PROCEEDINGS

of Javakhishvili

TBILISI STATE UNIVERSITY

ТРУДЫ

ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

им. Ив. Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის

შრომები

გამოყენებითი მათემატიკა • კომპიუტერული მეცნიერებანი

Applied Mathematics • Computer Sciences

Прикладная математика • Компьютерные науки

ტომი
Volume
Том
330 (19)

Tbilisi   თბილისი   Тбилиси

1998

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის

შრომები

PROCEEDINGS

OF JAVAKHISHVILI TBILISI STATE UNIVERSITY

ТРУДЫ

ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМ. ИВ. ДЖАВАХИШВИЛИ

ტომი
Volume
Том
330 (19)

გამოყენებითი მათემატიკა • კომპიუტერული მეცნიერებანი
Applied Mathematics • Computer Sciences
Прикладная математика • Компьютерные науки

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
Tbilisi University Press
Издательство Тбилисского университета
1998

გამოყენებითი მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტი[1)]

სამეცნიერო-ტექნიკური პროგრესის ეპოქის ერთ-ერთი ძირითადი დამახასიათებელი თავისებურებაა მათემატიკური მეთოდებისა და კომპიუტერების ფართო გამოყენება ადამიანის მოღვაწეობის სხვადასხვა სფეროში. ქურთულებს საწარმოო პროცესს მართავს კომპიუტერი, დიაგნოზს სვამს კომპიუტერი, კომპიუტერი – კონსტრუქტორის თანაავტორი – ასეთი ფრაზები დღეს ძალზე ხშირად გვხვდება სხვადასხვა სამეცნიერო-პოპულარულ ლიტერატურასა თუ ჟურნალ-გაზეთებში. მეცნიერების, ტექნიკის, მეურნეობის ბევრი დარგის მათემატიზაციის პროცესი დაიწყო 50-იან წლებში ელექტრონულ-გამომთვლელი მანქანების (კომპიუტერების) შექმნასა და მათ სწრაფ სრულყოფასთან ერთად. ყოველივე ამან განაპირობა გამოყენებითი მათემატიკისა და ინფორმატიკის საბაზო სამეცნიერო დისციპლინად ფორმირება. დღეისათვის კომპიუტერი და კომპიუტერიზაცია წარმოადგენს სამეცნიერო-ტექნიკური პროგრესის ერთ-ერთ განმსაზღვრელ ფაქტორს. მისი გამოყენება ხელს უწყობს მსგავსი დარგის სწრაფ განვითარებას, ავლენს რთული სისტემების პროექტირების პრინციპულად ახალ შესაძლებლობებს, წარმოებაში დანერგვის ვადების მნიშვნელოვან შემცირებას, უზრუნველყოფს სამრეწველო-ტექნოლოგიურ პროცესთა ოპტიმალური რეჟიმების ამორჩევასა და მართვის სრულყოფისა და შრომის ნაყოფიერების ზრდისათვის სათანადო პირობების შექმნას. კომპიუტერის გარეშე ვერ განხორციელდებოდა მრავალი თანამედროვე მსხვილი სამეცნიერო-ტექნიკური პროექტი (კოსმოსური გამოკვლევები, ატომური ენერგეტიკა, ზებგერითი ავიაცია, ეკონომიკა, ქიმია, ბიოლოგია, ლინგვისტიკა და მრავალი სხვა).

ყოველივე ზემოთქმულიდან ცხადი ხდება, თუ რაოდენ საჭიროა ქვეყნისათვის კადრები, რომელთაც შეუძლიათ იმუშაონ გამოყენებითი მათემატიკის, კომპიუტერული მეცნიერებების სფეროში. საქართველოში ასეთ ფართო პროფილის მაღალკვალიფიციურ კადრებს ამზადებს თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამოყენებითი მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტი. იგი გაიხსნა 35 წლის წინათ. მისი დაარსება არსებითად განაპირობა მიღწევებმა გამოთვლით ტექნიკასა და კიბერნეტიკაში, რომელთა გამოყენებამ ადამიანის მოღვაწეობის თითქმის ყველა სფეროში, განსაკუთრებით ბუნებისმეტყველებისა და ტექნიკის პრობლემების შესწავლასა და გადაჭრაში, გადამწყვეტი როლი შეასრულა, რაც, თავის მხრივ, შეუძლებელი იქნებოდა მათემატიკისა და ფიზიკის გარეშე.

[1)] სტატია მცირეოდენი შემოკლებით თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის 80 წლის იუბილესთან დაკავშირებით დაიბეჭდა „საქართველოს რესპუბლიკაში", 10-11 • 05 • 1998, გვ.10.

როგორც ცნობილია, ქართველ მეცნიერებს მათემატიკასა და ფიზიკაში მიღებული ჰქონდათ ფართოდ აღიარებული შედეგები. 50-იანი წლების სამეცნიერო პრობლემატიკამ ნათლად აჩვენა, რომ მეცნიერების ბევრი დარგის შემდგომი განვითარება შეუძლებელია მრავალდარგოვან კომპლექსურ პრობლემათა კვლევის გარეშე. არსებული ვაკუუმის შევსების აუცილებლობამაც განსაზღვრა კიბერნეტიკის (შემდგომში გამოყენებითი მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა) ფაკულტეტის შექმნა. გადამწყვეტი როლი ამ მიზნის განხორციელებაში შეასრულა აკადემიკოსმა ვლადიმერ ჭავჭანიძემ. ფაკულტეტის პირველი დეკანის მისია დაეკისრა პროფესორ გივი ქანთარიას. აღსანიშნავია, რომ ასეთი ტიპის ფაკულტეტის გახსნა უმაღლეს სასწავლო დაწესებულებაში იყო პირველი და უპრეცედენტო შემთხვევა ყოფილი საბჭოთა კავშირის მასშტაბით.

ფაკულტეტის განვითარებაში ლომის წილი ეკუთვნის აკადემიკოს ილია ვეკუას. მან 1965 წელს შექმნა უმაღლესი მათემატიკის კათედრა. 1971 წელს აკადემიკოს ილია ვეკუას ინიციატივით შეიქმნა ელექტრო-გამომთვლელი მანქანების მათემატიკური უზრუნველყოფის კათედრა. ალბათ, ბევრს გაუკვირდა, რომ დიდი მეცნიერი ამ კათედრას თვითონვე ჩაუდგა სათავეში. მაგრამ, ბატონი ილია ძალიან კარგად გრძნობდა, რომ მხოლოდ მისი აღიარებული ავტორიტეტის წყალობით დაედებოდა საჭირო საფუძველი მეცნიერების ამ უმნიშვნელოვანესი მიმართულების განვითარებას.

ამჟამად გამოყენებითი მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტზე ფუნქციონირებს შვიდი კათედრა: კიბერნეტიკის (საპატიო გამგე აკადემიკოსი ვ. ჭავჭანიძე), სტრუქტურული და გამოყენებითი ლინგვისტიკის (გამგე აკადემიკოსი თ. გამყრელიძე), უმაღლესი მათემატიკის (გამგე პროფესორი რ. კორძაძე), ეგმ-ის მათემატიკური უზრუნველყოფის (გამგე პროფესორი ჰ. მელაძე), შემთხვევით პროცესთა თეორიის (გამგე საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტი ნ. ვახანია), მართვის თეორიის (გამგე აკადემიკოსი გ. ხარატიშვილი), საბუნებისმეტყველო და ჰუმანიტარულ დარგებში მათემატიკური მეთოდების გამოყენების (გამგე დოცენტი ნ. ჯიქია). ფაკულტეტზე ფუნქციონირებს ფიზიკური კიბერნეტიკის პრობლემური სამეცნიერო-კვლევითი ლაბორატორია და მათემატიკური მოდელირების სასწავლო-სამეცნიერო ლაბორატორია.

ფაკულტეტის ძირითადი სამეცნიერო მიმართულებაა ბუნებისმეტყველების, ტექნიკისა და ეკონომიკის პრობლემათა მათემატიკური მოდელირება, ინფორმაციის მიღება და დამუშავება, თეორიისა და პრაქტიკისათვის მნიშვნელოვანი ამოცანების რეალურ დროში გამოკვლევა და გადაწყვეტა, თანამედროვე ენათმეცნიერების თეორიულ პრობლემათა კვლევა.

სპეციალისტები მზადდება ოთხი სპეციალობით: ინფორმატიკა, გამოყენებითი მათემატიკა, მენეჯმენტის ინფორმაციული ტექნოლოგიები და გამოყენებითი

ლინგვისტიკა. სწავლება ორ ეტაპიანია: პირველი ეტაპის (4 წელი) გავლის შემდეგ კურსდამთავრებული მიიღებს შესაბამისად ან გამოყენებითი მათემატიკის, ან ინფორმატიკის, ან გამოყენებითი ლინგვისტიკის ბაკალავრისა და ამასთან ერთად – ინფორმატიკისა და მათემატიკის მასწავლებლის კვალიფიკაციას; სათანადო მონაცემებისა და სურვილის მქონე ახალგაზრდებს მეორე ეტაპის (2 წელი) შემდეგ, მიეცემათ საშუალება მოიპოვონ სათანადო სპეციალობაში მაგისტრის ხარისხი.

ფაკულტეტის საბაზო დაწესებულებებია: უნივერსიტეტის ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ნ. მუსხელიშვილის სახელობის გამოთვლითი მათემატიკის, კიბერნეტიკისა და მართვის სისტემების ინსტიტუტები. ამასთან ერთად, გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტში ფუნქციონირებს ელექტრო–გამოთვლითი მანქანების მათემატიკური უზრუნველყოფის კათედრის ფილიალი.

აღნიშვნის ღირსია სტუდენტთა ზოგიერთი წარმატება: 1988–89წ. საკავშირო ოლიმპიადებში გაიმარჯვეა პროგრამირების სპეციალიზაციის სტუდენტებით დაკომპლექტებულმა გუნდმა. სტუდენტები აქტიურად მონაწილეობენ სამეცნიერო კონფერენციებში, აქვეყნებენ ნაშრომებს როგორც საქართველოში, ისე საზღვარგარეთ, სტუდენტებთა მოწინავე ნაწილი შეთავსებით მუშაობს ქვეყნის სხვადასხვა სამინისტროსა და ბანკის ქვედანაყოფებში, რომელთათვისაც ისინი მათემატიკური და პროგრამული უზრუნველყოფის სფეროში ქმნიან არსებითად საჭირო პროდუქციას.

ფაკულტეტზე ფუნქციონირებს მოსამზადებელი განყოფილება, რომელიც დაკომპლექტებულია ფიზიკა–მათემატიკური და ზოგად–საგამანათლებლო სკოლების ფიზიკა–მათემატიკური პროფილის კლასების მოწინავე მოსწავლეებით. I კურსზე მისაღები კონტინგენტის ნახევარი სწორედ ამ მოსამზადებელი განყოფილებიდან ირიცხება.

თბილისის უნივერსიტეტის იუბილეს გამოყენებითი მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტი ხვდება მნიშვნელოვანი წარმატებებით, ასევე – თავისი პრობლემებითაც; ხვდება ამის სრული შეგნებით, რომ არსებითად ამ პრობლემათა წარმატებით გადაწყვეტაზეა დამოკიდებული ჩვენს მიერ გამოშვებულ ახალგაზრდა სპეციალისტთა კვალიფიკაცია. ეს კი, გადაუჭარბებლად შეიძლება ითქვას, მნიშვნელოვანწილად განსაზღვრავს ქვეყნის პროგრესს.

ჰამლეტ მელაძე
გამოყენებითი მათემატიკისა და
კომპიუტერულ მეცნიერებათა
ფაკულტეტის დეკანი, პროფესორი

ჩვენი ჟურნალის ამ ნომერში გამოქვეყნებული ყველა სტატია წაკითხულ იქნა უნივერსიტეტის 80 წლისთავისადმი მიძღვნილ სამეცნიერო კონფერენციაზე: „გამოყენებითი მათემატიკისა და ინფორმატიკის აქტუალური პრობლემები", რომელიც გაიმართა 1998 წლის 22–23 მაისს.

მიმდინარე წლიდან ჩვენს ჟურნალში სტატიათა რეცენზირება ხდება დაფარულად, რომლის შესახებ ინფორმაცია ინახება რედკოლეგიაში.

გამოყენებითი მათემატიკა • APPLIED MATHEMETICS • ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

О РАСЩЕПЛЕНИИ ВЕКТОРА ПОТОКА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Р. Бочоришвили[*)] *Н. Элканишвили*[**)]

[*)] Кафедра информатики и вычислительной математики
[**)] Кафедра математического обеспечения ЭВМ

В работе рассматриваются пространственно-одномерные уравнения мелкой воды. Введён т.н. обобщённый вектор потока, с помощью которого строится численный поток. Параметры расщепления подобраны для модельных нелинейных скалярных законов сохранения из условия равномерной ограниченности приближённого решения соответствующей полудискретной схемы.

1. УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ.

Система уравнений мелкой воды в пространственно-одномерном случае имеет вид:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial F(Q)}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$Q=\begin{pmatrix}\rho\\ m\end{pmatrix}, F(Q)=\begin{pmatrix}\rho\\ \dfrac{m^2}{\rho}+g\rho^2\end{pmatrix}, \tag{2}$$

здесь ρ - уровень воды, $u=m/\rho$ - скорость течения, g - ускорение свободного падения, m - импульс.

2. ОБОБЩЁННЫЙ ВЕКТОР ПОТОКА И АППРОКСИМАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Метод расщепления вектора потока был предложен в работе [1], как обобщение известной схемы Куранта-Изааксона-Рисса для уравнений газовой динамики. Суть этого подхода состоит в представлении вектора-потока рассматриваемого уравнения в виде: $F(Q)=F^+(Q)+F^-(Q)$, где якобиан $\nabla F^+(Q)$ имеет неотрицательные собственные значения, а $\nabla F^-(Q)$ - неположительные собственные значения. Далее, для аппроксимации пространственных производных $\dfrac{\partial F^+}{\partial x},\dfrac{\partial F^-}{\partial x}$, применяются соответствующие односторонние разностные отношения, которые в результате определяют численный поток:

$$H_{j+1/2}=F^+(Q_j)+F^-(Q_{j+1}). \tag{3}$$

Следуя подходу, предложенному в [2],[3], в настоящей работе для уравнений мелкой воды (1), (2) предлагается обобщённый вектор-поток:

$$\Phi(\nu,Q)=c\rho\nu_1\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_1^2\end{pmatrix}+c\rho\nu_2\begin{pmatrix}\lambda_2\\ \lambda_2^2\end{pmatrix}, \tag{4}$$

где ν_1,ν_2 - параметры расщепления, зависящие от λ_1,λ_2 соответственно: $\lambda_1=u-c,\ \lambda_2=u+c,\ c=\sqrt{2g\rho}$, а c - скорость звука.

Заметим, что в случае $\nu_1,\nu_2=1$ обобщённый вектор-поток совпадает с $F(Q)=\Phi(\nu,Q)$. Кроме того, вектор $\Phi(\nu,Q)$ построен так, что первый член учитывает вклад первого собственного числа, а второй - второго собственного числа в формировании обобщённого потока. В отличие от (3) численный поток с помощью (4) определяется следующим образом:

$$H_{j-1/2}=\Phi\left(\nu^{+}_{j-1/2},Q_j\right)+\Phi\left(\nu^{-}_{j+1/2},Q_{j+1}\right), \tag{5}$$

где $\nu^{\pm}_{j+1/2}=\left(\nu^{\pm}_{1j+1/2},\nu^{\pm}_{2j+1/2}\right)$.

Легко проверить, что условия совместимости имеют вид:

$$\nu^{+}_{1j+1/2}+\nu^{-}_{1j+1/2}=1,\ \ \nu^{+}_{2j+1/2}+\nu^{-}_{2j+1/2}=1. \tag{6}$$

Ясно, что условия (6) недостаточны для определения $\nu^{\pm}_{j+1/2}$. Поэтому следующим шагом является выбор параметров расщепления.

3. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ РАСЩЕПЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ.

В качестве модельного уравнения рассмотрим нелинейный скалярный закон сохранения:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial f(V)}{\partial x}=0,\quad f\in C. \tag{7}$$

Для уточнения параметров расщепления достаточно рассмотреть полудискретную схему:

$$\frac{dV_j}{dt}+\frac{H_{j+1/2}-H_{j-1/2}}{h}=0, \tag{8}$$

где h - шаг дискретизации по пространству, $H_{j+1/2}$ - численный поток, который по аналогу (5) определяется по формуле:

$$H_{j+1/2}=\nu^{+}_{j+1/2}f\left(V_j\right)+\nu^{-}_{j-1/2}f\left(V_{j+1}\right), \tag{9}$$

условия совместимости имеют вид:

$$\nu^{+}_{j+1/2}+\nu^{-}_{j+1/2}=1. \tag{10}$$

Естественно, чтобы параметры расщепления $\nu^{\pm}$ уточнялись из требования равномерной ограниченности L^1 и L^∞ норм приближённого решения (7), построенного с помощью полудискретного уравнения (8)-(10).

Соответствующее исследование проводится для задачи Коши с существенно-ограниченными начальными данными с компактным носителем. Это даёт возможность ограничиться в (8) конечным числом уравнений и рассмотреть начальное условие:

$$V_j(0) = V_j^0, \ \ \left|V_j(0)\right| \le k_1 = const, \ \ \sum_j h\left|V_j^0\right| \le k_2 = const, \tag{11}$$

а в качестве граничных данных взять нуль.

Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Если*

$$\nu^-_{j+1/2} = -sign\frac{f(V_{j+1}) - f(V_j)}{V_{j+1} - V_j}, \tag{12}$$

то для решения (8)-(11) справедливы оценки:

$$\left|V_j(t)\right| \le k_1, \tag{13}$$

$$\sum_j h\left|V_j(t)\right| \le k_2. \tag{14}$$

Отметим, что условия (12) недостаточны для выбора параметров расщепления в случае систем уравнений. Для обобщения метода выбора параметров расщепления в случае систем уравнений удобнее, чтобы $\nu^\pm$ зависели от производных потока f в узловых точках, а не в промежуточных между узлами, как это происходит в случае (12). Следующие леммы определяют параметры расщепления именно таким образом.

ЛЕММА 2. *Если*

$$\nu^+_{j+1/2} f'_j \ge 0, \ \ \nu^-_{j+1/2} f'_{j+1} \le 0, \tag{15}$$

то для решения (8)-(11) имеет место оценка (14). Если кроме того выполняется условие:

$$\nu^+_{j+1/2} f'_j + \nu^-_{j+1/2} f'_{j+1} \ge \nu^-_{j-1/2} f'_j - \nu^+_{j-1/2} f'_{j-1},$$

то имеет место и оценка (13).

Заметим, что если $f'_j \cdot f'_{j-1} \ge 0$, тогда (12) можно заменить на $\nu^+_{j+1/2} = \left(1 + \mathrm{sign}\left(f'_j\right)\right)/2$, что приемлемо для обобщения в случае системы. Поэтому остаётся рассмотреть случай $f'_j \cdot f'_{j+1} \ge 0$.

ЛЕММА 3. *Пусть* $f'\left(V_j\right) \cdot f'\left(V_{j+1}\right) < 0$. *Если параметры расщепления* $\nu^\pm_{j-1/2}$ *удовлетворяют уравнению:*

$$k^{+}_{j+1/2}\left|f'_j\right| = k^{-}_{j+1/2}\left|f'_{j+1}\right|; \quad \nu^{+}_{j+1/2} + \nu^{-}_{j+1/2} = 1,$$

$$\nu^{+}_{j+1/2} = k^{+}_{j+1/2}\,sign\left(f'_j\right); \qquad \nu^{-}_{j+1/2} = -k^{-}_{j+1/2}\,sign\left(f'_{j+1}\right),$$

то имеют место оценки (13),(14).

4 ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ.

Полудискретная схема для уравнений мелкой воды определяется по формулам (4), (5), (8). Заметим, что λ_1, λ_2 определяют характеристики системы (1), (2), как это делает f' в случае скалярного закона (7).Так как согласно леммам 1-3 параметры расщепления зависят только от значений f' в узловых точках, то в случае (4), (5), (8) можно определить их по формулам:

$$\nu^{+}_{ij+1/2} = \begin{cases} (1 + sign(\lambda_i(Q_j))/2, \lambda_i(Q_j)\lambda_i(Q_{j+1}) > 0 \\ k^{-}_{ij+1/2}.sign(\lambda_i(Q_j)), \lambda_i(Q_j)\lambda_i(Q_{j+1}) < 0 \end{cases},$$

где $k^{+}_{ij+1/2}$ определяется из решения системы уравнений:

$$k^{+}_{ij+1/2}\left|\lambda_i(Q_j)\right| = k^{-}_{ij+1/2}\left|\lambda_i(Q_{j+1})\right|,$$

$$\nu^{+}_{ij+1/2} + \nu^{-}_{ij+1/2} = 1,$$

$$\nu^{-}_{ij+1/2} = -k^{-}_{ij+1/2}.sign(\lambda_i(Q_{j+1})).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Steger J.L, Warming R.F. *Flux splitting of the inviscid gas dynamic equations with applications to finite difference methods*, J.Comp.Phys., V.**40**, 1981, pp.263-293.

[2] Bochorishvili R., Elkanishvili N. *On flux splitting for ideal gas dynamic equations*, Reports, Enlarged Sessions of Seminar of Vekua Institute of Applied Mathematics, Vol.**13**, No.3, 1997.

[3] Bochorishvili R., Elkanishvili N. *Flux splitting for gas dynamic equations with Bertlo type equations of state*, CGMII, Short Communications, 1997.

მარჩხი წყლის განტოლებებისათვის ნაკადის ვექტორის გახლეჩის შესახებ

რ. ბოჭორიშვილი, ნ. ელკანიშვილი

განხილულია სივრცით ერთგანზომილებიანი მარჩხი წყლის განტოლებები. შემოტანილია ე.წ. განზოგადებული ნაკადის ვექტორი, რომლის საშუალებითაც ხდება რიცხვითი ნაკადის აგება.

მოდელური არაწრფივი სკალარული შენახვის კანონების შესაბამისი ნახევრად დისკრეტული სქემით აგებული მიახლოებითი ამონახსნის თანაბარი შემოსაზღვრულობის პირობიდან შერჩეულია გახლეჩის პარამეტრები. შემდეგ, მიღებული შედეგების საფუძველზე, გახლეჩის პარამეტრები განისაზღვრება მარჩხი წყლის განტოლებათა სისტემისათვის.

К ВОПРОСУ СХОДИМОСТИ МЕТОДА СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ

З. Гегечкори

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

В банаховом пространстве рассматривается абстрактная задача Коши для операторного уравнения эволюционного типа. Доказывается сходимость метода слабой аппроксимации при равномерной кусочной корректности факторизованной задачи.

В банаховом пространстве B рассмотрим абстрактную задачу Коши:

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad t \in [\Theta, T], \tag{1}$$

$$u(\Theta) = u_0. \tag{2}$$

Здесь A - неограниченный линейный оператор при каждом $t \in [0,T]$ допускающий замкнутое расширение. Область определения $D(A)$ всюду плотна в B, u_0 - заданный элемент из B.

Пусть U_{t_1} - множество элементов u_0 из B, $\overline{U}_{t_1} \equiv B$, таких, что для каждого из них задача (1), (2) при $\Theta = t_1$ однозначно разрешима в классе гладких решений. Тогда можно ввести линейный оператор перехода $S(t_2,t_1)$, ставящий в соответствие каждому элементу $u_0 \in U_t$ значение гладкого решения задачи (1), (2) в точке t_2:

$$u(t_2) = S(t_2,t_1)u_0, \quad 0 \le t_1 \le t_2 \le T, \tag{3}$$

$$u_0 = u(t_1).$$

Функцию вида $u(t) = S(t,\Theta)u_0$, $u_0 \in B$, будем называть обобщенным решением задачи (1), (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Задача (1), (2) называется корректной в B, если:*

1) при каждом $u_0 \in U_\Theta$ существует единственное гладкое решение задачи (1), (2) и $\overline{U}_\Theta \equiv B$,

2) оператор перехода $S(t_2,t_1)$ обладает следующими свойствами:

а) $S(t_2,t_1) = S(t_2,t_3)S(t_3,t_1)$, $0 \le t_1 \le t_3 \le t_2 \le T$, *б)* $\|S(t_2,t_1)\| \le M(T)$, $0 \le t_1 \le t_2 \le T$,

в) $S(t,t) = I$,

г) оператор $S(t_2,t_1)$ *сильно непрерывен по* t_1,t_2 *в треугольнике* $0 \le t_1 \le t_2 \le T$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Задача (1), (2) называется кусочно-корректной, если существует конечное разбиение интервала* $[0,T]$: $[T_0,T_1]..[T_{n-1},T_n]$, $T_0 = 0$, $T_n = T$, *такое, что на каждом из подинтервалов* $[T_k,T_{k+1}]$, $k = 0,\dots,n-1$ *задача (1), (2) корректна.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Корректная задача (1), (2) называется равномерно корректной, если*

$$\|S(t_2,t_1)\| \le e^{\alpha(t_2-t_1)} \tag{4}$$

для всех t_1,t_2, $0 \le t_1 \le t_2 \le T$, *где* α *- константа, зависящая только от* T.

Семейство операторов, удовлетворяющих условиям равномерной корректности, очевидно,образует полугруппу класса C_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Семейство кусочно-непрерывных функций* $f_\tau(t)$ *слабо аппроксимирует по* t *в интервале* $[0,T]$ *кусочно-непрерывную функцию* $f(t)$, *если*

$$\int_{t_1}^{t_2} (f_\tau(\Theta) - f(\Theta))d\Theta = \delta(\tau,t_1,t_2)$$

и $\|\delta\| \to 0$ *при* $\tau \to 0$ *и любых* $t_1,t_2 \in [0,T]$.

Для операторов введем определение слабой аппроксимации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Оператор (семейство операторов)* A_τ *слабо аппроксимирует по* t *в интервале* $[0,T]$ *оператор* A *на классе функций* V, *если функция (семейство функций)* $v_\tau(t) = A_\tau u(t)$ *слабо аппроксимирует функцию* $v(t) = Au(t)$, $\forall u(t) \in V$.

Пусть оператор A представим в виде

$$A = \sum_{i=1}^{p} A_i . \tag{5}$$

В дальнейшем будем рассматривать оператор

$$A_\tau = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(\tau, t) A_i \tag{6}$$

который слабо аппроксимирует оператор A на классе функций

$$V \equiv \left\{ u(t) \left| \begin{array}{l} a)\ u(t) \in \bigcap_{i=1}^{p} D(A_i),\ \ b)\ u(t) \in C(0,T;B), \\ A_i u(t) \text{ - кусочно - непрерывны по } t,\ i = 1,2,\ldots,p \end{array} \right. \right\},$$

если функции $\alpha_i(t,\tau)$ со значениями в R_1 кусочно-непрерывны по t, равномерно по t, τ ограничены и удовлетворяют условию

$$\frac{1}{\tau} \int_{t}^{t+\tau} \alpha_i(\tau, \Theta) d\Theta \to 1 \ \text{ при } \tau \to 0 \tag{7}$$

равномерно по t, $i = 1,\ldots,p$.

Введем разностную сеточную область :

$$\overline{\omega}_\tau = \left\{ t_j = j\tau, j = 0,1,\ldots,n-1, n = \left[\frac{t}{\tau}\right], t \in [0,T] \right\}.$$

Каждый из отрезков $[t_j, t_{j+1}]$ разобьем на p (по числу измерений) равных частей, вводя промежуточные (дробные) моменты времени

$$t_{j+\frac{i}{p}} = t_j + \frac{i}{p}\tau,\ i = 1,2,\ldots,p,\ \ j = 0,1,\ldots,n-1.$$

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим задачу:

$$\frac{du_\tau}{dt} = A_\tau u_\tau,\quad t \in [\Theta, T], \tag{1'}$$

$$u_\tau(\Theta) = u_0 . \tag{2'}$$

Под решением задачи (1'), (2') будем понимать функцию $u_\tau(t)$, построенную следующим образом [1]:

$$u_\tau(t) = S_\tau(t) u_0 = (S_p \ldots S_1)^n u_0 = T^n u_0 , \tag{8}$$

где $T(\tau)$ - оператор решения, определённого в промежутке $\left[t_j, t_{j+1}\right]$, $S_1,\dots,S_p$ - операторы решения, порожденные операторами $\alpha_i A_i$ соответственно.

Справедливы следующие лемма и теорема:

ЛЕММА. *Пусть* $S(t)$ *линейный оператор, такой, что* $\left\|S^n(t)\right\| \le e^{\alpha t}$. *Тогда* $\left\|e^{t(S-I)}\right\| \le e^{\alpha t}$ *и* $\forall \varphi \in B$ *имеет место неравенство*

$$\left\|\left(e^{t(S-I)} - S^n\right)\varphi\right\| \le e^{2\alpha t} \sqrt{n} \left\|(S-I)\varphi\right\|.$$

ТЕОРЕМА. *Если задача (1'), (2') равномерно кусочно корректна, то решение* $u_\tau(t)$ *сходится к обобщенному решению задачи (1), (2) в сильной операторной топологии.*

Вышеупомянутые лемма и теорема являются, в определённом смысле, обобщением соответствующих результатов работ [2]–[3].

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Яненко Н.Н., *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.* Новосибирск, Наука. 1967.

[2] Trotter H. *Approximation of semi-groups of operators*. Pacific J. Math. V.8 (1958), pp. 887-919.

[3] Рогава Дж., *Полудискретные схемы для операторных дифференциальных уравнений.* Тбилиси. Из-во ТГУ, 1995.

სუსტი აპროქსიმაციის მეთოდის კრებადობისთვის

ზ. გეგეჭკორი

ბანახის სივრცეში ევოლუციური ტიპის ოპერატორული განტოლებისათვის განხილულია კოშის აბსტრაქტული ამოცანა. დამტკიცებულია სუსტი აპროქსიმაციის მეთოდის კრებადობა, როდესაც გახლეჩილი ამოცანა უბან-უბან თანაბრად კორექტულია.

SOME NEW MATHEMATICAL PROBLEMS OF THE THEORY OF NONLINEAR ELASTICITY

Tamaz S. Vashakmadze

Computer Software Subfaculty

In the report on STAMM-94 (see [5]) we formulated some mathematical problems of nonlinear solid mechanics when piezoelectricity and electric conductive creeping thermo-dynamic elastic beams, plates and shallow shells with small or finite deformations subjected to electromagnetic fields are anisotropic and non-homogeneous. Below we continue to adduce some new results which substantiate possibility of research and solving of the mathematical problems. Here we study problems connected with thermoelasticity and homogeneity of Vekua shell theory.

1. ON THE PROBLEM OF THERMOELASTICITY

Let us consider for clearness a statical state of isotropic homogeneous media when on the surfaces $S^{\pm}$ the boundary conditions have the classical form:

$$l^{\pm}[u]=\sigma_{i3}+\sigma_{j3}u_{i,j}=g_i^{\pm},\quad \vartheta=T-T_0=g_4^{\pm},\quad x\in S^{\pm}.$$

In this case the corresponding system of differential equations is split (see e.g. [1]) and it's necessary to add to the system of s.s. 2.1 ([4]) the averaged equation with respect to the function $\vartheta(x_1,x_2,x_3)$.

Before constructing the unknown equation, we have to remember the remark ([1], p.74): "thus, in a simple connected freely medium, being in conditions of a plane deformation or generalized plane stress state, a stationary temperature field without thermal sources doesn't provoke stresses $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_{12}$. This result in case of plane deformation for the first time was established by [2]".

Below, *basing on some conclusions of s.2 [4] and Green functions, we construct 2-dimensional Helmholz's differential equation with small parameter, the presence of which proves, that in case of an elastic plate even without thermal sources in Ω_h there may arise important redistributions of a temperature, that denote to quantitative changes of a right hand site of an equilibrium equation (1.1)* (here and below the formulae of this type and some notions are taken by [4]).

Thus, we consider Poisson equation, corresponding to the function $\vartheta=\vartheta(u_1,u_2,u_3)$:

$$\nabla^2\vartheta=f_4,\quad \vartheta\big|_S=g_4. \tag{1}$$

From this equation immediately follows:

$$\vartheta(x_1,x_2,z_3)=\frac{h+z}{2h}g_4^{+}+\frac{h-z}{2h}g_4^{-}-\int_{-h}^{h}k(z,t)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}\,dt, \tag{2}$$

$$k(z,t)=\begin{cases}(h-z)(h+t), & t\le z,\\ (h+z)(h-t), & t\ge z,\end{cases}\quad k(z,t)=k(t,z). \tag{3}$$

In its turn, the last equation gives:

(4)

If we change the integrating order in the last member, from (4) follows:

$$\overline{\vartheta}(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\left(g_4^+ + g_4^-\right)-\frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\left(h^2-t^2\right)\left[\Delta\vartheta(x_1,x_2,t)-f(x_1,x_2,t)\right]dt .$$

Using the parametrical representation of integrals with weight h^2-t^2 from s.2 (see (2.16) [4]), we shall have:

$$\frac{(1+2\gamma)h^2}{3}\overline{\vartheta}-\overline{\vartheta}=\frac{h^2}{3}f_4^*-\frac{1}{2}\left(g_4^+ + g_4^-\right)+R_1[\vartheta;\gamma], \tag{5}$$

where $\overline{\vartheta}$ is averaged value in the integral sense of $\vartheta=\vartheta(x_1,x_2,z)$,

$$R_1(\vartheta;\gamma)=-\frac{1}{2h}\left[(1-\gamma)\rho_{sm}+\gamma\rho_{tr}\right]\left[t\int_0^t\Delta\vartheta(x_1,x_2,t)dt\right]$$

It's easy to show, that exact nonlocal representation type (5) is true also for the deflection averaged by Reissner:

$$\vartheta^*=\frac{3}{4h^3}\int\left(h^2-t^2\right)\vartheta(x_1,x_2,t)dt .$$

The above considered procedure finally gives such an exact nonlocal representation for ϑ^*:

$$h^2\frac{1+2\gamma}{3}\Delta\vartheta^*-\vartheta^*=\frac{h^2}{4}f_4^*+\frac{g_4^+ + g_4^-}{2}+R\left(\vartheta;p_m(x_3)\right).$$

Here

$$\vartheta^*(x_1,x_2)=\int_{-h}^{h}p_m(t)\vartheta(x_1,x_2,t)dt,\quad \int_{-h}^{h}p_m(t)dt=1,\quad \int_{-h}^{h}p_m'(t)dt=0 .$$

$p_m(t)$ are polynomials of m order, f_4^* is an averaged function of fourth component of the right hand side of initial three-dimensional system. For the remainder term R the following estimation holds

$$\left\|R_2(\vartheta;p_m)\right\|_{L_2(D)}\le ch^4\left\|\partial_{33}\vartheta\right\|_{L_2(\Omega_h)} .$$

Here $c>0$ (independent of h and ϑ) is constant.

REMARK 1. *The cases, when the density of thermal flux is given or it is lacking on the* $S^{\pm}$, *are investigated analogously by scheme of s.3 [4] as the problem of construction of averaged with respect to* ϑ^{*} *is same.*

REMARK 2. *The dynamical case is investigated here and below immediately if we apply the method of s.s. 3.2. [4].*

2. ON HOMOGENEITY OF VEKUA THEORY OF PLATES AND SHALLOW SHELLS

The method of reducibility of the initial problem to the investigation of the operational equation of the comparatively simple structure is given in the paper on the example of one class of Vekua differential equations. In recent times the domain of application of Vekua theory of elastic plates and shells has been expanded.

Let Ω_h be a three-dimensional domain, corresponding to an isotropic non-homogeneous, with respect to thickness elastic of plates or shells. Then, if we denote by symbol $L(\partial_1,\partial_2)$ Vekua's differential operator, and by η the parameter-measure of non-homogeneity and anisotropy, also, if we denote by symbol $M(\partial_1,\partial_2)$ the disturbance operator, then the problem of the elasticity theory of shells and plates can be written in the form $(\forall N<+\infty)$:

$$\left(L(\partial_1,\partial_2)-\eta M(\partial_1,\partial_2)\right)u(x_1,x_2)=0,\quad (x_1,x_2)\in D. \tag{6}$$

Below depending on the context we shall also assume that the averaged by Vekua conditions given on $S=\partial D\times\left]-h,h\right[$ are included in the formula (6).

As we have already mentioned in the monograph [3] on the basis of the asymptotic method, the solution of the initial problem is reduced to the successive solution of more simple problems. In our opinion, the method stated in [3] requires the further justification to prove the correctness of the mentioned process.

The way, stated below, differs from the methodology of the works of the kind [3]. Instead of asymptotic representation or Fourier-Legendre incomplete series, we use the expression

$$u=\gamma\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x_1,x_2)P_k(\eta/h)+(1-\gamma)\sum_{k=0}^{\infty}v_k(x_1,x_2)(\eta/h)^k. \tag{7}$$

Below we consider the case when $\gamma=1$, (see [6]). Evidently, when $\gamma=0$, we may apply well-known asymptotic procedure (see e.g. [3]) to an operator-equation (6).

If we denote $\eta=\tau h$, then (6) taking into account (7), by method of Galerkin-Vekua we have:

$$
\begin{aligned}
&L(\partial_1,\partial_2)u_0-\frac{1}{3}\hbar M(\partial_1,\partial_2)u_1=0 \\
&L(\partial_1,\partial_2)u_i-\hbar M\left[\frac{i}{2i-1}u_{i-1}+\frac{i+1}{2i+3}u_{i+1}\right]=0 \qquad (i=1,2,\ldots)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

The following theorem holds true.

THEOREM 1. *Let the number of equations in system (8) be finite* $(n<\infty)$. *Then finding the solution (if (6) are BVP)or general solution (if (6) are system of PDE) closed in the inversion of the operator* L *n- times and the application operator* $\hbar M$ *to the solution* φ *of an equation* $L\varphi=f$, *where* f *are known functions formulated by recursive processes.*

REFERENCES

[1] Kovalenko A., (1975), *Thermoelasticity.* Kiev: Visha Shkola.

[2] Muskhelishvili N., (1916), *On thermal stresses in the planar BVP of theory elasticity.* Petrograd: Izvestia elektrotekhnicheskogo Instituta,v. **13**: 23-37.

[3] Oleinik O., Iosifian G., Shamaev A., (1990), *Mathematical problems of theory of strong non-homogeneous elastic medium.* Moscow University Press.

[4] Vashakmadze T., (1986), *Some Problems of the Mathematical Theory of Anisotropic Elastic Plates.* Tbilisi University Press.

[5] Vashakmadze T., (1995), *Some Mathematical Problems of the Theory of Nonlinear Elasticity.* Trends in Appl. of Math. to Mech. Pitman. Monographs & Surv. Pure and Appl. Math. **77**, Longman: 348-357.

[6] Vashakmadze Tamaz, Vashakmadze Tamara, (1993). *On homogeneity of Vekua theory of plates and shells for anizotropic nonhomogeneous mediums.* Reports of enlarged session of the seminar of VIAM,v. **8,** N2: 107-110.

დრეკადობის არაწრფივი თეორიის ზოგიერთი მათემატიკური პრობლემის შესახებ

თ. ვაშაყმაძე

სტატიაში [5] ფორმულირებულია მყარი გარემოს მექანიკის რიგი ზოგიერთი გადაუწყვეტელი პრობლემებისა. შრომაში გადმოცემული შედეგები აფუძნებს ამ პრობლემათა რიგი საკითხების გამოკვლევისა და გადაწყვეტის შესაძლებლობას, დაკავშირებულს თერმოდრეკად ფირფიტათა დაზუსტებული თეორიების აგებასა და თხელ არაერთგვაროვან გარსთა ვეკუას თეორიის შესაბამის სასაზღვრო ამოცანის ჰომოგენიზირებასთან.

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ХАРАКТИСТИКАМИ

М. Ментешашвили

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

Рассматривается обратная задача Коши для гиперболического квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка с параболическим вырождением. Доказывается теорема о существовании решения задачи.

В плоскости переменных x, y рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned}&(u_y^2 - x^2)u_{xx} - 2(u_x u_y - xy)u_{xy} + (u_x^2 - y^2)u_{yy} = \\ &= (-yu_y^3 - xu_x u_y^2 + 3x^2 yu_y - x^3 u_x)/x^2.\end{aligned} \tag{1}$$

Уравнение (1) гиперболического типа всюду, за исключением множества точек, где справедливо соотношение $xu_x - yu_y \neq 0$. При выполнении этого равенства уравнение параболически вырождается. Соответствующие характеристические инварианты задаются следующим образом:

$$\begin{cases} u + xy = const, \\ \dfrac{p - y}{q - x} = const. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} u - xy = const, \\ \dfrac{p + y}{q + x} = const. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $p \equiv u_x$, $q \equiv u_y$ - известные обозначения Монжа.

В отличие от линейных уравнений, как известно [1],[2], семейства характеристических линий заранее не определены, поскольку они зависят от значения первых производных искомого решения . Следовательно, множество параболического вырождения заранее не определяется и зависит от искомого решения u, в частности от поведения производных решения по переменным x, y. Поэтому семейства характеристических кривых можно представить в виде однопараметрических семейств, только нужно потребовать, чтобы вдоль них не были нарушены соотношения (2) и (3) соответственно.

Допустим, два однопараметрических семейства плоских кривых-линий определены соотношениями

$$y = \varphi_1(x, c), \tag{4}$$

$$y = \varphi_2(x, c), \tag{5}$$

где φ_1, φ_2 - заданные, дважды непрерывно дифференцируемые функции по переменному x для любого значения действительного параметра c. Будем считать, что каждая кривая семейства (4) пересекает прямую $y = 0$ и любую кривую семейства (5). Притом подразумеваем, что как одно, так и второе семейство не имеют особых точек. Через D_1 обозначим ту часть плоскости, которую полностью покрывает заданное уравнением (4) семейство характеристических кривых, когда параметр c непрерывно пробегает все действительные значения. Аналогично, через D_2 обозначим ту часть плоскости, которую полностью покрывают характеристические линии, заданные уравнением (5), а через D - их пересечение $D = D_1 \bigcap D_2$.

Пусть $I = D \bigcap \{y = 0\}$.

Рассмотрим следующий вариант обратной задачи:
найти начальные значения регулярного решения u уравнения (1) τ и его производной по направлению нормали ν, если семейства плоских кривых, заданных уравнениями (4), являются характеристическими, соответствующими инвариантам (2), а семейство (5) является характеристическим, соответствующим инвариантам (3).

ТЕОРЕМА *Если* $\varphi_1'(x, c_1) - \varphi_2'(x, c_2) \neq 0, \forall c_1, c_2 \in R^1$, *тогда существует решение задачи (1), (4), (5), притом функция* ν *определяется однозначно, а* τ *- с точностью постоянной слагаемой.*

Доказательство. Пусть кривая семейства (4), соответствующая параметру c^*, пересекает прямую $y = 0$ в точке x_0: $\varphi_1(x, c^*) = 0$. Из этого уравнения решением параметра $c^* = c(x_0)$ достигается представление семейства (4) с помощью функции $y = \varphi_1(x, x_0)$, которая принимает нулевое значение при $x = x_0$. Если семейство (4) соответствует инвариантам (2), то выполняется соотношение $\dfrac{d\varphi_1(x,x_0)}{dx}=-\dfrac{p(x,\varphi_1(x,x_0))+\varphi_1(x,x_0)}{q(x,\varphi_1(x,x_0))+x}$. Аналогично, вдоль второго семейства характеристик (5) имеем: $\dfrac{d\varphi_2(x,x_0)}{dx}=-\dfrac{p(x,\varphi_2(x,x_0))-\varphi_2(x,x_0)}{q(x,\varphi_2(x,x_0))-x}$.

Если в последних равенствах точку $(x_0,0)$ будем считать произвольной на интервале I, тогда легко определяем неизвестные фунции τ' и ν. Естественно, τ определяется с точностью произвольной постоянной интегрирования. Теорема доказана.

❑

Когда семейства (4) и (5) не имеют общих направлений ни в одной точке, т.е. когда уравнение (1) строго гиперболического типа, тогда решение обратной задачи не представляет большой трудности. Если уравнение на некотором множестве точек параболически вырождается, тогда картина диаметрально меняется. Для иллюстрации приводим случай, когда семейства характеристических кривых (4), (5) имеют общие огибающие и заданы в виде

$$x=\varphi_1(y,c)\equiv c-a\left(\frac{a}{y+b}\right)^{1/2},\quad -b\le y\le a-b, \tag{6}$$

$$x=\varphi_{21}(y,c)\equiv c+a\left(\frac{a}{y+b}\right)^{1/2},\quad -b\le y\le a-b,\ \ a>b>0,\ \ c=const. \tag{7}$$

В каждой точке прямой $y=a-b$ проходит одна характеристическая кривая семейства (6) и гладко продолжается с той же точки вполне определенной кривой семейства (7). Следовательно, оба характеристических направления в точках этой прямой совпадают. Поэтому, прямая $y=a-b$ является линией параболического вырождения для уравнения (1). Также, $y=-b$ является линией параболического вырождения, так как все характеристики обоих семейств касаются прямой в бесконечности. Соотношения относительно τ' и ν имеют вид:

$$\frac{\tau'(x)}{\nu(x)+1}=-\frac{2b^2}{a^2}\left(\frac{a-b}{b}\right)^{1/2},\quad \frac{\tau'(x)}{\nu(x)-1}=\frac{2b^2}{a^2}\left(\frac{a-b}{b}\right)^{1/2},$$

откуда находим значения этих функций.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гвазава Д.К., *О зонах влияния начальных данных для решения нелинейных вырождающихся гиперболических уравнений,* Соврем. проблемы мат. физики. Труды Всес. симп., Тбилиси, 22-2 апр., 1987, т.1. - Тбилиси, 1987, с. 166-173.

[2] Бицадзе А.В., *Некоторые классы уравнения в частных производных,* М., Наука, 1981.

კოშის შექცეული ამოცანის ერთი ვარიანტის შესახებ კვაზიწრფივი ნამდვილმახასიათებლებიანი განტოლებისათვის

მ. მენთეშაშვილი

განხილულია კოშის შექცეული ამოცანა მეორე რიგის კვაზიწრფივი ნამდვილმახასიათებლებიანი დიფერენციალური განტოლებისათვის. დამტკიცებულია ამოცანის ამოხსნის არსებობა.

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ТИМОШЕНКО

В. Одишария

Кафедра кибернетики

Доказывается существование обобщенного решения одномерной задачи для системы Тимошенко.

Описанный в работах [1],[2] метод позволяет из системы (1.75)-(1.79), приведённой в [3], получить одномерный вариант нелинейной системы Тимошенко.

Статическую деформацию пластинки при отсутствии горизонтальной нагрузки можно описать следующей системой уравнений [3]:

$$\begin{aligned} &N' = 0, \\ &Q' + \left(Nw'\right)' + q = 0, \\ &M' - Q = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$N = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[u' + \frac{1}{2}(w')^2\right], \quad Q = k_0^2\frac{Eh}{2(1+\nu)}(\Psi + w'), \quad M = D\Psi',$$

причем u, w, Ψ - искомые, а q - заданная функции от аргумента $x \in [0,1]$. E, h и k_0^2 -известные положительные постоянные, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, $0 < \nu < 0{,}5$.

Пусть заданы следующие краевые условия:

$$u(0) = u(1) = 0, \quad w(0) = w(1) = 0, \quad \Psi(0) = \Psi(1) = 0. \tag{2}$$

Из (1), (2) получается самостоятельная задача относительно w, следующего вида [4]:

$$\Phi(w) = 0, \tag{3}$$

$$w(0) = w(1) = 0, \tag{4}$$

где

$$\Phi(\mathrm{v}) = \left(\gamma_0 + \gamma_1 \int_0^1 (\mathrm{v}')^2\, dx\right)\mathrm{v}'' + \gamma(x, \mathrm{v}) + q,$$

$$\gamma_0 = k_0^2 \frac{Eh}{2(1+\nu)}, \quad \gamma_1 = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}, \quad \alpha^2 = \frac{6\, k_0^2 (1-\nu)}{h^2},$$

$$\gamma(x, \mathrm{v}) = \alpha^2 \gamma_0 \mathrm{v} - \frac{\alpha^3 \gamma_0}{sh\alpha}\left[ch\alpha(1-x)\int_0^x \mathrm{v}(\xi) ch\alpha\xi d\xi + ch\alpha x \int_x^1 \mathrm{v}(\xi) ch\alpha(1-\xi) d\xi\right].$$

Остальные искомые функции u и Ψ исходной задачи (1)-(2) могут быть найдены с помощью формул:

$$u = \frac{x}{2}\int_0^1 (w')^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^x (w'(\xi))^2 d\xi,$$

$$\Psi = \frac{\alpha^2}{sh\alpha}\left[sh\alpha(1-x)\int_0^x w(\xi) ch\alpha\xi d\xi - sh\alpha x \int_x^1 w(\xi) ch\alpha(1-\xi) d\xi\right].$$

Обобщенным решением задачи (3),(4) назовем функцию $w \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,1) \cap W_2^2(0,1)$, которая удовлетворяет равенству

$$(\Phi(w), \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,1) \cap W_2^2(0,1).$$

ТЕОРЕМА. *Пусть* $q \in L_2(0,1)$. *Тогда существует решение* $w \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,1) \cap W_2^2(0,1)$ *задачи (3),(4).*

Приближенное решение w_n *задачи (3),(4) может быть найдено методом Бубнова-Галеркина. Совокупность приближенных решений* w_n *слабо* *компактна в* $\overset{0}{W}{}^1_2(0,1)\cap W^2_2(0,1)$. *Каждый слабый предел* w_n *есть обобщенное решение задачи (3), (4).*

Для доказательства теоремы строится последовательность приближений $\{w_n\}$., $n=1,2,..$ вида

$$w_n=\sum_{i=1}^{n} w_{n_i} v_i\,,\quad v_i=\sin i\pi x\,.$$

Коэффициенты w_{n_i} определяются из следующей системы алгебраических уравнений:

$$(\Phi(w_n), v_i)=0,\quad i=1,2,...n.$$

Далее, устанавливается разрешимость данной системы и выводится априорная оценка для w_n. После этого проверяется возможность предельного перехода при $n\to\infty$ в $(\Phi(w_n), v_i)=0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Перадзе Д.Г., *О решении динамической системы одномерных уравнений Тимошенко*, Труды конференции "Современные проблемы кибернетики и прикладной математики" 21-23 декабря 1987г., Тбилиси, Изд-во Тбилис. гос. ун-та, 1991. с.49-52.

[2] Одишария В.Ш., *Об одной краевой задаче для одномерной системы Тимошенко*, Труды Тбилисского государственного университета, 1993, 316(16), с.25-34.

[3] Вольмир А.С., *Нелинейная динамика пластинок и оболочек*. М. Наука, 1972.

[4] Перадзе Д.Г., *Интегро-дифференциальное представление системы одномерных уравнений Тимошенко*. Тезисы докладов конференции "Методы решения интегральных, дифференциальных и операторных уравнений". Тарту, 1987, с. 31-32.

ერთგანზომილებიანი ამოცანა ტიმოშენკოს არაწრფივი სისტემისათვის

ვ. ოდიშარია

ტიმოშენკოს მოდელით აღწერილი დრეკადი ფირფიტის სტატიკური დაძაბულ–დეფორმირებული მდგომარეობის განსაზღვრის ამოცანისათვის მტკიცდება არაწრფივი ერთგანზომილებიანი ამოცანის განზოგადებული ამონახსნის არსებობა. მიახლოებითი ამონახსნის ასაგებად გამოიყენება ბუბნოვ–გალიორკინის მეთოდი და მტკიცდება მისივე კრებადობა.

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR POISSON EQUATIONS WITH NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS

Nana Odishelidze

Computer Software Subfaculty

In this paper the optimal control problem for Poisson equation with non-local boundary conditions and quadratic functional is considered. Using the operators of exact difference schemes the difference scheme for the numerical solution of optimal control problem is constructed. The convergence of the difference scheme has been proven.

1. STATEMENT OF THE PROBLEM

The optimal control problem for Poisson equation with non-local boundary conditions is the generalization of Bitsadze-Samarski problem [1].

Let $\overline{D}$ be a rectangle $\overline{D}=[0,l_1]\text{x}\,[0,l_2]$, U the boundary of the rectangular domain, $\gamma=\{(l_1,y):0\le y\le l_2\}$ and $\gamma_m=\left\{\left(\overset{m}{x},y\right):0\le y\ge l_2\right\}$, $\overset{m}{x}$ - the such fixed points of the interval $]0,l_1[$, $m_s=m_1,\ldots,m_n$, that $\left[\overset{m_i}{x},\overset{m_{i-1}}{x}\right]$-are commensurable segments, V some open subset in R and U_{ad} the set of control functions $v:D\to V$, $v\in L_2(D)$. Let us consider the non-local boundary problem for Poisson equation for each fixed $v\in U_{ad}$ in the domain D:

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-u=a(x,y)v+b(x,y),\qquad (x,y)\in D \tag{1}$$

$$u(x,y)=0,\quad (x,y)\in\Gamma\setminus\gamma,$$

$$u(l_1,y)=\sum_{m=m_1}^{m_n}\sigma_m u(\overset{m}{x},y),\quad 0\le y\le l_2, \tag{2}$$

where $a\in L_\infty(D)$, $b\in L_2(D)$, $\sum\limits_{m=m_1}^{m_n}\sigma_m<1$, $\sigma_m=const>0$. Similarly as in [2], it can be shown, that the solution of the problem (1)-(2) exists and unique and belongs to Sobolev space $H^2(D)$. Let us consider the functional:

$$I(v) = \iint_D \left[c(x,y)u - z_d\right]^2 dxdy + \iint_D N(x,y)v^2 dxdy \tag{3}$$

where: $c \in L_\infty(D)$, z_d is a given element, $z_d \in L_2(D)$, $0 < N \in L_\infty(D)$.

The necessary and sufficient condition of the optimality in a maximum principle form has been obtained.

THEOREM 1. *Let $N(x,y)>0$ and ψ_0 be a solution of the adjoint problem*

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \psi = -2c(x,y)\left(c(x,y)u_0 - z_d\right),$$
$$\left(x,y\right) \in D \setminus \sum_{m=m_1}^{m_n}\gamma_m \tag{4}$$

$$\psi\left(x,y\right) = 0, \quad \left(x,y\right) \in \Gamma, \tag{5}$$

$$\psi_x(\overset{m}{x}{}^-,y) - \psi_x(\overset{m}{x}{}^+,y) = \sigma_m\psi_x(l_1,y), \ 0 \le y \le l_2, \ m = m_1,\dots,m_n,$$

then for $\left(u_0, v_0\right)$ to be optimal it is necessary and sufficient that the following relation be true almost everywhere on D:

$$2N\left(x,y\right) - a\left(x,y\right) = 0 \tag{6}$$

2. The existence and uniqueness of the solution of the optimal control problem

Let us the control domain V coincide with the space R. On the basis of obtained conditions of optimality the proof of the existence and uniqueness of the solution of the problem (1)-(3) is reduced to a proof of the existence and uniqueness of the solution of the following system (1)-(2), (4)-(5), (6). The solution $\left(u,\psi\right)$ of this system exists, is unique and belongs to Sobolev spaces

$$u \in H^2, \psi \in \overset{0}{H}{}^2\left(D \setminus \sum_{m=m_1}^{m_n}\gamma_m\right) \bigcap \overset{0}{H}{}^1(D).$$

3. The difference scheme

Using the operators of exact difference schemes [3] the difference scheme for numerical solution of the optimal control (1)-(3) is constructed. We shall use the denotations from [3,4].

$$v_{\bar{x}_1x_1} + v_{\bar{x}_2x_2} - v = ry + T_1T_2b, \qquad x \in \omega, \tag{7}$$

$$v(x_1, x_2) = 0, \qquad x \in \Gamma_h \setminus \gamma_h,$$

$$v(l_1, x_2) = \sum_{m=m_1}^{m_n} \sigma_m v\left(\overset{m}{x_1}, x_2\right), \quad x_2 \in \omega_2,$$

$$r = T_1 T_2 \frac{a^2(x_1, x_2)}{2N(x_1, x_2)},$$

$$R = T_1 T_2 2c^2$$

$$y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} - Qy, = \sum_{m=m_1}^{m_n} \sigma_m \delta_h\left(\overset{m}{x_1} - x_1\right) y_{\bar{x}_1}(l_1, x_2) - Rv + T_1 T_2 2c z_d, \ x \in \omega, \quad (8)$$

$$y(x) = 0, \ x \in \Gamma_h,$$

4. THE CONVERGENCE OF THE DIFFERENCE SCHEME

The solution of the difference scheme (7)-(8) exists and is unique.

THEOREM 2. *The solution of the difference scheme (7)-(8) converges to the exact solution according to the net norm* $H^1\left(\omega, \overset{m}{x}, \rho\right), \dot{H}^1(\omega)$ *with* $O\left(\sqrt{h}\right)$ *rate convergence, where* $h = \max(h_1, h_2)$.

REFERENCES

[1] Bitsadze A.V., Samarski A.A., *On some simplest generalizations of linear elliptic problems,* Papers of Academy of Sciences of USSR, **185**(1969), No. 2, pp.739-740

[2] Ii'in V.A., Moiseev E.I., *2-d non-local boundary value problem for Poisson's operator in differential and difference variants,* Mathematical modeling, **2**(1990), No. 8, pp.1422-1431.

[3] Samarski A., Lazarov R. D., Makarov V. L., *Difference scheme for differential equations with generalized solution,* 1987, -Moscow, Vishaia Shkola, 296p.

[4] Gordeziani D.G., *On solution method of one non-local boundary problems class,* (Rotaprint), Tbilisi University Press, 1981, 32p.

ოპტიმალური მართვის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის შესახებ პუასონის განტოლებისათვის არალოკალური სასაზღვრო პირობებით

ნ. თ. ოდიშელიძე

განხილულია ოპტიმალური მართვის ამოცანა პუასონის განტოლებისათვის არალოკალური სასაზღვრო პირობებით და კვადრატული ფუნქციონალით, რომლისთვისაც ზუსტი სხვაობიანი სქემების ოპერატორების გამოყენებით აგებულია რიცხვითი ალგორითმები. დამტკიცებულია შესაბამისი სქემის კრებადობა.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГОРНЫХ ОБВАЛОВ И ОПОЛЗНЕЙ БОЛЬШИХ ОБЪЕМОВ

Н. Схиртладзе[*)] *Г. Хелидзе*[**)] *А. Чантурия*[*)]

[*)] Кафедра математического обеспечения ЭВМ

[**)] НИИ энергетики Грузии

Построены математическая модель горных обвалов и оползней больших объемов и соответствующий алгоритм численной реализации. Конкретные расчеты проведены для оползня Ток (Италия, 1963 г).

Математическое моделирование горных обвалов и оползней больших объемов является актуальной проблемой для прогноза возможных стихийных обвалов в потенциально опасных районах, а также для оценки степени подвижности потока горной массы, сбрасываемой взрывами при строительстве инженерных сооружений в горных ущельях. Горные обвалы, оползни-обвалы и оползни объемом в $10^6 м^3$ обычно смещаются с большой скоростью и захватывают склоны на глубину до 100-500 м, перемещая потоки и массивы на большие расстояния, измеряемые километрами, и захватывая противоположные склоны ущелья.

Для количественного описания таких явлений будем считать, что в начальный момент смещающаяся часть массива мгновенно дробится и превращается в «жидкость», которая затем «стекает» со склона. Для объяснения же природы эффекта повышенной подвижности крупных обвалов воспользуемся законом сухого трения между потоком обломков твердых тел и подстилающей поверхностью, предложенным С.С. Григоряном [1].

В данной статье предполагается, что путь обломочного потока состоит из трех основных участков: а) начального участка движения обломочной массы по горному склону, где местный уклон русла к горизонту $\varphi = \varphi(x) > 0$, $x \in [0, S_1]$ и предельное значение удельной силы трения σ_* принимает максимально возможные значения; б) транзитного участка $\varphi = \varphi(x) = 0$, $x \in (S_1, S_2)$, где поток движется по рыхлым накоплениям, ледникам, снежникам и σ_* принимает меньшее значение; в) конечного участка, $\varphi = \varphi(x) < 0$, $x \in [S_2, S_3]$, предпологая, что поток подымается на противоположный начальному склон (рис.1), где x - координата вдоль траектории потока, S_1, S_2, S_3-координаты соответствующих участков.

Таким образом, можно дать следующую математическую формулировку для задачи крупномасштабных обвальных потоков, имеющих большую скорость и малый, по сравнению с их начальной массой, дополнительный захват по пути движения, в векторной форме:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(Q) = W(Q), \tag{1}$$

где

$$Q = (J, H)^T, \quad J = Hu, \quad F(Q) = [Ju + 0.5gH^2, J]^T,$$

$$W(Q) = \left[\left(gH\sin(\varphi) - \left(\frac{\sigma}{\rho} + \frac{K_v u^2}{2}\right)\right) sign(u), 0\right]^T.$$

Начальные условия: $u(x,0) = u_0(x), H(x,0) = H_0(x) \quad x \in [0, S_3]$. (2)

Граничные условия: $u(0,t) = u_1(t), H(0,t) = H_1(t) \quad t \in [0, T]$. (3)

Здесь t-время, $u(x,t)$-осредненная по поперечному сечению потока скорость, ρ-средняя плотность обвального потока, g-ускорение силы тяжести, K_v-коэффициент «гидравлического» сопротивления, $u_0(x)$ и $H_0(x)$-распределения скорости и толщины смещающейся породы в начальный момент времени, соответственно.

Учитывая структуру математической модели (1)-(3), для численного решения задачи можно использовать разностную схему расщепления вектора потока (РВП) [2]. Центрально-разностая схема РВП, которая естественным образом вводит необхоимую долю "искусственной" вязкости, имеет вид:

$$q^{n+1} = q^n - \tau\left\{(f(q))_{\overset{\circ}{x}} - 0.5h(\widetilde{f}(q))_{x\bar{x}}\right\} + w(q), \tag{4}$$

где τ, h-шаги временной и пространственной сеток; n-номер временного слоя; q, $f(q)$, и w являются разностными аналогами соответствующих функций; для первых разностных производных используются известные обозначения; $\widetilde{f} = f^+ - f^-$, $\widetilde{f}^{\pm} = 0.5(f \pm \widetilde{f})$; а расщепленные векторы потока имеют вид:

$$f^{+}(q)=\frac{H}{2}\begin{bmatrix} u(u+|u|+c+0.5c^{2} \\ u+|u|+c \end{bmatrix},\qquad f^{-}(q)=\frac{H}{2}\begin{bmatrix} u(u-|u|-c)+0.5c^{2} \\ u-|u|-c \end{bmatrix};$$

$c=\sqrt{gH}$ скорость распространения возмущений в потоке.

При реализации приведенных разностных схем, как обычно, учитывается условие устойчизости Куранта-Фридрихса-Леви.

Приведенный выше подход реализован на примере оползня Ток, обрушение которого произошло в водохронилище Вайонт (Италия) в 1963 г. [3]. Его следствием явился перелив 70-метрового слоя воды через плотину, повлекший за собой катастрофические последствия в нижнем бьефе.

Нами были проведены численные расчеты для двух поперечных сечений каньона, соответственно вблизи плотины и вблизи верхней границы оползня. Результаты расчетов иллюстрируются на рис.2 и 3, где показаны перемещение оползневой массы вблизи плотины; изменение его профиля и скорости оползневой массы в течение 100 сек. от начала движения до остановки оползневой массы. Результаты расчетов достаточно хорошо совпадают с количественными данными, приведенными в [3].

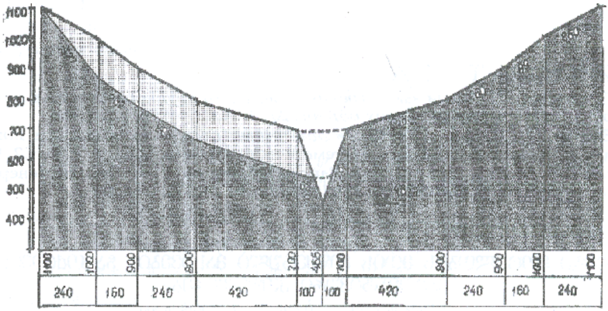

Рис.1

3.

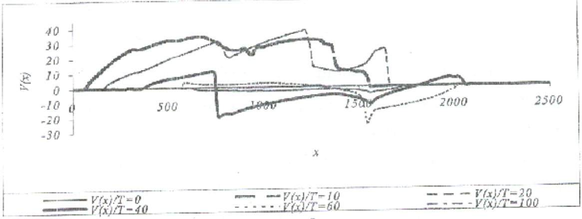

Рис. 2

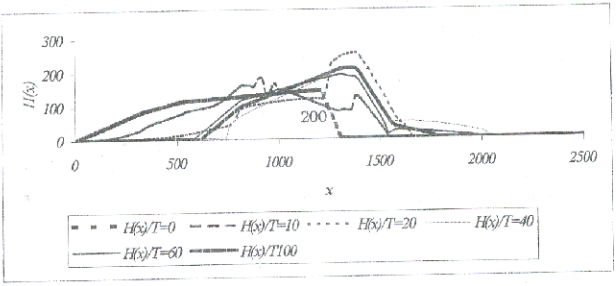

Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

[1] Григорян С.С., *Новый закон трения и механизм крупномасштабных горных обвалов и оползней больших объмов*, ДАН СССР.–1979, т.224, №4.

[2] Евсеев Е.Г., Шония В.В., *Разностные схемы расщепления вектора потока для уравнения мелкой воды*, Математическое моделирование. 1990. т.2. №3.

[3] Мюллер Л., *Оползень в долине Вайонт*, Сб. статей "Проблемы инженерной геологии", вып.4. Изд-во "Мир", М.,1967.

დიდი მოცულობის მთის მეწყერული მასივების ჩამოქცევის მათემატიკური მოდელირება

ნ. სხირტლაძე, გ. ხელიძე, ა. ჭანტურია

აგებულია დიდი მოცულობის მთის მეწყერული მასივების უეცარი ჩამოქცევის მათემატიკური მოდელი და მისი რიცხვითი რეალიზაციის ალგორითმი. კონკრეტული გათვლები ჩატარებულია ტოკის მეწყერისათვის (იტალია, 1963წ).

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ТИМОШЕНКО

Дж. Перадзе

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

Изучен вопрос сходимости алгоритма для задачи о вибрации балки.

1. ВВЕДЕНИЕ.

Рассматривается начально-краевая задача относительно функций w и ψ:

$$w_{tt}=\left(cd-a+b\int_0^1 w_x^2dx\right)w_{xx}-cd\psi_x,$$
$$\psi_{tt}=c\psi_{xx}-c^2d(\psi-w_x), \qquad (1)$$
$$0<x<1,\ 0<t\le T,$$
$$w_t(x,0)=w^{(1)}(x),\ \ w_x(x,0)=w^{(2)}(x),$$
$$\psi_t(x,0)=\psi^{(1)}(x),\quad \psi(x,0)=\psi^{(2)}(x), \qquad (2)$$
$$w_t(0,t)=w_t(1,t)=0,\ \ \psi_t(0,t)=\psi_t(1,t)=0,$$
$$0\le x\le 1,\ \ 0\le t\le T,$$

описывающая вибрацию балки в модели Тимошенко [1],[2]. Здесь a,b,c,d - некоторые положительные постоянные, причем $cd-a>0$, а $w^{(l)}(x),\psi^{(l)}(x)$- заданные функции, $l=1,2$.

Введем функции $u=w_t, v=w_x, f=\psi_t, \varphi=\psi_x$ и, исходя из (1), (2), сформулируем задачу в следующем виде:

$$u_t=\left(cd-a+b\int_0^1 v^2dx\right)v_x-cd\varphi,$$
$$v_t=u_x,\qquad f_t=c\varphi_x-c^2d(\psi-v), \qquad (3)$$
$$\varphi_t=f_x,\qquad \psi_t=f,$$
$$u(x,0)=w^{(1)}(x),\quad v(x,0)=w^{(2)}(x),\quad f(x,0)=\psi^{(1)}(x),$$
$$\varphi(x,0)=\psi_x^{(1)}(x),\ \ \psi(x,0)=\psi^{(2)}(x), \qquad (4)$$
$$u(0,t)=u(1,t)=0,\qquad f(0,t)=f(1,t)=0.$$

Алгоритм приближённого решения задачи (3), (4) состоит из трех частей.

2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

На отрезке $[0,1]$ вводится сетка с шагом $h=\dfrac{1}{N}$ и узлами

$x_j = jh, j = 0,1,..,N$. В качестве приближений искомых функций берутся

$$u_h = \sum_{i=1}^{N-1} u_i(t)\omega_{hi}(x),\ v_h = \sum_{j=0}^{N} v_j(t)\omega_{hj}(x),$$

$$f_h = \sum_{i=1}^{N-1} f_i(t)\omega_{hi}(x), \quad \varphi_h = \sum_{j=0}^{N} \varphi_j(t)\omega_{hj}(x), \tag{5}$$

$$\psi_h = \sum_{j=0}^{N} \psi_j(t)\omega_{hj}(x),$$

где ω_{hk} - кусочно-линейные финитные функции, $k = 0,1,\dots N$. Произвольным функциям вида

$$\lambda_h = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i(t)\omega_{hi}(x), \qquad \mu_h = \sum_{j=0}^{N} \mu_j(t)\omega_{hj}(x)$$

поставим в соответствие векторы

$$\underline{\lambda_h}(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t),\dots\lambda_{N-1}(t))', \quad \underline{\mu_h}(t) = (\mu_0(t), \mu_1(t),\dots \mu_N(t))'. \tag{6}$$

Функции $u_i(t), v_j(t), f_i(t), \varphi_j(t), \psi_j(t)$ из (5), $i = 1,2,\dots N-1$, $j = 0,1,\dots N$, определяются из следующей системы Галеркина:

$$M\,\underline{u_{ht}} = \left(cd - a + bh\underline{v_h}'K\underline{v_h}\right)Q\underline{v_h} - cdL\underline{\varphi_h},$$

$$K\underline{v_{ht}} = -Q'\underline{u_h}, \qquad M\underline{f_{ht}} = cQ\underline{\varphi_h} - c^2dL\left(\underline{\psi_h} - \underline{v_h}\right), \tag{7}$$

$$K\underline{\varphi_{ht}} = -Q'\underline{f_h}, \qquad K\underline{\psi_{ht}} = L'\underline{f_h},\ 0 < t \le T,$$

где матрицы

$$K = \frac{1}{h}\left(\left(\omega_{hi}, \omega_{hj}\right)\right)_{0\le i,j\le N}, \quad L = \frac{1}{h}\left(\left(\omega_{hi}, \omega_{hj}\right)\right)_{1\le i\le N-1, 0\le j\le N},$$

$$M = \frac{1}{h}\left(\left(\omega_{hi}, \omega_{hj}\right)\right)_{1\le i,j\le N-1,}\ Q = -\frac{1}{h}\left(\left(\omega_{hix}, \omega_{hj}\right)\right)_{1\le i\le N-1, 0\le j\le N},$$

и через (.,.) обозначено скалярное произведение в $L^2(0,1)$.

Система (7) дополняется начальными условиями, означающими, что векторы

$$\underline{u_h}(0), \underline{v_h}(0),\ \underline{f_h}(0), \underline{\varphi_h}(0), \underline{\psi_h}(0) \text{ заданы.} \tag{8}$$

Доказывается сходимость метода со скоростью $O\left(h^{3/2}\right)$ в смысле нормы $\|\lambda\|_h^2 = h\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2, \quad \lambda \in R^k$.

Для струны Тимошенко конечноэлементная полудискретизация по x реализована в работе [3].

3. СХЕМА ТИПА КРАНКА-НИКОЛСОНА.

На отрезке времени введем сетку $\{t_n \in [0,T] | 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_P = T\}$ при шаге $\tau_n = t_n - t_{n-1}$, $n = 1,2,\ldots,P$. Приближенное значение векторов вида (6) при $t = t_n$ обозначим через $\underline{\lambda_h^n}, \underline{\mu_h^n}$, $n = 0,1,\ldots,P$.

Для решения задачи (7), (8) воспользуемся разностной схемой

$$M\left(\underline{u_h^n} - \underline{u_h^{n-1}}\right) = \frac{\tau_n}{4}\left\{2(cd-a) + bh\left[\left(\underline{v_h^n}\right)' K\underline{v_h^n} + \left(\underline{v_h^{n-1}}\right)' K\underline{v_h^{n-1}}\right]\right\} Q\left(\underline{v_h^n} + \underline{v_h^{n-1}}\right) -$$

$$-\frac{\tau_n cd}{2} L\left(\underline{\varphi_h^n} + \underline{\varphi_h^{n-1}}\right),$$

$$2K\left(\underline{v_h^n} - \underline{v_h^{n-1}}\right) = -\tau_n Q'\left(\underline{u_h^n} + \underline{u_h^{n-1}}\right),$$

$$M\left(\underline{f_h^n} - \underline{f_h^{n-1}}\right) = \frac{\tau_n c}{2} Q\left(\underline{\varphi_h^n} + \underline{\varphi_h^{n-1}}\right) - \frac{\tau_n c^2 d}{2} L\left(\underline{\psi_h^n} + \underline{\psi_h^{n-1}} - \underline{v_h^n} - \underline{v_h^{n-1}}\right), \quad (9)$$

$$2K\left(\underline{\varphi_h^n} - \underline{\varphi_h^{n-1}}\right) = -\tau_n Q'\left(\underline{f_h^n} + \underline{f_h^{n-1}}\right),$$

$$2K\left(\underline{\psi_h^n} - \underline{\psi_h^{n-1}}\right) = \tau_n L'\left(\underline{f_h^n} + \underline{f_h^{n-1}}\right), \; n = 1,2,\ldots,P,$$

при начальных условиях

$$\underline{u_h^0} = \underline{u_h}(0) + \Delta\underline{u_h}(0), \;\; \underline{v_h^0} = \underline{v_h}(0) + \Delta\underline{v_h}(0), \;\; \underline{f_h^0} = \underline{f_h}(0) + \Delta\underline{f_h}(0),$$

$$\underline{\varphi_h^0} = \underline{\varphi_h}(0) + \Delta\underline{\varphi_h}(0), \;\; \underline{\psi_h^0} = \underline{\psi_h}(0) + \Delta\underline{\psi_h}(0). \quad (10)$$

Здесь $\Delta\underline{u_h}(0), \Delta\underline{v_h}(0)$, $\Delta\underline{f_h}(0), \Delta\underline{\varphi_h}(0), \Delta\underline{\psi_h}(0)$ - абсолютные погрешности начальных условий (8).

Получена оценка погрешности метода (9), (10) $\underline{y_h^n} - \underline{g_h}(t_n)$, $n = 1,2,\ldots,P$,

$$\underline{y_h^n} = \left(\underline{u_h^n}, \underline{v_h^n}, \underline{f_h^n}, \underline{\varphi_h^n}, \underline{\psi_h^n}\right)', \;\; \underline{g_h}(t_n) = \left(\underline{u_h}(t_n), \underline{v_h}(t_n), \underline{f_h}(t_n), \underline{\varphi_h}(t_n), \underline{\psi_h}(t_n)\right)'.$$

4. ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС.

В результате дискретизации по переменным x и t задача сводится к решению системы нелинейных уравнений:

$$A\left(\underline{y_h^n} - \underline{y_h^{n-1}}\right) = \frac{\tau_n}{2}\left(B + S\left(\underline{v_h^n}\right) + S\left(\underline{v_h^{n-1}}\right)\right)\left(\underline{y_h^n} + \underline{y_h^{n-1}}\right), \quad (11)$$

где $n = 1,2,\ldots,P$, а $A, B, S -$ матрицы, определяемые формулами:

$A = diag(M, 2K, M, 2K, 2K)$, $B = (B_{ij})_{1 \le i,j \le 5}, B_{12} = (cd-a)Q$, $B_{14} = -cdL$,

$B_{21} = B_{43} = -2Q'$, $B_{32} = -B_{35} = c^2 dL$, $B_{34} = cQ$, $B_{53} = 2L'$, остальные $B_{ij} = 0$,

$S\left(\underline{v_h^k}\right) = \left(S_{ij}^k\right)_{1 \le i,j \le 5}$, $k = n-1, n$, $S_{12}^k = \frac{hb}{2}\left(\underline{v_h^k}\right)' K\underline{v_h^k} Q$, остальные $S_{ij}^k = 0$.

Если в (11) вести счет от $(n-1)$-го слоя к n-ому, применяя на каждом слое итерационний метод, то вместо (11) будем иметь

$$A\left(\underline{y_{h,R}^{n}}-\underline{y_{h,R}^{n-1,F}}\right)=\frac{\tau_n}{2}\left(B+S\left(\underline{v_{h,R}^{n}}\right)+S\left(\underline{v_{h,R}^{n-1,F}}\right)\right)\left(\underline{y_{h,R}^{n}}+\underline{y_{h,R}^{n-1,F}}\right), \qquad (12)$$

где $\underline{y_{h,R}^{n-1,F}}=\left(\underline{u_{h,R}^{n-1,F}},\underline{v_{h,R}^{n-1,F}},\underline{f_{h,R}^{n-1,F}},\underline{\varphi_{h,R}^{n-1,F}},\underline{\psi_{h,R}^{n-1,F}}\right)'$ - последнее (финальное) итерационное приближение $\underline{y_h^{n-1}}$ с $(n-1)$-го слоя, $\underline{y_{h,R}^{n}}=\left(\underline{u_{h,R}^{n}},\underline{v_{h,R}^{n}},\underline{f_{h,R}^{n}},\underline{\varphi_{h,R}^{n}},\underline{\psi_{h,R}^{n}}\right)'$ - решение (реальное) уравнения (11), получаемое в результате замены $\underline{y_h^{n-1}}$ на $\underline{y_{h,R}^{n-1,F}}$.

Для решения (12) воспользуемся итерационным методом

$$A\underline{y_{h,R}^{n,m}}=A\underline{y_{h,R}^{n-1,F}}+\frac{\tau_n}{2}\left(B+S\left(\underline{v_{h,R}^{n,m-1}}\right)+S\left(\underline{v_{h,R}^{n-1,F}}\right)\right)\left(\underline{y_{h,R}^{n,m-1}}+\underline{y_{h,R}^{n-1,F}}\right), \qquad (13)$$

$m=1,2...$, где $\underline{y_{h1R}^{n,k}}$ - k-ое приближение вектора $\underline{y_{h,R}^{n}}, k=0,1,...$.

Нахождение $\underline{y_{h,R}^{n,m}}$ из (13) удобно производить методом факторизации.

Получена оценка погрешности процесса (13) $\underline{y_{h,R}^{n,m}}-\underline{y_h^{n}}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hirschhorn M., Reiss E., *Dynamic buckling of nonlinear Timoshenko beam*, SIAM J.Appl.Math.34(1979),pp.290-301.

[2] Tucsnak M., *On an initial and boundary value problem for the nonlinear Timoshenko beam,* An. Acad. Bras.Cienc. 63, N2,1991, pp.115-125.

[3] Cristie I., Sanz-Serna J.M., *A. Galerkin method for a nonlinear integro-differential wave system,* Comput. Meth.in Appl. Mech. and Engin.44(1984), pp. 229-237.

ტიმოშენკოს ერთგანზომილებიანი არაწრფივი სისტემის ამოხსნის რიცხვითი მეთოდი

ჯ. ფერაძე

განხილულია დინამიური ძალის დეფორმაციის ამოცანა. მისი დისკრეტიზებისათვის შესაბამისად სივრცულ და დროით ცვლადთა მიმართ გამოიყენება სასრულ ელემენტთა მეთოდი და კრანკ-ნიკოლსონის სქემა. მიღებული არაწრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა ამოხსნილია იტერაციული მეთოდით. შესწავლილია აგებული ალგორითმის სიზუსტის საკითხი.

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЧЁТКИМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Е. Катамадзе

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

Рассматривается один метод решения т.н. нечёткой задачи Коши (когда начальные условия заданы в виде нечёткого числа) для обыкновенного дифференциального уравнения I порядка, базирующийся на использовании одного интервального метода. Рассмотрен вопрос сходимости этого метода для одного класса уравнений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u' = f(u), \quad t > 0, \tag{1}$$

где f - заданная на $A = [a,b]$ непрерывная функция. Пусть, далее, в начальный момент $t = 0$ значение функции $u(t)$ задано неточно - в виде непрерывного выпуклого нечёткого числа [1] - непрерывного, строго выпуклого, нормализованного, имеющего ограниченный носитель, нечёткого подмножества множества действительных чисел. Множество таких чисел обозначим через $\widetilde{I}_C(\mathbf{R})$. Тогда начальное значение запишется в виде:

$$u(0) = \widetilde{u}_0 \in \widetilde{I}_C(\mathbf{R}). \tag{2}$$

Через $[\widetilde{u}_0]_0$ обозначим носитель $\widetilde{u}_0$. В дальнейшем будем считать, что замыкание множества $[\widetilde{u}_0]_0$ целиком лежит в интервале A, т.е.

$$[\widetilde{u}_0]_0 \subset (a,b). \tag{3}$$

Далее положим, что для любого $u_0 \in [\widetilde{u}_0]_0$ существует единственное, определенное на $T = [0,\bar{t}]$, непрерывное решение уравнения (1) $u(t) = u(t;u_0)$, удовлетворяющее условию $u(0) = u_0$. Через $G(T)$ обозначим семейство заданных на T непрерывных решений уравнения (1):

$$G(T) = \{u(t;u_0) \mid u \in C(T), u' = f(u), t > 0, u(0) = u_0, u_0 \in \mathbf{R}\}.$$

Тогда задача состоит в оценке для $t \in T$ нечеткого множества $\widetilde{u} = \widetilde{u}(t)$, которое определим в два этапа:

(i) сначала построим нечёткое множество U обыкновенных отображений из T в $\mathbf{R}$ ([1]), следующим образом:

$$\forall \varphi : T \to \mathbf{R}, \quad \mu_U(\varphi) = \begin{cases} \mu_{\widetilde{u}_0}(\varphi(0)), \text{ если } \varphi \in G(T) \\ 0, \text{ в обратном случае} \end{cases}, \tag{4}$$

(ii) на втором этапе с помощью U определим искомое нечёткое отображение $\widetilde{u}(t)$ как:

$$\forall t \in T,\ \forall x \in \mathbf{R},\ \mu_{\widetilde{u}(t)}(x) = \sup_{\substack{\varphi: T \to \mathbf{R} \\ \varphi(t) = x}} \mu_U(\varphi). \tag{5}$$

Доказывается, что, если $\widetilde{u}_0 \in \widetilde{I}_C(\mathbf{R})$, то определённое посредством (4)-(5) нечёткое отображение $\widetilde{u}$ каждому $t \in T$ ставит в соответствие непрерывное выпуклое нечёткое число, т.е.

$$\forall t \in T \quad \widetilde{u}(t) \in \widetilde{I}_C(\mathbf{R}). \tag{6}$$

Кроме того, задача оценки $\widetilde{u}(t)$ может быть сведена к оценке $\forall \alpha \in (0,1]$ множества α-уровня, определяемого следующим образом:

$$[\widetilde{u}(t)]_\alpha = \{x \mid \mu_{\widetilde{u}(t)}(x) \geq \alpha\} = \{x \mid x = u(t; u_0),\ u_0 \in [\widetilde{u}_0]_\alpha\}. \tag{7}$$

Кроме того, из (6) следует, что $\forall \alpha \in (0,1]$ $[\widetilde{u}(t)]_\alpha \in I_K(\mathbf{R})$, где $I_K(\mathbf{R})$ - множество выпуклых компактных подмножеств $\mathbf{R}$ (см. [2]). В силу выпуклости $\widetilde{u}_0$, $\forall \alpha \in (0,1]$ спреведливо также включение: $[\widetilde{u}_0]_\alpha \subset [\widetilde{u}_0]_0 \subset (a,b)$. Таким образом, для решения каждой из вышеуказанных задач возможно использование любого интервального метода, использующего арифметику в $I_K(\mathbf{R})$. В данной работе будет рассмотрен метод II порядка точности, предложенный Шокиным в работе [3].

2. Метрика и нормы.

Через $\widetilde{I}_B(\mathbf{R})$ обозначим множество ограниченных нечётких интервалов, т.е. имеющих ограниченный носитель, нормализованных, выпуклых нечётких подмножеств $\mathbf{R}$, функция принадлежности которых сверху полунепрерывна. Очевидно, что $\widetilde{I}_C(\mathbf{R}) \subset \widetilde{I}_B(\mathbf{R})$. В $\widetilde{I}_B(\mathbf{R})$ метрику введём следующим образом: $\forall \widetilde{u}, \widetilde{v} \in \widetilde{I}_B(\mathbf{R})$, $D(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = \sup\limits_{\alpha \in (0,1]} d([\widetilde{u}]_\alpha, [\widetilde{v}]_\alpha)$, где $d(\cdot,\cdot)$ - метрика Хаусдорфа, введённая в $I_K(\mathbf{R})$. Кроме того, в $I_K(\mathbf{R})$ будем рассматривать норму $\|[a,b]\|_{I_K(\mathbf{R})} = \max\{|a|,|b|\}$. Понятие ширины интервала, определяемого в $I_K(\mathbf{R})$ как $\omega([a,b]) = b - a$, в $\widetilde{I}_B(\mathbf{R})$ расширим следующим образом:

$$\Omega(\widetilde{u}) = \int_0^1 \omega([\widetilde{u}]_\alpha)\, d\alpha.$$

3. Описание численного метода.

Рассмотрим задачу (1)-(2). Положим, что функция $f(u)$, стоящая в правой части уравнения (1), определена на некотором интервале $A = [a,b]$ и имеет на A две первые ограниченные производные. Пусть, также, выполнено условие (3).

Далее, положим, что функция $f(u)$ имеет определённое для всех $U \subset A$, монотонное по включению интервальное расширение $F(U)$ и пусть $\exists \ell > 0,\ \forall U \subset A,\ \omega(F(U)) \le \ell\omega(U)$ ([3]). Пусть, кроме того, существует определённое для всех $U \subset A$, монотонное по включению интервальное расширение $\Psi(U)$ функции $\psi = f\left(ff'' + (f')^2\right)$.

В силу того, что $[\widetilde{u}_0]_0$ целиком лежит в A, для некоторого конечного $\tau_0 > 0$ найдётся число ϑ, $t_0 \ge \vartheta > 0$, такое, что $[\widetilde{u}_0]_0 + \vartheta\left(F(A) - \tau_0^2\Psi(A)/12\right) \subset A$.

Тогда $\forall\alpha \in (0,1]$, $[\widetilde{u}_0]_\alpha + \vartheta\left(F(A) - \tau_0^2\Psi(A)/12\right) \subset A$.

Решение построим на отрезке $[0,\vartheta]$, для чего разобъём его на m частей точками $t_j = j\tau$, $(j = 0,\dots,m)$, $\tau = \vartheta/m < \tau_0$. Интервал $[0,1]$ разобъём на n частей точками $\alpha_i = \delta_0 + ih$, $i = 0,\dots,n$, где $0 \le \delta_0 < h$, $h = (1-\delta_0)/n$.

Пусть $\forall i = 0,\dots,n$ интервалы $Y^{\alpha_i}(t_j) = Y_j^i$ определяются формулами:

$$Y_0^i = [\widetilde{u}_0]_{\alpha_i}, \tag{8}$$

$$Y_{j+1}^i = Y_j^i + \frac{\tau}{2}\left\{F(Y_j^i) + F\left(Y_j^i + \tau F\left(Y_j^i + [0,\tau]\times F(A)\right)\right)\right\} - \frac{\tau^3}{12}\Psi\left(Y_j^i + [0,\tau]\times F(A)\right). \tag{9}$$

Тогда, согласно [3], для любого решения $u(t)$ уравнения (1), такого, что $u(0) \in [\widetilde{u}_0]_{\alpha_i}$, $i = 0,\dots,n$ справедливы включения $u(t_j) \in Y_j^i$, $j = 1,\dots,m$ и имеет место следующая оценка для ширины интервалов Y_j^i:

$$\omega(Y_j^i) \le N\tau^2 + M\omega\left([\widetilde{u}_0]_{\alpha_i}\right),$$

где M и N - вещественные постоянные, не зависящие от j и τ. Доказывается, что эти постоянные не зависят также от h и i.

Для всех $j = 0,\dots,m$ определим нечёткое множество $\widetilde{y}^h(t_j)$ следующим образом:

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \mu_{\widetilde{y}^h(t_j)}(x) = \sup_{0\le i\le n} \alpha_i \mu_{Y_j^i}(x),$$

где $\mu_{Y_j^i}(x)$ -характеристическая функция множества.

Очевидно, что $\widetilde{y}^h(t_j) \in \widetilde{I}_B(\mathbf{R})$, $\forall j = 0,\dots,m$. Тогда для ширины нечёткого интервала $\widetilde{y}^h(t_j)$ справедлива следующая оценка:

$$\Omega\left(\widetilde{y}^{h}\left(t_{j}\right)\right)\leq N\tau^{2}+M\cdot\Omega\left(\widetilde{y}^{h}(0)\right)\leq N\tau^{2}+M\cdot\Omega\left(\widetilde{u}_{0}\right). \quad (10)$$

4. СХОДИМОСТЬ В СЛУЧАЕ МОНОТОННО ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ.

Для всех t_j, $j=0,\dots,m$, α_i, $i=0,\dots,n$ определим интервал погрешности Z_j^i из уравнения $Z_j^i+\left[\widetilde{u}\left(t_j\right)\right]_{\alpha_i}=Y_j^i$. Доказывается, что если существует константа $m_{\widetilde{u}_0}>0$, такая, что $\forall x\in\left[\widetilde{u}_0\right]_0$ $\left|\mu_{\widetilde{u}_0}'(x)\right|\geq m_{\widetilde{u}_0}$, то имеет место следующая оценка:

$$D\left(\widetilde{y}^{h}\left(t_{j}\right),\widetilde{u}\left(t_{j}\right)\right)\leq\max_{0\leq i\leq n}\left\|Z_{j}^{i}\right\|_{I_K(\mathbb{R})}+C\cdot h, \quad (11)$$

где C не зависит от i,j,h,τ.

Тогда, если f - монотонно возрастающая на $[a,b]$ функция, интервальное расширение $F(U)$ функции f совпадает с обобщенным расширением и естественным образом определяется как $F\left(\left[\underline{u},\overline{u}\right]\right)=\left[f(\underline{u}),f(\overline{u})\right]$, то для интервала погрешности имеет место оценка:

$$\left\|Z_{j}^{i}\right\|_{I_K(\mathbb{R})}\leq B\tau^{2},$$

где $B=\vartheta\cdot N_1\dfrac{e^{\vartheta\cdot M_1(1+\rho_0)}-1}{\vartheta\cdot M_1\left(1+\rho_0\right)}$, $\rho_0=\tau_0\dfrac{M_1+M_2}{2}$, где N_1 - постоянная, не зависящая от i,j,h,τ, M_1 и M_2 - верхние границы модулей соотв. первой и второй производной функции f.

Тогда $\forall t_j$, $j=0,\dots,m$ имеет место оценка

$$D\left(\widetilde{y}^{h}\left(t_{j}\right),\widetilde{u}\left(t_{j}\right)\right)\leq B\cdot\tau^{2}+C\cdot h,$$

что и доказывает сходимость метода в введённой выше метрике.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Dubois D., Prade H., *Towards fuzzy differential calculus. Part 1*, FSS, 8, 1982, 1-17.
[2] Dubois D., Prade H., *Théorie des possibilités*, Masson, Paris, 1988.
[3] Шокин Ю. И., *Интервальный анализ*, М., Наука, 1981.

არამკაფიო საწყისი პირობის მქონე ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის ერთი რიცხვითი მეთოდის შესახებ

ე. ქათამაძე

განიხილება პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისთვის არამკაფიო საწყისი პირობებით კოშის ამოცანის ამოხსნის რიცხვითი მეთოდი, რომელიც ეყრდნობა II რიგის ინტერვალურ მეთოდს. ერთი კლასის განტოლებებისათვის შეისწავლება მეთოდის კრებადობის საკითხი.

ON THE TORSION OF THE ELLIPTIC TUBES

Gaioz M. Khatiashvili

Computer Software Subfaculty

In this paper the problems of torsion for homogeneous elliptic tube, made from binary isotropic mixture [1], and for composite elliptic tube made from two different isotropic materials are studied.
It is known, that in the problem of torsion for the two-layered isotropic elliptic ring, after conformal mapping on the composed circular ring, the function of torsion is represented in the mapped domain by conformal mapping function. In this paper the functions of torsion f_j are represented by Faber's polynomials [2] directly in the given composed elliptic ring.

1. INTRODUCTION

We consider the elastic body (homogeneous and composed) with elliptic lateral (or interface) surfaces. Take the plane Ox_1x_2 of system of rectangular coordinats $Ox_1x_2x_3$, at the end of tube, bounded by two planes

$$x_3 = 0, \quad x_3 = l, \qquad (\ l > 0\ ). \tag{1}$$

and the elliptic surfaces, cross-section of which will be the ellipses γ_j given by equations

$$(x_1)_{\gamma_j} = a_j \cos\vartheta, (x_2)_{\gamma_j} = b_j \sin\vartheta, \ \ (0 \le \vartheta \le 2\pi; a_j > b_j; a_{k+1} > a_k; j = 0,1,2), \tag{2}$$

where a_j, b_j are the semi-axis of the ellipses γ_j.

The cosines n_1 and n_2 of outward normal n to ellipses γ_j may be represented in the form

$$(n_1)_{\gamma_j} = \Theta_j^{-1} b_j \cos\vartheta, \ (n_2)_{\gamma_j} = \Theta_j^{-1} a_j \sin\vartheta; \Theta_j = \sqrt{a_j^2 \sin^2\vartheta + b_j^2 \cos^2\vartheta}\,, \tag{3}$$

Let us introduce the operator $D_j = \partial / \partial x_j$.

In the elliptic rings bounded by cofocal ellipses γ_j, i.e. when it is placed the equalities

$$a_j^2 - b_j^2 = c^2 \qquad (j=0,1,2), \tag{4}$$

where 2c is the focal length, will be used the series with respect to Faber's polynomials t_1 and t_2, given by equalities

$$t_1 = z + \sqrt{z^2 - c^2}, t_2 = z - \sqrt{z^2 - c^2}, \ \lim_{z\to\infty}(z^{-1}\sqrt{z^2 - c^2}) = 1.. \tag{5}$$

Let us consider the components of vector of stress

$$\tau_{nk} = \tau_{1k} n_1 + \tau_{2k} n_2 \quad (k = 1,2,3), \tag{6}$$

where n_j are the cosines of outward normal n of curves γ_j.

2. THE TUBE MADE FROM BINARY ISOTROPIC MIXTURE

Let us consider the homogeneous tube, made from isotropic binary mixture, bounded by planes (1.1) and two confocal elliptic surfaces, the cross-section of which are the ellipses γ_0 and γ_1, given by equations (1.2). It is assumed the semi-axis of these ellipses satisfy condition (4) and is considered the linearized theory of mixture, when the body forces are absent and equations of elastic equilibrium are represented in the form [1]:

$$\sum_{j=1}^{3} D_k \tau_{jk}^{(\gamma)} + (-1)^\gamma D_k \Pi = 0 (k = 1,2,3; \gamma = 1,2), \tag{1}$$

$$\Pi=(\rho^{(2)}divu^{(1)}+\rho^{(1)}divu^{(2)}),\ (\rho=\rho^{(1)}+\rho^{(2)}),$$

where $\rho^{(\gamma)}$ are densities of substances. It is assumed that components of displacements stress and strains $u_j^{(\gamma)},\tau_{ij}^{(\gamma)}$ and $e_{ij}^{(\gamma)}(\gamma=1,2)$ of the two different substances, constituent the mixture, obey Steel's law [1].

$$\begin{aligned}\tau_{jk}^{(\gamma)}&=[(-1)^{\gamma}\alpha_2+\lambda_{3\gamma-2}divu^{(1)}+\lambda_{4-\gamma}divu^{(2)}]\delta_{jk}+2\mu_{2\gamma-1}e_{jk}^{(1)}+2\mu_{4-\gamma}e_{jk}^{(2)}+\\&+(-1)^{\gamma}2\lambda_5h_{jk}\quad(j,k=1,2,3;\quad\gamma=1,2),\end{aligned}\tag{2}$$

where δ_{jk} is Kroneker's symbol, λ_m and μ_k constants of elasticity,

$$\alpha_2=\lambda_3-\lambda_4,\quad 2e_{jk}^{(\gamma)}=D_ju^{(\gamma)}+D_ku_j^{(\gamma)},\quad 2h_{jk}=D_j(u_k^{(1)}+u_k^{(2)})-D_k(u_j^{(1)}+u_j^{(2)}).$$

Required components of stress $\tau_{jk}^{(\gamma)}$ in the each normal cross-section S of the tube, must satisfy the conditions [3,4]

$$\iint_S(x_1\tau_{32}^{(\gamma)}-x_2\tau_{31}^{(\gamma)})=M^{(\gamma)},\tag{3}$$

where the torques $M^{(\gamma)}$ are given values.

The components of the displacements and stresses in the problem of torsion, we seek in the form:

$$\begin{aligned}&u_1^{(\gamma)}=(-1)^{\gamma}Gx_3x_2,\quad u_2^{(\gamma)}=(-1)^{\gamma+1}Gx_3x_1,\quad u_3^{(\gamma)}=(-1)^{\gamma+1}Gf_{\gamma}(x_1,x_2),\\&\tau_{j3}^{(\gamma)}=\tau_{3j}^{(\gamma)}=(-1)^{(\gamma)}(\mu_3-\mu_{\gamma})G(D_jf+(-1)^jx_{3-j}),\\&\tau_{kk}^{(\gamma)}=(-1)^{\gamma}\alpha_2,\ \tau_{12}^{(\gamma)}=\tau_{21}^{(\gamma)}=0\ \ (j,\gamma=1,2;k=1,2,3).\end{aligned}\tag{4}$$

where G will be determined from conditions (3) and harmonic functions $f_{\gamma}(x_1,x_2)$ in the elliptic ring S bounded by ellipses γ_0 and γ_1 must satisfy the following boundary conditions:

$$(\frac{df_1}{dn})_{\gamma_j}=(\frac{df_2}{dn})_{\gamma_j}=(x_2n_1-x_1n_2)_{\gamma_j}\equiv-\frac{ic}{2\Theta_j}\sin2\vartheta\quad(i.e.\quad f_1\equiv f_2\equiv f),\tag{5}$$

only, if the following condition is fulfilled $\mu_1\mu_2-\mu_3^2+\lambda_5(\mu_1-\mu_2)\neq0$, where n_1 and n_2 are cosines of outward normal. Therefore, the functions $f_1\equiv f_2=f$ identical are equal to function of torsion of isotropic body.

Take in the account the expressions (4), It is easily to shown that conditions (3) will be fulfiled, if G is taken by equalities

$$\begin{aligned}&G=(gD_*)^{-1}M,\quad D_*=\iint_S[(D_2f+x_1)^2+(D_1f-x_2)^2]ds>0,\\&g=(\mu_1-\mu_3)(\mu_3-\mu_2)\neq0,\quad M\equiv M^{(2)}(\mu_1-\mu_3)=M^{(1)}(\mu_3-\mu_2).\end{aligned}\tag{6}$$

Represent the sought function in the domain S by formula

$$f=\operatorname{Re}F(z),\tag{7}$$

where $F(z)$ is the analytical function in the S of complex variable $z=x_1+ix_2$ $(i^2=-1)$ and introduce the notations

$$p_j=a_j+b_j,q_j=a_j-b_j,\tag{8}$$

from indicated boundary conditions we get

$$F(z) = i\frac{c^2}{2}(p_0^2 + p_1^2)^{-2}(t_1^2 - p_1^2 q_0^{-2} t_2^2). \qquad (9)$$

3. TWO-LAYERED ISOTROPIC ELLIPTIC TUBE

Let us consider the two layered tube, bounded by planes (1.1) and elliptic surface (1.2) within j=0 and j=2. The domains occupying by layers will be denote with Ω_1 and Ω_2 respectively. The cross-section of the tube will be the domain, composed by two isotropic layers (with different physical characteristics) ,occupying the elliptic rings S_1 and S_2, bounded by confocal ellipses γ_0 , γ_1 and γ_1,γ_2 respectively, given by equalities (1.2). It is assumed the rings S_1 and S_2 are glued together along ellipse γ_1.

The components of displacements and stresses in the problem of torsion of composed elliptic tube will be represented in the form [3,4]

$$(u_1)_j = -Gx_2x_3, \quad (u_2)_j = Gx_1x_3, \quad (u_3)_j = G f_j(x_1,x_2),$$
$$(\tau_{13})_j = G\mu_j(D_1 f_j - x_2), \qquad (\tau_{23})_j = G\mu_j(D_2 f_j + x_1) \quad (j = 1,2), \qquad (1)$$

where, constant G and harmonic functions f_j will be determined, μ_1 and μ_2 are Lame's coefficients in the domains Ω_1 and Ω_2 respectively (all other components of the stresses are equal to zero).

The components (1) must satisfy following boundary conditions [3,4]:

$\tau_{nk} = 0$ on the surfaces (1.2) , within $j=0$ and $j=2$,

$[\tau_{nk}]_1 = [\tau_{nk}]_2$, $[u_k]_1 = [u_k]_2$, (k=1,2,3) on the interface (1.2), within $j=1$, (2)

where symbols $[\,]_1$ and $[\,]_2$ denote the limiting values on the interface of the expressions enclosed in the brackets, taken from domains Ω_1 and Ω_2 respectively.

Besides them, in the each normal cross-section of the composed tube, will be fulfilled the equality

$$\iint_S (x_1\tau_{23} - x_2\tau_{13})ds = M, \quad (S = S_1 + S_2), \qquad (3)$$

where torque M is given value.

As in the previous item, the functions f_j may be represent with the help of the analytical functions $F_j(z)$

$$f_j = \operatorname{Re} F_j(z), \qquad (j=1,2). \qquad (4)$$

Let us represent the sought analytical functions $F_j(z)$, of complex variables $z = x_1 + ix_2$, in the form

$$F_j(z) = \frac{ic^2}{2}(m_1^{(j)} t_1^2 + m_2^{(j)} t_2^2), \qquad (5)$$

where $2c$ is focal length and constants $m_k^{(j)}$ will be determined.

After substitution of expressions (1) into boundary conditions (2), we get following algebraic equations for the coefficients $m_k^{(j)}$:

$$
\begin{aligned}
&p_{2j-2}^2 m_1^{(j)} - q_{2j-2}^2 m_2^{(j)} = \frac{1}{2} \quad (j = 1,2), \\
&p_1^2(\mu_1 m_1^{(1)} - \mu_2 m_1^{(2)}) - q_1^2(\mu_1 m_2^{(1)} - \mu_2 m_2^{(2)}) = \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2), \\
&p_1^2(m_1^{(1)} - m_1^{(2)}) + q_1^2(m_2^{(1)} - m_2^{(2)}) = 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

The determinant Δ_* of this system will be given in the form

$$\Delta_* = p_0^2 \; p_2^2[\mu_1 \; (q_0^4 - q_1^4) + \mu_2 \; (q_1^4 - q_2^4)] + q_0^2 \; q_2^2 \; [(\mu_1 \; (p_1^4 - p_0^4) + \mu_2 \; (p_2^4 - p_1^4)] > 0. \tag{7}$$

The solution of indicated equations might be represented in the form

$$
\begin{aligned}
&m_1^{(1)} = \frac{1}{\Delta_*}(\alpha P_{10} - \beta\mu_2 \; Q_{12}), m_2^{(1)} = \frac{1}{\Delta_*}(\alpha \; P_{10} - \beta\mu_1 \; Q_{10}); \\
&m_2^{(1)} = p_0^2 \; q_0^{-2} \; m_1^{(1)} - \frac{1}{2}q_0^{-2}, m_2^{(2)} = p_2^2 \; q_2^{-2} \; m_2^{(1)} - \frac{1}{2}q_2^{-2};
\end{aligned} \tag{8}
$$

where

$$
\begin{aligned}
&\alpha = 2^{-1}[\mu_1 q_0^{-2}(q_0^2 - q_1^2) - \mu_2 q_2^{-2}(q_2^2 + q_1^2)], \beta = 2^{-1} q_1^2(q_0^{-2} - q_2^{-2}), \\
&P_{ij} = p_i^2 q_j^2 + p_j^2 q_i^2, Q_{ij} = p_i^2 q_j^2 - p_j^2 q_i^2.
\end{aligned} \tag{9}
$$

As it is known [4] (according to (3)), the constant G from (1) is determined by equality

$$G = MD^{-1}, \quad D = \sum_{j=1,2} \mu_j \iint_{S_j} (x_1^2 + x_2^2 + x_1 D_1 f_j - x_2 D_2 f_j) dS > 0 \tag{10}$$

REFERENCES

[1] Steel T.R., *Applications of a theory of interacting continu,* Quart.J.Mech. and Appl. Math.; v. **XX**, part 1, **1967**, pp.57-72.

[2] Faber G., *Uber polinomishe entwiklungen,* Math. ann. **57**(1903), pp. 398-408.

[3] Love A.E.H., *Mathematical theory of elasticity,* 4-th ed. Cambridge, University Press, New York, 1927.

[4] Мусхелишвили Н. И., *Некоторые основные задачи математической теории упругости,* М., Наука, 1966.

ელიფსური მილების გრეხის შესახებ

გ. ხატიაშვილი

ნაშრომში, ბინარული ნარევისა და იზოტროპული მასალებისაგან დამზადებული ერთგვაროვანი და შედგენილი დრეკადი მილებისათვის, რომლესაც მათი ნორმალური კვეთა წარმოადგენს კონფოკალური ელიფსებით შემოსაზღვრულ არეს, გრეხის ფუნქციები წარმოდგენილია ფაბერის პოლინომებით.

ინფორმატიკა • INFORMATICS • ИНФОРМАТИКА

ИНФОРМАЦИОННО-СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Н. Бокучава Н. Николадзе Г. Мамасахлисов

Проблемная лаборатория физической кибернетики

В представленной работе, используя идеи классической теории планирования экперимента, на основе обобщения информационной матрицы Р. Фишера и применения некоторых информационных критериев, нами будет сформирована информационно-статистическая модель планирования эксперимента

1. ВЫБОР ФОРМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ.

Обозначим через $X(x_i)$, $i=\overline{1,n}$, множество независимых переменных (базисных переменных), определяемых экспериментатором заранее, до проведения эксперимента, через $Y(y_j)$, $j=\overline{1,m}$ - множество переменных, зависящих от базисных переменных, значения которых определяются экспериментально (т. е. множество измеряемых переменных), а через $X(x_{ji})$ - множество базисных переменных, соответствующих j-ому результату измерения зависимой переменной.

Одной из основных задач экспериментатора является установление функциональной зависимости между элементами множеств $Y(y_j)$ и $X(x_{ji})$. В виду того, что искомая функциональная зависимость обычно имеет сложный вид, то с практической точки зрения целесообразнее заменить ее более простой функциональной зависимостью. Достаточно хорошим способом проверки согласованности реальной функциональной зависимости с экспериментальными результатами является ее линеаризация с учетом отклонений между измеренными значениями y_j и соответствующими линейными значениями:

$$\hat{y}_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_{ji}, \qquad (1)$$

где β_i — неизвестные параметры. Тогда, обозначая эти отклонения через ε_j,

$j=\overline{1,m}$, будем иметь:

$$\varepsilon_j = y_j - \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_{ji} ,$$

откуда

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_{ji} + \varepsilon_j . \qquad (2)$$

В более общем виде соотношение (2) может быть записано в матричной форме. Для этого множества $X(x_{ji})$ и $Y(y_i)$ представим соответственно в виде следующих матриц:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Тогда, согласно (2), математическая модель планирования эксперимента в матричной форме примет следующий вид:

$$Y = X\beta + \varepsilon , \qquad (3)$$

где $\varepsilon = [\varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_m]^T$, $\beta = [\beta_1 \beta_2 ... \beta_n]^T$ - транспонированные матрицы вектора отклонений ε^T и неизвестных параметров β^T, наилучшая линейная несмещенная оценка которых может быть определена методом наименьших квадратов или из информационного критерия оценки параметров [1].

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИЛУЧШЕГО ПЛАНА ЭКСПЕРИМЕНТА.

Теперь определим информационный критерий выбора наилучшего плана эксперимента для модели (3).

Вводя обозначение $X_{jn} = [x_{j1} x_{j2} ... x_{jn}]^T$ и приписывая каждому множеству X_{jn}^T вероятностную меру $P_{jn}^{(K)}$, где $K \le m$ - количество различных вариантов выбора базисных переменных для выбранной конкретной модели типа (3), определим совокупность множеств X_{jn}^T с соответствующими вероятностными мерами $P_{jn}^{(K)}$ как K-ый план эксперимента:

$$\xi_k = \begin{Bmatrix} X_{1n}^T, & X_{2n}^T, & \dots & X_{mn}^T \\ P_{1n}^{(K)}, & P_{2n}^{(K)}, & \dots & P_{mn}^{(K)} \end{Bmatrix}, \qquad (4)$$

и представим информационную матрицу Р. Фишера [2] в следующем виде:

$$M(\xi_k) = \sum_{j=1}^{m} P_{jn}^{(K)} X_{jn} X_{jn}^T, \qquad (5)$$

приписывая при этом нулевые значения тем $P_{jn}^{(K)}$ - мерам, которые соответствуют таким X_{jn} множествам плана ξ_k, на которых измерения не проводились.

Далее, вводя понятие дисперсионной матрицы плана ξ_k для невырожденной матрицы типа (5) в виде

$$D(\xi_k) = (M(\xi_k))^{-1}, \qquad (6)$$

наилучшим из планов (4) будем считать план с наименьшей дисперсионной матрицей.

Что же касается вероятностных мер $P_{jn}^{(K)}$, то, принимая во внимание, что выборочные средние и выборочные дисперсии (ковариации) являются наиболее эффективной статистикой для оценки результатов эксперимента, и исходя из того факта, что плотности распределения вероятностей, соответствующие максимуму информационной энтропии, имеют экспоненциальный вид, в качестве вероятностных мер $P_{jn}^{(K)}$ целесообразно использовать функции нормального распределения вероятностей, для которых, при наличии однострочных матриц (векторов) $X_{jn}^T = [x_{j1} x_{j2} \cdots x_{jn}]$, векторов их средних значений $\mu_j^T = [\mu_{j1} \mu_{j2} \cdots \mu_{jn}]$ и ковариацонных матриц $\sum_j = \mathrm{cov}\{(X_{jn} - \mu_j)(X_{jn} - \mu_j)^T\}$, где $(X_{jn} - \mu_j)^T = [(x_{ij} - \mu_{j1}) .. (x_{ij} - \mu_{j1})]$, соответствующие плотности распределений будут иметь следующий вид [1]:

$$P_j(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}) = \left|2\pi^n \sum\nolimits_j\right|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(X_{jn} - \mu_j)^T \sum\nolimits_j^{-1} (X_{jn} - \mu_j)\right). \qquad (7)$$

Определив верятностные меры плана (4) и выделив наилучший план с

4.

помощью (6), встаёт вопрос: какому же из j результатов измерений отдать предпочтение, точнее говоря, как выбрать результат измерений с наибольшей информацией? Для решения этого вопроса воспользуемся Кульбаковской различающей информационной мерой, отдающей предпочтение ℓ-ому результату измерений против r-ой $(\ell, r=\overline{1,c}\le m)$, которые для (7) принимают следующий вид [1]:

$$\Im(\ell:r)=\int P_j^{(\ell)}\ln\frac{P_j^{(\ell)}}{P_j^{(r)}}dx_{j1}dx_{j2}\dots dx_{jn}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{|\sum_r|}{|\sum_\ell|}+\frac{1}{2}Sp\sum_\ell\left(\sum_r^{-1}-\sum_\ell^{-1}\right)+\frac{1}{2}Sp\sum_r^{-1}(\mu_\ell-\mu_r)(\mu_\ell-\mu_r)^T. \qquad (8)$$

Аналогично может быть представлена информационно-статистическая модель выбора наилучшей линейной функции, что будет сделано в последующей работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бокучава Н., *Об информационной статистике*, сообщ. АН ГССР, 86, №3, 1977, с. 585-587.

[2] Кульбак С. *Теория информации и статистика*, М., Мир, 1967.

ექსპერიმენტის დაგეგმვის ინფორმაციულ-სტატისტიკური მოდელი

ნ. ბოკუჩავა, ნ. ნიკოლაძე, გ. მამასახლისოვი

რ. ფიშერის ინფორმაციული მატრიცის განზოგადებისა და ზოგიერთი ინფორმაციული კრიტერიუმების გამოყენების საფუძველზე ჩამოყალიბებულია ექსპერიმენტის დაგეგმვის ინფორმაციულ-სტატისტიკური მოდელი.

О ПРИНЦИПАХ ИНФОРМАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Н. Бокучава *Н. Николадзе*

Проблемная лаборатория физической кибернетики

В представленной работе, с использованием некоторых информационных мер, нами будут сформированы информационные критерии, позволяющие решить не только вопросы, связанные с определением плотностей функций распределений, но и решить вопрос предпочтительности той или иной альтернативной гипотезы в критической области, провести оценку параметров, определить условие достаточности статистики и др.

1. Введение.

Всякий раз, когда производятся статистические наблюдения или проводится статистический эксперимент, возникает вопрос, насколько полные выводы о выборочной совокупности делаются на основании серии такого рода наблюдений или эксперимента?

Для правильного решения такой задачи мы должны быть в состоянии провести хотя бы грубую оценку соответствующей функции распределения при ограничениях определенного типа. Но так как заданным ограничениям всегда удовлетворяет бесконечное множество различных распределений, то задача выбора из этого множества некоторого "наиболее подходящего" распределения не может быть однозначно решена до тех пор, пока не будет задан точный критерий того, какое распределение считать "наиболее подходящим".

2. Принцип максимума информационной энтропии.

Обозначим через $X(x)$ непрерывную случайную величину X с элементами x, а через $\langle T_i(x)\rangle$ – ограничения, наложенные на статистику $Y_i = T_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, (т. е. на функции выборки на X). Тогда вопрос определения неизвестной плотности распределения вероятности при имеющейся информации о статистике (т. е. при имеющихся ограничениях) может быть решён, исходя из принципа максимума информационной энтропии, математическая модель которой представляется следующим образом:

$$H(x)\Big|_{\max} = \max\left(-\int_x f(x)\ln f(x)dx\right),$$

$$<T_i(x)> = \int_x T_i(x) f(x)dx, \quad (1)$$

$$\int_x f(x)dx = 1,$$

исходя из которой для $f(x)$ получаем [1]:

$$f(x) = \exp\left(-\lambda_0 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i(x)\right), \quad (2)$$

где постоянные λ_0 и λ_i $(i=\overline{1,n})$ легко определяются из второго и третьего соотношений модели (1).

2. ПРИНЦИП МИНИМУМА РАЗЛИЧАЮЩЕЙ ИНФОРМАЦИИ.

Предположим, что задано $H_\ell(\ell=\overline{1,m})$ альтернативных гипотез и требуется, при ограничениях

$$<T_i(x)>_k = \int_x T_i(x) f_k(x)dx,$$

наложенных на статистику $Y_i = T_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$, где $f_k(x)$ - плотности распределения вероятностей, соответствующие к-ой гипотезе $(k=\overline{1,m})$ и условию нормировки

$$\int_x f_k(x)dx = 1,$$

определить то минимальное количество информации, которая необходима для отдачи предпочтения k-ой гипотезе против ℓ-ой альтернативной гипотезы $(k \ne \ell; k,\ell=\overline{1,m})$. Для решения этого вопроса будем исходить из принципа минимума различающей информации, математическая модель которой имеет следующий вид [1], [2]:

$$\Im(k:\ell)\big|_{\min} = \min\left(\int_x f_k(x)\ln\frac{f_k(x)}{f_\ell(x)}dx\right),$$

$$<T_i(x)>_k = \int_x T_i(x) f_k(x)dx, \qquad (3)$$

$$\int_x f_k(x)dx = 1,$$

исходя из которой

$$\Im(k:\ell)\big|_{\min} = -\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{(k)} <T_i>_k - \ln Z_\ell^{(k)}, \qquad (4)$$

а

$$f_k(x) = f^*(x) = (Z_\ell^{(k)})^{-1} f_\ell(x)\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{(k)}T_i(x)\right), \qquad (5)$$

где $Z_\ell^{(k)}$ - нормировочный множитель, имеющий вид:

$$Z_\ell^{(k)} = \int_x exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{(k)}T_i(x)\right)f_\ell(x)dx. \qquad (6)$$

Правдоподобные и несмещённые оценки параметров $\lambda_i^{(k)}$ в свою очередь определяются из условий

$$<T_i(x)>_k = -\frac{\partial}{\partial\lambda_i^{(k)}}\ln Z_\ell^{(k)}, \qquad (7)$$

следующих из соотношений (6).

3. ИНФОРМАЦИОННЫЙ КРИТЕРИЙ ДОСТАТОЧНОСТИ СТАТИСТИКИ.

Информационным критерием достаточности статистики $Y_i = T_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$, при наличии $H_\ell(\ell=\overline{1,m})$ альтернативных гипотез, является, как известно, условие [2]:

$$\Im(k:\ell,X) = \Im(k:\ell,Y_i) = \Im(k:\ell)\big|_{\min}, \qquad (8)$$

$(k\neq\ell; k=\overline{1,m})$, т. е. условие равенства различающих информационных мер, определённых на области определения и области значений статистики, а их равенство с минимумом различающей информации означает, что данная статистика достаточна и для распределений экспоненциального типа (5).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Бокучава, *Об информацинной статистике,* Сообщ. АН ГССР, 1977, т. 86, №3.

[2] Н. Бокучава, *О некоторых вопросах информационной статистики,* Труды Тбилисского государственного университета, 1986, т. 268, №7, с. 182-199.

მოდელირების ინფორმაციული პრინციპების შესახებ

ნ. ბოკუჩავა, ნ. ნიკოლაძე

ჩამოყალიბებულია განაწილებების ფუნქციებისა და სტატისტიკის საკმარისობის დადგენის, პარამეტრების შეფასებისა და ჰიპოთეზათა შემოწმების განზოგადებული ინფორმაციული კრიტერიუმები.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОШАГОВОГО ПРОЦЕССА ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ПРОГНОЗА ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Т. Гачечиладзе [*)] *Г. Церцвадзе* [**)]

[*)] Кафедра теории случайных процессов

[**)] Кафедра кибернетики

Предлагается математическая модель многошагового процесса поддержки принятия решения о возможном развитии событий на основе данных, используемых для прогноза уровня землетрясения. Модель основана на нечётком дискриминационном анализе.

1. ВВЕДЕНИЕ.

Многие системы принятия решений, применяемые для оценки уровня риска в задаче прогноза землетрясений, могут быть рассмотрены как состоящие из базы данных и методов вывода, основанных на определённых (четких) данных и основных понятиях, не содержащих семантической неопределённости. Причём имеются два существенно различных подхода к построению базы знаний.

а) Некоторые системы основаны на хронологическом представлении данных (исторических знаниях). В этом случае типично представление данных в виде таблиц условных вероятностей, а правила вывода являются вероятностными. Некоторые содержат алгоритмы кластеризации и анализа дискриминантных функций. Общий атрибут всех этих систем — таблично-числовая база данных.

б) Главный альтернативный подход — это экспертные системы, основанные на базе знаний, содержащей результаты опросов экспертов, в которых делается попытка установления существенных соотношений между отобранными признаками (предвестниками) и возможными уровнями землетрясений. Процесс прогнозирования сводится к задачам поиска и использования различных т.н. *"forward –"* и *"backward – chaining"* алгоритмов.

Оба типа систем обладают значительными недостатками как с теоретической, так и с практической точки зрения. Эти недостатки (трудности) проистекают от используемых общих методов сбора и представления знаний, а также правил логического вывода, неадекватных в условиях неопределённости.

Цель предлагаемой работы заключается в построении нового метода поддержки принятия решения, работающего в условиях не только вероятностной неопределённости, но и возможностной. Предлагается матаматическая модель многошагового процесса принятия решения о возможностном развитии событий на основе данных, используемых для прогноза. Эта модель основана на нечётком дискриминационном анализе [1], [2], который призван обеспечить поддержку принятия решения о прогнозе уровня землетрясения по всей временной шкале (долгосрочный, промежуточный и краткосрочный). Дискриминационный анализ позволяет провести моделирование такого процесса, как интуитивная активность эксперта при принятии решения, а также усиление доверительного уровня принимаемого решения.

2. НЕЧЕТКИЙ ДИСКРИМИНАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ.

Дискриминационный анализ эффективно устанавливает значимости т.н. активностей [2] с точки зрения их относительной способности обеспечивать принятие решения из хорошо определённого (чёткого) множества возможных решений.

Источником информации является частотно-числовая база данных, содержащая "истории" правильных решений, т.е. знаний об активностях эксперта и последовавших решениях, представленных в виде сводной матрицы частот $\hat{F} = \|f_{ij}\|$, где $i : P_i \in P$ (множество предвестников) и $j : D_j \in D$ (множество решений), f_{ij} является долей (относительной частотой) тех записей с решением D_j, где присутствует предвестник P_i. Эта матрица является основой для двух других матриц: матрицы положительной дискриминации $\|\widetilde{P}_{ij}\|$ и матрицы отрицательной дискриминации $\|\widetilde{n}_{ij}\|$:

$$\widetilde{P}_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} I_{\tilde{L}r}\left(\frac{f_{ij}}{f_{ik}}\right) i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, \qquad (1')$$

$$\widetilde{n}_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} I_{\tilde{L}r}\left(\frac{f_{ik}}{f_{ij}}\right) i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, \qquad (1'')$$

где $\widetilde{Lr}$ -нечёткое подмножество "большие отношения", $\widetilde{Lr}^D$ - соответствующее дуальное. Эти величины соответствуют более гибкому подходу к принятию решения.

Величины (1') и (1") являются компонентами расщепления [3] индикатора $\widetilde{Lr}$, производящего отбор больших отношений (f_{ij}/f_{ik}) и группирующего их в подмножества (n-1)-элементных множеств $\{(f_{ij}/f_{ik}), j \neq k, j, k = \overline{1,n}, i = \overline{1,m}\}$ (и точно такой отбор из множеств $\{(f_{ik}/f_{ij})\}$). Рассматривая элементы этих множеств в качестве случайных событий с равномерным распределением вероятностей, приходим к выводу, что (1') есть вероятность нечёткого подмножества "большие отношения" множества $\{(f_{ij}/f_{ik})\}$, а (1") – вероятность того же подмножества $\{(f_{ik}/f_{ij})\}$. Эвристическая интерпретация мер положительной и отрицательной дискриминаций заключается в представлении $\widetilde{P}_{ij}$ как аккумулированного доверия к утверждению, что предвестник P_i более существен для принятия решения D_j, чем для остальных решений, а $\widetilde{n}_{ij}$- как аккумулированного доверия к утверждению, что P_i более существен для принятия решений "не D_j", чем для остальных решений. Таким образом, база данных, матрицы $\|f_{ij}\|$, $\|\widetilde{P}_{ij}\|$ и $\|\widetilde{n}_{ij}\|$ создают "среду становления решения". Конкретное решение принимается следующим образом: пусть данной конкретной ситуации соответствует определённая последовательность предвестников P'. В матрицах $\|\widetilde{P}_{ij}\|$ и $\|\widetilde{n}_{ij}\|$ отберём только те строки, которые соответствуют P', и образуем с помощью этих строк новые $\|\widetilde{P}_{ij}{}'\|$ и $\|\widetilde{n}_{ij}{}'\|$ матрицы. Нечёткое решение представляется в виде нечёткого подмножества множества $\{D_1,...,D_m\}$, функция принадлежности которого является выпуклой комбинацией:

$$\delta_j = \frac{1}{2}\left(\chi_{Large}\left(\widetilde{\pi}_j\right) + \chi_{small}\left(\widetilde{\nu}_j\right)\right), \tag{2}$$

где

$$\widetilde{\pi}_j = \frac{1}{m}\sum \widetilde{P}_{ij}' \text{ и } \widetilde{\nu}_j = \frac{1}{m}\sum \widetilde{n}_{ij}', \tag{3}$$

$\widetilde{\pi}_j$ и $\widetilde{\nu}_j$ представляют соответственно средние значения мер положительной и отрицательной дискриминации для решения D_j. Нечёткие подмножества $"Large"$ и $"Small"$ имеют такие функции принадлежности:

$$\chi : [0,1] \to [0,1], \tag{4}$$

что χ_{Large} - возрастающая, а χ_{small} - убывающая функция.

Решение D_{j_0} с j_0, определяемое из условия

$$\delta_{j_0} = \max_j \{\delta_j\} \tag{5}$$

можно интерпретировать как решение, которому соответствует наибольшее доверие.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Norris, D, Baldwin, J.F., Pilsworth, B.W., *Medical Diagnosis from Patient Records – A method using fuzzy diserimimation and connectivity analyses.*

[2] Гачечиладзе Т., Меладзе Г., Церцвадзе Г., *Новый подход к анализу нечётких данных, используемых при анализе землетрясений,* Proceedings of the Geophysical Center, Tbilisi (1998) (*в печати*).

[3] Criado, F., Gachechiladze, T., *Fuzzy random events and their corresponding conditional probability measures,* Revista de la Real Academia de ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid, tomo **LXXXIX** (1995), Matematicas.

გადაწყვეტილების მიღების ხელშემწყობი მრავალბიჯიანი პროცესის მათემატიკური მოდელი მიწისძვრის პროგნოზის ამოცანაში

თ. გაჩეჩილაძე, გ. ცერცვაძე

მიწისძვრის პროგნოზის ამოცანაში გადაწყვეტილების მიღების ხელშემწყობი მრავალბიჯიანი პროცესის მათემატიკური მოდელირებისათვის გამოყენებულია არამკაფიო დისკრიმინაციული ანალიზის აპარატი.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ СОЗДАНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ ЧАСТЕЙ ДЛЯ ПАКЕТОВ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Т.Заркуа

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

Выделены вопросы, возникающие при разработке и реализации языка обращения к пакету прикладных программ (ППП) научно-технических задач. Рассмотрены вопросы, связанные с мобильностью и расширяемостью пакетов.

Приводится обоснование преимуществ концепции R-технологии по сравнению с другими средствами производства програм. Выдвинута идея создания генераторов для управляющих программ пакетов, а в дальнейшем - создания генератора таких генераторов.

Как известно, требование расширяемости является одним из основных тревований, предъявляемых к управляющим програмам пакетов прикладных программ. Практически это означает наличие поддержки настраиваемости управляющей части пакета на изменения, вносимые в язык пакета (т.е. язык обращения к пакету). В случае, когда язык пакета не является сложным, достижение упомянутой цели осуществляется путём включения в информационное обеспечение пакета файла наименований функциональных модулей, возможно с некоторой дополнительной информацией, указывающей на задание, которое их использует, и на последовательность вызовов [1].

Однако естественное желание сделать язык пакета максимально удобным для пользователя, предусмотреть в пакете разнообразные режимы функционирования, неизбежно влечёт обогащение возможностей языка пакета и, как следствие, его усложнение. В результате вышеупомянутый файл, который фактически должен быть хранилищем формального описания языка пакета, не удаётся создать "кустарным способом". Возникает необходимость:

1) в формализме, позволяющем строго описать этот язык;

2) в разработке формата представления этого описания в компьютере;

3) в программной реализации языка пакета на базе этого представления;

4) в универсальности этой реализации, т.е. в её инвариантности

относительно конкретного языка пакета.

В свете вышесказанного реализация должна быть "привязана" к упомянутым в пунктах 1 и 2 формализму и его представлению с тем, чтобы при изменении языка пакета модифицировалось только его описание, но никак не реализация.

В связи с этим совершенно однозначно можно сказать, что единственной стандартной системой, позволяющей преодолеть все поставленные проблемы в комплексе без дополнительных программистских усилий, всего лишь за счёт внутренних свойств, заложенных в неё, вот уже в течение 20 с лишним лет (!) является R-технологический комплекс программиста (RTK) [2]. С моей точки зрения, решающую роль в этом играет то обстоятельство, что в RTK удачно совмещены процессы описания структуры данных и создания программы. Рамки данной работы не позволяют подробно осветить все особенности R-технологии программирования, но считаю необходимым подчеркнуть эффективность языка нагруженных графов (т.н. R-языка) для описания алгоритмов и очень удачное решение вопроса создания соответствующего языка программирования в лице $R/TRAN$-а.

Вышеизложенные выводы сделаны на основании опыта создания управляющей программы для ППП РАПСО (расчёта пространственных сооружений), разработанного в ИПМ ТГУ под руководством проф. Т.С.Вашакмадзе. Любопытно заметить, что это был первый опыт использования R-технологии программирования для создания пакетов прикладных программ, и к этому моменту сами разработчики технологии не включали создание управляющих частей ППП в сферу возможного эффективного применения комплекса RTK. Впоследствии автору довелось непосредственно участвовать в разработке и создании нескольких управляющих программ, в том числе таких, где не использовалась R-

технология. Опыт этих разработок ещё более укрепил уверенность автора в правильности вышеизложенных выводов.

Работа над созданием управляющих программ для различных ППП естественным путём привела к идее создания генератора для управляющей части данного пакета. В этом случае модификации пакета осуществляются путём генерации новой версии управляющей части и внесения необходимых изменений в файлы пакета. Исследование структуры таких генераторов позволило выделить общие части довольно большлгл объёма. Это, в свою очередь, привело к мысли о целесообразности создания генератора таких генераторов.

В заключение отмечу, что , с моей точки зрения , очень интересным и перспективным представляется синтез концепций, заложенных в R-технологию программирования с концепциями объектно-ориентированного программирования.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Заркуа Т.Я., Цискаридзе А.Ш., *Об одном подходе к построению управляющих программ для пакетов прикладных программ научно-технических задач,* Республиканская конференция молодых учёных и специалистов по актуальным проблемам математики и механики, Сборник докладов, Тбилиси, 1983, стр. 86-89.

[2] Вельбицкий И.В., *Технологический комплекс производства программ RTK (концепции и возможности),* Институт кибернетики АН УССР, Киев, 1979.

სამეცნიერო-ტექნიკური ამოცანების გამოყენებითი პროგრამების პაკეტების მმართველი ნაწილების შექმნის ზოგიერთი ასპექტი

თ. ზარქუა

გამოკვეთილია სამეცნიერო-ტექნიკური ამოცანების გამოყენებითი პროგრამების პაკეტის მმართველის ენის შემუშავებისა და რეალიზაციის საკითხები. გამოყოფილია პრობლემები, დაკავშირებული პაკეტების მობილურობასა და გაფართოებასთან.

დასაბუთებულია დაპროგრამების *R*-ტექნოლოგიის უპირატესობა ამჟამად არსებული სხვა საინსტრუმენტო საშუალებებთან შედარებით. წამოყენებულია თითოეული მმართველი პროგრამისათვის გენერატორისა და შემდგომ კი ასეთი გენერატორების გენერატორის შექმნის იდეა.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЭНТРОПИЙНОЙ МЕРЫ НЕЧЁТКОСТИ

Г. Кашмадзе

Кафедра кибернетики

Ввведено понятие энтропии измерительного прибора. С помощью понятия энтропии характеризуется также линейная аппроксимация функции.

В качестве основной характеристики измерительного прибора применяется понятие класса точности. Класс точности — обобщенная характеристика, определяемая пределами допускаемых основных и дополнительных погрешностей, а также другими свойствами средства измерений, влияющими на его точность. Чаще всего класс точности соответствует приведенной погрешности, отнесенной к конечному значению шкалы прибора — к максимальному значению физической величины в диапазоне измерений [1].

В литературе, посвященной теории измерений, отмечается, что класс точности прибора не определяет однозначно погрешность результата измерения, проведенного с помощью данного прибора. Несовершенство существующих оценок привело к появлению работ, посвященных поиску новых оценок средств измерений. Отличительной стороной этих работ является описание погрешности как случайной функции времени. Вместе с тем отмечается, что логическое обоснование целесообразности применения этих методов несколько затруднительно [2].

Любой результат x измерения физической величины, проведённого с помощью некоторого прибора, получается с некоторой погрешностью. Обычно, абсолютную погрешность $\delta(x)$ измерения определяют как половину цены деления шкалы прибора. В случае неравномерной шкалы (как это имеет место, например, для приборов электромагнитной системы) эта величина изменяется по мере движения вдоль шкалы.

Будем считать, что измерительный прибор определяет нечёткое множество отсчётов, характеризуемое функцией принадлежности

$$\mu(x) = 1 - \frac{2}{\pi} Arctg\left|\frac{\delta(x)}{x}\right| \; ; \qquad x \in [a,b]$$

где a, b - нижняя и верхняя границы шкалы соответственно (для величины $\mu(x)$ возможен подбор и других выражений). В качестве примера рассмотрим омметр, шкала которого характеризуется следующей таблицей:

числовой промежуток	количество делений	цена деления
500-300	2	100
300-200	1	100
200-100	5	20
100-50	5	10
50-30	4	5
30-20	5	2
20-10	10	1
10-0	10	1

Нечёткость омметра охарактеризуем энтропией [3]:

$$H = \sum_{i=1}^{42} [\mu_i \ln \mu_i + (1-\mu_i)\ln(1-\mu_i)] \cdot \Delta_i \; ,$$

где 42-количество делений на шкале, Δ_i - цена деления (длина числового промежутка, соответствующего данному делению), а величина μ_i определяется средней точкой деления.

Учёт энтропии прибора может оказатся полезным при сравнении различных приборов, а также при градуировании нового прибора.

Энтропийную меру нечёткости можно применить также при линейной аппроксимации функции $f(x)$ ломаной $g_n(x)$ на некотором отрезке $[a,b]$ [4].

В некоторых задачах целесообразно иметь аппроксимирующую ломаную с сравнительно малым количеством n отрезков. При этом существенное значение приобретает расположение на отрезке $[a,b]$ абсцисс угловых точек ломаной. Естественно возникает задача сравнения различных аппроксимирующих ломаных с фиксированным количеством n отрезков с точки зрения "близости" к графику функции f.

Будем считать график функции $f(x)$ нечётким множеством, которому произвольная точка $(x, g_n(x))$ ломаной принадлежит со степенью $\mu_{g_n}(x)$, где

$$\mu_{g_n}(x) = 1 - \frac{2}{\pi} Arctg\left|\frac{f(x) - g_n(x)}{f(x)}\right|, \qquad x \in [a,b].$$

Аппроксимацию функции f ломаной g_n оценим энтропией

$$H(g_n) = -\int_a^b \left(\mu_{g_n}(x) \ln \mu_{g_n}(x) + (1 - \mu_{g_n}(x)) \ln(1 - \mu_{g_n}(x))\right) dx.$$

Описанный подход был применён в случае, когда абсциссы угловых точек меняются определённым шагом h. Рассматривались различные кривые. График плотности нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x_0 = 0, \ \ \sigma = 1, \ \ x \in [-3,3],$$

например, с минимальной энтропией аппроксимируется ломаной линией, абсциссы угловых точек которой равны : -2,6 ; -2,2 ; -1,7 ; -0,4 ; 0 ; 0,4 ; 1,7 ; 2,2 ; 2,6 (среди всех ломаных, содержащих 10 отрезков; при шаге $h = 0.1$) .

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Н. Брянский, А. С. Дойников. Краткий справочник метролога. Москва. Изд. стандартов. 1991.

[2] Г. И. Кававлеров, С. М. Мандельштам. *Введение в информационную теорию измерений.* Москва. Энергия. 1974.

[3] De Luka, S. Termini. *A Definition of a Nonprobabilistic Entropy in the Setting of Fuzzy Sets Theory*. Inf. and Control. 20. 1972. pp. 301-302.

[4] А. Н. Тихонов, Д. П. Костомаров. *Вводные лекции по прикладной математике.* Москва. 1984.

5.

არამკაფიოების ენტროპიული ზომის ზოგიერთი გამოყენება

გ. კაშმაძე

შემოღებულია გამზომი ხელსაწყოს ენტროპიის ცნება. ენტროპიის ცნების გამოყენებით დახასიათებულია ფუნქციის ტეხილით აპროქსიმაცია.

О МЕТОДЕ АССОЦИАТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ, ОСНОВАННОЙ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ КОДИРОВАНИЯ

Р. Мегрелишвили В. Тогонидзе
Д. Булавришвили

Проблемная лаборатория физической кибернетики

Исследуется отличный от [1] метод идентификации, предназначенный для закрытых ассоциативных систем.

В системах искусственного интеллекта подчеркивается активный аспект представления знаний, что подразумевает согласованность систем запоминания и поиска информации. Каковы бы ни были методы формализации представления знаний (логическое, сетевое, об'ектное), эффективность их программной реализации зависит от базовой системы, т.е. от той структуры, на которой реализуется память [2].

Известно, что память, организованная на основе ассоциативного метода идентификации, является наиболее приближенной к принципу параллельного представления информации [2] .

Основная проблема ассоциативной идентификации (адресации) заключается в компактном (равномерном) размещении слов (фигур, записей) в памяти при условии осуществления их поиска в реальном масштабе времени [3,4].

Предположим, что отображение ($\varphi := a \to s$) из множества заданного словаря $M \subset V_n$ в множество идентификатов (адресов) $S_r \subset V_r$ осуществляется функцией

$$aH^T = s \ , \qquad (1)$$

где $a \in M$, $s \in S_r$, V_1 - *l*-мерное векторное пространство над полем $GF(2)$, H^T - транспонирсванная матрица H .

Тогда для построения неколлизионной системы необходимо построить H при условии, что каждый смежный класс V_n / V фактор-группы содержит не более одного элемента $s \in S_r$ (где пространство строк матрицы H есть V' нулевое пространство подпространства V). Однако при больших мощностях M процедура построения матриц H приводит (ввиду громоздкости алгоритма) к серьёзным вычислительным затруднениям [1].

В противоположность рассмотренному, можно осуществить многоступенчатую идентификацию. При этом процесс идентификации состоит из отдельных, последовательно осуществляемых матричных преобразований.

Пусть $W_n = M \bigcup B_n$, где

$$B_n = \bigcup \left(a^{(i)} + a^{(j)} \right), \tag{2}$$

$$a^{(i)} \neq a^{(j)} \in M .$$

Тогда при помощи матрицы

$$G^{(1)} = \left[g_1^{(1)} \ldots g_n^{(1)} \right], \tag{3}$$

базисной для подпространства V, легко можно построить $((n-1) \times n)$ матрицу H_{n-1} и получить первую ступень идентификации:

$$a H_{n-1}^T = s_{(n-1)} \quad \varphi^{(1)} := a \to s_{(n-1)} , \tag{4}$$

$$g^{(1)} = \left(g_1^{(1)} \ldots g_n^{(1)} \right) \in V_n , \; g^{(1)} \notin W_n . \tag{5}$$

Пусть, далее, $W_n = S_{n-1} \bigcup B_{n-1}$, где

$$B_{n-1} = \bigcup \left(s_{(n-1)}^{(i)} + s_{(n-1)}^{(j)} \right), \tag{6}$$

$$s_{(n-1)}^{(i)} \neq s_{(n-1)}^{(j)} \in S_{n-1} .$$

Тогда, аналогично (3)-(5), можно получить функцию для второй ступени идентификации

$$s_{(n-1)}H_{n-2}^{T} = s_{(n-2)} \quad \left(\varphi^{(2)} := s_{(n-1)} \to s_{(n-2)}\right) \tag{7}$$

и т.д.

$$\left(\varphi^{(k)} := a \to s_{(n-1)} \to \ldots \to s_{(n-k)}\right), \tag{8}$$

$$\left(\varphi^{(k)} := a \to s_{(n-k)}\right),$$

до k-го отображения, когда выбор пространства V_r размерности меньшей, чем r, становится невозможным ввиду невыполнимости условий, аналогичных (5), т.е. когда для верхней границы $r < \log_2\left(\left|W_{n-k+1}\right| + 1\right) - 1$.

Нижняя и верхняя априорные оценки для r имеют вид:

$$\log_2|M| \le r \le \log_2\left(|M| + C_{|M|}^{2} + 1\right) - 1. \tag{9}$$

Следует отметить, что H_{n-i} ($i = 1,\ldots,k$) матрицы отличаются малой плотностью ненулевых компонент, приводящей к простым алгоритмам реализации.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Варшамов Р.Р., *Математические методы повышения надежности систем связи,* Известия АН СССР: Техническая кибернетика, 1964, №4, с.53-58.

[2] Прангишвили А.И., *Разработка принципов и средств представления и параллельной обработки информации на клеточных автоматах,* Докторская диссертация. Грузинский технический университет, 1992.

[3] Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н., *Комбинаторные алгоритмы, теория и практика,* М., Мир, 1980.

[4] Мегрелишвили Р.П., Клочко И.Р., *К разрешению коллизии при использовании метода ассоциативной адресации,* Труды ТГУ: Кибернетика и прикладная математика, 1986, т.286, с.223-232.

კოდირების ალგებრულ სტრუქტურებზე დაფუძნებული ასოციატიური იდენტიფიკაციის მეთოდის შესახებ

რ. მეგრელიშვილი, ბ. ტოგონიძე, დ. ბულავრიშვილი

განხილულია ასოციატიური იდენტიფიკაციის, კოდირების ალგებრულ სისტემებზე დაფუძნებული, ორიგინალური მეთოდი, რომელიც, კერძოდ, ეყრდნობა ვექტორულ ქვესივრცეთა ბაზისურ მატრიცებსა და მათ გარდაქმნებს.

О ПРИНЦИПАХ ПОИСКА ИНФОРМАЦИИ В КОНЦЕПТУАЛЬНЫХ БАЗАХ ЗНАНИЙ

З. Кочладзе

Кафедра кибернетики

Рассмотрены принципы поиска, преобразования и вывода новых знаний в проблемно-ориентированных базах знаний, созданных на основе концептуального системного анализа.

Согласно принципам концептуального системного анализа [1,2,3,4] мы можем создавать проблемно-ориентированные базы знаний, где знания о некоторых объектах и процессах могут быть формализованы и выражены с помощью т.н. бифункционалов [3,4] следующего типа: $f(s)=(x_1\widetilde{x}_2\ldots\widetilde{x}_i\ldots\widetilde{x}_m)$, где $\widetilde{x}_i=\left\{\begin{matrix} x_i \\ - \\ \overline{x}_i \end{matrix}\right\}$, $i=\overline{1,m}$ является i-м признаком, описывающим знания об объекте или процессе. Каждый параметр в бифункционале встречается либо как поляризованный (x_i или $\overline{x}_i$), либо как неполяризованный. Как известно [1,2], именно поляризованные параметры определяют сущность концепта. Возьмём теперь m-мерное пространство, где осями будут $x_1,\ldots,x_m$, а значениями -1, 0, 1, где -1 соответствует состоянию i-го признака в виде $\overline{x}_i$, 0 - состоянию $\widetilde{x}_i$ и 1 - состоянию x_i. Тогда наш концепт будет m-мерной точкой в таком пространстве. Теперь, пусть мы имеем два бифункционала, которые описываются соответственно m_1 и m_2-мерными пространствами.

Введем определение обобщенного пространства двух бифункционалов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обобщенным пространством двух бифункционалов, каждый из которых описывается соответственно m_1 и m_2 множествами признаков, называется пространство U размерностью $m_1 \bigcup m_2 = n$.*

Так, например, пусть имеем два бифункционала $\varphi(A)=(x_1\overline{x}_2x_3\widetilde{x}_5\widetilde{x}_7)$ и $\varphi(B)=(x_1x_3\overline{x}_4\widetilde{x}_6\widetilde{x}_8)$. Тогда обобщенным пространством этих двух бифункционалов будет пространство $U(A,B)=(\widetilde{x}_1\ldots\widetilde{x}_8)$, а бифункционалы $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ в этом пространстве будут иметь вид $\varphi(A)=(x_1\overline{x}_2x_3\widetilde{x}_4\widetilde{x}_5\widetilde{x}_6\widetilde{x}_7\widetilde{x}_8)$

и $\varphi(B)=(x_1\tilde{x}_2x_3\bar{x}_4\tilde{x}_5\tilde{x}_6\tilde{x}_7\tilde{x}_8)$. Естественно, это определение легко можно обобщить для любого количества бифункционалов.

В таком пространстве естественным образом можно ввести обычную евклидовую метрику и получить n-мерное дискретное метрическое пространство. Такое пространство удобно для проведения сравнения концептов между собой, для проведения анализа структуры концепт – модели [3] и для генерирования новых концептов. Так, например, если с помощью бифункционалов мы опишем целевые структуры или предпочтения двух или нескольких лиц, участвующих в некотором конфликте, то в этом пространстве легко можно определить расстояния между целевыми структурами или предпочтениями, найти компромиссную точку (компромиссную целевую структуру), которая больше других устраивает всех участников конфликта.

Рассмотрим теперь другую задачу. Пусть мы имеем некоторые концепты, описывающие разные объект-системы, и некоторую частную реализацию [4] и желаем определить, к какому из концептов эта частная реализация относится. Другими словами, мы имеем классическую задачу распознавания образов. В таком случае применение вышеопределенного пространства будет неэффективным. Поэтому мы можем ввести другое пространство, где осями опять будут признаки, описывающие эту объект-структуру, но на осях будут отложены не три значения, как это было выше, а все те значения, которыми характеризуется данный признак и которые приведены в пространстве "признак-значения" [1,2].

Введем некоторые операции:

1.Операция инверсии $\overline{(x_1x_2\bar{x}_3\tilde{x}_4)}=(\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\tilde{x}_4)$.

2.Операция объединения $(\bar{x}_1x_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4)\bigcup(x_1x_2\bar{x}_3\tilde{x}_4\tilde{x}_5)=(\tilde{x}_1x_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4\tilde{x}_5)$.

3.Операция пересечения $(\bar{x}_1x_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4)\bigcap(x_1x_2\bar{x}_3\tilde{x}_4\tilde{x}_5)=(\varnothing x_2\bar{x}_3\tilde{x}_4\varnothing)$.

4.Операция эквивалентности $(x_1\bar{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4)\equiv(x_1\bar{x}_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4\tilde{x}_5)$.

5. Операция включения $(\bar{x}_1x_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4)\supset(\bar{x}_1\tilde{x}_3)$.

Все эти операции выведены на основе логики ал-множеств, определенных в работе [1].

Введем и здесь понятие обобщенного пространства двух или нескольких бифункционалов так же, как и выше, с тем различием, что если бифункционал не имеет некоторого признака, то в обобщенном пространстве определим его не как $\widetilde{x}_i$, а как пустое множество. Так, например, если мы имеем два бифункционала $\varphi(A)=(\overline{x}_1 x_2 x_3 \widetilde{x}_5 \widetilde{x}_7)$ и $\varphi(B)=(x_1 x_3 \overline{x}_4 \widetilde{x}_6 \widetilde{x}_8)$, то обобщенным пространством будет $U(A,B)=(\widetilde{x}_1 \widetilde{x}_2 \widetilde{x}_3 \widetilde{x}_4 \widetilde{x}_5 \widetilde{x}_6 \widetilde{x}_7 \widetilde{x}_8)$, а сами бифункционалы в этом пространстве записываются следующим образом: $\varphi(A)=(\overline{x}_1 x_2 x_3 \varnothing \widetilde{x}_5 \varnothing \widetilde{x}_7 \varnothing)$ и $\varphi(B)=(x_1 \varnothing x_3 \overline{x}_4 \varnothing \widetilde{x}_6 \varnothing \widetilde{x}_8)$. Бифункционалы в этом пространстве будут уже не точками, а r-мерными оболочками, где r - число поляризованных признаков в бифункционале. Легко можно видеть, что если формирование баз знаний было проведено правильно, то эти оболочки не будут пересекаться между собой. Точкой в этом пространстве будет частная реализация, классификацию которой мы хотим провести, и процесс распознавания сводится к построению этой точки и обнаружения, в какую из сформированных оболочек эта точка попадает.

Рассмотрим теперь один из возможных алгоритмов распознавания. Пусть имеем проблемно-ориентированную базу знаний, где знания описаны с помощью системы концептов, и частную реализацию, которую надо отнести к тому или иному концепту. Если бы мы имели мультипроцессорную вычислительную систему или специальное техническое устройство, то, естественно, распознавание наиболее быстро можно провести путем параллельного сравнения частной реализации со всеми концептами по формуле $\varphi(A) \sim B_i$. Однако, если мы имеем обычный компьютер с одним процессором, то такой принцип невозможен и мы должны последовательно один за другим сравнивать частную реализацию со всеми концептами. Если число признаков и число концептов большое (с чем мы и имеем дело для реальных БЗ), то такой подход окажется неэффективным и приведет к большому перебору. Поэтому надо искать более эффективные методы.

Одним из возможных вариантов является алгоритм, который имитирует параллельный процесс распознавания. Его сущность заключается в следующем: на первом шаге берется значение первого признака частной реализации и сравнивается с первыми признаками концептов таким образом, что отбрасываются те концепты, первый признак которых является поляризованным и значения которых не совпадают со значением частной реализации. На втором шаге берется второй признак и процедура сравнения происходит с оставшими концептами. Эта процедура продолжается до тех пор, пока не останется один концепт или же не закончится число признаков. Если БЗ была сформирована правильно, то распознавание всегда наступит раньше.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чавчанидзе В.В. *К вероятностным механизмам формирования (организации) понятий и образов естественным интеллектом,* Сообщения АН ГССР, т. 76, 3, 1974, с. 37-42.

[2] Чавчанидзе В.В. *К абстрактной теории искусственного концептуального интеллекта,* Труды 4-ой МОКИИ, т. 1. М., 1975, с. 207-218.

[3] Чавчанидзе В.В. *Универсальная модель принятия решений концептуальным и эмоциональным интеллектом,* Сб. стат.: Нормативные и дескриптивные модели принятия решений . По материалам советско—американского семинара. М., Наука , 1981, с. 215-238.

[4] Кочладзе З.Ю. *Об одном методе вычисления вероятностных концептов при использовании концептуального системного анализа,* Труды Тбилисского государственного университета, Кибернетика, прикладная математика, т. 316 , Тбилиси, 1993, с. 9-17.

ცოდნის კონცეპტუალურ ბაზებში ინფორმაციის ძებნის პრინციპების შესახებ

ზ. ქოჩლაძე

შესწავლება კონცეპტუალური სისტემური ანალიზის მეთოდების გამოყენებით პრობლემურად ორიენტირებული ბაზების შექმნის საკითხები. კერძოდ, განხილულია ბაზებში ცოდნის ძებნის, გარდაქმნისა და ახალი ცოდნის მიღების ძირითადი პრინციპები.

МЕТОД ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ПОВЕДЕНИЯ АВТОМАТОВ В СТАЦИОНАРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

Г. Церцвадзе *Т. Хведелидзе*

Проблемная лаборатория физической кибенетики

Получено явное выражение производящей функции вероятностей смены действия для автоматов Роббинса-Кринского, функционирующих в стационарной случайной среде с тремя классами реакций.

Традиционный подход к анализу асимптотического поведения последовательности конечных автоматов в случайных средах [1,2] основан на изучении предельных вероятностей цепей Маркова, ассоциированных с поведением конечных автоматов в стационарных случайных средах.

Однако путь к строгому и полному анализу асимптотического поведения последовательности конечных автоматов, в отличие от развитого в [1,2], проходит через исследование поведения бесконечных (со счетным числом состояний) стохастических автоматов, нахождение адекватного этому поведению математического аппарата и определение сходимости последовательностей конечных автоматов к соответствующим им предельным бесконечным автоматам. В [3] наглядно продемонстрирована плодотворность методов и фактов теории случайных блужданий по целочисленной решетке на полуоси для анализа асимптотического поведения конечных автоматов в стационарных случайных средах с двумя классами реакции.

В настоящей работе, в отличие от [1-3], предполагается, что все возможные реакции стационарной случайной среды воспринимаются автоматом как относящиеся к одному из трех классов - классу благоприятных реакций, классу неблагоприятных реакций и классу нейтральных реакций. Внутри каждого из этих классов реакции среды являются для автоматов неразличимыми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Мы будем говорить, что автомат (конечный или бесконечный) функционирует в стационарной случайной среде* $C(a_1, r_1; a_2, r_2; ...; a_k, r_k)$, *если действия автомата и значения его входного сигнала связаны следующим образом: действие* f_t, *произведенное автоматом в момент времени* t, *влечет за собой в момент* $t+1$ *значение сигнала* $s=+1$

(выигрыш) с вероятностью $p_i = \dfrac{1 - r_i + a_i}{2}$, *значение сигнала* $s = -1$ *(проигрыш) с вероятностью* $q_i = \dfrac{1 - r_i - a_i}{2}$ *и значение сигнала* $s = 0$ *(безразличие) с вероятностью* $r_i = 1 - q_i - p_i \ (i = 1,2,\ldots,k)$. *Здесь величина* $a_i = q_i - p_i$ $(|a_i| < 1 - r_i)$ *имеет смысл среднего выигрыша автомата за действие* f_i *в среде* C.

В этих предположениях методами теории случайных блужданий устанавливается, как и в [4] для конечных автоматов $B_2^{(n)}(1,1;\nu_0,\nu_1)$ с квазилинейной тактикой, что последовательность $\{B_2^{(n)}(n-1,1;0,0)\}_{n=1}^{\infty}$ конечных автоматов Роббинса-Кринского [5] имеет своим пределом бесконечный автомат $B_2(\infty,1;0,0)$ Роббинса-Кринского, вероятностные характеристики поведения которого являются пределом (при $n \to \infty$) вероятностных характеристик конечного автомата $B_2^{(n)}(n-1,1;0,0)$, следствием чего и является полная характеристика возможного асимптотического (при $n \to \infty$) поведения конечного автомата $B_2^{(n)}(n-1,1;0,0)$ Роббинса – Кринского и его бесконечного аналога $B_2(\infty,1;0,0)$.

Обозначим через $u_{x,d}^{(n)}$ вероятность того, что конечный автомат $A_k^{(n)}$ в момент времени d впервые сменит действие f_i, стартуя из состояния $x \in L_i^{(n)}$. Аналогично обозначается вероятность $u_{x,d}$ для бесконечного автомата A_k.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Следуя* [3], *будем говорить, что последовательность конечных автоматов* $\{A_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, *функционирующих в случайной среде* C, *имеет своим пределом бесконечный автомат* A_k, *если*

$$\exists \lim_{n\to\infty} u_{x,d}^{(n)} = u_{x,d}, \quad \forall x, d. \qquad (1)$$

Для автоматов Роббинса - Кринского доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА. *Последовательность конечных автоматов* $\{B_2^{(n)}(n-1,1;0,0)\}_{n=1}^{\infty}$, *функционирующих в стационарной случайной среде* $C(a_1, r_1; a_2, r_2)$ *с тремя классами реакций, сходится к бесконечному автомату* $B_2(\infty,1;0,0)$, *функционирующего в той же среде.*

Доказательство. Производящая функция вероятностей $U_x^{(n)}(z)=\sum_{d=1}^{\infty} u_{x,d}^{(n)} \cdot z^d$ смены действия f_i автоматом при старте из состояния $x \in L_i^{(n)}$ является решением граничной задачи:

$$U_x^{(n)}(z)=\frac{p_i z}{1-r_i z}U_{x-1}^{(n)}(z)+\frac{q_i z}{1-r_i z}U_{x-n-1}^{(n)}(z), \tag{2}$$

$$U_0^{(n)}(z)=1. \tag{3}$$

Решение этой граничной задачи с учетом дополнительного граничного условия

$$U_n^{(n)}(z)=U_{x-n-1}^{(n)}(z), \qquad x=\overline{1,n},$$

окончательно имеет следующий вид:

$$U_x^{(n)}(z)=\frac{1-z+q_i z\left(\dfrac{p_i z}{1-r_i z}\right)^{n-x}}{1-z+q_i z\left(\dfrac{p_i z}{1-r_i z}\right)^{n}}\cdot\left(\frac{p_i z}{1-r_i z}\right)^{x}. \tag{4}$$

В силу определения 2 и теоремы о непрерывности [6] для доказательства теоремы покажем, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} U_x^{(n)}(z)=U_x(z), \qquad |z|<1, \tag{5}$$

где $U_x(z)$ является решением граничной задачи

$$U_x(z)=\frac{p_i z}{1-r_i z}U_{x-1}(z), \quad x \ge 1, \tag{6}$$

$$U_0(z)=1, \tag{7}$$

и определяется по формуле

$$U_x(z)=\left(\frac{p_i z}{1-r_i z}\right)^{x}. \tag{8}$$

Переходя к пределу в (8) при $n \to \infty$ и учитывая, что $p_i z < 1 - r_i z$ при $|z| < 1$, получим (5).

СЛЕДСТВИЕ. Последовательность $\left\{B_2^{(n)}(n-1,1;0,0)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *конечных автоматов Роббинса-Кринского является асимптотически втягивающейся в любой невырожденной стационарной случайной среде* $C(a_1, r_1; a_2, r_2)$.

Действительно, так как вероятность изменить (когда-либо) действие f_i при старте из состояния $x \in L_i$ для автомата $B_2(\infty,1;0,0)$ строго меньше единицы, т.е.

$$\sigma_{x,i} = U_x(1) = \left(\frac{p_i}{q_i + p_i}\right)^x < 1, \quad \forall x, i,$$

то этот автомат является втягивающимся в любой стационарной случайной среде $C(a_1, r_1; a_2, r_2)$ [3,4]. Следовательно, последовательность $\left\{B_2^{(n)}(n-1,1;0,0)\right\}_{n=1}^{\infty}$ конечных автоматов Роббинса-Кринского является асимптотически втягивающейся в той же среде $C(a_1, r_1; a_2, r_2)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Цетлин М.Л., *Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем*, М., Наука, 1969.

[2] Варшавский В. И., *Коллективное поведения автоматов*, М., Наука, 1973.

[3] Королюк В.С., Плетнев А. И., Эйдельман С.Д., *Автоматы. Блуждания. Игры*, УМН, т. 43, вып. 1 (259), 1988.

[4] Хведелидзе Т. Д., Церцвадзе Г.Н., *Случайные блуждания и анализ поведения автоматов в случайных средах с тремя классами реакций*, Труды Тбилисского государственного университета, т. 308, 1991.

[5] Срагович В.Г.,. *Теория адаптивных систем.* М., Наука, 1976.

[6] Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т.1. М., Мир, 1967.

ᲨᲔᲛᲗᲮᲕᲔᲕᲘᲗ ᲒᲐᲠᲔᲛᲝᲨᲘ ᲐᲕᲢᲝᲛᲐᲢᲔᲑᲘᲡ ᲥᲪᲔᲕᲘᲡ ᲗᲔᲝᲠᲘᲐᲨᲘ ᲛᲐᲬᲐᲠᲛᲝᲔᲑᲔᲚ ᲤᲣᲜᲥᲪᲘᲐᲗᲐ ᲛᲔᲗᲝᲓᲘᲡ ᲨᲔᲡᲐᲮᲔᲑ

გ. ცერცვაძე   თ. ხვედელიძე

გარემოს სამი კლასის რეაქციის პირობებში, შემთხვევითი ხეტიალის თეორიის მეთოდების გამოყენებით, რობინს-კრინსკის ავტომატებისათვის მიღებულია მოქმედების შეცვლის ალბათობათა მაწარმოებელი ფუნქციის გამოსახულება ცხადი სახით და შესწავლილია მისი ასიმპტოტური ყოფაქცევა.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЛЕКСИКОГРАФИЯ И ВЕРОЯТНОСТНО – СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛЕКСИКИ КАК СИСТЕМЫ

Тамаз Цилосани , Татьяна Цилосани

Проблемная лаборатория физической кибернетики

Приведены характеристики созданного частотного словаря грузинской научно-технической лексики. На основе данных этого словаря выбраны словоформы для сравнения их эмпирических распределений с пятью теоретическими. Приведены конкретные результаты.

Предметом статистической лексикографии является составление и использование частотных словарей. Частотные словари отличаются от всех словарей другого типа тем, что они содержат только те словоформы, которые выбраны составителем. Параллельно указаны т.н. абсолютные или относительные (или обе вместе) частоты этих словоформ.

Словоформы в частотном словаре расположены, как правило, по двум основным принципам – по алфавиту (с указанием частот) или по убывающим частотам. В некоторых частотных словарях приводятся оба списка – как алфавитный, так и частотный. Иногда частотные словари, наряду с общими списками словоформ, содержат и их дополнительные списки, предназначенные для классификации, например, тематических подмассивов обработанного текста, частей речи и т.д.

Словник частотного словаря, в зависимости от возможностей издателя, содержит полный список встречаемых лексических единиц (полный словарь) или их определенную, наиболее часто употребляемую часть (неполный словарь). При неполном частотном словаре обязательно пристутствие всех словоформ, принадлежащих к т.н. "активной зоне" словаря.

Одной из основных характеристик частотного словаря является общая длина обработанного текста, которая и определяет надежность и соответственно пригодность частотного словаря.

Созданный нами частотный словарь (Т.П. Цилосани, Т.Г Цилосани, Г. Ш. Беришвили) представляет собой первую попытку частотного описания грузинской научно-технической лексики по физике. Он отраслевой, составлен в результате обработки текстов учебных пособий – В.И.Мамасахлисов, Г.А.Чилашвили, И.Ш.Вашакидзе "Квантовая механика" и М.М.Мирианашвили "Молекулярная физика". Объём частотного словаря составляет 160. тыс.

словоупотреблений.

В соответствии с традицией квантитативной лексикографии в частотном словаре принято выделять активную зону, в которую входят словоформы, суммарно покрывающие не менее 50% объема текста.

Активную зону данного частотного словаря составляют первые 250 словоформ. Это словоформы с рангами от 1 до 250 включительно, с абсолютными частотами от 13774 до 98. Активная зона покрывает более чем 50% текстового массива. Общий объем грузинского частотного словаря по физике равен 11549 словоформам и содержит 262 разные частоты.

Самая большая абсолютная частота — 13774 (относительная — 0.0860875) соответствует символу Z (обозначающему формулы). Словоформы с абсолютной частотей 1 встречаются, начиная с номера 6705. 90,5% покрытие текста дают первые 3155 словоформ частотного списка. Последней группе словоформ этой зоны соответствует ранг 2995 и абсолютная частота 6.

Работа по получению частотного словаря выполнена на мини-ЭВМ Реалитэ-2000 с операционной системой Реалитэ-2000 A1.

Благодаря созданию частотного словаря грузинской научно - технической лексики по физике стало возможным применение методов вероятностно - статистического моделирования грузинской лексики как системы, что в свою очередь позволяет описать различные системные и структурные свойства грузинского языка и речи.

Специальные приемы вероятностно — статистического моделирования позволяют установить совокупность и типы связей между элементами в речи (тексте). Этот подход к изучению текстов требует введения некоторых ограничений и допущений. Основным здесь является допущение о независимости лингвистических единиц и ввод понятия однородности текстов относительно фиксированного элемента, под которым понимается словоупотребление. Такое допущение, отличающееся от реального существования реализованных валентностей словоупотреблений в тексте, становится возможным, поскольку эти валентности, во-первых, действуют на ограниченном количестве шагов от фиксированной лексической единицы, во - вторых, "шумовой" эффект валентностей в значительной степени погашается в больших выборках.

В качестве методов вероятностно – статистического моделирования был использован метод сравнения теоретических законов распределений с эмпирическими законами распределений словоупотреблений в грузинских научно- технических текстах по физике. В качестве теоретических законов распределений были применены: нормальный, логнормальный, биномиальный пуассоновский законы, а также закон распределения Чебанова-Фукса. Из грузинского частотного словаря было выбрано 400 словоформ (т.е. 250 словоформ из активной зоны частотного словаря, а 150 словоформ были выбраны произвольно). Наименьшая абсолютная частота, с которой встретились обследуемые словоформы, была 10 с относительной частотой – 0,0000563, и относительной накопленной частотой - 0,8694750. Выбор частоты 10 для грузинских словоформ связан с тем, что из-за недостаточности статистики практически невозможно, опираясь на данную методику исследования, проводить сравнения эмпирических распределений с теоретическими для словоформ, имеющих малые абсолютные частоты.

Сравнение эмпирических и теоретических законов распределений этих словоформ проводилось с помощью критерия согласия x^2 по трем уровням значимости: 1-процентному, 5-процентному и 10-процентному.

Соотношение распределений грузинских словоформ по пяти законам распределений

Законы распределений	Совпадение по всем уровням значимости	Несовпадение по всем уровням значимости	Невыявленные подчинения
Нормальный	146	200	54
Логнормальный	112	91	197
Пуассона	295	105	-
Чебанова-Фукса	157	185	58
Биномиальный	268	132	-

Согласно таблице, эмпирические распределения словоформ, взятых из разных участков частотного словаря, лучше всего описываются пуассоновским и биномиальным законами. Что же касается нормального, логнормального законов и закона Чабанова – Фукса, то, как показали исследования, они хорошо "функционируют" в активной зоне частотного словаря, позже их зона действия сужается, а затем эти законы вобще перестают действовать. Для этих законов наблюдается наличие большого количества словоформ, для которых не удалось проверить соответствие между эмпирическими распределениями и теоретическими законами.

Применение методов вероятностно- статистического моделирования, а в частности использование теоретических законов распределений показало, что не существует единого теоретического закона, полностью описывающего реальные распределения словоупотреблений в текстах. Рассмотренные законы по-разному моделируют эмпирические распределения словоформ, взятых из разных зон частотного словаря. Содержательные с лингвистической точки зрения результаты можно получить тогда, когда эмпирические распределения той или иной лексической единицы проецируются поочередно на каждую из используемых теоретических моделей.

სტატისტიკური ლექსიკოგრაფია და ლექსიკის როგორც სისტემის ალბათურ-სტატისტიკური მოდელირება

თ. წილოსანი, ტ. წილოსანი

მოყვანილია ქართული სამეცნიერო-ტექნიკური ლექსიკის სიხშირითი ლექსიკონის მახასიათებლები. ამ ლექსიკონის საფუძველზე ამორჩეულია სიტყვაფორმები, მოყვანილია ამ სიტყვაფორმათა ემპირიული განაწილების ხუთ თეორიულ განაწილებასთან შედარების შედეგები.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОВЕРКИ ПРАВИЛЬНОСТИ ПРОГРАММ, НАПИСАННЫХ НА АЛГОРИТМИЧЕСКОМ ЯЗЫКЕ

М. Цуладзе Г. Кобуладзе

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

На основе концепции рекурсивных сетей переходов разработан язык представления синтаксиса языка программирования. Приводится описание реализации этого языка, выполненное в системе DELPHI 3 и являющееся ядром программы, предназначенной для автоматизации проверки фрагментов, написанных на алгоритмических языках.

Программирование является отраслью, характеризующейся чрезвычайно высокими темпами развития, что обуславливается, с одной стороны, усовершенствованием процесса создания программ, разработкой новых методик, инструментариев и, в конечном итоге, технологий, а с другой стороны, улучшением технических характеристик аппаратного обеспечения. Одновременно с вышеуказанным весьма рельефно обозначился процесс расширения сфер применения компьютерной техники. Сегодня вряд ли возможно назвать вид человеческой деятельности, для которого не было бы актуально применение компьютера. Одной из наиболее результативных сфер использования компьютеров является обучение.

Вышесказанного вполне достаточно для того, чтобы стало ясно значение создания программного обеспечения, предназначенного для улучшения процесса обучения, тем более если речь идет об обучении программированию. Ведь в этом случае существенная интенсификация и индивидуализация процесса являются совершенно необходимыми предпосылками для достижения требуемой производительности и, в результате, для обеспечения осуществления поставленных целей.

Привлечение компьютера в принципе позволяет облегчить решение следующих задач:

- создание учебного курса,
- проведение занятия,
- организационное обеспечение учебного процесса,
- обработку запросов на получение нестандартной информации об учебном процесе.

- Для осуществления перечисленного необходимо иметь:

- базы данных, которые предназначены для хранения и обработки информации о всех объектах, участвующих в учебном процессе (обучающиеся, преподаватели, учебные подразделения, предметы, специальности, специализации и т.д.),

• программы, предназначенные для поддержки обучения по конкретным предметам,

• программы, призванные способствовать удовлетворению некоторых конкретных требований учебного процесса.

Программа, которой посвящена данная публикация, призвана автоматизировать проверку правильности фрагментов программ, составленных на алгоритмических языках. Она является частью компьютерной системы, предназначенной для поддержки интенсификации и индивидуализации учебного процесса, разрабатываемой на факультете прикладной математики и компьютерных наук ТГУ. Для подобной программы принципиальным является требование легко настраиваться на любой новый язык программирования, а также на его возможные модификации (к примеру, обусловленные методологическими соображениями).

Проверка правильности программных фрагментов состоит из проверки синтаксиса и проверки семантики. Синтаксический анализ в программе осуществляется на основе формального описания синтаксиса соответствующего языка, заранее записанного в текстовый файл описанным ниже способом. Что же касается семантического анализа, то пока здесь требуется дополнительная информация о соответствующем примере, в частности, система тестов.

Для семантического анализа необходимо было выбрать метаязык для его описания, а также разработать способ представления этого описания в компьютере (во внешней памяти). В качестве метаязыка для описания синтаксиса языка был выбран язык рекурсивных схем. Синтаксис, описанный на этом языке, был представлен специальным образом и записан в текстовый файл. Представление о языке рекурсивных схем, а также об избранном нами способе его представления в виде текстового файла дает приводимое ниже описание части синтаксиса языка паскаль, на базе которого происходила отладка первой версии представленной программы. в частности, здесь приводится синтаксис операторов языка.

```
{$\7 | $\10 | $\12 | $\13 | $\14 | $\16 | $\17 | $\19 ) @
{ | $sah19 \3 : } { $\3 | $\4 } @
{ $\5 | $\6 | $\7 | $\8 } @
{ $\10 | $\11 | $\16 | $\21 } @
```

```
{ $acv15 \2 | $sah19 \2 } := $gam14 \2 @
      @
      goto $sah19 \3 @
      $sah19 \2 { / ( $\9 % , $\9 % ) } @
      { $gam14 \2 / $acv15 \2 / $sah19 \2 } @
      begin $\2 % ; $\2 % end @
      { $\12 / $\13 } @
      if $gam14 \14 then $\2 # else $\2 @
      case $\14 of $Con16 \3 % , $Con16 \3 % : $\2 % $Con16 \3 { % , $Con16 \3 % } : $\2 %
$\2 % end @
      $gam14 \13 @
      $con16 \3 @
      { $\17 | $\19 | $\20 } @
      for $sah19 \2 := $gam14 \2 { to / downto } $gam14 \2 do $\2 @
      $sah19 \2 @
      repeat $\2 % ; $\2 % until $gam14 \14 @
      while $gam14 \14 do $\2 @
      • $\22 $\2 @
      • with $\23 do @
      • $acv15 \2 % , $acv15 \2 % @
```

• здесь необходимы следующие пояснения:

• фрагмент, заключенный между двумя символами %, может повторяться нуль или больше раз;

• фрагмент, заключенный в фигурные скобки, содержит альтернативные фрагменты, отделяемые друг от друга символом | и из которых может быть выбран ровно один;

• символ @ означает окончание описания конструкции;

• если за символом $ следует идентификатор, то это означает отсылку к описанию, расположенному в файле, соответствующем этому идентификатору, иначе происходит отсылка в текущий файл с его начала;

• число за символом \ означает номер строки в файле отсылки, на который осуществляется переход;

• после обработки по месту отсылки происходит возврат в отправную точку, отсылка может быть кратной;

• в описаниях может встретиться символ #.

Данная программа написана в системе DELPHI 3 и предусматривает работу пользователя в среде WINDOWS 95. Для пользователя имеется главное меню, а также панель инструментов. Реализованы следующие возможности:

• открыть новый или уже существующий файл;

• закрыть файл;

• отредактировать текст файла;

• сохранить файл;

• указать путь к файлу, содержащему описание синтаксиса языка, на который настраивается обучение;

• работать с окнами как это принято в WINDOWS 95;

• выйти из программы в операционную среду (завершить работу).

В заключение следует подчеркнуть необходимость разработки программной поддержки для создания файла синтаксических описаний языка обучения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Донован Дж., *Системное программирование*, Москва, Мир, 1975.
[2] Вудс А., *Сетевые грамматики для анализа естественных языков*, Кибернетический сборник. Выпуск 13. Москва, Мир, 1976.
[3] Льюис Ф., Розенкранц Д., Стирнз Р., *Теоретические основы проектирования компиляторов,* Москва, Мир, 1979.
[4] Абрамов В. Г., Трифонов Н. П., Трифонова Г. Н., *Введение в язык паскаль*. Москва, Наука, 1988.
[5] Йенсен К., Вирт Н., *Паскаль. Руководство для пользователя,* Москва, Финансы и статистика, 1989.

ალგორითმულ ენაზე დაწერილი პროგრამების და მათი ფრაგმენტების სისწორის ავტომატური შემოწმება

მ. წულაძე, გ. ქობულაძე

შემუშავებულია პროგრამირების ენის სინტაქსის წარმოდგენის ენა, რომელიც ეყრდნობა რეკურსიული გადასვლის ქსელურ კონცეფციას. აღწერილია აღნიშნული ენის რეალიზაცია, რომელიც შესრულებულია სისტემა DELPHI 3-ში და წარმოადგენს ალგორითმულ ენაზე დაწერილი ფრაგმენტების ავტომატური შემოწმებისათვის განკუთვნილი პროგრამის ბირთვს.

SUMMARIES

APPLIED MATHEMATICS

ON FLUX VECTOR SPLITTING FOR SHALLOW WATER EQUATIONS

R. Bochorishvili, N. Elkanishvili

One dimensional water equations in space Shallow water are considered. The so-called generalised flux vector is suggested by means of which the numerical flux vector is constructed. In case of non-linear scalar conservation laws splitting parameters are selected on the basis of requirement of L^1 and L^∞ uniform boundedness of approximate solutions constructed by means of the corresponding semidiscrete scheme. On the basis of the result obtained splitting parameters are determined for shallow water equations.

TO THE CONVERGENCE OF THE WEAK APPROXIMATION METHOD

Z. Gegechkori

In the present work the abstract initial value problem for the operator equation of evolutionary type in the Banach space is considered. The convergence of the method of weak approximation with uniform piecewise correctness of the factorised problem is proved.

SOME NEW MATHEMATICAL PROBLEMS OF THE THEORY OF NONLINEAR ELASTICITY

Tamaz S. Vashakmadze

In the report on STAMM-94 we formulated some mathematical problems of non-linear solid mechanics when piezoelectricity and electric conductive creeping thermo-dynamic elastic beams, plates and shallow shells with small or finite deformations subjected to electromagnetic fields are anisotropic and non-homogeneous. In this work we continue to adduce some new results which substantiate possibility of research and solving the mathematical problems.

ON THE VERSION OF AN INVERSE PROBLEM FOR A QUASILINEAR EQUATION WITH REAL CHARACTERISTICS

M. Menteshashvili

The inverse Caushy problem for a hyperbolic quasilinear differential equation of second order with a parabolic singularity is considered. The existence theorem of an initial value problem is proved.

ONE-DIMENSIONAL PROBLEM FOR TIMISHENKO'S NONLINEAR SYSTEM

V. Odisharia

The existence of the generalised solution of the non-linear one-dimensional problem and the convergence of Bubnov-Galerkin method for a static deformation of a plate, described by the Temoshenko's model, is proved.

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR POISSON EQUATIONS WITH NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS

N. Odishelidze

In this paper the optimal control problem for the Helmholtz equation with non-local boundary conditions and the quadratic functional is considered. Using the operators of exact difference schemes the difference scheme for the numerical solution of optimal control problem is constructed. The convergence of the difference scheme is proved.

MATHEMATICAL MODELLING OF COLLAPSE OF BIG VOLUME LANDSLIDE MASSES

N. Skhirtladze, G. Khelidze, A. Chanturia

Mathematical model of a sudden collapse of big volume landslide masses and algorithm of its numerical realisation is elaborated. Concrete computations have been carried out for the case of Tok landslide (Italy, 1963).

THE NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE ONE-DIMENSIONAL NONLINEAR SYSTEM OF TIMOSHENKO

J. Peradze

The initial boundary value problem for a beam is considered in the model of Timoshenko. Using the finite element method, a Crank-Nikolson type scheme and the iteration process for a non-linear system of algebraic equations solves the problem. The algorithm convergence is proved.

ON ONE NUMERICAL METHOD FOR SOLVING AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WITH FUZZY INITIAL VALUE

E. Katamadze

This work deals with ordinary differential equation with fuzzy initial value, or with so called "fuzzy Cauchy problem". One method of the numerical solution of the problem under discussion is considered. This method is based on using one interval method. One important evaluation is proved. For one class of differential equations the question of convergence is considered. In practical situation the available knowledge about initial value may be fuzzy – it is the motivation of this work.

ON THE TORSION OF THE ELLIPTIC TUBES

G. Khatiashvili

In this paper for the homogeneous and composite elastic tubes, made from binary mixture and isotropic materials, when their normal cross-sections are the domains bounded by confocal or geometric similar ellipses, the functions of torsion by polynomials are represented.

INFORMATICS

INFORMATIONAL-STATISTICAL MODEL OF PLANNING THE EXPERIMENT

N. Bokuchava, N. Nikoladze, G. Mamasakhlisov

In the present work we are going to form the information method of planning the experiment applying the ideas of the classical theory of planning the experiment on the basis of generalising the R. Fisher information matrix and applying information criteria.

ON INFORMATIONAL PRINCIPLES OF MODELLING

N. Bokuchava, N. Nikoladze

The problem is discussed of applying informational criteria for stating the completeness of statistics for evaluation of parameters and testing hypotheses.

A MATHEMATICAL MODEL FOR DECISION SUPPORTING MANY-STEP PROCESS IN THE PROBLEM OF EARTHQUAKE PROGNOSIS

T. Gachechiladze, G. Tsertsvadze

A method of decision classification is described which constructs a numerical tabular knowledge base from historical cases, and derives inferences from particular case histories using discrimination analysis that are based on a theory of fuzzy relations. The method avoids many data collection problems associated with probabilistic approaches, and can handle incomplete information, partial inconsistency and fuzzy descriptions of data in a natural way.

ON SOME ASPECTS OF CREATING THE APPLIED PROGRAM PACKS MANAGING PARTS FOR SCIENTIFIC-TECHNICAL TASKS

T. Zarqua

The questions of developing and realising the calling language of applied program packs for scientific-technical tasks are revealed. Separate problems of mobilising and extending of applied packs are considered. The superiority of the R-technologies is demonstrated and the idea of creating the generator for every control program and after that creating generator for such generators is raised.

SOME APPLICATIONS OF ENTROIPIC MEASURE OF FUZZINESS

G. Kashmadze

In the present work the notion of entropy of measuring instrument is introduced. The function linear approximation is also characterised by employing the notion of entropy.

On The Method of Associative Identification Based on the Algebraic Coding Systems

R.Megrelishvili, B.Togonidze, D.Bulavrishvili

A new method of identification of information of words is considered. The method is based on the algebraic coding systems. The identification consists in calculation of the number indicating the address of a given word in the memory field, allowing compression of the initial information for compact filling of the memory system.

To the Main Principles of the Search Information in the Conceptual Knowledge Bases

Z. Kochladze

The article studies the problems of creating problem-oriented bases using the method of conceptual systems analysis. Particularly, the main principles of knowledge search, transformation and creation of the new knowledge in above-mentioned bases are analised.

Method of Creating Functions for the Problem of Automata Behaviour in Random Medium

G. Tsertsvadze, T. Khvedelidze

By the methods of random wolk theory is obtained the expression for creating function of Robins-Krinsky automaton activity changing probability and its asymptotic behaviour is investigated.

Statistical Lexicography and Vocabulary Model as System with Using of the Probability–Statistical Methods

T.P. Tsilosani, T.G. Tsilosani

The frequency vocabulary used in a Georgian scientific text in physics has been obtained by a digital computer. A scheme of comparing the empirical distribution of lexical units with theoretical laws of distributions is considered. The results for five theoretical distributions of laws are obtained.

Automatic Check of Programs and Its Parts Written on Algorythmical Language

$\boxed{\text{M. Tsuladze}}$, G. Kobuladze

A representation of programming language syntax is developed, which is based on network concept of recursive transition. The description of the above mentioned language realisation created with DELPHI 3 system is given. It is the core of the proposed for automatic check of parts written on algorithmical language.

სარჩევი
CONTENTS
СОДЕРЖАНИЕ

ინფორმატიკა • INFORMATICS • ИНФОРМАТИКА

გამომცემლობის რედაქტორი ბ. მიქაძე
ტექ. რედაქტორი ფ. ბუდალაშვილი
კორექტორი ე. სულხანიშვილი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 30.12.98
საბეჭდი ქაღალდი 70x108 1/16
პირ. ნაბ. თაბახი 8.4
სააღრ.=საგამომც. თაბახი 5.15

შეკვეთა № 112 ტირაჟი 150

ფასი სახელშეკრულებო

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის გამზირი, 14.

გამომცემლობა „ინტელექტი"
თბილისი, ილია ჭავჭავაძის გამზირი №2