თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

278

ISSN 0376—2637

მათემატიკა ● მექანიკა ● ასტრონომია
МАТЕМАТИКА ● МЕХАНИКА ● АСТРОНОМИЯ
MATHEMATICS ● MECHANICS ● ASTRONOMY

24

თბილისი Тбилиси Tbilisi
1988

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
Издательство Тбилисского университета
TBILISI UNIVERSITY PRESS

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

მათემატიკა. მექანიკა. ასტრონომია
MATHEMATICS. MECHANICS. ASTRONOMY

თბილისი 1988 TBILISI

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

278

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. АСТРОНОМИЯ

Тбилиси 1988

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988

О ЧИСЛЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЧИСЕЛ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ ТИПОВ $(-3,7,\chi)$, $(-3,11,\chi)$ и $(-13,3,\chi)$

Р.Ш.Гонгадзе

1. В настоящей статье методом работы /1/ построены базисы пространств параболических форм типов $(-3,7,\chi)$, $(-3,11,\chi)$ и $(-13,3,\chi)$. Далее, получены формулы для числа представлений натуральных чисел квадратичными формами соответствующих типов.

Пусть

$$Q(x)=Q(x_1,x_2,\ldots,x_f)=\sum_{1\leq r\leq s\leq f} b_{rs}x_r x_s$$

– положительная квадратичная форма от f (f – четное) переменных с целыми коэффициентами b_{rs}; далее, пусть D – определитель квадратичной формы

$$2Q(x)=\sum_{r,s=1}^{f} a_{rs}x_r x_s \quad (a_{rr}=2b_{rr};\ a_{rs}=a_{sr}=b_{rs})$$

A_{rs} – алгебраические дополнения элементов a_{rs} в D; Δ – дискриминант формы $Q(x)$, т.е. $\Delta = (-1)^{f/2} D$; $N = \frac{D}{\delta}$ – ступень формы $Q(x)$, здесь $\delta = о.н.д. \left(\frac{A_{11}}{2}, \dots, \frac{A_{ff}}{2}, \dots, A_{rs}, \dots \right)$; $\chi(n)$ – характер формы $Q(x)$, т.е. $\chi(n) = \left(\frac{\Delta}{n}\right)$ при $n>0$ и $\chi(n) = (-1)^{f/2}\chi(-n)$ при $n<0$ ($\left(\frac{\Delta}{n}\right)$ обозначает символ Кронекера). Следуя Э.Гекке (/2/, с.846), будем говорить, что $Q(x)$ является квадратичной формой типа $\left(-\frac{f}{2}, N, \chi\right)$. Пусть, наконец, $P_\nu(x) = P_\nu(x_1, x_2, \dots, x_f)$ – шаровая функция ν-го порядка относительно квадратичной формы $Q(x)$.

Мы будем пользоваться следующими результатами:

<u>Лемма I</u> (/2/, с.846). При заданных N и f существует лишь конечное число дискриминантов квадратичных форм. Они являются делителями N^f.

<u>Лемма 2</u> (/2/, с.855). Пусть $Q(x)$ – квадратичная форма типа $\left(-\frac{f}{2}, N, \chi\right)$ и $P_\nu(x)$ – отвечающая ей шаровая функция. Тогда обобщенный f – кратный тэта-ряд

$$\vartheta(\tau, P_\nu(x), Q(x)) = \sum_{x_1, \dots, x_f = -\infty}^{\infty} P_\nu(x) z^{Q(x)} \quad \text{при } \nu > 0 \qquad (\mathrm{I})$$

является параболической формой типа $\left(-\left(\frac{f}{2}+\nu\right), N, \chi\right)$

($z = \exp 2\pi i\tau$, $\operatorname{Im}\tau > 0$).

Лемма 3(/3/,с.65). Однородные полиномы ν-той степени от f переменных

$$\varphi_{\underbrace{r\ldots r}_{\nu\ \text{раз}}} = x_r^{\nu} + \sum_{1\le h\le \frac{\nu}{2}} (-1)^h \frac{\left(\frac{f}{2}+\nu-h-2\right)!}{\left(\frac{f}{2}+\nu-2\right)!}\left(\frac{Q(x)}{D}\right)^h G_h$$

$$(r = 1, 2, \ldots, f),$$

где

$$G_h = \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-2h+1)}{h!}\cdot\left(\frac{A_{rr}}{2}\right)^h x_r^{\nu-2h}$$

и

$$\varphi_{\underbrace{r\ldots r}_{(\nu-2)\ \text{раза}}st} = x_r^{\nu-2} x_s x_t + \sum_{1\le h\le \frac{\nu}{2}} (-1)^h \frac{\left(\frac{f}{2}+\nu-h-2\right)!}{\left(\frac{f}{2}+\nu-2\right)!}\left(\frac{Q(x)}{D}\right)^h G_h'$$

$$(r, s, t = 1, 2, \ldots, f),$$

где

$$G_1=(\nu-2)(\nu-3)\frac{A_{rr}}{2}x_r^{\nu-4}x_s x_t+(\nu-2)(A_{rs}x_t+A_{rt}x_s)x_r^{\nu-3}+A_{st}x_r^{\nu-2},$$

$$G_h=\frac{(\nu-2)(\nu-3)\cdots(\nu-2h-1)}{h!}\left(\frac{A_{rr}}{2}\right)^h x_r^{\nu-2h-2}x_s x_t+$$

$$+\frac{(\nu-2)(\nu-3)\cdots(\nu-2h)}{(h-1)!}\left(\frac{A_{rr}}{2}\right)^{h-1}(A_{rs}x_t+A_{rt}x_s)x_r^{\nu-2h-1}+$$

$$+\frac{(\nu-2)(\nu-3)\cdots(\nu-2h+1)}{(h-2)!}\left(\frac{A_{rr}}{2}\right)^{h-2}A_{rs}A_{rt}x_r^{\nu-2h}+$$

$$+\frac{(\nu-2)(\nu-3)\cdots(\nu-2h+1)}{(h-1)!}\left(\frac{A_{rr}}{2}\right)^{h-1}A_{st}x_r^{\nu-2h}\,,\quad \text{при } h\geq 2,$$

являются шаровыми функциями ν-го порядка относительно квадратичной формы $Q(x)$.

<u>Лемма 4</u> (/ 2/, с. 817 и 874). Пусть q – нечетное простое число $\equiv 3 \pmod 4$, F – положительная квадратичная форма типа $(-k, q, \chi)$. Тогда дискриминант формы F

$$\Delta=-q^{2\ell+1},\qquad 0\leq\ell\leq k-1. \tag{2}$$

Далее, если $\chi(-1)=(-1)^k$ и $k\geq 2$, то квадратичной форме F соответствует ряд Эйзенштейна

$$E(\tau,F)=1+\frac{1}{A_k(q)}\sum_{n=1}^{\infty}\Big((-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}q^{k-\frac{1}{2}}\sum_{d_1d_2=n}\chi(d_1)d_2^{k-1}+$$

$$+\sum_{d_1d_2=n}\chi(d_2)d_1^{k-1}\Big)z^{n} \qquad (3)$$

где $A_k(q)$ - так называемый постоянный член ряда Эйзенштейна.

Известно, что всякой квадратичной форме F соответствует тэта-ряд

$$\vartheta(\tau,F)=1+\sum_{n=1}^{\infty}r(n,F)z^{n}, \qquad (4)$$

где $r(n,F)$ обозначает число представлений натурального числа n формой F.

Лемма 5 (/2/, с.874). Пусть $2\nmid k$, $\chi(-1)=-1$, F - положительная квадратичная форма типа $(-k,q,\chi)$. Тогда разность

$$\vartheta(\tau,F)-E(\tau,F)$$

будет параболической формой типа $(-k,q,\chi)$.

Лемма 6 (/2/, с.846). Если $Q_1(x)$ и $Q_2(y)$ имеют одну и ту же ступень N и характеры $\chi_1(n)$ и $\chi_2(n)$ соответственно, то форма $F=Q_1(x)+Q_2(y)$ будет иметь ступень N и характер $\chi_1(n)\chi_2(n)$.

2.1. Переходим к построению базиса пространства параболических форм типа $(-3, 7, \chi)$. Согласно лемме 1 дискриминанты квадратичных форм типа $(-1, 7, \chi)$ надо искать среди нечетных степеней делителей числа 7^2.

Квадратичная форма

$$Q_1(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 \tag{5}$$

является единственной приведенной положительной бинарной квадратичной формой дискриминанта $\Delta = -7$. Она типа $(-1, 7, \chi)$, ибо для нее: $D = 7$, $A_{11} = 4$, $A_{22} = 2$, $A_{12} = -1$, т.е. $\delta = 1$, $N = 7$, $\chi(n) = \left(\frac{-7}{n}\right) = \left(\frac{n}{7}\right)$ при $n > 0$.

Следовательно, согласно лемме 3, получаем

$$\varphi_{11} = \frac{1}{7}(7x_1^2 - 4Q_1).$$

Уравнение $Q_1 = 1$ имеет 2 решения: $x_1 = \pm 1$, $x_2 = 0$. Таким образом,

$$\vartheta(\tau, Q_1) = 1 + 2z + \cdots \tag{6}$$

<u>Теорема 1.</u> Обобщенный бинарный тэта-ряд

$$\vartheta(\tau, \varphi_{11}, Q_1) = \frac{1}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{n=Q_1}(7x_1^2 - 4n)\right)z^n = \frac{6}{7}z + \cdots \tag{7}$$

является базисом пространства параболических форм типа $(-3,7,\chi)$, $\chi=\left(\frac{n}{7}\right)$ при $n>0$.

Доказательство. При помощи выписанных выше решений уравнения $Q_1=1$, убеждаемся в справедливости разложения (7).

Так как тэта-ряд (7) тождественно не исчезает, то он линейно независим. Следовательно, согласно лемме 2, утверждаемое справедливо, ибо известно (/2/, с.900), что максимальное число линейно независимых параболических форм типа $(-3,7,\chi)$ равно 1.

2.2. В /1/ (с.158) показано, что

$$\vartheta(\tau,\tilde{Q})=1+4z+\cdots, \tag{8}$$

где

$$\tilde{Q}=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_4^2+x_1x_3+x_2x_4 \tag{9}$$

– квадратичная форма типа $(-2,7,1)$ и дискриминанта $\Delta=7^2$.

Расомотрим, например представление чисел формой

$$F_1=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_4^2+x_1x_3+x_2x_4+x_5^2+x_5x_6+2x_6^2. \tag{10}$$

Согласно лемме 6, приняв во внимание (9), (5), (2) и (10), для F_1 получим: $k=3$, $D=7^3$, $\Delta=-7^3$, $\ell=1$, $N=q=7$, $\chi(n)=\left(\frac{n}{7}\right)$ при $n>0$, т.е. форма F_1 является квадратичной формой типа $(-3, 7, \chi)$.

Теорема 2.

$$r(n,F)=\frac{7}{8}\left(7\sum_{d_1d_2=n}\left(\frac{d_1}{7}\right)d_2^2-\sum_{d_1d_2=n}\left(\frac{d_2}{7}\right)d_2^2\right)+$$

$$+\frac{1}{8}\sum_{Q_1=n}(7x_1^2-4n).$$

Доказательство. Согласно (I0), (9), (5), (8) и (6), имеем

$$\vartheta(\tau,F_1)=\vartheta(\tau,\tilde{Q})\vartheta(\tau,Q_1)=1+6z+\cdots \tag{II}$$

Из (3) при $k=3$, $q=7$, $\ell=I$ следует

$$E(\tau,F_1)=1-\frac{7}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-7\sum_{d_1d_2=n}\left(\frac{d_1}{7}\right)d_2^2+\right. \tag{I2}$$

$$\left.+\sum_{d_1d_2=n}\left(\frac{d_2}{7}\right)d_2^2\right)z^n=1+\frac{21}{4}z+\cdots$$

ибо, как показал Гекке (/2/, с.828): $A_3(7)=-\frac{8}{7}$.

Согласно лемме 5, разность

$$\vartheta(\tau,F_1)-E(\tau,F_1)$$

является параболической формой типа $(-3,7,\chi)$. Следовательно, согласно теореме I, существует такое число c, что

$$\vartheta(\tau,F_1)-E(\tau,F_1)=c\,\vartheta(\tau,\varphi_1,Q_1).$$

Приравнивая коэффициенты при z в обеих частях этого равенства и принимая во внимание (II), (I2) и (7), получаем, что $c=\frac{7}{8}$.

Таким образом, доказано тождество

$$\vartheta(\tau,F_1)=E(\tau,F_1)+\frac{7}{8}\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_1).$$

Приравнивая коэффициенты при z^n в обеих частях этого тождества и принимая во внимание (4), (I2) и (7), получаем утверждаемое.

3.I. Переходим к построению базиса пространства параболических форм типа $(-3,\mathrm{II},\chi)$. Согласно лемме I, дискриминанты квадратичных форм типа $(-1,\mathrm{II},\chi)$ надо искать среди нечетных степеней делителей числа II^2.

Квадратичная форма

$$Q_2(x)=x_1^2+x_1x_2+3x_2^2 \qquad (I3)$$

является единственной приведенной положительной бинаркой .

квадратичной формой дискриминанта $\Delta = -11$. Она типа $(-1, 11, \chi)$, ибо для нее: $D=11$, $A_{11}=6$, $A_{22}=2$, $A_{12}=-1$, т.е. $\delta=1$, $N=11$, $\chi(n)=\left(\frac{-11}{n}\right)=\left(\frac{n}{11}\right)$ при $n>0$. Следовательно, согласно лемме 3, получаем

$$\varphi_{11}=\frac{1}{11}\left(11x_1^2-6Q_2\right).$$

Уравнение $Q_2=1$ имеет 2 решения: $x_1=\pm 1$, $x_2=0$.

Таким образом,

$$\vartheta(\tau, Q_2)=1+2z+\cdots \tag{14}$$

<u>Теорема 3</u>. Обобщенный бинарный тэта-ряд

$$\vartheta(\tau, \varphi_{11}, Q_2)= \tag{15}$$

$$=\frac{1}{11}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{n=Q_2}11x_1^2-6n\right)z^n=\frac{10}{11}z+\cdots$$

является базисом пространства параболических форм типа $(-3, 11, \chi)$, $\chi=\left(\frac{n}{11}\right)$ при $n>0$.

<u>Доказательство</u>. При помощи выписанных выше решений уравнения $Q_2=1$ убеждаемся в справедливости разложения (15). Далее, так как тэта-ряд (15) тождественно не исчезает, то он

линейно независимы. Следовательно согласно лемме 2, утверждаемое справедливо, ибо известно (/2/, с.900), что максимальное число линейно независимых параболических форм типа $(-3, 11, \chi)$ равно 1.

3.2. Рассмотрим, например, представление чисел формой

$$F_2 = Q_3(x_1, x_2, x_3, x_4) + Q_2(x_5, x_6), \tag{16}$$

где Q_2 определена формулой (13), а

$$Q_3 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_3 + \tag{17}$$

$$+ x_1x_4 + x_2x_3 - 2x_2x_4.$$

Q_3 является квадратичной формой типа $(-2, 11, 1)$ и дискриминанта 11^2.

Согласно лемме 6, приняв во внимание (16), (17), (13) и (2), для F_2 получаем: $k=3$, $D=11^3$, $\Delta=-11^3$, $\ell=1$, $N=q=11$, $\chi=\left(\frac{n}{11}\right)$ при $n>0$, т.е. форма F_2 является квадратичной формой типа $(-3, 11, \chi)$.

<u>Теорема 4</u>.

$$r(n, F_2) = \frac{1}{3}\left(11\sum_{d_1d_2=n}\left(\frac{d_1}{11}\right)d_2^2 - \sum_{d_1d_2=n}\left(\frac{d_2}{11}\right)d_2^2\right) -$$

$$-\frac{2}{15}\sum_{n=Q_2} 11x_1^2 - 6n.$$

Доказательство. Э.Гекке (/2/, с.901) показал, что

$$\vartheta(\tau, Q_3) = 1 + 0\cdot z + 12 z^2 + \cdots \tag{18}$$

Согласно (16), (17), (18), (13) и (14) имеем

$$\vartheta(\tau, F_2) = \vartheta(\tau, Q_3)\vartheta(\tau, Q_2) = 1 + 2z + \cdots \tag{19}$$

Из (3), при $k=3$, $q=11$, $\ell=1$, следует, что

$$E(\tau, F_2) = 1 - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(-11\sum_{d_1 d_2 = n}\Bigl(\frac{d_1}{11}\Bigr)d_2^2 + \tag{20}$$

$$+\sum_{d_1 d_2 = n}\Bigl(\frac{d_2}{n}\Bigr)d_2^2\Bigr)z^n = 1 + \frac{10}{3}z + \cdots ,$$

ибо, как показал Гекке (/2/, с.828): $\mathcal{L}_3(11) = -3$.

Согласно лемме 5, разность

$$\vartheta(\tau, F_2) - E(\tau, F_2)$$

является параболической формой типа $(-3, 11, \chi)$. Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 2, получаем тождество

$$\vartheta(\tau, F_2) = E(\tau, F_2) - \frac{22}{15}\vartheta(\tau, \varphi_{11}, Q).$$

Отсюда следует утверждаемое.

4.1. Переходим к построению базиса пространства параболических форм типа (-13,3, χ). Согласно лемме 1, дискриминанты квадратичных форм типа (-1,3, χ) надо искать среди нечетных делителей числа 3^2.

19.02

Квадратичная форма

$$Q_4 = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \tag{21}$$

является единственной приведенной положительной бинарной квадратичной формой дискриминанта $\Delta = -3$. Она типа (-1, 3, χ), ибо для неё: $D=3$, $A_{11}=A_{22}=2$, $A_{12}=-1$, т.е. $\delta=1$, $N=3$, $\chi(n)=\left(\frac{-3}{n}\right)=\left(\frac{n}{3}\right)$.

Следовательно, согласно лемме 3, получаем

$$\varphi_{\underbrace{1\cdots 1}_{12\text{ раз}}} = \frac{1}{729}\left(729x_1^{2} - 4\cdot 729x_1^{10}Q_4 + 6\cdot 729x_1^{8}Q_4^2 - \right.$$
$$\left. - 112\cdot 27x_1^6Q_4^3 + 35\cdot 27x_1^4Q_4^4 - 108x_1^2Q_4^5 + 2Q_4^6\right) \tag{22}$$

Форма

$$Q_5 = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2 + x_3 x_4 + x_4^2 + x_5^2 + x_5 x_6 + x_6^2 \qquad (23)$$

является квадратичной формой типа $(-3, 3, \chi)$, ибо для нее:

$\mathcal{D} = 27,\ \Delta = -27,\ A_{11} = 18,\ A_{34} = -9,\ A_{13} = A_{14} = 0$, т.е.

$\delta = 9,\ N = 3,\ \chi(n) = \left(\frac{-27}{n}\right) = \left(\frac{n}{3}\right)$ при $n > 0$.

Следовательно, согласно лемме 3, получаем:

$$\varphi_{\underbrace{1\ldots 1}_{10,\, p=3}} = \frac{1}{891}\left(891 x_1^{10} - 2430 x_1^{8} Q_5 + 28\cdot 81 x_1^6 Q_5^2 - \right. \qquad (24)$$

$$\left. - 84\cdot 35 x_1^4 Q_5^3 + 105 x_1^2 Q_5^4 - 2 Q_5^5\right),$$

$$\psi_{\underbrace{1\ldots 134}_{8,\, p=3}} = \frac{1}{55\cdot 729}\left(55\cdot 729 x_1^8 x_3 x_4 + 1215 x_1^8 Q_5 - \right.$$

$$- 280\cdot 243 x_1^6 x_3 x_4 Q_5 + 15\cdot 28\cdot 81 x_1^4 x_3 x_4 Q_5^2 - 28\cdot 81 x_1^6 Q_5^2 + \qquad (25)$$

$$+ 45\cdot 28 x_1^4 Q_5^3 - 28\cdot 180 x_1^2 x_3 x_4 Q_5^3 - 6\cdot 35 x_1^2 Q_5^4 +$$

$$\left. + 11\cdot 5 x_3 x_4 Q_5^4 + 5 Q_5^5\right)$$

Уравнение

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = n \qquad (26)$$

1) при $n=1$ имеет 4 решения с $x_1=\pm 1$ и 2 решения с $x_1=0$;

2) при $n=2$ оно решений не имеет;

3) при $n=3$ имеет 2 решения с $x_1=\pm 2$ и 4 решения с $x_1=\pm 1$.

Таким образом,

$$\vartheta(\tau,Q_4)=1+6z+6z^3+\dots, \tag{27}$$

откуда

$$\vartheta(\tau,Q_5)=\vartheta^3(\tau,Q_4)=1+18z+108z^2+234z^3+\dots \tag{28}$$

Нетрудно проверить, что уравнение

$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2+x_3^2+x_3x_4+x_4^2+x_5^2+x_5x_6+x_6^2=n \tag{29}$$

1) при $n=1$ имеет 12 решений с $x_1=0,\ x_3x_4=0$; с $x_1=0,\ x_3x_4=-1$ 2 решения; 4 решения с $x_1=\pm 1,\ x_3x_4=0$;

2) при $n=2$ имеет 8 решений с $x_1^2 x_3x_4=-1$; 40 решений с $x_1=\pm 1,\ x_3x_4=0$; 16 решений с $x_1=0,\ x_3x_4=-1$ и 44 решения с $x_1=0,\ x_3x_4=0$;

3) при $n=3$ имеет 54 решения с $x_1=0,\ x_3x_4=0$; 24 решения с $x_1=0,\ x_3x_4=-1$; 100 решений с $x_1=\pm 1$,

$x_3 x_4 = 0$; 48 решений с $x_1 = \pm 1$, $x_3 x_4 = -1$; 2 решения с $x_1 = \pm 2$, $x_3 x_4 = 0$; 4 решения с $x_1 = 0$, $x_3 x_4 = -2$; 2 решения с $x_1 = 0$, $x_3 x_4 = 1$.

Теорема 5. Система обобщенных кратных тэта-рядов

$$\vartheta(\tau, \varphi_{\underbrace{1\ldots1}_{12\,раз}}, Q_4) = \frac{1}{729} \sum_{n=1}^{\infty} \Bigl(\sum_{n=Q_4} 729 x_1^{12} - 2916 x_1^{10} n + 4374 x_1^{8} n^2 - 3024 x_1^6 n^3 + 945 x_1^4 n^4 - 108 x_1^2 n^5 + 2n^6 \Bigr) z^n = \frac{4}{243} z + 12 z^3 + \ldots, \tag{30}$$

$$\vartheta(\tau, \varphi_{\underbrace{1\ldots1}_{10\,раз}}, Q_5) = \frac{1}{891} \sum_{n=1}^{\infty} \Bigl(\sum_{n=Q_5} 891 x_1^{10} - 2430 x_1^{8} n + 2268 x_1^6 n^2 - 840 x_1^4 n^3 + 105 x_1^2 n^4 - 2n^5 \Bigr) z^n = -\frac{20}{297} z - \frac{48}{11} z^2 - \frac{1116}{11} z^3 + \ldots, \tag{31}$$

$$\vartheta(\tau, \varphi_{\underbrace{1\ldots1}_{8\,раз},3,4}, Q_5) = \frac{1}{40095} \sum_{n=1}^{\infty} \Bigl(\sum_{n=Q_5} 40095 x_1^{8} x_3 x_4 + 1215 x_1^8 n - 68040 x_1^8 x_3 x_4 n - 2268 x_1^6 n^2 + 34020 x_1^4 x_3 x_4 n^2 + 1260 x_1^4 n^3 - 5040 x_1^2 x_3 x_4 n^3 - 210 x_1^2 n^4 + 105 x_3 x_4 n^4 + 5 n^5 \Bigr) z^n = -\frac{4}{1215} z - \frac{24}{55} z^2 - \frac{588}{55} z^3 + \ldots, \tag{32}$$

где Q_4, Q_5, $\varphi_{\underbrace{1\cdots1}_{12\,раз}}$, $\varphi_{\underbrace{1\cdots1}_{10\,раз}}$ и $\varphi_{\underbrace{1\cdots1}_{8\,раз}34}$ определены формулами (21), (23), (22), (24), (25) соответственно, является базисом пространства параболических форм типа $(-13, 3, \chi)$, $\chi = \left(\frac{n}{3}\right)$ при $n>0$.

Доказательство. Проделав простые вычисления при помощи выписанных выше решений уравнений (26) и (29), убеждаемся в справедливости разложений (30) - (32). Тэта-ряды (30)-(32) линейно независимы, ибо определитель 3-го порядка, элементами которого являются их коэффициенты, отличен от нуля. Следовательно, согласно лемме 2, утверждаемое справедливо, ибо известно (/2/, с.800), что максимальное число линейно независимых параболических форм типа (-13, 3, χ) равно 3.

4.2. Рассмотрим, например, представление чисел формой

$$F_3 = Q_4(x_1, x_2) + Q_4(x_3, x_4) + \cdots + Q_4(x_{25}, x_{26}), \qquad (33)$$

где Q_4 определена формулой (21).

Согласно лемме 6, приняв во внимание (33), (21) и (2), для F_3 получим: $k = 13$, $D = 3^{13}$, $\Delta = -3^{13}$, $\ell = 1$, $N = q = 3$, $\chi(n) = \left(\frac{n}{3}\right)$ при $n>0$, т.е. F_3 является квадратичной формой типа (-13,3, χ).

Теорема 6.

$$r(n,F_3)=\frac{3}{55601}\left(3^{11}\sum_{d_1d_2=n}\left(\frac{d_1}{3}\right)d_2^{12}+\sum_{d_1d_2=n}\left(\frac{d_2}{3}\right)d_2^{12}\right)-$$

$$-\frac{70824}{55601}\left(\sum_{n=Q_4}729x_1^{12}-2916x_1^{10}n+4374x_1^{8}n^{2}-3024x_1^{6}n^{3}+945x_1^{4}n^{4}-\right.$$

$$\left.-108x_1^{2}n^{5}+2n^{6}\right)-\frac{135200}{55601}\left(\sum_{n=Q_5}891x_1^{10}-2430x_1^{8}n+2268x_1^{6}n^{2}-\right.$$

$$\left.-840x_1^{4}n^{3}+105x_1^{2}n^{4}-2n^{5}\right)+\frac{21632}{55601}\left(\sum_{n=Q_5}40095x_1^{8}x_3x_4+\right.$$

$$+1215x_1^{8}n-68040x_1^{6}x_3x_4n-2268x_1^{6}n^{2}+34020x_1^{4}x_3x_4n^{2}+$$

$$\left.+1260x_1^{4}n^{3}-5040x_1^{2}x_3x_4n^{3}-210x_1^{2}n^{4}+105x_3x_4n^{4}+5n^{5}\right).$$

Доказательство. Согласно (21), (27) и (33) имеем

$$\vartheta(\tau,F_3)=\vartheta^{13}(\tau,Q_4)=1+78z+2808z^{2}+61854z^{3}+\ldots$$

Из (3), при $k=13,\ q=3,\ \ell=1$, следует, что

$$E(\tau,F_3)=1+\frac{3}{55601}\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^{11}\sum_{d_1d_2=n}\left(\frac{d_1}{3}\right)d_2^{12}-\sum_{d_1d_2=n}\left(\frac{d_2}{3}\right)d_1^{12}\right)z^n=$$

$$=1+\frac{2190}{55601}z+\frac{8943480}{55601}z^2+\frac{1162261470}{55601}z^3+\ldots\,;$$

ибо нетрудно проверить, что, согласно формуле (47) из (/2/, с.827): $\mathcal{A}_{13}(3)=\frac{55601}{3}$.

Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 2, согласно лемме 5 и теореме 5, получаем тождество

$$\vartheta(\tau,F_3)=E(\tau,F_3)-\frac{2^3\cdot 3^2\cdot 1067}{55601}\vartheta(\tau,\varphi_{\underbrace{1\cdots 1}_{12\,раз}},Q_4)-$$

$$-\frac{2^5\cdot 3^4\cdot 11\cdot 4225}{55601}\vartheta(\tau,\varphi_{\underbrace{1\cdots 1}_{10\,раз}},Q_5)+$$

$$+\frac{2^7\cdot 3^6\cdot 55\cdot 469}{55601}\vartheta(\tau,\varphi_{\underbrace{1\cdots 1}_{8\,раз}134},Q_5).$$

Отсюда следует утверждаемое.

Поступила 16.IV.1987

Кафедра
математики физического
факультета ТГУ

Литература

1. Г.А.Ломадзе. Труды Тбилисского математ.ин-та АН ГССР, 1974, т.45, 146-161.

2. E. Hecke. Mathematische Werke. Zweite Auflage. Gottingen, 1970. 965 S.

3. Г.А.Ломадзе. Труды Тбилисского математ. ин-та АН ГССР, 1977, т.57, 63-81.

რ. გონგაძე

რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ $(-3,7,\chi)$, $(-3,11,\chi)$ და $(-13,3,\chi)$ ტიპის კვადრატული ფორმებით

რეზიუმე

აგებულია $(-3,7,\chi)$, $(-3,11,\chi)$ და $(-13,3,\chi)$ ტიპის პარაბოლურ ფორმათა სივრცეების ბაზისი განზოგადებული ჯერადი თეტა-მწკრივების სახით. აგებული ბაზისების საშუალებით მიღებულია ფორმულები ნატურალური რიცხვის $(-3,7,\chi)$, $(-3,11,\chi)$ და $(-13,3,\chi)$ ტიპის თითო-თითო კვადრატული ფორმით წარმოდგენათა რაოდენობისათვის.

R.Gongadze

ON THE NUMBER OF REPRESENTATIONS OF INTEGERS BY QUADRATIC FORMS OF TYPES $(-3,7,\chi)$, $(-3,11,\chi)$ and AND $(-13,3,\chi)$

Summary

Bases of cusp forms of types $(-3,7,\chi)$, $(-3,11,\chi)$ and $(-13,3,\chi)$ are constructed in the form of generalized multiple theta-series. With the help of constructed bases formulae for the number of representations of integers by one quadratic form of type $(-3,7,\chi)$, one of type $(-3,11,\chi)$ and one of type $(-13,3,\chi)$ are derived.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988

УДК 517.564-511.46

О РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВ ОБОБЩЕННЫХ КВАТЕРНАРНЫХ ТЭТА-РЯДОВ. I

К.Ш.Шавгулидзе

1. Пусть

$$Q(x)=Q(x_1,\ldots,x_r)=\sum_{1\le i\le j\le r} b_{ij}x_ix_j$$

– положительная квадратичная форма от r (r – четное) переменных с целыми коэффициентами b_{ij}. Этой форме сопоставим симметрическую матрицу A порядка r с элементами $a_{ii}=2b_{ii}$ и $a_{ij}=a_{ji}=b_{ij}$ при $i<j$. Пусть A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в $D=|A|$.

Далее, пусть $P(x)=P(x_1,\ldots,x_r)$ – шаровая функция ν-го порядка относительно квадратичной формы $Q(x)$ и

$\mathcal{P}(\nu,Q)$ – пространство функций $P(x)$.

Наконец, пусть

$$\vartheta(\tau,P,Q)=\sum_{n\in Z^r}P(n)e^{2\pi i Q(n)\tau}$$

– обобщенный r – кратный тэта-ряд и $M(\nu,Q)$ – пространство этих тэта-рядов.

Ф.Гудинг /1/ вычислил размерность пространства $M(\nu,Q)$ в случае приведенных бинарных квадратичных форм.

В работах /2,3/ мы установили верхние границы размерностей некоторых пространств обобщенных кватернарных тэта-рядов.

В настоящем сообщении вычисляются размерности пространств обобщенных тэта-рядов с шаровыми функциями второго порядка относительно некоторых приведенных положительных кватернарных квадратичных форм.

Э.Гекке (/4/, с.853) показал, что r^2 однородных квадратичных полиномов от r переменных

$$\varphi_{ij}=x_i x_j-\frac{A_{ij}}{rD}2Q(x) \qquad (1)$$

$$(i,j=1,\ldots,r)$$

являются шаровыми функциями второго порядка относительно квадратичной формы $Q(x)$.

2. Рассмотрим квадратичную форму

$$Q_1(x) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2,$$

где $0 < b_{11} < b_{22} < b_{33} < b_{44}$. В (/2/, с.48) мы показали, что $\dim \mathcal{M}(\nu, Q_1) \leq \binom{\frac{\nu}{2}+2}{2}$, отсюда при $\nu=2$ следует, что $\dim \mathcal{M}(2, Q_1) \leq 3$. Теперь покажем, что $\dim \mathcal{M}(2, Q_1) = 3$.

Для квадратичной формы Q_1 имеем: $D = 16 b_{11} b_{22} b_{33} b_{44}$, $A_{11} = 8 b_{22} b_{33} b_{44}$, $A_{22} = 8 b_{11} b_{33} b_{44}$, $A_{33} = 8 b_{11} b_{22} b_{44}$.
Следовательно, согласно (1)

$$\varphi_{11} = x_1^2 - \frac{1}{4 b_{11}} Q_1, \tag{2}$$

$$\varphi_{22} = x_2^2 - \frac{1}{4 b_{22}} Q_1, \tag{3}$$

$$\varphi_{33} = x_3^2 - \frac{1}{4 b_{33}} Q_1. \tag{4}$$

Уравнение

$$b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 = n$$

1) при $n = b_{11}$ имеет 2 решения:

$$x_1 = \pm 1, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0;$$

2) при $n = b_{22}$ имеет

а) 2 решения, если $b_{22} \neq b_{11} m^2$ *:

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_2 = \pm 1;$$

б) 4 решения, если $b_{22} = b_{11} m^2$:

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_2 = \pm 1,$$

$$x_1 = \pm m, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0;$$

3) при $n = b_{33}$ имеет

а) 2 решения, если $b_{33} \neq b_{11} \ell^2$, $b_{33} \neq b_{22} p^2$ и $b_{33} \neq b_{11} u^2 + b_{22} v^2$:

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \pm 1;$$

б) 4 решения, если $b_{33} = b_{11} \ell^2$, но $b_{33} \neq b_{22} p^2$ и $b_{33} \neq b_{11} u^2 + b_{22} v^2$:

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \pm 1,$$

$$x_1 = \pm \ell, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0;$$

в) 4 решения, если $b_{33} = b_{22} p^2$, но $b_{33} \neq b_{11} \ell^2$ и $b_{33} \neq b_{11} u^2 + b_{22} v^2$:

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \pm 1,$$

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_2 = \pm p;$$

---

* Здесь и ниже m, ℓ, p, u, v – целые числа.

г) 6 решений, если $b_{33}=b_{11}l^2$ и $b_{33}=b_{22}p^2$, но $b_{33}\neq b_{11}u^2+b_{22}v^2$:

$$x_1=x_2=x_4=0, \quad x_3=\pm 1,$$
$$x_1=\pm l, \quad x_2=x_3=x_4=0,$$
$$x_1=x_3=x_4=0, \quad x_2=\pm p;$$

д) 6 решений, если $b_{33}=b_{11}u^2+b_{22}v^2$, но $b_{33}\neq b_{11}l^2$ и $b_{33}\neq b_{22}p^2$:

$$x_1=x_2=x_4=0, \quad x_3=\pm 1,$$
$$x_1=\pm u, \quad x_2=\pm v, \quad x_3=x_4=0,$$
$$x_1=\pm u, \quad x_2=\mp v, \quad x_3=x_4=0;$$

е) 8 решений, если $b_{33}=b_{11}l^2$ и $b_{33}=b_{11}u^2+b_{22}v^2$, но $b_{33}\neq b_{22}p^2$:

$$x_1=x_2=x_4=0, \quad x_3=\pm 1,$$
$$x_1=\pm l, \quad x_2=x_3=x_4=0,$$
$$x_1=\pm u, \quad x_2=\pm v, \quad x_3=x_4=0,$$
$$x_1=\pm u, \quad x_2=\mp v, \quad x_3=x_4=0;$$

ж) 8 решений, если $b_{33}=b_{22}p^2$ и $b_{33}=b_{11}u^2+b_{22}v^2$,

но $b_{33}\neq b_{11}l^2$:

$$x_1=x_2=x_4=0, \quad x_3=\pm 1,$$

$$x_1=x_3=x_4=0, \quad x_2=\pm p,$$

$$x_1=\pm u, \quad x_2=\pm v, \quad x_3=x_4=0,$$

$$x_1=\pm u, \quad x_2=\mp v, \quad x_3=x_4=0;$$

з) 10 решений, если $b_{33}=b_{11}l^2$, $b_{33}=b_{22}p^2$ и

$b_{33}=b_{11}u^2+b_{22}v^2$:

$$x_1=x_2=x_4=0, \quad x_3=\pm 1,$$

$$x_1=\pm l, \quad x_2=x_3=x_4=0,$$

$$x_1=x_3=x_4=0, \quad x_2=\pm p,$$

$$x_1=\pm u, \quad x_2=\pm v, \quad x_3=x_4=0,$$

$$x_1=\pm u, \quad x_2=\mp v, \quad x_3=x_4=0.$$

Проделывая простые вычисления, при помощи этих решений, согласно (2)-(4), в том случае, когда $b_{22}\neq b_{11}m^2$,

$b_{33}\neq b_{11}l^2$, $b_{33}\neq b_{22}p^2$ и $b_{33}\neq b_{11}u^2+b_{22}v^2$,

получаем разложения:

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{Q_2=n} x_1^2-\frac{1}{4b_{11}}Q_1\right)z^n=\left(2-\frac{b_{11}}{2b_{11}}\right)z^{b_{11}}+$$

$$+\dots+\left(-\frac{b_{22}}{2b_{11}}\right)z^{b_{22}}+\dots+\left(-\frac{b_{33}}{2b_{11}}\right)z^{b_{33}}+\dots,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{Q_1=n} x_2^2-\frac{1}{4b_{22}}Q_1\right)z^n=\left(-\frac{b_{11}}{2b_{22}}\right)z^{b_{11}}+$$

$$+\dots+\left(2-\frac{b_{22}}{2b_{22}}\right)z^{b_{22}}+\dots+\left(-\frac{b_{33}}{2b_{22}}\right)z^{b_{33}}+\dots;$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{33},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{Q_2=n} x_3^2-\frac{1}{4b_{33}}Q_1\right)z^n=\left(-\frac{b_{11}}{2b_{33}}\right)z^{b_{11}}+\dots$$

$$\dots+\left(-\frac{b_{22}}{2b_{33}}\right)z^{b_{22}}+\dots+\left(2-\frac{b_{33}}{2b_{33}}\right)z^{b_{33}}+\dots$$

Эти обобщенные кватернарные тета-ряды линейно независимы, так как определитель 3-го порядка, элементами которого являются коэффициенты этих рядов при $z^{b_{11}}$, $z^{b_{22}}$, $z^{b_{33}}$, отличен от нуля.

Аналогично, в том случае, когда $b_{22}=b_{11}m^2$, но $b_{33}\neq b_{11}l^2$, $b_{33}\neq b_{22}p^2$ и $b_{33}\neq b_{11}u^2+b_{22}v^2$,

получаем:

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{Q_1=n} x_1^2-\frac{1}{4b_{11}}Q_1\right)z^n=\left(2-\frac{b_{11}}{2b_{11}}\right)z^{b_{11}}+$$

$$+\dots+\left(2m^2-\frac{b_{22}}{b_{11}}\right)z^{b_{22}}+\dots+\left(-\frac{b_{33}}{2b_{11}}\right)z^{b_{33}}+\dots;$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n} x_2^2-\frac{1}{4b_{22}}Q_1\Big)z^n=\Big(-\frac{b_{11}}{2b_{22}}\Big)z^{b_{11}}+$$

$$+\dots+\Big(2-\frac{b_{22}}{b_{22}}\Big)z^{b_{22}}+\dots+\Big(-\frac{b_{33}}{2b_{22}}\Big)z^{b_{33}}+\dots,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{33},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n} x_3^2-\frac{1}{4b_{33}}Q_1\Big)z^n=\Big(-\frac{b_{11}}{2b_{33}}\Big)z^{b_{11}}+$$

$$+\dots+\ -\frac{b_{22}}{b_{33}}z^{b_{22}}+\dots+\Big(2-\frac{b_{33}}{2b_{33}}\Big)z^{b_{33}}+\dots$$

Эти обобщенные кватернарные тэта-ряды так же, как и выше, линейно независимы.

Рассуждая аналогично, убеждаемся, что и в остальных 14 случаях тэта-ряды $\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_1)$, $\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_1)$ и $\vartheta(\tau,\varphi_{33},Q_1)$ линейно независимы. Выше же было сказано, что $\dim \mathcal{M}(2,Q_1)\leq 3$, следовательно, $\dim \mathcal{M}(2,Q_1)=3$.

Таким образом, доказана

Теорема I. $\dim \mathcal{M}(2,Q_1)=3$ и система обобщенных кватернарных тэта-рядов $\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_1)$, $\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_1)$ и $\vartheta(\tau,\varphi_{33},Q_1)$ является базисом пространства $\mathcal{M}(2,Q_1)$.

Рассмотрим теперь квадратичную форму

$$Q_2=b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}(x_3^2+x_4^2),$$

где $0<b_{11}<b_{22}<b_{33}$. В (/2/, с.51) мы показали, что $\dim \mathcal{M}(\nu,Q_2)\leq\frac{1}{4}\Big(\frac{\nu}{2}+1\Big)\Big(\frac{\nu}{2}+3\Big)$ при $\nu\equiv 2 \pmod 4$.

отсюда при $\nu = 2$ следует, что $\dim M(2,Q_2) \leq 2$.

Покажем, что $\dim M(2,Q_2) = 2$.

Для квадратичной формы Q_2 имеем: $D = 16\, b_{11} b_{22} b_{33}^2$, $A_{11} = 8 b_{22} b_{33}^2$, $A_{22} = 8 b_{11} b_{33}^2$. Следовательно, согласно (I),

$$\varphi_{11} = x_1^2 - \frac{1}{4b_{11}} Q_2 , \tag{5}$$

$$\varphi_{22} = x_2^2 - \frac{1}{4b_{22}} Q_2 . \tag{6}$$

Уравнение

$$b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33}(x_3^2 + x_4^2) = n$$

I) при $n = b_{11}$ имеет 2 решения:

$$x_1 = \pm 1, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0;$$

2) при $n = b_{22}$ имеет

а) 2 решения, если $b_{22} \neq b_{11} m^2$:

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_2 = \pm 1;$$

б) 4 решения, если $b_{22} = b_{11} m^2$:

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_2 = \pm 1;$$

$$x_1 = \pm m, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

Проделывая простые вычисления, при помощи этих решений, согласно (5) и (6), в случае, когда $b_{22} \neq b_{11} m^2$, получаем разложения:

$$\vartheta(\tau, \varphi_{11}, Q_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{Q_2 = n} x_1^2 - \frac{1}{4b_{11}} Q_2 \Big) z^n = \Big(2 - \frac{b_{11}}{2b_{11}}\Big) z^{b_{11}} + \ldots$$

$$\ldots + \Big(- \frac{b_{22}}{2b_{11}}\Big) z^{b_{22}} + \ldots ;$$

$$\vartheta(\tau, \varphi_{22}, Q_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{Q_2 = n} x_2^2 - \frac{1}{4b_{22}} Q_2 \Big) z^n = \Big(- \frac{b_{11}}{2b_{22}}\Big) z^{b_{11}} + \ldots$$

$$\ldots + \Big(2 - \frac{b_{22}}{2b_{22}}\Big) z^{b_{22}} + \ldots .$$

В случае, когда $b_{22} = b_{11} m^2$ аналогично получим:

$$\vartheta(\tau, \varphi_{11}, Q_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{Q_2 = n} x_1^2 - \frac{1}{4b_{11}} Q_2 \Big) z^n = \Big(2 - \frac{b_{11}}{2b_{11}}\Big) z^{b_{11}} + \ldots$$

$$\ldots + \Big(2m^2 - \frac{b_{22}}{b_{11}}\Big) z^{b_{22}} + \ldots ,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_2=n}x_2^2-\frac{1}{4b_{22}}Q_2\Big)z^n-\Big(-\frac{b_{11}}{2b_{22}}\Big)z^{b_{11}}+\dots$$

$$\dots+\Big(2-\frac{b_{22}}{b_{22}}\Big)z^{b_{22}}+\dots .$$

В обоих случаях обобщенные тэта-ряды $\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_2)$ и $\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_2)$ линейно независимы. Итак, доказана

<u>Теорема 2.</u> $\dim \mathcal{M}(2,Q_2)=2$ и система обобщенных кватернарных тэта-рядов $\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_2)$ и $\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_2)$ являются базисом пространства $\mathcal{M}(2,Q_2)$.

Таким же путем доказываются и следующие теоремы.

<u>Теорема 3.</u> Пусть

$$Q_3=b_{11}x_1^2+b_{22}(x_2^2+x_3^2)+b_{44}x_4^2,$$

где $0<b_{11}<b_{22}<b_{44}$. Тогда $\dim \mathcal{M}(2,Q_3)=2$ и система обобщенных кватернарных тэта-рядов

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_3)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_3=n}x_1^2-\frac{1}{4b_{11}}Q_3\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_3)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_3=n}x_2^2-\frac{1}{4b_{22}}Q_3\Big)z^n$$

является базисом пространства $\mathcal{M}(2, Q_3)$.

<u>Теорема 4</u>. Пусть

$$Q_4 = b_{11} x_1^2 + b_{22}(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2),$$

где $0 < b_{11} < b_{22}$. Тогда $\dim \mathcal{M}(2, Q_4) = 1$ и обобщенный тернарный тэта-ряд

$$\vartheta(\tau, \varphi_{11}, Q_4) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{Q_4 = n} x_1^2 - \frac{1}{4b_{11}} Q_4 \Big) z^n$$

является базисом пространства $\mathcal{M}(2, Q_4)$.

3. Рассмотрим теперь недиагональную квадратичную форму

$$Q_5 = b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{44} x_4^2 + b_{12} x_1 x_2 ,$$

где $|b_{12}| < b_{11} < b_{22} < b_{33} < b_{44}$. В (/3/, с. 51), мы показали, что $\dim \mathcal{M}(\nu, Q_5) \leq \left(\frac{\nu}{2} + 1\right)^2$. Следовательно, при $\nu = 2$ имеем: $\dim \mathcal{M}(2, Q_5) \leq 4$.

Теперь покажем, что $\dim \mathcal{M}(2, Q_5) = 4$.

Для квадратичной формы Q_5 имеем:

$$D=(4b_{11}b_{22}-b_{12}^2)\cdot 4b_{33}b_{44}, \quad A_{11}=8b_{22}b_{33}b_{44},$$

$$A_{22}=8b_{11}b_{33}b_{44}, \quad A_{33}=2(4b_{11}b_{22}-b_{12}^2)b_{44},$$

$$A_{44}=2(4b_{11}b_{22}-b_{12}^2)b_{33}.$$

Следовательно, согласно (I),

$$\varphi_{11}=x_1^2-\frac{b_{22}}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}Q_5, \tag{7}$$

$$\varphi_{22}=x_2^2-\frac{b_{11}}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}Q_5, \tag{8}$$

$$\varphi_{33}=x_3^2-\frac{1}{4b_{33}}Q_5, \tag{9}$$

$$\varphi_{44}=x_4^2-\frac{1}{4b_{44}}Q_5. \tag{10}$$

Уравнение

$$b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}x_3^2+b_{44}x_4^2+b_{12}x_1x_2=n$$

I) при $n=b_{11}$ имеет 2 решения:

$$x_1=\pm 1, \quad x_2=x_3=x_4=0;$$

2) при $n = b_{22}$ имеет

а) 2 решения, если $b_{22} \neq b_{11} m^2$:

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_2 = \pm 1;$$

б) 4 решения, если $b_{22} = b_{11} m^2$:

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_2 = \pm 1,$$

$$x_1 = \pm m, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0;$$

3) при $n = b_{33}$ имеет

а) 2 решения, если $b_{33} \neq b_{11} l^2$, $b_{33} \neq b_{22} P^2$,

$b_{33} \neq b_{11} u^2 + b_{22} v^2 + b_{12} u v$:

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \pm 1;$$

б) 4 решения, если $b_{33} = b_{11} l^2$, но $b_{33} \neq b_{22} P^2$ и

$b_{33} \neq b_{11} u^2 + b_{22} v^2 + b_{12} u v$:

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \pm 1,$$

$$x_1 = \pm l, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0;$$

в) 4 решения, если $b_{33} = b_{22} P^2$, но $b_{33} \neq b_{11} l^2$ и

$b_{33} \neq b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{12}uv$:

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \pm 1,$$

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_2 = \pm p;$$

г) 4 решения, если $b_{33} = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{12}uv$, но $b_{33} \neq b_{22}p^2$ и $b_{33} \neq b_{11}l^2$:

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \pm 1,$$

$$x_1 = \pm u, \quad x_2 = \pm v, \quad x_3 = x_4 = 0;$$

д) 6 решений, если $b_{33} = b_{11}l^2$ и $b_{33} = b_{22}p^2$, но $b_{33} \neq b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{12}uv$:

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \pm 1,$$

$$x_1 = \pm l, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0,$$

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_2 = \pm p;$$

е) 6 решений, если $b_{33} = b_{11}l^2$, $b_{33} = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{12}uv$, но $b_{33} \neq b_{22}p^2$:

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \pm 1,$$

$$x_1 = \pm l, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0,$$

$$x_1 = \pm u, \quad x_2 = \pm v, \quad x_3 = x_4 = 0;$$

ж) 6 решений, если $b_{33}=b_{22}p^2$, $b_{33}=b_{11}u^2+b_{22}v^2+b_{12}uv$,

но $b_{33}\neq b_{11}l^2$:

$$x_1=x_2=x_4=0,\quad x_3=\pm 1,$$

$$x_1=x_3=x_4=0,\quad x_2=\pm p,$$

$$x_1=\pm u,\quad x_2=\pm v,\quad x_3=x_4=0;$$

з) 8 решений, если $b_{33}=b_{11}l^2$, $b_{33}=b_{22}p^2$

и $b_{33}=b_{11}u^2+b_{22}v^2+b_{12}uv$:

$$x_1=x_2=x_4=0,\quad x_3=\pm 1,$$

$$x_1=\pm l,\quad x_2=x_3=x_4=0,$$

$$x_1=x_3=x_4=0,\quad x_2=\pm p,$$

$$x_1=\pm u,\quad x_2=\pm v,\quad x_3=x_4=0;$$

4) при $n=b_{44}$ могут представиться следующие варианты:

а) $b_{44}=b_{11}p^2$,

б) $b_{44}=b_{22}m^2$,

в) $b_{44}=b_{33}t^2$,

г) $b_{44}=b_{11}u^2+b_{22}v^2+b_{12}uv$.

д) $b_{44}=b_{11}w^2+b_{33}l^2$,

е) $b_{44}=b_{22}k^2+b_{33}q^2$.

ж) $b_{44}=b_{11}s^2+b_{22}d^2+b_{12}sd+b_{33}f^2$,

а также всевозможные сочетания из перечисленных семи или же ни один из перечисленных. Следовательно, при $n=b_{44}$ будем иметь всего $1+C_7^1+C_7^2+C_7^3+C_7^4+C_7^5+C_7^6+C_7^7=128$ вариантов.

Рассмотрим, например, случай, когда $b_{44}\neq b_{11}p^2$, $b_{44}\neq b_{22}m^2$, $b_{44}\neq b_{33}t^2$, $b_{44}\neq b_{11}u^2+b_{22}v^2+b_{12}uv$, $b_{44}\neq b_{11}w^2+b_{33}\ell^2$, $b_{44}\neq b_{11}k^2+b_{33}q^2$, $b_{44}\neq b_{11}s^2+b_{22}d^2+b_{12}sd+b_{33}f^2$.

В этом случае уравнение $Q_5=b_{44}$ имеет 2 решения:

$$x_1=x_2=x_3=0,$$

$$x_4=\pm 1.$$

Проделывая простые вычисления, согласно (7)-(10), в том случае, когда $b_{22}\neq b_{11}n^2$, $b_{33}\neq b_{11}\ell^2$, $b_{33}\neq b_{22}p^2$, $b_{33}\neq b_{11}u^2+b_{22}v^2+b_{12}uv$, получаем разложения:

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_5)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_5=n}x_1^2-\frac{b_{22}}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}Q_5\Big)z^n=\Big(2-\frac{2b_{11}b_{22}}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}\Big)z^{b_{11}}+\ldots\Big(-\frac{2b_{22}^2}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}\Big)z^{b_{22}}+\ldots+\Big(-\frac{2b_{22}b_{33}}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}\Big)z^{b_{33}}+\ldots+\Big(-\frac{2b_{22}b_{44}}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}\Big)z^{b_{44}}+\ldots,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_5)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_5=n} x_2^2-\frac{b_{11}}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}Q_5\Big)z^n=\frac{-2b_{11}^2}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}z^{b_{11}}+\dots+$$

$$+\Big(2-\frac{2b_{11}b_{22}}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}\Big)z^{b_{22}}+\dots+\Big(-\frac{2b_{11}b_{33}}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}\Big)z^{b_{33}}+\dots+\Big(-\frac{2b_{11}b_{44}}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}\Big)z^{b_{44}}+\dots$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{33},Q_5)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_5=n} x_3^2-\frac{1}{4b_{33}}Q_5\Big)z^n=\Big(-\frac{b_{11}}{2b_{33}}\Big)z^{b_{11}}+\dots+$$

$$+\Big(-\frac{b_{22}}{2b_{33}}\Big)z^{b_{22}}+\dots+\Big(2-\frac{b_{33}}{2b_{33}}\Big)z^{b_{33}}+\dots+\Big(-\frac{b_{44}}{2b_{33}}\Big)z^{b_{44}}+\dots,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{44},Q_5)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_5=n} x_4^2-\frac{1}{4b_{44}}Q_5\Big)z^n=\Big(-\frac{b_{11}}{2b_{44}}\Big)z^{b_{11}}+\dots+$$

$$+\Big(-\frac{b_{22}}{2b_{44}}\Big)z^{b_{22}}+\dots+\Big(-\frac{b_{33}}{2b_{44}}\Big)z^{b_{33}}+\dots+\Big(2-\frac{b_{44}}{2b_{44}}\Big)z^{b_{44}}+\dots .$$

Эти обобщенные кватернарные тэта-ряды линейно независимы, так как определитель 4-го порядка, элементами которого являются коэффициенты этих рядов при $z^{b_{11}}$, $z^{b_{22}}$, $z^{b_{33}}$, $z^{b_{44}}$, отличен от нуля. Рассуждая аналогично, убеждаемся, что и во всех остальных случаях эти тета-ряды линейно независимы. Выше было сказано, что $\dim M(2,Q_5)\leq 4$, следовательно, $\dim M(2,Q_5)=4$. Таким образом, доказана

<u>Теорема 5.</u> $\dim M(2,Q_5)=4$ и система обобщенных кватернарных тэта-рядов $\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_5)$, $\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_5)$, $\vartheta(\tau,\varphi_{33},Q_5)$, $\vartheta(\tau,\varphi_{44},Q_5)$ является базисом пространства $M(2,Q_5)$.

Таким же путем доказываются и следующие теоремы.

Теорема 6. Пусть

$$Q_6=b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}(x_3^2+x_4^2)+b_{12}x_1x_2,$$

где $0<|b_{12}|<b_{11}<b_{22}<b_{33}$. Тогда $\dim M(2,Q_6)=3$ и система обобщенных кватернарных тэта-рядов

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_6)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_6=n}x_1^2-\frac{b_{22}}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}Q_6\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_6)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_6=n}x_2^2-\frac{b_{11}}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}Q_6\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{33},Q_6)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_6=n}x_3^2-\frac{1}{4b_{33}}Q_6\Big)z^n$$

является базисом пространства $M(2,Q_6)$.

Теорема 7. Пусть

$$Q_7=b_{11}x_1^2+b_{22}(x_2^2+x_3^2)+b_{44}x_4^2+b_{12}x_1x_2,$$

где $0<|b_{12}|<b_{11}<b_{22}<b_{44}$. Тогда $\dim M(2,Q_7)=4$ и система обобщенных кватернарных тэта-рядов

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_7)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_7=n}x_1^2-\frac{b_{22}}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}Q_7\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_7)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_7=n}x_2^2-\frac{b_{11}}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}Q_7\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{44},Q_7)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_7=n}x_4^2-\frac{1}{4b_{44}}Q_7\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{12},Q_7)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_7=n}x_1x_2+\frac{b_{12}}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}Q_7\Big)z^n$$

является базисом пространства $\mathcal{M}(2,Q_7)$.

Теорема 8. Пусть

$$Q_8=b_{11}x_1^2+b_{22}(x_2^2+x_3^2+x_4^2)+b_{12}x_1x_2,$$

где $0<|b_{12}|<b_{11}<b_{22}$. Тогда $\dim\mathcal{M}(2,Q_8)=3$ и система обобщенных кватернарных тэта-рядов

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_8)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_8=n}x_1^2-\frac{b_{22}}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}Q_8\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_8)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_8=n}x_2^2-\frac{b_{11}}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}Q_8\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{12},Q_8)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_8=n}x_1x_2+\frac{b_{12}}{4b_{11}b_{22}-b_{12}^2}Q_8\Big)z^n$$

является базисом пространства $\mathcal{M}(2,Q_8)$.

Поступила 25.III.1987

Кафедра
алгебры и геометрии

Литература

1. F.Gooding, J. Number Theory, 9, 1977, 36-47.
2. К.Ш.Шавгулидзе. Труды ТГУ, Математика.Механика.Астрономия, 264, 1986, 42-56.
3. К.Ш.Шавгулидзе. Труды ТГУ, Математика.Механика.Астрономия, 278,1988, 46-65.
4. E.Hecke. Mathematische Werke. Gottingen, 1970.

ქ. შავგულიძე

განზოგადებულ ოთხცვლადიან თეტა-მწკრივთა სივრცეების განზომილების შესახებ. I

რეზიუმე

განხილულია ზოგიერთი დადებითი დაყვანილი ოთხცვლადიანი კვადრატული ფორმა, აგებულია ამ ფორმების მიმართ მეორე რიგის სფერული ფუნქციები, ნაპოვნია განზოგადებული ოთხცვლადიანი თეტა-მწკრივთა სივრცეების ბაზისები და დადგენილია ამ სივრცეების განზომილებები.

K.Shavgulidze

ON THE DIMENSION OF SPACES OF GENERALIZED QUATERNARY THETA -SERIES. I

Summary

Some positive reduced quaternary quadratic forms are considered. Spherical functions of second order with respect to these quadratic forms are constructed, the bases of the spaces of generalized quaternary theta-series are found and the dimension of these spaces is established.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988

УДК 517.564-511.46

О ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ РАЗМЕРНОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВ ОБОБЩЕННЫХ КВАТЕРНАРНЫХ ТЭТА-РЯДОВ. III

К.Ш.Шавгулидзе

Настоящее третье сообщение является продолжением первых двух /1,2/ и в нем сохраняются все прежние обозначения. Здесь рассмотрены некоторые приведенные недиагональные положительные кватернарные квадратичные формы $Q(x)$ и для этих форм найдены верхние границы размерностей пространств $\mathcal{M}(\nu,Q)$

§ 1. Рассмотрим квадратичную форму

$$Q_1(x) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 + b_{12}x_1x_2 ,$$

где $b_{11} < b_{22} < b_{33} < b_{44}$, $\quad |b_{12}| < b_{11}$.

Построим целые автоморфизмы U квадратичной формы $Q_1(x)$. Принимая во внимание условия, которым должны удовлетворять автоморфизмы квадратичных форм (/1/, с.30-32), и так как

$$b_{11}=Q_1(\pm1,0,0,0),$$
$$b_{22}=Q_1(0,\pm1,0,0),$$
$$b_{33}=Q_1(0,0,\pm1,0),$$
$$b_{44}=Q_1(0,0,0,\pm1),$$

то, нетрудно проверить, что целыми автоморфизмами квадратичной формы Q_1 будут:

$$U=\begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} \quad (e_i=\pm1,\ i=1,2,3), \tag{1}$$

и только они. Из этих 12 автоморфизмов в дальнейшем будем пользоваться лишь следующими:

$$U_1=\begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{bmatrix}, \qquad U_2=\begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

ибо, как это легко проверить, остальные являются произведениями этих последних.

Рассмотрим всевозможные полиномы $P_j(U_j X)$ $(j=1,\ldots,(\nu+1)^2)$, где $P_j \in \mathcal{P}(\nu, Q_1)$ – базисные шаровые функции ν -го порядка относительно квадратичной формы

Q_1 (/I/, с.29), а $U_j \in G$ – целые автоморфизмы той же квадратичной формы Q_1.

Из выражения (3) работы /I/ и (2) следует, что

$$P_h(U_1 X) = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} a_{kij}^{(h)} x_1^{\nu-k} x_2^{k-i} x_3^{i-j} (-x_4)^j =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j a_{kij}^{(h)} x_1^{\nu-k} x_2^{k-i} x_3^{i-j} x_4^j ,$$

$$P_h(U_2 X) = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} a_{kij}^{(h)} x_1^{\nu-k} x_2^{k-i} (-x_3)^{i-j} (-x_4)^j =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} (-1)^i a_{kij}^{(h)} x_1^{\nu-k} x_2^{k-i} x_3^{i-j} x_4^j .$$

Здесь использованы лишь автоморфизмы (2); легко убедиться, что для остальных автоморфизмов (1) имеем:

$$P_h(UX) = P_h(X) \quad \text{или} \quad P_h(U_1 X) \quad \text{или} \quad P_h(U_2 X).$$

Теперь следует выяснить – для каких P_h имеет место равенство

$$\sum_{U_m \in G} P_h(U_m X) = 0,$$

где U_m – какие-либо целые автоморфизмы из G.

Имеем:

$$P_h(X) + P_h(U_1 X) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} \left(1 + (-1)^j\right) a_{kij}^{(h)} x_1^{\nu-k} x_2^{k-i} x_3^{i-j} x_4^j ,$$

$$P_h(X)+P_h(U_2X)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\nu}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}\left(1+(-1)^i\right)a_{kij}^{(h)}x_1^{\nu-k}x_2^{k-i}x_3^{i-j}x_4^{j}.$$

Выясним, для каких P_h имеет место хоть одно из равенств

$$P_h(X)+P_h(U_1X)=0, \tag{3}$$

$$P_h(X)+P_h(U_2X)=0. \tag{4}$$

Равенство (3) будет иметь место тогда и только тогда, когда коэффициенты

$$\left(1+(-1)^j\right)a_{kij}^{(h)}=0 \tag{5}$$

для всех $a_{kij}^{(h)}$ $(0\le k\le\nu,\quad 0\le i\le k,\quad 0\le j\le i)$.

Учитывая строение базиса пространства шаровых функций (см./1/), достаточно показать справедливость (5) для последних $(\nu+1)^2$ коэффициентов от $a_{\nu-1\,0\,0}^{(h)}$ до $a_{\nu\nu\nu}^{(h)}$, т.е. когда

$k=\nu-1,\nu;\qquad i=0,1,\dots,k;\qquad j=0,1,\dots,i.$

Эти последние коэффициенты $a_{kij}^{(h)}$ все равны нулю, кроме одного, равного единице. Пусть $a_{kij}^{(h)}=1$ для некоторой тройки k,i,j, причем $\nu-1\le k\le\nu,\quad 0\le i\le k,$ $0\le j\le i$. Тогда, если j – нечетное, то

$(1+(-1)^j)\,a_{kij}^{(h)}=0$, т.е. P_h удовлетворяет равенству (3), если среди последних $(\nu+1)^2$ коэффициентов, индекс j коэффициента, равного единице - нечетное число. Рассуждая аналогично, убеждаемся, что P_h удовлетворяет одному из равенств (3), (4), если среди последних $(\nu+1)^2$ коэффициентов или индекс j, или индекс i коэффициента, равного единице - нечетное число.

Подсчитаем, сколько имеется полиномов P_h, удовлетворяющих хоть одному из равенств (3), (4), т.е. следует подсчитать, сколько имеется коэффициентов $a_{kij}^{(h)}$ с $\nu-1\le k\le\nu$, $0\le i\le k$, $0\le j\le i$, или индекс j, или индекс i которых - нечетное число. Имеем следующие случаи:

а) $2\nmid i$. Общее количество коэффициентов с такими индексами равно

$$\sum_{k=\nu-1}^{\nu}\sum_{\substack{i=0\\2\nmid i}}^{k}\sum_{j=0}^{i}1=\sum_{\substack{i=0\\2\nmid i}}^{\nu-1}(i+1)+\sum_{\substack{i=0\\2\nmid i}}^{\nu}(i+1)=$$

$$=2\sum_{\substack{i=0\\2\nmid i}}^{\nu-1}(i+1)=2(2+4+\dots+\nu)=\left(1+\frac{\nu}{2}\right)\nu.$$

б) $2\mid i$ и $2\nmid j$. Общее количество коэффициентов с такими индексами равно

$$\sum_{k=\nu-1}^{\nu}\ \sum_{\substack{i=0\\ 2|k}}^{k}\ \sum_{\substack{j=0\\ 2\nmid j}}^{i} 1=\sum_{\substack{i=0\\ 2|i}}^{\nu-1}\frac{i}{2}+\sum_{\substack{i=0\\ 2|i}}^{\nu}\frac{i}{2}=$$

$$=\left(1+2+\dots+\frac{\nu-2}{2}\right)+\left(1+2+\dots+\frac{\nu}{2}\right)=\left(\frac{\nu}{2}\right)^2.$$

Таким образом, всего имеется

$$\left(1+\frac{\nu}{2}\right)\nu+\left(\frac{\nu}{2}\right)^2$$

полиномов P_h, удовлетворяющих хоть одному из равенств (3), (4). Но для таких полиномов, согласно лемме I из /3/,

$$\vartheta(\tau, P_h Q_1)=0. \tag{6}$$

Итак, мы показали, что среди $(\nu+1)^2$ тэта-рядов, соответствующих линейно независимым шаровым функциям, $\left(1+\frac{\nu}{2}\right)\nu+\left(\frac{\nu}{2}\right)^2$ будут нулевыми. Следовательно, максимальное число линейно независимых тэта-рядов, т.е.

$$\dim M(\nu, Q_1)\leq(\nu+1)^2-\left(1+\frac{\nu}{2}\right)\nu-\left(\frac{\nu}{2}\right)^2=\left(\frac{\nu}{2}+1\right)^2.$$

Легко проверить, что квадратичная форма

$$Q_2=b_{11}x_1^2+b_{22}(x_2^2+x_3^2)+b_{44}x_4^2+b_{12}x_1x_2,$$

где $b_{11} < b_{22} < b_{44}$, $|b_{12}| < b_{11}$, имеет только автоморфизмы (1). Следовательно, рассуждая так же, как и выше, получаем, что

$$\dim \mathcal{M}(\nu, Q_2) < \left(\frac{\nu}{2}+1\right)^2.$$

Для квадратичных форм

$$Q = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 + b_{13}x_1x_3 ,$$

$$Q = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}(x_3^2 + x_4^2) + b_{13}x_1x_3 ,$$

$$Q = b_{11}x_1^2 + b_{22}(x_2^2 + x_3^2) + b_{44}x_4^2 + b_{13}x_1x_3 ,$$

$$Q = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 + b_{14}x_1x_4 ,$$

$$Q = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}(x_3^2 + x_4^2) + b_{14}x_1x_4 ,$$

$$Q = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 + b_{23}x_2x_3 ,$$

$$Q = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}(x_3^2 + x_4^2) + b_{23}x_2x_3 ,$$

$$Q = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 + b_{24}x_2x_4 ,$$

$$Q = b_{11}x_1^2 + b_{22}(x_2^2 + x_3^2) + b_{44}x_4^2 + b_{24}x_2x_4 ,$$

$$Q = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}(x_3^2 + x_4^2) + b_{24}x_2x_4 ,$$

$$Q = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 + b_{34}x_3x_4 ,$$

$$Q = b_{11}x_1^2 + b_{22}(x_2^2 + x_3^2) + b_{44}x_4^2 + b_{34}x_3x_4 ,$$

где $b_{11}<b_{22}<b_{33}<b_{44}$, $|b_{13}|<b_{11}$, $|b_{14}|<b_{11}$, $|b_{23}|<b_{22}$, $|b_{24}|<b_{22}$, $|b_{34}|<b_{33}$, построив соответствующие целые автоморфизмы и для каждой квадратичной формы Q рассмотрев всевозможные полиномы $P_h(U_jX)$ $(h=1,\dots,(\nu+1)^2)$, где $P_h\in\mathcal{P}(\nu,Q)$ – базисные шаровые функции ν-го порядка относительно квадратичной формы Q (/1/, с.29), а $U_j\in G$ – целые автоморфизмы той же квадратичной формы Q, так же, как и в случае квадратичной формы Q_1, получим:

$$\dim \mathcal{M}(\nu,Q)\leq\left(\frac{\nu}{2}+1\right)^2.$$

§ 2. Рассмотрим теперь квадратичную форму

$$Q_3=b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}(x_3^2+x_4^2)+b_{12}x_1x_2,$$

где $b_{11}<b_{22}<b_{33}$, $|b_{12}|<b_{11}$.

Построим целые автоморфизмы U квадратичной формы Q_3. Так как

$$b_{11}=Q_3(\pm1,0,0,0),$$

$$b_{22}=Q_3(0,\pm1,0,0),$$

$$b_{33}=b_{44}=Q(0,0,\pm1,0)=Q_3(0,0,0,\pm1),$$

то нетрудно проверить, что целыми автоморфизмами квадратичной формы Q_3, кроме автоморфизмов (I), будут еще и автоморфизмы:

$$\begin{bmatrix} \ell_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ell_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell_2 \\ 0 & 0 & \ell_3 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\ell_i = \pm 1; \quad i = 1, 2, 3). \tag{7}$$

В дальнейшем, п той же причине, что и выше, будем пользоваться лишь автоморфизмом

$$U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Так как автоморфизмы квадратичной формы Q_1 являются и автоморфизмами квадратичной формы Q_3, то, рассуждая так же, как и выше, можно показать, что

$$\dim \mathcal{M}(\nu, Q_3) \leq \left(\frac{\nu}{2}+1\right)^2.$$

Постараемся улучшить эту оценку. Из выражения (3) работы /1/ и (8) следует, что

$$P_h(U_3X) = \sum_{k=0}^{\nu}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i} a^{(h)}_{kij}\, x_1^{\nu-k}\, x_2^{k-i}\, x_4^{i-j}\, x_3^{j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i} a^{(h)}_{k\,i\,j}\, x_1^{\nu-k}\, x_2^{k-i}\, x_3^{i-(i-j)}\, x_4^{i-j}$$

Отсюда следует, что когда последние $(\nu+1)^2$ коэффициентов полинома $P_h(X)$ все равны нулю, кроме одного $a_{ikj}=1$, то и последние $(\nu+1)^2$ коэффициентов полинома $P_h(U_3X)$ также будут равны нулю, кроме одного $a_{ki\,i-j}=1$. Следовательно, $P_h(U_3X)$ является базисным полиномом пространства $\mathcal{P}(\nu, Q_3)$. Но, так как $\vartheta(\tau, P_h(X), Q_3(x)) = \vartheta(\tau, P_h(U_3X), Q_3(x))$, то тета-ряды $\vartheta(\tau, P_h(X), Q_3)$ и $\vartheta(\tau, P_h(U_3X), Q_3(x))$ соответствующие разным базисным полиномам $P_h(X)$ и $P_h(U_3X)$, линейно зависимы.

Подсчитаем, сколько имеется таких линейно зависимых тета-рядов. Пусть i и j – четные (в противном случае, согласно (6), $\vartheta(\tau, P_h, Q_3)=0$). Имеем следующие случаи:

а) Если $i \equiv 0 \pmod 4$, то j принимает $\sum\limits_{\substack{j=0\\ 2|i}}^{i} 1 = \frac{i}{2}+1$ четных значений. Следовательно, всего будет $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{i}{2}+1\right)\right] = \frac{i}{4}$ линейно зависимых тэта-рядов.

б) Если $i \equiv 2 \pmod 4$, то j принимает $\sum\limits_{\substack{j=0\\ 2|i}}^{i} 1 = \frac{i}{2}+1$ четных значений. Следовательно, всего будет $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{i}{2}+1\right)\right] = \frac{i+2}{4}$ линейно зависимых тэта-рядов.

Таким образом, число линейно зависимых тета-рядов, по крайней мере, равно

$$\sum_{k=\nu-1}^{\nu}\left(\sum_{\substack{i=0\\ i\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)}}^{k}\frac{i}{4}+\sum_{\substack{i=0\\ i\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)}}^{k}\frac{i+2}{4}\right)=\frac{\nu(\nu+2)}{8}.$$

Следовательно,

$$\dim \mathcal{M}(\nu,Q_3)\leqslant\left(\frac{\nu}{2}+1\right)^2-\frac{\nu}{4}\left(1+\frac{\nu}{2}\right)=\frac{(\nu+2)(\nu+4)}{8}.$$

Квадратичная форма

$$Q_4=b_{11}x_1^2+b_{22}\left(x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)+b_{12}x_1x_2\ ,$$

где. $b_{11}<b_{22}$, $|b_{12}|<b_{11}$ имеет лишь автоморфизмы (1) и (7).

Следовательно, так же, как и выше, получаем:

$$\dim \mathcal{M}(\nu,Q_4)\leqslant\frac{(\nu+2)(\nu+4)}{8}$$

для квадратичных форм

$$Q=b_{11}x_1^2+b_{22}(x_2^2+x_3^2+x_4^2)+b_{13}x_1x_3,$$

$$Q=b_{11}x_1^2+b_{22}(x_2^2+x_3^2)+b_{44}x_4^2+b_{14}x_1x_4,$$

$$Q=b_{11}x_1^2+b_{22}(x_2^2+x_3^2+x_4^2)+b_{14}x_1x_4,$$

$$Q=b_{11}x_1^2+b_{22}(x_2^2+x_3^2)+b_{44}x_4^2+b_{23}x_2x_3,$$

$$Q=b_{11}x_1^2+b_{22}(x_2^2+x_3^2+x_4^2)+b_{23}x_2x_3,$$

$$Q=b_{11}x_1^2+b_{22}(x_2^2+x_3^2+x_4^2)+b_{24}x_2x_4,$$

$$Q=b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}(x_3^2+x_4^2)+b_{34}x_3x_4,$$

$$Q=b_{11}x_1^2+b_{22}(x_2^2+x_3^2+x_4^2)+b_{34}x_3x_4,$$

где $b_{11}<b_{22}<b_{33}<b_{44}$, $|b_{13}|<b_{11}$, $|b_{14}|<b_{11}$, $|b_{23}|<b_{22}$, $|b_{24}|<b_{22}$, $|b_{34}|<b_{33}$, построив соответствующие целые автоморфизмы и для каждой квадратичной формы Q рассмотрев всевозможные полиномы $P_h(U_j X)$ $(h=1,\dots,(\nu+1)^2)$, где $P_h\in\mathcal{P}(\nu,Q)$ — базисные шаровые функции ν-го порядка относительно квадратичной формы Q, а $U_j\in G$ — целые автоморфизмы той же квадратичной формы Q, так же, как и в случае квадратичной формы Q_3, получим:

$$\dim \mathcal{M}(\nu,Q)\le\frac{(\nu+2)(\nu+4)}{8}.$$

§ 3. Рассмотрим теперь квадратичную форму

$$Q_5 = b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{44} x_4^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{34} x_3 x_4 ,$$

где $b_{11} < b_{22} < b_{33} < b_{44}$, $\quad |b_{12}| < b_{11}$, $\quad |b_{34}| < b_{33}$.

Целыми автоморфизмами квадратичной формы Q_5 будут:

$$\begin{bmatrix} \ell_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ell_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell_2 \end{bmatrix} \qquad (\ell_i = \pm 1; \quad i = 1, 2). \tag{9}$$

В дальнейшем будем пользоваться лишь автоморфизмом:

$$U_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{10}$$

Из выражения (3) работы /I/ и (10) следует, что

$$P_n(U_4 X) = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} a_{kij}^{(k)} (-x_1)^{\nu-k} (-x_2)^{k-i} x_3^{i-j} x_4^{j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i} a^{(h)}_{kij} x_1^{\nu-k} x_2^{k-i} x_3^{k-j} x_4^{j}$$

Имеем:

$$P_h(X)+P_h(U_4X)=$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} \left(1+(-1)^{i}\right) a^{(h)}_{kij} x_1^{\nu-k} x_2^{k-i} x_3^{i-j} x_4^{j}.$$

Выясним для каких P_h имеет место равенство

$$P_h(X)+P_h(U_4X)=0. \tag{11}$$

Равенство (10) будет иметь место тогда и только тогда, когда коэффициенты

$$\left(1+(-1)^{i}\right) a_{kij}=0$$

для всех k, i, j. Рассуждая так же, как и в §1, убеждаемся, что P_h удовлетворяет равенству (11), когда среди последних $(\nu+1)^2$ коэффициентов индекс i коэффициента, равного единице - нечетное число, т.е. всего имеется

$$\sum_{k=\nu-1}^{\nu} \sum_{\substack{i=0 \\ 2\nmid i}}^{k} \sum_{j=0}^{i} 1 = \sum_{k=\nu-1}^{\nu} \sum_{\substack{i=0 \\ 2\nmid i}}^{k} (i+1) = \left(1+\frac{\nu}{2}\right)\nu$$

полиномов $\mathcal{P}_k$, удовлетворяющих условию (11). Следовательно,

$$\dim \mathcal{M}(\nu, Q_5) \le (\nu+1)^2 - \left(1+\frac{\nu}{2}\right)\nu = \frac{\nu^2}{2} + \nu + 1 .$$

Квадратичная форма

$$Q_6 = b_{11} x_1^2 + b_{22}(x_2^2 + x_3^2) + b_{44} x_4^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{34} x_3 x_4 ,$$

где $b_{11} < b_{22} < b_{44}$, $|b_{12}| < b_{11}$, $|b_{34}| < b_{33}$, имеет лишь автоморфизмы (9). Следовательно, так же, как и выше,

$$\dim \mathcal{M}(\nu, Q_6) \le \frac{\nu^2}{2} + \nu + 1 .$$

Для квадратичных форм

$$Q = b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{44} x_4^2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{24} x_2 x_4 ,$$

$$Q = b_{11} x_1^2 + b_{22}(x_2^2 + x_3^2) + b_{44} x_4^2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{24} x_2 x_4 ,$$

$$Q = b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33}(x_3^2 + x_4^2) + b_{13} x_1 x_3 + b_{24} x_2 x_4 ,$$

$$Q = b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{44} x_4^2 + b_{14} x_1 x_4 + b_{23} x_2 x_3 ,$$

$$Q = b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33}(x_3^2 + x_4^2) + b_{14} x_1 x_4 + b_{23} x_2 x_3 ,$$

где $b_{11}<b_{22}<b_{33}<b_{44}$, $|b_{13}|<b_{11}$, $|b_{14}|<b_{11}$, $|b_{23}|<b_{22}$, $|b_{24}|<b_{22}$, $|b_{34}|<b_{33}$, построив соответствующие целые автоморфизмы и для каждой квадратичной формы Q рассмотрев всевозможные полиномы $P_h(U_j X)$ $(h=1,\dots,(\nu+1)^2)$, где $P_h \in \mathcal{P}(\nu,Q)$ – базисные шаровые функции ν-го порядка относительно квадратичной формы Q, а $U_j \in G$ – целые автоморфизмы той же квадратичной формы Q, так же, как и в случае квадратичной формы Q_5, получим:

$$\dim M(\nu,Q) \leq \frac{\nu^2}{2}+\nu+1.$$

§ 4. Рассмотрим теперь квадратичную форму

$$Q_4 = b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}(x_3^2+x_4^2)+b_{12}x_1x_2+b_{34}x_3x_4,$$

где $b_{11}<b_{22}<b_{33}$; $|b_{12}|<b_{11}$, $|b_{34}|<b_{33}$.

Целыми автоморфизмами квадратичной формы Q_4, кроме автоморфизмов (9), будут еще и автоморфизмы:

$$\begin{bmatrix} \ell_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ell_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell_2 \\ 0 & 0 & \ell_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\ell_i=\pm 1;\quad i=1,2). \tag{12}$$

В дальнейшем будем пользоваться автоморфизмом

$$U_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как автоморфизмы квадратичной формы Q_5 являются и автоморфизмами квадратичной формы Q_7, то

$$\dim \mathcal{M}(\nu, Q_4) \leq \frac{\nu^2}{2} + \nu + 1 .$$

С целью улучшения этой оценки рассмотрим полином

$$P_h(U_5 X) = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} a^{(h)}_{kij}\, x_1^{\nu-k} x_2^{k-i} x_4^{k-j} x_3^{j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} a^{(h)}_{kij}\, x_1^{\nu-k} x_2^{k-i} x_3^{i-(i-j)} x_4^{i-j} .$$

Отсюда следует, что когда последние $(\nu+1)^2$ коэффициентов полинома $P_h(X)$ все равны нулю, кроме одного $a^{(h)}_{kij} = 1$, то и последние $(\nu+1)^2$ коэффициентов полиномов $P_h(U_5 X)$ также будут равны нулю, кроме одного $a^{(h)}_{k\,i\,i-j} = 1$. Следовательно, $P_h(U_5 X)$ является базисным полиномом пространства $\mathcal{P}(\nu, Q_5)$ и тэта-ряды $\vartheta(\tau, P_h(X), Q_4)$ и $\vartheta(\tau, P_h(U_5 X), Q_7)$, соответствующие разным базисным полиномам $P_n(X)$ и $P_n(U_5 X)$, линейно зависимы.

Подсчитаем, сколько имеется таких линейно зависимых тэта-рядов. Пусть i — четное, тогда j принимает $\sum_{j=0}^{i} 1 = i+1$ значений; следовательно, всего будет $\left[\frac{i+1}{2}\right] = \frac{i}{2}$ линейно зависимых тэта-рядов. Таким образом, число линейно зависимых тэта-рядов, по крайней мере, равно

$$\sum_{k=\nu-1}^{\nu} \sum_{\substack{i=0\\ 2|i}}^{k} \frac{i}{2} = \sum_{\substack{i=0\\ 2|i}}^{\nu-1} \frac{i}{2} + \sum_{\substack{i=0\\ 2|i}}^{\nu} \frac{i}{2} = \left(\frac{\nu}{2}\right)^2.$$

Следовательно,

$$\dim M(\nu, Q_7) \leq \frac{\nu^2}{2} + \nu + 1 - \frac{\nu^2}{4} = \left(\frac{\nu}{2} + 1\right)^2.$$

Квадратичная форма

$$Q_8 = b_{11} x_1^2 + b_{22}(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + b_{12} x_1 x_2 + b_{34} x_3 x_4,$$

где $b_{11} < b_{22}$, $|b_{12}| < b_{11}$, $|b_{34}| < b_{33}$, имеет лишь автоморфизмы (9) и (12). Ввиду этого, рассуждая так же, как и выше, получаем, что

$$\dim \mathcal{M}(\nu, Q_8) \leq \left(\frac{\nu}{2}+1\right)^2.$$

Рассуждая так же, как и в случае квадратичной формы Q_7, убеждаемся, что для квадратичных форм

$$Q = b_{11} x_1^2 + b_{22}(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + b_{13} x_1 x_3 + b_{24} x_2 x_4,$$

$$Q = b_{11} x_1^2 + b_{22}(x_2^2 + x_3^2) + b_{44} x_4^2 + b_{14} x_1 x_4 + b_{23} x_2 x_3,$$

$$Q = b_{11} x_1^2 + b_{22}(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + b_{14} x_1 x_4 + b_{23} x_2 x_3,$$

где $b_{11} < b_{22} < b_{44}$, $|b_{13}| < b_{11}$, $|b_{14}| < b_{11}$, $|b_{23}| < b_{22}$, $|b_{24}| < b_{22}$, имеем:

$$\dim \mathcal{M}(\nu, Q) \leq \left(\frac{\nu}{2}+1\right)^2.$$

Поступила 25.III.1987

Кафедра
алгебры и геометрии

Литература

1. К.Ш.Шавгулидзе. Труды ТГУ. Математика.Механика.Астрономия, 252, 1984, с.21-33.

2. К.Ш.Шавгулидзе, Труды ТГУ, Математика.Механика.Астрономия, 264, 1986, с.42-56.

3. F.Gooding. J. Number Theory 9, 1977, p. 36-47.

ქ. შავგულიძე

განზოგადებულ ოთხწევრა თეტა-მწკრივთა ზოგიერთი სივრცის განზომილების ზედა საზღვრის შესახებ, III.

რეზიუმე

განხილულია ზოგიერთი დადებითი დაყვანილი ოთხცვლადიანი არადიაგონალური კვადრატული ფორმა, აგებულია მათი მთელი ავტომორფიზმები და დადგენილია განხილული კვადრატული ფორმების მიმართ განზოგადებული ოთხწევრა თეტა-მწკრივების სივრცეების განზომილების ზედა საზღვარი.

K.Shavgulidze

ON THE UPPER BOUND OF THE DIMENSION OF SOME SPACES OF GENERALIZED QUATERNARY THETA-SERIES.III

Summary

In the present, third report, some positive reduced non-diagonal quaternary quadratic forms are considered. Their integral automorphs are constructed and the upper bound of the dimension of the spaces of generalized quaternary theta-series with respect to the quadratic forms in ques is established.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988

УДК 511

О ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМАХ ТИПА (-6,13,1) и (-6,17,1)

Н.Д.Качахидзе

В статье /1/ построены базисы векторных пространств параболических форм типа $(-6, q, 1)$ при $q = 3,5,7$ и 11. В настоящей работе построены базисы векторных пространств параболических форм типа $(-6, q, 1)$ при $q = 13$ и 17. Далее, выведены формулы для числа представлений натуральных чисел одной квадратичной формой типа (-6,13,1) и одной типа (-6,17,1).

1.1. Пусть

$$Q(x) = Q(x_1, \ldots, x_f) = \sum_{1 \le r \le s \le f} b_{rs} x_r x_s$$

– положительная квадратичная форма от f (f – четное) переменных с целыми коэффициентами b_{rs} ; число $-\frac{f}{2}$ называется размерностью формы $Q(x)$. Далее, пусть D - определитель квадратичной формы

$$2Q(x)=\sum_{r,s=1}^{f} a_{rs} x_r x_s$$

$$(a_{rr}=2b_{rr};\ a_{rs}=a_{sr}=b_{rs},\ r<s);$$

A_{rs} - алгебраические дополнения элементов a_{rs} в D ; Δ - дискриминант квадратичной формы $Q(x)$, т.е. $\Delta=(-1)^{f/2}D$; δ =н.о.д. $\left(\frac{A_{rr}}{2}, A_{rs}\right)$ $(r,s=1,2,\ldots,f)$; $N=\frac{D}{\delta}$ - ступень квадратичной формы $Q(x)$; $\chi(d)$ - характер квадратичной формы $Q(x)$. Если дискриминант квадратичной формы $Q(x)$ является полным квадратом, то $\chi(d)=1$ (/2/, с.874). Следуя Э.Гекке (/2/, с.846), будем говорить, что $Q(x)$ является квадратичной формой типа $(-\frac{f}{2}, N, \chi(d))$. Пусть, наконец, $P_\nu(x)=P_\nu(x_1,\ldots,x_f)$ - шаровая функция ν-го порядка относительно квадратичной формы $Q(x)$.

Для удобства ссылок сформулируем в виде лемм некоторые известные результаты.

Лемма I (/2/, с.846). При заданных f и N существует лишь конечное число дискриминантов квадратичных форм. Они являются делителями числа N^f.

<u>Лемма 2</u> (/2/, с.854). Пусть $Q(x)$ – квадратичная форма типа $\left(-\frac{f}{2}, N, \chi\right)$ и $\mathcal{P}_\nu(x)$ – относящаяся к ней шаровая функция. Тогда обобщенный f – кратный тэта-ряд

$$\vartheta(\tau, Q(x), \mathcal{P}_\nu(x)) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^f} \mathcal{P}_\nu(x) z^{Q(x)}$$

будет параболической формой типа $\left(-\left(\frac{f}{2}+\nu\right), N, \chi\right)$. Здесь и всюду в дальнейшем предполагаем, что $z = e^{2\pi i \tau}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$.

<u>Лемма 3</u> (/1/, с.147). Среди f^4 однородных полиномов четвертой степени от f переменных

$$\varphi_{rstu} = x_r x_s x_t x_u - \frac{1}{(f+4)D}\left(A_{rs} x_t x_u + A_{rt} x_s x_u + A_{ru} x_s x_t + A_{st} x_r x_u + A_{su} x_r x_t + A_{tu} x_r x_s\right) \cdot 2Q(x) +$$

$$+ \frac{1}{(f+2)(f+4)D^2}\left(A_{rs} A_{tu} + A_{rt} A_{su} + A_{ru} A_{st}\right) \cdot 4Q^2(x)$$

$$(r, s, t, u = 1, \ldots, f)$$

имеется точно $\frac{1}{24}(f-1)f(f+1)(f+6)$ линейно независимых, образующих базис пространства шаровых функций четвертого порядка относительно квадратичной формы $Q(x)$.

Ввиду того, что мы собираемся искать параболические формы типа $(-6,13,1)$ и $(-6,17,1)$ в виде обобщенных кватернарных тэта - рядов, мы всюду будем брать $f = 4$ и $\nu = 4$.

1.2. Известно, что всякой положительной квадратичной форме F соответствует тэта-ряд

$$\vartheta(\tau,F) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n,F) z^n, \tag{1}$$

где $r(n,F)$ обозначает число представлений натурального числа n формой F.

Далее, пусть q - нечетное простое число и F - примитивная квадратичная форма типа $(-k,q,1)$, $2|k$, $k>2$. Известно (/2/, с.817, 874, 875), что дискриминант формы F

$$\Delta = q^{2l}, \quad 1 \leq l \leq k-1, \tag{2}$$

и что ей соответствует ряд Эйзенштейна

$$E(\tau,F) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha \sigma_{k-1}(n) z^n + \beta \sigma_{k-1}(n) z^{qn}\right),$$

где

$$\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}, \quad \alpha = \frac{i^k}{\rho_k} \cdot \frac{q^{k-l} - i^k}{q^k - 1}, \quad \beta = \frac{1}{\rho_k} \, \frac{q^k - i^k q^{k-l}}{q^k - 1},$$

$$\rho_k = (-1)^{k/2} \frac{(k-1)!}{(2\pi)^k} \zeta(k)$$ ($\zeta(k)$ – дзета-функция Римана).

Из этих формул при $k = 6$, $q = 13$ и $\ell = 3$ получаем:

$$E(\tau, F) = 1 + \frac{14}{61} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sigma_5(n) z^n - 2197 \sigma_5(n) z^{13n} \right) =$$

$$= 1 + \frac{14}{61} z + \frac{462}{61} z^2 + 56 z^3 +$$

$$+ \frac{14798}{61} z^4 + \frac{43764}{61} z^5 + \ldots; \qquad (3)$$

а при $k = 6$, $q = 17$ и $\ell = 3$

$$E(\tau, F) = 1 + \frac{63}{614} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sigma_5(n) z^n - 4913 \sigma_5(n) z^{17n} \right) =$$

$$= 1 + \frac{63}{614} z + \frac{2079}{614} z^2 + \frac{7686}{307} z^3 + \frac{66591}{614} z^4 +$$

$$+ \frac{98469}{307} z^5 + \frac{253638}{307} z^6 + \ldots \qquad (4)$$

Лемма 4 (/2/, с.874-875). Пусть $2 | k$, $k > 2$, q – нечетное простое, F – положительная примитивная квадратичная форма типа $(-k, q, 1)$. Тогда разность

$$\vartheta(\tau, F) - E(\tau, F)$$

будет параболической формой типа $(-k, q, 1)$.

Лемма 5 (/2/, с.846). Если $Q_1(x)$ и $Q_2(y)$ имеют одну и ту же ступень N и характеры χ_1 и χ_2 соответственно, то форма $F=Q_1(x)+Q_2(y)$ будет иметь ступень N и характер $\chi_1(d)\chi_2(d)$.

2.1. Согласно лемме 1 дискриминанты квадратичных форм типа (-2,13,1) надо искать среди квадратных делителей числа 13^4. В (/3/, с.197) показано, что

$$Q=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+4x_4^2+x_1x_2+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+2x_3x_4 \qquad (5)$$

является приведенной квадратичной формой дискриминанта 13^2.

Для формы Q имеем: $\Delta=D=13^2$, $A_{11}=104$, $A_{22}=A_{33}=52$, $A_{44}=26$, $A_{12}=-26$, $A_{13}=13$, $A_{14}=A_{23}=A_{34}=-13$, $A_{24}=0$, т.е. $\delta=13$, $N=13$, $\chi(d)=1$. Таким образом, Q является квадратичной формой типа (-2,13,1).

Согласно лемме 3,

$$\varphi_{1111}=\frac{1}{13^2}\left(169x_1^4-156x_1^2Q+16Q^2\right),$$

$$\varphi_{2222}=\frac{1}{13^2}\left(169x_2^4-78x_2^2Q+4Q^2\right),$$

$$\varphi_{3333}=\frac{1}{13^2}\left(169x_3^4-78x_3^2Q+4Q^2\right),$$

$$\varphi_{4444}=\frac{1}{13^2}\left(169\,x_4^4-39\,x_4^2Q+Q^2\right),$$

$$\varphi_{2244}=\frac{1}{6\cdot 13^2}\left(1014\,x_2^2x_4^2-78\,x_4^2Q-39\,x_2^2Q+4Q^2\right).$$

Легко проверить, что уравнение $Q=n$ имеет следующие решения:

1) при $n=1$

$$x_1=\pm 1,\ x_2=x_3=x_4=0,$$

т.е. всего 2 решения;

2) при $n=2$

$$x_1=\pm 1,\ x_2=\mp 1,\ x_3=x_4=0 \qquad x_1=x_2=0,\ x_3=\pm 1,\ x_4=0,$$

$$x_1=0,\ x_2=\pm 1,\ x_3=x_4=0$$

т.е. всего 6 решений;

3) при $n=3$

$$x_1=\pm 1,\ x_2=0,\ x_3=\pm 1,\ x_4=0 \qquad x_1=0,\ x_2=\pm 1,\ x_3=\mp 1,\ x_4=0$$

$$x_1=\pm 1,\ x_2=0,\ x_3=\mp 1,\ x_4=0 \qquad x_1=\pm 1,\ x_2=\mp 1,\ x_3=\pm 1,\ x_4=0,$$

т.е. всего 8 решений;

4) при $n=4$

$x_1=x_2=x_3=0,\ x_4=\pm1$ $\qquad$ $x_1=x_2=\pm1,\ x_3=x_4=0$

$x_1=x_2=0,\ x_3=\pm1,\ x_4=\mp1$ $\qquad$ $x_1=\pm2,\ x_2=x_3=x_4=0$

$x_1=\pm1,\ x_2=x_3=0,\ x_4=\mp1$ $\qquad$ $x_1=\pm2,\ x_2=\mp1,\ x_3=x_4=0,$

$x_1=\pm1,\ x_2=0,\ x_3=\pm1,\ x_4=\mp1$

т.е. всего 14 решений;

5) при $\quad n=5$

$x_1=0,\ x_2=\pm1,\ x_3=0,\ x_4=\mp1$ $\qquad$ $x_1=\pm1,\ x_2=x_3=\pm1,\ x_4=0$

$x_1=x_4=0,\ x_2=x_3=\pm1$ $\qquad$ $x_1=x_2=\pm1,\ x_3=\mp1,\ x_4=0$

$x_1=x_3=\pm1,\ x_2=x_4=\mp1$ $\qquad$ $x_1=\pm2,\ x_2=\mp1,\ x_3=\pm1,\ x_4=0,$

т.е. всего 12 решений.

Проделывая простые вычисления при помощи выписанных решений, получаем разложения:

$$\vartheta(\tau,Q,\varphi_{1111})=\frac{1}{13^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q=n}169x_1^4-156nx_1^2+16n^2\Big)z^n=$$

$$=\frac{58}{13^2}z+\frac{98}{13^2}z^2+\frac{642}{13^2}z^3+\frac{1686}{13^2}z^4+\frac{302}{13^2}z^5+\dots, \qquad (6)$$

$$\vartheta(\tau, Q, \varphi_{2222}) = \frac{1}{13^2} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{Q=n} 169x_2^4 - 78nx_2^2 + 4n^2 \Big) z^n =$$

$$= \frac{8}{13^2} z + \frac{148}{13^2} z^2 + \frac{28}{13^2} z^3 + \frac{324}{13^2} z^4 - \frac{1452}{13^2} z^5 + \dots , \quad (7)$$

$$\vartheta(\tau, Q, \varphi_{3333}) = \frac{1}{13^2} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{Q=n} 169x_3^4 - 78nx_3^2 + 4n^2 \Big) z^n =$$

$$= \frac{8}{13^2} z + \frac{122}{13^2} z^2 - \frac{232}{13^2} z^3 + \frac{324}{13^2} z^4 - \frac{1010}{13^2} z^5 + \dots , \quad (8)$$

$$\vartheta(\tau, Q, \varphi_{4444}) = \frac{1}{13^2} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{Q=n} 169x_4^4 - 39x_4^2 + n^2 \Big) z^n =$$

$$= \frac{2}{13^2} z - \frac{24}{13^2} z^2 + \frac{72}{13^2} z^3 + \frac{328}{13^2} z^4 + \frac{196}{13^2} z^5 + \dots , \quad (9)$$

$$\vartheta(\tau, Q, \varphi_{2244}) = \frac{1}{6 \cdot 13^2} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{Q=n} 1014x_2^2 x_4^2 - 78nx_4^2 - 39nx_2^2 + 4n^2 \Big) z^n =$$

$$= \frac{4}{3 \cdot 13^2} z - \frac{108}{3 \cdot 13^2} z^2 - \frac{90}{3 \cdot 13^2} z^3 - \frac{1112}{3 \cdot 13^2} z^4 + \frac{678}{3 \cdot 13^2} z^5 + \dots . \quad (10)$$

Согласно лемме 2, эти обобщенные кватернарные тэта-ряды являются параболическими формами типа (-6, 13, 1).

Так как определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{58}{13^2} & \frac{98}{13^2} & -\frac{642}{13^2} & \frac{1686}{13^2} & \frac{302}{13^2} \\ \frac{8}{13^2} & \frac{148}{13^2} & \frac{28}{13^2} & \frac{324}{13^2} & -\frac{1452}{13^2} \\ \frac{8}{13^2} & \frac{122}{13^2} & -\frac{232}{13^2} & \frac{324}{13^2} & -\frac{1610}{13^2} \\ -\frac{2}{13^2} & \frac{24}{13^2} & \frac{72}{13^2} & \frac{328}{13^2} & \frac{196}{13^2} \\ -\frac{34}{3\cdot 13^2} & -\frac{108}{3\cdot 13^2} & -\frac{90}{3\cdot 13^2} & -\frac{1112}{3\cdot 13^2} & \frac{678}{3\cdot 13^2} \end{vmatrix} = -\frac{2^7\cdot 379}{13^4} \neq 0,$$

то тета-ряды (6)-(10) линейно независимы. Известно (/2/, с. 899), что максимальное число линейно независимых параболических форм типа (-6,13,1) равно 5. Таким образом, доказана

<u>Теорема I</u>. Система обобщенных кватернарных тета-рядов

$$\vartheta(\tau,Q,\varphi_{1111}),\quad \vartheta(\tau,Q,\varphi_{2222}),\quad \vartheta(\tau,Q,\varphi_{3333}),$$
$$\vartheta(\tau,Q,\varphi_{4444}),\quad \vartheta(\tau,Q,\varphi_{2244})$$

является базисом пространства параболических форм типа (-6, 13,1).

2.2. Выведем формулу для числа представлений натурального числа n квадратичной формой

$$F_1 = Q(x_1,\ldots,x_4)+Q(x_5,\ldots,x_8)+Q(x_9,\ldots,x_{12}), \qquad (11)$$

где форма Q определена формулой (5).

Согласно лемме 5, приняв во внимание (5), (11) и (2), для F_1 получаем: $k=6$, $\Delta = D = 13^6$, $\ell = 3$, $N=q=13$, $\chi(d) = 1$, т.е. форма F_1 является примитивной квадратичной формой типа (-6,13,1).

<u>Теорема 2.</u> $$r(n,F_1)=\frac{14}{61}\sigma_5^*(n)+$$

$$+\frac{1308}{13^2\cdot 379}\Big(\sum_{Q=n}169x_1^4-156nx_1^2+16n^2\Big)+\frac{971800}{13^2\cdot 61\cdot 379}\Big(\sum_{Q=n}169x_2^4-78nx_2^2+4n^2\Big)-$$

$$-\frac{223616}{13^2\cdot 61\cdot 379}\Big(\sum_{Q=n}169x_3^4-78nx_3^2+4n^2\Big)+\frac{3659516}{13^2\cdot 61\cdot 379}\Big(\sum_{Q=n}169x_4^4-39nx_4^2+n^2\Big)+$$

$$+\frac{576718}{13^2\cdot 61\cdot 379}\Big(\sum_{Q=n}1014x_2^2x_4^2-78nx_4^2-39nx_2^2+4n^2\Big),$$

где

$$\sigma_5^*(n)=\begin{cases}\sigma_5(n) & \text{при } 13\nmid n,\\ \sigma_5(n)-2197\,\sigma_5\left(\frac{n}{13}\right) & \text{при } 13\mid n.\end{cases}$$

<u>Доказательство.</u> Согласно (1), принимая во внимание сказанное выше о числе решений уравнения $Q=n$, получим:

$$\vartheta(\tau, Q) = 1 + 2z + 6z^2 + 8z^3 + 14z^4 + 12z^5 + \ldots$$

Таким образом, в силу (5) и (II), имеем:

$$\vartheta(\tau, F_1) = \vartheta^3(\tau, Q) = 1 + 6z + 30z^2 + 104z^3 +$$

$$+ 318z^4 + 804z^5 + \ldots \qquad (12)$$

Согласно лемме 4, разность $\vartheta(\tau, F_1) - E(\tau, F_1)$ является параболической формой типа (-6,13,1). Следовательно, согласно теореме 1, существуют такие числа $c_1, \ldots, c_5$, что

$$\vartheta(\tau, F_1) - E(\tau, F_1) = c_1 \vartheta(\tau, Q, \varphi_{1111}) + c_2 \vartheta(\tau, Q, \varphi_{2222}) +$$

$$+ c_3 \vartheta(\tau, Q, \varphi_{3333}) + c_4 \vartheta(\tau, Q, \varphi_{4444}) + c_5 \vartheta(\tau, Q, \varphi_{2244}).$$

Приравнивая коэффициенты при $z, z^2, \ldots, z^5$ в обеих частях этого равенства и принимая во внимание разложения (12), (3) и (6)-(10), получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{58}{13^2} c_1 + \frac{8}{13^2} c_2 + \frac{8}{13^2} c_3 + \frac{2}{13^2} c_4 + \frac{4}{3 \cdot 13^2} c_5 = \frac{352}{61}, \\ \frac{98}{13^2} c_1 + \frac{148}{13^2} c_2 + \frac{122}{13^2} c_3 + \frac{24}{13^2} c_4 - \frac{36}{13^2} c_5 = \frac{1368}{61}, \\ -\frac{642}{13^2} c_1 + \frac{28}{13^2} c_2 - \frac{232}{13^2} c_3 + \frac{72}{13^2} c_4 - \frac{30}{13^2} c_5 = \frac{2928}{61}, \\ \frac{1686}{13^2} c_1 + \frac{324}{13^2} c_2 + \frac{324}{13^2} c_3 + \frac{328}{13^2} c_4 - \frac{1112}{3 \cdot 13^2} c_5 = \frac{4600}{61}, \\ \frac{302}{13^2} c_1 + \frac{1452}{13^2} c_2 - \frac{1010}{13^2} c_3 + \frac{196}{13^2} c_4 + \frac{226}{13^2} c_5 = \frac{5280}{61}. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что

$$c_1 = \frac{1308}{379}, \quad c_2 = \frac{971800}{61 \cdot 379}, \quad c_3 = -\frac{223616}{61 \cdot 379}$$

$$c_4 = \frac{3659516}{61 \cdot 379}, \quad c_5 = \frac{3460308}{61 \cdot 379}.$$

Таким образом, доказано тождество:

$$\vartheta(\tau, F_1) = E(\tau, F_1) + \frac{1308}{379}\vartheta(\tau, Q, \varphi_{1111}) +$$

$$+ \frac{971800}{61 \cdot 379}\vartheta(\tau, Q, \varphi_{2222}) - \frac{223616}{61 \cdot 379}\vartheta(\tau, Q, \varphi_{3333}) +$$

$$+ \frac{3659516}{61 \cdot 379}\vartheta(\tau, Q, \varphi_{4444}) + \frac{3460308}{61 \cdot 379}\vartheta(\tau, Q, \varphi_{2244}).$$

Приравнивая коэффициенты при z^n в обеих частях этого тождества и принимая во внимание (I), (3) и (6)-(10), получаем утверждаемое.

3.I. Согласно лемме I, дискриминанты квадратичных форм типа (-2,17,I) надо искать среди квадратных делителей числа 17^4. В (/4/, с.43I-458) показано, что существуют три приведенные кватернарные квадратичные ф.рмы дискриминанта 17^2:

$$Q_1 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 +$$

$$+ x_1x_4 + x_2x_4 + 3x_3x_4 , \tag{13}$$

$$Q_2 = x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + 6x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 -$$

$$- x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 + 5x_3x_4 , \tag{14}$$

$$Q_3 = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 5x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 +$$

$$+ 2x_2x_3 - x_2x_4 + 2x_3x_4 . \tag{15}$$

Для формы Q_1 имеем: $\Delta = D = 17^2$, $A_{11} = A_{22} = 102$, $A_{12} = -51$, $A_{13} = A_{24} = -17$, $A_{14} = 0$, $A_{23} = 17$, $A_{33} = A_{44} = 68$, $A_{34} = -34$, т.е. $\delta = 17$, $N = 17$, $\chi(a) = 1$. Следовательно, Q_1 является квадратичной формой типа $(-2, 17, 1)$.

Согласно лемме 3,

$$\varphi_{1111} = x_1^4 - \frac{9}{17} x_1^2 Q_1 + \frac{9}{17^2} Q_1^2 ,$$

$$\varphi_{3333} = x_3^4 - \frac{6}{17} x_3^2 Q_1 + \frac{4}{17^2} Q_1^2 ,$$

$$\varphi_{1144} = x_1^2 x_4^2 - \frac{1}{17} x_1^2 Q_1 - \frac{3}{2\cdot 17} x_4^2 Q_1 + \frac{2}{17^2} Q_1^2 ,$$

$$\varphi_{2223} = x_2^3 x_3 - \frac{9}{2\cdot 17} x_2 x_3 Q_1 - \frac{3}{4\cdot 17} x_2^2 Q_1 + \frac{3}{2\cdot 17^2} Q_1^2 .$$

Для формы Q_2 имеем: $\Delta = \mathcal{D} = 17^2$, $A_{11} = A_{22} = 204$, $A_{33} = A_{44} = 34$, $A_{12} = -85$, $A_{13} = A_{34} = A_{23} = -17$, $A_{24} = A_{14} = 17$, т.е. $\delta = 17$, $\mathcal{N} = 17$, $\chi(d) = 1$. Таким образом, Q_2 являтся квадратичной формой типа (–2,17,1).

Согласно лемме 3

$$\varphi_{3333} = x_3^4 - \frac{3}{17} x_3^2 Q_2 + \frac{1}{17^2} Q_2^2 .$$

Форма Q_3 также является квадратичной формой типа (–2,17,1), ибо для этой формы имеем: $\Delta = \mathcal{D} = 17^2$, $A_{11} = 170$, $A_{12} = A_{23} = -34$, $A_{13} = A_{34} = -17$, $A_{14} = 0$, $A_{22} = 102$, $A_{24} = 17$, $A_{33} = 68$, $A_{44} = 34$, т.е. $\delta = 17$, $\mathcal{N} = 17$, $\chi(d) = 1$.

Согласно лемме 3,

$$\varphi_{4444} = x_4^4 - \frac{3}{17} x_4^2 Q_3 + \frac{1}{17^2} Q_3^2$$

Легко проверить, что уравнение $Q_1 = n$ имеет следующие решения:

1) при $n=1$ оно решений не имеет;

2) при $n=2$

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_2 = \pm 1 \qquad x_1 = \pm 1, \quad x_2 = \mp 1, \quad x_3 = x_4 = 0,$$

$$x_1 = \pm 1, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

т.е. всего 6 решений;

3) при $n=3$

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \pm 1 \qquad x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = \pm 1, \quad x_4 = \mp 1,$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = \pm 1$$

т.е. всего 6 решений;

4) при $n=4$

$$x_1 = x_3 = 0, \quad x_2 = \pm 1, \quad x_4 = \mp 1 \qquad x_1 = \pm 1, \quad x_2 = x_3 = \mp 1, \quad x_4 = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = x_3 = \pm 1, \quad x_4 = \mp 1 \qquad x_1 = \pm 1, \quad x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = \mp 1$$

$$x_1 = x_4 = \pm 1, \quad x_2 = x_3 = \mp 1 \qquad x_1 = \pm 1, \quad x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \mp 1,$$

т.е. всего 12 решений;

5) при $n=5$

$$x_1 = x_4 = 0, \quad x_2 = x_3 = \pm 1 \qquad x_1 = x_4 = \pm 1, \quad x_2 = \mp 1, \quad x_3 = 0$$

$x_1=x_4=0,\ x_2=\pm1,\ x_3=\mp1$ $\qquad x_1=x_4=\pm1,\ x_2=0,\ x_3=\mp1$

$x_1=x_3=\pm1,\ x_2=0,\ x_4=\mp1$ $\qquad x_1=\pm1,\ x_2=x_4=\mp1,\ x_3=0,$

т.е. всего 12 решений;

6) при $n=6$

$x_1=x_2=\pm1,\ x_3=x_4=0$ $\qquad x_1=x_3=\pm1,\ x_2=x_4=0$

$x_1=x_4=\pm1,\ x_2=x_3=0$ $\qquad x_1=x_3=0,\ x_2=x_4=\pm1$

$x_1=\pm1,\ x_2=\mp2,\ x_3=x_4=0$ $\qquad x_1=0,\ x_2=x_4=\mp1,\ x_3=\pm1$

$x_1=x_3=\pm1,\ x_2=\mp1,\ x_4=0$ $\qquad x_1=\pm2,\ x_2=\mp1,\ x_3=x_4=0,$

$x_1=x_3=\pm1,\ x_2=x_4=\mp1$

т.е. всего 18 решений.

Нетрудно проверить, что уравнение $Q_2=n$ имеет следующие решения:

1) при $n=1$

$x_1=\pm1,\ x_2=x_3=x_4=0$ $\qquad x_1=x_3=x_4=0,\ x_2=\pm1,$

$x_1=\pm1,\ x_2=\mp1,\ x_3=x_4=0$

т.е. всего 6 решений;

2) при $n=2$ оно решений не имеет;

3) при $n=3$

$x_1=x_2=\pm 1,\ x_3=x_4=0$ $x_1=\pm 2,\ x_2=\mp 1,\ x_3=x_4=0$

$x_1=\pm 1,\ x_2=\mp 2,\ x_3=x_4=0$

т.е. всего 6 решений;

4) при $n=4$

$x_1=\pm 2,\ x_2=x_3=x_4=0$ $x_1=x_3=x_4=0,\ x_2=\pm 2,$

$x_1=\pm 2,\ x_2=\mp 2,\ x_3=x_4=0$

т.е. всего 6 решений;

5) при $n=5$ оно решений не имеет;

6) при $n=6$

$x_1=x_2=x_3=0,\ x_4=\pm 1$ $x_1=0,\ x_2=x_4=\mp 1,\ x_3=\pm 1$

$x_1=x_3=0,\ x_2=x_4=\pm 1$ $x_1=\pm 1,\ x_2=x_4=0,\ x_3=\mp 1$

$x_1=x_4=\pm 1,\ x_2=x_3=0$ $x_1=x_4=\pm 1,\ x_2=0,\ x_3=\mp 1$

$x_1=x_2=x_4=0,\ x_3=\pm 1$ $x_1=x_2=x_4=\pm 1,\ x_3=\mp 1,$

$x_1=x_4=0,\ x_2=\pm 1,\ x_3=\mp 1$

т.е. всего 18 решений.

Легко проверить, что уравнение $Q_3=n$ имеет следующие решения:

1) при $n=1$

$x_1=\pm 1,\ x_2=x_3=x_4=0,$

т.е. всего 2 решения;

2) при $n=2$

$$x_1=\pm 1,\ x_2=\mp 1,\ x_3=x_4=0 \qquad x_1=x_3=x_4=0,\ x_2=\pm 1,$$

т.е. всего 4 решения;

3) при $n=3$

$$x_1=\pm 1,\ x_2=x_4=0,\ x_3=\mp 1 \qquad x_1=x_4=0,\ x_2=\pm 1,\ x_3=\mp 1,$$

$$x_1=x_2=x_4=0,\ x_3=\pm 1$$

т.е. всего 6 решений;

4) при $n=4$

$$x_1=\pm 2,\ x_2=x_3=x_4=0 \qquad x_1=x_2=\pm 1,\ x_3=x_4=0$$

$$x_1=\pm 2,\ x_2=\mp 1,\ x_3=x_4=0 \qquad x_1=x_2=\pm 1,\ x_3=\mp 1,\ x_4=0,$$

$$x_1=x_3=\pm 1,\ x_2=\mp 1,\ x_4=0$$

т.е. всего 10 решений;

5) при $n=5$

$$x_1=x_2=x_3=0,\ x_4=\pm 1 \qquad x_1=\pm 2,\ x_2=x_4=0,\ x_3=\pm 1$$

$$x_1=0,\ x_2=x_4=\pm 1,\ x_3=\mp 1 \qquad x_1=x_3=\pm 1,\ x_2=x_4=0,$$

т.е. всего 8 решений;

6) при $n = 6$

$$x_1=\pm 1,\ x_2=x_3=\mp 1,\ x_4=0 \qquad x_1=x_3=0,\ x_2=x_4=\pm 1$$

$$x_1=x_4=\pm 1,\ x_2=x_3=0 \qquad x_2=\pm 1,\ x_1=x_3=0,\ x_4=\mp 1$$

$$x_1=x_3=\mp 1,\ x_2=x_4=\pm 1 \qquad x_1=\pm 1,\ x_2=x_4=\mp 1,\ x_3=0$$

$$x_1=x_2=x_4=\pm 1,\ x_3=\mp 1 \qquad x_1=x_4=\pm 1,\ x_2=0,\ x_3=\mp 1$$

$$x_1=x_2=0,\ x_3=\pm 1,\ x_4=\mp 1$$

т.е. всего 18 решений.

Проделывая простые вычисления при помощи выписанных решений уравнений $Q_1=n$, $Q_2=n$ и $Q_3=n$, получаем разложения:

$$\vartheta(\tau,Q_1,\varphi_{1111})=\frac{1}{17^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n}289x_1^4-153nx_1^2+9n^2\Big)z^n=$$

$$=\frac{148}{17^2}z^2+\frac{486}{17^2}z^3-\frac{856}{17^2}z^4-\frac{1108}{17^2}z^5+\frac{188}{17^2}z^6+\dots, \quad (16)$$

$$\vartheta(\tau,Q_1,\varphi_{3333})=\frac{1}{17^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n}289x_3^4-102nx_3^2+4n^2\Big)z^n=$$

$$=\frac{96}{17^2}z^2+\frac{148}{17^2}z^3-\frac{184}{17^2}z^4-\frac{558}{17^2}z^5+\frac{8}{17^2}z^6+\dots, \quad (17)$$

$$\vartheta(\tau,Q_1,\varphi_{1144})=\frac{1}{2\cdot 17^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n}578x_1^2x_4^2-34nx_1^2-51nx_4^2+4n^2\Big)z^n=$$

$$=-\frac{28}{17^2}z^2-\frac{198}{17^2}z^3+\frac{180}{17^2}z^4+\frac{1212}{17^2}z^5-\frac{812}{17^2}z^6+\ldots, \qquad (18)$$

$$\vartheta(\tau,Q_1,\varphi_{2223})=\frac{1}{4\cdot 17^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n}1156x_2^3x_3-306nx_2x_3-51nx_2^2+6n^2\Big)z^n=$$

$$=-\frac{66}{17^2}z^2+\frac{81}{17^2}z^3-\frac{222}{17^2}z^4-\frac{434}{17^2}z^5+\frac{462}{17^2}z^6+\ldots, \qquad (19)$$

$$\vartheta(\tau,Q_2,\varphi_{3333})=\frac{1}{17^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_2=n}289x_3^4-51nx_3^2+n^2\Big)z^n=$$

$$=\frac{6}{17^2}z+\frac{54}{17^2}z^3+\frac{96}{17^2}z^4+\frac{444}{17^2}z^6+\ldots, \qquad (20)$$

$$\vartheta(\tau,Q_3,\varphi_{4444})=\frac{1}{17^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_3=n}289x_4^4-51nx_4^2+n^2\Big)z^n=$$

$$=\frac{2}{17^2}z+\frac{16}{17^2}z^2+\frac{54}{17^2}z^3+\frac{160}{17^2}z^4+\frac{336}{17^2}z^5+\frac{376}{17^2}z^6+\ldots \qquad (21)$$

Согласно лемме 2 эти обобщенные кватернарные тэта-ряды являются параболическими формами типа (-6,17,1). Они линейно независимы, ибо определитель шестого порядка, элементами которого являются их коэффициенты, отличен от нуля. Известно, (/2/,с.899), что максимальное число линейно независимых параболических форм типа (-6,17,1) равно 6. Таким образом, доказана

<u>Теорема 3.</u> Система обобщенных кватернарных тэта-рядов

$$\vartheta(\tau,Q_1,\varphi_{1111}),\quad \vartheta(\tau,Q_1,\varphi_{3333}),\quad \vartheta(\tau,Q_1,\varphi_{1144}),$$

$$\vartheta(\tau,Q_1,\varphi_{2223}),\quad \vartheta(\tau,Q_2,\varphi_{3333}),\quad \vartheta(\tau,Q_3,\varphi_{4444})$$

является базисом пространства параболических форм типа (-6,17,1).

3.2. Теперь выведем формулу для числа представлений натурального числа n квадратичной формой

$$F_2 = Q_2(x_1,\ldots,x_4)+Q_2(x_5,\ldots,x_8)+$$
$$+Q_2(x_9,\ldots,x_{12}), \tag{22}$$

где форма Q_2 определена формулой (14).

Согласно лемме 5, приняв во внимание (14), (22) и (2), для F_2 получим: $k=6$, $\Delta = D = 17^3$, $\ell=3$, $N = q = 17$, $\chi(d)=1$, т.е. форма F_2 является примитивной квадратичной формой типа (-6,17,1).

<u>Теорема 4.</u> $r(n,F_2) = \frac{63}{614}\sigma_5^{\chi}(n) -$

$$-\frac{128871}{2^3\cdot 5\cdot 17^2\cdot 307}\left(\sum_{Q_1=n} 289x_1^4 - 153nx_1^2 + 9n^2\right)+$$

$$+\frac{18990693}{2^4\cdot 5\cdot 17^2\cdot 307}\left(\sum_{Q_1=n} 289x_3^4 - 102nx_3^2 + 4n^2\right)+$$

$$+\frac{2961441}{2^3\cdot 5\cdot 17^2\cdot 307}\left(\sum_{Q_1=n} 578x_1^2x_4^2-34nx_1^2-51nx_4^2+4n^2\right)+$$

$$+\frac{1058607}{2^2\cdot 17^2\cdot 307}\left(\sum_{Q_2=n} 289x_3^4-51nx_3^2+n^2\right),$$

где

$$\sigma^*_5(n)=\begin{cases}\sigma_5(n) & \text{при } 17\nmid n,\\ \sigma_5(n)-4913\,\sigma_5\left(\frac{n}{17}\right) & \text{при } 17\mid n.\end{cases}$$

Доказательство. Согласно (1), принимая во внимание сказанное выше о числе решений уравнения $Q_2=n$, получаем:

$$\vartheta(\tau,Q_2)=1+5z+6z^3+6z^4+18z^6+\cdots$$

Следовательно, в силу (22) и (14), имеем:

$$\vartheta(\tau,F_2)=\vartheta^3(\tau,Q_2)=$$

$$=1+18z+108z^2+234z^3+234z^4+864z^5+810z^6+\cdots \qquad (23)$$

Согласно лемме 4, разность $\vartheta(\tau,F_2)-E(\tau,F_2)$ является параболической формой типа (–6, 17, 1). Следовательно, согласно теореме 3, осуществляют также числа $c_1,\ldots,c_6$, что

$$\vartheta(\tau,F_2)-E(\tau,F_2)=c_1\vartheta(\tau,Q_1,\varphi_{1111})+c_2\vartheta(\tau,Q_1,\varphi_{3333})+$$
$$+c_3\vartheta(\tau,Q_1,\varphi_{1144})+c_4\vartheta(\tau,Q_1,\varphi_{2223})+c_5\vartheta(\tau,Q_2,\varphi_{3333})+$$
$$+c_6\vartheta(\tau,Q_3,\varphi_{4444}).$$

Приравнивая коэффициенты при $z, z^2, \dots, z^6$ в обеих частях этого равенства и принимая во внимание разложения (23), (4) и (16)-(21), так же, как и выше, получим, что

$$c_1=-\frac{128871}{2^3\cdot 5\cdot 307},\quad c_2=\frac{18990693}{2^4\cdot 5\cdot 307},\quad c_3=\frac{2961441}{2^2\cdot 5\cdot 307},$$

$$c_4=c_6=0,\quad c_5=\frac{1058607}{2^2\cdot 307}.$$

Таким образом, доказано тождество

$$\vartheta(\tau,F_2)=E(\tau,F_2)-\frac{128871}{2^3\cdot 5\cdot 307}\vartheta(\tau,Q_1,\varphi_{1111})+$$
$$+\frac{18990693}{2^4\cdot 5\cdot 307}\vartheta(\tau,Q_1,\varphi_{3333})+\frac{2961441}{2^2\cdot 5\cdot 307}\vartheta(\tau,Q_1,\varphi_{1144})+$$
$$+\frac{1058607}{2^2\cdot 307}\vartheta(\tau,Q_2,\varphi_{3333}).$$

Приравнивая коэффициенты при z^n в обеих частях этого тождества и принимая во внимание (1), (4) и (16)-(21), получаем утверждаемое.

Поступила I.IV.I987

Кафедра
алгебры и геометрии

Литература

1. Г.А.Ломадзе. Труды Тбилисск.математ. ин-та АН ГССР,1974, т.45, 146-161.
2. E. Hecke. Mathematische Werke. Göttingen, 1970, 965S.
3. К.Ш.Шавгулидзе. Труды Тбилисск.ун-та,1980, т.214,194-219.
4. O.Hermann. J.Number Theory, 1969, v.1, 431-458.

ნ. კაჭახიძე

(-6,13,1) და (-6,17,1) ტიპის პარაბოლურ და კვადრატულ ფორმათა შესახებ

რეზიუმე

აგებულია (-6,13,1) და (-6,17,1) ტიპის პარაბოლურ ფორმათა სივრცეების ბაზისები განზოგადებული ოთხჯერადი თეტა-ფუნქციების სახით. აგებული ბაზისების საშუალებით მიღებულია ფორმულები ნატურალური რიცხვის (-6,13,1) ტიპის და (-6,17,1) ტიპის თითო-თითო კვადრატული ფორმით წარმოდგენათა რაოდენობისათვის.

Kachakhidze

ON CUSP AND QUADRATIC FORMS OF TYPES (-6,13,1) AND (-6,17,1)

Summary

The bases of the spaces of cusp forms of types (-6,13,1) and (-6,17,1) in the form of generalized quaternary theta-series are constructed. Formulae for the number of representations of positive integers by one quadratic form of type (-6,13,1) and one of type (-6,17,1) are derived by means of the constructed bases.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988

УДК 511

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Г.Л.Эркомаишвили

Клоостерман /1/ при помощи сложного аппарата модулярных функций получил формулу для числа целочисленных решений системы диофантовых уравнений

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=n, \qquad x_1+x_2+x_3=m.$$

Ван-дер-Блей /2/ при помощи аппарата матриц дал значительно более простое доказательство результата Клоостермана.

В предлагаемой работе показано, как можно вполне элементарно получить формулы для арифметической функции $\nu(a,b;n,m)$ – числа целочисленных решений системы диофантовых уравнений

$$\begin{aligned} &a(x_1^2+x_2^2)+bx_3^2=n, \\ &x_1+x_2+x_3=m \quad (a,b,n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{Z}) \end{aligned} \tag{I}$$

при условии, что

$$a+2b=p \qquad (p \text{ - нечетное простое}). \quad (2)$$

В частности, с целью иллюстрации, выведена формула для $r(a,b;\, n,m)$ при $a=1;\ b=1,2,3.$

1. Исключив x_3 из обоих уравнений системы (1), получим уравнение

$$(a+b)(x_1^2+x_2^2)+2bx_1x_2-2bx_1m-2bx_2m=n-bm^2.$$

Это уравнение можно написать в виде

$$(a+b)\left(x_1-\frac{bm}{a+2b}\right)^2+(a+b)\left(x_2-\frac{bm}{a+2b}\right)^2+$$

$$+2b\left(x_1-\frac{bm}{a+2b}\right)\left(x_2-\frac{bm}{a+2b}\right)-\frac{2(a+2b)b^2m^2}{(a+2b)^2}=n-bm^2$$

или

$$(a+2b)\big((a+2b)x_1-bm\big)^2+(a+2b)\big((a+2b)x_2-bm\big)^2+$$

$$+2b\big((a+2b)x_1-bm\big)\big((a+2b)x_2-bm\big)= \qquad (3)$$

$$=(a+2b)\big((a+2b)n-abm^2\big).$$

В силу (2), уравнение (3) принимает вид

$$a(px_1-bm)^2+b(px_2-bm)^2+b(px_1-bm+px_2-bm)=$$

$$=p(pn-abm^2).$$

Нетрудно проверить, что умножив обе части этого уравнения на $\dfrac{2}{p}$, раскрыв скобки и приняв во внимание (2), получим уравнение

$$ap(x_1-x_2)^2+(p(x_1+x_2)-2bm)^2=2(pn-abm^2). \tag{4}$$

Применив к уравнению (4) линейную подстановку

$$x_1-x_2=u, \qquad x_1+x_2=v,$$

т.е.

$$x_1=\frac{u+v}{2}, \qquad x_2=\frac{v-u}{2},$$

получим

$$\begin{cases} apu^2+(pv-2bm)^2=2(pn-abm^2), & (5_1) \\ u\equiv v \pmod{2} & (5_2) \end{cases}$$

Пусть (u_0, v_0) – произвольное решение уравнения (5_1), тогда

$$apu_0^2+(pv_0-2bm)^2\equiv 2(p-abm^2)\pmod 2.$$

В силу (2), $2\nmid a$. Следовательно, $u_0^2+v_0^2\equiv 0\pmod 2$, т.е. $u_0\equiv v_0\pmod 2$. Таким образом, всякое решение уравнения (5_1) удовлетворяет и сравнению (5_2).

Применив к уравнению (5_1) линейную подстановку

$$pv-2bm=x,\qquad u=y,$$

т.е.

$$v=\frac{x+2bm}{p},\qquad y=u,$$

получим

$$\begin{cases} apy^2+x^2=2(pn-abm^2), & (6_1)\\ x+2bm\equiv 0\pmod p. & (6_2)\end{cases}$$

Условие (6_2), в силу (2), можно переписать в виде

$$x\equiv am\pmod p. \qquad (7)$$

Из (6_1) следует, что

$$x^2+2abm^2\equiv 0\pmod p,$$

т.е., опять-таки в силу (2),

$$x^2 - a^2m^2 \equiv 0 \pmod p.$$

Таким образом, если (x_0, y_0) является решением уравнения (6_1), то выполняется сравнение

$$x_0^2 \equiv a^2m^2 \pmod p. \tag{8}$$

Здесь могут иметь место следующие два случая:

1) p/m. Тогда из (8) получим, что $x_0 \equiv 0 \pmod p$, а это значит, что (x_0, y_0) удовлетворяет и сравнению (6_2). Из (1), (3), (4), (5) и (6) следует, что

$$r(a,b;n,m) = r(h), \qquad h = 2(pn - abm^2),$$

где $r(k)$ обозначает число целочисленных решений уравнения

$$x^2 + apy^2 = k \tag{9}$$

2) $p \nmid m$. Тогда из (8) следует, что

$$x \equiv am \pmod p \tag{10}$$

или

$$x \equiv -am \pmod{p}. \qquad (11)$$

Если x_0 является решением оравнения (10), то $-x_0$ будет решением оравнения (11) и наоборот. Поэтому из двух решений (x_0, y_0) и $(-x_0, y_0)$ уравнения (5_1) одно и только одно будет решением оравнения (6_2).

Следовательно,

$$\bar{r}(a,b;n,m) = \frac{1}{2} r(h).$$

Итак, доказана

<u>Теорема 1</u>. Пусть $a+2b=p$, где p - нечетное простое число. Тогда

$$r(a,b;n,m) = \begin{cases} r(2(pn-abm^2)) \text{ при } p|m, \\ \frac{1}{2} r(2(pn-abm^2)) \text{ при } p\nmid m, \end{cases} \qquad (12)$$

где $r(2(pn-abm^2))$ обозначает число целочисленных решений уравнения

$$x^2+apy^2=2(pn-abm^2) \qquad (13)$$

2. Рассмотрим несколько диофантовых систем вида (1).

<u>Теорема 2</u> (Клостерман). Пусть

$$N=\frac{1}{2}(3n-m^2). \qquad (14)$$

Тогда

$$\nu(1,1;n,m)=\begin{cases} 0 \text{ при } 3n<m^2 \text{ и при } n\not\equiv m \pmod 2, \\ 1 \text{ при } 3n=m^2, \\ 6\sum\limits_{d|N}\left(\frac{d}{3}\right) \text{ при } 3n>m^2,\ n\equiv m \pmod 2,\ 3|N, \\ 3\sum\limits_{d|N}\left(\frac{d}{3}\right) \text{ при } 3n>m^2,\ n\equiv m \pmod 2,\ 3\nmid N, \end{cases} \tag{15}$$

где $\left(\frac{d}{3}\right)$ – обобщенный символ Лежандра.

<u>Доказательство</u>. Известно (см., напр., /3/, с.167), что число целочисленных решений уравнения $x^2+3y^2=k$ $(k=2^{\alpha}u, 2\nmid u)$

$$\nu(k)=\begin{cases} 0 & \text{при } 2\nmid\alpha, \\ 2\sum\limits_{d|u}\left(\frac{d}{3}\right) & \text{при } \alpha=0, \\ 6\sum\limits_{d|u}\left(\frac{d}{3}\right) & \text{при } 2|\alpha,\ \alpha\geq 2. \end{cases} \tag{16}$$

В теореме 1 положим $a=b=1$, следовательно, $\rho=3$. Тогда уравнение (13) примет вид

$$x^2+3y^2=k, \qquad k=2(3n-m^2). \tag{17}$$

Если $3n<m^2$, то $k<0$. Следовательно, в силу (12) и (17), получим первую половину первой строки формулы (15).

Если $n\not\equiv m \pmod 2$, то $k=2u$, $2\nmid u$.

Следовательно, в силу (12) и (16), получаем вторую половину первой строки формулы (15).

Если $3n=m^2$, то $k=0$. Следовательно, в силу (12) и (17), получаем вторую строку формулы (15).

Если $3n>m^2$ и $n\equiv m \pmod 2$, то согласно (17) и (14) $k=4N=2^{\alpha}u,\ \alpha\geq 2,\ 2\nmid u$. Итак, в силу (12) и (16), получаем последние две строки формулы (15). Действительно, из $3|m$ и $3\nmid m$ следует $3|N$ и $3\nmid N$ соответственно; далее, ввиду мультипликативности символа Лежандра, имеем

$$\sum_{d|N}\left(\frac{d}{3}\right)=\sum_{d_1|2^{\alpha-2}}\left(\frac{d_1}{3}\right)\sum_{d_2|u}\left(\frac{d_2}{3}\right)=\begin{cases}\sum\limits_{d|u}\left(\frac{d}{3}\right) & \text{при } 2|\alpha,\\ 0 & \text{при } 2\nmid\alpha.\end{cases}$$

<u>Теорема 3</u>. Пусть $2(5n-2m^2)=2^{\alpha}5^{\beta}u$, $(u,10)=1$. Тогда

$$r(1,2;n,m)=\begin{cases}0 & \text{при } 5n<2m^2,\\ 1 & \text{при } 5n=2m^2,\\ \frac{1}{2}\left(1+(-1)^{\alpha}\left(\frac{u}{5}\right)\right)\sum_1 & \text{при } 5n>2m^2,\ \beta=0,\\ \left(1+(-1)^{\alpha}\left(\frac{v}{5}\right)\right)\sum_1 & \text{при } 5n>2m^2,\ \beta\geq 1,\end{cases}\tag{18}$$

где

$$\sum_1=\sum_{\substack{d|u\\ d\equiv 1,3,7,9 \pmod{20}}}1-\sum_{\substack{d|v\\ d\equiv 11,13,17,19 \pmod{20}}}1.\tag{19}$$

Доказательство. Известно (см., напр., /3/, с.176), что число целочисленных решений уравнения $x^2+5y^2=k$ $(k=2^\alpha 5^\beta u,\ (u,10)=1)$

$$r(k)=\left(1+(-1)^\alpha\left(\frac{u}{5}\right)\right)\sum_1. \tag{20}$$

В теореме I положим $a=1,\ b=2$, следовательно, $p=5$. Тогда уравнение (I3) примет вид

$$x^2+5y^2=k, \qquad k=2(5n-2m^2). \tag{21}$$

Если $5n<2m^2$, то $k<0$. Следовательно, в силу (12) и (21), получим первую строку формулы (18).

Если $5n=2m^2$, то $k=0$. Следовательно, в силу (12) и (21), получим вторую строку формулы (I8).

Если $5n>2m^2$, то, согласно (12) и (20), получаем последние две строки формулы (18), ибо из $5|m$ и $5\nmid m$ следует $\beta\geq 1$ и $\beta=0$ соответственно.

Теорема 4. Пусть $2(7n-3m^2)=2^\alpha u,\ 2\nmid u.$

Тогда

$$r(1,3;n,m)=\begin{cases} 0 & \text{при } 7n<3m^2 \text{ и при } n\not\equiv m \pmod 2,\\ 1 & \text{при } 7n=3m^2,\\ \sum\limits_{d|2^{\alpha-2}u}\left(\frac{d}{7}\right) & \text{при } 7n>3m^2,\ n\equiv m \pmod 2,\ 7\nmid u,\\ 2\sum\limits_{d|2^{\alpha-2}u}\left(\frac{d}{7}\right) & \text{при } 7n>3m^2,\ n\equiv m \pmod 2,\ 7|u. \end{cases} \tag{22}$$

Доказательство. Известно (см., напр., /3/, с.167), что число целочисленных решений уравнения $x^2+7y^2=k$ ($k=2^\alpha u$, $2\nmid u$)

$$r(k)=\begin{cases} 2\sum\limits_{d|u}\left(\frac{d}{7}\right) & \text{при } \alpha=0,\\ 0 & \text{при } \alpha=1,\\ 2\sum\limits_{d|2^{\alpha-2}u}\left(\frac{d}{7}\right) & \text{при } \alpha\geq 2. \end{cases} \qquad (23)$$

В теореме I положим $a=1$, $b=3$. Следовательно, $p=7$. Тогда уравнение (13) примет вид

$$x^2+7y^2=k, \qquad k=2(7n-3m^2). \qquad (24)$$

Если $7n<3m^2$, то $k<0$. Следовательно, в силу (12) и (24), получим первую половину первой строки формулы (22).

Если $n\not\equiv m \pmod 2$, то $k=2u$, $2\nmid u$. Следовательно, в силу (12) и (23), получим вторую половину первой строки формулы (22).

Если $7n=3m^2$, то $k=0$. Следовательно, в силу (12) и (24), получаем вторую строку формулы (22).

Если $7n>3m^2$ и $n\equiv m \pmod 2$, то $k=2^\alpha u$, $\alpha\geq 2$, $2\nmid u$ согласно (24)

Поэтому, в силу (12) и (23), получим последние две строки формулы (22), ибо из $7/m$ и $7\nmid m$ следует $7/u$ и $7\nmid u$ соответственно.

Поступила I.IУ.1987.

Кафедра
алгебры и геометрии

Литература

I. H.D.Kloosterman, Math. Annalen, 1942, B.118, 319-364.

2. F.Van der Bly, Inda. Mones Math., 1947, v.9, N1, 16-25; 129-135.

3. Л.Е.Диксон. Введение в теорию чисел. Обработанный перевод с английского А.З.Вальфиша. Тбилиси: Изд-во АН ГССР, 1941, с.409.

ც. ურქონიშვილი

დიოფანტურ განტოლებათა ერთი სისტემის შესახებ

რეზიუმე

სავსებით ელემენტარულად დამტკიცებულია ფორმულა

$$\begin{cases} a(x_1^2+x_2^2)+bx_3^2=n \\ x_1+x_2+x_3=m \end{cases} \qquad (a+2b=p,\ p\text{ - კენტი მარტივია})$$

დიოფანტურ განტოლებათა სისტემის მთელ რიცხვებში ამონახსნთა რაოდენობისათვის. ამ ზოგადი ფორმულიდან, როცა $a=b=1$, გამომდინარეობს კლოსტერმანის ცნობილი ფორმულა.

G. Erkomaishvili

ON A CERTAIN SYSTEM OF DIOPHANTINE EQUATIONS

Summary

A fully elementary proof of the formula for the number of integral solutions of the system of diophantine equations

$$\begin{cases} a(x_1^2+x_2^2)+bx_3^2=n \\ x_1+x_2+x_3=m \end{cases} \qquad (a+2b=p,\ p\text{-odd prime})$$

is given. From this general formula follows Kloosterman's well-known formula for the case a=b=1.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988

УДК 511.3

О РАЦИОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ К НЕКОТОРЫМ БЕСКОНЕЧНЫМ ЦЕПНЫМ ДРОБЯМ

Б.Г.Тасоев

Класс бесконечных цепных дробей, не являющихся периодическими и для которых имеется достаточная информация (в смысле арифметической природы и аппроксимации рациональными дробями), достаточно узок. Исключение составляют цепные дроби, связанные с числом e и с теоремами Лиувилля и Рота /1/, /2/.

В 1737 г. Эйлером было получено разложение

$$\frac{e^{\frac{2}{a}}+1}{e^{\frac{2}{a}}-1}=[a;3a,5a,\ldots,(2n+1)a,\ldots],\ a\in N, \tag{0.1}$$

известное как цепная дробь Ламберта /3/. Из этого разложения при $a=2$ следует

$$\frac{e+1}{e-1}=[2;6,10,\ldots,4n+2,\ldots]. \tag{0.2}$$

Отсюда Эйлер получил разложение для e :

$$e=[2;1,2,1,1,4,1,\ldots,1,2n,1,\ldots]. \qquad (0.3)$$

Впоследствии Гурвицем были найдены разложения /4/

$$e^2=[7;2,1,\overline{3+3\lambda,18+12\lambda,5+3\lambda,1,1}]_{\lambda=0}^{\infty}; \qquad (0.4)$$

$$e^{\frac{1}{q}}=[1;q-1,1,1,3q-1,1,1,5q-1,1,1,\ldots],\ q\in N; \qquad (0.5)$$

$$e^{\frac{2}{k}}=[1;\overline{\tfrac{k-1}{2}+3\lambda k,6k+12\lambda k,\tfrac{5k-1}{2}+3\lambda k,1}],\ 2\nmid k,\ k\in N. \qquad (0.6)$$

В настоящее время неизвестно разложение в цепную дробь числа e^a, где a - рациональное число или даже произвольное целое /3/.

Зигелем /5/ в 1929 г. было установлено следующее. Пусть

$$K_\lambda(x)=\Gamma(\lambda+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\lambda}J_\lambda(x)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

где $J_\lambda(x)$ - бесселева функция. Тогда из известных соотношений

$$J'_\lambda = \frac{\lambda}{x} J_\lambda - J_{\lambda+1},$$

$$\frac{J_{\lambda-1}}{J_\lambda} = \frac{2\lambda}{x} - \cfrac{1}{\frac{2\lambda+2}{x} - \dots}$$

следует, что цепная дробь

$$-i\,\frac{J_{\lambda-1}(2ix)}{J_\lambda(2ix)} = \frac{\lambda}{x} - \cfrac{1}{\frac{\lambda+1}{x} + \cfrac{1}{\frac{\lambda+2}{x} + \dots}}$$

для рационального λ и алгебраического $x \neq 0$ представляет трансцендентное число. Отсюда получается трансцендентность дроби

$$[r_1; r_2, r_3, \dots, r_n, \dots],$$

где $r_1, r_2, r_3, \dots$ – рациональные числа, образующие арифметическую прогрессию.

Дэвисом в работах /6/, /7/, с помощью цепных дробей доказано:

1. Неравенство

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \frac{\ln \ln q}{q^2 \ln q} \tag{0.7}$$

имеет бесконечно много решений в $p,\ q \in \mathbb{N}$;

2. Неравенство

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| > \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \frac{\ln \ln q}{q^2 \ln q} \qquad (0.8)$$

имеет место при всех натуральных $p, q: \; q \geq q_0(\varepsilon)$;

3. Неравенство

$$\left| e^{\frac{2}{b}} - \frac{p}{q} \right| < (c+\varepsilon) \frac{\ln \ln q}{q^2 \ln q}, \quad b \in \mathbb{N} \qquad (0.9)$$

имеет бесконечно много решений в $p, q \in \mathbb{N}$;

4. Неравенство

$$\left| e^{\frac{2}{b}} - \frac{p}{q} \right| > (c-\varepsilon) \frac{\ln \ln q}{q^2 \ln q} \qquad (0.10)$$

выполнено при всех натуральных $p, q: \; q \geq q_0(\varepsilon)$, где

$$c = \begin{cases} \frac{1}{b}, & 2 \nmid b, \\ \frac{1}{4b}, & 2 \mid b. \end{cases}$$

В настоящей работе даются аппроксимации рациональными дробями бесконечных цепных дробей, неполные частные которых растут по определенным закономерностям.

§ 1. Арифметические цепные дроби с одной и с двумя арифметическими прогрессиями

Ради полноты изложения докажем одно предложение, установленное Зигелем /5/. (Нами получено независимое от него доказательство).

Пусть

$$a, d, s \in \mathbb{N}, \quad \lambda = \frac{a}{d}, \quad [\lambda, 0] = 1, \tag{1.1}$$

$$[\lambda, s] = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+s-1).$$

<u>Теорема 1.1</u>. Имеет место разложение

$$\frac{\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!\, d^{2s+1} \cdot [\lambda, s+2]}}{\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!\, d^{2s} \cdot [\lambda, s+1]}} = \tag{1.2}$$

$$= [0; a+d, a+2d, \ldots, a+nd, \ldots].$$

В частности, при $a=0$

$$\frac{\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!(s+1)!\, d^{2s+1}}}{\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s!)^2 \cdot d^{2s}}} = \tag{1.3}$$

$$= [0; d, 2d, 3d, \ldots, nd, \ldots].$$

Доказательство. Рассмотрим р 1

$$f_n(x)=\sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{s!\, d^{n+s+1}[A, s+1]}, \qquad (1.4)$$

$$1 = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Покажем, что для любого n

$$f_n(x)-(dn+d+a)f_{n+1}(x)=dxf_{n+2}(x). \qquad (1.5)$$

Действительно, коэффициент при x^k в левой части (1.5) равен

$$\frac{1}{k!\, a(a+d)\cdots(a+dn+dk)}-\frac{dn+d+a}{k!\, a(a+d)\cdots(a+d+dn+dk)}=$$

$$=\frac{d}{(k-1)!\, a(a+d)\cdots(a+d+dn+dk)},$$

а в правой части (1.5) он равен

$$\frac{d}{(k-1)!\, a(a+d)\cdots(dn+2d+dk-d+a)}=$$

$$=\frac{d}{(k-1)!\, a(a+d)\cdots(a+d+dn+dk)}$$

Следовательно, равенство (1.5) справедливо для любого n. В частности, при $x = \frac{1}{d}$ имеем:

$$f_n\left(\frac{1}{d}\right) - (dn+d+a) f_{n+1}\left(\frac{1}{d}\right) = f_{n+2}(x),$$

или положив

$$\frac{f_n\left(\frac{1}{d}\right)}{f_{n+1}\left(\frac{1}{d}\right)} = \alpha_n,$$

получим

$$\alpha_n = d(n+1) + a + \frac{1}{\alpha_{n+1}},$$

откуда следует, что

$$\alpha_0 = [a+d;\ a+2d, a+3d, \ldots, a+nd, \ldots]$$

С другой стороны, из (1.4) следует, что

$$\alpha_0 = \frac{f_0\left(\frac{1}{d}\right)}{f_1\left(\frac{1}{d}\right)} = \frac{\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!\, d^{2s} \cdot [\lambda, s+1]}}{\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!\, d^{2s+1} \cdot [\lambda, s+2]}}$$

Из последних соотношений следует (I.2).

Для доказательства (I.3) следует рассмотреть ряд

$$f_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{s!(n+s)!\,d^{n+s}}$$

Очевидно, что если $\beta > 0$, то

$$\beta[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] = [a_0\beta; \frac{a_1}{\beta}, a_2\beta, \frac{a_3}{\beta} \ldots]. \tag{I.6}$$

<u>Теорема 2.I.</u> Пусть $u, v \in N$. Тогда

$$\frac{1}{d} \cdot \frac{\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{2^s}{s!(s+1)!(uv)^s}}{\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{2^s}{(s!)^2 \cdot (uv)^s}} = \tag{I.7}$$

$$= [0; u, v, 3u, 2v; 5u, 3v, \ldots].$$

<u>Доказательство.</u> Положим в (I.3) $d = \sqrt{\frac{uv}{2}}$. Тогда

$$\frac{1}{d} \cdot \frac{\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{2^s}{s!(s+1)!(uv)^s}}{\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{2^s}{(s!)^2 (uv)^s}} =$$

$$= [0; \sqrt{\frac{uv}{2}}, 2\sqrt{\frac{uv}{2}}, 3\sqrt{\frac{uv}{2}}, \ldots].$$

Умножив обе части на $\sqrt{\frac{v}{2u}}$, получим

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{\sum\limits_{s=0}^{\infty}\frac{2^s}{s!(s+1)!(uv)^s}}{\sum\limits_{s=0}^{\infty}\frac{2^s}{(s!)^2(uv)^s}}=\sqrt{\frac{v}{2u}}\left[0;\sqrt{\frac{uv}{2}},2\sqrt{\frac{uv}{2}},3\sqrt{\frac{uv}{2}},\dots\right]=$$

$$=[0;u,v,3u,2v,5u,3v,\dots]$$

Теорема 3.1. Пусть $u,v\in\mathbb{N}$. Тогда

$$\sqrt{\frac{v}{u}}\;\frac{e^{\frac{2}{\sqrt{uv}}}-1}{e^{\frac{2}{\sqrt{uv}}}+1}=[0;u,3v,5u,7v,\dots]. \tag{1.8}$$

В частности,

$$\sqrt{2}\cdot\frac{e^{\sqrt{2}}-1}{e^{\sqrt{2}}+1}= \tag{1.9}$$

$$=[0;1,6,5,14,\dots,4n+1,8n+6,\dots]$$

Доказательство. Положим в (0.1) $a=\sqrt{uv}$:

$$\frac{e^{\frac{2}{\sqrt{uv}}}-1}{e^{\frac{2}{\sqrt{uv}}}+1}=[0;\sqrt{uv},3\sqrt{uv},5\sqrt{uv},\dots].$$

Умножив обе части на $\sqrt{\frac{\nu}{u}}$, получим (I.8).

Имея в виду (I.6), легко получить следующие соотношения:

$$\frac{\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!(s+1)!\, b^{s+1} d^{2s+1}}}{\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s!)^2\, b^{s} d^{2s}}} = [0;\ bd,\ 2d,\ 3bd,\ 4d, \ldots]; \qquad (I.10)$$

$$\frac{\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!(s+1)!\, b^{s} d^{2s+1}}}{\sum\limits_{s+1}^{\infty} \frac{1}{(s!)^2\, b^{s} d^{2s}}} = [0 \cdot d,\ 2bd,\ 3d,\ 4bd, \ldots]; \qquad (I.11)$$

$$\frac{\sum\limits_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!\, b^{s+1/2} d^{2s+1} [\lambda, s+2]}}{\sum\limits_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!\, b^{s+1/2} d^{2s} [\lambda, s+1]}} = [0;\ a+d,\ (a+2d)b,\ (a+3d),\ (a+4d)b, \ldots]; \qquad (I.12)$$

$$\frac{\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!\, b^{s/2} d^{2s+1} [\lambda, s+2]}}{\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!\, b^{s/2} d^{2s} [\lambda, s+1]}} = [0;\ (a+d)b,\ a+2d,\ (a+3d)b, \ldots]. \qquad (I.13)$$

Теорема 1.1. Цепные дроби (1.2), (1.3), (1.7), (1.8) (1.9), (1.10), (1.11), (1.12), (1.13) - трансцендентны.

Доказательство. Трансцендентность (1.2) установлена Зигелем /5/. Трансцендентность остальных дробей следует из того, что каждая из них получается из (1.2) умножением на соответствующее алгебраическое число (см. также /8/).

§2. Цепные дроби с геометрическими прогрессиями

Теорема 1.2. Пусть $a\geq 2,\ b\geq 1$ - целые числа. Имеет место разложение

$$b\,\frac{1+\sum\limits_{s=1}^{\infty} a^{-s^2+2s}\, b^{-2s}\prod\limits_{m=1}^{s}(a^{2m}-1)^{-1}}{1+\sum\limits_{s=1}^{\infty} a^{-s^2}\, b^{-2s}\prod\limits_{m=1}^{s}(a^{2m}-1)^{-1}}= \tag{2.1}$$

$$=[b;\,ab,\,a^2b,\,a^3b,\dots].$$

Доказательство. Рассмотрим всюду сходящийся ряд

$$f_n(x)=\frac{1}{a^{\frac{n^2-n}{2}}\,b}+ \tag{2.2}$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(a-1)^s}{a^{\frac{n^2-n}{2}+2ns+s^2-2s}\cdot b^s\cdot\prod\limits_{m=1}^{s}(a^{2m}-1)}\,x^s.$$

Докажем, что для всякого n

$$f_n(x)-ba^n f_{n+1}(x)=(a-1)b^2 x f_{n+2}(x). \qquad (2.3)$$

В самом деле, коэффициент при x^s в левой части (2.3) равен

$$\frac{(a-1)^s}{a^{\frac{n^2-n}{2}+2ns+s^2-2s}\cdot b^n\prod\limits_{m=1}^{s}(a^{2m}-1)}-$$

$$-\frac{b\cdot a^n(a-1)^s}{a^{\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}+2(n+1)s+s^2-2s}\cdot b^{n+1}\prod\limits_{m=1}^{s}(a^{2m}-1)}=$$

$$=\frac{(a-1)^s}{a^{\frac{n^2-n}{2}+2ns+s^2-2s}\cdot b^n\prod\limits_{m=1}^{s}(a^{2m}-1)}\left(1-\frac{1}{a^{2s}}\right)=$$

$$=\frac{(a-1)^s}{a^{\frac{n^2-n}{2}+2ns+s^2}\cdot b^n\prod\limits_{m=1}^{s-1}(a^{2m}-1)},$$

а в правой части (2.3) он равен

$$\frac{(a-1)b^2\cdot(a-1)^{s-1}}{a^{\frac{(n+2)^2-(n+2)}{2}+2(n+2)(s-1)+(s-1)^2-2(s-1)}\, b^{n+2}\prod\limits_{m=1}^{s-1}(a^{2m}-1)}=$$

$$= \frac{(a-1)^{s}}{a^{\frac{n^2-n}{2}+2ns+s^2}\cdot b^n \prod\limits_{m=1}^{s-1}(a^{2m}-1)}.$$

Следовательно, равенство (2.3) имеет место. Положив, в частности, $x = \frac{1}{(a-1)b^2}$, получим

$$f_n\left(\frac{1}{(a-1)b^2}\right) - ba^n \cdot f_{n+1}\left(\frac{1}{(a-1)b^2}\right) = f_{n+2}\left(\frac{1}{(a-1)b^2}\right). \tag{2.3$_1$}$$

Обе части последнего равенства разделим на $f_{n+1}\left(\frac{1}{(a-1)b^2}\right)$ и введем обозначение

$$f_n\left(\frac{1}{(a-1)b^2}\right) \Big/ f_{n+1}\left(\frac{1}{(a-1)b^2}\right) = \alpha_n. \tag{2.4}$$

Тогда (2.3$_1$) примет вид

$$\alpha_n = ba^n + \frac{1}{\alpha_{n+1}},$$

откуда следует, что

$$\alpha_0 = [b;\ ab,\ a^2 b,\ a^3 b, \ldots].$$

С другой стороны, в силу (2.4) и (2.2)

$$\alpha_0 = \frac{f_0\left(\frac{1}{(a-1)b^2}\right)}{f_1\left(\frac{1}{(a-1)b^2}\right)} =$$

$$= \frac{1+\sum_{s=1}^{\infty} a^{-s^2+2s} \cdot b^{-2s} \prod_{m=1}^{s} (a^{2m}-1)^{-1}}{\frac{1}{b}\left(1+\sum_{s=1}^{\infty} a^{-s^2} b^{-2s} \prod_{m=1}^{s} (a^{2m}-1)^{-1}\right)}$$

Приравнивая последние два равенства, получим (2.1).

В частности, при $a=b$, имеем

$$\frac{1+\sum_{s=0}^{\infty} a^{-s^2} \cdot \prod_{m=1}^{s} (a^{2m}-1)^{-1}}{\frac{1}{a}+\sum_{s=1}^{\infty} a^{-(s+1)^2} \cdot \prod_{m=1}^{s} (a^{2m}-1)^{-1}} = \tag{2.4}$$

$$= [a;\ a^2,\ a^3, \ldots].$$

Имея в виду (1.6), из (2.1) и (2.4) легко вывести, что

$$b^2 \cdot \frac{1+\sum_{s=1}^{\infty} a^{-s^2+2s} b^{-2s} \prod_{m=1}^{s} (a^{2m}-1)^{-1}}{1+\sum_{s=1}^{\infty} a^{-s^2} b^{-2s} \prod_{m=1}^{s} (a^{2m}-1)^{-1}} = \tag{2.5}$$

$$= [b^2;\ a,\ a^2 b^2,\ a^3,\ a^4 b^2, \ldots];$$

$$\frac{1+\sum\limits_{s=1}^{\infty} a^{-s^2+2s}\, b^{-2s} \cdot \prod\limits_{m=1}^{s} (a^{2m}-1)^{-1}}{1+\sum\limits_{s=1}^{\infty} a^{-s^2} \cdot b^{-2s} \cdot \prod\limits_{m=1}^{s} (a^{2m}-1)^{-1}} = \tag{2.6}$$

$$= [1; ab^2, a^2, a^3b^2, \ldots];$$

$$a \cdot \frac{1+\sum\limits_{s=1}^{\infty} a^{-s^2} \cdot \prod\limits_{m=1}^{s} (a^{2m}-1)^{-1}}{\frac{1}{a}+\sum\limits_{s=1}^{\infty} a^{-(s+1)^2} \cdot \prod\limits_{m=1}^{s} (a^{2m}-1)^{-1}} = \tag{2.7}$$

$$= [a^2; a, a^4, a^3, a^5, a^4, \ldots];$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1+\sum\limits_{s=1}^{\infty} a^{-s^2} \prod\limits_{m=1}^{s} (a^{2m}-1)^{-1}}{\frac{1}{a}+\sum\limits_{s=1}^{\infty} a^{-(s+1)^2} \cdot \prod\limits_{m=1}^{s} (a^{2m}-1)^{-1}} = [1; a^3, a^2, a^5, a^4, \ldots] \tag{2.8}$$

<u>Теорема 2.2</u>. Цепные дроби (2.1), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) и (2,8) имеют одну и ту же арифметическую природу.

Доказательство очевидно.

§3. О рациональных аппроксимациях к некоторым арифметическим цепным дробям

Пусть $p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - соответственно числитель и знаменатель подходящей дроби n-го порядка иррационального числа $[x_0; x_1, x_2, \ldots]$.

Известно /9/, что

$$q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \sum_{\substack{(i_1, i_2 \ldots i_{n-2k}) \\ i_1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \\ i_s \not\equiv i_{s+1} (\mathrm{mod}\, 2)}} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{n-2k}} . \tag{3.1}$$

В частности /10/,

$$g_n(1, 1, \ldots, 1) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \sum_{\substack{i_1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \\ i_s \not\equiv i_{s+1} (\mathrm{mod}\, 2)}} 1 = \tag{3.2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{k}{n-k} = V_n ,$$

то есть число членов многочлена $q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равно $V_n - n$ - члену ряда Фибоначчи

$$V_0 = V_1 = 1, \quad V_n = V_{n-1} + V_{n-2}, \quad n > 1 .$$

Таким образом,

$$x_1 x_2 \cdots x_n < q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) < V_n x_1 x_2 \ldots x_n < 2^n x_1 x_2 \ldots x_n ,$$

и, следовательно,

$$q_n = f(n) \cdot x_1 x_2 \ldots x_n , \tag{3.3}$$

где $1 < f(n) < V_n$.

Известно /11/, /12/, что для бесконечной цепной дроби

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$$

имеют место

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{x_{n+1} q_n^2}, \tag{3.4}$$

где $x_{n+1} = a_{n+1} + [0; a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots] + [0; a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1]$. (3.5)

Теорема 1.3. Пусть $a \geq 0$, $d \geq 1$ - целые числа,

$$\alpha = [a; a+d, a+2d, \ldots, a+nd, \ldots]. \tag{3.6}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \left(\frac{1}{d} + \varepsilon\right) \frac{\ln \ln q}{q^2 \ln q} \tag{3.7}$$

имеет бесконечно много решений в целых p, q.

Существует число $q' = q(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\left(\frac{1}{d}-\varepsilon\right)\frac{\ln\ln q}{q^2\ln q} \qquad (3.8)$$

для всех целых p, q , где $q \geq q'$.

Таким образом, цепные дроби (0.1), (1.2), (1.3) допускают порядок аппроксимации

$$\frac{1}{d}\cdot\frac{\ln\ln q}{q^2\ln q}.$$

Доказательство. Рассмотрим знаменатель подходящей дроби n-го порядка цепной дроби (3.6). Имеем

$$q_n=f(n)(a+d)(a+2d)\cdots(a+nd)=$$

$$=f(n)\,d^n\left(\frac{a}{d}+1\right)\cdots\left(\frac{a}{d}+n\right),$$

где $f(n)$ - функция, определенная условиями (3.5). Применяя формулу Стирлинга

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

находим

$$\ln q_n\sim n\ln n,$$

откуда следует, что

$$n \sim \frac{\ln q_n}{\ln \ln q_n}.$$

В силу (3.4), (3.5) и (3.6), имеем

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{x_{n+1} q_n^2} \sim \frac{1}{d} \frac{\ln \ln q_n}{q_n^2 \ln q_n}. \tag{3.9}$$

А тогда, для любого $\varepsilon > 0$ для достаточно больших n

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left(\frac{1}{d} + \varepsilon\right) \frac{\ln \ln q_n}{q_n^2 \ln q_n},$$

и, следовательно, (3.7) доказано.

Соотношение (3.9) показывает, что для любого $\varepsilon > 0$ и $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ неравенство (3.8) имеет место, если n — достаточно большое. Пусть $\frac{p}{q}$ не является подходящей дробью. Тогда

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{2q^2} > \left(\frac{1}{d} - \varepsilon\right) \frac{\ln \ln q}{q^2 \ln q}, \quad q \geq q'.$$

Теорема 1.3 доказана полностью.

Теорема 2.3. Пусть $a\geq 0,\ b\geq 0,\ u\geq 1,\ v\geq 1$ – целые числа;

$$\beta=[0;\ a+u,\ b+v,\ a+2u,\ b+2v,\ a+3u,\ b+3v,\ldots]; \qquad (3.10)$$

$$c_1=\frac{1}{2u};\ c_2=\frac{1}{2v};\ c_*=\min(c_1,c_2), \qquad (3.11)$$

$$c^*=\max(c_1,c_2).$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ неравенство

$$\left|\beta-\frac{p}{q}\right|<(c_*+\varepsilon)\frac{\ln\ln q}{q^2\ln q} \qquad (3.12)$$

имеет бесконечно много решений в целых p, q.

Существует число $q'=q(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\beta-\frac{p}{q}\right|>(c^*-\varepsilon)\frac{\ln\ln q}{q^2\ln q} \qquad (3.13)$$

для всех целых p, q, где $q\geq q'$.

Таким образом, цепные дроби (1.7), (1.8), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12), (1.13) допускают порядок аппроксимации $c\ln\ln q/q^2\ln q$.

Доказательство. Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы(1.3), находим: 1) $2/n$

$$q_n = f(n)(a+u)(b+v)(a+2u)(b+2v)\cdots\left(a+\frac{n}{2}u\right)\left(b+\frac{n}{2}v\right) =$$

$$= f(n)(uv)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{a}{u}+1\right)\left(\frac{a}{u}+2\right)\cdots\left(\frac{a}{u}+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{b}{v}+1\right)\left(\frac{b}{v}+2\right)\cdots\left(\frac{b}{v}+\frac{n}{2}\right);$$

$$\ln q_n \sim 2n\ln n, \quad \ln\ln q_n \sim \ln n,$$

и, следовательно, для достаточно больших n $\quad n \sim \dfrac{\ln q_n}{2\ln\ln q_n}$.

В силу (3.4), имеем:

$$\left|\beta - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{z_{n+1}q_n^2} < \frac{1}{\left(a+\frac{n+2}{2}u\right)q_n^2}.$$

Поэтому

$$\left|\beta - \frac{p_n}{q_n}\right| \sim \frac{1}{2u}\cdot\frac{\ln\ln q_n}{q_n^2\ln q_n}. \tag{3.14}$$

2) При $2 \nmid n$, рассуждая аналогичным образом, получим

$$\left|\beta - \frac{p_n}{q_n}\right| \sim \frac{1}{2v} \cdot \frac{\ln\ln q_n}{q_n^2 \ln q_n}. \tag{3.15}$$

В силу (3.14) и (3.15), для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n неравенство (3.12) имеет место. Точно также, если $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$, то верно (3.13). Если же $\frac{p}{q} \neq \frac{p_k}{q_k}$, то

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2} < (c_* + \varepsilon)\frac{\ln\ln q}{q^2 \ln q}$$

для достаточно больших n, то есть если $q \geq q'(\varepsilon)$.

<u>Теорема 3.3</u>. Пусть дана бесконечная цепная дробь

$$\gamma = [a_0; \underbrace{a, a, \ldots, a}_{K_1}, b+d, \underbrace{a, \ldots, a}_{K_2}, b+2d, \ldots], \tag{3.16}$$

причем последовательность $\{K_i\}$ возрастает не быстрее, чем линейная функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| < \left(\frac{1}{d}+\varepsilon\right)\frac{\ln\ln q}{q^2 \ln q} \tag{3.17}$$

имеет бесконечно много решений в целых p, q.

Существует число $q' = q(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| > \left(\frac{1}{d}-\varepsilon\right)\frac{\ln\ln q}{q^2 \ln q} \tag{3.18}$$

для всех целых p, q, где $q \geq q'$.

Таким образом, число e допускает аппроксимацию $\ln\ln q/2q^2\ln q$ (см. также /6/).

Доказательство. Имеем:

$$a_{k_n} = b+nd, \quad a_{k_n+i}=a, \qquad i=1,2,\ldots,k_{n+1}-k_n-1.$$

Пусть $P_n = p_{k_n-1}$, $Q_n = q_{k_n-1}$. Тогда

$$Q_n = f(n)\,a^{k_1-1}(b+d)\,a^{k_2-k_1-1}\cdots(b+nd)\,a^{k_n-k_{n-1}-1} \sim$$

$$\sim F(n)\,a^{k_n-n}\,d^n\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Отсюда следует, что

$$\ln Q_n \sim n \ln n .$$

и, следовательно,

$$\left|\gamma - \frac{P_n}{Q_n}\right| \sim \frac{1}{d} \cdot \frac{\ln\ln Q_n}{Q_n^2 \ln Q_n} .$$

Поэтому для любого $\varepsilon>0$ при достаточно больших n верно (3.17).

Второе утверждение теоремы получается из следующих соображений. Если $\frac{p}{q} = \frac{P_n}{Q_n}$, то (3.18) справедливо. Если $\frac{p}{q}$ есть подходящая дробь для γ, не равная $\frac{P_n}{Q_n}$, то

$$\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{(a+2)q^2} > \left(\frac{1}{d} - \varepsilon\right) \frac{\ln\ln q}{q^2 \ln q} ,$$

начиная с некоторого q'. Если же $\frac{p}{q}$ не есть подходящая дробь, то

$$\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{2q^2} > \left(\frac{1}{d} - \varepsilon\right) \frac{\ln\ln q}{q^2 \ln q} , \quad q > q' .$$

Теорема 4.3. Пусть $a>1,\ b\geq 1$ – целые числа,

$$\delta=[b;\ ab,\ a^2b,\ a^3b,\ldots]. \qquad (3.19)$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ неравенство

$$\left|\delta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1+\varepsilon}{q^{2+\sqrt{\frac{2\ln a}{\ln q}}+\frac{\ln a}{\ln q}}} \qquad (3.20)$$

имеет бесконечно много решений в целых p,q.

Существует число $q'=q(\varepsilon)$ таков, что

$$\left|\delta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1-\varepsilon}{q^{2+\sqrt{\frac{2\ln a}{\ln q}}+\frac{\ln a}{\ln q}}} \qquad (3.21)$$

для всех целых p,q, где $q>q'(\varepsilon)$.

(Таким образом, указанный в теореме порядок аппроксимации допускают цепные дроби (2.1), (2.2)).

Доказательство. Рассмотрим знаменатель подходящей дроби n-го порядка дроби (3.19). Для достаточно больших n

$$q_n \sim f(n)\, a \cdot a^2 \cdots a^n \cdot b^n = f(n)\, b^n \cdot a^{\frac{n^2+n}{2}},$$

откуда следует, что

$$\ln q_n \sim \frac{1}{2} n^2 \ln a,$$

и, следовательно,

$$n \sim \sqrt{\frac{2\ln q_n}{\ln a}}, \qquad a^{n+1} \sim q_n^{\sqrt{\frac{2\ln a}{\ln q_n}} + \frac{\ln a}{\ln q_n}}.$$

Таким образом,

$$\left|\delta - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{x_{n+1} q_n^2} \sim \frac{1}{q_n^{2+\sqrt{\frac{2\ln a}{\ln q_n}} + \frac{\ln a}{\ln q}}} \tag{3.22}$$

Справедливость (3.20) следует из (3.22), если положить $P_n = P$, $q_n = q$. Далее, если $\frac{P}{q}$ есть подходящая дробь, то, в силу (3.22), верно (3.21). Если $\frac{P}{q}$ не есть подходящая дробь, то (3.21) следует из неравенства

$$\left|\theta - \frac{P}{q}\right| > \frac{1}{2q^2} > (1-\varepsilon) q^{-2-\sqrt{\frac{\ln a}{2\ln q}} - \frac{\ln a}{\ln q}} .$$

Теорема 5.3. Пусть $u>1$, $v>1$ – целые числа;

$$\theta = [a_0; u, v, u^2, v^2, u^3, v^3, \ldots]; \tag{3.23}$$

$$c_1 = \frac{\ln u}{\ln q} + \sqrt{\frac{2}{\left(1+\frac{\ln v}{\ln u}\right)\ln q}},$$

$$c_2 = \frac{\ln v}{\ln q} + \sqrt{\frac{2}{\left(1+\frac{\ln u}{\ln v}\right)\ln q}}, \tag{3.24}$$

$c_* = \min(c_1, c_2)$, $c^* = \max(c_1, c_2)$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\left|\theta - \frac{P}{q}\right| < \frac{1+\varepsilon}{q^{2+c^*}} \tag{3.25}$$

имеет бесконечно много решений в целых P, q.

Существует число $q' = q(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1-\varepsilon}{q^{2+c_*}} \qquad (3.26)$$

для всех целых p, q, где $q_0 q'(\varepsilon)$.

Таким образом, указанный в теореме порядок аппроксимации допускают цепные дроби (2.5), (2.6), (2.7), (2.8).

<u>Доказательство.</u> При $2|n$

$$q_n = f(n)(uv)(uv)^2 \ldots (uv)^{\frac{n}{2}} = f(n)(uv)^{\frac{n^2+n}{8}};$$

$$\ln q = \ln f(n) + \frac{n^2+2n}{8}\ln(uv), \quad \ln q \sim \frac{n^2}{8}\ln(uv),$$

$$n \sim 2\sqrt{\frac{2\ln q_n}{\ln(uv)}}.$$

Далее, имеем:

$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| \sim \frac{1}{q_n^{2+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\ln q_n \cdot \ln(uv)}}+\frac{\ln u}{\ln q_n}}}. \qquad (3.27)$$

Если $2 \nmid n$, то

$$q_n = f(n)\cdot(uv)(uv)^2\cdots(uv)^{\frac{n-1}{2}}u^{\frac{n-1}{2}+1} = f(n)\,u^{\frac{n^2+4n+3}{8}}v^{\frac{n^2-1}{8}};$$

$$\ln q_n = \ln f(n) + \frac{n^2+4n+3}{8}\ln u + \frac{n^2-1}{8}\ln v;$$

$$\ln q_n \sim \frac{n^2}{8}\ln(uv); \quad \ln q_n \sim \frac{(n-1)^2}{8}\ln(uv);$$

$$\frac{n-1}{2} \sim \sqrt{\frac{2\ln q_n}{\ln uv}};$$

$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{a_{n+1}q_n^2} \sim \frac{1}{q_n^{2+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\ln q_n\cdot\ln(uv)}}+\frac{\ln v}{\ln q_n}}} \qquad (3.28)$$

Из (3.27) и (3.28) следует (3.25). Если $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$, то из (3.27) и (3.28) следует (3.26). Если $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$, то

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{2q^2} > \frac{1-\varepsilon}{q^{2+c_n}},$$

и, следовательно, верно (3.26).

Теорема (6.3). Пусть $a>1,\ b>1$ – целые числа;

$$\omega = [a_0; a, \ldots, a, \underset{k_1}{b}, a, \ldots, a, \underset{k_2}{b^2}, a, \ldots, a, \underset{k_3}{b^3}, a, \ldots], \qquad (3.29)$$

причем последовательность $\{K_i\}$ возрастает не быстрее, чем линейная функция. Тогда для любого $\varepsilon>0$ неравенство

$$\left|\omega-\frac{p}{q}\right|<(1+\varepsilon)q^{-2-\sqrt{\frac{2\ln b}{\ln q}}} \tag{3.30}$$

имеет бесконечно много решений в целых p, q.

Существует число $q'=q(\varepsilon)$, такое, что

$$\left|\omega-\frac{p}{q}\right|>(1-\varepsilon)q^{-2-\sqrt{\frac{2\ln b}{\ln q}}} \tag{3.31}$$

для всех целых p, q, где $q>q'(\varepsilon)$.

<u>Доказательство</u>. Имеем:

$$a_{K_n}=b^n,\ a_{K_n+i}=a,\quad i=1,2,\dots,K_{n+1}-K_n-1.$$

Пусть $\mathcal{P}_n=P_{K_n-1},\ Q_n=q_{K_n-1}$.

Тогда для достаточно больших n

$$Q_n\sim F(n)a^{K_1-1}\cdot b\cdot a^{K_2-K_1-1}\cdot b^2\dots b^n\cdot a^{K_n-K_{n-1}-1}=$$

$$=F(n)\cdot a^{K_n-n}b^{\frac{n^2+n}{2}},$$

откуда следует, что

$$\ln Q_n \sim \frac{n^2}{2}\ln b, \quad n \sim \sqrt{\frac{2\ln Q_n}{\ln b}}.$$

Далее, находим

$$\left|\omega - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \left|\omega - \frac{p_{k_n-1}}{q_{k_n-1}}\right| = \frac{1}{r_{k_n} q^2_{k_n-1}} < \frac{1}{b^n q^2_{k_n-1}};$$

$$\left|\omega - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \left|\omega - \frac{p_{k_n-1}}{q_{k_n-1}}\right| > \frac{1}{(b^n+2) q^2_{k_n-1}};$$

$$b^n = q_{k_n-1}^{\frac{n\ln b}{\ln q_{k_n-1}}} \sim q_{k_n-1}^{\sqrt{\frac{2\ln b}{\ln q_{k_n-1}}}}.$$

Следовательно,

$$\left|\omega - \frac{P_n}{Q_n}\right| \sim Q_n^{-2-\sqrt{\frac{2\ln b}{\ln Q_n}}}. \tag{3.32}$$

Из (3.32) следует первое утверждение теоремы. Далее, если $\frac{p}{q}$ – подходящая дробь, не равная $\frac{P_n}{Q_n}$, то

$$\left|\omega-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{(a+2)q^2}>(1-\varepsilon)q^{-2-\sqrt{\frac{2\ln b}{\ln q}}}.$$

Если $\frac{p}{q}$ не есть подходящая дробь, то

$$\left|\omega-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{2q^2}>(1-\varepsilon)q^{-2-\sqrt{\frac{2\ln b}{\ln q}}}.$$

Если же $\frac{p}{q}=\frac{P_n}{Q_n}$, то, в силу (3.32), верно (3.31).

Аналогичным образом можно доказать следующие утверждения.

Теорема 7.3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_t$ - конечная последовательность натуральных чисел; $b, d \in \mathbb{N}$;

$$\gamma_0=[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_t, b+d, a_1, a_2, \ldots, a_t, b+2d, a_1, \ldots, a_t, b+3d, \ldots]. \tag{3.33}$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ неравенство

$$\left|\gamma_0-\frac{p}{q}\right|<\left(\frac{1}{d}+\varepsilon\right)\frac{\ln\ln q}{q^2\ln q} \tag{3,34}$$

имеет бесконечно много решений в целых p, q.

Существует число $q' = q(\varepsilon)$, такое, что

$$\left|\gamma_0 - \frac{p}{q}\right| > \left(\frac{1}{d} - \varepsilon\right)\frac{\ln\ln q}{q^2 \ln q} \tag{3.35}$$

для всех целых p, q, где $q > q'(\varepsilon)$.

Теорема 8.3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_t$ – конечная последовательность натуральных чисел; $1 < b \in \mathbb{N}$;

$$\omega_0 = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_t, b, a_1, a_2, \ldots, a_t, b^2, a_1, a_2, \ldots, a_t, b^3, \ldots] \tag{3.36}$$

0

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\left|\omega_0 - \frac{p}{q}\right| < (1+\varepsilon)\, q^{-2-\sqrt{\frac{2\ln b}{\ln q}}} \tag{3.37}$$

имеет бесконечно много решений в целых p, q.

Существует число $q' = q(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\omega_0 - \frac{p}{q}\right| > (1-\varepsilon)\, q^{-2-\sqrt{\frac{2\ln b}{\ln q}}} \tag{3.38}$$

для всех целых p, q , где $q > q'(\varepsilon)$.

Автор выражает глубокую благодарность профессору МГУ Фельдману Н.И. за внимание и поддержку при работе над данной статьей.

Поступила 25.III.1987

Кафедра математики Юго-Осетинского пединститута

Литература

1. Н.И.Фельдман. Приближения алгебраических чисел. М., 1981.
2. А.Б.Шидловский. Диофантовы приближения и трансцендентные числа. М., 1982.
3. С.Ленг. Введение в теорию диофантовых приближений. М., 1970.
4. O.Perron. Die Lehre von den Kettenbrüchen (Band I), B.G.Teubner. Verlagsgesselschaft, Stuttgart, 1954.
5. C.L.Siegel. Abh. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl., N1, 1929-1930, 1-70.
6. C.S.Davis. Austral. Math. Soc.(series A), 25, 1978, 497-502.
7. C.S.Davis. Bull. Austral. Math. Soc., v.20, 1979, 407-410.
8. V.Laohakosol and P.Ubolsri. Bull. Malaissian Math. Soc.(9) 1, 1986, 1-21.
9. П.Г.Когония. Труды ТГУ, т.56, 1955, 105-120.
10. П.Г.Когония. Труды ТГУ, 189, 1977, 5-14.
11. J.F.Koksma. Diophantische Approximationen. Berlin, 1936.
12. Б.Г.Тасоев. Труды ТГУ, 252, 1984, 53-82.

ბ. ტასოევი

რაციონალური აპროქსიმაციების შესახებ ზოგიერთი უსასრულო ჯაჭვ. წილადებისათვის

რეზიუმე

მოცემულია აპროქსიმაციები რაციონალურ წილადებში უსასრულო უწყვეტი წილადებისათვის, რომელთა არასრული ნაშთები იზრდება განსაზღვრული კანონზომიერებით. ირაციონალობის ზომები ფასდება როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან.

B. Tasoev

ON RATIONAL APPROXIMATIONS TO SOME INFINITE CONTINUED FRACTIONS

Summary

The paper deals with approximations in rational fractions for infinite continued fractions, the partial quotients of which increase according to certain regularities. The measures of irrationality are estimated both from above and from below.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988

УДК 517.9

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАСТУЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.Г.Гагнидзе

Пусть $\omega = \mathbb{R}^n \times (0,T)$, где $T = const > 0$, – слой в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. Введем для любых действительных $\ell > 0$, $0 \le \tau_1 < \tau_2 \le T$ и $0 \le \tau \le T$ следующие обозначения:

$$\omega(\ell;\tau_1,\tau_2) = \{x,t : |x| < \ell,\ \tau_1 < t < \tau_2\},$$

$$\omega(\ell;\tau) = \{x,t : |x| < \ell,\ t = \tau\},$$

$$\Gamma(\ell;\tau_1,\tau_2) = \partial\omega(\ell;\tau_1,\tau_2) \cap \{\tau_1 < t < \tau_2\}.$$

В этом слое ω рассмотрим задачу Коши для линейного параболического уравнения порядка $2p$ (p - целое положительное число) вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = 0 \tag{1}$$

с начальным условием на $\mathbb{R}^n$

$$u(x,0) = 0. \tag{2}$$

Операт р $\mathcal{L}$ имеет следующий специальный вид:

$$\mathcal{L}u \equiv (-1)^p \sum_{|\alpha|=p} \mathcal{D}_x^\alpha \left((A|x|+B)^\sigma \mathcal{D}_x^\alpha u \right),$$

где $A = const > 0$, $B = const > 0$, $\sigma = const$ и $0 \leq \sigma < 2p$. Здесь и далее $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\mathcal{D}_x^\alpha = \mathcal{D}_{x_1}^{\alpha_1} \cdot \mathcal{D}_{x_2}^{\alpha_2} \cdot \mathcal{D}_{x_3}^{\alpha_3} \cdots \mathcal{D}_{x_n}^{\alpha_n}$, $\mathcal{D}_{x_j} = \partial / \partial x_j$.

Введем понятие обобщенного решения задачи (1)-(2) в ω. Пусть $G \subset \omega$ – конечная область и $g \subset \partial G$. Через $\overset{\circ}{H}{}^p(G,g)$ обозначим пространство функций $u(x,t)$, полученное пополнением по норме

$$\|u\|^2 = \int_G \left(u_t^2 + \sum_{0 \leq |\alpha| \leq p} |\mathcal{D}_x^\alpha u|^2 \right) dx\,dt .$$

о

множества функций $u(x,t)\in C^1(\bar{G})$, равных нулю в окрестности g. Если $g=\varnothing$, то будем писать $H^p(G,\varnothing)=H^p(G)$.

Обобщенным решением задачи (1)-(2) в области ω будем называть функцию $u(x,t)$, которая для любой ограниченной области $\omega(\ell;\tau_1,\tau_2)$ принадлежит пространству $H^p(\omega(\ell;\tau_1,\tau_2))$ и при произвольной функции $v(x,t)\in H^p(\omega(\ell;\tau_1,\tau_2),\Gamma(\ell;\tau_1,\tau_2))$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\omega(\ell;\tau_1,\tau_2)} \Big(u_t v + \sum_{|\alpha|=p} (A|x|+B)^{\sigma} \mathcal{D}_x^{\alpha} u\cdot \mathcal{D}_x^{\alpha} v\Big)\, dx\,dt=0 \qquad (3)$$

и начальному условию $u(x,0)=0$.

Для исследования условий единственности решений задачи (1)-(2) будем использовать метод введения параметра, который использовался в работах О.А.Олейник и её учеников /1/-/3/.

Пусть $u(x,t)$ - обобщенное решение задачи (1)-(2) в ω.

Рассмотрим функцию $w(x,t)=\exp\{-\mu t\}\cdot u(x,t)$, где $\mu\geq 0$ - действительный параметр.

Следующее утверждение является аналогом леммы 1.1 из /1/ и леммы 1 из /2/.

<u>Лемма 1</u>. Для функции $w(x,t)$ при любых $\ell_2>\ell_1>0$ таких, что $1\leq \ell_2\leq \kappa \ell_1$ и произвольных $0\leq\tau_1\leq\tau_2\leq T$

имеет место неравенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega(\ell_1;\tau_2)}\omega^2dx+\mu\int\limits_{\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)}\omega^2dxdt\leq \qquad (4)$$

$$\leq\frac{1}{2}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1)}\omega^2dx+\frac{M\ell_2^{6}}{\rho^{2p}}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}\omega^2dxdt\ ,$$

где $0<\rho\leq(\ell_2-\ell_1)$, $M=const>0$ и зависит только от постоянных $p, \mathcal{H}, B, n$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ - гладкая финитная функция в $\mathbb{R}^n$, обладающая следующими свойствами: $\varphi(x)\equiv 1$ в области $\{|x|<\ell_1+\frac{1}{4}\rho\}$, $\varphi(x)\equiv 0$ вне области $\{|x|<\ell_2-\frac{1}{4}\rho\}$, $0\leq\varphi(x)\leq 1$, $|\mathcal{D}_x^\alpha\varphi(x)|\leq C_{|\alpha|}\rho^{-|\alpha|}$ в $\mathbb{R}^n$, где $C_{|\alpha|}=const>0$ и эти константы не зависят от ρ. Такие функции ранее использовались в работе /I/. Рассмотрим функцию $\theta(x)=\varphi^{2p}(x)$. Легко установить, что при $|\alpha|\leq p$ для функции $\theta(x)$ имеет место неравенство

$$\left|\mathcal{D}_x^\alpha\theta(x)\right|\leq C'_{|\alpha|}\rho^{-|\alpha|}\varphi^{2p-|\alpha|}(x)\ , \qquad (5)$$

где $C'_{|\alpha|}=const>0$ и зависят только от $|\alpha|$ и констант $C_{|\alpha|}$.

Положим в интегральном тождестве (3) для области $\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)$ $u(x,t)=\exp\{\mu t\}\cdot\omega$ и $v(x,t)=\exp\{-\mu t\}\cdot\omega(x,t)\cdot\theta(x)$.

Получаем

$$\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} \{\omega_t\omega\theta+\mu\omega^2\theta+$$

$$+\sum_{|\alpha|=p}(A|x|+B)^{\sigma}D_x^{\alpha}\omega\cdot D_x^{\alpha}(\omega\theta)\}\,dx\,dt=0.$$

Для упрощения записи в дальнейшем вместо D_x^{α} будем писать D^{α}. Легко видеть, что

$$D^{\alpha}(\omega\theta)=D^{\alpha}\omega\cdot\theta+\sum_{|\beta|<|\alpha|}a_{\alpha\beta}\,D^{\beta}\omega\cdot D^{\alpha-\beta}\theta,$$

где постоянные $a_{\alpha\beta}$ только от α и β зависят. Поэтому после интегрирования по частям первого члена в интегральном тождестве находим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}\omega^2\theta\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1)}\omega^2\theta\,dx+$$

$$+\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} \Big\{\mu\omega^2\theta + \sum_{|\alpha|=p}(A|x|+B)^6\cdot D^\alpha\omega\,\cdot$$

$$\cdot\Big(D^\alpha\omega\cdot\theta + \sum_{|\beta|<|\alpha|} a_{\alpha\beta} D^\beta\omega\cdot D^{\alpha-\beta}\theta\Big)\Big\}\,dx\,dt = 0 .$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} \Big\{\mu\omega^2\theta + (A|x|+B)^6\sum_{|\alpha|=p}(D^\alpha\omega)^2\theta\Big\}\,dx\,dt\, +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_2)}\omega^2\theta\,dx \le \frac{1}{2}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1)}\omega^2\theta\,dx\, + \tag{6}$$

$$+\left|\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)}\sum_{|\alpha|=p}\sum_{|\beta|<|\alpha|}(A|x|+B)^6 a_{\alpha\beta} D^\alpha\omega\, D^\beta\omega\cdot D^{\alpha-\beta}\theta\,dx\,dt\right| ,$$

поскольку в $\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)$ функция $\theta(x)$ постоянная и $D^{\alpha-\beta}\theta=0$.

Заметим, что мультииндекс $(\alpha-\beta)$ отличен от 0. Рассмотрим сумму

$$J_1 = \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} \sum_{|\alpha|=p} \sum_{|\beta|<|\alpha|} (A|x|+B)^{\sigma} a_{\alpha\beta} D^{\alpha}\omega\, D^{\beta}\omega \cdot D^{\alpha-\beta}\theta\, dx dt .$$

Из элементарного неравенства $2ab \le \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2$ находим

$$\left|(A|x|+B)^{\sigma} D^{\alpha}\omega \cdot D^{\beta}\omega \cdot D^{\alpha-\beta}\theta\right| \le \frac{\varepsilon}{2}(A|x|+B)^{\sigma}(D^{\alpha}\omega)^2\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon}(A|x|+B)^{\sigma}(D^{\beta}\omega)^2(D^{\alpha-\beta}\theta)^2\frac{1}{\theta} .$$

Пусть $M_1 = \max\limits_{\alpha,\beta}|a_{\alpha\beta}|$ и $M_2 = p^n$. Тогда

$$J_1 \le M_1 M_2 \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} (A|x|+B)^{\sigma} \sum_{|\alpha|=p}(D^{\alpha}\omega)^2\theta\, dx dt +$$

$$+ \frac{M_1}{2\varepsilon} \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} \sum_{|\alpha|=p}\sum_{|\beta|<|\alpha|}(A|x|+B)^{\sigma}(D^{\beta}\omega)^2(D^{\alpha-\beta}\theta)^2\frac{1}{\theta}\, dx dt \le$$

$$\le M_1 M_2 \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} (A|x|+B)^{\sigma} \sum_{|\alpha|=p}(D^{\alpha}\omega)^2\theta\, dx dt +$$

$$+ \frac{M_1}{2\varepsilon} \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} (A|x|+B)^{\sigma} \sum_{|\alpha|=p}\sum_{|\beta|<|\alpha|}(D^{\alpha-\beta}\theta)^2(D^{\beta}\omega)^2\frac{1}{\theta}\, dx dt .$$

Пусть $\varphi_1(x)$ – гладкая функция в $\mathbb{R}^n$, обладающая следующими свойствами: $\varphi_1(x)\equiv 0$ в области $\{|x|<\ell_1\}$, $\varphi_1(x)\equiv 1$ вне области $\{|x|<\ell_1+\frac{1}{4}\rho\}$, $0\le\varphi(x)\le 1$, $|D^\alpha\varphi_1|\le C^1_{|\alpha|}\rho^{-|\alpha|}$ в $\mathbb{R}^n$, где $C^1_{|\alpha|}=const>0$ и не зависят от ρ. (В каком-то смысле $\varphi_1(x)$ является аналогом функции $1-\varphi(x)$). Пусть $\theta_1(x)=\varphi_1^{2p}(x)$.

Легко видеть, что для функции $Q(x)$ имеет место оценка

$$|D^\alpha\theta_1(x)|\le C^2_{|\alpha|}\rho^{-|\alpha|}\varphi_1^{2p-|\alpha|},\quad C^2_{|\alpha|}=const>0,$$

аналогичная оценке для функции $\theta(x)$. Введем $\theta_0=\theta\cdot\theta_1$.

Очевидно, что $\theta_0\le\theta$ и $\theta_0\le\theta_1$. Поскольку при $|x|<\ell_1+\frac{1}{4}\rho$; $\theta_0=\theta_1$ и при $|x|>\ell_1+\frac{1}{4}\rho$ $\theta_0=\theta$, то для θ_0 также справедливы оценки

$$|D^\alpha\theta_0(x)|\le C^0_{|\alpha|}\rho^{-|\alpha|}\varphi_0^{2p-|\alpha|},$$

где $\varphi_0^{2p}=\theta_0$, а постоянные $C^0_{|\alpha|}=const>0$ и не зависят от ρ.

Нетрудно видеть, что в области $\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)$ при любом α, $|\alpha|\ne 0$, справедливо неравенство

$$\frac{|D^\alpha\theta|^2}{\theta}\le\frac{|D^\alpha\theta_0|^2}{\theta_0},$$

так как при $|x|>\ell_1+\frac{1}{4}\rho$ $\theta=\theta_0$, а при $\ell_1<|x|\leq\ell_1+\frac{1}{4}\rho$ $|D^\alpha\theta|^2=0$ и $|D^\alpha\theta_0|^2\geq 0$.

Учитывая последнее неравенство, получаем

$$|J_1|\leq M_1\cdot M_2\cdot\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}(A|x|+B)^6\sum_{|\alpha|=p}(D^\alpha\omega)^2\theta\,dx\,dt+$$

$$+\frac{M_1\cdot M_3}{2\varepsilon}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)}\sum_{|\alpha|=p}\sum_{|\beta|<|\alpha|}(A|x|+B)^6(D^\beta\omega)^2(D^{\alpha-\beta}\theta_0)\frac{1}{\theta_0}\,dx\,dt,$$

где $M_3=\max C^0_{|\alpha|}$.

Пусть $\varepsilon_1=M_1\cdot M_2\cdot\frac{\varepsilon}{2}$ и $M_4(\varepsilon)=M_1\cdot M_3\cdot p^n\cdot\frac{1}{2\varepsilon}$.

Тогда из последнего неравенства находим

$$|J_1|\leq\varepsilon_1\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}(A|x|+B)^6\sum_{|\alpha|=p}(D^\alpha\omega)^2\theta\,dx\,dt+ \tag{7}$$

$$+M_4(\varepsilon)\cdot\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)}(A|x|+B)^6\sum_{|\beta|<p}(D^\beta\omega)^2\rho^{-2(p-|\beta|)}\varphi_0^{2|\beta|}\,dx\,dt.$$

Здесь мы воспользовались оценкой для $D^{\alpha-\beta}\theta_0$.

Рассмотрим вторую сумму в правой части неравенства (7):

$$\mathcal{J}_2 = \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} \sum_{|\beta|\le p-1} (A|x|+B)^{\sigma} \rho^{-2(p-|\beta|)} (D^{\beta}\omega)^2 \varphi_0^{2|\beta|}\, dx\,dt .$$

Пусть $|\beta| = s \ge 1$ и $|\nu| = 1$. Нетрудно видеть, что с помощью интегрирования по частям получаем

$$\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\beta}\omega)^2 \varphi_0^{2s}\, dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} D^{\nu}\left(a(x) D^{\beta}\omega\cdot\varphi_0^{2s}\right) D^{\beta-\nu}\omega\, dx\,dt ,$$

где $a(x) = (A|x|+B)^{\sigma}$, поскольку на границе области интегрирования $\varphi_0 = 0$.

Отсюда находим

$$\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\beta}\omega)^2 \varphi_0^{2s}\, dx\,dt \le$$

$$\le \left| \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} D^{\nu}a(x)\cdot D^{\beta}\omega\cdot D^{\beta-\nu}\omega\, \varphi_0^{2s}\, dx\,dt \right| +$$

$$+\Big|\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\, D^{\beta+\nu}\omega\cdot D^{\beta-\nu}\omega\cdot \varphi_0^{2s}\, dx\,dt\Big| +$$

$$+\Big|\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\, D^{\beta}\omega\cdot D^{\beta-\nu}\omega\cdot 2s\cdot \varphi_0^{2s-1}\cdot D^{\nu}\varphi_0\, dx\,dt\Big| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon_2}{2}\,\rho\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} |D^{\nu}a(x)|\cdot(D^{\beta}\omega)^2\varphi_0^{2s}\,dx\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon_2\rho}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} |D^{\nu}a(x)|\cdot(D^{\beta-\nu}\omega)^2\varphi_0^{2s}\,dx\,dt +$$

$$+\frac{\varepsilon_3}{2}\,\rho^2\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\cdot(D^{\beta+\nu}\omega)^2\varphi_0^{2(s+1)}\,dx\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon_3\rho^2}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\beta-\nu}\omega)^2\varphi_0^{2(s-1)}\,dx\,dt +$$

$$+\frac{\varepsilon_4}{2}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\beta}\omega)^2\varphi_0^{2s}\,dx\,dt +$$

$$+\frac{M_5}{2\varepsilon_4\rho^2}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\beta-\nu}\omega)^2\varphi_0^{2(s-1)}\,dx\,dt \qquad (M_5=4s^2C_1^0).$$

Нетрудно убедиться, что для функции $a(x)$ справедлива оценка

$$|D^{\nu} a(x)| \leq \frac{M_6}{A|x|+B}\, a(x),$$

где M_6 зависит только от A и B. Отсюда имеем

$$|D^{\nu} a(x)| \leq \frac{M_6}{A}\cdot\frac{1}{|x|+\frac{B}{A}}\, a(x).$$

Учитывая, что в области $\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)$ $|x|+\frac{B}{A}>\ell_1$ и $\ell_1\geq\rho$ (поскольку $2\ell_1\geq\ell_2$), находим

$$|D^{\nu} a(x)| \leq \frac{M_6}{A\rho}\, a(x).$$

Тогда получаем

$$\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\beta}\omega)^2\varphi_0^{2s}\,dx\,dt \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon_2}{2}\rho\cdot\frac{M_6}{A\cdot\rho}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\beta}\omega)^2\varphi_0^{2s}\,dx\,dt +$$

$$+\frac{M_6}{2\varepsilon_2\rho^2 A}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\beta-\nu}\omega)^2\varphi_0^{2s}\,dx\,dt +$$

$$+\frac{\varepsilon_3}{2}\rho^2\int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\,(D^{\beta+\nu}\omega)^2\varphi_0^{2(s+1)}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon_3\rho^2}\int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\,(D^{\beta-\nu}\omega)^2\varphi_0^{2(s-1)}\,dx\,dt+ \qquad (8)$$

$$+\frac{\varepsilon_4}{2}\int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\,(D^{\beta}\omega)^2\varphi_0^{2s}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{M_5}{2\varepsilon_4\rho^2}\int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\,(D^{\beta-\nu}\omega)^2\varphi_0^{2(s-1)}\,dx\,dt.$$

Из неравенства (8) следует

$$\int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\,(D^{\beta}\omega)^2\varphi_0^{2s}\,dx\,dt\le$$

$$\le\left(\frac{M_6}{2\mathcal{H}}\varepsilon_2+\frac{\varepsilon_4}{2}\right)\cdot\int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\,(D^{\beta}\omega)^2\varphi_0^{2s}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{M_6}{2\mathcal{H}\varepsilon_2}+\frac{1}{2\varepsilon_3}+\frac{M_5}{2\varepsilon_4}\right)\cdot\int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\,(D^{\beta-\nu}\omega)^2\varphi_0^{2(s-1)}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{\varepsilon_3}{2}\rho^2\int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\,(D^{\beta+\nu}\omega)^2\varphi_0^{2(s+1)}\,dx\,dt.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\varphi_0^{2s} \le \varphi_0^{2(s-1)}$.

Положим $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{A}{M_6}$, $\varepsilon_3 = \varepsilon$. Тогда из последнего неравенства находим

$$\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\left(D^{\beta}\omega\right)^2 \varphi_0^{2s}\,dx\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\left(D^{\beta}\omega\right)^2 \varphi_0^{2s}\,dx\,dt +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2}\rho^2 \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\left(D^{\beta+\nu}\omega\right)^2 \varphi_0^{2(s+1)}\,dx\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{M_6^2}{A^2} + M_5 + \frac{1}{2\varepsilon}\right)\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\left(D^{\beta-\nu}\omega\right)^2 \varphi_0^{2(s-1)}\,dx\,dt.$$

Отсюда следует

$$\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell;\tau_1,\tau_2)} a(x)\left(D^{\beta}\omega\right)^2 \varphi_0^{2s}\,dx\,dt \le$$

$$\le \varepsilon\rho^2 \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\left(D^{\beta+\nu}\omega\right)^2 \varphi_0^{2s}\,dx\,dt +$$

$$+\frac{M_7(\varepsilon)}{\rho^2}\int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\,(D^{\beta-\nu}\omega)^2\varphi_0^{2(s-1)}\,dx\,dt\,, \qquad (9)$$

где $M_7(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}+2M_5+\frac{2M_6^2}{A^2}$.

Умножим неравенство (9) на $\rho_0^{-2(p-s)}$ и просуммируем по всем мультииндексам β, для которых $|\beta|=s$. Тогда получим

$$\sum_{|\beta|=s}\rho^{-2(p-s)}\int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\,(D^{\beta}\omega)^2\varphi_0^{2s}\,dx\,dt\le$$

$$\le\varepsilon\sum_{|\beta|=s+1}\rho^{-2[p-(s+1)]}\int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\,(D^{\beta}\omega)^2\varphi_0^{2(s+1)}\,dx\,dt+ \qquad (10)$$

$$+M_7(\varepsilon)\sum_{|\beta|=s-1}\rho^{-2[p-(s-1)]}\int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\beta}\omega)^2\varphi_0^{2(s-1)}\,dx\,dt.$$

Просуммируем полученное неравенство (10) по s от 1 до $p-1$. Находим

$$\sum_{1\le|\beta|\le p-1} \rho^{-2(p-|\beta|)} \int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^\beta\omega)^2 \varphi_0^{2|\beta|}\,dx\,dt \le$$

$$\le \varepsilon \sum_{|\alpha|=p} \int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^\alpha\omega)^2\theta_0\,dx\,dt +$$

$$+\varepsilon' \sum_{2\le|\beta|\le p-1} \rho^{-2(p-|\beta|)} \int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^\beta\omega)^2\varphi_0^{2|\beta|}\,dx\,dt +$$

$$+ M_8(\varepsilon,\varepsilon') \sum_{|\beta|\le p-2} \rho^{-2(p-|\beta|)} \int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^\beta\omega)^2\varphi_0^{2|\beta|}\,dx\,dt,$$

где постоянная $M_8(\varepsilon,\varepsilon')$ зависит только от ε, ε' и $M_7(\varepsilon)$. Пусть $\varepsilon'=1/2$. Тогда из последнего неравенства получаем

$$\sum_{|\beta|\le p-1} \rho^{-2(p-|\beta|)} \int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^\beta\omega)^2\varphi_0^{2|\beta|}\,dx\,dt \le$$

$$\le \varepsilon_1 \sum_{|\alpha|=p} \int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^\alpha\omega)^2\theta_0\,dx\,dt + \qquad (11)$$

$$+ M_8'(\varepsilon_1) \sum_{|\beta|\le p-2} \rho^{-2(p-|\beta|)} \int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\beta}\omega)^2 \varphi_0^{2|\beta|}\,dx\,dt ,$$

где $M_8'(\varepsilon_1) = M_8'(\varepsilon_1, M_8)$.

Применяя ко второму члену правой части неравенства (11) неравенство (10) при $s = p-2,\ p-3 \dots$ и т.д. и подбирая соответствующим образом ε, получаем

$$\sum_{|\beta|\le p-1} \rho^{-2(p-|\beta|)} \int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\beta}\omega)^2 \varphi_0^{2|\beta|}\,dx\,dt \le \qquad (12)$$

$$\le \varepsilon'' \sum_{|\alpha|=p} \int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^{\alpha}\omega)^2 \theta_0\,dx\,dt +$$

$$+ M_9(\varepsilon'')\cdot\rho^{-2p} \int\limits_{\omega(l_2;\tau_1,\tau_2)\setminus\omega(l_1;\tau_1,\tau_2)} a(x)\omega^2\,dx\,dt ,$$

где постоянная M_9 зависит от ε'' и M_8'. Учитывая, что $\theta_0 \le \theta$, из (12) получаем оценку для суммы $\mathcal{J}_2$. Из неравенств (7) и (12) находим

$$|\mathcal{J}_1| \leq \varepsilon \sum_{|\alpha|=p} \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} a(x)(D^\alpha \omega)^2 \theta \, dx\, dt +$$

$$+ M_{10}(\varepsilon)\rho^{-2p} \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} a(x)\omega^2 \, dx\, dt , \tag{13}$$

где M_{10} зависит от ε и M_9.

Используя оценку для суммы $\mathcal{J}_1$, находим

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_2)} \omega^2 \theta \, dx + \mu \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} \omega^2 \theta \, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} a(x) \sum_{|\alpha|=p} (D^\alpha \omega)^2 \theta \, dx\, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1)} \omega^2\theta\,dx + \varepsilon\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} a(x)\sum_{|\alpha|=p}(D^\alpha\omega)^2\theta\,dx\,dt + \qquad (14)$$

$$+ M_{10}(\varepsilon)\rho^{-2p}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)} a(x)\omega^2\,dx\,dt\,.$$

Учитывая свойства функции $\theta(x)$, из (14) при $\varepsilon=1$ получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega(\ell_1;\tau_2)}\omega^2\,dx + \mu\int\limits_{\omega(\ell_1;\tau_1,\tau_2)}\omega^2\,dx\,dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1)}\omega^2\,dx + M_{10}\cdot\rho^{-2p}\int\limits_{\omega(\ell_2;\tau_1,\tau_2)}(A(x)+B)^{\sigma}\omega^2\,dx\,dt.$$

Отсюда следует неравенство (4). Лемма доказана.

<u>Лемма 2</u>. Пусть $u(x,t)$ - обобщенное решение задачи (1)-(2) в ω. Тогда при любых $\ell_2>\ell_1>0$ таких, что $1\leq\ell_2\leq 2\ell_1$, и произвольном $0<\tau\leq T$ имеет место неравенство

неравенство

$$\int\limits_{\omega(\ell_1;0,\tau)} u^2\,dx\,dt \le \exp\{-\kappa+2\mu\tau\}\int\limits_{\omega(\ell_2;0,\tau)} u^2\,dx\,dt, \tag{15}$$

где постоянные κ и μ связаны соотношением

$$\varkappa \equiv \frac{M\,\ell_2^6\,\kappa^{2p}}{\mu(\ell_2-\ell_1)^{2p}} \le e^{-1}, \qquad \kappa>0 \text{ - целое число.}$$

Доказательство. Положим $\rho_\kappa=(\ell_2-\ell_1)/\kappa$. Тогда очевидно, что $0<\rho_\kappa\le\ell_2-\ell_1$. Пусть при $s=1,2,\ldots,(\kappa-1)$ $\ell_1(s)=\ell_1(s-1)+\rho_\kappa$, $\ell_2(s)=\ell_1(s)+\rho_\kappa$ и $\ell_1(0)=\ell_1$. Тогда из неравенства (4) при $\tau_1=0$ и $\tau_2=\tau$ получаем

$$\mu\int\limits_{\omega(\ell_1(s);0,\tau)}\omega^2\,dx\,dt \le \frac{M\,\ell_2^6(s)}{\rho_\kappa^{2p}}\int\limits_{\omega(\ell_2(s);0,\tau)}\omega^2\,dx\,dt \le$$

$$\le \frac{M\,\ell_2^6\,\kappa^{2p}}{(\ell_2-\ell_1)^{2p}}\int\limits_{\omega(\ell_2(s);0,\tau)}\omega^2\,dx\,dt.$$

Отсюда находим

$$\int\limits_{\omega(\ell_1(s);0,\tau)}\omega^2\,dx\,dt \le e^{-1}\int\limits_{\omega(\ell_2(s);0,\tau)}\omega^2\,dx\,dt. \tag{16}$$

Применяя неравенство (16) при $(s+1)$ для оценки правой части этого же неравенства при s и полагая $s=0,1,2,\dots,(k-1)$, получаем

$$\int\limits_{\omega(\ell_1;0,T)} \omega^2\,dx\,dt \le \exp\{-k\} \int\limits_{\omega(\ell_2;0,T)} \omega^2\,dx\,dt .$$

Учитывая, что $\omega(x,t)=\exp\{-\mu t\}\cdot u(x,t)$, отсюда получаем неравенство (15). Лемма доказана.

Теорема. Если для обобщенного решения $u(x,t)$ задачи (1)-(2) существует положительная постоянная ξ такая, что для любых $R\ge R^*$, $R^*=const>0$, справедливо неравенство

$$\int\limits_{\omega(R;0,T)} u^2\,dx\,dt \le \exp\left\{\xi R^{\frac{2p-6}{2p-1}}\right\}, \qquad (17)$$

то тогда $u(x,t)=0$ почти всюду в ω.

Доказательство. Положим $\ell_1=2^m$ и $\ell_2=2^{m+1}$. Пусть число $k=\lambda\left[2^{(2p-6)m/(2p-1)}\right]$, где λ и m – целые положительные числа. В таком случае

$$T = M\lambda^{2p}\cdot 2^6\mu^{-1}\, 2^{\frac{2p-6}{2p-1}m} .$$

Пусть $\mu = \tilde{M} 2^{\frac{2p-6}{2p-1} m}$, где $\tilde{M} = M \cdot e \lambda^{2p} \cdot 2^{6}$. Тогда $x \le e^{-1}$ и из неравенства (15) находим, что при $m \ge m^*$, $m^* = const > 0$, имеет место оценка

$$\int\limits_{\omega(2^m;0,\tau)} u^2 \, dx\, dt \le \exp\left\{\left(-\frac{\lambda}{2} + 2\tilde{M}\tau\right) \cdot 2^{\frac{2p-6}{2p-1} m}\right\} \cdot \int\limits_{\omega(2^{m+1};0,\tau)} u^2 \, dx\, dt . \qquad (18)$$

Из условия (17) и неравенства (18) получаем

$$\int\limits_{\omega(2^m;0,\tau)} u^2 \, dx\, dt \le \left\{\left(-\frac{\lambda}{2} + 2\tilde{M}\tau + \xi_1\right) 2^{\frac{2p-6}{2p-1} \cdot m}\right\}$$

где $\xi_1 = \xi \cdot 2^{\frac{2p-6}{2p-1}}$.

Пусть $\lambda = [4\xi_1] + 1$ и $\tau = \xi_2 / 4M_1$. Тогда

$$\int\limits_{\omega(2^m;0,\tau)} u^2 \, dx\, dt \le \exp\left\{-\frac{1}{2} \xi_1 \cdot 2^{\frac{2p-6}{2p-1} m}\right\}. \qquad (19)$$

Устремив в неравенстве (19) m к бесконечности, получим $u=0$ при $0 \leq t \leq \tau$. Аналогично доказывается, что $u=0$ при $\tau \leq t \leq 2\tau$, $2\tau \leq t \leq 3\tau$, $3\tau \leq t \leq 4\tau \ldots$. Таким образом, $u=0$ в ω. Теорема доказана.

Замечание. В случае, когда $p=1$ (для уравнения второго порядка), результаты настоящей работы совпадают с результатами работы /2/.

Поступила 30.III.1987.

Кафедра
дифференциальных и интегральных уравнений

Литература

1. О.А.Олейник, Е.В.Радкевич. Успехи матем. наук.-33:5 1978, с.7-76.
2. А.Г.Гагнидзе. Вестник МГУ, математ.-мех., 5, 1981, с.33-38.
3. А.Г.Гагнидзе. Успехи математ.наук-39:6, 1984,с.191-192.

ა. გაგნიძე

ზრდადკოეფიციენტებიანი პარაბოლური განტოლების კოშის ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის შესახებ

რეზიუმე

შესწავლილია მაღალი რიგის ზრდადკოეფიციენტებიანი პარაბოლური განტოლების კოშის ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის კლასები.

A. Gagnidze

UNIQUENESS OF CAUCHY PROBLEM SOLUTIONS FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH UNBOUNDED COEFFICIENTS

Summary

The uniqueness classes of Cauchy problem solutions for high order parabolic equations with unbounded coefficients are studied.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988

УДК 519.862

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА С НЕИЗВЕСТНЫМ НИЖНИМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

А.К.Сарбасова, Ю.П.Яценко

В данной работе исследуются вопросы существования и единственности решений некоторых систем нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа, в которых одна из неизвестных функций является нижним пределом интегрирования. Подобные математические задачи возникают при моделировании обновления экономических систем на основе интегральных динамических моделей акад. В.М.Глушкова /1/.

В соответствии с работами /1-4/ пятисекторная макроэкономическая модель с эндогенным научно-техническим прогрессом и эндогенными трудовыми ресурсами может быть описана следующей системой уравнений и неравенств:

$$m(t)=\int\limits_{a(t)}^{t}\Big[\beta_0+\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\eta(\xi)\,d\xi\Big]\lambda(t)\,y(\tau)\,m(\tau)\,d\tau, \qquad (1)$$

$$\eta(t)=\int_{a(t)}^{t}\Big[\beta_0+\int_{\tau_0}^{\tau}\eta(\xi)d\xi\Big]\gamma(t)z(\tau)m(\tau)d\tau, \qquad (2)$$

$$c(t)=\int_{a(t)}^{t}\Big[\beta_0+\int_{\tau_0}^{\tau}\eta(\xi)d\xi\Big]v(\tau)m(\tau)d\tau, \qquad (3)$$

$$\int_{t-b}^{t}n(\tau)d\tau=\int_{a(t)}^{t}m(\tau)d\tau, \qquad (4)$$

$$n(t)=\int_{t-b}^{t}\Big[D_0+\int_{\tau_0}^{\tau}\ell(\xi)d\xi\Big]n(\tau)d\tau, \qquad (5)$$

$$\ell(t)=\int_{a(t)}^{t}\Big[\beta_0+\int_{\tau_0}^{\tau}\eta(\xi)d\xi\Big]x(t)u(\tau)m(\tau)d\tau, \qquad (6)$$

$$0\le y(\tau),\ z(\tau),\ u(\tau),\ v(\tau)\le 1,\quad a(t)<t. \qquad (7)$$

Рассмотрим следующую задачу: при заданных $A(t)$, $\gamma(t)$, $x(t)$, $t\in[t_0,T]$, $y(\tau)$, $z(\tau)$, $u(\tau)$, $v(\tau)$, $\tau\in(-\infty,T]$, решить систему нелинейных интегральных уравнений (1)–(6) относительно искомых функций $m(t)$, $\eta(t)$, $c(t)$, $a(t)$, $n(t)$, $\ell(t)$, $t\in[t_0,T]$ при начальных условиях:

$$m(\tau)\equiv m_0(\tau),\quad \eta(\tau)\equiv \eta_0(\tau),\quad \ell(\tau)\equiv \ell_0(\tau),\quad n(\tau)\equiv n_0(\tau),$$

$$\tau\in[\tau_0,t_0],\quad a(t_0)=a_0,\quad \tau_0<a_0<t_0,\quad 0<b<t_0-\tau_0. \tag{8}$$

Предполагается, что $\lambda, \gamma, x\in C^1_{[t_0,T]}$, $y, z, u, v\in C_{(-\infty,T]}$, $m_0, \eta_0, \ell_0, n_0\in C_{(-\infty,t_0]}$, все заданные функции и величины положительные.

<u>Теорема I.</u> Если: I) $\displaystyle\int_{-\infty}^{t_0}\Big[\beta_0+\int_{\tau_0}^{\tau}\eta_0(\xi)\,d\xi\Big]\lambda(t)y(\tau)m_0(\tau)\,d\tau,$

$$\int_{-\infty}^{t_0}\Big[\beta_0+\int_{\tau_0}^{\tau}\eta_0(\xi)\,d\xi\Big]\gamma(t)z(\tau)m_0(\tau)\,d\tau,$$

$$\int_{-\infty}^{t_0}\Big[\beta_0+\int_{\tau_0}^{\tau}\eta_0(\xi)\,d\xi\Big]x(t)u(\tau)m_0(\tau)\,d\tau$$

расходятся при $t\in[t_0,T]$; 2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\tau}\eta_0(\xi)\,d\xi<\beta_0$;

3) $\lambda(t)$, $\gamma(t)$, $x(t)$ удовлетворяют условию Липшица по t , то система уравнений (I)-(6) имеет единственное решение $m, \eta, c, a, n, \ell\in C_{[t_0,T]}$, причем $m(t), \eta(t), c(t), n(t), \ell(t)\geqslant 0,\ a(t)<t.$

Доказательство проводится по схеме, реализованной в /5/ применительно к системе интегральных уравнений в двухсекторной модели /I,2/.

Именно, при условиях теоремы можно показать, что на некотором интервале $[t_0, t_1]$ таком, что выполняется

$$\int_{t_0}^{t} m(\tau)d\tau \leq \int_{t_0}^{t} n(\tau)d\tau + \int_{t-b}^{t_0} n_0(\tau)d\tau, \tag{9}$$

система (I), (2), (4)-(6) эквивалентна системе нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа относительно функций $m(t)$, $\eta(t)$, $n(t)$, $\ell(t)$, которая получается после разбиения интегралов в (I), (2), (6) на суммы по отрезкам $(a(t), t_0]$ и $[t_0, t_1]$ и определения неизвестной $a(t)$ из (4) как некоторого нелинейного оператора $m(\tau)$, $n(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$. Обозначим через Ω_d семейство непрерывных вектор-функций $\{m(t), \eta(t), n(t), \ell(t)\}$, $t \in [t_0, t_1]$: $0 \leq m(t) \leq m_0(t_0) + d = B_m$, $0 \leq \eta(t) \leq \eta_0(t_0) + d = B_\eta$, $0 \leq n(t) \leq n_0(t_0) + d = B_n$, $0 \leq \ell(t) \leq \ell_0(t_0) + d = B_\ell$, $d = const > 0$.

Условие (9) выполняется, если $t_1 - t_0 \leq \dfrac{b \min\limits_{[t_0 - b, t_1]} n(t)}{m_0(t_0) + d}$.

Из первого условия теоремы и $m \in \Omega_d$ следует, что

$$0 \leq t_0 - a(t) \leq C_a, \quad t \in [t_0, t_1], \quad C_a - const$$

Оценивая разности $m^*(t) - m_0(t_0)$, $\eta^*(t) - \eta_0(t_0)$, $\ell^*(t) - \ell_0(t_0)$, $n^*(t) - n_0(t_0)$, $m^* = A_1 m$, $\eta^* = A_2 \eta$, $\ell^* = A_3 \ell$, $n^* = A_4 n$,

получаем, что при $t_1 - t_0 \leq d/C_A$, где C_A - некоторая константа, оператор $A = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ оставляет инвариантным множество $\Omega_d \subset C_{[t_0, t_1]}$.

Далее можно показать, что оператор A является оператором сжатия в полученной системе нелинейных уравнений, которая имеет единственное непрерывное решение (m, η, n, ℓ) в силу принципа сжатых отображений. Решение $a(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, определяемое из уравнения (4), также единственно и непрерывно в силу условий теоремы.

Определив решения $m(t)$, $\eta(t)$, $\ell(t)$, $n(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, пополняем интервал заданий функций $m^\circ(t)$, $\eta^\circ(t)$, $\ell^\circ(t)$, $n^\circ(t)$, $t \in [0, t_1]$, и получаем систему уравнений (1)-(6) на интервале $[t_1, T]$. При этом функции $m^\circ(t) > 0$, $\eta^\circ(t) > 0$, $\ell^\circ(t) > 0$, $n^\circ(t) > 0$, $t \in [0, t_1]$. Аналогично доказываем существование единственного решения на некотором интервале $[t_1, t_2]$, затем на $[t_2, t_3]$ и т.д., пока не исчерпаем весь интервал $[t_0, T]$.

А теперь покажем, что $[t_0, T]$ будет покрыт за конечное число шагов $[t_i, t_{i+1}]$.

Действительно, для того чтобы $a(t) < t_i$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, в силу (4) достаточно выполнения

$$\int_{t-b}^{t} n(\tau)\,d\tau \geq \int_{t_i}^{t} m(\tau)\,d\tau$$

или достаточно

$$t_{i+1} - t_i \leq \frac{b \min\limits_{[t_0-b, T]} n(t)}{\max\limits_{[t_0, T]} m(t)} = K > 0. \tag{10}$$

Нетрудно показать, что $n(t) \geq n_0(t_0) e^{\sigma(t-t_0)}$, $\sigma - const$.

Выбирая величину Δt, удовлетворяющую оценкам, полученным выше, и (10), получаем, что длительность интервалов $t_{i+1} - t_i \geq \Delta t$ для всех i и число "переключений" предыстории не больше, чем $[T/\Delta t] + 1$.

Теорема доказана.

Рассмотрим также задачу определения функций $a(t)$, $m(t)$, $\eta(t)$, $c(t)$, $t\in[t_0,T]$, из уравнений (I)-(3) и

$$P(t)=\int_{a(t)}^{t} m(\tau)d\tau, \quad t\geq t_0>0, \tag{II}$$

при заданных P, λ, $\gamma\in C^1_{[t_0,T]}$, y, $z\in C_{(-\infty,T]}$ и начальных условиях (8). Такая задача возникает в трехсекторной макроэкономической модели с эндогенным научно-техническим прогрессом и экзогенными трудовыми ресурсами /2/.

Теорема 2. Если: 1) $\int_{-\infty}^{t_0}[\beta_0+\int_{\tau_0}^{\tau}\eta_0(\xi)d\xi]\lambda(t)y(\tau)m_0(\tau)d\tau$, $\int_{-\infty}^{t_0}[\beta_0+\int_{\tau_0}^{\tau}\eta_0(\xi)d\xi]\gamma(t)z(\tau)m_0(\tau)d\tau$ расходятся при $t\in[t_0,T]$; 2) $\int_{-\infty}^{\tau}\eta_0(\xi)d\xi<\beta_0$; 3) $\lambda(t)$, $\gamma(t)$ удовлетворяют условию Липшица по t, то система уравнений (1)-(3), (II) имеет единственное решение m, η, c, $a\in C_{[t_0,T]}$, причем $m(t)$, $\eta(t)$, $c(t)\geq 0$ и $a(t)<t$.

Доказательство подобно предыдущему.

Для этой задачи удается получить и более сильное достаточное условие существования и единственности решений, гарантирующее неубывание функции $a(t)$.

Теорема 3. Если $P'(t)\leq 0$, или $0\leq P'(t)\leq P'_{max}(t)$, $t\in[t_0,T]$, где

$$P'_{max}(t)=\int\limits_{x(t)}^{t_0}[\beta_0+\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\eta_0(\xi)d\xi]1(t)y(\tau)m_0(\tau)d\tau,$$

а $x(t)<t_0$ определяется из задачи Коши

$$m_0(x(t))x'(t)-\int\limits_{x(t)}^{t_0}[\beta_0+$$

$$+\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\eta_0(\xi)d\xi]1(t)y(\tau)m_0(\tau)d\tau=-P'(t),$$

то система уравнений (1)-(3), (11) имеет единственное решение $a\in C^1_{[t_0,T]}$, m, η, $c\in C_{[t_0,T]}$, причем $m,\eta,c\geq 0$, а $a(t)<t$ и $a'(t)\geq 0$.

Исследование рассмотренных систем нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа является составной частью исследования задач оптимального управления в пятисекторной модели развития экономических систем, включающей блоки производства полезного продукта, воспроизводства новых рабочих мест, научно-технического прогресса, трудовых ресурсов и совершенствования их воспроизводства, и в трехсекторной динамической макроэкономической модели. Исследование подобных оптимизационных задач позволяет находить важные закономерности развития и обновления экономических систем в условиях ускорения научно-технического прогресса /2,6,7/.

Поступило 1.IV.1987

Институт кибернетики
имени В.М.Глушкова АН УССР

Литература

1. В.М.Глушков. Управляющие системы и машины. 1977, №2, с.3-6.
2. Ю.П.Яценко. Институт кибернетики АН УССР, 1985, 246 с.- Деп. в ВИНИТИ 9.12.85, № 8436-В.
3. Ю.П.Яценко. Вестник АН УССР. 1986, № 9, 25-30.
4. Ю.П.Иванилов, А.А.Петров. Исследование операций (модели, системы, решения). - М.: ВЦ АН СССР, 1970, вып.I, 5-9.
5. Ю.П.Яценко. Украйн. математ. журнал, 38, 1986, № I, I28-I3I.
6. Ю.П.Яценко. Доклады АН УССР. Сер. А. 1986, №I2, 6I-64.
7. А.К.Сарбасова. Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1987, №I, 34-38.

ა. სარბასოვა, ი.იაცენკო

ინვესტიციების ფონდის ცვლადი სახეობის მქონე მოდელისათვის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნადობის გამოკვლევა

რეზიუმე

არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის არსებობის და ერთადერთობის საკითხები გამოკვლეულია ხუთსექტორიანი (სამსექტორიანი) დინამიური ეკონომიკური მოდელის ბაზაზე ენდოგენური მეცნიერულ-ტექნიკური პროგრესით და ენდოგენური (ეგზოგენური) შრომითი რესურსებით.

A. Sarbasova, Yu. Yatsenko

INVESTIGATION OF VOLTERRA TYPE INTEGRAL EQUATION SYSTEMS WITH AN UNKNOWN LOWER LIMIT OF INTEGRATION RESOLVABILITY

Summary

Questions of the existence and uniqueness of solution of nonlinear integral equation systems on the basis of a five-sectorial (three-sectorial) dynamic economic model with endogenous scientific and technical progress and endogenous (exogenious) labour resources are investigated.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988

УДК 539.3

К ВОПРОСУ ИЗГИБА ПАРОЙ СИЛ ОДНОРОДНОГО АНИЗОТРОПНОГО СТЕРЖНЯ СО СЛАБОИЗОГНУТОЙ ОСЬЮ

М.И.Кезерашвили

Задача изгиба парой сил однородного изотропного стержня со слабоизогнутой осью изучена в работе Р.М.Риза /I/.

В настоящей работе, используя полуобратный метод Сен-Венана и результаты работы /2/, дадим решение задачи изгиба парой сил однородного анизотропного стержня со слабоизогнутой осью для более общего случая, когда ось бруса – пространственная кривая.

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат $XOYZ$ дано однородное анизотропное тело, ограниченное поверхностью

$$F\left(x+\frac{kz^2}{2},\ y+\gamma\frac{kz^2}{2}\right)=0, \qquad (1)$$

где γ – постоянная, а k – малый параметр, квадратом и высшими степенями которого мы пренебрегаем.

Начало координат поместим в центре инерции нижнего закрепленного основания, а оси ОХ и ОУ направим по главным осям инерции указанного основания. Предположим, что боковая поверхность свободна от напряжений, а усилия, приложенные к верхнему основанию $z=\ell$, статически эквивалентны изгибающей паре сил с моментом M, направленной параллельно оси ОУ.

Введем систему координат:

$$\xi = x + \frac{1}{2} k z^2, \quad \eta = y + \frac{1}{2}\gamma k z^2, \quad \zeta = z, \tag{2}$$

тогда в пространстве $\zeta O \xi \eta$ рассматриваемое тело переходит в призматическое, ограниченное поверхностью

$$F(\xi, \eta) = 0. \tag{3}$$

Соотношения между производными по координатам ξ, η, ζ и x, y, z с точностью до x^2 имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta} + k\zeta\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial}{\partial \eta}\right),$$

а связь между направляющими косинусами нормали поверхностей (1) и (3) с упомянутой точностью будет:

$$\cos n,x = \cos n,\xi , \quad \cos n,y = \cos n,\eta , \tag{5}$$

$$\cos n,z = k\zeta(\cos n,\xi + y\cos n,\eta).$$

Воспользуемся этими формулами и преобразуем основные уравнения равновесия упругого тела и граничные условия к координатам ξ, η, ζ. Для этого будем исходить из компонентов смещения, которые при $k = 0$ дают компоненты смещения задачи изгиба парой сил однородного призматического стержня, ограниченного поверхностью (3), т.е.

$$u = \frac{a}{2}(\sigma_1\xi^2 - \sigma_2\eta^2 + \zeta^2) + aku_1, \tag{6}$$

$$v = a(\sigma_2\xi\eta + \frac{1}{2}\sigma_3\xi^2) + akv_1,$$

$$w = -a\xi\zeta + akw_1,$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — упругие постоянные, u_1, v_1, w_1 - искомые дополнительные смещения, а

$$a = \frac{M}{E\iint\limits_S \xi^2 dS}.$$

Компоненты деформации и напряжений, соответствующие смещениям (6) с точностью до k^2, будут:

$$e_{xx}=a\theta_1\xi+ake_{11},\qquad e_{yy}=a\theta_2\xi+ake_{22},$$

$$e_{xy}=a\theta_3\xi+ake_{12},\qquad e_{zz}=-a\xi+ak\zeta^2+ake_{33},$$

$$e_{xz}=ak\zeta(\theta_1\xi-\gamma\theta_2\eta)+ake_{13},\qquad e_{yz}=ak\zeta[\theta_2\eta+(\theta_3+\gamma\theta_2)\xi]+ake_{23},$$

$$X_x=-Gak\zeta^2+ak\tau_{11},\qquad Y_y=-Fak\zeta^2+ak\tau_{22},\qquad (7)$$

$$X_y=-Tak\zeta^2+ak\tau_{12},\qquad Z_z=Ea\xi-Cak\zeta^2+ak\tau_{33},$$

$$X_z=Mak\zeta(\theta_1\xi-\gamma\theta_2\eta)+Nak\zeta[\theta_2\eta+(\theta_3+\gamma\theta_2)\xi]+ak\tau_{13},$$

$$Y_z=Nak\zeta(\theta_1\xi-\gamma\theta_2\eta)+Lak\zeta[\theta_2\eta+(\theta_3+\gamma\theta_2)\xi]+ak\tau_{23},$$

где e_{ij} и τ_{ij} $(i,j=1,2,3)$ - искомые компоненты деформации и напряжений, соответствующие смещениям u_1, v_1, w_1, а величины C, F, G, E, L, M, N - упругие постоянные.

Уравнения равновесия рассматриваемого тела, на основании формул (4) примут вид:

$$\frac{\partial\tau_{11}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{12}}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau_{13}}{\partial\zeta}+\xi E-\theta_1=0,\qquad (8)$$

$$\frac{\partial\tau_{21}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{22}}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau_{23}}{\partial\zeta}+\gamma\xi E-\theta_2=0,$$

$$\frac{\partial\tau_{31}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{32}}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau_{33}}{\partial\zeta}-\zeta\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\xi}+\frac{\partial\theta_2}{\partial\eta}+2C\right)=0.$$

Граничные условия, выражающие отсутствие напряжений на боковой поверхности, в силу формул (5) будут:

$$\tau_{11}\cos n,\xi+\tau_{12}\cos n,\eta=G\zeta^2\cos n,\xi+T\zeta^2\cos n,\eta, \tag{9}$$

$$\tau_{21}\cos n,\xi+\tau_{22}\cos n,\eta=T\zeta^2\cos n,\xi+r'\zeta^2\cos n,\eta,$$

$$\tau_{31}\cos n,\xi+\tau_{32}\cos n,\eta=\zeta\theta_1\cos n,\xi+\zeta\theta_2\cos n,\eta,$$

где введены обозначения

$$\theta_1=\xi E-[M\sigma_1+N(\sigma_3+\gamma\sigma_2)]\xi-(N-M\gamma)\sigma_2\eta,$$

$$\theta_2=\gamma\xi E-[N\sigma_1+L(\sigma_3+\gamma\sigma_2)]\xi-(L-N\gamma)\sigma_2\eta.$$

Кроме этого, компоненты деформации, соответствующие напряжениям τ_{ij} $(i,j=1,2,3)$ должны удовлетворять условиям совместимости Сен-Венана.

Как легко догадаться, за частные решения задачи можно взять величины:

$$\tau'_{11} = G\zeta^2 + G\theta_3, \qquad \tau'_{12} = T\zeta^2 + T\theta_3,$$

$$\tau'_{22} = F\zeta^2 + F\theta_3, \qquad \tau'_{33} = C\zeta^2 + C\theta_3, \tag{10}$$

$$\tau'_{31} = \theta_1\zeta, \qquad \tau'_{32} = \theta_2\zeta,$$

где

$$Q_3 = \frac{1}{2}\left\{\left[-\sigma_1 + \frac{E(L-N\gamma)}{m^2}\right]\xi^2 + \right.$$

$$\left. + \left[-\sigma_3 + \frac{E(M\gamma-N)}{m^2}\right]\xi\eta - \sigma_2\eta^2\right\}.$$

Используя результаты работы /3/, искомые дополнительные напряжения будем искать в виде:

$$\tau_{11} = G\zeta^2 + G\theta_3 + E\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} - U_0 + \left(M\varphi + \frac{1}{2}N\xi^2 - M\xi\eta\right)\tau_0,$$

$$\tau_{22} = F\zeta^2 + F\theta_3 + E\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} - V_0 + \left(L\varphi - \frac{1}{2}N\eta^2 + L\xi\eta\right)\tau_0, \tag{11}$$

$$\tau_{12} = T\zeta^2 + T\theta_3 - E\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta} + N\varphi\tau_0,$$

$$\tau_{33}=C\zeta^2+C\theta_3+\sigma_1\left(E\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}-U_0\right)+\sigma_2\left(E\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}-V_0\right)-$$

$$-E\sigma_3\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta}+\Big[(\sigma_1 M+\sigma_2 L+\sigma_3 N-E)\varphi+\sigma_2\left(L\xi\eta-\frac{1}{2}N\eta^2\right)+$$

$$+\sigma_1\left(\frac{1}{2}N\xi^2-M\xi\eta\right)\Big]\tau_0\,,$$

$$\tau_{31}=\theta_1\zeta,\qquad \tau_{32}=\theta_2\zeta,$$

где

$$U_0=\int^{\xi}\left(G\frac{\partial\theta_3}{\partial\xi}+T\frac{\partial\theta_3}{\partial\eta}+\xi L\right)d\xi\,,$$

$$V_0=\int^{\eta}\left(T\frac{\partial\theta_3}{\partial\xi}+F\frac{\partial\theta_3}{\partial\eta}+\gamma\xi E\right)d\eta\,.$$

Нетрудно проверить, что искомые компоненты напряжения (II) удовлетворяют уравнениям равновесия /8/, граничным условиям /9/, а соответствующие компоненты деформации–условиям совместимости, если функция $\varphi(\xi,\eta)$ является решением следующей граничной задачи:

$$E\Delta_1^{(2)}\varphi=-(\beta_{11}M+\beta_{12}L+\beta_{13}N+E\sigma_1)\tau_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}-$$

$$-(\beta_{12}M+\beta_{22}L+\beta_{23}N+E\sigma_2)\tau_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+(\beta_{13}M+\beta_{23}L+\beta_{33}N+$$

$$+\sigma_3 E)\tau_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}(\beta_{11}U_0+\beta_{12}V_0)+\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\beta_{12}U_0+\beta_{22}V_0)-$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}(\beta_{13}U_0+\beta_{23}V_0)+(L\beta_{23}-M\beta_{13})\tau_0$$

в области S,

$$E\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = \int_{\Gamma}\Big\{\Big[-G\theta_3 + U_0 - \Big(M\varphi + \frac{1}{2}N\xi^2 - M\xi\eta\Big)\tau_0\Big]\cos n_1\xi - $$
$$ - T\theta_3 + N\varphi\tau_0)\cos n_1\eta\Big\}\,dS,$$

$$E\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = -\int_{\Gamma}\Big\{\Big[-F\theta_3 + V_0 - \Big(L\varphi - \frac{1}{2}N\eta^2 + L\xi\eta\Big)\tau_0\Big]\cos n_1\eta - $$
$$ - (T\theta_3 + N\varphi\tau_0)\cos n_1\xi\Big\}\,dS$$

на контуре Γ, где $\varphi(\xi,\eta)$ - функция кручения однородного анизотропного призматического стержня, упругие постоянные имеют вид:

$$\beta_{ij} = \frac{1}{E}(\sigma_{ij} - \sigma_i\sigma_j) \qquad (i,j = 1,2,3),$$

а оператор $\Delta_1^{(2)}$ равен:

$$\Delta_1^{(2)} = \beta_{22}\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} - 2\beta_{23}\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\partial\eta} + $$
$$ + (\beta_{33} + 2\beta_{12})\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\eta^2} - 2\beta_{13}\frac{\partial^4}{\partial\xi\partial\eta^3} + \beta_{11}\frac{\partial^4}{\partial\eta^4}.$$

Нетрудно проверить, что условия однозначности частных производных $\partial\Phi/\partial\xi$ и $\partial\Phi/\partial\eta$ при обходе контура Γ выполняются, а для функции $\Phi(\xi,\eta)$ - будет выполняться, если

$$\tau_0 = \frac{\gamma E}{D}\iint\limits_S \xi^2 dS,$$

где D - жесткость при кручении.

Наконец, заметим, что если мы хотим удовлетворить торцевым условиям, необходимо на решение /11/ наложить соответствующие решения задач Сен-Венана для однородного анизотропного призматического стержня.

Поступила 20.III.1987

Кафедра
матобеспечения ЭВМ ТГУ

Литература

1. П.М.Риз. ДАН СССР, т.XXIV, вып. №№2,3, 1939, с.110, 229.
2. Р.Т.Зивзивадзе, Р.А.Берекашвили. Тр. ГПИ, № 9 (279), 1984, с.130-135.

მ. კეზერაშვილი

ოდნავ გაღუნული ერთგვაროვანი ანიზოტროპული ძელის წყვილძალით ღუნვის შესახებ

რეზიუმე

მოცემულია ოდნავ გაღუნული ერთგვაროვანი ანიზოტროპული ძელის ამოცანის წყვილძალით ღუნვის ეფექტური ამოხსნა, ამოცანა მიყვანილია ბრტყელი არის (ძელის განივი კვეთი) მიმართ ერთ სასაზღვრო ამოცანამდე; რომლის ამოხსნადობა ნაჩვენებია.

M.Kezerashvili

OF THE PROBLEM OF BENDING OF AN ANISOTROPIC HOMOGENEOUS BAR WITH A SLIGHTLY BENT AXIS BY A COUPLE

Summary

The problem of bending of an anisotropic homogeneous bar with a sligthly bent axis by a couple is studied. The problem is reduced to a boundary-value problem for a plane area (cross section of a bar). The solvability of the obtained boundary-value problem is shown.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988

УДК 539.374

ОБ ОЦЕНКЕ АНИЗОТРОПИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЛИСТОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Г.А.Шелия, В.Ш.Пачулия, Т.Г.Гарданхадзе,
Л.Г.Азмайпарашвили

Листовой металл, полученный прокаткой, имеет определенную направленность механических свойств в пластическом состоянии – начальную пластическую анизотропию. Эксперименты и расчеты показывают, что анизотропия может оказывать существенное влияние на формообразование листового металла.

Анизотропные свойства тела обусловливаются его внутренним строением. Тела, обладающие симметрией внутреннего строения, имеют и соответствующую симметрию физико-механических свойств.

Современные способы получения сталей с различными присадками в сочетании со специальной технологией прокатки и термической обработки позволяют в определенной степени регулировать анизотропные свойства листового металла и его способность к упрочению.

Изготовление листового металла прокаткой приводит к возникновению в нем такой симметрии внутреннего строения, которая позволяет считать, что он обладает однородной ортогональной пластической анизотропией /ортотропией/, характеризуемой главными осями анизотропии, первая из которых совпадает с направлением прокатки, вторая направлена поперек прокатки, а третья перпендикулярна плоскости листа.

При решении технологических задач по формообразованию листового анизотропного металла обычно исходят из следующих предположений: листовой металл пластически ортотропен; приобретенная (в процессе пластического формообразования) анизотропия листового металла мала и не оказывает существенного влияния на его начальную анизотропию; материал заготовки несжимаем; упрочение металла изотропно; эффект Баушингера отсутствует. Эти допущения согласуются с условием пластичности анизотропного металла Р.Хилла, которое вместе с кривой упрочения используется для определения связи между напряжениями и деформациями.

Оси координат x, y, z совместим с главными осями анизотропии ортотропного листа, расположив ось x вдоль прокатки, ось y – поперек, а ось z – по нормали к плоскости листа.

Условие пластичности анизотропного материала Р.Хилла имеет вид

$$F(\sigma_y-\sigma_z)^2+G(\sigma_z-\sigma_x)^2+H(\sigma_x-\sigma_y)^2+$$
$$+2L\tau_{yz}^2+2M\tau_{zx}^2+2N\tau_{xy}^2=1 \qquad (I)$$

Приращение деформаций в анизотропном металле определяется ассоциированным с условием пластичности (I) законом:

$$
\begin{aligned}
& d\varepsilon_x = d\lambda\left[H(\sigma_x-\sigma_y)+G(\sigma_x-\sigma_z)\right],\\
& d\varepsilon_y = d\lambda\left[F(\sigma_y-\sigma_z)+H(\sigma_y-\sigma_x)\right],\\
& d\varepsilon_y = d\lambda\left[G(\sigma_z-\sigma_x)+F(\sigma_z-\sigma_y)\right],\\
& d\gamma_{yz} = d\lambda L\tau_{yz}, \quad d\gamma_{zx} = d\lambda M\tau_{zx},\\
& d\gamma_{xy} = d\lambda N\tau_{xy}
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

В соотношениях (1) и (2) $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и $\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ – нормальные и касательные напряжения в системе координат XYZ : $d\varepsilon_x, d\varepsilon_y, d\varepsilon_z$ и $d\gamma_{yz}, d\gamma_{zx}, d\gamma_{xy}$ - соответствующие приращения деформация удлинения и сдвига; F, G, H, L, M, N – параметры анизотропии, $d\lambda$ – коэффициент пропорциональности.

Для плоского напряженного состояния $\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{zx}$ условие пластичности (I) упрощается:

$$(G+H)\sigma_x^2+2H\sigma_x\sigma_y+(H+F)\sigma_y^2+2N\tau_{xy}^2=1. \qquad (3)$$

Соответственно упрощаются и зависимости (2):

$$d\varepsilon_x = d\lambda\left[(G+H)\sigma_x - H\sigma_y\right],$$
$$d\varepsilon_y = d\lambda\left[-H\sigma_x + (H+F)\sigma_y\right], \qquad (4)$$
$$d\gamma_{xy} = d\lambda N\tau_{xy}$$

Величины F, G, H, N можно найти из различной системы экспериментов. Выделим далее две системы экспериментов: (А) – в поле напряжений, т.е. используется только условие пластичности (3), и (В) – используется условие пластичности (3) и ассоциированный закон пластического течения (4).

Экспериментальные исследования трубчатых образцов, выполненные Жуковым А.М. /3/ на Д16Т – ⊗ , МАГ – △, и Лебедевым А.А., Косарчуком В.В. и Ковальчуком Б.И. /4/ на Д16Т – о , АМг6 – +, АМцС – □ (система экспериментов (А)), позволяют установить зависимость между параметрами анизотропии (см. рисунок).

На рисунке сплошной линией показан материал с $K=1$.

При $\sigma_x = K(G+H)^{-1}$, $\sigma_y = K(F+H)^{-1}$, $\tau_{xy}=0$

из условия (3) получим

$$K^2 = \frac{0.5}{1-\left[\left(\frac{G}{H}+1\right)\left(\frac{F}{H}+1\right)\right]^{-\frac{1}{2}}} \qquad (5)$$

С другой стороны, эксперименты на одноосное растяжение образцов, вырезанных вдоль осей x и y, позволяют найти показатели анизотропии

$$R_x = \frac{H}{G}, \qquad R_y = \frac{H}{F} \tag{6}$$

и вычислить значение K^2 из системы экспериментов (8).

В таблице приведены данные расчетов

материал	N	R_x	R_y	K
сталь для глубокой вытяжки	I	0,54	0,76	0,9I
	2	0,73	I,3I	0,998
	3	0,83	0,85	0,96
	4	0,96	I,56	I,02
	5	I,6I	I,63	I,I4
цинк		0,I8	0,6	0,8I2
титан		2,08	3,5	I,35
ст. 08КП		I,3	2,I2	I,I4
ст. 0XI8Н Т		0,77	0,76	0,94
АМцАМ		0,28	0,33	0,8I
АМг6М		0,73	0,65	0,92
Л 62		0,87	0,8I	0,94

Эксперименты типа (А) дают значение K, близкое к I. Эксперименты типа (В) для некоторых материалов дают значения, отличные от I. Поэтому для таких материалов необходимо скорректировать условие пластичности Р.Хилла.

Рассматриваются возможности описания пластической анизотропии листового металла с помощью условия пластичности Р.Хилла. Обсуждается система экспериментов, позволяющая найти параметры анизотропии. Отмечается, что система экспериментов в поле напряжений и данные, полученные с использованием ассоциированного течения, дают различные значения параметров анизотропии.

Эта неопределенность определения параметров анизотропии указывает на необходимость корректировки условия пластичности Р.Хилла.

Поступила 25.XII.1987

Кафедра
теоретической механики ГПИ

Литература

1. А.А.Ильюшин, Пластичность, М., 1948.
2. Л.М.Качанов, Теория пластичности, М., 1969.
3. А.М.Жуков, Известия АН СССР, №6, 1954.
4. А.А.Лебедев, В.В.Косарчук, Б.И.Ковальчук, Проблемы прочности, № 3, 1982.

გ. შელია, ვ. ფაჩულია, თ. გარდაფხაძე, ლ. აზმაიფარაშვილი

ფურცლოვანი პლასტიკური მასალის ანიზოტროპიული თვისებების შეფასება

რეზიუმე

განხილულია ფურცლოვანი მას ლის პლასტიკური ანიზოტროპიულობის აღწერის შესაძლებლობები ფ. ჰილის პლასტიკურობის პირობების გამოყენებით.

განხილულია ექსპერიმენტების სისტემა, რომლებიც საშუალებას იძლევიან განვსაზღვროთ ანიზოტროპიის პარამეტრები, აღნიშნულია, რომ ექსპერიმენტების სისტემა დაძაბულობის არეში და ასოცირებული დინების გამოყენებით მიღებული მონაცემები იძლევიან ანიზოტროპიის პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებს.

G. Shelia, V. Pachulia, T. Gardapkhadze, L. Azmaiparashvili

ON THE ESTIMATION OF THE ANISOTROPY OF THE PLASTIC PROPERTIES OF SHEET MATERIALS

Summary

The potentialities of descibing the plastic anisotropy of sheet metal with the hehp of F.Hill's condition of plasticity are discussed. A system of experiments permitting to find the parameters of anisotropy is discussed. I is noted that the system of experiments in the stress field and the data obtained through the use of associated flow yield differing values of the parameters of anisotropy.

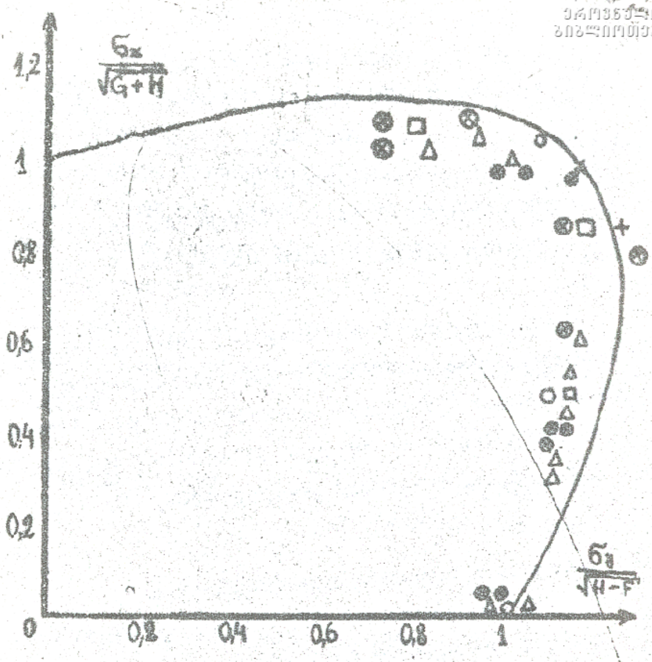


Рис.I.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988

УДК 583

ОБ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРОВОДИМОСТИ

Дж.В.Шарикадзе, Л.Г.Азмайпарашвили

В работе /1/ изучалась задача нестационарного свободного конвекционного течения слабопроводящей вязкой несжимаемой жидкости вдоль пористой бесконечной вертикальной пластины, когда внешнее однородное магнитное поле перпендикулярно к пластине. Было получено точное решение при произвольных температуре пластины и скорости потока. В работе подразумевалось, что проводимость жидкости постоянна, и диссипация энергии за счет трения и джоулева нагрева не была принята во внимание. В работе /2/ была изучена задача обтекания пластины с учетом диссипации энергии за счет вязкости при постоянной проводимости среды.

В настоящей работе рассматривается нестационарное течение электропроводящей теплопроводной жидкости с коэффициентом проводимости вида

$$\sigma = \sigma_0\left(1+\varepsilon\frac{u}{u_0}\right),$$

вызванное движением бесконечной стенки в своей плоскости со скоростью $u_w(t)$, с учетом диссипации энергии как за счет вязкости, так и джоулева тепла.

Основные уравнения магнитной гидродинамики с учетом теплопередачи, в общепринятых обозначения, имеют вид

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\sigma_0 H_0}{\rho}\left(1+\varepsilon\frac{u}{u_0}\right)u, \tag{1}$$

$$a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-\frac{\partial T}{\partial t}=b\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+c\left(1+\varepsilon\frac{u}{u_0}\right)u^2. \tag{2}$$

Причем скорость и температура жидкости должны удовлетворять следующим начально-граничным условиям:

$$u\Big|_{t=0}=0,\quad u\Big|_{y=0}=u_w(t),\quad u\Big|_{y=\infty}=0, \tag{3}$$

$$T\Big|_{t=0}=T_\infty,\quad T\Big|_{y=0}=T_w(t),\quad T\Big|_{y=\infty}=T_\infty. \tag{4}$$

Если перейти к безразмерным величинам

$$y=\delta y',\quad t=\frac{\delta^2}{\nu}t',\quad u=u_0\cdot u'(y',t'),\quad u_w(t)=u_0\cdot u_w'(t),$$

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon'}{u_0},\quad T=\frac{T'+T_\infty}{T_\infty},$$

получим (штрихи опущены)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=m^2(1+\varepsilon u)u, \tag{5}$$

$$\frac{1}{P_r}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-\frac{\partial T}{\partial t}=Ec\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+Ec\cdot m^2(1+\varepsilon u)u^2, \tag{6}$$

$$u\Big|_{t=0}=0,\quad u\Big|_{y=0}=u_w(t),\quad u\Big|_{y=\infty}=0, \tag{7}$$

$$T\Big|_{t=0}=0,\quad T\Big|_{y=0}=T_w(t),\quad T\Big|_{y=\infty}=0. \tag{8}$$

1. Приближенное решение задачи методом функции Грина

Ищем решение системы (5)-(8) в виде степенной суммы относительно малого параметра ε:

$$u(y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k,\qquad T(y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k T_k,$$

и ограничимся первыми двумя приближениями:

$$u(y,t) \approx u_0(y,t) + \varepsilon u_1(y,t),$$

$$T(y,t) \approx T_0(y,t) + \varepsilon T_1(y,t).$$

Тогда для u_0 и u_1 получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = m^2 u_0, \qquad (9)$$

$$u_0\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_0\Big|_{y=0} = u_w(t), \quad u_0\Big|_{y=\infty} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - \frac{\partial u_1}{\partial t} - m^2 u_1 = m^2 u_0^2, \qquad (10)$$

$$u_1\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_1\Big|_{y=0} = 0, \qquad u_1\Big|_{y=\infty} = 0.$$

Решение задачи (9) можно представить в виде

$$u_0(y,t) = \int_0^t \frac{u_w(\tau)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}\, y \exp\left[-\frac{y^2}{4(t-\tau)} - m^2(t-\tau)\right] d\tau,$$

а решение (10) будет

$$u_1(y,t)=m^2\int_0^t d\tau\int_0^\infty u_0^2\cdot G(y,\eta,t-\tau)d\eta,$$

где

$$G(y,\eta,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left\{\exp\left[-\frac{(y+\eta)^2}{4t}\right]-\right.$$

$$\left.-\exp\left[-\frac{(y-\eta)^2}{4t}\right]\right\}\exp(-m^2t).$$

Для скорости $u(y,t)$ получим решение в окончательном виде

$$u(y,t)=\int_0^t\frac{u_w(\tau)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}\,y\cdot\exp\left[-\frac{y^2}{4(t-\tau)}-\right.$$

$$\left.-m^2(t-\tau)\right]d\tau+m^2\varepsilon\int_0^t d\tau\int_0^\infty u_0^2\,G(y,\eta,t-\tau)d\eta.$$

Аналогично можно получить аналитическое решение для функции распределения температуры T.

2. Численное решение задачи

Так как оба уравнения системы (5), (6) нелинейны, то, как известно, доказательство сходимости соответствующей разностной схемы, в общем случае, не удается. Единственной возможностью проверки точности построения разностного решения (5)-(8) служит аналитическое решение (II). На основе отмеченного "эталонного решения" произведены реализация численного алгоритма и корректировка соответствующей рабочей программы для ЭВМ (оптимальный выбор шагов сетки, нужная аппроксимация нелинейных - квадратных и кубических - членов, нахождение конечной "толщины" области течения, которая с определенной точностью обеспечивает выполнение граничных условий на бесконечности и т.д.). Тем самым достигнут подбор такой конечноразностной аппроксимации системы (5)-(8), что полученные на ее основе результаты, для довольно широкого диапазона изменения критериев m, ϵ, P_r, E_c мало расходятся с результатами, полученными аналитическим решением. (Относительная количественная погрешность вышеуказанных решений не превышает 2,6%).

Расчеты проводились для случая равноускоренного движения нагретой пластины; изучено совместное влияние внешнего магнитного поля (m), степени проводимости (ϵ), числа Прандтля (P_r) и числа Эккерта (E_c) на изменение полей скоростей и температуры поперек пластины с течением времени.

Оказалось, что при увеличении магнитного поля скорость, с удалением от пластины, начинает резко падать до нулевого значения, то есть наличие магнитного поля вызывает торможение потока. Увеличение степени проводимости сопутствует торможению потока, причем ее влияние количественно почти не зависит от величины магнитного поля (рис.1).

Наличие электромагнитных сил противодействует распространению температуры поперек пластины, а увеличение степени проводимости способствует этому явлению при $P_r \approx 1$. При дальнейшем уменьшении значения числа Прандтля отмеченные количественные воздействия магнитного поля и степени проводимости на изменение температуры проявляются значительно слабее. Как известно, увеличение числа Эккерта, при отсутствии магнитного поля, способствует уменьшению распространения температуры поперек слоя, а при наличии магнитного поля увеличение степени проводимости также способствует этому явлению (рис.2).

Численный эксперимент выполнен на ЭВМ ЕС 1055 в ИСУ АН ГССР.

Поступила 10.XI.1987

Кафедра
механики сплошных сред

Литература

1. Д.В.Шарикадзе, А.А.Мегахед. Магнитная гидродинамика. 1971, 4, стр. 141-142.
2. А.А.Мегахед. Магнитная гидродинамика. 1972, 2, стр.149-151.
3. Д.В.Шарикадзе. Труды Тбилисского университета, 1971, I (137)А, стр.131-135.

ჯ.შარიქაძე, ლ.აზმაიფარაშვილი

ცვალებადი გამტარებლობის კოეფიციენტიანი გამტარი სითხის ერთი არასტაციონარული ამოცანის შესახებ

რეზიუმე

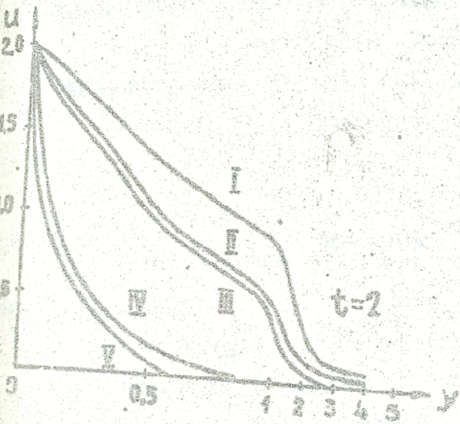
განხილულია ცვალებადი გამტარებლობის კოეფიციენტიანი გამტარი სითხის არასტაციონარული მოძრაობის ამოცანა უსასრულო ფირფიტის მახლობლობაში განივი მაგნიტური ველის მოქმედებისას.

J.Sharikadze, L.Azmaiparashvili

ON AN UNSTEADY PROBLEM OF CONDUCTING FLUID WITH VARIABLE CONDUCTIVITY

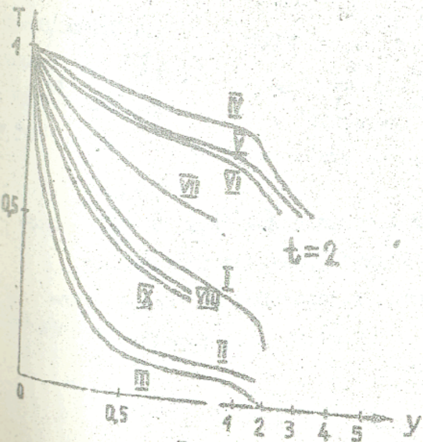
Summary

The paper deals with an unsteady problem of the motion of a conducting fluid with variable conductivity around an infinite porous plate in the presence of a magnetic field.



	m	ε
I	0	–
II	1	0,1
III	1	0,5
IV	5	0,1
V	5	0,5

Рис. 1.



	m	ε	Pr	Fr
I	0	–	1	1
II	1	0,1	1	1
III	1	0,5	1	1
IV	0	–	0,1	1
V	1	0,1	0,1	1
VI	1	0,5	0,1	1
VII	0	–	0,1	5
VIII	1	0,1	0,1	5
IX	1	0,5	0,1	5

Рис. 2.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988

УДК 532

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

К.А.Хелми

Рассматривается нестационарный пограничный слой неньютоновской степенной жидкости, коэффициент электропроводимости которой можно представить в виде:

$$\sigma = \sigma_0\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right)^m, \quad m \geq 0, \tag{I}$$

где u – скорость жидкости в пограничном слое, а u_∞ – скорость набегающего потока. Основные уравнения пограничного слоя степенной вязкой жидкости, находящейся во внешнем магнитном поле при $R_{em} \ll 1$, имеют вид:

$$\frac{nk}{\rho}\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right|^{n-1}\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}=\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}-$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial u_\infty}{\partial t}-u_\infty\frac{\partial u_\infty}{\partial x}+ \qquad (2)$$

$$+Nu_\infty\left[\left(1-\frac{1}{u_\infty}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^m-\left(1-\frac{1}{u_\infty}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^{m+1}\right]$$

где $\psi(x,y)$ – функция тока, $N=\sigma_0 B^2/\rho$,

а граничные условия:

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{y=0}=-v_0(x,t), \qquad (3)$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=\infty}=u_\infty(x,t).$$

Будем искать решение задачи (2)-(3) методом последовательных приближений /1/. Для этого введем "конечную толщину" пограничного слоя $\delta(x,t)$, пока неизвестную функцию, и потребуем выполнения условия не на бесконечности, а на расстоянии $\delta(x,t)$ /3,4/. Тогда будем иметь граничные условия:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=u_\infty(x,t) \quad \text{при} \quad y=\delta(x,t). \qquad (4)$$

Ищем решение (2)-(3) в виде

$$\psi(x,y)\approx\psi_1(x,y)+\psi_2(x,y), \qquad (5)$$

где под ψ_1 принято решение уравнения

$$\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial y^3} = 0, \tag{6}$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$\left.\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right|_{y=0} = -v_0(x,t), \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right|_{y=\delta(x,t)} = u_\infty(x,t).$$

Это решения имеет вид:

$$\psi_1(x,y) = [u_\infty(x,t)/2\delta(x,t)]y^2 - \int_0^x v_0(\xi)\,d\xi. \tag{8}$$

За следующее приближение $\psi_2(x,y)$ возьмем решение уравнения:

$$\frac{\partial^3 \psi_2}{\partial y^3} = \frac{\rho}{nk}\left|\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2}\right|^{1-n}\left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} - \right.$$

$$- \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial u_\infty}{\partial t} - u_\infty \frac{\partial u_\infty}{\partial x} + \tag{9}$$

$$\left. + N u_\infty\left[\left(1 - \frac{1}{u_\infty}\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right)^m - \left(1 - \frac{1}{u_\infty}\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right)^{m+1}\right]\right],$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям. Интегрируя (9) и удовлетворяя однородным граничным условиям, получим:

$$\psi(x,y)=\left(\frac{u_\infty}{2\delta}\right)y^2+A\left\{\frac{y^2}{48}\left(\frac{y^3}{5}-\frac{\delta^3}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_\infty}{\delta}\right)^2+\right. \tag{10}$$

$$+\frac{y^2}{24}\left(y^2-2\delta^2\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_\infty}{\delta}\right)+$$

$$+\left(v_0 u_\infty/\delta-\frac{\partial u_\infty}{\partial t}-u_\infty\frac{\partial u_\infty}{\partial x}\right)\frac{y^2}{12}(2y-3\delta)+$$

$$+\frac{N u_\infty\delta^3}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\left[3+(m+1)\left(1-\frac{y}{\delta}\right)^{m+4}-\right.$$

$$\left.\left.-(m+4)\left(\frac{2y}{\delta}-\frac{y^2}{\delta^2}+\left(1-\frac{y}{\delta}\right)^{m+3}\right)\right]\right\}-\int_0^x v_0\,d\xi,$$

где

$$A=\left(\frac{\rho}{nK}\right)\left(\delta/u_\infty\right)^{n-1} \tag{11}$$

Для напряжения поверхностного трения будем иметь:

$$\tau=K\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right|^n_{y=0}=K\left(\frac{u_\infty}{\delta}\right)^n\left[1+\frac{\rho\delta^n}{nKu_\infty^n}\left(\frac{\delta}{3}\frac{\partial u_\infty}{\partial t}+\right.\right.$$

$$+\frac{u_\infty}{6}\frac{\partial\delta}{\partial t}+\frac{11}{24}u_\infty\delta\frac{\partial u_\infty}{\partial x}+ \tag{12}$$

$$\left.\left.+\frac{u_\infty^2}{24}\frac{\partial\delta}{\partial x}-\frac{N u_\infty\delta}{(m+2)(m+3)}-\frac{v_0 u_\infty}{2}\right)\right]^n.$$

Неизвестную толщину пограничного слоя $\delta(x,t)$ определим из условия $\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$ при $y=\delta$. Оно дает уравнения для определения толщины пограничного слоя:

$$\frac{1}{6}\frac{\partial\delta^{n+1}}{\partial t}+\frac{u_\infty}{16}\frac{\partial\delta^{n+1}}{\partial x}+\left[\frac{1}{12}\frac{\partial \ln u_\infty}{\partial t}+\frac{3\partial u_\infty}{16\partial x}-\frac{N}{(m+1)(m+2)(m+3)}\right](n+1)\delta^{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}\frac{K}{\rho}u_\infty^{n-1}+\left(\frac{n+1}{4}\right)v_0(x,t)\delta^{n}. \qquad (13)$$

Рассмотрим частный случай, когда $v_0=\alpha\delta(x,t)$, $\alpha=const$. Тогда имеем для толщины пограничного слоя

$$\delta^{n+1}=\frac{8n(n+1)K}{\rho u_\infty^{3n+3}}\exp\left[-\frac{4}{3}(n-1)\int_0^x\frac{1}{u_\infty}\frac{\partial \ln u_\infty}{\partial t}dx+M\int_0^x\frac{dx}{u_\infty(x,t)}\right]\cdot\int_0^x u_\infty^{4n+1}\exp\left[\frac{4}{3}(n-1)\int_0^x\frac{1}{u_\infty}\frac{\partial \ln u_\infty}{\partial t}-M\int_0^x\frac{dx}{u_\infty}\right]dx, \qquad (14)$$

где

$$M=4(n+1)\left[\alpha+4N/(m+1)(m+2)(m+3)\right].$$

Когда $n=1$, $\alpha=0$, мы получим результат /I/.

Коэффициент трения при $u_\infty=const=u_0$ и малых NX дается выражениями:

$$C_f^{m=0}=\left[\frac{2^{2n^2+1}}{n(n+1)3^{n(n+1)}}\right]^{\frac{1}{n+1}} R_{ex}^{-\frac{1}{n+1}}\left(1-\frac{2n(n+2)}{u_0}\alpha X-\frac{n(n+5)}{3u_0}NX\right.$$

$$C_f^{m=1}=\left[\frac{2^{2n^2+1}}{n(n+1)3^{n(n+1)}}\right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot R_{ex}^{-\frac{1}{n+1}}\left(1-\frac{2n(n+2)}{u_0}\alpha X-\frac{n(n+2)}{3u_0}NX+\ldots\right.$$

где $R_{ex}=\dfrac{U_0^{2-n}x^n}{(K/\rho)}$ - обобщенное локальное число Рейнольдса.

Это значит, что с увеличением m будет увеличиваться C_f.

Аналогично можно рассмотреть другие примеры, дающие явное выражение для толщины пограничного слоя и найти все его характеристики, например, при:

$$v_0(x,t)=-\left[\frac{2(n-1)\partial \ln u_\infty}{3(n+1)\partial t}\right]\delta(x,t),$$

$$v_0=\frac{-4N}{(m+1)(m+2)(m+3)}\delta$$

и

$$\left[v_0(x,t)/u_\infty(x,t)\right]=\epsilon<<1.$$

Поступила I.VI.1987

Кафедра
механики сплошных сред

Литература

I. Д.В.Шарикадзе. Сообщ. АН Груз.ССР, 45,I,1967.
2. Д.В.Шарикадзе. Магнитная гидродинамика, 4,53-55.
3. С.Е.Швец. ПММ, I3,3,I949.
4. Е.М.Добрышман. ПММ,20,3,1956.
5. Д.В.Шарикадзе. Сообщ. АН Груз.ССР,43,3,I966.
6. V.J.Rossow, NACA, 1358, 1958.

ქ. ხელმი

არანიუტონური გამტარი სითხის არასტაციონარული სასაზღვრო ფენის ამოხსნის მიახლოებითი მეთოდი

რეზიუმე

მიახლოებითი მეთოდით ნაპოვნია ცვალებადი გამტარებლობის კოეფიციენტის მქონე ხარისხოვანი სითხის არასტაციონარული სასაზღვრო ფენის მახასიათებლები.

K.Helmy

AN APPROXIMATION METHOD FOR SOLVING THE PROBLEM OF AN UNSTEADY LAMINAR BOUNDARY LAYER OF A NON-NEWTONIAN CONDUCTING FLUID

Summary

Some characteristics of the non-stationary boundary layer of a power-low fluid with a variable coefficient of electrical conductivity have been found by the approximation method.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988

УДК 532

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ С ТЕПЛОПЕРЕДАЧЕЙ

К.А.Хелми

В работах /I-7/ рассматривались как стационарные, так и нестационарные задачи магнитной гидродинамики и неньютоновских жидкостей со степенным реологическим законом. В настоящей статье рассматривается нестационарная задача таких жидкостей, коэффициент электропроводности которых можно представить в виде

$$\sigma=\sigma_0 u^{m-1}, \quad m\geq 1. \tag{I}$$

Пусть проводящая жидкость со степенным реологическим законом занимает полупространство $y>0$. Внешнее однородное магнитное поле с индукцией B_0 направлено вдоль оси y, а электрическое поле отсутствует. Через непроводящую пластину, лежащую в жидкости, осуществляется вдув жидкости со скоростью $v_y = v(t)$. При движении пластины в жидкости возникает сдвиговое течение. Для малых чисел Рейнольдса, т.е. $R_m \ll 1$, уравнения, описывающие нестационарное течение и теплообмен в поперечном магнитном поле, имеют вид /8/

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(t)\frac{\partial u}{\partial y} = a\frac{\partial}{\partial y}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right] - Nu^{m}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v(t)\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{a}{c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}, \tag{3}$$

где $a = \frac{k}{\rho}$, $N = \frac{\sigma_0 B_0^2}{\rho}$, а остальные обозначения общеприняты с нулевыми начальными условиями и следующими граничными условиями:

$$u(y,t) = U(t), \quad T(y,t) = T_0(t) \quad при\ y = 0, \tag{4}$$

$$u(y,t) = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad при\ y \to \infty,$$

$$u(y,0) = 0$$

Для некоторых специальных случаев, когда имеется определенная связь между скоростью вдува $v(t)$ и скоростью движения пластины $U(t)$, удается найти автомодельные решения задачи (2), (4) с автомодельной переменной

$$\eta = \int_0^t v(\tau)\,d\tau - y .$$

Пусть

$$U(t) = A\left[\int_0^t v(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{n+1}{n-m}}, \qquad (5)$$

$$A = \left\{\frac{N(n-m)}{na(1+m)}\left(\frac{n-m}{n+1}\right)^{n}\right\}^{\frac{1}{n-m}} .$$

Тогда задача (2), (4) имеет обобщенное автомодельное решение

$$u(y,t) = u(\eta) = \begin{cases} A\,\eta^{\frac{n+1}{n-m}}, & \eta > 0 \\ 0, & \eta < 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Решение (6) соответствует сдвиговой волне, фронт которой перемещается со скоростью движения среды $v(t)$ в направлении оси y. Положение фронта в любой момент времени $y_0(t)$ определяется из условия $\eta = 0$. Точка $y = y_0(t)$ является точкой слабого разрыва. В этой точке u и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны. Это обеспечивает выполнение физических требований непрерывности скорости и касательных напряжений τ в любой точке, где

$$\tau = K\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n}_{y=0} = \tag{7}$$

$$= K\left|\left(\frac{m+1}{n-m}\right)^{n+1}\cdot A^{n-m}\cdot U(t)^{m+1}\right|^{\frac{n}{n+1}}$$

Для температуры пластины, целесообразно взять

$$T_0(t) = B\left[\int_0^t v(\tau)d\tau\right]^{\frac{\alpha}{n-m}}, \tag{8}$$

где

$$\alpha = [n(3+m)+1-m],$$

$$B = \left[\frac{a\rho(m-n)(n+1)}{A[n(m+2)+1]\alpha}\left(\frac{n+1}{n-m}\right)^{n} A^{n+1}\right].$$

Таким образом, задача (3), (4) имеет решение

$$T(y,t) = T(\eta) = \begin{cases} B\eta^{\frac{\alpha}{n-m}}, & \eta > 0 \\ 0, & \eta < 0 \end{cases} \tag{9}$$

Это решение тоже соответствует сдвиговой волне, фронт которой перемещается со скоростью $\overset{\circ}{v}(t)$.

Рассмотрим частный случай степенных зависимостей скорости вдува и скорости движения пластины от времени:

$$v(t)=ct^{l-1},\quad U(t)=u_0 t^{\,l\left(\frac{n+1}{n-m}\right)},\quad T_0(t)=\theta_0 t^{\frac{\alpha l}{n-m}},$$

где

$$u_0=A\left(\frac{c}{l}\right)^{\frac{n+1}{n-m}},\quad \theta_0=B\left(\frac{c}{l}\right)^{\frac{\alpha}{n-m}},\quad l\geq 1.$$

Решение (6) теперь имеет вид:

$$u(y,t)=\begin{cases} A\left(\frac{c}{l}t^{l}-y\right)^{\frac{n+1}{n-m}}, & y<y_0=\frac{c}{l}t^{l},\\ 0, & y\geq y_0.\end{cases}$$

Решение (9) имеет вид:

$$T(y,t)=\begin{cases} B\left(\frac{c}{l}t^{l}-y\right)^{\frac{\alpha}{n-m}}, & y<y_0,\\ 0, & y\geq y_0.\end{cases}$$

Как и следовало ожидать, при $m=1$ решение (6) совпадает с решением из /7/. С увеличением m скорость $u(y,t)$

и температура $T(y,t)$ убывают.

Поступила 15.IX.1987

Кафедра
механики сплошных сред

Литература

1. Л.К.Мартинсон, К.Б.Павлов, МГ,3,1966.
2. А.Г.Сетунков, ПМТФ,2,1970.
3. Л.К.Мартинсон, К.Б.Павлов, МГ,2,1971.
4. К.Б.Павлов, МГ,3,1972.
5. И.С.Граник, Л.К.Мартинсон. МГ,2,1973.
6. И.С.Граник, Л.К.Мартинсон. МГ,4,1974.
7. Л.К.Мартинсон. МГ,1,1974.
8. З.П.Шульман, Б.М.Берковский. Пограничный слой неньютоновских жидкостей, Минск, 1966.

ქ. ხელაძე

ბლანტი არანიუტონური სითხის არასტაციონარული დინება
სითბოგადაცემით

რეზიუმე

ნაპოვნია ხარისხოვანი რეოლოგიური კანონის მქონე არანიუტონური სითხის ამოცანის ავტომოდელური ამონახსნები შეყონვისა და სითბოგადაცემის გათვალისწინებით.

K.Helmy

UNSTEADY FLOW OF VISCOUS NON-NEWTONIAN FLUID WITH HEAT TRANSFER

Summary

Self similarity solutions for the problem of the displacement of a power-law viscous non-Newtonian fluid are presented, when there exists injection across a moving plate in the fluid, taking into account the variation of the electrical conductivity coefficient and the heat transfer.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988

УДК 538

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ИСТОЧНИКОВ И СТОКОВ МАССЫ

В.Д.Шарикадзе

В работе получено приближенное решение задачи нестационарного течения вязкой слабопроводящей жидкости в полупространстве, когда учитываются равномерно распределенные источники и стоки масс.

Рассмотрим нестационарное течение вязкой, несжимаемой слабопроводящей жидкости, возникшее движением пористой бесконечной пластины из состояния покоя, когда внутри жидкости имеются равномерно распределенные источники и стоки массы и перпендикулярно пластине действует внешее однородное магнитное поле.

Основные уравнения движения и неразрывности при этом /I,2/ будут иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{q}{\rho}u = \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\sigma B_0^2}{\rho}u, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{q}{\rho}, \end{cases} \qquad (1)$$

где $u(y,t)$, $v(y,t)$ - компоненты скорости жидкости, q - интенсивность источников и стоков массы.

Если ввести безразмерные величины:

$$u = u_0 u', \quad v = v_0 v', \quad y = \frac{\nu}{u_0}y', \quad t = \frac{\nu}{u_0^2}t',$$

$$v_w = v_0 v_w', \quad u_w = u_0 u_w',$$

$$\alpha = \frac{q}{\rho}\frac{\nu}{u_0^2}, \quad \beta = \frac{v_0}{u_0}, \quad N = \frac{\sigma B_0^2 \nu}{\rho u_0^2},$$

то из (1), (2) получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \left[\alpha y + \beta v_w(t)\right]\dfrac{\partial u}{\partial y} + (N-\alpha)u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & (3) \\ v = -\left[\dfrac{\alpha}{\beta}y + v_w\right], & (4) \end{cases}$$

где $v_w(t)$ - безразмерная скорость просачивания жидкости через пластину.

Введем некоторую функцию $\delta(t)$, которую будем называть толщиной пограничного слоя и потребуем, чтобы выполнялись следующие предельные условия:

$$u\Big|_{t=0} = 0, \tag{5}$$

$$u\Big|_{y=0} = u_w(t), \qquad u\Big|_{y=\delta(t)} = 0.$$

Будем искать $u(y,t)$ с помощью последовательных приближений /3/:

$$u^{(1)} = u_0,$$

$$u^{(2)} = u_0 + u_1, \ldots, u^{(n+1)} = u_0 + \cdots + u_n,$$

причем, каждая из функций определяется соответственно уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - \left[\alpha y + \beta v_w(t)\right]\frac{\partial u_0}{\partial y} + (N-\alpha)u_0. \tag{6}$$

Из первого уравнения (6) и предельных условий (5) находим:

$$u_0 = u_w(t)\left[1 - \frac{y}{\delta(t)}\right]. \tag{7}$$

Из (6) и (7) после интегрирования два раза по y и удовлетворения однородных передельных условий, для $u_1(y,t)$ получим:

$$u_1 = u_w'\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6\delta} - \frac{\delta}{3}y\right) + u_w\left[\left(\frac{\delta'}{6\delta^2} + \frac{\alpha}{3\delta} - \frac{N}{6\delta}\right)y^3 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\beta v_w}{2\delta} - \frac{\alpha}{2} + \frac{N}{2}\right)y^2 - \left(\frac{\delta'}{6} - \frac{\alpha}{6}\delta + \frac{N\delta}{3} + \frac{\beta v_w}{2}\right)y\right],$$

$$u_w' = \frac{du_w}{dt}, \quad \delta' = \frac{d\delta}{dt}.$$

Ограничимся первыми двумя приближениями, тогда для $u(y,t)$ получим:

$$u^{(2)} \approx u_0 + u_1.$$

Входящее в выражение неизвестное $\delta(t)$ определим из условия равенства нулю поверхностного трения $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, когда $y = \delta(t)$. Тогда для $\delta(t)$ будем иметь:

$$\delta^{2\prime} + \left(\frac{u_w'}{u_w} + \alpha + N\right)\delta^2 + 3\beta v_w \delta = 6 \qquad (8)$$

- неоднородное нелинейное дифференциальное уравнение относительно $\delta(t)$. Для его решения рассмотрим несколько случаев задания $v_w(t)$ и $u_w(t)$, когда можно получить решение в явном виде.

I. Пусть скорость пластины и скорость просачивания жидкости через пластину задаются в виде $u_w = 1$ и $v_w = 1$, тогда для определения неизвестной толщины $\delta(t)$ будем иметь уравнение

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{6 - 3\beta\delta - (\alpha+N)\delta}{2\delta}.$$

2. Пусть $v_w = A\delta$. Тогда для $\delta(t)$ получим:

$$\delta^2 = \frac{6e^{-(\alpha+N+3A\beta)t}}{u_w}\left[\int_0^t u_w(\tau)e^{(\alpha+N+3A\beta)\tau}d\tau + \frac{c_1}{6}\right],$$

которое при $u_w = const$ даст:

$$\delta^2 = \frac{6}{\alpha+N+3A\beta}\left[1 - e^{-(\alpha+N+3A\beta)t}\right] + \qquad (9)$$

$$+\frac{c_1}{u_w}e^{-(\alpha+N+3A\beta)t}$$

3. Если $v_w=\frac{B}{\delta}$, из (8) будем иметь:

$$(\delta^2)'+\left(\frac{u_w'}{u_w}+\alpha+N\right)\delta^2=6-3\beta B\equiv K,$$

откуда

$$\delta^2=\frac{Ke^{-(\alpha+N)t}}{u_w}\int_0^t u_w(\tau)e^{(\alpha+N)\tau}d\tau+\frac{c_1}{K}.$$

Для $u_w=const$ оно дает

$$\delta^2=\frac{K}{\alpha+N}\left[1-e^{-(\alpha+N)t}\right]+\frac{c_1}{u_w}e^{-(\alpha+N)t}. \quad (10)$$

При этом поверхностное трение в безразмерных величинах будет:

$$\tau_w=\mu\,\frac{\delta}{3}u_w'-\frac{u_w}{12\delta}\left(\delta^{2'}-2(\alpha-2N)\delta^2+6\beta v_w\delta+12\right).$$

В случае $v_w=A\delta$ и $u_w=1$ оно принимает вид

$$\tau_w = -\frac{\mu}{12\delta}\left[\delta^{2'} - 2(\alpha - 2N - 3A\beta)\delta^2 + 12\right],$$

где $\delta(t)$ определяется из (9).

При $v_w = \frac{B}{\delta}$ и $u_w = 1$ для поверхностного трения имеем

$$\tau_w = -\frac{\mu}{12\delta}\left[\delta^{2'} - 2(\alpha - 2N)\delta^2 + 6\beta B + 12\right];$$

где толщина выражается формулой (10).

Численные расчеты показывают, что присутствие источников уменьшает толщину слоя и поверхностное трение, когда $v_w = A\delta$ и $v_w = \frac{B}{\delta}$.

Поступила 25.III.1987

Кафедра
теоретической механики

Литература

1. С.В.Валландер. Лекции по гидроаэродинамике. Л.,1978,с.295.
2. В.Д.Шарикадзе. Труды Тбилисского университета.Математика. Механика.Астрономия. т.270, 1987, 194-201.
3. Д.В.Шарикадзе. Магнитная гидродинамика. 4,1966,53-65.

ვ. შარიქაძე

გამტარი სითხის მოძრაობის ამოცანის ერთი მიახლოებითი ამოხსნის შესახებ მასის წყაროებისა და ჩადინებების გათვალისწინებით

რეზიუმე

მიღებულია ნახევარსივრცეში გამტარი სითხის არასტაციონარული მოძრაობის ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი.

V.Sharikadze

ON AN APPROXIMATE SOLUTION OF A PROBLEM ON CONDUCTIVE FLUIDE MOTION WITH SOURCE-SINK OF MASS

Summary

It is given an approximate solution of the problem of conductive fluid unsteady motion in a half-space.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988

УДК 532

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПОРИСТЫМИ ДИСКАМИ

Л.А.Джикидзе

Задача движения вязкой несжимаемой жидкости, находящейся между двумя бесконечными дисками, была исследована Стюартсоном /I/, когда один диск неподвижен, а второй вращается с угловой скоростью ω. Обобщение этой задачи для слабопроводящей жидкости, когда перпендикулярно дискам приложено внешнее однородное магнитное поле, было проведено в работе /2/.

Интересными практическими задачами являются задачи, когда через диски происходит вдув или отсос жидкости. Первые исследования в этом направлении даны в работе /3/, а их обобщения для слабопроводящей жидкости при разных направлениях вращения пористых дисков были проведены в работе /4/.

В настоящей работе методом функции Грина и малого параметра исследуется задач движения вязкой слабопроводящей жидкости, находящейся между двумя дисками, когда диски вращаются в разных направлениях и имеют разные скорости вдува.

Рассмотрим задачу о стационарном течении вязкой несжимаемой проводящей жидкости, возникшем из состояния покоя, между двумя бесконечными дисками, отстоящими друг от друга на расстоянии h, из которых один вращается с угловой скоростью ω, другой – с угловой скоростью $s\omega$ (где s – целое число). Пусть с первого диска происходит равномерный вдув той же жидкости с постоянной скоростью v_1 и со второго – со скоростью v_2. Предполагаем, что скорости вдува и постоянное магнитное поле перпендикулярны плоскости дисков.

Для решения задачи воспользуемся уравнениями движения в цилиндрических координатах. С учетом того, что движение жидкости осесимметрично, система уравнений движения примет вид:

$$\begin{cases} v_r \dfrac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \dfrac{\partial v_r}{\partial z} - \dfrac{v_\varphi^2}{r} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial r} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial r} - \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{v_r}{r^2} + \dfrac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right) - \dfrac{\sigma B_0^2}{\rho} v_r , \\ v_r \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \dfrac{v_r v_\varphi}{r} = \nu\left(\dfrac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \dfrac{v_\varphi}{r^2} + \dfrac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}\right) - \\ \qquad - \dfrac{\sigma B_0^2}{\rho} v_\varphi , \\ v_r \dfrac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}\right). \end{cases} \qquad (1)$$

К этой системе нужно еще добавить уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0. \qquad (2)$$

(1)-(2) систему должны решить в следующих граничных условиях:

$$\begin{cases} z=0, & v_r=0, \quad v_\varphi=\omega r, \quad v_z=v_1, \\ z=h, & v_r=0, \quad v_\varphi=s\omega r, \quad v_z=v_2. \end{cases} \qquad (3)$$

Пусть

$$\begin{cases} v_r=\omega r F(z'), \quad v_\varphi=\omega r Q(z'), \quad v_z=\omega h H(z'), \\ \dfrac{p}{\rho}=\nu\omega\left[P(z')+\dfrac{r^2}{2h^2}K\right], \quad v_1=\omega h v_1', \quad v_2=\omega h v_2', \end{cases} \qquad (4)$$

где $z'=z/h$ и K – постоянная величина, зависящая только от числа Рейнольдса. Подстановка (4) в уравнениях (1)-(2) дает следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} F''-m^2F=Re(-Q^2+F^2+HF')+K, \\ Q''-m^2Q=Re(2FQ+HQ'), \\ P'=H''-Re(HH'), \\ H'+2F=0. \end{cases} \qquad (5)$$

где $Re = \dfrac{\omega h^2}{\nu}$ – число Рейнольдса, а $m^2 = \dfrac{\sigma B_0^2 h^2}{\nu \rho}$.

Систему (5) надо решить в следующих граничных условиях:

$$\begin{cases} z=0, \quad F=0, \quad Q=1, \quad H=v_1, \\ z=1, \quad F=0, \quad Q=s, \quad H=v_2. \end{cases} \tag{6}$$

Решение задачи (5)–(6) можно представить в виде

$$\begin{cases} F(z)=K\int\limits_0^1 G(z,\eta)\,d\eta + Re\int\limits_0^1 [-Q^2+F^2+HF']\,G(z,\eta)\,d\eta, \\ Q(z)=B(z)+Re\int\limits_0^1 [2FQ+HQ']\,G(z,\eta)\,d\eta, \\ H(z)=-2\int\limits_0^z F(\eta)\,d\eta + v_1. \end{cases} \tag{7}$$

где $G(z,\eta)$ – функция Грина задачи

$$G'' - m^2 G = 0,$$

$$G\Big|_{z=0} = 0, \quad G\Big|_{z=1} = 0.$$

Она имеет вид

$$G=\begin{cases} G_1=\dfrac{e^{-m(1-\eta)}-e^{m(1-\eta)}}{2m(e^{m}-e^{-m})}\left(e^{mz}-e^{-mz}\right), & 0\le z<\eta,\\[2ex] G_2=\dfrac{e^{-m(1-z)}-e^{m(1-z)}}{2m(e^{m}-e^{-m})}\left(e^{m\eta}-e^{-m\eta}\right), & \eta<z\le 1. \end{cases}$$

Пусть число Рейнольдса меньше единицы, тогда решения системы (7) можно искать в виде рядов

$$\begin{cases} F(z)=\sum\limits_{K=0}^{\infty} Re^{K} F_K(z), \quad Q(z)=\sum\limits_{K=0}^{\infty} Re^{K} Q_K(z),\\[2ex] H(z)=\sum\limits_{K=0}^{\infty} Re^{K} H_K(z), \quad K=\sum\limits_{K=0}^{\infty} Re^{K} K_K. \end{cases} \tag{8}$$

Подставляя ряды (8) в систему (7), получим следующие рекуррентные соотношения:

$$F_0=K_0\int_0^1 G(z,\eta)\,d\eta,$$

$$F_1=K_1\int_0^1 G(z,\eta)\,d\eta+\int_0^1\left(F_0^2-Q_0^2+H_0F_0'\right)G(z,\eta)\,d\eta,$$

- -

$$F_{K+1}=K_{K+1}\int_0^1 G(z,\eta)\,d\eta+\int_0^1\sum_{\alpha=0}^{K}\left(F_\alpha F_{K-\alpha}-Q_\alpha Q_{K-\alpha}+H_\alpha F'_{K-\alpha}\right)G(z,\eta)\,d\eta,$$

$$Q_0 = B(z),$$

$$Q_1 = \int_0^1 \left(2F_0 Q_0 + H_0 Q_0'\right) G(z,\eta)\, d\eta,$$

$$Q_{k+1} = \int_0^1 \sum_{\alpha=0}^{k} \left(2F_\alpha Q_{k-\alpha} + H_\alpha Q'_{k-\alpha}\right) G(z,\eta)\, d\eta,$$

$$H_0 = -2\int_0^z F_0\, d\eta + v_1,$$

$$H_{k+1} = -2\int_0^z F_{k+1}\, d\eta,$$

где $B(z)$ является решением задачи

$$B''(z) - m^2 B(z) = 0,$$

$$B(z)\Big|_{z=0} = 1, \qquad B(z)\Big|_{z=1} = s.$$

Первые два приближения $F_0, F_1, Q_0, Q_1, H_0, H_1, K_0, K_1$ имеют вид:

$$F_0 = \frac{K_0}{m^2}\left(A_1 e^{mz} - A_2 e^{-mz} - 1\right),$$

$$Q_0 = A_3 e^{mz} + (1 - A_3) e^{-mz},$$

$$H_0 = -\frac{2K_0}{m^3}\left(A_1 e^{mz} + A_2 e^{-mz} - mz - A_1 - A_2\right) + v_1,.$$

$$K_0 = m^3(v_2 - v_1)/2(2A_1 + 2\,[illegible]\,m),$$

$$F_1 = A_{13}e^{2mz} + A_{14}e^{-2mz} + A_{15}e^{mz} + A_{16}e^{-mz} + A_{17}ze^{mz} -$$
$$- A_{18}ze^{-mz} + A_{19}z^2e^{mz} - A_{20}z^2e^{-mz} - A_{21},$$

$$Q_1 = A_6 + A_7 ze^{mz} + A_8 ze^{-mz} + A_9 z^2 e^{mz} + A_{10} z^2 e^{-mz} +$$
$$+ A_{11}e^{mz} + A_{12}e^{-mz},$$

$$H_1 = -(A_{13}/m)e^{2mz} + (A_{14}/m)e^{-2mz} + A_{27}e^{mz} + A_{28}e^{-mz} +$$
$$+ A_{29}ze^{mz} - A_{30}ze^{-mz} - (2A_{19}/m)z^2e^{mz} -$$
$$- (2A_{20}/m)z^2e^{-mz} + 2A_{21}z + A_{31},$$

$$K_1 = 2(1 - A_3)A_3 - \frac{(1 - 6A_1A_2)K_0^2}{m^4} + \Big[(m^2A_{13}/2)(e^{3m} + 3e^{m} - 4) +$$
$$+ (m^2A_{14}/2)(e^{-3m} + 3e^{-m} - 4) + A_{22}(e^{2m} - 1) + A_{23}(e^{-2m} - 1) + A_{25}\Big]/A_{26},$$

где

$$A_1 = (1 - e^{-m})/(e^{m} - e^{-m}),$$

$$A_2 = (1 - e^{m})/(e^{m} - e^{-m}),$$

$$A_3 = (s - e^{-m})/(e^{m} - e^{-m}),$$

$$A_4 = -(e^{-m}+5)/(e^{-m}+1),$$

$$A_5 = (e^{m}+5)/(e^{m}+1),$$

$$A_6 = 4K_0[A_2A_3 - A_1(1-A_3)]/m^4,$$

$$A_7 = K_0A_3A_4/2m^3 + v_1A_3/2,$$

$$A_8 = K_0(1-A_3)A_5/2m^3 + v_1(1-A_3)/2,$$

$$A_9 = K_0A_3/2m^2,$$

$$A_{10} = K_0(1-A_3)/2m^2,$$

$$A_{11} = [-(A_7+A_9)e^{m} + (A_6-A_8-A_{10})e^{-m} - A_6]/(e^{m}-e^{-m}),$$

$$A_{12} = [(A_7+A_9-A_6)e^{m} + (A_8+A_{10})e^{-m} + A_6]/(e^{m}-e^{-m}),$$

$$A_{13} = -A_3^2/3m^2 - A_1^2K_0^2/3m^6,$$

$$A_{14} = -(1-A_3)^2/3m^2 - A_2^2K_0^2/3m^6,$$

$$A_{15} = [-A_{13}e^{2m} - A_{14}e^{-2m} + (A_{18}+A_{20}+A_{13}+A_{14}-A_{21})e^{-m} - (A_{17}+A_{19})e^{m} + A_{21}]/(e^{m}-e^{-m}),$$

$$A_{16} = [A_{13}e^{2m} + A_{14}e^{-2m} - (A_{18}+A_{20})e^{-m} + (A_{17}+A_{19}-A_{13}-A_{14}+A_{21})e^{m} - A_{21}]/(e^{m}-e^{-m}),$$

$$A_{17} = A_1A_4K_0^2/2m^5 + v_1K_0A_1/2m^2,$$

$$A_{18}=A_2A_5K_0^2/2m^5+v_1K_0A_2/2m^2,$$

$$A_{19}=A_1K_0^2/2m^4,\qquad A_{20}=A_2K_0^2/2m^4,$$

$$A_{21}=K_1/m^2+(1-6A_1A_2)K_0^2/m^6-2A_9(1-A_3)/m^2,$$

$$A_{22}=mA_{17}+2(m-1)A_{19},$$

$$A_{23}=mA_{18}+2(m-1)A_{20},$$

$$A_{24}=2K_0^2(A_1+A_2)(A_1-A_2-1)/m^3+v_1K_0(A_1-A_2),$$

$$A_{25}=A_{24}+2[m(m-1)A_{19}+m(m+1)A_{20}],$$

$$A_{26}=(e^m-1)(1-e^{-m})+m(e^{-m}-e^m),$$

$$A_{27}=2[2A_{19}+mA_{17}-m^2A_{15}]/m^3,$$

$$A_{28}=2[-2A_{20}-mA_{18}+m^2A_{16}]/m^3,$$

$$A_{29}=2[2A_{19}-mA_{17}]/m^2,$$

$$A_{30}=2[2A_{20}+mA_{18}]/m^2,$$

$$A_{31}=[(A_{13}-A_{14}+2A_{15}-2A_{16})m^2-2(A_{17}-A_{18})m-4(A_{19}-A_{20})]/m^3.$$

Исследуем функции F и Q, когда $s=0$, $s>0$ и $s<0$. $s=0$ означает, что верхний диск неподвижен и вращается только нижний диск. Если $s>0$, диски вращаются в одном направлении, а при $s<0$ диски вращаются в противоположном направлении.

В случае, когда $s=0$, распределение тангенциальной составляющей скорости показано на рисунке I при $v_1 > v_2$ и $v_1 < v_2$ для различных значений параметров m и Re. Из рисунка видно, что при неизменном Re тангенциальная составляющая скорости возрастает при уменьшении параметра m, а при неизменном m тангенциальная составляющая скорости возрастает при возрастании параметра Re. Для фиксированных значений m и Re тангенциальная составляющая скорости больше при $v_1 < v_2$, чем при $v_1 > v_2$.

На рисунках 2 и 3 показаны распределения радиальной составляющей скорости при $v_1 > v_2$ и $v_1 < v_2$ для различных значений параметров m и Re. Из рисунков видно, что при неизменном Re радиальная составляющая скорости возрастает при уменьшении m, при неизменном m она возрастает при возрастании Re, а для фиксированных m и Re значение радиальной составляющей скорости меньше при $v_1 < v_2$, чем при $v_1 > v_2$.

На рисунках 4,5,6 показаны распределения тангенциальной и радиальной составляющих скорости при $s > 0$. Обе составляющие скорости при неизменном Re возрастают при уменьшении параметра m, а при неизменном m возрастают при возрастании параметра Re. Кроме того, для фиксированных m и Re значение тангенциальной составляющей скорости меньше при $v_1 > v_2$, чем при $v_1 < v_2$, а значение радиальной составляющей скорости больше при $v_1 > v_2$, чем при $v_1 < v_2$.

На рисунках 7,8,9 показаны распределения тангенциальной и радиальной составляющих скорости при $s<0$. Как и в предыдущих случаях, обе составляющие при неизменном Re уменьшаются при возрастании параметра m, а при неизменном m составляющие скорости возрастают при возрастании Re. Аналогично, значение тангенциальной составляющей скорости при фиксированных m и Re больше при $v_1<v_2$, чем при $v_1>v_2$, а значение радиальной составляющей скорости меньше при $v_1<v_2$, чем при $v_1>v_2$.

Поступила 10.IУ.1987

Кафедра
теоретической механики
ГПИ им. В.И.Ленина

Литература

1. K.Stewartson. Proc. Camb. Phil. Soc., 2 (1958), 333.
2. A.C.Srivastava and S.K.Sharma. Bull. de L' Acad. Pol. Des Scien. Serie des sciences techniques, vol. IX, N11, 1961.
3. K.Stewartson. Proc. Camb. Phil. Soc., 449, 333, 1953.
4. M.A.Hossain and A.F.M.A.Rahman. Indian J. peure appl. Math. 15(2), 187–194, 1984.
5. Л.А.Дорфман. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел.М.,1960,260с.
6. А.Б.Ватажин, Г.А.Любимов, С.А.Регирер. Магнитогидродинамические течения в каналах.М.,1970,672с.

ლ. ჯიქიძე

სუსტადგამტარი სითხის მაგნიტოჰიდროდინამიკური დინება ორ მბრუნავ ფოროვან ფირფიტას შორის

რეზიუმე

გრინის ფუნქციისა და მცირე პარამეტრის მეთოდით შესწავლილია ორ ფოროვან ფირფიტას შორის სუსტადგამტარი ბლანტი სითხის დინება, როცა ფირფიტები ბრუნავენ სხვადასხვა მიმართულებით და გააჩნიათ სხვადასხვა გაჟონვის სიჩქარე.

L. Jikidze

MAGNETOHYDRODYNAMIC FLOW OF A WEAKLY CONDUCTIVE FLUID FLOWING BETWEEN TWO POROUS ROTATING DISKS

Summary

Magnetohyrdodynamic flow of a weakly conductive fluid flowing between two porous rotating disks has been studied by the method of Green's function and small arameters. The two disks rotate in different directions, having different velocities of suction.

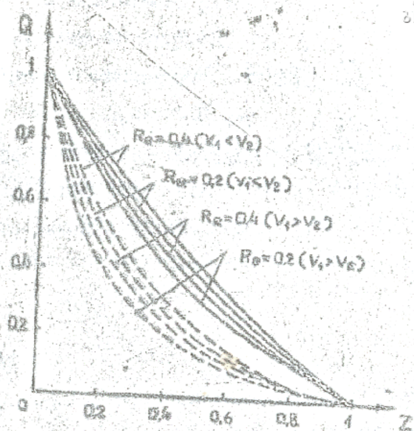


Рис.1 $S = 0$
$m = 2$ ———
$m = 4$ – – –

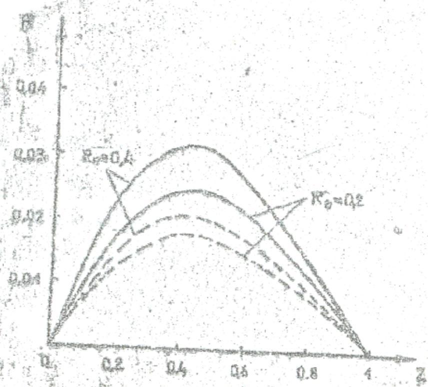


Рис.2 $S = 0;\ V_1 > V_2$
$m = 2$ ———
$m = 4$ – – –

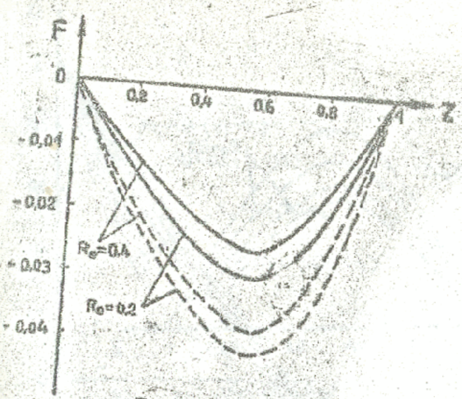


Рис. 3. $S=0$, $V_1 < V_2$
$m=2$ ———
$m=4$ - - - -

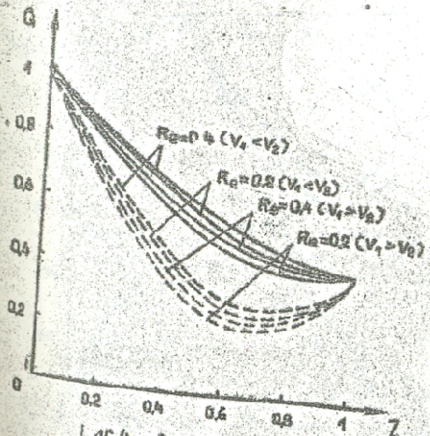


Рис. 4. $S=0.4$
$m=2$ ———
$m=4$ - - - -

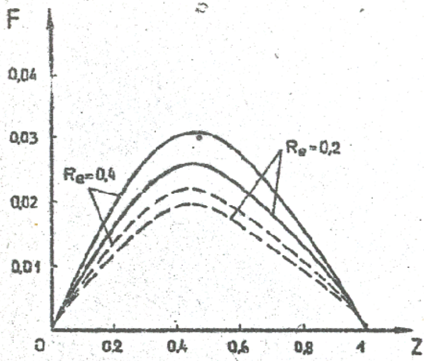


Рис.5. $S=0,4$, $V_1>V_2$

$m=2$ ———

$m=4$ - - - -

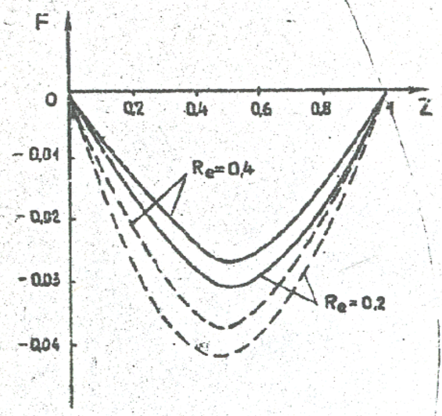


Рис.6 $S=0,4$, $V_1<V_2$

$m=2$ ———

$m=4$ - - - -

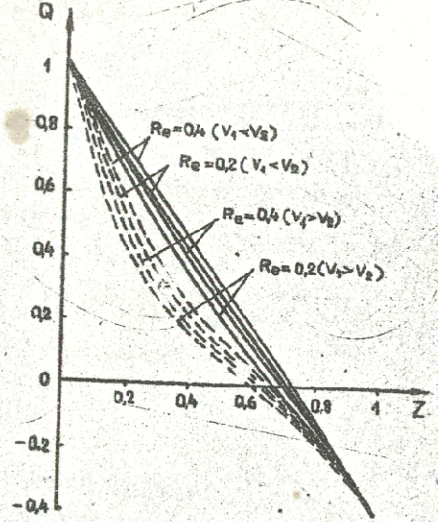


Рис. 7. $S = -0,4$

$m = 2$ ———
$m = 4$ - - - - -

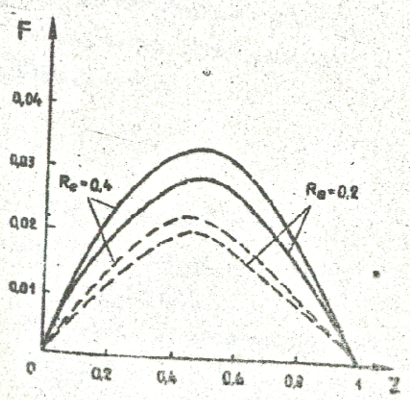


Рис. 8 $S = -0,4$; $V_1 > V_2$

$m = 2$ ———
$m = 4$ - - - - -

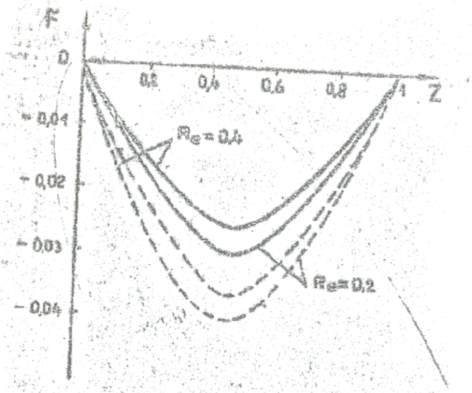


Рис. 9. $S = -0{,}4$, $V_1 < V_2$

$m = 2$ ———

$m = 4$ - - - -

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები

276, 1988

УДК 532

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ СТРУЙНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Дж.В.Шарикадзе, М.А.Еззат

Изучается магнитогидродинамическое струйное течение неньютоновской жидкости, когда проводимость жидкости задается в виде функции скорости

$$\sigma = \sigma_0 u, \tag{I}$$

а магнитное поле направлено поперек струйного течения. Аналогичная задача для обычной ньютоновской проводящей жидкости изучалась в работах /I,2,3/.

Уравнения движения и неразрывности степенной жидкости в безындукционном приближении имеют вид /2,5/:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{k}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n} - \frac{\sigma_0 B^2}{\rho}u^2, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

а граничные условия рассматриваемой задачи следующие:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v = 0 \quad \text{при} \quad y \to 0,$$

$$u \to 0 \quad . \quad \text{при} \quad y \to \pm\infty \qquad (3)$$

Если проинтегрировать уравнения (2) поперек сечения струи, придем к следующему условию сохранения:

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} u^2 d\alpha = N(x)\int_{-\infty}^{\infty} u^2 d\alpha$$

или

$$I = \rho\int_{-\infty}^{\infty} u^2 d\alpha = I_0 \exp -\int_{-\infty}^{\infty} N(\beta) d\beta \qquad (4)$$

Здесь $N(x) = \frac{\sigma_0 B^2(x)}{\rho}$ - параметр магнитогидродинамического взаимодействия, I_0 - импульс в начальном сечении струи.

Если ввести функцию тока в виде $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ и искать ее,

$$\Psi(x,y) = \varphi^{\frac{1}{2-n}}(x) f(\eta); \quad \eta = y\delta^{-\frac{1}{2n-1}}, \tag{5}$$

Из (2) и (4), при $N = const$, будем иметь

$$n|f''|^{n-1} f''' + \frac{1}{2-n}\frac{\delta\varphi'}{\nu} f f'' - \left(\frac{1}{2-n}\frac{\varphi'\delta}{\nu} - \frac{1}{2n-1}\frac{\varphi\delta'}{\nu} - \frac{N\varphi\delta}{\nu}\right) f'^2 = 0, \tag{6}$$

$$I = \rho\varphi^{\frac{2}{2-n}}\delta^{-\frac{1}{2n-1}} = I_0 \exp(-Nx). \tag{7}$$

Граничные условия при этом принимают вид:

$$f(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f'(\pm\infty) = 0. \tag{8}$$

Для того, чтобы задача была автомодельной, коэффициенты в уравнении (6) не должны зависеть от переменной x . Это дает:

$$\frac{1}{2-n}\frac{\varphi'\delta}{\nu} = \alpha = const, \tag{9}$$

$$\frac{1}{2-n}\frac{\varphi'\delta}{\nu} - \frac{1}{2n-1}\frac{\varphi\delta'}{\nu} + \frac{N\varphi\delta}{\nu} = \beta = const. \tag{10}$$

Учитывая соотношение (7), из (9) получим:

$$\sigma = \left(\frac{\rho}{I}\right)^{2n-1} \cdot \left[C - \frac{3n\nu\alpha}{(2n-1)N}\left(\frac{I}{\rho}\right)^{2n-1}\right]^{\frac{2(2n-1)}{3n}}$$

(II)

$$\varphi = \left[C - \frac{3n\nu\alpha}{(2n-1)N}\left(\frac{I}{\rho}\right)^{2n-1}\right]^{\frac{2-n}{3n}}.$$

Подстановка этих выражений в (10) дает связь между постоянными α и β, которая в свою очередь дает $\alpha = -\beta$. Не ограничивая общности, положим $\alpha = \frac{1}{3}$, тогда уравнение (6) приведется к виду:

(I2)

$$n|f''|^{n-1} f''' + \frac{1}{3}\left(f'^2 + f f''\right) = 0$$

решение которого, при граничных условиях (8) и условии $\int_{-\infty}^{\infty} f'^2 d\eta = 1$, будет

(I3)

$$f' = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2n-1}} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2n-1}} \left(|f(\infty)|^{\frac{n+1}{n}} - |f|^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{n}{2n-1}},$$

где

$$f(\infty)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n}{2n-1}}(3)^{\frac{1}{2n-1}}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{\frac{n}{2n-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{n+1}+\frac{3n-1}{2n-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3n-1}{2n-1}\right)} \qquad (14)$$

Для окончательного решения задачи определим постоянную интегрирования C в (11). Она находится из условия, что "толщина" струи $\delta(x)=0$ при $x\to 0$:

$$C=\frac{n\nu}{(2n-1)N}\left(\frac{I_0}{\rho}\right)^{2n-1}. \qquad (15)$$

Из (11) видно, что толщина струи с переменной проводимостью экспоненциально растет с увеличением расстояния x от источника и при $2>n>\frac{1}{2}$ (псевдопластичная жидкость).

Выпишем выражения для продольной составляющей скорости на оси струи и расхода через поперечное сечение

$$u=\left[\frac{(2n-1)N}{n\nu}\left(\frac{I_0}{\rho}\right)^{n+1}\right]^{\frac{1}{3n}}e^{-Nx}\left(1-e^{-N(2n-1)x}\right)^{-\frac{1}{3n}}f'(0), \qquad (16)$$

$$Q=2(\psi)_{y=\infty}=2f(\infty)\left[\frac{n\nu}{(2n-1)N}\left(\frac{I_0}{\rho}\right)^{2n-1}\right]^{\frac{1}{3n}}\left(1-e^{-N(2n-1)x}\right)^{\frac{1}{3n}}=$$

$$= 2f(\infty)\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{\frac{1}{3n}} N_0^{-\frac{1}{3n}}\left(1-e^{-N_0\bar{x}(2n-1)}\right)^{\frac{1}{3n}} =$$

$$= \frac{2n}{2n-1} f(\infty)\,\nu^{\frac{4n-1}{3n}}\,\bar{Q},$$

где

$$N_0 = NL, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad L = \left(\frac{\rho\nu^2}{I_0}\right)^{2n-1}.$$

Отсюда следует, что с ростом N расход растет, асимптотически приближаясь к постоянному значению, тем ме́ньшему, чем больше N_0, а $n \geq \frac{1}{2}$. Это означает, что магнитное поле является эффективным инструментом для управления расходом в струе.

При $n=1$ из полученных результатов получим решения ньютоновской жидкости, рассмотренные в /1/.

Поступила 20.V.1987

Кафедра
механики сплошных сред

Литература

1. Е.И.Шилова, Э.В.Щербинин. Магнитная гидродинамика, 3, 1968, 54-58.

2. R.Moreau. C.R. Ac. (Paris), 256, 4, 1963, 2294.

3. R.L.Peskin. Phys. Fluids, 6, 5, 1963, 643.

4. З.П.Шульман, В.М.Берковский. Пограничный слой неньютоновоких жидкостей, Минск, 1966, с.239.

5. К.Е.Джаугаштин, ИФЖ, 14,1,1968,129.

ჯ. შარიქაძე, მ. ეზზატ

ცვალებადი გამტარებლობის არანიუტონური სითხის მაგნიტოჰიდროდინამიკური ჭავლური დინება

რეზიუმე

შესწავლილია ცვალებადი გამტარებლობის მქონე არანიუტონური სითხის ჭავლური დინება.

J.Sharikadze, M.Ezzat

MEGNETOHYDRODYNAMIC JET FLOW OF A NON-NEWTONIAN FLUID WITH VARIABLE CONDUCTIVITY

Summary

The magnetohydrodynamic jet flow of a non-Newtonian fluid with variable conductivity is studied.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988

УДК 532

ОБ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ СТРУЙНОГО ТЕЧЕНИЯ СТЕПЕННОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Дж.В.Шарикадзе, М.А.Еззат

В работе /I/ введением универсальной координаты рассмотрено автомодельное решение задачи струйного течения обычной вязкой проводящей жидкости.

В настоящей заметке аналогичная задача рассмотрена для степенной вязкой несжимаемой жидкости, в которой за универсальную координату принята автомодельная переменная

$$\eta = y\,\delta^{-\frac{2}{n+1}}. \qquad (1)$$

Рассмотрим систему уравнений стационарного пограничного слоя для степенной слабопроводящей жидкости при $R_{em} \ll 1$.

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{k}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n} - \frac{\sigma B^2}{\rho}u, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Здесь подразумевается, что внешнее поперечное поле в общем случае может быть функцией x . Выберем его в виде

$$B^2 = B_0^2 \varphi(x).$$

Дополним уравнение движения (2) интегральным уравнением для импульса струи $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho u^2 dx$. Для этого проинтегрируем первое уравнение поперек струи с учетом граничных условий:

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$

$$u = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm\infty. \qquad (3)$$

Тогда будем иметь:

$$\frac{dI}{dx} + \sigma B^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} u d\alpha = 0; \qquad I = I_0 \quad \text{при} \quad x = 0. \qquad (4)$$

Введем преобразования автомодельности

$$u = u_m^{\frac{1}{2-n}}(x)\, f'(\eta),$$
$$\eta = y\,\delta^{-\frac{2}{n+1}}, \tag{5}$$

где u_m, δ – максимальное значение скорости и условная толщина струи, соответственно. Обе величины предполагаются функцией только продольной координаты: $u_m = u_m(x)$, $\delta = \delta(x)$.

Произведя преобразование из (2), получим следующее уравнение:

$$n\left|f''\right|^{n-1} f''' - \frac{1}{2-n}\,\frac{u_m'\delta^2}{\nu}\, f'^2 + \tag{6}$$

$$+ \frac{1}{\nu}\left(\frac{2}{n+1}\,\delta\delta' u_m + \frac{1}{2-n}\, u_m'\delta^2\right) f f'' =$$

$$= \frac{\sigma(\delta B)^2}{\rho\nu}\, u_m^{\frac{1-n}{2-n}}\, f'.$$

где $\nu = \frac{K}{\rho}$, а штрих обозначает дифференцирование для f по η, а для u_m, δ – по x. Далее из соотношения

$$\frac{2}{2-n}\, u_m'\delta + \frac{2}{n+1}\, u_m\delta\delta' + \frac{\pi\sigma}{\rho}(B\delta)^2 u_m^{\frac{1-n}{2-n}} = 0, \tag{7}$$

$$\Lambda = 2f(\infty)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f'^2 d\eta\right]^{-1},$$

полученного из интегрального условия (4) и тождества

$$(u_m\delta^2)' = u_m'\delta^2 + 2u_m\delta\delta', \tag{8}$$

найдем выражения для $u_m'\delta^2$ и $u_m\delta\delta'$

$$\frac{1}{2-n}u_m'\delta^2 = \frac{1}{3n}(u_m\delta^2)' - \frac{\sigma\Lambda}{3n\rho}(n+1)(B\delta)^2 u_m^{\frac{1-n}{2-n}};$$

$$\frac{2}{n+1}\delta\delta' u_m = \frac{2}{3n}(u_m\delta^2)' + \frac{\sigma\Lambda}{3n\rho}(2-n)(B\delta)^2 u_m^{\frac{1-n}{2-n}}. \tag{9}$$

Подставим соотношение (9) в уравнение (6). В результате получим

$$n|f''|^{n-1}f''' + \frac{1}{3n\nu}(u_m\delta^2)'(f'^2 + ff'') = \frac{\sigma\Lambda}{\rho\nu}(B\delta)^2\left[\frac{1}{\Lambda}f' - \frac{1}{3n}\{(n+1)f'^2 - ff''\}\right], \tag{10}$$

$$f(0)=0, \quad f'(0)=1, \quad f'(\infty)=0.$$

Для получения автомодельного уравнения примем

$$u_m \delta^2 = 3n\nu\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n x. \tag{11}$$

При этом решение уравнения (10) имеет вид:

$$f' = \left(1-|f|^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{n}{2n-1}},$$

$$\frac{\lambda}{2n-1}\left(1-|f|^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{1-n}{2n-1}}|f|^{\frac{n+1}{n}} = \tag{12}$$

$$= 1-\left(1-|f|^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{n}{2n-1}},$$

$$\lambda = \frac{3n}{n+1}.$$

Перейдем к отысканию максимального значения скорости и эффективной ширины струи δ. Для этого воспользуемся соотношением (11) и выражением для импульса струи

$$I = \lambda_1 \rho u_m^{\frac{2}{2-n}} \delta^{\frac{2}{n+1}}, \quad \lambda_1 = \frac{2(n+1)}{3n}. \tag{13}$$

В результате получим

$$\delta^{\frac{2}{n+1}} = \left(\frac{\rho A_1}{I}\right)^{\frac{2-n}{3n}} \left[3n\nu\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{n} x\right], \qquad (14)$$

$$u_m^{\frac{1}{2-n}} = \left(\frac{I}{\rho A_1}\right)^{\frac{n+1}{3n}} \left[3n\nu\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{n} x\right] \qquad (15)$$

Заметим, что эти формулы для u_m и δ формально совпадают с аналогичными выражениями для чисто гидродинамического течения при $n=1$ (ньютоновская жидкость) /2/. Отличие их состоит в том, что в магнитогидродинамическом случае импульс струи является величиной, убывающей вдоль оси струи как ньютоновской, так и степенной жидкости, тогда как при обычном течении без учета магнитного поля импульс не изменяется и остается равным своему начально заданному значению I_o.

Подставляя выражение (14), (15) в (4), получим уравнения для импульса струи

$$\frac{n+1}{3n}\frac{dI}{dz} + I_o^{\frac{n+1}{3n}} I^{\frac{2n-1}{3n}} = 0, \qquad I = I_o \text{ при } z=0 \qquad (16)$$

где S — параметр взаимодействия, z — универсальная координата.

$$z = S\int_0^{\bar{x}} \sqrt[3n]{x}\,\varphi(x)\,dx;$$

$$S = 2\left[3n\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n \lambda_1^{1+2n}\right]^{\frac{1}{3n}} \frac{\sigma B_0^2}{\rho U} L; \qquad (17)$$

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad L = \left(\frac{\rho \nu^2}{I_0}\right)^n, \quad U = \left(\frac{I_0}{\rho \nu}\right)^{2n+1}.$$

Решение уравнения (16) имеет вид:

$$I / I_0 = (1-z)^{\frac{3n}{n+1}}. \qquad (18)$$

Подставляя значение I в выражения (14), (15), получим

$$\frac{u_m}{u_{m_0}} = (1-z)^{2-n}, \qquad \frac{\delta}{\delta_0} = (1-z)^{\frac{1-2n}{n+1}}, \qquad (19)$$

$$\frac{G}{G_0} = (1-z)^{\frac{2n-1}{n+1}}.$$

Индекс „0" обозначает соответствующие величины при отсутствии магнитного поля /2/ при $n = 1$, $G = \int_{-\infty}^{\infty} u\,dy$ – расход жидкости в струе.

Из решения видно, что при $z = 1$ струя вырождается. При этом значение импульса скорости и расхода струи обращается в нуль. Эффективная ширина струи становится бесконечной. Связь реальной координаты с универсальной $x = x(z)$

зависят от распределения индукции магнитного поля (17). Предельная длина развития струи $x_{пр}$ и ее значение определяются из условия

$$S\int_0^{x_{пр}} \sqrt[3n]{x}\,\varphi(x)\,dx = 1.$$

При некотором значении $x = x_0$ расход в струе достигает максимального значения и в этой точке поперечная компонента скорости на бесконечности обращается в нуль.

При $n=1$ из полученных результатов получим решения для ньютоновской жидкости, рассмотренные в /I/.

Поступила 15.IX.1987

Кафедра
механики сплошных сред

Литература

1. К.Б.Джаугаштин. Магнитная гидродинамика, 1,1970, 5-18.
2. Л.А.Вулис, В.П.Кашкаров, Теория струй вязкой жидкости, М.,Физматгиз, 1965,с.431.

ჯ. შარიქაძე, მ. ეზზატ

ხარისხოვანი გამტარი სითხის ჭავლური დინების ავტომოდელური ამოცანის შესახებ

რეზიუმე

შესწავლილია ხარისხოვანი გამტარი სითხის ჭავლური დინების ავტომოდელური ამოცანა.

J. Sharikadze, M. Ezzat

A SELF-SIMILAR PROBLEM OF JET FLOW OF CONDUCTING POWER-LAW NON-NEWTONIAN VISCOUS FLUID

Summary

The flow of a laminar jet of a conducting power-low non-Newtonian viscous fluid is studied.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988
УДК 532.546:628.16.067

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ВОДЫ В СОВЕРШЕННЫЕ ДРЕНЫ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ

З.А.Ципрошвили

В настоящей работе рассматриваются плоские задачи установившейся фильтрации грунтовых вод в совершенные дрены различной формы. Плоскость фильтрации отнесена к комплексной плоскости $z = x + iy$. Вводится приведенный комплексный потенциал $\omega(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$, где φ, ψ – соответственно потенциал скорости и функция тока, деленные на коэффициент фильтрации /1,2,3,4/. Соответствующие обозначения и граничные условия указаны на схемах. Для краткости обозначим через $S(z)$, $S(\omega)$, $S(\omega')$, $S(\bar{\omega}')$ соответственно области фильтрации, комплексного потенциала, комплексной скорости и годографа скорости.

1. ДРЕНА ТРЕУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ. Для этой формы рассматриваются две задачи. а) дрена полностью заполнена водой, следовательно, области $S(z)$, $S(\omega)$ известны (рис.1). Области

$S(\omega)$, $S(z)$ конформно отображаются на верхнюю полуплоскость $\mathrm{Jm}(\xi)>0$ плоскости $\xi=t+i\tau$, а соответствующие отображающие функции обозначаются так: $\omega=\omega(\xi)$, $z=z(\xi)$ /5/.

Функция $z(\xi)$ для интервалов $(0,a)$, $(a,1)$, $(1,\infty)$, $(-\infty,0)$ дается соответственно формулами:

$$z(\xi)=iM_0\int_0^{\xi}\gamma_1(\xi)d\xi+Ti, \qquad (1.1)$$

$$z(\xi)=ih_0-M_0e^{-i\pi\alpha}\int_a^{\xi}\gamma_1(\xi)d\xi,$$

$$z(\xi)=L/2-M_0\int_1^{\xi}\gamma_1(\xi)\,d\xi, \qquad (1.2)$$

$$z(\xi)=M_0\int_0^{\xi}\gamma_1(\xi)d\xi+Ti,$$

$$\gamma_1(\xi)=|\xi^{-1/2}(a-\xi)^{\alpha-1/2}(1-\xi)^{-\alpha}|,$$

$$M_0=(h_0-T)/J_1(a,\alpha),\qquad J_1(a,\alpha)=\int_0^{a}\gamma_1(\xi)d\xi. \qquad (1.3)$$

Из первого равенства уравнения (1.2) с учетом условия $z(1)=L/2$ следует

$$
\begin{aligned}
&b/2 = i h_0 - M_0 e^{-i\pi\alpha} J_2(a,\alpha),\\
&J_2(a,\alpha) = \int_a^1 \gamma_1(\xi)\,d\xi,
\end{aligned} \qquad (1.4)
$$

$$
h_0/T = \sin(\pi\alpha) J_2(a,\alpha) / [J_1(a,\alpha) + J_2(a,\alpha)\sin(\pi\alpha)], \qquad (1.5)
$$

$$
\begin{aligned}
&L = 2h_0 \operatorname{ctg}(\pi\alpha),\\
&\gamma_0(\xi) = \left|\xi^{-1/2}(a-\xi)^{\alpha-1/2}(1-\xi)^{-\alpha}\right| > 0, \quad \gamma_1 \in R.
\end{aligned} \qquad (1.6)
$$

Функция $\omega(\xi)$ соответственно для интервалов: $(0,a)$, (a,ξ), $(1,\infty)$, $(-\infty,0)$ определяется формулами:

$$
\begin{aligned}
&\omega(\xi) = M_1 \int_0^\xi \gamma_2(\xi)\,d\xi - H - iq/2,\\
&\omega(\xi) = i M_1 \int_a^\xi \gamma_2(\xi)\,d\xi - h_0 - iq/2,
\end{aligned} \qquad (1.7)
$$

$$
\begin{aligned}
&\omega(\xi) = -h_0 - M_1 \int_1^\xi \gamma_2(\xi)\,d\xi,\\
&\omega(\xi) = i M_1 \int_0^\xi \gamma_2(\xi)\,d\xi - H - iq/2,
\end{aligned} \qquad (1.8)
$$

где

$$M_1=(H-h_0)/\mathcal{J}_3(a,\alpha), \quad \mathcal{J}_3(a,\alpha)=\int_0^a \gamma_2(\xi)d\xi, \tag{1.9}$$

$$H=H_0+T,$$
$$\gamma_2(\xi)=\left|\xi^{-1/2}(a-\xi)^{-1/2}(1-\xi)^{-1/2}\right|>0, \quad \gamma_2\in\mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Из второго равенства (1.7) с учетом условия $\omega(1)=-h_0$ получим:

$$q=2(H-h_0)\mathcal{J}_4(a,\alpha)/\mathcal{J}_3(a,\alpha), \tag{1.11}$$
$$\mathcal{J}_4(a,\alpha)=\int_0^1 \gamma_2(\xi)d\xi.$$

По оси абсцисс отложим a $(0<a<1)$, а по оси ординат – h_0/T. Вычисленные по формуле (1.3) координаты $(a, h_0/T)$ для различных α соединим плавной линией для каждого фиксированного α. Пользуясь этим графиком при заданных α и h_0/T, можно определить a, а затем, зная a, по формуле (1.11) можно определить q.

б) Учитывается промежуток высачивания (CD).

Функция $\omega(\xi)$ для полуплоскости $\mathcal{J}_m(\xi)>0$ определяется по граничным условиям:

$$\omega(t)=-\bar\omega(t)-2H,\ t\in(-\infty,0),\quad \omega(t)=\bar\omega(t)-iq,\ t\in(0,a),$$

$$\omega(t)=-\bar\omega(t)+i\left(z(t)-\bar z(t)\right),\ t\in(a,c),\quad \omega(t)=-\bar\omega(t)-2h, \tag{I.12}$$

$$t\in(c,1),\ \omega=\omega(t),\ t\in(1,+\infty),\ \bar\omega(t)=\varphi(t)-i\psi(t)$$

$$\bar z(t)=x(t)-iy(t)$$

и имеет вид /6/:

$$\omega(\xi)=(2\pi i)^{-1}X(\xi)\left\{-2H\left[\int_{-\infty}^{0}\left[X^+(t)(t-\xi)\right]^{-1}dt+\right.\right.$$

$$\left.+\int_{c}^{1}\left[X^+(t)(t-\xi)\right]^{-1}dt\right]-iq\int_{0}^{a}\left[X^+(t)(t-\xi)\right]^{-1}dt+ \tag{I.13}$$

$$\left.+i\int_{a}^{c}\left[z(t)-\bar z(t)\right]\left[X^+(t)(t-\xi)\right]^{-1}dt\right\},$$

при условии:

$$2H\left[-\int_{-\infty}^{0}|X^+(t)|^{-1}dt+\int_{0}^{1}|X(t)|^{-1}dt\right]+q\int_{0}^{a}|X(t)|^{-1}dt+$$

$$+\int_{a}^{c}\left(z(t)-\bar z(t)\right)|X^+(t)|^{-1}dt=0, \tag{I.14}$$

$$X(\xi)=\sqrt{\xi(\xi-a)(\xi-1)}, \qquad |X(t)|=\sqrt{|t(t-a)(t-1)|}.$$

Из равенства (1.14) с учетом условий

$$z(t)-\bar{z}(t)=2M_0 i\sin(\pi\alpha)J(t)+2h_0 i, \tag{1.15}$$

$$J(t)=\int_a^t \gamma_2(t)\,dt$$

можно определить q : имеем:

$$q=\left[\int_0^a |X^+(t)|^{-1}dt\right]^{-1}\left\{2H\left[\int_{-\infty}^0 |X^+(t)|^{-1}dt-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_c^1 |X(t)|^{-1}dt\right]+2h_0\left[J_2(a,\alpha)\right]^{-1}\int_a^c\left[J_2(a,\alpha)-J(t)\right]|X^+(t)|^{-1}dt\right\}. \tag{1.16}$$

$\varphi(c)$ можно вычислить по формуле (1.1); имеем:

$$L_1/k+ih=ih_0-M_0 e^{-i\pi\alpha}J_5(a,\alpha,c), \tag{1.17}$$

$$J_5(a,\alpha,c)=\int_a^c \gamma_1(t)\,dt.$$

Из (1.17) следует:

$$b_1/b = J_2(a,\alpha)/J_5(a,\alpha,c), \qquad (1.18)$$

$$b_1/b = (h_0-h)\,ctg(\pi\alpha).$$

По первой формуле (1.18) можно определить параметр c, если параметр a определен по формуле (1.3)

II. ДРЕНА ТРУБЧАТОЙ ФОРМЫ. Предполагается, что дрена полностью заполнена водой и $R_2 \div R_1$ (рис.2).

Функция $\omega(\xi)$ определяется следующими зависимостями:

$$\omega(\xi) = iM_2\int_0^\xi \gamma_2(\xi)\,d\xi, \quad M_2 = Q/2J_1, \quad J_1 = \int_0^1 \gamma_3(\xi)\,d\xi, \qquad (2.1)$$

$$\omega(\xi) = -H_0 + Q/2 + iM_2\int_a^\xi \gamma_3(\xi)\,d\xi,$$
$$Q = 2(H-H_0)J_1/J_2, \qquad (2.2)$$

$$J_2 = \int_a^1 \gamma_3(\xi)\,d\xi, \quad \omega(\xi) = iQ/2 - H - iM_2\int_1^\xi \gamma_3(\xi)\,d\xi, \qquad (2.3)$$

$$H = H_0 + T, \quad \gamma_3(\xi) = \left[\sqrt{|a^2-\xi^2|\,|1-\xi^2|}\right]^{-1}. \qquad (2.4)$$

Область $S(\omega')$ заранее задаем (рис.2). Отобразим область $S(1/\omega')$ (рис.2) на область $\mathrm{Im}(\xi)>0$, при этом $b=(1-a^2)^{1/2}$, имеем:

$$z(\xi)=-\frac{1}{R}\int_0^{\xi}\sqrt{\frac{b\xi+(\xi^2-a^2)^{1/2}}{b\xi-(\xi^2-a^2)^{1/2}}}\,\omega'(\xi)\,d\xi+iR_1 . \tag{2.5}$$

С учетом $\omega'(\xi)=iM_2\gamma_3(\xi)$ определим $z(\xi)$, имеем:

$$z(\xi)=-\frac{iM_2}{R}\int_0^{\xi}\sqrt{\frac{b\xi+(\xi^2-a^2)^{1/2}}{b\xi-(\xi^2-a^2)^{1/2}}}\,\gamma_3(\xi)\,d\xi+iR_1 \tag{2.6}$$

В равенстве (2.6) произведем некоторые преобразования и отделим действительную часть от мнимой, получим:

$$\begin{gathered} x=\frac{M_2}{Ra}\int_0^{\xi}(1-\xi^2)^{-1}d\xi , \\ y=-\frac{bM_2}{Ra}\int_0^{\xi}\frac{\xi\,d\xi}{(1-\xi^2)\sqrt{a^2-\xi^2}}+R_1 \end{gathered} \tag{2.7}$$

При $\xi = a$, $x = R_2$, $y = 0$ имеем:

$$R_2 = \frac{M_2}{Ra}\int_0^a (1-\xi^2)^{-1} d\xi,$$

$$R_1 = \frac{bM_2}{Ra}\int_0^a \left[(1-\xi^2)\sqrt{a^2-\xi^2}\right]^{-1} \xi d\xi. \tag{2.8}$$

Для $\xi > a$ функция $\varkappa(\xi)$ определяется так:

$$\varkappa(\xi) = R_2 - \frac{iM_2}{Ra}\int_a^\xi \frac{b\xi + (\xi^2-a^2)^{1/2}}{(1-\xi^2)\sqrt{\xi^2-a^2}} d\xi. \tag{2.9}$$

Согласно формуле (2.9) вычислим вычет в точке $\xi = 1$, получим зависимость:

$$R = 2\mathcal{P}(H-H_0)\left[aTJ_2\right]^{-1} \tag{2.10}$$

Отношение R_2/R_1 согласно (2.8) можно использовать для вычисления a при заданном R_2/R_1, а формулу (2.10) для вычисления R при заданных H, T; по формуле же (2.2) можно вычислить расход Q.

III. ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗ СИСТЕМЫ ИНФИЛЬТРАЦИОННЫХ БАССЕЙНОВ В СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫЕ ТРУБЧАТЫЕ ВОДОПРИЕМНИКИ

Ниже рассматривается фильтрация воды из системы инфильтрационных бассейнов в симметрично расположенные трубчатые водоприемники /1,2,3,7/. Предполагается, что бассейны достаточно длинные (теоретически бесконечные). Рассматриваются два случая: а) глубина воды в бассейне пренебрегается и изучается фильтрация из горизонтальных отрезков (рис.3); б) глубина воды в бассейне учитывается (рис.4).

При решении этих задач /1,2,3,4/ будем задавать часть контура области $S(\omega'(z))$ в виде дуги круга определенного радиуса, которому в области $S(z)$ соответствует смоченный периметр водоприемника. Предполагается, что в водоприемниках отсутствуют промежутки высачивания /2/.

а) Функция $\omega=\omega(\xi)$ вдоль действительной оси определяется так:

$$\omega(\xi)=M_3\int_a^{\xi}\alpha_1(\xi)d\xi,\quad a<\xi<+\infty,$$

$$\omega(\xi)=-iM_3\int_a^{\xi}\alpha_1(\xi)d\xi,\quad 1<\xi<a, \tag{3.1}$$

$$M_3=Q/2\Gamma_1,\quad \Gamma_1=\int_1^a\alpha_1(\xi)d\xi,$$

$$\omega(\xi)=-M_3\int_a^{\xi}\alpha_1(\xi)d\xi+iQ/2,\quad -1<\xi<1, \tag{3.2}$$

$$\omega(\xi) = T - H + iQ/_2 + iM_3 \int_{-1}^{\xi} \alpha_1(\xi)d\xi,$$

$$-a < \xi < -1, \qquad (3.3)$$

$$Q = (T-H)\Gamma_1/\Gamma_2,$$

$$M_3 = (T-H)/2\Gamma_2, \quad \Gamma_2 = \int_0^1 \alpha_1(\xi)d\xi,$$

$$\omega(\xi) = T - H - M_3 \int_{-a}^{\xi} \alpha_1(\xi)d\xi, \qquad (3.4)$$

$$\infty < \xi < a, \quad \alpha_1(\xi) = |(\xi^2-1)(\xi^2-a^2)|^{-1/2}. \qquad (3.5)$$

Найдем функцию $dz/d\omega = \Phi(\xi)$, имеем:

$$dz/d\omega = M_4 \int_1^{\xi} (\xi-a_2)(a_5-\xi)^{-1}\alpha_2(\xi)d\xi \; i, \quad 1 < \xi < a_5, \qquad (3.6)$$

$$\alpha_2(\xi) = |(\xi^2-1)(\xi+a)(a_5-\xi)|^{-1/2} > 0. \qquad (3.7)$$

Функцию $\alpha_2(\xi)(\xi-a_2)(a_5-\xi)^{-1}$ представим в виде суммы двух слагаемых

$$\alpha_2(\xi)(\xi-a_2)(a_5-\xi)^{-1} = A\alpha_2(\xi)[(\xi^2+B\xi+C)-(\xi^2-1)(\xi+a)], \qquad (3.8)$$

где

$$A = \left\{ a_5 \left[a_5 (a_5 - a) + 1 \right] + a \right\}^{-1}, \qquad (3.9)$$

$$B = a_5 - a, \quad d = a_5 (a_5 - a) - 1.$$

При взятии интеграла из второго слагаемого (3.8) нужно сначала произвести интегрирование по частям, тогда (3.6) можно представить так:

$$\frac{dz}{d\omega} = M_4 A \left\{ \int_1^{a_5} P_2(\xi) \alpha_2(\xi) d\xi + \right. \qquad (3.10)$$

$$\left. + i \left[\int_{a_5}^{\xi} P_2(\xi) \alpha_2(\xi) d\xi - P_3(\xi) \alpha_2(\xi) \right] \right\} - i, \quad 1 < \xi < a_5,$$

где

$$P_2(\xi) = (\xi - a_2) P_4(\xi) + (\xi^2 - 1)(\xi + a),$$

$$P_4(\xi) = 4\xi^2 + \xi (B + 2a) + d - 1, \qquad (3.11)$$

$$P_3(\xi) = 2(\xi^2 - 1)(\xi + a)(\xi - a_2), \qquad (3.12)$$

$$\frac{dz}{d\omega}=-iM_4 A\left\{\int_1^{\xi} P_2(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi-P_2(\xi)\alpha_2(\xi)\right\}-i, \qquad (3.13)$$

$$-1<\xi<1,$$

при

$$\left(dz/d\omega\right)_{\xi=1}=-i, \quad \left(dz/d\omega\right)_{\xi=-1}=-i+tg(\pi\beta), \qquad (3.14)$$

$$M_4=i\tilde{M}_4, \quad A\tilde{M}_4=\left[\int_1^{-1} P_2(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi\right]^{-1} \qquad (3.15)$$

$$\frac{dz}{d\omega}=-i+tg(\pi\beta)-M_4 A\left[\int_{-1}^{\xi} P_2(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi-\right.$$

$$\left.-P_3(\xi)\alpha_2(\xi)\right], \quad -a<\xi<-1, \qquad (3.16)$$

$$\left(dz/d\omega\right)_{\xi=-a}=(2R)^{-1}, \quad (2R)^{-1}=tg(\pi\beta), \qquad (3.17)$$

$$\int_1^{-1} P_2(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi+tg(\pi\beta)\int_{-1}^{a} P_2(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi=0, \qquad (3.18)$$

$$\frac{dz}{d\omega} = (2R)^{-1} + iM_4 A\left\{ \int_{-a}^{\xi} P_2(\xi)\alpha_2(\xi)\,d\xi - \right. \tag{3.19}$$

$$\left. - P_3(\xi)\alpha_2(\xi) \right\}, \quad -\infty < \xi < -a.$$

Функция $z = z(\xi)$ для различных промежутков действительной оси определяется по формулам:

$$z(\xi) = M_3 \int_{a_5}^{\xi} \alpha_1(\xi)\left\{ M_4 A\left[\int_1^{a_5} P_2(\xi)\alpha_2(\xi)\,d\xi + \right.\right. \tag{3.20}$$

$$\left.\left. + i\left(\int_{a_5}^{\xi} P_2(\xi)\alpha_2(\xi)\,d\xi - P_3(\xi)\alpha_2(\xi) \right) - 1 \right] \right\} d\xi - iT,$$

$$a_5 < \xi < +\infty,$$

$$z(\xi) = M_3 \int_{a_5}^{\xi} \alpha_1(\xi)\left\{ M_4 A\left[\int_1^{\xi} P_2(\xi)\alpha_2(\xi)\,d\xi - \right.\right. \tag{3.21}$$

$$\left.\left. - P_3(\xi)\alpha_2(\xi) \right] - 1 \right\} d\xi - iT, \quad a < \xi < a_5$$

Из условия $z(a)=0$ следует:

$$M_3 \int_{a_5}^{a} \alpha_1(\xi)\left\{\tilde{M}_4 A\left[\int_1^{\xi} P_2(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi - P_3(\xi)\alpha_2(\xi)\right] - 1\right\} d\xi - T = 0, \tag{3.22}$$

$$z(\xi) = i M_3 \int_{a}^{\xi} \alpha_1(\xi)\left\{M_4 A\left(\int_1^{\xi} P_2(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi - P_3(\xi)\alpha_2(\xi)\right) - i\right\} d\xi, \quad 1<\xi<a, \tag{3.23}$$

$$B/2 = M_3 \int_{a}^{1} \alpha_1(\xi)\left\{\tilde{M}_4 A\left[\int_1^{\xi} P_2(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi - P_3(\xi)\alpha_2(\xi)\right] - 1\right\} d\xi. \tag{3.24}$$

$$z(\xi) = -M_3 \int_{1}^{\xi} \alpha_1(\xi)\left\{\tilde{M}_1 A\left[\int_1^{\xi} P_2(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi - P_3(\xi)\alpha_2(\xi)\right] - i\right\} d\xi + \frac{B}{2}, \quad -1<\xi<1, \tag{3.25}$$

$$b_{01}/2 = -M_3 \int_{1}^{-1} \alpha_1(\xi)\Big\{\tilde{M}_4 A\Big[\int_{-1}^{\xi} P_2(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi - P_3(\xi)\alpha_2(\xi)\Big]\Big\}d\xi, \tag{3.26}$$

$$z(\xi) = iM_3 \int_{-1}^{\xi} \alpha_1(\xi)\Big\{-M_4 A\Big[\int_{-1}^{\xi} P_2(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi - P_3(\xi)\alpha_2(\xi)\Big] - i + tg(\pi\beta)\Big\}d\xi + (B + b_{01})/2 - i(T - H), \quad -a < \xi < -1, \tag{3.27}$$

$$b/2 = M_3 \int_{-1}^{-a} \alpha_1(\xi)\Big\{\tilde{M}_4 A\Big[\int_{-1}^{\xi} P_2(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi - P_3(\xi)\alpha_2(\xi)\Big] - 1\Big\}d\xi + (B + b_{01})/2, \tag{3.28}$$

$$M_3\, tg(\pi\beta)\int_{-1}^{-a} \alpha_1(\xi)d\xi + H = 0, \tag{3.29}$$

$$z(\xi)=-M_3\int\limits_{-a}^{\xi}\alpha_1(\xi)\Big\{R_0+iM_4 A\Big[\int\limits_{-a}^{\xi}P_2(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi-$$

$$-P_3(\xi)\alpha_2(\xi)\Big]\Big\}d\xi+{}^{L}/_{2}-iT, \qquad (3.30)$$

$$-\infty<\xi<-a.$$

Из уравнения (3.18) определим параметр a_2 в зависимости от параметров a_5, a, β имеем:

$$a_2={}^{\Gamma_3}/_{\Gamma_4}, \quad \Gamma_3=\int\limits_{1}^{-1}P_5(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi+tg(\pi\beta)\int\limits_{-1}^{a}P_5(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi, \qquad (3.31)$$

$$\Gamma_4=\int\limits_{1}^{-1}P_4(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi+tg(\pi\beta)\int\limits_{-1}^{a}P_4(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi, \qquad (3.32)$$

$$P_5(\xi)=\xi P_4(\xi)+(\xi^2-1)(\xi-a). \qquad (3.33)$$

В уравнения (3.22), (3.24), (3.26), (3.29) подстаним значения $M_3, \tilde{M}_4 A$ и соответственно получим:

$$\frac{T-H}{2\Gamma_2}\int\limits_{a_5}^{a}\alpha_1(\xi)\Big\{\tilde{M}_4 A\Big[\int\limits_{1}^{\xi}P_2(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi- \qquad (3.34)$$

$$-P_3(\xi)\alpha_2(\xi)\Big]-1\Big\}d\xi-T=0,$$

$$B=\frac{T-H}{\Gamma_2}\int\limits_a^1\alpha_1(\xi)\Big\{\tilde{M}_1 A\Big[\int\limits_1^\xi P_2(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi-$$

$$-P_3(\xi)\alpha_2(\xi)\Big]-1\Big\}d\xi, \tag{3.35}$$

$$b=\frac{T-H}{\Gamma_2}\int\limits_{-1}^{-a}\alpha_1(\xi)\Big\{\tilde{M}_1 B\Big[\int\limits_{-1}^\xi P_2(\xi)\alpha_2(\xi)d\xi-$$

$$-P_3(\xi)\alpha_2(\xi)\Big]-1\Big\}d\xi, \tag{3.36}$$

$$H=\big(T\Gamma_1 tg(\pi\beta)\big)\big/\big(2\Gamma_2+\Gamma_1 tg(\pi\beta)\big) \tag{3.37}$$

Если равенства (3.34)-(3.37) разделить на T и подставить в эти же равенства a_2 из (3.31), получим уравнения для определения параметров a_5, a, β. Действительно, из (3.34) определим H/T и подставим в уравнения (3.35), (3.36). Тогда из уравнения (3.35) и (3.36) можно определить a_5 и a, а затем из (3.37)–параметр β, а из формулы (3.31)-параметр a_2. Далее, по формуле (3.26) можно определить $b_{01}/2$, а из $(2R)^{-1}=tg(\pi\beta)$ — параметр R. Из равенства (3.25) можно получить уравнение депрессионной кривой, а из (3.27) - уравнение контура дрены.

б) Для этого случая (рис.4) функция $\omega(\xi)$ определяется по формулам:

$$\omega(\xi)=M_5\int\limits_a^\xi \alpha_1(\xi)\,d\xi-H_1\,,\quad a<\xi<+\infty,$$
$$\omega(\xi)=-M_5\int\limits_a^\xi \alpha_1(\xi)\,d\xi-H_1\,,\quad 1<\xi<a_1\,, \tag{3.38}$$

$$M_5=Q/(2\Gamma_1),\quad \omega(\xi)=-M_5\int\limits_1^\xi \alpha_1(\xi)\,d\xi-H_1+iQ/2\,,$$
$$-1<\xi<+1, \tag{3.39}$$

$$Q=(H_1-H_2)\Gamma_1/\Gamma_2\,,\quad \omega(\xi)=iM_5\int\limits_{-1}^\xi \alpha_1(\xi)\,d\xi-H_2+iQ/2\,,$$
$$-a<\xi<-1, \tag{3.40}$$

$$M_5=(H_1-H_2)/2\Gamma_2,\quad \omega(\xi)=-M_5\int\limits_{-a}^\xi \alpha_1(\xi)\,d\xi-H_2\,,$$
$$-\infty<\xi<-a. \tag{3.41}$$

Для определения $dz/d\omega$ имеем равенство:

$$dz/d\omega = M_6 \int_1^\xi \sigma_2(\xi)(\xi-\varepsilon)(a-\xi)^{-1} d\xi + N_6 , \qquad (3.42)$$

$$1<\xi<a,$$

где

$$\sigma_2(\xi) = \left|(\xi+1)^{-1/2}(\xi+a)^{-1/2}(\xi-1)^{-1/2-\alpha}(a-\xi)^{-1/2+\alpha}\right| , \qquad (3.43)$$

$$1<\xi<a.$$

Представим (3.42) в следующем виде:

$$\frac{dz}{d\omega} = M_6' A_1 \left\{ \int_1^\xi Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi + Q_5(\xi)\sigma_2(\xi) \right\} + N_6 , \qquad (3.44)$$

$$1<\xi<a,$$

где

$$Q_4(\xi) = (\xi-\varepsilon)Q_6(\xi) - (1+2\alpha)^{-1}Q_3(\xi), \qquad (3.45)$$

$$Q_5(\xi) = 2(-1+2\alpha)^{-1}(\xi+1)(\xi+a)(\xi-1)(\xi-\varepsilon), \qquad (3.46)$$

$$Q_6(\xi)=Q_1(\xi)-(2\alpha-1)^{-1}Q_2(\xi), \tag{3.47}$$

$$Q_1=\xi^2+B_1\xi+C_1, \quad Q_2(\xi)=\xi^2(3-2\alpha)+2\left[(1-2\alpha)a-\alpha\right]\xi-$$

$$-(1+2a\alpha), \quad Q_3(\xi)=(\xi+1)(\xi-a)(\xi-1), \tag{3.48}$$

$$A_1=(\alpha a^3)^{-1}, \quad B=2a, \quad C_1=2a^2-1, \quad N_6=-i+tg(\pi\alpha), \tag{3.49}$$

$$\frac{dz}{d\omega}=M_6A_1\Big\{\int_1^a Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi+$$

$$+e^{i\pi(1/2-\alpha)}\Big(\int_a^\xi Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi+ \tag{3.50}$$

$$+Q_5(\xi)\sigma_2(\xi)\Big)\Big\}+N_3, \quad a<\xi<+\infty,$$

$$\frac{dz}{d\omega}=M_6A_1e^{-i\pi(1/2+\alpha)}\Big\{\int_1^\xi Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi+ \tag{3.51}$$

$$+Q_5(\xi)\sigma_2(\xi)\Big\}+N_3, \quad -1<\xi<+1.$$

Из условия $\left(dz/d\omega\right)_{\xi=-1} = -i + tg(\pi\beta)$ получаем

$$M_7 = M_6 A_1 e^{-i\pi(1/2+\alpha)} =$$

$$= \left(tg(\pi\beta) - tg(\pi\alpha)\right)\left\{\int_1^{-1} Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)\right\}d\xi, \tag{3.52}$$

$$\frac{dz}{d\omega} = -i + tg(\pi\beta) - iM_7\left[\int_{-a}^{\xi} Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi + \right.$$

$$\left. + Q_5(\xi)\sigma_2(\xi)\right], \quad -a < \xi < -1. \tag{3.53}$$

С учетом условий $\left(dz/d\omega\right)_{\xi=a} = R_2$ получим:

$$R_2 = -i + tg(\pi\beta) - iM_7\int_{-1}^{-a} Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi, \tag{3.54}$$

$$R_1 = tg(\pi\beta),$$

$$0 = \int_1^{-1} Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi + \left(tg(\pi\beta) - \right. \tag{3.55}$$

$$\left. - tg(\pi\alpha)\right)\int_{-1}^{-a} Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi,$$

$$\frac{dz}{d\omega}=R_2-M_7\left(\int_{-a}^{\xi}Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi+Q_5(\xi)\sigma_2(\xi)\right), \tag{3.56}$$

$$-\infty<\xi<a.$$

После этого определим функцию $z(\xi)$, имеем:

$$z(\xi)=M_5\int_{a}^{\xi}\alpha_1(\xi)\Big\{M_6A_1\Big[\int_{1}^{a}Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi+$$

$$+e^{i\pi(1/2-\alpha)}\Big(\int_{a}^{\xi}Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi+Q_5(\xi)\sigma_2(\xi)\Big)+N_6\Big\}d\xi, \tag{3.57}$$

$$a<\xi<+\infty,$$

$$z(\xi)=-iM_5\int_{a}^{\xi}\alpha_1(\xi)\Big\{M_6A_1\Big[\int_{1}^{\xi}Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi+ \tag{3.58}$$

$$+Q_5(\xi)\sigma_2(\xi)\Big]+N_6\Big\}d\xi,\quad 1<\xi<a,$$

$$z(\xi)=-M_5\int_{1}^{\xi}\alpha_1(\xi)\Big\{M_7\Big[\int_{1}^{\xi}Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi+ \tag{3.59}$$

$$+Q_5(\xi)\sigma_2(\xi)\Big]+N_5\Big\}d\xi+iH_1+H_1\,tg(\pi\alpha),\quad -1<\xi<1.$$

Из условия $z(-1)=\omega_1/2+i(H_1-H_2)$ следует:

$$\omega_1/2+i(H_1-H_2)=-M_5\int_1^{-1}\alpha_1(\xi)\Big\{M_7\Big[\int_1^{\xi}Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi+$$
$$+Q_5(\xi)\sigma_2(\xi)\Big]+N_6\Big\}d\xi+iH_1+H_1\operatorname{tg}(\pi\beta),\tag{3.60}$$

$$z(\xi)=iM_5\int_1^{\xi}\alpha_1(\xi)\Big\{-iM_7\Big[\int_{-1}^{\xi}Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi+$$
$$+Q_5(\xi)\sigma_2(\xi)\Big]-i+\operatorname{tg}(\pi\beta)\Big\}d\xi+\omega_1/2+i(H_1-H_2),\tag{3.61}$$
$$-a_1<\xi<-1,$$

$$\omega/2=iM_5\int_{-1}^{a}\alpha_1(\xi)\Big\{-iM_7\Big[\int_{-1}^{\xi}Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi+\tag{3.62}$$
$$+Q_5(\xi)\sigma_2(\xi)\Big]-i\operatorname{tg}(\pi\beta)\Big\}d\xi+\omega_1/2+i(H_1-H_2),$$

$$z(\xi)=-M_5\int_{-a}^{\xi}\alpha_1(\xi)\Big\{R_2-M_7\Big[\int_{-a}^{\xi}Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi+\tag{3.63}$$
$$+Q_5(\xi)\sigma_2(\xi)\Big]\Big\}d\xi+\omega_1/2.$$

Из зависимости (3.55) определим ε в зависимости от других параметров, имеем:

$$\varepsilon = F_1/F_2, \quad F_1 = \int_1^{-1} Q_7(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi + \\ + \left(tg(\pi\beta) - tg(\pi\alpha)\right)\int_{-1}^{-a} Q_7(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi, \tag{3.64}$$

$$F_2 = \int_1^{-1} Q_6(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi + \left(tg(\pi\beta) - tg(\pi\alpha)\right) \times \\ \times \int_{-1}^{-a} Q_6(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi, \tag{3.65}$$

$$Q_7(\xi) = \xi Q_6(\xi) - (2\alpha - 1)^{-1} Q_3(\xi). \tag{3.66}$$

В равенстве (3.60) отделим действительную часть от мнимой, получим:

$$\mathcal{L}_1/2 = -M_5\int_1^{-1} \alpha_1(\xi)\left\{M_7\left[\int_1^{\xi} Q_4(\xi)\sigma_2(\xi)d\xi + \\ + Q_5(\xi)\sigma_2(\xi)\right] + tg(\pi\alpha)\right\}d\xi + H_1 tg(\pi\beta), \tag{3.67}$$

$$H_2 = \frac{tg(\pi\alpha)}{1 + tg(\pi\alpha)}. \tag{3.68}$$

Из равенства (3.62) следует

$$L/2 = M_3 \int_{-1}^{-a} \alpha_1(\xi) \Big\{ M_7 \Big[\int_{-1}^{\xi} Q_4(\xi) \sigma_2(\xi) d\xi + \qquad (3.69)$$

$$+ Q_5(\xi) \sigma_2(\xi) \Big] + 1 \Big\} d\xi + L_1/2,$$

$$tg(\pi\beta) = 2\Gamma_2/\Gamma_1 . \qquad (3.70)$$

Из формулы (3.64) ε подставим (3.68), (3.69), а затем (3.68) в (3.69) и по. чим уравнение для определения параметра a . Зная параметр a , легко определим параметр β , а по формуле (3.67) определим L_1 и, наконец, по (3.40) определим расход. После определения этих параметров можно определить по формуле (3.61) уравнение параметра водоприемника, а по формуле (3.59) – уравнение депрессионной кривой.

Поступила 25.Ш.1987

Грузинский
политехнический институт

Литература

1. П.Я.Полубаринова-Кочина. Теория движения грунтовых вод.М., 1977.

2. В.И.Аравин, С.Н.Нумеров. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М., 1953.

3. З.А.Цицкишвили. Сб. научных трудов ГПИ, № 12 (294), Тбилиси, 1985, стр.82-86.

4. З.А.Цицкишвили. Тезисы докладов научно-технического семинара "Перспективы развития водоснабжения и канализации",

Тбилиси, 1985, стр.72.

5. В.Коппенфельс, Ф.Штальман. Практика конформных отображений. М., И-Л, 1963.

6. Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения.М., 1968.

7. Т.В.Бурчак. Инфильтрационные бассейны. Киев, 1978.

ზ.ციცქიშვილი

წყლის ფილტრაციის ზოგიერთი ამოცანა სხვადასხვა ფორმის სრულყოფილი დრენაჟებისათვის.

რეზიუმე

შებრუნებული მეთოდით შესწავლილია წყლის ფილტრაციის ამოცანები სხვადასხვა ფორმის სრულყოფილი დრენაჟებისათვის. ყველა განხილული ფორმისათვის ამონახსნები მიღებულია ანალიზური ცხადი სახით, საიდანაც შეიძლება მოიძებნოს ფილტრაციის შესაბამისი არეები და სითხის ხარჯი.

Z.Tsitskishvili

SOME PROBLEMS OF WATER FILTRATION INTO PERFECT DRAINS OF DIFFERENT FORMS

Summary

Some plane problems of steady filtration of underground water into perfect drains of different forms are solved by means of the well-known methods.

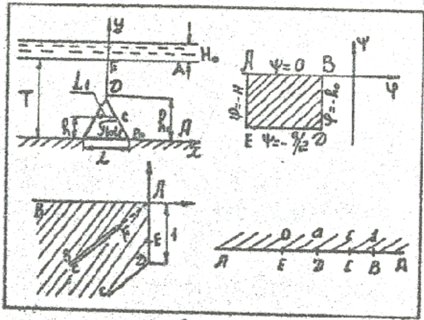


Рис.1

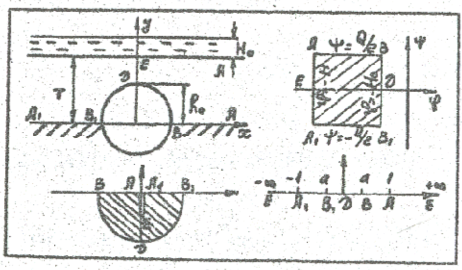


Рис.2

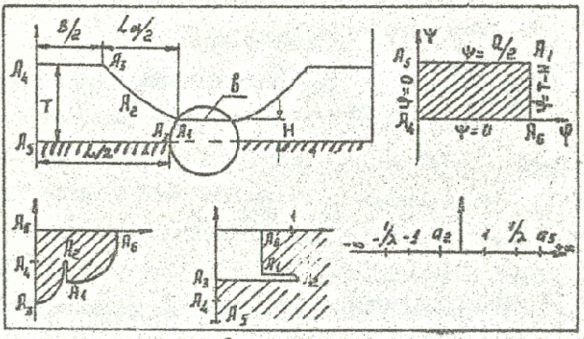


Рис-3

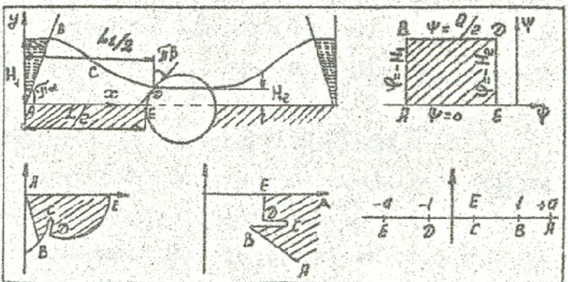


Рис. 4

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988

УДК 519.852.6

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Г.М.Комладзе

Задача линейного программирования формулируется следующим образом /I/: Найти решение $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, экстремизирующее линейную форму

$$f(x)=c_1 x_1+c_2 x_2+\dots+c_n x_n \qquad (0.1)$$

при ограничениях, наложенных на переменные

$$x_k \geq 0, \quad k=\overline{1,n}; \qquad (0.2)$$

$$a_{i1} x_1+a_{i2} x_2+\dots+a_{in} x_n \leq b_i, \quad i=\overline{1,s}; \qquad (0.3)$$

$$a_{i1} x_1+a_{i2} x_2+\dots+a_{in} x_n = b_i, \quad i=\overline{s+1,m}. \qquad (0.4)$$

В задаче линейного программирования требуется, чтобы все переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ были неотрицательными, так как задача, в которой переменные могут быть разных знаков, легко преобразуется в задачу линейного программирования с неотрицательными переменными. Такая задача более удобна для численного решения. Для решения задачи линейного программирования Дж.Данцигом разработан, так называемый, симплексный метод - метод последовательного улучшения плана /2, стр.73/.

Для задачи линейного программирования экстремальные значения целевой функции $f(x)$ достигаются в угловых точках многогранника (0.2) - (0.4), и эти значения являются глобальными. При решении задачи линейного программирования требуется невырожденность опорных планов, т.е. все ее опорные планы $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержат n положительных компонентов; опорный план - решение ограничений (0.2)-(0.4). Допущение о невырожденности обеспечивает возможность достижения оптимального плана за конечное число шагов. Если среди компонент x_i одна или несколько равны нулю, тогда через несколько шагов возможен возврат к старому базису. В этом случае в симплексной процедуре получается цикл /2, стр.77/. В симплексном методе требуются дополнительные переменные, которые неравенства (0.3) переводят в равенства.

В настоящей статье дается приведение задачи линейного программирования (0.1)-(0.4) к такой задаче, где опорными планами являются векторы, приложенные к вершине многогранного конуса и лежащие на ребрах этого конуса. Методом множителей Лагранжа доказывается, что эти векторы являются решениями ограничений (0.2)-(0,4). Система ограничений (0.3),(0,4) приведена к однородной системе ограничений. Последовательно определяются т.н. <u>главные векторы</u> для каждого ограничения-неравенства или уравнения (0.3), (0.4). Из главных векторов выбирается экстремизирующи.. вектор α функции (0.I). Вычисление ведется по шагам. Число шагов равно числу ограничений (0.3), (0.4).

§ I. Однородная система неравенств

Рассмотрим однородную систему неравенств

$$\varphi_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq 0, \qquad (1.I)$$
$$i = \overline{1,s}.$$

Каждое неравенство $\varphi_i(x) \leq 0$ определяет множество G_i точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, лежащих по определенную сторону от гиперплоскости $\varphi_i(x) = 0$. Мы рассмотрим только неотрицательные значения переменных $x_k \geq 0$, $k = \overline{1,n}$, тогда множество G_i может быть содержит только одну точку $x = 0$.

Очевидно, множество точек G_i выпуклое, т.е. произвольная точка x прямолинейного отрезка $x_1 x_2$, где $x_1, x_2 \in G_i$, содержится в области G_i.

Область $G = \bigcap_{i=1}^{s} G_i$ при неотрицательных значенияхх переменных x_k, $k = \overline{1,n}$, представляет собой выпуклое множество - выпуклый многогранный конус, с вершиной в начале координат $x=0$.

Пусть имеем векторы $x_1, x_2, \ldots, x_q$, удовлетворяющие системе неравенств (1.1), тогда их положительная линейная комбинация

$$x = \alpha_1^2 x_1 + \alpha_2^2 x_2 + \cdots + \alpha_q^2 x_q \tag{1.2}$$

также является решением системы (1.1), где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ - действительные числа.

В самом деле,

$$\varphi_i(x) = \varphi_i\left(\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^2 x_k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \alpha_k^2 \varphi_i(x_k) \leq 0, \quad i = \overline{1,s},$$

где

$$x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}).$$

Известно существование такой конечной системы решени $x_1, x_2, \ldots, x_q$ неравенств (1.1), что любое решение этих неравенств может быть представлено положительной комби нацией (1.2). Такие решения являются главными решениями или главными векторами неравенств (1.1) /3,4/.

Теперь рассмотрим целевую функцию (0.1) линейного программирования. На основе равенства (1.2) она будет иметь вид

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{k=1}^{q} x_{ki}\alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{q} A_k \alpha_k^2, \qquad (1.3)$$

где

$$A_k = \sum_{i=1}^{n} c_i x_{ki} . \qquad (1.4)$$

Таким образом, имеем целевую функцию

$$f(x)=F(\alpha), \qquad (1.5)$$

где

$$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q),$$

$$F(\alpha)=\sum_{k=1}^{q} A_k \alpha_k^2 .$$

Целевая функция $F(\alpha)$ – нормальная квадратичная форма переменных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$. Если все коэффициенты

$A_k \geq 0$, тогда целевая функция при $\alpha=0$ имеет минимум, если же все коэффициенты $A_k \leq 0$, тогда при $\alpha=0$ целевая функция имеет максимум. Если A_k имеют разные знаки, тогда при $\alpha=0$ целевая функция не имеет экстремума.

§ 2. Неоднородная система неравенств

Рассмотрим неоднородную систему неравенств

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n \leq b_i\,,\quad i=\overline{1,s} \tag{2.1}$$

Неоднородную систему неравенств заменим однородной системой неравенств

$$\varphi_i(x')=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n-b_i t\leq 0, \tag{2.2}$$

$$i=\overline{1,s}\,,$$

$$x'=(x_1,x_2,\dots,x_n,t).$$

Очевидно, что если вектор $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ удовлетворяет неравенствам (2.1), то вектор $x'=(x_1,x_2,\dots,x_n,t)$, у которого координата $t=1$, удовлетворяет неравенствам (2.2) и, наоборот, если вектор x' , у которого координата $t>0$, удовлетворяет неравенствам (2.2), то вектор $\left(\frac{x_1}{t},\frac{x_2}{t},\dots,\frac{x_n}{t}\right)$ удовлетворяет неравенствам (2.I).

Таким образом, вектор x' – решение однородной системы (2.2) дает возможность построить решение неоднородной системы неравенств (2.1). Для этого из пространства векторов $\{x' \mid x' = x_1, x_2, \ldots, x_n, t\}$ достаточно выделить подпространство векторов $\{x' \mid x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)\}$.

Допустим, что векторы $x'_1, x'_2, \ldots, x'_q$ являются главными векторами неравенств (2.2), тогда общее решение системы неравенств (2.2) будет иметь вид

$$x' = \alpha_1^2 x_1' + \alpha_2^2 x_2' + \cdots + \alpha_q^2 x_q', \tag{2.3}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ – действительные переменные. Из (2.3) получим

$$x_i = \alpha_1^2 x_{1i} + \alpha_2^2 x_{2i} + \cdots + \alpha_q^2 x_{qi}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.4}$$

$$t = \alpha_1^2 x_{1t} + \alpha_2^2 x_{2t} + \cdots + \alpha_q^2 x_{qt}. \tag{2.5}$$

Вектор x' дает общее решение неоднородной системы неравенств (2.1) при условии $t = 1$. Тогда за главные вектора можем взять

$$\frac{x'_k}{t} = \left(\frac{x_{k1}}{t}, \frac{x_{k2}}{t}, \dots, \frac{x_{kn}}{t} \right), \quad k = \overline{1,q},$$

при условии

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_q^2 = 1.$$

Таким образом, общее решение неравенств (2.1) имеет вид

$$x_i = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k^2 \, \overline{x}_{ki}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.6}$$

при условии

$$\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^2 = 1, \tag{2.7}$$

где

$$\overline{x}_{ki} = \frac{x_{ki}}{t}, \quad k = \overline{1,q}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Определим одно из α_i, $i = \overline{1,q}$. Например, α_q

$$\alpha_q = \pm\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_{q-1}^2},$$

тогда, после подстановки в целевую функцию (1.5), получим

$$F(\alpha)=F\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{q-1},\sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{q-1}^2}\right).$$

Целевая функция определена в замкнутой области (2.7) /5, § 163, стр.417/.

Таким образом, задача линейного программирования (0.1)-(0.4) сводится к следующей задаче: Найти экстремум функции (1.5) при условии

$$\omega(\alpha)=\sum_{k=1}^{q}\alpha_k^2-1=0. \tag{2.8}$$

Составим функцию Лагранжа

$$u(\alpha)=F(\alpha)-\lambda\,\omega(\alpha).$$

Определим α_k из уравнений

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \alpha_k}=(A_k-\lambda)\,\alpha_k=0, \quad k=\overline{1,q}. \tag{2.9}$$

Если $\lambda=A_k$, то системе уравнений (2.9) удовлетворяют ненулевые значения α_k . Вычислим соответствующие значения α_k . Для этого, умножая равенства (2.9) на α_k

и суммируя, получим

$$\sum_{k=1}^{q} A_k \alpha_k^2 - \Lambda \sum_{k=1}^{q} \alpha_k^2 = 0,$$

или, в силу (2.8),

$$F(\alpha) = \Lambda .$$

Таким образом, если Λ удовлетворяет уравнениям (2.9), $\Lambda = A_k, \ k=\overline{1,q}$, то значение функции $F(\alpha)$ равно самому Λ, и наибольшее и наименьшее значения при соблюдении условия (2.8) совпадают с наибольшим и наименьшим значениями $A_k, \ k=\overline{1,q}$.

Пусть A_ℓ - экстремальное значение из A_k, $\Lambda = A_\ell$. Соответствующее значение α_ℓ, $(A_\ell - \Lambda)\alpha_\ell = 0$, должны взять отличное от нуля, а все остальные значения α_k равняются нулю, так как из равенства $(A_k - A_\ell)\alpha_k = 0$, $\alpha_k = 0$, $A_k \neq A_\ell$. Из условия (2.8) получим $\alpha_\ell = 1$. Имея значения $\alpha_\ell = 1$, $\alpha_k = 0$, $k=\overline{1,q}$, вектор τ_ℓ определим с помощью формул (2.6).

Если экстремальных значений из коэффициентов A_k, $k=\overline{1,q}$, несколько, например, $A_\ell = A_p$, тогда линейная комбинация векторов x_ℓ, x_p, определенных с помощью формул (2.6) при условии $\alpha_\ell = 1,\ \alpha_k = 0,\ k \neq \ell,\ k = \overline{1,q}$, и $\alpha_p = 1,\ \alpha_k = 0,\ k \neq p,\ k = \overline{1,q}$,

$$x = \beta_1^2 x_\ell + \beta_2^2 x_p ,$$

где $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$ экстремизирует линейную форму (0.1).

Заметим, что при анализе систему (2.2) а, следовательно и (2.1), будем иметь три случая /6,7/.

1°. Векторы $x_1', x_2', \dots, x_p'$, удовлетворяющие некоторому неравенству $\varphi_i(x') \leq 0$, не лежат в полупространстве $\varphi_{i+1}(x') \leq 0$, т.е. $\varphi_{i+1}(x_k') > 0$, $k = \overline{1,p}$. В этом случае система неравенств $\varphi_i(x') \leq 0$, $\varphi_{i+1}(x') \leq 0$ имеет только тривиальное решение, т.е. не существует набора чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, t$, отличных от нуля, удовлетворяющих всем условиям. В этом случае система (2.1) противоречива.

2°. Область, определяемая неравенствами (2.2) при $t = 1$, не ограничена. В этом случае максимальное количество векторов $x_1', x_2', \dots, x_q'$, удовлетворяющих неравенствам (2.2), больше, чем количество чисел α_i, удовлетворяющих равенству (2.7). Равенство (2.7) не содержит некоторых α_i. Эти α_i принимают произвольные значения. Рассмотренный случай необязательно приводит к неразрешимой задаче. Целевая функция может быть ограничена и в неограниченной области.

3[0]. Система условий (2.2) совместна. Область, определяемая ею при $t=1$, ограничена. В этом случае максимальное количество неравных между собой векторов $x_1, x_2, \dots, x_q$, удовлетворяющих неравенствам (2.2), и количество чисел α_i, содержащихся в равенстве (2.7), равны. Область, определяемая неравенствами (2.1), ограничена. В этой области существуют экстремальные значения целевой функции $f(x)$. Это завершает решение задачи линейного программирования (0.1)-(0.4).

§ 3. Смешанная система неравенств

До сих пор мы предполагали, что система неравенств с неотрицательными переменными содержала неравенства типа

$$\varphi_i(x)=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n\le 0, \qquad i=\overline{1,s}. \tag{3.1}$$

Теперь к этим неравенствам присоединим равенство

$$\varphi_p(x)=a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\dots+a_{pn}x_n=0. \tag{3.2}$$

Легко заметить, что главными векторами системы (3.1), (3.2) будут те векторы неравенства (3.1), которые лежат в гиперплоскости $\varphi_p(x)=0$.

Теперь построим главный вектор x_{ik}, $\varphi_p(x_{ik})=0$, с помощью векторов x_i, $\varphi_p(x_i)>0$ и x_k, $\varphi_p(x_k)<0$,

$$x_{ik}=ax_i+bx_k, \tag{3.3}$$

где a и b будут определены так, чтобы вектор x_{ik} лежал в гиперплоскости $\varphi_p(x)=0$ /3,4/. Для этого достаточно взять

$$a=\frac{1}{\varphi_p(x_i)}, \quad b=-\frac{1}{\varphi_p(x_k)}.$$

Если будем спаривать все главные векторы неравенства (3.1), при которых $\varphi_p(x)$ положительна, с каждым главным вектором, при котором $\varphi_p(x)$ принимает отрицательные значения, то получим главные векторы смешанной системы (3.1), (3.2).

Следовательно, главными векторами системы неравенств (3.1), (3.2) являются главные векторы x_j, для которых $\varphi_i(x_j)\leq 0$ и $\varphi_p(x_j)=0$, и векторы x_{ik}, $\varphi_p(x_{ik})=0$.

Если будем иметь другие уравнения, например,

$$\varphi_{p+1}(x) = a_{p+1,1}x_1 + a_{p+1,2}x_2 + \dots + a_{p+1,n}x_n = 0, \qquad (3.4)$$

тогда с помощью главных векторов неравенств (3.1), (3.2) построим главные векторы неравенств (3.1), (3.2), (3.4).

Допустим, что имеем систему уравнений (3.2), где $p=\overline{1,m}$ и ранг матрицы этой системы равняется r $r \leq m < n$. Из этой системы выделим r линейно-независимых уравнений

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = 0, \quad p=\overline{1,r}, \qquad (3.5)$$

что облегчит вычислительную работу линейного программирования.

Приступим к фактическому построению главных векторов неравенств (2.2).

Возьмем систему неравенств

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad t \geq 0. \qquad (3.6)$$

Главные векторы этой системы – единичные векторы

$$\ell_1=(1,0,\dots,0,0),$$
$$\ell_2=(0,1,\dots,0,0),$$
$$\text{-------------}$$
$$\ell_n=(0,0,\dots,1,0),$$
$$\ell_t=\ell_{n+1}=(0,0,\dots,0,1).$$

Теперь возьмем одно из неравенств (2.2), $\varphi_1(x')\leq 0$, и вычислим $\varphi_1(\ell_i)$, $i=\overline{1,n+1}$. С помощью векторов ℓ_i, $\varphi_1(\ell_i)<0$, и ℓ_k, $\varphi_1(\ell_k)>0$, построим векторы ℓ_{ik}, $\varphi_1(\ell_{ik})=0$. Обозначим через $x_i^{(1)}$ те векторы ℓ_i, для которых $\varphi_1(\ell_i)<0$; ℓ_j, $\varphi_1(\ell_j)=0$; ℓ_{ik}, $\varphi_1(\ell_{ik})=0$. Имея главные векторы $x_i^{(1)}$ неравенства $\varphi_1(x')\leq 0$, возьмем неравенство $\varphi_2(x')\leq 0$ и для этого неравенства построим главные векторы с помощью векторов $x_i^{(1)}$. Эти векторы обозначим через $x_i^{(2)}$ и продолжим такие вычисления для всех неравенств и равенств (0.3), (0.4).

Для ясности изложенного алгоритма решения задач линейного программирования рассмотрим пример.

§ 4. Пример

Найти экстремум функции

$$f(x)=6x_1+4x_2 \tag{4.1}$$

при неотрицательных значениях переменных x_1, x_2, удовлетворяющих неравенствам

$$
\begin{aligned}
-x_1 - x_2 &\le -5, \\
-3x_1 + 2x_2 &\le -5, \\
4x_1 - x_2 &\le 15, \\
6x_1 - 4x_2 &= 15.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Систему неравенств (4.2) заменим однородной системой

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= -x_1 - x_2 + 5t \le 0, \\
\varphi_2(x) &= -3x_1 + 2x_2 + 5t \le 0, \\
\varphi_3(x) &= 4x_1 - x_2 - 15t \le 0, \\
\varphi_4(x) &= 6x_1 - 4x_2 - 15t = 0,
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

где

$$x = (x_1, x_2, t).$$

Для неравенств $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ t \ge 0$ главными векторами являются

$$
\begin{aligned}
\ell_1 &= (1,0,0), \\
\ell_2 &= (0,1,0), \\
\ell_3 &= (0,0,1).
\end{aligned}
$$

Вычислим $\varphi_1(\ell_1)$. Очевидно, $\varphi_1(\ell_1)$ можем определить как скалярное произведение векторов $\varphi_1 = (-1,-1,5)$, $\ell_1 = (1,0,0)$:

$$\varphi_1(\ell_1) = \varphi_1 \cdot \ell_1 = (-1,-1,5)\cdot(1,0,0) = -1.$$

Продолжим вычисление

$$\varphi_1(\ell_2)=(-1,-1,5)\cdot(0,1,0)=-1,$$

$$\varphi_1(\ell_3)=(-1,-1,5)\cdot(0,0,1)=5.$$

Взамен вектора ℓ_3 возьмем вектор $\frac{1}{5}\ell_3=(0,0,\frac{1}{5})$.

Итак, имеем

$$\ell_1=(1,0,0),\quad \varphi_1(\ell_1)=-1<0,$$

$$\ell_2=(0,1,0),\quad \varphi_1(\ell_2)=-1<0,$$

$$\ell_3'=(0,0,\tfrac{1}{5}),\quad \varphi_1(\ell_3')=1>0.$$

Вычислим ℓ_{13}, ℓ_{23}:

$$\ell_{13}=\ell_1+\ell_3'=(1,0,0)+(0,0,\tfrac{1}{5})=(1,0,\tfrac{1}{5}),$$

$$\ell_{23}=\ell_2+\ell_3'=(0,1,0)+(0,0,\tfrac{1}{5})=(0,1,\tfrac{1}{5}).$$

Таким образом, главными векторами неравенства $\varphi_1(x)\leq 0$ являются

$$x_1^{(1)}=(1,0,0),\quad x_2^{(1)}=(0,1,0),$$

$$x_3^{(1)}=(1,0,\tfrac{1}{5}),\quad x_4^{(1)}=(0,1,\tfrac{1}{5}).$$

Присоединим к неравенству $\varphi_1(x)\leq 0$ неравенство $\varphi_2(x)\leq 0$.

Вычислим $\varphi_2\left(x_i^{(1)}\right), \quad i=\overline{1,4}$:

$$\varphi_2\left(x_1^{(1)}\right)=(-3,2,5)\cdot(1,0,0)=-3, \quad x_1'^{(1)}=\frac{1}{3}x_1^{(1)}=\left(\frac{1}{3},0,0\right);$$

$$\varphi_2\left(x_2^{(1)}\right)=(-3,2,5)\cdot(0,1,1)=2, \quad x_2'^{(1)}=\frac{1}{2}x_2^{(1)}=\left(0,\frac{1}{2},0\right);$$

$$\varphi_2\left(x_3^{(1)}\right)=(-3,2,5)\cdot\left(1,0,\frac{1}{5}\right)=-2, \quad x_3'^{(1)}=\frac{1}{2}x_3^{(1)}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{10}\right);$$

$$\varphi_2\left(x_4^{(1)}\right)=(-3,2,5)\cdot\left(0,1,\frac{1}{5}\right)=3, \quad x_4'^{(1)}=\frac{1}{3}x_4^{(1)}=\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{15}\right).$$

Построим вектор

$$x_{12}^{(1)}=\left(\frac{1}{3},0,0\right)+\left(0,\frac{1}{2},0\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2},0\right).$$

Так как длина вектора $x_{12}^{(1)}$ не имеет значения, можем взять

$$x_{12}^{(1)}=(2,3,0).$$

Продолжим вычисление:

$$x_{14}^{(1)}=\left(\frac{1}{3},0,0\right)+\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{15}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{15}\right),\quad x_{14}^{\prime(1)}=(5,5,1);$$

$$x_{32}^{(1)}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{10}\right)+\left(0,\frac{1}{2},0\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{10}\right),\quad x_{32}^{\prime(1)}=(5,5,1)=x_{14}^{\prime(1)};$$

$$x_{34}^{(1)}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)+\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{15}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right),\quad x_{34}^{\prime(1)}=(3,2,1).$$

Для проверки вычисления, можно вычислить

$$\varphi_2\left(x_{12}^{\prime(1)}\right)=(-3,2,5)\cdot(2,3,0)=0 \qquad \text{и т.д.}$$

Итак, построили главные векторы:

$$x_1^{(2)}=(1,0,0),\quad x_2^{(2)}=(5,0,1),$$

$$x_3^{(2)}=(2,3,0),\quad x_4^{(2)}=(5,5,1).$$

Присоединим к неравенствам $\varphi_1(x)\le 0$, $\varphi_2(x)\le 0$ неравенство $\varphi_3(x)=4x_1-x_2-15t\le 0$ и составим главные векторы. Для этого вычислим:

$$\varphi_3\left(x_1^{(2)}\right)=(4,-1,-15)\cdot(1,0,0)=4,\quad x_1^{\prime(2)}=\frac{1}{4}x_1^{(2)}=\left(\frac{1}{4},0,0\right);$$

$$\varphi_3\left(x_2^{(2)}\right)=(4,-1,-15)\cdot(5,0,1)=5,\quad x_2^{\prime(2)}=\frac{1}{5}x_2^{(2)}=\left(1,0,\frac{1}{5}\right);$$

$$\varphi_3\left(x_3^{(2)}\right)=(4,-1,-15)\cdot(2,3,0)=5,\quad x_3^{\prime(2)}=\frac{1}{5}x_3^{(2)}=\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5},0\right);$$

$$\varphi_3\left(x_4^{(2)}\right)=(4,-1,-15)\cdot(5,5,1)\ \ 0, \quad x_4^{(2)}=(5,5,1);$$

$$\varphi_3\left(x_5^{(2)}\right)=(4,-1,-15)\cdot(3,2,1)=-5, \quad x_5^{\prime(2)}=\frac{1}{5}x_5^{(2)}=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right).$$

Построим векторы

$$x_{51}^{(2)}=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4},0,0\right)=\left(\frac{17}{20},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right); \quad x_{51}^{\prime(2)}=20x_{51}^{(2)}=(17,8,4);$$

$$x_{52}^{(2)}=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)+\left(1,0,\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{8}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right); \quad x_{52}^{\prime(2)}=\frac{5}{2}x_{52}^{(2)}=(4,1,1);$$

$$x_{53}^{(2)}=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5},0\right)=\left(1,1,\frac{1}{5}\right); \quad x_{53}^{\prime(2)}=5x_{53}^{(2)}=(5,5,1)=x_4^{(2)}.$$

Таким образом, главными векторами неравенств $\varphi_i(x)\leq 0$, $i=\overline{1,3}$, являются

$$x_1^{(3)}=(5,5,1), \quad x_2^{(3)}=(3,2,1),$$

$$x_3^{(3)}=(17,8,4), \quad x_4^{(3)}=(4,1,1).$$

Теперь возьмем $\varphi_4(x)=6x_1-4x_2-15=0$. Вычислим

$$\varphi_4\left(x_1^{(3)}\right)=(6,-4,-15)\cdot(5,5,1)=-5,\quad x_1^{\prime(3)}=\frac{1}{5}x_1^{(3)}=\left(1,1,\frac{1}{5}\right);$$

$$\varphi_4\left(x_2^{(3)}\right)=(6,-4,-15)\cdot(3,2,1)=-5,\quad x_2^{\prime(3)}=\frac{1}{5}x_2^{(3)}=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right);$$

$$\varphi_4\left(x_3^{(3)}\right)=(6,-4,-15)\cdot(17,8,4)=10,\quad x_3^{\prime(3)}=\frac{1}{10}x_3^{(3)}=\left(\frac{17}{10},\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right);$$

$$\varphi_4\left(x_4^{(3)}\right)=(6,-4,-15)\cdot(4,1,1)=5,\quad x_4^{\prime(3)}=\frac{1}{5}x_4^{(3)}=\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right).$$

Построим векторы

$$x_{13}^{(3)}=\left(1,1,\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{17}{10},\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{27}{10},\frac{9}{5},\frac{3}{5}\right);$$

$$x_{14}^{(3)}=\left(1,1,\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{9}{5},\frac{6}{5},\frac{2}{5}\right);$$

$$x_{23}^{(3)}=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{17}{10},\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{23}{10},\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right);$$

$$x_{24}^{(3)}=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{7}{5},\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right).$$

Из этих векторов получим $(t=1)$:

$$x_1^{(4)}=\left(\frac{9}{2},3,1\right),\quad x_2^{(4)}=\left(\frac{9}{2},3,1\right),$$

$$x_3^{(4)}=\left(\frac{23}{6},2,1\right),\quad x_4^{(4)}=\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2},1\right).$$

Общее решение неравенств (4.3) имеет вид

$$x=\alpha_1^2\left(\frac{9}{2},3,1\right)+\alpha_2^2\left(\frac{23}{6},2,1\right)+\alpha_3^2\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2},1\right),$$

или

$$x_1=\frac{9}{2}\alpha_1^2+\frac{23}{6}\alpha_2^2+\frac{7}{2}\alpha_3^2, \tag{4.4}$$

$$x_2=3\alpha_1^2+2\alpha_2^2+\frac{3}{2}\alpha_3^2, \tag{4.5}$$

$$t=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1. \tag{4.6}$$

Вычислим $f(x)$:

$$f(x)=6\left(\frac{9}{2}\alpha_1^2+\frac{23}{6}\alpha_2^2+\frac{7}{2}\alpha_3^2\right)+4\left(3\alpha_1^2+2\alpha_2^2+\frac{3}{2}\alpha_3^2\right)=$$
$$=39\alpha_1^2+31\alpha_2^2+27\alpha_3^2.$$

Максимальное значение функции достигается при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Тогда из (4.4) и (4.5) получим $x = \left(\frac{9}{2}, 3\right)$.

Минимальное значение достигается при $\alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = 0$, тогда будем иметь $x = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Итак, получили

$$f(x)_{max} = f\left(\frac{9}{2}, 3\right) = 39,$$

$$f(x)_{min} = f\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right) = 27.$$

Для упрощения вышеизложенных вычислений составим таблицу

Таблица

№		x_1	x_2	t			x
I шаг	φ_1	-1	-1	5	$\varphi_1(\ell)$		
1	ℓ_1	1			-1		$x_1^{(1)}$
2	ℓ_2		1		-1		$x_2^{(1)}$
3	ℓ_3			1	5	$\ell_3' = \frac{1}{5}\ell_3$	
4	ℓ_3'			$\frac{1}{5}$	1		
5	ℓ_{13}	1		$\frac{1}{5}$	0	$x_3^{(1)} = 5\ell_{13}$	$x_3^{(1)}$
6	ℓ_{23}		1	$\frac{1}{5}$	0	$x_4^{(1)} = 5\ell_{23}$	$x_4^{(1)}$

Продолжение

№		x_1	x_2	t			x
II шаг	φ_2	-3	2	5	$\varphi_2(x)$		
7	$x_1^{(1)}$	1			-3	$x_1^{\prime(1)}=\frac{1}{3}x_1^{(1)}$	$x_1^{(2)}$
8	$x_1^{\prime(1)}$	$\frac{1}{3}$			-1		
9	$x_2^{(1)}$		1		2	$x_2^{\prime(1)}=\frac{1}{2}x_2^{(1)}$	
10	$x_2^{\prime(1)}$		$\frac{1}{2}$		1		
11	$x_3^{(1)}$	5		1	-10	$x_3^{\prime(1)}=\frac{1}{10}x_3^{(1)}$	$x_2^{(2)}$
12	$x_2^{\prime(1)}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{10}$	-1		
13	$x_4^{(1)}$		5	1	15	$x_4^{\prime(1)}=\frac{1}{15}x_4^{(1)}$	
14	$x_4^{\prime(1)}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	1		
15	$x_{12}^{(1)}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$			$x_{12}^{\prime(1)}=6x_{12}^{(1)}$	
16	$x_{12}^{\prime(1)}$	2	3		0		$x_3^{(2)}$
17	$x_{14}^{(1)}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$		$x_{14}^{\prime(1)}=15x_{14}^{(1)}$	
18	$x_{14}^{\prime(1)}$	5	5	1	0		$x_4^{(2)}$
19	$x_{32}^{(1)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$		$x_{32}^{\prime(1)}=10x_{32}^{(1)}$	
20	$x_{32}^{\prime(1)}$	5	5	1	0		$=x_4^{(2)}$
21	$x_{34}^{(1)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$		$x_{34}^{\prime(1)}=6x_{32}^{(1)}$	
22	$x_{34}^{\prime(1)}$	3	2	1			$x_5^{(2)}$

Продолжение

№		x_1	x_2	t			x
III шаг	φ_3	4	-1	-15	$\varphi_3(x)$		
23	$x_1^{(2)}$	1			4	$x_1'^{(1)} = \frac{1}{4}\, x_1^{(2)}$	
24	$x_1'^{(2)}$	$\frac{1}{4}$			1		
25	$x_2^{(2)}$	5		1	5	$x_2'^{(2)} = \frac{1}{5}\, x_2^{(2)}$	
26	$x_2'^{(2)}$	1		$\frac{1}{5}$	1		
27	$x_3^{(2)}$	2	3		5	$x_3'^{(2)} = \frac{1}{5}\, x_3^{(2)}$	
28	$x_3'^{(2)}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$		1		
29	$x_4^{(2)}$	5	5	1	0		$x_1^{(3)}$
30	$x_5^{(2)}$	3	2	1	-5	$x_5'^{(2)} = \frac{1}{5}\, x_5^{(2)}$	$x_2^{(3)}$
31	$x_5'^{(2)}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	-1		
32	$x_{51}^{(2)}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$		$x_{51}'^{(2)} = 20\, x_{51}^{(2)}$	
33	$x_{51}'^{(2)}$	17	8	4	0		$x_3^{(3)}$
34	$x_{52}^{(2)}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$		$x_{52}'^{(2)} = \frac{5}{2}\, x_{52}^{(2)}$	
35	$x_{52}'^{(2)}$	4	1	1	0		$x_4^{(3)}$
36	$x_{53}^{(2)}$	1	1	$\frac{1}{5}$		$x_{53}'^{(2)} = 5\, x_{53}^{(2)}$	
37	$x_{53}'^{(2)}$	5	5	1	0		$= x_1^{(3)}$

Продолжение

№		x_1	x_2	t			x	
IV шаг	φ_4	6	-4	-15	$\varphi_4(x)$			
38	$x_1^{(3)}$	5	5	1	-5	$x_1'^{(3)} = \frac{1}{5} x_1^{(3)}$		
39	$x_1'^{(3)}$	1	1	$\frac{1}{5}$	-1			
40	$x_2^{(3)}$	3	2	1	-5	$x_2'^{(3)} = \frac{1}{5} x_2^{(3)}$		
41	$x_2'^{(3)}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	-1			
42	$x_3^{(3)}$	17	8	4	10	$x_3'^{(3)} = \frac{1}{10} x_3^{(3)}$		
43	$x_3'^{(3)}$	$\frac{17}{10}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	1			
44	$x_4^{(3)}$	4	1	1	5	$x_4'^{(3)} = \frac{1}{5} x_4^{(3)}$		
45	$x_4'^{(3)}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1			
46	$x_{13}^{(3)}$	$\frac{27}{10}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{3}{5}$		$x_{13}'^{(3)} = \frac{5}{3} x_{13}^{(3)}$		
47	$x_{13}'^{(3)}$	$\frac{9}{2}$	3	1	0		$x_1^{(4)}$	α_1^2
48	$x_{14}^{(3)}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{2}{5}$		$x_{14}'^{(3)} = \frac{5}{2} x_{14}'^{(3)}$		
49	$x_{14}'^{(3)}$	$\frac{9}{2}$	3	1	0		$= x_1^{(4)}$	
50	$x_{23}^{(3)}$	$\frac{23}{10}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{5}$		$x_{23}'^{(3)} = \frac{5}{3} x_{23}^{(3)}$		
51	$x_{23}'^{(3)}$	$\frac{23}{6}$	2	1	0		$x_2^{(4)}$	α_2^2
52	$x_{24}^{(3)}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$		$x_{24}'^{(3)} = \frac{5}{2} x_{24}^{(3)}$		
53	$x_{24}'^{(3)}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	0		$x_3^{(4)}$	α_3^2

Суммируя значения $x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x_3^{(4)}$ по столбцам, умноженные соответствующим образом на α_i^2, $i = 1,2,3$, получим значения (4.4), (4.5). С помощью этих значений определим экстремальные значения функции $f(x)$.

Нетрудно установить, что экстремальные значения функции $f(x)$ можем определить непосредственно с помощью значений $x_i^{(4)}$, $i=1,2,3$:

$$f\left(\frac{9}{2},3\right)=6\,\frac{9}{2}+4\cdot 3=39,\quad f\left(\frac{23}{6},2\right)=31,\quad f\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)=27.$$

Заметим, что из равных главных векторов оставили один, т.к. оставление всех равных главных векторов увеличивает объем вычислительной работы, а на конечный результат не влияет.

Как показывает пример, при решении задач линейного программирования количество шагов равно числу ограничений (числу уравнений и неравенств) и дополнительных переменных, переводящих неравенства в равенства, не требуется. При этом процесс зацикловання не получается. Ответ задачи линейного программирования получается с помощью коэффициентов соответствующей квадратичной формы.

Поступила 20.IV.1987

Кафедра
высшей математики

Литература

1. Л.В.Канторович. Математические методы организации и планирования производства. ЛГУ, 1939, стр.67.
2. С.Гасс. Линейное программирование. М., 1961.
3. E. Burger. ZAMM 36, №3/4, 156, 135-139.
4. Л.С.Раковщик. Математика в школе, 6, 1973, 4-12.
5. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.I, М.-Л., 1948.
6. Д.Гейл. Теория линейных экономических моделей. М.,1963.
7. Д.Б.Юдин, Е.Г.Гольштейн. Линейное программирование, М., 1963.

ბ. კოპლაძე

წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის ერთი ალგორითმის შესახებ

რეზიუმე

განხილულია წრფივი დაპროგრამების ამოცანა (0,1) - (0,4). უტოლობათა სისტემა (0,3),(0,4) მოყვანილია ერთგვაროვან სისტემაზე (2.2), მტკიცდება, რომ (2,2) უტოლობათა სისტემის მთავარი ვექტორებიდან - მთავარი ამონახსნებიდან - შეიძლება განისაზღვროს (0,1) მიზნის ფუნქციის ექსტრემუმის ვექტორი. მოცემულია მთავარი ვექტორების აგების და მიზნის ფუნქციის (0,1) ექსტრემალური მნიშვნელობის ვექტორის განსაზღვრის წესი.

G. Kondadze

ON ONE ALGORITHM FOR SOLVING PROBLEMS OF LINEAR PROGRAMMING

Summary

The paper deals with a problem of linear programming (0.1) - (0.4). The system of inequalities (0.3), (0.4) is reduced to the homogeneous system (2.2). It is proved that from the principal solutions - the main vectors of the system (2.2) - the extremizing vector of the specific function (0.1) can be defined. A technique is proposed for constructing the main vectors and determining the extremizing vector of the target function.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები

278, 1988

მათემატიკის ონტოლოგიურ-გნოსეოლოგიური არსის პრობლემა

მ. ქიქინაძე

მათემატიკის ობიექტური და შემეცნებითი არსის გარკვევის პრობლემა მით უფრო ძნელად გადასაწყვეტი ხდება, რაც უფრო განვითარებული სახით წარმოგვიდგენია მათემატიკის თეორიული და გამოყენებითი ასპექტები და, მაშასადამე, რაც უფრო მეტი შესაძლებლობა იქმნება სათანადო განზოგადებისათვის. ამ "პარადოქსის" ზოგად-შემეცნებითი არსი მარტო მათემატიკური შემეცნების კუთვნილება არაა, დღეს ზოგიერთ სხვა კარგად განვითარებული მეცნიერება, პირველ რიგში, ფიზიკა და ასტრონომია, ასევე "პარადოქსალურობით" არიან დამძიმებულნი, მაგრამ მათემატიკისათვის ის ტიპიურია და მისი გადაწყვეტის სიძნელე, როგორც ვნახავთ, დაკავშირებულია მათემატიკის, როგორც სპეციალური მეცნიერების, თვისებრივად სრულიად განსაკუთრებულ ხასიათთან.

ჩვენი უახლოესი მიზანია გამოვავლინოთ ამ "პარადოქსის" ახსნის, ანუ, რაც ცხადია, მისი ტოლფასია, მათემატიკის ონტოლოგიური და გნოსეოლოგიური არსის გარკვევის პრობლემის აუცილებელი ასპექტები და საყრდენები და დავადგინოთ პრობლემის თანამედროვე მდგომარეობა.

შევეცდებით, თვით პრობლემის კონკრეტულად წარმოდგენის ამ

პროცესში, რამდენადაც ეს შესაძლებელია, თავი შევიკავოთ მასზე საკუთარი თვალსაზრისის წარმოდგენისაგან, რაც ჩვენი შემდგომი კვლევის ბუნებრივ ამოცანას შეადგენს.

თანამედროვე მათემატიკის ონტოლოგიური სტატუსისა და შემეცნებითი მნიშვნელობის გარკვევისათვის განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს შემდეგ ისტორიულ-ლოგიკურ გარემოებებს: 1/ მათემატიკის საგნის არაკლასიკურ გაფართოებას, 2/ მეცნიერებათა "მათემატიზაციის" მზარდ პროცესს, 3/ მეცნიერულ-ტექნიკური პროგრესის პროცესს, განსაკუთრებით, მის თანამედროვე ეპოქალურ სტადიას - მეცნიერულ-ტექნიკურ რევოლუციას, მეცნიერებისა, ტექნიკისა და წარმოების ურთიერთგანპირობებული სინთეზის დინამიკურ მდგომარეობას, რომელშიც მონაწილე მეცნიერებათა შორის მათემატიკას ერთ-ერთი ცენტრალური ადგილი უკავია, 4/ მათემატიკის თითქმის ტოტალურ გამოყენებადობას.

ამ ასპექტთა შორის არსებულ მიმართებათა თვალსაზრისით უნდა შევნიშნოთ, რომ მათემატიკის გამოყენებადობა და გამოყენება ერთის მხრივ უფრო ფართოა, ხოლო მეორეს მხრივ - უფრო ვიწრო, ვიდრე მეცნიერების "მათემატიზაციის" ცნება: უფრო ფართოა იმ მხრივ, რომ მათემატიკა მაშინაც გამოიყენება ამა თუ იმ მეცნიერებაში, როცა ის ჯერ კიდევ არაა შესული "მათემატიზაციის" თვისებრივ სტადიაში, კერძოდ, ამ მხრივ გაცილებით უფრო ფართოა მათემატიკური მოდელირების ცნება, გარდა ამისა, მათემატიკა გამოიყენება არა მარტო ამა თუ იმ მეცნიერებაში, არამედ, საერთოდ ადამიანური საქმიანობისა და მოღვაწეობის ნებისმიერ სფეროში; უფრო ვიწროა იმ მხრივ, რომ მეცნიერების "მათემატიზაცია" არაა უბრალოდ მათემატიკის გამოყენება და ის სუბორდინაციულად არც ექვემდებარება მათემატიკის გამოყენების ცნებას, ვინაიდან საქმე ეხება გაცილებით უფრო ღრმა მოვლენას, სახელდობრ, ამა თუ იმ მეცნიერების განვითარების გარკვეულ

გნოსეოლოგიურად თვისებრივ სტადიას .

ისიც უნდა შევნიშნოთ, რომ მეცნიერულ-ტექნიკური რევოლუციის ბირთვს კიბერნეტიკა წარმოადგენს, ის არის სწორედ . ამ ეპოქალური მოვლენის ტიპიური გამოხატულება, მის ერთ-ერთ ყველაზე ძირითად საერთო თეორიულ და, კერძოდ, მისი ტექნიკური ასპექტის თეორიულ საფუძველს კი შეადგენს მათემატიკა და, პირიქით, სწრაფად მოქმედი გამოთვლითი მანქანების საშუალებით კიბერნეტიკა მაღალი პროცენტებით უხდის ვალს მათემატიკას, როგორც ამ უკანასკნელის განვითარების ტექნიკური სტადია. შემთხვევითი არაა ის, რომ როცა სურთ დაახასიათონ თანამედროვე მეცნიერულ-ტექნიკური პროგრესის ეპოქა, მაშინ პირველ რიგში კიბერნეტიკაზე მიუთითებენ, მაგრამ ამ შემთხვევაში არსებობს აბსოლუტური საფუძველიც- ჩვენ ვცხოვრობთ და ვმოღვაწეობთ კიბერნეტიკით გამოხატულ ტექნიკურ ეპოქაში, ისევე როგორც ერთ დროს, ბორბალი, სხვა დროს კი ორთქლის მანქანა და სხვა, შესაბამის ეპოქათა ტექნიკურ მახასიათებლებს წარმოადგენდნენ.

ჩვენ ვცხოვრობთ კიბერნეტიკისა და თითქმის დომინირებულად მოქმედი მათემატიკის ეპოქაში.

XIX საუკუნის პირველი ნახევრიდან დაწყებული აწინდელ დრომდე მათემატიკა თვისებრივად გაფართოვდა კლასიკური ინტუიციისათვის უჩვეულო ცნებებითა და თეორიებით, როგორიცაა, აბსტრაქტული ალგებრა, არაევკლიდური გეომეტრიები, სიმრავლეთა თეორია, კერძოდ, გეორგ კანტორის მიერ უსასრულობის სამყაროში ფილოსოფიურად და მათემატიკურად ფუნდამენტალური შეღწევა და უსასრულობის მკაცრი რაოდენობრივი, მათემატიკური დიფერენციაცია, გამოხატული კარდინალურ და ორდინალურ რიცხვთა თეორიის შექმნით, შემდეგ, ძირითადად უსასრულობისა და კლასიკური ლოგიკის კონფლიქტის სფეროში სიმრავლეთა თეორიის პარადოქსების გამოვლენა, რამაც პრობლემატური ნიშნის ქვეშ

დააყენა თვით კლასიკური ლოგიკის გამოყენებადობის საზღვრების საკითხი და საერთოდ აბსტრაქციების პრობლემაც, რაც პირველად მწვავე სახით წარმოადგინა ბრაუერის მათემატიკური ინტუიციონიზმის სკოლამ, მათემატიკის საფუძვლების ამ კრიზისზე რეაქციასთან მჭიდრო კავშირში სიმრავლეთა აქსიომური თეორიის ჩამოყალიბება-განვითარებამ; მრავალგანზომილებიანი და ფუნქციონალური სივრცეები, თვით ფუნქციონალური ანალიზი; ტოპოლოგიური სივრცეები და ტოპოლოგია; ალგებრული ტოპოლოგია; კატეგორია და კატეგორიათა თეორია; სხვადასხვა ალგებრები, მათ შორის, ბულისეული ალგებრები; ტენზორული აღრიცხვა, კვატერნიონები და ჰიპერკომპლექსური რიცხვები; ზომის მათემატიკური თეორია; ინფორმაციის მათემატიკური თეორია; ოპერაციული აღრიცხვა; აქსიომური კონცეფციის განვითარების აბსტრაქტული სტადია, მათემატიკური ლოგიკა და, კერძოდ, მეტამათემატიკა; გოდელისა და კოენის მათემატიკურად და ზოგადგნოსეოლოგიურად ფუნდამენტური აღმოჩენები; ე.წ. ფორმალურ ლოგიკურ-მათემატიკურ სისტემათა ანალიზის სემიოტიკური ასპექტები; არაკლასიკური მათემატიკა- საერთოდ კონსტრუქციული მათემატიკა და კერძოდ კონსტრუქციული მათემატიკური ლოგიკა; წარმოდგენა მათემატიკური სტრუქტურის, როგორც უზოგადესი მათემატიკური ცნების შესახებ და სხვა.

ამ სტატიის მიზანდასახულება, ცხადია, არ მოითხოვს თანამედროვე მათემატიკის ძირითად თვისებრივ მხარეთა სპეციალურ ანალიზს და, ვფიქრობ, რაც ზემოთ მოყვანილი ჩამოთვლაც საკმარისია და მაინფორმირებელია წარმოდგენის შესაქმნელად, თუ აბსტრაქციის რამდენად უფრო მაღალ თვისებრივ საფეხურზე ავიდა მათემატიკა რიცხვისა და ევკლიდურ-გეომეტრიულ კლასიკურ საფეხურთან შედარებით, მაგრამ მაინც სასურველია მივუთითოთ ზოგიერთ ტიპიურად განმაზოგადებელ მომენტებზე.

არაევკლიდურმა გეომეტრიებმა რევოლუციურად შეცვალეს კლასიკური წარმოდგენები სივრცის რაოდენობრივი სტრუქტურის შესახებ, ალგებრა განტოლებათა ალგებრის საფეხურიდან ავიდა ალგებრულ ოპერაციათა თეორიის აბსტრაქტულ საფეხურზე, ჩამოყალიბდა მათემატიკის ისეთი უზოგადესი და ცენტრალური ცნება, როგორიცაა იზომორფიზმის ცნება; მათემატიკისათვის დამახასიათებელი გახდა ცვალებადობის გაცილებით ფართო წრე და საფეხურებრივ უფრო მაღალი გამოხატულება, ვიდრე ცვლადი სიდიდის კლასიკური ცნებაა, სახელდობრ- ცვლადი მიმართება, ცვლადი ოპერაცია და სხვა, ხოლო აქსიომური კონცეფციის ე.წ. ფორმალურმა, უფრო სწორად, აბსტრაქტულმა სტადიამ წარმოგვიდგინა ისეთი აქსიომური სისტემა ანუ აქსიომური სქემა, რომელშიც არათუ ძირითადი ცნებები უნდა ფიქსირდებოდნენ განსაზღვრის გარეშე, არამედ - ინტერპრეტაციის გარეშეც, ისინი, ასე ვთქვათ, თვით აქსიომათა მოცემული ერთობლიობის საშუალებით იმპლიციტურად განისაზღვრებიან; ეს აქსიომური სქემა თავისი აბსტრაქტული რაობით წარმოგვიდგენს საგანთა და მათ შორის დამოკიდებულებათა მეტად ზოგად რაოდენობრივ გვარს, რომლის სახეები, ე.ი. ინტერპრეტაციები ანუ მოდელები, როგორც წესი, თვისებრივად სრულიად განსხვავებულნი არიან.

გასაგებია, რომ მათემატიკის თვისებრივად არაკლასიკურმა გაფართოებამ ბუნებრივად წარმოშვა პრობლემა მათემატიკის საგნის ახალი ანალიზისა, კერძოდ, საკითხი, უნდა დარჩეს თუ არა ძალაში მათემატიკის ენგელსისეული განსაზღვრა, როგორც მეცნიერებისა "სინამდვილის სივრცითი ფორმებისა და რაოდენობრივ დამოკიდებულებების შესახებ".

მკვლევართა ნაწილი მათემატიკის ასეთ გაფართოებაში ხედავს მის გასვლას რაოდენობის კატეგორიის ფარგლებს გარეთ, მაგრამ, რო-

როგორც წესი, მას ასეთი დასკვნა არა აქვს გაკეთებული სათანადო გაღრმავებული ფილოსოფიური ანალიზის საფუძველზე და ის უფრო გამოხატავს მათემატიკის მიერ რაოდენობის ფარგლებს გარეთ გასვლის ფაქტს, როგორც თავისთავად ცხადის, კონსტატაციას. ამ თვალსაზრისის წარმომადგენლები, უკეთეს შემთხვევაში, კმაყოფილდებიან ისეთი განმარტებებით, როგორიცაა, მაგალითად: მათემატიკა არის მეცნიერება "შინაარსისაგან განყენებულ ფორმათა და დამოკიდებულებათა" შესახებ ანუ -მეცნიერება "წმინდა ფორმების" შესახებ.[11, 329] , მაგრამ რა არის "წმინდა ფორმა" და რა კავშირი აქვს მას ფორმის ფილოსოფიურ კატეგორიასთან, ისინი არ განმარტავენ.

ზოგიერთი მკვლევარი ამ მიმართულებით პოულობს სხვა იოლ "გამოსავალს". ვ.ი.გნედენკო და ე.კოლმანი, ეთანხმებიან რა ა.დ. ალექსანდროვს იმაში, რომ მან, ახალი გეომეტრიების გაჩენასთან დაკავშირებით მიზანშეწონილად მიიჩნია ენგელსისეულ განსაზღვრაში სიტყვებს "სივრცითი ფორმა" დაუმატოს გამოთქმა "და სივრცითის მსგავსი ფორმები", თვით გვთავაზობენ მათემატიკის ასეთ განსაზღვრას: მათემატიკა არის მეცნიერება სინამდვილის რაოდენობრივი დამოკიდებულებებისა და სივრცითი ფორმების და აგრეთვე რაოდენობრივის მსგავსი დამოკიდებულებებისა და სივრცითის მსგავსი ფორმების შესახებ [5, 15, 17, 209-210]. ამასთან, მათაც არავითარი განმარტება არ მოაქვთ, თუ რა კატეგორიული შინაარსი უნდა ჩავაქსოვოთ ასეთ "მსგავსების" ცნებაში. რა თქმა უნდა, ეს უფრო სიძნელისადმი თავის არიდებაა, ვიდრე მისი დაძლევის ცდა.

პ.ხ.სამოროდნიცკი, მართალია, ცდილობს მათემატიკური შემეცნების პროცესის გამოკვლევის საშუალებით აჩვენოს, რომ მათემატიკურ აბსტრაქციათა აღმავალმა ხაზმა მოგვცა მხოლოდ და მხოლოდ რაოდენობის

ცნების გაფართოება და ამრიგად მან არ გაიყვანა მათემატიკა რაოდენობის ცნების ფარგლებს გარეთ, ამ აზრს ის ენერგიულადაც გამოთქვამს: "ან მათემატიკა არის მეცნიერება მხოლოდ და მხოლოდ რაოდენობის შესახებ ან მას არასდროს არ ჰქონია საქმე რაოდენობასთან [9, 108], მაგრამ ასეთი შეხედულების გამომუშავება კვლავ არაა დაკავშირებული სათანადო ფილოსოფიური კატეგორიების საშუალებით ჩატარებულ გაღრმავებულ ანალიზთან.

გვხვდება ისეთი თვალსაზრისიც, მაგალითად, ა.ძ. რიჟკოვისა, რომლის მიხედვითაც მათემატიკამ არათუ მიატოვა რაოდენობის ვიწრო ჩარჩოები და გავიდა უფრო ფართო სარბიელზე, არამედ, თვით თვისებრიობის სფეროშიც კი შეიჭრა უშუალოდ [8]. ვფიქრობთ, ასეთი ტენდენცია დაკავშირებულია უკვე რაოდენობისა და თვისებრიობის კავშირის არასწორ გაგებასთან, კერძოდ, ჰეგელიდან მომდინარე, რაოდენობის როგორც საგნის გარეგანი გარკვეულობის განსაზღვრასთან, რომელსაც არ შესწევს საკუთარი უნარი ასახოს საგნის, მოვლენის ღრმა, თვისებრიობასთან არსებით კავშირში მყოფი მხარეები.

ნიკოლო ბურბაკის შეხედულება, რომ მათემატიკის უზოგადესი ობიექტია მათემატიკური სტრუქტურა [4], იმაზე მიუთითებს, რომ თანამედროვე მათემატიკაში, როგორც მისი ერთ-ერთი ძირითადი განმსაზღვრელი გამოხატულება, დამკვიდრდა სიმრავლურ-თეორიულ და აქსიომურ-სტრუქტურულ კონცეფციათა სინთეზის სტადია, მაგრამ ასეთ ნიშანზე მითითება ვერ აღწევს მათემატიკის საგნის ონტოლოგიური გარკვევის პრობლემის დონეს და ის არის მათემატიკის არსის პრობლემის მხოლოდ მათემატიკურივე საშუალებებით "გადაწყვეტის" ცდა და ტავტოლოგიურობის მომენტსაც კი შეიცავს, ვინაიდან თუ მას დავავალებთ მათემატიკის საგნის განსაზღვრას, მაშინ სათანადო "განსაზღვრა" აუცილებლობით ასეთი სახით წარმოგვიდგება: "მათემატიკა

არის მეცნიერება მათემატიკურ სტრუქტურათა შესახებ ".

რა თქმა უნდა, სულ სხვა საქმეა, თუ მათემატიკის აღნიშნულ სტრუქტურულ ხასიათს გამოვიყენებთ მათემატიკის საგნის ანალიზისათვის სტრუქტურის ფილოსოფიურ კატეგორიასთან კავშირში, რომელიც, როგორც ზოგიერთი მკვლევარი თვლის, ფორმის ფილოსოფიური კატეგორიის გარკვეულ თანამედროვე განვითარებას წარმოადგენს.

მკვლევართა ერთი ჯგუფი, შეისწავლის რა მათემატიკური მოდელირების გნოსეოლოგიურ არსს, აქვე გამოთქვამს შეხედულებას, რომ მათემატიკა გადის უფრო ფართო სარბიელზე, ვიდრე რაოდენობის არეა, რომ "თანამედროვე მათემატიკა იკვლევს გაცილებით უფრო ფართო კლასს ობიექტებისა და დამოკიდებულებებისა, თუმცა რაოდენობა განაგრძობს არსებითი როლის თამაშს "მათემატიკური რეალობის" პირველ საფეხურებზე"[3, 5], მეორეს მხრივ, ისიც არსებითად კმაყოფილდება მხოლოდ იმის აღნიშვნით, რომ მათემატიკა არის მეცნიერება აბსტრაქტული სტრუქტურების, აბსტრაქტული ობიექტებისა და მათ შორის კავშირების შესახებ [3, 5]. მაგრამ "აბსტრაქტული ობიექტი", "აბსტრაქტული სტრუქტურა" და მათი კავშირი ფილოსოფიურ კატეგორიებთან დატოვებულნი არიან სათანადო ანალიზის გარეშე, თუმცა ამ შემთხვევაში უკვე ადგილი აქვს იმის სრულ შეგნებას, რომ მათემატიკის არსის პრობლემის გადაწყვეტას "ეხება საკმაოდ არსებითი სიძნელეები" და, რომ "მატერიალისტური მიდგომა მათემატიკის ბუნების გარკვევის საქმეში ემყარება ამ ობიექტებისა და კავშირების განხილვას, როგორც მატერიალური ობიექტების და სისტემების გარკვეულ მხარეთა ამსახველების, როგორც მათი სახეებისა და მოდელების, მაგრამ როგორც ისეთების, რომელნიც ფრიად განყენებულნი არიან ამ ობიექტთა და სისტემათა კონკრეტული ფიზიკური ბუნებისაგან და მხოლოდ ამ განყენების წყალობით იძენენ ძალას" [3, 5]. მათემატიკას რომ მისი უკიდურესი აბსტრაქტულობა დიდი ზოგა-

დობის ძალას და ამიტომ ფართო გამოყენების უნარს ანიჭებს, ეს ცხადია, მაგრამ მათემატიკის საგნის გარკვევის სიძნელე რჩება სიძნელედ. ამ პრობლემის გადაწყვეტის მიმართულებით მნიშვნელოვანი ნაბიჯი გადადგა ლევან ტოკიელმა, რომელმაც, შესანიშნავად გამოიყენა რა ფიზიკური იდეალიზმის ვ.ი.ლენინის მიერ მოცემული კრიტიკა, კერძოდ, "მატერიის გაქრობის" თვალსაზრისისა, სათანადო პარალელის გავლებით მიუთითა იმ ძირითად შეცდომაზე, რომელსაც უშვებენ ისინი, ვინც მათემატიკის არაკლასიკურ განვითარებაში ხედავენ მათემატიკის გასვლას რაოდენობის კატეგორიის ფარგლებს გარეთ ან მის მიერ საერთოდაც ამ სფეროს მიტოვებას, მისი აზრით, ისინი ერთმანეთში ურევენ რაოდენობის ფილოსოფიურ და მათემატიკურ ცნებებს.

მეორეს მხრივ, ეს ნაბიჯი, როგორც მხოლოდ სათანადო ნეგატიურ მომენტზე მითითებული, ცხადია, არ წარმოადგენდა პრობლემის სრულ ან პოზიტიურ გადაწყვეტას, საჭირო იყო აგრეთვე იმის ჩვენება, რომ მათემატიკის ერთადერთ შემეცნებით ობიექტს კვლავაც რაოდენობა წარმოადგენს, მაგრამ რაოდენობის ტრადიციული გაგების, სახელდობრ, რაოდენობის როგორც საგნის გარეგანი გარკვეულობის სახით წარმოდგენის ფარგლებში ასეთი ამოცანა თითქმის ტრივიალურად ჰპოვებდა გადაწყვეტას და ამიტომ ლევან ტოკიელმა კვლავ მახვილი მიმართა ზემოთ აღნიშნული შეცდომის გამოვლენისაკენ. რაოდენობის ასეთი გაგება, ჩვენი აზრით, არაა სწორი, უფრო კონკრეტულად კი – ის უფრო ვიწროა, ვიდრე რაოდენობის ფილოსოფიური კატეგორია. რაოდენობის ასეთი გაგების ფარგლებში, რა თქმა უნდა, გაუთვალისწინებელი დარჩა თვით მათემატიკის არაკლასიკური განვითარების საფუძველზე ისეთი ახალი ფილოსოფიური კატეგორიის წარმოშობის პრინციპული შესაძლებლობა, რომელიც თვით მოიცავს როგორც კერძოს თვით რაოდენობის არსებულ კატეგორიას.

როგორც ვხედავთ, მათემატიკის არაკლასიკური დაფუძნების პირობებში მათემატიკის ონტოლოგიური საწყისების პრობლემა, ერთის მხრივ, არსებითად ემთხვევა საერთოდ თანამედროვე მათემატიკის ონტოლოგიური არსის პრობლემას, ხოლო, მეორეს მხრივ, ის წარმოადგენს ერთდროულად ერთ-ერთ ძირითად მოთხოვნილებასაც და საფუძველსაც სათანადო ფილოსოფიურ კატეგორიათა, პირველ რიგში, ცხადია, დეტერმინიზმისა და რაოდენობის კორელატიურ კატეგორიათა ახალი გაღრმავებული ანალიზისა; უფრო მეტიც, მათემატიკის არაკლასიკური დაფუძნება ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი საფუძველია ახალ ფილოსოფიურ განზოგადებათა შესაძლებლობისა.

ფილოსოფიური კატეგორიების პრობლემა ხომ ისედაც ცენტრალურია, ვინაიდან მოძღვრება კატეგორიებზე არსებითად ემთხვევა თვით ფილოსოფიას, ჩვენ დროს კი ისეთი ყოვლისმომცველი დარგების არსებობამ, როგორიც არის მათემატიკა და კიბერნეტიკა, საერთოდ კი ე.წ. მეცნიერებათმცოდნეობის განვითარებამ და მისი პრობლემების აქტუალობის წინ წამოწევამ, ფილოსოფიურ კატეგორიათა პრობლემას უფრო მწვავე და საყოველთაო მნიშვნელობა შესძინა. საზოგადოდ, კონკრეტულ მეცნიერებათა თანამედროვე მჩქეფარე განვითარების კვალდაკვალ ანუ სპეციალური ცოდნის სფეროს პროგრესული განვითარების შესაბამისად, ცხადია, აუცილებელი ხდება ფილოსოფიურ კატეგორიათა შინაარსის სათანადო გამდიდრება და აგრეთვე მათი საკუთარი და მათ შორის კავშირების ლოგიკური დახვეწა-დაზუსტება. მეორეს მხრივ, როგორც ცნობილია, ფილოსოფია არსებითად თვით წარმოადგენს კონკრეტული ცოდნის განზოგადებას და მისი ნიშნულა მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული კონკრეტულ მეცნიერებათა სიღრმისეულ და მოცულობით განვითარებაზე და მით უფრო მეტად, რამდენადაც დიდია ამ მეცნიერებათა ნოვადობა. კიბერნეტიკა ხომ ობიექტური და სულიერი, მათ შორის, ინტელექტუალური, სი-

ნამდვილის ყველა სფეროს მოიცავს, რაც განსაკუთრებით აახლოებს მას ფილოსოფიასთან. რაც შეეხება მათემატიკისა და ფილოსოფიის ურთიერთდამოკიდებულებას, მათ ერთმანეთთან აახლოებს ფილოსოფიურ და სპეციალურ მეცნიერებათა კავშირის სრულიად უნიკალური გამოხატულება, რომელიც მდგომარეობს ფილოსოფიისა და მათემატიკის მიერ, ასე ვთქვათ, რაოდენობის სფეროს შესწავლის თავისებურ განაწილებაში, სახელდობრ, როგორც ეს [illegible]ევან გოკიელმა შენიშნა, მაშინ როცა ყველა სხვა სპეციალური მეცნიერება სინამდვილის თვისებრივ მხარეს ერთმანეთს შორის ინაწილებს და, მაშასადამე, არსებობს მრავალი თვისებრივი მეცნიერება, რომელნიც სინამდვილის ცალკეულ ნაწილებს შეისწავლიან და ამდენად ფილოსოფია სინამდვილის თვისებრივი მხარის შესწავლას ინაწილებს მრავალ სხვადასხვა სპეციალურ მეცნიერებებთან, რაოდენობას სპეციალურად მხოლოდ ერთი მეცნიერება - მათემატიკა შეისწავლის და, მაშასადამე, ის შეისწავლის სინამდვილის არა რომელიმე ცალკეულ ნაწილს, არამედ, სინამდვილის მთელ რაოდენობრივ მხარეს, რაც ერთდროულად განაპირობებს მის განსაკუთრებულ ზოგადობასაც და უკიდურეს აბსტრაქტულობასაც; ეს უკიდურესობა კი უბრალოდ აბსტრაქციების მეტად მაღალ ხარისხს კი არ წარმოადგენს, არამედ, ჩვენს წინაშეა აბსტრაქტულობის ზღვრული გამოხატულება - მათემატიკა თავისი ობიექტის წმინდა სახით აზრობრივად გამოსაყოფად ჯანდევბა თვით საგანთა და მოვლენათა თვისებრივი განსაზღვრულობიდან. ამრიგად, მათემატიკისა და ფილოსოფიის განსაკუთრებული სიახლოვე არა მარტო იმაშია, რომ ფილოსოფია ერთადერთ სპეციალურ მეცნიერებასთან, მათემატიკასთან, ინაწილებს სინამდვილის რაოდენობრივი მხარის საკუთრივ /არასაკუთრივ რაოდენობას სხვა მეცნიერებებიც შეისწავლიან, პირველ რიგში, ცხადია, ფიზიკა, ვინაიდან ისინი სინამდვილის თვისებრივი

მხარის აზა თუ იმ ნაწილს მათ რაოდენობასთან სათანადო კავშირში ანუ ზოგის ფილოსოფიურ ფარგლებში, შეისწავლიან/ შეისწავლის /ფილოსოფია-კატეგორიათა სისტემაში, მათემატიკა-სპეციალურად, ანუ სათანადო აბსტრაქციის საფეხურზე/, არამედ, იმითაც, რომ მათემატიკა ახლოსაა ფილოსოფიასთან თავისი ზოგადობისა და აბსტრაქტულობის ხარისხით, გარკვეული, ზემოთ აღნიშნული აზრით კი მასზე აბსტრაქტულიცაა.

ამ პრობლემატიკაზე შემდეგში დაწვრილებით შევჩერდებით, ახლა კი მას შევეხეთ იმ მიზნით, რომ გვეჩვენებინა მათემატიკის განსაკუთრებული მდგომარეობა ფილოსოფიისა და სპეციალურ მეცნიერებათა ურთიერთდამაკავშირებელი რგოლის თვალსაზრისით და, მართალია, როგორც მკითხველი შეამჩნევდა, მაქსიმალურად გამოვიყენეთ ჩვენი პირობა, შესაძლებლობის მიხედვით თავი შეგვეკავებინა პრობლემის არსებით მხარეებზე ჩვენი დადებითი შეხედულებების წინასწარ გადმოცემისაგან, მაგრამ ფილოსოფიისა და მათემატიკის კავშირის აღნიშნულ განსაკუთრებულ ხასიათზე წინასწარი მითითების გარეშე მნიშვნელოვნად შევიზღუდებოდით თვით პრობლემის განხილვის სათანადო აუცილებელი ასპექტების წარმოდგენის ჰორიზონტს.

მათემატიკის ონტოლოგიური და გნოსეოლოგიური სტატუსის გასარკვევად არსებითი მნიშვნელობა აქვს აგრეთვე შინაარსისა და ფორმის წყვილად კატეგორიათა დამუშავებულ თეორიასაც, მით უმეტეს, რომ, როგორც ამას თანამედროვე ფილოსოფიის წარმომადგენელთა მნიშვნელოვანი ნაწილი თვლის, დაწვრილებით გამოიკვეთა ახალ ფილოსოფიურ კატეგორიათა წყვილი: ელემენტები და სტრუქტურა, რომელნიც ნათლად აზრით, ფორმისა და შინაარსის კატეგორიათა შემდგომ განვითარებისა და დაზუსტებას წარმოადგენენ და, რომ, ამასთან ერთად მათ შორის განსხვავებაც არსებობს. ისიც უნდა აღვნიშნოთ, რომ,

ერთის მხრივ, ამ ახალ კატეგორიათა სრული უფლებამოსილება ყველა-
სათვის არაა მისაღები, მეორეს მხრივ, ისინი ხომ ჯერჯერობით და-
მუშავების ფაზაში იმყოფებიან და ამიტომ ბუნებრივია დეკლარაციის-
თა მრავალფეროვნება. მაგრამ, თვით განსაჯეთ თუ რას ნიშნავს მა-
თემატიკისათვის ამ კატეგორიათა შედარებით საყურადღებო მდგომარე-
ობა იმ პირობებში, როცა მათემატიკა უკვე ერთ-ერთ ცენტრალურ
როლს ასრულებს მეცნიერებათა ე.წ. სისტემურ-სტრუქტურული ანალიზის
საკითხებში. ამ კატეგორიათა პრობლემასთან კავშირში, ცხადია, გან-
საკუთრებით მხედველობაში მისაღებია ის გარემოება, რომ, როგორც
ზემოთ ვნახეთ, თანამედროვე მათემატიკის შინაგან პლანში მკვეთრად
გამოიხატა სტრუქტურულობის ლოგიკური იდეალი.

მათემატიკის ონტოლოგიურ-გნოსეოლოგიური არსის გარკვევის
პრობლემას მეცნიერებათა განვითარების თანამედროვე სტადიაზე მეც-
ნიერებათა "მათემატიზაციის" მზარდი პროცესის სახით ურთიერთად
ახალი საფუძველიც და ახალი სირთულეც შესძინა.

როგორც ცნობილია, მეცნიერებათა მთელი რიგისათვის მათე-
მატიკური კვლევის მეთოდი წარმოადგენდა, როგორც მინიმალური აუცი-
ლებლობა, როგორიცაა ფიზიკა, ასტრონომია, ტექნიკური მეცნიერებე-
ბი და სხვა, მაგრამ ეს ადვილად აიხსნება მათი ტიპიურად გამოხა-
ტული რაოდენობრივი ხასიათით.

მეორე მხრივ, ჯერ კიდევ XIX საუკუნის პირველი ნახევრიდან
მოყოლებული, სახელდობრ, ლოგიკის მათემატიზაციიდან დაწყებული,
მათემატიკა კვლევა-ძიების ძირითადი და სისტემური მეთოდის სახით
თანდათანობით ეუფლება ცოდნის სულ სხვადასხვა სფეროებს, მათ შო-
რის ისეთ მეცნიერებებსაც, რომელთა მათემატიკისადმი რაიმე ფუნ-
დამენტური დამოკიდებულების შესახებ ამ მეცნიერებათა გარკვეულ
წარსულში წარმოდგენაც არ არსებობდა. ახლა, მაგალითად, ენელიად

ნორჩია მათემატიკური ლინგვისტიკა, შედარებით ახალგაზრდაა ფსიქოლოგიის პრობლემათა მათემატიკური ანალიზი; მათემატიკური კვლევის თეორიული და კომპიუტერული მეთოდები სულ უფრო ფართოდ ინერგებიან ბიოლოგიასა და მედიცინაში და უკვე დიდი გავრცელება ჰპოვა ტერმინმა: "მათემატიკური ბიოლოგია", კერძოდ, ამერიკელმა მათემატიკოსმა ნ.რაშევსკიმ უკვე ჩვენი საუკუნის 40-50-იან წლებში მათემატიკის ბიოლოგიაში და მედიცინაში გამოყენების მთელი სკოლა შექმნა, რომელშიც მჭიდროდ არიან ერთმანეთთან დაკავშირებული თეორიული და ექსპერიმენტულ-კლინიკური კვლევა-ძიებანი; სასიცოცხლო პროცესების მათემატიკური მოდელირება დღეს ბიოლოგიისა და მედიცინის ერთ-ერთ ყველაზე გავრცელებულ და მნიშვნელოვან ასპექტს შეადგენს; ეკონომიკური მეცნიერება ამჟამად უკვე ფართოდაა "მათემატიზებული", რასაც მიგვითითებს ჩვენს ქვეყანაში არსებული მრავალი ეკონომიკურ-მათემატიკური ორგანიზაცია და რომ ეკონომიკური მეცნიერების თანამედროვე დონე მათემატიკითაა წარმოდგენილი, ამაზე მჭევრმეტყველურად ლაპარაკობს სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის ცენტრალური ეკონომიკურ-მათემატიკური ინსტიტუტის მიერ ჯერ კიდევ 1965 წლის დაარსებული ჟურნალი: " Экономика и математические методы ", რომელიც რეგულარულად გამოდის წელიწადში 6-ჯერ.

მათემატიკური "ექსპანსიის" ეს პროცესი ჩვენ მიგვაჩნია სრულიად კანონზომიერ ისტორიულ-ლოგიკურ პროცესად, ვინაიდან ყოველი საგანი, მოვლენა და სინამდვილის ესა თუ ის განსაზღვრული სფერო წარმოადგენს თვისებრიობისა და რაოდენობის დიალექტიკურ ერთიანობას და ამიტომ აუცილებლობით უნდა დადგეს ისეთი მომენტი, როცა მეცნიერების აღებულ დარგში უპირატესად თვისებ-

რიგი კვლევა-ძიების განვითარება აუცილებლობით მოითხოვს უფრო ღრმა და კონკრეტული კვლევა-ძიების სფეროზე გადასვლას, სახელდობრ, როცა აუცილებელი უნდა გახდეს ფართო რაოდენობრივი ანალიზი და, მაშასადამე, მათემატიკის სისტემატური და სისტემური გამოყენება, ანუ, აუცილებელი უნდა გახდეს ზომის ფილოსოფიური კატეგორიით გამოხატული ონტოლოგიური კანონზომიერების გნოსეოლოგიურში ასახვა.

ამასთან დაკავშირებით, რა თქმა უნდა, გაგვახსენდება გალილეო გალილეის აზრი, რომ ბუნების წიგნის წაკითხვა, მის მათემატიკურ ენაზე წაკითხვას ნიშნავსო. როგორც პოლ ლაფარგი გადმოგვცემს, კარლ მარქსი სთვლიდა, რომ "მეცნიერება მხოლოდ მაშინ აღწევს სრულყოფას, როცა მისთვის შესაძლებელი ხდება გამოიყენოს მათემატიკა" [1, 66]. რა თქმა უნდა, მეცნიერების მეცნიერულ სრულყოფილებაში კარლ მარქსი მათემატიკის რაიმე ცალკეულ, სპორადულ გამოყენებას არ გულისხმობდა, არამედ მიუთითებდა მისი განვითარების გარკვეულ გნოსეოლოგიურ სფეროზე. ამერიკელმა ფსიქოლოგმა სტივენსმა კი, რომელმაც თვით ეფექტურად დანერგა სათანადო მათემატიკური მეთოდები ფსიქოლოგიაში, ეს, ახლა უკვე მრავალ მეცნიერებაში რეალიზებული, გარემოება ასეთნაირად გამოთქვა: "ამა თუ იმ თანამედროვე მეცნიერების მეცნიერული სიმწიფის შესახებ შეიძლება ვიმსჯელოთ იმ ზომით, რა ზომითაც ის იყენებს მათემატიკურ მეთოდს".

როგორც ვხედავთ, მათემატიკა არა მარტო სინამდვილის შემეცნების, ამასთან ღრმად და ზუსტად ასახვის უძლიერესი და გარკვეულად, ფორმალური საშუალებაა, არამედ ის წარმოადგენს, აგრეთვე, მეცნიერების განვითარების ისეთ სფეროს, რომელიც მისი გნოსეოლოგიური სიმწიფის გამოხატულებაა და ამდენად წარმოადგენს თვით

მეცნიერების მეცნიერული სიმწიფის კრიტერიუმსაც.

მეორეს მხრივ, ძალაგებია, რომ ასეთი ახსნა-განმარტება პირობითი, არასაკმარისი ხასიათისაა, ვინაიდან ის ეყრდნობა გარკვეულ თვალსაზრისს, რომლის მიხედვითაც მათემატიკური შე-მეცნება წარმოადგენს ჩვენს ცნობიერებაში სინამდვილის რაოდე-ნობრივი მხარის ასახვას, მაგრამ თანამედროვე მათემატიკის, მათ შორის, ისეთი აბსტრაქტული დარგით ჩამოყალიბებულ თეორიათა თითქმის ტოტალური გამოყენებადობის პირობებში, ასეთ დებულე-ბას განსაკუთრებული დასაბუთება ესაჭიროება.

მათემატიკის არაჩვეულებრივმა გამოყენებადობამ, თუ აშკარა ონტოლოგიური სკეპტიციზმი არა, უკეთეს შემთხვევაში, განცვიფრება და უილაჯობა გამოიწვია ბევრ მკვლევარში, გან-საკუთრებით, თანამედროვე ფიზიკაში მათემატიკურად გამოხატულ ჰიპოთეზათა წარმოუდგენელი გამართლების ფაქტებთან დაკავშირე-ბით. შემთხვევითი არაა, რომ სწორედ ა.აინშტაინმა, რომელმაც, როგორც ამბობენ, თითქმის "მათემატიკური ფანქრის წვერზე" შექმ-ნა ფარდობითობის თეორია, რომელიც შემდგომში დაადასტურა ექსპე-რიმენტმა, ყველაზე ტიპიურად და ეფექტურად გამოხატა აღნიშნული განცვიფრება, მერე კი აღფრთოვანების განცდასთან. მან თავის "გეომეტრია და ცდის" ფურცლებზე განაცხადა: "ჩვენს წინაშე წარ-მოიშვა გამოცანა, რომელიც ასე აწუხებდა ყველა მკვლევარს. რა-ტომაა შესაძლებელი მათემატიკის ასეთი საუცხოო შესაბამისობა რეალურ საგნებთან, მაშინ როცა ის თვით წარმოადგენს მხოლოდ ადამიანური აზრის ქმნილებას, ყოველგვარი ცდისაგან დამოუკი-დებელს? შეუძლიან თუ არა ადამიანის გონებას ყოველგვარი ცდის გარეშე, მხოლოდ და მხოლოდ მსჯელობის საშუალებით, აღმოაჩინოს არსებულ საგანთა საფუძველი?"

თუმცა რომ დავანებოთ ა.აინშტაინის აქ გამოთქმულ იდეალისტურ შეხედულებას მათემატიკური მეცნიერების შესახებ, მაინც ძალაში რჩება საკითხი, როგორაა შესაძლებელი მნიშვნელოვნად შინაგანი, აბსტრაქტული გზით განვითარებადი მათემატიკის თეორიის ყოვლისმომცველი გამოყენება.

ამასთან დაკავშირებით გვიჩნდება სურვილი გავიხსენოთ აქვე დიდი ფიზიკოსის ჰაინრიხ ჰერცის ცნობილი გაკვირვებაც, აღნიშნული მათემატიკის გამოყენებადობის მეტად ღრმა თავისებურებაზე მითითებით: "ძნელია თავი გაითავისუფლო იმ გრძნობიდან, რომ თვითონ ეს მათემატიკური ფორმულები არსებობენ თავისთავად და აქვთ საკუთარი გონება, რომ ისინი ჩვენზე - მათ შემქმნელებზე უფრო ბრძენნი არიან და რომ ჩვენ მათგან შეგვიძლია მივიღოთ იმაზე მეტი, ვიდრე თავიდანვე მათში იყო ჩადებული" [10, 28].

თანამედროვე მეცნიერების წარმომადგენლები სულ სხვადასხვანაირად აღიქვამენ მათემატიკის ამ განსაკუთრებულ ეფექტიურ ძალას: ერთნი ცდილობენ მიუთითონ მათემატიკის აბსტრაქტულ ემპირიებათაგან ობიექტურად რეალური სამყაროსაკენ მიმავალ ხიდებზე, სხვანი კი მას იყენებენ როგორც საფუძველს მათემატიკის სრულიად განთავისუფლებისა ობიექტური რეალობისაგან, ანუ მათემატიკას მიიჩნევენ აზრის საკუთარ, იმანენტურ, წმინდა ქმნილებად. ასე მაგალითად, მორის კლაინის წიგნში "მათემატიკა. განსაზღვრულობის დაკარგვა", რომელიც თავიდან ბოლომდე გამსჭვალულია მათემატიკის შემეცნებითი მნიშვნელობისა და მისი ლოგიკური საფუძვლების ძიების პრობლემისადმი სკეფსისით, ამავე დროს ჩამოყალიბებული სიცხადითაა წარმოდგენილი ამ მიმართულებით არსებული სხვადასხვა კონცეფციები, მათ შორის, ისეთი გავრცელებულიც,

რომლის მიხედვით, თანამედროვე ფიზიკას ნამდვილად ხელთ აქვს მხოლოდ განტოლებები, მაგრამ არ იცის თუ რა რეალობაა მათ მიღმა და მათზე დაყრდნობილი ფიზიკური ექსპერიმენტი ხშირად მაინც არღვევს პროგნოზულ შედეგს.

მათემატიკის ტოტალურ გამოყენებადობას ახსნა სჭირდება და მათემატიკის ასეთ ცენტრალურ ქნოსეოლოგიურ ამოცანას, ჩვენ ვ.ნ.ტროსტნიკოვთან ერთად [10], ფარდობითობის თეორიის შემოქმედის ზემოთ მოყვანილ განცხადებასთან დაკავშირებითა და მისივე პატივისცემით, ვუწოდოთ "აინშტაინის ამოცანა". რაც შეეხება საერთოდ მათემატიკურ იდეალიზმს, მან მეცნიერების და მეცნიერებათა შორის კავშირების თანამედროვე არაჩვეულებრივი განვითარების პირობებში არამცთუ არ დათმო თავისი პოზიცია, შექმნილი ჯერ კიდევ პლატონის მიერ, არამედ, პირიქით, მათემატიკის არაჩვეულებრივად ფართო გამოყენება გაიხადა ძირითად საფუძვლად თავისი თვალსაზრისის უფრო ძლიერად და ტიპიურად გამოსახატავად, მაგრამ მის ამ ორთოდოქსალობას მნიშვნელოვნად უპირისპირდება მათემატიკური მოღვაწეობის განვითარების მანქანური სტადია.

ჩვენს შემდგომ გამოკვლევაში შევეცდებით დასმულ პრობლემებზე პასუხი გავცეთ ძირითადად რაოდენობის კატეგორიის [illegible] ანალიზისა და მათემატიკური აბსტრაქციის ბუნების გარკვევის საფუძველზე.

შემოვიდა 20.IV.1987

მათემატიკის დაფუძნებისა
და მეთოდიკის კათედრა.

ლიტერატურა

1. Сб. "Воспоминания о Марксе и Энгельсе", М., 1956.
2. ლ.ბოკერია, მათემატიკის საგანი და მეთოდი, თბ., 1955.
3. И.А.Акчурин, М.Ф.Веденов, Ю.В.Сачков. Сб.статей "Познавательная роль математического моделирования", Серия "Философия", № 8, 1966.
4. Н.Бурбаки. Очерки по истории математики. М., И.Л., 1963.
5. Б.В.Гнеденко. "Знание", серия "Математика, кибернетика", № I, 1970.
6. М.Клайн. Математика. Утрата определенности. М., "Мир", 1964.
7. Математика в современном мире. М., "Мир", 1967.
8. А.Г.Рыжков. Сб.статей "Гносеологическое значение системно-структурного анализа". Саратовский университет, 1968.
9. П.Х.Самородницкий. Спроба філософського аналізу проблеми визначення предмета математики. В: науковий збірник: "Философськи проблеми сучасного природознавства", вып. 13. Вид-во Київського університету, 1968.
10. В.Н.Тростников. Загадка Эйнштейна, "Знание", серия "Математика, кибернетика", № 6, 1971.
11. Философская энциклопедия, т.3, М., 1964.

М.Н.Чичинадзе

ПРОБЛЕМА ОНТОЛОГО-ГНОСЕОЛОГИЧЕСКОЙ СУЩНОСТИ МАТЕМАТИКИ

Р е з ю м е

В работе предпринята попытка определения основных аспек-тов анализа проблемы и ее современного состояния.

В связи с выявлением неудовлетворительного состо ния проблемы делается заключение, что для ее успешного решения необходим дальнейший углубленный анализ категории количест-ва.

Целью последующих исследований является попытка решения проблемы на основе осуществления такого анализа и изучения сущности математической абстракции.

M.V.Chichinadze

THE PROBLEM OF ONTO-GNOSEOLOGICAL ESSENCE OF MATHEMATICS

Summary

An attempt is made to determine the basic aspects of the analysis of the given problem and its state today.

As the problem is inadequately studied, the necessity of carrying out a thorough analysis of the category of quantity is concluded in order to achieve a successful solution.

The aim of subsequent research is to try to solve the problem on the basis of such analysis and study of the essence of mathematical abstraction.

СОДЕРЖАНИЕ

შ ი ნ ა ა რ ს ი

CONTENTS

Редактор издательства Л.Абуашвили

Подписано в печать 28.II.88
УЭ 01744 Бумага 60 x 84
Усл.печ.л. 21,25 Уч.изд.л. I0
Тираж 300 Заказ 45 Цена 2 р.

Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И.Чавчавадзе, I4
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის გამზირი, 14.
Типография Тбилисского университета,
380028, Тбилиси, пр. И.Чавчавадзе, I.
თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,
თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის გამზირი, 1.