თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

325

კიბერნეტიკა გამოყენებითი მათემატიკა
КИБЕРНЕТИКА, ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
CYBERNETICS, APPLIED MATHEMATICS

18

თბილისი Тбилиси Tbilisi
1998

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

325

КИБЕРНЕТИКА, ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Тбилиси 1998

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

325

კ ი ბ ე რ ნ ე ტ ი კ ა

გ ა მ ო ყ ე ნ ე ბ ი თ ი   მ ა თ ე მ ა ტ ი კ ა

C Y B E R N E T I C S

A P P L I E D   M A T H E M A T I C S

თბილისი 1998 Tbilisi

Издательство Тбилисского университета, 1998
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1998
Tbilisi University press, 1998

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили
თბილისის ივ. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
325, 1998

КОМПАКТНОЕ КОДИРОВАНИЕ И ВОПРОСЫ ФОРМАЛИЗАЦИИ ВЗАИМОРАСПОЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ

Н.Ш.Джикия

Рассматриваются вопросы кодирования изображений с применением матричного метода сжатия информации, когда это изображение получено на специальной информационно-кодирующей сетке.

Под изображением подразумевается плоский объект, вид которого изменяется от точки к точке. Формально изображение можно определить как некоторую действительную функцию нескольких переменных. Из ограниченности размеров реальных изображений следует, что эта функция не обращается в нуль на ограниченной области стандартных размеров и формы.

Для того, чтобы изображение можно было обработать на ЭВМ, его необходимо преобразовать в некоторый дискретный массив чисел, представляющих значение точек изображения. Полученную в результате матрицу назовем цифровым изображением. Для обеспечения адекватного представления исходного изображения при его воспроизведении матрица элементов изображения должна быть достаточно велика. Предложенный метод кодирования позволяет сократить этот объем информации без ущерба для возможностей воспроизведения исходного изображения.

Исходя из этого, большое практическое значение имеют исследования условий принадлежности точек к определенному виду траектории, виды расположения отрезков прямых относительно друг друга и т.д. при закодированном представлении соответствующих матриц этих контуров.

Введём следующие определения и обозначения.

Пусть $U_k = \alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1$, где $\alpha_i \in \{0,1\}$ и $i, k = \overline{1,n}$ – кодовый вектор n-мерного линейного векторного пространства V_n, заданный над полем $GF(2)$. Назовем его вектором основания, порождающим соответствующую матрицу элементов изображения.

Пусть, далее $v_i = \beta_n \beta_{n-1} \ldots \beta_1$, где $\beta_i \in \{0,1\}$ и $i = \overline{1,n}$ – произвольный кодовый вектор из пространства V_n.

<u>Определение 1</u>. Скалярной характеристикой или скаляром вектора $v_i \in V_n$ называется число, соответствующее весу этого вектора. Обозначим его через $s(v_i)$.

<u>Определение 2</u>. Ядром вектора $v_i \in V_n$ называется фрагмент длины n_1 этого вектора $(n_1 < n)$, ограниченный крайними единицами. Обозначим его через $\alpha(v_i)$.

<u>Определение 3</u>. Внешне позиционной скалярной характеристикой или внешнепозиционным скаляром вектора $v_i \in V_n$ называется число, определяющее позиционное удаление ядра вектора от компоненты нулевой позиции. Обозначим его через $\rho(v_i)$.

<u>Примечание</u>. Позиции в кодовом векторе фиксируются справа.

<u>Определение 4</u>. Внутрипозиционной скалярной характеристикой или внутрипозиционным скаляром ядра вектора $v_i \in V_n$ называется число, которое определяет позиционное расстояние между двумя компонентами, равными единице, в ядре данного вектора. Обозначим его через $\lambda(\alpha(v_i))$.

<u>Примечание</u>. $\lambda(\alpha(v_i))$ – число переменное. При этом очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(\alpha(v_i)) = n_1 - s(v_i), \quad k < n_1 < n, \quad i = \overline{1,n},$$

чему соответствует количество нолей в ядре данного вектора. Обозначим его через $\bar{s}(\alpha)$.

Пример. Пусть $n=9$ и $v_i = 001101010$, тогда согласно определениям I,2,3 и 4 будем иметь: $s(v_i)=4,\ \alpha(v_i)=110101,$ $\rho(v_i)=1,\ \lambda(\alpha(v_i))=2,\ \bar{s}(\alpha(v_i))=2.$

Специфика конструкции информационно-кодирующей сетки и порядок расположения элементов (блок, пакет, клетка) на сетке позволяет сформулировать следующую лемму:

Лемма. Для двух произвольных векторов основания U_{K_1} и U_{K_2}, где $K_1 \neq K_2,\ K_1, K_2 = \overline{1,n}$, расположенных на одних и тех же траекториях, одноименным элементам (блок, пакет, клетка) соответствуют кодовые векторы, скалярные характеристики которых постоянны и равны между собой.

Примечание. Под понятием двух одноименных траекторий будем подразумевать однотипность направлений кривых, необязательно содержащих фрагменты одинаковой длины.

Теорема I. Для того, чтобы элементы информационной сетки были расположены на одной непрерывной прямой, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$s(\alpha(S_H))=3,\ \lambda(\alpha(S_H))=const,\ \rho(S_H)=const,$$

где S_H - нормализованный суммарный вектор соответствующего элемента информационной сетки.

При этом для отдельных видов траектории будем иметь:

- для горизонтальной траектории:

$$\lambda(\alpha(S_H))=0,\ \rho(S_H)=3m \qquad (m=0,1,2);$$

- для вертикальной траектории:

$$\lambda(\alpha(S_H))=2,\ \rho(S_H)=m \qquad (m=0,1,2);$$

– для траектории биссектрисы $y=x$:

$$\lambda(\alpha(S_H))=1, \quad \rho(S_H)=1;$$

– для траектории биссектрисы $y=-x$:

$$\lambda(\alpha(S_H))=3, \quad \rho(S_H)=0.$$

Доказательство этой теоремы вытекает из свойств конструкции информационно-кодирующей сетки и леммы I.

Примечание. $S_H=\sum_{i=1}^{n} v_i+U_k \pmod 2$,

где v_i кодовые векторы являются элементами некоторой матрицы, натянутой на вектор основания U_k соответствующего элемента информационной сетки.

Следствие I. Отрезки прямых, расположенные на одной траектории и содержащие клетки двух i, j пакетов k-го блока, с векторами основания U_{k_i} и U_{k_j}, $i,j,k=\overline{1,n}$, являются непосредственными продолжениями друг друга, если: $(S_k)_i=(S_k)_j$ и $\lambda(\alpha(S_n)_k)=const$, где $(S_k)_i$ и $(S_k)_j$ – нормализованные суммарные векторы для клеток i-го и j-го пакетов, а $(S_n)_k$ – нормализованный суммарный вектор для пакетов k-го блока.

При этом:

-для горизонтальной траектории:

$$\lambda(\alpha(S_n))=0, \quad \rho(S_n)=3m \quad \text{или} \quad 3m+1 \quad (m=0,1,2)$$

-для вертикальной траектории:

$$\lambda(\alpha(S_n))=2, \quad \rho(S_n)=m \quad \text{или} \quad m+3 \quad (m=0,1,2)$$

-для траектории биссектрисы $y=x$:

$$\lambda(\alpha(S_n))=1, \quad \rho(S_n)=m \quad \text{или} \quad m+3 \quad (m=1,2)$$

-для траектории биссектрисы $y=-x$:

$$\lambda(\alpha(S_n))=3, \quad \rho(S_n)=m \quad \text{или} \quad m+3 \quad (m=0,1)$$

Следствие 2. Отрезки прямых, расположенные на одной траектории и содержащие клетки двух i, j пакетов с векторами основания U_{K_i} и U_{K_j} двух K-го и ℓ-го блоков, являются непосредственными продолжениями друг друга, если:

$$(S_K)_i = (S_K)_j, \quad s\big((S_П)_K + (S_П)_\ell\big) = 2 \ (mod 2), \quad \alpha(S_Б) = const.,$$

где $S_Б$ – нормализованный суммарный вектор для блоков. При этом, для отдельных видов траектории условия относительно $S_Б$ аналогичны условиям относительно $S_П$ в следствии I.

Следствие 3. Отрезки прямых, расположенные на одной траектории и содержащие клетки любых пакетов этой траектории, не являются непосредственными продолжениями друг друга, т.е. между ними существует разрыв, если нарушены условия относительно внутрипозиционного скаляра $Л$ в следствиях I и 2 теоремы I.

Следствие 4. Длина отрезка прямой, проходящей через клетки i – количества пакетов по одной траектории, определяется следующим соотношением:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} s\big((S_K)_i\big),$$

где $(S_K)_i$ – нормализованный суммарный вектор для клеток i-го пакета.

Примечание. Отрезок прямой должен содержать минимум три клетки.

Рассмотренная теорема лежит в основе формализации и вывода условий взаиморасположения точек на плоскости, отображенной с заданной точностью на кодирующую сетку.

Имеет место следующая

Теорема 2. Отрезки кривых, отображающих клетки двух i, j пакетов, расположены на двух одноименных траекториях, если:

I. Кодовые векторы, соответствующие клеткам, расположенным на одноименных $m_i = m_j$ строках, с соответствующими векторами основания образуют линейные комбинации (по $mod 2$) одного и того же значения с точки зрения равенств как скаляра и ядра, так и позиционных характеристик ядра в полученных нормализованных суммарных векторах;

2. Если $m_i \neq m_j$, тогда кодовые векторы с соответствующими векторами основания образуют линейную комбинацию (по $mod\ 2$) одного и того же значения по скаляру и ядру, но позиционные характеристики сдвинуты на постоянное число шагов.

<u>Примечание I</u>. Для горизонтальной траектории внешнепозиционный скаляр характеризуется сдвигом на 3 или 6 позиционных шагов, а для вертикальной траектории - на I или 2 позиционных шага.

<u>Примечание 2</u>. Для любого количества одноименных траекторий указанная теорема справедлива, так как всегда возможно установление бинарных соотношений между любым конечным числом траекторий.

<u>Следствие I</u>. Если смежные точки кривых удовлетворяют условиям теорем I и 2, то прямые, расположенные на этих кривых, являются параллельными.

<u>Следствие 2</u>. Для вывода условий параллельности отрезков прямых, содержащих клетки нескольких пакетов, сначала определяем группы пакетов, принадлежащих к одной прямой (согласно теоремы I). Далее, для каждого проверяем условия теоремы 2 и определяем параллельность отдельных фрагментов прямых, проходящих через клетки данных пакетов. После проверки всех групп делаем обобщенное заключение о параллельности.

<u>Следствие 3</u>. Если два отрезка прямых не являются параллельными, то линии, содержащие эти отрезки, пересекаются.

Согласно ограничениям, допущенным при определении понятия отрезка прямой, можно рассмотреть отдельные фрагменты пересекающихся прямых из одного пакета. Т.е. для анализа возможных случаев пересечения достаточно рассмотреть клетки одного пакета.

Для таких фрагментов пересекающихся прямых вычисляем суммарные векторы $(S_K)_1$ и $(S_K)_2$ и линейную комбинацию

$$S_c = (S_K)_1 + (S_K)_2 \pmod 2.$$

Имеет место следующая

Теорема 3. Отрезки прямых, фрагменты которых проходят через клетки одного пакета, пересекаются, если для этих фрагментов выполняется условие:

$$s(S_c) = s((S_K)_1) + s((S_K)_2) - 2 \pmod 2.$$

Очевидность этой теоремы вытекает из специфики построения информационной сетки.

Анализируя характеристики $\bar{S}$, $\mathcal{A}$ и ρ суммарного вектора S_c можно сделать следующий вывод: отрезки прямых являются перпендикулярными друг к другу для следующих значений $\bar{S}$, $\mathcal{A}$ и ρ суммарного вектора S_c (см. таблицу).

Поступила 10.II.1994

Проблемная
лаборатория физической
кибернетики

ნ. ჯიქია

კომპაქტური კოდირება და სიბრტყეზე გეომეტრიულ წერტილთა ურთიერთგანლაგების ფორმალიზაციის საკითხები

რეზიუმე

განიხილება გამოსახულების კომპაქტური კოდირების საკითხები, როდესაც ეს გამოსახულება მიღებულია სპეციალურ საინფორმაციო მაკოდირებელ ბადეზე.

მიღებულია შედეგები, რომლებიც უზრუნველყოფენ სიბრტყეზე გეომეტრიული წერტილების ურთიერთგანლაგების დადგენას, უშუალოდ შეკუმშულ მდგომარეობაში.

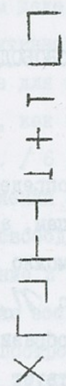
N.Jikia

COMPACT CODING AND QUESTIONS OF THE FORMALIZATION OF THE RELATIVE POSITION OF GEOMETRICAL POINTS ON A PLANE

Summary

Results are obtained which permit determination of the relative position of geometric points directly in compressed state.

Значения характеристик			Вид перпендикулярности
$\bar{S}$	λ	ρ	
2	2	I	
2	2	2	
3	3	0	
3	{I, I, I}	I	
3	3	2	
4	{2, I, I}	0	
4	{I, I, 2}	I	
5	{2, 3}	0	
5	{3, 2}	0	
5	{I,3,I}	I	



Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили
თბილისის ივ. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
325, 1998

О СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ПРОНИЛЬПОТЕНТНЫХ W - ГРУПП

А.Д. Тавадзе

Все определения, относящиеся к W - степенным нильпотентным группам, а также пронильпотентным W - группам и алгебрам Ли, можно найти в / 1,2 / и / 4 /.

Класс $\mathfrak{N}_c$ всех W - степенных групп класса $\leqslant c$ является многообразием мультиоператорных групп, поэтому в этом классе существует свободное произведение - назовем его c - м нильпотентным произведением и обозначим через $\Pi^{(c)}$.

Пусть $G^{(i)}, i\in I$, - пронильпотентные W - группы. Их свободным пронильпотентным произведением назовем предел обратного спектра нильпотентных W - групп $P_n = \Pi^{(c)}_{i\in I}(G^{(i)}/\bar{G}_c^{(i)W})$. Нетрудно видеть, что если, например, все $G^{(i)}$ просто группы, то их пронильпотентное произведение получается, если в свободном произведении взять нижний центральный ряд и пополнить это произведение относительно системы окрестностей, состоящей из членов этого ряда. Конечно, при этом необязательно свободное произведение будет вложено в пронильпотентное.

В / 3 / мы выяснили, каковы свободные подгруппы свободных групп. Они не все оказались свободными. Тем не менее, конечно порожденные подгруппы оказались свободными. Верно ли, что конечно порожденные подгруппы свободного произведения устроены так же, как в теореме Куроша о подгруппах свободного произведения? Иными словами, верно ли, что конечно порожденная подгруппа свободного произведения является свободным произведением подгрупп, сопряженных с подгруппами сомножителей и свободной группы?

На этот вопрос мы ответим отрицательно. На самом деле, он оказался тесно связанным с вопросом, в свое время активно обсуждавшимся, о справедливости аналога теоремы Куроша для подалгебр свободной лиевой суммы алгебр Ли. Эта проблема, как известно, была отрицательно решена А.И.Ширшовым в 1962г. /6/. В этой работе Ширшов построил базу свободного произведения алгебр Ли и, используя эту базу, привел пример подалгебры свободного произведения, в которой есть нетривиальное соотношение и которая не разлагается в свободное произведение. Мы также воспользуемся базой Ширшова для свободного произведения и построим пример, который при соответствующем понимании также дает пример, аналогичный примеру Ширшова.

При этом мы, конечно, будем помнить, что если L - нильпотентно аппроксимируемая полная алгебра (пронильпотентная W-алгебра), то формула Кэмпбелла-Хаусдорфа превращает ее в группу. Если алгебра - свободное произведение алгебр (см., например, /8/), то группа - свободное произведение групп, полученных из алгебр по той же формуле Кэмпбелла-Хаусдорфа. Таким образом, построенный ниже пример опровергает также гипотезу об аналоге теоремы Куроша для пронильпотентных групп.

Пусть $L=\prod\limits_{\alpha\in I}^{*}L_\alpha$ - свободное произведение алгебр Ли над некоторым полем Φ. Пусть $\{\ell_i^\alpha \mid i\in I_\alpha\}$ - фиксированная база алгебры L_α. Будем считать множество I_α линейно упорядоченным при каждом α; также упорядочим множество I.

Положим $l_i^\alpha > l_j^\beta$, если $\alpha > \beta$, а также если $\alpha = \beta$, но $i > j$. Построим на множестве всех l_i^α, $i \in I_\alpha$, $\alpha \in I$, систему правильных слов А.И.Ширшова / 5 /.

Определение. Правильное слово называется особым, если после опускания скобок в нем не будет подслов вида $l_i^\alpha l_j^\alpha$, где $i > j$.

А.И.Ширшов доказал, что особые правильные слова составляют базис свободного произведения.

В случае пронильпотентных алгебр L_α базы l_i^α, $i \in I_\alpha$, естественно выбирать из факторов нижнего центрального ряда и упорядочивать по весам, т.е. произвольно с условием, что элемент большего веса следует за элементом меньшего веса (элемент имеет вес j, если он лежит в замыкании j-го члена нижнего центрального ряда, но не лежит в замыкании $(j+1)$-го). Кроме того, вес правильного особого слова определяем как сумму весов всех составляющих сомножителей.

При таком соглашении видно, что линейная оболочка всех одночленов (от элементов баз) веса $\geq c+1$ образует идеал.

После пополнения относительно всех этих идеалов как системы окрестностей нуля эти идеалы превращаются в замыкания $(c+1)$-го члена нижнего центрального ряда в свободном пронильпотентном произведении и состоят из элементов вида $\sum_{i \geq c+1} u_i$, где каждое u_i есть линейная комбинация правильных особых слов.

Отсюда вытекает еще такое замечание. Если G - свободное пронильпотентное произведение пронильпотентных алгебр M и N то, как известно / 7 /, G/G_3 - второе нильпотентное произведение алгебр $M/\bar{M}_3$ и $N/\bar{N}_3$. В таком случае базу G/G_3 составляют элементы баз сомножителей, имеющих вес I (база G

по модулю коммутанта), элементы баз сомножителей веса 2 и произведения $m_i n_j$ элементов баз сомножителей, где m_i и n_j имеют вес I (базис коммутанта).

Пример. Пусть $\hat{L}$ – свободное пронильпотентное произведение абелевой двумерной алгебры A с базисом a_1, a_2 и одномерной алгебры B с базисом b. Оно является пополнением абстрактного свободного произведения $L = A * B$. Из тождества Якоби, так как $[a_1, a_2] = 0$, следует, что

$$[b, a_1, a_2] = [b, a_2, a_1].$$

Пусть G – подалгебра, порожденная элементами a_1, a_2, $c_1 = [b, a_1]$, $c_2 = [b, a_2]$, $\bar{G}$ – ее замыкание. Очевидно в $\bar{G}$ выполнено соотношение $[c_1, a_2] = [c_2, a_1]$. Мы покажем, что $\bar{G}$ не разлагается в свободное пронильпотентное произведение. Тем самым $\bar{G}$ и является контрпримером, о котором говорилось в начале заметки: $\bar{G}$ – не свободна, не лежит ни в каком сомножителе (и не сопряжена с подалгеброй сомножителя) и не разлагается в свободное произведение.

Идея доказательства состоит в рассмотрении $\bar{G}/\bar{G}_3 \cong G/G_3$. Если бы $\bar{G}$ разлагалось в свободное пронильпотентное произведение алгебр M и N, то $\bar{G}/\bar{G}_3$ разлагалось бы во 2-е нильпотентное произведение алгебр $M/\bar{M}_3$ и $N/\bar{N}_3$. Мы получим противоречие, рассматривая размерность коммутанта этого произведения.

Прежде всего покажем, что размерность фактор-алгебры G/G' по коммутанту равна 4. Очевидно, т.к. G порождается четырьмя элементами, она не может быть выше. С другой стороны, рассмотрим гомоморфизм $L \to L/L_3$. Базу этой алгебры, как уже отмечалось, составляют a_1, a_2, b, c_1, c_2 причем, в этой фактор-алгебре a_1, a_2, c_1, c_2 коммутируют и линейно независимы. Таким образом, у алгебры G найден абелев 4-мерный гомоморфный образ.

Какова размерность G'/G_3 ? Очевидно, этот коммутант порождается элементами $[c_1, a_1], [c_1, a_2]=[c_2, a_1], [c_2, a_2], [c_1, c_2]$, т.е. его размерность не превышает 4 (на самом деле нетрудно видеть, используя базу Ширшова для L , что она равна 4). Мы покажем, что предположение о разложении $\bar{G}$ в свободное пронильпотентное произведение приведет нас к тому, что G'/G_3 будет иметь размерность 5. Это и будет нужное противоречие.

Итак, предположим, что $G/G_3 = M/\bar{M}_3(2)\ N/\bar{N}_3$.
Запишем в этом произведении элементы a_1, a_2:

$$a_1 = m_1 + n_1 + k_1, \quad a_2 = m_2 + n_2 + k_2,$$

где $m_i \in M/\bar{M}_3,\ n_i \in N/\bar{N}_3,\ k_i$ - элементы взаимного коммутанта. Проектируя эти выражения на сомножители и учитывая, что $[a_1, a_2]=0$, получим $[m_1, m_2]=0 \mod G_3$, $[n_1, n_2]=0 \mod G_3$

Поэтому $0=[a_1, a_2]=[m_1, n_2]-[m_2, n_1] \mod G_3$

Так как a_1, a_2 - линейно независимы по модулю G', пары (m_1, n_1) и (m_2, n_2) не пропорциональны. Если m_1 и m_2, а также n_1 и n_2 - независимы, их можно включить в базы $M/\bar{M}_3$ и $N/\bar{N}_3$, а тогда оба слагаемых правой части равенства - элементы базы второго нильпотентного произведения и написанное равенство невозможно.

Пусть $m_1 = \alpha m_2$. Рассмотрим $a_1' = a_1 - \alpha a_2$, $a_1' = n_1 - \alpha n_2 \neq 0 \mod G'$ в силу линейной независимости a_1, a_2 в G/G'. Кроме того, $[a_1', a_2] = -[m_2, n_1 - \alpha n_2] \neq 0 \mod G_3$, так как m_2 и $n_1 - \alpha n_2$ снова можно включить в базы M/M' и N/N'. С другой стороны, конечно, $[a_1', a_2]=0$. Вывод из всего этого таков: a_1, a_2 не могут проектироваться на оба сомножителя, т.е. $a_1 = m_1 + k_1 \mod G_3$, $a_2 = m_2 + k_2 \mod G_3$.

Предположим, что $\dim M/\bar{M}'=3$. Тогда в $M/\bar{M}'$ кроме a_1, a_2 есть еще один порождающий, который можно записать в виде $u=\alpha_1 c_1+\alpha_2 c_2$ (если бы в него входили кратные a_1, a_2, то их можно вычесть - ведь a_1, a_2 проектируются в M). Кроме того, N тогда одномерна $(\dim M/\bar{M}'+\dim N/\bar{N}'=4=\dim G/G')$ и порождается одним элементом v.

Нетрудно видеть, что $[u,m_1]=[u,a_1]=\alpha_1[c_1,a_2]+\alpha_2[c_2,a_1] \bmod G_3$ и $[u,m_2]=[u,a_2]=\alpha_1[c_1,a_2]+\alpha_2[c_2,a_2] \bmod G_3$ выражаются через элементы $[c_1,a_1], [c_1,a_2], [c_2,a_2]$ базы второго нильпотентного произведения L/L_3 и поэтому линейно независимы, так как α_1 или α_2 отличны от нуля. Таким образом, коммутант $\bar{M}'/\bar{M}_3$ двумерен. В таком случае в базе коммутанта G/G_3 автоматически есть еще элементы $[a_1,v], [a_2,v], [u,v]$, то есть G'/G_3 имеет размерность 5 (в то время как на самом деле эта размерность равна 4). Таким образом, случай $\dim M/\bar{M}'=3$ невозможен.

Допустим, $\dim M/\bar{M}'=2$, т.е. $M/\bar{M}_3$ порождается коммутирующими элементами m_1, m_2. Тогда $N/\bar{N}_3$ порождается двумя элементами, которые запишем в самом общем виде:

$$u=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\beta_1 c_1+\beta_2 c_2+\ell,$$

$$v=\bar{\alpha}_1 a_1+\bar{\alpha}_2 a_2+\bar{\beta}_1 c_1+\bar{\beta}_2 c_2+\bar{\ell}, \quad \text{где } \ell, \bar{\ell}\in G'.$$

Так как a_1, a_2, u, v порождают G/G_3, то через них можно выразить c_1, c_2, следовательно, $\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда, совершая на u, v подходящие невырожденные линейные преобразования, можно считать, что на самом деле

$$u=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+c_1 \bmod G',$$

$$v=\bar{\alpha}_1 a_1+\bar{\alpha}_2 a_2+c_2 \bmod G'.$$

Покажем что $[u,v]\neq 0$. Если бы было наоборот, $0=[u,v]=$
$=\alpha_1[a_1,c_2]+\alpha_2[a_2,c_2]+\bar\alpha_1[c_1,a_1]+\bar\alpha_2[c_1,a_2]+[c_1,c_2] \bmod G_3$,
то мы пришли бы к следующему: нетрудно видеть, что G_3 состоит из элементов веса (в L) 4 и больше, а первые четыре члена имеют вес 3. Следовательно, сумма этих членов равна 0. Кроме того, получаем $[c_1,c_2]\in G_3$. Элемент $[c_1,c_2]$ имеет вес 4. Единственные элементы из G_3, имеющие вес 4, можно получить лишь таким образом: $[c_1,a_1,a_2]$, $[c_1,a_1,a_1]$, $[c_2,a_1,a_2]$, $[c_2,a_2,a_2]$. Конечно, через эти элементы $[c_1,c_2]=[[b,a_1],[b,a_2]]$ выразить нельзя. Таким образом, $[u,v]\neq 0 \bmod \bar N_3$. Следовательно, базу коммутанта G' второго нильпотентного произведения составляют $[a_1,u]$, $[a_2,u]$, $[a_1,v]$, $[a_2,v]$, $[u,v]$ – снова 5 элементов, так что невозможен и случай $\dim M/\bar M'=2$.

Все противоречия у нас возникали из предположения, что $\bar G$ разлагается в свободное пронильпотентное произведение. Таким образом, на самом деле G не может быть разложено в свободное произведение, и рассмотрение примера закончено.

Заметим, что те же самые рассуждения показывают, что в алгебре L подалгебра, порожденная a_1,a_2,c_1,c_2 не разлагается в свободное произведение. Этот пример отличается от примера А.И.Ширшова тем, что L нильпотентно аппроксимируема (в примере Ширшова была использована двумерная алгебра A, такая, что $[a_1,a_2]=a_2$).

Поступила I5.II.1994 . Кафедра высшей математики

Литература

1. Тавадзе А.Д. О пронильпотентных группах. Сообщ. АН ГССР, 1975, т.79, № 2, 301-304.

2. Тавадзе А.Д. Проективные пронильпотентные W - группы, Сообщ. АН ГССР, 1976, т.84, № 2, 273-276.

3. Тавадзе А.Д., Шмелькин А.Л. О свободных пронильпотентных группах. Исследования по алгебре, Тбилиси, 1985, 160-170.

4. Холл Ф. Нильпотентные группы, Математика. Периодический сб., перев. ин. статей, 1968, 12, № 1, 3-36.

5. Ширшов А.И. О свободных кольцах Ли, Мат. сб., 1958, т.95, № 2, 113-122.

6. Ширшов А.И. Об одной гипотезе теории алгебр Ли. Сибирский матем. ж., 1962, т.3, № 2, 297-301.

7. Шмелькин А.Л. Нильпотентные произведения и нильпотентные группы без кручения. Сибирский матем. ж., 1962, т.3, № 4, 625-640.

8. Шмелькин А.Л. О нижнем центральном ряде свободного произведения групп, Алгебра и логика, 1969, т.8, № 1, 129-137.

ა. თავაძე

პრონილპოტენტურ W – ჯგუფთა თავისუფალი ნამრავლის შესახებ

რეზიუმე

ნაშრომში დამტკიცებულია, რომ ანალოგი ა.გ. კუროშის თეორემისა ჯგუფთა თავისუფალი ნამრავლის ქვეჯგუფთა შესახებ არაა სამართლიანი პრონილპოტენტური W – ჯგუფებისათვის.

A. Tavadze

ON FREE PRODUCTS OF PRONILPOTENT W-GROUPS

Summary

The invalidity of the Kurosh theorem for the subgroups of free products of groups in case of pronilpotent W-groups is proved.

Труды Тбилисского государственного университета
им.И.Джавахишвили
თბილისის ივ.ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

325, 1998

ЦИФРОВЫЕ КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА И СЖАТИЕ ИНФОРМАЦИИ

Л.Д.Хикадзе

В известной формуле $n=9m+k$, где $n, m, k \in N$ (множество натуральных чисел), просуммируем цифры делимого n . Заметим, что в ряде случаев эта сумма равна непосредственно полученному остатку, а в остальных случаях равна ему, если продолжим суммирование цифр полученной суммы до приведения ее к числу, составляющему остаток. Это наводит на мысль рассмотреть отображение $n \to k$, устанавливающее эквивалентность остатка сумме цифр (или сумме цифр суммы цифр и т.д.) делимого. Возникла идея представления этой эквивалентности в виде таблицы эквивалентов. Это бесконечная вправо таблица с двумя входами, где в столбце по 9 чисел, против каждого из которых проставляется его порядковый номер в столбце от I до 9. Каждая из этих цифр является эквивалентом написанного числа, из скольких бы цифр оно не состояло. Каждую из строк можно рассматривать как класс эквивалентности по числам от I до 9. Это позволяет определить эквивалент любого числа, не прибегая к суммированию его цифр, или к делению по формуле $n=9m+k$.

Таблица эквивалентов

I	I0(I)	I9(I)	28(I)	. . . .
2	II(2)	20(2)	29(2)	. . . .
3	I2(3)	2I(3)	30(3)	. . . . .

4	I3(4)	22(4)	3I(4)	. . . . .
5	I4(5)	23(5)	32(5)	. . . . .
6	I5(6)	24(6)	33(6)	. . . . .
7	I6(7)	25(7)	34(7)	. . . . .
8	I7(8)	26(8)	35(8)	. . . . .
9	I8(9)	27(9)	36(9)	. . . . .

<u>Следствие</u>. Можно утверждать, что для произвольной алгебраической суммы любого числа слагаемых имеет место правило: существует такое представление алгебраической суммы, что соответствующая алгебраическая сумма цифр любого числа слагаемых равна сумме цифр полученной суммы либо непосредственно, либо после приведения суммы цифр к их эквивалентам.

Для иллюстрации сказанного приведем небольшую выборку примеров.

I) $(\forall n,\ n \in N)+1$:

$21+1=22 \to 2+1+1 \sim 2+2\ (4=4)$

$32+1=33 \to 3+2+1 \sim 3+3\ (6=6)$

$59+1=60 \to 5+9+1 \sim 6+0 \to 15 \sim 6 \to 1+5 \sim 6\ (6=6)$

$689+1+690 \to 6+8+9+1 \sim 6+9+0 \to 24 \sim 15 \to 2+4 \sim 1+5\ (6=6)$

$744+375+1=1120 \to 7+4+4+3+7+5+1 \sim 1+1+2+0 \to 31 \sim 4 \to$
$\to 3+1 \sim 4\ (4=4)$

2) $(\forall n,\ n \in N)+9$:

$426872+9=426881 \to 4+2+6+8+7+2+9 \sim 4+2+6+8+8+1 \to 38 \sim 29 \to$
$\to 3+8 \sim 2+9 \to 11 \sim 11 \to 1+1 \sim 1+1\ (2=2)$

3) (n : сумма цифр=9, $n \in N$) + 9 :

$216+9=225 \to 2+1+6+9 \sim 2+2+5 \to 18 \sim 9 \to 1+8 \sim 9\ (9=9)$

4) (n : сумма цифр=7, $n \in N$) + 9:

$40021+9=40030 \to 4+2+1+9 \sim 4+3 \to 16 \sim 7 \to 1+6 \sim 7\ (7=7)$

5) (n : сумма цифр=II $\sim$ 2, $n\in N$) + 9:

$2432+9=2441 \to 2+4+3+2+9 \sim 2+4+4+1 \to 20 \sim 11 \to 2 \sim 1+1\ (2=2)$

6) (n : сумма цифр=I2 $\sim$ 3, $n\in N$) + (m : сумма цифр=9, $m\in N$):

$129+342=471 \to 1+2+9+3+4+2 \sim 4+7+1 \to 21 \sim 12 \to 2+1 \sim 1+2\ (3=3)$

7) (n : сумма цифр=4, $n\in N$) + (m : сумма цифр=5, $m\in N$):

$400+230=630 \to 4+2+3 \sim 6+3\ (9=9)$

8) $(\forall n, n\in N)+(\forall m, m\in N)+\cdots+(\forall r, r\in N)$:

$781+254=1035 \to 7+8+1+2+5+4 \sim 1+3+5 \to 27 \sim 9 \to 2+7 \sim 9\ (9=9)$

$312+584+292=1188 \to 3+1+2+5+8+4+2+9+2 \sim 1+1+8+8 \to 36 \sim 18 \to$

$\to 3+6 \sim 1+8\ (9=9)$

$689240+745531+829426+487437+152829=2900463 \to 6+8+9+2+4+5+5+$

$+3+1+8+2+9+4+2+6+4+8+7+4+3+7+1+5+2+8+2+9 \sim 2+9+4+4+6+3 \to 145 \sim$

$\sim 28 \to 1+4+5 \sim 2+8 \to 10 \sim 10\ (1=1)$

$48297113+65418628+71346512=185062253 \to$

$\to 4+8+2+9+7+1+1+3+6+5+4+1+8+6+2+8+7+1+3+4+6+5+1+2 \sim 1+8+5+6+2+2+5+3 \to$

$\to 104 \sim 32 \to 1+4 \sim 3+2\ (5=5)$

9) Алгебраическая сумма:

$48-15=33 \quad 4+8-1-5 \sim 3+3 \quad 12-6 \sim 3+3\ (6=6)$

$136-36-45=55 \to 1+3+6-3-6-4-5 \sim 5+5 \to 10-18 \sim 10 \to 100-18 \sim$

$\sim 10 \to 82 \sim 10 \to 8+2 \sim 1 \to 10 \sim 1 \to 1 \sim 1\ (1=1)$

$25869-5324-742-128=19675 \to 2+5+8+6+9-5-3-2-4-7-4-2-1-2-8 \sim$

$\sim 1+9+6+7+5 \to 30-38 \sim 28 \to 300-38 \sim 28 \to 262 \sim 28 \to$

$2+6+2 \sim 2+8 \to 10 \sim 10\ (1=1)$

Замечание. Хочется особо отметить, что приведенный перечень примеров не случаен и послужит впоследствии основанием для утверждения, что рассмотренные в статье математические закономерности были косвенно получены путем использования чисел, имеющих смысл в другой области знания, возможно, - парапсихологии.

Построенные цифровые классы эквивалентности натурального ряда могут служить основой для сжатой записи кортежей букв некоторого алфавита (в нашем случае – грузинского алфавита), представляющих слова натурального языка.

Если перенумеровать буквы грузинского алфавита с помощью чисел от I до 33, получим следующие классы эквивалентности букв, которые мы назовем естественными классами эквивалентности букв грузинского алфавита.

Таблица естественных классов эквивалентности букв грузинского алфавита

I ა	I0 კ	I9 ტ	28 ძ	c_1
2 ბ	II ლ	20 უ	29 წ	c_2
3 გ	I2 მ	2I ფ	30 ჭ	c_3
4 დ	I3 ნ	22 ქ	3I ხ	c_4
5 ე	I4 ო	23 ღ	32 ჯ	c_5
6 ვ	I5 პ	24 ყ	33 ჰ	c_6
7 ზ	I6 ჟ	25 შ		c_7
8 თ	I7 რ	26 ჩ		c_8
9 ი	I8 ს	27 ც		c_9

В первых шести классах – по четыре буквы, а в 7, 8 и 9-ом классах – по три:

$c_1=\{$ა, კ, ტ, ძ$\}$, $c_2=\{$ბ, ლ, უ, წ$\}$, $c_7=\{$ზ, ჟ, შ$\}$,

$c_3=\{$გ, მ, ფ, ჭ$\}$, $c_4=\{$დ, ნ, ქ, ხ$\}$, $c_8=\{$თ, რ, ჩ$\}$,

$c_5=\{$ე, ო, ღ, ჯ$\}$, $c_6=\{$ვ, პ, ყ, ჰ$\}$, $c_9=\{$ი, ს, ც$\}$.

Рассмотрим дискретный канал передачи информации / I /:

{ა, ბ, …, ჰ} → $\{c_1, c_2, \dots, c_9\}$ $\xrightarrow{\text{канал}}$ $\{c_1, c_2, \dots, c_9\}$ → {ა, ბ, …, ჰ}

вход выход

где $p(1)$ – переходные, т.е. условные вероятности сообщений всевозможных кортежей некоторым образом закодированных символов c_i (i =I,...., 9).

Предположим, что выход канала снабжен системой группировки наблюдений, решающей схемой и частотно-числовой базой данных, содержащей сведения о лексикографических частотах допустимых кортежей букв алфавита данного языка[ж]. Эти кортежи являются представителями классов отношения эквивалентности на множестве всевозможных кортежей символов c_i (i =I,....,9), индуцированного цифровым отношением эквивалентности на множестве натуральных чисел.

Алгоритм построения графа восстановления исходного сообщения очень прост. Мы проиллюстрируем его на примере. Пусть на выходе канала получено сообщение $[c_4\ c_3\ c_1\ c_2\ c_9]$. Восстановление происходит поэтапно. На каждом этапе обращаемся к частотно-числовой базе данных и определяем частоты восстановленных на этом этапе буквенных кортежей. Кортежи с нулевыми частотами из дальнейшего рассмотрения исключаются. Граф восстановления в данном случае таков:

$$[c_4\ c_3\ c_1\ c_2\ c_9]$$

$$\rho c_3 c_1 c_2 c_9 P(\rho) \quad б c_3 c_1 c_2 c_9 P(б) \quad ȷ c_3 c_1 c_2 c_9 P(ȷ) \quad ь c_3 c_1 c_2 c_9 P(ь)$$

[ж] Допустимыми называются те кортежи, которые соответствуют лексическим единицам натурального языка. Лексикографическая частота подсчитывается по наиболее полным толковым словарям данного языка. Всем кортежам, не попавшим в список допустимых, приписывается нулевая частота.

ღვ $c_1c_2c_9$ P(ღვ)	ნვ $c_1c_2c_9$ P(ნვ)	ქვ $c_1c_2c_9$ 0	ხვ $c_1c_2c_9$ 0	
ღმ $c_1c_2c_9$ P(ღმ)	ნვ $c_1c_2c_9$ 0	ქმ $c_1c_2c_9$ P(ქმ)	ხმ $c_1c_2c_9$ P(ხმ)	
ღგ $c_1c_2c_9$ 0	ნგ $c_1c_2c_9$ 0	ქგ $c_1c_2c_9$ 0	ხგ $c_1c_2c_9$ 0	
ღჭ $c_1c_2c_9$ 0	ნჭ $c_1c_2c_9$ 0	ჭჭ $c_1c_2c_9$ 0	ხჭ $c_1c_2c_9$ 0	
ღვა c_2c_9 P(ღვა)	ღმა c_2c_9 P(ღმა)	ნვა c_2c_9 0	ქმა c_2c_9 P(ქმა)	ხმა P(ხმა)
ღვს c_2c_9 0	ღმს c_2c_9 0	ნვს c_2c_9 0	ქმს c_2c_9 0	ხმს 0
ღვტ c_2c_9 0	ღმტ c_2c_9 0	ნვტ c_2c_9 0	ქმტ c_2c_9 0	ხმტ 0
ღვდ c_2c_9 0	ღმდ c_2c_9 0	ნვდ c_2c_9 0	ქმდ c_2c_9 0	ხმდ 0
ღვაბ c_9 0	ღმაბ c_9 0	ქმაბ c_9 0	ხმაბ c_9 0	
ღვარ c_9 0	ღმარ c_9 0	ქმარ c_9 0	ხმარ c_9 P(ხმარ)	
ღვაუ c_9 0	ღმაუ c_9 0	ქმაუ c_9 0	ხმაუ c_9 P(ხმაუ)	
ღვან c_9 0	ღმან c_9 0	ქმან c_9 0	ხმან c_9 0	
ხმარი P(ხმარი)	ხმაუი 0			
ხმარს 0	ხმაულ 0	$[c_4c_3c_1c_2c_9]\to$[ხმარი]		
ხმარც 0	ხმაუც 0			

Ясно, что однозначность восстановления для рассмотренного примера случайна, но, как показывают предварительные оценки, процент однозначного восстановления высок, больше 80%. Причину этого надо искать в особом распределении букв грузинского алфавита по классам эквивалентности.

Повысить процент восстановления можно за счет использования более тонкого отношения эквивалентности, но в ущерб показателю сжатия. Поэтому в случае канала связи быть может рациональнее удовлетвориться достигнутым процентом.

Однако, в тех задачах, в которых более существенным, чем показатель сжатия, является вопрос представления информации, необходимо пользоваться более тонким отношением эквивалентности.

Рассмотрим еще одну числовую закономерность, которая вместе с уже рассмотренной может послужить основой для установления более тонкого отношения эквивалетности на множестве натуральных чисел.

Опять рассмотрим числа от I до 33. Каждому числу ($10m+n$, $m=0,1,\dots,3$; $n=0,1,\dots,9$) поставим в соответствие выражение $mn+m+n$. Разница этого показателя для соседних чисел равна $m+1$. Если строить классы эквивалентности по этому параметру и параметру шифрового класса эквивалентности, получим, очевидно, более тонкое отношение эквивалентности. Распределение букв грузинского алфавита по классам эквивалентности в этом случае таково:

$c_1' = \{\text{ა}, \text{კ}, \text{ტ}\}$, $c_1'' = \{\text{ძ}\}$,

$c_2' = \{\text{ბ}, \text{ლ}, \text{უ}\}$, $c_2'' = \{\text{წ}\}$,

$c_3' = \{\text{მ}, \text{ფ}\}$, $c_3'' = \{\text{გ}, \text{ჭ}\}$,

$c_4' = \{\text{დ}\}$, $c_4'' = \{\text{ნ}, \text{ხ}\}$, $c_4''' = \{\text{ქ}\}$,

$c_5' = \{\text{ე}\}$, $c_5'' = \{\text{ო}\}$, $c_5''' = \{\text{ღ}, \text{ჯ}\}$,

$c_6' = \{\text{ვ}, \text{ჰ}\}$, $c_6'' = \{\text{პ}\}$, $c_6''' = \{\text{ყ}\}$,

$c_7' = \{\text{ზ}\}$, $c_7'' = \{\text{ჟ}\}$, $c_7''' = \{\text{შ}\}$,

$c_8' = \{\text{თ}\}$, $c_8'' = \{\text{რ}\}$, $c_8''' = \{\text{ჩ}\}$,

$c_9' = \{\text{ი}\}$, $c_9'' = \{\text{ს}\}$, $c_9''' = \{\text{ც}\}$.

Поступила 24.III.1994

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

Литература

I. А.Файнстейн. Основы теории информации. ИЛ , Москва, 1960.

ლ. ხიხაძე

ნატურალური მწკრივის ეკვივალენტობის ციფრული კლასები და ინფორმაციის შეკუმშვა

რეზიუმე

განმარტებულია ნატურალური მწკრივის ეკვივალენტობის ციფრული კლასი. განხილულია ამ ცნების გამოყენების საკითხი ინფორმაციის შეკუმშვის ამოცანებში.

L.Khikhadze

THE CIPHER CLASSES OF EQUIVALENCE OF A NATURAL SERIES AND DATA COMPRESSION

Summary

The cipher class of the equivalence of natural series is defined. Application of this concept to the problem of data compression is discussed.

Труды Тбилисского государственного университета
им. Джавахишвили
თბილისის ივ. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
325, 1998

ПРИМЕНЕНИЕ ЭКСПЕРТОНОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Дж.Т.Гачечиладзе, Т.Г.Гачечиладзе

Нечеткий дискриминационный анализ /I/.

Дискриминационный анализ эффективно устанавливает значимости т.н. активностей /I/ с точки зрения их относительной способности обеспечить принятие решения из хорошо определенного (четкого) множества решений.

Будем рассматривать три категории объектов: I) объекты, относительно которых принимаются решения (О), 2) любых видов активности, на основе которых принимаются решения (A), 3) решения ($\mathcal{D}$).

Источником информации служит частотно-числовая база данных, содержащая "истории" правильных решений, т.е. записи об активностях и последовавших решениях, а также сводную таблицу частот $F=\|f_{ij}\|$, где $i: A_i \in A$ (множество активностей), а $j: A_j \in \mathcal{D}$ (множество решений). f_{ij} является долей (относительной частотой) тех записей с решением $\mathcal{D}_j$, где присутствует активность A_i . Если $A=\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ и $\mathcal{D}=\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n\}$, то

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix} \qquad (I)$$

Эта матрица является основой для двух других матриц: матрицы положительной дискриминации $P=\|P_{ij}\|$ и матрицы отрицательной дискриминации $N=\|n_{ij}\|$, где

$$P_{ij}=\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\chi_{b-r}\left(\frac{f_{ij}}{f_{ik}}\right),\quad \begin{matrix} i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n\end{matrix}\;, \qquad (2)$$

$$n_{ij}=\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\chi_{b-r}\left(\frac{f_{ik}}{f_{ij}}\right),\quad \begin{matrix} i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n\end{matrix} \qquad (2')$$

Здесь χ_{b-r} – функция принадлежности нечеткого подмножества с лингвистической меткой "больное отношение", производящая расщепление /2/ m $(n-1)$-элементных множеств

$$\left\{ f_{ij}/f_{ik_1}, \dots, f_{ij}/f_{ik_n} \right\} \quad (k_\ell \neq j)$$

и такого же количества $(n-1)$-элементных множеств

$$\left\{ f_{ik_1}/f_{ij}, \dots, f_{ik_n}/f_{ij} \right\} \quad (k_\ell \neq j).$$

Рассматривая элементы этих множеств в качестве случайных событий с равномерным распределением вероятностей, приходим к выводу, что (2) есть вероятность нечеткого подмножества "больное отношение" множества $\left\{ f_{ij}/f_{ik_1}, \dots, f_{ij}/f_{ik_n} \right\}$, а (2') – вероятность такого же нечеткого подмножества множества $\left\{ f_{ik_1}/f_{ij}, \dots, f_{ik_n}/f_{ij} \right\}$. Эвристическая интерпретация мер положительной и отрицательной дискриминации заключается в представлении P_{ij} как аккумулированного доверия к утверждению, что активность A_i более существенна для принятия решения D_j, чем для остальных решений, а n_{ij} – как аккумулированного доверия к утверждению, что A_i более существенна для принятия решения "не D_j ", чем для остальных решений.

Таким образом, база данных, матрицы F, P и N создают "среду становления решения". Конкретное решение принимается следующим образом. Пусть данной ситуации соответствует определенная последовательность активностей A'. В матрицах P и N отберем только те строки, которые соответствуют A', и образуем с помощью этих строк новые P' и N' матрицы. Нечеткое решение представляется в виде нечеткого подмножества множества $\mathcal{D}$, функция принадлежности которого является выпуклой комбинацией

$$\delta_j = \frac{1}{2}\left(\chi_{Large}(\mathcal{P}_j) + \chi_{Small}(\nu_j)\right), \tag{3}$$

где

$$\mathcal{P}_j = \frac{1}{m}\sum_i p'_{ij}, \quad \nu_j = \frac{1}{m}\sum_i n'_{ij}. \tag{4}$$

$\mathcal{P}_j$ и ν_j представляют соответственно средние значения мер положительной и отрицательной дискриминации для решения $\mathcal{D}_j$. Нечеткие подмножества $Large$ и $Small$ имеют такие функции принадлежности

$$\chi : [0;1] \to [0;1],$$

что χ_{Large} – возрастающая, а χ_{Small} – убывающая функция.

Решение $\mathcal{D}_{j_0}$ с j_0, определяемым из условия

$$\delta_{j_0} = \max_j\{\delta_j\}, \tag{5}$$

можно интерпретировать как решение, которому соответствует наибольшее доверие.

<u>Метод экспертона /3/</u>

Понятие экспертона является развитием концепции вероятностного множества, где вероятность каждого α-среза заменяется интервалом вероятностей, задаваемым на основе мнений экспертов.

В работе /3/ показано, что экспертоны характеризуются теми же алгебраическими свойствами, что и вероятности.

Предположим, что мы опять имеем дело с упомянутыми в предыдущем пункте тремя категориями объектов, с той лишь разницей, что отсутствует частотно-числовая база данных, т.е. объективная частотная информация. Восполним этот пробел экспертной информацией, представленной в виде интервалов субъективных вероятностей. Можно считать, что тем самым мы вводим в рассмотрение еще одну категорию объектов-экспертов. Поясним сказанное на примере. Предположим, что r экспертов высказывают свои суждения относительно n решений $\{D_1,\ldots,D_n\}$ в виде доверительных интервалов $[a_1,a_2]\subset[0;1]$:

эксперт	D_1	D_2	...	D_n
1	$[a^1_{11}, a^1_{21}]$	$[a^1_{12}, a^1_{22}]$	...	$[a^1_{1n}, a^1_{2n}]$
2	$[a^2_{11}, a^2_{21}]$	$[a^2_{12}, a^2_{22}]$	...	$[a^2_{1n}, a^2_{2n}]$
$\vdots$	$\vdots$			
r	$[a^r_{11}, a^r_{21}]$	$[a^r_{12}, a^r_{22}]$	...	$[a^r_{1n}, a^r_{2n}]$

Для каждого решения D_j $(j=1,\ldots,n)$ вычисляем две статистики одну для нижних пределов, другую - для верхних. Если эти статистики принять в качестве вероятностных законов и для каждого закона взять его коммулятивный дополнительный закон, получим таблицу, которая представляет собой то, что называют экспертоном:

Уровень среза	D_1	D_2	...	D_n
$\alpha_0=0$	1	1		1
α_1	$[d^{\alpha_1}_{11}, d^{\alpha_1}_{21}]$	$[d^{\alpha_1}_{12}, d^{\alpha_1}_{22}]$	...	$[d^{\alpha_1}_{1n}, d^{\alpha_1}_{2n}]$
α_2	$[d^{\alpha_2}_{11}, d^{\alpha_2}_{21}]$	$[d^{\alpha_2}_{12}, d^{\alpha_2}_{22}]$	...	$[d^{\alpha_2}_{1n}, d^{\alpha_2}_{2n}]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
α_N	$[d^{\alpha_N}_{11}, d^{\alpha_N}_{21}]$	$[d^{\alpha_N}_{12}, d^{\alpha_N}_{22}]$	...	$[d^{\alpha_N}_{1n}, d^{\alpha_N}_{2n}]$

$(\tilde{I})$

В этой таблице α_k $(k=0,1,\dots,N)$ – уровни срезов, а

$$d_{1j}^{\alpha_k}=\frac{1}{N}\sum_{\substack{m\\(a_{1j}^m\le\alpha_k)}} I_{\{a_{1j}^1,\dots,a_{1j}^r\}}\left(a_{1j}^m\right),\qquad j=1,\dots,n,\qquad (6)$$

$$d_{2j}^{\alpha_k}=\frac{1}{N}\sum_{\substack{m\\(a_{2j}^m\le\alpha_k)}} I_{\{a_{2j}^1,\dots,a_{2j}^r\}}\left(a_{2j}^m\right),\qquad k=0,1,\dots,N,$$

где $I_{\{\dots\}}(\cdot)$ – обычные индикаторы множеств.

Экспертон (I^*) с помощью поэтапного уменьшения энтропии может быть использован для принятия конкретного решения.

Первый этап. От экспертона (I^*) переходим к соответствующему вероятностному множеству:

Уровень среза	D_1	D_2	$\dots$	D_n
$\alpha_0=0$	1	1		1
α_1	$P_1^{\alpha_1}$	$P_2^{\alpha_1}$	$\dots$	$P_n^{\alpha_1}$
α_2	$P_1^{\alpha_2}$	$P_2^{\alpha_2}$	$\dots$	$P_n^{\alpha_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\alpha_N=1$	$P_1^{\alpha_N}$	$P_2^{\alpha_N}$	$\dots$	$P_n^{\alpha_N}$

(2^*)

где

$$P_j^{\alpha_k}=\frac{1}{2}\left(d_{1j}^{\alpha_k}+d_{2j}^{\alpha_k}\right),\qquad j=1,\dots,n,\quad k=0,1,\dots,N \qquad (7)$$

Второй этап. От вероятностного множества (2^*) переходим к обычному нечеткому подмножеству:

D_1	D_2	$\dots$	D_n
X_1	X_2	$\dots$	X_n

(3^*)

где

$$X_i=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}P_i^{\alpha_k},\qquad i=1,\dots,n, \qquad (8)$$

– математическое ожидание для каждого D_i $(i=1,\dots,n)$.

Третий этап. От нечеткого подмножества (3^*) переходим к ближайшему четкому:

D_1	D_2	$\dots$	D_n
$\tilde{\delta}(x_1)$	$\tilde{\delta}(x_2)$	$\dots$	$\tilde{\delta}(x_n)$

(4^*)

Здесь

$$\tilde{\delta}(x_i) = \begin{cases} 1, & x_i \geq 0,5 \\ 0, & x_i < 0,5 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n . \tag{9}$$

Можно, конечно, принять решение и на основе принципа:

$$D_0 \longrightarrow x_0 = \max_i x_i .$$

Все рассмотренные переходы сопровождаются уменьшением энтропии.

Очевидно, что метод экспертона в сочетании с дискриминационным анализом приводит к решению с большим доверием.

Наконец, отметим, что экспертоны можно применить для построения исходной матрицы дискриминационного анализа (I).

Поступила 28.III.1994

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

Литература

I. D. Norris, B.W.Pilsworth and J.F. Baldwin. Medical diagnosis from patient records - A method using fuzzy discrimination and connectivity analyses, FSS, 23, N1 (1987)

2. Т.Гачечиладзе, Т.Манджапарашвили. О нечетких подмножествах. Труды Тбилисского университета, т.209, сер. кибернетики и прикл. математики (1988).

3. A.Kaufmann. Theory of Expertons and fuzzy logic-FSS, 28, pp. 295-304 (1988).

ჯ. გაჩეჩილაძე, თ. გაჩეჩილაძე

ექსპერტონების გამოყენება გადაწყვეტილების მიღების ზოგიერთი საყრდენი სისტემის აგებისას

რეზიუმე

გადაწყვეტილების მიღების ზოგიერთი საყრდენი სისტემის საფუძველს წარმოადგენს გარკვეულ ხდომილებათა სიხშირეთა მონაცემების რიცხვითი ბაზა. ნაჩვენებია, როგორ შეიძლება ხსენებული საყრდენი სისტემების აგება სიხშირეთა მონაცემების ბაზის გარეშე ექსპერტონის ინფორმაციის საფუძველზე.

J.Gachechiladze, T.Gachechiladze

APPLICATION OF EXPERTONS IN CONSTRUCTING SOME DECISION SUPPORT SYSTEMS

Symmary

The numerical data base of the frequencies of certain events form the basis of some decision support systems. It is shown how such decision support systems can be constructed on the basis of the information provided by the experton, i.e. without resorting to the frequency data base.

Труды Тбилисского государственного университета
им....Джавахишвили
თბილისის ივ. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
325, 1998

СИСТЕМА ДИАГНОСТИРОВАНИЯ САХАРНОГО ДИАБЕТА, ОСНОВАННАЯ НА РЕЗУЛЬТАТАХ ТЕСТА ГЛЮКОЗОВОЙ ТОЛЕРАНТНОСТИ И ИСПОЛЬЗУЮЩАЯ НЕЧЕТКИЙ ВЫВОД

Т.С.Киселева

Вступление

Сахарный диабет – одна из распространенных болезней в зрелом возрасте. Диагноз сахарного диабета (СД) обычно ставится на основе теста глюкозовой толерантности (ТГТ), который составлен из уровня глюкозы в крови (ГК) и уровня инсулина (иммунореактивный инсулин) (ИРИ) с 75-граммовой вводимой дозой глюкозы.

Критерий диагноза сахарного диабета / I / следующий: если уровень глюкозы в крови по истечении введения дозы глюкозы (ГК2Ч) больше, чем 200 мг/л или если скорость повышения уровня глюкозы в крови (СГК) превосходит I40, тогда пациенту ставится диагноз – сахарный диабет.

Если СГК ниже I39, величина ГК через I час ниже I60 и ГК2Ч ниже I39, тогда состояние пациента рассматривается как нормальное (НОРМ). Ограниченная область между СД и НОРМ известна как "ослабленная глюкозовая толерантность" (ОГТ). Согласно этому критерию, всякий человек, чье ГК2Ч равно 20I мг/л, считается, страдает сахарным диабетом, тогда как другой, чье ГК2Ч равно I99, находится в состоянии ОГТ. Из-за ГК2Ч граница ОГТ и СД частично перекрывается. Более того, оказывается, что у пациентов с ОГТ наблюдаются разнообразные виды поведения ГТ. Цель / I / обеспечить новую диагностическую систему для констатации сахарного диабета, использовав нечеткий вывод.

Тест глюкозовой толерантности

В ТГТ две переменные - сахар и инсулин в крови - измерены последовательно во времени через 0, 30, 90, 120, 180 минут. Полученные данные показывают признаки толерантности пациента. Результаты ТГТ описаны графом, названным "Динамическим графом ТГТ", который ясно показывает характеристики ТГТ в трех группах: СД, ОГТ, НОРМ. Результаты в трех группах суммируются Динамическим графом.

Нечеткий вывод для диагноза диабета

Каждому моменту времени из последовательности времени $t_0, t_1, \ldots, t_n$ ставятся в соответствие нечетние правила. ГК и ИРИ представляют собой нечеткие множества, функция принадлежности которых принимает определенные значения в момент времени t_K. Эти значения являются своеобразными весами для ГТ и ИРИ в момент t_K согласно введенным нечетким правилам. Для конечного диагноза применяется центр тяжести минимального подмножества нечетких множеств в моменты $t_0, t_1, \ldots, t_n$.

Система была применена к ретроспективным данным 46 случаев СД и 44 случаев ОГТ и были получены хорошие результаты о 91% точностью (42/46) в СД и 98% (43/44) в ОГТ.

Заключение

Многие врачи ставят диагноз сахарного диабета, если величины КГ2Ч по ТГТ больше 200. Однако эта система ставит диагноз СД с непрерывной степенью с помощью нечеткого вывода и последовательно измеримыми во времени функциями принадлежности. Эта система, основанная на ретроспективных данных, может стать хорошей поддерживающей системой для клинического диагностирования сахарного диабета, для лечения диабета и пополнения медицинского образования.

Поступила 29.III.1994

Проблемная
лаборатория физической
кибернетики

Литература

1. Seizaburo A., Masaya Y., Joshimi N., Diagnostic System for Diabetes Mellitus based on the response of Glucose Tolerance Test using Fuzzy Inference.

ტ. კისელიოვა

შაქრის დიაბეტის დიაგნოსტიკის სისტემა

რეზიუმე

აღწერილია შაქრის დიაბეტის დიაგნოსტიკის სისტემა, რომელიც დაფუძნებულია გლუკოზის მიმართ ტოლერანტობის შემოწმების შედეგებზე და არამკაფიო გადაწყვეტილების მიღების მეთოდზე.

T.Kiseleva

A DIAGNOSTIC SYSTEM FOR DIABETES MELLITUS

Summary

The paper describes a diagnostic system for diabetes mellitus, based on the response to the Glucose Tolerance Test and on the method of fuzzy decision making.

Труды Тбилисского государственного университета

им.И.Джавахишвили

თბილისის ივ. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

325, 1998

КОМПЬЮТЕРНАЯ СИСТЕМА КОНТРОЛЯ ПРОЦЕДУРЫ АНЕСТЕЗИИ, ИСПОЛЬЗУЮЩАЯ НЕЧЕТКУЮ ЛОГИКУ

Т.С.Киселева

Вступление

Система / I / позволяет контролировать процедуру анестезии в течение хирургических операций. Система основана на данных и методах, используемых профессиональными анестезиологами, которые представлены в компьютере с помощью нечеткой логики. Система была успешно использована: I) при контроле давления крови в течение операции у действительных пациентов, 2) и для получения результатов на основе врачебных записей, которые сравнимы с консультациями живых врачей.

Описание системы

Система управляет кровяным давлением / КД / в течение устойчивой фазы *Enfluvence* анестезии. Отдельное устройство, измеряющее кровяное давление автоматически подает данные в систему. Затем компьютер автоматически определяет нужную дозу анестезии. К настоящему времени накоплено огромное количество данных о связи между изменением КД и изменением концентрации *Enfluvence*. В системе / I / это учтено следующим образом. КД разделено на 7 эмпирических категорий, которые имеют точку отсчета – центральную величину, – предлагаемую инструктирующим анестезиологом. Эти эмпирические категории называются в нечеткой логике функцией принадлежности. Аналогично, изменения в КД классифицируются 7 категориями.

Следующая основная часть системы – нечеткий вывод. Как известно, одна из форм человеческого мышления представляется в нечеткой логике правилом "ЕСЛИ...ТО". Например, "КД нормально, но умеренно убывает по сравнению с предыдущим временем" ⟶ концентрация Enfluvence умеренно убывает. Правило, которое находится в основе вывода, регулируется анкетным методом, представляемым инструктирующим анестезиологом, и подготовленным 7x7=49 правилами. Можно получить отношения, которые представляют собой комбинацию трех элементов – КД, изменения КД и изменения в концентрации ингаляционной анестезии, получаемые от каждого инструктирующего анестезиолога. Это отношение называется мыслительным отношением. Все результирующие множества, получаемые из этого, подсчитываются вместе в конечные результирующие множества и дефаццифицируются /становятся нечеткими/ при использовании метода центра гравитации.

Затем может быть получена фактическая концентрация анестезии.

Результаты

В результате программируемого процесса, в основу которого легли знания 5 докторов, было достигнуто следующее:

I) время вывода в среднем составило немногим более 3 секунд;

2) устойчивое управление КД;

3) в систему были "вложены" знания 50 уже описанных случаев контроля КД при использовании анестезии в течение хирургической операции. Результаты модели, основанные на этих знаниях,

были получены и сравнены с фактическим изменением концентрации анестезии.

Авторы / I / считают, что в связи с полученными результатами, они имеют право утверждать, что методы нечеткой логики оптимально отражают мышление и, в частности, позволяют конструировать индивидуальность каждого доктора и использовать его знания в качестве базы знаний системы.

В заключение следует сказать, что существует риск возрастания неточности и нечеткости в системе по мере накопления знаний. Время вносит свои коррективы. Однако метод / I / прошел апробацию в реальных условиях довольно успешно.

Поступила 29.III.1994

Проблемная
лаборатория физической
кибернетики

Литература

I. Imamura T., Takahashi Tand Kaiharas S., A computer System to Control Anesthetic Procedur e Using Fazzy Logic, Medinfo 92.

ტ. კისელოვა

ანესთეზიის პროცედურის კომპიუტერული კონტროლის
სისტემა

რეზიუმე

აღწერილია ქირურგიული ოპერაციების განმავლობაში ანესთეზიის პროცედურის კომპიუტერული კონტროლის სისტემა, რომელშიც გამოყენებულია არამკაფიო ლოგიკა.

T.Kiseleva

A COMPUTER SYSTEM FOR THE CONTROL OF ANESTHETIC PROCEDURE

Summary

A computer-controlled system of applying anesthesia in surgical operations is described, using fuzzy logic.

Труды Тбилисского государственного университета
им.И.Джавахишвили
თბილისის ივ.ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
325,1998

ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ НАЧАЛА СПИД И ВИЧ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ СПОСОБЫ НЕЧЕТКОЙ АРИФМЕТИКИ

Т.С.Киселева

Активизация СПИД в популяциях мира за последние десятилетие указывает на необходимость математического моделирования для предсказания распространения болезни и влияния на нее тормозящих факторов как на один из способов борьбы с "чумой XX века".

Одна из предлагаемых моделей - марковская модель. Для ее нормального функционирования важны результаты работы / I /, которые позволяют: I) оценить время начала болезней из доступных дат диагнозов болезней; 2) представить нечеткость, связанную с этими оценками, с помощью нечеткой арифметики.

§ I. Марковские модели распространения СПИД и ВИЧ в популяциях

Статус индивидуума в популяции, вызывающий интерес исследований, представляется следующими пунктами:

1) здоровый и неинфицированный;

2) инфицированный вирусом иммунодефицита человека, ВИЧ (*HIV*);

3) страдающий синдромом приобретенного иммунодефицита, СПИД (*AIDS*);

4) смертельный исход.

Иногда к вышеперечисленным пунктам добавляется СПИД относительной сложности (*AIDS related complex - ARC*), определяемый между ВИЧ-инфицированностью и СПИД. Нужно отметить, что стандартизация клинического определения СПИД была произведена в 1987 году и *ARC* в ней не учитывался. Однако практикующие врачи не стали игнорировать *ARC* - диагноз, т.к. когда он присутствует, может обеспечить дополнительной полезной информацией.

Стохастическая последовательность может быть определена неформально, как "произвольное бесконечное семейство реальных случайных переменных $\{E_t, t \in T\}$", где T - счетная бесконечная последовательность / 2 /. Марковская цепь есть стохастическая последовательность без последействий: последовательность, для которой знание существующего положения полно и уникально определяет будущее стохастическое поведение, и это поведение не зависит от прошлых состояний последовательности. Марковские модели, применяемые здесь, являются математическими моделями, основанными на марковских цепях, в которых индекс представляет время, и каждое состояние E_t марковской цепи есть состояние модели во время t.

В марковской модели распространения *HIV* инфекции и *AIDS* в популяции / 3 / моделируемые сущности есть индивидуумы, которые подозреваются на *HIV* инфекцию или *AIDS*. Каждый индивидуум описывается конечным множеством атрибутов, представляющих интерес в моделируемом промежутке времени: раса, пол, дата рождения, географическое положение, сексуальная ориентация, уровень сексуальной активности, описание употребления *IV* лекарства и т.д. В любой момент времени состояние индивидуума полностью определяется ℓ - записью $\langle a_1,\dots,a_\ell \rangle$, где ℓ есть число атрибутов и a_i есть кодовая величина i - того атрибута в момент t.

Для удобства атрибуты объединяются в 3 группы:

i) атрибуты, представляющие демографическую информацию;

j) атрибуты, представляющие относящиеся к риску характеристики;

k) атрибуты, указывающие на состояние здоровья и инфицированности.

То есть каждая из трех групп (обозначим их i, j, k) представляет собой вектор атрибутов индивидуума. И мы можем сослаться на состояние индивидуума в момент времени упорядоченной тройкой $\langle i,j,k \rangle$, где i, j, k являются многоразмерными векторами. Следовательно, существует M возможных состояний индивидуума, где M - число комбинаций состояний i, j, k. Каждый индивидуум находится в одном из M состояний для $\forall t$, так что состав популяций в момент t характеризуется M-мерным вектором $\langle q_1, q_2, \dots, q_M \rangle$, где каждое q_i есть число индивидуумов в состоянии i, $i = 1,2,\dots,M$.

Если модель определяется этими M-мерными записями и вероятности переходов от одного состояния модели к другому соответственно определены в терминах переходов от одного состояния индивидуума к другому, то эта модель есть марковская цепь.

§ 2. Доступные и необходимые данные

Для того, чтобы построить марковскую модель, необходимо неизвестные величины сконструировать из доступных и реальных.

Пусть доступные величины (для каждого индивидуума в популяции) для создания марковской модели распространения СПИД следующие:

I. *DEMOG* – закодированные демографические характеристики;

2. *BIRTH* – дата рождения,

3. *HIVDIAG* – дата установления *HIV* в организме,

4. *AIDSDIAG* – дата установления *AIDS*,

5. *DEATH* – дата смерти.

Неизвестные (чаще всего) величины:

I*. *HIVONSET* – дата появления *HIV* в организме,

2*. *AIDSONSET* – дата начала *AIDS* .

3*. *ARCONSET* – дата начала *ARC* .

Будем предполагать, что

а) *DEMOG, BIRTH, HIVDIAG, ARCDIAG, AIDSDIAG, DEATH* хорошо известны для каждого индивидуума в популяциях,

б) *BIRTH, HIVDIAG, ARCDIAG, AIDSDIAG, DEATH* есть различные временные величины, т.е. в каждый момент времени индивидуум находится только в одной из стадий болезни. (Далее покажем, что это ограничение может быть ослаблено).

Тогда каждая дата диагноза служит как нижняя граница начала следующего этапа болезни. Например, *ARCDIAG* – нижняя граница для *AIDSONSET* . Наличие как верхней, так и нижней границы неизвестной даты позволяет апроксимировать ее временным интервалом, который назовем сжимающим интервалом. При отсутствии дополнительной информации будем считать, что искомая дата может быть любой точкой этого интервала.

Нам необходима следующая дополнительная информация из опытных независимых исследований:

α – время выживания после начала СПИД ;

β – время между занесением ВИЧ в организм и началом СПИД ;

Γ – средний возраст индивидуумов, в котором возможен риск заболевания ВИЧ и СПИД.

Необходимо отметить, что α, β, Γ постоянны только в пределах одной популяции, т.к. индивидуумы различных демографических категорий, категорий риска и т.д. имеют различные параметры.

§ 3. Оценка AIDSONSET, ARCONSET, HIVONSET

Как было отмечено выше, AIDSONSET находится между ARCDIAG и AIDSDIAG. Пусть C обозначает сжимающий интервал [ARCDIAG, AIDSDIAG]. Рассмотрим два способа определения области относительной вероятности AIDSONSET внутри C.

Первый состоит в определении интервала $[BIRTH+\Gamma, HIVDIAG]$, в котором встречается необходимая для дальнейшего величина HIVONSET. При этом $BIRTH+\Gamma < HIVDIAG$. Это понятно, так как индивидуум должен находиться в определенном временно-возрастном интервале, когда его риск-поведение возможно. Затем сдвинем этот интервал вперед во времени на величину β для образования интервала $L=[BIRTH+\Gamma+\beta, HIVDIAG+\beta]$. Этот интервал L может быть определен как область в C относительно высокой вероятности нахождения AIDSONSET.

Второй способ – проектирование в обратном направлении от DEATH, $P=DEATH-\alpha$, $P\in C$. Мы определили P как точку очень высокой вероятности AIDSONSET внутри сжимающего интервала C.

Эти два метода используются во взаимодействии.

Рассмотрим 2 случая:

а) $\rho \in L$. Тогда ρ есть точка очень высокой вероятности внутри области, которая уже определена как область относительно высокой вероятности.

б) $\rho \notin L$. В этом случае мы расширим область вероятности в направлении ρ , чтобы включить ρ .

Подчеркнем еще раз: чтобы определить область относительно высокой вероятности внутри сжимающего интервала, необходима дополнительная информация. Ниже мы покажем, что теория нечеткой арифметики предлагает инструментарий для представления такой информации.

Аналогично, сжимающий интервал для оценивания $ARCONSET$ определяется $C=[HIVDIAG, ARCDIAG]$. Т.к. $ARCONSET$ представляет собой дату не первой важности, можно считать, что интервал C является и интервалом относительно высокой вероятности для $ARCONSET$.

Для $HIVONSET-C=[BIRTH, HIVDIAG]$ с интервалом относительно высокой вероятности, определяемым как $L=[BIRTH+\Gamma, HIVDIAG]$, если $BIRTH+\Gamma < HIVDIAG$, и точка оценки $HIVDIAG$ определяется как $\rho = DEATH-\alpha-\beta$, $\rho \in C$.

§ 4. Представление оцениваемых временных величин

Теория нечетких чисел и нечеткой арифметики / 4 / может быть применена для более качественного использования сжимающего интервала и области высокой и низкой вероятности. Нечеткое число A (в данном случае, например, $HIVONSET$, $AIDSONSET$) есть нечеткое подмножество R , которое является нормальным (его характеристическая функция принимает значение 1 в некоторой точке) и выпуклым (горизонтальные срезы графика μ_A по высотам α и α' для $0<\alpha<\alpha'<1$ производят вложенные проекции $A_\alpha, A_{\alpha'}$ от μ_A в R, $A_{\alpha'} < A_\alpha$).

Характеристические функции, которые определяют нечеткие числа, связанные с оценками HIVONSET, ARCONSET, AIDSONSET следуют из вышеизложенного определения интервалов и точек относительно высокой вероятности.

В общем характеристическая функция μ_A для нечеткого числа A определяется так, что для точек относительно высокой вероятности ее значения находятся около 1 и меньше 1 - в остальных областях.

Если L существует, а P не существует, то положим:

$$\mu_A(x)=1,\ x\in L,\ \mu_A(y)<1,\ y\in L.$$

Если P существует, а L не существует, то

$$\mu_A(P)=1,\ \mu_A(x)<1,\ x\in C,\ x\neq P$$

Если существует и L, и P , то

$$\mu_A(P)=1, \mu_A(y)<\mu_A(x)<1,\ x\in L,\ y\in C,\ x\neq y,\ x\neq P,\ y\neq P.$$

В обсуждении выше мы потребовали, чтобы даты рождения, смерти, даты диагноза HIV инфекции, ARC и AIDS были бы известны и различны для каждого индивидуума. Иногда бывает так, что некоторые из этих дат неизвестны. В частности, нередки случаи, когда диагностирование двух стадий болезни имеет одну и ту же дату. Такая потеря информации может качественно повлиять на дальнейший ход рассуждений. Однако опыт (результаты которого приведены чуть ниже) показывает, что и с достаточным количеством пропущенной информации возможно построить нечеткие оценки: из 326 случаев ARC и AIDS (данные департамента здравоохранения Кливленда, штат Огайо, на 1 августа 1989 года), 257 случаев AIDS в 6 пропущен HIVDIAG, ARCDIAG, *AIDSDIAG*, в 205 пропущен *HIVDIAG* и *ARCDIAG* , в 211 пропущен *HIVDIAG* , в 248 пропущен *ARCDIAG* .

Манипулирование нечеткими оценками должно осуществляться в программном обеспечении таким образом, чтобы осталась возможность использовать обычные арифметические операторы без использования усложненных процедур. Для этого полезен объектно ориентированный язык C^{++} .

Поступила 29.III.1994

Проблемная лаборатория физической кибернетики

Литература

1. Bielefeld R.A. Estimation of HIV Infection and AIDS Onset Times using Fuzzy Arithmetic Techniques, Medinfo 92.

2. Takacs L. Stochastic Proceses, Methaen and Co, LTD 1960.

3. Rowland DY., Debanne SM., Multivariate Markovian modeling of HIV infection, September, 1990, Program and Abstracts of the International Society for Clinical Biostatistics, Nimas, France.

4. Kaufman A.A., Gupta M., Introduction to Fuzzy Arithmetics: Theory and Applications, Van Nostrand, Reinhold, 1985.

ტ. კისელიოვა

შიდს-ისა და აივ-ის დასაწყისის შეფასება არამკაფიო არითმეტიკის საშუალებათა გამოყენებით

რეზიუმე

პოპულაციებში შიდ-ის გავრცელების მარკოვის მოდელში აუცილებელია ავადმყოფობის დასაწყისის შეფასება ავადმყოფობის დიაგნოზების ხელმისაწვდომი თარიღებიდან. ამ შეფასებებთან დაკავშირებული არამკაფიობა წარმოდგენილია არამკაფიო არითმეტიკის საშუალებით.

T.Kiseleva

ASSESSMENT OF THE ON SET OF THE HIV INFECTION AND AIDS USING FUZZY ARITHMETIC TECHNIQUES

Summary

Mathematical models based on the theory of Markov chains have been applied to the problem of predicting the spread of the HIV infection and AIDS across populations. Fuzzy arithmetic techniques are used to construct necessary estimates and inherent uncertaintics.

Труды Тбилисского государственного университета

им.И.Джавахишвили

თბილისის ივ.ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

325,1998

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В МЕДИЦИНЕ ПРИ НЕЧЕТКОЙ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Т.С.Киселева

Задача принятия решений математически может быть описана множеством альтернатив и отношением предпочтения на этом множестве. Чаще всего это отношение бинарное.

Бинарное отношение на множестве альтернатив может быть описано двумя способами:

а/ в виде подмножества декартова произведения множества альтернатив само на себя;

б/ в форме функции полезности, или,как ее называют иначе, функции цели. Функция полезности обычно имеет вид отображения множества альтернатив в числовую ось.

В некоторых случаях отношение удается описать не одной,а конечным набором функций полезности, и соответствующие задачи принятия решений называются многокритериальными.

Задачи принятия решений, в которых отношение предпочтения описано в форме функции полезности, называют задачами математического программирования / 3 /. Рациональное решение есть выбор альтернативы, на которой функция полезности принимает большее значение. Однако универсальным считается описание информации, на основе которой идет выбор альтернатив, в форме в форме отношения предпочтения на множестве альтернатив /8/.

Нечеткость в постановке задачи математического программирования может содержаться как в описании множества альтернатив, так и в описании функции полезности.

Существуют два подхода к определению задач нечеткого математического программирования (н.м.п.).

В первом, задача и н.м.п. формулируется как задача достижения нечетко определенной цели, причем решением задачи считается пересечение нечетких множеств цели и ограничений (допустимых альтернатив) /I/. В работе /I/ впервые сформулирована задача принятия решений на языке нечетких множеств.

В другом подходе предполагается, что решение выбирается подобно тому, как это делается в задачах многокритериальной оптимизации: в решении задачи должны присутствовать только те альтернативы, которые строго не доминируют над другими альтернативами.

Интермедия. Благодаря неточному выводу в самой природе медицинской информации врачи часто испытывают трудности в процессе принятия решений. Обычное принятие решений требует специальной величины вероятности и полезности. Но указанную оценку этих величин нелегко определить, так как медицинские знания содержат много неопределенности. Как уже было отмечено, теория нечетких множеств предлагает выход для рассмотрения неопределенности при принятии решений в медицине.

Описание системы. Разработанная система /2/ основывается на теории максимизации полезности нечеткого предположения. В этой системе вероятность и полезность выражаются как функции принадлежности. Функция принадлежности вероятности равна 0 для но случая и I – для абсолютного случая. Функция принадлежности полезности равна 0 для не удовлетворения и I – для абсолютного удовлетворения. Дерево решений состоит из выбранных вершин и некоторых случайных вершин.

Случайная вершина. Функция принадлежности предполагаемой полезности на случайной вершине есть *sup-min* функции принадлежности вероятности и полезности.

Выбранная вершина. Предпочтение для ветвей решения на выбранной вершине отдается в соответствии с выводом нечеткого утверждения. Истинная величина предпочитаемого отношения базируется на функции принадлежности предполагаемой полезности и лингвистически предпочитаемых отношениях: "классическое", "определенное", "вероятностное", "возможное", "незначительное". Если выбранная вершина имеет более чем две ветви решения, порядок этих ветвей решения определяется попарным сравнением, с допущением того, что действительны законы рефлексивности и транзитивности.

Система написана на языке Бейсик в системе *DOS* для персональных компьютеров. *CHANCE.BAS* вычисляет ожидаемую полезность установленного случайного узла и выдает результаты функции принадлежности ожидаемой полезности во внешний файл. *CHOICE.BAS* вычисляет истинную величину пяти нечетких представленных отношений по выбранному узлу.

Вывод. Использование нечеткого принятия решений, основываемого на максимизации ожидаемой полезности, имеет преимущества над обычным принятием решений, которые ясно видны в данной системе: I) нечеткое принятие решений не только руководит сравниванием ожидаемых полезностей, но также вычисляет истинную величину лингвистического предпочтения, 2) начальная величина отсечения функции принадлежности может подсказать, принять или отклонить предпочтение.

Поступила 29.III.1994

Проблемная
лаборатория физической
кибернетики

Литература

I. Р.Беллман, Л.Заде. Принятие решений в расплывчатых условиях. Сб."Вопросы анализа и процедуры принятия решений", под ред. А.Ф.Шахнова, Мир, М., 1976.

2. Ioshida K., Ikeda S., Tazaki F., Medical Application of Fuzzy Decision Making, MEDINFO 92.

3. С.А.Орловский. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации, М., Наука, 1981.

ტ. კისელიოვა

არამკაფიო გადაწყვეტილების მიღების გამოყენება მედიცინაში

რეზიუმე

აღწერილია გადაწყვეტილების მიღების ხელშემწყობი სისტემა, რომელიც ეხმარება ექიმს, სისტემა ემყარება არამკაფიო დაშვების სარგებლიანობის მაქსიმიზაციის თეორიას.

T.Kiseleva

APPLICATION OF FUZZY DECISION MAKING IN MEDICINE

Summary

A system facilitating decision making by the physician is described. It is based on the theory of maximization of the utility of fuzzy assumptions.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили

თბილისის ივ. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

325, 1998

კოლიზიის ფიქსირებული მნიშვნელობის სისტემები და მათი გარდაქმნები

რ. მეგრელიშვილი

ნაშრომში გამოკვლეულია მეთოდი, რომლის მეშვეობით შესაძლებელია იდენტიფიკაციის არაკოლიზიური და კოლიზიური [1,2] სისტემების გარდაქმნები. კოლიზიის δ სიღრმე განისაზღვრება როგორც მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომელსაც კოლიზიის სიდიდე არ აღემატება მისამართის ერთეული მნიშვნელობისათვის. δ პარამეტრთან დაკავშირებულია სისტემის კომპაქტურობის კოეფიციენტი

$$K_{\text{კომ.}} = |M| / \delta 2^{\Gamma} , \qquad (1)$$

სადაც $|M|$ – M მოცემული სიტყვების სიმძლავრეა, Γ –ორობითი მისამართის განზომილება.

ქვემოთ განხილულია მეთოდი, რომელიც (I) გამოსახულების შესაბამის სისტემას ($\delta, \Gamma', K'_{\text{კომ.}}$ პარამეტრებით) გარდაქმნის კოლიზიურ სისტემად ($2\delta, \Gamma'', K''_{\text{კომ.}}$ პარამეტრებით). მიზანი ასეთი გარდაქმნისა შეიძლება იყოს Γ პარამეტრის ცვლილება ($\Gamma'' < \Gamma'$), თავისუფალი მისამართების (სტრიქონების) რიცხვის შემცირება და სხ.[2].

ვთქვათ, V_n $GF(2)$ ველზე განსაზღვრული n-განზომილების ვექტორული სივრცეა, ხოლო $V \subset V_n$ – ქვესივრცე. სამართლიანია შემდეგი

<u>ლემა I.</u> V_n / V ფაქტორჯგუფის მოსაზღვრე კლასი არ შეიცავს V ქვესივრცის ნულოვანი V' სივრცის ელემენტებს ან შეიცავს მათ მხოლოდ δ-ს ტოლი რაოდენობით, სადაც $1 \leq \delta \leq 2^{\Gamma}$.

დავუშვათ, რომ $\mathcal{E}^*$ ელემენტი V_n/V ფაქტორჯგუფის $\{\mathcal{E}^*\neq 0\}$ მოსაზღვრე კლასის ლიდერია, $h\in V$ – ნებისმიერი ელემენტია, $g_i\,(i=0,\ldots,2^k-1)\in V$; G – V ქვესივრცის, H – V' ქვესივრცის ბაზისური მატრიცებია, ხოლო $\delta\{\mathcal{E}=0\}$ – მოსაზღვრე კლასში $h\neq 0\in V'$ ელემენტების რაოდენობაა. განვიხილოთ $V(\mathcal{E}^*)=\{g_i+\mathcal{E}^*/i=0,\ldots,2^k-1\}$,

$$V^*=V\cup V(\mathcal{E}^*), \qquad (2)$$

სადაც $|V|=2^k$. V_n/V^* ფაქტორჯგუფის $\{\mathcal{E}=0\}$ მოსაზღვრე კლასი შეიცავს 2δ რაოდენობის ელემენტებს, თუ $h\in\{\mathcal{E}^*\}$. მაშასადამე I ლემის გათვალისწინებით სამართლიანია შემდეგი

<u>ლემა 2.</u> V_n/V^* ფაქტორჯგუფის $\{\mathcal{E}\}$ მოსაზღვრე კლასი ა) არ შეიცავს $h\in V'$ ელემენტებს ან შეიცავს $h\in V'$ ელემენტებს δ რაოდენობით, თუ $\mathcal{E}^*\notin V'$; ბ) არ შეიცავს $h\in V'$ ელემენტებს ან შეიცავს $h\in V'$ ელემენტებს 2δ რაოდენობით, თუ $\mathcal{E}^*\in V'$.

შევნიშნოთ, რომ V_n/V ფაქტორჯგუფი წარმოადგენს იდენტიფიკაციის სისტემას. მაშასადამე (2) დამოკიდებულების და I და 2 ლემების გამოყენებით შესაძლებელია ერთი გარკვეული იდენტიფიკაციის სისტემის გარდაქმნა განსხვავებული ფაქტორიზაციის შესაბამის სისტემად. მიზანი ასეთი გარდაქმნებისა შეიძლება იყოს კოლიზიისა და სხვა პარამეტრების ცვლილება. განხილულ სისტემაში კოლიზია ერთ მისამართზე δ რაოდენობის $h\in V'$ სიტყვას ნიშნავს. სიტყვების საერთო რაოდენობა ნაწილდება მისამართების (სტრიქონების) სხვადასხვა რაოდენობაზე. ზოგჯერ, შესაძლოა, მიზანშეწონილი იყოს სტრიქონების რიცხვის შემცირება სტრიქონში სიტყვების რაოდენობის გაზრდის ხარჯზე ან პირიქით. ცხადია, სასურველია სტრიქონის ტევადობის შემოსაზღვრა (მისი ფიქსირება); მნიშვნელოვანია თავისუფალი სტრიქონების რიცხვის შემცირება და ა.შ.

ამრიგად, აღნიშნული გარდასახვები დაკავშირებულია მეხსიერების ველის სივრცესა და დროში გაშლასა და კომპანებასთან, განზომილებების სათანადო თანაფარდობების შერჩევასთან და სხვა. აღნიშნული მეთოდი შორსაა უნივერსალობისაგან, მაგრამ კერძო შემთხვევებში შესაძლებელია სასურვე-

ლი სამსახური გაუწიოს მეხსიერების ველის ორგანიზების, ცოდნის წარმოდგენის და სხვა ამოცანების გადაწყვეტას. ქვემოთ მოცემულია აღნიშნული გარდასახვების თანმიმდევრობა.

განვიხილოთ შემდეგი ორი გამოსახულება:

$$sH = h, \qquad (3)$$

$$hH_1 = s, \qquad (4)$$

სადაც $h \in V'$, H_1 - V'' ქვესივრცის ბაზისური მატრიცა, რომლის რანგი $r^* = r-1$ (r - H მატრიცის რანგია, V'' - V^* ქვესივრცის (2) ნულოვანი სივრცე). (3) - $\gamma : s \to h$ არის იდენტიფიკაციის (ასახვის) ფუნქცია, რომელიც S სიმრავლის ელემენტებს ცალსახად შეუსაბამებს V' სიმრავლის ელემენტებს, თუმცა, უნდა შევნიშნოთ, რომ შესაძლოა V' სიმრავლის არა ყოველი ელემენტი წარმოადგენს S სიმრავლის ელემენტების ანასახს. (4) შესაბამისობა V' და V'' სიმრავლეთა ელემენტებს შორის არის სურექტიული ასახვა V' სიმრავლისა V'' სიმრავლეზე. მაშასადამე (2) - (4) გარდასახვათა შემდეგი თანმიმდევრობა

$$aH^T = s \to sH = h \to hH_1^T = s_1 \qquad (5)$$

არის V_n/V ფაქტორჯგუფის გარდასახვა V_n/V^* ფაქტორჯგუფში, რაც გვაძლევს $h^* : M \to V'' - M$ სიმრავლის ასახვას V'' სიმრავლეში.

იდენტიფიკაციის V_n/V^* ახალ სისტემაში $a \in M$ ელემენტების არაუმეტეს δ (ან $d\delta$) რაოდენობას შეიძლება ეთანადებოდეს $r^* = r-1$ განზომილების ერთი გარკვეული S ორობითი ვექტორი (იდენტიფიკატი, ანუ მისამართის შესაბამისი რიცხვი).

(2) - (4) გარდასახვები შეიძლება გამოვიყენოთ მრავალჯერადად, ანუ (5) გარდასახვათა თანმიმდევრობა განვაგრძოთ, ვიდრე არ მივიღებთ ისეთ ფაქტორიზაციას, რომლის ყოველ მოსაზღვრე კლასში აღმოჩნდება თანაბარი რაოდენობის $h \in V'$ ელემენტები.

ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი

მტკიცება. ნებისმიერი V_n/V ფაქტორჯგუფი, რომლის $\{\varepsilon = 0\}$

მოსაზღვრე კლასი შეიცავს $\delta_1 = 2^{t_1}$ რაოდენობის $h \in V'$ ელემენტს, (2) – (5) სახის თანადობებით ყოველთვის შესაძლებელია გარდაიქმნას ფაქტორჯგუფად, რომლის ყოველი მოსაზღვრე კლასი შეიცავს $\delta_2 = 2^{t_2}$ რაოდენობის $h \in V'$ ელემენტს, სადაც V' – V ქვესივრცის და V'' – V^* ქვესივრცის, შესაბამისად, Γ და Γ' განზომილებების წრფივი სივრცეებია; $2^{\Gamma'} = 2^{\Gamma}/2^{t_2}$, $t_2 \geq t_1 \geq 0$ – მთელი რიცხვებია.

ვთქვათ, M – მოცემულ სიტყვათა სიმრავლეა და ვთქვათ, [1] მეთოდის გამოყენებით ავაგეთ H მატრიცი, რომელიც ამყარებს ცალსახა დამოკიდებულებას $a^{(i)} \in M$ სიტყვებსა და $s^{(i)}$ იდენტიფიკატორებს შორის. მიღებული სისტემა შეიძლება გარდაიქმნას ფიქსირებული სიგრძის კოლიზიურ სისტემად. ამისათვის $s^{(i)}$ ვექტორებს შევუსაბამებთ $h \in V'$ ელემენტებს (4):

$$s^{(i)} H = h^{(i)}. \qquad (6)$$

(6) შესაბამისობა ამყარებს ცალსახა დამოკიდებულებას $a^{(i)}$ ვექტორსა და $h^{(i)}$ ელემენტს შორის, ანუ M სიმრავლის ასახავს V სიმრავლეში. საზოგადოდ $|M| < |V'|$, ამიტომ შესაძლოა ზოგიერთი $h \in V'$ ელემენტი არ აღმოჩნდეს $a^{(i)}$ ელემენტის ანასახი. მას შემდეგ, რაც (6) შესაბამისობით M სიმრავლე გადადის V' სიმრავლეში, შესაძლებელია ზემოგანხილული (მტკიცება) მეთოდის გამოყენება კოლიზიური სისტემის მისაღებად, რომლისათვისაც არცერთი მისამართი არ იქნება „ცარიელი" და არცერთ მისამართზე არ ჩაიწერება ფიქსირებულ δ-ზე მეტი რაოდენობის $a \in M$ ელემენტი. ცხადია, რომ ასეთი გარდაქმნით მიღებულ სისტემაში კომპაქტურობის $K_{კომ.}$ კოეფიციენტი არ იცვლის მნიშვნელობას, მაგრამ რიგ შემთხვევებში, შესაძლოა, მეხსიერების ველში სტრიქონთა შორის სივრცის ეკონომიური გამოყენება უმჯობესი იყოს საკუთრივ სტრიქონთა სივრცის ეკონომიურ გამოყენებასთან შედარებით; მითუმეტეს, რომ შესაძლებელია სხვადასხვა განზომილებების მეხსიერების ველის ორგანიზება, მ.ო. ($m_1 \times m_2$) განზომილების ვარირება, სადაც m_1 – სტრიქონების, ხოლო m_2 – სტრიქონში $a \in M$

ელემენტების რაოდენობაა.

შემოსულია I.IV.1994

ტექნიკური კიბერნეტიკის
პრობლემური ლაბორატორია

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1. Р.Р.Варшамов. Математические методы повышения надежности систем связи. Известия АН СССР: Техническая кибернетика, 1964, № 4, с.53-58.

2. Э.Рейнгольд, Ю.Нивергельт, Н.Део. Комбинаторные алгоритмы; теория и практика. М.: Мир, 1980.

3. У.Питерсон, Э.Уэлдон. Коды, исправляющие ошибки. М.: Мир, 1976.

Р.П.Мегрелишвили

Системы с фиксированным значением коллизии и их преобразования

Резюме

Рассмотрена система ассоциативной идентификации. Идентификация заключается в вычислении определенного числа, указывающего адрес данного слова в поле памяти, что обуславливает сжатие исходной информации для компактного формирования и реорганизации системы памяти.

R. Mogrelishvili

SYSTEMS WITH FIXED COLLISION VALUE AND THEIR TRANSFORMATION I

Summary

An associative identification system is considered. The identification consists in calculating the number indicating the address of a given word in the memory field, allowing compression of the initial information for compact filling and reorganization of the memory system.

Труды Тбилисского государственного университета

им. И. Джавахишвили

თბილისის ივ. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

325, 1998

ინფორმაციის იდენტიფიკაციისა და შეკუმშვის ერთი მეთოდის შესახებ

რ. მეგრელიშვილი

ცალსახა იდენტიფიკაციის მეთოდი აღწერილია [1] ნაშრომში. მეთოდის იდეა მდგომარეობს H მატრიცის აგებაში, რომლის შესაბამისი V_n/V ფაქტორჯგუფის მოსაზღვრე კლასებში $M \subset V_n$ მოცემული სიმრავლის ელემენტები განაწილდება იმ პირობით, რომ ცალკეულ მოსაზღვრე კლასში აღმოჩნდება M სიმრავლის მხოლოდ ერთი ელემენტი, სადაც V_n – $GF(2)$ ველზე განსაზღვრული ვექტორული სივრცეა, ხოლო H – $V \subset V_n$ ქვესივრცის V' ნულოვანი სივრცის ბაზისური მატრიცი.

წინამდებარე მეთოდი აღნიშნულისაგან განსხვავებით $G^{(k)}$ $(1\times(n-k+1))$-განზომილების მატრიცის აგებას ემყარება, რომლისთვისაც V_{n-k+1}/V ფაქტორჯგუფის ცალკეულ მოსაზღვრე კლასს, ანალოგიურად [1]-ისა, შეესაბამება მხოლოდ ერთადერთი ელემენტი

$$S_{(r)} = aH^T \qquad (1)$$

იდენტიფიკატი, სადაც V არის $G^{(k)}$ მატრიცის სტრიქონთა სივრცე. ძირითადი განსხვავება არის ის, რომ ამ შემთხვევაში $G^{(k)}$ მატრიცის აგება წარმოადგენს საფეხურებრივ პროცესს და საკუთრივ $G^{(k)}$ მატრიცის საბოლოო სახე მიიღება $k=n-k$ სასრული რაოდენობის მატრიცების აგების შედეგად. გარკვეულ უპირატესობად შეიძლება მივიჩნიოთ, რომ რიგ შემთხვევებში არ არის საჭირო ვექტორთა სიმრავლეების დამახსოვრება, რაც აუცილებელია H მატრიცის ასაგებად.

განვიხილოთ $G^{(k)}$ მატრიცის აგების მეთოდი. ვთქვათ, მოცემუ-

და ნებისმიერად შერჩეული

$$a=(a_1,\dots,a_n)\in V_n \qquad (2)$$

სიტყვათა M სიმრავლე და დავუშვათ, რომ $a^{(i)}+a^{(j)}\in M\,(i\neq j\in\{1,\dots,|M|\})$ -სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტებია. შევადგინოთ ვექტორთა ჯამების შემდეგი სიმრავლეები:

$$B=\bigcup_{a^{(i)},a^{(j)}\in M}\left(a^{(i)}+a^{(j)}\right) \qquad (3)$$

და

$$W=M\cup B \qquad (4)$$

ვთქვათ $g\neq 0\in V_n$ $(g=(g_1,\dots,g_n))$ და

$$g\notin W_n \qquad (5)$$

(თუ ასეთი არსებობს); მაშინ

$$G_1=[g_1\cdots g_n] \qquad (6)$$

და

$$H_{n-1}=\begin{bmatrix}1\,0\cdots 0 & g_1 & 0\cdots 0\\ 0\,1\cdots 0 & g_2 & 0\cdots 0\\ 0\,0\cdots 0 & g_{i-2} & 0\cdots 0\\ 0\,0\cdots 0 & g_{i-1} & 0\cdots 0\\ 0\,0\cdots 0 & g_{i+1} & 1\cdots 0\\ 0\,0\cdots 0 & g_n & 0\cdots 0\end{bmatrix}, \qquad (7)$$

შესაბამისად, V და V' – ურთიერთნულოვანი სივრცეების ბაზისური მატრიცებია. ცხადია, (5) – (7) პირობების თანახმად V_n/V ფაქტორჯგუფის არცერთ მოსაზღვრე კლასში არ აღმოჩნდება M სიმრავლის ერთ ელემენტზე მეტი. ამიტომ არსებობს ასახვა M სიმრავლიდან $S^{(1)}_{n-1}$ სიმრავლეზე, რომლისთვისაც ნებისმიერი $a\in M$ ელემენტი ცალსახად განსაზღვრავს მის $s_{(n-1)}\in S^{(1)}_{n-2}$ ანასახს $S^{(1)}_{n-1}\subset V_{n-1}$ სიმრავლეში. თანადობას ამყარებს შემდეგი გამოსახულება:

$$aH^{T}_{n-1}=s_{(n-1)}, \qquad (8)$$

სადაც ყოველ წყვილს $a'\neq a''\in M$ სიმრავლიდან შეესაბამება $s'_{(n-1)}\neq s''_{n-1}\in S^{(1)}_{n-1}$ $(n-1)$ – განზომილების ვექტორები; ამიტომ $|M|=|S^{(1)}_{n-1}|$ ($|X|$ – ელემენტების რაოდენობაა X სიმრავლეში). ამრიგად M

სიმრავლის ნაცვლად მივიღებთ იდენტიფიცირებულ $S_{n-1}^{(1)}$ სიმრავლეს, რითაც აგების პირველი საფეხური მთავრდება.

განვაგრძოთ აგების პროცესი. განვიხილოთ $S_{n-1}^{(1)}$ სიმრავლე, როგორც საწყისი M სიმრავლე, და შევადგინოთ (3) და (4)-ის ანალოგიური გამოსახულებები:

$$B_{n-1} = \bigcup_{s^{(i)}\neq s^{(j)}\in S_{n-1}^{(1)}} \left(s^{(i)}+s^{(j)}\right) \tag{9}$$

და

$$W_{n-1} = S_{n-1}^{(1)} \cup B_{n-1} \tag{10}$$

დავუშვათ, რომ $g\neq 0\in V_{n-1}$ $(g=(g_1,\dots,g_{n-1}))$ და

$$g\notin W_{n-1},$$

$$G_2=[g_1\cdots g_{n-1}]. \tag{11}$$

მაშინ შესაძლებელია ისეთი H_{n-2} მატრიცის აგება, რომლისთვისაც

$$G_2 H_{n-2}^{T}=0, \tag{12}$$

ე.ი. მართებულია შემდეგი თანადობა:

$$s_{(n-1)} H_{n-2}^{T} = s_{(n-2)}, \tag{13}$$

სადაც ყოველ წყვილს $s'_{(n-1)}\neq s''_{(n-1)}\in S_{n-1}$ სიმრავლიდან შეესაბამება $s'_{(n-2)}\neq s''_{(n-2)}\in S_{n-2}$ $(n-2)$-განზომილების ვექტორები. ამიტომ $|M|=|S_{n-1}^{(1)}|=|S_{n-2}^{(2)}|$. ამრიგად, M და $S_1^{(1)}$ სიმრავლეების ნაცვლად მივიღებთ $S_{n-2}^{(2)}$ სიმრავლეს, ე.ი. იარსებებს ცალსახა შესაბამისობა $a\in M$ ვექტორებსა და $s_{(n-2)}\in S_{(n-2)}^{(2)}$ ვექტორებს შორის:

$$\gamma: a \longrightarrow s_{(n-1)} \longrightarrow s_{(n-2)}. \tag{14}$$

$$\gamma: a \longrightarrow s_{(n-2)}. \tag{14'}$$

დავუშვათ, რომ განხილული პროცესი შეიძლება განხორციელდეს k-ჯერადად, ანუ k-ს მაქსიმალურ მნიშვნელობამდე (რაც განსაზღვრულია V_{r+1} ვექტორული სივრცის მინიმალური განზომილებით), რომლისთვისაც შესაძლებელია V_{r+1}/V ფაქტორჯგუფის აგება (5) - (7), (I0) - (I2)-ის ანალოგიური პირობების გათვალისწინებით, ე.ი. მართებულია თანადობა:

$$\gamma: a \longrightarrow s_{(n-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow s_{(n-k)}, \tag{15}$$

$$\gamma: a \longrightarrow s(r),$$

რომელიც M სიმრავლეს ასახავს $S_r^{(k)}\subset V_{r+1}$ სიმრავლეში, სადაც $|M|=|S_r^{(k)}|$.

(I5) თანადობის არსებობისათვის ზედა საზღვარს წარმოადგენს

შემდეგი უტოლობა:

$$|W_{n-k+1}| < 2^{r}-1. \qquad (16)$$

(16) საკმარისი პირობაა იმისა, რომ მოიძებნება თუნდაც ერთი $g \neq 0 \in V_{r+1}$ არანულოვანი ვექტორი

$$g \notin W_{n-k+1}, \qquad (17)$$

რომლის მეშვეობით შესაძლებელია $(1 \times (n-k+1))$ - განზომილების $G^{(k)}$ და $(r \times (n-k+1))$ - განზომილების H_r მატრიცების აგება. r სიდიდის ქვედა საზღვარს, ჰემინგის საზღვრის [2] ანალოგიურად, აქვს შემდეგი სახე:

$$\log_2 |M| \leq r.$$

შემოსულია I.IV.1994

ფიზიკური კიბერნეტიკის
პრობლემური ლაბორატორია

ლიტერატურა

I. Р.Р.Варшамов. Математические методы повышения надежности систем связи. Известия АН СССР: Техническая кибернетика, 1964, № 4, с.53-58.

2. Э. Рейнгольд, Ю.Нивергельт, Н.Део. Комбинаторные алгоритмы, теория и практика. М.: Мир, 1980.

Р.П.Мегрелишвили

Об одном методе идентификации и сжатия информации

Резюме

Рассмотрен метод идентификации и сжатия информационных слов, основанный на алгебраических системах кодирования.

R. Megrelishvili

ON ONE METHOD OF IDENTIFICATION AND COMPRESSION OF INFORMATION

Summary

A method of identification and compression of information of words is considered. The method is based on algebraic coding systems.

Труды Тбилисского государственного университета

им. И. Джавахишвили

თბილისის ივ. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

325, 1998

ЦЕЛОСТНОСТЬ ВОСПРИЯТИЯ В НЕРЕГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ПРИ МНОГОУРОВНЕВОМ ФРАКТАЛЬНОМ КОДИРОВАНИИ НА СЖИМАЮЩИХ "В" МАТРИЦАХ

Н. Д. Жанобашвили

Целостность восприятия образов и сцен, процесс, обычно лугко удаваемый человеку, трудно понять и смоделировать на компьютерах. Камнем преткновения, в основном, являются теоретические трудности. Точнее: подавляющее множество задач, возникающих при распознавании, относится к категории так называемых нерегулярных задач.

В связи с тем, что мозг обладает уникальными возможностями в решении нерегулярных задач, для многих математиков и специалистов по вычислительной технике именно механизмы функционирования мозга стали одним из основных объектов интенсивных исследований. Однако, по мнению авторов, эти исследования, несмотря на их актуальность, все еще находятся в стадии поисков и разработок.

Настоящая статья не имеет претензии создания какой-либо гипотетической модели мозга.

Однако, считаем, что эффективность познавательного процесса и, в частности, возможность целостного восприятия в распознавании какой-либо логико-информационной системой (в том числе человеческим мозгом) связана с функциональными возможностями того первичного органа, в котором предварительно осуществляется прием исходной информации.

В естественных системах таким органом является глаз. Точнее - сетчатка глаза.

Считаем, что именно специфичность многоуровневого кодирования изображений на сетчатке глаза обусловливает способность мозга реализовать процесс целостного восприятия образов /I,2/.

В статье рассматривается одна из возможных конструкций многоуровневой кодирующей сетки ("искусственный глаз"), которая позволяет установить порядок и регулярность при распознавании, основанные на применении фрактальных свойств сжимающих "В" матриц.

Пусть G - отображение "К" слойного гиперкуба $\Gamma(\Omega_{i_1})$ на плоскость "По" с точностью до изоморфизма, $i_1 = 1,2,3 \ldots K$. Каждой вершине гиперкуба[I] сопоставлен отдельный элемент n-мерного линейного векторного пространства V_n, заданного над полем $GF(2)$.

Расположим на слоях $\Gamma(\Omega_{i_1})$ плоские конструкции специальных кодирующих сеток $\Omega_1, \Omega_2 \ldots \Omega_{i_1} \ldots \Omega_K$ и введём следующие понятия и правила композиции:

1.1. На U_0, являющемся вектором основания длиной n, натянута кодовая сетка первого слоя Ω_1 с точностью до эпиморфизма

$$E_1 : U_0 \Longrightarrow \Omega_1(n), \qquad (1.1)$$

где E_1 - функция кодирования.

2.1. Итеративность отображения всех остальных слоев друг на друга определяется с точностью до гомоморфизма:

I В работе /3/ рассматривается - мерная гиперпирамида с целью сокращения количества пикселей на втором слое кодовой сетки.

$$E_2 : \Omega_1(n) \Longrightarrow \Omega_2(n^2)$$

$$E_3 : \Omega_2(n) \Longrightarrow \Omega(n^3)$$

$$- - - - - - - - - - \qquad (I.2)$$

$$E_k : \Omega(n^{k-1}) \Longrightarrow \Omega_k(n^k)$$

Итеративность многослойности Ω_{i_1} при соблюдении условий (IA, 2A), в основном, обусловливает фрактальность кодирующей сетки. Говоря иначе, обусловливает восприятие целого без предварительного анализа и детализации его частей.

Введем понятия идеала $\mathcal{J}_d(\Omega_{i_1})$ и множества оригиналов $P(p_1, p_2 \dots p_{i_2} \dots p_{n_2})$, где $i_2 = 1, 2, \dots n_1$.

Идеал $\mathcal{J}_d$ в основном интерпретируется как геометрическое понятие, характеризующееся соответствующим кодовым отображением на кодовой сетке с точностью до изоморфизма. Пользуясь терминологией алгебры, он может быть ассоциирован с канонической формой в геометрическом контексте.

В множестве оригиналов $P(p_1, p_2 \dots p_{i_2} \dots p_{n_2})$ каждый элемент принадлежит определенному классу образов, где $p_1, p_2 \dots p_{n_2} \Rightarrow P_0$ (P_0 - образ идеала данного класса).

Имеет место следующая

<u>ТЕОРЕМА</u>: Количество оригиналов n_2, отображаемых идеалом на кодовой сетке, равно

$$n_2 = (2^n - 1)^{k_1, k_2 \dots k_n}, \qquad (I.3)$$

где $k_1, k_2 \dots k_n$ - количество пикселей (рецепторов) на соответствующих слоях $\Omega(n_{i_1})$ кодирующей сетки, занятых оригиналом.

<u>СЛЕДСТВИЕ</u>: Суммарный коэффициент сжатия для заданного класса образов определяется соотношением

$$K_{сж} = \frac{(2^{n}-1)^{K_1, K_2 \cdots K_n}}{n K_0}, \tag{1.4}$$

где K_0 – количество пикселей (рецепторов) идеала.

Поступила 5.V.1994

Кафедра
кибернетики

Литература

1. Margaret Livingston and David Hubel- Segregation of form, Color, movement and depth: Anatomy, physiology and perception in science, vol. 240, pp. 740-749, May -6, 1988.

2. S. Zeki and S. Slipp. The Functional logic of cortical connections. Nature, vol. 335, No 6188, pp. 311-317, 1988.

3. Н.Нанобашвили, Г.Грдзелидзе. Целостность восприятия в распознавании в контексте сжатия информации. Труды Тбилисского гос.университета (в печати).

ნ.ნანობაშვილი

მთლიანობის აღქმა რეგულარული ტიპის სახეთა ამოცნობის ამოცანებში ფრაქტალური მრავალდონიანი კოდირებისას შეკუმშვის „B" მატრიცებზე.

რეზიუმე

განხილულია მრავალდონიანი კოდირების გამოყენებისას გამოსახულებათა მთლიანობაში აღქმის შესაძლებლობა.

N.Nanobashvili

PERCEPTION OF WHOLENESS IN IRREGULAR -TYPE IMAGE RECOGNITION PROBLEMS IN AT FRACTAL MULTILEVEL CODING ON "B" COMPRESSION MATRICES

Summary

The possibility of wholeness perception of images is using multilevel coding is considered.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის

შრომები

325, 1998

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОЛОЧКИ

Д.Г.Парадзе

Рассмотрим следующую задачу теории оболочек Тимошенко / I /: в области Ω с границей $\partial\Omega$ найти функции $u_1, u_2, w, \psi_1, \psi_2$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{\partial N_i}{\partial x_i}+\frac{\partial T}{\partial x_j}+p_i=0,\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}+k_1N_1+k_2N_2+\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(N_1\frac{\partial w}{\partial x_1}+$$

$$+T\frac{\partial w}{\partial x_2}\Big)+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(T\frac{\partial w}{\partial x_1}+N_2\frac{\partial w}{\partial x_2}\Big)+q=0,\ \frac{\partial M_i}{\partial x_i}+\frac{\partial H}{\partial x_j}-Q_i=0 \tag{I}$$

при краевых условиях

$$u_i|_{\partial\Omega}=w|_{\partial\Omega}=\psi_i|_{\partial\Omega}=0, \tag{2}$$

где

$$N_i=\frac{Eh}{1-\nu^2}\Big\{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-k_iw+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial x_i}\Big)^2+\nu\Big[\frac{\partial u_j}{\partial x_j}-k_jw+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial x_j}\Big)^2\Big]\Big\},\ T=\frac{Eh}{2(1+\nu)}\times$$

$$\times\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2}\Big),\ Q_i=k_0^2\frac{Eh}{2(1+\nu)}\Big(\frac{\partial w}{\partial x_i}+\psi_i\Big),\ M_i=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\times$$

$$\times\Big(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial \psi_j}{\partial x_j}\Big),\quad H=\frac{1-\nu}{2}\Big(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\Big),$$

k_i, p_i, q – заданные функции, $i,j=1,2,\ i\neq j$, E, h, ν, k_0^2 – известные положительные постоянные, $\nu<\frac{1}{2}$.

Отметим, что система уравнений (I) в математическом плане фактически не исследована / 2 /.

Под $(C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}))^n$, $0<\alpha<1$, будем понимать пространство n - мерных вектор-функций с компонентами из $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ / 3 / и нормой $|v|_{1,m,\alpha}=|v_1|_{m,\alpha}+|v_2|_{m,\alpha}+\ldots+|v_n|_{m,\alpha}$ для $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)\in(C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}))^n$, где $|\omega|_{m,\alpha}=\sum_{|l|=0}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|D^l\omega(x)|+$ $+\sum_{|l|=m}\langle D^l\omega(x)\rangle^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}}$, $x=(x_1,x_2)$, $l=(l_1,l_2)$, $\langle\omega_1\rangle^{(\alpha)}_{\overline{\Omega}}=$ $=\sup_{x,x'\in\overline{\Omega}}\frac{|\omega_1(x)-\omega_1(x')|}{|x-x'|^\alpha}$. Нам потребуются соотношения

$$\|L^{-1}\|_{1,0,\alpha}\leq\gamma_1,\quad|\Delta^{-1}|_{0,\alpha}\leq\gamma_2,\quad|(aL-I)^{-1}|_{1,0,\alpha}\leq\gamma_3 \qquad (3)$$

для норм операторов, обратных к $L,\Delta,aL-I$ при однородных граничных условиях Дирихле. Здесь $L=\mu\Delta+(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad\,div}$ - оператор плоской теории упругости, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, I - единичный оператор, $\lambda=\frac{\nu}{1-\nu^2}$, $\mu=\frac{1}{2(1+\nu)}$, $a=\frac{h^2(1+\nu)}{6K_0^2}$. Предполагается, что L^{-1}, $(aL-I)^{-1}$ переводят $(C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}))^2$ в $(C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^2$, а оператор Δ^{-1} переводит $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ в $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Введем величины

$$m_1=\frac{2\gamma_2 s_1}{K_0^2(1-\nu)}\left(\frac{\gamma_1 s_1}{1-\nu^2}+\frac{1}{2}\right),\quad m_2=\frac{2\gamma_2 s_1|k|_{1,1,\alpha}}{K_0^2(1-\nu)}\left(\frac{\gamma_1(s_1+s_2)}{1-\nu^2}+\frac{3}{2}\right),$$

$$m_3=1-\gamma_2 s_1\left[\frac{2(1+\nu)|p|_{1,0,\alpha}}{K_0^2Eh}\left(\frac{\gamma_1}{1-\nu^2}+1\right)+\gamma_2 s_1+\frac{2|k|^2_{1,1,\alpha}}{K_0^2(1-\nu)}\left(\gamma_1 s_2+1\right)\right],$$

$$m_4=\frac{2\gamma_2(1+\nu)}{K_0^2Eh}\left(\frac{s_1|k|_{1,1,\alpha}|p|_{1,0,\alpha}}{1-\nu^2}+|q|_{0,\alpha}\right),\quad m_5=\frac{\gamma_1 s_1}{1-\nu^2}+1,$$

$$m_6=|k|_{1,1,\alpha}\left(\frac{\gamma_1 s_2}{1-\nu^2}+1\right)+1,\quad m_7=\frac{K_0^2(1-\nu)}{2\gamma_2 s_1}-\frac{\gamma_1|p|_{1,0,\alpha}}{Eh},$$

$$r_1=\inf_{r\in R}\{r\},\quad r_2=\sup_{r\in R}\{r\},\quad r_3=\frac{-m_6+\sqrt{m_6^2+4m_5m_7}}{2m_5},$$

где $s_i=\max\left[1,i(\mathrm{diam}\,\Omega)^{1-\alpha}\right]$, $i=1,2$, $p=(p_1,p_2)$, $k=(k_1,k_2)$,

$$R=\{r \mid r>0,\ m_1 r^3+m_2 r^2+m_4<m_3 r\}.$$

Обозначим через $B_n(0,\rho)$ шар в $(C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))^n$ с центром в нуле и радиусом ρ.

Т е о р е м а. Пусть Ω – выпуклая область, выполняются неравенства (3) и $\kappa\in(C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}))^2$, $p\in(C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}))^2$, $q\in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\partial\Omega\in C^{2,\alpha}$.

Пусть, кроме того,

$$m_3>0,\quad r_1<r_3,$$

$$m_4(27m_1^2m_4+4m_2^3+18m_1m_2m_3)<m_3^2(m_2^2+4m_1m_3). \qquad (4)$$

Тогда задача (I), (2) имеет решение $u_1, u_2, w, \psi_1, \psi_2$, причем $u=(u_1,u_2)\in B_2\left(0,\frac{\gamma_1}{1-\nu^2}(s_1r^2+s_2\|\kappa\|_{1,1,\alpha}r)+\frac{\gamma_1\|p\|_{1,0,\alpha}}{Eh}\right)$, $w\in B_1(0,r)$, $\psi=(\psi_1,\psi_2)\in B_2(0,\gamma_3 s r)$, где $r=\min(r_2,r_3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы основывается на проверке факта существования решения операторного уравнения

$$w=\Phi(w) \qquad (5)$$

при условии на границе

$$w\big|_{\partial\Omega}=0. \qquad (6)$$

К задаче (5), (6) приходим применяя операторы L^{-1}, Δ^{-1}, $(aL-I)^{-1}$ и выразив с помощью (I), (2) функции u_1, u_2, ψ_1, ψ_2 через w. Разрешимость полученной задачи (5), (6) доказывается в два этапа. Вначале убеждаемся в том, что оператор Φ переводит шар $B_1(0,r)$ в себя, затем достаточно показать, что Φ является χ – уплотняющим оператором / 4 /. Последнее достигается в результате представления Φ в виде суммы $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$, где Φ_1 – сжимающий оператор, а Φ_2 – вполне непрерывный.

Приведем достаточное условие соблюдения требования (4). Оно заключается в малости $\kappa, p, q, \gamma_i, i=1,2,3$. Для первого неравенства из (4) отмеченное очевидно, два же других неравенства будут выполняться в силу вытекающей из наложенного ограничения малости параметра m_4.

Вопрос разрешимости задачи (1), (2) в случае пластинки $(\kappa=0)$ подробно рассмотрен в /5/.

Поступила 10.2.1994

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

Литература

1. А.С.Вольмир. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. "Наука", М., 1972.

2. И.И.Ворович. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. "Наука", М., 1989.

3. О.А.Ладыженская, Н.Н.Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. "Наука", М., 1973.

4. Р.Р.Ахмеров, М.И.Каменский, А.С.Потапов и др. Меры некомпактности и уплотняющие операторы. "Наука", Новосибирск, 1986.

5. Д.Г.Перадзе. Уплотняющий оператор одной системы уравнений и её разрешимость. Тр. Тбилис. гос. ун-та, 1990, т.300, 88 - 100.

ჯ. ფერაძე

გარსისთვის ერთი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობა

რეზიუმე

განხილულია ტიმოშენკოს დიფერენციალურ განტოლებათა არაწრფივი სისტემა, რომელიც აღწერს გარსის დეფორმაციას. მოყვანილია თეორემა სასაზღვრო ამოცანის ძლიერი ამოხსნის არსებობის შესახებ.

J. Peradze

The solvability of one boundary value problem for a shell

Summary

The paper deals with the nonlinear system of Timoshenko differential equations which describes shell deformation. The theorem on existence of a strong solution of a boundary value problem is given.

Труды Тбилисского государственного университета
им.И.Джавахишвили
თბილისის ივ.ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

325, 1998

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ МНОГОШАГОВОГО МЕТОДА

Н.О.Брегвадзе, Д.Г.Перадзе

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), \qquad (1)$$

$$t > 0,$$

при начальном условии

$$u(0) = u_0. \qquad (2)$$

Предположим, что выполняются требования, обеспечивающие разрешимость задачи (1), (2). Для нахождения решения введем сетку $\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0,1,\}$ с шагом $\tau > 0$, обозначим через $y_n = y(t_n)$, $f_n = f(t_n, y_n)$ функции, определенные на ω_τ, и воспользуемся m - шаговым разностным методом

$$\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{m} a_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^{m} b_k f_{n-k}, \qquad (3)$$

$$n = m, m+1, \ldots,$$

где a_k, b_k - числовые коэффициенты, не зависящие от n, $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$ - заданные начальные значения, $a_0 \neq 0$.

Введем погрешность $z_n = y_n - u(t_n)$ и получим оценку для неё. С этой целью воспользуемся ходом рассуждений, приведенным в / 1,2 /.

Как следует из (3), погрешность удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{m} a_k z_{n-k} = \psi_{n-m} + \varphi_{n-m}, \qquad (4)$$
$$n = m,\ m+1, \dots .$$

Здесь ψ_{n-m} — погрешность аппроксимации,

$$\psi_{n-m} = \sum_{k=0}^{m}\left(-\frac{1}{\tau} a_k u_{n-k} + b_k f(t_{n-k}, u_{n-k})\right),$$

$u_{n-k} = u(t_{n-k})$, и φ_{n-m} определяется формулой

$$\varphi_{n-m} = \sum_{k=0}^{m} b_k \big(f(t_{n-k}, y_{n-k}) - f(t_{n-k}, u_{n-k})\big). \qquad (5)$$

Пусть существует частная производная функции $f(t,u)$ по u, причем выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(t,u)\right| \leq L. \qquad (6)$$

В силу (5)

$$\varphi_{n-m} = \sum_{k=0}^{m} b_k l_{n-k} z_{n-k}, \qquad (7)$$

где $l_{n-k} = \frac{\partial f}{\partial u}(t_{n-k}, u_{n-k} + \theta z_{n-k})$, $0 \leq \theta_k \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, m$.

В результате подстановки (7) в (4) получаем

$$\sum_{k=0}^{m} (a_k - \tau b_k l_{n-k}) z_{n-k} = \tau \psi_{n-m}. \qquad (8)$$

Предположим, что шаг сетки настолько мал, что

$$\tau \leq \frac{|a_0|(1-\varepsilon)}{|b_0| L}, \qquad (9)$$

причем $0 < \varepsilon < 1$. Из (9) следует

$$|a_0 - \tau b_0 l_n| \geq \varepsilon |a_0| > 0. \qquad (10)$$

Разрешая (8) относительно z_n, запишем

$$z_n = \sum_{k=1}^{m}\left(-\frac{a_k}{a_0} + \tau p_{nk}\right) z_{n-k} + \tau \frac{\psi_{n-m}}{a_0 - \tau b_0 l_n}, \qquad (11)$$

$$p_{nk}=\frac{a_0 b_k \ell_{n-k}-a_k b_0 \ell_n}{a_0(a_0-\tau b_0 \ell_n)}, \tag{12}$$

$$k=1,2,\dots,m.$$

Введем векторы $Z_n=(z_{n-m+1},z_{n-m+2},\dots,z_n)^T$, $\Psi_{n-1}=(0,0,\dots,0,\frac{\psi_{n-m}}{a_0-\tau b_0 \ell_n})^T$ и матрицы $P_{n-1}=(p_{ij}^{(n-1)})$, $S=(s_{ij})$, $i,j=1,2,\dots m$, где $p_{mj}^{(n-1)}=p_{n,m-j+1}$, $s_{mj}=-\frac{a_{m-j+1}}{a_0}$, $j=1,2,\dots,m$, $s_{i,i+1}=1$, $i=1,2,\dots,m-1$, остальные элементы матриц P_{n-1} и S равны нулю.

На основании (II) имеем

$$Z_n=(S+\tau P_{n-1})Z_{n-1}+\tau\Psi_{n-1}. \tag{13}$$

Наложим ограничения на коэффициенты a_k из формулы (3). Пусть они таковы, что корни характеристического уравнения $a_0 q^m+a_1 q^{m-1}+\dots+a_m=0$ лежат внутри или на границе единичного круга комплексной плоскости, причем на границе единичного круга нет кратных корней.

Воспользуемся нормой

$$\|V\|_*=\|QV\|_\infty, \tag{14}$$

где $V\in R^m$ и матрица Q определяется равенством $\tilde{S}=QSQ^{-1}$. Здесь $\tilde{S}$ - модифицированная жорданова форма матрицы S.

Примем во внимание неравенство / 2 /

$$\|S\|_*\le 1. \tag{15}$$

Кроме (15), нам потребуется также оценка для $\|P_{n-1}\|_*$. Чтобы найти её, сначала, исходя из (12), (6) и (10), запишем

$$\|P_{n-1}\|_\infty \leq pL,\qquad (16)$$

где $p=\frac{1}{\varepsilon a_0^2}\sum_{k=1}^{m}(|a_0||b_k|+|a_k||b_0|)$.

Затем, применяя (I6) и (I4), выводим неравенство

$$\|P_{n-1}\|_* \leq c,\qquad (17)$$

где $c=MpL$, $M=\|Q\|_\infty\|Q^{-1}\|_\infty$.

Посредством (I3), (I5) и (I7) получаем

$$\|Z_n\|_* \leq (1+\tau c)^{n-m+1}\Big(\|Z_{m-1}\|_* + \tau\sum_{k=m}^{n}\|\Psi_{k-1}\|_*\Big).\qquad (18)$$

Из (I8), (I4) и (I0) следует окончательная оценка

$$|z_n| \leq Me^{cT}\Big(\max_{0\leq j\leq m-1}|z_j| + \frac{\tau}{\varepsilon|a_0|}\sum_{k=0}^{n-m}|\psi_k|\Big),\qquad (19)$$

$$n=m,\ m+1,\ \ldots$$

В частном случае, когда $\varepsilon=\frac{1}{2}$, из (I9) вытекает неравенство, доказанное в / 2 /.

Поступила I2.XII.I997

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

Литература

I. Н.С.Бахвалов. Численные методы. "Наука", М., I975.

2. А.А.Самарский, А.В.Гулин. Численные методы. "Наука", М., I989.

ნ.ბრეგვაძე, ჯ.ფერაძე

მრავალბიჯიანი მეთოდის ცდომილების ერთი შეფასების შესახებ

რეზიუმე

მიღებულია კოშის ამოცანის სხვაობიანი მეთოდით ამოხსნის ცდომილების შეფასება, რომელიც წარმოადგენს ცნობილი შედეგის განზოგადოებას.

N.Bregvadze, J.Peradze

On one estimate for an error of the multi-step method

Summary

An error estimate, generalizing the well-known result, is obtained for the difference method of solution of the Cauchy problem.

СОДЕРЖАНИЕ

შ ი ნ ა ა რ ს ი

CONTENTS

117

2000

გამომცემლობის რედაქტორი ლ. აბულაშვილი

კორექტორი ლ. ზოლიძე

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 21.12.98.

საბეჭდი ქაღალდი 60X84 I/I6

პირ.ნაბეჭდი თაბახი 5,5

სააღრ.-საგამომც. თაბახი 3,35

შეკვეთა #233 ტირაჟი 80

ფასი სახელშეკრულებო

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,

380028, თბილისი, ი.ჭავჭავაძის გამზ,I4.

გამომცემლობა „ინტელექტი", თბილისი,

ი.ჭავჭავაძის გამზ.,I7ა