თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского университета
Proceedings of Tbilisi University
354

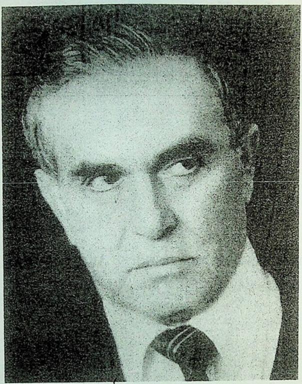
ISSN 0376-2637

მათემატიკა. მექანიკა. ასტრონომია

Математика. Механика. Астрономия

Mathematics. Mechanics. Astronomy

34-35



ეძღვნება ანდრო ბიწაძის დაბადების 90 წლისთავს
Посвящается 90-летию со дня рождения А.В. Бицадзе
To A.V. Bitsadze's 90th birth anniversary

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
TBILISI UNIVERSITY PRESS

Труды Тбилисского университета
т. 354

Математика ✧ Механика ✧ Астрономия

34-35

Тбилиси 2005

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского университета
Proceedings of Tbilisi University
ტ. 354 v.

მათემატიკა ✧ მექანიკა ✧ ასტრონომია

Mathematics ✧ Mechanics ✧ Astronomy

34-35

თბილისი 2005 Tbilisi

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
*Труды Тбилисского государственного
университета им. Ив. Джавахишвили*
Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University
345
УДК 51 (479. 22) (092)

АКАДЕМИК НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ МУСХЕЛИШВИЛИ

И. Н. Векуа

Николай Иванович Мусхелишвили родился в г. Тбилиси 16 февраля 1891 года. Он получил превосходное домашнее воспитание. Мать Николая Ивановича, Дария Александровна, широко образованная по тому времени женщина, сама руководила воспитанием своих детей, обучала их русскому и иностранным языкам. Отец Николая Ивановича, Иван Леванович Мусхелишвили – военный инженер и артиллерийский офицер – хорошо знал математику и старался привить любовь и вкус к ней своим детям. По-видимому, это обстоятельство в известной мере определило наклонности его сыновей.

Николай и Александр Мусхелишвили увлекались математикой, будучи еще гимназистами. Сам Николай Иванович высоко оценивает роль отца, считая его своим первым учителем математики.

Среднее образование Николай Иванович получил в Тбилиси, где окончил классическую гимназию. В гимназии он был одним из первых учеников и проявлял особенные способности в математике. После окончания гимназии в 1909 году Николай Иванович поступил на физико-математический факультет Петербургского университета. По окончании университета (1914г.) он был оставлен при кафедре механики для подготовки к профессорскому званию. В то время кафедрой механики руководил профессор Д. К. Бобылев, находившийся в преклонном возрасте и уже не ведший научную работу, фактическим же руководителем являлся Гурий Васильевич Колосов – автор известной работы «Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости». В этой работе, вышедшей в 1909 году, Колосов дал замечательные формулы, выражающие поля смещений и напряжений при плоско деформированном и плоско напряженном состоянии равновесия посредством аналитических функций от одной комплексной переменной. Эта тематика заинтересовала и Николая Ивановича Мусхелишвили. В 1915 году была опубликована первая работа Н. И. Мусхелишвили «О равновесии упругих круглых дисков», написанная совместно с Г. В. Колосовым [I]. В этой работе было получено явное решение основных краевых задач плоской теории упругости для круговой области. В дальнейшем, продолжая систематические исследования в этом направлении, Н. И. Мусхелишвили опубликовал серию работ, посвященных различным краевым задачам плоской теории упругости и другим проблемам математической физики. В 1919 году в Известиях Российской Академии наук печатается его труд [4], посвященный изучению свойств решений бигармонического уравнения. В 1922 году отдельной книгой выходит другая крупная работа Н. И. Мусхелишвили [5], посвященная применениям интеграла типа Коши к проблемам математической физики. Используя свойства аналитических функций комплексной переменной, Мусхелишвили получил эффективные решения целого ряда краевых задач, которые ранее считались недоступными.

Н. И. Мусхелишвили много занимался также педагогической работой. Вначале он преподавал высшую математику и механику в Петроградском университете и некоторых других высших технических учебных заведениях.

В 1920 году Николай Иванович возвратился в Тбилиси, и с тех пор его научная, педагогическая и общественная деятельность непрерывно протекает в этом городе. В 1920 году он был приглашен на работу в Тбилисский университет, созданный вскоре после Великой Октябрьской революции (1918 г.), Здесь он присоединился к группе математиков (в нее входили А. М. Размадзе, А. К. Харадзе и Г. Н. Николадзе), обеспечившей развитие научных исследований по основным направлениям математики и механики, а также преподавание физико-математических дисциплин на высоком уровне. Физико-математический факультет Тбилисского университета становится в эти годы кузницей квалифицированных кадров.

Под непосредственным руководством Н. И. Мусхелишвили и под влиянием научных идей, развитых в его работах, в Грузии выросла большая группа ученых и сложилась тбилисская математическая школа. Проблематика тбилисской математической школы, в первый период связанная главным образом с задачами теории упругости, впоследствии постепенно расширялась и распространялась на ряд новых направлений. Особенно следует отметить развитие работ по сингулярным интегральным уравнениям, краевым задачам теории аналитических функций и дифференциальным уравнениям эллиптического типа.

Н. И. Мусхелишвили внес значительный вклад в дело подготовки высококвалифицированных инженерных кадров Закавказья: научная и педагогическая деятельность Николая Ивановича не ограничивается рамками университета, он принимает активное участие в работе Тбилисского политехническсго института, где читает курсы теоретической механики и теории упругости.

В течение длительного периода Н. И. Мусхелишвили занимал ряд руководящих должностей в высших учебных заведениях Тбилиси. В разное время он был деканом физико-математического и политехнического факультетов Тбилисского университета, а также проректором по учебной и научной части Тбилисского политехнического института. Около 40 лет Николай Иванович заведует кафедрой механики в Тбилисском университете.

Велика заслуга Н. И. Мусхелишвили в деле организации и развития Грузинской Академии наук, созданной в 1941 году на базе Грузинского филиала АН СССР. Николай Иванович – бессменный Президент Грузинской Академии наук с момента ее основания. Находясь на этом посту, Н. И. Мусхелишвили оказал большое влияние на развитие всей науки в Грузии. Будучи человеком широких научных и общественных интересов, Николай Иванович способствует развитию всех отраслей научного знания. В Академии наук Грузии представлены все основные области современной науки как физико-математического и естественного профилей, так и гуманитарного направления.

Научные работы Н. И. Мусхелишвили получили широкое признание в Советском Союзе и за границей. В 1933 году Николай Иванович был избран членом-корреспондентом АН СССР, а в 1939 – действительным членом (академиком) этой Академии. В 1941 году он избирается действительным членом и Президентом Академии наук Грузии. Николай Иванович является также иностранным членом Болгарской и Польской академий наук.

Н. И. Мусхелишвили принадлежит свыше 80 научных работ. Его труды оказали огромное влияние на дальнейшее развитие теории упругости, дифференциальных и интегральных уравнений, математической физики. На основе методов, развитых Николаем Ивановичем, написано громадное количество работ. Его результаты используются при решении различных технических задач. Фундаментальная монография Н. И. Мусхелишвили «Некоторые основные задачи математической теории упругости» [35], опубликованная в 1933 году, с тех пор выдержала еще три издания. Другая его монография «Сингулярные интегральные уравнения» [33], напечатанная в 1946 году, выходит теперь вторым изданием. Обе эти монографии являются настольными книгами специалистов, занимающихся вопросами теории упругости, краевых задач аналитических функций и сингулярных интегральных уравнений. Эти работы были в свое время удостоены Сталинских премий и переведены на иностранные языки. Переводы этих книг были встречены в кругах иностранных ученых восторженно. На страницах ряда иностранных научных и реферативных журналов помещены рецензии, в которых этим монографиям дана исключительно высокая оценка. Ниже приводятся выдержки из рецензии известного английского механика, профессора Р. Хиля, опубликованной в английском журнале «Nature» (т. 174. № 4433,

1954) под заголовком «Веха в теории упругости». «Появление этого перевода (имеется в виду перевод монографии «Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения, плоская теория упругости, кручение и изгиб». – **И. В.**), превосходного во всех отношениях, является событием первостепенной важности... Мусхелишвили и другие (имеются в виду советские ученые. – **И. В.**) показали, что эти общие решения (комплексные представления полей смещений и напряжений) имеют не только теоретический интерес, но они имеют значительные преимущества в ряде граничных задач в сравнении с общепринятыми методами...

Сочинения Н. Мусхелишвили не могут не произвести весьма яркого впечатления на каждого читателя ясностью изложения прекрасным стилем и скрупулезным вниманием к деталям. Нигде не встречаются небрежности (а труды содержат более чем 1000 страниц), каждое существенное место четко объясняется; изложение всюду ведется на высоком уровне даже в приложениях». В заключение рецензент отмечает: «Можно лишь сожалеть о том, что точка зрения автора является точкой зрения математика, занимающегося механикой. Вопрос не охвачен во всей широте: освещен один аспект. Но как великолепно он решен!».

Аналогичные отзывы имеются и во многих других рецензиях.

Н. И. Мусхелишвили ведет большую общественную и государственную работу. Он принимает активное участие в общественной жизни страны. Николай Иванович – депутат всех созывов Верховного Совета СССР. В течение длительного периода он был председателем грузинского Общества по распространению научных и политических знаний. За выдающиеся заслуги перед государством Н. И. Мусхелишвили награжден тремя орденами Ленина, а также другими орденами и медалями. В 1945 году ему было присвоено звание Героя Социалистического Труда.

Н. И. Мусхелишвили деятельно участвует в работе Академии наук СССР и ряда всесоюзных организаций. Он является членом Президиума АН СССР, председателем Национального Комитета советских механиков, членом Комитета по ленинским премиям и Высшей аттестационной комиссии. Н. И. Мусхелишвили – член ряда международных научных объединений; как представитель советской науки он принимает участие в работе многих международных научных съездов и конференций.

Николай Иванович – автор ряда учебников, изданных на грузинском и русском языках. Особенно широко известен его учебник аналитической геометрии. Этот учебник неоднократно переиздавался, он переведен на китайский язык.

КРАТКИЙ ОЧЕРК НАУЧНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ*

Научные работы Н. И. Мусхелишвили посвящены следующим четырем основным проблемам механики и математики**: 1) плоская задача теории упругости, 2) кручение и изгиб однородных и неоднородных брусьев, 3) краевые задачи для гармонических и бигармонических уравнений и 4) сингулярные интегральные уравнения и краевые задачи для аналитических функций.

I. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

Большой цикл работ Н. И. Мусхелишвили посвящен плоской задаче теории упругости. Можно сказать без преувеличения, что благодаря трудам Николая Ивановича эта важная область механики приобрела в известном смысле завершенный вид. В настоящее время основные задачи плоской теории упругости не только решены теоретически, но и доведены до той степени разработанности, когда полученные теоретические результаты можно прилагать непосредственно к решению практических задач.

Предварительно напомним некоторые общие факты, на которых базируются эти исследования.

§ 1. Комплексное представление полей смещений и напряжений плоской задачи теории упругости

Изучаемый в работах Н. И. Мусхелишвили широкий круг проблем математической физики тесно связан с классом гармонических и бигармонических функций двух независимых переменных. Семейство таких функций, как известно, выражается посредством простых формул через аналитические функции одного комплексного аргумента $z = x + iy$. Это обстоятельство позволило Н. И. Мусхелишвили в своих исследованиях широко применить классический аппарат теории аналитических функций.

1. Комплексное представление решений уравнения Лапласа

---

* Рамки и характер этой брошюры не позволяют полно изложить содержание многочисленных научных работ Н. И. Мусхелишвили. Мы не имеем возможности вдаваться в подробности и останавливаться на всех деталях доказательств. Однако, несмотря на это, мы все же сделали попытку осветить в кратких чертах основные направления и главнейшие результаты научных исследований Н. И. Мусхелишвили. – **И. В.**

** В настоящем очерке даны лишь основные результаты Н. И. Мусхелишвили по этим направлениям; кратко изложены общие методы изучения ряда основных, типичных задач; к сожалению, почти не освещен вопрос применения этих методов при решении конкретных практических задач. Читатель, желающий получить более основательное представление об этой важной стороне работ Н. И. Мусхелишвили, а также относительно всех других затрагиваемых ниже вопросов, должен обратиться к монографиям Н. И Мусхелишвили ([33], [35]). – **И. В.**

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

проще всего получить, если записать его в комплексной форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}\partial z}=0\,, \qquad (1)^*$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ и $\dfrac{\partial}{\partial z}$ – операции комплексного дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Из (1) получим, что всякая гармоническая функция в некоторой области D плоскости комплексной переменной $z = x + iy$ имеет вид:

$$u=\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}, \qquad (2)$$

где Φ – произвольная аналитическая функция от z в области D.

От функции Φ можно потребовать, чтобы она принимала вещественное значение в некоторой произвольно фиксированной точке z_0 области D

$$\Phi(z_0)=\overline{\Phi(z_0)}.$$

(В качестве z_0 здесь и во всех аналогичных случаях в дальнейшем можно взять начало координат $z = 0$). В таком случае входящая в (2) аналитическая функция Φ определяется однозначно посредством заданной гармонической функции u.

Бигармоническое уравнение $\Delta\Delta u=0$ можно записать в форме

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \bar{z}^2\partial z^2}=0\,.$$

Отсюда легко получается следующая формула:

$$u=z\overline{\Phi_1(z)}+\bar{z}\Phi_1(z)+\Phi_0(z)+\overline{\Phi_0(z)}\,, \qquad (3)$$

где Φ_0 и Φ_1 – произвольные аналитические функции от z в области D.

Эта формула, по-видимому, впервые была получена французским математиком Э. Гурса.

В формуле (3) функции Φ_0 и Φ_1 можно подчинить условиям:

$$\Phi_1(z_0)=0, \quad \Phi_1'(z_0)=\overline{\Phi_1'(z_0)}, \quad \Phi_0(z_0)=\overline{\Phi_0(z_0)}\,.$$

---

* Здесь и в дальнейшем верхняя черта обозначает переход к сопряженному значению. – И. В.

Тогда пара аналитических функций Φ_0, Φ_1 выражается однозначно посредством заданной бигармонической функции.

В дальнейшем мы все время будем предполагать, что рассматриваемые гармонические и бигармонические функций однозначны и непрерывны в области D. Тогда входящие в формулы (2) и (3) аналитические функции будут голоморфны в области, если последняя односвязна. В случае многосвязной области эти функции, вообще говоря, будут многозначными. Нетрудно выяснить природу их многозначности, но здесь на этом мы не останавливаемся.

2. Переходим теперь к уравнениям плоской задачи теории упругости. Их решения, как увидим ниже, также выражаются посредством аналитических функций.

Под плоской деформацией упругой среды подразумевается такая деформация, когда частицы среды перемещаются параллельно некоторой плоскости и, кроме того, во всех параллельных ей плоскостях картина деформации одинакова. Если возьмем указанную плоскость в качестве плоскости Oxy декартовой системы координат, то компоненты вектора смещения будут иметь вид:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0,$$

т. е. перемещения перпендикулярно плоскости Oxy равны нулю, а остальные компоненты u и v – функции только двух координат x и y. В таком случае система уравнений теории упругости в компонентах вектора смещения принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} \mu\Delta u+(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}=0,\\ \mu\Delta v+(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}=0,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где λ и μ – постоянные Ламе,

$$\Theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial(u+iv)}{\partial z}+\frac{\partial(u-iv)}{\partial\bar{z}}. \tag{5}$$

Для простоты мы ограничиваемся рассмотрением однородной системы уравнений. Это соответствует предположению, что объемные силы не действуют на упругую среду. При наличии действия объемных сил мы будем иметь систему уравнений с правыми частями, отличными от нуля. Решения ее можно получить, прибавляя к общему решению системы (4) некоторое частное решение неоднородной системы. В практических задачах это частное решение обычно всегда можно построить в явной форме. В общем же случае, т. е. для произвольно заданной системы объемных сил, частное решение выражается в квадратурах [35], [47].

Из (4) следует, что $\Delta\Theta=0$. Следовательно, согласно формуле (2), можем написать

$$\Theta = \frac{1}{\lambda+\mu}\left[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}\right], \qquad (6)$$

где φ – аналитическая функция от z.

Система уравнений (4) запишется в следующей комплексной форме:

$$2\mu\frac{\partial^2(u+iv)}{\partial z\partial\bar{z}}+(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial\bar{z}}=0 .$$

Отсюда имеем

$$2\mu\frac{\partial(u+iv)}{\partial z}+(\lambda+\mu)\,\Theta=\varphi_1(z)\,, \qquad (7)$$

где $\varphi_1(z)$ – некоторая аналитическая функция от z.

Рассматривая также комплексное сопряженное равенство, а затем складывая их, в силу (5) и (6) получим

$$2(\lambda+2\mu)\Theta \equiv (\chi+1)\left[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}\right]=\varphi_1(z)+\overline{\varphi_1(z)},$$

где

$$\chi=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}=3-4\sigma\,(\sigma - \text{постоянная Пуассона}). \qquad (8)$$

Следовательно,

$$\varphi_1=(\chi+1)\,\varphi'(z)+ic_0 \quad (c_0 - \text{веществ. пост.}). \qquad (9)$$

В силу (6) и (9) из равенства (7) легко получим следующую формулу, выражающую поле смещений плоско деформированного состояния упругой среды:

$$2\mu(u+iv)=\chi\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}, \qquad (10)$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – произвольные аналитические функции от $z = x + iy$ области D, занятой упругой средой.

Правая часть равенства (10) не изменится, если функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ подчинить некоторым дополнительным условиям, а именно:

$$\varphi(z_0)=0 \text{ или } \psi(z_0)=0, \qquad (11)$$

где z_0 – некоторая фиксированная точка области D.

При выполнении одного из условий (11) каждому вектору смещения (u, v), заданному в области D, соответствует вполне определенная пара аналитических функций (φ, ψ).

Следует заметить, что формула (10) выражает также (усредненное по толщине) поле смещений в случае обобщенного плоско напряженного состояния упругой пластинки ([35], § 26). Необходимо только в этом случае положить

$$\chi = \frac{3-\sigma}{1+\sigma}.$$

3. Поле напряжений плоско деформированного состояния выражается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \\ Y_y &= \lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \\ X_y &= Y_x = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \\ Z_z &= \lambda\Theta, \ Z_x = Z_y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Равенства (12) можно записать в комплексной форме так:

$$\left.\begin{aligned} X_x + Y_y &= 2(\lambda+\mu)\left[\frac{\partial(u+iv)}{\partial z} + \frac{\partial(u-iv)}{\partial \overline{z}}\right], \\ Y_y - X_x + 2iX_y &= -2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left[2\mu(u-iv)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Пользуясь формулой (10), из (13) получим выражение поля напряжений через аналитические функции:

$$\left.\begin{aligned} X_x + Y_y &= \left(2\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right) \equiv 4\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z)\right], \\ Y_y - X_x + 2iX_y &= 2\left(\overline{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\right). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Формулы (10) и (14) впервые были получены Г. В. Колосовым в 1909 г.* Рассуждения его мы воспроизвели выше с некоторыми видоизменениями. Впоследствии новый вывод этих формул и строгое их обоснование были даны Н. И. Мусхелишвили [35].

Иногда формулы (14) удобно записывать в виде:

$$\left.\begin{aligned} X_x + Y_y &= 4\,\mathrm{Re}\left[\Phi(z)\right], \\ Y_y - X_x + 2iX_y &= 2\left(\overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z),\right) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где

---

* Аналогичные формулы были получены, вероятно, еще раньше (около 1900 г.) С. А. Чаплыгиным. Они найдены в посмертных бумагах и впервые опубликованы в полном собрании его сочинений (Гостехиздат, М. – Л., 1950, т. III, стр. 306 – 323). Эти формулы и их простейшие применения были получены значительно позже в работах ряда зарубежных ученых, которые, по-видимому, не были знакомы с результатами Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили. – **И. В.**

$$\varphi'(z) = \Phi(z), \ \psi'(z) = \Psi(z).$$

Нетрудно выяснить, что по заданному полю напряжений аналитическая функция Ψ определяется однозначно, а Φ – с точностью до аддитивной мнимой постоянной. Следовательно, для того, чтобы пара функций (Φ, Ψ) определялась однозначно по заданному полю напряжений, достаточно положить

$$\Phi(z_0) = \overline{\Phi(z_0)} \ (z_0 - \text{фикс. точка}).$$

При нулевом значении поле напряжений ($X_x = 0$, $X_y = 0$, $Y_y = 0$), очевидно,

$$\Phi = iC, \qquad \Psi = 0$$

и, следовательно,

$$\varphi = i\,Cz + \alpha + i\beta, \ \Psi = \gamma + i\delta,$$

где C, α, β, γ и δ – произвольные вещественные постоянные. Подставляя эти выражения в (10), получим поле смещений, соответствующее произвольному жесткому (плоскому) перемещению упругой среды. Это означает, что по заданному полю напряжений соответствующее поле смещений определяется с точностью до аддитивного тривиального поля смещений.

Для того, чтобы существовало взаимно однозначное соответствие между полем напряжений и полем смещений, достаточно потребовать, чтобы входящие в представление поля смещений функции φ и ψ удовлетворяли условиям:

$$\varphi(0)=0, \qquad \varphi'(0)=\overline{\varphi'(0)}, \qquad \psi(0)=0. \tag{16}$$

Здесь предполагается, что начало координат ($z = 0$) принадлежит рассматриваемой области. Это допущение, очевидно, всегда можно реализовать без ущерба для общности рассуждений.

4. Мы будем рассматривать непрерывные деформации упругой среды, т. е. будем предполагать, что компоненты тензора напряжений и смещений – непрерывные однозначные функции в рассматриваемой области. При этих предположениях аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, фигурирующие в формулах (10) и (14), могут быть как однозначными, так и многозначными в рассматриваемой области D. Характер многозначности функций φ и ψ зависит только от топологической структуры области D.

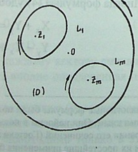


Рис. 1.

Если область D односвязна, то функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ голоморфны в D.

Пусть D – конечная многосвязная область (рис. 1). Предположим, что граничные контуры $L_1..., L_m, L_0$ – простые замкнутые кривые Жордана, не имеющие общих точек, а L_0 содержит внутри себя контуры $L_1..., L_m$. Возьмем произвольные фиксированные точки $z_1, z_2,..., z_m$ соответственно внутри контуров $L_1, L_2,..., L_m$. Тогда φ и ψ будут многозначными функциями следующего вида:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=-\frac{1}{2\pi(\chi+1)}\sum_{k=1}^{n}(X_k+iY_k)\ln(z-z_k)+\varphi_*(z),\\ \psi(z)&=\frac{\chi}{2\pi(\chi+1)}\sum_{k=1}^{n}(X_k-iY_k)\ln(z-z_k)+\psi_*(z),\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где $\varphi_*(z)$, $\psi_*(z)$ – произвольные голоморфные функции в области D; X_k, Y_k ($k = 1, 2,..., m$) – вещественные постоянные, имеющие следующий механический смысл: вектор (X_k, Y_k) – главный вектор сил напряжений, приложенных к контуру L_k ($k = 1, 2,..., m$).

Рассмотрим теперь случай, когда область D бесконечна. В этом случае контур L_0 отсутствует, а функции φ и ψ вблизи бесконечно удаленной точки имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=-\frac{X+iY}{2\pi(\chi+1)}\ln z+\varphi_{**}(z),\\ \psi(z)&=\frac{\chi(X-iY)}{2\pi(\chi+1)}\ln z+\psi_{**}(z),\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где φ_{**} и ψ_{**} голоморфны в рассматриваемой области,

$$X=\sum_{1}^{m}X_k,\qquad Y=\sum_{1}^{m}Y_k,$$

т.е. (X, Y) – главный вектор всех сил напряжений, действующих на совокупность граничных контуров области.

Вывод важных формул (17) и (18) был дан Н. И. Мусхелишвили ([35], §§ 35, 36).

Поведение функций φ_{**} и ψ_{**} на бесконечности зависит от характера распределения напряжений вблизи бесконечности.

Сделаем естественное предположение, что поле напряжений ограничено в окрестности бесконечно удаленной точки. Тогда в формулах (18) слагаемые φ_{**} и ψ_{**} будут иметь вид:

$$\varphi_{**}=\Gamma z+\psi_0(z),\ \psi_{**}=\Gamma' z+\psi_0(z), \tag{19}$$

где Γ и Γ' – комплексные постоянные, а φ_0 и ψ_0 – голоморфные функции в области D, ограниченные в окрестности бесконечно удаленной точки. Постоянные Γ и Γ' имеют определенный механический смысл.

Если дополнительно потребуем, чтобы и смещения оставались ограниченными на бесконечности, то для этого должны быть соблюдены следующие условия:

$$X = Y = 0, \quad \Gamma = \Gamma' = 0.$$

§ 2. Метод конформных отображений

В своих работах Н. И. Мусхелишвили использует комплексные представления полей смещений и напряжений для решения разнообразных краевых задач. Благодаря наличию в этих формулах аналитических функций применение аппарата классической теории функций комплексной переменной позволяет получить эффективное решение значительного числа конкретных задач, представляющих интерес для технических приложений. В этом параграфе мы изложим некоторые результаты Н. И. Мусхелишвили, полученные при помощи метода конформных отображений.

1. Пусть дана ограниченная односвязная область D. С помощью аналитической функции $z = w(\zeta)$ она может быть конформно отображена на единичный круг $[\zeta] < 1$. Как известно, функция $w(\zeta)$ однозначно определяется, если потребовать выполнение условий

$$\omega(0) = 0, \quad \omega'(0) > 0. \tag{1}$$

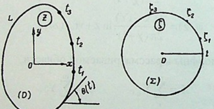


Рис. 2.

Вместо этих условий можно потребовать и другие эквивалентные им условия, в частности, чтобы три заданные фиксированные точки t_1, t_2, t_3 границы L области D переходили в три фиксированные точки ζ_1, ζ_2, ζ_3 единичной окружности (рис. 2). В дальнейшем будем предполагать, что граница L области D – простая замкнутая кривая Жордана, которая в каждой граничной точке t имеет касательную, причем угол $\Theta(t)$ наклона касательной является функцией, непрерывной в смысле Гельдера.

Так как

$$\varphi(z)=\varphi(\omega(\zeta))=\varphi_0(\zeta), \quad \varphi'(z)=\frac{1}{\omega'(\zeta)}\varphi'_0(\zeta),$$

$$\psi(z) = \psi(\psi(\zeta)) = \psi_0(\zeta),$$

то, согласно (10), поле смещений будет выражено по формуле

$$2\mu(u+iv)=\chi\varphi_0(\zeta)-\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi'(\zeta)}-\overline{\psi_0(\zeta)}. \tag{2}$$

В этой формуле фигурируют произвольные функции $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$, голоморфные внутри единичного круга $|\zeta|<1$.

Допустим, что на границе L области D задано поле смещений, т. е.

$$2\mu\,(u+iv)=f\,(t),\quad t\in L,$$

где f (t) – функция точки t, заданная на границе L области D. Следуя Н. И. Мусхелишвили, эту задачу будем называть второй основной краевой задачей (сокращенно задача II).

Так как $t=\omega(\zeta)$, где ζ – граничная точка единичной окружности, то задача сводится к отысканию внутри единичной окружности Σ пары голоморфных функций φ_0 и ψ_0, удовлетворяющих граничному условию:

$$\overline{\chi\varphi_0(\zeta)}-\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi'_0(\zeta)}-\overline{\psi_0(\zeta)}=f_0(\zeta)\,. \tag{3}$$

Предположим, что φ_0, φ'_0, ψ_0 непрерывны вплоть до окружности. Для этого достаточно принять, что заданная функция $f_0(\zeta)\equiv f(\omega(\zeta))$ имеет по дуге окружности непрерывную производную первого порядка, удовлетворяющую условию Гельдера. Умножим обе части (3) на множители вида $\frac{1}{2\pi i}\zeta^{-n-1}(\zeta\in\Sigma,\ n=0,1,\dots)$ и проинтегрируем. Будем иметь

$$\frac{\chi}{2\pi i}\int_\Sigma\zeta^{-n-1}\varphi_0(\zeta)\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi'_0(\zeta)}\zeta^{-n-1}\ \ d\zeta=c_n\,, \tag{4}$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma\zeta^{-n-1}f_0(\zeta)\,d\zeta\ \ (n=0,1,2,\dots).$$

Здесь мы учли, что $\psi_0(0)=0$ и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma\zeta^{-n-1}\overline{\psi_0(\zeta)}\,d\zeta=0\ \ (n=0,1,\ 2,\dots).$$

Искомая функция $\varphi_0(\zeta)$, голоморфная внутри единичного круга, может быть представлена рядом Тейлора:

$$\varphi_0(\zeta)=a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2+\dots \tag{5}$$

Подставляя это в (4), получим равенства

$$\chi a_n - \sum_{k=1}^{\infty} k A_{n+k} \bar{a}_k = c_n \qquad (n=0, 1, \ldots), \tag{6}$$

где

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \zeta^{-k} \, d\zeta \quad (k=1, 2, \ldots).$$

Итак, задача определения коэффициентов ряда (5) сводится к решению бесконечной системы (6). Определив из этой системы неизвестные a_k, по формуле (5) находим искомую функцию $\varphi_0(\zeta)$. Граничные значения другой искомой функции $\psi_0(\zeta)$ находятся из равенства (3). Значения же ее внутри области можно восстановить по формуле Коши.

2. Фактическое решение бесконечной системы уравнений (6) в общем случае, очевидно, связано с известными трудностями. Однако имеется весьма важный класс областей, когда эта система переходит в конечную систему уравнений.

Следуя Н. И. Мусхелишвили ([35], § 84), рассмотрим случай, когда $\omega(\zeta)$ – полином. Тогда на окружности Σ функция $\dfrac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}$ будет рациональной функцией от ζ. Так как $\omega'(\zeta) \neq 0$ в круге $|\zeta| \leq 1$, то эта функция не имеет полюсов вне Σ, за исключением бесконечно удаленной точки. Поэтому вне Σ имеем разложение вида:

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega}\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)} = b_m \zeta^m + b_{m-1} \zeta^{m-1} + \ldots + b_1 \zeta + b_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{b'_{-t}}{\zeta^t}.$$

Мы применяем, следуя Н. И. Мусхелишвили, обозначение, определяемое формулой

$$\overline{\omega}(\zeta) = \overline{\omega(\bar{\zeta})}.$$

Таким образом,

$$A_k \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \zeta^{-k} d\zeta = \begin{cases} b_{k-1}, \ k = 1, 2, \ldots, m+1 \\ 0, \ k > m+1 \end{cases}$$

и равенства (6) примут вид:

$$\chi a_n - \sum_{k-1}^{m} k b_{n+k-1} \bar{a}_k = c_n. \tag{7}$$

Эти равенства справедливы для всех n, если учесть, что $b_n = 0$ при $n > m$. Система (7) представляет собой конечную линейную систему уравнений, где c_n и b_n – заданные числа. Целое число m зависит только от области.

Если $n>m$, то $b_{n+k-1}=0$ и, следовательно, система (7) дает:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i \chi}\int_\Sigma \frac{f_0(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}}. \tag{8}$$

Если $0 \le n \le m$, то имеем следующую систему специального типа:

$$\left.\begin{array}{l}
\chi a_0 - b_0\overline{a_1} - 2b_1\overline{a_2} - \ldots - m b_{m-1}\overline{a_m} = c_0,\\
\chi a_1 - b_1\overline{a_1} - 2b_2\overline{a_2} - \ldots - m b_m\overline{a_m} = c_1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\chi a_{m-1} - b_{m-1}\overline{a}_1 - 2b_m\overline{a}_2 = c_{m-1},\\
\chi a_m - b_m\overline{a}_1 = c_m.
\end{array}\right\}. \tag{9}$$

Таким образом, мы имеем $m+1$ комплексных уравнений с $m+1$ комплексными неизвестными величинами $a_0, a_1, \ldots, a_m$. На основании теоремы единственности решения задачи II нетрудно доказать, что эта система однозначно разрешима.

Следует еще отметить, что и в более общем случае, когда $\omega(\zeta)$ –рациональная функция, решение задачи также приводится к конечной системе линейных уравнений ([35], гл. 5).

Изложенный метод годится также для случая бесконечной односвязной области, отображаемой конформно на круг при помощи рациональных функций. Поэтому он позволяет решить широкий круг краевых задач плоской теории упругости ([35], гл. 5; II, III). Практически он может быть применен к случаю любой односвязной области, ибо любую такую область всегда можно приближенно отобразить конформно на круг посредством рациональных функций.

Методы приближенного конформного отображения хорошо разработаны. Имея в виду также наличие современных вычислительных средств, использующих быстродействующие электронные счетные машины, изложенный выше прием следует рассматривать как эффективный способ решения основных краевых задач плоской упругости.

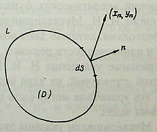


Рис. 3.

3. Совершенно аналогичным приемом решается также краевая задача при заданных на границе напряжениях (сокращенно задача I). Сила напряжения, действующая на элемент дуги ds контура с нормалью n (рис. 3), может быть записана в комплексной форме так ([35], § 32):

$$(X_n + iY_n)ds = -id\{\varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}\}. \qquad (10)$$

Поэтому краевое условие задачи I можно записать в виде

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f \quad (\text{на } L), \qquad (11)$$

где $f = i\int_0^s (X_n + iY_n)ds + c + ic'$ (c и c′ – веществ. пост.).

Эта краевая задача по своему виду совпадает с задачей II при $\chi = -1$ (см. [35], гл. 5, II).

4. Следует заметить, что к краевой задаче вида (11) приводит также первая основная краевая задача для бигармонического уравнения:

$$\Delta\Delta\, u=0 \ (\text{в } D), \qquad (12)$$

$$u=f_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = f_2 \ (\text{на } L). \qquad (13)$$

В самом деле, краевое условие (13), как нетрудно заметить, можно записать еще так:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f \ (\text{на } L), \qquad (14)$$

где f – заданная функция на L, выражающаяся через f_1 и f_2. Представляя теперь искомую бигармоническую функцию по формуле Гурса (1.3), краевое условие (14) приведем к виду (11).

§ 3. Метод интегральных уравнений

В работах Н. И. Мусхелишвили успешно используется также метод интегральных уравнений. Свойства интеграла Коши и других интегральных представлений аналитических функций (например, интеграла типа Коши) позволили Н. И. Мусхелишвили получить интегральные уравнения типа Фредгольма, которые дают возможность изучить вопросы существования и единственности решения для широкого класса краевых задач. Интегральные уравнения Н. И. Мусхелишвили обладают сравнительно простой структурой, их ядра выписываются в явной форме, следовательно, эти уравнения могут быть использованы для численного решения краевых задач.

В работах Н. И. Мусхелишвили указаны два различных способа приведения краевых задач к интегральным уравнениям. Первый из них существенно использует конформное преобразование области на круг и, следовательно, относится к случаю односвязной области. Для второго метода не обязательно использование конформного отображения, он применим к любой многосвязной области.

1. Для определенности будем рассматривать задачу II. Применяя теорему и интеграл Коши, краевую задачу (2.3) можно привести к интегральному уравнению типа Фредгольма. Умножим с этой целью обе части (3) на $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d\zeta}{\zeta - z}$, где $\zeta \in \Sigma$, а точка z лежит внутри Σ. По теореме Коши имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma}\frac{\psi_0(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 0, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma}\frac{\overline{\varphi_0'(\zeta)d\zeta}}{\overline{\omega'(\zeta)}(\zeta - z)} = l(\varphi_0),$$

где $l(\varphi_0)$ – линейный функционал от φ_0, равный

$$l(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi i\,\omega'(0)}\int_{\Sigma}\varphi_0(\sigma)d\sigma \equiv \frac{1}{2\pi i\,\omega'(0)}\int_{\Sigma}\frac{\overline{\varphi_0'(\sigma)d\sigma}}{\sigma} \equiv \frac{\varphi_0'(0)}{\omega'(0)}.$$

Учитывая эти равенства, получим

$$\chi\varphi_0(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma}\frac{\omega(\zeta) - \omega(z)}{\overline{\omega'(\zeta)}(\zeta - z)}\overline{\varphi_0'(\zeta)}\,d\zeta - l(\varphi_0)\omega(z) = F_0(z), \tag{1}$$

где

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma}\frac{f_0(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по z, а затем переходя к пределу, когда z стремится к граничной точке t, получим

$$\chi\varphi_0'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma}\overline{\varphi_0'(\zeta)}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\zeta) - \omega(t)}{\zeta - t}\right]\frac{d\zeta}{\overline{\omega'(\zeta)}} - l(\varphi_0)\,\omega'(z) = F_0'(t). \tag{2}$$

Таким образом, мы имеем интегральное уравнение 2-го рода типа Фредгольма, позволяющее найти граничные значения производной искомой функции φ_0. Определив при помощи этого уравнения φ_0', мы можем выразить квадратурами искомые функции φ_0 и ψ_0, используя интеграл Коши.

Интегральное уравнение (2) было получено впервые Н. И. Мусхелишвили ([17], [35], § 98).

Можно также получить интегральное уравнение для $\varphi_0(t)$. Действительно, учитывая, что $d\zeta = -\zeta^2 d\overline{\zeta}$ и применив к (1) интегрирование по частям, получим

$$\chi\varphi_0(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma}\overline{\varphi_0(\zeta)}\,d_{\zeta}\frac{\zeta^2[\omega(\zeta) - \omega(t)]}{\overline{\omega'(\zeta)}(\zeta - t)} - l(\varphi_0)\omega(z) = F_0(t). \tag{3}$$

Определив из этого уравнения граничные значения φ_0, находим граничные значения другой искомой функции ψ_0 из равенства (2.3). Значения φ_0 и ψ_0 внутри области можно выразить по формуле Коши.

Если положить $\chi = -1$, то получим интегральное уравнение, которое позволяет решать краевую задачу плоского деформированного состояния при заданных контурных напряжениях, а также первую основную краевую задачу (2.13) для бигармонического уравнения.

Предыдущие интегральные уравнения решаются в явном виде, если $\omega(\zeta)$ – рациональная функция. В таком случае эти уравнения приводятся к конечным системам уравнений, указанным в § 2. Таким образом, по эффективности этот метод не уступает методу, изложенному в § 2.

2. Изложенный выше метод относится к случаю конечной или бесконечной односвязной области; непосредственно на случай многосвязной области он не переносится. Как известно, многосвязную область нельзя отобразить взаимно однозначно и конформно на круг. Однако, следуя Н. И. Мусхелишвили и несколько модифицируя предыдущие рассуждения, можно указать другой способ, позволяющий получить интегральные уравнения для случая любой многосвязной области.

Пусть D – многосвязная область, ограниченная простыми замкнутыми кривыми Жордана $L_0, L_1, ..., L_m$ (см. рис. 1). Пусть $z = \omega(\zeta)$ отображает конформно область D на некоторую область G, ограниченную кривыми Γ_0, $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$. В частности, область (G) может совпадать с областью D (например, если в качестве $\omega(\zeta)$ взять просто ζ). В качестве области G можно взять также одну из канонических областей сязности (m + 1). Например, можно считать, что Γ_0 – единичная окружность, а $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_m$ – окружности, лежащие внутри Γ_0, причем центр Γ_0 лежит вне этих окружностей.

В таком случае краевое условие (2.3), после перехода к комплексно сопряженному значению, примет вид:

$$\overline{\chi\varphi_0(\zeta)} - \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\varphi_0'(\zeta) - \varphi_0(\zeta) = \overline{f_0}\,, \quad \zeta \in \Gamma \tag{4}$$

$$(\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_m)\,.$$

Пусть z – произвольная фиксированная точка, лежащая вне G + Г. Умножая обе части этого равенства на $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d\zeta}{\zeta - z}$ и интегрируя по Г, получим

$$\chi\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\varphi_0(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\frac{\varphi_0'(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = g_0(z), \tag{5}$$

где

$$g_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_0(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}\,.$$

Здесь мы учли, что, согласно теореме Коши,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\psi_0(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = 0.$$

Функция $g_0(z)$, очевидно, является заданной и голоморфной вне Г.

Равенство (5) можно переписать так:

$$\frac{\chi}{2\pi i}\int_{\Gamma}\overline{\varphi_0(\zeta)}\,d\ln\frac{\zeta - z}{\bar\zeta - \bar z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\overline{\omega(\zeta) - \omega(t)}}{\overline{\omega'(\zeta)}(\zeta - z)}\,d\varphi_0(\zeta) = g_0(z)\ ,$$

где t произвольная точка на Г.

Пусть точка z стремится к t, оставаясь все время вне G. Тогда, используя граничные свойства интеграла типа Коши, получим:

$$-\chi\overline{\varphi(t)} + \frac{\chi}{2\pi i}\int_{\Gamma}\overline{\varphi(\zeta)}\,d_\zeta\ln\frac{\zeta - t}{\bar\zeta - \bar t} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\overline{\omega(\zeta) - \omega(t)}}{\overline{\omega'(\zeta)}(\zeta - t)}\,d\varphi(\zeta) = g_0^-(t)$$

или, проинтегрировав по частям, будем иметь:

$$-\chi\varphi(t) + \frac{\chi}{2\pi i}\int_{\Gamma}\overline{\varphi(\zeta)}\,d_\zeta\ln\frac{\zeta - t}{\bar\zeta - \bar t} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\varphi(\zeta)\,d_\zeta\frac{\overline{\omega(\zeta) - \omega\, t}}{\overline{\omega'(\zeta)}\,(\zeta - t)} = g_0^-(t)\ , \qquad (6)$$

где $g_0^-(t)$ – предельное значение $g_0(z)$ извне.

Это интегральное уравнение впервые было получено Н. И. Мусхелишвили (в предположении, что $\omega(\zeta) = \zeta$). Оно дает возможность определить граничные значения искомой аналитической функции φ для случая любой многосвязаной области ([18], [19]).

Аналогично получается интегральное уравнение и для краевой задачи, когда на границе заданы компоненты напряжений (задача I). В этом случае необходимо положить $\chi = -1$. Можно вывести подобным путем интегральные уравнения для решения ряда смешанных краевых задач.

Следует иметь в виду, что в случае задачи II в правой части краевого условия (2.3) содержится 2 n вещественных постоянных X_k и Y_k (см. формулу (1.17), которые также подлежат определению. Как уже отмечалось выше, (X_k, Y_k) равен главному вектору сил, приложенных к контуру L_k (k=1, 2,..., n). Поэтому при задании граничных значений компонентов вектора смещений величины X_k, Y_k заранее могут быть не заданы. Они определяются при помощи условий разрешимости интегрального уравнения (6) ($\chi \neq -1$).

Отметим, что к интегральному уравнению (6) могут быть применены численные методы интегрирования. Следовательно, таким путем можно решать практические задачи для случая многосвязной области.

§ 4. Краевые задачи для частного вида областей

Для решения значительного круга практически важных задач в работах Н. И. Мусхелишвили применяются специальные методы, приспособленные к конкретным условиям этих задач. В таких случаях решения задачи обычно выражаются в явной форме при помощи квадратур.

Эти методы применяются, например, при решении разнообразных краевых задач плоской деформации и плоского напряжения упругих тел, заполняющих полупространство. В таких случаях задача сводится к отысканию пары функций (Φ, Ψ), голоморфных, например, в нижней полуплоскости и удовлетворяющих определенным краевым условиям вдоль вещественной оси. Во многих случаях, применяя специальные приемы продолжения этих функций на верхнюю полуплоскость, Н. И. Мусхелишвили сводит решение задач к отысканию одной функции Φ, голоморфной в плоскости с разрезами вдоль вещественной оси и удовлетворяющей определенным краевым условиям на этих разрезах. В ряде случаев эти краевые условия позволяют определить в явной форме функцию Φ.

1. Из многочисленных задач, изученных Н. И. Мусхелишвили таким способом, мы рассмотрим нижеследующую основную смешанную краевую задачу для полуплоскости. Будем считать, что упругая среда находится в нижней полуплоскости. Пусть на вещественной оси имеются отрезки $L_1 \equiv (a_1, b_1), \ldots, L_n \equiv (a_n, b_n)$ (рис. 4).

Пусть $L' = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$, оставшуюся часть вещественной оси обозначим через L''. Предположим, что на L' заданы компоненты смещений u, v, а на L'' – компоненты напряжений – касательная и нормальная силы.

Вспомним формулы:

$$2\mu(u+iv) = \chi\varphi(z) - \overline{z}\,\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)},$$

$$X_x + Y_y = 4\,\mathrm{Re}\,[\varphi'(z)],$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2[\overline{z}\varphi''(z) + \psi'(z)],$$

где φ (z) и ψ (z) голоморфны в нижней полуплоскости, которую обозначим через S^-

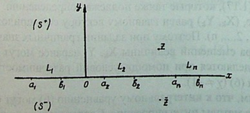


Рис. 4.

Первое уравнение продифференцируем по x, получим

$$2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial u}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\chi\varphi'(z)-\overline{\varphi'(z)}-\overline{z\varphi''(z)}-\overline{\psi'(z)}\,.$$

Обозначая

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u', \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=v',$$

$$\varphi'(z)=\Phi(z), \qquad \psi'(z)=\Psi(z),$$

предыдущие 3 равенства запишем в виде:

$$\left.\begin{aligned}&X_x+Y_y=4\operatorname{Re}[\Phi(z)]\\&Y_y-X_x+2iX_y=2\left[\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)\right],\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$2\mu(u'+iv')=\chi\Phi(z)-\overline{\Phi(z)}-z\overline{\Phi'(z)}-\overline{\Psi(z)}\,. \tag{2}$$

Так как на L' заданы u и v, то, очевидно, будут заданы на L' также u' и v'. Легко заметить, что

$$Y_y-iX_y=\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}+z\overline{\Phi'(z)}+\overline{\Psi(z)}\,. \tag{3}$$

Следовательно, рассматриваемая краевая задача сводится к отысканию двух голоморфных в нижней полуплоскости S^- функций $\Phi(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющих краевым условиям:

$$\chi\Phi(z)-\overline{\Phi(z)}-z\,\overline{\Phi'(z)}-\overline{\Psi(z)}=f_1+if_2 \quad (\text{на } L'), \tag{4}$$

$$\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}+z\,\overline{\Phi'(z)}+\overline{\Psi(z)}=f_1'+if_2 \quad (\text{на } L'), \tag{5}$$

где f_1 и f_2 – функции, заданные на всей вещественной оси.

Для решения этой краевой задачи, следуя Н. И. Мусхелишвили ([35], гл. 6), применим специальный способ продолжения искомых функций.

Определим функцию $\Phi(z)$ в верхней полуплоскости S^+ по формуле (см. рис. 4):

$$\Phi(z)=-\overline{\Phi(\bar{z})}-\bar{z}\,\overline{\Phi'(\bar{z})}-\overline{\Psi(\bar{z})}\,. \tag{6}$$

Таким образом, под $\Phi(z)$ будем понимать в дальнейшем функцию, голоморфную на всей плоскости за исключением, может быть, вещественной оси.

Из (6) легко получим

$$\Psi(z)=-\overline{\Phi(\bar{z})}-\Phi(z)-z\Phi'(z)\,. \tag{7}$$

В силу (7) формулы (2) и (3) принимают вид:

$$Y_y - iX_y = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\,\overline{\Phi'(z)}, \qquad (8)$$

$$2\mu(u' + iv') = \chi\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\,\overline{\Phi'(z)}. \qquad (9)$$

Таким образом, компоненты вектора смещений и напряжений удалось выразить через единственную кусочно голоморфную функцию $\Phi(z)$.

Краевые условия (4) и (5) в силу (8) и (9) запишутся теперь так:

$$\left.\begin{aligned} &\chi\Phi^-(x) + \Phi^+(x) = f_1 + if_2 \quad (\text{на} \quad L'), \\ &\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = f_1 + if_2 \quad (\text{на} \quad L''). \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Требуется, таким образом, определить голоморфную (как в нижней, так и в верхней полуплоскости) функцию Φ, непрерывную сверху и снизу вплоть до вещественной оси. Граничные значения этой функции на вещественной оси удовлетворяют условию (10).

Кроме того, на бесконечности будем считать, что

$$\Phi(z) = O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Такое предположение соответствует допущению, что компоненты напряжений, а также вращение равны нулю на бесконечности. Решения этой задачи можно выразить в явной форме посредством интегралов типа Коши.

Обозначим

$$f_1 + if_2 = f(t) \ \text{на} \ L', \ f_1 + if_2 = g(t) \ \text{на} \ L''.$$

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L''}\frac{g(t)\,dt}{t - z}, \qquad (11)$$

который представляет собой голоморфную функцию всюду вне L''. Граничные значения $\Phi_0(z)$, когда точка z стремится к точке x, принадлежащей L'', согласно известным формулам, выражаются в виде:

$$\Phi_0^+(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L''}\frac{g(t)\,dt}{t - x},$$

$$\Phi_0^-(x) = -\frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L''}\frac{g(t)\,dt}{t - x}.$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Имеем

$$\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) = g(x) \ \text{на} \ L''. \qquad (12)$$

Будем искать функцию $\Phi(z)$ в виде:

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+\Phi_*(z).$$

В силу (12) краевое условие (10) принимает вид:

$$\Phi_*^+(x)-\Phi_*^-(x)=0 \text{ на } L'',$$

$$\chi\Phi_*^-(x)+\Phi_*^+(x)=f_*(t) \text{ на } L'', \qquad (13)$$

где

$$f_*(t)=f(t)-\chi\Phi_0^-(x)-\Phi_0^+(x).$$

Функция $\Phi_*(z)$ голоморфна на всей плоскости, разрезанной вдоль отрезков $a_1 b_1,\dots, a_n b_n$ (см. рис. 4).

На щелях (a_k, b_k) имеет место условие (13). Эта задача решается в явной форме.

Введем в рассмотрение голоморфную функцию

$$X(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{-\frac{1}{2}+i\beta}(z-b_k)^{-\frac{1}{2}-i\beta},$$

где

$$\beta=\frac{1}{2\pi}\ln\chi.$$

Функция X (z) голоморфна в плоскости, разрезанной вдоль отрезков $a_k b_k$ (k = 1,..., n) (обозначим эту область в дальнейшем через D). На бесконечности она исчезает как z^{-n}. На L' ее граничные значения снизу и сверху удовлетворяют краевому условию.

$$\chi X^-(x)+X^+(x)=0.$$

Учитывая это, краевое условие (13) можем записать в виде:

$$\frac{\Phi_*^+(x)}{X^+(x)}-\frac{\Phi_*^-(x)}{X^-(x)}=\frac{f_*(x)}{X^+(x)}.$$

Частным решением этой задачи будет функция

$$\Phi_*(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L'}\frac{f_*(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}.$$

Общее решение задачи (13) складывается из ее частного решения и общего решения соответствующей однородной задачи:

$$\chi\Phi_{**}^-(x)+\Phi_{**}^+(x)=0 \quad \text{на } L'. \qquad (14)$$

Но функция $\Phi_*(z)$ на бесконечности обращается в нуль как z^{-n-1}. Чтобы получить все решения задачи, исчезающие на бесконечности, к полученному частному решению Φ_* необходимо добавить все решения однородной задачи (14), обращающиеся в нуль на бесконечности.

Поэтому общее решение задачи (13) имеет вид:

$$\Phi_*(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{L'} \frac{f_*(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)} + \chi(z) P_{n-1}(z), \tag{15}$$

где

$$P_{n-1}(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{n-1} z^{n-1}$$

(c_k – произвольн. комплексн. постоянные).

Искомое решение исходной задачи дается формулой:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_*(z) = \Phi^*(z) + X(z) P_{n-1}(z), \tag{16}$$

где

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L''} \frac{g(t)\,dt}{t-z} + \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{L'} \frac{f_*(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)} .$$

В формулу (16) входят линейно 2n вещественных постоянных, которые определяются однозначно при помощи дополнительных условий, вытекающих из конкретных свойств рассматриваемой физической задачи. Например, рассмотрим случай, когда вдоль отрезков $a_k b_k$ ($k=1,\ldots,n$) полуплоскость продавливается поступательным перемещением (перпендикулярно границе) жестких штампов заданных форм. В таком случае заранее задаются вдоль этих отрезков не только смещения, но также главные векторы (X_k, Y_k) внешних сил, т. е.

$$\int_{a_k}^{b_k} (Y_y - iX_y)\,dx = Y_k - iX_k \quad (k=1,\ldots,n).$$

В силу (8) эти равенства можно записать в виде:

$$\int_{a_k}^{b_k} [\Phi^+(t) - \Phi^-(t)dt = -Y_k + iX_k \quad (k=1,\ldots,n). \tag{17}$$

Таким образом, имеем 2n вещественных уравнений, которые позволяют определить все 2n вещественных постоянных, входящих, в силу формулы (16), в левые части равенств (17). Эти постоянные можно также определить, исходя из естественного требования непрерывности компонентов вектора смещения в точках a_k и b_k (см. [35], гл. 6, § 114).

II. ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ И ИЗГИБА БРУСЬЕВ

Переходим к работам Н. И. Мусхелишвили, которые посвящены задачам кручения и изгиба однородных и неоднородных брусьев. Н. И. Мусхелишвили впервые обобщил классическую задачу Сен-Венана и изучил задачу о кручении и изгибе брусьев, составленных из различных материалов ([35], гл. 7). Ниже мы кратко изложим некоторые результаты, относящиеся к призматическому телу, составленному из различных призматических брусьев с параллельными боковыми поверхностями.

Обозначим поперечное сечение составного бруса через S. Оно составлено из областей $S_0, S_1, ..., S_m$, причем $S_1, ..., S_m$ – односвязные области, ограниченные кривыми $L_1, ..., L_m$ соответственно, а S_0 – многосвязная область, ограниченная кривыми $L_0, L_1, ..., L_m$ (рис. 5). Предполагается, что брус с сечением S_0 спаян с остальным вдоль их боковых поверхностей.

Для простоты предположим, что $L_0, L_1, ..., L_m$ – простые замкнутые гладкие кривые.

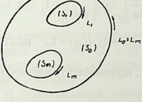


Рис. 5.

Пусть $(\mu_0, \lambda_0), (\mu_1, \lambda_1), ..., (\mu_m, \lambda_m)$ – постоянные Ламе, соответствующие брусьям, поперечные сечения которых $S_0, S_1, ..., S_m$.

§ 5. Задачи кручения

Компоненты смещения при кручении составного бруса, как и в случае однородного бруса, отыскиваются в следующей форме:

$$u = -\tau zy, \quad v = \tau zx, \quad w = \tau\varphi(x, y),$$

где τ – постоянная, определяющая степень закручивания составного бруса, а $\varphi(x, y)$ – однозначная гармоническая функция внутри каждой из областей S_j (j=0, 1,..., m). Для определения искомой функции φ необходимо учесть следующие условия, вытекающие из физической природы задачи:

1) предполагается, что внешняя боковая поверхность бруса свободна от напряжений;

2) усилия, действующие на элементы боковых поверхностей соседних брусьев, должны быть равны по величине и противоположны по знаку;

3) компоненты вектора смещения u, v, w должны оставаться непрерывными при переходе через боковые поверхности.

Компоненты тензора напряжений определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} X_z &= \tau\mu_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right), \\ Y_z &= \tau\mu_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right) \end{aligned}\right\} \quad (\text{в } S_j)$$

(остальные компоненты равны нулю).

Перечисленные выше условия приводят к следующей краевой задаче для функции φ (x, y): необходимо найти непрерывную в замкнутой области $S + L$, $S = S_0 + S_1 + ... + S_n$, функцию φ (x, y), гармоническую внутри каждой из областей S_j (j = 0, 1, ..., m) и удовлетворяющую краевым условиям:

$$\mu_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_0 - \mu_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_j = f_j \quad (\text{на } L_j) \tag{1}$$

$$(j = 1, 2, ..., m + 1;\ L_{m+1} = L_0;\ \ \mu_{m+1} = 0).$$

Символ $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_j$ (j = 1, 2, ..., m) означает граничное значение нормальной производной $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)$, когда переменная точка из области S_j стремится к произвольно выбранной точке на L_j, а $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_0$ на L_j означает граничное значение $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)$, когда переменная точка из области S_0 стремится к точке на L_j.

Правые части равенств (1) – заданные непрерывные функции на L_j (j = 0, 1, ..., m). В случае задачи кручения

$$fj = (\mu_0 - \mu_j)[y \cos(n, x) - x \cos(n, y)] \quad (\text{на } L_j).$$

Нетрудно показать, что для разрешимости краевой задачи (1) необходимо выполнение условия:

$$\sum_{j=1}^{m+1} \int_{L_j} f_j\, ds = 0. \tag{2}$$

Легко заметить, что это условие действительно выполняется в случае задачи кручения.

Для решения краевой задачи (1), как показал Н. И. Мусхелишвили, можно применить метод интегральных уравнений. Отыскивая решение в виде потенциала простого слоя

$$\varphi(x, y) = \int_L \rho(s) \ln\frac{1}{r}\, ds$$

при помощи краевого условия (1), мы получим следующее интегральное уравнение типа Фредгольма 2-го рода для определения плотности ρ.

$$\rho(t) + \int_L K(t, s)\, \rho(s)\, ds = f(t)\,, \tag{3}$$

где

$$K(t,s) = \frac{\mu_0 - \mu_j}{\pi(\mu_0 + \mu_j)} \cdot \frac{\cos(\overline{ts}, n)}{r_{st}}\,, \quad \text{при } t \in L_j,$$

Следуя Н. И. Мусхелишвили, можно доказать, что при выполнении условия (2) уравнение (3) всегда разрешимо, причем.

$$\rho = \rho_* + C\rho_0,$$

где C – произвольная вещественная постоянная, ρ_* – некоторое частное решение неоднородного уравнения (3), а ρ_0 – некоторое (нормированное) решение соответствующего однородного уравнения (последнее имеет лишь одно такое решение).

Как доказано Н. И. Мусхелишвили, потенциал простого слоя с плотностью ρ_0 равен тождественно постоянной. Наличие этой постоянной, очевидно, не влияет на распределение поля напряжений. Следовательно, при кручении бруса поле напряжений определяется всегда однозначно.

Таким образом, для определения напряженного состояния достаточно найти лишь одно частное решение уравнения (3).

Для решения весьма широкого круга практических задач кручения составных брусьев можно использовать также различные специальные методы (см. [35], гл. 7). Например, в случае бруса с круговым сечением, состоящим из внешнего кругового кольца S_0 и внутреннего концентрического круга S_1 искомая гармоническая функция φ (x, y) может быть найдена из краевого условия (1) посредством разложения в ряд Лорана.

В ряде задач можно применять методы конформного отображения областей. Посредством конформного отображения, например, решается задача кручения круглого бруса, составленного из двух брусьев, причем внутренний также является круговым, но эксцентричным.

§ 6. Задачи растяжения и изгиба

Изучая задачи растяжения и изгиба составных брусьев, Н. И. Мусхелишвили сначала рассматривает случай, когда коэффициенты Пуассона для всех брусьев одинаковы. Затем, используя этот результат, он дает решение задачи в случае брусьев с различными коэффициентами Пуассона.

1. Рассмотрим случай брусьев с одинаковыми коэффициентами Пуассона, т. е. $\sigma_0 = \sigma_1 = ... = \sigma_m = \sigma$.

Исследуем в отдельности задачи растяжения продольной силой, изгиба парой и изгиба поперечной силой.

Задача на растяжение бруса продольной силой F решается элементарно формулами:

$$u=-\frac{\sigma F}{S_E}x, \qquad v=-\frac{\sigma F}{S_E}y, \qquad w=\frac{F}{S_E}z, \qquad Z_z=\frac{E_jF}{S_E} \quad (\text{в } S_j)$$

(остальные компоненты напряжения равны нулю).

Здесь E_j – модуль Юнга поперечного сечения S_j

$$S_E=\sum_{j=1}^{m}\left|S_j\right|E_j \quad \left(\left|S_j\right| - \text{площадь } S_j\right)$$

В случае изгиба парой задача решается по формулам:

$$u=\frac{M}{2I_E}(z^2+\sigma x^2-\sigma y^2),$$

$$v=\frac{M}{I_E}\sigma xy, \quad w=-\frac{M}{I_E}xz,$$

$$Z_z=-\frac{ME_j}{I_E}x \ (\text{в } S_j)$$

(остальные компоненты напряжения равны нулю), где M – момент изгибающей пары, приложенной к верхнему основанию бруса, а

$$I_E=\sum_{j=0}^{m}F_jI_i, \quad I_j=\iint_{S_j}x^2\,dxdy,$$

где I_j – момент инерции поперечного сечения S_j.

Предполагается, что начало координат находится в приведенном центре тяжести нижнего основания, а оси Ox и Oy декартовой системы координат совпадают с главными осями инерции. Момент изгибающей пары направлен по оси Oy.

Более сложным образом решается задача об изгибе бруса под действием поперечной силы W, приложенной к верхнему основанию. В этом случае решение задачи отыскивается в виде:

$$\left.\begin{aligned} u&=-\tau yz+\frac{W}{I_E}\left[\frac{1}{2}\sigma(l-z)(x^2-y^2)+\frac{1}{2}lz^2-\frac{1}{6}z^3\right], \\ v&=\tau xz+\frac{W}{I_E}(l-z)\,xy, \\ w&=\tau\varphi-\frac{W}{I_E}\left[x\left(lz-\frac{1}{2}z^2\right)+\chi+xy^2\right]. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Предполагается, что заданная поперечная сила W направлена вдоль оси Ox. В формулах (1) φ и χ – гармонические функции внутри каждой области S_j, τ – постоянная, l – длина бруса.

Вычисляя компоненты напряжений, получим

$$\left.\begin{aligned} X_z &= \mu_j \tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right) + \frac{W\mu_j}{I_E}\left\{\frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right\}, \\ Y_z &= \mu_j \tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - x\right) - \frac{W\mu_j}{I_E}\left\{\frac{\partial\chi}{\partial y} + (2+\sigma)xy\right\}, \\ Z_z &= -\frac{WE_j}{I_E}(l - z)\,x, \\ X_y &= Y_y = X_y = 0. \end{aligned}\right\} \text{ в } S_j$$

Гармоническая функция φ, входящая в формулы (1), есть функция кручения рассматриваемого составного бруса (способ отыскания этой функции был изложен в предыдущем параграфе). Что же касается другой гармонической функции χ, то для ее отыскания получается такая же задача, как и для отыскания функции φ. Разница состоит только в том, что правая часть краевой задачи (1) из § 5 в данном случае имеет вид:

$$f_j = (\mu_j + \mu_0)\left\{\left[\frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)y^2\right]\cos(n, x) + \right.$$
$$\left. + (2+\sigma)xy\cos(n, y)\right\} \text{ на } L_j$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m+1, \qquad \mu_{m+1} = 0, \qquad L_{m+1} = L_0).$$

Нетрудно видеть, что условие (2) из § 5 выполняется и в данном случае.

2. Более сложна задача изгиба составных брусьев в случае различных коэффициентов Пуассона. Однако Н. И. Мусхелишвили предложил способ, позволяющий решить задачу до конца и в этом случае.

Для этого предварительно решается следующая вспомогательная задача о плоской деформации: требуется найти упругое равновесие составного бруса (прежние обозначения сохраняются) в предположении, что он подвержен плоской деформации параллельно плоскости Oxy (т. е. w = 0, a u и v зависят только от x и y). Кроме того, должны быть выполнены следующие условия.

1) Внешние напряжения, приложенные к боковой поверхности бруса, равны нулю.

2) На поверхностях раздела различных материалов напряжения непрерывны, т. е. напряжения, приложенные к элементам поверхности' раздела с той и другой стороны, уравновешивают друг друга.

3) На поверхностях раздела смещения претерпевают заданные разрывы, т. е.

$$u_j - u_k = g, \quad v_j - v_k = h,$$

где g и h – заданные непрерывные функции на L. Значки j, k указывают, что берутся значения u и v для брусьев, занимающих области с номерами j, k и примыкающих к поверхности раздела.

Эта задача для любых непрерывных функций g и h допускает решение, притом единственное (доказано Д. И. Шерманом). Следует напомнить, что в данном случае напряженное состояние определяется формулами:

$$X_z = Y_z = 0,$$

$$Z_z = \lambda_j\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \sigma_j\left(X_x + Y_y\right) \quad (\text{в } S_j).$$

Следуя Н. И. Мусхелишвили, рассмотрим три решения этой вспомогательной задачи, соответствующие следующим трем значениям функций g и h на линиях раздела областей S_j и S_k:

$$g_1 = \frac{1}{2}(\sigma_j - \sigma_k)\,(x^2 - y^2)\,, \quad h_1 = (\sigma_j - \sigma_k)\; xy\,,$$

$$g_2 = (\sigma_j - \sigma_k)\, xy\,, \qquad h_2 = \frac{1}{2}(\sigma_j - \sigma_k)(y^2 - x^2)\,,$$

$$g_3 = (\sigma_j - \sigma_k)\, x\,, \qquad h_3 = (\sigma_j - \sigma_k)\, y.$$

Снабдим компоненты вектора смещений и тензора напряжений, соответствующие этим функциям, верхними знаками 1, 2, 3.

Рассматривая теперь общую задачу растяжения и изгиба парой составного бруса, будем искать компоненты вектора смещений и тензора напряжений в виде:

$$u = \sum_{k=1}^{3} a_k (u^k + u_k), \qquad v = \sum_{k=1}^{3} a_k (v^k + v_k), \qquad w = \sum_{k=1}^{3} a_k w_k,$$

$$Z_z = \sum_{k=1}^{3} a_k \left(Z_z^k + Z_{z,k}\right),$$

где a_1, a_2, a_3 – вещественные постоянные, подлежащие определению:

$$u_1 = -\frac{1}{2}[z^2 + \sigma_j (x^2 - y^2)], \quad v_1 = -\sigma_j\, xy, \quad w_1 = xz;$$

$$u_2 = -\sigma_j\, xy, \quad v_2 = -\frac{1}{2}[z^2 + \sigma_j (y^2 - x^2)], \quad w_2 = yz;$$

$$u_3 = -\sigma_j x, \quad v_3 = -\sigma_j y, \quad w_3 = z;$$

$$Z_{z,1} = E_j x, \quad Z_{z,2} = E_j y, \quad Z_{z,3} = E_j.$$

Мы считаем, что на верхнем основании бруса приложены силы, которые статически эквивалентны паре с моментами M_x, M_y и растягивающей силе F. Удовлетворяя эти условия, для определения неизвестных a_1, a_2, a_3 получаем следующую алгебраическую систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^{3}(I_{ij}+K_{ij})a_j = b_j \qquad (i=1,\ 2,\ 3)\,, \tag{2}$$

$$b_1 = -M_y, \qquad b_2 = M_x, \qquad b_3 = F,$$

где

$$I_{\alpha\beta} = \sum_{j=0}^{m} E_j \iint_{S_j} x_\alpha x_\beta \, dx\, dy\,,$$

$$K_{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^{3} E_j \iint_{S_j} x_\alpha Z_z^{(\beta)} \, dx\, dy$$

$$(\alpha,\beta=1,\,2,\,3, \qquad x_1=x, \qquad x_2=y, \qquad x_3=1).$$

Как доказано Н. И. Мусхелишвили, детерминант системы (2) всегда положителен. Следовательно, система (2) имеет всегда решение и притом единственное.

Таким путем задача растяжения продольной силой и задачи изгиба парой составного бруса в случае различных коэффициентов Пуассона решается полностью. Аналогичный прием предложен также для решения задачи изгиба поперечной силой.

III. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В ряде работ Н. И. Мусхелишвили разработал методы решения широкого круга краевых задач для класса аналитических функций одной комплексной переменной. Эти задачи, постановка которых восходит к Гильберту, являлись предметом изучения ряда математиков [33]. До работ Н. И. Мусхелишвили были изучены задачи главным образом для областей, ограниченных гладкими замкнутыми кривыми. В трудах Н. И. Мусхелишвили даны формулы, выражающие в явной форме решения краевой задачи Гильберта для плоскости при наличии конечного числа разрезов вдоль разомкнутых дуг [261. (В случае замкнутого контура эта задача решена Ф. Д. Гаховым). Полученные результаты были применены им к вопросам теории сингулярных интегральных уравнений на разомкнутых контурах. Нужно отметить, что эти результаты важны при решении технических и физических задач.

§ 7. Задачи Гильберта для разомкнутых контуров

1. Пусть S – плоскость, разрезанная вдоль дуг $L_1 = a_1b_1$, $L_p \equiv a_p\,b_p$, которые не имеют между собой общих точек (рис. 6). На каждом из этих контуров выберем (в качестве положительного) направление, идущее от

a_k до b_k. На каждом разрезе будем различать два берега (левый и правый) в соответствии с выбранным направлением положительного обхода, снабжая эти берега соответственно знаком (+) или (–). Краевая задача Гильберта для бесконечной области S формулируется следующим образом: следует отыскать голоморфную в S функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую краевому условию:

$$\Phi^{+}(t) = \sigma(t)\,\Phi^{-}(t) + g(t) \quad \text{на } L \tag{1}$$

$$(L = L_1 + L_2 + \ldots + L_p),$$

где $\Phi^{+}(t)$ и $\Phi^{-}(t)$ – граничные значения функции Φ в точке t слева и справа, соответственно, $\sigma(t)$ – функция, заданная на L, непрерывная в смысле Гельдера и не обращающаяся в нуль на L.

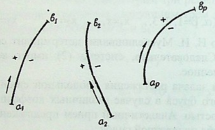


Рис. 6.

Относительно искомой функции $\Phi(z)$, кроме голоморфности в S, предположим, что:

1) на бесконечности она имеет разложение вида:

$$\Phi(z) = a_k z^{k} + a_{k-1} z^{k-1} + \ldots,\ \ a_k \neq 0. \qquad (\text{k целое})$$

Число k будем называть порядком функции $\Phi(z)$ на бесконечности. Считаем, что k конечно;

2) функции $\Phi^{+}(t)$ и $\Phi^{-}(t)$ существуют и непрерывны внутри каждой кривой L;

3) вблизи концов дуг L_k

$$\left|\Phi(z)\right| < \frac{\text{const}}{\left|z-c\right|^{\alpha}} \qquad \alpha < 1,$$

где c обозначает любой конец кривых L_k.

Следуя Н. И. Мусхелишвили, введем в рассмотрение комплексные числа

$$\alpha_k + i\beta_k = \mp\frac{1}{2\pi i}\ln\,\sigma(c_k),$$

где c_k – либо одно из a_j, либо одно из b_j. В формуле (2) берем знак –, если $c_k = a_j$, и знак +, если $c_k = b_j$.

Выбираем целые числа λ_k так, чтобы выполнялись неравенства

$$-1 < \alpha_k + \lambda_k < 1.$$

Отсюда видно, что λ_k определяется однозначно и равно $-\alpha_k$, если α_k – целое число.

Если же α_k не целое число, то λ_k определяется с точностью до аддитивного слагаемого + 1 или – 1.

Если α_k – целое, то соответствующие концы дуг L_j называются особенными, в остальных случаях эти концы называются неособенными. Допустим, что вблизи некоторой группы неособенных концов $c_1, c_2,..., c_q$ функция Φ (z) ограничена. Такое решение задачи Гильберта назовем решением класса h $(c_1, c_2,..., c_q)$. После введения понятия класса выбор λ_k подчиним следующим условиям: на неособенных концах, где решение должно быть ограничено, будем брать для λ_k значение, удовлетворяющее условию

$$1 > \lambda_k + \alpha_k > 0 \quad (k = 1, 2, ..., q),$$

а на остальных неособенных концах –

$$-1 < \lambda_k + \alpha_k < 0 \quad (k = q + 1, ..., n).$$

Вводим в рассмотрение функцию

$$\chi(z) = \Pi(z)\, e^{\Gamma(z)}, \tag{3}$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln\sigma(t)\,dt}{t-z}, \qquad \Pi(z) = \prod_{k=1}^{2p}(z-c_k)^{\lambda_k}.$$

Функция χ (z), как нетрудно заметить, удовлетворяет следующим условиям:

1) χ (z) – решение однородной краевой задачи Гильберта, т. е.

$$\chi^+(t) = \sigma(t)\,\chi^-(t)\,; \tag{4}$$

2) она принадлежит классу h $(c_1, c_2, ..., c_q)$;

3) $\chi(z) \neq 0$ всюду в S;

4) на бесконечности выполняется условие

$$\lim_{z\to\infty} \chi(z) z^{\chi} = 1,$$

где

$$\chi = -(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{2p}).$$

Целое число χ – индекс задачи Гильберта для класса h ($c_1, c_2, ..., c_q$). Функция χ (z) – каноническое решение класса h ($c_1, c_2, ..., c_q$) однородной задачи Гильберта.

В силу (4) краевое условие (1) можно записать так:

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\chi^-(t)} + \frac{g(t)}{\chi^+(t)}.$$

Отсюда, используя формулу Коши, получим

$$\Phi(z) \equiv \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)\,dt}{\chi+(t)(t-z)} + \chi(z)\,P(z), \tag{5}$$

где P (z) – произвольный полином. Эта формула дает все решения класса h ($c_1, c_2, ..., c_q$) задачи Гильберта. В частности, общее решение однородной задачи (g (t) $\equiv$ 0) запишется в виде:

$$\Phi(z) = \chi(z)\,P(z). \tag{6}$$

Простое исследование формулы (6) показывает, что

1) на неособенных концах $c_1, c_2, ..., c_q$

$$\lim_{z \to c_k} \Phi(z) = 0 \qquad (k = 1, 2, ..., q),$$

на остальных неособенных концах функция Φ (z) имеет особенности порядка меньше 1;

2) вблизи особенных концов решение остается ограниченным, за исключением тех случаев, когда $\beta_k = 0$; вблизи таких концов Φ (z) может обращаться в бесконечность логарифмического типа.

2. В ряде приложений необходимо найти решения задачи Гильберта, исчезающие на бесконечности. Для этой цели рассмотрим два случая.

1) Если $x \geq 0$, то все решения, исчезающие на бесконечности, даются формулой:

$$\Phi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)\,dt}{\chi^+(t)(t-z)} + \chi(z)\,P_{\chi-1}(z), \tag{7}$$

где P_{x-1} – полином степени не выше P – 1, причем $P_{-1} \equiv 0$. Следовательно, при $\chi = 0$ решение неоднородной задачи Гильберта всегда существует и определяется однозначно по формуле

$$\Phi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)\,dt}{\chi^+(t)(t-z)}. \tag{8}$$

2) Если $\chi < 0$, то решение задачи Гильберта, исчезающее на бесконечности, существует только тогда, когда выполнены равенства

$$\int_L \frac{t^k g(t)\,dt}{\chi^+(t)} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, -\chi - 1).$$

В этом случае решение единственное и задается формулой (8).

3. Рассмотрим один частный, нередко встречающийся на практике случай, когда $\sigma(t) = -1$. Тогда краевое условие Гильберта принимает вид:

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = g(t).$$

В этом случае каноническое решение выражается в форме:

$$\chi(z) = \sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}},$$

где

$$R_1(z) = \prod_{k=1}^{q} (z - c_k),$$

$$R_2(z) = \prod_{k=q+1}^{2n} (z - c_k).$$

Индекс задачи

$$\chi = p - q.$$

Ясно, что в данном случае все концы неособенные.

§ 8. Сингулярные интегральные уравнения на разомкнутых контурах

1. Изложенные выше результаты Н. И. Мусхелишвили применяет для изучения сингулярного интегрального уравнения вида:

$$K\varphi \equiv A(\zeta)\,\varphi(\zeta) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(\zeta,t)}{t-\zeta}\,\varphi(t)\,dt = f(\zeta). \qquad (1)$$

Относительно функций $A(\zeta)$, $K(\zeta, t)$, $f(\zeta)$ предположим, что они непрерывны в смысле Гельдера на L относительно всех своих аргументов. Кроме того, будем считать, что

$$A(\zeta) + B(\zeta) \neq 0, \quad A(\zeta) - B(\zeta) \neq 0, \quad (\text{всюду на } L), \qquad (2)$$

где

$$B(\zeta) = K(\zeta, \zeta).$$

При выполнении условия (2) будем считать, что уравнение (I) – сингулярное интегральное нормального типа. Уравнение (1) можно переписать в следующей форме:

$$A(\zeta)\,\varphi(\zeta)+\frac{B(\zeta)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-\zeta}+\int_L k(\zeta,\,t)\ \varphi(t)\,dt=f(\zeta), \tag{3}$$

где

$$k(\zeta,t)=\frac{K(\zeta,t)-K(\zeta,\,\zeta)}{t-\zeta}.$$

2. Рассмотрим предварительно так называемое характеристическое уравнение:

$$K^0\varphi\equiv A(\zeta)\,\varphi(\zeta)+\frac{B(\zeta)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-\zeta}=f(\zeta). \tag{4}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z}.$$

Согласно известным свойствам интеграла типа Коши, имеем:

$$\Phi^+(\zeta)=\frac{1}{2}\varphi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-\zeta},$$

$$\Phi^-(\zeta)=-\frac{1}{2}\varphi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-\zeta},\ \ \zeta\in L.$$

Используя эти формулы, уравнение (4) запишем в таком виде:

$$\Phi^+(\zeta)=\sigma(\zeta)\,\Phi^-(\zeta)+g(\zeta), \tag{5}$$

где

$$\sigma(\zeta)=\frac{A(\zeta)-B(\zeta)}{A(\zeta)+B(\zeta)},\quad g(\zeta)=\frac{f(\zeta)}{A(\zeta)+B(\zeta)}.$$

Следовательно, функция Φ (z) есть решение неоднородной задачи Гильберта (5), причем она исчезает на бесконечности.

Пусть Φ (z) – решение задачи (5). Тогда решение исходного сингулярного интегрального уравнения (4) дается формулой:

$$\varphi(\zeta)=\Phi^+(\zeta)-\Phi^-(\zeta). \tag{6}$$

Из формулы (6) следует, что вблизи неособенных концов контуров L_k решение имеет особенность порядка меньше 1 (см. ниже, § 9). Можно теперь, пользуясь формулой (6), разбить семейства решений уравнения (4) на классы. Будем считать, что $\varphi\in h\,(c_1, c_2,\dots, c_q)$, если Φ (z) – решение класса $h\,(c_1, \dots, c_q)$ задачи (5). Здесь, как мы условились в предыдущем параграфе, $c_1, c_2,\dots, c_q$ – неособенные концы. Очевидно, вблизи точек $c_1, c_2,\dots, c_q$ решение будет ограничено, вблизи же особенных концов оно будет либо ограниченным, либо будет обращаться в бесконечность как $\ln(\zeta - c)$.

Как мы видели выше, общее решение задачи Гильберта дается формулой (7.5). Очевидно, мы должны искать решение задачи (5), исчезающее на бесконечности. Написав теперь по формуле (7.7) или (7.8) решения задачи (5) класса $h(c_1, c_2, ..., c_q)$, исчезающие на бесконечности, найдем решения класса $h(c_1, c_2, ..., c_q)$ уравнения (4) по формуле (6). Пусть χ – индекс класса $h(c_1, c_2, ..., c_q)$ задачи (5). Если $\chi \geq 0$, то все решения класса $h(c_1, c_2, ..., c_q)$ уравнения (4) даются формулой вида:

$$\varphi(\zeta) = K^* f + B^*(\zeta)\, Z(\zeta)\, P_{\chi-1}(\zeta) \tag{7}$$

где $P_{\chi-1}$ – полином степени не выше $\chi-1$, причем

$$P_{\chi-1} \equiv 0, \quad \text{если } \chi \leq 0.$$

Если $\chi < 0$, то решение существует только при соблюдении следующих условий:

$$\int_L \frac{t^k f(t)\,dt}{Z(t)} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, -\chi-1).$$

Причем решение в этом случае однозначно определяется по формуле (7), где следует положить $P_{\chi-1} \equiv 0$.

В формуле (7) имеем следующие обозначения:

$$K^* f = A^*(\zeta) f(\zeta) - \frac{B^*(\zeta) Z(\zeta)}{\pi i} \int_L \frac{f(t)\,dt}{Z(t)(t-\zeta)},$$

причем

$$A^* = \frac{A}{A^2 - B^2}, \qquad B^* = \frac{B}{A^2 - B^2},$$

$$Z(\zeta) = \chi^+(\zeta)\,(A(\zeta) + B(\zeta)) = \omega_0(\zeta) \prod_1^{2p} (\zeta - c_k)^{\gamma_k},$$

где $\omega_0(\zeta)$ – вполне определенная непрерывная в смысле Гельдера функция, всюду отличная от нуля, а γ_k – комплексные числа; ω_0 и γ_k однозначно определяются с помощью A и B.

Таким образом, характеристическое уравнение (4) решается в явной форме.

3. Полученные выше результаты Н. И. Мусхелишвили применяет к исследованию общего сингулярного интегрального уравнения вида (1). Записав его в виде (3) и применив формулу обращения (7), можно получить уравнение типа Фредгольма 2-го рода, которое либо непосредственно эквивалентно исходному, либо же эквивалентно ему в некотором обобщенном смысле. Этот способ регуляризации позволяет доказать ряд основных теорем, обобщающих классические теоремы Фредгольма.

Приведем основные результаты.

Теорема 1. Число решений однородного уравнения $K\varphi = 0$ класса $h(c_1, c_2,..., c_q)$ всегда конечно.

Теорема 2. Необходимые и достаточные условия разрешимости в данном классе $h=(c_1, c_2,..., c_q)$ уравнения $K\varphi = f$ заключаются в том, чтобы

$$\int_L f\psi_j dt = 0 \qquad (j-1,2...., k'),$$

где $(j=1,2...., k')$ – полная система линейно независимых решений союзного класса $h' = h\,(c_1, c_2,..., c_q)$ союзного однородного уравнения $K'\psi = 0$.

Теорема 3. Если k – число линейно независимых решений класса h однородного уравнения $K\varphi = 0$, χ – индекс этого класса, а k' – число линейно независимых решений союзного класса h' союзного однородного уравнения $K'\psi = 0$, $k - k' = \chi$.

Заметим, что союзное однородное уравнение имеет вид

$$K'\varphi \equiv A(\zeta)\,\varphi(\zeta) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K\,(t,\zeta)}{t-\zeta}\varphi(t)\,dt = 0.$$

§ 9. О поведении интеграла типа Коши вблизи концов пути интегрирования

Следует сказать, что предыдущие результаты существенно используют некоторые свойства интеграла типа Коши вблизи концов пути интегрирования. Соответствующие формулы были получены Н. И. Мусхелишвили [33].

Пусть L – разомкнутая гладкая дуга ab, причем угол наклона касательной к ней удовлетворяет условию Гельдера. Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi\,(t)\,dt}{t-z}.$$

Предположим, что вблизи концов $\varphi\,(t)$ имеет вид:

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_*(t)}{(t-c)^{\gamma}}, \qquad \gamma = \alpha + i\beta, \qquad \alpha \geq 0 \;\; (c=a \;\; \text{или} \;\; b),$$

где $\varphi_*\,(t)$ непрерывна по Гельдеру вблизи c, включая c.

1. Пусть $\gamma = 0$. Тогда вблизи c имеем

$$\Phi(z) = \pm\frac{\varphi\,(c)}{\pi i}\ln\frac{1}{z-c} + \Phi_0\,(z),$$

где верхний знак берется при $c = a$, нижний – при $c = b$ (положительное направление идет от a к b). $\Phi_0\,(z)$ ограничена вблизи c.

2. Если $\gamma = \alpha + i\beta \neq 0$, $0 \leq \alpha < 1$, то

$$\Phi(z) = \pm \frac{e^{\mp\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi i} \cdot \frac{\varphi_*(c)}{(z-c)^{\gamma}} + \Phi_0(z),$$

где знаки выбираются так, как условились выше, $(z - c)^{\gamma}$ есть та ветвь многозначной функции, которая принимает значение $(t - c)^{\gamma}$ на левом берегу разреза L. Вблизи с функция Φ_0 подчиняется неравенству

$$|\Phi_0(z)| < \frac{C}{|z-c|^{\alpha_0}}, \qquad C = \mathrm{const},$$

причем

$$\alpha_0 = 0, \quad \text{если} \quad \alpha = 0, \quad \text{и} \quad \alpha_0 < \alpha, \quad \text{если} \quad \alpha > 0.$$

3. Если $\gamma = 0$ и точка $z \in L$, то вблизи с

$$\Phi(z) = \pm \frac{\varphi(c)}{2\pi i} \ln \frac{1}{z-c} + \Phi^*(z),$$

причем правило выбора знаков остается прежнее, а $\Phi^*(z)$ непрерывна по Гельдеру вблизи с, включая с.

4. Если $\gamma = \alpha + i\beta \neq 0$ и $z \in L$, то

$$\Phi(z) = \pm \frac{\mathrm{ctg}\,\gamma\pi}{2i} \frac{\varphi_*(c)}{(z-c)^{\gamma}} + \Phi^*(z),$$

причем, если $\alpha = 0$, то Φ^* удовлетворяет условию Гельдера вблизи с, включая с; если же $\alpha > 0$, то

$$\Phi^*(z) = \frac{\Phi^{**}(z)}{|z-c|^{\alpha_0}}, \qquad \alpha_0 < \alpha,$$

а $\Phi^{**}(z)$ удовлетворяет условию Гельдера вблизи с, включая с. Знаки выбираются по-прежнему.

§ 10. Задачи Гильберта для системы аналитических функций и системы сингулярных интегральных уравнений

Пусть $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ – вектор, компоненты которого голоморфные функции $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Краевые условия Гильберта для вектора Φ можно записать в виде:

$$\Phi^+(t) = \sigma(t)\,\Phi^-(t) + g(t) \quad \text{на} \ L, \tag{1}$$

где $\sigma(t)$ – матричная функция, заданная на L и удовлетворяющая условиям: 1) элементы σ – непрерывные в смысле Гельдера функции на L и 2) $\det \sigma(t) \neq 0$ всюду на L; 3) $g(t)$ – заданная вектор-функция, также непрерывная в смысле Гельдера. Здесь L – совокупность гладких (замкнутых или разомкнутых) контуров, которые вместе составляют границу области D^+. Дополнение $D^+ + L$ до полной плоскости обозначим через D^-. Предположим, что D^- состоит из конечного числа односвязных областей. Искомая функция Φ голоморфна как в D^+, так и в D^-, непрерывно продолжима вплоть до L как из D^+, так и из D^-, а на бесконечности имеет разложение вида:

$$\Phi(z) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots, \; a_0 \neq 0 \quad (k \text{ – целое}).$$

Эта задача в настоящее время исчерпывающе изучена в работах ряда авторов. Существенно важную роль играет в теории этой задачи понятие индекса. В том случае, когда L состоит из конечного числа простых замкнутых гладких кривых, Н. И. Мусхелишвили получил важную формулу для вычисления индекса:

$$\chi = \frac{1}{2\pi}\{\arg \det \sigma(t)\}_L,$$

т. е. индекс равен приращению $\frac{1}{2\pi}\arg \det \sigma(t)$, когда точка t один раз опишет границу L в направлении, оставляющем область D^+ слева.

При помощи индекса формулируется ряд предложений относительно задачи (I). Эти предложения переносятся затем на системы сингулярных интегральных уравнений [33].

§ 11. Краевые задачи теории потенциала

1. Ряд работ Н. И. Мусхелишвили посвящен классическим задачам теории потенциала. Как известно, в случае односвязной области решения задачи Дирихле и Неймана всегда можно выразить при помощи потенциалов двойного и простого слоев соответственно. В случае же многосвязной области это уже не так. Поэтому данный случай требует особого рассмотрения. Н. И. Мусхелишвили посвятил этому вопросу специальные исследования. Приведем здесь результат, относящийся к задаче Дирихле.

Пусть D – область (конечная) трехмерного пространства, ограниченная простыми замкнутыми поверхностями $S_0, S_1, \ldots, S_m$ удовлетворяющими условиям Ляпунова. Мы предположим, что $S_1, \ldots, S_m$ расположены внутри S_0. Рассмотрим задачу Дирихле:

$$\Delta U = 0 \quad (\text{в } D), \quad U = f \quad (\text{на } S). \tag{1}$$

Искомое решение, которое предполагается непрерывным в замкнутой области D + S, следуя Н. И. Мусхелишвили, представим в виде:

$$U(P) = \frac{1}{2\pi}\iint_S \rho(Q)\frac{d}{dn_Q}\left(\frac{1}{PQ}\right)dS_Q + \sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{PQ_k}, \tag{2}$$

где n_Q – внешняя нормаль в точке $Q \in S$; $Q_1, \ldots, Q_m$ – произвольно зафиксированные точки внутри $S_1, \ldots, S_m$, соответственно; ρ – непрерывная функция, а A_k – постоянные, подлежащие определению. Удовлетворяя краевому условию задачи (1s), получим интегральное уравнение типа Фредгольма 2-го рода:

$$\rho(P_0)+\iint_S K(P_0,Q)\,\rho(Q)\,dS_Q = f(P_0)-\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{P_0Q_k}, \tag{3}$$

где P_0 – переменная граничная точка,

$$K(P_0,Q)=\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dn_Q}\left(\frac{1}{P_0Q}\right).$$

Доказывается, что однородное уравнение

$$\rho(P_0)+\iint_S K(P_0,Q)\,\rho(Q)\,dS_Q=0$$

имеет ровно m линейно независимых решений. Следовательно, соответствующее однородное сопряженное уравнение имеет также ровно m линейно независимых решений $\nu_1, \ldots, \nu_m$. Поэтому необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (3) принимает вид:

$$\sum_{k=1}^{m}A_k\iint_S\frac{\nu_j(P)}{PQ_k}\,dS_P=\iint_S f(P)\nu_j(P)\,dS_P\ \ (j=1,\ldots,m).$$

В работе Н. И. Мусхелишвили [24] доказано, что эта система всегда разрешима и имеет единственное решение. Таким образом, постоянные A_k (сосредоточенные массы) определяются через заданные граничные значения искомого решения. Следовательно, решение задачи Дирихле для многосвязной области представляется в виде суммы потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью и потенциалов сосредоточенных масс.

Аналогичным путем (с использованием потенциалов простого слоя) решается также задача Неймана. Эти результаты остаются в силе в пространстве любого числа измерений.

2. На плоскости иногда приходится решать задачу Дирихле в такой узкой постановке: следует отыскать аналитическую в области D функцию Ф (z), непрерывную в замкнутой области D + L и удовлетворяющую граничному условию

$$\operatorname{Re}[\Phi(t)] = f(t),\ t \in L \tag{4}$$

Эта задача в случае односвязной области эквивалентна обычной задаче Дирихле. Но в случае многосвязной области не всякую гармоническую функцию можно представить как вещественную часть однозначной аналитической функции. Поэтому задача (4) в данном случае не может иметь решения для всякой заданной на границе непрерывной функции f (t). Н. И. Мусхелишвили рассмотрел эту задачу в следующей видоизмененной постановке:

$$\mathrm{Re}\,[\Phi(t)] = f(t) + c(t), \quad t \in L \tag{5}$$

где c (t) – кусочно постоянная функция: $c = 0$ на L_0, $c = c_k$ на L_k ($k = 1, ..., m$), причем $c_1, ..., c_m$ – вещественные постоянные, которые также следует определить. В работе Н. И. Мусхелишвили установлено, что задача в такой видоизмененной постановке всегда имеет решение и притом единственное, т. е. для всякой заданной на L непрерывной вещественной функции f (t) существует голоморфная в D и непрерывная в D + L функция Φ (t) и вполне определенные постоянные $c_1, ..., c_m$, удовлетворяющие краевому условию (5). Эти постоянные являются функционалами вида

$$c_k = \int_L f(t)\nu_k(t)\,ds. \qquad (k=1,..., m). \tag{6}$$

Отсюда следует, что для разрешимости исходной задачи (4) необходимо и достаточно выполнение равенств:

$$\int_L f(t)\nu_k(t)\,ds = 0 \qquad (k=1,..., m). \tag{7}$$

Нужно отметить, что $\nu_1, ..., \nu_m$ – линейно независимые функции, которые зависят исключительно от области.

Заключение

Из приведенного выше краткого обзора видно, что исследования Н. И. Мусхелишвили охватывают широкий круг проблем. Эти работы имеют огромное влияние на ход развития ряда областей механики и математики.

Методы Н. И. Мусхелишвили по плоской задаче теории упругости нашли применение и дальнейшее развитие в работах С. Г. Михлина, Д. И. Шермана и др. В монографиях Г. Н. Савина, Д. В. Вайнберга и др. при помощи этих методов решены многие задачи, встречающиеся в технических приложениях. В работах Л. А. Галина, А. И. Каландия, И. Н. Карцивадзе, И. Я. Штаермана и др. получили дальнейшее применение и развитие методы и результаты Н. И. Мусхелишвили по контактным задачам.

Исследования по задачам кручения и изгиба брусьев продолжены в разных направлениях в работах А. Я. Горгидзе, А. К. Рухадзе и др.

Идеи Н. И. Мусхелишвили оказали большое влияние на разработку в Советском Союзе проблематики по краевым задачам для аналитических функций и теории сингулярных интегральных уравнений (работы Ф. Д. Гахова, И. Н. Векуа, Н. П. Векуа, А. В. Бицадзе, Д. А. Квеселава, Б. В. Хведелидзе, Л. Г. Магнарадзе, Г. Ф. Манджавидзе и др.).

Эти же идеи за последние два десятилетия проникли в общую теорию уравнений с частными производными эллиптического типа (работы И. Н. Векуа, З. И. Халилова и др.). В частности, они нашли существенные приложения в вопросах теории оболочек.

Труды Н. И. Мусхелишвили пользуются большой популярностью в широких кругах специалистов зарубежных стран. В монографиях Грина и Зерна (Англия), И. С. Сокольникова (США), И. Бабушки, К. Ректориса и Ф. Вычихло (Чехословакия) и др. значительное место уделяется основательному изложению методов и результатов Н. И. Мусхелишвили. Эти результаты часто используются в работах иностранных ученых при решении многих актуальных задач математики и механики.*

* Эта статья в виде брошюры издана в Новосибирске в 1961 г. Сибирским отделением АН СССР. Мы приводим полный текст этой брошюры без изменений (прим. редактора).

Научные труды акад. Н. И. Мусхелишвили

1. О равновесии упругих круглых дисков под влиянием напряжений, приложенных в точках их обвода и действующих в их плоскости. – Изв. электротехн. института, Петроград, 1915, т. 12, 39-55 (совместно с Г.В. Колосовым).

2. О тепловых напряжениях в плоской задаче теории упругости. Изв. электротехн. института, Петроград, т. 13, 1916, 23-37.

3. Об определении гармонической функции по заданиям на контуре. – Ж. Физ.-мат. об-ва при Перм. университете, 1918 (1919), вып. I. 89-93.

4. Sur 1'Integration de 1'équation biharmonique. – Izv. Ross. Akad. Nauk, 1919.v.13. №12-15. 663-686.

5. Лекции по аналитической геометрии, читанные в Тифлисском политехническом институте, ч. I, Тифл. политехн. институт, Тифлис, 1922. 261 стр. (на правах рукописи).

6. Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la physique mathématique. – Tiflis, Édition de l'Université de Tiflis, Imprimerié de 1'Etat, 1922, 157 p.

7. Sulla deformazione piana di un cilindro elastico isotropo. – Atti Accad. Llncei. 1922. 5 ser. v.31, №12, 548-551.

8. Sur l'équilibre des corps élastiques soumis à l'action de la chaleur. – Bull. Univ., Tiflis. – 1923, №3, 17-26.

9. О решении одного интегрального уравнения, встречающегося в теории черного излучения. Ж. Русск. физ.-хим. общества, часть физ., 1924, т. 56, вып.1. 30-39.

10. Russian-Georgian and Georgian-Russian Mathematical Dictionary. Pure and Applied mathematics with Theoretical Mechanics, Tbilisi. 1925. 249 p. (together with G.Nikoladze and A.Kharadze).

11. Course of Theoretical Mechanics. Part 1, Statics, Tbilisi, Tbilisi University. 1926, 292 p. (Lithographic edition) (in Georgian).

12. Лекции по аналитической геометрии. Ч. I, изд. II, перераб., Тифлис, 1926. 208 стр.

13. Sur la solution du problème biharmonique pour l'aire extéreure à une ellipse. – Math. Zeitschr. 1927. Bd. 26. №5. 700-705.

14. Sur 1'integration approchee de 1'équation biharmonique. – C.R. Acad. sci., 1927, t. 185. №22. 1184-1186

15. Sur les orbites périodiques et les lignes géodésiques fermées. – Atti Accad. Lincei, 1927, ser. 8, v.5. №10. 769-773.

16. Course of Theoretical Mechanics. Part II. Kinematics. Tbilisi. Tbilisi University. 1928. 253 p. (in Georgian).

17. О периодических орбитах в замкнутых геодезических линиях (тезисы доклада). Труды Всероссийского съезда математиков в Москве. 27 апреля – 4 мая 1927 г., М.-Л., 1928. 189.

18. О некоторых контурных задачах плоской гидродинамики. Труды Всероссийского съезда математиков. М.-Л., 1928, 262.

19. Sur le problème fondamental d'hydrodynamique à deux dimensions. – Atti Accad. Lincei, 1928. ser. 6, v. 7, №12, 995-1002.

20. Zum problem der Torsion der homogenen isotropen Prismen. – Sak. Polyt. Inst. Moambe; 1929, v.l, part 1, pp.1-20.

21. Sur le problème de torsion des cylindres élastiques isotropes. – Atti Accad, Lincei, 1929, ser. 6, v. 9, №4. 295-300.

22. Course of Analytic Geometry. Part 1, Tbilisi, Polyt. Inst. Publ., 1929, X+235 p. (in Georgian).

23. Course of Theoretical Mechanics. Part I, Statics. Tbilisi, 1930, 216 p. (in Georgian).

24. Nouvelle méthod de reduction du problème biharmonique fondamental à une équation de Fredholm. – C.R. Acad. sci., 1931, 1 192. №2, 77-79.

25. Théoremes d'existence relatifs au problème biharmonique et aux problèmes d'élasticité á deux dimensions. – C.R. Acad. sci., 1931, t.192. №4. 221-223.

26. Course of Theoretical Mechanics. Part II, Kinematics, 2-nd ed., Tbilisi, 1932. 208 p. (in Georgian).

27. К задаче кручения и изгиба упругих брусьев, составленных из различных материалов. – Изв. АН СССР, ОМЕН, вып. 7. 1932, 907-945.

28. К задаче кручения и изгиба составных упругих балок. – Изв. Инж.-стр. института Грузии, вып. I, 1932, 123-127.

29. Sur le problème de torsion des poutres élastiques composées. – C.R. Acad. sci., 1932, t. 194. №17. 1435-1437.

30. Recherches sur des problème aux limites relatifs à l'équation biharmonique et aux équations de l'elasticité a deux dimensions. - Math. Ann., 1932. Bd. 107, №2, 282-312.

31. Курс аналитической геометрии, ч. I, Л.-М., 1933, 220 стр.

32. Course of Theoretical Mechanics. P.I, Statics, 2 nd edition, Tbilisi, 1933, 190 p. (in Georgian).

33. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения, плоская задача, кручение и изгиб (предисловие акад. А.Н.Крылова). АН СССР, Л., 1933. 397 стр.

34. Решение плоской задачи теории упругости для сплошного эллипса. – Прикл. мат. и мех., т. I, вып. I, 1933, 5-12.

35. Praktische Lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsformen. – Z. angew. Math. und Mech., 1933, Bd. 13. №14, 264-282.

36. Sur l'équivalence de deux méthodes de réduction du. problème plan biharmonique à une équation integrale. – C.R. Acad. sci., 1933, t.196, №26, 1947-1948 (avec V.Fock).

37. Перевод: Вебстер А., Механика материальных точек твердых, упругих и жидких тел. Лекции по математической физике (перевод с

англ. изд. под ред. К.В.Меликова). – Л.-М., 1933, 624 стр. (совместно с М. Б.Севастьяновой и К.В.Меликовым).

38. Курс аналитической геометрии, ч. 2, – Л.-М., 1934, 276 стр.

39. Новый общий способ решения основных контурных задач плоской теории упругости. – ДАН СССР, 1934, т. 3, №1, 7-11.

40. Исследование новых интегральных уравнений плоской теории упругости. – ДАН СССР, 1934, т. 3, №2. 73-77.

41. 0б одной новой контурной задаче теории упругости. – ДАН СССР, 1934, т. 3. №3, 141-144.

42. Новый способ решения плоских задач теории упругости. – Бюллетень II Всесоюзного съезда математиков в Ленинграде 24-30 июня 1934 г. Л.. 1934. 68 (тезисы доклада).

43. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения, плоская задача, кручение и изгиб. Изд. 2, перераб. и доп. – М.-Л., Изд. АН СССР, 1935. 453 стр.

44. Решение основной смешанной задачи теории упругости для полуплоскости. – ДАН СССР. 1935, т. 3, №2, 51-53.

45. Упругости теория. БСЭ, т. 56, 1936, 147-158.

46. Новый способ решения плоских задач теории упругости (резюме доклада). – Труды II Всесоюзного математического съезда в Ленинграде 24-30 июня 1934 г., т. 2, Л.-М., 1936, 345-346.

47. О некоторых краевых задачах теории упругости (резюме доклада) – Труды II Всесоюзного математического съезда, т. 2, М.-Л., 1936, 358.

48. On the numerical solutions of plane problems of elasticity. - Tbil. Mathem. Inst. Shrom., v.l, 1937, pp.83-87 (in Georgian).

49. Ред. перевода: Главы 7-9. В кн. Франк Ф. и Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч.2, перевод под общ. ред. Л.Э.Гуревича,- Л.-М., 1937. 224-346.

50. Курс аналитической геометрии. Изд. 2, перераб., – М.-Л., 1938, 576 стр.

51. Course of Analytic Geometry. Tbilisi, Tbilisi State University, 1939, 704 p. (In Georgian).

52. О решении основных граничных задач теории Ньютонова потенциала. – ПММ, т. 4, вып. 4, 1940, 3-26.

53. О решении основных контурных задач теории логарифмического потенциала. – Тр. Тбил. мат. института, т.7, 1939, 1-24 (совместно с Д.З. Авазашвили).

54. О решении задачи Дирихле на плоскости. – Сообщения Груз. ФАН СССР.-1940, т.I. №2, 99-106.

55. Замечания относительно основных граничных задач теории потенциала. – Сообщения Груз. ФАН СССР, 1940, т. I. № 3, 169-170. Поправки к статье, там же, №7, 567.

56. Приложения интегралов типа Коши к одному классу сингулярных ин-

тегральных уравнений. – Тр. Тбил. мат. института, т. 10. 1941, 1-43, 161-162.

57. Об основной смешанной краевой задаче теории логарифмического потенциала для многосвязных областей. – Сообщения АН Груз. ССР, 1941,т. 2, №4, 309-313.

58. Основные граничные задачи теории упругости для полуплоскости. – Сообщения АН Груз. ССР. 1941, т. 2, №10, 873-880.

59. Сингулярные интегральные уравнения с ядром типа Коши на разомкнутых контурах. – Тр. Тбил. мат. института АН Груз. ССР, т. 11. 1942, 141-172 (совместно с Д.А. Квеселава).

60. Основные граничные задачи теории упругости для плоскости с прямолинейными разрезами – Сообщения АН Груз. ССР, 1942, т.3, №2, 103-110.

61. К задаче равновесия жесткого штампа на границе упругой полуплоскости при наличии трения. – Сообщения АН Груз. СССР, 1942, т. 3. №5, 413-418.

62. Системы сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши. – Сообщения АН Груз. ССР. 1942, т. 3, №10, 987-994.

63. Краевая задача Римана для нескольких неизвестных функций и ее приложения к системам сингулярных интегральных уравнений. – Тр. Тбил. мат. института, т. 12, 1943, 1-46 (совместно с Н.П.Векуа).

64. Сингулярные интегральные уравнения, граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. – М. – Л., 1946, 448 стр.

65. Курс аналитической геометрии. Изд. 3-е, испр. и доп., – М. – Л., – 1947, 664 стр.

66. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения, плоская теория упругости, кручение и изгиб. Изд. 3-е, перераб. и доп., – М. – Л., 1949. 63 II 5 стр.

67. Course of analytic geometry. Third revised and enlarged Edition, – Tbilisi. Tekh. da Shroma, 1951. XVI. 671 p.(in Georgian).

68. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. – Groningen. P.Noordhoff, 1953, XXXI. 7CJ4 p. (English translation of the third Russian edition of 1949)

69. Singular integral equations. – Groningen, P. Noordhoff, 1953, 447 p. (English translation of the Russian edition of 1946).

70. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения, плоская теория упругости, кручение и изгиб. Изд. 4-е. исправленное и дополненное, – М., Изд.-во АН СССР, 1954, 547 стр.

71. Course of analytic geometry. – Peking, 1955, 633 p. (Chinese translation of the third Russian edition 1947).

72. Citeva probleme fundamentale ale teorei matematice a elasticotatii, v.v. 1-3. - Buchuresti, Inst. studii rom.-sov., 1956, 892 p. (Roumanian translation of the third Russian edition 1949).

73. Some basic problems of the mathematical theory of elasiclty. – Peking. 1958, XVII, 526 pp. (Chinese translation of the fourth Russian editlon of 1954).

74. Применения теории аналитических функций в теории упругости. Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. – М, 1960, 142-143 (совместно с И.Н.Векуа).

75. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. Изд. 2-е, перераб. – М., Физматгиз, 1962, 599 стр.

76. Методы теории аналитических функций и теории упругости. Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике (1960). – М. – Л., Изд.-во АН СССР, 1962, 310-388 (совместно с И.Н. Векуа).

77. Course of analytic geometry. 4-th edition. – Tbilisi, Sabch. Sakartv., 1962. 617 p.(in Georgian).

78. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. – Groningen, P.Noordhoff, 1963, XXXI, 718 p.

79. Singuläre Integralgleichungen. Randwertprobl erne der Funktionentheorie und Anwendungen auf die mathematische Physik. - Berlin. Akademie-Verlag, 1965. XIV. 564 p (German translation of the second Russian edition of 1962).

80. Приложения теории функций комплексного переменного в теории упругости. – В кн.: Приложения теории функций в механике сплошной среды, т. I, – М., Наука, 1965, 32-55. The same In English: Applications of the theory of functions of a complex variable to the theory of elasticity Ibid., s. 6-75.

81. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения, плоская теория упругости, кручение и изгиб. Изд. 5-е, испр. и доп , – М., Наука, 1966, 707 с.

82. Курс аналитической геометрии. Изд. 4-е. – М., Высшая школа, 1967, 655 с.

83. Илья Несторович Векуа (к 60-летию со дня рождения). Успехи математических наук, т. 22, вып.5, 1967, 185-195 (совместно с И.Г. Петровским).

84. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. Изд. 3-е, испр. и доп. – М., Наука. 1968, 511 с.

85. Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitatstheori. – Leipzig, 1971, 636 S. (German translation of the fifth Russian edition of 1966).

86. Singular integral equations. Boundary problems of the theory of functions and some of their applications in mathematical physics. – Tbilisi. Metsniereba, 1982, 591 p. (in Georgian).

ი. ვეკუა

აკადემიკოსი ნიკოლოზ ივანეს ძე მუსხელიშვილი

რეზიუმე

გადმოცემულია აკადემიკოს ნ. მუსხელიშვილის მოკლე ბიოგრაფია და მეცნიერული მოღვაწეობა.

I. Vekua

Academician N. Muskhelishvili

Summary

Here you can see academician N. Muskhelishvili's short biography and scientific activities.

*ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского государственного
университета им. Ив. Джавахишвили
Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University
354*

УДК 51(479. 22) (092)

АКАДЕМИК ИЛЬЯ НЕСТОРОВИЧ ВЕКУА

А.В. Бицадзе

Последнее семидесятилетие истории человечества ознаменовалось глубочайшими изменениями в жизни народов и государств. Оно представляет собой целую эпоху в развитии науки вообще и математики в частности. За этот период особенно высокого экономического и культурного подъема добилась наша страна. В просвещение и науку пришли представители самых широких слоев населения. Советская наука стала воистину народной. В стране зародились крупные центры математической мысли. Советская математическая наука заняла первенствующее положение в мире по целому ряду ее отраслей. Всемирной известности и славы достигла целая плеяда наших математиков, среди которых почетное место занимает Илья Несторович Векуа.*

Илья Несторович прошел славный путь советского ученого от рядового труженика до крупного организатора науки и снискал большую любовь и уважение специалистов, работающих в современной математике и в смежных с ней отраслях знаний.

Трудно писать о человеке, которого довольно близко знал на протяжении почти тридцати лет по совместной работе во многих больших научных коллективах, в жизни которых он всегда выделялся своими лучшими качествами исследователя, воспитателя и организатора. Трудно не только из-за чувства большой ответственности перед историей науки, но и в силу сложности процесса научного творчества, без раскрытия которого невозможно показать настоящий облик ученого.

Автор был далек от мысли, что ему удастся в полной мере описать жизнь и многостороннюю деятельность Ильи Несторовича Векуа. Тем не менее, он взял на себя смелость рассказать об этом замечательном человеке правдиво и искренне, как о своем учителе и друге.

---

* Эта статья в виде брошюры была издана издательством «Мецниереба» в 1987 г. Мы приводим полный текст этой брошюры без измененнй (прим. редактор).

ДЕТСТВО И ГОДЫ УЧЕБЫ

В грузинской семье молодых супругов Нестора и Лизы Векуа, в селе Шешелети (Самурзакано, ныне Гальский район Грузии) 23 апреля 1907 года родился первенец, названный вскоре Ильей, которому суждено было стать одним из крупнейших математиков наших дней.

Будучи потомком вожака крестьянского движения середины прошлого века в причерноморской Грузии (в Самегрело) Уту Тодуа, вошедшего в историю Грузии под именем Мартали Тодуа (Правдивого Тодуа), маленький Илико рос и воспитывался в среде, где трудолюбие, борьба за справедливость и жажда знаний составляли основное содержание жизни. Еще подростком, в свободное от школьных занятий время, он уходил работать в поле, где с раннего утра до позднего вечера, не разгибая спины, трудились отец и старый дед. Продукты сельского хозяйства, выращиваемые изнурительным трудом, составляли основное средство существования быстро растущей семьи Нестора Федоровича Векуа.

К младшему брату Васо и к сестрам: Маро, Вере и Цоцо Илико относился с большой заботой и чувством нежной любви. Его прилежание и успехи в учебе были показательным примером для всех детей Шешелети.

Большую заботу о воспитании своих внуков и внучек проявлял дед Федор (Тэдо). Умирая, он во всеуслышание завещал сыну не лишать детей возможности получить образование, ибо без образования жизнь человека ему всегда представлялась беспросветной.

После успешного окончания средней школы в г. Зугдиди осенью 1925 г. Илья Несторович поступил на физико-математический факультет Тбилисского государственного университета. Выбор был не случайным. Математика своей строгостью и внутренней стройностью логического хода мыслей еще в школе привлекала его внимание. Как будто все шло хорошо. Но в 1926 г. семью Ильи Несторовича постигло большое несчастье. В сорокачетырехлетнем возрасте скончалась горячо любимая мать. Глубокая душевная травма и, естественно, связанные с ней материальные лишения не поколебали в нем уверенность в необходимости завершения университетского образования.

Это был период, когда на физико-математическом факультете Тбилисского университета научную и педагогическую работу вели Н. И. Мусхелишвили, Г. Н. Николадзе, А. М. Размадзе и А. К. Харадзе. Благодаря им на физико-математическом факультете по ряду ведущих математических дисциплин лекции читались на высоком научном уровне. Однако, из-за отсутствия в то время традиции ведения научных семинаров, возможности втягивания студенческой молодежи в науку были значительно ограничены. На заседаниях студенческого научного кружка, как правило, слушали рефераты по давно решенным математическим проблемам, не так уж далеко выходящим за рамки программ обычно читаемых дисциплин. Отметим кстати, что Илья Несторович неоднократно избирался председателем студенческого физико-математического кружка, начиная с третьего курса.

Для расширения математического кругозора у студентов старшекурсников, безусловно, большое значение имели математические беседы, периодически устраиваемые профессорами и преподавателями факультета. Студенты знали, что их профессора – видные ученые, работы которых печатались в авторитетных научных журналах, и это, пожалуй, имело самое благоприятное влияние на разжигание глубокого интереса у грузинской молодежи к физико-математическим наукам. Но, к сожалению, послеуниверситетская подготовка математических научных кадров все еще шла самотеком.

В 1929–1930 гг. Илья Несторович работает в геофизической обсерватории Грузии сперва в Тбилиси, а затем в Карсани (недалеко от Тбилиси).

В конце 20-х – начале 30-х годов в связи с открытием в Тбилиси новых высших учебных заведений технического профиля настала необходимость перейти к планомерной подготовке математических кадров высшей научной квалификации. Партия и правительство осуществили широкие мероприятия в масштабе всего Советского Союза с целью массовой подготовки научных кадров через аспирантуру. По инициативе Н. И. Мусхелишвили была направлена большая группа молодых математиков, успешно окончивших Тбилисский университет, для прохождения аспирантуры в научных учреждениях и высших учебных заведениях Москвы и Ленинграда.

Следует отметить, что это были тяжелые годы для только что зарождавшейся грузинской математической школы. Смерть вырвала из ее руководящего ядра в расцвете сил двух выдающихся ученых – А. М. Размадзе и Г. Н. Николадзе.

В ЛЕНИНГРАДЕ

В октябре 1930 г. Илья Несторович поступает в аспирантуру Академии наук СССР в Ленинграде. В то время в Физико-математическом институте Академии наук СССР и в Ленинградском государственном университете работали крупнейшие советские математики: И. М. Виноградов, Н. М. Гюнтер, Н. Е. Кочин, А. Н. Крылов, В. И. Смирнов и др. достойные продолжатели славных традиций Петербургской математической школы.

Они читали интересные спецкурсы по целому ряду актуальных направлений теоретической и прикладной математики, ставили и обсуждали новые проблемы большой научной важности, систематически вели научно-исследовательские семинары, самыми активными участниками которых были тогда еще совсем молодые талантливые ленинградские математики: Г. М. Голузин, Н. П. Еругин, С. Г. Михлин, С. Л. Соболев, С. А. Христианович и др.

В те годы в Ленинграде часто бывал Н. И. Мусхелишвили, который читал цикл лекций по математической теории упругости и руководил работой аспирантов.

Естественно, что такая кипучая жизнь привлекала к себе математическую молодежь со всех концов Советского Союза. В то время в Ленинграде из грузинских математиков вместе с Ильей Несторовичем Векуа успешно занимались в аспирантуре А. Я. Горгидзе, Д. Е. Долидзе, Я. Г. Мецхваришвили, А. К. Рухадзе и др.

Наряду с тонкими проблемами математического анализа и аналитической теории чисел в центре внимания Ленинградской математической школы стояли и проблемы механики сплошной среды в математическом аспекте.

На развитие новых математических методов в теории упругости, начиная уже с 20-х годов, большое влияние оказывали работы Н. И. Мусхелишвили. Поднятые им проблемы стали объектами научных исследований многих молодых математиков.

В первых своих оригинальных научных исследованиях (совместно с А. К. Рухадзе) Илья Несторович разрабатывает вопросы кручения и изгиба упругих брусьев и стержней.

В аспирантуре И. Н. Векуа начал работать под руководством акад. А. Н. Крылова, который в то время был директором Физико-математического института им. В. А. Стеклова. Постепенно он включился в работу в группе акад. В. И. Смирнова, возглавлявшего теоретический отдел в Сейсмологическом институте, который раньше находился в составе Физико-математического института.

К этому же периоду относятся исследования И. Н. Векуа, посвященные теории распространения упругих волн в бесконечном слое с параллельными плоскими границами. Возникшие здесь плоские задачи значительной прикладной важности редуцируются к смешанным задачам для волновых уравнений:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0,\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0\,,\qquad (1)$$

когда искомые в слое функции $\varphi(x, y, t)$ и $\psi(x, y, t)$ (продольный и поперечный потенциалы) связаны между собой линейными дифференциальными соотношениями как в краевых, так и в начальных условиях.

Аналогичная задача для полупространства (задача Лэмба) была исследована в 1932 г. В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым, которые для этой цели ввели в рассмотрение функционально-инвариантные решения уравнений (1).

Решение отмеченных выше смешанных задач по своей физической сущности должны выражаться в терминах так называемых падающих и отраженных волн. Но исследование этих задач для слоя, по сравнению с задачей Лэмба, существенно осложняется по той причине, что в первом случае число отраженных волн растет неограниченно вместе с возрастанием времени, в то время, как во втором случае их всего четыре.

Построив явную формулу для каждой из отраженных волн и систематизируя их бесконечную совокупность, Илья Несторович дал полное решение всех рассматриваемых им задач. Эти исследования легли в основу его кандидатской диссертации, защищенной позже.

За три года пребывания в Ленинграде Илья Несторович стал вполне сложившимся математиком, автором серьезных научных исследований. Замечательный город большой современной культуры оказал значительное влияние и на формирование общего мировоззрения Ильи Несторовича. Его внимание всегда привлекали всемирно известные музеи и театры Ленинграда. Здесь у него появилось много друзей среди известных представителей советской науки и культуры. Зародившаяся в Ленинграде еще в 1930 г. дружба между Ильей Несторовичем Векуа и Сергеем Львовичем Соболевым во многом способствовала успеху общего дела, которому так преданно служили эти два больших математика.

В 1933 г. Илья Несторович и другие грузинские математики, окончившие аспирантуру в Ленинграде и Москве, возвратились в Тбилиси, где их ждали интересные и весьма актуальные задачи развертывания исследовательской работы и поднятия научного уровня преподавания в тех отраслях математики, в которых сильно чувствовалось отсутствие специалистов на месте.

В ТБИЛИСИ

В начале 30-х годов Тбилиси стал одним из крупнейших центров высшего образования страны. В 1933 г. в нем уже насчитывалось одиннадцать высших учебных заведений.

В таких крупных вузах, как Тбилисский государственный университет, Закавказский индустриальный институт, Закавказский институт инженеров путей сообщения и Лесотехнический институт, математическая подготовка специалистов шла по обширной программе. Поднятие общей культуры преподавания математики и особенно его научного уровня стало настоятельной необходимостью.

На долю вернувшихся из Москвы и Ленинграда молодых математиков пала большая педагогическая нагрузка. Каждый из них был вынужден совмещать свою работу в нескольких вузах.

Осенью 1933 г. Илья Несторович находился на основной работе в должности научного сотрудника физико-математического факультета Тбилисского государственного университета. Он сразу становится одним из самых активных участников уже постоянно действующего научно-исследовательского семинара по проблемам математики и механики, на заседаниях которого часто выступает с докладами и сообщениями по теории дифференциальных уравнений с частными производными. Для студентов старших курсов физического отделения читает лекции по дополнительным главам математики, охватывающим такие разделы современной математики, как дифференциальные уравнения с частными производными, вариационное исчисление, тензорный анализ, специальные функции и др.

В 1935 г. Илья Несторович – ученый секретарь Математического института Грузинского филиала Академии наук СССР, в создании которого он принимал самое активное участие. Этот институт был организован вначале при Тбилисском государственном университете в 1933 г. Инициатором его создания был акад. Н. И. Мусхелишвили. Илья Несторович параллельно ведет преподавательскую работу в Тбилисском государственном университете. Кроме этого с 1936 г. он возглавляет работу теоретического отдела Геофизического института Грузинского филиала Академии наук СССР.

Осенью 1937 г. Илья Несторович начинает чтение курса лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям для студентов математического отделения приема 1935 г. в Тбилисском государственном университете. Студенты-математики этого приема, в том числе и автор настоящих строк, кроме отмеченного выше курса до окончания университета у Ильи Несторовича слушали: аналитическую теорию обыкновенных дифференциальных уравнений, курс дифференциальных уравнений с частными производными и курс интегральных уравнений.

Отличительной чертой лекций И. Н. Векуа являлось неустанное стремление приблизить преподавание к современному состоянию науки в областях читаемых их дисциплин.

При чтении лекций устная речь и манера держаться у доски у Ильи Несторовича были лишены всякого элемента артистизма. Внутренняя логика выявления математических фактов, подчеркнутое выделение главного из единства последовательности этих фактов раскрывали перед слушателями его лекций всю красоту излагаемого предмета.

Успеваемость по дисциплинам, читаемым Ильей Несторовичем, при всей его требовательности была самая высокая. Может быть не случайно, что многие из студентов-математиков Тбилисского университета приема 1935 г., оставшихся в живых после Великой Отечественной войны (очень многие погибли на фронте), пошли в науку, специализируясь в различных отраслях современного математического анализа и прикладной математики (дифференциальные уравнения математической физики, интегральные уравнения, функциональный анализ, механика сплошной среды, теоретическая геофизика и т. д.), охватывающих круг научных интересов Ильи Несторовича.

На оформление ученых степеней в нашей стране серьезно начали обращать внимание лишь во второй половине 30-х годов.

В 1937 г. Илья Несторович на основе работ, выполненных еще в бытность свою аспирантом в Ленинграде, успешно защищает кандидатскую диссертацию на тему «Распространение упругих колебаний в бесконечном слое» и сразу же избирается доцентом Тбилисского государственного университета.

Среди научных направлений теоретической и прикладной математики в творчестве Ильи Несторовича доминирующее положение всегда занимала теория дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа.

В результате глубокого анализа сущности и роли общего решения бигармонического уравнения, а также богатого набора аналитических (функционально инвариантных) решений уравнений (1), у Ильи Несторовича еще в Ленинграде зародилась идея отыскания общих представлений решений широких классов эллиптических уравнений и, что самое главное, создания на их базе новых методов решения краевых задач.

Общие решения некоторых частных классов эллиптических уравнений в математике были известны и раньше, но отношение к ним со стороны многих специалистов было весьма скептическим по той причине, что не знали, как приспособить их для получения решений основных задач математической физики. Например, Давид Гильберт, признанный величайшим математиком всех времен, и его ученик и последователь Рихард Курант в двухтомнике математической физики, изданном в 30-х годах, скептически высказываются о пользе известных к тому времени общих комплексных представлений решений эллиптических уравнений. Сегодня в математическом мире общепризнано, что преодоление этого традиционного скептицизма, проявляемого к общим решениям эллиптических уравнений, неразрывно связано с именем И. Н. Векуа.

Начатые Ильей Несторовичем в 1936 г. интенсивные исследования завершились в середине 40-х годов созданием стройной аналитической теории линейных дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа с двумя независимыми переменными.

Построенные им формулы общего комплексного представления решений эллиптических уравнений оказались весьма удобными для выявления новых качественных и структурных свойств этих решений, а также для решения обширного класса краевых задач, недоступных для известных раньше методов исследований.

С целью ознакомления читателя с существенным вкладом, внесенным И. Н. Векуа в сокровищницу науки, нам придется в дальнейшем пользоваться математическим аппаратом.

Во второй половине 30-х годов Илья Несторович разработал метод построения общих решений весьма широкого класса эллиптических уравнений вида

$$\Delta^n u + \sum_{k=1}^{n} L_k(\Delta^{n-k} u) = 0, \qquad (2)$$

где Δ – оператор Лапласа, а L_k – линейный дифференциальный оператор вида

$$L_k(u) \equiv \sum_{p,\,q=0}^{p+q\le k} a_{pq}^{(k)}(x, y)\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q} \qquad (3)$$

с аналитическими коэффициентами $a_{pq}^{(k)}(x, y)$.

Этот метод позволил Илье Несторовичу получить основополагающие для аналитической теории эллиптических уравнений результаты. Им было показано, что общее решение уравнения (2) в односвязной области D, лежащей в области аналитичности коэффициентов оператора (3), выражается формулой:

$$u(x,y) = \Big\{G_o(z, \bar{z}_o; z, \bar{z})\Phi_o(z) - \\ - \sum_{k=1}^{n-1}\int_{z_o}^{z}\Phi_k(t)\frac{\partial}{\partial t}G_k(t,\bar{z}_o;z,\bar{z})\Big\}dt, \qquad (4)$$

где z_o — фиксированная точка области D, $\Phi_0(z),..., \Phi_{n-1}(z)$ –произвольные аналитические в этой области функции комплексного аргумента $z=x+iy$, а функции $G_k(t, \tau; z, \zeta)$, $k=0, 1,..., n-1$ имеют вид

$$G_k(t,\tau; z, \zeta) = \frac{\partial^{2(n-k-1)}G(t, \tau; z, \zeta)}{\partial t^{n-k-1}\partial\tau^{n-k-1}}. \qquad (5)$$

В правой части формулы (5) под знаком производной стоит вполне определенная аналитическая функция своих аргументов $G(t, \tau; z, \zeta)$, которая единственным образом определяется через коэффициенты операторов L_k, $k=1,..., n-1$. Она является решением интегрального уравнения Вольтерра второго рода в комплексной области с аналитическим ядром. Размеры области D зависят от характера аналитической продолжаемости функций $a_{pq}^{(k)}(x, y)$ для комплексных значений независимых переменных x и y; когда $a_{pq}^{(k)}(x, y)$ — целые функции переменных x и y, то в качестве D можно взять любую односвязную область. Формула (4) устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством регулярных в области D решений уравнения (2) и множеством аналитических функций $\Phi_0(z),..., \Phi_{n-1}(z)$, удовлетворяющих условиям

$$\Phi_k(z_0) - \overline{\Phi_k(z_0)} = 0, \;\; k = 0,1,..., \; n-1.$$

Формулу (4) Илья Несторович распространил и для многосвязных областей (в этом случае в качестве $\Phi_k(z_0)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, следует брать аналитические функции, имеющие вполне определенный характер многозначности).

При помощи этих формул И. Н. Векуа удалось построить фундаментальное решение и полную систему частных решений уравнения (2), установить их структурные свойства и исследовать с достаточной полнотой так называемую первую краевую задачу нахождения регулярных в области D решений уравнения (2), удовлетворяющих условиям

$$\left.\frac{d^l u}{d\nu^l}\right|_\Gamma = f_l, \quad l = 0,1,\ldots, n-1$$

где Г — контур области D, а ν— внешняя нормаль Г.

Эти результаты Ильи Несторовича легли в основу его докторской диссертации «Комплексное представление решений эллиптических уравнений и их применение к граничным задачам», защищенной в 1939 г. в Тбилисском государственном университете.

В теории общих комплексных представлений решений эллиптических уравнений, пожалуй, самым главным является открытый Ильей Несторовичем факт возможности эквивалентной редукции любой краевой задачи для уравнения (2) к соответствующей краевой задаче для систем аналитических функций $\Phi_0(z), \ldots, \Phi_{n-1}(z)$.

В современной теории так называемых нефредгольмовых задач для эллиптических (в том числе псевдодифференциальных) уравнений ключевое положение занимает поставленная и исследованная Ильей Несторовичем общая линейная краевая задача для аналитических функций одного комплексного аргумента. Эта задача заключается в отыскании аналитической в области D функции Ф(z), непрерывной вместе со своими производными до порядка m вплоть до границы Г области D и удовлетворяющей краевому условию

$$\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m}\left\{a_k(t)\frac{d^k\Phi(t)}{dt^k} + T_k\left(\frac{d^k\Phi}{dt^k}\right)\right\} = f(t), \ t \in \Gamma, \tag{6}$$

где a_k и f – заданные на Г функции, а T_k – заданные вполне непрерывные операторы.

К такой задаче сводится, в частности, задача отыскания регулярного в области D решения уравнения

$$\Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,y)\, u = 0, \tag{7}$$

удовлетворяющего краевому условию вида

$$\sum_{j+k\le m} a^{jk}(t)\frac{\partial^{j+k}u}{\partial x^j \partial y^k}+\sum_{j+k\le m}T_{jk}\left(\frac{\partial^{j+k}u}{\partial x^j \partial y^k}\right)=f(t),\ t\in\Gamma, \tag{8}$$

где $a^{jk}(t)$, $f(t)$ – заданные непрерывные вещественные функции точек контура Γ, T_{jk} при $j+k=m$ – заданные вполне непрерывные линейные операторы, а при $j+k<m$ – произвольные линейные операторы. Эта задача охватывает известные классические задачи Дирихле, Неймана, Пуанкаре и др.

При исследовании краевой задачи (6) важную роль сыграли приведенные ниже специальные интегральные представления аналитических функций, предложенные впервые Ильей Несторовичем и вошедшие в математическую литературу под названием интегральных представлений Векуа.

Если граница Γ области D достаточно гладка и точка $z=0$ принадлежит области D (это последнее требование не ограничивает общности), то для каждой аналитической в D функции $\Phi(z)$, удовлетворяющей условию $\operatorname{Im}\Phi(0)=0$, существует единственная вещественная функция μ длины дуги Γ такая, что функция $\Phi(z)$ в области D представляется в виде интеграла типа Коши:

$$\Phi(z)=\int_\Gamma \frac{t\mu(t)ds}{t-z} \tag{9}$$

при требовании непрерывности по Гельдеру функции $\Phi(z)$ в $D+\Gamma$, и в виде контурного интеграла

$$\Phi(z)=\int_\Gamma \mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+\int_\Gamma \mu(t)ds, \tag{10}$$

когда $\dfrac{d^m\Phi(z)}{\partial z^m}$ непрерывна по Гельдеру в $D\cup\Gamma$.

При помощи интегральных представлений (9) и (10) краевая задача (6) Ильей Несторовичем была редуцирована к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению

$$A(t)\mu(t)+\int_\Gamma K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=f(t),\quad t\in\Gamma, \tag{11}$$

с интегралом в смысле главного значения по Коши.

Установив условие нормальной разрешимости интегрального уравнения (11) в терминах коэффициентов краевого условия (6) и используя разработанный им же метод регуляризации, Илья Несторович построил вполне законченную и вместе с тем весьма изящную теорию краевой задачи (6).

Илья Несторович полностью раскрыл природу краевой задачи (7) – (8); обнаружив, что эта задача носит, вообще говоря, нетеровский, а не фредгольмовский характер, он получил условие нормальной разрешимости

$$\sum_{k=0}^{m} i^k a^{m-k,k}(t) \neq 0, \; t \in \Gamma,$$

и установил формулу индекса задачи

$$æ = 2\,(m+p),$$

где p – приращение функции

$$-\frac{1}{2\pi} \arg \sum_{k=0}^{m} i^k a^{m-k,k}(t)$$

при однократном обходе контура Г в положительном направлении.

Установив необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (7) – (8), он показал, что эти условия можно сформулировать в терминах замкнутости относительно рассматриваемой области некоторого ядра, а также в терминах полноты определенной системы функций. Следует отметить, что упомянутые ядро и система функций строятся в явном виде при помощи функции Римана уравнения (7) и коэффициентов краевого условия (8).

Наряду с этим формулы общих решений эллиптических уравнений оказались полезными и при изучении структурных и качественных свойств целого ряда специальных функций математической физики, а полученные из этих формул полные системы частных решений успешно были использованы Ильей Несторовичем при разработке вариационного метода построения приближенных решений краевых задач для уравнений (2).

В теорию сингулярных интегральных уравнений Илья Несторович внес существенный вклад, указав, в частности, методы их эквивалентной регуляризации. Чтобы охарактеризовать значение и роль этих работ Ильи Несторовича в развитии теории сингулярных интегральных уравнений, приведем выдержку из предисловия к первому изданию известной монографии Н. И. Мусхелишвили «Сингулярные интегральные уравнения»: «Под влиянием ряда результатов, полученных участниками семинара[1] и, главным образом благодаря прекрасным работам И. Н. Векуа, круг вопросов, которыми я предполагал заняться, существенно изменился, и я могу с большим и вполне понятным удовлетворением отметить, что большую часть содержания этой книги следует рассматривать как результат коллективной работы молодых сотрудников Тби-

[1] Имеется в виду семинар, проводимый в Тбилисском математическом институте в начале 40-х годов.

лисского математического института Академии наук Грузинской ССР, вместе с И. Н. Векуа и со мной».

Построение общих решений эллиптических уравнений, когда число независимых переменных больше двух, сталкивается с принципиальными затруднениями.

Для так называемых метагармонических функций, являющихся решениями эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2}+\lambda^2 u=0,\ \ p\geq 2,$$

Илье Несторовичу удалось построить интегральное представление вида

$$u(x_1,\ldots x_p)=u_0(x_1,\ldots,x_p)-\int_0^1 u_0(x_1 t,\ldots,x_p t)t^q\frac{\partial}{\partial t}J_0(\lambda r\sqrt{1-t})\,dt,$$

где u_0 – гармоническая функция, число

$$q=\frac{p-2}{p},\ r^2=x_1^2+\ldots+x_1^2,\ \text{а } J_0 – \text{функция Бесселя.}$$

Впервые Ильей Несторовичем были установлены приведенные ниже фундаментальные свойства метагармонических функций, лежащие в основе современной теории этих функций.

Регулярная вне р-мерного шара метагармоническая функция $u=(x_1, \ldots, x_p)$, допускающая при $r\to\infty$ убывание в виде $u=e^{-\sigma r}\, o(r^{-q-1/2})$, где $\sigma=\mathrm{Im}\,\lambda$, а о – символ Ландау, тождественно равна нулю.

В случае действительных λ из двух условий Зоммерфельда

$$\frac{\partial u}{\partial r}-i\lambda u=(r^{-q-1/2}),$$

$$u=O(r^{-q-1/2})$$

при больших r, гарантирующих справедливость формулы Грина и единственность решения задачи Дирихле и Неймана для бесконечной области, последнее (так называемое условие «конечности») является следствием первого.

Регулярные метагармонические в бесконечной области функции $u(x_1, \ldots x_p)$, удовлетворяющие при больших r условиям

$$\frac{\partial u}{\partial r}-i\lambda u=e^{-i\lambda r}\ o(r^{-q-1/2}),\ \mathrm{Im}\lambda>0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}+i\lambda u=e^{-i\lambda r}\ o(r^{-q-1/2}),\ \mathrm{Im}\lambda<0,$$

допускают представление в виде суммы метагармонических потенциалов простого и двойного слоев.

На базе этих результатов И. Н. Векуа дал исчерпывающее решение так называемых внешних задач Дирихле и Неймана для метагармонических функций.

Методы и результаты И. Н. Векуа в теории эллиптических уравнений нашли важные приложения к задачам механики сплошной среды, в частности в теории упругих оболочек. К его работам прикладного характера мы еще вернемся ниже.

Приведенные выше результаты, начиная с 1937 г., последовательно публиковались Ильей Несторовичем в разных периодических изданиях. Впоследствии их большая часть систематически была изложена в известной монографии «Новые методы решения эллиптических уравнений», удостоенной в 1950 г. Государственной премии.

40-е годы были периодом бурного развития математической научной мысли в Грузии, обусловленным интенсивной творческой деятельностью грузинских математиков старшего поколения во главе с Николаем Ивановичем Мусхелишвили.

Илья Несторович справедливо считается самым активным участником организованного в 1941 г. Н. И. Мусхелишвили научно-исследовательского семинара по сингулярным интегральным уравнениям и краевым задачам теории функций, постоянно действовавшего в течение нескольких лет.

С 1942 г. по 1947 г. под руководством И. Н. Векуа еженедельно функционировал при физико-математическом факультете Тбилисского государственного университета семинар по теории дифференциальных уравнений эллиптического типа.

Результативность интенсивного творческого труда И. Н. Векуа и его далеко идущие научные идеи вызывали живой интерес математической молодежи Тбилиси 40-х годов. Поэтому не удивительно, что он еще тогда находился в окружении многочисленных учеников и последователей.

Характерными чертами Ильи Несторовича как воспитателя кадров высшей научной квалификации являлись внимательность, строгая требовательность и принципиальность при оценке полученных научных результатов. Все это снискало ему глубокое уважение, признательность и любовь со стороны его учеников.

Успехи в науке во многом зависят от правильной организации работы научных учреждений и вузов. Сегодня нам кажется естественным, когда у нас организаторами науки и высшего образования являются известные ученые. Далеко не так было в двадцатых и тридцатых годах, в основном, из-за отсутствия достаточного количества квалифицированных кадров.

В 40-х годах Илья Несторович – уже крупный организатор науки и высшего образования в Грузии.

В тяжелые годы Великой Отечественной войны, будучи деканом физико-математического факультета, а потом проректором Тбилисского государственного университета, он провел большую организационную работу для обеспечения бесперебойности в процессе обучения. Параллельно он заведовал кафедрами геометрии в университете и теоретической механики в Закавказском институте инженеров путей сообщения.

Большие научные заслуги И. Н. Векуа получили достойную оценку. В 1944 г. он был избран членом-корреспондентом Академии наук Грузинской ССР, а в 1946 г. – членом-корреспондентом Академии наук СССР и действительным членом Академии наук Грузинской ССР.

Илья Несторович показал себя крупным организатором науки на постах заведующего отделом Тбилисского математического института, председателя отделения математических и естественных наук (1947–1950 гг.) и академика-секретаря Академии наук Грузинской ССР (1947–1951 гг.).

Глубокое понимание перспектив развития науки, непримиримость к недостаткам в текущей работе и высокая принципиальность при решении научно-организационных вопросов снискали И. Н. Векуа доверие партии, правительства и коллектива Академии наук. В 1946 г. его заслуги были отмечены высокими правительственными наградами: орденом «Знак Почета» и медалями.

Несмотря на то, что организационная работа отнимала много времени, сил и энергии, Илья Несторович в те годы, как и дальше, твердо стоял на переднем крае науки, успешно разрабатывал проблемы принципиальной важности.

Путь творчества далеко не всегда можно уподобить зеленой улице. И на жизненном пути Ильи Несторовича не раз возникали серьезные препятствия и затруднения. На первый взгляд может показаться удивительным, что наиболее глубокие исследования Ильи Несторовича выполнены именно в эти трудные периоды жизни. Успехи эти, конечно, обусловлены яркостью таланта Ильи Несторовича при наличии большой силы воли и четкой организованности в работе.

В начале 50-х годов в творчестве Ильи Несторовича наблюдается новый исключительно большой подъем. В конце 1951 г. он принимает приглашение перейти на постоянную работу в научные учреждения и вузы Москвы.

В МОСКВЕ

Поздней осенью 1951 г. Илья Несторович вместе со своей семьей (с женой Тамарой Васильевной и дочерью Ламарой) переезжает в Москву и сразу приступает к работе в качестве заведующего отделом Центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ) и заведующего кафедрой теоретической механики в Московском физико-техническом институте. Инициатором приглашения И. Н. Векуа был акад. С. А. Христианович, руководивший в то время названными учреждениями.

В течение этого периода научные интересы Ильи Несторовича не были ограничены лишь проблемами прикладного характера. В конце 1952 г. его избирают профессором кафедры дифференциальных уравнений Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (МГУ), а в 1953 г. – старшим научным сотрудником Математического института им. В. А. Стеклова Академии наук СССР. Илья Несторович успешно продолжает начатые им еще в Тбилиси исследования по общим эллиптическим системам двух уравнений первого порядка.

В Тбилиси была написана его фундаментальная работа «Системы дифференциальных уравнений 1-го порядка и граничные задачи с применением в теории оболочек», опубликованная в «Математическом сборнике» в 1952 г.

Хорошо известно, что теория аналитических функций $\Phi(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ одного комплексного переменного представляет собой теорию системы Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0,\ \ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0. \qquad (12)$$

Система (12) является частным случаем эллиптической системы

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+au+bv=0,\ \ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+cu+dv=0 \qquad (13)$$

с заданными действительными коэффициентами a, b, c, d действительных переменных x и y.

Попытка построения теории функций $w(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, действительная и мнимая части которой являются решениями системы (13), была предпринята еще Бельтрами. В начале 30-х годов Т. Карлеман и Н. Теодореско показали, что некоторые свойства решений системы (12) переносятся на решения частных классов эллиптических систем.

До начала 50-х годов в течение двадцати с лишним лет не было достигнуто сколько-нибудь существенных продвижений на пути исследования систем вида (13). Благодаря работам Ильи Несторовича была создана единая теория общих эллиптических систем двух уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными, именуемая теорией обобщенных аналитических функций.

В обозначениях

$$w(z)=u(x, y)+iv(x, y),\ 4A=a+d+i(c-b),$$

$$4B=a-d+i(c+b),\ \ 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y},$$

система (13) записывается в виде

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + Aw + B\bar{w} = 0. \tag{14}$$

Ниже мы приводим некоторые фундаментальные положения теории обобщенных аналитических функций, принадлежащие И. Н. Векуа.

Если коэффициенты A и B системы (14) на всей плоскости E комплексного переменного z принадлежат классу $L_{p,2,}$ $p>2$, то в любой области D этой плоскости каждая обобщенная аналитическая функция w, удовлетворяющая уравнению (14), представляется в виде

$$w(z)=\Phi(z)e^{\omega(z)}, \tag{15}$$

где

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D}\frac{A(\zeta)+B(\zeta)\overline{w}/w}{\zeta - z}d\xi d\eta,\ \zeta = \xi + i\eta, \tag{16}$$

а $\Phi(z)$ — вполне определенная аналитическая в области D функция переменного z.

Важность формулы (15) заключается в том, что из нее непосредственно получается для обобщенных аналитических функций доказательство теоремы единственности, теоремы Лиувилля, обобщенного принципа экстремума модуля, принципа аргумента и т. д.

Из формулы (16) очевидно, что связь между обобщенными аналитическими функциями и аналитическими функциями, осуществляемая формулой (15), является нелинейной, если: $B\neq 0$. По заданной аналитической функции $\Phi(z)$ из соотношения (15) единственным образом определяется обобщенная аналитическая функция $w(z)$.

Существует линейный оператор:

$$w(z) = \Phi(z) + \iint\limits_{D}\Gamma_1(z, \zeta)\,\Phi(\zeta)\,d\xi d\eta +$$

$$+\iint\limits_{D}\Gamma_2(z, \zeta)\,\overline{\Phi(\zeta)}\,d\xi d\eta,\ \zeta = \xi + i\eta, \tag{17}$$

устанавливающий взаимно однозначное соответствие между множествами аналитических в области D и непрерывных в замкнутой области $\overline{D}$ функций $\overline{\Phi}$ (z) и обобщенных аналитических в D функций $w(z)$, причем $\Gamma_1(z, \zeta)$ и $\Gamma_2(z, \zeta)$ – вполне определенные функции, которые выражаются через коэффициенты A и B системы (14).

Из формулы (17) получаются различные интегральные представления обобщенных аналитических функций, обобщающие интегральное представление Коши для аналитических функций. Представление обобщенных аналитических функций в виде (17) оказалось полезным при исследовании краевых задач для этих функций.

Если A и B – аналитические функции действительных переменных x, y, то для обобщенных аналитических функций имеет место представление

$$w(z)=e^{\int\limits_{z_0}^{z}A(z,\tau)d\tau}\left\{\Phi(z)+\int\limits_{z_0}^{z}\widetilde{\Gamma}_1(z,\overline{z},t)\Phi(t)dt+\int\limits_{\overline{z}_0}^{\overline{z}}\widetilde{\Gamma}_2(z,\overline{z},\overline{t})\,\overline{\Phi(t)}\,\overline{dt}\right\}, \quad (18)$$

в котором $\widetilde{\Gamma}_1$ и $\widetilde{\Gamma}_2$ – аналитические функции своих аргументов, выражающиеся через A и B, а Φ (z) – произвольная аналитическая функция переменного z.

В случае, когда A и B – целые функции переменных x и y, представление (18) годится для любой односвязной области плоскости комплексного переменного z.

Многие свойства решений эллиптической системы (13) остаются в силе для общей эллиптической системы

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}-q_1\frac{\partial w}{\partial z}-q_2\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}}+Aw+B\overline{w}=0,\ |q_1|+|q_2|<1. \quad (19)$$

Это следует из того факта, что система (19) в результате преобразования независимых переменных, порождаемого уравнения Бельтрами

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \overline{z}}-q(z)\frac{\partial \gamma}{\partial z}=0,\ |q|\le q_0<1, \quad (20)$$

приводится к системе вида (13).

Если решение γ уравнения (20) гомеоморфно отображает область D плоскости переменного z на область D_1 плоскости переменного γ, то общее решение уравнения (20) в области D имеет вид

$$w(z)=\Phi[\gamma(z)],$$

где Φ (γ) – произвольная аналитическая функция в области D_1.

При предположениях, что q=0 вне области D и $|q|\le q_0<1$ на всей плоскости E переменного z, одним из гомеоморфизмов на E уравнения Бельтрами является функция

$$\gamma(z)=z-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{E}\frac{\rho(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta-z},\ \ \zeta=\xi+i\eta,$$

где ρ – решение двумерного сингулярного интегрального уравнения

$$\rho(z)-\frac{q(z)}{\pi}\iint\limits_{E}\frac{\rho(\zeta)d\xi d\eta}{(\zeta-z)^2}=q(z),$$

которое всегда имеет, и притом единственное, решение в некотором классе L_p, $p>2$.

При предположении, что коэффициенты A, $B \in L_p$ (D), $p>2$, всякое решение w(z) уравнения (19) можно представить в виде

$$w(z)=\Phi[\omega(z)]e^{\varphi(z)}, \tag{21}$$

где ω(z) – некоторый гомеоморфизм уравнения Бельтрами (20) с коэффициентом

$$q(z)=q_1(z)+q_2(z)\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}}\left|\frac{\partial w}{\partial z}\right.,$$

Φ (z) – аналитическая функция в области ω(D), а функция $\varphi(z) \in C_\alpha(E)$, $\alpha=\frac{p-2}{2}$, голоморфна вне $D \cup S$ и исчезает на бесконечности. Представление (21) имеет место и тогда, когда коэффициенты в левой части уравнения (19) зависят от w и от ее производных любого порядка, лишь бы на рассматриваемых решениях выполнялись указанные выше условия. Формула (21) допускает обращение. Она позволяет перенести ряд классических свойств аналитических функций одного комплексного переменного на решения уравнения (19): теорему единственности, принцип аргумента, принцип максимума модуля и др.

Общие Q-квазиконформные отображения плоских областей являются решениями равномерно эллиптической системы вида (19) при A = B = 0. Справедливо и обратное утверждение. Поэтому указанные выше результаты И. Н. Векуа позволяют решить чисто аналитическим путем основные проблемы квазиконформных отображений.

С помощью построенной им теории обобщенных аналитических функций И. Н. Векуа удалось исчерпывающим образом исследовать обобщенную задачу Римана – Гильберта в следующей постановке: найти непрерывное в $D \cup S$ решение w уравнения (14) по краевому условию

$$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(z)}\, w\,(z)] \equiv \alpha u+\beta v=\gamma,\ z \in S, \tag{22}$$

где α, β, γ – заданные на S вещественные функции класса $C_\alpha(S)$, $0<\alpha<1$ причем $\alpha^2+\beta^2=1$. Область D, вообще говоря, многосвязна.

Формулы (9), (10) и (17) позволяют редуцировать задачу (22) к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению и получить полный качественный анализ этой задачи.

Пусть граница S области D связности m+1 представляет собой совокупность S_0 S_1, ..., S_m замкнутых кривых Ляпунова. Так как в результате конформного отображения виды уравнения (14) и краевого условия (22) сохраняются, без нарушения общности можно считать, что S_0 – единичная окружность с центром в точке z=0, принадлежащей области D, а S_1, ..., S_m – окружности, лежащие внутри S_0.

Индексом задачи (22) называется целое число n, равное приращению $\frac{1}{2\pi}\arg[\alpha(\zeta)+i\beta(\zeta)]$ при однократном обходе контура S области D в положительном направлении. Краевому условию (22) можно придать вид

$$\mathrm{Re}[z^{-n}e^{ic(z)}w(z)]=\gamma,\ z\in S,$$

где $c(z)=c_i$ на S_i причем $c_0=0$, а $c_1, ..., c_m$ – некоторые вещественные постоянные, которые однозначно выражаются через α и β.

Введем в рассмотрение сопряженную задачу

$$\frac{\partial w^*}{\partial \bar{z}} - Aw^* - \overline{B}\,\overline{w^*} = 0,\ \ z\in D,$$

$$\mathrm{Re}\left[(\alpha+i\beta)\frac{dz}{ds}w^*(z)\right]=0,\ z\in S. \tag{23}$$

Индексом этой задачи называется число $n'=m-n-1$.

Основные результаты, полученные И. Н. Векуа по задаче (22), можно сформулировать в виде следующих утверждений:

I. Задача (22) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_S(\alpha+i\beta)\,w^*\gamma ds=0\,, \tag{24}$$

где w^* – произвольное решение сопряженной задачи.

II. Если l и l' – числа линейно независимых решений соответствующей (22) однородной задачи и однородной задачи (23), то

$$l-l'=n-n'=2n-m+1.$$

III. При $n<0$ соответствующая (22) однородная задача нетривиальных решений не имеет, а неоднородная задача (22) имеет и притом единственное решение при выполнении условий (24).

IV. При $n>m-1$ соответствующая (22) однородная задача имеет ровно $l=2n+m-1$ линейно независимых решений, а неоднородная задача (22) всегда разрешима.

Все результаты Ильи Несторовича по теории эллиптических систем первого порядка вошли в его монографию «Обобщенные аналитические функции», вышедшую в свет в конце 1959 г.

Исключительная результативность творческой деятельности Ильи Несторовича в Москве естественно вызвала значительное расширение круга его учеников и последователей. В середине 50-х годов под его непосредственным руководством работали в МГУ и в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР много молодых талантливых математиков, представителей различных народов Советского Союза и зарубежных стран. За этот период И. Н. Векуа вместе с М. А. Лаврентьевым и С. Л. Соболевым возглавлял работу научно-исследовательских семинаров по теории функций (в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР) и по дифференциальным уравнениям с частными производными (в МГУ).

Московский период в творческой деятельности Ильи Несторовича знаменуется признанием его научных заслуг во всемирном масштабе. Появляются изложения его научных результатов в монографиях и обзорах всемирно известных зарубежных специалистов. Он успешно выступает с научными докладами на Международной конференции по теории функций в Хельсинки (Финляндия) в 1957 г. и на Международном математическом конгрессе в Эдинбурге (Англия) в 1958 г. Устанавливаются личные и научные контакты между Ильей Несторовичем и крупными зарубежными специалистами по современному математическому анализу. Обе названные выше монографии Ильи Несторовича выходят за рубежом на английском, немецком и китайском языках, а отдельные работы – на испанском, итальянском, румынском и других языках.

В научно-исследовательской работе часто возникают острые моменты, когда большое значение приобретает привлечение к работе свежих научных сил из смежных отраслей, тесно связанных с разрабатываемой проблемой. Одной из таких проблем на грани 40–50-х годов являлось создание быстродействующих электронных вычислительных машин. В 1952 г. в разгар работы над усовершенствованием быстродействующих электронных вычислительных машин директор Института точной механики и вычислительной техники Академии наук СССР академик М. А. Лаврентьев приглашает Илью Несторовича своим заместителем по научной работе. Здесь в течение двух лет в творческом сотрудничестве укрепилась дружба между И. Н. Векуа и прославленными в мире учеными М. А. Лаврентьевым и С. А. Лебедевым.

Директор Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР академик И. М. Виноградов в 1955 г. в качестве своего заместителя вместо ушедшего с этой должности академика М. В. Келдыша приглашает И. Н. Векуа.

В большом коллективе этого крупнейшего мирового центра математической мысли Илья Несторович скоро приобретает заслуженный авторитет и искреннее уважение. Сотрудники института им. Стеклова с большой теплотой вспоминают о нем и ныне.

Творческая и научно-организационная деятельность Ильи Несторовича получила высокую оценку. Будучи членом-корреспондентом АН СССР по Отделению технических наук, он в 1954 г. избирается членом бюро Отделения физико-математических наук, а в 1958 г. – действительным членом (академиком) Академии наук СССР

В 1957 г. Илья Несторович принимал непосредственное участие в разработке проекта создания Сибирского отделения Академии наук СССР. Он стал одним из самых активных членов возглавляемой академиком М. А. Лаврентьевым инициативной группы для осуществления решения партии и правительства о продвижении большой науки на Восток страны.

В СИБИРИ

Востоком нашей страны принято называть богатейшую часть земли между Уралом и Тихим океаном с населением, немногим больше 30 миллионов человек. Он делится на две части – Сибирь и Дальний Восток.

Взоры России были обращены к Востоку еще со времен царя Ивана Грозного. Позднее М. В. Ломоносов писал: «Российское могущество прирастать будет Сибирью». Тем не менее до середины прошлого века Сибирь считалась краем каторжников и немногих смельчаков – золотоискателей и землепроходцев.

По мере развития капитализма в России на Востоке страны возникали промышленные очаги с крупными населенными пунктами и городами, среди которых лишь один Томск стал к концу прошлого века городом довольно высокой культуры с двумя высшими учебными заведениями: Томским университетом, основанным в 1888 г., и Технологическим институтом, основанным в 1900 г.

Большое влияние на развитие культуры дореволюционной Сибири оказали политические ссыльные, сыгравшие немаловажную роль и в революционном движении рабочих и крестьян края.

За годы Советской власти, после выполнения первых пятилетних планов, Советский Восток стал краем высоко развитой промышленности и сельского хозяйства. Сильно поднялся уровень культурной жизни населения. Значительно расширилась сеть школ и высших учебных заведений. Сибирь и Дальний Восток сыграли громадную роль в разгроме немецкого фашизма и японского милитаризма в годы Великой Отечественной войны.

Директивными органами было принято решение построить на территории от Урала до Тихого океана могучие предприятия электрометаллургической, химической, угледобывающей, машиностроительной и других современных отраслей промышленности, создать третью металлургическую базу страны с производством 15–20 миллионов тонн чугуна в год, максимально использовать энергию могучих сибирских рек, из которых одна лишь Ангара в этом отношении богаче, чем Волга, Кама и Днепр вместе взятые.

Ясно было, что успех этого великого предначертания во многом зависел от темпов развития большого комплекса отраслей науки, от близости крупных научных учреждений к месту развертывания событий огромного народнохозяйственного масштаба.

В 1957 г. было создано Сибирское отделение АН СССР (СО АН СССР) и утвержден состав оргкомитета во главе с академиком М. А. Лаврентьевым.

В состав СО АН СССР были включены все академические научно-исследовательские институты страны, находящиеся территориально в Сибири и на Дальнем Востоке. В конце 1957 г. было начато строительство Академгородка – центра СО АН СССР на живописном берегу Обского моря, недалеко от города Новосибирска.

В Новосибирск переехали на постоянную работу видные советские ученые из Москвы и Ленинграда вместе с возглавляемыми ими научными коллективами, на базе которых были созданы новые научно-исследовательские институты СО АН СССР. Началась интенсивная тяга научной молодежи на Восток со всех концов Советского Союза.

В марте 1958 г. был избран Президиум СО АН СССР во главе с М. А. Лаврентьевым. Среди избранных в члены Президиума СО АН СССР был и И. Н. Векуа.

Комплекс научно-исследовательских институтов в Академгородке не мог расширяться и развиваться без непрерывного притока молодых сил населения Сибири. Одной из первоочередных задач стала подготовка кадров высшей научной квалификации. 9 января 1959 г. Совет Министров СССР принял постановление об открытии в Академгородке Новосибирского государственного университета, ректором которого был назначен И. Н. Векуа. К этому времени на территории нынешнего Академгородка кроме деревянного домика академика М. А. Лаврентьева и щитовых домиков для первых строителей города науки, не было ни одного законченного капитального сооружения.

По своему замыслу Новосибирский университет должен был стать университетом нового типа. Перед ректором нового университета стояли задачи срочно укомплектовать профессорско-преподавательский состав университета, возглавить работу по составлению новых учебных планов и программ, набрать первый контингент студентов и, что не менее важно, быть в постоянном контакте со строителями, чтобы к сентябрю 1959 г. во что бы то ни стало завершить строительство школьного помещения для временного размещения в нем, существующего пока что в постановлениях университета.

Решение этих задач требовало много сил и энергии от Ильи Несторовича. Это было большое испытание его организаторского таланта.

19 июня 1959 г. в «Правде» Илья Несторович писал: «Новосибирский университет призван стать одним из главных очагов подготовки высококвалифицированных кадров для восточных районов страны. Новосибирский университет – это не только новое высшее учебное заведение. Он является университетом нового типа. У него не будет собственных лабораторий, вся учебная и научная деятельность университета строится на базе научно-исследовательских институтов и промышленных

предприятий. Студенты параллельно с обучением будут работать в научно-исследовательских институтах Сибирского отделения АН СССР и в заводских лабораториях и конструкторских бюро гор. Новосибирска. При этом каждому студенту предоставляются богатые возможности для ознакомления с новейшими достижениями науки и техники, использования новых приборов и аппаратуры, непосредственного участия в решении актуальных научных и практических проблем».

К концу августа 1959 г. коллектив профессоров и преподавателей Новосибирского государственного университета был укомплектован восьмью академиками, восемнадцатью членами-корреспондентами АН СССР и несколькими десятками докторов и кандидатов наук. Учебные планы и программы в основном были составлены и утверждены. Был укомплектован контингент студентов первых двух курсов физико-математической специальности и первого курса химической специальности. Строительство школьного помещения и студенческого общежития было завершено; 1 октября 1959 г. начался первый учебный год Новосибирского университета.

Университет набирал силы, рос, мужал, и уже в 1963 г. он обрадовал своим первым выпуском талантливых математиков, механиков и физиков. Научные труды ряда студентов старших курсов получили высокую оценку. На сегодняшний день среди выпускников Новосибирского университета уже много прославленных ученых.

Все, что было обещано в отмеченной выше статье «Правды», было реализовано с честью.

Возглавляя Новосибирский университет, Илья Несторович руководил также и работой теоретического отдела Института гидродинамики СО АН СССР, возглавлял или был членом четырех ученых советов, принимал самое активное участие в работе «Сибирского математического журнала» в качестве члена его редколлегии. Наряду с этим, И. Н. Векуа в 1963 г. был избран членом Бюро отделения математики Академии наук СССР и принимал самое активное участие в его работе.

Будучи занятым большой административно-организационной работой, Илья Несторович всегда находил время для научных исследований. Сибирский период его научной деятельности в основном характеризуется широким выходом из области математического анализа в другие области современной математики, а также механики сплошной среды, причем объектами его исследований и здесь являлись проблемы принципиальной важности.

И. Н. Векуа показал, что его методы комплексных представлений решений линейных эллиптических уравнений успешно могут быть использованы при изучении свойств некоторых классов нелинейных уравнений второго порядка эллиптического типа. К такому классу относится, например, уравнение Гаусса:

$$\Delta \ln v(x, y) = -2k(x, y)\, v(x, y).$$

В результате исследования этого уравнения Илья Несторович нашел весьма простое доказательство известной теоремы Д. Гильберта о несуществовании регулярной поверхности отрицательной кривизны $k \leq k_0 < 0$, $k_0 = \text{const}$, конформно гомеоморфной всей плоскости.

С помощью отмеченной выше аналитической теории эллиптических уравнений И. Н. Векуа удалось разработать единую стройную математическую теорию широкого класса упругих оболочек.

Классическая теория оболочек страдает тем недостатком, что в ней наблюдается несовместимость между дифференциальными уравнениями и краевыми условиями.

Илья Несторович предложил новый вариант теории упругих оболочек, который по сравнению с классической теорией обладает тем преимуществом, что в этом варианте между дифференциальными уравнениями и краевыми условиями имеется полная совместимость, причем эти дифференциальные уравнения по своей структуре близки к классическим уравнениям плоской задачи теории упругости.

Полученные в этом направлении результаты Ильи Несторовича подробно были изложены в прочитанном им в Новосибирском университете спецкурсе и изданы в 1965 г. в виде отдельной монографии «Теория тонких пологих оболочек переменной толщины».

Приведем краткое содержание исследований И. Н. Векуа по теории упругих оболочек.

В системе координат, в которой $x_3 = 0$ – уравнение срединной поверхности S оболочки, для радиуса-вектора R (x^1, x^2, x^3) точки оболочки имеем

$$R = \mathbf{r}(x^1, x^2) + x^3\, \mathbf{n}(x^1, x^2), \tag{25}$$

где $\mathbf{n}$ – единичная к S нормаль в точке (x^1, x^2) и $\mathbf{r}$ – радиус-вектор этой точки.

Первый вариант предложенной И. Н. Векуа теории применяется к тонким пологим оболочкам. Этот вариант строится на двух допущениях:

1) компоненты вектора смещения и тензора напряжений можно приблизить полиномами некоторой степени N относительно переменного x^3 и

2) оболочка является тонкой и пологой, т. е.

$$1 - k_1 x^3 \approx 1,\ 1 - k_2 x^3 \approx 1,\ -h \leq x^3 \leq h,$$

где k_1 и k_2 – главные кривизны поверхности S, а толщина достаточно мала. В этих допущениях задача сводится к эллиптической системе уравнений в частных производных, эквивалентной одному уравнению вида (2) при $2n = 6N + 6$. В теории тонких оболочек можно ограничиться случаями $N = 0$ и $N = 1$.

Приближение порядка $N = 0$ соответствует тому случаю, когда картины напряженного и деформированного состояния одинаковы вдоль любой поверхности, параллельной S. Этот случай напряженного равновесия оболочки в действительности является безмоментным. Однако в отличие от классической безмоментной теории в теории И. Н. Векуа задача сводится к уравнению эллиптического типа вида (2) шестого порядка, общее решение которого линейно выражается посредством трех произвольных аналитических функций одного комплексного переменного. Их присутствие позволяет обеспечить выполнение всех трех физических краевых условий.

При приближении порядка $N = 1$ задача опять сводится к эллиптическому уравнению (2), но уже двенадцатого порядка. В отличие от классической моментной теории, здесь естественно вводится в рассмотрение поперечная пара сил (которая в классической теории игнорируется). При помощи этой пары удается построить непротиворечивый вариант теории оболочек, согласованный с естественными краевыми условиями соответствующей механической задачи. Эта теория представляет собой видоизменение классической моментной теории, но ее преимуществом является то, что она свободна от внутренних противоречий, присущих классическим построениям. Это хорошо демонстрируется на примерах пластинки и сферической оболочки.

Второй вариант относится к безмоментной теории оболочек.

Характерной чертой безмоментной (или, как еще принято говорить, мембранной) теории оболочек является то, что она приводит к статически определимой задаче, которая, в свою очередь, сводится к линейной системе уравнений в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными вида (19), тип которой определяется знаком гауссовой кривизны k срединной поверхности оболочки. Эта система эллиптична при $k > 0$, гиперболична при $k < 0$, а при $k = 0$ она параболически вырождается.

При $k > 0$ система имеет вид (14) (кстати, к такой же системе приводится задача малых изгибаний поверхностей) и сформулированные выше результаты Ильи Несторовича по краевой задаче (22) приводят к важным для теории оболочек выводам.

В случае выпуклой оболочки указанная система совпадает с системой

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \overline{Bw} = F, \qquad (26)$$

и эти выводы становятся весьма прозрачными. А именно, в выпуклой оболочке, свободной от действия поверхностных нагрузок при наличии одного отверстия, не всегда может быть реализовано безмоментное напряженное состояние равновесия, если распределение нормальных усилий по краям отверстия задано по произвольному закону (касательные усилия по краям вообще заранее не задаются). При этом в такой оболочке не может существовать ненулевое поле безмоментного напряжения, если нормальные усилия равны нулю на границе.

В выпуклой оболочке с числом отверстий $m > 1$ безмоментное состояние напряженного равновесия реализуется при любом распределении нормальных усилий по краям отверстий, причем, в случае отсутствия нормальных усилий на контуре в оболочке может существовать ровно $3m - 3$ линейно независимых безмоментных напряженных состояний.

Уравнение (26) инвариантно относительно проективного преобразования координат. Поэтому легко получить формулы преобразования полей смещений и усилий при переходе от данной оболочки к другой, срединные поверхности которых проективно эквивалентны. Используя эти свойства, при наличии решения рассматриваемой задачи для данной оболочки можно построить решение аналогичной задачи для других оболочек, проективно с ней эквивалентных. Таким путем решение ряда задач для эллипсоидных оболочек можно получить из решений родственных задач для сферической оболочки. Заметим, что в этом случае $B = 0$ и уравнение (26) переходит в неоднородное уравнение Коши – Римана

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = F.$$

В случае тонких оболочек постоянной толщины искомое поле тангенциальных напряжений определяется при помощи решений уравнения

$$\nabla_\alpha (a^{\alpha\beta}\nabla_\beta w) + 2Hw = F,\ 2H = k_1 + k_2, \tag{27}$$

где ∇_α – ковариантные производные относительно гауссовых параметров на координатных поверхностях x^3=const при записи уравнения оболочки в виде (25). Коэффициенты $a^{\alpha\beta}$ уравнения (27) выражаются через геометрические характеристики оболочки, а правая его часть F зависит от внешней нагрузки.

К уравнению (27) приводятся также задачи безмоментной теории оболочек и бесконечно малых изгибаний поверхностей. И, стало быть, теория этих задач охватывается теорией обобщенных аналитических функций, о которой речь шла выше.

Наряду с этим Илья Несторович показал, что теория уравнений с частными производными смешанного типа может служить математической моделью безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака. Этот факт вызвал большой интерес среди специалистов (как математиков, так и механиков), поскольку прикладная важность теории уравнений смешанного типа раньше наблюдалась лишь в задачах трансзвукового движения сжимаемой жидкости.

В Новосибирске под руководством И. Н. Векуа были подготовлены и защищены около десяти докторских и кандидатских диссертаций. К концу 1964 г. среди учеников Ильи Несторовича насчитывалось более десяти докторов и двадцати кандидатов физико-математических наук, среди них есть не только представители народов Советского Союза, но и граждане Германской Демократической Республики, Польской Народной Республики, Китайской Народной Республики, Корейской Народно-Демократической Республики и др.

Деятельность И. Н. Векуа в Сибири получила высокую оценку. В 1961 г. за большие заслуги в подготовке специалистов и развитии науки он был награжден орденом Ленина, а в апреле 1963 г. за научный труд «Обобщенные аналитические функции» ему была присуждена Ленинская премия.

Период пребывания Ильи Несторовича в Сибири характеризуется также усилением его контактов с зарубежными математиками и механиками. В 1959 г. он участвовал в работе Международного симпозиума по теории тонких упругих оболочек в Нидерландах; в 1960 г. был членом X Международного конгресса по теоретической и прикладной механике в Италии; в 1960 г. в Швеции участвовал в работе Генеральной ассамблеи Международного математического союза и Стокгольмского Международного математического конгресса; в 1963 г. под его руководством (как председателя оргкомитета) в Новосибирске успешно прошла работа Американо-советского симпозиума по дифференциальным уравнениям с частными производными; он выступил с докладом в Тбилиси на Международном симпозиуме по приложениям теории функций в механике сплошной среды, а в 1964 г. в Мюнхене на XI Международном конгрессе по теоретической и прикладной механике был одним из генеральных докладчиков; дважды посетил США по приглашению Американского математического общества и т. д. Он принимал активное участие в работе международных математических конгрессов в Эдинбурге (1958), Стокгольме (1962), Москве (1966), Ницце (1970).

СНОВА В ТБИЛИСИ

В начале 1965 г. руководящие органы Грузинской ССР поставили вопрос о возвращении И. Н. Векуа в Тбилиси. Эта весть с огорчением была воспринята в Новосибирском государственном университете и в Сибирском отделении Академии наук СССР. Не так уж легко было расставаться с человеком, который, находясь в ряду создателей и руководителей огромного научного центра на Востоке страны, не щадя сил и энергии, основал и выпестовал высшее учебное заведение совершенно нового типа.

В марте 1965 г. Президиум Сибирского отделения Академии наук СССР постановляет: за большие заслуги в создании Сибирского отделения АН СССР Илье Несторовичу Векуа объявить благодарность и в связи с переездом на постоянную работу в г. Тбилиси освободить его от занимаемых должностей в Сибири. Это решение за подписью академика М. А. Лаврентьева было разослано по всем учреждениям СО АН СССР.

Накануне своего славного шестидесятилетия всемирно прославленный ученый, Лауреат Ленинской и Государственной премий, действительный член Академии наук СССР снова на родной земле. Своего достойного сына народ выбрал в депутаты Верховного Совета СССР, а грузинская партийная организация – членом своего Центрального Комитета.

С ноября 1964 г. Илья Несторович был вице-президентом Академии наук Грузинской ССР, а с декабря 1965 г. – ректором Тбилисского государственного университета.

Весь свой организаторский талант и большое доброе сердце Илья Несторович отдавал на службу своей Alma mater – родному университету, свидетелю первого взлета его могучего дарования.

Основанный после Великой Октябрьской социалистической революции Тбилисский государственный университет сразу стал надежным очагом высшего образования, науки и культуры в Грузии. В течение ряда лет его возглавляли крупнейшие, прославленные ученые П. Г. Меликишвили и И. А. Джавахишвили, крайне заинтересованные в развитии науки и в распространении культуры и просвещения среди широких слоев населения республики. В его стенах по разным специальностям лекции читались на грузинском, русском, азербайджанском, армянском и порой даже на европейских языках. Практиковались приглашения для чтения лекций и ведения научных исследований известных специалистов из других, в том числе европейских университетов, долгосрочные командировки наиболее одаренных студентов старших курсов и молодых специалистов в крупные мировые научные центры. В результате этого сложились славные традиции, выдвинувшие Тбилисский университет в ряды лучших университетов Советского Союза. Большинство высших учебных заведений, расположенных на территории Грузинской ССР, берут свое начало от Тбилисского университета. На базе его научных подразделений в 1941 г. была организована и Академия наук Грузии.

Начиная с середины пятидесятых годов, в результате ограничения штатных совместительств, во взаимных отношениях академических научных учреждений и учебных заведений страны возникли определенные трудности с известными теперь отрицательными последствиями. Их смогли частично избежать лишь отдельные ВУЗы, такие, как МГУ, НГУ, МИФИ, МФТИ и др. Опыт, накопленный И. Н. Векуа в бытность его ректором Новосибирского государственного университета, позволил ему в значительной мере обойти эти трудности и в Тбилисском университете. По его инициативе при университете были открыты научно-исследовательские-институты и проблемные лаборатории, способствовавшие сближению науки и высшего образования.

В 1968 г. торжественно было отмечено пятидесятилетие со дня основания Тбилисского государственного университета. В знак уважения к университету и к его ректору в Тбилиси для участия в юбилейных церемониях прибыли представители многих крупных университетов всего мира. Это мероприятие стало настоящим народным праздником, оставшимся надолго в памяти очевидцев.

На склоне лет Н. И. Мусхелишвили счел целесообразным уйти с поста президента Академии наук Грузинской ССР, на который регулярно избирали его начиная с 1941 г. По его же предложению на этот пост в 1972 г. был избран И. Н. Векуа. Несмотря на ухудшение состояния здоровья Илья Несторович умело руководил работой вверенного ему учреждения, часто обращаясь за советом к Н. И. Мусхелишвили.

Наряду с большой научно-организаторской деятельностью И. Н. Векуа успешно продолжал начатые им же в Москве и Новосибирске исследования по математической теории оболочек и в сочетании с ней разрабатывал численные методы решения практически важных для народного хозяйства задач строительной техники. Полученные в этом направлении новые результаты им были доложены на международных симпозиумах в Ювяскуле (1972 г., Финляндия), в Дармштадте (1976 г., ФРГ) и других форумах, в работе которых имел честь принять участие и автор этих строк. Доклады И. Н. Векуа с большим интересом были встречены специалистами.

Интенсивно и плодотворно проходила работа Ильи Несторовича над его будущей монографией, посвященной математической теории оболочек. Он понимал, что шли последние месяцы его жизни, но работа над монографией во что бы то ни стало должна быть завершена именно им.

В 1977 г. по приглашению Ильи Несторовича я посетил его в Кунцевском отделении Кремлевской больницы. Стоял теплый солнечный день. Он встретил меня, как всегда, побритый и аккуратно одетый, с хорошим настроением. Однако в беседе вынужден был пользоваться грифельной доской.

– Сегодня внимательно просмотрел я окончательный вариант рукописи моей монографии. В ней вроде все в порядке, но вырисовывается масса новых интересных и трудных проблем. Хорошо, если они получат свое решение. Что Вы скажете об этом? – спросил он меня.

– Илья Несторович! Особенности всех Ваших монографий, огромный к ним интерес обусловлены тем, что наряду с законченными результатами они содержат новые проблемы, наводящие на размышление читателя.

– Я понимаю, Вы произнесли эти слова, чтобы мне было приятно, но будет еще приятнее, если наша молодежь продолжит работу над этими проблемами.

– Все Ваши монографии переведены и изданы за рубежом. Работа над проблемами, поднятыми в них, ведется во многих научных центрах и ведется весьма успешно.

– Вы хотите сказать, что наука не умещается в национальные рамки? Да, это так, но будет еще лучше, если на родине не будет прервана работа над проблемами, в круг которых ввел нас Н. И. Мусхелишвили.

Прочитав эти слова, написанные на грифельной доске, я посмотрел в лицо Илье Несторовичу. Он сидел на стуле со слегка опущенной головой. Впервые заметил я слезы в его глазах. После этого дня мы с ним больше уже не встречались.

Посмертно вышедшая в свет его монография «Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек» с интересом была встречена. Она была удостоена Государственной премии СССР. Мне официально было сообщено, что ее английский перевод, изданный в Лондоне в 1985 г., был распродан быстро. Рукопись указанной монографии И. Н. Векуа на русском языке, естественно, находилась в его личном архиве. В подготовке ее к печати значительна заслуга Тамары Васильевны Векуа.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Мы вправе гордиться всемирным признанием заслуг сложившихся в текущем столетии грузинских научных школ историков, математиков и физиологов и щедро снабжаем их основоположников И. А. Джавахишвили, Н. И. Мусхелишвили и И. С. Бериташвили лучшими эпитетами.

Среди представителей этих школ много прославленных имен. К их числу безусловно относится и Илья Несторович Векуа. Особая одаренность, трудолюбие, умение увлечь за собой научную молодежь позволили ему внести крупный вклад в науку, открыть перспективные научные направления и самому стать главой новой научной школы.

Тернист и труден жизненный путь большого ученого. Из здравствующих ныне поколений мало кому известно, что в творческой деятельности каждого из названных здесь ученых были периоды, полные невзгод и драматизма. В биографиях и других посвященных им сочинениях акцент делается преимущественно на полученных ими важных результатах, молчанием обходятся радости и печали, сопутствующие самому процессу творчества. В этом отношении и настоящая брошюра не представляет исключения.

Глубина и важность отмеченных в предыдущих разделах брошюры исследований И. Н. Векуа, новые научные направления, у истоков которых он стоял, выдвинули его в ряды выдающихся ученых нашего времени. Общепризнано, что среди известных математиков и механиков много учеников и последователей Ильи Несторовича как у нас, так и за рубежом. Почти все крупнейшие математики и механики – современники Ильи Несторовича лично знали, глубоко уважали и ценили его.

Знаменательно, что в 1978 г. в Москве в издательстве «Наука» вышел в свет сборник статей под названием «Комплексный анализ и его приложения» в объеме 672 страниц, посвященный Илье Несторовичу Векуа к его семидесятилетию (ответственные редакторы Н. Н. Боголюбов и М. А. Лаврентьев, зам. ответственных редакторов А. В. Бицадзе). Сборник содержит работы 95 авторов, в том числе 58 иностранцев. Среди них такие крупные ученые как: Л. Альфорс, С. Бергман, А. Вайнштайн, В. Койтер, Е. Комацу, Г. Леви, Дж. Сансоне, Г. Фикера, Р. Финн, В. Хейман и др.

Рукописи указанных статей поступили в редакцию вместе с сопроводительными письмами их авторов, содержащими трогательные слова на имя Ильи Несторовича. Редакция не сочла возможным их опубликовать в сборнике и сдала в личный архив адресата.

Илье Несторовичу не суждено было увидеть указанный сборник в напечатанном виде. 2 декабря 1977 г. его не стало. Илья Несторович Векуа похоронен в Тбилиси в пантеоне «Мтацминда» рядом с его учителем и соратником по науке Николаем Ивановичем Мусхелишвили.

Минуло немало лет после ухода из жизни Николая Ивановича Мусхелишвили и Ильи Несторовича Векуа, но основанные ими научные направления плодотворно развиваются в крупных научных центрах мира. Не в этом ли бессмертие ученого?!

А. Бицадзе
23 мая 1986 г.
Приэльбрусье

Научные труды акад И. Н. Векуа

1. Задача кручения кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем. – Изв. АН СССР, ОМЕН, сер. 7. 1933. № 3, 373–386 (совместно с А. К. Рухадзе).

2. Кручение и изгиб поперечной силой бруса, составленного из двух упругих материалов, ограниченых конфокальнымн эллипсами. – Прикл. матем. и мех., 1933, I, вып. 2, 167–178 (совместно с А. К. Рухадзе).

3. Распространение упругих волн в бесконечном слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями. – В кн.: Труды II Всесоюз. математического съезда. Ленинград. 24–30 июня 1934. Т. 2. Секц. докл. М. –Л., АН СССР, 1936, 363–364.

4. Комплексное представление общего решения уравнений стационарной плоской задачи теории упругости. – ДАН СССР. 1937, 16, № 3, 163–168.

5. Sur une représentation complèxe de la solution générale des équations du problème stationnaire plan de la théorie de l'elasticité. – C. r. Acad. sci. URSS, 1937, 16, №3, 155–160.

6. Об общем представлении решений дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка. – ДАН СССР, 1937, 17, № 6. 291–295.

7. Sur la représentation générale des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre. – C. r. Acad. sci. URSS, 1937, 17, № 6, 295–299.

8. Общее представление решений дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа, линейных относительно оператора Лапласа. – Труды Тбил. матем. ин-та, 1937, 2, 227–240 (резюме на нем. яз.).

9. Краевая задача колебания бесконечного слоя. – Труды Тбил. матем. ин-та 1937, 1, 141 – 164 (на груз. яз., резюме на нем. яз.).

10. К вопросу распространения упругих волн в бесконечном слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями. – Труды Тбил. геофиз. ин-та, 1937, 2, 23-50 (резюме на груз. яз.).

11. Несколько замечаний по вопросу статьи И.Г. Курдиани «Некоторые вопросы неустойчивости стратификации воздушных масс». – Труды Тбил. геофиз. ин-та, 1939, 4, 165-171.

12. Комплексное представление решений эллиптических дифференциальных уравнений и его применение к граничным задачам. – Труды Тбил. матем. ин-та, 1939, 7, 161-253.

13. О сингулярных линейных интегральных уравнениях, содержащих интегралы в смысле главного значения по Коши. – ДАН СССР, 1940, 26, № 4, 335-338.

14. Sur les équations intégrales linéaires singulières contenant des intégrales au sens de la valeur principale de Cauchy. – C. r. Acad. sci. URSS, 1940, 26, № 4, 327-330.

15. Граничные задачи теории линейных эллиптических дифференци-

альных уравнений с двумя независимыми переменными. 1. – Сообщ. Груз. ФАН СССР, 1940, 1, № 1, 29-34.

16. Граничные задачи теории линейных эллиптических дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными. 2. – Сообщ. Груз. ФАН СССР, 1940, 1, № 3, 181-186.

17. Граничные задачи теории линейных эллиптических дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными. 3. – Сообщ. Груз. ФАН СССР, 1940, 1, № 7, 497-500.

18. Замечания по поводу метода Фурье. – Сообщ. Груз. ФАН СССР, 1940, 1, № 9, 647-650 (совместно с Д.Ф. Харазовым).

19. Приложение метода акад. Н. Мусхелишвили к решению граничных задач плоской теории упругости анизотропной среды. – Сообщ. Груз. ФАН СССР, 1940, 1, № 10, 719-724.

20. Allgemeine Darstellung der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet. – Сообщ. Груз. ФАН СССР, 1940, 1, № 5, 329-335.

21. Об одном новом интегральном представлении аналитических функций и его приложении. – Сообщ. АН Груз. СССР, 1941, 2, № 6, 477-484 (резюме на груз. яз.).

22. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с интегралом в смысле главного значения по Коши. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1941, 2, № 7, 579-586 (резюме на груз. яз.).

23. О приведении сингулярных интегральных уравнений к уравнению Фредгольма. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1941, 2, № 8, 697-700 (резюме на груз. яз.).

24. О гармонических и метагармонических функциях в пространстве. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1941, 2, № 1, 20-32.

25. Дополнение к работе «Об одном новом интегральном представлении аналитических функций и его приложении». – Сообщ. АН Груз. ССР, 1941, 2, № 8, 701-706 (резюме на груз. яз.).

26. Интегральные уравнения с особым ядром типа Коши. – Труды Тбил. матем. ин-та, 1941, 10, 45-72 (резюме на груз. яз.).

27. Uber harmonische und metaharmonische. Funktionen in Raum. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1941, 2, № 1-2, 29-34.

28. Об аппроксимации решений эллиптических дифференциальных уравнений. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1942, 3, № 97-102.

29. Решение основной краевой задачи для уравнения $\Delta^{n+1}u = 0$. – Сообщ. АН Груз. СССР, 1942, 3, 213-220.

30. О решениях уравнения $\Delta u+\lambda^2 u=0$. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1942, 3 № 4, 307 – 314 (на груз. яз., резюме на рус. яз.).

31. Об изгибе пастинки со свободным краем. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1942, 3, №7, 641 – 648 (резюме на груз. яз.).

32. К теории сингулярных интегральных уравнений. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1942, 3, № 9, 869–876.

33. Об одной линейной граничной задаче Римана. – Труды Тбил. матем. ин-та, 1942, 11, 109–139.

34. О решении смешанной граничной задачи теории ньютонова потенциала для многосвязной области. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1942, 3 753–758. .

35. Функция Грина для сферического слоя. – Труды Тбил. гос. ун-та, 1942, 25, 225–228 (на груз. яз., резюме на рус. яз.).

36. О некоторых основных свойствах метагармонических функций. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1943, 4, № 4, 281–288 (резюме на груз. яз.).

37. Замечания об общем представлении решений дифференциальных уравнений эллиптического типа. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1943. 4, № 5, 385–392 (на груз. яз., резюме на рус. яз.).

38. К общей задаче дифракции. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1943, 4, № 6, 503–506 (резюме на груз. яз.).

39. Об одном интегральном представлении решений дифференциальных уравнений. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1943,. 4, № 9, 843–852 (текст на рус. и груз. яз.).

40. Об одном новом представлении решений дифференциальных уравнений. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1943, 4, № 10, 941–950 (на груз. яз., резюме на рус. яз.).

41. О метагармоничсских функциях. – Труды Тбил. матем. ин-та, 1943, 12. 105–174.

42. Исправление к статье Ильи Векуа «Об одной линейной граничной задаче Римана» (см. Труды Тбил. матем. ин-та, 1942, 11, 109–139). – Труды Тбил. матем. ин-та, 1943, 12, 215.

43. Об одном разложении метагармонических функций. – ДАН СССР, 1945, 48, №1, 3–6.

44. Sur certain développement des fonctions métaharmoniques. – C. r. Acad. sci. URSS, 1945, 48, № 1, 3–6.

45. Общие представления решений дифференциального уравнения сферических функций. – ДАН СССР, 1945, 49, № 5, 319–322.

46. Représentation générale des solutions d'une équation différentielle des fonctions sphériques. – C. r. Acad. sci. URSS,1945, 49, № 5, 311–314a.

47. Обращение одного интегрального преобразования и его некоторые применения. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1945, 6, №3, 179–183.

48. Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля. – Прикл. матем. и мех., 1945, 9, вып. 2, 143–150.

49. Интегрирование уравнений сферической оболочки. – Прикл. матем. и мех., 1945, 9, вып. 5, 368–388.

50. К теории функций Лежандра. – Сообщ. АН Груз. ССР. 1946. 7, № 1–2, 3–10.

51. К теории цилиндрических функций. – Сообщ. АН Груз. ССР. 1946, 7, № 3, 95–101.

52. Об одном обобщении интеграла Пуассона для полуплоскости. – ДАН СССР, 1947, 56, № 3, 229–231.

53. Sur une généralisation de l'intégrale de Poisson pourle demi-plan. – C. r. Acad. sci. URSS, 1947, 56, № 3, 229–231.

54. Некоторые основные вопросы теории тонкой сферической оболочки. – Прикл. матем. и мех., 1947, 11, вып. 5, 499–516.

55. Аппроксимация решений дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа. – Труды Тбил. гос. ун-та, 1947, 30а, 1–21 (на груз. яз., резюме на рус. яз.).

56. Об одном обобщении интеграла Пуассона для полуплоскости. – Труды Тбил. матем. ин-та, 1947, 15, 149–154 (на груз. яз., резюме на рус. яз.).

57. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.–Л., Гостехиздат, 1948, 296 с.

58. Об одном методе решения граничных задач синусоидальных колебаний упругого цилиндра. – ДАН СССР, 1948, 60, № 5, 779–782.

59. К теории тонких пологих упругих оболочек. – Прикл. матем. и мех., 1948, 12, вып. 1, 69–74.

60. К теории упругих оболочек. – ДАН СССР. 1949, 68, № 3, 453–455.

61. Академия наук Грузинской ССР. – Вест. АН СССР, 1949, № 7. 99–103.

62. Об одном представлении решений дифференциальных уравнений эллиптического типа. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1950, 11, №3, 137–141.

63. О доказательстве некоторых теорем единственности, встречающихся в теории установившихся колебаний. – ДАН СССР, 1951, 80, № 3.

64. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением в теории оболочек. - Матем. сб., 1952, 31, вып. 2, 217–314.

65. Общее представление функций двух независимых переменных, допускающих производные в смысле Соболева и проблема примитивных. –ДАН СССР, 1953, 89, № 5, 773–775.

66. О полноте системы гармонических полиномов в пространстве. – ДАН СССР, 1953, 90, № 4, 495–498.

67. О полноте системы метагармонических функций. – ДАН СССР, 1953. 90, № 5, 715–718.

68. Граничная задача с косой производной для уравнения эллиптического типа. – ДАН СССР, 1953, 92, № 6, 1113– 1116.

69. Об одном свойстве решения обобщенной системы уравнений Коши–Римана. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1953, 14, № 8,449–453.

70. О некоторых свойствах решений системы уравнений эллиптического типа. – ДАН СССР, 1954, 98, № 2, 181–184.

71. О решении граничных задач теории оболочек. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1954, 15. № 1, 3–6.

72. Задача приведения к каноническому виду дифференциальных форм эллиптического типа и обобщенная система Коши–Римана. – ДАН СССР, 1955, 100, № 2, 197–200.

73. Об одном методе решения краевых задач уравнений в частных производных. – ДАН СССР, 1955, 101, № 4, 593–596.

74. Об одном методе расчета призматических оболочек. – Труды Тбил. матем. ин-та, 1955, 21, 191–259.

75. Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben mit einer Anwendung in der Theorie der Schalen. Deutsche Verlag, der Wiss., 1956, S. 107.

76. Теория обобщенных аналитических функций и ее применения в геометрии и механике. – В кн.: Труды III Всесоюз. матем. съезда. Москва, июнь-июль, 1956, т. 2. Краткое содержание обзорных и секционных докл. М., Изд-во АН СССР, 1956, с. 9–11.

77. На съезде чехословацких математиков. – Вестн. АН СССР, 1956, № 1, 45–47.

78. Конгресс румынских математиков. – Вестн. АН СССР, 1956, № 11, 76–77.

79. О некоторых условиях жесткости поверхностей положительной кривизны. Прочитано на IV съезде чехословацких математиков в Праге 6.IX.1955. – Чех. матем. журн., 1956, 6, ж. 2, 143–160 (резюме на франц. яз.).

80. Достижения советских математиков. – «Природа», 1957, № 11, 71–77.

81. Некоторые вопросы бесконечно малых изгибаний поверхностей. – ДАН СССР, 1957, 112, № 3, 377–380.

82. Владимир Иванович Смирнов (к 70-летию со дня рождения). – УМН, 1957, 12, вып. 6, 197–201.

83. Citeva probleme ale teorie functiilor analitice generalizate si ale aplicatülor ei în geometrie si mecanica. – Bul. mat al Soc. st. Mat. Fiz. din R. P. R., 1957, 1, № 2; 229–243.

84. Теория обобщенных аналитических функций и некоторые ее применения в геометрии и механике. – В кн.: Труды III Всесоюз.-матем. съезда. Москва, июнь-июль, 1956, т. 3. Обзорные докл. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 42–64.

85. Über die korrekte Stellung der Riemann – Hilbertschen Aufgabe. – Proc. Intern. Colloq. on Theory of Function. Ann. Acad. scient. Fennicae, ser. A. 1, 1958, p. 14.

86. Доказательство жесткости кусочно-регулярных замкнутых выпуклых поверхностей неотрицательной кривизны. – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, 22, № 2, 165–176 (совместно с Б. В. Боярским).

87. Об условиях, обеспечивающих безмоментное напряженное состояние равновесия выпуклой оболочки. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1958, 20, № 5, 525–532.

88. Об условиях безмоментности выпуклых оболочек. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1958, 21, № 6, 649–652.

89. Об условиях реализации состояния безмоментного напряженного равновесия выпуклых оболочек. – Матем. ин-т. им. В. Л. Стеклова АН СССР. М., 1958, 23 с.

90. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959, 628 с.

91. Изучение некоторых проблем геометрии и механики. О планах на 1959 г. – Изд. МГУ, 1959, 8/1, № 2 (Ученые МГУ смотрят в будущее).

92. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек. – Пекин, Гаодэн цзяоюй чубаньшэ, 1960, VIII, 204 с. (на китайск. яз.).

93. Об условиях безмоментности напряженного состояния равновесия выпуклой оболочки. – В кн.: Труды Всесоюз. совещ. по дифференциальным уравнениям. Ереван, ноябрь, 1958. Ереван, Изд-во АН Арм. ССР, 1960, с. 32–44.

94. Über die Bedingungen der Verwirklichung des momentenfreien Spannungsgleichgewichtes, von Schallen positiver Krümmung, Amsterdam, North-Holland Publ. Co.,1960, 270–280.

95. Замечание о свойствах решении уравнений $\Delta u = -2ke^u$. – Сиб. матем. журн., 1960, I, №\3, 331–342.

96. Академик Николай Иванович Мусхелишвили. К 70-летию со дня рождения. Краткая биография и обзор научных работ. – Новосибирск, АН СССР, 1961, 55 с.

97. Академик Николай Иванович Мусхелишвили. К 70-летию со дня рождения. – Тбилиси, 1961. 61 с. (на груз. яз.).

98. Проективные свойства полей усилий и изгибаний. – В кн.: Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию академика Н. И. Мусхелишвили. М., Изд-во АН СССР, 1961, с. 83–91.

99. Проективные свойства полей усилий и изгибаний. – В кн.: Всесоюз. совещ. по применениям методов теории функций комплексного переменного к задачам математической физики. Тбилиси, 20–27 февраля 1961 г. Тезисы докл. Тбилиси, Матем. ин-т АН Груз. ССР им. Л. М. Размадзе, 1961, с. 19.

100. A projective property of force and deflection fields. – In: Problems of continuum mechanics. Philadelphia, 1961, p. 582-591.

101. О некоторых свойствах решений уравнения Гаусса. – В кн.: Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. Т. 64, М., Изд-во АН СССР, 1961, 5–8.

102. К теории квазиконформных отображений. – В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Новосибирск, Изд-во АН СССР, 1961, 57-64.

103. Николай Иванович Мусхелишвили (к семидесятилетию со дня рождения). – УМН 1961, 16, вып. 2, 169–188.

104. О компактности семейства обобщенных аналитических функций. – Труды Тбил. гос. ун-та. Сер. мех.-матем. наук, 1961. 84, 17–21 (резюме на груз. яз.).

105. Generalized analytic functions. Oxford-London-New-York-Paris. 1962, 668 p.

106. Методы теории аналитических функций в теории упругости. – В кн.: Труды Всесоюз. съезда по теоретической и прикладной механике (27 января – февраля 1960 г.). Обзорные докл. М.–Л., Изд-во АН СССР, 1962, с. 310–338 (совместно с Н. И. Мусхелишвили).

107. Неподвижные особые точки обобщенных аналитических функций. – ДАН СССР, 1962, 145, № 1, 24–26.

108. Уравнения и системы уравнений эллиптического типа. – Труды IV Всесоюз. матем. съезда, т. 1, 1963, с. 29–48.

109. Verallgeimeinerte analytische Funktionen. Berlin, Akad.–Verlag, 1963, 538 S.

110. Об одном варианте теории тонких пологих оболочек. – Новосибирск, Изд. Новосиб. гос. ун-та, 1964, 68 с.

111. Теория тонких и пологих оболочек переменной толщины. – Новосибирск, Изд. Новосиб. гос. ун-та, 1964, 39 с.

112. Основы тензорного анализа. – Новосибирск, Изд. Новосиб. гос. ун-та, 1964, 138 с.

113. On a version of the bending theory of elastic shells. Univ. Maryland, USA, 1964, 42 p.

114. New methods in mathematical shell theory. Proc. XI Intern. Congr. Appl. Mech. Munich, 1964, p. 47–58.

115. Theory of thin and shallow elastic shells with variable thickness. – В кн.: Приложения теории функций в механике сплошной среды. Труды Тбил. симпоз., т. 1. М., «Наука», 1965. 410-431.

116. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины. – Труды Тбил. матем. ин-та им. А. М. Размадзе, 1965, 30, 5–103.

117. Основы тензорного анализа. Тбилиси, Изд. ТГУ. 1967, 137 с.

118. Über eine Verallgemeinerung des Biegetheorie des Schalen.–Intern. Kongr. Anwendungen der Mathematik in Ingenieurwiss. mit Rahmenthema, Anwendungen elektronischer Rechenanlagen im Bauwesen, 1967, Bd. 1, S. 260 – 280.

119. New methods for solving elliptic equations. Amsterdam. North-Holland Publ-Co., 1967.

120. On construction of approximate solution of equation of the shallow spherical shell. – Intern. J. Solids and Struct., 1968 10, 991–1003.

121. On conformal invariant differential forms in shell theory.– In: Functional theoretical methods in partial differential equations, 1968, p. 303–311.

122. On one version of the consistent theory of elastic shells. – IUTAM Sympos. Copenhagen. Berlin–Heidelberg – New-York. 1969, p. 59–84.

123. Об интегрировании системы уравнений упругого равновесия пластинки. – ДАН СССР, 1969, 186. № 3, 541–544.

124. Об интегрировании уравнений равновесия цилиндрической оболочки. – ДАН СССР, 1969, 186, № 4. 787–790.

125. Об одном классе иррегулярной эллиптической системы уравнений первого порядка. Аннотации докл. семинара ИПМ ТГУ, т. I. 1969, 5-9.

126. On one class of the elliptic systems with singularities.– Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics. Tokyo, 1969, p. 142–147.

127. Вариационные принципы построения теории оболочек. Тбилиси. 1970, 17с.

128. Об одном методе решения основной бигармонической краевой задачи и задачи Дирихле. – В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Л., 1970, 120–127.

129. Уравнения тонких упругих оболочек. Аннотации докл. ИПМ ТГУ, т. 5, 1 971, с. 69–75.

130. Вопросы редукции к двумерной задаче. Третья научная сессия ИПМ ТГУ. Тезисы докл., т. 3, 1971.

131. Об одном направлении построения теории оболочек. – В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. М., «Наука», 1972, 267-290.

132. On two ways of constructing the theory of elastic shells.–Proc. XIII Intern. Congr. Theoret. and Appl. Mech. Moscow, 1972, Berlin–Heidelberg–New-York, Springer–Verlag, 1973, p. 322–339.

133. Об одном функциональном уравнении теории минимальных поверхностей. – ДАН СССР, 1974, 217, № 5, 997–1000.

134. О двух путях построения непротиворечивой теории упругих оболочек. Матер. I Всесоюз. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин, Гегечкори. – Тбилиси, «Мецниереба», 1975, с. 5–10.

135. On one method of solving the first biharmonic boundary value problem and the Dirichlet problem. J. Amer. Math. Soc., 1976, 104, 104-111.

136. Об одном классе статически определимых задач теории оболочек. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1976, 83, № 2, 273– 276; № 3, 529–532 (резюме на рус. и англ. яз.).

137. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. – М., «Наука», 1978, 296 с.

138. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М., «Наука», 1982, 286 с.

139. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. – Тбилиси, «Мецниереба», 1982, 365 с. (на груз. яз.).

140. Shell theory: General Methods of Construction. Boston–London–Melbourne, Pitman Advanced Publishing Program, 1985, 287 p.

ა. ბიწაძე

აკადემიკოსი ილია ნესტორის ძე ვეკუა

რეზიუმე

გადმოცემულია აკადემიკოს ი. ვეკუას ბიოგრაფია და მეცნიერული მოღვაწეობა.

A. Bitsadze

Academician Ilia Vekua

Summary

Here you can see academician I. Vekua's biography and scientific activities.

*ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები*
*Труды Тбилисского государственного
университета им. Ив. Джавахишвили*
Proceeding of I. Javakhishvili Tbilisi State University
354

УДК 539.3

КРАТКИЙ ОБЗОР ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ И. Н. ВЕКУА ПО ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Т. В. Меунаргия

Среди научных направлений в творчестве академика И. Н. Векуа одно из главных мест всегда занимала теория упругих оболочек и пластин.

§1. Работы по классической теории оболочек

1. Исследования И. Н. Векуа, посвященные вопросам теории оболочек, берут свое начало еще с сороковых годов прошлого века, после успешного завершения им цикла работ о комплексном представлении общих решений эллиптических дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными. Построенные им формулы общего представления решений оказались весьма удобными для выявления новых качественных и структурных свойств этих решений, а также для решения обширного класса краевых задач, труднодоступных для известных ранее методов исследования.

В теории общих комплексных представлений решений эллиптических уравнений, пожалуй, самым главным является открытый И. Н. Векуа факт о возможности эквивалентной редукции достаточно широкого класса краевых задач к соответствующей краевой задаче для систем аналитических функций комплексного переменного $z = x + iy$.

В статье «Об изгибе пластинки со свободным краем», вышедшей в 1942 году, И. Н. Векуа изучил основные граничные задачи изгиба пластинки с помощью двух аналитических функций от z.

Метод комплексных представлений общих решений оказался весьма успешным в вопросах интегрирования системы уравнений равновесия тонкой сферической оболочки. Полученные в 1945 году формулы выражают в явном виде усилия, моменты и смещения через четыре произвольные аналитические функции. В качестве примера была решена граничная задача для оболочки, имеющей форму сферического сегмента.

Введением на срединной поверхности изометрической системы координат И. Н. Векуа удалось построение общего представления решений системы дифференциальных уравнений тонких пологих оболочек привести к решению интегрального уравнения типа Вольтерра в комплексной области. Решение этого уравнения находится методом последовательных приближений и является аналитической функцией двух комплексных переменных. Для сферических и цилиндрических оболочек комплексные представления решений выписаны в явном виде через четыре аналитические функции.

Основные результаты этих работ изложены в монографии И. Н. Векуа «Новые методы решения эллиптических уравнений», изданной в 1948 году и удостоенной Государственной премии СССР в 1950 г.

2. В начале пятидесятых годов прошлого века И.Н. Векуа разработал новый математический аппарат, позволивший ему существенно расширить рамки классической теории аналитических функций и ее применений. На основе решений обобщенных уравнений Коши-Римана был получен класс функций, названный им обобщёнными аналитическими функциями. Возможности теории обобщенных аналитических функций оказались весьма обширными. Выявились глубокие связи со многими разделами анализа, геометрии и механики (квазиконформные отображения, теория поверхностей; теория оболочек, газовая динамика и др.).

Новый аналитический аппарат позволил И.Н. Векуа значительно расширить и углубить исследования геометрических и механических задач, возникающих при изучении бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны и безмоментного напряженного состояния выпуклых оболочек. Все это привело к ряду новых результатов, и, кроме того, позволило полнее раскрыть геометрическую и механическую природу обобщенных аналитических функций.

Общий метод изучения основных задач безмоментной теории выпуклых оболочек и бесконечно малых изгибаний поверхностей с помощью обобщенных аналитических функций изложен И. Н. Векуа в известной монографии «Обобщенные аналитические функции», удостоенной Ленинской премии в 1963 году.

Система уравнений безмоментного напряженного состояния оболочки имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\partial_\alpha\left(\sqrt{a}\,\mathbf{T}^\alpha\right)+\mathbf{X}=0, \qquad (\mathbf{T}^\alpha=T^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\beta, \quad \mathbf{X}=X^\alpha\mathbf{r}_\alpha+X_3\mathbf{n}) \tag{1}$$

или в тензорной записи

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}+X^\beta=0,\ b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}+X_3=0 \ \ (\alpha,\beta=1,2), \tag{2}$$

где тензорное поле $T^{\alpha\beta}$ называется еще и статическим полем.

Система уравнений при бесконечно малых изгибаниях поверхности S в компонентах вектора смещения $\mathbf{U}=u_\alpha\,\mathbf{r}^\alpha+u_3\mathbf{n}$, являющегося достаточно гладкой функцией, принимает вид

$$\frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha u_\beta+\nabla_\beta u_\alpha\right)-b_{\alpha\beta}u_3=0. \tag{3}$$

Она является тензорной записью векторного уравнения бесконечно малых изгибаний

$$d\mathbf{r}d\mathbf{U} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$d\mathbf{U} = \mathbf{V} \times d\mathbf{r}, \ (\mathbf{V} = V^{\alpha}\, \mathbf{r}_{\alpha} + V_3\mathbf{n}),$$

где вектор $\mathbf{V}$ носит название вектора вращения. Очевидно, что поле вращений однозначно определяется через поле смещений $\mathbf{U}$; наоборот, если задано заранее поле вращений, то соответствующее ему поле смещений $\mathbf{U}$ определяется посредством квадратур с точностью до переноса. Если на поверхности задано некоторое поле вращений $\mathbf{V}$, то по формулам

$$\hat{T}^{\alpha\beta} = c^{\alpha\lambda} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^{\lambda}} \mathbf{r}^{\beta} \tag{4}$$

определяется контравариантный тензор второго ранга $\hat{T}^{\alpha\beta}$, который удовлетворяет однородной системе уравнений (2), т. е.

$$\nabla_{\alpha} \hat{T}^{\alpha\beta} = 0, \quad b_{\alpha\beta} \hat{T}^{\alpha\beta} = 0\,. \tag{5}$$

Этот тензор полностью характеризует деформацию поверхности при ее бесконечно малом изгибании. Поэтому его называют тензором изгибаний.

Таким образом, каждому полю вращений сопоставляется вполне определенное однородное статическое поле безмоментного напряжения. Это позволяет интерпретировать геометрические свойства бесконечно малых изгибаний поверхности как определенные механические свойства, характеризующие безмоментное напряженное состояние оболочек.

И. Н. Векуа решает полностью следующий вопрос: можно ли любое статическое поле представить в виде (4), т.е. возможно ли заданное решение системы (5) интерпретировать всегда как некоторое поле изгибания. Ответ оказывается не всегда положительным.

Действительно, принимая во внимание формулы

$$\frac{d\mathbf{V}}{ds} = \hat{T}^{\alpha\beta} l_{\alpha} \mathbf{r}_{\beta} = \hat{\mathbf{T}}_{(l)}, \quad (l_{\alpha} = \mathbf{l}\mathbf{r}_{\alpha}),$$

$$d\mathbf{U} = d\,(\mathbf{V} \times \mathbf{r}) + \mathbf{r} \times d\mathbf{V}\,,$$

очевидно, что для существования однозначных полей смещений и вращений необходимо и достаточно выполнение следующих равенств:

$$\int_L \hat{\mathbf{T}}_{(l)} ds = 0, \qquad \int_L \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{T}}_{(l)}\, ds = 0, \tag{6}$$

где L – любая кусочно-гладкая замкнутая кривая на поверхности S.

С другой стороны, пусть $T^{\alpha\beta}$ – некоторое однородное статическое поле, т.е. удовлетворяет системе уравнений

$$\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0, \quad b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0,$$

и пусть $\mathbf{U}$ – некоторое поле смещений при бесконечно малых изгибаниях, тогда, применяя формулу Грина, получаем следующее тождество:

$$\int_L \mathbf{U}\mathbf{T}_{(1)}\, ds = 0, \tag{7}$$

где L – граница срединной поверхности оболочки, которая состоит из конечного числа кусочно-гладких простых замкнутых контуров L_0, L_1,... L_m, а $\mathbf{T}_{(1)}$ – вектор усилий $\mathbf{T}_{(1)} = T^{\alpha\beta} l_\alpha \mathbf{r}_\beta$. Кроме того, считается, что поля $\mathbf{U}$ и $\mathbf{T}_{(1)}$ непрерывны в $S + L$.

Если в качестве вектора $\mathbf{U}$ взять тривиальные изгибания, т.е.

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{C},$$

где $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{C}$ – произвольные постоянные векторы, то из (7) получаются условия типа (6)

$$\int_L \mathbf{T}_{(1)}\, ds = 0, \qquad \int_L \mathbf{r} \times \mathbf{T}_{(1)}\, ds = 0. \tag{8}$$

Очевидно, что для односвязных поверхностей в качестве L можно взять любую замкнутую кусочно-гладкую кривую, что будет означать идентичность условий (6) и (8). Следовательно, в случае односвязной поверхности каждому статическому полю будут сопоставляться (с точностью до тривиального изгибания) однозначные поля смещений и вращений. В случае многосвязной поверхности это уже не так, ибо условия типа (6), которые в этом случае принимают вид

$$\int_{L_j} \mathbf{T}_{(1)}\, ds = 0, \qquad \int_{L_j} \mathbf{r} \times \mathbf{T}_{(1)}\, ds = 0,$$

$$(j = 1, 2, ..., m)$$

не будут выполняться для любого статического поля, и, следовательно, соответствующие им поля смещений и вращений будут многозначными функциями. Но и в этом случае всякому безмоментному напряженному состоянию оболочки сопоставляется вполне определенное бесконечно малое изгибание ее срединной поверхности, если последняя будет превращена в односвязную поверхность произвольно выбранными разрезами L_1', L_2', ..., L_m'. При этом берега каждого разреза сдвигаются в отношении друг друга как жесткие тела. Эти сдвиги вполне однозначно определяются по заданному статическому полю. Отсюда делается заключение: если отсутствует ненулевое однородное статическое поле, которое удовлетворяет геометрическим связям и условиям, обеспечивающим однозначность полей смещений и вращений, то поверхность будет жесткой.

Для выпуклых оболочек И.Н. Векуа даны необходимые и достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность статического поля усилий $T^{\alpha\beta}$, удовлетворяющего системе уравнений (2).

Это условие имеет вид:

$$\iint_S \mathbf{UX}\,ds + \int_L \mathbf{UT}_{(1)}ds = 0, \qquad (9)$$

т.е. сумма элементарных работ внешних поверхностных и контурных сил, приложенных к оболочке, находящейся в состоянии безмоментного напряженного состояния, на перемещениях, соответствующих любому бесконечно малому изгибанию срединной поверхности, равна нулю.

Рассматривая на срединной поверхности оболочки положительной гаусовой кривизны $K > 0$ (выпуклые оболочки) некоторую сопряженно изометрическую систему координат, И. Н. Векуа вводит комплексные функции смещения w и напряжения w' следующим образом:

$$w(z) = \frac{u_1 + iu_2}{\sqrt{a\sqrt{K}}}, \quad w'(z) = aK^{\frac{1}{4}}(T^{11} - iT^{12}) + \frac{\sqrt{a}}{2}K^{-\frac{1}{4}}X^3,$$

тогда системы уравнений (2) и (3) принимают вид

$$\partial_{\bar{z}}w + B\bar{w} = 0, \qquad u_3 = \frac{1}{K\sqrt{a}}\mathrm{Re}\left[\partial_z\left(\frac{K^{\frac{1}{4}}w}{\sqrt{a}}\right)\right], \qquad (10\text{ а})$$

$$\partial_{\bar{z}}w' - \bar{B}\bar{w}' = F, \qquad T^{11} + T^{22} = -\frac{X_3}{\sqrt{aK}}, \qquad (10\text{ б})$$

где

$$F = \frac{1}{2}\sqrt{a\sqrt{K}}\left[\sqrt{K}\partial_z\left(\frac{X_3}{K}\right) - \frac{\sqrt{a}}{2}(X^1 - iX^2)\right], \qquad (11)$$

а коэффициент B выражается с помощью символов Кристофеля следующим образом:

$$B = \frac{1}{4}(\Gamma^1_{22} - \Gamma^1_{11} + 2\Gamma^2_{12}) - \frac{i}{4}(\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{22} + 2\Gamma^1_{12}). \qquad (12)$$

Таким образом, комплексные функции смещения w и напряжения w' являются обобщенными аналитическими функциями, удовлетворяющими взаимно сопряженным уравнениям. Если $B = 0$, то получается уравнение Коши-Римана

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0, \qquad \frac{\partial w'}{\partial \bar{z}} = 0,$$

т.е. w и w' – аналитические функции от z. Следовательно, для поверхностей, удовлетворяющих условию $B = 0$, задача приводится к решению уравнений Коши-Римана и тогда комплексные функции смещения и напряжения будут иметь вид

$$w(z) = \Phi(z), \qquad w'(z) = \Psi(z),$$

где Φ и Ψ (z) – аналитические функции от z.

И. Н. Векуа доказал, что условие B = 0 выполняется для всех поверхностей второго порядка положительной кривизны K > 0 и только для них. Следует отметить, что и раньше было известно, что поверхности второго порядка при K > 0 приводят к системе Коши-Римана. И. Н. Векуа установлено и обратное предложение, которое раньше не было доказано.

Реализация безмоментного напряженного состояния оболочки или, коротко, состояния (**T**), возможна лишь при некоторых специальных распределениях внешних нагрузок **X**. Это следует из условия (9), которое при произвольном задании поля (**X, T**), вообще говоря, не будет выполняться. Оставляя в стороне задачу о физических условиях реализации состояния (**T**), И. Н. Векуа главным образом занимается чисто математическим вопросом об отыскании условий, обеспечивающих существование и единственность статического поля усилий $\mathbf{T}_{(1)}$, удовлетворяющего системе уравнений (2). Для этого необходимо выполнение равенства (9). Достаточность условия (9) И. Н. Векуа доказывает для оболочек положительной кривизны.

Показано, что комплексная функция напряжения w' и вектор усилия $\mathbf{T}_{(1)}$ связаны между собой соотношениями вида

$$\mathbf{T}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{K}}}\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{i}w'(z)\frac{dz}{ds}\mathbf{r}_{\bar z}\right] - \frac{X_3}{\sqrt{K}}\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{i}\,\frac{dz}{ds}\,\mathbf{r}_z\right], \tag{13}$$

$$w'(z) = \frac{2K^{-\frac{1}{4}}}{iz'}\,\mathbf{T}_{(1)}\mathbf{n}_z - \frac{\sqrt{a}}{2K^{\frac{1}{4}}}\,\frac{\bar z'}{z'}\,X_3, \tag{14}$$

где

$$\mathbf{r}_z = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 - i\mathbf{r}_2), \quad \mathbf{n}_z = -\frac{\sqrt{aK}}{2}(\mathbf{r}^1 - i\mathbf{r}^2), \quad z' = \frac{dz}{ds}.$$

Как видно из формулы (14), совместимое с состоянием (**T**) поле (**X, T**), удовлетворяет следующему условию: правая часть равенства (14), которая содержит контурные усилия $\mathbf{T}_{(1)}$ и нормальную составляющую X_3 поверхностных сил, представляет собой граничное значение некоторого непрерывного в G + Γ (на которую гомеоморфно отображается срединная поверхность оболочки) решения (10 б). Доказано, что выполнение этого условия не только необходимо, но и достаточно для реализации состояния (**T**).

В случае незамкнутой выпуклой оболочки (оболочки с краями или отверстиями) И. Н. Векуа рассмотрел краевое условие общего вида, когда вместо нормального или касательного усилия в каждой точке контура задается усилие в некотором наклонном направлении t, составляющем с тангенциальной нормалью $\boldsymbol{l}$ угол φ ($|\varphi| < \pi$):

$$T_{(lt)} = T_{(ll)}\cos\varphi + T_{(ls)}\sin\varphi = f \quad (\text{на } L). \tag{15}$$

Пользуясь формулой (13), это условие можно записать еще и так:

$$\mathrm{Re}\left[w'(z)\frac{dz}{ds}\ \frac{d\bar{z}}{dt'} \right] = g \quad (\text{на } L), \tag{16}$$

где

$$g = -K^{\frac{1}{4}} f - \frac{\sqrt{a}}{2} K^{-\frac{1}{4}} X_3 \,\mathrm{Re}\left[\frac{dz}{ds}\frac{dz}{dt'}\right],$$

причем $\mathbf{t} \times \mathbf{t}' = \mathbf{n}$.

Таким образом, краевое условие (15) приводится к обобщенной задаче Римана - Гильберта вида (16). В этом случае индекс задачи (16) равен

$$k = 2(m - 1).$$

Поэтому в случае выпуклой оболочки с одним отверстием ($m = 0$) $k = -2$ и неоднородная задача разрешима лишь при выполнении трех условий вида

$$\int_L f u_t^{(j)} ds + \iint_S \mathbf{U}^{(j)}\,\mathbf{X}\, dS = 0 \quad (j=1,2,3), \tag{17}$$

где $u_t^{(j)} = \mathbf{U}^j \mathbf{t}$ – проекция поля $\mathbf{U}^{(j)}$ на $\mathbf{t}$, причем $\mathbf{U}^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$) являются решениями сопряженной однородной кинематической задачи

$$u_{t'} = 0 \ (\text{на } L). \tag{18}$$

Здесь может представиться два случая: 1) все поля $\mathbf{U}^{(j)}$ являются тривиальными и 2) по крайней мере одно из них нетривиальное. В первом случае равенства (17) являются условиями равновесия статики твердого тела. Следовательно, в этом случае краевая задача всегда имеет решение. Во втором же случае краевая задача, очевидно, не всегда разрешима. Для выпуклой оболочки с двумя отверстиями ($m = 1$) $k = 0$, поэтому могут представиться два случая: 1) либо неоднородная задача (16) всегда разрешима, а соответствующая задача не имеет нетривиальное решение и 2) либо однородная задача имеет одно решение, а неоднородная задача разрешима лишь при выполнении условия

$$\int_L f u_t ds + \iint_S \mathbf{U}\mathbf{X} dS = 0, \tag{19}$$

где $\mathbf{U}$ – решение (нетривиальное) задачи (18). Здесь особо следует отметить тот случай, когда поле $\mathbf{U}$ тривиальное. В этом случае равенство (19) совпадает с одним из условий равновесия статики твердого тела и, следовательно, задача имеет решение.

Наконец, в случае $m > 1$ индекс задачи $k = 2(m - 1)$ больше $m - 1$ и неоднородная задача (16) всегда имеет решение, а соответствующая однородная задача допускает ровно $3m - 3$ линейно независимых решений. Следовательно, поле усилий имеет вид

$$\mathbf{T}_{(l)} = \overset{0}{\mathbf{T}}_{(l)} + \sum_{k=1}^{3m-3} c_k \overset{k}{\mathbf{T}}_{(l)} \ ,$$

где постоянные c_k можно определить при помощи добавочных условий. Отсюда, в частности, получаются следующие важные результаты: 1) В выпуклой оболочке, имеющей одно отверстие и свободной от действия поверхностных нагрузок, не всегда реализуется безмоментное напряженное состояние, если распределение нормальных усилий вдоль отверстий задано по произвольному закону. При этом в такой оболочке не может существовать ненулевое поле усилий, если нормальные усилия равны нулю на границе. 2) Для выпуклой оболочки с двумя отверстиями существуют случаи, когда при любом способе распределения нормальных усилий по контуру в оболочке реализуется безмоментное напряженное состояние. Также можно указать случаи, когда последнее не имеет места. 3) Для выпуклых оболочек с числом отверстий больше двух реализуется безмоментное напряженное состояние при любом способе распределения нормальных усилий вдоль контуров отверстий, причем в оболочке с m (m > 1) отверстиями может существовать ровно 3m – 3 линейно независимых (ненулевых) безмоментных напряженных состояний при отсутствии нормальных усилий на контуре.

3. Естественно теперь поставить вопрос о том, в какой мере краевые условия (16) могут быть реализованы на практике. И. Н. Векуа указал некоторые конкретные приемы реализации такого рода условий, которые возникают при наличии так называемых втулочных связей. А именно, для таких связей краевая задача имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}\, \mathbf{T}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \mathbf{X} = 0 \quad (\text{на S}),$$

$$T_{(ls)} = T^{\alpha\beta} l_{\alpha} s_{\beta} = 0 \quad (\text{на L}).$$

В комплексной форме это записывается так:

$$\frac{\partial w'}{\partial \bar{z}} - \overline{B}\overline{w}' = F \qquad (\text{в G}),$$

$$\operatorname{Re}\left[w' \frac{dz}{dl} \frac{dz}{ds} \right] = 0 \qquad (\text{на Γ}).$$

Наряду с этим И. Н. Векуа показал, что теория уравнений с частными производными смешанного типа может служить математической моделью безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака. Этот факт вызвал большой интерес среди специалистов (как математиков, так и механиков), поскольку прикладная важность теории уравнений смешенного типа раньше наблюдалась лишь в задачах сверхзвукового движения сжимаемой жидкости.

§ 2. Общие методы построения различных вариантов теории оболочек

1. В своих многочисленных работах по теории оболочек И. Н. Векуа предложил несколько способов построения различных вариантов теории оболочек, для каждого из которых он получил систему уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными и соответствующие краевые условия. И. Н. Векуа считает, что при попытке совершенствования того или иного раздела механики не следует особенно далеко выходить за классические рамки, ибо исследования классиков базировались на ясных физических и геометрических допущениях или на длительном практическом опыте.

Действительно, оставаясь по существу в рамках классического подхода к задаче, ему удалось построить новый вариант теории упругих оболочек, который согласован с естественными краевыми условиями. В начале 50-ых годов эта теория была разработана для случая призматических оболочек переменной толщины и изложена в работе автора "Об одном методе расчета призматических оболочек" (1955). Затем эти результаты он переносит на случай произвольных пологих упругих оболочек в работе "Теория тонких пологих оболочек переменной толщины" (1965).

И.Н. Векуа рассматривает оболочки, которые подчинены соотношениям упругости согласно обобщенному закону Гука. Для отыскания компонент тензора напряжения и вектора смещения он применяет разложения этих величин по полиномам Лежандра относительно толщинной координаты x_3, выражающей расстояние точки оболочки до ее срединной поверхности. Для коэффициентов разложений, называемых моментами, он получает бесконечную систему уравнений с двумя независимыми переменными. Для построения приближенных решений И. Н. Векуа, имея в виду, что главная цель теории оболочек состоит именно в построении приближенных решений соответствующих задач трехмерной теории упругости, фиксирует некоторое целое неотрицательное число N, т.е. рассматривает отрезки рядов для компонент тензора напряжений, содержащих первые N + 1 слагаемых. Следовательно, из бесконечной системы уравнения удерживаются лишь первые N + 1 уравнений, которые содержат в главных частях искомые моменты до порядка N включительно. При этом И. Н. Векуа отмечает, что „любой вариант теории оболочек строится на базе рассмотрения некоторой конечной системы уравнений, которая, очевидно, составляет лишь необходимое условие равновесия оболочки. Поэтому ни один вариант теории оболочек не может претендовать на полноту. Общим недостатком всех вариантов является то, что вне рассмотрения остается бесконечное множество других необходимых условий равновесия оболочки." Для системы уравнений в компонентах вектора смещений И. Н. Векуа обнаруживает замечательное сходство этой системы с уравнениями плоской теории упругости, которое открывает широкие возможности для применения методов теории функций комплексного переменного и интегральных уравнений, развитых в работах Н. И. Мусхелишвили, его учеников и последователей.

Для этих систем И. Н. Векуа рассматривает краевые условия, вытекающие из пространственных краевых задач, и доказывает теоремы существования и единственности решения этих задач.

Очевидно, что с увеличением N приближения становятся более точными, но ясно, что при больших N значительно возрастают практические трудности решения соответствующей системы уравнений. Однако во многих случаях практически достаточно ограничиться приближениями порядка N = 0 и N = 1. Поэтому эти случаи были рассмотрены И. Н. Векуа особо.

И. Н. Векуа показал, что приближение порядка N = 0 представляет по существу безмоментную теорию оболочек, дополненную таким образом, что соответствующие системы уравнений совместимы с тремя физическими краевыми условиями задачи.

Случай N = 1 соответствует допущению о том, что картина напряженного и деформированного состояний оболочки изменяется вдоль нормали к срединной поверхности по линейному закону. Этот случай „весьма близок" к классической моментной теории оболочек, но с ней в точности не совпадает. Классическая теория дополнена здесь таким образом, что получается система уравнений, которая совместима с шестью физическими краевыми условиями.

Как было отмечено выше, классическая теория оболочек приводит к пяти независимым краевым условиям. Это связано с гипотезой Кирхгофа-Лява, согласно которой на каждой поперечной элементарной площадке система сил может быть заменена статически ей эквивалентной совокупностью векторов усилия и момента; они имеют пять компонентов – три компонента вектора усилия и два компонента момента пары. Эта гипотеза по существу равносильна предложению, что поперечные поверхностные элементы оболочки можно рассматривать как абсолютно жесткие фигуры, однако это допущение, по мнению И. Н..Векуа, не согласуется с тем, что, как выясняется при анализе деформации, нельзя считать равными нулю растяжения и сжатия в поперечных направлениях. В противном случае получается весьма частный вид деформации, и соответствующая система дифференциальных уравнений не совместима с пятью физическими краевыми условиями. Это обстоятельство и создает в классической теории оболочек внутренне противоречивую ситуацию. Поэтому И. Н. Векуа с самого начала отказывается от исходного допущения классической теории оболочек. Например, при приближениях порядка N = 1, наиболее близких к классической теории, в каждой поперечной элементарной площадке, наряду с усилием и моментом, действуют также равные и противоположно направленные силы, расположенные в плоскости площадки и приложенные к двум равным ее половинкам, разделенным срединной поверхностью. Эту пару И. Н. Векуа называет расщепляющей парой сил, или поперечной силой. В случае жесткой площадки эта пара сил не вызывает, разумеется, никакого механического эффекта, но в упругом теле ее действие, очевидно, сопровождается сжатием или растяжением в поперечном направлении, причем в последнем случае может образоваться трещина вдоль срединной поверхности и произойти расслоение оболочки. Введение в рассмотрение расщепляющей пары сил дополняет моментную теорию оболочек, позволяя устранить присущее ей внутренее противоречие, а именно, дает полную систему уравнений, согласованную с шестью физическими краевыми условиями задачи. В дальнейшем И. Н. Векуа построил такой вариант теории оболочек, который в случае N = 1 полностью обеспечивает все пять физических краевых условий, без введения поперечной силы.

В ряде практически важных случаев полученные уравнения проинтегрированы в явном виде. Например, интегралы систем уравнений равновесия пластинки и сферической оболочки постоянной толщины выражаются в явном виде при помощи аналитических функций комплексного переменного z.

2. В своих построениях И. Н. Векуа исходит из уравнений трехмерной теории упругости, записанных в произвольной системе координат (x^1, x^2, x^3), используя векторные обозначения. Эти уравнения можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\boldsymbol{\sigma}^i}{\partial x^i}+\boldsymbol{\Phi}=0, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^i=\lambda\,(\mathbf{R}^i\partial_j\mathbf{u})\,\mathbf{R}^i+\mu\,(\mathbf{R}^i\partial_j\mathbf{u})\,\mathbf{R}^j+\mu\partial^i\mathbf{u}\,, \tag{1a}$$

$$(i,\ j=1,2,3,\qquad \partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i},\qquad \partial^j=g^{ij}\partial_j)$$

где $\boldsymbol{\sigma}^i$ – контравариантные составляющие поля напряжения, $\boldsymbol{\Phi}$ – объемная сила, $\mathbf{u}$ – вектор смещения, g – дискриминант метрической формы пространства

$$ds^2=g_{ij}\,dx^i\,dx^j,\qquad g_{ij}=\mathbf{R}_i\mathbf{R}_j,\qquad g^{ij}=\mathbf{R}^i\mathbf{R}^j,$$

$\mathbf{R}_i=\partial_i\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^i=g^{ij}\,\mathbf{R}_j$, – ковариантные и контравариантные базисные векторы, λ и μ – постоянные Ламе.

В дальнейшем систематически будут использованы обозначения и символы, употребляемые в тензорном исчислении, где латинские и греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3 и 1, 2, соответственно.

Для системы координат, нормально связанной со срединной поверхностью S оболочки Ω, справедливы формулы:

$$\mathbf{R}\,(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{r}\,(x^1, x^2) + x^3\mathbf{n}\,(x^1, x^2),$$

$$\mathbf{R}_\alpha = (a_{\alpha\beta} - x_3 b_{\alpha\beta})\mathbf{r}^\beta \equiv (a_\alpha^\beta - x_3\, b_\alpha^\beta)\,\mathbf{r}_\beta, \qquad \mathbf{R}_3 = \mathbf{n}, \ \ (x^3 = x_3),$$

$$\sqrt{g}\mathbf{R}^\alpha = \sqrt{a}\left[a_\beta^\alpha + x_3\left(b_\beta^\alpha - 2Ha_\beta^\alpha\right)\right]\mathbf{r}^\beta, \qquad \mathbf{R}_3 = \mathbf{n}$$

где $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}$ – радиус-векторы пространства Ω и срединной поверхности S, $\mathbf{r}_\alpha$, $\mathbf{r}^\alpha$ и ковариантные базисные векторы на поверхности S, $\mathbf{n}$ –орт нормали к S, a – дискриминант метрической квадратичной формы на S, причем

$$\sqrt{g} = \sqrt{a}\,(1 - k_1 x_3)(1 - k_2 x_3) = \sqrt{a}\,(1 - 2Hx_3 + Kx_3^2),$$

$$H = \frac{1}{2} b_\gamma^\gamma = k_1 + k_2\,,\ K = b_1^1\, b_2^2 - b_1^2\, b_2^1 = k_1 k_2\,,$$

k_1 и k_2 – главные кривизны, H и K – средняя и Гауссова кривизны поверхности S, $a_{\alpha\beta}$, и $b_{\alpha\beta}$ – ковариантные компоненты метрического тензора и тензора кривизны

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha\, \mathbf{r}_\beta,\ b_{\alpha\beta} \equiv -\,\mathbf{n}_\alpha\, \mathbf{r}_\beta,\ a = a_{11}\ a_{22} - a_{12}^2.$$

И. Н. Векуа рассматривает тонкие и пологие оболочки, для которых справедливы следующие допущения геометрического характера:

$$a_\beta^\alpha - x_3 b_\alpha^\beta \cong a_\alpha^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2). \tag{2}$$

В соответствии с допущением (2) получается

$$\mathbf{R}_\alpha \cong \mathbf{r}_\alpha, \qquad \mathbf{R}^\alpha \cong \mathbf{r}^\alpha,$$

и уравнение представится в виде

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\partial_i\left(\sqrt{a}\boldsymbol{\sigma}^i\right) + \boldsymbol{\Phi} = 0, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^i = c^{ij}\,\partial_j\,\mathbf{u} \tag{3 a}$$

где C^{ij} – диадные операторы:

$$C^{\alpha\beta} = \lambda\,(\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{r}^\beta) + \mu\,(\mathbf{r}^\beta \otimes \mathbf{r}^\alpha) + \mu a^{\alpha\beta} E, \qquad C^{\alpha 3} = \lambda\,(\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{n}) + \mu\,(\mathbf{n} \otimes \mathbf{r}^\alpha),$$

$$C^{3\alpha} = \lambda\,(\mathbf{n} \otimes \mathbf{r}^\alpha) + \mu\,(\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{n}), \qquad C^{33} = (\lambda + \mu)\,(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \mu E,$$

$$E = \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}^\alpha + (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}),$$

$\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{r}^\beta$ – базисные контравариантные диады, а E – оператор тождественного преобразования. Если φ – функция, а $\mathbf{u}$ – вектор, то справедливы формулы

$$\mathbf{u}\,(\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{r}^\beta) = u^\alpha\,\mathbf{r}^\alpha,\ \ (\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{r}^\beta)\,\mathbf{u} = u^\beta\,\mathbf{r}^\alpha,\ \ (u^\alpha = \mathbf{u}\mathbf{r}^\alpha),$$

$$\varphi\,(\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{r}^\beta) = (\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{r}^\beta)\,\varphi = (\varphi\,\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{r}^\beta) = (\mathbf{r}^\alpha \otimes \varphi\mathbf{r}^\beta),$$

$$\mathbf{u}\,(\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{n}) = u^\alpha\,\mathbf{n},\ (\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{n})\,\mathbf{u} = u_3\mathbf{r}^\alpha,\ (u_3 = \mathbf{u}\mathbf{n}),$$

$$\varphi\,E = E\,\varphi = \varphi,\ \mathbf{u}E = E\mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

3. Переход к двумерным уравнениям И. Н. Векуа осуществляет разными способами. Один из них заключается в следующем. Умножая обе части (3) на

$$\frac{2m+1}{2h}P_m\left(\frac{x_3}{h}\right),$$

где P_m – полином Лежандра порядка m, а затем интегрируя их относительно x_3, в пределах от – h до h (2h – толщина оболочки), получим бесконечную систему двумерных уравнений, которая в векторной записи принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\partial_\alpha\left(\sqrt{a}\,\overset{(m)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^{\alpha}\right)-\frac{2m+1}{h}\left(\overset{(m-1)}{\boldsymbol{\sigma}^3}+\overset{(m-3)}{\boldsymbol{\sigma}^3}+\ldots\right)+\overset{(m)}{F}=0, \qquad (3\ б)$$

$$(m = 0, 1, \ldots)$$

$$\overset{(m)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^{i}=C^{i\alpha}\partial_\alpha\overset{(m)}{\mathbf{u}}+\frac{1}{h}C^{i3}\overset{(m)}{\mathbf{u}'}, \qquad (3\ c)$$

$$\left(\overset{(-k)}{\sigma^{i}}=0, \qquad k>0\right).$$

Учитывая разложения вида

$$\overset{(m)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^{i}=\overset{(m)}{\sigma}{}^{i\alpha}\mathbf{r}_\alpha+\overset{(m)}{\sigma}{}^{i3}\mathbf{n},\quad \overset{(m)}{\mathbf{u}}=\overset{(m)}{u}{}^{\alpha}\mathbf{r}_\alpha+\overset{(m)}{u}{}^{3}\mathbf{n},\quad \overset{(m)}{\mathbf{F}}=\overset{(m)}{F}{}^{\alpha}\mathbf{r}_\alpha+\overset{(m)}{F}{}^{3}\mathbf{n}, \qquad (4)$$

получаем тензорную запись этой системы:

$$\begin{cases}\nabla_\alpha\overset{(m)}{\sigma}{}^{\alpha\beta}-b_\alpha^\beta\overset{(m)}{\sigma}{}^{\alpha3}-\dfrac{2m+1}{h}\left(\overset{(m-1)}{\sigma}{}^{3\beta}+\overset{(m)}{\sigma}{}^{3\beta}+\ldots\right)+\overset{(m)}{F}{}^{\beta}=0,\\[2ex] \nabla_\alpha\overset{(m)}{\sigma}{}^{\alpha3}+b_{\alpha\beta}\overset{(m)}{\sigma}{}^{\alpha\beta}-\dfrac{2m+1}{h}\left(\overset{(m-1)}{\sigma}{}^{33}+\overset{(m)}{\sigma}{}^{33}+\ldots\right)+\overset{(m)}{F}{}^{3}=0,\end{cases} \qquad (5)$$

$$(\alpha,\ \beta = 1,\ 2)$$

а равенство (3 c) принимает вид

$$\begin{aligned}\overset{(m)}{\sigma}{}^{i\alpha}&=C^{i\beta}\left(\nabla_\beta\overset{(m)}{u}{}^{\alpha}-b_\beta^\alpha\overset{(m)}{u}{}^{3}\right)+\frac{1}{h}C^{i3}\overset{(m)}{u}{}'^{\alpha}\\ \overset{(m)}{\sigma}{}^{i3}&=C^{i\beta}\left(\nabla_\beta\overset{(m)}{u}{}^{3}+b_{\alpha\beta}\overset{(m)}{u}{}^{\alpha}\right)+\frac{1}{h}C^{i3}\overset{(m)}{u}{}'^{3},\end{aligned} \qquad (6)$$

где ∇_α – символы ковариантных производных на поверхности S; далее

$$\left(\overset{(m)}{\sigma}{}^{ik},\ \overset{(m)}{u}{}^{i},\ \overset{(m)}{\Phi}{}^{i}\right)=\frac{2m+1}{2h}\int_{-h}^{h}(\sigma^{ik}, u^i, \Phi^i,)\,P_m\left(\frac{x_3}{h}\right)dx^3,$$

$$\overset{(m)}{F}{}^{i}=\overset{(m)}{\Phi}{}^{i}+\frac{2m+1}{h}\left(\overset{(+)}{\sigma}{}^{3i}-(-1)^m\overset{(-)}{\sigma}{}^{3i}\right),\qquad \overset{(\pm)}{\sigma}{}^{3i}=\sigma^{3i}\left(x^1,\ x^2,\ \pm h\right),$$

$$\overset{(m)}{u'_i}=(2m+1)\left(\overset{(m+1)}{u_i}+\overset{(m+3)}{u_i}+\ldots\right)\qquad (m=0, 1, \ldots).$$

Бесконечная система уравнений (5) и (6) имеет то преимущество, что она содержит две независимые переменные x^1 и x^2, но уменьшение числа независимых переменных на единицу достигнуто ценой увеличения количества уравнений до бесконечности, что, разумеется, имеет свои очевидные практические неудобства.

Поэтому необходимо редуцировать задачу к некоторой конечной системе уравнений с двумя независимыми переменными. И. Н. Векуа указал несколько разных способов такой редукции. Ниже предлагается один из таких способов.

4. Предполагается, что векторы смещения и напряжения являются полиномами относительно x^3, т.е.

$$\mathbf{U}(x^1,\ x^2,\ x^3)=\sum_{m=0}^{N}\overset{(m)}{\mathbf{u}}(x^1,x^2)\,P_m\left(\frac{x^3}{h}\right),$$

$$\boldsymbol{\sigma}^i(x^1,\ x^2,\ x^3)=\sum_{m=0}^{N}\overset{(m)}{\boldsymbol{\sigma}}(x^1,x^2)\,P_m\left(\frac{x^3}{h}\right), \tag{7}$$

где N – некоторое фиксированное неотрицательное целое число. Это означает, что в предыдущих уравнениях всюду

$$\overset{(m)}{\mathbf{u}}=\overset{(m)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^i=0,\quad \text{если}\quad m>N.$$

Кроме того, в системе уравнений (5) удерживаются только первые 3N + 3 уравнений, так что получается система уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа, которая относительно произвольной криволинейной системы координат принимает вид

$$\mu\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha}\overset{(m)}{u}{}^{\beta}+(\lambda+\mu)\nabla^{\beta}\nabla_{\alpha}\overset{(m)}{u}{}_{\alpha}+\overset{(m)}{L}{}_{\beta}\left(\overset{(o)}{u}{}_i,\ldots,\overset{(N)}{u}{}_i\right)=0,$$

$$\mu\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha}\overset{(m)}{u}{}^3+\overset{(m)}{L}{}^3\left(\overset{(o)}{u}{}_i,\ldots,\overset{(N)}{u}{}_i\right)=0,\quad (m=0,1,\ldots,N). \tag{8}$$

Решения системы уравнений (8) и построенные с их помощью векторы смещения и напряжения (см. формулу (7)) называются основной системой уравнений для приближения порядка N.

Краевые условия, которые следует присоединить к системе уравнений (8), И. Н. Векуа получает из трехмерных граничных условий, которые заданы на боковых поверхностях оболочки. Например, если на боковых поверхностях оболочки заданы значения вектора смещения $\mathbf{U}$ или вектора напряжения $\boldsymbol{\sigma}_{(l)}$, где $\boldsymbol{l}$ – единичная нормаль к боковой поверхности, то можно вычислить также граничные значения всех моментов $\overset{(m)}{\mathbf{u}}$ и $\overset{(m)}{\boldsymbol{\sigma}}_{(l)}$, т.е.

$$\overset{(m)}{\mathbf{U}}\Big|_L=\overset{(m)}{u}{}_{(l)}\boldsymbol{l}+\overset{(m)}{u}{}_{(s)}\mathbf{S}+\overset{(m)}{\mathbf{u}}{}_{(3)}\mathbf{n}=\overset{(m)}{\mathbf{f}},\qquad \text{(задача I)}$$

$$\overset{(m)}{\sigma}_{(l)}\Big|_L=\left[\overset{(m)}{\sigma}_{(ll)}\boldsymbol{l}+\overset{(m)}{\sigma}_{(ls)}\mathbf{S}+\overset{(m)}{\sigma}_{(ln)}\mathbf{n}\right]_L=\overset{(m)}{\mathbf{g}}\,,\ \text{(задача II)}$$

где L – граница срединной поверхности S, а $\boldsymbol{l}$ – тангенциальная нормаль к L, причем $\boldsymbol{l}\times\mathbf{s}=\mathbf{n}$.

Кроме предыдущих двух основных краевых задач, И. Н. Векуа рассмотрел также ряд других задач смешанного типа, для которых доказал теоремы существования и единственности.

Иногда удобнее записывать уравнения в комплексной форме, используя для этой цели изометрические координаты на срединной поверхности, относительно которой первая основная квадратичная форма имеет вид

$$ds^2=\Lambda dz d\bar{z},\qquad \Lambda(x^1,\,x^2)>0,\ \ z=x^1+ix^2.$$

На срединной поверхности с изометрическими координатами И. Н. Векуа вводит комплексные ковариантные производные вида

$$2\nabla_z=\nabla_1-{}_i\nabla_2,\ 2\nabla_{\bar{z}}=\nabla_1+{}_i\nabla_2$$

и доказывает справедливость следующих важных формул:

$$\nabla_z u_+=\frac{\partial u_+}{\partial z},\qquad \nabla_z u^+=\frac{1}{\Lambda}\,\frac{\partial u_+}{\partial z},\qquad \nabla_{\bar{z}}u_+=\Lambda\frac{\partial u^+}{\partial\bar{z}},\qquad \nabla_{\bar{z}}u^+=\frac{\partial u^+}{\partial\bar{z}},$$

$$\nabla_z(t^{11}-t^{22}+2it^{12})=\frac{1}{\Lambda^2}\,\frac{\partial}{\partial z}\,(t_{11}-t_{22}+2it_{12}),\ \ \nabla_{\bar{z}}(t^{11}+t^{22})=\frac{1}{\Lambda}\,\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\,(t_1^1+t_2^2),$$

где $u_+=u_1+iu_2$, $u^+=u^1+i\,u^2$ – комплексные ковариантные и контравариантные компоненты вектора $\mathbf{u}$, $t_{\alpha\beta}$ и $t^{\alpha\beta}$ – ковариантные и контравариантные компоненты тензора напряжения на поверхности S, а дифференциальные операторы $\dfrac{\partial}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}$ выражаются с помощью частных производных следующим образом:

$$2\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x^1}-i\frac{\partial}{\partial x^2}\,,$$

$$2\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{\partial}{\partial x^1}+i\frac{\partial}{\partial x^2}\,.$$

Теперь система уравнений (5) в комплексной записи принимает вид

$$\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial}{\partial z}\left(\overset{(m)}{\sigma}_{11}-\overset{(m)}{\sigma}_{22}+2i\overset{(m)}{\sigma}_{12}\right)+\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\overset{(m)}{\sigma}{}^1_1+\overset{(m)}{\sigma}{}^2_2\right)-H\overset{(m)}{\sigma}_+-Q\overset{(m)}{\bar{\sigma}}_+-$$

$$-\frac{2m+1}{h}\left(\overset{(m-1)}{\sigma_+}+\overset{(m-3)}{\sigma_+}+\ldots\right)+\overset{(m)}{F}_+=0,$$

$$\frac{1}{\Lambda}\left(\frac{\partial \overset{(m)}{\sigma}_{+}}{\partial z}+\frac{\partial \overset{(m)}{\sigma}_{+}}{\partial \bar{z}}\right)+H\left(\overset{(m)}{\sigma}{}_{1}^{1}+\overset{(m)}{\sigma}{}_{2}^{2}\right)+\operatorname{Re}\left[\overline{Q}\left(\overset{(m)}{\sigma}{}_{1}^{1}-\overset{(m)}{\sigma}{}_{2}^{2}+2i\,\overset{(m)}{\sigma}{}_{1}^{2}\right)\right]- \tag{9}$$

$$-\frac{2m+1}{h}\left(\overset{(m-1)}{\sigma}{}_{3}^{3}+\overset{(m-3)}{\sigma}{}_{3}^{3}+\ldots\right)+\overset{(m)}{F}_{3}=0.$$

$$(m=0,\,1,\,\ldots,\,N)\,,$$

где

$$\overset{(m)}{\sigma}_{+}=\overset{(m)}{\sigma}_{13}+i\,\overset{(m)}{\sigma}_{23}=\overset{(m)}{\sigma}_{31}+i\,\overset{(m)}{\sigma}_{32},\quad \overset{(m)}{F}_{+}+\overset{(m)}{F}_{1}+i\,\overset{(m)}{F}_{2}\,.$$

$$H=\frac{1}{2}b_{\alpha}^{\alpha},\quad Q=\frac{1}{2}\left(b_{1}^{1}-b_{2}^{2}+2ib_{2}^{1}\right).$$

5. Соотношения между компонентами тензора напряжения и вектора смещения в комплексной форме записываются следующим образом:

$$\overset{(m)}{\sigma}_{11}+\overset{(m)}{\sigma}_{22}+2i\,\overset{(m)}{\sigma}_{12}=4\mu\Lambda\left(\frac{\partial \overset{(m)}{u}{}^{+}}{\partial \bar{z}}-Q\,\overset{(m)}{u}_{3}\right),$$

$$\overset{(m)}{\sigma}{}_{1}^{1}+\overset{(m)}{\sigma}{}_{2}^{2}=2(\lambda+\mu)\left(\overset{(m)}{\Theta}+2H\,\overset{(m)}{u}_{3}\right)+\frac{2\lambda}{h}\,\overset{(m)}{u'}_{3}\,,$$

$$\overset{(m)}{\sigma}_{+}=\mu\left(2\frac{\partial \overset{(m)}{u}_{3}}{\partial \bar{z}}+H\,\overset{(m)}{U}_{+}+Q\,\overset{(m)}{\overline{U}}_{+}+\frac{1}{h}\,\overset{(m)}{U'}_{+}\right) \tag{10}$$

$$\overset{(m)}{\sigma}{}_{3}^{3}=\lambda\left(\overset{(m)}{\Theta}+2H\,\overset{(m)}{u}_{+}\right)+\frac{\lambda+2\mu}{h}\overset{(m)}{U}_{3}\,,$$

$$\left(\overset{(m)}{\Theta}+\frac{1}{\Lambda}\left(\frac{\partial \overset{(m)}{U}_{+}}{\partial z}+\frac{\partial \overset{(m)}{U}_{+}}{\partial \bar{z}}\right),\ m=0,1,\ldots,N\right).$$

Таким же образом записываются граничные условия на боковых поверхностях. Например, граничные условия в напряжениях в комплексной записи принимают вид

$$\overset{(m)}{\sigma}_{(ll)}+i\,\overset{(m)}{\sigma}_{(ls)}=\frac{1}{2}\left[\overset{(m)}{\sigma}{}_{\alpha}^{\alpha}-\left(\overset{(m)}{\sigma}_{11}-\overset{(m)}{\sigma}_{22}+2i\,\overset{(m)}{\sigma}_{12}\right)\left(\frac{d\bar{z}}{ds}\right)^{2}\right],$$

$$\overset{(m)}{\sigma}_{(ln)} = -\mathrm{Im}\left(\overset{(m)}{\sigma}_{+}\left(\frac{d\bar{z}}{ds}\right)\right).$$

Если подставить (10) в (9), то система уравнений равновесия в компонентах вектора смещения принимает следующий комплексный вид:

$$\mu\Delta \overset{(m)}{u}_{+} + 2(\lambda+\mu)\frac{\partial \overset{(m)}{\Theta}}{\partial \bar{z}} + \overset{(m)}{L}_{+}\left(\overset{(0)}{u}_{i}, \ldots, \overset{(N)}{u}_{i}\right) + \overset{(m)}{F}_{+} = 0$$

$$\mu\Delta \overset{(m)}{u}_{3} + \overset{(m)}{L}_{3}\left(\overset{(0)}{u}_{i}, \ldots, \overset{(N)}{u}_{i}\right) + \overset{(m)}{F}_{3} = 0, \tag{11}$$

$$\left(\overset{(m)}{\Theta} = \left(\frac{\partial \overset{(m)}{u}_{+}}{\partial z} + \frac{\partial \overset{(m)}{\bar{u}}_{+}}{\partial \bar{z}}\right),\ m=0,1,\ldots,N\right)$$

где Δ – оператор Лапласа, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \dfrac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} = 4\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$, а $\overset{(m)}{L}_{+}$, $\overset{(m)}{L}_{3}$ – линейные дифференциальные операторы. содержащие искомые вектор-функции $\overset{(m)}{\mathbf{u}}$ и их производные первого порядка относительно z.

Здесь важно отметить, что для всякого фиксированного m первое уравнение системы (11) содержит дифференциальный оператор плоской теории упругости относительно $\overset{(m)}{u}_{+}$, а во втором уравнении главная часть совпадает с оператором лапласа относительно $\overset{(m)}{u}_{3}$. Это обстоятельство играет важную роль при практической реализации расчета оболочек на основе полученных уравнений, позволяя редуцировать задачу к решению последовательности плоских задач и уравнения Пуассона. Это можно осуществить, например, применяя метод малого параметра и способ итерации.

6. И. Н. Векуа рассмотрел приближения различных порядков. Особое внимание он уделяет рассмотрению приближений порядков N = 0 и N = 1, так как они по своей структуре близки к безмоментной и моментной теориям оболочек, соответственно.

Для приближения порядка N = 1 векторы смещения и напряжения имеют вид

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{3}{2}x_3\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\sigma}^i = \frac{1}{2h}\mathbf{T}^i + \frac{3x_3}{2h^3}\mathbf{S}^i,\ (x_3 = x^3)$$

где

$$\mathbf{u}=2\overset{(0)}{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{v}=\frac{2}{3h}\overset{(1)}{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{T}^i=2h\overset{(0)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^i, \quad \mathbf{S}^i=\frac{2h^2}{3}\overset{(1)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^i.$$

Тогда сила напряжений $\boldsymbol{\sigma}_{(l)}$, действующая на площадку с единичной нормалью $\boldsymbol{l}$, выражается по формуле

$$\boldsymbol{\sigma}_{(l)}=\frac{1}{2h}\mathbf{T}_{(l)}+\frac{3x_3}{2h^3}\mathbf{S}_{(l)}, \tag{12}$$

где

$$\mathbf{T}_{(l)}=T_{(ll)}\mathbf{l}+T_{(ls)}\mathbf{s}+T_{(ln)}\mathbf{n},$$
$$\mathbf{S}_{(l)}=S_{(ll)}\mathbf{l}+S_{(ls)}\mathbf{s}+S_{(ln)}\mathbf{n},$$
$$\mathbf{M}_{(l)}=\mathbf{n}\times\mathbf{S}_{(l)}=M_{(ll)}\mathbf{l}+M_{(ls)}\mathbf{s},$$

векторы $\mathbf{T}_{(l)}$ и $\mathbf{M}_{(l)}$ – усилие и момент, приложенные к площадке с нормалью $\boldsymbol{l}$, $T_{(ll)}$ – нормальное усилие, $T_{(ls)}$ – касательное усилие, $T_{(ln)}$ –перерезывающая сила, $M_{(ll)}$, $M_{(ls)}$ – крутящий и изгибающий моменты, соответственно.

Для выяснения физического смысла величины $S_{(ln)}$ надо обратиться к формуле (12). Из этой формулы вытекает, что на площадке с нормалью $\boldsymbol{l}$ распределена касательная нагрузка интенсивности

$$\frac{1}{2h}T_{(ln)}+\frac{3x_3}{2h^3}S_{(ln)},$$

второе слагаемое которой представляет кососимметрическую нагрузку относительно срединной поверхности S. Поэтому на верхнюю ($x_3 > 0$) и нижнюю ($x_3 < 0$) половинки площадки будут действовать силы

$$\frac{1}{2}T_{(ln)}+\frac{3}{4h}S_{(ln)}, \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}T_{(ln)}-\frac{3}{4h}S_{(ln)},$$

соответственно. Для достаточно тонких оболочек можно допустить, что результат действия этих сил совпадают с результатом действия перерезывающей силы $T_{(ln)}$ и пары по величине равных и противоположных сил

$$\frac{3}{4h}S_{(ln)}, \quad \text{и} \quad -\frac{3}{4h}S_{(ln)},$$

приложенных к разным половинкам площадки с нормалью $\boldsymbol{l}$. При $S_{(ln)} > 0$ эта пара сил вызывает поперечное растяжение и, следовательно, стремится расщепить оболочку вдоль срединной поверхности. Поэтому И.Н. Векуа эту пару сил называет расщепляющей парой сил. Этот термин он сохраняет и в случае, когда $S_{(ln)} < 0$, хотя в последнем случае, наоборот, указанная пара сил вызывает поперечное сжатие. Классическая теория оболочек не учитывает эффекта действия расщепляющей пары сил. Рассмотрение этой силы позволило И.Н. Векуа преодолеть внутренние противоречия, присущие классической моментной теории оболочек. Для краткости, величину

$$\hat{S}_{(ln)} = \frac{3}{4h} S_{(ln)}$$

И.Н. Векуа называет расщепляющей силой.

Поле смещений пластинки постоянной толщины, а также сферической оболочки И.Н. Векуа выражает при помощи шести произвольных аналитических функций от z, которые позволяют обеспечить выполнение шести граничных условий. Например, в качестве пяти граничных условий можно взять пять краевых условий классической моментной теории, а в качестве шестого условия задать граничные значения расщепляющей силы $\hat{S}_{(ln)}$. Рассмотрение последнего условия вносит в теорию оболочек внутреннюю согласованность и избавляет от необходимости привлечения дополнительных гипотез.

7. Конечную систему уравнений (8) И.Н. Векуа получает также на основании вариационного принципа о минимуме функционала энергии.

Фунционал энергии упругой деформации имеет вид

$$I(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}^i \partial_i \mathbf{u} d\Omega - \iiint\limits_{\Omega_s} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{u} d\Omega ,$$

где Ω_s – область, занятая оболочкой со срединной поверхностью S.

Если вектор смещения представлен приближенными выражениями вида

$$\mathbf{u}_N = \sum_{m=0}^{N} \overset{(m)}{\mathbf{u}}(x^1, x^2) P_m\left(\frac{x_3}{h}\right), \tag{13}$$

то соответствующие приближенные выражения для функционала энергии представляются следующим образом:

$$I(\mathbf{u}_N) = \sum_{m=0}^{N} \frac{2h}{2m+1} \left\{ \frac{1}{2} \iint\limits_S \overset{(m)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^i D_i \overset{(m)}{\mathbf{u}} ds - \iint\limits_S \overset{(m)}{\boldsymbol{\Phi}} \overset{(m)}{\mathbf{u}} ds \right\},$$

где

$$D_i \overset{(m)}{\mathbf{u}} = \begin{cases} \partial_\alpha \overset{(m)}{\mathbf{u}}, & \text{если} \quad i = \alpha, \\ \dfrac{2m+1}{h}\left(\overset{(m+1)}{\mathbf{u}} + \overset{(m+3)}{\mathbf{u}} + \ldots \right), & \text{если} = 3. \end{cases}$$

Если положить $\boldsymbol{\sigma}^i = C^{ij} \partial_j \mathbf{u}$, то получается

$$I(\mathbf{u}_N)=\sum_{m=0}^{N}\frac{2h}{2m+1}\left\{\frac{1}{2}\iint_S C^{ij}D_i\overset{(m)}{\mathbf{u}}D_j\overset{(m)}{\mathbf{u}}\,ds-\iint_S\overset{(m)}{\mathbf{\Phi}}\overset{(m)}{\mathbf{u}}\,ds\right\},$$

Рассматривая теперь задачу о минимуме функционала $I(\mathbf{u}_N)$ для совокупности N + 1 векторов $\overset{(0)}{\mathbf{u}}, \overset{(1)}{\mathbf{u}}, \ldots, \overset{(N)}{\mathbf{u}}$ на поверхности S, И.Н. Векуа получает конечную систему уравнений (8).

Таким образом, конечная система (8) составляет систему уравнений Эйлера-Лагранжа вариационной задачи о минимуме функционала энергии упругой деформации для полей смещений вида (13).

Здесь необходимо сделать следующее замечание. После решения некоторой краевой задачи для приближения порядка N соответствующие поля смещений и напряжений будут выражаться в виде

$$\mathbf{u}_N=\sum_{m=0}^{N}\overset{(m)}{\mathbf{u}}(x^1,x^2)P_m\left(\frac{x_3}{h}\right),\qquad \boldsymbol{\sigma}_N^i=\sum_{m=0}^{N}\overset{(m)}{\mathbf{u}}{}^i(x^1,x^2)Pm\left(\frac{x_3}{h}\right),\tag{14}$$

которые вообще говоря, не согласованы с краевыми заданиями на лицевых поверхностях $x_3 = \pm h$.

И.Н. Векуа предложил несколько способов удовлетворения краевых условий на лицевых поверхностях. Один из этих способов, названный им способом нормированных моментов поля напряжений, заключается в следующем: фиксируется некоторое натуральное число N и из бесконечной системы (3 б) рассматривается только совокупность первых N + 1 уравнений:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\partial_\alpha\left(\sqrt{a}\,\overset{(m)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^\alpha\right)-\frac{2m+1}{h}\left(\overset{(m-1)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^3+\overset{(m-3)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^3+\ldots\right)+\overset{(m)}{F}=0,\tag{15 a}$$

$$(m=0,1,\ldots,N).$$

Контравариантные составляющие вектора напряжения представляются в виде

$$\overset{(m)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^i=C^{ij}\overset{(N)}{D}_j\overset{(m)}{\mathbf{u}}+\frac{2m+1}{h}C^{i3}\left(\overset{(+)}{\mathbf{V}}-(-1)^m\overset{(-)}{\mathbf{V}}\right),\tag{15 б}$$

где

$$\overset{(N)}{D}_j\overset{(m)}{\mathbf{u}}=\begin{cases}\partial_\alpha\overset{(m)}{\mathbf{u}}, & \text{если } i=\alpha,\\ \dfrac{2m+1}{h}\displaystyle\sum_{p=m}^{N}(1-(-1)^{m+p})\overset{(p)}{\mathbf{u}}, & \text{если } i=3,\end{cases}\tag{15 c}$$

$$\overset{(+)}{\mathbf{V}}=\sum_{p=m+1}^{\infty}\overset{(p)}{\mathbf{u}},\qquad \overset{(-)}{\mathbf{V}}=\sum_{p=m+1}^{\infty}(-1)^p\overset{(p)}{\mathbf{u}}.$$

В выражения (15б) входят N + 3 векторов $\overset{(0)}{\mathbf{u}},\dots,\overset{(N)}{\mathbf{u}},\overset{(+)}{\mathbf{V}},\overset{(-)}{\mathbf{V}}$. Оказывается, что последние два из векторов $\overset{(+)}{\mathbf{V}}$ и $\overset{(-)}{\mathbf{V}}$ можно выразить через N + 1 векторов $\overset{(0)}{\mathbf{u}},\dots,\overset{(N)}{\mathbf{u}}$, обеспечивая при этом выполнение краевых условий на лицевых поверхностях. Действительно, представляя контравариантные составляющие поля напряжений приближенной формулой

$$\boldsymbol{\sigma}^i(x^1,x^2,x^3)=\sum_{m=0}^{N}\overset{(m)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^i(x^1,x^2)P_m, \tag{16}$$

краевые условия на лицевых поверхностях $x^3=\pm h$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{\sigma}^3(x^1,x^2,h)=\sum_{m=0}^{N}\overset{(m)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^3=-\overset{(+)}{\mathbf{P}},\quad \boldsymbol{\sigma}^3(x^1,x^2,-h)\sum_{m=0}^{N}(-1)^m\overset{(m)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^3=-\overset{(-)}{\mathbf{P}},$$

где $\overset{(+)}{\mathbf{P}}$ и $\overset{(-)}{\mathbf{P}}$ – заданные напряжения на лицевых поверхностях.

Подставляя в эти равенства выражения (15 б), можно убедиться, что векторы $\overset{(+)}{\mathbf{V}}$ и $\overset{(-)}{\mathbf{V}}$ выражаются при помощи векторов $\overset{(0)}{\mathbf{u}},\dots,\overset{(N)}{\mathbf{u}}$ и их частных производных первого порядка следующим образом:

$$\begin{aligned}\overset{(+)}{\mathbf{V}}&=-\frac{2h}{N(N+2)}C_0^{-1}\left(\overset{(+)}{\mathbf{A}}_N+\frac{(-1)N}{N+1}\overset{(-)}{\mathbf{A}}_N\right),\\ \overset{(-)}{\mathbf{V}}&=-\frac{2h}{N(N+2)}C_0^{-1}\left(\frac{(-1)^N}{N+1}\overset{(+)}{\mathbf{A}}_N+\overset{(-)}{\mathbf{A}}_N\right),\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\overset{(+)}{\mathbf{A}}_N=\overset{(+)}{\mathbf{P}}+\sum_{m=0}^{N}C^{3j}\overset{(N)}{D}_j\overset{(m)}{\mathbf{u}},\quad \overset{(-)}{\mathbf{A}}_N=\overset{(-)}{\mathbf{P}}-\sum_{m=0}^{N}(-1)^m C^{3j}\overset{(N)}{D}_j\overset{(m)}{\mathbf{u}},$$

$$C_0^{-1}\mathbf{V}=\frac{1}{\mu}\left(\mathbf{V}-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}V_3\mathbf{n}\right).$$

Если внести (17) в равенство (15 б), то получается соотношение, связывающее между собой вектор-функции $\overset{(m)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^i$ и $\overset{(0)}{\mathbf{u}},\dots,\overset{(N)}{\mathbf{u}}$. Далее, подставляя выражение $\overset{(m)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^i$ в формулу (16), получим приближенное выражение поля напряжений, согласованное с краевыми условиями на лицевых поверхностях оболочки. Выражения вида (16), согласованные с краевыми условиями на лицевых поверхностях, И.Н. Векуа называет нормированными моментами поля напряжений. Теперь, если внести полученные выражения нормированных моментов $\overset{(m)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^i$ в уравнения (15а), то получим систему уравнений порядка 6N + 6 для определения 3N + 3 функций $\left(\overset{(0)}{u}_1, \overset{(0)}{u}_2, \overset{(0)}{u}_3\right), \ldots, \left(\overset{(N)}{u}_1, \overset{(N)}{u}_2, \overset{(N)}{u}_3\right)$, которые представляют ковариантные компоненты искомых моментов $\overset{(0)}{\mathbf{u}}, \ldots, \overset{(N)}{\mathbf{u}}$ вектора смещения $\mathbf{U}$. Исключение составляют случаи N = 0, 1, 2, когда эти системы расщепляются на взаимно независимые системы более низкого порядка. В частности, при N = 0, 1 получаются системы уравнений безмоментного состояния оболочки, а также бесконечно малых изгибаний поверхностей. В общем же случае (N > 2) получается система уравнений порядка 6N + 6, имеющая довольно сложную структуру, что, естественно, затрудняет ее практическое применение.

8. Для выполнения краевых условий на лицевых поверхностях И.Н. Векуа предложил другой способ. В частности, он ставит вопрос, нельзя ли к приближенному выражению (14) вектора смещения $\mathbf{U}_N(x^1, x^2, x^3)$ добавить слагаемое $\mathbf{U}_*(x^1, x^2, x^3)$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) поле напряжений, соответствующее полю смещений $\mathbf{U}_N + \mathbf{U}_*$, согласовано с краевыми условиями на лицевых поверхностях $x_3 = \pm h$; 2) моменты $\overset{(m)}{\mathbf{u}}_*$ векторного поля $\mathbf{U}_*$ обращаются в нуль, если $k \le N$; 3) по абсолютному значению векторное поле $\mathbf{U}_*$ и соответствующие поля напряжений $\boldsymbol{\sigma}^i(u_*)$ можно сделать сколь угодно малыми величинами внутри оболочки. И.Н. Векуа показал, что векторное поле $\mathbf{U}_*$, удовлетворяющее перечисленным условиям, существует и в ряде важных случаев его можно найти в явном виде.

Итак, если построенные приближения $\mathbf{U}_N(x^1, x^2, x^3)$ и $\boldsymbol{\sigma}^i(\mathbf{U}_N)$ не согласуются с краевыми условиями на поверхностях, то при помощи добавления к $\mathbf{U}_N$ и $\boldsymbol{\sigma}^i(u_N)$ слагаемых $\mathbf{U}_*$ и $\boldsymbol{\sigma}^i(u_*)$, т.е. полагая

$$\mathbf{U}(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{U}_n(x^1, x^2, x^3) + \mathbf{U}_*(x^1, x^2, x^3),$$

$$\boldsymbol{\sigma}^i(x^1, x^2, x^3) = \boldsymbol{\sigma}^i{}_N\,(x^1, x^2, x^3) + \boldsymbol{\sigma}^i\,(u_*),$$

можно обеспечить выполнение краевых условий на лицевых поверхностях, а также справедливость систем уравнений равновесия оболочки.

И.Н. Векуа на базе приближений порядка N = 2 построил моментную теорию оболочки, обеспечивающую выполнение не только пяти естественных физических условий на боковых поверхностях, но и удовлетворяющую условиям на лицевых поверхностях оболочки. Предлагаемый метод несколько отличается от способа нормированных моментов поля напряжений. Различие состоит в том, что при обеспечении краевых условий на лицевых поверхностях берется приближение различного порядка для касательных и поперечных составляющих поля напряжений. А именно, касательные компоненты тензора напряжений приближаются линейными выражениями относительно толщинной координаты x_3, а поперечные напряжения приближаются квадратичными функциями от x_3. Рассматриваемый вариант моментной теории оболочек обеспечивает выполнение условий на лицевых поверхностях и пяти естественных граничных заданий вместо четырех краевых условий Кирхгофа-Лява. Вместе с тем, эта теория находится в согласии с рядом результатов классической теории. Например, в случае пластинки постоянной толщины прогиб w удовлетворяет следующему уравнению:

$$\Delta\Delta w = \frac{1}{D}\left(p - \frac{(4-\sigma)h^2}{\sigma(1-\sigma)}\Delta p - \frac{h^4}{18}\Delta\Delta p\right),$$

$$\left(\overset{(+)}{\mathbf{P}} = -p\mathbf{n}, \quad \overset{(-)}{\mathbf{P}} = 0\right).$$

При p = const получается классическое уравнение С. Жермен-Лагранжа

$$\Delta\Delta w = \frac{p}{D}.$$

И.Н. Векуа предложил еще один способ вывода уравнений оболочек, основанный на последовательном дифференцировании уравнения равновесия упругих оболочек. Была получена система уравнений 10-го порядка, согласованная с пятью независимо задаваемыми физическими или кинематическими условиями. Что же касается краевых условий на лицевых поверхностях, то они выполняются приближенно; предполагается, что $\sigma^3(x^1, x^2, \varepsilon h)$ и $\sigma^3(x^1, x^2, -\varepsilon h)$ равны $\overset{(+)}{\mathbf{P}}$ и $\overset{(-)}{\mathbf{P}}$, соответственно. Наличие параметра ε в уравнениях позволяет привести некоторые результаты в согласие с классическими. Например, в случае изгиба пластинки постоянной толщины прогиб удовлетворяет неоднородному бигармоническому уравнению

$$\Delta\Delta w = \frac{2}{3\varepsilon^3}\frac{p}{D},$$

которое будет совпадать с классическим уравнением С. Жермен-Лагранжа, если ε задать в виде

$$\varepsilon^3 = \frac{2}{3}.$$

§ 3. Статически определимые задачи и нейтральные поверхности упругих оболочек

И.Н. Векуа распространил методы безмоментной теории оболочек на более общие задачи. Здесь в первую очередь нужно выделить класс статически определимых задач теории оболочек. Статически определимость задачи достигается путем тех или иных допущений о характере распределения напряжений в оболочке. Указаный прием широко применяется в теории упругости под названием полуобратного метода Сен-Венана. Для этой цели поле напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, выраженное симметрическим тензором второго ранга, И.Н. Векуа представляет как сумму двух полей напряжений – тангенциального и поперечного, которые соответственно обозначаются через $\mathbf{T}$ и $\mathbf{Q}$. Эти поля напряжений являются симметрическими тензорами второго ранга.

В своих построениях И.Н. Векуа заранее задает поперечное поле напряжений $\mathbf{Q}$, которое выражается исключительно через вектор $\boldsymbol{\sigma}^3$:

$$\boldsymbol{\sigma}^3(x^1,x^2,x^3)=\frac{1}{2}\left(-\overset{(+)}{P}+\overset{(-)}{P}\right)-\frac{x^3}{2h}\left(\overset{(+)}{P}+\overset{(-)}{P}\right),$$

$$\left(\boldsymbol{\sigma}^3(x^1,x^2,\pm h)=\mp\overset{(\pm)}{P}\right).$$

Таким образом, предполагается что внутрь оболочки вектор $\boldsymbol{\sigma}^3$ продолжается по линейному (относительно x^3) закону, который, вероятно, с достаточной точностью применим к тонким оболочкам.

Уравнения равновесия сплошной среды на каждой координатной поверхности $\hat{S}: x^3=\text{const}$ можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\alpha\left(\sqrt{g}\,\mathbf{T}^\alpha\right)+\mathbf{X}=0 \quad (\text{на} \quad \hat{S}:x^3=\text{const}), \tag{1}$$

где формулой

$$\mathbf{T}^\alpha=\sigma^{\alpha\beta}\,\mathbf{R}_\beta$$

выражается тангенциальное поле напряжений, которое является искомым, а выражение

$$\mathbf{X}=\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\alpha\left(\sqrt{g}\,\sigma^{\alpha 3}\,\mathbf{n}\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_3\left(\sqrt{g}\,\boldsymbol{\sigma}^3\right)+\boldsymbol{\Phi}$$

представляет заданное векторное поле в области Ω, занимаемой оболочкой.

Пусть $\mathbf{U}$ представляет вектор смещений при бесконечно малых изгибаниях координатной поверхности $\hat{S}: x^3=\text{const}$, т.е.

$$\frac{1}{2}\left(\hat{\nabla}_\alpha u_\beta+\hat{\nabla}_\beta u_\alpha\right)-\hat{b}_{\alpha\beta}u_3=0 \qquad (\text{на} \quad \hat{S}:x^3=\text{const}),$$

где

$$\hat{\nabla}_\alpha u_\beta=\partial_\alpha u_\beta-\hat{\Gamma}^\lambda_{\alpha\beta}u_\lambda, \qquad \hat{\nabla}_\alpha u_3=\partial_\alpha u_3,$$

причем

$$\hat{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\beta}=\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}+A^{\lambda}_{.\gamma}\nabla_{\alpha}A^{\gamma}_{\beta.}; \qquad A^{\gamma}_{\beta.}=a^{\gamma}_{\beta}-x_3 b^{\gamma}_{\beta}; \qquad \hat{b}_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta}-x_3 b^{\beta}_{\alpha}b_{\beta\gamma}.$$

$$A^{\lambda.}_{.\gamma}=\theta^{-1}\left[(1-2Hx_3)a^{\lambda}_{\gamma}+x_3 a^{\lambda}_{\gamma}\right], \qquad \theta=1-2Hx_3+Kx^{\,2}_{\,3}.$$

$$(x^3=x_3).$$

И.Н. Векуа рассмотрел следующие краевые задачи:

задача (I) :

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_{\alpha}\left(\sqrt{g}\,\mathbf{T}^{\alpha}\right)+\mathbf{X}=0 \qquad (\text{на} \quad \hat{S}: x^3=\text{const})$$

$$\sigma_{(ll)}\equiv\sigma_{\alpha\beta}l_{\alpha}l_{\beta}=f_1 \qquad (\text{на} \quad \partial\hat{S});$$

задача (II):

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_{\alpha}\left(\sqrt{g}\,\mathbf{T}^{\alpha}\right)+\mathbf{X}=0 \qquad (\text{на} \quad \hat{S}: x^3=\text{const})$$

$$\sigma_{(S)}\equiv\sigma^{\alpha\beta}l_{\alpha}S_{\beta}=f_2 \qquad (\text{на} \quad \partial\hat{S});$$

задача (I′₀):

$$\frac{1}{2}\left(\hat{\nabla}_{\alpha}u_{\beta}+\hat{\nabla}_{\beta}u_{\alpha}\right)-\hat{b}_{\alpha\beta}U_3=0 \qquad (\text{на} \quad \hat{S}: x^3=\text{const});$$

$$u_{(s)}=u_{\alpha}s^{\alpha}=0 \qquad (\text{на} \quad \partial\hat{S});$$

задача (II′₀):

$$\frac{1}{2}\left(\hat{\nabla}_{\alpha}u_{\beta}+\hat{\nabla}_{\beta}u_{\alpha}\right)-\hat{b}_{\alpha\beta}U_3=0 \qquad (\text{на} \quad \hat{S}: x^3=\text{const});$$

$$u_{(l)}=u_{\alpha}l^{\alpha}=0 \qquad (\text{на} \quad \partial\hat{S});$$

Здесь f_1 и f_1 – заданные функции точки боковой поверхности $\sum$ оболочки Ω.

Из формулы

$$\iint\limits_{\hat{S}}\mathbf{X}\mathbf{u}d\hat{s}+\int\limits_{\partial\hat{S}}\left(\sigma_{(11)}u_{(1)}+\sigma_{(1s)}u_{(s)}\right)dS=0 \tag{2}$$

вытекает, что для разрешимости задачи (I) (соответственно задачи (II)) необходимо выполнение условия

$$\iint\limits_{\hat{S}}\mathbf{X}\mathbf{u}d\hat{s}+\int\limits_{\partial\hat{S}}f_1u_{(l)}dS=0 \qquad \left(\iint\limits_{\hat{S}}\mathbf{X}\mathbf{u}d\hat{s}+\int\limits_{\partial\hat{S}}f_2u_{(s)}dS=0\right),$$

где **u** – любое решение однородной краевой задачи (I′₀) (соответственно (II′₀)).

Таким образом, задача (I'_0) (соответственно задача (II'_0)) представляет сопряженную однородную краевую задачу относительно краевой задачи (I) (соответственно (II)).

Применяя деривационные формулы Гаусса и Вейнгартена, уравнение (1) можно записать в виде

$$\hat{\nabla}_\alpha \sigma^{\alpha\beta} + X^\beta = 0, \qquad \hat{b}_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} + X_3 = 0, \qquad (\text{на} \quad \hat{s})$$

$$(\mathbf{X} = x^\beta \mathbf{R}_\beta + x_3 n),$$

которое для каждой координатной поверхности $\hat{S} : x_3 = \text{const}$ составляет систему безмоментной теории оболочек. Для выпуклых оболочек И.Н. Векуа приводит краевые задачи (I) и (II), а также (I'_0) и (II'_0), к краевым задачам для обобщенных аналитических функций. Их можно сформулировать, соответственно, следующим образом:

задача ($\hat{I}$):

$$\partial_{\bar{z}} U - \bar{\hat{B}}\bar{U} = \hat{F} \qquad (\text{в} \quad \hat{G}),$$

$$\operatorname{Re}\left[U\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right] = -\hat{K}^{-\frac{1}{4}} f_1 - \frac{1}{2}\hat{k}_s \hat{K}^{-\frac{3}{4}} X_3 \qquad (\text{на} \quad \partial\hat{G});$$

задача ($\hat{II}$):

$$\partial_{\bar{z}} U - \bar{\hat{B}}\bar{U} = \hat{F} \qquad (\text{в} \quad \hat{G}),$$

$$\operatorname{Re}\left[U\frac{dz}{ds}\frac{dz}{dl}\right] = -\hat{K}^{-\frac{1}{4}} f_2 + \frac{1}{2}\hat{\tau}_s \hat{K}^{-\frac{3}{4}} X_3 \qquad (\text{на} \quad \partial\hat{G});$$

задача ($\hat{I}_0$):

$$\partial_{\bar{z}} w + \hat{B}\bar{w} = 0 \qquad (\text{в} \quad \hat{G}),$$

$$\operatorname{Re}\left[w\frac{d\bar{z}}{ds}\right] = 0 \qquad (\text{на} \quad \partial\hat{G});$$

задача ($\hat{II}_0$):

$$\partial_{\bar{z}} w + \hat{B}\bar{w} = 0 \qquad (\text{в} \quad \hat{G}),$$

$$\operatorname{Re}\left[w\frac{d\bar{z}}{dl}\right] = 0 \qquad (\text{на} \quad \partial\hat{G}).$$

Здесь G – область комплексной переменной $z = x^1 + ix^2$, на которую топологически отображается поверхность $\hat{S} : x^3 = \text{const}$ при помощи соответствующих сопряженно-изометрических координат x^1 и x^2, $\partial\hat{G}$ – границы области $\hat{G}$.

Комплексные функции напряжения U и смещения w выражаются в виде

$$U = g\hat{K}^{\frac{1}{4}}(\sigma^{11} - i\sigma^{12}) + \frac{\sqrt{g}}{2}\hat{K}^{-\frac{1}{4}}X_3, \qquad w = \frac{u_1 + iu_2}{\sqrt{g\sqrt{\hat{K}}}},$$

причем $\hat{K} = \Theta^{-1}K$, где K – Гауссова кривизна поверхности $\hat{S}$ а $\hat{k}_s$ и $\hat{\tau}_s$ – нормальная кривизна и геодезическое кручение поверхности $\hat{S}$. Величины $\hat{F}$ и $\hat{B}$ выражаются следующим образом:

$$\hat{F} = \frac{1}{2}\sqrt{g\sqrt{\hat{K}}}\left\{-\sqrt{g}(X^1 - iX^2) + \sqrt{\hat{K}}\,\partial_2\left(\frac{X_3}{K}\right)\right\},$$

$$\hat{B} = \frac{2i}{\hat{K}\sqrt{g}}\mathbf{n}\mathbf{n}_z\mathbf{n}_{\overline{zz}}, \qquad \left(\mathbf{n}_z = \partial_z\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}_{\overline{zz}} = \frac{\partial^2\mathbf{n}}{\partial\overline{z}^2}\right).$$

Применяя общие теоремы из теории обобщенных аналитических функций для статически определимых задач, в случае выпуклой оболочки И.Н. Векуа получает результаты, аналогичные результатам, полученным им ранее для безмоментной теории оболочек.

И.Н. Векуа указал также на другие способы задания поперечного поля напряжений и показал, что для всех этих случаев статически определимые задачи равновесия выпуклой оболочки приводятся к краевым задачам вида

$$\partial_{\overline{z}}w + B\overline{w} = F \quad \text{в} \quad \hat{G},$$
$$\operatorname{Re}[\lambda(z)w(z)] = f \quad \text{на} \quad \partial\hat{G}.$$

где λ и f зависят не только от сопряженно-изометрической координаты $z = x^1 + ix^2$, но также и от соответствующей скалярной координаты x^3. Сложность задачи состоит в том, что, во-первых, сопряженно-изометрическая координата $z = x^1 + ix^2$ поверхности $\hat{S}$ тоже зависит от x^3, а, следовательно, для всякой поверхности необходимо определить зависимость z от x^3; во-вторых, необходимо решать бесконечное число краевых задач вышеприведенного вида (всякой фиксированной $x^3 \in [-h, h]$ соответствует краевая задача). И.Н. Векуа считает, что для практических задач достаточно найти приближенные решения лишь конечного числа таких задач:

$$\partial_{\overline{z}}w_k + B_k\overline{w}_k = F_k \quad \text{в} \quad \hat{G},$$
$$\operatorname{Re}[\lambda_k w_k] = f_k \quad \text{на} \quad \partial\hat{G}.$$

где w_k, F_k λ_k, f_k обозначают значения соответствующих функций на координатных поверхностях $\hat{S}_k : x_k^3 = \text{const}$ $(k=1,2\ldots,m)$. После того, как будут найдены решения $w_1, \ldots, w_m$ этих задач, можно, применяя некоторые интерполяционные формулы, найти приближенное выражение функции w для любого значения $x_3 \in [-h, h]$.

Следует еще отметить, что для тонких и пологих оболочек коэффициент B можно считать независимым от x^3. Кроме того, для сферических оболочек, а также для проективно эквивалентных им оболочек $B \equiv 0$ на S.

2. Представляя поле напряжений как сумму тангенциального и поперечного напряжений, И.Н. Векуа ставит целью определить не только напряжения, как это делалось выше, но и деформации оболочки. Для осуществления этой цели он пользуется законом Гука только для компонент тангенциального поля напряжений и для нормальной компоненты σ_{33}:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \lambda\theta g^{\alpha\beta} + 2\mu e^{\alpha\beta}, \qquad \sigma^{33} = \lambda\theta g + 2\mu e^{33}.$$

Соотношения $\sigma^{\alpha 3} = 2\mu e^{\alpha 3}$ не используются.

Для определения деформированного состояния оболочки имеется система уравнений

$$\frac{1}{2}\left(\hat{\nabla}_\alpha u_\beta + \hat{\nabla}_\beta u_\alpha\right) - \hat{b}_{\alpha\beta} = \hat{\sigma}_{\alpha\beta}, \tag{3}$$

где

$$\hat{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda'+\mu)}\sigma^{\gamma}_{\gamma} g_{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{(\lambda'+\mu)(\lambda+2\mu)}\sigma^{33} g_{\alpha\beta}.$$

$$\lambda' = \frac{2\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \mathbf{u} = u_i \mathbf{R}^i$$

Для замкнутой выпуклой оболочки надо найти непрерывное на каждой поверхности $\hat{S} : x^3 = \text{const}$ решение этой системы, а для выпуклых оболочек с отверстиями необходимо присоединить к этой системе кинематическое условие втулочных связей

$$u_{(l)} \equiv u^\alpha l_\alpha = 0 \quad \text{на } \partial\hat{S}.$$

Как известно, с введением комплексной функции смещения w, система уравнений (3) для выпуклых оболочек записывается в виде

$$\partial_{\bar{z}} w + \hat{B}\bar{w} = \hat{P},$$

где

$$w = \frac{u_1 + iu_2}{\sqrt{g\sqrt{\hat{K}}}}, \quad \hat{P} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12}}{2\sqrt{g\sqrt{\hat{K}}}}.$$

Итак, задача отыскания поля смещений приводится к обобщенному уравнению Коши-Римана с соответствующим краевым условием.

Для выпуклых замкнутых оболочек все координатные поверхности $\hat{S}$:x^3=const представляют собой овалоиды, которые топологически отображаются на плоскость E комплексной переменной $z = x^1 + ix^2$, где x^1, x^2 – сопряженно-изометрические координаты на овалоидах. И.Н. Векуа показал, что в этом случае поле смещений можно представить в виде

$$\mathbf{U}=\operatorname{Re}\left\{-2\hat{K}^{\frac{1}{4}}w\mathbf{n}_z+\frac{\mathbf{n}}{\hat{K}\sqrt{g}}\left[\partial_z(\sqrt{g}\hat{K}^{\frac{3}{2}}w)-\frac{\sqrt{\hat{K}}}{2}(\hat{\sigma}_{11}+\hat{\sigma}_{22})\right]\right\},$$

где w – произвольное решение уравнения

$$\partial_{\bar{z}}w+\hat{B}w=\hat{P} \quad \text{в} \quad E,$$

имеющее на бесконечности порядок $O(|z|^2)$.

Пусть оболочка имеет m + 1 отверстий, ограниченных линейчатыми поверхностями $\sum_0, \sum_1, ..., \sum_m$, образующие которых составляют семейство нормалей к поверхности S вдоль ∂S. Пусть эти поверхности подчинены абсолютно гладким и жестким втулочным связям, т.е.

$$\sigma_{(ls)}=0, \quad \sigma_{(ln)}=0, \quad u_{(l)}=0 \quad \text{на} \quad E.$$

Предполагается, что поле напряжений, которое считается заранее определенным, удовлетворяет первым двум физическим краевым условиям. Следовательно, остается определить поле смещений из уравнений (3), обеспечив выполнение краевого условия $u_{(l)}=0$ (на $\sum$). Эта задача приводится к неоднородной краевой задаче вида

$$\partial_z w+\hat{B}\bar{w}=\hat{P} \quad \text{в} \quad \hat{G},$$

$$\operatorname{Re}\left[w\frac{d\bar{z}}{ds}\right]=0 \quad \text{на} \quad \partial\hat{G}.$$

представляющей задачу Римана-Гильберта для обобщенных аналитических функций. Далее И.Н. Векуа доказывает, что равновесие упругой оболочки, имеющей m + 1 отверстий, ограниченных кривыми Ляпунова, и подчиненной абсолютно гладким втулочным связям, всегда имеет решение, который определяется однозначно; иными словами, поля напряжений и смещений существуют и определяются однозначно.

3. Методы, указанные выше, И.Н. Векуа использовал для исследования условий, обеспечивающих существование в упругих оболочках нейтральных поверхностей, т.е. поверхностей, которые при деформации оболочек испытывают лишь бесконечно малые изгибания. Он ограничивается упругими выпуклыми оболочками, подчиненными втулочным связям, а также замкнутыми выпуклыми оболочками. Построение относится к случаю, когда S – срединная поверхность и она же представляет нейтральную поверхность оболочки.

Напряженное состояние оболочки представляется в виде суммы тангенциального и поперечного полей напряжений, причем предполагается, что оболочки – упругие и подчиняются закону Гука. В отличие от предыдущего случая, здесь полностью используется закон Гука.

Итак, пусть

$$\sigma_j^i=T_j^i+Q_j^i,$$

где

$$T_{\beta}^{\alpha}=\lambda'\theta' g_{\beta}^{\alpha}+2\mu e_{\beta}^{\alpha},\quad T_{3}^{i}=T_{i}^{3}=0,\quad \theta'=e_{\alpha}^{\alpha},\qquad (4)$$

$$Q_{\beta}^{\alpha}=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{3}^{3}g_{\beta}^{\alpha},\quad Q_{3}^{i}=\sigma_{3}^{i},\quad Q_{i}^{3}=\sigma_{i}^{3},\quad \lambda'=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}.$$

Из этих равенств вытекает, что

$$\boldsymbol{\sigma}^{\alpha}=\mathbf{T}^{\alpha}+\mathbf{Q}^{\alpha},\qquad \boldsymbol{\sigma}^{3}=\mathbf{Q}^{3}$$

где

$$\mathbf{T}^{\alpha}=\sigma_{\beta}^{\alpha}\mathbf{R}^{\beta},\quad \mathbf{T}^{3}=0,\quad \mathbf{Q}^{i}=Q_{j}^{i}\mathbf{R}^{j}.$$

Следовательно, $\mathbf{T}^{\alpha}$ удовлетворяет условию $\mathbf{n}\mathbf{T}^{\alpha}=0$; поэтому поле напряжений $\mathbf{T}^{\alpha}$ будет тангенциальным полем напряжений.

Пусть $\mathbf{u}$ – вектор смещения $\mathbf{u}=u_{\alpha}\mathbf{R}^{\alpha}+u_{3}\mathbf{n}$. Тогда, принимая во внимание соотношения

$$e_{\beta}^{\alpha}=\frac{1}{2}\left(\hat{\nabla}^{\alpha}u_{\beta}+\hat{\nabla}^{\beta}u_{\alpha}\right)-\hat{b}_{\beta}^{\alpha}u_{3},$$

из равенств (4) получаем

$$T_{\beta}^{\alpha}=\lambda'(\hat{\nabla}_{\gamma}u^{\gamma}-2\hat{H}u_{3})g_{\beta}^{\alpha}+\mu(\hat{\nabla}^{\alpha}u_{\beta}+\hat{\nabla}_{\beta}u^{\alpha}-2\hat{b}_{\beta}^{\alpha}u_{3}),\qquad (5)$$

$$\frac{1}{2}(\hat{\nabla}_{\gamma}u_{\gamma}+2\hat{\nabla}_{\beta}u_{\alpha})-\hat{b}_{\alpha\beta}u_{3}=\frac{1}{2\mu}T_{\alpha\beta}-\frac{\lambda'}{4\mu(\lambda'+\mu)}T_{\gamma}^{\gamma}g_{\alpha\beta},\qquad (6)$$

$$u_{3}=\frac{1}{2\hat{H}}\hat{\nabla}_{\gamma}u^{\gamma}-\frac{1}{4(\lambda'+\mu)\hat{H}}T_{\gamma}^{\gamma},\qquad \hat{H}=\hat{b}_{\alpha}^{\alpha}=\hat{b}_{1}^{1}+\hat{b}_{2}^{2}\neq 0.$$

Пусть на некоторой поверхности $\hat{S}: x^{3}=\mathrm{const}$, принадлежащей оболочке Ω, тождественно обращается в нуль тангенциальное поле напряжений, т.е.

$$T_{\alpha\beta}=0\quad \text{на}\quad \hat{S}.$$

Тогда из соотношения (6) следует, что поле смещений удовлетворяет уравнениям

$$\frac{1}{2}(\hat{\nabla}_{\alpha}u_{\beta}+\hat{\nabla}_{\beta}u_{\alpha})-\hat{b}_{\alpha\beta}u_{3}=0\qquad \text{на}\qquad \hat{S},$$

$$(\alpha,\beta=1,2)$$

составляющим систему уравнений бесконечно малых изгибаний координатной поверхности $\hat{S}: x^{3}=\mathrm{const}$. Обратно, если выполняется уравнения (7) на каждой поверхности $\hat{S}$, то согласно формуле (5) на этой поверхности $T_{\alpha\beta}=0$.

Таким образом, координатная поверхность $\hat{S} : x^3 = \text{const}$, для которой это условие выполняется, представляет собой нейтральную поверхность оболочки.

И.Н. Векуа показал, что если срединная поверхность тонкой упругой оболочки является нейтральной, то напряжения $\overset{(+)}{\mathbf{P}}$ и $\overset{(-)}{\mathbf{P}}$, приложенные к лицевым поверхностям оболочки, должны удовлетворять некоторому уравнению. Это означает, что напряжения $\overset{(+)}{\mathbf{P}}$ и $\overset{(-)}{\mathbf{P}}$ одновременно нельзя задавать произвольно. Задачи такого типа часто встречаются на практике. Например, в летающих в воздухе или плавающих под водой аппаратах можно считать заданным напряжение $\overset{(-)}{\mathbf{P}}$, действующее на внутреннюю лицевую поверхность S^-, но напряжение $\overset{(+)}{\mathbf{P}}$, действующее на внешнюю лицевую поверхность S^+, вообще говоря, заранее не известно. Такая же ситуация имеется на плотинах: одна лицевая поверхность плотины свободна от напряжений (вернее, подвергается атмосферному давлению), а другая несет гидродинамическую нагрузку, вообще говоря, переменную, которую трудно определить точно в любой момент времени.

Один из основных результатов, полученных И.Н. Векуа для выпуклых оболочек с отверстиями, заключается в следующем:

Пусть выпуклая оболочка Ω постоянной толщины, имеющая $m + 1$ отверстий, подчинена втулочным связям и напряжения $\overset{(+)}{\mathbf{P}}$ и $\overset{(-)}{\mathbf{P}}$, действующие на лицевые поверхности, связаны некоторым соотношением; тогда срединная поверхность является нейтральной. При $m > 1$ она является жесткой, при $m = 0$ поверхность S допускает три линейно независимых поля смещений бесконечно малых изгибаний и, наконец, в случае $m = 1$ представляются две возможности: 1) S является жесткой; 2) S допускает одно поле смещений бесконечно малых изгибаний.

В тех случаях, когда S допускает нетривиальные бесконечно малые изгибания ($m = 0$, $m = 1$), можно посредством присоединения к кинематической втулочной связи $\mathbf{U}_{(1)} = 0$ на ∂S еще дополнительных условий точечного типа превратить S в жесткую поверхность.

Результаты последних двух параграфов излагаются в его посмертно вышедшей в свет монографии „Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек“ (1982), удостоенной Государственной премии СССР за 1984 г. и переведенной на английский язык в 1985 году.

Работы И. Н. Векуа по теории оболочек

1. О комплексном представлении общего решения уравнений плоской задачи стационарного колебания теории упругости.-ДАН СССР. 1937.16, N3.-С. 155-160.

2. Об изгибе пластинки со свободным краем.-Сообщ. АН Груз. ССР.1942.-3, N7.-С. 641-648.

3. Интегрирование уравнений сферической оболочки.-Прикл. матем. и мех.-1945.-9, вып. 2.-С. 143-150.

4. Некоторые основные вопросы теории тонкой сферической оболочки.-Прикл. матем. и мех.-1947.-П. вып. 5.-с.499-516.

5. Новые методы решения эллиптических уравнений.-М. Гостехиздат. 1948.-С. 296.

6. К теории тонких, пологих упругих оболочек.-Прикл. матем.и мех.-1948.-12, вып.I.-С. 69-74.

7. К теории упругих оболочек.-ДАН СССР.-1949.-68, N3.-С. 453-455.

8. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек.-Матем. сб.-1952.-31, вып.2.-С. 217-314.

9. О решении граничных задач теории оболочек.-Сообщ. АН Груз. ССР.-1954.-15, N I, с.3-6.

10. Об одном методе расчета призматических оболочек.-Тр.Тбилисск. матем. ин-та. -1955. 21.-С.191-259.

11. Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Tipus und Randwertaufgaben mit einer Anwendung in der Theorie der Schalen.-Deutsche Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956, S.107.

12. Теория обобщенных аналитических функций и некоторые ее применения в геометрии и механике.-Труды III Всесоюз. матем. съезда. Москва, июнь-июль, 1956.

13. Об условиях,обеспечивающих безмоментное напряженное состояние равновесия выпуклой оболочки.-Сообщ. АН Груз. ССР.-1958.-20, N 5, с. 525-532.

14. Об условиях реализации состояния безмоментного напряженного равновесия выпуклых оболочек. Матем. ин-т им. В. А. Стеклова АН (15-28) СССР.-М., 1958, с. 23.

15. Об условиях безмоментности выпуклых оболочек.-Сообщ. АН Груз. ССР.-1958. №6, с. 649-652.

16.Обобщенные аналитические функции. -М. Физматгиз, 1959.

17. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек. Пекин. Гаоден цзяоюй чубаньщэ, 1960, УШ, с. 204.

18. Об условиях безмоментности напряженного состояния равновесия выпуклой оболочки.-Тр. Всесоюзного совещания по дифф. ур-ям, Ереван, 1958.-Ереван АН Арм. ССР. 1960, с. 32-44.

19. Über die Bedingungen der Verwiklichung des momentenfreien Spannungsgleichgewichte von Schallen positiver Krümmung.-Proc/ Symp/ theory thin elastic shells, Delft, 1959. Amsterdam, Nort-Holl. Publ. Comp. 1960, S. 270-280.

20. Проективные свойства полей усилий и изгибаний. -В кн.: Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию акад. Н.И. Мусхелишвили. -М. Изд-во АН СССР. 1961, с. 83-91.

21. Об одном варианте теории тонких пологих оболочек. -Новосибирск. Изд-во Новосиб. гос. ун-та. 1964, с. 68.

22. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины. -Новосибирск. Изд-во Новосиб. гос. ун-та. 1964, с. 36.

23. New methods in mathematical shell theory. -Proc. XI Intern. Congr. Appl. Mech., Munich, 1964, s. 47-58.

24. Theory of thin shallow elastic shells with variable thickness. – В кн.: Приложение теории функций в механике сплошной среды. – Тр. Тбилисск. симпозиума. Т. I – М.: Наука, 1965, с. 410-531.

25. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины. -Труды Тбил. матем. ин-та им. А. Размадзе. 1965, с. 5-103.

26. On one version of consistent theory of elastic shells.-IUTAM Symposium, Kopenhagen, 1967, Berlin-Heidelberg-New York, 1969, p.59-84.

27. On construction of approximate solutions of equation of the shallow spherical shell.-Intern. J. Solids and Structures, 1968, 10, p. 991-1003.

28. Uber eine Verallgmeinerung der Biegetheorie der Schalen.-Intern. Kongr. Anwend. elektronischer Rechenanlagen in Bauwesen, Weimar, 1967, Bd. I, p. 260-280.

29. On conformal invariant differential forms in shell theory. In. Funct. theor. meth. diff.equat. Acad. press, New York, 1968, p. 303-311.

30. Об интегрировании системы уравнений упругого равновесия пластинки.-ДАН СССР. 1969. 186, N 3, с. 541-544.

31. Об интегрировании уравнений равновесия цилиндрической оболочки.-ДАН СССР. 1969. 186, N 4, с. 787-790.

32. Вариационые принципы построения теории оболочек. -Тбилиси. Изд-во Тбилисск.гос. ун-та, 1970.

33. Уравнения тонких упругих оболочек.-Аннотация докл. ИПМ ТГУ. т. 5. 1971, с. 69-75.

34. Об одном направлении построения теории оболочек. Механика в СССР за 50 лет, т.3. М. Наука, 1972, с. 267-290.

35. On two ways of constructing the theory of elastic shells.- Proc. XIII Intern. Congr. Theoret. and Appl. Mech. Moscow, 1972, Berlin-Heidelberg - New York, Springer-Verlag, 1973, p. 322-339.

36. О двух путях построения непротиворечивой теории упругих оболочек.- Матер. I Всесоюз. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Гегечкори. Тбилиси, „Мецниереба", 1975, с. 5-50.

37. Об одном классе статически определеных задач теории оболо-

чек.-Сообщ. АН Груз. ССР. 1976. т.83, N 2, с.273-276. N 3, с. 529-532.

38. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М. Наука, 1982, с. 286.

39. Shell Theory. General Methods of Construction. -Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourne,1985, p. 287.

40. Обобщенные аналитические функции. М. Наука, 1988. с. 509.

Поступила 20.04.2002
Институт прикладной математики им. И.Н. Векуа

თ. მეუნარგია

ი. ვეკუას მიერ გარსთა თეორიაში მიღებული ძირითადი შედეგების მოკლე მიმოხილვა

რეზიუმე

გადმოცემულია ი. ვეკუას მიერ გარსთა თეორიაში მიღებული ძირითადი შედეგების მოკლე მიმოხილვა.

T. Meunargia

Short review is the exposition of the fundamental results obtained by I. Vekua in the theory of shells

Summary

The aim of the present short review is the exposition of the fundamental results obtained by I. Vekua in the theory of shells.

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского государственного
университета им. Ив. Джавахишвили
Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University
354

УДК 517. 9

НЕКОТОРЫЕ ШТРИХИ К ТВОРЧЕСКОМУ ПОРТРЕТУ АНДРЕЯ ВАСИЛЬЕВИЧА БИЦАДЗЕ

Дж. К. Гвазава, О.М. Джохадзе, С.С. Харибегашвили

Трудно писать об ученом не только из-за большой ответственности перед историей науки, но и из-за сложности процесса научного творчества, без раскрытия которого невозможно показать настоящий его облик.

Подобное отношение Андрея Васильевича Бицадзе к данному вопросу в качестве эпиграфа приведено не случайно, ибо исчерпывающее описание многогранного творчества ученого представляется нам трудно преодолимой проблемой. Мы не имеем намерения касаться научно-организаторской или педагогической деятельности Андрея Васильевича, ни его научно-воспитательной работы с молодежью. Остановимся лишь на его научных результатах, хотя и здесь никак не претендуем на их представление в совершенном виде.

Представляется целесообразным разделение научного творчества Андрея Васильевича на несколько этапов с соблюдением для них определенного хронологического принципа.

Эллиптические уравнения и системы вместе с поставленными для них задачами занимают существенное место в творчестве Андрея Васильевича. Прежде бесспорным фактом считалось, что условие равномерной эллиптичности

$$k_0\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)^N \le \det\sum_{i,j=1}^{n}A^{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \le k_1\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)^N,\quad k_0,\ k_1=\mathrm{const}>0,$$

линейного уравнения или системы

$$L(u):=\sum_{i,j=1}^{n}A^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}B^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+C(x)u=F(x),\ u=(u_1,\dots,u_N),$$

обеспечивает фредгольмовость краевых задач в области D, в частности первой краевой задачи

$$u|_{\partial D} = f.$$

Незакономерность этого факта А.В.Бицадзе показал понятным для всех простым примером, что впоследствии в литературе было названо системой Бицадзе

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} = 0, \qquad 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Оказалось, что однородная задача Дирихле для системы Бицадзе в круговой области $D : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$ имеет бесконечное множество линейно независимых решений и все они представимы в явном виде формулой

$$w := u_1 + iu_2 = (R^2 - |z - z_0|^2)\, \psi(z), \quad z_0 = x_0 + iy_0$$

в терминах произвольной аналитической функции $\psi(z)$ комплексного аргумента $z = x + iy$.

В то время этот факт казался неожиданным и почти невероятным и стал предметом обсуждения многих математиков, пытающихся найти объяснение этому феномену. И. М. Гельфанд на своем известном семинаре попытался объяснить этот факт кратностью характеристических корней системы (1). В ответ на это А. В. Бицадзе построил другую систему

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \sqrt{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \sqrt{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

с простыми характеристическими корнями, для которой задача Дирихле также имеет бесконечное множество линейно независимых решений

$$w_k(z) = B_k\{[(\mu\zeta + \overline{\zeta})^2 - 4\mu R^2]^k - (\mu\zeta - \overline{\zeta})^{2k}\}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\zeta = z - z_0$, $(1+\sqrt{2})\,\mu = i$. а B_k – произвольные комплексные постоянные. На основании этих простых и изящных примеров в теории краевых задач для эллиптических систем возникли целые направления. Широко известная теория нефредгольмовых краевых задач-одно из этих направлений. Эти теории не теряют актуальности и в настоящее время и им посвящают свои исследования многие последователи и ученики А.В. Бицадзе.

После всего этого возник естественный вопрос выделения классов эллиптических систем с разрешимыми в каком-либо смысле краевыми задачами, в частности, разрешимыми в смысле Фредгольма, Нетера или Хаусдорфа. В этом направлении невозможно умолчать о слабо связанных в смысле Бицадзе системах, для которых задача Дирихле всегда фредгольмова.

Считалось, что разрешимость краевых задач определяется лишь главной частью систем. А. В. Бицадзе высказал иное мнение, а именно, что на разрешимость существенно могут повлиять и коэффициенты системы при младших производных. С целью обоснования этого соображения он ввел понятие сильно связанных систем, что охватывает ранее построенные системы (1) и (2) в виде частных примеров. Как выяснилось, разрешимые в том или ином смысле краевые задачи для эллиптических систем с операторами Бицадзе в главной части при добавлении младших членов могут оказаться неразрешимыми.

Упомянутые выше основополагающие эффекты А. В. Бицадзе раскрыл применением аппарата теории функций комплексного переменного. Этот аппарат хорошо приурочен к однородной системе, состоящей только из главной части

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (3)$$

с двумя независимыми переменными. А.В.Бицадзе построил общее регулярное решение системы (3) следующего вида:

$$u(x,y)=\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{l=1}^{k_j}\sum_{k=0}^{l-1}C_{lkj}\bar{z}_j^k\varphi_{jl}^{(k)}(z_j),$$

где $\phi_{jl}(z_j)$ – аналитические функции комплексного переменного $z_j = z + \lambda_j y$, а λ_j – корни соответствующего системе (3) характеристического полинома $Q(\lambda) = \det(A + 2B\lambda + C\lambda^2)$ с положительными мнимыми частями. Что же касается N – компонентных векторов C_{lkj}, они являются решениями вполне определенной системы линейных алгебраических уравнений.

Аппараты теорий аналитических функций и одномерных сингулярных интегральных уравнений позволяют исследовать многие краевые задачи в случае двух независимых переменных. При большем числе этих переменных возникают значительные затруднения из-за отсутствия полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. Применением многомерного аналога теоремы Сохоцкого-Племеля А. В. Бицадзе рассмотрел первую краевую задачу для известной системы Мосиля-Теодореску, свел ее к многомерной системе сингулярных интегральных уравнений со специальным матричным ядром и построил формулу ее обращения. Эта формула в литературе называется формулой обращения Бицадзе.

Среди задач, поставленных для эллиптических уравнений и систем, в частности, даже для гармонических функций задача с наклонной производной считается одной из основных, когда на границе n-мерной области D задано условие

$$\sum_{i=1}^{n}l_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}=f(x), \quad x\in\partial D.$$

Еще в работах Г. Жиро показано, что если направление вектора $l := (l_1, ..., l_n)$ ни в одной граничной точке не выходит в касательную задача будет разрешимой в смысле Фредгольма. В противном случае ситуация меняется настолько, что многие были склонны считать эту задачу нетипичной для эллиптических уравнений. Рассматривая именно эти нестандартные случаи, А. В. Бицадзе воочию показал, что она вовсе не выходит за рамки типичных задач и доказал теоремы о количестве и существовании решений. Как выяснилось, задача с наклонной производной может оказаться одновременно и недоопределенной и переопределенной. Чтобы сделать задачу корректной, исходя из структуры взаимосвязи векторного поля l с областью необходимо некоторое множество граничных точек освободить от условий, а на некоторых множествах потребовать дополнительные условия. Для наглядности приведем один простейший пример, когда векторное поле касается границы в k изолированных точках. Тогда число линейно независимых решений рассматриваемой задачи не превосходит k.

Объекты исследования А. В. Бицадзе всегда неординарны. Он исследовал задачи, которые, как правило, не подчинены стандартным условиям, обеспечивающим существование и единственность решений. К числу таковых можно отнести предложенные им задачи для эллиптических уравнений с параболическим вырождением с весовыми условиями на границе. Эти задачи продиктованы практической необходимостью. Для них нарушаются не только условия равномерной или сильной эллиптичности, но и параболически вырождаются на всей границе либо на определенной ее части. Причем, множество точек параболического вырождения может оказаться даже характеристикой. Например, для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0, \qquad y > 0, \quad m > 0,$$

прямая вырождения y = 0 одновременно является его кратной характеристикой. В таком случае роль коэффициентов при младших производных расширяется и в зависимости от них не все решения могут оказаться ограниченными. М.В. Келдыш рассмотрел задачу в классе ограниченных функций, и, тем самым, пренебрег неограниченными решениями. А. В. Бицадзе заменил требование ограниченности следующими взвешенными граничными условиями:

$$u\big|_{\sigma} = f, \quad \lim_{y \to 0} \psi(x, y)\, u(x, y) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

где $\sigma \cup \{y = 0, 0 \le x \le 1\}$ – граница области, а весовая функция ψ на линии вырождения обращается в нуль. Эти задачи выявили новую практическую и теоретическую ценность весовых функциональных пространств, которые и до и после постановки этих задач являются предметом многих исследований.

Связанными с параболическим вырождением эффектами не менее богаты гиперболические уравнения и системы. На разрешимость поставленных для них задач здесь влияют многие факторы, в том числе порядок параболического вырождения, ориентация множества точек вырождения относительно характеристических многообразий и другие. В отличие от отдельно взятого уравнения гиперболические системы даже без параболического вырождения проявляют множество неожиданных свойств. Так, например, известная задача Гурса для скалярного уравнения вполне корректна. Построенная А. В. Бицадзе гиперболическая система

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y}=0, \qquad 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0$$

показала, что соответствующая однородная задача может иметь бесконечное множество линейно независимых решений. Более того, на корректность этой задачи могут оказать существенное влияние младшие члены системы. Этот факт дал толчок многим важным исследованиям и стимулировал ряд научных направлений.

В середине прошлого столетия математика нашла новые значительные приложения, что, по-видимому, следует объяснить невиданными темпами развития техники. Достижение околозвуковой и сверхзвуковой скоростей поставило многие проблемы, в том числе проблему уравнений смешанного типа, которой заинтересовался М. А. Лаврентьев и заинтересовал А. В. Бицадзе. Слиянием методов теории аналитических функций, уравнений в частных производных и сингулярных интегральных уравнений А. В. Бицадзе создал мощный и в то же время изящный аппарат, приуроченный к решению задач, поставленных для уравнений смешанного типа. Эффективность предложенного метода была опробирована на краевых задачах для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\operatorname{sgn} y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

являющегося моделью известного уравнения Трикоми. Для них А. В. Бицадзе поставил множество актуальных проблем и установил для них ряд значительных фактов. Они в литературе именуются «Бицадзевскими». Мы упомянем только принцип экстремума Бицадзе. Для уравнения Трикоми

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

наряду с задачей Трикоми рассматривали и задачу Дирихле, ожидая его разрешимость. Это понадобилось для практической, конкретной цели. А. В. Бицадзе показал, что эта задача не всегда поставлена корректно и для ее разрешимости необходимо освободить от условий определенный участок границы подобласти гиперболичности. Для постановки задач, отвечающих практическим целям, в которых вся граница области занята условиями, А. В. Бицадзе предложил несколько вариантов. В одном из них он связал значения решения в различных точках границы определенным функциональным законом. Эта нелокальная задача корректна. Она подсказала пути своего естественного обобщения на многомерный случай.

Правильно поставленной каждой плоской задаче можно сопоставить несколько пространственных вариантов. Из них необходимо остановиться на тех, которые максимально будут приближены к практическим проблемам. Пространственный вариант упомянутой выше задачи именно такой природы, хорошо обобщается и дает корректно поставленную задачу. Что касается задачи Трикоми, она имеет несколько вариантов обобщения. Здесь и проявляется структура множества точек изменения типа. Это множество может оказаться поверхностью, ориентированной в направлении пространства или времени. Этот момент определяет два существенно отличных направления в теории краевых задач для многомерных уравнений смешанного типа.

Уравнения относят к различным типам в зависимости от его характеристических корней. Если оно наряду с действительными характеристическими корнями имеет и комплексные, его относят к уравнениям составного типа. К таким уравнениям относится, например, продифференцированное уравнение Лапласа. Если вместо оператора Лапласа дифференцируется оператор Трикоми, получается оператор смешанно-составного типа. Для уравнения такой сложной природы А.В. Бицадзе поставил ряд актуальных задач и получил важные результаты.

Выше была упомянута нелокальная задача, где были взаимосвязаны значения искомого решения в различных граничных точках. Как практический, так и теоретический интерес представляли задачи, в постановке которых граничные значения решений связаны определенным законом с их значениями на некотором множестве внутренних точек области. Задача Бицадзе-Самарского занимает видное место в задачах такого типа. Ее простейший и наглядный вариант формулируется следующим образом: найти в единичном круге гармоническую функцию u, удовлетворяющую условию

$$u(x, y) - u(\delta x, \delta y) = f(x, y), \quad x^2 + y^2 = 1,$$

где постоянная $\delta \in (0, 1)$.

При моделировании практические задачи в основном сводятся к нелинейным уравнениям. По-видимому этим следует объяснить большой интерес к поставленным для них задачам. Применяемые в линейном случае мощные методы для этих уравнений не всегда столь эффективны. Считается большим достижением обнаружение даже отдельных классов их решений. Построенные А. В. Бицадзе точные решения нелинейных уравнений специального вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - b(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + \sum_{i=1}^{n} c^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x,u) = 0 \qquad (4)$$

нашли многообразные практические и теоретические приложения. Уравнения вида (4) охватывают многочисленные модели, соответствующие известным уравнениям гравитационного поля, теории ферромагнетизма, уравнения Гейзенберга, Лоренц-ковариантные уравнения.

Многие творческие достижения А. В. Бицадзе, в том числе и приведенные выше давно стали краеугольным камнем, на котором выстроены научные направления в современной теории уравнений в частных производных.

Список научных работ А. В. Бицадзе

1. Касательная производная потенциала простого слоя.- В кн.: Н.И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1946, §13, гл. I.

2. О местных деформациях при сжатии упругих тел.- Сообщ. АН ГССР, 1942, т.3, №5.

3. Об общем представлении решения эллиптических дифференциальных уравнений.- Сообщ. АН ГССР, 1943, т.4, №7.

4. Граничные задачи для систем линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа.-Сообщ. АН ГССР, 1944, т.5, №8.

5. Общее представление решений эллиптических систем дифференциальных уравнений и некоторые их приложения.- Кандидатская диссертация, 1944.

6. О некоторых применениях общего представления решений эллиптических дифференциальных уравнений.- Сообщ. АН ГССР, 1946, т.7, №6.

7. Задачи колебания равномерно сжатой тонкой упругой пластинки. Труды Тбилисского гос. ун-та.-Тбилиси, 1947, т. 30 а.

8. Общие представления решений системы дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа и их применения.-В кн.: И.Н. Векуа. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.-Л., 1948.

9. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными.-Успехи мат. наук, 1948, т. 3, №6 (28).

10. О так называемых площадно-моногенных функциях.-Доклады АН СССР, 1948, т.59, №8.

11. Об одной системе функций.-Успехи мат. наук. 1950, т.5, вып. 4 (38).

12. О единственности решений общей граничной задачи для уравнения смешанного типа.-Сообщения АН ГССР, 1950, т. 11, №4.

13. К проблеме уравнений смешанного типа.-Доклады АН СССР, 1950, т.70, №8.

14. О некоторых задачах смешанного типа.-Доклады АН СССР, 1950, т.70, №4.

15. К общей задаче смешанного типа.-Доклады АН СССР, 1951, т. 78, №4.

16. К проблеме уравнений смешанного типа.-Докторская диссертация, 1951.

17. К проблеме уравнений смешанного типа.-Труды математического ин-та АН СССР. -М., 1953, т. 61.

18. Об одном уравнении смешанного типа.-Успехи мат. наук, 1953, т. 8, вып. 1 (59).

19. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его приложения. -Известия АН СССР, 1953, т. 17, №6.

20. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его применения. -Доклады АН СССР, т. 93, № 3.

21. Обращение одной системы сингулярных интегральных уравне-

ний.-Доклады АН СССР, 1954, т. 93, №4.

22. О двумерных интегралах типа Коши.-Сообщения АН Гр. ССР, 1955, т. 16, №3.

23. К проблеме уравнений смешанного типа.-Пекин, 1955 (китайский язык).

24. Об одной задаче Франкля.-Доклады АН СССР, 1956, т. 109, №6.

25. Линейные уравнения с частными производными смешанного типа. Труды III Всесоюзного математического съезда.-М.:Изд-во АН СССР, 1956, т. 3.

26. К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях.-Доклады АН СССР, 1956, т. 110, №6.

27. О единственности решения задачи Франкля для уравнения Чаплыгина. - Доклады АН СССР, 1957, т. 112, №3.

28. Об эллиптических системах дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.- Доклады АН СССР, 1957, т. 112, №6.

29. Об одном элементарном способе решения некоторых граничных задач теории голоморфных функций и связанных с ними особых интегральных уравнений.-Успехи мат. наук, 1957, т. 12, №5 (77).

30. Монография о математике (рецензия).-Природа, 1957, №10.

31. Zum Problem der Gleichungen vom gemischten Typus.-GDR, Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1957.

32. Некоторые линейные задачи для линейных дифференциальных уравнений с частными производными.-Пекин, 1958 (китайский язык).

33. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях.-Доклады АН СССР, 1958, т. 122, №2.

34. Уравнения смешанного типа.-Итоги науки, 1959, т.2.

35. К теории уравнений смешанно-составного типа.-Сибирский мат. журнал, 1961, т. 2, №1.

36. Об уравнении смешанно-составного типа.-Сибирский мат. журнал, 1961, т. 2, №1.

37. К теории гармонических функций. Труды Тбилисского гос. унта.-Тбилиси, 1961, т. 84.

38. Математическая жизнь в СССР. Михаил Алексеевич Лаврентьев.-Успехи мат. наук, 1961, т. 16, вып. 4 (100).

39. Об уравнениях смешанного типа в трехмерных областях.-Доклады АН СССР, 1962, т. 143, №5.

40. Об однородной задаче наклонной производной для гармонических функций в трехмерных областях.-Доклады АН СССР, 1963, т. 148, №4.

41. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми.- Сибирский мат. журнал, 1962, т. 3, №5.

42. К задаче наклонной производной для гармонических функций в трехмерных областях. Материалы советского симпозиума по уравнениям с частными производными.-Новосибирск, 1963.

43. Об одном частном случае задачи наклонной производной для гармонических функций в трехмерных областях.-Доклады АН СССР, 1964, т. 155, №4.
44. Задача наклонной производной с полиномиальными коэффициентами.-Доклады АН СССР, 1964, т. 157, №6.
45. Об одном классе многомерных сингулярных интегральных уравнений. - Доклады АН СССР, 1964, т. 159, №5.
46. Equations of the Mixed Type-Pergamon Press (Oxford, London, New-York, Paris), 1964.
47. Нормально разрешимые эллиптические краевые задачи.-Доклады АН СССР, 1965, т. 154, №6.
48. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка.-М.:Наука, 1966.
49. Об одном критерии сходимости градиентов последовательности гармонических функций.-Доклады АН СССР, 1966, т. 168, №4.
50. К лемме Шварца. Труды Тбилисского математического ин-та. Тбилиси,1967, т. 33.
51. Лекции по теории аналитических функций комплексного переменного. -Новосибирск:Новосибирский гос. ун-т, 1967.
52. Илья Несторович Векуа.-Тбилиси: Мецниереба, 1967.
53. Boundary value problems for second order elliptic equations. North-Hollands (Amsterdam), 1968.
54. Сергей Львович Соболев.- Успехи мат. наук, 1968, т. 23, вып. 5 (143).
55. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. - Доклады АН СССР, 1969, т. 185, №4.
56. Основы теории аналитических функций комплексного переменного.-М.:Наука, 1969.
57. К теории уравнений смешанного типа.-Дифференц. уравнения, 1970, т.6, №1.
58. К теории нефредгольмовых эллиптических краевых задач.- В кн.: Дифференц. уравнения с частными производными.М.:Наука, 1970.
59. Zur Theorie der Gleichungen vom gemischten Typus. Elliptische Differentialgleichungen, Band II, Akademie-Verlag, Berlin, 1971.
60. К теории одного класса уравнений смешанного типа.- В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Л.: Наука, 1970.
61. Sur la théorie des problèmes aux limites elliptiques non-fredholmiens. -Ac. Ses. du Congres International des Mathématiciens, 1970, Nice (Gautli ber Villars, Paris). 1971.
62. К теории нефредгольмовых эллиптических краевых задач.-Труды международного математического конгресса в Нице, 1972.
63. К теории одного уравнений смешанного типа. В кн.: Beiträge zur Analysis, 4 (Berlin, DDR, DVM), 1972, t. 4.
64. К теории квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Труды Математического ин-та АН СССР.-

М., 1971, т. 112.
65. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. 2-е изд., доп.-М.:Наука, 1972.
66. Лекции по уравнениям математической физики. - Московский инженерно-физический институт,1972.
67. К теории уравнений смешанного типа, порядок которых вырождается вдоль линии изменения типа.-В кн.:Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. К 80-летию акад. Н. И. Мусхелишвили. М., 1972.
68. Об одной системе линейных уравнений с частными производными. -Доклады АН СССР, 1972, т. 204, №5.
69. К теории вырождающихся гиперболических уравнений в многомерных областях.- Доклады АН СССР, 1972, т. 204, №6.
70. О корректной постановке задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях.-Доклады АН СССР, 1972, т. 205, №1.
71. Дифференциальное уравнение с частными производными. – Математическая энциклопедия, т. 2. М.: Советская энциклопедия, 1979.
72. Краевые задачи.БСЭ, 3-е изд., т.13.
73. К линеаризованной задаче Навье-Стокса. Труды международного симпозиума в Карл-Маркс-Штадте, 1973.
74. Grundlagen der Theorie analytischer Functionen.-Academic verlag. Berlin. DDR, 1973.
75. К теории уравнений Максвелла-Эйнштейна.- Доклады АН СССР, 1974, т. 216, №2.
76. On an application of function-theoretical methods in the linearized Navier-Stokes boundary value problem.-Annals. Acad Sc. Technical Series A. Mathematica, (Finland), 1974, №571.
77. Пропедевтический курс математического анализа. Ротапринт МИФИ. - М., 1974.
78. К теории уравнений смешанного типа в многомерных областях.-Дифференц. уравнения, 1975, т. 10, №12.
79. О некоторых классах решений уравнения Максвелла-Эйнштейна. Труды Математического ин-та АН СССР.-М., 1975, т. 134.
80. Об одном уравнении гравитационного поля.-Доклады АН СССР, 1975, т. 222, №4.
81. К вопросу о постановке характеристической задачи для гиперболических систем второго порядка.-Доклады АН СССР, 1975, т. 223, №6.
82. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических систем второго порядка.-Доклады АН СССР, 1975, т. 225, №1.
83. Постановка преподавания математики в МИФИ.-В кн.:Научная организация учебного процесса. М.:МИФИ, 1975, вып. 2.
84. Примерный набор упражнений по курсу уравнений математической физики.-М.: МИФИ, 1975.

85. О современном состоянии теории уравнений смешанного типа.- В кн.: Beiträge zur Analysis, Berlin, DDR, 1976, t. 8.

86. Уравнения математической физики.-М.: Наука, 1976.

87. К теории систем уравнений с частными производными. Труды Математического ин-та АН СССР,-М., 1976, т. 142.

88. On a class of the nonlinear partial differential equations. Труды симпозиума по применению функ. теоретических методов в теории уравнений в частных производных, 1976.

89. Об одном классе квазилинейных уравнений в частных производных.-В кн.: Проблемы математической физики и вычислительной математики. М :Наука, 1977.

90. О некоторых классах точных решений уравнений гравитационного поля.-Доклады АН СССР, 1977, т. 223, №4.

91. Über einige Klassen exakter Lösungen des Systems der Maxwell- Einsteinschen Gleichungen. Testakt. 200 Wiederkehr des Geburtstages vom Carl Friedrich Gauss. Berlin, 1977.

92. К задаче Дирихле и Неймана для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка.-Доклады АН СССР, 1977, т. 234, №2.

93. К задаче Трикоми для нелинейных уравнений смешанного типа.-Доклады АН СССР, 1977, т. 235, №47.

94. К теории одного класса нелинейных уравнений в частных производных. -Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, №11.

95. Волны в потоке жидкости переменной плотности.-Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, №6.

96. Об одной краевой задаче для уравнений Гельмгольца.-Доклады АН СССР, 1978, т. 239, №6.

97. Об одной системе нелинейных уравнений в частных производных.-Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, №7.

98. О точных решениях одного варианта уравнений гравитационного поля.-Доклады АН СССР, 1980, т. 58, №2.

99. Некоторые классы уравнений в частных производных.-М.:Наука, 1981.

100. О точных решениях одного класса систем квазилинейных уравнений в частных производных.-Доклады АН СССР, 1981, т. 257, №4.

101. О точных решениях некоторых классов нелинейных уравнений в частных производных.-Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, №10.

102. Точные решения некоторых вариантов уравнений гравитационного поля. -Труды Математического ин-та АН СССР.-М., 1981, т. 157.

103. Об одном нелинейном уравнений параболического типа.-Доклады АН СССР, 1982, т. 264, №6.

104. К задаче Коши для одного класса нелинейных уравнений в частных производных первого порядка.-Доклады АН СССР, 1982, т. 265, №1.

105. Уравнения математической физики.-М.: Наука, 1982.

106. Новый класс точных решений уравнений Янга (2) калибровоч-

ных полей. -Доклады АН СССР, 1983, т. 269, №4.

107. К теории автодуальных (3) калибровочных полей.-Доклады АН СССР, 1983, т. 270, №1.

108. К теории нелокальных краевых задач.-Доклады АН СССР, 1984, т. 277, №1.

109. Об одном классе точных решений Лоренц-ковариантных уравнений. - Доклады АН СССР, 1984, т. 277, №2.

110. Некоторые проблемы динамики Грузинского побережья Черного моря. -Сообщения АН Гр. ССР, 1984, т. 113, №1.

111. Основы теории аналитических функций.-3-е изд., доп. Учебник.- М. Наука, 1984.

112. К построению точных решений некоторых классов нелинейных уравнений, описывающих нестационарные процессы. - В кн.: Актуальные проблемы математической физики и вычислительной математики. М . Наука, 1984.

113. Об одном классе условно разрешимых нелокальных задач для гармонических функций.-Доклады АН СССР, 1985, т. 280, №3.

114. К задаче Коши для гармонических функций.-Дифференц. уравнения, 1986, т. 22, №1.

115. Андрей Николаевич Тихонов, К 80-летию со дня рожд.-Дифференц. уравнения, 1986, т. 22, №12 (соавторы Еругин Н. П., Ильин В. А., Самарский А. А.).

116. О некоторых интегральных уравнениях первого рода.-Доклады АН СССР, 1986, т. 286, №6.

117. Сингулярные интегральные уравнения первого рода с ядрами Неймана. -Дифференц. уравнения, 1986, т. 22, №5.

118. Многомерное преобразование Гильберта.-Доклады АН СССР, 1987, т. 293, №5.

119. О полигармонических функциях.-Доклады АН СССР, 1987, т. 294, №3.

120. Уравнения в частных производных. Труды Математического инта АН СССР,-М., 1987, т. 176 (соавторы Виноградов В. С., Дезин А. А., Ильин В. А.).

121. Николай Павлович Еругин (К 80 - летию со дня рождения) – Дифференц. уравнения, 1987, т. 23, №5 (соавторы Дородницын А. А., Ильин В. А., Самарский А. А., Тихонов А. Н.).

122. Андрей Николаевич Тихонов, (К 80-летию со дня рожд.-Успехи мат. наук), 1987, т. 42, №3 (соавторы Ильин В.А., Олейник О.А., Попов Ю.П., Самарский А.А., Свешников А.Г., Соболев С.Л.).

123. Об интегральных уравнениях линейной теории контактных задач.-Доклады АН СССР, 1988, т. 303, №2.

124 Интегральные уравнения первого рода с сингулярными ядрами, порожденными ядром Шварца.-Доклады АН СССР, 1988, т. 301, №6.

125. О некоторых свойствах полигармонических функций.-Диффе-

ренц. уравнения, 1988, т. 24, №5.

126. К задаче Неймана для гармонических функций.-Доклады АН СССР, 1990, т. 311, №1.

127. Сингулярные интегральные уравнения первого рода.-Труды математического ин-та АН СССР.-М., 1991, т. 200.

128. On the generalized Neumann problem. Potential theory (Nagova, 1990), de Gruyter, Berlin, 1992.

129. Function-theoretic methods for singular integral equations. Complex Variables Theory Appl. 19 (1992), no 1-2.

130. Об одной гиперболической системе квазилинейных уравнений первого порядка. -Доклады РАН, 1992, т. 327, №4-6.

131. Махмуд Салахитдинович Салахитдинов (К 60-летию со дня рождения).-Успехи мат. наук, 1993, т. 48, №6 (294) (соавторы Алимов Ш.А., Аюпов Ш.А. и др.).

132. Алексей Алексеевич Дезин (К 70-летию со дня рождения).-Дифференц. уравнения, 1993, т. 29, №8. (соавторы Владимиров В.С., Илин В.А.).

133. Двумерные аналоги формул обращения Харди и Гильберта. -Доклады РАН, 1993, т. 333, №6.

134. К теории квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных. -Дифференц. уравнения, 1994, т. 30, № 5.

135. Александр Андреевич Самарский (К 75-летию со дня рождения).-Дифференц. уравнения, 1994, т. 30, №7 (соавторы Арсеньев А. А., Дородницын А. А., и др.).

136. Структурные свойства решений гиперболических систем уравнений в частных производных первого порядка. Восьмая научная конференция по современным проблемам вычислительной математики и математической физики (Москва, 1994), Мат. Модел. 6 (1994), №6.

137. Partial differential equations. Series on Soviet and East European Mathematics. 2. Singapore: World Scientific/ XIII, 1994.

138. Integral equation of first kind. Series on Soviet and East European Mathematics, 7. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995.

Поступила 15. 05. 2002.
Тбилисский математический
институт им. А.М. Размадзе

ჯ. გვაზავა, ო. ჯოხაძე, ს. ხარიბეგაშვილი

ზოგიერთი შტრიხი ანდრო ბიწაძის შემოქმედებითი პორტრეტისათვის

რეზიუმე

წინამდებარე წერილში ავტორები შეეცადნენ აკადემიკოს ანდრო ბიწაძის ზოგიერთი უმნიშვნელოვანესი სამეცნიერო შედეგის წარ-

მოდგენას. თვალსაჩინოებისათვის მეცნიერის შემოქმედება დაყოფილია რამდენიმე ნაკვეთად გარკვეული ქრონოლოგიური პრინციპების დაცვით.

საწყისი ნაკვეთი მოიცავს ელიფსურ განტოლებებსა და სისტემებს და მათთვის დასმულ სასაზღვრო ამოცანებს. ფრედჰოლმის აზრით მათ ამოხსნადობას, როგორც ა. ბიწაძემ აჩვენა, ვერ უზრუნველყოფს თანაბარი ელიფსურობის პირობა შესაბამისი მახასიათებელი ფესვების ჯერადობის მიუხედავად. ა. ბიწაძის ცნობილი შედეგების საფუძველზე გამოიყო ძლიერად და სუსტად შებმული სისტემები. ამ უკანასკნელთათვის მანვე დაადგინა, რომ სასაზღვრო ამოცანათა ამოხსნადობაზე სისტემის დაბალი რიგის წევრებსაც შეუძლიათ ზემოქმედება იქონიონ.

სამეცნიერო შედეგების მომდევნო ნაკვეთი ეხება დახრილწარმოებულებიან სასაზღვრო ამოცანას ჰარმონიული ფუნქციისათვის, რომელიც თურმე ერთდროულად ნაკლულადაც და ჭარბადაც შეიძლება იყოს დასმული. ამოცანა რომ კორექტულად იქცეს, საჭირო ხდება მის ფორმულირებაში გარკვეული ცვლილებების შეტანა.

შერეული და შერეულ-შედგენილი ტიპის განტოლებებს ა. ბიწაძის შემოქმედებაში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავიათ. აქ მას ეკუთვნის ექსტრემუმის პრინციპები ლავრენტიევ-ბიწაძის განტოლებისათვის, სხვადასხვა სასაზღვრო ამოცანათა დასმა და მათი ორიგინალური გადაწყვეტა.

ყურადღება დაეთმო ჰიპერბოლურ განტოლებებსა და სისტემებს, რომლებიც პარაბოლური გადაგვარების გარეშეც მრავალ მოულოდნელ თვისებას ავლენენ. მაგალითად, ა. ბიწაძის მიერ აგებული ჰიპერბოლური სისტემებისათვის გურსას ამოცანის ბირთვი უსასრულოგანზომილებიანია და მის კორექტულობაზე არსებითად მოქმედებენ სისტემის უმცროსი წევრებიც.

მოტანილია არალოკალურ ამოცანებთან დაკავშირებული შედეგები, მათ შორის ბიწაძე-სამარსკის ამოცანაც და ა. ბიწაძის რამდენიმე მნიშვნელოვანი გამოკვლევა არაწრფივ განტოლებათა ზუსტი ამოხსნების წარმოდგენათა შესახებ.

J. Gvazava, O. Jokhadze, S. Kharibegashvili

Some traits of the creative portrait of Andro Bitsadze

Summary

In the present letter, an attempt to represent a number of the most important scientific results of academician Andro Bitsadze has been done. Of visibility for, hisscientific work is divided into several stages with an obser-

vance of the specific chronological principle.

The initial stage concerns elliptic equations and systems and boundary-value problems set for them, in which Bitsadze refused the sufficiency of the condition of uniform ellipticity for their being of Fredgolm type, independently from the multiplicity of corresponding characteristic roots. On the basis of known examples Bitsadze introduced weakly and strongly connected elliptic systems. For the latter Bitsadze established the influence of the low terms of systems on the solvability of boundary-value problems.

The next range of results concerns a problem with oblique derivative for harmonic functions, in which Bitsadze revealed that such problems can be simultaneously underdetermined and over determined, and the specific changes in setting are necessary for their correctness.

The mixed and mixed-compound type equations take important place in scientific work of Bitsadze; to him belong the extremum principle for Lavrentyev-Bitsadze equation, the statements of several boundary value problems and they have been solved by original methods.

The specific place is given to hyperbolic equations and systems, which even in the absence of parabolic degeneration exhibit many unexpected properties. For example, the kernel of Goursat problem for the hyperbolic system, built by Bitsadze, is infinite-dimensional and the low terms of the system substantially Influence on its correctness.

There are given also nonlocal problems, including the Bitsadze-Samarsky problem and some results of Bitsadze, related to the exact solutions of some classes of nonlinear equations.

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского государственного
университета им. Ив. Джавахишвили
Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University
354

УДК 52.09

ГРУЗИНСКАЯ АСТРОНОМИЯ XX ВЕКА

Р.И.Киладзе, Г.Н.Салуквадзе

История современной грузинской астрономии начинается с конца XIX века, когда великий князь Георгий, обосновавшись в Абастумани, пригласил к себе известного русского астронома С.П.Глазенапа.

Профессор С.П.Глазенап с августа 1892 до мая 1893 года производил в Абастумани измерения тесных двойных звезд, используя для этого небольшой (9-дюймовый) рефрактор.

Результаты, опубликованные С.П.Глазенапом, сразу привлекли к себе внимание астрономов.

В конце 20-х годов XX века перед Академией наук СССР встала задача создания новой обсерватории на юге страны. По инициативе Ленинградского государственного астрономического института были снаряжены экспедиции в южные районы СССР с целью поиска места, обладающего благоприятным для астрономических исследований климатом. Одновременно институт стал конструировать опытный 13-дюймовый рефлектор – первенец отечественного астрономического приборостроения. К нему восходят истоки отечественного астрономического оптико-механического производства.

На основе результатов наблюдений С.П.Глазенапа и данных экспедиций 1930-1931 годов было решено организовать южную обсерваторию в Абастумани. Ее первыми задачами были: испытание первого оптического телескопа, внедрение в практику астрономических наблюдений электрофотометрического метода, успешно развивавшегося в то время в обсерваториях США.

В экспедициях участвовал молодой выпускник Тбилисского государственного университета Е.К.Харадзе, назначенный директором обсерватории (в дальнейшем он в течение многих десятилетий бессменно руководил ею).

Обсерватория в Абастумани была первой в СССР высокогорной астрофизической обсерваторией. Вначале была построена опытная база. Результаты наблюдений первых лет указывали на целесообразность расширения ее работы, в связи с чем началось строительство обсерватории на возвышающейся над Абастумани горе Канобили (высота над уровнем моря 1600-1700м), где условия для наблюдений оказались еще более благоприятными. Одной из характеристик этих условий может служить средняя величина дифракционного изображения звезды, которая на горе Канобили составляет 0.6 секунд дуги.

Известно, что инструментальное оснащение советских обсерваторий, в том числе и Абастуманской, в то время существенно отставало от мирового уровня наблюдательной астрономии. Поэтому научные задачи должны были выбираться таким образом, чтобы, будучи актуальными, они вместе с тем могли бы решаться при помощи наличного, довольно скромного оборудования. При этом необходимо было учитывать как тенденцию развития науки, так и перспективы роста обсерватории в последующие годы. Все это вместе взятое предопределило основные направления исследований обсерватории: изучение межзвездного поглощения света, наблюдения переменных звезд и участие в Службе Солнца.

Изучение переменных звезд

В самые первые годы работы обсерватории исследовались переменные звезды типа W Большой Медведицы, являющиеся системами тесных двойных звезд, компоненты которых представляют собой вытянутые эллипсоиды. Для ряда звезд этой категории были получены кривые блеска и значения элементов, вошедшие в каталоги переменных звезд (В.М.Бодокия и др.). Впоследствии усилиями В.Б.Никонова в практику обсерватории были внедрены электрофотометрические и электроколориметрические измерения затменно-переменных и спектрально-двойных звезд.

В обсерватории проводились исследования физически переменных звезд, среди которых обстоятельно была изучена звезда ν Эридана, изменение блеска которой Я.И.Кумсишвили интерпретировал как следствие интерференции двух колебаний с различными периодами. Он получил улучшенные параметры кривой блеска и другие данные, подтверждающие гипотезу Ван Хофа о наличии у звезд типа β Большого Пса двух пульсаций разных форм, но почти одинаковых периодов.

Несколько физически переменных звезд (12 Ящерицы, β Лиры и др.) были исследованы в разные периоды на основе наблюдений, проводимых в порядке участия обсерватории в международной научной кооперации. Все другие фотоэлектрические исследования переменных звезд, проводимые в Абастумани, координировались с генеральным планом изучения этих звезд, разработанным Комиссией по переменным звездам Астрономического совета АН СССР. Некоторые работы, предпринятые с целью исследования галактического поглощения света, потребовали определения цветовых показателей для более 100 долгопериодических цефеид (М.А.Вашакидзе) и для такого же количества короткопериодических типа RR Лиры (И.Ф.Алания). При этом было получено среднее значение абсолютной величины для 47 короткопериодических цефеид при улучшенном учете межзвездного поглощения света. Опубликованные И.Ф.Алания списки моментов максимумов блеска этих звезд вошли в каталоги. После вступления в строй 70-сантиметрового менискового телескопа И.Ф.Алания занимался спектроскопическими исследованиями звезд типа RR Лиры. В этих объектах спектральный тип, определяемый по линиям кальция, получается обычно более ранним, чем по другим критериям; эта разность является показателем металличности звезды.

И.Ф.Алания показал, что такого рода работы могут быть успешно выполнены при помощи спектров, полученных предобъективной призмой. Он разработал методику определения спектральных индексов Престона и для нескольких десятков звезд типа RR Лиры определил величину металличности в зависимости от фазы.

В работах Н.Л.Магалашвили и Я.И.Кумсишвили (40-80-е годы) были построены кривые блеска и вычислены элементы орбит около 50 затменно-переменных звездных систем. Для некоторых из них тонкие фотометрические эффекты объяснены эллипсоидальностью компонентов и газовыми потоками. Установлен также характер изменений степени поляризации света. Получены спектрофотометрические характеристики более 10 физически переменных звезд. Для нескольких классических переменных звезд типа RR Лиры определены спектральные индексы металличности и их зависимость от фазы изменения блеска. Для звезды R Северной Короны обнаружена быстрая нестационарная микропеременность блеска, имеющая важное значение для построения феноменологической модели переменности звезд данного типа.

В 43-х площадках Каптейна построен прецизионный каталог фотоэлектрических величин в международной трехцветной системе звезд 7.5-10.5 зв. величины (О.П.Абуладзе), являющийся расширением аналогичного каталога ярких стандартов, составленного в Крымской астрофизической обсерватории АН СССР.

В числе переменных звезд, исследованных астрономами Абастуманской обсерватории, достойна упоминания P Лебедя, для которой выполнены детальные отождествления спектральных линий и обнаружено, что их смещения, характеризующие скорости выброса атомов с поверхности звезды, зависят от потенциала ионизации соответствующих элементов, что указывает на стратификацию химических элементов в оболочке звезды (Е.К.Харадзе). Кроме того, были обнаружены иррегулярные изменения блеска и цвета, а также непостоянство спектрофотометрического градиента; при этом было показано, что покраснение P Лебедя лишь частично объясняется межзвездным рассеянием света. Спектрофотометрия нескольких переменных звезд (типа P Лебедя и Вольф-Райе) показала существование аномалии в распределении энергии в спектре (изменение градиента со временем, отклонения от нормального распределения для звезд B0) и ее обусловленность особенностями самих звезд. При этом, с целью выявления роли фотографических и других эффектов, особо изучались лабораторные спектры, имитирующие спектры переменных звезд (М.В.Долидзе).

Р.А.Бартая проведены спектрофотометрические исследования открытой ею же в 1948г. Новой в созвездии Змеи.

М.А.Вашакидзе дал простой метод приближенной оценки температур Новых и плотности их газовых оболочек в момент появления запрещенных линий в их спектрах. Ш.Г.Горделадзе дал оценку массы выброшенной оболочки при вспышке Новой. Эта оценка основана на данных о светимости Новой в максимуме в предположении, что излучение Новой является тепловым излучением однородной и изотермической оболочки.

В последнее время возникла необходимость разработки новых методов интерпретации кривых блеска затменно-переменных звезд. Это вызвано двумя причинами: во-первых, существенно повысилась точность фотоэлектрических наблюдений, что позволяет выявить тонкие эффекты на кривых блеска; во-вторых, успехи рентгеновской астрономии привели к открытию таких пар затменно-переменных звезд, интерпретация кривых блеска которых невозможна классическими методами. С появлением нетрадиционных методов определения элементов орбит звезд стало возможным осмысление параметров околозвездного вещества, тем более, что точные кривые блеска содержат информацию не только о геометрических параметрах, но и об особенностях этих систем. Над этой проблемой работает М.И.Кумсиашвили.

Для массивной тесной двойной системы XZ Цефея, для которой характерно интенсивное перетекание вещества, интерпретация изменения блеска выполнена новым неклассическим методом. В частности, на основе спектроскопических данных получены новые геометрические и физические параметры звезды с учетом геометрии Роша.

Рентгеновский источник X-1 Лебедя в течение многих лет привлекает внимание астрономов мира, поскольку измерения массы компактной компоненты указывают на наличие черной дыры. Поэтому в обсерватории велись фотоэлектрические наблюдения по программе координации оптических наблюдений рентгеновских источников с наблюдениями с борта искусственного спутника "АСТРОН". Полученные результаты хорошо согласуются с моделью прецессирующего аккреционного диска.

В дальнейшем эти исследования продолжались по программе мониторинга уникальных астрономических объектов в обсерваториях Грузии, Казахстана, России, Узбекистана и Украины. Порой эти наблюдения проводились параллельно с рентгеновскими и радионаблюдениями.

По инициативе обсерватории также велось комплексное исследование двойной звезды RY Щита. В этой программе участвовала также Южная Европейская обсерватория. На основе анализа наблюдательного материала был получен важный результат: массы компонентов отличаются друг от друга на три порядка, в то время как в других случаях эта величина не превосходила нескольких единиц. Этот результат существенно меняет наши представления о физической природе данной системы. Анализ кривой изменения блеска был проведен неклассическим методом.

В фотометрической системе Стремгрена-Крауфорда велись шестицветные наблюдения RY Щита. Анализ наблюдательных данных показывает, что RY Щита находится в фазе окончания "смены ролей" компонент, когда у остатка гелиевого ядра с водородной оболочкой начинают появляться свойства звезды Вольф-Райе (М.И.Кумсиашвили и др.).

Абастуманская обсерватория активно участвовала также в исследовании звезды ТТ Овна по программе международной кооперации. Данный объект в рентгеновском диапазоне наблюдался с борта искусственного спутника "ЕКЗОСАТ".

Успеху этих работ способствовал двухканальный электрофотометр, сконструированный В.О.Кахиани.

В обсерватории ведутся интенсивные фотоэлектрические наблюдения Ae/Be звезд Хербига. Результаты анализа и классификации по многим фотоэлектрическим параметрам используются для установления и моделирования механизма излучения этих объектов. Обнаружено усиление спектра оболочки в процессе падения блеска звезды, что указывает на возможность аккреции вещества из околозвездного пространства (Я.Н.Чхиквадзе).

Двухканальный электрофотометр позволяет выявлять быстрые и кратковременные изменения блеска звезд. С его помощью были проведены наблюдения звезды V533 Геркулеса, для которой характерно изменение блеска с периодом 63.6 сек, причем временами переменность исчезает.

В тесных двойных системах типа Алголя, спутники которых принадлежат к K0 и более поздним спектральным типам, в верхних слоях фотосферы замечается температурная инверсия (поярчение), означающая значительное отличие закона изменения яркости с углом выхода излучения от обычного закона потемнения диска к краю.

У звезды ЕМ Цефея наблюдалась вспышка в красной области и одновременно падение блеска в ультрафиолете (Н.Т.Кочиашвили).

На основе материала наблюдений в разных обсерваториях Р.Ш.Нацвлишвили оценил общее количество вспыхивающих звезд в ассоциации Ориона в 2000. Это означает, что в этой ассоциации практически все красные карлики являются вспыхивающими.

А.Ш.Хатисашвили определил точные положения сорока двух новых звезд.

О.П.Абуладзе для 56 звезд Северного Полярного ряда и 36 других звезд создал фотометрические стандарты в фотометрических системах UBV и UBVR, а для 38 звезд – в системе uvbyβ.

И.Ф.Алания и О.П.Абуладзе в системах uvbyβ и UBV проведены электрофотометрические наблюдения звезд типа RR Лиры и пекулярных звезд, обнаруженных в Абастумани. Для нестационарных, Новых и магнитных звезд ими построены кривые блеска в системе UBV и установлен характер их изменения.

Звездная астрономия и астрофизика

С вводом в строй 40-сантиметрового рефрактора (1937г.) и 36-сантиметрового телескопа системы Шмидта (1940г.) появилась возможность широкополосных фотографических наблюдений звезд, что было использовано для изучения структуры Галактики в ближайших окрестностях Солнца, в частности распределения в ней поглощающей и светящейся (звездной) материи.

Были предприняты, во-первых, измерения избытков цвета звезд во многих направлениях с целью получения данных об избирательном поглощении в Галактике и, во-вторых, теоретико-статистические исследования.

В этом плане особого упоминания заслуживает работа М.А.Вашакидзе, являющаяся первым из звездно-астрономических исследований в Абастумани. В ней предложен новый метод определения пространственной плотности звезд и межзвездного поглощения света в Галактике. Этот метод, известный в астрономической литературе как метод Вашакидзе-Оорта, вошел в учебники по звездной астрономии. Он основан на предположении, что поверхности одинаковой звездной плотности в Галактике являются плоскостями, параллельными галактическому экватору. Метод Вашакидзе-Оорта нашел применение в звездно-астрономических исследованиях, связанных с изучением космического поглощения света звезд.

М.А.Вашакидзе составил каталог избытков цвета 509 внегалактических туманностей (до 12.8-13.3 зв. величины; по каталогу Шепли и Эймс) и 110 долгопериодических цефеид в максимуме блеска ($7\text{-}12^{m}.5$), выяснил характер зависимости показателя цвета внегалактической туманности от звездной величины, типа и диаметра, определил значения избирательной оптической толщины, коэффициента поглощения для светлых, светло-темных и темных областей Млечного Пути, рассмотрел зависимость толщины поглощающего слоя от галактической долготы.

В числе первых по времени каталогов был каталог показателей цвета 14.000 звезд 10.3-13.3 зв. величины в площадках Каптейна NN 1-43 (Е.К.Харадзе). Анализ каталога позволил дать характеристику поглощения в виде кривых зависимости избытка цвета от расстояния для 43 отдельных направлений (на различных галактических широтах) до расстояний около 2 кпс, заново оценить общую массу межзвездной пыли, а также констатировать иррегулярность распределения межзвездной материи.

К перечисленным здесь работам примыкают и статьи Т.А.Кочлашвили "Определение фотовизуальных величин звезд и исследование поглощения в избранных направлениях и в направлении на галактический центр" и И.Ф.Алания "Избытки цвета переменных звезд типа RR Лиры в максимуме блеска и исследование галактического поглощения по ним". И.Ф.Алания установлено существование отдельных рассеивающих свет облаков на больших галактических широтах, а также клочковатость избирательного поглощения.

Результаты детальных исследований поглощения света во многих направлениях, основанных на применении упомянутых каталогов, находятся в согласии с выводами работы В.А.Амбарцумяна и Ш.Г.Горделадзе, выполненной в Абастумани значительно раньше, в 1938г. В ней было показано, что межзвездное поглощение света вызывается не непрерывной средой, а отдельными темными туманностями.

Из других работ, основанных на колориметрических определениях, отметим исследования в области местной системы звезд, подтвердившие отсутствие в ней аномального космического поглощения, т.е. наличие местного повышения пространственной плотности звезд (М.А.Вашакидзе и др.).

А.Ф.Торонджадзе и Т.А.Кочлашвили предложили способ определения плоскости симметрии галактической поглощающей материи. Ими было показано, что распределение плотности поглощающей материи по Z - координате не представляется простой барометрической формулой.

А.Ф.Торонджадзе показал, что известный множитель γ, переводящий избирательное поглощение в полное, зависит от величины избытка цвета.

Первая работа в Грузии, касающаяся вопросов звездной кинематики, была опубликована в 1953 году А.Ф.Торонджадзе. В 1956 году была напечатана его вторая работа по кинематике молодых горячих звезд вблизи Солнца – объектов местной звездной системы. В этих работах А.Ф.Торонджадзе получил уравнения, описывающие структуру местной системы при естественной гипотезе, что она является фрагментом спиральной структуры нашей Галактики, расширяющейся параллельно галактической плоскости.

А.Ф.Торонджадзе рассмотрел вопрос об известном K-эффекте для множества звезд спектральных классов O-B с новой точки зрения, согласно которой движение белых горячих звезд, рассеянных в окрестностях Солнца, трактуется как распад ранее существовавшей ассоциации, располагавшейся вдоль галактической спиральной ветви. Таким образом, была показана связь между кинематическими закономерностями и генетическими свойствами звездных систем.

В 1955 году Р.Дзигвашвили изучил плоские галактические орбиты звезд и их свойства, использовав гравитационный потенциал П.П.Паренаго. На основе решения уравнений движения Р.М.Дзигвашвили получил соотношения между компонентами скоростей и элементами орбит звезд. С помощью указанного потенциала были вычислены скорости центроидов звезд и дисперсии скоростей для разных расстояний от центра Галактики. Были построены диаграммы Ботлингера. Анализ этих диаграмм приводит к следующему выводу: полоса допустимых движений, внутри которой могут двигаться звезды плоской подсистемы Галактики, достаточно узка. Это исключает перераспределение звезд плоской подсистемы с момента их возникновения. Следовательно, звезды плоской подсистемы Галактики возникли в той же области, где они находятся в настоящее время. В то же время полоса допустимых движений для сферической подсистемы достаточно широка. Большинство этих объектов, которые в настоящее время находятся вблизи Солнца, могли образоваться в центральных областях Галактики.

Были также изучены относительные орбиты звезд, диссипировавших из открытых скоплений.

В последующий период Р.М.Дзигвашвили выполнил аналогичные исследования для потенциала Кузьмина и пришел к заключению, что изменения формы потенциала Галактики не оказывают значительного влияния на полученные им ранее качественные результаты.

М.Г.Колхидашвили (Тбилисский государственный университет) обобщил известную теорему Клейбера для случая эллипсоидального распределения скоростей звезд и показал, что отношение средней тангенциальной скорости к средней лучевой скорости зависит от положения рассматриваемых звезд на небесной сфере (по Клейберу это отношение – постоянная величина).

М.Г.Колхидашвили определил пространственную плотность звезд в шаровых скоплениях с помощью анализа поверхностной плотности. В соавторстве с В.М.Арчемашвили и Р.М.Дзигвашвили им были изучены параметры вращения Галактики на основе кинематических данных для рассеянных скоплений.

В 70-е годы Г.А.Маласидзе (Тбилисский государственный университет), наряду с плоскими орбитами звезд, изучил и их пространственные орбиты. Было получено обобщенное выражение для галактического потенциала, которое включает в себя множество известных потенциалов в качестве частных случаев. Этот потенциал, который был использован в дальнейшем во многих динамических исследованиях, известен в литературе как потенциал Кузьмина – Маласидзе. Преимущество этого потенциала заключается в том, что в случае плоского движения решение получается в эллиптических интегралах. Г.А.Маласидзе построил двухкомпонентную модель Галактики, которая допускает существование третьего квадратичного интеграла. Одно из его исследований касается построения разных моделей Галактики на основе теории третьего квадратичного интеграла. Ему, в частности, удалось выделить класс линзообразных моделей. В соавторстве с Г.Т.Кеванишвили (Тбилисский государственный университет) им изучены некоторые актуальные вопросы определения кривой вращения Галактики.

Работы Кеванишвили касаются вопросов пространственного распределения звезд ранних спектральных классов в Галактике и имеют большое значение для проблемы возникновения звезд. Он рассмотрел распределение 55000 звезд спектрального класса A из каталога HD. Методом Монте-Карло, применив вероятностные законы распределения (закон Пуассона и др.), он выявил более двух десятков сгущений A-звезд около плоскости Галактики. Их средние плотности и линейные размеры примерно такие же, как у открытых ранее T-ассоциаций. Три из этих сгущений весьма плотные и содержат $7x10^2$ звезд/пс^3. Скопления имеют заметные средние лучевые скорости относительно звездного фона (~10км/сек) и показывают признаки расширения, что подтверждает реальность открытых К.Ф.Кеванишвили сгущений звезд.

В 80-х годах В.М.Арчемашвили и Р.М.Дзигвашвили на основе наблюдательных данных построили кинематические и динамические модели для индивидуальных звездных скоплений. Для скопления M67 кривая пространственной плотности звезд разделяется на три части: центральную, промежуточную и периферийную. В промежуточной части было обнаружено наличие пиков пространственной плотности. Разработан критерий, позволяющий определить допустимые зоны движения звезд скопления для полученного распределения пространственных плотностей. Сделана попытка оценки возраста звездных скоплений M67 и NGC 2420 на основе их функций светимости и построена структурная и кинематическая модель этих объектов.

В 80-х годах Т.Г.Мдзинаришвили и А.Ф.Торонджадзе исследовали проблему решения основного уравнения звездной статистики, которая принадлежит к классу некорректных задач математической физики. Был разработан статистический метод решения некоторых обратных задач звездной астрономии, с помощью которого можно изучать структуру и кинематику Галактики. Были получены следующие выводы: распределение молодых объектов вблизи Солнца действительно указывает на три фрагмента спиральной структуры Галактики, существование которых ставилось под сомнение; теория волн плотности точнее описывает полученную картину распределения молодых объектов, чем теория стохастического образования звезд; анализ остаточных скоростей молодых звезд обнаруживает расширение фрагментов спиральной структуры Галактики.

В 90-х годах Р.М.Дзигвашвили, Г.А.Маласидзе и Т.Г.Мдзинаришвили на основе данных о лучевых скоростях изучили возможные формы орбит шаровых скоплений. Результаты этих исследований подтверждают гипотезу о том, что возможно преждевременное прекращение процесса гидродинамического развития шаровых скоплений в результате потери ими некоторого количества газо-пылевого вещества при столкновении с более плотными облаками подобной же материи во время пересечения плоскости симметрии Галактики. Было установлено, что межзвездные облака движутся по почти круговым орбитам.

Т.Г.Мдзинаришвили, Р.М.Дзигвашвили, Т.М. Борчхадзе и Н.Г. Когошвили исследовали распределение пульсаров в окрестности Солнца и получили следующие результаты: в новейшем каталоге пульсаров Тейлора, Манчестера и Лайна имеется систематическая ошибка в определениях расстояний пульсаров, которая приводит к скучиванию объектов к фрагментам спиральной структуры Галактики; если шкала расстояний этого каталога близка к действительности, тогда пульсары, имеющие наиболее точные расстояния, независимо от возраста, образуют тонкий слой вблизи плоскости Галактики, наподобие О-звезд, и указывают на фрагменты спиральной структуры. Пекулярные скорости большинства пульсаров должны быть на порядок меньше принятых ранее величин, если характерный возраст пульсара адекватно отражает его реальный возраст.

А.Ф.Торонджадзе исследовал также функцию распределения Z-компонент скоростей звезд на основе анализа широтных составляющих собственных движений, использовав для этого данные Генерального каталога Босса.

Эти работы, основанные на фотометрических исследованиях, в дальнейшем были дополнены обозрениями на основе массовой двухмерной спектральной классификации звезд до 12 зв. величины по спектрам, получаемым с помощью большой предобъективной призмой, установленной на 70-сантиметровом менисковом телескопе (Р.А.Бартая, С.П. Априамашвили и др.). Из звездно - астрономических спектральных работ обсерватории следует упомянуть разработку методики определения лучевых скоростей относительно слабых звезд (Р.И.Киладзе), в частности в ассоциациях. Ранее были определены спектральные параллаксы звезд в площадках Каптейна. Были составлены каталоги спектральных параллаксов, содержащие более 1500 звезд (Р.А.Бартая и Н.Б.Каландадзе).

Работы по спектральной классификации на первом этапе велись в двух направлениях – по плану П.П.Паренаго комплексного исследования Млечного Пути (Е.К.Харадзе, А.С. Априамашвили, М.Д. Метревели) и в областях, содержащих звездные ассоциации и диффузные туманности (Е.К.Харадзе, Р.А. Бартая) .

На следующем этапе, в кооперации с Голосеевской обсерваторией (Украина), были исследованы избранные участки Млечного Пути по "расширенному плану" П.П.Паренаго. Результаты спектральной классификации и фотометрии 40000 звезд опубликованы в виде трех каталогов (Н.Б. Каландадзе и др.). Результаты дискуссии о строении Галактики на основе этих данных приведены в монографии Н.Б.Каландадзе. Следует отметить также некоторые работы по областям звездообразования, выполненные по этой программе (М.Д.Метревели). Кроме того, Д.Г.Чипашвили классифицировала звезды в окрестности северного галактического полюса, а А.Д.Чуадзе – звезды местной системы.

В сотрудничестве с Южноевропейской обсерваторией выполнена также работа, посвященная вопросам выделения населений разных составляющих Галактики (Р.А.Бартая и др). По этой же программе выполнена спектральная классификация 1236 звезд из Каталога Мак-Кормика (Е.К.Харадзе, Р.А.Бартая).

М.А.Шиукашвили разработала методику двумерной количественной спектральной классификации для звезд спектральных классов F0-G5 и классифицировала звезды в избранных Т-ассоциациях.

Т.Д.Швелидзе в сотрудничестве с астрономами Тартуской астрономической обсерватории разработал методику автоматической спектральной классификации звезд поздних спектральных классов F-G-K, а для 333 звезд четырех областей главного меридиального сечения Галактики определил физические параметры: $\log T_{eff}$, M_v и [Fe/H].

В обсерватории интенсивно велись работы по спектральной классификации и фотометрии непрерывного спектра звезд поздних спектральных классов (F-M, G, S) (М.В.Долидзе, Г.Н.Джимшелейшвили).

На основе большого однородного спектрального материала (~1000 звезд), накопленного на 70-сантиметровом менисковом телескопе, были изучены спектры углеродных звезд, пекулярных объектов, звезд с особенностями спектрального распределения энергии, симбиотических звезд, звезд с дефицитом металлов: субкарликов, карликов и гигантов F-M классов (Г.Н.Джимшелейшвили).

Для изучения спектров звезд поздних спектральных классов привлекались данные, относящиеся к самым различным участкам спектра (М.В.Долидзе. Г.Н.Джимшелейшвили).

В сотрудничестве с Тартуской обсерваторией велись методические работы по разработке критериев классификации F-M звезд с особенностями в спектрах (Г.Н.Джимшелейшвили).

Спектральная классификация звезд выполнена также в 115 площадках Каптейна и избранных площадках главного меридиального сечения Галактики в Северном полушарии. Всего классифицировано в избранных областях свыше 200000 звезд (Е.К.Харадзе, Р.А.Бартая, К.Б.Чаргеишвили).

Ш.А.Сабашвили (Тбилисский государственный университет) обобщил модель Милна-Эддингтона в теории образования спектральных линий звезд в случае отсутствия локального термодинамического равновесия, рассмотрел многократное рассеяние света в средах разной геометрии, получил численные решения уравнения переноса излучения для ряда значений оптического размера среды и вероятности выживания фотона при элементарном акте рассеяния. Составив таблицы ряда важных функций теории переноса излучения, он произвел разложения этих функций по кратностям рассеяния и изучил асимптотику их общего члена.

Сабашвили установил некоторые вероятностные характеристики процесса случайных блужданий фотонов при диффузии света.

До открытия В.А.Амбарцумяном звездных ассоциаций – очагов звездообразования в Галактике в астрономии, в частности звездной динамике, все звездные системы считались динамически устойчивыми.

Морфологическое исследование звездных ассоциаций показало, что в составе ассоциаций встречаются кратные системы звезд, которые обладают большей степенью динамической неустойчивости, чем сами ассоциации в целом. Это позволило В.А.Амбарцумяну выделить среди кратных звезд объекты нового типа – системы типа Трапеции Ориона, характеризуемые высокой динамической неустойчивостью.

Поскольку кратные звездные системы типа Трапеции являлись неисследованными объектами нашей Галактики, то, естественно, с целью их изучения в первую очередь необходимо было составление каталога этих систем.

На основе Индекс-каталога визуально-двойных звезд Г.Н.Салуквадзе составил каталог кратных систем типа Трапеции, содержащий 412 объектов.

Статистическая обработка каталога систем типа Трапеции привела автора к важному выводу, что реальные трапеции встречаются среди кратных звезд с главными звездами спектральных классов O-B2. Это заключение указывает на молодость трапеций.

В дальнейшем Г.Н.Салуквадзе и Г.Ш.Джавахишвили составили новый каталог кратных систем типа Трапеции, содержащий 637 объектов. Этот каталог в настоящее время является единственным полным каталогом подобных систем.

Г.Н.Салуквадзе была изучена связь трапеций с молодыми галактическими образованиями – галактическими скоплениями и эмиссионными туманностями. Основные результаты, полученные автором, дают веское подтверждение того, что внутри ассоциации звезды рождаются не одновременно, а отдельными группами.

В течение нескольких десятилетий Г.Н.Салуквадзе ведутся фотографические наблюдения трапеций с целью определения относительных положений их компонент.

В работах Г.Н.Салуквадзе была подробно рассмотрена кинематика кратных систем типа Трапеции. Эти исследования относятся к системам, главные звезды которых принадлежат к спектральным классам O-B2. Использованный наблюдательный материал, содержащий взаимные расстояния компонент систем, в большинстве случаев охватывает интервал времени более 100 лет. На основе этого астрометрического материала было получено расширение у 14 из 15 исследованных систем типа Трапеции.

Г.Н.Салуквадзе и Г.Ш.Джавахишвили составили список широких кратных систем типа Трапеции, компонентами которых являются звезды спектральных классов O-B2. Обнаружение подобных систем свидетельствует о расширении систем типа Трапеции.

Эти результаты являются новым веским аргументом в пользу представления о динамической неустойчивости трапеций.

Г.Н.Салуквадзе осуществил поиск кратных систем типа Трапеции вблизи 670 Орионовых переменных в 13 Т-ассоциациях. Всего было выявлено 120 трапеций, 85% из которых являются физическими системами. Большинство трапеций расположено в туманностях, причем они встречаются в основном группами .

Г.Н.Салуквадзе и Г.Ш.Джавахишвили ведут планомерные фотоэлектрические наблюдения кратных систем типа Трапеции в шестицветной фотометрической системе Стремгрена-Крауфорда. Ими показано, что компоненты в большинстве случаев принадлежат к ранней группе "B" и все исследуемые системы являются физическими. Результаты вычислений $\lg T_{eff}$ и $\lg g$ показали, что их значения лежат в интервалах 4.03-4.54 и 2.58-4.02 соответственно. Компоненты трапеций обычно имеют массы в несколько $M_\odot$ (почти у половины из них $M > 10\ M_\odot$). Более 70% компонент имеют возраст меньше $4 \cdot 10^6$ лет.

Были наблюдены также шесть систем с главными звездами спектрального класса M. Оказалось, что 12 из 19 звезд относятся к "поздней группе", а шесть имеют спектральный класс не ранее M.

Для компонент звездных систем типа Трапеции были измерены лучевые скорости (Г.Ш.Джавахишвили , Г.Н.Салуквадзе).

Изучение структурных и фотометрических характеристик ряда открытых звездных скоплений подтвердило существование у скоплений ядра и протяженной короны. Учет звезд короны сильно меняет вид диаграммы «цвет-звездная величина» и двухцветной диаграммы, а также вид функции светимости (Г.Н.Салуквадзе , В.М.Арчемашвили).

Планетарные и газовые туманности

Исследование важных объектов астрофизики – газовых туманностей начинается в Абастумани с открытия в 1954 г. М.А.Вашакидзе поляризации Крабовидной туманности. Это важное открытие явилось прекрасным подтверждением существования синхротронного механизма излучения электронов в магнитном поле небесных тел. Поляризационные исследования М.А.Вашакидзе распространил и на другие галактические и внегалактические туманности. В результате этих исследований была показана зависимость степени поляризации от типа туманности, при которой ранние типы обнаруживают бо́льшую степень поляризации; вместе с тем, галактики с большой степенью поляризации в большинстве случаев оказываются радиогалактиками.

С вводом в строй 70-сантиметрового менискового телескопа (1955г.) появились новые возможности изучения слабых туманностей.

Н.А.Размадзе выполнил электрофотометрию более десятка ярких планетарных туманностей и двух диффузных, изучив при этом пространственное распределение плотности вещества в некоторых из них. Он определил концентрацию электронов, дважды ионизованного кислорода и других элементов и оценил нижние пределы их масс.

Н.А.Размадзе открыта высокая плотность туманности N8 по Каталогу туманностей Б.А.Воронцова-Вельяминова, привлекающей внимание своими необычными значениями относительных интенсивностей эмиссионных линий λ4363, N_1 и N_2.

Изучению галактических облаков газа и пыли посвящены работы Дж.Ш.Хавтаси, который использовал в качестве материала карты Барнарда, Росса и Кальверт, а также другие источники. Каталогизировав туманности, в результате статистической обработки материала он нашел, что система темных туманностей является плоской, имеет некоторый наклон к плоскости галактического экватора и состоит из двух групп, одна из которых структурно связана с местной системой. Большинство туманностей оказалось ориентировано параллельно плоскости Галактики.

Работа Дж.Ш.Хавтаси была завершена выпуском полного цветного атласа галактических темных туманностей, расположенных в диапазоне галактических широт от -20^0 до $+20^0$.

Внегалактическая астрономия

Для более чем 200 галактик были определены показатели цвета и выявлена их корреляция с морфологическим типом галактик. Исследование степени и плоскости поляризации галактик показало, что их поляризация не обусловлена межзвездной средой нашей Галактики (М.А.Вашакидзе).

Статистически исследовано распределение видимых диаметров галактик и их центральных областей (Дж.Ш.Хавтаси).

На примере некоторых ярких галактик было показано, что модель нормальной логарифмической спирали не может быть адекватно применена для определения количества спиральных рукавов в нашей Галактике (Р.М.Дзигвашвили и Т.М.Борчхадзе).

В начале 70-х годов прошлого века была завершена многолетняя работа по созданию сводного каталога ярких галактик на магнитной ленте ЭВМ. Каталог систематически пополняется данными из публикующихся в мировой астрономической литературе каталогов и списков и в настоящее время содержит данные по 30 различным параметрам (координаты, данные фотографических, фотоэлектрических, радио- и инфракрасных наблюдений) почти для 35000 галактик. Каталог записан на CD ROM (Т.М.Борчхадзе, Н.Г.Когошвили).

Подсчет количества галактик в северном полушарии неба, имеющих видимое направление закручивания спиральных рукавов по часовой стрелке, показал их статистически значимое преобладание по сравнению с количеством галактик, имеющих направление закручивания рукавов в противоположную сторону. Это свидетельствует о том, что спиральные галактики распределены не случайно, т.е. имеет место анизотропия видимого распределения галактик относительно земного наблюдателя (Т.М.Борчхадзе, Н.Г.Когошвили).

Совместно с астрономами Южной Европейской обсерватории составлен список галактик южного неба, имеющих в спектре эмиссионные линии (Т.М.Борчхадзе и др.).

На основе исследования пространственного распределения галактик в некоторых подскоплениях, представляющих собой основные сгущения галактик в скоплении Девы, получено распределение объемной плотности галактик, средних скоростей и абсолютных звездных величин галактик различных морфологических типов в зависимости от центров подскоплений к периферии (Н.Г.Когошвили, Т.М.Борчхадзе).

В рамках международной программы по определению прецизионных положений радиоисточников определены точные положения 42 радиоисточников (Р.Я.Инасаридзе).

Изучение Солнца

Изучение фотосферных, хромосферных и корональных явлений Солнца, главным образом по программе Службы Солнца и во время наблюдения полных солнечных затмений – третье направление, в котором работы в Грузии были начаты вскоре после организации обсерватории на горе Канобили. Ввод в строй спектрогелиоскопа в Абастумани в 1937г. существенно пополнил тогда еще сравнительно бедную сеть солнечных станций, расположенных на различных меридианах, и сделал обсерваторию одной из опорных станций Службы Солнца. Во время Международного геофизического года (1957-1958), с установкой хромосферно-фотосферного телескопа с киносъемкой через фильтры и радиотелескопа, работающего на волне 1,5 м, участие Абастуманской обсерватории стало значительно содержательнее, выразившись в регулярных фотографических наблюдениях фотосферы и хромосферы в кальциевой и водородной линиях, патруле хромосферных вспышек и регистрации радиоизлучения Солнца.

Для изучения потемнения солнечного диска к краю в Абастумани в 1959-1960.гг. был изготовлен фотоэлектрический спектрометр для близкой инфракрасной области (0.5-2.5μ). Для исследования были выбраны инфракрасный триплет кальция (λλ 8498, 8542, 8662), а также водородные линии серий Пашена и Брэккета. Было выяснено, что при переходе от центра к краю солнечного диска полуширины и эквивалентные ширины спектральных линий уменьшаются, а их остаточные интенсивности увеличиваются (Хецуриани Ц.С.).

На основе анализа квазисинхронного наблюдательного материала спектров и фильтрограмм вспышек, спокойных, активных и петельных протуберанцев, корональных конденсаций, активных корональных узлов и др., накопленного с помощью солнечных телескопов Абастуманской астрофизической обсерватории в течение нескольких десятилетий, получен ряд следующих важных результатов.

Впервые получены снимки короны в красной линии при внезатменных условиях (Хецуриани Ц.С.).

Впервые измерена степень поляризации в резонансной эмиссионной линии кальция λ 4227 в протуберанцах и определен фактор деполяризации, на основе которого оценена величина магнитного поля протуберанца (Хецуриани Ц.С., Никольский Г.М.). Измерена также степень поляризации активного протуберанца в длинноволновой компоненте линии гелия λ 5876 (Хецуриани Ц.С., Тетруашвили Э.И.).

Ш.А.Сабашвили разработал метод определения оптического размера солнечных протуберанцев различных форм по асимптотическому поведению крыльев спектральных линий.

Исследованы физические и геометрические характеристики активных областей для холодных и горячих образований, их взаиморасположение и характер движения материи в этих системах. Измерены и построены распределения яркостей в эмиссионных линиях над активной областью. Хецуриани Ц.С., Тетруашвили Э.И. и Гиголашвили М.Ш. установлено, что свечение желтой корональной линии связано с областями большой пятнообразовательной деятельности. Свечение как зеленой, так и желтой корональных линий возникает в одних и тех же локальных областях.

Исследован характер движения материи петлеобразных и других структур, связанных со вспышками в линиях D_3 гелия и H_α водорода. Измеренные доплеровские скорости заключены в пределах от −200 до +150 км/сек. Скорости в корональных структурах оказались на порядок меньше (~10 км/сек).

Низкие магнитные петли, расположенные под открытым магнитным полем, соединяют локальные фотосферные участки через корону, играя роль своеобразных трубок. При определенных условиях по этим трубкам перетекает плазма, что способствует выравниванию физических параметров участков подножия петель и таким образом обеспечивает энергетическую стабильность активной области.

Изучены характеристики эруптивного протуберанца и окружающей его короны. С активизацией протуберанца увеличиваются температура и плотность в корональной части активной области. Начинается также образование новых корональных петель и лучевых структур. Статистический анализ параметров профилей красной и зеленой корональных линий, полученных на малом коронографе Обсерватории в течение 20-го цикла солнечной активности, показал, что интенсивности и полуширины контуров спектральных линий короны изменяются в зависимости от фазы солнечной активности. Это указывает на рост средней яркости, температуры и нетепловых скоростей короны с увеличением активности Солнца (Хецуриани Ц.С., Тетруашвили Э.И., Гиголашвили М.Ш).

Основными результатами изучения динамики, структуры и физического состояния спокойных протуберанцев являются: определение электронной концентрации, кинетической температуры и „турбулентной скорости" в спокойных протуберанцах; уточнение относительного химического состава солнечной атмосферы с использованием метода „кривых роста"; создание альтернативной модели спокойного протуберанца на основе изучения тонкой структуры линии K ионизованного кальция.

На основе анализа „квазисинхронных" высотных серий и длительных спектральных наблюдений спикул в линиях D_3 гелия и H_α водорода найдено, что лучевые скорости спикул по модулю как в линии D_3 гелия, так и в линии H_α водорода увеличиваются с высотой, причем для H_α-спикул они в 2-3 раза больше, чем для D_3-спикул. Определено время жизни спикул по наблюдениям в линиях гелия и водорода.

По "квазисинхронным" высотным сериям спектрограмм H_α-спикул, полученным на большом внезатменном коронографе, определены шкалы высот для отдельных спикул и хромосферы в целом.

Доказана возможность трансформации вертикальных пятиминутных колебаний в горизонтальные во время их распространения из нижних в верхние слои солнечной хромосферы при наличии магнитного поля (В.И.Кулиджанишвили).

Лучевые скорости спикул показывают пятиминутные колебания. H_α- и D_3-спикулы являются одними и теми же образованиями, но водород и гелий излучают в различных областях спикул (Хуцишвили Э.В.).

За последнее десятилетие в Абастуманской астрофизической обсерватории были проведены исследования дифференциального вращения различных слоев солнечной атмосферы, основанные на однородных наблюдательных данных, полученных в обсерватории в течение нескольких циклов солнечной активности по программе Службы Солнца.

Анализ большого материала наблюдательных данных показывает следующие особенности изменения скорости вращения Солнца с циклом солнечной активности:

Угловые скорости избранных больших пятен изменяются с фазой солнечной активности: замедление вращения пятен начинается на восходящей ветви солнечной активности и заканчивается на нисходящей, достигая минимума около максимума солнечной активности.

Найдены квазипериодические колебания плазмы в пятнах. Их период и амплитуда увеличиваются около максимума солнечной активности (Хуцишвили Э.В., Гиголашвили М.Ш., Квернадзе Т.М.).

При анализе данных о вращении водородных волокон/протуберанцев и больших солнечных пятен с целью выявления асимметрии N-S солнечного вращения были получены следующие результаты.

Знак асимметрии N-S изменяется в зависимости от четности/нечетности цикла солнечной активности с 22-летним периодом.

Высокая скорость вращения и его хорошо выраженная дифференциальность получены в северном полушарии для водородных волокон в течение циклов №№ 20, 22. В то же время твердое вращение больших пятен замечено в южном полушарии.

В течение цикла № 21 скорость вращения велика и дифференциальность хорошо выражена в южном полушарии, в то время как вращение больших пятен имеет твердотельный характер в северном полушарии.

В обоих полушариях обнаружено распространение квазидвухлетнего импульса остаточных скоростей от высоких широт к экватору, при этом волны интерферируют. Амплитуда квазидвухлетнего импульса в обоих полушариях изменяется нерегулярно (Гиголашвили М.Ш., Джапаридзе Д.Р.).

Активные области, возникающие вблизи границ фоновых магнитных полей, достигают самого высокого уровня развития.

Установлено, что влияние активной области распространяется на обширный участок в атмосфере Солнца, хотя и является кратковременным и не меняет основных характеристик крупномасштабных фоновых магнитных полей. Определены физические условия во флоккулах, находящихся на разных стадиях развития (Ограпишвили Н.Б.).

Прогнозирование наступающего цикла солнечной активности играет особо важную роль в гелиофизике. Прогнозирование характеристик наступающего цикла № 23 солнечной активности в Абастумани производилось тремя различными методами: методом анализа длительных наблюдательных рядов относительных чисел солнечных пятен (Хецуриани Ц.С., Гиголашвили М.Ш., Гоголадзе Н. А.); методом зависимости активности Солнца от четности/нечетности солнечного цикла (Хецуриани Ц.С., Гиголашвили М.Ш., Гоголадзе Н. А.); методом „предвестников", основанным на использовании геомагнитных возмущений, имевших место в конце предшествующего 11-летнего цикла солнечной активности.

Этими методами прогнозирования были установлены следующие характеристики для цикла № 23 солнечной активности:

Цикл солнечной активности № 23 начался в мае 1996 г. (минимум активности).

Максимум солнечной активности предсказан на вторую половину 2000 г. (что оправдалось!).

Максимальное значение средних предсказанных относительных чисел солнечных пятен равно 150 (±48), которое в пределах ошибок совпадает с наблюденным значением относительных чисел Вольфа.

Следующий минимум солнечной активности наступит в 2007 (±1) г. (Хецуриани Ц.С., Гиголашвили М.Ш.).

Для оперативного прогнозирования вспышек был проведен анализ различных характеристик структурных образований активных областей (Ограпишвили Н.Б.).

Ш.С.Макандарашвили создал Каталог необычных явлений в радиоизлучении Солнца, содержащий один цикл солнечной активности (1957-1967 гг). В Каталоге даны непрерывные записи радиоизлучения Солнца в отдельные моменты. В него внесены как отдельные, так и целая серия радиовсплесков. Приведена запись 954 всплесков радиоизлучения разных типов. Каталог помещен в интернет.

Полное солнечное затмение 19 июня 1936 года было первым затмением, наблюденным экспедицией Абастуманской астрофизической обсерватории (К.И.Захарин, В.В.Вихров и В.Б.Никонов). Во время этого затмения основное внимание было уделено радиометрии и поляриметрии солнечной короны.

Общая яркость короны 19 июня 1936 года равнялась половине яркости полной Луны. Все инструменты для радиометрических наблюдений были изготовлены в Ленинградском государственном оптическом институте, а прибор для поляриметрических наблюдений короны Солнца был сконструирован в механической мастерской Абастуманской обсерватории.

В последующие годы была организована целая серия экспедиций по наблюдению солнечных затмений под руководством М.А. Вашакидзе: 21 сентября 1941 года (Алма-Ата), 9 июля 1945 года (Финляндия), 20 мая 1947 года (Бразилия), 25 февраля 1952 года (Средняя Азия), 30 июня 1954 года (Грузия).

Экспедициями Абастуманской астрофизической обсерватории во время этих затмений изучалась поляризация солнечной короны. Первые исследования показали, что в среднем ее ход с расстоянием от поверхности Солнца согласуется с моделью ван де Хюлста, но в отдельных областях короны может отклоняться от нее. Наибольшая степень поляризации короны соответствует мощным корональным потокам над протуберанцами. В других областях степень поляризации соответствует рассеянию света свободными электронами. Эту теорию впервые выдвинул немецкий астроном К.Шварцшильд, а наблюдения М.А.Вашакидзе явились ее подтверждением.

Полное солнечное затмение 15 февраля 1961 года (Ростов-на-Дону) по причине плохой погоды было безрезультатным для абастуманских гелиофизиков. Однако во время следующих трех солнечных затмений (22 сентября 1968 года – в Западной Сибири, 10 июля 1972 года – на Чукотке и 30 июля 1973 года – в Африке) экспедициями Абастуманской обсерватории под руководством Г.Н.Салуквадзе и Ц.С.Хецуриани был получен ценный фотометрический и поляриметрический наблюдательный материал.

Были построены карты изофот и графики распределения яркости в различных радиальных направлениях, оценены интегральная интенсивность и степень сжатия короны. На основе анализа поляриметрического наблюдательного материала корона 22 сентября 1968 года была разделена на K- и F-составляющие. Было также исследовано изменение электронной плотности и температуры в зависимости от расстояния от края солнечного диска.

Наблюдать затмение 31 июля 1981 года предполагалось двумя экспедициями Абастуманской обсерватории. Одна должна была проводить наблюдения с территории Целиноградской области, Казахская ССР (В.И.Кулиджанишвили, Э.В. Хуцишвили, Р.И.Киладзе, Д.Р.Джапаридзе, А.И.Суладзе), вторая – в г. Братске (Ц.С.Хецуриани, Г.Ш.Джавахишвили, Ан.А.Амбарцумян, В.И.Дасаев).

Наблюдать затмение удалось только экспедициии в Целиноградской области. Программа наблюдений предусматривала проведение поляризационных исследований короны с помощью фотоэлектрических поляриметров. Конструкция поляриметра была разработана сотрудниками Лаборатории солнечной активности ИЗМИРАН АН СССР и Абастуманской астрофизической обсерватории.

Во время последующих шести полных солнечных затмений (11 июля 1991 года – в Мексике, 3 ноября 1994 года – в Бразилии, 24 октября 1995 года – в Индии, 9 марта 1997 года – в России, 11 августа 1999 года – в Турции и 21 июня 2001 года – в Замбии), охватывающих полный цикл солнечной активности, научными экспедициями, руководимыми В.И.Кулиджанишвили, при благоприятных погодных условиях были проведены успешные наблюдения солнечной короны.

Наблюдения, проведенные во время последних солнечных затмений, отличаются от прежних тем, что они проводились при помощи аппаратуры, снабженной электронной и компьютерной техникой, почти на порядок увеличившей точность полученных результатов и скорость фиксирования явлений.

При затмении 1991 года параметры солнечной K-короны с высокой точностью были измерены при помощи электрополяриметра оригинальной конструкции, который был сконструирован в Абастуманской обсерватории В.И.Кулиджанишвили, А.К. Майером и С.В.Даником.

Во время полного солнечного затмения 3 ноября 1994 года в Бразилии с помощью данного поляриметра было осуществлено сканирование солнечной короны по 10 концентрическим окружностям до 4 солнечных радиусов. Получено, что в корональных лучах температура $T = 1.53 \times 10^6$ K, а плотность в интенсивном луче примерно вдвое больше, чем в лучах, находящихся в квадрантах SW и NW. По этим данным представлена модель короны 3 ноября 1994 года и выведены эмпирические формулы для изменения плотности вдоль корональных лучей. Особое внимание было уделено определению направления плоскости поляризации.

Электрополяриметр был также успешно применен во время солнечного затмения 11 августа 1999 года, которое наблюдалось с территории Турции. Экспедиция Абастуманской астрофизической обсерватории была разделена на две группы. Одна из них в составе В.И. Кулиджанишвили (руководитель экспедиции), В.П. Джапиашвили, Э.К. Годеридзе, Т.М. Борчхадзе, Г.Ш. Джавахишвили, Ан.А. Амбарцумян была направлена в г. Турхал, где она присоединилась к группе турецких астрономов и студентов из Стамбульского университета, которую возглавлял Т. Озкан. Вторая группа грузинских астрономов в составе М.Ш. Гиголашвили (руководитель экспедиции), Ц.С.Хецуриани, Э.В. Хуцишвили, Р.И. Киладзе, Г.И. Салуквадзе, Л.А. Геонджян, Д.Р. Джапаридзе и З.Г. Капанадзе совместно с турецкими коллегами во главе с А.Октеном разместилась в г.Элазиге.

Научная программа совместной грузино-турецкой экспедиции была довольно обширной. В настоящее время наблюдательный материал, полученный обеими группами, находится в процессе обработки.

Обрабатывается также наблюдательный материал, полученный В.И.Кулиджанишвили во время полного солнечного затмения 21 июня 2001 года в Замбии.

Поверхность Луны. Планеты и кометы

В Абастуманской обсерватории в 1950 г. впервые в СССР был применен электрополяриметрический метод изучения физических свойств лунной поверхности. Была доказана реальность отрицательной поляризации отраженного от лунной поверхности света. Поляриметрическим методом было обнаружено преходящее явление – кратковременное изменение яркости лунного света, подтверждающее существование активных процессов на Луне (В.П.Джапиашвили). Поляриметрический метод был усовершенствован Л.В.Ксанфомалити. Им был создан автоматический электронный поляриметр для измерения отдельных точек на Луне и других небесных объектах. Затем им же был изобретен качественно новый электронный прибор - поляровизор, позволяющий получать поляризационные изображения Луны.

А.Н.Королем и А.К.Майером был создан оригинальный прибор, поляровизор-дискриминатор, с помощью которого был накоплен наблюдательный материал, подготовлен и издан „Поляриметрический атлас Луны", получивший премию им. Ф.А.Бредихина Академии наук СССР (В.П.Джапиашвили и А.Н.Король).

На основе богатого и отличающегося однородностью поляриметрического наблюдательного материала по отдельным ("точечным") лунным образованиям была проведена спектрополяриметрия лунной поверхности и образцов лунного грунта (О.И.Кварацхелия).

О.И.Кварацхелия, А.Н.Король и А.К.Майер провели лабораторные поляриметрические измерения 20 образцов лунного грунта, доставленных на Землю межпланетными кораблями серий "Луна" (СССР) и "Аполлон" (США).

Для исследования корреляции оптических характеристик лунных и земных магматических пород с их химическим составом в лабораторных условиях были измерены более 400 образцов вулканического происхождения с различным химическим составом и с разными размерами частиц. Были установлены коррелятивные связи оптических параметров (степень поляризации, альбедо, цвет) для окислов железа, титана, кремния, алюминия и магния. Было проведено трехпараметрическое районирование лунной поверхности по значениям альбедо, цвета и степени поляризации. Получены карты изученности лунной поверхности по местам посадок космических аппаратов, доставивших лунный грунт на Землю. По картам, полученным с помощью АЛС "Луна-16,20 и 24" и КК "Аполлон-11,12,14,16 и 17", изучено около 15% поверхности Луны. Была изучена относительная пористость реголита Луны. Получены соответствующие карты-схемы лунной поверхности, на которых указаны регионы распространения тонкой фракции грунта. Идентификация районов с преимущественным распространением тонкой фракции в поверхностном слое чрезвычайно важна на ранних этапах проектных работ по лунной базе, поскольку именно в массе тонкой фракции грунта (с размерами частиц меньше 45 мкм) содержатся наибольшие количества водорода и гелия-3 – основных элементов в природных ресурсах Луны (О.И.Кварацхелия).

Поляриметрический метод использовался также для исследования атмосфер планет-гигантов и галилеевых спутников Юпитера. Была обнаружена сильная зависимость степени поляризации света, отраженного от полярных областей Юпитера, от фазового угла (О.Р.Болквадзе).

Определены средние размеры аэрозольных частиц в атмосферах Юпитера (~0.26 μ) и Сатурна (~ 1 μ). Оценена оптическая толщина надоблачной атмосферы Юпитера (~0.05) и кольца В Сатурна (1±0.4). Для 6 значений фазового угла Юпитера составлены графические карты распределения поляризации на поверхности планеты (О.Р.Болквадзе, Л.А.Сигуа).

Анализ наблюдательного материала показал, что в атмосферах Юпитера и Сатурна, кроме аномальных явлений, отмечаются изменения поляризационных характеристик с периодами как 3-4 года, так и 11-12 лет.

Найдено, что в максимуме солнечной активности степень поляризации диффузно отраженного от гигантских планет света для любого значения фазового угла отличается от нуля. Одновременно подтверждено существование ориентированных частиц в атмосферах Юпитера и Сатурна.

Степень поляризации света, отраженного от галилеевых спутников, в близких к оппозиции фазах положительна, когда фазовый угол $\alpha<0.4^0$, и отрицательна, когда $\alpha>0.8^0$. Это указывает на существование второй точки инверсии (Р.А.Чигладзе).

В 1966 году, при пересечении Землей плоскости колец Сатурна, была решена проблема трехсотлетней давности – измерение толщины колец (Р.И.Киладзе). Она оказалась равной 1.4±0.5 км, что очень близко к последующим определениям этой величины.

При прохождении Меркурия по диску Солнца в 1973г. Р.И.Киладзе была обнаружена рефракция вблизи диска планеты (эффект Ломоносова), что равносильно обнаружению атмосферы вокруг него. Измеренная величина рефракции указывает на плотность атмосферы Меркурия, составляющую не более одной тысячной от земной.

В обсерватории выполнялись фотографические наблюдения спутников Марса во время противостояний. Полученные высокоточные положения использовались для уточнения их орбит (А.Ш.Хатисашвили, Г.Н.Салуквадзе, С.М.Чантурия).

В обсерватории ведутся систематические фотографические наблюдения комет и малых планет с целью определения их точных положений. Исследованы физические параметры комет Аренда-Роланда (1956 в), Мркоса (1957 d), Икейя-Секи (1956 н) и Шумейкера-Леви (Г.Н.Салуквадзе, В.П.Джапиашвили, И.Р.Бейтришвили, Р.И.Киладзе). Фрагменты кометы Шумейкера-Леви наблюдались незадолго до их падения на Юпитер.

Впервые обработан изофотометрический атлас комет Хегнера-Рихтера. Найдены новые зависимости скорости истечения газов в нейтральных комах 17 ярких комет с изменением их гелиоцентрического расстояния. На основе полученных зависимостей сделан вывод о токсономии кометных ядер. Предложен "реликт-тест" для выявления необлученного реликтового кометного вещества (И.А.Симония).

Небесная механика

В области небесной механики и теоретической астрономии следует особо отметить исследования Н.Г.Магнарадзе (Тбилисский государственный университет).

Н.Г.Магнарадзе изучила поле притяжения метеорного потока, распределенного по эллиптической орбите, вывела разложение ньютонова потенциала эллиптической орбиты и исследовала сходимость этого разложения в некоторых точках на границе сходимости. Она рассмотрела некоторые частные случаи ограниченной задачи трех тел, когда масса исследуемого тела является заданной функцией времени, в том числе движение в гравитационном поле с двумя неподвижными центрами; представила решения основных дифференциальных уравнений движения в виде степенных рядов по времени, вывела рекуррентные соотношения для их коэффициентов и доказала сходимость этих рядов. Н.Г.Магнарадзе изучила поступательное движение космического тела относительно Земли, а также подлет тела с переменной массой к Венере.

В дальнейшем Н.Г.Магнарадзе исследовала нерегулярное движение тел с переменной массой вблизи момента соударения, а также релятивистские эффекты в случае, когда масса является аналитической функцией времени.

В ряде работ Н.Г.Магнарадзе, обобщив метод Дж.Стефенсена, исследовала прямые и обратные, регулярные и нерегулярные задачи движения тел с переменной массой в ньютоновом гравитационном поле с учетом реактивных сил и атмосферного сопротивления. Ее результаты получили широкое признание.

Ц.Г.Читаладзе (Тбилисский государственный университет) исследовала обобщенную задачу движения в ньютоновском гравитационном поле с двумя неподвижными центрами в случае тела переменной массы. Она изучила также обратную задачу регулярного движения тела переменной массы в этих же условиях.

И.П.Тарасашвили (Государственный политехнический университет) рассмотрел с точки зрения небесной механики известную гипотезу Гильдена-Мультона о происхождении противосияния и исследовал движение кометы в далеких областях солнечной системы. Он показал, что эксцентриситет оскулирующей орбиты кометы уменьшается с ростом гелиоцентрического расстояния. И.П.Тарасашвили исследовал также движение материальной точки, расположенной на окраине солнечной системы (схема Фату), и устойчивость этого движения.

М.П.Имнадзе (Институт вычислительной математики Академии наук Грузии) исследовал уравнения движения в задаче двух тел в сферических координатах, найдя шесть интегралов системы, и показал их взаимную независимость. При этом он разработал метод определения орбит, в котором применяются интегралы в новой форме.

А.В.Пурцхванидзе предложил метод, по которому устанавливается существование корней уравнений Лагранжа, и дал улучшенный способ вычисления отношений площадей сектора и треугольника в задаче двух тел.

Г.А.Тевзадзе (Государственный политехнический университет) рассмотрел движение звезд в системах типа Трапеции и вопросы устойчивости таких систем. Им получен критерий распада системы трех тел (критерий Тевзадзе).

М.Г.Сагинашвили (Институт вычислительной математики Академии наук Грузии) выполнил ряд работ, касающихся изучения движения в системах небесных тел в случае разных потенциалов. Среди них – третий интеграл движения и поле скоростей для квазигуковского потенциала.

Р.И.Киладзе рассмотрел ограниченную задачу трех тел применительно к проблемам космогонии солнечной системы. Им построена теория возникновения осевого вращения планет при их росте за счет межпланетной материи (гипотеза О.Ю.Шмидта). На основе этой теории установлена функциональная зависимость скорости вращения планеты от ее массы и радиуса орбиты, оценен средний радиус допланетных частиц и сделано несколько предсказаний (малость массы Плутона, наличие у него неизвестного тогда спутника, существование вокруг него спутникового роя, а также существование пылевой материи за орбитой Плутона), большинство из которых впоследствии оправдалось.

В течение последнего десятилетия Р.И.Киладзе опубликован ряд работ по рационализации системы уравнений ограниченной задачи трех тел и теории движения геостационарных спутников. Им получен новый интеграл движения, что является редким случаем в небесной механике: до этого были известны лишь пять подобных интегралов, четыре из которых принадлежит Ньютону, а один – Якоби.

Новые небесные объекты, открытые грузинскими астрономами

Интенсивные наблюдения, проводимые абастуманскими астрономами, позволяют время от времени открывать новые небесные объекты.

В декабре 1942 года Г.А.Тевзадзе открыл две кометы. Одна из них была им подробно исследована: измерены координаты, описано изменение формы, определен тип хвоста и т.д.

В 1948 г. Р.А.Бартая открыла в созвездии Змеи новую, которая в тот момент была сравнительно яркой (9-ой зв. величины), что способствовало ее подробному спектрофотометрическому изучению.

При помощи 70-сантиметрового менискового телескопа в 1958-61 гг. С.П.Априамашвили открыл три объекта, которым были присвоены имена: Новая Щита 1958, Новая Стрельца 1960 и Новая Змееносца 1961. В 1961 г. им же были открыты 17 планетарных туманностей, две звезды типа Вольф-Райе и одно открытое звездное скопление. С менисковым телескопом связано и открытие пекулярных звезд Р.А.Бартая, Н.Б.Каландадзе, МД.Метревели и К.Б.Чаргеишвили, а также углеродных и H_α - эмиссионных звезд М.В.Долидзе. С конца 60-х годов в обсерватории ведется интенсивная работа по выявлению вспыхивающих звезд. За пионерскими работами Р.И.Киладзе в области туманности Ориона (в 1968-71гг. им было открыто 40 вспыхивающих звезд) последовали наблюдения Р.Ш.Нацвлишвили не только в области туманности Ориона, но и в Плеядах, приведшие к открытию сотен новых объектов.

С 1961 года Абастуманская обсерватория включилась в международную программу по фотографическому патрулированию богатых внегалактическими туманностями областей с целью открытия сверхновых звезд. По этой программе А.Д.Чуадзе в 1967 г. удалось открыть сверхновую звезду в галактике NGC 3389. Впоследствии Г.Н.Кимеридзе на фотографиях, полученных с помощью анаберрационной камеры Шмидта, открыл шесть сверхновых звезд в галактиках NGC 4165, 4647, 3733, 4419, 4579 и одну – в анонимной галактике.

Еще одна сверхновая в галактике NGC 7448 была открыта Р.Я.Инасаридзе в 1980 г. при помощи 40-сантиметрового двойного астрографа Цейсса.

В конце августа 1975 г. в созвездии Лебедя Р.И.Киладзе была открыта Новая, достигшая в максимуме 2-ой зв. величины. Исключительная яркость этого объекта позволила детально изучить ее физические характеристики. Оригинальная методика обработки спектрального материала позволила автору установить наличие 9 облаков газа с различными скоростями, выброшенных при вспышке звезды.

В 1997 г. Г.Н.Кимеридзе и Р.Я.Инасаридзе при помощи 40-сантиметрового двойного астрографа начали патрулирование туманности Андромеды с целью обнаружения в ней вспышек Новых. Ими зафиксировано 6 событий, причем 3 из них обнаружены раньше других наблюдателей.

Телескопы Абастуманской обсерватории

Установка в Абастуманской обсерватории каждого нового телескопа, как звездного, так и солнечого, являлась важным событием для грузинской наблюдательной астрономии. За время существования обсерватории были установлены восемь звездных и семь солнечных телескопов. Ниже приводятся их краткие характеристики.

1. Звездные телескопы

1. 33-сантиметровый рефлектор (с фокусами f=165см (ньютоновский) и f=600см (нэсмитовский)). Работает с 1932 года.
2. 40-сантиметровый рефрактор (f= 680см). Работает с 1937 года.
3. 20-сантиметровый двойной астрограф Цейсса (f =100см). С 1937 по 1963 год работал на 40-сантиметровом рефракторе, а с 1963 года – как самостоятельный телескоп.
4. 44-сантиметровая анаберрационная камера Шмидта (f = 625см). Работает с 1940 года.
5. 70-сантиметровый менисковый телескоп АС-32 (f =210см в прямом и f=1050см в нэсмитовском фокусах). Работает с 1955 года.
6. 48-сантиметровый рефлектор АЗТ-14 (f =210см в прямом фокусе и f=770см в нэсмитовском). Работает с 1966 года.

7. 125-сантиметровый рефлектор АЗТ-11 (f =1580см). Работает с 1978 года.

8. 40-сантиметровый двойной астрограф Цейсса (f =300см). Работает с 1979 года.

2. Солнечные телескопы

1. Спектрогелиоскоп Хейла. Диаметр объектива 10см, фокусное расстояние 500см, световой диаметр зеркала и дополнительного зеркала 22.5см. Установлен в 1938г.

2. Хромосферно-фотосферный телескоп. Первая камера – хромосферный телескоп. Диаметр объектива 6см, эквивалентные фокусные расстояния 543 и 214см. Вторая камера – фотогелиограф. Диаметр объектива 13см, эквивалентное фокусное расстояние 908см. Установлен в 1957 году.

3. Горизонтальный солнечный телескоп АЦУ-5. Диаметр объектива 44см. Фокусное расстояние в системе Ньютона 1750см, в системе Кассегрена – 6054см. Работает с 1965 года.

4. 12-сантиметровый коронограф типа Лио. Диаметр объектива 12см, f =300см. Работает с 1966 года.

5. 53-сантиметровый внезатменный коронограф (f =800см). Работает с 1977 года.

6. Радиотелескоп параболический (d =100см, λ=3.25см). Работает с 1986 года.

7. Радиотелескоп синфазный, многодипольный (S =20кв.м., λ =1.43м.). Работает с 1957 года.

Изучение верхней атмосферы Земли

Одним из эффективных методов изучения верхней атмосферы Земли является фотометрия сумеречного неба; она позволяет обнаруживать люминесценцию отдельных слоев атмосферы. Исследования в этой области были предприняты в Абастумани еще в начале сороковых годов XX в. (в видимом и инфракрасном участках спектра). Были получены систематические данные о вертикальном распределении давления и плотности атмосферы в диапазоне высот от 30 до 120-130 км. Установлены закономерные сезонные изменения показателя цвета сумерек. Обнаружена корреляция между спектральными характеристиками верхних слоев атмосферы, солнечной активностью и характеристиками ионосферы. Обнаружена также люминесценция в близком инфракрасном участке спектра, наблюдаемая в двух сравнительно тонких слоях на высотах 30-40 и 90-100 км.

Эти исследования изложены в монографии Т.Г.Мегрелишвили.

В 1992 году Т.Г.Мегрелишвили опубликовала работу о регулярных и нерегулярных вариациях параметров средней и верхней атмосферы по наблюдениям сумеречного света за 1942 - 1988 гг. Многолетние систематические наблюдения позволили установить, что сумеречная атмосфера испытывает регулярные периодические колебания с периодами 22, 11, 5.5, 1, 1/2 и 1/3 года, причем 22-и 11-летние колебания оказались синхронными с известными циклами солнечной активности. Было показано, что колебания носят глобальный характер и сохраняются на разных уровнях.

Сезонный характер особенностей глобальной циркуляции атмосферы таков, что именно зимой возмущения из нижней атмосферы передаются в среднюю и верхнюю атмосферу посредством вертикальных потоков.

В Абастумани ведутся систематические электрофотометрические наблюдения свечения ночного неба, главным образом в инфракрасной области спектра (Л.М.Фишкова). Многолетний материал позволил установить сезонный ход интенсивности свечения, подойти к изучению его связи с солнечной активностью, выяснить различные закономерности вариаций свечения. Применение комплекса фотометрических и спектральных приборов, работающих в широком спектральном диапазоне, позволило вести измерения интенсивности известных эмиссий ночного неба (кислорода, натрия, гидроксила) и фиксировать появление в спектрах ночного неба линий, характерных для спектров низкоширотных полярных сияний, возникающих во время сильных геомагнитных возмущений.

Описание закономерностей вариаций ночного излучения верхних слоев атмосферы Земли в средних широтах дано в монографии Л.М.Фишковой .

Исследования регулярного ночного хода эмиссий обнаружили две компоненты: одну, относящуюся к лунным, вторую – солнечным термическим полусуточным приливам.

Сезонные вариации отмеченных эмиссий ночного неба обнаруживают колебания с периодами в 12 и 6 месяцев, связанные с годовыми колебаниями малых составляющих атмосферы.

Исследованные Л.М.Фишковой регулярные вариации эмиссии атомарного кислорода на 630нм отображают процессы ионизации и рекомбинации в ионосферной F-области.

Согласно многолетним наблюдениям распределение интенсивности в непрерывном спектре свечения ночного неба в области 470-670нм характеризуется уменьшением интенсивности с ростом длины волны. Среднегодовые интенсивности полос меняются в фазе с 11-летним циклом солнечной активности. Заметный вклад в непрерывный спектр ночного неба вносит многократное рассеяние солнечного света в области земной тени.

Большой вклад в изучение водорода в верхней атмосфере по наблюдениям H_α-эмиссии, наряду с Л.М.Фишковой, внесла Н.М.Марцваладзе. Ею были получены важные данные о количестве, пространственном распределении и динамике атомарного водорода в верхней атмосфере и геокороне.

Н.М.Марцваладзе и Л.М.Фишковой исследованы характеристики нерегулярного поведения эмиссий на 630нм и 656нм (водород), связанных с магнитосферно-ионосферными процессами в период геомагнитных возмущений. Показано, что во время магнитных бурь происходит разогрев и высыпание ионов в верхнюю атмосферу, возбуждающих H_{α}-эмиссию.

Эти работы, продолженные в дальнейшем В.М.Искандаровой, представляют большой интерес из-за возможных серьезных последствий антропогенного воздействия на слой озона.

Многолетние наблюдения атмосферного натрия позволили установить основные закономерности его поведения в пространстве и во времени, вертикальную структуру, воздействие лунных приливов и др. Исходя из концепции, что слой натрия в атмосфере формируется в результате транспортировки его из области накопления метеорного вещества в область высот его интенсивного окисления, было получено соотношение, связывающее поток натрия вследствие турбулентного переноса с вертикальным градиентом концентрации натрия. Это дало, в свою очередь, возможность определить вертикальный ход коэффициента турбулентной диффузии.

Эпизодическое появление в спектрах сумеречного неба эмиссии лития на 671нм связано в основном с испытаниями ядерного и термоядерного оружия в атмосфере. Регистрация эмиссии лития в Абастумани с 1958 до 1970 г. позволила определить высоту и протяженность излучающего слоя, а также оценить скорости его горизонтального перемещения и диффузии.

Наблюдения за эмиссией атомарного кислорода велись ночью с помощью 4-азимутального электрофотометра как в Абастумани, так и в Душети, с целью осуществления одновременных наблюдений из двух пунктов, расстояние между которыми сравнимо с высотой свечения (95-100 км).

Оценки температуры термосферы, концентрации атомарного кислорода и вектора скорости на высоте 300 км одновременно в трех точках неба подтвердили факт разогрева верхней атмосферы в приэкваториальной области при распаде кольцевого тока во время главной фазы магнитной бури с внезапным началом, действие которого распространяется до геомагнитных широт Закавказья.

В начале 60-х годов XXв. большой интерес для аэрономии вызвало изучение эмиссии атмосферного гелия в инфракрасной области спектра, впервые обнаруженной в 1958 году в спектре сумеречного неба в северных широтах во время полярного сияния и в 1964 году – на широте Абастумани (Т.И.Торошелидзе). Установлено, что в гелиевой оболочке Земли фронт возмущений в основном перемещается от утреннего терминатора. Для объяснения этого эффекта предложен плазменный механизм генерации электронов медленными магнитозвуковыми колебаниями, возникающими в результате трансформации дрейфовых волн в терминаторной зоне. В такой интерпретации терминатор является источником колебаний, перекачивающим энергию из освещенной области термосферы на ночную сторону.

В вариациях свечения ночного неба обнаружено отображение сейсмической активности. Показано, что сейсмическая активность вызывает увеличение интенсивности эмиссии на 558нм и уменьшение интенсивностей эмиссий гидроксила и водорода на 630нм, а также увеличение скорости меридиональной составляющей термосферного ветра, увеличение температуры и уменьшение концентрации молекулярного кислорода на высоте около 300 км (Л.М.Фишкова, Т.И.Торошелидзе).

На основе наблюдательных данных об интенсивности собственного свечения ночного неба в красной (630.0нм) и зеленой (557.7нм) линиях, а также в полосах гидроксила (8-3) были теоретически объяснены динамические явления, характерные для мезосферно-термосферных высот.

Увеличение интенсивности зеленой линии и одновременное уменьшение интенсивности красной линии перед землетрясением объясняется изменением вертикального потока атомарного кислорода, усилением и диссипацией атмосферных акустико-гравитационных волн на термосферных высотах (Г.Г.Дидебулидзе, Л.М.Фишкова, А.Д.Патарая, Т.И.Торошелидзе).

Импульсное увеличение интегральной интенсивности красной кислородной линии (630.0нм) с длительностью 20-40 мин. объясняется прохождением солитона внутренних гравитационных волн (Г.Г.Дидебулидзе и А.Д.Патарая).

Найдены спектры короткопериодических атмосферных гравитационных волн. Они существенны для объяснения глобального изменения интенсивностей полос гидроксила и зеленой линии вблизи весеннего и осеннего равноденствий.

Исследованы вихревые структуры нейтральной среды на термосферных высотах. Указана их роль в термосферно-мезосферных циркуляционных моделях (Г.Г.Дидебулидзе).

В стратосфере существует слой аэрозоля, мощность которого возрастает во время эруптивных извержений вулканов, когда пепел и газы забрасываются непосредственно в атмосферу. На умеренных широтах, в частности на широте Абастумани, из-за разрыва в тропопаузе проникновение газов из тропосферы в стратосферу интенсивнее, чем на высоких и низких широтах. Поэтому связь динамики стратосферного аэрозольного слоя с активностью наземных источников аэрозоля и газов-предшественников проявляется здесь непосредственным образом. Особенно четко удалось выявить динамику и сложную структуру стратосферного аэрозольного слоя после извержений вулканов Сент-Хеленс (в

1980г.) и Эль-Чичон (в 1982 г.) (Г.Г.Матешвили, Ю.Д.Матешвили, С.П.Чилингарашвили).

С целью исследования стратификации аэрозоля в стратосфере в интервале высот 15-50 км в эксперименте по советско-американскому проекту "Союз-Аполлон"(ЭПАС) с космических кораблей "Союз-16" и "Союз-19" при участии Абастуманской обсерватории была осуществлена панорамная фотографическая фотометрия дневного горизонта Земли на всем протяжении траектории космического корабля над освещенной частью планеты (Ю.Д.Матешвили и др.).

Первые исследования оптических характеристик атмосферы методом сумеречного зондирования на высотах от 30 до 80 км были начаты в обсерватории в 40-х годах прошлого столетия. Обнаружение в 40-х годах аэрозольного слоя на высотах 40-60 км представляет особый интерес.

Существование этого слоя было отчетливо выявлено с помощью корреляционного анализа зависимости степени поляризации рассеянного света от высоты, полученной в 1949-1951 гг. Степень поляризации рассеянного света близка к релеевской (Г.Г.Микиртумова).

С 80-х годов исследовательский интерес переместился на изучение распространения в атмосфере пылевого компонента космического происхождения. Одним из его источников было прохождение кометой Галлея перигелия в феврале 1986 г., вторым – прохождение перигелия кометой Темпля-Туттля в 1998 г. и связанный с ней метеорный дождь Леонид.

Продемонстрирована картина вторжения в атмосферу пылевых частиц, их накопления на разных высотах и дальнейшего перераспределения.

В 1998 г. над Грузией наблюдалось уникальное и замечательное явление: метеорный поток Леонид пронесся в виде болидного дождя. Во время этого метеорного потока проводился подсчет часовых чисел метеоров.

Наблюдения интенсивности рассеянного сумеречного света в периоды метеорного потока Леонид в 1998 и 1999 годах показали, что в атмосферу было внесено большое количество пыли.

Разработана модель, описывающая формирование метеорного потока в результате выброса вещества из ядра кометы и его последующей эволюции. Модель позволяет предсказывать максимум активности метеорного потока с точностью до одной минуты.

Долговременные сумеречные наблюдения указывают на постоянное присутствие пылевых слоев в атмосфере на высотах между 50 и 150 км. (Ю.Д.Матешвили, Г.Г.Матешвили).

Результаты, полученные в 60-70 гг. XXв. как методом сумеречного зондирования, так и другими методами, демонстрируют высокую степень запыленности атмосферы в эти годы. Особенно интересен феномен 1968 г., когда наблюдалась аномально высокая запыленность атмосферы.

На основе наблюдений, полученных в Абастумани, разработана оптическая модель стратификации аэрозоля в атмосфере (Т.Г.Мегрелишвили, Ю.Д.Матешвили, Г.Г.Матешвили).

Наконец, следует упомянуть об исследовании атмосферного режима горы Канобили, первоначально связанное с выбором места для строительства первой в СССР высокогорной астрофизической обсерватории. В дальнейшем эти исследования в Абастуманской обсерватории велись почти постоянно: изучались метеорологические и оптические характеристики, определялись продолжительность безлунного наблюдательного времени и качество изображения звезд (Е.К.Харадзе и Г.Н.Салуквадзе).

Астрономическое образование

Помимо чисто научных достижений в Грузии повышался общий уровень астрономического образования. Были восстановлены древние традиции распространения астрономических знаний. В 30-е годы в Тбилисском государственном университете была создана кафедра астрономии, более полувека руководимая Е.К.Харадзе. Началась подготовка научных и педагогических кадров, ведущих исследовательские работы в Абастуманской обсерватории, а также обучение будущих поколений астрономов. Была создана серия оригинальных учебников для студентов: „Сферическая астрономия" (А.Бенашвили), „Основы астрономии", „Астрофизика", „История астрономии" (Е.К.Харадзе); лекционные курсы по теоретической астрофизике, звездной астрономии, сферической астрономии (Р.И.Киладзе, Ш.А.Сабашвили, М.Г.Колхидашвили, Г.Д.Квирквелия, Г.Т.Кеванишвили) и др; школьный учебник по астрономии Е.К.Харадзе – единственный оригинальный курс, написанный в союзной республике.

Широко велась пропаганда астрономических знаний, издавались научно-популярные книги о новых открытиях в астрономии, достижениях космонавтики (Е.К.Харадзе, М.Г.Колхидашвили, М.П.Имнадзе, Ш.А.Сабашвили, Г.Д.Квирквелия и др.). Ученые также выступали по радио и телевидению, читали лекции в обществе „Знание", принимали экскурсии в Абастуманской обсерватории и учебном планетарии университета. Работники обсерватории и сотрудники кафедры астрономии помогали астрономическому кабинету и кружку во Дворце пионеров, консультировали прессу при освещении астрономических явлений, руководили проведением финальных стадий школьных астрономических конференций, составляли конкурсные задачи для астрономических олимпиад, проводили их финальные туры.

В начале эры космонавтики в Тбилиси, Абастумани, Батуми и др. велись регулярные наблюдения спутников с целью уточнения их орбит.

Грузинские астрономы участвовали в работе всесоюзных и международных обществ: ВАГО, МАС и др. Создана Ассоциация грузинских астрономов. Отметим многолетнюю работу Е.К.Харадзе председателем всесоюзной комиссии по проблемам строения Галактики, а также вице-президентом МАС.

С 1960 г. издается ежегодный астрономический календарь.

Об авторитете грузинских астрономов свидетельствует большое число международных конференций, симпозиумов, рабочих совещаний и др., проведенных в Грузии в разное время.

С 1937 года обсерватория издает „Бюллетень Абастуманской астрофизической обсерватории". В 2004 году вышел в свет очередной, 77-й, выпуск. Изданы „Атлас галактических туманностей" (автор Дж.Ш.Хавтаси, 1960) и „Поляриметрический атлас Луны" (авторы В.П.Джапиашвили и А.Н.Король, 1982).

Библиография работ грузинских астрономов, опубликованных в 1921-2000гг., приведена в „Бюллетенях" Абастуманской обсерватории под номерами 25, 40, 62, 70, 71, 74 и 75.

Работы, выполненные грузинскими астрономами, были отмечены Государственной премией СССР за 1971 год (Р.И.Киладзе), премией им. Ф.А.Бредихина за 1983 год (В.П.Джапиашвили и А.Н.Король), медалью Астрономического совета АН СССР „За обнаружение новых астрономических объектов" (Р.Ш.Нацвлишвили), медалью Тихоокеанского астрономического общества „За открытие комет" (Г.А.Тевзадзе).

Абастуманская обсерватория АН Грузии, созданная как первая в СССР высокогорная астрофизическая обсерватория в целях испытания первого отечественного телескопа и звездного электрофотометра и внедрения в астрономические наблюдения новых физических методов, решив эти задачи, в дальнейшем своем развитии в условиях научно-творческого сотрудничества с ведущими астрономическими учреждениями мира сложилась в многопрофильное астрономическое учреждение.

На этом заканчиваем краткий обзор основных астрономических работ, выполненных в Грузии в XX веке. Как видно из этого очерка, научные исследования в области астрономии в республике были проведены в основном силами Абастуманской астрофизической обсерватории АН Грузии.

Поступила 25.04.2002
Абастуманская астрофизическая
обсерватория им. Е.К.Харадзе

Литература

1. Абуладзе О.П. Фотоэлектрические стандарты в избранных площадках Каптейна КА 1-43. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1982, 55, 3-52.
2. Алания И.Ф. Исследование избирательного поглощения света в Галактике по цветовым избыткам короткопериодических цефеид. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1959, №23, 3-67
3. Алания И.Ф. и Абуладзе О.П. uvbyβ-электрофотометрия звезд типа RR Лиры. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1986, №61, 15-78.
4. Арчемашвили В.М., Дзигвашвили Р.М. Оценка возрастов скоплений М 67 и NGC 2420 на основе их функции светимостей. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1986, №61, 193-204.
5. Бартая Р.А. Массовая двухмерная спектральная классификация звезд в площадках Каптейна и применение ее данных к решению звездно-астрономических задач. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1979, №50, 3-239.
6. Бартая Р.А. Каталог спектральных классов и классов светимости 10 396 звезд в площадках Каптейна №№2-43. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1979, №51, 3-317.
7. Болквадзе О.Р. Исследование поляризационных свойств Юпитера. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1980, №53, 131-161.
8. Вашакидзе М.А. Изучение галактического поглощения света по избыткам цвета внегалактических туманностей и долгопериодических цефеид и другими методами. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1953, №13, 1-164.
9. Вашакидзе М.А. Изучение состояния степени поляризации в излучении нескольких внегалактических туманностей и Крабовидной туманности. Тр. Кутаис. гос. пед. инст. 1956, 15, 473-487.
10. Gigolashvili M.Sh., Zhugzhda Yo. D. Fine Structure of Motions in a Quiescent Prominence. Solar Phys., 1982, 77, 95-108.
11. Дзигвашвили Р.М. Изучение галактических орбит и некоторые закономерности в движениях звезд. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1955, №18, 115-170.
12. Дзигвашвили Р.М., Маласидзе Г.А., Мдзинаришвили Т.Г. О статистическом анализе движения шаровых звездных скоплений в Галактике. Астрофизика, 1998, т.41, вып.1, 101-112.
13. Дидебулидзе Г.Д. Атмосферные гравитационные волны в горизонтальном сдвиговом течении. Геомагнитизм и аэрономия, 2000, т.40, №4, 88-96.
14. Джапиашвили В.П., Король А.Н. Поляриметрический атлас Луны. Тб., «Мецниереба», 1982.

15. Долидзе М.В. Списки S, C, M звезд и эмиссионных объектов, выявленных наблюдениями в красных лучах. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1975, №47, 3-144.
16. Japaridze D.R., Gigolashvili M.Sh. Investigation of the Solar Differential Rotation by Hydrogen Filaments in 1976-1986. Solar Phys., 1992, 141, 267-274.
17. Каландадзе Н.Б. Пространственное распределение межзвездной пыли в Галактике. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1991, 69, 3-216.
18. Кварацхелия О.И. Спектрополяриметрия лунной поверхности и образцов лунного грунта. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1988, №64, 1-312.
19. Киладзе Р.И. Наблюдения колец Сатурна при прохождении Земли через их плоскость (1966 г.) Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1969, №37, 151-164.
20. Киладзе Р.И. Рефракция в атмосфере Меркурия. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1983, №56, 137-146.
21. Киладзе Р.И. Современное вращение планет как результат развития околопланетных роев мелких частиц. Тб., «Мецниереба», 1986, 244 стр. (монография).
22. Киладзе Р.И. Сочилина А.С., Григорьев К.В., Вершков А.Н. Каталог орбит геостационарных спутников. СПб, 1996, 103.
23. Kogoshvili N.G. Borchkhadze T.M. New version of the merged catalogue of galaxies. Bull. of Abast. Astrophys. obs., 2000, 75, 283-288.
24. Кочиашвили Н.Т. UBVR-фотометрия газотемных переменных систем I.EM. Сер. Астрофизика, 1999, т.42, вып.4, 531-535.
25. Кумсиашвили М.И. Трехцветная электрофотометрия затменной двойной звезды RY Близнецов. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1982, №55, 89-120.
26. Kulijanishvili V.I. Mayer A. K., Mayer V.A., Danik S.V. The corona electropolarimetry during July 11, 1991 solar eclipse, Memorias del segundo congreso de Astronomia Solar, La Paz, Baja California Sur, Mexico, 1993, 37-47.
27. Kulijanishvili V.I. Kakhiani V.O. Corona electropolarimetry during November 3, 1994 solar eclipse, Romanian Astron.J. v.6., Bucharest, 1996, 9-12.
28. Кумсишвили Я.И. Электрофотометрическое исследование звезды ν Эридана. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1962, №28, 11-85.
29. Магалашвили Н.Л. Электроколориметрия затменной переменной U Ophiuchi. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1949, №10, 1-62.
30. Марцваладзе Н.М., Фишкова Л.М. Характеристика нерегулярного поведения ночного излучения верхней атмосферы Земли в линиях [OI] 630,0 нм и H_α 656,3 нм. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1989, №66, 189-198.

31. Матешвили Г.Г.,Матешвили Ю.Д., Мегрелишвили Т.Г. Оптическая стратификация аэрозоля в средней атмосфере. Оптика атмосферы и аэрозоль, 133-149.Москва. Наука.1986.
32. Mateshvili G.G., Mateshvili Y.D. Mateshvili N.Y. Optical Observations of Meteor Shower Eta-Aquarides Dust in Earth's Atmosphere. Solar System Research. 1997, v. 31, №6, pp.539-545.
33. Mateshvili, N. Mateshvili G., Mateshvili Y., Gheondjian, Kapanadze Z.Dust particles in the atmosphere during Leonid meteor showers of 1998 and 1999. Leonid Storm Research , Peter Jenniskens, Frans Rietmeijer, Noah Brosh and Mark Fonda (Editors). Kluwer Academic Publisher.Dordrecht/Boston/London, 2000, 606 pp.
34. Мдзинаришвили Т.Г., Торонджадзе А.Ф. Статистический метод решения некоторых обратных задач звездной астрономии. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1986, №6, 215-230.
35. Мегрелишвили Т.Г. Закономерности вариации рассеянного света и излучения сумеречной атмосферы Земли. Тб. «Мецниереба», 1981, 273 стр. (монография).
36. Метревели М.Д. и др. Список B, V-величин и спектральных классов 940 F-G-K-M звезд в направлении к IC1848. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1999, 74, 165-177.
37. Нацвлишвили Р.Ш. Каталог вспыхивающих звезд вблизи туманности Ориона. Астрофизика, 1991, 34, №1, 107-139.
38. Ograpishvili N.B. Distribution of active regions on the solar surface estimated by statistical methods. Solar Physics, 1994, 93-104.
39. Сабашвили Ш.А. Многократное рассеяние резонансного излучения в плоском слое и шаре. Астрофизика, 1973, 9, №2, 273-293.
40. Салуквадзе Г.Н. Каталог кратных систем типа Трапеции. Астрофизика, 1978, т.14, выпуск 1, 57-68.
41. Салуквадзе Г.Н. Кратные системы типа Трапеции в Т-ассоциациях. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1987, №62, 3-56.
42. Салуквадзе Г.Н. О кинематике кратных систем типа Трапеции. Астрофизика, 1985, том 22, выпуск 1, 97-104.
43. Сигуа Л.А. Электрополяриметрическое исследование Сатурна и его колец. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1986, №61, 109-125.
44. Simonia I. Luminiscence of cometary hydrocarbons. Comments on Astrophysics, 1999, vol.1, part E, 25-30.
45. Тарасашвили И.П. О движении малого тела в наружной области планетной системы. Ч.I. Теория движения в ограниченной проблеме Fatou в плоском случае. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1940, №5, 65-118.
46. Tevzadze G.A. Note on two new comets. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1943, №7, 189-199.
47. Тевзадзе Г.А. К вопросу об устойчивости системы трех тел. Изв. АН Арм. ССР, 1962, 15, №5, 67-98.

48. Торонджадзе А.Ф. Особенности движения звезд спектральных классов О и В и расширение звездных ассоциаций. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1953, №15, 115-167.
49. Торошелидзе Т.И. Анализ проблем аэрономии по наблюдению излучения верхней атмосферы. Тб., «Мецниереба», 1991, 216 стр. (монография).
50. Фишкова Л.М. Ночное излучение среднеширотной верхней атмосферы Земли. Тб., «Мецниереба», 1983, 270 стр. (монография).
51. Хавтаси Дж. Ш. Атлас галактических туманностей Тб., 1960, 9 стр.
52. Харадзе Е.К. Каталог показателей цвета 14000 звезд и исследование поглощения света в Галактике на основе цветовых избытков звезд. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1952, №12, 3-422.
53. Kharadze E.K., Bartaya R.A. Spectral classification of 1246 stars of McCormick proper motion fields (spectral types and luminosity classes). Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1992, 72, 273-294.
54. Хатисов А.Ш. Салуквадзе Г.Н. Результаты позиционных наблюдений спутников Марса. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., №46, 1975, 217-224.
55. Хецуриани Ц.С. Измерение контуров линий пашеновской серии водорода в солнечном спектре. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1968, №36, 57-66.
56. Хецуриани Ц.С., Гиголашвили М.Ш. Об определении параметров наступающего 23-го цикла солнечной активности по методу «предвестников». Тр. конференции «Новый цикл активности Солнца: наблюдательный и теоретический аспекты». Санкт-Петербург, 1998, изд-во ПИЯФ, Гатчина, 365-388.
57. Khutsishvili E., Kvernadze T., Sikharulidze M. Rotation of plasma in sunspots. Solar Physics, 1998, 178, 271-283.
58. Чаргеишвили К.Б. Каталог спектральных классов и классов светимости 6037 звезд в направлении на антицентр Галактики. Бюлл. Абастум. астрофиз. обс., 1988, №65, 1-239.
59. Шевченко В.П., Пугачева С.Г., Новиков В.В., Кварацхелия О.П., Оптические и тепловые параметры поверхности Луны. Московский гос. университет, 2001, 1-152 (монография).
60. Shvelidze T., Malyoto V. The automated quantitative spectral classification of stars in areas of the main meridional section of the Galaxy. Bull. Abastum. Astrophys. obs., 2000, 75, 189-225.

რ. კილაძე, გ. სალუქვაძე

ქართული ასტრონომია XX საუკუნეში

რეზიუმე

გადმოცემულია მეოცე საუკუნეში ქართველ ასტრონომთა მიერ მიღებული ძირითადი შედეგები.

R. Kiladze, G. Salukvadze

Georgian astronomy in the 20th century

Summary

The most important results obtained by Georgian astronomers in the 20th century are presented.

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского государственного
университета им. Ив. Джавахишвили
Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University
354

УДК 511

О ПРЕДСТАВИМОСТИ ПОДХОДЯЩИХ ЧИСЕЛ НЕКОТОРЫХ РОДОВ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ТЕРНАРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Л.А.Сулаквелидзе

Хорошо известно [1], что род положительных тернарных квадратичных форм представляет все натуральные числа за исключением чисел, принадлежащих определенным арифметическим прогрессиям. Такие представимые числа называются подходящими числами (eligible numbers).

Нахождение тех подходящих чисел, которые непредставимы той или иной формой из данного рода представляет большую трудность даже в тех случаях, когда рассматриваются простейшие диагональные формы. Так, например, в [2] для формы $x^2 + y^2 + 7z^2$ найдено лишь некоторое подмножество множества всех непредставимых подходящих чисел.

В работе [3] дан общий подход к нахождению т.н. точных формул для числа представлений целых чисел положительными диагональными тернарными квадратичными формами. В [5] и [6] метод работы [3] был распространен на произвольные недиагональные формы.

С помощью результатов этих работ в ряде случаев можно получить более сильные (по сравнению с упомянутыми в [2]) и исчерпывающие утверждения.

Ниже докажем соответствующую теорему для форм $f_1=x^2+12y^2+12z^2+12yz$ и $g_1=9x^2+4y^2+4z^2+4yz$. Аналогичные результаты можно сформулировать и для форм

$$f_2=x^2+y^2+16z^2,\ g_2=2x^2+2y^2+5z^2-2yz-2xz;$$

$$f_3=x^2+4y^2+16z^2,\ g_3=4x^2+4y^2+5z^2-4xz;$$

$$f_4=x^2+16y^2+16z^2,\ g_4=4x^2+9y^2+9z^2+2yz+4xz+4xy;$$

$$f_5=x^2+8y^2+64z^2,\ g_5=4x^2+8y^2+17z^2-4xz;$$

$$f_6=x^2+3y^2+36z^2,\ g_6=3x^2+4y^2+9z^2;$$

$$f_7=x^2+12y^2+36z^2,\ g_7=4x^2+9y^2+12z^2;$$

$$f_8=x^2+4y^2+9z^2+4yz,\ g_8=2x^2+5y^2+8z^2+2xy+4yz;$$

$$f_9=x^2+48y^2+48z^2+48yz,\ f_{10}=9x^2+16y^2+16z^2+16yz;$$

(см. [4,6]).

Отметим, что пары форм f_i, g_i (i=1,…, 8) принадлежат двухклассным родам. Форма f_9 принадлежит трехклассному роду, а форма f_{10} – четырехклассному роду.

Теорема. Все натуральные числа, за исключением чисел вида 3k+2, 4k+2, $3\cdot 9^{\ell}(12k+1)$, $9^{\ell}(12k+7)$, $9^{\ell}(9k+6)$, $9^{\ell+1}(12k+11)$, являются подходящими для рода форм f_1 и g_1. Среди подходящих чисел лишь числа вида s^2 (в случае, когда все входящие в s простые $p\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$) представимы формой f_1, но непредставимы формой g_1. Все остальные подходящие числа представимы как формой f_1, так и формой g_1.

Доказательство. В [7] показано, что если $n=2^{\alpha}3^{\beta}u$, (u,6)=1, то имеют место равенства

$$r(n;f_1)=(2^{\frac{\alpha}{2}}\cdot 3-2)\sum_{d/s}d\prod_{p/d}\left(1-\left(\frac{p}{3}\right)\frac{1}{p}\right)\pm t \quad \text{при} \quad n=t^2,\ t\equiv\pm 1(\mathrm{mod}\,3) \qquad (1)$$

$$r(n;g_1)=(2^{\frac{\alpha}{2}}\cdot 3-2)\sum_{d/s}d\prod_{p/d}\left(1-\left(\frac{p}{3}\right)\frac{1}{p}\right)\mp t \quad \text{при} \quad n=t^2,\ t\equiv\pm 1(\mathrm{mod}\,3) \qquad (2)$$

$$r(n;f_1)=r(n;g_1)=\rho(n;f_1),$$

где r(n;f) обозначает число представлений числа n формой f, а

$$\rho(n;f)=\frac{2\pi}{\Delta^{\frac{1}{2}}}n^{\frac{1}{2}}\sum_{q=1}^{\infty}q^{-3}\sum_{h\,\mathrm{mod}\,q}{}' e^{2\pi i\frac{nh}{q}}S(fh,q)$$

– сумма т.н. сингулярного ряда, соответствующего форме f. Удобные формулы для вычисления значений функции $\rho(n;f)$ даны в [5]. По этим формулам имеем, что $\rho(n;f_1)=0$ лишь в следующих случаях:

1) $\alpha=0$, $2\nmid\beta$, $u\equiv 1(\mathrm{mod}\,12)$, т.е. $n=3\cdot 9^{\ell}(12k+7)$
2) $\alpha=0$, $2\nmid\beta$, $u\equiv 1(\mathrm{mod}\,12)$, т.е. $n=3\cdot 9^{\ell}(12k+7)$
3) $\alpha=0$, $2\mid\beta$, $u\equiv 7(\mathrm{mod}\,12)$, т.е. $n=9^{\ell}(12k+7)$
4) $\alpha=0$, $2\mid\beta$, $\beta>0$, $u\equiv 11(\mathrm{mod}\,12)$, т.е. $n=9\cdot 9^{\ell}(12k+11)$
5) $2\mid\alpha$, $\beta=0$, $u\equiv 5(\mathrm{mod}\,6)$, или $2\nmid\alpha$, $\alpha>1$, $\beta=0$, $u\equiv 1(\mathrm{mod}\,6)$ т.е. $n=4^{\ell}(6k+5)$ или $n=4^{\ell}2(6k+1)$.

В обоих случаях имеем $n=3k+2$, ибо $4^{\ell}=(3+1)^{\ell}=3k+1$.

Из (2) и (3) следует, что при $n=t^2$, $t\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ и $n=t^2$, $t\equiv -1(\mathrm{mod}\,3)$ имеем $r(n;f_1)>0$ и $r(n;g_1)>0$; а при $n=t^2$, $t\equiv 2(\mathrm{mod}\,6)$ и $n=t^2$, $t\equiv 4(\mathrm{mod}\,6)$

имеем

$$(2^{\frac{\alpha}{3}}\cdot 3-2)\sum_{d/s} d\prod_{p/d}(1-(\frac{p}{3})\frac{1}{p})-2^{\frac{\alpha}{2}}s \geq (2^{\frac{\alpha}{2}}\cdot 3-2)\sum_{d/s} d\prod_{p/d}(1-\frac{1}{p})-2^{\frac{\alpha}{2}}s =$$

$$= 2s(2^{\frac{\alpha}{2}}-1) > 0\,,$$

т.е. $r(n;f_1)>0$ и $r(n;g_1)>0$.

Если в (1) имеем $n=t^2$, $t\equiv -1(\mathrm{mod}6)$, то $\alpha=\beta=0$. Поэтому, по крайней мере одно делящее s простое $p\equiv -1(\mathrm{mod}3)$.

Таким образом

$$\sum_{d/s} d\prod_{p/d}(1-(\frac{p}{3})\frac{1}{p}) > \sum_{d/s} d\prod_{p/d}(1-\frac{1}{p}) = s\,,$$

т.е. $r(n;f_1)>0$.

Если в (2) имеем $n=t^2$, $t\equiv 1(\mathrm{mod}6)$ и хотя бы одно делящее s простое $p\equiv -1(\mathrm{mod}3)$, то имеем, также, $r(n;g_1)>0$.

Если $n=s^2$ и все входящие в s простые $p\equiv 1(\mathrm{mod}3)$, то

$$r(n;g_1)=\sum_{d/s} d\prod_{p/d}(1-(\frac{p}{3})\frac{1}{p})-s=\sum_{d/s} d\prod_{p/d}(1-\frac{1}{p})-s=0\,.$$

Таким образом, ввиду того, что числа вида

$3k+2,\ 4k+2,\ 3\cdot 9^{\ell}(12k+1)\,,\ 9^{\ell}(12k+7)\,, 9^{\ell}(9k+6)\,, 9^{\ell+1}(12k+11)$ (4)

и только они непредставимы формой f_1, а числа вида (4) и s^2 (в случае, когда все входящие в s простые $p\equiv 1(\mathrm{mod}3)$) и только они, непредставимы формой g_1, получаем утверждаемое.

Поступила 6.10.2003.
Кафедра общей математики

Литература

1. B. Jones. Trans. Amer. Math., Soc. 1931, 33. 111-124.
2. X. Wang & D. Pei. Science in China (Series A), 2001, 10. 1278-1283.
3. Г.А. Ломадзе. Acta Arithmetica, 1971, 19. 267-305.
4. Г.А. Ломадзе. Acta Arithmetica, 1978, 34. 131-162.
5. Л.А. Сулаквелидзе. Труды Тбилисского государственного университета, математика, механика, астрономия, 1977, 189, 29-52.
6. Л.А. Сулаквелидзе. Труды Тбилисского государственного университета, математика, механика, астрономия, 1989, 214, 146-192.
7. Л.А. Сулаквелидзе. Труды Тбилисского математического института, 1983, 72, 56-67.

ლ. სულაქველიძე

დადებითი ტერნარული კვადრატული ფორმების ზოგიერთი გვარების მახლოვადი რიცხვების წარმოდგენადობის შესახებ

რეზიუმე

სამცვლადიან დადებით კვადრატულ ფორმათა ზოგიერთი გვარისათვის ნაპოვნია ყველა ის ე.წ. მახლოვადი რიცხვი, რომელიც გვარის მოცემული კვადრატული ფორმით არ წარმოიდგინება.

L. Sulakvelidze

On the representation of eligible numbers of some genus of positive ternary quadratic forms

Summary

There is founded the all eligible numbers of some genus of positive ternary quadratic forms can not be represented by a given form in the genera.

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
*Труды Тбилисского государственного
университета им. Ив. Джавахишвили*
Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University
354

УДК 517.5; 517.98

ЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ В ОДНОМ НОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Д.Ф. Гогуадзе, П.Г. Карчава

В энциклопедической монографии ([1], с.416) авторы пишут: "Вплоть до настоящего времени изучаются и линейные функционалы на пространствах ограниченных непрерывных функций."

В настоящей работе вводится новое пространство функций и устанавливается общий вид линейного функционала на нем посредством введённого обобщённого интеграла. Затем из этого представления получаются, как частный случай, все до сих пор известные представления линейных функционалов в различных пространствах ограниченных функций.

Пусть $\mathcal{U}$ – произвольный класс множеств и $E \in \mathcal{U}$. Конечный класс попарно непересекающихся множеств $\{E_1,\ldots,E_n\} \subset \mathcal{U}$, объединение которых равно E, называется разбиением множества E и обозначается через DE. При этом, множества E_k $(k = 1,\ldots,n)$ называются компонентами разбиения DE .

Разбиение D_1E множества $E \in \mathcal{U}$ называется продолжением разбиения DE (в обозначении $D_1E \succ DE$), если каждый компонент разбиения D_1E является подмножеством некоторого компонента разбиения DE .

Обозначим через $\mathcal{U}$ E множество всех разбиений множества $E \in \mathcal{U}$.

Класс множеств будем называть нормальным и обозначим через $\mathcal{N}$, если для каждого $E \in \mathcal{N}$ множество $\mathcal{N}$ E всех разбиений множества E является направленным отношением продолжения $\succ$.

Отсюда следует, что отображения множества $\mathcal{N}$ E во множество комплексных чисел являются направленностями и к ним применима обобщённая теория пределов (см. [2], гл. II).

Приведем теперь важные примеры нормальных классов. В первую очередь отметим мультипликативный класс, введенный в [3].

Класс множеств, содержащий вместе с любыми двумя своими множествами E и F и их пересечение $E \cap F$, называется мультипликативным и обозначается через $\mathcal{M}$. Пусть $D_1E = \{E_1',\ldots,E_m'\}$ и $D_2E = \{E_1'',\ldots,E_n''\}$ – два разбиения множества $E \in \mathcal{M}$. Произведением разбиений D_1E и D_2E называется разбиение, компонентами которого являются всевозможные пересечения $E_i' \cap E_k''(i = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots, n)$, и обозначается через $(D_1 \cdot D_2)E$. Очевидно, произведение двух разбиений является продолжением обоих разбиений. Следовательно, множество $\mathcal{M}E$ является направленным отношением продолжения $\succ$.

Другим примером нормального класса является обобщённо-мультипликативный класс, введенный в [4].

Класс множеств, содержащий вместе с любыми двумя своими множествами E и F и разбиение их пересечения $E \cap F$, называется обобщённо-мультипликативным и обозначается через $\mathcal{M}_o$. Если $D_1E = \{E_1'', \cdots, E_m''\}$ и $D_2E = \{E_1', \cdots, E_n'\}$ – два разбиения множества $E \in \mathcal{M}_o$, то $\{E_k^{ij}\}(k = 1, \ldots, N_{ij}; i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$, где $\{E_k^{ij}\}(k = 1, \ldots, N_{ij})$, является разбиением пересечения $E_i' \cap E_j''$, представляет собой продолжение обоих разбиений. Следовательно, множество $\mathcal{M}_oE$ является направленным отношением продолжения $\succ$.

Очевидно, что мультипликативный класс является также обобщённо-мультипликативным. Приведём пример обобщённо-мультипликативного класса, который не является мультипликативным. Пусть E – произвольное множество, мощности большей или равной счетной мощности и P(E) – класс всех его подмножеств. Возьмём конечное подмножество $e \subset E$ и удалим из класса P(E) множество e и все его подмножества, кроме одноэлементных подмножеств. Обозначим через $\mathcal{M}_o$ оставшийся класс и покажем, что он является обобщенно-мультипликативным, но не мультипликативным. Действительно, возьмём множество E-e и представим его в виде $E\text{-}e = F_1 \cup F_2$, где $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ ($\varnothing$ – пустое множество). Образуем множества $E_1 = F_1 \cup e$ и $E_2 = F_2 \cup e$. Тогда $E_1 \cap E_2 = (F_1 \cup e) \cap (F_2 \cup e) = e$. Следовательно, $E_1 \cap E_2 = e \bar{\in} \mathcal{M}_o$. Однако – $\mathcal{M}_o$ содержит разбиение множества $E_1 \cap E_2 = e$.

Пусть комплексная функция f задана на множестве $E \in \mathcal{N}$ и μ – комплексная функция множества $e \in \mathcal{N}$.

Комплексное число **I** назовем обобщённым интегралом функции f по функции μ на множестве E относительно класса $\mathcal{N}$ и обозначим его через

$$(\mathcal{N})\int_E f(x)\mu(dE),$$

если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение $D_\varepsilon E$, что для любого его продолжения $\{E_1, \ldots, E_n\}$, при всяком выборе значений $f(x_k)$($x_k \in E_k$, $k=1,\ldots,n$), имеет место неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\mu(E_k) - I\right| < \varepsilon.$$

Непосредственно доказывается, что только что определенный интеграл обладает всеми основными свойствами обычного интеграла Римана-Стильтьеса.

В дальнейшем классы комплексных функций будут обозначаться прописными латинскими буквами с индексом k, а классы действительных функций – прописными латинскими буквами без индексов.

Пусть f – комплексная функция, заданная на множестве $E\in\mathcal{N}$. Будем говорить, что функция f обобщённо-непрерывна на множестве E относительно класса $\mathcal{N}$ или принадлежит классу $[M_k;E;\mathcal{N}]$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение $D_\varepsilon E=\{E_1,\ldots,E_n\}$, что для любых $x_k,y_k\in E_k(k=1,\ldots,n)$ имеет место неравенство

$$|f(x_k) - f(y_k)| < \varepsilon.$$

Обозначим через $[A_k;VB;E;\mathcal{N}]$ множество всех комплексных конечно-аддитивных функций с ограниченной вариацией на классе $\mathcal{N}$, а через $[A;VB;E;\mathcal{N}]$ – множество всех действительных таких функций.

Теорема 1. Если $f\in[M_k;E;\mathcal{N}]$ и $\mu\in[A_k;VB;E;\mathcal{N}]$, то существует интеграл

$$(\mathcal{N})\int_E f(x)\mu(dE).$$

Доказательство. Так как $f\in[M_k;E;\mathcal{N}]$, то для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение $D_\varepsilon E=\{E_1,\ldots,E_n\}$, что для любых $x_i,y_i\in E_i(i=1,\ldots,n)$ имеет место неравенство

$$|f(x_i) - f(y_i)| < \frac{\varepsilon}{V(\mu;E;\mathcal{N})},$$

где $V(\mu;E;\mathcal{N})$ – вариация функции μ на множестве E. Пусть $\{E_{ik}\}$ $(i=1,\ldots,n;k=1,\ldots,n_i)$ – произвольное продолжение разбиения $D_\varepsilon E$. Тогда будем иметь

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(E_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_i} f(x_{ik})\mu(E_{ik})\right| \le \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(E_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_i} f(x_i)\mu(E_{ik})\right| +$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_i} f(x_i)\mu(E_{ik}) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_i} f(x_{ik})\mu(E_{ik})\right| < \varepsilon$$

откуда, согласно критерию Коши, следует существование указанного интеграла.

Обозначим через Ref действительную часть функции f, а через Imf – коэффициент мнимой части функции f.

Теорема 2. $f\in[M_k,E;\mathcal{N}]$ тогда, и только тогда, когда $\mathrm{Re}f\in[M,E;\mathcal{N}]$ и $\mathrm{Im}f\in[M,E;\mathcal{N}]$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f\in[M_k,E;\mathcal{N}]$. Тогда для всякого числа $\varepsilon>0$ найдётся такое разбиение $D_\varepsilon E=\{E_1,\ldots,E_n\}$ множества E, что для любых $x_k,y_k\in E_k(k=1,\ldots,n)$ имеет место неравенство

$$|f(x_k)-f(y_k)|<\varepsilon.$$

Кроме того,

$$f(x_k)=\mathrm{Re}f(x_k)+i\,\mathrm{Im}f(x_k),$$
$$f(y_k)=\mathrm{Re}f(y_k)+i\,\mathrm{Im}f(y_k).$$

Поэтому из равенства

$$|f(x_k)-f(y_k)|=|\mathrm{Re}f(x_k)+i\,\mathrm{Im}f(x_k)-(\mathrm{Re}f(y_k)+i\,\mathrm{Im}f(y_k))|=$$
$$=|\mathrm{Re}f(x_k)-\mathrm{Re}f(y_k)+i(\mathrm{Im}f(x_k)-\mathrm{Im}f(y_k))|=$$
$$=\sqrt{[\mathrm{Re}f(x_k)-\mathrm{Re}f(y_k)]^2+[\mathrm{Im}f(x_k)-\mathrm{Im}f(y_k)]^2}$$

получаем по-отдельности

$$|\mathrm{Re}f(x_k)-\mathrm{Re}f(y_k)|<\varepsilon \text{ и } |\mathrm{Im}f(x_k)-\mathrm{Im}f(y_k)|<\varepsilon.$$

Достаточность. Пусть $\mathrm{Re}f\in[M,E;\mathcal{N}]$ и $\mathrm{Im}f\in[M,E;\mathcal{N}]$. Тогда, в силу нормальности класса $\mathcal{N}$, для всякого числа $\varepsilon>0$ найдётся такое разбиение $D_\varepsilon E=\{E_1,\ldots,E_n\}$, что для любых $x_k,y_k\in E_k(k=1,\ldots,n)$ одновременно имеют место неравенства

$$|\mathrm{Re}f(x_k)-\mathrm{Re}f(y_k)|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |\mathrm{Im}f(x_k)-\mathrm{Im}f(y_k)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для любых $x_k,y_k\in E_k(k=1,\ldots,n)$ имеем

$$|f(x_k)-f(y_k)|=|\mathrm{Re}f(x_k)-\mathrm{Re}f(y_k)+i(\mathrm{Im}f(x_k)-\mathrm{Im}f(y_k))|<\varepsilon.$$

Функция f называется простой или принадлежащей классу $[P_k;E;\mathcal{N}]$, если она имеет вид

$$f=\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_{E_k},$$

где $\{E_1,\ldots,E_n\}$ – разбиение множества E, $a_k(k=1,\ldots,n)$ – некоторое фиксированное комплексное число и $\chi_{E_k}(k=1,\ldots,n)$, характеристическая функция множества E_k.

Теорема 3. Функция f принадлежит классу $[M_k;E;\mathcal{N}]$ тогда и только тогда, когда она является равномерным пределом простых функций из класса $[P_k;E;\mathcal{N}]$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f\in[M_k;E;\mathcal{N}]$. Тогда для каждого n найдётся такое разбиение $D_nE=\{E_1^n,\dots,E_{m_n}^n\}$, что для любых $x_k^n, y_k^n \in E_k^n (k=1,\dots,m_n)$ имеет место неравенство

$$\left|f(x_k^n)-f(y_k^n)\right|<\frac{1}{n}.$$

Для каждого n определим простую функцию

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{m_n} f(x_k^n)\chi_{E_k^n}(x),$$

где x_k^n – произвольная фиксированная точка из $E_k^n (k=1,\dots,m_n)$.

Покажем теперь, что функция f является равномерным пределом простых функций f_n. Действительно, пусть $\varepsilon>0$ – произвольное число. Найдём такое n, что $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Так как любая точка $x\in E$ принадлежит некоторому $E_{k_0}^n (1\le k_0\le m_n)$, то для любой точки $x\in E$ имеем

$$\left|f(x)-f_n(x)\right|=\left|f(x)-\sum_{k=1}^{m_n} f(x_k^n)\chi_{E_k^n}(x)\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

Достаточность. Пусть функция f является равномерным пределом простых функций из класса $[P_k;E;\mathcal{N}]$. Тогда для всякого числа $\varepsilon>0$ найдётся такая простая функция $f_n\in[P_k;E;\mathcal{N}]$, что для любого $x\in E$ имеем

$$\left|f(x)-f_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, существует такое разбиение $DE=\{E_1,\dots,E_m\}$, что $f_n=a_k$ на $E_k (k=1,\dots,m)$. Поэтому для любых $x_k,y_k\in E_k(k=1,\dots,m)$ имеем

$$\left|f(x_k)-f_n(y_k)\right|\le\left|f(x_k)-f_n(x_k)\right|+\left|f_n(x_k)-f_n(y_k)\right|+\left|f_n(y_k)-f(y_k)\right|<\varepsilon.$$

Легко показать, что если функция f принадлежит классу $[M_k;E;\mathcal{N}]$, то она ограничена. Поэтому в множество $[M_k;E;\mathcal{N}]$ мы можем ввести норму

$$\|f\|=\sup_{x\in E}\left|f(x)\right|. \qquad (*)$$

Теорема 4. Если последовательность функций $f_n \in [M_k;E;\mathcal{N}]$ равномерно сходится к функции f на множестве E, то функция f также принадлежит классу $[M_k;E;\mathcal{N}]$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству достаточности теоремы 3.

Покажем теперь, что если $f,g \in [M_k;E;\mathcal{N}]$, то их прозведение $f \cdot g$ также принадлежит классу $[M_k;E;\mathcal{N}]$. Действительно, так как $f,g \in [M_k;E;\mathcal{N}]$, то они ограничены на множестве E. Следовательно, найдётся такое число $M>0$, что $|f(x)|<M$ и $|g(x)|<M$ для любого $x \in E$. Кроме того, для всякого числа $\varepsilon>0$ найдутся такие разбиения $D'E=\{E_1',\ldots,E_m'\}$ и $D''E=\{E_1'',\ldots,E_n''\}$, что для любых $x_k',x_k'' \in E_k'$ $(k=1,\ldots,m)$ и $y_k',y_k'' \in E_k''$ $(k=1,\ldots,n)$, соответственно, имеет место неравенство

$$\left|f(x_k')-f(x_k'')\right|<\frac{\varepsilon}{2M} \text{ и } \left|g(y_k')-g(y_k'')\right|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

В силу нормальности класса $\mathcal{N}$ найдётся такое разбиение $DE=\{E_1,\ldots,E_n\}$, что оно является продолжением обоих разбиений $D'E$ и $D''E$. Поэтому для любых $\chi_i',\chi_i'' \in E_i$ $(i=1,\ldots,N)$ будем иметь

$$\begin{aligned}\left|f(x_i')g(x_i')-f(x_i'')g(x_i'')\right| &\le \left|f(x_i')g(x_i')-f(x_i')g(x_i'')\right|+\\ &+\left|f(x_i')g(x_i'')-f(x_i'')g(x_i'')\right|<\left|f(x_i')\right|\left|g(x_i')-g(x_i'')\right|+\\ &+\left|g(x_i'')\right|\left|f(x_i')-f(x_i'')\right|<\varepsilon.\end{aligned}$$

Так же доказывается, что если $f,g \in [M_k;E;\mathcal{N}]$, то их сумма $f+g$ также принадлежит классу $[M_k;E;\mathcal{N}]$ и если $f \in [M_k;E;\mathcal{N}]$, то для любого фиксированного комплексного числа α произведение af также принадлежит классу $[M_k;E;\mathcal{N}]$. Так как сходимость по норме (*) влечет равномерную сходимость на множестве E, то из всего вышесказанного следует

Теорема 5. Множество $[M_k;E;\mathcal{N}]$, наделенное нормой (*), представляет собой коммутативную банахову алгебру над полем комплексных чисел относительно обычного сложения и умножения функций.

Пусть $F \subset [M_k;E;\mathcal{N}]$. Функции семейства F назовём равномерно обобщённо-непрерывными на множестве E относительно класса $\mathcal{N}$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение $D_\varepsilon E=\{E_1,\ldots,E_n\}$, что для любых $x_k,y_k \in E_k$ $(k=1,\ldots,n)$ и для любой функции $f \in F$ имеет место неравенство

$$\left|f(x_k)-f(y_k)\right|<\varepsilon.$$

Теорема 6. Для того, чтобы семейство $F \subset [M_k; E; \mathcal{N}]$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы функции семейства F были равномерно ограничены на множестве E и равномерно обобщенно-непрерывны на множестве E относительно класса $\mathcal{N}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть семейство F компактно. Равномерная ограниченность функций семейства F вытекает из того факта, что компактное множество метрического пространства ограничено. Докажем равномерную обобщенную непрерывность функций семейства F. Построим для заданного $\varepsilon > 0$ конечную $\frac{\varepsilon}{3}$ -сеть $\{f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$ для семейства F. Так как функция $f_i (i=1,\ldots,m)$ обобщённо непрерывна на множестве E относительно класса $\mathcal{N}$, то для числа $\frac{\varepsilon}{3}$ найдётся такое разбиение $D_i E = \{E_1^{'}, \ldots, E_{n_i}^{'}\}$ $(i = 1, \ldots, m)$, что имеет место неравенство

$$\left| f_i(x_k^{'}) - f_i(x_k^{''}) \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

каковы бы ни были $x_k^{'}, x_k^{''} \in E_k^{i} (k = 1, \ldots, n_i)$. Так как класс $\mathcal{N}$ является нормальным, то найдётся такое разбиение $DE = \{E_1, \ldots, E_n\}$, что оно является продолжением всех разбиений $D_i E (i = 1, \ldots, m)$. Поэтому для любых $x_k^{'}, x_k^{''} \in E_k (k = 1, \ldots, n)$ и для любой функции $f \in F$ будем иметь

$$\left| f(x_k^{'}) - f(x_k^{''}) \right| \le \left| f(x_k^{'}) - f_i(x_k^{'}) \right| + \left| f_i(x_k^{'}) - f_i(x_k^{''}) \right| +$$

$$+ \left| f_i(x_k^{''}) - f(x_k^{''}) \right| \le \sup_{x \in E} \left| f(x) - f_i(x) \right| + \left| f_i(x_k^{'}) - f_i(x_k^{''}) \right| +$$

$$+ \sup_{x \in E} \left| f_i(x) - f(x) \right| < 2 \left\| f - f_i \right\| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Если выбрать теперь f_i, так, чтобы было

$$\left\| f - f_i \right\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

то получим

$$\left| f(x_k^{'}) - f(x_k^{''}) \right| < \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно и полученная оценка не зависит от выбора $x_k^{'}, x_k^{''}$ из $E_k (k=1,\ldots,n)$ и от выбора функции f из семейства F, то равномерная обобщенная непрерывность функций семейства F доказана.

Достаточность. Очевидно, достаточно показать, что из семейства F можно выделить равномерно сходящуюся последовательность функций.

В силу условий теоремы для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение $D_\varepsilon E=\{E_1,\ldots,E_N\}$, что имеет место неравенство

$$\left|f(x_k')-f(x_k'')\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

каковы бы ни были $x_k', x_k'' \in E_k$ $(k = 1,\ldots, N)$ и $f\in F$.

Выберем произвольно элемент x_k из $E_k(k = 1,\ldots,N)$. Так как функции семейства F равномерно ограничены, то из семейства F можно выделить последовательность функций $\{f_n(x)\}$, которая будет равномерно сходиться на множестве $\{x_1,\ldots, x_N\}$. Покажем теперь, что последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве E. Так как последовательность $\{x_1,\ldots, x_N\}$ равномерно сходится на множестве $\{f_n(x)\}$, то для всякого числа $\varepsilon >0$ найдётся такой номер n_ε, что когда $n,m>n_\varepsilon$, имеет место неравенство

$$\left|f_n(x)-f_m(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

каков бы ни был элемент $x\in\{x_1,\ldots, x_N\}$. Пусть x – произвольный элемент множества E. Тогда x принадлежит некоторому $E_{k_0}\ (1\le k_0\le N)$.

Поэтому, когда $n,m>n_\varepsilon$ и $x_{k_0}\in\{x_1,\ldots,x_N\}\cap E_{k_0}$, имеем

$$\left|f_n(x)-f_m(x)\right|<\left|f_n(x)-f_n(x_{k_0})\right|+\left|f_n(x_{k_0})-f_m(x_{k_0})\right|+$$
$$+\left|f_m(x_{k_0})-f_m(x)\right|<\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно и полученная оценка не зависит от x, то равномерная сходимость на множестве E последовательности $\{f_n(x)\}$ доказана.

Пусть E – произвольное множество и F – семейство ограниченных действительных функциий f, заданных на множестве E .

Семейство F назовем достаточным, если оно обладает следующими свойствами:

1) оно является линейным нормированным пространством;

2) вместе с каждой функцией f оно содержит и ее модуль $|f|$ и они имеют равные нормы;

3) если $0\le f(x)\le g(x)$ на E , то $\|f\|\le\|g\|$.

Отсюда следует, что вместе с функцией f в семейство F входит ее положительная часть $f^+(x) = \max\{f(x),0\}$ и отрицательная часть $f^-(x) = \max\{0,-f(x)\}$, так как

$$f^+(x)=\frac{1}{2}\left(\left|f(x)\right|+f(x)\right),\quad f^-(x)=\frac{1}{2}\left(\left|f(x)\right|-f(x)\right)$$

Далее, вместе со всякими двумя функциями f и g в семейство F входят $\max\{f(x),g(x)\}$ и $\min\{f(x),g(x)\}$, так как

$$\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[(f(x)+g(x))+|f(x)-g(x)|],$$

$$\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[(f(x)+g(x))-|f(x)-g(x)|].$$

Легко проверить, что пространство $[M;E;\mathcal{N}]$ является достаточным семейством.

Теорема 7. Всякий линейный функционал Ф на достаточном семействе F может быть представлен в виде разности двух неотрицательных линейных функционалов.

Доказательство. Для произвольной неотрицательной функции $f\in F$ положим

$$\Phi^+(f)=\sup\Phi(g),$$

где верхняя грань берется по всем $g\in F$, удовлетворяющим неравенствам $0\le g\le f$.

Очевидно,

$$\Phi^+(f)\ge 0,\ \ \Phi^+(f)\ge\Phi(f),$$

поскольку можно положить $g=0$ и $g=f$.

Так как

$$|\Phi(g)|\le\|\Phi\|\cdot\|g\|\le\|\Phi\|\cdot\|f\|,\ \ 0\le g\le f,$$

то

$$|\Phi^+(f)|\le\|\Phi\|\cdot\|f\|.$$

Следовательно, функционал Φ^+ принимает только конечные значения.

Покажем, что функционал Φ^+ аддитивен на семействе неотрицательных функций $f\in F$. Для этого покажем сперва, что

$$\Phi^+(f_1+f_2)\le\Phi^+(f_1)+\Phi^+(f_2),\ \ f_1,f_2\ge 0.$$

Пусть $0\le g\le f_1+f_2$. Функцию g всегда можно представить в виде

$$g_1+g_2,$$

где $0\le g_1\le f_1$, $0\le g_2\le f_2$. Для этого достаточно положить

$$g_1=\min\{f_1,g\},\ \ g_2=g-g_1.$$

Очевидно, что

$$0\le g_1\le f_1,\ 0\le g_2=g-g_1=g-\min\{f_1,g\}=\max\{g-f_1,0\}\le f_2.$$

Поэтому имеем

$$\Phi(g) = \Phi(g_1) + \Phi(g_2) \le \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2),$$

откуда

$$\Phi^+(f_1+f_2) \le \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2).$$

Покажем теперь обратное неравенство. Пусть f_1, f_2 – неотрицательные функции из F и выберём g_1, g_2 из F так, что

$$0 \le g_1 \le f_1,\ 0 \le g_2 \le f_2.$$

Тогда

$$\Phi^+(f_1+f_2) \ge \sup\Phi(g_1+g_2) = \sup\Phi(g_1) + \sup\Phi(g_2) =$$

$$= \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2).$$

Таким образом, функционал Φ^+ аддитивен на семействе неотрицательных функций $f \in F$. Кроме того, очевидно, что он положительно однороден, т.е. $\Phi^+(af_1) = a\,\Phi^+(f)$ для любого вещественного $a \ge 0$.

Теперь для любой функции $f \in F$ полагаем

$$\Phi^+(f) = \Phi^+(f^+) - \Phi^+(f^-)$$

где f^+, f^-, соответственно, положительная и отрицательная части функции f. Это определение однозначно. Если имеем также

$$f = f_1^+ - f_1^-,\ f_1^+ \ge 0,\ f_1^- \ge 0,$$

то

$$f^+ + f_1^- = f_1^+ + f^-,$$

откуда

$$\Phi^+(f^+) + \Phi^+(f_1^-) = \Phi^+(f^+ + f_1^-) = \Phi^+(f_1^+ + f^-) = \Phi^+(f_1^+) + \Phi^+(f^-)$$

и

$$\Phi^+(f^+) - \Phi^+(f^-) = \Phi^+(f_1^+) - \Phi^+(f_1^-).$$

Покажем теперь, что функционал Φ^+ аддитивен на F. Пусть

$$f_1 = g_1 - h_1,\ f_2 = g_2 - h_2,\ g_1 \ge 0,\ h_1 \ge 0,\ g_2 \ge 0,\ h_2 \ge 0.$$

Тогда

$$f_1 + f_2 = (g_1 + g_2) - (h_1 + h_2)$$

и

$$\Phi^+(f_1+f_2) = \Phi^+(g_1+g_2) - \Phi^+(h_1+h_2) =$$

$$=\Phi^+(g_1) + \Phi^+(g_2) - \Phi^+(h_1) + \Phi^+(h_2) = \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2).$$

Покажем теперь, что функционал Φ^+ однороден. Если $a \geq 0$, то, очевидно,

$$\Phi^+(af) = a\Phi^+(f).$$

Поэтому достаточно рассмотреть случай $a = -1$. Но если

$$f = g - h \text{ где } g \geq 0,\ h \geq 0,$$

то

$$-f = h - g$$

и

$$\Phi^+(-f) = \Phi^+(h) - \Phi^+(g) = -[\Phi^+(g) - \Phi^+(h)] = -\Phi^+(f).$$

Покажем теперь, что функционал Φ^+ ограничен на F. Действительно, для любой функции $f \in F$ имеем

$$\left|\Phi^+(f)\right| = \left|\Phi^+(f^+) - \Phi^+(f^-)\right| \leq \Phi^+(f^+) + \Phi^+(f^-) = \Phi^+(|f|) \leq \|\Phi\| \cdot \|f\|,$$

откуда

$$\|\Phi^+\| \leq \|\Phi\|.$$

Рассмотрим теперь функционал

$$\Phi^-(f) = \Phi^+(f) - \Phi(f),$$

определенный на всем F .

Очевидно, функционал $\Phi^-(f)$ линеен вместе с $\Phi^+(f)$ и $\Phi(f)$. Кроме того он неотрицателен, так как $\Phi^+(f) \geq \Phi(f)$ для всех неотрицательных f из F .

Следовательно,

$$\Phi(f) = \Phi^+(f) - \Phi^-(f)$$

представляет собой желаемое представление.

Наконец заметим, что полученное разложение является минимальным в том смысле, что если

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$$

– какое-нибудь другое разложение функционала Φ на неотрицательные линейные функционалы Φ_1 и Φ_2, то

$$\Phi^+ \leq \Phi_1, \quad \Phi^- \leq \Phi_2.$$

Действительно, если f – неотрицательная функция из F и $g \in F$ такая, что $0 \leq g \leq f$, то

$$\Phi(g) = \Phi_1(g) - \Phi_2(g) \le \Phi_1(g) \le \Phi_1(f),$$

откуда

$$\Phi^+(f) \le \Phi_1(f).$$

Из равенства

$$\Phi_2 - \Phi^- = \Phi_1 - \Phi^+$$

получаем, что

$$\Phi^-(f) \le \Phi_2(f).$$

Теорема 8. Всякий линейный функционал в пространстве $[M;E;\mathcal{N}]$ представим в виде

$$\Phi(f) = (\mathcal{N})\int_E f(x)\mu(dE),$$

где $\mu \in [A;VB;E;\mathcal{N}]$.

Доказательство. Допустим сперва, что функционал Φ неотрицателен. Для любого $e \in \mathcal{N}$ положим

$$\mu(e) = \phi(\chi_e).$$

Пусть $D_e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ – разбиение множества $e \in \mathcal{N}$. Из равенства

$$\chi_e(x) = \chi_{e_1}(x) + \cdots + \chi_{e_n}(x)$$

непосредственно следует конечная аддитивность функции μ.

Для любой простой функции

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} \, (E_i \in \mathcal{N},\ i = 1, \ldots, n) \in [P;E;\mathcal{N}]$$

будем иметь

$$\Phi(f) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Phi(\chi_{E_i}(x)) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) =$$

$$= (\mathcal{N})\int_E f(x)\,\mu(dE).$$

Пусть теперь f – произвольная функция из класса $[M;E;\mathcal{N}]$. Тогда для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение $D_\varepsilon E = \{E_1, \ldots, E_n\}$, что каковы бы ни были $x_i^{'}, x_i^{''} \in E_i (i = 1, \ldots, n)$ имеет место неравенство

$$\left| f(x_i^{'}) - f(x_i^{''}) \right| < \varepsilon.$$

Рассмотрим функции

$$f_1(x)=\sum_{i=1}^{n} m_i \chi_{E_i}(x),\ \ m_i=\inf_{x\in E_i}\{f(x)\},$$

$$f_2(x)=\sum_{i=1}^{n} M_i \chi_{E_i}(x),\ \ M_i=\sup_{x\in E_i}\{f(x)\}.$$

Тогда имеем

$$\Phi(f_1)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Phi(\chi_{E_i}(x))=\sum_{i=1}^{n} m_i\mu(E_i)=(\mathcal{N})\int_E f_1(x)\mu(dE),$$

$$\Phi(f_2)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Phi(\chi_{E_i}(x))=\sum_{i=1}^{n} M_i\mu(E_i)=(\mathcal{N})\int_E f_2(x)\mu(dE).$$

Для любого $x\in E$ имеют место неравенства

$$f_1(x)\le f(x)\le f_2(x),$$

откуда, в силу неотрицательности функционала Φ, получаем

$$\Phi(f_1)\le\Phi(f)\le\Phi(f_2).$$

Кроме того,

$$\Phi(f_1)=(\mathcal{N})\int_E f_1(x)\mu(dE)\le(\mathcal{N})\int_E f(x)\mu(dE)\le(\mathcal{N})\int_E f_2(x)\mu(dE)=\Phi(f_2).$$

Из этих неравенств получаем

$$|\Phi(f)-(\mathcal{N})\int_E f(x)\,\mu(dE)|\le\Phi(f_2)-\Phi(f_1)<2\varepsilon\mu(E).$$

Что, в силу произвольности числа $\varepsilon>0$, дает

$$\Phi(f)=(\mathcal{N})\int_E f(x)\,\mu(dE).$$

Это представление единственное, поскольку функция μ однозначно определяется функционалом Φ.

Пусть теперь Φ – произвольный линейный функционал в $[M;E;\mathcal{N}]$. Тогда, согласно теореме 7, функционал Φ может быть представлен в виде

$$\Phi=\Phi^{+}-\Phi^{-},$$

где Φ^{+}, Φ^{-} – неотрицательные линейные функционалы на $[M;E;\mathcal{N}]$.

Тогда, согласно доказанному,

$$\Phi^{+}(f)=(\mathcal{N})\int_{E} f(x)\,\mu_1(dE),$$

$$\Phi^{-}(f)=(\mathcal{N})\int_{E} f(x)\,\mu_2(dE).$$

где

$$\mu_1(e)=\Phi^{+}(\chi_e),\ \ \mu_2(e)=\Phi^{-}(\chi_e).$$

Теперь, если положить

$$\mu=\mu_1-\mu_2,$$

то, очевидно, $\mu\in[A;VB;E;\mathcal{N}]$ и

$$\Phi(f)=\Phi^{+}(f)-\Phi^{-}(f)=(\mathcal{N})\int_{E} f(x)\,\mu_1(dE)-(\mathcal{N})\int_{E} f(x)\,\mu_2(dE)=$$

$$=(\mathcal{N})\int_{E} f(x)\,\mu(dE).$$

Для доказательства аддитивности μ покажем, что

$$\mu(e)=\Phi(\chi_e).$$

Действительно,

$$\Phi(\chi_e)=\Phi^{+}(\chi_e)-\Phi^{-}(\chi_e)=\mu_1(e)-\mu_2(e)=\mu(e).$$

Теорема 9. Общий вид линейного функционала Φ в пространстве $[M;E;\mathcal{N}]$ задаётся формулой

$$\Phi(f)=(\mathcal{N})\int_{E} f(x)\,\mu(dE),$$

где $\mu\in[A;VB;E;\mathcal{N}]$. При этом

$$\|\Phi(f)\|=V(\mu;E;\mathcal{N}).$$

Доказательство. Согласно теореме 8, любой линейный функционал Φ в пространстве $[M;E;\mathcal{N}]$ представим в виде

$$\Phi(f)=(\mathcal{N})\int_{E} f(x)\,\mu(dE),$$

где $\mu\in[A;VB;E;\mathcal{N}]$. Справедливо и обратное. Если $\mu\in[A;VB;E;\mathcal{N}]$, то интеграл

$$(\mathcal{N})\int\limits_{E} f(x)\,\mu(dE)$$

представляет собой линейный функционал Ф в пространстве [M;E;$\mathcal{N}$]. Ограниченность функционала Ф следует из неравенства

$$|\Phi(f)|=|(\mathcal{N})\int\limits_{E} f(x)\,\mu(dE)|\le \sup_{x\in E}\{|f(x)|\}\cdot V(\mu;E;\mathcal{N})=\|f\|\cdot V(\mu;E;\mathcal{N}),$$

откуда

$$\|\Phi\|\le V(\mu;E;\mathcal{N}).$$

Покажем обратное неравенство. Согласно определению вариации, для всякого числа ε найдётся такое разбиение $D_\varepsilon E=\{E_1,\ldots,E_n\}$, что имеет место неравенство

$$V(\mu;E;\mathcal{N})<\sum_{k=1}^{n}|\mu(E_k)|+\varepsilon.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sgn}\Phi(\chi_{E_k}(x))\cdot\chi_{E_k}(x).$$

Очевидно, что функция f на каждом E_k (k=1,…,n) принимает одно из трех значений 1, -1,0 и, следовательно, $f\in$[M;E;$\mathcal{N}$] и $\|f\|=1$. Поэтому

$$|\Phi(f)|\le\|\Phi\|\cdot\|f\|=\|\Phi\|.$$

Но

$$\Phi(f)=\Phi\left(\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sgn}\Phi(\chi_{E_k}(x))\cdot\chi_{E_k}(x)\right)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sgn}\Phi(\chi_{E_k}(x))\cdot\chi_{E_k}(x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sgn}\mu(E_k)\cdot\mu(E_k)=\sum_{k=1}^{n}|\mu(E_k)|.$$

Следовательно,

$$V(\mu;E;\mathcal{N})<\|\Phi\|+\varepsilon,$$

откуда

$$V(\mu;E;\mathcal{N})\le\|\Phi\|.$$

Теорема. 10. Общий вид линейного функционала Ф в пространстве [M_k;E;$\mathcal{N}$] дается формулой

$$\Phi(f)=(\mathcal{N})\int\limits_{E} f(x)\,\mu(dE),$$

где $\mu \in [M_k;VB;E;\mathcal{N}]$. При этом

$$\|\Phi\| = V(\mu;\, E;\, \mathcal{N}).$$

Доказательство. Пусть Φ – линейный функционал на $[M_k;E;\mathcal{N}]$. Тогда

$$\Phi(f) = \Phi_r(f) + i\,\Phi_{im}(f)\,,$$

где Φ_r и Φ_{im} являются действительными линейными функционалами на $[M_k;E;\mathcal{N}]$. В частности, Φ_r и Φ_{im} являются действительными линейными функционалами на $[M_k;E;\mathcal{N}]$ над полем действительных чисел. Поэтому, согласно теореме 8,

$$\Phi_r(f) = (\mathcal{N})\int_E f(x)\,\mu_1(dE)\,, \qquad \Phi_{im}(f) = (\mathcal{N})\int_E f(x)\,\mu_2(dE),\,,$$

где $\mu_1, \mu_2 \in [A;VB;E;\mathcal{N}]$.

Определим $\mu \in [A_k;VB;E;\mathcal{N}]$ равенством

$$\mu = \mu_1 + i\mu_2.$$

Согласно теореме 2, любая функция $f \in [M_k;\, E;\mathcal{N}]$ имеет вид $f = g + ih$, где $g,h \in [M;E;\mathcal{N}]$. Поэтому будем иметь

$$\Phi(f) = \Phi(g) + i\,\Phi(g) = \Phi_r(g) + i\,\Phi_{im}(g) + i\{\Phi_r(h) + \Phi_{im}(h)\} =$$

$$= (\mathcal{N})\int_E g(x)\,\mu_1(dE) + i(\mathcal{N})\int_E g(x)\,\mu_2(dE) + i\{(\mathcal{N})\int_E h(x)\,\mu_1(dE) +$$

$$+ i(\mathcal{N})\int_E h(x)\,\mu_2(dE)\} = (\mathcal{N})\int_E f(x)\,\mu_1(dE) + i(\mathcal{N})\int_E f(x)\,\mu_2(dE) =$$

$$= (\mathcal{N})\int_E f(x)\,\mu(dE).$$

Функция μ единственна, поскольку единственны μ_1 и μ_2. Остается показать, что

$$\|\Phi\| = V(\mu;\, E;\, \mathcal{N}).$$

Неравенство

$$\|\Phi\| \le V(\mu;\, E;\, \mathcal{N})$$

очевидно. Покажем обратное неравенство. Согласно определению вариации, для всякого числа ε найдётся такое разбиение $D_\varepsilon E = \{E_1,\ldots,E_n\}$, что имеет место неравенство

$$V(\mu;\, E;\, \mathcal{N}) < \sum_{k=1}^{n} |\mu(E_k)| + \varepsilon.$$

Пусть $\mu(E_k) = |\mu(E_k)| e^{ia_k}$ $(k=1, \ldots, n)$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{-ia_k} \chi_{E_k}(x).$$

Очевидно, $f \in [M_k; E; \mathcal{N}]$, $\|f\| < 1$ и

$$(\mathcal{N}) \int_E f(x)\, \mu(dE) = \sum_{k=1}^{n} |\mu(E_k)|.$$

Поэтому

$$|\Phi(f)| \leq \|\Phi\| \cdot \|f\| = \|\Phi\|.$$

Следовательно,

$$\|\Phi\| \geq (\mathcal{N}) \int_E f(x)\, \mu(dE) = \sum_{k=1}^{n} |\mu(E_k)| > V(\mu; E; \mathcal{N}) - \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности чисел $\varepsilon > 0$,

$$\|\Phi\| \geq V(\mu; E; \mathcal{N}).$$

Из теоремы 10 получаются, как частный случай, все до сих пор известные представления линейных функционалов в различных пространствах ограниченных функций (см. [I], IV. 2. Перечень специальных пространств).

С этого момента через $\mathcal{M}$ обозначим мультипликативный класс множеств.

Теорема 11. Если $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ – мультипликативные классы подмножеств множества X, содержащие X, то класс

$$\mathcal{M} = \{E \cap F : E \in \mathcal{M}_1,\ F \in \mathcal{M}_2\}$$

является наименьшим мультипликативным классом, содержащим $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$.

Доказательство. Пусть $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$. Тогда

$$E_1 = F_1 \cap G_1\ (F_1 \in \mathcal{M}_1,\ G_1 \in \mathcal{M}_2),$$

$$E_2 = F_2 \cap G_2\ (F_2 \in \mathcal{M}_1,\ G_2 \in \mathcal{M}_2),$$

откуда

$$E_1 \cap F_2 = (F_1 \cap G_1) \cap (F_2 \cap G_2) = (F_1 \cap F_2) \cap (G_1 \cap G_2) = F \cap G \in \mathcal{M},$$

где $F = F_1 \cap F_2 \in \mathcal{M}_1$, и $G = G_1 \cap G_2 \in \mathcal{M}_2$.

Очевидно, $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}$ и класс $\mathcal{M}$ является наименьшим.

Следствие. Если (X, J) – произвольное топологическое пространство и $\{F_\alpha\}$ $(\alpha \in I)$ и $\{G_\alpha\}(\alpha \in I)$ – классы всех замкнутых соответственно всех открытых множеств, то класс

$$\mathcal{M} = \{ F_\alpha \cap G_\beta : \alpha \in I, \beta \in I \}$$

является мультипликативным классом, содержащим J.

Пусть теперь (E, J) – произвольное топологическое пространство и $\mathcal{M}$ – мультипликативный класс из следствия. Обозначим через $C_K(E)$ множество всех ограниченных, комплексных, непрерывных функций, заданных на множестве E.

Покажем, что $C_K(E) \subset [M_k; E; \mathcal{M}]$. Так как $f \in C_K(E)$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Re} f \in C(E)$ и $\mathrm{Im} f \in C(E)$, то для этого достаточно показать, что $C(E) \subset [M; E; \mathcal{M}]$. Пусть $f \in C(E)$. Так как функция f ограничена на множестве E, то найдутся такие числа a_1 и a_n, что

$$a_1 < f(x) < a_n \ (x \in E).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Разделим интервал (a_1, a_n) на интервалы (a_k, a_{k+1}) $(k = 1,\ldots,n\text{-}1)$ таким образом, чтобы было

$$a_{k+1} - a_k < \varepsilon \ (k = 1,\ldots,n\text{-}1).$$

Тогда

$$\{\{(a_k, a_{k+1}) \cup \{a_{k+1}\}(k = 1,\ldots,n\text{-}2)\}, (a_{n-1}, a_n)\}$$

является разбиением интервала (a_1, a_n). Поэтому, в силу непрерывности функции f,

$$\{f^{-1}[(a_k, a_{k+1})](k = 1,\ldots,n\text{-}1), \{f^{-1}[\{a_{k+1}\}] (k = 2,\ldots, n\text{-}1)\}$$

является разбиением множества E. Для любых $x_k', x_k'' \in f^{-1}[(a_k, a_{k+1})]$ $(k = 1,\ldots, n\text{-}1)$ очевидно имеем

$$\left| f(x_k') - f(x_k'') \right| < a_{k+1} - a_k < \varepsilon.$$

Таким образом, общий вид линейного функционала Φ в пространстве $C_K(E)$ представляется интегралом

$$\Phi(f) = (\mathcal{M})\int_E f(x)\,\mu(dE),$$

где $\mu \in [A_k; VB; E; \mathcal{M}]$ и

$$\|\Phi\| = V(\mu; E; \mathcal{M}).$$

Следовательно, теорема IV. 6.2 из [1] (см. с. 284) является частным случаем теоремы 10.

Рассмотрим теперь пространства $B(S,\Sigma)$ и $B(S)$ (см. [I], с. 261). Очевидно, что

$$B(S,\Sigma) \subset [M_k; S; \Sigma]$$

$$B(S) \subset [M_k; S; \Sigma],$$

если Σ есть класс всех подмножеств множества S. Следовательно, теорема IV. 5.1 и следствие IV. 5.3 из [1] (см. с. 280-281) являются частными случаями теоремы 10.

Поступила 16.09.2002

Институт вычислительной математики АН Грузии

Литература

1. Н.Данфорд, Дж.Т.Шварц, Линейные операторы. Общая теория. Москва. ИИЛ. 1962.
2. Дж.Келли, Общая топология. Москва, Наука, 1981.
3. A.Kolmogoroff, Math. Ann., 1930, v. 103, 654-696.
4. Д. Ф. Гогуадзе, Мат. заметки, 1996, т. 60, вып. 6, 832-844.

დ. გოგუაძე, პ. ქარჩავა

წრფივი ფუნქციონალი ახალ ფუნქციათა სივრცეში და მისი ზოგიერთი გამოყენება

რეზიუმე

ნაშრომში შემოყვანილია ახალი ფუნქციათა სივრცე და დადგენილია წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი სახე შემოყვანილი განზოგადებული ინტეგრალის საშუალებით. შემდეგ ამ წარმოდგენიდან მიღებულია, როგორც კერძო შემთხვევა, ყველა აქამდე ცნობილი წრფივი ფუნქციონალის წარმოდგენა შემოსაზღვრულ ფუნქციათა სხვადასხვა სივრცეში.

D.Goguadze, P. Karchava

Linear functional in new space of functions and some of its applications

Summary

In this paper is introduced a new space of functions and is established a general form of linear functional on them by means of introduced generalized integral. Then from this representation are obtained all untill now known representations of linear functionals in various spaces of bounded functions.

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского государственного
университета им. Ив. Джавахишвили
Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University
354

УДК 513.83

ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ Q-СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

И.Д. Дочвири

1. Введение

При изучении различных свойств битопологических пространств [3,4] одним из важнейших вопросов является выявление зависимостей между фиксированными топологическими структурами. Вместе с тем, вопрос установления неподвижных точек сжимающих отображений, возникший при исследовании различных функциональных и операторных уравнений, способствовал бурному развитию теории неподвижных точек для метрических [8] и квазиметрических пространств [4,7,9,10]. В связи с этим, в настоящей работе исследуются вопросы существования неподвижных точек т.н. Q-сжимающих отображений квазиметрических пространств. Следует отметить, что пренебрежение в определении метрической функции аксиомой симметрии [1] на заданном множестве X порождает две топологии τ_1 и τ_2, т.е. битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2). Асимметрическую „метрику" ρ обычно называют квазиметрикой [2,11]. Каждому квазиметрическому пространству (X,ρ) соответствует сопряженное квазиметрическое пространство (X, ρ^*), где $\rho^*(x;y)=\rho(y;x)$ для всех $x;y\in X$. Топология, порожденная квазиметрикой ρ (соотв. ρ^*) на X, обозначается через $\tau(\rho)$ (соотв. $\tau(\rho^*)$) и базой для нее служат т.н. l - (соотв.r-) открытые шары вида: $B_l(x_o;\delta)=\{x\in X/\rho(x_o;x) <\delta \}$ (соотв. $B_r(x_o;\delta)=\{x\in X/\rho^*(x_o;x) <\delta \}$).

2. Неподвижные точки Q-сжимающих отображений

Определение 2.1. Отображение $f:(X,\rho)\to(X,\rho^*)$ назовем Q-сжимающим, если $\rho^*(f(x);f(y))< \rho(x;y)$, для любых $x;y\in X$ (здесь Q обозначает англ. термин «Quasi»).

Если ρ является метрикой на X, то определение 2.1. совпадает с понятием сжимающего отображения, введенным М. Эдельштейном [5,6].

Обозначим через f^n отображение из (X,ρ) в (X, ρ^*), определенное следующим образом: $f^n(x)= f(f^{n-1}(x))$, для $n\in N$, при этом условно допустим $f^{o}(x)=x$. Через Fix (f) обозначим множество всех неподвижных точек отображения f.

Справедлива следующая

Теорема 2.1. Пусть $f:(X,\rho)\to(X,\rho^{*})$ – Q-сжимающее отображение и $x\in X$ – такая точка, что последовательность $\{f^{n}(x)\}_{n\in N}$ содержит подпоследовательность $\{f^{n_k}(x)\}_{k\in N}$, l- сходящуюся к точке $p\in X$, относительно ρ^{*}, тогда $p\in Fix(f)$.

Доказательство. Допустим обратное, т.е. $f(p)\neq p$. Тогда $\rho^{*}(f(p);p)\neq 0$. Из аксиомы треугольника имеем: $\rho^{*}(f(p);p)\leq\rho^{*}(f(p);f^{n_{k+1}}(x))+\ \rho^{*}(f^{n_{k+1}}(x);p)$ для любого $n\in$N. Поскольку последовательность $\{f^{n_k}(x)\}_{k\in N}$ l сходится относительно ρ^{*} к точке $p\in X$, то для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер N_0, что когда $k+1\geq N_0$, имеет место неравенство $\rho^{*}(f^{n_{k+1}}(x);p)\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Ввиду того, что f является Q-сжимающим, имеем: $\rho^{*}(f(p);f^{n_{k+1}}(x))<\rho(p;f^{n_k}(x))=\rho^{*}(f^{n_k}(x);p)$. Но для фиксированного $\varepsilon>0$ существует такой номер N_1, что когда $k\geq N_1$, следует $\rho^{*}(f^{n_k}(x);p)\leq\ \dfrac{\varepsilon}{2}$, т.е. $\rho^{*}(f(p);f^{n_{k+1}}(x))<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Легко заметить, что для всех $k\geq\tilde{N}$, где $\tilde{N}=\max\{N_0-1;N_1\}$, имеет место неравенство $0<\rho^{*}(f(p);p)<\varepsilon$. В силу последнего неравенства, при $\varepsilon<\rho^{*}(f(p);p)$ приходим к противоречию, т.е. $p\in Fix(f)$.

Теорема 2.2. Пусть $f_k:(X,\rho)\to(X,\rho^{*})$, $k\in N$ являются Q-сжимающими отображениями и $x_k\in Fix(f_k)$. Кроме того, пусть $f_o:(X,\rho)\to(X,\rho^{*})$ – такое Q-сжимающее отображение, что последовательность $\{f_k\}_{k\in N}$ равномерно l-сходится к f_0 относительно ρ^{*}. Если существует l-сходящаяся последовательность $\{x_{k_\alpha}\}_{\alpha\in N}$ к точке $x_0\in X$ относительно ρ, то $x_0\in Fix(f_0)$.

Доказательство. Заметим, что для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер N_0, что при $\alpha\geq N_0$ выполняются неравенства: $\rho^{*}(f_{k_\alpha}(x_0);f_0(x_0))\leq\dfrac{\varepsilon}{3}$ и

$\rho(x_{k_\alpha};x_0)\leq\dfrac{\varepsilon}{3}$.

Ввиду аксиомы треугольника имеем:

$$\rho^{*}(f_{k_\alpha}(x_{k_\alpha});f_0(x_0))\leq\rho^{*}(f_{k_\alpha}(x_{k_\alpha});f_{k_\alpha}(x_0))+$$

$$+\rho^{*}(f_{k_\alpha}(x_0);f_0(x_0))\leq\rho^{*}(f_{k_\alpha}(x_{k_\alpha});\ f_{k_\alpha}(x_0))+\frac{\varepsilon}{3}.$$

Поскольку отображения f_k являются Q-сжимающими, то $\rho^{*}(f_{k_\alpha}(x_{k_\alpha});f_0(x_0))\leq\rho^{*}(f_{k_\alpha}(x_{k_\alpha});\ f_{k_\alpha}(x_0))+\dfrac{\varepsilon}{3}<\rho(x_{k_\alpha};x_0)+\dfrac{\varepsilon}{3}<\dfrac{2\varepsilon}{3}$. Из аксиомы треугольника вытекает, что $\rho^*(x_0; f_0(x_0)) \le \rho(x_{k_\alpha}; x_0) + \frac{2\varepsilon}{3}$, а из условия l-сходимости $\{x_{k_\alpha}\}_{\alpha\in N}$ к $x_0 \in X$ относительно ρ следует $\rho^*(x_0; f_0(x_0)) \le \rho(x_{k_\alpha}; x_0) + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Так как $0 < \rho^*(x_0; f_0(x_0)) = const.$, неравенство $\rho^*(x_0; f_0(x_0)) < \varepsilon$ не выполняется при $\rho^*(x_0; f_0(x_0)) > \varepsilon$, что противоречит произвольности ε.

В работе [2] достаточно полно изучен вопрос l- и r-сходимостей в квазиметрических пространствах и в соответствующих терминах охарактеризована компактность. Согласно [2], квазиметрическое пространство (X,ρ) называют l- (соотв. r-), компактным, если каждое l- (соотв. r-)– открытое покрытие X, содержит конечное подпокрытие. В [2] доказано, что если квазиметрическое пространство (X,ρ) является l- (соотв. r-) компактным, то из любой последовательности $\{x_\alpha \in X\}_{\alpha\in N}$ можно извлечь l - (соотв. r -) сходящуюся подпоследовательность.

Имеет место следующая

Теорема 2.3. Пусть Q-сжимающее отображение $f:(X,\rho)\to(X,\rho^*)$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) существуют такое множество $M \subset X$ и точка $x_0 \in M$, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $\rho^*(f^n(x_0); f^{n+1}(x_0)) < \rho(x_0; f(x_0))$;

(2) для любой точки $x \notin M$ выполняется следующее неравенство: $\rho^*(x_0;x) - \rho(x_0;x) < 2\rho(x_0;f(x_0))$;

(3) $f(M)$ является l- компактным подмножеством в (X,ρ^*). Тогда $Fix(f) \neq \varnothing$.

Доказательство. Если $x_0 \notin Fix(f)$ и $x_n = f^n(x_0)$ для любого $n \in N$, т.е. $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \{0\} \cup N$, тогда из аксиомы треугольника имеем: $\rho(x_0;x_n) \le \rho(x_0;x_1) + \rho(x_1;x_{n+1}) + \rho^*(x_n;x_{n+1})$. Заметим, что условия (1) и (2) определяют неравенство $\rho(x_0;x_n) \le 2\rho(x_0;x_1) + \rho(x_1;x_{n+1})$ и, следовательно, $x_n \in M$, т.е. $f^n(x_0) \in M$ для любого $n \in N$. Поскольку $\{f^n(x_0)\}_{n\in N} \in f(M)$ и $f(M)$ является l-компактным подмножеством в (X,ρ^*), то из $\{f^n(x_0)\}_{n\in N}$ можно извлечь l-сходящуюся подпоследовательность. Остается использовать теорему 2.1. Ясно, что $Fix(f) \neq \varnothing$.

Поступила 24.12.2002
Кафедра общей математики
Грузинского технического университета

Литература

1. П.С. Александров, В.В. Немыцкий. Математ. сборн., 3,1938, 663-672.
2. S. Bodjanova. Math. Slovaca, 31 (3), 1981, 277-289.
3. B.P. Dvalishvili. Doct. Dissert., Tbilisi State University, 1994.
4. И.Д. Дочвири. Кандидат. диссерт., Тб. гос. ун-т, 2002.
5. M. Edelstein. J. of London Math. Soc., 37, 1962, 74-79.
6. M. Edelstein. Proc. Amer. Math. Soc., 15(5), 1964, 689-695.
7. J. Jachimski. Publ. Math. Debrecen, 43, 1993, 283-288.
8. B. Rhoades. Trans. Amer. Math. Soc., 226, 1977, 257-290.
9. B. Rhoades. Demonstr. Math., 30(2), 1997, 301-305.
10. S. Romaguera, E. Checa. Math. Japan., 35, 1990, 137-139.
11. K. Stoltenberg. Duke Math. Journ., 36, 1969, 65-71.

ი. დოჭვირი

თეორემები კვაზიმეტრიკული სივრცეების Q-კუმშვადი ასახვების უძრავი წერტილების შესახებ

რეზიუმე

ნაშრომში დამტკიცებულია სხვადასხვა თეორემა კვაზიმეტრიკული სივრცეების Q-კუმშვადი ასახვების უძრავი წერტილების შესახებ.

I.Dochviri

Fixed point theorems for Q-contractive mappings of quasi-metric spaces

Summary

In the work the several fixed point theorems are proved for Q-contractive mappings of quasi-metric spaces.

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского государственного
университета им. Ив. Джавахишвили
Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University
354

УДК 517.51

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Н. Г. Джангвеладзе

Необходимые и достаточные условия для непрерывности функций нескольких переменных ([4],[5]) позволяют указать достаточные условия для сверху (снизу) полунепрерывности. При установлении этих условий будут использованы определенные свойства верхнего (нижнего) предела, с которых и начнем.

1. Верхний и нижний пределы

Пусть функция $f(x)$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$ определена на множестве $E\in R^n$ и пусть точка $x^0=(x^0_1,\dots,x^0_n)\in R^n$ является предельной точкой для E. Точка x^0 может принадлежать или не принадлежать множеству E.

Если функция f не имеет предела в точке x^0, то для изучения характера изменения величин $f(x)$ вблизи точки x^0 необходимы два понятия верхнего и нижнего пределов.

Рассмотрим пересечение $U(x^0,\delta)\cap E$ множества E с δ-окрестностью $U(x^0,\delta)$ точки x^0, $\delta>0$. Обозначим через $M_\delta(x^0,f)$ верхнюю и через $m_\delta(x^0,f)$ – нижнюю грани значений $f(x)$, принимаемых функцией f в точках $x\in U(x^0,\delta)\cap E$. Следовательно,

$$m_\delta(x^0,f)=\inf\{f(x):x\in U(x^0,\delta)\cap E\},$$
$$M_\delta(x^0,f)=\sup\{f(x):x\in U(x^0,\delta)\cap E\}.$$

При уменьшении $\delta>0$ верхняя грань $M_\delta(x^0,f)$ не возрастает, а $m_\delta(x^0,f)$ не убывает. Поэтому существуют конечные или бесконечные пределы $\lim\limits_{\delta\to0+} m_\delta(x^0,f)$ и $\lim\limits_{\delta\to0+} M_\delta(x^0,f)$. Эти пределы обозначаются, соответственно, символами

$$\varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x),\quad \varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x) \tag{1}$$

и их называют нижним и верхним пределами для функции f в точке x^0 по множеству (вдоль множества) E.

Следовательно,

$$\underset{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}{\underline{\lim}}\, f(x)=\lim_{\delta\to 0+} \mathrm{m}_\delta(x^0,f),\quad \overline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}\, f(x)=\lim_{\delta\to 0+} \mathrm{M}_\delta(x^0,f). \qquad (2)$$

Очевидно, что $\mathrm{M}_\delta(x^0,f)\geq \mathrm{m}_\delta(x^0,f)$ и

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}\, f(x)\geq \underset{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}{\underline{\lim}}\, f(x). \qquad (3)$$

Если

$$\underset{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}{\underline{\lim}}\, f(x)=\overline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}\, f(x),$$

то тогда функция f по множеству E имеет в точке x^0 конечный или бесконечный пределы

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x) \qquad (5)$$

и

$$\underset{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}{\underline{\lim}}\, f(x)=\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x)=\overline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}\, f(x). \qquad (6)$$

Если при любом $\delta>0$ функция $f(x)$ является неограниченной сверху на $\mathrm{U}(x^0,\delta)\cap \mathrm{E}$, то пишем

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}\, f(x)=+\infty. \qquad (7)$$

Аналогично, в случае неограниченности $f(x)$ снизу на $\mathrm{U}(x^0,\delta)\cap \mathrm{E}$ пишем

$$\underset{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}{\underline{\lim}}\, f(x)=-\infty. \qquad (8)$$

В случае $\mathrm{M}_\delta(x^0,\delta)$, стремящегося к-∞ при уменьшении δ, полагаем

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}\, f(x)=+\infty. \qquad (9)$$

Также, если $\mathrm{m}_\delta(x^0,\delta)$ с уменьшением δ стремится к+∞, то

$$\underset{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}{\underline{\lim}}\, f(x)=-\infty. \qquad (10)$$

Имеет место

Теорема 1 ([1], стр. 146). Пусть функции $\varphi(x)$ и $g(x)$ определены на множестве $E\in R^n$ и пусть x^0 является предельной точкой для E, которая может принадлежать или нет множеству E. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}} f(x) + \underline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}\, g(x) \le$$

$$\le \overline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}[\varphi(x)+g(x)] \le \overline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}\varphi(x) + \overline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}} g(x), \tag{11}$$

$$\underline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}\,\varphi(x) + \underline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}\, g(x) \le$$

$$\le \underline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}\,[\varphi(x)+g(x)] \le \underline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}\,[\varphi(x) + \overline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}} g(x). \tag{12}$$

Из неравенств (11) и (12) получается

Следствие 1 ([1], стр. 146). Если

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}} g(x) = \underline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}\, g(x) = \lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} g(x), \tag{13}$$

то тогда имеют место равенства

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}[\varphi(x)+g(x)] = \overline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}\varphi(x) + \lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} g(x), \tag{14}$$

$$\underline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}\,[\varphi(x)+g(x)] = \underline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}\,[\varphi(x) + \lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} g(x). \tag{15}$$

Наконец, отметим следующие равенства ([2], стр. 17).

$$\underline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}\, f(x) = -\overline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}[-f(x)], \tag{16}$$

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}} f(x) = -\underline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}}\,[-f(x)]. \tag{17}$$

2. Полунепрерывные функции

Полунепрерывность сверху (снизу) функции в точке связана с верхним (нижним) пределом этой функции в той же точке.

Понятие полунепрерывности сверху (снизу) функции f в точке x^0 требует, чтобы предельная для множества E точка x^0 обязательно принадлежала множеству E.

Далее, понятие непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x^0 требует, чтобы значение $\varphi(x^0)$ было конечным. Такое требование не является обязательным для понятия полунепрерывности сверху (снизу) в x^0.

Определение 1 ([3], стр. 385). Определенная на множестве $E\subset R^n$ функция $f(x)$ называется полунепрерывной сверху в точке x^0, если

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}} f(x) = f(x^0). \tag{18}$$

Если же

$$\underline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}} f(x) = f(x^0), \tag{19}$$

то тогда функция $f(x)$ называется полунепрерывной снизу в точке x^0.

В этом определении не предполагается конечность величины $f(x^0)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x^0, то тогда она будет в этой точке полунепрерывной одновременно сверху и снизу. Обратно, из полунепрерывности функции $f(x)$ в точке x^0 и сверху и снизу следует, при конечности $f(x^0)$, непрерывность $f(x)$ в x^0.

Так как точка x^0 принадлежит множеству E определения функции $f(x)$, то для любого $\delta > 0$ имеем $m_\delta(x^0, f) \le f(x^0) \le M_\delta(x^0, f)$.

Следовательно,

$$m_\delta(x^0, f) \le \underline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}} f(x) \le f(x_0) \le \overline{\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}} f(x) \le M_\delta(x^0, f). \tag{20}$$

2. Достаточные условия для полунепрерывности

3.1. Случай функции нескольких переменных. Пусть в окрестности $U(x^0, \delta)$ точки $x^0 = (x_1, \ldots, x^0_n)$ определена конечная функция $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Определение 2. Функцию $f(x)$ будем называть по переменному x_k, сверху (снизу) сильно полунепрерывной в точке x^0, если имеет место равенство

$$\overline{\lim_{x\to x^0}}\left[f(x) - f(x(x^0_k))\right] = 0, \tag{21}$$

соответственно равенство

$$\underline{\lim_{x\to x^0}}\left[f(x) - f(x(x^0_k))\right] = 0. \tag{22}$$

Здесь через $x(x^0_k)$, $1\le k\le n$, обозначена та точка, которая получится из точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с заменой $x_k = x^o_k$ ([6]).

Определение 3. Функцию $f(x)$ будем называть по каждой переменной сверху (снизу) сильно полунепрерывной в точке x^0, если равенство (21) (равенство (22)) выполняется для всех значений k=1,…,n.

1^0. Имеет место следующая

Теорема 2. По каждой переменной сверху сильная полунепрерывность функции $f(x)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, в точке $x^0=(x^0_1,\ldots,x^0_n)$ является достаточным условием для сверху полунепрерывности функции $f(x)$ в точке x^0.

Доказательство. Напишем очередное равенство

$$\begin{gathered} f(x)-f(x^0)=\left[f(x)-f(x(x_1^0))\right]+ \\ +\left[f(x(x_1^0))-f(x(x_1^0,x_2^0))\right]+\cdots+\left[f(x^0(x_n))-f(x^0)\right]. \end{gathered} \tag{23}$$

Здесь символом $x(x^0_1, x^0_2)$ обозначена точка, которая получается из точки $x=(x_1,\ldots,x_n)$ с заменами $x_1=x^0_1$ и $x_2=x^0_2$. Далее, символом $x^0(x_n)$ обозначена точка, полученная из точки $x^0=(x^0_1,\ldots,x^0_n)$ с заменой x^0_n на x_n.

Так как верхний предел суммы, составленной из конечного количества слагаемых, не превосходит сумму верхних пределов для слагаемых (см. (11)), то из равенства (23) получаем оценку

$$\begin{gathered} \varlimsup_{x\to x^0}\left[f(x)-f(x^0)\right]\le \\ \le\varlimsup_{x\to x^0}\left[f(x)-f(x(x_1^0))\right]+\varlimsup_{x\to x^0}\left[f(x(x_1^0))-f(x(x_1^0,x_2^0))\right]+ \\ +\cdots+\varlimsup_{x\to x^0}\left[f(x^0(x_n))-f(x^0)\right]. \end{gathered} \tag{24}$$

Здесь в правой части первый верхний предел равен нулю в силу равенства (21) при k=1. Из того же равенства (21) при k=2 получаем

$$\varlimsup_{x\to x^0}\left[f(x)-f(x(x_2^0))\right]=0. \tag{25}$$

Если в равенстве (25) положим частное значение $x_1=x^0_1$, то получим*

$$\varlimsup_{x\to x^0}\left[f(x(x_1^0))-f(x(x_1^0,x_2^0))\right]\le 0. \tag{26}$$

Далее, из равенства (21) при k=n следует

$$\varlimsup_{x\to x^0}\left[f(x)-f(x(x_n^0))\right]=0. \tag{27}$$

Для частных значений $x_i=x^0_i$ при i=1,…,n-1, из равенства (27) получаем неравенство

---

* Относительно подмножества верхний предел не превосходит верхнего предела относительно основного множества.

$$\overline{\lim_{x \to x^0}}\left[f(x^0(x_n)) - f(x^0)\right] \leq 0. \qquad (28)$$

Поэтому из (24) следует, что

$$\overline{\lim_{x \to x^0}}\left[f(x) - f(x^0)\right] \leq 0. \qquad (29)$$

С другой стороны, в силу равенства (14), левую часть неравенства (29) можно записать в виде

$$\overline{\lim_{x \to x^0}} f(x) - f(x^0) \leq 0.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{x \to x^0}} f(x) \leq f(x^0)\,, \qquad (30)$$

Вместе с тем, из соотношений (20) имеем

$$f(x^0) \leq \underline{\lim_{x \to x^0}} f(x). \qquad (31)$$

Сопоставлением неравенств (30) и (31) получаем равенство

$$\overline{\lim_{x \to x^0}} f(x) = f(x^0).$$

означающее полунепрерывность сверху функции $f(x)$ в точке x^o. Теорема доказана.

2°. Для полунепрерывности снизу имеет место**

Теорема 3. По каждой переменной снизу сильная полунепрерывность функции $f(x)$ в точке x^0, т.е. выполнение равенства (22) для всех k=1,…,n, является достаточным условием для полунепрерывности снизу функции $f(x)$ в точке x^0.

Доказательство. Применением равенства (16) к равенству (22) получим

$$\overline{\lim_{x \to x^0}}\left[- f(x) + f(x(x_k^o))\right] = 0$$

или, что то же самое,

$$\overline{\lim_{x \to x^0}}\left\{- f(x) - \left[- f(x(x_k^o))\right]\right\} = 0.$$

Значит, равенство (21) выполнено для функции $-f(x)$ при всех k =1,...,n. Поэтому, в силу теоремы 2, имеем

** Нижний предел относительно подмножества не меньше нижнего предела относительно основного множества.

$$\overline{\lim_{x \to x^0}}[-f(x)] = -0f(x^0). \tag{32}$$

В силу равенства (16), равенство (32) можно переписать так:

$$-\lim_{x \to x^0} f(x) = -f(x^0).$$

Отсюда

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0), \tag{33}$$

т.е. функция $f(x)$ является полунепрерывной снизу в точке $x°$. Теорема доказана.

3.2. **Случай функций двух переменных.** Достаточные условия полунепрерывности сверху (снизу) для функций двух переменных имеют более простой вид.

Для конечной в окрестности точки $x^0 = (x^0{}_1, x^0{}_2)$функции двух переменных $\varphi(x_1, x_2)$ введем следующее

Определение 4. Функцию $\varphi(x_1, x_2)$ будем называть по переменному x_1 полунепрерывной сверху (снизу) в точке x^0, если

$$\overline{\lim_{x \to x^0}}\left|\varphi(x_1, x_2^0) - \varphi(x_1^0, x_2^0)\right| = 0, \tag{34}$$

если, соответственно,

$$\lim_{x_1 \to x_1^0}\left|\varphi(x_1, x_2^0) - \varphi(x_1^0, x_2^0)\right| = 0. \tag{35}$$

Аналогичным образом вводится по переменному x_2 полунепрерывность сверху (снизу) функции $\varphi(x_1, x_2)$ в точке x^0.

Теорема 4. Для полунепрерывности сверху в точке x^0 функции $\varphi(x_1,x_2)$ достаточно, чтобы $\varphi(x_1,x_2)$ в точке x^0 являлась относительно одного из переменных сильно полунепрерывной сверху и относительно другого переменного полунепрерывной сверху.

Доказательство. Для определенности предположим, что функция $\varphi(x_1, x_2)$ в точке x^0 является по переменному x_1 сильно полунепрерывной сверху и по переменному x_2 полунепрерывной сверху. Это эквивалентно следующим двум равенствам

$$\overline{\lim_{(x_1,x_2) \to x^0}}\left|\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1^0, x_2)\right| = 0, \tag{36}$$

$$\overline{\lim_{x_2 \to x_2^0}}\left|\varphi(x_1^0, x_2) - \varphi(x_1^0, x_2^0)\right| = 0. \tag{37}$$

Теперь напишем следующее очевидное равенство:

$$\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2^0)=$$
$$=\left[\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2)\right]+\left[\varphi(x_1^0,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2^0)\right]. \tag{38}$$

Отсюда получаем, в силу равенств (36), (37) и соотношения (11),

$$\overline{\lim_{(x_1,x_2)\to x^0}}\left[\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2^0)\right]\le 0,$$

или, что то же самое в силу равенства (14),

$$\overline{\lim_{(x_1,x_2)\to x^0}}\varphi(x_1,x_2)\le\varphi(x_1^0,x_2^0). \tag{39}$$

С другой стороны, согласно неравенствам (20),

$$\varphi(x_1^0,x_2^0)\le\overline{\lim_{(x_1,x_2)\to x^0}}\varphi(x_1,x_2). \tag{40}$$

Из неравенств (39) и (40) следует равенство

$$\overline{\lim_{(x_1,x_2)\to x^0}}\varphi(x_1,x_2)=\varphi(x_1^0,x_2^0),$$

означающее полунепрерывность сверху функции $\varphi\ (x_1,\ x_2)$ в точке x^0. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 5. Для полунепрерывности снизу функции $\varphi\ (x_1, x_2)$ в точке x^0 достаточно, чтобы $\varphi\ (x_1, x_2)$ в точке x^0 являлась относительно одного из переменных сильно полунепрерывной снизу и относительного другого переменного полунепрерывной снизу.

Поступила 19.12.2002
Кафедра математики
Кутаисского гос. университета

Литература

1. П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Введение в теорию функций действительного переменного, 1938.
2. Валле Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. I, 1933.
3. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. М., 1974.
4. O.P. Dzagnidze. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 106 (1993), 7-48.
5. O.P. Dzagnidze. Real analysis Exchange, 24, №2. (1998/99), 695-702.
6. O.P. Dzagnidze. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 123 (2000), 23-29.

ნ. ჯანგველაძე

მრავალი ცვლადის ფუნქციის ნახევრადუწყვეტობის საკმარისი პირობები

რეზიუმე

დადგენილია მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზემოდან (ქვემოდან) ნახევრადუწყვეტობის საკმარისი პირობები, რომელნიც გარკვეულ კავშირშია უწყვეტობის აუცილებელ და საკმარის პირობებთან ([4],[5]).

N.Jangveladze

Sufficient conditions for the semicontinuity of functions of several variables

Summary

Sufficient conditions are established for functions of several viriables to be upper (lower) semicontinuous. These conditions are connected in a certain sense with the necessary and sufficient conditions for continuity ([4], [5]).

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского государственного
университета им. Ив. Джавахишвили
Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University
354

УДК 517.51

О РЕГУЛЯРНОЙ И СМЕШАННЫХ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

М. Ш. Каладзе

Предварительные факты

Пусть функция $f(x)$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in \mathrm{R}^n$ определена в окрестности $\mathrm{U}(x^0)$ точки $x^0=(x^0{}_1,\dots,x^0{}_n)\in \mathrm{R}^n$. Предположим, что функция f обладает в $\mathrm{U}(x^0)$ частной производной относительно переменного x_j, символически f'_{x_j}, $x\in \mathrm{U}(x^0)$. Далее, пусть частная производная f'_{x_j} обладает в точке x^0 частной производной относительно переменного x_i, символически $f''_{x_j,x_i}(x^0)$. Очевидно, что $f''_{x_i,x_j}(x^0)$ означает частную производную относительно переменного x_j в точке x^0 для $f'_{x_i}(x)$, предполагая $f'_{x_i}(x)$ существующей и конечной в окрестности $\mathrm{U}(x^0)$.

Если $j\neq i$, то тогда $f''_{x_j,x_i}(x^0)$ и $f''_{x_i,x_j}(x^0)$ называются вторых порядков смешанными частными производными в точке x^0 для функции f.

Основная задача об $f''_{x_j,x_i}(x^0)$ и $f''_{x_i,x_j}(x^0)$ состоит в следующем: какие свойства в точке x^0 функции f обеспечивают выполнение равенства

$$f''_{x_i,x_j}(x^0)=f''_{x_j,x_i}(x^0). \tag{1}$$

В связи с этой задачей известны результаты как положительного, так и отрицательного характера.

Теорема A (W.H. Young, 1917). Если у функции $f(x_1,x_2)$ имеются конечные частные производные $f'_{x_1}(x_1,x_2)$ и $f'_{x_2}(x_1,x_2)$ в окрестности точки $x^0=(x^0{}_1,x^0{}_2)$ и эти частные производные являются дифференцируемыми в точке x^0 функциями, то тогда имеет место равенство

$$f''_{x_2,x_1}(x^0)=f''_{x_1,x_2}(x^0). \tag{2}$$

Теорему A коротко формулируют так: дважды дифференцируемость в точке $x^0=(x^0{}_1,x^0{}_2)$ функции $f=(x_1,x_2)$ влечет равенство (2). Вспомним, что определенная в окрестности $U(x^0)$ функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется дважды дифференцируемой в точке $x^0=(x^0_1, \ldots, x^0_n)$, если в $U(x^0)$ существуют конечные $f'_{x_k}(x)$ и $f'_{x_k}(x)$ и они являются дифференцируемыми в x^0 функциями, $k=1,\ldots,n$).

Теорема B ([1], стр. 428). Если функция $F(x_1,x_2)$ всюду в области G допускает производные $F''_{x_1,x_1}, F''_{x_1,x_2}, F''_{x_2,x_1}, F''_{x_2,x_2}$, то почти всюду в G

$$f''_{x_1,x_2} = f''_{x_2,x_1}. \tag{3}$$

Теорема C ([2], стр. 27). Существует функция $F(x_1,x_2)$, непрерывная вместе со своими первыми частными производными в некоторой области и обладающая всюду в этой области обеими смешанными частными производными, для которых неравенство

$$F''_{x_1,x_2} \neq F''_{x_2,x_1} \tag{4}$$

осуществляется на множестве плоской положительной меры.

Теорема D ([2], стр. 27). Существует функция $F(x_1,x_2)$, непрерывная вместе со своими первыми частными производными в некоторой области и обладающая почти всюду в этой области обоими смешанными частными производными, для которых неравенство (4) осуществляется почти всюду.

Основные утверждения

1⁰. Определение ([3]). Определенная в окрестности точки $x^0=(x^0_1, x^0_2)$ функция двух переменных $\psi(x_1, x_2)$ обладает в точке x^0 регулярной производной, символически $\psi'_{rg}(x^0)$, если для каждого числа $\lambda \geq 1$ существует не зависящий от λ предел, конечный или бесконечный,

$$\psi'_{rg}(x^0) = \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0) \\ \frac{1}{\lambda} \leq \left|\frac{k}{h}\right| \leq \lambda}} \frac{\Delta^2_{[x^0]}\Psi(h,k)}{hk}, \tag{5}$$

где

$$\Delta^2_{[x^0]}\Psi(h,k) = \\ = \Psi(x_1^0+h, x_2^0+k) - \Psi(x_1^0, x_2^0+k) - \Psi(x_1^0+h, x_2^0) + \Psi(x_1^0, x_2^0). \tag{6}$$

Следующая теорема является расширением утверждения Теоремы А.

Теорема. Если функция $f(x_1,x_2)$ является дважды дифференцируемой в точке $x^0=(x^0_1,\ x^0_2)$, то тогда в x^0 существует конечная регулярная производная $F'_{rg}(x^0)$ и

$$f''_{x_1,x_2}(x^0)=f'_{rg}(x^0)=f''_{x_2,x_1}(x^0). \tag{7}$$

Доказательству этой теоремы предпошлем некоторые соотношения между смешанными частными производными вторых порядков для функций $n\geq 2$ переменных. При этом, наряду с обозначениями $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и $x^0=(x^0_1,\ldots,x^0_n)$, будем пользоваться обозначениями ([4])

$$x(x_i^0)=(x_1,\ldots,x_{x-1},x_i^0,\ldots,x_{x+1},\ldots,x_n), \tag{8}$$

$$x^0(x_j)=(x_1^0,\ldots,x_{j-1}^0,x_j,x_{j+1},\ldots,x_n^0). \tag{8}$$

Далее, символом $x^0(x_i,\ x_j)$ будем обозначать ту точку, которая получится из $x^0(x_j)$ в результате замены x^0_i на x_i.

2⁰. Лемма. Если функция $\phi(x)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$ дважды дифференцируема в точке $x^0=(x^0_1,\ldots,x^0_n)$, то тогда для всех $i,\ j=1,\ldots,n$ имеют место равенства

$$B_\Phi(x_0;h,k)=hk\Phi''_{x_ix_j}(x^0)+h(|h|+|k|)\cdot\omega_1(h,k), \tag{10}$$

$$B_\Phi(x_0;h,k)=hk\Phi''_{x_jx_i}(x^0)+k(|h|+|k|)\cdot\omega_2(h,k), \tag{11}$$

где

$$B_\Phi(x_0;h,k)=\Phi_{ij}(h,k)-\Phi_i(h)-\Phi_j(k)+\Phi(x^0), \tag{12}$$

$$\Phi_{ij}(h,k)=\Phi(x^0(x_i^0+h,x_j^0+k)), \tag{13}$$

$$\Phi_i(h)=\Phi(x^0(x_i^0+h)),\quad \Phi_j(k)=\Phi(x^0(x_j^0+k)), \tag{14}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\omega_1(h,k)=0,\quad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\omega_2(h,k)=0. \tag{15}$$

Доказательство. Введем функцию переменного t_i

$$\varphi(t_i,k)=\Phi(x^0(t_i,x_j^0+k))-\Phi(x^0(t_i)), \tag{16}$$

для которой

$$\varphi(x_i^0+\mathrm{h},\mathrm{k})-\varphi(x_i^0,\mathrm{k})=\Phi(x^0(x_i^0+\mathrm{h},x_j^0+\mathrm{k}))- \\ -\Phi(x^0(x_i^0+\mathrm{h}))-\Phi(x^0(x_j^0+\mathrm{k}))+\Phi(x^0) \tag{17}$$

или, что то же самое,

$$\varphi(x_i^0+\mathrm{h},\mathrm{k})-\varphi(x_i^0,\mathrm{k})=\Phi_{\mathrm{ij}}(\mathrm{h},\mathrm{k})-\Phi_{\mathrm{i}}(\mathrm{h})-\Phi_{\mathrm{j}}(\mathrm{k})+\Phi(x^0). \tag{18}$$

Значит,

$$\mathrm{B}_{\Phi}(x^0;\mathrm{h},\mathrm{k})=\varphi(x_i^0+\mathrm{h},\mathrm{k})-\Phi(x_i^0,\mathrm{k}). \tag{19}$$

По формуле Лагранжа

$$\varphi(x_i^0+\mathrm{h},\mathrm{k})-\varphi(x_i^0,\mathrm{k})=\mathrm{h}\varphi'(x_i^0+\theta_1\mathrm{h},\mathrm{k}),\ 0<\theta_1<1. \tag{20}$$

Поэтому

$$\mathrm{B}_{\Phi}(x^0;\mathrm{h},\mathrm{k})=\mathrm{h}\varphi'(x_i^0+\theta_1\mathrm{h},\mathrm{k}),\ 0<\theta_1<1. \tag{21}$$

С другой стороны,

$$\varphi'(x_i^0+\theta_1\mathrm{h},\mathrm{k})= \\ =\Phi'_{\mathrm{x_i}}(x^0(x_i^0+\theta_1\mathrm{h},x_j^0+\mathrm{k}))-\Phi'_{\mathrm{x_i}}(x^0(x_i^0+\theta_1\mathrm{h})). \tag{22}$$

Равенство (21) перепишем в виде

$$\varphi'(\mathrm{x_i^0}+\theta_1\mathrm{h},\mathrm{k})=\left[\Phi'_{\mathrm{x_i}}(\mathrm{x^0}(\mathrm{x_i^0}+\theta_1\mathrm{h},\mathrm{x_j^0}+\mathrm{k}))-\Phi'_{\mathrm{x_i}}(\mathrm{x^0})\right]- \\ -\left[\Phi'_{\mathrm{x_i}}(\mathrm{x^0}(\mathrm{x_i^0}+\theta_1\mathrm{h}))-\Phi'_{\mathrm{x_i}}(\mathrm{x^0})\right]. \tag{23}$$

Так как первых порядков частные производные функции Φ являются дифференцируемыми функциями в точке x^0, то выражения в квадратных скобках из равенства (22) можно заменить известными равенствами. Поэтому имеем

$$\varphi'(x_i^0+\theta_1\mathrm{h},\mathrm{k})=\theta_1\mathrm{h}\Phi''_{x_i^2}(x^0)+\mathrm{k}\Phi''_{x_i,x_j}(x^0)+ \\ +(|\theta_1\mathrm{h}|+|\mathrm{k}|)\cdot\omega_3(\mathrm{h},\mathrm{k})-\theta_1\mathrm{h}\Phi''_{x_i^2}(x^0)+|\theta_1\mathrm{h}|\cdot\omega_4(\mathrm{h},\mathrm{k})= \\ =\mathrm{k}\Phi''_{\mathrm{x_i x_j}}(x^0)+(|\mathrm{h}|+|\mathrm{k}|)\cdot\omega_1(\mathrm{h},\mathrm{k}). \tag{24}$$

Теперь из равенств (21) и (24) получаем равенство (10).
Аналогично доказывется и равенство (11).

Следует отметить, что в равенствах (10) и (11) переменные h и k не зависят друг от друга. Лемма доказана.

3^0. Доказательство теоремы. Полагая в равенствах (12)-(14) n=2, i=1, j=2 и φ=*f*, получим функции

$$f_{12}(\mathrm{h},\mathrm{k})=f(x_1^0+\mathrm{h},x_2^0+\mathrm{k}),$$

$$f_1(\mathrm{h})=f(x_1^0+\mathrm{h},x_2^0),\quad f_2(\mathrm{k})=f(x_1^0,x_2^0+\mathrm{k}),$$

$$\mathrm{B}_f(x^0;\mathrm{h},\mathrm{k})=f(x_1^0+\mathrm{h},x_2^0+\mathrm{k})-f(x_1^0,x_2^0+\mathrm{k})-$$

$$-f(x_1^0+\mathrm{h},x_2^0)+f(x_1^0,x_2^0).$$

Значит (см. равенство (6)),

$$\mathrm{B}_\mathrm{f}(x^0;\mathrm{h},\mathrm{k})=\Delta^2_{[x^0]}f(\mathrm{h},\mathrm{k}). \tag{25}$$

Поэтому равенства (10) и (11) примут вид

$$\Delta^2_{[x^0]}f(\mathrm{h},\mathrm{k})=\mathrm{hk}f''_{x_1,x_2}(x^0)+\mathrm{h}(|\mathrm{h}|+|\mathrm{k}|)\cdot\omega_1(\mathrm{h},\mathrm{k}), \tag{26}$$

$$\Delta^2_{[x^0]}f(\mathrm{h},\mathrm{k})=\mathrm{hk}f''_{x_2,x_1}(x^0)+\mathrm{k}(|\mathrm{h}|+|\mathrm{k}|)\cdot\omega_2(\mathrm{h},\mathrm{k}). \tag{27}$$

Отсюда

$$\frac{\Delta^2_{[x^0]}f(\mathrm{h},\mathrm{k})}{\mathrm{hk}}=f''_{x_1,x_2}(x^0)+\left(1+\frac{|\mathrm{h}|}{|\mathrm{k}|}\right)\cdot\omega_1(\mathrm{h},\mathrm{k})\cdot\operatorname{sign}\mathrm{k}, \tag{28}$$

$$\frac{\Delta^2_{[x^0]}f(\mathrm{h},\mathrm{k})}{\mathrm{hk}}=f''_{x_2,x_1}(x^0)+\left(1+\frac{|\mathrm{k}|}{|\mathrm{h}|}\right)\cdot\omega_2(\mathrm{h},\mathrm{k})\cdot\operatorname{sign}\mathrm{h}. \tag{29}$$

Возьмем любое число $\lambda\geq 1$ и предположим, что (h,k)→(0,0) при соблюдении условий $\frac{1}{\lambda}\leq\frac{|\mathrm{k}|}{|\mathrm{h}|}\leq\lambda$. Тогда из равенств (28) и (29) получаем равенства

$$f'_{\mathrm{rg}}(x^0)=f''_{x_1,x_2}(x^0), \tag{30}$$

$$f'_{\mathrm{rg}}(x^0)=f''_{x_2,x_1}(x^0). \tag{31}$$

Теорема доказана

4^0. Следствие 1 (n-мерный аналог теоремы А). Если функция *f*(*x*), $x=(x_1,\ldots,x_n)$ дважды дифференцируема в точке $x^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$, то тогда для всех i, j = 1,…,n имеют место равенства

$$f''_{x_i,x_j}(x^0)=f''_{x_j,x_i}(x^0). \tag{32}$$

Доказательство. В равенствах (10) и (11) положим k = h, получим

$$B_f(x^0;h,h) = h^2 f''_{x_i,x_j}(x^0) + 2h^2 \cdot \operatorname{sign} h \cdot \omega_1(h,h), \tag{33}$$

$$B_f(x^0;h,h) = h^2 f''_{x_j,x_i}(x^0) + 2h^2 \cdot \operatorname{sign} h \cdot \omega_1(h,h). \tag{34}$$

Отсюда получим равенство

$$f''_{x_i,x_j}(x^0) - f''_{x_j,x_i}(x^0) = 2\operatorname{sign} h \cdot (\omega_1 - \omega_2), \tag{35}$$

левая часть которого не зависит от h и правая его часть стремится к нулю при $h \to 0$. Значит $\omega_2(h, h) = \omega_1(h, h)$. Равенство (32) доказано.

Следствие 2 (n-мерный вариант теоремы Шварца). Пусть в окрестности $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ у функции $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, имеются конечные $f'_{x_i}, f'_{x_j}, f''_{x_i,x_j}$ и f''_{x_j,x_i}. Если зависящие от двух переменных x_i и x_j функции $f''_{x_i,x_j}(x^0(x_i,x_j))$ и $f''_{x_j,x_i}(x^0(x_i,x_j))$ являются непрерывными в точке (x_i^0, x_j^0), тогда имеет место равенство

$$f''_{x_i,x_j}(x^0) = f''_{x_j,x_i}(x^0). \tag{36}$$

Доказательство. Правая часть равенства (22) можно записать в виде

$$k\ f''_{x_i,x_j}(x^0(x_i^0 + \theta_1 h, x_j^0 + \theta_2 k)),\ \ 0 < \theta_2 < 1. \tag{37}$$

Поэтому из равенства (21) получаем

$$\begin{gathered} B_f(x^0;h,k) = \\ hk\ f''_{x_i,x_j}(x^0(x_i^0 + \theta_1 h, x_j^0 + \theta_2 k)),\ \ 0 < \theta_1, \theta_2 < 1. \end{gathered} \tag{38}$$

Так же, введением функции переменного t_j

$$\psi(h, t_j) = f(x^0(x_i^0 + h), t_j) - f(x^0(t_j))$$

и аналогичным способом получится равенство

$$\begin{gathered} B_f(x^0;h,k) = \\ hk\ f''_{x_j,x_i}(x^0(x_i^0 + \theta_3 h, x_j^0 + \theta_4 k)),\ \ 0 < \theta_3, \theta_4 < 1. \end{gathered} \tag{39}$$

Значит, правые части равенств (38) и (39) равны между собой и непрерывность в (x_i^0, x_j^0) смешанных частных производных влечет равенство (36).

Поступила 17.12.2002
Кафедра математики
Кутаисского гос. университета

Литература

1. Г.П. Толстов. Изв.АН СССР, серия матем., 13 (1949), 425-446.
2. Г.П. Толстов. Изв.АН СССР, Матем. сб., т. 24(66), №1 (1949), 27-51.
3. С. Сакс. Теория интеграла, перевод с английсского, ИЛ, Москва, 1949.
4. O. Dzagnidze. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 123(2000), 23-29.

მ. კალაძე

ორი ცვლადის ფუნქციის რეგულარული და შერეული კერძო წარმოებულების შესახებ

რეზიუმე

ორი ცვლადის ორჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციისათვის დამტკიცებულია რეგულარული წარმოებულის ტოლობა მეორე რიგის შერეულ კერძო წარმოებულებთან.

M. Kaladze

On regular and mixed partial derivatives for functions of two variables

Summary

The equality of a regular derivative to mixed partial derivatives of second order is proved for a twice differentiable function of two variables.

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского государственного
университета им. Ив. Джавахишвили
Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University
354

УДК 519.63

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО

Т. А. Джангвеладзе, З. В. Кигурадзе

Введение

При математическом моделировании многих физических, биологических, экологических и других процессов возникают задачи с нелокальными краевыми условиями. По сравнению с классическими краевыми задачами в нелокальных задачах вместо краевых условий дается зависимость значений искомой функции на границе и внутри области [I]. Так что нелокальные задачи представляют собой естественное обобщение обыкновенных краевых задач.

Исторически одна из первых работ, посвященная нелокальным краевым задачам, принадлежит началу XX века [2]. Современное исследование нелокальных краевых задач берет начало в работе А. Бицадзе и А. Самарского [I], в которой в прямоугольных областях для многомерных эллиптических уравнений второго порядка методом интегральных уравнений доказаны теоремы существования и единственности решения. Приведены классы задач, для которых можно применить этот метод. Исследованию задач, рассматриваемых в [1], и их некоторым обобщениям посвящаются многие научные работы (см., например, [3]-[10] и др.). В работе [3], в случае уравнения Лапласа был дан итерационный метод доказательства существования решений, основанный на альтернативном методе Шварца [11, с.249-254]. Применение альтернативного метода Шварца дает не только доказательство существования решений, но и возможность построения численного алгоритма решений задачи. Здесь же отметим, что в [3] нелокальная задача редуцируется на классических задачах Дирихле, что дает возможность использовать эффективные численные методы решения этих задач. В работах [4]-[10] рассмотрены различные подходы для изучения нелокальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Известно, что при нахождении приближенных решений большое значение имеет построение простых и экономических алгоритмов. Для построения таких алгоритмов особое внимание уделяется методу декомпозиции.

Цель настоящей работы заключается в иллюстрации применения метода декомпозиции и итерационного процесса Шварца в прямоугольнике для уравнения Лапласа задачи Бицадзе-Самарского. Как было отмечено, итерационный процесс для нелокальной задачи Бицадзе-Самарского, который был основан на альтернативном процессе Шварца, был дан в [3]. При этом алгоритм в [3] имеет последовательный характер.

В настоящей работе задача решается с помощью метода декомпозиции и итерационного процесса Шварца. Здесь же исследованы как последовательный, так и параллельный алгоритм решений задачи.

Вопросы применения метода декомпозиции для различных задач обсуждаются в многочисленных научных работах (см., например, [12], [13]).

Отметим также, что впервые обоснование метода декомпозиции для решения задачи Бицадзе-Самарского для последовательного алгоритма было проделано в [10].

Настоящая работа состоит из трех параграфов. В первом параграфе ставится нелокальная задача Бицадзе-Самарского для уравнения Лапласа в прямоугольнике, во втором и в третьем параграфах изучается сходимость последовательного и параллельного алгоритма, соответственно.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую нелокальную задачу Бицадзе-Самарского [1]. В области $\Omega=\{-\ell<x<\ell,\ 0<y<1\}$ будем искать решение $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ уравнения

$$\Delta u=0, \tag{1}$$

которое удовлетворяет условиям:

$$\begin{gathered} u(x,0)=\varphi_1(x),\ u(x,1)=\varphi_2(x),\ x\in[-\ell,\ell], \\ u(-\ell,y)=\varphi_3(y),\ y\in[0,1], \\ u(\ell,y)=u(x_0,y),\ y\in[0,1], \end{gathered} \tag{2}$$

где $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, а x_0 – фиксированная точка конечного интервала $(-\ell,\ell)$; φ_k, $k=1,2,3$ – заданные непрерывные функции. Предположим, что для функций φ_k, $k = 1,2,3$, выполнены следующие условия согласования:

$$\varphi_1(-\ell)=\varphi_3(0),\quad \varphi_2(-\ell)=\varphi_3(1),$$

которые являются необходимыми для непрерывности решения на $\overline{\Omega}$.

Заметим, что единственность решения задачи (1),(2) вытекает из принципа экстремума [1].

2. Метод декомпозиции и последовательный алгоритм

Для исследования задачи (1),(2), поставленной в предыдущем параграфе, рассмотрим следующий последовательный итерационный процесс:

$$\Delta u_n = 0, \ (x,y) \in \Omega_1,$$
$$u_n(x,0) = \varphi_1(x), \ u_n(x,1) = \varphi_2(x), \ x \in [-\ell, x_1],$$
$$u_n(-\ell, y) = \varphi_3(y), \quad y \in [0,1], \tag{3}$$
$$u_n(x_1, y) = \bar{u}_{n-1}(x_1, y), \quad y \in [0,1],$$
$$n = 1,2,\ldots$$

$$\Delta \bar{u}_n = 0, \ (x,y) \in \Omega_2,$$
$$\bar{u}_n(x,0) = \varphi_1(x), \ \bar{u}_n(x,1) = \varphi_2(x), \ x \in [x_0, \ell],$$
$$\bar{u}_n(x_0, y) = u_n(x_0, y), \quad y \in [0,1], \tag{4}$$
$$\bar{u}_n(\ell, y) = u_n(x_0, y), \quad y \in [0,1],$$
$$n = 1,2,\ldots$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$\Omega_1 = \{-\ell < x < x_1, \ 0 < y < 1\}, \ \ \Omega_2 = \{x_0 < x < \ell, \ 0 < y < 1\},$$

где x_1 – фиксированная точка интервала (x_0, ℓ), а $\bar{u}_0(x_1, y) = \varphi_4(y)$ – любая непрерывная функция, определенная на сегменте [0,1], которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi_4(0) = \varphi_1(x_1), \qquad \varphi_4(1) = \varphi_2(x_1).$$

Итерационный процесс (3),(4) на каждом шаге итерации дает возможность приведения нелокальной задачи (1),(2) к последовательному решению классической краевой задачи Дирихле.

Покажем, что итерационный процесс (3),(4) дает возможность построения решений задачи (1),(2). Докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. Последовательный итерационный процесс (3),(4) равномерно сходится к решению задачи (1),(2) в области Ω и выполняются следующие соотношения:

$$\left|u(x,y) - u_n(x,y)\right| \le Cq^{n-1}, \ (x,y) \in \bar{\Omega}_1,$$
$$\left|u(x,y) - \bar{u}_n(x,y)\right| \le Cq^{n-1}, \ (x,y) \in \bar{\Omega}_2,$$

где постоянная $q \in (0,1)$ не зависит от функций u, u_n, $\bar{u}_n$, а постоянная C зависит от φ_k, $k = 1,2,3,4$.

Доказательство. Заметим, что, решая задачи (3) и (4), мы получаем последовательность гармонических функций $\{u_n\}$, $\{\bar{u}_n\}$, которые определены в областях $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$, соответственно.

При этом имеют место следующие соотношения:

вдоль прямой $x = x_0 (y \in [0,1])$, $\bar{u}_n = u_n$, т.е. $u_{n+1} - u_n = \bar{u}_{n+1} - \bar{u}_n$;

вдоль прямой $x = x_1 (y \in [0,1])$, $\bar{u}_n = u_{n+1}$, т.е. $u_{n+1} - u_n = \bar{u}_n - \bar{u}_{n-1}$.

Введем следующие обозначения:

$$M_n = \max_{y\in[0;1]} \left|u_{n+1}(x_0, y) - u_n(x_0, y)\right| = \max_{y\in[0;1]} \left|\bar{u}_{n+1}(x_0, y) - \bar{u}_n(x_0, y)\right|,$$

$$M_n^1 = \max_{y\in[0;1]} \left|u_{n+1}(x_1, y) - u_n(x_1, y)\right| = \max_{y\in[0;1]} \left|\bar{u}_n(x_1, y) - \bar{u}_{n-1}(x_1, y)\right|.$$

Если $M_n^1 \neq 0$, тогда, применяя лемму Шварца [11, с.250-254] для гармонической функции $v_n = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{M_n^1}$ в области $\bar{\Omega}_1$, получаем

$$M_n \leq q M_n^1, \tag{5}$$

где постоянная $q \in (0,1)$ зависит только от конфигурации области Ω_1.

Если $M_n \neq 0$, тогда применяя принцип экстремума [11, с.218] для гармонической функции $\bar{v}_n = \dfrac{\bar{u}_{n+1} - \bar{u}_n}{M_n}$ в области Ω_2, получаем

$$M_{n+1}^1 \leq M_n. \tag{6}$$

Если $M_n^1 = 0$ для некоторого индекса n, тогда из принципа экстремума получаем $M_n = 0$, и неравенство (5) справедливо.

Если $M_n = 0$ для некоторого индекса n, тогда опять из принципа экстремума получаем $M_{n+1}^1 = 0$, и неравенство (6) справедливо.

Из оценок (5) и (6) следует, что

$$\begin{aligned} M_{n+1} &\leq q M_n, \\ M_{n+1}^1 &\leq q M_n^1. \end{aligned} \tag{7}$$

Это означает, что последовательности $\{M_n\}$ и $\{M_n^1\}$ стремятся к нулю, и мы получаем равномерную сходимость рядов:

$$\begin{aligned} u_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (u_{k+1} - u_k) &= \lim_{n\to\infty} u_n = u, \\ \bar{u}_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{u}_{k+1} - \bar{u}_k) &= \lim_{n\to\infty} \bar{u}_n = \bar{u}, \end{aligned} \tag{8}$$

в областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$, соответственно.

Согласно теореме Вайерштрасса [11, с.232-233], функции u и $\overline{u}$ являются гармоническими, определенными в областях Ω_1 и Ω_2, соответственно. Что касается области $\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$, имеем:

вдоль прямой $x = x_0 (y \in [0,1])$, $\overline{u}_n - u_n = 0$;

вдоль прямой $x = x_1 (y \in [0,1])$, $\overline{u}_n - u_n = \overline{u}_n - \overline{u}_{n-1}$.

Последние разности равномерно стремятся к нулю.

Согласно принципу экстремума, следует, что предельные функции u и $\overline{u}$ совпадают в области Ω_{12} и определяют гармоническую функцию, регулярную в области Ω, являющуюся решением задачи (1),(2).

Теперь оценим скорость сходимости итерационного процесса (3),(4). Используя неравенство треугольника, принцип экстремума и второе из неравенств (7), имеем

$$\left|u_{n+p} - u_n\right| = \left|u_{n+p} - u_{n+p-1} + u_{n+p-1} - u_{n+p-2} + \cdots + u_{n+2} - u_{n+1} + u_{n+1} - u_n\right| \le$$

$$\le M^1_{n+p-1} + M^1_{n+p-2} + \cdots + M^1_{n+1} + M^1_n \le$$

$$\le q^{n+p-2} M^1_1 + q^{n+p-3} M^1_1 + \cdots + q^n M^1_1 + q^{n-1} M^1_1 =$$

$$= q^{n-1} M^1_1 (q^{p-1} + q^{p-2} + \cdots + q + 1) = q^{n-1} M^1_1 \frac{1-q^p}{1-q},$$

$$M^1_1 = \max_{y \in [0;1]} \left|u_2(x_1, y) - u_1(x_1, y)\right| \le \max_{y \in [0;1]} \left(\left|u_2(x_1, y)\right| + \left|u_1(x_1, y)\right|\right) =$$

$$= \max_{y \in [0;1]} \left|\overline{u}_1(x_1, y)\right| + \max_{y \in [0;1]} \left|\overline{u}_0(x_1, y)\right| \le$$

$$\le \max_{\partial\Omega_2} \{|\varphi_1(x)|, |\varphi_2(x)|, |u_1(x_0, y)|\} + \max_{y \in [0;1]} |\varphi_4(y)| \le$$

$$\le \max\{\max_{\partial\Omega_2}\{|\varphi_1(x)|, |\varphi_2(x)|\}, \max_{\partial\Omega_1, k=1,2,3,4} |\varphi_k|\} + \max_{y \in [0;1]} |\varphi_4(y)| = M.$$

Таким образом,

$$\left|u_{n+p} - u_n\right| \le q^{n-1} M \frac{1-q^p}{1-q}.$$

Если в этом неравенстве перейдем к пределу, при $p \to \infty$, тогда в области $\overline{\Omega}_1$ получим

$$\left|u - u_n\right| \le q^{n-1} \frac{M}{1-q}.$$

Аналогично в области $\overline{\Omega}_2$ имеем

$$\left|u - \overline{u}_n\right| \le q^{n-1} \frac{M^*}{1-q},$$

где

$$M^{*} = \max\{ \max_{\partial\Omega_1, k=1,2,3,4} |\varphi_k|, \max_{\partial\Omega_2, k=1,2} |\varphi_k| \} + \max_{\partial\Omega_1, k=1,2,3,4} |\varphi_k|.$$

Окончательно получаем:

$$\left|u(x,y) - u_n(x,y)\right| \le Cq^{n-1}, \ (x,y) \in \overline{\Omega}_1,$$
$$\left|u(x,y) - \overline{u}_n(x,y)\right| \le Cq^{n-1}, \ (x,y) \in \overline{\Omega}_2,$$

где

$$C = \max\left\{\frac{M}{1-q}, \frac{M^{*}}{1-q}\right\}.$$

Теорема 1 доказана.

3. Метод декомпозиции и параллельный алгоритм

Мы уже отметили, что алгоритм (3),(4) решения задачи (1),(2) имеет последовательный характер. Теперь рассмотрим еще один подход решения задачи (1),(2). В этом случае приближенные решения на областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ будем искать с помощью параллельного алгоритма.

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{gathered} \Delta u_n = 0, \ (x,y) \in \Omega_1, \\ u_n(x,0) = \varphi_1(x), \ u_n(x,1) = \varphi_2(x), \ x \in [-\ell, x_1], \\ u_n(-\ell, x_1) = \varphi_3(y), \ y \in [0,1], \\ u_n(x_1, y) = \overline{u}_{n-1}(x_1, y), \ \ y \in [0,1], \\ n = 1,2,\ldots; \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \Delta \overline{u}_n = 0, \ (x,y) \in \Omega_2, \\ \overline{u}_n(x,0) = \varphi_1(x), \ \overline{u}_n(x,1) = \varphi_2(x), \ x \in [x_0, \ell], \\ \overline{u}_n(x_0, y) = u_{n-1}(x_0, y), \ y \in [0,1], \\ \overline{u}_n(\ell, y) = u_{n-1}(x_0, y), \ \ y \in [0,1], \\ n = 1,2,\ldots, \end{gathered} \tag{10}$$

где $\overline{u}_0(x_1, y) = \varphi_4(y)$ и $u_0(x_0, y) = \varphi_5(y)$ – произвольные непрерывные функции, определенные на отрезке [0,1], которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\varphi_4(0)=\varphi_1(x_1),\ \ \varphi_4(1)=\varphi_2(x_1),$$
$$\varphi_5(0)=\varphi_1(x_0),\ \ \varphi_5(1)=\varphi_2(x_0).$$

Покажем, что параллельный итерационный процесс (9),(10) также дает возможность построения решения задачи (1),(2). Докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. Параллельный итерационный процесс (9), (10) равномерно сходится к решению задачи (1),(2) в области Ω и выполняются следующие соотношения:

$$\left|u(x,y)-u_n(x,y)\right|\le Cq^{\frac{n}{2}-1},\ \ (x,y)\in\overline{\Omega}_1,$$

$$\left|u(x,y)-\overline{u}_n(x,y)\right|\le Cq^{\frac{n}{2}-1},\ \ (x,y)\in\overline{\Omega}_2,$$

где постоянная $q\in(0,1)$ не зависит от функций $u, u_n, \overline{u}_n$, а постоянная C зависит от φ_k, k=1,2,3,4,5.

Доказательство. Докажем теорему подобно доказательству теоремы 1. Заметим, что задачи (9),(10) можно решить параллельно в областях Ω_1 и Ω_2, соответственно. Полученные последовательности гармонических функций $\{u_n\}$, $\{\overline{u}_n\}$ определены в областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$, соответственно.

Имеем следующие соотношения:

вдоль прямой $x=x_0 (y\in[0,1])$, $\overline{u}_n=u_{n-1}$, т.е. $u_n-u_{n-1}=\overline{u}_{n+1}-\overline{u}_n$;

вдоль прямой $x=x_1 (y\in[0,1])$, $\overline{u}_{n-1}=u_n$, т.е. $u_{n+1}-u_n=\overline{u}_n-\overline{u}_{n-1}$.

Введем обозначения:

$$M_{n-1}=\max_{y\in[0;1]}\left|u_n(x_0,y)-u_{n-1}(x_0,y)\right|=\max_{y\in[0;1]}\left|\overline{u}_{n+1}(x_0,y)-\overline{u}_n(x_0,y)\right|,$$
$$M_n^1=\max_{y\in[0;1]}\left|u_{n+1}(x_1,y)-u_n(x_1,y)\right|=\max_{y\in[0;1]}\left|\overline{u}_n(x_1,y)-\overline{u}_{n-1}(x_1,y)\right|$$

и для гармонической функции $v_n=\dfrac{u_{n+1}-u_n}{M_n^1}$ применим лемму Шварца [11, с.250-254] в области Ω_1, получим

$$M_n\le qM_n^1, \tag{11}$$

где постоянная $q\in(0,1)$ зависит только от конфигурации области Ω_1.

Если $M_n^1=0$, тогда из принципа экстремума получаем M_n=0 и неравенство (11) доказано.

Если $M_{n-1} \neq 0$, тогда, применяя принцип экстремума [11, с.218] для гармоническои функции $\overline{v}_{n-1} = \dfrac{\overline{u}_{n+1} - \overline{u}_n}{M_{n-1}}$ в области Ω_2, получаем

$$M^1{}_{n+1} \leq qM_{n-1}. \tag{12}$$

Если $M_{n-1} = 0$, тогда, применяя опять принцип экстремума [11, с.218], получаем $M^1_{n+1} = 0$ и неравенство (12) справедливо.

Из оценок (11) и (12) следует, что:

$$\begin{aligned} &M_{n+1} \leq qM_{n-1}, \\ &M^1{}_{n+2} \leq qM^1_n. \end{aligned} \tag{13}$$

Это означает, что последовательности $\{M_n\}$ и $\{M^1_n\}$ стремятся к нулю.

Таким образом, ряд, аналогичный ряду (8), также равномерно сходится. Соответствующие гармонические функции u и $\overline{u}$ определены в областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ соответственно, и удовлетворяют условиям (2).

Что касается области Ω_{12}, имеем:

вдоль прямой $x = x_0 (y \in [0,1])$, $\quad \overline{u}_n - u_n = \overline{u}_n - \overline{u}_{n+1}$;

вдоль прямой $x = x_1 (y \in [0,1])$, $\quad \overline{u}_n - u_n = u_n - \overline{u}_{n-1}$ и последние разности равномерно стремятся к нулю, когда $n \to \infty$.

Функции u и $\overline{u}$ опять совпадают в области Ω_{12} и определяют гармоническую функцию, регулярную в области Ω, являющуюся решением задачи (1),(2).

Теперь оценим скорость сходимости итерационного процесса (9), (10).

Отметим, что из второго неравенства (13) имеем:

если n=2k, тогда

$$M^1_n \leq q^{\frac{n-2}{2}} M^1_2, \tag{14}$$

а если n=2k-1, тогда

$$M^1_n \leq q^{\frac{n-1}{2}} M^1_1. \tag{15}$$

Используя неравенство треугольника, имеем

$$\begin{aligned} |u_{n+p} - u_n| = |u_{n+p} - u_{n+p-1} + u_{n+p-1} - u_{n+p-2} + \cdots + \\ + u_{n+2} - u_{n+1} + u_{n+1} - u_n| \leq M^1_{n+p-1} + M^1_{n+p-2} + \cdots + \\ + M^1_{n+1} + M^1_n. \end{aligned} \tag{16}$$

Принимая во внимание (14) и (15) для n=2k и p=2m, из (16) получаем

$$\left|u_{n+p}-u_n\right| \le q^{\frac{n+p-1-1}{2}} M_1^1 + q^{\frac{n+p-2-2}{2}} M_2^1 + q^{\frac{n+p-3-1}{2}} M_1^1 +$$

$$+ q^{\frac{n+p-4-2}{2}} M_2^1 + \cdots + q^{\frac{n+1-1}{2}} M_1^1 + q^{\frac{n-2}{2}} M_2^1 = (M_1^1 + M_2^1) q^{\frac{n}{2}} (q^{\frac{p-4}{2}} +$$

$$+ q^{\frac{p-6}{2}} + \cdots + q + 1) + q^{\frac{n+p-2}{2}} M_1^1 + q^{\frac{n-2}{2}} M_2^1 =$$

$$= q^{\frac{n-2}{2}} \left[q(M_1^1 + M_2^1) \frac{1 - q^{\frac{p-2}{2}}}{1-q} + q^{\frac{p}{2}} M_1^1 + M_2^1 \right].$$

Если n=2k-1 и p=2m-1, из (16) получаем

$$\left|u_{n+p}-u_n\right| \le q^{\frac{n+p-1-1}{2}} M_1^1 + q^{\frac{n+p-2-2}{2}} M_2^1 + q^{\frac{n+p-3-1}{2}} M_1^1 +$$

$$+ q^{\frac{n+p-4-2}{2}} M_2^1 + \cdots + q^{\frac{n+1-2}{2}} M_2^1 + q^{\frac{n-1}{2}} M_1^1 = q^{\frac{n+p-1}{2}} M_1^1 + (M_1^1 +$$

$$+ M_2^1) q^{\frac{n-2}{2}} (q^{\frac{p-2}{2}} + q^{\frac{p-4}{2}} + \cdots + q^{\frac{3}{2}} + q^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= q^{\frac{n-2}{2}} \left[q^{\frac{p}{2}} M_1^1 + (M_1^1 + M_2^1) \frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{\frac{p}{2}}}{1-q} \right].$$

Если n=2k и p=2m-1, тогда

$$\left|u_{n+p}-u_n\right| \le q^{\frac{n+p-1-2}{2}} M_2^1 + q^{\frac{n+p-2-1}{2}} M_1^1 + \cdots +$$

$$+ q^{\frac{n+3-1}{2}} M_1^1 + q^{\frac{n+2-2}{2}} M_2^1 + q^{\frac{n+1-1}{2}} M_1^1 + q^{\frac{n-2}{2}} M_2^1 = q^{\frac{n-2}{2}} \Big[(M_1^1 +$$

$$+ M_2^1)(q^{\frac{p-1}{2}} + q^{\frac{p-3}{2}} + \cdots + q) + M_2^1 \Big] =$$

$$= q^{\frac{n-2}{2}} \left[(M_1^1 + M_2^1) \frac{q - q^{\frac{p+1}{2}}}{1-q} + M_2^1 \right],$$

и, наконец, если n=2k-1 и p=2m, тогда

$$|u_{n+p}-u_n|\le q^{\frac{n+p-1-2}{2}}M_2^1+q^{\frac{n+p-2-1}{2}}M_1^1+\cdots+$$

$$+q^{\frac{n+3-2}{2}}M_2^1+q^{\frac{n+2-1}{2}}M_1^1+q^{\frac{n+1-2}{2}}M_2^1+q^{\frac{n-1}{2}}M_1^1=q^{\frac{n-2}{2}}(M_1^1+$$

$$+M_2^1)q^{\frac{n-2}{2}}(q^{\frac{p-1}{2}}+q^{\frac{p-3}{2}}+\cdots+q^{\frac{3}{2}}+q^{\frac{1}{2}})=$$

$$=q^{\frac{n-2}{2}}(M_1^1+M_2^1)\frac{q^{\frac{1}{2}}-q^{\frac{p+1}{2}}}{1-q}.$$

Если в полученных неравенствах перейдем к пределу при $p\to\infty$, получим следующие оценки:

если $n=2k$ и $p=2m$, тогда

$$|u-u_n|\le q^{\frac{n-2}{2}}\left[\frac{(M_1^1+M_2^1)q}{1-q}+M_2^1\right];$$

если $n=2k-1$ и $p=2m-1$, тогда

$$|u-u_n|\le q^{\frac{n-1}{2}}\frac{M_1^1+M_2^1}{1-q};$$

если $n=2k$ и $p=2m-1$, тогда

$$|u-u_n|\le q^{\frac{n-2}{2}}\left[\frac{(M_1^1+M_2^1)q}{1-q}+M_2^1\right];$$

если $n=2k-1$ и $p=2m$, тогда

$$|u-u_n|\le q^{\frac{n-1}{2}}\frac{M_1^1+M_2^1}{1-q}.$$

Оценим величины M_1^1 и M_2^1. Имеем

$$M_1^1=\max_{y\in[0;1]}|u_2(x_1,y)-u_1(x_1,y)|\le\max_{y\in[0;1]}\left(|u_2(x_1,y)|+|u_1(x_1,y)|\right)=$$

$$=\max_{y\in[0;1]}\left(|\overline{u}_1(x_1,y)|+|\overline{u}_0(x_1,y)|\right)\le$$

$$\le\max_{\partial\Omega_2}\{|\varphi_1(x)|,|\varphi_2(x)|,|u_0(x_0,y)|\}+\max_{y\in[0;1]}|\varphi_4(y)|\le$$

$$\le\max_{\partial\Omega_2}\{|\varphi_1(x)|,|\varphi_2(x)|,|\varphi_5(y)|\}+\max_{y\in[0;1]}|\varphi_4(y)|,$$

$$
\begin{aligned}
M_2^1 &= \max_{y\in[0;1]}\left|u_3(x_1,y)-u_2(x_1,y)\right| \le \max_{y\in[0;1]}\left(\left|u_3(x_1,y)\right|+\left|u_2(x_1,y)\right|\right)= \\
&= \max_{y\in[0;1]}\left(\left|\bar{u}_2(x_1,y)\right|+\left|\bar{u}_1(x_1,y)\right|\right)\le \\
&\le \max_{\partial\Omega_2}\{|\varphi_1(x)|,|\varphi_2(x)|,|u_1(x_0,y)|\}+\max_{\partial\Omega_2,k=1,2,5}|\varphi_k|\le \\
&\le \max\{\max_{\partial\Omega_2}\{|\varphi_1(x)|,|\varphi_2(x)|\},\max_{\partial\Omega_1}\{|\varphi_1(x)|,|\varphi_2(x)|,|\varphi_3(y)|,|\bar{u}_0(x_1,y)|\}+ \\
&+\max_{\partial\Omega_2,k=1,2,5}|\varphi_k| = \max\{\max_{\partial\Omega_2}\{|\varphi_1(x)|,|\varphi_2(x)|\},\max_{\partial\Omega_1,k=1,2,3,4}|\varphi_k|\}+\max_{\partial\Omega_2,k=1,2,5}|\varphi_k|.
\end{aligned}
$$

Таким образом, для любого n, в области $\bar{\Omega}_1$ мы получаем следующее соотношение

$$
|u(x,y)-u_n(x,y)|\le Mq^{\frac{n-2}{2}},
$$

где постоянная M зависит от φ_k, k=1,2,…,5.

Аналогично в области $\bar{\Omega}_2$ мы также получаем оценку

$$
|u(x,y)-\bar{u}_n(x,y)|\le M^* q^{\frac{n-2}{2}},
$$

где постоянная M^* зависит от φ_k, k=1,2,…,5.

Окончательно мы имеем:

$$
|u(x,y)-u_n(x,y)|\le Cq^{\frac{n-2}{2}},
$$

$$
|u(x,y)-\bar{u}_n(x,y)|\le Cq^{\frac{n-2}{2}},
$$

где $C=\max\{M,M^*\}$. Таким образом, теорема 2 доказана.

Поступила 30.05.2003

Кафедра информатики и вычислительной математики.

Литература

1. А. В. Бицадзе, А. А. Самарский. ДАН СССР, 185(4) (1969), 739-740.
2. E. Hilb. Mathematische Zeitschrift. 58(1918), 1-9.
3. Д. Г. Гордезиани. Семинар ИПМ ТГУ, Аннот. докладов, (1970), №2, 39-40.
4. Д. Г. Гордезиани. О методах решения одного класса нелокальных краевых задач. Изд-во Тбилисского университета (1981), 32 с.
5. А. Л. Скубачевский. Мат. сб.(1982), т. 117(159), 548-558.
6. Б. П. Панеях. Мат. заметки, (1984), т.35, N3, 425-434.
7. В. А. Ильин, Е. И. Моисеев. Дифференц. ур-ния, (1987), Т.23, №7 1198-1207.
8. М. П. Сапаговас, Р. Ю. Чегис. Дифференц. ур-ния (1987), т.23, N7, 1268-1274.
9. В. А. Ильин, Е. И. Моисеев. Мат. моделирование, (1990), т.2, N8, 139-156.
10. Т. А. Джангвеладзе. Об одном итерационном методе решения нелокальной краевой задачи Бицадзе-Самарского. Тбилисский гос. ун-т, рукопись (курсовая работа), (1975), 17 с.
11. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики, т. II, М. (1951).
12. B. Smith, P. Bjorstad, W. Gopp. Domain decomposition-parallel multilevel metods for elliptic PDEs. Cambriadge University Press (1996).
13. A. Quarteroni, A. Valli. Domain decomposition methods for PDEs. Oxford Science Publications (1999).

თ. ჯანგველაძე, ზ. კიღურაძე

არეთა დეკომპოზიციის მეთოდი ბიწაძე-სამარსკის არალოკალური სასაზღვრო ამოცანისათვის

რეზიუმე

ნაშრომში განიხილება არეთა დეკომპოზიციის მეთოდი და შვარცის იტერაციული პროცესი ბიწაძე-სამარსკის არალოკალური სასაზღვრო ამოცანისათვის. შესწავლილია როგორც მიმდევრობითი ასევე პარალელური ალგორითმების კრებადობის საკითხი, დადგენილია კრებადობის სიჩქარე.

T. Jangveladze, Z. Kiguradze

The domain decomposition method for Bitsadze-Samarski nonlocal boundary value problem

Summary

The present work is devoted to the domain decomposition and Schwarz-type iterative method for Bitsadze-Samarski nonlocal boundary value problem. The parallel count algorithm as well as sequential ones are investigated. The rate of convergence is presented, too.

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
*Труды Тбилисского государственного
университета им. Ив. Джавахишвили*
Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University
354

УДК 517.95, 519.6

ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИОННОЙ СИСТЕМЫ И ЕЁ РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА

М.З.Тутберидзе

Введение

Некоторые задачи математической физики приводят к исследованию следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(x,t,u,v,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),\quad (x,t)\in \Omega\times(0,T], \tag{0.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(x,t,u,v),\quad (x,t)\in \overline{\Omega}\times(0,T], \tag{0,2}$$

где $f=f(x,t,u,v,p,q)$ и $g=g(x,t,u,v)$ – заданные функции своих аргументов, $\dfrac{\partial f}{\partial q}\geq 0$, $u=u(x,t)$ и $v=v(x,t)$ –искомые функции, $T=\text{const}>0$, $\Omega=(0,1)$.

Решение системы (0.1), (0.2) рассматривается при следующих начально-краевых условиях:

$$u(x,0)=u_0(x),\ \ x\in\overline{\Omega},\ \ u(0,t)=\phi_1(t),\ \ u(1,t)=\phi_2(t),\ \ t\in(0,T], \tag{0.3}$$

$$v(x,0)=v_0(x),\ \ x\in\overline{\Omega}. \tag{0.4}$$

Задача, подобная (0.1) –(0.4), изучалась в работах [2]-[6], а также в ряде других работ.
В [2] для случая

$$f\left(x,t,u,v,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(x,t,u,v)$$

исследована задача (0.1)-(0.4) и ее многомерный аналог.
В случае

$$f\left(x,t,u,v,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+h(x,t,u,v)$$

задача (0.1)-(0.4) изучалась в работе [6] методом конечных разностей.

Задача (0.1)-(0.4) и ее многомерный аналог при

$$f\left(x,t,u,v,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=a\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

исследованы в [4],[5].

В работе [6] доказаны теоремы сравнения для случая различных коэффициентов и начально-краевых задач при

$$f\left(x,t,u,v,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=a(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(u,v),\quad g(x,t,u,v)=h(u,v).$$

Начально-краевые задачи для нелинейных параболических уравнений изучаются в работах [7], [8], [9], а также в ряде других работ.

В настоящей статье доказаны теоремы сравнения для системы (0.1)-(0.2) в случае различных начально-краевых условий и одинаковых коэффициентов, а также в случае различных коэффициентов. Построена разностная схема для задачи (0.1)-(0.4) и доказаны дискретные аналоги теорем сравнения.

1. Постановка задачи и теоремы сравнения для случая одинаковых коэффициентов

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f\left(x,t,u,v,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),\ (x,t)\in\Omega\times(0,T],\tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=g(x,t,u,v),\ (x,t)\in\overline{\Omega}\times(0,T],\tag{1.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\Omega};\quad u(0,t)=\varphi_1(t),\quad u(1,t)=\varphi_2(t),\quad t\in(0,T],\tag{1.3}$$

$$v(x,0)=v_0(x),\quad x\in\overline{\Omega},\tag{1.4}$$

где $f=f(x,t,u,v,p,q)$ и $g=g(x,t,u,v)$ – заданные функции своих аргументов, $\dfrac{\partial f}{\partial q}\geq 0$, $u=u(x,t)$ и $v=v(x,t)$ – искомые функции, $T=\mathrm{const}>0$, $\Omega=(0,1)$.

Здесь и далее в этом параграфе будем предполагать, что f и g – неубывающие функции по аргументам v и u, соответственно.

Справедлива следующая

Теорема 1.1. Пусть (u_1,v_1), (u_2,v_2) – две пары непрерывных функций в $\overline{\Omega}\times[0,T]$, для которых существуют $\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u_k}{\partial t}$ в $\Omega\times(0,T]$, и $\frac{\partial v_k}{\partial t}$ в $\overline{\Omega}\times(0,T]$, $k=1,2$, и которые удовлетворяют неравенствам:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}-f\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)>\frac{\partial u_1}{\partial t}-f\left(x,t,u_1,v_1,\frac{\partial v_1}{\partial x},\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right),$$
$$(x,t)\in\Omega\times(0,T], \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}-g(x,t,u_2,v_2)>\frac{\partial v_1}{\partial t}-g(x,t,u_1,v_1),\ (x,t)\in\overline{\Omega}\times(0,T], \tag{1.6}$$

$$u_2(x,0)>u_1(x,0),\ x\in\overline{\Omega},\ u_2(0,t)>u_1(0,t),\ u_2(1,t)>u_1(1,t),\ t\in(0,T], \tag{1.7}$$

$$v_2(x,0)>v_1(x,0),\quad x\in\overline{\Omega}. \tag{1.8}$$

Тогда $u_2(x,t)>u_1(x,t)$, и $v_2(x,t)>v_1(x,t)$, при $(x,t)\in\overline{\Omega}\times(0,T]$.

Доказательство. Допустим противоположное. Пусть существует точка $(\hat{x},\hat{t})\in\Omega\times(0,T]$, такая, что $u_2(\hat{x},\hat{t})\le u_1(\hat{x},\hat{t})$, или точка $(\breve{x},\breve{t})\in\overline{\Omega}\times(0,T]$, такая, что $v_2(\breve{x},\breve{t})\le v_1(\breve{x},\breve{t})$. Рассмотрим следующие величины:

$$T' = \sup\{t\in(0,T]: u_2(x,t)>u_1(x,t)\ \ \forall x\in\Omega\}, \tag{1.9}$$

$$T'' = \sup\{t\in(0,T]: v_2(x,t)>v_1(x,t)\ \ \forall x\in\overline{\Omega}\}. \tag{1.10}$$

В силу (1.7) и (1.8) имеем: $T'>0$ и $T''>0$. Покажем, что существует точка $x'\in\Omega$, такая, что $u_1(x',T')=u_2(x',T')$, $v_1(x',T')\le v_2(x';T')$, или точка $x''\in\overline{\Omega}$, такая, что $v_1(x'',T'')=v_2(x'',T'')$, $u_1(x'',T'')\le u_2(x'',T'')$. Действительно, пусть $T'<T''$. Тогда, очевидно, $T'<T$. Из определения (1.9) это возможно только тогда, когда найдётся точка $x'\in\Omega$ такая, что $u_1(x',T')=u_2(x',T')$. Но поскольку $T'<T''$, то согласно (1.10) $v_1(x',T')<v_2(x',T')$. Аналогично доказывается существование точки $x''=\overline{\Omega}$ для случая $T''<T'$. Пусть теперь $T'=T''<T$. Тогда в силу определений (1.9) и (1.10) существуют точки $x'\in\Omega$ и $x''\in\overline{\Omega}$, такие, что $u_1(x',T')=u_2(x',T')$ и $v_1(x'',T'')=v_2(x'',T'')$. Опять, в силу (1.9) и (1.10), имеем: $u_1(x'',T'')\le u_2(x'',T'')$ и $v_1(x',T')\le v_2(x',T')$. Таким об-

разом, при $T^{'} = T^{''} < T$ существуют вышеупомянутые обе точки. Наконец, рассмотрим случай $T^{'} = T^{''} = T$. Исходя из (1.9) и (1.10), чтобы не противоречить предположению, и в этом случае существует $x^{'}$ или $x^{''}$.

Пусть существует $x^{'}$. В точке $(x^{'}, T^{'})$ имеем:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \le 0, \ \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \ge 0, \qquad (1.11)$$
$$u_2 - u_1 = 0, \ v_2 - v_1 \ge 0.$$

Рассмотрим неравенство (1.5) в той же точке $(x^{'}, T^{'})$. Учитывая (1.11), будем иметь:

$$0 < \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t} - f\left(x^{'}, T^{'}, u_2, v_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) + f\left(x^{'}, T^{'}, u_1, v_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) =$$
$$= \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t} - f\left(x^{'}, T^{'}, u_1, v_2, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) + f\left(x^{'}, T^{'}, u_1, v_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) =$$
$$= \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t} - f\left(x^{'}, T^{'}, u_1, v_2, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) + f\left(x^{'}, T^{'}, u_1, v_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) -$$
$$- f\left(x^{'}, T^{'}, u_1, v_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) + f\left(x^{'}, T^{'}, u_1, v_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) \le f_q\left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right] \le 0.$$

Что невозможно. Получено противоречие.

Аналогично, в точке $(x^{''}, T^{''})$ получаем:

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial t} \le 0, \ \ u_2 - u_1 \ge 0, \ \ v_2 - v_1 = 0. \qquad (1.12)$$

Рассмотрим неравенство (1.6) в той же точке $(x^{''}, T^{''})$. С учётом соотношений (1.12) имеем:

$$0 < \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial t} - g(x^{''}, T^{''}, u_2, v_2) + g(x^{''}, T^{''}, u_1, v_1) = \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial t} -$$
$$- g(x^{''}, T^{''}, u_2, v_1) + g(x^{''}, T^{''}, u_1, v_1) \le 0,$$

что невозможно. Таким образом, и в этом случае получено противоречие, т.е. наше предположение неверно. Теорема 1.1 доказана.

Теорема 1.2. Пусть (u_1,v_1), (u_2,v_2), – две пары непрерывных функций в $\overline{\Omega}\times[0,T]$, для которых существуют $\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}, \dfrac{\partial u_k}{\partial t}$ в $\Omega\times(0,T]$ и $\dfrac{\partial v_k}{\partial t}$ в $\overline{\Omega}\times(0,T]$, k=1,2 и которые удовлетворяют неравенствам:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - f\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) \geq \frac{\partial u_1}{\partial t} - f\left(x,t,u_1,v_1,\frac{\partial u_1}{\partial x},\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right), \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T], \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} - g(x,t,u_2,v_2) \geq \frac{\partial v_1}{\partial t} - g(x,t,u_1,v_1), \quad (x,t)\in\overline{\Omega}\times(0,T], \tag{1.14}$$

$$u_2(x,0)\geq u_1(x,0),\ x\in\overline{\Omega};\ u_2(0,t)\geq u_1(0,1),\ u_2(1,t)\geq u_1(1,t),\ t\in(0,T] \tag{1.15}$$

$$v_2(x,0)\geq v_1(x,0), \quad x\in\overline{\Omega}. \tag{1.16}$$

Если f и g удовлетворяют условию Липшица по аргументам u и v:

$$\left|f(x,t,u_2,v_2,p,q) - f(x,t,u_1,v_1,p,q)\right| \leq L(|u_2-u_1|+|v_2-v_1|), \tag{1.17}$$

$$\left|g(x,t,u_2,v_2) - g(x,t,u_1,v_1)\right| \leq L(|u_2-u_1|+|v_2-v_1|), \tag{1.18}$$

тогда $u_2(x,t)\geq u_1(x,t)$ и $v_2(x,t)\geq v_1(x,t)$ при $(x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,T]$.

Доказательство. Рассмотрим функции $u_a(x,t) = u_2(x,t)+ae^{Mt}$ и $v_a(x,t)= v_2(x,t)+ae^{Mt}$ при $(x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,T]$, где $a > 0$, а значение величины M определим ниже. Очевидно, что $u_a(x,t)>u_2(x,t)$ и $v_a(x,t)>v_2(x,t)$ при $(x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,T]$, поэтому из неравенств (1.15) и (1.16) получим: $u_a(x,0)>u_1(x,0)$, $x\in\overline{\Omega}$; $u_a(0,t)>u_1(0,t)$, $u_a(1,t)>u_1(1,t)$, $t\in[0,T]$ и $v_a(x,0)> v_1(x,0)$, $x\in\overline{\Omega}$. Причём из соотношений (1.13), (1.14), (1.17), (1.18) имеем:

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}-f\left(x,t,u_a,v_a,\frac{\partial u_a}{\partial x},\frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial t}+f\left(x,t,u_1,v_1,\frac{\partial u_1}{\partial x},\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)=$$

$$=\frac{\partial u_2}{\partial t}+Mae^{Mt}-\frac{\partial u_1}{\partial t}-f\left(x,t,u_2+ae^{Mt},v_2+ae^{Mt},\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)+$$

$$+f\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)-f\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)+$$

$$+f\left(x,t,u_1,v_1,\frac{\partial u_1}{\partial t},\frac{\partial^2 u_1}{\partial t}\right)\geq\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial t}-f\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)+$$

$$+f\left(x,t,u_1,v_1,\frac{\partial u_1}{\partial x},\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)+Mae^{Mt}-2Lae^{Mt}\geq ae^{Mt}(M-2L);$$

$$\frac{\partial v_a}{\partial t}-g(x,t,u_a,v_a)-\frac{\partial v_1}{\partial t}+g(x,t,u_1,v_1)=\frac{\partial v_2}{\partial t}+Mae^{Mt}-\frac{\partial v_1}{\partial t}-$$

$$-g(x,t,u_2+ae^{Mt},v_2+ae^{Mt})+g(x,t,u_2,v_2)-g(x,t,u_2,v_2)+g(x,t,u_1,v_1)\geq$$

$$\geq\frac{\partial v_2}{\partial t}-g(x,t,u_2,v_2)-\frac{\partial v_1}{\partial t}+g(x,t,u_1,v_1)+Mae^{Mt}-2Lae^{Mt}\geq ae^{Mt}(M-2L).$$

Если величину M подберём так, что M-2L > 0, тогда пары (u_a,v_a) и (u_1,v_1) удовлетворят условиям теоремы 1.1. Таким образом, $u_a(x,t)>u_1(x,t)$ и $v_a(x,t)>v_1(x,t)$ при $(x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,T]$. Заметим, что $u_a(x,t)\to u_2(x,t)$ и $v_a(x,t)\to v_2(x,t)$, при $a\to 0$, $(x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,T]$. Поэтому легко получаются доказываемые неравенства. Теорема 1.2 доказана.

2. Теорема сравнения для случая разных коэффициентов

Рассмотрим следующие две системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f_1\left(x,t,u,v,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T],\tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=g_1(x,t,u,v),\quad (x,t)\in\overline{\Omega}\times(0,T],\tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f_2\left(x,t,u,v,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T],\tag{2.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g_2(x,t,u,v), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,T], \tag{2.4}$$

где $f_k = f_k(x,t,u,v,p,q)$ и $g_k = g_k(x,t,u,v)$ – заданные функции своих аргументов, причём $\frac{\partial f_k}{\partial q} \geq 0, \; k = 1,2$.

Здесь и далее в этом параграфе будем предполагать, что f_k и g_k, k=1,2, – неубывающие функции по аргументам v и u, соответственно.

Теорема 2.2. Пусть (u_1, v_1), (u_2, v_2) – две пары непрерывных функций в $\overline{\Omega} \times [0,T]$, которые являются решениями систем (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4), причём:

$$\begin{gathered} u_2(x,0) > u_1(x,0), \quad x \in \overline{\Omega}; \\ u_2(0,t) > u_1(0,t), \quad u_2(1,t) > u_1(1,t), \quad t \in (0,T], \end{gathered} \tag{2.5}$$

$$v_2(x,0) > v_1(x,0), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2.6}$$

$$f_2(x,t,u,v,p,q) > f_1(x,t,u,v,p,q) \tag{2.7}$$

$$g_2(x,t,u,v) > g_1(x,t,u,v). \tag{2.8}$$

Тогда $u_2(x,t) > u_1(x,t)$ и $v_2(x,t) > v_1(x,t)$ при $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,T]$.

Доказательство. Вычтем из уравнений (2.3) и (2.4) уравнения (2.1) и (2.2), соответственно. Получим:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_2}{\partial t} - f_2\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial t} + \\ + f_1\left(x,t,u_1,v_1,\frac{\partial u_1}{\partial x},\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) = 0, \end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} - g_2(x,t,u_2,v_2) - \frac{\partial v_1}{\partial t} + g_1(x,t,u_1,v_1) = 0. \tag{2.10}$$

Учитывая (2.7) и (2.8), оценим левые части уравнений (2.9) и (2.10):

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}-f_2\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial t}+f_1\left(x,t,u_1,v_1,\frac{\partial u_1}{\partial x},\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)=$$

$$=\frac{\partial u_2}{\partial t}-f_2\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)+f_1\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)-$$

$$-f_1\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial t}+f_1\left(x,t,u_1,v_1,\frac{\partial u_1}{\partial x},\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)<$$

$$<\frac{\partial u_2}{\partial t}-f_1\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial t}+f_1\left(x,t,u_1,v_1,\frac{\partial u_1}{\partial x},\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right);$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}-g_2(x,t,u_2,v_2)-\frac{\partial v_1}{\partial t}+g_1(x,t,u_1,v_1)=$$

$$=\frac{\partial v_2}{\partial t}-g_2(x,t,u_2,v_2)+g_1(x,t,u_2,v_2)-g_1(x,t,u_2,v_2)-\frac{\partial v_1}{\partial t}+$$

$$+g_1(x,t,u_1,v_1)<\frac{\partial v_2}{\partial t}-g_1(x,t,u_2,v_2)-\frac{\partial v_1}{\partial t}+g_1(x,t,u_1,v_1).$$

Таким образом, функции (u_1,v_1) и (u_2,v_2) удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}-f_1\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial t}+f_1\left(x,t,u_1,v_1,\frac{\partial u_1}{\partial x},\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)>0,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}-g_1(x,t,u_2,v_2)-\frac{\partial v_1}{\partial t}+g_1(x,t,u_1,v_1)>0.$$

При этом, имеют место соотношения (2.5), (2.6). Согласно теореме 1.1, имеем: $u_2(x,t)>u_1(x,t)$ и $v_2(x,t)>v_1(x,t)$ при $(x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,T]$.

Теорема 2.2. Пусть (u_1, v_1), (u_2, v_2) – две пары непрерывных функций в $\overline{\Omega}\times[0,T]$, которые являются решениями систем (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4), причём:

$$u_2(x,0)\ge u_1(x,0),\ x\in\overline{\Omega};$$
$$u_2(0,t)\ge u_1(0,t),\ u_2(1,t)\ge u_1(1,t),\ \ t\in(0,T], \tag{2.11}$$

$$v_2(x,0)\ge v_1(x,0),\quad x\in\overline{\Omega}, \tag{2.12}$$

$$f_2(x,t,u,v,p,q)\ge f_1(x,t,u,v,p,q) \tag{2.13}$$

$$g_2(x,t,u,v)\ge\ g_1(x,t,u,v). \tag{2.14}$$

Если f_k и g_k, $(k=1,2)$ удовлетворяют условию Липшица по аргументам u и v :

$$|f_k(x,t,u_2 v_2,p,q) - f_k(x,t,u_1 v_1,p,q)| \le L(|u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|), \quad k = 1,2, \tag{2.15}$$

$$|g_k(x,t,u_2,v_2) - g_k(x,t,u_1,v_1)| \le L(|u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|), \quad k = 1,2, \tag{2.16}$$

тогда $u_2(x,t) \ge u_1(x,t)$ и $v_2(x,t) \ge v_1(x,t)$ при $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,T]$.

Доказательство. Вычтем из уравнений (2.3) и (2.4) уравнения (2.1) и (2.2), соответственно. Получим:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_2}{\partial t} - f_2\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial t} + \\ &+ f_1\left(x,t,u_1,v_1,\frac{\partial u_1}{\partial x},\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) = 0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} - g_2(x,t,u_2,v_2) - \frac{\partial v_1}{\partial t} + g_2(x,t,u_1,v_1) = 0. \tag{2.18}$$

Учитывая соотношения (2.13), (2.14), (2.15), (2.16), оценим левые части уравнений (2.17) и (2.18). Имеем:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - f_2\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial t} + f_1\left(x,t,u_1,v_1,\frac{\partial u_1}{\partial x},\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial u_2}{\partial t} - f_2\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) + f_1\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) -$$

$$- f_1\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial t} + f_1\left(x,t,u_1,v_1,\frac{\partial u_1}{\partial x},\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) \le$$

$$\le \frac{\partial u_2}{\partial t} - f_1\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial t} + f_1\left(x,t,u_1,v_1,\frac{\partial u_1}{\partial x},\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right);$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}-g_2(x,t,u_2,v_2)-\frac{\partial v_1}{\partial t}+g_1(x,t,u_1,v_1)=$$

$$=\frac{\partial v_2}{\partial t}-g_2(x,t,u_2,v_2)+g_1(x,t,u_2,v_2)-g_1(x,t,u_2,v_2)-\frac{\partial v_1}{\partial t}+$$

$$+g_1(x,t,u_1,v_1)\le\frac{\partial v_2}{\partial t}-g_1(x,t,u_2,v_2)-\frac{\partial v_1}{\partial t}+g_1(x,t,u_1,v_1).$$

Таким образом, функции (u_1,v_1) и (u_2,v_2) удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}-f_1\left(x,t,u_2,v_2,\frac{\partial u_2}{\partial x},\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial t}+f_1\left(x,t,u_1,v_1,\frac{\partial u_1}{\partial x},\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)\ge 0,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}-g_1(x,t,u_2,v_2)-\frac{\partial v_1}{\partial t}+g_1(x,t,u_1,v_1)\ge 0.$$

При этом имеют место соотношения (2.11), (2.12). Согласно теореме 1.2, имеем: $u_2(x,t)\ge u_1(x,t)$ и $v_2(x,t)\ge v_1(x,t)$ при $(x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,T]$.

3. Разностная схема и аналоги теорем сравнения

Введём сетку по переменным x и t, соответственно: $\omega_h=\{x_k=kh,\ h>0,\ k=0,1,\ldots,M;\ hM=1\}$, $\omega_\tau=\{t_j=j\tau,\ \tau>0,\ j=0,1,\ldots,N;\ \tau N=T\}$.

Поставим задаче (1.1), (1.2), (1.13), (1.14) в соответствие неявную разностную схему:

$$\frac{U_i^{j+1}-U_i^j}{\tau}=f\left(x_i,t^{j+1},U_i^{j+1},V_i^{j+1},\frac{U_{i+1}^{j+1}-U_{i-1}^{j+1}}{2h},\frac{U_{i+1}^{j+1}-2U_i^{j+1}+U_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right),\qquad(3.1)$$

$$i=1,2,\ldots,M-1,\qquad j=0,1,\ldots,N-1,$$

$$\frac{V_i^{j+1}-V_i^j}{\tau}=g\left(x_i,t^{j+1},U_i^j,V_i^{j+1}\right),\qquad(3.2)$$

$$i=0,1,\ldots,M,\quad j=0,1,\ldots,N-1,$$

$$U_i^0=u_{0,i},\ i=0,1,\ldots,M;\ \ U_0^j=\varphi_1^j,\ \ U_M^j=\varphi_2^j,\quad j=1,2,\ldots,N,\qquad(3.3)$$

$$V_i^0=v_{0,i},\ i=0,1,\ldots,M.\qquad(3.4)$$

Справедлива следующая

Теорема 3.1. Пусть f и g – неубывающие функции по аргументам v и u, соответственно, и удовлетворяют следующим условиям:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \le L, \ \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right| \le L, \ \left|\frac{\partial f}{\partial p}\right| \le L, \ \left|\frac{\partial g}{\partial u}\right| \le L, \ \left|\frac{\partial g}{\partial v}\right| \le L, \tag{3.5}$$

причём $\dfrac{\partial f}{\partial q} \ge \delta > 0$. Пусть также $(\overline{U}, \overline{V})$ и $(\overline{\overline{U}}, \overline{\overline{V}})$ – две пары сеточных функций, определенных на сетке $\omega_h \times \omega_\tau$, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$\frac{\overline{\overline{U}}_i^{j+1} - \overline{\overline{U}}_i^{j}}{\tau} - f\left(x_i, t^{j+1}, \overline{\overline{U}}_i^{j+1}, \overline{\overline{V}}_i^{j+1}, \frac{\overline{\overline{U}}_{i+1}^{j+1} - \overline{\overline{U}}_{i-1}^{j+1}}{2h}, \frac{\overline{\overline{U}}_{i+1}^{j+1} - 2\overline{\overline{U}}_i^{j+1} + \overline{\overline{U}}_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right) \ge \tag{3.6}$$

$$i = 1,2,\ldots,M-1, \quad j = 0,1,\ldots,N-1,$$

$$\ge \frac{\overline{U}_i^{j+1} - \overline{U}_i^{j}}{\tau} - f\left(x_i, t^{j+1}, \overline{U}_i^{j+1}, \overline{V}_i^{j+1}, \frac{\overline{U}_{i+1}^{j+1} - \overline{U}_{i-1}^{j+1}}{2h}, \frac{\overline{U}_{i+1}^{j+1} - 2\overline{U}_i^{j+1} + \overline{U}_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right),$$

$$\frac{\overline{\overline{V}}_i^{j+1} - \overline{\overline{V}}_i^{j}}{\tau} - g\left(x_i, t^{j+1}, \overline{\overline{U}}_i^{j}, \overline{\overline{V}}_i^{j+1}\right) \ge \frac{\overline{V}_i^{j+1} - \overline{V}_i^{j}}{\tau} - g\left(x_i, t^{j+1}, \overline{U}_i^{j}, \overline{V}_i^{j+1}\right), \tag{3.7}$$

$$i = 0,1,\ldots,M-1, \quad j = 0,1,\ldots,N-1.$$

При этом

$$\overline{\overline{U}}_i^{0} \ge \overline{U}_i^{0}, \quad \overline{\overline{V}}_i^{0} \ge \overline{V}_i^{0}, \quad i = 0,1,\ldots,M, \tag{3.8}$$

$$\overline{\overline{U}}_0^{j} \ge \overline{U}_o^{j}, \quad \overline{\overline{U}}_M^{j} \ge \overline{U}_M^{j}, \quad j = 1,2,\ldots,N. \tag{3.9}$$

Тогда для достаточно малых значений τ и h имеем: $\overline{\overline{U}}_i^{j} \ge \overline{U}_i^{j}$, $\overline{\overline{V}}_i^{j} \ge \overline{V}_i^{j}$, $i = 0,2,\ldots,M$, $j = 0,1,\ldots,M, j = 0, 1, \ldots, N$.

Доказательство. Запишем (3.6) и (3.7) в следующем виде:

$$\frac{Y_i^{j+1}-Y_i^j}{\tau}-f\left(x_i,t^{j+1},\bar{\bar{U}}_i^{j+1},\bar{\bar{V}}_i^{j+1},\frac{\bar{\bar{U}}_{i+1}^{j+1}-\bar{\bar{U}}_{i-1}^{j+1}}{2h},\frac{\bar{\bar{U}}_{i+1}^{j+1}-2\bar{\bar{U}}_i^{j+1}+\bar{\bar{U}}_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right)+$$

$$+f\left(x_i,t^{j+1},\bar{U}_i^{j+1},\bar{V}_i^{j+1},\frac{\bar{U}_{i+1}^{j+1}-\bar{U}_{i-1}^{j+1}}{2h},\frac{\bar{U}_{i+1}^{j+1}-2\bar{U}_i^{j+1}+\bar{U}_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right)\ge 0;$$

$$\frac{Z_i^{j+1}-Z_i^j}{\tau}-g\left(x_i,t^{j+1},\bar{\bar{U}}_i^j,\bar{\bar{V}}_i^{j+1}\right)+g\left(x_i,t^{j+1},\bar{U}_i^j,\bar{U}_i^{j+1}\right)\ge 0,$$

где $Y_i^j=\bar{\bar{U}}_i^j-\bar{U}_i^j$, $Z_i^j=\bar{\bar{V}}_i^j-\bar{V}_i^j$. Преобразуя левые части этих неравенств, имеем:

$$\frac{Y_i^{j+1}-Y_i^j}{\tau}-f\left(x_i,t^{j+1},\bar{\bar{U}}_i^{j+1},\bar{\bar{V}}_i^{j+1},\frac{\bar{\bar{U}}_{i+1}^{j+1}-\bar{\bar{U}}_{i-1}^{j+1}}{2h},\frac{\bar{\bar{U}}_{i+1}^{j+1}-2\bar{\bar{U}}_i^{j+1}+\bar{\bar{U}}_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right)+$$

$$+f\left(x_i,t^{j+1},\bar{U}_i^{j+1},\bar{V}_i^{j+1},\frac{\bar{U}_{i+1}^{j+1}-\bar{U}_{i-1}^{j+1}}{2h},\frac{\bar{U}_{i+1}^{j+1}-2\bar{U}_i^{j+1}+\bar{U}_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right)=$$

$$=\frac{Y_i^{j+1}-Y_i^j}{\tau}-f_uY_i^{j+1}-f_vZ_i^{j+1}-f_p\frac{Y_{i+1}^{j+1}-Y_{i-1}^j}{2h}-f_q\frac{Y_{i+1}^{j+1}-2Y_{i-1}^j+Y_{i+1}^{j+1}}{h^2}=$$

$$=-\left(\frac{f_q}{h^2}-\frac{f_p}{2h}\right)Y_{i-1}^{j+1}-\left(\frac{f_q}{h^2}+\frac{f_p}{2h}\right)Y_{i+1}^{j+1}+\left(\frac{2f_q}{h^2}+\frac{1}{\tau}-f_u\right)Y_i^{j+1}-f_vZ_i^{j+1}-\frac{Y_i^j}{\tau};$$

$$\frac{Z_i^{j+1}-Z_i^j}{\tau}-g\left(x,t^{j+1},\bar{\bar{U}}_i^j,\bar{\bar{V}}_i^{j+1}\right)+g\left(x,t^{j+1},\bar{U}_i^j,\bar{V}_i^{j+1}\right)=$$

$$=\frac{Z_i^{j+1}-Z_i^j}{\tau}-g_uY_i^j-g_vZ_i^{j+1}=\left(-g_v+\frac{1}{\tau}\right)Z_i^{j+1}-\frac{Z_i^j}{\tau}-g_uY_i^j.$$

Наконец:

$$\left(\frac{f_q}{h^2}-\frac{f_p}{2h}\right)Y_{i-1}^{j+1}+\left(\frac{f_q}{h^2}+\frac{f_p}{2h}\right)Y_{i+1}^{j+1}-\left(\frac{2f_q}{h^2}+\frac{1}{\tau}-f_u\right)Y_i^{j+1}\le -f_vZ_i^{j+1}-\frac{Y_i^j}{\tau},\tag{3.10}$$

$$\left(-g_v+\frac{1}{\tau}\right)Z_i^{j+1}\ge\frac{Z_i^j}{\tau}+g_uY_i^j.\tag{3.11}$$

Применяя метод математической индукции относительно индекса j, докажем, что

$$Y_i^j \geq 0,\ \ Z_i^j \geq 0,\ i=0,1,\dots,M,\ \ j=0,1,\dots,N. \tag{3.12}$$

В силу условий (3.8) и (3.9) при j=0 имеем:

$$Y_i^0 \geq 0,\ \ Z_i^0 \geq 0,\ i=0,1,\dots,M.$$

Предположим, что (3.12) верно для j=k-1 и покажем его справедливость для j=k. Запишем (3.10) и (3.11) в следующем виде:

$$\left(\frac{f_q}{h^2}-\frac{f_p}{2h}\right)Y_{i-1}^{j+1}+\left(\frac{f_q}{h^2}+\frac{f_p}{2h}\right)Y_{i+1}^{j+1}-\left(\frac{2f_q}{h^2}+\frac{1}{\tau}-f_u\right)Y_i^{j+1} \leq -f_v Z_i^{j+1}-\frac{Y_i^j}{\tau}, \tag{3.13}$$

$$\left(-g_v+\frac{1}{\tau}\right)Z_i^k \geq \frac{Z_i^{k-1}}{\tau}+g_u Y_i^{k-1}. \tag{3.14}$$

Если $\tau<\dfrac{1}{L}$, то в правой части соотношения (3.14) будем иметь: $-g_v+\dfrac{1}{\tau}>0$. По индукции правая часть (3.14) неотрицательна. Поэтому из (3.16) получим $Z_i^k \geq 0, i=0,2,\dots,M$.

Рассмотрим теперь левую часть соотношения (3.13). Имеем:

$$\frac{f_q}{h^2}-\frac{f_p}{2h} \geq \frac{\delta}{h^2}-\frac{L}{2h},\quad \frac{f_q}{h^2}+\frac{f_p}{2h} \geq \frac{\delta}{h^2}-\frac{L}{2h}.$$

Если $h<\dfrac{2\delta}{L}$, то $\dfrac{f_q}{h^2}\pm\dfrac{f_p}{2h}>0$. При этом $\dfrac{2f_q}{h^2}+\dfrac{1}{\tau}-f_u \geq \dfrac{1}{\tau}-L>0$, так как $f_q>0$, а по вышесказанному $\tau<\dfrac{1}{L}$. Правая часть неравенства (3.13) неположительна, при этом $Y_0^k \geq 0,\ Y_M^k \geq 0$ в силу (3.9). Если воспользуемся теоремой сравнения для сеточной функции $Y_i^k \geq 0,\ i=0,1,\dots,M$, получим, что $Y_i^k \geq 0,\ i=0,2,\dots,M$. Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2. Пусть f_k и g, k =1,2 – неубывающие функции по аргументам v и u, соответственно, причём $\dfrac{\partial f_k}{\partial q} \geq \delta>0,\ k=1,2$, и удовлетворяют следующим условиям:

$$\left|\frac{\partial f_k}{\partial u}\right| \le L,\ \left|\frac{\partial f_k}{\partial v}\right| \le L,\ \left|\frac{\partial f_k}{\partial p}\right| \le L,\ \left|\frac{\partial g_k}{\partial u}\right| \le L,\ \left|\frac{\partial g_k}{\partial v}\right| \le L,\ \ k = 1,2. \qquad (3.15)$$

Пусть также сеточные функции $(\overline{U}, \overline{V})$и $(\overline{\overline{U}}, \overline{\overline{V}})$ являются решениями следующих разностных уравнений

$$\frac{\overline{U}_i^{j+1} - \overline{U}_i^j}{\tau} - f_1\left(x_i, t^{j+1}, \overline{U}_i^{j+1}, \overline{V}_i^{j+1}, \frac{\overline{U}_{i+1}^{j+1} - \overline{U}_{i-1}^{j+1}}{2h}, \frac{\overline{U}_{i+1}^{j+1} - 2\overline{U}_i^{j+1} + \overline{U}_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right), \qquad (3.16)$$

$$i = 1,2,\ldots, M-1, \quad j = 0,1,\ldots, N-1,$$

$$\frac{\overline{V}_i^{j+1} - \overline{V}_i^j}{\tau} = g_1(x_i, t^{j+1}, \overline{U}_i^j, \overline{V}_i^{j+1}), \qquad (3.17)$$

$$i = 0,1,\ldots, M;\ j = 0, 1,\ldots, N-1$$

$$\frac{\overline{\overline{U}}_i^{j+1} - \overline{\overline{U}}_i^j}{\tau} = f_2\left(x_i, t^{j+1}, \overline{\overline{U}}_i^{j+1}, \overline{\overline{V}}_i^{j+1}, \frac{\overline{\overline{U}}_{i+1}^{j+1} - \overline{\overline{U}}_{i-1}^{j+1}}{2h}, \frac{\overline{\overline{U}}_{i+1}^{j+1} - 2\overline{\overline{U}}_i^{j+1} + \overline{\overline{U}}_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right),$$

$$i = 1,2,\ldots, M-1, \quad j = 0,1,\ldots, N-1, \qquad (3.18)$$

$$\frac{\overline{\overline{V}}_i^{j+1} - \overline{\overline{V}}_i^j}{\tau} = g_2(x_i, t^{j+1}, \overline{\overline{U}}_i^j, \overline{\overline{V}}_i^{j+1}),$$

$$i = 0, 1,\ldots, M, \quad j = 0, 1,\ldots, N-1 \qquad (3.19)$$

при этом

$$\overline{\overline{U}}_i^0 \ge \overline{U}_i^0,\ \overline{\overline{V}}_i^0 \ge \overline{V}_i^0,\ i = 0,1,\ldots,M, \qquad (3.20)$$

$$\overline{\overline{U}}_0^j \ge \overline{U}_0^j,\ \overline{\overline{V}}_m^j \ge \overline{V}_m^j,\ j = 1,2,\ldots,N. \qquad (3.20)$$

Тогда для достаточно малых значение τ и h имеем: $\overline{\overline{U}}_i^j \ge \overline{U}_i^j$, $\overline{\overline{V}}_i^j \ge \overline{V}_i^j$, $i = 0,1,\ldots,M$, $j = 0,1,\ldots, M, j = 0,1\ldots, N$.

Доказательство. Вычтем из (3.19) и (3.18) (3.17) и (3.16), соответственно. Получим:

$$\frac{Y_i^{j+1}-Y_i^j}{\tau}-f_2\left(x_i,t^{j+1},\bar{\bar{U}}_i^{j+1},\bar{\bar{V}}_i^{j+1},\frac{\bar{\bar{U}}_{i+1}^{j+1}-\bar{\bar{U}}_{i-1}^{j+1}}{2h},\frac{\bar{\bar{U}}_{i+1}^{j+1}-2\bar{\bar{U}}_i^{j+1}+\bar{\bar{U}}_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right)+$$

$$+f_1\left(x_i,t^{j+1},\bar{U}_i^{j+1},\bar{V}_i^{j+1},\frac{\bar{U}_{i+1}^{j+1}-\bar{U}_{i-1}^{j+1}}{2h},\frac{\bar{U}_{i+1}^{j+1}-2\bar{U}_i^{j+1}+\bar{U}_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right)=0;$$

$$\frac{Z_i^{j+1}-Z_i^j}{\tau}-g_2\left(x_i,t^{j+1},\bar{\bar{U}}_i^j,\bar{\bar{V}}_i^{j+1}\right)+g_1\left(x_i,t^{j+1},\bar{U}_i^j,\bar{U}_i^{j+1}\right)=0,$$

где $Y_i^j=\bar{\bar{U}}_i^j-\bar{U}_i^j$, $Z_i^j=\bar{\bar{V}}_i^j-\bar{V}_i^j$. Преобразуя левые части этих тождеств, имеем:

$$\frac{Y_i^{j+1}-Y_i^j}{\tau}-f_2\left(x_i,t^{j+1},\bar{\bar{U}}_i^{j+1},\bar{\bar{V}}_i^{j+1},\frac{\bar{\bar{U}}_{i+1}^{j+1}-\bar{\bar{U}}_{i-1}^{j+1}}{2h},\frac{\bar{\bar{U}}_{i+1}^{j+1}-2\bar{\bar{U}}_i^{j+1}+\bar{\bar{U}}_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right)+$$

$$+f_1\left(x_i,t^{j+1},\bar{\bar{U}}_i^{j+1},\bar{\bar{V}}_i^{j+1},\frac{\bar{\bar{U}}_{i+1}^{j+1}-\bar{\bar{U}}_{i-1}^{j+1}}{2h},\frac{\bar{\bar{U}}_{i+1}^{j+1}-2\bar{\bar{U}}_i^{j+1}+\bar{\bar{U}}_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right)-$$

$$-f_1\left(x_i,t^{j+1},\bar{\bar{U}}_i^{j+1},\bar{\bar{V}}_i^{j+1},\frac{\bar{\bar{U}}_{i+1}^{j+1}-\bar{\bar{U}}_{i-1}^{j+1}}{2h},\frac{\bar{\bar{U}}_{i+1}^{j+1}-2\bar{\bar{U}}_i^{j+1}+\bar{\bar{U}}_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right)+$$

$$+f_1\left(x_i,t^{j+1},\bar{U}_i^{j+1},\bar{V}_i^{j+1},\frac{\bar{U}_{i+1}^{j+1}-\bar{U}_{i-1}^{j+1}}{2h},\frac{\bar{U}_{i+1}^{j+1}-2\bar{U}_i^{j+1}+\bar{U}_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right)\le$$

$$\le\frac{Y_i^{j+1}-Y_i^j}{\tau}-f_1\left(x_i,t^{j+1},\bar{\bar{U}}_i^{j+1},\bar{\bar{V}}_i^{j+1},\frac{\bar{\bar{U}}_{i+1}^{j+1}-\bar{\bar{U}}_{i-1}^{j+1}}{2h},\frac{\bar{\bar{U}}_{i+1}^{j+1}-2\bar{\bar{U}}_i^{j+1}+\bar{\bar{U}}_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right)+$$

$$+f_1\left(x_i,t^{j+1},\bar{U}_i^{j+1},\bar{V}_i^{j+1},\frac{\bar{U}_{i+1}^{j+1}-\bar{U}_{i-1}^{j+1}}{2h},\frac{\bar{U}_{i+1}^{j+1}-2\bar{U}_i^{j+1}+\bar{U}_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right);$$

$$\frac{Z_i^{j+1}-Z_i^j}{\tau}-g_2\left(x_i,t^{j+1},\bar{\bar{U}}_i^j,\bar{\bar{V}}_i^{j+1}\right)+g_1\left(x_i,t^{j+1},\bar{\bar{U}}_i^j,\bar{\bar{V}}_i^{j+1}\right)-g_1\left(x_i,t^{j+1},\bar{\bar{U}}_i^j,\bar{\bar{V}}_i^{j+1}\right)+$$

$$+g_1\left(x_i,t^{j+1},\bar{U}_i^j,\bar{V}_i^{j+1}\right)\le\frac{Z_i^{j+1}-Z_i^j}{\tau}-g_1\left(x_i,t^{j+1},\bar{\bar{U}}_i^j,\bar{\bar{V}}_i^{j+1}\right)+g_1\left(x_i,t^{j+1},\bar{U}_i^j,\bar{V}_i^{j+1}\right).$$

Таким образом, функции удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\frac{\bar{\bar{U}}_i^{j+1} - \bar{\bar{U}}_i^{j}}{\tau} - f_1\left(x_i, t^{j+1}, \bar{\bar{U}}_i^{j+1}, \bar{\bar{V}}_i^{j+1}, \frac{\bar{\bar{U}}_{i+1}^{j+1} - \bar{\bar{U}}_{i-1}^{j+1}}{2h}, \frac{\bar{\bar{U}}_{i+1}^{j+1} - 2\bar{\bar{U}}_i^{j+1} + \bar{\bar{U}}_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right) \ge$$

$$i = 1,2,\ldots,M-1, \quad j = 0,1,\ldots,N-1,$$

$$\ge \frac{\overline{U}_i^{j+1} - \overline{U}_i^{j}}{\tau} - f_1\left(x_i, t^{j+1}, \overline{U}_i^{j+1}, \overline{V}_i^{j+1}, \frac{\overline{U}_{i+1}^{j+1} - \overline{U}_{i-1}^{j+1}}{2h}, \frac{\overline{U}_{i+1}^{j+1} - 2\overline{U}_i^{j+1} + \overline{U}_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right);$$

$$\frac{\bar{\bar{V}}_i^{j+1} - \bar{\bar{V}}_i^{j}}{\tau} - g_2\left(x_i, t^{j+1}, \bar{\bar{U}}_i^{j}, \bar{\bar{V}}_i^{j+1}\right) \ge \frac{\overline{V}_i^{j+1} - \overline{V}_i^{j}}{\tau} - g_1\left(x_i, t^{j+1}, \overline{U}_i^{j}, \overline{V}_i^{j+1}\right),$$

$$i = 0,1,\ldots,M, \quad j = 0,1,\ldots,N-1,$$

при этом, имеют место соотношения (3.15), (3.20), (3.21). Согласно теореме 3.1 тогда для достаточно малых значений τ и h имеем: $\bar{\bar{U}}_i^{j} \ge \overline{U}_i^{j}$, $\bar{\bar{V}}_i^{j} \ge \overline{V}_i^{j}$, $i = 0,1,\ldots,M$, $j = 0,1,\ldots,N$. Теорема доказана.

Поступила 30.05.2003
Кафедра информатики и вычислительной математики.

Литература

1. С Глесстон, М. Эдлунд. Основы теории ядерных реакторов. М., 1954.
2. A.McNabb. J. Math. Anal. and Appl., 1961, 3, №1, 133-144.
3. J. Kautsky. Aplikace Matematiky, 1957, 2, №5, 327-341.
4. В.Н. Масленникова. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1963, №3, том3, 467-477, 159-162.
5. V.N. Maslennikova. Outlines of the Joint Soviet-American Symphosium on PDE's 1963, Novosibirsk. 1963, Moscow.
6. Z. Batiashvili, T. Jangveladze. Reports of enlarged session of the seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, 1999 N1, Vol. 14, 7-9.
7. А. Фридман. Уравнения с частными производными параболического вида. М., 1968.
8. K.Nickel. Mathematische Zeitschrift, 1978, 161, 221-234.
9. А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений, М., 1987.

მ. თუთბერიძე

შედარების თეორემები ერთი არაწრფივი დიფუზიური სისტემისა და მისი სხვაობიანი ანალოგისათვის

რეზიუმე

განხილულია არაწრფივ კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა ერთი სისტემა, რომელიც აღწერს სხვადასხვა ტიპის დიფუზიურ პროცესს. შრომა შედგება შესავალისა და სამი პარაგრაფისაგან. შესავალში გადმოცემულია სტატიაში შესწავლილ საკითხებთან დაკავშირებული სამეცნიერო ნაშრომების მოკლე მიმოხილვა. პირველი ორი პარაგრაფი ეძღვნება შედარების თეორემების დამტკიცებას როგორც ერთნაირი კოეფიციენტების მქონე, ასევე განსხვავებულ კოეფიციენტებიანი სისტემის შემთხვევებისათვის. მესამე პარაგრაფში კი ანალოგიური საკითხები შესწავლილია განხილული ამოცანის შესაბამისი სხვაობიანი სქემისათვის.

M. Tutberidze

Comparison theorems for one diffusion system of nonlinear equations and its finite difference analogous

Summary

In the note one system of nonlinear partial differential equations is considered. This system describes a different kind of diffusion processes. The article consists of introduction and three parts. In the introduction the origin of the task and a little review of the articles about this one is narated. The first two parts are dedicated to the proofs of the comparison theorems for the cases of the same and the different coefficients. In the third part there are discussed the same questions for the finite difference scheme, corresponding to the considered problem.

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского государственного
университета им. Ив. Джавахишвили
Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University
354

УДК 538

ОБ ОДНОМ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИИ

Дж. В. Шарикадзе

Пусть даны система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с коэффициентами, зависящими только от времени t:

$$
\begin{aligned}
& a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1(t)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(t)u + a_3(t)\frac{\partial v}{\partial x} + a_4(t)v - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\
& a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a_5(t)\frac{\partial v}{\partial x} + a_6(t)v + a_7(t)\frac{\partial u}{\partial x} + a_8(t)u - \frac{\partial v}{\partial t} = 0
\end{aligned} \tag{1}
$$

и предельные условия:

$$
\begin{aligned}
& u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u_w(t), \quad u(x,t) = 0, \quad u_w(0) = 0, \\
& v(x,0) = 0, \quad v(0,t) = v_w(t), \quad v(\infty,t) = 0, \quad v_w(t) = 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Ставится задача: при каких функциях $a_i(t)$, $u_w(t)$, $v_w(t)$ $(i=1,8)$ существуют автомодельные решения задачи (1), (2) и найти эти решения; коэффициент a=const.

Умножим второе уравнение системы (1) на α и сложим с первым, получим:

$$
\begin{aligned}
& a\frac{\partial^2 (u+\alpha v)}{\partial x^2} + a_1(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(u + \frac{a_5}{a_1}\alpha v\right) + a_2(t)\left(u + \frac{a_6}{a_2}\alpha v\right) + \\
& + \alpha a_7(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(u + \frac{a_3}{\alpha a_7}v\right) + \alpha a_8(t)\left(u + \frac{a_4}{\alpha a_8}v\right) = \frac{\partial}{\partial t}(u+\alpha v) = 0.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Предположим, что

$$a_5(t) = a_1(t), \quad a_6(t) = a_2(t), \quad a_3(t) = a_7(t), \quad a_4(t) = a_8(t), \quad \alpha^2 = 1.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} u(x,t) + v(x,t) &= u_+(x,t), \\ u(x,t) - v(x,t) &= u_-(x,t). \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда из (3) и (2) получим:

$$a\frac{\partial^2 u_+}{\partial x^2} + (a_1 + a_3)\frac{\partial u_+}{\partial x} + (a_2 + a_4)u_+ - \frac{\partial u_+}{\partial t} = 0, \tag{5}$$

$$u_+(x,0) = 0, \quad u_+(0,t) = u_w(t) + v_w(t) = u_{+w}(t), \quad u_+(\infty,t) = 0$$

$$a\frac{\partial^2 u_-}{\partial x^2} + (a_1 - a_3)\frac{\partial u_-}{\partial x} + (a_2 - a_4)u_- - \frac{\partial u_-}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

$$u_-(x,0) = 0, \quad u_-(0,t) = u_w(t) - v_w(t) = u_{-w}(t), \quad u_-(\infty,t) = 0.$$

Ищем решение в виде:

$$u_+(x,t) = u_{+w}(t)\, f(\eta), \quad u_-(x,t) = u_{-w}(t)\, \varphi(\eta), \tag{7}$$

где $\eta = \dfrac{x}{2\sqrt{at}}$ – автомодельная переменная.

Подставляя (7) в (5) и (6) будет иметь:

$$f'' + 2\left[\eta + (a_1 + a_3)\sqrt{\frac{t}{a}}\right]f' - 4t\left[\frac{u'_{+w}}{u_{+w}} - (a_2 + a_4)\right]f = 0, \tag{8}$$

$$\varphi'' + 2\left[\eta + (a_1 - a_3)\sqrt{\frac{t}{a}}\right]\varphi' - 4t\left[\frac{u'_{-w}}{u_{+w}} - (a_2 - a_4)\right]\varphi = 0, \tag{9}$$

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi(\infty) = 0. \tag{10}$$

Для того чтобы (8) и (9) давали автомодельные решения, необходимо потребовать, чтобы имели место равенства:

$$[a_1(t)+a_3(t)]\sqrt{\frac{t}{a}}=\beta=\text{const},\quad [a_1(t)-a_3(t)]\sqrt{\frac{t}{a}}=\delta=\text{const},$$

$$t\left[\frac{u'_{+w}}{u_{+w}}-(a_2+a_4)\right]=n,\quad t\left[\frac{u'_{-w}}{u_{-w}}-(a_2-a_4)\right]=m,\quad m,n\in N. \tag{11}$$

где

$$f'(\eta)=\frac{df}{d\eta},\quad u'_{\pm w}=\frac{du_{\pm w}}{dt},\quad \varphi'(\eta)=\frac{d\varphi}{d\eta}.$$

Из равенства (11) получаем условия автомодельности:

$$a_1(t)=\frac{\beta+\delta}{2}\sqrt{\frac{a}{t}},\quad a_3(t)=\frac{\beta-\delta}{2}\sqrt{\frac{a}{t}}, \tag{12}$$

$$\begin{gathered} u_{+w}(t)=At^n\exp\left\{-\int_0^t[a_2(\tau)+a_4(\tau)]d\tau\right\} \\ u_{-w}(t)=Bt^m\exp\left\{-\int_0^t[a_2(\tau)-a_4(\tau)]d\tau\right\} \end{gathered} \tag{13}$$

Тогда уравнения (8) и (9) дадут:

$$f''+2(\eta+\beta)f'-4nf=0,\quad f(0)=1,\quad f(\infty)=0, \tag{14}$$

$$\varphi''+2(\eta+\delta)\varphi'-4m\varphi=0,\quad \varphi(0)=1,\quad \varphi(\infty)=0. \tag{15}$$

Решения задач (14) и (15) выражаются через кратные интегралы вероятностей:

$$f(\eta)=\frac{i^{2n}\operatorname{erfc}(\eta+\beta)}{i^{2n}\operatorname{erfc}\beta},\quad \varphi(\eta)=\frac{i^{2m}\operatorname{erfc}(\eta+\delta)}{i^{2m}\operatorname{erfc}\delta}, \tag{16}$$

где

$$i^n\operatorname{erfc} z=\int_z^\infty i^{n-1}\operatorname{erfc} z\,dz.$$

Решениями первоначальной задачи будут:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[u_w(t)(f+\varphi)+v_w(t)(f-\varphi)\right], \tag{17}$$

$$v(x,t)=\frac{1}{2}\left[u_w(t)(f-\varphi)+v_w(t)(f+\varphi)\right] \tag{18}$$

Для приложения полученных результатов рассмотрим течение проводящей жидкости в полубесконечной области, вызванное перемещением плоской пористой стенкой поступательно в своей плоскости со скоростью $u_w(t)$. Пусть перпендикулярно стенке приложено внешнее магнитное поле $B_0(t)$. В жидкости индуцируется магнитное поле $b(x,t)$.

Тогда система, определяющая скорость и индуцированное магнитное поле в приближении пограничного слоя, будет иметь вид [1]:

$$\begin{aligned} &\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+v_0(t)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{B_0(t)}{\rho\mu_0}\frac{\partial b}{\partial x}=0,\\ &\nu_m\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}+v_0(t)\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial t}+B_0(t)\frac{\partial u}{\partial x}=0. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь v_0 (t) – скорость просачивания жидкости через стенку, ρ – плотность жидкости, μ_0 – магнитная проницаемость жидкости, а ν_m – коэффициент магнитной вязкости. Стенка занимает oyz-область, внешнее магнитное поле перпендикулярно стенке и направлено по оси x.

Неизвестные функции $u(x,t)$ и $b(x,t)$ удовлетворяют предельным условиям:

$$\begin{aligned} &u(x,0)=u_w(0)=0,\ \ u(0,t)=u_w(t),\ \ u(\infty,t)=0,\\ &b(x,0)=0,\ \ b(0,t)=0,\ \ b(\infty,t)=0. \end{aligned} \tag{22}$$

Если потребовать, что $\nu=\nu_m$ и сравнить систему (21) и (1), будем иметь:

$$u(x,t)=u(x,t),\ \ v(x,t)=\frac{b(x,t)}{\sqrt{\rho\mu_0}},$$

$$a=\nu=\nu_m,\ a_1(t)=v_0(t),\ a_2=0,\ a_3=\frac{B_0(t)}{\sqrt{\rho\mu_0}},\ a_4=0,\ u_w=u_w,$$

$$a_5=v_0,\ a_6=0,\ a_7=\frac{B_0(t)}{\sqrt{\rho\mu_0}},\ a_8=0,\ v_w=0,\ n=m.$$

Решение задач (21)-(22) аналогично вышеизложенной задаче, при этом:

$$u(x,t)=\frac{u_w(t)}{2}\left[f(\eta)+\varphi(\eta)\right],$$

$$b(x,t)=\frac{u_w(t)}{2}\left[f(\eta)-\varphi(\eta)\right]\sqrt{\rho\mu_0},$$

где

$$f(\eta)=\frac{i^{2n}\operatorname{erfc}(\eta+\beta)}{i^{2n}\operatorname{erfc}\beta},\ \ \varphi(\eta)=\frac{i^{2n}\operatorname{erfc}(\eta+\delta)}{i^{2n}\operatorname{erfc}\delta}.$$

$$u_w(t)=At^n.$$

Таким образом, скорость проводящей жидкости и индуцированное магнитное поле выражаются эффективно через кратные интегралы вероятностей:

$$u(x,t)=\frac{At^n}{2}\left[\frac{i^{2n}\mathrm{erfc}(\eta+\beta)}{i^{2n}\mathrm{erfc}\beta}+\frac{i^{2n}\mathrm{erfc}(\eta+\delta)}{i^{2n}\mathrm{erfc}\delta}\right],$$

$$b(x,t)=\frac{At^n}{2}\sqrt{\rho\mu_0}\left[\frac{i^{2n}\mathrm{erfc}(\eta+\beta)}{i^{n}\mathrm{erfc}\beta}-\frac{i^{2n}\mathrm{erfc}(\eta+\delta)}{i^{2n}\mathrm{erfc}\delta}\right].$$

При этом скорость просачивания жидкости через стенку и приложенное внешнее магнитное поле должны удовлетворять условиям автомодельности:

$$v_0(t)=a_1(t)=\frac{\beta+\delta}{2}\sqrt{\frac{a}{t}},$$

$$\frac{B_0(t)}{\sqrt{\rho\mu_0}}=a_3(t)=\frac{\beta-\delta}{2}\sqrt{\frac{a}{t}}.$$

Если вернуться к старым переменным, то для скорости течения жидкости и индуцированного магнитного поля будет иметь:

$$u(x,t)=\frac{At^n}{2}\left[\frac{i^{2n}\mathrm{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{\nu t}}+\beta\right)}{i^{2n}\mathrm{erfc}\beta}+\frac{i^{2n}\mathrm{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{\nu t}}+\delta\right)}{i^{2n}\mathrm{erfc}\delta}\right],$$

$$b(x,t)=\frac{At^n}{2}\sqrt{\rho\mu_0}\left[\frac{i^{2n}\mathrm{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{\nu t}}+\beta\right)}{i^{2n}\mathrm{erfc}\beta}-\frac{i^{2n}\mathrm{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{\nu t}}+\delta\right)}{i^{2n}\mathrm{erfc}\delta}\right].$$

Поверхностное трение на пористой стенке имеет вид:

$$\tau=\mu\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=-\frac{At^n}{2}\mu\left[\frac{i^{2n-1}\mathrm{erfc}\beta}{i^{2n}\mathrm{erfc}\beta}+\frac{i^{2n-1}\mathrm{erfc}\delta}{i^{2n}\mathrm{erfc}\delta}\right]\frac{1}{2\sqrt{\nu t}}$$

Если стенка мгновенно начинает перемещаться с постоянной скоростью u_0, то $A=u_0$, $n=0$ и из вышеприведенных формул получим:

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2}\left[\frac{erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\nu t}} + \beta\right)}{erfc\beta} + \frac{erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\nu t}} + \delta\right)}{erfc\delta}\right],$$

$$b(x,t) = \frac{u_0}{2}\sqrt{\rho\mu_0}\left[\frac{erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\nu t}} + \beta\right)}{erfc\beta} - \frac{erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\nu t}} + \delta\right)}{erfc\delta}\right],$$

$$\tau = -\frac{u_0\rho}{4\sqrt{t}}\left[\frac{i^{-1}erfc\beta}{i^0 erfc\beta} + \frac{i^{-1}erfc\delta}{i^0 erfc\delta}\right] = -\frac{u_0\rho}{4\sqrt{\pi t}}\left[\frac{e^{-\beta^2}}{erfc\beta} + \frac{e^{-\delta^2}}{erfc\delta}\right]$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{t}{\nu}}\left(v_o + \frac{B_0}{\sqrt{\rho\mu_0}}\right) = \text{const}, \quad \delta = \sqrt{\frac{t}{\nu}}\left(v_o - \frac{B_0}{\sqrt{\rho\mu_0}}\right) = \text{const},$$

$$i^0 erfcz = erfcz, \quad i^{-1}erfcz = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}.$$

Если имеем обычную непроводящую жидкость, которая приходит в движение мгновенно со скоростью u_0=Const и стенка непористая, получим решение классической задачи Стокса [2].

Поступила 15.12.2003

Кафедра теоретической механики

Литература

1. А.Б. Ватажин, Г.А. Любимов, С.А. Регирер. Магнитогидродинамические течения в каналах. М., Наука, 1970.
2. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя, М., Наука, 1974.

ჯ. შარიქაძე

მეორე რიგის კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა ერთი სისტემის ავტომოდელური ამოხსნისა და მისი გამოყენების შესახებ

რეზიუმე

მიღებულია მეორე რიგის კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა ერთი სისტემის ავტომოდელური ამონახსნის არსებობის პირობები, რომლებიც ედება ამ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტებს.

მაგალითისათვის განხილულია ფოროვანი უსასრულო კედლის მოძრაობით გამოწვეული ბლანტი არაკუმშვადი გამტარი სითხის მოძრაობის ამოცანა. ავტომოდელობის მოთხოვნა გარკვეულ შეზღუდვებს ადებს, როგორც კედლის გადაადგილების სიჩქარეს, ასევე გაჟონვის სიჩქარესა და გარედან მოდებულ მაგნიტურ ველს.

J. Sharikadze

Similary solution of the system of partial differential equation of second order and its application

Summary

The system of partial differential equation of second order has some conditions in which it lays on definite coefficients of this differential equation and the solution is similary.

For the example porous plate motion in viscous incompressible conducting fluid is considered; where the similary solution lays on velocity of motion of plate, as well as velocity of suction and external magnetic field.

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского государственного
университета им. Ив. Джавахишвили
Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University

354

УДК 538

ОБ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ МГД-ТЕЧЕНИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ ОТСОСА

Л. А. Джикидзе

Нестационарное течение вязкой несжимаемой слабопроводящей жидкости вдоль бесконечной пористой пластины, подверженной равномерному отсасыванию и находящейся в постоянном поперечном магнитном поле, при периодической скорости внешнего потока с учетом теплопередачи было изучено в работе [1]. Динамическая часть этой задачи была обобщена в работе [2] на случай периодического изменения скорости отсоса. Влияние периодического закона отсоса на температуру жидкости исследовано в работе [3]. Во всех этих работах частоты периодических законов были одинаковы, а коэффициент электропроводности постоянным. В работе [4] была изучена нестационарная задача МГД-течения бесконечной пористой пластины в слабопроводящей жидкости. когда скорость набегающего потока, скорость отсоса и коэффициент электропроводности являются периодическими функциями времени с разными частотами.

В настоящей работе изучается нестационарная задача движения проводящей жидкости, вызванного вращением бесконечной пористой пластины, когда скорость отсоса и коэффициент электропроводности являются периодическими функциями с разными частотами.

Для решения задачи воспользуемся уравнениями нестационарного движения слабопроводящей жидкости, находящейся в однородном внешнем магнитном поле:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\dfrac{\partial V_r}{\partial r}+V_z\dfrac{\partial V_r}{\partial z}-\dfrac{V_\varphi^2}{r}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial r}+\nu\left(\Delta V_r-\dfrac{V_r}{r^2}\right)-\dfrac{\sigma B_0^2}{\rho}V_r,\\
\dfrac{\partial V_\varphi}{\partial t}+V_r\dfrac{\partial V_\varphi}{\partial r}+V_z\dfrac{\partial V_\varphi}{\partial z}-\dfrac{V_rV_\varphi}{r}=\nu\left(\Delta V_\varphi-\dfrac{V_\varphi}{r^2}\right)-\dfrac{\sigma B_0^2}{\rho}V_\varphi,\\
\dfrac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\dfrac{\partial V_z}{\partial r}+V_z\dfrac{\partial V_z}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z}+\nu\Delta V_z,\\
\dfrac{\partial V_r}{\partial r}+\dfrac{V_r}{r}+\dfrac{\partial V_z}{\partial z}=0,
\end{cases}
\tag{1}
$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Для решения системы (1) будем иметь следующие предельные условия:

$$\begin{cases} t = 0; \quad V_r = V_\varphi = V_z = 0 \\ z = 0; \qquad V_r = 0, \qquad V_\varphi = r\omega, \quad V_z = 0 \\ z = \infty, \qquad V_r = 0, \qquad V_\varphi = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Из геометрического и механического соображения ищем решения системы (1) в виде:

$$\begin{cases} V_r = \omega r f(\eta, t^{'}), \quad V_\varphi = \omega r \varphi(\eta, t^{'}), \quad V_z = \sqrt{\nu\omega}[\Psi(\eta, t^{'}) - V^{'}(t)], \\ P = -\rho\omega\nu p(\eta, t^{'}), \qquad \eta = \sqrt{\dfrac{\omega}{\nu}} z, \qquad t^{'} = \omega t, \quad V_o = \sqrt{\nu\omega} V_0^{'}. \end{cases} \tag{3}$$

Следуя [5] и [6], рассмотрим случай, когда влияние диссипационных эффектов пренебрежимо мало и интенсивный отсос приводит к значительному уменьшению радиальной скорости жидкости вблизи пластины.

С учетом этого, а также того, что отсос жидкости через пластину происходит по закону

$$V(t) = V_0(1 + \varepsilon A_1 \cos\omega_1 t),$$

а коэффициент электропроводности изменяется по закону

$$\sigma(t) = \sigma_0(1 + \varepsilon A_2 \cos\omega_2 t),$$

подстановка (3) в систему (1) дает следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - V_0(1 + \varepsilon A_1 \cos\omega_1 t)\dfrac{\partial f}{\partial \eta} - m^2(1 + \varepsilon A_2 \cos\omega_2 t) f - \dfrac{\partial f}{\partial t} = -\varphi^2, \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} - V_0(1 + \varepsilon A_1 \cos\omega_1 t)\dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} - m^2(1 + \varepsilon A_2 \cos\omega_2 t)\varphi - \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial \eta} = -\dfrac{\partial^2 \Psi}{\int \partial \eta^2} + (\Psi - V)\dfrac{\partial \Psi}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial t}(\Psi - V), \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial \eta} = -2f, \end{cases} \tag{4}$$

где $m^2 = \dfrac{\sigma_0 B_0^2}{\omega\rho}$, а штрихи над буквами отброшены.

Для системы (4) получаются следующие начальные и граничные условия:

$$\begin{cases} t=0, & f=\varphi=\Psi=0, \\ \eta=0, & f=0, \quad \varphi=1, \quad \Psi=0, \\ \eta=\infty, & f=0, \quad \varphi=0. \end{cases} \tag{5}$$

Решения задачи (4)-(5) ищем в виде

$$\begin{cases} f(\eta,t)=f_0(\eta)+\sum\limits_{k=1}^{2}(f_k(\eta)\cos\omega_k t+g_k(\eta)\sin\omega_k t), \\ \varphi(\eta,t)=\varphi_0(\eta)+\sum\limits_{k=1}^{2}(\varphi_k(\eta)\cos\omega_k t+q_k(\eta)\sin\omega_k t). \end{cases} \tag{6}$$

Подставим (6) в (4)-(5), пренебрегая слагаемыми, содержащими ε^2 множителем, и приравнивая коэффициенты перед $\cos\omega_k t$ и $\sin\omega_k t$ с одинаковыми частотами. Получим следующие уравнения и граничные условия:

$$\begin{cases} f_0''-V_0 f_0'-m^2 f_0=-\varphi_0^2, \\ \varphi_0''-V_0\varphi_0'-m^2\varphi_0=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_0(0)=f_0(\infty)=0, \\ \varphi_0(0)=1, \varphi_0(\infty)=0, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} f_1''-V_0 f_1'-m^2 f_1-\omega_1 g_1=V_0 A_1 f_0'-2\varphi_0\varphi_1, \\ g_1''-V_0 g_1'-m^2 g_1+\omega_1 f_1=-2\varphi_0 q_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1(0)=f_1(\infty)=0, \\ g_1(0)=g_1(\infty)=0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} f_2''-V_0 f_2'-m^2 f_2-\omega_2 g_2=m^2 A_2 f_0-2\varphi_0\varphi_2, \\ g_0''-V_0 g_0'-m^2 g_2+\omega_2 f_2=-2\varphi_0 q_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_2(0)=f_2(\infty)=0, \\ g_2(0)=g_2(\infty)=0, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \varphi_1''-V_0\varphi_1'-m^2\varphi_1-\omega_1 q_1=V_0 A_1\varphi_0', \\ q_1''-V_0 q_1'-m^2 q_1+\omega_1\varphi_1=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_1(0)=\varphi_1(\infty)=0, \\ q_1(0)=q_1(\infty)=0, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \varphi_2''-V_0\varphi_2'-m^2\varphi_2-\omega_2 q_2=m^2 A_2\varphi_0, \\ q_2''-V_0 q_2'-m^2 q_2+\omega_2\varphi_2=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_2(0)=\varphi_2(\infty)=0, \\ q_2(0)=q_2(\infty)=0, \end{cases} \tag{11}$$

Решения системы (7) имеют вид

$$f_0(\eta)=\frac{1}{\beta}(e^{-a\eta}-e^{-2a\eta}), \quad \varphi_0=e^{-a\eta}, \tag{12}$$

где $a=\frac{1}{2}(\sqrt{V_0^2+4m_2}-V_0)$, $\beta=3a^2+aV_0$.

Введя символ Кронекера, системы (8)-(11) можно записать в виде двух систем

$$\begin{cases} f_k'' - V_0 f_k' - m^2 f_k - \omega_k g_k = V_0 A_1 f_0' \delta_{1k} + m^2 A_2 f_0 \delta_{2k} - 2\varphi_0 \varphi_k, \\ g_k'' - V_0 g_k' - m^2 g_k + \omega_k f_k = -2\varphi_0 q_k, \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} \varphi_k'' - V_0 \varphi_k' - m^2 \varphi_k - \omega_k q_k = V_0 A_1 \varphi_0' \delta_{1k} + m^2 A_2 \varphi_0 \delta_{2k}, \\ q_k'' - V_0 q_k' - m^2 q_k + \omega_k \varphi_k = 0, \end{cases} \tag{14}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} f_k(0) = f_k(\infty) = 0, \quad g_k(0) = g_k(\infty) = 0, \\ \varphi_k(0) = \varphi_k(\infty) = 0, \quad q_k(0) = q_k(\infty) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Умножая вторые уравнения систем (13)-(14) на i, складывая и вычитая из первых уравнений, получаем

$$\begin{cases} F_k'' - V_0 F_k' - (m^2 - i\omega_k) F_k = A(\eta) - 2\varphi_0 \Phi_k, \\ G_k'' - V_0 G_k' - (m^2 + i\omega_k) G_k = A(\eta) - 2\varphi_0 Q_k, \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \Phi_k'' - V_0 \Phi_k' - (m^2 - i\omega_k) \Phi_k = B(\eta), \\ Q_k'' - V_0 Q_k' - (m^2 + i\omega_k) Q_k = B(\eta), \end{cases} \tag{17}$$

где введены функции

$$F_k = f_k + i g_k, \qquad G_k = f_k - i g_k,$$
$$\Phi_k = \varphi_k + i q_k, \qquad Q_k = \varphi_k - i q_k,$$
$$A(\eta) = V_0 A_1 f_0' \delta_{1k} + m^2 A_2 f_0 \delta_{2k},$$
$$B(\eta) = V_0 A_1 \varphi_0' \delta_{1k} + m^2 A_2 \varphi_0 \delta_{2k},$$

причем функции $F_k(\eta)$, $G_k(\eta)$, $\Phi_k(\eta)$, и $Q_k(\eta)$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$F_k(0) = F_k(\infty) = 0, \qquad G_k(0) = G_k(\infty) = 0, \tag{18}$$

$$\Phi_k(0) = \Phi_k(\infty) = 0, \qquad Q_k(0) = Q_k(\infty) = 0. \tag{19}$$

После нахождения $F_k(\eta)$, $G_k(\eta)$, $\Phi_k(\eta)$, и $Q_k(\eta)$ неизвестные функции $f_k(\eta)$, $g_k(\eta)$, $\varphi_k(\eta)$, и $q_k(\eta)$ находятся из выражений

$$f_k(\eta) = \frac{F_k(\eta) + G_k(\eta)}{2}, \qquad g_k(\eta) = \frac{F_k(\eta) - G_k(\eta)}{2i},$$
$$\varphi_k(\eta) = \frac{\Phi_k(\eta) + Q_k(\eta)}{2}, \qquad q_k(\eta) = \frac{\Phi_k(\eta) + Q_k(\eta)}{2i} \tag{20}$$

Решения задачи (17)-(19) имеют вид:

$$\Phi_k(\eta) = -\frac{n_k}{i\omega_k}\left[e^{-a\eta} - e^{-\frac{1}{2}(-V_0 + a_k - ib_k)\eta}\right],$$

$$Q_k(\eta) = -\frac{n_k}{i\omega_k}\left[e^{-a\eta} - e^{-\frac{1}{2}(-V_0 + a_k + ib_k)\eta}\right],$$

а решения задачи (16) – (18) вид:

$$F_k(\eta) = -\frac{n_k}{i\omega_k\beta}\left[e^{-a\eta} - e^{-\frac{1}{2}(-V_0 + a_k - ib_k)\eta}\right] + \left(\frac{aV_0A_1\delta_{1k} + n_k}{\beta(\beta - i\omega_k)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2n_k}{\omega_k(\omega_k - i\beta)}\right)\left[e^{-2a\eta} - e^{-\frac{1}{2}(-V_0 + a_k - ib_k)\eta}\right] -$$

$$- \frac{2n_k}{\omega_k(\varepsilon_k - id_k)}(e^{-a\eta} - 1)e^{-\frac{1}{2}(-V_0 + a_k - ib_k)\eta},$$

$$G_k(\eta) = \frac{n_k}{i\omega_k\beta}\left[e^{-a\eta} - e^{-\frac{1}{2}(-V_0 + a_k - ib_k)\eta}\right] + \left(\frac{aV_0A_1\delta_{1k} + n_k}{\beta(\beta - i\omega_k)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2n_k}{\omega_k(\omega_k + i\beta)}\right)\left[e^{-2a\eta} - e^{-\frac{1}{2}(-V_0 + a_k + ib_k)\eta}\right] +$$

$$+ \frac{2n_k}{\omega_k(c_k - id_k)}(e^{-a\eta} - 1)e^{-\frac{1}{2}(-V_0 + a_k + ib_k)\eta},$$

где введены следующие обозначения

$$n_k = aV_0A_1\delta_{ik} - m^2A_2\delta_{2k},$$

$$n_k = \sqrt{\frac{1}{2}\left[V_0^2 + 4m^2 + \sqrt{(V_0^2 + 4m^2)^2 + 16\omega_k^2}\right]}, \quad b_k = \frac{2\omega_k}{a_k}$$

$$c_k = \frac{1}{2}(2ab_k + a_kb_k - 2\omega_k),$$

$$d_k = \frac{1}{4}(a_k^2 - b_k^2 + 4aa_k - 4V_0a - V_0^2).$$

Для неизвестных функций φ_k, q_k, f_k, g_k будем иметь

$$\varphi_k(\eta)=\frac{n_k}{\omega_k}e^{-\frac{1}{2}(-V_0+a_k)\eta}\sin\frac{b_k}{2}\eta,$$

$$q_k(\eta)=\frac{n_k}{\omega_k}\left[e^{-a\eta}-e^{-\frac{1}{2}(-V_0+a_k)\eta}\cos\frac{b_k}{2}\eta\right],$$

$$f_k(\eta)=\frac{aA_0A_1\delta_{1k}-n_k}{\beta^2+\omega_k^2}\left[e^{-2a\eta}-e^{-\frac{1}{2}(-V_0+a_k)\eta}\cos\frac{b_k}{2}\eta\right]-$$

$$-\frac{aV_0A_1\delta_{1k}\omega_k^2+n_k\beta^2}{\beta\omega_k(\beta^2+\omega_k^2)}e^{-\frac{1}{2}(-V_0+a_k)\eta}\sin\frac{b_k}{2}\eta+$$

$$+\frac{2n_k}{\omega_k(c_k^2+d_k^2)}(e^{-a\eta}-1)e^{-\frac{1}{2}(-V_0+a_k)\eta}\left(c_k\cos\frac{b_k}{2}\eta+d_k\sin\frac{b_k}{2}\eta\right),$$

$$g_k(\eta)=\frac{n_k}{\beta\omega_k}\left[e^{-a\eta}-e^{-\frac{1}{2}(-V_0+a_k)\eta}\cos\frac{b_k}{2}\eta\right]-$$

$$-\frac{aV_0A_1\omega_k^2\delta_{1k}+(\omega_k^2+2\beta^2)}{\beta\omega_k(\omega_k^2+\beta^2)}\left[e^{-2a\eta}-e^{-\frac{1}{2}(-V_0+a_k)\eta}\cos\frac{b_k}{2}\eta\right]-$$

$$-\frac{aV_0A_1\delta_{1k}+n_k}{\omega_k^2+\beta^2}e^{-\frac{1}{2}(-V_0+a_k)\eta}\sin\frac{b_k}{2}\eta-$$

$$-\frac{2n_k}{\omega_k(c_k^2+d_k^2)}(e^{-a\eta}-1)e^{-\frac{1}{2}(-V_0+a_k)\eta}\left(d_k\cos\frac{b_k}{2}\eta-C_k\sin\frac{b_k}{2}\eta\right).$$

Полученные решения справедливы в случае бесконечной пластины, но при достаточно большом радиусе R приближенно можно пренебречь влиянием кромки и определить момент силы сопротивления вращению пластины

$$M=-2\pi\rho\nu\int_0^R r^2\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)_{z=0}dr=-\frac{\pi\rho\omega\sqrt{\nu\omega}R^4}{2}\Bigg\{-a+$$

$$+\varepsilon\sum_{k=1}^{2}\frac{n_k}{\omega_k}\left[\frac{b_k}{2}\cos\omega_k t+\left(a_k-a-\frac{V_0}{2}\right)\sin\omega_k t\right]\Bigg\}.$$

Для коэффициента момента сопротивления будем иметь

$$C_m=-\frac{2\pi}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\left\{-a+\varepsilon\sum_{k=1}^{2}\frac{n_k}{\omega_k}\left[\frac{b_k}{2}\cos\omega_k t+\left(a_k-a-\frac{V_0}{2}\right)\sin\omega_k t\right]\right\},$$

где $Re = \dfrac{R^2\omega}{\nu}$ – число Рейнольдса.

Из полученных выше формул легко усмотреть влияние скорости отсоса и магнитного взаимодействия на физические характеристики потока. Изменяя амплитуды и частоты колебательных движений и величины V_0, можно управлять течением и поверхностным трением.

Поступила 15.05.2003

Грузинский технический университет

Литература

1.U. Suryaprakasarao. ZAMM, 1962, 42, 4/5, pp. 133-141.
2. I. Pop. Buletinul Inst. Politechnic. Din IASI. Ser. Noua, 1967, 13(17), 3-4, s. 173-178.
3. Г. Абесадзе. Труды Грузинского политехнического института, 1975, 3(176), с. 223-227.
4. Д.В.Шарикадзе, Г.Д. Ткешелашвили. Труды Международного симпозиума по проблемам механики сплошных сред, Тбилиси, 1997, 87-89.
5. Sparrow E.M., Cess R.D. Trans. ASME. I.Appl. Mech., vol. 84, 181-187.
6. Д.В.Шарикадзе, Л.А. Джикидзе. Труды Международного симпозиума по проблемам механики сплошных сред, Тбилиси, 1997, 221-223.

ლ. ჯიქიძე

უსასრულო მბრუნავი ფოროვანი ფირფიტის მახლობლობაში გამტარი სითხის მაგნიტოჰიდრო-დინამიკური დინების ერთი არასტაციონარული ამოცანის შესახებ

რეზიუმე

ნაშრომში შესწავლილია უსასრულო ფოროვანი ფირფიტის ბრუნვით გამოწვეული გამტარი სითხის მოძრაობის არასტაციონარული ამოცანა, როდესაც გამოჟონვის სიჩქარე და ელექტროგამტარებლობის კოეფიციენტი წარმოადგენენ სხვადასხვა სიხშირის მქონე პერიოდულ ფუნქციებს.

გამოთვლილია დინების ყველა ფიზიკური მახასიათებელი.

L. Jikidze

One problem on the magnetohydrodynamic nonstationary flow of conductive liquid at nearly of infinite revolving porous plate

Summary

In this paper, the nonstationary problem of the motion of conductive liquid caused by revolving an infinite porous plate, when leakage speed and coefficient of electroconductivity are periodic functions of different frequences, has been considered.

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского государственного
университета им. Ив. Джавахишвили
Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University
354

УДК 523.4

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА, ОТРАЖЕННОГО ОТ ПОВЕРХНОСТЕЙ ГАЛИЛЕЕВЫХ СПУТНИКОВ ЮПИТЕРА ВБЛИЗИ ОПОЗИЦИИ

Р.А.Чигладзе

В рамках международной программы "Международный патруль Юпитера", в которой Абастуманская астрофизическая обсерватория АН Грузии принимает активное участие, нами с 1981 г. проведена серия электрополяриметрических наблюдений Юпитера в галилеевых спутниках вблизи оппозиции.

Наблюдательный материал получен с помощью электронного поляриметра АСЭП-78, изготовленного в лаборатории астрономической радиоэлектроники Абастуманской астрофизической обсерватории под руководством А.Н.Короля. Этот поляриметр в комплексе с 40-см рефрактором, а по мере возможности, и 125-см рефрактором (АЗТ-II) применялся нами для исследования поляриметрических свойств галилеевых спутников Юпитера.

Как известно, поляризационные свойства галилеевых спутников Юпитера вблизи оппозиции слабо изучены из-за малочисленности поляриметрических наблюдений. Нам удалось накопить достаточно однородный электрополяриметрический материал, позволивший получить после детальной обработки надежные характеристики света, отраженного от поверхностей спутников Юпитера вблизи оппозиции.

Наблюдения проводились как в интегральном свете, так и через светофильтры, эффективные длины волн и ширины пропускания которых на полуинтенсивности, соответственно, равны: 4170 и 170; 4460 и 120; S335 и 160; 6405 и 90; 7040 и 150; 7830 и 110. Нормированные спектральные характеристики этих фильтров приводятся в работе [1].

Кроме этого, наблюдения были проведены с четырьмя светофильтрами, кривые пропускания которых определены на монохроматоре МДР-2 в комплекте с штатным фотометром вакуумной установки ПП-601.

Для исследования инструментальной поляризации в каждом фильтре наблюдались стандартные звезды нулевой, умеренной и большой поляризации. Здесь же надо отметить, что $б_p$<0.05%.

Статистическая обработка наблюдений позволила нам впервые прийти к следующим выводам:

1. Вблизи оппозиции наблюдается резкое изменение положения плоскости поляризации полярных областей Юпитера на ~90°. Аналогичное явление наблюдается также для всех галилеевых спутников.

2. Степень поляризации галилеевых спутников Юпитера в момент оппозиции значительно отличается от нуля, например: для Ио, когда L= 93°, P(L)=0,35%; для Европы, когда L=269°, P(L) = 0.27%; для Ганимеда, когда L = 90°, P(L) = 0,35%; для Каллисто, когда L = 333°, P(L) = 0.46%.)

3. Существуют две точки инверсии на поляризационной кривой галилеевых спутников Юпитера, одна из них находится вблизи оппозиции, когда $\alpha \in]0^\circ,1^\circ[$. Здесь надо отметить, что с Земли не наблюдается вторая точка инверсии для Каллисто.

Согласно измерениям [2,3], отраженное солнечное излучение Луны и планет имеет циркулярно поляризованную компоненту P_c. В противостояние, т.е. когда Солнце, Земля и планета находятся на одной прямой, степень циркулярной поляризации $P_c = 0$ /4/.

Циркулярная поляризация, вероятно, возникает в результате двухкратного отражения. После первого отражения неполяризованный свет Солнца приобретает частичную линейную поляризацию; после второго отражения, которое либо сопровождается поглощением /3/, либо происходит под углом, большим угла полного внутреннего отражения, линейная поляризация частично переходит в циркулярную, что, в свою очередь, может быть причиной изменения положения плоскости и величины поляризации.

Вблизи оппозиции, когда $\alpha \in]0^\circ,1^\circ[$, для Ио наблюдается наибольшая амплитуда орбитальных вариаций степени поляризации, которые составляют 0,35%, при $\lambda_{эфф.}$=420 нм.

Орбитальные вариации степени поляризации Каллисто вблизи оппозиций незначительно меняются по сравнению с другими галилеевыми спутниками, однако при ~10° они могут достигать 0,9%. Этот наблюдательный факт объясняется тем, что более темная сторона Каллисто (лобовая сторона) имеет значительно больший оппозиционный эффект, чем светлая.

Наименьший оппозиционный эффект имеет Европа, а у Ио и Ганимеда оппозиционный эффект больше, чем у Европы, но меньше, чем у Каллисто.

На коротковолновом участке спектра степень поляризации спутника Ио, Европы и Ганимеда по абсолютной величине незначительно больше, чем на остальных участках спектра, что касается поляризационной кривой спутника Каллисто, она в некотором виде отлична от остальных кривых.

Поступила 15.09.2003.
Кафедра астрономии

Литература

1. О.Р.Болквадзе, О.И.Кварацхелия, А.Н.Король, А.К.Майер, Л.А.Сигуа, Р.А.Чигладзе. Бюлл.Абаст.астроф.обс., 61, 269-287, 1986.
2. Ю.Н.Липский, М.М.Поспергилис. Астрон.ж., 44, 410-413. 1967.
3. I.G. Kamp, R.D. Wolstenonaft, I.B. Swedind. Nature, 232, 165-167, 1971.
4. В.Н.Сазонов. Астрон.ж., 49, 833-836, 1972.

რ. ჭიღლაძე

იუპიტერის გალილეისეული თანამგზავრების ზედაპირებიდან არეკლილი სინათლის პოლარიზაციული თვისებები ოპოზიციის მახლობლობაში

რეზიუმე

განხილულია იუპიტერის გალილეისეული თანამგზავრების ზედაპირებიდან არეკლილი სინათლის პოლარიზაციული თვისებები ოპოზიციის მახლობლობაში.

ნაჩვენებია, რომ როცა ფაზის კუთხე $\alpha=0^{\circ}$-ს პოლარიზაციის ხარისხის სიდიდე $P\neq0$. ადრე თვლიდნენ, რომ როცა $\alpha=0^{\circ}$, $P=0$. ნაშრომში მოცემულია ამ ფაქტის ახსნის ერთი მისაღები ვერსია.

R. Chighladze

Polarized properties of th light reflected from the surfaces of Jupiter's Gallilean satellites in nearly opposition

Summary

The work discusses polarized properties of the light reflected from the surfaces of Jupiter's Gallilean satellites in nearly opposition (in less studying of time of scientist-researchers).

It is shown that when the phase angle $\alpha=0^{\circ}$ the size if polarization degree is $P\neq0$. Early, they supposed that when $\alpha=0^{\circ}$, $P=0$. The work gives one acceptable version to explain this fact.

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского государственного
университета им. Ив. Джавахишвили
Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University
354

УДК 523.4

ერთი ჰიპოთეზა იუპიტერის გალილეისეული თანამგზავრების შესახებ

რ. ჭიღლაძე

ორ ათეულ წელზე მეტია საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის აბასთუმნის ასტროფიზიკურ ობსერვატორიაში მიმდინარეობს იუპიტერის გალილეისეული თანამგზავრების სისტემატური ელექტროპოლარიმეტრიული და ელექტროფოტომეტრიული დამზერითი მასალის მოპოვება როგორც 40 სმ-იანი რეფრაქტორით, ისე 125 სთ-იანი რეფლექტორით, რომელთაც დაკვირვების პროცესში მიღგმული აქვთ პოლარიმეტრი АСЭП-78[1].

რადგან იუპიტერის გარშემო ფონის გავლენის გათვალისწინება გაძნელებულია, ამიტომ იუპიტერის ლიმბიდან პლანეტის სამი რადიუსით (მხედველობის სხივის გასწვრივ) დაკვირვება არ წარმოებდა. აქვე აღვნიშნავთ, რომ უშუქფილტრო დაკვირვებისას ერთი გაზომვის საშუალო კვადრატული ცთომილება არ აღემატება 0,05%-ს, დაკვირვების მეთოდიკა დაწვრილებითაა აღწერილი შრომაში [2].

ზოგად შემთხვევაში თანამგზავრის ზედაპირიდან არეკვლილი სინათლის პოლარიზაციის ხარისხის სიდიდე უნდა იცვლებოდეს α-ფაზის კუთხეზე, L – თანამგზავრის ორბიტულ გრძედზე, λ – ტალღის სიგრძეზე და t – დაკვირვების დროზე დამოკიდებულებით, ე.ი. $P=P(\alpha, L, \lambda, t)$.

წარმოდგენილ ნაშრომში შესწავლილია იუპიტერის გალილეისეული თანამგზავრების ზედაპირებიდან არეკვლილი სინათლის პოლარიზაციული თვისებები.

დამზერილი მასალის ანალიზის საფუძველზე ვასკვნით:

1. თანამგზავრ იოს წინა მხრიდან (დედამიწაზე მყოფი დამკვირვებლისაკენ მომავალი $L=90^0$) არეკვლილი სინათლის პოლარიზაციის ხარისხი სიდიდე 0.15–0.20%-ით ნაკლებია უკანა მხრიდან ($L=270^0$) არეკვლილი სინათლის პოლარიზაციის ხარისხის სიდიდეზე, როცა ფაზის კუთხე $\alpha=5^0$. თანამგზავრ იოს უკანა ნახევარსფეროდან არეკვლილი სინათლის პოლარიზაციის ხარისხის სიდიდე ტოლია $P(\alpha)=P(5^0)= -0.31\%$.

2. თანამგზავრ ევროპას წინა ნახევარსფეროდან არეკვლილი სინათლის პოლარიზაციის ხარისხის სიდიდე უშუქფილტრო დაკვირვებისას აბსოლუტური სიდიდით 0.08%-ით ნაკლებია უკანა მხრიდან

არეკვლილი სინათლის პოლარიზაციის ხარისხის სიდიდეზე, როცა ფაზის კუთხე $\alpha=3^0.5$-ია, ხოლო უკანა ნახევარსფეროდან არეკვლილი სინათლის პოლარიზაციის ხარისხის სიდიდე $P(\alpha)=P(3^0.5)= -0.25\%$.

3. თანამგზავრ განიმედის წინა მხრიდან არეკვლილი სინათლის პოლარიზაციის ხარისხის სიდიდე უფილტრო დაკვირვებისას აბსოლუტური სიდიდით 0,18%-ით ნაკლებია უკანა მხრიდან არეკვლილი სინათლის პოლარიზაციის ხარისხის სიდიდეზე, როცა ფაზის კუთხე $\alpha=4^0$-ია, ხოლო თანამგზავრ განიმედის უკანა ნახევარსფეროდან არეკვლილი სინათლის პოლარიზაციის ხარისხის სიდიდე შეადგენს $P(\alpha)=P(4^0)= -0.35\%$.

4. თანამგზავრ კალისტოს წინა ნახევარსფეროდან არეკვლილი სინათლის პოლარიზაციის ხარისხის სიდიდე უფილტრო დაკვირვებისას აბსოლუტური სიდიდით 0,40%-ით მეტია უკანა მხრიდან (ნახევარსფეროდან) არეკვლილი სინათლის პოლარიზაციის ხარისხის სიდიდეზე, რომელიც შეადგენს 0,70%-ს.

როგორც ირკვევა, პირველი სამი თანამგზავრისთვის (იო, ევროპა, განიმედი) წინა ნახევარსფეროდან არეკვლილი სინათლის პოლარიზაციის ხარისხის სიდიდე მცირეა უკანა ნახევარსფეროდან არეკვლილი სინათლის პოლარიზაციის ხარისხის სიდიდეზე, ხოლო თანამგზავრ კალისტოს შემთხვევაში პირიქითაა.

აღნიშნული მოვლენის ახსნის ერთ-ერთი შესაძლებელი ჰიპოთეზა შემდეგია: ცნობილია, რომ დიდი პლანეტების სიახლოვეს უამრავი მეტეორიტების ნაკადია, რომლებიც ზოგი წრიულ და ზოგიც ელიფსურ ორბიტებზე მოძრაობენ. ელიფსურ ორბიტებზე თანამგზავრების მოძრაობის თანხვდენილი მიმართულებით მოძრავი მეტეორული ნაკადები უნდა იყვნენ მიზეზი აღნიშნული შემჩნეული განსხვავებისა, რომლებიც ასიმეტრიულად ეცემიან სინქრონულად [3] მოძრავი თანამგზავრების წინა და უკანა ნახევარსფეროებს.

გამოთვლების გაიოლების მიზნით განვიხილოთ ის მეტეორული ნაკადები, რომლებსაც პერიცენტრი (უმცირესი მანძილი) აქვთ პლანეტასთან ახლო მყოფი თანამგზავრის (ამ შემთხვევაში იოს ორბიტის) ახლოს $\sim 6R$ (იუპიტერის ექვსი რადიუსის მანძილზე), ხოლო აპოცენტრი (უშორისი მანძილი) თანამგზავრ კალისტოს ორბიტის ახლო $\sim 26R$ (იუპიტერის ოცდაექვსი რადიოსის მანძილზე).

ცის მექანიკიდან კარგად ცნობილია, რომ სხეულის მოძრაობის სიჩქარე პერიცენტრსა და აპოცენტრში გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით: $V=\overline{V}\cdot\sqrt{\frac{1+\ell}{1-\ell}}$ (პერიცენტრში) და $V=\overline{V}\cdot\sqrt{\frac{1-\ell}{1+\ell}}$ (აპოცენტრში), სადაც $\overline{V}$ – არის მოძრავი სხეულის საშუალო სიჩქარე ორბიტაზე, ხოლო ℓ – ორბიტის ექსცენტრისიტეტი.

ერთი მხრით, აღნიშნული მონაცემების მქონე მეტეორული სხეულების სიჩქარე პერიცენტრში იქნება V = 22. 50 კმ/წმ, ხოლო აპოცენტრში V = 5. 04 კმ/წმ.

მეორე მხრით, წრიულ ორბიტაზე მოძრავი გალილეისეული თანამგზავრების ორბიტალური სიჩქარებია: იოსათვის – 16,94 კმ/წმ; ევროპისათვის – 13,43 კმ/წმ; განიმედისათვის – 10,63 კმ/წმ და კალისტოსათვის – 8, 01 კმ/წმ.

როგორც ჩანს, აღნიშნული მეტეორული სხეულები იოს, ევროპასა და განიმედს უკანა მხრიდან ეცემიან ($V_{\text{ნაკად.}} > V_{\text{თან.}}$), ხოლო კალისტოს შემთხვევაში ($V_{\text{კალ.}} > V_{\text{ნაკად}}$) პირიქით, კალისტო ეწევა და უსწრებს მეტეორულ ნაკადებს და ამიტომ მას წინა მხრიდან ეცემიან. რადგან მეტეორული სხეულების მეტი ნაწილი ბნელია (ნაკლები ალბედოსა და დიდი პოლარიზაციის მქონე), ამიტომ თანამგზავრების აღნიშნული მხრიდან არეკვლილ სინათლეს მეტი პოლარიზაციის ხარისხი შეესატყვისება, რადგან აღნიშნული ეფექტი მილიარდობით წლების განმავლობაში გრძელდება. ამიტომ თანამგზავრების წინა და უკანა მხარეები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

შემოსულია 15.09.2003
ასტრონომიის კათედრა

ლიტერატურა

1. რ. ჭიღლაძე, თსუ ახალციხის ფილიალის შრომების კრებული, 2, 2001, 170-172.
2. О.Р. Болквадзе, О.И. Кварацхелия, А. Н. Король, А.К. Майер, Л.А. Сигуа, Р.А. Чигладзе, Бюлл. Абаст. астроф. обс., 61, 1986, 269-287.
3. Дж. Веверка, в кн.: Фотометрия поверхности спутников. М., 1980, 203-243.

Р.А. Чигладзе

Одна гипотеза о галилеевых спутниках Юпитера

Резюме

На основе наблюдательного материала изучены свойства света, отраженного от поверхности галилеевых спутников Юпитера.

Высказана гипотеза, которая хорошо объясняет различие поверхностей галилеевых спутников Юпитера.

R.Chighladze

A hypothesis about Jupiter's Gallilean satellites

Summary

The polarization properties of the light reflected from different sides of Jupiter's Gallilean satellites are studied on the basis of observationel material.

Given hypothesis well explains different hemispheres of Jupiter's Gallilean satellites surfaces.

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского государственного
университета им. Ив. Джавахишвили
Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University

354

УДК 510

აკადემიკოსი ნიკო მუსხელიშვილი – თბილისის მათემატიკის ინსტიტუტის დამფუძნებელი

თ. ეფრემიძე

საკავშირო მ/ა ამიერკავკასიის ფილიალის პრეზიდიუმის წევრი, იმავე აკადემიის წევრ-კორესპონდენტი პროფ. ნ.ი. მუსხელიშვილი აქტიური მონაწილეა საქართველოს გეოფიზიკური ინსტიტუტის ორგანიზაციისა და მასში მათემატიკური გეოფიზიკის განყოფილების შექმნისა, რომელმაც 1940 წლამდე იარსება. იგი ამის შესახებ არაფერს ამბობს თავის „Curriculum Vitae“-ში (ავტობიოგრაფია), რომელიც შედგენილი უნდა იყოს არაუადრეს 1936 წლისა. იგი მასში წერს: „1933 წ. ჩემი ინიციატივით ორგანიზაცია გაუკეთდა მათემატიკის, მექანიკისა და ფიზიკის ინსტიტუტს თბილისის უნივერსიტეტთან, რომელიც ამჟამად გარდაიქმნა ფიზიკურ ინსტიტუტად იმის გამო, რომ ჩემივე ინიციატივით დაარსებული იქნა (1935 წ. 1 ნოემბრიდან) მათემატიკური ინსტიტუტი საკ. მ/ა საქართველოს ფილიალთან. მათემატიკის, მექანიკის და ფიზიკის ინსტიტუტის არსებობის მანძილზე ნ.ი. მუსხელიშვილი იყო მისი დირექტორი“...[1, გვ. 29]. ამასვე იმეორებს ის 1938 წ. 21 ივნისს დაწერილ ავტობიოგრაფიაში: „ჩემი ინიციატივით, ორგანიზაციული და ახლო მონაწილეობით დაარსებულ დაწესებულებათაგან აღვნიშნავ მათემატიკურ ინსტიტუტის – სსრკ მ/ა საქართველოს ფილიალთან და ფიზიკის ინსტიტუტის თბილისის უნივერსიტეტთან. ამას გარდა, მე ვღებულობდი საქმიან მონაწილეობას პოლიტექნიკური ინსტიტუტის ორგანიზაციაში, უნივერსიტეტის პოლიტექნიკურ ფაკულტეტთან მისი შერწყმის შემდეგ“ [2, ფ. 27].

აქ ჩვენ გვაინტერესებს, თბილისის მათემატიკური ინსტიტუტის შექმნისა და მისი განმტკიცებისათვის აკად. ნ. მუსხელიშვილის მიერ გაწეული მუშაობის ანალიზი 1935-1940 წლებში, რაც გარკვეულად, დამატებით შუქს მოჰფენს მისი მოღვაწეობის მასშტაბებს.

პირველი დოკუმენტი, რომლიდანაც ჩანს პროფ. ნ. მუსხელიშვილის (1891-1976) განზრახვა, თბილისში მათემატიკური ინსტიტუტის დაარსების შესახებ, არის მოსკოვიდან 1935 წ. 17 აპრილს თ. ნიკოლაძისადმი (1890-1939) მიწერილი წერილი, სადაც სხვათა შორის, იგი

წერს: ...ღამის 12 საათზე დარეკა ალექსადროვმა[1] ... მან თქვა, რომ მათ (მას და კოლმოგოროვს[2]) დაბეჯითებით სურთ ჩემთან მოლაპარაკება, რაც შეიძლება მალე. კუპრაძისა და ლავრენტიევის[3] აზრით, ისინი უნდა მივიწვიოთ თბილისში და რომ ისინი თბილისურ ვითარებაში არავის არ მიაყენებენ ვნებას[4] და ხელს არ შეუშლიან სხვათა მოწვევას. მათ იმსჯელეს აქ, ფილიალთან დიდი მათემატიკური ინსტიტუტის შექმნის ორგანიზაციის შესახებ, რომელშიც დათანხმდებიან სამუშაოდ გადმოვიდნენ ლავრენტიევი და ზოგიერთი სხვა. ყველაფერი ეს ჯერჯერობით საიდუმლოდ შეინახე" [1].

1935 წლისათვის საგრძნობლად გაიზარდა ახალგაზრდა ქართველ მათემატიკოსთა რიცხვი, რომლებიც პროფ. ა. მუსხელიშვილის წინასწარდასახული მიზნის მიხედვით, მათემატიკური ფიზიკის, თუ გამოყენებითი მათემატიკის სხვადასხვა სპეციალობას დაეუფლნენ რუსეთის სამეცნიერო-კვლევით ინსტიტუტებში და დაბრუნდნენ თბილისში. ისინი თავიდანვე თავს იყრიდნენ უნივერსიტეტის, ინდუსტრიული ინსტიტუტის და სხვა უმაღლესი სასწავლებლების კათედრებზე, აგრეთვე უნივერსიტეტთან არსებულ მათემატიკის, მექანიკის და ფიზიკის ინსტიტუტში (დაარსდა 1933 წ) და შემდეგ (1934 წლიდან) გეოფიზიკის ინსტიტუტის თეორიული გეოფიზიკის განყოფილებაში. გეოფიზიკის ინსტიტუტის თეორიული განყოფილების გამგე – პროფ. ნ. მუსხელიშვილი, 1935 წ. ოქტომბრის თვეში თბილისში გამართულ თათბირზე, განყოფილების თემატიკის შესახებ ამბობდა: „თბილისის მათემატიკური სკოლა სწავლობდა, ძირითადად მათემატიკის გამოყენებით საკითხებს, რომელთაც საქმე აქვს სეისმოლოგიასთან, დრეკადობის თეორიასთან, დიდ შენობათა საკითხებთან, ამა თუ იმ შენობის დედამიწის ზედაპირზე დაწოლასთან, მანქანებთან დაკავშირებით რთულ გაანგარიშებებთან. ეს საკითხები დაკავშირებულია დრეკადობისა და პლასტიკურობის თეორიასთან. ეს მეცნიერება ჯერ კიდევ ახალგაზრდაა, მაგრამ ჩვენს თემატიკაში ის შედის ..." [2, 19]. ცხადია, როცა დრეკადობის თეორიის, როგორც მეცნიერების დარგის ახალგაზრდულობის შესახებ ლაპარაკობდა, პროფ. ნ. მუსხელიშვილს მხედველობაში ჰქონდა ის მეთოდები, რომლებიც განვითარებული იყო მის მიერ. ამასთან მას, როგორც ქართული მათემატიკური სკოლის აღიარებულ ხელმძღვანელს, არ აკმაყოფილებდა მათემატიკის ცალმხრივი განვითარება საქართველოში და ფიქრო-

---

[1] პ.ს. ალექსანდროვი (1896-1982), ტოპოლოგიური სკოლის მამამთავარი რუსეთში, აკადემიკოსი.

[2] ა.ნ. კოლმოგოროვი (1903-1987), დიდი რუსი მათემატიკოსი, აკადემიკოსი.

[3] მ.კ. ლავრენტიევი (1900-1986), დიდი რუსი მათემატიკოსი და მექანიკოსი, აკადემიკოსი.

[4] მინიშნებაა იმაზე, რაც „ლუზინშჩინის" წინ, – 1933 წ. გადახდათ თავს კოლმოგოროვს და ალექსანდროვს, ნ.ნ. ლუზინის (1883-1950) წინააღმდეგ შეურაცხმყოფელი გამოსვლით.

ბდა დამოუკიდებელი მათემატიკის ცალმხრივი განვითარება საქართველოში და ფიქრობდა დამოუკიდებელი აკადემიური ინსტიტუტის შექმნას. ნ. მუსხელიშვილის ამ ოცნებას განხორციელება ეწერა იმით, რომ ახალგაზრდა რუსი მათემატიკოსები მ. ლავრენტიევი, ა. კოლმოგოროვი, პ. ალექსანდროვი, სურვილს გამოთქვამდნენ მ/ა ფილიალის სისტემაში მუშაობისას, თუ თბილისში დაარსებული იქნებოდა მათემატიკური ინსტიტუტი.

1935 წ. 26 აპრილს მოსკოვიდან თბილისში გამოგზავნილ წერილში ნ. მუსხელიშვილი თ. ნიკოლაძეს დაუფარავად სწერს:

„ ...აქ ჩვენ (მე და კუპრაძემ[5]) დავაპირეთ თბილისში მათემატიკური ინსტიტუტის გახსნა აკადემიის ფილიალთან. მე მგონია, რომ საქმე გატარდება. ეს მოგვცემს საშუალებას რამდენიმე გამოჩენილი მათემატიკოსი მოვიწვიოთ თბილისში და შევქმნათ მართლაც მნიშვნელოვანი მათემატიკური ცენტრი (ხარაძეს[6] ამის შესახებ დღეს მივწერე).

ალექსანდროვი და კოლმოგოროვი ძალიან დიდი ენერგიით მოისწრაფიან თბილისისაკენ და მე მგონია, რომ ეს ბოლოს და ბოლოს ძალიან კარგია ჩვენთვის.

სხვათა შორის აქ კოლმოგოროვი სულ სხვა შთაბეჭდილებას ახდენს“...[1]

კოლმოგოროვის შესახებ „შთაბეჭდილება“, აქ შემთხვევით არ არის ნახსენები და იგი პირად ურთიერთობათა საკითხებს განეკუთვნება. ამ პერიოდში ქართველი მათემატიკოსების ცხოვრებისეულ საკითხებზე ფიქრი და აზრთა გაზიარება ბატონ ნიკოსა და ქალბატონ თამარის მიმოწერის არცთუ იშვიათი თემა იყო. ასეთ წერილად მიგვაჩნია ჩვენ, იმავე ხანებში, — 1935 წ. 10 მაისს, მოსკოვიდან გამოგზავნილი წერილი (რუსულადაა დაწერილი).

„შენ მრავალ შემთხვევაში მართალი ხარ. ამის შესახებ გწერდი ერთ-ერთ წინა წერილში. ყველაფერი ეს საჭიროა მკვეთრად შეიცვალოს და მე მგონია, რომ ჩემთვის ძნელი არ უნდა იყოს გავლენა მოვახდინო ახალგაზრდობაზე, ვაჩვენო მაგალითი. მაგრამ, შეიძლება მე ვცდებოდე. რაც შეეხება, მე პირადად, ვფიქრობ, ძალიან გარკვეულად შევცვალო ზოგიერთი რამე, ჩემი ცხოვრების წესში. არ ვიცი, საკმარისი იქნება, თუ არა ეს სხვებზე გავლენის მოხდენის თვალსაზრისით...

მე ძალიან მძიმედ განვიცდი, როცა ვფიქრობ, რომ ხშირად მიზეზი ვარ იმისა, რაც ხდება თბილისში (ზოგიერთი ახალგაზრდა მათემატიკოსის ცხოვრების წესის თვალსაზრისით). მაგრამ ასეა განა? არ ვიცი, შეიძლება მე დიდ პასუხისმგებლობას მივიწერ“. ახალგაზრდა

[5] საქ. მ/ა აკადემიკოსი თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორი, თმიის პირველი (1935-1941) დირექტორი ვიქტორ დიმიტრის ძე კუპრაძე (1903-1985).

[6] ქართული მათემატიკური სკოლის ერთ-ერთი შემქმნელი, თსუ პროფესორი და მათემატიკური ანალიზის კათედრის გამგე არჩილ კირილეს ძე ხარაძე (1895-1976).

ქართველ მათემატიკოსთა ცხოვრების წესზე დაფიქრებული მასწავლებელი იწყებს პრაქტიკულად ახალი ინსტიტუტის შექმნას და ამ თვალსაზრისითაც „ზომავს“ მოსაწვევ კანდიდატებს. ამ საქმეში, მას უპირველეს დახმარებას უწევს ვ.დ. კუპრაძე (1903-1985), რომელიც 1935 წლის ზაფხულს თბილისში ატარებს. ვ. სტეკლოვის სახ. მოსკოვის მათემატიკურ ინსტიტუტში „ელექტრომაგნიტური ტალღების დიფრაქციის თეორიის სასაზღვრო ამოცანებზე“ – სადოქტორო დისერტაციის დაცვასთან დაკავშირებით, იგი ამავე წლის სექტემბრიდან მოსკოვში მიემგზავრება. ამ დროს, პროფ. ნ. მუსხელიშვილი რამდენიმე ხნით კისლოვოდსკში იმყოფება სამკურნალოდ. 1935 წ. 18 სექტემბერს თ. ნიკოლაძე მეუღლეს სწერს:

„გორგიძის[7] შესახებ უკვე მიიღეს აქ ზომები, მიუხედავად იმისა, რომ ცოტა ძნელი იყო ამჟამად ეს (შენ არა ხარ, კუპრაძე წავიდა, ვეკუა 1/X-ში „Один“ მიდის ქობულეთში ორი კვირით და ყველა ეს ლექცია გასანაწილებელია). მგონი უგზავნიან დეპეშას, რომ 20/X-მდე არის შესაძლებელი მათი იქ დარჩენა, მერე კი აუცილებლად უნდა დაბრუნდნენ.

კუპრაძე წავიდა 15-ში და თქვა, რომ ორ თვეზე მეტ ხანს არ მოუხდება იქ დარჩენა. დაიბარა, რომ მათემატიკის ინსტიტუტის ბინის საკითხი ჯერაც გამოურკვეველია და 3 „კანიდატურიდან“ სტოვებენ მხოლოდ ერთს, პუშკინის ბიბლიოთეკას. მას მოსწონს ეს ბინა, ოღონდ ძნელი იქნება ამის შესახებ ბრომ...ქალთან ბრძოლა., ბრომ... ხომ ამ ბიბლიოთეკის დირექტორია“ [1].

უნდა შევნიშნოთ რომ ნ. მუსხელიშვილისადმი კისლოვოდსკში გაგზავნილი ვ.დ. კუპრაძის წერილიც შემონახულია[8], რომელიც 1935 წ. 15 სექტემბრით თარიღდება. იგი ასეთი შინაარსისაა: „პრეზიდიუმის სხდომაზე გავიტანეთ მე და ილიამ ინსტიტუტის შტატი (პირები, თანამდებობანი, ხელფასები და სხვ). პირველი ოქტომბრიდან ხალხი უკვე ჯამაგირს მოსკოვში ვიშოვით. ინსტიტუტის ბინა ჯერ საბოლოოდ ამორჩეული არ არის, მაგრამ საკითხი მნიშვნელოვნად არის წინ წაწეული და თუ ძალიან არ ვცდები, ახლო მომავალში საბოლოოდ დადებითად გამოირკვევა. ჩვენ შევარჩიეთ სამი ბინა: 1) ЗКУ[9]-ს ყოფილი საერთო საცხოვრებელი, 2) ყოფილი მე-18 სკოლა წყნეთისა და ოლგას ქუჩების კუთხეში, 3) ყოფილი პუშკინის სახ. სამკითხველო ალექსანდროვის ბაღში. გაცნობის შემდეგ გამოირკვა, რომ ყველაზე უფრო შესაფერი, უკანასკნელია (მის ერთ სართულზეა

---

[7] როგორც ჩანს, საქმე ეხება იმჟამად უნივერსიტეტის მათემატიკის კათედრის წევრის ა. გორგიძის მივლინებას მოსკოვში, სამეცნიერო მიზნით.

[8] ნ. მუსხელიშვილის არქივიდან, წერილები მოგვაწოდა ქალბატონმა მარინე მუსხელიშვილმა, რისთვისაც დიდ მადლობას მოვახსენებთ.

[9] ЗКУ – Закавказский университет, 1917 წელს შექმნილი კერძო რუსული უნივერსიტეტი, რომელიც შეიქმნა ქალთა უმაღლესი კურსების (დაარსდა 1909 წ.) საფუძველზე და იარსება 1920 წლამდე.

ლაპარაკი 8-10 ოთახამდე) ...კ. გორდელაძე მეტად საქმიან და სასარგებლო დახმარებას გვიწევს [1].

1935 წ. 29 სექტემბრის №214 ბრძანება საკ. მ/ა საქართველოს ფილიალისადმი გვაუწყებს:

„საკ. მ/ა პრეზიდიუმის 1935 წ. 5/VII დადგენილების და საკ. მ/ა საქართველოს ფილიალის 1935 წ. 28/VIII გადაწყვეტილების საფუძველზე ა.წ. 1-ლი ოქტომბრიდან ორგანიზებულ იქნას საქართველოს ფილიალის სისტემაში მათემატიკური ინსტიტუტი შემდეგი სტრუქტურით: 1. დირექცია, 2. მათემატიკური ფიზიკის განყოფილება, 3. მექანიკის განყოფილება, 4. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის განყოფილება, 5. ალბათობათა თეორიის, მათემატიკური სტატისტიკისა და ფუნქციათა მიახლოების განყოფილება, 6. ალგებრისა და რიცხვითი თეორიის განყოფილება.

II დადგენილ იქნას ქვემომოყვანილი საშტატო განაწესი მათემატიკური ინსტიტუტისადმი ა.წ. 1 ოქტომბრიდან.

დირექცია

1. დირექტორი – პროფ. კუპრაძე ვ.დ.
2. სწავლული მდივანი – დოც. ვეკუა ი.ნ.
3. მდივანი – ხარაძე თ.კ.

მათემატიკური ფიზიკის განყოფილება

1. ხელმძღვანელი – პროფ. კუპრაძე ვ.დ.
2. მეცნიერ-სპეციალისტი – დოც. ვეკუა ი.ნ.
3. მეცნიერ-სპეციალისტი – მეცხვარიშვილი ი.გ.
4. მეცნიერ-სპეციალისტი – დოლიძე დ.ე.
5. მეცნიერ-მუშაკი I რანგისა – ართმელიძე ნ.კ.

მექანიკის განყოფილება

1. ხელმძღვანელი – საკ. მ/ა/ წევრ-კორესპ., პროფ. მუსხელიშვილი ნ.ი.
2. მეცნიერ-სპეციალისტი – დოც. რუხაძე ა.კ.
3. მეცნიერ-სპეციალისტი – გიორგაძე ა.ი.

კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის განყოფილება

1. ხელმძღვანელი – პროფ. ხარაძე ა.კ.
2. უფრ. მეცნ.-სპეციალისტი – პროფ. ლავრენტიევი მ.ა.
3. მეცნიერ-მუშაკი I რანგის – ჭელიძე ვ.გ.

. ალბათობის თეორიის განყოფილება

1. ხელმძღვანელი – აკად. ბერნშტეინი ს.ნ.
2. მეცნ.-სპეციალისტი – დოც. მიქელაძე შ.ე.

3. უფროსი მეცნ. სპეციალისტი – პროფ. გოკიელი ლ.პ.
4. მეცნ.-სპეციალისტი – დოც. სულაქველიძე კ.ა.

ალგებრის განყოფილება

1. ხელმძღვანელი – ვაკანტური
2. მეცნ.-სპეციალისტი – დოც. მარჯანიშვილი კ.კ

საქ. მ/ა საქართველოს ფილიალის თავმჯდომარის მოადგილე კ. გორდელაძე" [3. 4-5] ვიცე-პრეზიდენტის აკად. ა. კომაროვის მონაწილეობით, სადაც მათემატიკის ინსტიტუტის დირექტორი პროფ. ვ.დ. კუპრაძე, ინსტიტუტის თემატიკის შესახებ ამბობდა: „ყოველგვარი გადაჭარბების გარეშე შეიძლება ითქვას, რომ საქართველოში მათემატიკის ზოგიერთი მიმართულება წარმოდგენილია საკმარისად ნათლად და ძლიერად. ძირითად მიმართულებად ითვლება გამოყენებითი მათემატიკა, რომელიც განსაკუთრებით ძლიერადაა განვითარებული საქართველოში. ეს შემთხვევითი მოვლენა არაა იმიტომ, რომ ქართული მათემატიკური სკოლის მთავარი ნაწილი თავიდანვე ატარებს იდეური მიდრეკილების, სამეცნიერო ინტერესებისა და გემოვნების ანაბეჭდს, ამ სკოლის ერთ-ერთი შემქმნელის – პროფესორ მუსხელიშვილისა, რომელიც არის ჩვენი ახალი ინსტიტუტის ერთ-ერთი ძირითადი მშენებელთაგანი..." [2, ფ. 24]. ახასიათებს რა ინსტიტუტის განყოფილებებს, იგი ჩამოთვლის ყველას, „მათემატიკური ლოგიკის" დამატებით:

„...დრეკადობის მათემატიკურ თეორიას, გარდა საკუთრივ მეცნიერული მნიშვნელობისა, აქვს აგრეთვე დიდი გამოყენება მანქანათმშენებლობისა და ტექნიკის სხვადასხვა დარგებისათვის. ამ მეცნიერების დიდ განყოფილებად წარმოგვიდგება დრეკადობის თეორიის ბრტყელი ამოცანები. პროფ. მუსხელიშვილის მიერ ლოგიკური თანმიმდევრობითაა ამ დარგში განვითარებული სხვადასხვა მეთოდები. თავდაპირველად ეს შრომები, ცხადია, ძალზე ეფექტური, – წამოყენებული იყო, როგორც კერძო მეთოდი. შემდეგში, პროფ. ნ. მუსხელიშვილმა დაამუშავა ზოგადი მეთოდი, გამოიყენა რა ამისათვის ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდი, რომელიც გვაძლევს ამ ამოცანების საბოლოო თეორიული ამოხსნის საშუალებას. თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ ინტეგრალური განტოლებანი წარმოადგენს სრულიად დამთავრებულ, გამოკვეთილ, გამოთვლით აპარატს, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ჩვენ აქ გვაქვს ამოცანების სრული ამოხსნის შემთხვევა. მაგრამ, არ კმაყოფილდება რა ამით, პროფესორმა მუსხელიშვილმა, ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ამოცანის ამოხსნის მიზნით წამოაყენა ინტეგრალური განტოლების ეფექტური, შედარებით მისაწვდომი გაანგარიშების საშუალება ცალკეული ამოცანების შემთხვევაში..." [4, ფ. 26].

პროფ. ვ.დ. კუპრაძის ვრცელი სიტყვიდან აქ მოვიტანეთ ის ნაწყვეტი მათემატიკის ინსტიტუტის საერთო თემატიკის დახასიათებიდან,

რომელიც საკუთრივ პროფ. ნ. მუსხელიშვილის განყოფილებას შეეხება. ცხადია, მათემატიკის ინსტიტუტის მესვეურთა თავდაპირველი ჩანაფიქრი 8-10 ოთახიან ბინაში შესახლებულიყვნენ, ოცნებად დარჩა. ამის შესახებ პროფ. ვ. კუპრაძე ამბობდა: „...სამუშაო პირობები ჩვენთან აუტანელია. ის მოგვაგონებს იმ პირობებს, რომელშიც საწარმოო ძალთა სექციაა ჩაყენებული. ჩვენც, ასევე ერთი ოთახი გვაქვს, ამასთან გეოფიზიკის ინსტიტუტის მეზობლად. ასეთი პირობები გვაიძულებს უარი ვთქვათ იმ პროგრამის განხორციელებაზე, რომელიც გვინდოდა დაგვესახა. ჩვენ გვინდოდა მოგვეწვია რამდენიმე უცხოელი მეცნიერი, რომლებსაც უნდოდათ გამოქცევა ფაშისტურ ქვეყნებიდან...“ [4, ფ. 28].

მიუხედავად ამისა, მაინც იქნა მოწვეული უცხოეთიდან პროფესორები ა.ზ. ვალფიში და ს.ა. ბერგმანი, რომლებიც აქტიურად ჩაებნენ მათემატიკური ინსტიტუტის საქმიანობაში; კერძოდ, ა. ვალფიში სათავეში ჩაუდგა რიცხვთა თეორიის განყოფილებას, ხოლო ს. ბერგმანი – ფუნქციათა თეორიისას. ფუნქციათა თეორიის განყოფილების გამგე პროფ. ა. ხარაძე 1937 წლიდან ხელმძღვანელობდა ალგებრის განყოფილებას.

1937 წ. 1 იანვრისათვის მათემატიკურ ინსტიტუტში 28 თანამშრომელია, მაშინ როცა თავიდან იქ 15 მეცნიერ-მუშაკი ითვლებოდა. მალე, ს. ბერგმანის უცხოეთში წასვლით და მოწვეული პროფესორის მ. ლავრენტიევის სურვილით, ფუნქციათა თეორიის განყოფილება უქმდება, პროფ. ა. ვალფიშისათვის კი შესაძლებელი შეიქმნა მინიმალური სამუშაო და საცხოვრებელი პირობების დაკმაყოფილება. მოწვეულ რუს მეცნიერთაგან, მხოლოდ პროფ. მ.ა. ლავრენტიევმა შეძლო მათემატიკური ინსტიტუტის და საქართველოში მათემატიკის მეცნიერების განვითარების საქმეში მნიშვნელოვანი წვლილის შეტანა. შედარებით მკრთალი კვალი დასტოვა აკად. ს. ბერნშტეინის (1880-1968) ინსტიტუტის შტატის თანამშრომლობამ და სამეცნიერო საბჭოს წევრობამ.

მათემატიკის ინსტიტუტის შექმნისთანავე, პირველ ყოვლისა, დაისვა საკითხი მისი საგამომცემლო საქმიანობის შესახებ. აკადემიის ფილიალის მხრივ, ამ საქმიანობას სათავეში ჩაუდგა ფილიალის სამეურნეო ნაწილის გამგედ ახლად დანიშნული კ. სულაქველიძე, ხოლო ინსტიტუტის მხრიდან პროფ. ვ. კუპრაძე. 1935 წლიდანვე დაიწყო ინსტიტუტის „შრომათა“ კრებულისათვის მასალების შეგროვება. ამასთან, „შრომებში“ ფორმატა გარკვეული წილი უცხოელ და საბჭოთა მათემატიკოსებს გამოეყოთ – გამოცემის პრესტიჟის ამაღლების თვალსაზრისით. „შრომებში“ თავდაპირველად ნაშრომები იბეჭდებოდა ქართულ, რუსულ, გერმანულ, ფრანგულ და ინგლისურ ენებზე, მაგრამ ლუზინშჩინის უარყოფითი შედეგების გავლენით, 1938 წლიდან ამ კარგ ტრადიციას გასაქანი არ მიეცა. 1937-1941 წლებში მათემატიკის ინსტიტუტმა გამოსცა „შრომათა“ 10 კრებული, რომლის

მთავარი რედაქტორი პროფ. ვ. კუპრაძე იყო, ხოლო აკად. ნ. მუსხელიშვილი – სარედაქციო კოლეგიის წევრი.

მათემატიკის ინსტიტუტის შრომების და საერთოდ, ფილიალის საერთო ჟურნალის – „სსრკ მ/ა საქართველოს ფილიალის მოამბის" გამოცემას ნ. მუსხელიშვილმა დიდი ამაგი დასდო. ჯერ იყო და „მეცნიერების მოამბის" პირველი ნომრის გამოცემა 1936 წელს, ცხარე აზრთა გაცვლისა და უთანხმოების საგანი შეიქმნა პრეზიდიუმში. ჟურნალს აშკარად სამეცნიერო-პოპულარულ-საცნობარო გამოცემის ხასიათი ჰქონდა. იგი გამოდიოდა ქართულ ენაზე და ასეთი გამოცემისათვის სრულიად ნორმალურ ჟურნალად უნდა ჩაითვალოს. უთანხმოების საგანს, პროფ. ნ. მუსხელიშვილსა და პროფ. კ. გორდელაძეს შორის წარმოადგენდა ის, რომ უნდა ჰქონოდა თუ არა მ/ა ფილიალს ისეთი სახის ჟურნალი, როგორიც იყო ფრანგების „Comptes Rendus", ან რუსების „Докл. АН СССР" (გამოცემა დაიწყო, 1934 წ.), რომელშიც თავს მოიყრიდა საბუნებისმეტყველო-მათემატიკურ-ტექნიკურ მეცნიერებათაგან საუკეთესო სამეცნიერო პროდუქცია, რომლის გატანა შესაძლებელი იქნებოდა მსოფლიო არენაზე. ამასთან, სამეცნიერო ენა, პროფ. ნ. მუსხელიშვილის აზრით, უნდა ყოფილიყო უპირატესად ევროპული (მათ შორის რუსული) ენები. ცხადია, მაშინ და განსაკუთრებით დღეს, პროფ. ნ. მუსხელიშვილის ეს პოზიცია ერთგვარად „არაქართულად" ფასდებოდა, მაგრამ მის პოზიციას, საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით ედო საფუძვლად და არა ის, რომ ქართულ ენაზე შრომათა გამოქვეყნებას თაკილობდა.

საინტერესოა „მეცნიერების მოამბის" პირველ და უკანასკნელ ნომერში მოთავსებული ინფორმაცია 1935 წ. 11 ოქტომბერს ფილიალის მათემატიკური ინსტიტუტის ანგარიშის სახით პროფ. ნ. მუსხელიშვილის გამოსვლის ნაწყვეტი, რომელშიც იგი ამბობს: „ინსტიტუტი უზრუნველყოფილია ახალგაზრდა ნიჭიერ მათემატიკოსთა კადრებით. მასში იმუშავებენ საკავშირო ცენტრებისა და საზღვარგარეთის მეცნიერები. ბევრმა ცნობილმა უცხოელმა და საბჭოთა მათემატიკოსმა განაცხადა თანხმობა ჩვენი ინსტიტუტის კონსულტანტობაზე. ჩვენ ვაპირებთ მოვიწვიოთ საზღვარგარეთიდან ცნობილი გერმანელი მათემატიკოსი ვალფიში, რომელმაც წინადადება შემოიტანა გამოვცეთ ტფილისში ისეთივე საერთაშორისო მათემატიკური ჟურნალი, როგორც ამჟამად პოლონეთში გამოდის.

კადრებითა და თემატიკის მხრივ, ინსტიტუტმა მჭიდრო კავშირი გააბა სათანადო დაწესებულებებთან. მისი განვითარება ყოველმხრივ უზრუნველყოფილია, მხოლოდ დაბრკოლებებს შეადგენს შესაფერისი ბინის უქონლობა, მათემატიკური ბიბლიოთეკის სიღარიბე და უცხოეთის მათემატიკური ლიტერატურის სიმცირე..." [5, 85].

ეს საერთაშორისო ჟურნალი, რომლის გამოცემაზეც აქ პირველად ჩამოვარდა საუბარი, იწოდებოდა „Acta Arithmetica", რომლის

მთავარი რედაქტორი იყო იმჟამად პოლონეთში მცხოვრები გერმანელი პროფ. ა. ვალფიში (1892-1962). 1936 წ. დეკემბერში ეს საკითხი ნ. მუსხელიშვილის ინიციატივით დასმული იყო საქფილიალის პრეზიდიუმზე. ჩვენ აქ მოგვყავს პრეზიდიუმის შესაბამისი ოქმის ქართულ თარგმანს ზოგიერთი შემოკლებით: „11/XII – 1936 წ. სხდომის ოქმი. ესწრებოდნენ ამხ. თათარაშვილი, მუსხელიშვილი, შაკაროვი, კუპრაძე, ჯანაშია, კანდელაკი, სოსნოვსკი, ზაიცევი, ჯანელიძე, ნოდია, ხარაძე, ვეკუა, სულაქველიძე, აბულაძე, ცხაკაია.

დღის წესრიგი: ... 5. საერთაშორისო მათემატიკური ჟურნალის „Acta Arithmetica"-ს გამოცემის შესახებ (მომხ. ამხ. კუპრაძე).

დაადგინეს: 1. თანხმობა გამოეცხადოს მათემატიკის ინსტიტუტს, რიცხვთა თეორიაში საერთაშორისო მათემატიკური ჟურნალის „Acta Arithmetica"-ს გამოცემის თბილისში გადმოტანის შესახებ, იმის გამო, რომ ამ ჟურნალის მთავარი ხელმძღვანელი – პროფ. ვალფიში გადმოეიდა თბილისში.

2. ჟურნალის რიგითი ტომის პირველი გამოშვება მოეწყოს 1937 წ. მარტში, დაიწყოს რა საორგანიზაციო სამუშაო დაუყოვნებლივ, ამ დადგენილების მიღებისთანავე.

3. ინარჩუნებს რა თავის პირველსახეს, ჟურნალი რჩება რიცხვთა თეორიის პრობლემებისადმი მიძღვნილ სპეციალურ ორგანოდ, მაგრამ იგი დაბეჭდავს გამოკვლევებს გეომეტრიიდან, ალგებრიდან, ფუნქციათა თეორიიდან და მათემატიკის სხვა ნაწილებიდან (ხაზგასმა ჩვენია, თ.ე.), რომლებშიც კვლევის არსებითი მეთოდი არითმეტიკულია ან ეხება თეორიულ-რიცხვით პრობლემებთან დაკავშირებულ საკითხებს (მაგალითად, „ზეტა", „ელ" და სხვა ფუნქციები).

4. დამტკიცებულ იქნეს ჟურნალის გამოცემა წლიურად ერთი ტომის (ორი გამოშვების) სახით, 20-25 ნაბეჭდი თაბახის სრული მოცულობით.

5. ეთხოვოს აკადემიკოს ვინოგრადოვს და მ/ა წევრ-კორესპონდენტს შნირელმანს შევიდნენ ჟურნალის რედაქციის შემადგენლობაში.

6.დასმულ იქნეს საკ. მ/ა პრეზიდიუმისა და მ/ა მათემატიკური ჯგუფის წინაშე საკითხი, რათა ჟურნალი გამოიცეს, როგორც მ/ა მათემატიკური ჯგუფის და მ/ა საქ.ფილიალის მათემატიკური ინსტიტუტის ორგანო.

7. ჟურნალში სტატიები დაიბეჭდოს ერთ-ერთ შემდეგ ენებზე: რუსული, ფრანგული, ინგლისური, გერმანული, ავტორთა სურვილის შესაბამისად.

8. დასმულ იქნეს მათემატიკური ინსტიტუტის და ფილიალის გამომცემლობის წინაშე, როგორც კატეგორიული ამოცანა, შესრულდეს ყველა პირობა, რათა 1937 წ. მარტში გამოცემულ იქნეს რიგითი ტომის პირველი გამოშვება და გაგრძელდეს ის მომავალში იმ სახით მაინც.

9. ამ მიზნით:

ა) დამტკიცებულ იქნეს აქვე წარმოდგენილი ჩამონათვალი და დახასიათება შრიფტებისა და ნიშნებისა, რომლითაც უნდა იქნეს აკრებილი ჟურნალი.

ბ) ამ გადაწყვეტილების მიღებისთანავე, დაწყებულ იქნეს ჩამოსხმა და შეძენა შრიფტებისა, ნიშნებისა, მათემატიკური სიმბოლოებისა და უკიდურეს შემთხვევაში 10 ნაბეჭდი ფორმის მოცულობით 40000 მანეთი საერთო ღირებულების საზღვრებში, რომელიც გამოყოფილ იქნეს ფილიალის ტიპოგრაფიის ორგანიზაციის სახსრებიდან „Acta Arithmetica "-ს საჭიროებისათვის.

გ) გაგრძელებულ იქნეს 1937 წ. განმავლობაში ტიპოგრაფიის შევსება შრიფტებითა და ნიშნებით იმ ანგარიშით, რომ წლის ბოლოს მათემატიკური ინსტიტუტის ორივე ჟურნალი „Acta Arithmetica" და „შრომები" უზრუნველყოფილ იქნეს აუცილებელი ტიპოგრაფიული ნიშნების სრული ანაწყობით, რისთვისაც 37 წლისათვის ტიპოგრაფიის აღჭურვისათვის გამოიყოს 50000 მანეთი, თანახმად თანდართული სმეტისა.

დ) გამოყოფილ იქნეს ფილიალის ტიპოგრაფიაში 3 ასოთამწყობისაგან შედგენილი ჯგუფი „Acta Arithmetica"-ზე მუდმივი მუშაობისათვის, ამასთან მათემატიკური ინსტიტუტის სხვა გამოცემის მომსახურებისთვისაც (ინსტიტუტის „შრომები", მონოგრაფიები და სხვ.).

ე) დიდ მნიშვნელობას ვაძლევთ რა ჟურნალის ტექნიკურ გაფორმებას (ქაღალდის ხარისხი, ნახაზები, გაფორმების ტექნიკა, სააეტორო ამონაბეჭდების შესრულების ხარისხი), წინადადება მიეცეს ფილიალის გამომცემლობას, გამოჰყოს თავისი ფონდიდან საუკეთესო ხარისხის აუცილებელი რაოდენობის ქაღალდი ჟურნალის პირველი გამოშვებისათვის და გაითვალისწინოს მომავალში ქაღალდზე მოთხოვნილება, რათა ჟურნალის მუშაობაში ამ მხრივ არ იყოს დაბრკოლება.

10. პირადი პასუხისმგებლობა ამ გადაწყვეტილების შესაბამის დროში შესრულებაზე დაევალოს მათემატიკის ინსტიტუტის დირექტორს ამხ. კუპრაძეს, ფილიალის ადმინისტრაციული ნაწილის უფროსს ამხ. სულაქველიძეს და ფილიალის გამომცემლობის გამგეს ამხ. შაკიროვს.

11. პრეზიდიუმის ეს დადგენილება განიხილება განხილვისა და დამტკიცებისათვის შეტანილ იქნეს საქ. კპ ცკ-ის მეცნიერების განყოფილებაში [7, ფ. 44-46].

საქართველოში მათემატიკის განვითარების ამ დიდმნიშვნელოვან პროექტს ხელს აწერს მ/ა ფილიალის პირველი მოადგილე თათარაშვილი (1900-1937), მაგრამ პროექტის სულისჩამდგმელი მ. ვალფიშთან და ვ. კუპრაძესთან ერთად არის პროფ. ნ. მუსხელიშვილი, — იმჟამად ფილიალის ფაქტობრივი გამგებელი და თავმჯდომარის მოადგილე. ცხადია, დაკვირვებული თვალი მიხვდება, რომ ასეთ ღირებულ დადგენილებაზე ხელი უნდა მოეწერა ფილიალის ხელმძღვანელთაგან ნეიტრალურ კაცს. ამასთან, ისიც ჩანს, თუ ამ ჟურნალის

და საერთოდ საქართველოში მათემატიკის ყველა დარგის (მათ შორის რიცხვთა თეორიის, გეომეტრიის, ალგებრის, ფუნქციათა თეორიის და სხვა) განვითარებას, მიუხედავად იმის, რომ ყველაზე თვალსაჩინოდ ეს განვითარება, გამოყენებითი მათემატიკის ხაზით იჩენდა თავს.

სამწუხაროდ „Acta Arithmetica"-ს გამოცემა თბილისში ვერ განხორციელდა 30-იანი წლების ბოლოს რთული პოლიტიკური და ეკონომიკური ვითარების გამო. უფრო, მეტი საგრძნობი სიძნელეები შეექმნა ფილიალის სისტემაში და მათ შორის მათემატიკურ ინსტიტუტში კონსულტანტების მოწვევის საქმეს, რადგანაც შეთავსებათა წინათ არსებული სისტემა, მუშაობის მანკიერ სტილად ჩაითვალა.

ამ მხრივ, საინტერესოა ნ. მუსხელიშვილსა და საკ. მ/ა პრეზიდიუმის წევრებს შორის მიმოწერა, რომელიც დაკავშირებულია აკადემიკოსების ა. კოლმოგოროვის, პ. ალექსანდროვის, ს. სობოლევის და სხვათა მოწვევასთან მათემატიკის ინსტიტუტში, კონსულტანტის შეთავსებით თანამშრომლობის, თუ დისერტაციის ოპონენტობასთან დაკავშირებით. აქ ჩვენ მოვიტანთ, მხოლოდ აკად. პ. ალექსანდროვის მოწვევასთან დაკავშირებით არსებულ ზოგიერთ დოკუმენტს.

1940 წ. 11 თებერვალს მათემატიკის ინსტიტუტის დირექციამ საკ. მ/ა საქ.ფილიალის პრეზიდიუმს მიმართა:

„ამ წლიდან საკ. მ/ა საქართველოს ფილიალის მათემატიკურ ინსტიტუტში დაიწყო კვლევითი მუშაობა მათემატიკის ახალ, მნიშვნელოვან დარგში, – ტოპოლოგიაში.

განზრახულია დაწყებულ იქნეს კვლევითი მუშაობა როგორც თვით ტოპოლოგიის დარგით (ტოპოლოგიური სივრცეების ჰომოლოგიის თეორია), ასევე ტოპოლოგიის გამოყენებაშიც (დიფერენციალურ გეომეტრიასა და ვარიაციულ აღრიცხვაში). დასახულია, დამუშავდეს ისეთი სერიოზული საკითხები, როგორიცაა ჰომოლოგიის თეორია: უსასრულო კომპლექსი, სპექტრი ასეთი კომპლექსებისაგან, სივრცეები, რომლებიც აპროქსიმირდებიან ასეთი სპექტრებით.

გეგმის სირთულისა და განშტოებადობის გამო და იმის გამო, რომ ამ პრობლემებზე ჯერ-ჯერობით მუშაობს ინსტიტუტიტის ერთადერთი თანამშრომელი[10], ამ თემის დამუშავებაში საჭირო გამოცდილების გარეშე, საჭიროდ ვთვლით ინსტიტუტს ყავდეს კონსულტანტი ამ საკითხებში. ვთვლით რა, რომ მ/ა წევრ-კორესპონდენტი პ.ს. ალექსანდროვი არა საუკეთესო კანდიდატი ამისათვის, მათემატიკური ინსტიტუტი შუამდგომლობს თქვენს წინაშე, ინსტიტუტის მუდმივ კონ-

---

[10] ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, მათემატიკური ინსტიტუტის უფროსი მეცნიერი თანამშრომელი, აკად. პ.ს. ალექსანდროვის ერთ-ერთი თვალსაჩინო მოწაფე გ.ს. ჭოღოშვილი (1914-1991 წ.), შემდეგ საქ. სსრ მ/ა აკადემიკოსი, რომლის სახელთან დაკავშირებულია საქართველოში ტიპოლოგიის განვითარების საყოველთაოდ ცნობილი ეტაპი.

სულტანტად მისი მოწვევის შესახებ თბილისში, წელიწადში არანაკლებ 2 თვის ყოფნის პირობით.

ამას გარდა, პ.ს. ალექსანდროვის კავშირი ჩვენს ინსტიტუტთან, სამსახურს გაუწევს ინსტიტუტის მთელი თეორიული განყოფილების გაძლიერებას, კერძოდ, ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიისა და მათემატიკის ფილოსოფიის ხაზით.

ინსტიტუტის დირექტორი პროფ. ვ. კუპრაძე

სწავლული მდივანი ა. გორგიძე" [4, 56].

საკ. მეცნ. აკად. საქ.ფილიალის პრეზიდიუმმა თავის 16/11-1040 წ. სხდომაზე, აკად. ნ. მუსხელიშვილის თავმჯდომარეობით, მიმდინარე საკითხებში განიხილა აღნიშნული მიმართვა და მიიღო შემდეგი რეზოლუცია:

„ეთხოვოს სსრკ მ/ა პრეზიდიუმს დანიშნოს საკ. მ/ა წევრ-კორესპონდენტი პ.ს. ალექსანდროვი საქართველოს მათემატიკური ინსტიტუტის მუდმივ კონსულტანტად ტოპოლოგიის დარგში" [6,50]. იმავე წლის 22 თებერვალს საკ. მ/ა საქ.ფილიალის პრეზიდიუმიდან ასეთი შინაარსის მიმართვა გაიგზავნა მოსკოვში:

„სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის პრეზიდიუმს!

ასლი: სსრკ მ/ა ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა განყოფილების აკადემიკოს-მდივანს აკადემიკოსს ა. კოლმოგოროვს"

სსრკ მ/ა საქართველოს ფილიალის პრეზიდიუმის ა/ქ 16-11-1040 წ. №05 წერილის ასლის თანდართვით, გთხოვთ დანიშნოთ სსრკ მ/ა წევრ-კორესპონდენტი პ.ს. ალექსანდროვი სსრკ მ/ა საქართველოს ფილიალის მათემატიკური ინსტიტუტის მუდმივ კონსულტანტად ტოპოლოგიაში.

სსრკ მ/ა საქართველოს ფილიალის თავ-რე აკადემიკოსი ნ. მუსხელიშვილი" [6, 52].

ახლოვდება პ.ს. ალექსანდროვის თბილისში დაგეგმილი მივლინების ვადები და აკადემიიდან პასუხი არ ისმის. აკად. ნ. მუსხელიშვილი არაოფიციალურად გებულობს, რომ საკითხი ჯერ კიდევ განხილული არ არის და თვით პ.ს. ალექსანდროვს მიმართავს 1940 წ. 23 აპრილის წერილით შემდეგს:

„ძვირფასო პაველ სერგის ძევ!

ახლახან, მე მივიღე ცნობა ანდრეი ნიკოლოზის ძის ახალი ავადმყოფობის შესახებ. ამიტომ მე ვშიშობ, რომ საკითხის განხილვა თქვენი თბილისში მუშაობის შესახებ, რომელიც ჩვენ მივწერეთ სსრკ მ/ა პრეზიდიუმს და ანდრეი ნიკოლოზის ძეს, შეიძლება დაყოვნდეს.

ამიტომ ძალიან გთხოვთ, თავად იზრუნოთ საკითხის წაწევისათვის.

გიგზავნით პრეზიდიუმში და ანდრეი ნიკოლოზის ძისადმი გაგზავნილი ქაღალდების ასლებს.

ნ. მუსხელიშვილი" [5, ფ. 19].

13 მაისს აკად. ნ. მუსხელიშვილი ღებულობს შემდეგი შინაარსის ფოტოტელეგრამას მოსკოვიდან (№2412).

„ძვირფასო ნიკოლოზ ივანეს - ძევ!

ვფიქრობ, რომ თქვენი პირადი ტელეგრამა სობოლევისადმი არსებითად დააჩქარებდა საქმეს. კუპრაძის წერილი სობოლევს არ მიუღია.

ვიმეორებ, თხოვნას შუამდგომლობაზე მოსკოვის უნივერსიტეტის რექტორისა და მ/ა პრეზიდიუმის წინაშე, – თბილისში 20 მაისიდან 20 ივნისამდე მივლინების შესახებ.

გულწრფელად თქვენი პ. ალექსანდროვი" [8, ფ.22]

იმავე დღეს მოსკოვში იგზავნება შემდეგი შინაარსის ტელეგრამა: „მოსკოვი, მ/ა აკადემიკოს სობოლევს.

„გთხოვთ დახმარება გაუწიოთ ალექსანდროვის თბილისში ჩამოსვლის საკითხს, ოცი მაისიდან – ათ ივნისამდე: აკადემიკოსი მუსხელიშვილი 13-მაისი-40" [იქვე, ფ. 23].

როგორც ჩანს, პ.ს. ალქსანდროვი აღნიშნული მივლინებით 1940 წლის მაის-ივნისში იმყოფებოდა თბილისში, მაგრამ მოსაგვარებელი რჩებოდა საკითხი მისი დანიშვნის შესახებ მათემატიკის ინსტიტუტის კონსულტანტად.

1940 წ. ივლისის თვეში ნ. მუსხელიშვილი ღებულობს აკად. ა. კოლმოგოროვის შემდეგი შინაარსის პირად ბარათს ამ თემაზე:

„მოსკოვი 6, სტაროპიმენსკაიას შესახვევი, სახ. 8, ბინა 5.

ღრმად პატივცემულო ნიკოლოზ ივანეს ძევ!

საკითხი, პავლე სერგის ძე ალექსანდროვის დანიშვნის შესახებ საკ. მ/ა საქ.ფილიალის მათემატიკური ინსტიტუტის კონსულტანტად ოფიციალურ ინსტანციებში უკვე განიხილეს, ჩემი აქ ყოფნის დროს. პრინციპულად ყველა თანახმაა და მიესალმებიან ამ წამოწყებას. მაგრამ, ჯერ კიდევ არაა მოწესრიგებული საკითხი, პავლე სერგის ძის ამ მოღვაწეობის ანაზღაურების შესახებ. ჯერ კიდევ შემოდგომაზე[11], ჩემი პროექტი ამ საკითხზე იმაში მდგომარეობდა, რომ მ/ა პრეზიდიუმზე გატარებულიყო გადაწყვეტილება პ.ს.-სთვის ერთობლივი ხელფასის დანიშვნის შესახებ, – მოსკოვში მათემატიკურ ინსტიტუტში (სადაც იგი ღებულობს 750 მანეთს) და თქვენთან, – მთლიანად 1500 მანეთის ოდენობით. ჩვეულებრივ, ასეთ შემთხვევაში დანიშნული გაერთიანებული ხელფასი ერთობლივი სამუშაოსათვის, უნდა ანაზღაურდეს მ/ა-ის დაინტერესებული დაწესებულებების ასიგნებათა ბიუჯეტიდან. ცალკეულ შემთხვევაში თხოულობენ, აგრეთვე დამატებით ასიგნებებს მ/ა პრეზიდიუმის სახსრებიდან. თუ 750 მანეთი იქნება გამოყოფილი საკ. მ/ა საქართველოს ფილიალის ბიუჯეტის სახსრებიდან (ხელფასის სახით), მაშინ არავითარი დაბრკოლება პრეზიდიუმიდან არ იქნება. თუ არა და, ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა განყოფილება მხარს დაუჭერს შუამდგომლობას ახალი სახსრების მიღების შესახებ. თუ საკ. მ/ა საქ.ფილიალის საბიუჯეტო სახსრები შეიძლება განსაზღვრულ იქნეს, მხოლოდ 1941 წელს, მაშინ განყო-

[11] უნდა ვიგულისხმოთ 1939 წ. შემოდგომა, როცა ეს საკითხი შეთანხმებული იყო ნ. მუსხელიშვილთან (თ.ე.)

ფილებას შეუძლია აანაზღაუროს პაველ სერგის ძის საშემოდგომო მივლინება თავისი სახსრებიდან. მაგრამ, ასეთ გადაწყვეტილებას ექნებოდა, არსებითად ერთჯერადი ხასიათი და არ იქნებოდა შესაბამისობაში თავდაპირველ ჩანაფიქრთან.

2 აგვისტომდე მე ვიქნები მოსკოვში და შემიძლია ამ საქმის პრეზიდიუმზე გატანა, თქვენთვის სასურველი ვარიანტის არჩევის და საკ. მ/ა საქ.ფილიალისაგან შესაბამისი მომართვის მიღების შემდეგ.

საუკეთესო სურვილებით

თქვენი ღრმად პატივისმცემელი ა. კოლმოგოროვი.

P.S. ანალოგიურ წერილს მე ვუგზავნი ვ.დ. კუპრაძესაც“ [6, 30].

ოფიციალურად, უცნობია ა. კოლმოგოროვის წერილის შინაარსი პროფ. ვ. კუპრაძისადმი, მაგრამ აკად. ნ. მუსხელიშვილისადმი მისი წერილის საფუძველზე, საქართველოს ფილიალის პრეზიდიუმმა აცნობა მათემატიკურ ინსტიტუტს საქმის ვითარება, რომელსაც მოჰყვა ა. კოლმოგოროვის 1940 წ. 5 ნოემბრის შემდეგი შინაარსის მეორე წერილი ნ. მუსხელიშვილისადმი:

„ღრმად პატივცემულო ნიკოლოზ ივანეს ძევ!

ვვარაუდობდი რა თქვენს ნახვას, ან მ/ა ოქტომბრის სესიებზე, ან სტალინური პრემიების საექსპერტო კომისიის სხდომებზე, მე არ მომიწერია თქვენთვის ახალი სიძნელეების შესახებ, რომელიც პაველ სერგის-ძის საქართველოს ფილიალში სამუშაოდ მიწვევის გაფორმებასთანაა დაკავშირებული.

ჯერ კიდევ ივლისში, როცა ყირიმში მივემგზავრებოდი, მე მოველაპარაკე მ/ა პრეზიდიუმის მდივანს პ.ა. სვეტლოვს, რომ მას დაესვა პრეზიდიუმის ერთ-ერთ განმკარგულებელ სხდომაზე საკითხი, პაველ სერგის-ძისათვის ხელფასის სახით 1500 მანეთის დანიშვნის შესახებ, მოსკოვისა და თბილისის ერთობლივი ვალდებულებათა საერთო ანაზღაურებისათვის (ამჟამად, ის ღებულობს მოსკოვის სტეკლოვის სახ. მათემატიკურ ინსტიტუტში 750 მანეთს). მაგრამ, ამ პროექტის წინააღმდეგ გამოვიდა ოტო იურის-ძე შმიდტი, რომელიც ფიქრობს, რომ სამუშაო საქართველოს ფილიალის ხაზით ანაზღაურებული უნდა იქნეს ფილიალის სახსრებიდან.

თქვენი მონაწილეობის გარეშე, ჩემთვის უხერხული იყო ხელახლა დამესვა ეს საკითხი პრეზიდიუმზე. ამასთან, ახლოვდება უკვე 1941 წელი, როცა თქვენი თქმით, შესაძლებელია გაითვალისწინოთ შესაბამისი საშუალებანი ფილიალის ბიუჯეტში. თუ ასეთი შესაძლებლობა არსებობს ამჟამადაც, სსრკ მ/ა პრეზიდიუმის წინაშე სპეციალურ ასიგნებათა შესახებ საკითხის დაყენება, შეიძლება არც ღირდეს.

ღრმა პატივისცემით თქვენი ა/ კოლმოგოროვი“ [6, 53].

იმისათვის, რომ აკადემიის ვიცე-პრეზიდენტი აკადემიკოსი ო.ი. შმიდტი (1891-1956) განაწყოს საქმის სასარგებლოდ, ამასთან აკად. ა. კოლმოგოროვის ნაცვლად აკადემიის ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერ-

ბათა განყოფილების ახლადარჩეული აკად. ს.ლ. სობოლევი ოფიციალურად ჩააყენოს საქმის კურსში, ფილიალის პრეზიდიუმიდან მოსკოვში იგზავნება შემდეგი მიმართვა:

„სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის ვიცე-პრეზიდენტ აკადემიკოს ო.ი. შმიდტს!

ასლი: ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა განყოფილების აკადემიკოს-მდივანს აკად. ს.ლ. სობოლევს.

საკ. მ/ა საქ.ფილიალის პრეზიდიუმმა და მათემატიკურმა ინსტიტუტმა მიმართეს სსრკ მ/ა პრეზიდიუმს თხოვნით, სსრკ მ/ა წევრ-კორესპონდენტის პროფ. პ.ს. ალექსანდროვის დანიშვნის შესახებ მ/ა საქართველოს ფილიალის მათემატიკური ინსტიტუტის მუდმივ კონსულტანტად და თანხმობაც მიიღეს (სსრკ მ/ა ფიზიკა-მათემატიკური განყოფილების პასუხის ასლი თან ერთვის). თბილისის ახალგაზრდა მათემატიკური ინსტიტუტის მუშაობაში პ.ს. ალექსანდროვის მონაწილეობა ძალზე მნიშვნელოვანია, თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ ინსტიტუტის სამეცნიერო თემატიკაში უკანასკნელ ხანს შეტანილია სამუშაო ტოპოლოგიიდან. ეს სამუშაო მინდობილი აქვს ინსტიტუტის ახალგაზრდა თანამშრომელს და მისდამი ხელმძღვანელობა ისეთი დიდი სპეციალისტის მიერ, როგორიცაა პ.ს. ალექსანდროვი, უაღრესად სასურველია.

ამჟამად, საკითხი დგას თბილისში პროფ. პ. ალექსანდროვის მუშაობის პირობების გაფორმების შესახებ.

იმის გამო, რომ ალექსანდროვი ვ. სტეკლოვის სახ. მათემატიკური ინსტიტუტის მეცნიერ თანამშრომლად ითვლება, ჩვენ მიგვაჩნია, რომ ორგანიზაციულად მიზანშეწონილი იქნებოდა მ/ა წევრ-კორესპონდენტ პ.ს. ალექსანდროვს ერთიანი ხელფასი განისაზღვროს მის ვალდებულებათა გამო მ/ა-ში, რის შესახებაც გთხოვთ თანხმობას.

სსრკ მ/ა საქ.ფილიალის თავ-რე აკადემიკოსი ნ. მუსხელიშვილი

სსრკ მ/ა საქ.ფილიალის მათემატიკური

ინსტიტუტის დირექტორი პროფესორი ვ. კუპრაძე“ [6, 55].

აკადემიკოსების ო.ი. შმიდტისა და ს.ლ. სობოლევისადმი გაგზავნილ ამ მიმართვას, გარკვეულად თარიღიც არ უზის, მაგრამ იგი დაწერილი უნდა იყოს კოლმოგოროვის ზემოთ მოტანილი 5 ნოემბრის წერილის შემდეგ; წინააღმდეგ შემთხვევაში ნ. მუსხელიშვილისათვის ო. შმიდტის პოზიცია ივლისის თვეში ცნობილი იქნებოდა 5 ნოემბრის წერილში ა. კოლმოგოროვი საჭიროდ არ ჩათვლიდა ამ ფაქტზე ყურადღების შეჩერებას. აკად. ს. სობოლევის როლიც გაურკვეველია ამ სიტუაციაში: თუ ის აკადემიკოს-მდივანის მოვალეობას დროებით ასრულებს, რატომ არ ჩანს მიმართვის ტექსტიდან, ან საპასუხო წერილს რატომ არ უგზავნის ნ. მუსხელიშვილსა და ვ. კუპრაძეს?

მათემატიკურ ინსტიტუტში სიტუაციის შესწავლის შემდეგ – 1940 წ. 3 დეკემბერს, დირექციამ ასეთი წერილით უპასუხა საქ.ფილიალის პრეზიდიუმს: „საკ. მ/ა საქართველოს ფილიალის პრეზიდიუმს.

„თქვენს შეტყობინებასთან დაკავშირებით, რომელიც ეხება პროფ. პ.ს. ალექსანდროვის გაფორმებას სამუშაოზე მათემატიკურ ინსტიტუტში გაცნობებთ, რომ ჩვენი განსაკუთრებული დაინტერესებულობის გამო პროფ. ალექსანდროვთან თანამშრომლობით, ჩვენ განზრახული გვაქვს კვლავაც ვეცადოთ მომავალ წელს მოვიპოვოთ ჩვენს საშტატო განრიგში შესაბამისი ერთეული.

ამჟამად ინსტიტუტს შეუძლია თავის თავზე აიღოს ის ხარჯები, რომლებიც დაკავშირებული იქნება პროფ. ალექსანდროვის ჩამოსვლასთან, როგორც ნაგულისხმევიც იყო ადრე.

ინსტიტუტის დირექტორი პროფ. ვ.დ. კუპრაძე.

სწავლული მდივანი დ.ა. კვესელავა" [6, 57].

ცხადია, საკ. მ/ა საქართველოს ფილიალის მათემატიკურ ინსტიტუტს არ ჰქონდა საბიუჯეტო წლის ბოლოს შესაბამისი სახსრები და, როგორც მოსალოდნელი იყო, პ. ალექსანდროვის შტატში ჩარიცხვაზე უარი ეთქვა, რაც გამოხატულია 1940 წ. 3 დეკემბრის წერილში, რომელიც ასე იკითხება:

„ღრმად პატივცემულო ანდრეი ნიკოლოზის ძევ" თქვენ 1940 წ. 5 ნოემბრის წერილის პასუხად, გიგზავნით საკ მ/ა საქართველოს ფილიალის მათემატიკის ინსტიტუტის 1940 წ. 3/XII № 65 მიმართვას.

თქვენი პატივისმცემელი აკად. ნ. მუსხელიშვილი" [7, 56].

ცხადია, 1941 წლისათვის, მათემატიკური ინსტიტუტის კონსულტანტად დანიშვნა პროფ. პ. ალექსანდროვისა, დადებითად უნდა გადაწყვეტილიყო, რისი დამადასტურებელიცაა 1941 წლის იანვრის თვეში აკადემიკოსების პ.ს. ალექსანდროვის, ა. კოლმოგოროვის და ს. სობოლევის ერთობლივი მოწვევა თბილისში. 1941 წ. 3 იანვარს მოისმინეს და განიხილეს პ.ს. ალექსანდროვის მოხსენება „ფენილთა თეორემა" (Теорема мостовых), 10 იანვარს მისივე „ჰომოლოგიური ტოპოლოგია"; 24 იანვარს – „Betti"-ს ჯგუფი. 13 და 14 იანვარს აკადემიკოსმა ა. კოლმოგოროვმა სემინარზე წაიკითხა მოხსენება: „დინამიკურ სისტემათა თეორიაში ახალ გამოკვლევათა მიმოხილვა". 24 და 27 იანვარს აკად. ს. სობოლევი სემინარზე კითხულობს მოხსენებას „ჰიპერბოლურ განტოლებათა ერთი სასაზღვრო ამოცანის შესახებ" [2, 37].

ზემოთ მოტანილი დოკუმენტური მასალა ცხადყოფს, რომ საქართველოში მათემატიკის ყველა დარგის ჰარმონიულ განვითარებას საფუძველი ჩაყრილი ჰქონდა 40-იან წლებში, საბჭოთა კავშირის მშვიდობიანი განვითარება რომ არ შეწყვეტილიყო ომის დაწყებით. გარკვეული უარყოფითი როლი შეასრულა ამ მხრივ, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ჩამოყალიბების ორგანიზაციულმა სიძნელეებმა 1941 წ. თებერვალში, რომლითაც მეცნიერ-კონსულტანტობის პრაქტიკის შემდგომი შენარჩუნება საჭიროდ არ ჩაითვალა. ამის

შემდეგ საქ. მ/ა მათემატიკის ინსტიტუტში სახელგანთქმული მათემატიკოსები ს. ბერშტეინი, ი. ვინოგრადოვი, მ. ლავრენტევი, ა. კოლმოგოროვი, პ. ალექსანდროვი, მ. კელდიში, ა. იშლინსკი და სხვები, მხოლოდ მცირე ხნით და ისიც მათემატიკოსთა კონფერენციებსა, ყრილობებზე და დისერტაციების დაცვის დროს არიან მოწვეულნი. მათ მუშაობას ისეთი ეფექტი არ მოჰყოლია შემდგომში, როგორც ამას ახორციელებდა აკად. ნ. მუსხელიშვილის მხარდაჭერით და თანადგომით პროფ. ვ.დ. კუპრაძე და თბილისის მათემატიკური ინსტიტუტის სამეცნიერო საბჭო.

მათემატიკური ინსტიტუტის სტრუქტურა, 1936 წლიდან დაწყებული, თითქმის ყოველწლიურად იცვლებოდა, რაც დადებითად მოქმედებდა ინსტიტუტის წინსვლაზე. 1938 წ. გარდაიქმნა ფუნქციათა თეორიის განყოფილება და შეიქმნა გამოთვლითი მათემატიკის განყოფილება მეცნ. დოქტორის შ.ე. მიქელაძის ხელმძღვანელობით. მეცნიერ-თანამშრომელთა საერთო რიცხვი ინსტიტუტში ამ დროს 29-ია.

1938 წ. დასაწყისში პროფ. ნ. მუსხელიშვილის ინიციატივით ფილიალის ინსტიტუტებისა და სამეცნიერო განყოფილებების ხაზით ორგანიზებულ იქნა ახალგაზრდა მეცნიერთა საკავშირო-რესპუბლიკური კონკურსი „სოცშეჯიბრის" საკავშირო მოწოდებაზე გამოხმაურების სახით. ამ მიმართულებით გაწეული მუშაობის მასშტაბზე წარმოდგენას გვაძლევს „ოქმი კომისიისა", რომელმაც განიხილა ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა ხაზით ახალგაზრდა მეცნიერთა საკონკურსოდ წარმოდგენილი ნაშრომები 1938 წ. 7/1 [6, 3-5].

მონაწილეობდნენ პროფესორები: მუსხელიშვილი, ხარაძე, ნოდია, ბიუსი, გოკიელი, დოცენტი ქვარცხავა.

თავმჯდომარე – პროფ. მუსხელიშვილი, მდივანი – მაღალაშვილი.

დღის წესრიგი: ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა ხაზით ახალგაზრდა მეცნიერების მიერ კონკურსზე წარმოდგენილი ნაშრომების განხილვა.

მოისმინეს: 1. რეცენზიები შემდეგ ნაშრომებზე:

1. დევიზით „W" – ელექტრომაგნიტური ტალღების დიფრაქციის ზოგადი ამოცანის ამოხსნა.

2. დევიზით „Марс" – ორი დამოუკიდებელი ცვლადის ელიფსური ტიპის დიფერენციული განტოლების ზოგადი ამოხსნის კომპლექსური წარმოდგენა და მისი გამოყენება მათემატიკური ფიზიკისა და დრეკადობის თეორიის საკითხებში.

3. დევიზით „Дельта" – კუთხური წერტილების მქონე კონტურისათვის ბრტყელი დრეკადობის თეორიის ძირითადი ამოცანები.

4. დევიზით „Гях" – ორადბმული არეების რგოლზე კონფორმული გადასახვის შესახებ.

5. დევიზით „Гях" – კერძო წარმოებულიან დიფერენციულ განტოლებათა ამოხსნის შესახებ.

6. დევიზით „Y“ – პოლიჰარმონიულ განტოლებათა ინტეგრების შესახებ.

7. დევიზით „Z“ – დრეკადობის თეორიის ძირითადი ამოცანების ამოხსნის ზოგიერთი ეფექტური მეთოდი.

8. დევიზით „A“ – მექანიკური კვადრატურის ფორმულების გამოკვლევა.

9. დევიზით „Луна“ – ორი ცვლადის ფუნქციის წარმოებულ რიცხვთა შესახებ.

10. დევიზით „Альтаир“ – ახალი ვარსკვლავების აფეთქებასთან დაკავშირებული ზოგიერთი მოვლენის გამოკვლევა.

11. დევიზით „Эксперимент“ – ორ და სამგანზომილებიანი ბორნფელდის ელექტროდინამიკაში პრობლემების ამოხსნის მეთოდები.

12. დევიზით „Друзья“ – ძირულას მასივის პრეგმატიტების რადიოაქტივობის საკითხისათვის.

13. დევიზით „Опыт“ – სოფელ რეროს (საქ. სსრ. სამხ. ოსეთის ავტ. ოლქი) სპილენძის ელექტროდაზვერვა.

14. დევიზით „Самолет“ – ფენების ვერტიკალური სასაზღვრო დაყოფის შემთხვევაში სეისმური დაზვერვის მეთოდის თეორია.

15. დევიზით „Товарищ“ – სიმძიმის ძალის ანომალიები ფაი-ს რედუქციაში, კავკასიაში და მისი გეოლოგიური ინტერპრეტაციის ცდა.

16. დევიზით „Наука“ – ფენოვანი წიაღისეულის დაზვერვაში გრავიმეტრიული მეთოდის გამოყენება.

დაადგინეს: I. დაშვებულ იქნენ საკავშირო კონკურსზე შემდეგი ნაშრომები: დევიზებით: „W“, „Марс“, „Дельта“, „A“, „Луна“, „Эксперимент“, „Самолет“, „Наука“, „Товарищ“.

II. უარი ეთქვა კონკურსში, რეკომენდაცია გაეწიოთ ნაშრომებს დევიზით „Y“, „Z“, „Друзья“, „Опыт“.

თან ერთვის რეცენზიები ყველა ნაშრომზე, რომლებიც დაშვებულია კომისიის მიერ და წარმოდგენილია ახალგაზრდა მეცნიერებათა საკავშირო კონკურსზე.

კომისიის თავმჯდომარე: პროფესორი მუსხელიშვილი“ [9, ფ. 3-5].

საკავშირო კონკურსზე დაშვებული 10 ნაშრომიდან 5 მათემატიკიდან იქნა შერჩეული, 1 ფიზიკიდან („Эксперимент“), 1 ასტრონომიიდან („Альтаир“)და 3 გეოფიზიკიდან. ჩვენ ამჟამად შევძლია გავშიფროთ დევიზები და დავასახელოთ საკავშირო კონკურსზე დაშვებული ნაშრომების ავტორები. ესენი არიან ვ.დ. კუპრაძე („W“), ი.ნ. ვეკუა („Марс“), ლ.გ. მაღნარაძე („Дельта“), შ.ე. მიქელაძე („A“), ვ.გ. ჭელიძე („Луна“). მათემატიკური ფიზიკის და დრეკადობის თეორიის დარგიდან ნაშრომზე დასაბუთებული რეცენზიები თვით პროფ. ნ. მუსხელიშვილმა წარადგინა და კონკურსის წარმატებით ჩატარებაში მთავარი როლი მან შეასრულა. აღსანიშნავია, რომ პროფ. ნ. მუსხელიშ-

ვილი მის მიერ რეცენზირებული ნაშრომებიდან ხელს აწერს მხოლოდ „Дельта"-ს რეცენზიაზე. ხელმოუწერელ რეცენზიაში „W" ნაშრომზე შენიშვნის სახით იგი წერს: „არსებობს თეორემა ავტორის მიერ დამტკიცებული არ არის (მოტანილია მხოლოდ ფიზიკური მოსაზრებები), რასაც თვით ავტორი აღიარებს. გადმოცემა არ არის გამოკვეთილი; მაგალითად, პირობა მე-7 გვერდზე ზედმეტია" [9, ფ.11]. მიუხედავად ამისა იგი ნაშრომს რეკომენდაციას აძლევს საკავშირო კონკურსზე. „Y" ნაშრომის (იგი ეკუთვნოდა ფიზ. მათ. მ/ა პ. ზერაგიას) რეცენზიაში დასკვნის სახით იგი წერს: „რადგან ავტორის მეთოდი წარმოადგენს უკვე არსებული მეთოდების პირდაპირ (თუმცა არატრივიალურ) განზოგადებას, მე ვთვლი, რომ ნაშრომი არ შეიძლება გადაგზავნილი იყოს საკავშირო კონკურსზე" [9, 15]. ნაშრომის „Марс" (ავტორი ი.ნ. ვეკუა) რეცენზიაში წერს: „ავტორის მიერ მიღებული შედეგები ხსნის ფართო ასპარეზს შემდგომი გამოკვლევებისათვის, რათა შექმნილ იქნეს მითითებულ განტოლებათა ამოხსნის ახალი მეთოდები და, რომელიც დიდ ინტერესს წარმოადგენს მათემატიკური ფიზიკისათვის" [8, ფ. 13]. ცხადია, რეცენზენტი რეკომენდაციას აძლევს ნაშრომს საკავშირო კონკურსისათვის, მაგრამ ეს ნაშრომი მათემატიკურ ინსტიტუტისა და კომკავშირის თბილისის კომიტეტს შორის „მოძრაობისას" დაიკარგა. როგორც შემდგომ გამოირკვა, მიზეზი ამ კურიოზული შემთხვევებისა, რომელმაც მრავალი ვნებათა ღელვა და უსიამოვნო შედეგები მოუტანა ქართულ მათემატიკას და პირადად პროფ. მუსხელიშვილს, იყო დაუსაბუთებელი ბრალდება მეცნ. კანდიდატ პ. ზერაგიასი, იმჟამად დოც. ი. ვეკუასადმი, მისი საკანდიდატო დისერტაცია მომზადდა პროფ. ნ. მუსხელიშვილის ხელმძღვანელობით, ამიტომ ბრალდების სიმძიმის ცენტრი მის მხარეზე გადადიოდა. ეს საკითხი შემდგომ – 1940 წ. გარკვეულ იქნა ი.ნ. ვეკუას სადოქტორო დისერტაციის და პ. ზერაგიას საკანდიდატო დისერტაციების გამოქვეყნების და მათი შეჯერების შემდეგ.

მიუხედავად ფილიალის საქმიანობით გადატვირთულობისა და მათემატიკურ ინსტიტუტში მთლიანი მათემატიკის განვითარებაზე განუწყვეტელი ფიქრისა, აკად. ნ. მუსხელიშვილს არ ავიწყდება საკუთარი თემატიკის შემდგომ განვითარებაზე ზრუნვა. ამის დამადასტურებელია 1940 წ. თბილისში მოწვეული I საკავშირო კონფერენცია დრეკადობის თეორიისა და კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის მომიჯნავე პრობლემებზე [7,5].

საორგანიზაციო კომიტეტი ჯერ კიდევ 1939 წ. 21 დეკემბრის სსრკ მ/ა პრეზიდიუმის გადაწყვეტილებით შეიქმნა, შემდეგი შემადგენლობით: აკად. ნ. მუსხელიშვილი (თავ-რე), აკად. ს.ლ. სობოლევი, უსსრ აკადემიკოსი მ.ა. ლავრენტევი, პროფ. ვ.დ. კუპრაძე, პროფ. დ.ი. პანოვი და პროფ. ი.ნ. ვეკუა, რომელთაც შემდეგ დაემატა მე-7 წევრი დოც. ა.ი. გორგიძე (მდივანი). საორგანიზაციო კომიტეტის გადაწყვეტილებით, კონფერენციის მოწვევის თარიღად დადგენილ იქნა 1940 წ. 1-5 თებერვალი. საბჭოთა კავშირის სხვადასხვა ქალაქიდან მოწვეული იყო 33 (მთლიანად კი 46) მონაწილე, რომელთაგან 2 აკადემიკოსი, 8 პროფესორი, 26 დოცენტი, 5 ასისტენტი და 5 ასპირანტი. კონფერენციას ყოველწლიურად ესწრებოდა აგრეთვე 80-მდე ადგილობრივი მეცნიერ მუშაკი. სულ წაკითხული იყო 18 მოხსენება, რომელთაგან 6 მოხსენება თბილისელმა სპეციალისტებმა წარადგინეს. ესენი იყვნენ: 1. ნ. მუსხელიშვილი – „თბილისელი მათემატიკოსების შრომები დრეკადობის თეორიაში და ზოგიერთი, მათთან დაკავშირებული შრომები“ (მიმოხილვითი). 2. ი.ნ. ვეკუა – „ორ და სამგანზომილებიან სივრცეში სტაციონალური რხევითი განტოლების ამონახსნის ზოგადი წარმოდგენა“. 3. ა.ი. გორგიძე და ა.კ. რუხაძე – „დრეკადობის თეორიის ბრტყელი ამოცანების ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამონახსნის შესახებ“. 4. ლ.გ. მაღნარაძე – „კუთხური წერტილების მქონე კონტურისათვის დრეკადობის თეორიის ძირითადი განტოლებანი (ბრტყელი და სივრცითი ამოცანები)“. 5. ა.კ. რუხაძე – „სხვადასხვა მასალისაგან შედგენილი დრეკადი ძელის ღუნვის ამოცანისათვის“. 6. ბ.ი. ხალილოვი – „კლებში ამოცანა და მისი განზოგადოება“.

კონფერენციის გადაწყვეტილებით, წაკითხული მოხსენებები გადაეცა ჟურნალის „ПММ“ (გამოყენებითი მათემატიკა და მექანიკა) რედაქციის გამოსაქვეყნებლად, ხოლო კონფერენციამ დაბეჭდა მოხსენებათა მოკლე თეზისები და პროგრამა. საინტერესოა აღინიშნოს, რომ პირველად ამ კონფერენციაზე მოიყარეს თავი ერთად, აკად. ნ. მუსხელიშვილის მოწაფეებმა და მიმდევრებმა: ი. ვეკუამ, ა. რუხაძემ, ა. გორგიძემ, ლ. მაღნარაძემ, ც. ლეივინამ, ს. მიხლინამ, ი. მინლიმა, გ. საეინმა, ზ. ხალილოვმა და სხვებმა.

რეზოლუციაში ჩაწერილ იქნა შემდეგი სიტყვები: „საბჭოთა მეცნიერების მიერ მიღებულია საბოლოო შედეგები ბრტყელი დრეკადობის თეორიის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანებისათვის, რომელსაც

ასე დიდი თეორიული და პრაქტიკული ღირებულება აქვს. მიღწეულია დიდი წარმატებები ბრტყელი ანიზოტროპული დრეკადობის თეორიისა და პლასტიკურობის თეორიაში" [7]. ცხადია, ამ შეფასებაში, აკად. ნ. მუსხელიშვილის პირად წვლილთან ერთად, დრეკადობის თეორიაში საბჭოთა სკოლის თვალსაჩინო მიღწევების საკავშირო მასშტაბით აღიარებაც ჟღერდა.

დიდი იყო წარმატებები, რომელიც კონფერენციის რეზოლუციაში თვალსაჩინოდაა აღნიშნული – ქართულ მათემატიკოსთა მუსხელიშვილისეული სკოლისა, რასაც თან სდევდა დიდი მადლიერების გრძნობაც დიდი რუსი მათემატიკოსის ა.ნ. კრილოვისადმი, რომელიც გამოხატულია ერთობლივ მოსაწვევ ბარათში კონფერენციის წინა დღეებში რომ იყო გაგზავნილი თბილისიდან.

„ლენინგრადი, უნივერსიტეტის სანაპირო, 5

აკადემიკოს კრილოვს.

ძვირფასო ალექსი ნიკოლოზის ძევ მოგმართავთ თხოვნით, ჩამობრძანდეთ თბილისში თქვენს მეუღლესთან ერთად 1-5 თებერვალს დრეკადობის თეორიაში კონფერენციის მუშაობაში მონაწილეობის მისაღებად.

მათემატიკური ინსტიტუტის კოლექტივი დიდი ხანია ოცნებობს დაგინახონ თქვენ თბილისში, რათა პირადად გადაგიხადონ მადლობა იმ ღვაწლისათვის, რაც თქვენ დასდეთ ჩვენი კადრების მომზადების საქმეს.

მუსხელიშვილი, კუპრაძე, ვეკუა, რუხაძე" [7, 20].

მათემატიკური ინსტიტუტი, 40-50-იანი წლების ახალ მიღწევათა 10-წლეულში შედიოდა და აკად. ნ. მუსხელიშვილი და მისი სკოლა მათემატიკური ფიზიკის ფართო ჰორიზონტების დაპყრობისათვის ემზადებოდა.

შემოვიდა 15.12.2002

ქუთაისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ლიტერატურა

1. საქართველოს უახლესი ისტორიის სახელმწიფო ცენტრალური არქივი (სუისცა), ფ. 613, ა. 1, შ.ე. 134.
2. სუისცა, ფ. 300, ა. 1, შ.ე. 218.
3. ნ. მუსხელიშვილის საოჯახო არქივი
4. ჟურნალი „მეცნიერების მოამბე", №1, 1936, გვ. 186.
5. რამაძის სახ. თბილისის მათმატიკის ინსტიტუტი – 50. თბილისი, „მეცნიერება" 1986, 135 გვ.
6. საქართველოს მ/ა ცენტრალური არქივი, სსრკ მ/ა საქფილიალის (სმაცა), ფ. 1, ა. 1, შ.ე. 100.
7. სმაცა, ფ. ა. 1, შ.ე. 255.
8. სმაცა, ფ. 1, ა. 1, შ.ე. 265.
9. სმაცა, ფილიალის მიმოწერა, 1937 წ., ფ, 33, ა. 1, შ.ე. 178 (საქმე №62).
10. რამმაძის სახ. თმი-ის აკად ნ. მუსხელიშვილის სახ. კაბინეტის არქივი.

Т.Е. Ефремидзе

Академик Н.И. Мусхелишвили - основатель Тбилисского математического института

Резюме

В работе рассматриваются архивные материалы о деятельности акад. Н.И. Мусхелишвили по созданию и научно-организационному укреплению Института математики АН Грузии.

T. Epremidze

Academician N.I.Muskhelishvili - the founder of Tbilisi mathematical Institute

Summary

The paper deals with archivers about the contribution of academician N. Muskhelishvili in the establishment and scientific developments of mathematical Institute.

შინაარსი

Содержание

Contents

გამომცემლობის რედაქტორი ლ. აბუაშვილი
ტექრედაქტორი ფ. ბუდაღაშვილი
კორექტორები: ე. სულხანიშვილი
დ. გოგბერაშვილი
კომპიუტერული უზრუნველყოფა: ხ. ბადრიძე
მ. ჩილვინაძე
ხელმოწერილია დასაბეჭდად 19.10.05
საბეჭდი ქაღალდი 60×84
პირ. ნაბეჭდი თაბახი 28.88
სააღრ.-საგამომც. თაბახი 16,62
შეკვეთა 58 ტირაჟი 120
ფასი სახელშეკრულებო

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
0128, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ., 14.

თბილისის უნივერსიტეტის სარედაქციო-საგამომცემლო
კომპიუტერული სამსახური, 0128, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ., 1.