლური ტიპის კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებისა და სისტემების ზოგიერთი კლასისათვის დასმულ სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევას კუთხოვან არეებში. ამ ამოცანების შესწავლისას გამოყენებული კვლევის მეთოდები აგრეთვე წარმატებით შეიძლება გამოყენებული იყოს მაღალი რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლური ტიპის კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებისა და სისტემების ზოგიერთი კლასისათვის დასმულ სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევისას კუთხოვან არეებში. აღსანიშნავია, რომ ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები

არაწრფივ ჰიპერბოლური ტიპის კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებისა და სისტემებისათვის დიდ ინტერესს იწვევს ტალღის გავრცელების თეორიაში. აგრეთვე აღსანიშნავია, რომ ამ ამოცანებით აღიწერება ზებგერით ნაკადში სოლის ჰარმონიული რხევა, სიმის რხევა ბლანტ სითხეში, აირის შთანთქვის პროცესი სორბენტის მიერ.

დისერტაციის მოცულობა და სტრუქტურა

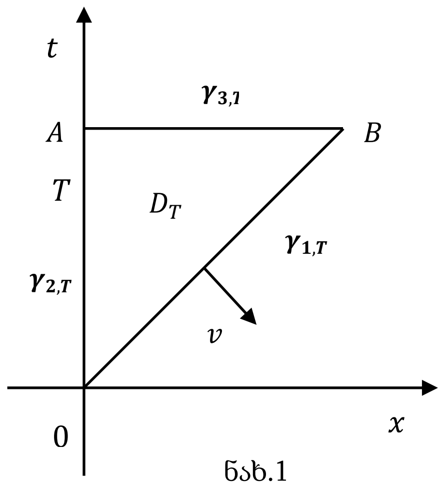
წარმოდგენილი დისერტაცია მოიცავს შესავალს, სამ თავს, ცხრამეტ პარაგრაფს და გამოყენებული ლიტერატურის სიას (47 დასახელებას). დისერტაციის ტექსტი გადმოცემულია 109 გვერდზე.

დისერტაციის შინაარსი

პირველ თავში განვიხილულია შემდეგი სახის მეოთხე რიგის ჰიპერბოლური განტოლება ორი x და t დამოუკიდებელი ცვლადების სიბრტყეზე

$$\square^2 u + h(u, \square u) = F(x,t), \qquad (1)$$

სადაც $\square := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, h და F მოცემული, ხოლო u უცნობი სკალარული ფუნქციებია.



ნახ.1

აღვნიშნოთ D_T: $0 < x < t$, $t < T$ −თი კუთხოვანი არე, რომელიც შემოსაზღვრულია $\gamma_{1,T}$: $x = t$, $0 \le t \le T$ მახასიათებელი, დროითი $\gamma_{2,T}$: $x = 0$, $0 \le t \le T$ და სივრცითი $\gamma_{3,T}$: $t = T$, $0 \le x \le T$ ორიენტაციის სეგმენტებით (ნახ.1).

(1) განტოლებისათვის D_T არეში განვიხილოთ დარბუს ტიპის სასაზღვრო ამოცანა შემდეგი დასმით: ვეძებოთ D_T არეში (1) განტოლების $u = u(x,t)$ ამონახსნი, რომელიც საზღვრის $\gamma_{1,T}$ და $\gamma_{2,T}$ ნაწილებზე აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს

$$u|_{\gamma_{1,T}} = u(t,t) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\gamma_{1,T}} = \frac{\partial u}{\partial \nu}(t,t) = \mu_2(t), \ 0 \le t \le T, \qquad (2)$$

$$u|_{\gamma_{2,T}} = u(0,t) = \mu_3(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{\gamma_{2,T}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = \mu_4(t), \quad 0 \le t \le T, \qquad (3)$$

სადაც μ_i, $i = 1, \ldots, 4$, მოცემული სკალარული ფუნქციებია, ამასთან $\mu_1(t)$ და $\mu_3(t)$ ფუნქციები $\gamma_{1,T}$ და $\gamma_{2,T}$ წირების $O = O(0,0)$ საერთო წერტილში აკმაყოფილებენ შეთანხმებულების პირობას $\mu_1(0) = \mu_3(0)$, $\nu = (\nu_x, \nu_t)$ არის ∂D_T საზღვრის გარე ნორმალის ერთეულოვანი ვექტორი, ხოლო $\frac{\partial}{\partial \nu}$ არის წარმოებული ნორმალის მიმართულებით.

აღსანიშნავია, რომ ზემოთმოყვანილ D_T კუთხოვან არეში შემდეგი სახის მეორე რიგის ჰიპერბოლური განტოლებისათვის

$$u_{tt} - u_{xx} + a(x,t)u_x + b(x,t)u_t + f(x,t,u) = F(x,t)$$

წრფივ შემთხვევაში დარბუს ტიპის ამოცანები, როცა $\gamma_{1,T}$ და $\gamma_{2,T}$ საზღვრის ნაწილზე დასახელებულია დირიხლეს ან ნეიმანის პირობები კარგად არის შესწავლილი (გურსას, დარბუს, სობოლევის, მიხაილოვის, მელცერის, გომანის, ტროიცკაიას, ფირმანის და სხვათა შრომებში) და დამტკიცებულია მათი კორექტულობა. არაწრფივ შემთხვევაში კი ამ ამოცანების გამოკვლევა დამატებით აწყდება არსებით სირთულეებს. ზოგ შემთხვევაში ახალ ეფექტებს აქვს ადგილი, განსაკუთრებით, როცა განტოლებაში შემავალი საძიებელი ამონახსნის მიმართ ხარისხოვანი არაწრფივობის რიგი მეტია ერთზე (ს. ხარიბეგაშვილის, ო. ჯოხაძის, გ. ბერიკელაშვილის, ბ. მიდოდაშვილის და სხვათა შრომებში). ამასთან, ამავე D_T კუთხოვან არეში (1) მეოთხე რიგის არაწრფივი ჰიპერბოლური განტოლებისათვის დარბუს ტიპის ამოცანები, კერძოდ, $(1)-(3)$ ამოცანა, საერთოდ არ იყო განხილული და შესწავლილი. ჩვენი მიზანია $(1)-(3)$ ამოცანის გამოკვლევა მისი ამონახსნის არსებობის, ერთადერთობის ან არარსებობის თვალსაზრისით.

$(1)-(3)$ ამოცანის გამოკვლევა ხორციელდება ეტაპობრივად:

I. ვთქვათ, $h \in C(R^2)$, $F \in C(\overline{D}_T)$. თუ u, სადაც u, $u \in C^2(\overline{D}_T)$, წარმოადგენს $(1)-(3)$ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს, მაშინ $v = \square u$ ფუნქციის შემოღებით ეს ამოცანა დაიყვანება შემდეგ სასაზღვრო ამოცანაზე u და v უცნობი ფუნქციების მიმართ:

$$L_1(u,v) \coloneqq \square u - v = 0, \ \ (x,t) \in D_T, \tag{4}$$

$$L_2(u,v) := \square v + h(u,v) = F(x,t), \ \ (x,t) \in D_T, \tag{5}$$

$$u\big|_{\gamma_{1,T}} = u(t,t) = \mu_1(t), \ \ u\big|_{\gamma_{2,T}} = u(0,t) = \mu_3(t), \ \ 0 \le t \le T, \tag{6}$$

$$v\big|_{\gamma_{1,T}} = v(t,t) = \mu_5(t), \ \ v\big|_{\gamma_{2,T}} = v(0,t) = \mu_6(t), \ \ 0 \le t \le T, \tag{7}$$

სადაც $\mu_5(t)$ და $\mu_6(t)$ გამოისახებიან მოცემული $\mu_2(t)$, $\mu_3(t)$ და $\mu_4(t)$ ფუნქციების საშუალებით. პირიქით, თუ $u, v \in C^2(\overline{D}_T)$ წარმოადგენს $(4)-(7)$ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს, სადაც $\mu_1, \mu_4 \in C([0,T])$, $\mu_2 \in C^1([0,T])$, $\mu_3 \in$

$C^2([0,T])$, მაშინ u ფუნქცია იქნება $(1)-(3)$ ამოცანის კლასიკური ამონახსნი. ქვემოთ სიმარტივისთვის ვიგულისხმოთ, რომ $\mu_i = 0,\ \ i = 1, \dots, 4$.

II. შემოგვაქვს $(4)-(7)$ ამოცანის C კლასის განზოგადებული ამონახსნის ცნება: ვთქვათ, $h \in C(R^2)$ და $F \in C(\overline{D}_T)$. u და v ფუნქციათა სისტემას ეწოდება $(4)-(7)$ ამოცანის C კლასის განზოგადებული ამონახსნი, თუ $u, v \in C(\overline{D}_T)$ და არსებობს

$$u_n, v_n \in \overset{0}{C^2}(\overline{D}_T) := \left\{ w \in C^2(\overline{D}_T) : w \Big|_{\gamma_{i,T}} = 0,\ \ i = 1,2 \right\} \tag{8}$$

მიმდევრობები ისეთი, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \tag{9}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|L_1(u_n, v_n)\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|L_2(u_n, v_n) - F\|_{C(\overline{D}_T)} = 0. \tag{10}$$

აღსანიშნავია, რომ $(4)-(7)$ ამოცანის $u, v \in C^2(\overline{D}_T)$ კლასიკური ამონახსნი წარმოადგენს ამ ამოცანის C კლასის განზოგადებულ ამონახსნს, ამასთან u ფუნქცია იქნება საწყისი $(1)-(3)$ ამოცანის კლასიკური ამონახსნი.

I და II ეტაპების განხილვიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ჩვენ ჯერ ვაჩვენებთ, რომ $(4)-(7)$ ამოცანას გააჩნია C კლასის u, v განზოგადებული ამონახსნი, ხოლო შემდეგ ვაჩვენებთ, რომ $u, v \in C^2(\overline{D}_T)$, მაშინ u ფუნქცია იქნება საწყისი $(1)-(3)$ ამოცანის კლასიკური ამონახსნი.

III. განხილული ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობასთან დაკავშირებით მართებულია შემდეგი **თეორემა:** ვთქვათ, $h \in C(R^2)$, $F \in C(\overline{D}_T)$. თუ h ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიფშიცის ლოკალურ პირობას (კერძოდ, თუ $h \in C^1(R^2)$), მაშინ $(4)-(7)$ ამოცანას არ შეიძლება ჰქონდეს ერთზე მეტი C კლასის განზოგადებული ამონახსნი, ხოლო $(1)-(3)$ საწყის ამოცანას არ გააჩნია ერთზე მეტი კლასიკური ამონახსნი u.

IV. $(4)-(7)$ ამოცანა $C(\overline{D}_T)$ უწყვეტ ფუნქციათა კლასში ეკვივალენტურად დაიყვანება ვოლტერას ტიპის არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე

$$\mathrm{w} = \mathrm{Kw},$$

სადაც $K: C(\overline{D}_T) \to C(\overline{D}_T)$ უწყვეტი და კომპაქტირი ოპერატორია, $w=(u,v)$ არის $(4)-(7)$ ამოცანის C კლასის განზოგადებული ამონახსნი.

V. აპრიორული შეფასება: ვთქვათ (1) განტოლებაში შემავალი h ფუნქცია წარმოდგება შემდეგი სახით:

$$h(u,v) = g(u) + f(v), \tag{11}$$

სადაც f და g მოცემული $C(R)$ კლასის ფუნქციებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს

$$\int_0^S f(\tau)d\tau \ge -M_1 - M_2 s^2 \quad \forall s \in R,\ \ M_i = const \ge 0,\ \ i = 1,2, \tag{12}$$

$$|g(s)| \le N_1 + N_2|s| \quad \forall s \in R,\ \ N_i = const \ge 0,\ \ i = 1,2, \tag{13}$$

მაშინ $(4)-(7)$ ამოცანის ნებისმიერი C კლასის u,v განზოგადებული ამონახსნისათვის მართებულია შემდეგი აპრიორული შეფასება

$$|u(x,t)| \le C_1\|F\|_{L_2(D_t)} + C_2,\ \ (x,t) \in D_T, \tag{14}$$

$$|v(x,t)| \le C_3\|F\|_{L_2(D_t)} + C_4,\ \ (x,t) \in D_T, \tag{15}$$

სადაც $C_i = C_i(t) \ge 0,\ i = 1,\dots,4,$ სიდიდეები არ არიან დამოკიდებული $u,\ v$ და F ფუნქციებზე, ამასთან $C_j > 0,$ როცა $j = 1,3.$

აღსანიშნავია, რომ (14) და (15) აპრიორული შეფასებები მართებულია იმ შემთხვევაშიც, როცა $h \in C(R^2)$ არის სუსტად არაწრფივი ფუნქცია, ანუ

$$|h(u,v)\,| \le M_0 + M_1\,|u| + M_2\,|v| \quad \forall u,v \in R, \tag{16}$$

სადაც $M_i = const \ge 0,\ \ i = 0,1,2\,.$

ამ აპრიორულ შეფასებებზე დაყრდნობით და ლერე–შაუდერის თეორემის გამოყენებით მტკიცდება $(4) - (7)$ ამოცანას C კლასის განზოგადებული ამონახსნი არსებობა.

VI. ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა: ვთქვათ $h \in C^1(R^2)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (16) პირობას ან $(11), (12), (13)$ პირობებს. მაშინ ნებისმიერი $F \in C^1(\bar{D}_T)$ ფუნქციისათვის $(4) - (7)$ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი C კლასის განზოგადებული ამონახსნი, რომელიც აგრეთვე წარმოადგენს ამ ამოცანის $u, v \in C^2(\bar{D}_T)$ კლასიკურ ამონახსნს D_T არეში და როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ ფუნქცია u იქნება $(1) - (3)$ საწყისი ამოცანის კლასიკური ამონახსნი.

VII. ამონახსნის არარსებობა. ახლა განვიხილოთ (1) განტოლების შემდეგი სახის კერძო შემთხვევა. როცა

$$h(u, v) = \mu sinu + \lambda e^v, \quad \lambda, \mu = const. \tag{17}$$

(17) ტოლობით მოცემული $h(u, v)$ ფუნქცია არ აკმაყოფილებს (16) პირობას, როცა $\lambda \neq 0$, რადგან იგი შეიცავს ძლიერ არაწრფივობას λe^v წევრის სახით. მაგრამ ამასთან, თუ $\lambda \geq 0$, მაშინ მართებულია (12) პირობა და როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ ნებისმიერი $F \in C^1(\bar{D}_T)$ ფუნქციისათვის $(4) - (7)$ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი C კლასის განზოგადებული ამონახსნი, რომელიც აგრეთვე წარმოადგენს ამ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს D_T არეში.

როცა $\lambda < 0$, $\mu = const$ მართებულია შემდეგი **თეორემა ამონახსნის არარსებობის შესახებ:** ვთქვათ $h(u, v)$ ფუნქცია მოცემულია (17) ტოლობით, სადაც $\lambda < 0$. მაშინ არსებობს $F \in C^1(\bar{D}_T)$ ფუნქცია ისეთი, რომ $(4) - (7)$ ამოცანას D_T არეში არ აქვს C კლასის განზოგადებული ამონახსნი.

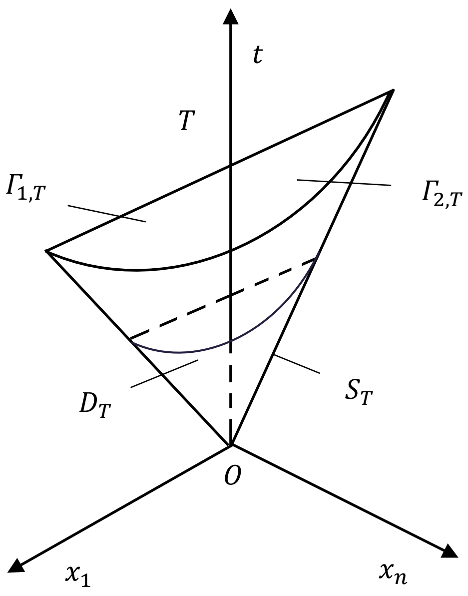
მოვიყვანოთ კიდევ ერთი შედეგი ამონახსნის არარსებობის შესახებ: ვთქვათ (11) წარმოდგენაში $f = 0$, $g \in C^1(R)$, ამასთან $g(u) \leq -|u|^\alpha$, $\alpha = const > 1$. მაშინ არსებობს $F \in C^1(\bar{D}_T)$ ფუნქცია ისეთი, რომ $(4) - (7)$ ამოცანას D_T არეში არ აქვს C კლასის განზოგადებული ამონახსნი.

მეორე თავში განიხილება $(1)-(3)$ ამოცანის ერთი მრავალგანზომილებიანი ვარიანტი.

ევკლიდეს $x=(x_1,\dots,x_n)$ და t ცვლადების $\mathbb{R}^{n+1}$ სივრცეში განვიხილოთ შემდეგი სახის არაწრფივი ჰიპერბოლური განტოლება იტერირებული ტალღის ოპერატორით მთავარ ნაწილში

$$\square^2 u + f(\square u) + g(u) = F(x,t), \tag{18}$$

სადაც $\square := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$; f, g და F მოცემული, ხოლო u უცნობი სკალარული ფუნქციებია, $n \geq 2$.



ნახ. 2

აღვნიშნოთ $D_T\colon |x|<t<T,\ \ x_n>0$ −თი კონუსური არე, რომელიც შემოსაზღვრულია $S_T\colon t=|x|,\ \ x_n\geq 0,\ \ 0\leq t\leq T$ მახასიათებელი $S\colon t=|x|$ კონუსის ნაწილით, $\Gamma_{1,T}\colon x_n=0,\ \ |x|\leq t\leq T$ დროითი ორიენტაციის $x_n=0$ სიბრტყის ნაწილით და $\Gamma_{2,T}\colon t=T,\ \ |x|\leq T,\ \ x_n\geq 0$ სივრცითი ორიენტაციის $t=T$ სიბრტყის ნაწილით (იხ. ნახ.2), როდესაც $T=\infty$ გვექნება $D_\infty\colon t>|x|,\ \ x_n>0,\ \ \Gamma_{1,\infty}\colon t\geq |x|,\ \ x_n=0$ წრიული კონუსური არის ნახევარი.

(18) განტოლებისათვის D_T არეში განვიხილოთ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა: ვეძებოთ D_T არეში (17) განტოლების $u=u(x,t)$ ამონახსნი, რომელიც საზღვრის S_T და $\Gamma_{1,T}$ ნაწილებზე აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$u\big|_{S_T} = u(x,|x|) = \mu_1(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{S_T} = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,|x|) = \mu_2(x),\ \ 0\leq |x|\leq T,\ \ x_n\geq 0, \tag{19}$$

$$u\big|_{\Gamma_{1,T}} = u(x',0,t) = \mu_3(x',t),\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\big|_{\Gamma_{1,T}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x',0,t) =$$

$$= \mu_4(x',t),\ \ |x'|\leq t\leq T, \tag{20}$$

სადაც $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, μ_i, $i = 1, \dots, 4$, მოცემული სკალარული ფუნქციებია, ამასთან μ_1 და μ_3 ფუნქციები S_T და $\Gamma_{1,T}$ ზედაპირების საერთო წერტილებში აკმაყოფილებენ შეთანხმებულების პირობას $\mu_1\big|_{S_T \cap \Gamma_{1,T}} = \mu_3\big|_{S_T \cap \Gamma_{1,T}}$, $\nu = (\nu_x, \nu_t) = \left(\nu_{x_1}, \dots, \nu_{x_n}, t\right)$ არის ∂D_T საზღვრის გარე ნორმალის ერთეულოვანი ვექტორი. ქვემოთ სიმარტივისთვის ვიგულისხმოთ, რომ $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$.

აღსანიშნავია, რომ შემდეგი სახის მეოთხე რიგის ჰიპერბოლური განტოლებისათვის

$$\square^2 u + g(u) = F(x,t)$$

კონუსურ არეებში სხვა ამოცანები დირიხლეს და ნეიმანის სასაზღვრო პირობებით გამოკვლეული იყო ს.ხარიბეგაშვილის და ბ.მიდოდაშვილის ნაშრომებში.

$(18)-(20)$ სასაზღვრო ამოცანის გამოკვლევა ხორციელდება ანალოგიური სქემით, როგორც $(1)-(3)$ სასაზღვრო ამოცანის შემთხვევაში.

I. ვთქვათ, $f, g \in C(\mathbb{R})$, $F \in C(\overline{D}_T)$. თუ u, სადაც u, $\square u \in C^2(\overline{D}_T)$ წარმოადგენს $(18)-(20)$ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს, მაშინ $v = \square u$ ფუნქციის შემოღებით ეს ამოცანა დაიყვანება შემდეგ სასაზღვრო ამოცანაზე u და v უცნობი ფუნქციების მიმართ:

$$L_1(u,v) \coloneqq \square u - v = 0, \ \ (x,t) \in D_T, \tag{21}$$

$$L_2(u,v) \coloneqq \square v + f(v) + g(u) = F(x,t), \ \ (x,t) \in D_T, \tag{22}$$

$$u\big|_{S_T} = 0, \ \ 0 \le |x| \le T, \ \ x_n \ge 0, \ \ u\big|_{\Gamma_{1,T}} = 0, \ \ |x'| \le t \le T, \tag{23}$$

$$v\big|_{S_T} = 0, \ \ 0 \le |x| \le T, \ \ x_n \ge 0, \ \ v\big|_{\Gamma_{1,T}} = 0, \ \ |x'| \le t \le T. \tag{24}$$

პირიქით, თუ $u, v \in C^2(\overline{D}_T)$ წარმოადგენს $(21)-(24)$ ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს, მაშინ u ფუნქცია იქნება $(18)-(20)$ ამოცანის კლასიკური ამონახსნი.

II. შემოგვაქვს $(21)-(24)$ ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნის ცნება. ვთქვათ, $\overset{0}{W}{}_2^1\left(D_T, S_T, \Gamma_{1,T}\right) \coloneqq \left\{u \in W_2^1(D_T) \colon u\big|_{S_T \cup \Gamma_{1,T}} = 0\right\}$, სადაც $W_2^1(D_T)$ არის

კარგად ცნობილი სობოლევის სივრცე, რომელიც შეიცავს $L_2(D_T)$ კლასის ფუნქციებს და რომლებსაც გააჩნიათ ამავე კლასის პირველი რიგის განზოგადებული წარმოებულები. ამასთან $u\big|_{S_T\cup\Gamma_{1,T}}=0$ ტოლობა უნდა გავიგოთ კვალის თეორიის აზრით.

ვთქვათ, $f,g\in C(\mathbb{R})$. $F\in L_2(D_T)$. u და v ფუნქციათა სისტემას ეწოდება $(21)-(24)$ ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნი, თუ $u,v\in \overset{0}{W}{}_2^1\big(D_T,S_T,\Gamma_{1,T}\big)$ და არსებობს

$$u_m,v_m\in \overset{0}{C}{}^2\big(\overline{D}_T,S_T,\Gamma_{1,T}\big):=\left\{w\in C^2(\overline{D}_T): w\big|_{S_T\cup\Gamma_{1,T}}=0\right\} \qquad (25)$$

მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\lim_{m\to\infty}\|u_m-u\|_{W_2^1(D_T)}=0,\quad \lim_{m\to\infty}\|v_m-v\|_{W_2^1(D_T)}=0, \qquad (26)$$

$$\lim_{m\to\infty}\|L_1(u_m,v_m)\|_{L_2(D_T)}=0,\quad \lim_{m\to\infty}\|L_2(u_m,v_m)-F\|_{L_2(D_T)}=0. \qquad (27)$$

ცხადია, რომ $(25)-(27)-$ის გათვალისწინებით $(21)-(24)$ ამოცანის $u,v\in \overset{0}{C}{}^2\big(\overline{D}_T,S_T,\Gamma_{1,T}\big)$ კლასიკური ამონახსნი წარმოადგენს ამ ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებულ ამონახსნს. ამასთან, თუ $(21)-(24)$ ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნი არის საკმარისად გლუვი, კერძოდ $u,v\in \overset{0}{C}{}^2\big(\overline{D}_T,S_T,\Gamma_{1,T}\big)$, მაშინ u,v იქნება $(21)-(24)$ ამოცანის კლასიკური ამონახსნი, ხოლო u იქნება $(18)-(20)$ საწყისი ამოცანის კლასიკური ამონახსნი.

III. აპრიორული შეფასება: ვთქვათ, $f,g\in C(\mathbb{R})$, $F\in L_2(D_T)$. განვიხილოთ f და g ფუნქციებზე დადებული შემდეგი პირობები

$$\int_0^s f(\tau)\,d\tau\geq -M_1-M_2s^2\quad \forall s\in\mathbb{R},\ \ M_i=const\geq 0,\ \ i=1,2, \qquad (28)$$

$$g\in C(\mathbb{R}),\ \ |g(s)|\leq N_1+N_2|s|\quad \forall s\in\mathbb{R},\ \ N_i=const\geq 0,\ \ i=1,2. \qquad (29)$$

მაშინ $(21)-(24)$ ამოცანის ნებისმიერი W_2^1 კლასის u, v განზოგადებული ამონახსნისათვის მართებულია შემდეგი აპრიორული შეფასება

$$\|u\|_{W_2^1(D_T)} \leq C_1\|F\|_{L_2(D_T)} + C_2, \tag{30}$$

$$\|v\|_{W_2^1(D_T)} \leq C_3\|F\|_{L_2(D_T)} + C_4, \tag{31}$$

სადაც $C_i = const \geq 0,\ i = 1, \dots, 4,$ სიდიდეები არ არიან დამოკიდებული $u,\ v$ და F ფუნქციებზე, ამასთან $C_1 > 0,\ C_3 > 0.$

IV. ამონახსნის არსებობა. ვთქვათ g ფუნქცია აკმაყოფილებს (29) პირობას, ხოლო f ფუნქცია (28) პირობასთან ერთად აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$f \in C(\mathbb{R}),\ |f(v)| \leq \gamma_1 + \gamma_2|v|^\alpha,\ v \in \mathbb{R},\ 0 \leq const = \alpha < \frac{n+1}{n-1}, \tag{32}$$

სადაც $\gamma_i = const \geq 0,\ i = 1,2.$ მაშინ ნებისმიერი $F \in L_2(D_T)$ ფუნქციისათვის $(21)-(24)$ ამოცანა $\overset{0}{W_2^1}(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ სივრცეში ეკვივალენტურად დაიყვანება არაწრფივ ფუნქციონალურ განტოლებაზე

$$w = K_0 w,$$

სადაც $K_0 \colon \overset{0}{W_2^1}(D_T, S_T, \Gamma_{1,T}) \to \overset{0}{W_2^1}(D_T, S_T, \Gamma_{1,T})$ უწყვეტი და კომპაქტური ოპერატორია, ხოლო $w = (u, v)$ არის $(21)-(24)$ ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნი. აქედან (30), (31) აპრიორულ შეფასებაზე დაყრდნობით და ლერე–შაუდერის თეორემის გამოყენებით გამომდინარეობს $(21)-(24)$ ამოცანის ერთი მაინც W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნის არსებობა.

V. ამონახსნის ერთადერთობა. მტკიცდება, რომ თუ (18) განტოლებაში შემავალი f და g ფუნქციები დამატებით აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს

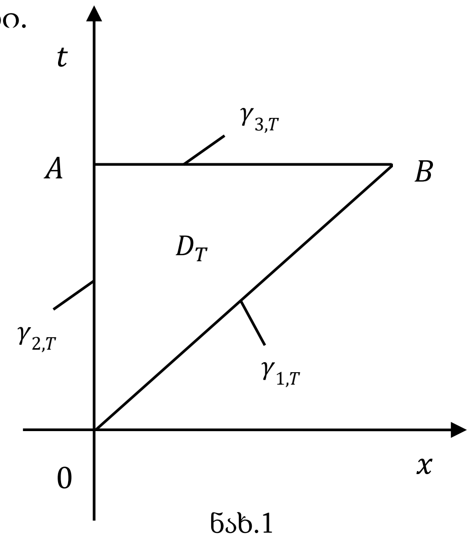
$$f \in C^1(\mathbb{R}),\ |f'(s)| \leq d_1 + d_2|s|^\gamma \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{33}$$

$$g \in C^1(\mathbb{R}), \ \ |g'(s)| \le d_3 + d_4|s|^\gamma \quad \forall s \in \mathbb{R}\,, \tag{34}$$

სადაც $d_i, \gamma = const \ge 0,\ \ i = 1, \ldots, 4,$ ხოლო $0 \le \gamma < \frac{2}{n-1}$, მაშინ ადგილი ექნება $(21)-(24)$ ამოცანის W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნის ერთადერთობას. აქედან თავის მხრივ გამომდინარეობს, რომ $(28), (29), (32)-(34)$ პირობების შესრულების შემთხვევაში ნებისმიერი $F \in L_2(D_T)$ ფუნქციისათვის $(21)-(24)$ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნი.

VI. ამონახსნის არარსებობა. ვთქვათ $g = 0$, ხოლო f ფუნქცია (32) პირობასთან ერთად აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: $f(\tau) \le -|\tau|^p \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad p = const > 1.$ მაშინ არსებობს $F \in L_2(D_T)$ ფუნქცია ისეთი, რომ $(21)-(24)$ ამოცანას არ გააჩნია W_2^1 კლასის განზოგადებული ამონახსნი.

მესამე თავში სკალარული განტოლების ნაცვლად განვიხილავთ არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებათა სისტემას იმავე D_T : $0 < x < t, \quad t < T$ კუთხოვან არეში (ნახ.1). განტოლებათა ამ სისტემას აქვს შემდეგი სახე



ნახ.1

$$\square^2 u_i + f_i(u_1, \ldots, u_N) = F_i(x,t), \ \ i = 1, \ldots, N, \tag{35}$$

სადაც $\square := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$; $f = (f_1, \ldots, f_N)$ და $F = (F_1, \ldots, F_N)$ მოცემული, ხოლო $u = (u_1, \ldots, u_N)$ უცნობი N −განზომილებიანი ვექტორ−ფუნქციებია, $N \ge 2$, განვიხილოთ სასაზღვრო ამოცანა შემდეგი დასმით: ვეძებოთ D_T არეში (35) სისტემის ამონახსნი, რომელშიც განსხვავებით $(1)-(4)$ ამოცანისა დაკავებული იქნება D_T არის მთელი საზღვარი:

$$u|_{\gamma_{1,T}} = u(t,t) = 0, \ \ 0 \le t \le T, \tag{36}$$

$$u|_{\gamma_{2,T}} = u(0,t) = 0, \ \ u_x|_{\gamma_{2,T}} = u_x(0,t) = 0, \ \ 0 \le t \le T, \tag{37}$$

$$u|_{\gamma_{3,T}} = u(x,T) = 0, \ \ u_t|_{\gamma_{3,T}} = u_t(x,T) = 0. \tag{38}$$

$(35)-(37)$ სასაზღვრო ამოცანის შემოსაღებად განვიხილოთ ჰილბერტის სივრცე $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$, როგორც კლასიკური

$$\overset{0}{C}{}^k(\overline{D}_T,\partial D_T):=\{u\in C^k(\overline{D}_T): u|_{\gamma_{1,T}}=0,\ \ u|_{\gamma_{2,T}}=u_x|_{\gamma_{2,T}}=0,$$

$$u|_{\gamma_{3,T}}=u_t|_{\gamma_{3,T}}=0\}.\ \ k\geq 1.$$

სივრცის გასრულება, როცა. $k=2$ შემდეგი ნორმით

$$\|u\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T),}=\int\limits_{D_T}\left[u^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+(\Box u)^2\right]dxdt. \qquad (39)$$

(39) −დან გამომდინარეობს, რომ თუ $u\in\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$, მაშინ $u\in\overset{0}{W}{}^1_2(D_T)$ და $\Box u\in L_2(D_T)$. აქ, როგორც უკვე ზემოთ აღვნიშნეთ, $W^1_2(D_T)$ წარმოადგენს ცნობილ სობოლევის სივრცეს, რომელიც შედგება $L_2(D_T)$ სივრცის იმ ელემენტებისაგან, რომლებსაც გააჩნიათ განზოგადებული პირველი რიგის კერძოწარმოებულები x და t ცვლადების მიმართ იმავე $L_2(D_T)$ სივრციდან. ამასთან $\overset{0}{W}{}^1_2(D_T):=\{u\in W^1_2(D_T): u\big|_{\partial D_T}=0\}$, სადაც ტოლობა $u\big|_{\partial D_T}=0$ უნდა გავიგოთ კვალის თეორიის აზრით.

ქვემოთ (35) სისტემაში შემავალი f ვექტორ−ფუნქციისაგან მოვითხოვთ, რომ

$$f\in C(\mathbb{R}^N),\ \ |f(u)|\leq M_1+M_2|u|^\alpha,\ \ \alpha=const>1,\ \ u\in\mathbb{R}, \qquad (40)$$

სადაც $|\cdot|$ არის ნორმა $\mathbb{R}^N$ სივრცეში, $M_i=const\geq 0,\ \ i=1,2.$

ვთქვათ f ვექტორ−ფუნქცია აკმაყოფილებს (40) პირობას, ხოლო $F\in L_2(D_T)$. $u\in\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$ ვექტორ−ფუნქციას ეწოდება $(35)-(38)$ სასაზღვრო ამოცანის სუსტი განზოგადებული ამონახსნი, თუ ნებისმიერი $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_N)\in\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$ ვექტორ−ფუნქციისათვის მართებულია შემდეგი ინტეგრალური ტოლობა

$$\int_{D_T} \Box u \Box \varphi dxdt + \int_{D_T} f(u)\varphi dxdt = \int_{D_T} F\varphi dxdt \quad \forall \varphi \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T). \tag{41}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $(35)-(38)$ ამოცანის კლასიკური ამონახსნი $u \in \overset{0}{C}{}^4(\overline{D}_T, \partial D_T)$ წარმოადგენს სუსტ განზოგადებულ ამონახსნს და პირიქით, თუ $(35)-(38)$ ამოცანის სუსტი განზოგადებული ამონახსნი u ეკუთვნის $\overset{0}{C}{}^4(\overline{D}_T, \partial D_T)$ კლასს, მაშინ u იქნება ამ ამოცანის კლასიკური ამონახსნი.

შემდეგი პირობის

$$\lim_{|u|\to\infty} inf \frac{uf(u)}{|u|^2} \geq 0 \tag{42}$$

შესრულების შემთხვევაში, რომელიც ეხება f ვექტორ−ფუნქციის ყოფაქცევას უსასრულობის მიდამოში, სადაც

$$uf(u) = \sum_{i=1}^{N} u_i f_i(u), \quad |u|^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2,$$

მტკიცდება $(35)-(38)$ ამოცანის სუსტი განზოგადებული ამონახსნისათვის აპრიორული შეფასება

$$\|u\|_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)} \leq c_1 \|F\|_{L_2(D_T)} + c_2,$$

სადაც მუდმივები $c_1 > 0$ და $c_2 \geq 0$ არ არიან დამოკიდებული u და F −ზე. აქედან ნებისმიერი $F = (F_1, \dots, F_N) \in L_2(D_T)$ ვექტორ−ფუნქციისათვის ლერე−შაუდერის თეორემის გამოყენებით გამომდინარეობს $(35)-(38)$ სასაზღვრო ამოცანის ერთი მაინც სუსტი განზოგადებული $u = (u_1, \dots, u_N)$ ამონახსნის არსებობა $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$ სივრციდან.

ამ ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობასთან დაკავშირებით მტკიცდება, რომ თუ f ვექტორ−ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\big(f(u) - f(v)\big)(u - v) \geq 0 \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^N, \tag{45}$$

მაშინ $(35)-(38)$ სასაზღვრო ამოცანას არ შეიძლება ჰქონდეს ერთზე მეტი განზოგადებული ამონახსნი $u \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)$.

რაც შეეხება ამონახსნის არარსებობას, მოვიყვანოთ f ვექტორ–ფუნქციათა ერთი კლასი, როცა შესრულებულია (40) პირობა, მაგრამ დარღვეულია (42) პირობა და ამ შემთხვევაში $F=(F_1,\ldots,F_N)\in L_2(D_T)$ ვექტორ–ფუნქციათა საკამარისად ფართო კლასისათვის $(35)-(38)$ ამოცანას არ გააჩნია სუსტი განზოგადებული ამონახსნი. ეს კლასია:

$$f_i(u_1,\ldots,u_N)=\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\left|u_j\right|^{\beta_{ij}}+b_i\,,\ \ i=1,\ldots,N,$$

სადაც a_{ij}, β_{ij} და b_i მუდმივები აკმაყოფილებენ შემდეგ უტოლობებს

$$a_{ij}>0,\ \ \beta_{ij}=const>1\,,\ \ \sum_{i=1}^{N} b_i>0,\ \ i,j=1,\ldots,N.$$

ეს ფაქტი მტკიცდება საცდელ ფუნქციათა მეთოდის გამოყენებით.

დასკვნა

დისერტაციაში მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებებისა და სისტემების ერთი კლასისათვის განხილულია სასაზღვრო ამოცანები ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში და მათი ერთი მრავალგანზომილებიანი ვარიანტი. ორგანზომილებიან შემთხვევაში მეოთხე რიგის სკალარული არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებათა ერთი კლასისათვის ახალი უცნობი ფუნქციის შემოღებით ხდება დასმული ამოცანის რედუცირება შესაბამის მეორე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლური სისტემისათვის დასმულ სასაზღვრო ამოცანაზე. მიღებული სასაზღვრო ამოცანისათვის შემოდის განზოგადებული ამონახსნის ცნება უწყვეტ ფუნქციათა კლასში. არაწრფივ წევრებზე დადებულ გარკვეულ პირობებში მახასიათებელთა და აპრიორულ შეფასებათა მეთოდების გამოყენებით მტკიცდება განზოგადებული ამონახსნის არსებობა უწყვეტ ფუნქციათა კლასში. უფრო მეტიც, სასაზღვრო ამოცანის მონაცემებზე გარკვეული სიგლუვის მოთხოვნის შემთხვევაში მტკიცდება, რომ განზოგადებული ამონახსნი არის ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი კუთხოვან არეში, საიდანაც თავის მხრივ გამომდინარეობს, რომ ამ ამონახსნის ერთერთი კომპონენტი წარმოადგენს საწყის სასაზღვრო ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს. განიხილება აგრეთვე ამ ამოცანის ამონახსნის არარსებობის და ერთადერთობის საკითხებიც. ორგანზომილებიან შემთხვევაში იმავე კუთხოვანი არის შემთხვევაში განიხილება სასაზღვრო ამოცანა მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ სისტემათა ერთი კლასისათვის, სადაც განსხვავებით სკალარული შემთხვევისა კუთხოვანი არის მთელი საზღვარია დაკავებული. ამ შემთხვევაში, რადგან დასმული ამოცანის გამოკვლევა მახასიათებელთა მეთოდით აწყდება დიდ სირთულეებს შემოთავაზებულია სხვა მიდგომა. ეს ამოცანა არა უწყვეტ ფუნქციათა კლასში, არამედ სობოლევის სივრცეში ეკვივალენტურად დაიყვანება არაწრფივ ფუნქციონალურ განტოლებაზე სობოლევის სივრცეში. არაწრფივ წევრზე დადებული გარკვეული პირობების შესრულების შემთხვევაში მიღებულია ფუნქციონალურ განტოლების ამონახსნისათვის აპრიორული შეფასება სობოლევის სივრცეში, საიდანაც გამომდინარეობს სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობა. ამასთან განხილულია დასმული ამოცანის ამონახსნის არარსებობის და ერთადერთობის

საკითხებიც. დისერტაციაში განხილულია აგრეთვე ორგანზომილებიანი ამოცანის ერთი მრავალგანზომილებიანი ვარიანტი მეოთხე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ განტოლებებათა ერთი კლასისათვის სობოლევის სივრცეში ფუნქციონალური მეთოდების გამოყენებით ეს ამოცანა ეკვივალენტურად დაიყვანება არაწრფივ ფუნქციონალურ განტოლებაზე სობოლევის სივრცეში. განტოლების არაწრფივ წევრებზე დადებული პირობების შესრულების შემთხვევაში დამტკიცებული მისი ამონახსნისათვის აპრიორული შეფასება, საიდანაც გამომდინარეობს სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობა. განხილულია აგრეთვე ის შემთხვევები, როცა სასაზღვრო ამოცანას არ გააჩნია ამონახსნი, ან ადგილია ქვს მის ერთადერთობას. აღსანიშნავია, რომ განსხვავებით ორგანზომილებიანი შემთხვევიშა, როცა განტოლებაში შემავალი საძიებელი ამონახსნის მიმართ ხარისხოვანი არაწრფივობის რიგი შეიძლება იყოს რა გინდ დიდი, მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში ეს რიგი უნდა იყოს ნაკლები ე.წ. კატოს რიცხვზე, რაც დაკავშირებულია ჩართვის თეორემებთან სობოლევის სივრცეში.

ნაშრომის აპრობაცია

დისერტაციაში გადმოცემული შედეგები მოხსენებული იყო საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის მათემატიკის დეპარტამენტის სემინარებზე. ამასთნავე, აღნიშნული შედეგები ასახულია ავტორის პუბლიკაციებში და მოხსენებულ იქნა საერთაშორისო კონფერენციებზე, რომელთა ნუსხაც თან ერთვის ავტორეფერატს. გარდა ამისა, სადოქტორო პროგრამის გეგმის შესაბამისად მომზადდა და ჩაბარდა თემატური სემინარები და კოლოკვიუმები დისერტაციის ძირითადი შედეგების შესახებ.

თეონა ბიბილაშვილის მოხსენებების და შრომების სია

კონფერენციები

1. T. Bibilashvili, S. Kharibegashvili, Darboux type problem for one nonlinear hyperbolic equation of the fourth order. XXXVI Enlarged Session of the Seminar at I. Vekua Institute of Applied Mathematics. April 19–21, 2022. Tbilisi, Georgia. https://www.viam.science.tsu.ge/enlarged/2022/abstracts_eng.pdf
2. T. Bibilashvili, A boundary value problem for a class of higher–order nonlinear hyperbolic equations. XXXVII Enlarged Session of the Seminar at I. Vekua Institute of Applied Mathematics. April 19–22, 2023. Tbilisi, Georgia. https://www.viam.science.tsu.ge/enlarged/2023/program_eng.pdf
3. T. Bibilashvili,The boundary value problem for one class of high–order nonlinear hyperbolic systems. XXXVIII Enlarged Session of the Seminar at I. Vekua Institute of Applied Mathematics. April 22–24, 2024. Tbilisi, Georgia. https://www.viam.science.tsu.ge/enlarged/2024/program_eng.pdf
4. თ. ბიბილაშვილი, სასაზღვრო ამოცანა ერთი მეოთხე რიგის არაწრფივი ჰიპერბოლური განტოლებისათვის იტერირებული ტალღის ოპერატორით მთავარ ნაწილში. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის 100 და იმს ფაკულტეტის დაარსების 65 წლისთავისადმი მიძღვნილი II სტუდენტური სამეცნიერო – პრაქტიკული კონფერენცია „ციფრული ტრანსპორმაცია – გამოწვევები და პროგრესი". 20–21 მაისი, 2022 წელი, სტუ, საქართველო, თბილისი. თეზისების კრებული, გვ. 101–105.
5. თ. ბიბილაშვილი, სასაზღვრო ამოცანა მაღალი რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ სისტემათა ერთი კლასისათვის. სტუდენტთა 88–ე ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, 18 მაისი 2024 წელი.

სამეცნიერო სტატიები

1. T. Bibilashvili, S. Kharibegashvili ,Darboux type problem for one nonlinear hyperbolic equation of the fourth order. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, **36** (2022), 11–14.

   https://www.viam.science.tsu.ge/enl_ses/vol36/Bibilashvili.pdf

2. T. Bibilashvili, S. Kharibegashvili , Darboux type problem for a class of fourth–order nonlinear hyperbolic equations. Mem. Differential Equations Math. Phys. **89** (2023), 39–59.

   https://rmi.tsu.ge/jeomj/memoirs/vol89/vol89–3.pdf

3. T. Bibilashvili, Darboux type multi–dimensional problem for a class of higher – order nonlinear hyperbolic equations. Transactions of A.Razmadze Mathematical Institute, **177** (2023), No.1, 135–137.

   https://rmi.tsu.ge/transactions/TRMI–volumes/177–1/r177(1)–3.pdf

4. T. Bibilashvili, A boundary value problem for a class for of higher – order nonlinear hyperbolic equations. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, **37** (2023), 3–6.

   https://www.viam.science.tsu.ge/enl_ses/vol37/bibilashvili.pdf

5. T. Bibilashvili, S. Kharibegashvili, On the solvability of the boundary value problem for one class of higher – order nonlinear hyperbolic systems. Transactions of A.Razmadze Mathematical Institute, Vol. **178** (2024), issue 2, 317 – 319.

   https://rmi.tsu.ge/transactions/TRMI-volumes/178-2/r178(2)-2.pdf

6. T. Bibilashvili, The boundary value problem for one class of high – order nonlinear hyperbolic systems. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, **38** (2024), 11–14.

   https://www.viam.science.tsu.ge/enl_ses/vol38/Bibilashvili.pdf