

290/2

263.



2000 თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского университета

Proceedings of Tbilisi University

335

მათემატიკა ♦ მექანიკა ♦ ასტრონომია

Математика ♦ Механика ♦ Астрономия

Mathematics ♦ Mechanics ♦ Astronomy

32



თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
Tbilisi University Press
© 2007

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
Tbilisi University Press
Mathematics & Mechanics & Astronomy



თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
Издательство Тбилисского университета
Tbilisi University Press

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

Proceedings of Tbilisi University

ტ. 335 v.



მათემატიკა ♦ მექანიკა ♦ ასტრონომია

Mathematics ♦ Mechanics ♦ Astronomy

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი 2000 Tbilisi
Tbilisi University Press





Труды Тбилисского университета

т. 335

Математика ✧ Механика ✧ Астрономия

25480

Тбилиси 2000

საქართველოს
პარლამენტის
ბიბლიოთეკა
გეგმვის დეპარტამენტი

სარედაქციო კოლეგია:

- ა. გაგნიძე, დ. გორდეზიანი, ლ. ზამბახიძე, ი. ზონენაშვილი, ე. იმერლიშვილი,
გ. ლომაძე, ლ. მღნარაძე, ე. ნადარაია, შ. საბაშვილი, გ. ტყეშუაშვილი,
ჯ. შარიკაძე (რედაქტორი)

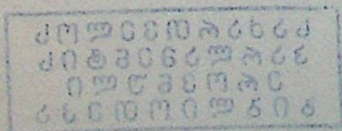
Редакционная коллегия:

- А.Г.Гагნიძე, Д.Г. Гордезиანი, Л.Г. Замбахидзе,
И.А.Зоненашвили, Е.В. Имерлишвили, Г.А.Ломадзе, Л.Г.Магна-
радзе, Э.А.Надарая, Ш.А.Сабашвили, Г.К.Ткебучава, Д.В. Шари-
кадзе (редактор)

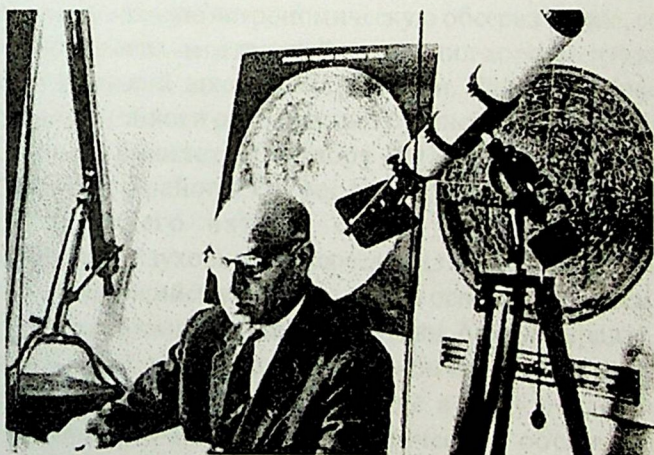
Editorial board:

- A.Gagnidze, D.Gordeziani, E.Imerlishvili, G.Lomadze, L. Magnaradze,
E. Nadaraia, Sh. Sabashvili, J. Sharikadze (editor), G. Tkebuchava, L. Zamba-
khidze, I.Zonenashvili

- © თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2000
© Издательство Тбилисского университета, 2000
© Tbilisi University Press, 2000



ქელენება ევგენი ხარაძის დაბადების 90 წლისთავს
Посвящается 90-летию со дня рождения Е.К.Харадзе
To E.K.Kharadze's 90th birth anniversary



ВЫДАЮЩИЙСЯ АСТРОНОМ СОВРЕМЕННОСТИ

(К 90- летию академика Е. К. Харадзе)

Ш.А.Сабашвили

В конце октября 1997 года астрономическая общественность Грузии и многих стран мира с глубоким почтением отметили девяностолетний юбилей видного грузинского ученого, организатора науки и общественного деятеля Евгения Кирилловича Харадзе.

Е.Харадзе не только внес свой весомый вклад в развитие одной из фундаментальных наук – астрономии, но и основал в Грузии великолепную астрономическую обсерваторию, создал и в течение многих десятилетий руководил хорошо известной в мире грузинской школой астрономии. Велика его заслуга также в организации и руководстве грузинской наукой в целом.

Е. Харадзе родился 31 октября 1907 года в с. Парцхнали Харагоульского района. Он рос в интеллигентной семье, что сказалось на его натуре, складе характера, общем мировоззрении и духовных интересах. Из этой же семьи вышел и другой выдающийся ученый, один из основателей всемирно известной грузинской школы математики Арчил Харадзе, брат Е.Харадзе. Сам же Е. Харадзе , окончивший Тбилисский государственный университет и еще в пору студенчества работавший в Тбилисской геофизической обсерватории, страстно увлекся астрономией и посвятил ей всю свою жизнь.

В начале тридцатых годов Е.Харадзе устанавливает тесные научные связи с директором Ленинградского астрономического института проф. Б.Нумеровым, становится аспирантом этого института и принимает активное участие в экспедиции, предпринятой по инициативе Б.Нумерова с целью



поиска подходящего места на территории Грузии для основания южной астрономической высокогорной обсерватории. Экспедиция объездила почти всю Грузию. Выбор пал на гору Канобили близ курорта Абастумани, ставшей в дальнейшем признанным центром грузинской астрономии. Е. Харадзе был назначен директором еще несуществовавшей Канобильской обсерватории, строительству которой на пустом, безлюдном месте, оснащению первоклассным оборудованием, выбору научных направлений, привлечению в обсерваторию и воспитанию полноценных научных кадров Е.Харадзе посвятил почти всю свою жизнь, душевные силы, волю и знания.

Для успешной работы обсерватории необходимо, чтобы она располагалась в зоне хорошего астроклимата. Это подразумевает отсутствие поблизости больших поселений, световой фон которых мешает наблюдению слабых небесных светил; стабильный климат, безветрие, большое число ясных безоблачных ночей, малое количество атмосферной пыли и достаточную высоту над уровнем моря для максимального уменьшения искажающего действия земной атмосферы. Эти условия обеспечивают большой объем наблюдений в течение года, высокие показатели разрешающей и проникающей способностей телескопов, т.е. возможность наблюдать предельно слабые объекты и выявлять предельно малые детали в структуре небесных систем. Отсутствие некоторых из перечисленных условий не позволяет ряду обсерваторий осуществлять полноценные наблюдения. Абастуманский же астроклимат – один из самых уникальных в мировом масштабе, что, кстати, было известно уже с конца прошлого века, когда известный русский астроном С.П. Глазенап на маленьком рефракторе выполнил прекрасные работы по изучению тесных двойных звезд. Оценивая эти работы, крупный американский астроном Бернгхем в 1883 г. в журнале "Astronomy and Astrophysics" заключал: "Если судить по результатам, ни одна обсерватория в Европе не имеет столь благоприятного расположения, и было бы трудно назвать такую где-либо,



кроме обсерватории на горе Гамильтон, где атмосферные условия так же благоприятны". Высоко оценивают абастуманский астроклимат и современные астрономы, так что выбор горы Канобили был первой и весьма важной удачей всей экспедиции.

В дальнейшем научная судьба Е.Харадзе тесно переплелась с судьбой созданной им обсерватории. Постройка прекрасного научного городка со всеми условиями для творческой научной работы, установка целого ряда инструментов для наблюдения самых различных объектов (земной атмосферы, Солнца, Луны, планет и их спутников, комет, стационарных и переменных звезд, звездных скоплений, галактик и их систем); участие обсерватории в осуществлении объемных программ астрометрических, фотометрических и спектрофотометрических работ, запланированных ведущими международными организациями; основание научной библиотеки, регулярно пополняемой книгами и периодическими изданиями со всего мира; составление больших звездных каталогов, накопление и анализ большого наблюдательного материала, создание различных непрерывных служб (Солнца, Сверхновых звезд и т.п.); установление связей со многими астрономическими институтами, обсерваториями и организациями мира; забота о бытовых условиях сотрудников – все это стало содержанием жизни Е.Харадзе. Мельчайшие детали обсерваторской повседневности ни на минуту не забывались ее бессменным директором, даже тогда когда он занимался другими, не менее важными работами. Более полстолетия он заведовал кафедрой астрономии Тбилисского государственного университета – основной кузницей научных кадров для обсерватории и учителей астрономии средних школ; около двух десятилетий руководил Академией наук Грузии, будучи сначала ее вице-президентом, а затем президентом; в течение многих лет был ректором Тбилисского университета, оставив неизгладимый след в памяти студентов и профессорско-преподавательского состава.

С начала же своего основания обсерватория оказалась в гуще научных проблем. Главными как в творческой работе самого Е.Харадзе, так и деятельности обсерватории, в целом

стали две проблемы: распределение поглощающего вещества в Галактике и спектральная классификация звезд. Первая из них важна, так как диффузная материя, ослабляя свет звезд, искажает наблюдаемое пространственное распределение небесных тел, и ее учет необходим для восстановления реальной структуры далеких областей Вселенной. Для этого нужно определить распределение поглощающего материала как функцию направления и расстояния от нас. Важность второй проблемы связана с тем, что вся информация о физических условиях и процессах внутри небесных тел содержится именно в их спектрах, в основном спектральных линиях, и только изучением спектра можно установить температуру, химический состав, давление, плотность, лучевую скорость, вращение, скорости хаотических движений, градиенты физических величин по радиусу и другие параметры небесных светил, а также свойства межзвездной среды. Была разработана уникальная, т.н. Абастуманская методика спектральной классификации, снискавшая мировое признание, и проведена большая работа по спектральной классификации звезд. В указанных направлениях исследований Абастуманская обсерватория стала ведущим учреждением не только в масштабах Советского Союза. В течение многих лет Е.Харадзе был председателем комиссии по звездной астрономии при Астрономическом Совете Академии наук СССР (в дальнейшем он был избран действительным членом этой академии – почет, которого удостоивались немногие грузинские ученые!), а затем секции "Физика и эволюция Галактики и Мегалактики". Абастуманская обсерватория считалась координирующей организацией по проблемам строения и эволюции Галактики, а докторская диссертация Е.Харадзе "Каталог показателей цвета 14000 звезд и исследование поглощения света на основе избытков цвета" получила признание в международных астрономических кругах. Можно упомянуть и классические работы М.Вашакидзе, как открытие поляризации излучения Крабовидной туманности, вывод формулы галактического вращения одновременно с голландским ученым Оортом и независимо от него.



Благодаря этим достижениям многие грузинские астрономы стали активными членами международных астрономических организаций и участниками их съездов. Многие помнят резонанс выступлений Е.Харадзе на XVII ассамблее Международного Астрономического Союза (МАС) в Гренобле (Франция) в 1976 г. и на коллоквиуме МАС в Ватикане, посвященном кардинальным вопросам спектральной классификации. Масштабна и организационная сторона участия Е.Харадзе в работе МАС – в 1975-82 годах он работал вице-президентом МАС, а в отдельных случаях блестяще выполнял и роль президента, как, например, во время работы XVIII Генеральной Ассамблеи МАС в Греции.

Большие организационные способности Е.Харадзе проявились во время проведения многих международных конференций, устраиваемых в Грузии: III Европейской астрономической конференции в 1976 г. в Тбилиси, годовом координационном совещании Исполнительного Комитета МАС в 1981 г. в Абастумани и др.

Творческие интересы Е.Харадзе многогранны. Нельзя обойти, например, его работу по созданию оригинальных учебников для студентов и учащихся. Он написал двухтомник "Основы астрономии" и учебник "Астрофизика" для студентов университета, а в самое последнее время – объемистую книгу по истории астрономии, охватывающую все этапы развития этой науки. Е.Харадзе продолжает работать и над другими книгами: по его же инициативе члены кафедры астрономии составили лекционные курсы по разным разделам астрономии. Трудно переоценить роль учебников на родном языке! Отметим, что школьный учебник Е.Харадзе был единственным оригинальным курсом астрономии во всем СССР, в других республиках пользовались переводом с русского. Большой вклад вносит Е.Харадзе и в популяризацию науки: пишет брошюры, публикует статьи о важных астрономических явлениях и открытиях, выступает с докладами в разных аудиториях, а в самой Абастуманской обсерватории уже

многие десятилетия принимаются экскурсии из всех регионов Грузии, которым предлагаются популярные лекции.

Колоссальная энергия позволяет Е.Харадзе заниматься одновременно многим. Он долго руководил республиканской организацией "Знание" и Обществом любителей книг, был председателем Тбилисского отделения Всесоюзного астрономо-геодезического общества и вице-президентом этого Общества, главным редактором "Сообщений АН Грузии", "Бюллетеня Абастуманской астрофизической обсерватории", грузинского "Астрономического календаря", членом редколлегий ряда престижных журналов. Большой вклад внес он в создание 11-томника первой в истории Грузинской Энциклопедии: скрупулезно взвешивал и вносил нужные коррективы во все без исключения (более тысячи!) статьи по астрономии, и сам написал немало статей. Только большому эrudиту подвластно все это, равно как и работа во многих государственных и избирательных органах, когда приходилось заниматься самыми разными вопросами.

Существенная черта личности Е.Харадзе – это примат общественных интересов над личными. Он уделяет большое внимание творческим и личным проблемам сотрудников, приобретает книги и журналы для астрономических учреждений на свои личные средства.

Широкая натура, интеллигентность и чуткость делают общение с Е.Харадзе приятным и неповторимым. Студенты и преподавательский состав родного для него механико-математического факультета хорошо знают об этом, ощущают в повседневной жизни и высоко ценят.

Его неисчерпаемая энергия всегда поражала всех: в течение полустолетия он еженедельно ездил в Абастумани не прекращая работу и в пути, часто засиживался в рабочем кабинете до поздней ночи, глубоко вникал во все вопросы жизни обсерватории. Эта творческая активность и душевная щедрость, может быть, и являются основным залогом столь крепкого здоровья Е.Харадзе.

Е.Харадзе неустанно заботится о том, чтобы обсерватория



отвечала возросшим требованиям времени. Привлекается новая, прецизионная наблюдательная техника; в последние годы активно разрабатываются проблемы плазменной астрофизики. В частности, выполненные здесь работы по интерпретации феномена пульсаров получили международное признание.

В связи с юбилеем Е.Харадзе в Тбилиси поступили поздравления от директора Института астрономии Российской Академии наук академика А.А.Боярчука, от заведующего отделом Европейской Южной Обсерватории, известного астронома Р.Веста, который, кстати, в пору молодости стажировался в Абастумани под руководством Е.Харадзе и который, в знак большого уважения к нему, назвал одну из открытых им малых планет именем Харадзе, от почетного профессора Коллеж де Франс Ж. Пекера, от академика В.В. Соболева (Петербургский университет) и многих других.

Пожелаем Евгению Кирилловичу дальнейших творческих успехов, здоровья и долголетия на благо грузинской науки.



УДК 52

СВЕЧЕНИЕ ПЛОСКОГО ПРОТУБЕРАНЦА В СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЯХ

Ш. А. Сабашвили

В [1], [2] и других работах автора было рассмотрено свечение среды определенной геометрии для заданного вида коэффициента поглощения в спектральной линии. В частности, для сферического протуберанца был предложен метод определения оптического радиуса по асимптотическому поведению наблюдаемых профилей в крыльях. Представляет определенный интерес рассмотрение аналогичной задачи для плоской среды.

Примем обычные предположения: однородное распределение первичных источников, изотропное рассеяние с полным перераспределением квантов по частотам. Протуберанец представляется диском радиуса R и оптической толщины в центре линии τ_0 . Наблюдатель находится на расстоянии r от центра диска, а луч зрения составляет в центре диска с нормалью диска угол φ (ниже считается $\varphi = 0$). Освещенность E_x единичной площадки dB , находящейся около наблюдателя и перпендикулярной к направлению на центр диска, представим как интеграл от освещенностей, созданных круговыми кольцами радиуса l и толщины dl . Учитывая, что из каждой точки кольца указанная площадка видна под одинаковым телесным углом $d\omega$:

$$d\omega = \frac{dB \cos \theta}{r_1^2} = \frac{\cos \theta}{r^2 + l^2}, \tag{1}$$

а проекция кольца на плоскость, перпендикулярную соответствующему лучу зрения, равна $2\pi l dl \cos \theta$, где θ – угол между лучом зрения и осью диска, можно написать:

$$E_x = \int_0^R 2\pi l dl \cdot I_x(0, \theta) \frac{\cos^2 \theta}{r^2 + l^2}. \quad (2)$$

Здесь x – «расстояние» рассматриваемой частоты ν от центральной частоты линии ν_0 , выраженная в условных единицах, например, в доплеровских полуширинах линий:

$$x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}, \quad \Delta\nu_D = \frac{\nu_0 \bar{V}}{c}, \quad \bar{V} - \text{средняя скорость атомов}, \quad (3)$$

а $I_x(0, \theta)$ – интенсивность излучения на границе диска в «частоте» x , выходящего под углом θ к нормали. $I_x(0, \theta)$ можно выразить через функцию источников $S(\tau)$, где τ – оптическая глубина точки в центре линии, а S – отношение коэффициентов излучения и поглощения:

$$I_x(0, \theta) = \int_0^{\theta_0} S(\tau) e^{-\alpha(x) \sec \theta \tau} \alpha(x) \sec \theta d\tau, \quad (4)$$

$\alpha(x)\tau$ – оптическая глубина точки в «частоте» x , $\alpha(x)$ – профиль коэффициента поглощения с нормировкой $\alpha(0) = 1$.

Подставив (4) в (2) с учетом соотношений $l/r = \operatorname{tg} \theta$, $dl = \frac{rd\theta}{\cos^2 \theta}$, и обозначив $\theta_0 = \operatorname{arctg} R/r$ (θ_0 – угловой радиус диска), получим:

$$E_x = 2\pi \int_0^{\theta_0} \operatorname{tg} \theta d\theta \int_0^{\tau} S(\tau) e^{-\alpha(x) \sec \theta \tau} \cdot \alpha(x) d\tau. \quad (5)$$

Меняя порядок интегрирования, перепишем (5) в виде:

$$E_x = \int_0^{\tau} S(\tau) f(\tau, x) d\tau, \quad (6)$$

где

$$f(\tau, x) = 2\pi\alpha(x) \int_0^{\theta_0} e^{-\alpha(x)\sec\theta\tau} \cdot \operatorname{tg}\theta d\theta. \quad (7)$$

В случае протуберанца с бесконечным радиусом $R = \infty$ ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$), сделав подстановку

$$\sec\theta = y, \quad \sin\theta d\theta = \frac{dy}{y^2}, \quad (8)$$

из (7) можно получить:

$$f(\tau, x) = 2\pi\alpha(x) E_1[\alpha(x)\tau], \quad (9)$$

где E_1 - первая интегрально-показательная функция, получаемая при $n=1$ из общего выражения:

$$E_n(z) = \int_1^{\infty} e^{-zy} \frac{dy}{y^n}. \quad (10)$$

Для конечного же протуберанца, введя обозначения

$$\sec\theta = y, \quad y_0 = \sec\theta_0 = \sec\operatorname{arctg}\frac{R}{r}, \quad (11)$$

из (7) получаем формулу:

$$f(\tau, x) = 2\pi\alpha(x) \int_1^{y_0} e^{-\alpha(x)\tau y} \frac{dy}{y}, \quad (12)$$

которую можно привести к виду:

$$f(\tau, x) = 2\pi\alpha(x) \{E_1[\alpha(x)\tau] - E_1[\alpha(x)\tau y_0]\}. \quad (13)$$

Так как $E_1(y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$, при $\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ (13) превращается в (9).

Итак, освещенность, созданная диском около наблюдателя на «частотах» x внутри линии, дается формулами (6) и (13). Профиль же линии, который можно определить как

$$r_\lambda \equiv r_x = \frac{E_\lambda}{E_{\lambda_0}} = \frac{E_v}{E_{v_0}} = \frac{E_x}{E_o}, \quad (14)$$

дается формулой:

$$r(x) = \frac{\int_0^{\infty} S(\tau) f(\tau, x) d\tau}{\int_0^{\infty} S(\tau) f(\tau, o) d\tau}, \quad (15)$$

в которую надо подставить (13) и вытекающее из нее выражение:

$$f(\tau, o) = 2\pi \{E_1(\tau) - E_1(\tau y_o)\}. \quad (16)$$

Дальнейшее справедливо для общего вида профиля $\alpha(x)$ и, в частности, в случае доплеровского профиля

$$\alpha(x) = e^{-x^2}, \quad (17)$$

соответствующего средам, где уширение линий происходит в результате тепловых движений атомов. Заметим, что для «бесконечного» протуберанца из (16) получается:

$$f(\tau, o) = 2\pi E_1(\tau). \quad (18)$$

Рассмотрим поведение профиля линии (14) в крыльях, т.е. при $x \rightarrow \infty$. Так как при этом $\alpha(x) \rightarrow 0$, для любой оптической глубины τ , путем выбора x , можем получить $\tau\alpha(x) \ll 1$, что означает полную прозрачность диска вдоль нормали в далеких крыльях линий. На расстоянии l от центра толщина диска по лучу зрения в «частоте» x равна $\tau\alpha(x) \sec \theta$, т.е. $\tau\alpha(x) y$, так что для любых фиксированных y с ростом x достигается условие прозрачности

$$\tau\alpha(x) y \ll 1. \quad (19)$$

А это означает, что излучение крыльев линий, возникшее в любой точке протуберанца с частотным распределением $\mathcal{E}(x)$, выйдет из среды почти без изменения, т.е. с тем же частотным распределением; таким образом:

25480

$$I(x) \sim \mathcal{E}(x).$$



С другой стороны, при допущенном полном перераспределении квантов по частотам при элементарном акте рассеяния имеем (см., напр, [3], [4]):

$$\mathcal{E}(x) \sim \alpha(x), \quad (21)$$

так что, окончательно:

$$I(x) \sim \mathcal{E}(x) \sim \alpha(x) = e^{-x^2}, \quad (22)$$

откуда видна линейность логарифма интенсивности "в шкале" $[(v - v_0) / \Delta v_D]^2$, в крыльях, при $|v - v_0| \rightarrow \infty$.

Реально из формулы (15) для бесконечного диска с учетом формул (9) и (18) получим:

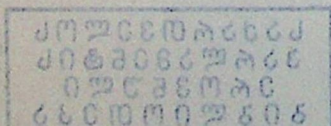
$$r(x) = \alpha(x) \frac{\int_0^\infty S(\tau) E_1[\alpha(x)\tau] d\tau}{\int_0^\infty S(\tau) E_1(\tau) d\tau}. \quad (23)$$

В общем же случае $\left(\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}, R < \infty\right)$, с учетом (13) и (16), формула (15) дает:

$$r(x) = \alpha(x) \frac{\int_0^\infty S(\tau) \{E_1[\alpha(x)\tau] - E_1[\alpha(x)\tau y_0]\} d\tau}{\int_0^\infty S(\tau) [E_1(\tau) - E_1(\tau y_0)] d\tau}. \quad (24)$$

Можно предположить, что для крыльев линий форма правой части (24) (по крайней мере в случае $\alpha(x) = e^{-x^2}$) в основном определяется множителем $\alpha(x)$ (имеется в виду слабая зависимость дроби от x). Проверим это.

При $x \rightarrow \infty$ аргументы E_1 , т.е. $\alpha(x)\tau$ и $\alpha(x)\tau y_0$ стремятся к нулю. Воспользуемся разложением $E_1(x)$ в окрестности $x = 0$:



$$E_1(x) = -\gamma - \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n \cdot n!}. \quad (25)$$

Выписав лишь первые три члена, получаем:

$$E_1[\alpha(x)\tau] \approx -\gamma - \ln \tau + x^2 + \tau\alpha(x) + \dots; \quad (26)$$

$$E_1[\alpha(x)\tau y_o] \approx -\gamma - \ln y_o - \ln \tau + x^2 + \tau\alpha(x)y_o + \dots; \quad (27)$$

откуда, с точностью до членов, содержащих только положительные степени $\alpha(x)$ и, тем самым, исчезающих при $x \rightarrow \infty$, имеем

$$E_1[\alpha(x)\tau] - E_1[\alpha(x)\tau y_o] = \ln y_o + \tau\alpha(x)(1 - y_o) + \dots \approx \ln y_o. \quad (28)$$

Подставив (28) в (24), получим:

$$r(x) = A(\tau_o, y_o) e^{-x^2}, \quad (29)$$

где

$$A(\tau_o, y_o) = \ln y_o \frac{\int_0^{\infty} S(\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} S(\tau) [E_1(\tau) - E_1(\tau y_o)] d\tau}. \quad (30)$$

Таким образом:

$$\ln r(x) = -x^2 + \ln A(\tau_o, y_o). \quad (31)$$

Если построить наблюдаемый профиль линии в системе координат $[\ln r(x), x^2]$, в крыльях он будет асимптотически стремиться к прямой, которая отсечет на оси ординат отрезок $b_o = \ln A^{\text{теор}}(\tau_o, y_o)$. Вычислив последнюю величину теоретически, можно попытаться решить уравнение $\ln A(\tau_o, y_o) = b_o$ относительно τ_o и y_o . Так как это не удастся сделать однозначно, понадобится оценить y_o независимо. Можно построить семейство графиков зависимости $\ln A(\tau_o, y_o)$ от τ_o ,

для ряда значений y_0 , оценить y_0 (например, на основе наблюдений) и определить на соответствующем графике абсциссу точки графика с ординатой b_0 . Это значение абсциссы и будет равно оптической толщине среды τ_0 . Но реализовать это будет нелегко.

Добавив к этому дополнительные сложности, которые возникнут при рассмотрении случая $\varphi \neq 0$, следует признать преимущества сферической модели, в которой расчет доводится до конца однозначно.

Укажем, что для бесконечного протуберанца $S(\tau)$ представляет решение интегрального уравнения для бесконечного слоя оптической толщины τ_0 :

$$S(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\tau K(|\tau - \tau'|) S(\tau', \tau_0) d\tau' + S^*(\tau), \quad (32)$$

где λ – вероятность выживания фотона при рассеянии, $S^*(\tau)$ – распределение первичных источников, а ядро K определяется видом $\alpha(x)$:

$$K(\tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_1[\alpha(x)\tau] dx, \quad (33)$$

A – нормировка функции $\alpha(x)$. В случае конечного диска $S(\tau)$ будет отличаться от решения (32). И в этом плане очевидно преимущество сферической модели, в которой функция источников $S_{sp}(\tau, \tau_0)$ просто выражается через решение уравнения (32) (см. [5]).

Поступила 22.10.1997
Кафедра астрономии

ლიტერატურა

1. შ.ა. საბაშვილი. Бюллетень Абастуманской астрофизической обсерватории, 49 (1978), стр. 143-148.
2. შ.ა. საბაშვილი. Бюллетень Абастуманской астрофизической обсерватории, 56 (1983), стр. 113-122.
3. В.В. Соболев. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М., 1956.
4. В.В. Иванов. Перенос излучения и спектры небесных тел. М., 1969.
5. В.В. Соболев. Астрофизика, т.3, в.5, 1967

შ. საბაშვილი

ბრტყელი პროტუბერანცის ნათება სპექტრულ ხაზებში

რეზიუმე

შესწავლილია ბრტყელი პროტუბერანცის ნათება, რომელშიც გამოსხივების წყაროები განაწილებულია თანაბრად, ხოლო ფოტონთა გაბნევა ხდება იზოტროპულად და სრული სიხშირული გადაწილებით. განიხილება პროტუბერანცის ოპტიკური სისქის განსაზღვრის საკითხი დანაკვირვებ სპექტრულ ხაზთა პროფილების ასიმპტოტური ყოფაქცევის მიხედვით ხაზთა შორეულ ფრთებში.

Emission of a plane prominence in spectral lines

Summary

Emission of a plane prominence is studied. Homogeneous distribution of the primary sources of radiation, Dopler profile and isotropic photon scattering with complete frequency redistribution are assumed. The problem of determining the optical thickness of the prominence from the asymptotic behaviour – of the observed line profiles in the far wings is considered.

УДК 511.4

О ЧИСЛЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЧИСЕЛ НЕКОТОРЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

М. Г. Отинашвили

Введение

Пусть $r(n; f)$ обозначает число представлений натурального числа n положительной примитивной квадратичной формой

$$f = a_1(x_1^2 + x_2^2) + a_2(x_3^2 + x_4^2) + \dots + a_6(x_{11}^2 + x_{12}^2) \quad (1)$$

с целыми коэффициентами a_1, a_2, \dots, a_6

В статье [1] предложен метод нахождения явных точных формул для $r(n; f)$ и, в частности, выведены соответствующие формулы в случае нескольких конкретных форм вида (1).

В предлагаемой статье методом статьи [1] выведены формулы для $r(n; f)$, когда

$$f_1 = x_1^2 + \dots + x_8^2 + 2(x_9^2 + \dots + x_{12}^2),$$

$$f_2 = x_1^2 + \dots + x_4^2 + 2(x_5^2 + \dots + x_{12}^2),$$

$$f_3 = x_1^2 + \dots + x_4^2 + 2(x_5^2 + \dots + x_8^2) + 4(x_9^2 + \dots + x_{12}^2),$$

$$f_4 = x_1^2 + x_2^2 + 2(x_3^2 + \dots + x_{10}^2) + 4(x_{11}^2 + x_{12}^2),$$

$$f_5 = x_1^2 + x_2^2 + 2(x_3^2 + \dots + x_6^2) + 4(x_7^2 + \dots + x_{12}^2),$$

$$f_6 = x_1^2 + \dots + x_4^2 + 2(x_5^2 + x_6^2) + 4(x_7^2 + \dots + x_{12}^2).$$

Пусть $n = 2^\alpha u$ (α - целое ≥ 0 , u - нечетное), $\left(\frac{-1}{d}\right)$ - символ

Якоби, $\sigma_5(u) = \sum_{d_1, d_2=u} \left(\frac{-1}{d_1}\right) d_2^5,$

$$v_1(n) = 4 \sum_{\substack{x_1^2+x_2^2+4(x_3^2+x_4^2)=2n \\ 2 \nmid x_1, 2 \nmid x_2, x_1 > 0, x_2 > 0}} x_1^4 - 3x_1^2 x_2^2,$$

$$v_{11}(n) = 16 \sum_{\substack{x_1^2+\dots+x_4^2=4n \\ 2 \nmid x_1, \dots, 2 \nmid x_4, x_1 > 0, \dots, x_4 > 0}} \left(\frac{-1}{x_1 x_2 x_3 x_4}\right) x_1 x_2 x_3 x_4,$$

$$v_2(n) = 16 \sum_{\substack{2(x_1^2+x_2^2)+x_3^2+x_4^2=2n \\ 2 \nmid x_1, \dots, 2 \nmid x_4, x_1 > 0, \dots, x_4 > 0}} x_1^4 - 3x_1^2 x_2^2,$$

$$v_3(n) = 4 \sum_{\substack{x_1^2+x_2^2+8(x_3^2+x_4^2)=2n \\ 2 \nmid x_1, 2 \nmid x_2, x_1 > 0, x_2 > 0}} x_1^4 - 3x_1^2 x_2^2,$$

$$\tilde{v}_1(n) = 16 \sum_{\substack{x_1^2+\dots+x_4^2=2n \\ 2 \nmid x_1, \dots, 2 \nmid x_4, x_1 > 0, \dots, x_4 > 0}} \left(\frac{-1}{x_1 x_2 x_3 x_4}\right) x_1 x_2 x_3 x_4,$$

$$\tilde{v}_2(n) = 4 \sum_{\substack{x_1^2+x_2^2+4(x_3^2+x_4^2)=n \\ 2 \nmid x_1, 2 \nmid x_2, x_1 > 0, x_2 > 0}} x_1^4 - 3x_1^2 x_2^2,$$

$$\tilde{v}_3(n) = 16 \sum_{\substack{x_1^2+\dots+x_4^2=n \\ 2 \nmid x_1, \dots, 2 \nmid x_4, x_1 > 0, \dots, x_4 > 0}} \left(\frac{-1}{x_1 x_2 x_3 x_4}\right) x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 r(n; f_1) &= 2\sigma_5(u) - 2v_1(n) - \frac{1}{8}v_{11}(n), n \equiv 1(\text{mod } 2), \\
 &= 64\sigma_5(u) + \frac{7}{2}\tilde{v}_1(n), n \equiv 2(\text{mod } 4), \\
 &= \frac{8}{31}(2^{5(\alpha-1)}247 + 63)\sigma_5(u), n \equiv 0(\text{mod } 4),
 \end{aligned}
 \tag{I}$$

$$\begin{aligned}
 r(n; f_2) &= \frac{1}{2}\sigma_5(u) - v_1(n) - \frac{1}{32}v_{11}(n), n \equiv 1(\text{mod } 2), \\
 &= 16\sigma_5(u) + \frac{3}{2}\tilde{v}_1(n), n \equiv 2(\text{mod } 4), \\
 &= \frac{8}{31}(2^{5(\alpha-1)}61 + 63)\sigma_5(u), n \equiv 0(\text{mod } 4),
 \end{aligned}
 \tag{II}$$

$$\begin{aligned}
 r(n; f_3) &= \frac{1}{8}\sigma_5(u) + \frac{1}{2}v_1(n) + \frac{31}{128}v_{11}(n) - v_3(n), n \equiv 1(\text{mod } 4), \\
 &= \frac{1}{8}\sigma_5(u) + \frac{1}{2}v_1(n) + \frac{31}{128}v_{11}(n) - 4v_2(n), n \equiv 3(\text{mod } 4), \\
 &= 4\sigma_5(u) - \frac{1}{4}\tilde{v}_1(n) - 4\tilde{v}_2(n), n \equiv 2(\text{mod } 4), \\
 &= 128\sigma_5(u) + \frac{15}{2}\tilde{v}_3(u), n \equiv 4(\text{mod } 8), \\
 &= 4096\sigma_5(u) \cdot 2^{-5\alpha} \left\{ 2^{5\alpha} - 2^6(2^5(2^{5(\alpha-3)} - 1) \cdot 31^{-1} - 1) \right\}, \\
 &\quad n \equiv 0(\text{mod } 8),
 \end{aligned}
 \tag{III}$$



$$\begin{aligned}
r(n; f_4) &= \frac{1}{8}\sigma_5(u) + \frac{1}{4}v_1(n) + \frac{15}{128}v_{11}(n) + 4v_3(n), n \equiv 1(\text{mod } 4), \\
&= \frac{1}{8}\sigma_5(u) + \frac{1}{4}v_1(n) + \frac{15}{128}v_{11}(n) - 2v_2(n), n \equiv 3(\text{mod } 4), \\
&= 4\sigma_5(u) - 2\tilde{v}_2(n), n \equiv 2(\text{mod } 4), \\
&= 128\sigma_5(u) + \frac{7}{2}\tilde{v}_3(n), n \equiv 4(\text{mod } 8), \\
&= 4096\sigma_5(u) \cdot 2^{-5\alpha} \{2^{5\alpha} - 2^6(2^5(2^{5(\alpha-3)} - 1) \cdot 31^{-1} - 1)\}, \\
&\quad n \equiv 0(\text{mod } 8),
\end{aligned} \tag{IV}$$

$$\begin{aligned}
r(n; f_5) &= \frac{1}{32}\sigma_5(u) + \frac{3}{16}v_1(n) + \frac{47}{512}v_{11}(n) - \frac{1}{2}v_3(n), n \equiv 1(\text{mod } 4), \\
&= \frac{1}{32}\sigma_5(u) + \frac{3}{16}v_1(n) + \frac{47}{512}v_{11}(n) - \frac{3}{2}v_2(n), n \equiv 3(\text{mod } 4), \\
&= \sigma_5(u) - \frac{1}{16}\tilde{v}_1(n) - \frac{3}{2}\tilde{v}_2(n), n \equiv 2(\text{mod } 4), \\
&= 32\sigma_5(u) + \frac{5}{2}\tilde{v}_3(n), n \equiv 4(\text{mod } 8), \\
&= 1024\sigma_5(u) \cdot 2^{-5\alpha} \{2^{5\alpha} - 2^8(2^5(2^{5(\alpha-3)} - 1) \cdot 31^{-1} - 1)\}, \\
&\quad n \equiv 0(\text{mod } 8),
\end{aligned} \tag{V}$$

$$\begin{aligned}
r(n; f_6) &= \frac{1}{16}\sigma_5(u) + \frac{3}{8}v_1(n) + \frac{47}{256}v_{11}(n) - v_3(n), n \equiv 1(\text{mod } 4), \\
&= \frac{1}{16}\sigma_5(u) + \frac{3}{8}v_1(n) + \frac{47}{256}v_{11}(n) - 3v_2(n), n \equiv 3(\text{mod } 4), \\
&= 2\sigma_5(u) - \frac{1}{8}\tilde{v}_1(n) - \frac{7}{2}\tilde{v}_2(n), n \equiv 2(\text{mod } 4), \\
&= 64\sigma_5(u) + \frac{9}{2}\tilde{v}_3(n), n \equiv 4(\text{mod } 8), \\
&= 2048\sigma_5(u) \cdot 2^{-5\alpha} \{2^{5\alpha} - 2^7(2^5(2^{5(\alpha-3)} - 1) \cdot 31^{-1} - 1)\}, \\
&\quad n \equiv 0(\text{mod } 8).
\end{aligned} \tag{VI}$$

§1. Некоторые известные результаты

1.1 В данной статье N, a, k, n, r, m, q обозначают натуральные числа; b, u, v – нечетные натуральные числа; p – простое число; $c, g, h, j, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ – целые числа; i – мнимая единица; z, τ – комплексные переменные ($\text{Im } \tau > 0$);

$e(z) = \exp(2\pi iz)$; $Q = e(\tau)$; $\left(\frac{h}{u}\right)$ – обобщенный символ Якоби; –

$\sum_{h \bmod q}$ и $\sum'_{h \bmod q}$ соответственно обозначают суммы, в которых h пробегает полную и приведенную систему вычетов по $\bmod q$; a – общее наименьшее кратное коэффициентов a_k в (1); Δ – определитель квадратичной формы (1).

Далее, пусть

$$\vartheta_{gh}(z | \tau; c, N) = \sum_{m \equiv c \pmod{N}} (-1)^{h(m-c)/N} e\left(\frac{1}{2N}(m + \frac{g}{2})^2 \tau\right) e\left((m + \frac{g}{2})z\right), \quad (1.1)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^n}{\partial z^n} \vartheta_{gh}(z | \tau; c, N) = \\ & = (\pi i)^n \sum_{m \equiv c \pmod{N}} (-i)^{h(m-c)/N} (2m + g)^n e\left(\frac{1}{2N}(m + \frac{g}{2})^2 \tau\right) e\left((m + \frac{g}{2})z\right). \quad (1.2) \end{aligned}$$

Положим

$$\vartheta_{gh}(\tau; c, N) = \vartheta_{gh}(0 | \tau; c, N), \quad (1.3)$$

$$\vartheta_{gn}^{(n)}(\tau; c, N) = \frac{\partial^n}{\partial z^n} \vartheta_{gh}(z | \tau; c, N) \Big|_{z=0}.$$

Из (1.1), согласно обозначениям (1.3), следует

$$\vartheta_{gh}(\tau; 0, N) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{hm} Q^{(2Nm+g)^2/8N}, \quad (1.4)$$

$$\mathfrak{g}_{g^n}^{(n)}(\tau; 0, N) = (\pi i)^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{hm} (2Nm + g)^n Q^{(2Nm+g)^2/8N} \quad (1.5)$$

Квадратичной форме (1) соответствует тега-ряд

$$\prod_{k=1}^6 \mathfrak{g}_{00}^2(\tau; 0, 2a_k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n; f) Q^n \quad (1.6)$$

Далее, положим

$$\Theta(\tau; f) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n; f) Q^n, \quad (1.7)$$

где $\rho(n; f)$ – сумма сингулярного ряда, соответствующего квадратичной форме (1). Наконец, пусть

$$\Gamma_0(4N) = \left\{ \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \mid \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \gamma \equiv 0 \pmod{4N} \right\}.$$

1.2 В дальнейшем будут применяться некоторые результаты, которые сформулируем в виде следующих лемм:

Лемма 1 (см., напр., [1], лемма 1). Целая модулярная форма $F(\tau)$ веса r относительно подгруппы сравнений $\Gamma_0(4N)$ тождественно равна нулю, если в ее разложении в степенной ряд

$$F(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m Q^m$$

коэффициенты $C_m = 0$ для всех $m \leq \frac{r}{12} 4N \prod_{p|4N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$.

Лемма 2 ([1], леммы 2 и 3). Функции $\prod_{k=1}^6 \mathfrak{g}_{00}^2(\tau; 0, 2a_k)$ и $\Theta(\tau; f)$ являются целыми модулярными формами веса $r=6$ и

характера $\chi(\delta) = \left(\frac{\Delta}{|\delta|} \right)$ относительно подгруппы сравнений

$\Gamma_0(4N)$.

Лемма 3 ([1], лемма 4). При заданном N функции

$$\begin{aligned}
 & 1. \phi_2(\tau; g_1, \dots, g_4; h_1, \dots, h_4; N_1, \dots, N_4) = \\
 & = \left\{ \frac{1}{N_1^2} \mathfrak{G}_{g_1 h_1}^{(4)}(\tau; 0, 2N_1) \mathfrak{G}_{g_2 h_2}(\tau; 0, 2N_2) + \frac{1}{N_2^2} \mathfrak{G}_{g_2 h_2}^{(4)}(\tau; 0, 2N_2) \mathfrak{G}_{g_1 h_1}(\tau; 0, 2N_1) + \right. \\
 & \left. - \frac{6}{N_1 N_2} \mathfrak{G}_{g_1 h_1}''(\tau; 0, 2N_1) \mathfrak{G}_{g_2 h_2}''(\tau; 0, 2N_2) \right\} \prod_{k=3}^4 \mathfrak{G}_{g_k h_k}(\tau; 0, 2N_k), \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2. \phi_3(\tau; g_1, \dots, g_4; h_1, \dots, h_4; N_1, \dots, N_4) = \\
 & = \left\{ \frac{1}{N_1} \mathfrak{G}_{g_1 h_1}''(\tau; 0, 2N_1) \mathfrak{G}_{g_2 h_2}(\tau; 0, 2N_2) + \right. \\
 & \left. - \frac{1}{N_2} \mathfrak{G}_{g_2 h_2}''(\tau; 0, 2N_2) \mathfrak{G}_{g_1 h_1}(\tau; 0, 2N_1) \right\} \prod_{k=3}^4 \mathfrak{G}_{g_k h_k}(\tau; 0, 2N_k), \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

$$3. \phi_4(\tau; g_1, \dots, g_4; h_1, \dots, h_4; N_1, \dots, N_4) = \prod_{k=1}^4 \mathfrak{G}'_{g_k h_k}(\tau; 0, 2N_k), \quad (1.10)$$

где

$$\text{a) } 2 \mid g_k, N_k \mid N (k=1, 2, 3, 4), 4 \mid N \sum_{k=1}^4 \frac{h_k^2}{N_k}, 4 \mid \sum_{k=1}^4 \frac{g_k^2}{4N_k};$$

b) для всех α, δ с условием $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{4N}$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\prod_{k=1}^4 N_k}{|\delta|} \right) \phi_1(\tau; \alpha g_1, \dots, \alpha g_4; h_1, \dots, h_4; N_1, \dots, N_4) = \\
 & = \left(\frac{\Delta}{|\delta|} \right) \phi_1(\tau; g_1, \dots, g_4; h_1, \dots, h_4; N_1, \dots, N_4)
 \end{aligned}$$



являются целыми модулярными формами веса $r=6$ характера

$$\mathfrak{N}(\delta) = \left(\frac{\Delta}{|\delta|} \right)$$

относительно подгруппы сравнений $\Gamma_0(4N)$.

Лемма 4 ([2]). Пусть $n = 2^\alpha u v$, $u = \prod_{p|n, p|2\Delta} p^\beta$,

$$v = \prod_{p|n, p|\Delta, p>2} p^\beta, (\alpha \geq 0, \beta \geq 0). \text{ Тогда}$$

$$\rho(n; f) = \frac{2^{5\alpha+3} v^5}{\Delta^2} \mathfrak{N}_2 \cdot \prod_{p|\Delta, p>2} \mathfrak{N}_p \cdot \prod_{p|\Delta, p>2} (1-p^{-6})^{-1} \sigma_5(u),$$

значения величин \mathfrak{N}_2 и \mathfrak{N}_p даны в леммах 5 и 6 из [2].

§2. Формулы для $r(n, f_1)$ и $r(n, f_2)$

В этом параграфе рассматриваются квадратичные формы f_1 и f_2 , в которых $a=2$, определитель соответственно $\Delta = 2^4, 2^8$, также полагаем: $N=2$.

Лемма 5. Функции

$$\begin{aligned} \psi(\tau; f_1) = & \mathfrak{G}_{00}^8(\tau; 0, 2) \mathfrak{G}_{00}^4(\tau; 0, 4) - \Theta(\tau; f_1) + 2 \frac{1}{128\pi^4} \chi_1(\tau) + \\ & + \frac{1}{8} \frac{1}{16\pi^4} \mathfrak{G}_{21}^4(\tau; 0, 2) - \frac{7}{2} \frac{1}{256\pi^4} \mathfrak{G}_{41}^4(\tau; 0, 4), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \psi(\tau; f_2) = & \mathfrak{G}_{00}^4(\tau; 0, 2) \mathfrak{G}_{00}^8(\tau; 0, 4) - \Theta(\tau; f_2) + \frac{1}{128\pi^4} \chi_1(\tau) + \\ & + \frac{1}{32} \frac{1}{16\pi^4} \mathfrak{G}_{21}^4(\tau; 0, 2) - \frac{3}{2} \frac{1}{256\pi^4} \mathfrak{G}_{41}^4(\tau; 0, 4), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\chi_1(\tau) = \phi_2(\tau; 4, 4, 0, 0; 0, \dots, 0; 2, \dots, 2), \quad (2.3)$$

являются целыми модулярными формами веса $r = 6$ и характера $\aleph(\delta) = 1$ относительно $\Gamma_0(8)$.

Доказательство: Согласно лемме 2, первые два слагаемых в (2.1) и (2.2) являются целыми модулярными формами веса $r = 6$ и характера $\aleph(\delta) = 1$ относительно $\Gamma_0(8)$.

В ([1]) показано, что остальные слагаемые в (2.1) и (2.2) удовлетворяют условиям а) и в) леммы 3. Таким образом, они также являются целыми модулярными формами веса $r = 6$ и характера $\aleph(\delta) = 1$ относительно $\Gamma_0(8)$.

Теорема 1.

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}^8(\tau; 0, 4) \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 4) &= \Theta(\tau; f_1) - 2 \frac{1}{128\pi^4} \chi_1(\tau) + \\ &- \frac{1}{8} \frac{1}{16\pi^4} \vartheta_{21}^4(\tau; 0, 2) + \frac{7}{2} \frac{1}{256\pi^4} \vartheta_{41}^4(\tau; 0, 4), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{\infty}^6(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}^8(\tau; 0, 4) &= \Theta(\tau; f_2) - \frac{1}{128\pi^4} \chi_1(\tau) + \\ &- \frac{1}{32} \frac{1}{16\pi^4} \vartheta_{21}^4(\tau; 0, 2) + \frac{3}{2} \frac{1}{256\pi^4} \vartheta_{41}^4(\tau; 0, 4). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Доказательство: Согласно лемме 1, функции $\psi(\tau; f_1)$ и $\psi(\tau; f_2)$ будут тождественно равны нулю, если все коэффициенты при Q^n ($n \leq 6$) их разложениях по степеням Q равны нулю.

1. В лемме 4 положим: $n = 2^\alpha u$, $v = 1$, $\Delta = 2^4 \cdot 2^8$. Тогда соответственно получим

$$\rho(n; f_1) = \frac{2^{5\alpha+3}}{2^2} \aleph_2 \sigma_5(u), \quad \rho(n; f_2) = \frac{2^{5\alpha+3}}{2^4} \aleph_2 \sigma_5(u).$$

В лемме 5 из [2] положим: $f=f_1, \gamma_6 = \gamma_5 = 1, \gamma_4 = \gamma_3 = \gamma_2 = \gamma_1 = 0, \gamma = 2, b_1 = \dots = b_6 = 1, b = 1$, тогда

$$\aleph_2 = 1 \quad \text{при } \alpha = 0, 1$$

$$\aleph_2 = \frac{2^{5(1-\alpha)}63 + 247}{248} \quad \text{при } \alpha \geq 2.$$

Таким образом,

$$\rho(n; f_1) = 2\sigma_5(u) \quad \text{при } \alpha = 0$$

$$= 64\sigma_5(u) \quad \text{при } \alpha = 1$$

$$= \frac{2^{5\alpha}247 + 2016}{124} \sigma_5(u) \quad \text{при } \alpha \geq 2.$$

Вычислив по этим формулам значения $\rho(n; f_1)$ для всех ($n \leq 6$), получим

$$\Theta(\tau; f_1) = 1 + 2Q + 64Q^2 + 488Q^3 + 2056Q^4 + 6252Q^5 + 15616Q^6 + \dots \quad (2.6)$$

В лемме 5 из [2] положим: $f=f_2, \gamma_6 = \gamma_5 = \gamma_4 = \gamma_3 = 1, \gamma_2 = \gamma_1 = 0, \gamma = 4, b_1 = \dots = b_6 = 1, b = 1$, тогда

$$\aleph_2 = 1 \quad \text{при } \alpha = 0, 1$$

$$= \frac{2^{5(1-\alpha)}63 + 61}{62} \quad \text{при } \alpha \geq 2.$$

Таким образом,

$$\rho(n; f_2) = \frac{1}{2}\sigma_5(u) \quad \text{при } \alpha = 0$$

$$= 16\sigma_5(u) \quad \text{при } \alpha = 1$$

$$= \frac{2^{5\alpha}61 + 2016}{124} \sigma_5(u) \quad \text{при } \alpha \geq 2.$$

Вычислив значения $\rho(n, f_2)$ для всех $n \leq 6$, получим

$$\Theta(\tau; f_2) = 1 + \frac{1}{5}Q + 16Q^2 + 122Q^3 + 520Q^4 + 1563Q^5 + 3904Q^6 + \dots \quad (2.7)$$

II. Из (1.4) следует:

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}^8(\tau; 0, 2)\vartheta_{00}^4(\tau; 0, 4) &= 1 + 16Q + 120Q^2 + \\ &+ 576Q^3 + 2056Q^4 + 5984Q^5 + 14944Q^6 + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 2)\vartheta_{00}^8(\tau; 0, 4) &= 1 + 8Q + 40Q^2 + 160Q^3 + 520Q^4 + \dots \\ &+ 1456Q^5 + 3616Q^6 + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

В [1] показано, что

$$\frac{1}{128\pi^4}\chi_1(\tau) = -8Q - 32Q^3 + 80Q^5 + 448Q^7 - 232Q^9 - 2656Q^{11} + \dots \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{16\pi^4}\vartheta_{21}^{t4}(\tau; 0, 2) = 16Q - 192Q^3 + 864Q^5 - 1408Q^7 - 1584Q^9 + 8640Q^{11} + \dots \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{256\pi^4}\vartheta_{11}^{t4}(\tau; 0, 4) = 16Q^2 - 192Q^6 + 864Q^{10} + \dots \quad (2.12)$$

При помощи формул (2.1), (2.4), (2.6), (2.8), (2.10), (2.11), (2.12) и (2.2), (2.5), (2.7), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) легко проверить, что все коэффициенты при Q^n ($n \leq 6$) в разложениях функций $\psi(\tau; f_1)$ и $\psi(\tau; f_2)$ по степеням Q равны нулю. Таким образом, тождества (2.4) и (2.5) доказаны.

Доказательство формул (I) – (II). Приравняв коэффициенты при Q^n в обеих частях тождеств (2.4) и (2.5), согласно (1.6) и (1.7), получим

$$r(n; f_1) = \rho(n; f_1) - 2\nu_1(n) - \frac{1}{8}\nu_{11}(n) + \frac{7}{2}\tilde{\nu}_1(n),$$

$$r(n; f_2) = \rho(n; f_2) - \nu_1(n) - \frac{1}{32}\nu_{11}(n) + \frac{3}{2}\tilde{\nu}_1(n),$$

где $\nu_1(n), \nu_{11}(n), \tilde{\nu}_1(n)$ соответственно обозначают коэффициенты при Q^n в разложениях функций $\frac{1}{128\pi^4}\chi_1(\tau), \frac{1}{16\pi^4}\vartheta_{21}^{t4}(\tau; 0, 2),$

$\frac{1}{256\pi^4} \vartheta_{41}^4(\tau; 0, 4)$ по степеням Q .

Таким образом, формулы (I) – (II) доказаны.

§3. Формулы для $r(n; f_3), r(n; f_4), r(n; f_5)$ и $r(n; f_6)$

В этом параграфе рассматриваются квадратичные формы f_3, f_4, f_5 и f_6 , в которых $a = 4$, определители соответственно $\Delta = 2^{12}, 2^{12}, 2^{16}$ и 2^{14} , также полагаем: $N=4$.

Лемма 6. Функции

$$\begin{aligned} \psi(\tau; f_3) &= \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 4) \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 8) - \Theta(\tau; f_3) + \\ &- \frac{1}{2} \frac{1}{128\pi^4} \lambda_1(\tau) - \frac{31}{128} \frac{1}{16\pi^4} \vartheta_{21}^4(\tau; 0, 2) + 4 \frac{1}{512\pi^4} \lambda_2(\tau) + \\ &+ \frac{1}{128\pi^4} \lambda_3(\tau) + \frac{1}{4} \frac{1}{256\pi^4} \vartheta_{41}^4(\tau; 0, 4) + 4 \frac{1}{512\pi^4} \lambda_4(\tau) + \\ &- \frac{15}{2} \frac{1}{4096\pi^4} \vartheta_{81}^4(\tau; 0, 8). \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \psi(\tau; f_4) &= \vartheta_{00}^2(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}^8(\tau; 0, 4) \vartheta_{00}^2(\tau; 0, 8) - \Theta(\tau; f_4) + \\ &- \frac{1}{4} \frac{1}{128\pi^4} \lambda_1(\tau) - \frac{15}{128} \frac{1}{16\pi^4} \vartheta_{21}^4(\tau; 0, 2) + 2 \frac{1}{512\pi^4} \lambda_2(\tau) + \\ &- 4 \frac{1}{128\pi^4} \lambda_3(\tau) + 2 \frac{1}{512\pi^4} \lambda_4(\tau) - \frac{7}{2} \frac{1}{4096\pi^4} \vartheta_{81}^4(\tau; 0, 8), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \psi(\tau; f_5) &= \vartheta_{00}^2(\tau; 0, 2) \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 4) \vartheta_{00}^6(\tau; 0, 8) - \Theta(\tau; f_5) + \\ &- \frac{3}{6} \frac{1}{128\pi^4} \lambda_1(\tau) - \frac{47}{512} \frac{1}{16\pi^4} \vartheta_{21}^4(\tau; 0, 2) + \frac{3}{2} \frac{1}{512\pi^4} \lambda_2(\tau) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{128\pi^4} \lambda_3(\tau) + \frac{1}{16} \frac{1}{256\pi^4} \vartheta_{41}^4(\tau; 0, 4) + \frac{3}{2} \frac{1}{512\pi^4} \lambda_4(\tau) + \\ &- \frac{5}{2} \frac{1}{4096\pi^4} \vartheta_{81}^4(\tau; 0, 8), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
 \omega(\tau; f_6) = & \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 2)\vartheta_{00}^2(\tau; 0, 4)\vartheta_{00}^6(\tau; 0, 8) - \Theta(\tau; f_6) + \\
 & - \frac{3}{8} \frac{1}{128\pi^4} \lambda_1(\tau) - \frac{47}{256} \frac{1}{16\pi^4} \vartheta_{21}^4(\tau; 0, 2) + 3 \frac{1}{512\pi^4} \lambda_2(\tau) + \\
 & + \frac{1}{128\pi^4} \lambda_3(\tau) + \frac{1}{8} \frac{1}{256\pi^4} \vartheta_{41}^4(\tau; 0, 4) + \frac{7}{2} \frac{1}{512\pi^4} \lambda_4(\tau) + \\
 & - \frac{9}{2} \frac{1}{4096\pi^4} \vartheta_{81}^4(\tau; 0, 8),
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$\chi_1(\tau) = \omega_2(\tau; 4, 4, 0, 0; 0, \dots, 0; 2, 2, 2, 2),$$

$$\chi_2(\tau) = \omega_2(\tau; 8, 8, 4, 4; 0, \dots, 0; 4, 4, 2, 2),$$

$$\chi_3(\tau) = \omega_2(\tau; 4, 4, 0, 0; 0, \dots, 0; 2, 2, 4, 4),$$

$$\chi_4(\tau) = \omega_2(\tau; 8, 8, 0, 0; 0, \dots, 0; 4, 4, 4, 4),$$

являются целыми модулярными формами веса $r = 6$ и характера $\aleph(\delta) = 1$ относительно подгруппы сравнений $\Gamma_0(4N)$.

Доказательство: Согласно лемме 2, первые два слагаемых в (3.1), (3.2), (3.3) и (3.4) являются целыми модулярными формами веса $r = 6$ и характера $\aleph(\delta) = 1$ относительно $\Gamma_0(4N)$.

В ([1]) показано, что остальные слагаемые в (3.1)-(3.4) удовлетворяют условиям а) и в) леммы 3. Таким образом, они также являются целыми модулярными формами веса $r = 6$ и характера $\aleph(\delta) = 1$ относительно $\Gamma_0(4N)$.

Теорема 2.

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 2)\vartheta_{00}^4(\tau; 0, 4)\vartheta_{00}^4(\tau; 0, 8) = & \Theta(\tau; f_3) + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{1}{128\pi^4} \lambda_1(\tau) + \frac{31}{128} \frac{1}{16\pi^4} \vartheta_{21}^4(\tau; 0, 2) - 1 \frac{1}{512\pi^4} \lambda_2(\tau) + \\
 & - \frac{1}{128\pi^4} \lambda_3(\tau) - \frac{1}{4} \frac{1}{256\pi^4} \vartheta_{41}^4(\tau; 0, 4) - 4 \frac{1}{512\pi^4} \lambda_4(\tau) + \\
 & + \frac{15}{2} \frac{1}{4096\pi^4} \vartheta_{81}^4(\tau; 0, 8),
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}^2(\tau; 0, 2)\vartheta_{00}^8(\tau; 0, 4)\vartheta_{00}^2(\tau; 0, 8) &= \Theta(\tau; f_4) + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{1}{128\pi^4} \lambda_1(\tau) + \frac{15}{128} \frac{1}{16\pi^4} \vartheta_{21}^4(\tau; 0, 2) - 2 \frac{1}{512\pi^4} \lambda_2(\tau) + \\ &+ \frac{1}{128\pi^4} \lambda_3(\tau) - 2 \frac{1}{512\pi^4} \lambda_4(\tau) + \frac{7}{2} \frac{1}{4096\pi^4} \vartheta_{81}^4(\tau; 0, 8), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}^2(\tau; 0, 2)\vartheta_{00}^4(\tau; 0, 4)\vartheta_{00}^6(\tau; 0, 8) &= \Theta(\tau; f_5) + \\ &+ \frac{3}{6} \frac{1}{128\pi^4} \lambda_1(\tau) + \frac{47}{512} \frac{1}{16\pi^4} \vartheta_{21}^4(\tau; 0, 2) - \frac{3}{2} \frac{1}{512\pi^4} \lambda_2(\tau) + \\ &- \frac{1}{2} \frac{1}{128\pi^4} \lambda_3(\tau) - \frac{1}{16} \frac{1}{256\pi^4} \vartheta_{41}^4(\tau; 0, 4) - \frac{3}{2} \frac{1}{512\pi^4} \lambda_4(\tau) + \\ &+ \frac{5}{2} \frac{1}{4096\pi^4} \vartheta_{81}^4(\tau; 0, 8), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}^4(\tau; 0, 2)\vartheta_{00}^2(\tau; 0, 4)\vartheta_{00}^6(\tau; 0, 8) &= \Theta(\tau; f_6) + \\ &+ \frac{3}{8} \frac{1}{128\pi^4} \lambda_1(\tau) + \frac{47}{256} \frac{1}{16\pi^4} \vartheta_{21}^4(\tau; 0, 2) + 3 \frac{1}{512\pi^4} \lambda_2(\tau) + \\ &- \frac{1}{128\pi^4} \lambda_3(\tau) - \frac{1}{8} \frac{1}{256\pi^4} \vartheta_{41}^4(\tau; 0, 4) - \frac{7}{2} \frac{1}{512\pi^4} \lambda_4(\tau) + \\ &+ \frac{9}{2} \frac{1}{4096\pi^4} \vartheta_{81}^4(\tau; 0, 8). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Доказательство: Согласно лемме 1, функции $\psi(\tau; f_3)$, $\psi(\tau; f_4)$, $\psi(\tau; f_5)$, $\psi(\tau; f_6)$ будут тождественно равны нулю, если все коэффициенты при Q^n ($n \leq 12$) в их разложениях по степеням Q равны нулю.

I. В лемме 4 положим: $n = 2^\alpha u$, $v = 1$, $\Delta = 2^{12}, 2^{12}, 2^{16}$ и 2^{14} . Тогда соответственно получим

$$\rho(n; f_3) = \frac{2^{5\alpha+3}}{2^6} \chi_2 \sigma_5(u).$$

$$\rho(n; f_4) = \frac{2^{5\alpha+3}}{2^6} \chi_2 \sigma_5(u).$$

$$\rho(n; f_5) = \frac{2^{5\alpha+3}}{2^8} \chi_2 \sigma_5(u).$$

$$\rho(n; f_6) = \frac{2^{5\alpha+3}}{2^7} \chi_2 \sigma_5(u).$$

В лемме 5 из [2] положим: $f=f_3, \gamma_6=\gamma_5=2, \gamma_4=\gamma_3=1, \gamma_2=\gamma_1=0, \gamma=6, b_1=\dots=b_6=1, b=1$, тогда

$$N=1 \text{ при } \alpha=0,1,2$$

$$= 2^{-5\alpha} \{2^{5\alpha} - 2^6(2^5(2^{5(\alpha-3)} - 1)31^{-1} - 1)\} \text{ при } \alpha \geq 3.$$

Таким образом,

$$\rho(n; f_3) = \frac{1}{3} \sigma_5(u) \text{ при } \alpha=0$$

$$= 4\sigma_5(u) \text{ при } \alpha=1$$

$$= 128\sigma_5(u) \text{ при } \alpha=2$$

$$= 4096\sigma_5(u) \cdot 2^{-5\alpha} \{2^{5\alpha} - 2^6(2^5(2^{5(\alpha-3)} - 1)31^{-1} - 1)\}$$

$$\text{при } \alpha \geq 3.$$

Вычислив по этим формулам значения $\rho(n; f_3)$ для всех $n \leq 12$, получим

$$\begin{aligned} \Theta(n; f_3) = & 1 + \frac{1}{3}Q + 4Q^2 + \frac{61}{2}Q^3 + 128Q^4 + \frac{1563}{4}Q^5 + 976Q^6 + \\ & + 2101Q^7 + 1101Q^8 + \frac{59293}{3}Q^9 + 12504Q^{10} + \frac{40263}{2}Q^{11} + 31232Q^{12} + \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

В лемме 5 из [2] положим: $f=f_4, \gamma_6=2, \gamma_5=\gamma_4=\gamma_3=\gamma_2=1, \gamma_1=0, \gamma=6, b_1=\dots=b_6=1, b=1$, тогда

$$\chi_2 = 1 \text{ при } \alpha = 0, 1, 2$$

$$= 2^{-5\alpha} \{2^{5\alpha} - 2^6(2^5(2^{5(\alpha-3)} - 1)31^{-1} - 1)\} \text{ при } \alpha \geq 3.$$

Таким образом,

$$\rho(n; f_4) = \frac{1}{8}\sigma_3(u) \text{ при } \alpha = 0$$

$$= 4\sigma_3(u) \text{ при } \alpha = 1$$

$$= 128\sigma_3(u) \text{ при } \alpha = 2$$

$$= 4096\sigma_3(u) \cdot 2^{-5\alpha} \{2^{5\alpha} - 2^6(2^5(2^{5(\alpha-3)} - 1)31^{-1} - 1)\}$$

при $\alpha \geq 3$.

Вычислив значения $\rho(n; f_4)$ для всех $n \leq 12$, получим

$$\Theta(\tau; f_4) = 1 + \frac{1}{8}Q + 4Q^2 + \frac{61}{2}Q^3 + 128Q^4 + \frac{1563}{4}Q^5 + 976Q^6 + \\ + 2101Q^7 + 4101Q^8 + \frac{59293}{8}Q^9 + 12504Q^{10} + \frac{40263}{2}Q^{11} + 31232Q^{12} + \dots \quad (3.10)$$

В лемме 5 из [2] положим: $f=f_5, \gamma_6=\gamma_5=\gamma_4=2, \gamma_3=\gamma_2=1, \gamma_1=0, \gamma=8, b_1=\dots=b_6=1, b=1$, тогда

$$\chi_2 = 1 \text{ при } \alpha = 0, 1, 2$$

$$= 2^{-5\alpha} \{2^{5\alpha} - 2^8(2^5(2^{5(\alpha-3)} - 1)31^{-1} - 1)\} \text{ при } \alpha \geq 3.$$

Таким образом,

$$\rho(n; f_5) = \frac{1}{32}\sigma_5(u) \text{ при } \alpha = 0$$

$$= \sigma_5(u) \text{ при } \alpha = 1$$

$$= 32\sigma_5(u) \text{ при } \alpha = 2$$

$$= 1024\sigma_5(u) \cdot 2^{-5\alpha} \{2^{5\alpha} - 2^8(2^5(2^{5(\alpha-3)} - 1)31^{-1} - 1)\}$$

при $\alpha \geq 3$,

получим

$$\Theta(\tau; f_5) = 1 + \frac{1}{32}Q + Q^2 + \frac{61}{8}Q^3 + 32Q^4 + \frac{1563}{16}Q^5 + 244Q^6 + \frac{2101}{4}Q^7 + 1032Q^8 + \frac{59293}{32}Q^9 + 3126Q^{10} + \frac{40263}{8}Q^{11} + 7808Q^{12} + \dots \quad (3.11)$$

В лемме 5 из [2] положим: $f=f_6, \gamma_6 = \gamma_5 = \gamma_4 = 2, \gamma_3 = 1, \gamma_2 = \gamma_1 = 0, \gamma = 7, b_1 = \dots = b_6 = 1, b = 1$, тогда

$$\mathcal{K}_2 = 1 \quad \text{при } \alpha = 0, 1, 2$$

$$= 2^{-5\alpha} \{2^{5\alpha} - 2^7(2^5(2^{5(\alpha-3)} - 1)31^{-1} - 1)\} \quad \text{при } \alpha \geq 3.$$

Таким образом,

$$\rho(u; f_6) = \frac{1}{16}\sigma_{5,1}(u) \quad \text{при } \alpha = 0$$

$$= 2\sigma_5(u) \quad \text{при } \alpha = 1$$

$$= 64\sigma_5(u) \quad \text{при } \alpha = 2$$

$$= 2048\sigma_5(u) \cdot 2^{-5\alpha} \{2^{5\alpha} - 2^7(2^5(2^{5(\alpha-3)} - 1)31^{-1} - 1)\}$$

при $\alpha \geq 3$,

получим


$$\Theta(\tau; f_6) = 1 + \frac{1}{16}Q + 2Q^2 + \frac{61}{4}Q^3 + 64Q^4 + \frac{1563}{8}Q^5 + 488Q^6 + \frac{2101}{2}Q^7 + 2056Q^8 + \frac{59293}{16}Q^9 + 6252Q^{10} + \frac{40263}{4}Q^{11} + 15616Q^{12} + \dots \quad (3.12)$$

II. Из (1.4) следует:

$$d_{0,1}^4(\tau; 0.2)d_{0,0}^4(\tau; 0.4)d_{0,0}^4(\tau; 0.8) = 1 + 8Q + 32Q^2 + 96Q^3 + 248Q^4 + 560Q^5 + 1152Q^6 + 2240Q^7 + 4104Q^8 + 7144Q^9 + 11968Q^{10} + 19232Q^{11} + 29792Q^{12} + \dots \quad (3.13)$$

$$d_{0,1}^4(\tau; 0.2)d_{0,0}^8(\tau; 0.4)d_{0,0}^2(\tau; 0.8) = 1 + 4Q + 20Q^2 + 64Q^3 + 184Q^4 + 472Q^5 + 1040Q^6 + 2176Q^7 + 4104Q^8 + 7284Q^9 + 12344Q^{10} + 19648Q^{11} + 30560Q^{12} + \dots \quad (3.14)$$

$$d_{0,1}^2(\tau; 0.2)d_{0,0}^4(\tau; 0.4)d_{0,0}^6(\tau; 0.8) = 1 + 4Q + 12Q^2 + 32Q^3 + 72Q^4 + 152Q^5 + 301Q^6 + 576Q^7 + 1032Q^8 + 1780Q^9 + 2952Q^{10} + 4704Q^{11} + 7328Q^{12} + \dots \quad (3.15)$$



$$\nu_{00}^4(\tau; 0.2)\nu_{00}^2(\tau; 0.4)\nu_{00}^6(\tau; 0.8) = 1 + 8Q + 28Q^2 + 63Q^3 + 136Q^4 + 304Q^5 + 624Q^6 + 1152Q^7 + 2056Q^8 + 3560Q^9 + 5864Q^{10} + 9408Q^{11} + 14752Q^{12} + \dots \quad (3.16)$$

В [1] показано, что

$$\frac{1}{512\pi^4}\chi_2(\tau) = -32Q^3 - 64Q^7 + 416Q^{11} + \dots \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{128\pi^4}\chi_3(\tau) = -8Q + 80Q^5 - 232Q^9 + \dots \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{512\pi^4}\chi_4(\tau) = -8Q^4 - 32Q^8 + 80Q^{10} + \dots \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{4096\pi^4}\nu_{81}^4(\tau; 0.8) = 16Q^4 - 192Q^{12} + \dots \quad (3.20)$$

При помощи формул (3.1), (3.9), (3.13), (2.10), (2.11), (2.12), (3.17), (3.18), (3.19), (3.20); (3.2), (3.10), (3.14); (3.3), (3.11), (3.15) и (3.4), (3.12), (3.16) легко проверить, что коэффициенты при Q^n в разложениях функций $\psi(\tau; f_3)$, $\psi(\tau; f_4)$, $\psi(\tau; f_5)$, $\psi(\tau; f_6)$ по степеням Q равны нулю. Таким образом, тождества (3.5)-(3.8) доказаны.

Доказательство формул (III)-(VI). Приравняв коэффициенты при Q^n в обеих частях тождеств (3.5)-(3.8), согласно (1.6) и (1.7), получим

$$r(n; f_3) = \rho(n; f_3) + \frac{1}{2}\nu_1(n) + \frac{31}{128}\nu_{11}(n) - 4\nu_2(n) - \nu_3(n) + \\ - \frac{1}{4}\dot{\nu}_1(n) - 4\dot{\nu}_2(n) + \frac{15}{2}\dot{\nu}_3(n),$$

$$r(n; f_4) = \rho(n; f_4) + \frac{1}{4}\nu_1(n) + \frac{15}{128}\nu_{11}(n) - 2\nu_2(n) + 4\nu_3(n) + \\ - 2\dot{\nu}_2(n) + \frac{7}{2}\dot{\nu}_3(n),$$

$$r(n; f_5) = \rho(n; f_5) + \frac{3}{16}\nu_1(n) + \frac{47}{512}\nu_{11}(n) - \frac{3}{2}\nu_2(n) - \frac{1}{2}\nu_3(n) + \\ - \frac{1}{16}\dot{\nu}_1(n) - \frac{3}{2}\dot{\nu}_2(n) + \frac{5}{2}\dot{\nu}_3(n),$$

$$r(n; f_6) = \rho(n; f_6) + \frac{3}{8}\nu_1(n) + \frac{47}{256}\nu_{11}(n) - 3\nu_2(n) - \nu_3(n) + \\ - \frac{1}{8}\dot{\nu}_1(n) - \frac{7}{2}\dot{\nu}_2(n) + \frac{9}{2}\dot{\nu}_3(n),$$

где $v_1(n), v_{11}(n), v_2(n), v_3(n), \tilde{v}_1(n), \tilde{v}_2(n), \tilde{v}_3(n)$ соответственно обозначают коэффициенты при Q^n в разложениях функций

$$\frac{1}{128\pi^4} \chi_1(\tau), \quad \frac{1}{16\pi^4} \vartheta_{21}'^4(\tau; 0, 2), \quad \frac{1}{512\pi^4} \chi_2(\tau), \quad \frac{1}{128\pi^4} \chi_3(\tau),$$
$$\frac{1}{256\pi^4} \vartheta_{41}'^4(\tau; 0, 4), \quad \frac{1}{512\pi^4} \chi_4(\tau), \quad \frac{1}{4096\pi^4} \vartheta_{81}'^4(\tau; 0, 8)$$
 по степеням Q .

Таким образом, формулы (III) – (VI) доказаны.

Поступила 20.10.1997

Кафедра алгебры и геометрии

Литература

1. G.A. Lomadze. Georgian Mathematical Journal (1998), No 6.
2. G.A. Lomadze. Georgian Mathematical Journal (1998), No 4.
3. G.A. Lomadze. Proceeding of the Georgian Academy of Sciences. Mathematics 1 (1993), No1.

ზოგიერთი კვადრატული ფორმით რიცხვის წარმოდგენათა
რაოდენობის შესახებ

რეზიუმე

მიღებულია ზოგიერთი 12 ცვლადიანი კვადრატული ფორმით
ნატურალური რიცხვის წარმოდგენათა რაოდენობის გამოსათვლელი
ზუსტი ფორმულები. კერძოდ, ეს ფორმულები მიღებულია ორი ისეთი
კვადრატული ფორმისათვის, რომლის კოეფიციენტები ღებულობენ
მნიშვნელობებს 1 და 2. ხოლო დანარჩენი ოთხის კოეფიციენტები –
1, 2 და 4-ს.

M. Otinashvili

*On the number of representations
of positive integers by quadratic forms*

Summary

Exact formulas are derived for the number of representations of
positive integers by some quadratic forms in 12 variables in particular,
for two quadratic forms with coefficients assuming the values 1 and 2,
and for four quadratic forms with coefficients 1, 2 and 4.

УДК 513.015.3.513.7

О НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ НОРМАЛЯМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Э.Д. Алшибая

В $(n+1)$ -мерном афинном пространстве рассматривается распределение гиперплоскостных элементов, дифференциальные уравнения которого относительно репера нулевого порядка имеют вид

$$\omega_i^{n+1} = L_{i\alpha} \omega^\alpha \quad (i, j, \dots, = \overline{1, n}; \alpha, \beta, \dots, = \overline{1, n+1}),$$

где $L_{ij} \neq L_{ji}$.

1. Прямая

$$x^i = v^i x^{n+1},$$

определенная вектором

$$v = v^i \bar{e}_i + \bar{e}_{n+1},$$

где v^i удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$dv^i + v^e \omega_e^i - v^i \omega_{n+1}^{n+1} + \omega_{n+1}^i = v_\alpha^i \omega^\alpha,$$

называется аффинной нормалью распределения [1].

В окрестности первого порядка строится инвариантное поле вектора

$$\bar{\alpha} = L^i \bar{e}_i + \bar{e}_{n+1},$$

где

$$L^i = -L^{ik} L_{k_{n+1}}, \quad dL^i + L^e \omega_e^i - L^i \omega_{n+1}^{n+1} + \omega_{n+1}^i = L^i_\alpha \omega^\alpha,$$

внутренние определенное распределением.

При смещении вдоль кривых, касающихся нормалью $\vec{\alpha}$, гиперплоскостной элемент перемещается параллельно.

В окрестности второго порядка уже строятся как аффинные так и проективные нормали.

Объект

$$Q^i = -\tilde{A}_s^i A_{n+1}^s,$$

где

$$A_\alpha^i = L_\alpha^i - L^i L^s L_{s\alpha}, \quad A_k^i \tilde{A}_j^k = \delta_j^i,$$

определяет инвариантное оснащение.

Вдоль кривой, касающейся распределения нормалью \vec{Q} , нормаль $\vec{\alpha}$ переносится параллельно.

Фундаментальными подобъектами второго порядка охватываются объекты

$$B^i = -\frac{1}{n+2} L^{ki} L^{sm} L_{msk},$$

$$a^i = -\frac{1}{n+2} L^{ki} a^{sm} M_{msk}, \quad \left\{ (a_{sm} = \frac{1}{2} (L_{sm} + L_{ms}), a^{sm} a_{mk} = \delta_k^s, M_{msk} = \right. \\ \left. = \frac{1}{2} (L_{smk} + L_{smk}) \right\},$$

$$\beta^i = -\frac{1}{2(n+2)} a^{ik} a^{sj} (M_{kjs} + M_{ksj}),$$

$$\gamma^i = -\frac{1}{n+2} L^{ik} a^{sj} (L_{k(j)s} + L_{(j)k|s}) - L_{(js)k}.$$

Каждый из них определяет аффинную нормаль, внутренне связанную с распределением. Все они являются

разновидностями нормали Бляшке.

При помощи величин

$$\mathfrak{R}_{kje} = L_{kje} + L_{ke} L_{jn+1} + L_{kj} L_{en+1} + L_{ej} L_{kn+1}, \quad \mathfrak{R}_{k[je]} = 0,$$

строятся нормали

$$x^i = M^i x^{n+1}, \quad x^i = S^i x^{n+1}, \quad x^i = D^i x^{n+1},$$

где

$$M^i = -\frac{1}{2(n+2)} L^{lk} a^{sj} \mathfrak{R}_{kjs}, \quad S^i = -\frac{1}{2(n+2)} a^{im} a^{sj} \mathfrak{R}_{sjm},$$

$$D^i = -\frac{1}{2(n+2)} a^{it} l^{ek} \mathfrak{R}_{ket},$$

которые инвариантны и относительно проективной группы преобразований. Нормаль, определенная объектом $\{M^i\}$, совпадает с проективной нормалью, построенной Михэилеску [3], исходя из геометрических соображений для двумерных распределений.

Проективными нормальми являются и нормали

$$x^i = N^i x^{n+1} \quad \text{и} \quad x^i = \tilde{N}^i x^{n+1},$$

которые определяются при помощи фундаментальных объектов первого и второго порядков.

Объекты N^i и \tilde{N}^i имеют такие строения:

$$N^i = -N^{is} a^{km} a^{jt} N_{mts} \left\{ (n+2) L_{kjn+1} - L_{kj} \lambda + S_j S^m L_{km} \right\},$$

где

$$N_{kje} = (n+2) L_{kje} - L_{kj} a_e - L_{ke} a_j + (n+2) L_{ej} L_{kn+1} + 2(n+2) L_{km} S^m a_{je},$$

$$N_{it} = a^{ks} a^{jm} N_{kje} N_{smt}, \quad N^{st} N_{it} = \delta_t^s, \quad \lambda = a^{kj} L_{kja+1},$$

$$\tilde{N}^i = -\tilde{N}^{is} L^{km} L^{jt} \tilde{N}_{mts} \left\{ (n+2) L_{kjn+1} - L_{kj} \tilde{\lambda} + D_j D^m L_{km} \right\},$$

где

$$\tilde{N}_{kje} = (n+2)L_{kje} - L_{kj}B_e - L_{ke}B_j + (n+2)L_{ej}L_{kn+1} + 2(n+2)L_{km}D^m a_{je},$$

$$\tilde{N}_{ji} = L^{mk}L^{ei}\tilde{N}_{kji}\tilde{N}_{mie}, \quad \tilde{N}^{si}\tilde{N}_{it} = \delta_t^s, \quad \tilde{\lambda} = L^{kj}L_{jkn+1}.$$

Проведем построения нормалей, охваченных фундаментальными подобъектами третьего порядка.

Рассмотрим объект [2]

$$\hat{b}_{ijk} = (n+2)\hat{L}_{ijk} - a_{ij}\hat{b}_k - a_{jk}\hat{b}_i - a_{ki}\hat{b}_j \quad (\hat{L}_{ijk} = \hat{L}_{(ijk)}, \hat{b}_k = a^{ij}\hat{L}_{ijk})$$

и свертку

$$\hat{b}_o = a^{is}a^{jm}a^{kr}\hat{b}_{ijk}\hat{b}_{smr}, \quad d \ln \hat{b}_o - \omega_{n+1}^{n+1} = C_\alpha \omega^\alpha.$$

Величины

$$C^i = L^{ki}C_k$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dC^i + C^e \omega_e^i - C^i \omega_{n+1}^{n+1} + \omega_{n+1}^i = C_\alpha^i \omega^\alpha$$

и определяют аффинную нормаль третьего порядка для данного распределения.

Объект

$$J^i = \beta^i + h^i,$$

где

$$h^i = \frac{1}{2}a^{ik} \left(C_k + \frac{1}{n+2}a_k \right),$$

определяет проективную нормаль [2], аналог нормали Фубини для распределения.

При помощи объектов $A_j^i = \beta_j^i - \beta^k \beta^l L_{kj}$, $H_\beta = -\frac{1}{n}(\beta_i^i - \beta^k \beta^l L_{ki})$

и $h = a^{ij}h_i h_j$ построим тензор

$$S_{ik} = (n+2) \left[a_{ij} \frac{A_k^j}{\beta} - L_{mk} (\beta^m - a^m) h_i + \frac{1}{2} (a_{ik} + L_{ik}) \frac{H}{\beta} + \frac{1}{2} r_{ik} h \right],$$

$$dS_{ik} - S_{ek} \omega_i^e - S_{ic} \omega_k^e = S_{ika} \omega^a.$$

Рассмотрим величины

$$k^e = b^{je} \tilde{b}_{jpr} a^{pk} a^{qi} S_{ik},$$

где

$$\tilde{b}_{ijk} = (n+2)M_{ijk} - a_{ik}\beta_j - a_{jk}\beta_i - a_{ij}a_k + 2r_{k(\beta_j)} - 2(n+2)r_{k(h_j)},$$

$$b_{ij} = a^{pq} a^{rs} \tilde{b}_{ipr} \tilde{b}_{jq_s}, \quad b^{ik} b_{kj} = \delta_j^i.$$

Система величин

$$W^i = \beta^i + k^i,$$

определяет проективную нормаль – аналог директрисы Вильчинского [2].

При помощи построенных нормалей можно построить разные пучки как аффинных, так и проективных нормалей.

Пучок аффинных нормалей, проходящих через $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$, имеет вид

$$\xi^i(\lambda) = L^i - \lambda p^i,$$

где

$$p^i = L^i - \beta^i.$$

$\bar{\alpha}$ и \bar{Q} аффинными нормальями определенный пучок будет

$$\zeta^i(\lambda) = L^i - \lambda q^i,$$

где

$$q^i = L^i - Q^i,$$

а нормальями $\bar{\beta}$ и \bar{Q} –

$$\eta^i(\lambda) = \beta^i - \lambda t^i,$$

где

$$t^i = \beta^i - Q^i.$$

Будем иметь и разные проективные пучки. Проективные

нормали второго порядка можно разделить на две группы. В одну из них войдут те нормали, которые построены при помощи фундаментальных объектов первого и второго порядков, а во вторую – нормали, определенные величинами $\{L_{i\alpha}, L_{ijk}\}$. Взяв проективные нормали из каждой группы, можем получить разные пучки.

Рассмотрим пучок проективных нормалей, натянутый на нормали M^i и N^i :

$$\mathfrak{R}^i(\tau) = M^i - \tau \hat{M}^i,$$

где

$$\hat{M}^i = M^i - N^i.$$

При помощи объектов J^i и W^i определим пучок проективных нормалей

$$\mathfrak{R}^i(\alpha) = J^i + \alpha \hat{J}^i,$$

где

$$\hat{J}^i = W^i - J^i.$$

2. Соответствие Бомпьяни-Пантази, сопоставляет к каждой прямой, проходящей через точку M , характеристику гиперплоскостного элемента, соответствующую смещению точки M вдоль этой прямой.

Каждой нормали

$$x^i = v^i x^{n+1}$$

соответствует $(n-1)$ - мерная плоскость

$$\pi_i x^i - 1 = 0, \quad x^{n+1} = 0 \quad (\pi_i = -L_{ik} v^k - L_{in+1}),$$

лежащая в плоскости элемента и не проходящая через центр, нормаль второго рода.

Нормали $\bar{\alpha}$, в соответствии Бомпьяни-Пантази, соответствует бесконечно удаленная $(n-1)$ - мерная плоскость.

Однопараметрическому пучку нормалей, лежащих в двумерной плоскости, которая проходит через нормаль $\bar{\alpha}$, в

соответствии Бомпьяни-Пантази, соответствует однопараметрический пучок параллельных $(n-1)$ -мерных плоскостей лежащих в плоскости элемента.

В частности, пучку нормалей, проходящих через $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$, соответствует пучок параллельных $(n-1)$ - мерных плоскостей

$$\lambda p_i x^i - 1 = 0, \quad x^{n+1} = 0,$$

где

$$P_i = L_{ik} p^k.$$

Пучку нормалей, определенному $\bar{\alpha}$ и \bar{Q} -

$$\lambda q_i x^i - 1 = 0, \quad x^{n+1} = 0,$$

где

$$q_i = L_{ik} q^k.$$

Пучку же нормалей, натянутому на нормали $\bar{\beta}$ и \bar{Q} , ставится в соответствие такой пучок нормалей второго рода

$$(p_i + \lambda t_i) x^i - 1 = 0, \quad x^{n+1} = 0 \quad (t_i = L_{ik} p^k),$$

что $(n-1)$ - мерные плоскости этого пучка пересекаются по $(n-2)$ - мерной плоскости, определяемой уравнениями

$$p_i x^i - 1 = 0,$$

$$q_i x^i - 1 = 0,$$

$$x^{n+1} = 0.$$

Проективной нормали M^i , в соответствии Бомпьяни-Пантази, соответствует нормаль второго рода, определенная объектом

$$m_i = -\frac{1}{2} \left(L_{in+1} - \frac{\gamma_i}{n+2} \right), \quad m_i x^i - 1 = 0, \quad x^{n+1} = 0,$$

нормали N^i - $(n-1)$ - мерная плоскость

$$n_i x^i - 1 = 0, \quad x^{n+1} = 0,$$

где

$$n_i = -L_{ik} N^k - L_{in+1}.$$

Таким образом, в плоскости элемента получаем однопараметрический пучок (n-1)-мерных плоскостей, определенный объектами

$$\mathfrak{R}_i(\tau) = m_i - \tau \hat{m}_i,$$

где

$$\hat{m}_i = m_i - n_i.$$

Пучку нормалей

$$\mathfrak{R}^i(\alpha) = J^i + \alpha \hat{J}^i,$$

будет соответствовать пучок (n-1)-мерных плоскостей, определенный объектами

$$\tilde{\mathfrak{R}}_i(\alpha) = \tilde{h}_i - \alpha \tilde{h}^i,$$

где

$$\tilde{h}_i = -L_{ik} J^k - L_{in+1}, \quad \tilde{k}_i = -L_{ik} W^k - L_{in+1},$$

а

$$\tilde{h}^i = \tilde{k}_i - \tilde{h}_i.$$

3. К распределению присоединяются разные инвариантно соприкасающиеся гиперквадрики, которые устанавливают поляритет между нормальными и (n-1)-мерными плоскостями, принадлежащими гиперплоскостному элементу и не проходящими через центр элемента.

Рассмотрим внутренне связанную с распределением соприкасающуюся гиперквадрику

$$a_{ij} x^i x^j + 2 \frac{\beta_i}{n+2} - 2x^{n+1} + (\tilde{\beta} + \frac{H}{\beta}) x^{n+1} x^{n+1} = 0 \quad (*)$$

$$\left(-\frac{\beta_i}{n+2} = \beta^k a_{ki}, \quad \tilde{\beta} = a_{ij} \beta^i \beta^j \right).$$

Полярной некоторой нормали

$$x^i = v^i x^{n+1}$$

относительно этой гиперквадрики является $(n-1)$ -мерная плоскость

$$\tau_i x^i - 1 = 0, \quad x^{n+1} = 0,$$

где

$$\tau_i = a_{ij} v^j + \frac{\beta_i}{n+2}.$$

Нормали β^i в этом поляритете соответствует бесконечно удаленная $(n-1)$ -мерная плоскость.

Полярной нормали J^i относительно данной гиперквадрики будет $(n-1)$ -мерная плоскость

$$h_i x^i - 1 = 0, \quad x^{n+1} = 0 \quad (h_i = a_{ie} h^e),$$

нормали W^i - $(n-1)$ -мерная плоскость

$$k_i x^i - 1 = 0, \quad x^{n+1} = 0 \quad (k_i = a_{ie} k^e).$$

Пучку проективных нормалей

$$\mathfrak{R}^i(\alpha) = J^i + \alpha \hat{J}^i$$

относительно (*) гиперквадрики соответствует пучок $(n-1)$ -мерных плоскостей, определенный объектами

$$\mathfrak{R}_i(\alpha) = h_i + \lambda \hat{h}_i,$$

где

$$\hat{h}_i = k_i - h_i.$$

Аналогично находятся поляры других нормалей относительно рассмотренной гиперквадрики (*)

Поступила 12.12.1998

Кафедра алгебры и геометрии

1. Э.Д. Алшибая, Тр. Геометр. Семинара, Ин-т научн. инфор. АН СССР, 1974, 5, 169-194.
2. Г.Ф. Лаптев, Докл. АН СССР, 1958, 121, №1, 41-44.
3. Т. Mihailescu, Geometrie diferenciala proiectiva, Bucuresti, Acad. RPR, 1958, 494.

მ. ალშიბაია

ჰიპერსიბრტყითი ელემენტების განაწილების ნორმალებს
შორის ზოგიერთი თანადობის შესახებ

რეზიუმე

$(n+1)$ -განზომილებიან აფინურ სივრცეში განიხილება ჰიპერ-სიბრტყითი ელემენტების განაწილება. განაწილების პირველი რიგის ფუნდამენტური ობიექტით აიგება აფინური (α) ნორმალი. მეორე რიგის ფუნდამენტური ობიექტებითაა დახასიათებული აფინური ნორმალები, რომლებიც ბლაშკეს ნორმალის ნაირსახეობებს წარმოადგენენ.

განაწილების მეორე რიგის ფუნდამენტური ობიექტით განისაზღვრება ნორმალები და ნორმალთა კონები, რომლებიც ინვარიანტულია პროექციული გარდაქმნების მიმართ.

პროექციულ ნორმალთა კანონიკური კონა მესამე რიგის ფუნდამენტური ობიექტით არის გამოსახული.

ბომპიანი-პანტაზის თანადობით ყოველი ნორმალისათვის ჰიპერ-სიბრტყით ელემენტში მოიძებნება $(n-1)$ -განზომილებიანი სიბრტყე, რომელიც არ გადის მის ცენტრში, — მეორე გვარის ნორმალი.

განიხილება აგრეთვე მიმხები ჰიპერკვადრიკებით დამყარებული პოლარიტეტი და მისი საშუალებით მიღებული მეორე გვარის ნორმალები.

*Some correspondences between the normals of distributions
of n-plane elements*

Summary

The distribution of n-plane elements is considered in $(n+1)$ -dimensional affine space. Affine normal (α) is constructed by the fundamental object of distribution first-order. Affine normals being variants of the Blaschke normal, are characterized by second-order fundamental objects.

Normals and sheaves of these normals that are invariant to projective transformation are defined by fundamental objects of the second order.

The canonical sheaf of projective normals is determined by fundamental objects of the third-order.

Using the Bompiani-Pantazi projectivity, a $(n-1)$ -dimensional plane is obtained for each normal in the hyperplane element, the plane not crossing its center, i.e. being a normal of the second kind.

The polarity established on the osculating hyperquadrics and the normals of the second kind obtained by means of this polarity are also considered.

УДК 513

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЛИНИЙ КРИВИЗНЫ И ИНДИКАТРИСЫ АФФИННЫХ НОРМАЛЕЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

Э.Д.Алшибая

В многомерном аффинном пространстве рассматривается гиперповерхность. При помощи инвариантных аффинных нормалей гиперповерхности строятся разные объекты и инварианты. Находится их геометрический смысл.

Введено понятие индикатрисы аффинных нормалей. Найдены классы гиперповерхностей, для которых имеет место соответствие Петерсона.

§1. Некоторые объекты, связанные с оснащением гиперповерхности

1. В $(n+1)$ -мерном аффинном пространстве рассмотрим гиперповерхность A_n . Присоединим к текущей точке M гиперповерхности A_n аффинный репер $(M, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n, \bar{e}_{n+1})$. Расположим векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ в касательной гиперплоскости. Инфинитезимальное перемещение такого репера определяется уравнениями

$$\begin{aligned} d\bar{M} &= \omega^i \bar{e}_i, & i, j, \dots &= \overline{1, n}, \\ d\bar{e}_\alpha &= \omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta, & \alpha, \beta, \dots &= \overline{1, n+1}, \end{aligned} \quad (1)$$

где дифференциальные формы $\omega^i, \omega_\alpha^B$ подчинены структурным уравнениям аффинного пространства

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^{k'} \wedge \omega_k^i, \\ d\omega_\alpha^B &= \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^B. \end{aligned} \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение гиперповерхности A_n в этом репере будет иметь вид:

$$\omega^{n+1} = 0. \quad (3)$$

Продифференцировав уравнение (3) и применив лемму Картана, получим уравнения

$$\omega_i^{n+1} = l_{ij} \omega^j, \quad (4)$$

где $l_{ij} = l_{ji}$. Величины l_{ij} являются компонентами фундаментального объекта второго порядка гиперповерхности [1]. В выбранном репере величины l_{ij} образуют тензор.

Будем предполагать, что дискриминант тензора отличен от нуля

$$l = \det \|l_{ij}\| \neq 0, \quad (5)$$

т.е. что гиперповерхность не вырождена.

Дифференциальное уравнение тензора l_{ij} и его дискриминанта имеют вид:

$$\nabla l_{ij} + l_{ij} \omega_{n+1}^{n+1} = l_{ije} \omega^e, \quad (6)$$

$$d \ln l - 2\omega_i^i + n\omega_{n+1}^{n+1} = b_k \omega^k. \quad (7)$$

Здесь

$$b_k = l^{ij} l_{ijk}, \quad \nabla l_{ij} = dl_{ij} - l_{is} \omega_j^s - l_{sj} \omega_i^s.$$

Величины l_{ijk} вместе с l_{ij} образуют фундаментальный объект третьего порядка гиперповерхности A_n .

2. Пусть на гиперповерхности определено поле нормалей (оснащающее поле)

$$\bar{v} = v^i \bar{e}_i + \bar{e}_{n+1},$$

где v^i удовлетворяют дифференциальным уравнениям инвариантности поля векторов

$$\nabla v^i - v^i \omega_{n+1}^{n+1} + \omega_{n+1}^i = v_k^i \omega^k. \quad (9)$$

Построим некоторые объекты, охваченные фундаментальными объектами третьего, четвертого и пятого порядков гиперповерхности, а также объектом оснащения v^i .

Обозначим

$$v_k = l_{ki} v^i. \quad (10)$$

Продифференцировав (10), будем иметь

$$\nabla v_k + l_{ks} \omega_{n+1}^s = (v^i l_{iks} + l_{ik} v_s^i) \omega^s, \quad (11)$$

где величины l_{ijk} , v_k^i удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\nabla l_{ik} - (l_{ij} l_{ks} + l_{ki} l_{js} + l_{jk} l_{is}) \omega_{n+1}^s + l_{ijk} \omega_{n+1}^{n+1} = l_{ijks} \omega^s, \quad (12)$$

$$\nabla v_k^i - v_k^i \omega_{n+1}^{n+1} + (\delta_s^i v_k + v^i l_{ks}) \omega_{n+1}^s = v_{ks}^i \omega^s. \quad (13)$$

Величины $(l_{ij}, l_{ijk}, l_{ijks})$ образуют фундаментальный объект четвертого порядка A_n .

Рассмотрим объекты:

$$A_k^i = v_k^i - v_s v_s^i, \quad (14)$$

$$A_{sk} = l_{st} A_k^t = l_{st} v_k^t - v_s v_k, \quad (15)$$

и найдем их дифференциальные уравнения. Продифференцировав (14) и (15), получим:

$$\nabla A_k^i - A_k^i \omega_{n+1}^{n+1} = A_{ks}^i \omega^s, \quad (16)$$

$$\nabla A_{sk} = A_{ske} \omega^e, \quad (17)$$

где

$$A_{ske} = l_{sie} A_k^i + l_{si} A_{ke}^i.$$

Как видно из дифференциальных уравнений (17), величины

A_{sk} образуют абсолютный тензор. Этот тензор будет симметричным, если нормаль $\bar{\nu}$ индуцирует на гиперповерхности эквивариантную связность [2].

Обозначим дискриминант тензора A_{ij} через a , т.е.

$$a = \det \|A_{ij}\|. \quad (18)$$

Будем считать, что

$$a \neq 0,$$

тогда можно ввести матрицу $\|A^{ij}\|$ приведенных миноров так, что

$$A^{ik} A_{kj} = \delta_j^i. \quad (19)$$

Продифференцировав эти равенства, получим дифференциальные уравнения для величин A^{ik} . Будем иметь

$$\nabla A^{ij} = -A^{ik} A^{js} A_{kse} \omega^l.$$

Обозначим величины

$$\tilde{A}_s^i = A^{im} l_{ms}. \quad (20)$$

Ясно, что

$$\tilde{A}_s^i A_k^s = \delta_k^i,$$

где A_k^s определены уравнениями (16). Дифференциальные уравнения для величин \tilde{A}_s^i имеют вид:

$$\nabla \tilde{A}_s^i + \tilde{A}_s^i \omega_{n+1}^{n+1} = []_{sl}^i \omega^l. \quad (21)$$

Объекты A_{ke}^i и A_{ske} , которые появляются при продолжении A_k^i и A_{ks} , удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla A_{kj}^i - A_{kj}^i \omega_{n+1}^{n+1} - (A_{ej}^i l_{kj} - A_k^i l_{ej} - A_{kj}^i \delta_e^i) \omega_{n+1}^e = A_{kje}^i \omega^e, \quad (22)$$

$$\nabla A_{ijk} - (A_{ie} l_{jk} + A_{ej} l_{ik}) \omega_{n+1}^e = A_{ijke} \omega^e, \quad (23)$$

ГДЕ

$$A_{ijke} = l_{is} A_{jke}^s + l_{ies} A_{jk}^s. \quad (24)$$

Введем величины

$$\tilde{A}_{kj}^i = A_{kj}^i - v_j A_k^i. \quad (25)$$

$$\tilde{A}_{ikj} = l_{is} \tilde{A}_{kj}^s = l_{is} A_{jk}^s - v_j A_{ik}^s. \quad (26)$$

Дифференциальные уравнения для этих величин имеют вид:

$$\nabla \tilde{A}_{kj}^i - \tilde{A}_{kj}^i \omega_{n+1}^{n+1} - (A_e^i l_{kj} - A_{kj} \delta_e^i) \omega_{n+1}^e = \tilde{A}_{kje}^i \omega^e, \quad (27)$$

$$\nabla \tilde{A}_{ikj} - (A_{ie} l_{kj} - l_{ie} A_{kj}) \omega_{n+1}^e = \tilde{A}_{ikje} \omega^e. \quad (28)$$

\tilde{A}_{kje}^i и \tilde{A}_{ikje} связаны соотношениями

$$\tilde{A}_{ike}^j = l_{ise} \tilde{A}_{kj}^s + l_{is} \tilde{A}_{kje}^s. \quad (29)$$

Рассмотрим величины

$$\hat{A}_{kj}^i = \tilde{A}_p^i \tilde{A}_{kj}^p = \tilde{A}_p^i (A_{kj}^p - v_j A_k^p) = \tilde{A}_p^i A_{kj}^p - \delta_k^i v_j \quad (30)$$

и найдем их дифференциальные уравнения.

Будем иметь

$$\nabla \hat{A}_{kj}^i - (\delta_e^i l_{kj} - \tilde{A}_e^i A_{kj}) \omega_{n+1}^e = \hat{A}_{kje}^i \omega^e. \quad (31)$$

3. Линиями кривизны называют линии, вдоль которых аффинные нормали образуют развертывающиеся поверхности. Эти линии определяются следующими уравнениями [1]:

$$\left[\frac{\delta_e^i}{\rho} + (v_e^i - v^i v^k l_{ke}) \right] \omega^e = 0, \quad (32)$$

$$\det \left\| \frac{\delta_e^i}{\rho} + (v_e^i - v^i v^k l_{ke}) \right\| = 0.$$

Или, в силу (16) и (12),

$$(04) \quad \left(\frac{\delta_e^i}{\rho} + A_e^i \right) \omega^e = 0, \quad (33)$$

$$\det \left\| \frac{\delta_e^i}{\rho} + A_e^i \right\| = 0.$$

По аналогии с классической теорией поверхностей, сумма корней характеристического уравнения [1], поделенная на n , называется H средней кривизной A_n гиперповерхности:

$$H = -\frac{1}{n} A_e^i = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \dots + \frac{1}{\rho_n} \right), \quad (34)$$

а произведение

$$\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{1}{\rho_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\rho_n} = \det \| A_j^i \| = K \quad (35)$$

– полной аффинной кривизной гиперповерхности.

Найдем дифференциальные уравнения для H и K :

$$d \ln H - \omega_{n+1}^{n+1} = H_e \omega^e, \quad (36)$$

где

$$H_e = -\frac{A_{ie}^i}{nH}. \quad (37)$$

Как видно из (36), H является относительным инвариантом.

Дифференциальное уравнение для K имеет вид

$$d \ln K - n \omega_{n+1}^{n+1} = K_e \omega^e \quad (38)$$

Как видно из (38), K является относительным инвариантом, но отношение

$$\frac{K}{H^n} = S \quad (39)$$

будет абсолютным инвариантом. Действительно, из уравнений (36) и (38) следует, что

$$d \ln \frac{K}{H^n} = d \ln S = S_e \omega^e,$$

где

$$S_e = K_e - nH_e.$$

Как видно из (40), S является абсолютным инвариантом.

4. Вычислим, чему равняется инвариант S для гиперсферы. Как уже было показано в [1], характеристическим признаком гиперсфер является

$$A_{ij} = -Hl_{ij}, \tag{41}$$

или

$$A_j^i = -\delta_j^i H. \tag{42}$$

Поэтому для гиперсфер

$$K = (-1)^n H^n \tag{43}$$

и абсолютный инвариант S :

$$S = \frac{K}{H^n} = (-1)^n. \tag{44}$$

Условие (43) можно переписать и в таком виде:

$$K(-1)^n H^n = 0.$$

При $n=2$ получаем

$$K - H^2 = 0, \tag{45}$$

что согласуется с хорошо известным условием для аффинных сфер в трехмерном пространстве [2].

§2. Индикатриса аффинных нормалей

1. Пусть на гиперповерхности A_n задано оснащающее поле векторов $\vec{\nu}$:

$$\vec{\nu} = \nu^i \vec{e}_i + \bar{e}_{n+1}, \tag{*}$$

где ν^i удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla v^i - v^i \omega_{n+1}^{n+1} + \omega_{n+1}^i = v_k^i \omega^k.$$

Индикатрисой такого оснащающего поля будем называть гиперповерхность, образованную концами этих векторов при условии, что их начала помещены в фиксированную точку. С заданным оснащающим полем векторов \bar{v} можно взять семейство полей векторов \bar{n} , которые отличаются от векторов \bar{v} на некоторый функциональный множитель μ :

$$\bar{n} = \mu \bar{v}.$$

При каждом выборе μ векторы \bar{n} будут порождать новую индикатрису. Мы будем искать те индикатрисы \bar{A}_n , которые порождены полем $\bar{n} = \mu \bar{v}$ и находятся в соответствии Петерсона с гиперповерхностью A_n .

Говорят, что две гиперповерхности находятся в соответствии Петерсона, если в соответствующих точках этих гиперповерхностей касательные гиперплоскости параллельны.

Положив

$$\bar{n} = \mu \bar{v} \quad (46)$$

и продифференцировав, получим

$$\overline{dn} = d\mu \bar{v} + \mu \overline{dv}. \quad (47)$$

Но

$$\overline{dv} = (v_e^i \omega^e + v^i \omega_{n+1}^{n+1}) \bar{e}_i + (v^k \omega_k^{n+1} + \omega_{n+1}^{n+1}) \bar{e}_{n+1}.$$

Или, используя соотношение (*)

$$\overline{dv} = (v_e^i \omega^e + v^i v^k \omega_k^{n+1}) \bar{e}_i + (v^k \omega_k^{n+1} + \omega_{n+1}^{n+1}) \bar{v} = A_e^i \omega^e \bar{e}_i + (v^k \omega_k^{n+1} + \omega_{n+1}^{n+1}) \bar{v}. \quad (48)$$

Подставляя выражение для \overline{dv} из (48) в (47), получим

$$\begin{aligned} \overline{dn} &= \mu (v_e^i \omega^e - v^i v^k \omega_k^{n+1}) \bar{e}_i + [d\mu + \mu (v^k \omega_k^{n+1} + \omega_{n+1}^{n+1})] \bar{v} = \\ &= \mu A_e^i \omega^e \bar{e}_i + [d \ln \mu + (v^k \omega_k^{n+1} + \omega_{n+1}^{n+1})] \bar{n}. \end{aligned} \quad (49)$$

Для того, чтобы осуществилось соответствие Петерсона, т.е.

чтобы вектор \overline{dn} лежал в касательной гиперплоскости, достаточно потребовать выполнения условия

$$d \ln \mu + (v^k \omega_k^{n+1} + \omega_{n+1}^{n+1}) = 0.$$

Продифференцируем внешним образом выражение (*), будем иметь

$$dv^k \wedge \omega_k^{n+1} + v^k \omega_k^{n+1} \wedge \omega_i^{n+1} + v^k \omega_k^{n+1} \wedge \omega_{n+1}^{n+1} + \omega_{n+1}^i \wedge \omega_i^{n+1} = 0,$$

или

$$l_{ki} (dv^k + v^i \omega_j^k - v^k \omega_{n+1}^{n+1} + \omega_{n+1}^k) \wedge \omega^i = 0,$$

или

$$l_{ki} v_e^k \omega^e \wedge \omega^i = 0,$$

откуда

$$l_{k[i} v_{e]}^k = 0. \quad (50)$$

А это есть условие эквиаффинности связности, определенной рассматриваемым оснащением.

Если условие (50) выполнено, то, очевидно, форма

$$v^k \omega_k^{n+1} + \omega_{n+1}^{n+1}$$

будет полным дифференциалом некоторой функции. В этом случае из (*) получаем

$$d \ln \mu = dn,$$

т.е.

$$\mu = ce^n. \quad (51)$$

Отсюда следует, что если индуцированная связность эквиаффинная, то существует однопараметрическое семейство индикатрис \overline{A}_n , находящихся в соответствии Петерсона с гиперповерхностью A_n .

2. Будем считать, что гиперповерхность A_n оснащена такими нормальными, что A_n и ее индикатриса \overline{A}_n находятся в соответствии Петерсона. Тогда

$$\overline{dn} = \mu A_e^i \omega^e \bar{e}_i. \quad (52)$$

Продифференцировав еще раз (52), получим:

$$\begin{aligned} \overline{d^2 n} &= d(\mu A_e^i \omega^e) \bar{e}_i + \mu A_e^i \omega^e \omega_i^k \bar{e}_k + \mu A_e^i \omega^e \omega_i^{n+1} \bar{l}_{n+1} = \\ &= [d(\mu A_e^i \omega^e) + \mu A_e^k \omega_i^k \omega^e - \mu A_e^k \omega_k^{n+1} \nu^i \omega^e] \bar{e}_i + \mu A_e^i \omega^e \omega_i^{n+1} \bar{\nu} = \\ &= [\dots] \bar{e}_i + l_{ks} A_e^s \omega^e \omega^k \bar{n}. \end{aligned}$$

Или, с учетом (15),

$$\overline{d^2 n} = [\dots] \bar{e}_i + A_{ke} \omega^e \omega^k \bar{n}. \quad (53)$$

Таким образом, мы видим, что A_{ke} является асимптотическим тензором индикатрисы.

Уравнение

$$A_{ke} \omega^k \omega^e = 0$$

определяет конус асимптотических направлений на индикатрисе \bar{A}_n .

Поступила 15.9.1997

Кафедра алгебры и геометрии

Литература

1. Э.Д. Алшибая. Труды Тбилисского университета, Математика. Механика. Астрономия, 129, 1968.
2. П.А. Широков, А.П. Широков. Аффинная дифференциальная геометрия, М., 1958.

ჰიპერზედაპირის სიმრუდის წირებისა და აფინურ ნორმალთა
ინდიკატრისის ზოგიერთი თვისება

რეზიუმე

ჰიპერზედაპირის ინვარიანტული ნორმალების საშუალებით აგებულია სხვადასხვა ობიექტი და ინვარიანტი. მრავალგანზომილებიან შემთხვევისათვის განზოგადოებულია ინდიკატრისის და სიმრუდის წირების ცნებანი. მოძებნილია ჰიპერზედაპირის ახალი კლასები, რომელთათვისაც აღვილი აქვს პეტერსონის თანალობას.

E. Alshibaia

Some properties of curvature lines and the indicatrix of the affine normals of hypersurfaces

Summary

Various objects and invariants are constructed using the invariant normals of a hypersurface. The notions of indicatrix and curvature lines are generalized for the multidimensional case. New classes of hypersurfaces with Peterson correspondence are found.

თბილისის ივ. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавახишвили

335

УДК 513.83

ზოგიერთი ტიპის განცალკევების აქსიომების და
წინა-კომპაქტური ბიტოპოლოგიური სივრცეების
შესახებ

ირაკლი ღოჭვირი

როგორც ცნობილია, ბიტოპოლოგიური სივრცეების თეორიის განვითარებას საფუძვლად უდევს ჯ. კელის [4] ნაშრომი, რომელშიც ავტორი ნებისმიერ X სიმრავლეზე განიხილავდა ე.წ. კვაზი-ფსევდომეტრიკებს (მანძილის ანტი-სიმეტრიულ ფუნქციებს), რამაც გამოიწვია მასზე ორი ურთიერთმეუღლეული „მეტრიკის“ წარმოშობა. აღნიშნულის საფუძველზე X სიმრავლეზე წარმოიქმნა ორი ტოპოლოგია, რამაც, გარკვეული აზრით, განაზოგადა ტოპოლოგიური სივრცეები. ამრიგად ბიტოპოლოგიური სივრცეები წარმოადგენენ X სიმრავლეს, აღჭურვილს ორი დამოუკიდებელი τ_1 და τ_2 ტოპოლოგიით.

ქვემოთ ჩვენს მიერ (i, j) -წინა-ღია სიმრავლის ცნებაზე დაყრდნობით შესწავლილია სპეციალური ტიპის განცალკევების საკითხები და ე.წ. (i, j) -წინა-კომპაქტური ბიტოპოლოგიური სივრცეების ზოგიერთი თვისება (აქედან ვიგულისხმებთ, რომ $i, j \in \{1, 2\}$ და $i \neq j$).

განმარტება 1. (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცის $A \subset X$ ქვესიმრავლეს ეწოდება (i, j) -წინა-ღია, თუ არსებობს ისეთი $U \in \tau_i$ სიმრავლე, რომ $A \subset U \subset \tau_j - cA$.

(X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცის ყველა (i, j) -წინა-ღია სიმრავლეების ოჯახობა აღინიშნება $A \in (i, j) - PO(X)$ -ით [1;3].

თუ $A \in (i, j) - PO(X)$ სიმრავლეა, მაშინ X/A სიმრავლეს

ეწოდება (i, j) -წინა-ჩაკეტილი.

მარტივი შესამოწმებელია, რომ თუ $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ წარმოადგენს (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცის (i, j) -წინა-ლია სიმრავლეებისაგან შედგენილ ოჯახობას, მაშინ $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in (i, j) - PO(X)$, მაგრამ საზოგადოდ $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \notin (i, j) - PO(X)$.

შევნიშნოთ, რომ თუ $A \in \tau_i$, მაშინ $A \in (i, j) - PO(X)$.

წინადადება 1. თუ (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიურ სივრცეში $A \in (i, j) - PO(X)$ და $U \in \tau_1 \cap \tau_2$ სიმრავლეებია, მაშინ $(A \cap U) \in (i, j) - PO(X)$.

დამტკიცება: ვინაიდან $A \in (i, j) - PO(X)$, ამიტომ არსებობს ისეთი $O \in \tau_i$ სიმრავლე, რომ $A \subset O \subset \tau_j - clA$. ცხადია, რომ $A \cap U \subset O \cap U \subset U \cap \tau_j - clA \subset \tau_j - cl[U \cap A]$, რადგან $U \in \tau_1 \cap \tau_2$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $U \cap O \in \tau_i$, მაშინ ვკეჩნება $A \cap U \in (i, j) - PO(X)$.

წინადადება 2. ვთქვათ M და N (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცის ისეთი ქვესიმრავლეებია, რომ $M \subset N$ და $M \in (i, j) - PO(X)$, მაშინ M სიმრავლე (i, j) -წინა-ლიაა (N, τ^*_1, τ^*_2) -ში, სადაც $\tau^*_k = \tau_k \cap N$ ($k = 1, 2$).

დამტკიცება: რადგან $M \in (i, j) - PO(X)$, ამიტომ არსებობს ისეთი $O \in \tau_i$ სიმრავლე, რომ $M \subset O \subset \tau_j - clM$. აქედან ცხადია, რომ $M \subset O \cap N \subset N \cap \tau_j - clM = \tau^*_j - clM$. ვინაიდან $O \cap N \in \tau^*_i$, ამიტომ $M \in (i, j) - PO(N)$.

განმარტება 2. (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცის $A \subset X$ ქვესიმრავლის მომცველი ყველა (i, j) -წინა-ჩაკეტილი სიმრავლეების თანაკვეთას ეწოდება A -ს (i, j) -წინა-ჩაკეტვა და აღინიშნება (i, j) - $pclA$ -თი [3].

შევნიშნოთ, რომ $x \in (i, j) - pclA$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x -ის ყოველი (i, j) -წინა-ლია U მიდამოსათვის $A \cap U \neq \emptyset$.

წინადადება 3. A სიმრავლე (i, j) -წინა-ჩაკეტილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A = (i, j) - pclA$ [2].

განმარტება 3. (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება წყვილად-წინა- T_0 (წყვილად-წინა- T_1) თუ X -ში ყოველი ორი განსხვავებული წერტილისათვის, არსებობს τ_i -წინა-ლია სიმრავლე, რომელიც მოიცავს ერთ-ერთს და არ მოიცავს სხვა წერტილებს $i=1$ ან 2 (არსებობს $U \in \tau_i - PO(X)$ და $V \in \tau_j - PO(X)$, ისეთი, რომ $x \in U$, $y \notin U$ და $x \notin V$, $y \in V$)

განმარტება 4. (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება წყვილად-წინა- T_2 , თუ X -ში ყოველი ორი განსხვავებული წერტილისათვის, არსებობს მათი მომცველი თანაუკვეთი τ_i და τ_j წინა-ლია მიდამოები.

წინადადება 4. (X, τ_1, τ_2) წყვილად-წინა- T_0 ბიტოპოლოგიური სივრცისათვის ტოლფასია შემდეგი წინადადებები:

1. $\{x\} = \tau_1 - pcl\{x\} \cap \tau_2 - pcl\{x\}$, ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის;
2. x წერტილის ყველა τ_1 -წინა-მიდამოების თანაკვეთა τ_2 -წინა-მიდამოებთან, ტოლია $\{x\}$ -ის, ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის.

დამტკიცება: დაუშვათ $y \neq x$ ორი წერტილია X -ში. ვინაიდან



(X, τ_1, τ_2) წყვილად-წინა $-T_0$ ბიტოპოლოგიური სივრცეა, ამიტომ არსებობს მხოლოდ x -ის მომცველი τ_1 , წინა-ღია V სიმრავლე ან მხოლოდ y წერტილის მომცველი τ_2 -წინა-ღია U სიმრავლე. სხვა სიტყვებით ან $x \notin \tau_1 - pcl\{y\}$ და ან $y \notin \tau_2 - pcl\{x\}$. მაშასადამე, $x, y \notin \tau_1 - pcl\{y\} \cap \tau_2 - pcl\{x\}$. აქედან ცხადია, რომ $\{x\} = \tau_1 - pcl\{x\} \cap \tau_2 - pcl\{x\}$.

(1) \Rightarrow (2) ტრივიალურია.

ვაჩვენოთ, რომ (2)-დან გამომდინარეობს (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცის წყვილად-წინა $-T_0$. მართლაც, თუ $x \neq y$ რაიმე წერტილებია X -ში, მაშინ (2) პირობის ძალით $\{x\}$ სიმრავლე წარმოადგენს x წერტილის ყველა τ_1 -წინა-მიდამოებისა და τ_1 -წინა-მიდამოების თანაკვეთას. მაშასადამე, არსებობს ერთი მაინც τ_1 -წინა-მიდამო y წერტილისა, რომელიც არ შეიცავს x წერტილს, ან არსებობს ერთი მაინც τ_2 -წინა-მიდამო y წერტილისა, რომელიც არ მოიცავს x წერტილს. აქედან ცხადია, რომ (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცე არის წყვილად-წინა- T_0 .

წინადადება 5. წყვილად-წინა- T_0 (წყვილად-წინა- T_1) ბიტოპოლოგიური სივრცეების ნამრავლი არის წყვილად-წინა- T_0 (წყვილად-წინა- T_1).

დამტკიცება: ვთქვათ $(X, \tau_1, \tau_2) = \prod_{\alpha \in \Lambda} (X_\alpha, \tau_{1\alpha}, \tau_{2\alpha})$, სადაც τ_1

და τ_2 არიან $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ სიმრავლეზე ნამრავლით ინდუცირებული

ტოპოლოგიები, ე. ი. $\tau_k = \prod_{\alpha \in \Lambda} \tau_{k\alpha}$, $k = 1; 2$ თუ $x = (x_\alpha)$ და $y = (y_\alpha)$

ორი განსხვავებული წერტილია X -დან, მაშინ რაიმე $\lambda \in \Lambda$ -თვის $x_\lambda \neq y_\lambda$, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $(X_\lambda, \tau_{1\lambda}, \tau_{2\lambda})$ სივრცე არის წვეილად-წინა T_0 , ამიტომ არსებობს ისეთი $U_\lambda \in \tau_{1\lambda} - PO(X_\lambda)$ სიმრავლე, რომ $y_\lambda \notin U_\lambda$ ან არსებობს $V_\lambda \in \tau_{2\lambda} - PO(X_\lambda)$ სიმრავლე, რომელიც მოიცავს y_λ წერტილს და არ მოიცავს x_λ -ს. განვიხილოთ სიმრავლეები $U = \prod_{\lambda \neq \alpha} X_\lambda \times U_\alpha$ და $V = \prod_{\lambda \neq \alpha} X_\lambda \times V_\alpha$. ცხადია, რომ $U \in \tau_1 - PO(X)$ და $V \in \tau_2 - PO(X)$, ამასთანავე $x \in U, y \notin U$.

განმარტება 3-დან მარტივად გამომდინარეობს შემდეგი წინადადების სამართლიანობა.

წინადადება 6. (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცე არის წვეილად-წინა- T_1 მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა (X, τ_1) და (X, τ_2) სივრცეები არიან წინა- T_1 .

წინადადება 7. ვთქვათ (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცისათვის $\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$ დიაგონალი წარმოადგენს $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2)$ ტოპოლოგიური სივრცის წინა-ჩაკეტილ ქვესიმრავლეს, მაშინ (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცე არის წვეილად-წინა- T_2 .

დამტკიცება: ვთქვათ $x \neq y$ ორი განსხვავებული წერტილია X -ში, მაშინ $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$. ვინაიდან Δ არის $\tau_1 \times \tau_2$ - წინა-ჩაკეტილი, ამიტომ $(X \times X) \setminus \Delta$ არის მისი ყოველი წერტილის $\tau_1 \times \tau_2$ -წინა-მიდამო. შევნიშნოთ, რომ $(X \times X) \setminus \Delta$ სიმრავლისათვის არსებობს (x, y) წერტილის მომცველი ისეთი $\tau_1 \times \tau_2$ -წინა-ლია $U \times V$ სიმრავლე, რომ $U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta$. ცხადია, რომ $U \in \tau_1 - PO(X)$, $V \in \tau_2 - PO(X)$ და ამასთან $x \in U, y \in V$. ვინაიდან $U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta$, ამიტომ $U \cap V \neq \emptyset$.



განმარტება 5. (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიურ სივრცეს ვუწოდოთ წყვილად-წინა - T_3 , თუ ყოველი τ_i - ჩაკეტილი F სიმრავლისათვის და ყოველი $x \notin F$ წერტილისათვის, არსებობს ისეთი τ_i -წინა-ღია U და τ_j - წინა-ღია V სიმრავლეები, რომ $x \in U, F \subset V$ და $U \cap V \neq \emptyset$.

წინადადება 8. (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცე არის წყვილად-წინა T_3 მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის და მისი არამომცველი τ_i - ჩაკეტილი F სიმრავლისათვის, არსებობს ისეთი τ_i -წინა-ღია A სიმრავლე, რომ $x \in A$ და $(\tau_j - pclA) \cap F = \emptyset$.

დამტკიცება: რადგან $X \setminus F$ სიმრავლე მოიცავს x წერტილს და არის τ_i -ღია, ამიტომ არსებობს ისეთი $A \in \tau_i - PO(X)$ სიმრავლე, რომ $x \in A \subset \tau_j - pclA \subset X \setminus F$. აქედან ცხადია, რომ $(\tau_j - pclA) \cap F = \emptyset$.

პირიქით, ვთქვათ F არის τ_i -ჩაკეტილი სიმრავლე და $x \notin F$. მაშინ ცხადია, რომ არსებობს ისეთი $U \in \tau_i - PO(X)$, რომ $x \in U$ და $(\tau_j - pclA) \cap F = \emptyset$. ვინაიდან $V = X \setminus (\tau_j - pclA) \in \tau_j - PO(X)$ ისეთი, რომ $F \subset A, x \in U$ და $U \cap V = \emptyset$. ამრიგად, (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცე არის წყვილად-წინა- T_3 .

განმარტება 6. $f: (X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (Y, \gamma_1, \gamma_2)$ ასახვას ეწოდება P - უწყვეტი, თუ $f: (X, \tau_k) \rightarrow (Y, \gamma_k)$ ასახვები $k=1,2$ ერთდროულად უწყვეტია [1].

განმარტება 7. (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიურ სივრცეს ვუწოდებთ

(i, j) - წინა-კომპაქტურს, თუ მისი ნებისმიერი (i, j) -წინა-ლია $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ დაფარვა შეიცავს სასრულ $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}\} \subset \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ქვედაფარვას [2].

წინადადება 9. თუ (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცე (i, j) - წინა-კომპაქტურია, მაშინ (X, τ_i) ტოპოლოგიური სივრცე კომპაქტურია.

დამტკიცება ტრივიალურად მიიღება განმარტება 7-დან.

განმარტება 8. (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება ორად-კომპაქტური, თუ (X, τ_i) სივრცეები ერთდროულად კომპაქტურია $(i = 1, 2)$ [1].

იმ შემთხვევაში, როცა (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცე არის $(1, 2)$ და $(2, 1)$ წინა-კომპაქტური, მაშინ მას ეწოდება p - წინა-კომპაქტური.

შედეგი 1. თუ (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცე არის p - წინა-კომპაქტური, მაშინ ის ორად-კომპაქტურია.

წინადადება 10. (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცის (i, j) - წინა-კომპაქტურობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი (i, j) -წინა-ჩაკეტილი $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ოჯახისათვის, რომელთა $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha = \emptyset$, არსებობდეს ისეთი სასრულ $\{F_{\alpha_k}\}_{k=1, \dots, n} \subset \{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ქვეოჯახი, რომ $\bigcap_{k=1}^n F_{\alpha_k} = \emptyset$.

დამტკიცება: დავუშვათ (X, τ_1, τ_2) (i, j) -წინა-კომპაქტური ბიტოპოლოგიური სივრცეა, ხოლო $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ისეთი (i, j) -წინა-ჩაკეტილი სიმრავლეების ოჯახია, რომ $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha = \emptyset$. მაშინ ცხადია, რომ $U_\alpha = X \setminus F_\alpha$ სიმრავლეებისაგან შედგენილი $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ოჯახი



წარმოადგენს (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცის (i, j) -წინა-
 ღია დაფარვას. (X, τ_1, τ_2) -ის (i, j) - წინა-კომპაქტურობის გამო
 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ოჯახი შეიცავს სასრულ $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1, \dots, n}$ ქვეოჯახს, რომელიც
 აგრეთვე ფარავს (X, τ_1, τ_2) -ს. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$X \setminus \bigcap_{k=1}^n F_{\alpha_k} = \bigcup_{k=1}^n X \setminus F_{\alpha_k} = \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k} = X, \text{ ამიტომ } \bigcap_{k=1}^n F_{\alpha_k} = \emptyset.$$

პირიქით, დავუშვათ $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცის
 (i, j) - წინა-ღია დაფარვაა. მაშინ $\{F_\alpha = X \setminus U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ოჯახი არის
 (i, j) - წინა-ჩაკეტილი და $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha = \emptyset$. თანახმად თეორემის საკმარის
 ნაწილში მოთხოვნილი პირობისა - არსებობს $\{F_{\alpha_k}\}_{k=1, \dots, n} \subset \{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$,
 რომ $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha = \emptyset$. აქედან ცხადია, რომ $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1, \dots, n}$ წარმოადგენს
 (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცის (i, j) -წინა-ღია დაფარვას.

განმარტება 10. $f: (X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (Y, \gamma_1, \gamma_2)$ ასახვას ეწოდება
 (i, j) -წინა-უწყვეტი, თუ ყოველი $O \in \gamma_j$, სიმრავლისათვის
 $f^{-1}(O) \in (i, j) - PO(X)$ [3].

ყოველი p - უწყვეტი ასახვა არის (i, j) -წინა-უწყვეტი. პირიქით
 საზოგადოდ არაა სამართლიანი [5].

$f: (X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (Y, \gamma_1, \gamma_2)$ ასახვისათვის ტოლფასია წინადა-
 დებები:

1. f არის (i, j) -წინა -უწყვეტი;
2. ყოველი γ_j -ჩაკეტილი სიმრავლის წინარე სახე (i, j) -
 წინა-ჩაკეტილია;
3. ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის და $f(x)$ წერტილის
 შემცველი ყოველი $V \in \gamma_j$, სიმრავლისათვის, არსებობს x -ის შემცველი

ისეთი სიმრავლე $U \in (i, j) - PO(X)$, რომ $f(U) \subset V$;

4. $(i, j) - pclf^{-1}(B) \subset f^{-1}(\tau_j - clB)$, ყოველი $B \subset Y$ ქვესიმრავლისათვის.

5. $f((i, j) - pclA \subset \tau_j - clf(A))$, ყოველი $A \subset X$ ქვესიმრავლისათვის.

წინადადება II. ვთქვათ $f : (X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (Y, \gamma_1, \gamma_2)$ ასახვა (i, j) -წინა-უწყვეტია და (Y, τ_1, τ_2) (i, j) -წინა-კომპაქტურ ბიტოპოლოგიურ სივრცეს ასახავს (Y, γ_1, γ_2) -ზე, მაშინ (Y, γ_i) სივრცე კომპაქტურია.

დამტკიცება: ვთქვათ $\{O_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ოჯახი წარმოადგენს (Y, γ_i) სივრცის რაიმე ღია დაფარვას, ე.ი. $Y = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} O_\alpha$. ცხადია, რომ $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} O_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}(O_\alpha)$, ამიტომ $\mathfrak{S} = \{f^{-1}(O_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ ოჯახი არის (X, τ_1, τ_2) (i, j) -წინა-ღია დაფარვა. (X, τ_1, τ_2) -ის (i, j) -წინა-კომპაქტურობის გამო, \mathfrak{S} ოჯახიდან ამოირჩევა სასრული ქვედაფარვა $\mathfrak{S}_n = \{f^{-1}(O_{\alpha_k})\}_{k=1, \dots, n}$, ანუ $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}(O_{\alpha_k})$.

f -ასახვის სურექტიურობის გამო და უკანასკნელი ტოლობის საფუძველზე, ცხადია, (Y, γ_i) სივრცის კომპაქტურობა.

წინადადება 12. თუ $f : (X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (Y, \gamma_1, \gamma_2)$ P -ღიაა და P -უწყვეტად ასახავს (X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიურ სივრცეს (Y, γ_1, γ_2) (i, j) -წინა-კომპაქტურ ბიტოპოლოგიურ სივრცეზე, მაშინ (X, τ_1, τ_2) - (i, j) -წინა-კომპაქტურია.

დამტკიცება: დაუშვათ, რომ $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ არის (X, τ_1, τ_2) ბიტო-

ბოლოგიური სივრცის ნებისმიერი (i, j) -წინა-ლია დაფარვა, რადგან $A_\alpha \in (i, j) - PO(X)$, ამიტომ არსებობს $O_\alpha \in \tau_i$, რომ $A_\alpha \subset O_\alpha \subset \tau_j - clA_\alpha$. აქედან ცხადია, რომ $f(A_\alpha) \subset f(O_\alpha) \subset f(\tau_j - clA_\alpha)$ ამასთანავე $f(O_\alpha) \in \gamma_i$. f ასახვის P -უწყვეტობის გამო $f(\tau_j - clA_\alpha) \subset \tau_j - clf(A_\alpha)$. ამრიგად $f(A_\alpha) \subset f(O_\alpha) \subset \tau_j - clf(A_\alpha)$ ე.ი. $f(A_\alpha) \in (i, j) - PO(Y)$ ყოველი $\alpha \in \Lambda$ -თვის. ვინაიდან (X, τ_1, τ_2) არის (i, j) -წინა-კომპაქტური ბიტოპოლოგიური სივრცე და $\{f(A_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ არის (Y, γ_1, γ_2) -ის (i, j) -წინა-ლია დაფარვა, ამიტომ ცხადია დასამტკიცებელი.

წინადადება 13. ვთქვათ $f : (X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (Y, \gamma_1, \gamma_2)$ P -ლიაა და (i, j) წინა უწყვეტად ასახავს (X, τ_1, τ_2) (i, j) -წინაკომპაქტურ ბიტოპოლოგიურ სივრცეს (Y, γ_1, γ_2) -ზე. მაშინ (Y, γ_1, γ_2) - (i, j) -წინაკომპაქტურია.

დამტკიცება: ვთქვათ $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ოჯახობა წარმოადგენს (Y, γ_1, γ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცის (i, j) -წინა-ლია დაფარვას. ვინაიდან $U_\alpha \in (i, j) - PO(Y)$ ყოველი $\alpha \in \Lambda$ -თვის, ამიტომ არსებობს ისეთი $O_\alpha \in \gamma_i$, რომ $U_\alpha \subset O_\alpha \subset \gamma_j - clU_\alpha$. ცხადია, რომ $f^{-1}(U_\alpha) \subset f^{-1}(O_\alpha) \subset f^{-1}(\gamma_j - clU_\alpha)$, აქ ვისარგებლოთ თეორემა 2-ით [6]-დან, მაშინ ცხადია $f^{-1}(\gamma_j - clU_\alpha) \subset \gamma_j - cl f^{-1}(U_\alpha)$, ამრიგად მივიღებთ, რომ $f^{-1}(U_\alpha) \subset f^{-1}(O_\alpha) \subset \gamma_j - cl f^{-1}(U_\alpha)$, ანუ $f^{-1}(U_\alpha) \in (i, j) - PO(X)$. ცხადია, რომ $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha\right) =$

$$= \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}(U_\alpha), \text{ ე.ი. } \{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda} \text{ } (i, j) \text{- წინა-ლია დაფარვა}$$



(X, τ_1, τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცისა. მაშინ ცხადია, რომ $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ შეიცავს სასრულ ქვედაფარვას $\{f^{-1}(U_{\alpha_k})\}_{k=1, \dots, n}$, ამიტომ იგივე $\{(U_{\alpha_k})\}_{k=1, \dots, n}$ ფარავს (Y, γ_1, γ_2) ბიტოპოლოგიურ სივრცეს.

შეშვიდა 15.9.1999
 ალგებრა-გეომეტრიის კათედრა

ლიტერატურა

1. B.Dvalishvili. Doct. Diss., Tbilisi (1994).
2. I.Dochviri. Georg. Acad. Sci. (1999), v. 161, №3 (2000), 403-406.
3. M.Jelic. Inst. Math. Comput. Sci. Math. Ser. 3 (1990), 25-29.
4. J.Kelly. Proc. London Math. Soc., 13 (1963), 71-89.
5. F.H. Khedr, S.M. Al-Arrefi, T.Noiri. Indian J. pure & appl. Math. 23 (9), (1995), 625-633.
6. R. Sikorski. Fund. Math., 41 (1955), 12-20.

Иракий Дж. Дочвири

О некоторых типах аксиом отделимости и пре-компактных битопологических пространств

Резюме

Вводятся различные типы аксиом отделимости для битопологических пространств, изучены некоторые свойства пре-компактных битопологических пространств.

Irakly Dochviri

*On some types of separation axioms and pre-compact
bitopological spaces*

Summary

Various types of separation axioms are introduced for bitopological spaces and some properties of pre-compact bitopological spaces are studied.

УДК 519.21

მუავრ-ლაპლასის ინტეგრალური თეორემის მართი
შედეგისა და მისი გამოყენების შესახებ

ირინა დოჭვირი

ნაშრომში განხილულია ტყის შემადგენლობის შეცვლის ერთი მეთოდი ჰაერში ნახშირორჟანგის შემცველობის გაუმჯობესების მიზნით. ამ მეთოდის შემუშავებისას გამოყენებულია ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ფუნდამენტური შედეგის — მუავრ-ლაპლასის ზღვართი თეორემის ერთ-ერთი შედეგი [2]. მიღებულია ტყის შემადგენლობის კორექციის ალგორითმი, ჰაერში ნახშირორჟანგის შემცველობის გაუმჯობესების მიზნით, რომელიც აგებულია ბორჯომის პლატოს მე-16, მე-17, მე-20 და 21-ე კვარტლების ტყეთა მაგალითზე. მიღებული შედეგები ახლოსაა ექსპერიმენტ-მეტყვევითა ინტუიციურ რეკომენდაციებთან და შესაძლებელია გამოვიყენოთ ჰაერში სხვა კომპონენტებისა (ჟანგბადის, იზოპრენის და სხვა) და სხვა ტყეების განხილვისას.

თეორემა: თუ ბერნულის სქემაში A ხდომილების განხორციელების ალბათობა P განსხვავებულია 0-გან და 1-გან, ხოლო ცდათა რიცხვი საკმარისად დიდია ($n \rightarrow \infty$), მაშინ ალბათობა იმისა, რომ n დამოუკიდებელი ცდის დროს A ხდომილების განხორციელების ფარდობით სიხშირესა და P ალბათობას შორის სხვაობის მოდული, არ აღემატება წინასწარ დასახელებულ Δ დადებით რიცხვს, გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \left(\left| \frac{m}{n} - P \right| \leq \Delta \right) = \Phi \left(\Delta \sqrt{\frac{n}{pq}} \right),$$

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

დამტკიცება: განვიხილოთ,

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{m}{n} - P\right| \leq \Delta\right\} &= P\left\{-\Delta \leq \frac{m}{n} - P \leq \Delta\right\} = P\left\{-\Delta \leq \frac{m - np}{n} \leq \Delta\right\} = \\ &= \left\{-\Delta \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \Delta \sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} = \end{aligned}$$

(მუავრ-ლაპლასის ინტეგრალური თეორემის თანახმად)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\Delta \sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\Delta \sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\Delta \sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \phi\left(\Delta \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ცნობილია, რომ ფიჭვნარებსა და ფიჭვნარ-ნაძვნარებში ნახშირორჟანგის შემცველობა ჰაერში არის 0,03%. ქვემოთ ჩვენს მიერ მიღებულია, რომ ბორჯომის პლატოს აღნიშნულ ოთხ კვარტალში ტყეთა შემადგენლობა ისე შეიძლება შეიცვალოს, რომ მთელ პლატოზე ჰაერში ნახშირორჟანგის შემცველობა „მაღიან მცირედ“ განსხვავდებოდეს ეტალონურისაგან – 0,03%-გან.

ზემოთ დასახელებულ ოთხ კვარტალში ტყეთა საერთო ფართობია 309 ჰა; აქედან ფიჭვნარებსა და ფიჭვნარ-ნაძვნარებს უჭირავთ 50,4 ჰა; დანარჩენია (ფოთლოვანები, შერეულები) – 248,6 ჰა. შეგვიძლია გავაკეთოთ ასეთი დაშვება: ალბათობა იმისა, რომ ადებულ ოთხ კვარტალში ჰაერში ნახშირორჟანგის შემცველობა არის 0,03%, უდრის $p = (50,4 : 309) \cdot k$, საწინააღმდეგო ხლომილების ალბათობა იქნება $q = 1 - p$, სადაც k - პროპორციულობის კოეფიციენტი ჯერ-ჯერობით უცნობია. ამ კოეფიციენტის განსზღვრა შესაძლებელია შემდეგი ტოლობიდან:

$$M\left(\frac{S_{\text{ფ}}}{S} \times k\right) = 0,0003,$$

სადაც $S=309$ კა; $S_{\text{ფ}}=50,4$ კა M მათემატიკური ლოდინის სიმბოლოა. ამ ტოლობიდან ვპოულობთ, რომ $k = 0,0003 \cdot 309 : 50,4 \approx 0,0019$. დავუშვათ აღებულ ოთხ კვარტალში იმ ნაკვეთთა ფართობი, რომლებიც წარმოადგენენ ფიჭვნარებსა და ფიჭვნარ-ნაძვნარებს ($S_{\text{ფ}}=50,4$ კა) უნდა შეიცვალოს X კა-ფართობით, რათა ოთხივე კვარტალში ჰაერში ნაზშირორჟანგის შემცველობა 0,03%-ის „გაუტოლდეს“. მაშინ შევკვიძლია დაწეროთ შემდეგი დამოკიდებულება:

$$P\left\{\left|\frac{S_{\text{ფ}} + X}{S} \cdot k - 0,0003\right| \leq \Delta\right\} \geq \phi\left(\Delta \sqrt{\frac{S}{Pq}}\right) \quad (1)$$

სადაც ϕ ფუნქცია ტაბულირებულია (მას ლაპლასის ფუნქცია ეწოდება), Δ – წარმოადგენს საჭირო სიზუსტეს (ჩვენს შემთხვევაში ვუშვებთ, რომ $\Delta=0,0001$, $k=0,0019$ ე.ი. (1) დამოკიდებულება ასე გადაიწერება:

$$P\left\{\left|\frac{50,4 + X}{309} \cdot 0,0019 - 0,0003\right| < 0,0001\right\} \geq \phi\left(0,0001 \sqrt{\frac{309}{P(1-P)}}\right);$$

გამოთვლების შედეგად, გვექნება:

$$\phi\left(0,0001 \sqrt{309 / P(1-P)}\right) = \phi\left(293,45 \sqrt{1 / ((50,4 + X)(259 - X))}\right),$$

საჭირო $\Delta=0,0001$ სიზუსტესთან ერთად ჩვენ უნდა დავასახელოთ აგრეთვე δ რიცხვი, რომელიც წარმოადგენს იმის გარანტიის რაოდენობრივ ზომას, რომ შესრულდება შემდეგი მოვლენა: პლატოს ზემოსენებულ ოთხ კვარტალში ნაზშირორჟანგის შემცველობა ჰაერში რომ შემცირდეს 0,03 %-მდე (0,0001 სიზუსტით), საჭიროა ამ ოთხ კვარტალში სახეობათა შემადგენლობა გადანაწილდეს ფიჭვის სასარგებლოდ შემდგენიარად: 50,4 კა-დან ფიჭვნარებისა და ფიჭვნარ-ნაძვნარების ფართობი უნდა გაიზარდოს $(50,4 + X)$ კა-მდე (შესაბამისად, დანარჩენი ფართობი 248 კა-დან უნდა შემცირდეს $(248,6 - X)$

ჰა-მდე.) X - ჯერ-ჯერობით უცნობი სიდიდეა. მისი განსაზღვრა შესაძლებელია სწორედ ზემოთ აღნიშნული δ „გარანტიის“ არსებობის დროს. როგორც მათემატიკურ სტატისტიკაშია მიღებული, ეს „გარანტია“ (ალბათობა) ძალიან ახლოს უნდა იყოს 1-თან, რათა ჩავთვალოთ ის სარწმუნოდ, კერძოდ, დაუშვათ რომ $\delta = 0,9625$.

მაშინ (2)-დან მივიღებთ, რომ

$$\Phi\left(\frac{293,45}{\sqrt{(50,4+X)(259,6-X)}}\right) \geq 0,9625.$$

ცხრილებიდან ვპოულობთ, რომ

$$\frac{293,45}{\sqrt{(50,4+X)(259,6-X)}} \geq 2,08, \quad (3)$$

ჩვენი მიზანია X უცნობი ფართის განსაზღვრა.

(3) უტოლობის ამოხსნის შედეგად X ფართისთვის ვღებულობთ:

$$X \in (0; 40,4] \cup [168,8; 256,6)$$

ზემოთქმულიდან გამომდინარე მივიღებთ, რომ ბორჯომის პლატოს ოთხ კვარტალში ფიჭვნარების რაოდენობა (50,4 ჰა) ან უნდა შემცირდეს 40,4 ჰა-მდე, ან გაიზარდოს 168,8 ჰა-დან 259,6 ჰა-მდე. რათა ჰაერში ნახშირორჟანგის შემცველობა აღებული „გარანტიით“ (0,9625) ახლოს იყოს არჩეული სიზუსტით (0,0001) ეტალონურთან (0,03%).

δ „გარანტიის“ სხვა დასაშვები მნიშვნელობისათვის, კერძოდ, თუ მის მნიშვნელობად განვიზილავთ ზემოთ დასახელებულზე მეტ რიცხვს, მაშინ გამოთვლების შედეგები საძიებელი X ფართისათვის ნახშირორჟანგის შემცველობა „ძალიან მცირედ“ განსხვავდება ეტალონურისაგან $-0,03\%$ -გან.

შემოსულია 15.9.1999

ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური
სტატისტიკის კათედრა.

1. გ. გიგაური, საქართველოს ტყეების კურორტოლოგიური მნიშვნელობა, თბილისი, „განათლება“, 1978.
2. А.Н. Ширяев, Вероятность, Москва, «Наука», 1984.
3. G. Gigauri, L.Dolize, R. Tkebuchava, Sh. Ebralidze, Bull. Georg. Acad. Soc. Sci, 1999

Ирина Дэс. Дочвири

Об одном следствии интегральной теоремы Муавра-Лапласа и его применении

Резюме

Получен алгоритм коррекции содержания лесного состава, который построен на примере кварталов Боржомского плато.

Irina Dochviri

On one result and use of the Muavre-Laplace integral theorem

Summary

An algorithm of the forest composition correction is obtained, constructed on the basis of the plots of the Borjomi plateau forests.

УДК 539.3

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОМ
ПОДКРЕПЛЕНИИ БЕСКОНЕЧНЫХ ПЛАСТИН
С ОТВЕРСТИЕМ

И.А. Зоненашвили, Л.Р. Имедадзе

С целью оптимизации пластинчатых конструкций рассматривается обратная задача обобщенной плоской теории упругости об эквивалентном подкреплении бесконечной пластинки толщиной h , испытывающей двухосное растяжение усилиями $P_0 = const$ и $q_0 = const$. Пластинка ослаблена отверстием, криволинейный край L которого подкреплён тонким ребром жесткости, к которому приложены внешние нормальные напряжения p . Пусть $\omega(\zeta)$ – конформно отображающая функция области, занимаемой срединной плоскостью пластинки, на внешность единичной окружности.

Желательно, чтобы в перфорированной пластинке сохранялось напряженное состояние

$$\sigma_x = P_0, \quad \sigma_y = q_0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (1)$$

Подкрепление, обеспечивающее в пластинке поле напряжений вида (1), т.е. сводящее концентрацию напряжений около отверстия к единице, назовем эквивалентным подкреплением.

Условия сопряжения пластинки с ребром жесткости имеют вид [1]:

$$\delta_1(s)U(s) - F_2(s) - \frac{1}{\rho(s)} \int_0^s F_1(s) ds = q_1(s) + C, \quad (2)$$

$$D_1(s)U(s) - D_2V'(s) - F_2(s) = f_1(s), \quad (3)$$

где $\delta_1(s)$ и $\delta_2(s)$ – соответственно приведенные жесткости ребра на растяжение и изгиб в своей плоскости – являются параметрами управления поля напряжений в пластинке,

$$q_1(s) = f_1(s) - \frac{1}{\rho} \int_0^s f_2(s) ds, \quad (4)$$

$$f_1(s) = \frac{p}{h} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\overline{\omega'(\sigma)\omega(\sigma)}}{\sigma |\omega'(\sigma)|} \right\}, \quad f_2(s) = -\frac{p}{h} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\overline{\omega'(\sigma)\omega(\sigma)}}{\sigma |\omega'(\sigma)|} \right\}, \quad (5)$$

$$D_1(s) = \delta_1(s) + \frac{R^2}{\rho} \cdot \delta_2(s), \quad D_2(s) = \frac{R^2 \delta_2(s)}{\rho |\omega'(\sigma)|}, \quad (6)$$

C – неизвестная действительная постоянная, $U(s)$, $V(s)$, $F_1(s)$, $F_2(s)$ – функции, определяющие поле напряжений в пластинке, связанные между собою равенствами

$$2\mu g(\sigma) = \int_0^\sigma \omega'(\sigma)[U(\sigma) + iV(\sigma)] d\sigma, \quad (7)$$

$$-\frac{i\sigma\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} [F_1(\sigma) + iF_2(\sigma)] = (1 + \alpha)\varphi(\sigma) - 2\mu g(\sigma), \quad (8)$$

$\varphi(\sigma)$ – граничное значение комплексного потенциала Колосова – Мухелишвили, $g(\sigma)$ – вектор перемещения, ρ – радиус кривизны контура L .

Функции U , V , F_1 , F_2 , соответствующие полю напряжений вида (1); имеют вид [2]:

$$U(\sigma) = \frac{\alpha - 1}{4} (p_0 + q_0) + \frac{q_0 - p_0}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sigma^2 \omega'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right\},$$

$$V(\sigma) = \frac{p_0 - q_0}{2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\sigma^2 \omega'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right\}, \quad (9)$$

$$F_1(\sigma) = -\frac{1}{|\omega'(\sigma)|} \operatorname{Im} \left\{ \frac{p_0 + q_0}{2\sigma} \omega(\sigma) \overline{\omega'(\sigma)} + \frac{q_0 - p_0}{2\sigma} \overline{\omega(\sigma)} \overline{\omega'(\sigma)} \right\},$$

$$F_2(\sigma) = \frac{1}{|\omega'(\sigma)|} \operatorname{Re} \left\{ \frac{p_0 + q_0}{2\sigma} \omega(\sigma) \overline{\omega'(\sigma)} + \frac{q_0 - p_0}{2\sigma} \overline{\omega(\sigma)} \overline{\omega'(\sigma)} \right\}. \quad (10)$$

Определяя из равенств (2), (3) искомые параметры жесткости $\delta_1(\theta)$ и $\delta_2(\theta)$, обеспечивающие поле напряжений вида (1), получим

$$\delta_1(\theta) = \frac{1}{U(\theta)} \left\{ q_1(\theta) + F_2(\theta) + \frac{1}{\rho(\theta)} \int_0^\theta F_1(\theta) |\omega'(\sigma)| d\theta + C \right\}, \quad (11)$$

$$\delta_2(\theta) = \left[\frac{R^2}{\rho^2} U(\theta) - \frac{R^2}{\rho |\omega'(\sigma)|} V'(\theta) \right]^{-1} \cdot [f_1(\theta) + F_2(\theta) - \delta_1(\theta) U(\theta)]. \quad (12)$$

Постоянная C выражается через $\delta_1(0)$ из равенства (2) в случае $\theta = 0$:

$$C = \delta_1(0) U(0) - F_2(0) - q_1(0). \quad (13)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда бесконечная пластинка ослаблена эллиптическим отверстием. В этом случае конформно отображающая функция имеет вид

$$w(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad 0 \leq m < 1.$$

Соответственно функции $U(\theta)$, $V(\theta)$, $F_1(\theta)$, $F_2(\theta)$, $q_1(\theta)$, $f_1(\theta)$ принимают вид:

$$U(\theta) = \frac{\alpha - 1}{4} (p_0 + q_0) + \frac{(q_0 - p_0) R^2}{2 |\omega'(\sigma)|^2} [(1 + m^2) \cos 2\theta - 2m], \quad (14)$$

$$V(\theta) = \frac{(p_0 - q_0)R^2}{2|\omega'(\sigma)|^2} (1 - m^2) \sin 2\theta, \quad (15)$$

$$F_1(\theta) = \frac{R \sin 2\theta}{|\omega'(\sigma)|^2} \left[m(p_0 + q_0) + \frac{q_0 - p_0}{2} (1 + m^2) \right], \quad (16)$$

$$F_2(\theta) = \frac{R(1 - m^2)}{2|\omega'(\sigma)|^2} [p_0 + q_0 + (q_0 - p_0) \cos 2\theta], \quad (17)$$

$$q_1(\theta) = -\frac{PR^2}{h} \left[\frac{1 - m^2}{|\omega'(\sigma)|} - \frac{2m}{\rho} \sin 2\theta \right], \quad (18)$$

$$f_1(\theta) = -\frac{PR^2}{|\omega'(\sigma)|h} (1 - m^2). \quad (19)$$

Следовательно, $\delta_1(\theta)$ и $\delta_2(\theta)$ будут выражаться следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_1(\theta) = & \frac{1}{A(\theta)} \left\{ \frac{R(1 - m^2)}{2|\omega'(\sigma)|} [p_0 + q_0 + (q_0 - p_0) \cos 2\theta] + \right. \\ & + \frac{R}{\rho} \left[(p_0 + q_0)m + \frac{q_0 - p_0}{2} (1 + m^2) \right] \sin^2 \theta - \\ & \left. - PR \left[\frac{1 - m^2}{|\omega'(\sigma)|} - \frac{2m}{\rho} \sin^2 \theta - \frac{1 - m^2}{|\omega'(1)|} - \frac{R(1 - m^2)}{|\omega'(1)|} q_0 + C_1 \right] \right\}, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\delta_2(\theta) = \frac{1}{B(\theta)} \left\{ \frac{R}{2\rho} [(q_0 + p_0)(1 + m) + m(q_0 + p_0) - 4pm] \sin^2 \theta - C_2 \right\}, \quad (21)$$

где

$$A(\theta) = \frac{\alpha - 1}{4} (p_0 + q_0) + \frac{R^2(q_0 - p_0)}{2|\omega'(\sigma)|^2} [(1 + m^2) \cos 2\theta - 2m], \quad (22)$$

$$B(\theta) = \frac{\rho^2}{R^2} A(\theta) - \frac{R^2(q_0 - p_0)}{\rho |\omega'(\sigma)|} \cos 2\theta, \quad (23)$$

$$C_1 = \delta_1(0) \left[\frac{\alpha - 1}{4} (p_0 + q_0) + \frac{R^2(1 - m^2)(q_0 - p_0)}{2 |\omega'(1)|^2} \right], \quad (24)$$

$$C_2 = C_1 - \frac{R(1 - m^2)}{|\omega'(1)|} q_0 + \frac{(1 - m^2)RP}{|\omega'(1)|}. \quad (25)$$

$\delta_1(\theta)$ и $\delta_2(\theta)$ содержат неизвестную постоянную $\delta_1(0)$. Эта величина жесткости $\delta_1(\theta)$ в сечении $\theta = 0$. Исходя из условий $\delta_1(\theta) > 0$, $\delta_2(\theta) > 0$, для всех $0 \leq \theta \leq 2\pi$ из равенств (20), (21) определяется наименьшее значение $\delta_1(0)$. Это обстоятельство в некоторой мере ограничивает физические и геометрические данные условий задачи.

В случае круглого отверстия ($m = 0$, $\rho = R$, $w(\xi) = R\xi$) равенства (20), (21) принимают вид:

$$\delta_1(\theta) = \frac{1}{A_0(\theta)} \left\{ \frac{1}{2} [p_0 + q_0 + (q_0 - p_0) \cos 2\theta] + \frac{1}{2} (q_0 - p_0) \sin^2 \theta - q_0 + C_1^0 \right\}, \quad (26)$$

$$\delta_2(\theta) = \frac{1}{B_0(\theta)} \left[\frac{1}{2} (q_0 - p_0) \sin^2 \theta - C_2 \right], \quad (27)$$

где

$$A_0(\theta) = \frac{\alpha - 1}{4} (p_0 + q_0) + \frac{1}{2} (q_0 - p_0) \cos 2\theta,$$

$$B_0(\theta) = \frac{\alpha - 1}{4} (p_0 + q_0) - \frac{1}{2} (q_0 - p_0) \cos 2\theta,$$

$$C_1^0 = \delta_1(0) \left[\frac{\alpha - 1}{4} (p_0 + q_0) + \frac{1}{2} (q_0 - p_0) \right], \quad (28)$$

$$C_2^0 = \delta_1(0) \left[\frac{\alpha - 3}{4} (p_0 + q_0) + P \right].$$



Полученные решения сохраняют, очевидно, силу и в том случае, когда пластинка ослаблена несколькими произвольно расположенными криволинейными отверстиями.

Поступила 20. 4. 1998
Кафедра теоретической механики

Литература

1. И.А. Зоненашвили, Ж.В. Старовойтенко, Н.П. Флейшман. Сообщения АН ГССР, 78, 1, 1975.
2. И.А. Зоненашвили. Сообщения АН ГССР, 141, 1991

ი. ზონენაშვილი, ლ. იმედაძე

შებრუნებული ამოცანა სვრელის მქონე უსასრულო ფირფიტის ექვივალენტური გამაგრების შესახებ

რეზიუმე

სვრელის მქონე უსასრულო ფირფიტებში დაძაბულობის ველის ოპტიმალური მართვის მიზნით განიხილება შებრუნებული ამოცანა, რომელშიც მართვის პარამეტრებად მიღებულია გამაგრებელი წიბოს სიხისტეები გაჭიმვასა და ღუნვაზე.

I. Zonenashvili, L. Imedaze

An inverse problem of equivalent strengthening of an infinite plate with a hole

Summary

An inverse problem of equivalent strengthening of an infinite plate with a curved hole and prestressed rib has been studied with a view to optimizing the plate structure.

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ,
ЗАНИМАЮЩЕЙ ДВУСВЯЗНУЮ ОБЛАСТЬ,
ОГРАНИЧЕННУЮ ВЫПУКЛЫМ
МНОГОУГОЛЬНИКОМ И ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ
РАЗРЕЗОМ

Г. А. Капанадзе

Пусть срединная поверхность изотропной упругой пластинки на плоскости z занимает конечную двусвязную область, ограниченную выпуклым многоугольником (A) и прямолинейным разрезом (B_1B_2). Обозначим через A_1, \dots, A_q вершины многоугольника (A) и ось ox направим вдоль отрезка (B_1B_2). Точку $z=0$ возьмем в середине отрезка (B_1B_2). Через L_0 и L_1 обозначим границу многоугольника (A) и разреза (B_1B_2), соответственно, а через $L_0^{(k)}$ и $L_1^{(j)}$ — их стороны, т.е. $L_0^{(k)} = A_k A_{k+1}$, $k = 1, \dots, q-1$, $L_1^{(1)} = B_1B_2$, $L_1^{(2)} = B_2B_1$. Положительным направлением на $L = L_0 \cup L_1$ будем считать то, которое область s оставляет слева.

Предположим, что на каждом звене $L_0^{(k)}$ прикреплена жесткая планка и пластинка изгибается нормальноизгибающими моментами, приложенными к планкам, а часть B_1B_2 — оперта.

Рассмотрим задачу:



Найти прогиб $w(x, y)$ средней поверхности пластинки, если на каждом звене граничного контура L_0 известны значения главного изгибающего момента M_n .

Согласно приближенной теории изгиба пластинки ([1], [2]) прогиб $w(x, y)$ средней поверхности пластинки в рассматриваемом случае удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 w = 2, \quad z \in S \tag{1}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad M_n(t) = f'(t), \quad N(t) = 0, \quad t \in L_0, \\ w = 0, \quad M_n(t) = 0, \quad t \in L_1, \end{aligned} \tag{2}$$

где $N(t)$ – перерезывающая сила.

На основании известных формул ([1][2]) сформулированная задача сводится к отысканию двух функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, голоморфных в области S , по следующим граничным условиям на L :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[i e^{-\nu(t)} (\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}) \right] = 0 \\ \operatorname{Re} \left[i e^{-i\nu(t)} (x\varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}) \right] = f_j(t), \quad t \in L_j, \quad j = 0, 1, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$f_0(t) = \frac{1}{\sigma - 1} \int_0^s M_n(t) dt + C^{(0)}(t), \quad t \in L_0, \quad C^{(0)}(t) = C_k^{(0)},$$

$$f_1(t) = C^{(1)}(t), \quad t \in L_1, \quad C^{(1)}(t) = C_k^{(1)}, \quad t \in L_1^{(k)}, \quad \nu(t) = \alpha(t) \text{ и } \nu(t) = \beta(t)$$

при $t \in L_0$ и $t \in L_1$ соответственно, причем $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – углы между осью ox и внешними нормальными контуров L_0 и L_1

соответственно, т.е. $\alpha(t) = \alpha_k, t \in L_0^{(k)}$ и $\beta(t) = -\frac{\pi}{2}, t \in L_1^{(1)}$,

$\beta(t) = \frac{\pi}{2}$, $t \in L_1^{(2)}$. Постоянные $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(0)}$ заранее неизвестны

и должны быть определены в ходе решения задачи таким образом, чтобы функции $\varphi(z)$ и $\bar{z}\varphi'(z) + \psi(z)$ были непрерывно продолжимы в области $S+L$ (функцию $\varphi(z)$ можно подчинить условию $\varphi(z_0) = 0$, где z_0 – некоторая точка области S).

Граничные условия (3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[ie^{-iv(t)}\varphi(t)] &= F_j(t), \\ \operatorname{Re}[ie^{-iv(t)}(\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)})] &= 0, \quad t \in L_j, \quad j = 0, 1, \end{aligned} \quad (4)$$

где $F_1(t) = \frac{c^{(1)}(t)}{x+1}$, $F_0(t) = \frac{1}{x+1} [f_0(t) + c^{(0)}(t)]$, при $t \in L_1$ и $t \in L_0$ соответственно.

Пусть функция $z = \omega(\xi)$ конформно отображает область S на круговое кольцо $D(1 < |\xi| < R)$. При этом L_1 переходит в окружность $l_1(|\xi| = 1)$, а L_0 – в окружность $l_0(|\xi| = R)$. Обозначим через b_k и a_k образы точек B_k и A_k при отображении $z = \omega(\xi)$ ($b_k = e^{i\theta_k^{(1)}}$, $a_k = \operatorname{Re} e^{i\theta_k^{(0)}}$).

Отображающая функция $z = \omega(\xi)$ имеет вид

$$z = \omega(\xi) = k \cdot e^{iC_0} \cdot \prod_{\xi_0}^{\xi} \prod_{k=1}^q \left(\frac{a_k}{R} \right)^{\alpha_k^{(1)}-1} \left(1 - \frac{\xi}{a_k} \right)^{\alpha_k^{(1)}-1} \prod_{k=1}^2 \left(1 - \frac{b_k}{\xi} \right), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^a \left(\frac{a_k}{R} \right)^{\alpha_k^{(1)}-1} \left(1 - \frac{\xi}{R^{2j} a_k} \right)^{\alpha_k^{(1)}-1} \left(1 - \frac{a_k}{R^{2j} \xi} \right)^{\alpha_k^{(1)}-1} \prod_{k=1}^2 (b_k) \cdot \left(1 - \frac{\xi}{R^{2j} b_k} \right) \cdot \\ & \cdot \left(1 - \frac{b_k}{R^{2j} \xi} \right) d\xi + \omega(\xi_0). \end{aligned}$$

где k – произвольная действительная постоянная,

$$c_o^* = -\frac{1}{4\pi_i} \int_0^{2\pi} \ln[e^{2i\beta} \sigma^{-2}] d\theta = -\frac{1}{2} (\mathfrak{G}_2^{(1)} - \mathfrak{G}_1^{(1)}) - \pi,$$

ξ_o - произвольная точка области D .

Обозначая $\varphi(z) = \varphi[\omega(\xi)] = \varphi_o(\xi)$, из граничного условия (4) относительно функции $\chi(\xi) = \xi^{-1} \cdot \varphi_o(\xi)$ получаем граничную задачу Римана–Гильберта для кругового кольца D :

$$\begin{aligned} \chi(\sigma) - e^{2i\beta} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \overline{\chi(\sigma)} &= \sigma^{-1} \psi_1(\sigma), \quad \sigma \in l_1, \\ \chi(\tau) - e^{2i\alpha} \frac{\bar{\tau}}{\tau} \overline{\chi(\tau)} &= \tau^{-1} \psi_0(\tau), \quad \tau \in l_0, \end{aligned}$$

(6)

где $\psi_1(\sigma) = -2i e^{i\beta(\sigma)} F_1(\sigma)$, $\psi_0(\tau) = -2i e^{i\alpha(\tau)} F_0(\tau)$.

Функции $e^{2i\alpha(\sigma)}$ и $e^{2i\beta(\sigma)}$ можно представить в виде $e^{2i\alpha(\tau)} = \tau \cdot \omega'(\tau) [\tau \cdot \overline{\omega'(\tau)}]^{-1}$, $e^{2i\beta(\sigma)} = \sigma \omega'(\sigma) [\overline{\sigma \omega'(\sigma)}]^{-1}$, где $\omega(\xi)$ определена формулой (5). На основании этих формул, граничные условия (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Omega(\sigma) - \overline{\Omega(\sigma)} &= \Theta_1(\sigma), \quad \sigma \in l_1 \\ \Omega(\tau) - \overline{\Omega(\tau)} &= \Theta_0(\tau), \quad \tau \in l_0, \end{aligned}$$

(7)

где $\Omega(\xi) = \varphi_o(\xi) \cdot [\xi \omega'(\xi)]^{-1}$, $\Theta_1(\sigma) = \sigma^{-1} \psi_1(\sigma) \cdot \omega'^{-1}(\sigma)$,
 $\Theta_0(\tau) = \tau^{-1} \psi_0(\tau) \cdot \omega'^{-1}(\tau)$.

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (7) имеет вид

$$\int_0^{2\pi} \Theta_1(\sigma) d\vartheta = \int_0^{2\pi} \Theta_0(\tau) d\vartheta \quad (8)$$

и при выполнении этих условий решение задачи (7) представимо в виде

$$\Omega(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^1 \int_{l_j} K(\xi; t) \Theta_j \cdot (t) dt + C_1^*, \quad (9)$$

где $K(\xi; t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t - R^{2k} \cdot \xi}$, C_1^* - действительная постоянная

Таким образом, решение задачи (4) имеет вид

$$\Phi_0(\xi) = -\frac{\xi \cdot \omega'(\xi)}{\pi(x+1)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{l_1} \frac{e^{i\beta(\sigma)} C^{(1)}(\sigma) d\sigma}{(\sigma - R^{2k} \xi) \sigma \omega'(\sigma)} + \int_{l_0} \frac{e^{i\alpha(\tau)} [f_0(\tau) + C^{(0)}(\tau)] d\tau}{(\tau - R^{2k} \xi) \tau \omega'(\tau)} + C_1^* \right\}; \quad (10)$$

где $C_1^{**} = -\pi(x+1)C_1^*$

Условие (8) записывается в виде

$$\int_{l_1} \frac{e^{i\beta(\sigma)} C^{(1)}(\sigma) d\sigma}{\sigma \omega'(\sigma)} + \int_{l_0} \frac{e^{i\alpha(\tau)} [f_0(\tau) + C^{(0)}(\tau)] d\tau}{\tau \omega'(\tau)} = 0. \quad (11)$$

Так как функция $\omega'(\xi)$ в точках a_k имеет особенности вида $(\xi - a_k)^{\alpha_k - 1}$, то для непрерывной продолжимости функции $\Phi_0(\xi)$ в $D+l$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{l_1} \frac{e^{i\beta(\sigma)} C^{(1)}(\sigma) d\sigma}{(\sigma - R^{2j} a_k) \sigma \omega'(\sigma)} + \int_{l_0} \frac{e^{i\alpha(\tau)} [f_0(\tau) + C^{(0)}(\tau)] d\tau}{(\tau - R^{2j} a_k) \tau \omega'(\tau)} + C_0^* \right\} = 0, \quad (12)$$

$k = 1, \dots, q.$

На основании результатов, приведенных в монографии [1] относительно поведения интеграла типа Коши вблизи точек разрыва плотности, можно доказать, что функция $\Phi'(z)$ вблизи

точек B_k удовлетворяет условиям $|\varphi'(z)| < M|z - B_k|^{-1/2}$ ($k = 1, 2$), а вблизи точек A_k ограничена.

После того, как найдена функция $\varphi(z)$, для нахождения функции $\psi(z)$ воспользуемся условием (4), которое можно записать в виде (см. [3])

$$\operatorname{Re}[ie^{iv(t)}(\psi(t) + p(t)\varphi'(t))] = F_j^*(t), \quad t \in L_j, \quad j = 0, 1 \quad (13)$$

где $F_j^*(t) = F_j(t) + \operatorname{Re}[ie^{iv(t)}(\bar{t} - p(t))\varphi'(t)]$, $t \in L_j$ ($j = 0, 1$), $p(t)$ — определенный полином, удовлетворяющий условиям $p(B_k) = \overline{B_k}$, $k = 1, 2$.

Решение задачи (13) строится аналогично решению предыдущей. Условие разрешимости задачи (13) совместно с условиями непрерывной продолжимости выражения $\psi(z) + p(z)\varphi'(z)$ и условиями (11)-(12) дает для определения $q+4$ искомых действительных постоянных систему $q+4$ линейных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами. Доказывается, что полученная система однозначно разрешима и, таким образом, рассмотренная задача имеет единственное решение

Поступила 15.11.1999

Кафедра теоретической механики

Литература

1. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука». 1968
2. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. М., «Наука». 1968
3. Банцури Р.Д.. ДАН СССР, т. 243, № 4, 1978. 882-885

ბ. კაპანაძე

სწორხაზოვანი ჭრილის მქონე ამოზნექილი
მრავალკუთხედით შემოსაზღვრული ორადბმული ფირფიტის
ღუნვის ერთი ამოცანის შესახებ
რეზიუმე

განხილულია სწორხაზოვანი ჭრილის მქონე ამოზნექილი მრავალკუთხედით შემოსაზღვრული ორადბმული ფირფიტის ღუნვის ამოცანა, როდესაც ფირფიტის გარე საზღვარზე მოქმედებენ ნორმალური მღუნავი მომენტები, ხოლო ჭრილის საზღვარი დაყრდნობილია. აგებულია კომპლექსური პოტენციალები, რომელთა საშუალებითაც ფირფიტის შუა ზედაპირის ჩალუნვა გამოისახება.

G. Kapanadze

On one problem of bending of doubly-connected plate with linear section bounded by concave polygon

Summary

The present paper deals with the bending problem of doubly-connected plate with linear section bounded by concave polygon when normal bending moments act on the outer boundary of the plate and the boundary of the section is supported complex potentials by which bending of the middle surface is expressed are constructed.

УДК 532

УРАВНЕНИЕ МИЗЕСА ДЛЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ И ЕГО
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Дж. В. Шарикадзе

1. В 1927 году Мизесом [1,2] был получен новый вид дифференциального уравнения для обычного ламинарного пограничного слоя. Затем Карманом и Миллиkenом [1] было дано видоизменение этого уравнения и метод Мизеса получил интересное развитие.

В настоящей работе дано обобщение уравнения Мизеса для ламинарно пограничного слоя проводящей жидкости и получено его приближенное решение.

Основная идея уравнения Мизеса заключается в переходе от производных по аргументам x и y в уравнениях Прандтля к производным вдоль линии тока и по направлениям, перпендикулярным к линиям тока.

Напишем уравнения Прандтля для ламинарного пограничного слоя проводящей жидкости, когда на тело перпендикулярно скорости набегающего потока действует внешнее магнитное поле $B_0(x)$ [3,4]:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} (U_\infty - u), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Перейдем к новым переменным

$$\left. \begin{aligned} \xi =, \quad \eta = \psi(x, y), \\ u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь $\psi(x, y)$ – функция тока. Уравнение линии тока

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v},$$

где dx и dy – проекции элемента линии тока, дает

$$v = u \frac{dx}{dy}, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \right) = u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^2}{\partial x}$$

и уравнения Прандтля (1), (2) в новых переменных примут вид

$$\frac{\partial u^2}{\partial \xi} \frac{1}{2} = \frac{d u_\infty^2}{dx} \frac{1}{2} + \nu u \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \left(\frac{u^2}{2} \right) + m(U_\infty - u), \quad (4)$$

где $m(x) = \frac{\sigma B_0^2}{\rho}$.

Помня, что U_∞ зависит только от x , а не от ψ , из (4) уравнения получим

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{U_\infty^2 - u^2}{2} = \nu u \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \left(\frac{U_\infty^2 - u^2}{2} \right) + m(U_\infty - u). \quad (5)$$

Введем теперь отнесенную к единице массы потерю кинетической энергии из-за торможения вязкостью в пограничном слое:

$$Z = \frac{U_\infty^2 - u^2}{2}, \quad \frac{u}{U_\infty} = \sqrt{1 - 2 \frac{Z}{U_\infty^2}},$$

Здесь предполагается, что функция Z выражена через ξ и ψ . Уравнение (5) при этом даст

$$\frac{\partial Z}{\partial \xi} = \nu u \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} - m u \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2Z}{U_\infty^2}} \right). \quad (6)$$

Это есть уравнение Мизеса для пограничного слоя проводящей жидкости. При этом граничные условия запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \text{при } \psi = 0 \quad Z &= \frac{U_\infty^2}{2} = Z_0 \quad - \text{данная функция } \xi, \\ \text{при } \psi = \infty \quad Z &= 0, \\ \text{при } \xi = 0 \quad Z &= \bar{Z}(\psi) \quad - \text{данная функция } \psi. \end{aligned} \quad (7)$$

Если вместо переменной ξ формально ввести потенциал скорости φ того потенциального потока, который при данном x имеет вид на внешней границе слоя, т.е. положить

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = U_\infty(\xi),$$

и заметить, что

$$\frac{\partial Z}{\partial \xi} = \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = U_\infty \frac{\partial Z}{\partial \varphi},$$

то уравнение Мизеса (6) приобретает вид, данный ему Карманом и Милликеном в обычной гидродинамике. Для ламинарного пограничного слоя проводящей жидкости вид этого уравнения в форме Кармана-Милликена следующий:

$$\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = \nu \frac{U}{U_\infty} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} - m \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2Z}{U_\infty^2}} \right) \quad (8)$$

при тех же граничных условиях, но с заменой ξ на φ . Здесь $U_\infty = U_\infty(\varphi)$ и $m = m(\varphi)$.

Уравнение Мизеса, подобно уравнению Прандтля, представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение



в частных производных второго порядка параболического типа с переменным коэффициентом при старшей производной. Это можно записать в виде:

$$\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = v \sqrt{1 - 2 \frac{Z}{U_\infty^2}} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} - m \left(1 - \sqrt{1 - 2 \frac{Z}{U_\infty^2}} \right). \quad (9)$$

Применим уравнение Мизеса в форме Кармана-Милликена для расчета продольного обтекания пластинки U_∞ , когда перпендикулярно к пластине действует внешнее магнитное поле.

Перейдем к безразмерному виду уравнения (8), выбрав за масштаб продольных скоростей скорость потока ($U_\infty const$) на бесконечности, а за масштаб длины – характерную длину L_0 . С этой целью напомним:

$$\varphi = U_\infty L_0 \phi_1, \quad \psi = \frac{2U_\infty L_0}{\sqrt{Re}} \psi_1, \quad Z = U_\infty^2 Z_1, \quad Re = \frac{U_\infty L_0}{\nu}$$

Коэффициент 2 в масштабе ψ введен для удобства. Уравнения (8) и (9) при таком выборе масштабов могут быть переписаны в виде

$$\frac{\partial Z}{\partial \phi} = \frac{1}{4} u \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} - m \left(1 - \sqrt{1 - 2Z} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \phi} = \frac{1}{4} \sqrt{1 - 2Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} - m \left(1 - \sqrt{1 - 2Z} \right). \quad (11)$$

Здесь для удобства сохранены те же обозначения, что и для размерных. Граничные условия (7) имеют ранее указанный вид.

Рассмотрим внешнее решение уравнения (11), т.е. такое приближенное решение, которое будет наиболее близко походить к истинному во внешней части пограничного слоя, и, наоборот, удаляться от точного решения вблизи стенки обтекаемого тела.



Такое решение можно получить, если в правой части уравнения (10) коэффициент u заменить на единицу или Z на нуль, т.е. линеаризировать уравнение (10) при помощи внешнего потока.

При такой линеаризации уравнение (10) примет обычный линейный вид

$$\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2}$$

и его решение при граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \psi = 0 \quad Z = \frac{1}{2}, \\ \text{при } \bar{\psi} = \infty \quad Z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

будет

$$Z = \frac{\psi}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\varphi} \frac{e^{-\frac{\psi^2}{\varphi-\xi}}}{(\varphi-\xi)^{3/2}} d\xi. \quad (14)$$

Заменяя переменную

$$\frac{\psi}{(\varphi-\xi)^{1/2}} = \eta \quad (15)$$

из (14) получим

$$Z = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{\psi}{\sqrt{\varphi}}, \quad (16)$$

или в старых обозначениях:

$$u = \sqrt{1-2Z} = \sqrt{\operatorname{erf} \frac{\psi}{\sqrt{\varphi}}}. \quad (17)$$

Отсюда видно, что внешнее решение не зависит от магнитного поля. Известно, что такое решение в обычной гидродинамике [1-3] даст для трения примерно на 15% меньше трения по Блязиусу

$$\tau_{\text{бляз}} = \frac{0,332}{\sqrt{x}}, \quad \tau_{\text{прибл.}} = \frac{0,282}{\sqrt{x}},$$

где τ – безразмерное трение.

Поправим это решение и учтем магнитное поле. Для этого найдем второе приближение. Перепишем уравнение (11) в тождественно с (11) виде:

$$\frac{\partial Z}{\partial \varphi} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} = \frac{1}{4} (\sqrt{1-2Z} - 1) \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} - m(1 - \sqrt{1-2Z}) \quad (18)$$

Если положить справа $Z = 0$, что соответствует «внешнему» решению, то уравнение (18) перейдет в уравнение (12) и даст первое приближение $Z = Z^{(1)}$, которое определяется равенством (17). Положим теперь справа $Z = Z^{(1)}$ и составим такое уравнение для второго приближения $Z^{(2)}$:

$$\frac{\partial Z^{(2)}}{\partial \varphi} - \frac{1}{4} \frac{\partial Z^{(2)}}{\partial \psi^2} = \frac{1}{4} (\sqrt{1-2Z^{(1)}} - 1) \frac{\partial^2 Z^{(1)}}{\partial \psi^2} - m(1 - \sqrt{1-2Z^{(1)}}) \quad (19)$$

Это линейное неоднородное уравнение второго порядка имеет решение:

$$Z^{(2)}(\varphi, \psi) = Z^{(1)}(\varphi, \psi) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\eta \int_0^\varphi \left[e^{-\frac{(\varphi-\eta)^2}{\varphi-\xi}} - e^{-\frac{-(\varphi+\eta)^2}{\varphi-\xi}} \right] \frac{f(\xi, \eta) d\xi}{\sqrt{\varphi-\xi}},$$

где введено обозначение

$$f(\varphi, \psi) = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 Z^{(1)}}{\partial \psi^2} (\sqrt{1-2Z^{(1)}} - 1) - m(1 - \sqrt{1-2Z^{(1)}})$$

Несмотря на то, что решение получено в замкнутой форме, пользоваться им слишком сложно. Поэтому ниже дадим простое использование той же идеи для построения приближенного решения.

2. Напишем безразмерное уравнение для стационарного пограничного слоя проводящей жидкости при обтекании

пластины с постоянной скоростью $U_\infty = const$:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - m(1-u) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (21)$$

при граничных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y=0 \quad u=0, \\ \text{при } y=\infty \quad u=1. \end{array} \right\} \quad (22)$$

Заменим в левой части уравнения (20) множители u и v при

$\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ соответственно на 1 и 0.

Получим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (23)$$

а граничные условия останутся прежними.

Построим внешнее решение. Для этого введем автономную переменную

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{x}} \quad (24)$$

и новую функцию

$$u = f\left(\frac{y}{2\sqrt{x}}\right) = f(\eta). \quad (25)$$

Тогда уравнение (23) и граничные условия (23) перепишутся в виде

$$\left. \begin{array}{l} f'' + 2\eta f' = 0, \\ f(0), f(\infty) = 1. \end{array} \right\} \quad (26)$$

Решение этой задачи имеет вид

$$u(\eta) = \operatorname{erf}(\eta) = \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{x}}\right). \quad (27)$$

Для безразмерного трения будем иметь

$$\tau_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}, \quad (28)$$

а обычного размерного напряжения трения

$$\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\mu\rho U_\infty^3}{x}} = 0,564 \sqrt{\frac{\mu\rho U_\infty^3}{x}}. \quad (29)$$

Если сравнить это решение с решением Блязиуса

$$\left(\tau_{\text{Бляз}} = 0,332 \sqrt{\frac{\mu\rho U_\infty^3}{x}}\right), \text{ заметим, что для трения получается}$$

сильное преувеличение, почти в 1,7 раз, и что трение в этом приближении не зависит от приложенного магнитного поля.

Для исправления полученного решения воспользуемся вышеприведенным методом.

Перепишем уравнение (20) тождественно следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - m(1-u) = (1-u) \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (30)$$

Возьмем теперь в правой части (30) $u=0$ и $v=0$, а в

выражении $\frac{\partial u}{\partial x}$ вместо u подставим решение $u^{(1)}$ и будем решать

его относительно $u^{(2)}$:

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial y^2} - m(1-u^{(2)}) = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \quad (31)$$

при прежних граничних умовах.

Если искать решение уравнения (31) в автомодельной форме

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{x}}, \quad u^{(2)} = f(\eta), \quad (32)$$

а за $u^{(1)}$ взять решение (27), получим

$$\varphi'' + 2\eta\varphi' - 4n\varphi = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}, \quad (33)$$

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(\infty) = 0. \quad (34)$$

Здесь введены обозначения

$$\varphi(\eta) = 1 - f(\eta), \quad mx = \frac{\sigma B_0^2(x)}{\rho} \cdot x = n,$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = -\frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x} e^{-\eta^2}, \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{d\eta}, \quad \varphi'' = \frac{d^2\varphi}{d\eta^2}.$$

Отсюда видно, что автомодельность задачи достигается тогда, когда внешнее магнитное поле

$$B_0(x) \approx \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Решение задачи (33) и (34) имеет вид

$$\varphi(\eta) = 2^{2n} \Gamma(n+1) i^{2n} \operatorname{erfc} \eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}(n+1)} \eta e^{-\eta^2}$$

и окончательно для второго приближения получим

$$u^{(2)} = 2^{2n} \Gamma(n+1) i^{2n} \operatorname{erfc} \eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}(n+1)} \eta e^{-\eta^2} \quad (35)$$

где $i^n \operatorname{erfc} x$ – кратный интеграл вероятности.

Если отсутствует магнитное поле, то $n=0$ и из (35) получается

$$u^{(2)} = 1 - \operatorname{erfc} \eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta e^{-\eta^2} = \operatorname{erf} \eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta e^{-\eta^2}$$

что совпадает с результатом обычной гидродинамики.

Напряжение трения будет равно:

$$\tau_{0\text{взр.}} = \left. \frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \left[2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} - \frac{1}{n+1} \right]. \quad (36)$$

Отсюда видно, что уточненное решение зависит от магнитного поля через параметр n и увеличение магнитного поля (увеличение параметра n) увеличивает напряжение трения на пластинке.

Поступила 15.9.1998

Кафедра теоретической механики

Литература

1. Л.Г. Лойцянский. Аэродинамика пограничного слоя. М.Л., Гостехиздат, 1941
2. Л.Г. Лойцянский. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиздат, 1962
3. И.П. Гинзбург. Теория сопротивления и теплопередачи. Изд. Ленингр. университета, Л., 1970
4. А.Б. Ватажин, Г.А. Любимов, С.А. Регирер. Магнитогидродинамические течения в каналах. М., Наука. 1970

ჟ. შარიკაძე

გამტარი სითხის სასაზღვრო ფენისათვის მიზეზის განტოლება და მისი მიახლოებითი ამოხსნა

რეზიუმე

გამოყვანილია გამტარი სითხის სასაზღვრო ფენისათვის მიზეზის განტოლება და ნაპოვნია მისი მიახლოებითი ამონახსნი კარმან-მილიკენის მეთოდით. პირველი მიახლოება არ არის დამოკიდებული მაგნიტურ ველზე, ხოლო მეორე მიახლოება დამოკიდებულია მაგნიტურ

ველზე და $B_0(x) \approx \frac{1}{\sqrt{x}}$. იგი ცხადი სახით არის ნაპოვნი. ამ შემთხვევაში მაგნიტური ველის გაზრდა იწვევს ხახუნის გაზრდას.

J. Sharikadze

Mises' s equation of the boundary layer of conducting fluid and its approximate solution

Summary

Mises' s equations of the boundary layer of conducting fluid is deduced and its approximation solution is found by Karman-Milikan's method. The first approximation is independent of magnetic field, but

the second approximation depends on magnetic field and $B_0(x) \approx \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Expression (36) shows that the increase of the magnetic field increases the skin friction.

УДК 538

სუსტადგამტარი არაკუმშვადი სითხის
ლაშინარული სასაზღვრო ფენი გაჟონვის, წნევის
ბრადიენტისა და ერთგვაროვანი მაგნიტური ველის
გათვალისწინებით

ი. გრძელიძე

შევისწავლოთ სუსტადგამტარი არაკუმშვადი სითხის სტაციონარული ლამინარული სასაზღვრო ფენის ამოცანა ფირფიტაზე გაჟონვისა და წნევის გრადიენტის გათვალისწინებით, როდესაც ფირფიტის მართობულად მოქმედებს გარე ერთგვაროვანი მაგნიტური ველი. ლამინარული სასაზღვრო ფენისა და უწყვეტობის განტოლებებს აქვთ ასეთი სახე:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + m^2 (U_{\infty} - u), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

სადაც u და v სიჩქარის კომპონენტებია,

$U_{\infty}(x)$ - გარე ნაკადის სიჩქარეა,

ν - სიბლანტის კინემატიკური კოეფიციენტი,

$$m^2 = \frac{\sigma B_0^2}{\rho}, \quad \sigma - \text{ელექტრო გამტარობის კოეფიციენტი,}$$

B_0 - მაგნიტური ველი, ρ - სიმკვრივე.

ეს განტოლებები უნდა ამოიხსნას შემდეგ სასაზღვრო პირობებში:
როცა $y=0$, $u=0$, $v=v_0(x)$, $v_0(x) < 0$ გაჟონვა

როცა $y = \delta, u \rightarrow U_\infty(x)$ $v_0(x) > 0$ შეეწონება

გაუნებისა და მაგნიტური ველის გათვალისწინებით მოცემული ამოცანისათვის გვექნება შემდეგი ინტეგრალური თანაფარდობა:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} u^2 dy - U_\infty \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} u dy + m^2 \int_0^{\delta(x)} u dy = \\ = U_\infty (U'_\infty + m^2) \delta - U_\infty v_0(x) - v \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \end{aligned} \quad (4)$$

1. ამოხსნის მეთოდი, სიჩქარის პროფილი პოლკაუზენის მეთოდის მსგავსად ვეძებთ მეთოხე ხარისხის პოლინომის სახით:

$$\frac{u}{U_\infty} = C_1(x)\eta + C_2(x)\eta^2 + C_3(x)\eta^3 + C_4(x)\eta^4, \quad (5)$$

სადაც $\eta = \frac{y}{\delta(x)}$.

$C_1(x); C_2(x); C_3(x); C_4(x)$ კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის გვაქვს შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$v_0(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_0 = v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_0 - m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0; \quad (6)$$

$$\left(\frac{u}{U_\infty} \right)_\delta = 1; \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_\delta = 0; \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_\delta = 0, \quad (7)$$

რომელთა დაკმაყოფილება მოგვცემს

$$\begin{aligned} PC_1 + 2MC_2 - 6C_3 &= 0, \\ MC_1 - 2C_2 &= N + P, \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &= 1, \\ C_1 + 2C_2 + 3C_3 + 4C_4 &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნები:

$$M = \frac{\delta v_0}{v}; \quad N = \frac{\delta^2 U'_\infty}{v}; \quad P = \frac{m^2 \delta^2}{v} \quad (9)$$

აქედან C_1, C_2, C_3, C_4 - თვის მივიღებთ

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \frac{24 + MN + 6N + MP + 6P}{18 + 6M + M^2 + P}, \\ C_2(x) &= \frac{24M - 18N - NP - 18P - P^2}{2(18 + 6M + M^2 + P)}, \\ C_3(x) &= \frac{4M^2 - 3MN - 3MP + NP + 4P + P^2}{18 + 6M + M^2 + P}, \\ C_4(x) &= \frac{4MN - 6M^2 - 12M + 6N + 4MP - NP - P^2 - 12}{2(18 + 6M + M^2 + P)}. \end{aligned} \quad (10)$$

M -ის ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის, რადგანაც $P > 0$ გამოსახულება

$$M^2 + 6M + 18 + P > 0.$$

მოწყვეტის წერტილი მოიცემა პირობით

$$24 + MN + 6N + MP + 6P = 0.$$

ამგვარად, მოწყვეტის წერტილი დამოკიდებულია გარე არის სიჩქარეზე, გაუნვის პარამეტრზე და მაგნიტური ველის მოქმედებაზე. თუ (4) განტოლებაში შევიტანთ სიჩქარის პროფილის (5) პოლინომურ გამოსახულებას და გავითვალისწინებთ (10) გამოსახულებებს, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{dv_0}{dx} &= \frac{2520D^3 v}{U_\infty \delta^3 A_3} \left\{ N \left(\frac{A_4}{2520D^2} - 1 \right) + M + \frac{A_5}{D} + \frac{60A_7 P}{D} \right\} + \\ &+ \frac{2\delta A_2}{v A_3} U_\infty'' + \frac{6\delta' A_1}{\delta^2 A_3} + \frac{\delta' A_6 P}{\delta A_3}. \end{aligned} \quad (11)$$

ამრიგად, სასაზღვრო ფენის სისქე დამოკიდებულია სამ M, N, P პარამეტრზე. (11) გამოსახულებაში შემავალი A_1, A_2, \dots, A_7, D სიდიდეები

მოიცემა ფორმულებით:

$$\begin{aligned}
 A_1 = & 2\{(9180N^2 + 7128N + 175392) + M(7290N^2 - 10584N - 181728) \\
 & + M^2(2112N^2 - 11388N - 86112) + M^3(291N^2 - 3276N - 21936) \\
 & + M^4(19N^2 - 416N - 3768) - M^5(26N - 432) - 24M^6\} + \\
 & + P^5 + P^4(-36 - 40M - 3M^2 + 6N) + \\
 & + P^3(-948 - 4620N - 23364M - 124MN - 4089M^2 - 2M^2N + \\
 & + 34M^3 + 5N^2) + \\
 & + P^2(-12096 + 24508M^2 - 120360M - 240N^2 - 4032N - \\
 & - 14872MN + 786M^3 + 60MN^2 - 8236M^2N - 88M^4 + 31M^2N^2) \\
 & + P(-342432 + 14400M - 80352M^2N - 469808MN - 322416N - \\
 & - 25452N^2 - 6456M^3 + 291024M^2 + 612MN^2 + 6600M^3N - \\
 & - 1488M^4 + 28M^2N^2 + 164M^4N + 110M^3N^2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 = & 2\{(11016N + 7128) + M(9126N - 6156) + M^2(3114N - 8064) + \\
 & + M^3(531N + 3048) + M^4(38N - 546) - 39M^5\} + \\
 & + P^4 + P^3(-1008 + N + M^2 - 11M) + P^2(1416 + 1874M - 17M^3 - \\
 & - 920M^2 + 25MN + 8,5M^2N - 48N) + \\
 & + P(-87912 - 96MN + 19M^3N - 99,5M^2N - 3246M^3 - \\
 & - 26640M^2 - 105020M + 82M^4 + 36N),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_3 = & 2\{(1890N^2 + 26568N + 19008) + M(2898N^2 + 19944N + 12672) + \\
 & + M^2(909N^2 + 1368N - 19008) + M^3(76N^2 - 780N - 4032) - \\
 & - M^4(78N + 144)\} + P^4(29 + 4M) + P^3(23208 + 4021M + 58N + \\
 & + 8MN - 51M^2) + P^2(123396 + 19092N - 21780M + 4MN^2 + \\
 & + 3692MN - 102M^2N + 60M^2 + 29N^2 + 176M^3) + \\
 & + P(-271152 - 51M^2N^2 + 328M^3N - 4692M^2N - 518MN^2 - \\
 & - 16488MN - 47664M^2 - 370224M - 1092N^2 + 76488N - \\
 & - 156M^4 - 1560M^3),
 \end{aligned}$$

$$A_4 = 2\{72(17N^2 + 211N + 1778) + 6M(101N^2 + 1007N + 10848) + 2M^2(38N^2 + 321N + 9108) + 3M^3(11N + 936) + 216M^4\} + P^4 + P^3(2N - 17M - 75) + P^2(N^2 - 141N + 906 + 67M^2 + 537M - 34MN) + P(33M^3 + 1074M^2 - 72798M + 23760 + 143M^2N + 1143MN + 1914N - 66N^2 - 17MN^2),$$

$$A_5 = 24 + MN + 6N + MP + 6P,$$

$$A_6 = \{(-3636N^2 + 24480N + 8352) + M(-1914N^2 + 67224N - 16560) + M^2(-1940N^2 - 13536N - 27936) + M^3(-467N^2 + 3744N + 1272) + M^4(-736N - 2184) - 156M^5\} + 2P^4 + P^3(2118 + 2N + 7M + 4M^2) + P^2(66684 + 3432M^2 + 23310M + 36MN + 108N + 66M^2N - 51M^3) + P(-519M^3N + 176M^4 - 26166M^3 - 1532M^2N - 52272M^2 + 17256MN - 153408M + 29MN^2 + 102N^2 + 44544N + 62M^2N^2),$$

$$A_7 = -36M^2 + 9MN - 192M + 36N - P^2 + 9MP - NP - 432,$$

$$D = 18 + 6M + M^2 + P.$$

ზოგად შემთხვევაში (11) განტოლების ინტეგრირება დიდ სიძნელეებთან არის დაკავშირებული. კერძო შემთხვევებში ეს განტოლება შეიძლება ვაინტეგრიროთ რიცხობრივად ან გრაფიკულად.

განვიხილოთ რამდენიმე კერძო შემთხვევა, როდესაც (11) განტოლების ინტეგრირება ხერხდება ანალიზური სახით. დავუშვათ, რომ სასაზღვრო ფენის გარე არეში პოტენციალური დინება მოცემულია სახით $U_\infty = U_0 + U_1x$, სადაც U_0 და U_1 მუდმივებია. თუ დავუშვებთ, რომ M და P მუდმივებია, მაშინ (11) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით.

$$\frac{MA_1 + 6A_4 + A_6P}{D\{N(A_4 - 2520D^3) + 2520D^2M + 2520DA_5 + 2520 \cdot 60DA_1P\}} \frac{dN}{dx} = \frac{2U'_x(x)}{U_x} \quad (12)$$

თუ (12)-ს ვაინტეგრირებთ, როცა M და P სიდიდეები იღვწება
სხვადასხვა მნიშვნელობებს

$$x = 0, N = 0 \text{ და } U_{\infty}(x) = U_0 \quad (13)$$

სასაზღვრო პირობის გათვალისწინებით, მივიღებთ, რომ

1) თუ არა გვაქვს გაუონვა, ე.ი. $M = 0$, მაშინ სიჩქარის პროფილს
ექნება სახე

$$\begin{aligned} \frac{u}{U_{\infty}} = & \frac{30 + 6(N + P)}{18 + P} \eta - \frac{N + P}{2(18 + P)} \eta^2 + \\ & + \frac{P(P + N + 4)}{18 + P} \eta^3 + \frac{(6 - P)N - P^2 - 12}{2(18 + P)} \eta^4 \end{aligned} \quad (14)$$

ბოლო მოწყვეტის წერტილში გვექნება

$$N = -(P + 4) \quad (15)$$

აქედან ჩანს, რომ მოწყვეტის წერტილი დამოკიდებულია მაგნიტური
ურთიერთქმედების პარამეტრზე.

1ა) თუ $M = 0$ და მაგნიტური ურთიერთქმედების პარამეტრი
 $P = 1$, მაშინ (12) განტოლების ამონახსნი განსახილველ შემთხვევაში
იქნება:

$$\begin{aligned} & 0,0006935706 \log |N - 9,58939| - \\ & - 0,262598039 \log |N^2 + 23,08456N + 42271,80116| - \\ & - 0,093712452 \arctg \frac{N + 23,08456}{6,45999} = \log \frac{U_{\infty}}{U_0} - 1,33574 \end{aligned} \quad (16)$$

და მოწყვეტის წერტილში $N = -5$.

1ბ) თუ $M = 0$, ბოლო მაგნიტური ურთიერთქმედების პარამეტრად
ავირჩიოთ $P = 5$, მაშინ სიჩქარის პროფილისათვის გვექნება

$$\frac{u}{U_{\infty}} = \frac{6(N + 9)}{23} \eta - \frac{13N - 115}{2 \cdot 23} \eta^2 + \frac{5(N + 9)}{23} \eta^3 + \frac{N - 37}{2 \cdot 23} \eta^4, \quad (17)$$

ბოლო მოწყვეტის წერტილში

$$N = -9 \quad (18)$$

(12) განტოლების ინტეგრირება ამ შემთხვევაში მოგვცემს

$$4,3552933839 \log |N - 38,93989| +$$

$$+ 1,44019885 \log |N^2 + 56,05562N + 785,5581333961| -$$

$$- 2093,76042334422 \operatorname{arctg} \frac{N + 28,02781}{0,24495} = -2 \log \frac{U_\infty}{U_0} - 3259,54. \quad (19)$$

2) თუ გაჟონვის პარამეტრი $M = -1$, მაშინ სიჩქარის პროფილი მოიცემა გამოსახულებით

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{5(N+P)+24}{13+P} \eta - \frac{24+(P+18)(P+N)}{2(13+P)} \eta^2 +$$

$$+ \frac{4+N(P+3)+P(P+7)}{13+P} \eta^3 + \frac{6+2N-P(N+4)-(P^2+12)}{2(13+P)} \eta^4 \quad (20)$$

მოწყვეტის წერტილში კი

$$N = -\left(\frac{24}{5} + P\right) \quad (21)$$

2ა) როცა $M = -1$, მაგნიტური ურთიერთქმედების პარამეტრი ტოლია 1-ის, მაშინ (12) განტოლების ინტეგრირება მოგვცემს

$$0,02870507704 \log |N - 19,42758| +$$

$$+ 1,54140438592 \log |N^2 + 34,59698N + 41727,695626| -$$

$$- 2,56179348499 \operatorname{arctg} \frac{x+17,29849}{20,35385} = \log \frac{U_\infty}{U_0} + 5,354326, \quad (22)$$

2ბ) თუ გაჟონვის პარამეტრი $M = -1$, ხოლო მაგნიტური ურთიერთქმედების პარამეტრი $P = 5$, მაშინ სიჩქარის პროფილი იქნება

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{5N+49}{18} \eta - \frac{23N+139}{2 \cdot 18} \eta^2 + \frac{8N+64}{18} \eta^3 - \frac{3N+51}{2 \cdot 18} \eta^4 \quad (23)$$

ხოლო მოწყვეტის წერტილში

$$N = -9,8 \quad (24)$$

(12) განტოლების ინტეგრირება მოგვცემს

$$0,048712636 \log |N - 40,03277| +$$

$$+ 2,7159642679794 \log |N^2 + 58,57986N + 258711,2865503805| +$$

$$+ 0,3885623899 \operatorname{arctg} \frac{N + 29,28993}{50779266,41167} = 2 \log \frac{U_\infty}{U_0} + 14,77906. \quad (25)$$

ვიპოვოთ ხახუნის ძალა სხეულის ზედაპირზე

$$\tau = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \frac{U_\infty C_1(x)}{\delta}.$$

1. თუ გაჟონვა არა გვაქვს ე.ი. $M = 0$, მაშინ ნებისმიერი N და P პარამეტრებისათვის გვექნება

$$\tau = \mu \frac{U_\infty [24 + 6(N + P)]}{\delta (18 + P)}.$$

2. ხოლო თუ გაჟონვის პარამეტრი ტოლია - 1, მაშინ

$$\tau = \mu \frac{U_\infty [24 + 5(N + P)]}{\delta (13 + P)}.$$

თუ (9) ფორმულებიდან N პარამეტრს და δ სისქეს გამოვსახავთ P პარამეტრით, მივიღებთ

$$N = \frac{U'_\infty P}{m^2}; \quad \delta = \frac{\sqrt{vP}}{m}.$$

მაშინ განხილულ შემთხვევაში ხახუნის ძალისათვის გვექნება:

1. როცა არა გვაქვს გაჟონვა ($M = 0$).

$$\tau = \mu \frac{U_\infty m}{\sqrt{vP}} \frac{24 + 6\left(\frac{U'_\infty}{m^2} + P\right)}{13 + P}$$

2. ხოლო როცა გაჟონვის პარამეტრი $M = -1$, გვექნება

$$\tau = \mu \frac{U_\infty m}{\sqrt{vP}} \frac{24 + 5\left(\frac{U'_\infty}{m^2} + P\right)}{13 + P}.$$

შემოსულია 15.12.1998
დიფერენციალური და ინტეგრალური
განტოლებების კათედრა

И. Грдзелидзе

*Ламинарный пограничный слой слабопроводящей несжимаемой
жидкости с учетом отсоса, градиента давления и
однородного магнитного поля*

Резюме

Изучен ламинарный пограничный слой слабопроводящей несжимаемой жидкости с помощью профиля скорости четвертого порядка с учетом отсоса, градиента давления и однородного магнитного поля.

I. Grdzelidze

*On laminar boundary layer of weakly conducting incompressibly
fluid with suction, with pressure gradient and with uniform magnetic
field*

Summary

Laminar boundary layer of weakly conducting incompressibly fluid with suction, with pressure gradient and with uniform magnetic field was studied using the fourth degree velocity profiles.

УДК 532, 546

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ БЕЗ ПОДПОРА ИЗ КАНАЛА КРИВОЛИНЕЙНОГО СЕЧЕНИЯ

З.А. Цицкишвили

Рассмотрим плоскую стационарную задачу фильтрации из канала криволинейного сечения. Существуют задачи фильтрации, когда на бесконечности скорость фильтрации по вертикали вниз равна по величине коэффициенту фильтрации [1-3].

Мы будем предполагать, без ограничения общности, что коэффициент фильтрации равен единице и движение жидкости в пористой среде подчиняется закону Дарси.

Плоскость движения жидкости в пористой среде отнесем к плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Введем комплексный потенциал $\omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ - потенциал скорости, а $\psi(x, y)$ - функция тока. Кроме того, рассмотрим плоскость $w(z) = d\omega/dz$ и вспомогательную комплексную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$.

Односвязную область, занятую движущейся жидкостью, обозначим через $S(z)$, а ее границу $l(z)$. Граница $l(z)$ содержит неизвестные участки, которые подлежат определению, и известные участки, которые обыкновенно являются отрезками прямых. Ниже мы рассмотрим случай, когда один из участков $l(z)$ заменен аналитической кривой, которой на плоскости $w = d\omega/dz$ соответствует дуга окружности.



Области $S(z)$ на плоскостях $\omega(z)$ и $w = d\omega/dz$ соответствуют области $S(\omega)$ и $S(w)$.

Полуплоскость $\text{Im}(\zeta) > 0$ конформно отображим на области $S(z)$, $S(\omega)$ и $S(w)$. Функции, которые конформно отображают полуплоскость $\text{Im}(\zeta) > 0$ на области $S(z)$, $S(\omega)$ и $S(w)$, обозначим соответственно через $z = z(\zeta)$, $\omega = \omega(\zeta)$ и $w = w(\zeta) = \omega'(\zeta)/z'(\zeta)$.

Схемы областей $S(z)$, $S(\omega)$, $S(1/w)$, $S(w)$, $S(\zeta)$ даются на рисунке.

Из-за того, что область $S(z)$ имеет ось симметрии, достаточно рассмотреть правую половину области $AEDD_1E$. Граничные условия приведены на рисунке.

Найдем функцию $\omega(\zeta)$:

$$\omega(\zeta) = M \int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} + N, \quad (1)$$

где M и N - неизвестные постоянные.

После интегрирования получим

$$\omega(\zeta) = M \left[\arcsin(2\zeta - 1) - \frac{\pi}{2} \right] + N, \quad 0 < \zeta < 1, \quad (2)$$

$$\omega(\zeta) = -i2M \text{arctg} \sqrt{\frac{1-\zeta}{\zeta}} + N, \quad \zeta > 1. \quad (3)$$

Из условия $\zeta = 0$, $\omega(0) = 0$, следует

$$0 = -M\pi + N.$$

А из условия $\zeta = 1$, $\omega(1) = \frac{iQ}{2}$, с учетом (4), получим

$$N = \frac{iQ}{2}, \quad M = \frac{iQ}{\pi}. \quad (5)$$

Введем обозначение: $\omega(\zeta) = i\tilde{\omega}(\zeta)$.

После этого найдем функцию $dz/d\omega$:

$$\frac{dz}{d\omega} = M_2 \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^{1/2+\alpha} (a-\zeta)^{1/2-\alpha} (1-\zeta)^{1/2}} + N_2, \quad (6)$$

где M_2, N_2 и a — неизвестные постоянные.

В точке $\zeta=0$ $dz/d\omega = -i + tg(\pi\alpha)$. Из этого условия мы получаем, что $N_2 = -i + tg(\pi\alpha)$.

Далее, в точке $\zeta=a$ $dz/d\omega = h(-i + tg(\pi\alpha))$. Из этого условия определяется M_2 , получим.

$$M_2 = a_1 - ib_1 = [-i + tg(\pi\alpha)](h-1)/I_1, \quad (7)$$

где h — неизвестная постоянная, а

$$I_1 = \int_0^a \frac{d\zeta}{\zeta^{1/2+\alpha} (a-\zeta)^{1/2-\alpha} (1-\zeta)^{1/2}}. \quad (8)$$

Для промежутка $a < \zeta < 1$ формула (6) записывается так:

$$\frac{dz}{d\omega} = h[-i + tg(\pi\alpha)] + M_2 e^{i\pi(\frac{1}{2}-\alpha)\zeta} \int_a^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^{1/2+\alpha} (\zeta-a)^{1/2-\alpha} (1-\zeta)^{1/2}}. \quad (9)$$

В точке $\zeta=1$ $dz/d\omega = -hi$. Из этого условия следует уравнение

$$htg(\pi\alpha) + (h-1)I_2/I_1 = 0, \quad (10)$$

где

$$I_2 = \int_a^1 \frac{d\zeta}{\zeta^{1/2+\alpha} (\zeta-a)^{1/2-\alpha} (1-\zeta)^{1/2}}. \quad (11)$$

Для промежутка $1 < \zeta < +\infty$ формула (6) принимает следующий вид:

$$\frac{dz}{d\omega} = -M_2 e^{-i\pi\alpha} \int_1^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^{1/2+\alpha} (\zeta-a)^{1/2-\alpha} (\zeta-1)^{1/2}} - hi, \quad (12)$$

а для интервала $\zeta < 0$ имеет вид:

$$\frac{dz}{d\omega} = M_2 e^{-i\pi(\frac{1}{2}+\alpha)} \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{(-\zeta)^{1/2+\alpha} (a-\zeta)^{1/2-\alpha} (1-\zeta)^{1/2}} + N_2. \quad (13)$$

Для определения $z(\zeta)$ имеем равенство

$$dz(\zeta) = [M_2 \gamma(\zeta) + N_2] \omega'(\zeta) ds, \quad (14)$$

где

$$\gamma(\zeta) = \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^{1/2+\alpha} (a-\zeta)^{1/2-\alpha} (1-\zeta)^{1/2}}. \quad (14)$$

Проинтегрируем равенство (14) в промежутке $(0, \zeta)$, получим:

$$z(\zeta) = M_2 \int_0^{\zeta} \gamma(\zeta) \omega'(\zeta) ds + N_2 \omega(\zeta) + z(0). \quad (15)$$

Рассмотрим граничное значение (15) в точке $\zeta = a$, имеем

$$z(a) = M_2 \int_0^a \gamma(\zeta) \omega'(\zeta) d\zeta + N_2 \omega(a) + z(0) \quad (16)$$

Уравнение (14) после интегрирования можно еще записать так:

$$z(\zeta) = [M_2 \gamma(\zeta) + N_2] \omega(\zeta) - M_2 \int_0^{\zeta} \omega(\zeta) \sigma(\zeta) d\zeta, \quad (17)$$

где

$$\sigma(\zeta) = \left[\zeta^{1/2+\alpha} (a-\zeta)^{1/2-\alpha} (1-\zeta)^{1/2} \right]^{-1}. \quad (18)$$

Рассмотрим значение (16) в точке $\zeta = a$, получим:

$$z(a) = M_2 \int_0^a \gamma(\zeta) \omega'(\zeta) d\zeta + N_2 \omega(a) + z(0). \quad (19)$$

Запишем (17) для интервалов (a, ζ) и $(1, \zeta)$ соответственно, получим:

$$z(\zeta) = [M_2 \gamma(\zeta) + N_2] \omega(\zeta) - M_2 \int_0^a \omega(\zeta) \sigma(\zeta) d\zeta - M_2 e^{-\pi i (\zeta/2 - \alpha)} \int_a^\zeta \omega(\zeta) \left[\zeta^{1/2 + \alpha} (\zeta - a)^{1/2 - \alpha} (1 - \zeta)^{1/2} \right]^{-1} d\zeta, \quad (20)$$

$$z(\zeta) = [M_2 \gamma(\zeta) + N_2] \omega(\zeta) + z(1) - [M_2 \gamma(1) + N_2] \omega(1) + M_2 e^{-i\pi\alpha} \int_1^\zeta \omega(\zeta) \left[\zeta^{1/2 + \alpha} (\zeta - a)^{1/2 - \alpha} (\zeta - 1)^{1/2} \right]^{-1} d\zeta. \quad (21)$$

Перепишем уравнение (15) в виде

$$\frac{b}{2} - iH = i[a_1 - ib_1] \int_0^a \gamma(\zeta) \tilde{\omega}'(\zeta) d\zeta + [1 + itg(\pi\alpha)] \tilde{\omega}(a) + \frac{B}{2}. \quad (22)$$

После разделения действительной и мнимой частей получим:

$$\frac{b}{2} = b_1 \int_0^a \gamma(\zeta) \tilde{\omega}'(\zeta) d\zeta + \tilde{\omega}(a) + \frac{B}{2}, \quad (23)$$

$$-H = a_1 \int_0^a \gamma(\zeta) \tilde{\omega}'(\zeta) d\zeta + tg(\pi\alpha) \tilde{\omega}(a). \quad (24)$$

Проинтегрируем (14) в промежутке $(\zeta, 0)$, получим:

$$z(\zeta) = z(0) - M_2 \int_{\zeta}^0 \gamma(\zeta) \omega'(\zeta) d\zeta + N_2 [\omega(\zeta) - \omega(0)]. \quad (25)$$

Рассмотрим значение (30) в точке $\zeta = 1$, получим

$$z(1) = [M_2 \gamma(1) + N_2] \omega(1) - M_2 \int_0^a \omega(\zeta) \sigma(\zeta) d\zeta - M_2 e^{i\pi(\frac{1}{2}-\alpha)} \int_a^1 \omega(\zeta) \left[\zeta^{\frac{1}{2}+\alpha} (\zeta-a)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} d\zeta. \quad (26)$$

Перепишем (26) в следующем виде:

$$-iH_0 = h\tilde{\omega}(1) - iM_2 \int_0^a \tilde{\omega}(\zeta) \sigma(\zeta) d\zeta + M_2 e^{-i\pi\alpha} \int_a^1 \tilde{\omega}(\zeta) \left[\zeta^{\frac{1}{2}+\alpha} (\zeta-a)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} d\zeta. \quad (27)$$

В равенстве (27) выделим действительную и мнимую части:

$$-H_0 = h\tilde{\omega}(1) - a_1 \int_0^a \tilde{\omega}(\zeta) \sigma(\zeta) d\zeta - [a_1 \sin(\pi\alpha) + b_1 \cos(\pi\alpha)] \times \int_0^1 \tilde{\omega}(\zeta) \left[\zeta^{\frac{1}{2}+\alpha} (\zeta-a)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} d\zeta, \quad (28)$$

$$0 = h\tilde{\omega}(1) - b_1 \int_0^a \tilde{\omega}(\zeta) \sigma(\zeta) d\zeta + [a_1 \cos(\pi\alpha) - b_1 \sin(\pi\alpha)] \times \int_0^a \tilde{\omega}(\zeta) \left[\zeta^{\frac{1}{2}+\alpha} (\zeta-a)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} d\zeta. \quad (29)$$

Таким образом, для определения пяти действительных параметров a , H_0 , h , Q и $\tilde{\omega}(a)$ получена система из пяти

уравнений (10), (23), (24), (28), и (29), т.е. число неизвестных параметров равно числу уравнений. Это значит, что задача имеет одно решение, вернее, единственное решение. Такой результат был ожидаем.

После определения параметров можно конкретизировать параметрическое уравнение депрессионной кривой по формуле (25), а по формуле (20) можно определить параметрическое уравнение периметра дна канала.

По выше приведенным формулам можно проводить необходимые расчеты.

Поступила 13.2.1999

*Кафедра теоретической механики
ГТУ*

Литература

1. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953, 616 с.
2. Аверьянов С.Ф. Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод. В сб.: Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод М., АН СССР, 1956, с. 85-441.
3. Полубаринова-Кочина Д.Я. Теория движения грунтовых вод. М., Наука, 1977, 604 с.

ზ. ციცქიშვილი

ფილტრაციის ამოცანის ამოხსნა უსაყრდენოდ
მრუდწირული ფორმის არხიდან
რეზიუმე

ამოხსნილია ბრტყელი სტაციონარული ფილტრაციის ამოცანა მრუდწირული ფორმის კვეთის მქონე არხიდან, როდესაც არხის ქვემოთ უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში ფილტრაციის სიჩქარე სიდიდით ფილტრაციის კოეფიციენტის ტოლია.

Z. Tsitskishvili

On the solution of filtration problem for the channal with curved form section without a prop

Summary

The solution of the flat stationary problem for the channal with curved form section when the downward filtration velocity at the infinity equals to the filtration coefficient is given.

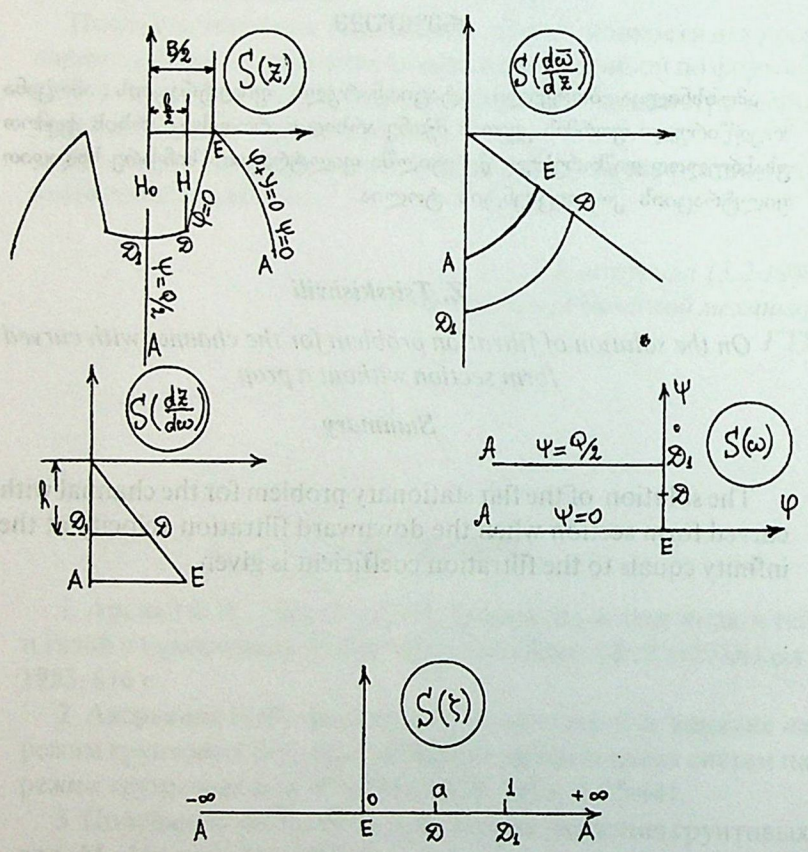


Рис.

УДК 532, 546

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗ КАНАЛА КРИВОЛИНЕЙНОГО СЕЧЕНИЯ С ПОДПОРОМ

З.А. Цицкишвили

Рассмотрим плоскую стационарную задачу фильтрации из криволинейного канала с подпором. Как известно, при фильтрации с подпором скорость фильтрации по вертикали вниз на бесконечности равна нулю, а когда фильтрация происходит без подпора, то скорость на бесконечности равна по величине коэффициенту фильтрации. В работах [1,2] обращено внимание на значение фильтрации с подпором.

Будем предполагать, без ограничения общности, что коэффициент фильтрации равен единице. Движение жидкости в пористой среде подчиняется закону Дарси.

Плоскость движения жидкости в пористой среде отнесем к плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Введем комплексный потенциал $\omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ - потенциал скорости, а $\psi(x, y)$, функция тока; кроме этого введем комплексную плоскость $w(z) = d\omega/dz$.

Односвязную область, занятую движущейся жидкостью, обозначим через $S(z)$, а ее границу через $l(z)$, которая частично неизвестна и подлежит определению. Области $S(z)$ на плоскостях ω , w и $1/w$ соответствуют области $S(\omega)$, $S(w)$ и

$S(1/w)$.

В рассматриваемом случае граница $l(z)$ состоит из неизвестных депрессионных кривых и из известных участков, которые в большинстве случаев являются отрезками прямых. В нашем случае один из этих участков заменен аналитической кривой, которой на плоскости $w = d\omega/dz$ соответствует дуга окружности.

Области $S(z)$ на плоскости ω соответствует область $S(\omega)$, а на плоскости $w = d\omega/dz$ – область $S(w)$. Область $S(w)$ – круговой многоугольник. С помощью преобразования $1/w$ область $S(w)$ конформно отображается на линейный многоугольник. Область $S(\omega)$ тоже является линейным многоугольником.

Вводится вспомогательная плоскость $\zeta = \xi + i\eta$. Полуплоскость $\text{Im}(\zeta) > 0$ конформно отображается на области $S(z)$, $S(\omega)$ и $S(1/w)$, а функции, которые конформно отображают полуплоскость $\text{Im}(\zeta) > 0$ на области $S(z)$, $S(\omega)$ и $S(w)$, соответственно обозначаются так: $z = z(\zeta)$, $\omega = \omega(\zeta)$ и $w(\zeta) = d\omega/dz$.

С помощью формулы Кристоффеля-Шварца отыскиваются $\omega(\zeta)$ и $w(\zeta)$, а затем с помощью зависимости $w(\zeta) = \omega'(\zeta)/z'(\zeta)$ отыскиваются сначала $z'(\zeta)$, а затем $z(\zeta)$ с учетом граничных условий.

Граничные условия указаны на рисунке.

Ввиду симметрии, рассмотрим одну половину области; в нашем случае мы рассмотрим правую половину $AFEDD_1A$.

Найдем функцию $\omega(\zeta)$:

$$\omega(\zeta) = M \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} + N, \tag{1}$$

где M и N – неизвестные постоянные.

Формула (1) при $0 < \zeta < 1$ записывается так:

$$\omega(\zeta) = M \left[\arcsin(2\zeta - 1) - \frac{\pi}{2} \right] + N, \quad (2)$$

а при $\zeta > 1$ так:

$$\omega(\zeta) = -2iM \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\zeta}{\zeta}} + N. \quad (3)$$

Из условия $\zeta = 0$, $\omega(0) = 0$, следует равенство:

$$0 = -\pi M + N. \quad (4)$$

Из условия $\zeta = 1$, $\omega(1) = iQ/2$, вытекает, что

$$N = iQ/2, \quad M = iQ/2\pi. \quad (5)$$

Введем обозначение: $\omega(\zeta) = i\tilde{\omega}(\zeta)$, $0 < \zeta < 1$.

После этого найдем функцию $dz/d\omega$, имеем:

$$\frac{dz}{d\omega} = M_2 \int_0^{\zeta} \frac{(\zeta + \mu) d\zeta}{\zeta^{1/2+\alpha} (a-\zeta)^{1/2-\alpha} (1-\zeta)^{1/2}} + N_2. \quad (6)$$

В точке $\zeta = 0$, $dz/d\omega = -i + tg(\pi\alpha)$, следовательно,

$N_2 = -i + tg(\pi\alpha)$. Далее, в точке $\zeta = a$, $dz/d\omega = h[-i + tg(\pi\alpha)]$.

Из этого условия определяется M_2 , получим:

$$M_2 = a_1 - ib_1 = [-i + tg(\pi\alpha)](h-1)/I_1, \quad (7)$$

где h – неизвестная постоянная

$$I_1 = \int_0^a \left\{ (\zeta + \mu) / \left[\zeta^{1/2+\alpha} (a-\zeta)^{1/2-\alpha} (1-\zeta)^{1/2} \right] \right\} d\zeta. \quad (8)$$

Для интервала $a < \zeta < 1$ формула (6) принимает вид:

$$\frac{dz}{d\omega} = h[-i + tg(\pi\alpha)] + M_2 e^{i\pi(\frac{1}{2}-\alpha)} \int_a^\zeta \frac{(\zeta + \mu)d\zeta}{\zeta^{\frac{1}{2}+\alpha} (\zeta - a)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}}} \quad (9)$$

В точке $\zeta = 1$, $dz/d\omega = -hi$. Из этого условия получим уравнение:

$$htg(\pi\alpha) + (h-1)I_2/I_1 = 0, \quad (10)$$

где

$$I_2 = \int_a^1 \left\{ (\zeta + \mu) \left/ \left[\zeta^{\frac{1}{2}+\alpha} (a-\zeta)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}} \right] \right. \right\} d\zeta. \quad (11)$$

Для промежутка $1 < \zeta < +\infty$ формула (9) принимает вид

$$\frac{dz}{d\omega} = -M_2 e^{-i\pi\alpha} \int_1^\zeta \frac{(\zeta + \mu)d\zeta}{\zeta^{\frac{1}{2}+\alpha} (\zeta - a)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}}} - hi, \quad (12)$$

а для интервала $\zeta < 0$ (6) записывается так:

$$\frac{dz}{d\omega} = M_2 e^{-i\pi(\frac{1}{2}+\alpha)} \int_0^\zeta \frac{(\zeta + \mu)d\zeta}{(-\zeta)^{\frac{1}{2}+\alpha} (a-\zeta)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}}} + N_2 \quad (13)$$

Для определения $z(\zeta)$ имеем равенство:

$$dz(\zeta) = [M_2 \gamma(\zeta) + N_2] \omega'(\zeta) d\zeta, \quad (14)$$

где

$$\gamma(\zeta) = \int_0^\zeta \frac{(\zeta + \mu)d\zeta}{\zeta^{\frac{1}{2}+\alpha} (a-\zeta)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}}}. \quad (14_1)$$

Проинтегрируем равенство (14) в промежутке $(0, \zeta)$, получим:

$$z(\zeta) = M_2 \int_0^\zeta \gamma(\zeta) \omega'(\zeta) d\zeta + N_2 \omega(\zeta) + z(0) \quad (15)$$

или

$$z(\zeta) = [M_2\gamma(\zeta) + N_2]\omega(\zeta) - M_2 \int_0^\zeta \omega(\zeta)\sigma(\zeta)d\zeta, \quad (16)$$

где

$$\sigma(\zeta) = (\zeta + \mu) \sqrt{\left[\zeta^{\frac{1}{2} + \alpha} (a - \zeta)^{\frac{1}{2} - \alpha} (1 - \zeta)^{\frac{1}{2}} \right]}. \quad (17)$$

Рассмотрим значение (15) в точке $\zeta = a$, получим:

$$z(a) = M_2 \int_0^a \gamma(\zeta)\omega'(\zeta)d\zeta + N_2\omega(a) + z(0). \quad (18)$$

Запишем (16) для интервалов (a, ζ) и $(1, \zeta)$:

$$z(\zeta) = [M_2\gamma(\zeta) + N_2]\omega(\zeta) - M_2 \int_0^a \omega(\zeta)\sigma(\zeta)d\zeta - \\ - M_2 e^{-\pi i(\frac{1}{2} - \alpha)\zeta} \int_a^\zeta \left\{ \omega(\zeta)(\zeta + \mu) \sqrt{\left[\zeta^{\frac{1}{2} + \alpha} (\zeta - a)^{\frac{1}{2} - \alpha} (1 - \zeta)^{\frac{1}{2}} \right]} \right\} d\zeta, \quad (19)$$

$$z(\zeta) = [M_2\gamma(\zeta) + N_2]\omega(\zeta) + z(1) - [M_2\gamma(1) + N_2]\omega(1) + \\ + M_2 e^{-\pi i\alpha} \int_1^\zeta \left\{ \omega(\zeta)(\zeta + \mu) \sqrt{\left[\zeta^{\frac{1}{2} + \alpha} (\zeta - a)^{\frac{1}{2} - \alpha} (\zeta - 1)^{\frac{1}{2}} \right]} \right\} d\zeta. \quad (20)$$

Перепишем уравнение (18) в развернутом виде:

$$\frac{b}{2} - iH = i[a_1 - ib_1] \int_0^a \gamma(\zeta)\tilde{\omega}'(\zeta)d\zeta + \\ + [1 + itg(\pi\alpha)]\tilde{\omega}(a) + B/2. \quad (21)$$

После разделения действительной и мнимой частей получим:

$$\frac{b}{2} = b_1 \int_0^a \gamma(\zeta) \tilde{\omega}'(\zeta) d\zeta + \tilde{\omega}(a) + B/2, \quad (22)$$

$$-H = a_1 \int_0^a \gamma(\zeta) \tilde{\omega}'(\zeta) d\zeta + tg(\pi\alpha) \cdot \tilde{\omega}(a). \quad (23)$$

Проинтегрируем (14) в промежутке $(\zeta, 0)$, получим:

$$z(\zeta) = z(0) - M_2 \int_{\zeta}^0 \gamma(\zeta) \omega'(\zeta) d\zeta + N_2 [\omega(\zeta) - \omega(0)], \quad (24)$$

где

$$\gamma(\zeta) = e^{-i\pi(\frac{1}{2}+\alpha)\zeta} \int_0^{\zeta} (\zeta + \mu) \left[(-\zeta)^{\frac{1}{2}+\alpha} (a-\zeta)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} d\zeta.$$

Рассмотрим значение (19) в точке $\zeta = 1$, получим:

$$z(1) = [M_2 \gamma(1) + N_2] \omega(1) - M_2 \int_0^a \omega(\zeta) \sigma(\zeta) d\zeta - M_2 e^{i\pi(\frac{1}{2}-\alpha)} \int_a^1 \omega(\zeta) (\zeta + \mu) \left[\zeta^{\frac{1}{2}+\alpha} (\zeta - a)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} d\zeta. \quad (25)$$

Перепишем (24) в следующем виде:

$$-iH_0 = h\tilde{\omega}(1) - iM_2 \int_0^a \tilde{\omega}(\zeta) \sigma(\zeta) d\zeta + M_2 e^{-i\pi\alpha} \int_a^1 \tilde{\omega}(\zeta) (\zeta + \mu) \left[\zeta^{\frac{1}{2}+\alpha} (\zeta - a)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} d\zeta. \quad (26)$$

В равенстве (26) выделим действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned}
 -H_0 = h\tilde{\omega}(1) - a_1 \int_0^a \tilde{\omega}(\zeta)\sigma(\zeta)d\zeta - [a_1 \sin(\pi\alpha) + b_1 \cos(\pi\alpha)] \times \\
 \times \int_a^1 \tilde{\omega}(\zeta)(\zeta + \mu) \left[\zeta^{\frac{1}{2}+\alpha} (\zeta - a)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1 - \zeta)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} d\zeta; \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 = h\tilde{\omega}(1) - b_1 \int_0^a \tilde{\omega}(\zeta)\sigma(\zeta)d\zeta + [a_1 \cos(\pi\alpha) + b_1 \sin(\pi\alpha)] \times \\
 \times \int_a^1 \tilde{\omega}(\zeta)(\zeta + \mu) \left[\zeta^{\frac{1}{2}+\alpha} (\zeta - a)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1 - \zeta)^{\frac{1}{2}} \right] d\zeta. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Для определения шести действительных параметров a , μ , H , h , Q и $\tilde{\omega}(a)$ получена система их пяти уравнений (10), (22), (23), (27), и (28). Следовательно, число неизвестных параметров на единицу больше, чем число уравнений. Это значит, что задача фильтрации имеет бесчисленное множество решений. Такой результат был ожидаем. Задача о фильтрации с подпором, когда скорость фильтрации под каналом на бесконечности равна нулю, имеет множество решений [1-2]. Чтобы зафиксировать определенное решение, нужно задать координаты одной точки на линии депрессии.

После определения параметров можно определить параметрическое уравнение депрессионной кривой по формуле (24), а по формуле (19) можно определить параметрическое уравнение периметра канала.

Поступила 13.2.1999
Кафедра теоретической механики

ლიტერატურა

1. Аверьянов С.Ф. Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод. В сб: Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод М.: АН СССР, 1956, с. 85-441.
2. Полубаринова-Кочина Д.Я. Теория движения грунтовых вод. М., Наука, 1977. 604. с.

ზ. ციცქიშვილი

ფილტრაციის ამოცანის ამოხსნა საყრდენით
მრუდწირული ფორმის არხიდან
რეზიუმე

ამოხსნილია ბრტყელი სტაციონარული ფილტრაციის ამოცანა მრუდწირული ფორმის კვეთის მქონე არხიდან, როდესაც არხის ქვემოთ უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში ფილტრაციის სიჩქარე სიდიდით ნულის ტოლია.

Z. Tsitsikishvili

On the solution of filtration problem for the channel with curved form section with a prop

Summary

The solution of the flat stationary problem for the channel with curved form section when the downward filtration velocity at the infinity equals to zero is given.

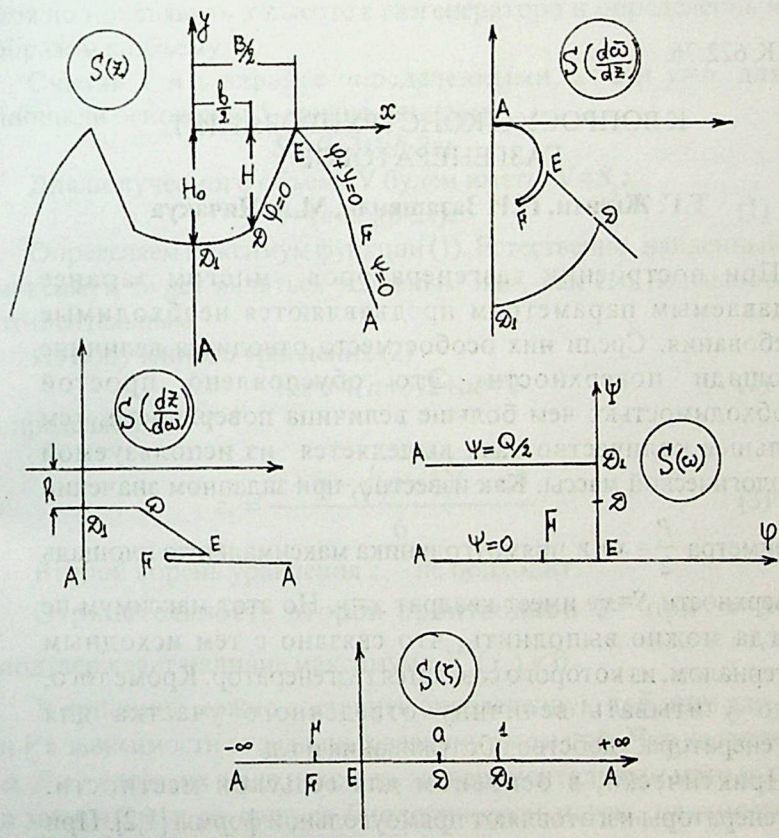


Рис.



УДК 622.76

К ВОПРОСУ О КОНСТРУИРОВАНИИ ГАЗГЕНЕРАТОРОВ

Т.Г. Жгенти, Н.И. Зазашвили, М.А. Чичакуа

При построении газгенераторов многим заранее задаваемым параметрам предъявляются необходимые требования. Среди них особое место отводится величине площади поверхности. Это обусловлено простой необходимостью: чем больше величина поверхности, тем большее количество газа выделяется из используемой биологической массы. Как известно, при заданном значении

периметра $\frac{P}{2} = x + y$ прямоугольника максимальную площадь поверхности $S = xy$ имеет квадрат $x = y$. Но этот максимум не всегда можно выполнить, что связано с тем исходным материалом, из которого создается газгенератор. Кроме того, надо учитывать величину отведенного участка для газгенератора, удобство обслуживания и т.д.

Практически, в основном для сельской местности, газгенераторы изготовляют прямоугольной формы [1,2]. При этом стараются выполнить условие относительного максимума величины площади поверхности газгенератора. С этим вопросом переплетается и другая особенность конструирования газгенераторов. После загрузки газгенератора биологической массой образуется в основном три слоя: $z = \alpha + \beta + \gamma$, в зависимости от плотности используемого вещества. Первый из них, α , самый нижний, который можно



назвать подкладкой, при нагревании питает промежуточный β слой необходимой биомассой. В этом смысле его можно также назвать эммитером. Выработка газовой смеси происходит в β слое, а непосредственным источником газа является γ слой. Исходя из такого деления, определенное требование можно предъявить к высоте z газгенератора и определенным образом к объему V .

Считая x и y заранее определенными, $x=a$ и $y=b$, для площади основания S_1 можно написать:

$$S_1 = (a-2z)(b-2z).$$

Для полученного объема V будем иметь: $V = S_1 z$,

$$V = (a-2z)(b-2z)z. \tag{1}$$

Определяем максимум функции (1). Естественно, найденный максимум будет являться условным или, как его называют, относительным.

Из полученного уравнения (2)

$$12z^2 + 4(a+b)z + ab = 0 \tag{2}$$

определяем z :

$$z_1 = \frac{a+b - \sqrt{(a-b)^2 + ab}}{6} \tag{3}$$

Второй корень уравнения z_2 – не подходит.

Отрицательность второй производной V'' при $x=x_1$ подтверждает наличие максимума $V''(x_1) < 0$.

В принципе можно составить определенную таблицу для z и V в зависимости от заданных величин $x=a$ и $y=b$. Что касается α , β и γ слоев, их надо находить экспериментальным методом, в зависимости от состава биологической массы, плотности применяемого вещества, его поверхностного натяжения и, возможно, от минеральных составляющих используемой воды [3].

Далее, необходимо уделить внимание еще одному параметру. Если газгенератор сконструирован из проводящего материала, например, из проводника первого рода, тогда необходимо биомассу изолировать от стенок установки



(например, покрасить соответствующей краской). В самом деле, если электрические цепи элементарных ячеек биомассы будут замыкаться через стенки установки, тогда, разряжаясь, они будут быстрее истощаться. Таким образом, появится возможность появления относительной неоднородности биомассы. Это обстоятельство будет способствовать уменьшению количества получаемого газа [4].

В дальнейшем надо обратить внимание на следующее: необходимо найти другие пути разрушения образуемых корок на поверхности биомассы. По всей вероятности, надо искать определенную присаду, с помощью которой можно увеличить рабочее время одноразового использования биомассы. Хорошо было бы найти разбавитель-активизатор для вторичного использования отработанной биомассы.

При конструировании необходимо обратить внимание на некоторые вопросы:

Процесс «брожения» или биометаногенез известен достаточно давно. Его открыл Вольта в 1776 году. Получение газа из биологической среды является одним из видов преобразования энергии. Установлено также процентное соотношение выделенной газовой среды, в основном – это метан и углекислый газ. Найден также соответствующий эквивалент энергии биогаза [4].

Настоящая статья посвящена весьма актуальному вопросу, т.е. объяснению механизма выделения газовой смеси из множества влажных семян сельскохозяйственных культур. Экспериментально установлено, что выделение тепла происходит за счет электрических процессов [5].

Ввиду того, что каждое семя, содержащее определенное количество воды, представляет собой источник электрического напряжения с энергоемкими параметрами, емкостью C и индуктивностью L , а также активным сопротивлением R , его можно представить как последовательную электрическую цепь из трех линейных элементов L , R , C .

По закону Кирхгофа можно написать:

$$U_L + U_R + U_C = 0, \quad L \frac{dI}{dt} + RI + U_C = 0, \quad I = C \frac{du_c}{dt}.$$

Из этих соотношений элементарным путем можно получить:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{LI^2}{2} + \frac{CU_C^2}{2} \right) = -RI^2, \quad (4)$$

где I – сила тока, t – текущее время.

Под знаком производной заключена полная реактивная энергия системы. Правая часть выражения (4) является джоулевым теплом. Это соотношение можно формулировать следующим образом: изменение полной реактивной энергии биологического объекта преобразуется в газовую среду при наличии источника напряжения, способного давать электрический ток. Если допустить, что активное сопротивление R равно нулю, тогда получим идеальный случай, т.е. энергия внутри такой среды всегда будет существовать и выделение тепла отсутствовать:

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{CU_C^2}{2} = const$$

Естественно, процесс выделения энергии в виде тепла носит переменный характер или, более точно, меняющийся, т.е. происходит уменьшение как энергии, так и величины частоты. Поэтому при низких частотах можно допустить, что $L \approx 0$.

Если же процесс носит нелинейный характер $L \neq const$, $C \neq const$ и $R \neq const$ и зависит от напряжения $L(U)$, $C(U)$ и $R(U)$, тогда выделение газа также будет наблюдаться, но описать сам процесс будет более сложно.

Таким образом, влажные семена, которые собраны в одну кучу, составляют элементарные хаотично направленные электрические цепи и протекающий процесс носит хаотический характер.

Далее, необходимо отметить, что семя является не только источником электрического напряжения, но и определенным

резонатором. Иначе говоря, на вольтамперной характеристике (ВАХ) имеется так называемый «отрицательный» участок. ВАХ представляет N образную кривую наподобие характеристики туннельного диода. Отрицательное дифференциальное сопротивление вместе с другими электрическими элементами может играть роль усилителя напряжения, генератора гармонических или импульсных колебаний и т.д. [6].

Если будут созданы условия для генерации колебаний для определенного числа семян, то они будут являться дополнительным источником для выделения джоулевого тепла или, иначе, газа. Следовательно, наличие отрицательного участка семян или другой биологической массы создает дополнительные условия для получения энергии [7].

Лабораторными исследованиями было доказано, что каждое увлажненное семя представляет источник постоянного напряжения. Например, была измерена величина напряжения одного зерна пшеницы. Кроме того, с помощью вольтамперного метода была снята соответствующая характеристика $I(U)$ и определено наличие отрицательного участка. Такие участки на вольтамперной характеристике были найдены у воды, что хорошо освещается в научной литературе.

Таким образом, если из увлажненных семян составить соответствующую цепь, то будет наблюдаться разрядный процесс, что и вызывает выделение газа. На основании вышеизложенного можно утверждать, что первичным процессом является разрядный электрический процесс зерен, где каждое из них воздействует друг на друга и является независимым источником напряжения. Заметим, что биологическая клетка растительного или любого другого происхождения тоже проявляет подобные электрические свойства.

*Поступила 14.5.1997
Кафедра радиоэлектроники*

1. Н.И. Зазашвили, М.А. Чичакуа и др. Патент Грузии на изобретение № 26 от 30.03.93. Генератор биогаза.

2. М.А. Чичакуа, Н.И. Зазашвили и др. «Установка для получения биогаза из биомассы». Тезисы докладов. Республиканская конференция Научно-исследовательского института биотехнологии Академии сельского хозяйства Грузии. Октябрь 1993 г., стр.16.

3. Н.И. Зазашвили, М.А. Чичакуа и др. «Получение биогаза из биологической массы». Тезисы докладов. Республиканская конференция Научно-исследовательского института биотехнологии Академии сельского хозяйства Грузии. Октябрь 1993 г., стр.15.

4. Альберт Сассон. Биотехнология: свершения и надежды. М., Мир. 1987, с. 274-279.

5. Т.Г. Жгенти и др. К вопросу выделения тепла из семян, журн. Сельское хозяйство, № 9, 1969.

6. Т.Г. Жгенти. Об одной резервированной автоколебательной модели биологической системы. Труды Тбилисского университета, том 133, 1969, стр. 241-244.

7. Т.Г. Жгенти, Г.Ш. Кеванишвили. О воздействии низкочастотного электромагнитного поля на биологическую клетку, журн. Биофизика, том 36, вып. 3, Москва, 1991, стр. 483-488.

თ. ჟღენტის, ნ. ჯაჯაშვილის. მ. ჭიჭაყუა

გაზგენერატორების კონსტრუირების საკითხისათვის
რეზიუმე

განხილულია გაზგენერატორების ზოგიერთი თავისებურება. ნაპოვნია მათი მოცულობის საჭირო ფარდობითი მაქსიმუმი. გათვალისწინებულია გამოყენებული მასალის უარყოფითი წინააღობის გავლენა.

T. Zhgenti, N. Zazashvili, M. Chichaqua

Towards the construction of gas generators

Summary

Some peculiarities of gas generators are considered. The relative maximum of their volume is determined. The effect of the negative resistance of the material used is taken into account.

УДК 556.3

КОМПЛЕКСНАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ УСТАНОВКА

Т.Г.Жгенти, Н.И. Зазашвили, М.А.Чичакуა

С целью получения переменного магнитного поля в этой установке используется последовательный колебательный контур LC . Из уравнения свободных колебаний

$$L \frac{dI}{dt} + RI + U = 0, \quad I = C \frac{dU}{dt}$$

можно получить соотношение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2} \right) = -RI^2, \quad (1)$$

где L – индуктивность, R – активное сопротивление, C – емкость колебательного контура, I – величина тока, U – напряжение на конденсаторе.

Уравнение (1) показывает, что изменение полной реактивной энергии безвозвратно расходуется в виде тепла. Кроме этого, с помощью энергоемких элементов (LUC) происходит разделение энергии. Если к LC контуру подсоединить генератор гармонических колебаний, то при резонансе в полости катушки индуктивности можно получить магнитное поле достаточно большой напряженности, что будет зависеть и от значения активного сопротивления R .

Заметим, что в полости катушки индуктивности будет хотя и малая, но заметная электрическая составляющая. Поэтому на элементарный заряд будет действовать сила

$$F = qE + q[VH], \quad \frac{d}{dt}(mV) = F_1, \quad (2)$$

где q – заряд, m – масса частицы, V – скорость, E, H – электрическая и магнитная напряженности.

Получая необходимую скорость V , заряд далее будет смещаться с помощью магнитной составляющей по определенной траектории.

Вышеизложенный элементарный подход приведен со следующей целью:

Если в полость индуктивности поместить сухие семена сельскохозяйственных культур и перемещать их с порошкообразной массой минеральных удобрений, то за счет силы (2) в поры семян будут проникать отдельные частицы минеральных удобрений.

Блок-схема прибора-установки приведена на рисунке. Необходимо отметить, что установку можно использовать как в сельском хозяйстве, так и медицине [1,2,3,4,5,6].

Для увеличения урожайности с/х культур и для лечения некоторых заболеваний человека используются блоки 1,4 и 5 (см. рис.). В случае внесения минеральных удобрений непосредственно в сухие семена работают все блоки, что по сравнению с другими методами дает экономию на 98%. Кроме того, урожай зерновых культур увеличивается в среднем на 15-20%.

Поступила 10.5.1999

Кафедра радиоэлектроники

Литература

1. Т.Г. Жгенти, К.А. Нишнианидзе и др. Способ введения в семена удобрений и микроэлементов. Авторское свидетельство № 191928, бюлл. № 4.26.1. 1967, с приоритетом от 1964 года.

2. Т.Г. Жгенти, К.А. Нишнианидзе и др. Способ предпосевной обработки семян электромагнитными волнами низкой частоты. Авторское свидетельство № 206235, бюлл. № 24. 2.12.1967, с приоритетом от 27.5.1963.

3. Т.Г. Жгенти, К.А. Нишнианидзе, Ц.З. Джавахишвили. Эффективность внесения минеральных удобрений в семена кукурузы перед посевом обработкой электромагнитными волнами. Труды Грузинского сельскохозяйственного института, том. LXXX-LXXXI, 1970.

4. Т.Г. Жгенти, Л.Н. Челидзе, К.А. Нишнианидзе и др. Способ лечения парадонтоза. А.С. № 628928, бюлл. № 39, 1978.

5. Т.Г. Жгенти, К.А. Нишнианидзе, Г.К. Кеванишвили, К.К. Катамадзе, А.С. № 7899119, бюлл. № 47, 1980.

6. Т.Г. Жгенти, Н.И. Зазашвили, М.А. Чичакуа. Универсальный прибор электромагнитного воздействия. Тезисы докладов. Международный конгресс «Слабые и сверхслабые поля и излучения в биологии и медицине». Санкт-Петербург 1997, стр. 202.

თ. ჯღენტის, ნ. ზაზაშვილის, მ. ჩიჭაყუას

კომპლექსური ელექტრომაგნიტური დანადგარი
რეზიუმე

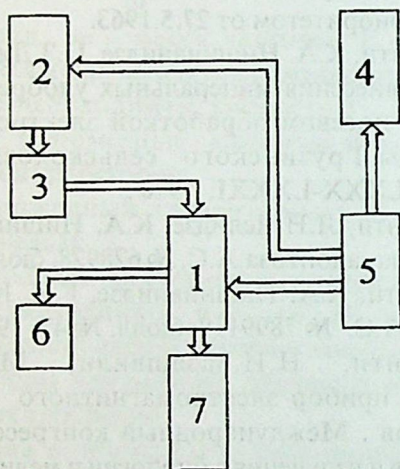
განხილულია უნივერსალური ელექტრომაგნიტური ხელსაწყო-დანადგარი, რომელიც შეიძლება გამოყენებულ იქნეს სოფლის მეურნეობაში და მედიცინაში.

T. Zhgenti, N. Zazashvili, M. Chichagua

A complex electromagnetic device

Summary

A universal electromagnetic device that can be used in agriculture and medicine is discussed.



1. соленоид
2. измельчитель минеральных удобрений
3. приемник порошкообразных минеральных удобрений
4. генератор гармонических колебаний
5. автоматизированный пульт управления установкой
6. приемник части минеральных удобрений
7. приемник обоготенных семян

УДК 556.3, 538.4

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Т.Г.Жгенти, Н.И.Зазашвили, М.А. Чичакуа

Существуют разные методы внесения минеральных удобрений и микроэлементов как непосредственно в почву, так и в семена сельскохозяйственных культур [1,2].

Не вдаваясь в описание принятых методов, рассмотрим способ введения минеральных удобрений непосредственно в сухие семена [3]. В данном случае основное внимание уделяется зерновым культурам.

В основе предполагаемого способа лежит физический механизм движения заряженных частиц в электромагнитном поле. С этой целью необходимо твердообразные минеральные удобрения измельчить и придать им порошкообразную форму. Затем надо смешать их с сухими семенами и полученную массу обработать в электромагнитном поле низкой частоты. Необходимость применения низкочастотного диапазона обусловлена следующим соображением: ввиду того, что каждая частица порошка минеральных удобрений по массе гораздо больше элементарных частиц, т.е. более инерциальна, для их переноса надо использовать именно выбранный диапазон. В зависимости от напряженности электромагнитного поля подбирается и величина экспозиции. Ввиду того, что минеральные удобрения полностью обволакивают каждое семя, вероятность попадания их в поры семян равна почти единице. Многократная проверка степени внедрения их в поры семян с помощью рентгеноструктурного анализа и



аналитического взвешивания полностью подтвердила такой перенос. Такое обогащение семян минеральными удобрениями с помощью специальной аппаратуры происходит в течение нескольких минут. Затем необходимо отделить оставшуюся массу минеральных удобрений, которая используется для другой партии семян. Здесь уместно отметить, что семена одновременно получают активацию за счет энергии электромагнитного поля (4) (табл.1)

Таблица №1

	Урожай У/ га		%
	Семена, обработанные в магнитном поле	Контроль	
1964			
1. Хашури, Квишхетский молочно-овощной совхоз (кукуруза в зерне)	30,0	25,0	120,0
2. Хашури, село Црома, колхоз (кукуруза в зерне)	24,19	26,60	112,0
3. Лагодехи, село Шрома, колхоз (кукуруза в початках)	61,11	40,80	153,2
4. Мцхета, село Ксовриси, колхоз (кукуруза в зерне)	30,81	19,37	159,4

Первые экспериментальные опыты в открытой почве показали высокую эффективность предполагаемого метода. Экономия использования минеральных удобрений этим способом по сравнению с существующими составляет 98-99%.

Начиная с 1963 года проводились многочисленные испытания как на научных участках, так и в производственных условиях [5]. В первую очередь необходимо было установить степень влияния (стимуляции) электромагнитного поля на семена. Поэтому контрольным вариантом мы взяли именно такое



влияние и по отношению к нему выявили эффект непосредственного внедрения минеральных удобрений в сухие семена (табл.2)

Если обратиться к среднему значению за пять лет и отбросить эффект увеличения урожая (5-6%) преимущество данного метода очевидно.

В данный момент ведутся работы по созданию усовершенствованной установки низкочастотного магнитного поля. Предполагается, что будет применен двухступенчатый и автоматический метод обработки семян.

Поступила 10.5.1997

Кафедра радиоэлектроники

Литература

1. Справочник по минеральным удобрениям. Под ред. М.В. Каталимова. Изд. «Сельскохозяйственная литература», М., 1960
2. А.М. Гродзинский и Д.М. Гродзинский. «Краткий справочник по физиологии растений», изд. «Наукова Думка», Киев, 1973.
3. Т.Г.Жгенти, К.А. Нишнианидзе и др. Авторское свидетельство № 191928, бюлл. № 4, 26.1.1967, с приоритетом от 1964 года.
4. Т.Г. Жгенти, К.А. Нишнианидзе и др. Авторское свидетельство № 206235, бюлл. № 24, 2.12.1967, с приоритетом от 27.5.1963.
5. Т.Г.Жгенти, К.А.Нишнианидзе, Ц.З. Джавахишвили. Труды Грузинского сельскохозяйственного института. Том LXXX-LXXXI, 1970.



Таблица №2

Эффективность введения минеральных удобрений в сухие семена с помощью электромагнитного поля на Мухранском учебно-опытном хозяйстве (кукуруза "грузинский круг", в зерне)

Варианты	1965г.		1966г.		1967 г.		1968 г.		1969г.		среднее за пять лет	
	У/га	%	У/га	%	У/га	%	У/га	%	У/га	%	У/га	%
1. Семена, обработанные в магнитном поле 14,9 кГц, 15 мин. (контроль)	44,8	100	46,2	100	58,1	100	48,0	100	64,2	100	52,5	100
2. Введение в семена сульфатаммония, 6,5 кГц, 25 мин.	44,6	99,6	41,1	89,0	67,3	115,9	51,2	106,7	72,8	113,4	55,4	105,5
3. Введение в семена сульфатаммония 14,9 кГц, 15 мин.	49,8	111,2	44,7	96,8	52,6	90,9	47,2	98,3	69,0	107,4	52,7	100,4
4. Введение суперфосфата 6,5 кГц, 25 мин.	44,2	98,7	53,3	115,3	65,2	112,1	57,0	118,8	73,7	114,6	58,7	106,1
5. Введение суперфосфата 14,9 кГц, 15 мин.	44,5	99,3	49,7	107,6	60,0	103,3	55,1	114,9	69,8	108,6	55,8	106,3

ელექტრომაგნიტური ენერგიის ერთი გამოყენების შესახებ
რეზიუმე

მშრალი თესვები ირევა წვრილად დაფშენილ მინერალურ სასუქში და შეიტანება ელექტრომაგნიტურ ველში. სასუქის მცირე ნაწილი შედის უშუალოდ მშრალ თესვებში.

T. Zhgenti, N. Zazashvili, M. Chichagua

On one application of the energy of electric-magnetic field

Summary

Dry seeds are mixed with powdery mineral fertilizers and exposed to an electromagnetic field. Part of the fertilizer enters the dry seeds.



УДК 556.38

УВЕЛИЧЕНИЕ АКТИВНОСТИ ФЕРМЕНТА КАТАЛАЗЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Т.Г.Жгенти, Н.И.Зазашвили, М.А. Чичакуа

Из сплошного спектра электромагнитных волн, излучаемых Солнцем на поверхность Земли, наблюдается три интервала частот: сверхнизкие ($10^{-2}-5$)Гц, низкочастотные ($5 \times 10^2 - 3 \times 10^4$)Гц и высокочастотные, вплоть до радиационного излучения. Заметим, что существование радиационных поясов Земли достаточно активно задерживает этот диапазон частот. Иначе говоря, имеются три «окна прозрачности» в земной атмосфере [1]. Первая из них тесно связана с геомагнитным полем. Возбуждение и регуляция магнитосферы Земли происходит при помощи солнечного ветра [2].

С точки зрения биологического воздействия самыми активными оказались слабые и сверхслабые электромагнитные поля низкочастотного диапазона. Именно эти поля мы успешно применяем для медицинских и сельскохозяйственных целей.

В этом смысле следует отличать три вида воздействия: физическое, биологическое и биохимическое.

При действии на кровь низкочастотных магнитных полей отмечали процесс колебательных движений эритроцитов. С увеличением напряженности магнитного поля отдельные эритроциты гибли [3]. Это явление не зависит от величины частоты воздействующего поля.

Решая уравнение Навье-Стокса в сферической системе координат с учетом внешнего воздействия, можно определить частоту колебания и коэффициент затухания [3]:

$$\omega_n^2 = \frac{T(n-1)(n+2)n}{R^3 \left(\rho_1 + \rho_2 \frac{n}{n+1} \right)}, \quad \beta_n = \frac{\nu_1 \rho_1 n(n-1) + \nu_2 \rho_2 n(n+2)}{R^2 \left(\rho_1 + \rho_2 \frac{n}{n+1} \right)}$$

где T – поверхностное натяжение мембраны эритроцитов, R – радиус, ρ_1, ρ_2 – плотность жидкости внутри и вне эритроцитов, $n = 2, 3, \dots, \nu_1$ и ν_2 – коэффициенты вязкости сред.

При применении слабых низкочастотных магнитных полей вышеуказанного диапазона наблюдались лечебные эффекты. Отметим только некоторые: при лечении парадонтоза [5] (первая и вторая стадии), лейкопении [4], радикулита и ишиаса [6]. В этом отношении накоплен большой материал, а методы успешно применяются на практике.

Что касается биологического выхода, в первую очередь надо отметить увеличение урожайности разных сельскохозяйственных культур. Предложенные нами методы успешно применяются в условиях России, Украины, Белоруссии и Грузии. Особо надо отметить результаты, полученные в научных центрах [7,8].

В этой работе мы хотим уделить внимание биохимическому эффекту при действии магнитного поля звукового диапазона на биологические объекты. Эти эксперименты были проведены в 1966 году на кафедре радиоэлектроники физического факультета университета, в них принимала участие студентка V курса радиофизического отделения Р.Амиридзе.

После воздействия на семена кукурузы низкочастотного магнитного поля необходимо было исследовать активность фермента каталазы методом измерения объема выделенного кислорода. Результаты проведенных работ сведены в таблицу.

Для проведенных экспериментов использовалась соответствующая аппаратура [4,5,8,9].

Отметим, что с целью сравнения в таблицу введен столбец с показателями эффективности полученных результатов в процентах.

Поступила 10.10.1999
Кафедра радиоэлектроники

Определение влияния низкочастотного магнитного поля на фермент каталазы

Дни	N/N n/n	Объем выделенного кислорода (мл) ³					
		Контроль	Частота колебаний магнитного кГц				
			f ₁ =7,2	f ₂ =11,8	к контролю в %	f ₃ =14	f ₄ =19
I	1	30		50	66	40	
	2	29		50	72	45	
	3	30		52	66	40	
II	4	45		58	29	70	
	5	45		60	34	68	
	6	48		60	25	70	
III	7	30	50	57	90	50	40
	8	32	57	60	87	52	39
	9	30	57	60	100	50	39
IV	10	30	80	50	66	54	40
	11	35	80	57	63	61	41
	12	35	84	57	63	59	40
V	13	40	70	82	100	65	52
	14	42	68	80	90	64	50
	15	40	68	82	100	65	51

1. Л.И. Мирошниченко. Солнечная активность и Земля. Наука, М., 1981, с. 110.
2. Т.Г.Жгенти, А.Г. Хантадзе. О механизме саморегуляции магнитосферы Земли. Доклады АН России, том 349, № 3, М., 1996, с. 385-386.
3. Т.Г.Жгенти, Г.Ш. Кеванишвили. О воздействии низкочастотного электромагнитного поля на биологическую клетку. Биофизика, т.36. вып.3, М., 1941, с. 483-488.
4. Р.Я. Вепхвадзе, Т.Г.Жгенти, К.А. Нишнианидзе. А.С. № 506966, Б.И. 1978, № 31.
5. Т.Г.Жгенти, Л.Н. Челидзе, К.А. Нишнианидзе, А.С. № 628928, Б.И. 1978, № 39.
6. Т.Г.Жгенти, К.К. Катамадзе, Г.Ш. Кеванишвили. А.С. № 789119, Б.И. 1980, № 47.
7. Т.Г.Жгенти, К.А. Нишнианидзе. А.С. № 191928, Б.И. 1967, № 4.
8. Т.Г.Жгенти, И.Ф. Сарашвили, Н.Н. Чхенкели. А.С. № 206235, Б.И. № 24, 1967.
9. Т.Г.Жгенти, Н.И. Зазашвили, В.В.Циколия, М.А. Чичакуа. Универсальный прибор электромагнитного воздействия. Международный конгресс "Слабые и сверхслабые поля и излучения в биологии и медицине". Санкт-Петербург, 1997 с. 202.

თ. უღმეტი ნ.ზაზაშვილი, ა. ჭიჭაყვა

ფერმენტ კატალაზის აქტიობის გაზრდა

ელექტრომაგნიტური ველით

რეზუმე

განხილულია დაბალი სიხშირის მაგნიტური ველის მოქმედების შედეგად ბიოქიმიური პროცესების გააქტივება ფერმენტ კატალაზის მაგალითზე.

T. Zhgenti, N.Zazashvili, M. Chichagua

Increase of catalase activity by means of electro-magnetic field

Summary

The activation of biochemical processes under the action of a low-frequency magnetic field is discussed, using the example of catalase.

УДК 51

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში უცხოელ
მოქალაქეთა მოსამზადებელი ფაკულტეტის დაარსების
ისტორია და მათემატიკის სწავლებასთან
დაკავშირებული სირთულეები

თ. მოსეშვილი

საქართველოს უნივერსიტეტებში ქართულ, რუსულ და ინგლისურ ენებზე სწავლობენ უმაღლესი განათლების მისაღებად საქართველოში ჩამოსული უცხო ქვეყნების მოქალაქეები. სწავლების საწყის ეტაპზე უცხოელი მოქალაქეები გადიან ერთწლიან მოსამზადებელ კურსს, რათა დაეუფლონ ენას და ენის შესწავლის პარალელურად ამავე ენაზე გაიმეორონ მათი სპეციალობისათვის საჭირო საგნები; ამასთან, გამეორების პროცესში შეივსონ ცოდნაში არსებული ხარვეზები, შეისწავლონ ის საკითხები, რომლებიც არა აქვთ სამშობლოში ნასწავლი ჩვენგან განსხვავებული სასკოლო პროგრამით, დაეუფლონ ტერმინოლოგიას, ცნებებს, განსაზღვრებებს, დებულებებსა და მსჯელობას შესასწავლ ენაზე, შეიძინონ ცოდნის ისეთი საფუძველი, რომ შეძლონ არჩეული სპეციალობის მიხედვით უმაღლესი განათლების მიღება. ამ მიზნით უცხოელი მოქალაქეების მომზადების დიდი გამოცდილება აქვს ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტს. ჯერ კიდევ 21 წლის წინ, 1979 წელს, საქართველოში პირველად თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში დაარსდა უცხოელ მოქალაქეთა მოსამზადებელი ფაკულტეტი, რომლის სტუდენტები იყვნენ ყოფილ საბჭოთა კავშირში სასწავლებლად ჩამოსული უცხოელი მოქალაქეები. მოგვიანებით, 10 წლის შემდეგ, უცხოელი მოქალაქეებისათვის მოსამზადებელი განყოფილებები გაიხსნა საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტსა და თბილისის სახელმწიფო სამედიცინო უნივერსიტეტშიც. 1995 წ. უნივერსიტეტის რეორგანიზაციასთან

დაკავშირებით შემდგომ მოსამზადებელი ცენტრის ჩამოყალიბების მიზნით გაუქმდა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში უცხოელ მოქალაქეთა მოსამზადებელი ფაკულტეტი. ამჟამად თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში არსებობს მოსამზადებელი ცენტრი, სადაც უცხოელი მოქალაქეები გადაიან მოსამზადებელი სწავლების ერთწლიან კურსს.

არსებობის 16 წლის განმავლობაში თსუ უცხოელ მოქალაქეთა მოსამზადებელ ფაკულტეტზე სწავლობდნენ ავღანეთის, ინდოეთის, შრი-ლანკის, ნეპალის, ბანგლადეშის, ლაოსის, კამპუჩიის, პაკისტანის, ორდანიის, იემენის, ჰალესტინის, სირიის, ტუნისის, ბოლივიის, ვენესუელის, ეკვადორის, მექსიკის, ნიკარაგუის, კოსტა-რიკის, პერუს და ჩილეს მოქალაქეები. ამ ქვეყნებიდან ჩამოსული უცხოელები სწავლობდნენ მოსამზადებელი ფაკულტეტის რუსულენოვან ჯგუფებში. მოგვიანებით, 1989 წლიდან, საქართველოში სასწავლებლად ჩამოდიოდნენ თურქეთის მოქალაქენიც, რომელთაგან უმეტესობა წარმოშობით ქართველები იყვნენ, და მცირე ნაწილი ფერეიდანელი ქართველებისა – ირანიდან. თურქეთიდან ჩამოსული წარმოშობით ქართველი მოქალაქეებისა და ფერეიდანელი ქართველებისათვის ჩამოყალიბდა ქართულენოვანი ჯგუფები. მოსამზადებელ ფაკულტეტზე არსებობდა საინჟინრო-ტექნიკური, ეკონომიკური, სამედიცინო, ფილოლოგიური, იურიდიული, ისტორიული სპეციალობების ჯგუფები. მოსამზადებელი სწავლების ერთწლიანი კურსის გავლის შემდეგ უცხოელი მოქალაქეები სასწავლო წლის ბოლოს აბარებდნენ გამოსაშვებ გამოცდებს. თსუ მოსამზადებელი ფაკულტეტის დამთავრების შემდეგ უცხოელ მოქალაქეთა ნაწილი რჩებოდა საქართველოში და სწავლას აგრძელებდა მათი სპეციალობის მიხედვით თსუ-ს, ყოფილი პოლიტექნიკური ინსტიტუტისა და სამედიცინო ინსტიტუტის შესაბამის ფაკულტეტებზე. უცხოელ მოქალაქეთა უმეტესობა კი მიემგზავრებოდა რუსეთისა და სხვა მოკავშირე რესპუბლიკების ქალაქებში და იქაურ უმაღლეს სასწავლებლებში აგრძელებდა სწავლას მისაღები გამოცდების ჩაბარების გარეშე.

სტატიის ავტორი 16 წლის განმავლობაში ასწავლიდა მათემატიკას თსუ უცხოელ მოქალაქეთა მოსამზადებელი ფაკულტეტის უცხოელ სტუდენტებს. აღნიშნულ ფაკულტეტზე მათემატიკა ისწავლებოდა საინჟინრო-ტექნიკური, ეკონომიკური და სამედიცინო სპეციალობების ჯგუფებში. მოსამზადებელ ეტაპზე უცხოელი სტუდენტებისათვის

სწავლების პროცესი დაკავშირებულია დიდ სირთულეებთან და თავისებურებებთან. სირთულეები უპირველეს ყოვლისა იმით არის გამოწვეული, რომ ენა, რომელზეც სწავლობენ უცხოელი მოქალაქეები, მათთვის უცხო ენას წარმოადგენს და, გარდა იშვიათი გამონაკლისისა, ამ ენას უცხოელი მოქალაქეები სასწავლო პროცესის დასაწყისში სრულებით არ ფლობენ. მათემატიკის შესწავლას მოსამზადებელ ეტაპზე უცხოელი სტუდენტები ენის შესწავლის დაწყებიდან თითქმის თვენახევრის შემდეგ იწყებენ. ამდენად გასაგებია, რომ უცხოელ სტუდენტებს არა აქვთ შესასწავლი ენის ცოდნის ისეთი დონე, რომ შესაძლებელი გახდეს მათთან თავისუფლად ავხსნათ გადასაცემი მასალა, - ახსნის პროცესში გვიხდება მათი ენობრივი ცოდნის დონის გათვალისწინება, იძულებული ვხდებით შევიზღუდოთ სიტყვების გარკვეული მარაგი (რამდენადაც ეს შესაძლებელია); საჭირო ხდება ლექსიკონებისა და სხვა დამხმარე, ე.წ. შუამავალი ენის (მაგალითად: ინგლისურის, ფრანგულის, ესპანურის) მოშველიება. სასწავლო პროცესში სირთულეებს ქმნის ისიც, რომ გვიხდება უცხოელებისათვის დამახასიათებელი თავისებურებების გათვალისწინებაც. მაგალითად, როგორც ცნობილია, არაბულ ქვეყნებში დამწერლობის მიმართულება ჩვენგან განსხვავებით არის მარჯვნიდან მარცხნივ. ამის გამო არაბული ქვეყნების მოქალაქეებთან სწავლების პროცესს ახლავს დამწერლობის მიმართულების შეცვლით გამოწვეული სირთულეებიც. გარდა ამისა, არის განსხვავება ჩვენს ქვეყანასა და უცხოელი სტუდენტების ქვეყნებში არსებულ სასკოლო პროგრამებს შორის, რის გამოც უცხოელ სტუდენტებს პირველად უხდებათ მათთვის უცხო ენაზე შესწავლა ისეთი საკითხებისა, რომლებიც სამშობლოში არ უსწავლიათ. ეს კი, ენობრივი ბარიერის და სწავლებისათვის გამოყოფილი შეზღუდული დროის პირობებში, საკმაოდ ართულებს სასწავლო პროცესს.

ზემოაღნიშნული საერთო სირთულეების გარდა თსუ უცხოელ მოქალაქეთა მოსამზადებელი ფაკულტეტი კიდევ ერთი დიდი სირთულის წინაშე აღმოჩნდა. ეს იყო წიგნებისა ადა სახელმძღვანელოების უქონლობა იმ საგნებში, რომლებიც ისწავლებოდა მოსამზადებელ ეტაპზე. იმის გამო, რომ უცხოელი სტუდენტები ვერ ფლობენ საკმარისად შესასწავლ ენას, შეუძლებელია ასახსნელი მასალა მათ კარნახით ჩავაწერინოთ. ხსენებულ ფაკულტეტზე მომუშავე მასწავლებლები იძულებული ვიყავით გადასაცემი მასალის სრული ტექსტი გარკვევით დაგვეწერა დაფაზე, რათა უცხოელ სტუდენტებს დაფიდან გადაეწერათ.

ამას ემატებოდა მათემატიკაში საშინაო დავალებად მისაცემი ამოცანები, რომლებიც საკარგი შიშების ასევე დაფაზე დაწერა. გარდა იმისა, რომ მასწავლებლისათვის ეს უაღრესად შრომატევადი და დამქანცველი სამუშაო იყო, იგი ძალზე აფერხებდა სასწავლო პროცესს და ამით სერიოზულ სირთულეს უქმნიდა თვით უცხოელ სტუდენტებს. ამ მდგომარეობის გამო სახელმძღვანელოების შექმნის თაობაზე თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტმა მიმართა მოსკოვის ავტოსაგზაო ინსტიტუტს, რომელიც კოორდინირებასა და კურატორობას უწევდა საბჭოთა კავშირში არსებულ უცხოელ მოქალაქეთა მოსამზადებელ ფაკულტეტებს, მაგრამ აღმოჩნდა, რომ ძველი პროგრამის მიხედვით ადრე გამოცემული სახელმძღვანელოები აღარ გააჩნდათ ისეთი რაოდენობით, რომ ჩვენთვის ერთ ეგზემპლარზე მეტი გადმოეცათ. არ იყო ცნობილი, მოხერხდებოდა თუ არა ახალი სახელმძღვანელოების გამოცემა ახლო მომავალში. ყოველივე ამის გამო თსუ უცხოელ მოქალაქეთა მოსამზადებელ ფაკულტეტზე მომუშავე მასწავლებლების წინაშე დაისვა ამოცანა: შეგვედგინა არსებული სასწავლო პროგრამების შესაბამისად სახელმძღვანელოები მოსამზადებელი ფაკულტეტის უცხოელი სტუდენტებისათვის. აღნიშნული ფაკულტეტის მასწავლებლებმა დიდი სასწავლო დატვირთვის მიუხედავად შეძლეს ფაკულტეტის დაარსებიდან 3-4 წელიწადში შეედგინათ და გამოსაქვეყნებლად მოემზადებინათ მათემატიკის, ფიზიკისა და ქიმიის სახელმძღვანელოები უცხოელი სტუდენტებისათვის, რომლებიც თბილისის უნივერსიტეტის გამოცემლობამ გამოსცა.

საქართველოში უცხოელი მოქალაქეებისათვის მოსამზადებელი ფაკულტეტის დაარსებისას არც მათემატიკის სწავლების მეთოდი გაგვაჩნდა. იმხანად (1979 წ.) ყოფილ საბჭოთა კავშირში ჯერ კიდევ არ იყო სრულად შემუშავებული მოსამზადებელ ეტაპზე უცხოელი სტუდენტებისათვის მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა. სასწავლო პროცესზე დაკვირვების შედეგად გამოვლინდა, რომ სსრკ-ში არსებული მეთოდი არ იძლეოდა ამ ეტაპზე მათემატიკის სწავლების მიზნის სრულად მიღწევის შესაძლებლობას.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში უცხოელ მოქალაქეთა მოსამზადებელ ფაკულტეტზე მათემატიკის სწავლების გაუმჯობესების მიზნით ჩატარდა შემდეგი სამუშაოები: უპირველეს ყოვლისა გამოვიკვლიეთ უცხოელი სტუდენტებისათვის მოსამზადებელ ეტაპზე მათემატიკის სწავლებასთან დაკავშირებული სირთულეები და მათი

გამომწვევი მიზეზები, დავადგინეთ უცხოელი სტუდენტების მიერ შესასწავლი ენის ცოდნის ეტაპობრივი დონე; გარდა ამისა, საჭირო გახდა იმის გარკვევა, თუ რა მეთოდით ჰქონდათ მათ ნასწავლი თითოეული საკითხი და რომელი საკითხები არ ჰქონდათ გავლილი სამშობლოში ჩვენგან განსხვავებული სასკოლო პროგრამით. ამ მიმართულებებით 1979-1982 წლებში ჩატარებული გამოკვლევების საფუძველზე შემუშავეთ ალგებრისა და ანალიზის საწყისების საკითხთა სწავლების ახალი, საბჭოთა კავშირში არსებულისგან განსხვავებული მეთოდი ([10], [11], [12]), რომელიც ზემოხსენებული სირთულეების დაძლევისა და მათემატიკის სწავლების მიზნის ეფექტურად მიღწევის შესაძლებლობას გვაძლევს. შემუშავებული მეთოდის შესაბამისად შევადგინეთ მოსამზადებელი ფაკულტეტის უცხოელი სტუდენტებისათვის სახელმძღვანელოები ალგებრასა და ანალიზის საწყისებში ([3], [4], [5], [6]), რომლებიც გამოსცა თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობამ 1982, 1985, 1986 წლებში. ეს წიგნები დაიწერა უცხოელი სტუდენტებისათვის სწავლების პროცესის დამახასიათებელი სირთულეებისა და მათ მიერ რუსული ენის ცოდნის დონის გათვალისწინებით. შევნიშნავთ, რომ ქ. მოსკოვის ქიმიური მანქანათმშენებლობის ინსტიტუტმა 1982 წ. სურვილი გამოთქვა თბილისის უნივერსიტეტის მიერ გამოცემული წიგნის – Т.И. Мосешвили, "Конспект по алгебре и началам анализа" – 100 ცალის შექმნის თაობაზე. აღვნიშნავთ იმასაც, რომ უცხოელი სტუდენტებისათვის თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობამ ხელახლა გამოცემით გაამრავლა ქ. მოსკოვში 1979 წელს გამოცემული წიგნი: В.Н. Свешникова, "Лабораторные работы по научному стилю речи (математика)". სახელმძღვანელოების გამოცემით შესაძლებელი გახდა 1982-1983 სასწავლო წლიდან ჩვენ მიერ შემუშავებული მეთოდით გვესწავლებინა ალგებრისა და ანალიზის საწყისების საკითხები მოსამზადებელი ფაკულტეტის უცხოელი სტუდენტებისათვის. 1982-1984 წლებში ჩატარებული პედაგოგიური ექსპერიმენტის დადებითი შედეგების საფუძველზე მომდევნო წლებში (1984-1994 წ.წ.) მოხდა შემუშავებული მეთოდის აპრობაცია და ამ მეთოდით სწავლების დამკვიდრება თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის უცხოელ მოქალაქეთა მოსამზადებელ ფაკულტეტზე. გამოვიკვლიეთ და დავადგინეთ მოსამზადებელ ეტაპზე უცხოელი სტუდენტებისათვის მათემატიკის სწავლებისათვის საჭირო



მათემატიკური ტერმინოლოგია. ენობრივი ბარიერის დაძლევის მიზნით შევადგინეთ ქართულ-ინგლისურ-ფრანგულ-ესპანური და რუსულ-ინგლისურ-ფრანგულ-ესპანური მათემატიკურ ტერმინთა ლექსიკონები, შესაბამისად, ქართულენოვანი და რუსულენოვანი ჯგუფებისათვის. აქვე დავძენთ, რომ მათემატიკური ტერმინების ინგლისურ და ფრანგულ ენებზე თარგმნით შესაძლებლობა მოგვეცა არაბი, ლაოსელი და კამპუჩიელი სტუდენტების მონაწილეობით შეგვედგინა რუსულ-არაბულ-ქართული, რუსულ-ლაოსური და რუსულ-კამპუჩიური ლექსიკონებიც. შესასწავლ ენაზე უცხოელი სტუდენტებისათვის მეტყველების განვითარებისა და მათემატიკური ცოდნის განმტკიცების მიზნით კითხვა-პასუხის სახით შევადგინეთ მათემატიკური შინაარსის ტექსტები ლინგაფონის კურსისათვის ალგებრისა და ანალიზის საწყისების ძირითად საკითხებზე. ტექსტები შეიცავს თეორიული მასალის ირგვლივ დასმულ შეკითხვებს შესაბამისი პასუხებით, ასევე, მარტივ სავარჯიშოებს პასუხებით. უცხოელი სტუდენტებისათვის მათემატიკის სწავლების პროცესზე ხანგრძლივი დაკვირვების შედეგად დავადგინეთ სასწავლო საათების რაციონალური განაწილება პროგრამის საკითხებზე. შემუშავებული გვაქვს აგრეთვე საკონტროლო სამუშაოებისა და კოლოკვიუმების ჩატარების მეთოდები უცხოელ სტუდენტებთან სასწავლო პროცესის დამახასიათებელი სირთულეების გათვალისწინებით.

ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში დღეს დგას საკითხი უცხოელ მოქალაქეთა მოსამზადებელი ფაკულტეტის აღდგენის თაობაზე. ის გამოცდილება, რაც არსებობს თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში ზემოხსენებულ ფაკულტეტზე მათემატიკის სწავლებასთან დაკავშირებით, დიდ დახმარებას გაუწევს მოსამზადებელ ეტაპზე უცხოელი სტუდენტებისათვის მათემატიკის ეფექტურ სწავლებას.

*შემოსულია 27.7.2000
მათემატიკის დაფუძნებისა და
მეთოდის კათედრა*

1. Д.П. Дорохин, З.Е. Плаксенко. Математика. Пособие для студентов-иностранцев. Москва, 1974, 1976.

2. Ю.А. Кузьмин, Т.Е. Аросева. Тематический диалог (математика) для студентов-иностранцев. Москва, 1985.

3. Т.И. Мосешвили. Конспект по алгебре и началам анализа для студентов-иностранцев, обучающихся на подготовительном факультете для иностранных граждан ТГУ. Тбилиси, 1982.

4. Т. И. Мосешвили. Алгебра и начала анализа, часть I. Пособие для студентов-иностранцев, обучающихся на подготовительном факультете для иностранных граждан ТГУ. Тбилиси, 1985.

5. Т. И. Мосешвили. Алгебра и начала анализа, часть II. Пособие для студентов-иностранцев, обучающихся на подготовительном факультете для иностранных граждан ТГУ. Тбилиси, 1986.

6. Т. И. Мосешвили. Алгебра и начала анализа, часть III. Пособие для студентов-иностранцев, обучающихся на подготовительном факультете для иностранных граждан ТГУ. Тбилиси, 1986.

7. Е.М. Приходько, Т.П. Пасько, Д.Л. Чебова. Математика. Пособие для студентов-иностранцев, обучающихся на подготовительных факультетах вузов СССР. Москва, 1971.

8. В.Н. Свешникова. Лабораторные работы по научному стилю речи (математика) для студентов-иностранцев. Москва, 1979.

9. А.А. Шишкин, В.И. Евсин, Н.А. Корнева. Алгебра и начала анализа. Пособие для студентов-иностранцев, обучающихся на подготовительных факультетах вузов СССР. Москва, 1984.

10. თ. მოსეშვილი. სამეცნიერო-მეთოდოლოგიური ჟურნალი „მათემატიკა“, 1998, №2, გვ. 54.

11. თ. მოსეშვილი. სამეცნიერო-პედაგოგიური ჟურნალი „სკოლა და ცხოვრება“, 1999, №9-10, გვ. 89.

12. იგივე, 1999, № 11-12, გვ. 105.



История основания подготовительного факультета для иностранных граждан в Тбилисском государственном университете и сложности при преподавании им математики

Резюме

В 1979 году, впервые в Грузии, в Тбилисском государственном университете был основан подготовительный факультет для иностранных граждан. Десять лет спустя подготовительные отделения для иностранных граждан были основаны и в техническом и медицинском университетах Грузии. На подготовительном этапе студенты-иностранцы проходят годовой курс обучения. Они изучают иностранный для них язык – грузинский или русский и параллельно повторяют на этом языке разные предметы, в том числе математику. Так как иностранцы не владеют изучаемым языком в достаточной степени, то в процессе преподавания им математики приходится преодолевать языковой барьер. Кроме того пробелы в их знаниях по математике в силу разницы между программами для средних школ в нашей стране и на родине студента-иностранца создают серьезную сложность в процессе преподавания им математики.

В работе передается, в каких условиях создавался подготовительный факультет для иностранных граждан в ТГУ, какова цель преподавания математики, описаны те трудности и особенности, которые характерны для учебного процесса при преподавании математики студентам-иностранцам на подготовительном этапе. В результате исследований найдены пути преодоления этих сложностей. Сформулированы основные положения и методические рекомендации, которые должны способствовать достижению цели эффективного преподавания математики иностранным студентам на подготовительном этапе.

T. Moseshvili

*History of foundation of the preparatory faculty for
the foreign citizens in Tbilisi State University and teaching prob-
lems of mathematics*

Summary

It was first time in Georgia that in 1979 the faculty for preparation of the foreign citizens was established in Tbilisi State University. Ten years later preparatory departments for the foreign citizens were founded in the technical and medical universities too. On the preparatory stage during one year foreign students are studying language on which they are going to continue study. At the same time, by using the same language, they are learning different subjects among which is mathematics. The teaching process of mathematics on the preparatory stage is accompanied with serious difficulties: foreign students have to overcome language barrier; apart from this, there is difference between the programs of school mathematics existing in foreign countries and in our country.

In this paper it is presented the history of foundation of the preparatory faculty for the foreign citizens in Tbilisi State University. Here are described the problems connected with the teaching mathematics to the foreign students on the preparatory stage. The ways how to solve them are found, also methodical recommendations and basic principles which will help to achieve the goals efficiently in the process of teaching mathematics on the preparatory stage for the foreign students.

Содержание

1. Ш.А. Сабашвили. Выдающийся астроном современности	7
2. Ш.А. Сабашвили. Свечение плоского протуберанца в спектральных линиях	14
3. М.Г. Отинашвили. О числе представлений чисел некоторыми квадратичными формами	23
4. Э.Д. Алшибая. О некоторых соотношениях между нормальными распределения гиперплоскостных элементов	43
5. Э.Д. Алшибая. Некоторые свойства линий кривизны и индикатрисы аффинных нормалей гиперповерхности	54
6. Ираклий Дж. Дочвири. О некоторых типах аксиом отделимости и пре-компактных битопологических пространств	75
7. Ирина Дж. Дочвири. Об одном следствии интегральной теоремы Муавра-Лапласа и его применении	81
8. И.А. Зоненашвили, Л.Р. Имедадзе. Обратная задача об эквивалентном подкреплении бесконечных пластин с отверстием	82
9. Г.А. Капанадзе. Об одной задаче изгиба пластинки, занимающей двусвязную область, ограниченную выпуклым многоугольником и прямолинейным разрезом	89
10. Дж. В. Шарикадзе. Уравнение Мизеса для пограничного слоя проводящей жидкости и его приближенное решение	96
11. И. Грдзелидзе. Ламинарный пограничный слой слабопроводящей несжимаемой жидкости с учетом отсоса, градиента давления и однородного магнитного поля	115
12. З.А. Цицкишвили. Решение задачи фильтрации без подпора из канала криволинейного сечения.	116
13. З.А. Цицкишвили. Решение задачи фильтрации из канала криволинейного сечения с подпором	125
14. Т.Г. Жгенти, Н.И. Зазашвили, М.А. Чичакуа. К вопросу о конструировании газгенераторов	134
15. Т.Г. Жгенти, Н.И. Зазашвили, М.А. Чичакуа. Комплексная электромагнитная установка	141
16. Т.Г. Жгенти, Н.И. Зазашвили, М.А. Чичакуа. Об одном применении энергии электромагнитного поля	145
17. Т.Г. Жгенти, Н.И. Зазашвили, М.А. Чичакуа. Увеличение активности фермента каталазы электромагнитным полем ...	150
18. Т.И. Мосешвили. История основания подготовительного факультета для иностранных граждан в Тбилисском государственном университете и сложности при преподавании им математики	162

1. შ. საბაშვილი. თანამედროვეობის გამოჩენილი ასტრონომი	7
2. შ. საბაშვილი. ბრტყელი პროტუბერანციის ნათება სპექტრულ ხაზებში	21
3. მ. ოტინაშვილი. ზოგიერთი კვადრატული ფორმით რიცხვის წარმოდგენათა რაოდენობის შესახებ	42
4. ე. აღშიბაია. ჰიპერსობრტყითი ელემენტების განაწილების ნორმალების შორის ზოგიერთი თანადობის შესახებ	52
5. ე. აღშიბაია. ჰიპერზელაპირის სიმრუდის წირებისა და აფინურ ნორმალთა ინდიკატრისის ზოგიერთი თვისება	64
6. ირაკლი დოჭვირი. ზოგიერთი ტიპის განცალკების აქსიომების და წინაკომპაქტური ბიტოპოლოგიური სივრცეების შესახებ	65
7. ირინა დოჭვირი. მუავრ-ლაპლასის ინტეგრალური თეორემის ერთი შედეგისა და მისი გამოყენების შესახებ	77
8. ი. ზონენაშვილი, ლ. იმედაძე. შებრუნებული ამოცანა ხვრელის მქონე უსასრულო ფირფიტის ექვივალენტური გამაგრების შესახებ	87
9. გ. კაპანაძე. სწორხაზოვანი ჭრილის მქონე ამოზნექილი მრავალკუთხედით შემოსაზღვრული ორადბმული ფირფიტის ღუნვის ერთი ამოცანის შესახებ	95
10. ჯ. შარიტაძე. გამტარი სითხის სასაზღვრო ფენისათვის მიზეხის განტოლება და მისი მიახლოებითი ამოხსნა	106
11. ი. გრძელიძე. სუსტგამტარი არაკუმშვადი სითხის ლამინარული სასაზღვრო ფენი გაუონვის, წნევის გრადიენტისა და ერთგვაროვანი მაგნიტური ველის გათვალისწინებით	107
12. ზ. ციციქიშვილი. ფილტრაციის ამოცანის ამოხსნა უსაყრდენოდ მრულწირული ფორმის არხიდან	123
13. ზ. ციციქიშვილი. ფილტრაციის ამოცანის ამოხსნა საყრდენით მრულწირული ფორმის არხიდან	132
14. თ. ჟღენტი, ნ. ზაზაშვილი, მ. ჭიჭაყუა. გაზგენერატორების კონსტრუირების საკითხისათვის	139
15. თ. ჟღენტი, ნ. ზაზაშვილი, მ. ჭიჭაყუა. კომპლექსური ელექტრომაგნიტური დანადგარი	143
16. თ. ჟღენტი, ნ. ზაზაშვილი, მ. ჭიჭაყუა. ელექტრომაგნიტური ენერჯის ერთი გამოყენების შესახებ	149
17. თ. ჟღენტი, ნ. ზაზაშვილი, მ. ჭიჭაყუა. ფერმენტ კატალაზის აქტიობის გაზრდა ელექტრომაგნიტური ველით	153
18. თ. მოსეშვილი. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში უცხოელ მოქალაქეთა მოსამზადებელი ფაკულტეტის დაარსების ისტორია და მათემატიკის სწავლებასთან დაკავშირებული სირთულეები	155

Contents

1. Sh. Sabashvili. The great astronomer of contemporaneity	7
2. Sh. Sabashvili. Emission of a plane prominence in spectral lines	22
3. M. Otinashvili. On the number of representations of positive integers by quadratic forms	42
4. E. Alshibaia. Some correspondences between the normals of distributions of n-plane elements	53
5. E. Alshibaia. Some properties of curvature lines and the indicatrix of the affine normals of hypersurfaces	64
6. Irakly Dochviri. On some types of separation axioms and pre-compact bitopological spaces	76
7. Irina Dochviri. On one results and use of the Muavre-Laplace integral theorem	81
8. I. Zonenashvili, L. Imedadze. An invers problem of equivalent strengthening of an infinite plate with a hole	88
9. G. Kapanadze. On one problem of bending of a doubly-connected plate with linear section bounded by concave polygon	95
10. J. Sharikadze. Mises's equation of the boundary layer of conducting fluid and its approximate solution	106
11. I. Grdzeldze. On laminar boundary layer of weakly conducting incompressibly fluid with suction, with pressure gradient and with uniform magnetic field	115
12. Z. Tsitskishvili. On the solution of filtration problem for the channel with curved form section without a prop	123
13. Z. Tsitskishvili. On the solution of filtration problem for the channel with curved form section with a prop	132
14. T. Zhghenti, N. Zazashvili, M. Chichaqua. Towards the construction of gasgenerators	140
15. T. Zhghenti, N. Zazashvili, M. Chichaqua. A complex electromagnetic device	143
16. T. Zhghenti, N. Zazashvili, M. Chichaqua. On one application of the energy of electric-magnetic field	149
17. T. Zhghenti, N. Zazashvili, M. Chichaqua. Increase of catalase activity by means of electro-magnetic field	154
18. T. Moseshvili. History of foundation of the preparatory faculty for the foreign citizens in Tbilisi State University and teaching problems of mathematics	163

Редактор издательства Л. Адуашвили
Техредактор Ф. Будагашвили
Корректор Л. Долидзе

Подписано в печать 24.07.01
Формат бумаги 60X84 1/16
Усл. печатные л. 10,5
Учетно-изд. л. 6,02

Заказ № 46

Тираж 120

Цена договорная

Издательство Тбилисского университета,
380028, Тбилиси, пр. И. Чавчавадзе, 14

Издательство “Универсал”,
380028, Тбилиси, пр. И. Чавчавадзе, 1

2002-2



26
40-2000

05356/
12