290
1993

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

314

ISSN 0376—2637

მათემატიკა. მექანიკა. ასტრონომია
МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. АСТРОНОМИЯ
MATHEMATICS. MECHANICS. ASTRONOMY

29

თბილისი Тбилиси Tbilisi
1993

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა.

Издательство Тбилисского университета

Tbilisi University Press

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

314

მათემატიკა. მექანიკა. ასტრონომია

MATHEMATICS. MECHANICS. ASTRONOMY

თბილისი 1995 TBILISI

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

314

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. АСТРОНОМИЯ

ТБИЛИСИ

1993

Издательство Тбилисского университета, 1993
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1993
TBILISI UNIVERSITY PRESS, 1993

Труды Тбилисского государственного университета

им. И. А. Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

314, 1993

УДК 511

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ НЕКОТОРЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ С ВОСЬМЬЮ ПЕРЕМЕННЫМИ

Р.И.Беридзе

§ I. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_8$ обозначают произвольные натуральные числа; $r(n;f)$ – число представлений натурального n формой

$$f = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_8 x_8^2. \qquad (I.I)$$

Положим

$$\vartheta_{gh}(\tau;0;N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{hk} Q^{\frac{1}{8N}(2Nk+g)^2}, \qquad (I.2)$$

тогда

$$\vartheta''_{gh}(\tau;0;N) = -\pi^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{hk} (2Nk+g)^2 Q^{\frac{1}{8N}(2Nk+g)^2}. \qquad (I.3)$$

(g, h – целые числа, N – натуральное число, τ – комплексная переменная с $\Im m\, \tau > 0$, $Q = \exp(2\pi i \tau)$).

Согласно (I.2),

$$\prod_{k=1}^{8} \vartheta_{00}(\tau;0;2a_k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n;f) Q^n. \qquad (I.4)$$

Теперь положим

$$\theta(\tau;f) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n;f) Q^n, \qquad (I.5)$$

где $\rho(n;f)$ – сингулярный ряд, соответствующий форме вида (I.I).

В дальнейшем мы будем применять следующие леммы:

<u>Лемма I</u> (см., напр., / 3 /, стр.10, лемма 2). Целая модулярная форма $F(\tau)$ размерности $-r$, присоединенная к группе $\Gamma_0(N)$ и делителю N, тождественно равна нулю, если ее коэффициенты Фурье $A_n = 0$ для всех

$$n \leq \frac{r}{12} N \prod_{p \mid N} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

<u>Лемма 2</u> (см. / I /, стр.78). Пусть $n = 2^{\alpha} u v$, $u = \prod_{\substack{p \mid n \\ p \nmid 2\Delta}} p^{\beta}$, $v = \prod_{\substack{p \mid n \\ p \mid \Delta,\, p > 2}} p^{\beta}$,

$\Delta = a_1, a_2 \cdots a_8 = r^2 \omega$, ω – бесквадратное число. Тогда

$$\rho(n;f) = \frac{\pi^4 \cdot 2^{3\alpha} \cdot v^3}{6 \Delta^{1/2}} \chi_2 \prod_{\substack{p \mid \Delta \\ p > 2}} \chi_p \prod_{\substack{p \mid n \\ p > 2}} \left(1 - \left(\frac{\omega}{p}\right) p^{-4}\right)^{-1} L^{-1}(4,\omega) \times$$

$$\times \sum_{d_1 d_2 = u} \left(\frac{\Delta}{d_1}\right) d_2^3,$$

значения величин χ_2 и χ_p даны в работе / 4 / (стр. 69, формула (Ш.45) и стр. 63, формула (Ш.2I)), значения $L(4,\omega)$ вычислены в работе / 2 /(стр. 298).

§ 2. В этом параграфе рассматривается представление чисел формой

$$f_1 = x_1^2 + 2\left(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2\right).$$

<u>Теорема I.</u>

$$\vartheta_{00}(\tau;0;2)\vartheta_{00}^7(\tau;0,4) = \theta(\tau;f_1) - \qquad (2.I)$$

$$- \frac{1}{88\pi^2}\left(2\vartheta_{00}^2(\tau;0;2) - \vartheta_{00}^2(\tau;0;4)\right) X(\tau),$$

где

$$X(\tau) = \vartheta_{00}''(\tau;0;2)\vartheta_{00}(\tau;0;4) - \frac{1}{2}\vartheta_{00}''(\tau;0;4)\vartheta_{00}(\tau;0;2).$$

<u>Доказательство.</u> Легко проверяется, что функция

$$\varphi(\tau;f_1) = \vartheta_{00}(\tau;0;2)\vartheta_{00}^7(\tau;0;4) - \theta(\tau;f_1) +$$

$$+ \left(A_1 \vartheta_{00}^2(\tau;0;2) + A_2 \vartheta_{00}^2(\tau;0,4)\right) X(\tau)$$

является целой модулярной формой размерности – 4, присоединенной к подгруппе $\Gamma_0(8)$ и делителя 8. Следовательно, достаточно показать, согласно лемме I, что в разложении $\varphi(\tau; f_1)$ по степеням Q постоянные A_1 и A_2 можно подобрать так, чтобы коэффициенты при Q^n $(n \le 4)$ были равны нулю.

Положив в лемме 2

$$a_1=1,\ a_2=a_3=\dots=a_8=2,\ \Delta=2^7,\ \nu=1,\ n=2^\alpha u,\ u=\prod_{\substack{p|n\\ p>2}} p^\beta,$$
$$s=8,\ \omega=2,$$

получим

$$\rho(n;f_1)=\frac{1}{11}2^{3\alpha+4}\chi_2\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{2}{d_1}\right)d_2^3, \qquad (2.2)$$

т.к. $L(4,2)=\dfrac{2^8\cdot 3\sqrt{2}}{11\pi^2}$.

Положив в формуле (Ш.45) работы /3/

$$n_1=1,\ e_1=0,\ d_1=1;\ n_2=7,\ e_2=1,\ d_2=1;\ \theta(1)=\theta(2)=0,$$
$$B(t)=8t-1,\ C(t)\equiv 0 \pmod 4,\ T(t)=2^{-3t+4,5} \text{ при } t\le 3$$

получим

$$\chi_2=1+\left(\frac{2}{u}\right)2^{-3\alpha-3}. \qquad (2.3)$$

Согласно (2.2) и (2.3), имеем

$$\rho(n;f_1)=\frac{2}{11}\left(2^{3\alpha+3}+\left(\frac{2}{u}\right)\right)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{2}{d_1}\right)d_2^3. \qquad (2.4)$$

Согласно формулам (1.2) и (1.3),

$$\vartheta_{00}(\tau;0;2)\vartheta_{00}^7(\tau;0;4)=1+2Q+14Q^2+28Q^3+86Q^4+$$
$$+168Q^5+308Q^6+560Q^7+740Q^8+\dots, \qquad (2.5)$$

$$X(\tau)=\vartheta''_{00}(\tau;0;2)\vartheta_{00}(\tau;0;4)-\frac{1}{2}\vartheta''_{00}(\tau;0;4)\vartheta_{00}(\tau;0;2)=$$

$$=-32\pi^2\left(Q-2Q^2-2Q^3+4Q^4+4Q^6-4Q^8+\cdots\right). \qquad (2.6)$$

Согласно (I.2) и (2.6),

$$\chi(\tau)\vartheta'_{00}(\tau;0,2)=-32\pi^2\left(Q+2Q^2-6Q^3-12Q^4+12Q^5+20Q^6-\right.$$
$$\left.-8Q^7+8Q^8+\cdots\right), \qquad (2.7)$$

$$\lambda(\tau)\vartheta''_{00}(\tau;0;4)=-32\pi^2\left(Q-2Q^2+2Q^3-4Q^4-4Q^5+12Q^6-\right.$$
$$\left.-8Q^7+24Q^8+\cdots\right). \qquad (2.8)$$

Вычисляя $\rho(n;f_1)$ по формулам (2.4), согласно (I.5), будем иметь

$$\theta(\tau;f_1)=1+\frac{18}{11}Q+\frac{130}{11}Q^2+\frac{364}{11}Q^3+\frac{1026}{11}Q^4+\frac{1726}{11}Q^5+$$
$$+\frac{3216}{11}Q^6+\frac{6192}{11}Q^7+\frac{8194}{11}Q^8+\cdots \qquad (2.9)$$

Постоянные A_1 и A_2 подберем так, чтобы коэффициенты при Q и Q^2 в разложении $\psi(\tau;f_1)$ по степеням Q были равны нулю, т.е., согласно (2.5), (2.7) – (2.9), так, чтобы

$$2-\frac{18}{11}-32\pi^2A_1-32\pi^2A_2=0,\quad 14-\frac{130}{11}-64\pi^2(A_1-A_2)=0,$$

т.е.

$$A_1=\frac{1}{44\pi^2},\quad A_2=-\frac{1}{8\pi^2}.$$

Легко проверить, что в разложении $\psi(\tau;f_1)$ при этих значениях A_1 и A_2, все коэффициенты при Q^n $(n\le 4)$ равны нулю.

Теорема I^a. Пусть $n=2^\alpha u$, $(u,2)=1$. Тогда

$$r(n;f_1)=\frac{2}{11}\left(2^{3\alpha+3}+\left(\frac{2}{u}\right)\right)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{2}{d_1}\right)d_2^3+\frac{4}{11}\sum_{n=x^2+y^2+z^2+2t^2}(x^2-2t^2)-$$
$$-\frac{2}{11}\sum_{n=x^2+2y^2+2z^2+2t^2}(x^2-2y^2).$$

Доказательство. Согласно (I.5), (2.2) и теореме I,

$$r(n,f_1)=\frac{2}{11}\left(2^{3\alpha+3}+\left(\frac{2}{u}\right)\right)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{2}{d_1}\right)d_2^3+$$
$$+\frac{4}{11}\nu_1(n)-\frac{2}{11}\nu_2(n), \qquad (2.10)$$

где $\nu_1(n)$ и $\nu_2(n)$ обозначают коэффициенты при Q^n в разложеных функций $-\frac{1}{16\pi^2}X(\tau)\vartheta_{00}^2(\tau;0;2)$ и $-\frac{1}{16\pi^2}X(\tau)\vartheta_{00}^2(\tau;0;4)$.

Согласно (I.2) и (I.3)

$$-\frac{1}{16\pi^2}X(\tau)\vartheta_{00}^2(\tau;0;4)=\sum_{m_1,m_2,m_3,m_4=-\infty}^{\infty}(m_1^2-2m_2^2)Q^{m_1^2+2m_2^2+2m_3^2+2m_4^2},$$

т.е.

$$\nu_2(n)=\sum_{n=x^2+2y^2+2z^2+2t^2}(x^2-2y^2). \qquad (2.11)$$

Из (2.10) - (2.11) следует утверждение.

§ 3. В этом параграфе рассматривается представление чисел формой

$$f_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+2x_8^2.$$

Теорема 2.

$$\vartheta_{00}^7(\tau;0;2)\vartheta_{00}(\tau;0;4)=\theta(\tau;f_2)+\frac{1}{44\pi^2}\Big(\vartheta_{00}^2(\tau;0;2)-$$
$$-4\vartheta_{00}^2(\tau;0;4)\Big)X(\tau),$$

где $X(\tau)$ определено в теореме I.

Теорема 2ª. Пусть $n=2^\alpha u$, $(u,2)=1$. Тогда

$$r(n;f_2)=\frac{2}{11}\Big(2^{3\alpha+6}+\Big(\frac{2}{u}\Big)\Big)\sum_{d_1d_2=u}\Big(\frac{2}{d_1}\Big)d_2^3-\frac{4}{11}\sum_{n=x^2+y^2+z^2+2t^2}(x^2-2t^2)+$$
$$+\frac{16}{11}\sum_{n=x^2+2y^2+2z^2+2t^2}(x^2-2y^2).$$

§ 4. В этом параграфе рассматривается представление чисел формой

$$f_3=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\big(x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2\big).$$

Теорема 3.

$$\vartheta_{00}^3(\tau;0;2)\vartheta_{00}^5(\tau;0;4)=\theta(\tau;f_3)-\frac{1}{88\pi^2}\Big(3\vartheta_{00}^2(\tau;0;2)+$$
$$+5\vartheta_{00}^2(\tau;0;4)\Big)X(\tau).$$

где $X(\tau)$ определено в теореме I.

<u>Теорема 3</u>

<u>Теорема 3ª.</u> Пусть $n=2^{\alpha}u$, $(u,2)=1$. Тогда

$$r(n;f_3)=\frac{2}{11}\left(2^{3\alpha+4}+\left(\frac{2}{u}\right)\right)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{2}{d_1}\right)d_2^3+$$

$$+\frac{6}{11}\sum_{n=x^2+y^2+z^2+2t^2}\left(x^2-2t^2\right)+\frac{10}{11}\sum_{n=x^2+2y^2+2z^2+2t^2}\left(x^2-2y^2\right).$$

§ 5. В этом параграфе рассматривается представление чисел формой

$$f_4=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+2\left(x_6^2+x_7^2+x_8^2\right).$$

<u>Теорема 4.</u>

$$\vartheta_{00}^5(\tau;0;2)\vartheta_{00}^3(\tau;0;4)=\theta(\tau;f_4)-$$

$$-\frac{1}{88\pi^2}\left(5\vartheta_{00}^2(\tau;0,2)+6\vartheta_{00}^2(\tau;0;4)\right)X(\tau),$$

где $X(\tau)$ определено в теореме I.

<u>Теорема 4ª.</u> Пусть $n=2^{\alpha}u$, $(u,2)=1$. Тогда

$$r(n;f_4)=\frac{2}{11}\left(2^{3\alpha+5}+\left(\frac{2}{u}\right)\right)\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{2}{d_1}\right)d_2^3+\frac{10}{11}\sum_{n=x^2+y^2+z^2+2t^2}\left(x^2-2t^2\right)+$$

$$+\frac{12}{11}\sum_{n=x^2+2y^2+2z^2+2t^2}\left(x^2-2y^2\right).$$

§ 6. В этом параграфе рассматривается представление чисел формой

$$f_5=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+4\left(x_6^2+x_7^2+x_8^2\right).$$

<u>Теорема 5.</u>

$$\vartheta_{00}^5(\tau;0;2)\vartheta_{00}^3(\tau;0;8)=\theta(\tau;f_5)+\frac{17}{4}\vartheta_{00}^3(\tau;0;8)\vartheta_{01}^4(\tau;0;8)\vartheta_{80}(\tau;0;8)+$$

$$+5\vartheta_{00}^2(\tau;0;8)\vartheta_{01}^4(\tau;0;8)\vartheta_{80}^2(\tau;0;8)+\frac{5}{4}\vartheta_{00}(\tau;0;8)\vartheta_{01}^4(\tau;0;8)\vartheta_{80}^3(\tau;0;8).$$

<u>Теорема 5ª.</u> Пусть $n=2^{\alpha}u$, $(u,2)=1$. Тогда

$$r(n;f_5)=\frac{3}{2}\sigma_3(n)+\frac{17}{2}\sum_{\substack{n=x^2+4y^2+4z^2+4t^2\\ 2\nmid x,\ x>0}}(x^2-4y^2),\quad \text{если}\quad n\equiv 1 \pmod 4;$$

$$=\frac{5}{2}\sigma_3(n)+10\sum_{\substack{n=x^2+y^2+z^2+4t^2\\ 2\nmid x,\ 2\nmid y,\ 2\nmid z\\ x>0,\ y>0,\ z>0}}(x^2-4t^2),\quad \text{если}\quad n\equiv 3 \pmod 4;$$

$$=20\sigma_3(u)+20\sum_{\substack{n=x^2+y^2+4z^2+4t^2\\ 2\nmid x,\ 2\nmid y,\ x>0,\\ y>0}}(x^2-4z^2),\quad \text{если}\quad \alpha=1;$$

$$=96\sigma_3(u)\quad \text{если}\quad \alpha=2;$$

$$=\frac{2}{7}(41\cdot 2^{3\alpha}+64)\sigma_3(u)\quad \text{если}\quad \alpha\geq 3.$$

§ 7. В этом параграфе рассматривается представление чисел формой $f_6=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4(x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)$.

Теорема 6.

$$\vartheta_{00}^3(\tau;0;2)\vartheta_{00}^5(\tau;0;8)=\theta(\tau;f_6)+\frac{21}{8}\vartheta_{00}^3(\tau;0;8)\vartheta_{01}^4(\tau;0;8)\vartheta_{80}(\tau;0;8)+$$
$$+\frac{3}{2}\vartheta_{00}(\tau;0;8)\vartheta_{01}^4(\tau;0;8)\vartheta_{80}^2(\tau;0;8)+$$
$$+\frac{1}{8}\vartheta_{00}(\tau;0;8)\vartheta_{01}^4(\tau;0;8)\vartheta_{80}^3(\tau;0;8).$$

Теорема 6ª. Пусть $n=2^\alpha u$, $(u,2)=1$. Тогда

$$r(n;f_6)=\frac{3}{4}\sigma_3(n)+\frac{21}{4}\sum_{\substack{n=x^2+4y^2+4z^2+4t^2\\ 2\nmid x,\ x>0}}(x^2-4y^2),\quad \text{если}\quad n\equiv 1 \pmod 4;$$

$$= \frac{1}{4}\sigma_3(n) + \sum_{\substack{n=x^2+y^2+z^2+4t^2\\ 2\nmid x,\ 2\nmid y,\ 2\nmid z\\ x>0,\ y>0,\ z>0}} (x^2-4t^2),$$ если $n \equiv 3 \pmod 4$;

$$= 6\sigma_3(u) + 6\sum_{\substack{n=x^2+y^2+4z^2+4t^2\\ 2\nmid x,\ 2\nmid y,\ x>0,\\ y>0}} (x^2-4t^2),$$ если $\alpha = 1$;

$$= 16\sigma_3(u),$$ если $\alpha = 2$;

$$= \frac{13\,2^{3\alpha}-384}{56}\sigma_3(u),$$ если $\alpha \geq 3$.

§ 8. В этом параграфе рассматривается представление чисел формой

$$f_7 = x_1^2 + 4(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2).$$

Теорема 7.

$$\vartheta_{00}(\tau;0;2)\vartheta_{00}^{7}(\tau;0;8) = \theta(\tau;f_7) + \frac{7}{8}\vartheta_{00}^{3}(\tau;0;8)\vartheta_{01}^{4}(\tau;0;8)\vartheta_{10}(\tau;0;8).$$

Теорема 7*. Пусть $n = 2^{\alpha}u$, $(u,2)=1$. Тогда

$$r(n;f_7) = \frac{1}{4}\sigma_3(u) + \frac{7}{4}\sum_{\substack{n=x^2+4y^2+4z^2+4t^2\\ 2\nmid x,\ x>0}} (x^2-4y^2),$$ если $n \equiv 1 \pmod 4$;

$$= 0,$$ если $n \equiv 3 \pmod 4$;

$$= 16\sigma_3(u),$$ если $\alpha = 2$;

$$= \frac{1}{14}(3\cdot 2^{3\alpha}+32)\sigma_3(u),$$ если $\alpha \geq 3$.

§ 9. В этом параграфе рассматривается представление чисел формой

$$f_8 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + 4x_8^2.$$

Теорема 8.

$$\vartheta_{00}^{7}(\tau;0;2)\,\vartheta_{00}(\tau;0;8)=\theta(\tau;f_8)+$$

$$+\frac{7}{2}\vartheta_{00}^{3}(\tau;0;8)\,\vartheta_{01}^{4}(\tau;0;8)\,\vartheta_{80}(\tau;0;8)+$$

$$+7\,\vartheta_{00}^{2}(\tau;0;8)\,\vartheta_{01}^{4}(\tau;0;8)\,\vartheta_{80}^{2}(\tau;0;8)+$$

$$+\frac{7}{2}\vartheta_{00}(\tau;0;8)\,\vartheta_{01}^{4}(\tau;0;8)\,\vartheta_{80}^{3}(\tau;0;8).$$

Теорема 8'. Пусть $n=2^{\alpha}u$, $(u,2)=1$. Тогда

$$r(n;f_8)=7\sigma_3(n)+7\sum_{\substack{n=x^2+4y^2+4z^2+4t^2\\ 2\nmid x,\ x>0}}(x^2-4y^2), \quad \text{если } n\equiv 1\pmod 4;$$

$$=9\sigma_3(n)+28\sum_{\substack{n=x^2+y^2+z^2+4t^2\\ 2\nmid x,\ 2\nmid y,\ 2\nmid z\\ x>0,\ y>0,\ z>0}}(x^2-4t^2), \quad \text{если } n\equiv 3\pmod 4;$$

$$=56\sigma_3(u)+28\sum_{\substack{n=x^2+y^2+4z^2+4t^2\\ 2\nmid x,\ 2\nmid y,\ x>0,\ y>0}}(x^2-4z^2), \quad \text{если } \alpha=1;$$

$$=56\sigma_3(u), \quad \text{если } \alpha=2;$$

$$=\frac{1}{112}\left(1007\cdot 2^{3\alpha}-1280\right)\sigma_3(u), \quad \text{если } \alpha\geq 3$$

Поступила 22.XII.1991

Кафедра высшей математики
факультета кибернетики и приклад-
ной математики

Литература

1. Р.И.Беридзе. Труды ТГУ, 117, 1966, стр.77-101.

2. Г.А.Ломадзе. Сообщения АН ГССР, 41:2, 1966, стр.257-263.

3. Г.А.Ломадзе. Труды ТГУ, 117, 1966, стр.7-43.

4. А.В.Малышев. Труды Математического института им. В.А.Стеклова, 65, 1962, I-2I2.

რ. ბერიძე

რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ ზოგიერთი რვაცვლადიანი კვადრატული ფორმით

რეზიუმე

მიღებულია ფორმულები ნატურალური n რიცხვის წარმოდგენათა რაოდენობისათვის

$$f=a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2+a_4x_4^2+a_5x_5^2+a_6x_6^2+a_7x_7^2+a_8x_8^2$$

სახის ფორმებით, როცა

$$a_1=1,\ a_2=a_3=\dots=a_8=2;4;$$
$$a_1=a_2=\dots=a_7=1,\ a_8=2;4;$$
$$a_1=a_2=a_3=1,\ a_4=a_5=a_6=a_7=a_8=2;4;$$
$$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=1,\ a_6=a_7=a_8=2;4.$$

R.Beridze

ON THE REPRESENTATION OF INTEGERS BY SOME QUADRATIC FORMS OF EIGHT VARIABLES

Summary

Formulae are obtained for the number of representations of a natural number by quadratic forms of the kind

$$f=a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2+a_4x_4^2+a_5x_5^2+a_6x_6^2+a_7x_7^2+a_8x_8^2,$$

when

$$a_1=1,\ a_2=a_3=\dots=a_8=2;4;$$
$$a_1=a_2=\dots=a_7=1,\ a_8=2;4;$$
$$a_1=a_2=a_3=1,\ a_4=a_5=a_6=a_7=a_8=2;4;$$
$$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=1,\ a_6=a_7=a_8=2;4.$$

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили

ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

314, 1993

УДК 511

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ ТИПОВ (-2,11,1) и (-3,11,χ)

Х.Д.Джашиашвили

Э.Гекке(/ 1 /, с.901) доказал, что существует три класса квадратичных форм с четырьмя переменными дискриминанта 11^2:

$$Q_{11}=x_1^2+x_1x_2+3x_2^2+x_3^2+x_3x_4+3x_4^2,$$

$$Q_{12}=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+2x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3-2x_2x_4,$$

$$Q_{22}=x_1^2+4(x_2^2+x_3^2+x_4^2)+x_1x_3+4x_2x_3+3x_2x_4+7x_3x_4$$

Х.Петерсон (/2/, с.80) доказал, что число представлений натурального числа n квадратичной формой Q_{11} –

$$r(n,Q_{11})=\frac{12}{5}\sum_{d/n,\ 11\nmid d} d+\frac{8}{5}\sum_{\substack{x_1^2+x_2^2+11(x_3^2+x_4^2)=24n\\ x_1\equiv x_2\equiv x_3\equiv x_4\equiv 1 \pmod 6}}\left(\frac{-1}{x_1x_2x_3x_4}\right), \qquad (1)$$

где $\left(\frac{-1}{u}\right)$ обозначает символы Якоби $\left(\frac{-1}{u}\right)$ при $2\nmid u,\ u>0$ и $-\left(\frac{-1}{u}\right)$ при $2\nmid u,\ u<0$.

В предлагаемой работе получены формулы для числа представлений натурального числа n квадратичными формами Q_{12}, Q_{22}.

Пусть

$$Q_1=x_1^2+x_1x_2+3x_2^2.$$

Известно*, что число представлений натурального числа n

---

* Это нам сообщил Г.А.Ломадзе

прямой суммой квадратичных форм Q_{11} и Q_1 –

$$r(n, Q_{11} \oplus Q_1) = \frac{1}{5}\Big(11 \sum_{\delta d=n} \left(\frac{\delta}{11}\right) d^2 - \sum_{d/n} \left(\frac{d}{11}\right) d^2\Big) + \frac{4}{15} \sum_{Q_1=n} 11x_1^2 - 6n \qquad (2)$$

В настоящей работе также получены формулы для числа представлений натурального числа n квадратичными формами: $Q_{12} \oplus Q_1$, $Q_{22} \oplus Q_1$.

§ I. Некоторые известные результаты

Мы всюду будем придерживаться терминологии Э.Гекке /I/. Пусть

$$Q(x) = Q(x_1, \dots, x_f) = \sum_{1 \le r \le s \le f} b_{rs} x_r x_s$$

– положительная квадратичная форма от f (f – чётное) переменных с целыми коэффициентами b_{rs}; D – определитель квадратичной формы

$$2Q(x) = \sum_{r,s=1}^{f} a_{rs} x_r x_s$$

$$(a_{rr} = 2b_{rr};\ a_{rs} = a_{sr} = b_{rs},\ r < s);$$

A_{rs} – алгебраические дополнения элементов a_{rs} в D; Δ – дискриминант квадратичной формы $Q(x)$, т.е. $\Delta = (-1)^{f/2} D$; $\delta = \text{н.о.д.}\left(\frac{A_{rr}}{2}, A_{rs}\right) (r, s = 1, 2, \dots f)$; $N = \frac{D}{\delta}$ – ступень квадратичной формы $Q(x)$; $\chi(d)$ – характер квадратичной формы $Q(x)$, т.е. если Δ – квадрат, то $\chi(d) = 1$, если же Δ не является квадратом и $2 \nmid \Delta$, то

$$\chi(d) = \begin{cases} \left(\frac{d}{|\Delta|}\right) & \text{при } d > 0 \\ (-1)^{f/2} \chi(d) & \text{при } d < 0 \end{cases} \qquad (3)$$

(здесь $\left(\frac{d}{|\Delta|}\right)$ обозначает обобщённый символ Якоби). Положительная квадратичная форма от f переменных, ступени N и с характером χ называется квадратичной формой типа $(-\frac{f}{2}, N, \chi)$.

Всюду в дальнейшем q обозначает нечётное простое число, а $z=\exp(2\pi i\tau)$, $\operatorname{Im}\tau>0$.

Если $Q(x)$ – квадратичная форма типа $(-2,q,1)$, то (/I/, с.874,817) её дискриминант $\Delta=q^2$ и ей соответствует ряд Эйзенштейна

$$E(\tau;Q(x))=1+\frac{24}{q-1}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{d\mid n,\, q\nmid d} d\Big)z^n. \tag{4}$$

Если же $Q(x)$ – квадратичная форма типа $(-k,q,\chi)$, $\chi(-1)=-1$, $2\nmid k$, $k>2$, то (/I/, с.877,818) её дискриминант

$$\Delta=(-1)^{(q-1)/2}\,q^{2l+1},\quad 0\le l\le k-1,$$

и ей соответствует ряд Эйзенштейна

$$E(\tau;Q(x))=1+\frac{1}{A_k(q)}\sum_{n=1}^{\infty}\Big((-1)^{[k/2]}q^{k-l-1}\sum_{\delta d=n}\chi(\delta)d^{k-1}+\sum_{d\mid n}\chi(d)d^{k-1}\Big)z^n, \tag{5}$$

где

$$A_k(q)=(-1)^{[k/2]}\frac{q^{k-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^k}(k-1)!\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-k}.$$

Любой положительной квадратичной форме $Q(x)$, как хорошо известно, соответствует тета-ряд

$$\vartheta(\tau;Q(x))=1+\sum_{n=1}^{\infty}r(n,Q(x))z^n, \tag{6}$$

где $r(n,Q(x))$ обозначает число представлений натурального числа n формой $Q(x)$.

Лемма I (/I/, с.811,954). Целая модулярная форма $F(\tau)$ типа $(-k,N,\chi)$ тождественно равна нулю, если в её разложении

$$F(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

коэффициенты $a_n=0$ для всех $n\le\frac{k}{12}N\prod_{q\mid N}\left(1+\frac{1}{q}\right)$.

Лемма 2 (/I/, с.790,875,845). Если $Q(x)$ является квадратичной формой типа $(-k, q, \varkappa)$, то отвечающие ей тета-ряд $\vartheta(\tau, Q(x))$ и ряд Эйзенштейна $E(\tau; Q(x))$ будут целыми модулярными формами типа $(-k, q, \varkappa)$.

§ 2. Квадратичные формы типа (-2,II,I)

Теорема I.

$$r(n, Q_{12}) = \frac{12}{5} \sum_{d/n,\ 11\nmid d} d + \frac{12}{5} \sum_{\substack{x_1^2+x_2^2+11(x_3^2+x_4^2)=24n \\ x_1\equiv x_2\equiv x_3\equiv x_4\equiv 1 \pmod 6}} \frac{-1}{x_1 x_2 x_3 x_4}$$

$$r(n, Q_{22}) = \frac{12}{5} \sum_{d/n,\ 11\nmid d} d + \frac{48}{5} \sum_{\substack{x_1^2+x_2^2+11(x_3^2+x_4^2)=24n \\ x_1\equiv x_2\equiv x_3\equiv x_4\equiv 1 \pmod 6}} \left(\frac{-1}{x_1 x_2 x_3 x_4}\right).$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что квадратичные формы Q_{11}, Q_{12} и Q_{22} являются квадратичными формами типа (-2,II,I). Следовательно, согласно лемме 2, функции

$$\varphi_1(\tau) = \vartheta(\tau; Q_{12}) + \vartheta(\tau; Q_{22}) - \frac{5}{4} E(\tau; Q_{11}) - \frac{3}{4} \vartheta(\tau; Q_{11})$$

и

$$\varphi_2(\tau) = \vartheta(\tau; Q_{12}) - \vartheta(\tau; Q_{22}) - \frac{15}{4} E(\tau; Q_{11}) + \frac{15}{4} \vartheta(\tau; Q_{11})$$

будут целыми модулярными формами типа (-2,II,I). Таким образом, в силу леммы I, они будут тождественно равны нулю, если в их разложениях по степеням z коэффициенты при z^n равны нулю для всех $n \leqslant 2$.

Из (4) следует:

$$E(\tau; Q_{11}) = E(\tau; Q_{12}) = E(\tau; Q_{22}) = 1 + \frac{12}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{d/n,\ 11\nmid d} d \Big) z^n = \tag{7}$$
$$= 1 + \frac{12}{5} z + \frac{36}{5} z^2 + \ldots$$

Э.Гекке (/I/, с.901) показал, что

$$\vartheta(\tau, Q_{11}) = 1 + 4z + 4z^2 + 8z^3 + \ldots, \tag{8}$$

$$\vartheta(\tau;Q_{12})=1+0z+12z^2+12z^3+\cdots, \qquad (9)$$

$$\vartheta(\tau;Q_{22})=1+6z+0z^2+6z^3+\cdots \qquad (10)$$

Теперь нетрудно проверить, что коэффициенты при z^n в разложениях функций $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ по степеням z равны нулю для всех $n\leq 2$. Итак, доказаны тождества:

$$\vartheta(\tau;Q_{12})+\vartheta(\tau;Q_{22})=\frac{5}{4}E(\tau;Q_{11})+\frac{3}{4}\vartheta(\tau;Q_{11}), \qquad (11)$$

$$\vartheta(\tau;Q_{12})-\vartheta(\tau;Q_{22})=\frac{15}{4}E(\tau;Q_{11})-\frac{15}{4}\vartheta(\tau;Q_{11}). \qquad (12)$$

Сложив тождества (II) и (I2), получим:

$$\vartheta(\tau;Q_{12})=\frac{5}{2}E(\tau;Q_{11})-\frac{3}{2}\vartheta(\tau;Q_{11}).$$

Приравняв коэффициенты при z^n в обеих частях этого тождества и приняв во внимание (6) и (7), получим:

$$r(n,Q_{12})=6\sum_{d|n,\ 11\nmid d} d-\frac{3}{2}r(n,Q_{11}),$$

откуда, в силу формулы (I),

$$r(n,Q_{12})=6\sum_{d|n,\ 11\nmid d} d-\frac{3}{2}\left(\frac{12}{5}\sum_{d|n,\ 11\nmid d} d+\frac{8}{5}\sum_{\substack{x_1^2+x_2^2+11(x_3^2+x_4^2)=24n\\ x_1\equiv x_2\equiv x_3\equiv x_4\equiv 1 \pmod 6}}\left(\frac{-1}{x_1x_2x_3x_4}\right)\right). \qquad (13)$$

Если из тождества (II) вычтем тождество (I2), получим

$$\vartheta(\tau;Q_{22})=-\frac{5}{4}E(\tau;Q_{11})+\frac{9}{4}\vartheta(\tau;Q_{11}).$$

Отсюда, так же, как и выше,

$$r(n,Q_{22})=-3\sum_{d|n,\ 11\nmid d} d+\frac{9}{4}\left(\frac{12}{5}\sum_{d|n,\ 11\nmid d} d+\frac{8}{5}\sum_{\substack{x_1^2+x_2^2+11(x_3^2+x_4^2)=24n\\ x_1\equiv x_2\equiv x_3\equiv x_4\equiv 1 \pmod 6}}\left(\frac{-1}{x_1x_2x_3x_4}\right)\right). \qquad (14)$$

Из (13) и (14) следует утверждаемое.

§ 3. Квадратичные формы типа $(-3, 11, \chi)$

Теорема 2

$$r(n, Q_{12} \oplus Q_1) = \frac{1}{3}\left(11 \sum_{\delta d = n} \left(\frac{\delta}{11}\right) d^2 - \sum_{d \mid n} \left(\frac{d}{11}\right) d^2\right) - \frac{2}{15} \sum_{Q_1 = n} (11 x_1^2 - 6n),$$

$$r(n, Q_{22} \oplus Q_1) = \frac{1}{3}\left(11 \sum_{\delta d = n} \left(\frac{\delta}{11}\right) d^2 - \sum_{d \mid n} \left(\frac{d}{11}\right) d^2\right) + \frac{7}{15} \sum_{Q_1 = n} (11 x_1^2 - 6n).$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что квадратичные формы $Q_{11} \oplus Q_1$, $Q_{12} \oplus Q_1$, $Q_{22} \oplus Q_1$ являются квадратичными формами типа $(-3, 11, \chi)$; здесь, в силу (3), $\chi = \chi(d) = \left(\frac{d}{11}\right)$ при $d > 0$. Следовательно, согласно лемме 2, функции

$$\varphi_3(\tau) = \vartheta(\tau; Q_{12} \oplus Q_1) + \vartheta(\tau; Q_{22} \oplus Q_1) - \frac{3}{4} E(\tau; Q_{11} \oplus Q_1) - \frac{5}{4} \vartheta(\tau; Q_{11} \oplus Q_1)$$

и

$$\varphi_4(\tau) = \vartheta(\tau; Q_{12} \oplus Q_1) - \vartheta(\tau; Q_{22} \oplus Q_1) - \frac{9}{4} E(\tau; Q_{11} \oplus Q_1) + \frac{9}{4} \vartheta(\tau; Q_{11} \oplus Q_1)$$

будут целыми модулярными формами типа $(-3, 11, \chi)$. Таким образом, в силу леммы 1, они будут тождественно равны нулю, если в их разложениях по степеням z, коэффициенты при z^n равны нулю для всех $n \leqslant 3$.

Для всех трёх вышеперечисленных квадратичных форм имеем: $k = 3$, $\Delta = -11^2$, т.е. $q = 11$ и $\ell = 1$; а Э.Гекке (/1/, с.828) показал, что $A_3(11) = -3$. Таким образом, из (5) следует:

$$E(\tau; Q_{11} \oplus Q_1) = E(\tau; Q_{12} \oplus Q_1) = E(\tau; Q_{22} \oplus Q_1) =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(11 \sum_{\delta d = n} \left(\frac{\delta}{11}\right) d^2 - \sum_{d \mid n} \left(\frac{d}{11}\right) d^2\right) z^n = 1 + \frac{10}{3} z + 12 z^2 + \frac{100}{3} z^3 + \ldots \quad (15)$$

Известно (/3/, с.168), что

$$r(n, Q_1) = r(2^a u, Q_1) = \begin{cases} 2 \sum_{d \mid u} \left(\frac{d}{11}\right) & \text{при } 2 \mid a, \\ 0 & \text{при } 2 \nmid a. \end{cases}$$

Вычислив по этой формуле значения $r(n,Q_1)$ при $n=1,2,3$ согласно (6), получим:

$$\vartheta(\tau;Q_{11}\oplus Q_1)=\vartheta(\tau;Q_{11})\vartheta(\tau;Q_1)=1+6z+12z^2+20z^3+\cdots, \tag{16}$$

$$\vartheta(\tau;Q_{12}\oplus Q_1)=\vartheta(\tau;Q_{12})\vartheta(\tau;Q_1)=1+2z+12z^2+40z^3+\cdots, \tag{17}$$

$$\vartheta(\tau;Q_{22}\oplus Q_1)=\vartheta(\tau;Q_{22})\vartheta(\tau;Q_1)=1+8z+12z^2+10z^3+\cdots \tag{18}$$

Теперь, принимая во внимание (15) – (18), нетрудно проверить, что коэффициенты при z^n в разложениях функций $\psi_3(\tau)$ и $\psi_4(\tau)$ по степеням z равны нулю для всех $n\leq 3$. Итак, доказаны тождества:

$$\vartheta(\tau;Q_{12}\oplus Q_1)+\vartheta(\tau;Q_{22}\oplus Q_1)=\frac{3}{4}E(\tau;Q_{11}\oplus Q_1)+\frac{5}{4}\vartheta(\tau;Q_{11}\oplus Q_1), \tag{19}$$

$$\vartheta(\tau;Q_{12}\oplus Q_1)-\vartheta(\tau;Q_{22}\oplus Q_1)=\frac{9}{4}E(\tau;Q_{11}\oplus Q_1)-\frac{9}{4}\vartheta(\tau;Q_{11}\oplus Q_1). \tag{20}$$

Сложив эти тождества, получим:

$$\vartheta(\tau;Q_{12}\oplus Q_1)=\frac{3}{2}E(\tau;Q_{11}\oplus Q_1)-\frac{1}{2}\vartheta(\tau;Q_{11}\oplus Q_1).$$

Приравнивая коэффициенты при z^n в обеих частях этого тождества и принимая во внимание (6) и (15), получаем:

$$r(n,Q_{12}\oplus Q_1)=\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{3}\left(11\sum_{\delta d=n}\left(\frac{\delta}{11}\right)d^2-\sum_{d|n}\left(\frac{d}{11}\right)d^2\right)\right\}-\frac{1}{2}r(n,Q_{11}\oplus Q_1),$$

откуда, в силу формулы (2),

$$\begin{aligned} r(n,Q_{12}\oplus Q_1)&=\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{3}\left(11\sum_{\delta d=n}\left(\frac{\delta}{11}\right)d^2-\sum_{d|n}\left(\frac{d}{11}\right)d^2\right)\right\}-\\ &-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\left(11\sum_{\delta d=n}\left(\frac{\delta}{11}\right)d^2-\sum_{d|n}\left(\frac{d}{11}\right)d^2\right)\right\}-\frac{2}{15}\sum_{Q_1=n}\left(11x_1^2-n\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Если из тождества (19) вычтем тождество (20), получим:

$$\vartheta(\tau;Q_{22}\oplus Q_1)=-\frac{3}{4}E(\tau;Q_{11}\oplus Q_1)+\frac{7}{4}\vartheta(\tau;Q_{11}\oplus Q_1).$$

Отсюда, так же, как и выше,

$$r(n, Q_{22}\oplus Q_1)=\frac{3}{4}\left\{\frac{1}{3}\left(11\sum_{\delta d=n}\left(\frac{\delta}{11}\right)d^2-\sum_{d|n}\left(\frac{d}{11}\right)d^2\right)\right\}+$$
$$+\frac{7}{4}\left\{\frac{1}{3}\left(11\sum_{\delta d=n}\left(\frac{\delta}{11}\right)d^2-\sum_{d|n}\left(\frac{d}{11}\right)d^2\right)\right\}+\frac{7}{15}\sum_{Q_1=n}\left(11x_1^2-6n\right). \qquad (22)$$

Из (21) и (22) следует утверждаемое.

Поступила 13.V.1982

Кафедра
алгебры и геометрии

Литература

1. E.Hecke. Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen – In: Mathematische Werke. Zweite Auflage. – Göttingen: Vandenhoeck u. Ruprecht, 1970, S.789–918.
2. H.Petersson. Modulfunktionen und quadratische Formen – Berlin: Springer, 1982.
3. Л.Е.Диксон. Введение в теорию чисел. Перевод с английского. – Тбилиси: Изд-во АН ГССР, 1941.

ნ.ქაჭიაშვილი

(-2,11,1) და (-3,11,χ) ტიპის კვადრატული ფორმებით რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ

რეზიუმე

მიღებულია ფორმულები ნატურალური რიცხვის (-2,11,1) და (-3,11,χ) ტიპის ორ-ორი კვადრატული ფორმით წარმოდგენათა რაოდენობისათვის.

Kh. Jashiashvili

ON THE REPRESENTATION OF INTEGERS BY QUADRATIC FORMS OF TYPES $(-2, 11, 1)$ AND $(-3, 11, \chi)$

Summary

Formulae are obtained for the number of representations of positive integers by two quadratic forms of type $(-2, 11, 1)$ and two of type $(-3, 11, \chi)$.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

314, 1993

УДК 511+512

ИСПРАВЛЕНИЕ К РАБОТЕ "О ЧИСЛЕ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ. II." ТРУДЫ ТГУ, 1989, т.288, 46-69

Н.Д. Кочахидзе

В лемме 3 на стр.48 величина G_1 должна иметь вид:

$$G_1=(\nu-2)(\nu-3)\frac{A_{74}}{2}x_4^{\nu-4}x_3x_4+(\nu-2)(A_{73}x_4+A_{71}x_3)x_4^{\nu-3}+A_{34}x_4^{\nu-2}.$$

Ввиду этого на стр.50 получим:

$$\varphi_{4\dots 433}=x_3^2x_4^4-\frac{Q}{3\cdot 17}\left(18x_3^2x_4^2-12x_3x_4^3+5x_4^4\right)+$$
$$+\frac{6Q^2}{5\cdot 17^2}\left(3x_3^2-12x_3x_4+13x_4^2\right)-\frac{72}{5\cdot 17}Q^3,$$

а вместо функции $\varphi^*_{1\dots 123}$ следует взять функцию

$$\varphi^*_{1\dots 144}=x_1^4x_4^2-\frac{2Q^*}{3\cdot 17}\left(x_1^4+4x_1^3x_4+3x_1^2x_4^2\right)+$$
$$+\frac{2Q^{*2}}{5\cdot 17^2}\left(5x_1^2+4x_1x_4+x_4^2\right)-\frac{3Q^{*3}}{5\cdot 17^3}.$$

Следовательно, на стр.55 формула (12) примет вид:

$$\vartheta(\tau,Q,\varphi_{4\dots 433})=\frac{1}{15\cdot 17^3}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q=n}73695x_3^2x_4^4-1445n\left(18x_3^2x_4^2-\right.$$
$$\left.-12x_3x_4^3+5x_4^4\right)+306n^2\left(3x_3^2-12x_3x_4+13x_4^2\right)-216n^3\Big)z^n=$$

$$=\frac{36}{5\cdot 17^3}z+\frac{17422}{5\cdot 17^3}z^2-\frac{8574}{5\cdot 17^3}z^3-\frac{25998}{5\cdot 17^3}z^4+\frac{64450}{5\cdot 17^3}z^5-\frac{402024}{5\cdot 17^3}z^6+$$

$$+\frac{1067870}{5\cdot 17^3}z^7-\frac{1399346}{5\cdot 17^3}z^8+\frac{1134744}{5\cdot 17^3}z^9+\frac{1394310}{5\cdot 17^3}z^{10}+\ldots,$$

а в формуле (I7) вместо разложения тета-ряда $\vartheta(\tau, Q^*, \varphi^*_{1\ldots 123})$ надо взять

$$\vartheta(\tau, Q^*, \varphi^*_{1\ldots 144})=\frac{1}{15\cdot 17^3}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q^*=n} 73695x_1^4x_4^2-2890n(x_1^4+2x_1^3x_4+3x_1^2x_4^2)+$$
$$+102n^2(5x_1^2+4x_1x_4+x_4^2)-9n^3\Big)z^n=$$

$$=\frac{1350}{15\cdot 17^3}z^3+\frac{600}{15\cdot 17^3}z^5+\frac{3128}{15\cdot 17^3}z^8+\frac{5584}{25\cdot 17^3}z^9+\frac{9980}{15\cdot 17^3}z^{10}+\ldots$$

На стр.56 в теореме и в формуле (20) последний тета-ряд $\vartheta(\tau, Q^*, \varphi_{1\ldots 123})$ следует заменить тета-рядом $\vartheta(\tau, Q^*, \varphi^*_{1\ldots 144})$.

В результате этих исправлений все содержимое на стр.57 и 58 неверно и оно должно быть заменено следующим:

$$c_1=-\frac{35\,642\,140\,826\,895}{2^6\cdot 13\cdot 29\,950\,897\cdot 121\,141\,729},\quad c_2=-\frac{51\,922\,138\,011\,369}{2^5\cdot 13\cdot 29\,950\,897\cdot 121\,141\,729},$$

$$c_3=\frac{12\,306\,586\,348\,033}{2^5\cdot 13\cdot 29\,950\,897\cdot 121\,141\,729},\quad c_4=\frac{4\,829\,929\,779\,312\,877}{2^6\cdot 3\cdot 13\cdot 29\,950\,897\cdot 121\,141\,729},$$

$$c_5=\frac{25\,065\,000\,012\,865}{2^3\cdot 29\,950\,897\cdot 121\,141\,729},$$

$$c_6=-\frac{361\,822\,130\,728\,835\,554\,761\,927}{2^8\cdot 13\cdot 17^2\cdot 547\cdot 29\,950\,897\cdot 121\,141\,729},$$

$$c_7=\frac{504\,484\,475\,034\,083\,518\,117\,899}{2^7\cdot 13\cdot 17^2\cdot 547\cdot 29\,950\,897\cdot 121\,141\,729},$$

$$c_8 = \frac{7\,820\;093\;402\;727\;813\;879\;507}{2^5\cdot 13\cdot 17^2\cdot 547\cdot 29\,950\,897\cdot 121\,141\,729},$$

$$c_9 = -\frac{15\cdot 58\,689\;602\;654\;444\;245\;753\;703}{2^8\cdot 13\cdot 17^3\cdot 547\cdot 29\,950\,897\cdot 121\,141\,729},$$

$$c_{10} = \frac{15\cdot 31\,803\;685\;229\;929\;508\;608\;701}{2^7\cdot 13\cdot 17^2\cdot 547\cdot 29\,950\,897\cdot 121\,141\,729}.$$

Приравнивая коэффициенты при z^{n+12} в обеих частях тождества (20) и принимая во внимание (8) - (19) и значения чисел $c_1, c_2, \ldots, c_{10}$, получаем:

$$a_{17}(n) = \frac{1}{2\cdot 29\,950\,897}\left\{\sum_{d_1 d_2 = n+12}\left(\frac{d_1}{17}\right) d_2^7 - \right.$$

$$- \frac{35\,642\,140\,826\,895}{2^5\cdot 13\cdot 17^3\cdot 121\,141\,729}\sum_{Q=n+12}\left(4913x_1^6 - 10115(n+12)x_1^4 + 4998(n+12)^2x_1^2 - 343(n+12)^3\right) -$$

$$- \frac{51\,922\,138\,011\,369}{2^4\cdot 13\cdot 17^3\cdot 121\,141\,729}\sum_{Q=n+12}\left(4913x_2^6 - 8670(n+12)x_2^4 + 3672(n+12)^2x_2^2 - 216(n+12)^3\right)$$

$$+ \frac{12\,306\,586\,348\,033}{2^4\cdot 13\cdot 17^3\cdot 121\,141\,729}\sum_{Q=n+12}\left(4913x_3^6 - 7225(n+12)x_3^4 + 2550(n+12)^2x_3^2 - 125(n+12)^3\right),$$

$$+ \frac{4\,829\,929\,779\,312\,877}{2^5\cdot 3\cdot 13\cdot 17^3\cdot 121\,141\,729}\sum_{Q=n+12}\left(4913x_4^6 - 4335(n+12)x_4^4 + 918(n+12)^2x_4^2 - 27(n+12)^3\right)$$

$$+\frac{5\,013\,000\,002\,573}{2^2\cdot 3\cdot 17^3\cdot 121\,141\,729}\sum_{Q=n+12}\Big(78695x_3^2x_4^4-1445(n+12)(18x_3^2x_4^2-12x_3x_4^3+5x_4^4)+$$

$$+306(n+12)^2(3x_3^2-12x_3x_4+13x_4^2)-216(n+12)^3\Big)-$$

$$-\frac{361\,822\,130\,788\,835\,554\,761\,927}{2^7\cdot 13\cdot 17^5\cdot 547\cdot 121\,141\,729}\sum_{Q^*=n+12}\Big(4913x_1^6-1445(n+12)x_1^4+102(n+12)^2x_1^2-(n+12)^3\Big)+$$

$$+\frac{504\,764\,479\,034\,083\,518\,117\,899}{2^6\cdot 13\cdot 17^5\cdot 547\cdot 121\,141\,729}\sum_{Q^*=n+12}\Big(4913x_3^6-1445(n+12)x_3^4+102(n+12)^2x_3^2-(n+12)^3\Big)+$$

$$+\frac{7\,820\,093\,402\,727\,813\,879\,507}{2^4\cdot 13\cdot 17^5\cdot 547\cdot 121\,141\,729}\sum_{Q^*=n+12}\Big(4913x_4^6-2890(n+12)x_4^4+408(n+12)^2x_4^2-8(n+12)^3\Big)-$$

$$-\frac{58\,689\,602\,654\,414\,245\,753\,703}{2^7\cdot 13\cdot 17^5\cdot 547\cdot 121\,141\,729}\sum_{Q^*=n+12}\Big(73695x_1^4x_3^2-1445(n+12)(x_1^4+6x_1^2x_3^2)+$$

$$+51(n+12)^2(4x_1^2+2x_3^2)-3(n+12)^3\Big)+$$

$$+\frac{31\,803\,685\,229\,919\,508\,608\,701}{2^6\cdot 13\cdot 17^5\cdot 547\cdot 121\,141\,729}\sum_{Q^*=n+12}\Big(73695x_1^4x_4^2-2890(n+12)(x_1^4+2x_1^3x_4+3x_1^2x_4^2)+$$

$$+102(n+12)^2(5x_1^2+4x_1x_4+x_4^2)-8(n+12)^3\Big)\Big\}.$$

Поступила 10.У.1992

Кафедра
алгебры и геометрии

ნ.კაჭახიძე

ანოტაცია

ნაშრომის "სიმეტრიული ჯამების გამოყენება წარმოდგენათა რიცხვის შესახებ. II" თბილისის უნივერსიტეტის შრომები, 1989, ტ.288, 45-59.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

314, 1993

УДК 539.31

ЗАДАЧА О РАСТЯЖЕНИИ И ИЗГИБЕ МОМЕНТАМИ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННОГО КРУГОВОГО ИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА С ПРОДОЛЬНЫМИ ЩЕЛЯМИ

К.В.Кахая

В работе /3,4/ дан алгоритм решения задач теории упругости для тел, близких к цилиндрическим, позволяющий учитывать возмущение цилиндрических поверхностей лишь в граничных условиях.

В данной статье указанным способом дано решение задач растяжения и изгиба моментами для естественно закрученных однородных изотропных брусьев с поперечным сечением, представляющим собой круговую область с прямолинейными разрезами.

Пусть изотропное тело ограничено плоскостями $x_3=0$ и $x_3=l$ $(l>0)$ и поверхностью, уравнения которой даны в виде

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1^0(s)\cos\alpha - x_2^0(s)\sin\alpha,\\
x_2 &= x_2^0(s)\cos\alpha + x_1^0(s)\sin\alpha, \qquad (1)\\
x_3 &= x_3,
\end{aligned}
$$

где s – дуговая абсцисса на кривой L границы области S,

N.Kachakhidze

CORRECTION

to the paper "On the Number of Irreducible Representations of a Symmetric Group. II", Proceedings of Tbilisi University, v.288, 1989, 46–59.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

314, 1993

УДК 539.31

ЗАДАЧА О РАСТЯЖЕНИИ И ИЗГИБЕ МОМЕНТАМИ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННОГО КРУГОВОГО ИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА С ПРОДОЛЬНЫМИ ЩЕЛЯМИ

К. В. Кахая

В работе /3,4/ дан алгоритм решения задач теории упругости для тел, близких к цилиндрическим, позволяющий учитывать возмущение цилиндрических поверхностей лишь в граничных условиях.

В данной статье указанным способом дано решение задач растяжения и изгиба моментами для естественно закрученных однородных изотропных брусьев с поперечным сечением, представляющим собой круговую область с прямолинейными разрезами.

Пусть изотропное тело ограничено плоскостями $x_3=0$ и $x_3=l$ $(l>0)$ и поверхностью, уравнения которой даны в виде

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1^0(s)\cos\alpha - x_2^0(s)\sin\alpha,\\
x_2 &= x_2^0(s)\cos\alpha + x_1^0(s)\sin\alpha,\\
x_3 &= x_3,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где s – дуговая абсцисса на кривой L границы области S, полученной сечением области Ω , занятой телом, плоскостью $x_3=0$, а $\alpha=\theta x_3$ – угол поворота поперечных сечений тела при равномерном закручивании тела, где θ – малый параметр.

Предполагается, что начало прямоугольной системы декартовых координат $Ox_1x_2x_3$ помещено в центре инерции основания тела при $x_3=0$ (назовем это основание нижним), а оси Ox_1 и Ox_2 направлены по главным осям инерции этого основания.

В рассматриваемых задачах боковая поверхность (I) свободна от нагрузки, поэтому будут иметь место следующие граничные условия

$$\tau_{kn} \equiv \sum_{j=1}^{3} \tau_{jk} n_j = 0 \quad (k=1,2,3) \tag{2}$$

в точках поверхности (I), а в области Ω , занятой телом, помимо компоненты напряжения τ_{jk} и соответствующие им компоненты деформации e_{jk} должны удовлетворять следующим уравнениям равновесия и условиям совместимости Сен-Венана:

$$\sum_{j=1}^{3} \partial_j \tau_{jk} = 0 \quad (k=1,2,3), \tag{3}$$

$$\partial_i \partial_\gamma e_{jj} = \partial_j (-\partial_j e_{i\gamma} + \partial_i e_{\gamma j} + \partial_\gamma e_{ij}) \quad (i,j,\gamma=1,2,3), \tag{4}$$

где $\partial_\alpha \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}$ (α = 1,2,3) обозначает оператор дифференцирования.

Будут рассматриваться только малые деформации. Тогда между компонентами деформаций и компонентами смещения u_α имеют место следующие зависимости:

$$e_{\alpha\beta} = \partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha, \quad e_{\gamma\gamma} = \partial_\gamma u_\gamma \quad (\alpha \neq \beta,\ \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3). \tag{5}$$

С торцевых условиях будет сказано ниже.

Искомые компоненты напряжения представим в виде /4/

$$\tau_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{N} \theta^{k} \tau_{\alpha\beta}^{(k)}, \tag{6}$$

где θ – указанный малый параметр, $\tau_{\alpha\beta}^{(0)}$ – решение задач Сен-Венана для цилиндрического тела с "невозмущенной" боковой поверхностью, а $\tau_{\alpha\beta}^{(k)}$ $(k \geqslant 1)$ – дополнительные напряжения, подлежащие определению.

Подстановкой выражения (6) в уравнения равновесия и граничные условия (2), как показано в работе /4/, искомые компоненты напряжения $\tau_{\alpha\beta}^{(k)}$ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\tau_{1\alpha}^{(k)} n_1^0 + \tau_{2\alpha}^{(k)} n_2^0 + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} C_m^j \Big\{ [x_1\partial_2 - x_2\partial_1]^{(m-j)} \tau_{1\alpha}^{(k-m)} \frac{d^j n_1}{d\theta^j} + [x_1\partial_2 - x_2\partial_1]^{(m-j)} \tau_{2\alpha}^{(k-m)} \frac{d^j n_2}{d\theta^j} \Big\}_{\theta=0} x_3^{m-j} + \sum_{m=0}^{k-1} \Big\{ \frac{1}{m!} [x_1\partial_2 - x_2\partial_1]^{(m)} \tau_{\alpha 3}^{(k-m-1)} [n_1^0 x_2(s) - n_2^0 x_1(s)] \Big\}_{\theta=0} x_3^{m} = 0, \tag{7}$$

где

$$[x_1\partial_2 - x_2\partial_1]^{(m)} \equiv \Big[x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big]^{(m)}, \quad C_m^j = \frac{m!}{j!(m-j)!},$$

$$\frac{d^{2i+1} n_j}{d\theta^{2i+1}} = (-1)^{i+2-j} n_{3-j}^0 x_3^{2i+1}, \qquad \frac{d^{2i} n_j}{d\theta^{2i}} = (-1)^{i} x_3^{2i} n_j^0,$$

n_j - косинусы нормали к поверхности (I), а n_j^0 - косинусы нормали к цилиндрической поверхности, параметрическое уравнение которой будет дано в виде

$$x_1 = x_1^0(s), \qquad x_2 = x_2^0(s), \qquad x_3 = x_3. \tag{8}$$

Итак, для определения компонентов напряжения $\tau_{\alpha\beta}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots N$) на первом этапе требуется определить компоненты напряжений $\tau_{\alpha\beta}^{(0)}$, т.е. решить задачи Сен-Венана для цилиндрических тел, ограниченных поверхностью (8).

Торцевые условия при $x_3=0$ примут вид /2/.

$$\iint\limits_S \tau_{\alpha 3}^{(0)} ds - P_\alpha + \sum_{k=1}^{N} \theta^k \iint\limits_S \tau_{\alpha 3}^{(k)} ds = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

$$\iint\limits_S \left(x_1 \tau_{23}^{(0)} - x_2 \tau_{13}^{(0)}\right) ds - m_3 + \sum_{k=1}^{N} \theta^k \iint\limits_S \left(x_1 \tau_{23}^{(k)} - x_2 \tau_{13}^{(k)}\right) ds = 0,$$

$$\iint\limits_S x_2 \tau_{33}^{(0)} ds - m_1 + \sum_{k=1}^{N} \theta^k \iint\limits_S x_2 \tau_{33}^{(k)} ds = 0,$$

$$\iint\limits_S x_1 \tau_{33}^{(0)} ds + m_2 + \sum_{k=1}^{N} \theta^k \iint\limits_S x_1 \tau_{33}^{(k)} ds = 0,$$

где P_3 и P_1, P_2 - продольные и поперечные силы, приложенные в произвольной точке основания при $x_3 = 0$, а m_3 и m_1, m_2 - крутящие и изгибающие моменты.

Искомые компоненты напряжения $\tau_{\alpha\beta}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots N$) должны быть представлены в виде / 2 /

$$\tau_{\alpha\beta}^{(k)} = \left(\tau_{\alpha\beta}^{(k)}\right)^{a} + \left(\tau_{\alpha\beta}^{(k)}\right)^{s},$$

где $\left(\tau_{\alpha\beta}^{(k)}\right)^{a}$ - решение задач Альманзи с заданными правыми частями, а $\left(\tau_{\alpha\beta}^{(k)}\right)^{s}$ - решение задач Сен-Венана с торцевыми условиями (при $x_3 = 0$)

$$\iint\limits_{S}\left(\tau_{\alpha 3}^{(k)}\right)^{s} ds = -\iint\limits_{S}\left(\tau_{\alpha 3}^{(k)}\right)^{a} ds \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

$$\iint\limits_{S}\left[x_1\left(\tau_{23}^{(k)}\right)^{s} - x_2\left(\tau_{13}^{(k)}\right)^{s}\right] ds = -\iint\limits_{S}\left[x_1\left(\tau_{23}^{(k)}\right)^{a} - x_2\left(\tau_{13}^{(k)}\right)^{a}\right] ds,$$

$$\iint\limits_{S} x_\beta\left(\tau_{33}^{(k)}\right)^{s} ds = \iint\limits_{S} x_\beta\left(\tau_{33}^{(k)}\right)^{a} ds \qquad (\beta = 1, 2).$$

Рассмотрим изотропный, естественно закрученный круговой цилиндр высотой l и радиусом R. Пусть рассматриваемое тело имеет продольные щели, образующие которых параллельны оси Ox_3, начало системы координат $Ox_1x_2x_3$ помещено в нижнем основании тела в центре круга, а прямолинейные щели расположены в плоскости x_1Ox_3.

Нормальное сечение естественно закрученного кругового цилиндра со щелями будет представлять собой круговую область с прямолинейными разрезами, соответствующими щелям, расположенным вдоль диаметра, не выходящими на внешнюю круговую границу γ_0.

Обозначим разрезы через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q$, где q - натуральное число, а значения величин, заданных на верхнем и нижнем краях разрезов, будут снабжены дополнительно $+$ $-$ соответственно.

Пусть к нижнему основанию тела при $x_3 = 0$ приложены продольные силы, главный вектор которых P приложен в центре инерции и направлен параллельно оси Ox_3 и, кроме того, изгибающие пары с моментами m_1 и m_2.

Тогда для компонентов напряжения $\tau^{(0)}_{\alpha\beta}$ будет иметь следующие выражения / 2 /:

$$\tau^{(0)}_{\alpha\beta}=0, \quad \tau^{(0)}_{33}=(a^*_0+a^*_1x_1+a^*_2x_2)E \tag{9}$$

где постоянные a^*_j принимают значения

$$a_0=-P(\mathcal{I}_{33})^{-1}, \quad a_1=m_2(\mathcal{I}_{11})^{-1}, \quad a_2=-m_1(\mathcal{I}_{22})^{-1},$$

$$\mathcal{I}_{11}=E\iint\limits_S x_1^2ds, \quad \mathcal{I}_{22}=\iint\limits_S x_2^2ds, \quad \mathcal{I}_{33}=\iint\limits_S ds=Es^*.$$

Учитывая (9), граничные условия (4) для $k=1$ примут вид

$$\tau^{(1)}_{n\alpha}=0, \quad \tau^{(1)}_{n3}=g(s) \quad (\alpha=1,2), \tag{10}$$

где

$$\tau^{(1)}_{n\alpha}\equiv\tau^{(1)}_{1\alpha}n^0_1+\tau^{(1)}_{2\alpha}n^0_2 \quad (\alpha=1,2,3),$$

$$g(s)=\left[(a^*_1x_1^2+a^*_2x_1x_2+a^*_0x_1)n^0_2-\right.$$

$$\left.-(a^*_1x_1x_2+a^*_2x_2^2+a^*_0x_2)n^0_1\right]E. \tag{11}$$

Очевидно, что главный вектор усилий $g(s)$ равен нулю и поэтому $\tau^{(1)}_{\alpha\beta}$ будет представлять собой решение антиплоской задачи / 2 /.

Тогда можем написать / 2 /

$$\tau^{(1)}_{\alpha\beta}=0, \quad \tau^{(1)}_{33}=0, \quad \tau^{(1)}_{\alpha3}=\mu\partial_\alpha\chi_* \quad (\alpha,\beta=1,2), \tag{12}$$

где гармоническая функция χ_* является решением граничной задачи Неймана

$$\partial_n \chi_* \equiv \partial_1 \chi_* n_1^\circ + \partial_2 \chi_* n_2^\circ = \frac{1}{\mu} g_0(s) \qquad (13)$$

в точках контура γ_0.

$$(\partial_n \chi_*)_k^{\pm} = \frac{1}{\mu} g_k^{\pm}(s) \qquad (k = 1, 2, \ldots q) \qquad (14)$$

в точках контура γ_k, где g_0 и $g_k^{\pm}$ – значения функции $g(s)$ (см. (II)) на контуре γ_0 и в точках разреза γ_k с номером k, взятых соответственно для краев $x_2 > 0$ (g_k^{+}) и $x_2 < 0$ (g_k^{-}).

Вместо функции χ_* введем сопряженную к ней гармоническую функцию $\chi(x_1, x_2)$, определенную условиями Коши-Римана

$$\partial_1 \chi = \partial_2 \chi_*, \qquad \partial_2 \chi = -\partial_1 \chi_*.$$

Учитывая, что

$$n_1^\circ = \frac{\partial x_2}{\partial s}, \qquad n_2^\circ = \frac{\partial x_1}{\partial s},$$

можем написать

$$\partial_n \chi_* \equiv \frac{\partial \chi_*}{\partial n} = \frac{\partial \chi}{\partial s} \equiv \partial_s \chi.$$

Тогда, согласно выражениям (I3) и (I4), для введенной функции χ получим следующие граничные условия:

$$\chi^{+} = \frac{1}{\mu} \int_0^s g_0(s)\, ds \qquad \text{на окружности } \gamma_0,$$

$$(\chi^{\pm})_k = \frac{1}{\mu} \int_{s_k}^s g^{\pm}(s)\, ds \qquad \text{на разрезах } \gamma_k, \qquad (I5)$$

где действительные постоянные C_k подлежат определению, а s_k – произвольная точка на разрезе γ_k.

Обозначим разрезы γ_k соответственно $a_k b_k$ $(k=1,2,\dots,q)$, где $a_1<b_1<a_2<b_2<\dots<a_q<b_q$. Тогда граничную задачу для функции $\chi(x_1,x_2)$ можно свести на плоскости комплексной переменной $z=x_1+ix_2$ к следующей граничной задаче: найти кусочно-голоморфную функцию $F(z)=\chi(x_1,x_2)+i\chi_*(x_1,x_2)$, почти ограниченную вблизи концов разрезов $a_k b_k$, по заданным граничным условиям

$$Re F(z)=f_0(t),\ t\in\gamma_0,\ [Re F(z)]_k^{\pm}=f_k^{\pm}(t)+C_k,\ t\in\gamma_k;$$
$$(k=1,2,\dots q;\ t=x_1(s)+ix_2(s)),$$

где

$$2\mu f_0=\int_0^s g_0\,ds,\qquad \mu f_k^{\pm}(t)=\int_{a_k}^t g_k^{\pm}\,dt \tag{16}$$

удовлетворяют условию Гельдера.

Почти ограниченной функцией вблизи узла p называется функция $\Phi(z)$, удовлетворяющая условию $\lim|z-p|^{\varepsilon}\Phi(z)=0$ для любого $\varepsilon>0$.

Приведем решение этой граничной задачи, данной Г.А.Кутателадзе (см. /2/, стр.72).

Введем новую функцию $\Phi(z)$, определенную равенствами

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=F(z)+\Phi_0(z),\quad z\in S^+,\\ \Phi(z)&=-F\left(\frac{R^2}{z^2}\right)+\Phi_0(z),\quad z\in S^-,\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{f_0(t)\,dt}{t-z}-\frac{1}{4\pi i}\int_{\gamma_0}f_0(t)\,dt. \tag{18}$$

Через S^+ обозначена круговая область с разрезами, ограниченная окружностью γ_0, а через S^- – внешняя по отношению к γ_0 бесконечная область.

Пусть γ_k^* обозначают разрезы вдоль действительной оси, являющиеся инверсиями разрезов γ_k относительно окружности γ_0. Тогда рассматриваемая задача для $\varphi(z)$ сводится к следующей граничной задаче.

Найти функцию $\varphi(z)$, голоморфную в бесконечной плоскости с разрезами $\gamma_k+\gamma_k^*$ ($k = 1,2,\ldots q$), по граничным условиям:

$$\left[\Phi(t)+\overline{\Phi(t)}\right]_k = \begin{cases} g_k^{\pm}(t), & t\in\gamma_k \\ -g_k^{\pm}(t), & t\in\gamma_k^* \end{cases} \tag{19}$$

где

$$g_k^{\pm}(t)=2f_k^{\pm}(t)+2C_k-2\left[\Phi_0(t)+\overline{\Phi_0(t)}\right]_k^{\pm}. \tag{20}$$

Решение этой задачи имеет вид / I /

$$\Phi(z)=\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\left[f_k^+(t)-f_k^-(t)\right]\left(\frac{1}{t-z}+\frac{z}{tz-R^2}\right)dt+ \tag{21}$$

$$+\tilde{X}(t)\int_{\gamma_k}\frac{g_k(t)}{\tilde{X}^+(t)}\left[\frac{1}{t-z}-\frac{t^{2q+1}R^{2-2q}}{tz-R^2}\right]dt$$

при соблюдении условий

$$\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{g_k(t)}{\tilde{X}^+(t)}\left[t^j+\frac{t^{2q-j-2}}{R^{2q-2j-2}}\right]dt=0, \tag{22}$$

где

$$\tilde{X}(z)=\prod_{j=1}^{q}\left[(z-a_j)(z-b_j)\left(z-\frac{R^2}{a_j}\right)\left(z-\frac{R^2}{b_j}\right)\right]^{1/2},$$

$$g_k(t)=g_k^+(t)+g_k^-(t) \qquad (k=1,2,\ldots q). \tag{23}$$

Здесь подразумевается та ветвь, при которой

$$\lim_{z \to \infty} z^{-q} \tilde{X}(z) = 1.$$

Если подставить в условия (15) значение $g_k(t)$, то получим систему алгебраических уравнений относительно постоянных $c_1, c_2, \dots c_q$, которая всегда однозначно разрешима / 1 /.

Вычислим в явном виде функции $f_k(t)$ и $g_k(t)$, входящие в выражения (15) – (20). Примем во внимание, что на разрезах вдоль оси Ox_1 $x_2 = 0$ и $n_1 = 0$, на верхнем крае разреза $n_2^o = +1$, а на нижнем $n_2^o = -1$. Кроме того, если рассмотреть полярные координаты на окружности γ_0 радиуса R, будем иметь

$$x_1 = R\cos\theta, \quad x_2 = R\sin\theta, \quad n_1^o = \cos\theta, \quad n_2^o = \sin\theta.$$

Поэтому для функции $g(s)$ (см.(11)) получим следующие граничные значения (на γ_0 произвольную постоянную интегрирования можем взять равной нулю):

$$g_0(s) = g(s) = 0 \qquad \text{на окружности } \gamma_0,$$
$$\qquad (24)$$
$$g_k^{\pm}(s) = \pm(a_1^* x_1^2 + a_0^* x_1)E \qquad \text{на разрезах } \gamma_k.$$

Учитывая граничные значения (24), можем записать (см.(16) и (18))

$$f_0(t) = 0, \quad \Phi_0(t) = 0,$$
$$\qquad (25)$$
$$\mu f_k^{\pm}(t) = \pm E\left[\frac{1}{3}a_1^*(t^3 - a_k^3) + \frac{1}{2}a_0^*(t^2 - a_k^2)\right].$$

Тогда граничные функции $g_k^{\pm}(t)$, определенные равенствами (20), примут следующий вид:

$$g_k^{\pm}(t) = \pm\frac{2E}{\mu}\left[\frac{1}{3}a_1^*(t^3 - a_k^3) + \frac{1}{2}a_0^*(t^2 - a_k^2)\right] + 2C_k \tag{26}$$

и, как легко видеть, будем иметь (см. (23))

$$g_k(t) = 4C_k \qquad (k = 1, 2, \ldots q). \tag{27}$$

Подставив значения $g_k(t)$ в условия (22), получим систему алгебраических уравнений относительно постоянных $C_1, C_2, \ldots C_q$ в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{q} \beta_{jk} C_k = 0 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, q-1), \tag{28}$$

где

$$\beta_{jk} = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma_k} \frac{\left[t^j + \dfrac{t^{2q-j-2}}{R^{2q-2j-2}}\right]dt}{\prod\limits_{\alpha=1}^{q}\left[(t-a_\alpha)(t-b_\alpha)\left(t-\dfrac{R^2}{a_\alpha}\right)\left(t-\dfrac{R^2}{b_\alpha}\right)\right]^{1/2}}.$$

Определитель системы (28), как показано в / I /, отличен от нуля, т.е. однородная система алгебраических уравнений (28) имеет тривиальное решение

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_q = 0.$$

Таким образом, функции $g_k(t)$ тождественно равны нулю и условия существования решения задачи (I9) выполнены автоматически.

Функция $\Phi(t)$, определенная равенством (2I), будет дана равенством

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{\gamma_k}\frac{2E}{\mu}\left[\frac{1}{3}a_1^*(t^3 - a_k^3) + \frac{1}{2}a_0^*(t^2 - a_k^2)\right]\left(\frac{1}{t-z} + \frac{z}{tz-R^2}\right)dt\right\} \tag{29}$$

Вычислив интегралы, входящие в (29), можно выписать явное выражение для функций

$$\Phi(z)=\frac{E}{\mu\pi i}\sum_{k=1}^{q}\left\{\frac{2}{9}a_1^*(b_k^3-a_k^3)+\frac{1}{2}a_0^*(b_k^2-a_k^2)+\right.$$

$$+\left[\frac{1}{6}a_1^*(b_k^2-a_k^2)+\frac{1}{2}a_0^*(b_k-a_k)\right]z+\frac{1}{3}a_1^*(b_k-a_k)z^2-$$

$$-\left(\frac{1}{3}a_1^*a_k^3+\frac{1}{2}a_0^*a_k^2\right)\ln\frac{(b_k-z)(b_kz-R^2)}{(a_k-z)(a_kz-R^2)}+$$

$$+\left[\frac{1}{6}a_1^*(b_k^2-a_k^2)+\frac{1}{2}a_0^*(b_k-a_k)\right]\frac{R^2}{z}+\frac{1}{3}a_1^*(b_k-a_k)\frac{R^4}{z^2}+$$

$$+\left(\frac{1}{3}a_1^*z^3+\frac{1}{2}a_0^*z^2\right)\ln\frac{b_k-z}{a_k-z}+\left(\frac{1}{3}a_1^*\frac{R^6}{z^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}a_0^*\frac{R^4}{z^2}\right)\ln\frac{b_kz-R^2}{a_kz-R^2}\Bigg\}.$$

Из выражения (17) получим

$$F'(z)=\Phi(z)\,,\quad z\in S^+.$$

Здесь принято $\Phi_0(z)=0$ (см. (25)).

Таким образом, если учесть, что $X=\mathrm{Re}\,F(z)$, рассматриваемая в данной работе задача решена и решение представлено в явном виде.

Поступила 2.IV.1992.

Кафедра

теоретической механики

Литература

I. Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. -М., Наука, 1968- 5II с.

2. Г.М.Хатиашвили. Задачи Альманзи-Мичелла для однородных и составных тел. - Тбилиси. Мецниереба, 1983. - 236 с.

3. Г.М.Хатиашвили, К.В.Кахая. О деформации цилиндрических тел со слабой изогнутой осью. - Труды ВЦ АН ГССР, Т.XX:I.- С. 104-115.

4. К.В.Кахая. О задачах Сен-Венана для однородных естественно закрученных изотропных брусьев. - Труды ВЦ АН ГССР,1980, Т.XX:I. - С.II6-125.

კ.კახაია

ბუნებრივად დაგრეხილი წრიული გრძელი [illegible] [illegible]
იზოტროპული ძელის დაჭიმვის და [illegible], ღუნვის ამოცანა

რეზიუმე

ამოხსნილია ერთგვაროვანი დაგრეხილი ძელის [illegible] ძალით დაჭიმვისა და [illegible] [illegible] ამოცანა, როდესაც ძელის გვერ-დი [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] არის.

K.Kakhaya

PROBLEMS OF EXTENSION AND BENDING WITH A COUPLE OF NATURALLY TWISTED CIRCULAR ISOTROPIC BEAM WITH LONGITUDINAL CUTS

Summary

The problems of extension by longitudinal force and bending due to a couple of forces of a naturally twisted beam are solved when the cross-section of a body represents a circular area with cuts along the diameter of the circle.

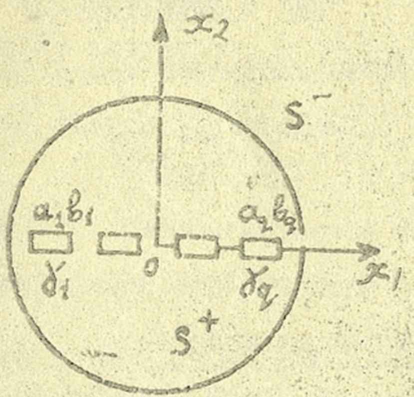


Рис.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили

ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
314, 1993

УДК 593.31

ВТОРИЧНЫЙ ЭФФЕКТ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННОГО ОДНОРОДНОГО АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

М.И.Кезерашвили

Рассмотрим в декартовой прямоугольной системе координат $\xi_1 O \xi_2 \xi_3$ естественно закрученное однородное анизотропное тело[1], боковая поверхность которого свободна от внешних напряжений, а на свободном ($\xi_1 = \ell$) основании действующие усилия статически эквивалентны растягивающей силе P , приложенной к центру инерции указанного основания и направленной параллельно оси $O\xi_1$.

Смещения и углы поворота считаем не настолько малыми, чтобы можно было пренебречь нелинейными членами в компонентах деформации, но при этом напряжения в теле не превосходят предела пропорциональности, т.е. задачу решаем в геометрически нелинейной постановке.

---

[1] Определение такого тела дано в работе / I /.

Обозначим поперечное сечение такого недеформированного тела через S, а его границу - через L.

Произведем замену координат:

$$\xi = \xi_1 - k\eta_1\zeta_1, \quad \eta = \eta_1 + k\xi_1\zeta_1, \quad \zeta = \zeta_1, \tag{I}$$

тогда в системе $\xi O \eta \zeta$ рассматриваемое тело переходит в призматическое, с ограниченной поверхностью $F(\xi, \eta) = 0$.

Если x, y, z - координаты точки тела после деформации, тогда ее же координаты ξ, η, ζ до деформации можно записать в виде:

$$x = \xi + u, \quad y = \eta + v, \quad z = \zeta + w,$$

где u, v, w - компоненты вектора смещения.

Связь между производными по координатам ξ, η, ζ и x, y, z с точностью до k^2, дана в работе / 2 /.

Как известно, формулы для компонентов деформации в координатах конечного состояния в нелинейной теории имеют вид:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],$$

- (2)

- -

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Решение задачи в смещениях будем искать в следующем виде:

$$u = -\alpha\left(\sigma_1\xi + \frac{1}{2}\sigma_3\eta\right) + \alpha k u_1 + \alpha^2 u_2 + \alpha^2 k u_3,$$

$$v = -\alpha\left(\sigma_2\eta + \frac{1}{2}\sigma_3\xi\right) + \alpha k v_1 + \alpha^2 v_2 + \alpha^2 k v_3, \tag{3}$$

$$w = \alpha\zeta + \alpha k w_1 + \alpha^2 w_2 + \alpha^2 k w_3,$$

где $\alpha = P/ES$ – постоянная, σ_i $(i = 1,2,3.)$ – упругие константы, u_1, v_1, w_1 и u_2, v_2, w_2 – известные компоненты смещения /3, 4/, а u_3, v_3, w_3 – искомые дополнительные компоненты смещения, выражающие вторичные эффекты при растяжении рассматриваемого тела, т.е. выкладки будем производить до членов порядка $\alpha^2\kappa$.

Компоненты деформации, соответствующие смещениям (3), с учетом (2) с точностью по $\alpha^2\kappa$ принимают вид:

$$\varepsilon_x = -\alpha\sigma_1 + \alpha\kappa\left(\varepsilon_x^{(1)} - \frac{1}{2}\zeta\sigma_3\right) + \alpha^2\left[\varepsilon_x^{(2)} - \frac{3}{8}\left(4\sigma_1^2 + \sigma_3^2\right)\right] + \alpha^2\kappa\left[\varepsilon_x^{(3)} - \zeta\sigma_3(\sigma_1 + \sigma_2)\right],$$

$$\varepsilon_y = -\alpha\sigma_2 + \alpha\kappa\left(\varepsilon_y^{(1)} + \frac{1}{2}\zeta\sigma_3\right) + \alpha^2\left[\varepsilon_y^{(2)} - \frac{3}{8}\left(4\sigma_2^2 + \sigma_3^2\right)\right] + \alpha^2\kappa\left[\varepsilon_y^{(3)} + \zeta\sigma_3(\sigma_1 + \sigma_2)\right],$$

$$\varepsilon_z = \alpha + \alpha\kappa\varepsilon_z^{(1)} + \alpha^2\left(\varepsilon_z^{(2)} - \frac{3}{2}\right) + \alpha^2\kappa\varepsilon_z^{(3)},$$

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}\alpha\sigma_3 + \alpha\kappa\left[\varepsilon_{xy}^{(1)} + \frac{1}{2}\zeta(\sigma_1 - \sigma_2)\right] + \alpha^2\left[\varepsilon_{xy}^{(2)} - \frac{3}{4}(\sigma_1 + \sigma_2)\sigma_3\right] +$$
$$+ \alpha^2\kappa\left[\varepsilon_{xy}^{(3)} + \zeta\left(\sigma_1^2 - \sigma_2^2\right)\right], \qquad (4)$$

$$\varepsilon_{xz} = \alpha\kappa\left[\varepsilon_{xz}^{(1)} + \frac{1}{2}\left(\eta\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_3\xi\right)\right] + \alpha^2\varepsilon_{xz}^{(2)} + \alpha^2\kappa\left[\varepsilon_{xz}^{(3)} + \frac{1}{2}\eta(2\sigma_1 - 1) +\right.$$
$$\left.+ \frac{1}{4}\sigma_3\left(\eta\sigma_3 - 2\xi\sigma_2 + \xi - 2\sigma_1\xi\right)\right],$$

$$\varepsilon_{yz} = \alpha\kappa\left[\varepsilon_{yz}^{(1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sigma_3\eta - \xi\sigma_2\right)\right] + \alpha^2\varepsilon_{yz}^{(2)} + \alpha^2\kappa\left[\varepsilon_{yz}^{(3)} - \frac{1}{2}\xi\sigma_1(2\sigma_2 - 1) +\right.$$
$$\left.+ \frac{1}{4}\sigma_3\left(-\xi\sigma_3 + 2\eta\sigma_2 - \eta + 2\sigma_1\eta\right)\right],$$

где

$$\varepsilon_x^{(j)} = \frac{\partial u_j}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_y^{(j)} = \frac{\partial v_j}{\partial \eta}, \quad \varepsilon_z^{(j)} = \frac{\partial w_j}{\partial \zeta}, \quad \varepsilon_{xy}^{(j)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial \eta} + \frac{\partial v_j}{\partial \xi}\right),$$

$$\varepsilon_{xz}^{(j)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial \zeta} + \frac{\partial w_j}{\partial \xi}\right), \quad \varepsilon_{yz}^{(j)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial \zeta} + \frac{\partial w_j}{\partial \eta}\right) \quad (j = 1,2,3)$$

По результатам работ / 3 / и / 4 / компоненты напряжений, соответствующие смещениям u_j, v_j, w_j ($j = 1,2$), соответственно равны:

$$\sigma_x^{(1)} = \left[Q(\sigma_2-\sigma_1) - \frac{1}{2}\sigma_3(H-A)\right]\xi, \qquad \sigma_y^{(1)} = \left[R(\sigma_2-\sigma_1) - \frac{1}{2}\sigma_3(B-H)\right]\xi,$$

$$\sigma_z^{(1)} = \left[T(\sigma_2-\sigma_1) - \frac{1}{2}\sigma_3(F-G)\right]\xi, \qquad \tau_{xy}^{(1)} = \left[D(\sigma_2-\sigma_1) - \frac{1}{2}\sigma_3(R-Q)\right]\xi,$$

$$\tau_{xz}^{(1)} = \left(N\sigma_2 + \frac{1}{2}M\sigma_3\right)\xi - \left(M\sigma_1 + \frac{1}{2}N\sigma_3 - E\right)\eta,$$

$$\tau_{yz}^{(1)} = \left(L\sigma_2 + \frac{1}{2}N\sigma_3 - E\right)\xi - \left(N\sigma_1 + \frac{1}{2}L\sigma_3\right)\eta. \tag{5}$$

$$\sigma_x^{(2)} = \frac{3}{2}\left[A\left(\sigma_1^2 + \frac{1}{4}\sigma_3^2\right) + H\left(\sigma_2^2 + \frac{1}{4}\sigma_3^2\right) + G + Q(\sigma_1+\sigma_2)\sigma_3\right],$$

$$\sigma_y^{(2)} = \frac{3}{2}\left[H\left(\sigma_1^2 + \frac{1}{4}\sigma_3^2\right) + B\left(\sigma_2^2 + \frac{1}{4}\sigma_3^2\right) + F + R(\sigma_1+\sigma_2)\sigma_3\right],$$

$$\sigma_z^{(2)} = \frac{3}{2}\left[G\left(\sigma_1^2 + \frac{1}{4}\sigma_3^2\right) + F\left(\sigma_2^2 + \frac{1}{4}\sigma_3^2\right) + C + T(\sigma_1+\sigma_2)\sigma_3\right],$$

$$\tau_{xy}^{(2)} = \frac{3}{2}\left[Q\left(\sigma_1^2 + \frac{1}{4}\sigma_3^2\right) + R\left(\sigma_2^2 + \frac{1}{4}\sigma_3^2\right) + T + D(\sigma_1+\sigma_2)\sigma_3\right],$$

$$\tau_{xz}^{(2)} = 0, \qquad \tau_{yz}^{(2)} = 0,$$

где $A, B, \ldots, R, T$ – упругие постоянные.

Используя значения компонентов напряжений (5), для компонентов напряжения, соответствующих деформациям (4), получим:

$$\sigma_x = \alpha^2\varkappa\left\{\sigma_x^{(3)} - 5(\sigma_1+\sigma_2)\left[\sigma_3(A-H) - 2Q(\sigma_1-\sigma_2)\right]\right\},$$

$$\sigma_y = \alpha^2\varkappa\left\{\sigma_y^{(3)} - 5(\sigma_1+\sigma_2)\left[\sigma_3(H-B) - 2R(\sigma_1-\sigma_2)\right]\right\},$$

$$\sigma_z = \alpha E + \alpha^2 \kappa \left\{ \sigma_z^{(3)} - \zeta(\sigma_1 + \sigma_2)\left[\sigma_3(G-F) - 2T(\sigma_1 - \sigma_2)\right]\right\},$$

$$\tau_{xy} = \alpha^2 \kappa \left\{ \tau_{xy}^{(3)} - \zeta(\sigma_1 + \sigma_2)\left[\sigma_3(Q-R) - 2D(\sigma_1 - \sigma_2)\right]\right\},$$

$$\tau_{xz} = \alpha \kappa E \eta + \alpha^2 \kappa \left\{ \tau_{xz}^{(3)} + N\left[\xi \sigma_2 (1 - 2\sigma_2) + \frac{1}{2}\sigma_3 (2\eta\sigma_2 - \xi\sigma_3 + \right.\right. \tag{6}$$

$$\left.\left. + 2\sigma_1 \eta - \eta)\right] + M\left[\eta\sigma_1(2\sigma_1 - 1) + \frac{1}{2}\sigma_3(\eta\sigma_3 - 2\xi\sigma_2 + \xi - 2\sigma_1\xi)\right]\right\},$$

$$\tau_{yz} = -\alpha\kappa E\xi + \alpha^2\kappa\left\{\tau_{yz}^{(3)} + L\left[\xi\sigma_2(1 - 2\sigma_2) + \frac{1}{2}\sigma_3(2\eta\sigma_2 - \xi\sigma_3 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\sigma_1\eta - \eta)\right] + N\left[\eta\sigma_1(2\sigma_1 - 1) + \frac{1}{2}\sigma_3(\eta\sigma_3 - 2\xi\sigma_2 + \xi - 2\sigma_1\xi)\right]\right\},$$

где $\sigma_x^{(3)}, \sigma_y^{(3)}, \ldots, \tau_{yz}^{(3)}$ – искомые дополнительные компоненты напряжений, соответствующие смещениям u_3, v_3, w_3

Уравнения равновесия рассматриваемого тела примут вид:

$$\frac{\partial \sigma_x^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(3)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(3)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(3)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(3)}}{\partial \zeta} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(3)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_z^{(3)}}{\partial \zeta} + (2\sigma_1 + 2\sigma_2 - 1)\left[N(\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{1}{2}\sigma_3(M - L)\right] - \tag{7}$$

$$(\sigma_1 + \sigma_2)\left[\sigma_3(G - F) - 2T(\sigma_1 - \sigma_2)\right] = 0.$$

Связь между направляющими косинусами нормали деформированной и недеформированной поверхностей с точностью до κ, α и $\alpha\kappa$ будет иметь вид:

$$\cos \widehat{n,x} = (1 + \alpha\sigma_1)\cos\widehat{n,\xi} + \left[\kappa\zeta + \alpha\kappa\zeta(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}\alpha\sigma_3\right]\cos\widehat{n,\eta} -$$

$$- \alpha\left(\sigma_1 - \frac{1}{2}\kappa\zeta\sigma_3\right)\cos^3\widehat{n,\xi} - \alpha(\sigma_3 + \kappa\zeta\sigma_2)\cos^2\widehat{n,\xi}\cos\widehat{n,\eta} -$$

$$- \alpha\left(\sigma_2 + \frac{1}{2}\kappa\zeta\sigma_3\right)\cos\widehat{n,\xi}\cos^2\widehat{n,\eta} - \alpha\kappa\zeta\sigma_2\cos^3\widehat{n,\eta}, \tag{8}$$

$$\cos\widehat{n,y}=\left[-k\zeta-\alpha k\zeta(\sigma_1+\sigma_2)+\frac{1}{2}\alpha\sigma_3\right]\cos\widehat{n,\xi}+(1+\alpha\sigma_2)\cos\widehat{n,\eta}-$$

$$-\alpha(\sigma_3+k\zeta\sigma_2)\cos\widehat{n,\xi}\cos^2\widehat{n,\eta}-\alpha\left(\sigma_2-\frac{1}{2}k\zeta\sigma_3\right)\cos^3\widehat{n,\eta}-$$

$$-\alpha\left(\sigma_1-\frac{3}{2}k\zeta\sigma_3\right)\cos^2\widehat{n,\xi}\cos\widehat{n,\eta}+\alpha k\zeta\sigma_1\cos^3\widehat{n,\xi},$$

$$\cos\widehat{n,z}=-k\left[\alpha\left(\sigma_1\eta-\frac{1}{2}\xi\sigma_3-\eta\right)+\eta\right]\cos\widehat{n,\xi}+k\left[\xi-\alpha\left(\xi-\sigma_2\xi+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\sigma_3\eta\right)\right]\cos\widehat{n,\eta}+\alpha k\eta\sigma_1\cos^3\widehat{n,\xi}+\alpha k(\eta\sigma_3-\xi\sigma_1)\cos^2\widehat{n,\xi}\cos\widehat{n,\eta}+$$

$$+\alpha k(\eta\sigma_2-\xi\sigma_3)\cos\widehat{n,\xi}\cos^2\widehat{n,\eta}-\alpha k\xi\sigma_2\cos^3\widehat{n,\eta}.$$

На основании последних зависимостей граничные условия на контуре L выразятся следующим образом:

$$\sigma_x^{(3)}\cos\widehat{n,\xi}+\tau_{xy}^{(3)}\cos\widehat{n,\eta}=\left[\sigma_3(A-H)-2Q(\sigma_1-\sigma_2)\right](\sigma_1+\sigma_2)\zeta\cos\widehat{n,\xi}+$$

$$+\left[\sigma_3(Q-R)-2D(\sigma_1-\sigma_2)\right](\sigma_1+\sigma_2)\zeta\cos\widehat{n,\eta}, \qquad (9)$$

$$\tau_{xy}^{(3)}\cos\widehat{n,\xi}+\sigma_y^{(3)}\cos\widehat{n,\eta}=\left[\sigma_3(Q-R)-2D(\sigma_1-\sigma_2)\right](\sigma_1+\sigma_2)\zeta\cos\widehat{n,\xi}+$$

$$+\left[\sigma_3(H-S)-2R(\sigma_1-\sigma_2)\right](\sigma_1+\sigma_2)\zeta\cos\widehat{n,\eta},$$

$$\tau_{xz}^{(3)}\cos\widehat{n,\xi}+\tau_{yz}^{(3)}\cos\widehat{n,\eta}=-\left\{\eta\left[E+\frac{3G}{8}(4\sigma_1^2+\sigma_3^2)+\frac{3F}{8}(4\sigma_2^2+\sigma_3^2)+\frac{3}{2}C+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2}T(\sigma_1+\sigma_2)\sigma_3\right]+N\left[\frac{1}{2}\sigma_3(4\eta\sigma_2+2\sigma_1\eta-\eta-\xi\sigma_3)-\right.$$

$$\left.-\xi\sigma_2(2\sigma_2-1)\right]+M\left[\frac{1}{2}\sigma_3(\eta\sigma_3-2\xi\sigma_2+\xi-2\sigma_1\xi)+\right.$$

$$\left.\left.+\eta\sigma_1(2\sigma_1-1)\right]\right\}\cos\widehat{n,\eta}+\left\{\xi\left[E+\frac{3G}{8}(4\sigma_1^2+\sigma_3^2)+\frac{3F}{8}(4\sigma_2^2+\right.\right.$$

$$\left.+\sigma_3^2)+\frac{3}{2}C+\frac{3}{2}T(\sigma_1+\sigma_2)\sigma_3\right]-L\left[\frac{1}{2}\sigma_3(-\xi\sigma_3+2\eta\sigma_2-\right.$$

$$\left.-\eta+2\sigma_1\eta)-\xi\sigma_2(2\sigma_2-1)\right]-N\left[\frac{1}{2}\sigma_3(\eta\sigma_3-2\xi\sigma_2+\xi-\right.$$

$$\left.\left.-2\sigma_1\xi)+\eta\sigma_1(2\sigma_1-1)\right]\right\}\cos\widehat{n,\eta}.$$

Кроме этого, компоненты деформации $\varepsilon_x^{(3)}, \varepsilon_y^{(3)}, \ldots, \varepsilon_{yz}^{(3)}$, соответствующие напряжениям $\sigma_x^{(3)}, \sigma_y^{(3)}, \ldots, \tau_{yz}^{(3)}$ должны удовлетворять условиям совместимости Сен-Венана.

Для искомых компонентов напряжений примем:

$$\sigma_x^{(3)} = [\sigma_3(A-H) - 2Q(\sigma_1-\sigma_2)](\sigma_1+\sigma_2)\zeta,$$

$$\sigma_y^{(3)} = [\sigma_3(H-B) - 2R(\sigma_1-\sigma_2)](\sigma_1+\sigma_2)\zeta,$$

$$\sigma_z^{(3)} = [\sigma_3(G-F) - 2T(\sigma_1-\sigma_2)](\sigma_1+\sigma_2)\zeta,$$

$$\tau_{xy}^{(3)} = [\sigma_3(Q-R) - 2D(\sigma_1-\sigma_2)](\sigma_1+\sigma_2)\zeta, \tag{10}$$

$$\tau_{xz}^{(3)} = \eta\left[E + \frac{3G}{8}(4\sigma_1^2+\sigma_3^2) + \frac{3F}{8}(4\sigma_2^2+\sigma_3^2) + \frac{3}{2}C + \frac{3}{2}T(\sigma_1+\sigma_2)\sigma_3\right] -$$
$$- N\left[\frac{1}{2}\sigma_3(2\eta\sigma_2 - 2\sigma_1\eta - \eta - \xi\sigma_3) - \xi\sigma_2(2\sigma_2-1)\right] - M\left[\frac{1}{2}\sigma_3(\eta\sigma_3 -\right.$$
$$\left. - 2\xi\sigma_1 + \xi - 2\sigma_2\xi) + \eta\sigma_1(2\sigma_1-1)\right],$$

$$\tau_{yz}^{(3)} = \xi\left[E + \frac{3G}{8}(4\sigma_1^2+\sigma_3^2) + \frac{3F}{8}(4\sigma_2^2+\sigma_3^2) + \frac{3}{2}C + \frac{3}{2}T(\sigma_1+\sigma_2)\sigma_3\right] -$$
$$- M\left[\frac{1}{2}\sigma_3(\xi\sigma_3 - 2\eta\sigma_2 - \eta + 2\sigma_1\eta) - \xi\sigma_2(2\sigma_2-1)\right] - N\left[\frac{1}{2}\sigma_3(\eta\sigma_3 -\right.$$
$$\left. - 2\xi\sigma_1 + \xi - 2\sigma_1\xi) - \eta\sigma_1(2\sigma_1-1)\right]$$

Нетрудно проверить, что напряжения (10) удовлетворяют всем условиям поставленной задачи, т.е. искомые напряжения построены.

Искомые компоненты смещения u_3, v_3, w_3 соответствующие [illegible] определяются [illegible] линейной теории упругости.

ТГУ [illegible] Кафедра математического [illegible]

Литература

1. П.М.Риз. Изв.АН СССР, Серия матем., № 4, 1939.

2. М.И.Кезерашвили. Тр.ТГУ,307(28),мат., мех.,астр.1991,82.

3. А.К.Рухадзе, Л.Р., Рабинович. Тр.ГПИ, № 8 (148), 1971.

4. Д.Я.Горгидзе, В.Д.Мецугов. Тр.ГПИ, математика, № 6(162), 1973.

მ.კეზერაშვილი

ბუნებრივად დაგრეხილი ერთგვაროვანი ანიზოტროპული სხეულის გაჭიმვის მეორადი ეფექტი გეომეტრიულად არაწრფივ თეორიაში

რეზიუმე

შესწავლილია ბუნებრივად დაგრეხილი ერთგვაროვანი ანიზოტროპული სხეულის გაჭიმვის მეორადი ეფექტის ამოცანა გეომეტრიულად არაწრფივ თეორიაში.

მიღებულია დაძაბულობის კომპონენტების ანალიზური სახე.

M.Kezerashvili

THE SECONDARY EFFECT OF STRETCHING OF NATURALLY TWISTED ANISOTROPIC HOMOGENEOUS BODY IN GEOMETRICALLY NON-LINEAR THEORY

Summary

The title problem is studied and the stress components are calculated in analytical form.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

314, 1993

УДК 538

ДВИЖЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОРИСТОЙ ПЛАСТИНЫ В ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Л.А.Джикидзе

Ламинарное течение вокруг вращающегося диска впервые было изучено Карманом / I /, который с помощью замен переменных свел уравнения Навье-Стокса к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Позднее эти уравнения были усовершенствованы Кокреном / 2 /, и уравнения, полученные Карманом, были решены численно. Обратная задача, когда диск находится в покое, а бесконечная жидкость вращается с постоянной угловой скоростью, была изучена Бодевадтом / 3 /. Та же задача, когда диск и бесконечная жидкость вращаются с разными угловыми скоростями, была рассмотрена Роджерсом и Лансом / 4 /.

С другой стороны, Стюарт / 5 /, используя предположения Бетчелора /6/, изучил эффект постоянного отсоса для больших и малых значений параметра отсоса.

Какутани / 7 / обобщил задачу Кармана для электропроводящей жидкости при наличии магнитного поля, когда магнитное число Прандтля мало. В работе Сирнапракасарао и Гупта / 8 / была изучена задача о вращении пористого диска в электропроводящей ности при больших значениях скорости отсоса.

В настоящей работе методом функции Грина и малого параметра изучается задача о вращении пористой пластины и проводящей жидкости при больших значениях скорости отсоса с учетом теплопередачи.

Рассмотрим задачу о стационарном движении вязкой несжимаемой жидкости, возникшем из состояния покоя при вращении пористой пластины, вращающейся со скоростью $a\omega$ (где a - постоянное число). Пусть с пластины происходит равномерный отсос той же жидкости со скоростью V_0. Предполагаем, что скорость отсоса и постоянное магнитное поле перпендикулярны плоскости пластины. Допускаем, что приложенное магнитное поле мало.

Для решения задачи воспользуемся уравнениями движения в цилиндрических координатах. С учетом того, что течение жидкости осесимметрично, система уравнений движения примет вид

$$\left\{\begin{aligned} & v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\varphi^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_r}{r^2}\right)-\frac{\sigma B_0^2}{\rho}v_r,\\ & v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}+\frac{v_r v_\varphi}{r}=\nu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}-\frac{v_\varphi}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right)-\frac{\sigma B_0^2}{\rho}v_\varphi,\\ & v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right).\end{aligned}\right. \tag{1}$$

К этой системе нужно добавить уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \tag{2}$$

Систему (1) - (2) должны решать при следующих граничных условиях:

$$\left\{\begin{aligned} & z=0, \quad v_r=0, \quad v_\varphi=a\omega, \quad v_z=V_0,\\ & z=\infty, \quad v_r=0, \quad v_\varphi=0.\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Пусть

$$\left\{\begin{aligned} & v_r=\omega r F(z'), \quad v_\varphi=\omega r Q(z'), \quad v_z=\sqrt{\nu\omega}\,[H(z')-v_0'],\\ & P=-\rho\nu\omega P, \quad V_0=\sqrt{\nu\omega}\,v_0', \quad z=\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\,z'\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Подстановка (4) в систему (I)-(2) дает следующую систему уравнений

$$\begin{cases} F'' + \nu_0 F' = HF' + F^2 - Q^2 + m^2 F, \\ Q'' + \nu_0 Q' = 2FQ + HQ' + m^2 Q, \\ HH' - \nu_0 H' = P' + H'', \\ H' + 2F = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $m_1 = \frac{\sigma B_0^2}{\rho\omega}$. Если дополнительно ввести переменную $\eta = \nu_0 z'$, то система (5) примет вид

$$\begin{cases} F'' + F' = \varepsilon[HF'] + \varepsilon^2[F^2 - Q^2 + m^2 F], \\ Q'' + Q' = \varepsilon[HQ'] + \varepsilon^2[2FQ + m^2 Q], \\ \varepsilon[HH'] + H' = \varepsilon P' + H'', \\ H' + \varepsilon[2F] = 0, \end{cases} \tag{6}$$

где $\varepsilon = 1/\nu_0$. Для системы (6) получаются следующие граничные условия:

$$\begin{cases} \eta = 0, \ F = 0, \ Q = a, \ H = 0, \\ \eta = \infty, \ F = 0, \ Q = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Решение задачи (6)-(7) можно представить в виде

$$\begin{cases} F(\eta) = \varepsilon \int_0^\infty [HF'] G(\eta,\xi) d\xi + \varepsilon^2 \int_0^\infty [F^2 - Q^2 + m^2 F] G(\eta,\xi) d\xi, \\ Q(\eta) = \int_0^\infty [HQ'] G(\eta,\xi) d\xi + \varepsilon^2 \int_0^\infty [2FQ + m^2 Q] G(\eta,\xi) d\xi, \\ H(\eta) = -2\varepsilon \int_0^\eta F d\xi, \end{cases} \tag{8}$$

где $G(\eta,\xi)$ – функция Грина задачи

$$G'' + G' = 0,$$

$$G\big|_{\eta=0} = 0, \qquad G'\big|_{\eta=\infty} = 0.$$

Она имеет вид

$$G = \begin{cases} G_1 = e^{-\eta} - 1, & 0 \le \eta < \xi, \\ G_2 = (1 - e^{\xi}) e^{-\eta}, & \xi < \eta < \infty. \end{cases}$$

Будем искать решение системы (8) в виде рядов по малому параметру ε

$$\begin{cases} F = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+2} F_k , \\ Q = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} Q_k , \\ H = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+3} H_k . \end{cases} \qquad (9)$$

Подставляя ряды (9) в систему (7) и приравнивая коэффициент при одинаковых степенях ε, получим следующие рекуррентные соотношения:

$$F_0 = \int\limits_0^{\infty} [-Q_0^2]\, G(\eta,\xi)\, d\xi ,$$

$$F_1 = \int\limits_0^{\infty} [-2Q_0Q_1 + m^2 F_0]\, G(\eta,\xi)\, d\xi ,$$

$$F_n = \int\limits_0^{\infty} \Big[\sum_{r=0}^{n-2} (H_r F'_{n-r-2} + F_r F_{n-r-2}) - \sum_{r=0}^{n} Q_r Q_{n-r} + m^2 F_{n-1}\Big] G(\eta,\xi)\, d\xi \quad (n \geq 2),$$

$$Q_0 = B(\eta),$$

$$Q_1 = \int\limits_0^{\infty} [m^2 Q_0]\, G(\eta,\xi)\, d\xi ,$$

$$Q_n = \int\limits_0^{\infty} \Big[\sum_{r=0}^{n-2} (2F_r Q_{n-r-2} + H_r Q'_{n-r-2}) + m^2 Q_{n-1}\Big] G(\eta,\xi)\, d\xi \qquad (n \geq 2),$$

$$H_n = -2\int\limits_0^{\eta} F_n\, d\xi \qquad (n \geq 0),$$

где $B(\eta)$ является решением задачи

$$B''(\eta) + B'(\eta) = 0 ,$$

$$B(0) = a, \quad B(\infty) = 0 .$$

Первые три приближения $F_0, F_1, F_2, Q_0, Q_1, Q_2, H_0, H_1$ [illegible]

[illegible]

$$F_0 = \frac{a^2}{2}\left[e^{-\eta} - e^{-2\eta}\right].$$

$$F_1 = a^2 m^2\left[-\left(\frac{\eta}{2} + \frac{5}{4}\right)e^{-\eta} + \left(\eta + \frac{5}{4}\right)e^{-2\eta}\right],$$

$$F_2 = \frac{a^4}{144}\left[-e^{-4\eta} + 18e^{-3\eta} + 6(7+12\eta)e^{-2\eta} - (36\eta+59)e^{-\eta}\right] + \frac{a^2 m^4}{8}\left[-(8\eta^2 + 28\eta + 29)e^{-2\eta} + (3\eta^2 + 14\eta + 29)e^{-\eta}\right].$$

$$Q_0 = ae^{-\eta},$$

$$Q_1 = -am^2\eta e^{-\eta},$$

$$Q_2 = a^3\left[\left(-\frac{\eta}{2} + \frac{1}{12}\right)e^{-\eta} - \frac{1}{12}e^{-3\eta}\right] + am^4\left(\frac{\eta^2}{2} + \eta\right)e^{-\eta},$$

$$H_0 = -\frac{a^2}{2}\left(e^{-\eta} - 1\right)^2,$$

$$H_1 = a^2 m^2\left[\eta\left(e^{-2\eta} - e^{-\eta}\right) + \frac{7}{4}\left(e^{-\eta} - 1\right)^2\right],$$

$$H_2 = \frac{a^4}{288}\left[201 - (144\eta + 190)e^{-\eta} + (144\eta + 156)e^{-2\eta} + 24e^{-3\eta} - e^{-4\eta}\right] +$$

$$+ \frac{a^2 m^4}{8}\left[(4\eta^2 + 36\eta + 47)e^{-\eta} - (8\eta^2 + 36\eta + 47)e^{-2\eta} - 47\right]$$

Так как тангенциальная составляющая скорости Q зависит от нечетных степеней параметра a, распределение скорости будет симметричным относительно оси η при одинаковых значениях по модулю параметра a. Радиальная составляющая скорости F зависит от четных степеней параметра a, поэтому распределение скорости будет одинаковым при одинаковых значениях по модулю параметра a.

Распределение тангенциальной и радиальной составляющих скорости показаны на рисунках 1 и 2. Обе составляющие скорости при постоянном ε возрастают при уменьшении параметра m, а при постоянной m возрастают при уменьшении параметра ε.

Вышеполученные решения справедливы в случае бесконечной пластины. Однако при достаточно большом радиусе R приближенно можно пренебречь влиянием кромки и вычислить значение момента сопротивления вращению пластины.

Будем иметь для момента $\mathcal{M}$ сил сопротивления на пластине

$$\mathcal{M} = -\int_0^R \tau_{\varphi z} r^2 dr = -\int_0^R 2\pi\mu r^2 \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} dr =$$

$$= -\frac{\pi\mu v_0 \omega\sqrt{\omega} R^4}{2\sqrt{\nu}} \left(\frac{\partial Q}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} .$$

Пусть $\mathcal{M}_0$ и $Q'^0(0)$ – значения $\mathcal{M}$ и $Q'(0)$ при $m=0$. Они имеют вид

$$Q'(0) = -a\left[1+\varepsilon^2 m^2 + \varepsilon^4\left(\frac{a^2}{3} - m^4\right)\right],$$

$$Q'^0(0) = -a\left[1+\frac{a^2\varepsilon^4}{3}\right],$$

$$\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_0} = \frac{3+3\varepsilon^2 m^2 + \varepsilon^4(a^2 - 3m^4)}{3+a^2\varepsilon^4} .$$

График выражений $\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_0}$ показан на рисунке 3. Расчеты показывают, что при постоянном значении параметра a сопротивление на пластине возрастает при возрастании параметра ε, а при постоянном значении ε сопротивление уменьшается при возрастании параметра a.

Рассмотрим задачу теплопередачи вращающейся пластины. Точное решение задачи о нагревании вязкой несжимаемой жидкости вращающимся диском было дано И.А.Кибелем / 9 /, а затем Л.А. Дорфманом / 10 /. В последнее время в ряде работ были обобщены задачи теплопередачи и были даны различные методы их решения.

В настоящей работе задача теплопередачи вращающейся пластины с учетом джоулева тепла решается методом функции Грина и малого параметра.

Напишем уравнение притока тепла

$$\rho C_p\left(v_r\frac{\partial T}{\partial r}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\lambda\left[\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]+$$
$$+\mu\left\{2\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2+2\left(\frac{v_r}{r}\right)^2+2\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)^2+\right. \qquad (10)$$
$$\left.+\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)^2\right\}+\epsilon B_0^2\left(v_\varphi^2+v_r^2\right).$$

Так же, как в случае, рассмотренном Кибелем, решения ищем в виде

$$T=T_1(z)+r^2T_2(z). \qquad (11)$$

Пусть

$$\begin{cases} T_1=\dfrac{\mu\omega\nu V_0}{\lambda}\tau_1 \\ T_2=\dfrac{\mu\omega^2V_0}{\lambda}\tau_2 \end{cases} \qquad (12)$$

Подстановка (4) и (12) в уравнение (10) даст следующую систему уравнений:

$$\tau_1''+V_0P_r\tau_1'=-4\tau_2-\frac{1}{V_0}\left(4F^2+2H'^2\right)+P_rH\tau_1',$$
$$\tau_2''+V_0P_r\tau_2'=P_r\left(2F\tau_2+H\tau_2'\right)-\frac{1}{V_0}\left(Q'^2+F'^2\right)-\frac{m^2}{V_0}\left(Q^2+F^2\right). \qquad (13)$$

где $P_r=\dfrac{\rho C_p\nu}{\lambda}$ - число Прандтля. Если дополнительно ввести переменную $\eta=V_0'z'$, то (13) примет вид

$$\begin{cases} \tau_1''+P_r\tau_1'=\epsilon\left[P_r(H\tau_1')-2H'^2\right]-\epsilon^2\left[4\tau_2\right]-\epsilon^3\left[4F^2\right], \\ \tau_2''+P_r\tau_2'=\epsilon\left[P_r(H\tau_2')-Q'^2-F'^2\right]+\epsilon^2\left[P_r(2F\tau_2)\right]- \\ \qquad -\epsilon^3\left[m^2\left(F^2+Q^2\right)\right]. \end{cases} \qquad (14)$$

Граничные условия мы будем брать в одном из следующих двух видов:

а) Пластина поддерживается при постоянной температуре T_0, так что

$$\begin{cases} z=0, & T_1=T_0, \quad T_2=0, \\ z=\infty, & T_1=0, \quad T_2=0. \end{cases} \tag{I5}$$

б) Пластина представлена сама по себе так, что на поверхности ее $\frac{\partial T}{\partial z}=0$, тогда

$$\begin{cases} z=0, & \frac{\partial T_1}{\partial z}=\frac{\partial T_2}{\partial z}=0, \\ z=\infty, & T_1=T_2=0. \end{cases} \tag{I6}$$

При наших допущениях граничные условия (I5) и (I6) примут вид

$$\begin{cases} \eta=0, & \tau_1=\tau_0, \quad \tau_2=0, \\ \eta=\infty, & \tau_1=0, \quad \tau_2=0. \end{cases} \tag{I7}$$

$$\begin{cases} \eta=0, & \frac{d\tau_1}{d\eta}=\frac{d\tau_2}{d\eta}=0, \\ \eta=\infty, & \tau_1=0, \quad \tau_2=0. \end{cases} \tag{I8}$$

Решение задачи (I4)-(I7) или (I4)-(I8) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \varepsilon\int_0^\infty [P_1(H\tau_2')-2H_1^2]G(\eta,\zeta)d\zeta-\varepsilon^2\int_0^\infty[4\tau_2]G(\eta,\zeta)d\zeta- \\ &\quad -\varepsilon^3\int_0^\infty[4F^2]G(\eta,\zeta)d\zeta, \\ \tau_2 &= \varepsilon\int_0^\infty[P_1(H\tau_2')-Q'^2-F'^2]G(\eta,\zeta)d\zeta+\varepsilon^2\int_0^\infty[P_1(2F\tau_2)]G\,d\zeta- \\ &\quad -\varepsilon^3\int_0^\infty m^2[F^2+Q^2]G(\eta,\zeta)d\zeta, \end{aligned} \tag{I9}$$

где $G(\eta,\zeta)$ – функция Грина.

Для задачи (I4)-(I7) функция Грина имеет следующий вид:

$$G=\begin{cases} G_1=\dfrac{e^{-P_1\eta}-1}{P_1}, & 0<\eta<\zeta, \\ G_2=\dfrac{1-e^{P_1\zeta}}{P_1}e^{-P_1\eta}, & \zeta<\eta<\infty, \end{cases}$$

а для задачи (I4)-(I8), она имеет вид

$$G=\begin{cases} G_1=-\dfrac{1}{P_1}, & 0<\eta<\zeta, \\ G_2=-\dfrac{e^{P_1\zeta}}{P_1}e^{-P_1\eta}, & \zeta<\eta<\infty. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу (I4)-(I7). Будем искать решения системы (I4) в виде рядов по малому параметру

$$\begin{cases} \tau_1 = \tau_{10} + \varepsilon^3 \tau_{11} + \varepsilon^4 \tau_{12} + \dots \\ \tau_2 = \varepsilon \tau_{20} + \varepsilon^3 \tau_{21} + \varepsilon^5 \tau_{22} + \dots \end{cases} \tag{I9}$$

Подставляя ряды (9)-(I9) в систему (I4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем следующие рекуррентные формулы:

для четных индексов функции τ_1

$$\tau_{10} = f_1(\eta),$$

$$\tau_{12} = \int_0^\infty [P_r(H_0 \tau_{10}')] G(\eta,\xi) d\xi,$$

$$\tau_{1\,2i-2} = \int_0^\infty P_r \Big[H_{i-1} \tau_{10}' + \sum_{\nu=0}^{i-4} H_\nu \tau_{1\,2i-2\nu-6}'\Big] G(\eta,\xi) d\xi \quad (i \geq 4);$$

для нечетных индексов функции τ_1

$$\tau_{11} = \int_0^\infty (-4\tau_{20}) G(\eta,\xi) d\xi,$$

$$\tau_{13} = \int_0^\infty (-4\tau_{21}) G(\eta,\xi) d\xi,$$

$$\tau_{1\,2i+1} = \int_0^\infty \Big[P_r \sum_{\nu=0}^{i-2} H_\nu \tau_{1\,2i-2\nu-3}' - \sum_{\nu=0}^{i-2} \big(2H_\nu' H_{i-\nu-2}' +$$

$$+ 4F_\nu F_{i-\nu-2}\big) - 4\tau_{2i}\Big] G(\eta,\xi) d\xi \quad (i \geq 2);$$

для функции τ_2

$$\tau_{20} = \int_0^\infty (-Q_0'^2) G(\eta,\xi) d\xi,$$

$$\tau_{21} = \int_0^\infty (2Q_0' Q_1' - m^2 Q_0^2) G(\eta,\xi) d\xi,$$

$$\tau_{22} = \int_0^\infty (2P_r F_0 \tau_{20} + P_r H_0 \tau_{20}' - F_0'^2 - Q_1'^2 - 2Q_0' Q_2' - m^2 2Q_0 Q_1) G(\eta,\xi) d\xi,$$

$$\tau_{2i} = \int_0^\infty \Big[2P_r \sum_{\nu=0}^{i-2} F_\nu \tau_{2\,i-2-\nu} + P_r \sum_{\nu=0}^{i-2} H_\nu \tau_{2\,i-2-\nu}' - \sum_{\nu=0}^{i} Q_\nu' Q_{i-\nu} -$$

$$- \sum_{\nu=0}^{i-3} F_\nu' F_{i-2-\nu}' - m^2 \Big(\sum_{\nu=0}^{i-1} Q_\nu Q_{i-\nu-1} + \sum_{\nu=0}^{i-3} F_\nu F_{i-\nu-3}\Big)\Big],$$

где $A(\eta)$ являются решением задачи

$$A''(\eta)+P_\tau A'(\eta)=0,$$

$$A(0)=\tau_0\,,\quad A(\infty)=0.$$

Первые два приближения $\tau_{10}, \tau_{11}, \tau_{20}, \tau_{21}$ имеют следующий вид

$$\tau_{10}=\tau_0 e^{-P_\tau \eta},$$

$$\tau_{11}=\frac{4a^2}{P_\tau^2(P_\tau-2)}\left[\frac{P_\tau}{P_\tau-2}\left(e^{-2\eta}-e^{-P_\tau\eta}\right)-e^{-P_\tau\eta}\eta\right],$$

$$\tau_{20}=\frac{a^2}{2(P_\tau-2)}\left[e^{-2\eta}-e^{-P_\tau\eta}\right].$$

$$\tau_{21}=\frac{a^2m^2}{(P_\tau-2)^2}\left[(P_\tau-1)\left(e^{-2\eta}-e^{-P_\tau\eta}\right)-(P_\tau-2)\eta e^{-2\eta}\right].$$

Рассмотрев задачу (14)-(18), оказывается, что решения задачи должны искать в виде рядов

$$\begin{cases} \tau_1=\varepsilon^3\tau_{10}+\varepsilon^5\tau_{11}+\varepsilon^7\tau_{12}+\dots=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{2i+3}\tau_{1i}\,, \\ \tau_2=\varepsilon\tau_{20}+\varepsilon^3\tau_{21}+\varepsilon^5\tau_{22}+\dots=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{2i+1}\tau_{2i}\,. \end{cases} \tag{20}$$

Подставляя ряды (9)-(20) в систему (14) и снова приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем следующие рекуррентные формулы:

$$\tau_{10}=\int_0^\infty(-4\tau_{20})G(\eta,\xi)d\xi,$$

$$\tau_{11}=\int_0^\infty(-4\tau_{21})G(\eta,\xi)d\xi,$$

$$\tau_{1i}=\int_0^\infty\left[P_\tau\sum_{\tau=0}^{i-2}H_\tau\tau_{1\,i-\tau-2}-2\sum_{\tau=0}^{i-2}H'_\tau H'_{i-\tau+2}-4\sum_{\tau=0}^{i-2}F_\tau F_{i-\tau-2}-4\tau_{2i}\right]G(\eta,\xi)d\xi$$
$$(i\geq 2),$$

$$\tau_{20}=\int_0^\infty\left(-Q_0'^2\right)G(\eta,\xi)d\xi,$$

$$\tau_{21}=\int_0^\infty\left(-2Q_0'Q_1'-m^2Q_0^2\right)G(\eta,\xi)d\xi.$$

$$\tau_{22}=\int_0^\infty \left(2P_1F_0\tau_{20}+P_1H_0\tau_{20}'-F_0'^2-Q_1'^2-2Q_0'Q_2'-m^2 2Q_0Q_1\right)G(\eta,\zeta)d\zeta$$

$$\tau_{2i}=\int_0^\infty \Big[2P_1\sum_{r=0}^{i-2}F_r\tau_{2\,i-2-r}+P_1\sum_{r=0}^{i-2}H_r\tau_{2\,i-2-r}'-\sum_{r=0}^{i}Q_r'Q_{i-r}'-$$

$$-\sum_{r=0}^{i-2}F_r'F_{i-2-r}'-m^2\Big(\sum_{r=0}^{i-1}Q_rQ_{i-r-1}+\sum_{r=0}^{i-3}F_rF_{i-r-3}\Big)\Big]G(\eta,\zeta)d\zeta$$

$$(i\geq 3).$$

Первые два приближения τ_{10}, τ_{11}, τ_{20}, τ_{21} имеют следующий вид:

$$\tau_{10}=\frac{2a^2}{P_1^2(P_1-2)}\left[\frac{P_1^2}{2(P_1-2)}e^{-2\eta}-\frac{P_1^2+2P_1-4}{P_1(P_1-2)}e^{-P_1\eta}-2\eta e^{-P_1\eta}\right],$$

$$\tau_{11}=\frac{4a^2m^2}{P_1^3(P_1-2)^2}\left[\frac{P_1^2}{2}\eta e^{-2\eta}+(3P_1-4)\eta e^{-P_1\eta}-\frac{P_1^2(P_1+2)}{4(P_1-2)}e^{-2\eta}+\right.$$

$$\left.+\frac{P_1^3+3P_1^2-10P_1+8}{P_1(P_1-2)}e^{-P_1\eta}\right],$$

$$\tau_{20}=\frac{a^2}{2P_1(P_1-2)}\left[P_1e^{-2\eta}-2e^{-P_1\eta}\right],$$

$$\tau_{21}=-\frac{a^2m^2}{P_1}\left[\left(\frac{P_1}{P_1-2}\eta-1\right)e^{-2\eta}-\frac{3P_1-4}{(P_1-2)^2}\left(e^{-2\eta}-e^{-P_1\eta}\right)\right].$$

Вычисления и построение графиков функций τ_1 и τ_2 для случаев а) и б) для различных значений параметров a, m, ε и P_1 показывают, что при постоянных значениях параметров m, ε, P_1 функции τ_1 и τ_2 возрастают при возрастании параметра a, при постоянных a, m и ε функции возрастают при уменьшении числа P_1 и при постоянных a, m и P_1 возрастают при возрастании параметра ε.

Поступила 20.IX.1991

Кафедра
теоретической механики

Литература

1. T.von Karman. ZAMM 1(1021)233.
2. W.G.Cochran. Proc.Cambridge Phil.Soc. 30(1934) 365.
3. V.T.Bodewadt. ZAMM 20(1940) 241.
4. M.H.Rogers and Lance. J.Fluid Mech. 7(1960) 617.
5. J.T.Stuart. J.Mech.and Appl.Math. 7(1954) 446.
6. G.K.Batchelor. Quart.J.Mech.and Appl.Math. 4(1951) 29.
7. T.Kakutani. J.Phys.Soc.Japan 17(1962) 1496.
8. V.Suryaprakasarao and A.S.Gupta. J.Phys.Soc.Japan 21,N11(1966)2390.
9. Л.А.Джикидзе. Труды ТГУ. Математика.Механика.Астрономия, т.307, 1991.
10. И.А.Кибель. ПММ, том XI, 1947.
11. Л.А.Дорфман. Изв. АН СССР, ОТН. № 12, 1957.
12. Л.А.Дорфман. Гидродинамическое сопротавление и теплоотдача вращающихся тел. М.,1960, 259 с.
13. А.Б.Ватажин, Г.А.Любимов, С.А.Регирер. Магнитогидродинамические течения в каналах."Наука", М.,1970, 672.

ლ.ჯიქიძე

მბრუნავი ფოროვანი ფირფიტის მახლობლად ბლანტი სითხის სითბოგადაცემის დამახასიათებლები

რეზიუმე

ჰოლის ეფექტისა და მცირე პარამეტრის მეთოდით შესწავლილია მბრუნავი ფოროვანი ფირფიტის მახლობლად ბლანტი სითხის სითბოგადაცემის დამახასიათებლები ჰოლის სიჩქარის დიდი და მცირე მნიშვნელობისათვის. სითბოგადაცემის ამოცანის ამოხსნისას დამახასიათებლები ჯოულის სითბო.

L.Jikidze

THE MOTION OF A ROTATING POROUS PLATE IN CONDUCTING FLUID WITH ACCOUNT OF HEAT TRANSFER

Summary

Taking account of heat transfer rotating porous plate motion in conducting fluid has been studied by the method of Green's function and the perturbation theory for large values of suction parameter and small values of stable magnetic field. The Joule heat was taken into account in solving the problem of heat transfer.

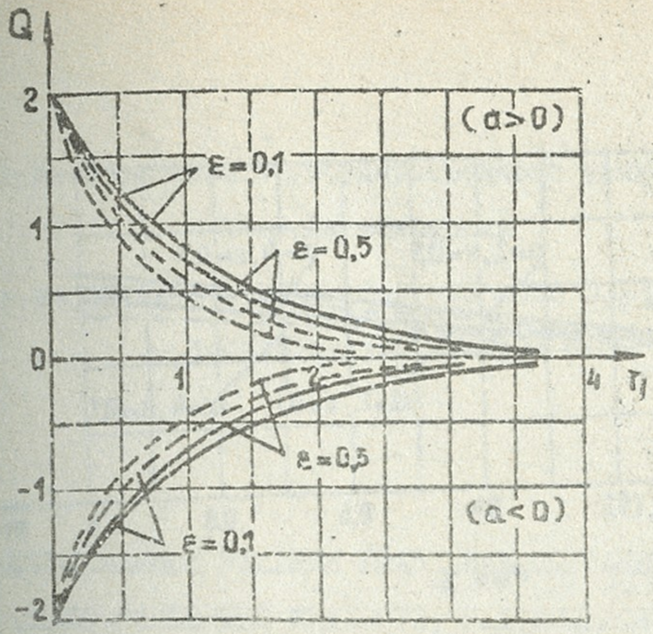


Рис. 1 m = 0,1 ——
m = 0,5 ----

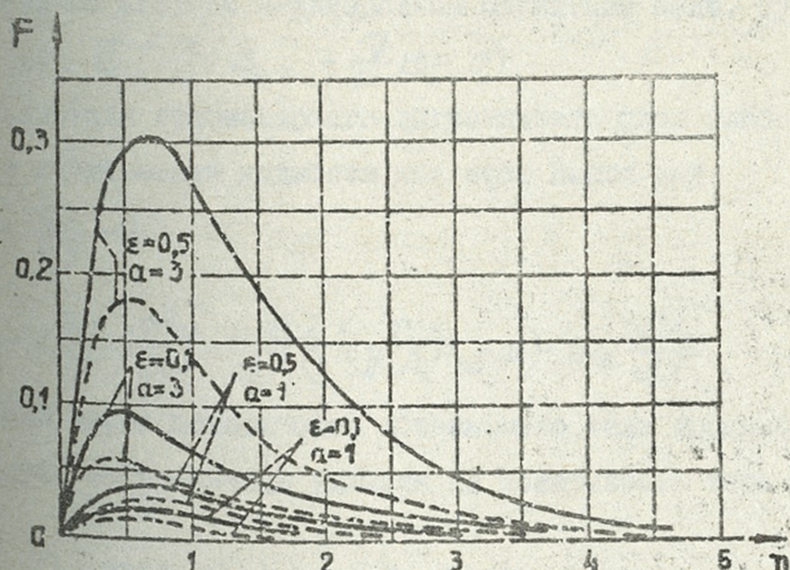


Рис. 2 m=0,1 ——
m=0,5 ----

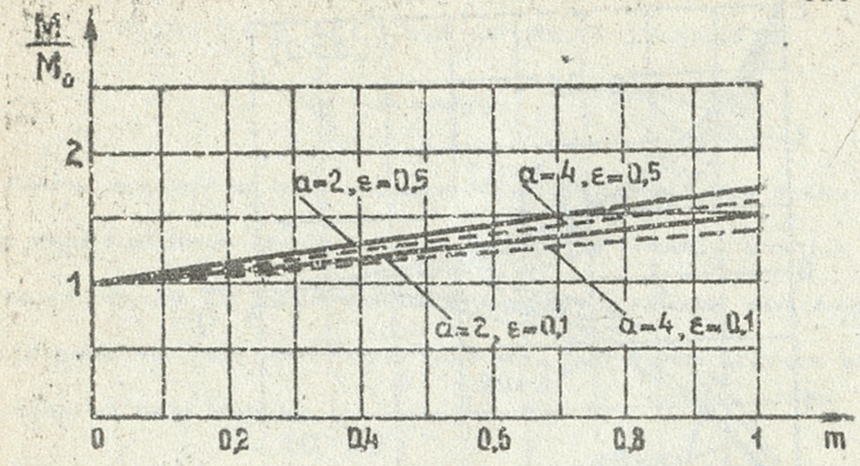


Рис. 3

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

314, 1993

УДК 538

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

И. П. Грдзелидзе

Рассматривается движение вязкой несжимаемой слабопроводящей жидкости во внешнем неоднородном магнитном поле. Пусть это поле имеет вид $\vec{B}\left(\frac{x}{L}B_0, -\frac{y}{L}B_0, 0\right)$.

Уравнения стационарного пограничного слоя слабопроводящей вязкой несжимаемой жидкости при этом имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \qquad (1)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\sigma B_0^2}{\rho L^2}(x^2+y^2)(U_\infty-u)+U_\infty\frac{dU_\infty}{dx}. \qquad (2)$$

Если через поверхность обтекаемого тела происходит отсос или вдув, то граничные условия на поверхности тела будут иметь вид

$$u(x,0)=0, \quad v(x,0)=-v_w(x). \qquad (3)$$

Для приближенного решения задачи будет использован метод последовательных приближений, разработанный для пограничного слоя "конечной толщины". Поэтому граничное условие на бесконечности заменяется условием

$$u(x, \delta(x)) = 0, \tag{4}$$

где $\delta(x)$ - конечная толщина пограничного слоя. Эта толщина неизвестна. Для ее определения требуется выполнение условий:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\delta(x)} = 0. \tag{5}$$

В задаче (I) - (5) перейдем к безразмерному виду, вводя следующие переменные:

$$u = u_0 u_1; \quad v = \frac{\delta_0 u_0}{L} v_1; \quad U_\infty = u_0 U_{\infty 1}; \quad v_w = \frac{u_0 \delta_0}{L} v_{w1};$$

$$x = L x_1; \quad y = \delta_0 y_1; \quad \delta = \delta_0 \delta_1; \quad \tau = \tau_0 \tau_1 = \mu \frac{u_0}{\delta_0} \tau_1. \tag{6}$$

Тогда система уравнений (I), (2) и граничные условия (3)-(5) примут вид:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} = u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} - \left(\frac{M^2}{R_e} x_1^2 + \frac{M^2}{R_e^2} y_1^2\right)(U_{\infty 1} - u_1) - U_{\infty 1} \frac{dU_{\infty 1}}{dx_1}, \tag{8}$$

$$u_1(x,0) = 0, \quad v_1(x,0) = -v_{w1}(x_1), \quad u_1(x_1, \delta_1(x_1)) = 0, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right|_{y_1=\delta_1(x_1)} = 0, \tag{10}$$

$$\tau_1 = \left.\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right|_{y_1=0} \tag{11}$$

Здесь введены

$$M^2 = \frac{\sigma B_0^2 L^2}{\rho \nu}, \quad R_e = \frac{u_0 L}{\nu}, \quad \frac{\delta_0^2}{L^2} = \frac{1}{R_e}.$$

В последующем для простоты штрихи у безразмерных величин не будем принимать во внимание.

Будем искать решение задачи (7) - (9) методом последовательных приближений / I /:

$$u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)+u_3(x,y)+\cdots$$
$$v(x,y)=v_1(x,y)+v_2(x,y)+v_3(x,y)+\cdots, \tag{I2}$$

где u_1 и v_1 удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$u_1(x,0)=0,\quad v_1(x,0)=-v_w(x),\quad u_1(x,\delta)=U_\infty(x), \tag{I3}$$

а функция u_K и v_K, где $K\geq 2$, - однородным граничным условиям, соответствующим (I2).

Ограничимся двумя первыми приближениями задачи. При этом u_1 функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=0 \tag{I4}$$

и граничным условиям (I2), а функция $u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}-\left(\frac{M^2}{R_e}x^2+\frac{M^2}{R_e^2}y^2\right)(U_\infty-u_1)-U_\infty\frac{dU_\infty}{dx}. \tag{I5}$$

Решение задачи (I2), (I3) имеет вид

$$u_1(x,y)=\frac{U_\infty}{\delta}y, \tag{I6}$$

а для функций $v_1(x,y)$ из уравнения неразрывности (7) и граничного условия (I3) будем иметь:

$$v_1(x,y)=-\left(\frac{U_\infty}{\delta}\right)'\frac{y^2}{2}-v_0(x), \tag{I7}$$

где штрих обозначает производную по x.

Подставляя (I6) и (I7) в (I5) и интегрируя два раза по y, получим

$$u_2(x,y)=\frac{U_\infty}{\delta}\left(\frac{U_\infty}{\delta}\right)'\frac{y^4}{24}-v_w(x)\frac{U_\infty}{\delta}\frac{y^2}{2}-\frac{M^2}{R_e}x^2U_\infty\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6\delta}\right)-$$
$$-\frac{M^2}{R_e^2}U_\infty\left(\frac{y^4}{12}-\frac{y^5}{20\delta}\right)-U_\infty U_\infty'\frac{y^2}{2}+c_1y+c_2.$$

Определяя C_1 и C_2 из граничных условий

$$u_2(x,0)=0, \quad u_2(x,\delta)=0,$$

найдем окончательный вид функций $u_2(x,y)$.

Подставляя значения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ в (I2), получим решения задачи в двух первых приближениях

$$u(x,y) \approx u_1(x,y)+u_2(x,y)=\frac{U_\infty}{\delta}y+\left\{\frac{U_\infty}{\delta}\left(\frac{U_\infty}{\delta}\right)'\left(\frac{y^4}{24}-\frac{y\delta}{24}\right)-\right.$$

$$-\frac{v_W U_\infty}{2}\left(\frac{y^2}{\delta}-y\right)-\frac{M^2}{R_e}U_\infty x^2\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6\delta}-\frac{y\delta}{3}\right)-$$

$$\left.-\frac{M^2}{R_e^2}U_\infty\left(\frac{y^4}{12}-\frac{y^5}{20\delta}-\frac{\delta^3 y}{30}\right)-U_\infty U'_\infty\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y\delta}{2}\right)\right\};$$

$$v(x,y)\approx v_1(x,y)+v_2(x,y)=-\frac{y^2}{2}\left(\frac{U_\infty}{\delta}\right)'-v_W(x)+v_2(x,y).$$

Для нахождения неизвестной толщины пограничного слоя $\delta(x)$ потребуем выполнения условия непрерывного перехода скорости пограничного слоя в скорость внешнего потока

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\delta}=0.$$

Для определения $\delta(x)$ оно дает нелинейное дифференциальное уравнение

$$(\delta^2)'+\left(6\frac{U'_\infty}{U_\infty}+\frac{8}{3}\frac{M^2}{R_e}\frac{x^2}{U_\infty}\right)\delta^2+\frac{4}{5}\frac{M^2}{R_e^2 U_\infty}\delta^4+\frac{8v_W(x)}{U_\infty}\delta=\frac{16}{U_\infty}. \qquad (I9)$$

Так как аналитическое решение этого уравнения в общем виде затруднительно, рассмотрим несколько частных случаев задания скорости просачивания, когда возможно решение уравнения (I9).

I. Пусть скорость просачивания имеет вид

$$v_w(x) = -\frac{1}{10}\frac{M^2}{R_e^2}\delta^3. \tag{20}$$

Тогда уравнение (I0) дает

$$(\delta^2)' + \left(6\frac{U'_\infty}{U_\infty} + \frac{8}{3}\frac{M^2}{R_e}\frac{x^2}{U_\infty}\right)\delta^2 = \frac{16}{U_\infty}.$$

Решая это уравнение при условии, что $\delta(0)=0$, получим

$$\delta^2 = 16\exp\left[-\int_0^x\left(6\frac{U'_\infty}{U_\infty} + \frac{8}{3}\frac{M^2}{R_e}\frac{\alpha^2}{U_\infty}\right)d\alpha\right] \times$$

$$\times \int_0^x \frac{1}{U_\infty}\left\{\exp\left[\int_0^\alpha\left(6\frac{U'_\infty}{U_\infty} + \frac{8}{3}\frac{M^2}{R_e}\frac{\beta^2}{U_\infty}\right)d\beta\right]\right\}d\alpha. \tag{21}$$

Рассмотрим несколько случаев задания скорости внешнего потока.

а. Пусть $U_\infty = const = 1$. Тогда для толщины будем иметь

$$\delta^2 = 16 e^{-\frac{8}{9}\frac{M^2}{R_e}x^3}\int_0^x e^{\frac{8}{9}\frac{M^2}{R_e}\alpha^3}d\alpha.$$

Считая $\frac{M^2}{R_e} \ll 1$, разлагая экспоненту в ряд и интегрируя, получим

$$\delta^2 = 16\left(x - \frac{2}{3}\frac{M^2}{R_e}x^4\right). \tag{22}$$

При отсутствии магнитного поля будем иметь:

$$\delta^2 = 16x.$$

б. Пусть скорость внешнего потока равна

$$U_\infty(x) = x+1. \tag{23}$$

Тогда (2I) дает

$$\delta^2 = \frac{e^{-\frac{8}{3}\frac{M^2}{R_e}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)}}{(x+1)^{6+\frac{8}{3}\frac{M^2}{R_e}}}\int_0^x(\alpha+1)^{\frac{8}{3}\frac{M^2}{R_e}+5}e^{\frac{8}{3}\frac{M^2}{R_e}\left(\frac{\alpha^2}{2}-\alpha\right)}d\alpha. \tag{24}$$

2. Подберем скорость просачивания в виде

$$v_w(x) = -\left[\frac{1}{10}\frac{M^2\delta^2}{R_e^2} + \left(\frac{3}{4}U'_\infty + \frac{1}{3}\frac{M^2}{R_e}x^2\right)\delta\right]. \qquad (25)$$

Тогда из (19) уравнения получим

$$(\delta^2)' = \frac{16}{U_\infty},$$

решение которого имеет простой вид:

$$\delta^2 = \int_0^x \frac{16}{U_\infty} d\alpha.$$

Отсюда видно, что при подборе скорости просачивания в виде (25) толщина пограничного слоя не зависит от магнитного поля.

В случае $U_\infty = const = 1$ и $U_\infty = x+1$ для толщины пограничного слоя будем иметь соответственно:

$$\delta = 4\sqrt{x}, \quad \delta = 4\sqrt{\ln(x+1)}.$$

3. Если скорость просачивания имеет вид

$$v_w(x) = -\left(\frac{1}{3}\frac{M^2}{R_e}x^2\delta + \frac{1}{10}\frac{M^2}{R_e^2}\delta^3\right), \qquad (26)$$

то соответствующая толщина определяется из выражения

$$\delta^2 = 16 e^{-6\int_0^x (\ln U_\infty)' d\alpha} \int_0^x \frac{e^{6\int_0^\alpha (\ln U_\infty)' d\beta}}{U_\infty} d\alpha. \qquad (27)$$

Если $U_\infty = 1$, $U_\infty = x+1$, для толщины получим

$$\delta = 4\sqrt{x}, \quad \delta = \left\{\frac{2}{3}\left[1-(x+1)^{-6}\right]\right\}^{1/2}. \qquad (28)$$

Здесь, как и в предыдущем случае, толщина пограничного слоя не зависит от магнитного поля.

4. Пусть скорость просачивания определяется выражением

$$v_w(x) = -\left(\frac{3}{4}U'_\infty\delta + \frac{1}{10}\frac{M^2}{R_e^2}\delta^3\right), \qquad (29)$$

тогда для толщины будем иметь

$$\delta^2=16e^{-\frac{8}{3}\frac{M^2}{Re}\int\limits_0^x\frac{\alpha^2}{U_\infty}d\alpha}\int\limits_0^x\frac{e^{\frac{8}{3}\frac{M^2}{Re}\int\limits_0^\alpha\frac{\beta^2}{U_\infty}d\beta}}{U_\infty}d\alpha. \qquad (30)$$

Если $U_\infty=1$, то получим

$$\delta^2=16e^{-\frac{8}{9}\frac{M^2}{Re}x^3}\int\limits_0^x e^{\frac{8}{9}\frac{M^2}{Re}\alpha^3}d\alpha,$$

считая, что $\frac{M^2}{Re}\ll 1$, можно разложить экспоненту в ряд. Ограничиваясь двумя членами разложения и интегрируя, получим приближенно:

$$\delta^2\approx 16\left(x-\frac{2}{3}\frac{M^2}{Re}x^4\right). \qquad (31)$$

Вычисляя трение на поверхности обтекаемого тела, получим:

$$\tau=\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0}=U_\infty\left[\frac{1}{\delta}-\left(\frac{U_\infty}{\delta}\right)'\frac{\delta^2}{24}+\frac{V_w}{2}+\frac{M^2}{Re}\frac{\delta x^2}{3}+\frac{M^2}{R_e^2}\frac{\delta^3}{30}+\frac{U'_\infty\delta}{2}\right].$$

Поступила 15.XI.1992

Кафедра
дифференциальных и интегральных
уравнений

Литература

1. А.Б.Ватажин, Г.А.Любимов, А.С.Регирер. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.,Наука, 1970, 672 с.
2. Д.В.Шарикадзе. Магнитная гидродинамика, № 4, 1968, с.53-55.
3. М.Е.Швец. ПММ, т.В, в.3, 1949, с.257-266.
4. Д.В.Шарикадзе, М.А.Еззат, К.А.Хелми. Труды ТГУ, Математика. Механика. Астрономия, т.270, 1987, с.175-193.

ი.გრძელიძე

არაერთგვაროვან მაგნიტურ ველში მოთავსებულ სუსტადგამტარი სითხის სასაზღვრო ფენის განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნა

რეზიუმე

მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით ამოხსნილია არაერთგვაროვან მაგნიტურ ველში სუსტადგამტარი სითხის სასაზღვრო ფენის განტოლებები ფილტრაციის გათვალისწინებით.

I.Grdzelidze

APPROXIMATE SOLUTION OF BOUNDARY LAYER EQUATIONS OF A WEAKLY CONDUCTIVE FLUID CONSIDERED IN NON-UNIFORM MAGNETIC FIELDS

Summary

The boundary layer equations of a weakly conductive fluid considered in non-uniform magnetic fields with percolation are solved by using the method of successive approximations.

Труды Тбилисского государственного университета
им. Ив. Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

314, 1993

УДК 538

ПОДОБНЫЕ ТЕЧЕНИЯ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛАСТИНАМИ С УЧЕТОМ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ОТСОСА

Л. А. Джикидзе

Подобные решения уравнений движения жидкости, сдавливаемой между двумя пластинами, вызывают большой интерес в теории гидродинамической смазки. Упрощения, приводящие дифференциальные уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, сделали возможным глубоко изучить характер течения.

В работе / I / впервые были получены подобные решения в случае нестационарного течения жидкости между двумя пластинами, когда расстояние между пластинами пропорционально величине $(1-\alpha t)^{1/2}$, где α^{-1} выражает характерное время. В работе / 2 / эта задача была обобщена в случае, когда пластины вращаются со скоростью, пропорциональной величине $\Omega(1-\alpha t)^{-1}$, где Ω выражает характерную угловую скорость.

Большой интерес вызывает тот случай, когда к дискам приложено магнитное поле. В работах /3/, /4/ и /5/ было исследовано влияние магнитного поля на течение, но авторы этих работ частично или полностью пренебрегали инерционными членами в уравнениях

Навье-Стокса. В работах /6/ и /7/ полностью были сохранены инерционные члены.

В настоящей работе методом функции Грина и малого параметра изучается задача о движении слабопроводящей жидкости между двумя пластинами, когда пластины вращаются со скоростями $a\omega(t)$ и $b\omega(t)$ (где a и b - постоянные числа) и через пластины происходит вдув и отсос той же жидкости со скоростью $v_0(t)$.

Пусть верхняя пластина совершает движение относительно нижней пластины со скоростью $h'(t)$, где $h(t)$ - расстояние между пластинами, и пусть перпендикулярно пластинам приложено магнитное поле $B(t)$.

Для решения задачи воспользуемся уравнениями движения в цилиндрических координатах. С учетом того, что течение жидкости осесимметрично, система уравнений движения примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\dfrac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\dfrac{\partial v_r}{\partial z} - \dfrac{v_\varphi^2}{r} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial r} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial r} - \dfrac{v_r}{r^2}\right) - \dfrac{\sigma B^2}{\rho}v_r, \\ \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \dfrac{v_r v_\varphi}{r} = \nu\left(\dfrac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - \dfrac{v_\varphi}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right) - \dfrac{\sigma B^2}{\rho}v_\varphi, \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\dfrac{\partial v_z}{\partial r} + v_z\dfrac{\partial v_z}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}\right). \end{cases} \tag{1}$$

К этой системе нужно добавить уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Систему (1) - (2) должны решать при следующих граничных условиях:

$$\begin{cases} z=0: \ v_r=0; \ v_\varphi = a\omega(t), \ v_z = v_0(t), \\ z=h(t), \ v_r=0; \ v_\varphi = b\omega(t), \ v_z = h'(t)+v_0(t). \end{cases} \tag{3}$$

Пусть

$$
\begin{cases}
v_r=\dfrac{\omega_0 r}{1-\omega_0 t}f(\eta), \quad v_\varphi=\dfrac{\omega_0 r}{1-\omega_0 t}q(\eta), \quad v_z=\dfrac{\omega_0 h_0}{\sqrt{1-\omega_0 t}}g(\eta), \\
\dfrac{P}{\rho}=\dfrac{\omega_0 \nu}{(1-\omega_0 t)}\left[(1-\omega_0 t)P(\eta)+\dfrac{r^2}{2h_0^2}K\right], \quad \eta=\dfrac{z}{h_0\sqrt{1-\omega_0 t}}, \\
v_0=\dfrac{\omega_0 h_0}{\sqrt{1-\omega_0 t}}u_0, \quad h(t)=h_0\sqrt{1-\omega_0 t}, \quad B=\dfrac{B_0}{\sqrt{1-\omega_0 t}}, \quad \omega=\dfrac{\omega_0}{1-\omega_0 t}.
\end{cases} \tag{4}
$$

Рассмотрим два случая:

а) Допустим, что к пластинам приложено большое магнитное поле. Тогда подстановка (4) в систему (I)-(2) дает следующую систему уравнений:

$$
\begin{cases}
f''-m^2 f=Re\left[f+\frac{1}{2}\eta f'+gf'+f^2-q^2\right]+K \\
q''-m^2 q=Re\left[q+\frac{1}{2}\eta q'+2fq+gq'\right], \\
g'+2f=0, \\
\dfrac{\partial P}{\partial \eta}=g''-Re\left[\dfrac{g}{2}+\dfrac{\eta}{2}g'+gg'\right],
\end{cases} \tag{5}
$$

где $m^2=\dfrac{\sigma B_0^2 h_0^2}{\rho\nu}$, $Re=\dfrac{\omega_0 h_0}{\nu}$, а K - постоянная, зависящая от m и Re.

Для системы (5) получаются следующие граничные условия:

$$
\begin{cases}
\eta=0, \quad f=0, \quad q=a, \quad g=u_0, \\
\eta=1, \quad f=0, \quad q=b, \quad g=u_0-\frac{1}{2}.
\end{cases} \tag{6}
$$

Решение задачи (5) - (6) можно представить в виде

$$
\begin{cases}
f(\eta)=Re\int_0^1\left(f+\frac{1}{2}\xi f'+gf'+f^2-q^2\right)G(\eta,\xi)d\xi+K\int_0^1 G(\eta,\xi)d\xi, \\
q(\eta)=Re\int_0^1\left(q+\frac{1}{2}\xi q'+2fq+gq'\right)G(\eta,\xi)d\xi, \\
g(\eta)=-2\int_0^\eta f d\xi,
\end{cases} \tag{7}
$$

где $G(\eta,\xi)$ - функция Грина задачи

$$
G''-m^2 G=0,
$$
$$
G\big|_{\eta=0}=0; \qquad G\big|_{\eta=1}=0.
$$

Она имеет вид

$$G = \begin{cases} G_1 = \dfrac{sh\, m(\xi-1)}{m\, sh\, m}\, sh\, m\eta, & 0<\eta<\xi, \\ G_2 = \dfrac{sh\, m(\eta-1)}{m\, sh\, m}\, sh\, m\xi, & \xi<\eta<1. \end{cases}$$

Будем искать решение системы (7) в виде рядов по малому параметру

$$f = \sum_{\beta=0}^{\infty} R_e^{\beta} f_{\beta}, \quad q = \sum_{\beta=0}^{\infty} R_e^{\beta} q_{\beta}, \tag{8}$$

$$g = \sum_{\beta=0}^{\infty} R_e^{\beta} g_{\beta}, \quad K = \sum_{\beta=0}^{\infty} R_e^{\beta} K_{\beta}.$$

Подставляя ряды (8) в систему (7) и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях R_e, получим следующие рекуррентные соотношения:

$$f_0 = \int_0^1 K_0\, G(\eta,\xi)\, d\xi,$$

$$f_{\beta} = \int_0^1 \Big[f_{\beta-1} + \frac{1}{2}\xi f'_{\beta-1} + \sum_{\alpha=0}^{\beta-1} \big(g_{\alpha} f'_{\beta-\alpha-1} - q_{\alpha} q_{\beta-\alpha-1} + f_{\alpha} f_{\beta-\alpha-1} \big) + K_{\beta} \Big] G(\eta,\xi)\, d\xi,$$

$$q_0 = A(\eta),$$

$$q_{\beta} = \int_0^1 \Big[q_{\beta-1} + \frac{1}{2}\xi q'_{\beta-1} + \sum_{\alpha=0}^{\beta-1} \big(2 f_{\alpha} q_{\beta-\alpha-1} + g_{\alpha} q'_{\beta-\alpha-1} \big) \Big] G(\eta,\xi)\, d\xi,$$

$$g_0 = -2\int_0^{\eta} f_0\, d\xi + U_0,$$

$$g_{\beta} = -2\int_0^{\eta} f_{\beta}\, d\xi,$$

где $A(\eta)$ является решением задачи

$$A''(\eta)-m^2A(\eta)=0,$$

$$A(0)=a,\quad A(1)=b.$$

Первые два приближения $f_0,\ f_1,\ \varphi_0,\ \varphi_1,\ g_0,\ g_1,\ K_0,\ K_1$ имеют вид:

$$f_0=\frac{K_0}{m^2\,\mathrm{sh}\,m}\left[\mathrm{sh}\,m\eta+\mathrm{sh}\,m(1-\eta)-\mathrm{sh}\,m\right],$$

$$\varphi_0=\frac{1}{\mathrm{sh}\,m}\left[b\,\mathrm{sh}\,m\eta+a\,\mathrm{sh}\,m(1-\eta)\right],$$

$$g_0=-\frac{2K_0}{m^3\,\mathrm{sh}\,m}\left[\mathrm{ch}\,m\eta-\mathrm{sh}\,m(1-\eta)-\eta m\,\mathrm{sh}\,m+(\mathrm{ch}\,m-1)\right]+\dots,$$

$$K_0=\frac{m^3\,\mathrm{sh}\,m}{4[2(\mathrm{ch}\,m-1)-m\,\mathrm{sh}\,m]},$$

$$f_1=\frac{K_0[(m^2-K_0)\,\mathrm{sh}^2m-2K_0(\mathrm{ch}\,m-1)]-K_1m^4\,\mathrm{sh}^2m}{m^6\,\mathrm{sh}^3m}\left[\mathrm{sh}\,m(\eta-1)-\right.$$

$$\left.-\mathrm{sh}\,m\eta+\mathrm{sh}\,m\right]+\frac{K_0^2}{6m^6\,\mathrm{sh}^3m}\left[(2\,\mathrm{sh}\,m-\mathrm{sh}\,2m)(\mathrm{ch}\,m(2\eta-1)+3)+\right.$$

$$\left.+(\mathrm{ch}\,2m+4\,\mathrm{ch}\,m-5)(\mathrm{sh}\,m\eta-\mathrm{sh}\,m(\eta-1))\right]+\frac{K_0(m^2-2K_0)(\mathrm{ch}\,m-1)}{2m^5\,\mathrm{sh}^2m}\left[\mathrm{sh}\,m\eta+\right.$$

$$\left.+\mathrm{sh}\,m(\eta-1)\right]+\frac{K_0(m+4K_0)}{8m^4\,\mathrm{sh}\,m}\left[\mathrm{sh}\,m(\mathrm{ch}\,m(\eta-1)-\mathrm{ch}\,m\eta)\eta-m\,\mathrm{sh}\,m\times\right.$$

$$\left.\times(\mathrm{sh}\,m(\eta-1)-\mathrm{sh}\,m)\eta^2+(\mathrm{ch}\,m-1-m\,\mathrm{sh}\,m)\,\mathrm{sh}\,m\eta\right]+$$

$$+\frac{K_0[2K_0(\mathrm{ch}\,m-1)+U_0m^3\,\mathrm{sh}\,m]}{2m^4\,\mathrm{sh}\,m}\left[(\eta-1)\,\mathrm{sh}\,m\eta-\eta\,\mathrm{sh}\,m(\eta-1)\right]+$$

$$+\frac{1}{6m\,\mathrm{sh}^2m}\left\{b^2\left[\mathrm{sh}\,m(\mathrm{ch}\,2m\eta+3)-\mathrm{sh}\,m\eta(\mathrm{ch}\,2m+3)+4\,\mathrm{sh}\,m(\eta-1)\right]-\right.$$

$$-2ab\left[\mathrm{sh}\,m(\mathrm{ch}\,m(2\eta-1)+3\,\mathrm{ch}\,m)+4\,\mathrm{ch}\,m(\mathrm{sh}\,m(\eta-1)-\mathrm{sh}\,m\eta)\right]+$$

$$\left.+a^2\left[\mathrm{sh}\,m(\mathrm{ch}\,2m(\eta-1)+3)+(\mathrm{ch}\,2m+3)\,\mathrm{sh}\,m(\eta-1)-4\,\mathrm{sh}\,m\eta\right]\right\},$$

$$q_1=\frac{2K_0(a+b)(\mathrm{ch}\,m-1)}{m^4\,\mathrm{sh}^3 m}\left[\mathrm{sh}\,m\eta-\mathrm{sh}\,m(\eta-1)-\mathrm{sh}\,m\right]+$$

$$+\frac{3m^2-12K_0}{8m^3\,\mathrm{sh}^2 m}\left[\mathrm{sh}\,m\left(b\,\mathrm{ch}\,m\eta-a\,\mathrm{ch}\,m(\eta-1)\right)\eta+(a-b\,\mathrm{ch}\,m)\,\mathrm{sh}\,m\eta\right]+$$

$$+\frac{m^2+4K_0}{8m^2\,\mathrm{sh}\,m}\left[b\,\mathrm{sh}\,m\eta-a\,\mathrm{sh}\,m(\eta-1)\right]\eta^2+$$

$$+\frac{U_0 m^3\,\mathrm{sh}\,m+2K_0(\mathrm{ch}\,m-1)}{2m^3\,\mathrm{sh}^2 m}\left[b\,\mathrm{sh}\,m\eta-a\,\mathrm{sh}\,m(\eta-1)\right]\eta-$$

$$-\frac{(1+4U_0)m^3\,\mathrm{sh}\,m+4K_0\left[m\,\mathrm{sh}\,m-2(\mathrm{ch}\,m-1)\right]}{8m^3\,\mathrm{sh}^2 m}\,b\,\mathrm{sh}\,m\eta\,.$$

$$q_2=\frac{2K_0\left[(m^2-K_0)\,\mathrm{sh}^2 m-2K_0(\mathrm{ch}\,m-1)\right]-K_1 m^4\,\mathrm{sh}\,m}{m^7\,\mathrm{sh}^3 m}\left[\mathrm{ch}\,m\eta-\right.$$

$$\left.-\mathrm{ch}\,m(\eta-1)-\eta\, m\,\mathrm{sh}\,m+(\mathrm{ch}\,m-1)\right]-\frac{K_0(m^2-2K_0)(\mathrm{ch}\,m-1)}{m^6\,\mathrm{sh}^2 m}\left[\mathrm{ch}\,m\eta+\right.$$

$$\left.+\mathrm{ch}\,m(\eta-1)-(\mathrm{ch}\,m+1)\right]-\frac{K_0^2}{6m^7\,\mathrm{sh}^3 m}\left[(2\,\mathrm{sh}\,m-\mathrm{sh}\,2m)\left(\mathrm{sh}\,m(2\eta-1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+6m\eta+\mathrm{sh}\,m\right)+2(\mathrm{ch}\,2m+4\,\mathrm{ch}\,m-5)\left(\mathrm{ch}\,m\eta-\mathrm{ch}\,m(\eta-1)+\mathrm{ch}\,m-1\right)\right]-$$

$$-\frac{K_0\left[2K_0(\mathrm{ch}\,m-1)+U_0 m^3\,\mathrm{sh}\,m\right]}{m^6\,\mathrm{sh}\,m}\left[m\eta\,\mathrm{ch}\,m\eta-\mathrm{ch}\,m(\eta-1)+\mathrm{sh}(\eta-1)-\right.$$

$$\left.-\mathrm{sh}\,m\eta-m(\mathrm{ch}\,m-1)+\mathrm{sh}\,m\right]-\frac{K_0(m+4K_0)}{4m^6\,\mathrm{sh}\,m}\left\{\mathrm{sh}\left[3m\eta\left(\mathrm{sh}\,m(\eta-1)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mathrm{sh}\,m\eta\right)-(m^2\eta+3)\left(\mathrm{ch}\,m(\eta-1)-\mathrm{ch}\,m\eta\right)+3(\mathrm{ch}\,m-1)\right]+m\left(\mathrm{ch}\,m-\right.$$

$$\left.\left.-1-m\,\mathrm{sh}\,m\right)(\mathrm{ch}\,m-1)\right\}-\frac{1}{6m^2\,\mathrm{sh}^2 m}\left\{b^2\left[\mathrm{sh}\,m\left(\mathrm{sh}\,2m\eta+6m\eta\right)-\right.\right.$$

$$-2(ch\,2m+3)(ch\,m-1)+8(ch\,m(\eta-1)-ch\,m)\Big]-2ab\,\times$$

$$\times\Big[sh\,m\,(sh\,m(2\eta-1)+6m\eta\,ch\,m+sh\,m)+8\,ch\,m\,(ch\,m(\eta-1)-$$

$$-ch\,m\eta-ch\,m+1)\Big]+a^2\Big[sh\,m\,(sh\,2m(\eta-1)+6m\eta+sh\,2m)+$$

$$+2(ch\,2m+3)(ch\,m(\eta-1)-ch\,m)-8(ch\,m\eta-1)\Big]\Big\},$$

$$K_1=\frac{K_0\left[(m^2-K_0)sh^2m-2K_0(ch\,m-1)\right]}{m^4\,sh^2m}-$$

$$-\frac{K_0(m+4K_0)}{3m^3[2(ch\,m-1)-m\,sh\,m]}\Big\{sh\,m\left[(m^2+6)(ch\,m-1)-3m\,sh\,m\right]+$$

$$+m(ch\,m-1-m\,sh\,m)(ch\,m-1)\Big\}-\frac{m}{12\,sh\,m[2(ch\,m-1)-m\,sh\,m]}\Big\{(a^2+$$

$$+b^2)\Big[sh\,m\,(sh\,2m+6m)-2(ch\,m-1)(ch\,2m+7)\Big]-4ab\,\times$$

$$\times\Big[sh\,m\,(sh\,m+3m\,ch\,m)-8\,ch\,m\,(ch\,m-1)\Big]\Big\}-$$

$$-\frac{K_0^2}{6m^4sh^2m[2(ch\,m-1)-m\,sh\,m]}\Big[(2sh\,m-sh\,2m)(sh\,m+3m)+$$

$$+2(ch\,2m+4ch\,m-5)(ch\,m-1)\Big].$$

б) Предположим, что магнитное поле таково, что $m^2 = R_e m_0^2$.
Тогда подстановка (4) в систему (I) - (2) дает следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} f'' = R_e\left[(1+m_0^2)f + \frac{1}{2}\eta f' + g f' + f^2 - q^2\right] + K, \\ q'' = R_e\left[(1+m_0^2)q + \frac{1}{2}\eta q' + 2fq + gq'\right], \\ \frac{\partial P}{\partial \eta} = g'' - R_e\left[\frac{1}{2}g + \frac{\eta}{2}g' + gg'\right], \\ g' + 2f = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Решение задачи (6) - (9) можно представить в виде:

$$\begin{cases} f(\eta) = R_e\int_0^1\left[(1+m_0^2)f + \frac{1}{2}\zeta f' + g f' + f^2 - q^2\right]G(\eta,\zeta)d\zeta + \\ \qquad + K\int_0^1 G(\eta,\zeta)d\zeta, \\ q(\eta) = R_e\int_0^1\left[(1+m_0^2)q + \frac{1}{2}\zeta q' + 2fq + gq'\right]G(\eta,\zeta)d\zeta, \\ g(\eta) = -2\int_0^\eta f d\zeta, \end{cases} \qquad (IO)$$

где $G(\eta,\zeta)$ - функция Грина задачи

$$G'' = 0,$$

$$G\Big|_{\eta=0} = 0, \quad G\Big|_{\eta=1} = 0.$$

Она имеет вид

$$G = \begin{cases} G_1 = (\zeta-1)\eta, & 0 \le \eta < \zeta; \\ G_2 = (\eta-1)\zeta, & \zeta < \eta \le 1. \end{cases}$$

Подставляя ряды (8) в систему (IO) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях R_e, получим следующие рекуррентные соотношения:

$$f_0 = \int_0^1 K_0 G(\eta,\zeta)d\zeta,$$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$$f_\beta = \int_0^1\left[(1+m_0^2)f_{\beta-1} + \frac{1}{2}\zeta f'_{\beta-1} + \sum_{\alpha=0}^{\beta-1}\left(g_\alpha f'_{\beta-\alpha-1} - q_\alpha q_{\beta-\alpha-1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + f_\alpha f_{\beta-\alpha-1}\right) + K_\beta\right]G(\eta,\zeta)d\zeta,$$

$$q_\beta = C(\eta)$$

$$q_\beta = \int_0^1 \Big[(1+m_0^2) q_{\beta-1} + \frac{1}{2} \zeta q'_{\beta-1} + \sum_{\alpha=0}^{\beta-1} 2 f_\alpha q'_{\beta-\alpha-1} + g_\alpha q'_{\beta-\alpha-1} \Big] G(\eta,\zeta)\, d\zeta,$$

$$g_0 = -2\int_0^\eta f_0\, d\zeta + U_0,$$

$$g_\beta = -2\int_0^\eta f_\beta\, d\zeta,$$

где $G(\eta)$ – решение задачи

$$C''(\eta) = 0,$$

$$C(0) = a, \quad C(1) = b.$$

Первые два приближения $f_0, f_1, q_0, q_1, g_0, g_1, K_0, K_1$ имеют вид:

$$f_0 = \frac{K_0}{2}(\eta^2 - \eta),$$

$$q_0 = a + (b-a)\eta,$$

$$g_0 = -\frac{K_0}{6}(2\eta^3 - 3\eta^2) + U_0,$$

$$K_0 = -3,$$

$$f_1 = \frac{(1+m_0^2)K_0}{24}\left[5\eta^4 - 12\eta^3 + 6\eta^2 + \eta\right] + \frac{K_0^2}{360}\left[3\eta^5 - 2\eta - \eta^6\right] + \frac{K_0}{24}\left[\eta^4 - \eta^3\right] - \frac{b-a}{12}\left[4a(\eta^3 - \eta) + (b-a)(\eta^4 - \eta)\right] + \frac{(K_1 - a^2)}{2}(\eta^2 - \eta),$$

$$q_1 = \frac{\left[(1+m_0^2)a + U_0(b-a)\right]}{2}(\eta^2 - \eta) + \frac{(3+2m_0^2)(b-a) - aK_0}{12} \times (\eta^3 - \eta) + \frac{aK_0}{24}(\eta^4 - \eta) + \frac{K_0(b-a)}{120}(\eta^5 - \eta),$$

$$g_1 = -\frac{(1+m_0^2)K_0}{24}\left(2\eta^5-6\eta^4+4\eta^3+\eta^2\right)+\frac{K_0^2}{2520}\left(2\eta^7-7\eta^6+14\eta^2\right)-$$

$$-\frac{K_0}{120}\left(4\eta^5-5\eta^4\right)-\frac{b-a}{60}\left[10a\left(\eta^4-2\eta^2\right)+(b-a)\left(2\eta^5-5\eta^2\right)\right]-$$

$$-\frac{K_1-a^2}{6}\left(2\eta^6-3\eta^2\right),$$

$$K_1 = a^2+\frac{(4+5m_0^2)K_0}{20}-\frac{3K_0^2}{140}+\frac{(a-b)(7a+3b)}{10}.$$

Вычислены все характеристики течения и построены соответствующие графики.

Поступила 15.XI.1991

Кафедра
теоретической механики

Литература

1. S.Ishizawa. Bull.of the J.S.M.E., 1966, Vol.9, N35, 533-550.
2. E.A.Hamza and D.A.MacDonald. Quarterly of Applied Mathematic,1984, Vol.41, 495-511.
3. W.F.Hughes and R.A.Elco. Journal of Fluid Mechanics, 1962, Vol.13, 21-32.
4. D.C.Kurma. E.R.Maki and R.J.Donelly. Journal of Fluid Mechanics, Vol.19, 393-400.
5. S.Kaujiyama. ASME Journal of Lubrication Technology, 1969, vol.91, N4, 589-596.
6. E.A.Hamza. ASME Journal of Tribology, 1988, vol.110, N2, 375-377.

7. E.A.Hamza. Trans.ASME, J.Appl.Mech.,1989,vol.56,N1,218-221.

8. А.Б.Ватажин, Г.А.Любимов. С.А.Регирер. Магнитогидродинамические течения в каналах. "Наука", М., 1970, 672.

ი.ჯიქიძე

ორ ფირფიტს შორის სუსტად გამტარი სითხის მსგავსი

დინება მაგნიტური ველისა და შეჟონვის გათვალისწინებით

რეზიუმე

გრინის ფუნქციისა და მცირე პარამეტრის მეთოდით შესწავლილია სუსტადგამტარი სითხის მსგავსი დინებები ორ მბრუნავ ფოროვან ფირფიტს შორის, გარდა ბრუნვისა ზედა ფირფიტა მოძრაობს ქვედა ფირფიტის მიმართ $h'(t)$ სიჩქარით, სადაც $h(t)$ ფირფიტებს შორის მანძილია. ფირფიტები ბრუნავენ სხვადასხვა კუთხური სიჩქარით, მათ პერპენდიკულარულად მოდებულია $B(t)$ გარეგანი მაგნიტური ველი და ფირფიტებში ხდება სითხის შეჟონვა და გამოჟონვა ერთიდაიგივე $V_0(t)$ სიჩქარით.

გამოთვლილია დინების ყველა მახასიათებელი და აგებულია შესაბამისი გრაფიკები.

L.Jikidze

SIMILAR FLOWS OF A WEAKLY CONDUCTIVE FLUID BETWEEN TWO PLATES IN THE PRESENCE OF A MAGNETIC FIELD AND SUCTION

Summary

Similar flows of a weakly conductive fluid flowing between two porous rotating plates have been studied by the method of Green's function and the perturbation theory of small parameters. Besides rotation, the upper plate moves towards the lower plate at $h'(t)$ speed, where $h(t)$ is the distance between the plates. The plates rotate at different angular velocities and the external magnetic field $B(t)$ is applied perpendicularly to them while injection and suction of fluid into the plates (exudation and leakage) take place at one and the same, $V_0(t)$, speed.

All the characteristics of the flow are calculated and corresponding graphs plotted.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

314, 1993

УДК 538

ДВУМЕРНОЕ ПУЛЬСИРУЮЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОМ КАНАЛЕ

Д.В.Шарихадзе, Р.Г.Левдариани

Рассматривается двумерное нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в пористом канале, вызванное периодическим изменением во времени как перепада давления, так и скоростей просачивания жидкости через стенки канала.

Если направить ось OX параллельно стенкам, а ось OY - перпендикулярно им, то уравнения нестационарного двумерного движения вязкой несжимаемой жидкости будут иметь вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Искомые скорости $u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$ должны удовлетворять следующим предельным условиям:

$$
\begin{aligned}
&u(x,y,0)=0, && v(x,y,0)=0,\\
&u(x,-h,t)=0, && v(x,-h,t)=v_{w_1}(t),\\
&u(x,h,t)=0, && v(x,h,t)=v_{w_2}(t).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Введем следующие безразмерные величины:

$$
u=u_0u_1,\quad v=v_0v_1,\quad x=lx_1=\frac{u_0}{v_0}hx_1,\quad y=hy_1,\quad t=\frac{h^2}{\nu}t_1,
$$

$$
P=\frac{\rho\nu u_0^2}{v_0h}P_1,\quad v_{w_1}=v_0v_{01},\quad v_{w_2}=v_0v_{02}.
$$

Тогда из системы (I) будем иметь уравнения в безразмерном виде:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{v_0}{u_0}\right)^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=R_0\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial P}{\partial x},\\
&\left(\frac{v_0}{u_0}\right)^2\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}-\frac{\partial v}{\partial t}=R_0\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{u_0}{v_0}\right)\frac{\partial P}{\partial y},\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где u_0, v_0 – характеристические средняя скорость и скорость просачивания соответственно, l – длина канала, h – половина расстояния между стенками, $R_0=\frac{v_0h}{\nu}$ – число Рейнольдса просачивания. В системе (3) для простоты опущены индексы.

Ищем решение системы (3) в виде:

$$
u(x,y,t)=(1-x)\frac{\partial f(y,t)}{\partial y},\qquad v(x,y,t)=f(y,t).
\tag{4}
$$

Тогда она примет вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^3f}{\partial y^3}-\frac{\partial^2f}{\partial y\partial t}=R_0\left[f\frac{\partial^2f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{1}{1-x}\frac{\partial P}{\partial x},\\
&\frac{\partial^2f}{\partial y^2}-\frac{\partial f}{\partial t}=R_0f\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{u_0}{v_0}\frac{\partial P}{\partial y}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Допустим, что величины $\frac{1}{1-x}\frac{\partial P}{\partial x}$, $v_{01}(t)$ и $v_{02}(t)$ меняются по периодическому закону:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1-x}\frac{\partial P}{\partial x}=a+\varepsilon e^{i\omega t}b,\\
&v_{01}=c\left(1+\varepsilon e^{i\omega t}\right),\\
&v_{02}=d\left(1+\varepsilon e^{i\omega t}\right),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где a, b – неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий, а c, d – заданные постоянные.

Будем искать функцию $f(y,t)$ в виде:

$$f(y,t)=\varphi(y)+\varepsilon e^{i\omega t}\psi(y). \tag{7}$$

Подставляя (7) в систему (5) и отбрасывая члены, содержащие ε^2 и выше, из первого уравнения системы (5) будем иметь:

$$\varphi'''=R_0\left(\varphi\varphi''-\varphi'^2\right)+a, \tag{8}$$

$$\psi'''-i\omega\psi'=R_0\left(\varphi\psi''+\psi\varphi''-2\varphi'\psi'\right)+b, \tag{9}$$

а из (2) следующие граничные условия:

$$
\begin{aligned}
&\varphi(-1)=c, && \varphi(1)=d,\\
&\varphi'(-1)=0, && \varphi'(1)=0,\\
&\psi(-1)=c, && \psi(1)=d,\\
&\psi'(-1)=0, && \psi'(1)=0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Будем считать, что число Рейнольдса просачивания $R_0=\frac{v_0h}{\nu}$ мало. Представим функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$, а также неизвестные постоянные a и b в виде рядов по степеням R_0:

$$\varphi(y)=\sum_{k=0}^{\infty}R_0^k, \quad \psi(y)=\sum_{k=0}^{\infty}R_0^k\psi_k(y), \quad \ldots \tag{11}$$

$$a=\sum_{k=0}^{\infty} R_0^k a_k, \qquad b=\sum_{k=0}^{\infty} R_0^k b_k.$$

Подставляя (II) в уравнения (8) и (9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях R_0, получим в первых двух приближениях:

$$\begin{aligned}
&\Phi_0''' = a_0,\\
&\varphi_0''' - i\omega\varphi_0' = b_0,\\
&\text{- - - - - - - - - - - - - -}\\
&\Phi_1''' = \Phi_0\Phi_0'' - \Phi'^2 + a_1,\\
&\varphi_1''' - i\omega\varphi_1' = b_1 + \Phi_0\varphi_0'' + \Phi_0''\varphi_0 - 2\Phi_0'\varphi_0',
\end{aligned} \tag{I2}$$

где Φ_0, φ_0, Φ_1 и φ_1 функции должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned}
&\Phi_0(-1)=c, \quad \Phi_0(1)=d, \quad \Phi_0'(-1)=0, \quad \Phi_0'(1)=0,\\
&\varphi_0(-1)=c, \quad \varphi_0(1)=d, \quad \varphi_0'(-1)=0, \quad \varphi_0'(1)=0,\\
&\Phi_k(\mp1)=0, \quad \Phi_k'(\mp1)=0, \quad \varphi_k(\mp1)=0, \quad \varphi_k'(\mp1)=0,
\end{aligned} \tag{I3}$$

где $k \geqslant 1,2,\dots$, а штрихи показывают производные по y.

Решение системы (I2) не представляет труда. Мы найдем функции Φ_0, Φ_1 и φ_0, а также величины a_0, b_0, a_1. Нахождение функции φ_1 и величины b_1 в допущенном приближении не имеет смысла, так как слагаемые, содержащие φ_1 и b_1 имеют коэффициентами произведение двух бесконечно малых величин εR_0.

Таким образом, для Φ_0, φ_0, Φ_1, a_0, b_0 и a_1 получим следующие выражения:

$$\Phi_0(y) = A(y^3-3y)+B,$$

$$\varphi_0(y) = \frac{1}{D}\left[4A\left(\operatorname{sh}\sqrt{i\omega}\,y - y\sqrt{i\omega}\,\operatorname{ch}\sqrt{i\omega}\right)+B\right].$$

$$a_0 = 6A, \quad b_0 = \frac{1}{D}\left[4a(i\omega)^{3/2} ch\sqrt{i\omega}\right], \quad a_1 = \frac{324}{35}A^2,$$

$$\varphi_1 = \frac{AB}{4}(y^2-1)^2 - \frac{A^2}{70}(y^7-3y^3+2y),$$

где введены обозначения:

$$A = \frac{c-d}{4}, \quad B = \frac{c+d}{2}, \quad D = 2\left(sh\sqrt{i\omega} - \sqrt{i\omega}\, ch\sqrt{i\omega}\right).$$

Окончательно для компонентов скорости и перепадов давления вдоль и поперек основного течения в предложенном приближении будем иметь:

$$u(x,y,t) = (1-x)\left[\varphi_0'(y) + R_0\varphi_1'(y) + \varepsilon e^{i\omega t}\varphi_0'(y)\right],$$

$$v(x,y,t) = \varphi_0(y) + R_0\varphi_1(y) + \varepsilon e^{i\omega t}\left[\varphi_0(y) + R_0\varphi_1(y)\right],$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = (1-x)\left[a_0 + R_0 a_1 + \varepsilon e^{i\omega t} b_0\right],$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{v_0}{u_0}\left[\varphi_0'' + R_0\varphi_1'' + \varepsilon e^{i\omega t}(\varphi_0'' - i\omega\varphi_0) - R_0\varphi_0\varphi_0'\right].$$

Поступила 10.II.1990

Кафедра
теоретической механики,
спец.лаборатория ИПМ

Литература

1. A.S.Bermann. J.of Applied Physics, v.24, N9, 1953, p.1232-1235.
2. R.M.Terrill, G.M.Shrestha, ZAMP, 16, 1965, p.470-482.
3. В.М.Ерошенко, Л.И.Зайчик. Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях., Москва, "Наука", 1984.

გ.შარიქაძე, რ.დევდარიანი

ფოროვან არხში ბლანტი არაკუმშვადი სითხის ორგანზომილებიანი არასტაციონარული დინება

რეზიუმე

განხილულია ბლანტი არაკუმშვადი სითხის ორგანზომილებიანი არასტაციონარული დინება ფოროვან არხში, რომელიც გამოწვეულია როგორც წნევის დაცემის, ასევე კედლებში გაჟონვის სიჩქარის დროის მიხედვით პერიოდული ცვლილებით.

G.Sharikadze, R.Devdariani

TWO-DIMENSIONAL UNSTEADY FLOW OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID IN A POROUS CHANNEL

Summary

Two-dimensional unsteady flow of a viscous incompressible fluid through a porous channel is considered. This motion gets excited from the periodical time change of a pressure drop and a percolation velocity.

Труды Тбилисского государственного университета

им. И.Джавахишвили

ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

314, 1993 УДК 538

სუსტელექტროგამტარი ბრტყელ ფენაში სითხის კონვექციური დინება ორ პარალელურ კედელს შორის სითბოგადაცემით

ვ.ცაცქირიძე

ბრტყელ ფენაში სითხის კონვექციური დინებების შესწავლას დიდი პრაქტიკული და თეორიული მნიშვნელობა აქვს. ასეთი ამოცანები სითბოგადაცემის გათვალისწინებით თითქმის შეუსწავლელია.

ერთ-ერთი პირველი გამოკვლევა, რომელშიც შესწავლილია ორ პარალელურ კედელს შორის ბრტყელ ფენაში არაგამტარი სითხის კონვექციური დინება სითბოგადაცემის გარეშე, როდესაც დინება გამოწვეულია ან კედლების პერიოდული მოძრაობით, ან წნევის პერიოდული დაცემით, გადმოცემულია /1/ სტატიაში. მიღებულია ნავიე-სტოქსის არასტაციონარული მოძრაობის განტოლების ზუსტი ამონახსნი ლაპლასის ინტეგრალური გარდაქმნის გამოყენებით. ნაშრომში მოყვანილია მსგავსების კრიტერიუმები ახასიათებენ თანაფარდობას ინერციულ ძალებსა და სიბლანტის ძალებს შორის, რომლებიც იწვევენ რხევით მოძრაობას სითხეში.

/1/ ნაშრომისაგან განსხვავებით /2/ ნაშრომში შესწავლილია ელექტროგამტარი ბრტყელ ფენაში სითხის პერიოდული მოძრაობა [illegible] სითბოგადაცემის გათვალისწინების გარეშე, როდესაც მოქმედებს გარეგანი ერთგვაროვანი მაგნიტური ველი. წნევის დაცემა განისაზღვრება ფურიეს მწკრივის საშუალებით. მაგნიტოჰიდროდინამიკის განტოლებების ზუსტი ამონახსნების მისაღებად აქაც გამოყენებულია ლაპ-

ლასის ინდუქციური დარეგულება.

ნაშრომში შესწავლილია მაგნიტოჰიდროდინამიკური ბლანტი გამტარი სითხის მოძრაობა ბრტყელ არხში სითბოგადაცემის გათვალისწინებით, როდესაც მოქმედებს გარეგანი ერთგვაროვანი მაგნიტური ველი. წნევის ვარდნა მოიცემა ფორმულით ($-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=Ae^{-i\omega t}$), ხოლო სითბოგადაცემის პირობები ხდება მუდმივად. სითბოგადაცემის განტოლებაში გათვალისწინებულია როგორც ხახუნის შედეგად გამოყოფილი ენერგიის დისიპაცია $\eta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$, ასევე ჯოულის სითბო σV^2. მიღებულია ნავიე-სტოქსის და სითბოგადაცემის განტოლებების ზუსტი ამონახსნები მაგნიტოჰიდროდინამიკური ბრტყელ არხში სითხის არასტაციონარული მოძრაობის შემთხვევაში. შესწავლილია მახასიათებელი კრიტერიუმები ასახავენ ხახუნის ძალებით გამოწვეულ სითხის ნაკადის მოძრაობას გარეგანი ერთგვაროვანი მაგნიტური ველის გავლენით.

განხილულია მაგნიტოჰიდროდინამიკური ბლანტი გამტარი სითხის არასტაციონარული დინება ბრტყელ არხში, როდესაც მოძრაობის მართობულად მოქმედებს გარეგანი ერთგვაროვანი (H_0) მაგნიტური ველი. შესაბამისი ინდუქციური მაგნიტური ველი მცირეა, ამიტომ მას უგულებელვყოფთ. ვიგულისხმებთ, რომ სითხის სიჩქარეს აქვს სახე $V=V_z(x,t)$ მიმართული Oz ღერძის გასწვრივ, ხოლო ტემპერატურა T არის x და t-ს ფუნქცია – $T=T(x,t)$.

მოძრაობის და სითბოგადაცემის განტოლებებს არაინდუქციური მიახლოებაში აქვს სახე /5,6/ :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)\vec{V}=-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p+\nu\Delta\vec{V}-\frac{\sigma}{\rho}\left[H[\vec{V}\cdot\vec{H}]\right],$$

$$\rho c_v\left(\frac{\partial T}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)T\right)=\kappa\Delta T+\Phi+\sigma[\vec{V}\cdot\vec{H}]^2. \qquad (1)$$

სადაც $\sigma[\vec{v}\cdot\vec{H}]^2$ ჯოულის სითბოა, ხოლო Φ არის ხახუნის შე[illegible] ენერგიის დისიპაციის ფუნქცია, რომელიც ტოლია.

$$\Phi=2\eta\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ თქმულს, (1) სისტემიდან უგანზომილებო სიდიდეებში მივიღებთ

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}-\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+M^2 U(\xi,\tau)=De^{-i\alpha\tau},$$

$$S\frac{\partial \Theta}{\partial \tau}-\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2}=\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2+M^2U^2, \tag{2}$$

სადაც $\xi=\frac{x}{L}$, $\tau=\frac{\nu}{L^2}t$, $U=\frac{V}{V_0}$, $\Theta=\frac{K}{\eta V_0^2}T$ — უგანზომილებო სიდიდეებია, ხოლო V_0 და L შესაბამისად მახასიათებელი სიჩქარე და მახასიათებელი სიგრძეა. $M=H_0L\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$ — ჰარტმანის რიცხვია, $\alpha=\frac{\omega L^2}{\nu}$ — დამყარებული პულსაციური მოძრაობის მსგავსობის კრიტერიუმია, $S=\frac{\eta C_v}{K}$ — პრანდტლის რიცხვია, $D=\frac{AL^2}{\nu V_0}$ — წნევის პულსაციური ვარდნის ამპლიტუდა, σ — გამტარებლობის კოეფიციენტი, ν — სიბლანტის კინემატიკური კოეფიციენტი, η — სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტი, ω — სიხშირე, C_v — კუთრი სითბოტევადობა, K — სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტი.

შევისწავლოთ სითხის დინება, რომელიც გამოწვეულია კედლების პულსაციური მოძრაობით და წნევის პულსაციური ვარდნით —
$\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}=Ae^{-i\omega t}\right)$.

ამ შემთხვევაში სასაზღვრო პირობებს ექნებათ სახე:

$$U(\xi,\tau)\Big|_{\xi=1}=A_1e^{-i\alpha\tau},\quad U(\xi,\tau)\Big|_{\xi=-1}=A_2e^{-i\alpha\tau}. \tag{3}$$

$$\theta(\xi,\tau)\Big|_{\xi=1} = B_1 e^{-2i\alpha\tau}, \quad \theta(\xi,\tau) = B_2 e^{-2i\alpha\tau}, \tag{4}$$

ვეძებთ (2) ამოცანის ამოხსნას შემდეგი სახით:

$$U(\xi,\tau) = \Phi(\xi) e^{-i\alpha\tau}, \quad \theta(\xi,\tau) = F(\xi) e^{-2i\alpha\tau}.$$

მაშინ სიჩქარისა და ტემპერატურისათვის (3)-(4) სასაზღვრო პირობებით მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს /7/:

$$U(\xi,\tau) = \frac{A_1 \operatorname{sh}\sqrt{M^2-i\alpha}\,(1+\xi) + A_2 \operatorname{sh}\sqrt{M^2-i\alpha}\,(1-\xi)}{\operatorname{sh} 2\sqrt{M^2-i\alpha}} -$$
$$- \frac{D}{M^2-i\alpha}\left(\frac{\operatorname{ch}\sqrt{M^2-i\alpha}\,\xi}{\operatorname{ch}\sqrt{M^2-i\alpha}} - 1\right)\Bigg\} e^{-i\alpha\tau}, \tag{5}$$

$$\theta(\xi,\tau) = \Big\{ C_1 e^{-\sqrt{\alpha s}(1-i)\xi} + C e^{\sqrt{\alpha s}(1-i)\xi} +$$
$$+ \frac{1}{4M^2 - 2i\alpha(2-s)}\Big(a_1 \operatorname{ch} 2\sqrt{M^2-i\alpha}\,(1+\xi) + a_2 \operatorname{ch} 2\sqrt{M^2-i\alpha}\,(1-\xi) +$$
$$+ a_4 \operatorname{ch} 2\sqrt{M^2-i\alpha}\,\xi + a_5 \operatorname{sh}\sqrt{M^2-i\alpha}\,(1+2\xi) + a_6 \operatorname{sh}\sqrt{M^2-i\alpha}\,(1-2\xi)\Big) +$$
$$+ \frac{1}{M^2 - i\alpha(1-2s)}\Big(a_3 \operatorname{ch}\sqrt{M^2-i\alpha}\,\xi + a_7 \operatorname{sh}\sqrt{M^2-i\alpha}\,(1+\xi) +$$
$$+ a_8 \operatorname{sh}\sqrt{M^2-i\alpha}\,(1-\xi)\Big) + \frac{a_9}{2i\alpha s}\Big\} e^{-2i\alpha\tau}, \tag{6}$$

სადაც

$$C_1 = \frac{1}{2\operatorname{sh} 2\sqrt{\alpha s}(1-i)}\Big\{\frac{1}{4M^2 - 2i\alpha(2-s)}\Big[e^{-\sqrt{\alpha s}(1-i)}\Big(a_1 \operatorname{ch} 4\sqrt{M^2-i\alpha} +$$
$$+ a_5 \operatorname{sh} 3\sqrt{M^2-i\alpha} + a_4 \operatorname{ch} 2\sqrt{M^2-i\alpha} + a_6 \operatorname{sh}\sqrt{M^2-i\alpha} + a_2\Big) -$$
$$- e^{\sqrt{\alpha s}(1-i)}\Big(a_2 \operatorname{ch} 4\sqrt{M^2-i\alpha} + a_5 \operatorname{sh} 3\sqrt{M^2-i\alpha} + a_4 \operatorname{ch} 2\sqrt{M^2-i\alpha} +$$
$$+ a_5 \operatorname{sh}\sqrt{M^2-i\alpha} + a_1\Big)\Big] + \frac{1}{M^2 - i\alpha(1-2s)}\Big[e^{-\sqrt{\alpha s}(1-i)}\Big(a_2 \operatorname{ch}\sqrt{M^2-i\alpha} +$$

$$a_7 sh 2\sqrt{\mu^2 - i\alpha}\Big) - e^{\sqrt{\alpha s}(1-i)}\Big(a_3 ch\sqrt{\mu^2 - i\alpha} + a_8 sh 2\sqrt{\mu^2 - i\alpha}\Big)\Big] -$$

$$- \frac{a_9}{i\alpha s} sh\sqrt{\alpha s}(1-i) + B_2 e^{\sqrt{\alpha s}(1-i)} - B_1 e^{-\sqrt{\alpha s}(1-i)}\Big\},$$

$$C_2 = \frac{1}{2 sh 2\sqrt{\alpha s}(1-i)}\Big\{\frac{1}{4\mu^2 - 2i\alpha(2-s)}\Big[e^{-\sqrt{\alpha s}(1-i)}\Big(a_2 ch 4\sqrt{\mu^2 - i\alpha} +$$

$$+ a_6 sh 3\sqrt{\mu^2 - i\alpha} + a_4 ch 2\sqrt{\mu^2 - i\alpha} + a_5 sh\sqrt{\mu^2 - i\alpha} + a_1\Big) -$$

$$- e^{\sqrt{\alpha s}(1-i)}\Big(a_1 ch 4\sqrt{\mu^2 - i\alpha} + a_5 sh 3\sqrt{\mu^2 - i\alpha} + a_4 ch 2\sqrt{\mu^2 - i\alpha} +$$

$$+ a_6 sh\sqrt{\mu^2 - i\alpha} + a_2\Big)\Big] + \frac{1}{\mu^2 - i\alpha(1-2s)}\Big[e^{-\sqrt{\alpha s}(1-i)}\Big(a_3 ch\sqrt{\mu^2 - i\alpha} +$$

$$+ a_8 sh 2\sqrt{\mu^2 - i\alpha}\Big) - e^{\sqrt{\alpha s}(1-i)}\Big(a_3 ch\sqrt{\mu^2 - i\alpha} + a_7 sh 2\sqrt{\mu^2 - i\alpha}\Big)\Big] -$$

$$- \frac{a_9}{i\alpha s} sh\sqrt{\alpha s}(1-i) + B_1 e^{\sqrt{\alpha s}(1-i)} - B_2 e^{-\sqrt{\alpha s}(1-i)}\Big\},$$

$$a_1 = \frac{A_1^2(2\mu^2 - i\alpha)}{2 sh^2 2\sqrt{\mu^2 - i\alpha}}, \qquad a_2 = -\frac{A_2^2(2\mu^2 - i\alpha)}{2 sh^2 2\sqrt{\mu^2 - i\alpha}},$$

$$a_3 = \frac{2\mu^2 D^2}{(\mu^2 - i\alpha) ch\sqrt{\mu^2 - i\alpha}}, \qquad a_4 = \frac{A_1 A_2(2\mu^2 - i\alpha)}{sh^2 2\sqrt{\mu^2 - i\alpha}} - \frac{D^2(2\mu^2 - i\alpha)}{(\mu^2 - i\alpha)^2 ch^2\sqrt{\mu^2 - i\alpha}},$$

$$a_5 = \frac{A_1 D(2\mu^2 - i\alpha)}{(\mu^2 - i\alpha) sh 2\sqrt{\mu^2 - i\alpha}\, ch\sqrt{\mu^2 - i\alpha}},$$

$$a_6=\frac{A_2D(2M^2-i\alpha)}{(M^2-i\alpha)\,sh\,2\sqrt{M^2-i\alpha}\;ch\sqrt{M^2-i\alpha}},$$

$$a_7=-\frac{2M^2DA_2}{(M^2-i\alpha)\,sh\,2\sqrt{M^2-i\alpha}},\quad a_8=-\frac{2DM^2A_2}{(M^2-i\alpha)\,sh\,2\sqrt{M^2-i\alpha}}$$

$$a_9=\frac{i\alpha}{2}\left(\frac{A_1^2-2A_1A_2\,ch\,2\sqrt{M^2-i\alpha}+A_2^2}{sh^2\,2\sqrt{M^2-i\alpha}}+\frac{2D(A_1+A_2)}{(M^2-i\alpha)\,ch^2\sqrt{M^2-i\alpha}}-\right.$$

$$\left.-\frac{D^2}{2(M^2-i\alpha)^2\,ch^2\sqrt{M^2-i\alpha}}\right)-\frac{M^2D^2}{(M^2-i\alpha)^2}.$$

დინების ფიზიკური მახასიათებლების შესწავლისათვის საჭიროა (5)-(6)-დან ნამდვილი ნაწილების გამოყოფა. სიმარტივისათვის ასეთ გამოყოფას ჩვენ კონკრეტული შემთხვევებისათვის განვიხილავთ.

1. კედლები უძრავია ($A_1=A_2=0$) და სითბოგადაცემა კედლებზე არ ხდება ($B_1=B_2=0$). მოძრაობა გამოწვეულია წნევის მუდმივი დაცემით ($D\neq 0$).

მაშინ სიჩქარისა და სითბოგადაცემის ნამდვილი ნაწილები (5)-(6)-დან ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$U(\xi,\tau)=\frac{D}{M^4+\alpha^2}\left\{\left(1-\frac{ch\,a(1+\xi)\cos b(1-\xi)+ch\,a(1-\xi)\cos b(1+\xi)}{ch\,2a+\cos 2b}\right)\times\right.$$

$$\times\left(M^2\cos\alpha\tau+\alpha\sin\alpha\tau\right)-\frac{sh\,a(1+\xi)\sin b(1-\xi)-sh\,a(1-\xi)\sin b(1+\xi)}{ch\,2a+\cos 2b}\times \tag{7}$$

$$\left.\times\left(M^2\sin\alpha\tau-\alpha\cos\alpha\tau\right)\right\},$$

$$\theta(\xi,\tau)=(p_1\cos\alpha\tau+q_1\sin 2\alpha\tau)f_1(\xi)+(p_1\sin 2\alpha\tau-q_1\cos 2\alpha\tau)g_1(\xi)+$$

$$+(p_2\cos 2\alpha\tau+q_2\sin 2\alpha\tau)f_2(\xi)+(p_2\sin\alpha\tau-q_2\cos\alpha\tau)g_2(\xi)+$$

$$+\left(P_3\cos 2\alpha\tau+q_3\sin 2\alpha\tau\right)f_3(\xi)+\left(P_3\sin 2\alpha\tau-q_3\cos 2\alpha\tau\right)g_3(\xi), \qquad (3)$$

სადაც

$$a=\pm\sqrt{\frac{\mu^2}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\mu^4+\alpha^2}}\,, \qquad b=-\frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{a},$$

$$P_1=\frac{2\mu^4D^2\left(\mu^4-\alpha^2(3-4s)\right)}{(\mu^4+\alpha^2)^2\left(\mu^4+\alpha^2(1-2s)^2\right)}, \qquad q_1=\frac{2\mu^2D^2\alpha\left[\mu^4(3-2s)-\alpha^2(1-2s)\right]}{(\mu^4+\alpha^2)^2\left(\mu^4+\alpha^2(1-2s)^2\right)},$$

$$P_2=D^2\,\frac{\mu^4\left(4\mu^4-\alpha^2(10-3s)\right)+\alpha^4(2+s)}{(\mu^4+\alpha^2)^2\left(4\mu^4+\alpha^2(2-s)^2\right)}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,4a+2\,\mathrm{ch}\,2a\cos 2b+\cos 4b}{(\mathrm{ch}\,2a+\cos 2b)^2}-$$

$$-2\alpha\mu^4D^2\,\frac{2+\mu^2(2-s)}{(\mu^4+\alpha^2)^2\left(4\mu^4+\alpha^2(2-s)^2\right)}\cdot\frac{2\,\mathrm{sh}\,2a\sin 2b}{(\mathrm{ch}\,2a+\cos 2b)^2},$$

$$q_2=D^2\,\frac{\mu^4\left(4\mu^4-\alpha^2(10-3s)\right)+\alpha^4(2-s)}{(\mu^4+\alpha^2)^2\left(4\mu^4+\alpha^2(2-s)^2\right)}\cdot\frac{2\,\mathrm{sh}\,2a\sin 2b}{(\mathrm{ch}\,2a+\cos 2b)^2}+$$

$$+2\alpha\mu^4D^2\,\frac{2+\mu^2(2-s)}{(\mu^4+\alpha^2)^2\left(4\mu^4+\alpha^2(2-s)^2\right)}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,4a+2\,\mathrm{ch}\,2a\cos 2b+\cos 4b}{(\mathrm{ch}\,2a+\cos 2b)^2},$$

$$P_3=\frac{D^2}{2s(\mu^4+\alpha^2)^2}\left\{\frac{(\mu^4-\alpha^2)(1+\mathrm{ch}\,2a\cos 2b)}{(\mathrm{ch}\,2a+\cos 2b)}-2\alpha\mu^2\left(\frac{\mathrm{sh}\,2a\sin 2b}{(\mathrm{ch}\,2a+\cos 2b)^2}-\frac{\mu^2}{\alpha}\right)\right\}$$

$$q_3=-\frac{D^2}{2s(\mu^4+\alpha^2)^2}\left\{2\alpha\mu^4\,\frac{1+\mathrm{ch}\,2a\cos 2b}{(\mathrm{ch}\,2a+\cos 2b)^2}+(\mu^4-\alpha^2)\left(\frac{\mathrm{sh}\,2a\sin 2b}{(\mathrm{ch}\,2a+\cos 2b)^2}-\frac{\mu^4}{\alpha}\right)\right\},$$

$$f_1(\xi)=\frac{ch\,a(1+\xi)\cos b(1-\xi)+ch\,a(1-\xi)\cos b(1+\xi)}{ch\,2a+\cos 2b}=$$

$$=\frac{ch\sqrt{\alpha s}(1+\xi)\cos\sqrt{\alpha s}(1-\xi)+ch\sqrt{\alpha s}(1-\xi)\cos\sqrt{\alpha s}(1+\xi)}{ch\,2\sqrt{\alpha s}+\cos 2\sqrt{\alpha s}}, \qquad (9)$$

$$g_1(\xi)=-\frac{sh\,a(1+\xi)\sin b(1-\xi)-sh\,a(1-\xi)\sin b(1+\xi)}{ch\,2a+\cos 2b}=$$

$$=-\frac{sh\sqrt{\alpha s}(1+\xi)\sin\sqrt{\alpha s}(1-\xi)-sh\sqrt{\alpha s}(1-\xi)\sin\sqrt{\alpha s}(1+\xi)}{ch\,2\sqrt{\alpha s}+\cos 2\sqrt{\alpha s}},$$

$$f_2(\xi)=\frac{ch\,2a(1+\xi)\cos 2b(1-\xi)+ch\,2a(1-\xi)\cos 2b(1+\xi)}{ch\,4a+\cos 4b}=$$

$$=\frac{ch\sqrt{\alpha s}(1-\xi)\cos\sqrt{\alpha s}(1-\xi)+ch\sqrt{\alpha s}(1-\xi)\cos\sqrt{\alpha s}(1+\xi)}{ch\,2\sqrt{\alpha s}+\cos 2\sqrt{\alpha s}}; \qquad (1$$

$$g_2(\xi)=-\frac{sh\,2a(1+\xi)\sin 2b(1-\xi)-sh\,2a(1-\xi)\sin 2b(1+\xi)}{ch\,4a+\cos 4b}=$$

$$=-\frac{sh\sqrt{\alpha s}(1+\xi)\sin\sqrt{\alpha s}(1-\xi)-sh\sqrt{\alpha s}(1-\xi)\sin\sqrt{\alpha s}(1+\xi)}{ch\,2\sqrt{\alpha s}+\cos 2\sqrt{\alpha s}},$$

$$f_3(\xi)=1-\frac{ch\sqrt{\alpha s}(1+\xi)\cos\sqrt{\alpha s}(1-\xi)+ch\sqrt{\alpha s}(1-\xi)\cos\sqrt{\alpha s}(1+\xi)}{ch\,2\sqrt{\alpha s}+\cos 2\sqrt{\alpha s}}, \qquad (11$$

$$g_3(\xi)=-\frac{sh\sqrt{\alpha s}(1+\xi)\sin\sqrt{\alpha s}(1-\xi)-sh\sqrt{\alpha s}(1-\xi)\sin\sqrt{\alpha s}(1+\xi)}{ch\,2\sqrt{\alpha s}+\cos 2\sqrt{\alpha s}};$$

კედლებზე ხახუნის ძალისათვის მივიღებთ

$$F_{\text{ხხ.}}\Big|_{\xi=\pm1} = \mp\frac{D}{a^2+b^2}\left\{\frac{sh\,2a}{ch\,2a+\cos 2b}\left(a\cos\alpha\tau - b\sin\alpha\tau\right) + \frac{\sin 2b}{ch\,2a+\cos 2b}\left(a\sin\alpha\tau + b\cos\alpha\tau\right)\right\},$$

ხოლო სითბოს ნაკადისათვის და საშუალო სიჩქარისათვის შესაბამისად გვექნება:

$$\theta = \frac{2D}{M^4+\alpha^2}\left\{\left(1-\frac{a\,sh\,2a}{(a^2+b^2)(ch\,2a+\cos 2b)}\right)\left(M^2\cos\alpha\tau - \alpha\sin\alpha\tau\right) + \frac{a\sin 2b - b\,sh\,2a}{(a^2+b^2)(ch\,2a+\cos 2b)}\left(M^2\sin\alpha\tau - \alpha\cos\alpha\tau\right)\right\},$$

$$U_{\text{ს.შ.}} = \frac{D}{M^4+\alpha^2}\left\{\left(1-\frac{a\,sh\,2a}{(a^2+b^2)(ch\,2a+\cos 2b)}\right)\left(M^2\cos\alpha\tau + \alpha\sin\alpha\tau\right) + \frac{a\sin 2b - b\,sh\,2a}{(a^2+b^2)(ch\,2a+\cos 2b)}\left(M^2\sin\alpha\tau - \alpha\cos\alpha\tau\right)\right\}.$$

თუ (2) სითბოგამტარებლობის განტოლებაში უგულვებელვყოფთ ჯერ ჯოულის სითბოს და შემდეგ ხახუნის სითბოს, ამასთანავე ვიგულისხმებთ, რომ $\alpha\to0$ (როდესაც სითხის ყოველი ნაწილაკი ერთ ფაზაში ერთნაირი აჩქარებით ირხევა), მაშინ შესაბამისად მივიღებთ

$$\theta_1^{(1)}(\xi) = \frac{D^2}{2M^2 ch^2 M}\left(\frac{\xi^2-1}{2} + \frac{ch\,2M - ch\,2M\xi}{4M^2}\right),$$

$$\theta_2^{(1)}(\xi)=\frac{D^2}{2M^2 ch^2 M}\Big\{(2+ch2M)\frac{1-\xi^2}{2}+\frac{4chM}{M^2}(chM\xi-chM)+\frac{1}{4M^2}(ch2M-ch2M\xi)\Big\}.$$

$\theta_1^{(1)}$ და $\theta_2^{(1)}$ მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს ბრტყელი შრის ღერძზე ($\xi=0$ წერტილში).

ჰარტმანის რიცხვის მცირე მნიშვნელობებისათვის სიბლან-ტით 4 ... სითბური ეფექტი უფრო მნიშვნელოვანია, ვიდრე ჯო-ულის სითბოთი, ხოლო ჰარტმანის რიცხვის დიდი მნიშვნელობებისათვის ჯოულის სითბოს გავლენა უფრო მნიშვნელოვანია სითხის მოძრაობაზე, ვიდრე ხახუნის სითბოსი.

2. დავუშვათ, რომ სითხის დინება გამოწვეულია ზედა ($\xi=1$) კედლის პერიოდული მოძრაობით ($A_1\neq 0$, ყველა სხვა ...), ხოლო წნევის დაცემა ნულის ტოლია ($D=0$), აგრეთვე $A_2=0$ და $B_1=B_2=0$; მაშინ სიჩქარისა და სითბოგადაცემის ამოცანის ამონახსნი (5)-(6)-დან მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$U(\xi,\tau)=\frac{A_1}{ch4a-\cos4b}\Big\{\big[ch\,a(3+\xi)\cos b(1-\xi)-ch\,a(1-\xi)\cos b(3+\xi)\big]\cos\alpha\tau+\big[sh\,a(3+\xi)\sin b(1-\xi)+sh\,a(1-\xi)\sin b(3+\xi)\big]\sin\alpha\tau\Big\}, \quad (12)$$

$$\theta(\xi,\tau)=(p_1\cos2\alpha\tau+q_1\sin2\alpha\tau)f_1(\xi)+(p_1\sin2\alpha\tau-q_1\cos2\alpha\tau)g_1(\xi)+(p_2\cos2\alpha\tau+q_2\sin2\alpha\tau)f_2(\xi)+(p_2\sin2\alpha\tau-q_2\cos2\alpha\tau)g_2(\xi)+B_1\cos2\alpha\tau\, f_3(\xi)+B_1\sin2\alpha\tau\, g_3(\xi). \quad (13)$$

სადაც

$$P_1=-\frac{A_1^2}{4\mu^2+\alpha^2(2-s)^2}\left\{\frac{(4\mu^4+\alpha^2(2-s))\,sh2(\sqrt{\alpha s}+2a)\cos 2(\sqrt{\alpha s}-2b)}{(ch4\sqrt{\alpha s}-\cos 4\sqrt{\alpha s})(ch8a+\cos 8b-4ch4a\cos 4b+2)}+\right.$$

$$+(4\mu^4+\alpha^2(2-s))\frac{sh2(\sqrt{\alpha s}-2a)\cos 2(\sqrt{\alpha s}+2b)-2sh2\sqrt{\alpha s}\cos 2\sqrt{\alpha s}}{(ch4\sqrt{\alpha s}+\cos 4\sqrt{\alpha s})(ch8a+\cos 8b-4ch4a\cos 4b+2)}+$$

$$\left.+2\alpha\mu^2(s-1)\frac{ch2(\sqrt{\alpha s}+2a)\sin 2(\sqrt{\alpha s}-2b)+ch2(\sqrt{\alpha s}-2a)\sin 2(\sqrt{\alpha s}+2b)-2ch2\sqrt{\alpha s}\sin 2\sqrt{\alpha s}}{(ch4\sqrt{\alpha s}+\cos 4\sqrt{\alpha s})(ch8a+\cos 8b-4ch4a\cos 4b+2)}\right\}$$

(14)

$$q_1=-\frac{A_1^2}{4\mu^2+\alpha^2(2-s)^2}\left\{\frac{(4\mu^4+\alpha^2(2-s))\,ch2(\sqrt{\alpha s}+2a)\sin 2(\sqrt{\alpha s}-2b)}{(ch4\sqrt{\alpha s}-\cos 4\sqrt{\alpha s})(ch8a+\cos 8b-4ch4a\cos 4b+2)}+\right.$$

$$+(4\mu^4+\alpha^2(2-s))\frac{ch2(\sqrt{\alpha s}-2a)\sin 2(\sqrt{\alpha s}+2b)-2ch2\sqrt{\alpha s}\sin 2\sqrt{\alpha s}}{(ch4\sqrt{\alpha s}-\cos 4\sqrt{\alpha s})(ch8a+\cos 8b+4ch4a\cos 4b+2)}-$$

$$\left.-2\alpha\mu^2(s-1)\frac{sh2(\sqrt{\alpha s}+2a)\cos 2(\sqrt{\alpha s}-2b)+sh2(\sqrt{\alpha s}-2a)\cos(\sqrt{\alpha s}+2b)-2sh2\sqrt{\alpha s}\cos 2\sqrt{\alpha s}}{(ch4\sqrt{\alpha s}-\cos 4\sqrt{\alpha s})(ch8a+\cos 8b-4ch4a\cos 4b+2)}\right\}.$$

$$P_2=\frac{A_1^2}{s}\cdot\frac{ch4a\cos 4b-1}{ch8a+\cos 8b-4ch4a\cos 4b+2},$$

(15)

$$q_2=\frac{A_1^2}{s}\cdot\frac{sh4a\sin 4b}{ch8a+\cos 8b-4ch4a\cos 4b+2},$$

$$
\begin{aligned}
f_1(\xi)=\frac{1}{2}\Big\{ & sh\,2\left(\sqrt{\alpha s}+a(1+\xi)\right)\cos 2\left(\sqrt{\alpha s}-b(1+\xi)\right)+\\
& - sh\,2\left(\sqrt{\alpha s}-a(1+\xi)\right)\cos 2\left(\sqrt{\alpha s}+b(1+\xi)\right)-\\
& - sh\left(4a+\sqrt{\alpha s}(1+\xi)\right)\cos\left(4b-\sqrt{\alpha s}(1+\xi)\right)+\\
& + sh\left(4a-\sqrt{\alpha s}(1+\xi)\right)\cos\left(4b+\sqrt{\alpha s}(1+\xi)\right)-\\
& - 2\,sh\sqrt{\alpha s}(1-\xi)\cos\sqrt{\alpha s}(1-\xi)\Big\},
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
g_1(\xi)=\frac{1}{2}\Big\{ & ch\,2\left(\sqrt{\alpha s}+a(1+\xi)\right)\sin 2\left(b(1+\xi)-\sqrt{\alpha s}\right)-\\
& - ch\,2\left(\sqrt{\alpha s}-a(1+\xi)\right)\sin 2\left(\sqrt{\alpha s}+b(1+\xi)\right)-\\
& - ch\left(4a+\sqrt{\alpha s}(1+\xi)\right)\sin\left(4b-\sqrt{\alpha s}(1+\xi)\right)-\\
& - ch\left(4a-\sqrt{\alpha s}(1+\xi)\right)\sin\left(4b+\sqrt{\alpha s}(1+\xi)\right)+\\
& + 2\,ch\sqrt{\alpha s}(1-\xi)\sin\sqrt{\alpha s}(1-\xi)\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
f_2(\xi)=1-\frac{ch\sqrt{\alpha s}(1+\xi)\cos\sqrt{\alpha s}(1-\xi)+ch\sqrt{\alpha s}(1-\xi)\cos\sqrt{\alpha s}(1+\xi)}{ch\,2\sqrt{\alpha s}+\cos 2\sqrt{\alpha s}},
\tag{17}
$$

$$
g_2(\xi)=\frac{sh\sqrt{\alpha s}(1+\xi)\sin\sqrt{\alpha s}(1-\xi)-sh\sqrt{\alpha s}(1-\xi)\sin\sqrt{\alpha s}(1+\xi)}{ch\,2\sqrt{\alpha s}+\cos 2\sqrt{\alpha s}},
$$

$$
f_3(\xi)=\frac{ch\sqrt{\alpha s}\,\frac{3+\xi}{2}\cos\sqrt{\alpha s}\,\frac{1-\xi}{2}-ch\sqrt{\alpha s}\,\frac{1-\xi}{2}\cos\sqrt{\alpha s}\,\frac{3+\xi}{2}}{ch\,2\sqrt{\alpha s}-\cos 2\sqrt{\alpha s}},
\tag{18}
$$

$$
g_3(\xi)=\frac{sh\sqrt{\alpha s}\,\frac{3+\xi}{2}\sin\sqrt{\alpha s}\,\frac{1-\xi}{2}-sh\sqrt{\alpha s}\,\frac{1-\xi}{2}\sin\sqrt{\alpha s}\,\frac{3+\xi}{2}}{ch\,2\sqrt{\alpha s}-\cos 2\sqrt{\alpha s}}.
$$

კედლებზე ხახუნის ძალისათვის მივიღებთ

$$F_{ხახ.}\Big|_{\xi=1} = \frac{A_1}{ch4a - \cos 4b}\Big\{sh4a(a\cos\alpha\tau + b\sin\alpha\tau) + \sin 4b(b\cos\alpha\tau - a\sin\alpha\tau)\Big\},$$

$$F_{ხახ.}\Big|_{\xi=-1} = \frac{2A_1}{ch4a - \cos 4b}\Big\{sh2a\cos 2b(a\cos\alpha\tau + b\sin\alpha\tau) + ch2a\sin 2b(b\cos\alpha\tau - a\sin\alpha\tau)\Big\}.$$

ხოლო სითხის ხარჯისათვის და სამუშაო სიმძლავრისათვის შესაბამისად გვექნება:

$$Q = \frac{A_1}{(a^2+b^2)(ch2a+\cos 2b)}\Big\{sh2a(a\cos\alpha\tau - b\sin\alpha\tau) + \sin 2b(a\sin\alpha\tau + b\cos\alpha\tau)\Big\},$$

$$U_{სამ.} = \frac{A_1^2}{(a^2+b^2)(ch2a+\cos 2b)}\Big\{sh2a(a\cos\alpha\tau - b\sin\alpha\tau) + \sin 2b(a\sin\alpha\tau + b\cos\alpha\tau)\Big\}.$$

თუ (2) სითბოგამტარებლობის განტოლებაში ჩავსვამთ ჯოულის სითბოს და შიდა ხახუნის სითბოს, ამასთან გავითვალისწინებთ, რომ $\alpha \to 0$ (რომელსაც სითხის ყოველი ნაწილაკი ერთ ფაზაში ურთიერთ ამპლიტუდის იწყებს), მაშინ შესაბამისად მივიღებთ:

$$\Theta_1^{(2)}(\xi) = \frac{A_1^2 M^2}{2sh^2 2M}\left(\frac{1-\xi^2}{2} + \frac{ch4M - ch2M(1+\xi)}{4M^2}\right) + \Theta_1\frac{\xi+1}{2},$$

$$\theta_2^{(2)}(\xi)=\frac{A_1^2\mu^2}{2sh^2 2\mu}\left(\frac{\xi^2-1}{2}+\frac{ch 4\mu-ch 2\mu(1+\xi)}{4\mu^2}\right)+B_1\frac{\xi+1}{2}.$$

როდესაც $\mu\to 0$, მაშინ ხახუნის სითბური გამოწვევა სითბოგადაცემას აქვს პარაბოლური ხასიათი, ხოლო ჯოულის სითბური გამოწვევა სითბოგადაცემის კანონს აქვს წრფივი სახე.

ჰარტმანის რიცხვის მცირე მნიშვნელობებისათვის ჯოულის სითბოს ეფექტი უფრო მნიშვნელოვანია სითხის მოძრაობაზე, ვიდრე ხახუნის სითბოსი, ხოლო ჰარტმანის რიცხვის დიდი მნიშვნელობებისათვის ხახუნის სითბოს ეფექტი უფრო მნიშვნელოვანია, ვიდრე ჯოულის სითბოთი გამოწვეული ეფექტი.

3. დავუშვათ, რომ დისკები გამოწვეულია ძალების პერიოდული მოძრაობით, ე.ი. $A_1=A_2=A_0$, $B_1=B_2=B_0$, $D=0$. მაშინ სიჩქარის და სითბოგადაცემის რეალური ნაწილები (5)-(6)-დან წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$U(\xi,\tau)=\frac{A_0}{ch 2a+\cos 2b}\Big\{\big(ch\, a(1+\xi)\cos(1-\xi)+ch\, a(1-\xi)\cos b(1+\xi)\big)\cos\alpha\tau- \tag{19}$$

$$-\big(sh\, a(1+\xi)\sin b(1-\xi)-sh\, a(1-\xi)\sin b(1+\xi)\big)\sin\alpha\tau,$$

$$\theta(\xi,\tau)=\left(P_1\cos 2\alpha\tau+q_1\sin 2\alpha\tau\right)f_1(\xi)+\left(P_1\sin 2\alpha\tau-q_1\cos 2\alpha\tau\right)g_1(\xi)+$$

$$+\left(P_2\cos 2\alpha\tau+q_2\sin 2\alpha\tau\right)f_2(\xi)+\left(P_2\sin 2\alpha\tau-q_2\cos 2\alpha\tau\right)g_2(\xi)+$$

$$+B_0\cos 2\alpha\tau\, f_3(\xi)+\quad +B_0\sin 2\alpha\tau\, g_3(\xi) \tag{20}$$

ვიბრაციის ხასიათის ძალისათვის მივიღებთ

$$F_{\text{ხძ.}}\Big|_{\xi=\pm1} = \pm\frac{A_0}{ch2a+\cos2b}\Big\{sh2a(a\cos\alpha\tau+b\sin\alpha\tau)- -\sin2b(b\cos\alpha\tau-a\sin\alpha\tau)\Big\},$$

ხოლო სითხის ხარჯისათვის და საშუალო სიჩქარისათვის შესაბამისად გვექნება:

$$Q=\frac{2A_0}{(a^2+b^2)(ch2a+\cos2b)}\Big\{sh2a(a\cos\alpha\tau-b\sin\alpha\tau)+\sin2b(b\cos\alpha\tau+a\sin\alpha\tau)\Big\},$$

$$U_{\text{საშ.}}=\frac{A_0}{(a^2+b^2)(ch2a+\cos2b)}\Big\{sh2a(a\cos\alpha\tau-b\sin\alpha\tau)+\sin2b(b\cos\alpha\tau+a\sin\alpha\tau)\Big\},$$

სადაც

$$p_1=-\frac{A_0^2}{4\mu^4+\alpha^2(2-s)^2}\Big\{(4\mu^4+\alpha^2(2-s))\frac{ch6a\cos2b+ch2a\cos6b-2ch2a\cos2b}{(ch4a-\cos4b)^2}+ +2\alpha\mu^2(1-s)\frac{sh6a\sin2b+sh2a\sin6b+2sh2a\sin2b}{(ch4a-\cos4b)^2}\Big\}, \tag{21}$$

$$q_1=-\frac{A_0^2}{4\mu^4+\alpha^2(2-s)^2}\Big\{(4\mu^4+\alpha^2(2-s))\frac{sh6a\sin2b+sh2a\sin6b+2sh2a\sin2b}{(ch4a-\cos4b)^2}+ +2\alpha\mu^2(1-s)\frac{ch6a\cos2b+ch2a\cos6b-2ch2a\cos2b}{(ch4a-\cos4b)^2}\Big\},$$

$$p_2=-\frac{A_0^2(ch2a\cos2b+1)}{2s_0(ch2a+\cos2b)^2},\qquad q_2=\frac{A_0^2\,sh2a\sin2b}{2s(ch2a+\cos2b)^2}, \tag{22}$$

$$f_3(\xi)=\frac{ch\sqrt{\alpha s}(1+\xi)\cos\sqrt{\alpha s}(1-\xi)-ch\sqrt{\alpha s}(1-\xi)\cos\sqrt{\alpha s}(1+\xi)}{ch2\sqrt{\alpha s}+\cos2\sqrt{\alpha s}},$$

$$g_3(\xi)=\frac{sh\sqrt{\alpha s}(1+\xi)\sin\sqrt{\alpha s}(1-\xi)-sh\sqrt{\alpha s}(1-\xi)\sin\sqrt{\alpha s}(1+\xi)}{ch2\sqrt{\alpha s}+\cos2\sqrt{\alpha s}}$$

$f_1(\xi)$, $g_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ და $g_2(\xi)$-ს გამოსათვლელად ვისარგებლებთ (8)-(10) ფორმულებით.

თუ (2) სითბოგამტარებლობის განტოლებაში უკუვაგდებთ ჯერ ჯოულის სითბოს და შემდეგ ხახუნის სითბოს, ამასთანავე ვიგულისხმებთ, რომ $\alpha \to 0$, მაშინ შესაბამისად მივიღებთ

$$\theta_1^{(3)}(\xi)=\frac{A_0^2}{2}\cdot\frac{M^2}{ch^2M}\left(\frac{ch2M-ch2M\xi}{4M^2}+\frac{\xi^2-1}{2}\right)+B_0,$$

$$\theta_2^{(3)}(\xi)=\frac{A_0^2}{2}\cdot\frac{M^2}{ch^2M}\left(\frac{ch2M-ch2M\xi}{4M^2}+\frac{1-\xi^2}{2}\right)+B_0.$$

როდესაც $0,7<M<1$, მაშინ ჯოულის სითბოს მოქმედებით გამოწვეული ეფექტი უფრო მნიშვნელოვანია, ვიდრე ხახუნის სითბოთი გამოწვეული ეფექტი, ხოლო ყველა დანარჩენ შემთხვევაში ხახუნის სითბოთი გამოწვეული ეფექტი უფრო მნიშვნელოვანია.

4. დავუშვათ, რომ სითხის დინება გამოწვეულია წნევის პერიოდული დაცემით ($D\neq 0$) და კედლების პერიოდული მოძრაობით ($A_1=A_2=A_0$). სითბოგადაცემა კედლებზე მუდმივია ($B_1=B_2=B_0$).

მაშინ სიჩქარისა და სითბოგადაცემის რეალური ნაწილები (5)-(6)-დან წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$U(\xi,\tau)=\frac{ch\,a(1+\xi)\cos b(1-\xi)+ch\,a(1-\xi)\cos b(1+\xi)}{ch2a+\cos2b}\left\{\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)\cos\alpha\tau+\frac{\alpha D}{M^4+\alpha^4}\sin\alpha\tau\right\}-$$

$$-\frac{sh\,a(1+\xi)\sin b(1-\xi)-sh\,a(1-\xi)\sin b(1+\xi)}{ch2a+\cos2b}\left\{\frac{\alpha D}{M^4+\alpha^2}\cos\alpha\tau+\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)\sin\alpha\tau\right\}+$$

$$+\frac{D}{M^4+\alpha^2}\left(M^2\cos\alpha\tau-\alpha\sin\alpha\tau\right), \qquad (24)$$

$$\theta(\xi,\tau)=(P_1\cos 2\alpha\tau+q_1\sin 2\alpha\tau)f_1(\xi)+(P_1\sin 2\alpha\tau-q_1\cos 2\alpha\tau)g_1(\xi)+$$

$$+(P_2\cos 2\alpha\tau+q_2\sin 2\alpha\tau)f_2(\xi)+(P_2\sin 2\alpha\tau-q_2\cos 2\alpha\tau)g_2(\xi)+$$

$$+(P_3\cos 2\alpha\tau+q_3\sin 2\alpha\tau)f_3(\xi)+(P_3\sin 2\alpha\tau-q_3\cos 2\alpha\tau)g_3(\xi)+$$

$$+B_0\cos 2\alpha\tau\, f_4(\xi)+B_0\sin 2\alpha\tau\, g_4(\xi), \qquad (25)$$

სადაც

$$P_1=-\frac{2DM^2}{(M^4+\alpha^2)(M^4+\alpha^2(1-2s)^2)}\left[\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)\left(M^4-\alpha^2(1-2s)\right)+\frac{\alpha^2(1-2s)}{M^4+\alpha^2}\right],$$

$$q_1=-\frac{2DM^2}{(M^4+\alpha^2)(M^4+\alpha^2(1-2s)^2)}\left[\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)\frac{\alpha(1-2s)}{D}-\alpha D\left(M^4-\alpha^2(1-2s)\right)\right],$$

$$P_2=\left\{\frac{4M^4+\alpha^2(2-s)}{4M^4+\alpha^2(2-s)^2}\left[\left(\frac{\alpha D}{M^4+\alpha^2}\right)^2-\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)^2\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{4\alpha^2DM^2(2-s)}{(M^4+\alpha^2)(4M^4+\alpha^2(2-s)^2)}\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)\right\}\frac{ch4a+2ch2a\cos 2b+\cos 4b}{(4ch2a+\cos 2b)^2}-$$

$$-\left\{\frac{2\alpha D(4M^4+\alpha^2(2-s))}{(M^4+\alpha^2)(4M^4+\alpha^2(2-s)^2)}\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2\alpha M^2(1-s)}{4M^4+\alpha^2(2-s)^2}\left[\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)^2-\left(\frac{\alpha D}{M^4+\alpha^2}\right)^2\right]\right\}\frac{sh2a\sin 2b}{2(ch2a+\cos 2b)^2},$$

$$q_2=\left\{\frac{4M^4+\alpha^2(2-s)}{4M^4+\alpha^2(2-s)^2}\left[\left(\frac{\alpha D}{M^4+\alpha^2}\right)^2-\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)^2\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{2\alpha D(4M^4+\alpha^2(2-s))}{(M^4+\alpha^2)(4M^4+\alpha^2(2-s)^2)}\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)\right\}\frac{sh2a\sin 2b}{2(ch2a+\cos 2b)^2}+$$

$$+\left\{\frac{2\alpha D\left(4\mathcal{M}^4+\alpha^2(2-S)\right)}{(\mathcal{M}^4+\alpha^2)(4\mathcal{M}^4+\alpha^2(2-S)^2)}\left(A_0-\frac{D\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^4+\alpha^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2\alpha\mathcal{M}^2(1-S)}{4\mathcal{M}^4+\alpha^2(2-S)^2}\left[\left(A_0-\frac{D\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^4+\alpha^2}\right)^2-\left(\frac{\alpha D}{\mathcal{M}^4+\alpha^2}\right)^2\right]\right\}\frac{ch4a+2ch2a\cos 2b+\cos 4b}{(4ch2a+\cos 2b)^2},$$

$$F_3=\left[\left(\frac{\alpha D}{\mathcal{M}^4+\alpha^2}\right)^2-\left(A_0-\frac{D\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^4+\alpha^2}\right)^2\right]\frac{ch2a\cos 2b+1}{2S(ch2a+\cos 2b)^2}+$$

$$\frac{\alpha D}{\mathcal{M}^4+\alpha^2}\left(A_0-\frac{D\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^4+\alpha^2}\right)\frac{sh2a\sin 2b}{S(ch2a+\cos 2b)^2}-\frac{D\mathcal{M}^4}{S(\mathcal{M}^4+\alpha^2)},$$

$$g_3=\frac{\alpha D}{\mathcal{M}^4+\alpha^2}\left(A_0-\frac{D\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^4+\alpha^2}\right)\frac{ch2a\cos 2b+1}{S(ch2a+\cos 2b)^2}-$$

$$\left[\left(\frac{\alpha D}{\mathcal{M}^4+\alpha^2}\right)^2-\left(A_0-\frac{D\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^4+\alpha^2}\right)^2\right]\frac{sh2a\sin 2b}{2S(ch2a+\cos 2b)^2}+\frac{\mathcal{M}^2D(\mathcal{M}^4+\alpha^2)}{2\alpha S(\mathcal{M}^4+\alpha^2)}.$$

$f_1(\xi)$, $g_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, $g_2(\xi)$, $f_3(\xi)$, $g_3(\xi)$, $f_4(\xi)$ და $g_4(\xi)$ შესაბამისად გამოითვლება (9), (10), (11) და (23) ფორმუ-ლებით.

ძაბვისეული ნაპირის ორივე კედელზე. მივიღებთ

$$F_{\text{ხახ.}}\Big|_{\xi=\pm 1}=\pm\frac{sh2a}{ch2a+\cos 2b}\left[a\left(A_0-\frac{D}{a^2+b^2}\right)\cos\alpha\tau+b\left(A_0+\frac{D}{a^2+b^2}\right)\sin\alpha\tau\right]\mp$$

$$\mp\frac{\sin 2b}{ch2a+\cos 2b}\left[b\left(A_0+\frac{D}{a^2+b^2}\right)\cos\alpha\tau-a\left(A_0-\frac{D}{a^2+b^2}\right)\right],$$

ორი სითხის ხახუნის და საშუალო სიჩქარისათვის კი შესაბამისად გვე-ქნება:

$$Q=\frac{2}{\mathcal{M}^4+\alpha^2}\left\{\frac{sh2a}{ch2a+\cos 2b}\left[a\left(A_0-\frac{D}{a^2+b^2}\right)\left(\mathcal{M}^2\cos\alpha\tau+\alpha\sin\alpha\tau\right)-\right.\right.$$

$$-b\left(A_0+\frac{D}{a^2+b^2}\right)\left(\alpha\cos\alpha\tau-M^2\sin\alpha\tau\right)\Big]-$$

$$-\frac{\sin 2b}{ch 2a+\cos 2b}\Big[b\left(A_0+\frac{D}{a^2+b^2}\right)\left(M^2\cos\alpha\tau+\alpha\sin\alpha\tau\right)+$$

$$+a\left(A_0-\frac{D}{a^2+b^2}\right)\left(\alpha\cos\alpha\tau-M^2\sin\alpha\tau\right)\Big]+$$

$$+D\left(M^2\cos\alpha\tau+\alpha\sin\alpha\tau\right)\Big\},$$

$$U_{\omega d.}=\frac{1}{M^4+\alpha^2}\Big\{\frac{sh 2a}{ch 2a+\cos 2b}\Big[a\left(A_0-\frac{D}{a^2+b^2}\right)\left(M^2\cos\alpha\tau+\alpha\sin\alpha\tau\right)-$$

$$-b\left(A_0+\frac{D}{a^2+b^2}\right)\left(\alpha\cos\alpha\tau-M^2\sin\alpha\tau\right)\Big]-$$

$$-\frac{\sin 2b}{ch 2a+\cos 2b}\Big[b\left(A_0+\frac{D}{a^2+b^2}\right)\left(M^2\cos\alpha\tau+\alpha\sin\alpha\tau\right)+$$

$$+a\left(A_0-\frac{D}{a^2+b^2}\right)\left(\alpha\cos\alpha\tau-M^2\sin\alpha\tau\right)\Big]+$$

$$+D\left(M^2\cos\alpha\tau+\alpha\sin\alpha\tau\right)\Big\}.$$

თუ (2) სითბოგამტარებლობის განტოლებაში უკუვაგდებთ ჯო- ჯოულის სითბოს და ბლანტ ხახუნის სითბოს, ამასთანავე ვიგულისხმებთ, რომ $\alpha\to 0$, მაშინ შესაბამისად მივიღებთ

$$\theta_1^{(4)}(\xi)-B_0=\frac{M^2C^2}{2}\left(\frac{\xi^2-1}{2}+\frac{ch 2M\xi-ch 2M}{4M^2}\right),$$

$$\theta_2^{(4)}(\xi)-B_0=\left(\frac{M^2C^2}{2}+\frac{D^2}{M^2}\right)\frac{1-\xi^2}{2}+\frac{2DC}{M^2}\left(ch M-ch M\xi\right)+$$

$$+\frac{C^2}{8}\left(ch 2M-ch 2M\xi\right),$$

სადაც

$$C = \frac{A_0 - \frac{D}{\mu^2}}{ch\,\mu l} .$$

ფარფლის სიგრძის მცირე მნიშვნელობისათვის ნაკადის სი-თბო უფრო მნიშვნელოვან როლს თამაშობს სითბოგადაცემათა, ვიდრე კონტურის სიგრძე. ხოლო ფარფლების სიგრძის დიდი მნიშვნელობისათვის მათი მოქ-მედება სითბოგადაცემაზე თითქმის ერთნაირია.

გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ: გარკვეული ერთგვაროვანი მაგნი-ტური ველის მოქმედება აძლიერებს სითხის ტურბულენტურ რიცხვებს. მაგნი-ტური ველის გაძლიერებას სითხის დინების სიჩქარე მცირდება მილის ღერძზე [illegible], ხოლო კედლებთან ახლოს იზრდება, მაგრამ რომ საშუალო სიჩქარე [illegible] მილის კვეთში არ იცვლება.

სიჩქარე, სითბოგადაცემას, ნაკადს და ნაკადის დინების მიმართ [illegible] მუდმივი რჩება.

[illegible] იზრდება სითხის [illegible], რომლის [illegible], [illegible] და [illegible] და [illegible].

$\alpha = \frac{\omega h^2}{\nu}$ [illegible] მოძრაობის [illegible] კრიტერიუმს.

[illegible] სიჩქარის [illegible] და [illegible] ძალას მოქმედს. რაც უფრო მცირეა α, მით მცირეა ინერციული ძალა და მით უფრო დიდი [illegible] სითხის [illegible] როცა $\alpha = 0$ (ეს ის შემთხვევაა, როდესაც $\nu = \infty$), მაშინ სითხის ყოველი ნაწილაკი ერთ ფაზაში იმოძრავებს [illegible]. რაც უფრო დიდია α, მით უფრო დიდია ინერციული ძალა და მით უფრო მეტია [illegible] სითხის [illegible]. როცა $\alpha = \infty$ (ეს იდეალური სითხის შემთხვევაა, $\nu = 0$), მაშინ [illegible] მოძრაობა არ [illegible] სითხის [illegible] მოძრაობას.

როდესაც სითხის დინება გამოწვეულია წნევის პულსაციური ვარდნებით და გარეგანი მაგნიტური ველი არ მოქმედებს, მაშინ მივიღებთ ჰარტმანის სტაციონარულ ამოცანას, სითბოგადაცემის გათვალისწინებით, ხოლო როდესაც დინება გამოწვეულია კედლების პულსაციური მოძრაობით და წნევის პულსაციური ვარდნებით, მაშინ მივიღებთ ჰარტმანის არასტაციონარულ ამოცანას (ვგულისხმობთ, რომ $M=0$, $\tau \neq 0$, $\alpha \to 0$).

როდესაც სითხის დინება გამოწვეულია, წნევის პულსაციური ვარდნით, ან ერთი კედლის პულსაციური მოძრაობით, ან კედლების პულსაციური მოძრაობით, მაშინ გარეგანი ერთგვაროვანი მაგნიტური ველის გაზრდით და რხევების კრიტერიუმის ($\alpha = \frac{\omega h^2}{\nu}$) გაზრდით ხახუნი კედლებზე იზრდება, ხოლო ხარჯი კლებულობს.

როდესაც სითხის პულსაციური დინება გამოწვეულია კედლების პულსაციური მოძრაობით და წნევის პულსაციური ვარდნით, მაშინ ხახუნი კედლებზე კლებულობს, ხოლო ხარჯი იზრდება.

ჰარტმანის რიცხვის გაზრდისას ტემპერატურა ბრტყელ მილში კლებულობს. ეს შედეგი ეთანხმება წინა შემთხვევაში მიღებულ შედეგს, რომლის თანახმადაც ჰარტმანის რიცხვის ზრდა იწვევს სითხის პულსაციური დინების დამუხრუჭებას.

როდესაც სითხის პულსაციური დინება გამოწვეულია წნევის პულსაციური ვარდნით, მაშინ ჰარტმანის რიცხვის ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის ჯოულის სითბოს და ხახუნის სითბოს ფარდობის მრუდის მიმდინარეობა სითხის პულსაციურ მოძრაობაზე უფრო ინტენსიურია, ვიდრე ერთი კედლის პულსაციური მოძრაობით გამოწვეული სითხის პულსაციური მოძრაობის დროს ჯოულის სითბოს და ხახუნის სითბოს ფარდობის მრუდის მიმდინარეობა.

სითხის პულსაციურ მოძრაობაზე, გარეგანი მაგნიტური ველის მოქმედება საგრძნობლად იწვევს ტემპერატურის ზრდას ბრტყელ მილში.

[illegible] 9.1.1992 — [illegible] [illegible]

ავტორი

ლიტერატურა

1. И.Н.Садиков, Труды Московского физикотехнического института, 7, 1961, 124-135.
2. Rao A.Ramachandra, K.S.Deshkachar. J.Indian Inst.Sci., 68, N 7-8, 1988, 247-260.
3. А.Б.Ватажин, Г.А.Любимов, С.А.Регирер. Магнитогидродинамические течения в каналах. "Наука", М.,1970, 672.
4. Э.Я.Блум, Ю.А.Михайлов, Р.Я.Озолс. Тепло и массообмен в магнитном поле. Рига, 1980, 355.
5. А.М.Самойленко, С.А.Кривошея, Н.А.Перестюк. Дифференциальные уравнения. М., Высш.шк., 1989,383.

В.Н.Цуцкиридзе

ПУЛЬСАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ С ТЕПЛОПЕРЕДАЧЕЙ

Резюме

Рассматривается пульсационное течение вязкой несжимаемой слабопроводящей жидкости между параллельными стенками с теплопередачей, когда течение жидкости вызвано или пульсационным перепадом давления, или пульсационным движением одной стенки, или пульсационным движением стенок, или пульсационным перепадом давления и пульсационным движением стенок.

Найдены физические характеристики течения жидкости.

V. Tsutskiridze

PULSATION FLOW OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE WEAKLY CONDUCTING LIQUID BETWEEN TWO PARALLEL WALLS WITH HEAT TRANSFER

Summary

The title problem is studied for the case in which the flow of liquid is due to a fall in the pulsation of the pressure gradient or to pulsation movement of one wall or pulsation movement of walls, or to the fall of pulsation of the pressure gradient and the movement of the walls.

The physical characteristics of liquid movement are found.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
314, 1993.

УДК 538

ელექტროგამტარი ბლანტი უკუმში სითხის კონვექციური დინება ორ პარალელურ კედელს შორის სითბოგადაცემით

ვ. ცუცქირიძე

უკანასკნელ წლებში დიდ ინტერესს იწვევს სითბური მოვლენები, მილებში, რომლებზეც მოქმედებს ცვალებადი მაგნიტური ველი. /1/ ნაშრომში შესწავლილია ელექტროგამტარი ბლანტი უკუმში სითხის სტაციონარული დინება ორ იზოთერმულ კედელს შორის სითბოგადაცემით. ნაჩვენებია თუ როგორ მოქმედებს ცვალებადი ერთგვაროვანი მაგნიტური ველი სითბოგადაცემაზე წნევის მუდმივი ვარდნისა და სითხის მუდმივი ხარჯის დროს. გამოკვლეულია არსებითი დამოკიდებულება სითხის ნაკადის ტემპერატურასა, სითბოგადაცემის ნუსელტის რიცხვსა, ცვალებადი მაგნიტური ველის სიდიდესა და ბრტყელი მილის კედლების ელექტროგამტარებლობას შორის. /1/ ნაშრომისაგან განსხვავებით /2/ სტატიაში შესწავლილია ბლანტი უკუმში სითხის არასტაციონარული დინება ორ პარალელურ კედელს შორის სითბოგადაცემით. სიჩქარის განაწილების კანონს აქვს პარაბოლური ხასიათი. /3/ სტატიაში მიღებულია ნავიე-სტოქსის არასტაციონარული მოძრაობის განტოლების ანალიზური ამონახსნი. ბლანტი უკუმში სითხის დინება განიხილება ორ პარალელურ კედელს შორის, რომელზეც მოქმედებს ცვალებადი ერთგვაროვანი მაგნიტური ველი. /1/ და /2/ ნაშრომებისაგან განსხვავებით სითხის დინება

გამოწვეული კედლების რხევითი ბიძგებით. გამოკვლეულია დამოკიდებულება კედლების რხევის სიხშირესა და ჰარტმანის რიცხვის 0 და 2 მნიშვნელობას შორის.

/1-3/ ნაშრომებისაგან განსხვავებით სტაციონარული შესწავლილია ელექტროგამტარი ბლანტი უკუმში სითხის პერიოდული დინება ბრტყელ მილში, როგორც ჯოულის სითბოს $\left(M^2\left(\frac{\partial h}{\partial \xi}\right)^2\right)$, ასევე ხახუნის სითბოს $\left(\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2\right)$ გათვალისწინებით, ერთგვაროვანი განივი მაგნიტური ველის მოქმედებისას. სითხის დინება გამოწვეულია კედლების პერიოდული მოძრაობით და წნევის პერიოდული დაცემით, რომელიც მოცემულია შემდეგი კანონით: $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}=Ae^{-i\omega t}$. ტემპერატურის ცვლილება ბრტყელ მილში ხდება პერიოდულად. მიღებულია ნავიე-სტოქსისა და სითბოგამტარობის განტოლებების ზუსტი ამონახსნები. მიღებული მსგავსობის კრიტერიუმები ახასიათებენ სიბლანტის ძალებით გამოწვეულ სითხის რხევით მოძრაობას გარეგან, ერთგვაროვანი მაგნიტური ველის გავლენით.

განვიხილოთ ელექტროგამტარი ბლანტი უკუმში სითხის მოძრაობა ორ პარალელურ კედელს შორის, რომელიც გამოწვეულია წნევის პერიოდული დაცემით $\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}=Ae^{-i\omega t}\right)$ და კედლების პერიოდული მოძრაობით, როდესაც კედლების მართობულად მოქმედებს გარეგანი ერთგვაროვანი მაგნიტური ველი H_0.

თუ OZ ღერძს მივმართავთ სითხის დინების მიმართულებით, ხოლო OX ღერძს კედლების მართობულად, მაშინ საძიებო სიდიდეებისათვის გვექნება:

$$\vec{V}(0,0,V_z(x,t)),\quad \vec{H}(H_0,0,H_z(x,t)),\quad (T=T(x,t)).$$

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ თქმულს, ინდუქციის, მოძრაობის და სითბოგამტარობის განტოლებებს უგანზომილებო სიდიდეებში, გვექნება სახე /4,5/:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}=De^{-i\alpha\tau}+\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+M^2\frac{\partial h}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial h}{\partial \tau}=\frac{R}{R_m}\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}+\frac{R}{R_m}\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$S\frac{\partial \theta}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2+M^2\left(\frac{\partial h}{\partial \xi}\right)^2,$$

სადაც $\xi=\frac{x}{L}$, $\tau=\frac{\nu}{L^2}t$, $u=\frac{V}{V_0}$, $h=\frac{H}{H_0 R_m}$,

$\alpha=\frac{wL^2}{\nu}$, $D=\frac{AL^2}{\nu V_0}$, $\theta=\frac{K}{\nu V_0^2}T$ –

– განზომილებო სიდიდეებია, ხოლო V_0 და L შესაბამისად მახასიათებელი სიჩქარე და სიგრძეა. $M=H_0L\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$ - ჰარტმანის რიცხვია, $S=\frac{\eta C_v}{k}$ - ეკერტის რიცხვია, $R=\frac{V_0L}{\nu}$ და $R_m=\frac{V_0L}{\nu_m}$ - სითხის ჰიდროდინამიკური და მაგნიტური რიცხვებია, η - სითხის დინამიკური კოეფიციენტი, ν - სითხის კინემატიკური კოეფიციენტი, C_v - კუთრი სითბოტევადობა მუდმივი მოცულობის დროს, k - სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტი, σ - გამტარებლობის კოეფიციენტი, ν_m - სითხის მაგნიტური კოეფიციენტი, w - სიხშირე.

თუ კედლები გაუმტარია და მოძრაობენ პერიოდულად, ამავე დროს სითბოგადაცემა კედლებზე ხდება პერიოდული კანონით, მაშინ (1) სისტემისათვის ვიღებთ შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$u(\xi,\tau)\Big|_{\xi=\pm1}=A_0e^{-i\alpha\tau},\quad h(\xi,\tau)\Big|_{\xi=\pm1}=0,\quad \theta(\xi,\tau)\Big|_{\xi=\pm1}=B_0e^{-2i\alpha\tau}. \tag{2}$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $R=R_m$.

ვეძებთ (1)-(2) ამოცანის ამონახსნს შემდეგი სახით:

$$u(\xi,\tau)=f(\xi)e^{-i\alpha\tau},\quad h(\xi,\tau)=\varphi(\xi)e^{-i\alpha\tau},\quad \theta(\xi,\tau)=q(\xi)e^{-2i\alpha\tau} \tag{3}$$

მაშინ მოძრაობის განტოლებისა (1) და სასაზღვრო პირობებისათვის (2) მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
&f''(\xi)+M^2\varphi'(\xi)+i\alpha f(\xi)=-D,\\
&\varphi''(\xi)+f'(\xi)+i\alpha\varphi(\xi)=0,\\
&q''(\xi)+2i\alpha S q(\xi)=-\left[f'^2(\xi)+M^2\varphi'^2(\xi)\right].
\end{aligned} \tag{4}$$

$$f(\xi)\Big|_{\xi=\pm 1}=H_0,\qquad P(\xi)\Big|_{\xi=\pm 1}=0,\qquad q(\xi)\Big|_{\xi=\pm 1}=B_0. \tag{5}$$

(4)-(5) ამოცანის ამონახსნებს სიჩქარისა, ინდუქციის ველის და სითბოგადაცემისათვის ექნებათ სახე:

$$U(\xi,\tau)=\frac{e^{-i\alpha\tau}}{i\alpha}\left\{\frac{D+i\alpha H_0}{sh\sqrt{M^2-4i\alpha}}\left(ch M\frac{1+\xi}{2}\,sh\sqrt{M^2-4i\alpha}\,\frac{1-\xi}{2}+\right.\right. \tag{6}$$

$$\left.\left.+ch M\frac{1-\xi}{2}\,sh\sqrt{M^2-4i\alpha}\,\frac{1+\xi}{2}\right)-D\right\},$$

$$h(\xi,\tau)=\frac{(D+i\alpha H_0)e^{-i\alpha\tau}}{i\alpha M sh\sqrt{M^2-4i\alpha}}\left(sh M\frac{1-\xi}{2}\,sh\sqrt{M^2-4i\alpha}\,\frac{1+\xi}{2}-\right. \tag{7}$$

$$\left.-sh M\frac{1+\xi}{2}\,sh\sqrt{M^2-4i\alpha}\,\frac{1-\xi}{2}\right),$$

$$\theta(\xi,\tau)=\left\{a_1 ch\left(M-\sqrt{M^2-4i\alpha}\right)\left(\frac{ch\left(M-\sqrt{M^2-4i\alpha}\right)\xi}{ch\left(M-\sqrt{M^2-4i\alpha}\right)}-\frac{ch\sqrt{\alpha S}(1-i)\xi}{ch\sqrt{\alpha S}(1-i)}\right)+\right.$$

$$+a_2 ch\left(M+\sqrt{M^2-4i\alpha}\right)\left(\frac{ch\left(M+\sqrt{M^2-4i\alpha}\right)\xi}{ch\left(M+\sqrt{M^2-4i\alpha}\right)}-\frac{ch\sqrt{\alpha S}(1-i)\xi}{ch\sqrt{\alpha S}(1-i)}\right)+ \tag{8}$$

$$\left.+a_3 ch M\left(\frac{ch M\xi}{ch M}-\frac{ch\sqrt{\alpha S}(1-i)\xi}{ch\sqrt{\alpha S}(1-i)}\right)+B_0\frac{ch\sqrt{\alpha S}(1-i)\xi}{ch\sqrt{\alpha S}(1-i)}\right\}e^{-2i\alpha\tau},$$

სადაც

$$a_1=\left(\frac{D+i\alpha H_0}{2sh\sqrt{M^2-4i\alpha}}\,sh\,\frac{M+\sqrt{M^2-4i\alpha}}{2}\right)^2\frac{\left(M-\sqrt{M^2-4i\alpha}\right)^2}{\alpha^2\left[\left(M-\sqrt{M^2-4i\alpha}\right)^2+2i\alpha S\right]},$$

$$a_2=\left(\frac{D+i\alpha H_0}{2sh\sqrt{M^2-4i\alpha}}\,sh\,\frac{M-\sqrt{M^2-4i\alpha}}{2}\right)^2\frac{\left(M+\sqrt{M^2-4i\alpha}\right)^2}{\alpha^2\left[\left(M+\sqrt{M^2-4i\alpha}\right)^2+2i\alpha S\right]},$$

$$a_3=\left(\frac{D+i\alpha H_0}{sh\sqrt{M^2-4i\alpha}}\right)^2\cdot\frac{ch M-ch\sqrt{M^2-4i\alpha}}{i\alpha\left(M^2+2i\alpha S\right)}.$$

თუ ჩავსვამთ (6), (7) ფორმულებში ნაპოვნი და ნა[illegible]თა ნაშთების გამოსახულებას, საძიებელი ნაწილისათვის გვექნება:

$$U(\xi,\tau)=\frac{2}{\alpha}\left\{\frac{ch\frac{\mu}{2}(1+\xi)\,sh\frac{a}{2}(1-\xi)\cos\frac{\alpha}{a}(1-\xi)+ch\frac{\mu}{2}(1-\xi)\,sh\frac{a}{2}(1+\xi)\cos\frac{\alpha}{a}(1+\xi)}{ch2a-\cos\frac{4\alpha}{a}}\times\right.$$

$$\times\left[\left(\alpha A_0\,sha\cos\frac{2\alpha}{a}+Dcha\sin\frac{2\alpha}{a}\right)\cos\alpha\tau-\right.$$

$$\left.-\left(Dsha\cos\frac{2\alpha}{a}-\alpha A_0\,cha\sin\frac{2\alpha}{a}\right)\sin\alpha\tau\right]-$$

$$-\frac{ch\frac{\mu}{2}(1+\xi)\,ch\frac{a}{2}(1-\xi)\sin\frac{\alpha}{a}(1-\xi)+ch\frac{\mu}{2}(1-\xi)\,ch\frac{a}{2}(1+\xi)\sin\frac{\alpha}{a}(1+\xi)}{ch2a-\cos\frac{4\alpha}{a}}\times$$

$$\times\left[\left(\alpha A_0\,sha\cos\frac{2\alpha}{a}+Dcha\sin\frac{2\alpha}{a}\right)\sin\alpha\tau+\right.$$

$$\left.\left.+\left(Dsha\cos\frac{2\alpha}{a}-\alpha A_0\,cha\sin\frac{2\alpha}{a}\right)\cos\alpha\tau\right]+\frac{D}{2}\sin\alpha\tau\right\}, \tag{10}$$

$$h(\xi,\tau)=\frac{2}{\alpha\mu}\left\{\frac{sh\frac{\mu}{2}(1-\xi)\,sh\frac{a}{2}(1+\xi)\cos\frac{\alpha}{a}(1+\xi)-sh\frac{\mu}{2}(1+\xi)\,sh\frac{a}{2}(1-\xi)\cos\frac{\alpha}{a}(1-\xi)}{ch2a-\cos\frac{4\alpha}{a}}\times\right.$$

$$\times\left[\left(\alpha A_0\,sha\cos\frac{2\alpha}{a}+Dcha\sin\frac{2\alpha}{a}\right)\cos\alpha\tau+\right.$$

$$\left.+\left(Dsha\cos\frac{2\alpha}{a}-\alpha A_0\,cha\sin\frac{2\alpha}{a}\right)\sin\alpha\tau\right]-$$

$$-\frac{sh\frac{\mu}{2}(1-\xi)\,ch\frac{a}{2}(1+\xi)\sin\frac{\alpha}{a}(1+\xi)-sh\frac{\mu}{2}(1+\xi)\,ch\frac{a}{2}(1-\xi)\sin\frac{\alpha}{a}(1-\xi)}{ch2a-\cos\frac{4\alpha}{a}}\times$$

$$\times\left[\left(\alpha A_0\,sha\cos\frac{2\alpha}{a}+Dcha\sin\frac{2\alpha}{a}\right)\sin\alpha\tau+\right.$$

$$\left.\left.+\left(Dsha\cos\frac{2\alpha}{a}-\alpha A_0\,cha\sin\frac{2\alpha}{a}\right)\cos\alpha\tau\right]\right\}, \tag{11}$$

სადაც

$$a=\pm\sqrt{\frac{M^2}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{M^4+16\alpha^2}}$$

სითბოგამტარებლობის განტოლების ამოხსნისათვის (8) გან-ვიხილოთ რამდენიმე კერძო შემთხვევა:

1. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც პრანდტლის რიცხვი მიისწრაფვის ნულისაკენ ($S=\frac{nC_v}{K}\longrightarrow 0$) და α ($\alpha=\frac{WL^2}{\nu}$) შემოსაზღვრული სიდიდეა, მაშინ (6) ფორმულაში, თუ მოვახდენთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების გაცალკევებას, ნამდვილი ნაწილისათვის გვექნება:

$$\theta(\xi,\tau)-B_0\cos 2\alpha\tau=\left(P_1\cos 2\alpha\tau+q_1\sin 2\alpha\tau\right)\left[f_1(\xi)+P_2(\operatorname{ch}M\xi-\operatorname{ch}M)\right]-$$

$$-\left(q_1\cos 2\alpha\tau+P_1\sin 2\alpha\tau\right)\left[g_1(\xi)+q_2(\operatorname{ch}M\xi-\operatorname{ch}M)\right], \qquad (12)$$

სადაც

$$P_1=\frac{(D^2-\alpha^2A_0^2)\left(\operatorname{ch}2a\cos\frac{4\alpha}{a}-1\right)-2\alpha DA_0\operatorname{sh}2a\sin\frac{4\alpha}{a}}{2\alpha^2\left(\operatorname{ch}2a-\cos\frac{4\alpha}{a}\right)^2},$$

$$q_1=\frac{2\alpha DA_0\left(\operatorname{ch}2a\cos\frac{4\alpha}{a}-1\right)+(D^2-\alpha^2A_0^2)\operatorname{sh}2a\sin\frac{4\alpha}{a}}{2\alpha^2\left(\operatorname{ch}2a-\cos\frac{4\alpha}{a}\right)^2},$$

$$P_2=\frac{4\alpha}{M^2}\left(\operatorname{sh}a\sin\frac{2\alpha}{a}-\operatorname{ch}M\right),\qquad q_2=\frac{4\alpha}{M^2}\operatorname{ch}a\cos\frac{2\alpha}{a},$$

$$f_1(\xi)=\frac{1}{2}\Big[\operatorname{ch}M(1+\xi)\operatorname{ch}a(1-\xi)\cos\frac{2\alpha}{a}(1-\xi)+\operatorname{ch}M(1-\xi)\operatorname{ch}a(1+\xi)\cos\frac{2\alpha}{a}(1+\xi)-$$

$$-2\operatorname{ch}M\xi\operatorname{ch}\xi\cos\frac{2\alpha}{a}\xi+2\operatorname{ch}M\operatorname{ch}a\cos\frac{2\alpha}{a}-\operatorname{ch}2a\cos\frac{4\alpha}{a}-\operatorname{ch}2M\Big],$$

$$g_1(\xi)=-\frac{1}{2}\Big[\operatorname{ch}M(1+\xi)\operatorname{sh}a(1-\xi)\sin\frac{2\alpha}{a}(1-\xi)+\operatorname{ch}M(1-\xi)\operatorname{sh}a(1+\xi)\sin\frac{2\alpha}{a}(1+\xi)-$$

$$-2\operatorname{ch}M\xi\operatorname{sh}a\xi\sin\frac{2\alpha}{a}\xi+2\operatorname{ch}M\operatorname{sh}a\sin\frac{2\alpha}{a}-\operatorname{sh}2a\sin\frac{4\alpha}{a}\Big].$$

2. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც სითხის ფენის ნაწილაკები ერთ ფაზაში ასრულებენ აპერიოდულ რხევას ($\alpha \to 0$), მაშინ, თუ გადავალთ ზღვარზე (8) ფორმულაში, როდესაც $\alpha \to 0$ -კენ, მივიღებთ

$$\frac{\Theta(\xi,\tau)-B_0}{D^2}=\frac{1}{M^2}\left[\frac{1-\xi^2}{2}+2\,\frac{ch M\xi - ch M}{sh M}-\frac{ch 2M\xi - ch 2M}{4 sh^2 M}\right]. \qquad (13)$$

კედლებზე ხახუნის ძალისათვის მივიღებთ

$$F_{\text{ხახ.}}\Big|_{\xi=\pm 1}=\frac{\alpha A_0 sh a\cos\frac{2\alpha}{a}+D ch a\sin\frac{2\alpha}{a}}{\alpha\left(ch 2a-\cos\frac{4\alpha}{a}\right)}\left[\left(a\cos\alpha\tau-\frac{2\alpha}{a}\sin\alpha\tau\right)\left(\pm ch a\cos\frac{2\alpha}{a}\pm\right.\right.$$

$$\left.\left.\pm ch M\right)\pm\left(a\sin\alpha\tau-\frac{2\alpha}{a}\cos\alpha\tau\right)sh a\sin\frac{2\alpha}{a}\right]-$$

$$-\frac{D sh a\cos\frac{2\alpha}{a}-A_0 ch a\sin\frac{2\alpha}{a}}{\alpha\left(ch 2a-\cos\frac{4\alpha}{a}\right)}\left[\left(\frac{2\alpha}{a}\cos\alpha\tau+a\sin\alpha\tau\right)\left(\pm ch a\cos\frac{2\alpha}{a}\pm\right.\right.$$

$$\left.\left.\pm ch M\right)\pm\left(a\cos\alpha\tau+\frac{2\alpha}{a}\sin\alpha\tau\right)sh a\sin\frac{2\alpha}{a}\right],$$

ხოლო ხარჯისათვის გვექნება:

$$Q=\frac{2\left(D sh a\cos\frac{2\alpha}{a}-\alpha A_0 ch a\sin\frac{2\alpha}{a}\right)}{\alpha^2\left(ch 2a-\cos\frac{4\alpha}{a}\right)}\left[\left(M ch a\cos\frac{2\alpha}{a}-a ch M\right)\cos\alpha\tau+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2\alpha}{a}ch M-M sh a\sin\frac{2\alpha}{a}\right)\sin\alpha\tau\right]+$$

$$+\frac{2\left(\alpha A_0 sh a\cos\frac{2\alpha}{a}+D ch a\sin\frac{2\alpha}{a}\right)}{\alpha^2\left(ch 2a-\cos\frac{4\alpha}{a}\right)}\left[\left(\frac{2\alpha}{a}ch M-M sh a\sin\frac{2\alpha}{a}\right)\cos\alpha\tau+\right.$$

$$\left.+\left(M ch a\cos\frac{2\alpha}{a}-a ch M\right)\sin\alpha\tau\right]+\frac{2D}{\alpha}\sin\alpha\tau.$$

გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ მაგნიტური ველის მოქმედება სითხის პულსაციურ მოძრაობაზე იწვევს სითხის პულსაციური დინების ფაზის ჩამორჩენას. პულსაციური მოძრაობის სიხშირის გაზრდა და გარეგანი მაგნიტური ველის გაზრდა იწვევს ელექტროგამტარი სითხის დინების სიჩქარის შემცირებას.

როდესაც სითხის ყველა ნაწილაკი ერთ ფაზაში ერთნაირი ამპლიტუდით ირხევა ($\alpha \to 0$), მაშინ კედლების მიერ პულსაციური მოძრაობა თავის სიხშირესთან ერთად გავლენას არ ახდენს სითბოგადაცემაზე ელექტროგამტარ სითხეში, ხოლო წნევის პულსაციური დაცემა მნიშვნელოვან როლს თამაშობს სითბოგადაცემაზე. კერძოდ, თუ წნევის პულსაციურ დაცემას გავზრდით და სითხეზე მოქმედ გარეგან მაგნიტურ ველს შევამცირებთ, მაშინ სხვაობა ტემპერატურის საწყის პულსაციურ განაწილებასა და საბოლოო პულსაციურ განაწილებას შორის კლებულობს, ხოლო თუ წნევის პულსაციური დაცემა კლებულობს და გარეგანი მაგნიტური ველი იზრდება, მაშინ ტემპერატურული სხვაობა იზრდება.

როდესაც ელექტროგამტარი სითხის პულსაციური დინება გამოწვეულია წნევის პულსაციური დაცემით, მაშინ $\omega t = 0^\circ$ პერიოდში, ბრტყელი მილის ღერძზე, მახასიათებლის α კრიტერიუმის გაზრდით და მაგნიტური ველის გაზრდით (როდესაც $S \to 0$ და α სასრული რიცხვია), სხვაობა ტემპერატურის საწყის პულსაციურ განაწილებასა და საბოლოო პულსაციურ განაწილებას შორის მცირდება, ხოლო α და M-ის შემცირებით, ტემპერატურული სხვაობა იზრდება.

თუ $\omega t = 0^\circ$ ან $\omega t = \frac{\pi}{4}$ პერიოდში, გარეგანი მაგნიტური ველის გაზრდით და α-ს გაზრდით, ხახუნი კედლებზე იზრდება, ხოლო სითხის ხარჯი კლებულობს.

როდესაც $A_0 = B_0 = 0$, $D = 1$, $\alpha \to 0$ და S სასრული სიდიდეა, მაშინ მიღებული შედეგები ემთხვევა /1/ სტატიაში მოცემულ შედეგებს.

[illegible] პულსაციური მოძრაობა, რომელიც გამოწვეულია წნევის პულსაციური ვარდნით, ისევე ფირფიტების [illegible] ელექტროგამტა- რი სითხეები.

მიღებულია 9.I.1992

თეორიული მექანიკის კათედრა

ლიტერატურა

I. Ю.А.Михайлов, Р.Я.Озолс. Изв. АН. Латв.ССР, сер.физ. и техн. наук, 2, 1965, 19-28.

2. Я.С.Уфлянд. ИФЖ. 54, № 6, 1988, 1006-1009.

3. K.Vairavelu. Trans.ASME. J.Appl.Mech., 55, N4, 1988, 981-983.

4. А.Б.Ватажин, Г.А.Любимов, С.А.Регирер. Магнитогидродинамические течения в каналах. Наука, М., 1970, 672.

5. А.В.Лыков. Теория теплопроводности, М., Высш.школа, 1967, 600.

В.Н.Цуцкиридзе

ПУЛЬСАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ С ТЕПЛОПЕРЕДАЧЕЙ

Резюме

Рассматривается пульсационное течение вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости между бесконечными параллельными стенками с теплопередачей, вызванное пульсационным перепадом давления и пульсационным движением стенок.

V.Tsulskiridze

PULSATION FLOW OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE CONDUCTING LIQUID BETWEEN TWO PARALLEL WALLS WITH HEAT TRANSFER

Summary

The title problem has been studied for the case when the movement of liquid is due to the drop of the pulsation of the pressure gradient and to the pulsation movement of the walls.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

314, 1993

УДК 537.53

ВЛИЯНИЕ КОЛЕБАНИЙ МАГНИТОСФЕРЫ ЗЕМЛИ НА БИОЛОГИЧЕСКИЕ ОРГАНИЗМЫ

Т.Г. Мгенти

Надо полагать, что механизм первичного действия низкочастотного электромагнитного поля ($f = 0 \div 10^5$ Гц) на биологическую клетку или на отдельные органы живого организма установлен /1,2,3,4,5/. Сам механизм состоит в том, что часть энергии электромагнитного поля, при таком действии, преобразуется в механическую форму энергии. Речь идет о том, что мембранные системы биологических объектов совершают вынужденные колебания под действием естественных или искусственных электромагнитных полей. В отдельных случаях могут наблюдаться резонансные процессы, которые возможны при соблюдении определенных внешних условий и физических параметров мембран, а также окружающих жидких сред. Основными природными источниками электромагнитной энергии являются: атмосферные электрические разряды, колебания магнитосферы и ионосферы Земли, геомагнитные пульсации и т.п.

В работе / 4 / были приведены основные следствия, вытекащие из полученных результатов, касающихся значений частоты колебаний и коэффициентов затухания как для сферической модели, так и для цилиндрической.

Исходя из вышеуказанных следствий, укажем на некоторые дополнительные выводы, которые позволяют уточнить основные положения.

В случае сферической мембраны для величины частоты f_n и коэффициента затухания β_n имели:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{T(n-1)n(n+2)}{a^3\left(\rho_1+\rho_2\frac{n}{n+1}\right)}}, \tag{1}$$

$$\beta_n = \frac{\nu_1\rho_1 n(n-1)+\nu_2\rho_2 n(n+2)}{a^2\left(\rho_1+\rho_2\frac{n}{n+1}\right)}, \tag{2}$$

где T – поверхностное натяжение мембраны, a – радиус сферы, ρ_1 и ρ_2 – плотности жидкости внутри и вне среды, n – мода, ν_1 и ν_2 – вязкости жидкости

Известно, что для этого случая первая мода отсутствует.

При $n = 2$, $\rho_1=\rho_2=\rho$ и $\nu_1=\nu_2=\nu$, для f_2 и β_2 получим:

$$f_2 = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{6T}{5\rho a^3}}, \tag{3}$$

$$\beta_2 = \frac{6\nu}{a^2} \tag{4}$$

Из выражения (4) видно, что только в этом случае коэффициент затухания колебаний не зависит от плотности жидкости. Заметим, что этот коэффициент (2),(4) уменьшается с ростом радиуса мембраны. Иначе говоря, если от клетки переходить к органам организма, будут наблюдаться резонансные эффекты и резонанс будет смещаться в сторону инфразвукового диапазона.

Этот вывод является существенным, ввиду того, что величина собственной частоты вышеуказанных систем находится вблизи к собственной частоте дневной или ночной магнитосферы Земли, особенно во время магнитных бурь. Последнее заключение базируется на том, что с уменьшением геометрических размеров магнитосферы Земли, повышается величина ее собственной частоты колебаний. Совпадение или хотя бы близость собственных частот биосистем и магнитосферы говорит об их долговременной функциональной связи, хотя на один взгляд они очень сильно отличаются друг от друга. Остается показать как такая связь осуществляется.

Для доказательства этого утверждения воспользуемся исключительно важным выводом Чандрасекара / 6 /

$$T = \frac{\mu H^2}{2\pi K} \cos^2\vartheta, \tag{5}$$

где μ - магнитная проницаемость среды, H - магнитная напряженность, K - волновое число.

Если формулу (I) применить для определения собственной частоты дневной магнитосферы Земли с учетом выражения (5) (для нормального случая $\cos\vartheta = 1$), то полученное соотношение будет указывать на явную зависимость частоты колебания от величины магнитной напряженности:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu H^2 (n-1) n (n+2)}{2\pi K \cdot a^3 \left(\rho_1 + \rho_2 \frac{n}{n+1}\right)}}. \tag{6}$$

Заметим, что формула (5) была выведена для плоского случая, но для малой кривизны она будет также справедлива. Что касается коэффициента затухания β_n (2), то для больших радиусов $a >> 1$ она принимает весьма малую величину, несмотря на то, что $\rho_1 << 1$ и $\rho_2 << 1$. Напомним, что при этом вязкость полностью отсутствуют. Таким образом, можно считать, что $\rho_н \simeq 0$.

В этих условиях формула (3) примет вид:

$$f_2 = \frac{H}{\mathcal{R}}\sqrt{\frac{3H}{5\mathcal{R}K\rho a^3}} \qquad (7)$$

Из этой зависимости можно получить очень важный вывод: во время магнитных бурь резко растет напряженность магнитного поля и незначительно, но все же уменьшается радиус дневной магнитосферы Земли. Это означает, что увеличивается величина собственной частоты дневной магнитосферы. Увеличение амплитуды магнитной напряженности и смещение величины частоты в сторону низких частот, позволяет более эффективно влиять на биологические объекты.

Как известно, $K = \frac{2\mathcal{R}}{\lambda}$ и $\lambda = \frac{V'}{f'}\ \frac{2\mathcal{R}V'}{\omega'}$; поэтому $K = \frac{\omega'}{V'}$, где V' - альфеновская скорость.

Существует определенная, но малая вероятность, что $f' \simeq f_2$ ($\omega' \simeq \omega_2$), тогда из (7) можно получить:

$$f_2 = \sqrt[3]{\frac{0{,}3\cdot\mu\cdot V' H^2}{\mathcal{R}^4\cdot\rho\cdot a^3}}, \qquad (8)$$

где размерности величин учтены в СИ системе $[\mu] = \frac{Гн}{м}$, $[V'] = \frac{м}{с}$, $[H] = А/м$, $[\rho] = \frac{кг}{м^3}$. Подстановка в формулу (8) соответствующих величин $B = \mu H = 3\ (10^{-6} \div 10^{-8})$ Тл, $V' = 10^7\ \frac{м}{сек}$, $a = (8 \div 10)R$ ($R = 6370\cdot10^3$м - радиус Земли), $\rho = 1{,}7\ 10^{-20}\ \frac{кг}{м^3}$ позволяет найти величину частоты в пределах $f_2 = (0{,}1 \div 6)$Гц.

В работе / 4 / была рассмотрена цилиндрическая модель, для которой величина частоты определялась так:

$$f_{nm} = \sqrt{\frac{\tau\left[m(2m^2+4m+3) + a^2\frac{\mathcal{R}^2(2n+1)^2}{l^2}\right]\cdot I_m(aq_n)}{a^3\left[\rho_1 I_m(aq_n) + \rho_2 K_m(aq_n)\right]}}, \qquad (9)$$

где ℓ - длина цилиндра, a - ее радиус, $I_m(aq_n)$ - модифицированные функции Бесселя, $K_m(aq_n)$ функция Макдональда, $q_n = \pi(2n+1)/\ell$.

При $n = m = 0$

$$f_{00} = \frac{1}{2}\left\{\frac{T}{a\ell^2}\cdot\frac{I_0(\pi a/\ell)}{\rho_1 I_0(\pi a/\ell) + \rho_2 K_0(\pi a/\ell)}\right\}^{1/2}. \quad (10)$$

Если учесть, что $\frac{a}{\ell} << 1$, тогда выражение (10) упрощается и принимает вид:

$$f_{00} \simeq \frac{1}{2}\left[\frac{T}{a\ell^2\cdot\rho_2 K_0(\pi a/\ell)}\right]^{1/2}. \quad (11)$$

Полученную формулу также можно использовать для определения собственной частоты колебания ночной магнитосферы Земли, где T определяется из (5).

В этой работе рассмотрена функциональная связь между колебательными процессами биосистемы и магнитосферы Земли. Но на биосистемы влияют и другие электрические и магнитные изменения, происходящие как в условиях Земли, так и вне ее. Кроме вышеуказанных первичных процессов проявляются и вторичные или их последствия. С этими явлениями связаны волнение и штормы морей и океанов, что связано с обогащением воды кислородом, необходимым для подводных обитателей, для процесса деления клеточных систем и т.д.

Во время экспериментов над биологической клеткой не надо забывать о непрерывном вынужденном действии естественных электромагнитных полей. В противном случае полученные результаты могут иметь противоречивый характер.

Поступила 29.V.1991

Кафедра
радиоэлектроники

Литература

1. Т.Г.Жгенти, Г.Ш.Кеванишвили //Сообщения АН ГССР.1971.т.62. № 1. с.37.
2. Т.Г.Жгенти, Г.Ш.Кеванишвили //Биофизика. 1980. т.25. № 1. с.189.
3. Т.Г.Жгенти, И.Ф.Саришвили. К.А.Нишнианидзе и др. А.С.206235. СССР//Б.И. 1967. № 24.
4. Т.Г.Жгенти, Г.Ш.Кеванишвили // Биофизика 1991. т.36. № 3. стр. 483÷488.
5. Т.Г.Жгенти, К.К.Катамадзе, Г.Ш.Кеванишвили, К.А.Нишнианидзе. А.С.789119 СССР//Б.И.1980. № 47.
6. S.Chandrasekhar. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford, Charendon Press. 1961, 452.

თ.ჟღენტი

დედამიწის მაგნიტოსფეროს რხევის გავლენა ბიოლოგიურ ობიექტებზე

რეზიუმე

სფერული და ცილინდრული მოდელების [illegible] შედეგად ნაჩვენია ბიოლოგიური სისტემების საკუთარი რხევის სიხშირის მნიშვნელობების კავშირი დედამიწის დღის და ღამის მაგნიტოსფეროს საკუთარ რხევის სიხშირის სიდიდეებთან.

T.Zhghenti

THE EFFECT OF THE EARTH'S MAGNETOSPHERE OSCILLATION ON BIOLOGICAL ORGANISMS

Summary

By considering spherical and cylindrical models a relation has been found between the values of the proper oscillation frequency of biological systems and the values of the proper oscillation frequency of the earth's day and night magnetosphere.

Труды Тбилисского государственного университета

им. И. Джавахишвили

ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

314, 1993

მათემატიკისა და ფილოსოფიის ურთიერთმიმართე-ბების ისტორიულ-ლოგიკური ასპექტის შესახებ

მ. ქიქინაძე

მათემატიკისა და ფილოსოფიის შორის დამოკიდებულების პრობლემა ამ მეცნიერებებთან მიმართებაში ერთნაირად ძველია და ერთნაირი ხანგრძლივობისაა, ვინაიდან ერთდროულად მოხდა მათემატიკის როგორც მეცნიერების წარმოქმნა და პირველი ფილოსოფიური სკოლების ჩასახვა. როგორც ცნობილია, ძველი ფიზიკოსების მილეთის "სკოლა", თალესის მეთაურობით, ერთდროულად იყო პირველი ფილოსოფიური და პირველი მათემატიკური სკოლა. ყველა საგანთა საერთო ამოსავალი ძირის ანუ არხეს ამ სკოლის მიერ დაყენებული პრობლემა თავისი არსით მოითხოვდა სინამდვილის უზოგადესი საფუძვლის ზოგადაბსტრაქტულ - ცნებით ასახვას. მაგრამ მილეთელებმა ასეთი აბსტრაქტული, ცნებით გამოსახატელი ზოგადი კონკრეტულ-საგნობრივი, გრძნობადი ფორმით წარმოადგინეს და გაიგივეს პრობლემის აბსტრაქტულ-ცნებით კარიბჭესთან. უფრო სწორად, მთელი მათი ცდა სამყაროს ძიებისა თვით გამოხატავდა აბსტრაქტული ზოგადის აუცილებლობას. ასეა თუ ისე, მილეთელებმა პირველად წამოაყენეს არხის პრობლემა და მისი გადაწყვეტის ძნელ ცდაში თვით, ნებით თუ უნებლიეთ, მიიყვანეს ის აბსტრაქტულ-ლოგიკური გამოხატულებისა და გადაწყვეტის აუცილებლობამდე და სწორედ ეს პრობლემა იქნება მომავალი ფილოსოფოსების ცენტრალური პრობლემა და მასთან დაკავშირებული საერთო პრობლემა სინამდვილის ცნებითი ასახვის განვითარებისა.

უნდა ითქვას, რომ ვერც მილეთელ მატერიალისტთა მიმდევრების პირდაპირმა გამარტივებულმა, დიალექტიკის ფუძემდებელმა ჰერაკლიტემ ვერ

შეადარება კონკრეტულობისა და გრძნობადობის აღნიშნულ სამყარო-
ბან ნაწილადა, აბსოლუტად გამოაცხადა თვით მოძრაობა და მრავლო-
ბითობა ბრძოლა-ერთიანობა, მაგრამ მათ ძირი მაინც კონკრეტულ-საგ-
ნობრივით და, მაშასადამე, გრძნობად-ჭვრეტადით, ცეცხლით წარმოიდ-
გინა.

პითაგორელთა კონკრეტულ-საგნობრივი ცნებებისა და მასთან და-
კავშირებული გრძნობადობის ეს საზღვარი გადალახა პითაგორას ფილო-
სოფიურმა სკოლამ, რომელმაც ფუძედ რიცხვი არსად. საწყისად გამოაცხადა
რიცხვი; რიცხვი არის პრინციპი, მიზეზი ყოფიერებისა, ასე, სულისა
და ცოდნისა, ერთი სიტყვით ნივთიერ და სულიერ თვისებათა არსება. პით-
აგორელთა ამით თავისი აბსტრაქტულ-ცნებითი გამოსახულება და, მაშასა-
დამე, მიღებულია ერთიანობა პრინციპით, საკუთრივ ფილოსოფიური გა-
დაწყვეტა. მართალია, პითაგორელთა ეს მსოფლმხედველობრივი მოძღვრე-
ბები სინამდვილის რაოდენობრივი მხარის აბსოლუტიზაციას წარმოადგე-
ნდა, ხოლო თავისი რიცხვით - მისტიკური გამოსახულებით, იდეალის-
ტური იყო, მაგრამ მისი ისტორიულად სრულიად გამართლებული მნიშ-
ვნელობა მდგომარეობდა იმაში, რომ აზრი პირველად ავიდა არსის გრ-
ძნობად და საკონკრეტულ-ცნებით, ანუ, ნაირად ცნებით, აბსტრაქტულ-
ცნებით გამოსახვის სიმაღლეზე. ეს არ იყო შემთხვევითი, ვინაიდან
მათემატიკის უკიდურესი აბსტრაქტულობით გამომდინარე მისი უპირატე-
სი მიდგომა იმდროინდელ აზრს აქვეიან შეეძლო მიეღო არსის უნივერ-
სალური ხედვის გამოხატულება, ეს, მით უმეტეს, არაა საკვირველი, თუ
მხედველობაში მივიღებთ, რომ თვით ანაქსიმენი ფილოსოფიის ჩამოყალიბება
წარმოუდგენელია მათემატიკის როგორც წარმოადგენს პითაგორელებს.
პითაგორეიზმი ცალმხრივობა და შეზღუდულია, მაგრამ პითაგორული მეთოდის
შემდეგ მხარეა სიახლოვე მათემატიკისა და ფილოსოფიის შორის.

შემდეგ ჩვენ ვნახავთ, რომ ამ ორი მეცნიერების სიახლოვე მაინც
მათ მიღწევებთან დაკავშირებული არაა, არამედ, არსებობს მათი კავში-

რის უფრო ღრმა საფუძველია. მაგრამ იგი, ანალოგიურად, და [illegible], წმინდა სიმბოლო უფრო ბევრად გამოხატავს ფილოსოფიის აბსტრაქ-ტიულ ღირებულებაზე, კერძოდ, ინდივიდუალურ ფილოსოფიის და იმდენად ტიურად, რომ თვით ყველაზე მნიშვნელოვან ფილოსოფიურ სისტემათა ფორ-მალი განსხვავებული ფუნქციის სახით მათემატიკური იდეებია, რომლებიც ჩვენ ქვემოთ სპეციალურად შევეხებით, ყველა ერთ და, მაგალითად, მრა-ვალი თავის ფილოსოფიაში მათემატიკურ იდეებს ძირითად საგანსა და იდეას მთელი მოძღვრების, როგორც სიმბოლოს, გამოხატვისა და აბსტრაქ-ციულ ძირს, ხოლო რაც მის იდეათა სამყაროს, ამ ფილოსოფიური სისტე-მისათვის დამახასიათებელი სახის მიღებას ლოგიკურ, ანალოგიურობით მით-ხოვ იდეათა სუბორდინაციულ ბუნებას, ქვეშიდან ამ მიზნით მიმართავს რიცხვს ანუ იდეათა ქვანტიფიკაციას, რაც მნიშვნელოვანწილად გამოხატავს ამ სისტემის მიერ საკუთარი თავის შინაგან ბუნებას, შინაგან რთუ-ვას, ვინაიდან რიცხვის მრავლობითი არის უნივერსალურობა იდეის თავის თავისუფალი იდეებისა და შინაგან ერთიანობის, [illegible].

ასეთივე ადგილი უკავია მათემატიკურ აზროვნებას ჰეგელის თვითგანვითარებადი აბსოლუტური იდეის ლოგიკაში, რომელიც იმ საწყი-სავალ საფეხურს, რომელსაც ჰეგელის აბსოლუტური იდეა ბუნებიდან თა-ვის განვითარების უმაღლეს საფეხურზე, აბსოლუტურ სულში, დაუბრუნ-დება, ვინაიდან "ბრძოლა საწყისზე აბსოლუტური და თავისი არსის შეცნობაში მყოფ სულს, რომელიც <u>თავისი არსის გამოხატვისათვის</u> ქმნის სფეროს წმინდა წარმოდგენებისათვის, ვინც შეიმეცნებს, რომ ეს სფე-როა თვით აზრი, ის შეიქმნება მის წარმოსადგენად წმინდა სულიერ გამოსახულებას, შესაძლოა აზრად მიიჩნიოს აბსოლუტის რიცხვი - ეს შინაგანი, აბსტრაქტული განვითარება" /4,234/, /1/ ,/5/ .

იდეალიზმი ნახვითად წარმოადგენს მათემატიკისა და ფილოსო-ფიის მჭიდრო ღრმა სიახლოვის კავშირს, მაგრამ საკითხის ბუნებას იმით, რომ დამოუკიდებლად ავლენს ამ კავშირს.

როგორც ზემოთაც ვნახეთ, პითაგორეიზმის სახით მათემატიკა იმ ზომით მოემსახურა ფილოსოფიას, რომ მას პირველად დაუყენა არსის გამოხატვა აბსტრაქტულ-ცნებითი საფუძველზე. ამასთან ერთად და განუყრელ კავშირში, პითაგორეიზმმა, მიუხედავად თავისი იდეალის-ტური და მისტიციზმური არსისა, უდიდესი ისტორიულ-შემეცნებითი რო-ლი შეასრულა იმითაც, რომ სინამდვილის ფორმალური რაოდენობითი ანალიზი აიყვანა პრინციპიალურ სიმაღლეზე და დიდად შეუწყო ხელი ანტიკური მათემატიკის განვითარებას.

როგორც ვნახეთ, პითაგორიზმმა დაასწრო პლატონსაც და თვით კე-პლერსაც არსის უმაღლესი ცნებითი გამოხატვის მიზნით მიმართვა მა-თემატიკისათვის, მაგრამ პითაგორას კლასიკური მემკვიდრეები მასზე მაღლა აიწიენ იმ მხრივ, რომ, მისგან განსხვავებით, მათ მათემატი-კა არ მიუჩნევიათ არსის უმაღლეს გამოხატულებად, არამედ, ის მიიჩ-ნიეს მხოლოდ ამ უკანასკნელის გამოხატულებისათვის საჭიროების განვითარე-ბის უმაღლეს წინარე საფეხურად და როგორც კი პლატონმა აღმოაჩინა სფე-როს იდეალური აბსოლუტობით მოიძებნა უმაღლესის სრულყოფილად, ამ უკანასკნელმა მაშინვე დაკარგა თვით თავისი არსი, რითაც გამოხატა ისიც, რომ მათემატიკა არ წარმოადგენს არსის უმაღლეს საფუძველს.

ჩვენთვის აქ მთავარ საგულისხმოა ის, რომ პლატონისა და კეპლერის ფილოსოფიები დიდი ფიქსირებით გამოავლენენ არა მარტო სიახლოვეს მა-თემატიკასა და ფილოსოფიას შორის, არამედ, პრინციპიალურ განსხვავე-ბასაც მათ შორის და, ამასთან განუყრელ კავშირში, იმას აუცილებლო-ბასაც, რაც მოხდა უკვე თვით ანტიკურობის პერიოდში პითაგორეიზმიდან ელეატურ ფილოსოფიაზე გადასვლის წესით.

პითაგორელთა ის მოძღვრება, რომელმაც უარყო სინამდვილის თვისებ-რივი მხარე, უფრო სწორად, გაარაოდენობრივა ის, ცხადია, ვერ იქნებო-და უზოგადესი ცნება ანუ ვერ შეასრულებდა ყველა საგანთა და მოვ-ლენათა ნამდვილი ძირის როლს. რისი მიზეზიც იყო არა ონტოლოგიური

ზოგადობა, არამედ, ინტუიციური ცალმხრივობა, მაგრამ და წარმოად-
გენდა მაინც კონსეკვენტურ ზოგადობას, იმ მხრივ, რომ მან შემეცნება
აიყვანა, მართალია, ერთი, საბოლოო, მხოლოდ რაოდენობრივ, მაგრამ,
ამ თავისი ცალმხრივობით, ყოვლის მომცველ აბსტრაქტულ-ცნებით საფუ-
ძველზე, რითაც, ამასთან ერთად, მოამზადა საფუძველი პარმენიდე-ძენო-
ნის ელეატური, პირველი რაციონალისტური ფილოსოფიისათვის, რომელიც, მი-
უხედავად თავისი მეტაფიზიკური მიზანდასახულობის უარყოფით დიალექ-
ტიკისა და ცნობილ საგანთა და მოვლენათა ილუზორულად წარმოდგენისა,
თავისი მხოლოდ აზრით, კონსეკვენტურად საერთო "ერთი არსით" წარ-
მოადგენს მოვლენათა კონკრეტულობისაგან სრულიად თავისუფალ აბს-
ტრაქტულობის აბსოლუტს, რომლის უზოგადესი პრედიკატები: არის, ერთი,
სრული, განუყოფელი, თავისთავად იგივური, უცვლელი, მარადიული და სხვა
ჭეშმარიტად ფილოსოფიურ რაობებს წარმოგვიდგენენ. ამავე დროს და მისი
არსის ამ პრედიკატებით ისარგებლებენ თავის ფილოსოფიურ სისტემათა ასა-
გებად მთელი რიგი, ამასთან, დიდი, როგორც იდეალისტი, ისე მატერიალის-
ტი ფილოსოფოსებისა. ელეატების ეს ერთი არსი მოვლენათა არსებზე უფრო
ზოგადია, მაგრამ აბსოლუტურად მოწყვეტილი იგი მოვლენებისაგან და
ელეატების დამსახურებაა, ჯერ-ერთი, ის, რომ მათ არსი მოვლენისაგან
მკაცრად განასხვავეს, მეორეც ის, რომ მათ ერთ არსს სუბსტანციონალუ-
რი აბსტრაქტულობა ჰქონდა, რაც გზას უკაფავდა ფილოსოფიური აზრის
შემდგომ განვითარებას.

პარმენიდე-ძენონის ფილოსოფია, მიუხედავად თავისი მეტაფიზიკუ-
რი და იდეალისტური თეორეტიზმისა, პრინციპულ სიმაღლეზე აიყვანს
ცნებით, აბსტრაქტულ აზროვნებას და კერძო საფუძველს ჩაუყრის აქსიო-
მატურ მეთოდს ცოდნის დედუქციური წარმართვისა. პარმენიდე-ძენონის აპო-
რიები, თავისივე იდეალისტური სკეპტიკური მიზანდასახულობის საწინა-
აღმდეგოდ, იმდენად უარყოფითი დიალექტიკა უფრო იყოს საშუალება მხო-
ლოდ და მხოლოდ საგანთა მრავლობისა და მოძრაობის რეალობის უარყოფისა,

ფაქტიურად აფუძნებდნენ და ავითარებდნენ ფილოსოფოსები ცნებები ამავე ისე რომ, მრავალი მეცნიერი ფილოსოფოსი უკუაგდებს თვით მათ საკვანძო მიზანს და შეინარჩუნებს და ხშირად იმეორებს ამ მიზნის მართლ სა[illegible]ლეებას, ცნებათა აბსოლუტების ელეატურ ისტორიას, ხოლო მათ მიერ საპირისპიროთა მოსაზრებების შეფარდებიდან გადაწყვეტილი იქნება მხოლოდ ის, რაც ელეატებმა ამ პოლემიკაში ფაქტიურად ცხადი სახით წარმოადგინეს, თვით საპირისპირონი და მათი დაპირისპირება, რის შედეგადაც უფრო ადრეა იმის შეცნობა, რაც არის იმპულსებიდან წარმოქმნის სრულყოფა.

ამ ფილოსოფიის საგანი ერთ-ერთ ძირითად ქვასად კვლავ მათემატიკა წარმოადგენდა, რომელიც მას აძლევს მოსაზრებებს იმაში, რომ... მაწარმოდგენილის ანტიკური მათემატიკის კრიზისი.

ასეთი იყვნენ არა მხოლოდ სრულიად ნათელი, ქმნადი მათემატიკის და ქმნადი ფილოსოფიის პირველივე თანახვედრათა თითქმის პოზიტიური და ანალოგ დრამატული შედეგები. პითაგორეული ფილოსოფიის ძირითადი ცნოლოგიური ფესვები მათემატიკაშია, მათემატიკა ჰქმნის მას თვის ფუძეგმა-ქმნადობის პროცესში, მაგრამ თვით პითაგორიზმშივე მოღვაწეობენ რომლებიც მათემატიკის განვითარების უდიდესი იდეური ძალა, ზენონს შემდეგ მიერვე საფუძვლიანებულ ელეატური ფილოსოფია იმ დროისათვის (და თანამედროვე თვალსაზრისითაც) უძლიერეს არგუმენტებით თავს დაესხმა ყველაზე ანტიკურ მეცნიერებას, მათ შორის, მათემატიკას, და ირაციონალობის აღმოჩენასთან ერთად გამოწვეული შედეგით ღრმა კრიზისულ მდგომარეობაში ჩააგდებს მათემატიკას, ხოლო პითაგორიზმით სულმთავრული მათემატიკის განვითარება თვითონ მიეცა ირაციონალობის სახით, პითაგორიზმის [illegible] კონცეფციის დაუზიანებლად. მათემატიკის საფუძვლების ანტიკური კრიზისი კი, ისევე როგორც საერთოდ, ფუნდამენტური ასეთი კრიზისი, თვითვე აღმოჩნდება მათემატიკის განვითარების ერთ-ერთი ძირითადი სტიმული და საფუძველი. მასზე ჩვენ ქვემოთ სახით წა[illegible] ისეთი [illegible] მათემატიკური [illegible], რომლებიც [illegible]
[illegible]

რებისა, რომ მაქსიმალურად იქნენ გათვალისწინებული, ხოლო, მესამე-ლებლიობის პირობებში, ჰეგელიანელების ელეატური კრიტიკული არგუმენტები, პირველ რიგში, უსასრულობის ცნების ამ კრიტიკით გამოვლენილი ძნელი და სახიფათო მომენტები, მეორეს მხრივ, თვით აღმოჩნდებიან მათემატიკის ისტორიულ-ლოგიკური განვითარების ცენტრალური მაგისტრალის საკვანძო პუნქტები. ასეთნი არიან, უპირველესად ყოვლისა, დედეკინდის მათემატიკური ატომიზმი და ევდოქსის თანაფარდობათა ზოგადი თეორია და ამოწურვის მეთოდი. ანტიკური მათემატიკის კრიზისით გამოვლენილი ძირითადი სიძნელეები იმყოფებიან უწყვეტობისა და წყვეტილობის, სასრულისა და უსასრულოს და აქტუალურ და პოტენციალურ უსასრულობათა დიალექტიკურად დაპირისპირებულ წყვილთა ძნელად გასარკვევ კავშირის სფეროში, რომელთა შორის ცენტრალური და მოძრაობის ძირეულია აქტუალური და პოტენციალური უსასრულობების დამოკიდებულება. ანტიკურმა მათემატიკამ, ისევე, როგორც, მნიშვნელოვნად, თანამედროვემაც, აქილესის ქუსლი უპირატესად აქტუალურ უსასრულობაში დაინახა. როგორც ვხედავთ, ანტიკური მათემატიკის კრიზისით შექმნილი სიტუაცია ღრმად ფილოსოფიური ბუნებისაა და მისი დაძლევა შესაძლებელი იყო მხოლოდ კვლავ მათემატიკისა და ფილოსოფიის კავშირის გზაზე.

დედეკინდი მას მიუძღვება თავისი პლატონისეული ფილოსოფიის საწყისი მოსაზრებებით და მიიღებს რა არსებული მეცნიერების ძენონისეულ კრიტიკას, შეეცდება არა თვით არსებული მათემატიკის გამოყვანას ელეატური წრიდან, ამავე მათემატიკის უსასრულობისა და კონტინუალური წარმოდგენების ფარგლებში, არამედ, მცდარად მიიჩნევს თვით ამ მათემატიკის ძირითად პრინციპებს უსასრულოდ დაყოფისა და ნულზომითი წერტილისა და ჩამოაყალიბებს თავისებურ მათემატიკურ ატომისტურ კონცეფციას, რომლის ფარგლებში პარმენიდე-ძენონის აპორიები და ირაციონალობა კარგავენ ძალას და ის ამავე საფუძველზე აიგებს

თავისებურ სასრული, დისკრეტულ მათემატიკას; ეს იყო მათემატიკის დაფუძნების პირველი კონცეფცია. ბევრი რამაა საერთო დემოკრიტეს ანტიკური მათემატიკის კრიზისთან დამოკიდებულებასა და ბრაუერის თანამედროვე მათემატიკის კრიზისთან დამოკიდებულებას შორის. პირველმა პანაგორიზური ფილოსოფიური ფინიტური პოზიციებიდან დაასკვნა არსებული მათემატიკის ლოგიკური საფუძვლების მანკიერების შესახებ და შექმნა თვისებრივად სრულიად განსხვავებული, ფინიტური ატომისტური მათემატიკური თეორია, ბრაუერმაც თავისი ფილოსოფიური ინტუიციონიზმის პოზიციებიდან უარყო არსებული მათემატიკა, თავისი აქტუალური უსასრულობითა და გამორიცხული მესამის კანონით და ჩამოაყალიბა პოტენციონალური უსასრულობის აბსტრაქციაზე დაფუძნებული ახალი, ინტუიციური მათემატიკა. აშკარაა ორივე კონცეფციის რევოლუციური ხასიათი. დემოკრიტესა და ბრაუერის მათემატიკურ თეორიებს შორის აღნიშნული პარალელისათვის სავსებით შეიძლება ვთქვათ, რომ დემოკრიტე – ანტიკური ბრაუერია, მაგრამ . . რამდენად უფრო ძნელი იყო ანტიკურ პერიოდში მათემატიკის მიმართ რევოლუციური დამოკიდებულების გამოჩენა, ვიდრე თანამედროვე მათემატიკაში, რომელმაც უკვე თვით მოიტოვა უკან, ისტორიულ-ლოგიკური განვითარების გზაზე, მთელი რიგი კრიზისული სიტუაციები და რევოლუციური აღმოჩენები /3/.

მათემატიკური ატომიზმი აღმოჩნდება სრულიად აუცილებელი და ის უდიდეს როლს შეასრულებს მათემატიკის ინტეგრალური მეთოდების განვითარებაში და კერძოდ არქიმედის შრომებში და მეტად საგულისხმოა ის, რომ ატომიზმის იდეაც, ექსტრაპოლირებული ფინიტურიდან უსასრულობაზე, დიდ როლს შეასრულებს თვით უსასრულობის მათემატიკაში.

პარალელი აქ გრძელდება, თუმცა რამდენადმე სუსტდება, თუ აღვნიშნავთ რომ, ფილოსოფიურ ინტუიციონისტურ საფუძვლებზე შექმნილი ბრაუერის ინტუიციონისტური მათემატიკა, განსაკუთრებით ალგორითმების თეორიის შექმნის საფუძველზე, თვით გახდება საფუძველი ე.წ. კონსტრუქციული მათემატიკისა.

ევდოქს კნიდელის ნაშრომმა შეიძლება რომელიმე ძირითადად მნიშვნელოვ ცვლილება უკვე ანაქსაგორას ხანის მაგისა ფილოსოფიის საფუძვლებ გამოიკვლევდა უწყვეტობისა და უსასრულო მცირის პრობლემატიკა უსასრულო თვალსაზრისის. მაგალითად, თვალსაზრისი, რომელიც მე იტყობ განვითარებული და ანტიკური მათემატიკისათვის სამყაროს დამკვიდრე-ბულ იქნება არისტოტელეს ნატურფილოსოფიაში, ევდოქსი თავის, ანტი-კური მათემატიკისათვის ფუძემდებლ თეორიებს, თანაფარდობათა ზოგად თეორიასა და ამოწურვის მეთოდი შექმნა, მიუხედავად ამისა, რომ ევდოქსი უარყოფს აქტუალურ უსასრულობას და მათემატიკა დააფუძნოს პო-ტენციალურ უსასრულობაზე.

პლატონი, რომელიც შეპყრობილი მათემატიკის სიყვარულით, საგრ-ძნობ გავლენას ახდენს მათემატიკური ცოდნის განვითარებაზე მის მიმართ უდიდესი ინტერესის გამოწვევით და ხელშეწყობით.

ჯერ პარმენიდე, შემდეგ კი, განსაკუთრებით არისტოტელე, რომელიც ფორმალური ლოგიკის შემოქმედია, ქმნის მეცნიერული ცოდნის მისაღები ლოგიკური ორგანიზაციის საფუძვლებს, რასთანაც დაკავშირებით უდიდეს ყურადღებას უთმობს მათემატიკას, და ამკვიდრებს მეცნიერებაში აქსი-ომურ-დედუქციურ თვალსაზრისს. ლოგიკურ სქემას, რომელიც შესაბამ-ისად იქნა განხორციელებული მათემატიკის კლასიკური პერიოდის რე-ზუმალურ, ენციკლოპედიურ ნაშრომებში, ევკლიდეს „საწყისებში" და რომელიც თავის ანტიკურ ამოცანა გამოხატულებას პოულობს არქიმე-დის მექანიკასა და მათემატიკაში.

სხვადასხვა, მათ შორის, საწინააღმდეგო, ფილოსოფიურ საფუძვლე-ბზე შექმნილი მათემატიკური კონცეფციები, შედეგები, ცალ-ცალკე და ერთად, შემდგომ იქნება გამოყენებული არქიმედის მიერ. დე-მოკრიტეს, მათემატიკური უსასრულობის უწყვეტობის საფუძვლები შემუშა-ვებული, ფინიტური ატომიზმი არქიმედთან ტრანსფორმირებული იქცევა პო-ტენციალურად უსასრულოდ დიდ და აქტუალურად უსასრულო მცირე ატომიზმში,

რომელიც მის [illegible] [illegible] დიალექტიკური [illegible] [illegible] სამყა[illegible], ხოლო ამავე აქტუალური უსასრულობის ცნების [illegible] [illegible] მექანიკური [illegible] ამოწურვის პოტენციალურად უსასრულო მეთოდი[illegible] გამოყენებით [illegible] უკვე [illegible] [illegible]. ანტიკური მათემატიკის [illegible] [illegible] პირობებში ანტიკური მათემატიკა ხასიათდებოდა [illegible] და [illegible], ანალიზისა და სინთეზის, [illegible] და [illegible] [illegible] [illegible] და, [illegible], [illegible], როგორც [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] ამ [illegible] პირობებში [illegible] [illegible] [illegible] და [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] უსასრულოდ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

[illegible] [illegible] მათემატიკისა და ფილოსოფიის [illegible] და [illegible] [illegible] ურთიერთობების [illegible] მათემატიკის განვითარების ფილოსოფიურ-ლოგიკური [illegible] [illegible] ხაზის ერთ-ერთი [illegible] [illegible] ანტიკური [illegible]: VI–V საუკუნეების [illegible] მათემატიკა – მათემატიკის საფუძვლების პირველი კრიზისი – დემოკრიტე და ევდოქსე – ევკლიდე და არქიმედე.

მათემატიკისა და ფილოსოფიის ურთიერთდამოკიდებულების [illegible] საფუძველზე ჩვენ ანტიკური პერიოდი [illegible], როგორც ამ კავშირისათვის [illegible] და ეს [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] მიუთითებს ანტიკური მეცნიერებისა და ფილოსოფიის მიერ თავისი ჩამოყალიბებიდან [illegible] სამი საუკუნის განმავლობაში [illegible] [illegible] [illegible] და [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], როგორც პლატონი და არისტოტელე და არქიმედე [illegible], [illegible] [illegible] არ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]-

სახეზეა ის, რომ ბერძნული მეცნიერებისა და ფილოსოფიის კავშირი ყველა აზრის პირველი აღმოჩენა იყო და ასეთი რჩება მასზე ბევრი [illegible] სიღრმეებითა და მრავალფეროვნებით წარმოდგა. ამას შეეხება ევკლიდეს და არქიმედეს ლოგიკურ-მათემატიკური საფუძვლები, ისინი ადრეული და მარაქარნებელი იქნენ მხოლოდ XIX საუკუნის ბოლოსა და XX საუკუნის დასაწყისში, უპირველესად ჰილბერტისა, [illegible] კრიტიკებთან.

მათემატიკისა და ფილოსოფიის ისტორიული კავშირის ერთ-ერთი უდიდეს შემთხვევას წარმოადგენს არაევკლიდური გეომეტრიის აღმოჩენა, რომელმაც ყოველგვარი დაამსხვრია კანტიანური კონცეფციის თვალსაზრისი სივრცეზე და გეომეტრიაზე, ერთი მისი ფილოსოფიის ფუნდამენტური საფუძველი, მხოლოდ ევკლიდური [illegible] გეომეტრიის აბსოლუტურობაზე. არაევკლიდურმა გეომეტრიამ, ფარდობითობის თეორიასთან კავშირში, არაჩვეულებრივის ძალით დაასაბუთეს დებულება იმის შესახებ, რომ სივრცე არის მატერიის არსებობის ფორმა. მეტად საგულისხმოა ის გარემოება, რომ ნ. ლობაჩევსკი თავის ერთ მოხსენებაში მივიდა არა უბრალოდ როგორც [illegible] და მხოლოდ მათემატიკოსი, რომელმაც აჩვენა V პოსტულატის დამოუკიდებლობა, არამედ, როგორც მოაზროვნე, რომელიც ამტკიცებდა იმას, რომ სივრცის გეომეტრიული თვისებები განპირობებული არიან მისი ფიზიკური სტრუქტურით და თავის გეომეტრიას უწოდებდა როგორც სივრცის შესაძლო გეომეტრიას. არაევკლიდურმა გეომეტრიებმა ფუნდამენტურად შეცვალეს დამკვიდრებული წარმოდგენები აქსიომურ თეორიაზე და კრიტერიუმისა და სხვა მათემატიკოსთა გამოკვლევებით. სწორედ ახალი, აბსტრაქტული საფუძველზე აიგნენ აქსიომისა და აქსიომური სისტემის ცნებები, რის საფუძველზეც აქსიომური კონცეფცია თანამედროვე მათემატიკის და საერთოდ მეცნიერების ერთ-ერთი ძირითადი კონცეფცია გახდა.

მათემატიკისა და ფილოსოფიის კავშირი კერძოდ, მათემატიკის ფილოსოფიისადმი დამოკიდებულება, სიღრმისეულად და ნათლად იჩენს

თავს ცალკეულ მათემატიკურ დისციპლინათა ფარგლებში, მაგრამ [illegible] ესა თუ ის ზოგადმეთოდური დარგი თავისი განვითარების ისეთ საზღვრებს არ მიაღწევს, რომლის იქით მას აღარ ძალუძს გასვლა თავისი შინაური ლოგიკური საფუძვლების გადასინჯვისა და წესრიგში მოყვანის გარეშე, ასეთ ვითარებაში კი, ყოველ შემთხვევაში აღმოჩნდება ხოლმე, რომ საქმე ეხება ძველი მათემატიკის ლოგიკურ-ფილოსოფიურ საფუძვლებს. ხშირა ისე, როგორც ამას მართლაც კარგად აღნიშნავს, რომ ბრიტანელი მათემატიკოსი ბერტრან რასელი საფუძვლებზე და ამ საკითხთა ცალკეულ პარადოქსებში დიდ ხანს იყო შემჩნეულად და გარკვეულად შინაგანი დაბრკოლებების გარეშე შეიძლება, რომ ვინც კი ხედავდა ამ მეთოდის საერთო ფუძემდებში წარმოშობილ ბზარების შესახებ /6, 335/. ამ მეთოდის თეორიულ საწყისებში და, მათ შორის, თვით, სწორედ მათემატიკის ფილოსოფიურ დასაბუთების საკითხის შესახებ საუბარი უკვე დაწყებული იყო იმ დროს, თუ, რა თქმა უნდა, საფუძვლებში წარმოშობილი ბზარების შესახებ არ იცოდა.

მათემატიკისა და ფილოსოფიის შორის კავშირი ფიქსირდა და ძირითად იმიტომ, რომ მათემატიკის საერთო ლოგიკური საფუძვლების კრიზისის დროსაც შეხვედრებში და ასევე ანტიკური მათემატიკის ისტორია ამ მხრივ, რაც კიდევ უფრო მკვეთრი გამოხატულებით განმეორდა XIX-XX საუკუნეთა მიჯნაზე კანტორის სიმრავლეთა თეორიაში, როგორც ახალ მათემატიკის ფუნდამენტში, პარადოქსების გამოვლენის სახით და ეს კავშირი იმდენად მკვეთრად და უშუალო აღქმადობით წარმოჩინდა, რომ მათემატიკის კრიზისის დაძლევის საშუალებებით წარმოიშვნენ მათემატიკური ფილოსოფიური სკოლები: ლოგიციზმის, ფორმალიზმის და ინტუიციონიზმის სკოლები.

დავით ჰილბერტის ფორმალისტური პროგრამის ძირითადი იდეა იმაში მდგომარეობდა, რომ კლასიკური ლოგიკურ-მათემატიკური თეორიისთვის შეიძლება მისი ისეთი ადეკვატური ფორმალური განხილვა, რომ მისი დას-

ფაქტიურად ინტუიციური-გრაფიკული სიმბოლური გამოსახვის საშუალებით ფინიტური მეთოდით გამოკვლევამ უნდა შესაძლებლობა მოგვცეს იმის დადგენისა, რომ შინაარსობრივ სფეროში შეიძლება თუ არა ფორმალურ-ლოგიკური წინააღმდეგობის დედუქცირება. ავსტრიელი მათემატიკოსისა და ლოგიკოსის კურტ გიოდელის სათანადო გამოკვლევებმა აჩვენეს ასეთი იდეის განხორციელების პრინციპიალური შეუძლებლობა. ამ აღმოჩენების ფილოსოფიური მნიშვნელობა მდგომარეობდა იმის ჩვენებაში, რომ სიმრავლეთა თეორიისა და არითმეტიკის აქსიომური სისტემებისათვის არ არსებობს მათი შინაარსის ისეთი ადეკვატური ფორმა, რომელიც იმდენად სრულად დაიჭერს ამ შინაარს, რომ ფორმის მიხედვით შეიძლებოდეს შინაარსის ლოგიკური მდგომარეობის ბოლომდე გარკვევა, ყველა შემთხვევაში, უსასრულობის ლოგიკური შინაარსისა - სასრული ინტუიციური საშუალებებით, სხვანაირად, რომ შეუძლებელია მთელი ამ შინაარსის პროეცირება ფორმაზე. ჰილბერტი ზრუნავდა შინაარსისათვის, ის ამბობდა, რომ ვერვინ გაგვაგდებს კანტორის მიერ შექმნილი სამოთხიდან. "ეს სამოთხე" კი, შინაარსობრივი სამოთხეა. ჰილბერტის ფორმალიზმი მდგომარეობს არა შინაარსის უგულვებელყოფაში, არამედ, მისი პროგრამის პრეტენზიაში - გამონახოს ხსენებული შინაარსის სრულიად ადეკვატური ფორმა. გიოდელმა აჩვენა ამის შეუძლებლობა.

ბერტრან რასელისა და ალფრედ უაიტხედის ლოგიცისტური კონცეფცია ლოგიკიდან მათემატიკის დედუქციისა აგრეთვე უსაფუძვლო აღმოჩნდა.

ამასთან დაკავშირებით ჩვენ მხოლოდ ერთ შენიშვნას გავაკეთებთ. ლოგიკა ზოგადი მეცნიერებაა და ის გარკვეულად მთელი სინამდვილის შესახებაა მოძღვრება, იმდენად, რამდენადაც ლოგიკა არის მოძღვრება მთელი სინამდვილის ამსახველი აზროვნების წესებისა და კანონების შესახებ, მაშინ როცა, მათემატიკა წმინდა რაოდენობითი მეცნიერებაა და მისი არსი ემთხვევა ე.წ. მათემატიკური აბსტრაქციის გნოსეოლოგიური აქტის არსს, რომელიც მდგომარეობს სინამდვილიდან აზრით რა-

თვისებების წმინდა სახით გამოყოფაში და, მაშასადამე, თეორიული მაღალ აბსტრაქციაში, აქედან გასაგებია, რომ ლოგიკიდან მათემატიკა არ მიიღება დედუქციების გზით. საჭირო იქნებოდა კვლავ აბსტრაქციის და არა დედუქციების აქტი. ლოგიციზმი, როგორც ჩანს, გამოდის იქიდან, რომ თითქოს მათემატიკა იყოს უბრალოდ სიმრავლეთა თეორია, მაშინ როცა სიმრავლის ცნება ფილოსოფიურ კატეგორიას ანუ ზოგად-ლოგიკურ ცნებას წარმოადგენს, მათემატიკა კი მათემატიკური აბსტრაქციის საფუძველზე წარმოადგენს არა სიმრავლეთა თეორიას, არამედ, სიმრავლეთა აბსტრაქტულ თეორიას, ანუ სიმრავლეთა წმინდა რაოდენობრივ თეორიას, რითაც მათემატიკა დედუქციურად გამიჯნულია ლოგიკიდან.

ლეიტზენ ბრაუერის ფილოსოფიურმა ინტუიციონიზმა წამოაყენა იდეა არისტოტელური ლოგიკის აქტუალური უსასრულობისადმი არაადეკვატობის შესახებ, ამასთან ერთად, პირველად შეიტანა მათემატიკაში არაკონსტრუქციული არსებობა და აქტ პოტენციალური უსასრულობის აბსტრაქციაზე დაფუძნებული სათანადო მათემატიკური ინტუიციონისტური სისტემა, ხოლო ალგორითმების თეორიის სათანადო განვითარებასთან მჭიდრო კავშირში ინტუიციონისტურ მათემატიკის ნიადაგზე და, მისი დაზუსტების სახით, წარმოიშვა კონსტრუქციული მათემატიკა.

მათემატიკა თვით თავისი არსებობით ფაქტიურად ასაბუთებს დიალექტიკას, მათემატიკის არსი, როგორც აღვნიშნეთ, ემთხვევა ე.წ. მათემატიკური აბსტრაქციის არსს, რომელიც მდგომარეობს სიმრავლის თეორეტიკული მაღალი აბსტრაქციის საფუძველზე რაოდენობის წმინდა სახით გამოყოფაში. ასეთი სახით ხდება რაოდენობა მათემატიკის შესასწავლ ობიექტად. მათემატიკა არის სპეციალური მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის მთელი სიმრავლის [illegible] რაოდენობრივ მხარეს.

მაგრამ მათემატიკა, როგორც [illegible] მეცნიერება, [illegible]

[illegible]

[illegible]

გან ერთიანობის ანუ ზომას და ასევე საფუძვლზე, თითქოს, საკუთარ სფეროს შემეცნებისა, რის ტიპიურ გამოხატულებას წარმოადგენს ე.წ. მოდელების თეორია, რომელიც შეისწავლის კავშირს ფორმალიზებულ ლოგიკურ-მათემატიკურ ენებსა და ამ ენების შესაბამის მათემატიკურ სტრუქტურებს შორის, ასე რომ, წარმოიშობიან საკუთრივ მათემატიკური ენები და მათი შესაბამისი სემანტიკა. საერთოდ, უარქმნილი თვისებრიობა თითქოს წარმოშობს მათემატიკის საკუთარ ონტოლოგიურ-გნოსეოლოგიურ ავტონომიას, სხვანაირად, შეიძლება ვილაპარაკოთ მათემატიკის შინაგან ავტონომიურ ფილოსოფიაზე. ალგორითმების თეორიაში ასევე შინაგან აგრეთვე ტიპიურად ფილოსოფიურ სფეროს ქმნის ჩერჩის (კლინის ტიურინგის და სხვა) თეზისი, რომელიც გამოხატავს შემეცნების მიმართებას ალგორითმის ზოგად ცნებასა და ალგორითმის ზუსტ ცნებას შორის /10/.

მათემატიკისა და ფილოსოფიის ურთიერთგამომპირ. ჰქველი კავშირის თვალსაზრისით განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი და შთამაგონებელია ლევან გოკიელის შემოქმედება. მან მიუთითა კლასიკური ლოგიკის შეზღუდულობაზე და არაადეკვატურობაზე სიმრავლეთა თეორიის პარადოქსთა ძირში შინაარსის შინაარი და სიმრავლეთა თეორიის საფუძვლების ხანგრძლივ ცდაში და ფაქტზე შეიმუშავა დიალექტიკის ლოგიკური კონცეფცია ანუ ჩამოაყალიბა დიალექტიკა როგორც ლოგიკური სისტემა, რაც ფილოსოფიისა და მათემატიკის ურთიერთგანპირობებული განვითარების თვალსაზრისით სრულიად უნიკალურ მოვლენად უნდა მივიჩნიოთ. მეტად მაინტერესებელია ის გარემოებაც, რომ სიმრავლეთა თეორიის პარადოქსებისაგან განთავისუფლების ფაქტზე წარმოშობილი ეს ლოგიკა მოეპყრობა ამავე პარადოქსებს და დადგენილ იქნება, რომ ისინი ნამდვილად პარადოქსები ანუ ფორმალურ-ლოგიკურ წინააღმდეგობათა მაპროდუცირებელი მსჯელობანი კი არ არიან, არამედ, გამოხატავენ უსასრულობის ლოგიკურ რეგრესის შედეგებს, რომლის არსი ცნებათა მეტაფიზიკაა, მოვლენა კი-ალოგიზმი.. მეორეს მხრივ, თუ სწორად წარვმართავთ პარადოქსებში

განხორციელებულ მსჯელობას, ისინი დაასაბუთებენ სამართლიანად ფილო-
სოფიურ, ლოგიკურ და მათემატიკურ ჭეშმარიტებებს. ამ დაპირისპირებისა
და ამავე ზომით შექმნილ იქნა მათემატიკის დაფუძნების გარკვეული
დიალექტიკურ-ლოგიკური თეორია /6/, /7/, /2/, /3/. ჩვენი მათემატი-
კოსი და ფილოსოფოსი ბერნარდ ბოლცანო, მისივე განცხადებით, ფილო-
სოფიიდან მათემატიკაში მოვიდა იმ მიზნით, რომ ფილოსოფიისათვის
შეექმნა მათემატიკის მკაცრი ლოგიკურობა და ამ დროში ის ჩამოყალი-
ბდა როგორც არანაკლებ დიდი მათემატიკოსი, ვიდრე ფილოსოფოსი, სახელ-
დობრ, როგორც თანამედროვე მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი ფუძემ-
დებელი, ლევან გოკიელი ფილოსოფიაში მოვიდა მათემატიკისათვის, ამას-
თან, სრულიად ბუნებრივად, ანუ მათემატიკის დაფუძნების მისი ცდის
სათანადო ევოლუციის შედეგად და ფილოსოფიაში მოიტანა მათემატიკი-
სის ზუსტი და მკაცრი ლოგიკურობა, ის მოვიდა ფილოსოფიაში მათემა-
ტიკისათვის, მაგრამ, ამასთან ერთად, შექმნა ფილოსოფიური დიალექტი-
კური ლოგიკის გარკვეული სისტემა, რითაც თვით ლოგიკა აიყვანა დი-
ალექტიკის სიმაღლეზე.

ასეთია მათემატიკისა და ფილოსოფიის ღრმა სიახლოვითი კავ-
შირის ზოგიერთი ძირითადი ისტორიულ-ლოგიკური გამოვლენანი. მათემა-
ტიკისა და ფილოსოფიის ამ ისტორიულ-ლოგიკური ურთიერთგანპირობე-
ბული კავშირის საფუძველია განსაკუთრებული სიახლოვე მათემატიკისა
და ფილოსოფიის შორის, რაც ორ ძირითად, ერთმანეთთან და კავშირებულ
მომენტში გამოიხატება. ერთი მათგანი ძირეულია: რაოდენობა ამ ორი
მეცნიერების საკუთრივი ობიექტია, ამასთან, ფილოსოფია მას, როგორც
რაოდენობის კატეგორიას, შეისწავლის კატეგორიათა სისტემაში, პირველ
რიგში, თვისებრიობასთან კავშირში, მათემატიკა კი - სპეციალურად,
ანუ ის არის სპეციალური მეცნიერება რაოდენობის შესახებ, ამდენად
ისინი, ასე ვთქვათ, ერთმანეთს შორის "ინაწილებენ" რაოდენობას. მე-
ორე მომენტი ზოგად-კერძოობითია: ფილოსოფია არის ამასთან სპეცია-

ლური ცორნის განზოგადებაც. ასე რომ, მათემატიკა, ერთის მხრივ, იყენებს ფილოსოფიურ კატეგორიებს ბოლო ... დარგის მიღწევებითა, მეორეს მხრივ, ის შეისწავლის რაოდენობის სახეებს და, მათ, ტიპებს, აკავშირებს ფილოსოფიასთან; კერძოდ, რაოდენობის კატეგორიას. ამ ორ მეცნიერებათა შორის სიახლოვე წარმოჩნდება იმ სახითაც, რომ, თუ ფილოსოფია არის მოძღვრება ყველაზე სრულყოფილის არსებობისა და თვისებების შესახებ, მათემატიკა არის სპეციალური მეცნიერება ყველაზე სრულყოფილის ბაზის - რაოდენობრივი ბაზის შესახებ. ამას სავარაუდოთ დავუშვათ ის, რომ ეს ორი მეცნიერება უაღრესად ახლოვდება, თუმცა სხვადასხვა მიმართულებით, რაც კვლავ წარმოადგენს ამ ორივეს ფარგლებს გარეთ მრავალ საკითხს.

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1. მ.ქოქიბრიძე, მათემატიკის დაფუძნების ჰილბერტის თეორიის შესახებ, თსუ შრომები, ტ.76, 1959.
2. მ.ჭიჭინაძე, ლევან გოკიელი - მათემატიკოსი და ლოგიკოსი, თსუ შრომები, სერია - მათემატიკა, მექანიკა, ასტრონომია, ტ.225, 1981.
3. მ.ჭიჭინაძე, სავლე წერეთლისა და ლევან გოკიელის მეცნიერული ურთიერთობის შესახებ (ეძღვნება სავლე წერეთლის დაბადების 80 წლისთავს, საქ. სსრ მეცნ. აკად., მაცნე, ფილოსოფიისა და ფსიქოლოგიის სერია, N3, 1987, გვ.68-85.
4. Н.Бурбаки. Очерки по истории математики. М., Изд-во иностран.лит-ры, 1963.
5. Гегель. Сочинения, т.П, 1934.
6. Гегель. Сочинения, т.У, 1937.
7. Гокиели Л.П. Логика, т.I, Тб., Изд-во "Мецниереба", 1965.
8. Гокиели Л.П. Логика, т.П, Тб., Изд-во "Мецниереба", 1967.
9. Клайн М. Математика, утрата определенности, пер. с англ., М., "Мир", 1981.
10. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., "Наука", 1986.

11. Математика в современном мире, сб.статей, пер.с англ., М., "Мир", 1967.

М.Н.Чичинадзе

О ВЗАИМООБУСЛОВЛИВАЮЩЕЙ ИСТОРИКО-ЛОГИЧЕСКОЙ СВЯЗИ МАТЕМАТИКИ И ФИЛОСОФИИ

Резюме

Между философией и математикой существует коренная связь: для обеих наук количество является собственным объектом, соответственно, как категория и как специальная наука о количестве.

Она представляется как взаимообусловливающая историко-логическая связь. Рассматриваются ее основные моменты – от Милетской школы Фалеса до современности. В связи с современным кризисом основ математики возникли философские школы математиков: формализма, логицизма и интуицизма. Возникшая на почве преодоления этого кризиса теория коренных выводов Л.П. Гокиели является типичной для упомянутой связи.

Общегносеологический акт математической абстракции, в связи с переходом противоположностей друг в друга, создает уникальное явление: внутреннюю, автономную философию математики, особо проявляющуюся в теории моделей и теории алгоритмов, примером которой является тезис Чёрча (Клини, Тьюринга и т.д.).

M.Chichinadze

ON THE MUTUALLY-CONDITIONING HISTORICO-LOGICAL RELATIONSHIP OF MATHEMATICS AND PHILOSOPHY

Summary

There is a fundamental relationship between philosophy and mathematics: quantity constitutes the proper object of both sciences, respectively, as a category and a special science of quantity. It is conceptualized as a mutually-conditioning-historico-logical relationship. Its basic points are discussed, beginning with the Milesian school of Thales to the present time. In connection with the modern crisis of the foundations of mathematics philosophical schools of mathematicians have arisen: those of formalism, logicism, and intuitionism. L.G.Gokieli's theory of fundamental inferences, emerging on the tide of overcoming this crisis, is typical of the relationship just referred to.

The general gnoseological act of mathematical abstraction in connection with the transition of opposites one to the other gives rise to a unique phenomenon: an internal, autonomous philosophy of mathematics, particularly apparent in the theory of models and the theory of algorithms, its nucleus being the thesis of Church (Cleany, Thuring, and others).

Труды Тбилисского государственного университета
им. Ив.Джавахишвили

თბილისის ივ.ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

314, 1993

[illegible] თმის დამუშავების
პროცესში

[illegible]

[illegible]

[illegible] თმის დამუშავების პროცესში.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ტალღების რეგისტრაციის პროცესში ფაზების ცვალებადობა გავლენას ახდენს აღდგენილი ტალღების სიდიდეზე.

ტალღების წყაროს კომპლექსური ამპლიტუდა (საყრდენი ტალღის) რეგისტრაციის სიბრტყეში გამოისახება სიდიდით

$$u_R = a_R \exp(i\varphi_R), \tag{1}$$

სადაც a_R - ტალღის ამპლიტუდაა, φ_R -ფაზა.
ანალოგიურად გამოისახება უძრავი ობიექტიდან გაბნეული ტალღის ამპლიტუდა

$$u_0 = a_0 \exp(i\varphi_0) \tag{2}$$

მოძრავი ობიექტის მიერ გაბნეული ტალღის კომპლექსურ ამპლიტუდას ექნება შემდეგი სახე:

$$u_0(t) = a_0 \exp[i(\varphi_0 + \Delta\varphi)]. \tag{3}$$

$\Delta\varphi$ ფაზის ცვალებადობა, რომელიც გამოწვეულია ობიექტის მოძრაობით, დამოკიდებულია ობიექტის გადაადგილების სიდიდეზე $\Delta l = vt$. თუ ობიექტი გადაადგილდა Δl მანძილზე, მაშინ ოპტიკური გზა ტალღის ობიექტამდე და უკუმიმართულებით მარეგისტრირებელ გარემომდე გაიზრდება ორჯერ და შეადგენს $2\Delta l = 2vt$. პროპორციულად შეიცვლება ტალღის ფაზაც

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{2vt}{\lambda}. \tag{4}$$

თუ მე-(3) გამოსახულებაში გავითვალისწინებთ (4)-ს, მივიღებთ

$$u_0(t) = a_0 \exp\left[i\left(\varphi_0 + 4\pi \frac{vt}{\lambda}\right)\right]. \tag{5}$$

ინტერფერენციულ სურათს, რომელიც მიიღება საყრდენი U_R და საგ-
ნის $U_o(t)$ ტალღებით, სარეგისტრაციო გარემოში ექნება სახე:

$$J_{OR}(t)=|U_R+U_o(t)|^2=|U_R|^2+|U_o(t)|^2+ \\ +U_R U_o^*(t)+U_o(t)\,U_R^*(t). \qquad (6)$$

ობიექტიდან არეკლილი ტალღის კომპლექსური ამპლიტუდა შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$U_{ORC}=U_C|U_R|^2+U_C|U_o(t)|^2+U_C U_R U_o^*(t)+ \\ +U_C U_R^*(t); \qquad (7)$$

უკანასკნელი წევრი (7) გამოსახულებაში წარმოადგენს აღდგენით ტალღას (მოძრავი ობიექტის აღდგენილ გამოსახულებას) G_0, რომელიც ექსპოზიციის დროის გათვალისწინებით შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად /2/:

$$G_0=U_C U_R^*\,\frac{1}{T}\int_0^T U_o(t)\,dt= \\ =U_C U_R^*\,\frac{1}{T}\int_0^T\left\{\exp\left[i\left(4\pi\frac{vt}{\lambda}\right)\right]\right\}dt. \qquad (8)$$

(8)-ე გამოსახულება (2)-ს გათვალისწინებით მიიღებს სახეს

$$G_0=U_C U_R a_0\,\frac{1}{T}\int_0^T\left\{\exp\left[i\left(4\pi\frac{vt}{\lambda}\right)\right]\right\}dt= \\ =U_C U_R^* a_0\,\frac{1}{T}\cdot\frac{\exp\left(i4\pi\frac{vt}{\lambda}\right)}{\left(i4\pi\frac{vt}{\lambda}\right)}\Bigg|_0^T=U_C U_R^* a_0\cdot\frac{\exp\left(i4\pi\frac{vT}{\lambda}\right)-1}{\left(i4\pi\frac{vT}{\lambda}\right)} \qquad (9)$$

გავითვალისწინოთ, რომ (9) გამოსახულებაში ნამრავლი $U_C U_R^*\ a_0$ წარმოადგენს ფაქტიურად უძრავი ობიექტის გამოსახულებას აღმდგენი ტალღების საშუალებით. დავწეროთ აღდგენილი გამოსახულების ინტენსიურობის გამოსახულება მოძრავი ობიექტის შემთხვევაში:

$$J_{ot}=G_0G_0^*=J_0\left[\frac{\exp\left(i4\pi\frac{vT}{\lambda}\right)-1}{i\cdot 4\pi\frac{vT}{\lambda}}\right]^2 \qquad (10)$$

(10)-ე გამოსახულებიდან მივიღებთ მოძრავი ობიექტის აღდგენილი გამოსახულების ფარდობით ინტენსიურობას

$$J_{ფარდ.} = \frac{1-\cos(4\pi\frac{VT}{\lambda})}{8(\pi\frac{VT}{\lambda})^2} = \frac{2\sin^2(2\pi\frac{VT}{\lambda})}{8(\pi\frac{VT}{\lambda})^2} =$$

$$= \frac{\sin^2(2\pi\frac{VT}{\lambda})}{(2\pi\frac{VT}{\lambda})^2} = \operatorname{sinc}^2\left(2\pi\frac{VT}{\lambda}\right), \qquad (11)$$

სადაც

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x},$$

სადაც V - ობიექტის გადაადგილების სიჩქარეა, T - რეგისტრაციის დრო, $\lambda = 0,63$ მკ.მ კოჰერენტული ტალღის სიგრძე.

ზემოთ მიღებული დამოკიდებულება საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ, რეგისტრაციის პროცესში ტალღები, რომელიც გაიბნევა მოძრავი ობიექტიდან, ამ უკანასკნელის გადაადგილებისას $\Delta\ell \geqslant \frac{\lambda}{2}$ მანძილზე, აღდგენილი კოჰერენტული ტალღების ინტენსიურობა მკვეთრად ეცემა.

ფარდობითი ინტენსიურობით მიღებული გამოსახულება სამართლიანია ობიექტის თანაბარი მოძრაობისას იმ პირობით რომ, ობიექტის ზედაპირი იყოს გამბნევადი. ზედაპირი ითვლება გამბნევადად, თუ ის ხორკლიანია, ე.ი. უსწორმასწორობების სიმაღლე მის ზედაპირზე ბევრად დიდია, ვიდრე ტალღის სიგრძე ანდა უსწორმასწორობების საშუალო სიმაღლე $\widetilde{\Delta h} >> \lambda$.

ხორკლიანობის (სიმქისის) სხვადასხვა ხარისხის შეფასება განპირობებულია აღდგენილი გამოსახულების სხვადასხვა ხარისხის განათებით. აღდგენილი გამოსახულების ინტენსიურობის ცვალებადობა დამოკიდებულია როგორც ზედაპირის გადაადგილების სიდიდეზე $\Delta\ell >> VT$, ასევე ზედაპირის ხორკლიანობის სიდიდეზე $\widetilde{\Delta h}$. მცირე ხორკლიანობის შემთხვევაში (1) დამოკიდებულება იქნება სამართლიანი, როცა

$VT<\widetilde{\Delta h}$, $VT>\widetilde{\Delta h}$ მნიშვნელობებისას ფარდობითი ინტენსიურობა არ იცვლება და ტოლია მნიშვნელობისა, როცა $VT=\widetilde{\Delta h}$. ამგვარად, დამოკიდებულებას ზედაპირის $\widetilde{\Delta h}$ ხორკლიანობასა და არეკლილი ტალღების შეფარდობით ინტენსიურობას შორის ექნება (11) გამოსახულების სახე, იმ განსხვავებით, რომ არგუმენტი $VT=\Delta l$ შეიცვლება $\widetilde{\Delta h}$ სიდიდით და მივიღებთ

$$J_{გარ.} = \sin c^2\left(2\pi \frac{\widetilde{\Delta h}}{\lambda}\right). \qquad (12)$$

წარმოვადგინოთ (12) გამოსახულება გრაფიკული სახით. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ობიექტის გადაადგილების სიდიდე მეტია ტალღის სიგრძეზე – $\Delta l >> \lambda$. თუ ხორკლიანობის სიდიდის ცვალებადობა ზღვრებში მოცემული იქნება საზღვრებში $0{,}04\lambda \leq \widetilde{\Delta h} \leq 0{,}4\lambda$, მაშინ (12) თანახმად არეკლილი ტალღების ფარდობითი ინტენსიურობის გრაფიკი თითქმის სწორხაზოვანია და ცალსახა.

როცა $\widetilde{\Delta h} \leq 0{,}04\lambda$ გრაფიკი ხდება ძალზე არასწორხაზოვანი, ხოლო როცა $\widetilde{\Delta h} > 0{,}4\lambda$ გრაფიკი ხდება მრავალსახა. ამგვარად, დამყარდა დამოკიდებულება თავის სიბრტყეში გადაადგილებული ზედაპირის ხორკლიანობასა და არეკლილი ტალღების ფარდობით ინტენსიურობას შორის. არეკლილი ტალღების ინტენსიურობის განსაზღვრას მივყავართ ხორკლიანობის განსაზღვრამდე, ხოლო არეკლილი გამოსახულება შეიცავს ინფორმაციას ობიექტის ზედაპირზე უსწორობების სივრცითი განაწილების შესახებ.

შემოსულია 23.VIII.1993

ქუთაისის ტექნიკური
უნივერსიტეტი

ლიტერატურა

1. T.Ohtsubo, T.Asakura. Opt.Commun. V. 25. 1978, p.315.

2. H.W.Sun Lu, Tr.Hemstreet und H.T.Gould.C. Phisics Letters. V. 25.A, N 4, 1967, pp 294-295.

3. А.Н.Ануашвили. В кн. Оптоэлектронные методы и средства обработки изображений. Винница-Тбилиси; ГПИ, 1987, с.95--99.

Ц.А.Гегучадзе, А.Н.Ануашвили, А.Д.Гецадзе

КОНТРОЛЬ ЗА КАЧЕСТВОМ ПОВЕРХНОСТИ ВО ВРЕМЯ ЕЕ ОБРАБОТКИ

Р е з ю м е

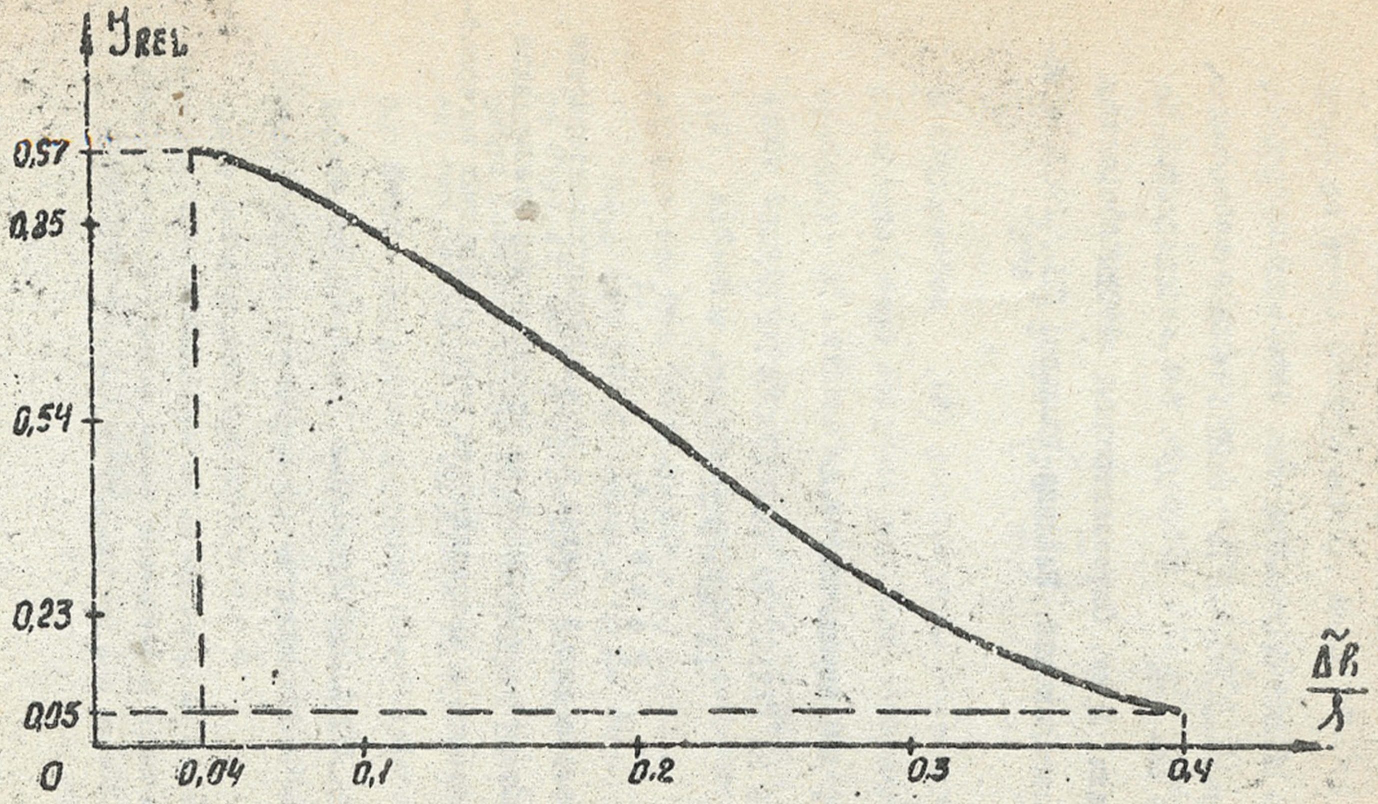
В статье описан новый подход к определению характеристик поверхности объекта основанный на закономерной взаимосвязи перемещения объекта и интенсивности восстановленных когерентных волн.

Ts.Geguchadze, A.Anuashvili, A.Getsadze

CHECKING OF A SURFACE QUALITY DURING ITS PROCESSING

S u m m a r y

In this article a new approach to the determination of the object's surface characteristics is presented, based on the objective interrelation of its displacement and the intensity of restored coherent waves.



ნახ.1. არეკლილი ტალღების ფარდობით ინტენსიობას და ზედაპირის ხორკლიანობის სიდიდეს შორის დამოკიდებულების გრაფიკი

Н.Г. Магнарадзе

(1916-1992)

Нино Георгиевна Магнарадзе

/1916 - 1992 гг./

Грузинская наука понесла тяжелую утрату. 26 мая 1992 года скончалась известный ученый в области небесной механики, доктор физико-математических наук, член редколлегии нашего журнала, профессор Нино Георгиевна Магнарадзе.

Н.Г.Магнарадзе родилась в Новом Сенаки 18 марта 1916 г. в семье юриста. Мать Нино Георгиевны - Мария - была педагогом. После окончания Тбилисского университета в 1939 году Н.Г.Магнарадзе была зачислена в аспирантуру по специальности "небесная механика". Научными руководителями Нины Георгиевны были академик Е.К.Харадзе и проф.Г.Н.Дубошин. В 1947 году в Астрономическом институте им.П.Штернберга Московского университета Н.Г. Магнарадзе защитила кандидатскую диссертацию на тему "О разложении ньютонова потенциала эллиптической орбиты". В 1966 году там же была защищена докторская диссертация на тему: "О движении космического тела с переменной массой в гравитационном поле многих тел".

Нино Георгиевна Магнарадзе - первая женщина в Грузии, которой была присуждена ученая степень доктора физико-математических наук.

С 1969 года она - профессор кафедры астрономии Тбилисского университета им.И.Джавахишвили.

Научное творчество Н.Г.Магнарадзе связано с исследованиями движений космического тела переменной массы (искусственные спутники, метеориты и кометы). В её работах разработан новый эффективный метод решения задач так называемых регулярных (исключены столкновения тел) и нерегулярных (учтены парные столкновения тел) реактивных движений космических тел с переменной массой. Ею исследованы прямые (когда известны массы тел как аналитические функции времени, а их радиус-векторы - неизвестны) и обратные (когда известны радиус-векторы как аналитические функции времени, а их массы неизвестны), задачи движения космических тел с переменной массой в ньютоновом и постньютоновом гравитационном полях при учете сопротивления сред и релятивистских эффектов.

Разработанный Н.Г.Магнарадзе метод дает возможность не только получить аналитическое решение, но и достаточно удобен для его численной реализации на современных вычислительных машинах.

Проф. Н.Г.Магнарадзе являлась членом международного Астрономического Союза.

Почти полвека преподавала Нино Георгиевна в Тбилисском университете, там же вела она и научную деятельность.

Лекции Н.Г.Магнарадзе всегда отличались простотой и оригинальностью. Она воспитала целое поколение астрономов.

За долголетнюю научную и педагогическую деятельность Нино Георгиевна Магнарадзе была награждена медалью им.И.Джавахишвили.

Она оставила рукопись своей монографии, опубликовать которую она хотела на английском языке. Н.Г.Магнарадзе подготовила для опубликования оригинально построенные лекции и специальные курсы, которые читались ею длительное время студентам Тбилисского университета.

Научная и педагогическая деятельность Нино Георгиевны Магнарадзе, ее принципиальность, отзывчивость и скромность снискали ей горячую любовь и уважение всех, кому выпало счастье знать её, работать с ней или учиться у нее.

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ Н.Г.Магнарадзе

I.	О разложении ньютонова потенциала эллиптической орбиты.	Труды Тбилисского гос.университета I950,40,I-34
2.	О сходимости разложения ньютонова потенциала эллиптической орбиты в некоторых граничных точках области сходимости.	Бюллетень Абаст. астрофиз.обсерв., I950,II,I43-I53.
3.	Об оценке остаточных членов разложений ньютонова потенциала эллиптической орбиты.	Бюллетень Абаст. астрофиз.обсерв., I950,II,I55-I6I.
4.	Некоторые замечания к задаче о движении материальной точки под действием силы, зависящей от времени.	Бюллетень Абаст. астрофиз.обсерв., I958,22,I39-I44.
5.	Об ограниченной задаче трех тел, когда притягиваемое тело имеет переменную массу.	Бюллетень Абаст. астрофиз.обсерв., I959,22,I45-I59.
6.	Об одном случае ограниченной задачи трех тел, когда притягиваемое тело имеет переменную массу.	Бюллетень Абаст. астрофиз.обсерв., I96I,26,I9I-2I4.
7.	Об ограниченной пространственной задаче трех тел, когда масса притягиваемого тела является заданной функцией от времени.	Бюллетень Абаст. астрофиз.обсерв., I96I,26,2I5-224.

8. О поступательно-вращательном движении космического тела относительно Земли.	Сборник: Проблемы движения искусственных небесных тел., АН СССР, М., 1963, 278-292.
9. О движении космического тела с переменной массой при полете к Венере.	Бюллетень Абаст., астрофиз. обсерв., 1964, 30, 143-151.
10. О движении космического тела с переменной массой в гравитационном поле многих тел.	Бюллетень Абаст. астрофиз. обсерв. №34 1966, 135-156.
11. О движении космического тела с кусочно-аналитической массой в гравитационном поле многих тел.	Конференция по общим вопросам небесной механики и астродинамики, Москва, 23-29 марта 1967г.
12. Исследование движения тела переменной массы в гравитационном поле многих тел с помощью степенных рядов по регуляризирующей переменной.	Тезисы докл. Совещание рабочей группы по аналитическим методам небесной механики. Ленинград, 3-7 августа 1970г.
13. О движении тела переменной массы в гравитационном поле многих тел вблизи момента соударения.	Тезисы докладов научной конференции, посвященной 50-летию образования СССР, Ереван 158-159, 1967г.
14. О движении тела переменной массы в гравитационном поле многих тел вблизи соударений.	Сообщ. АН ГССР, 68, № I, 1972, 57-60.
15. Исследование движения тела переменной массы в гравитационном поле многих тел с помощью регуляризирующей переменой.	Сообщ. АН ГССР, 68, №2, 1972, 325-328.

16.	О движении космического тела с кусочно-аналитической массой в гравитационном поле многих тел.	Сборник: Современные проблемы небесной механики и астродинамики, Тр. Конференции по общим вопросам небесной механики и астродинамики. АНСССР, М., 1973, 253-256.
17.	Исследование скорости движения тела переменной массы в гравитационном поле многих тел вблизи соударения с учетом сопротивления среды.	Труды Тбилисского гос. университета, 179, 1976, 75-83.
18.	Исследование регулярного движения тел переменных масс в гравитационном поле с учетом релятивистских эффектов.	Бюллетень Абаст. астрофиз. обсерв., 1978, 49, 149-158.
19.	О движении двух тел с переменными массами в ньютоновом гравитационном поле.	Труды Тбилисского гос. университета т. 204, 1978, 13-28.
20.	О релятивистском эффекте при движении многих тел с переменными массами в постньютоновом гравитационном поле.	Труды Тбилисского гос. ун-та, 1981, 218, 183-216.
21.	Исследование обратной задачи теории регулярного движения многих космических тел с переменными массами в ньютоновом гравитационном поле.	Бюлл. Абастум. астрофиз. обсерв., 1986, 61, 231.
22.	Fundamental Problems of the Theory of Motion of Cosmic Bodies with Variable Masses in the Newtonian Gravitational Field. I.	Bull. Abastum. Astrophys. Obs., 1991, N 71, pp. 3-26.

СОДЕРЖАНИЕ

სარჩევი

Contents

გამომცემლობის რედაქტორი ი. აბუაშვილი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 22.12.93

საბეჭდი ქაღალდი 60X84

პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 10,75

სააღრ.-საგამომც. თაბახი 6,2

ტირაჟი 200 შეკვეთის N 17

ფასი სახელშეკრულებო

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის პრ. 14

თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,

თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის პრ. 1