თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

ISSN—0376—2637

კიბერნეტიკა. გამოყენებითი მათემატიკა

КИБЕРНЕТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

CYBERNETICS. APPLIED MATHEMATICS

17

თბილისი Тбилиси Tbilisi
1995

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
TBILISI UNIVERSITY PRESS

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

ტ. 318 v.

კიბერნეტიკა
გამოყენებითი მათემატიკა
CYBERNETICS
APPLIED MATHEMATICS

თბილისი 1995 Tbilisi

Труды Тбилисского университета

т. 318

КИБЕРНЕТИКА

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Тбилиси 1995

Труды Тбилисского государственного университета им. И. Джавахишвили

თბილისის ივ. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები

318, 1995

სრულად დეკოდირებადი ეფექტური კოდი

მ. კობიაშვილი

სტატიაში განხილულია მიმდევრობით სრულად დეკოდირებადი მყისი კოდი. დეკოდირების სისწრაფე შედარებულია ჰაფმენის კოდის დეკოდირების სისწრაფესთან. ნაჩვენებია მხოლოდ დეკოდირების უპირატესობა და არ არის განხილული კოდის აგების სისწრაფე. ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ერთი კოდის დეკოდირება უფრო სწრაფია მეორე კოდის დეკოდირებაზე, თუ ნაკლებია დეკოდირების დროს შესრულებული ოპერაციების (ბიჯების) რიცხვი).

შემოვიტანთ შემდეგ აღნიშვნები:

n – საწყისი (წყაროს) ალფავიტის სიმბოლოთა რაოდენობა.

q_i – i-ური სიმბოლოს სიხშირე.

l_i – i-ური კოდის სიგრძე.

$L=\sum_{i=1}^{n} l_i$ – გადაკოდირებული ინფორმაციის სიგრძე.

M_j – j-ურ სეგმენტში სიმბოლოთა რაოდენობა.

K – $]\log_2 n[- [\log_2]\log_2 n[\,]$ – დამხმარე აღნიშვნა.

შეკუმშვის განზოგადებული მოდელი ეყრდნობა შემდეგ ალგორითმულ სქემას:

ა) დალაგდეს საწყისი ალფავიტის სიმბოლოები სიხშირის ზრდადობის მიხედვით.

ბ) დალაგებული სიმბოლოები გაიყოს 2^K სეგმენტად ისე, რომ სეგმენტში სიმბოლოთა რაოდენობა წარმოადგენდეს 2-ის რომელიმე ხარისხს და ამავე დროს სიხშირეთა ჯამი საკმაოდ ახლოს იყოს სიდიდესთან:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i/2^K$$

ბ) ყოველი სიმბოლოს კოდი ავაგოთ შემდეგი ფორმულით:

სიმბოლოს კოდი = K თანრიგიან სეგმენტის ნომერს, თუ სეგმენტში მხოლოდ ერთი სიმბოლოა.

სიმბოლოს კოდი = K თანრიგიან სეგმენტის ნომერს II (კონკატენაცია) $]\log_2 M_j[$ თანრიგიანი სიმბოლოს რიგითი ნომერი სეგმენტში, თუ სეგმენტში ერთზე მეტი სიმბოლოა.

ზოგადობის შეუზღუდავად აღწერილი მოსაზრებები უჩვენოთ მარტივი მაგალითის საფუძველზე. ვთქვათ მოცემულია ტექსტი:

This is a simple example of Haffman encoding.

ამ ტექსტისათვის ჰაფმენის ხე ნაჩვენებია 1-ლ სურათზე, ხოლო ჰაფმენის კოდი - 1-ლ ცხრილში.

ავაგოთ კოდი იგივე ტექსტისათვის ზემოთ მოყვანილი ალგორითმით.

ა) დალაგებული სიმბოლოები სიხშირის მიხედვით მოყვანილია ცხრილ 2-ში.

ბ) ზემოთ მოყვანილი მიმდევრობა უნდა გავყოთ 2^3-ზე ნაწილად (სეგმენტად) ისე, რომ ყოველ სეგმენტში იყოს 2-ის ხარისხი რაოდენობის სიმბოლოები და სიხშირეთა ჯამი "ახლოს" იყოს სიდიდესთან $44/2^3 = 5,5$ (იხილეთ ცხრილი 3).

გ) სიმბოლო ' '-ის კოდი იქნება 3 თანრიგიანი სეგმენტის ნომერი (000), რადგან ამ სეგმენტში მხოლოდ ერთი სიმბოლოა. ანალოგიურად E-ს კოდი იქნება 001. სიმბოლო I-ს კოდი იქნება 3 თანრიგიანი სეგმენტის ნომრის (010-ის) კონკატენაცია $]\log_2 2[=1$ თანრიგიან სეგმენტში სიმბოლოს რიგით ნომერთან (0-თან). ე.ი. სიმბოლო I-ს კოდია $010 \| 0 = 0100$. ანალოგიურად A-ს კოდი ტოლია $010 \| 1 = 0101$. ა.შ. სიმბოლო X-ის კოდი იქნება 3 თანრიგიანი სეგმენტის ნომრის (111-ის) კონკატენაცია $]\log_2 4[=2$ თანრიგიან სეგმენტში სიმბოლოს რიგით ნომერთან (11-თან), რაც გვაძლევს 11111-ს.

ჩვენს მიერ აგებული კოდი მოყვანილია ცხრილ 4-ში.

აღვნიშნოთ, რომ ჰაფმენის კოდის სიგრძე მოცემული ტექსტი-
სათვის $L_H = \sum_{i=1}^{18} q_i = 175$, და ჩვენს მიერ აგებული კო-
დის სიგრძე $L' = \sum_{i=1}^{18} q_i' = 175$. მართალია, მოცემული მა-
გალითისათვის $L_H = L'$, მაგრამ საზოგადოდ $L_H \le L'$.

ახლა განვიხილოთ დეკოდირების პროცესი. იმისათვის, რომ მო-
ვახდინოთ ჰაფმენის კოდის დეკოდირება, საჭიროა კოდის ყოველი თან-
რიგის გაანალიზება და მხოლოდ ამის შემდეგ გადავიდეთ შემდეგ თანრი-
გზე. ანუ, როგორც ამბობენ, ვიმოძრაოთ ჰაფმენის ხის ტოტზე. მაგა-
ლითისათვის აღებული ტექსტის დეკოდირებისათვის საჭიროა 175 თანრი-
გის ცალ-ცალკე ანალიზი.

განვიხილოთ ჩვენს მიერ აგებული კოდის დეკოდირების ალგორი-
თმი.

ა) ანალიზი უკეთდება პირველ K თანრიგს ანუ სეგმენტის
ნომერს, თუ ამ სეგმენტში მხოლოდ ერთი სიმბოლოა. ეს სიმბოლო დე-
კოდირებულია და გადავდივართ შემდეგი სიმბოლოს დეკოდირებაზე. ხოლო
თუ სეგმენტში სიმბოლოთა რაოდენობა აღემატება 1-ს, მაშინ ანალიზი
უკეთდება $]\log_2 M_j[$ რაოდენობა თანრიგებს ერთდროულად (სიმბოლოს
ნომერს სეგმენტში). აქ j არის სეგმენტის ნომერი. სიმბოლოს
ინდექსი ცხრილში გამოითვლება ფორმულით:

$$i = B_j + \tau,$$

სადაც τ არის სიმბოლოს ნომერი სეგმენტში და

$$B_0 = 0, \quad B_j = B_{j-1} + M_{i-1}, \quad i = 1, 2^K - 1.$$

სიტყვისთვის დეკოდირება გავუკეთოთ კოდს, რომელიც ნაჩვენე-
ბია სურათ 3-ზე.

პირველ იტერაციაზე ვუკეთებთ 3 თანრიგს 111-ს. რადგან მე-
7-ე ($111_2 = 7$) სეგმენტში სიმბოლოთა რაოდენობა აღემატება 1-ს, ვკითხუ-
ლობთ $]\log_2 4[= 2$ თანრიგს 01-ს. ვითვლით ინდექს:

$$i = B_7 + 01_2 = 15 + 1 = 16.$$

მე-16 სიმბოლოს დალაგებულ მიმდევრობაში არის T.

მესამე იტერაციაზე ვკითხულობთ 3 თანრიგს 101-ს. რადგან მე-5 ($101_2=5$) სეგმენტში სიმბოლოთა რაოდენობა აღემატება 1-ს, ვკითხულობთ $]\log_2 2[=1$ თანრიგს 0-ს. ვითვლით ინდექსს:

$$i = B_5 + 0 = 8.$$

მე-8 სიმბოლოს დალაგებულ მიმდევრობაში არის H და ა.შ.

ჩვენს მიერ აგებულ კოდში ' ' და E-ს დეკოდირებას სჭირდება მხოლოდ სეგმენტის ნომრის ანალიზი, ხოლო დანარჩენების, როგორც სეგმენტის ნომრის, ასევე სიმბოლოს ნომრის სეგმენტში. შესაბამისად სიმბოლო ' ' და E დეკოდირდება ერთ, დანარჩენები - ორ იტერაციაში. მთელი კოდის დეკოდირებას სჭირდება $7+4+2\times 33=77$ იტერაცია. ე.ი. იტერაციების რიცხვი ჰაფმენის კოდის დეკოდირებასთან შედარებით შემცირდა $175/77 \approx 2,27$ ჯერ.

<u>დასკვნა</u>: შემოთავაზებული კოდური სისტემისათვის გვაქვს შემდეგი შეფასებები: $\mu' \geq \mu_H$, მაქსიმალური იტერაციების რიცხვი დეკოდირებისას უდრის $2n$. ამასთან აღნიშნული ალგორითმული სქემა პრაქტიკულად (პროგრამულად) ადვილად განსახორციელებელია.

შემოვიდა 10.IX.1993.

ეგმ-ს მათემატიკური
უზრუნველყოფის კათედრა

ლიტერატურა

1. Хаффмен Д., Построение кодов с минимальной избыточностью, Кибернетический сборник, 3(1961), с.79-87.

2. Хэмминг Р.В., Теория кодирования и теория информации, Пер. с англ.- М. : Радио и связь, 1983.

3. Abramson N., Information theory and coding, New York: Mc-Gray-Hill 1963.

М.М.Кониашвили

БЫСТРО ДЕКОДИРУЕМЫЙ ЭФФЕКТИВНЫЙ КОД

Резюме

Расомотрен последовательно быстро декодирующий мгновенный код. Скорость декодирования сравнена с кодом Хаффмена. Показано превосходство только в скорости декодирования.

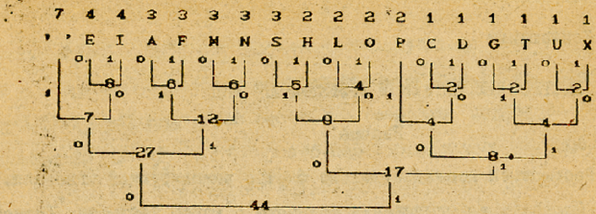
M.Koniashvili

FAST DECODABLE EFFECTIVE CODE

Summary

A sequentially fast decoding code is considered and its decoding speed is compared with the Haffman code. The former has been found to be superior only in the speed of decoding.

სურათი 1.



ცხრილი 1.

სიმბოლო	სიხშირე	ჰაფმენის კოდი	კოდის სიგრძე
' '	7	000	3
E	4	0010	4
I	4	0011	4
A	3	0100	4
F	3	0101	4
M	3	0110	4
N	3	0111	4
S	3	1000	4
H	2	1001	4
L	2	1010	4
O	2	1011	4
P	2	11000	5
C	1	11001	5
D	1	11011	5
G	1	11100	5
T	1	11101	5
U	1	11110	5
X	1	11111	5

ცხრილი 2.

სიმბოლო	' '	E	I	A	F	M	N	S	H	L	O	P	C	D	G	T	U	X
სიხშირე	7	4	4	3	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1

ცხრილი 3.

სიმბოლო	' '	E	I A	F M	N S	H L	O P C D	G T U X
სიხშირთა ჯამი	7	4	7	6	6	4	4	4
სეგმენტი	0	1	2	3	4	5	6	7

ცხრილი 4.

სიმბოლო	სიხშირე	სეგმენტი	სიმბოლოს ნომერი სეგმენტში	კოდი
' '	7	$0 = 000_2$	–	000
E	4	$1 = 001_2$	–	001
I	4	$2 = 010_2$	0	0100
A	3	$2 = 010_2$	1	0101
F	3	$3 = 011_2$	0	0110
M	3	$3 = 011_2$	1	0111
N	3	$4 = 100_2$	0	1000
S	3	$4 = 100_2$	1	1001
H	2	$5 = 101_2$	0	1010
L	2	$5 = 101_2$	1	1011
O	2	$6 = 110_2$	00	11000
P	2	$6 = 110_2$	01	11001
C	1	$6 = 110_2$	10	11010
D	1	$6 = 110_2$	11	11011
G	1	$7 = 111_2$	00	11100
T	1	$7 = 111_2$	01	11101
U	1	$7 = 111_2$	10	11110
X	1	$7 = 111_2$	11	11111

სურათი 2.

სიმბოლო: T H I S ' ' I S

კოდი: 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1

ოპერაცია: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

Труды Тбилисского государственного университета им. И. Джавахишвили

თბილისის ივ. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები

318, 1995

დრეკადობის მათემატიკური თეორიის დინამიკის შერეული ტიპის მეორე ძირითადი ამოცანის ამოხსნა [illegible] მიმდევრობით – [illegible] სივრცეებში

ქ. მელაძე, ჯ. გაჩეჩილაძე

განვიხილოთ დინამიკის შერეული ტიპის მეორე ძირითადი ამოცანა [1]: ცილინდრში $D^+\times[0,\infty)$ ვიპოვოთ რეგულარული ვექტორი $\vec{u}\in C^1(\overline{D}^+\times[0,\infty))\cap C^2(D^+\times[0,\infty))$, რომელიც არის შემდეგი განტოლების ამონახსნი:

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=\mu\Delta\vec{u}+(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u}+\vec{P}_0 \qquad (1)$$

და აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\forall(\vec{z},t):\{T(\partial_x,\vec{n})\vec{u}(\vec{z},t)\}^+\equiv\lim_{D\ni\vec{x}\to\vec{z}\in S}T(\partial_x,\vec{n})\vec{u}(\vec{x},t)=0, \qquad (2)$$

$(\vec{z},t)\in S\times[0,\infty)$, S – D არის საზღვარია:

$$\forall\vec{x}\in D^+:\vec{u}(\vec{x},0)=0,\qquad \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}(\vec{x},0)=0, \qquad (3)$$

D – ერთეულოვანი ბურთია, $T(\partial_x,\vec{n}(\vec{x}))$ – დაძაბულობის ოპერატორია, $\vec{n}(\vec{x})$ – ერთეულოვანი ვექტორია, რომელიც S-ის მართობია $\vec{x}$ წერტილში, λ და μ – ლამეს კოეფიციენტებია. ნავარაუდევია აგრეთვე, რომ სრულდება შეთანხმებულობის პირობები [1]. ამ ამოცანის ამონახსნი არსებობს და ერთადერთია [1

(1)-(3) ამოცანის რიცხვითი ამოხსნისათვის განვიხილოთ შემდეგი ეკონომიური სხვაობიანი სქემა ფაქტორიზებული ოპერატორით [3]:

$$(\hat{E}+\tau^2 R)\vec{y}_{\bar{t}t}=\Lambda\vec{y}+\vec{\varphi}, \tag{4}$$

$$\hat{\bar{T}}\vec{y}(\vec{x},t)=0,\quad \vec{x}\in S,\quad t\in\bar{\omega}_\tau, \tag{5}$$

$$\vec{y}(\vec{x},0)=0,\quad \vec{y}_t(\vec{x},0)=\frac{1}{2}\tau\vec{P}_0(\vec{x},0),\quad \vec{x}\in\omega_h, \tag{6}$$

სადაც $\vec{\varphi}=\vec{P}_0$ - ამოსავალი განტოლების მარჯვენა მხარეა, ოპერატორი $R=\sum\limits_{\alpha=1}^{3}R_\alpha=-6\sum\limits_{\alpha=1}^{3}y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ განისაზღვრება [3]-ში, τ - დროითი ბიჯია; ოპერატორი Λ ასეთია [3]:

$$\Lambda u^s=\sum_{\beta=1}^{3}\Big[\mu u^s_{\bar{x}_\beta x_\beta}+\frac{1}{2}(\lambda+\mu)\big(u^\beta_{\bar{x}_\beta x_s}+u^\beta_{\bar{x}_s x_\beta}\big)\Big], \tag{7}$$

$$s=1,2,3,$$

ხოლო ოპერატორი $\hat{\bar{T}}$ კი ასეთი [4]:

$$\hat{\bar{T}}\vec{u}=\Big\{\big[(2\mu+\lambda)u_{1\bar{x}}+\lambda u_{2\bar{y}}+\lambda u_{3\bar{z}}\big]n_1+\mu(u_{1\bar{y}}+u_{2\bar{x}})n_2+\mu(u_{1\bar{z}}+u_{3\bar{x}})n_3,$$

$$\mu(u_{2\bar{x}}+u_{1\bar{y}})n_1+\big[\lambda u_{1\bar{x}}+(\lambda+2\mu)u_{2\bar{y}}+\lambda u_{3\bar{z}}\big]n_2+\mu(u_{2\bar{z}}+u_{3\bar{y}})n_3,$$

$$\mu(u_{3\bar{x}}+u_{1\bar{z}})n_1+\mu(u_{3\bar{y}}+u_{2\bar{z}})n_2+\big[\lambda u_{1\bar{x}}+\lambda u_{2\bar{y}}+(\lambda+2\mu)u_{3\bar{z}}\big]n_3\Big\} \tag{8}$$

(5)-(6) სქემით $j+1$ -ე დროით შრეზე $\vec{y}^{\,j+1}$ -ის მიღება დაიყვანება თანმიმდევრობით შემდეგი ამოცანების ამოხსნაზე [3]:

$$A)\ (\hat{E}+\tau^2 R_1)\vec{w}_{(1)}=\vec{F},\quad \vec{F}=\prod_{\alpha=1}^{3}(\hat{E}+\tau^2 R_\alpha)\vec{y}_{\bar{t}}+\tau(\Lambda\vec{y}+\vec{\varphi}),$$

$$B)\text{-}C)\ (\hat{E}+\tau^2 R_\alpha)\vec{w}_{(\alpha)}=\vec{w}_{(\alpha-1)},\quad \alpha=2,3,$$

$$\vec{y}^{\,j+1}=\vec{y}^{\,j}+\tau\vec{w}_{(3)}, \tag{9}$$

სადაც $\vec{w}_{(\alpha)}$ -თვის გვაქვს შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$\begin{cases}\vec{W}_{(1)}=(\hat{E}+\tau^2R_2)(\hat{E}+\tau^2R_3)\vec{\mu}_{\bar{t}}, & x=0,1; \quad (10)\\ \vec{W}_{(2)}=(\hat{E}+\tau^2R_3)\vec{\mu}_{\bar{t}}, & y=0,1; \quad (11)\end{cases}$$

$$\vec{W}_{(3)}=\vec{\mu}_{\bar{t}}=\frac{\vec{y}^{\,j}-\vec{y}^{\,j-1}}{\tau}, \quad j=1,2,\ldots \qquad (12)$$

$\vec{y}^{\,j}$ გამოითვლება (5) განტოლებათა სისტემიდან, რისთვისაც ამ სისტემას გარდავქმნით შემდეგი მსჯელობის საფუძველზე: $y_K^j(x_n-\delta_n h)$-თვის შეიძლება დავწეროთ გამოსახულება:

$$y_K^j(x_n-\delta_n h)=y_K^{j-1}(x_n-\delta_n h)+\tau y_{K\bar{t}}^{j-1}(x_n-\delta_n h)+O(\tau^2), \qquad (13)$$

$$\delta_n=\delta_n(x_n,x_n-h,x_n+h)=\begin{cases}1, & x_n=x_n,\ x_n-h\in D,\ x_n+h\bar{\in} D,\\ -1, & x_n=x_n,\ x_n-h\bar{\in} D,\ x_n+h\in D.\end{cases} \qquad (14)$$

(13)-ის საფუძველზე განსაზღვრით. (5)-ში შემავალი წარმოებულები საზღვარზე შემდეგნაირად:

$$(\vec{y}^{\,j}_{Kx_n})^+=\frac{\delta_n}{h}y_K^j(x_n)-\frac{2\delta_n}{h}y_K^{j-1}(x_n-\delta_n h)+\frac{\delta_n}{h}y_K^{j-2}(x_n-\delta_n h), \qquad (15)$$

რის შემდეგ (5)-ის ნაცვლად $\vec{y}_K^{\,j}(\vec{x})$-თვის ვიღებთ სისტემას:

$$\hat{T}'\vec{y}(\vec{x},t)=\vec{b}^{\,j}, \qquad (16)$$

რომელიც იხსნება უშუალოდ.

მოგვყავს შემოთავაზებული რიცხვითი ალგორითმის შესაბამისი გამოთვლების ბლოკ-სქემა "მიმდევრობითი მანქანისათვის" (ნახ.1). შევნიშნოთ, რომ $j=1$ შრისთვის გამოთვლები გამოყოფილია ცალკე, ვინაიდან (9) სისტემების ამოხსნისას (10) და (11) სასაზღვრო პირობები აიღება უშუალოდ საწყისი მონაცემების საფუძველზე, ხოლო (16) სისტემებში $\vec{b}^{\,j}$-ს გამოსახულებები აგრეთვე გამოითვლება უშუალოდ

საწყისი პირობების საფუძველზე და ამ წრისთვის აქვთ განსხვავებული სახე. ციკლი წრეების მიხედვით იწყება $j=2$ -დან.

განვიხილოთ ბლოკ-სქემის I ბლოკი: ეს ბლოკი შეიცავს შემდეგ ქვეპროგრამებს:

$N1$ - ეს ქვეპროგრამა ადგენს N ნომრის მიხედვით $(x_1(N)-\delta_1(N)h, x_2(N), x_3(N))$ სამეულის ნომერს (K -ს);

$N2$ თანადება სამეულს $(x_1(N), x_2(N)-\delta_2(N)h, x_3(N))$:

$N3$ - $(x_1(N), x_2(N), x_3(N)-\delta_3(N)h)$-ს;

$NS1$, $NS2$, $NS3$ - კუბის წახნაგების მიხედვით კვანძების განაწილების ქვეპროგრამები;

B - $b_1^j(N)$, $b_2^j(N)$, $b_3^j(N)$-ების გამოთვლის ქვეპროგრამა;

D - დეტერმინანტების დათვლის ქვეპროგრამა;

T - $y_1^j(N)$, $y_2^j(N)$, $y_3^j(N)$ - ების დათვლის ქვეპროგრამა;

M - $\mu_{1t}^j(N)$, $\mu_{2t}^j(N)$, $\mu_{3t}^j(N)$-ების დათვლის ქვეპროგრამა;

ბლოკ-სქემის II ბლოკი შეიცავს შემდეგ ქვეპროგრამებს:

N - კვანძის ნომრის ძიების ქვეპროგრამა;

$N12$ - $(x_1(N)-\delta_1(N)h, x_2(N)-\delta_2(N)h, x_3(N))$ კვანძის ნომრის ძიების ქვეპროგრამა;

$N13$ თანადება $(x_1(N)-\delta_1(N)h, x_2(N), x_3(N)-\delta_3(N)h)$-ს;

$N23$ თანადება $(x_1(N), x_2(N)-\delta_2(N)h, x_3(N)-\delta_3(N)h)$-ს;

F -(9)-ის A) ჯგუფის სისტემების მარჯვენა მხარეების გამოთვლის ქვეპროგრამა;

W - (9)-ში შემავალი სისტემების ამოხსნის რაიმე ცნობილი მეთოდის შესაბამისი ქვეპროგრამა;

Y - $y_1^{j+1}(N)$, $y_2^{j+1}(N)$, $y_3^{j+1}(N)$ - ების გამოთვლის ქვეპროგრამა.

განვიხილოთ აღწერილი ზოგადი მიმდევრობითი გამოთვლითი პროცესის "გაპარალელების" სქემა.

პარალელური გამოთვლების სქემა

გვაქვს "ცენტრალური მანქანა" (ცმ), რომელშიც ჩაწერილია პროგრამის საწყისი მონაცემები და ხდება გამოთვლების ყველა შედეგების (როგორც საშუალედო, ასევე საბოლოოს) დამახსოვრება, და პარალელური პროცესორები (პპ) თავისი ლოკალური მეხსიერებებით და მართვის მოწყობილობებით (ნახ. 2).

შევნიშნოთ, რომ მთლიანად გვაქვს $(N+1)^3$ კვანძი, კუბის შიგნით არის $(N-1)^3$ კვანძი, ხოლო ზედაპირზე – $(N+1)^3-(N-1)^3$ კვანძი. ნახ. 1-ზე მოცემული ბლოკ-სქემის I ბლოკისთვის პარალელური გამოთვლები შეიძლება ჩატარდეს ყველა [illegible] ქვეპროგრამით. შევაფასოთ, რამდენი პარალელური პროცესორი იქნება საჭირო ამ გამოთვლების ჩასატარებლად. წინასწარ შევნიშნოთ, რომ კუბის შემთხვევაში $N<8$-თვის ზედაპირის კვანძების რაოდენობა მეტია შიგა კვანძების რაოდენობაზე: $(N+1)^3-(N-1)^3 \geq (N-1)^3$. მაშასადამე, $N<8$-ის შემთხვევაში უნდა ავიღოთ

$$P = 3\times[(N+1)^3-(N-1)^3] = 3\times[2\times(3N^2+1)] \qquad (17)$$

პროცესორი. $N>8$-ის შემთხვევაში კი უნდა ავიღოთ

$$P = 3\times(N-1)^3 \qquad (18)$$

პროცესორი. ეს პროცესორები $Г1, Г2, \ldots, Г6$ წახნაგების შესაბამისად პირობითად დავყოთ ექვს "მანქანად", რომლებიც იდენტურ ფუნქციებს ასრულებენ. შევნიშნოთ, რომ პროცესორების რაოდენობა "მანქანებში" არათანაბარია, ვინაიდან კუბის წიბოს წერტილები, რომლებიც ორი წახნაგის საზღვარზე მდებარეობენ, ზედაპირისადმი ნორმალის ცალსახობის (კოორდინატებზე უწყვეტი დამოკიდებულების) პირობიდან უნდა მივაკუთვნოთ ყოველთვის ერთ წახნაგს. ამის გათვალისწინებით ზოგადად მივიღებთ პპ-ების "პირობით მანქანებად" განაწილების ასეთ სქემას (ნახ. 3).

ახლა განვიხილოთ ნახ.1-ზე მოცემული ბლოკ-სქემის II ბლოკი. შევნიშნოთ, რომ (9)-ში A), B), და C) სისტემების ჯგუფები იყოფა სამ-სამ ქვეჯგუფად: ყოველ ცალკეულ ქვეჯგუფში გვაქვს $(N-1)^2$ სისტემა, რომელთა ამოხსნა შეიძლება ვაწარმოოთ პარალელურად. აგრეთვე პარალელურად ვაწარმოებთ გამოთვლებს ქვეჯგუფების მიხედვით ყველა აღნიშნული ქვეპროგრამით შიგა კვანძებში. ცხადია, რომ საჭირო პარალელური პროცესორების რაოდენობა იქნება $3\times(N-1)^2$.

თუ განვიხილავთ პროცესს მთლიანობაში $N \leq 8$ -ის შემთხვევაში, მაშინ ზედაპირის კვანძებთან მუშაობისას (I ბლოკი) გამოთვლებს ვაწარმოებთ ნახ.3-ზე მოცემული სქემის მიხედვით. პროცესის II ბლოკზე გადასვლისას პროცესორების ექვს "მანქანად" პირობითი დაყოფა არ არის საჭირო და არსებული პროცესორების საერთო რაოდენობიდან მუშა მდგომარეობაში იმყოფება $3(N-1)^2$ პროცესორი. გამოთვლები ამ ეტაპზე მიმდინარეობს შემდეგი სქემით (ნახ.4).

$N>8$-ის შემთხვევაში პროცესორების საერთო რაოდენობა 18. I ბლოკისთვის გამოთვლები წარიმართება შემდეგი სქემით (ნახ.5). გამოთვლების II ბლოკისთვის მუშა მდგომარეობაში იქნება $3(N-1)^3$ პროცესორი (ნახ.6).

განვიხილოთ ზემოაღწერილი პარალელური გამოთვლების სქემის რეალიზაცია მონაცვლეობით მიმდევრობით - პარალელურ (მმპ) სისტემებზე [2]. წარმოვადგინოთ გამოთვლითი პროცესი შესაბამისი ცვლილების დიაგრამის [2] საშუალებით. ამ დიაგრამის i-ურ პარალელურ-მიმდევრობით რგოლს აქვს შემდეგი სახე (ნახ.7). ამ ნახაზზე მოცემული მონაკვეთები აღნიშნავენ ცალკეული ამოცანების შესრულებისათვის საჭირო დროს i-ური რგოლის პარალელურ ბიჯზე; S_i - "მიმდევრობითი" ბიჯია; P_i - i -ური რგოლის "პარალელური" ბიჯია.

პარალელური გამოთვლების განხილული სქემისთვის გვაქვს 13 მიმდევრობითი და 12 პარალელური ბიჯი. განვიხილოთ ნახ.[illegible]-ის შესაბა-

ჩისი ყველა ჩვილი და გამოთვლილი დრო t_1, რომელიც საჭიროა მთელი სამუშაოს შესასრულებლად მიმდევრობითი ალგორითმის შემთხვევაში ერთი პროცესორის მიერ, დრო t_p, რომელიც ესაჭიროება სამუშაოს შესასრულებლად მმპ-ს პარალელურ P ბიჯზე, და, აგრეთვე, სწრაფ-ქმედების გაზრდის კოეფიციენტი (სვკ):

$$\sigma = \frac{t_1}{t_p + t_s}, \qquad (19)$$

სადაც t_s არის S მიმდევრობითი ბიჯის შესაბამისი დრო.

$S1$ ბიჯი: $NS1, NS2, \dots, NS6$ კვაპროგრამების რეალიზაცია "ცენტრალურ მანქანაზე"; სათანადო დრო t_{S1}.

$P1$ ბიჯი: $N1, N2, N3, B, D$ კვაპროგრამების რეალიზაცია. ყოველ პპ-ზე სრულდება შემდეგი სამუშაო: ხორციელდება რომელიმე NI $(I=1,2,3)$ პროგრამა, შესაბამისად B კვაპროგრამა და, ამის შემდეგ, ყოველი ΓI $(I=1,\dots,6)$-თვის – D კვაპროგრამა. თუ $N \leq 6$, მაშინ ამოცანების რიცხვი, რომელიც ხორციელდება ერთ პპ-ზე, $n=p$, ხოლო სხვა შემთხვევაში – $n<p$.

$$t_{P1} = \max_m \left[t_{N1}(m) + t_B(m) + t_D(m)\right], \quad m = 1, \dots, n, \qquad (20)$$

$$n = 6(3N^2+1).$$

დრო, რომელიც საჭიროა მიმდევრობით იგივე გამოთვლების ჩასატარებლად, იქნება:

$$t_1 = \sum_{m=1}^{6(N^2+1)} \left[t_{NI}(m) + t_B(m) + t_D(m)\right]. \qquad (21)$$

მაშასადამე, "მიმდევრობითობის კოეფიციენტი" [2] და სვკ პირველი რგოლისთვის იქნება:

$$f_1 = \frac{t_{S1}}{t_{S1}+t_1}, \quad \sigma_1 = \frac{t_1}{t_{S1}+t_{P1}} = \frac{1}{f + \frac{t_{P1}}{t_1}}. \qquad (22)$$

$S2$ ბიჯი: $P1$ პარალელურ ბიჯზე მიღებული შედეგების ჩაწერა "ცენტრალურ მანქანაში". სათანადო დრო t_{S2}.

$P2$ ბიჯი: T და M ქვეპროგრამების რეალიზაცია. საჭირო პრო-ცესორების რაოდენობა იგივეა, რაც $P1$ ბიჯზე.

$$t_{P2} = \max_m [t_M(m) + t_T(m)], \tag{23}$$

$$m = 1, \dots n, \quad n = 6(3N^2+1),$$

$$t_2 = \sum_{m=1}^{6(3N^2+1)} \left(t_M(m) + t_T(m)\right), \tag{24}$$

$$f_2 = \frac{t_{S2}}{t_{S2} + t_2}, \quad \sigma_2 = \frac{t_2}{t_{S2} + t_{P2}} = \frac{1}{f_2 + \frac{t_{P2}}{t_2}} \tag{25}$$

$S3$ ბიჯი: $P2$ ბიჯზე მიღებული შედეგების ჩაწერა "ცენტრალურ მანქანაში", N ქვეპროგრამის რეალიზაციის საფუძველზე (9) სის-ტემებისთვის უცნობების გადანომრვა კვანძების ნომრის მიხედვით; სათანადო დრო- t_{S3}. ამ ბიჯის შემდეგ ცნობილია, თუ რომელ სი-სტემას რომელი პპ ხსნის შემდეგ "პარალელურ ბიჯზე". ხდება $3(N-1)^2$ ამოცანის ამოხსნა და ე.ი. ყოველთვის $n < p$.

$P3$ ბიჯი: N, $N12$, $N23$, F და W ქვეპროგრამების რეალიზაცია $A)$ ჯგუფისთვის.

$$t_{P3} = \max_m [t_N(m) + t_{N12}(m) + t_{N13}(m) + t_{N23}(m) + \tag{26}$$

$$+ t_F(m) + t_W(m)], \quad m = 1, \dots, n, \quad n = 3(N-1)^2;$$

$$t_3 = \sum_{m=1}^{3(N-1)^2} [t_N(m) + t_{N12}(m) + t_{N13}(m) + t_{N23}(m) + \tag{27}$$

$$+ t_F(m) + t_W(m)].$$

f_3 და σ_3 გამოითვლება (22)-ის ანალოგიურად.

$S4$ ბიჯი: W მატრიცის რეალიზაციის შედეგების დამახსოვრება "ცენტრალურ მანქანაში"; სათანადო დრო – t_{S4}.

$P4$ ბიჯი: N და W მატრიცების რეალიზაცია ჯგუფისათვის B).

$$t_{P4}=\max_{m}\left[t_N(m)+t_W(m)\right], \tag{28}$$

$$m=1,\dots,n, \qquad n=3(N-1)^2.$$

$$t_4=\sum_{m=1}^{3(N-1)^2}\left(t_N(m)+t_W(m)\right). \tag{29}$$

f_4 და σ_4 გამოითვლება წინა შემთხვევების ანალოგიურად.

$S5$ ბიჯი: $P4$ ბიჯზე მიღებული W მატრიცის რეალიზაციის შედეგების დამახსოვრება "ცენტრალურ მანქანაში"; სათანადო დრო $t_5=t_{S4}$.

$P5$ ბიჯი: N და W მატრიცების რეალიზაცია C) ჯგუფისთვის.

$$t_{P5}=t_{P4}, \quad t_5 = t_4, \quad f_5=f_4, \quad \sigma_5=\sigma_4 .$$

$S6$ ბიჯი: $P5$ ბიჯზე მიღებული W მატრიცის რეალიზაციის შედეგების დამახსოვრება "ცენტრალურ მანქანაში"; სათანადო დრო – $t_{S6}=t_{S5}$.

$P6$ ბიჯი: Y მატრიცის რეალიზაცია.

$$t_{P6}=\max_{m} t_Y(m), \quad m=1,\dots,n, \quad n=3(N-1)^2, \tag{30}$$

$$t_6=\sum_{m=1}^{3(N-1)^2} t_Y(m) \tag{31}$$

f_6 და σ_6 გამოითვლება წინა შემთხვევების ანალოგიურად.

$S7$ ბიჯი: σ_6 ბიჯზე მიღებული შედეგების ჩაწერა "ცენტრალურ მანქანაში"; სათანადო დრო – t_{S7}.

$P7$ ბიჯი: აქედან დაწყებული ხდება გადასვლა $j=j+1$ (იხ. ნახ.1) და ეს ბიჯი ფაქტიურად იმეორებს $P1$ ბიჯს. ასევე გვექნება, რომ $S8$ ბიჯი იმეორებს $S2$ ბიჯს, $P8$ იმეორებს $P2$-ს და $S9$ იმეორებს $S3$-ს, $P9-P3$, $S10-S4$, $P10-P4$, $S11-S5$, $P11-P5$, $S12-S6$, $P12-P6$, $S13-S7$. ყველა საბოლოო მომდევნო ბიჯება ხდება "ცენტრალური მანქანიდან".

ახლა ჩვენ განვიხილავთ ვარიანტის დიაგრამის ცალკეული ბლოკებისთვის სგკ σ. თუ გამოთვლითი სამუშაო მოითხოვს რამოდენიმე მიმდევრობით და პარალელურ ბიჯს, ამ შემთხვევაში შეგვიძლია განვმარტოთ სგკ σ როგორც დრო, რომელიც საჭიროა ამ სამუშაოს შესასრულებლად ერთპროცესორიან მანქანაზე, შეფარდებული იმ დროსთან, რომელიც საჭიროა მის შესასრულებლად მპკ-ზე:

$$\sigma=\frac{T_1}{T_P+T_S}, \tag{32}$$

სადაც $T_1=\sum\limits_{K=1}^{L}\left(t_{SK}+\sum\limits_{m=1}^{n} t_K(m)\right)$, $T_P=\sum\limits_{K=1}^{L}\max\limits_{m} t_K(m)$, $T_S=\sum\limits_{K=1}^{L} t_{SK}$ L – ბლოკების რაოდენობა ვარიანტის დიაგრამაში. განხილული სქემისთვის $L=12$. მარტივად მტკიცდება შემდეგი თეორემა:

თეორემა. L ბლოკიანი ვარიანტის დიაგრამის შესაბამისი სგკ წარმოადგენს ცალკეული ბლოკების სგკ-ების აწონილ კომბინაციას:

$$\sigma=\sum_{K=1}^{L}\frac{t_{SK}+t_{PK}}{T_P+T_S}\,\sigma_K. \tag{33}$$

შევნიშნოთ, რომ ისევე, როგორც ცალკეული ბლოკებისთვის, მთელი დიაგრამისთვისაც (33) შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\sigma=\frac{1}{f+\frac{T_P}{T_1}}, \tag{34}$$

სადაც ქალიახის დიაგრამის "მიმდევრობითობის კოეფიციენტი" წარმოადგენს ცალკეული წვეროების "მიმდევრობითობის კოეფიციენტების" აწონილ კომბინაციას:

$$f = \frac{T_s}{T_1} = \sum_{k=1}^{L} \frac{t_{sk} + t_{pk}}{T_p + T_s} f_k . \qquad (35)$$

შემ. ვიდა 29.IX.1993

ევმ-ის მათემატიკური
უზრუნველყოფის კათედრა

ლიტერატურა

1. Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В., Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости, М.,Наука,1976.

2. Е.Валях, Последовательно-параллельные вычисления. М.,Мир, 1985.

3. Самарский А.А., Теория разностных схем, М.,Наука,1983.

4. ა. გაჩეჩილაძე, დინამიკის წერტილის ტიპის ბელის დინამიური ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა, თსუ შრომები, სერია "გამოყენებითი მათემატიკა", ტ. К(315), 1993.

Г.В.Меладзе, Дж.Т.Гачечиладзе

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ СМЕШАННОГО ТИПА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ПОПЕРЕМЕННО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Резюме

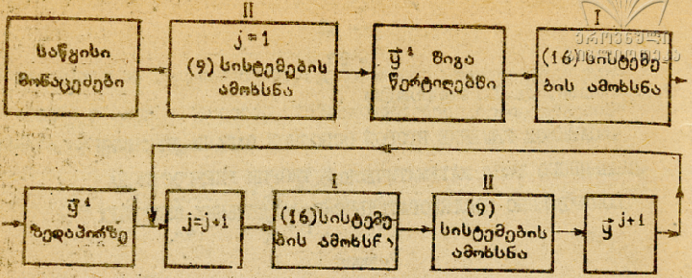
Представлен последовательный алгоритм численного решения второй основной задачи динамики математической теории упругости, на основе которого построена схема параллельных вычислений. Рассмотрена реализация этой схемы на попеременно последовательно-параллельных системах. Вычислен коэффициент повышения быстродействия.

H.Meladze, J.Gachechiladze

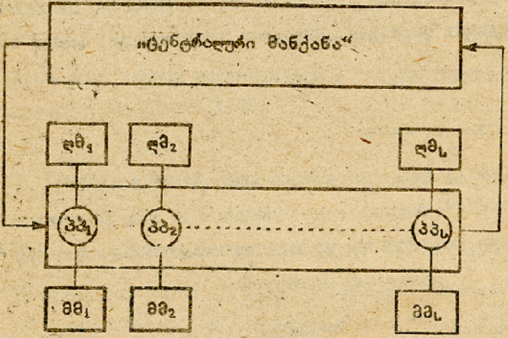
NUMERICAL SOLUTION OF A MIXED TYPE SECOND FUNDAMENTAL PROBLEM OF DYNAMICS IN THE MATHEMATICAL THEORY OF ELASTICITY WITH ALTERNATING SEQUENTIAL-PARALLEL SYSTEMS

Summary

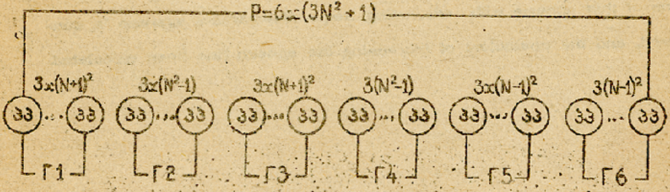
A sequential algorithm is presented for the numerical solution of the second fundamental problem of the mathematical theory of elasticity, with a scheme of parallel computations constructed on its basis. The realization of this scheme with alternating sequential-parallel systems is considered, and the coefficient of increasing the speech has been calculated.



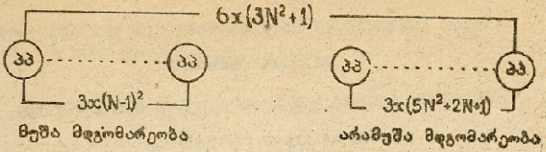
ნახ. 1



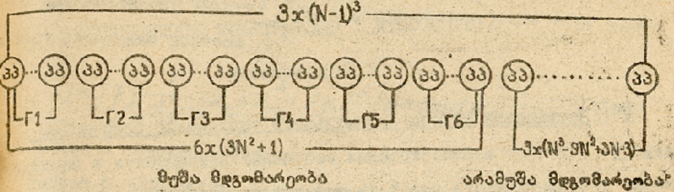
ნახ. 2



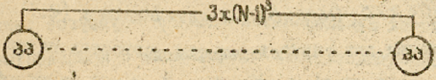
ნახ. 3



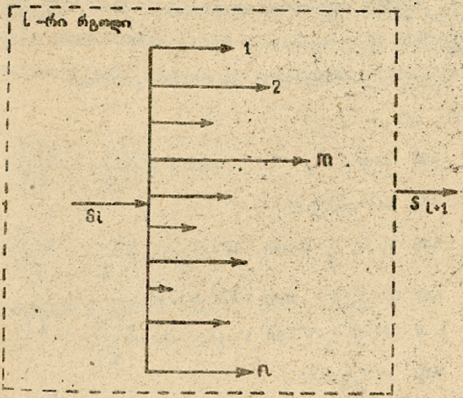
ნახ.4



ნახ.5



ნახ.6



ნახ.7

Труды Тбилисского государственного университета
им.И.Джавахишвили

თბილისის ივ.ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

318, 1995

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С КВАДРАТИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

Н.Т.Одишелидзе

I°. Постановка задачи оптимального управления при чистом сдвиге. В точном машиностроении возникает потребность в исследовании деформативности одной из деталей редуктора, приводящая нас к рассматриваемой ниже задаче оптимального управления.

Пусть $G=\{0<x<a,\ 0<y<b,\ 0<z<c\}$ - упругое тело. $V(u,v,\omega)$ - вектор перемещения при упругой деформации с компонентами u, v, ω соответственно, вдоль x, y, z. X_x, Y_y, Z_z - нормальные напряжения на соответствующих площадках, X_y, Y_z, X_z - касательные напряжения на указанных индексом площадках, Z - массовая сила, отнесенная к единице объема /I/.

Будем рассматривать следующие граничные условия:

$z=0,\ c:\ Z_z=0;\ u=0;\ v=0;$ (I.I)

$x=0:\ X_y=0$ или $v=0;\ X_x=0$ или $u=0,$

$X_z=f_1(y)$ или $\omega=f_1(y);$ (I.2)

$x=a:\ X_y=0$ или $v=0;\ X_x=0$ или $u=0;$ (I.3)

$X_z=f_2(y)$ или $\omega=f_2(y)$ или $\omega(a,y)=\delta\omega(x_0,y)+f_2(y);$

$y=0:\ X_y=0$ или $u=0;\ Y_y=0$ или $v=0;$ (I.4)

$Y_z=f_3(x)$ или $w=f_3(x);$

$$y=b: X_y=0 \text{ или } u=0; Y_y=0 \text{ или } v=0;$$
$$Y_z=f_4(x) \text{ или } \omega=f_4(x), \qquad (I.5)$$

где f_i $(i=1,\dots,4)$ – поверхностные силы, σ – положительная константа, x_0 – фиксированное число, $0<x_0<a$.

Потенциальная энергия деформированного упругого тела выражается следующим образом /2/:

$$I=\iiint_G \frac{1}{2\mu}\left[Z_x^2+Z_y^2+2\mu Z^2\right]dx\,dy\,dz. \qquad (I.6)$$

Поставим следующие задачи:

Задача А. Определить такую массовую силу Z из промежутка $[P_1, P_2]$, при которой равновесие тела удовлетворяет условиям (I.I)-(I.5) и минимизирует потенциальную энергию.

Здесь предполагается, что тело $\bar{G}$ неоднородно, $\mu(x,y)$ – заданная функция, P_1, P_2 – заданные числа.

Задача Б. Определить функцию μ $(P_1<\mu(x,y)<P_2)$ тела $\bar{G}$ при заданных массовых силах таким образом, чтобы деформированное состояние имело минимальную потенциальную энергию.

Система уравнений равновесия упругого тела имеет следующий вид /I/:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=0;$$
$$\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}=0; \qquad (I.7)$$
$$\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}=0.$$

Уравнения закона Гука имеют вид:

$$X_x = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$Y_z = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial x};\qquad (I.8)$$

$$Z_x = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial w}{\partial x};$$

$$X_y = Y_x = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

$$X_z = Z_x = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right);\qquad (I.9)$$

$$Y_z = Z_y = \mu\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

где $\lambda=\lambda(x,y)=\mu\cdot E/((1-2\nu)(1+\nu))$, E – модуль упругости, $\mu=\mu(x,y)$ – модуль сдвига, $\nu=\nu(x,y)$ – коэффициент Пуассона.

Заметим, что, ввиду (I.9), граничные условия (I.I) можно записать в следующем виде:

$$z=0,c:\ u=0,\ v=0,\ \frac{\partial w}{\partial z}=0. \qquad (I.10)$$

Решение задачи (I.I)-(I.5), (I.7)-(I.9) будем искать в виде:

$$u=0,\ v=0,\ w=w(x,y). \qquad (I.II)$$

Можно доказать, что если f_i $(i=1,\dots,4)$ – непрерывные функции, то задача (I.I) - (I.5), (I.7) - (I.9) будет иметь единственное решение.

Ввиду того, что вектор перемещения $V(0,0,\omega(x,y))$ не зависит от z из (I.7) - (I.9) получим:

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}=-Z(x,y),$$

$$X_x=0,\ Y_y=0,\ Z_z=0,\ X_y=Y_x=0, \qquad (I.12)$$

$$Z_x=X_z=\mu\frac{\partial\omega}{\partial x},$$

$$Z_y=Y_z=\mu\frac{\partial\omega}{\partial y}.$$

Из равенства (I.12) для определения функции $\omega(x,y)$ получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)=-Z(x,y). \qquad (I.13)$$

Ввиду того, что вектор перемещения $V(0,0,\omega(x,y))$ не зависит от z, рассмотрим произвольное, перпендикулярное оси z, сечение Ω области G. Граничные условия для этого сечения будут иметь вид:

$$x=0:\mu\frac{\partial\omega}{\partial x}=f_1(y) \quad \text{или} \quad \omega=f_1(y);$$

$$x=a:\mu\frac{\partial\omega}{\partial x}=f_2(y) \quad \text{или} \quad \omega=f_2(y) \text{ или } \omega(a,y)=6\omega(x_0,y)+f_2(y);$$

$$y=0:\mu\frac{\partial\omega}{\partial y}\ f_3(x) \quad \text{или} \quad \omega=f_3(x); \qquad (I.14)$$

$$y=b:\mu\frac{\partial\omega}{\partial y}=f_4(x) \quad \text{или} \quad \omega=f_4(x).$$

Решая уравнение (I.13) при граничных условиях (I.14), из (I.11) можно определить все компоненты перемещения и, следовательно, из системы (I.8) - (I.9) - все составляющие тензора напряжения. Таким образом, тензор напряжения будет определён в любой точке упругого тел $\bar{G}$.

Задача А и задача Б связаны с исследованием задач оптимального управления для уравнений Пуассона (I.13) с нелокальными краевыми условиями Бицадзе-Самарского (I.14) при интегральном критерии качества (I.6).

Уравнение (I.13) является математической моделью упругого чистого сдвига четырехгранной призмы. Заметим, что если тело $\bar{G}$ однородное то $\mu(x,y)=const$ и уравнение (I.13) переходит в уравнение Пуассона.

Получение необходимых и достаточных условий оптимальности продемонстрируем для задачи оптимального управления уравнений Пуассона с нелокальными краевыми условиями и квадратичным функционалом.

2°. <u>Необходимые и достаточные условия оптимальности</u>. Пусть $\bar{G}$ – прямоугольник, $\bar{G}=[0,\ell_1]\times[0,\ell_2]$, Γ – граница прямоугольной области, $\gamma=\{(\ell_1,y): 0<y<\ell_2\}$, $\gamma_0=\{(x,y): 0<y<\ell_2\}$; x – фиксированная точка из $]0,\ell_1[$, V – некоторое открытое подмножество из R, Ω – множество функций управления $v: G\to V$, $v\in L_2(\bar{G})$.

Для каждого фиксированного $v\in\Omega$ в области G рассмотрим задачу Бицадзе-Самарского для уравнения Гельмгольца /3/:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-q(x,y)u=a(x,y)v+b(x,y),\quad (x,y)\in G, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} &u(x,y)=0,\quad (x,y)\in\Gamma\setminus\gamma,\\ &u(\ell_1,y)=\sigma u(x,y),\quad 0<y<\ell_2, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $a\in L_2(G)$, $b\in L_2(G)$, $0\le q\in L_2(G)$. Решение задачи (2.I) – (2.2) существует, единственно и принадлежит пространству $W_2^2(G)$ /4/.

Рассмотрим функционал:

$$I(v)=\iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+\iint\limits_G v^2\,dx\,dy. \tag{2.3}$$

Поставим следующую задачу оптимального управления: найти функцию $v_0\in\Omega$, при которой решения краевой задачи (2.I), (2.2) придают функционалу (2.3) минимальное значение. V_0 – оптимальное управление, $u_0(x,y)=u(x,y,V_0(x,y))$ – оптимальное решение, (u_0,V_0) – оптимальная пара.

Пусть $V_\varepsilon\in\Omega$ – произвольное допустимое управление и u_ε – соответствующее решение задачи (2.I)-(2.2). Введём следующие обозначения:

$$\Delta V=V_\varepsilon-V_0,\qquad \Delta u=u_\varepsilon-u_0. \tag{2.4}$$

Тогда получаем следующую задачу:

$$\frac{\partial^2\Delta u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Delta u}{\partial y^2}-q(x,y)\Delta u=a(x,y)\Delta u,\quad (x,y)\in G, \tag{2.5}$$

$$\Delta u(x,y)=0,\quad (x,y)\in\Gamma\setminus\gamma,$$
$$\Delta v(\ell_1,y)=6\Delta u(\overset{\circ}{x},y),\quad 0<y<\ell_2. \tag{2.6}$$

Пусть $\varphi\neq 0$ – произвольная интегрируемая функция. Умножая уравнение (2.5) на φ и интегрируя по области G, получаем следующее равенство:

$$\iint_G\varphi(x,y)\left[\frac{\partial^2\Delta u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Delta u}{\partial y^2}-q(x,y)\Delta u\right]dxdy=$$
$$=\iint_G a(x,y)\varphi(x,y)\Delta V dxdy. \tag{2.7}$$

При фиксированных V_0 и V_ε найдем приращение функционала (2.3):

$$\Delta I=I(v_\varepsilon)-I(v_0)=2\iint_G\left[\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial\Delta u}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\partial\Delta u}{\partial y}+V_0\Delta V\right]dxdy+$$
$$+\iint_G\left[\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\iint_G\Delta V^2dxdy. \tag{2.8}$$

Учитывая соотношения (2.7) и (2.8), для приращения ΔI получаем следующее выражение:

$$\Delta I=\iint_G\varphi(x,y)\left[\frac{\partial^2\Delta u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Delta u}{\partial y^2}-q(x,y)\Delta u\right]dxdy+\iint_G(6V_0-a(x,y)\varphi)\Delta Vdxdy+$$
$$+2\iint_G\left[\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial\Delta u}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\partial\Delta u}{\partial y}+V_0\Delta V\right]dxdy+ \tag{2.9}$$
$$+\iint_G\left[\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial y}\right)^2+\Delta V^2\right]dxdy.$$

Для построения сопряженного уравнения (для определения φ) проведем следующие преобразования:

$$\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}\varphi(x,y)\frac{\partial^2\Delta u}{\partial x^2}dxdy=\int_0^{\ell_2}\Big[\int_0^{\overset{\circ}{x}}\varphi(x,y)\frac{\partial^2\Delta u}{\partial x^2}dx+$$

$$+\int_{\overset{\circ}{x}}^{\ell_1}\varphi(x,y)\frac{\partial^2\Delta u}{\partial x^2}dx\Big]dy=\int_0^{\ell_2}\Big[\varphi(\ell_1,y)\Delta u_x(\ell_1,y)-\varphi(0,y)\Delta u_x(0,y)+$$

$$+\left(\varphi(\overset{\circ}{x}{}^-,y)-\varphi(\overset{\circ}{x}{}^+,y)\right)\Delta u_x(\overset{\circ}{x},y)+$$

$$+\left(\varphi_x(\overset{\circ}{x}{}^-,y)-\varphi_x(\overset{\circ}{x}{}^+,y)-\sigma\varphi_x(\ell_1,y)\right)\Delta u(\overset{\circ}{x},y)+$$

$$+\int_0^{\overset{\circ}{x}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Delta u(x,y)dx+\int_{\overset{\circ}{x}}^{\ell_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Delta u(x,y)dx\Big]dy.$$

Аналогичными преобразованиями получаем:

$$\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}\varphi(x,y)\frac{\partial^2\Delta u}{\partial y^2}dxdy=\int_0^{\ell_1}\Big[\varphi(x,\ell_2)\Delta u_y(x,\ell_2)-$$

$$-\varphi(x,0)\Delta u_y(x,0)+\int_0^{\ell_2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\Delta u(x,y)dy\Big]dx.$$

Рассмотрим следующее выражение:

$$\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}\left[\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial\Delta u}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\partial\Delta u}{\partial y}\right]dxdy=\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}\left[\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial\Delta u}{\partial x}\right]dxdy+$$

$$+\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}\left[\frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\partial\Delta u}{\partial y}\right]dxdy=\underline{I}+\underline{II}.$$

Вычислим I и II, учитывая (2.6):

$$\underline{I}=\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}\left[\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial\Delta u}{\partial x}\right]dxdy=\int_0^{\ell_2}\Big[\int_0^{\overset{\circ}{x}}\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial\Delta u}{\partial x}dx+$$

$$+\int_{\overset{\circ}{x}}^{\ell_1}\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial\Delta u}{\partial x}dx\Big]dy=\int_0^{\ell_2}\Big[\left(u_x(\overset{\circ}{x}{}^-,y)-u_x(\overset{\circ}{x}{}^+,y)+\right.$$

$$\left.+\sigma u_x(\ell_1,y)\right)\Delta u(\overset{\circ}{x},y)-\int_0^{\ell_1}\frac{\partial^2u_0}{\partial x^2}\Delta u(x,y)dx\Big]dy;$$

$$\overline{II}=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left[\frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\partial\Delta u}{\partial y}\right]dx\,dy=\int_0^{l_1}\left[\int_0^{l_2}\frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\partial\Delta u}{\partial y}dy\right]dx=$$

$$=\int_0^{l_1}\left[\frac{\partial u_0(x,l_2)}{\partial y}\Delta u(x,l_2)-\frac{\partial u_0(x,0)}{\partial y}\Delta u(x,0)-\right.$$

$$\left.-\int_0^{l_2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\Delta u(x,y)dy\right]dx=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\Delta u(x,y)\,dx\,dy.$$

Учитывая полученные выше тождества, заключаем, что если φ_0 - решение следующей задачи:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-q(x,y)\varphi=2\left(q(x,y)u+a(x,y)v+b(x,y)\right),$$

$$\varphi(x,y)=0,\qquad (x,y)\in\Gamma^{(x,y)\in G\setminus\gamma_0}, \tag{2.10}$$

$$\varphi_x(\overset{\circ}{x}{}^-,y)-\varphi_x(\overset{\circ}{x}{}^+,y)-\sigma\varphi_x(l_1,y)=-2\sigma u_x(l_1,y), \tag{2.11}$$

$$0\le y\le l_2,$$

то приращение функционала ΔI (2.9) примет вид:

$$\Delta I=\iint_G[2v_0-a(x,y)\varphi_0]\Delta v+\iint_G\left[\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial x}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial y}\right)^2+\Delta v^2\right]dx\,dy \tag{2.12}$$

<u>Теорема</u>. Для оптимальности пары (u_0, v_0) необходимо и достаточно выполнение соотношения

$$2v_0-a(x,y)\varphi_0=0 \tag{2.13}$$

почти всюду на G , где φ_0 - решение задачи (2.10)-(2-11).

<u>Доказательство</u>.<u>Необходимость</u>. Пусть (u_0, v_0) - оптимальная пара. Покажем, что тогда выполняется условие (2.13). Докажем от противного. По определению $2v_0-a(x,y)\varphi_0=0$ п.в. на G, что эквивалентно следующему: возможность

$$2v_0-a(x,y)\varphi_0\neq 0 \tag{2.14}$$

на множестве меры нуль. Положим, что $2v_0 - a(x,y)\varphi_0 \neq 0$ на множестве положительной меры. Следовательно

$$0 < \mu[\{(x,y)\in G / 2v_0 - a(x,y)\varphi_0 \neq 0\}] = \mu[\{(x,y)\in G /$$
$$2v_0 - a(x,y)\varphi_0 > 0\} \cup \{(x,y)\in G / 2v_0 - a(x,y)\varphi_0 < 0\}] =$$
$$= \mu[\{(x,y)\in G / 2v_0 - a(x,y)\varphi_0 > 0\}] +$$
$$+ \mu[\{(x,y)\in G / 2v_0 - a(x,y)\varphi_0 < 0\}],$$

где μ – мера Лебега на G.

Введем обозначения:

$$G_+ = \{(x,y)\in G / 2v_0 - a(x,y)\varphi_0 > 0\},$$
$$G_- = \{(x,y)\in G / 2v_0 - a(x,y)\varphi_0 < 0\}.$$

Согласно нашему допущению $\mu(G_+) + \mu(G_-) > 0$.

Рассмотрим два случая: $\mu(G_+) > 0$, $\mu(G_-) > 0$.

I. Пусть $\mu(G_+) > 0$. Поскольку V – открыто, то $\exists d_0 > 0$ такое, что $v_0 + d\chi_{G_+} \in G$ при $|d| < d_0$, где χ_{G_+} – характеристическая функция множества G_+.

Обозначим: $T = 2v_0 - a(x,y)\varphi_0$.

$\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\iint\limits_{G_+} T\,dx\,dy > \varepsilon$.

По определению $\|d\chi_{G_+}\|_{L_\infty} \longrightarrow 0$ при $d \to 0$.

Пусть $d < 0$. Положим, что $\Delta v = d\chi_{G_+}$, следовательно, $\Delta u(x,y,d\chi_{G_+})$ есть решение задачи (2.5), (2.6) и

$$\Delta u(x,y,d\chi_{G_+}) = d\Delta u(x,y,\chi_{G_+}). \tag{2.15}$$

Рассмотрим (2.12). Учитывая $\Delta v = d\chi_{G_+}$ и (2.15), получаем:

$$\iint\limits_G [2v_0 - a(x,y)\varphi_0]\Delta v\,dx\,dy = \iint\limits_G T d\chi_{G_+}\,dx\,dy = \iint\limits_{G_+} T d\,x\,dy, \tag{2.16}$$

$$\iint\limits_G \left[\frac{\partial \Delta u}{\partial x}(x,y,d\chi_{G_+})\right]^2 dx\,dy = d^2 \iint\limits_G \left[\frac{\partial \Delta u}{\partial x}(x,y,\chi_{G_+})\right]^2 dx\,dy, \tag{2.17}$$

$$\iint\limits_G \left[\frac{\partial \Delta u}{\partial y}(x,y,d\chi_{G_+})\right]^2 dx\,dy = d^2 \iint\limits_G \left[\frac{\partial \Delta u}{\partial y}(x,y,\chi_{G_+})\right]^2 dx\,dy. \qquad (2.18)$$

По условию V_0 – оптимально, поэтому для достаточно малого приращения ΔV : $I(V_0+\Delta V)-I(V_0)\geq 0$.

С другой стороны, при $\Delta V = d\chi_{G_+}$ в силу (2.12), (2.16), (2.17), (2.18):

$$I(V_\varepsilon)-I(V_0)=\iint\limits_G [2V_0 - a(x,y)\varphi_0]\Delta V + \iint\left[\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y}\right)^2 + \Delta V^2\right] dx\,dy = d\left[\iint\limits_{G_+} T\,dx\,dy + d\iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x}(x,y,\chi_{G_+})\right)^2\right] dx\,dy + \iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y}(x,y,\chi_{G_+})\right)^2 dx\,dy + \iint\limits_{G_+} dx\,dy\right]\right].$$

$\exists\delta>0$ такое, что при $-\delta\leq d\leq 0$ имеет место

$$\left|d\left[\iint\limits_G\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x}(x,y,\chi_{G_+})\right)\right]^2 dx\,dy + \iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y}(x,y,\chi_{G_+})\right)^2 dx\,dy + \iint\limits_{G_+} dx\,dy\right]\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, при $-\delta\leq d\leq 0$

$$0<\frac{\varepsilon}{2}<\iint\limits_{G_+} T\,dx\,dy + \left[\iint\limits_G\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x}(x,y,\chi_{G_+})\right)^2 dx\,dy + \iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y}(x,y,\chi_{G_+})\right)^2 dx\,dy + \iint\limits_{G_+} dx\,dy\right]\right],$$

$$d\left[\iint\limits_{G_+} T\,dx\,dy + d\left[\iint\limits_G\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x}(x,y,\chi_{G_+})\right)^2\right] dx\,dy + \iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y}(x,y,\chi_{G_+})\right) dx\,dy + \iint\limits_{G_+} dx\,dy\right]\right] < 0,$$

т.е. при $-\delta\leq d\leq 0$

$$I(V_\varepsilon)-I(V_0)<0.$$

Учитывая, что при $|d| < d_0$

$$v = v_0 + d\chi_{G_+} \in \Omega \qquad \text{и} \qquad \lim_{d \to 0} \|d\chi_{G_+}\|_{L_2} = 0$$

получаем противоречие с оптимальностью v_0. Значит $\mu(G_+) = 0$. Аналогично доказывается, что $\mu(G_-) = 0$.

<u>Достаточность</u>. Пусть $2v_0 - a(x,y)\varphi_0 = 0$ почти всюду на G. Из нашего допущения следует, что для каждого v_ε

$$I(v_\varepsilon) - I(v_0) \geq 0,$$

т.е. (u_0, v_0) - есть оптимальная пара.

Поступила 15.X.1993

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

Литература

1. Н.И.Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости.- М.:Наука, 1966. - 707с.
2. С.П.Тимошенко, Дж.Гульер. Теория упругости.- М.:Наука,1975.- 576с.
3. А.В.Бицадзе. А.А.Самарский. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач. Докл.АН СССР.-1969.-Т.185.-№2. -739-740с.
4. Г.В.Меладзе ,Т.С.Цуцунава ,Д.Ш.Девадзе.Задача оптимального управления для дифференциальных уравнений первого порядка на плоскости с нелокальными краевыми условиями. Тбилисский государственный университет.-Тбилиси.1987.-61с.-Деп. в ГрузНИИНТИ 25.12.87.№372-Г87.

ნ. ოდიშელიძე

დრეკადობის თეორიის ოპტიმალური მართვის ზოგიერთი ამოცანის შესახებ კვადრატული ფუნქციონალით

რეზიუმე

განხილულია ოპტიმალური მართვის ზოგიერთი ამოცანა, რომელიც დაკავშირებულია მართკუთხა პარალელეპიპედის დრეკად წონასწორობასთან სუფთა ძვრის პირობებში. მმართველ ფუნქციად აღებულია მასური ძალა, რომელიც ახდენს განსახილველი სხეულის პოტენციური ენერგიის მინიმიზაციას. მიღებულია ოპტიმალობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

N.Odishelidze

ON SOME OPTIMAL CONTROL PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY WITH A QUADRATIC FUNCTIONAL

Summary

The paper deals with some optimal control problems connected with the elastic equilibrium of a recta gular parallelepiped under its simple shear. The mass force which minimizes the potential energy of the body under consideration is assumed to be the directing function. The neccesary and sufficient conditions of optimality are obtainted.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили

თბილისის ივ. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

318, 1995

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Н. Т. Одишелидзе

1°. Численная реализация двумерных модельных задач. Пусть G – прямоугольник, $G=[0,\ell_1]\times[0,\ell_2]$, Γ – граница прямоугольной области, $\gamma=\{(\ell_1,y): 0<y<\ell_2\}$, $\gamma_0=\{(\mathring{x},y): 0<y<\ell_2\}$, $\mathring{x}$ – фиксированная точка из $]0,\ell_1[$, V – некоторое открытое множество из R, Ω – множество функций управления $v: G\to V$, $v\in L_2(G)$.

Для каждого фиксированного $v\in\Omega$ в области G рассмотрим задачу Бицадзе-Самарского для уравнения Пуассона /1/:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a(x,y)v+b(x,y),\quad (x,y)\in G,\qquad (1)$$

$$u(x,y)=0,\quad (x,y)\in\Gamma\setminus\gamma,$$

$$u(\ell_1,y)=\sigma u(\mathring{x},y),\quad 0<y<\ell_2,\qquad (2)$$

где $a\in L_\infty(G)$, $b\in L_2(G)$. Решение задачи (1)-(2) существует и единственно и принадлежит пространству $W_2^1(G)$ /2/.

Рассмотрим функционал:

$$I(v)=\iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+\iint\limits_G v^2\,dx\,dy.\qquad (3)$$

Поставим следующую задачу оптимального управления: найти функцию $v_0\in\Omega$, при которой решение краевой задачи (1), (2) придаёт функционалу (3) минимальное значение. v_0 – оптимальное управление, $u_0(x,y)=u(x,y,v_0(x,y))$ – оптимальное решение,

(u_0,v_0) – оптимальная пара. Для задачи Бицадзе-Самарского (I)-(2) с функционалом (3) построена сопряженная задача:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=2(a(x,y)v+b(x,y)),\quad (x,y)\in G\setminus\gamma_0,$$
$$\varphi(x,y)=0,\qquad (x,y)\in\Gamma, \tag{4}$$
$$\varphi_x(\overset{0}{x}{}^-,y)-\varphi_x(\overset{0}{x}{}^+,y)-\sigma\varphi_x(l_1,y)=-2\sigma u_x(l_1,y),\quad 0<y<l_2. \tag{5}$$

<u>Теорема</u>. Для оптимальности пары (u_0,v_0) необходимо и достаточно выполнение следующего соотношения:

$$2v_0-a(x,y)\varphi_0=0 \tag{6}$$

почти всюду на G , где φ_0 – решение задачи (4)-(5).

Приведём результаты численного решения задачи оптимального управления для уравнений Пуассона с нелокальными краевыми условиями (I)-(3). Учитывая (6), решение этой задачи сводится к решению системы краевых задач:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{a^2(x,y)}{2}\varphi+b,\quad (x,y)\in G, \tag{7}$$
$$u(x,y)=0,\qquad (x,y)\in\Gamma\setminus\gamma, \tag{8}$$
$$u(l_1,y)=\sigma u(\overset{0}{x},y),\qquad 0<y<l_2,$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=a^2(x,y)\varphi+2b,\quad (x,y)\in G\setminus\gamma_0, \tag{9}$$
$$\varphi(x,y)=0,\qquad (x,y)\in\Gamma,$$
$$\varphi'_x(\overset{0}{x}{}^+,y)-\varphi'_x(\overset{0}{x}{}^-,y)-\sigma\varphi'_x(l_1,y)=-2\sigma u'_x(l_1,y),\quad 0<y<l_2, \tag{10}$$

для решения которой построена разностная схема:

$$v_{\bar{x}_1x_1}+v_{\bar{x}_2x_2}=r\cdot y+T_1T_2b,\quad x\in\omega,\quad r=T_1T_2\frac{a^2(x)}{2},$$
$$v(x_1,x_2)=0,\quad x\in\Gamma_h\setminus\gamma_h, \tag{11}$$
$$v(l_1,x_2)=\sigma v(\overset{0}{x}_1,x_2),\quad x_2\in\bar{\omega}_2,$$

$$y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -\sigma\delta_h(\overset{\circ}{x}_1 - x_1)\left(y_{\bar{x}_1}(\ell_1, x_2) - 2v_{\bar{x}_1}(\ell_1, x_2)\right) + 2T_1T_2 b, \quad x \in \omega,$$

$$y(x_1, x_2) = 0, \qquad x \in \Gamma_h, \tag{12}$$

где $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, T_1, T_2 – операторы Стеклова /3/.

Схема решения полученной системы.

Для реализации разностной схемы (II)-(I2) организуем итерационный процесс.

$$v^{k+1}_{\bar{x}_1 x_1} + v^{k+1}_{\bar{x}_2 x_2} = y^k + T_1 T_2 b, \quad x \in \omega,$$

$$v^{k+1}(x_1, x_2) = 0, \quad x \in \Gamma_h \setminus \gamma_h, \tag{13}$$

$$v^{k+1}(\ell_1, x_2) = \sigma v^k(\overset{\circ}{x}_1, x_2), \quad x_2 \in \bar{\omega}_2,$$

$$y^{k+1}_{\bar{x}_1 x_1} + y^{k+1}_{\bar{x}_2 x_2} = -\sigma\delta_h(x_1 - \overset{\circ}{x}_1)\left(y^k_{\bar{x}_1}(\ell_1, x_2) - 2v^k_{\bar{x}_1}(\ell_1, x_2)\right) + 2T_1T_2 b, \quad x \in \omega, \tag{14}$$

$$y^{k+1}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_h, \qquad k = 0, 1, \dots$$

На каждом шаге итерации находим решение задачи (I3), а затем, с помощью найденного решения, находим решение задачи (I4).

Для реализации разностной схемы (II) построим аналоги формул встречной прогонки. Задачу (II) перепишем в следующем виде

$$A_i V_{i-1} - C_i V_i + B_i V_{i+1} = -f_i, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$V_0 = 0, \qquad V_N = \sigma V_{k_0}, \tag{15}$$

где V_i и f_i – векторы размерности M_i, C_i – квадратная матрица $M_i \times M_i$, A_i и B_i – прямоугольные матрицы соответственно размерности $M_i \times M_{i-1}$ и $M_i \times M_{i+1}$, индекс k_0 соответствует узлу

Решение задачи (I5) выражается с помощью следующих формул

$$V_i = \xi_i V_{i+1} + \eta_i, \quad i = 1, \dots, k_0 - 1,$$

$$V_{i+1} = \alpha_{i+1} V_i + \beta_{i+1} + T_{i+1}\sigma V_{k_0}, \quad i = k_0, \dots, N-1,$$

$$V_{k_0} = \frac{f_{k_0} + A_{k_0}\eta_{k_0} + \beta_{k_0+1} B_{k_0}}{C_{k_0} - A_{k_0}\xi_{k_0-1} - B_{k_0}\alpha_{k_0+1} - \sigma B_{k_0} T_{k_0+1}},$$

$$\xi_i = \frac{B_i}{C_i - A_i \xi_{i-1}}, \quad \xi_0 = 0, \quad i = 1, \dots, k_0 - 1,$$

$$\eta_i = \frac{A_i \eta_{i-1}}{C_i - A_i \xi_{i-1}}, \quad \eta_0 = 0, \quad i = 1, \dots, k_0 - 1,$$

$$\alpha_i = \frac{A_i}{C_i - B_i\alpha_{i-1}}, \quad \alpha_N = 0, \quad i = N-1, \dots, K_0+1,$$

$$\beta_i = \frac{B_i\beta_{i+1} + \alpha_i}{C_i - B_i\alpha_{i+1}}, \quad \beta_N = 0, \quad i = N-1, \dots, K_0+1,$$

$$T_i = \frac{B_i T_{i+1}}{C_i - B_i\alpha_{i+1}}, \quad T_N = 1, \quad i = N-1, \dots, K_0+1.$$

Для реализации разностной схемы (I2) будем пользоваться формулами правой прогонки.

<u>Пример</u>. В качестве исходной была взята задача оптимального управления:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a(x,y)v + b(x,y), \quad (x,y) \in G = (0,\ell_1)\times(0,\ell_2),$$
$$u(x,y) = f_1(y), \quad (x,y) \in \Gamma\setminus\gamma, \qquad \text{(I6)}$$
$$u(\ell_1,y) = \sigma u(\overset{\circ}{x},y) + f_2(y), \quad 0<y<\ell_2, \quad \overset{\circ}{x}\in(0,\ell_1),$$

$$\min_{v\in R} I(v) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + v^2\right]dx\,dy, \qquad \text{(I7)}$$

где

$$f_1(y) = a_0 \sin\left[\frac{\pi}{\ell_2}\right], \qquad f_2(y) = b_0 \sin\left[\frac{\pi}{\ell_2}\right]$$

Решение задачи (I6)-(I7) сходится к нахождению решения системы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{a^2(x,y)}{2}\varphi + b, \quad (x,y)\in G, \qquad \text{(I8)}$$

$$u(x,y) = a_0 \sin\left[\frac{\pi}{\ell_2}y\right], \quad (x,y)\in\Gamma\setminus\gamma, \qquad \text{(I9)}$$
$$u(\ell_1,y) = \sigma u(\overset{\circ}{x},y) + b_0 \sin\left[\frac{\pi}{\ell_2}\right],$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = a^2(x,y)\varphi + 2b, \quad (x,y)\in G\setminus\gamma_0, \qquad \text{(20)}$$
$$\varphi(x,y) = 0, \qquad (x,y)\in\Gamma,$$

$$\varphi'_x(\overset{\circ}{x}{}^+,y) - \varphi'_x(\overset{\circ}{x}{}^-,y) - \sigma\varphi'_x(\ell_1,y) = -2\sigma u'_x(\ell_1,y), \quad 0<y<\ell_2. \qquad \text{(2I)}$$

Построим точное решение задач (I8),(I9) и (20),(2I) при $b=0$. Пусть $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, тогда из уравнений (I8) и (20) имеем $\Delta(2u) = a^2\varphi$ $\Delta\varphi - a^2\varphi = 0$ (A). Отсюда $\Delta(\varphi - 2u) = 0$.

Пусть $\varphi_1 - 2u = \Phi$, тогда $\Delta\Phi = 0$ (B).

Пусть $G = G_1 \cup G_2$, где $G_1 = [0, \overset{\circ}{x}[\times [0, \ell_2]$, $G_2 = [\overset{\circ}{x}, \ell_1] \times [0, \ell_2]$.

$$u(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y), & (x,y) \in G_1, \\ u_2(x,y), & (x,y) \in G_2, \end{cases} \tag{22}$$

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \varphi_1(x,y), & (x,y) \in G_1, \\ \varphi_2(x,y), & (x,y) \in G_2. \end{cases}$$

Учитывая (22), из (18),(19) и (20),(21) в прямоугольнике G_1 получаем:

$$\begin{aligned} &\Delta u_1 = \frac{a^2(x)}{2}\varphi_1, \\ &x = 0 : u_1(x,y) = 0{,}02 + \sin\left(\frac{\pi}{\ell_2} y\right), \\ &y = 0,\ y = \ell_2,\ 0 < x < \overset{\circ}{x} : u_1(x,y) = 0, \\ &\Delta\varphi_1 = a^2(x,y)\varphi_1, \\ &x = 0 : \varphi_1 = 0, \\ &y = 0,\ y = \ell_2,\ \varphi_1(x,y) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

В прямоугольнике G_2:

$$\begin{aligned} &\Delta u_1 = \frac{a^2\varphi_2}{2}, \\ &x = \ell_1 : u_2(x,y) = 6u_1(\overset{\circ}{x}, y) + 0{,}02 \sin\left(\frac{\pi}{\ell_2} y\right), \\ &y = 0,\ y = \ell_2 : u_2(x,y) = 0, \\ &\Delta\varphi_2 = a^2(x,y)\varphi_2, \\ &x = \ell_1 : \varphi_2(x,y) = 0; \\ &y = 0,\ y = \ell_2 : \varphi_2(x,y) = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

При $x = \overset{\circ}{x}_1$

$$\varphi'_{2x}(\overset{\circ}{x}, y) - \varphi'_{1x}(\overset{\circ}{x}, y) - 6\varphi'_x(\ell_1, y) = -26u_{2x}(\ell_1, y).$$

В прямоугольниках G_1 и G_2 решения уравнений (A),(B) найдем с помощью метода разделения переменных /4/.

$$\varphi_i = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n^i e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell_2} + a^2\right)x} + B_n^i e^{\left(\frac{\pi n}{\ell_2} + a^2\right)x}\right)\sin\left(\frac{\pi}{\ell_2} y\right), \quad i = 1, 2, \tag{25}$$

$$\Phi_i = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n^i e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell_2} + a^2\right)x} + D_n^i e^{\left(\frac{\pi n}{\ell_2} + a^2\right)x}\right)\sin\left(\frac{\pi}{\ell_2} y\right), \quad i = 1, 2. \tag{26}$$

Из (В) можно найти u_i :

$\varphi_i - 2u_i = \Phi_i$, отсюда $u_i = \dfrac{\varphi_i - \Phi_i}{2}$

$$u_i = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(e^{-\frac{\pi n}{\ell_2}x}\big(A_n^i e^{-a^2x} - C_n^i\big) + e^{-\frac{\pi n}{\ell_2}x}\big(B_n^i e^{a^2x} - D_n^i\big)\Big)\sin\Big(\frac{\pi}{\ell_2}y\Big), \quad i=1,2. \tag{27}$$

С учетом (23) и (24) u_i и φ_i удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned}
&1)\ u_1(0,y)=f_1(y),\\
&2)\ \varphi_1(0,y)=0,\\
&3)\ \varphi_2(\ell_1,y)=0,\\
&4)\ u_2(\ell_1,y)-6u_1(\overset{o}{x},y)=f_2(y),\\
&5)\ u_1(\overset{o}{x},y)-u_2(\overset{o}{x},y)=0,\\
&6)\ \varphi'_{2x}(\overset{o}{x},y)-\varphi'_{1x}(\overset{o}{x},y)-6\varphi'_{2x}(\ell_1,y)=-26u'_{2x}(\ell_1,y),\\
&7)\ \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=\overset{o}{x}}-\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=\overset{o}{x}}=0,\\
&8)\ \varphi_1(\overset{o}{x},y)=\varphi_2(\overset{o}{x},y).
\end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом, получаем систему из 8 алгебраических уравнений с восьмью неизвестными. В таблице I,II,III приведены результаты расчёта при $n=1$ этой системы. На основе найденных неизвестных $A^i, B^i, C^i, D^i (i=1,2)$ из дополнительных условий (28) строится точное решение задачи (I8),(I9),(20),(2I) (при $b=0$).

Далее, задача (I8),(I9),(20),(2I) была решена при помощи разностных схем (II), (I2). Результаты счёта приведены в таблицах I,II,III, анализ которых подтверждает теоретический порядок скорости сходимости разностных схем (II),(I2).

2^0. Задача минимизации потенциальной энергии, запасённой телом при чистом сдвиге, для упругого равновесия стального тела.

В точном машиностроении возникает потребность в исследовании деформативности одной из деталей редуктора, что приводит нас к рассматриваемой ниже задаче оптимального управления. Приведём результаты численной реализации по решению задачи минимизации потенциальной энергии, запасённой телом параллелопипедной формы. Эту задачу, при определенных предположениях, можно свести к задаче оптимального управления для уравнений Пуассона с нелокальными краевыми условиями

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} = -\frac{1}{\mu} z(x), \quad x \in G,$$

$$\omega(x) = 0{,}02 \sin(\pi x_2), \quad x \in \Gamma \setminus \gamma,$$

$$\omega(1, x_2) = \frac{1}{2} \omega\left(\frac{1}{2}, x_2\right), \quad 0 < x_2 < 1, \qquad (29)$$

$$\min_{z \in R} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{2}{\mu} \sqrt{z} \right] dx_1 dx_2,$$

где $G = [0,1] \times [0,1]$ см^2, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $E = 10$ кг/см^2, $\nu = 0{,}3$.

Сравнение полученных результатов с результатами натурных экспрериментов показывает вполне удовлетворительную точность алгоритмов. Как видно из таблицы 4, значения функции перемещения получены в пределах упругой деформации, что свидетельствует о достоверности решения поставленной задачи.

Кафедра математического
обеспечения ЭВМ

Поступила 29.X.1993

Литература

1. А.В.Бицадзе, А.А.Самарский. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач. Докл.АН СССР.-1969.-Т.185.-12.-739-740с.
2. Г.В.Меладзе, Т.С.Цуцунава, Д.Ш.Девадзе. Задача оптимального управления для дифференциальных уравнений первого порядка на плоскости с нелокальными краевыми условиями. Тбилисский государственный университет.-Тбилиси,1987.-61с. -Деп. в ГрузНИИНТИ 25.12.87.№372-Г87.
3. А.А.Самарский, Р.Д.Лазаров, В.Л.Макаров. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями.М.: Наука.1987.
4. В.И.Лебедев, В.И.Агошков. Операторы Пуанкаре-Стеклов и их приложения в анализе.- М.:ОВМ АН СССР, 1983.

ნ.ოდიშელიძე

დრეკადობის თეორიის ოპტიმალური მართვის ზოგიერთი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა

რეზიუმე

განხილულია თხელი ფირფიტის ოპტიმალური მართვის ზოგიერთი ამოცანისა, რომელიც დაკავშირებულია მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის [illegible] სხვა ძირის პირობებში, მართვად ფუნქციად აღებულია მასური ძალა, რომელიც ახდენს განსახილველი სხეულის [illegible] ფუნქციის მინიმიზაციას.

N.Odishelidze

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF SOME OPTIMAL CONTROL PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY

Summary

The results of the calculation of some optimal control problems connected with the elastic equilibrium of a rectangular parallelepiped under its simple shear are presented. The mass force which minimizes the potential energy of the body under consideretion is assumed to be the directing function.

Таблица I.

i	$10^6 \cdot v$								
1	336	478	545	577	589	582	553	488	348
2	197	321	391	426	437	426	391	320	197
3	129	227	291	327	338	327	291	227	128
4	90	165	218	250	260	250	218	165	90
5	66	123	165	191	200	191	165	123	66
6	54	102	140	163	171	163	140	103	55
7	49	93	127	149	156	149	127	93	49
8	49	93	127	149	156	149	127	93	49
9	54	102	139	162	170	162	139	102	54
10	66	123	165	191	200	191	165	123	66
	A^1	B^1	C^1	D^1	A^2	B^2	C^2	D^2	it
	-0.44	0.00	0.27	0.35	-0.11	0.14	0.14	0.65	22
	$\|\tilde z\|_{W_2^1(G)}$					8.785×10^{-5}			

i	$10^6 \cdot y$								
1	190	262	293	306	303	301	279	254	186
2	108	176	213	231	235	227	203	160	101
3	67	118	152	170	175	167	146	110	57
4	42	79	105	121	126	121	104	77	41
5	23	48	68	82	88	85	73	54	29
6	14	24	40	51	57	57	49	37	19
7	8	14	15	26	33	35	31	24	13
8	4	7	8	5	14	18	18	14	7
9	2	3	3	2	1	6	8	6	3
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$a(x,y)=1$, $a_0=0.02$, $b_0=0$, $h=0,1$, v, y-приближённое решение системы (13),(14), $A^1, B^1, C^1, D^1, A^2, B^2, C^2, D^2$-решение системы (28). $\tilde z = \max(z_1, z_2)$, где $z_1 = u - v$, $z_2 = \varphi - y$, u, φ-решение системы (18),(19),(20),(21).

Таблица II

i	$10^6 v$								
1	-226	-337	-487	-560	-591	75	-512	-402	-242
2	-302	-570	-788	-939	-100	977	-850	-634	-344
3	-415	-813	-115	-140	-151	147	-128	946	-503
4	-544	-111	-162	200	-218	-213	-185	-136	-726
5	-649	-146	-223	-279	-308	-303	-264	-194	-103
6	-647	-634	-635	-631	-606	-548	-453	-324	-169
7	-460	-364	390	729	937	994	903	682	366
8	-340	254	858	133	162	167	150	112	602
9	-388	116	619	101	152	131	117	887	475
10	-649	-786	-950	-107	-112	-106	-915	-668	-353
	A^1	$10^4 \times B^1$	$10^4 \times C^1$	$10^3 \times D^1$	$10^3 \times A^2$	B^2	$10^9 \times C^2$	D^2	it
	-0.64	5.987	-5.986	-1.541	1.5416	0	-4.541	0.0432	19
	$\|z\|_{W_2^1}$					8.050346×10^{-5}			

i	$10^6 y$								
1	-482	-542	-446	-229	217	126	409	225	848
2	33	182	409	731	125	216	372	549	255
3	432	827	113	149	188	242	314	377	387
4	868	152	193	218	235	251	264	255	190
5	151	245	287	294	282	261	234	191	117
6	176	391	415	388	337	278	219	158	859
7	162	352	591	507	399	293	207	135	681
8	122	262	433	650	456	288	180	107	511
9	655	139	228	342	488	223	116	633	286
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$a(x,y)=1$, $a_0=0$, $b_0=0{,}02$, $h=0{,}1$, v, y – приближённое решение системы (13), (14), $A^1, B^1, C^1, D^1, A^2, B^2, C^2, D^2$ – решение системы (28).

$z=\max(z_1, z_2)$, где $z_1=u-v$, $z_2=\psi-y$, u, ψ – решение системы (18), (19), (20), (21).

Таблица III

i	$10^6 v$								
1	-208	-352	-460	-532	-562	-547	-485	-378	-224
2	-293	-554	-769	-919	-985	-956	-831	-618	-334
3	-409	-803	-114	-139	-150	-146	126	-936	-497
4	-540	-110	-161	-199	-217	-213	-185	-136	-723
5	-648	-146	-222	-279	-306	-303	264	-194	-103
6	-646	-629	[illegible]	-623	-597	-339	[illegible]	-319	-166
7	-459	-298	401	743	952	100	916	692	371
8	-338	262	870	135	163	169	151	113	608
9	-386	123	632	103	127	132	119	897	480
10	-648	-782	943	-106	-111	-106	-908	-663	-350
	A^1	$10^3 \times B^1$	C^1	D^1	A^2	B^2	C^2	D^2	it
	-1.08	1.074	0.278	0.357	-.1174	0.140	0.141	1.2940	33
	$\|w_2^1\|$					8.758346×10^{-5}			

i	$10^6 y$								
1	-377	-394	-277	- 47	413	148	437	247	988
2	100	293	549	890	142	236	395	574	268
3	482	917	128	163	203	259	331	394	402
4	911	160	204	230	248	264	277	267	197
5	155	253	297	305	293	272	244	199	121
6	180	400	426	400	348	287	227	164	892
7	166	350	605	519	409	301	213	139	705
8	125	267	442	663	466	295	185	110	527
9	670	142	233	348	497	228	119	650	294
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$a(x,y)=1$, $a_0=0.02$, $b_0=0,02$, $h=0,1$, v, y-приближённое решение системы (13), (14), A^1, B^1, C^1, D^1, A^2, B^2, C^2, D^2-решение системы (28). $Z=\max\{Z_1, Z_2\}$, где $Z_1 = u - v$, $Z_2 = \Psi - y$, u, Ψ-решение системы (18), (19), (20), (21).

Таблица IV

1	$10^9 v$								
1	320	442	495	51[illegible]	524	518	495	442	320
2	185	301	366	399	409	399	366	301	185
3	119	210	270	302	313	302	270	210	119
4	827	151	200	228	238	288	200	151	827
5	599	111	150	174	182	174	150	111	5.99
6	493	929	126	147	154	147	126	9.29	4.93
7	4.45	8.42	115	134	141	134	115	842	445
8	4.44	8.42	151	134	141	134	115	8.42	4.45
9	4.93	9.09	126	147	154	147	126	9.29	4.93
10	5.99	111	150	174	182	174	150	111	5.99

1	$10^{10} y$								
1	3.07	5.79	8.23	110	158	266	560	357	174
2	6.50	118	161	201	255	348	508	694	339
3	110	190	242	278	314	364	430	487	488
4	187	2[illegible]0	338	355	360	362	362	336	244
5	350	445	464	444	407	364	317	253	162
6	320	675	531	551	460	371	290	206	111
7	258	533	833	669	509	372	263	172	8.69
8	179	366	567	782	537	344	219	132	6.36
9	1.34	185	287	396	515	248	136	7.59	3.49
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0

v, y – приближённое решение системы (29). $h = 0.1$

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили
თბილისის ივ. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
318, 1994

ვექტორული ქვესივრცის ბაზისური მატრიცის ერთი სტრუქტურისა და ვანდერმონდის განზოგადებული დეტერმინანტის შესახებ

რ. მეგრელიშვილი

წინამდებარე ნაშრომში განიხილება $V \subset V_n$ ვექტორული ქვესივრცის ბაზისის ერთი ახალი სტრუქტურა. ნაჩვენებია, რომ ბაზისური H მატრიცის თვისებების გამოყენებით მიიღება ეფექტური წრფივი (n, k)-კოდების კლასები და განისაზღვრება მე-3 რიგის ვანდერმონდის განზოგადებული დეტერმინანტის ნულისაგან განსხვავებულობა იმ შემთხვევისათვის, როდესაც მისი ელემენტები წარმოადგენენ $GF(2^m)$ ველის ელემენტებს.

განვიხილოთ მატრიცა

$$H_1 = \begin{bmatrix} \alpha^{1\cdot 1} & \alpha^{1\cdot 2} & \dots & \alpha^{1\cdot m} \\ \alpha^{2\cdot 1} & \alpha^{2\cdot 2} & \dots & \alpha^{2\cdot m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha^{m\cdot 1} & \alpha^{m\cdot 2} & \dots & \alpha^{m\cdot m} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

სადაც $\alpha^{ij} \in GF(2^m)$ $(i, j = 1, \dots, m)$ – $GF(2)$ ველზე $p(x) = \sum_{k=0}^{m-1} x^k$ ერთეულოვანი მრავალწევრის ფესვით განსაზღვრული ველის მულტიპლიკაციური ჯგუფის ელემენტებია (მაგალითად $m \geq 5$ -მარტივი რიცხვის შემთხვევაში, რომლისთვისაც $p(x)$ დაუყვანადია), მოყვანილია (1) ნაშრომში.

H_1 მატრიცის ელემენტებისაგან შევადგინოთ მატრიცა

$$H_2=\begin{bmatrix}\alpha^{i_1 j_1} & \alpha^{i_1 j_2}\\ \alpha^{i_2 j_1} & \alpha^{i_2 j_2}\\ \alpha^{i_3 j_1} & \alpha^{i_3 j_2}\\ \alpha^{i_4 j_1} & \alpha^{i_4 j_2}\end{bmatrix} \qquad (2)$$

სადაც $i_1\ne i_2\ne i_3\ne i_4\in\{1,\dots,m\}$; $j_1\ne j_2\in\{1,\dots,m\}$. (2) მატრიცი შედგენილია ისეთნაირად, რომ მისი ერთსახელა i_v სტრიქონის და j_u სვეტის ელემენტები წარმოადგენენ H მატრიცის შესაბამის ერთსახელა i სტრიქონის და j სვეტის ელემენტებს.

H_2 მატრიცის ყოველი სტრიქონისათვის განვიხილოთ ჯამი, შედგენილი შემდეგი ორი შესაკრებისაგან:

$$\left(\alpha^{i_v j_1}x_1+\alpha^{i_v j_2}x_2\right) \bmod P(x), \qquad (3)$$

სადაც $x_l\in GF(2^m)$ $(l=1,2)$; $v=1,2,3,4$. შევნიშნოთ, რომ (3) ჯამის მნიშვნელობა ჩაწერილია m-განზომილებიანი ორობითი ვექტორების სახით (/2/, გვ. 182).

ქვემოთ ნაჩვენებია, რომ /3/-ში მიღებული m - ნორმის განსაზღვრების შესაბამისად სამართლიანია შემდეგი ლემები:

ლემა 1. m-ნორმა ვექტორისა, რომელიც წარმოადგენს (2) მატრიცის (3) გამოსახულების შესაბამისად შედგენილ ჯამურ სვეტს, აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობებს

$$4\ge\left|\begin{matrix}\alpha^{i_1 j_1}x_1+\alpha^{i_1 j_2}x_2\\ \alpha^{i_2 j_1}x_1+\alpha^{i_2 j_2}x_2\\ \alpha^{i_3 j_1}x_1+\alpha^{i_3 j_2}x_2\\ \alpha^{i_4 j_1}x_1+\alpha^{i_4 j_2}x_2\end{matrix}\right|_m\ge 3, \qquad (4)$$

სადაც $i_1 \neq \cdots \neq i_4$, $j_1 \neq j_2 \in \{1, \ldots, m\}$.

დამტკიცება. საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ ლემა სამართლიანია $x_\ell \in GF(2^m)$ ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, გარდა იმ ერთად-ერთი შემთხვევისა, როდესაც $x_1 = x_2 = 0$. განვიხილოთ (4)-ის ორი (მიღებული დაშვებების თანახმად) ნებისმიერი ჯამი:

$$(\alpha^{i_1 j_1} x_1 + \alpha^{i_1 j_2} x_2) \bmod p(x) \qquad (5)$$

$$(\alpha^{i_2 j_1} x_1 + \alpha^{i_2 j_2} x_2) \bmod p(x), \qquad (6)$$

სადაც $i_1 = i_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$; $j_1 = j_2 \in \{1, \ldots, m\}$.

დავუშვათ, რომ (5) ჯამი ტოლია ნოლის x_1, x_2 გარკვეული მნიშვნელობისათვის, მაშინ საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ (6) არ არის ნოლის ტოლი.

მართლაც, თუ (6) ჯამიც ნოლის ტოლია, ე.ი.

$$\alpha^{i_1 j_1} x_1 + \alpha^{i_1 j_2} x_2 \equiv 0 (\bmod p(x)), \qquad (5)$$

$$\alpha^{i_2 j_1} x_1 + \alpha^{i_2 j_2} x_2 \equiv 0 (\bmod p(x)), \qquad (6)$$

მაშინ $\alpha^{i_2 j_2}$ გავამრავლოთ (5)-ზე, ხოლო $\alpha^{i_1 j_1}$ – (6)-ზე და მიღებული გამოსახულებები შევკრიბოთ; მივიღებთ:

$$(\alpha^{i_1 j_2 + i_2 j_1} + \alpha^{i_1 j_1 + i_2 j_2}) x_2 \equiv 0 (\bmod p(x)). \qquad (7)$$

განვიხილოთ გამოსახულება (7): $i_1 j_2 + i_2 j_1 \not\equiv (i_1 j_1 + i_2 j_2) \bmod m$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში $i_1 i_2 + i_2 j_1 \equiv (i_1 j_1 + i_2 j_2) \bmod m$; $(i_1 - i_2)(i_2 - j_1) \equiv 0 (\bmod m)$, ე.ი. $i_1 = i_2$ ან $j_1 = j_2$ (რადგან m მარტივი რიცხვია), რაც ეწინააღმდეგება ჩვენს მიერ მიღებულ დაშვებას, რომ $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$. მაშასადამე $\alpha^{i_1 j_2 + i_2 j_1} + \alpha^{i_1 j_1 + i_2 j_2} \not\equiv 0 (\bmod p(x))$. ამიტომ გამოსახულება (7) არ შეიძლება უდრიდეს ნოლს. აქედან გა-

მომდინარეობს, რომ (6) უნდა განსხვავდებოდეს ნულისაგან. ამრიგად მივიღეთ, რომ (5) და (6) არ შეიძლება ერთდროულად უტოლდებოდეს ნულს $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, m\}$ ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ამიტომ m-ნიშნა ვექტორისა, რომელიც მიიღება (2) გამოსახულების სვეტების ჯამით, არ არის სამზე ნაკლები. იმ შემთხვევაში, როდესაც (5) და (6) ერთდროულად განსხვავებულია ნულისაგან $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, m\}$ ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, მაშინ m-ნიშნა (4) გამოსახულების ჯამური ვექტორებისა წონა ოთხის. ლემა დამტკიცებულია.

ანალოგიური გზით მტკიცდება, რომ ასევე სამართლიანია შემდეგი ორი ლემა.

ლემა 2. m-ნიშნა ვექტორისა, რომელიც წარმოადგენს (1) მატრიცის ნებისმიერი სამი სვეტის ელემენტებისაგან შედგენილ ვექტორებს, აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობებს:

$$W\left|\begin{matrix} \alpha^{i_1 j_1}x_1+\alpha^{i_1 j_2}x_2+\alpha^{i_1 j_3}x_3 \\ \alpha^{i_2 j_1}x_1+\alpha^{i_2 j_2}x_2+\alpha^{i_2 j_3}x_3 \\ \alpha^{i_3 j_1}x_1+\alpha^{i_3 j_2}x_2+\alpha^{i_3 j_3}x_3 \\ \alpha^{i_4 j_1}x_1+\alpha^{i_4 j_2}x_2+\alpha^{i_4 j_3}x_3 \end{matrix}\right|_m \geq 2, \tag{8}$$

სადაც $\alpha^{ij} \in GF(2^m)$ $(i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4,\ j_1 \neq j_2 \neq j_3 \in \{1, \ldots, m\})$; $x_1, x_2, x_3 \in GF(2^m)$ – ერთდროულად არ უდრის ნულს.

ლემა 3. m-ნიშნა ვექტორისა, რომელიც წარმოადგენს (1) მატრიცის პირველი ოთხი სტრიქონისა და ნებისმიერი ოთხი სვეტის ელემენტებისაგან შედგენილ ვექტორებს, აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობებს:

$$4 \geq \left| \begin{matrix} \alpha^{1j_1}x_1+\alpha^{1j_2}x_2+\alpha^{1j_3}x_3+\alpha^{1j_4}x_4 \\ \alpha^{2j_1}x_1+\alpha^{2j_2}x_2+\alpha^{2j_3}x_3+\alpha^{2j_4}x_4 \\ \alpha^{3j_1}x_1+\alpha^{3j_2}x_2+\alpha^{3j_3}x_3+\alpha^{3j_4}x_4 \\ \alpha^{4j_1}x_1+\alpha^{4j_2}x_2+\alpha^{4j_3}x_3+\alpha^{4j_4}x_4 \end{matrix} \right|_m \geq 1, \qquad (9)$$

სადაც $\alpha^{ij} \in GF(2^m)$ $(j_1 \neq \dots \neq j_4 \in \{1,\dots,m\})$, $x_1,\dots,x_4 \in GF(2^m)$ ერთდროულად არ უდრის ნულს.

განვიხილოთ წრფივი (n, k)- კოდის შემამოწმებელი მატრიცა:

$$H=\begin{bmatrix} \alpha^1\alpha^2 \dots \alpha^m & \\ \alpha^2\alpha^4 \dots \alpha^{2m} & \\ \alpha^3\alpha^6 \dots \alpha^{3m} & I_{4m} \\ \alpha^4\alpha^8 \dots \alpha^{4m} & \end{bmatrix}, \qquad (10)$$

სადაც

$$I_{4m}=\begin{bmatrix} \alpha^0 & & & \\ & \alpha^0 & & \\ & & \alpha^0 & \\ & & & \alpha^0 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

$4m$ რიგის ერთეულოვანი მატრიცაა, ე.ი. რომლის დიაგონალზე განლაგებულია ნულისაგან განსხვავებული კომპონენტები (განხილულ შემთხვევაში – ერთიანები); ხოლო ყველა სხვა კომპონენტი ნულოვანია.

მოცემული (10) მატრიცის მიმართ სრულდება შემდეგი უტოლობა:

$$\sum_{\nu=1}^{\gamma} S_{j_\nu} \neq 0, \qquad (12)$$

სადაც $\gamma \in \{1,2,3,4\}$, S – m სიგრძის j_ν-ური ფიქსირებული პაკეტური შეცდომის შესაბამისი სინდრომია $j_\nu \in \{1,2,\dots,m+4\}$ /2/.

ცნობილია, რომ, თუ მოცემული შემამოწმებელი მატრიცის მიმართ ყოველი γ და ნაკლები რაოდენობის ფაზირებული პაკეტი წარმოქმნის არანულოვან სინდრომს, მაშინ კოდი, რომელიც წარმოიქმნება ამ მატრიცის ნულოვან სივრცეს, ასწორებს $t=\left[\frac{\gamma}{2}\right]$ -ჯერად ფაზირებულ პაკეტურ შეცდომებს. (12) ეტალონში $\gamma=4$; $t=2$. ამრიგად, ყოველი $m\geq 5$ მარტივი რიცხვისათვის, რომლისთვისაც $p(x)=\sum_{k=0}^{m-1}x^k$ $GF(2)$ ველზე დაუყვანადია, არსებობს m სიგრძის ორჯერადი ფაზირებული პაკეტური შეცდომების გამასწორებელი წრფივი $(m^2+4m,\ m^2)$ - კოდების კლასი. ℓ ხარისხის ბლოკური შერევის შედეგად /2/ მიიღება წრფივ $(\ell m^2+4\ell m,\ \ell m^2)$ - კოდების კლასს, რომელიც ასწორებს $b=(\ell-1)m+1$ სიგრძის ორჯერად პაკეტებს.

ზემოთ გადმოცემულის საფუძველზე სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

<u>თეორემა 1.</u> ყოველი $m\geq 5$ მარტივი რიცხვისათვის, რომლისათვისაც $p(x)=\sum_{k=0}^{m-1}x^k$ დაუყვანადია, არსებობს კლასი წრფივი $(\ell m^2+4\ell m,\ \ell m^2)$ - კოდებისა, რომლებიც ასწორებენ $b=(\ell-1)m+1$ სიგრძის ორჯერად პაკეტურ შეცდომებს; $\ell\geq 1$ მთელი რიცხვია.

ძნელი არ არის იმაში დარწმუნება, რომ მიღებული კოდები ხასიათდებიან შედარებით მაღალი ეფექტურობით, ვიდრე /4/ ნაშრომში განხილული კოდები. ასევე ცხადია, რომ (1) მატრიცი შესაძლებლობას იძლევა ავაგოთ ერთჯერადი პაკეტური შეცდომების შესაბამისი შემამოწმებელი

$$H=\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha^1 & \alpha^2 & \cdots & \alpha^m & \multirow{2}{*}{I_{2m}} \\ \alpha^2 & \alpha^4 & \cdots & \alpha^{2m} & \end{array}\right] \qquad (13)$$

მატრიცი.

l ხარისხის ბლოკური შერევის შედეგად მიღებული მატრიცის ნულოვანი სივრცე წარმოადგენს კლასს წრფივი (lm^2+2lm^2, lm^2)-კოდებისა, რომლებიც ასწორებენ $b=(l-1)m+1$ სიგრძის ერთჯერად პაკეტურ შეცდომებს. ამრიგად, განხილულის შედეგად სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

<u>თეორემა 2</u>: ყოველი m მარტივი რიცხვისათვის არსებობს კლასი წრფივი (lm^2+2lm, lm^2) - კოდებისა, რომლებიც ასწორებენ $b=(l-1)m+1$ სიგრძის ერთჯერად-პაკეტურ შეცდომებს, სადაც $l\geq 1$ მთელი რიცხვია.

ცხადია, რომ მე-2 თეორემაში მიღებული კოდები ხასიათდებიან უფრო მაღალი ეფექტურობით, ვიდრე /5/ ნაშრომში მოცემული კოდები.

განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\alpha^{i_1 j_1}x_1+\alpha^{i_1 j_2}x_2+\alpha^{i_1 j_3}x_3\equiv 0(\mathrm{mod}\,P(x)),$$
$$\alpha^{i_2 j_1}x_1+\alpha^{i_2 j_2}x_2+\alpha^{i_2 j_3}x_3\equiv 0(\mathrm{mod}\,P(x)),$$
$$\alpha^{i_3 j_1}x_1+\alpha^{i_3 j_2}x_2+\alpha^{i_3 j_3}x_3\equiv 0(\mathrm{mod}\,P(x)), \qquad (14)$$

სადაც $\alpha^{ij}\in GF(2^m)$ მოდულით $P(x)=\sum_{k=0}^{m-1}x^k$ ველის ელემენტებია, $m\geq 5$ მარტივი რიცხვია, რომლისათვისაც $P(x)$ დაუყვანადია $GF(2)$ ველზე; $i_1\neq i_2\neq i_3$, $j_1\neq j_2\neq j_3\in\{1,\dots,m\}$.

2-ე ლემიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგი.

<u>შედეგი</u>. ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა (14) სისტემას, რომლის α^{ij} ($i_1=i_2=i_3$, $j_1=j_2=j_3\in\{1,\dots,m\}$) კოეფიციენტები (1) მატრიცის ელემენტებია, ხოლო x_ξ ($\xi\in\{1,2,3\}$) უცნობები მოდულით $P(x)=\sum_{k=0}^{m-1}x^k$ - $GF(2^m)$ ველის ელემენტებია, არანულოვანი ამოხსნა არ გააჩნია.

დროებლია, - იმისათვის, რომ (14) სისტემას ჰქონდეს არანულოვანი ამოხსნა, აუცილებელი და საკმარისი პირობაა მისი დეტერმინანტის ნულთან ტოლობა. მაგრამ, როგორც დავინახეთ, (14) სისტემას არანულოვანი ამოხსნა არ გააჩნია. ამიტომ შეიძლება დავასკვნათ, რომ მისი დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, ე.ი.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^{i_1 j_1} & \alpha^{i_1 j_2} & \alpha^{i_1 j_3} \\ \alpha^{i_2 j_1} & \alpha^{i_2 j_2} & \alpha^{i_2 j_3} \\ \alpha^{i_3 j_1} & \alpha^{i_3 j_2} & \alpha^{i_3 j_3} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (15)$$

სადაც $\alpha^{ij} \in GF(2^m)$ $(i_1 = i_2 = i_3,\ j_1 = j_2 = j_3 \in \{1,\dots,m\})$ $\bmod\ p(x) = \sum_{k=0}^{m-1} x^k$ ველის არანულოვანი ელემენტებია.

შევნიშნოთ, რომ (15) დეტერმინანტი წარმოადგენს ვანდერმონდის განზოგადოებულ დეტერმინანტს, რომლის ელემენტები $GF(2^m)$ მოდულით $p(x)$ ველის ელემენტებია. მართლაც, თუ (15)-ში შემოვიტანთ აღნიშვნებს

$$\beta_1 = \alpha^{i_1},\ \beta_2 = \alpha^{i_2},\ \beta_3 = \alpha^{i_3}, \qquad (15')$$

მივიღებთ

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_1^{j_1} & \beta_1^{j_2} & \beta_1^{j_3} \\ \beta_2^{j_1} & \beta_2^{j_2} & \beta_2^{j_3} \\ \beta_3^{j_1} & \beta_3^{j_2} & \beta_3^{j_3} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (16)$$

ამრიგად სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

<u>თეორემა 3.</u> მე-3 რიგის ვანდერმონდის განზოგადოებული (16) დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია; თუ β_i $(i = 1, 2, 3)$ - (15') ელემენტები $GF(2)$ ველზე $p(x)$ მოდულით განსაზღვრული $GF(2^m)$ მრავალწევრთა ველის ელემენტებია; $j_1 = j_2 = j_3 \in \{1,\dots,m\}$; $m \geq 5$ მარტივი რიცხვია, რომლისთვისაც $p(x) = \sum_{k=0}^{m-1} x^k$ დაუყვანადია $GF(2)$ ველზე.

შემოვიდა 1.XI.1993

[illegible]

ლიტერატურა

1. А.А.Алберт. Конечные поля. Кибернетический сборник, новая серия, 1966, вып. 3, стр.7-49.

2. У.Питерсон, Э.Уэлдон. Коды, исправляющие ошибки. "Мир",М., 1976.

3. Р.П.Мегрелишвили. Об обобщенной формулировке кодового расстояния.Сообщения АН ГССР, т.X,№ 2, 1967.

4. Р.П.Мегрелишвили, Фам Хонг Тхай. Класс (n,k)- кодов, исправляющих двойные пакеты ошибок. Сообщения АН ГССР,т.83, № 2,1976.

5. Р.П.Мегрелишвили, Т.Г.Николаишвили, Фам Хонг Тхай. Класс (n,k)-кодов, исправляющих пакеты ошибок. Сообщения АН ГССР, т.81, № 2, 1976.

Р.П. Мегрелишвили

ОБ ОДНОЙ СТРУКТУРЕ БАЗИСНОЙ МАТРИЦЫ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА И ОБОБЩЕННОЙ ДЕТЕРМИНАНТЕ ВАНДЕРМОНДА

Резюме

Рассматривается структура базисной матрицы векторного пространства, с помощью которой получаются классы кодов, исправляющих сгруппированные (пакеты) ошибки. Рассматривается частный случай определения обобщенного детерминанта Вандермонда.

R.Megrelishvili

ON A ONE STRUCTURE OF THE BASIC MATRIX OF A VECTOR SPACE AND ON THE GENERALIZED VANDERMONDE DETERMINANT

Summary

The paper considers the structure of the basic matrix of a vector space which helps construct classes of burst-error-correcting codes. A special case of generalized Vandermonde determinant is considered.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили

თბილისის ივ. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

318,1995

О ЗАДАЧЕ КОШИ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

М.З.Ментешашвили

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного уравнения Дюбрейль-Жакотэна на плоскости переменных x, y :

$$(u_y^2-1)u_{xx}-2u_x u_y u_{xy}+u_x^2 u_{yy}=0, \qquad (I)$$

гиперболического всюду, за исключением точек, где производная u_x искомого решения имеет нули. Там уравнение (I) параболически вырождается. Следовательно, множество точек параболического вырождения рассматриваемого уравнения не определено. Поэтому, при постановке задачи Коши следует всегда удостовериться, не вырождается ли уравнение на носителе данных (см./I-2/). Этого правила необходимо придерживаться и в случае, рассмотренном ниже.

Пусть $\tau(\varphi), \nu(\varphi)$ – заданные на окружности единичного радиуса функции, соответственно дважды и один раз непрерывно дифференцируемые.

Задача Коши требует нахождения функции $u(x,y)$, удовлетворяющей уравнению (I) и условиям на единичной окружности γ :

$$u\Big|_\gamma=\tau(\varphi), \qquad u'_\rho\Big|_\gamma=\nu(\varphi). \qquad (2)$$

Наряду с решением необходимо определение и той области, в которой указанное решение можно полностью построить.

К исследованию задачи мы приступим с общего интеграла уравнения (I). Он представим при помощи двух произвольных функций $f, g \in C^2(R^1)$ и имеет вид (см. /3/):

$$f(u+y)+g(u-y)=x. \qquad (3)$$

Подчиняя общий интеграл (3) условиям (2), с учетом $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $\rho=1$, мы получаем

$$\begin{gathered} f[\tau(\theta)+\sin\theta]+g[\tau(\theta)-\sin\theta]=\cos\theta, \\ f'[\tau(\theta)+\sin\theta](u_\rho+y_\rho)+g'[\tau(\theta)-\sin\theta](u_\rho-y_\rho)=\cos\theta. \end{gathered} \qquad (4)$$

Дифференцированием первого из соотношений (4) по переменной θ и комбинированием полученного результата со вторым соотношением приходим к системе двух линейных алгебраических уравнений относительно величин f', g', которые и определяем:

$$\begin{gathered} f'(\tau(\theta)+\sin\theta)=\frac{1}{2}\,\frac{1-\nu(\theta)\sin\theta-\tau'(\theta)\cos\theta}{\nu(\theta)\cos\theta-\tau'(\theta)\sin\theta}\equiv F(\theta), \\ g'(\tau(\theta)-\sin\theta)=\frac{1}{2}\,\frac{1+\nu(\theta)\sin\theta+\tau'(\theta)\cos\theta}{\nu(\theta)\cos\theta-\tau'(\theta)\sin\theta}\equiv G(\theta). \end{gathered} \qquad (5)$$

Предположим, что выполнено условие

$$[\tau'(\theta)]^2-\cos^2\theta\neq 0, \qquad 0\leq\theta\leq 2\pi. \qquad (6)$$

Тогда на указанном замкнутом интервале уравнения

$$\tau(\theta)+\sin\theta=z,$$

$$\tau(\theta)-\sin\theta=\zeta$$

однозначно разрешимы в классе действительных решений. Обозначим их соответственно через

$$\theta=T(z), \qquad \theta=\overline{T}(\zeta).$$

Тогда интегрированием обоих соотношений (5) в пределах от нулевого значения θ до произвольного $\theta = T(x)$ в первом соотношении и $\theta = \bar{T}(\xi)$ – во втором, будем иметь

$$f(x) = f[\tau(0)] + \int_0^{T(x)} F(t)(\tau'(t) + \cos t)\,dt,$$

$$g(\xi) = g[\tau(0)] + \int_0^{\bar{T}(\xi)} G(t)(\tau'(t) - \cos t)\,dt. \qquad (7)$$

Их сумма уже дает нам решение задачи (I–2) в неявном виде, которое будет содержать неопределенные значения свободных функций при $\theta = 0$. Но путем нормирования возможно и их определение. В частности, предполагая, что соотношение (3) при f, g, определенных по формуле (7), выполняется в точке $\rho = 1$, $\theta = 0$, можем утверждать, что

$$f[\tau(0)] + g[\tau(0)] + \int_0^{T[u(1,0)+0]} F(t)\,dt + \int_0^{\bar{T}[u(1,0)-0]} G(t)\,dt = x\Big|_{x=1},$$

но учитывая тождества $T[\tau(\theta) + \sin\theta] \equiv \theta$, $\bar{T}[\tau(\theta) - \sin\theta] \equiv \theta$ для всех значений $\theta \in [0, 2\pi]$, в том числе и при $\theta = 0$, верхние пределы интегрирования в обоих интегральных слагаемых обращаются в нуль. Следовательно,

$$f[\tau(0)] + g[\tau(0)] = x\Big|_{x=1} = 1$$

Окончательно, в неявном виде решение задачи получит форму:

$$x - 1 = \int_0^{T[u+y]} F(t)(\tau'(t) + \cos t)\,dt + \int^{\bar{T}[u-y]} G(t)(\tau'(t) - \cos t)\,dt. \qquad (8)$$

Такое представление достигается при выполнении условия (6) и интегрируемости подынтегральных выражений. Если условие (6) выполняется в точке (1,0), то имеет место следующая

Теорема

Если $\tau'(\frac{\pi}{2})=0$, $\nu^2(\frac{\pi}{2})=1$ и функции $\lambda_i = \nu' + (-1)^i\sqrt{\frac{\tau''}{\tau'}(2\tau'\nu\nu' - (\nu^2-1)\tau'')}$ в точке (I,0) имеют действительные решения одинакового знака, тогда существуют кривые γ_1 и γ_2, которые являются границей области определения решения задачи, причем эти кривые касаются окружности в указанной точке; γ_1 расположена внутри окружности и замкнута, а γ_2 находится вне окружности и может быть как замкнутой, так и разомкнутой.

Поступила I4.XII.1994

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

Литература

I. E.Goursat, Sur l' integration des equations aux derivées partilles du second ordre, Paris, 1924.

2. А.В.Бицадзе, Некоторые классы уравнений в частных производных, Москва, I981.

3. Д.К.Гвазава, О глобальной разрешимости задачи Коши для одного нелинейного уравнения, Сообщ. АН Грузии, т.99,I98I, стр. 553-556.

მ. მენთეშაშვილი

კოშის ამოცანის შესახებ ერთეულოვან წრეწირზე

რეზიუმე

განიხილება დუბრეილ-ჟაკოტენის განტოლება

$$(u_y^2-1)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+u_x^2u_{yy}=0$$

x, y ცვლადების სიბრტყეზე.

დასმულია კოშის ამოცანა ერთეულოვან γ წრეწირზე

$$u\Big|_\gamma=\tau(\varphi), \qquad u_\rho\Big|_\gamma=\nu(\varphi),$$

სადაც τ, ν ერთეულოვან წრეწირზე მოცემული ორჯერ და ერთხელ უწყვეტად წარმოებადი ცნობილი ფუნქციებია შესაბამისად. მიღებულია ამოცანის ამოხსნა არაცხადი სახით.

M.Menteshashvili

ON A CAUCHY PROBLEM WITH INITIAL CONDITION ON A UNIT CIRCLE

Summary

The initial value problem for the Dubreil-Jakoten equation $(u_y^2-1)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+u_x^2u_{yy}=0$ with initial conditions on a unit circle is considered. The solution of the problem in the implicit form is obtained. The theorem of the existence global solution is proved.

Труды Тбилисского государственного университета
им.И.Джавахишвили

თბილისის ივ.ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

318.1995

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Н.В.Бокучава

§ I. Введение

Коммуникационными системами называют системы, включающие большое число однотипных элементов (частиц), в которых переход из одного состояния в другое осуществляется перемещением элементов (частиц) по определенным каналам связи.

При реализации перемещений частиц в коммуникационных системах возможны два случая. Первый, когда конкретные частицы передвигающихся по тому или иному каналу связи, строго фиксированы, и второй, когда частицы случайно оказываются в том или ином канале. В первом случае коммуникационные системы называют детерминированными, а во втором – стохастическими.

Так как детерминированные коммуникационные системы можно всегда рассматривать как предельный случай стохастических систем, то мы остановимся на изучении вопросов моделирования стохастических коммуникационных систем.

Пусть частицы перемещаются из n групп начального состояния (истоков) в m группы конечного состояния (стоков), причем все истоки $j=\overline{1,n}$ и стоки $i=\overline{1,m}$ связаны между собой коммуникациями с соответствующей характеристикой T_{ij} (примерами таких характеристик могут служить стоимость перевозок, время передвижения и т.д.). Так как в стохастической системе выбор частицами пары (i, j), и, следовательно, величина характеристики случайны, то будет существовать вероятность P_{ij} каждой конкретной реализации $t = T_{ij}$ случайной величины T с элементами T_{ij}. Для определения P_{ij} разобьем ось t между значениями от $\min\limits_{i,j} T_{ij}$ до $\max\limits_{i,j} T_{ij}$ на ℓ примыкающих друг к другу отрезков Δ_K, внутри которых будем считать характеристики T_{ij} неразличимыми. Тогда число коммуникаций, попадающих в тот или иной отрезок Δ_K

$$n_K = \sum_{i,j} \Delta_K(T_{ij}), \tag{I}$$

где функция

$$\Delta_K(T_{ij}) = \begin{cases} 1, & T_{ij} \in \Delta_K \\ 0, & T_{ij} \bar{\in} \Delta_K \end{cases} \tag{2}$$

Количество частиц x_{ij}, передвигающихся по этим коммуникациям с неразличимыми характеристиками $T_{ij} \in \Delta_K$,

$$x_{ij}(\Delta_K) = \sum_{i,j} x_{ij} \Delta_K(T_{ij}).$$

Предполагая равновероятность выбора одной конкретной коммуникации в отрезке Δ_K, для искомой вероятности P_{ij} (вероятности выбора одной коммуникации) получим

$$P_{ij} = \frac{x_{ij}(\Delta_K)}{N n_K}, \quad \forall T_{ij} \in \Delta_K, \tag{3}$$

причем будем полагать, что при отсутствии коммуникации, т.е. при $n_K = 0$, $P_{ij} = 0$, $N = \sum_{ij} x_{ij}$ – общее число частиц.

Так как в рассматриваемой нами стохастической коммуникационной системе общее число N частиц в промежуточных состояниях размещается по mn коммуникациям с вероятностями P_{ij}, образуя при этом матрицу потоков $X = \{x_{ij}\}$, то вероятность реализации произвольной матрицы потока /I/

$$P(X) = \frac{N!}{\prod_{i,j} x_{ij}!} \prod_{ij} P_{ij}^{x_{ij}}, \qquad (4)$$

а соответствующая энтропия при использовании формулы стирлинга примет следующий вид:

$$H(X) \approx \sum_{i,j} x_{ij} \ln \frac{P_{ij}}{x_{ij}} + C \qquad (5)$$

Теперь рассмотрим основные модели распределения частиц по коммуникационным системам.

§ 2. Канонические ансамбли коммуникационных систем

Как уже отмечалось, элементы коммуникационной системы характеризуются тремя признаками: истоками, стоками и коммуникациями, причем, для каждого из этих признаков существует распределение частиц по заранее заданным группам. Рассмотрим следующие варианты определения потоков.

§ 2.I. Микроканонический ансамбль коммуникационных систем

Предположим, что мы не располагаем никакой информацией о размещении частиц по mn возможным коммуникациям, т.е. не можем отдать предпочтение ни одной из реализаций T_{ij} случайной величины T, что эквивалентно принятию $P_{ij} = \frac{1}{mn} = const$. Тогда, нахождение наилучших оценок для величин потоков x_{ij}, исходя из соотношения (5), сводится к решению следующей задачи:

$$\max_{i,j} H(X) = -\sum_{i,j} x_{ij} \ln x_{ij} (mn)$$

$$\sum_{i,j} x_{ij} = N,$$

решением которой будет /2/

$$x_{ij} = \frac{N}{mn} . \tag{6}$$

§ 2.2. Канонический ансамбль

Определим число частиц, выходящих из каждого истока. Для этого просуммируем матрицу потоков по индексу

$$x_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} , \quad j = \overline{1,n} .$$

Тогда вероятность выхода частица именно из этого истока будет равна

$$q_j = N^{-1} \sum_i x_{ij} , \quad j = \overline{1,n}.$$

Предположим теперь, что известно среднее значение некоторых характеристик истоков $\langle L(q) \rangle$, т.е.

$$\langle L(q) \rangle = \sum_j L_j(q) q_j = \frac{1}{N} \sum_{i,j} L_j(q) x_{ij} ,$$

тогда задача определения потоков x_{ij} сводится к решению следующей задачи:

$$\max_{x_{ij}} \Big(-\sum_{i,j} x_{ij} \ln x_{ij} \Big),$$

при условиях

$$\sum_{i,j} x_{ij} L_j(q) = N \langle L(q) \rangle ,$$

$$\sum_j x_{ij} = x_i , \quad i = \overline{1,m} ,$$

решением которой будет /2/

$$x_{ij} = Z^{-1} x_i \exp(-\lambda L_j(q)), \tag{7}$$

где

$$Z = \sum_{j} exp(-\lambda L_j(q)).$$

§ 2.3. Большой канонический ансамбль

Будем предполагать, что известно число частиц и вероятность выхода частиц из конкретного стока, число частиц, входящих в сток, и вероятность входа, средние значения характеристик коммуникационной системы как на истоке, так и на стоке. Тогда для нахождения значения потоков x_{ij} придется решить следующую вариационную задачу:

$$\max_{x_{ij}} \left(-\sum_{i,j} x_{ij} \ln x_{ij}\right),$$

при условиях

$$\sum_{j} x_{ij} L_j(q) = N\langle L(q)\rangle, \quad j = \overline{1,n},$$

$$\sum_{i} x_{ij} L_i(p) = N\langle L(p)\rangle, \quad i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{i,j} x_{ij} = N,$$

для которой

$$x_{ij} = Z^{-1} N exp\left(-\lambda_1 L_j(q) - \lambda_2 L_j(p)\right), \tag{8}$$

где

$$Z = \sum_{i,j} exp\left(-\lambda_1 L_j(q) - \lambda_2 L_i(p)\right).$$

§ 3. Общая постановка задачи

Всем вышерассмотренным моделям коммуникационных систем соответствуют задачи математического программирования с переменными величинами потоков x_{ij}, общая формулировка которых такова:

$$\max_{ij}\left(\sum_{i,j} x_{ij} \ln \frac{P_{ij}}{x_{ij}}\right), \tag{9}$$

$$\sum_{i,j} a_{ij}(r) x_{ij} = b(r), \quad r = \overline{1,s},$$
$$\sum_{i,j} x_{ij} = N, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{10}$$

где $b(r)$ и $a_{ij}(r)$ – коэффициенты, определяемые типом задач, общее решение которых имеет следующий вид:

$$x_{ij} = Z^{-1} P_{ij} \exp\left(\sum_{r=1}^{s} \lambda(r) a_{ij}(r)\right), \tag{11}$$

где

$$Z = \sum_{r=1}^{s} \exp\left(\lambda(r) a_{ij}(r)\right), \tag{12}$$

а $\lambda(r)$ определяются из условий (10). Случай, когда некоторые P_{ij} равны нулю, означает, что имеются коммуникации между парами (i,j), априорная вероятность выбора которых нулевая. Следовательно, потоки x_{ij} по этим коммуникациям равны нулю и задача максимизации $H(x_{ij})$ должна рассматриваться в пространстве меньшей размерности.

Сравнивая полученные соотношения (6), (7), (8) с гиббсовскими распределениями, приходим к заключению, что модели статистической физики, связанные с распределением частиц идеального газа, по энергетическим (уровням) ячейкам можем рассматривать как стохастические коммуникационные системы.

Поступила 12.1.1994

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

Литература

I. А.Вильсон. Энтропийные методы моделирования сложных систем М.,"Наука", 1978.

2. Н.В.Бокучава. Общие принципы формирования моделей. Труды ТПУ, т.258, № 6,1985.

ნ.ბოკუჩავა

კომუნიკაციური სისტემების მოდელირება

რეზიუმე

ნაშრომში განხილულია კომუნიკაციურ სისტემებში მიმდინარე პროცესების მოდელირების ზოგადი ენტროპიული მეთოდები და პრინციპები.

W.Bokuchava

MODELLING OF COMMUNICATION SYSTEMS

Summary

The paper deals with general entropy methods and principles of modelling processes occurring in communication systems.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили

თბილისის ივ. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

318, 1995

ОБ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА ДЛЯ ПЛОСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ОБЛАСТИ

М. И. Кезерашвили

Как известно, обобщенная задача Неймана для плоской ортотропной области сводится к следующей краевой задаче: ищется обобщенная гармоническая функция $u(x_1, x_2)$, которая в области S удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\Delta_1 u = 0, \tag{1}$$

а на контуре Г области S – граничному условию:

$$\frac{d_1 u}{dn} = f_1(x_1,x_2)\cos(n,\hat{}x_1) + f_2(x_1,x_2)\cos(n,\hat{}x_2), \tag{2}$$

где $f_1(x_1,x_2)$ и $f_2(x_1,x_2)$ – заданные функции на контуре Г, n – внешняя нормаль к контуру, а обобщенные операторы Лапласа Δ_1 и нормальной производной $\frac{d_1}{dn}$ имеют вид:

$$\Delta_1 = M\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + L\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$\frac{d_1}{dn} = M\frac{\partial}{\partial x_1}\cos(n,\hat{}x_1) + L\frac{\partial}{\partial x_2}\cos(n,\hat{}x_2), \tag{3}$$

где M и L – упругие константы.

Отметим, что для существования решения указанной задачи необходимо выполнение условия:

$$\oint_{\Gamma} \frac{d_1 u}{dn} dS = 0 \tag{4}$$

Известно также, что ряд задач линейной и нелинейной теории упругости, как для анизотропных (изотропных) призматических тел, так и тел, близких к призматическим (напр. I,2,3,4), приводятся к задачам вида (I) и (2), в которых функции $f_1(x_1,x_2)$ и $f_2(x_1,x_2)$ как правило, известные полиномы не выше третьей степени, т.е. имеют следующий общий вид:

$$f_1 = b_1 x_1^3 + b_2 x_1^2 x_2 + b_3 x_1 x_2^2 + b_4 x_2^3 + b_5 x_1^2 + b_6 x_1 x_2 + b_7 x_2^2 + b_8 x_1 + b_9 x_2 + b_{10},$$

$$f_2 = c_1 x_1^3 + c_2 x_1^2 x_2 + c_3 x_1 x_2^2 + c_4 x_2^3 + c_5 x_1^2 + c_6 x_1 x_2 + c_7 x_2^2 + c_8 x_1 + c_9 x_2 + c_{10} \qquad (5)$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ и $c_1, c_2, \ldots, c_{10}$ – известные коэффициенты, значения которых определяют разные типы задач.

Настоящая работа посвящена решению вышепоставленной задачи для плоской прямоугольной ортотропной области, ограниченной прямыми $x_1 = \pm a$, $x_2 = \pm b$, в условиях (5).

Для начала сделаем замену переменных:

$$\xi_1 = x_1 \sqrt{\frac{L+M}{2M}}, \quad \xi_2 = x_2 \sqrt{\frac{L+M}{2L}}, \quad \varphi = u \frac{L+M}{2\sqrt{LM}}, \qquad (6)$$

тогда обобщенные операторы (3) превращаются в "обычные" операторы:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}, \quad \frac{d}{dn} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \cos(n, \xi_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \cos(n, \xi_2),$$

а уравнение (I) и условие (2) в новых переменных можно записать в следующем развернутом виде:

$$\Delta \varphi = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_1 = -a\sqrt{\frac{L+M}{2M}}} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{L+M}{2L}} \left(-b_1 a^3 + \sqrt{\frac{2L}{L+M}}\, b_2 a^2 \xi^2 - \cdots + b_{10}\right),$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\right|_{\xi_1=a\sqrt{\frac{L+M}{2M}}}=\frac{1}{M}\sqrt{\frac{L+M}{2L}}\left(b_1a^3+\sqrt{\frac{2L}{L+M}}\,b_2a^2\xi_2+\dots+b_{10}\right),$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=-b\sqrt{\frac{L+M}{2L}}}=\frac{1}{L}\sqrt{\frac{L+M}{2M}}\left(c_1\sqrt{\left(\frac{2M}{L+M}\right)^3}\xi_1^3-\frac{2c_2bM}{L+M}\xi_1^2+\dots+c_{10}\right),$$

(8)

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=b\sqrt{\frac{L+M}{2L}}}=\frac{1}{L}\sqrt{\frac{L+M}{2M}}\left(c_1\sqrt{\left(\frac{2M}{L+M}\right)^3}\xi_1^3+\frac{2c_2bM}{L+M}\xi_1^2+\dots+c_{10}\right).$$

Условие существования решения (4) в данном случае имеет следующий вид:

$$(3b_1+c_2)a^2+(b_3+3c_4)b^2+3(b_8+c_9)=0.$$

Для упрощения вычислений сперва преобразуем полученную задачу в другую, соответствующую уже частично нулевым граничным условиям задачу, скажем, на двух противоположных сторонах $\xi_2=\pm b\sqrt{\frac{L+M}{2L}}$ прямоугольника. С этой целью положим

$$\varphi=F+\omega, \tag{9}$$

где $\omega(\xi_1,\xi_2)$ – искомая функция, а функцию $F(\xi_1,\xi_2)$ подберем таким образом, чтобы она заранее удовлетворяла бы тем же граничным условиям на сторонах $\xi_2=\pm b\sqrt{\frac{L+M}{2L}}$, что и функция $\varphi(\xi_1,\xi_2)$. Следовательно, одним из значений функции может служить следующее выражение:

$$F=\frac{2Mc_1}{L(L+M)}\xi_1^3\xi_2+\frac{1}{L+M}\sqrt{\frac{M}{L}}c_2\xi_1^2\xi_2^2+\frac{b^2c_3}{L}\xi_1\xi_2+$$

(10)

$$+\frac{1}{2(L+M)}\sqrt{\frac{L}{M}}c_4\xi_2^4+\frac{1}{L}\sqrt{\frac{2M}{L+M}}c_5\xi_1^2\xi_2+\frac{1}{\sqrt{2L(L+M)}}c_6\xi_1\xi_2^2+$$

$$+\frac{1}{L}\sqrt{\frac{L+M}{2M}}c_7 b^2\xi_2+\frac{c_8}{L}\xi_1\xi_2+\frac{c_9}{2\sqrt{ML}}\xi_2^2+\frac{1}{L}\sqrt{\frac{L+M}{2M}}c_{10}\xi_2 .$$

Подставляя (9) в (7) и (8) и учитывая (10), получим, что искомая функция $\omega(\xi_1,\xi_2)$ внутри преобразованного прямоугольника должна удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$\Delta\omega=-\Delta F=A\xi_1^2+B\xi_1\xi_2+C\xi_2^2+D\xi_1+E\xi_2+G, \tag{11}$$

а на его сторонах – граничным условиям:

$$\left.\frac{\partial\omega}{\partial\xi_1}\right|_{\xi_1=-a\sqrt{\frac{L+M}{2M}}}=\frac{1}{M}\sqrt{\frac{L+M}{2L}}\left(-b_1a^3+\sqrt{\frac{2L}{L+M}}\,b_2a^2\xi_2-\dots+b_{10}\right)-$$
$$-\left(\frac{3a^2c_1}{L}\xi_2-\sqrt{\frac{2}{L(L+M)}}\,ac_2\xi_2^2+\frac{b^2c_3}{L}\xi_2-\frac{2c_5a}{L}\xi_2+\frac{1}{\sqrt{2L(L+M)}}c_6\xi_2^2+\frac{1}{L}c_8\xi_2\right), \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial\omega}{\partial\xi_1}\right|_{\xi_1=a\sqrt{\frac{L+M}{2M}}}=\frac{1}{M}\sqrt{\frac{L+M}{2L}}\left(b_1a^3+\sqrt{\frac{2L}{L+M}}\,b_2a^2\xi_2+\dots+b_{10}\right)-$$
$$-\left(\frac{3a^2c_1}{L}\xi_2+\sqrt{\frac{2}{L(L+M)}}\,ac_2\xi_2^2+\frac{b^2c_3}{L}\xi_2+\frac{2c_5}{L}\xi_2+\frac{1}{\sqrt{2L(L+M)}}c_6\xi_2^2+\frac{1}{L}c_8\xi_2\right)$$

$$\left.\frac{\partial\omega}{\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=-b\sqrt{\frac{L+M}{2L}}}=0,\qquad \left.\frac{\partial\omega}{\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=b\sqrt{\frac{L+M}{2L}}}=0, \tag{13}$$

где введены обозначения

$$A=-\frac{2}{L+M}\sqrt{\frac{M}{L}}\,c_2,\quad B=-\frac{12Mc_1}{L(L+M)},\quad C=-\frac{2}{L+M}\left(c_2\sqrt{\frac{M}{L}}+3\sqrt{\frac{L}{M}}\,c_4\right),$$

$$D=-\frac{2c_6}{\sqrt{2L(L+M)}},\quad E=-\frac{2}{L}\sqrt{\frac{2M}{L+M}}\,c_5,\quad G=-\frac{1}{\sqrt{ML}}\,c_9.$$

Неоднородное уравнение (II), при граничных условиях (I2) и (I3), решим методом тригонометрических рядов. Для этого положим:

$$\omega=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\xi_1)\sin \lambda_n \xi_2, \tag{I4}$$

где $\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{b}\sqrt{\frac{1}{2(L+M)}}$, а $f_n(\xi_1)$ - это некоторые подлежащие определению функции. При таком выборе функции $\omega(\xi_1,\xi_2)$ граничное условие при $\xi_2=\pm b\sqrt{\frac{L+M}{2L}}$ будет автоматически выполнено.

Далее, разлагая предварительно по таким же функциям правую часть уравнения (II) и подставляя (I4) в (II), для определения функции $f_n(\xi_1)$ получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$f_n''(\xi_1)-\lambda_n^2 f_n(\xi_1)=\frac{4(-1)^n\sqrt{2(L+M)}\, b}{\sqrt{L}\,\pi^2(2n+1)^2}(B\xi_1+E),$$

общим интегралом которого будет служить выражение:

$$f_n(\xi_1)=A_n sh\lambda_n\xi_1+B_n ch\lambda_n\xi_1-\frac{8(-1)^n\sqrt{2(L+M)^3}\, b^3}{\pi^4(2n+1)^4 L\sqrt{L}}(B\xi_1+E),$$

где A_n и B_n - произвольные постоянные интегрирования, которые должны быть подобраны так, чтобы удовлетворить граничным условиям (I2) на двух остальных сторонах $\xi_1=\pm a\sqrt{\frac{L+M}{2M}}$, что для A_n и B_n после несложных вычислений дает следующие значения:

$$A_n=\frac{-192(-1)^n(L+M)Mb^4c_1}{\pi^5(2n+1)^5 L ch\frac{(2n+1)\pi a\sqrt{L}}{2b\sqrt{M}}}+\frac{8(-1)^n(L+M)b^2}{\pi^3(2n+1)^3 L ch\frac{(2n+1)\pi a\sqrt{L}}{2b\sqrt{M}}}\left\{\frac{b_2a_2^2+b_9}{M}\right.$$

$$-\frac{3a^2c_1+c_8}{L}+\frac{3b^2b_4}{M}\left[1-\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\right]\Bigg\},$$

$$B_n=\frac{8(-1)^n(L+M)ab^2}{\pi^3(2n+1)^3L\,sh\frac{(2n+1)\pi a\sqrt{L}}{2b\sqrt{M}}}\left(\frac{b_6}{M}-\frac{2c_5}{L}\right).$$

Таким образом, коэффициенты A_n и B_n найдены, т.е. функция $\omega(\xi_1,\xi_2)$ определена формулой (I4). Следовательно, определена и функция $\varphi(\xi_1,\xi_2)=F+\omega$, где $F(\xi_1,\xi_2)$ имеет значение (I0), которое, однако, в окончательной записи решения должно быть представлено в виде разложения по синусам, так как при определении A_n и B_n по условиям (I2) производные $\partial F/\partial\xi_1$ и $\partial F/\partial\xi_2$ на сторонах $\xi_1=\pm a\sqrt{\frac{L+M}{2M}}$ были разложены по таким же функциям, по каким было разложено $\omega(\xi_1,\xi_2)$.

Используя значение ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi\xi_2}{2b}=\frac{\pi^2\xi_2}{8b}$$

и переходя в (9) к старым переменным, с учетом вышесказанного, окончательно для искомой функции $U(x_1,x_2)$ получим:

$$\begin{aligned}U&=\frac{x_2}{L}\left(c_1x_1^3+b^2c_3x_1+c_5x_1^2+c_7b^2+c_8x_1+c_{10}\right)+\\&+\frac{16b^2}{\pi^3}\sqrt{\frac{M}{L}}\left[\frac{1}{M}\left(b_2a^2+b_9\right)-\frac{1}{L}\left(3c_1a^2+b^2c_3+c_8\right)+\right.\\&\left.+\frac{3b^2b_4}{M}\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n sh\frac{(2n+1)\pi\sqrt{L}\,x_1}{2b\sqrt{M}}}{(2n+1)^3ch\frac{(2n+1)\pi\sqrt{L}\,a}{2b\sqrt{M}}}\sin\frac{(2n+1)\pi x_2}{2b}+\\&+\frac{16ab^2}{\pi^3}\sqrt{\frac{M}{L}}\left(\frac{b_6}{M}-\frac{2c_5}{L}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n ch\frac{(2n+1)\pi\sqrt{L}\,x_1}{2b\sqrt{M}}}{(2n+1)^3sh\frac{(2n+1)\pi\sqrt{L}\,a}{2b\sqrt{M}}}\sin\frac{(2n+1)\pi x_2}{2b},\end{aligned}\qquad (I5)$$

$$+\frac{64b^3M}{L^2\pi^4}\left(c_5+3c_1x_1\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^4}\sin\frac{(2n+1)\pi x_2}{2b}-$$

$$-\frac{384b^4}{\pi^5}\sqrt{\frac{M}{L}}\left(\frac{b_4}{M}-\frac{Mc_1}{L^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi\sqrt{L}\,x_1}{2b\sqrt{M}}}{(2n+1)^5\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi\sqrt{L}\,a}{2b\sqrt{M}}}\sin\frac{(2n+1)\pi x_2}{2b}.$$

В заключение отметим, что полученные здесь результаты охватывают целые классы конкретных граничных задач для ортотропных (изотропных) прямоугольных областей и позволяют эффективно решать их.

Для иллюстрации эффективности полученных решений в качестве конкретного примера обратимся к задаче кручения ортотропного призматического тела с прямоугольным сечением. Как известно, в этом случае в соотношениях (5) имеются следующие упрощения:

$$b_1=b_2=b_3=b_4=b_5=b_6=b_7=b_8=b_{10}=0,\quad b_9=M,$$

$$c_1=c_2=c_3=c_4=c_5=c_6=c_7=c_9=c_{10}=0,\quad c_8=-L. \qquad (16)$$

Подставляя значения коэффициентов (16) в (15), легко найдем, что

$$U=-x_1x_2+\sqrt{\frac{M}{L}}\,\frac{32b^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi\sqrt{L}\,x_1}{2b\sqrt{M}}}{(2n+1)^3\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi\sqrt{L}\,a}{2b\sqrt{M}}}\sin\frac{(2n+1)\pi x_2}{2b},$$

значение которого в точности соответствует известному выражению функции кручения (5).

Поступило 27.I.1994

Кафедра математического
обеспечения ЭВМ ТГУ

Литература

I. Bors C.J. Teoria elasticitatii corpurilor anisotrope. Ed.Acad.republ.soc. Romania.- Bucuresti, 1970.- 518p.

2. Saint - Venant B. Memoire sur la flixion des prismes. Journal de Math.(Liouville).- 1856.-v.1, sec.2.- pp.89-189.

3. Риз П.М. Деформация и напряжения естественно закрученных стержней. Изв.АН СССР, сер.мат.- 1939, № 4.-С.449-477.

4. Рухадзе А.К., Кунах К.И. Об одной задаче деформации геометрически нелинейных однородных ортотропных цилиндрических брусьев. Труды ГПИ, № 6(162), 1973. - С.5-II.

5. Love A.E. A treatise on the mathematical theory of elasticity. - Cambridge, 1927.

მ. კეზერაშვილი

ბრტყელი მართკუთხა ორთოტროპული არისათვის ნეიმანის ერთი განზოგადებული ამოცანის შესახებ

რეზიუმე

მიღებულია ტრიგონომეტრიული მწკრივების მეთოდის გამოყენებით ნეიმანის ერთი განზოგადებული სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა ბრტყელი მართკუთხა ორთოტროპული არისათვის.

M.Kezerashvili

ON ONE GENERAL PROBLEM OF NEUMAN FOR A RECTANGULAR ORTHOTROPIC PLANE SECTION

Summary

The title problem is solved by the method of trigonometrical series.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

გამომცემლობის რედაქტორი ლ. აბუაშვილი

კორექტორი ნ. მაჭავარიანი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 12.10.95

ქაღალდის ფორმატი 60X84 1/16

ნაბეჭდი თაბახი 5,25 სააღრიცხვო საგამომც. თაბახი 3.

შეკვეთის № 172 ტირაჟი 200

ფასი სახელშეკრულებო

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 380028,

თბილისი, ი. ჭავჭავაძის პრ. I.

თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა, 380028,

თბილისი, ი. ჭავჭავაძის პრ. I.