290
1990

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY
300

ISSN 0376-2637

კიბერნეტიკა. გამოყენებითი მათემატიკა
КИБЕРНЕТИКА, ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
CYBERNETICS. APPLIED MATHEMATICS

13

თბილისი Тбилиси Tbilisi
1990

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
Издательство Тбилисского университета
Tbilisi University Press

ეროვნული ბიბლიოთეკა

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
Proceedings of Tbilisi University

300

კიბერნეტიკა. გამოყენებითი მათემატიკა
CYBERNETICS. APPLIED MATHEMATICS

თბილისი 1990 Tbilisi

Труды Тбилисского университета

300

КИБЕРНЕТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Тбилиси 1990

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

Редакционная коллегия

Г.Л.Арсенишвили, Н.Н.Вахания, Р.В.Гамкрелидзе,
Т.Г.Гачечиладзе, Р.А.Кордзадзе, Р.П.Мегрелишвили
(секретарь), Г.В.Меладзе, В.В.Чавчанидзе (редактор)

სარედაქციო კოლეგია

გ.არსენიშვილი, რ.გამყრელიძე, თ. გაჩეჩილაძე, ნ.ვახანია,
რ.კორძაძე, რ.მეგრელიშვილი (მდივანი), ჰ.მელაძე, ვ.ჭავჭანიძე (რედაქტორი)

Editorial board

G.Arsenishvili, V.Chavchanidze (editor), T.Gachechiladze,
R.Gamkrelidze, R.Kordzadze, R.Megrelishvili(secretary),
H.Meladze, N.Vakhania

Издательство Тбилисского университета, 1990
© თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1990
Tbilisi University Press, 1990

ეროვნული ბიბლიოთეკა

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
300, I990

19229

ПРОГРАММЫ ВЫЯВЛЕНИЯ ЭКСПЕРТНЫХ ЗНАНИЙ И ДИАГНОСТИКИ В СИСТЕМЕ ДИСПАНСЕРНОГО НАБЛЮДЕНИЯ КАРДИОЛОГИЧЕСКИХ БОЛЬНЫХ

О.И. Галицкая

Одной из важнейших задач при разработке экспертной системы диспансерного наблюдения кардиологических больных стала задача выявления медицинских знаний /I/. В данной статье предложена программа FN , осуществляющая опрос врача-эксперта с целью создания базы знаний для диагностики кардиологических заболеваний. Опрос проводится в диалоговом режиме по следующему алгоритму:

I. Выдать на экран дисплея список предполагаемых диагнозов и стандартизированную анкету больного, в которой отмечены обнаруженные у пациента симптомы.

2. На основании отмеченных симптомов врачу предлагается поставить предварительный диагноз (отметить номер его в меню диагнозов).

3. Выделить наиболее значимые симптомы при постановке диагноза.

4. Определить те нарушения в организме (патофизиологические состояния), которые могут вызвать указанные симптомы.

5. Назвать другие симптомы, подтверждающие поставленн

საქართველოს
ეროვნული
ბიბლიოთეკა

диагноз, а также соответствующие нарушения в организме. Здесь и далее предусмотрена возможность указания как одного или нескольких симптомов, так и вообще отсутствия ответа.

6. Перечислить симптомы, не обнаруженные у пациента, но еще более подтверждающие диагноз, и какие патофизиологические состояния они вызывают.

7. Назвать симптомы, обнаруженные у пациента и ставящие диагноз под сомнение.

8. После фиксации всех полученных данных в памяти ЭВМ формируется массив S' – симптомы для различных состояний и FI – массив состояний. На экран дисплея выдается список патофизиологических состояний, выявленных для данного заболевания.

9. Данная операция производится в целях корректировки возможных ошибок, а также выявления значимости каждого симптома для каждого состояния. Операция проводится в цикле для каждого выявленного состояния и разбивается на 4 этапа:

а) на экране печатается номер и название состояния, а также список симптомов, его характеризующих; эксперту предлагается удалить или добавить новые симптомы;

б) эксперту предлагается расположить симптомы по убыванию их значимости для данного состояния;

в) присвоить степень достоверности по пятибальной системе следующему допущению: состояние j характеризуется симптомом i, $i=\overline{1,n}_j$.

г) выдача на экран списка симптомов с их вероятностями, который фиксируется в массиве $S1$.

Таким образом, в результате вышеприведенных шагов форми-

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

руется массив состояний для рассматриваемого заболевания и список симптомов с соответствующими вероятностями, характеризующих каждое из этих состояний. Эти данные могут быть использованы при казуальном подходе к дифференциальной диагностике кардиологических больных в экспертной системе диспансеризации.

IO. Вывод на экран следующих сочетаний симптомов:

главные симптомы,

главные + подтверждающие,

главные + подтверждающие + подтверждающие, не обнаруженные у пациента,

главные + подтверждающие + ставящие диагноз под сомнение.

В каждом случае устанавливается, с какой достоверностью каждая группа симптомов указывает на поставленный диагноз, и как влияет на постановку диагноза каждая группа симптомов.

II. Выдача полученных данных на экран для дополнительной проверки. Запись их в массив G производится в следующем порядке:

- номер заболевания,
- вероятность,
- группа симптомов.

Таким образом, в процессе диалога производится установление следующих фактов: какие симптомы являются определяющими при постановке диагноза, как влияют на предварительный диагноз симптомы, сопутствующие главным, какие сочетания симптомов являются характерными для данного заболевания, какие изменения (патофизиологические состояния) возникают в организпри данном заболевании, какие признаки характеризуют каждое состояние и какова значимость каждого признака для подтверждения у больного данного состояния.

Входными данными являются:

1. Анкета кардиологического больного, записанная на магнитном диске в символьном массиве A¤(35)50 . Размерность массива - 35 элементов по 50 байтов.

2. Симптомы пациента, записанные на магнитном диске в числовом массиве I(12) . Данные являются номерами симптомов, размерность-12 элементов.

3. Список диагнозов на магнитном диске в символьном массиве D¤ , размерность - 5 элементов по 50 байтов.

Ограничения:

N = 35 - количество элементов массива A¤.

N1 = 12 - количество элементов массива I.

M = 6 - количество элементов массива D¤.

N2 = 11 - количество состояний.

Программа содержит 9 подпрограмм, выполняющих функции проверки и записи в память ответов на запросы системы:

DEFFN1 - запрос о нарушениях в организме, проверка ответа на отсутствие ошибки, запись в память F¤ и формирование массива симптомов S .

DEFFN2 - проверка на отсутствие ошибки ответа на запрос о номере обнаруженного симптома, формирование массива симптомов B .

DEFFN3 - проверка на отсутствие ошибки при ответе на запрос о номере необнаруженного симптома, формирование массива симптомов B .

DEFFN4 + DEFFN5 - формирование матрицы G и проверка на дублирование признаков.

DEFFN6 - проверка на отсутствие ошибки при ответе на запрос о вероятности симптома.

DEFFN7 - запрос о значимости для постановки диагноза различных сочетаний симптомов, проверка на отсутствие ошибки.

DEFFN8 - печать таблицы групп симптомов.

DEFFN10 - печать матрицы S.

Выходными данными являются:

FX(50)50 - символьный массив выявленных состояний с максимальным числом элементов 50, реальное число определяется индексом (J-1).

S(5,11) - числовая матрица номеров симптомов. Максимальное число элементов, соответствующих каждому состояния, 5, реальное число определяется с помощью индексного массива I(11).

S7(5,11) - числовая матрица значимостей симптомов с максимальным числом элементов столбца 5: Реальное число определяется с помощью индексного массива I(11).

G(50,50) - числовая матрица, определяющая связь между диагнозом, значением группы симптомов для данного заболевания и всей группой симптомов. Максимальное число элементов в строке - 50, в столбце - 50, реальное число определяется с помощью индексного массива (J).

Программа написана на языке Бейсик и реализована на ЭВМ "Искра - 226" /2,3/.

Характеристики симптомов, полученные в результате реализации вышеописанной программы, наряду с симптомами пациента явились входными данными для программы DDD, реализующей казуальный подход к дифференциальной диагностике кардиологи-

ეროვნული ბიბლიოთეკა

ческих больных в экспертной системе /I/.

Согласно алгоритму, изложенному в /I/, программа DDD на выходе выдает следующие данные:

I. Матрицу значимостей симптомов до и после опроса экспертов.
2. Массив показателей доверия для каждого патофизиологического состояния.
3. Массив патофизиологических состояний, идентифицированных системой как "принятые".
4. Стартовые состояния.
5. Траектории развития болезни.
6. Окончательный диагноз системы.

Программы FN и DDD включены в программное обеспечение экспертной системы диспансерного наблюдения кардиологических больных.

Поступила 25.XП.1989

Проблемная лаборатория физической кибернетики

Литература

I. О.И.Галицкая. Принципы построения экспертной системы диспансерного наблюдения кардиологических больных. Труды Тбилисского университета. Кибернетика. Прикладная математика. Тбилиси, 1988.
2. Б.Уолш. Программирование на Бейсике. М.,Радио и связь, 1988.
3. Г.Блэнд. Основы программирования на языке Бейсик в стандарте М Х. М., Финансы и статистика, 1989.

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

ო. გალიცკაია

ექსპერტული ცოდნის და დიაგნოსტიკის გამოვლენის პროგრამები კარდიოლოგიური ავადმყოფების დისპანსერული დაკვირვების სისტემაში

რეზიუმე

სტატიაში აღწერილია ორი პროგრამა, რომლებიც ჩართულია კარდიოლოგიური ავადმყოფების დისპანსერული დაკვირვების ექსპერტული სისტემის პროგრამულ უზრუნველყოფაში.

O.Galitskaya

PROGRAMS FOR BRINGING OUT EXPERT KNOWLEDGE IN THE SYSTEM OF DISPENSARIZATION OF CARDIOLOGICAL PATIENTS

Summary

The paper discusses two programs included in the software of the expert system of dispensarization of cardiological patients.

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили
ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
300, 1990

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С УПРУГИМ РАВНОВЕСИЕМ ТЕЛ, ПРИ ЧИСТОМ СДВИГЕ

Д.Ш.Девадзе, Н.Г.Хомасуридзе

I°. Постановка задачи оптимального управления при чистом сдвиге. Пусть $\bar{G}=\{0\leq x\leq a,\ 0\leq y\leq b,\ 0\leq z\leq c\}$ – упругое тело. $U(u,v,w)$ – вектор перемещения при упругой деформации с компонентами u,v,w, соответственно, вдоль x,y,z.

X_x, Y_y, Z_z – нормальные напряжения на соответствующих площадках, X_y, Y_z, X_z – касательные напряжения на указанных индексом площадках, Z – массовая сила, отнесенная к единице объема /I/.

Будем рассматривать следующие граничные условия:

$$z=0,c: Z_z=0; \quad u=0; \quad v=0; \tag{I.I}$$

$$x=0: X_y=0 \text{ или } v=0; \qquad X_x=0 \text{ или } u=0;$$
$$X_z=f_1(y) \text{ или } w=f_1(y); \tag{I.2}$$

$$x=a: X_y=0 \text{ или } v=0; \qquad X_x=0 \text{ или } u=0;$$
$$\tag{I.3}$$
$$X_z=f_2(y) \text{ или } w=f_2(y) \text{ или } w(a,y)=\delta w(x_0,y)+f_2(y);$$

$$y=0: X_y=0 \text{ или } u=0; \qquad Y_y=0 \text{ или } v=0;$$
$$\tag{I.4}$$
$$Y_z=f_3(x) \text{ или } w=f_3(x);$$

$$y=b:\ X_y=0 \text{ или } u=0; \qquad Y_y=0 \text{ или } v=0; \tag{I.5}$$

$$Y_z=f_4(x) \text{ или } w=f_4(x);$$

где f_i $(i=\overline{1,4})$ – поверхностные силы, b – положительная константа, x_0 – фиксированное число, $0<x_0<a$.

Потенциальная энергия деформированного упругого тела выражается следующим образом /2/:

$$I_1=\iiint\limits_G \frac{1}{2\mu}\left[Z_x^2+Z_y^2+2\mu Z\right]dxdydz. \tag{I.6}$$

Расcмотрим также функционал, соответствующий деформативности упругого деформированного тела:

$$I_2=\int_0^a\int_0^b w(x,y)dxdy. \tag{I.7}$$

Поставим следующие задачи:

Задача А. Определить такую массовую силу Z из промежутка $[\beta_1, \beta_2]$, при которой равновесие тела удовлетворяет условиям (I.I)-(I.5) и минимизирует потенциальную энергию (деформативность).

Здесь предполагается, что тело $\bar{D}$ неоднородно, $\mu(x,y)$ – заданная функция, β_1, β_2 – заданные числа.

Задача Б. Определить функцию μ $(\beta_2 \leq \mu(x,y) \leq \beta_2)$ тела $\bar{D}$ при заданных массовых силах таким образом, чтобы деформированное состояние имело минимальную потенциальную энергию (деформативность).

Система уравнений равновесия упругого тела имеет следующий вид /I/:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=0, \tag{I.8}$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}=0;$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_y}{\partial z}=-Z(x,y).$$

Уравнения закона Гука имеют вид:

$$X_x=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$Y_y=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad (I.9)$$

$$Z_z=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$X_y=Y_x=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$X_z=Z_x=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad (I.I0)$$

$$Y_z=Z_y=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

где $\lambda=\lambda(x,y)=\mu E\backslash((1-2\nu)(1+\nu))$, - модуль упругости, $\mu=\mu(x,y)$ - модуль сдвига, $\nu=\nu(x,y)$ - коэффициент Пуассона.

Заметим, что ввиду (I.9), граничные условия (I.I) можно записать в следующем виде:

$$z=0,c:\ u=0,\quad v=0,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=0. \qquad (I.II)$$

Решение задачи (I.I)-(I.5), (I.8)-(I.I0) будем искать в виде:

$$u=0,\ v=0,\ w=w(x,y). \qquad (I.I2)$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

Можно доказать, что если f_i $(i=\overline{1,4})$ – непрерывные функции, то задача (I.I)-(I.5), (I.8)-(I.I0) будет иметь единственное решение.

Ввиду того, что вектор перемещения $U(0,0,w(x,y))$ не зависит от z, из (I.8)-(I.I0) получим:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}=-Z(x,y),\\
X_x=Y_y=Z_z=0, \qquad X_y=Y_x=0,\\
Z_x=X_z=\mu\frac{\partial w}{\partial x},\\
Z_y=Y_z=\mu\frac{\partial w}{\partial y}.
\end{gathered} \qquad (I.13)$$

Из равенства (I.I3) для определения функции $w(x,y)$ получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)=-Z(x,y). \qquad (I.14)$$

Ввиду того, что вектор перемещения $U(0,0,w(x,y))$ не зависит от z, рассмотрим произвольное, перпендикулярное оси z, сечение Ω области G. Граничные условия для этого сечения будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
&x=0:\ \mu\frac{\partial w}{\partial x}=f_1(y) && \text{или} \quad w=f_1(y);\\
&x=a:\ \mu\frac{\partial w}{\partial x}=f_2(y) && \text{или} \quad w=f_2(y) \quad \text{или}\\
&\qquad w(a,y)=\delta w(x_0 y)+f_2(y);\\
&y=0:\ \mu\frac{\partial w}{\partial y}=f_3(x) && \text{или} \quad w=f_3(x);\\
&y=b:\ \mu\frac{\partial w}{\partial y}=f_4(x) && \text{или} \quad w=f_4(x).
\end{aligned} \qquad (I.15)$$

Решая уравнение (I.I4) при граничных условиях (I.I5), из (I.I2) можно определить все компоненты перемещения и, следовательно, из системы (I.9), (I.I0) – все составляющие тензора напряжения. Таким образом, тензор напряжения будет определен в любой точке упругого тела.

Задача А и задача Б связаны с исследованием задач оптимального управления для уравнений Пуассона (I.I4), с краевыми условиями Римана-Гильберта или с нелокальными краевыми условиями Бицадзе-Самарского (I.I5) при интегральных критериях качества (I.6) или (I.7).

Получение необходимых и достаточных условий оптимальности продемонстрируем для линейной задачи оптимального управления уравнений Пуассона с нелокальными краевыми условиями.

2^0. Необходимые и достаточные условия оптимальности.
Пусть $\bar{G}$ – прямоугольник, $\bar{G}=[0,a]\times[0,b]$, Γ – граница прямоугольной области $\gamma=\{(a,y):0\leq y\leq b\}$, $\gamma_0=\{(\cancel{x}_0,y):0\leq y\leq b\}$, x_0 – фиксированная точка из $]0,a[$, V – ограниченное подмножество из R^2, Ω – множество измеримых функций $v:G\to V$.

Для каждого фиксированного $v\in\Omega$ в области G рассмотрим задачу Бицадзе-Самарского для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a(x,y)v+b(x;y),\quad (x;y)\in G, \tag{2.I}$$

$$u(x,y)=\varphi_1(x;y),\quad (x,y)\in\Gamma\setminus\gamma,$$

$$u(a,y)=\delta\, u(x_0,y),\quad 0\leq y\leq b.$$

$$0<\delta=const. \tag{2.2}$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

где $a, b \in L_2(G)$, φ_1 - функция класса Липшица. Тогда решение задачи (2.I), (2.2) существует, единственно и принадлежит пространству $W_2^2(G) \cap W_2^1(\bar{G})$ /3/.

19829

Рассмотрим функционал

$$I(v) = \iint\limits_G [c(x,y)\,u(x,y) + d(x,y)\,v(x,y)]\,dx\,dy, \qquad (2.3)$$

$$c, d \in L_2(G),$$

и поставим следующую задачу оптимального управления: найти функцию $v_0 \in \Omega$, при которой решение краевой задачи (2.I), (2.2) придает функционалу (2.3) минимальное значение. v_0 - оптимальное управление, $u_0(x,y) = u(x,y,v_0(x,y))$ - оптимальное решение, (v_0, u_0) - оптимальная пара.

Пусть $v_0 \in \Omega$ - оптимальное управление, $v_3 \in \Omega$ - произвольное допустимое управление, u_0 и u_ε соответствующие решения задачи (2.I), (2.2). Введем обозначения $\Delta v = v_\varepsilon - v_0$, $\Delta u = u_\varepsilon - u_0$. Тогда получаем следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial y^2} = a(x,y)\Delta v, \qquad (x,y) \in G, \qquad (2.4)$$

$$\Delta u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Gamma \setminus \gamma,$$

$$\Delta u(a,y) = \delta \Delta u(x_0,y), \qquad 0 \le y \le b. \qquad (2.5)$$

Пусть $\varphi \neq 0$ - произвольная интегрируемая функция. Умножая уравнение (2.4) на φ и интегрируя по области G , получим следующее равенство:

$$\iint\limits_G \varphi(x,y)\left[\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial y^2}\right] dx\,dy = \qquad (2.6)$$

$$= \iint\limits_G a(x,y)\,\varphi(x,y)\,\Delta v\,dx\,dy.$$

საქართველოს
ეროვნული
ბიბლიოთეკა

При фиксированных V_0 и V_ε найдем приращение функционала (2.3):

$$\Delta I = I(u_\varepsilon) - I(u_0) = \iint\limits_G \left[c(x,y)\Delta u + d(x,y)\Delta v\right] dx\,dy. \qquad (2.7)$$

Учитывая соотношения (2.6) и (2.7), для приращения ΔI получаем следующее выражение:

$$\Delta I = \iint\limits_G \left[\varphi(x,y)\left(\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial y^2}\right) + c(x,y)\Delta u\right] dx\,dy + \qquad (2.8)$$

$$+ \iint\limits_G \left[d(x,y) - a(x,y)\varphi\right]\Delta v \; dx\,dy$$

Для построения сопряженного уравнения (для определения φ) проведем следующие преобразования:

$$\int_0^a \int_0^b \varphi(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx\,dy = \int_0^b \left(\int_0^{x_0} \varphi(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \int_{x_0}^a \varphi(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx\right) dy =$$

$$= \int_0^b \Big[\varphi(a,y)u'_x(a,y) - \varphi(0,y)u'_x(0,y) + \left(\varphi(x_0^-,y) - \varphi(x_0^+,y)\right)u'_x(x_0,y) +$$

$$+ \left(\varphi'_x(x_0^+,y) - \varphi'_x(x_0^-,y) - \delta\varphi'_x(a,y)\right)u(x_0,y) +$$

$$+ \int_0^{x_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}u(x,y)\,dx + \int_{x_0}^a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}u(x,y)\,dx\Big] dy.$$

Аналогичными преобразованиями получаем:

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$\int_0^a\int_0^b \varphi(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dxdy =$$

$$= \int_0^a \Big[\varphi(x,b)\,u'_y(x,b) - \varphi(x,0)\,u'_y(x,0) + \int_0^b \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\,u(x,y)dy\Big]dx .$$

Учитывая полученные выше тождества, заключаем, что если φ – решение следующей задачи:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -c(x,y), \quad (x,y)\in G\setminus\gamma_0 ; \tag{2.9}$$

$$\varphi(x,y)=0, \quad (x,y)\in\Gamma,$$

$$\varphi'_x(x_0^+,y)-\varphi'_x(x_0^-,y)-\delta\varphi'_x(a,y)=0, \quad 0\le y\le b, \tag{2.10}$$

то приращение функционала ΔI (2.8) примет вид:

$$\Delta I = \iint_G [d(x,y) - a(x,y)\varphi(x,y)]\Delta v\,dxdy .$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема I. Пусть φ_0 – решение сопряженной задачи (2.9), (2.10), тогда для оптимальности (v_0, u_0) необходимо и достаточно почти всюду на G выполнение следующего соотношения:

$$\inf_{v\in V}\,[d(x,y) - a(x,y)\varphi(x,y)]v =$$

$$= [d(x,y) - a(x;y)\varphi(x,y)]v_0(x,y) . \tag{2.11}$$

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

3^0. Существование и единственность решения сопряженной задачи. Исследуем задачу (2.9), (2.10). Введем обозначение $f(x,y)=-c(x,y)$ и уравнение (2.9) перепишем уже в следующем виде:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=f(x,y), \quad (x,y)\in G\setminus\gamma_0 \tag{3.I}$$

Для доказательства существования решения задачи (3.I), (2.10) воспользуемся методом разделения переменных /4/. Пусть функция $f\in L_2 G$ представляется в виде сходящегося ряда по системе $\{\sin\frac{k\pi x}{a}\}$, $\{\sin\frac{k\pi y}{b}\}$, т.е.

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}f_m\cdot\sin\frac{\pi n x}{a}\sin\frac{\pi m y}{b}.$$

Решение неоднородного уравнения (3.I) предотавим в виде $\varphi=u-v$, где v – частное решение

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-f_{mn}}{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}\cdot\sin\frac{\pi n x}{a}\cdot\sin\frac{\pi m y}{b},$$

а u – решение следующей неоднородной краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad (x,y)\in G\setminus\gamma_0, \tag{3.2}$$

$$u(x,y)=0, \qquad (x,y)\in\Gamma, \tag{3.3}$$

$$u'_x(x_0^+,y)-u'_x(x_0^-,y)-\delta u'_x(a,y)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\pi n}{a}\cdot\frac{(-1)^n f_{mn}}{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}\cdot\sin\frac{\pi m y}{b}. \tag{3.4}$$

Значения неизвестной на γ_0 функции $u(x_0,y)$ обозначим через $\varphi(y)$ и пусть она определяется в виде сходящегося ряда:

$$\varphi(y)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k \sin\frac{k\pi y}{b}, \quad \beta_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(y)\sin\frac{k\pi y}{b}\,dy.$$

Существование решения задачи (3.2)-(3.4) будет доказано, если определим значения числа β_k. Для этого рассмотрим следующие граничные задачи:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2}=0, \qquad (x,y)\in G_\alpha, \\ u_\alpha(x,y)=0, \qquad (x,y)\in\partial G_\alpha\setminus\gamma_0, \\ u_\alpha(x_0,y)=\varphi(y), \qquad y\in\gamma_0,\end{gathered} \tag{3.5}$$

где $\alpha=1,2$; $G_1\cup\gamma_0\cup G_2=G$.

Если φ - функция класса Липшица, тогда существует решение u_α из пространства $W_2^2(G_\alpha)\cap W_2^{3/2}(\bar{G}_\alpha)$ и, следовательно, решение задачи (3.2)-(3.4) будет иметь вид:

$$u(x,y)=\begin{cases} u_1(x,y), & (x,y)\in G_1, \\ u_2(x,y), & (x,y)\in G_2, \\ \varphi(y) & y\in\gamma_0. \end{cases}$$

В прямоугольниках G_1 и G_2 решения уравнения (3.5) найдем с помощью метода разделения переменных /4/:

$$u_1(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\frac{sh\,\frac{k\pi x}{b}}{sh\,\frac{k\pi x_0}{b}}\cdot\sin\frac{k\pi y}{b},$$

$$u_2(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\,\frac{sh\,\frac{k\pi(a-x)}{b}}{sh\,\frac{k\pi(a-x_0)}{b}}\,\sin\frac{k\pi y}{b}.$$

Учитывая эти представления, из условия (3.4) будем иметь:

$$\beta_k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a b^3 \sigma\cdot n}{k\pi^2(k^2a^2+b^2n^2)\left[\frac{\sigma}{sh\,\frac{k\pi(a-x_0)}{b}}-cth\,\frac{k\pi(a-x_0)}{b}-cth\,\frac{k\pi x_0}{b}\right]}\,f_{kn}. \tag{3.6}$$

Тем самым построена функция $\varphi(y)$. Этим заканчивается доказательство существования решения.

Из представления (3.6) сразу видно, что однородная задача (3.I), (2.I0) ($f(x,y)=0$) имеет только тривиальное решение, следовательно, задача имеет единственное решение.

Поступила 26.XП.1989

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

Литература

I. Н.И.Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.:Наука, 1966. - 707 с.

2. С.П.Тимошенко, Дж.Гудьер. Теория упругости. - М.:Наука, 1975. - 576 с.

3. Г.В.Меладзе, Т.С.Цуцунава, Д.Ш.Девадзе. Задача оптималь-

ного управления для квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка на плоскости с нелокальными краевыми условиями. Тбилис. гос.ун-т. - Тбилиси, 1987. - 61 с. Деп. в Груз.НИИНТИ 25.12.1987, № 372-Г87.

4. В.И.Лебедев, В.И.Агошков. Операторы Пуанкаре-Стеклова и их приложения в анализе. - М.: ОВМ АН СССР, 1983.

დ. დევაძე, ნ. ხომასურიძე

სუფთა ძვრის დროს სხეულთა დრეკად წონასწორობასთან დაკავშირებული ოპტიმალური მართვის ზოგიერთი ამოცანა

რეზიუმე

გამოკვლეულია ოპტიმალური მართვის ზოგიერთი ამოცანა, რომლებიც დაკავშირებულია მართკუთხა პარალელეპიპედის დრეკად წონასწორობასთან სუფთა ძვრის პირობებში (ანტიბრტყელი დეფორმაცია), მმართველ ფუნქციად აღებულია მასური ძალა, რომელიც ახდენს განსახილველი სხეულის დრეკადი დეფორმაციულობის მინიმიზაციას.

D.Devadze, N.Khomasuridze

SOME PROBLEMS OF OPTIMAL CONTROL CONNECTED WITH ELASTIC EQUILIBRIUM OF BODIES UNDER PURE BENDING

Summary

The paper deals with some problems of optimal control connected with the elastic equilibrium of a rectangular parallelepiped under its pure bending (antiplane strain). The directing tendency is the mass force which minimizes the elastic deformability of the body under consideration.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
300, 1990

ДВУХФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Н.Р.Николадзе, К.Т.Микеладзе

Динамика физического объема и изменение качественного уровня и состава производственных ресурсов образуют предпосылки процесса производства, а выпуск продукции является завершением этого процесса. В этом процессе производственные ресурсы выступают в качестве непосредственных факторов производства, их экономический потенциал реализуется в выпуске физического объема продукции определенного состава и качества. Предметом факторного анализа и прогноза являются определение и предвидение влияния физического объема и динамики факторов производства на физический объем и динамику продукции, а также взаимодействия самих факторов производства.

Предположим, что объемы валового общественного продукта (ВОП), производственных материальных затрат (ПМЗ) и основных производственных фондов (ОПФ) в моменты времени $t_0 < t_1 < \cdots < t_K$ имеют вид функции e^{y_i}, $i = \overline{0,K}$; $K \geq 2$. С экономической точки зрения процессы формирования категорий ВОП, ПМЗ и ОПФ находятся в таком взаимоотношении, что требуется минимизация колебаний в скорости роста объема этих показателей в данном регионе при условии достижения целевых значений. Иными словами, задача состоит в отыскании такой оптимальной траектории $e^{f(t)}$, чтобы она достигала целевых показателей, но при этом минимизировала колебания скорости роста. Математическая формулировка этой целевой установки оптимального управления процессом стыковки основных показателей может быть найдена следующим образом: найти

$$\min\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_K} |f''(t)|^2 dt$$

при условии

$$e^{f(t_i)} < e^{y_i},$$

где $i=\overline{0,K}$.

Данная функция оценивает колебания скорости изменения роста, то есть $f''(t)$, на временном интервале $[\bar{t}_0, \bar{t}_K]$ и, по всей вероятности, дает разумный критерий с точки зрения эффективного функционирования стационарного процесса формирования ВОП, ПМЗ и ОПФ региона - в едином народнохозяйственном комплексе страны.

Очевидным решением этой задачи является функция, с исходным значением $\exp y_0$, стремящаяся далее с постоянной скоростью к $\exp y_1$, затем с требуемой постоянной скоростью к $\exp y_2$ и т.д. Такая траектория подразумевает, что $f(t)$ является кусочно-линейной функцией, которая с учетом условия непрерывности задается линейным сплайном.

Если $\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_K} |f''(t)|^2 dt$ определен, то скорость роста оказывается неопределенной в точках промежутка $[\bar{t}, \bar{t}_{K-1}]$, поскольку в этих точках закрытого интервала скорость роста претерпевает скачки. Наличие таких скачкообразных разрывов практически недопустимо по тем причинам, что плановая социалистическая экономика обусловливает пропорциональное управляемое развитие всех отраслей народного хозяйства страны. Не теряя общности, потребуем такие $f(t)$, которые удовлетворяют условия непрерывности первых и вторых производных на $[\bar{t}_0, \bar{t}_k]$. Это обеспечивает "гладкость" скорости роста. Решением задачи будет кубический сплайн, интерполирующий значения ординат $y=\{y_0, y_1, \dots, y_k\}$ на $t=\overline{1,T}$ и экстраполирующий на те же самые промежутки времени $t=\overline{T+1,T^*}$. Таким образом, наше предположение о том, что при помощи кубического сплайна имеется "наилучшее приближение" к функционированию рассматриваемого реального процесса, подтверждает его свойства "минимальной кривизны".

Теперь рассмотрим последовательность построения кубической сплайн-функции (алгоритм), в которой полностью укладывается предусмотренная моделью схема решения вышепоставленной задачи. Введем следующие обозначения: x – ОПФ, y –ПМЗ, z –ВОП. $f(x,y,z_f)$ показывает промежуточное значение прогнозируемого показателя от одной начальной узловой точки сетки сплайна к другой.

Рассмотрим прямоугольник

$$D\{(x,y);\ a \leq x \leq b;\ c \leq y \leq d\}. \tag{I}$$

и построим в D сетку

$$D_n=\{(x_k, y_l): a \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_n \equiv b,$$
$$c \equiv y_0 < y_1 < \dots < y_m \equiv d\}. \tag{2}$$

Задача кусочно-кубической интерполяции по значениям функции

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$f(x,y)$ в точках D_h состоит в построении такой функции $S(x,y,z_f)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1. $S(x,y,z_f)\in C^2(D)$, где $C^2(D)$ – класс дважды непрерывно производных функций, определенных на D.

2. В каждой узловой точке D_h – сетки $S(x,y,z_f)$ представляет двойной кубический полином следующего вида:

$$S(x,y,z_f)\Big/_{\{(x_k,y_l)\}} = \sum_{i=0}^{3}\ \sum_{j=0}^{3} \sigma_{ij}^{k,l}(x_k-x)^i(y_l-y)^j .$$

3. В точках D_h – сетки $S(x,y,z_f)$ принимает значения:

$$S(x_k,y_l,z_f)=f_{kl}\in z_f \quad (k=\overline{0,n},\ \ l=\overline{0,m})$$

4. На ∂D функция $S(x,y,z_f)$ удовлетворяет определенным условиям, например,

$$\left.\frac{D^2 S(x,y,z_f)}{\partial V^2}\right|_{\partial D} = 0,$$

где $V(x,y)$ – внешняя нормаль к κD .

$S(x,y,z_f)$ строим в узловых точках в терминах производного второго порядка относительно каждого переменного, то есть σ_{ij}^{kl} представляет функции от

$$S''_{xx}(x_k,y_k,z_f);\ S''(x_k,y_l,z_f);\ S^{IV}_{xxyy}(x,y,z_f). \qquad (3)$$

Алгоритм построения двухмерных сплайнов сводится к слу-

ეროვნული ბიბლიოთეკა

чаю одномерного. Тогда в $S(x,y,z_f)$ y рассмотрим как параметр и получим функцию от одного переменного, которая представляется в следующем виде:

$$S(x,y,z_f)=S''_{xx}(x_{i-1},y_i,z_f)\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+$$

$$+S''_{xx}(x_i,y_i,z_f)\left(\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}\right)+\Big[S(x_{i-1},y_j,z_f)- \tag{4}$$

$$-\frac{1}{6}h_i^2 S''_{xx}(x_{i-1},y_j,z_f)\Big]\frac{x_i-x}{h_i}+$$

$$+\Big[S(x_i,y_j,z_f)-\frac{1}{6}h_i^2 S''_{xx}(x_i,y_j,z_f)\Big]\frac{x-x_{i-1}}{h_i},$$

где $h_0=x_i-x_{i-1}$. Если в (4) подставим $x_{i-1}=x_i-h_i$, получим:

$$S(x,y,z_f)=\Big[S''_{xx}(x_{i-1},y_j,z_f)-$$

$$-S''_{xx}(x_i,y_j,z_f)\Big]\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+\frac{1}{2}S''(x_i,y_j,z_f)\times \tag{5}$$

$$\times(x_i-x)^2+\Big[S(x_{i-1},y_j,z)-S(x_i,y_i,z)-$$

$$-\frac{1}{6}h_i^2 S''_{xx}(x_{i-1},y_j,z_f)-\frac{1}{3}h_i^2 S''_{xx}(x_i,y_j,z_f)\Big]\times$$

$$\times\frac{x_i-x}{h_i}+S(x_i,y_j,z_f).$$

Теперь уже ясно, что обобщенный алгоритм построения двойного кубического сплайна сводится к алгоритмам построения $S''(x_i, y_j, z_f)$ и $S(x_i, y_j, z_f)$ одномерных сплайнов, и общая блок-схема этого алгоритма состоит в следующем:

I. В узлах $y = y_j$, $(j = \overline{0, m})$, должны решаться $m+1$ задач построения одномерных сплайнов в терминах производных второго порядка, то есть должны решаться системы уравнения

$$A_h M^{(j)} = H_h f^{(j)} \quad (j = 0, 1 \ldots m), \tag{6}$$

где A_h - и H_h - матрицы независимы от y_j:

$$A_h = \begin{pmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{2} & \frac{h_3}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3+h_4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}+h_n}{3} \end{pmatrix}$$

$$H_h = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & -\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h_{n-1}} \; \frac{1}{h_n} & \frac{1}{h_n} \end{pmatrix} \tag{7}$$

A_h - квадратичная, H_h - прямоугольная;

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$M^{(j)} = \begin{pmatrix} M_0^{(j)} \\ M_1^{(j)} \\ \vdots \\ M_{n-1}^{(j)} \end{pmatrix} ; \qquad f^{(j)} = \begin{pmatrix} f(x_1, y_j) \\ f(x_2, y_j) \\ \vdots \\ f(x_n, y_j) \end{pmatrix} . \qquad (8)$$

В результате получаются значения функции $S''_{xx}(x, y, z_f)$ в узловых точках D_h сетки

$$M_i^{(j)} = S''_{xx}(x_i, y_j, z_f).$$

2. Вдоль линии $x = x_i$, $i = \overline{0,n}$, должны решаться $n+1$ задач построения линейных сплайнов в терминах производных второго порядка, то есть должны решаться системы

$$A_\tau N^{(i)} = H_\tau f^{(i)} \quad (i = \overline{0,n}), \qquad (9)$$

где A_τ- и H_τ - матрицы независимы от y_i :

$$A_\tau = \begin{pmatrix} \frac{\tau_1 + \tau_2}{3} & \frac{\tau_2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\tau_2}{6} & \frac{\tau_2 + \tau_3}{3} & \frac{\tau_3}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tau_3}{6} & \frac{\tau_3 + \tau_4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_{m-1}}{6} & \frac{\tau_{m-1} + \tau_m}{3} \end{pmatrix} .$$

$$H_\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} & -\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2} & \frac{1}{\tau_2} & 0 & 0 & \\ 0 \quad \cdot & \frac{1}{\tau_2} & -\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_3} & 0 & 0 & \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_{m-1}}-\frac{1}{\tau_m} & \frac{1}{\tau_m} & \end{pmatrix} \tag{10}$$

A_τ - квадратичная, H_τ - прямоугольная;

$$N^{(i)} = \begin{pmatrix} N_0^{(i)} \\ N_0^{(i)} \\ \vdots \\ N_m^{(i)} \end{pmatrix}; \quad f^{(i)} = \begin{pmatrix} f(x_i, y_0) \\ f(x_i, y_1) \\ \vdots \\ f(x_i, y_m) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

В результате получаются значения кусочно-кубической сплайн-функции $S''_{yy}(x_i, y_i, z_f)$ в отношении x, y в узлах D - сетки

$$N_j^{(i)} = S''_{yy}(x_i, y\ , z_f).$$

В точках (x_{i-1}, y) и (x_i, y) вычисление значения функции $S(x, y, z_f)$ производится на основе следующих формул:

$$S(x_{i-1}, y_j, z_f) = N_{j-1}^{(i-1)} \frac{(y_j - y)^3}{6\tau_j} + N_j^{(i-1)} \frac{(y - y_{i-1})^3}{6\tau_j} +$$

$$+ \left[f(x_{i-1}, y_{j-1}) - \frac{N_{j-1}^{i} \tau_j^2}{6} \right] \frac{y_j - y}{\tau_j} + \tag{12}$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$+\left[f(x_{i-1}, y_j) - \frac{N_j^{(i-1)}\tau_j^2}{6}\right]\frac{y-y_{j-1}}{\tau_j}$$

или, если вставим $y_{j-1}=y_j-\tau_j$, то

$$S(x_{i-1}, y_j, z_f) = \left(N_{j-1}^{(i-1)} - N_j^{(i-1)}\right)\frac{(y_j-y)^3}{6\tau_j} +$$

$$+\frac{1}{2}N_j^{(i-1)}(y_j-y)^2 + \left[f(x_{i-1}, y_{j-1}) -\right. \tag{I3}$$

$$\left.-f(x_{i-1}, y_j) - \frac{\tau_j^2}{6}N_{j-1}^{(i-1)} - \frac{\tau_j^2}{3}N_j^{(i-1)}\right]\frac{y_i-y}{\tau_j} +$$

$$+f(x_{i-1}, y_i).$$

Аналогично

$$S(x_i, y_j, z_f) = N_{j-1}^{(i)}\frac{(y_i-y)^3}{6\tau_j} + N_j^{(i)}\frac{(y-y_{j-1})^3}{6\tau_j} +$$

$$+\left[f(x_{i-1}, y_{j-1}) - \frac{N_{j-1}^{(i)}\tau_j^2}{6}\right]\frac{y-y_{j-1}}{\tau_j} + \tag{I4}$$

$$+\left[f(x_{i-1}, y_j) - \frac{N_j^{(i)}}{6}\tau_j^2\right]\frac{y-y_{j-1}}{\tau_j}$$

или

$$S(x_i, y_j, z_f) = \left(N_{j-1}^{(i)} - N_j^{(i)}\right)\frac{(y_i-y)^3}{6\tau_j} +$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$+\frac{1}{2}N_j^{(i)}(y_i-y)^2+\Big[f(x_i,y_{j-1})-f(x_i,y_i)-$$

$$-\frac{\tau_j^2}{6}N_{j-1}^{(i)}-\frac{\tau_j^2}{3}N_j^{(i)}\Big]\frac{y_j-y}{\tau_j}+f(x_i,y_j). \tag{I5}$$

Вдоль линии $x=x_i$ $(i=\overline{0,n})$ решаем $n+1$ задач интерполирования $S''_{xx}(x,y_i,z_f)$ функции. Решение их возможно после выполнения I-го этапа вышеописанной блок-схемы, потому что $S''_{xx}(x,y_j,z_f)$ – значения она дает в узловых точках, то есть должны решаться системы

$$\mathcal{A}_\tau K^{(i)}=H_\tau S''^{(i)}_{xx} \quad (i=\overline{0,n}), \tag{I6}$$

где

$$K^{(i)}=\begin{pmatrix} K_0^{(i)} \\ K_1^{(i)} \\ \vdots \\ K_m^{(i)} \end{pmatrix}, \qquad S''^{(i)}_{xx}=\begin{pmatrix} S''_{xx}(x_i,y_0) \\ S''_{xx}(x_i,y_1) \\ \vdots \\ S''_{xx}(x_i,y_m) \end{pmatrix}. \tag{I7}$$

В результате получаются значения $S''^{IV}_{xx}(x,y_j,z_f)$ функции $K_j^{(i)}=S''^{IV}_{xxyy}(x,y_j,z_f)$ в узловых точках сетки.

Вычисления значений функции $S''(x,y_j,z_f)$ в точках (x_{i-1},y) и (x_i,y) производятся по следующим формулам:

$$S''(x_{i-1},y_j,z_f)=K_{j-1}^{(i-1)}\frac{(y_i-y)^3}{6\tau_j}+$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$+\left(M_{i-1}^{(j)}-\frac{\tau_j^2}{6}K_{j-1}^{(i-1)}\right)\frac{y_j-y}{\tau_j}+$$

$$+K_j^{(i-1)}\frac{(y-y_{j-1})}{6\tau_j}+\left(M_{i-1}^{(j)}-\frac{\tau_j^2}{6}K_j^{(i-1)}\right)\frac{y-y_{j-1}}{\tau_j} \tag{I8}$$

или

$$S''_{xx}(x_{i-1},y_j,z_f)=\left(K_{j-1}^{(i-1)}-K_j^{(i-1)}\right)\frac{(y_j-y)^3}{6\tau_j}+$$

$$+\frac{1}{2}K_j^{(i-1)}(y_j-y)^2+\left[M_{i-1}^{(j-1)}-M_{i-1}^{(j)}-\frac{\tau_j^2}{6}K_{j-1}^{(i-1)}-\right. \tag{I9}$$

$$\left.-\frac{\tau_j^2}{6}K_j^{(i-1)}\right]\frac{y_j-y}{\tau_j}+M_{i-1}^{(j)}.$$

Аналогично

$$S''_{xx}(x_i,y_j,z_f)=K_{j-1}^{(i-1)}\frac{(y_j-y)^3}{6\tau_j}+K_j^{(i)}\frac{(y-y_{j-1})^3}{6\tau_j}+ \tag{20}$$

$$+\left(M_i^{(j)}-\frac{\tau_j^2}{6}K_{j-1}^{(i)}\right)\frac{y_j-y}{\tau_j}+$$

$$+\left(M_i^{(j)}-\frac{\tau_j^2}{6}K_j^{(i)}\right)\frac{y-y_{j-i}}{\tau_j}.$$

или

$$S''_{xx}(x_i,y_j,z_f)=\left(K_{j-1}^{(i)}-K_j^{(i)}\right)\frac{(y_j-y)^3}{6\tau_j}+$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$+\frac{1}{2}K_j^{(i)}(y_j-y)^2+\Big[M_i^{(j-1)}-M_i^{(j)}-\frac{\tau_j^2}{6}K_{j-1}^{(i)}-$$

$$-\frac{\tau_j^2}{6}K_j^{(i)}\Big]\frac{y_j-y}{\tau_j}+M_i^{(j)},$$

$\sigma_{i,j}^{k,l}$ – коэффициенты вычисляются на основе следующих формул:

$$S'(x,y,z_f)=\Big\{\Big[\big(K_{j-1}^{(i-1)}-K_j^{(i-1)}\big)-\big(K_{j-1}^{(i)}-K_j^{(i)}\big)\Big]\frac{(y_j-y)^3}{6\tau_j}+$$

$$+\frac{1}{2}\big(K_j^{(i-1)}-K_j^{(i)}\big)(y_i-y)^2+\big(M_i^{(j-1)}-M_i^{(j-1)}\big)-\big(M_{i-1}^{(j-1)}-M_i^{(j)}\big)-$$

$$-\frac{\tau_j^2}{6}\big(K_{j-1}^{(i-1)}-K_{j-1}^{(i)}\big)-\frac{\delta_j^2}{6}\big(K_j^{(i-1)}-K_j^{(i)}\big)\frac{y_i-y}{\tau_j}+$$

$$+\big(M_{i-1}^{(j)}-M_i^{(j)}\big)\Big\}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+\frac{1}{2}\Big\{\big(K_{j-1}^{(i-1)}-K_j^{(i)}\big)\Big]\frac{y_i-y}{\tau_j}+$$

$$+\frac{1}{2}K_j^{i}(y_j-y)^2+M_i^{(j-1)}-M_i^{(j)}-\frac{\tau_j^2}{6}K_{j-1}^{(i)}-$$

$$-\frac{\tau_j^2}{6}K_j^{(i)}\Big]\frac{y_j-y}{\tau_j}+M_i^{(j)}\Big\}(x_i-x)^2+$$

$$+\Big\{\Big[\big(N_{j-1}^{(i-1)}-N_j^{(i-1)}\big)-\big(N_{j-1}^{(i)}-N_j^{(i)}\big)\Big]\frac{(y_j-y)^3}{6\tau_j}+$$

$$+\frac{1}{2}\big(N_j^{(i-1)}-N_j^{(i)}\big)(y_j-y)^2+\Big[\big(f(x_{i-1},y_{i-1})-f(x_{i-1},y_j)\big)-$$

$$-\big(f(x_i,y_{j-1})-f(x_i,y_j)\big)-\frac{\tau_j^2}{6}\big(N_{j-1}^{(i-1)}-N_{j-1}^{(i)}\big)-$$

$$-\frac{\tau_i^2}{3}\big(N_j^{(i-1)}-N_j^{(i)}\big)\Big]\frac{y_j-y}{\tau_j}+\big(f(x_{i-1},y_j)-f(x_i,y_j)\big)-$$

$$-\frac{1}{6}h_i\Big[\big(K_{j-1}^{(i-1)}-K_j^{(i-1)}\big)\frac{(y_j-y)^3}{6\tau_j}+\frac{1}{2}K_j^{(i-1)}(y_j-y)^2+M_i^{(j)}\Big]-$$

$$- \frac{1}{3} h_i^2 \left[K_{j-1}^{(i)} - K_j^{(i)} \right] \frac{(y_j - y)^3}{6\tau_j} + \frac{1}{2} K_j^{(i)} (y_i - y)^2 +$$

$$+ \left[M_i^{(j-1)} - M_i^{(j)} - \frac{\tau_j^2}{6} K_{j-1}^{(i)} - \frac{\tau_j^2}{6} K_j^{(i)} \right] \frac{y_j - y}{\tau_j} +$$

$$+ M_i^{(j)} \Big\} \frac{x_i - x}{h_i} + \Big\{ \left(N_{j-1}^{(i)} - N_j^{(i)} \right) \frac{(y_j - y)^3}{6\tau_j} +$$

$$+ \frac{1}{2} N_j^{(i)} (y_j - y)^2 + \Big[f(x_i, y_{j-1}) - f(x_i, y_j) - \tag{22}$$

$$- \frac{\tau_j^2}{6} N_{j-1}^{(i)} - \frac{\tau_j^2}{3} N_j^{(i)} \Big] \frac{y_i - y}{\tau_j} + f(x_i, y_j) \Big\};$$

p - мерный сплайн строится следующим образом: берем n- мерный параллелепипед

$$D = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) : a_1 \leq x_1 \leq b_1 \ldots a_p \leq x_p \leq b_p \right\}. \tag{23}$$

ᲔᲠᲝᲕᲜᲣᲚᲘ ᲑᲘᲑᲚᲘᲝᲗᲔᲙᲐ

Определим сетку на D :

$$D_h=\{(x_{1k_1},\dots,x_{pk_p}) : a_1 \equiv x_{10} < x_{11} < \dots < x_{1n_1} \equiv b_1\}, \qquad (24)$$

$$k_1=\{1,\dots,n_p\}\dots : a_p \equiv x_{p_0} \leq x_{p_1} < \dots < x_{p_n} \equiv b_p \ ,$$

$$k_p \in \{1,\dots,n_p\}.$$

Скажем, на D дается $f(x_1,\dots,x_p)$ функция и по значениям этой функции в узловых точках D_h -сетки должны построить кусочно p - кубический полином $S(x_1,\dots,x_p,z_f)$, который удовлетворяет следующим условиям:

1. $S(x_1,\dots,x_p,z_f)\in C^2 D$.

2. D_h $S(x_1,\dots,x_p,z_f)$ в каждой ячейке p -сетки представляет p - кубический полином следующего вида:

$$S(x_1 \dots x_p)\Big/_{\{x_{1k_1},\dots,x_{pk_p}\}} =$$

$$= \sum_{1=0}^{3} \dots \sum_{i_p=0}^{3} \sigma^{k_1\dots k_p}_{i_1\dots i_p} (x_{ik_1}-x_1)^{i} \cdots (x_{pk_p}-x_p)^{i_p}.$$

3. $S(x_1,\dots,x_p,z_f)$ в точках D_h - сетки принимает следующие значения:

$$S(x_{1k_1},\dots,x_{pk_p},z_f)=f(x_{1k_1},\dots,x_{pk_p})\in Z_f \ , \ ,$$

$$k=0\dots n, \quad k_p=0\dots n_p.$$

4. Функция $S(x_1,\dots,x_p,z_f)$ на D_h удовлетворяет определенным условиям, скажем

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$\left.\frac{\partial^2 S\, x_1,\dots,x_p,z_f}{\partial \nu^2}\right|_{\partial D} = 0,$$

$\nu(x_1,\dots,x_p)$ – внешняя нормаль в отношении ∂D.
логично для случая $p=2$ $x_2,\dots,x_p$ рассмотрим как па-
метры, тогда обобщением формулы (4) имеем:

$$S(x_1,\dots,x_p,z_f)=S''_{x_1x_1}(x_{1k_1-1},x_2,\dots,x_p,z_f)\frac{(x_{1k}-x_1)^3}{6h_{1k_1}}+$$

$$+S''_{x_1x_1}(x_{1k},x_2,\dots,x_p,z_f)\frac{(x_1-x_{1k_1-1})^3}{6h_1k_1}+$$

$$+\Big[S(x_{1k_1-1},x_2,\dots,x_p,z_f)-$$

$$-\frac{1}{6}h^2_{1k_1}S''_{x_1x_1}(x_{1k_1-1},x_2,\dots,x_p,z_f)\Big]\frac{x_{1k_1}-x_1}{h_{1k_1}}+$$

$$+\Big[S(x_{1k_1},x_2,\dots,x_p,z_f)-$$

$$-\frac{1}{6}h'_{1k_1}S'_{x_1x_1}(x_{1k_1},x_2,\dots,x_p,z_f)\Big]\frac{x_1-x_{1k_1-1}}{h_{1k_1}}.$$

нкции $S''_{x_1x_1}(x_{1k_1},\dots,x_p,z_f)$ и $S(x_{1k_1},x_2,\dots,x_p,z_f)$,
ходящие в эти формулы, представляют $(p-1)$ - кубические
плайны в отношении переменных $x_2,\dots,x_p$. Поскольку зна-
ения этих функций даются в узловых точках D_h-сетки, мы
жем вышеприведенную формулу использовать для каждого узла.
м путем мы вычислим производные: $S^{IV}_{x_1x_1x_tx_t}\cdots S^{(2p)}_{x_1x_1\cdots x_px_p}$,

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

что дает нам возможность вычислить коэффициенты $\epsilon^{k,j,i}_{i,j,\dots,l}$

Разработка предложенной модели на ЭВМ наглядно показывает количественные взаимосвязи между ВОП и производственными ресурсами, тенденцию протекания всего процесса в данном промежутке и за его пределами и дает надежные оценки прогнозируемых показателей.

Поступила 27.XII.1989

Проблемная ла-
боратория физичес-
кой кибернетики

Литература

I. Дж.Альберг, Э.Нильсон, Дж.Уолш. Теория сплайнов и ее приложение. - М.:"Мир", 1972.

2. А.И.Анчишкин. Прогнозирование роста социалистической экономики. - М. "Экономика", 1973.

3. С.А.Столяк. Сплайны и их применение - экономика и математические методы: вып. 3, 1971.

4. С.Б.Стечкин, Ю.Н.Субботин. Сплайны в вычислительной математике. - М.: "Наука", 1976.

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

ნ. ნიკოლაძე, კ. მიქელაძე

ეკონომიკური ზრდის ორფაქტორიანი მოდელი

რეზიუმე

ნაშრომის მიზანია რაოდენობრივი კავშირების დამყარება ერთობლივი საზოგადოებრივი პროდუქტის ფიზიკური მოცულობის დინამიურ მწკრივებსა და საწარმოო რესურსების ფიზიკური მოცულობის დინამიურ მწკრივებს შორის. დასმული ამოცანის გადაწყვეტა განხორციელდა ორფაქტორიანი ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელის აგებით, რომელიც ეყრდნობა ორგანზომილებიან კუბურ სპლაინ-ფუნქციებს.

N.Nikoladze, K.Mikeladze

A TWO-FACTOR MODEL OF ECONOMIC GROWTH

Summary

The aim of the study is to establish quantitative relations between the dynamical series of the gross national product and the dynamical series of productive resources. The problem is solved by constructing a two-factor mathematical-economic model based on two-dimensional cubic spline-functions.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
300, I990

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕДЕНИЯ АВТОМАТОВ ПРИ ТРЕХ ТИПАХ РЕАКЦИЙ СТАЦИОНАРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЫ

Т.Д.Хведелидзе

Как известно, асимптотическое (при емкости памяти автомата $n \to \infty$) поведение последовательности конечных автоматов в случайной среде определяется поведением предельного бесконечного автомата, которое, в свою очередь, достаточно полно описывается вероятностью смены действия и средним временем до смены действия. Вычисление этих основных вероятностных характеристик поведения, без знания которых не могут быть указаны автоматы, выходящие на оптимальный режим /I-3/, является достаточно трудной задачей.

В работах /4,5/ получены явные аналитические формулы для вычислений этих вероятностных характеристик поведения автоматов при двух типах реакций стационарной случайной среды и предложен численный алгоритм их нахождения, реализованный на ЭВМ.

В настоящей работе предлагается численный алгоритм нахождения вероятностных характеристик поведения автоматов при трех типах реакций стационарной случайной среды и обсуждены возможности их приближенного вычисления на основании известного разложения Ньютона-Пюизе /6/.

ეროვნული ბიბლიოთეკა

Прежде всего определим стохастический автомат марковского типа и его функционирование в стационарной случайной среде, когда среда на поведение автомата реагирует тремя типами реакций.

Следуя /5/, вероятностный автомат определяется как объект

$$\mathcal{A} = \langle S, F_\varkappa, \mathcal{M}, \mu(\alpha', f/\alpha, s), \mathcal{P}_0 \rangle, \tag{I}$$

где S – конечное множество входных сигналов, $F_\varkappa = \{f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa\}$ – конечное множество выходных сигналов (действий) автомата; $\mathcal{M}$ – конечное или счетное множество состояний автомата; $\mu(\alpha', f/\alpha, s)$ – условная вероятность перехода автомата из состояния α при входном сигнале s в состоянии α' при выходном сигнале (действий) f ; $\mathcal{P}_0$ – стартовое распределение вероятностей состояний.

В частности, вероятностный автомат Мура определяется (I) и дополнительным предположением, что всюду, где $\mu(\alpha', f/\alpha, s) \neq 0$, выполнено соотношение

$$\mu(f/\alpha, s, \alpha') = \mu(f/\alpha').$$

В дальнейшем мы будем рассматривать автоматы Мура с тремя входными сигналами – I, 0, +I и дополнительно предполагать, что множество $\mathcal{M}$ можно представить как объединение $\varkappa$ непересекающихся подмножеств b_i , таких, что всем состояниям из b_i отвечает один и тот же выходной сигнал f_i , т.е.

$$\mu(f_i/\alpha') = 0 \qquad \text{для} \quad \alpha' \bar{\in} b_i,$$

$$\mu(f_i/\alpha') = 1 \qquad \text{для} \quad \alpha' \in b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, \varkappa).$$

Будем говорить, что автомат функционирует в стационарной случайной среде $C = C(a_1, q_1; a_2, q_2; \ldots; a_\varkappa, q_\varkappa)$, если его действие f_i , произведенное в момент времени t , влечет появ-

ეროვნული ბიბლიოთეკა

ление на входе автомата в момент $t+1$ значение сигнала $s=+1$ (выигрыш, нештраф) с вероятностью $q_i = \frac{1+a_i}{2}(1-r_i)$, значение сигнала $s=-1$ (проигрыш, штраф) с вероятностью $p_i = \frac{1-a_i}{2}(1-r_i)$ и значение сигнала $s=0$ (безразличие) с вероятностью $r_i = 1-q_i-p_i$ $(i=1,2,\ldots,k)$. Здесь величина $a_i = \frac{q_i-p_i}{q_i+p_i}$ $(|a_i|<1)$ имеет смысл условного среднего выигрыша за действие f_i в среде C.

Так как все действия автомата должны быть равноправными, то структура автомата должна обеспечивать некоторое свойство симметричности: при одинаковой последовательности входных сигналов, поступающих при использовании разных действий, автомат должен вести себя одинаково.

Определим теперь широкий класс симметричных стохастических бесконечных автоматов марковского типа с регулярной тактикой, с двумя действиями и тремя входными сигналами $B_2(l, m, \nu_0, \nu_1)$.

Итак, $S=\{-1, 0, +1\}$, $F_2=\{f_1, f_2\}$, $M=\{0, \mp 1, \mp 2, \ldots\}$, $(t=0,1,2,\ldots)$.

Обозначим через $N(t)$ номер состояния автомата, $s(t)$ – сигнал, поступающий на вход автомата в момент времени t.

Для определения автомата необходимо задать три независимые случайные величины $\xi(-1)$, $\xi(0)$, $\xi(1)$, принимающие целочисленные значения. Вероятности того, что они примут значение x, равны $V_{-1}(x)$, $V_0(x)$ и $V_{+1}(x)$ соответственно.

Функция переходов и выхода (действий) автомата определяются равенствами:

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$N(t+1)=\begin{cases} N(t)-\xi(S(t+1)), & \text{если } N(t)<0,\\ N(t)+\xi(S(t+1)), & \text{если } N(t)>0,\\ \xi_0(t+1), & \text{если } N(t)=0,\end{cases} \tag{2}$$

$$f(t)=\begin{cases} f_1, & \text{если } N(t)<0,\\ f_2, & \text{если } N(t)>0,\\ f_0, & \text{если } N(t)=0,\end{cases}$$

где

$$\xi_0(t+1)=\begin{cases} -\xi(S(t+1)), & \text{если } N(t-1)<0,\\ \xi(S(t+1)), & \text{если } N(t-1)>0,\end{cases}$$

$$f_0=\begin{cases} f_1, & \text{если } N(t-1)<0,\\ f_2, & \text{если } N(t-1)>0.\end{cases}$$

$$\xi(-1)=\begin{cases} -m & \text{с вероятностью } 1-\nu_1,\\ l & \text{с вероятностью } \nu_1,\end{cases}$$

$$\xi(+1)=\begin{cases} -m & \text{с вероятностью } \nu_0,\\ l & \text{с вероятностью } 1-\nu_0,\\ \xi(0) & \text{с вероятностью } 1.\end{cases}$$

В данном нами определении симметричного автомата удобно исходное состояние как области b_1, так и b_2 снабжать номером 0.

Автомат с вероятностью $\tilde{p}_i=p_i(1-\nu_1)+q_i\nu_0$ принимает решение о прыжке на m состояний по направлению из области, с вероятностью $\tilde{q}_i=p_i\nu_1+q_i(1-\nu_0)$ – о прыжке в глубь области на l состояний, а с вероятностью $r_i=1-\tilde{p}_i-\tilde{q}_i$ остается в том же состоянии, в котором он был в предыдущий момент времени.

Аналогичным образом, как в /4/, можно показать, что

ეროვნული ბიბლიოთეკა

вероятностные характеристики автомата инвариантны к одновременному умножению величин ℓ и m на целое d, $d=2,3,4...$ Так что ℓ и m можно считать взаимно простыми целыми числами.

При $m=1$ автоматы являются одновходовыми /7,8/: входным состоянием в каждом действии является состояние с номером α $(\alpha=0,1,2,...)$. При $m>1$ автоматы являются многовыходовыми /8/ (автомат, находясь в состоянии с номером $\alpha\in[0,1,2,...,m-1]$ в течение одного такта может сменить действие f_i).

Автомат $B_2(1,1,\nu_0,\nu_1)$ является предельным автоматом стохастического конечного автомата $W^{(j)}_{2n,2}(\epsilon,\eta)$ линейно-гистерезионого типа, а автомат $B_2(1,\ell,0,0)$ - бесконечным аналогом глубокого автомата $D^{(j)}_{2n,2}$ /7/.

В дальнейшем мы будем рассматривать поведение автомата в области, отмеченной некоторым действием до его смены, и индекс i, для сокращения записей, опустим.

Обозначим через $u_k(\alpha)$ вероятность смены действия f за k тактов функционирования, если автомат стартует из состояния с номером $\alpha\geq 0$. Из правил (2) поведения автомата при одном такте функционирования автомат попадает или в состояние $\alpha-m$, или в состояние $\alpha+\ell$, или остается в состоянии α. Поэтому относительно вероятностей $u_k(\alpha)$ получим разностное уравнение

$$u_{k+1}(\alpha)=\tilde{p}u_k(\alpha-m)+\tilde{q}u_k(\alpha+\ell)+ru_k(\alpha), \quad k=1,2,... \tag{3}$$

и граничные условия

$$u_0(-j)=1, \quad j=1,2,...,m; \quad u_0(\alpha)=0 \quad \forall\alpha\geq 0. \tag{4}$$

Для производящей функции $U(\alpha,z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_k(\alpha)z^k$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

вероятностей смены действия f, после умножений (3) и (4) на z^{k+1} и суммирований по всем k, получим следующее разностное уравнение с граничными условиями:

$$U(\alpha,z)=\frac{\tilde{p}z}{1-rz}U(\alpha-m,z)+\frac{\tilde{q}z}{1-rz}U(\alpha+l,z), \tag{5}$$

$$\alpha=0,1,2,\dots$$

$$U(-j,z)=1, \qquad j=1,2,\dots,m.$$

Из вероятностного смысла $u_k(\alpha)$ вытекает, что для $|z|<1$ и $\forall_\alpha \geq 0$ $U(\alpha,z)<1$.

Будем искать решение уравнения (5) в виде

$$U(\alpha,z)=\lambda^{\alpha+1}(z).$$

Тогда относительно $\lambda(z)$ получим алгебраическое уравнение

$$\lambda^{m}(z)=\frac{\tilde{p}z}{1-rz}+\frac{\tilde{q}z}{1-rz}\lambda^{m+l}(z), \tag{6}$$

через корни которого выражается решение задачи (5).

Обозначим через δ средний "шаг" блуждания автомата по области:

$$\delta=m\tilde{p}-l\tilde{q}.$$

Относительно корней уравнения (6) справедлива следующая лемма, доказательство которой основано на теореме Руше и происходит аналогичным /4/ образом.

Лемма I. Для $0<|z|<1$ все корни уравнения (6) простые, m корней $\lambda_j(z)$, $j=1,2,\dots,m$, лежат в единичном круге K_1 комплексной λ плоскости, остальные l корней, $j=m+1, m+2,\dots,m+l$ - вне его.

ᲔᲠᲝᲕᲜᲣᲚᲘ ᲑᲘᲑᲚᲘᲝᲗᲔᲙᲐ

2. При $\delta>0$ $A_1(1)=1$, $|A_j(1)|<1$, $j=2,\dots,m$, $|A_{m+j}(1)|>1$, $j=1,2,\dots,\ell$; при $\delta=0$ $A_1(1)=A_{m+1}(1)=1$, $|A_j(1)|<1$, $j=2,\dots,m$, $|A_{m+j}(1)|>1$, $j=2,\dots,\ell$; при $\delta<0$ $|A_j(1)|<1$, $j=1,2,\dots,m$. $|A_{m+1}(1)|=1$, $|A_{m+j}(1)|>1$, $j=2,3,\dots,\ell$.

Через $A_j(z)$ $(j=1,2,\dots,m)$ производящая функция вероятностей смены действия определяется формулой

$$U(\alpha,z)=\sum_{j=1}^{m}\frac{D_j(z)A_j^{\alpha+1}(z)}{D(z)}, \tag{7}$$

где $D(z)$ – определитель Вандермонда, составленный из степеней $A_1^{-1}(z), A_2^{-1}(z),\dots,A_m^{-1}(z)$; $D_j(z)$ получается из $D(z)$ путем замены j-го столбца на столбец из единиц.

Из (7) при $\alpha=0$, используя теорему Лапласа, получим

$$U(0,z)=1-\prod_{j=1}^{m}(1-A_j(z)),\quad A_0(z)=1. \tag{8}$$

Методом разностных уравнений для среднего времени до смены действия (при $\delta>0$) выводится формула

$$\tau_\alpha=\left\{\alpha+1+\sum_{j=1}^{m}\frac{\tilde{D}_j(1)}{D(1)}A_j^{\alpha+1}(1)\right\}\delta^{-1}, \tag{9}$$

где $\tilde{D}_j(1)$ получается из $D(1)$ путем замены j-го столбца столбцом из элементов $0,1,2,\dots,m-1$.

На основании формул (7), (8), (9) можно доказать следующую теорему.

Теорема I. а) при $\delta>0$ $\sigma_0=U(0,1)=1$,

$$\tau_0=\frac{\partial U(0,z)}{\partial z}\bigg|_{z=1}=\delta^{-1}\prod_{j=2}^{m}(1-A_j(1));$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

б) при $\delta = 0$ $\sigma_0 = 1$, $\tau_0 = \infty$;

в) при $\delta < 0$ $\tau_0 = \infty$, $\sigma_0 = 1 - \prod_{j=1}^{m}(1 - \lambda_j(1))$.

В общем случае применение результатов этой теоремы для численных расчетов затруднительно необходимостью вычисления всех корней $\lambda_j(1)$, $j = 1, 2, \dots, m$, уравнения (6). Однако при некоторых ограничениях на l или m формулы для σ_0 и τ_0 можно существенно упростить.

Действительно, при $m = 1$ уравнение (6) примет вид

$$\tilde{q} z \lambda^{l+1}(z) - (1 - rz)\lambda(z) + \tilde{p} z = 0,$$

а при $l = 1$

$$\tilde{p} z w^{m+1}(z) - (1 - rz) w(z) + \tilde{q} z = 0, \tag{10}$$

где $w(z) = \lambda^{-1}(z)$.

В этом случае, с учетом леммы, справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 2.</u> а) Пусть $m = 1$, тогда при $\delta < 0$

$$\sigma_\alpha = \lambda_1^{\alpha+1}(1) < 1, \quad \tau_\alpha = \infty.$$

а при $\delta > 0$ $\sigma_\alpha = 1$, $\tau_\alpha = (\alpha + 1)\delta^{-1}$.

б) Пусть $l = 1$, тогда при $\delta < 0$ $\sigma_0 = \frac{m\tilde{p}}{\tilde{q}}$, $\tau_0 = \infty$,

а при $\delta > 0$ $\sigma_0 = 1$, $\tau_0 = \left[\tilde{q}(w^{-1}(1) - 1)\right]^{-1}$.

Для построения численных алгоритмов и для непосредственного вычисления вероятностных характеристик автомата удобно использовать известный метод диаграмм Ньютона-Пюизе /6/, который позволяет последовательно вычислять коэффициенты разложения аналитической функции $U(u, z)$ (см.рис.1).

Последовательное применение этого метода к производящей

ეროვნული ბიბლიოთეკა

функции $U(0,z)$ при $m=1$ приводит к следующему разложению:

$$U(0,z)=\tilde{P}\frac{z}{1-rz}+\tilde{q}\tilde{P}^{\ell+1}\left(\frac{z}{1-rz}\right)^{\ell+2}+$$
$$+(\ell+1)\tilde{q}^{2}\tilde{P}^{2\ell+1}\left(\frac{z}{1-rz}\right)^{2\ell+3}+ \qquad (11)$$
$$+\frac{(\ell+1)(3\ell+2)}{2}\tilde{q}^{3}\tilde{P}^{3\ell+1}\left(\frac{z}{1-rz}\right)^{3\ell+4}+\cdots$$

С помощью этого разложения можно осуществить приближенные вычисления σ_0 при $\ell>2$.

В частности, при $\ell=1$ $\sigma_0=\frac{\tilde{P}}{\tilde{q}}$, а при $\ell=2$ $\sigma_0=\left(\sqrt{1+4\frac{\tilde{P}}{\tilde{q}}}-1\right)/2$.

Теорема 2 дает возможность произвести приближенные вычисления τ_0 при $\ell=1,\ m>2$. В этом случае имеем

$$\tau_0=\frac{W(1)}{\tilde{q}(1-W(1))}, \qquad (12)$$

где $W(1)$ является решением уравнения (10):

$$W(1)=\frac{\tilde{q}}{1-r}+\frac{\tilde{P}}{1-r}\left(\frac{\tilde{q}}{1-r}\right)^{m+1}+(m+1)\left(\frac{\tilde{P}}{1-r}\right)^{2}\left(\frac{\tilde{q}}{1-r}\right)^{2m+1}+$$
$$+\frac{(m+1)(3m+2)}{2}\left(\frac{\tilde{P}}{1-r}\right)^{3}\left(\frac{\tilde{q}}{1-r}\right)^{3m+1}+\cdots$$

Для построения численных алгоритмов, на основании разложения Ньютона-Пюизе, введем параметры

$$\varepsilon=\sqrt[m+\ell]{\tilde{q}^{m}\tilde{P}^{\ell}}, \qquad \rho=\sqrt[m+\ell]{\frac{\tilde{q}}{\tilde{P}}}.$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

и рассмотрим функцию

$$W(\alpha,z)=\rho^{\alpha+1}U(\alpha,z).$$

Тогда на основании (5) $W(\alpha,z)$ является решением следующей граничной задачи:

$$W(\alpha,z)=\frac{\varepsilon z}{1-\gamma z}W(\alpha-m,z)+\frac{\varepsilon z}{1-\gamma z}W(\alpha+l,z),\quad \alpha\geq 0, \tag{13}$$

$$W(-j,z)=\rho^{1-j},\quad j=1,2,\ldots,m.$$

Из (13) следует, что

$$W(\alpha,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^{j}\gamma^{k-j}\mathcal{A}^{(k-j)}(\alpha,k)z^{k},$$

где $\mathcal{A}^{(k-j)}(\alpha,k)$ удовлетворяют уравнениям

$$\mathcal{A}^{(k-j)}(\alpha,k)=\mathcal{A}^{(k-j)}(\alpha-m,k-1)+\mathcal{A}^{(k-j)}(\alpha+l,k-1)+\mathcal{A}^{(k-j-1)}(\alpha,k-1),$$

$$\alpha\geq 0,\quad j=0,1,2,\ldots,k, \tag{14}$$

$$\mathcal{A}^{(0)}(-i,0)=\rho^{1-i},\quad \mathcal{A}^{(j)}(-i,0)=0,\quad j=1,2,\ldots,k,\quad i=1,2,\ldots,m,$$

$$\mathcal{A}^{(j)}(\alpha,0)=0\quad \forall\alpha\geq 0,\quad j=0,1,2,\ldots,k,$$

$$\mathcal{A}^{(-1)}(\alpha,k)=\mathcal{A}^{(k)}(\alpha-m,k)=\mathcal{A}^{(k)}(\alpha+l,k)=0.$$

Поэтому ε_α и τ_α можно представить в виде

$$\varepsilon_\alpha=\rho^{-(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^{j}\gamma^{k-j}\mathcal{A}^{(k-j)}(\alpha,k), \tag{15}$$

$$\tau_\alpha=\rho^{-(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}k\varepsilon^{j}\gamma^{k-j}\mathcal{A}^{(k-j)}(\alpha,k).$$

Для нахождения $\mathcal{A}^{(k-j)}(\alpha,k)$ в (15) необходимо определить число путей, которые приводят к смене действия автомат, стартующий из состояния с номером α (рис.2). Если для некоторого

ეროვნული ბიბლიოთეკა

k ($k=1,2,\dots$) условие $\alpha - km \geq 0$ не выполняется, то это означает, что автомат может на k-м шаге сменить действие. Состояния с отрицательными номерами будем называть заключительными состояниями. При этом в каждом ярусе число заключительных состояний может быть различным, не превосходящим m.

Обозначим через $N(k)$ максимальный номер состояний k-го яруса, а через $R^{(k-j)}(\alpha, i, k)$ - количество путей, которые приводят автомат из состояния с номером α в i-ое состояние k-го яруса при $k-j$ остановках в пути. Легко заметить, что $N(k) = \alpha + k\ell$.

Для определения $R^{(k-j)}(\alpha, i, k)$ имеем следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} R^{(k-j)}(\alpha, N(k)-i, k) = {} & R^{(k-j)}(\alpha, N(k-1)+m+\ell-i, k-1)\,\eta(N(k-1)+m+\ell-i) + \\ & + R^{(k-j)}(\alpha, N(k-1)-i, k-1)\,\eta(N(k-1)-i) + \\ & + R^{(k-j-1)}(\alpha, N(k-1)+\ell-i, k-1)\,\eta(N(k-1)+\ell-i), \end{aligned} \tag{I6}$$

$$R^{(k-j)}(\alpha, N(k), k) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k, \end{cases}$$

$$R^{(k-j)}(\alpha, \alpha-m, 1) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k, \end{cases}$$

$$R^{(k-j)}(\alpha, \alpha, 1) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k-1, \\ 0, & \text{если } j \neq k-1, \end{cases}$$

$$R^{(k-j)}(\alpha, i, 1) = 0 \quad \forall i \neq \alpha,\ \alpha-m,\ \alpha+\ell,$$

$$R^{(-1)}(\alpha, i, k) = 0 \text{ для } \forall i, k, \quad N(k) = \alpha + k\ell, .$$

где

$$j = 1, 2, \dots, k, \quad i = 1, 2, \dots, \alpha + k\ell + m, \quad \eta(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \geq 0, \\ 0, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

Тогда

$$\mathcal{A}^{(k-j)}(\alpha,k)=\sum_{i=1}^{m}\rho^{1-i}R^{(k-j)}(\alpha,-i,k), \qquad (I7)$$

$$u_k(\alpha)=\rho^{-(\alpha+1)}\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^{j}\eta^{k-j}\mathcal{A}^{(k-j)}(\alpha,k). \qquad (I8)$$

Формулы (I6), (I7), (I8), (I5) позволяют последовательно находить $R^{(k-j)}(\alpha,i,k)$, $\mathcal{A}^{(k-j)}(\alpha,k)$, $u_k(\alpha)$ и, следовательно, σ_α и τ_α.

Таким образом, разложение производящей функции, полученное методом диаграммы Ньютона-Пюизе (при стартовом состоянии автомата $\alpha=0$), позволяет вычислять вероятностные характеристики σ_0 и τ_0 при широком диапазоне значений параметров ℓ и m ($\ell=1$ или $m=1$). Число слагаемых в разложении зависит от параметров среды, от параметров ℓ , m и от степени точности. В общем же случае, численный алгоритм дает возможность с достаточной степенью точности вычислять σ_α и τ_α при любом α $(\alpha=0,1,2,\ldots)$.

Поступила 27.XII.1989

Проблемная лаборатория физической кибернетики

Литература

I. А.И.Эзрохи. Поведение автоматов с регулярной тактикой в стационарных случайных средах. - Киев (Препринт /ИК АН УССР № 77-76), 1976.

2. Е.Н.Вавилов, С.Д.Эйдельман, А.И.Эзрохи. Докл. АН УССР, сер. А., № 8, 1977.

3. Е.Н.Вавилов, С.Д.Эйдельман, А.И.Эзрохи. Кибернетика, № 5, 1977.
4. Л.П.Лобанов, А.И.Плетнев, С.Д.Эйдельман. Кибернетика, 6, 1984.
5. В.С.Королюк, А.И.Плетнев, С.Д.Эйдельман. Успехи математических наук, т.43, вып.I, 1988.
6. Н.Г.Чеботарев . Теория алгебраических функций. М.-Л. Общегосударственное изд-во техн.-теорет. лит., 1948.
7. Т.Д.Хведелидзе. Труды ТГУ, т.279, 1988.
8. В.Г.Срагович. Теория адаптивных систем. М.,"Наука", 1976.

თ. ხვედელიძე

სამი ტიპის რეაქციის მქონე შემთხვევით სტაციონარულ გარემოში ავტომატების ქცევის ალბათური მახასიათებლების გამოთვლის რიცხვითი მეთოდები

რეზიუმე

წარმოდგენილია ავტომატების ქცევის ალბათური მახასიათებლების პოვნის რიცხვითი ალგორითმი და განხილულია ამ მახასიათებლების მიახლოებითი გამოთვლის შესაძლებლობა ნიუტონ-პუიზეს გაშლის საფუძველზე.

T.Kvedelidze

NUMERICAL METHODS FOR CALCULATING THE PROBABILITY CHARACTERISTICS OF THE BEHAVIOUR OF AUTOMATA IN THREE REACTION TYPES OF STATIONARY RANDOM MEDIA

Summary

A numerical algorithm is presented for calculating the probability characteristics of the behaviour of automata and the possibility of an approximate calculation of these characteristics on the basis Newton-Puize expansion is discussed.

ეროვნული ბიბლიოთეკა

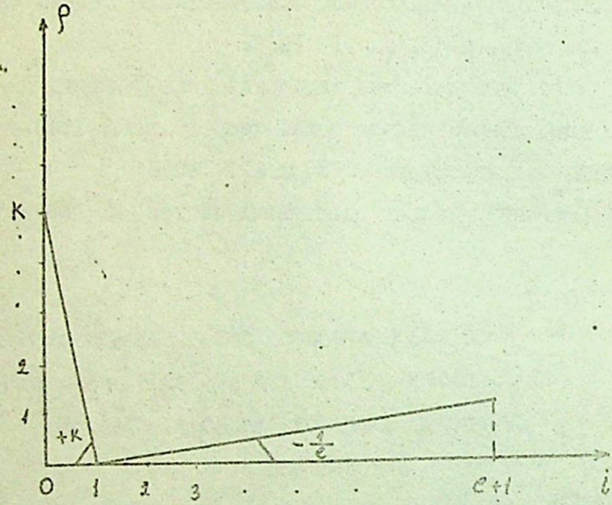


Рис.I. K-ая (K=1,2,···) диаграмма Ньютона-Пюизе

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

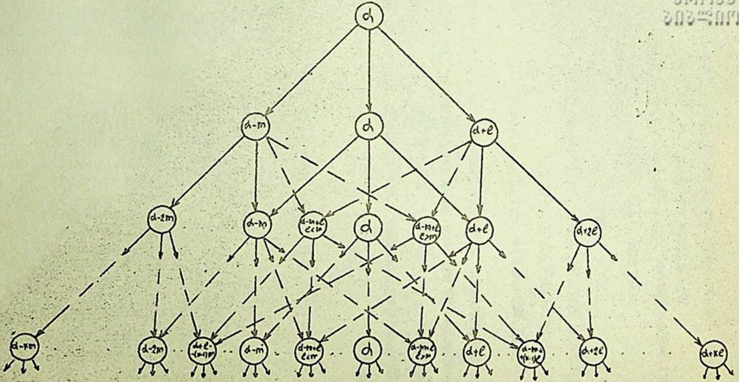


Рис.2. Граф перехода автомата $B_2(\ell,m,0,0)$ в области состояний при условии $\alpha-km\geq 0$

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили
ივ.ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

300, 1990

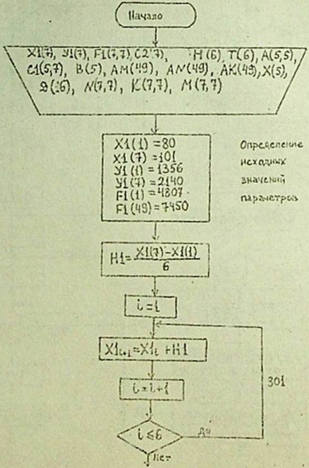
АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДВУХФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

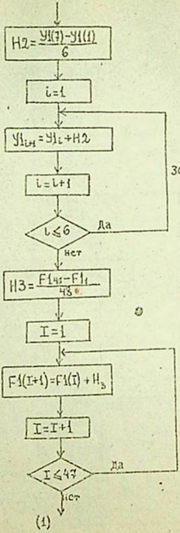
К.Т.Микеладзе, Н.Р.Николадзе

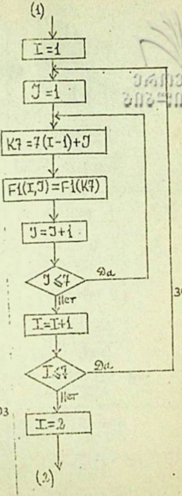
В работе представлен алгоритм решения двухфакторной модели экономического роста. Алгоритм осуществляет разработку задачи, поставленной в /I/ на ЭВМ.

Ниже приведена укрупненная блок-схема и программа решения задачи на ЭВМ.

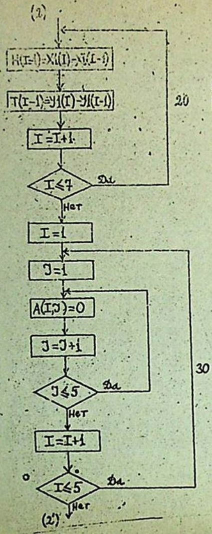
Укрупненная блок-схема решения задачи на Э В М

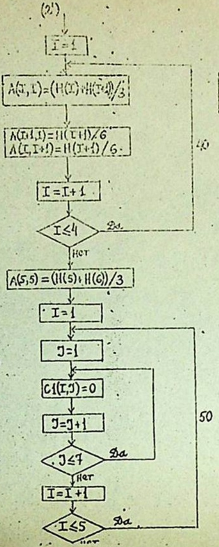


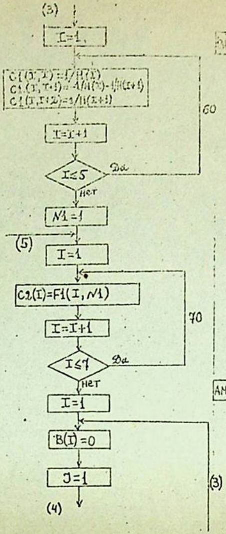


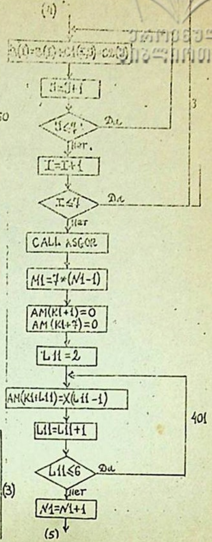


ეროვნული ბიბლიოთეკა

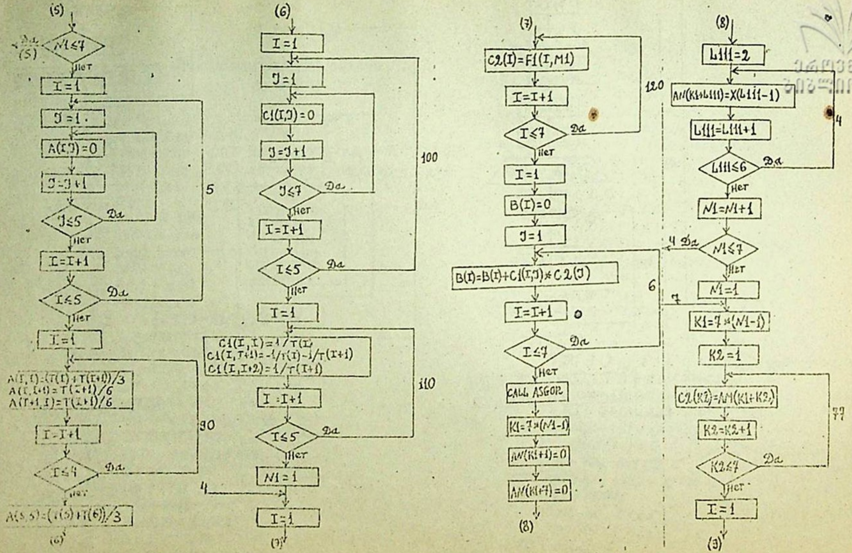






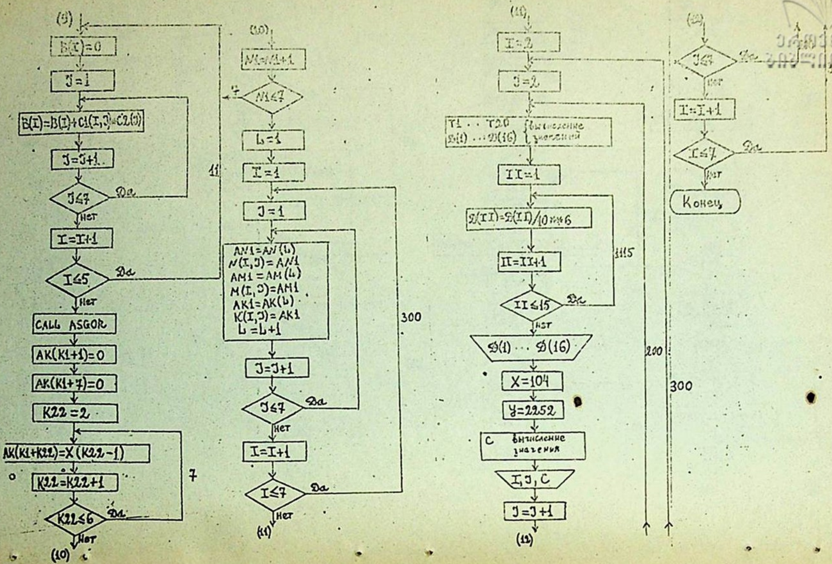


ეროვნული ბიბლიოთეკა



ეროვნული ბიბლიოთეკა

ეროვნული ბიბლიოთეკა



Программа решения задачи
на Э В М

```
      PROGRAM   GAUS1
      DIMENSION  X1(7),Y1(7),F1(7,7),C2(7),H(6),T(6),A(5,5)
      DIMENSION  C1(5,7),B(5),AM(49),AN(49),AK(49),X(5),D(16)
      DIMENSION  N(7,7),K(7,7),M(7,7)
      REAL       N,K,M
      X1(1) = 468
      X1(7) = 520
      Y1(1) = 480
      Y1(7) = 768
      F1(1) = 235
      F1(49)=260
      H1 =(X1(7) -X1(1))/6
      DO 301 I=1,6
301   X1(I+1) = X1(I) + H1
      H2 =(Y1(7) -Y1(1))/6
      DO 302 I=1,6
302   Y1(I+1) = Y1(I) + H2
      H3 = (F1(49) - F1(1))/48
      DO 303 I=1,47
303   F1(I+1) = F1(I) + H3
      DO 304 I=1,7
      DO 304 J =1,7
      K7 = 7*(I-1)+J
304   F1(I,J) = F1(K7)
      DO 20 I=2,7
      H(I-1) = X1(I) - X1(I-1)
20    T(I-1) =Y1(I)-Y1(I-1)
      DO 30 I=1,5
      DO 30 J=1,5
30    A(I,J) =0
      DO 40 I =1,4
      A(I,I) = (H(I)+H(I+1))/3.
      A(I+1,I) = H(I+1)/6.
40    A(I,I+1) = H(I+1)/6
      A(5,5) = (H(5) +H(6))/3.
      DO 50 I=1,5
      DO 50 J=1,7
50    C1(I,J) =0
      DO 60 I=1,5
      C1(I,I) = 1/H(I)
      C1(I,I+1) = -1/H(I) -1/H(I+1)
60    C1(I,I+2) = 1/H(I+1)
      DO 1 N1=1,7
      DO 70 I=1,7
70    C2(I)= F1(I,N1)
      DO 3 I =1,5
      B(I) = 0.
      DO 3 J =1,7
3     B(I) = B(I) + C1(I,J)*C2(J)
      CALL ASGOR (A,B,X,5,1)
      K1= 7*(N1-1)
      AM(K1+1) = 0
      AM(K1+7) = 0
      DO 401 L11=2,6
401   AM(K1+L11) = X(L11-1)
1     CONTINUE
      DO 80 I=1,5
      DO 80 J=1,5
80    A(I,J) =0
```

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

```
      DO 90 I=1,4
      A(I,I)=(T(I)+T(I+1))/3.
      A(I,I+1)=T(I+1)/6.
90    A(I+1,I)=T(I+1)/6.
      A(5,5)=(T(5)+T(6))/3.
      DO 100 I=1,5
      DO 100 J=1,7
100   C1(I,J)=0
      DO 110 I=1,5
      C1(I,I)=1/T(I)
      C1(I,I+1)=-1/T(I)-1/T(I+1)
110   C1(I,I+2)=1/T(I+1)
      DO 4 N1=1,7
      DO 120 I=1,7
      C2(I)=F1(I,N1)
120   CONTINUE
      DO 6 I=1,5
      B(I)=0.
      DO 6 J=1,7
6     B(I)=B(I)+C1(I,J)*C2(J)
      CALL ASGOR(A,B,X,5,1)
      K1=7*(N1-1)
      AN(K1+1)=0
      AN(K1+7)=0
      DO 4 L111=2,6
      AN(K1+L111)=X(L111-1)
4     CONTINUE
      DO 7 N1=1,7
      K1=7*(N1-1)
      DO 77 K2=1,7
77    C2(K2)=AM(K1+K2)
```

```
      DO 11 I=1,5
      B(I)=0.
      DO 11 J=1,7
11    B(I)=B(I)+C1(I,J)*C2(J)
      CALL ASGOR(A,B,X,5,1)
      AK(K1+1)=0
      AK(K1+7)=0
      DO 7 K22=2,6
      AK(K1+K22)=X(K22-1)
7     CONTINUE
      L=1
      DO 700 I=1,7
      DO 700 J=1,7
      AN1=AN(L)
      N(I,J)=AN1
      AM1=AM(L)
      M(I,J)=AM1
      AK1=AK(L)
      K(I,J)=AK1
      L=L+1
700   CONTINUE
      DO 200 I=2,7
      DO 300J=2,7
      T1=(K(I-1,J-1)-K(I,J-1)-K(I-1,J)
     *+K(I,J))/(H(I-1)*T(J-1))
      T3=(K(I,J-1)-K(I,J))/H(I-1)
      T4=(M(J-1,I-1)-M(J,I-1)-M(J-1,I)+
     +M(J,I))/(H(I-1)*T(J-1))
      T5=(K(I-1,J-1)-K(I-1,J)+K(I,J-1)-K(I,J))/
     *H(I-1)
      T6=(M(J-1,I)-M(J,I))/H(I-1)
```

```
      T7 =(K(I-1,J) - K(I,J))/T(J-1)
      T8 = (M(J,I-1) - M(J,I))/T(J-1)
      T9 = (K(I-1,J-1) - K(I-1,J))/H(I-1)
      T10 = (N(I-1,J-1) -N(I,J-1) -- N(I-1,J) +
     *N(I,J))/ (H(I-1)*T(J-1))
      T11 = (K(I-1,J-1) - K(I,J-1))/T(J-1)
      T12 = (N(I,J-1) -N(I,J))/ H(I-1)
      T13 = (F1(I-1,J-1) -F1(I-1,J) - F1(I,J-1)+
     *F1(I,J))/(H(I-1)*T(J-1))
      T14 =(N(I-1,J) -N(I,J))/H(I-1)
      T15 = (M(J-1,I-1) -M(J-1,I))/ T(J-1)
      T16 = (N(I-1,J-1) -N(I-1,J))/H(I-1)
      T17 = (F1(I-1,J)-F1(I,J))/ H(I-1)
      T18 = (N(I-1,J) -N(I,J)) / T(J-1)
      T19 =(M(J-1,I-1) -M(J,I-1))/T(J-1)
      T20 =(F1(I,J-1) -F1(I,J))/T(J-1)
      D(1) = T1/36
      D(2) = (Y1(J)*T1)/12 + T3/12
      D(3) = (Y1(J)*Y1(J)*T1)/12 +(Y1(J)*T3)/6+
     *T4/6 -(T(J-1)*T5)/36
      D(4) = (Y1(J)*Y1(J)*Y1(J)*T1)/36+(Y1(J)*Y1(J)*
     *T3)/12 +(Y1(J)*T4)/6 -(Y1(J)*T(J-1)*T5)/
     *36 + T6/6
      D(5) =(X1(I)*T1)/12 + T7/12
      D(6) = (X1(I)*Y1(J)*T1)/4 +(Y1(J)*T7)/4+
     *(X1(I)*T3)/4 + K(I,J)/4
      D(7) = (X1(I) *Y1(J)*Y1(J)*T1)/4+(X1(I)*
     * Y1(J)*T3)/2 +(X1(I)*T4)/2 -(X1(I)*T(J-1)*T5)/
     * 12 +(Y1(J)*Y1(J)*T7)/4 +T8/2-(T(J-1)*(K(I-1,J)+
     *K(I,J)))/12+(Y1(J)*K(I,J))/2
      AD1 =(X1(I)*Y1(J)*Y1(J)*Y1(J)*T1)/12+(X1(I)*
     *Y1(J)*Y1(J)*T3)/4 + (X1(I)*Y1(J)*T4)/2 -
     * (X1(I)*Y1(J)*T(J-1)*T5)/12
      AD2 =(X1(I)*T6)/2 +(Y1(J)*Y1(J)*Y1(J)*T7)/
     * 12 +(Y1(J)*T8)/2 -(Y1(J)*T(J-1)*(K(I-1,J)+
     * K(I,J)))/12+(Y1(J)*Y1(J)*K(I,J))/4 +M(J,I)/2
      D(8) = AD1 + AD2
      D(9) =(X1(I)*X1(I)*T1)/12 +(X1(I)*T7)/6+
     * T10/6 -(H(I-1)*T11)/36-(H(I-1)*T7)/18
      AD1 =(X1(I)*X1(I)*Y1(J)*T1)/4+(X1(I)*X1(I)*
     * T3)/4 +(X1(I)*Y1(J)*T7)/2 +(X1(I)*K(I,J))/2
      AD2 =(Y1(J)*T10)/2 +T12/2 -(Y1(J)*H(I-1)*
     * T11)/12 -(H(I-1)*K(I,J-1))/12 -(Y1(J)*
     * H(I-1)*T7)/6 - (H(I-1)*K(I,J))/6
      D(10) = AD1 + AD2
      AD1 = (X1(I)*X1(I)*Y1(J)*Y1(J)*T1)/4 +
     * (X1(I)*X1(I)*Y1(J)*T3)/2+(X1(I)*X1(I)*T4)/
     * 2 - (X1(I)*X1(I)*T(J-1)*T5)/12 +(X1(I)*
     *Y1(J)*Y1(J)*T7)/2 + X1(I)*Y1(J)*K(I,J)
      AD2 = X1(I)*T8 - (X1(I)*T(J-1)*(K(I-1,J) +
     * K(I,J)))/6 +(Y1(J)*Y1(J)*T10)/2 +Y1(J)*T12+
     * T13-(T(J-1)*T14)/6 -(T(J-1)*T12)/3 -(Y1(J)*
     * Y1(J)*H(I-1)*T11)/12 -(Y1(J)*H(I-1)*K(I,J-1))/
     * 6 -(H(I-1)*T15)/6
      AD3 =(H(I-1)*T(J-1)*(K(I-1,J-1)+K(I,J-1)))/
     * 36 -(Y1(J)*Y1(J)*H(I-1)*T7)/6 -(Y1(J)*
     * H(I-1)*K(I,J))/3 -(H(I-1)*T8)/3+(H(I-1)*
     * T(J-1)*(K(I-1,J) + K(I,J)))/18
      D(11) = AD1 + AD2 +AD3
      AD1 =(X1(I)*X1(I)*Y1(J)*Y1(J)*Y1(J)*T1)/12+
     * (X1(I)*X1(I)*Y1(J)*Y1(J)*T3)/4 +(X1(I)*X1(I)*
     * Y1(J)*T4)/2 -(X1(I)*X1(I)*Y1(J)*T(J-1)*T5)/
     * 12 +(X1(I)*X1(I)*T6)/2
```

```
  AD2 = (X1(I)*Y1(J)*Y1(J)*Y1(J)*T7)/6+
* (X1(I)*Y1(J)*Y1(J)*K(I,J))/2 + X1(I)*Y1(J)*
* T8-(X1(I)*Y1(J)*T(J-1)*(K(I-1,J)+K(I,J)))/
* 6 +  X1(I)*M(J,I) + (Y1(J)*Y1(J)*Y1(J)*T10)/6
  AD3 = (Y1(J)*Y1(J)*T12)/2 + Y1(J)*T13  -
* (Y1(J)*T(J-1)*T16)/6 -(Y1(J)*T(J-1)*T12)/
* 3+T17 -(Y1(J)*Y1(J)*Y1(J)*H(I-1)*T11)/36-
* (Y1(J)*Y1(J)*H(I-1)*K(I,J-1))/12 -(Y1(J)*
* H(I-1)*T15)/6
  AD4 = (Y1(J)*H(I-1)*T(J-1)*(K(I-1,J-1)+
* K(I,J-1)))/36 + (H(I-1)*M(J-1,I))/6 -
* (Y1(J)*Y1(J)*Y1(J)*H(I-1)*T7)/18 - (Y1(J)*
* Y1(J)*H(I-1)*K(I,J))/6 -(Y1(J)*H(I-1)*
* T8)/3 + (Y1(J)*H(I-1)*T(J-1)*(K(I-1,J) +
* K(I,J)))/18 - (H(I-1)*M(J,I))/3
  D(12) = AD1 + AD2 +AD3 +AD4
  D(13) = ( X1(I)*X1(I)*X1(I)*T1)/36 +(X1(I)*
* X1(I)*T7)/12 + (X1(I)*T10)/6 - (X1(I) *
* H(I-1)*T11)/36 - (X1(I)*H(I-1)*T7)/
* 18+T18/6
  AD1 = (X1(I)*X1(I)*X1(I)*Y1(J)*T1)/12+
* (X1(I)*X1(I)*X1(I)*T3)/12 +(X1(I)*X1(I)*
* Y1(J)*T7)/4 + (X1(I)*X1(I)*K(I,J))/4 +
* (X1(I)*Y1(J)*T10)/2
  AD2 =(X1(I)*T12)/2 -(X1(I)*Y1(J)*H(I-1)*
* T11)/12 -(X1(I)*Y1(J)*H(I-1)*T7)/6 -
* (X1(I)*H(I-1)*K(I,J-1))/12 -(X1(I)*
* H(I-1)*K(I,J))/6 + (Y1(J)*N(I-1,J))/(2*
* T(J-1)) + N(I,J)/2
  D(14) = AD1 + AD2
  AD1 = (X1(I)*X1(I)*X1(I)*Y1(J)*Y1(J)*T1)/12+
* (X1(I)*X1(I)*X1(I)*Y1(J)*T3)/6 + (X1(I)*
* X1(I)*X1(I)*T19)/(6*H(I-1)) -(X1(I)*X1(I)*
* X1(I)*M(J-1,I))/(2*H(I-1)*T(J-1))
  AD2 =(X1(I)*X1(I)*X1(I)*M(J,I))/(6*H(I-1)*
* T(J-1)) -(X1(I)*X1(I)*X1(I)*T(J-1)*T5)/36+
* (X1(I)*X1(I)*Y1(J)*Y1(J)*T7)/4 +(X1(I)*
* X1(I)*Y1(J)*K(I,J))/2+(X1(I)*X1(I)*T8)/2-
* (X1(I)*X1(I)*T(J-1)*(K(I-1,J) +K(I,J)))/12
  AD3 = (X1(I)*Y1(J)*Y1(J) * T10)/2 + X1(I)*
* Y1(J)*T12 + X1(I)*T13 -(X1(I)*T(J-1)*
* T16)/6 -(X1(I) * T(J-1)*T12)/3 -(X1(I)*
* Y1(J)*Y1(J)*H(I-1)*T11)/12-(X1(I)*
* Y1(J)*H(I-1)*K(I,J-1))/6 -(X1(I)*H(I-1)*
* T15)/6
  AD4 = (X1(I)*H(I-1)*T(J-1)*(K(I-1,J-1)+
* K(I,J-1)))/36 -(X1(I)*Y1(J)*Y1(J)*H(I-1)*
* T7)/6 - (X1(I)*Y1(J)*H(I-1)*K(I,J))/3 -
* (X1(I)*H(I-1)*T8)/3
  AD5 = (X1(I)*H(I-1)*T(J-1)* (K(I-1,J)+
* K(I,J)))/18 + (Y1(J)*Y1(J)*T18)/2 + Y1(J)*
* N(I,J) + T20 -(T(J-1)*N(I-1,J))/6 -(T(J-1)*
* N(I,J))/3
  D(15) = AD1+ AD2 + AD3+ AD4 + AD5
  AD1 =(X1(I)*X1(I)*X1(I)*Y1(J)*Y1(J)*Y1(J)*
* T1)/36 + (X1(I)*X1(I)*X1(I)*Y1(J)*Y1(J)*
* T3)/12 + (X1(I)*X1(I)*X1(I)*Y1(J)*T4)/6 -
* (X1(I)*X1(I)*X1(I)*Y1(J)*T(J-1)*T5)/36
  AD2 = (X1(I)*X1(I)*X1(I)*T6)/6 + (X1(I)*
* X1(I)*Y1(J)*Y1(J)*Y1(J)*T7)/12 + (X1(I)*
* X1(I)*Y1(J) *Y1(J)*K(I,J))/4 + (X1(I)*X1(I)*
* Y1(J) * T8)/2 - (X1(I)*X1(I)*Y1(J)*T(J-1)*
* (K(I-1,J) + K(I,J)))/12.
```

```
      AD3=(X1(I)*X1(I)*M(J,I))/2 +(X1(I)*
     * Y1(J)*Y1(J)*Y1(J)*T10)/6 +(X1(I)*Y1(J)*
     * Y1(J)*T12)/2 +X1(I)*Y1(J)*T13 -(X1(I)*
     * Y1(J)*T(J-1)*T16)/6 -(X1(I)*Y1(J)*
     * T(J-1)*T12)/3
      AD4= X1(I)*T17 -(X1(I)*Y1(J)*Y1(J)*
     * Y1(J)*H(I-1)*T11)/36 -(X1(I)*Y1(J)*
     * Y1(J)*H(I-1)*K(I,J-1))/12 -(X1(I)*
     * Y1(J)*H(I-1)*T19)/6 +(X1(I)*Y1(J)*
     * H(I-1)*T(J-1)*(K(I-1,J-1)+K(I,J-1)))/36
      AD5=(X1(I)*H(I-1)*M(J-1,I))/6 -(X1(I)*
     * Y1(J)*Y1(J)*Y1(J)*H(I-1)*T7)/18 -
     * (X1(I)*Y1(J)*Y1(J)*H(I-1)*K(I,J))/6 -
     * (X1(I)*Y1(J)*H(I-1)*T8)/3
      AD6=((X1(I)*Y1(J)*H(I-1)*T(J-1)*
     * (K(I-1,J)+K(I,J)))/18 -(X1(I)*H(I-1)*
     * M(J,I))/3 +(Y1(J)*Y1(J)*Y1(J)*T18)/6 +
     * (Y1(J)*Y1(J)*N(I,J))/2 +Y1(J)*T20 -
     * (Y1(J)*T(J-1)*N(I-1,J))/6 -(Y1(J)*T(J-1)*
     * N(I,J))/3)/10**6 +F1(I,J)*16/15
      D(16)=(AD1+AD2+AD3+AD4+AD5)/10**6+AD6
      DO 1115 II=1,15
      D(II)=D(II)/10**6
 1115 CONTINUE
      PRINT 500,I,J,D(1),D(2),D(3),D(4),D(5),D(6),D(7),D(8)
  500 FORMAT(2I5/E10.3,'X3Y3-',E10.3,'X3Y2+'E10.3,
     * 'X3Y1-',E10.3,'X3-',E10.3,'X2Y3+',E10.3,'X2Y2-',
     * E10.3,'X2Y1+',E10.3,'X2+')
      PRINT 800,D(9)D(10),D(11),D(12),D(13),D(14),D(15),D(16)
  800 FORMAT(E10.3,'X1Y3-',E10.3,'X1Y2+',E10.3,
     * 'X1Y1-',E10.3,'X1-',E10.3,'Y3+',E10.3'Y2-',
     * E10.3'Y1+',E10.3)
```

```
      X=527
      Y=809
      C =D(1)*X*X*X*Y*Y*Y-D(2)*X*X*X*Y*Y+
     * D(3)*X*X*X*Y -D(4)*X*X*X -D(5)*X*X*Y*Y*Y+
     * D(6)*X*X*Y*Y --D(7)*X*X*Y +D(8)*X*X +
     * D(9)*X*Y*Y*Y -D(10)*X*Y*Y +D(11)*X*Y-
     * D(12)*X -D(13)*Y*Y*Y +D(14)*Y*Y -
     * D(15)*Y +D(16)
      PRINT 900,I,J,C
  900 FORMAT(2I5/E10.3)
  300 CONTINUE
  200 CONTINUE
      STOP
      END
```

Вышепредложенная программа осуществляет вычисление количественных взаимосвязей между динамическими рядами объемов основных производственных фондов, производственных ресурсов и валового общественного продукта. Полученные результаты дают возможность провести ретроспективный анализ экономических показателей и разработать их надежные прогнозы.

Поступила II.I. 1990

Проблемная лаборатория физической кибернетики

Литература

I. Н.Николадзе, К.Микеладзе. Двухфакторная модель экономического роста. Труды ТГУ,298, сер. киб. и прикл.мат., 1990.

2. Дж.Альберг, Э.Нильсон, Дж.Уолш. Теория сплайнов и ее приложение. М., "Мир", 1972.

3. С.А.Столяк. Сплайны и их применение - экономика и математические методы. Вып.3, 1971.

4. С.Б.Стечкин, Ю.Н.Суботин. Сплайны в вычислительной математике. М., "Наука", 1976.

კ.მიქელაძე, ნ.ნიკოლაძე

ეკონომიკური ზრდის ორფაქტორიანი მოდელის ამოხსნის ალგორითმი

რეზიუმე

ნაშრომში განხილულია ეკონომიკური ზრდის ორფაქტორიანი მოდელის ამოხსნის ალგორითმი.

K.Mikeladze, N.Nikoladze

AN ALGORITHM OF THE SOLUTION OF A TWO-FACTOR MODEL OF ECONOMIC EXPANSION

Summary

An algoritm of the solution of a two-factor model of economic expansion is presented.

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили
ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
300 , 1990

ОБ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ

М.И.Кезерашвили

В настоящей работе строится алгоритм решения задачи изгиба парой сил однородного анизотропного слабо изогнутого тела в физически линейной, но геометрически нелинейной постановке. Такая постановка интересна тем, что многие из новых материалов допускают большие перемещения и углы поворота, иногда вплоть до разрушения, подчиняющегося при этом линейному закону Гука.

Пусть в декартовой системе координат $\xi_1 O\eta_1\zeta_1$ дано однородное слабо изогнутое анизотропное тело, ограниченное боковой поверхностью:

$$F(\xi_1+\frac{1}{2}K\zeta_1^2,\eta_1)=0$$

и плоскостями $\zeta_1=0$ (нижнее закрепленное основание), $\zeta_2=\ell$ (верхнее свободное основание), где K – малый параметр, квадратом и высшими степенями которого мы пренебрегаем.

Начало координат поместим в центре инерции нижнего закрепленного основания, а оси $O\xi_1$ и $O\eta_1$ направим по главным осям инерции указанного основания, поперечное сечение которого обозначим через S , а его границу через L .

Будем также считать, что боковая поверхность тела свободна от внешних усилий, а усилия, приложенные к верхнему основанию $\zeta_2 = l$, статически эквивалентны изгибающей паре сил с моментом M_0 и направлены параллельно оси $O\eta_1$.

Требуется в области, занятой телом, определить компоненты тензора напряжений и вектора смещения, удовлетворяющие всем известным условиям теории упругости.

Введем новую систему координат:

$$\xi = \xi_1 + \frac{1}{2} k \zeta_1^2, \quad \eta = \eta_1, \quad \zeta = \zeta_1, \tag{I}$$

тогда в пространстве $\zeta O \xi \eta$ рассматриваемое тело переходит в призматическое, ограниченное поверхностью $F(\xi, \eta) = 0$.

Если обозначим через x, y, z координаты точки тела после деформации, тогда

$$x = \xi + u, \quad y = \eta + v, \quad z = \zeta + w, \tag{2}$$

где u, v, w – компоненты смещения, которые являются функциями от координат x, y, z.

Соотношения между производными по координатам ξ, η, ζ и x, y, z с точностью до k^2 с учетом равенств (I) и (2) устанавливаются формулами:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(1 - \frac{\partial u}{\partial \xi} - k\zeta \frac{\partial w}{\partial \xi}\right)\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \zeta}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + k\zeta \frac{\partial w}{\partial \eta}\right)\frac{\partial}{\partial \xi} + \left(1 - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \left[-\frac{\partial u}{\partial \zeta} + k\zeta\left(1 - \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} + k\zeta \frac{\partial v}{\partial \xi}\right)\frac{\partial}{\partial \eta} +$$

$$+ \left(1 - \frac{\partial w}{\partial \zeta} - k\zeta \frac{\partial w}{\partial \xi}\right)\frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Зависимость между компонентами тензора деформации и компонентами вектора смещения в координатах конечного состояния в вышеуказанной постановке имеет вид:

$$l_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right], \tag{4}$$

- -

- -

$$l_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Решение поставленной задачи в смещениях будем искать в следующем виде:

$$u = \frac{\beta}{2}\left(\sigma_1\xi^2 - \sigma_2\eta^2 + \zeta^2\right) + \beta k u_1 + \beta^2 u_2 + \beta^2 k u_3, \tag{5}$$

$$v = \beta\left(\sigma_2\xi\eta + \frac{1}{2}\sigma_3\xi^2\right) + \beta k v_1 + \beta^2 v_2 + \beta^2 k v_3,$$

$$w = -\beta\xi\zeta + \beta k w_1 + \beta^2 w_2 + \beta^2 k w_3,$$

где $\beta = M_0(EI_\eta)^{-1}$ – малый параметр, σ_i (i = I,2,3), E – упругие константы, u_1, v_1, w_1 и u_2, v_2, w_2 – известные компоненты смещения, построенные в работах /I/ и /2/, а u_3, v_3, w_3 – искомые компоненты смещения, вызванные от учета слабой изогнутости оси данного тела при его изгибе парой сил, т.е. в вычислениях будем сохранять члены не только порядка β , β_k , β^2, но и порядка $\beta^2 k$.

Для компонентов деформации, соответствующих смещениям (5), с учетом формул (3) и (4), с принятой нами точностью, получим:

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

$$\varepsilon_{xx}=\beta\sigma_1\xi+\beta\kappa\frac{\partial u_1}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\beta^2\left[2\frac{\partial u_2}{\partial\xi}+\sigma_2\eta^2-(\sigma_3+3\sigma_1^2)\xi^2+\zeta^2\right]+$$

$$+\kappa\beta^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi}+\sigma_1\xi\zeta^2\right),$$

$$\varepsilon_{yy}=\beta\sigma_2\xi+\beta\kappa\frac{\partial v_1}{\partial\eta}+\frac{1}{2}\beta^2\left(2\frac{\partial v_2}{\partial\eta}+\sigma_2\eta^2+2\sigma_2\sigma_3\xi\eta-3\sigma_2\xi^2\right)+\beta^2\kappa\frac{\partial v_3}{\partial\eta},$$

$$\varepsilon_{zz}=-\beta(\xi+\kappa\zeta^2)+\beta\kappa\frac{\partial w_1}{\partial\zeta}+\frac{1}{2}\beta^2\left(2\frac{\partial w_2}{\partial\zeta}+\zeta^2-3\xi^2\right)+\kappa\beta^2\left[\frac{\partial w_3}{\partial\zeta}-\right.$$

$$\left.-\xi\zeta(2\zeta+1-\sigma_1-\sigma_1\zeta)\right],$$

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\beta\sigma_3\xi+\frac{1}{2}\beta\kappa\left(\frac{\partial u_1}{\partial\eta}+\frac{\partial v_1}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{2}\beta^2\left[\frac{\partial u_2}{\partial\eta}+\frac{\partial v_2}{\partial\xi}+\sigma_2(\sigma_1-\sigma_2)\xi\eta-\right. \qquad (6)$$

$$\left.-\sigma_3(\sigma_1+2\sigma_2)\xi^2\right]+\frac{1}{2}\beta^2\kappa\left[\frac{\partial u_3}{\partial\eta}+\frac{\partial v_3}{\partial\xi}+\zeta^2(\sigma_2\eta+\sigma_3\xi)\right],$$

$$\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\beta\kappa\left(\frac{\partial u_1}{\partial\zeta}+\frac{\partial w_1}{\partial\xi}+\sigma_1\xi\zeta\right)+\frac{1}{2}\beta^2\left[\frac{\partial u_2}{\partial\zeta}+\frac{\partial w_2}{\partial\xi}-\zeta(1+\sigma_1)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\beta^2\kappa\left\{\frac{\partial u_3}{\partial\zeta}+\frac{\partial w_3}{\partial\xi}+\zeta\left[\xi^2(\sigma_1-\sigma_3^2-2\sigma_1^2)-\sigma_2\sigma_3\xi\eta-\zeta^2\right]\right\},$$

$$\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\beta\kappa\left[\frac{\partial v_1}{\partial\zeta}+\frac{\partial w_1}{\partial\eta}+\zeta(\sigma_2\eta+\sigma_3\xi)\right]+\frac{1}{2}\beta^2\left[\frac{\partial v_2}{\partial\zeta}+\frac{\partial w_2}{\partial\eta}-\zeta(\sigma_2\eta+\right.$$

$$\left.+\sigma_3\xi)\right]+\frac{1}{2}\beta^2\kappa\left\{\frac{\partial v_3}{\partial\zeta}+\frac{\partial w_3}{\partial\eta}+\xi\zeta\left[\sigma_2\eta+\sigma_3\xi(1-\sigma_1)-2\sigma_2(\sigma_2\eta+\sigma_3\xi)\right]\right\}.$$

Введем обозначения:

$$\mathcal{A}_{11}=\frac{1}{2}\left[(3\sigma_1+\sigma_3^2)\mathcal{A}+3\sigma_2^2H+2\sigma_3(\sigma_1+2\sigma_3)Q+3G\right]\xi^2-\sigma_2\left[\sigma_3H+Q(\sigma_1-\right.$$

$$\left.-\sigma_2)\right]\xi\eta-\frac{1}{2}\sigma_2^2(\mathcal{A}+H)\eta^2, \qquad (7)$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$A_{22}=\frac{1}{2}\left[(3\sigma_1+\sigma_3^2)H+3\sigma_2^2B+2\sigma_3(\sigma_1+2\sigma_2)R+3F\right]\xi^2-\sigma_2\left[\sigma_3B+R(\sigma_1-\right.$$

$$\left.-\sigma_2)\right]\xi\eta-\frac{1}{2}\sigma_2^2(H+B)\eta^2,$$

$$A_{12}=\frac{1}{2}\left[(3\sigma_1+\sigma_3^2)Q+3\sigma_2^2R+2\sigma_3(\sigma_1+2\sigma_2)D+3T\right]\xi^2-\sigma_2\left[\sigma_3R+D(\sigma_1-\right.$$

$$\left.-\sigma_2)\right]\xi\eta-\frac{1}{2}\sigma_2^2(Q+R)\eta^2,$$

$$A_{33}=\frac{1}{2}\left[(3\sigma_1+\sigma_3^2)G+3\sigma_2^2F+2\sigma_3(\sigma_1+2\sigma_2)T+3C\right]\xi^2-\sigma_2\left[\sigma_3F+T(\sigma_1-\right.$$

$$\left.-\sigma_2)\right]\xi\eta-\frac{1}{2}\sigma_2^2(G+F)\eta^2,$$

$$A_{13}=\xi(M\sigma_1+N\sigma_3)+N\sigma_2\eta,\quad A_{23}=\xi(N\sigma_1+L\sigma_3)+L\sigma_2\eta;$$

$$B_{11}=\left[(\sigma_1-2)G+A\sigma_1+Q\sigma_3\right]\xi+Q\sigma_2\eta,\quad C_{11}=-\frac{1}{2}(A+G),$$

$$B_{22}=\left[(\sigma_1-2)F+H\sigma_1+R\sigma_3\right]\xi+R\sigma_2\eta,\quad C_{22}=-\frac{1}{2}(H+F),$$

$$B_{33}=\left[(\sigma_1-2)C+G\sigma_1+T\sigma_3\right]\xi+T\sigma_2\eta,\quad C_{33}=-\frac{1}{2}(G+C),$$

$$B_{12}=\left[(\sigma_1-2)T+Q\sigma_1+D\sigma_3\right]\xi+D\sigma_2\eta,\quad C_{12}=-\frac{1}{2}(Q+T),$$

$$B_{13}=\left[M(1+\sigma_1)+N\sigma_3\right]\xi+N\sigma_2\eta,\quad B_{23}=\left[N(1+\sigma_1)+L\sigma_3\right]\xi+L\sigma_2\eta,$$

$$E_{11}=(\sigma_1-1)\xi G,\quad E_{22}=(\sigma_1-1)\xi F,\quad E_{12}=(\sigma_1-1)\xi T,\quad E_{33}=(\sigma_1-1)\xi C,$$

$$E_{13}=\left[M(\sigma_1-\sigma_3^2-2\sigma_1^2)+N\sigma_3(1-\sigma_1)-2N\sigma_2\sigma_3\right]\xi^2+\sigma_2(N-M\sigma_3-2N\sigma_2)\xi\eta,$$

$$E_{23}=\left[N(\sigma_1-\sigma_3^2-2\sigma_1^2)+L\sigma_3(1-\sigma_1)-2L\sigma_2\sigma_3\right]\xi^2+\sigma_2(L-N\sigma_3-2L\sigma_2)\xi\eta,$$

где A, B, C, ..., R, T – упругие постоянные.

С учетом этих обозначений и равенств (6) для компонентов напряжений, определенных по линейному закону Гука, получим:

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$\begin{aligned}
X_x &= \beta k\left[\tau_{11}^{(1)} - G\zeta^2\right] + \beta^2\left[\tau_{11}^{(2)} - A_{11} - C_{11}\zeta^2\right] + \beta^2 k\left[B_{11}\zeta^2 + E_{11}\zeta + \tau_{11}^{(3)}\right],\\
Y_y &= \beta k\left[\tau_{22}^{(1)} - F\zeta^2\right] + \beta^2\left[\tau_{22}^{(2)} - A_{22} - C_{22}\zeta^2\right] + \beta^2 k\left[B_{22}\zeta^2 + E_{22}\zeta + \tau_{22}^{(3)}\right],\\
Z_z &= \beta k\left[\tau_{33}^{(1)} - C\zeta^2\right] + \beta^2\left[\tau_{33}^{(2)} - A_{33} - C_{33}\zeta^2\right] + \beta^2 k\left[B_{33}\zeta^2 + E_{33}\zeta + \tau_{33}^{(3)}\right] - \alpha E\xi,\\
X_y &= \beta k\left[\tau_{12}^{(1)} - T\zeta^2\right] + \beta^2\left[\tau_{12}^{(2)} - A_{12} - C_{12}\zeta^2\right] + \beta^2 k\left[B_{12}\zeta^2 + E_{12}\zeta + \tau_{12}^{(3)}\right],\\
X_z &= \beta k\left[\tau_{13}^{(1)} + A_{13}\zeta\right] + \beta^2\left[\tau_{13}^{(2)} - B_{13}\zeta\right] + \beta^2 k\left[E_{13}\zeta - M\zeta^3 + \tau_{13}^{(3)}\right],\\
Y_z &= \beta k\left[\tau_{23}^{(1)} + A_{23}\zeta\right] + \beta^2\left[\tau_{23}^{(2)} - B_{23}\zeta\right] + \beta^2 k\left[E_{23}\zeta - N\zeta^3 + \tau_{23}^{(3)}\right],
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\tau_{11}^{(3)}$, $\tau_{22}^{(3)}$, ..., $\tau_{23}^{(3)}$ – искомые компоненты напряжения, соответствующие смещениям u_3, v_3, w_3, а $\tau_{11}^{(1)}$, $\tau_{22}^{(1)}$, ..., $\tau_{23}^{(1)}$ и $\tau_{11}^{(2)}$, $\tau_{22}^{(2)}$, ..., $\tau_{23}^{(2)}$ – компоненты напряжения, соответствующие смещениям u_1, v_1, w_1 и u_2, v_2, w_2, которые по данным работ /I/ и /2/ равны:

$$\tau_{11}^{(1)} = G\zeta^2 + f_{11} = G\left[\zeta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{EL}{m^2} - \sigma_1\right)\xi^2 - \left(\frac{EN}{m^2} + \sigma_3\right)\xi\eta - \sigma_2\eta^2\right] + E\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\eta^2} -$$

$$- U_0^* + \left(M\varphi + \frac{1}{2}N\xi^2 - M\xi\eta\right)\tau_0^*,$$

$$\tau_{22}^{(1)} = F\zeta^2 + f_{22} = F\left[\zeta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{EL}{m^2} - \sigma_1\right)\xi^2 - \left(\frac{EN}{m^2} + \sigma_3\right)\xi\eta - \sigma_2\eta^2\right] + E\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi^2} -$$

$$- V_0^* + \left(L\varphi - \frac{1}{2}N\eta^2 + L\xi\eta\right)\tau_0^*,$$

$$\tau_{12}^{(1)} = T\zeta^2 + f_{12} = T\left[\zeta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{EL}{m^2} - \sigma_1\right)\xi^2 - \left(\frac{EN}{m^2} + \sigma_3\right)\xi\eta - \sigma_2\eta^2\right] - E\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi\partial\eta} + N\tau_0^*\varphi,$$

$$\tau_{33}^{(1)} = C\zeta^2 + f_{33} = C\left[\zeta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{EL}{m^2} - \sigma_1\right)\xi^2 - \left(\frac{EN}{m^2} + \sigma_3\right)\xi\eta - \sigma_2\eta^2\right] + \sigma_1\left(E\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\eta^2} - U_0^*\right) +$$

$$+ \sigma_2\left(E\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi^2} - V_0^*\right) - E\sigma_3\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi\partial\eta} + \left[\sigma_1 M + \sigma_2 L + \sigma_3 N - E\right)\varphi +$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$+\sigma_2\left(L\xi\eta-\frac{1}{2}N\eta^2\right)+\sigma_1\left(\frac{1}{2}N\xi^2-M\xi\eta\right)\Big]\tau_0^*,$$

$$\tau_{13}^{(1)}=f_{13}\zeta=\left[(E-M\sigma_1-N\sigma_3)\xi-N\sigma_2\eta-\left(M\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+N\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+N\xi-M\eta\right)\tau_0^*\right]\zeta,$$

$$\tau_{23}^{(1)}=f_{23}\zeta=\left[(-N\sigma_1-L\sigma_3)\xi-L\sigma_2\eta-\left(L\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+N\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+L\xi-N\eta\right)\tau_0^*\right]\zeta,$$

$$\tau_{11}^{(2)}=C_{11}\zeta^2+\varphi_{11}=C_{11}\zeta^2+\frac{\partial^2\Phi^{**}}{\partial\eta^2}-2M(2C_0\varphi+d_0\omega^{**})-2C_0N\xi^2+$$

$$+\left[2\left(M\sigma_3+\frac{NE}{L}\right)\xi\eta-N\sigma_1\xi^2\right]d_0+\int^{\xi}\left(\frac{\partial H_{11}}{\partial\xi}+\frac{\partial H_{12}}{\partial\eta}+B_{13}\right)d\xi,$$

$$\tau_{22}^{(2)}=C_{22}\zeta^2+\varphi_{22}=C_{22}\zeta^2+\frac{\partial^2\Phi^{**}}{\partial\xi^2}-2L(2C'_0\varphi+d_0\omega^{**})+2C_0N\eta^2+$$

$$+\left[(N\sigma_3+E)\eta^2-2L\sigma_1\xi\eta\right]d_0+\int^{\eta}\left(\frac{\partial H_{12}}{\partial\xi}+\frac{\partial H_{22}}{\partial\eta}+B_{23}\right)d\eta; \qquad (9)$$

$$\tau_{12}^{(2)}=C_{12}\zeta^2+\varphi_{12}=C_{12}\zeta^2-\frac{\partial^2\Phi^{**}}{\partial\xi\partial\eta}-2N(2C'_0\varphi+d_0\omega^{**})+2C_0(M\eta^2-L\xi^2),$$

$$\tau_{33}^{(2)}=C_{33}\zeta^2+\varphi_{33}=C_{33}\zeta^2+\sigma_1\frac{\partial^2\Phi^{**}}{\partial\eta^2}+\sigma_2\frac{\partial^2\Phi^{**}}{\partial\xi^2}-\sigma_3\frac{\partial^2\Phi^{**}}{\partial\xi\partial\eta}-2(2C'_0\varphi+$$

$$+d_0\omega^{**})(M\sigma_1+L\sigma_2+N\sigma_3-E)-2C'_0\left[(N\sigma_1+L\sigma_3)\xi^2-(N\sigma_2+M\sigma_3)\eta^2\right]+$$

$$+d_0\sigma_1\left[2\left(M\sigma_3+\frac{NE}{L}\right)\xi\eta-N\sigma_1\xi^2\right]+d_0\sigma_2\left[(N\sigma_3+E)\eta^2-2L\sigma_1\xi\eta\right]+$$

$$+d_0E\left[\sigma_1(\xi^2+\xi\eta)+\left(\sigma_2-\frac{E}{L}\right)\eta^2\right]-\frac{1}{2}(G+C')\sigma_3\xi\eta+\frac{\sigma_3^2}{8\sigma_1\sigma_2}(G+C')(\sigma_1\xi^2+\sigma_2\eta^2)+$$

$$+\sigma_1\int^{\xi}\left(\frac{\partial H_{11}}{\partial\xi}+\frac{\partial H_{12}}{\partial\eta}+B_{13}\right)d\xi+\sigma_2\int^{\eta}\left(\frac{\partial H_{12}}{\partial\xi}+\frac{\partial H_{22}}{\partial\eta}+B_{23}\right)d\eta,$$

$$\tau_{13}^{(2)}=\varphi_{13}\zeta=\Big\{2N\frac{\partial}{\partial\eta}(2C'_0\varphi+d_0\omega^{**})+2M\frac{\partial}{\partial\xi}(2C_0\varphi+d_0\omega^{**})+$$

$$+4C_0(N\xi-M\eta)-2d_0\left[\left(M\sigma_3+\frac{NE}{L}\right)\eta-N\sigma_1\xi\right]+\frac{1}{E}\Big[2(MC_1\xi+NC_2\eta)+$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$+\frac{\sigma_3^2}{4\sigma_1\sigma_2}(G+C)(M\sigma_1\xi+N\sigma_2\eta)\Big]+N\xi-M\eta\Big\}\zeta,$$

$$\tau_{23}^{(2)}=\varphi_{23}\zeta=\Big\{2L\frac{\partial}{\partial\eta}(2c_0\varphi+d_0\omega^{**})+2N\frac{\partial}{\partial\xi}(2c_0\varphi+d_0\omega^{**})+$$

$$+4c_0(L\xi-N\eta)-2d_0\Big[(N\sigma_3+E)\eta-L\sigma_1\xi\Big]+\frac{1}{E}\Big[2(Nc_1\xi+Lc_2\eta)+$$

$$+\frac{\sigma_3^2(G+C)}{4\sigma_1\sigma_2}(N\sigma_1\xi+L\sigma_2\eta)\Big]+L\xi-N\eta\Big\}\zeta,$$

где функции φ^*, φ^{**}, ω^*, ω^{**} удовлетворяют определенным граничным условиям, а τ_0^*, c_0, d_0, U_0^*, V_0^* имеют определенные значения.

Подставляя значения компонентов напряжения (8) в уравнения равновесия и используя равенства (3), (9), а также результаты работ /I/ и /2/, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial\tau_{11}^{(3)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{12}^{(3)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau_{13}^{(3)}}{\partial\zeta}+\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial\xi}+\frac{\partial B_{12}}{\partial\eta}-3M+\frac{\partial U_2}{\partial\xi}\right)\zeta^2+\frac{\partial E_{11}}{\partial\xi}\zeta+\frac{\partial U_0}{\partial\xi}=0,$$

$$\frac{\partial\tau_{12}^{(3)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{22}^{(3)}}{\partial\eta}+\frac{\partial_{23}^{(3)}}{\partial\zeta}+\left(\frac{\partial B_{12}}{\partial\xi}+\frac{\partial B_{22}}{\partial\eta}-3N+\frac{\partial V_2}{\partial\eta}\right)\zeta^2+\frac{\partial E_{12}}{\partial\xi}\zeta+\frac{\partial V_0}{\partial\eta}=0, \tag{IO}$$

$$\frac{\partial\tau_{13}^{(3)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{23}^{(3)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau_{33}^{(3)}}{\partial\zeta}+\Theta_0\zeta+E_{33}=0,$$

где введены обозначения:

$$\frac{\partial U_2}{\partial\xi}=-\frac{\partial H_{13}}{\partial\xi}-\frac{\partial B_{13}}{\partial\xi}-2G+\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial\xi}-\frac{\partial f_{13}}{\partial\xi},$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$\frac{\partial U_0}{\partial \xi} = \sigma_2 \eta \frac{\partial f_{12}}{\partial \xi} - \sigma_2 \xi \frac{\partial f_{12}}{\partial \eta} - \sigma_1 \xi \frac{\partial f_{11}}{\partial \xi} - (\sigma_2 \eta + \sigma_3 \xi) \frac{\partial f_{11}}{\partial \eta} + \xi (f_{13} + A_{13}) + E_{13},$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial \eta} = - \frac{\partial A_{23}}{\partial \xi} - \frac{\partial B_{23}}{\partial \xi} - 2T + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial \xi} - \frac{\partial f_{23}}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial \eta} = \sigma_2 \eta \frac{\partial f_{22}}{\partial \xi} - \sigma_2 \xi \frac{\partial f_{22}}{\partial \eta} - \sigma_1 \xi \frac{\partial f_{12}}{\partial \xi} - (\sigma_2 \eta + \sigma_3 \xi) \frac{\partial f_{12}}{\partial \eta} + \xi (f_{23} + A_{23}) + E_{23},$$

$$\theta_0(\xi, \eta) = \frac{\partial E_{13}}{\partial \xi} + \frac{\partial E_{23}}{\partial \eta} - (\sigma_2 \eta + \sigma_3 \xi) \left(\frac{\partial A_{13}}{\partial \eta} + \frac{\partial f_{13}}{\partial \eta} \right) - \sigma_1 \xi \left(\frac{\partial A_{13}}{\partial \xi} + \frac{\partial f_{13}}{\partial \xi} \right) +$$

$$+ \sigma_2 \eta \left(\frac{\partial A_{13}}{\partial \xi} + \frac{\partial f_{23}}{\partial \xi} \right) - \sigma_2 \xi \left(\frac{\partial A_{23}}{\partial \xi} + \frac{\partial f_{23}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial \xi} - \frac{\partial f_{33}}{\partial \xi} - \frac{\partial A_{33}}{\partial \xi} +$$

$$+ (\sigma_1 E - E - 2C) \xi + 2 D_{33} + A_{13} + f_{13}.$$

Зависимость между направляющими косинусами нормали деформированной и недеформированной поверхностей с точностью до K, β, βK будет иметь вид:

$$\cos \widehat{n, x} = \cos \widehat{n, \xi} + \beta \{ \xi \cos \widehat{n, \xi} [-\sigma_1 + \sigma_1 \cos^2 \widehat{n, \xi} + \sigma_3 \cos \widehat{n, \xi} \cos \widehat{n, \eta} +$$

$$+ \sigma_2 \cos^2 \widehat{n, \eta}] - (\sigma_2 \eta + \sigma_3 \xi) \cos \widehat{n, \eta} \},$$

(I2)

$$\cos \widehat{n, y} = \cos \widehat{n, \eta} + \beta \{ \sigma_2 \eta \cos \widehat{n, \xi} + \xi [\sigma_1 \cos^2 \widehat{n, \xi} + \sigma_3 \cos \widehat{n, \xi} \cos \widehat{n, \eta} +$$

$$+ \sigma_2 \cos^2 \widehat{n, \eta} - \sigma_1] \cos \widehat{n, \eta} \},$$

$$\cos \widehat{n, z} = - \beta \zeta \cos \widehat{n, \xi} + K \zeta \cos \widehat{n, \xi} + \beta K \zeta \{ \xi [(1 - \sigma_1) + \sigma_1 \cos^2 \widehat{n, \xi} +$$

$$+ \sigma_3 \cos \widehat{n, \xi} \cos \widehat{n, \eta} + \sigma_2 \cos^2 \widehat{n, \eta}] \cos \widehat{n, \xi} - (\sigma_2 \eta + \sigma_3 \xi) \cos \widehat{n, \eta} \}.$$

Учитывая равенства (8) и (I2), получим следующие граничные условия для рассматриваемого тела на контуре L :

$$\begin{aligned} \tau_{11}^{(3)}\cos\widehat{n,\xi}+\tau_{12}^{(3)}\cos\widehat{n,\eta} &= \left[\left(P_2^{(1)}-B_{11}\right)\zeta^2-E_{11}\zeta+P_0^{(1)}\right]\cos\widehat{n,\xi}+\\ &+\left[\left(P_2^{(2)}-B_{12}\right)\zeta^2-E_{12}\zeta+P_0^{(2)}\right]\cos\widehat{n,\eta},\\ \tau_{12}^{(3)}\cos\widehat{n,\xi}+\tau_{22}^{(3)}\cos\widehat{n,\eta} &= \left[\left(Q_2^{(1)}-B_{12}\right)\zeta^2-E_{12}\zeta+Q_0^{(1)}\right]\cos\widehat{n,\xi}+\\ &+\left[\left(Q_2^{(2)}-B_{22}\right)\zeta^2-E_{22}\zeta+Q_0^{(2)}\right]\cos\widehat{n,\eta},\\ \tau_{13}^{(3)}\cos\widehat{n,\xi}+\tau_{23}^{(3)}\cos\widehat{n,\eta} &= \left[\left(C_{33}-C+M\right)\zeta^3+R_1^{(1)}\zeta\right]\cos\widehat{n,\xi}+\\ &+\left[N\zeta^3+R_1^{(2)}\zeta\right]\cos\widehat{n,\eta}, \end{aligned} \quad .\text{(I3)}$$

где

$$P_2^{(1)}=-G\sigma_1\xi+T\sigma_2\eta+B_{13}+\mathcal{A}_{13}-\varphi_{13}+f_{13}, \qquad P_0^{(1)}=\sigma_1\xi f_{11}-\sigma_2\eta f_{12},$$

$$P_2^{(2)}=-G(\sigma_2\eta+\sigma_3\xi)-\sigma_2\xi T, \qquad P_0^{(2)}=(\sigma_2\eta+\sigma_3\xi)f_{11}+\sigma_2\xi f_{12},$$

$$Q_2^{(1)}=-T\sigma_1\xi+F\sigma_2\eta+B_{23}+\mathcal{A}_{23}-\varphi_{23}+f_{23}, \qquad Q_2^{(2)}=-T(\sigma_2\eta+\sigma_3\xi)-\sigma_2\xi F,$$

$$Q_0^{(1)}=\sigma_1\xi f_{12}-\sigma_2\eta\varphi_{22}, \qquad Q_0^{(2)}=(\sigma_2\eta+\sigma_3\xi)f_{12}+\sigma_2\xi f_{22},$$

$$R_1^{(1)}=\sigma_1\xi(\mathcal{A}_{13}+f_{13})-\sigma_2\eta(\mathcal{A}_{23}+f_{23})+\xi^2E(1-\sigma_1)-\varphi_{33}+\mathcal{A}_{33}+f_{33}-E_{13},$$

$$R_1^{(2)}=\sigma_2\xi(\mathcal{A}_{23}+f_{23})+(\sigma_2\eta+\sigma_3\xi)(\mathcal{A}_{13}+f_{13}-E\xi)-E_{23}.$$

Решение задачи в компонентах напряжений будем искать в виде /3/:

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$\tau^{(3)}_{11}=-B_{11}\zeta^2-E_{11}\zeta-M\omega-\frac{E\xi^2d}{2}+\int^{\xi}(ML_2+NM_2)d\xi+\sum_{k=0}^{1}\zeta^{2k}\Big[E\frac{\partial^2\Phi_{2k}}{\partial\eta^2}-$$

$$-U_{2k}+M(P_{2k}f+q_{2k}\psi+\tau_{2k}\varphi)-\Big(\frac{E}{6}\xi^3-\frac{m^2}{L}\sigma_3\xi\eta^2\Big)P_{2k}-\frac{1}{2L}(NE+$$

$$+\sigma_3m^2)\xi\eta^2q_{2k}+\xi\Big(\frac{1}{2}N\xi-M\eta\Big)\tau_{2k}\Big],$$

$$\tau^{(3)}_{12}=-B_{12}\zeta^2-E_{12}\zeta-N\omega+\sum_{k=0}^{1}\zeta^{2k}\Big[N(P_{2k}f+q_{2k}\psi+\tau_{2k}\varphi)-E\frac{\partial^2\Phi_{2k}}{\partial\xi\partial\eta}\Big],$$

$$\tau^{(3)}_{33}=-B_{33}\zeta^2-E_{33}\zeta+(E-\sigma_1M-\sigma_2L-\sigma_3N)\omega-\Big[\frac{E}{2}\Big(\sigma_2\eta^2+2\sigma_1\xi^2-\frac{E-N\sigma_3}{M}\xi^2\Big)+$$

$$+\frac{\sigma_2}{M}(EN+\sigma_3m^2)\xi\eta-\frac{1}{2}\zeta E\Big]d+\sigma_1\int^{\xi}(ML_2+NM_2)d\xi+\sigma_2\int^{\eta}(LM_2+NL_1)d\eta+$$

$$+E\beta_{33}\Phi_2+\sum_{k=0}^{1}\zeta^{2k}\Big\{\sigma_1\Big(E\frac{\partial^2\Phi_{2k}}{\partial\eta^2}-U_{2k}\Big)+\sigma_2\Big(E\frac{\partial^2\Phi_{2k}}{\partial\xi^2}-V_{2k}\Big)-E\sigma_3\frac{\partial^2\Phi_{2k}}{\partial\xi\partial\eta}+$$

$$+(\sigma_1M+\sigma_2L+\sigma_3N-E)(P_{2k}f+q_{2k}\psi+\tau_{2k}\varphi)+\Big[\frac{E}{3}\Big(\frac{\sigma_2N}{L}\eta^3+\frac{E-2M\sigma_1-\sigma_3N}{2M}\xi^3\Big)+$$

$$+\sigma_2\Big(\sigma_1\frac{m^2}{L}-\frac{E}{2}\Big)\xi\eta^2-\frac{\sigma_2}{2M}(EN+\sigma_3m^2)\xi^2\eta\Big]P_{2k}+\Big[\sigma_1\Big(\sigma_2\frac{m^2}{M}-\frac{E}{2}\Big)\xi^2\eta-$$

$$-\frac{\sigma_1}{2L}(NE+\sigma_3m^2)\xi\eta^2+\frac{E}{3}\Big(\frac{\sigma_1N}{M}\xi^3+\frac{E-2L\sigma_2-\sigma_3N}{2L}\eta^3\Big)\Big]q_{2k}+\Big[\sigma_2\eta(L\xi-$$

$$-\frac{1}{2}N\eta)+\sigma_1\xi\Big(\frac{1}{2}N\xi-M\eta\Big)\Big]\tau_{2k}-\frac{E\zeta^2}{(2k+1)(2k+2)}\Big[P_{2k}\xi+q_{2k}\eta\Big]\Big\},$$

$$\tau^{(3)}_{13}=(M-C+C_{13})\zeta^3+\Big(M\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+N\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+E\xi d-ML_2-NM_2\Big)\zeta+$$

$$+\sum_{k=0}^{1}\frac{\zeta^{2k+1}}{2k+1}\Big[\Big(\frac{E}{2}\xi^2-\sigma_2\frac{m^2}{L}\eta^2-M\frac{\partial f}{\partial\xi}-N\frac{\partial f}{\partial\eta}\Big)P_{2k}+\frac{1}{2L}(NE\eta^2+$$

$$+m^2\sigma_3\eta^2-M\frac{\partial\psi}{\partial\xi}-N\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\Big)q_{2k}+\Big(M\eta-N\xi-M\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-N\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\Big)\tau_{2k}\Big],$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$\tau_{23}^{(3)}=N\zeta^3+\left[L\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+N\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\frac{1}{M}(NE+\sigma_3 m^2)\xi d-LM_2-NL_2\right]\zeta+$$

$$+\sum_{k=0}^{1}\frac{\zeta^{2k+1}}{2k+1}\left[\left(\frac{NE}{2M}\xi^2+\sigma_3\frac{m^2}{2M}\xi^2-L\frac{\partial f}{\partial\eta}-N\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)P_{2k}+\left(\frac{E}{2}\eta^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sigma_1\frac{m^2}{M}\xi^2-L\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-N\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)q_{2k}+\left(M\eta-L\xi-L\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-N\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)\tau_{2k}\right],$$

где $m^2=ML-N^2$, $\varphi(\xi,\eta)$ – функция кручения однородного анизотропного призматического тела, $f(\xi,\eta)$, $\varphi(\xi,\eta)$ – известные функции /4/, а P_{2k}, q_{2k}, τ_{2k} $(k=0,1)$, d – постоянные, подлежащие определению.

Можно проверкой показать, что напряжения (I4) будут удовлетворять всем условиям поставленной задачи, если функции Φ_{2k} $(k=0,1)$, ω являются решениями следующих граничных задач:

$$1^\circ\quad E\Delta_1^{(2)}\Phi_0=-(\beta_{11}M+\beta_{12}L+\beta_{13}N+E\sigma_1)\left(P_0\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}+q_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\tau_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\right)-(\beta_{12}M+\beta_{22}L+$$

$$+\beta_{23}N+E\sigma_2)\left(P_0\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+q_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\tau_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\right)+(\beta_{13}M+\beta_{23}L+\beta_{33}N+E\sigma_3)\left(P_0\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}+\right.$$

$$\left.+q_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}+\tau_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}(\beta_{11}U_0+\beta_{12}V_0)+\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\beta_{12}U_0+\beta_{22}V_0)-$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}(\beta_{13}U_0+\beta_{23}V_0)+\left[E\left(\beta_{12}+\sigma_2\frac{E-N\sigma_3}{M}\right)-2\sigma_2\left(E\sigma_1+\beta_{11}\frac{m^2}{L}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\beta_{23}}{M}(NE+\sigma_3 m^2)\right]\xi P_0+\left[2\beta_{23}\sigma_1\frac{m^2}{M}+\sigma_1 E\left(\sigma_3+2\sigma_2\frac{N}{M}\right)+\frac{\beta_{11}}{L}(NE+\right.$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$+\sigma_3 m^2)\Big]\xi q_0 + \Big[E\Big(\beta_{12} + \sigma_1 \frac{E-\sigma_3 N}{L}\Big) - \frac{\beta_{13}}{L}(NE+\sigma_3 m^2) - 2\sigma_1\Big(\beta_{22}\frac{m^2}{M} +$$

$$+E\sigma_2\Big)\Big]\eta q_0 + \Big[2\sigma_2\beta_{13}\frac{m^2}{L} + \frac{\beta_{22}}{M}(NE+\sigma_3 m^2) + \sigma_2 E\Big(\sigma_3 + 2\sigma_1\frac{N}{L}\Big)\eta P_0 +$$

$$+(L\beta_{23} - M\beta_{13})\tau_0 + \Big[(M\beta_{11} + L\beta_{12} + N\beta_{13} + \sigma_1 E)\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + (L\beta_{22} + M\beta_{12} +$$

$$+N\beta_{23} + \sigma_2 E)\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - (M\beta_{13} + L\beta_{23} + N\beta_{33} + \sigma_3 E)\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} -$$

$$-\Big[\frac{\beta_{23}}{M}(EN + m^2\sigma_3) - \beta_{12}E + E\sigma_2\Big(2\sigma_1 - \frac{E - N\sigma_3}{M}\Big)\Big]d -$$

$$-\beta_{11}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\int^{\xi}(ML_2 + NM_2)d\xi - \beta_{22}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\int^{\eta}(LM_2 + NL_2)d\eta +$$

$$+\beta_{13}\Big(M\frac{\partial L_2}{\partial \eta} + N\frac{\partial M_2}{\partial \eta}\Big) + \beta_{23}\Big(L\frac{\partial M_2}{\partial \xi} + N\frac{\partial L_2}{\partial \xi}\Big) - \beta_{12}\Big(M\frac{\partial L_2}{\partial \xi} + N\frac{\partial M_2}{\partial \xi} +$$

$$+L\frac{\partial M_2}{\partial \eta} + N\frac{\partial L_2}{\partial \eta}\Big) - E\beta_{33}\Big(\sigma_3\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi \partial \eta} - \sigma_2\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi^2} - \sigma_1\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2}\Big)$$

в области S,

$$E\frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} = \int^{s}\Big\{\Big[P_0^{(1)} + U_0 - M(P_0 f + q_0\psi + \tau_0\varphi) + \Big(\frac{E}{6}\xi^3 - \frac{m^2}{L}\sigma_2\xi\eta^2\Big)P_0 + \frac{1}{2L}(NE +$$

$$+\sigma_3 m^2)\xi\eta^2 q_0 - \xi\Big(\frac{1}{2}N\xi - M\eta\Big)\tau_0 + M\omega + \frac{1}{2}\xi^2 d - \int^{\xi}(ML_2 +$$

$$+NM_2)d\xi\Big]\cos\widehat{n,\xi} + \Big[P_0^{(2)} - N(P_0 f + q_0\psi + \tau_0\varphi - \omega)\Big]\cos\widehat{n,\eta}\Big\}dS,$$

$$E\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} = -\int^{s}\Big\{\Big[Q_0^{(2)} + V_0 - L(P_0 f + q_0\psi + \tau_0\varphi) + \Big(\frac{E}{6}\eta^3 - \sigma_1\frac{m^2}{M}\xi^2\eta\Big)q_0 + \frac{1}{2M}(NE +$$

$$+\sigma_3 m^2)\xi^2\eta P_0+\eta\left(\frac{1}{2}N\eta-L\xi\right)\tau_0+L\omega-\frac{1}{M}(EN+m^2\sigma_3)\xi\eta d-$$

$$-\int^{\eta}(LM_2+NL_2)d\eta\Big]\cos\widehat{n,\eta}+\Big[Q_0^{(1)}-N(P_0 f+q_0\psi+\tau_0\varphi-\omega)\Big]\cos\widehat{n,\xi}\Big\}dS$$

на контуре L;

2°. $$E\Delta_1^{(2)}\Phi_2=-(\beta_{11}M+\beta_{12}L+\beta_{13}N+E\sigma_1)\left(P_2\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}+q_2\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+\tau_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\right)-(\beta_{12}M+\beta_{22}L+$$

$$+\beta_{23}N+E\sigma_2)\left(P_2\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+q_2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\tau_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\right)+(\beta_{13}M+\beta_{23}L+\beta_{33}N+E\sigma_3)\left(P_2\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}+\right.$$

$$\left.+q_2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}+\tau_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}(\beta_{11}U_2+\beta_{12}V_2)+\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\beta_{12}U_2+\beta_{22}V_2)-$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}(\beta_{13}U_2+\beta_{23}V_2)+\Big[E\left(\beta_{12}+\sigma_2\frac{E-N\sigma_3}{M}\right)-2\sigma_2\left(E\sigma_1+\beta_{11}\frac{m^2}{L}\right)-$$

$$-\frac{\beta_{23}}{M}(NE+\sigma_3 m^2)\Big]\xi P_0+\Big[2\beta_{23}\sigma_1\frac{m^2}{M}+\sigma_1 E\left(\sigma_3+2\sigma_2\frac{N}{M}\right)+\frac{\beta_{11}}{L}(NE+\sigma_3 m^2)\Big]\xi q_0+$$

$$+\Big[E\left(\beta_{12}+\sigma_1\frac{E-\sigma_3 N}{L}\right)-\frac{\beta_{13}}{L}(NE+\sigma_3 m^2)-2\sigma_1\left(\beta_{22}\frac{m^2}{M}+E\sigma_2\right)\Big]\eta q_0+$$

$$+\Big[2\sigma_2\beta_{13}\frac{m^2}{L}+\frac{\beta_{22}}{M}(NE+\sigma_3 m^2)+\sigma_2 E\left(\sigma_3+2\sigma_1\frac{N}{L}\right)\Big]\eta P_0+(L\beta_{23}-M\beta_{13})\tau_2$$

в области S,

$$E\frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta}=\int^{s}\Big\{\Big[P_2^{(1)}+U_2-M(P_2 f+q_2\psi+\tau_2\varphi)+\left(\frac{E}{6}\xi^3-\frac{m^2}{L}\xi\eta^2\right)P_0+\frac{1}{2L}(NE+$$

$$+\sigma_3 m^2)\xi\eta^2 q_0-\xi\left(\frac{1}{2}N\xi-M\eta\right)\tau_1\Big]\cos\widehat{n,\xi}+\Big[P_0^{(2)}-N(P_0 f+q_0\psi+$$

$$+\tau_0\varphi)\Big]\cos\widehat{n,\eta}\Big\}ds,$$

$$E\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi} = -\int^{s}\Big\{\Big[Q_2^{(2)} + V_2 - \mathcal{L}(P_2 f + q_2\psi + \tau_2\varphi) + \Big(\frac{E}{6}\eta^3 - \sigma_1\frac{m^2}{M}\xi^2\eta\Big)q_2 + \frac{1}{2M}(NE + \sigma_3 m^2)\xi^2\eta P_2 + \eta\Big(\frac{1}{2}N\eta - \mathcal{L}\xi\Big)\tau_2\Big]\cos\widehat{n,\eta} + \Big[Q_2^{(2)} - N(P_2 f + q_2\psi + \tau_2\varphi)\Big]\cos\widehat{n,\xi}\Big\}dS$$

на контуре $\mathcal{L}$;

$$3^\circ.\ \Delta_1\omega = \frac{\partial E_{13}}{\partial\xi} - \frac{\partial\mathcal{A}_{33}}{\partial\xi} + \frac{\partial E_{23}}{\partial\eta} + \frac{\partial\Phi_{33}}{\partial\xi} - \frac{\partial f_{33}}{\partial\xi} - \sigma_1\xi\Big(\frac{\partial\mathcal{A}_{13}}{\partial\xi} + \frac{\partial f_{13}}{\partial\xi}\Big) - \sigma_2\xi\Big(\frac{\partial\mathcal{A}_{23}}{\partial\eta} + \frac{\partial f_{23}}{\partial\eta}\Big) - (\sigma_2\eta + \sigma_3\xi)\Big(\frac{\partial\mathcal{A}_{13}}{\partial\eta} + \frac{\partial f_{13}}{\partial\eta}\Big) + \sigma_2\eta\Big(\frac{\partial\mathcal{A}_{23}}{\partial\xi} + \frac{\partial f_{23}}{\partial\xi}\Big) +$$

$$+ \mathcal{A}_{13} + f_{13} - [E(1-\sigma_1) + 2C]\xi - 2\Big\{\sigma_1\Big(E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\eta^2} - U_2\Big) + \sigma_2\Big(E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\xi^2} - V_2\Big) - E\sigma_3\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\xi\partial\eta} + (\sigma_1 M + \sigma_2\mathcal{L} + \sigma_3 N - E)(P_2 f + q_2\psi + \tau_2\varphi) + \frac{E}{3}\Big(\frac{E - 2\mathcal{L}\sigma_2 - \sigma_3 N}{2\mathcal{L}}\eta^3 +$$

$$+ \sigma_1\frac{N}{M}\xi^3\Big)q_2 + \frac{E}{3}\Big(\frac{E - 2M\sigma_1 - \sigma_3 N}{2M}\xi^3 + \sigma_2\frac{N}{\mathcal{L}}\eta^3\Big) + \Big[\sigma_2\Big(\sigma_1\frac{m^2}{\mathcal{L}} - \frac{E}{2}\Big)\xi\eta^2 - \frac{\sigma_2}{2M}(EN + \sigma_3 m^2)\xi^2\eta\Big]P_2 + \Big[\sigma_1\Big(\sigma_2\frac{m^2}{M} - \frac{E}{2}\Big)\xi^2\eta - \frac{\sigma_1}{2\mathcal{L}}(NE + \sigma_3 m^2)\xi\eta^2\Big]q_2 +$$

$$+ \Big[\sigma_2\eta\Big(\mathcal{L}\xi - \frac{1}{2}N\eta\Big) + \sigma_1\xi\Big(\frac{1}{2}N\xi - M\eta\Big)\tau_2 - M\frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial\xi} - N\frac{\partial M_2}{\partial\xi} - \mathcal{L}\frac{\partial M_2}{\partial\eta} - N\frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial\eta}$$

в области S,

$$\frac{d_1\omega}{dn} = \Big[R_1^{(1)} - dE\xi + M\mathcal{L}_2 + NM_2\Big]\cos\widehat{n,\xi} + \Big[R_1^{(2)} - \frac{d}{M}(EN + \sigma_3 m^2)\xi + \mathcal{L}M_2 + N\mathcal{L}_2\Big]\cos\widehat{n,\eta}$$

на контуре $\mathcal{L}$, где

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{2}{E}\int^{\xi}\Big\{\beta_{11}\Big(E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\eta^2} - U_2\Big) + \beta_{12}\Big(E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\xi^2} - V_2\Big) - \beta_{13}E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{E}{2}\beta_{33}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\xi^2} +$$

$$+ (M\beta_{11} + \mathcal{L}\beta_{22} + N\beta_{13} + E\sigma_1)(P_2 f + q_2\psi + \tau_2\varphi) - \frac{E}{6}\eta^3\Big(\beta_{12} - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\frac{E - \sigma_3 N}{2\mathcal{L}}\Big)q_2 -$$

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

$$-\frac{E}{6}\Big(\beta_{11}-\sigma_1^2+\sigma_1\frac{E-\sigma_3N}{M}\Big)\xi^3P_2+\Big[\beta_{11}\xi\Big(\frac{1}{2}N\xi-M\eta\Big)+\beta_{12}\eta\Big(L\xi-\frac{1}{2}N\eta\Big)\Big]\tau_2-$$

$$-\frac{1}{2M}\beta_{12}(NE+\sigma_3m^2)\xi^2\eta P_2+\sigma_2\Big(\beta_{11}\frac{m^2}{L}+\frac{E}{2}-\sigma_1\Big)\xi\eta^2P_2-\frac{1}{3}E\sigma_1^2\frac{N}{M}\xi^3q_2-$$

$$-\frac{1}{3}E\sigma_1\sigma_2\frac{N}{L}\eta^3P_2-\frac{1}{2L}\beta_{11}(NE+\sigma_3m^2)\xi\eta^2q_2+\sigma_1\Big(\beta_{12}\frac{m^2}{M}+\frac{E\sigma_1}{2}\Big)\xi^2\eta q_{12}\Big\}d\xi+h(\eta),$$

$$M_2=-\frac{2}{E}\int^{\eta}\Big\{\beta_{12}\Big(E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\eta^2}-U_2\Big)+\beta_{22}\Big(E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\xi^2}-V_2\Big)-\beta_{23}E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{E}{2}\beta_{33}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\eta^2}+$$

$$+(M\beta_{12}+L\beta_{22}+N\beta_{23}+\sigma_2E)(P_2f+q_2\varphi+\tau_2\Phi)-\frac{E}{6}\Big(\beta_{12}-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\frac{E-\sigma_3N}{M}\Big)\xi^3P_2-$$

$$-\frac{E}{6}\Big(\beta_{22}-\sigma_2^2+\sigma_2\frac{E-\sigma_3N}{L}\Big)\eta^3q_2+\sigma_2\Big(\beta_{12}\frac{m^2}{L}+\frac{\sigma_2E}{2}\Big)\xi\eta^2P_2-\frac{1}{2M}\beta_{22}(NE+$$

$$+\sigma_3m^2)\xi^2\eta P_2-\frac{1}{3}E\sigma_2^2\frac{N}{L}\eta^3P_2+\sigma_1\Big(\beta_{22}\frac{m^2}{M}+\frac{E\sigma_2}{2}\Big)\xi^2\eta q_2-\frac{1}{2L}\beta_{12}(NE+$$

$$+\sigma_3m^2)\xi\eta^2q_2-\frac{1}{3}E\sigma_1\sigma_2\frac{N}{M}\xi^3q_{12}+\Big[\beta_{12}\xi\Big(\frac{1}{2}N\xi-M\eta\Big)+\beta_{22}\eta\Big(L\xi-\frac{1}{2}N\eta\Big)\Big]\tau_2\Big\}d\eta+l(\xi),$$

где неизвестные функции $h(\eta)$ и $l(\xi)$ определяются из условия:

$$\frac{\partial M_2}{\partial\xi}+\frac{\partial L_2}{\partial\eta}=-\frac{2}{E}\Big\{\beta_{13}\Big(E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\eta^2}-U_2\Big)+\beta_{23}\Big(E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\xi^2}-V_2\Big)-(M\beta_{13}+L\beta_{23}+N\beta_{33}+$$

$$+E\sigma_1)(P_2f+q_2\varphi+\tau_2\Phi)-\frac{E}{6}\Big(\beta_{13}-\sigma_1\sigma_3+\sigma_3\frac{E-\sigma_3N}{M}\Big)\xi^3P_2+\sigma_2\Big(\beta_{13}\frac{m^2}{L}+$$

$$+\frac{\sigma_3E}{2}\Big)\xi\eta^2P_2-\frac{1}{2M}\beta_{13}(NE+\sigma_3m^2)\xi^2\eta P_2-\frac{E}{3}\sigma_2\sigma_3\frac{N}{L}\eta^3P_2-$$

$$-\frac{E}{6}\Big(\beta_{23}-\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\frac{E-\sigma_3N}{L}\Big)\eta^3q_2+\sigma_1\Big(\beta_{23}\frac{m^2}{M}+\frac{E\sigma_3}{2}\Big)\xi^2\eta q_2-$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$-\frac{1}{2}\beta_{13}\left(\frac{NE}{L}+\sigma_3\frac{m^2}{M}\right)\xi\eta^2 q_2-\frac{EN}{3M}\sigma_1\sigma_3\xi^3 q_2+\Big[\beta_{13}\xi\left(\frac{1}{2}N\xi-M\eta\right)-$$

$$-\beta_{23}\eta\left(\frac{1}{2}N\eta-L\xi\right)\Big]\tau_2\Big\}.$$

Постоянные P_{2K} , q_{2K} , τ_{2K} (K = 0,I) определяются из условий однозначности частных производных $\partial\Phi_{2K}/\partial\xi$, $\partial\Phi_{2K}/\partial\eta$ и самой функции $\Phi_{2K}(\xi,\eta)$ (K = 0,I) при обходе контура L и соответственно будут равны:

$$P_0=\frac{1}{I_\eta}\iint\limits^{S}\Big[f_{11}(\sigma_1+\sigma_2)+\xi(f_{13}+A_{13})+E_{13}+M\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+N\frac{\partial\omega}{\partial\eta}-ML_2-NM_2\Big]d\xi d\eta,$$

$$q_0=\frac{1}{I_\xi}\iint\limits^{S}\Big[f_{12}(\sigma_1+\sigma_2)+\xi(f_{23}+A_{23})+E_{23}+L\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+N\frac{\partial\omega}{\partial\xi}-LM_2-NL_2\Big]d\xi d\eta,$$

$$\tau_0=\frac{1}{D}\iint\limits^{S}\Big\{\xi\big[2\sigma_1 f_{12}+\xi(f_{23}+A_{23})-\sigma_3 f_{11}+E_{23}\big]-\eta\big[f_{11}(\sigma_1+2\sigma_2)+$$

$$+\sigma_2 f_{22}+E_{13}+\xi A_{13}\big]+\Big[(M\eta-N\xi)\frac{\partial f}{\partial\xi}+(N\eta-L\xi)\frac{\partial f}{\partial\eta}\Big]P_0+$$

$$+\Big[(M\eta-N\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+(N\eta-L\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\Big]q_0+\Big[\frac{1}{2M}(NE+\sigma_3 m^2)\xi^3+\Big(\frac{m^2}{L}\sigma_2\eta^3-$$

$$-\frac{E}{2}\xi^2\eta\Big)\Big]P_0+\Big[\frac{E}{2}\eta^2\xi-\sigma_1\frac{m^2}{M}\xi^3-\frac{1}{2L}(NE+\sigma_3 m^2)\eta^3\Big]q_0+(N\xi-$$

$$-M\eta)\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+(L\xi-N\eta)\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+\xi(LM_2+NL_2)+\eta(ML_2+NM_2)-$$

$$-\frac{1}{M}(EN+m^2)\xi^2 d\Big\}d\xi d\eta,$$

$$P_2=-GS(\sigma_1+\sigma_2+2)I_\eta^{-1},\qquad q_2=-TS(\sigma_1+\sigma_2+2)I_\xi^{-1},$$

$$\tau_2=\frac{1}{D}\iint\limits^{S}\Big\{B_{23}+A_{23}-\varphi_{23}+f_{23}+\Big[(M\eta-N\xi)\frac{\partial f}{\partial\xi}+(N\eta-L\xi)\frac{\partial f}{\partial\eta}+$$

$$+\frac{1}{2M}(NE+\sigma_3 m^2)\xi^3-\left(\frac{E}{2}\xi^2\eta-\frac{m^2}{L}\sigma_2\eta^3\right)\Big]P_2+\Big[(M\eta-N\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+(N\eta-$$

$$-L\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{E}{2}\eta^2\xi-\sigma_1\frac{m^2}{M}\xi^3-\frac{1}{2L}(N+\sigma_3 m^2)\eta^3\Big]q_2\Big\}d\xi d\eta\,,$$

где S - площадь поперечного сечения S , D - жесткость при кручении однородного анизотропного призматического тела, а I_ξ и I_η - моменты инерции основания тела относительно осей $O\xi$ и $O\eta$ соответственно.

Из условия существования функции $\omega(\xi,\eta)$ получаем значение постоянной d :

$$d=\frac{1+\sigma_1+\sigma_2}{ES}\iint\limits^{S} f_{13}\,d\xi d\eta+\frac{2}{ES}\iint\limits^{S}\Big\{\sigma_1\left(E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\eta^2}-U_2\right)+\sigma_1\left(E\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\xi^2}-V_2\right)-$$

$$-E\sigma_3\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\xi\partial\eta}+(\sigma_1 M+\sigma_2 L+\sigma_3 N-E)(P_2 f+q_2\psi+\tau_2\varphi)-\frac{E}{3}\left(\frac{E-2L\sigma_2-\sigma_3 N}{2L}\eta^3+\right.$$

$$\left.+\sigma_1\frac{N}{M}\xi^3\right)q_2-\frac{E}{3}\left(\frac{E-2M\sigma_1-\sigma_3 N}{2M}\xi^3+\frac{\sigma_2 N}{L}\eta^3\right)P_2-\Big[\sigma_2\left(\frac{\sigma_1 m^2}{M}-\frac{E}{2}\right)\xi\eta^2-$$

$$-\frac{\sigma_2}{2M}(EN+\sigma_3 m^2)\xi^2\eta\Big]P_2-\Big[\sigma_1\left(\frac{\sigma_2 m^2}{M}-\frac{E}{2}\right)\xi^2\eta-\frac{\sigma_1}{2L}(NE+\sigma_3 m^2)\xi\eta^2\Big]q_2+$$

$$+\frac{1}{2}N(\sigma_1\xi^2-\sigma_2\eta^2)\tau_2\Big\}d\xi d\eta.$$

Искомые смещения U_3 , V_3 , W_3 , соответствующие напряжениям (I4), определим с помощью известного приема линейной теории упругости.

Наконец, отметим, что для удовлетворения торцевых условий на торце $\zeta_2=\ell$ необходимо на полученные решения (I4) добавить решения определенных задач Сен-Венана.

Поступила 26.I.1990

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

ეროვნული ბიბლიოთეკა

Литература

1. М.И.Кезерашвили. К вопросу изгиба парой сил однородного анизотропного стержня со слабо изогнутой осью. Тр.ТГУ, сер. киберн.и .приклад. матем., 1987, № 272(8), 86-96.
2. К.М.Долаберидзе. Изгиб парой сил однородных геометрически нелинейных анизотропных цилиндрических брусьев. Тр. ГПИ, 1973, № 6(162), 136-139.
3. Р.Т.Зивзивадзе, Р.А.Берекашвили. Обобщение задачи Альманзи для составных анизотропных цилиндрических брусьев. Тр.ГПИ, 1984, № 9(279), 130-135.
4. А.К.Рухадзе. С.В. Бердзенишвили. О двух вспомогательных функциях для однородного анизотропного призматического бруса эллиптического сечения. Тр.ГПИ, 1984, № 9(279), 127-129.

მ. კეზერაშვილი

გეომეტრიულად არაწრფივი თეორიის ერთი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის ალგორითმის შესახებ

რეზიუმე

მოცემულია გეომეტრიულად არაწრფივი ერთგვაროვანი ოდნავ დაღუნული ანიზოტროპული სხეულის წყვილძალით ღუნვის ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი.

ამოცანა მიიყვანება სხეულის განივი კვეთის მიმართ სამ სასაზღვრო ამოცანამდე, რომელთა ამოხსნადობა ნაჩვენებია.

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

M. Kezerashvili

ON AN ALGORITHM OF THE SOLUTION OF ONE BOUNDARY PROBLEM OF GEOMETRICALLY NON-LINEAR THEORY

Summary

An algorithm is presented for solving the problem of bending a geometrically non-linear slightly bent anisotropic homogeneous body by coupled force.

The solution of the problem is reduced to three boundary value problems for plane section (cross-section of a body). The solvability of these problems is shown.

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили
ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
300, 1990

УПЛОТНЯЮЩИЙ ОПЕРАТОР ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ РАЗРЕШИМОСТЬ

Д.Г.Перадзе

В последнее время все большее применение в теории пластинок и оболочек находит модель Тимошенко /I/. Математически она почти не исследована, что в основном объясняется сложной нелинейностью соответствующей системы дифференциальных уравнений. Эта система в случае пластинки имеет вид

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial T}{\partial x_2}+P_1=0, \qquad \frac{\partial T}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial x_2}+P_2=0,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(N_1\frac{\partial w}{\partial x_1}+T\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(T\frac{\partial w}{\partial x_1}+N_2\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)+q=0, \tag{I}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1}+\frac{\partial H}{\partial x_2}-Q_1=0, \qquad \frac{\partial H}{\partial x_1}+\frac{\partial M_2}{\partial x_2}-Q_2=0,$$

где $N_1=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\nu\left[\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right]\right\}$,

$$N_2=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2+\nu\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2\right]\right\},$$

$$T=\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right), \quad Q_1=k^2\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}+\varphi_1\right),$$

$$Q_2=k^2\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}+\varphi_2\right), \quad M_1=D\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right), \quad M_2=D\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right),$$

$$H=D\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right),$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$u_1, u_2, w, \varphi_1, \varphi_2$ – искомые, p_1, p_2, q – заданные функции аргументов x_1, x_2, $(x_1, x_2) \in \Omega$, Ω – область с границей $\partial\Omega$, занимаемая пластинкой в плане, E, k, ν, K, D – известные положительные постоянные, $0 < \nu < \frac{1}{2}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

Дополним (I) краевыми условиями

$$u_1 = u_2 = w = \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \qquad (2)$$

Будем искать решение (I), (2) в $(C^{2,\alpha}(\bar\Omega))^5$, $0<\alpha<1$ /2/. Под $(C^{m,\alpha}(\bar\Omega))^n$ понимается пространство n-размерных вектор-функций с компонентами из $C^{m,\alpha}(\bar\Omega)$ и нормой $|v|_{1,m,\alpha} = |v_1|_{m,\alpha} + |v_2|_{m,\alpha} + \dots + |v_n|_{m,\alpha}$ для $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in (C^{m,\alpha}(\bar\Omega))^n$, где $|\omega|_{m,\alpha} = \sum_{|\ell|=0}^{m} \sup_{x\in\bar\Omega} |D^\ell \omega(x)| + \sum_{|\ell|=m} \langle D^\ell \omega(x) \rangle_{\bar\Omega}^{(\alpha)}$,

$$x = (x_1, x_2), \quad \ell = (\ell_1, \ell_2), \quad \langle \omega_1 \rangle_{\bar\Omega}^{(\alpha)} = \sup_{x, x' \in \bar\Omega} \frac{|\omega_1(x) - \omega_1(x')|}{|x - x'|^\alpha}.$$

Нам потребуются соотношения

$$|b^{-1}|_{1,0,\alpha} \leq \gamma_1, \qquad (3)$$

$$|\Delta^{-1}|_{0,\alpha} \leq \gamma_2, \qquad (4)$$

$$|(ab - I)^{-1}|_{1,0,\alpha} \leq \gamma_3 \qquad (5)$$

для норм операторов, обратных к b, Δ, $ab - I$, при однородных граничных условиях Дирихле. Здесь

$$b = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, & (\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \mu\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

– оператор плоской теории

ეროვნული ბიბლიოთეკა

упругости $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, I - единичный оператор, $\lambda = \frac{\nu}{1-\nu^2}$, $\mu = \frac{1}{2(1+\nu)}$, $a = \frac{h^2(1+\nu)}{6k^2}$.

Предполагается, что $L^{-1}, (aL-I)^{-1}$ переводят $(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}))^2$ в $(C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}))^2$, а оператор Δ^{-1} переводит $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ в $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Введем величины

$$m_1 = \frac{2\gamma_2 s}{(1-\nu)k^2}\left(\frac{\gamma_1 s}{1-\nu^2} + \frac{1}{2}\right), \quad m_2 = 1 - \gamma_2 s\left[\frac{2(1+\nu)|P|_{1,0,\alpha}}{k^2 Eh}\left(\frac{\gamma_1}{1-\nu^2} + 1\right) + \gamma_3 s\right],$$

$$m_3 = \frac{2\gamma_2(1+\nu)|q|_{0,\alpha}}{k^2 Eh}, \quad m_4 = \frac{\gamma_1 s}{1-\nu^2} + 1, \quad m_5 = \frac{(1-\nu)k^2}{2\gamma_2 s} - \frac{\gamma_1 |P|_{1,0,\alpha}}{Eh},$$

$$r_1 = \inf_{r \in R}\{r\}, \quad r_2 = \sup_{r \in R}\{r\}, \quad R = \{r \mid r > 0,\ m_1 r^3 - m_2 r + m_3 < 0\},$$

$$r_3 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4m_4 m_5}}{2m_4}, \quad \text{где} \quad s = \max\left(1, (\operatorname{diam}\Omega)^{1-\alpha}\right),$$

$P = (P_1, P_2)$, и обозначим через $V_n(0,\rho)$ шар в $(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}))^n$ с центром в нуле и радиусом ρ.

Теорема. Пусть

1) $P \in (C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}))^2$, $q \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$.

2) $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$,

3) выполняются неравенства (3)-(5) в случае существования L^{-1}, Δ^{-1}, $(aL-I)^{-1}$,

4) $m_2 > 3m_1^{1/3}\left(\frac{m_3}{2}\right)^{2/3}$,

5) $r_1 < r_3$.

Тогда задача (1), (2) имеет решение в $(C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}))^5$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

причем $u=(u_1,u_2)\in V_2\left(0,\ \frac{\gamma_1 s r^2}{1-\nu^2}+\frac{\gamma_1 |P|_{1,0,\alpha}}{Eh}\right)$, $w\in V_1(0,r)$,

$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)\in V_2(0,\gamma_3 s r)$, где $r=\min(r_2,r_3)$.

<u>Доказательство</u>. Системе (I) придадим вид

$$Lu=f(w),\quad \Delta w=\Phi(u,w,\varphi),\quad (aL-I)\varphi=g(w), \tag{6}$$

где

$$f=(f_1,f_2),\quad g=(g_1,g_2),\quad f_i=-\frac{1}{2}(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2-$$

$$-\frac{1}{2}\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2-\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)-bP_i,\quad g_i=\frac{\partial w}{\partial x_i},\quad i,j=1,2,$$

$$i\neq j,\quad \Phi=\Phi_1+\Phi_2,\quad \Phi_1=\Phi_1(u,w),\quad \Phi_2=\Phi_2(w,\varphi),$$

$$\Phi_1=-bc\left(N_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+2T\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+N_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right),$$

$$\Phi_2=bc\left(P_1\frac{\partial w}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial w}{\partial x_2}-q\right)-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2},\quad b=\frac{1}{Eh},\quad c=\frac{2(1+\nu)}{k^2}.$$

В силу допущения 2) теоремы

$$\exists\ L^{-1},\ \Delta^{-1},\ (aL-I)^{-1}, \tag{7}$$

причем

$$L^{-1},\ (aL-I)^{-1}\in\mathcal{L}\left((C^{0,\alpha}(\bar\Omega))^2,\ (C^{2,\alpha}(\bar\Omega))^2\right), \tag{8}$$

$$\Delta^{-1}\in\mathcal{L}\left(C^{0,\alpha}(\bar\Omega),\ C^{2,\alpha}(\bar\Omega)\right),$$

где $\mathcal{L}(X,Y)$ – пространство линейных ограниченных операторов из X в Y /3,4/.

Далее, имеем

$$u_\ell = G^1_{\ell 1} f_1 + G^1_{\ell 2} f_2 , \tag{9}$$

$$\varphi_\ell = G^2_{\ell 1} g_1 + G^2_{\ell 2} g_2 , \tag{10}$$

где $\ell = 1,2$, и использованы обозначения

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} G^1_{11} & G^1_{12} \\ G^1_{21} & G^1_{22} \end{pmatrix}, \qquad (aL - I)^{-1} = \begin{pmatrix} G^2_{11} & G^2_{12} \\ G^2_{21} & G^2_{22} \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$N_\ell = N_{\ell 1}(w), \quad T = T_1(w), \qquad \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_\ell} = M_{\ell 1}(w),$$

причем $N_{\ell 1}, T_1, M_{\ell 1}$ – действующие на w операторы, $\ell = 1,2$, вид которых понятен.

Если воспользоваться полученными соотношениями во втором уравнении системы (6), после чего подействовать на него оператором Δ^{-1}, то придем к уравнению

$$w = \Phi(w). \tag{II}$$

Здесь $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$,

$$\Phi_1(w) = -bc\Delta^{-1}\left[N_{11}(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2T_1(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + N_{21}(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right],$$

$$\Phi_2(w) = \Delta^{-1}\left[bc\left(P_1\frac{\partial w}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial w}{\partial x_2} - q\right) - M_{11}(w) - M_{21}(w)\right].$$

Применяя /5/, покажем, что уравнение (II) при условии

$$w = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \tag{I2}$$

разрешимо. Отсюда непосредственно будет следовать существование решения исходной задачи. Обоснование разрешимости (II), (I2) состоит из двух частей. В первой убедимся в том, что оператор Φ переводит некоторый шар $V_1(0,r)$ в себя, а

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

во второй части будет показано, что Φ - χ - уплотняющий оператор.

То, что из $w \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ следует $\Phi(w) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, является результатом (8) и условия I) теоремы.

Справедливы

Предложение I. Если $v=(v_1, v_2) \in \left(C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})\right)$,

$$\omega_1, \omega_2, w \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}),$$

$$\theta = \theta(v_1, v_2, \omega_1, \omega_2, w) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \theta_{ij} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_i \partial x_j},$$

где

$$\theta_{ii} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_j},$$

$$\theta_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_j} + \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j,$$

то

$$\theta \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \text{ и } |\theta|_{0,\alpha} \leq (\lambda + 2\mu) c \left(|v|_{1,2,\alpha} + |w|_{2,\alpha} |\omega_1|_{2,\alpha} \right) |\omega_2|_{2,\alpha}.$$

<u>Предложение 2.</u> Если $w \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, где

$$\theta_i = \frac{\partial w}{\partial x_i} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \right] + (\lambda + \mu) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j,$$

то

$$\theta \in \left(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\right)^2 \text{ и } |\theta|_{1,0,\alpha} \leq (\lambda + 2\mu) c |w|^2_{2,\alpha}.$$

Проверяются оба утверждения по общей схеме и поэтому докажем только перво. из них.

Принадлежность θ пространству $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ очевидна.

Что касается оценки нормы, то она получается так:

$$|\theta|_{0,\alpha} \le (\lambda+2\mu)\Big(\sum_{l_1=1}^{2}\sum_{|l_2|=1}\sup|D^{l_2}v_{l_1}|+$$

$$+\sum_{|l_1|=1}\sum_{|l_2|=1}\sup|D^{l_1}w|\sup|D^{l_2}\omega_1|\Big)\sum_{|l_3|=2}\sup|D^{l_3}\omega_2|+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\Big(\langle\theta_{ij}\rangle^{(\alpha)}_{\bar{\Omega}}\sup\Big|\frac{\partial^2\omega_2}{\partial x_i\partial x_j}\Big|+$$

$$+\sup|\theta_{ij}|\Big\langle\frac{\partial^2\omega_2}{\partial x_i\partial x_j}\Big\rangle^{(\alpha)}_{\bar{\Omega}}\Big).^{*}$$

Если учесть, что при $i, j=1,2$

$$\langle\theta_{i,j}\rangle^{(\alpha)}_{\bar{\Omega}} \le (\lambda+2\mu)(\operatorname{diam}\Omega)^{1-\alpha}\Big[\sum_{l_1=1}^{2}\sum_{|l_2|=2}\sup|D^{l_2}v_{l_1}|+$$

$$+\sum_{|l_1|=1}\Big(\sup\Big|D^{l_1}\Big(\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_j}\Big)\Big|+\sup\Big|D^{l_1}\Big(\frac{\partial w}{\partial x_{3-i}}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_{3-j}}\Big)\Big|\Big)\Big]\le$$

$$\le(\lambda+2\mu)(\operatorname{diam}\Omega)^{1-\alpha}\Big[\sum_{l_1=1}^{2}\sum_{|l_2|=2}\sup|D^{l_2}v_{l_1}|+$$

$$+\sum_{|l_1|=2}\sum_{|l_2|=1}\Big(\sup|D^{l_1}w|\sup|D^{l_2}\omega_1|+\sup|D^{l_2}w|\sup|D^{l_1}\omega_1|\Big)\Big]$$

и

$$\sup|\theta_{ij}|\le(\lambda+2\mu)\Big(\sum_{l_1=1}^{2}\sum_{|l_2|=1}\sup|D^{l_2}v_{l_1}|+$$

$$+\sum_{|l_1|=1}\sum_{|l_2|=1}\sup|D^{l_1}w|\sup|D^{l_2}\omega_1|\Big),$$

то получаем требуемое неравенство.

---

*Здесь и далее под знаком $\sup$ опущено $x\in\bar{\Omega}$.

ეროვნული ბიბლიოთეკა

Оценим нормы вектора u и φ . В силу (6),(3) и (5) $|u|_{1,2,\alpha} \leq \gamma_1 |f|_{1,0,\alpha}$ и $|\varphi|_{1,2,\alpha} \leq \gamma_3 |g|_{1,0,\alpha}$.

Поэтому справедливы неравенства

$$|u|_{1,2,\alpha} \leq \gamma_1 [(\lambda+2\mu) s |w|^2_{2,\alpha} + b |p|_{1,0,\alpha}], \qquad (I3)$$

$$|\varphi|_{1,2,\alpha} \leq \gamma_3 s |w|_{2,\alpha}, \qquad (I4)$$

первое из которых выводится с помощью предложения 2, а второе элементарно.

Получим оценку нормы $\Phi(w)$. Для этого рассмотрим сумму $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Ясно, что Φ_1 совпадает с функцией $\theta(u_1, u_2, \frac{1}{2} w, w, w)$ из предложения I, умноженной на $-c$, в результате чего

$$|\Phi_1|_{0,\alpha} \leq (\lambda+2\mu) cs (|u|_{1,2,\alpha} + \frac{1}{2} |w|^2_{2,\alpha}) |w|_{2,\alpha} .$$

Очевидно, кроме того, что

$$|\Phi_2|_{0,\alpha} \leq bc (s |p|_{0,\alpha} |w|_{2,\alpha} + |g|_{1,0,\alpha}) + s |\varphi|_{1,2,\alpha}$$

Используя вид оператора Φ , а также (4), (I3) и (I4), запишем

$$|\Phi(w)|_{2,\alpha} \leq \gamma_2 (|\Phi_1|_{0,\alpha} + |\Phi_2|_{0,\alpha}) \leq m_1 |w|^3_{2,\alpha} + (1-m_2) |w|_{2,\alpha} + m_3 .$$

Отсюда следует, что в случае выполнения неравенства

$$m_1 r^3 < m_2 r - m_3, \qquad (I5)$$

Φ переводит шар $V_1(0,r)$ в себя.

Чтобы показать, что Φ в $V_1(0,r)$ — χ - уплотняющий оператор, достаточно проверить, что Φ_1 - сжимающий оператор, а Φ_2 - вполне непрерывный /5/.

Оператор Φ_1 будет сжимающим, если

$$|\Phi_1'|_{2,\alpha} \leq \sigma < 1. \tag{I6}$$

Для получения верхней границы $|\Phi_1'|_{2,\alpha}$ примем во внимание, что $\Phi_1(w)$ совпадает с $\Delta^{-1}\varphi_1(u,w)$, если компоненты u заменить выражениями, стоящими в правой части (9). Поэтому в качестве искомой верхней границы для $|\Phi_1'|_{2,\alpha}$ может быть взята оценка нормы $(\Delta^{-1}\varphi_1)' = \Delta^{-1}\varphi_1' \in \in \mathcal{L}((C^{2,\alpha}(\bar\Omega))^3,\ C^{2,\alpha}(\bar\Omega))$, в которой $|u|_{1,2,\alpha}$ в свою очередь оценивается согласно (I3).

Пусть $\delta u = (\delta u_1, \delta u_2)$ и δw - приращения соответственно $u = (u_1, u_2)$ и w. В обозначениях предложения I, как нетрудно убедиться, для $\delta\varphi_1 = \varphi_1(u+\delta u,\ w+\delta w) - \varphi_1(u, w)$ справедливо равенство $\delta\varphi_1 = d\varphi_1 + R$, где

$$d\varphi_1 = -c\left[\theta(u_1, u_2, \tfrac{1}{2}w, \delta w, w) + \theta(\delta u_1, \delta u_2, \delta w, w, w)\right]. \tag{I7}$$

$$|R|_{0,\alpha} = 0(|\delta|_{1,2,\alpha}), \quad \delta = (\delta u, \delta w).$$

Простые, но громоздкие выкладки, аналогичные тем, которые доказывают предложение I, приводят к неравенству $|d\varphi_1|_{0,\alpha} \leq \varkappa |\delta|_{1,2,\alpha}$, где

$$\varkappa = (\lambda+2\mu)cs\left(|u|_{1,2,\alpha} + |w|_{2,\alpha} + |w|^2_{2,\alpha}\right). \tag{I8}$$

Поэтому $|\varphi_1'|_{2,\alpha} \leq \varkappa$. Отметим, что для оценки нормы $d\varphi_1$, исходя из (I7), можно было бы воспользоваться неравенством треугольника, а затем каждое слагаемое оценить согласно предложения I. Этот, естественно, несложный прием вместо (I8) дает соотношение $\varkappa = (\lambda+2\mu)cs(|u|_{1,2,\alpha} + |w|_{2,\alpha} + \frac{3}{2}|w|^2_{2,\alpha})$, которое ухудшает окончательный результат.

Теперь можно оценить норму Φ_1'. Будем иметь на основании (I8), (4) и (I3)

$$|\Phi_1'|_{2,\alpha} \le \gamma_2 x \le \beta\left[m_4|w|^2_{2,\alpha} + |w|_{2,\alpha} + \left(\frac{1}{\beta} - m_5\right)\right],$$

где $\beta = \frac{2\gamma_3 S}{(1-\nu)K^2}$.

Понятно, что в $V_1(0,r)$ неравенство (I6) будет выполняться, если

$$m_4 r^2 + r - (m_5 - \varepsilon) < 0, \qquad (I9)$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Итак, радиус шара $V_1(0,r)$ должен удовлетворять двум требованиям (I5) и (I9), кроме того, что, разумеется, надо, чтобы был положительным

$$r > 0. \qquad (20)$$

Поясним, в чем заключается назначение условий 4) и 5) теоремы. Из фигурирующих в формулировке теоремы величин r_i, $i = 1,2,3$, первая неотрицательна, а две остальные положительны. В отношении r_1 и r_2 достоверность отмеченного вытекает из того, что функция $y(r) = m_1 r^3 - m_2 r + m_3$ в силу 4) имеет критическую точку на положительной полуоси, в которой значение ее отрицательно, и $y(0) > 0$, $\lim\limits_{r\to\infty} y(r) = \infty$. Неравенство же $r_3 > 0$ следует из неравенств $m_4 > 0$, $\beta m_5 > m_2 > 0$.

Требование 5) теоремы гарантирует существование такого малого ε в (I9), что пересечение (r_1, r_2) - множества решений системы неравенств (I5) и (20) с множеством решений (I9) будет непустым, иными словами, существует радиус, согласующийся с (I5), (I9) и (20).

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

Покажем, что Φ_2 – вполне непрерывный оператор. Если множество $\{w\}$ ограничено в $C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$, то множества $\left\{\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\}$, $i=1,2$, компактны в $C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$ /6/. Так как $p_i \in C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$, то компактны в $C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$ и $\left\{p_i \frac{\partial w}{\partial x_i}\right\}$. Отсюда вытекает, что множества (мн.) $\left\{\Delta^{-1}\left(p_i \frac{\partial w}{\partial x_i}\right)\right\}$ компактны (комп.) в $C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$. Сходные рассуждения и получаемое из (I0) равенство $M_{\ell 1}(w)=\frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(G^2_{\ell 1}\frac{\partial w}{\partial x_1}+G^2_{\ell 2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)$ позволяют судить о компактности множеств $\{\Delta^{-1}M_{\ell 1}(w)\}$, $\ell=1,2$. В самом деле,

$|w|_{2,\alpha} \le const \Longrightarrow$ мн. $\left\{\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\}$ комп. в $C^{0,\alpha}(\bar\Omega) \Longrightarrow$ мн. $\left\{G^2_{\ell 1}\frac{\partial w}{\partial x_1}+G^2_{\ell 2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right\}$ комп. в $C^{2,\alpha}(\bar\Omega) \Longrightarrow$ мн. $\{M_{\ell 1}(w)\}$, $\ell=1,2$, комг. в $C^{0,\alpha}(\bar\Omega) \Longrightarrow$ мн. $\{\Delta^{-1}M_{\ell 1}(w)\}$, $\ell=1,2$, комп. в $C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$.

На этом завершается доказательство разрешимости задачи (II), (I2) и принадлежности решения w шару $V_1(0,r)$. Следствием этого, а также (7) и неравенств (I3),(I4) является существование решения исходной задачи (I),(2) и вхождение u и φ в соответствующие шары. Величина $min(r_2, r_3)$ представляет собой точную верхнюю границу множества решений системы неравенств (I9) при $\varepsilon=0$ с (I5) и (20).

Теорема доказана.

<u>Замечание I</u>. Для выполнения требования 5) теоремы достаточно, чтобы m_2 было достаточно большим или достаточно малым было бы m_3. То что последнее справедливо, видно на том примере, когда $q=0$. В этом случае $m_3=0$, в результате $r_1=0$ и, понятно, 5) выполняется.

<u>Замечание 2</u>. Величины r_1 и r_2 из условия 5) могут быть найдены с помощью формулы Кардано /7/.

Поступила 29.I.I990

Кафедра математическог
обеспечения ЭВМ.

Литература

1. А.С.Вольмир. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. "Наука", М.,1972.
2. О.А.Ладыженская, Н.Н.Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа."Наука", М.,1973.
3. К.Миранда. Уравнения с частными производными. ИЛ ,М.,1957.
4. C.Morrey. Multiple integrals in the calculus of variations. "Springer-Verlag", Berlin, Heidelberg, New York, 1966.
5. Р.Р.Ахмеров, М.И.Каменский, А.С.Потапов и др. Меры некомпактности и уплотнлющие операторы."Наука", Новосибирск, 1986.
6. Л.Берс, Ф.Джон, М.Шехтер. Уравнения с частными производными. "Мир", М., 1966.
7. А.Г.Курош. Курс высшей алгебры. "Наука", М.,1975.

ჯ. ფერაძე

დაწყებარა ერთი სისტემის დამკვრივების ოპერატორი
და მისი ამოხსნადობა

რეზიუმე

განიხილება ტიმოშენკოს დიფერენციალურ განტოლებათა არაწრფივი სისტემა, რომელიც აღწერს ფირფიტის დეფორმაციას. საწყის მონაცემებზე დაშვებულ შეზღუდვებში მტკიცდება სასაზღვრო ამოცანის ძლიერი ამოხსნის არსებობა.

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

D.Peradze

DENSIFYING OPERATOR FOR ONE SYSTEM OF EQUATIONS AND ITS SOLVABILITY .

Summary

The paper deals with the nonlinear system of Timoshenko differential equations which describes plate deformation. Under some restrictions on the initial data the existence of a strong solution of a boundary value problem is proved.

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

300, 1990

КОНЕЧНЫЕ НЕЧЕТКИЕ ПОДМНОЖЕСТВА И ЭНТРОПИЯ

Т.Г.Гачечиладзе, Т.В.Манджапарашвили

Пусть $\mathcal{X}=\{x_1,\dots,x_n\}$ — конечное множество элементарных случайных событий, $p_1,\dots,p_n$ — соответствующие вероятности. Расщепим это множество: $\mathcal{X}=\tilde{\mathcal{X}}\oplus\tilde{\mathcal{X}}^D$ /I/. Это расщепление производится "поточечно". Количество информации, соответствующее нерасщепленной точке, зависит от соответствующей вероятности $I=I(p(x))$. Для расщепленной точки естественно предположить, что информация зависит как от вероятности, так и от соответствующего значения функции принадлежности:

$$I^{\sim}=I(\mu_{\tilde{\mathcal{X}}}(x),p(x)) \tag{I}$$

Аналогично для дуальной нечеткой точки

$$I^{\sim D}=I(\mu_{\tilde{\mathcal{X}}^D}(x),p(x))=I(1-\mu_{\tilde{\mathcal{X}}}(x),p(x)). \tag{2}$$

Эти функции, как мы убедимся ниже, определяются таким образом, что

$$I(p(x))=I(\mu_{\tilde{\mathcal{X}}}(x),p(x))+I(\mu_{\tilde{\mathcal{X}}^D}(x),p(x)). \tag{3}$$

С целью установления вида функции $I^{\sim}$, рассмотрим три ее свойства.

I) $I^{\sim}$ как функции p непрерыва на (0;I].

2. Пусть даны $\mathcal{X}=\tilde{\mathcal{X}}\oplus\tilde{\mathcal{X}}^D$ и $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}\oplus\mathcal{Y}^D$. Расщепление $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ производим по известным правилам /I/. Если для

ეროვნული ბიბლიოთეკა

некоторых x и y значения функций принадлежностей совпадают $\mu_{\tilde{x}}(x)=\mu_{\tilde{y}}(y)=\mu$, то у $(\widetilde{x,y})\subseteq\widetilde{X\times Y}$ будет такое же значение функции принадлежности. Мы предполагаем, что $I^{\sim}$ обладает свойством:

$$I(\mu,pq)=I(\mu,p)+I(\mu,q) \tag{4}$$

для любых $0\le\mu,p,q\le1$.

3) Увеличение значения функции принадлежности влечет такое же увеличение информации соответствующего нечеткого события:

$$I(\lambda\mu,p)=\lambda I(\mu,p) \tag{5}$$

для любых $0\le\mu,p\le1$ и неотрицательного λ.

Теорема. Пусть $I^{\sim}=I(\mu,p)$ - функция, удовлетворяющая условиям 1), 2), 3). Тогда $I^{\sim}$ имеет вид:

$$I^{\sim}=I(\mu,p)=-k\mu\log p. \tag{6}$$

Доказательство. Соотношение (5) влечет:

$$I(\mu,p)=\mu I(1,p), \tag{7}$$

для любых $0\le\mu,p\le1$, а (4) для нерасщепленных множеств ($\mu=1$)

$$I(1,p\cdot q)=I(1,p)+I(1,q). \tag{8}$$

Единственное непрерывное решение этого функционального уравнения, как известно /2/, имеет вид:

$$I(1,p)=-k\log p, \tag{9}$$

где k - константа. Так как количество информации рассматривается как неотрицательная величина, то теорема доказана.

Вернемся к полному множеству случайных элементарных событий. Мы показали, что количество информации, соответствующее расщепленному событию $\tilde{x}_i$ определяется формулой

$$I_i^{\sim}=I(\mu_i,p_i)=-k\mu_i\log p_i. \tag{10}$$

Следовательно, среднее количество информации, соответствующее расщепленному множеству $\tilde{\mathcal{X}}$, вычисляется по формуле:

$$\mathcal{I}(\tilde{\mathcal{X}}) = \sum_{i=1}^{n} P_i I_i^{\sim} = -K \sum_{i=1}^{n} \mu_i P_i \log P_i \,. \qquad \text{(II)}$$

Это энтропия нечеткого подмножества по Заде /3/. Аналогично,

$$\mathcal{I}(\tilde{\mathcal{X}}^{D}) = \sum_{i=1}^{n} P_i I^{\sim D} = -K \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{D} P_i \log P_i \,. \qquad \text{(I2)}$$

Ясно, что

$$\mathcal{I}(\tilde{\mathcal{X}}) + \mathcal{I}(\tilde{\mathcal{X}}^{D}) = H(\mathcal{X}), \qquad \text{(I3)}$$

где $H(\mathcal{X})$ - энтропия Шеннона, так как $\mu_i + \mu_i^{D} = 1, \; i = 1, \dots, n$.

Сделаем одно замечание. Согласно /4/ в качестве вероятности расщепленной точки рассматривается величина $\mu_i P_i$, а условная вероятность $\tilde{x}_i$ при условии, что $\tilde{x}_i \subset \tilde{\mathcal{X}}$, определяется формулой /4/:

$$P(\tilde{x}_i / \tilde{\mathcal{X}}) = \frac{\mu_i P_i}{\mathcal{P}^{\sim}} \,. \qquad \text{(I4)}$$

Соответствующее шенноновское количество информации

$$H(\tilde{\mathcal{X}}) = -K \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i P_i}{\mathcal{P}^{\sim}} \log \frac{\mu_i P_i}{\mathcal{P}^{\sim}} \,. \qquad \text{(I5)}$$

В связи с этой формулой приведем два неравенства /5/. Первое:

$$-K \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i P_i}{\mathcal{P}^{\sim}} \log \frac{\mu_i P_i}{\mathcal{P}^{\sim}} \leq -K \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i P_i}{\mathcal{P}^{\sim}} \log P_i \,, \qquad \text{(I6)}$$

причем равенство имеет место, когда все μ_i равны. Это неравенство можно переписать так:

$$-K \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i P_i}{\mathcal{P}^{\sim}} \log \frac{\mu_i}{\mathcal{P}^{\sim}} \leq 0, \qquad \text{(I7)}$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

т.е. хотя бы одно

$$\mu_i \geqslant P^{\sim}. \qquad (18)$$

Использование на $\tilde{X}$ нормированных вероятностей (14) влечет за собой необходимость определенного согласования между обычными вероятностями и функциями принадлежности. Последнее неравенство надо рассматривать в качестве условия такого согласования.

Второе неравенство таково:

$$H(\tilde{X}) \leqslant P^{\sim -1} \mathcal{Z}(\tilde{X}), \qquad (19)$$

оно является прямым следствием первого.

Мы введем еще две энтропийные меры - энтропию расщепленного множества и энтропию расщепления, как результат поточечного расщепления универсального множества.

Исходя из известного свойства функции шенноновской энтропии /5/, можем написать:

$$H(\tilde{x}_1 \oplus \tilde{x}_1^D, \ldots, \tilde{x}_n \oplus \tilde{x}_n^D) \equiv H(\mu_1 p_1, \mu_1^D p_1; \ldots; \mu_n p_n, \mu_n^D p_n) = \qquad (20)$$

$$= H(p_1, \ldots, p_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i H(\mu_i, \mu_i^D).$$

Выражение

$$S(\tilde{X}, \tilde{X}^D) = H(\tilde{X} \oplus \tilde{X}) \equiv H(\tilde{x}_1 \oplus \tilde{x}_1^D, \ldots, \tilde{x}_n \oplus \tilde{x}_n^D) \qquad (21)$$

мы рассматриваем в качестве энтропии расщепленного множества $\tilde{X} \oplus \tilde{X}^D$, а

$$L(\tilde{X}, \tilde{X}^D) = \sum_{i=1}^{n} p_i H(\mu_i, \mu_i^D) \qquad (22)$$

в качестве энтропии расщепления.

Таким образом,

$$S(\tilde{X}, \tilde{X}^D) = H(X) + L(\tilde{X}, \tilde{X}^D). \qquad (23)$$

Для дуальной пары /6/ $u^{\sim}$ полагаем:

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$P_{\tilde{u}} = P_{\tilde{x}} + P_{\tilde{x}^{D}} = P. \tag{24}$$

Поэтому условные вероятности (см. /4/)

$$P(\tilde{x}/\tilde{u}) = \frac{P_{\tilde{x}}}{P_{u^{\sim}}} = \mu, \qquad P(\tilde{x}^{D}/u^{\sim}) = \frac{P_{\tilde{x}^{D}}}{P_{u^{\sim}}} = 1-\mu, \tag{25}$$

а условная энтропия

$$H(\tilde{x}, \tilde{x}^{D}/u^{\sim}) = H(\mu_{\tilde{x}}(x), 1-\mu_{\tilde{x}}(x)). \tag{26}$$

(20) можно переписать так:

$$H(\tilde{x}_1 \oplus \tilde{x}_1^{D}, \ldots, \tilde{x}_n \oplus \tilde{x}_n^{D}) = \tag{27}$$

$$= H(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i H(\tilde{x}_i, \tilde{x}_i^{D}/u^{\sim}).$$

Имеет место утверждение: пусть множество дуальных пар упорядочено по уровням нечеткости /6/,/7/, тогда если $u^{\sim} \preceq v^{\sim}$, то

$$H(\tilde{x}, \tilde{x}^{D}/u^{\sim}) \leq H(\tilde{y}, \tilde{y}^{D}/v^{\sim}). \tag{28}$$

В действительности,

$$u^{\sim} \leq v^{\sim} \Longleftrightarrow \min(\mu_{\tilde{x}}, \mu_{\tilde{x}^{D}}) \leq \mu_{\tilde{y}}, \mu_{\tilde{y}^{D}} \leq \max(\mu_{\tilde{x}}, \mu_{\tilde{x}^{D}}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\left|\tfrac{1}{2} - \mu_{\tilde{x}}\right|, \left|\tfrac{1}{2} - \mu_{\tilde{x}^{D}}\right| \geq \left|\tfrac{1}{2} - \mu_{\tilde{y}}\right|, \left|\tfrac{1}{2} - \mu_{\tilde{y}^{D}}\right| \right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow H(\tilde{x}, x^{D}/u^{\sim}) \leq H(\tilde{y}, \tilde{y}^{D}/v^{\sim}).$$

Поступила 8.II.1990

Проблемная лаборатория физической кибернетики

ეროვნული ბიბლიოთეკა

Литература

1. Т.Гачечиладзе, Т.Манджапарашвили. Труды ТГУ, сер. киб. и прикл.мат., 279, № 9, 235, 1988.
2. J. Aczel. Lecturs on functional equations and their applications. Acad.Press. N.Y., 1966.
3. L.A.Zadeh. J.Math. Anal.and Appl.23, 421 (1968).
4. Т.Гачечиладзе, Т.Манджапарашвили. Сообщ. АН ГССР, 134, № 3, 1989.
5. А.Файнстейн. Основы теории информации. М., ИЛ, 1969.
6. R.R.Yager. Inf. and Control, 44, 236 (1980).
7. Т.Гачечиладзе, Т.Манджапарашвили. Труды ТГУ, 300, № 13, 107, 1990.

თ. გაჩეჩილაძე, თ. მანჯაფარაშვილი

სასრული არამკაფიო ქვესიმრავლეები და ენტროპია

რეზიუმე

განხილულია სასრულ არამკაფიო ქვესიმრავლეთა ერთერთი მნიშვნელოვანი მახასიათებელი-ენტროპია. სხვადასხვა ენტროპიულ ზომათა შორის გამოკვლეულია ზადეს, დელუკასა და ე.წ, β-ენტროპია. შესწავლილია მათი თვისებები.

T.Gachechiladze, T.Manjaparashvili

FINITE FUZZY SUBSETS AND ENTROPY

Summary

Entropy – one of the important characteristics of fuzzy subsets – is considered. Among different entropic measurs, those of Zade, De Luca, and the so-called β-entropy are studied.

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახ, თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
300, 1990

ДУАЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ И НЕЧЕТКОСТЬ

Т.Г.Гачечиладзе, Т.В.Манджапарашвили

Рассмотрим решетку нечетких подмножеств $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ /1/. Дуальный элемент (дуальное подмножество) определяется на основе процедуры расщепления обычного множества /1/

$$A=\tilde{A}\oplus\tilde{A}^{D}, \qquad (I)$$

где $A\subseteq\Omega$, $\tilde{A}$ - нечеткое подмножество, $\tilde{A}^{D}$ - дуальное подмножество. Связь дуального подмножества с нечетким дополнением такова:

$$\neg\tilde{A}=\tilde{A}^{D}\cup A^{*},$$

здесь $A^{*}\equiv(\emptyset:\tilde{A})$ - псевдодополнение элемента $\tilde{A}$ /2/. Дуальный элемент указывает на следующее: если можно утверждать, что элементы A наделены в какой-то степени свойством $\mathcal{P}$ /3/,/4/, то в какой-то степени они же не наделены этим свойством. Чем "ближе" /5/ $\tilde{A}$ и $\tilde{A}^{D}$, тем "больше" нечеткости содержится в утверждении "элементы A наделены свойством $\mathcal{P}$ ". Аналогичные идеи лежат в основе понятия нечеткости в работе /6/, где сопоставляются не $\tilde{A}$ и $\tilde{A}^{D}$, а $\tilde{A}'$ и $\neg\tilde{A}$. Там же дано обобщение понятия "метрического" сопоставления степеней нечеткости двух подмножеств на "неметрическое", которое сводится к определенному отношению f между сопоставляемыми подмножествами. Ниже мы покажем, что м ввести эквивалентное отношение φ, которое, на наш взгляд, лучше подчеркивает тот факт, что нечеткость является внутренним свойством нечеткого подмножества и не зависит от псевдодополнения.

Основой нашего подхода, так же, как и в /5/, является понятие "между" в дистрибутивной решетке /2/.

Определение I. Пусть $\tilde{X}$ и $\tilde{Y} \in \mathcal{P}^{\sim}(\Omega)$. $\tilde{X}$ не менее нечетко чем $\tilde{Y}$, $(\tilde{X}\varphi\tilde{Y})$, если $\tilde{X} \odot Y$ и $(\tilde{X} \odot Y)^{D} = \tilde{X}^{D} \odot Y$ находится между $\tilde{Y}$ и $\tilde{Y}^{D}$ в $\mathcal{P}^{\sim}(\Omega)$, где $\odot$ - операция последовательного расщепления пересечения двух подмножеств /I/,

$$(\tilde{X}\varphi\tilde{Y}) \Longleftrightarrow \begin{cases} (\tilde{Y}, \tilde{X} \odot Y, \tilde{Y}^{D}) \\ \\ (\tilde{Y}, \tilde{X}^{D} \odot Y, \tilde{Y}^{D}) \end{cases} \Longleftrightarrow \tilde{Y} \cap \tilde{Y}^{D} \subseteq \tilde{X} \odot Y \subseteq \tilde{Y} \cup \tilde{Y}^{D}.$$

Ясно, что $(\tilde{X}\varphi X)$ для $\forall \tilde{X} \in \mathcal{P}^{\sim}(\Omega)$.

Теорема I. Отношения f и φ эквивалентны на $\mathcal{P}^{\sim}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $(\tilde{X} f \tilde{Y})$; это означает, что

$$\begin{cases} (\tilde{Y}, \tilde{X}, \neg\tilde{Y}) \\ (\tilde{Y}, \neg\tilde{X}, \neg\tilde{Y}) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (I_{\tilde{Y}} \wedge I_{\neg\tilde{Y}}) \leq I_{\tilde{X}} \leq (I_{\tilde{Y}} \vee I_{\neg\tilde{Y}}) \\ (I_{\tilde{Y}} \wedge I_{\neg\tilde{Y}}) \leq I_{\neg\tilde{X}} \leq (I_{\tilde{Y}} \vee I_{\neg\tilde{Y}}) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (I_{\tilde{Y}} \wedge I_{\neg\tilde{Y}}) \cdot I_{Y} \leq I_{\tilde{X}} \cdot I_{Y} \leq (I_{\tilde{Y}} \vee I_{\neg\tilde{Y}}) \cdot I_{Y} \\ (I_{\tilde{Y}} \wedge I_{\neg\tilde{Y}}) \cdot I_{Y} \leq I_{\neg\tilde{X}} \cdot I_{Y} \leq (I_{\tilde{Y}} \vee I_{\neg\tilde{Y}}) \cdot I_{Y} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (I_{\tilde{Y}} \wedge I_{\tilde{Y}^{D}}) \leq I_{\tilde{X}} \cdot I_{Y} \leq (I_{\tilde{Y}} \vee I_{\tilde{Y}^{D}}) \\ (I_{\tilde{Y}} \wedge I_{\tilde{Y}^{D}}) \leq I_{\tilde{X}^{D}} \cdot I_{Y} \leq (I_{\tilde{Y}} \vee I_{\tilde{Y}^{D}}) \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\tilde{Y}, \tilde{X} \odot Y, \tilde{Y}^{D}) \\ (\tilde{Y}, \tilde{X}^{D} \odot Y, Y^{D}) \end{cases} \Longleftrightarrow (\tilde{X}\varphi\tilde{Y})$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

Пусть теперь, наоборот, $(\tilde{\mathcal{X}} \varphi \tilde{\mathcal{Y}})$, т.е.

$$\begin{cases} (\tilde{\mathcal{Y}}, \tilde{\mathcal{X}} \circ \mathcal{Y}, \tilde{\mathcal{Y}}^D) \\ (\tilde{\mathcal{Y}}, \tilde{\mathcal{X}}^D \circ \mathcal{Y}, \tilde{\mathcal{Y}}^D) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \wedge I_{\tilde{\mathcal{Y}}^D}) \le I_{\tilde{\mathcal{X}}} \cdot I_{\mathcal{Y}} \le (I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \vee I_{\mathcal{Y}^D}) \\ (I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \wedge I_{\mathcal{Y}^D}) \le I_{\tilde{\mathcal{X}}^D} \cdot I_{\mathcal{Y}} \le (I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \vee I_{\tilde{\mathcal{Y}}^D}) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \wedge I_{\neg\tilde{\mathcal{Y}}}) \le I_{\tilde{\mathcal{X}}} \cdot I_{\mathcal{Y}} + I_{\tilde{\mathcal{X}}} \cdot I_{\mathcal{Y}^c} \le (I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \vee I_{\tilde{\mathcal{Y}}^D}) + (I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \vee I_{\mathcal{Y}^c}) \\ (I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \wedge I_{\neg\tilde{\mathcal{Y}}}) \le I_{\tilde{\mathcal{X}}^D} \cdot I_{\mathcal{Y}} + I_{\mathcal{X}^c} I_{\mathcal{Y}} + I_{\neg\tilde{\mathcal{X}}} \cdot I_{\tilde{\mathcal{Y}}^c} \le (I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \vee I_{\tilde{\mathcal{Y}}^D}) + (I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \vee I_{\mathcal{Y}^c}). \end{cases}$$

Переход, который мы совершили, является законным по следующим причинам. Во-первых, мы усилили первое правое неравенство, добавив к нему $I_{\tilde{\mathcal{X}}} \cdot I_{\mathcal{Y}^c} \le I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \vee I_{\mathcal{Y}^c}$, во-вторых, чтобы выполнялось $(\tilde{\mathcal{X}} \varphi \tilde{\mathcal{Y}})$, необходимо иметь $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, следовательно, $I_{\mathcal{X}^c} \cdot I_{\mathcal{Y}} = 0$, а добавляя ко второму правому неравенству $I_{\neg\tilde{\mathcal{X}}} \cdot I_{\mathcal{Y}^c} \le I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \vee I_{\mathcal{Y}^c}$, мы также его усиливаем.

Таким образом,

$$\begin{cases} (\tilde{\mathcal{Y}}, \tilde{\mathcal{X}} \circ \mathcal{Y}, \tilde{\mathcal{Y}}^D) \\ (\tilde{\mathcal{Y}}, \tilde{\mathcal{X}}^D \circ \mathcal{Y}, \mathcal{Y}^D) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \wedge I_{\neg\tilde{\mathcal{Y}}}) \le I_{\tilde{\mathcal{X}}} \le (I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \vee I_{\neg\tilde{\mathcal{Y}}}) \\ (I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \wedge I_{\neg\tilde{\mathcal{Y}}}) \le I_{\neg\tilde{\mathcal{X}}} \le (I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \vee I_{\neg\tilde{\mathcal{Y}}}) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (\tilde{\mathcal{Y}}, \tilde{\mathcal{X}}, \neg\tilde{\mathcal{Y}}) \\ (\tilde{\mathcal{Y}}, \neg\tilde{\mathcal{X}}, \neg\tilde{\mathcal{Y}}) \end{cases} \Longleftrightarrow (\tilde{\mathcal{X}} f \tilde{\mathcal{Y}}).$$

<u>Лемма I.</u> Если $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y}$, то из $(\tilde{\mathcal{Y}}, \tilde{\mathcal{X}} \circ \mathcal{Y}, \tilde{\mathcal{Y}}^D)$ следует $(\tilde{\mathcal{Y}} \circ \mathcal{Z}, \tilde{\mathcal{X}} \circ \mathcal{Z}, \tilde{\mathcal{Y}}^D \circ \mathcal{Z})$.

<u>Доказательство.</u> $(\tilde{\mathcal{Y}}, \tilde{\mathcal{X}} \circ \mathcal{Y}, \tilde{\mathcal{Y}}^D) \Longleftrightarrow (I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \wedge I_{\mathcal{Y}^D}) \le I_{\tilde{\mathcal{X}}} \cdot I_{\mathcal{Y}} \le$ $\le (I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \vee I_{\mathcal{Y}^D}) \Longrightarrow (I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \wedge I_{\tilde{\mathcal{Y}}^D}) \cdot I_{\mathcal{Z}} \le I_{\tilde{\mathcal{X}}} I_{\mathcal{Y}} I_{\mathcal{Z}} \le (I_{\tilde{\mathcal{Y}}} \vee I_{\tilde{\mathcal{Y}}^D}) I_{\mathcal{Z}} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow (I_{\tilde{y}}\cdot I_{z} \wedge {}_{\tilde{y}^{D}}\cdot I_{z}) \leq I_{\tilde{x}}\cdot I_{z} \leq (I_{\tilde{y}}\cdot I_{z} \vee I_{\tilde{y}^{D}} I_{z}) \Longleftrightarrow (I_{\tilde{y}\circ z} \wedge I_{\tilde{y}^{D}\circ z}) \leq$$

$$\leq (I_{\tilde{y}\circ z} \vee I_{\tilde{y}^{D}\circ z}) \Longleftrightarrow (\tilde{y}\circ z,\ \tilde{x}\circ z,\ \tilde{y}^{D}\circ z).$$

Теорема 2. φ транзитивно на $\mathcal{P}(\tilde{\Omega})$, т.е. $(\tilde{x}\varphi\tilde{y})$ и $(\tilde{y}\varphi\tilde{z}) \Longrightarrow (\tilde{x}\varphi\tilde{z})$.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} (\tilde{x}\varphi\tilde{y}) \Longleftrightarrow \begin{cases} (\tilde{y},\ \tilde{x}\circ y,\ \tilde{y}^{D}) \\ (\tilde{y},\ \tilde{x}^{D}\circ y,\ y^{D}) \end{cases} \\ \\ (\tilde{y}\varphi\tilde{z}) \Longleftrightarrow \begin{cases} (\tilde{z},\ \tilde{y}\circ z,\ \tilde{z}^{D}) \\ ((\tilde{z},\ \tilde{y}^{D}\circ z,\ \tilde{z}^{D}) \end{cases} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \{(\tilde{z},\ y\circ z,\ \tilde{z}^{D}) \text{ и } (\tilde{z},\ (\tilde{y}\circ z)^{D},\ \tilde{z}^{D}) \text{ и } (\tilde{y},\ \tilde{x}\circ y,\ \tilde{y}^{D})\} \Longrightarrow \{(\tilde{z},\ \tilde{y}\circ z,\ \tilde{z}^{D})$$

$$\text{и } (\tilde{z}, (\tilde{y}\circ z)^{D}, \tilde{z}^{D}) \text{ и } (\tilde{y}\circ z,\ \tilde{x}\circ z,\ \tilde{y}^{D}\circ z)\} \Longrightarrow (\tilde{z},\ \tilde{x}\circ z,\ \tilde{z}^{D}).$$

Последний переход сделан на основе свойства отношения "между", обозначенного в /5/ как P_3 а)[ж].

Аналогично можно доказать, что

[ж] В работе Ягера /5/ приводятся некоторые полезные свойства отношения (a, b, c) :

$P_1 : (abc) \Leftrightarrow (cba),$

$P_2 : (abc) \text{ и } (acb) \Leftrightarrow b=c,$

$P_3 : (abc) \text{ и } (axb) \Rightarrow (axc),$

$P_4 : (abc) \text{ и } (bcd) \text{ и } b \neq c \Rightarrow (abd),$

$P_5 : (abc) \text{ и } (acd) \Rightarrow (bcd),$

$P_6 : (aba) \Leftrightarrow a=b,$

$P_7 : (aab) \Leftrightarrow (baa) \Leftrightarrow (abb) \Leftrightarrow (bba),$

$P_8 : (abc) \Rightarrow (aab),$

P_9 : если решетка дистрибутивная, то:

(а) $(pbc) \text{ и } (pdc) \text{ и } (bxd) \Rightarrow (pxc)$

(в) $(pbc) \text{ и } (pdb) \text{ и } (cxd) \Rightarrow (pbx)$

$P_{10} : (abc) \Rightarrow a \wedge c \leq b \leq a \vee c.$

$$\begin{cases} (\tilde{X}\varphi\tilde{Y}) \\ (\tilde{Y}\varphi\tilde{Z}) \end{cases} \Longrightarrow (Z, (\tilde{X}\circ Z)^D, \tilde{Z}^D).$$

Т.о.,

$$\begin{cases} (\tilde{Z}, (\tilde{X}\circ Z), \tilde{Z}^D) \\ (\tilde{Z}, (\tilde{X}\circ Z)^D, \tilde{Z}^D) \end{cases} \Longleftrightarrow (\tilde{X}\varphi\tilde{Z}).$$

<u>Теорема 3</u>. φ рефлексивно на $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega) : (\tilde{X}\varphi\tilde{X})$.

<u>Доказательство</u>. Имеем

$$\begin{cases} (I_{\tilde{X}} \wedge I_{\tilde{X}^D}) \leq I_{\tilde{X}} \leq (I_{\tilde{X}} \vee I_{\tilde{X}^D}) \\ (I_{\tilde{X}} \wedge I_{\tilde{X}^D}) \leq I_{\tilde{X}^D} \leq (I_{\tilde{X}} \vee I_{\tilde{X}^D}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (I_{\tilde{X}} \wedge I_{\tilde{X}^D}) \leq I_{\tilde{X}} \cdot I_{X} \leq (I_{\tilde{X}} \vee I_{\tilde{X}^D}) \\ (I_{\tilde{X}} \wedge I_{\tilde{X}^D}) \leq I_{\tilde{X}^D} \cdot I_{X} \leq (I_{\tilde{X}} \vee I_{\tilde{X}^D}) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (\tilde{X}, (\tilde{X}\circ X), \tilde{X}^D) \\ (\tilde{X}, \tilde{X}^D\circ X, \tilde{X}^D) \end{cases} \Longleftrightarrow (\tilde{X}\varphi\tilde{X}).$$

<u>Теорема 4</u>. Если $(\tilde{X}\varphi\tilde{Y})$ и $(\tilde{Y}\varphi\tilde{X})$, то или $\tilde{X}\circ Y = \tilde{Y}\circ X$ и $\tilde{X}^D\circ Y = Y^D\circ X$, или $\tilde{X}\circ Y = \tilde{Y}^D\circ X$ и $\tilde{X}^D\circ Y = \tilde{Y}^D\circ X$.

<u>Доказательство</u>.

$$(\tilde{X}\varphi\tilde{Y}) \Longleftrightarrow \begin{cases} (\tilde{Y}, \tilde{X}\circ Y, Y^D) \\ (\tilde{Y}, (\tilde{X}\circ Y)^D, \tilde{Y}) \end{cases} \text{ и } (\tilde{Y}\varphi\tilde{X}) \Longleftrightarrow \begin{cases} (\tilde{X}, \tilde{Y}\circ X, \tilde{X}^D) \\ (\tilde{X}, (\tilde{Y}\circ X)^D, \tilde{X}^D) \end{cases}$$

Предположим, что $\tilde{X}\circ Y \neq \tilde{Y}\circ X$, тогда, согласно лемме I, P_1 и P_4, можем написать:

$$\begin{cases} (\tilde{Y}, \tilde{X}\circ Y, \tilde{Y}^D) = (\tilde{Y}^D, \tilde{X}\circ Y, \tilde{Y}) \\ (\tilde{X}, \tilde{Y}\circ X, \tilde{X}^D) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (\tilde{Y}^D\circ X, \tilde{X}\circ Y, \tilde{Y}\circ X) \\ (\tilde{X}\circ Y, \tilde{Y}\circ X, \tilde{X}^D\circ Y) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\tilde{Y}^D\circ X, \tilde{X}\circ Y, \tilde{X}^D\circ Y) = (\tilde{X}^D\circ Y, \tilde{X}\circ Y, \tilde{Y}^D\circ X).$$

Согласно P_2 имеем:

ეროვნული ბიბლიოთეკა

$$\begin{cases}(\tilde{X}^D\circ Y,\ \tilde{X}\circ Y,\ \tilde{Y}^D\circ X)\\ (\tilde{X},\ (\tilde{Y}\circ X)^D,\ \tilde{X}^D)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}(\tilde{X}^D\circ Y,\ \tilde{X}\circ Y,\ \tilde{Y}^D\circ X)\\ (\tilde{X}\circ Y,\ \tilde{Y}^D\circ X,\ \tilde{X}^D\circ Y)=(\tilde{X}^D\circ Y,\ \tilde{Y}^D\circ X,\ \tilde{X}\circ Y)\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \tilde{X}\circ Y=\tilde{Y}^D\circ X.$$

Аналогично, на основе P_1, P_2, P_4 и леммы I:

$$\begin{cases}(\tilde{Y},(\tilde{X}\circ Y)^D,\tilde{Y}^D)=(\tilde{Y}^D,(\tilde{X}\circ Y)^D,\tilde{Y})\\ (\tilde{X},(\tilde{Y}\circ X)^D,\tilde{X}^D)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}(\tilde{Y}^D\circ X,\ \tilde{X}^D\circ Y,\ \tilde{Y}\circ X)\\ (\tilde{X}\circ Y,\ \tilde{Y}^D\circ X,\ \tilde{X}^D\circ Y)\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow(\tilde{X}\circ Y,\ \tilde{X}^D\circ Y,\ \tilde{Y}\circ X);$$

$$\begin{cases}(\tilde{X}\circ Y,\ \tilde{X}^D\circ Y,\ \tilde{Y}\circ X)\\ (\tilde{X},\ \tilde{Y}\circ X,\ \tilde{X}^D)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}(\tilde{X}\circ Y,\ \tilde{X}^D\circ Y,\ \tilde{Y}\circ X)\\ (\tilde{X}\circ Y,\ \tilde{Y}\circ X,\ \tilde{X}^D\circ Y)\end{cases}\Longrightarrow\tilde{X}^D\circ Y=\tilde{Y}\circ X.$$

Теперь пусть $\tilde{X}\circ Y=\tilde{Y}\circ X$, тогда

$$(\tilde{X}\circ Y,\ \tilde{Y}^D\circ X,\ X^D\circ Y)=(\tilde{Y}\circ X,\ \tilde{Y}^D\circ X,\ \tilde{X}^D\circ Y)$$

и, согласно P_1, можем написать:

$$\begin{matrix}(\tilde{Y}\circ X,\ \tilde{Y}^D\circ X,\ \tilde{X}^D\circ Y)\\ (\tilde{Y}\circ X,\ \tilde{X}^D\circ Y,\ \tilde{Y}^D\circ X)\end{matrix}\Longrightarrow\tilde{X}^D\circ Y=\tilde{Y}^D\circ X.$$

Мы видим, что φ на $\mathcal{P}(\Omega)$ не является антисимметричным и, следовательно, не является отношением частичного порядка.

Теорема 5. На $\mathcal{P}(\Omega)$ отношение φ таково, что

(1) $(\tilde{X}\varphi\tilde{X}^D)$ и $(\tilde{X}^D\varphi\tilde{X})$,

(2) $(\tilde{X}\varphi\tilde{Y})\Longleftrightarrow(\tilde{X}^D\varphi\tilde{Y})\Longleftrightarrow(\tilde{X}^D\varphi Y^D)\Longleftrightarrow(\tilde{X}\varphi\tilde{Y}^D)$.

ეროვნული ბიბლიოთეკა

<u>Доказательство</u>.

(I). Так как операция $(\ )^D$ является инволюцией, то

$$(\tilde{X}\varphi\tilde{X}^D) \Longleftrightarrow \begin{cases}(\tilde{X}^D, \tilde{X}\circ X, (\tilde{X}^D)^D)\\ (\tilde{X}^D, \tilde{X}^D\circ X, (\tilde{X}^D)^D)\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}(\tilde{X}^D, \tilde{X}, \tilde{X})\\ (\tilde{X}^D, \tilde{X}^D, \tilde{X})\end{cases}.$$

Чтобы показать, что $(\tilde{X}^D, \tilde{X}, \tilde{X})$ имеет место, заметим, что $(\tilde{X}^D \cap \tilde{X}) \cup \tilde{X} = \tilde{X}$ и $(\tilde{X}^D \cup \tilde{X}) \cap \tilde{X} = \tilde{X}$. Согласно P_7 $(\tilde{X}^D, \tilde{X}, \tilde{X}) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow (\tilde{X}^D, \tilde{X}^D, X)$. Т.о., имеем $(\tilde{X}\varphi\tilde{X}^D)$. Чтобы показать, что $(\tilde{X}^D\varphi\tilde{X})$, должны иметь $(\tilde{X}, \tilde{X}^D\circ X, \tilde{X}^D) = (\tilde{X}, \tilde{X}^D, \tilde{X}^D)$ и $(\tilde{X}, (\tilde{X}^D\circ X)^D, X^D) = (\tilde{X}, (\tilde{X}^D)^D, X^D)$, что опять вытекает из P_7.

(2).

$$(\tilde{X}\varphi\tilde{Y}) = \begin{cases}(\tilde{Y}, \tilde{X}\circ Y, \tilde{Y}^D)\\ (\tilde{Y}, \tilde{X}^D\circ Y, \tilde{Y}^D)\end{cases}.$$

Т.к. $(\tilde{X}^D)^D = \tilde{X}$, то $(\tilde{Y}, \tilde{X}\circ Y, \tilde{Y}^D) \Longrightarrow (\tilde{Y}, (\tilde{X}^D)^D, \tilde{Y}^D)$.

Однако $\begin{cases}(\tilde{Y}, \tilde{X}^D\circ Y, Y^D)\\ (\tilde{Y}, (\tilde{X}^D)^D\circ Y, \tilde{Y}^D)\end{cases} \Longleftrightarrow (\tilde{X}^D\varphi\tilde{Y})$.

Чтобы имело место $(\tilde{X}^D\varphi\tilde{Y}^D)$, должны иметь $(\tilde{Y}^D, \tilde{X}^D\circ Y, (\tilde{Y}^D)^D)$ и $(\tilde{Y}^D, (\tilde{X}^D)^D\circ Y, (\tilde{Y}^D)^D)$, которые следуют из $(\tilde{X}\varphi\tilde{Y})$:

$$(\tilde{Y}, \tilde{X}^D\circ Y, \tilde{Y}^D) \Longrightarrow (\tilde{Y}^D, \tilde{X}^D\circ Y, \tilde{Y}) \Longrightarrow (\tilde{Y}^D, \tilde{X}^D\circ Y, (\tilde{Y}^D)^D)$$

и $(\tilde{Y}, \tilde{X}\circ Y, \tilde{Y}^D) \Longrightarrow (\tilde{Y}^D, \tilde{X}\circ Y, \tilde{Y}) \Longrightarrow (\tilde{Y}^D, (\tilde{X}^D)^D\circ Y, (\tilde{Y}^D)^D)$.

<u>Теорема 6</u>. Если $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ и $(\tilde{X}\varphi\tilde{Y})$, то $(\tilde{X}\varphi(\tilde{Y}^D : \tilde{Y}))$ и $(\tilde{X}\varphi(\tilde{Y} : \tilde{Y}^D))$.

<u>Доказательство</u>. Имеем /I/:

$$(\tilde{Y}^D : \tilde{Y}) = Y^c_{>1/2} \cup \tilde{Y}^D, \quad (\tilde{Y} : \tilde{Y}^D) = Y^c_{<1/2} \cup \tilde{Y}.$$

ეროვნული ბიბლიოთეკა

и

$$(\tilde{X}\varphi\tilde{Y}) \Longleftrightarrow \begin{cases}(\tilde{Y}, \tilde{X}\circ y, \tilde{Y}^D)\\(\tilde{Y}, \tilde{X}^D\circ y, \tilde{Y}^D)\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\tilde{Y}\cap\tilde{Y}^D\subseteq\tilde{X}\circ y\subseteq\tilde{Y}\cup\tilde{Y}^D\\ \tilde{Y}\cap\tilde{Y}^D\subseteq\tilde{X}^D\circ y\subseteq\tilde{Y}\cup\tilde{Y}^D\end{cases}.$$

Далее,

$$(\tilde{X}\varphi(\tilde{Y}^D:\tilde{Y})) = \begin{cases}((y^c_{>1/2}\cup\tilde{Y}^D), \tilde{X}\circ(y^c_{>1/2}\cup\tilde{Y}^D), (y^c_{>1/2}\cup\tilde{Y}^D)^D)\\((y^c_{>1/2}\cup\tilde{Y}^D), \tilde{X}^D\circ(y^c_{>1/2}\cup\tilde{Y}^D), (y^c_{>1/2}\cup y^D)^D)\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix}((y^c_{>1/2}\cup\tilde{Y}^D), \tilde{X}, \tilde{Y}_{>1/2})\\((y^c_{>1/2}\cup\tilde{Y}^D), \tilde{X}^D, \tilde{Y}_{>1/2})\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}\tilde{Y}_{>1/2}\cap(y^c_{>1/2}\cup y^D)\subseteq\tilde{X}\subseteq\tilde{Y}_{>1/2}\cup(y^c_{>1/2}\cup\tilde{Y}^D)\\ \tilde{Y}_{>1/2}\cap(y^c_{>1/2}\cup y^D)\subseteq\tilde{X}^D\subseteq\tilde{Y}_{>1/2}\cup(y^c_{>1/2}\cup\tilde{Y}^D)\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\tilde{Y}_{>1/2}\cap y^D\subseteq\tilde{X}\subseteq\tilde{Y}_{>1/2}\cup\tilde{Y}^D\cup y^c_{>1/2}\\ \tilde{Y}_{>1/2}\cap\tilde{Y}^D\subseteq\tilde{X}^D\subseteq\tilde{Y}_{>1/2}\cup\tilde{Y}^D\cup y^c_{>1/2}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\tilde{Y}^D_{<1/2}\subseteq\tilde{X}\subseteq\tilde{Y}_{>1/2}\cup y^c_{>1/2}\\ \tilde{Y}^D_{<1/2}\subseteq\tilde{X}^D\subseteq\tilde{Y}_{>1/2}\cup\tilde{Y}^c_{>1/2}\end{cases}.$$

Это выражение может быть получено из $(\tilde{X}\varphi\tilde{Y})$:

$$\begin{cases}\tilde{Y}\cap y^D\subseteq\tilde{X}\circ y\subseteq\tilde{Y}\cup\tilde{Y}^D\\ \tilde{Y}\cap\tilde{Y}^D\subseteq\tilde{X}^D\circ y\subseteq\tilde{Y}\cup\tilde{Y}^D\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\tilde{Y}_{>1/2}\cap\tilde{Y}^D\subseteq\tilde{X}\circ y\cup\tilde{X}\circ y^2\subseteq\tilde{Y}_{>1/2}\cup\tilde{Y}^D\cup y^c_{>1/2}\\ \tilde{Y}_{>1/2}\cap\tilde{Y}^D\subseteq\tilde{X}^D\circ y\cup\tilde{X}^D\circ y^D\subseteq\tilde{Y}_{>1/2}\cup\tilde{Y}^D\cup y^c_{>1/2}\end{cases},$$

т.к. $\tilde{Y}_{>1/2}\cap y^D\subseteq\tilde{Y}\cap y^D$; $\tilde{Y}\cup\tilde{Y}^D=\tilde{Y}_{>1/2}\cup\tilde{Y}^D$ и $y^c\subseteq y^c_{>1/2}$ (а тем более $\tilde{X}\circ y^c$ и $X^D\circ y^c$ являются подмножествами $y^c_{>1/2}$). Т.о., $(\tilde{X}\varphi(\tilde{Y}^D:\tilde{Y}))$.

$$(\tilde{X}\varphi(\tilde{Y}:\tilde{Y}^D))\Rightarrow\begin{cases}((y^c_{\le 1/2}\cup\tilde{Y}), \tilde{X}\circ(y\cup y^c_{\le1/2}), (y^c_{\le1/2}\cup\tilde{Y})^D)\\((y^c_{\le1/2}\cup\tilde{Y}), \tilde{X}\circ(y\cup y^c_{\le1/2}), (y^c_{\le1/2}\cup\tilde{Y})^D)\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}((y^c_{\le1/2}\cup\tilde{Y}), \tilde{X}, \tilde{Y}^D_{>1/2})\\((y^c_{\le1/2}\cup\tilde{Y}), \tilde{X}^D, \tilde{Y}^D_{>1/2})\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\tilde{Y}_{\ge1/2}\cap(y^c_{\le1/2}\cup\tilde{Y})\subseteq\tilde{X}\subseteq\tilde{Y}^D_{\ge1/2}\cup(y^c_{\le1/2}\cup\tilde{Y})\\ \tilde{Y}_{\ge1/2}\cap(y^c_{\le1/2}\cup\tilde{Y})\subseteq\tilde{X}^D\subseteq\tilde{Y}^D_{\ge1/2}\cup(y^c_{\le1/2}\cup\tilde{Y})\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{y}^{D}_{\geq 1/2} \cap \tilde{y} \subseteq \tilde{x} \subseteq \tilde{y} \cup \tilde{y}^{D}_{\geq 1/2} \cup y^{c}_{\leq 1/2} \\ y_{\geq 1/2} \cap \tilde{y} \subseteq \tilde{x}^{D} \subseteq \tilde{y} \cup \tilde{y}^{D}_{\geq 1/2} \cup y^{c}_{\leq 1/2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{y}_{\leq 1/2} \subseteq \tilde{x} \subseteq y^{D}_{\geq 1/2} \cup y^{c}_{\leq 1/2} \\ \tilde{y}_{\leq 1/2} \subseteq \tilde{x}^{D} \subseteq \tilde{y}^{D}_{\geq 1/2} \cup y^{c}_{\leq 1/2} \end{array} \right. .$$

Вернемся к выражению для $(\tilde{x} \varphi \tilde{y})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{y} \cap \tilde{y}^{D} \subseteq \tilde{x} \odot y \subseteq \tilde{y} \cup \tilde{y}^{D} \\ \tilde{y} \cap \tilde{y}^{D} \subseteq \tilde{x}^{D} \odot y \subseteq \tilde{y} \cup \tilde{y}^{D} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{y} \cap \tilde{y}^{D}_{\geq 1/2} \subseteq \tilde{x} \odot y \cup \tilde{x} \odot y^{c} \subseteq \tilde{y} \cup \tilde{y}^{D}_{\geq 1/2} \cup y^{c}_{\leq 1/2}, \\ \tilde{y} \cap \tilde{y}^{D}_{\geq 1/2} \subseteq \tilde{x}^{D} \odot y \cup \tilde{x}^{D} \odot y^{c} \subseteq \tilde{y} \cup \tilde{y}^{D}_{\geq 1/2} \cup y^{c}_{\leq 1/2} \end{array} \right.$$

т.к. $\tilde{y} \cap \tilde{y}^{D}_{\geq 1/2} \subseteq \tilde{y} \cap \tilde{y}^{D}$, $\tilde{y} \cup \tilde{y}^{D} = \tilde{y} \cup \tilde{y}^{D}_{\geq 1/2}$, $y^{c} \subseteq y^{c}_{\leq 1/2}$ (а, следовательно, и $\tilde{x} \odot \tilde{y}^{c} \subseteq y^{c}_{\leq 1/2}$, $\tilde{x}^{D} \odot y^{c} \subseteq y^{c}_{\leq 1/2}$).

Т.о., $(\tilde{x} \rho \tilde{y}) \Rightarrow (\tilde{x} \varphi (\tilde{y} : \tilde{y}^{D}))$.

На $\mathbb{L}^{\sim}$ можно определить отношение E такое, что $(\tilde{x} E \tilde{y})$, если $\tilde{x} = \tilde{y}$ или $\tilde{x}^{D} = \tilde{y}$, или $\tilde{x} = \tilde{y}^{D}$. E на расщепленной степени универсального множества является отношением эквивалентности. Каждый класс эквивалентности состоит из нечеткого подмножества и соответствующего дуального. Если $\tilde{x} = \tilde{x}^{D}$, то класс эквивалентности состоит из одного элемента. Проверим, что E в действительности является отношением эквивалентности. Рефлексивность и симметричность очевидны. Пусть $(\tilde{x} E \tilde{y})$ и $(\tilde{y} E \tilde{z})$ и пусть из первого следует, что $\tilde{x} = \tilde{y}^{D}$; если второе означает, что $\tilde{x} = \tilde{z}$, то $\tilde{x} = \tilde{z}^{D}$ (а $\tilde{x}^{D} = \tilde{z}$); если $\tilde{y}^{D} = \tilde{z}$ (или $\tilde{y} = \tilde{z}^{D}$), то $\tilde{x} = \tilde{z}$. Аналогично проверяются и другие случаи. Т.о.,

$$\{(\tilde{x} E \tilde{y}) \text{ и } (\tilde{y} E \tilde{z})\} \Rightarrow \{\tilde{x} = \tilde{z}, \text{ или } \tilde{x} = \tilde{z}^D, \text{ или } \tilde{x}^D = \tilde{z}\} \Rightarrow \{(\tilde{x} E \tilde{z})\}.$$

Транзитивность E доказана.

Подмножество $\mathcal{P}^{\sim}(\Omega)$, состоящее из некоторого элемента и соответствующего дуального, будем называть дуальной парой. Согласно теореме 5, если один элемент дуальной пары более нечеткий, чем элемент другой дуальной пары, тогда любой элемент первой пары более нечеткий, чем любой элемент второй пары. Т.о., имеет смысл ввести определение нечеткости дуальной пары.

Определение 2. Пусть $\mathcal{L}$ – множество дуальных пар с компонентами из $\mathcal{P}^{\sim}(\Omega)$.

Определим на $\mathcal{L}$ отношение Φ такое, что если для $u^{\sim}$ и $v^{\sim} \in \mathcal{L}$ $(u^{\sim} \Phi v^{\sim})$, то $(\tilde{x} \Phi \tilde{y})$ для $\forall \tilde{x} \in u^{\sim}$ и $\forall \tilde{y} \in v^{\sim}$. Если $(u^{\sim} \Phi v^{\sim})$, то будем говорить, что дуальная пара $u^{\sim}$ более нечеткая, чем пара $v^{\sim}$.

Теорема 7. Отношение Φ на множестве $\mathcal{L}$ дуальных пар, компоненты которых принадлежат $\mathcal{P}^{\sim}(\Omega)$, является частичным порядком.

Доказательство. Мы должны показать, что Φ рефлексивно, антисимметрично, транзитивно.

(I) Рефлексивность означает $(u^{\sim} \Phi u^{\sim})$; рассмотрим элемент $\tilde{x} \in u^{\sim}$, т.к. $(\tilde{x} \Phi \tilde{x})$, то $(u^{\sim} \Phi u^{\sim})$.

(2) Транзитивность означает, что $(u^{\sim} \Phi v^{\sim})$ и $(v^{\sim} \Phi w^{\sim}) \Rightarrow$ $\Rightarrow (u^{\sim} \Phi w^{\sim})$. $(u^{\sim} \Phi v^{\sim})$ означает $(\tilde{x} \Phi \tilde{y})$ для всех $\tilde{x} \in u^{\sim}$ и всех $\tilde{y} \in v^{\sim}$; $(v^{\sim} \Phi w^{\sim})$ означает $(\tilde{y} \Phi \tilde{z})$ для всех $\tilde{y} \in v^{\sim}$ и $\tilde{z} \in w^{\sim}$. Согласно

теореме 2 $(\tilde{X}\varphi\tilde{Y})$ и $(\tilde{Y}\varphi\tilde{Z}) \Longrightarrow (\tilde{X}\varphi\tilde{Z})$, следовательно, $(u^{\sim}\Phi w^{\sim})$.

(3) Антисимметричность означает $(u^{\sim}\Phi v^{\sim})$ и $(v^{\sim}\Phi u^{\sim}) \Longrightarrow u^{\sim}=v^{\sim}$.

Имеем:

$(u^{\sim}\Phi v^{\sim}) \Longrightarrow$ если $\tilde{X}\in u^{\sim}$ и $\tilde{Y}\in v^{\sim}$ то $(\tilde{X}\varphi\tilde{Y})$,
$(v^{\sim}\Phi u^{\sim}) \Longrightarrow$ если $\tilde{X}\in u^{\sim}$ и $\tilde{Y}\in v$, то $(\tilde{Y}\varphi\tilde{X})$.

Согласно теореме I будем иметь $(\tilde{X}f\tilde{Y})$ и $(\tilde{Y}f\tilde{X})$, что означает или $\tilde{X}=\tilde{Y}$, или $\tilde{X}=\tilde{Y}^{D}$ /6/; следовательно, $u^{\sim}=v^{\sim}$.

Поступила I4.П.I990

Проблемная лаборатория физической кибернетики

Литература

I. Т.Гачечиладзе, Т.Манджапарашвили. О нечетких множествах. Труды ТГУ, сер. киб.и прикл. мат.,279, № 9, 235,I988.

2. Г.Биркгоф. Теория решеток. М., I984.

3. A.De Luca, S.Termini. J.Math. Anal.Appl. 40, 373 (1972).

4. A.De Luca, S.Termini. Inf. and Control, 24, 55 (1974).

5. R.R.Yager. Inf. and Control, 44, 236 (1980).

ეროვნული ბიბლიოთეკა

თ. გაჩეჩილაძე, თ. მანჯაფარაშვილი

ᲓᲣᲐᲚᲣᲠᲘ ᲔᲚᲔᲛᲔᲜᲢᲘ ᲓᲐ ᲐᲠᲐᲛᲙᲐᲤᲘᲝᲝᲑᲐ

რეზიუმე

არამკაფიო ქვესიმრავლეთა მესერში შემოტანილია დუალური ელემენტის ცნება, რომლის საფუძველზე განხილულია მიმართება: "X არანაკლებ არამკაფიოა ვიდრე Y", შესწავლილია ამ მიმართების თვისებები.

T.Gachechiladze, T.Manjaparashvili

THE DUAL ELEMENT AND FUZZINERS

Summary

The notion of dual element is introduced into the lattice of fuzzy subsets. On the basis of this notion the relationship "X is no less fuzzy than Y" is considered. The properties of this relationship are studied.

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

СОДЕРЖАНИЕ

ეროვნული ბიბლიოთეკა

შინაარსი

ეროვნული ბიბლიოთეკა

CONTENTS

ეროვნული
ბიბლიოთეკა

Редактор издательства Л.Абуашвили
Подписано в печать 5.II.90
Бумага 60 х 84
Усл.печ.л. 7,75 Уч.-издат.л. 4,4
Тираж 300 Заказ 615
Цена 90 коп.
Издательство Тбилисского университета,
380028, Тбилиси, пр. И.Чавчавадзе, I4.
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის გამზირი, 14.
Типография Тбилисского университета,
380028, Тбилиси, пр. И.Чавчавадзе, I.
თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,
თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის გამზირი, 1.

მ. 3'/15

ეროვნული
ბიბლიოთეკა