თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY
324

მათემატიკა. მექანიკა. ასტრონომია

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. АСТРОНОМИЯ.

MATEMATICS. MECHANICS. ASTRONOMY

თბილისი ТБИЛИСИ TBILISI

1997

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
Издательство Тбилисского университета
TBILISI UNIVERSITY PRESS

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили
თბილისის ი. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
324, 1997

УДК 511

О НЕКОТОРЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ ТЕОРИИ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ

Г.А.Ломадзе

В одноименной статье /I/ доказаны два и приведены без доказательства аналогично доказываемые четыре арифметических равенства, имеющих место в случае произвольного нечетного натурального числа n. В настоящей статье будет доказано, что для всякого натурального $n\equiv 0 \pmod 4$ имеют место равенства:

21004

$$\sum_{4(6x+1)^2+12y^2+48z^2=n}(-1)^{x+z}=\begin{cases}(-1)^{s-1}\left(\frac{s}{3}\right)s & \text{при } n=4s^2,\ s>0,\\ 0 & \text{в противном случае;}\end{cases} \qquad (1)$$

$$\sum_{4(6x+1)^2+12y^2+48z^2=n}(-1)^{x+y+z}=\begin{cases}\left(\frac{s}{3}\right)s & \text{при } n=4s^2,\ s>0,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases} \qquad (2)$$

Здесь суммы взяты по всем целочисленным решениям x, y, z уравнений, указанных под знаком сумм.

В данной статье будут применяться следующие обозначения: N, a, k, l, n, r — натуральные числа; u — нечетное натуральное число; p — простое число; $m, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, c, g, h, j, x, y, z$ — целые числа; $A, B, C, D, G, \zeta, \tau$ — комплексные величины $(\operatorname{Im}\tau>0)$; $\left(\frac{m}{u}\right)$ — обобщенный символ Якоби; $e(\zeta)=\exp 2\pi i\zeta$; $Q=\exp 2\pi i\tau$; $\eta(\gamma)=1$ при $\gamma>0$ и $\eta(\gamma)=-1$ при $\gamma<0$; $\varphi(a)$ — функция Эйлера.

Пусть

$$\Gamma = \left\{ \frac{a\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta} \,\middle|\, \alpha\delta-\beta\gamma=1 \right\}$$

— неоднородная полная модулярная группа и

$$\Gamma_0(4N) = \left\{ \frac{a\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta} \in \Gamma \,\middle|\, \gamma \equiv 0 \pmod{4N} \right\}$$

— неоднородная конгруэнц-подгруппа группы Γ.

Далее, пусть

$$\vartheta_{gh}(\zeta|\tau;c,N) = \sum_{m\equiv c \pmod N} (-1)^{h(m-c)/N} e\left(\frac{(2m+g)^2}{8N}\tau\right) e\left(\left(m+\frac{g}{2}\right)\zeta\right). \qquad (3)$$

Положив

$$\vartheta_{gh}(\tau;c,N) = \vartheta_{gh}(0|\tau;c,N),$$

$$\vartheta'_{gh}(\tau;c,N) = \frac{\partial}{\partial\zeta}\vartheta_{gh}(\zeta|\tau;c,N)\Big|_{\zeta=0}, \qquad (4)$$

получим

$$\vartheta_{gh}(\tau;0,N) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{hm} Q^{(2Nm+g)^2/8N}, \qquad (5)$$

$$\vartheta'_{gh}(\tau;0,N) = \pi i \sum_{m=-\infty} (-1)^{hm} (2Nm+g) Q^{(2Nm+g)^2/8N} \qquad (6)$$

В /I/ показано, что

$$\vartheta_{g+2j,h}(\tau;c,N) = \vartheta_{gh}(\tau;c+j,N), \quad \vartheta_{gh}(\tau;c+Nj,N) = (-1)^{hj}\vartheta_{gh}(\tau,c,N), \qquad (7)$$

$$\vartheta'_{g+2j,h}(\tau;c,N) = \vartheta'_{gh}(\tau;c+j,N), \quad \vartheta'_{gh}(\tau;c+Nj,N) = (-1)^{hj}\vartheta'_{gh}(\tau;c,N), \qquad (8)$$

$$\vartheta_{-g,h}(\tau;0,N) = \vartheta_{gh}(\tau;0,N), \quad \vartheta'_{-gh}(\tau;0,N) = -\vartheta_{gh}(\tau;0,N). \qquad (9)$$

<u>Определение</u>. Функция F, определенная на $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$, называется целой модулярной формой (ц.м.ф.) веса r относительно $\Gamma_0(4N)$, если

I) F регулярна на $\mathcal{H}$.

2) для всех подстановок из $\Gamma_0(4N)$ и всех $\tau\in\mathcal{H}$

$$F\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=(\gamma\tau+\delta)^{7}F(\tau),$$

3) в окрестности точки $\tau=i\infty$ имеет место разложение

$$F(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}A_m Q^m, \tag{10}$$

4) для всех подстановок из Γ, в окрестности каждой рациональной точки $\tau=-\frac{\delta}{\gamma}\ (\gamma\neq 0,(\gamma,\delta)=1)$ имеет место разложение

$$(\gamma\tau+\delta)^{7}F(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}B_m e\left(\frac{m}{4N}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right).$$

В дальнейшем будем пользоваться следующими результатами:

Лемма I (/2/, с.811,953). Ц.м.ф. F веса 7 относительно $\Gamma_0(4N)$ тождественно равна нулю, если в ее разложении (10)

$$A_m=0 \qquad \text{для всех} \qquad m\leq\frac{7}{3}N\prod_{p/4N}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Лемма 2 (/3/, с.115, леммы 9 и 10). При четном g для всех подстановок из $\Gamma_0(4N)$ имеют место равенства:

$$\vartheta_{gh}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};0,2N\right)=e\left(-\frac{\alpha\gamma\delta^2h^2}{16N}\right)e\left(\frac{\beta\delta}{4N}\left(\frac{g}{2}\right)^2\delta^{2\varphi(2N)-2}\right)\times$$

$$\times\, i^{\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)/2}\, i^{(1-|\delta|)/2}\left(\frac{2\beta N\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)(\gamma\tau+\delta)^{1/2}\vartheta_{ag,h}(\tau;0,2N),$$

$$\vartheta'_{gh}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};0,2,N\right)=\operatorname{sgn}\delta\; e\left(-\frac{\alpha\gamma\delta^2h^2}{16N}\right)e\left(\frac{\beta\delta}{4N}\left(\frac{g}{2}\right)^2\delta^{2\varphi(2N)-2}\right)\times$$

$$\times\, i^{3\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)/2}\, i^{(1-|\delta|)/2}\left(\frac{2\beta N\operatorname{sgn}}{|\delta|}\right.(\gamma\tau+\delta)^{3/2}\vartheta'_{ag,h}(\tau;0,2N).$$

Лемма 3 (/3/, с.116, лемма II). Пусть g - четное. Тогда для каждой подстановки из Γ, в окрестности любой рациональной точки

$$\tau=-\frac{\delta}{\gamma}\quad(\gamma\neq 0,\ (\gamma,\delta)=1)$$

имеют место разложения:

$$(\gamma\tau+\delta)^{1/2}\vartheta_{gh}(\tau;0,2N)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m e\left(\frac{m}{4N}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) \quad \text{при } 2|\gamma,$$

$$=e\left(\frac{h}{16N}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)\sum_{m=0}^{\infty}C'_m e\left(\frac{m}{4N}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) \quad \text{при } 2\nmid\gamma,$$

$$(\gamma\tau+\delta)^{3/2}\vartheta'_{gh}(\tau;0,2N)=\sum_{m=0}^{\infty}D_m e\left(\frac{m}{4N}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) \quad \text{при } 2|\gamma,$$

$$=e\left(\frac{h}{16N}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)\sum_{m=0}^{\infty}D'_m e\left(\frac{m}{4N}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) \quad \text{при } 2\nmid\gamma.$$

<u>Лемма</u> 4 [I]. Пусть N - произвольно заданное натуральное число и

$$\varphi(\tau)=\sum_{l=1}^{\omega}H_l\prod_{k=1}^{3}\vartheta_{g_{kl}h_{kl}}(\tau;0,2N_{kl})-H_0\vartheta'_{gh}(\tau;0,2N_0), \tag{11}$$

где H_l и H_0 - произвольные постоянные, ω - любое натуральное число. Тогда функция $\varphi^4(\tau)$ будет ц.м.ф. веса 6 относительно $\Gamma_0(4N)$, если

$$2|g_{kl},\ N_{kl}|N \quad (k=1,2,3;\ l=1,2,\ldots,\omega), \tag{12}$$

$$4\Big|N\sum_{k=1}^{3}\frac{h_{kl}^2}{N_{kl}},\qquad 4\Big|\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{N_{kl}}\left(\frac{g_{kl}}{2}\right) \quad (l=1,2,\ldots,\omega), \tag{13}$$

$$2|g,\ 4N_0|N,\ 4N_0\Big|\left(\frac{g}{2}\right)^2 \tag{14}$$

и для всех α и δ, удовлетворяющих условию $\alpha\delta\equiv1\pmod{4N}$ выполняются равенства

$$\sum_{l=1}^{\omega}H_l\prod_{k=1}^{3}\left\{\left(\frac{N_{kl}}{|\delta|}\right)\vartheta_{\alpha g_{kl},h_{kl}}(\tau;0,2N_{kl})\right\}=\pm\sum_{l=1}^{\omega}H_l\prod_{k=1}^{3}\vartheta_{g_{kl}h_{kl}}(\tau;0,2N_{kl}), \tag{15}$$

$$\operatorname{sgn}\delta\left(\frac{-N_0}{|\delta|}\right)\vartheta'_{\alpha g,h}(\tau;0,2N_0)=\pm\vartheta'_{gh}(\tau;0,2N_0) \tag{16}$$

I) Эта лемма в /I/, за неименнем места и с несколько бо́льшим ограничением, была приведена без доказательства.

(в обоих равенствах должен стоять один и тот же знак).

Доказательство. Согласно (5) и (6), функция $\varphi(\tau)$, а, следовательно, и $\varphi^4(\tau)$ удовлетворяют условию I) определения.

Так как $N_{kl} | N$ и $N_0 | N$, то всякая подстановка группы $\Gamma_0(4N)$ является также и подстановкой групп $\Gamma_0(4N_{kl})$ $(1\le k\le 3, 1\le l\le \omega)$ и $\Gamma_0(4N_0)$. Следовательно, в силу лемы 2, для каждой подстановки из группы $\Gamma_0(4N)$ имеют место равенства:

$$\prod_{k=1}^{3}\vartheta_{g_{kl}h_{kl}}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};0,2N_{kl}\right)=e\left(-\frac{\alpha\gamma\delta^2}{16}\sum_{k=1}^{3}\frac{h_{kl}^2}{N_{kl}}\right)\times$$

$$\times\, e\left(\beta\delta\sum_{k=1}^{3}\frac{\delta^{2\varphi(2N_{kl})-2}}{4N_{kl}}\left(\frac{g_{kl}}{2}\right)^2\right)i^{3\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)/2}\, i^{3(1-|\delta|)/2}\times$$

$$\times\left(\frac{2}{|\delta|}\right)\left(\frac{\beta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)(\gamma\tau+\delta)^{3/2}\prod_{k=1}^{3}\left\{\left(\frac{N_{kl}}{|\delta|}\right)\vartheta_{\alpha g_{kl},h_{kl}}(\tau;0,2N_{kl})\right\},$$

$$\vartheta'_{gh}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};0,2N_0\right)=\operatorname{sgn}\delta\, e\left(-\frac{\alpha\gamma\delta^2h^2}{16N_0}\right)e\left(\frac{\beta\delta}{4N_0}\delta^{2\varphi(2N_0)-2}\left(\frac{g}{2}\right)^2\right)\times$$

$$\times\, i^{3\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)/2}\, i^{(1-|\delta|)/2}\left(\frac{-2}{|\delta|}\right)\left(\frac{\beta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)\left(\frac{-N_0}{|\delta|}\right)(\gamma\tau+\delta)^{3/2}\vartheta'_{\alpha g,h}(\tau;0,2N_0).$$

Нетрудно проверить, что

$$i^{3(1-|\delta|)/2}\left(\frac{2}{|\delta|}\right)=i^{(1-|\delta|)/2}\left(\frac{-2}{|\delta|}\right)=i^{3(|\delta|-1)^2/4}.$$

Таким образом, согласно (II) – (I6), для каждой подстановки из группы $\Gamma_0(4N)$ имеет место равенство

$$\varphi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=i^{3\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)/2}\, i^{3(|\delta|-1)^2/4}\left(\frac{\beta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)(\gamma\tau+\delta)^{3/2}\varphi(\tau),$$

т.е. для каждой подстановки из $\Gamma_0(4N)$

$$\varphi^4\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=(\gamma\tau+\delta)^6\varphi^4(\tau). \qquad (I7)$$

Итак, функция $\varphi^4(\tau)$ удовлетворяет и условию 2) определения.

Из (3) и (4) следует

$$\vartheta_{g_{kl}h_{kl}}(\tau;0,2N_{kl})=\sum_{m\equiv 0(\mathrm{mod}\,2N_{kl})}(-1)^{h_{kl}m/2N_{kl}}\,e\left\{\frac{1}{4N_{kl}}\left(m(m+g_{kl})+\left(\frac{g_{kl}}{2}\right)^2\right)\tau\right.$$

и

$$\vartheta'_{gh}(\tau;0,2N_0)=\pi i\sum_{m\equiv 0(\mathrm{mod}\,2N_0)}(-1)^{hm/2N_0}(2m+g)\,e\left\{\frac{1}{4N_0}\left(m(m+g)+\left(\frac{g}{2}\right)^2\right)\tau\right\}$$

Так как

$$m(m+g_{kl})+\left(\frac{g_{kl}}{2}\right)^2=\left(m+\frac{g_{kl}}{2}\right)^2\geq 0 \quad \text{и} \quad 2N_{kl}\,|\,m \quad (k=1,2,3;\ l=1,2,\ldots,$$

а также

$$m(m+g)+\left(\frac{g}{2}\right)^2=\left(m+\frac{g}{2}\right)^2\geq 0 \quad \text{и} \quad 2N_0\,|\,m,$$

то, согласно (13) и (14),

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{4N_{kl}}\left(m(m+g_{kl})+\left(\frac{g_{kl}}{2}\right)^2\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{4N_0}\left(m(m+g)+\left(\frac{g}{2}\right)^2\right)$$

являются неотрицательными целыми числами. Таким образом, функции $\prod_{k=1}^{3}\vartheta_{g_{kl}h_{kl}}(\tau;0,2N_{kl})$ и $\vartheta_{gh}(\tau;0,2N_0)$, а, следовательно, и функции $\varphi(\tau)$ и $\varphi^4(\tau)$ удовлетворяют условию 3) определения.

Согласно лемме 3, в окрестности любой рациональной точки $\tau=-\frac{\delta}{\gamma}$ $(\gamma\neq 0,\ (\gamma\delta)=1)$ имеем

$$(\gamma\tau+\delta)^{3/2}\prod_{k=1}^{3}\vartheta_{g_{kl}h_{kl}}(\tau;0,2N_{kl})=\sum_{m=0}^{\infty}G_m\,e\left(\frac{m}{16N}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right),$$

$$(\gamma\tau+\delta)^{3/2}\vartheta'_{gh}(\tau;0,2N_0)=\sum_{m=0}^{\infty}G'_m\,e\left(\frac{m}{16N}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right).$$

Следовательно, согласно (11),

$$(\gamma\tau+\delta)^{3/2}\varphi(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}B_m\,e\left(\frac{m}{16N}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right),$$

откуда

$$(\gamma\tau+\delta)^{6}\varphi^4(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}B'_m\,e\left(\frac{m}{4N}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right).$$

Таким образом, функция $\varphi^4(\tau)$ удовлетворяет условию 4) определения.

Доказательство равенств (1) и (2). В лемме 4 положим:

$N = 144$, $\omega = 1$, $H_1 = 1$, $H_0 = 1/48\pi i$, $g_{11} = g_{21} = 0$, $g_{31} = 96$, $h_{11} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, $h_{21} = h_{31} = 1$, $g = 48$, $h = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$, $N_{11} = 12$, $N_{21} = 48$, $N_{31} = 144$, $N_0 = 36$. Тогда соответственно получим:

$$\varphi_1(\tau) = \vartheta_{00}(\tau; 0, 24)\,\vartheta_{01}(\tau; 0, 96)\,\vartheta_{96,1}(\tau; 0, 288) - \frac{1}{48\pi i}\,\vartheta'_{48,1}(\tau; 0, 72)$$

и

$$\varphi_2(\tau) = \vartheta_{01}(\tau; 0, 24)\,\vartheta_{01}(\tau, 0, 96)\,\vartheta_{96,1}(\tau; 0, 288) - \frac{1}{48\pi i}\,\vartheta'_{48,0}(\tau; 0, 72).$$

Нетрудно проверить, что функции $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ удовлетворяют условиям (I2) - (I4) леммы 4.

Из $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{576}$ следует, что $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{36}$, т.е.

$$\alpha \equiv \pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 11, \pm 13, \pm 17 \pmod{36}$$

и соответственно

$$\delta \equiv \pm 1, \mp 7, \mp 5, \mp 13, \mp 11, \pm 17 \pmod{36} \qquad (I8)$$

Следовательно, согласно (7) и (9), имеем:

$$\vartheta_{96\alpha,1}(\tau; 0, 288) = \vartheta_{\pm 96 + 96(\alpha \mp 1),1}(\tau; 0, 288) = \vartheta_{\pm 96,1}(\tau; 48(\alpha \mp 1), 288) =$$

$$= \begin{cases} \vartheta_{96,1}(\tau; 0, 288) & \text{при } \alpha \equiv \pm 1, \mp 11, \pm 13 \pmod{36}, \\ -\vartheta_{96,1}(\tau; 0, 288) & \text{при } \alpha \equiv \mp 5, \pm 7, \mp 17 \pmod{36}. \end{cases} \qquad (I9)$$

Согласно (8) и (9), имеем:

$$\vartheta'_{48\alpha,1}(\tau; 0, 72) = \vartheta'_{48 + 48(\alpha - 1),1}(\tau; 0, 72) = \vartheta'_{48,1}(\tau; 24(\alpha - 1), 72) =$$

$$= \vartheta'_{48,1}(\tau; 0, 72) \quad \text{при } \alpha \equiv 1, -5, 7, -11, 13, -17 \pmod{36}, \qquad (20)$$

$$\vartheta'_{48\alpha,1}(\tau; 0, 72) = \vartheta_{-48 + 48(\alpha + 1),1}(\tau; 0, 72) = \vartheta'_{-48,1}(\tau; 0, 24(\alpha + 1), 72) =$$

$$= -\vartheta'_{48,1}(\tau; 0, 72) \quad \text{при } \alpha \equiv -1, 5, -7, 11, -13, 17 \pmod{36}. \qquad (2I)$$

Далее, имеем:

$$\left(\frac{12}{161}\right)\left(\frac{48}{161}\right)\left(\frac{144}{161}\right)=1,\ \operatorname{sgn}\delta\left(\frac{-36}{161}\right)=\begin{cases}1 & \text{при } \delta\equiv 1 \pmod 4,\\ -1 & \text{при } \delta\equiv -1 \pmod 4).\end{cases} \qquad (22)$$

Из (I9) и (22) следует, что

$$\left(\frac{12}{161}\right)\left(\frac{48}{161}\right)\left(\frac{144}{161}\right)\vartheta_{00}(\tau;0,24)\vartheta_{01}(\tau;0,96)\vartheta_{96\alpha,1}(\tau;0,288)=$$

$$=\begin{cases}\vartheta_{00}(\tau;0,24)\vartheta_{01}(\tau;0,96)\vartheta_{96,1}(\tau;0,288) & \text{при } \alpha\equiv\pm1,\pm11,\pm13 \pmod{36},\\ -\vartheta_{00}(\tau;0,24)\vartheta_{01}(\tau;0,96)\vartheta_{96,1}(\tau;0,288) & \text{при } \alpha\equiv\pm5,\pm7,\pm17 \pmod{36})\end{cases} \qquad (23)$$

Из (I8) и (20) - (22) следует, что

$$\operatorname{sgn}\delta\left(\frac{-36}{161}\right)\vartheta'_{48\alpha,1}(\tau;0,72)=$$

$$=\begin{cases}\vartheta'_{48,1}(\tau;0,72) & \text{при } \delta\equiv\pm1,\pm11,\pm13 \pmod{36},\\ -\vartheta'_{48,1}(\tau;0,72) & \text{при } \delta\equiv\pm5,\pm7,\pm17 \pmod{36})\end{cases} \qquad (24)$$

Из (I8), (23) и (24) следует, что функция $\varphi_1^4(\tau)$ и почти дословным рассуждением и $\varphi_2^4(\tau)$ удовлетворяют и условиям (I5) и (I6) леммы 4.

Таким образом, функции $\varphi_1^4(\tau)$ и $\varphi_2^4(\tau)$ являются ц.м.ф. веса 6 относительно группы $\Gamma_0(576)$. Следовательно, в силу леммы I, эти функции будут тождественно равны нулю, если в их разложениях по степеням Q коэффициенты при Q^n равны нулю для всех $n\leqslant 576$. Для этого достаточно показать, что в разложениях $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ по степеням Q коэффициенты при Q^n равны нулю для всех $n\leqslant 144$.

Из (5) следует

$$\vartheta_{00}(\tau;0,24)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}Q^{12m^2}=1+2Q^{12}+2Q^{48}+2Q^{108}+2Q^{192}+\ldots, \qquad (25)$$

$$\vartheta_{01}(\tau;0,24)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m Q^{12m^2}=1-2Q^{12}+2Q^{48}-2Q^{108}+2Q^{192}-\ldots, \tag{26}$$

$$\vartheta_{01}(\tau;0,96)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m Q^{48m^2}=1-2Q^{48}+2Q^{192}-\ldots, \tag{27}$$

$$\vartheta_{96,1}(\tau;0,288)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m Q^{4(6m+1)^2}=Q^4(1-Q^{96}-Q^{192}+\ldots); \tag{28}$$

следовательно,

$$\vartheta_{00}(\tau;0,24)\vartheta_{01}(\tau;0;96)\vartheta_{96,1}(\tau;0,288)=Q^4+2Q^{16}-4Q^{64}-5Q^{100}+7Q^{196}+\ldots, \tag{29}$$

$$\vartheta_{01}(\tau;0,24)\vartheta_{01}(\tau;0,96)\vartheta_{96,1}(\tau;0,288)=Q^4-2Q^{16}+4Q^{64}-5Q^{100}+7Q^{196}-\ldots \tag{30}$$

Из (6) следует

$$\frac{1}{48\pi i}\vartheta'_{48,0}(\tau;0,72)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(3m+1)Q^{4(3m+1)^2}=Q^4-2Q^{16}+4Q^{64}-5Q^{100}+7Q^{196}-\ldots, \tag{31}$$

$$\frac{1}{48\pi i}\vartheta'_{48,1}(\tau;0,72)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m(3m+1)Q^{4(3m+1)}=Q^4+2Q^{6}-4Q^{64}-5Q^{100}+7Q^{196}+\ldots \tag{32}$$

Ввиду того, что в разложениях (29), (32) и (30), (31) коэффициенты при Q^n соответственно равны при всех $n\leqslant 144$, то справедливы тождества:

$$\vartheta_{00}(\tau;0,24)\vartheta_{01}(\tau;0,96)\vartheta_{96,1}(\tau;0,288)=\frac{1}{48\pi i}\vartheta'_{48,1}(\tau;0,72) \tag{33}$$

и

$$\vartheta_{01}(\tau;0,24)\vartheta_{01}(\tau;0,96)\vartheta_{96,1}(\tau;0,288)=\frac{1}{48\pi i}\vartheta_{48,0}(\tau;0,72). \tag{34}$$

Из (33),(25),(27),(28),(32) и (34),(26)-(28),(31) соответственно следует

$$\sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_1+m_3}Q^{4(6m_1+1)^2+12m_2^2+48m_3^2}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m(3m+1)Q^{4(3m+1)^2}$$

и

$$\sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_1+m_2+m_3}Q^{4(6m_1+1)^2+12m_2^2+48m_3^2}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(3m+1)Q^{4(3m+1)^2}.$$

Приравняв коэффициенты при Q^n в обеих частях этих равенств, соответственно получим:

$$\sum_{4(6m_1+1)^2+12m_2^2+48m_3^2=n}(-1)^{m_1+m_3}=\sum_{4(3m+1)^2=n}(-1)^m(3m+1)$$

и

$$\sum_{4(6m_1+1)^2+12m_2^2+48m_3^2=n}(-1)^{m_1+m_2+m_3}=\sum_{4(3m+1)^2=n}(3m+1),$$

т.е.

$$\sum_{4(6x+1)^2+12y^2+48z^2=n}(-1)^{x+z}=\sum_{\substack{4s^2=n\\ s\equiv 1 \pmod 3}}(-1)^{(s-1)/3}s=\begin{cases}(-1)^{s-1}\left(\frac{s}{3}\right)s & \text{при } n=4s^2,\ s>0,\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}$$

и

$$\sum_{4(6x+1)^2+12y^2+48z^2=n}(-1)^{x+y+z}=\sum_{\substack{4s^2=n\\ s\equiv 1 \pmod 3}}s=\begin{cases}\left(\frac{s}{3}\right)s & \text{при } n=4s^2,\ s>0,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Равенства (I) и (2) доказаны.

Поступила 30.IX.1994

Кафедра
алгебры и геометрии

Литература

I. Г.А.Ломадзе. О некоторых арифметических приложениях теории модулярных форм. Труды Математического ин-та им.В.А.Стеклова АН СССР, 200 (I99I), с.236-244.

2. E.Hecke. Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen. Mathematische Werke. Göttingen: Vandenhoeck u. Ruprecht. 1970.

3. Г.А.Ломадзе. О числе представлений чисел квадратичными формами с четырьмя переменными. Труды Тбилисского Математического ин-та им.А.М.Размадзе АН ГССР, 40(1971), с.106-139.

გ. ლომაძე

მოდულურ ფორმათა თეორიის ზოგიერთი

არითმეტიკული გამოყენება

რეზიუმე

მთელ მოდულურ ფორმათა თეორიის გამოყენებით დამტკიცებულია, რომ ნებისმიერი ნატურალური $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ რიცხვისათვის სამართლიანია (I) და (2) ტოლობები.

G. Lomadze

ON SOME ARITHMETICAL APPLICATIONS OF THE THEORY OF MODULAR FORMS

Summary

With the help of the theory of entire modular forms it is demonstrated that for an arbitrary positive integer $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ the (1) and (2) equalities hold.

Труды Тбилисского государственного университета
им.И.Джавахишвили
თბილისის ი.ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

324,1997

УДК 511.4

О ЧИСЛЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЧИСЕЛ НЕКОТОРЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ С 10 ПЕРЕМЕННЫМИ

Г.А.Ломадзе, А.Н.Данелия

Пусть $r(n;f)$ обозначает число представлений натурального числа n примитивной целочисленной положительной квадратичной формой

$$f=a_1(x_1^2+x_2^2)+a_2(x_3^2+x_4^2)+a_3(x_5^2+x_6^2)+a_4(x_7^2+x_8^2)+a_5(x_9^2+x_{10}^2).$$

В настоящее время известна лишь формула Лиувилля /1/ для $r(n;f)$ в случае, когда $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=1$.

В статьях /2,3/ построено несколько параболических форм веса 5 относительно подгруппы сравнений $\Gamma_0(4N)$, коэффициенты Фурье разложений в ряд которых имеют простой арифметический смысл. При помощи этих параболических форм в /4/ предложен метод получения формул для $r(n;f)$ и с целью иллюстрации метода выведена формула для $r(n;f)$, когда

$$f=x_1^2+\cdots+x_8^2+4(x_9^2+x_{10}^2).$$

В предлагаемой статье методом статьи /4/ выведены формулы для $r(n;f_i)$, когда

$$f_1=x_1^2+x_2^2+2(x_3^2+\cdots+x_{10}^2),\quad f_2=x_1^2+\cdots+x_4^2+2(x_5^2+\cdots+x_{10}^2),$$

$$f_3=x_1^2+\cdots+x_6^2+2(x_7^2+\cdots+x_{10}^2),\quad f_4=x_1^2+\cdots+x_8^2+2(x_9^2+x_{10}^2),$$

$$f_5=x_1^2+x_2^2+4(x_3^2+\cdots+x_{10}^2),\quad f_6=x_1^2+\cdots+x_4^2+4(x_5^2+\cdots+x_{10}^2),$$

$$f_7=x_1^2+\dots+x_6^2+4(x_7^2+\dots+x_{10}^2),\quad f_8=x_1^2+x_2^2+2(x_3^2+x_4^2)+4(x_5^2+\dots+x_{10}^2),$$

$$f_9=x_1^2+x_2^2+2(x_3^2+\dots+x_6^2)+4(x_7^2+\dots+x_{10}^2),\quad f_{10}=x_1^2+x_2^2+2(x_3^2+\dots+x_8^2)+$$
$$+4(x_9^2+x_{10}^2),\quad f_{11}=x_1^2+\dots+x_4^2+2(x_5^2+x_6^2)+4(x_7^2+\dots+x_{10}^2),$$

$$f_{12}=x_1^2+\dots+x_4^2+2(x_5^2+\dots+x_8^2)+4(x_9^2+x_{10}^2),\quad f_{13}=x_1^2+\dots+x_6^2+$$
$$+2(x_7^2+x_8^2)+4(x_9^2+x_{10}^2).$$

Пусть $n=2^\alpha u$ (α — целое ≥ 0, u — нечетное). $\left(\frac{-1}{d_1}\right)$ — символ Якоби.

$$\sigma^*(u)=\sum_{d_1d_2=u}\left(\frac{-1}{d_1}\right)d_2^4,\quad \nu_1(n)=\sum_{\substack{x^2+y^2=2u\\ 2\nmid x,\,2\nmid y,\,x>0,\,y>0}} x^4-3x^2y^2,$$

$$\nu_2(n)=\sum_{\substack{x^2+y^2=u\\ 2\nmid x,\,x>0,\,y=0}} x^4-3x^2y^2,\quad \nu_3(n)=\sum_{\substack{x^2+y^2=u\\ x\not\equiv y\,(\mathrm{mod}\,2),\,x>0,\,y>0}} x^4-3x^2y^2,$$

$$\nu_4(n)=\sum_{\substack{x^2+y^2=2^{\alpha-1}u\\ 2|x,\,x>0,\,y=0}} x^4-3x^2y^2,\quad \nu_5(n)=\sum_{\substack{x^2+y^2=2^{\alpha-1}u\\ 2|x,\,2|y,\,x>0,\,y>0}} x^4-3x^2y^2,$$

$$\nu_6(n)=\sum_{\substack{x^2+y^2=2^{\alpha-2}u\\ 2|x,\,x>0,\,y=0}} x^4-3x^2y^2,\quad \nu_7(n)=\sum_{\substack{x^2+y^2=2^{\alpha-2}u\\ 2|x,\,2|y,\,x>0,\,y>0}} x^4-3x^2y^2$$

$$\nu_8(n)=\sum_{\substack{x^2+y^2+8(z^2+t^2)=2u\\ 2\nmid x,\,2\nmid y,\,x>0,\,y>0}} (-1)^{1/2(y-1)+z+t}(x^2-8z^2)y,\quad \nu_9(n)=\sum_{\substack{x^2+y^2+z^2+4t^2=u\\ 2\nmid x,\,2\nmid y,\,2\nmid z,\,x>0,\,y>0,\,z>0}} (-1)^{1/2(x+y+z-3)+t}xyz.$$

Полученные нами формулы имеют следующий вид:

(I) $r(n;f_1)=\frac{4}{5}\sigma^* u-\frac{8}{5}\nu_1(n)$ при $\alpha=0,\ u\equiv 1 \pmod 4$,

$=\frac{4}{5}\sigma^* u$ при $\alpha=0,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$=\frac{68}{5}\sigma^*(u)+\frac{32}{5}\nu_2(n)+\frac{64}{5}\nu_3(n)$ при $\alpha=1,\ u=k^2$ 1),

$=\frac{68}{5}\sigma^*(u)+\frac{64}{5}\nu_3(n)$ при $\alpha=1,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2$ 2),

$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha}-1)\sigma^*(u)$ при $\alpha\geq 1,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$=\frac{1028}{5}\sigma^*(u)+\frac{64}{5}\nu_1(n)$ при $\alpha=2,\ u\equiv 1 \pmod 4$,

$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha}+1)\sigma^*(u)+\frac{32}{5}\nu_4(n)+\frac{64}{5}\nu_5(n)$ при $2\nmid\alpha,\ \alpha\geq 3,\ u=k^2$,

$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha}+1)\sigma^*(u)+\frac{64}{5}\nu_5(n)$ при $\alpha\geq 3,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2$;

(II) $r(n;f_2)=\frac{8}{5}\sigma^*(u)-\frac{16}{5}\nu_1(n)$ при $\alpha=0,\ u\equiv 1 \pmod 4$,

$=\frac{8}{5}\sigma^*(u)$ при $\alpha=0,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$=\frac{132}{5}\sigma^*(u)+\frac{48}{5}\nu_2(n)+\frac{96}{5}\nu_3(n)$ при $\alpha=1,\ u=k^2$,

$=\frac{132}{5}\sigma^*(u)+\frac{96}{5}\nu_3(n)$ при $\alpha=1,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2$,

$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha+1}-1)\sigma^*(u)$ при $\alpha\geq 1,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$=\frac{2052}{5}\sigma^*(u)+\frac{96}{5}\nu_1(n)$ при $\alpha=2,\ u\equiv 1 \pmod 4$,

$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha+1}+1)\sigma^*(u)+\frac{48}{5}\nu_4(n)+\frac{96}{5}\nu_5(n)$ при $2\nmid\alpha,\ \alpha\geq 3,\ u=k^2$,

$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha+1}+1)\sigma^*(u)+\frac{96}{5}\nu_5(n)$ при $\alpha\geq 3,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2$;

---

1),2) Всюду в данной статье $u=k^2$ обозначает, что u является полным квадратом целого числа, а $u\neq k^2$ обозначает, что u не является квадратом целого числа.

(III) $r(n;f_3)=\frac{16}{5}\sigma^*(u)-\frac{22}{5}\nu_1(n)$ при $\alpha=0,\ u\equiv 1 \pmod 4$,

$=\frac{16}{5}\sigma^*(u)$ при $\alpha=0,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$=52\sigma^*(u)+16\nu_2(n)+32\nu_3(n)$ при $\alpha=1,\ u=k^2$,

$=52\sigma^*(u)+32\nu_3(n)$ при $\alpha=1,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2$,

$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha+2}-1)\sigma^*(u)$ при $\alpha\geq 1,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$=820\sigma^*(u)+32\nu_1(n)$ при $\alpha=2,\ u\equiv 1 \pmod 4$,

$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha+2}+1)\sigma^*(u)+16\nu_4(n)+32\nu_5(n)$ при $2\nmid\alpha,\ \alpha\geq 3,\ u=k^2$,

$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha+2}+1)\sigma^*(u)+32\nu_5(n)$ при $\alpha\geq 3,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2$;

(IV) $r(n;f_4)=\frac{32}{5}\sigma^*(u)-\frac{24}{5}\nu_1(n)$ при $\alpha=0,\ u\equiv 1 \pmod 4$,

$=\frac{32}{5}\sigma^*(u)$ при $\alpha=0,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$=\frac{516}{5}\sigma^*(u)+\frac{64}{5}\nu_2(n)+\frac{128}{5}\nu_3(n)$ при $\alpha=1,\ u=k^2$,

$=\frac{516}{5}\sigma^*(u)+\frac{128}{5}\nu_3(n)$ при $\alpha=1,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2$,

$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha+3}-1)\sigma^*(u)$ при $\alpha\geq 1,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$=\frac{8196}{5}\sigma^*(u)+\frac{128}{5}\nu_1(n)$ при $\alpha=2,\ u\equiv 1 \pmod 4$,

$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha+3}+1)\sigma^*(u)+\frac{64}{5}\nu_4(n)+\frac{128}{5}\nu_5(n)$ при $2\nmid\alpha,\ \alpha\geq 3,\ u=k^2$,

$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha+3}+1)\sigma^*(u)+\frac{128}{5}\nu_5(n)$ при $\alpha\geq 3,\ u\equiv 1 \pmod 4$,
$u\neq k^2$;

(V) $r(n;f_5)=\frac{1}{10}\sigma^*(u)-\frac{19}{20}\nu_1(n)+2\nu_8(n)$ при $\alpha=0,\ u\equiv 1 \pmod 4$.

$=0$ при $\alpha=0,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$=\frac{4}{5}\sigma^*(u)-\frac{8}{5}\nu_1(n)$ при $\alpha=1,\ u\equiv 1 \pmod 4$.

$= \frac{4}{5}\sigma^*(u)$ при $\alpha=1,\ u\equiv 3 \pmod 4,$

$= \frac{68}{5}\sigma^*(u)+\frac{32}{5}\nu_2(n)+\frac{64}{5}\nu_3(n)$ при $\alpha=2,\ u=k^2,$

$= \frac{68}{5}\sigma^*(u)+\frac{64}{5}\nu_3(n)$ при $\alpha=2,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2,$

$= \frac{4}{5}(2^{4\alpha-4}-1)\sigma^*(u)$ при $\alpha\geq 2,\ u\equiv 3 \pmod 4,$

$= \frac{1028}{5}\sigma^*(u)+\frac{64}{5}\nu_1(n)$ при $\alpha=3,\ u\equiv 1 \pmod 4,$

$= \frac{4}{5}(2^{4\alpha-4}+1)\sigma^*(u)+\frac{32}{5}\nu_6(n)+\frac{64}{5}\nu_7(n)$ при $2|\alpha,\ \alpha\geq 4,\ u=k^2,$

$= \frac{4}{5}(2^{4\alpha-4}+1)\sigma^*(u)+\frac{64}{5}\nu_7(n)$ при $\alpha\geq 4,\ u\equiv 1 \pmod 4,$
$u\neq k^2;$

(VI) $r(n;f_6)=\frac{1}{5}\sigma^*(u)-\frac{19}{10}\nu_1(n)+4\nu_8(n)$ при $\alpha=0,\ u\equiv 1 \pmod 4,$

$= \frac{1}{5}\sigma^*(u)+16\nu_9(n)$ при $\alpha=0,\ u\equiv 3 \pmod 4,$

$= \frac{24}{5}\sigma^*(u)-\frac{48}{5}\nu_1(n)$ при $\alpha=1,\ u\equiv 1 \pmod 4,$

$= \frac{24}{5}\sigma^*(u)$ при $\alpha=1,\ u\equiv 3 \pmod 4,$

$= \frac{132}{5}\sigma^*(u)+\frac{48}{5}\nu_2(n)+\frac{96}{5}\nu_3(n)$ при $\alpha=2,\ u=k^2,$

$= \frac{132}{5}\sigma^*(u)+\frac{96}{5}\nu_3(n)$ при $\alpha=2,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2,$

$= \frac{4}{5}(2^{4\alpha-3}-1)\sigma^*(u)$ при $\alpha\geq 2,\ u\equiv 3 \pmod 4,$

$= \frac{2052}{5}\sigma^*(u)+\frac{96}{5}\nu_1(n)$ при $\alpha=3,\ u\equiv 1 \pmod 4,$

$= \frac{4}{5}(2^{4\alpha-3}+1)\sigma^*(u)+\frac{48}{5}\nu_6(n)+\frac{96}{5}\nu_7(n)$ при $2|\alpha,\ \alpha\geq 4,\ u=k^2,$

$= \frac{4}{5}(2^{4\alpha-3}+1)\sigma^*(u)+\frac{96}{5}\nu_7(n)$ при $\alpha\geq 4,\ u\equiv 1 \pmod 4,$
$u\neq k^2;$

(УП) $r(n;f_7)=\frac{3}{5}\sigma^*(u)-\frac{27}{10}\nu_1(n)+6\nu_8(n)$ при $\alpha=0,\ u\equiv 1 \pmod 4$,

$=\sigma^*(u)+80\nu_9(n)$ при $\alpha=0,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$=\frac{64}{5}\sigma^*(u)-\frac{118}{5}\nu_1(n)$ при $\alpha=1,\ u\equiv 1 \pmod 4$,

$=\frac{64}{5}\sigma^*(u)$ при $\alpha=1,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$=\frac{1028}{5}\sigma^*(u)+\frac{272}{5}\nu_2(n)+\frac{544}{5}\nu_3(n)$ при $\alpha=2,\ u=k^2$,

$=\frac{1028}{5}\sigma^*(u)+\frac{544}{5}\nu_3(n)$ при $\alpha=2,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2$,

$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha}-1)\sigma^*(u)$ при $\alpha\geq 2,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$=\frac{16388}{5}\sigma^*(u)+\frac{544}{5}\nu_1(n)$ при $\alpha=3,\ u\equiv 1 \pmod 4$,

$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha}+1)\sigma^*(u)+\frac{272}{5}\nu_5(n)+\frac{544}{5}\nu_7(n)$ при $2|\alpha,\ \alpha\geq 4,\ u=k^2$,

$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha}+1)\sigma^*(u)+\frac{544}{5}\nu_7(n)$ при $\alpha\geq 4,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2$;

(УШ) $r(n;f_8)=\frac{1}{10}\sigma^*(u)-\frac{19}{20}\nu_1(n)+2\nu_8(n)$ при $\alpha=0,\ u\equiv 1 \pmod 4$,

$=\frac{1}{10}\sigma^*(u)+8\nu_9(n)$ при $\alpha=0,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$=\frac{8}{5}\sigma^*(u)-\frac{16}{5}\nu_1(n)$ при $\alpha=1,\ u\equiv 1 \pmod 4$,

$=\frac{8}{5}\sigma^*(u)$ при $\alpha=1,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$=\frac{132}{5}\sigma^*(u)+\frac{48}{5}\nu_2(n)+\frac{96}{5}\nu_3(n)$ при $\alpha=2,\ u=k^2$,

$=\frac{132}{5}\sigma^*(u)+\frac{96}{5}\nu_3(n)$ при $\alpha=2,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2$,

$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha-3}-1)\sigma^*(u)$ при $\alpha\geq 2,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$=\frac{2052}{5}\sigma^*(u)+\frac{96}{5}\nu_1(n)$ при $\alpha=3,\ u\equiv 1 \pmod 4$,

$$= \frac{4}{5}(2^{4\alpha-3}+1)\sigma^*(u)+\frac{48}{5}\nu_6(n)+\frac{96}{5}\nu_7(n) \text{ при } 2|\alpha,\ \alpha\geq 4,\ u=k^2,$$

$$= \frac{4}{5}(2^{4\alpha-3}+1)\sigma^*(u)+\frac{96}{5}\nu_7(n) \qquad \text{при } \alpha\geq 4,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2;$$

(IX) $$r(n;f_9)=\frac{1}{5}\sigma^*(u)-\frac{9}{10}\nu_1(n)+2\nu_8(n) \quad \text{при } \alpha=0,\ u\equiv 1 \pmod 4,$$

$$=\frac{1}{5}\sigma^*(u)+128\nu_9(n) \quad \text{при } \alpha=0,\ u\equiv 3 \pmod 4,$$

$$=\frac{16}{5}\sigma^*(u)-\frac{22}{5}\nu_1(n) \quad \text{при } \alpha=1,\ u\equiv 1 \pmod 4,$$

$$=\frac{16}{5}\sigma^*(u) \quad \text{при } \alpha=1,\ u\equiv 3 \pmod 4,$$

$$=52\sigma^*(u)+\nu_2(n)+2\nu_3(n) \quad \text{при } \alpha=2,\ u=k^2,$$

$$=52\sigma^*(u)+2\nu_3(n) \quad \text{при } \alpha=2,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2,$$

$$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha-2}-1)\sigma^*(u) \quad \text{при } \alpha\geq 2,\ u\equiv 3 \pmod 4,$$

$$=820\sigma^*(u)+2\nu_1(n) \quad \text{при } \alpha=3,\ u\equiv 1 \pmod 4,$$

$$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha-2}+1)\sigma^*(u)+\nu_6(n)+2\nu_7(n) \quad \text{при } 2|\alpha,\ \alpha\geq 4,\ u=k^2,$$

$$=\frac{4}{5}(2^{4\alpha-2}+1)\sigma^*(u)+2\nu_7(n) \quad \text{при } \alpha\geq 4,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2;$$

(X) $$r(n;f_{10})=\frac{2}{5}\sigma^*(u)-\frac{4}{5}\nu_1(n)+2\nu_8(n) \quad \text{при } \alpha=0,\ u\equiv 1 \pmod 4,$$

$$=\frac{2}{5}\sigma^*(u)+16\nu_9(n) \quad \text{при } \alpha=0,\ u\equiv 3 \pmod 4,$$

$$=\frac{32}{5}\sigma^*(u)-\frac{24}{5}\nu_1(n) \quad \text{при } \alpha=1,\ u\equiv 1 \pmod 4,$$

$$=\frac{32}{5}\sigma^*(u) \quad \text{при } \alpha=1,\ u\equiv 3 \pmod 4,$$

$$=\frac{516}{5}\sigma^*(u)+\frac{64}{5}\nu_2(n)+\frac{128}{5}\nu_3(n) \quad \text{при } \alpha=2,\ u=k^2,$$

$$=\frac{516}{5}\sigma^*(u)+\frac{128}{5}\nu_3(n) \quad \text{при } \alpha=2,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2,$$

$$=\frac{4}{5}\left(2^{4\alpha-1}-1\right)\sigma^*(u) \quad \text{при} \quad \alpha\geq 2,\ u\equiv 3 \pmod 4,$$

$$=\frac{8196}{5}\sigma^*(u)+\frac{128}{5}\nu_1(n) \quad \text{при} \quad \alpha=3,\ u\equiv 1 \pmod 4,$$

$$=\frac{4}{5}\left(2^{4\alpha-1}+1\right)\sigma^*(u)+\frac{64}{5}\nu_6(n)+\frac{128}{5}\nu_7(n) \quad \text{при} \quad 2|\alpha,\ \alpha\geq 4,\ u=k^2,$$

$$=\frac{4}{5}\left(2^{4\alpha-1}+1\right)\sigma^*(u)+\frac{128}{5}\nu_7(n) \quad \text{при} \quad \alpha\geq 4,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2;$$

(XI) $$r(n;f_{11})=\frac{2}{5}\sigma^*(u)+\frac{9}{5}\nu_1(n)+4\nu_8(n) \quad \text{при} \quad \alpha=0,\ u\equiv 1 \pmod 4,$$

$$=\frac{2}{5}\sigma^*(u)+32\nu_9(n) \quad \text{при} \quad \alpha=0,\ u\equiv 3 \pmod 4,$$

$$=\frac{32}{5}\sigma^*(u)-\frac{54}{5}\nu_1(n) \quad \text{при} \quad \alpha=1,\ u\equiv 1 \pmod 4,$$

$$=\frac{32}{5}\sigma^*(u) \quad \text{при} \quad \alpha=1,\ u\equiv 3 \pmod 4,$$

$$=\frac{516}{5}\sigma^*(u)+\frac{144}{5}\nu_2(n)+\frac{288}{5}\nu_3(n) \quad \text{при} \quad \alpha=2,\ u=k^2,$$

$$=\frac{516}{5}\sigma^*(u)+\frac{288}{5}\nu_3(n) \quad \text{при} \quad \alpha=2,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2,$$

$$=\frac{4}{5}\left(2^{4\alpha-1}-1\right)\sigma^*(u) \quad \text{при} \quad \alpha\geq 2,\ u\equiv 3 \pmod 4,$$

$$=\frac{8196}{5}\sigma^*(u)+\frac{288}{5}\nu_1(n) \quad \text{при} \quad \alpha=3,\ u\equiv 1 \pmod 4,$$

$$=\frac{4}{5}\left(2^{4\alpha-1}+1\right)\sigma^*(u)+\frac{144}{5}\nu_6(n)+\frac{288}{5}\nu_7(n) \quad \text{при} \quad 2|\alpha,\ \alpha\geq 4,\ u=k^2,$$

$$=\frac{4}{5}\left(2^{4\alpha-1}+1\right)\sigma^*(u)+\frac{288}{5}\nu_7(n) \quad \text{при} \quad \alpha\geq 4,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2;$$

(XII) $$r(n,f_{12})=\frac{4}{5}\sigma^*(u)-\frac{8}{5}\nu_1(n)+4\nu_8(n) \quad \text{при} \quad \alpha=0,\ u\equiv 1 \pmod 4,$$

$$=\frac{4}{5}\sigma^*(u)+256\nu_9(n) \quad \text{при} \quad \alpha=0,\ u\equiv 3 \pmod 4,$$

$$=\frac{64}{5}\sigma^*(u)-\frac{48}{5}\nu_1(n) \quad \text{при} \quad \alpha=1,\ u\equiv 1 \pmod 4,$$

$= \frac{64}{5}\sigma^*(u)$ при $\alpha=1,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$= \frac{1028}{5}\sigma^*(u) + \frac{12}{5}\nu_2(n) + \frac{24}{5}\nu_3(n)$ при $\alpha=2,\ u=k^2$,

$= \frac{1028}{5}\sigma^*(u) + \frac{24}{5}\nu_3(n)$ при $\alpha=2,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2$,

$= \frac{4}{5}(2^{4\alpha}-1)\sigma^*(u)$ при $\alpha\geq 2,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$= \frac{16388}{5}\sigma^*(u) + \frac{24}{5}\nu_1(n)$ при $\alpha=3,\ u\equiv 1 \pmod 4$,

$= \frac{4}{5}(2^{4\alpha}+1)\sigma^*(u) + \frac{12}{5}\nu_6(n) + \frac{24}{5}\nu_7(n)$ при $2|\alpha,\ \alpha\geq 4,\ u=k^2$,

$= \frac{4}{5}(2^{4\alpha}+1)\sigma^*(u) + \frac{24}{5}\nu_7(n)$ при $\alpha\geq 4,\ u\equiv 1 \pmod 4,$
$u\neq k^2$;

(XIII) $r(n;f_{13}) = \frac{8}{5}\sigma^*(u) - \frac{11}{5}\nu_1(n) + 6\nu_8(n)$ при $\alpha=0,\ u\equiv 1 \pmod 4$,

$= \frac{8}{5}\sigma^*(u) + 80\nu_9(n)$ при $\alpha=0,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$= \frac{128}{5}\sigma^*(u) - \frac{96}{5}\nu_1(n)$ при $\alpha=1,\ u\equiv 1 \pmod 4$,

$= \frac{128}{5}\sigma^*(u)$ при $\alpha=1,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$= \frac{2052}{5}\sigma^*(u) + \frac{448}{5}\nu_2(n) + \frac{896}{5}\nu_3(n)$ при $\alpha=2,\ u=k^2$,

$= \frac{2052}{5}\sigma^*(u) + \frac{896}{5}\nu_3(n)$ при $\alpha=2,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2$,

$= \frac{4}{5}(2^{4\alpha+1}-1)\sigma^*(u)$ при $\alpha\geq 2,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$= \frac{32772}{5}\sigma^*(u) + \frac{896}{5}\nu_1(n)$ при $\alpha=3,\ u\equiv 1 \pmod 4$,

$= \frac{4}{5}(2^{4\alpha+1}+1)\sigma^*(u) + \frac{448}{5}\nu_6(n) + \frac{896}{5}\nu_7(n)$ при $2|\alpha,\ \alpha\geq 4,$
$u=k^2$,

$= \frac{4}{5}(2^{4\alpha+1}+1)\sigma^*(u) + \frac{896}{5}\nu_7(n)$ при $\alpha\geq 4,\ u\equiv 1 \pmod 4,$
$u\neq k^2$.

С целью сокращения объема статьи мы будем всюду пользоваться обозначениями, принятыми в статье /4/, и ссылаться на определения и леммы, приведенные там же.

I. Лемма I. Функции

$$1)\ \psi(\tau;f_1)=\vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}^8(\tau;0,4)-\theta(\tau;f_1)+ \tag{I.I}$$
$$+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)-\frac{16}{5}\cdot\frac{1}{2048\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;2,2),$$

$$2)\ \psi(\tau;f_2)=\vartheta_{00}^4(\tau;0,2)\vartheta_{00}^6(\tau;0,4)-\theta(\tau;f_2)+ \tag{I.2}$$
$$+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)-\frac{24}{5}\cdot\frac{1}{2048\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;2,2),$$

$$3)\ \psi(\tau;f_3)=\vartheta_{00}^6(\tau;0,2)\vartheta_{00}^4(\tau;0,4)-\theta(\tau;f_3)+ \tag{I.3}$$
$$+\frac{11}{10}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)-8\,\frac{1}{2048\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;2,2),$$

$$4)\ \psi(\tau;f_4)=\vartheta_{00}^8(\tau;0,2)\vartheta_{00}^2(\tau;0,4)-\theta(\tau;f_4)+ \tag{I.4}$$
$$+\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)-\frac{32}{5}\cdot\frac{1}{2048\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;2,2)$$

являются целыми модулярными формами веса 5 и характера $\chi(\delta)=\operatorname{sgn}\delta\left(\frac{2}{|\delta|}\right)$ относительно подгруппы сравнений $\Gamma_0(8)$.

Доказательство. I) В квадратичной форме f_1

$$a_1=1,\ a_2=\dots=a_5=2,\ \gamma_1=0,\ \gamma_2=\dots=\gamma_5=1,\ \gamma=4,\ a=2,\ \Delta=2^8;$$

2) в квадратичной форме f_2

$$a_1=a_2=1,\ a_3=a_4=a_5=2,\ \gamma_1=\gamma_2=0,\ \gamma_3=\gamma_4=\gamma_5=1,\ \gamma=3,\ a=2,\ \Delta=2^6;$$

3) в квадратичной форме f_3

$$a_1=a_2=a_3=1,\ a_4=a_5=2,\ \gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0,\ \gamma_4=\gamma_5=1,\ \gamma=2,\ a=2,\ \Delta=2^4;$$

4) в квадратичной форме f_4

$$a_1=\dots=a_4=1,\ a_5=2,\ \gamma_1=\dots=\gamma_4=0,\ \gamma_5=1,\ \gamma=1,\ a=2,\ \Delta=2^2;$$

кроме того, во всех этих четырех формах $b_1=b_2=b_3=b_4=b_5=1$.

Согласно леммам 7 и 8 из /4/, все первые два слагаемых в правых частях (I.I)-(I.4) являются целыми модулярными формами веса 5 и характера $\chi(\delta)=\operatorname{sgn}\delta\left(\frac{-1}{|\delta|}\right)$ относительно $\Gamma_0(8)$.

В лемме 9,I) из /4/ положим $N=2$. Тогда очевидно, что все последние два слагаемых в правых частях (I.I)-(I.4) удовлетворят условиям $a)$ и $b)$ этой леммы.

Если $\alpha\delta\equiv 1 \pmod 8$, то $\alpha\delta\equiv 1 \pmod 4$, т.е.

$$\alpha\equiv\pm 1 \pmod 8 \quad \text{и соответственно} \quad \delta\equiv\pm 1 \pmod 8). \tag{I.5}$$

Далее, для этих последних двух слагаемых из правых частей (I.I)-(I.4) имеем

$$\left(\frac{N_1N_2}{|\delta|}\right)=1 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\Delta}{|\delta|}\right)=1. \tag{I.6}$$

Из (I.I6), (I.6), (I.7) и (I.IO) статьи /4/, в силу (I.5), получим

$$\Psi_2(\tau;4\alpha,4\alpha;0,0;2,2)=\frac{1}{2}\vartheta^{(4)}_{4\alpha,0}(\tau;0,4)\vartheta_{4\alpha,0}(\tau;0,4)-\frac{3}{2}\vartheta''^{2}_{4\alpha,0}(\tau;0,4)=$$

$$=\frac{1}{2}\vartheta^{(4)}_{\pm4+4(\alpha\mp1),0}(\tau;0,4)\vartheta_{\pm4+4(\alpha\mp1),0}(\tau;0,4)-\frac{3}{2}\vartheta''^{2}_{\pm4+4(\alpha\mp1),0}(\tau;0,4)=$$

$$=\frac{1}{2}\vartheta^{(4)}_{\pm4,0}(\tau;2(\alpha\mp1),4)\vartheta_{\pm4,0}(\tau;2(\alpha\mp1),4)-\frac{3}{2}\vartheta''^{2}_{\pm4,0}(\tau;2(\alpha\mp1),4)=$$

$$=\frac{1}{2}\vartheta^{(4)}_{\pm4,0}(\tau;0,4)\vartheta_{\pm4,0}(\tau;0,4)-\frac{3}{2}\vartheta''^{2}_{\pm4,0}(\tau;0,4)=$$

$$=\frac{1}{2}\vartheta^{(4)}_{40}(\tau;0,4)\vartheta_{40}(\tau;0,4)-\frac{3}{2}\vartheta''^{2}_{40}(\tau;0,4)=\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2).$$

Следовательно, согласно (I.5) и (I.6), все последние два слагаемых из правых частей (I.I)-(I.4) удовлетворяют также и условию $c)$ леммы 9.I) из /4/. Таким образом, они являются целыми модулярными формами веса 5 и характера $\chi(\delta)=\operatorname{sgn}\delta\left(\frac{-1}{|\delta|}\right)$ относительно $\Gamma_0(8)$.

Теорема I. Имеют место тождества

I) $\vartheta_{00}^{2}(\tau;0,2)\vartheta_{00}^{8}(\tau;0,4)=\theta(\tau;f_1)+$

$$-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)+\frac{16}{5}\,\frac{1}{2048\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;2,2), \qquad (I.7)$$

2) $\vartheta_{00}^{4}(\tau;0,2)\vartheta_{00}^{6}(\tau;0,4)=\theta(\tau;f_2)+$

$$-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)+\frac{24}{5}\cdot\frac{1}{2048\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;2,2), \qquad (I.8)$$

3) $\vartheta_{00}^{6}(\tau;0,2)\vartheta_{00}^{4}(\tau;0,4)=\theta(\tau;f_3)+$

$$-\frac{11}{10}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)+8\cdot\frac{1}{2048\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;2,2), \qquad (I.9)$$

4) $\vartheta_{00}^{8}(\tau;0,2)\vartheta_{00}^{2}(\tau;0,4)=\theta(\tau;f_4)+$

$$-\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;)+\frac{32}{5}\cdot\frac{1}{2048\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;2,2). \qquad (I.10)$$

Доказательство. Согласно лемме 6 из /4/, функции $\varphi(\tau;f_i)$ (i = I,2,3,4) будут тождественно равны нулю, если в их разложениях по степеням Q, все коэффициенты при Q^n $(n\leq 5)$ равны нулю.

I. В леммах I0 и I2 из /4/ положим: $n=2^{\alpha}u,\ m=u,\ v=1,$ $\Delta=2^8, 2^6, 2^4$. Тогда соответственно получим:

$$\rho(n;f_1)=\begin{cases}\frac{4}{5}\sigma^{*}u & \text{при } \alpha=0,\\ \frac{4}{5}\left(2^{4\alpha}+\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\sigma^{*}(u) & \text{при } \alpha\geq 1;\end{cases} \qquad (I.II)$$

$$\rho(n;f_2)=\frac{8}{5}\sigma^{*}(u) \quad \text{при} \quad \alpha=0, \qquad (I.I2)$$

$$=\frac{4}{5}\left(2^{4\alpha+1}+\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\sigma^{*}(u) \quad \text{при} \quad \alpha\geq 1;$$

$$\rho(n;f_3)=\frac{16}{5}\sigma^*(u) \quad \text{при} \quad \alpha=0,$$

$$=\frac{4}{5}\left(2^{4\alpha+2}+\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\sigma^*(u) \quad \text{при} \quad \alpha\geq 1; \tag{I.13}$$

$$\rho(n;f_4)=\frac{32}{5}\sigma^*(u) \quad \text{при} \quad \alpha=0, \tag{I.14}$$

$$=\frac{4}{5}\left(2^{4\alpha+3}+\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\sigma^*(u) \quad \text{при} \quad \alpha\geq 1.$$

Вычислив по этим формулам значения $\rho(n;f_i)$ $(i=1,2,3,4)$ для всех $n\leq 5$, получим:

$$\theta(\tau;f_1)=1+\frac{4}{5}Q+\frac{68}{5}Q^2+64Q^3+\frac{1028}{5}Q^4+\frac{2504}{5}Q^5+\cdots, \tag{I.15}$$

$$\theta(\tau;f_2)=1+\frac{8}{5}Q+\frac{132}{5}Q^2+1+128Q^3+\frac{2052}{5}Q^4+\frac{5008}{5}Q^5+\cdots, \tag{I.16}$$

$$\theta(\tau;f_3)=1+\frac{16}{5}Q+52Q^2+256Q^3+820Q^4+\frac{10016}{5}Q^5+\cdots, \tag{I.17}$$

$$\theta(\tau;f_4)=1+\frac{32}{5}Q+\frac{516}{5}Q^2+512Q^3+\frac{8196}{5}Q^4+\frac{20032}{5}Q^5+\cdots \tag{I.18}$$

Из (I.8) статьи /4/ следует:

$$\vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}^8(\tau;0,4)=1+4Q+20Q^2+64Q^3+180Q^4+456Q^5+\cdots, \tag{I.19}$$

$$\vartheta_{00}^4(\tau;0,2)\vartheta_{00}^6(\tau;0,4)=1+8Q+36Q^2+128Q^3+372Q^4+912Q^5+\cdots, \tag{I.20}$$

$$\vartheta_{00}^6(\tau;0,2)\vartheta_{00}^4(\tau;0,4)=1+12Q+68Q^2+256Q^3+756Q^4+1880Q^5+\cdots, \tag{I.21}$$

$$\vartheta_{00}^8(\tau;0,2)\vartheta_{00}^2(\tau;0,4)=1+16Q+116Q^2+512Q^3+1588Q^4+3872Q^5+\cdots \tag{I.22}$$

II. Согласно (I.8) и (I.9) из /4/, имеем:

I) $\frac{1}{2}\vartheta_{10}^{(4)}(\tau;0,4)\vartheta_{10}(\tau;0,4)=\frac{1}{2}\cdot 256 Q^4\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}(2m_1+1)^4 Q^{1/2(2m_1+1)^2}\times$

$$\times \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} Q^{1/2(2m_2+1)^2} = 128\pi^4 \cdot 4Q(1+81Q^4+\cdots)(1+Q^4+\cdots) = \qquad (I.23)$$

$$= 128\pi^4(4Q+328Q^5+\cdots),$$

$$\frac{3}{2}\vartheta''^2_{40}(\tau;0,4) = \frac{3}{2}256\pi^4 \sum_{m_1=-\infty}^{\infty}(2m_1+1)^2 Q^{1/2(2m_1+1)^2} \times$$

$$\times \sum_{m_2=-\infty}^{\infty}(2m_2+1)^2 Q^{1/2(2m_2+1)^2} = 3\cdot 128\pi^4 \cdot 4Q(1+9Q^4+\cdots)^2 = \qquad (I.24)$$

$$= 128\pi^4(12Q+216Q^5+\cdots);$$

2) $$\frac{1}{2}\vartheta^{(4)}_{00}(\tau;0,4)\vartheta_{00}(\tau;0,4) = \frac{1}{2}\cdot 4096\pi^4 \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} m_1^4 Q^{2m_1^2} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} Q^{2m_2^2} =$$

$$= 2048\pi^4 \cdot 2Q^2(1+16Q^6+\cdots)(1+2Q^2+2Q^8+\cdots) = \qquad (I.25)$$

$$= 2048\pi^4(2Q^2+4Q^4+32Q^8+\cdots),$$

$$\frac{3}{2}\vartheta''^2_{00}(\tau;0,4) = \frac{3}{2}\cdot 4096\pi^4 \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} m_1^2 Q^{2m_1^2} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} m_2^2 Q^{2m_2^2} =$$

$$= 3\cdot 2048\pi^4 \cdot 4Q^4(1+4Q^6+\cdots)^2 = 2048\pi^4(12Q^4+96Q^{10}+\cdots). \qquad (I.26)$$

Из (I.16) статьи /4/, (I.23), (I.24) и (I.25), (I.26) соответственно следует, что

$$\frac{1}{128\pi^4}\psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2) = -8Q+112Q^5+\cdots \qquad (I.27)$$

и

$$\frac{1}{2048\pi^4}\psi_2(\tau;0,0;0,0;2,2) = 2Q^2-8Q^4+32Q^8+\cdots \qquad (I.28)$$

Приняв во внимание (I.I) - (I.4), (I.19)-(I.22), (I.15)-(I.18) и (I.27), (I.28), нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^n $(n\leq 5)$ в разложениях функций $\psi(\tau;f_i)$ $(i=1,2,3,4)$ по степеням Q равны нулю. Теорема доказана.

Доказательство формул (I) - (IУ). Приравняв коэффициенты при Q^n в обеих частях тождеств (I.7)-(I.10), согласно (I.II) и (I.12) из /4/, получим:

$$r(n;f_1) = \rho(n;f_1) - \frac{2}{5}\Lambda_1(n) + \frac{16}{5}\Lambda_2(n), \qquad (I.29)$$

$$r(n;f_2)=\rho(n;f_2)-\frac{4}{5}\Lambda_1(n)+\frac{34}{5}\Lambda_2(n), \tag{I.30}$$

$$r(n;f_3)=\rho(n;f_3)-\frac{11}{10}\Lambda_1(n)+8\Lambda_2(n), \tag{I.31}$$

$$r(n;f_4)=\rho(n;f_4)-\frac{6}{5}\Lambda_1(n)+\frac{32}{5}\Lambda_2(n), \tag{I.32}$$

где $\Lambda_1(n)$ и $\Lambda_2(n)$ соответственно обозначают коэффициенты при Q^n в разложениях функций $\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)$ и $\frac{1}{2048\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;2,2)$ по степеням Q.

Из (I.16) статьи /4/, (I.23) и (I.24) следует

$$\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)=\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty}(2m_1+1)^4 Q^{1/2\{(2m_1+1)^2+(2m_2+1)^2\}}-$$

$$-3\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty}(2m_1+1)^2(2m_2+1)^2 Q^{1/2\{(2m_1+1)^2+(2m_2+1)\}}=\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{\substack{x^2+y^2=2n\\ 2\nmid x,\,2\nmid y}}x^4-3x^2y^2\Bigg)Q^n,$$

т.е.

$$\Lambda_1(n)=4\sum_{\substack{x^2+y^2=2n\\ 2\nmid x,\,2\nmid y,\,x>0,\,y>0}}x^4-3x^2y^2=\begin{cases}4\nu_1(n) & \text{при } \alpha=0,\ u\equiv 1 \pmod 4),\\ 0 & \text{во всех других случаях.}\end{cases} \tag{I.33}$$

Из (I.16) статьи /4/, (I.25) и (I.26) следует

$$\frac{1}{2048\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;2,2)=\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty}m_1^4 Q^{2m_1^2+2m_2^2}-$$

$$-3\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty}m_1^2 m_2^2 Q^{2m_1^2+2m_2^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{2x^2+2y^2=n}x^4-3x^2y^2\Bigg)Q^n,$$

т.е.

$$\Lambda_2(n)=\sum_{2x^2+2y^2=n}x^4-3x^2y^2= \tag{I.34}$$

$= 0$ при $\alpha=0$ и при $\alpha\geq 1,\ u\equiv 3 \pmod 4)$,

$= 2\nu_2(n)+4\nu_3(n)$ при $\alpha=1,\ u=k^2$

$= 4\nu_3(n)$ при $\alpha=1,\ u\equiv 1 \pmod 4),\ u\neq k^2$,

$= 4\nu_1(n)$ при $\alpha=2,\ u\equiv 1 \pmod 4)$,

$$= 2\nu_4(n)+4\nu_5(n) \text{ при } 2\nmid\alpha,\ \alpha\geq 3,\ u=k^2,$$

$$= 4\nu_5(n) \qquad \text{при } \alpha\geq 3,\ u\equiv 1 \pmod 4,\ u\neq k^2.$$

Из (I.29)-(I.32),(I.II)-(I.I4) и (I.33),(I.34) следуют формулы (I)-(IУ).

2.Лемма 2. Функции

$$1)\ \varphi(\tau;f_5)=\vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}^6(\tau;0,8)-\theta(\tau;f_5)+$$

$$+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{512\pi^4}\Psi_2(\tau;8,8;0,0;4,4)-\frac{16}{5}\cdot\frac{1}{8192\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;4,4)+$$

$$+\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)-\frac{1}{2}\cdot\frac{i}{32\pi^4}\Psi_3(\tau;4,0,4,0;0,1,1,1;2,4,2,4), \tag{2.I}$$

$$2)\ \varphi(\tau;f_6)=\vartheta_{00}^4(\tau;0,2)\vartheta_{00}^6(\tau;0,8)-\theta(\tau;f_6)+$$

$$+\frac{12}{5}\cdot\frac{1}{512\pi^4}\Psi_2(\tau;8,8;0,0;4,4)-\frac{24}{5}\cdot\frac{1}{8192\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;4,4)+$$

$$+\frac{19}{40}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)-\frac{i}{32\pi^3}\Psi_3(\tau;4,0,4,0;0,1,1,1;2,4,2,4)+$$

$$-2\cdot\frac{i}{512\pi^3}\Psi_4(\tau;8,8,8,0;1,1,1,1;4,4,4,4). \tag{2.2}$$

$$3)\ \varphi(\tau;f_7)=\vartheta_{00}^6(\tau;0,2)\vartheta_{00}^4(\tau;0,8)-\theta(\tau;f_7)+$$

$$+\frac{59}{10}\cdot\frac{1}{512\pi^4}\Psi_2(\tau;8,8;0,0;4,4)-\frac{136}{5}\cdot\frac{1}{8192\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;4,4)+$$

$$+\frac{27}{40}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)-\frac{3}{2}\cdot\frac{i}{32\pi^3}\Psi_3(\tau;4,0,4,0;0,1,1,1;2,4,2,4)+$$

$$-10\cdot\frac{i}{512\pi^3}\Psi_4(\tau;8,8,8,0;1,1,1;4,4,4,4) \tag{2.3}$$

являются целыми модулярными формами веса 5 и характера $\chi(\delta)=\operatorname{sgn}\delta\left(\frac{-1}{|\delta|}\right)$ относительно подгруппы сравнений $\Gamma_0(16)$.

<u>Доказательство</u>. I) В квадратичной форме f_5

$a_1=1,\ a_2=\cdots=a_5=4,\ \gamma_1=0,\ \gamma_2=\cdots=\gamma_5=2,\ \gamma=8,\ a=4,\ \Delta=2^{16}$,

2) В квадратичной форме f_6

$a_1=a_2=1,\ a_3=a_4=a_5=4,\ \gamma_1=\gamma_2=0,\ \gamma_3=\gamma_4=\gamma_5=2,\ \gamma=6,\ a=4,\ \Delta=2^{12}$,

3) В квадратичной форме f_7

$a_1=a_2=a_3=1,\ a_4=a_5=4,\ \gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0,\ \gamma_4=\gamma_5=2,\ \gamma=4,\ \Delta=2^8$;

кроме того во всех этих трех формах $b_1=\cdots=b_5=1$.

Согласно леммам 7 и 8 из /4/, все первые два слагаемых в правых частях (2.I)-(2.3) являются целыми модулярными формами веса 5 и характера $\chi(\delta)=\operatorname{sgn}\delta\left(\frac{-1}{|\delta|}\right)$ относительно $\Gamma_0(16)$.

В лемме 9 из /4/ положим $N=4$. Тогда очевидно, что третьи, четвертые и пятые слагаемые в правых частях (2.I)-(2.3) удовлетворят условиям $a)$ и $b)$ этой леммы.

Для всех этих трех слагаемых из (2.I)-(2.3) имеем:

$$\left(\frac{N_1N_2}{|\delta|}\right)=1 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\Delta}{|\delta|}\right)=1 \qquad (2.4).$$

Пусть теперь $\alpha\delta\equiv1 \pmod{16}$, тогда $\alpha\delta\equiv1 \pmod 4$, т.е.

$\alpha\equiv\pm1 \pmod 4$ и соответственно $\delta\equiv\pm1 \pmod 4$. (2.5)

Рассуждая так же, как и в лемме I, согласно (I.16), (I.6), (I.7) и (I.10) из /4/ получим:

$$\begin{aligned}&\Psi_2(\tau;8\alpha,8\alpha;0,0;4,4)=\frac{1}{8}\vartheta^{(4)}_{8\alpha,0}(\tau;0,8)\vartheta_{8\alpha,0}(\tau;0,8)+\\&-\frac{3}{8}\vartheta''^2_{8\alpha,0}(\tau;0,8)=\frac{1}{8}\vartheta^{(4)}_{80}(\tau;0,8)\vartheta_{80}(\tau;0,8)+\\&-\frac{3}{8}\vartheta''^2_{80}(\tau;0,8)=\Psi_2(\tau;8,8;0,0;4,4).\end{aligned}\qquad (2.6)$$

$$\begin{aligned}&\Psi_2(\tau;4\alpha,4\alpha;0,0;2,2)=\frac{1}{2}\vartheta^{(4)}_{4\alpha,0}(\tau;0,4)\vartheta_{4\alpha,0}(\tau;0,4)+\\&-\frac{3}{2}\vartheta''^2_{4\alpha,0}(\tau;0,4)=\frac{1}{2}\vartheta^{(4)}_{40}(\tau;0,4)\vartheta_{40}(\tau;0,4)+\\&-\frac{3}{2}\vartheta''^2_{40}(\tau;0,4)=\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2).\end{aligned}\qquad (2.7)$$

Следовательно, согласно (2.4)-(2.7), третьи, четвертые и пятые слагаемые из правых частей (2.I)-(2.3) удовлетворяют также и условию $c)$ леммы 9.I) из /4/. Таким образом, они являются целыми модулярными формами веса 5 и характера $\chi(\delta)=sgn\,\delta\left(\frac{-1}{|\delta|}\right)$ относительно $\Gamma_0(16)$.

Аналогично, согласно (I.I7), (I.6), (I.7) и (I.I0) из /4/, получаем

$$\Psi_3(\tau;4\alpha,0,4\alpha,0;0,1,1,1;2,4,2,4)=\Big\{\frac{1}{2}\vartheta''_{4\alpha,0}(\tau;0,4)\vartheta_{01}(\tau;0,8)+$$

$$-\frac{1}{4}\vartheta_{4\alpha,0}(\tau;0,4)\vartheta''_{01}(\tau;0,8)\Big\}\vartheta'_{4\alpha,1}(\tau;0,4)\vartheta_{01}(\tau;0,8)=$$

$$=\Big\{\frac{1}{2}\vartheta''_{\pm4,0}(\tau;0,4)\vartheta_{01}(\tau;0,8)-\frac{1}{4}\vartheta_{\pm4,0}(\tau;0,4)\vartheta''_{01}(\tau;0,8)\Big\}\times$$

$$\times\vartheta'_{\pm4,1}(\tau;0,4)\vartheta_{01}(\tau;0,8)=\pm\Big\{\frac{1}{2}\vartheta''_{40}(\tau;0,4)\vartheta_{01}(\tau;0,8)+$$

$$-\frac{1}{4}\vartheta_{40}(\tau;0,4)\vartheta''_{01}(\tau;0,8)\Big\}\vartheta'_{41}(\tau;0,4)\vartheta_{01}(\tau;0,8)=$$

$$=\pm\Psi_3(\tau;4,0,4,0;0,1,1,1;2,4,2,4). \tag{2.8}$$

$$\Psi_4(\tau;8\alpha,8\alpha,8\alpha,0;1,1,1,1;4,4,4,4)=\vartheta'^3_{8\alpha,1}(\tau;0,8)\vartheta_{01}(\tau;0,8)=$$

$$=\pm\vartheta'^3_{81}(\tau;0,8)\vartheta_{01}(\tau;0,8)=\pm\Psi_4(\tau;8,8,8,0;1,1,1,1;4,4,4,4). \tag{2.9}$$

В (2.8) и (2.9) будет знак "+" при $\alpha\equiv1(mod\,4)$ и знак "-" при $\alpha\equiv-1(mod\,4)$. Следовательно, эти две функции удовлетворяют условиям $a), b), c)$ леммы 9.2) из /4/, ибо

$$\left(\frac{\prod\limits_{k=1}^{4}N_k}{|\delta|}\right)=1, \qquad sgn\,\delta\left(\frac{-1}{|\delta|}\right)=\begin{cases}1 & \text{при } \delta\equiv1(mod\,4),\\ -1 & \text{при } \delta\equiv-1(mod\,4),\end{cases}$$

и в данном случае также имеют место сравнения (2.5). Таким образом, они являются целыми модулярными формами веса 5 и характера $\chi(\delta)=sgn\,\delta\left(\frac{-1}{|\delta|}\right)$ относительно $\Gamma_0(16)$.

Теорема 2. Имеют место тождества:

$$1)\ \vartheta_{00}^{2}(\tau;0,2)\vartheta_{00}^{8}(\tau;0,8)=\theta(\tau;f_5)-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{512\pi^4}\Psi_2(\tau;8,8;0,0;4,4)+$$

$$+\frac{16}{5}\cdot\frac{1}{8192\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;4,4)-\frac{19}{80}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{i}{32\pi^3}\Psi_3(\tau;4,0,4,0;0,1,1,1;2,4,2,4), \tag{2.10}$$

$$2)\ \vartheta_{00}^{4}(\tau;0,2)\vartheta_{00}^{6}(\tau;0,8)=\theta(\tau;f_6)-$$

$$-\frac{12}{5}\cdot\frac{1}{512\pi^4}\Psi_2(\tau;8,8;0,0;4,4)+\frac{24}{5}\cdot\frac{1}{8192\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;4,4)+$$

$$-\frac{19}{40}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)+\frac{i}{32\pi^3}\Psi_3(\tau;4,0,4,0;0,1,1,1;2,4,2,4)+$$

$$+2\cdot\frac{i}{512\pi^3}\Psi_4(\tau;8,8,8,0;1,1,1,1;4,4,4,4), \tag{2.11}$$

$$3)\ \vartheta_{00}^{6}(\tau;0,2)\vartheta_{00}^{4}(\tau;0,8)=\theta(\tau;f_7)+$$

$$-\frac{59}{10}\cdot\frac{1}{512\pi^4}\Psi_2(\tau;8,8;0,0;4,4)+\frac{136}{5}\cdot\frac{1}{8192\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;4,4)+$$

$$-\frac{27}{40}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)+\frac{3}{2}\cdot\frac{i}{32\pi^3}\Psi_3(\tau;4,0,4,0;0,1,1,1,2,4,2,4)+$$

$$+10\cdot\frac{i}{512\pi^3}\Psi_4(\tau;8,8,8,0;1,1,1,1;4,4,4,4). \tag{2.12}$$

Доказательство. Согласно лемме 6 из /4/, функции $\varphi(\tau;f_i)$ $(i=5,6,$ будут тождественно равны нулю, если в их разложениях по степеням Q , все коэффициенты при Q^n $(n\leq 10)$ равны нулю.

I. В леммах 10 и 12 из /4/ положим: $n=2^{\alpha}u,\ m=u,\ v=1,\ \Delta=2^{16},2^{12},2^{8}$. Тогда соответственно получим:

$$\rho(n;f_5)=\frac{1}{20}\left(1+\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\sigma^4(u) \quad \text{при} \quad \alpha=0,$$

$$=\frac{4}{5}\sigma^4(u) \quad \text{при} \quad \alpha=1, \tag{2.13}$$

$$=\frac{4}{5}\left(2^{4\alpha-4}+\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\sigma^4(u) \quad \text{при} \quad \alpha\geq 2;$$

$$\rho(n;f_6)=\frac{1}{5}\sigma^*(u) \quad \text{при} \quad \alpha=0,$$
$$=\frac{24}{5}\sigma^*(u) \quad \text{при} \quad \alpha=1,$$
$$=\frac{4}{5}\left(2^{4\alpha-3}+\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\sigma^*(u) \quad \text{при} \quad \alpha\geq 2; \qquad (2.14)$$

$$\rho(n;f_7)=\frac{1}{5}\left(4-\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\sigma^*(u) \quad \text{при} \quad \alpha=0,$$
$$=\frac{64}{5}\sigma^*(u) \quad \text{при} \quad \alpha=1,$$
$$=\frac{4}{5}\left(2^{4\alpha}+\left(\frac{-1}{u}\right)\right)\sigma^*(u) \quad \text{при} \quad \alpha\geq 2. \qquad (2.15)$$

Вычислив по этим формулам значения $\rho(n;f_i)$ $(i=5,6,7)$ для всех $n\leq 10$, получим:

$$\theta(\tau;f_5)=1+\frac{1}{10}Q+\frac{1}{4}Q^2+\frac{68}{5}Q^4+\frac{313}{5}Q^5+64Q^6+\frac{1028}{5}Q^8+ \frac{6481}{10}Q^9+\frac{2504}{5}Q^{10}+\dots, \qquad (2.16)$$

$$\theta(\tau;f_6)=1+\frac{1}{5}Q+\frac{24}{5}Q^2+16Q^3+\frac{132}{5}Q^4+\frac{626}{5}Q^5+384Q^6+480Q^7+ \frac{2052}{5}Q^8+\frac{6481}{5}Q^9+\frac{15024}{5}Q^{10}+\dots, \qquad (2.17)$$

$$\theta(\tau;f_7)=1+\frac{3}{5}Q+\frac{64}{5}Q^2+80Q^3+\frac{1028}{5}Q^4+\frac{1878}{5}Q^5+1024Q^6+ 2400Q^7+\frac{16388}{5}Q^8+\frac{19443}{5}Q^9+\frac{40064}{5}Q^{10}+\dots \qquad (2.18)$$

Из (I.8) статьи /4/ следует

$$\vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}^6(\tau;0,8)=1+4Q+4Q^2+20Q^4+72Q^5+64Q^6+180Q^8+ 580Q^9+456Q^{10}+\dots, \qquad (2.19)$$

$$\vartheta_{00}^4(\tau;0,2)\vartheta_{00}^6(\tau;0,8)=1+8Q+24Q^2+32Q^3+36Q^4+144Q^5+384Q^6+ 448Q^7+372Q^8+1160Q^9+2736Q^{10}+\dots, \qquad (2.20)$$

$$\vartheta_{00}^6(\tau;0,2)\vartheta_{00}^4(\tau;0,8)=1+12Q+60Q^2+160Q^3+260Q^4+408Q^5+ 1024Q^6+2240Q^7+3060Q^8+3660Q^9+7352Q^{10}+\dots \qquad (2.21)$$

II. Согласно (I.8) и (I.9) из /4/, получим:

$$1)\ \frac{1}{8}\vartheta^{(4)}_{80}(\tau;0,8)\,\vartheta_{80}(\tau;0,8)=\frac{1}{8}\cdot 4096\pi^4\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}(2m_1+1)^4Q^{(2m_1+1)^2}\times$$

$$\times\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}Q^{(2m_2+1)^2}=512\pi^4\cdot 4Q^2(1+81Q^8+625Q^{24}+\cdots)(1+Q^8+Q^{24}+\cdots)=$$
$$=512\pi^4(4Q^2+328Q^{10}+\cdots);\qquad(2.22)$$

$$\frac{3}{8}\vartheta''^2_{80}(\tau;0,8)=\frac{3}{8}\cdot 4096\pi^4\cdot\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}(2m_1+1)^2Q^{(2m_1+1)^2}\cdot\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}(2m_2+1)^2Q^{(2m_2+1)^2}=$$
$$=3\cdot 512\pi^4\cdot 4Q^2(1+9Q^8+25Q^{24}+\cdots)^2=512\pi^4(12Q^2+216Q^{10}+\cdots);\qquad(2.23)$$

$$2)\ \frac{1}{8}\vartheta^{(4)}_{00}(\tau;0,8)\,\vartheta_{00}(\tau;0,8)=\frac{1}{8}\cdot 2^{16}\pi^4\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}m_1^4Q^{4m_1^2}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}Q^{4m_2^2}=$$
$$=8192\pi^4\cdot 2Q^4(1+16Q^{12}+\cdots)(1+2Q^4+2Q^{16}+\cdots)=8192\pi^4(2Q^4+4Q^8+32Q^{16}+\cdots);\qquad(2.24)$$

$$\frac{3}{8}\vartheta''^2_{00}(\tau;0,8)=\frac{3}{8}\cdot 2^{16}\pi^4\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}m_1^2Q^{4m_1^2}\cdot\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}m_2^2Q^{4m_2^2}=$$
$$=3\cdot 8192\pi^4\cdot 4Q^8(1+4Q^{12}+\cdots)^2=8192\pi^4(12Q^8+96Q^{20}+\cdots);\qquad(2.25)$$

$$3)\ \frac{1}{2}\vartheta^{(4)}_{40}(\tau;0,4)\,\vartheta_{40}(\tau;0,4)=\frac{1}{2}\cdot 256\pi^4\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}(2m_1+1)^4Q^{1/2(2m_1+1)^2}\times$$
$$\times\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}Q^{1/2(2m_2+1)^2}=128\pi^4\cdot 4Q(1+81Q^4+625Q^{12}+\cdots)(1+Q^4+Q^{12}+\cdots)=$$
$$=128\pi^4(4Q+328Q^5+324Q^9+2504Q^{13}+\cdots);\qquad(2.26)$$

$$\frac{3}{2}\vartheta''^2_{40}(\tau;0,4)=\frac{3}{2}\cdot 256\pi^4\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}(2m_1+1)^2Q^{1/2(2m_1+1)^2}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}(2m_2+1)^2Q^{1/2(2m_2+1)^2}=$$
$$=3\cdot 128\pi^4\cdot 4Q(1+9Q^4+25Q^{12}+\cdots)^2=\qquad(2.27)$$
$$=128\pi^4(12Q+216Q^5+972Q^9+600Q^{13}+\cdots);$$

$$4)\ \frac{1}{4}\vartheta''_{40}(\tau;0,4)\,\vartheta_{01}(\tau;0,8)=-\frac{1}{2}\cdot 16\pi^2\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}(2m_1+1)^2Q^{1/2(2m_1+1)^2}\times$$
$$\times\sum_{m_3=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_3}Q^{4m_3^2}=-8\pi^2\cdot 2Q^{1/2}(1+9Q^4+25Q^{12}+\cdots)\times$$
$$\times(1-2Q^4+2Q^{16}+\cdots)=-8\pi^2\cdot 2Q^{1/2}(1+7Q^4+18Q^8+25Q^{12}+\cdots);\qquad(2.28)$$

$$\frac{1}{4}\vartheta_{40}(\tau;0,4)\,\vartheta''_{01}(\tau;0,8)=-\frac{1}{4}\cdot 256\pi^2\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}Q^{1/2(2m_1+1)^2}\times$$
$$\times\sum_{m_3=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_3}m_3^2Q^{4m_3^2}=-64\pi^2\cdot 2Q^{1/2}(1+Q^4+Q^{12}+\cdots)\times$$
$$\times(-2Q^4+8Q^{16}+\cdots)=-64\pi^2\cdot 2Q^{1/2}(-2Q^4-2Q^8+6Q^{16}+\cdots);\qquad(2.29)$$

$$\vartheta'_{11}(\tau;0,4)\vartheta_{01}(\tau;0,8)=4\pi i\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_2}(2m_2+1)Q^{1/2(2m_2+1)^2}\times$$

$$\times\sum_{m_4=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_4}Q^{4m_4^2}=4\pi i\cdot 2Q^{1/2}(1-3Q^4+5Q^{12}+\cdots)\times \tag{2.30}$$

$$\times(1-2Q^4+2Q^{16}-\cdots)=4\pi i\cdot 2Q^{1/2}(1-5Q^4+6Q^8+5Q^{12}+\cdots);$$

5) $$\vartheta'^{3}_{81}(\tau;0,8)\vartheta_{01}(\tau;0,8)=-512\pi^3 i\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_1}(2m_1+1)Q^{(2m_1+1)^2}\times$$

$$\times\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_2}(2m_2+1)Q^{(2m_2+1)^2}\cdot\sum_{m_3=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_3}(2m_3+1)Q^{(2m_3+1)^2}\cdot\sum_{m_4=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_4}Q^{4m_4^2}=$$

$$=-512\pi^3 i\cdot 8Q^3(1-3Q^8+5Q^{24}-\cdots)^3(1-2Q^4+2Q^{16}-\cdots)= \tag{2.31}$$

$$=-512\pi^3 i\,(8Q^3-16Q^7-72Q^{11}+\cdots).$$

Из (I.16) статьи /4/. (2.22)-(2.23), (2.24)-(2.25), (2.26)-(2.27) соответственно следует:

$$\frac{1}{512\pi^4}\psi_2(\tau;8,8;0,0;4,4)=-8Q^2+112Q^{10}+\cdots, \tag{2.32}$$

$$\frac{1}{8192\pi^4}\psi_2(\tau;0,0;0,0;4,4)=2Q^4-8Q^8+32Q^{16}+\cdots, \tag{2.33}$$

$$\frac{1}{128\pi^4}\psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)=-8Q+112Q^5-648Q^9+1904Q^{13}+\cdots \tag{2.34}$$

Из (I.17) статьи /4/. (2.28)-(2.30), (2.31) следует:

$$\frac{i}{32\pi^3}\psi_3(\tau;4,0,4,0;0,1,1,1;2,4,2,4)=$$
$$=4Q+72Q^5-444Q^9+712Q^{13}+\cdots, \tag{2.35}$$

$$\frac{i}{512\pi^3}\psi_4(\tau;8,8,8,0;1,1,1,1;4,4,4,4)=8Q^3-16Q^7-72Q^{11}+\cdots \tag{2.36}$$

Приняв во внимание (2.I)-(2.3), (2.I9)-(2.2I), (2.I6)-(2.I8) и (2.32)-(2.36), нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^n $(n\leq 10)$ в разложениях функций $\varphi(\tau;f_i)$ $(i=5,6,7)$ по степеням Q равны нулю.

<u>Доказательство формул</u> (У)-(УП). Приравняв коэффициенты при Q^n в обеих частях тождеств (2.10)-(2.12), согласно (I.II) и (I.I2) из /4/, получим

$$r(n;f_5)=\rho(n;f_5)-\frac{2}{5}\Lambda_3(n)+\frac{16}{5}\Lambda_4(n)-\frac{19}{80}\Lambda_1(n)+\frac{1}{2}\Lambda_5(n); \tag{2.37}$$

$$r(n;f_6)=\rho(n;f_6)-\frac{12}{5}\Lambda_3(n)+\frac{24}{5}\Lambda_4(n)-\frac{19}{40}\Lambda_1(n)+\Lambda_5(n)+2\Lambda_6(n); \tag{2.38}$$

$$r(n;f_7)=\rho(n;f_7)-\frac{59}{10}\Lambda_3(n)+\frac{136}{5}\Lambda_4(n)-\frac{27}{40}\Lambda_1(n)+\frac{3}{2}\Lambda_5(n)+10\Lambda_6(n), \tag{2.39}$$

где $\Lambda_3(n), \Lambda_4(n), \Lambda_1(n), \Lambda_5(n), \Lambda_6(n)$ соответственно обозначают коэффициенты при Q^n в разложениях функций $\frac{1}{512\pi^4}\Psi_2(\tau;8,8;0,0;4,4)$, $\frac{1}{8192\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;4,4)$, $\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)$, $\frac{i}{32\pi^3}\Psi_3(\tau;4,0,4,0;0,1,1,1;2,4,2,4)$, $\frac{i}{512\pi^3}\Psi_4(\tau;8,8,8,0;1,1,1,1;4,4,4,4)$ по степеням Q.

Из (I.I6) статьи /4/, (2.22) и (2.23) следует

$$\frac{1}{512\pi^4}\Psi_2(\tau;8,8;0,0;4,4)=\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty}(2m_1+1)^4Q^{(2m_1+1)^2+(2m_2+1)^2}+$$

$$-3\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty}(2m_1+1)^2(2m_2+1)^2Q^{(2m_1+1)^2+(2m_2+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{\substack{x^2+y^2=n\\2\nmid x,\ 2\nmid y}}x^4-3x^2y^2\Bigg)Q^n,$$

т.е.

$$\Lambda_3(n)=4\sum_{\substack{x^2+y^2=n\\2\nmid x,\ 2\nmid y,\ x>0,\ y>0}}x^4-3x^2y^2=\begin{cases}4\nu_1(n) & \text{при } \alpha=1,\ u\equiv1\pmod4,\\ 0 & \text{во всех других случаях.}\end{cases} \tag{2.40}$$

Из (I.I6) статьи /4/, (2.24) и (2.25) следует

$$\frac{1}{8192\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;4,4)=\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty}m_1^4Q^{4m_1^2+4m_2^2}-3\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty}m_1^2m_2^2Q^{4m_1^2+4m_2^2},$$

т.е.

$$\Lambda_4(n)=\sum_{4x^2+4y^2=n} x^4-3x^2y^2= \tag{2.41}$$

$=0$ при $\alpha=0,1$ и при $\alpha\geq 2,\ u\equiv 3 \pmod 4$,

$=2\nu_2(n)+4\nu_3(n)$ при $\alpha=2,\ u=k^2$,

$=4\nu_3(n)$ при $\alpha=2,\ u\equiv 1 \pmod 4),\ u\neq k^2$,

$=4\nu_1(n)$ при $\alpha=3,\ u\equiv 1 \pmod 4)$,

$=2\nu_6(n)+4\nu_7(n)$ при $2|\alpha,\ \alpha\geq 4,\ u=k^2$.

$=4\nu_7(n)$ при $\alpha\geq 4,\ u\equiv 1 \pmod 4),\ u\neq k^2$.

Коэффициент $\Lambda_1(n)$ определен формулой (I.33) на стр.30.

Из (I.17) статьи /4/ и (2.28) - (2.30) следует

$$\frac{i}{32\pi^3}\Psi_3(\tau;4,0,4,0;0,1,1,1;2,4,2,4)=\Biggl(\sum_{m_1,m_3=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_3}(2m_1+1)^2 Q^{1/2(2m_1+1)^2+4m_3^2}-$$

$$-8\sum_{m_1,m_3=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_3}m_3^2 Q^{1/2(2m_1+1)^2+4m_3^2}\Biggr)\sum_{m_2,m_4=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_2+m_4}(2m_2+1)Q^{1/2(2m_2+1)^2+4m_4^2}=$$

$$=\sum_{m_1,m_2,m_3,m_4=-\infty}^{\infty}(-1)^{m_2+m_3+m_4}\left((2m_1+1)^2(2m_2+1)-8(2m_2+1)m_3^2\right)Q^{1/2\{(2m_1+1)^2+(2m_2+1)^2\}+4(m_3^2+m_4^2)},$$

т.е.

$$\Lambda_5(n)=4\sum_{\substack{x^2+y^2+8(z^2+t^2)=2n\\ 2\nmid x,\ 2\nmid y,\ x>0,\ y>0}}(-1)^{1/2(y-1)+z+t}(x^2y-8yz^2)=$$

$$=\begin{cases}4\nu_8(n) & \text{при } \alpha=0,\ u\equiv 1 \pmod 4),\\ 0 & \text{во всех других случаях.}\end{cases} \tag{2.42}$$

Из (I.17) статьи /4/ и (2.31) следует

$$\frac{i}{512\pi^3}\Psi_4(\tau;8,8,8,0;1,1,1,1;4,4,4,4)=\sum_{n=1}^{\infty}\Biggl(\sum_{\substack{x^2+y^2+z^2+4t^2=n\\ 2\nmid x,\ 2\nmid y,\ 2\nmid z}}(-1)^{1/2(x-1)+1/2(y-1)+1/2(z-1)+t}xyz\Biggr)Q^n,$$

т.е.

$$\Lambda_6(n) = 8 \sum_{\substack{x^2+y^2+z^2+4t^2=n \\ 2\nmid x,\ 2\nmid y,\ 2\nmid z \\ x>0,\ y>0,\ z>0}} (-1)^{1/2(x+y+z-3)+t} xyz =$$

$$= \begin{cases} 8\nu_9(n) & \text{при } \alpha=0,\ u\equiv 3 \pmod 4, \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases} \qquad (2.43)$$

Из (2.37)-(2.39), (2.13)-(2.15), (2.40)-(2.43) и (1.33) следуют формулы (У)-(УП).

3. Теорема 3. Имеют место тождества:

$$1)\ \vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}^2(\tau;0,4)\vartheta_{00}^6(\tau;0,8) = \Theta(\tau;f_8) +$$

$$-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{512\pi^4}\Psi_2(\tau;8,8;0,0;4,4) + \frac{24}{5}\cdot\frac{1}{8192\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;4,4) +$$

$$-\frac{19}{80}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0;0;2,2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{i}{32\pi^3}\Psi_3(\tau;4,0,4,0;0,1,1,1;2,4,2,4) +$$

$$+\frac{i}{512\pi^3}\Psi_4(\tau;8,8,8,0;1,1,1,1;4,4,4,4), \qquad (3.1)$$

$$2)\ \vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}^4(\tau;0,4)\vartheta_{00}^4(\tau;0,8) = \Theta(\tau;f_9) -$$

$$-\frac{11}{10}\cdot\frac{1}{512\pi^4}\Psi_2(\tau;8,8;0,0;4,4) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8192\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;4,4) +$$

$$-\frac{9}{40}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{i}{32\pi^3}\Psi_3(\tau;4,0,4,0;0,1,1,1;2,4,2,4) +$$

$$+16\cdot\frac{i}{512\pi^3}\Psi_4(\tau;8,8,8,0;1,1,1,1;4,4,4,4), \qquad (3.2)$$

$$3)\ \vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}^6(\tau;0,4)\vartheta_{00}^2(\tau;0,8) = \Theta(\tau;f_{10}) -$$

$$-\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{512\pi^4}\Psi_2(\tau;8,8;0,0;4,4) + \frac{32}{5}\cdot\frac{1}{8192\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;4,4) +$$

$$-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{i}{32\pi^3}\Psi_3(\tau;4,0,4,0;0,1,1,1;2,4,2,4) +$$

$$+2\cdot\frac{i}{512\pi^3}\Psi_4(\tau;8,8,8,0;1,1,1,1;4,4,4,4), \qquad (3.3)$$

4) $$\vartheta_{00}^4(\tau;0,2)\vartheta_{00}^2(\tau;0,4)\vartheta_{00}^4(\tau;0,8)=\theta(\tau;f_{11})-\frac{27}{10}\cdot\frac{1}{512\pi^4}\Psi_2(\tau;8,8;0,0;4,4)+$$

$$+\frac{12}{5}\cdot\frac{1}{8192\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;4,4)-\frac{9}{20}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)+ \qquad (3.4)$$

$$+\frac{i}{32\pi^3}\Psi_3(\tau;4,0,4,0;0,1,1,1;2,4,2,4)+4\cdot\frac{i}{512\pi^3}\Psi_4(\tau;8,8,8,0;1,1,1,1;4,4,4,4),$$

5) $$\vartheta_{00}^4(\tau;0,2)\vartheta_{00}^4(\tau;0,4)\vartheta_{00}^2(\tau;0,8)=\theta(\tau;f_{12})-\frac{12}{5}\cdot\frac{1}{512\pi^4}\Psi_2(\tau;8,8;0,0;4,4)+$$

$$+\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{8192\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;4,4)-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)+ \qquad (3.5)$$

$$+\frac{i}{32\pi^3}\Psi_3(\tau;4,0,4,0;0,1,1,1;2,4,2,4)+32\frac{i}{512\pi^3}\Psi_4(\tau;8,8,8,0;1,1,1,1;4,4,4,4),$$

6) $$\vartheta_{00}^6(\tau;0,2)\vartheta_{00}^2(\tau;0,4)\vartheta_{00}^2(\tau;0,8)=\theta(\tau;f_{13})-\frac{24}{5}\cdot\frac{1}{512\pi^4}\Psi_2(\tau;8,8;0,0;4,4)+$$

$$+\frac{224}{5}\cdot\frac{1}{8192\pi^4}\Psi_2(\tau;0,0;0,0;4,4)-\frac{11}{20}\cdot\frac{1}{128\pi^4}\Psi_2(\tau;4,4;0,0;2,2)+ \qquad (3.6)$$

$$+\frac{3}{2}\cdot\frac{i}{32\pi^3}\Psi_3(\tau;4,0,4,0;0,1,1,1;2,4,2,4)+10\cdot\frac{i}{512\pi^3}\Psi_4(\tau;8,8,8,0;1,1,1,1;4,4,4,4).$$

<u>Доказательство</u>. I.1) В квадратичной форме f_8

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=a_4=a_5=4,\ \gamma_1=0,\ \gamma_2=1,\ \gamma_3=\gamma_4=\gamma_5=2,\ \gamma=7,\ a=4,\ \Delta=2^{14};$

2) В квадратичной форме f_9

$a_1=1,\ a_2=a_3=2,\ a_4=a_5=4,\ \gamma_1=0,\ \gamma_2=\gamma_3=1,\ \gamma_4=\gamma_5=2,\ \gamma=6,\ a=4,\ \Delta=2^{12};$

3) В квадратичной форме f_{10}

$a_1=1,\ a_2=a_3=a_4=2,\ a_5=4,\ \gamma_1=0,\ \gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=1,\ \gamma_5=2,\ \gamma=5,\ a=4,\ \Delta=2^{10};$

4) В квадратичной форме f_{11}

$a_1=a_2=1,\ a_3=2,\ a_4=a_5=4,\ \gamma_1=\gamma_2=0,\ \gamma_3=1,\ \gamma_4=\gamma_5=2,\ \gamma=5,\ a=4,\ \Delta=2^{10};$

5) В квадратичной форме f_{12}

$a_1=a_2=1,\ a_3=a_4=2,\ a_5=4,\ \gamma_1=\gamma_2=0.\ \gamma_3=\gamma_4=1,\ \gamma_5=2,\ \gamma=4,\ a=4,\ \Delta=2^8;$

6) В квадратичной форме f_{13}

$a_1=a_2=a_3=1,\ a_4=2,\ a_5=4,\ \gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0,\ \gamma_4=1,\ \gamma_5=2,\ \gamma=3,\ a=4,\ \Delta=2^6.$

Следовательно, в леммах I0 и I2 из /4/ положив $n=2^\alpha u,\ m=u,$ $v=1,\ \Delta=2^{14},\ 2^{12},\ 2^{10},\ 2^{10},\ 2^8$ и 2^6 соответственно получим:

$$\rho(n;f_8)=\begin{cases}\dfrac{2^{4\alpha-1}}{5}\sigma^*(u) & \text{при} \quad \alpha=0,1,\\[2mm] \dfrac{4}{5}\left(2^{4\alpha-3}+\left(\dfrac{-1}{u}\right)\right)\sigma^*(u) & \text{при} \quad \alpha\geq 2;\end{cases} \tag{3.7}$$

$$\rho(n;f_9)=\begin{cases}\dfrac{2^{4\alpha}}{5}\sigma^*(u) & \text{при} \quad \alpha=0,1,\\[2mm] \dfrac{4}{5}\left(2^{4\alpha-2}+\left(\dfrac{-1}{u}\right)\right)\sigma^*(u) & \text{при} \quad \alpha\geq 2;\end{cases} \tag{3.8}$$

$$\rho(n;f_{10})=\rho(n;f_{11})=\begin{cases}\dfrac{2^{4\alpha+1}}{5}\sigma^*(u) & \text{при} \quad \alpha=0,1,\\[2mm] \dfrac{4}{5}\left(2^{4\alpha-1}+\left(\dfrac{-1}{u}\right)\right)\sigma^*(u) & \text{при} \quad \alpha\geq 2;\end{cases} \tag{3.9}$$

$$\rho(n;f_{12})=\begin{cases}\dfrac{2^{4\alpha+2}}{5}\sigma^*(u) & \text{при} \quad \alpha=0,1,\\[2mm] \dfrac{4}{5}\left(2^{4\alpha}+\left(\dfrac{-1}{u}\right)\right)\sigma^*(u) & \text{при} \quad \alpha\geq 2;\end{cases} \tag{3.10}$$

$$\rho(n;f_{13})=\begin{cases}\dfrac{2^{4\alpha+3}}{5}\sigma^*(u) & \text{при} \quad \alpha=0,1,\\[2mm] \dfrac{4}{5}\left(2^{4\alpha+1}+\left(\dfrac{-1}{u}\right)\right)\sigma^*(u) & \text{при} \quad \alpha\geq 2.\end{cases} \tag{3.11}$$

Вычислив по этим формулам значения $\rho(n;f_i)$ $(i=8,9,10,11,12,13)$ для всех $n\leq 10$, получим:

$$\begin{aligned}\theta(\tau;f_8)=1&+\frac{4}{10}Q+\frac{8}{5}Q^2+8Q^3+\frac{132}{5}Q^4+\frac{313}{5}Q^5+128Q^6+240Q^7+\\&+\frac{2052}{5}Q^8+\frac{6481}{5}Q^9+\frac{5006}{5}Q^{10}+\ldots,\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\theta(\tau;f_9)=1&+\frac{4}{5}Q+\frac{16}{5}Q^2+16Q^3+52Q^4+\frac{626}{5}Q^5+256Q^6+480Q^7+\\&+820Q^8+\frac{6481}{5}Q^9+\frac{10016}{5}Q^{10}+\ldots,\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\theta(\tau;f_{10})=\theta(\tau;f_{11})=1+\frac{2}{5}Q+\frac{22}{5}Q^2+32Q^3+\frac{516}{5}Q^4+\frac{1252}{5}Q^5+$$
$$+512Q^6+960Q^7+\frac{8196}{5}Q^8+\frac{12962}{5}Q^9+\frac{20032}{5}Q^{10}+\cdots, \tag{3.14}$$

$$\theta(\tau;f_{12})=1+\frac{4}{5}Q+\frac{64}{5}Q^2+64Q^3+\frac{1028}{5}Q^4+\frac{2504}{5}Q^5+1024Q^6+$$
$$+1920Q^7+\frac{16388}{5}Q^8+\frac{25924}{5}Q^9+\frac{40064}{5}Q^{10}+\cdots, \tag{3.15}$$

$$\theta(\tau;f_{13})=1+\frac{8}{5}Q+\frac{128}{5}Q^2+128Q^3+\frac{2052}{5}Q^4+\frac{5008}{5}Q^5+2048Q^6+$$
$$+3840Q^7+\frac{32772}{5}Q^8+\frac{51848}{5}Q^9+\frac{80128}{5}Q^{10}+\cdots, \tag{3.16}$$

Из (1.8) статьи / 4 / следует

$$\vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}^2(\tau;0,4)\vartheta_{00}^6(\tau;0,8)=1+4Q+8Q^2+16Q^3+36Q^4+72Q^5+128Q^6+$$
$$+224Q^7+372Q^8+580Q^9+912Q^{10}+\cdots, \tag{3.17}$$

$$\vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}^4(\tau;0,4)\vartheta_{00}^4(\tau;0,8)=1+4Q+12Q^2+32Q^3+68Q^4+136Q^5+256Q^6+$$
$$+448Q^7+756Q^8+1220Q^9+1880Q^{10}+\cdots, \tag{3.18}$$

$$\vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}^6(\tau;0,4)\vartheta_{00}^2(\tau;0,8)=1+4Q+16Q^2+48Q^3+116Q^4+264Q^5+512Q^6+$$
$$+928Q^7+1588Q^8+2500Q^9+3872Q^{10}+\cdots, \tag{3.19}$$

$$\vartheta_{00}^4(\tau;0,2)\vartheta_{00}^2(\tau;0,4)\vartheta_{00}^4(\tau;0,8)=1+8Q+28Q^2+64Q^3+132Q^4+272Q^5$$
$$+512Q^6+896Q^7+1524Q^8+2440Q^9+3704Q^{10}+\cdots, \tag{3.20}$$

$$\vartheta_{00}^4(\tau;0,2)\vartheta_{00}^4(\tau;0,4)\vartheta_{00}^2(\tau;0,8)=1+8Q+32Q^2+96Q^3+244Q^4+528Q^5+$$
$$+1024Q^6+1856Q^7+3124Q^8+5000Q^9+7744Q^{10}+\cdots, \tag{3.21}$$

$$\vartheta_{00}^6(\tau;0,2)\vartheta_{00}^2(\tau;0,4)\vartheta_{00}^2(\tau;0,8)=1+12Q+64Q^2+208Q^3+500Q^4+1048Q^5+$$

$$+2048Q^6+3680Q^7+6196Q^8+10060Q^9+15488Q^{10}+\dots \tag{3.22}$$

II. В тождествах (3.I)-(3.7), перенеся все слагаемые из правых частей в левые, получим функции, аналогичные функциям из леммы 2 и, рассуждая дословно так же, как в этой лемме, убеждаемся, что они также являются целыми модулярными формами веса 5 и характера $\chi(\delta)=sgn\,\delta\left(\frac{-1}{|\delta|}\right)$ относительно $\Gamma_0(16)$. Далее, приняв во внимание (3.I)-(3.6), (3.I2)-(3.I6) и (2.32)-(2.36), нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^n $(n<10)$ в разложениях этих функций по степеням Q равны нулю. Следовательно, согласно лемме 6 из /4/, они тождественно равны нулю. Таким образом, утверждаемое справедливо.

Доказательство формул (УШ)-(ХШ). Приравняв коэффициенты при Q^n в обеих частях тождеств (3.I)-(3.6), получим:

$$r(n;f_8)=\rho(n;f_8)-\frac{4}{5}\Lambda_3(n)+\frac{24}{5}\Lambda_4(n)-\frac{19}{80}\Lambda_1(n)+\frac{1}{2}\Lambda_5(n)+\Lambda_6(n); \tag{3.23}$$

$$r(n;f_9)=\rho(n;f_9)-\frac{11}{10}\Lambda_3(n)+\frac{1}{2}\Lambda_4(n)-\frac{9}{40}\Lambda_1(n)+\frac{1}{2}\Lambda_5(n)+16\Lambda_6(n); \tag{3.24}$$

$$r(n;f_{10})=\rho(n;f_{10})-\frac{6}{5}\Lambda_3(n)+\frac{32}{5}\Lambda_4(n)-\frac{1}{5}\Lambda_1(n)+\frac{1}{2}\Lambda_5(n)+2\Lambda_6(n); \tag{3.25}$$

$$r(n;f_{11})=\rho(n;f_{11})-\frac{27}{10}\Lambda_3(n)+\frac{72}{5}\Lambda_4(n)-\frac{9}{20}\Lambda_1(n)+\Lambda_5(n)+4\Lambda_6(n); \tag{3.26}$$

$$r(n;f_{12})=\rho(n;f_{12})-\frac{12}{5}\Lambda_3(n)+\frac{6}{5}\Lambda_4(n)-\frac{2}{5}\Lambda_1(n)+\Lambda_5(n)+32\Lambda_6(n); \tag{3.27}$$

$$r(n;f_{13})=\rho(n;f_{13})-\frac{24}{5}\nu_3(n)+\frac{324}{5}\nu_4(n)-\frac{11}{20}\nu_1(n)+\frac{3}{2}\nu_5(n)+10\nu_6(n). \qquad (3.28)$$

Из (3.23)-(3.28), (3.7)-(3.II), (2.40)-(2.43) и (I.33) следуют формулы (УШ)-(ХШ).

Поступила I3.У.1994 Кафедра алгебры и геометрии

Литература

1. J. Liouville. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 11(1866), 1-8.
2. G.Lomadze. Proceedings of the Georgian Academy of Sciences. Mathematics, 1 (1993), N 61-85.
3. G. Lomadze. Georgian Mathematical Journal, (1995), No 2, 189-199.
4. G. Lomadze. Georgian Mathematical Journal, (1995), No 5, 491-516.

გ. ლომაძე, ა. დანელია

ზოგიერთი ათცვლადიანი კვადრატული ფორმით რიცხვის წარმოდგენათა რაოდენობის შესახებ

რეზიუმე

/4/ ნაშრომში განვითარებული მეთოდით გამოყვანილია (I)-(XIII) ფორმულები ნატურალური რიცხვის წარმოდგენათა რაოდენობისათვის I-2 გვარდებზე მოყვანილი f_i $(i=1,2,\ldots,13)$ კვადრატული ფორმებით. ამ ფორმულების ე.წ. დამატებითი წევრებს $\nu_k(n)$ $(k=1,2,\ldots,7)$ აქვთ მარტივი არითმეტიკული აზრი.

G. Lomadze, A. Danelia

ON THE NUMBER OF REPRESENTATIONS OF INTEGERS BY SOME QUADRATIC FORMS IN 10 VARIABLES

Summary

By the method developed in the paper /4/ formulae (I)-(XIII) are derived for the number of representations of integers by the quadratic forms f_i $(i=1,2, \ldots 13)$ on the pages 1-2. The so-called additional terms $\nu_k(n)$ $(k=1,2, \ldots 7)$ in these formulae have a simple arithmetical sense.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили
თბილისის ი. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
324, 1997

УДК 517.5

О СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХААРА И РАДЕМАХЕРА

М.М.Махлуф

Следуя П.Л.Ульянову /5/, обозначим через A множество всех монотонно убывающих неотрицательных последовательностей $\{a_m\}$ (т.е. $a_m \geq 0$ и $a_m \downarrow$), а через $\bar{A}$ – множество всех последовательностей $\{c_k\}$ (k =1,2,.....), для каждой из которых найдется такое число $c \geq 1$, что

$$\max_{2^m < k \leq 2^{m+1}} |c_k| \leq c \cdot \min_{2^{m-1} < k \leq 2^m} |c_k| \qquad (m=0,1,\dots) \qquad \text{(1)}$$

Рассмотрим бесконечную числовую матрицу $M = \|\alpha_{mi}\|_\infty$ (m, i = 1, 2, ...). Предположим, что числа $N_m = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{mi}|$ (m, i = 1, 2, ...) существуют и конечны для всех $m = 1, 2, \dots$ Матрица $M = \|\alpha_{mi}\|$ (m, i = 1, 2, ...) называется регулярной (см. /1/), если выполняются следующие условия:

1) $\lim\limits_{m \to \infty} \alpha_{mi} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots)$, (2)

2) $\{N_m\}$ – ограниченное множество, (3)

3) $\lim\limits_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{mi} = 1$. (4)

Пусть $u_1, u_2, \dots$ – некоторая последовательность действительных чисел. Если сходится каждый ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_{mk} u_k ,$$

где

$$R_{mk}=\sum_{i=k}^{\infty} a_{mi} \qquad (m,k=1,2,\dots), \tag{5}$$

то числа $$\tau_m=\sum_{k=1}^{\infty} R_{mk} u_k \quad (m=1,2,\dots) \tag{6}$$

называются линейными средними (определенными матрицей M) для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ (см. /I/).

Условия I) и 3), очевидно, можно записать так:

$$\lim_{m\to\infty} R_{mk}=1 \tag{7}$$

Обозначим через M множество всех двойных последовательностей $T^*=\{R_{mk}\}$ $(m,k = 1, 2,\dots)$, каждая из которых удовлетворяет условиям:

I) $\lim\limits_{m\to\infty} R_{mk}=1$ $\qquad (k = 1, 2, \dots)$. (8)

2) Найдется такое число $c'\geq 1$ (зависящее от последовательности T^*, что

$$\max_{2^n<k\leq 2^{n+1}} |R_{mk}| \leq c'\cdot \min_{2^{n-1}<k\leq 2^n} |R_{mk}| \qquad \begin{pmatrix} n=0,1,\dots \\ m=1,2,\dots \end{pmatrix} \tag{9}$$

Обозначим через A_δ множество всех последовательностей $\{c_k\}$ $(k=1,2,\dots)$, для каждой из которых найдется такое число $c\geq 1$, что

$$\max_{2^m<k\leq 2^{m+1}} |c_k| \leq c\cdot \min_{2^{m-\delta}<k\leq 2^{m+1-\delta}} |c_k| \qquad (m=0,1,2,\dots) \tag{I'}$$

где $\delta\in\{0;1\}$.

Очевидно, что $A_1=\bar{A}$.

Обозначим через $\bar{M}_\delta$ множество всех двойных последовательностей $T^*=\{R_{mk}\}$ $(m, k = 1, 2, \dots)$, каждая из которых удовлетворяет условиям:

I) $\lim\limits_{m\to\infty} R_{mk}=1 \qquad (k=1,2,\dots)$, (8')

2) Найдется такое число $c'\geq 1$ (зависящее от последовательности T^*), что

$$\max_{2^n<k\leq 2^{n+1}} |R_{mk}| \leq c'\cdot \min_{2^{n-\delta}<k\leq 2^{n+1+\delta}} |R_{mk}| \qquad \begin{pmatrix} n=0,1,\dots \\ m=1,2,\dots \end{pmatrix}, \qquad (9')$$

где $\delta\in\{0;1\}$.

Нетрудно заметить, что если M положительная (т.е. $\alpha_{mi}\geq 0$, m,i = I,2, ...) регулярная матрица и числа R_{mk} определены равенствами (5), то $\{R_{mk}\}\in \overline{M}_1=\overline{M}$.

Очевидно, что если M - регулярная матрица, числа R_{mk} определены равенствами (5) и для любых двух натуральных чисел $k',k''\in(2^n,2^{n+1})$

$$R_{mk'}=R_{mk''} \qquad \begin{pmatrix} m=1,2,\dots \\ n=0,1,2,\dots \end{pmatrix}$$

и выполнено условие (8'), то $\{R_{mk}\}\in\overline{M}_0$.

Пусть N - множество натуральных чисел и $\Psi: N\to N$ - данная функция. Если $R_{mk}=0$ при $k>2^{\psi(m)}$ (m,k = I, 2, ...), то скажем, что последовательность R_{mk} - Ψ- конечна.

Обозначим через $B(\psi)$ множество всех ψ- конечных двойных последовательностей $\{\beta_{mk}\}$, а через $\overline{M}_\delta(\psi)$ обозначим множество всех последовательностей вида $\{R_{mk}\cdot\beta_{mk}\}$, где $\{R_{mk}\}\in\overline{M}_\delta$, а $\{\beta_{mk}\}\in B(\psi)$.

Пусть для некоторой двойной последовательности $T^*=\{R_{mk}\}$ все числа, определенные равенствами (6), конечны. Тогда числа τ_m (m = I, 2, ...) будем называть T^* - средними для ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k . \qquad (10)$$

Если $\exists \lim\limits_{m\to\infty} \tau_m = S$, то скажем, что ряд (IO) T - суммируем к числу S. Через X_i (i = I, 2, ...) будет обозначена ортонормированная на $[0, 1]$ полная система Хаара, занумерованная следующим образом:

$X_1(t)\equiv 1,\; X_i(t)=X_n^{(k)}(t)$ при $i=2^n+k$,

$1\le k\le 2^n;\quad n=0,1,2,\dots$ где (при $i\ge 2$)

$$X_i(t)=X_n^{(k)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{при } t\in\left(\frac{2k-2}{2^{n+1}},\ \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right), \\ -\sqrt{2^n} & \text{при } t\in\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}},\ \frac{2k}{2^{n+1}}\right), \\ 0 & \text{при остальных } t\in[0;1]. \end{cases}$$

Как показал П.Л.Ульянов / 6 /, таким образом определенная система не является базисом в пространстве $C([0,1])$. Но мы будем изучать поведение рядов Хаара в терминах "почти всюду" и поэтому нам будет неважно, как определить функции Хаара в точках разрыва.

Пусть $\{r_i\}_0^\infty$ - система Радемахера, где

$r_i(t)=\operatorname{sign}\sin(2^{i+1}\pi t)$ (i = 0, I, 2, ...).

Ортонормированная на $[0,1]$ и полная система Уолша $\{\varphi_i\}_1^\infty$ (см / 3 /) строится следующим образом:

$\varphi_1(t)\equiv 1$ на $[0,1]$; если $i\ge 1$ и $2^{\nu_1}+2^{\nu_2}+\dots+2^{\nu_p}$ $(\nu_1<\nu_2<\dots$ есть двоичное представление числа i, то полагаем

$$\varphi_{i+1}(t)=r_{\nu_1}(t)\cdot r_{\nu_2}(t)\cdots r_{\nu_p}(t).$$

Для рядов по системе Хаара Марцинкевичем / IO / доказана следующая

Теорема А. Для всех $p\in[1,+\infty)$, всех последовательностей $\{a_i\}$ и любых $m=1,2,3,\ldots$ справедливо неравенство:

$$A_p\int_0^1\left\{\sum_{i=1}^m a_i^2X_i^2(t)\right\}^{\frac{p}{2}}dt\leq\int_0^1\left|\sum_{i=1}^m a_iX_i(t)\right|^p dt\leq$$

$$\leq B_p\int_0^1\left\{\sum_{i=1}^m a_i^2X_i^2(t)\right\}^{\frac{p}{2}}dt, \tag{11}$$

где A_p и B_p - некоторые положительные постоянные, зависящие лишь от p.

Вопросы, связанные со сходимостью рядов Хаара с коэффициентами из класса $\bar{A}$, подробно изучались П.Л.Ульяновым (см. /5/).

В этой работе будут рассмотрены вопросы суммируемости рядов Хаара с коэффициентами из класса A_δ.

Для доказательства основной теоремы нам понадобятся следующие леммы:

Лемма I. Пусть $\{c_k\}\in A_\delta$ и

$$\sum_{k=1}^\infty c_k^2=+\infty. \tag{12}$$

Предположим, что $\{R_{mk}\}\in\bar{M}_\delta(\varphi)$ и

$$\tau_{im}(t)\sum_{k=2^i+1}^{2^{\varphi(m)}}c_kR_{mk}X_k(t)\qquad(i=1,2,\ldots,i<\varphi(m)).$$

Тогда для данного множества $E\subset[0,1]$ положительной меры найдутся: натуральное число n_0, измеримое множество

$$P^*\subset E;\qquad\frac{1}{2^{n_0+1}}\leq mes\,P^*\leq\frac{1}{2^{n_0}}.$$

Функция $\varphi:N\to N$ такие, что для любых $n_1\geq n_0$ и $m\geq\varphi(n_1)$ справедливы неравенства

$$\int_{P^*}\tau_{n,m}^2(t)dt\geq\gamma\Gamma_m^2\,mes\,P^*, \tag{13}$$

$$\int_{P^*} \tau^4_{n,m}(t)\,dt \le \gamma_1 \Gamma^4_m \, mes P^*, \tag{I4}$$

где

$$\Gamma_m = \left\{ \sum_{i=1}^{2^{\varphi(m)}} c_i^2 R^2_{m_i} \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (m=1,2,\dots),$$

а γ, γ_1 - положительные постоянные, зависящие от последовательностей $\{c_i\}$, $\{R_{m_i}\}$.

<u>Доказательство:</u> Пусть $\{R_{mk}\} \in \bar{M}_\delta(\varphi)$, $\{c_k\} \in A_\delta$ и пусть выполнено условие (I2). Тогда (см. (I) и (9))

$$\max_{2^n < k \le 2^{n+1}} (c_k^2 R^2_{mk}) \le (c \cdot c')^2 \min_{2^{n-\delta} < k \le 2^{n+1-\delta}} (c_k^2 R^2_{mk}) \qquad \begin{pmatrix} m=1,2,\dots \\ n=0,1,\dots \end{pmatrix} \tag{I5}$$

Так как $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi(m) = +\infty$, то для каждого фиксированного j (j = I, 2, ...) существует натуральное число $N_1(j)$ такое, что $\varphi(m) > j$ как только $m > N_1(j)$.

Пусть j фиксировано и $m > N_1(j)$. Легко видеть, что $\sum\limits_{k=1}^{2^j} c_k^2 R^2_{mk}$ ограничены, а $\sum\limits_{k=2^j+1}^{2^{\varphi(m)}} c_k^2 R^2_{mk} \to +\infty$ (тем более $\Gamma_m \to \infty$) при $m \to \infty$. Тогда

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{2^{\varphi(m)}} c_k^2 R^2_{mk}}{\sum\limits_{k=2^j+1}^{2^{\varphi(m)}} c_k^2 R^2_{mk}} = 1 + \lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{2^j} c_k^2 R^2_{mk}}{\sum\limits_{k=2^j+1}^{2^{\varphi(m)}} c_k^2 R^2_{mk}} = 1 .$$

Ясно, что найдется функция $\psi: N \to N$ такая, что для любого $m \ge \psi(j)$ будем иметь

$$\varphi(m) \ge j+1 \tag{I6}$$

и

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{2^{\nu(m)}} c_k^2 R_{mk}^2}{\sum\limits_{k=2^{\nu}+1}^{2^{\nu(m)}} c_k^2 R_{mk}^2} \leqslant 2. \tag{17}$$

Пусть теперь $E \subset [0,1]$ и $mes\, E > 0$.

Найдется иррациональная точка, $t_0 \in E$, которая является точкой плотности множества E. Значит, для всякого $\varepsilon > 0$, в частности, для

$$\varepsilon = \frac{1}{2^8 (cc')^8 B_4}, \tag{18}$$

где B_4 ($\geqslant$ 1) – постоянная, стоящая в правой части неравенства (11) (p = 4). Найдутся такие натуральные числа n_0 и k_0 ($\leqslant 2^{n_0}$), что имеет место неравенство:

$$\frac{mes\left\{E \wedge \left[\frac{k_0-1}{2^{n_0}}; \frac{k_0}{2^{n_0}}\right]\right\}}{mes\left\{\left[\frac{k_0-1}{2^{n_0}}; \frac{k_0}{2^{n_0}}\right]\right\}} > 1-\varepsilon. \tag{19}$$

Введем обозначения $\Delta \equiv \left[\frac{k_0-1}{2^{n_0}}; \frac{k_0}{2^{n_0}}\right]$ и $P^* \equiv \Delta \wedge E$.

Очевидно

$$P^* \subset E,\ P^* \subset \Delta \quad \text{и} \quad \frac{mes(\Delta - P^*)}{mes\,\Delta} < \varepsilon. \tag{20}$$

Учитывая неравенство $1-\varepsilon > \frac{1}{2}$ из (11), получаем

$$\frac{1}{2} mes\,\Delta \leqslant mes\,P^* \leqslant mes\,\Delta,$$

т.е.

$$\frac{1}{2^{n_0+1}} \leqslant mes\,P^* \leqslant \frac{1}{2^{n_0}}. \tag{21}$$

Пусть $n_1 > n_0$; $m > \varphi(n_1)$ и рассмотрим функцию

$$\tau'_{n_1 m}(t) = \tau_{n_1 m}(t) \cdot X_\Delta(t),$$

где X_Δ – характеристическая функция множества Δ.

Введем обозначение $\mu = \varphi(m) - n_1 - 1$.

Определим последовательность $\{c'_k\}$ ($k = 1, 2, \ldots$) следующим образом:

$$c'_k = \begin{cases} c_k, & \text{если } k \in [2^{n_1}+1, 2^{\varphi(m)}] \text{ и } X_k(t) \wedge X_\Delta(t) \not\equiv 0, \\ 0, & \text{для остальных } k = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\tau'_{n,m}(t) = \sum_{k=2^{n_1}+1}^{2^{n_1+\mu+1}} c'_k R_{mk} X_k(t).$$

Используя правую часть неравенства (II) при $p = 4$ и учитывая, что

$$\tau'_{n,m}(t) = \begin{cases} \tau_{n,m}(t) & \text{при } t \in \Delta, \\ 0 & \text{при } t \in [0,1] - \Delta \end{cases}$$

получим:

$$\int_\Delta \tau^4_{n,m}(t)dt \leq B_4 \int_0^1 \left\{ \sum_{k=2^{n_1}+1}^{2^{\varphi(m)}} c'^2_k R^2_{mk} X^2_k(t) \right\}^2 dt =$$

$$= B_4 \int_\Delta \left\{ \sum_{k=2^{n_1}+1}^{2^{\varphi(m)}} c'^2_k R^2_{mk} X^2_k(t) \right\}^2 dt.$$

Отсюда выводим:

$$\int_\Delta \tau^4_{n,m}(t)dt \leq B_4 \int_\Delta \left\{ \sum_{s=0}^{\mu} \sum_{k=2^{n_1+s}+1}^{2^{n_1+s+1}} c'^2_k R^2_{mk} X^2_k(t) \right\}^2 dt \leq$$

$$\leq B_4 \int_\Delta \left\{ \sum_{s=0}^{\mu} 2^{n_1+s} \max_{2^{n_1+s} < k \leq 2^{n_1+s+1}} (c'^2_k R^2_{mk}) \right\}^2 dt \leq$$

$$\leq B_4 \left\{ \sum_{s=0}^{\mu} 2^{n_1+s} \max_{2^{n_1+s} < k \leq 2^{n_1+s+1}} (c'^2_k R^2_{mk}) \right\}^2 \operatorname{mes} \Delta \leq$$

$$\leq B_4\left\{2^{\delta}(c'c)^2\sum_{s=0}^{\mu}2^{n_1+s-\delta}\min_{2^{n_1+s-\delta}<k\leq 2^{n_1+s+1-\delta}}\left(c_k'^2R_{nk}^2\right)\right\}^2 mes\,\Delta \leq$$

$$\leq 4^{\delta}B_4(c'c)^4\left\{\sum_{s=0}^{\mu}\sum_{k=2^{n_1+s-\delta}}^{2^{n_1+s+1-\delta}}c_k^2R_{mk}^2\right\}^2 mes\,\Delta =$$

$$=4^{\delta}B_4(c'c)^4\left\{\sum_{k=2^{n_1-\delta}+1}^{2^{n_1+\mu+1-\delta}}c_k^2R_{mk}^2\right\}^2 mes\,\Delta =$$

$$=4^{\delta}B_4(c'c)^4\left\{\sum_{k=2^{n_1-\delta}+1}^{2^{\psi(m)}}c_k^2R_{mk}^2\right\}^2 mes\,\Delta . \qquad (22)$$

Используя равенство Парсеваля и учитывая неравенство (I5), получаем:

$$\int_{\Delta}\tau_{n,m}^2(t)dt=\int_{\Delta}\tau_{n,m}'^2(t)dt=\int_0^1\tau_{n,m}'^2(t)dt=$$

$$=\int_0^1\left\{\sum_{k=2^{n_1}+1}^{2^{n_1+\mu+1}}c_k'^2R_{mk}^2X_k^2(t)\right\}dt=\int_{\Delta}\left\{\sum_{k=2^{n_1}+1}^{2^{n_1+\mu+1}}c_k'^2R_{mk}^2X_k^2(t)\right\}dt\geq$$

$$\geq\int_{\Delta}\left\{\sum_{k=2^{n_1}+1}^{2^{n_1+\mu+1-\delta}}c_k'^2R_{mk}^2X_k^2(t)\right\}dt=\int_{\Delta}\left\{\sum_{k=2^{n_1}+1}^{2^{n_1+\mu+1-\delta}}c_k^2R_{mk}^2X_k^2(t)\right\}dt=$$

$$=\int_{\Delta}\left\{\sum_{s=0}^{\mu-\delta}\sum_{k=2^{n_1+s}+1}^{2^{n_1+s+1}}c_k^2R_{mk}^2X_k^2(t)\right\}dt\geq$$

$$\geqslant \sum_{s=0}^{\mu-\delta} 2^{n_1+s} \min_{2^{n_1+s}<k\leq 2^{n_1+s+1}} \left(c_k^2 R_{mk}^2\right) \operatorname{mes}\Delta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\operatorname{mes}\Delta}{2^{\delta}(c'c)^2} \sum_{s=0}^{\mu-\delta} 2^{n_1+s+\delta} \max_{2^{n_1+s+\delta}<k\leq 2^{n_1+s+1+\delta}} \left(c_k^2 R_{mk}^2\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\operatorname{mes}\Delta}{2^{\delta}(c'c)^2} \sum_{s=0}^{\mu-\delta} \sum_{k=2^{n_1+s+\delta}+1}^{2^{n_1+s+1+\delta}} c_k^2 R_{mk}^2 =$$

$$= c_k^2 R_{mk}^2 = \frac{\operatorname{mes}\Delta}{2^{\delta}(c'c)^2} \sum_{2^{n_1+\delta}+1}^{2^{n_1+\mu+1}} c_k^2 R_{mk}^2 .$$

Но $\varphi(m) = n_1 + \mu + 1$.

Поэтому

$$\int_{\Delta} \tau_{n,m}^2(t)\,dt \geqslant \frac{\operatorname{mes}\Delta}{2^{\delta}(c'c)^2} \sum_{k=2^{n_1+\delta}+1}^{2^{\varphi(m)}} c_k^2 R_{mk}^2 . \tag{23}$$

Применим оценки (22) и (23)

$$\int_{P^*} \tau_{n,m}^2(t)\,dt = \int_{\Delta} \tau_{n,m}^2(t)\,dt - \int_{\Delta - P^*} \tau_{n,m}^2(t)\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\Delta} \tau_{n,m}^2(t)\,dt - \left\{ \int_{\Delta - P^*} \tau_{n,m}^4(t)\,dt \right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\operatorname{mes}(\Delta - P^*)} \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\Delta} \tau_{n,m}^2(t)\,dt - \left\{ \int_{\Delta} \tau_{n,m}^4(t)\,dt \right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\operatorname{mes}(\Delta - P^*)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\operatorname{mes}\Delta}{2^{\delta}(c'c)^2} \sum_{k=2^{n_1+\delta}+1}^{2^{\varphi(m)}} c_k^2 R_{mk}^2 -$$

$$- 2^{\delta}(c'c)^2 \sqrt{B_4 \operatorname{mes}\Delta \operatorname{mes}(\Delta - P^*)} \cdot \sum_{k=2^{n_1-\delta}+1}^{2^{\varphi(m)}} c_k^2 R_{mk}^2 =$$

$$\cdot\left(1-4^{\delta}(c'c)^4\sqrt{\frac{B_4\, mes(\Delta-P^*)}{mes\,\Delta}\cdot\frac{\sum\limits_{k=2^{n_1-\delta}+1}^{2^{\psi(m)}} c_k^2 R_{mk}^2}{\sum\limits_{k=2^{n_1+\delta}+1}^{2^{\psi(m)}} c_k^2 R_{mk}^2}}\right)\times$$

$$\times\frac{mes\,\Delta}{2^{\delta}(c'c)^2}\sum_{k=2^{n_1+\delta}+1}^{2^{\psi(m)}} c_k^2 R_{mk}^2 .$$

Следовательно, учитывая (I7), (I8), (20) и (2I), получаем:

$$\int_{P^*}\tau^2_{n,m}(t)\,dt\geqslant\left(1-4^{\delta}(c'c)^4\sqrt{\frac{B_4}{2^8(c'c)^8B_4}}\cdot 2\right)\times$$

$$\times\frac{mes\,P^*}{2^{\delta}(c'c)^2}\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2^{\psi(m)}} c_k^2 R_{mk}^2\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2^{2+\delta}(c'c)^2}\Gamma_m^2\, mes\,P^* .$$

С другой стороны, из (20), (2I) и (22) вытекает, что

$$\int_{P^*}\tau^4_{n,m}(t)\,dt\leqslant\int_{\Delta}\tau^4_{n,m}(t)\,dt\leqslant 4^{\delta}B_4(c'c)^4\Gamma_m^4\cdot 2\,mes\,P^*=$$

$$=2^{2\delta+1}B_4(c'c)^4\Gamma_m^4\, mes\,P^* .$$

Лемма I доказана.

Лемма 2. Пусть $\{c_k\}\in A_\delta$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k^2=\infty$.

Предположим, что $\{R_{mk}\}\in\overline{M}_8(\psi)$. и

$$\tau_m(t)=\sum_{k=1}^{2^{\psi(m)}} c_k R_{mk}\chi_k(t)\qquad(m=1,2,\dots).$$

Если $\tau_m^+(t)=\max\{0,\tau_m(t)\}$, то

$$mes\left\{t:\tau_m^+(t)=\bar{\bar{0}}\left(\sum_{k=1}^{2^{\psi(m)}} c_k^2 R_{mk}^2\right)^{\frac{1}{2}};\ t\in[0;1]\right\}=0 .$$

Доказательство. Предположим противное, т.е. в каждой точке некоторого множества $\mathcal{E} \subset [0,1]$ с $mes\,\mathcal{E} > 0$

$$\tau_m^+(t) = \bar{\bar{o}}\left(\sum_{k=1}^{2^{\psi(m)}} c_k^2 R_{mk}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим

$$\Gamma_m = \left\{\sum_{k=1}^{2^{\psi(m)}} c_k^2 R_{mk}^2\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (m=1,2,\dots).$$

В силу теоремы Егорова существует множество $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ положительной меры, такое, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\tau_m^+(t)}{\Gamma_m} = 0 \tag{24}$$

равномерно для всех $t \in \mathcal{E}'$.

Согласно лемме I найдутся: натуральное число n_0, измеримое множество $P^* \subset \mathcal{E}'$; $\frac{1}{2^{n_0+1}} \leqslant mes\,P^* \leqslant \frac{1}{2^{n_0}}$.

Функция $\varphi : N \to N$ такие, что для любых натуральных чисел $n_1 \geqslant n_0$ и $m \geqslant \varphi(n_1)$ будут выполнены неравенства (I3) и (I4).

Обозначим через α_k (k = I, 2, ...) коэффициенты Фурье-Хаара функции χ_{P^*} (где χ_{P^*} – характеристическая функция множества P^*).

Пусть $\varepsilon > 0$, натуральное число $n_1 \geqslant n_0$ такое, что

$$\sum_{k=2^{n_1}+1}^{\infty} \alpha_k^2 < \varepsilon^2. \tag{25}$$

Фиксируя n_1, рассмотрим функцию

$$\tau_{n_1,m}(t) = \sum_{k=2^{n_1}+1}^{2^{\psi(m)}} c_k R_{mk} \chi_k(t),$$

где $m \geqslant \varphi(n_1)$.

Легко видеть, что для фиксированного n_1

$$\sup\left|\sum_{k=1}^{2^{n_1}} c_k R_{mk} \chi_k(t)\right| < +\infty,$$

$t \in [0,1]$, $m \in \{1,2,\dots\}$.

Из (24) следует равномерная (на множестве P^*) сходимость к нулю отношения

$$\frac{\tau^+_{n,m}(t)}{\Gamma_m},$$

где $\tau^+_{n,m}(t)=\max\{0,\tau_{n,m}(t)\}$.

Поэтому найдется натуральное число $N(n_1,\varepsilon)\geq\varphi(n_1)$ такое, что для всех $t\in P^*$ и любых $m\geq N(n_1,\varepsilon)$

$$\frac{\tau^+_{n,m}(t)}{\Gamma_m}\leq\varepsilon.$$

Тогда

$$\int_{P^*}|\tau_{n,m}(t)|dt\leq\int_{P^*}\left\{|\tau_{n,m}(t)-\varepsilon\Gamma_m|+\varepsilon\Gamma_m\right\}dt=$$

$$=\int_{P^*}\left\{2\varepsilon\Gamma_m-\tau_{n,m}(t)\right\}dt=2\varepsilon\Gamma_m\cdot mesP^*-\int_0^1\tau_{n,m}(t)\chi_{P^*}(t)dt=$$

$$=2\varepsilon\Gamma_m\cdot mesP^*-\sum_{k=2^{n_1}+1}^{2^{\varphi(m)}}c_kR_{mk}\alpha_k\leq$$

$$\leq2\varepsilon\Gamma_m\cdot mesP^*-\left\{\sum_{k=2^{n_1}+1}^{2^{\varphi(m)}}c_k^2R_{mk}^2\right\}^{\frac12}\cdot\left\{\sum_{k=2^{n_1}+1}^{2^{\varphi(m)}}\alpha_k^2\right\}^{\frac12}\leq$$

$$\leq2\varepsilon\Gamma_m\cdot mesP^*+\Gamma_m\cdot\varepsilon=\varepsilon\Gamma_m(2mesP^*+1). \qquad (27)$$

С другой стороны, согласно неравенству Гельдера,

$$\int_{P^*}\tau^2_{n,m}(t)dt\leq\left\{\int_{P^*}\tau_{n,m}(t)dt\right\}^{\frac23}\left\{\tau^4_{n,m}(t)dt\right\}^{\frac13}$$

Отсюда, учитывая (I3) и (I4), получаем

$$\int_{P^*}|\tau_{n,m}(t)|dt\geq\left(\gamma_1^{-\frac12}\cdot\gamma^{\frac23}\right)\Gamma_m\cdot mesP^*. \qquad (28)$$

Но для достаточно малого ε (27) противоречит (28). Полученное противоречие доказывает лемму.

<u>Следствие</u>: Пусть $\{c_k\} \in A_\delta$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(t)$ таков, что на некотором множестве $E \subset [0,1]$ положительной меры

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\, S_{2^{q_m}} \equiv \overline{\lim_{m\to\infty}} \sum_{k=1}^{2^{q_m}} c_k X_k(t) < +\infty ,$$

где $\{q_m\}$ - некоторая возрастающая $k \to \infty$ последовательность целых чисел, тогда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$.

Для доказательства достаточно рассмотреть

$$R_{mk} = \begin{cases} 1 & \text{при } k \in [1, 2^{q_m}] \quad \text{и } m \in N, \\ 0 & \text{при } k \in (2^{q_m}, +\infty) \quad \text{и } m \in N, \end{cases}$$

и применить лемму 2 (учитывая, что так определено

$$\{R_{mk}\} \in \overline{M}_\delta(\varphi(m)), \qquad \text{где } \varphi(m) = 2^{q_m}).$$

<u>Теорема I</u>. Пусть $\{c_k\} \in A_\delta$; $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \infty$.

Далее, предположим, что $T^* \equiv \{R_{mk}\} \in \overline{M}_\delta$ и T^* - средние $\tau_m(t)$ для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(t)$ имеют смысл на множестве E положительной меры. Если

$$\tau_m^+(t) = \max\{0; \tau_m(t)\} \qquad (t \in E),$$

то

$$\operatorname{mes}\left\{t : \tau_m^+(t) = \bar{\delta} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 R_{mk}^2\right)^{\frac{1}{2}};\ t \in E\right\} = 0.$$

<u>Доказательство</u>: По условию на множестве $E \subset [0, 1]$ положительной меры существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} c_k R_{mk} X_k(t) = \tau_m(t) \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Так как для каждого фиксированного m $\{c_k R_{mk}\} \in A_\delta$, то согласно следствию, все числа

$$\Gamma_m = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 R_{mk}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (m = 1,2,\dots)$$

конечны. При этом $\lim\limits_{m \to \infty} \Gamma_m = +\infty$.

Предположим теперь, что существует множество $B \subset E$ положительной меры, такое, что в каждой точке $t \in B$

$$\tau_m^+(t) = o(\Gamma_m). \tag{29}$$

Тогда, как легко видеть, найдутся: измеримое множество $B \subset E$ с мерой, меньшей, чем $\frac{mes\, B}{2^{m+1}}$ ($m = 1,2,\dots$), и функция $\psi : N \to N$, стремящаяся к $+\infty$, такая, что будут выполнены следующие неравенства:

$$\left| \tau_m^+(t) - \left\{ \sum_{k=1}^{2^{\psi(m)}} c_k R_{mk} X_k(t) \right\}^+ \right| < 1; \quad t \in B - B_m, \tag{30}$$

$$\Gamma_m \geq \left\{ \sum_{k=1}^{2^{\psi(m)}} c_k^2 R_{mk}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \geq \left(1 - \frac{1}{m}\right) \Gamma_m \quad (m = 1,2,\dots), \tag{31}$$

где

$$\left\{ \sum_{k=1}^{2^{\psi(m)}} c_k R_{mk} X_k(t) \right\}^+ = \max\left\{ 0, \sum_{k=1}^{2^{\psi(m)}} c_k R_{mk} X_k(t) \right\}.$$

Положим:

$$\overline{R}_{mk} = \begin{cases} R_{mk} & \text{при } 1 \leq k \leq 2^{\psi(m)}, \\ 0 & \text{при } k > 2^{\psi(m)}, \end{cases}$$

$$\overline{\tau}_m(t) = \sum_{k=1}^{2^{\psi(m)}} c_k R_{mk} X_k(t) \quad \text{и} \quad \overline{\Gamma}_m = \left\{ \sum_{k=1}^{2^{\psi(m)}} c_k^2 \overline{R}_{mk}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что $\overline{T}^* \equiv \{\overline{R}_{mk}\} \in \overline{M}_S(2^{\psi(m)})$ и $\overline{\tau}_m(t)$ ($m = 1,2,\dots$) являются $\overline{T}^*$ - средними для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k X_k(t)$.

Согласно (30) и (3I) имеем:

$$\left|\tau_m^+(t)-\bar{\tau}_m^+(t)\right|<1 \qquad \left(t\in B-\bigcup_{m=1}^{\infty}B_m\right), \tag{32}$$

$$\Gamma_m \geq \bar{\Gamma}_m \geq \left(1-\frac{1}{m}\right)\Gamma_m . \tag{33}$$

Из (29), (32) и (33) без труда получаем, что в каждой точке $t\in B-\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}B$ $\quad \bar{\tau}_m^+(t)=O(\bar{\Gamma}_m)$.

Это противоречит лемме 2, так как $mes\left(B-\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}B_m\right)>0$.

Следующая теорема является непосредственным следствием теоремы I.

Теорема 2. Предположим, что $\{c_k\}\in A_\delta$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k^2=\infty$ и T^* - средние $\tau_m(t)$ $(T^*\in \bar{M}_\delta)$ для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k X_k(t)$ имеют смысл на множестве $E\subset[0,I]$ положительной меры.

Тогда $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\,\tau_m(t)=-\underline{\lim\limits_{m\to\infty}}\,\tau_m(t)=+\infty$ почти для всех $t\in E$.

Теорема 3. Пусть $\{c_k\}\in A_\delta$, $T^*\in\bar{M}_\delta$ и T^*- средние $\tau_m(t)$ для ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k X_k(t) \tag{34}$$

имеют смысл на множестве E положительной меры. Если в каждой точке $t\in E$ выполнено соотношение

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\,\tau_m(t)<+\infty , \tag{35}$$

то ряд (34) является рядом Фурье от некоторой функции $f\in L^p$ $([0,1])$ при всех $p\in[1,\infty)$.

<u>Доказательство</u>. Согласно теореме I, из условия (35) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty,$$

т.е. ряд (34) является рядом Фурье от некоторой функции $f\in L^2$ $([0,1])$. По теореме Хаара (см. / 3 /, стр.55) почти для всех $t\in[0,1]$

$$\lim_{m\to\infty} S_{2^m} \equiv \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{2^m} c_k\chi_k(t) \equiv f(t). \tag{36}$$

Используя правую часть неравенства (II) получаем:

$$\int_0^1\left|\sum_{k=2}^{2^m} c_k\chi_k(t)\right|^p dt \leq B_p\int_0^1\left(\sum_{k=2}^{2^m} c_k^2\chi_k^2(t)\right)^{\frac{p}{2}} dt =$$

$$= B_p\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} c_k^2\chi_k^2(t)\right)^{\frac{p}{2}} dt \leq$$

$$\leq B_p\left(\sum_{n=0}^{m-1} 2^n \max_{2^n<k\leq 2^{n+1}} c_k^2\right)^{\frac{p}{2}} \leq B_p\left(2^\delta c^2\sum_{n=0}^{m-1} 2^{n-\delta}\min_{2^{n-\delta}<k\leq 2^{n+1-\delta}} c_k^2\right)^{\frac{p}{2}} \leq$$

$$\leq B_p\left(2^\delta c^2\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{2^{n-\delta}<k\leq 2^{n+1-\delta}} c_k^2\right)^{\frac{p}{2}} =$$

$$= B_p\left(2^\delta c^2\sum_{2^{\delta}<k\leq 2^{m-\delta}} c_k^2\right)^{\frac{p}{2}} \leq$$

$$\leq B_p\, 2^{\frac{p\cdot\delta}{2}} c^p\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\right)^{\frac{p}{2}} \qquad (p>1). \tag{37}$$

В силу (36), почти для всех $t\in[0,1]$

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=2}^{2m} c_k X_k(t)=f(t)-c_1 .$$

Согласно лемме Фату из (37) вытекает, что $f-c_1$ и, следовательно, f принадлежит всем пространствам

$$L^p([0,1]) \quad (p\in[1,+\infty)).$$

П.Л.Ульяновым (см. / 5 /) показано, что нельзя утверждать, что функция f существенно ограничена, если даже потребовать дополнительно, чтобы $c_m\downarrow 0$.

Рассмотрим ряд по системе Радемахера $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r_k$ (*)

Если $T^*\equiv\{R_{mk}\}$ - линейный регулярный метод суммирования и T^*- средние для ряда (*) имеют смысл на некотором множестве $E\subset[0,1]$ положительной меры, тогда для любой точки $x\in E$ справедливы равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_{mk} a_k r_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty} R_{mk} a_k\left\{\frac{1}{\sqrt{2^k}}\sum_{2^{k-1}<j\le 2^k} X_j(x)\right\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{2^{k-1}<j\le 2^k}\frac{R_{mk}a_k}{\sqrt{\max\{2^{k-1},1\}}}\cdot X_j(x)\equiv\sum_{j=1}^{\infty} R'_{mj}c'_j X_j(x), \tag{38}$$

где $R'_{mj}=R_{mk}$ при $j\in(2^{k-1};2^k]$ и

$$c'_j=\frac{a_k}{\sqrt{\max\{2^{k-1},1\}}} \quad \text{при } j\in(2^{k-1};2^k] \quad (k=0,1,2,\dots)$$

Очевидно, что $\{R'_{mj}\}\in\overline{M}_0$, а $\{c'_j\}\in\mathcal{A}_0$ при $\delta=0$. Из теорем I-3 получаем для рядов по системе Радемахера следующие теоремы.

Теорема 4. Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 = \infty$. Далее предположим, что $T^* = \{R_{mk}\}$ - регулярный линейный метод суммирования и T^*- средние $\tau_m(t)$ для ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r_k(t)$ имеют смысл на множестве E ($\subset [0 : 1]$) положительной меры. Если

$$\tau_m^+(t) = max\{0; \tau_m(t)\} \quad (t \in E),$$

то

$$mes\left\{t : \tau_m^+(t) = \bar{\bar{o}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 R_{mk}^2\right)^{\frac{1}{2}} ; t \in E\right\}$$

Теорема 5. Предположим, что $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 = +\infty$ и T^*- средние $\tau_m(t)$ ($T^* = \{R_{mk}\}_\infty$ - регулярный линейный метод суммирования) для рядов $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r_k(t)$ имеют смысл на множестве $E \subset [0, 1]$ положительной меры. Тогда

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \tau_m(t) = -\underline{\lim_{m\to\infty}} \tau_m(t) = +\infty$$

для всех $t \in E$,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sum_{k=0}^{q_m} a_k r_k(t) = -\underline{\lim_{m\to\infty}} \sum_{k=0}^{q_m} a_k r_k = +\infty$$

почти для всех $t \in [0, 1]$, где $q_m \uparrow \infty$ - - любая последовательность натуральных чисел.

Теорема 6. Пусть $T^* = \{R_{mk}\}$ - линейный регулярный метод суммирования и T^*- средние для ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k r_k(t) \tag{39}$$

имеют смысл на множестве E ($\subset [0, 1]$) положительной меры.

Если в каждой точке $t\in E$ выполнено условие

$$\varlimsup_{m\to\infty} r_m(t)<+\infty,$$

то ряд (39) является рядом Фурье от некоторой функции

$$f\in L^p([0;1]) \quad \text{при всех} \quad p\in[1;+\infty].$$

Теорема 5 показывает характер расходимости ряда по системе Радемахера

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k r_k(t)$$

при условии

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2=\infty .$$

Теорема 5 является обобщением известной теоремы А.Н.Колмогорова на случай суммируемости рядов по системе Радемахера. Известно, что в теореме А.Н.Колмогорова утверждается, что расходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^2$ влечет за собой расходимость почти всюду на $[0, 1]$ ряда по системе Радемахера

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k r_k(t).$$

О рядах по системе Хаара П.Л.Ульяновым были доказаны следующие теоремы (см. / 5 /):

<u>Теорема (А)</u>. Пусть последовательность $\{a_m\}\in\bar{A}$ и ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m X_m(t)$$

таков, что на некотором множестве $E\subset[0, 1]$ с $mes\,E>0$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left|S_{q_n}\right| \equiv \varlimsup_{n\to\infty} \left|\sum_{k=1}^{q_n} a_k X_k(t)\right|<+\infty$$

при $t\in E$, где q_n - некоторая возрастающая последовательность целых чисел. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2<\infty.$$

<u>Теорема (В)</u>. Если $\{a_m\}\in\bar{A}$ и ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m X_m(t)$ (* *) сходится на некотором множестве $E\subset[0, 1]$ с $mes\,E>0$,

то ряд. $(**)$ является рядом Фурье от некоторой функции $f(t)$, которая принадлежит всем пространствам L^p $([0,1])$ с $p\in[1;+\infty)$.

При $\delta=1$ теорема 2 и теорема 3 обобщают соответственно теорему (В) на случай суммируемости рядов по системе Хаара.

Поступила 4.IУ.1993

Кафедра
математического анализа

Литература

I. Г.Алексич. Проблемы сходимости ортогональных рядов. ИЛ. Москва, 1963.

2. С.Качмаж, Г.Штейнгаз. Теория ортогональных рядов. Физматгиз, Москва, 1958.

3. А.Зигмунд. Тригонометрические ряды, т.I, Мир, Москва,1965.

4. А.Зигмунд. Тригонометрические ряды, т.2, Мир, Москва,1965.

5. И.М.Соболь. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. Наука, Москва, 1969.

6. П.Л.Ульянов. Изв.АН СССР, сер.мат., 1964,28, № 4, 925-950.

7. П.Л.Ульянов. Мат.сб., 1964,63,№ 3, 356-391.

8. П.Халмош. Конечномерные векторные пространства. Физматгиз, Москва, 1963.

9. В.Г.Челидзе. Некоторые вопросы теории двойных рядов. Издание Уханского университета (Китай), 1958.

IO.Г.А.Чхаидзе. Некоторые вопросы теории функций. Том 2, Тбилиси, 1981, стр.(IIO-I27).

II.Г.А.Чхаидзе. Некоторые вопросы теории функции. Том 2, Тбилиси, 1981, стр.(I28-I63).

12. R.E.A.C. Paley Proc. London Math. Soc., s. 2, 1932, 34, 241-279.

13. J. Marcinkiewicz. Ann. Soc. Polon. Math. 16 (1937), 84-96.

მ. მაკლუფი

ჰაარისა და რადემახერის სისტემების მიმართ მწკრივების შეჯამებადობის შესახებ

რეზიუმე

დამტკიცებულია თეორემები კოეფიციენტთა ერთი გარკვეული კლასის შემთხვევაში ჰაარის სისტემის მიმართ მწკრივთა შეჯამებადობის შესახებ. კერძოდ, განზოგადოებულია პ. ულიანოვისა და ა. კოლმოგოროვის თეორემები.

M. Makluf

ON THE HAAR AND RADEMACHER SUMMABILITY OF SERIES

Summary

The Haar series with coefficients from some definite class are considered and their summability by the regular methods is discussed.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили
თბილისის ი.ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
324, 1997

УДК 517

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

Худа Аль Мурад

Как известно, сопряженный оператор (неограниченного) линейного оператора $A: \mathcal{D} \to H$ (где H - гильбертово пространство и $\mathcal{D}$ - линейное всюду плотное подмножество H) может обладать довольно "патологическими" свойствами. В частности, область определения $\mathcal{D}^*$ сопряженного к A оператора $A^*: \mathcal{D}^* \to H$ может не быть всюду плотным линейным подмногообразием H и, следовательно, не обязательно имеет второе сопряжение $A^{**}=(A^*)^*$.

Нижеследующим разительным примером такой "патологии" мы обязаны устному сообщению И.Н.Карцивадзе: пусть H - действительное сепарабельное гильбертово пространство и $(l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots)$ - его некоторый ортонормированный базис. Обозначим через $N_1, N_2, \ldots, N_i$ некоторую последовательность бесконечных, попарно непересекающихся подмножеств множества N всех натуральных чисел, составляющих разбиение N, т.е. пусть

1) $N_i \subset N^{*}$ $(i=1,2,\ldots)$,

2) $N_i \cap N_j = \phi$ при любых i, j $(i, j \in N,\ i \neq j)$,

3) $\mathrm{Card}\, N_i = +\infty$ $(i=1,2,\ldots)$,

4) $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$

Очевидно, что такие разбиения множества N существуют. Зададим теперь образы подлежащего построению линейного опе-

ратора базисных векторов $l_1, l_2, l_3, \ldots$ по следующему правилу:
$Al_i = l_{k(i)}$ для любого $i \in N$, где $k(i)$ обозначает такой единственный (в силу 2), 4)) номер $k = k(i)$, при котором $i \in N_{k(i)}$

Очевидно, что $k(i)$ определен для любого $i \in N$ и так мы получаем однозначную арифметическую функцию

$$k : N \longrightarrow N,$$

которая представляет собой сюръективное $N \longrightarrow N$ отображение, имеющее "бесконечную кратность" на любом $q \in N$, т.е. прообраз любого $q \in N$ при отображении k, совпадающий с $k^{-1}(q) = N_q$, — бесконечное множество.

Теперь мы можем, имея определение A на всех базисных векторах $l_1, l_2, l_3, \ldots$, распространить A по линейности на всю линейную оболочку $\mathcal{D}$, натянутую на последовательность $(l_1, l_2, l_3, \ldots)$, иначе говоря, обозначая через $\mathcal{D}$ совокупность всех конечных линейных комбинаций векторов $l_1, l_2, \ldots, l_n$, т.е. положив

$$\mathcal{D} = \left\{ x \,|\, x = \sum_{i=1}^{n(x)} \xi_i l_i, \quad \text{где} \quad \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n(x)} \in R \right\},$$

определим оператор $A : \mathcal{D} \longrightarrow H$ по формуле:

$$Ax = \sum_{i=1}^{n(x)} \xi_i l_{k(i)}, \quad \text{если} \quad x = \sum_{i=1}^{n(x)} \xi_i l_i$$

Определенный таким образом оператор $A : \mathcal{D} \longrightarrow H$, очевидно, линеен, но, как легко сообразить, неограничен на $\mathcal{D}$, ибо если, например, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ - последовательность положительных чисел, обладающая свойствами $\sum_1^\infty \alpha_i = +\infty$ и $\sum_1^\infty \alpha_i^2 < +\infty$ и беря последовательность элементов вида

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_{p_i} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где множество $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ составляет, например, N_1, будем иметь $Ax_n=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)l_1$ и $\|x_n\|=\left\{\sum_{1}^{n}\alpha_i^2\right\}^{1/2}\leq$

$\leq\left(\sum_{1}^{\infty}\alpha_i^2\right)^{1/2}<+\infty$, а $\|Ax_n\|=\sum_{1}^{n}\alpha_i\to\infty$ при $n\to\infty$.

Оператор $A:\mathcal{D}\to H$ имеет сопряженный $A^*:\mathcal{D}^*\to H$ (ибо $\mathcal{D}$ всюду плотно в H) и, как мы сейчас покажем, $\mathcal{D}^*$ представляет нулевое подпространство H, т.е. $\mathcal{D}^*=\{0\}$.

В самом деле, пусть p - произвольно фиксированное натуральное число и

$$k^{-1}(p)=\{q_1,q_2,\dots,q_s,\dots\}=\mathbb{N}_p.$$

Мы знаем, что $\mathbb{N}_p$ - бесконечно, так что последовательность $l_{q_1},l_{q_2},\dots,l_{q_s},\dots$ составляет бесконечную ортонормированную последовательность векторов в H . Все $l_{q_1},l_{q_2},\dots$ лежат в $\mathcal{D}$, и если $z\in\mathcal{D}^*$ является некоторым элементом из области определения сопряженного оператора, будем иметь (см.,напр., /I/)[I]

$$\left(Al_{q_s}|z\right)=\left(l_{q_s}|A^*z\right).$$

Но $Al_{q_s}=l_p$ при всех $(s=1,2,\dots)$ и, следовательно, имеем

$$\left(l_p|z\right)=\left(l_{q_s}|A^*z\right)\quad(s=1,2,\dots). \tag{I}$$

Правые части в формуле (I) представляют собой коэффициенты Фурье элемента $A^*z\,(\in H)$ относительно ортонормированной бесконечной системы $l_{q_1},l_{q_2},\dots,l_{q_s}\dots$ и поэтому $\left(l_{q_s}|A^*z\right)\to 0$ при $s\to\infty$. Отсюда, т.к. левая часть формулы (I) не зависит от s , получим: $\left(l_p|z\right)=0$, т.е. получаем, что любой элемент из $\mathcal{D}^*$ ортогонален l_p . Но p в этом рассуждении произвольно выбранное число из $\mathbb{N}$, и, следовательно,

---

[I] Через ($x|y$) мы обозначили скалярное произведение элементов x и y из H

$\mathcal{D}^*$ ортогонален всему базису $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ откуда следует, что $\mathcal{D}^* = \{0\}$.

Подробно проанализировав конструкцию оператора A в вышеприведенном примере, мы можем сделать некоторые общие замечания относительно строения области определения $\mathcal{D}$ сопряженного оператора к любому $A: \mathcal{D} \to H$, где $\mathcal{D}$ – произвольное всюду плотное линейное многообразие из H, но предварительно введем несколько общих соглашений, используемых нами ниже.

Во-первых, условимся, как это часто практикуется, каждый единичный элемент $y \in H$ $(\|y\| = 1)$ называть направлением в H. Любое направление y однозначно определяет соответствующее одномерное подпространство в H, обозначенное через $\mathcal{R}_y$ и определяемое равенством:

$$\mathcal{R}_y = \{x \mid x \in H, x = \lambda y \quad \text{при любых } \lambda \in R\}$$

(прямая, проходящая на 0 - элементе в направлении y).

Рассмотрим произвольную последовательность $(x_n)_{n \geq 1}$ из H и будем, как обычно, ее называть слабо сходящейся к нулю, если $(x_n | x) \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$ для любого $x \in H$. Очевидно, для слабой сходимости x_n к нулю достаточно выполнения вышеуказанного предельного соотношения лишь для любого направления x из H. Слабую сходимость $(x_n)_{n \geq 1}$ к нулю будем, следуя некоторым авторам (см., например, / 2 /), обозначать символом: $x_n \rightharpoonup 0$.

Пусть $A: \mathcal{D} \to H$ – некоторый линейный оператор из $\mathcal{D}$ в гильбертовом пространстве H, где $\mathcal{D}$ – всюду плотное линейное подмножество H. Мы будем говорить, что направление y $(y \in H)$ является предельным для A, если существует та-

такая слабо сходящаяся к нулю последовательность элементов $(x_n)_{n\geq 1}$ из $\mathcal{D}$, что $Ax_n \neq 0 \; (n=1,2,\dots)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Ax_n}{\|Ax_n\|} = y$$

в сильном смысле в H, т.е. $y(\in H)$ есть предельное направление для оператора A, если $\|y\|=1$ и существует последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in \mathcal{D}$ $(n=1,2,\dots)$,

$$x_n \rightharpoonup 0, \quad Ax_n \neq 0, \qquad \frac{Ax_n}{\|Ax_n\|} = y + \omega_n \quad (n=1,2,\dots),$$

где $\lim \omega_n = 0$ (в сильном смысле в H).

Направление y мы будем называть сильно предельным для A, если y есть предельное направление для A и соответствующая в предыдущем определении последовательность x_n обладает дополнительным свойством:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|Ax_n\| > 0.$$

После таких терминологических соглашений мы можем сформулировать первое основное предложение этой статьи:

ТЕОРЕМА. Пусть $A : \mathcal{D} \to H$ - некоторый линейный оператор (где $\mathcal{D} \subset H$, $\mathcal{D}$ линейно и $\overline{\mathcal{D}} = H$) и y представляет сильно предельное направление для A. Тогда область определения $\mathcal{D}^*$ сопряженного к A оператора $A^* : \mathcal{D}^* \to H$ ортогональна y, т.е. $\mathcal{D}^*$ лежит в ортогональном дополнении одномерного пространства $\mathbb{R}y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Так как y сильно предельное для A направление, существуют такие элементы $(x_1, x_2, x_3, \dots x_n, \dots)$ из $\mathcal{D}$, что $x_n \rightharpoonup 0$, $\|Ax_n\| \neq 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|Ax_n\| > 0$ и, кроме того $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{Ax_n}{\|Ax_n\|} = y$. Поэтому найдутся такие строго положительное число $\mu\,(>0)$ и подпоследовательность x-ов $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$

что

$$x_{n_k}\rightharpoonup 0,\quad \frac{Ax_{n_k}}{\|Ax_{n_k}\|}=y+\omega_{n_k},\quad \|Ax_{n_k}\|\geq\mu\ (>0) \qquad (4)'$$

при $k=1,2,\dots$, где $\omega_{n_k}\to 0$ при $k\to\infty$.

Пусть $z\in\mathcal{D}^*$ – произвольный элемент из $\mathcal{D}^*$. Рассмотрим скалярное произведение (y/z) и, воспользовавшись условием (4), перепишем его следующим образом:

$$(y/z)=\left(\frac{Ax_{n_k}}{\|Ax_{n_k}\|}-\omega_{n_k}/z\right)=\frac{1}{\|Ax_{n_k}\|}\left(Ax_{n_k}/z\right)-\left(\omega_{n_k}/z\right). \qquad (5)$$

Последнее слагаемое правой части формулы (5) очевидно стремится к нулю (т.к. $\omega_{n_k}\to 0$ в H) при $k\to\infty$. Мы сейчас покажем, что стремится к нулю и первое слагаемое этой же части формулы (5). В самом деле, используя неравенство $\|Ax_{n_k}\|\geq\mu\ (>0)$ (при всех $k=1,2,\dots$) и свойство сопряженного оператора, получаем:

$$\left|\frac{1}{\|Ax_{n_k}\|}\left(Ax_{n_k}/z\right)\right|\leq\frac{1}{\mu}\left|\left(Ax_{n_k}/z\right)\right|=\frac{1}{\mu}\left|\left(x_{n_k}/A^*z\right)\right|,$$

но $x_{n_k}\rightharpoonup 0$, и поэтому правая часть имеет пределом нуль (при $k\to 0$). Отсюда заключаем, что выражение (5) имеет пределом нуль, и т.к. оно (его левая часть) не зависит от k, имеем: $(y/z)=0$.

Теорема доказана.

Прежде чем продолжить изложение, заметим, что заключение $\mathcal{D}^*=\{0\}$ в примере И.Н.Карцивадзе является следствием этой теоремы. Чтобы убедиться в этом, достаточно за $x_1, x_2, \dots, x_n\dots$ в этой теореме взять $N/_p=(\ell_{p_1}, \ell_{p_2}, \ell_{p_3}, \dots, \ell_{p_n})$. Ввиду того, что в указанном примере $A\ell_{p_1}, A\ell_{p_2}, \dots, A\ell_{p_3}, \dots$ все совпадают с ℓ_p, будем иметь: ℓ_p есть сильно предельный элемент для A ($\mu=1,\ y=\ell_p$) и, следовательно, $\mathcal{D}^*\perp\ell_p$ ($p=1,2,\dots$).

Возвращаясь к общему случаю, рассмотрим теперь вопрос об ортогональности к $\mathcal{D}^*$ некоторого направления y, являющегося просто предельным (но не сильно предельным) направлением для A. Этот случай представляет бóльшие трудности и мы не имеем сколько-нибудь удовлетворительного ответа на него. Здесь мы ограничиваемся рассмотрением двух частных примеров, подчеркивающих тонкость поставленного вопроса в общем случае.

В этих примерах y обозначает некоторое направление в H, которое является предельным для оператора A, в определенном усиленном смысле, не являясь, однако, сильно предельным для A.

ПРИМЕР: пусть $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n \ldots$ - ортонормированный базис H, а y - элемент из A, обладающий свойством $\|y\|=1$, т.е. y - некоторое направление. Рассмотрим линейную оболочку $\mathcal{D}$ базисных элементов $(e_1, e_2, \ldots)$, т.е. $\mathcal{D}=\{x / x=\sum_{i=1}^{n(x)} \xi_i e_i$, где $\xi_1 \cdots \xi_{n(x)} \in R\}$, и определим линейный оператор $A: \mathcal{D} \longrightarrow H$ по равенствам $Ae_i=\mu_i y$ $(i=1,2,\ldots)$ на базисных элементах, где $\mu_i \in R^+$, $\mu_1 \neq 0$ и $\mu_i \longrightarrow 0$ при $i \longrightarrow \infty$. Очевидно y является предельным элементом для A (в прежних обозначениях имеем: $x_n=e_n$, $n=1,2,\ldots$, и $\omega_n=0$, $n=1,2,\ldots$), но y не является сильно предельным для A в силу условия $\mu_i (=\|Ae_i\|) \longrightarrow 0$ при $i \longrightarrow \infty$.

I) Если ряд чисел $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2$ расходится, то $\mathcal{D}^*$ все еще ортогональна к y.

В самом деле, так как ряд $\sum_1^{\infty} \mu_i^2$ расходится, то существует такая последовательность (положительных) чисел $(\xi_i)_i \geq 1$, что $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2$ сходится, но $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \xi_i$ расходится (если бы такой последовательности $(\xi_i)_i \geq 1$ не существовало, то для любой последовательности $(\xi_i)_i \geq 1$ со свойством $\sum_1^{\infty} \xi_i^2 < \infty$ сходился бы также ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\xi_i$, откуда, в силу известной теоремы Ландау (см., напр., /3/), следовала бы сходимость ряда $\sum_{1}^{\infty}\mu_i^2$ в противоречие нашему предположению о расходимости последнего).

Рассмотрим теперь последовательность элементов $(x_n)_{n\geq 1}$ из H , определенных по формулам

$$x_n \sum_{i=1}^{n}\xi_i l_i .$$

В силу сходимости ряда $\sum_{1}^{\infty}\xi_i^2$ и ортонормированности последовательности элементов $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует в H и $\lim x_n = x = \sum_{1}^{\infty}\xi_i l_i$.

Далее

$$Ax_n = \sum_{i=1}^{n}\xi_i A l_i = \left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\mu_i\right)y$$

Пусть $z\in\mathcal{D}^*$ и y/z есть скалярное произведение y на z . Тогда имеем

$$(y/z)=\mu_i^{-1}(\mu_i y/z)=\mu_i^{-1}(Al_i/z)=\mu_i^{-1}(l_i/A^*z).$$

Отсюда, после элементарных умножений получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i\xi_i\cdot(y/z)=\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i l_i/A^*z\right)=(x_n/A^*z). \tag{6}$$

Совершаем предельный переход при $n\to\infty$ в правой части этого равенства. Это, в силу $x_n\to x$, показывает, что правая часть в равенстве (6) имеет предел, равный (x/A^*z). Следовательно имеет предел и левая часть этого равенства. Но, в силу расходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\xi_i$, первый множитель $\sum_{1}^{n}\mu_i\xi_i$ предела при $n\to\infty$ не имеет, и поэтому для существования предела всей левой части необходимо должно быть $(y/z)=0$.

Таким образом, y является для A просто предельным (т.е. не сильно предельным элементом), но $\mathcal{D}^*$ все еще остается в ортогональном дополнении $\mathfrak{N}_y$.

2) Теперь, сохраняя все последние обозначения, предположим, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2$ сходится. Мы сейчас покажем, что y (оставаясь предельным элементом для $\mathcal{A}$) не ортогонален к $\mathcal{D}^*$.

Действительно, в настоящих предположениях, беря любую последовательность чисел $(\xi_i)_{i \geq 1}$ со свойством $\sum_1^{\infty} \xi_i^2 < +\infty$, будем иметь

$$\mathcal{A} x_n = \mathcal{A}\left(\sum_1^n \xi_i e_i\right) = \left(\sum_1^n \mu_i \xi_i\right) y ,$$

откуда, т.к. $\sum_1^{\infty} \mu_i^2 < +\infty$, получаем, что существует предел $\lim \mathcal{A} x_n = \left(\sum_1^{\infty} \mu_i \xi_i\right) y$.

Это показывает, что $\mathcal{A}$ допускает расширение до ограниченного линейного оператора, определенного на всем пространстве H , т.е. можно считать, что оператор $\mathcal{A}$ есть $H \to H$ линейный и ограниченный оператор (определенный по формуле: $\mathcal{A} x = \left(\sum_1^{\infty} \mu_i \xi_i\right) y$, если $x = \sum_1^{\infty} \xi_i e_i$) и поэтому область определения $\mathcal{A}^*$ совпадает со всем H , и, следовательно, предельный для $\mathcal{A}$ элемент y (т.к. $|y| = 1$) не может быть ортогональным к $\mathcal{D}^*$. В нашем случае элемент, ортогональный всему $\mathcal{D}^*$ – обязательно нулевой.

Поступила 8.IУ.1994

Кафедра
математического анализа

Литература

1. Н.И.Ахиезер, И.М.Глазман. Теория линейных операторов, М.-Л., 1950.
2. Н.С.Ландкоф. Основы современной теории потенциала, М., 1994.
3. E. Landau. Ueber einen Konvergenzsatz- Göttingen Nachrichten, 1907.

ხუდა ალ მურადი

შენიშვნა შეუღლებული ოპერატორის განსაზღვრის არის შესახებ

რეზიუმე

შესწავლილია მოცემული წრფივი $A: D \to H$ ოპერატორის შეუღლებული ოპერატორის განსაზღვრის არის ორთოგონალური დამატების თვისებები, როცა H ჰილბერტის სეპარაბელური სივრცეა, ხოლო D - მისი ყველგან მკვრივი წრფივი მრავალსახეობას წარმოადგენს.

Huda al Murad

A NOTE ON THE DOMAIN OF DEFINITION OF AN ADJOINT OPERATOR

Summary

The orthogonal complement of the domain of the adjoint to the linear operator $A:D \to H$, where D is a dense manifold in the Hilbert H space, is studied.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили

თბილისის ი. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

324, 1997

УДК 517.965.4

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

М.Г.Майсурадзе

Пусть $\omega = R^n \times [0,T]$ – область в пространстве $R^{n+1}_{x,t}$. Обозначим при любых $\ell_2>0,\ \ell_2>\ell_1>0,\ \tau,\tau_1,\tau_2\in[0,T],\ \tau_1<\tau_2$

$$\omega(\ell;\tau)=\{x,t: |x_j|<\ell,\ j=\overline{1,n},\ t=\tau\},$$

$$\omega(\ell;\tau_1,\tau_2)=\{x,t: |x_j|<\ell,\ j=1,n,\ \tau_1<t<\tau_2\},$$

$$\Gamma(\ell;\tau_1,\tau_2)=\partial\omega(\ell;\tau_1,\tau_2)\cap\{\tau_1<t<\tau_2\},$$

$$\varkappa(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)=\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2).$$

В области ω рассмотрим задачу Коши для параболического уравнения четвертого порядка

$$u_t + Lu = 0, \tag{1}$$

где L – дифференциальный оператор четвертого порядка с эллиптической главной частью, с начальным условием на $R^n\setminus\{0\}$

$$u(x,t)=0. \tag{2}$$

Пусть

$$Lu \sum_{\alpha=\beta=2} D_x^\beta\left(a_{\alpha\beta}(x,t)D_x^\alpha u\right)+$$

$$+\sum_{\alpha<\beta=2}(-1)^\beta D_x^\beta\left(b_{\alpha\beta}(x,t)D_x^\alpha u\right)+\sum_{\alpha<2}c_\alpha(x,t)D_x^\alpha u.$$

Будем предполагать, что коэффициенты $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, c_\alpha$ - ограниченные измеримые функции в любой конечной подобласти ω.

Введем понятие обобщенного решения задачи Коши (I), (2).

Пусть $G \to \omega$ - конечная область и $g \subset \partial G$. Через $H^2(G,g)$ обозначим пространство функций, полученное пополнением по норме

$$\|u\| = \left(\int_G \left(u_t^2 + \sum_{0 \leq \alpha \leq 2} |D_x^\alpha|^2 \right) dx\,dt \right)^{1/2}$$

множества функций $u \in G^2(\bar{G})$, равных нулю в окрестности g.

О п р е д е л е н и е: обобщенным решением задачи (I)-(2) в области ω будем называть функцию u, которая для любой области $\omega(\ell;\tau_1,\tau_2)$ принадлежит $H^2(\omega(\ell;\tau_1,\tau_2))$ и при любой функции $v \in H^2(\omega(\ell;\tau_1,\tau_2), \Gamma(\ell;\tau_1,\tau_2))$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\omega(\ell;\tau_1,\tau_2)} \Big\{ u_t v + \sum_{\alpha=\beta=2} a_{\alpha\beta} D_x^\alpha u D_x^\beta v + \sum_{\alpha<\beta=2} b_{\alpha\beta} D_x^\alpha u D_x^\beta v + \sum_{\alpha<2} c_\alpha D_x^\alpha u v \Big\} dx\,dt = 0 \tag{3}$$

и начальному условию (2).

Пусть коэффициенты уравнения (I) при любых $(x,t) \in \omega$ и $v \in H^2(\omega(\ell;\tau_1,\tau_2))$ удовлетворяют следующим условиям:

$$|a_{\alpha\beta}| < M a(x), \quad |\alpha| = |\beta| = 2, \quad M = const > 0, \tag{4}$$

$$\sum_{\alpha=\beta=2} a_{\alpha\beta} D_x^\alpha v D_x^\beta v \geq m_1 a(x) \sum_{\alpha=2} (D_x^\alpha)^2, \quad m_1 = const > 0, \tag{5}$$

$$b_{\alpha\beta}^2(x,t) \leq M_1 a(x), \quad M_1 = const > 0, \tag{6}$$

$$|c_\alpha(x,t)| \leq C, \quad C = const > 0, \tag{7}$$

где a - неубывающая при возрастании $|x|$ функция, причем

$$m_0 \leq a(x) \leq M_0 (|x|+1)^6 h_0(h_0(x)), \quad m_0, M_0 = const > 0, \tag{8}$$

$0 \le \sigma < 4$, $\quad h_0$ - неубывающая $\quad h_0(1) \ge 1 \quad$ и

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r h(r)} = \infty,$$

$$\left|\frac{\partial a(x)}{\partial x_i}\right| \le \frac{B}{|x|+1} a(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \; B = const > 0. \tag{9}$$

Лемма I. Пусть выполнены условия (4)-(7) и функция a удовлетворяют условиям (8)-(9). Для функции $w = \exp\{-\mu^2 t\} u$, где u - обобщенное решение задачи (I)-(2) в области ω, а $\mu > 0$ - параметр, при любых $\ell_2 > \ell_1 > 0$, $\ell_2 \ge 2\ell_1$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < T$, $\ell_2 > 1$ имеет место неравенство

$$1/2 \int\limits_{\omega(\ell_1;\tau_2)} w^2 dx + \mu_0 \int\limits_{\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} w^2 dx dt \le 1/2 \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1)} w^2 dx + \frac{\hat{M} \ell_2^5}{\rho^4} h_0(h_0(\ell_2)) \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} w^2 dx dt, \tag{I0}$$

где $0 < \rho \le \ell_2 - \ell_1$, $\mu = \mu_0 + \mu_1$, $\mu_0, \mu_1 \ge 0$, $\mu_1, \hat{M} = const > 0$ зависят только от $m_0, M_0, m_1, \mu_1, M, c, B, n, T$.

Доказательство. Пусть φ - гладкая функция в R^n, обладающая следующими свойствами: $\varphi(x) = 1$ в области $\{x : |x| < \ell_1 + 1/4\rho\}$, $\quad \varphi(x) = 0$ вне области $\{x : |x| < \ell_2 - 1/4\rho\}$, $0 \le \varphi \le 1$, $|D_x^\alpha \varphi| \le c_{|\alpha|} \rho^{-|\alpha|}$ в R^n, где $c_{|\alpha|} = const > 0$ и не зависит от ρ. Пусть $\theta(x) = \varphi^4(x)$. Легко видеть, что

$$|D_x^\alpha \theta(x)| \le c'_{|\alpha|} \rho^{-|\alpha|} \varphi^{4-|\alpha|}, \qquad |\alpha| \le 2, \tag{II}$$

где $c'_{|\alpha|} = const > 0$ и зависят только от $c_{|\alpha|}$ и $|\alpha|$.

Положим в интегральном тождестве (3) $u = \exp\{-\mu^2 t\} w$ и $v = \exp\{-\mu^2 t\} w\theta$, получаем

$$\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} \Big\{ w_t w\theta + \mu w^2 \theta + \sum_{\alpha=\beta=2} a_{\alpha\beta} D^\alpha w D^\beta (w\theta) + \sum_{\alpha<\beta=2} b_{\alpha\beta} D^\alpha w D^\beta (w\theta) + \sum_{\alpha<2} c_\alpha D^\alpha w w \theta \Big\} dx dt = 0. \tag{I2}$$

Поскольку $D^\beta(w\theta)=D^\beta w\theta+\sum_{\gamma<\beta}A_{\gamma\beta}D^\gamma wD^{\beta-\gamma}\theta$, где $A_{\gamma\beta}=const>0$, то тогда после интегрирования по частям первого члена равенства (I2) находим

$$1/2\int_{\omega(l_2;\tau_2)}w^2\theta dx-1/2\int_{\omega(l_2;\tau_1)}w^2\theta dx+\int_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)}\Big\{\mu w^2\theta+\sum_{\alpha<2}c_\alpha D^\alpha ww\theta+$$

$$+\sum_{\alpha=\beta=2}a_{\alpha\beta}D^\alpha w\Big[D^\beta w\theta+\sum_{\gamma<\beta}A_{\gamma\beta}D^\alpha wD^{\beta-\gamma}\theta\Big]+\sum_{\beta<\alpha=2}b_{\alpha\beta}D^\alpha wD^\beta(w\theta)\Big\}dxdt=0.$$

Отсюда находим

$$\int_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)}\Big\{\mu w^2\theta+\sum_{\alpha=\beta=2}a_{\alpha\beta}D^\alpha wD^\beta w\theta\Big\}dxdt+1/2\int_{\omega(l_2;\tau_2)}w^2\theta dx\leq 1/2\int_{\omega(l_2;\tau_1)}w^2\theta dx+\Big|\int_{\omega(l_2,l_1;\tau_2,\tau_1)}\sum_{\beta=\alpha=2}\times$$

$$\times\sum_{\gamma<\beta}a_{\alpha\beta}A_{\gamma\beta}D^\alpha wD^{\beta-\gamma}\theta D^\gamma wdxdt\Big|+\Big|\int_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)}\sum_{\beta<\alpha=2}b_{\alpha\beta}D^\alpha wD^\beta(w\theta)dxdt\Big|+$$

$$+\Big|\int_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)}\sum_{\alpha<2}c_\alpha D^\alpha ww\theta dxdt\Big| \tag{I3}$$

Заметим, что в правой части неравенства суммирование проводится по тем мультииндексам γ, для которых $\gamma_i\leq\beta_i$ при $i=1,2,\dots,n$ и $|\gamma|<|\beta|$. Рассмотрим вторую сумму из правой части неравенства (I3)

$$I_1=\int_{\omega(l_2,l_1;\tau_1,\tau_2)}\sum_{\beta=\alpha=2}\sum_{\gamma<\beta}a_{\alpha\beta}A_{\gamma\beta}D^\alpha wD^{\beta-\gamma}\theta D^\gamma wdxdt.$$

Легко видеть, что

$$|a_{\alpha\beta}D^\alpha wD^\gamma wD^{\beta-\alpha}\theta|\leq\varepsilon/2|a_{\alpha\beta}(D^\alpha w)^2\theta|+1/2\varepsilon|a_{\alpha\beta}(D^\gamma w)^2(D^{\beta-\alpha}\theta)^2 1/\theta|.$$

Пусть $M_3=\max A_{\gamma\beta}$, $M_4=2^n$, тогда находим

$$|I_1|\leq M_3M_4\varepsilon/2\int_{\omega(l_2,l_1;\tau_1,\tau_2)}\sum_{\beta=\alpha=2}|a_{\alpha\beta}|(D^\alpha w)^2\theta wdxdt+$$

$$+M_3/2\varepsilon\int_{\omega(l_2,l_1;\tau_1,\tau_2)}\sum_{\beta=\alpha=2}\sum_{\gamma<\beta}|a_{\alpha\beta}|(D^{\beta-\gamma}\theta)^2(D^\gamma w)^2\frac{1}{\theta}dxdt\leq$$

$$\leq M_3M_4^2M\varepsilon/2\int_{\omega(l_2,l_1;\tau_1,\tau_2)}a(x)\sum_{\alpha=2}(D^\alpha w)^2\theta wdxdt+$$

$$+MM_4M_3/2\varepsilon\int_{\omega(l_2,l_1;\tau_1,\tau_2)}\sum_{\beta=2}\sum_{\gamma<2}a(x)(D^{\beta-\gamma}\theta)^2(D^\gamma w)^2\frac{1}{\theta}dxdt.$$

Пусть φ_1 - гладкая функция в R^n, обладающая следующими свойствами: $\varphi_1(x)=1$ в области $\{x:|x|<\ell_1+1/4\rho\}$, $\varphi(x)=0$ вне области $\{x:|x|<\ell_1\}$, $0\le\varphi\le 1$, $|D_x^\alpha \varphi_1|\le c_{|\alpha|}\rho^{-|\alpha|}$ в R^n, где $c_{|\alpha|}=const>0$ не зависит от ρ. Пусть $\theta_1(x)=\varphi_1^4(x)$; тогда легко видеть, что $|D_x^\alpha\theta_1(x)|\le c''_{|\alpha|}\rho^{-|\alpha|}\varphi_1^{4-|\alpha|}$, $|\alpha|\le 2$, $c''_{|\alpha|}=const>0$ (аналогично оценкам (II)). Пусть теперь $\theta_0=\theta\theta_1$, тогда очевидно $\theta_0<\theta$, $\theta_0<\theta_1$. Поскольку $\theta_0=\theta_1$ при $|x|<\ell_1+\rho/4$ и $\theta_0=\theta_1$ при $|x|>\ell_2+\rho/4$, то справедливы неравенства $|D^\alpha\theta_0(x)|\le c^\alpha_{|\alpha|}\rho^{-|\alpha|}\varphi_0^{4-|\alpha|}$, где $\varphi_0^4=\theta_0$, $c^\alpha_{|\alpha|}=const>0$ и не зависит от ρ. Нетрудно видеть, что в области $\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)$ при любых α, $|\alpha|\ne 0$, имеет место оценка $\frac{(D^\alpha\theta)^2}{\theta}\le\frac{(D^\alpha\theta_0)^2}{\theta_0}$. Поскольку при $|x|>\ell_1+\rho/4$ $\theta=\theta_0$, а при $\ell_1<|x|<\ell_1+\rho/4$ $D^\alpha\theta=0$, то учитывая последнее свойство, получаем

$$|I_1|\le M_3M_4^2M\varepsilon/2\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)}a(x)\sum_{\alpha=2}(D^\alpha w)^2\theta w\,dx\,dt+$$

$$+MM_4M_3/2\varepsilon\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)}a(x)\sum_{\beta=2}\sum_{\gamma<2}(D^\gamma w)^2\frac{(D^{\beta-\gamma}\theta_0)^2}{\theta_0}dx\,dt\le$$

$$\le M_3M_4^2M\varepsilon/2\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)}a(x)\sum_{\alpha=2}|D^\alpha w|^2\theta w\,dx\,dt+MM_4M_3M_5/2\varepsilon\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)}a(x)\times$$

$$\times\sum_{\beta=2}\sum_{\gamma<2}(D^\gamma w)^2\varphi_0^{2\gamma}\rho^{-2(2-\gamma)}dx\,dt,$$

где $M_5=\max\limits_\gamma c^0_\gamma$. Пусть $\varepsilon_1=MM_3M_4\varepsilon/2$ и $M_6=MM_3M_5M_4^2\,1/2\varepsilon$. Тогда находим

$$|I_1|\le\varepsilon_1\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)}a(x)\sum_{\alpha=2}|D^\alpha w|^2\theta w\,dx\,dt+M_6(\varepsilon)\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)}a(x)\sum_{\gamma=2}(D^\gamma w)^2\varphi_0^{2\gamma}\rho^{-2(2-\gamma)}dx\,dt. \quad (I4)$$

Рассмотрим вторую сумму из правой части неравенства (I4)

$$I_2=\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)}a(x)\sum_{\gamma<1}(D^\gamma w)^2\varphi_0^{2\gamma}\rho^{-2(2-\gamma)}dx\,dt.$$

Пусть $|\nu|=1$ и $|\gamma|=s\ge 1$. Нетрудно видеть, что после интегрирования по частям получаем

$$\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^\nu w)^2\varphi_0^{2s}\,dxdt = \Big|\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)} D^\nu\big(a(x)D^\nu w\,\varphi_0^{2s}\big)D^{\nu-\nu} w\,dxdt\Big|,$$

так как на границе области $\varphi_0=0$. Отсюда, используя известное неравенство $2ab\leq\varepsilon a^2+\varepsilon^{-1}b^2$, находим

$$\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^\nu w)^2\varphi_0^{2s}\,dxdt \leq \frac{\varepsilon_2}{2}\rho\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)}|D^\nu a(x)|(D^\nu w)^2\varphi_0^{2s}\,dxdt +$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon_2\rho}\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)}|D^\nu a(x)|(D^{\nu-\nu}w)^2\varphi_0^{2s}\,dxdt + \frac{\varepsilon_3}{2}\rho^2\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\nu-\nu}w)^2\varphi_0^{2s}\,dxdt +$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon_3\rho^2}\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\nu-\nu}w)^2\varphi_0^{2(s-1)}\,dxdt + \frac{\varepsilon_4}{2}\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^\nu w)^2\varphi_0^{2s}\,dxdt +$$

$$+\frac{c_0'}{2\varepsilon_4\rho^2}\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\nu-\nu}w)^2\varphi_0^{2(s-1)}\,dxdt.$$

Используя неравенство (9) для функции a, а также учитывая, что в области $\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)$ имеет место неравенство $(|x|+1)^{-1}\leq\ell_1^{-1}$ и $\rho^{-1}\leq\ell_1^{-1}$, находим

$$\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)}|D^\nu a(x)|\Phi^2\,dxdt \leq \frac{B}{\rho}\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\Phi^2\,dxdt \tag{I5}$$

при любой функции Φ.

Используя (I5), получаем

$$\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^\nu w)^2\varphi_0^{2s}\,dxdt \leq \frac{\varepsilon_2}{2}B\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\nu-\nu}w)^2\varphi_0^{2s}\,dxdt + \frac{B}{2\varepsilon_2\rho^2}\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\nu-\nu}w)^2\varphi_0^{2s}\,dxdt +$$

$$+\frac{\varepsilon_3}{2}\rho^2\int\limits_{\omega(\ell_1,\ell_2;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\nu+\nu}w)^2\varphi_0^{2(s+1)}\,dxdt + \frac{1}{2\varepsilon_3\rho^2}\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\nu-\nu}w)^2\varphi_0^{2(s-1)}\,dxdt +$$

$$+\frac{\varepsilon_4}{2}\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^\nu w)^2\varphi_0^{2s}\,dxdt + \frac{c_1^0}{2\varepsilon_4\rho^2}\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\nu-\nu}w)^2\varphi_0^{2(s-1)}\,dxdt. \tag{I6}$$

Собирая вместе одинаковые члены, из (I6) выводим

$$\int\limits_{\omega(l_2,l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(\mathcal{D}^{\gamma}w)^2\varphi_0^{2s}\,dxdt \leq \left(\frac{\varepsilon_1}{2}B+\frac{\varepsilon_4}{2}\right)\int\limits_{\omega(l_2,l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(\mathcal{D}^{\gamma}w)^2\varphi_0^{2s}\,dxdt +$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{B}{2\varepsilon_2}+\frac{1}{2\varepsilon_3}+\frac{c_1^0}{2\varepsilon_4}\right)\int\limits_{\omega(l_2,l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(\mathcal{D}^{\gamma-\nu}w)^2\varphi_0^{2(s-1)}\,dxdt +$$

$$+\int\limits_{\omega(l_2,l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(\mathcal{D}^{\gamma+\nu}w)^2\varphi_0^{2(s+1)}\,dxdt.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\varphi_0^2\leq 1$, и заменили φ_0^{2s} на $\varphi_0^{2(s+1)}$.

Положим $\varepsilon_2=1/2$, $\varepsilon_4=1/2B$, $\varepsilon_3=\varepsilon$. Тогда находим

$$\int\limits_{\omega(l_2,l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(\mathcal{D}^{\gamma}w)^2\varphi_0^{2s}\,dxdt \leq \varepsilon\rho^2\int\limits_{\omega(l_2,l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(\mathcal{D}^{\gamma-\nu}w)^2\varphi_0^{2(s+1)}\,dxdt +$$

$$+M_7(\varepsilon)\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\omega(l_2,l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(\mathcal{D}^{\gamma-\nu}w)^2\varphi_0^{2(s-1)}\,dxdt, \qquad (17)$$

где $M_7(\varepsilon)=2B^2+62c_1^0+1/\varepsilon$. Просуммируем (I7) по всем мультииндексам γ , при которых $|\gamma|=s$ $(s=1)$. Тогда имеем

$$\sum_{\gamma=1}\rho^{-2}\int\limits_{\omega(l_2,l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(\mathcal{D}^{\gamma}w)^2\varphi_0^2\,dxdt \leq$$

$$\leq\varepsilon\sum_{\gamma=2}\int\limits_{\omega(l_2,l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(\mathcal{D}^{\gamma}w)^2\varphi_0^4\,dxdt + M_7(\varepsilon)\rho^{-4}\int\limits_{\omega(l_2,l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)w^2\,dxdt. \qquad (18)$$

Рассмотрим третью сумму из правой части неравенства (I3)

$$I_3=\int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)}\sum_{\alpha\leq 1}c_\alpha\mathcal{D}^{\alpha}w\,w\,\theta\,dxdt.$$

Из условий (7) имеем

$$\left|\int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)} c_\alpha\mathcal{D}^{\alpha}w\,w\,\theta\,dxdt\right| \leq \varepsilon\int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)}|\mathcal{D}^{\alpha}w|^2\theta\,dxdt+\frac{c^2}{\varepsilon}\int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)} w^2\theta\,dxdt.$$

Отсюда находим

$$|I_3|\leq\sum_{\alpha\leq 1}\int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)}|\mathcal{D}^{\alpha}w|^2\theta\,dxdt+M_{10}\int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)} w^2\theta\,dxdt. \qquad (19)$$

Рассмотрим четвертую сумму из правой части неравенства (I3)

$$I_4 = \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} \sum_{\beta\leq\alpha=2} b_{\alpha\beta} \mathcal{D}^\alpha w \mathcal{D}^\beta (w\theta)\, dx dt.$$

Имеем

$$|b_{\alpha\beta}\mathcal{D}^\alpha w \mathcal{D}^\beta(w\theta)| \leq \frac{\varepsilon}{2} b_{\alpha\beta}^2 |\mathcal{D}^\alpha w|\theta + \frac{1}{2\varepsilon}|\mathcal{D}^\beta(w\theta)|\frac{1}{\theta}. \tag{20}$$

Поскольку $\mathcal{D}^\beta(w\theta) = \sum\limits_{\gamma\leq\beta} A_{\alpha\beta}\mathcal{D}^\alpha w \mathcal{D}^{\beta-\gamma}\theta$, то $|\mathcal{D}^\beta(w\theta)|^2 \leq 2^n \sum\limits_{\gamma\leq\beta} A_{\alpha\beta}^2 |\mathcal{D}^\gamma w|^2 |\mathcal{D}^{\beta-\gamma}\theta|^2$.

Но тогда из уравнений (20) и условия (8) получаем

$$\Big|\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} \sum_{\beta\leq\alpha=2} b_{\alpha\beta}\mathcal{D}^\alpha w \mathcal{D}^\beta(w\theta)\, dx dt\Big| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} M_1 \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} \sum_{\alpha=2} a(x)|\mathcal{D}^\alpha w|^2 \theta\, dx dt + M_{11}(\varepsilon) \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} \sum_{\beta\leq1} |\mathcal{D}^\beta(w\theta)|^2 \frac{1}{\theta}\, dx dt,$$

где $M_{11}(\varepsilon) = M_{11}(\varepsilon, M_1)$. Отсюда находим

$$|I_4| \leq \varepsilon \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} \sum_{\alpha=2} a(x)|\mathcal{D}^\alpha w|^2\theta\, dx dt + M_{12}(\varepsilon) \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} \sum_{\beta\leq1}\sum_{\gamma\leq\beta} \rho^{-2(\beta-\gamma)} (\mathcal{D}^\gamma w)^2 \varphi^{2(2-\beta-\gamma)}\, dx dt,$$

где M_{12} зависит от M_{11} и ε . Обозначим

$$I_5 = \sum_{\beta\leq1}\sum_{\gamma\leq\beta} \rho^{-2(\beta-\gamma)} \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} (\mathcal{D}^\gamma w)^2 \varphi^{2(2-\beta-\gamma)}\, dx dt.$$

Нетрудно видеть, что I_5 можно оценить сверху следующим образом:

$$I_5 \leq \sum_{s=0}\sum_{\alpha\leq1-s} \rho^{-2s} \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} |\mathcal{D}^\alpha w|^2 \varphi^{2(2-s)}\, dx dt = I_6.$$

Заметим, что слагаемое

$$\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} \sum_{\alpha\leq1} |\mathcal{D}^\alpha w|^2 \theta\, dx dt$$

из правой части неравенства (I9) входит в сумму I_6 . Поэтому из оценки I_6 будет следовать и оценка I_3 .

$$I_6 = \sum_{s=0}\sum_{\alpha\leq1-s} \rho^{-2s} \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} |\mathcal{D}^\alpha w|^2 \varphi^{2(2-s)}\, dx dt \leq \sum_{\alpha\leq1} \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} |\mathcal{D}^\alpha w|^2 \varphi^4\, dx dt +$$

$$+ M''\rho^{-2} \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} w^2\varphi^2\, dx dt \leq \sum_{\alpha\leq1} \rho^{-2(2-\alpha)} \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} |\mathcal{D}^\alpha w|^2 \varphi^{2\alpha}\, dx dt + M''\rho^{-2} \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} w^2\varphi^2\, dx dt. \tag{21}$$

Аналогично неравенству (I8) можно показать, что

$$\sum_{\alpha\le 1}\rho^{-2(2-\alpha)}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}|D^\alpha w|^2\varphi^{2\alpha}dxdt\le\varepsilon'\sum_{\alpha=2}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}|D^\alpha w|^2\varphi^{2\alpha}dxdt+\hat{M}_8\rho^{-4}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}w^2dxdt. \tag{22}$$

Тогда из (2I) и (22) получаем

$$I_6\le\varepsilon'\sum_{\alpha=2}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}|D^\alpha w|^2\varphi^{2\alpha}dxdt+\hat{M}_9\rho^{-4}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}w^2dxdt \tag{23}$$

Учитывая неравенства (I4),(I8),(I9) и (23), из (I3) получаем

$$\begin{aligned}1/2\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1)}w^2\theta dx+\mu\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}w^2\theta dxdt+\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}\sum_{\alpha=\beta=2}a_{\alpha\beta}D^\alpha wD^\beta w\theta dxdt\le 1/2\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_2)}w^2\theta dxdt+\\+\varepsilon_1\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}a(x)\sum_{\alpha=2}(D^\alpha w)^2\theta dxdt+M_6(\varepsilon_1)\varepsilon\sum_{\alpha=2}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}a(x)(D^\alpha w)^2\varphi_0^4dxdt+\\+M_7(\varepsilon)M_6(\varepsilon_1)\rho^{-4}\int\limits_{\omega(\ell_2,\ell_1;\tau_1,\tau_2)}a(x)w^2\theta dxdt+\varepsilon'\sum_{\alpha=2}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}|D^\alpha w|^2\varphi^{2\alpha}dxdt+\hat{M}_9\rho^{-4}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}w^2dxdt+\\+M_{10}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}w^2\theta dxdt+\varepsilon\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}a(x)\sum_{\alpha=2}|D^\alpha w|^2\theta dxdt+M_{12}(\varepsilon)\varepsilon'\sum_{\alpha=2}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}|D^\alpha w|^2\varphi^{2\alpha}dxdt+\\+M_{12}(\varepsilon)\hat{M}_0\rho^{-4}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}w^2dxdt.\end{aligned}$$

Учитывая условия (6) и (8), находим

$$\begin{aligned}1/2\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1)}w^2\theta dx+\mu\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}w^2\theta dxdt+m_1\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}a(x)\sum_{\alpha=2}|D^\alpha w|^2\theta dxdt\le 1/2\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}w^2dx+\\+(\varepsilon_1+M_6(\varepsilon_1)\varepsilon+\varepsilon'+M_{12}(\varepsilon)\varepsilon'+\varepsilon)\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}a(x)\sum_{\alpha=2}|D^\alpha w|^2\theta dxdt+M_{10}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}w^2\theta dxdt+\\+\left(M_7(\varepsilon)M_6(\varepsilon_1)+\frac{\hat{M}_0}{m_0}+\frac{M_{12}(\varepsilon)\hat{M}_0}{M_0}\right)\rho^{-4}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}a(x)w^2\theta dxdt.\end{aligned}$$

Положим $\varepsilon_1=1/3$, $\varepsilon'=1/3(M_6(\varepsilon_1)+1)$, $\varepsilon=1/3(M_{12}(\varepsilon)+1)$. Тогда

$$1/2\int\limits_{\omega(\ell_2,\tau_1)}w^2\theta dx+\mu\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}w^2\theta dxdt\le 1/2\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}w^2dx+M_{13}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}w^2\theta dxdt+\hat{M}\rho^{-4}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}a(x)w^2\theta dxdt.$$

Пусть $\mu=\mu_0+\mu_1$ и $\mu_1=M_{13}$. Тогда из последнего неравенства получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_2)} w^2\theta\,dx+\mu_0\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} w^2\theta\,dx\,dt\le \frac{1}{2}\int\limits_{\omega(\ell_2,\ldots,\tau_1)} w^2dx+\frac{\hat{M}\ell_0^6 h_0(h_0(\ell_2))}{\rho^4}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} w^2dx\,dt.$$

Учитывая свойства функции θ , получаем неравенство (IO). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (4)-(9) и u - обобщенное решение задачи (I)-(2). Тогда для любых $\ell_2>\ell_1>0,\ \ell_2\ge 2\ell_1,\ \ell_1>1$ и $0<\tau<T$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{\omega(\ell_1;0,\tau)} u^2dx\,dt\le \hat{c}\exp\{-\kappa+2\mu_0\tau\}\int\limits_{\omega(\ell_2;0,\tau)} u^2dx\,dt, \tag{24}$$

где $\hat{c}=const>0$, постоянные κ и μ_0 связаны соотношением $P\equiv\dfrac{\hat{M}\ell_0^6\kappa^4}{\mu_0(\ell_2-\ell_1)^4}h_0(h_0(\ell_2))\le e^{-1}$,

κ - целое положительное число.

Доказательство. Пусть $\ell_2>\ell_1>0$ и $\ell_2\ge 2\ell_1$. Положим $\rho_\kappa=(\ell_2-\ell_1)/\kappa$. Очевидно, что $0<\rho\le\ell_2-\ell_1$. Положим при $s=1,2,\ldots,(\kappa-1)$ $\ell_1(s)=\ell_1(s-1)+\rho_\kappa$, $\ell_2(s)=\ell_1(s)+\rho_\kappa$, $\ell_1(0)=\ell_1$.

Тогда из неравенства (IO) имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega(\ell_1(s);\tau_2)} w^2dx+\mu_0\int\limits_{\omega(\ell_1(s);\tau_1,\tau_2)} w^2dx\,dt\le \frac{1}{2}\int\limits_{\omega(\ell_2(s);\tau_1)} w^2dx+\frac{\hat{M}\ell_2^6(s)}{\rho^4}h_0(h_0(\ell_2(s)))\int\limits_{\omega(\ell_2(s);\tau_1,\tau_2)} w^2dx\,dt.$$

Полагая здесь $\tau_1=0$, $\tau_2=\tau$ и учитывая, что $\ell_2(s)\le\ell_2$, находим

$$\mu_0\int\limits_{\omega(\ell_1(s);0,\tau)} w^2dx\,dt\le\frac{\hat{M}\ell_0^6(s)}{\rho^4}h_0(h_0(\ell_2(s)))\int\limits_{\omega(\ell_2(s);0,\tau)} w^2dx\,dt.$$

Поскольку $P\le 1$, то

$$\int\limits_{\omega(\ell_1(s);0,\tau)} w^2dx\,dt\le e^{-1}\int\limits_{\omega(\ell_2(s);0,\tau)} w^2dx\,dt.$$

Применяя последнее неравенство, соответствующее $(s+1)$, для оценки правой части этого же неравенства, соответствующего s, и полагая последовательно $s=0,1,\ldots,(\kappa-1)$, находим

$$\int\limits_{\omega(\ell_1;0,\tau)} w^2dx\,dt\le\exp\{-\kappa\}\int\limits_{\omega(\ell_2;0,\tau)} w^2dx\,dt.$$

Учитывая, что $u=\exp\{\mu t\}w$, получаем

$$\int\limits_{\omega(\ell_1,0,\tau)} u^2 dxdt \le \exp\{-\kappa+2\mu t\}\int\limits_{\omega(\ell_2;0,\tau)} u^2 dxdt.$$

Учитывая, что $\mu=\mu_0+\mu_1$, находим

$$\int\limits_{\omega(\ell_1;0,\tau)} u^2 dxdt \le \exp\{-\kappa+2\mu_0\tau+2\mu_1\tau\}\int\limits_{\omega(\ell_2;0,\tau)} u^2 dxdt.$$

Отсюда следует неравенство (24) при $\hat{c}=\exp\{2\mu_1 T\}$.

Лемма доказана.

Пусть h – неубывающая положительная функция, такая, что

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r h^3(r) h_0(h_0(r))}=\infty,$$

причем $h(r)\ge 1$ и при $r\ge 1$ $[h(2r)]\le c_2[h(r)]$, где $c_2=\mathrm{const}>0$ и $[\xi]$ – целая часть числа ξ. Пусть $T(m)=b_2\lambda^{-1}[h(2^{m+1})]^{-3}\times$ $\times[h_0(h_0(2^{m+1}))]^{-1}$, где $\lambda, b_2=\mathrm{const}>0$. Легко видеть, что $\sum\limits_{m=m_0}^{\infty}T(m)=\infty$ и при любых $t_0\in[0,T]$ существует $E=E(t_0,m_0,\lambda,b_2)$, что $\sum\limits_{m=m_0}^{E}T(m)\ge t_0$.
Пусть $0<\delta\le 1$ такое, что $\sum\limits_{m=m_0}^{E}\delta T(m)=t_0$. Положим $\tau(m)=\sum\limits_{s=m}^{E}\delta T(s)$.
Очевидно, что $\tau(m_0)=t_0$ и $\tau(E+1)=0$.

<u>Лемма 3</u>. Пусть выполнены условия (4)-(9). Тогда для обобщенного решения u задачи (I)-(2) имеет место неравенство

$$\int\limits_{\omega(2^{m_0}-1,t_0)} u^2 dx \le \sum_{m=m_0}^{E}\hat{c}_1^{\,2}\exp\{(m-m_0)\ln 2\hat{c}_1+{}^{6}\!/_{2}\ln(m-m_0)^2+ \tag{25}$$
$$+m6\ln 2+\left(2b_1b_2\lambda(\xi_0+1)-{}^{\lambda}\!/_{2}\right)2^{\frac{4-6}{3}(m+1)}h(2^{m+1})\}\int\limits_{\omega(2^{m+1};0,t_0)} u^2 dxdt,$$

где $c_1=\mathrm{const}>0$, $\xi_0=\left(1-2^{-(4-6)/3}\right)^{-1}$, $b_1=2^4\hat{M}e$, b_2 и λ – произвольные целые постоянные.

<u>Доказательство</u>. Из неравенства (I0) следует, что

$$\mu_0\int\limits_{\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} w^2 dxdt\le 1/2\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1)} w^2 dx+\frac{\hat{M}\ell_2^6}{\rho^4}h_0(h_0(\ell_2))\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} w^2 dxdt.$$

оценки правой части этого же неравенства, соответствующего s, и полагая последовательно $s=0,1,\dots,(k-1)$, находим

$$\int\limits_{\omega(2^m-1;\tau(m))} u^2 dx \leq \sum_{m=m_0}^{E}\left(A(m)\prod_{s=m_0}^{m-1} B(s) \int\limits_{\omega(2^{m+1},\tau(m+1),\tau(m))} u^2 dx dt\right) \qquad (31)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\tau(m_0$ $\tau(E+1)=0$ и $u(x,0)=0$.

Оценим теперь $\prod\limits_{s=m_0}^{m-1} B(s)$.

$$\prod_{s=m_0}^{m-1} B(s) \leq \prod_{s=m_0}^{m-1} 2^{s\sigma_1+1}\hat{c}_1^2 \exp\{2T\mu(s)\} \leq \exp\{(m-m_0)\ln 2\,\hat{c}_1^2 +$$

$$+\sigma/2 \ln 2(m-m_0)^2 + 2b_1 b_2 \lambda \xi_0 [h(2^{m+1})] 2^{\frac{4-\sigma}{3}(m+1)}\},$$

где $\xi_0 = \left(1-2^{-(4-\sigma)/3}\right)^{-1}$.

Обозначим

$$P(m,m_0) = (m-m_0)\ln 2\left(\hat{c}_1^2 + \frac{\sigma_1}{2}\ln 2(m-m_0)^2\right).$$

Учитывая оценку $\prod\limits_{s=m_0}^{m-1} B(s)$, из неравенства (31) получаем

$$\int\limits_{\omega(2^m-1;\tau(m))} u^2 dx \leq \sum_{m=m_0}^{E} \hat{c}_1^2 2^{m\sigma_1} \exp\{-k+2\mu_0 T(m) + P(m,m_0) + 2b_1 b_2 \lambda \xi_0 [h(2^{m+1})] 2^{\frac{4-\sigma}{3}(m+1)}\} \times$$

$$\times \int\limits_{\omega(2^{m+1};\tau(m+1),\tau(m))} u^2 dx dt \leq \sum_{m=m_0}^{E} \hat{c}_1^2 \exp\{P_1(m,m_0) + 2b_1 b_2 \lambda [h(2^{m+1})] 2^{\frac{4-\sigma}{3}(m+1)} +$$

$$+2b_1 b_2 \lambda \xi_0 [h(2^{m+1})] 2^{\frac{4-\sigma}{3}(m+1)} - \lambda [h(2^{m+1}) 2^{\frac{4-\sigma}{3}(m+1)}]\} \times \int\limits_{\omega(2^{m+1};\tau(m+1),\tau(m))} u^2 dx dt,$$

где $P_1(m,m_0) = P(m,m_0) + m\sigma_1 \ln 2$. Отсюда находим

$$\int\limits_{\omega(2^m-1;\tau(m))} u^2 dx \leq \hat{c}_1^2 \exp\{P_1(m,m_0) + (2b_1 b_2 \lambda(\xi_0+1) - \frac{\lambda}{2})[h(2^{m+1})] 2^{\frac{4-\sigma}{3}(m+1)}\} \times \int\limits_{\omega(2^{m+1},\tau(m+1),\tau(m))} u^2 dx dt$$

Из последнего неравенства следует неравенство (25). Лемма доказана.

Теорема. Пусть выполнены условия (4) и (9). Если для обобщенного решения u задачи (1)-(2) существует положительная константа $\eta>0$, такая, что при любых $R \geq R^*$, $R^* = const > 0$, справедливо неравенство

$$\int\limits_{\omega(R,0,T)} u^2\,dx\,dt \leq \exp\left\{\eta R^{\frac{4-\sigma}{3}} h(R)\right\}, \tag{32}$$

то $u=0$ в ω.

<u>Доказательство</u>. Из (25) и (29) получаем

$$\int\limits_{\omega(2^{m_0}-1,t_0)} u^2\,dx \leq \sum_{m=m_0}^{E} \hat{c}_1^2 \exp\left\{(m-m_0)\ln 2\hat{c}_1^2 + m\sigma_1 \ln 2 + \lambda(2b_1b_2(\xi_0+1)-1/2)2^{\frac{4-\sigma}{3}(m+1)} h(2^{m+1}) + \right.$$
$$\left. + \eta 2^{\frac{4-\sigma}{3}(m+1)} h(2^{m+1}) + \frac{\sigma}{2}\ln 2(m-m_0)^2\right\}.$$

При достаточно больших m и m_0

$$\left\{(m-m_0)\ln 2\hat{c}_1^2 + m\sigma_1\ln 2 + \frac{\sigma}{2}\ln 2(m-m_0)^2\right\} \leq \eta 2^{\frac{4-\sigma}{3}(m+1)} h(2^{m+1}),$$

поэтому

$$\int\limits_{\omega(2^{m_0}-1,t_0)} u^2\,dx \leq \sum_{m=m_0}^{E} \hat{c}_1^2 \exp\left\{(-\lambda + 2\eta + 2b_1b_2\lambda(\xi_0+1)2^{\frac{4-\sigma}{3}} h(2^{m+1})\right\}.$$

Пусть $b_2 = (8b_1(\xi_0+1))^{-1}$ и $\lambda = [12\eta+1]$.

$$\int\limits_{\omega(2^{m_0}-1,t_0)} u^2\,dx \leq \sum_{m=m_0}^{E} \hat{c}_1^2 \exp\left\{-\eta 2^{\frac{4-\sigma}{3}(m+1)} h(2^{m+1})\right\}. \tag{33}$$

Нетрудно видеть, что при любом $\sigma_1 = const > 0$

$$\sum_{m=m_0}^{E} \exp\left\{-\eta 2^{\sigma_1(m+1)} h(2^{m+1})\right\} \leq \exp\left\{-\eta 2^{\sigma_1(m_0+1)} h(2^{m_0+1})\right\} \times \sum_{m=m_0}^{E} \exp\left\{-\eta\left(2^{\sigma_1(m+1)} h(2^{m+1}) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - 2^{\sigma_1(m_0+1)} h(2^{m_0+1})\right)\right\} \leq \exp\left\{-\eta 2^{\sigma_1(m_0+1)} h(2^{m_0+1})\right\} \sum_{m=m_0}^{E} \exp\left\{-\eta 2^{\sigma_1(m_0+1)} h(2^{m_0+1})(2^{\sigma_1(m-m_0)}-1)\right\}.$$

При достаточно больших m_0 $2^{(m-m_0)\sigma_1} \geq \sigma_0(m-m_0)+1$, где $\sigma_0 = const > 0$ и зависит только от σ_1. Тогда из (33) получаем

$$\int\limits_{\omega(2^{m_0}-1,t_0)} u^2\,dx \leq \hat{c}_1^2 \exp\left\{-\eta 2^{\sigma_1(m_0+1)} h(2^{m_0+1})\right\} \sum_{m=m_0}^{E} \exp\left\{-\eta\sigma_0 2^{\frac{4-\sigma}{3}(m_0+1)} h(2^{m_0+1})(m-m_0)\right\} \leq$$
$$\leq \hat{c}_1^2 \exp\left\{-\eta 2^{\sigma_1(m_0+1)} h(2^{m_0+1})\right\} \times \sum_{s=0}^{\infty} \exp\left\{-\eta\sigma_0 s 2^{\frac{4-\sigma}{3}(m_0+1)} h(2^{m_0+1})\right\} \leq$$
$$\leq \hat{c}_1^2 \exp\left\{-\eta 2^{\sigma_1(m_0-1)} h(2^{m_0-1})\right\} \left(1 - \exp\left\{-\eta\sigma_0 s 2^{\frac{4-\sigma}{3}(m_0+1)} h(2^{m_0+1})\right\}\right)^{-1}.$$

Пусть $m_0 \to \infty$, тогда $u=0$ при $t=t_0$. Но так как t_0 произвольное, то $u=0$ в ω.

Поступила 15.V.1996

Кафедра
дифференциальных и интегральных
уравнений

L - контур границы пластины, $U(s), V(s), F_1(s), F_2(s)$ - функции, характеризующие поле напряжений в пластине, $\rho(s)$ - радиус кривизны контура L, $f_1(s)$ и $f_2(s)$ - функции от внешних нагрузок, действующих на L, $z=\omega(\zeta)$ - функция, конформно отображающая область, занимаемую срединной плоскостью пластины, на единичную окружность.

В качестве примера рассмотрим круглый диск с центром в начале координат с границей L. Обозначим через L_1 дугу границы с центральным углом α, через L_9 - дугу с центральным углом $-\alpha$, через L_5 - часть границы между центральными углами $\pi-\alpha$ и $\pi+\alpha$. Через L_3 и L_7 обозначим дуги контура L соответственно с центральными углами между $\frac{\pi}{2}-\beta, \frac{\pi}{2}+\beta$ и $\frac{3\pi}{2}-\beta, \frac{3\pi}{2}+\beta$ ($\alpha<\frac{\pi}{2}, \beta<\frac{\pi}{2}, \alpha\leq\beta$ отсчитываются от оси ox в положительном направлении). Предположим, что действующие внешние усилия на участках L_1+L_9 и L_5 параллельны оси ox и соответственно равны $P_x=hP_1$ и $P_x=-hP_1$, а на участках L_3 и L_7 параллельны оси oy и соответственно равны $P_y=hP_2$ и $P_y=-hP_2$. Вдоль участка границы $L_2+L_4+L_6+L_8$ пластинка свободна от внешних усилий.

Требуется найти такие значения жёсткостей подкрепляющего ребра $\delta_1(s)$ и $\delta_2(s)$, которые всюду в пластинке обеспечивают следующее поле напряжений:

$$\sigma_x=\sigma_y=P=const, \quad \tau_{xy}=0. \tag{5}$$

В этом случае функции, характеризующие поле напряжений в пластине, имеют вид / 2 /:

$$U(\theta)=\frac{PR}{2}(\varkappa-1), \quad V(\theta)=0, \quad F_1(\theta)=0, \quad F_2(\theta)=-PR\,. \tag{6}$$

Для вычисления функций f_1 и f_2 на каждом участке L_j ($j = \overline{1,9}$) пользуемся выражением 3

$$f_1(\sigma)+if_2(\sigma)=\frac{RP_1}{\sigma}\left[\frac{1}{hP_1}\int_0^\sigma (P_x+iP_y)\frac{d\sigma}{\sigma}+C_1+iC_2\right]. \qquad (7)$$

После некоторых преобразований с учётом симметрии функций f_1 и f_2 относительно координатных осей и с учётом равенства $\omega(\sigma)=R\sigma=Re^{i\theta}$, находим

Таблица

на	f_1/RP_1	f_2/RP_1
L_1	$C_1\cos\theta+(C_2+\theta)\sin\theta$	$(C_2+\theta)\cos\theta-C_1\sin\theta$
L_2	$C_1\cos\theta+(C_2+\alpha)\sin\theta$	$(C_2+\alpha)\cos\theta-C_1\sin\theta$
L_3	$\left[C_1-\frac{P_2}{P_1}(\theta-\beta)\right]\cos\theta+(C_2+\alpha)\sin\theta$	$(C_2+\alpha)\cos\theta-\left[C_1-\frac{P_2}{P_1}(\theta-\beta)\right]\sin\theta$
L_4	$\left[C_1-\frac{P_2}{P_1}(\pi-2\beta)\right]\cos\theta+(C_2+\alpha)\sin\theta$	$(C_2+\alpha)\cos\theta-\left[C_1-\frac{P_2}{P_1}(\pi-2\beta)\right]\sin\theta$
L_5	$\left[C_1-\frac{P_2}{P_1}(\pi-2\beta)\right]\cos\theta+(C_2+\pi-\theta)\sin\theta$	$(C_2+\pi-\theta)\cos\theta-\left[C_1-\frac{P_2}{P_1}(\pi-2\beta)\right]\sin\theta$
L_6	$\left[C_1-\frac{P_2}{P_1}(\pi-2\beta)\right]\cos\theta+(C_2-\alpha)\sin\theta$	$(C_2-\alpha)\cos\theta-\left[C_1-\frac{P_2}{P_1}(\pi-2\beta)\right]\sin\theta$
L_7	$\left[C_1-\frac{P_2}{P_1}(2\pi-\beta-\theta)\right]\cos\theta+(C_2-\alpha)\sin\theta$	$(C_2-\alpha)\cos\theta-\left[C_1-\frac{P_2}{P_1}(2\pi-\beta-\theta)\right]\sin\theta$
L_8	$C_1\cos\theta+(C_2-\alpha)\sin\theta$	$(C_2-\alpha)\cos\theta-C_1\sin\theta$
L_9	$C_1\cos\theta+(C_2-2\pi+\theta)\sin\theta$	$(C_2+\theta-2\pi)\cos\theta-C_1\sin\theta$

$$C_2=0, \quad C_1=\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\frac{P_2}{P_1}>0. \qquad (8)$$

Легко проверить, что интеграл $\int_0^\theta f_2(\theta)d\theta$ также симметричен относительно координатных осей, поэтому можно ограничиться его рассмотрением лишь на четверти окружности.

Далее вычисляем функцию $q_1(\theta)$, имеем

$$q_1(\theta)=\begin{cases}(1+C_1-\cos\theta)RP_1 & \text{на } L_1,\\ (1+C_1-\cos\alpha)RP_1 & \text{на } L_2,\\ \left[1+C_1-\cos\alpha-\frac{P_2}{P_1}(\sin\theta-\sin\beta)\right]RP_1 & \text{на } L_3.\end{cases} \qquad (9)$$

Следовательно, из условия (I) с учётом равенств (6) получаем

$$\delta_1(\theta)\frac{\varkappa-1}{2}=\begin{cases}-\left(1+\frac{C_3}{R^2P}\right)+\left(1+C_1-\cos\theta\right)\frac{P_1}{P} & \text{на } L_1, \\ -\left(1+\frac{C_3}{R^2P}\right)+\left(1+C_1-\cos\alpha\right)\frac{P_1}{P} & \text{на } L_2, \\ -\left(1+\frac{C_3}{R^2P}\right)+\left[1+C_1-\cos\alpha-\frac{P_2}{P_1}(\sin\theta-\sin\beta)\right]\frac{P_1}{P} & \text{на } L_3.\end{cases} \tag{10}$$

Полагая здесь $\theta=0$, выражаем произвольную постоянную C_3 C'_3 через значение $\delta_1(0)$. Эта величина жёсткости $\delta_1(\theta)$ в сечении $\theta=0$ остаётся произвольной.

Итак

$$1+\frac{C_3}{R^2P}=C_1\frac{P_1}{P}-\frac{\varkappa-1}{2}\delta_1(0). \tag{11}$$

Подставляя это значение в предыдущие формулы, находим

$$\delta_1(\theta)\frac{\varkappa-1}{2}=\begin{cases}(1-\cos\theta)\frac{P_1}{P}+\frac{\varkappa-1}{2}\delta_1(0) & \text{на } L_1, \\ (1-\cos\alpha)\frac{P_1}{P}+\frac{\varkappa-1}{2}\delta_1(0) & \text{на } L_2, \\ (1-\cos\alpha)\frac{P_1}{P}-(\sin\theta-\sin\beta)\frac{P_2}{P}+\frac{\varkappa-1}{2}\delta_1(0) & \text{на } L_3.\end{cases} \tag{12}$$

Любопытно отметить, что на участках загружения жесткость $\delta_1(\theta)$ несколько меньше, чем на незагруженной части границы, где δ_1 сохраняет постоянное значение. Действительно, по мере роста угла θ на дуге L_1 жёсткость $\delta_1(\theta)$ возрастает от значения $\delta_1(0)$ до значения

$$\delta_1(\alpha)=\delta_1(0)+\frac{2}{\varkappa-1}\frac{P_1}{P}(1-\cos\alpha), \tag{13}$$

которое сохраняется на участке L_2 , затем $\delta_1(\theta)$ убывает на дуге L_3 до значения

$$\delta_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=\delta_1(\alpha)-\frac{P_2}{P}(1-\sin\beta). \tag{14}$$

Легко проверить, что $\delta_1(\frac{\pi}{2}) \geq \delta_1(0)$, если выполняется условие

$$\frac{P_1}{P_2} \geq \frac{\sin^2 \beta/2}{\sin^2 \alpha/2}. \tag{15}$$

Из условия (2), с учётом равенств (6) и таблицы, легко получаем

$$\frac{\varkappa-1}{2}\left(\delta_1(\theta)+\delta_2(\theta)\right) = \begin{cases} \left(C_1\cos\theta+\theta\sin\theta\right)\frac{P_1}{P}-1 & \text{на } L_1, \\ \left(C_1\cos\theta+\alpha\sin\theta\right)\frac{P_1}{P}-1 & \text{на } L_2, \\ \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{P_2}{P}\cos\theta+\alpha\frac{P_1}{P}\sin\theta-1 & \text{на } L_3. \end{cases} \tag{16}$$

Для положительности $\delta_1+\delta_2$, в частности, в точках $\theta=0$ и $\theta=\frac{\pi}{2}$ должны выполняться условия

$$\frac{P_2}{P} > \frac{1}{\frac{\pi}{2}-\beta}, \qquad \frac{P_1}{P} > \frac{1}{\alpha}. \tag{17}$$

Если учесть, что главные векторы усилий, приложенных к дугам L_1 и L_3 соответственно равны

$$P_1^* = 2\alpha R P_1 h, \qquad P_2^* = 2R\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)P_2 h, \tag{18}$$

то из условий (17) следует

$$\frac{P_1^*}{2Rh} > P, \qquad \frac{P_2^*}{2Rh} > P. \tag{19}$$

Это означает, что задаваемая величина P должна быть меньше средних напряжений в диаметральных сечениях неподкреплённого диска под той же нагрузкой, что и следовало ожидать.

Через величины (18) величина C_1 выражается в виде

$$C_1 = \alpha P_2^* / P_1^*. \tag{20}$$

Через те же величины выражение (16) принимает вид

$$\frac{\varkappa-1}{2}\left(\delta_1(\theta)+\delta_2(\theta)\right) = \begin{cases} \lambda_2\cos\theta+\lambda_1\frac{\theta}{\alpha}\sin\theta-1 & \text{на } L_1 \\ \lambda_2\cos\theta+\lambda_1\sin\theta-1 & \text{на } L_2, \\ \lambda_2\frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\frac{\pi}{2}-\beta}\cos\theta+\lambda_1\sin\theta-1 & \text{на } L_3. \end{cases} \qquad (21)$$

Здесь обозначено

$$\lambda_1 = P_1^*/P^*, \qquad \lambda_2 = \frac{P_2^*}{P^*}, \qquad (22)$$

$P^* = 2RhP$ - главный вектор усилий, действующих в диаметральном сечении подкрепленного диска.

На основании (I9) легко заключить, что

$$\lambda_1 > 1, \qquad \lambda_2 > 1. \qquad (23)$$

Рассмотрим частный случай, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\alpha = \frac{\pi}{2}\ \beta$; тогда имеем

$$\frac{\varkappa-1}{2}\left(\delta_1(\theta)+\delta_2(\theta)\right) = \begin{cases} \lambda\left(\cos\theta+\frac{\theta}{\alpha}\sin\theta\right)-1 & \text{на } L_1, \\ \lambda(\cos\theta+\sin\theta)-1 & \text{на } L_2 \\ \lambda\left(\cos\theta^*+\frac{\theta^*}{\alpha}\sin\theta^*\right)-1 & \text{на } L_3, \end{cases} \qquad (24)$$

$$\theta^* = \frac{\pi}{2}-\theta.$$

Как и следовало ожидать, функции δ_1 и δ_2 симметричны относительно диаметра $\theta = \pi/4$.

Зная δ_1, из равенств (2I) определяем жесткость δ_2.

$$\frac{\varkappa-1}{2}\delta_2(\theta) = \begin{cases} \lambda_2\cos\theta+\frac{\lambda_1}{\alpha}(\theta\sin\theta-1+\cos\theta)-1-\frac{\varkappa-1}{2}\delta_1(0) & \text{на } L_1, \\ \lambda_2\cos\theta+\frac{\lambda_1}{\alpha}(\alpha\sin\theta-1+\cos\alpha)-1-\frac{\varkappa-1}{2}\delta_1(0) & \text{на } L_2, \\ \frac{\lambda_2}{\frac{\pi}{2}-\beta}(\theta^*\cos\theta+\sin\theta-\sin\beta)+\frac{\lambda_1}{\alpha}(\alpha\sin\theta- & \text{на } L_3 \\ -1+\cos\alpha)-1-\frac{\varkappa-1}{2}\delta_1(0) & \end{cases} \qquad (25)$$

Для положительности $\sigma_2(\theta)$ при $\theta=0$ получаем условие

$$\Lambda_2 > 1 + \frac{\varkappa-1}{2}\sigma_1(0). \qquad (26)$$

Аналогично из условия положительности $\sigma_2(\theta)$ при $\theta = \frac{\pi}{2}$ находим

$$\Lambda_1 > 1 + \frac{\varkappa-1}{2}\sigma_1\left(\frac{\pi}{2}\right). \qquad (27)$$

Условия (26), (27) корректируют ранее полученные условия (23).

В частном случае $P_1 = P_2$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$ последние условия сводятся к одному:

$$\Lambda > 1 + \frac{\varkappa-1}{2}\sigma_1(0). \qquad (28)$$

Поступила 5.IX.1993

Кафедра теоретической механики

Литература

I. И.А.Зоненашвили, Ж.В.Старовойтенко, Н.П.Флейшман. Сообщения АН ГССР, 78, I, 1975.

2. И.А.Зоненашвили. Сообщения АН ГССР, I4I, I, I99I.

3. Г.Н.Савин, Н.П.Флейшман, Пластинки и оболочки с рёбрами жёсткости, Киев, "Наукова думка", 1964.

ი. ზონენაშვილი, ნ. ფლეიშმანი

შებრუნებული ამოცანები სიხისტის წიბოებით გამაგრებული ფირფიტებისათვის

რეზიუმე

ფირფიტებში დაძაბულობის ველის ოპტიმალური მართვის მიზნით განხილება შებრუნებული ამოცანები, რომლებშიც მართვის პარამეტრებად მიღებულია გამაგრებული წიბოს სიხისტეები გაჭიმვასა და ღუნვაზე.

I. Zonenashvili, N. Fleishman

INVERSE PROBLEMS FOR PLATES REINFORCED WITH STIFFENING RIBS

Summary

Inverse problems in which the rigidities of the stiffening rib towards tension ahd bending are taken to be the control parameters are considered with a view to optimal control of the stress fields in plates.

Труды Тбилисского государственного университета

им. И. Джавахишвили

თბილისის ი. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

324, 1997

УДК 538

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ С УЧЕТОМ ОБЪЕМНЫХ ИСТОЧНИКОВ И СТОКОВ МАССЫ

В. Д. Шарикадзе

Стационарное осесимметричное течение слабопроводящей жидкости в круглой трубе с неподвижными объемными источниками массы, находящейся во внешнем магнитном поле, описывается системой уравнений

$$u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{q}{\rho}u_z=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\nu}{r}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right]-\frac{\sigma H_0^2}{\rho}u_z,$$

$$u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{q}{\rho}u_r=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\nu}{r}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)-\frac{u_r}{r}\right]- \qquad \text{(I)}$$

$$-\frac{\sigma H_0^2 u_r}{\rho},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(ru_z)+\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)=r\frac{q}{\rho}.$$

Если внешнее магнитное поле перпендикулярно течению, то оно будет иметь компоненту H_r или H_φ. Ограничимся случаем, когда внешнее магнитное поле имеет компоненту H_φ. Тогда эта компонента, как это следует из условия соленоидальности магнитного поля (уравнение записано в цилиндрической системе координат), будет постоянной величиной $H_\varphi=H_0=const$. Здесь также подразумевается, что внешним электрическим полем можно пренебречь.

Рассмотрим случай $q=const$. Автомодельное решение системы (I) вдали от входа в трубу будем искать в виде, тождественно удовлетворяющем уравнению неразрывности

$$u_z = u_0\left(1-\frac{N}{2}z\right)f'(\lambda),$$

$$u_r = \frac{R}{2}\,\frac{q}{\rho}\,\frac{f+\lambda}{\sqrt{\lambda}}, \qquad (2)$$

где $\lambda=\frac{r^2}{R^2}$, $z=\frac{2\nu z}{u_0R^2}$, $N=\frac{qR^2}{\rho\nu}$.

Здесь R - радиус круглой трубы, u_0 - среднемассовая скорость на входе, N - параметр, характеризующий интенсивность объёмных источников и стоков ($q>0$ - источники, $q<0$ - стоки). Ось Oz совпадает с направлением течения жидкости.

Подставляя (2) во второе уравнение (I), получим, что $\frac{\partial P}{\partial r}$ не зависит от r. Тогда первое уравнение (I) сводится к обыкновенному уравнению

$$(\lambda f'')' - \frac{M^2}{4}f' = \frac{N}{4}\left[(f+\lambda)f'' - f'^2 + f'\right] + \frac{K}{2}, \qquad (3)$$

где $M^2=\frac{\sigma H_0^2R^2}{\rho\nu}$ - параметр магнитогидродинамического взаимодействия, а

$$K = \frac{1}{1-\frac{Nz}{2}}\,\frac{\partial P/\rho u_0^2}{\partial z}. \qquad (4)$$

Для простоты вычисления допустим, что параметры магнитогидродинамического взаимодействия и интенсивность объёмных источников равны, т.е. $M^2=N$. Тогда из (3) получим

$$(\lambda f'')' = \frac{N}{4}\left[(f+\lambda)f''' - f'^2 + 2f'\right] + \frac{K}{2}. \qquad (5)$$

Граничные условия для рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\lim_{\lambda\to 0} f/\sqrt{\lambda} = 0, \qquad \lim_{\lambda\to 0}(f''\sqrt{\lambda}) = 0,$$

$$f(1)=1, \qquad f'(1)=0. \qquad (6)$$

Первое и третье условия означают равенство нулю радиальной составляющей скорости на оси и стенке канала, второе и четвертое-соответственно симметрию и равенство нулю на стенке осевой составляющей скорости.

Рассмотрим решение краевой задачи (5), (6) при малых значениях параметра N .

При (N) $\ll 1$ вид зависимости $f(\lambda)$ может быть найден методом возмущений / I /. Раскладывая f и κ в ряд по степеням ε , будем иметь

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + O(\varepsilon^2), \qquad \frac{\kappa}{2} = \kappa_0 + \varepsilon \kappa_1 + O(\varepsilon^2), \tag{7}$$

где $\varepsilon = \frac{N}{4}$.

Подставляя соотношения (7) в (5) и (6), придём к системе уравнений относительно f_0 и f_1 с граничными условиями

$$(\lambda f'')' = \kappa_0, \quad (\lambda f_1'')' = \kappa_1 - f_0'^2 + 2f_0' + (f_0 + \lambda) f_0'' , \tag{8}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f_i}{\sqrt{\lambda}} = 0, \quad \lim_{\lambda \to 0} \sqrt{\lambda} f_i''' = 0, \quad f_i(1) = 1 - i, \quad f_i'(0) = 0, \quad i = 0,1. \tag{9}$$

Решая задачу (8), (9), получим

$$f \approx 2\lambda - \lambda^2 + \frac{N}{4}\left(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{6} - \frac{\lambda^4}{18} - \frac{5}{18}\lambda \right). \tag{10}$$

Наличие объемных источников и стоков массы вызывает отклонение от гартмановского и пуазейловского. Последнее описывается двумя первыми членами в уравнениях (10). По сравнению с ним профиль осевой скорости в случае источников малой интенсивности ($N > 0$) оказывается более вытянутым. Безразмерный градиент давления дается выражением

$$\kappa = -4 + N .$$

Из этой формулы следует, что при $N > 0$ падение давления будет более слабым.

Таким образом, объёмные источники уменьшают общее гидравлическое сопротивление каналов.

Поступила 15.У.1995

Кафедра теоретической механики

Литература

1. В.Д.Шарикадзе. Труды ТГУ.1989, 284, с.165-174.
2. С.И.Аладьев, А.И.Зайчик. ПММ, 1976, т.40, в.6, с.1121-1124.
3. А.Х.Найфе. Методы возмущений. Мир,М.,1976, с.455.

ვ. შარიქაძე

სითხის მაგნიტოჰიდროდინამიკური დინება წრიულ მილში მოცულობითი წყაროებისა და ჩასადინების გათვალისწინებით

რეზიუმე

შესწავლილია ბლანტი არაკუმშვადი სუსტადგამტარი სითხის სტაციონარული დინება წრიულ მილში მოცულობითი წყაროებისა და ჩასადინების გათვალისწინებით.

V.Sharikadze

MAGNETOHYDRODYNAMIC FLOW OF FLUID IN A CIRCULAR PIPE WITH ACCOUNT OF THE VOLUM SOURCES AND SINK MASS

Summary

The steady flow of viscous incompressible weakly conducting fluid in a circular pipe with volume sources sink mass is studied.

Труды Тбилисского государственного университета

им. И. Джавахишвили

თბილისის ი.ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

324, 1997

УДК 538

სუსტადელექტროგამტარი ბლანტი არაკუმშვადი სითხის პულსაციური დინება ფოროვან კედლებს შორის სითბოგადაცემით

ვ.ცუცქირიძე

შესწავლილია სუსტადელექტროგამტარი ბლანტი არაკუმშვადი სითხის პულსაციური დინება ფოროვან კედლებს შორის სითბოგადაცემით, რომელსაც მოქმედებს გარეგანი ერთგვაროვანი მაგნიტური ველი. სითხის დინება გამოწვეულია ფოროვანი კედლების პულსაციური მოძრაობით და წნევის პულსაციური დაცემით, რომელიც მოიცემა ფორმულით: $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}=Ae^{-i\omega t}$. ტემპერატურის ცვლილება ფოროვანი მილის კედლებზე და თვით მილში მიმდინარეობს პულსაციურად. სითბოგადაცემის განტოლებაში გათვალისწინებულია, როგორც ხახუნის შედეგად გამოწვეული ენერგიის დისიპაცია $\eta\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)$, ასევე ჯოულის სითბო σV^2.

მიღებულია ნავიე-სტოქსის და სითბოგადაცემის განტოლებების ზუსტი ამონახსნები სუსტადელექტროგამტარი ბლანტი არაკუმშვადი სითხის არასტაციონალური მოძრაობის შემთხვევაში. მოძრაობის და სითბოგადაცემის ფიზიკური მახასიათებლები შესწავლილია მათზე ჰარტმანის, პრანდტლის, რეინოლდსის რიცხვებისა და პულსაციური დინების მსგავსების კრიტერიუმების მოქმედების ცვლილების გათვალისწინებით.

დასმული ამოცანის შესაბამისი ამოცანები შესწავლილია [1-4] სტატიებში, ხოლო [5-6] განხილულია სითხის ლამინარული დინება

მილში სითბოგადაცემის გარეშე, როდესაც მილის კედლებში ხდება ინტენსიური შეჟონვა ან გაჟონვა.

განვიხილოთ სუსტადელექტროგამტარი ბლანტი არაკუმშვადი სითხის დინება ბრტყელ ფოროვან მილში სითბოგადაცემის გათვალისწინებით, როდესაც მოძრაობის მართობულად მოდებულია გარეგანი ერთგვაროვანი (H_0) მაგნიტური ველი. შინაგანი ინდუქცია გარეგან მაგნიტურ ველთან შედარებით მცირეა, ამიტომ მას უგულვებელვყოფთ. იგულისხმება, რომ სითხის სიჩქარეს გააჩნია მდგენელები $0z$ და $0x$ ღერძების გასწვრივ $\vec{V}(u_0^*, 0, v_z(x,t))$, ხოლო ტემპერატურა $T(x,t)$ არის x და t ფუნქცია. $u_0^* = const$ არის გაჟონვის სიჩქარე.

მოძრაობისა და სითბოგადაცემის განტოლებებს არაინდუქციურ მიახლოებაში ზოგადად აქვთ სახე [7, 8]:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla \vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{V} - \frac{\sigma}{\rho} \vec{H} \times (\vec{V} \times \vec{H}),$$

$$\rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \nabla T) \right) = K \Delta T + \Phi + \sigma (\vec{V} \times \vec{H})^2, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0,$$

სადაც $\sigma(\vec{V} \times \vec{H})$ ჯოულის სითბოა, ხოლო Φ არის ხახუნის შედეგად ენერგიის დისიპაცია, რომელიც ტოლია

$$\Phi = 2\eta \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 \right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right\}.$$

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ თქმულს (1) სისტემიდან უგანზომილებო სიდიდეებში მივიღებთ

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-R\frac{\partial u}{\partial \xi}+M^2u=f(\tau),$$
$$P_r\frac{\partial \theta}{\partial \tau}-\frac{\partial^2\theta}{\partial \xi^2}-P_rR\frac{\partial \theta}{\partial \xi}=\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2+M^2u^2, \qquad (2)$$

სადაც $\xi=\frac{x}{L}$, $\tau=\frac{\nu}{L^2}t$, $u=\frac{v}{V_0^*}$, $\theta=\frac{K}{\eta V_0^{*2}}T$ – უგანზომილებო სიდიდეებია, ხოლო V_0^* და L – შესაბამისად მახასიათებელი სიჩქარე და მახასიათებელი სიგრძეა. $M=H_0L\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$ – ჰარტმანის რიცხვია, $P_r=\frac{\eta C_v}{K}$ – პრანდტლის სითბური რიცხვია, $\alpha=\frac{\omega L^2}{\nu}$ არის დამყარებული პულსაციური მოძრაობის მსგავსების კრიტერიუმი, $R=\frac{u_0^*L}{\nu}$ არის სითხის გადინების მახასიათებელი რეინოლდსის რიცხვი, $f(\tau)=f_1(t)\frac{L^2}{\nu V_0^*}$ – უგანზომილებო სიდიდეა – $f_1(t)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$, σ – სითხის გამტარებლობის კოეფიციენტი, ν – სიბლანტის კინემატიკური კოეფიციენტი, η – სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტი, C_v – კუთრი სითბოტევადობა მუდმივი მოცულობის დროს, K – სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტი, ω – სიხშირე.

(2) სისტემისათვის საწყისი და სასაზღვრო პირობები ზოგადად მოიცემა შემდეგი სახით:

$$u(\xi,0)=0,\quad u(1,\tau)=\varphi_1(\tau),\quad u(-1,\tau)=\varphi_2(\tau),$$
$$\theta(\xi,0)=\theta_1(\xi,0)+\theta_2(\xi,0)=0, \qquad (3)$$

$$\theta(1,\tau)=\theta_1(1,\tau)+\theta_2(1,\tau)=q_1^{(1)}(\tau)+q_1^{(2)}(\tau)=q_1(\tau),$$
$$\theta(-1,\tau)=\theta_1(-1,\tau)+\theta_2(-1,\tau)=q_2^{(1)}(\tau)+q_2^{(2)}(\tau)=q_2(\tau), \qquad (4)$$

სადაც $\theta_1(\xi,\tau)$ არის ტემპერატურა, როდესაც სითბოგამტარებლობის განტოლებაში გათვალისწინებულია მხოლოდ ხახუნის სითბო, ხოლო $\theta_2(\xi,\tau)$ არის ტემპერატურა, როდესაც სითბოგამტარებლობის განტოლებაში გათვალისწინებულია მხოლოდ ჯოულის სითბო.

ვგულისხმობთ, რომ სითხე მყისიერად იწყებს მოძრაობას (ე.ი. $u(\xi,0)=0$) და ტემპერატურის ცვლილება ბრტყელი მილის კედლებზე საწყის მომენტში ნულია.

თუ (2)-(3) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნისათვის გამოვიყენებთ ლაპლასის ინტეგრალურ გარდაქმნას, მივიღებთ

$$\bar{u}'' + R\bar{u}' - (M^2+s)\bar{u} = -\bar{f}(s), \tag{5}$$

$$\bar{u}(1,s) = \bar{\varphi}_1(s), \quad \bar{u}(-1,s) = \bar{\varphi}_2(s), \tag{6}$$

სადაც

$$\bar{u}(\xi,s) = \int_0^\infty u(\xi,\tau)e^{-s\tau}d\tau, \quad \bar{f}(s) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau,$$

$$\bar{\varphi}_1(s) = \int_0^\infty \varphi_1(\tau)e^{-s\tau}d\tau, \quad \varphi_2(\tau) = \int_0^\infty \varphi_2(\tau)e^{-s\tau}d\tau .$$

(5)-(6) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა სიჩქარისათვის გარდასახვებში მოგვცემს

$$\bar{U}(\xi,s) = \left(\bar{\varphi}_1(s) - \frac{\bar{f}(s)}{M^2+s}\right)e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}\frac{sh\bar{\beta}(1+\xi)/2}{sh\bar{\beta}} + \left(\bar{\varphi}_2(s) - \frac{\bar{f}(s)}{M^2+s}\right)e^{\frac{R(1+\xi)}{2}}\frac{sh\bar{\beta}(1-\xi)/2}{sh\bar{\beta}} + \frac{\bar{f}(s)}{M^2+s}, \tag{7}$$

სადაც

$$\bar{\beta} = \sqrt{R^2+4(M^2+s)} .$$

შევისწავლოთ სითხის დინება, რომელიც გამოწვეულია ფოროვანი კედლების პულსაციური მოძრაობით ($u(\pm1,\tau) = \varphi_{1,2}(\tau) = A_{1,2}e^{-i\alpha\tau}$, $\bar{\varphi}_{1,2}(s) = \frac{A_{1,2}}{s+i\alpha}$) და წნევის პულსაციური დაცემით ($-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = f_1(t) = Ae^{-i\omega t}$, $\bar{f}_1(s) = \frac{A}{s+i\omega}$).

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ თქმულს (7) ფორმულაში, მაშინ იგი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\bar{U}(\xi,s) = \frac{A_1 e^{\frac{R(1-\xi)}{2}} sh\bar{\beta}(1+\xi)/2 + A_2 e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}} sh\bar{\beta}(1-\xi)/2}{(s+i\alpha)\, sh\bar{\beta}} + \frac{D\left(sh\bar{\beta} - e^{\frac{R(1-\xi)}{2}} sh\bar{\beta}(1+\xi)/2 - e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}} sh\bar{\beta}(1-\xi)/2\right)}{(M^2+s)(s+i\alpha)\, sh\bar{\beta}}, \tag{8}$$

სადაც $D = \frac{AL^2}{\nu V_0^*}$ არის წნევის პულსაციური დაცემის ამპლიტუდა, ხოლო A_1 და A_2 - კედლების მოძრაობის ამპლიტუდებია.

თუ (8) ფორმულას ჩავწერთ ორიგინალებში, მაშინ სიჩქარის გამოსათვლელად მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$U(\xi,\tau)=\left\{\left(A_1-\frac{D}{M^2-i\alpha}\right)e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}\operatorname{sh}\beta(1+\xi)/2+\right.$$

$$\left.+\left(A_2-\frac{D}{M^2-i\alpha}\right)e^{-\frac{R(1-\xi)}{2}}\operatorname{sh}\beta(1-\xi)/2+\frac{D\operatorname{sh}\beta}{M^2-i\alpha}\right\}\frac{e^{-i\alpha\tau}}{\operatorname{sh}\beta}+ \tag{9}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu_n e^{-s_n\tau}}{i\alpha-s_n}\left[\left(A_1+\frac{4D}{R^2+\mu_n^2}\right)e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1+\xi)}{2}+\right.$$

$$\left.+\left(A_2+\frac{4D}{R^2+\mu_n^2}\right)e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1-\xi)}{2}\right]=U_1(\xi,\tau)+U_2(\xi,\tau),$$

სადაც $S_n=-\frac{\mu_n^2+R^2+4M^2}{4}$, $\mu_n=\pi n$, $U_1(\xi,\tau)$ აღწერს სითხის დამყარებულ პულსაციურ დინებებს ფოროვან კედლებს შორის, ხოლო $U_2(\xi,\tau)$ აღწერს სითხის იმ რხევით მოძრაობას, რომელიც გამოიწვია ფოროვანი კედლების პულსაციურმა მოძრაობამ და წნევის პულსაციურმა დაცემამ სითხეში.

დროის საკმაოდ დიდი შუალედის შემდეგ სითხეში რხევითი მოძრაობები მიილევა $(U_2(\xi,\tau)\longrightarrow 0)$, ამიტომ სიჩქარისათვის (9) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$U(\xi,\tau)=U_1(\xi,\tau)=\left\{\left(A_1-\frac{D}{M^2-i\alpha}\right)e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}\operatorname{sh}\beta(1+\xi)/2+\right. \tag{10}$$

$$\left.+\left(A_2-\frac{D^2}{M^2-i\alpha}\right)e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}}\operatorname{sh}\beta(1-\xi)/2+\frac{D\operatorname{sh}\beta}{M^2-i\alpha}\right\}\frac{e^{-i\alpha\tau}}{\operatorname{sh}\beta}.$$

სითბოგამტარებლობის (2) განტოლებაში უკუვაგდოთ ჯერ ჯოულის სითბო და შემდეგ ხახუნის სითბო. შესაბამისად მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს:

$$P_r \frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} - \frac{\partial^2\theta_1}{\partial\xi^2} - P_r R \frac{\partial\theta_1}{\partial\xi} = \left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^2, \tag{11}$$

$$P_r \frac{\partial\theta_2}{\partial\tau} - \frac{\partial^2\theta_2}{\partial\xi^2} - P_r R \frac{\partial\theta_2}{\partial\xi} = M^2 u^2 \tag{12}$$

თუ (II) - (I2) განტოლებებში გავითვალისწინებთ სიჩქარის (I0) ფორმულას და გამოვიყენებთ ლაპლასის ინტეგრალური გარდაქმნის ფორმულას, მაშინ (4) სასწყისი-სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით ტემპერატურა გარდასახვებში მოიცემა შემდეგი სახით:

$$\bar\theta_m(\xi,s) = \left(\bar q_1^{(m)}(s) - \bar q_m(1)\right) e^{\frac{P_r R(1-\xi)}{2}} \frac{\operatorname{sh}\bar\gamma(1+\xi)/2}{\operatorname{sh}\bar\gamma} + \left(\bar q_2^{(m)}(s) - \bar q_m(-1)\right) e^{-\frac{P_r R(1+\xi)}{2}} \frac{\operatorname{sh}\bar\gamma(1-\xi)/2}{\operatorname{sh}\bar\gamma} + \bar q_m(\xi), \tag{13}$$

სადაც $m=\overline{1,2}$; $\bar\gamma = \sqrt{P_r^2R^2+4P_r s}$, $\beta_{1,2} = -\frac{R}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{R^2+4(M^2-i\alpha)}$,

$$2\beta_3=\beta_1+\beta_2, \quad 2\beta_4=\beta_1, \quad 2\beta_5=\beta_2; \tag{14}$$

$$\bar q_1(\xi) = -\frac{1}{s+2i\alpha}\left\{\sum_{k=1}^{2}\frac{\beta_k^2 a_k e^{2\beta_k\xi}}{4\beta_k^2+2P_r R\beta_k - sP_r} + \frac{(M^2-i\alpha)a_3 e^{-R\xi}}{R^2(1-P_r)-sP_r}\right\},$$

$$\bar q_2(\xi) = -\frac{M^2}{s+2i\alpha}\left\{\sum_{k=1}^{5}\frac{a_k e^{2\beta_k\xi}}{4\beta_k^2+2P_r R\beta_k - sP_r} + \frac{a_6}{sP_r}\right\}, \tag{15}$$

$$a_{1,2} = \left[\frac{\left(A_1 - \frac{D}{M^2-i\alpha}\right)e^{-\beta_{2,1}} - \left(A_2 - \frac{D}{M^2-i\alpha}\right)e^{\beta_{2,1}}}{2\operatorname{sh}(\beta_1-\beta_2)}\right]^2, \tag{16}$$

$$a_3=\frac{1}{2\,sh^2(\beta_1-\beta_2)}\left[\left(\mathcal{A}_2-\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{M}^2-i\alpha}\right)^2 e^{2\beta_3}+\left(\mathcal{A}_1-\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{M}^2-i\alpha}\right)^2 e^{-2\beta_3}-\right.$$

$$\left.-2\left(\mathcal{A}_2-\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{M}^2-i\alpha}\right)\left(\mathcal{A}_1-\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{M}^2-i\alpha}\right)ch(\beta_1-\beta_2)\right], \tag{17}$$

$$a_{4,5}=\frac{\mathcal{D}}{(\mathcal{M}^2-i\alpha)\,sh(\beta_1-\beta_2)}\left[\left(\mathcal{A}_2-\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{M}^2-i\alpha}\right)e^{\beta_{2,1}}-\left(\mathcal{A}_1-\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{M}^2-i\alpha}\right)e^{-\beta_{2,1}}\right],$$

$$a_6=\left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{M}^2-i\alpha}\right)^2. \tag{18}$$

შევისწავლოთ ტემპერატურის ცვლილება სითხეში დამყარებული პულსაციური დინების დროს, როდესაც ტემპერატურის ცვლილება საწყის მომენტში ნულია, ხოლო ბრტყელი მილის კედლებზე იცვლება პულსაციური კანონით $\left(q^{(1)}_{1,2}(\tau)=B^{(1)}_{1,2}e^{-2i\alpha\tau},\ q^{(2)}_{1,2}(\tau)=B^{(2)}_{1,2}e^{-2i\alpha\tau}\right)$.

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ ათქმულს (I3) ფორმულაში, მაშინ ტემპერატურისათვის ორიგინალებში შესაბამისად მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს:

$$\theta_m(\xi,\tau)=\left[\left(B_1^{(m)}-q_m(-1)\right)e^{\frac{P_2R(1-\xi)}{2}}sh\,\gamma(1+\xi)/2+\right.$$

$$\left.+\left(B_2^{(m)}-q_m(-1)\right)e^{-\frac{P_2R(1+\xi)}{2}}sh\,\gamma(1-\xi)/2+q_m(\xi)\,sh\,\gamma\right]\frac{e^{-2i\alpha\tau}}{sh\,\gamma}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu_n e^{s_n\tau}}{P_2(s_n+2i\alpha)}\left[\left(B_1^{(m)}-q_m^*(1)\right)e^{\frac{P_2R(1-\xi)}{2}}\sin\mu_n(1+\xi)/2+\right.$$

$$\left.+\left(B_2^{(m)}-q_m^*(-1)\right)e^{-\frac{P_2R(1+\xi)}{2}}\sin\mu_n(1-\xi)/2\right], \tag{19}$$

სადაც $m=\overline{1,2}$; $\mu_n=\pi n$, $s_n=-\dfrac{\mu_n^2+P_r^2R^2}{4P_r}$, $\gamma=\sqrt{P_r^2R^2-8i\alpha P_r}$;

$$q_1(\xi)=-\sum_{k=1}^{2}\frac{\beta_k^2 a_k e^{2\beta_k\xi}}{4\beta_k^2+2P_rR\beta_k+2i\alpha P_r}-\frac{(M^2-i\alpha)a_3e^{-R\xi}}{R^2(1-P_r)+2i\alpha P_r},$$

$$q_2(\xi)=-M^2\sum_{k=1}^{5}\frac{a_k e^{2\beta_k\xi}}{4\beta_k^2+2P_rR\beta_k+2i\alpha P_r}+\frac{M^2a_6}{2i\alpha P_r},$$

$$q_1^*(\xi)=-\sum_{k=1}^{2}\frac{\beta_k^2 a_k e^{2\beta_k\xi}}{4\beta_k^2+2P_rR\beta_k-s_nP_r}-\frac{(M^2-i\alpha)a_3e^{-R\xi}}{R^2(1-P_r)-s_nP_r}, \tag{20}$$

$$q_2^*(\xi)=-M^2\sum_{k=1}^{5}\frac{a_k e^{2\beta_k\xi}}{4\beta_k^2+2P_rR\beta_k-s_nP_r}+\frac{M^2a_6}{2s_nP_r}.$$

შევნიშნოთ, რომ $q_2(\xi)$ და $q_2^*(\xi)$ გამოთვლის დროს a_3 და a_4 კოეფიციენტების წინ იგულისხმება „—" ნიშანი.

I. განვიხილოთ სითხის პულსაციური დინება, რომელიც გამოწვეულია კედლების პულსაციური მოძრაობით. ვთქვათ კედლების პულსაციური მოძრაობა წარმოებს ერთი და იგივე ფაზაში, ერთი და იგივე ამპლიტუდით $(A_1=A_2=U_0)$, ხოლო ტემპერატურის ცვლილება მილის კედლებზე ხდება პულსაციურად ერთი და იგივე ფაზაში, ერთი და იგივე

ამპლიტუდით $\left(B_{1,2}^{(1)}=\theta_1^{(1)}=const,\;\; B_{1,2}^{(2)}=\theta_1^{(2)}=const\right)$, წნევის დაცემა კი ნულის ტოლია $(D=0)$.

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ თქმულს, მაშინ სიჩქარისათვის და ტემპერატურისათვის (9) და (19) ფორმულებიდან მივიღებთ, რომ

$$\frac{u^I(\xi,\tau)}{u_0}=\frac{e^{-i\alpha\tau}}{sh\,\beta}\left(e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}sh\,\beta(1+\xi)/2+e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}}sh\,\beta(1-\xi)/2\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu_n e^{-\left(\mu^2+\frac{R^2+\mu_n^2}{4}\right)}}{}\left(e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1+\xi)}{2}+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1-\xi)}{2}\right)=u_1^I(\xi,\tau)+u_2^I(\xi,\tau), \qquad (9^I)$$

$$\theta_m^I(\xi,\tau)=\left[\left(\theta_1^{(m)}-q_m(1)\right)e^{\frac{P_rR(1-\xi)}{2}}sh\frac{\gamma(1+\xi)}{2}+\left(\theta_1^{(m)}-q_m(-1)\right)e^{\frac{P_rR(1+\xi)}{2}}sh\frac{\gamma(1-\xi)}{2}+\right.$$

$$\left.+q_m(\xi)\,sh\,\gamma\right]\frac{e^{-2i\alpha\tau}}{sh\,\gamma}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu_n e^{s_n\tau}}{P_r(s_n+2i\alpha)}\left[\left(\theta_1^{(m)}-q_m^*(1)\right)e^{\frac{P_rR(1-\xi)}{2}}\sin\mu_n(1+\xi)/2+\right.$$

$$\left.+\left(\theta_1^{(m)}-q_m^*(-1)\right)e^{-\frac{P_rR(1+\xi)}{2}}\sin\mu_n(1-\xi)/2\right]=\theta_m^*(\xi,\tau)+\theta_m^{**}(\xi,\tau), \qquad (19^I)$$

სადაც $m=\overline{1,2}$, ხოლო $q_{1,2}(\xi)$ და $q_{1,2}^*(\xi)$ გამოითვლება (20) ფორმულებიდან.

თუ გამოვითვლით ხახუნის ძალას სითხეში და ბრტყელი მილის კედლებზე, შესაბამისად მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$F^{I}_{ხახ.}=\frac{u_0 e^{-i\alpha\tau}}{2\,sh\,\beta}\left[\beta\left(e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}ch\frac{\beta(1+\xi)}{2}-e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}}ch\frac{\beta(1-\xi)}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-R\left(e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}sh\frac{\beta(1+\xi)}{2}+e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}}sh\frac{\beta(1-\xi)}{2}\right)\right], \qquad (*$$

$$F^{I}_{1,2}=\frac{u_0 e^{-i\alpha\tau}}{2\,sh\,\beta}\left[\beta\left(\pm ch\,\beta\mp e^{\mp R}\right)-R\,sh\,\beta\right],$$

ხოლო სითხის ხარჯისათვის და საშუალო სიჩქარისათვის გვექნება:

$$\theta^{I}=\frac{u_0\beta\,(ch\,\beta/2-ch\,R)\,e^{-i\alpha\tau}}{(M^2-i\alpha)\,sh(\beta_1-\beta_2)},$$

$$u^{I}_{საშ.}=\frac{1}{2}\,\frac{u_0\beta\,(ch\,\beta/2-ch\,R)\,e^{-i\alpha\tau}}{(M^2-i\alpha)\,sh\,\beta}.$$

როდესაც სითხის პულსაციური დინება გამოწვეულია ფოროვანი კედლების პულსაციური მოძრაობით (კედლები ერთ ფაზაში ერთნაირი ამპლიტუდით მოძრაობს), ხახუნის ძალა მილის კედლებზე სხვადასხვა მნიშვნელობებს ღებულობს, ხოლო სიჩქარე მაქსიმალურ მნიშვნელობებს მილის ღერძზე ვერ აღწევს.

II. ვთქვათ კედლების პულსაციური მოძრაობა და ტემპერატურის

ცვლილება მილის კიდლებზე წარმოებს სხვადასხვა ნიშნის მქონე ამპლიტუდით ($A_1 = V_0$, $A_2 = -V_0$, $B_1^{(1)} = -B_2^{(1)} = \theta_2^{(1)} = const$, $B_1^{(2)} = -B_2^{(2)} = \theta_2^{(2)} = const$). წნევის დაცემა მილში კვლავ ნულის ტოლია ($\mathcal{D}=0$).

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ თქმულს, მაშინ სიჩქარისა და ტემპერატურისათვის მივიღებთ

$$\frac{U^{II}(\xi,\tau)}{V_0} = \frac{e^{-i\alpha\tau}}{sh\,\beta}\left(e^{\frac{R(1-\xi)}{2}} sh\frac{\beta(1+\xi)}{2} - e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}} sh\frac{\beta(1-\xi)}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu_n e^{-\left(M^2+\frac{R^2+\mu_n^2}{4}\right)\tau}}{i\alpha - M^2 - \frac{R^2+\mu_n^2}{4}}\left(e^{\frac{R(1-\xi)}{2}} \sin\frac{\mu_n(1+\xi)}{2} - e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}} \sin\frac{\mu_n(1-\xi)}{2}\right) =$$

$$= U_1^{II}(\xi,\tau) + U_2^{II}(\xi,\tau), \qquad (9^{II})$$

$$\theta_m^{II}(\xi,\tau) = \frac{e^{-2i\alpha\tau}}{sh\,\gamma}\left[\left(\theta_2^{(m)} - q_m(1)\right)e^{\frac{P_r R(1-\xi)}{2}} sh\frac{\gamma(1+\xi)}{2} - \left(\theta_2^{(m)} + q_m(-1)\right)e^{-\frac{P_r R(1+\xi)}{2}} sh\frac{\gamma(1-\xi)}{2} + \right.$$

$$\left. + q_m(\xi)\, sh\,\gamma\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu_n e^{s_n\tau}}{P_r(s_n+2i\alpha)}\left(\theta_2^{(m)} - q_m^*(1)\right)e^{\frac{P_r R(1-\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1+\xi)}{2} -$$

$$-\left(\theta_2^{(m)} + q_m^*(-1)\right)e^{-\frac{P_r R(1+\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1-\xi)}{2}\Bigg] = \theta_{m+2}^{*}(\xi,\tau) + \theta_{m+2}^{**}(\xi,\tau), \qquad (19^{II})$$

სადაც $q_{1,2}(\xi)$ და $q_{1,2}^*(\xi)$ გამოითვლება (20) ფორმულებიდან.

თუ გამოვითვლით ხახუნის ძალას სითხეში და ბრტყელი მილის კედ-

ლებზე, შესაბამისად მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$F^{II}_{ხს.}=\frac{V_0 e^{-i\alpha\tau}}{2\,sh\beta}\left[\beta\left(e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}ch\frac{\beta(1+\xi)}{2}+e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}}ch\frac{\beta(1-\xi)}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-R\left(e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}sh\frac{\beta(1+\xi)}{2}-e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}}sh\frac{\beta(1-\xi)}{2}\right)\right],$$

$$F^{II}_{1,2}=\frac{V_0 e^{-i\alpha\tau}}{2\,sh\beta}\left[\beta\left(\pm ch\beta+e^{\mp R}\right)\mp R\,sh\beta\right].$$

ხოლო სითხის ხარჯისათვის და საშუალო სიჩქარისათვის გვექნება:

$$\theta^{II}=\frac{V_0 e^{-i\alpha\tau}}{(M^2-i\alpha)\,sh\beta}\left[\beta\left(ch\beta+chR\right)+R\,shR\right],$$

$$U^{II}_{სშ.}=\frac{1}{2}\cdot\frac{V_0 e^{-i\alpha\tau}}{(M^2-i\alpha)\,sh\beta}\left[\beta\left(ch\beta+chR\right)+R\,shR\right].$$

როდესაც სითხის პულსაციური დინება გამოწვეულია კედლების პულსაციური მოძრაობით (კედლების პულსაციური მოძრაობა წარმოებს ნიშნით საწინააღმდეგო მიმართულებით), მაშინ ბრტყელი მილის ღერძზე ხახუნის ძალა მაქსიმალურ მნიშვნელობას ვერ აღწევს, ხოლო მილის

კედლებზე ერთნაირ მნიშვნელობებს არ ღებულობს, როგორც ეს არაფოროვანი კედლების შემთხვევაში გვქონდა.

ფოროვანი კედლების პულსაციური მოძრაობს დროს (I-II შემთხვევა) პულსაციის გადაცემა ხდება მთელ სითხეზე. როგორც გამოთვლები გვიჩვენებს, სითხის პულსაციური დინების ლოკალიზება ხდება კედლებთან ახლოს. ამიტომ სითხის პულსაციური დინების დამყარება საკმაოდ სწრაფად ხდება. სითხის სიჩქარე, რომელიც პულსაციის დამყარების პროცესს აღწერს, განისაზღვრება 9^{I} და 9^{II} ფორმულებით; რაც უფრო მცირეა მანძილი ფოროვან კედლებს შორის, მით უფრო სწრაფად ხდება სითხის პულსაციური მოძრაობის დამყარება და, პირიქით, რაც უფრო დიდია მანძილი კედლებს შორის, მით უფრო დიდი დროა საჭირო სითხის პულსაციური მოძრაობის დასამყარებლად.

სითხის პულსაციური დინების დამყარება ხდება სითხის რხევითი მოძრაობის დაწყებიდან საკმაოდ დიდი დროის შემდეგ, ე.ი. როდესაც $\tau \to \infty$, მაშინ სიდიდეები

$$U_2^{I}=\frac{U_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu_n e^{-\left(M^2+\frac{R^2+\mu_n^2}{4}\right)\tau}}{i\alpha-M^2-\frac{R^2+\mu_n^2}{4}}\left(e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1+\xi)}{2}+e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1-\xi)}{2}\right),$$

$$U_2^{II}=\frac{V_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu_n e^{-\left(M^2+\frac{R^2+\mu_n^2}{4}\right)\tau}}{i\alpha-M^2-\frac{R^2+\mu_n^2}{4}}\left(e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1+\xi)}{2}-e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1-\xi)}{2}\right)$$

მიისწრაფის ნულისაკენ, და სითხის დამყარებული პულსაციური დინება გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$\frac{U^{I}(\xi,\tau)}{U_0}=\frac{e^{-i\alpha\tau}}{sh\,\beta}\left(e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}sh\frac{\beta(1+\xi)}{2}+e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}}sh\frac{\beta(1-\xi)}{2}\right),$$

$$\frac{U^{II}(\xi,\tau)}{V_0}=\frac{e^{-i\alpha\tau}}{sh\beta}\left(e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}sh\frac{\beta(1+\xi)}{2}-e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}}sh\frac{\beta(1-\xi)}{2}\right). \qquad (+)$$

სითხის დამყარებული პულსაციური დინების დროს (I–II შემთხვევა) გარკვეული დროის გავლის შემდეგ სითხეში ტემპერატურის ცვლილება ხდება პულსაციური რეჟიმით, ე.ი. როდესაც $\tau \to \infty$, მაშინ სიდიდეები

$$\theta_m^{**}(\xi,\tau)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu_n e^{s_n\tau}}{P_2(s_n+2i\alpha)}\left[\left(\theta_1^{(m)}-q_m^*(1)\right)e^{\frac{P_2R(1-\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1+\xi)}{2}+\right.$$
$$\left.+\left(\theta_1^{(m)}-q_m^*(-1)\right)e^{-\frac{P_2R(1+\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1-\xi)}{2}\right],$$

$$\theta_{m+2}^{**}(\xi,\tau)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)\mu_n e^{s_n\tau}}{P_2(s_n+2i\alpha)}\left[\left(\theta_2^{(m)}-q_m^*(1)\right)e^{\frac{P_2R(1-\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1+\xi)}{2}-\right.$$
$$\left.-\left(\theta_2^{(m)}+q_m^*(-1)\right)e^{-\frac{P_2R(1+\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1-\xi)}{2}\right]$$

მიისწრაფის ნულისაკენ, და სითხის დამყარებული პულსაციური მოძრაობის დროს (რომელიც გამოწვეულია ფოროვანი, კედლების პულსაციური მოძრაობით) ტემპერატურის ცვლილების კანონს სითხეში ექნება პულსაციური ხასიათი, რომელიც შემდეგი ფორმულებით გამოითვლება:

$$\theta_m^*(\xi,\tau)=\frac{e^{-2i\alpha\tau}}{sh\,\gamma}\Big[\big(\theta_1^{(m)}-q_m(1)\big)e^{\frac{P_rR(1-\xi)}{2}}sh\frac{\gamma(1+\xi)}{2}+$$

$$+\big(\theta_1^{(m)}-q_m(-1)\big)e^{-\frac{P_rR(1+\xi)}{2}}sh\frac{\gamma(1-\xi)}{2}+q_m(\xi)\,sh\,\gamma\Big],$$

$$\theta_{m+2}^*(\xi,\tau)=\frac{e^{-2i\alpha\tau}}{sh\,\gamma}\Big[\big(\theta_2^{(m)}-q_m(1)\big)e^{\frac{P_rR(1-\xi)}{2}}sh\frac{\gamma(1+\xi)}{2}-$$

$$-\big(\theta_2^{(m)}+q_m(-1)\big)e^{-\frac{P_rR(1+\xi)}{2}}sh\frac{\gamma(1-\xi)}{2}+q_m(\xi)\,sh\,\gamma\Big].$$

როდესაც სითხის მოძრაობა გამოწვეულია ფოროვანი კედლების პულსაციური მოძრაობით, მაშინ ხახუნის სითბოს მოქმედება სუსტადელექტროგამტარ სითხეზე უფრო მნიშვნელოვანია, ვიდრე არაფოროვანი კედლების პულსაციური მოძრაობის დროს, ხოლო ჯოულის სითბოს მოქმედება ორივე შემთხვევაში თითქმის ერთნაირია.

III. განვიხილოთ სითხის პულსაციური დინება, რომელიც გამოწვეულია მხოლოდ წნევის პულსაციური დაცემით ($D \neq 0$) . მილის კედლები უძრავია ($A_1 = A_2 = 0$).

ვიგულისხმოთ, რომ ფოროვანი მილის კედლებზე ტემპერატურის ცვლილება პულსაციური კანონით არ ხდება (ე.ი. $B_1^{(1)} = B_2^{(1)} = B_1^{(2)} = B_2^{(2)} = 0$).

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ თქმულს, მაშინ სიჩქარისათვის და ტემპერატურისათვის (9) და (19) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$\frac{U^{III}(\xi,\tau)}{D/(M^2-i\alpha)}=\frac{e^{-i\alpha\tau}}{sh\,\beta}\Big[sh\,\beta-e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}sh\frac{\beta(1+\xi)}{2}-e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}}sh\frac{\beta(1-\xi)}{2}\Big]+$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(M^2-i\alpha)\mu_n e^{-\left(M^2+\frac{R^2+\mu_n^2}{4}\right)\tau}}{\left(i\alpha-M^2-\frac{R^2+\mu_n^2}{4}\right)\left(R^2+\mu_n^2\right)}\Big[e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1+\xi)}{2}+$$

$$+e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1-\xi)}{2}\Bigg]=U_1^{III}(\xi,\tau)+U_2^{III}(\xi,\tau), \qquad (9^{III})$$

$$\theta_m^{III}(\xi,\tau)=\frac{e^{-2i\alpha\tau}}{sh\,\gamma}\Bigg[q_m(\xi)sh\,\gamma-q_m(1)e^{\frac{P_2R(1-\xi)}{2}}sh\frac{\gamma(1+\xi)}{2}-$$

$$-q_m(-1)e^{-\frac{P_2R(1+\xi)}{2}}sh\frac{\gamma(1-\xi)}{2}\Bigg]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu_n e^{s_n\tau}}{P_2(s_n+2i\alpha)}\left(q_m^*(1)e^{\frac{P_2R(1-\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1+\xi)}{2}+\right.$$

$$\left.+q_m^*(-1)e^{-\frac{P_2R(1+\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1-\xi)}{2}\right)=\theta_{m+4}^{*}(\xi,\tau)+\theta_{m+4}^{**}(\xi,\tau), \qquad (19^{III})$$

სადაც $q_m(\xi)$ და $q_m^*(\xi)$ გამოითვლება (20) ფორმულებიდან.

წნევის პულსაციური დაცემა, სითხეში წარმოშობს პულსაციურ დინებას და რხევით მოძრაობებს, რომელიც (9^{III}) ფორმულით გამოისახება.

სითხეში პულსაციური დინების დამყარება (რომელიც გამოწვეულია წნევის პულსაციური დაცემით) ხდება სითხის რხევითი მოძრაობის დაწყებიდან საკმაოდ დიდი დროის შემდეგ. ე.ი. როდესაც $\tau\to\infty$, მაშინ

$$\frac{U_2^{III}(\xi,\tau)}{D/(M^2-i\alpha)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu_n(M^2-i\alpha)e^{\left(M^2+\frac{R^2+\mu_n^2}{4}\right)\tau}}{\left(i\alpha-M^2-\frac{R^2+\mu_n^2}{4}\right)\left(R^2+\mu_n^2\right)}\Bigg[e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1+\xi)}{2}+$$

$$+e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1-\xi)}{2}\Bigg]$$

ჯამი მიისწრაფის ნულისაკენ, და სითბოს დამყარებული პულსაციური დინება გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\frac{U_1^{III}(\xi,\tau)}{D/(\mu^2-i\alpha)}=\frac{e^{-i\alpha\tau}}{sh\beta}\left[sh\beta-e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}sh\frac{\beta(1+\xi)}{2}-e^{-\frac{R(1+\xi)}{2}}sh\frac{\beta(1-\xi)}{2}\right].$$

როდესაც ფოროვან მილში დამყარდება სითხის პულსაციური დინება, მაშინ ტემპერატურის ცვლილება ჯერ კიდევ ხდება როგორც პულსაციური კანონით, ასევე რხევითი კანონით, საკმაოდ დიდი დროის გასვლის შემდეგ, ე.ი. როდესაც $\tau\to\infty$, სიდიდეები

$$\theta^{**}_{m+4}(\xi,\tau)=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu_n e^{s_n\tau}}{P_n(s_n+2i\alpha)}\left(q_m^*(1)e^{\frac{P_nR(1-\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1+\xi)}{2}+q_m^*(-1)e^{-\frac{P_nR(1+\xi)}{2}}\sin\frac{\mu_n(1-\xi)}{2}\right)$$

მიისწრაფვის ნულისაკენ, ხოლო ტემპერატურის ცვლილება ხდება პულსაციური კანონით, რომელიც (19^{III}) ფორმულით გამოითვლება.

თუ გამოვითვლით ხახუნის ძალას სითხეში, ფოროვანი მილის კედლებზე შესაბამისად მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$F^{III}_{\text{ხახ}}=\frac{De^{-i\alpha\tau}}{2(\mu^2-i\alpha)sh\beta}\left[\left(R\,sh\frac{\beta(1+\xi)}{2}-\beta ch\frac{\beta(1+\xi)}{2}\right)e^{\frac{R(1-\xi)}{2}}+\right.$$

$$\left.+\left(R\,sh\frac{\beta(1-\xi)}{2}+\beta ch\frac{\beta(1-\xi)}{2}\right)e^{\frac{R(1+\xi)}{2}}\right],$$

$$F^{III}_{1,2}=\frac{De^{-i\alpha\tau}}{2(\mu^2-i\alpha)sh\beta}\left[\beta\left(\pm e^{\mp R}\mp ch\beta\right)+R\,sh\beta\right],$$

ხოლო სითხის ხარჯისათვის და საშუალო სიჩქარისათვის გვექნება:

$$\theta^{III}=\frac{2De^{-i\alpha\tau}}{\mu^2-i\alpha}\left[1-\frac{\beta(ch\beta-chR)}{2(\mu^2-i\alpha)sh\beta}\right],$$

$$U^{III}_{\text{საშ.}}=\frac{De^{-i\alpha\tau}}{\mu^2-i\alpha}\left[1-\frac{\beta(ch\beta-chR)}{2(\mu^2-i\alpha)sh\beta}\right].$$

როდესაც სითხის პულსაციური დინება გამოწვეულია წნევის პულსაციური დაცემით, მაშინ ფოროვანი მილის ღერძზე ($\xi = 0$) სიჩქარე და ტემპერატურა ვერ აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას, ხოლო ხახუნის ძალა ნულის ტოლი არაა ღერძზე, როგორც ეს არაფოროვანი მილის შემთხვევაში გვქონდა.

ზემოთ მიღებული ფორმულებით ჩატარებული გამოთვლები გვიჩვენებს რომ: გარეგანი ერთგვაროვანი მაგნიტური ველის მოქმედება ამუხრუჭებს სითხის პულსაციურ დინებას. მაგნიტური ველის გაზრდისას სითხის დინების სიჩქარე ბრტყელი მილის ღერძზე კლებულობს, ხოლო კედლებთან იზრდება, მაშინ როდესაც საშუალო სიჩქარის სიდიდე ბრტყელი მილის კვეთში არ იცვლება.

სიჩქარეს, ტემპერატურას, ხახუნს და ხარჯს დროის მიმართ აქვთ პერიოდული თვისებები.

ყოველი პერიოდი იწყება სითხის ძლიერი დინებით წინ, რომლის შემდეგ ხდება უკუდინება, შემდეგ კი გვაქვს უძრაობის მდგომარეობა და ისევ სუსტი უკუდინება.

1. როდესაც სითხის დინება გამოწვეულია წნევის პულსაციური დაცემით ან კედლების პულსაციური მოძრაობით, მაშინ გარეგანი ერთგვაროვანი მაგნიტური ველის გაზრდა და გაჟონვის რეინოლდსის რიცხვის $\left(R = \frac{U_0^* L}{\nu}\right)$ გაზრდა იწვევს ხახუნის გაზრდას და სითხის ხარჯის შემცირებას.

2. როდესაც სითხის პულსაციური დინება გამოწვეულია კედლების პულსაციური მოძრაობით და წნევის პულსაციური დაცემით, მაშინ გაჟონვის რეინოლდსის რიცხვის გაზრდა იწვევს სითხის პულსაციური დინების დამყარების შენელებას, ხოლო გაჟონვის რეინოლდსის რიცხვის შემცირება იწვევს სითხის პულსაციური დინების დამყარების აჩქარებას, ხოლო ტემპერატურის ცვლილება ორივე შემთხვევაში უმნიშვნელოდ განსხვავდება ერთმანეთისაგან.

3. როდესაც სითხის პულსაციური დინება გამოწვეულია წნევის პულსაციური დაცემით, მაშინ ჰარტმანის რიცხვის გაზრდა იწვევს ტემპერატურის შემცირებას ფოროვან მილში. ეს შედეგი ეთანადება წინა შემთხვევაში მიღებულ შედეგს, რომლის თანახმადაც ჰარტმანის რიცხვის ზრდა იწვევს სითხის პულსაციური დინების დამუხრუჭებას.

საზოგადოდ შეგვიძლია გავაკეთოთ ასეთი დასკვნა:

ა) სითხის პულსაციური დინების დამყარება და ტემპერატურის პულსაციური კანონით ცვლილება არაფოროვან მილებში უფრო სწრაფად ხდება, ვიდრე ფოროვან მილებში.

ბ) სითხის პულსაციურ დინებაზე გარეგანი მაგნიტური ველის მოქმედება საზოგადოდ იწვევს ტემპერატურის ზრდას ბრტყელ მილში.

შემოსულია 15.IX.1993

თეორიული მექანიკის
კათედრა

ლიტერატურა

I. Д.Ф.Файзуллаев, И.Б.Примов, Докл. АН Уз.СССР, № 8, 1989, 13-16.

2. Г.Г.Гробец, В.М.Ерошенко, Л.И.Зайчик, Процессы в тепловых двигателях, М.,1984, 93-98.

3. R.M.Terrill, G.Walker, Applied scientific Recearch, vol. 18, 1967, 193.

4. G.Raithby, Int. J.Heat mass Transfer, vol. 14, N2, 1971.

5. И.Г.Тюленев, Численные методы в математической физике. М., 1986 , 29-28.

6. R.M.Terrill, Trans, ASME: J. Fluids Eng., 105, N3, 1983, 303-307.

7. А.Б.Ватажин, Г.А.Любимов, С.А.Регирер. Магнитогидродинамические течения в каналах."Наука", М., 1970, 672.

8. Э.Я.Блум, Ю.А.Михайлов, Р.Я.Озолс, Тепло-и массообмен в магнитном поле, Рига, 1980, 355.

В.Н.Цуцкиридзе

Пульсационное течение слабопроводящей вязкой несжимаемой жидкости между пористыми стенками с теплопередачей

Резюме

Изучено пульсационное течение слабопроводящей вязкой несжимаемой жидкости между пористыми стенками с теплопередачей, когда перпендикулярно стенкам приложено внешнее однородное магнитное поле. Течение жидкости вызвано пульсационным движением пористых стенок и пульсационным падением давления.

V.Tsutskiridze

PULSATION FLOW OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE WEAKLY CONDUCTING LIQUID BETWEEN POROUS WALLS WITH HEAT TRANSFER

Summary

The titl e problem has been studied for the case when the outer un uniform magnetic field is in action. The flow of liquid is due to the drop of the pulsation of the pressure gradient and to the pulsation movement of the wall s.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили

თბილისის ი. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

324, 1997

УДК 538

ელექტროგამტარი ბლანტი არაკუმშვადი სითხის პულსაციური დინება ფოროვან კედლებს შორის სითბოგადაცემით

ვ. ცუცქირიძე

შესწავლილია ელექტროგამტარი ბლანტი არაკუმშვადი სითხის პულსაციური დინება ფოროვან კედლებს შორის სითბოგადაცემით, როდესაც მოქმედებს გარეგანი ერთგვაროვანი მაგნიტური ველი. სითხის დინება გამოწვეულია ფოროვანი კედლების პულსაციური მოძრაობით და წნევის პულსაციური დაცემით. ტემპერატურის ცვლილება ფოროვანი მილის კედლებზე და თვითონ მილში წარმოებს პულსაციურად. მიღებულია ნავიე-სტოქსის, ინდუქციის და სითბოგადაცემის განტოლებების ზუსტი ამონახსნები ელექტროგამტარი ბლანტი არაკუმშვადი სითხის არასტაციონალური მოძრაობის შემთხვევაში. სითბოგადაცემის განტოლების ზუსტი ამონახსნები მიღებულია სამ შემთხვევაში: 1. როდესაც სითბოგამტარებლობის განტოლებაში გათვალისწინებულია როგორც ხახუნის სითბო – $\eta\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2$, ასევე ჯოულის სითბო – $\nu\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2$; 2. როდესაც სითბოგადაცემის განტოლებაში გათვალისწინებულია მხოლოდ ხახუნის სითბო; 3. როდესაც სითბოგადაცემის განტოლებაში გათვალისწინებულია მხოლოდ ჯოულის სითბო.

შემოყვანილი უგანზომილებო სიდიდეების: ჰარტმანის რიცხვის, პრანდტლის სითბური რიცხვის, დამყარებული პულსაციური მოძრაობის მსგავსების კრიტერიუმისა და გაჟონვის მახასიათებელი რეინოლდსის რიცხვის საშუალებით დადგენილია დინების ფიზიკური სურათი. გამოთვლილია ხახუნის ძალა კედლებზე და ნაპოვნია სითხის ხარჯი და საშუალო სიჩქარე.

განვიხილოთ ელექტროგამტარი ბლანტი არაკუმშვადი სითხის დინება ფოროვან კედლებს შორის, როდესაც მოძრაობის მართობულად მოდებულია გარეგანი ერთგვაროვანი (H_0) მაგნიტური ველი.

თუ $0z$ ღერძს მივმართავთ სითხის დინების მიმართულებით, ხოლო $0x$ ღერძს კედლების მართობულად, მაშინ საძებნი სიდიდეებისათვის გვექნება: $\vec{V}(u_0^*, 0, V_z(x,t))$, $\vec{H}(H_0, 0, H_z(x,t))$, $T = T(x,t)$.

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ თქმულს, მაშინ მოძრაობის, ინდუქციის და სითბოგადაცემის განტოლებები უგანზომილებო სიდიდეებში მოიცემა შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \tau} = f(\tau) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + M^2 \dfrac{\partial h}{\partial \xi} + R \dfrac{\partial u}{\partial \xi}, \\[2ex] \dfrac{\partial h}{\partial \tau} = \dfrac{\nu_m}{\nu} \dfrac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \dfrac{\nu_m}{\nu} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} + R \dfrac{\partial h}{\partial \xi}, \\[2ex] P_r \dfrac{\partial \theta}{\partial \tau} - R P_r \dfrac{\partial \theta}{\partial \xi} = \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + M^2 \left(\dfrac{\partial H}{\partial \xi}\right)^2. \end{cases} \tag{1}$$

სადაც $\xi = \frac{x}{L}$, $\tau = \frac{\nu}{L^2} t$, $u = \frac{V}{V_0^*}$, $\theta = \frac{K}{\eta V_0^{*2}} T$, $f(\tau) = -\frac{L^2}{\nu V_0^* \rho} \frac{\partial P}{\partial z}$, $h = \frac{H}{H_0 R_m}$ უგანზომილებო სიდიდეებია, ხოლო V_0^* და L შესაბამისად მახასიათებელი სიჩქარე და მახასიათებელი სიგრძეა, u_0^* ფოროვნების მახასიათებელი სიჩქარეა. $M = H_0 L \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$ არის ჰარტმანის რიცხვი, $P_r = \frac{\eta c_v}{K}$ - პრანდლტის სითბური რიცხვი, $R = \frac{u_0^* L}{\nu}$ -სითხის გაჟონვის მახასიათებელი რეინოლდსის რიცხვი, $\alpha = \frac{\omega L^2}{\nu}$ -დამყარებული პულსაციური მოძრაობის მსგავსების კრიტერიუმი, ხოლო $D = \frac{A L^2}{\nu V^*}$ - წნევის პულსაციური დაცემის ამპლიტუდაა. $R_m = V_0^* L / \nu_m$ - რეინოლდსის მაგნიტური რიცხვია.

მოძრაობის და ინდუქციის განტოლებებისათვის საწყის-სასაზღვრო პირობებს აქვთ სახე:

$$u(\xi,0) = h(\xi,0) = 0, \qquad u(\pm 1,\tau) = \varphi_{1,2}(\tau), \qquad h(\pm 1,\tau) = 0, \tag{2}$$

ხოლო სითბოგადაცემის განტოლებისათვის საწყისი-სასაზღვრო პირობები მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} \theta(\xi,0)=\theta_1(\xi,0)=\theta_2(\xi,0), \\ \theta(\pm 1,\tau)=\theta_1(\pm 1,\tau)+\theta_2(\pm 1,\tau)=q^{(1)}_{1,2}(\tau)+q^{(2)}_{1,2}(\tau)=q_{1,2}(\tau), \end{cases} \tag{3}$$

სადაც $\theta(\xi,\tau)=\theta_1(\xi,\tau)+\theta_2(\xi,\tau)$ სითხის სრული ტემპერატურაა, ხოლო $\theta_1(\xi,\tau)$ არის ტემპერატურა, როდესაც სითბოგადაცემის განტოლებაში გათვალისწინებულია მხოლოდ ხახუნის სითბო, ხოლო $\theta_2(\xi,\tau)$ არის ტემპერატურა, როდესაც სითბოგადაცემის განტოლებაში გათვალისწინებულია მხოლოდ ჯოულის სითბო.

(7)-(9) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნისათვის გამოვიყენოთ ლაპლასის ინტეგრალური გარდაქმნა. მივიღებთ, რომ

$$s\bar{u}=\bar{f}(s)+\bar{u}''+R\bar{u}'+M^2\bar{h}', \tag{4}$$

$$s\bar{h}=\frac{\nu_m}{\nu}\bar{h}''+\frac{\nu_m}{\nu}\bar{u}'+R\bar{h}', \tag{5}$$

$$\bar{u}(\pm 1,s)=\bar{\varphi}_{1,2}(s), \quad \bar{h}(\pm 1,s)=0, \tag{6}$$

სადაც $$\bar{u}(\xi,s)=\int_0^\infty u(\xi,\tau)e^{-s\tau}d\tau, \qquad \bar{f}(s)=\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau,$$

$$\bar{h}(\xi,s)=\int_0^\infty h(\xi,\tau)e^{-s\tau}d\tau, \qquad \bar{\varphi}_{1,2}(s)=\int_0^\infty \varphi_{1,2}(\tau)e^{-s\tau}d\tau.$$

განვიხილოთ დინება, როდესაც სიბლანტის კინემატიკური კოეფიციენტი (ν) ტოლია მაგნიტური სიბლანტის კინემატიკური კოეფიციენტის (ν_m) (ე.ი. $\nu=\nu_m$). მაშინ (4)-(5)-(6) ამოცანის ამონახსნს გარდასახვებში ექნება შემდეგი სახე:

$$2\bar{u}-\frac{2\bar{f}}{s}=\left(\bar{\varphi}_1-\frac{\bar{f}}{s}\right)\left[\frac{\exp[(R+M)(1+\xi)/2]\,sh\left(\sqrt{(R+M)^2+4s}\,(1+\xi)/2\right)}{sh\sqrt{(R+M)^2+4s}}+\right.$$

$$\left.\frac{\exp[(R+M)(1+\xi)/2]\,sh\left(\sqrt{(R+M)^2+4s}\,(1+\xi)/2\right)}{sh\sqrt{(R-M)^2+4s}}\right]+$$

$$+\left(\bar{\varphi}_2-\frac{\bar{f}}{s}\right)\frac{\exp[(R+M)(1+\xi)/2]\,sh\left(\sqrt{(R+M)^2+4s}\,(1-\xi)/2\right)}{sh\sqrt{(R+M)^2+4s}}+$$

$$\frac{\exp\left[(R-M)(1+\xi)/2\right]\ \mathrm{sh}\left(\sqrt{(R-M)^2+4s}\,(1-\xi)/2\right)}{\mathrm{sh}\sqrt{(R-M)^2+4s}}\Bigg],$$

$$2M\,\bar{h}=\left(\bar{\varphi}_1-\frac{\bar{f}}{s}\right)\frac{\exp\left[(R+M)(1+\xi)/2\right]\mathrm{sh}\left(\sqrt{(R+M)^2+4s}\,(1+\xi)/2\right)}{\mathrm{sh}\sqrt{(R+M)^2+4s}}-$$

$$-\frac{\exp\left[(R-M)(1+\xi)/2\right]\ \mathrm{sh}\left(\sqrt{(R-M)^2+4s}\,(1+\xi)/2\right)}{\mathrm{sh}\sqrt{(R-M)^2+4s}}\Bigg]+$$

$$+\left(\bar{\varphi}_2-\frac{\bar{f}}{s}\right)\Bigg[\frac{\exp\left[(R+M)(1+\xi)/2\right]\mathrm{sh}\left(\sqrt{(R+M)^2+4s}\,(1-\xi)/2\right)}{\mathrm{sh}\sqrt{(R+M)^2+4s}}-$$

$$-\frac{\exp\left[(R-M)(1+\xi)/2\right]\ \mathrm{sh}\left(\sqrt{(R+M)^2+4s}\,(1-\xi)/2\right)}{\mathrm{sh}\sqrt{(R-M)^2+4s}}\Bigg]. \qquad (8)$$

შევისწავლოთ სითხის დინება, რომელიც გამოწვეულია კედლების პულსაციური მოძრაობით $\left(u\ {\pm 1},\tau)=\varphi_{1,2}(\tau)=A_{1,2}\,e^{-i\alpha\tau}\right)$ და წნევის პულსაციური დაცემით $\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=f^*(t)=A e^{-i\alpha\tau}\right)$.

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ თქმულს (7) და (8) ფორმულებში, მაშინ სიჩქარისათვის და მაგნიტური ინდუქციისათვის ორიგინალებში მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$2u(\xi,\tau)+\frac{2D}{i\alpha}e^{-i\alpha\tau}=$$

$$\frac{e^{-i\alpha\tau}}{\mathrm{sh}\sqrt{(R+M)^2-4i\alpha}}\Bigg[\frac{\exp\left[(R+M)(1-\xi)/2\right]\ \mathrm{sh}\left(\sqrt{(R+M)^2-4i\alpha}\,(1+\xi)/2\right)}{i\alpha/(D+i\alpha A_1)}$$

$$+\frac{\exp\left[-(R+M)(1+\xi)/2\right]\ \mathrm{sh}\left(\sqrt{(R+M)^2-4i\alpha}\,(1-\xi)/2\right)}{i\alpha/(D+i\alpha A_2)}\Bigg]+$$

$$+\frac{e^{-i\alpha\tau}}{sh\sqrt{(R-M)^2-4i\alpha}}\left[\frac{\exp[(R-M)(1-\xi)/2]\,sh\sqrt{(R-M)^2-4i\alpha}(1+\xi)/2}{i\alpha/(D+i\alpha A_1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\exp[-(R-M)(1+\xi)/2]\,sh\left(\sqrt{(R-M)^2-4i\alpha}(1-\xi)/2\right)}{i\alpha/(D+i\alpha A_2)}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{e^{s_n\tau}}{s_n(s_n+i\alpha)}\left[(A_1s_n-D)\exp[(R+M)(1-\xi)/2]\sin\mu_n(1+\xi)/2+\right.\right.$$

$$\left.+(A_2s_n-D)\exp[-(R+M)(1+\xi)/2]\sin\mu_n(1-\xi)/2\right]+$$

$$+\frac{e^{s_n^*\tau}}{s_n^*(s_n^*+i\alpha)}\left[(A_1s_n^*-D)\exp[(R-M)(1-\xi)/2]\sin\mu_n(1+\xi)/2+\right.$$

$$\left.\left.+(A_2s_n^*-D)\exp[-(R-M)(1+\xi)/2]\sin\mu_n(1-\xi)/2\right]\right\}, \qquad (9)$$

$$2M\,h(\xi,\tau)=\frac{e^{-i\alpha\tau}}{sh\sqrt{(R+M)^2-4i\alpha}}\left[\frac{\exp[(R+M)(1-\xi)/2]\,sh\left(\sqrt{(R+M)^2-4i\alpha}(1+\xi)/2\right)}{i\alpha/(D+i\alpha A_1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\exp[(R+M)(1+\xi)/2]\,sh\left(\sqrt{(R+M)^2-4i\alpha}(1-\xi)/2\right)}{i\alpha/(D+i\alpha A_2)}\right]-$$

$$-\frac{e^{-i\alpha\tau}}{sh\sqrt{(R-M)^2-4i\alpha}}\left[\frac{\exp[(R-M)(1-\xi)/2]\,sh\left(\sqrt{(R-M)^2-4i\alpha}(1+\xi)/2\right)}{i\alpha/(D+i\alpha A_1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\exp[-(R-M)(1+\xi)/2]\,sh\left(\sqrt{(R-M)^2-4i\alpha}(1-\xi)/2\right)}{i\alpha/(D+i\alpha A_2)}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{e^{s_n\tau}}{s_n(s_n+i\alpha)}\left[(A_1s_n-D)\exp[(R+M)(1-\xi)/2]\sin\mu_n(1+\xi)/2+\right.\right.$$

$$\left.+(A_2s_n-D)\exp[-(R+M)(1+\xi)/2]\sin\mu_n(1-\xi)/2\right]-$$

$$-\frac{e^{S_n^*\tau}}{S_n^*(S_n^*+i\alpha)}\Big[(A_1 S_n^*-D)\exp[(R-M)(1-\xi)/2]\sin\mu_n(1+\xi)/2 +$$

$$+(A_2 S_n^*-D)\exp[-(R-M)(1+\xi)/2]\sin\mu_n(1-\xi)/2\Big]\Big\}, \qquad (10)$$

სადაც $S_n=-\frac{1}{4}\left[\mu_n^2+(R+M)^2\right]$, $S_n^*=-\frac{1}{4}\left[\mu_n^2+(R-M)^2\right]$, $\mu_n=\pi n$.

სითბოგადაცემის (I) განტოლებაში ((I) სისტემის მე-3 განტოლება) უკუვაგდოთ ჯერ ჯოულის სითბო და შემდეგ ხახუნის სითბო. შესაბამისად მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს:

$$P_r\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau}-RP_r\frac{\partial\theta_1}{\partial\xi}-\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\xi^2}=\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^2, \qquad (11)$$

$$P_r\frac{\partial\theta_2}{\partial\tau}-RP_r\frac{\partial\theta_2}{\partial\xi}-\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\xi^2}=\left(M\frac{\partial h}{\partial\xi}\right)^2. \qquad (12)$$

ფოროვან მილში ტემპერატურის პულსაციური რეჟიმის დამყარება უფრო ნელა ხდება, ვიდრე სიჩქარის პულსაციური რეჟიმით ცვლილება. ამიტომ (II) და (I2) განტოლებებში შეგვიძლია ჩავსვათ სიჩქარისა და ინდუქციის მნიშვნელობები, რომლებიც მოცემულია შემდეგი ფორმულებით:

$$2u(\xi,\tau)+\frac{2D}{i\alpha}e^{-i\alpha\tau}=$$

$$=\frac{e^{-i\alpha\tau}}{sh\sqrt{(R+M)^2-4i\alpha}}\left[\frac{\exp[(R+M)(1-\xi)/2]\,sh\left(\sqrt{(R+M)^2-4i\alpha}\,(1+\xi)/2\right)}{i\alpha/(D+i\alpha A_1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\exp[-(R+M)(1+\xi)/2]\,sh\left(\sqrt{(R+M)^2-4i\alpha}\,(1-\xi)/2\right)}{i\alpha/(D+i\alpha A_2)}\right]+$$

$$-\frac{e^{-i\alpha\tau}}{sh\sqrt{(R-M)^2-4i\alpha}}\;\frac{\exp[(R-M)(1-\xi)/2]\,sh\left(\sqrt{(R-M)^2-4i\alpha}\,(1+\xi)/2\right)}{i\alpha/(D+i\alpha A_1)}+$$

$$-\frac{\exp[-(R-M)(1+\xi)/2]\; sh\left(\sqrt{(R-M)^2-4i\alpha}\,(1-\xi)/2\right)}{i\alpha/(D+i\alpha A_2)}\Bigg], \tag{13}$$

$$2Mh(\xi,\tau)=\frac{e^{-i\alpha\tau}}{sh\sqrt{(R+M)^2-4i\alpha}}\left[\frac{\exp[(R+M)(1-\xi)/2]\; sh\left(\sqrt{(R+M)^2-4i\alpha}\,(1+\xi)/2\right)}{i\alpha/(D+i\alpha A_1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\exp[-(R+M)(1+\xi)/2]\; sh\left(\sqrt{(R+M)^2-4i\alpha}\,(1-\xi)/2\right)}{i\alpha/(D+i\alpha A_2)}\right]-$$

$$-\frac{e^{-i\alpha\tau}}{sh\sqrt{(R-M)^2-4i\alpha}}\left[\frac{\exp[(R-M)(1-\xi)/2]\; sh\left(\sqrt{(R-M)^2-4i\alpha}\,(1+\xi)/2\right)}{i\alpha/(D+i\alpha A_1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\exp[-(R-M)(1+\xi)/2]\; sh\left(\sqrt{(R-M)^2-4i\alpha}\,(1-\xi)/2\right)}{i\alpha/(D+i\alpha A_2)}\right] \tag{14}$$

თუ (II)-(I2) განტოლებებში გავითვალისწინებთ (I3)-(I4) ფორმულებს და გამოვიყენებთ ლაპლასის ინტეგრალური გარდაქმნის ფორმულას, მაშინ (3) საწყისი-სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით ტემპერატურა გარდასახვებში მოიცემა შემდეგი სახით:

$$\bar{\theta}_{1,2}(\xi,s)=\left[\frac{1}{s+2i\alpha}\sum_{k=1}^{10}\frac{b_k^2 e^{2\beta_k}}{4\beta_k^2+2P_1R\beta_k-sP_1}+\right.$$

$$\left.+\bar{q}_1^{(1,2)}(s)\right]\exp RP_1(1-\xi)/2\;\frac{sh\left(\sqrt{P_1^2R^2+4sP_1}\,(1+\xi)/2\right)}{sh\sqrt{P_1^2R^2+4sP_1}}+$$

$$+\left[\frac{1}{s+2i\alpha}\sum_{k=1}^{10}\frac{b_k^2 e^{-2\beta_k}}{4\beta_k^2+2P_1R\beta_k-sP_1}+\right.$$

$$+\bar{q}_2^{(1,2)}(s)\Big]\exp\left[-RP_r(1+\xi)/2\right]\frac{sh\left(\sqrt{P_r^2R^2+4sP_r}\,(1-\xi)/2\right)}{sh\sqrt{P_r^2R^2+4sP_r}}-$$

$$-\frac{1}{s+2i\alpha}\sum_{k=1}^{10}\frac{b_k^2e^{2\beta_k}}{4\beta_k^2+2P_rR\beta_k-sP_r}\,, \qquad (15)$$

სადაც

$$\begin{cases} \beta_{1,2}=-\dfrac{R+M}{2}\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{(R+M)^2-4i\alpha}\,, \quad \beta_{3,4}=-\dfrac{R-M}{2}\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{(R-M)^2-4i\alpha}\,, \\ 2\beta_5=\beta_1+\beta_2\,, \quad 2\beta_6=\beta_1+\beta_3\,, \quad 2\beta_7=\beta_1+\beta_4\,, \quad 2\beta_8=\beta_2+\beta_3\,, \\ 2\beta_9=\beta_2+\beta_4\,, \quad 2\beta_{10}=\beta_3+\beta_4\,. \end{cases} \qquad (16)$$

$$\begin{cases} b_1=\dfrac{\beta_1}{sh(\beta_1-\beta_2)}\left(\dfrac{A_1}{4}e^{-\beta_2}-\dfrac{A_2}{4}e^{\beta_2}-\dfrac{D}{2i\alpha}sh\beta_2\right), \quad b_5^2=2b_1b_2\,, \quad b_6^2=\pm 2b_1b_3\,, \\ b_2=\dfrac{\beta_2}{sh(\beta_1-\beta_2)}\left(\dfrac{A_2}{4}e^{\beta_1}-\dfrac{A_1}{4}e^{-\beta_1}+\dfrac{D}{2i\alpha}sh\beta_1\right), \quad b_7^2=\pm 2b_1b_4\,, \quad b_9^2=\pm 2b_2b_3\,, \\ b_3=\dfrac{\beta_3}{sh(\beta_1-\beta_2)}\left(\dfrac{A_1}{4}e^{-\beta_4}-\dfrac{A_2}{4}e^{\beta_4}-\dfrac{D}{2i\alpha}sh\beta_4\right), \quad b_9=\pm 2b_2b_4\,, \quad b_{10}^2=2b_3b_4\,, \\ b_4=\dfrac{\beta_4}{sh(\beta_1-\beta_2)}\left(\dfrac{A_2}{4}e^{\beta_3}-\dfrac{A_1}{4}e^{-\beta_3}-\dfrac{D}{2i\alpha}sh\beta_3\right). \end{cases} \qquad (17)$$

შევნიშნოთ, რომ b_6^2, b_7^2, b_8^2 და b_9^2 სიდიდეებში „+" ნიშანი აღებულია $\bar{\theta}_1(\xi,s)$ შემთხვევაში, ხოლო „–" ნიშანი $\bar{\theta}_2(\xi,s)$ შემთხვევაში.

შევისწავლოთ ტემპერატურის ცვლილება სითხეში, დამყარებული პულსაციური დინების დროს, როდესაც ტემპერატურის ცვლილება საწყის მომენტში ნულია, ხოლო ბრტყელი მილის კედლებზე ხდება პულსაციური კანონით (ე.ი. $q_{1,2}^{(1)}(\tau)=B_{1,2}^{(1)}e^{-2i\alpha\tau}$, $q_{1,2}^{(2)}(\tau)=B_{1,2}^{(2)}e^{-2i\alpha\tau}$).

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ თქმულს (15) განტოლებაში, მაშინ ტემპერატურისათვის ორიგინალებში შესაბამისად მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$
\begin{aligned}
\theta_{1,2}(\xi,\tau) = \Bigg\{ \Bigg[& \sum_{k=1}^{10} \frac{b_k^2 e^{2\beta_k}}{4\beta_k^2 + 2P_r R\beta_k + 2i\alpha P_r} + \\
& + B_1^{(1,2)} \Bigg] \exp RP_r(1-\xi)/2 \, \frac{sh\left(\sqrt{P_r^2R^2 - 8i\alpha P_r}(1+\xi)/2\right)}{sh\sqrt{P_r^2R^2 - 8i\alpha P_r}} + \\
& + \Bigg[\sum_{k=1}^{10} \frac{b_k^2 e^{-2\beta_k}}{4\beta_k^2 + 2P_r R\beta_k + 2i\alpha P_r} + \\
& + B_2^{(1,2)} \Bigg] \exp\left[-PP_r(1+\xi)/2\right] \frac{sh\left(\sqrt{P_r^2R^2 - 8i\alpha P_r}(1-\xi)/2\right)}{sh\sqrt{P_r^2R^2 - 8i\alpha P_r}} - \\
& - \sum_{k=1}^{10} \frac{b_k^2 e^{2\beta_k}}{4\beta_k^2 + 2P_r R\beta_k + 2i\alpha P_r} \Bigg] e^{-2i\alpha\tau} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\mu_n e^{s_n\tau}}{P_r(s_n + 2i\alpha)} \Bigg\{ \Bigg[B_1^{(1,2)} + \\
& + \sum_{k=1}^{10} \frac{b_k^2 e^{2\beta_k}}{4\beta_k^2 + 2P_r R\beta_k - sP_r} \Bigg] \exp RP_r(1-\xi)/2 \, \sin\mu_n(1+\xi)/2 + \Bigg[B_2^{(1,2)} + \\
& + \sum_{k=1}^{10} \frac{b_k^2 e^{-2\beta_k}}{4\beta_k^2 + 2P_r R\beta_k - sP_r} \Bigg] \exp\left[-RP_r(1+\xi)/2\right] \sin\mu_n(1-\xi)/2 \Bigg\}, \qquad (18)
\end{aligned}
$$

სადაც $s_n = -\frac{1}{4P_r}\left(\mu_n^2 + R^2P_r\right)$, $\mu_n = \pi n$.

I. ახლა განვიხილოთ სითხის პულსაციური დინება, რომელიც გამოწვეულია მხოლოდ კედლების პულსაციური მოძრაობით. ვთქვათ, კედლების პულსაციური მოძრაობა წარმოებს ერთი და იგივე ფაზაში, ერთი და იგივე ამპლიტუდით ($A_1 = A_2 = u_0$), ხოლო ტემპერატურის ცვლილება მილის კედლებზე ხდება პულსაციურად ერთი და იგივე ფაზაში, ერთი და იგივე ამპლიტუდით ($B_{1,2}^{(1)} = \theta_1^{(1)} = const$, $B_{1,2}^{(2)} = \theta_1^{(2)} = const$), წნევის დაცემა კი ნულის ტოლი იყოს ($D=0$).

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ თქმულს, მაშინ სიჩქარისათვის, ინდუქციისათვის და ტემპერატურისათვის (9), (10), და (18) ფორმულებიდან მივიღებთ, რომ

$$\frac{2u^I(\xi,\tau)}{u_0}=\left[\frac{sh\beta_1 e^{\beta_2\xi}-sh\beta_2 e^{\beta_1\xi}}{sh(\beta_1-\beta_2)}+\frac{sh\beta_3 e^{\beta_4\xi}-sh\beta_4 e^{\beta_3\xi}}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right]e^{-i\alpha\tau}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left\{\frac{e^{s_n\tau}}{s_n+i\alpha}\Big(\exp[(R+M)(1-\xi)/2]\sin\mu_n(1+\xi)/2+\right.$$

$$+\exp[-(R+M)(1+\xi)/2]\sin\mu_n(1-\xi)/2\Big)+$$

$$+\frac{e^{s_n^*\tau}}{s_n^*+i\alpha}\Big(\exp[(R-M)(1-\xi)/2]\sin\mu_n(1+\xi)/2+$$

$$\left.+\exp[-(R-M)(1+\xi)/2]\sin\mu_n(1-\xi)/2\Big)\right\}, \qquad (9^I)$$

$$\frac{2Mh^I(\xi,\tau)}{u_0}=\left[\frac{sh\beta_1 e^{\beta_2\xi}-sh\beta_2 e^{\beta_1\xi}}{sh(\beta_1-\beta_2)}-\frac{sh\beta_3 e^{\beta_4\xi}-sh\beta_4 e^{\beta_3\xi}}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right]e^{-i\alpha\tau}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left\{\frac{e^{s_n\tau}}{s_n+i\alpha}\Big(\exp[(R+M)(1-\xi)/2]\sin\mu_n(1+\xi)/2+\right.$$

$$+\exp[-(R+M)(1+\xi)/2]\sin\mu_n(1-\xi)/2\Big)-$$

$$-\frac{e^{s_n^*\tau}}{s_n^*+i\alpha}\Big(\exp[(R-M)(1-\xi)/2]\sin\mu_n(1+\xi)/2+$$

$$\left.+\exp[-(R-M)(1+\xi)/2]\sin\mu_n(1-\xi)/2\Big)\right\}, \qquad (10^I)$$

$$\theta^{I}_{1,2}(\xi,\tau)=\Bigg[\frac{\theta_1^{(1,2)}}{sh\,\gamma}\Big(\exp P_r R(1-\xi)/2\; sh\,\gamma(1+\xi)/2+\exp[-P_r R(1+\xi)/2]\; sh\,\gamma(1-\xi)/2\Big)+$$

$$-\frac{1}{sh\,\gamma}\sum_{k=1}^{10}\frac{b_k^2}{4\beta_k^2+2P_rR\beta_k+2i\alpha P_r}\Big(\exp\big(2\beta_k+RP_r(1-\xi)/2\big)\; sh\,\gamma(1+\xi)/2+$$

$$+\exp\big(-2\beta_k-RP_r(1+\xi)/2\big)\; sh\,\gamma(1-\xi)/2-e^{2\beta_k\xi}\; sh\,\gamma\Big)\Bigg]e^{-2i\alpha\tau}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu_n e^{s_n\tau}}{P_r(s_n+2i\alpha)}\Bigg[\theta_1^{(1,2)}\Big(\exp P_rR(1-\xi)/2\;\sin\mu_n(1+\xi)/2+$$

$$+\exp[-P_rR(1+\xi)/2]\;\sin\mu_n(1-\xi)/2\Big)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\frac{b_k^2}{4\beta_k^2+2P_rR\beta_k-s_nP_r}\Big(\exp\big(2\beta_k+RP_r(1-\xi)/2\big)\sin\mu_n(1+\xi)/2+$$

$$+\exp\big(-2\beta_k-RP_r(1+\xi)/2\big)\sin\mu_n(1-\xi)/2\Big)\Bigg], \qquad (18^{I})$$

სადაც

$$\gamma=\sqrt{P_r^2R^2-8i\alpha P_r},\quad b_1=-\frac{u_0}{2}\frac{\beta_1\, sh\,\beta_2}{sh(\beta_1-\beta_2)},\quad b_2=\frac{u_0}{2}\frac{\beta_2\, sh\,\beta_1}{sh(\beta_1-\beta_2)},$$

$$b_3=-\frac{u_0}{2}\frac{\beta_3\, sh\,\beta_4}{sh(\beta_3-\beta_4)},\qquad b_4=\frac{u_0}{2}\frac{\beta_4\, sh\,\beta_3}{sh(\beta_3-\beta_4)}. \qquad (17^{I})$$

თუ გამოვიყვანთ ხახუნის ძალას სითხეში და მილის კედლებზე, შესაბამისად მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს:

$$F^{I}_{ხახ.}=\frac{u_0}{2}\left[\frac{\beta_2\, sh\beta_1 e^{\beta_2\xi}-\beta_1\, sh\beta_2 e^{\beta_1\xi}}{sh(\beta_1-\beta_2)}+\frac{\beta_4\, sh\beta_3 e^{\beta_4\xi}-\beta_3\, sh\beta_4 e^{\beta_3\xi}}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right]e^{-i\alpha\tau},$$

$$F^{I}_{1}=\frac{u_0}{2}\left[\frac{\beta_2\, sh\beta_1 e^{\beta_2}-\beta_1\, sh\beta_2 e^{\beta_1}}{sh(\beta_1-\beta_2)}+\frac{\beta_4\, sh\beta_3 e^{\beta_4}-\beta_3\, sh\beta_4 e^{\beta_3}}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right]e^{-i\alpha\tau},$$

$$F^{I}_{2}=\frac{u_0}{2}\left[\frac{\beta_2\, sh\beta_1 e^{-\beta_2}-\beta_1\, sh\beta_2 e^{-\beta_1}}{sh(\beta_1-\beta_2)}+\frac{\beta_4\, sh\beta_3 e^{-\beta_4}-\beta_3\, sh\beta_4 e^{-\beta_3}}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right]e^{-i\alpha\tau},$$

ხოლო სითხის ხარჯისათვის და საშუალო სიჩქარისათვის გვექნება:

$$Q^I=\frac{iu_0e^{-i\alpha\tau}}{\alpha}\Big[\frac{\beta_1-\beta_2}{sh(\beta_1-\beta_2)}sh\beta_1\, sh\beta_2+\frac{\beta_3-\beta_4}{sh(\beta_3-\beta_4)}\Big]sh\beta_3\, sh\beta_4\Big],$$

$$u^I_{\text{საშ}}=\frac{iu_0e^{-i\alpha\tau}}{2\alpha}\Big[\frac{\beta_1-\beta_2}{sh(\beta_1-\beta_2)}sh\beta_1\, sh\beta_2+\frac{\beta_3-\beta_4}{sh(\beta_3-\beta_4)}\Big]sh\beta_3\, sh\beta_4\Big].$$

როდესაც ბრტყელი მილის კედლები ერთ ფაზაში ერთნაირი ამპლიტუდით მოძრაობენ პულსაციური კანონით, მაშინ სიჩქარე მაქსიმალურ მნიშვნელობას ვეღარ აღწევს მილის ღერძზე (როგორც ეს არაფოროვანი მილის შემთხვევაში იყო), ხოლო ხახუნის ძალას კედლებზე ერთნაირი მიმართულება აქვს, ხოლო სიდიდე სხვადასხვა.

გაჟონვის რეინოლდსის რიცხვის $(R=u_0^* L/\nu)$ გაზრდა იწვევს სითხის ხარჯის შემცირებას.

II. განვიხილოთ სითხის პულსაციური დინება, რომელიც გამოწვეულია კედლების პულსაციური მოძრაობით, როდესაც კედლების პულსაციური მოძრაობა წარმოებს ერთი და იგივე ფაზაში სხვადასხვა ნიშნის მქონე ამპლიტუდით $(A_1=V_0,\ A_2=-V_0)$. ასევე ტემპერატურის ცვლილება მილის კედლებზე ხდება პულსაციურად, ერთი და იგივე ფაზაში, სხვადასხვა ნიშნის მქონე ამპლიტუდით $(B_1^{(1)}=-B_2^{(1)}=\theta_2^{(1)}=const,$ $B_1^{(2)}=-B_2^{(2)}=\theta_2^{(2)}=const)$. წნევის დაცემა კი ნულის ტოლია $(D=0)$.

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ თქმულს, მაშინ სიჩქარისათვის, ინდუქციისათვის და ტემპერატურისათვის (9), (10) და (18) ფორმულებიდან მივიღებთ, რომ

$$\frac{2u^2(\xi,\tau)}{V_0}=\Big[\frac{ch\beta_2e^{\beta_1\xi}-ch\beta_1e^{\beta_2\xi}}{sh(\beta_1-\beta_2)}+\frac{ch\beta_4e^{\beta_3\xi}-ch\beta_3e^{\beta_4\xi}}{sh(\beta_3-\beta_4)}\Big]e^{-i\alpha\tau}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\Big\{\frac{e^{s_n\tau}}{s_n+i\alpha}\Big(exp[(R+M)(1-\xi)/2]\sin\mu_n(1+\xi)/2-$$

$$- \exp[-(R+M)(1+\xi)/2] \sin \mu_n (1-\xi)/2 \Big) +$$

$$+ \frac{e^{s_n^* \tau}}{s_n^* + i\alpha} \Big(\exp[(R-M)(1-\xi)/2] \sin \mu_n (1+\xi)/2 -$$

$$- \exp[-(R-M)(1+\xi)/2] \sin \mu_n (1-\xi)/2 \Big) \Big\}, \qquad (9^{II})$$

$$\frac{2M h^{II}(\xi,\tau)}{v_0} = \left[\frac{ch\beta_2 e^{\beta_1 \xi} - ch\beta_1 e^{\beta_2 \xi}}{sh(\beta_1 - \beta_2)} - \frac{ch\beta_4 e^{\beta_3 \xi} - ch\beta_3 e^{\beta_4 \xi}}{ch(\beta_3 - \beta_4)} \right] e^{-i\alpha\tau} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{s_n \tau}}{s_n + i\alpha} \Big(\exp[(R+M)(1-\xi)/2 \sin \mu_n (1+\xi)/2 -$$

$$- \exp[-(R+M)(1+\xi)/2] \sin \mu_n (1-\xi)/2 \Big) -$$

$$- \frac{e^{s_n^* \tau}}{s_n^* + i\alpha} \Big(\exp[(R-M)(1-\xi)/2 \sin \mu_n (1+\xi)/2 -$$

$$- \exp[-(R-M)(1+\xi)/2] \sin \mu_n (1-\xi)/2 \Big) \Big\}, \qquad (10^{II})$$

$$\theta_{1,2}^{II}(\xi,\tau) = \Big[\frac{\theta^{(1,2)}}{sh\gamma} \Big(\exp P_1 R(1-\xi)/2 \, sh\gamma(1+\xi)/2 - \exp[-P_1 R(1+\xi)/2] \, sh\gamma(1-\xi)/2 \Big) +$$

$$+ \frac{-1}{sh\gamma} \sum_{k=1}^{10} \frac{b_k^2}{4\beta_k^2 + 2P_1 R\beta_k + 2i\alpha P_1} \Big(\exp(2\beta_k + RP_1(1-\xi)/2) \, sh\, \gamma(1+\xi)/2 -$$

$$- \exp(-2\beta_k - RP_1(1+\xi)/2) \, sh\, \gamma(1-\xi)/2 - e^{2\beta_k \xi} sh\gamma \Big) e^{-2i\alpha\tau} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \mu_n e^{s_n \tau}}{P_1(s_n + 2i\alpha)}, \quad \theta_2^{(1,2)} \Big(\exp P_1 R(1-\xi)/2 \, \sin \mu_n (1+\xi)/2 -$$

$$- \exp[-P_1 R(1+\xi)/2] \sin \mu_n (1-\xi)/2 \Big) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \frac{b_k^2}{4\beta_k^2 + 2P_1 R\beta_k - s_n P_1} \Big(\exp(2\beta_k + RP_1(1-\xi)/2) \sin \mu_n (1+\xi)/2 +$$

$$+\exp\left(-2\beta_k - RP_r(1+\xi)/2\right)\sin\beta_n^r(1-\xi)/2\Big)\Big], \qquad (18^{V})$$

სადაც

$$\gamma=\sqrt{P_r^2R^2-8i\alpha P_r}\,,\qquad b_1=\frac{V_0}{2}\,\frac{\beta_1\,ch\,\beta_2}{sh\,(\beta_1-\beta_2)}\,, \qquad (17^{II})$$

$$b_2=-\frac{V_0}{2}\,\frac{\beta_2\,ch\,\beta_1}{sh(\beta_1-\beta_2)}\,,\qquad b_3=\frac{V_0}{2}\,\frac{\beta_3\,ch\,\beta_4}{sh(\beta_3-\beta_4)}\,,\qquad b_4=-\frac{V_0}{2}\,\frac{\beta_4\,ch\,\beta_3}{sh(\beta_3-\beta_4)}\,.$$

თუ გამოვითვლით ხახუნის ძალას სითხეში და მილის კედლებზე, შესაბამისად მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს:

$$F^{II}_{\text{ხხ.}}=\frac{V_0}{2}\left[\frac{\beta_1 ch\beta_2 e^{\beta_1\xi}-\beta_2 ch\beta_1 e^{\beta_2\xi}}{sh(\beta_1-\beta_2)}+\frac{\beta_3 ch\beta_4 e^{\beta_3\xi}-\beta_4 ch\beta_3 e^{\beta_4\xi}}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right]e^{-i\alpha\tau},$$

$$F^{II}_{1}=\frac{V_0}{2}\left[\frac{\beta_1 ch\beta_2 e^{\beta_1}-\beta_2 ch\beta_1 e^{\beta_2}}{sh(\beta_1-\beta_2)}+\frac{\beta_3 ch\beta_4 e^{\beta_3}-\beta_4 ch\beta_3 e^{\beta_4}}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right]e^{-i\alpha\tau},$$

$$F^{I}_{2}=\frac{V_0}{2}\left[\frac{\beta_1 ch\beta_2 e^{-\beta_1}-\beta_2 ch\beta_1 e^{-\beta_2}}{sh(\beta_1-\beta_2)}+\frac{\beta_3 ch\beta_4 e^{-\beta_3}-\beta_4 ch\beta_3 e^{-\beta_4}}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right]e^{-i\alpha\tau},$$

ხოლო სითხის ხარჯისათვის და საშუალო სიჩქარისათვის გვექნება:

$$Q^{II}=\frac{V_0e^{-i\alpha\tau}}{i\alpha}\left[\frac{\beta_2 ch\beta_2\, sh\beta_1-\beta_1 ch\beta_1\, sh\beta_2}{sh(\beta_1-\beta_2)}+\frac{\beta_4 ch\beta_4\, sh\beta_3-\beta_3 ch\beta_3\, sh\beta_4}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right],$$

$$U''_{\text{სშ.}}=\frac{V_0e^{-i\alpha\tau}}{2i\alpha}\left[\frac{\beta_2 ch\beta_2\, sh\beta_1-\beta_1 ch\beta_1\, sh\beta_2}{sh(\beta_1-\beta_2)}+\frac{\beta_4 ch\beta_4\, sh\beta_3-\beta_3 ch\beta_3\, sh\beta_4}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right].$$

როდესაც ბრტყელი მილის კედლები ერთი და იგივე ფაზაში სხვადასხვა ნიშნის მქონე ამპლიტუდით პულსაციური კანონით მოძრაობენ, მაშინ ფოროვანი მილის ღერძზე ($\xi=0$) პულსაციური ნაკადის სიჩქარე ნულის ტოლი არაა (როგორც ეს არაფოროვანი მილის შემთხვევაში გვქონდა).

როგორც I შემთხვევაში ასევე II შემთხვევაში გაჟონვის რეინოლდსის რიცხვის გაზრდა იწვევს სითხის ხარჯის შემცირებას, ხოლო ხახუნის ძალა იზრდება.

გაჟონვის რეინოლდსის რიცხვის შემცირება იწვევს ხახუნის სითბოთი გამოწვეული ტემპერატურის გაზრდას, ხოლო ჯოულის სითბოთი გამოწვეული ტემპერატურა კლებულობს.

საზოგადოდ გაჟონვის რეინოლდსის რიცხვის ცვლილება (გადიდება ან შემცირება) ფოროვანი მილის ღერძზე უმნიშვნელო გავლენას ახდენს სითხის ნაკადის საშუალო სიჩქარეზე და სითხის სრულ ტემპერატურაზე.

სითხის სიჩქარის, შინაგანი ინდუქციის და ტემპერატურის პულსაციური რეჟიმით ცვლილების დამყარება ხდება სითხის რხევითი მოძრაობის დაწყებიდან საკმაოდ დიდი დროის შემდეგ. ე.ი. როდესაც $\tau\to\infty$, მაშინ $9^{I}, 9^{II}, 10^{I}, 10, 18^{I}$ და 18^{II} ფორმულებში უსასრულო ჯამით გამოსახული შესაკრებები ნულის ტოლია, ხოლო სითხის სიჩქარის, შინაგანი ინდუქციის და ტემპერატურის ცვლილების კანონს ექნებათ პულსაციური ხასიათი და გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$\frac{2u^{I}(\xi,\tau)}{u_0}=\left[\frac{sh\beta_1 e^{\beta_2\xi}-sh\beta_2 e^{\beta_1\xi}}{sh(\beta_1-\beta_2)}-\frac{sh\beta_3 e^{\beta_4\xi}-sh\beta_4 e^{\beta_3\xi}}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right]e^{-i\alpha\tau},$$

$$\frac{2u^{II}(\xi,\tau)}{v_0}=\left[\frac{ch\beta_2 e^{\beta_1\xi}-ch\beta_1 e^{\beta_2\xi}}{sh(\beta_1-\beta_2)}-\frac{ch\beta_4 e^{\beta_3\xi}-ch\beta_3 e^{\beta_4\xi}}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right]e^{-i\alpha\tau},$$

$$\frac{2Mh^{I}(\xi,\tau)}{u_0}=\left[\frac{sh\beta_1 e^{\beta_2\xi}-sh\beta_2 e^{\beta_1\xi}}{sh(\beta_1-\beta_2)}-\frac{sh\beta_3 e^{\beta_4\xi}-sh\beta_4 e^{\beta_3\xi}}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right]e^{-i\alpha\tau}$$

$$\frac{2Mh^{II}(\xi,\tau)}{v_0}=\left[\frac{ch\beta_2 e^{\beta_1\xi}-ch\beta_1 e^{\beta_2\xi}}{sh(\beta_1-\beta_2)}-\frac{ch\beta_4 e^{\beta_3\xi}-ch\beta_3 e^{\beta_4\xi}}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right]e^{-i\alpha\tau},$$

$$\theta^{I}_{1,2}(\xi,\tau)=\Bigg[\frac{\theta_1^{(1,2)}}{sh\gamma}\Big(\exp P_r R(1-\xi)/2\; sh\gamma(1+\xi)/2+\exp[-P_r R(1+\xi)/2]\, sh\gamma(1-\xi)/2\Big)+$$

$$-\frac{1}{sh\gamma}\sum_{k=1}^{10}\frac{b_k^2}{4\beta_k^2+2P_rR\beta_k+2i\alpha P_r}\Big(\exp\big(2\beta_k+RP_r(1-\xi)/2\big)\,sh\gamma(1+\xi)/2\;+$$

$$+\exp\big(-2\beta_k-RP_r(1+\xi)/2\big)\,sh\gamma(1-\xi)/2-e^{2\beta_k\xi}\,sh\gamma\Big)\Bigg]e^{-2i\alpha\tau},$$

$$\theta^{II}_{1,2}(\xi,\tau)=\Bigg[\frac{\theta_2^{(1,2)}}{sh\gamma}\Big(\exp P_r R(1-\xi)/2\; sh\gamma(1+\xi)/2-\exp[-P_r R(1+\xi)/2]\, sh\gamma(1+\xi)/2\Big)$$

$$+\frac{1}{sh\gamma}\sum_{k=1}^{10}\frac{b_k^2}{4\beta_k^2+2P_rR\beta_k+2i\alpha P_r}\Big(\exp\big(2\beta_k+RP_r(1-\xi)/2\big)\,sh\gamma(1+\xi)/2\;-$$

$$-\exp\big(-2\beta_k-RP_r(1+\xi)/2\big)\,sh\gamma(1-\xi)/2-e^{2\beta_k\xi}\,sh\gamma\Big)\Bigg]e^{-2i\alpha\tau}$$

III. განვიხილოთ სითხის პულსაციური დინება, რომელიც გამოწვეულია მხოლოდ წნევის პულსაციური დაცემით ($\mathcal{D}\neq 0$). მილის კედლები უძრავია ($A_1=A_2=0$), ხოლო ტემპერატურის ცვლილება კედლებზე ნულის ტოლია ($B^{(1)}_{1,2}=B^{(2)}_{1,2}=0$).

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ თქმულს, მაშინ სიჩქარისათვის, ინდუქციისათვის და ტემპერატურისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$2u^{III}(\xi,\tau)+\frac{2D}{i\alpha}=\frac{D}{i\alpha}\left[\frac{sh\beta_1 e^{\beta_2\xi}-sh\beta_2 e^{\beta_1\xi}}{sh(\beta_1-\beta_2)}+\frac{sh\beta_3 e^{\beta_4\xi}-sh\beta_4 e^{\beta_4\xi}}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right]e^{-i\alpha\tau}-$$

$$-\frac{D}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left\{\frac{e^{s_n\tau}}{s_n(s_n+i\alpha)}\Big(\exp[(R+M)(1-\xi)/2]\sin\mu_n(1+\xi)/2+\right.$$

$$+\exp[-(R+M)(1+\xi)/2]\sin\mu_n(1-\xi)/2\Big)+$$

$$+\frac{e^{s_n^*\tau}}{s_n^*(s_n^*+i\alpha)}\Big(\exp[(R-M)(1-\xi)/2]\sin\mu_n(1+\xi)/2+$$

$$\left.+\exp[-(R-M)(1-\xi)/2]\sin\mu_n(1-\xi)/2\Big)\right\}, \qquad (9^{III})$$

$$2Mh^{III}(\xi,\tau)=\frac{D}{i\alpha}\left[\frac{sh\beta_1 e^{\beta_2\xi}-sh\beta_2 e^{\beta_1\xi}}{sh(\beta_1-\beta_2)}-\frac{sh\beta_3 e^{\beta_4\xi}-sh\beta_4 e^{\beta_3\xi}}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right]e^{-i\alpha\tau}-$$

$$-\frac{D}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\left\{\frac{e^{s_n\tau}}{s_n(s_n+i\alpha)}\Big(\exp[(R+M)(1-\xi)/2]\sin\mu_n(1+\xi)/2+\right.$$

$$+\exp[-(R+M)(1+\xi)/2]\sin\mu_n(1-\xi)/2\Big)-$$

$$-\frac{e^{s_n^*\tau}}{s_n^*(s_n^*+i\alpha)}\Big(\exp[(R-M)(1-\xi)/2]\sin\mu_n(1+\xi)/2+$$

$$\left.+\exp[-(R-M)(1+\xi)/2]\sin\mu_n(1-\xi)/2\Big)\right\}, \qquad (10^{III})$$

$$\theta^{III}_{1,2}(\xi,\tau)=$$

$$=\frac{e^{-2i\alpha\tau}}{sh\gamma}\sum_{k=1}^{10}\frac{b_k^2}{4\beta_k^2+2P_r R\beta_k+2i\alpha P_r}\Big(\exp(2\beta_k+RP_r(1-\xi)/2)\,sh\,\gamma(1+\xi)/2+$$

$$+\exp(-2\beta_k-RP_r(1+\xi)/2)\,sh\,\gamma(1-\xi)/2-e^{2\beta_k\xi}sh\,\gamma\Big)\Big]e^{-2i\alpha\tau}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mu_n e^{s_n\tau}}{P_r(s_n+2i\alpha)}\sum_{k=1}^{10}\frac{b_k^2}{4\beta_k^2+2P_r R\beta_k-s_n P_r}\Big(\exp(2\beta_k+RP_r(1-\xi)/2)\sin\mu_n(1+\xi)/2+$$

$$+\exp\left(-2\beta_K - RP_r(1+\xi)/2\right)\sin\mu_m(1-\xi)/2\Big), \qquad (18^{III})$$

სადაც

$$\gamma=\sqrt{P_r^2R^2-8i\alpha P_r}\,,\quad b_1=-\frac{D}{2i\alpha}\,\frac{\beta_1\,sh\beta_2}{sh(\beta_1-\beta_2)}\,,\quad b_2=\frac{D}{2i\alpha}\,\frac{\beta_2\,sh\beta_1}{sh(\beta_1-\beta_2)}\,,$$

$$b_3=-\frac{D}{2i\alpha}\,\frac{\beta_3\,sh\beta_4}{sh(\beta_3-\beta_4)}\,,\qquad b_4=\frac{D}{2i\alpha}\,\frac{\beta_4\,sh\beta_3}{sh(\beta_3-\beta_4)}\,.$$

თუ გამოვითვლით ხახუნის ძალას სითხეში და მილის კედლებზე, შესაბამისად მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს:

$$F^{III}_{ხახ.}=\frac{D}{2i\alpha}\left[\frac{\beta_2\,sh\beta_1 e^{\beta_2\xi}-\beta_1\,sh\beta_2\,e^{\beta_1\xi}}{sh(\beta_1-\beta_2)}+\frac{\beta_4\,sh\beta_3\,e^{\beta_4\xi}-\beta_3\,sh\beta_4\,e^{\beta_3\xi}}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right]e^{-i\alpha\tau},$$

$$F^{III}_1=\frac{D}{2i\alpha}\left[\frac{\beta_2\,sh\beta_1 e^{\beta_2}-\beta_1\,sh\beta_2\,e^{\beta_1}}{sh(\beta_1-\beta_2)}+\frac{\beta_4\,sh\beta_3\,e^{\beta_4}-\beta_3\,sh\beta_4\,e^{\beta_3}}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right]e^{-i\alpha\tau},$$

$$F^{III}_2=\frac{u_0}{2i\alpha}\left[\frac{\beta_2\,sh\beta_1 e^{-\beta_2}-\beta_1\,sh\beta_2\,e^{-\beta_1}}{sh(\beta_1-\beta_2)}+\frac{\beta_4\,sh\beta_3\,e^{-\beta_4}-\beta_3\,sh\beta_4\,e^{-\beta_3}}{sh(\beta_3-\beta_4)}\right]e^{-i\alpha\tau}.$$

ხოლო სითხის ხარჯისათვის და საშუალო სიჩქარისათვის გვექნება:

$$Q^{III}=\frac{4De^{-i\alpha\tau}}{i\alpha}\left[\frac{(\beta_1-\beta_2)sh\beta_1\,sh\beta_2}{\beta_1\beta_2\,sh(\beta_1-\beta_2)}+\frac{(\beta_3-\beta_4)sh\beta_3\,sh\beta_4}{\beta_3\beta_4\,sh(\beta_3-\beta_4)}-1\right],$$

$$U^{III}_{საშ.}=\frac{De^{-i\alpha\tau}}{i\alpha}\left[\frac{2(\beta_1-\beta_2)sh\beta_1\,sh\beta_2}{i\alpha\,sh(\beta_1-\beta_2)}+\frac{2(\beta_3-\beta_4)sh\beta_3\,sh\beta_4}{i\alpha\,sh(\beta_3-\beta_4)}-1\right].$$

როდესაც სითხის პულსაციური დინება გამოწვეულია წნევის პულსაციური დაცემით, მაშინ ხახუნის ძალა მილის ღერძზე ($\xi=0$) ნულის ტოლი არაა (როგორც ეს არაფოროვანი მილის შემთხვევაში გვქონდა), ხოლო ტემპერატურა მაქსიმალურ მნიშვნელობებს ვერ აღწევს.

ზემოთ მიღებული ფორმულებით ჩატარებული გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ მაგნიტური ველის მოქმედება სითხის პულსაციურ მოძრაობაზე და გაჟონვის რეინოლდსის რიცხვის გაზრდა იწვევს სითხის პულსაციური მოძრაობის დამუხრუჭებას.

სითხის სიჩქარის და შინაგანი ინდუქციის პულსაციური რეჟიმით ცვლილების დამყარება უფრო სწრაფად ხდება, ვიდრე ტემპერატურის პულსაციური რეჟიმით ცვლილების დამყარება.

სიჩქარეს, შინაგან ინდუქციას, ტემპერატურას, ხახუნს და ხარჯს დროის მიმართ აქვს პერიოდული თვისებები.

როდესაც ფოროვან მილში სითხის პულსაციური დინება გამოწვეულია კედლების პულსაციური მოძრაობით, მაშინ სითხის ტემპერატურის პულსაციურ ცვლილებაზე ხახუნის სითბოთი გამოწვეული ტემპერატურის გავლენა უფრო მნიშვნელოვანია, ვიდრე ჯოულის სითბოთი გამოწვეული ტემპერატურის ცვლილება, ხოლო როდესაც სითხის პულსაციური დინება გამოწვეულია წნევის პულსაციური დაცემით, მაშინ ჯოულის სითბოს გავლენა უფრო მნიშვნელოვანია, ვიდრე ხახუნის სითბოს გავლენა.

საზოგადოდ, პულსაციური დინება ფოროვან მილებში, რომელიც გამოწვეულია ფოროვანი კედლების პულსაციური მოძრაობით და წნევის პულსაციური დაცემით, იწვევს ტემპერატურის შემცირებას ელექტროგამტარ სითხეში (ნახ.) .

გარეგანი მაგნიტური ველის გაზრდა და გაჟონვის რეინოლდსის რიცხვის გაზრდა იწვევს პულსაციური დინების დამუხრუჭებას.

ნახაზი გვიჩვენებს ტემპერატურის დამოკიდებულებას გარეგან მაგნიტურ ველზე (ჰარტმანის რიცხვზე) ფოროვან მილში. ნახაზის პირ-

ველი გრაფიკი გვიჩვენებს ტემპერატურის განაწილების კანონს, როდე-
საც $M=0$, მეორე - როდესაც $M=2$.

შემოსულია 10.X.1995

საქართველოს ტექნიკური
უნივერსიტეტი

ლიტერატურა

I.Б.Ю.Бахвалов, В.М.Ерошенко, Л.И.Зайчик, Теплофизика высоких температур, 1981,19,№ I, 212-215.

2.Б.Ю.Бахвалов, В.М.Ерошенко, Л.И. Зайчик, А.А.Климов,Инж.физ.журн. 1982, 42, № 3, 372-376.

3.В.М. Сыч, Магнит. гидродин., 1968, №I, 85-92.

4.И.П.Тюленев, "Числ.методы в мат.физ.", М.,1986,26-28.

5.Д.Ф.Файзуллаев, И.Б.Примов, Док.АН Уз.ССР, 1989, № 8, 13-16.

6.Д.В.Шарикадзе, Тр.Тбилисск.ун-та, 1964, 102, 121-133.

7. Bhargva Rama, Rani Meena, "Indian J. Pure and Appl. Math.", 1984, 15, N4, 397-408.

8. G.D.Gupta, "Indian J. Theor. Phys.", 1982, 30, N1, 49-54.

9. G.Raithby, Int. J. Heat MassTransfer, 1971, 14, N2.

10. R.M.Terrill, G. Walker, Applied Scientific Research, 1967, 18, 193.

В.Н.Цуцкиридзе

Пульсационное течение электропроводящей вязкой несжимаемой жидкости между пористыми стенками с теплопередачей

Резюме

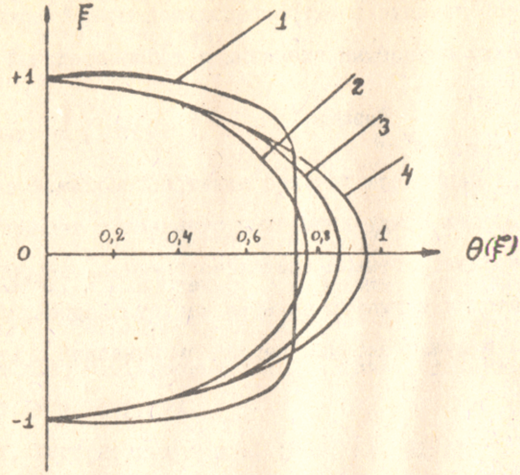
Изучено пульсационное течение электропроводящей вязкой несжимаемой жидкости между пористыми стенками с теплопередачей, когда перпендикулярно стенкам приложено внешнее однородное магнитное поле. Течение жидкости вызвано как пульсационным движением стенок, так и пульсационным перепадом давления и изменением температуры.

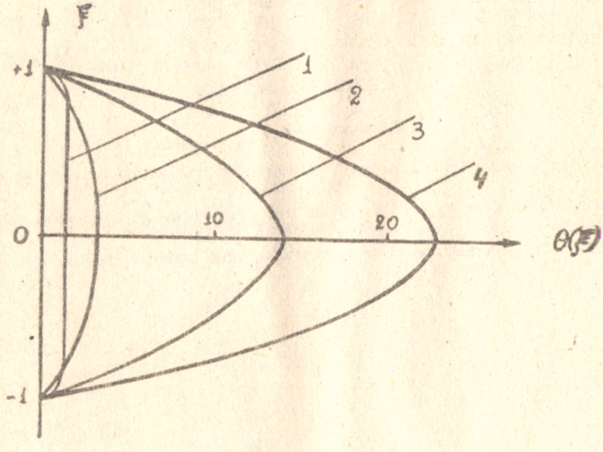
V. Tsutskiridze

PULSATION FLOW OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE CONDUCTING LIQUID BETWEEN POROUS WALLS WITH HEAT TRANSFER

Summary

The title problem has been studied for the case when the movement of liquid is due to the drop of the pulsation of the pressure of gradient and to the pulsation movement of the porous walls.





ნახაზი.

Труды Тбилисского государственного университета
им.И.Джавахишвили
თბილისის ი.ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
324, 1997

УДК 519; 71

О ЦЕЛОСТНОМ ВОСПРИЯТИИ В РАСПОЗНАВАНИИ В КОНТЕКСТЕ СЖАТИЯ ИНФОРМАЦИИ

Н.Д.Нанобашвили, Г.Д.Грдзелидзе

Восприятию осмысленного целого предшествует конкретизация и детальное осмысление его частей. Этот старый тезис гештальт-психологов приобретает новую значимость, так как исследования все более убеждают ученых, что человеческий мозг, в основном, таким образом воспринимает окружающий его мир.

Целостность восприятия, процесс автоматически столь легко удаваемый человеку, трудно понять и смоделировать на ЭВМ. Однако проблема моделирования становится еще более труднопреодолимой при рапознавании сцен и образов на ЭВМ, когда:

Iа. Обозримая сцена-рельеф сильно насыщена большим числом неидентичных объектов;

Iб. Не удаётся восстановить и распознать из частей целое.

Проведенные исследования /I,2,3/ в естественных системах по решению указанных проблем выделяют основную роль сетчатки человеческого глаза, которая обрабатывает и кодирует информацию в компактной (сжатой) форме и только после этого передает ее мозгу.

Возможности моделирования на многоуровневой кодирующей сетке ("искусственный глаз") процесса целостного восприятия в распознавании и посвящена настоящая работа.

I. Конструкция и представление изображений на кодовой сетке

Пусть на плоскости $\mathfrak{N}_0$, ограниченной сторонами правильного m_0 угольника, натянута Ω_{i_1} $(i_1 = 2,3,4,\dots k_1)$ слойная гиперпирамида $\Gamma(\Omega_{i_1})$ высотой $(k+1)d_0'$ и вершиной $\mathcal{U}_0'$.

Точки пересечения слоев высотой $\mathcal{U}_0'$ и ребрами $\Gamma(\Omega_{i_1})$ образуют равномерно возрастающую гомотетию относительно $\mathcal{U}_0'$.

Расположим на слоях $\Gamma(\Omega_{i_1})$ плоские конструкции специальных кодирующих сеток $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_K$ и введем следующие соответствия и правила композиции:

Iа. $\mathcal{U}_0' \to \mathcal{U}_0$ - это соответствие порождает вектор-основание, являющееся корнем ступенчатой Ω_{i_1} слойной кодовой гиперпирамиды.

2а. На $\mathcal{U}_0$ натянута кодовая сетка первого Ω_1 слоя с точностью до эпиморфизма

$$E_1 : \mathcal{U}_0(1) \Longrightarrow \Omega_1(n), \tag{I.I}$$

где E_1 - функция кодирования $(\mathcal{E}ncoding)$, $\mathcal{U}_0(1)$ - вектор длины n исходного слоя, представляющий вершину кодовой конструкции гиперкуба $\Gamma(\Omega_{i_1})$.

3а. Итеративность отображения всех остальных слоев друг на друга определяется с точностью до гомоморфизма

$$\begin{aligned} &E_2 : \Omega_1(n) \Longrightarrow \Omega_2(n^2), \\ &E_3 : \Omega_2(n^2) \Longrightarrow \Omega_3(n^3), \\ &\text{-------------------} \\ &E_K : \Omega_{K-1}(n^{K-1}) \Longrightarrow \Omega_K(n^K) \end{aligned} \tag{I.2}$$

4а. $d_0' \to d$ - это соответствие порождает понятие кодового расстояния между любой вершиной и соответствующими элементами, расположенными на основаниях элементарных пирамид с соблюдением следующих условий нормировки:

$$d_0(V_i, V_i') = \begin{cases} 1, \text{ если } V_i \in \Omega(n^{k-1}), V_i' \in \Omega(n^k). \\ 2, \text{ если } V_i, V_i' \in \Omega(n^{k-1}), \text{ или } V_i, V_i' \in \Omega(n^k) \end{cases} \quad (I.3)$$

2. Фрактальность кодирующей сетки и вопросы распознавания и кодирования

Итеративность многослойности Ωi_1 при соблюдении условий $3a, 4a$, в основном, обусловливает фрактальность кодирующей сетки.

Именно фрактальность обусловливает восприятие осмысленного целого без предварительного анализа и детализации частей целого изображения или сцены.

Введем следующие обозначения и определения:

$\mathcal{I}mF$ – образ фрагмента кривой F, отображенной на кодирующей сетке $\Omega(n^k)$. Уточним варианты присваивания в контексте $\mathcal{I}mF$.

$$\mathcal{I}mF = \begin{cases} \mathcal{I}mL(г), & \text{если } \mathcal{I}mF \text{ фрагмент гор.прямой} & (-) \\ \mathcal{I}mL(в), & \text{фрагмент верт.прямой} & (|) \\ \mathcal{I}mL(D_1), & \text{фрагмент диагональной прямой справа} & (/) \\ \mathcal{I}mL(D_2), & \text{фрагмент диагональной прямой слева} & (\backslash) \end{cases}$$

$dim(V_i)$ – размерность вектора V_i; $ker\, S$ – ядро суммарного вектора S; $ker\, S'$ – ядро нормализованного суммарного вектора.

<u>Определение 2.I</u>. Ядром $ker\, S$ (или S') называется часть вектора S (или S'), ограниченного двумя крайними единицами справа и слева.

Согласно определению 2.I

$$\dim(\ker S) < \dim(S); \quad \dim(\ker S) < \dim(S'); \qquad (2.1)$$
$$sc(S) \geq sc(\ker S); \quad sc(S') \geq sc(\ker S').$$

Определение 2.2. Внутренним шагом (В.Ш.) $st(\ker S')$ ядра $\ker S'$ называется расстояние, равное количеству нулей между ближайшими единицами в ядре.

Определение 2.3. Если $Sc(st(\ker S')) = const$ и $st(\ker S') = const$ и одинаковы для всех пар наиближайше расположенных единиц в ядре, то тогда ядра называются однородными.

m - длина строки столбца пакета (блока), $n = m \times m$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.I. Если $\Im m F$ на $\Omega(n^k)$ отображает фрагмент отрезка прямой, то тогда

$$st(\ker S') = \begin{cases} 0, & \text{если } \Im m F = \Im m L(г) \quad (-) \\ m-2, & \text{если } \Im m F = \Im m L(D_1) \quad (/) \\ m-1, & \text{если } \Im m F = \Im m L(в) \quad (|) \\ m, & \text{если } \Im m F = \Im m L(D_2) \quad (\backslash) \end{cases} \qquad (2.2)$$

Доказательство теоремы вытекает из специфики построения кодирующих сеток на слоях гиперпирамиды $\Gamma(\Omega_{i_1})$ и из определений 2.I и 2.2.

Следствие 2.I. Ядра прямых на $\Omega(n^k)$ являются однородными.

Следствие 2.2. Образами прямых $L(г)$, $L(D_1)$, $L(в)$, $L(D_2)$ являются скаляры ядер этих прямых с точностью до эквивалентности, т.е.

$$\begin{aligned} \Im m L(г) &= Sc(\ker L(г)) = \bar{S}_г, \\ \Im m L(D_1) &= Sc(\ker L(D_1)) = \bar{S}_{D_1}, \\ \Im m L(в) &= Sc(\ker L(в)) = \bar{S}_в, \\ \Im m L(D_2) &= Sc(\ker L(D_2)) = \bar{S}_{D_2}. \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Соотвественно также имеет место:

$$Sc\left(st(ker\, S_1')\right) = \bar{S}_1' \leq \bar{S}_1 ,$$
$$Sc\left(st(ker\, S_{D_1}')\right) = \bar{S}_{D_1}' \leq \bar{S}_{D_1} ,$$
$$Sc\left(st(ker\, S_6')\right) = \bar{S}_6' \leq \bar{S}_6 , \qquad (2.4)$$
$$Sc\left(st(ker\, S_{D_2}')\right) = \bar{S}_{D_2}' \leq \bar{S}_{D_2}$$

Следствие 2.3. Контур плоского изображения представим в виде совокупностей последовательности из ядер $\bar{S}_1, \bar{S}_{D_1}, \bar{S}_6, \bar{S}_{D_2}$.

Определение 2.4. Совокупность последовательности из ядер $\bar{S}_1, \bar{S}_{D_1}, \bar{S}_6, \bar{S}_{D_2}$ называется собственным спектром изображения на $\Omega(n^k)$. Имеет место следующая

Теорема 3.I. На кодирующих сетках, расположенных на слоях $\Omega(n^{i_1})$, $i_1 = 2, 3, 4, \ldots, k$, каждый контур изображения имеет единственный собственный спектр. Теорема доказывается на основе теоремы 2.I. и следствий 2.I. и 2.2.

Следствие 3.I. Система кодирующих сеток, расположенных на слоях $\Omega(n^{i_1})$, является фрактальной.

Следствие 3.2. Фрактальность среди всех возможных $\Omega(n^{i_1})$, $i_1 = 2, 3, 4, \ldots, k$, слоев по крайней мере на k_0 количестве $(k > k_0 \geq 1)$ кодирующих сеток обеспечивает положительный результат в распознавании.

При этом:

а) Восприятие целого, т.е. опосредствование всей сцены или совокупности образов в виде единого целого происходит на слоях ближе к вершине гиперпирамиды $\Gamma(\Omega_{i_1})$, именно на этих слоях распознается целое и происходит обобщённый анализ сцены.

б) На средних слоях гиперпирамиды распознается и реализуется конкретный анализ отдельных крупных и средних частей всей сцены.

в) На основании $\Omega(n^{k})$ гиперпирамиды $\Gamma(\Omega_{i_1})$ и близких к нему слоях распознается и происходит детальный анализ элементов крупных и средних частей сцены.

Примечание. Кодирующая сетка, на которой отображены с точностью до изоморфизма все кодовые $\Omega(i_1)$ слои гиперпирамиды $\Gamma(\Omega_{i_1})$ при использовании метода сжатия / 4,5 / на "В" матрицах, в определенном грубом приближении имитирует отдельные специфические особенности работы человеческого глаза / 2,3 /.

Кодирующую сетку ("искусственный глаз") можно смоделировать на ЭВМ, что позволит решить весьма интересные практические и прикладные задачи в контексте искусственного интеллекта.

Поступила 21.У.1996

Кафедра кибернетики
ТГУ

Литература

1. R.L. Klatzky. Human memory. San-Francisco, 1978.
2. D.Marr. Vision. New York, 1982.
3. Энн Трейсман. В мире науки (Scientific American), N1, 1987.
4. N.Nanobashvili, H.Meladze. International Georgian Symposium for project development and conversion. Tbilisi, 1995.
5. N.Nanobashvili, N.Dzhikia. The fifth International Symposium on Information Theory, Moscow - Tbilisi, 1979.

ნ. ნანობაშვილი, გ. გრძელიძე

გამოსახულებათა მთლიანობაში აღქმის შესახებ ინფორმაციის შეკუმშვის კონტექსტში

რეზიუმე

განხილულია სახეთა გამოცნობის საკითხებში ფრაქტალური სქემების გამოყენება.

N.Nanobashvili, G.Grdzelidze

ON THE WHOLENESS OF PERCEPTION IN PATTERN RECOGNITION IN THE CONTEXT OF INFORMATION COMPRESSION

Summary

The use of fractal diagrams in pattern recognition is cosidered.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
324, 1997

УДК 538

О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ С УЧЕТОМ ИСТОЧНИКОВ И СТОКОВ МАССЫ

Дж. В. Шарикадзе

Уравнения магнитной газодинамики идеально проводящего газа с учетом равномерно распределенных объемных источников и стоков массы внутри жидкости с интенсивностью J имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(p+\frac{h^2}{2}\right)+\frac{mh^2}{\rho r}+\frac{J}{\rho}u=0, \tag{I}$$

$$\frac{\partial \ln\rho}{\partial t}+u\frac{\partial \ln\rho}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{Nu}{r}=\frac{J}{\rho}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \ln p}{\partial t}+u\frac{\partial \ln p}{\partial r}-\kappa\left(\frac{J}{\rho}-\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{Nu}{r}\right)=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial t}+u\frac{\partial \ln h}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial r}+(N-m)\frac{u}{r}=0, \tag{4}$$

где u – скорость проводящего газа, ρ – плотность, p – давление, $H=\sqrt{4\pi}\,h$ – напряженность магнитного поля, $\vec{v}[v(r,t),0,0]$, $\vec{H}[0,0,H_z(r,t)]$ или $\vec{v}[v(r,t),0,0]$, $H[0,H_\varphi(r,t),0]$. $N=0$, $m=0$ – в случае плоской симметрии, $N=1$, $m=0$ – в случае цилиндрической симметрии, когда $H=H_z(r,t)$ и $N=1$, $m=1$ – в случае цилиндрической симметрии, когда $H=H_\varphi(r,t)$.

Если силовые линии магнитного поля не вморожены в вещество, то $h\neq b\rho$ и неизвестными функциями являются u, ρ, p, h, которые удовлетворяют системе (I) – (4).

Допустим, что интенсивность равномерно распределенных объемных источников и стоков массы можно представить в виде

$$J = \alpha\rho \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad (5)$$

где α - некоторое постоянное.

Тогда уравнения (I) - (4) можно записать в форме:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + (1+\alpha) u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(p + \frac{h^2}{2}\right) + \frac{m h^2}{\rho r} = 0,\\
&\frac{\partial \ln\rho}{\partial t} + u \frac{\partial \ln\rho}{\partial r} = (\alpha-1)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{Nu}{r},\\
&\frac{\partial \ln p}{\partial t} + u \frac{\partial \ln p}{\partial r} = \kappa\left[(\alpha-1)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{Nu}{r}\right],\\
&\frac{\partial \ln h}{\partial t} + u \frac{\partial \ln h}{\partial r} = -\left[\frac{\partial u}{\partial r} + (N-m)\frac{u}{r}\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Допустим, что давление является лишь функцией времени

$$p = p(t), \qquad (7)$$

а магнитное поле представимо в виде

$$h = r^{-m} f(t). \qquad (8)$$

Тогда из первого уравнения системы (6) получим, что

$$r = (\alpha+1)ut + F(u). \qquad (9)$$

Введя новые независимые переменные $t,\ u$ вместо $t,\ r$ и преобразуя последние три уравнения системы (6), после простых преобразований получим:

$$\frac{d\ln\rho}{dt} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\ln p}{dt} = \frac{d\ln h}{dt} - m\frac{u}{r} = -\left[\frac{\alpha-1}{(\alpha+1)t+F'} + \frac{Nu}{(\alpha+1)ut+F}\right], \qquad (10)$$

где $F' = \dfrac{dF}{du}$.

Принимая во внимание (9), будем иметь

$$\frac{d\ln\rho}{dt}=\frac{1}{\kappa}\frac{d\ln p}{dt}=\frac{d\ln h}{dt}-m\frac{u}{r}=-\left[\frac{\alpha-1}{(\alpha+1)t+F'}-\frac{Nu}{r}\right]. \qquad (11)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\rho&=\varphi_1(u)r^{-\frac{N}{\alpha+1}}\left[(\alpha+1)t+F'(u)\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}},\\
p&=\varphi_2(u)r^{-\frac{\kappa N}{\alpha+1}}\left[(\alpha+1)t+F'(u)\right]^{\frac{\kappa(\alpha-1)}{\alpha+1}},\\
h&=\varphi_3(u)r^{-\frac{N-m}{\alpha+1}}\left[(\alpha+1)t+F'(u)\right]^{-\frac{1}{\alpha+1}}.
\end{aligned} \qquad (12)$$

Для того чтобы выполнялось требование $p=p(t)$, необходимо допустить, что

$$\left.\begin{aligned}
F(u)&=-(\alpha+1)ut_0,\\
\varphi_2(u)&=Au^{\frac{\kappa N}{\alpha+1}},\\
\varphi_3(u)&=Bu^{\frac{N-(\alpha+2)m}{\alpha+1}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Тогда решения основной системы имеют вид:

$$\begin{aligned}
\rho&=\varphi_4(u)\left[(\alpha+1)(t-t_0)\right]^{\frac{\alpha-(N+1)}{\alpha+1}},\\
p&=A\left[(\alpha+1)(t-t_0)\right]^{\frac{\kappa[\alpha-(N+1)]}{\alpha+1}},\\
h&=Br^{-m}\left[(\alpha+1)(t-t_0)\right]^{-\frac{m(\alpha+2)+(N+1)}{\alpha+1}},
\end{aligned}$$

где A и B - постоянные. Эти решения при $\alpha=0$ переходят в решения, полученные в работах / 1,2 /.

Рассмотрим случай плоской симметрии. Тогда $N=0,\ m=0.$ Уравнения (6) в этом случае имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(1+\alpha)u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\frac{h^2}{2}\right)=0, \qquad (14)$$

$$\frac{\partial \ln \rho^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\partial t} + u\frac{\partial \ln \rho^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial t} + u\frac{\partial \ln h}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \qquad (16)$$

Тогда из (15), (16) следует, что

$$h = b\rho^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \alpha < 1, \quad b = const. \qquad (17)$$

Так будет выражаться условие вмороженности магнитных силовых линий в вещество при наличии объемных источников и стоков массы при условии, что имеет место (5).

В этом случае (14) и (15) преобразуются в форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1+\alpha)u\frac{\partial u}{\partial x} + c_m^2\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} = 0, \qquad (18)$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} + (1-\alpha)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad (19)$$

где

$$c_m^2 = \frac{\partial P}{d\rho} + \frac{h^2}{(1-\alpha)\rho} = c_0^2 + v_\alpha^2, \qquad (20)$$

$v_\alpha = \frac{h}{\sqrt{(1-\alpha)\rho}}$ - скорость Альфвена, c_0 - скорость звука.

Введем обозначения

$$\ln \rho = z, \quad c_m^2 = v(z)$$

Тогда система (18)-(19) принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1+\alpha)u\frac{\partial u}{\partial x} + v(z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad (21)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + u\frac{\partial z}{\partial x} + (1-\alpha)\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \qquad (22)$$

Перейдем к независимым переменным u и z и искомым зависимым переменным x и t. Для этого представим все частные производные системы в виде якобианов:

$$\frac{\partial(u,x)}{\partial(t,x)} + (1+\alpha)u\frac{\partial(t,u)}{\partial(t,x)} + v(z)\frac{\partial(t,z)}{\partial(t,x)} = 0, \qquad (23)$$

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(x,t)} + u\frac{\partial(t,z)}{\partial(t,x)} + (1-\alpha)\frac{\partial(t,u)}{\partial(t,x)} = 0, \qquad (24)$$

а затем умножая на $\dfrac{\partial(t,x)}{\partial(u,z)}$ и раскрывая якобианы, получим систему

$$\frac{\partial x}{\partial z} - (1-\alpha)u\frac{\partial t}{\partial z} + v(z)\frac{\partial t}{\partial u} = 0, \tag{25}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} - u\frac{\partial t}{\partial u} + (1-\alpha)\frac{\partial t}{\partial z} = 0. \tag{26}$$

Покажем, что общая задача произвольного изэнтропического движения сжимаемого проводящего газа без ударных волн может быть сведена к решению некоторого линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка.

Вместо x введем новую функцию $F(u,z)$ с помощью преобразования Лежандра $x + ut + F(u,z)$, после чего замена $v\,dz = d\xi$ приведет систему (25)-(26) к виду

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} - \alpha u\frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial t}{\partial u} = 0, \tag{27}$$

$$t + \frac{\partial F}{\partial u} + (1-\alpha)v\frac{\partial t}{\partial \xi} = 0. \tag{28}$$

Введем новую функцию $\varphi(u,\xi)$, чтобы выполнялись равенства

$$F = -\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \alpha u\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}, \qquad t = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}. \tag{29}$$

Тогда уравнение (27) удовлетворяется тождественно, а (28), к которому свелось уравнение (29), принимает вид

$$(1+\alpha)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + (1-\alpha)v\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \alpha u\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial u} = \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}. \tag{30}$$

Таким образом, система свелась к одному линейному дифференциальному уравнению второго порядка. При $\alpha = 0$ это уравнение переходит в уравнение, полученное в / 3 /.

Поступила 15.I.1997

Кафедра
теоретической механики

Литература

Д.В.Шарикадзе. Прикладная математика и механика. 1959, 23, в.5.

А.Г.Куликовский. ДАН СССР, 1957, 117, № 2.

Г.С.Голицын, Т.Джузумкулов, К.П.Станюкович. Магнитная гидродинамика, 1966, I.

შარიქაძე

მაგნიტური გაზოდინამიკის განტოლებების ზოგიერთი ამონახსნის შესახებ მასის წყაროებისა და ჩასადენების გათვალისწინებით

რეზიუმე

მაგნიტურ ველში მოთავსებული იდეალურად გამტარი გაზის ერთგანზომილებიანი არასტაციონარული მოძრაობის არაწრფივ განტოლებათა სისტემა, როდესაც გათვალისწინებულია მასის წყაროები და ჩასადენები დაიყვანება მეორე რიგის ცვლადკოეფიციენტებიან წრფივ განტოლებაზე.

კერძო შემთხვევაში მიღებულია ამ სისტემის ამონახსნი, როცა წნევა მხოლოდ დროის ფუნქციაა და ჩასადენებისა და წყაროების ინტენსივობა მოიცემა კანონით $J=\alpha\rho\frac{\partial u}{\partial t}$.

J.Sharikadze

SOME SOLUTIONS OF THE EQUATIONS OF MAGNETIC GASDYNAMICS IN THE PRESENCE OF MASS SOURCES AND SINKS

Summary

Nonlinear equations of one dimensional non-stationary motion of perfectly conducting gas in the presence of a transverse magnetic fild are reduced to a linear differential equation for certain intensity of mass sources and sinks.

In the particular cases we obtain some exact solutions of nonlinear equations, when pressure is a function of t and intensity sources and sinks of mass is $J=\alpha\rho\frac{\partial u}{\partial t}$.

Contents

გამომცემლობის რედაქტორი ლ.აბუაშვილი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 12.05.98
პირ.ნაბეჭდი თაბახი 10,25
სააღრ.-საგამომც.თაბახი 7,13
შეკვეთა №310 ტირაჟი 150
ფასი სახელშეკრულებო

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
380028, თბილისი, ი.ჭავჭავაძის გამზ. 14

გამომცემლობა „მერიდიანი," „კაბადონი",
თბილისი, გურამიშვილის გამზ., 74

Издательство "Меридиани", "Кабадони",
Тбилиси, пр.Гурамишвили, 74.