თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY
259

ISSN 0376-2637

მათემატიკა · მექანიკა · ასტრონომია
МАТЕМАТИКА · МЕХАНИКА · АСТРОНОМИЯ
MATHEMATICS · MECHANICS · ASTRONOMY

19—20

თბილისი Тбилиси Tbilisi
1986

ПОСВЯЩАЕТСЯ

акад. Н.П. БЕКУА к 70-летию со дня рождения

ეძღვნება

აკად. ნ.ვეკუას დაბადებიდან 70 წლისთავზე

DEDICATED

to acad. N.VEKUA at the 70-th anniversary

of his birthday

Издательство Тбилисского университета

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

Tbilisi University Press

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

Proceedings of Tbilisi University

ტ. 259 v.

მათემატიკა · მექანიკა
ასტრონომია

MATHEMATICS. MECHANICS
ASTRONOMY

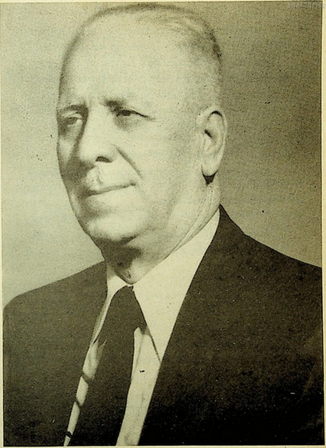
თბილისი 1985 Tbilisi

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

т. 259

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. АСТРОНОМИЯ

Тбилиси 1985



Н.П. ВЕКУА

Директору ордена Трудового Красного Знамени Тбилисского математического института им. А.М.Размадзе Академии наук Грузинской ССР, академику АН ГССР, лауреату Государственной премии ГССР, заслуженному деятелю науки ГССР, заведующему кафедрой теоретической механики Тбилисского государственного университета, профессору

Николаю Петровичу В е к у а

10 августа 1983 года исполнилось 70 лет со дня рождения и 45 лет научно-педагогической и общественной деятельности.

Редакция журнала поздравляет Николая Петровича с семидесятилетием со дня рождения и желает ему крепкого здоровья и больших творческих успехов.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები

259, 1985

УДК 517.54

НОРМАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

А.Г. Джваршеишвили

§ I. Предварительные сведения

Пусть G_K – область, ограниченная простой непрерывной линией Γ_K, $K=1,2$, $G=G_1\times G_2$, $\Gamma=\Gamma_1\times\Gamma_2$. Положим, на G определена мероморфная[I)] функция и ее значения лежат на сфере Σ Римана с центром в $(0,0,1/2)$ и радиусом I/2. Как известно, сферическое расстояние между точками $z\in\bar{C}$, $w\in\bar{C}$ определяется по формуле

$$k(z,w)=\frac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\,\sqrt{1+|w|^2}};\quad k(\infty,z)=\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}};$$

$$k(\infty,\infty)=0.$$

Для функции f сферический верхний дифференциал в точке (z_0,w_0) определим по формуле

$$\rho_0^*(f,z_0,w_0)=\overline{\lim_{\substack{z\to z_0\\ w\to w_0}}}\frac{|f(z,w)-f(z_0,w_0)|}{(|z-z_0|+|w-w_0|)\sqrt{1+|f(z,w)|^2}\,\sqrt{1+|f(z_0,w_0)|^2}} \tag{I}$$

I) Функцию f назовем мероморфной, если она мероморфна по каждой переменной в отдельности и непрерывна по совокупности переменных.

Лемма I. Пусть f - мероморфная функция на G. Тогда для любой точки $(z_0, w_0) \in G$ имеем

$$\tfrac{1}{2}\rho_0(f, z_0, w_0) \leq \rho_0^*(f, z_0, w_0) \leq \rho_0(f, z_0, w_0), \qquad (2)$$

где $\rho_0(f, z_0, w_0) = \dfrac{|f_z'(z_0, w_0)| + |f_w'(z_0, w_0)|}{1 + |f(z_0, w_0)|^2}$.

Доказательство. Прежде всего положим

$$\frac{|z - z_0|}{|w - w_0|} \leq 1.$$

Тогда

$$\frac{|f_z'(z_0, w_0)(z - z_0) + f_w'(z_0, w_0)(w - w_0)|}{|z - z_0| + |w - w_0|} \leq$$

$$\leq \frac{|f_z'(z_0, w_0)|\frac{|z - z_0|}{|w - w_0|} + |f_w'(z_0, w_0)|}{\frac{|z - z_0|}{|w - w_0|} + 1} \leq$$

$$\leq |f_z'(z_0, w_0)| + |f_w'(z_0, w_0)|.$$

Аналогичное неравенство получим, если положим $\dfrac{|w - w_0|}{|z - z_0|} \leq 1$.

Таким образом при любом стремлении $z \to z_0$, $w \to w_0$ получим

$$\varlimsup_{\substack{z \to z_0 \\ w \to w_0}} \frac{|f_z'(z_0, w_0)(z - z_0)| + |f_w'(z_0, w_0)(w - w_0)|}{|z - z_0| + |w - w_0|} \leq \qquad (3)$$

$$\leq |f_z'(z_0, w_0)| + |f_w'(z_0, w_0)|.$$

Так как f – мероморфная функция на G, то для всех точек $(z_0, w_0) \in G$ имеем (см. /I/, стр. 433)

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ w \to w_0}} \frac{|f(z,w)-f(z_0,w_0)-f'_z(z_0,w_0)(z-z_0)-f'_w(z_0,w_0)(w-w_0)|}{|z-z_0|+|w-w_0|}=0 \quad (4)$$

Теперь из (I), (4), (3) непосредственно получаем

$$\rho_0^*(f,z_0,w_0) \leq \frac{|f'_z(z_0,w_0)|+f'_w(z_0,w_0)|}{1+|f(z_0,w_0)|^2}.$$

Далее, в (I) попеременно положим $z=z_0$, а затем $w=w_0$. Тогда получим

$$\frac{|f'_z(z_0,w_0)|}{1+|f(z_0,w_0)|^2} \leq \rho_0^*(f,z_0,w_0) \geq \frac{|f'_w(z_0,w_0)|}{1+|f(z_0,w_0)|^2}$$

Из последних неравенств мгновенно получаем требуемое соотношение (2) и лемма доказана.

Лемма 2. Пусть f – мероморфная функция в $G=G_1 \times G_2$, G_K – односвязная область, $K=1,2$. Фиксированные точки $(a,b)\in G$, $(c,d)\in G$ соединены простой спрямляемой непрерывной линией L, уравнение которой есть

$t=t(s)$, $\tau=\tau(s)$, $0 \leq s \leq |L|$, где s – длина соответствующей дуги. Тогда справедливо неравенство

$$k(f(a,b),f(c,d)) \leq 2\int_L \rho_0(f,t,\tau)\,ds, \quad L \subset G.$$

Доказательство. Так как f – мероморфная функция и в силу определения $\rho_0^*(f)$ для любой замкнутой области $\bar{D} \subset G$, $L \subset \bar{D} = D$ и каждого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, D)$ такое, что в каждой точке $(z_0, w_0) \in D$ и для всех $(z, w) \in K(z_0, w_0, \delta) = K(z_0, \delta) \times K(w_0, \delta)$,

$$K(z, \delta) = \{t : |t - z| < \delta\}$$

имеем

$$\frac{k(f(z,w)), f(z_0, w_0))}{|z - z_0| + |w - w_0|} < \rho_0^*(f, z_0, w_0) + \varepsilon . \tag{5}$$

Разобьем линию L точками $M_K(z_K, w_K)$, $z_K = t(s_K)$, $w_K = \tau(s_K)$, $K = \overline{0,n}$, $M_0 = M(a, b)$, $M_n = M(c, d)$, кроме того

$$|\Delta z_K| = |z_K - z_{K+1}| < \delta/2 ; \quad |\Delta w_K| < \delta/2 . \tag{6}$$

Справедливо неравенство

$$k(f(a,b), f(c,d)) < \sum_{K=0}^{n-1} k(f(z_K, w_K), f(z_{K+1}, w_{K+1})) . \tag{7}$$

На основании леммы (I) и неравенств (5), (6) и (7) получаем

$$k(f(a,b), f(c,d)) < \sum_{K=0}^{n-1} \rho_0^*(f, z_K, w_K)(|\Delta z_K| + |\Delta w_K|) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{K=0}^{n-1} (|\Delta z_K| + |\Delta w_K|) < 2 \sum_{K=0}^{n-1} \rho_0^*(f, z_K, w_K)|\Delta s_K| + 2\varepsilon |L| .$$

Отсюда непосредственно получаем требуемое неравенство. Лемма доказана.

Введем одно определение, которое было рассмотрено в монографии /2/. Комплексной плоскостью назовем множество тех точек (z,w), которые удовлетворяют условию

$$\alpha z+\beta w=\gamma,$$

где α, β, γ – фиксированные комплексные числа.

Пусть $E\subset\mathbb{C}^2=\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ – некоторое множество и точка $P_0(z_0,w_0)$ – предельная точка множества E. Рассмотрим последовательность точек $P_n(z_n,w_n)\in E$, $n\geq 1$, $P_n\to P_0$. Проведем через точки P_n и P комплексную плоскость

$$\pi_n:\ \frac{z-z_n}{z_0-z_n}=\frac{w-w_n}{w_0-w_n},\quad n\geq 1.$$

Если при $n\to\infty$ плоскости π_n допускают бесконечное множество предельных плоскостей, то P_0 называется предельной точкой бесконечного порядка.

Справедлива следующая

Лемма 3. Пусть f – мероморфная функция в G, а в точках множества $E\subset G$ она обращается в нуль. Если E имеет в $\overset{\circ}{G}$ хотя бы одну предельную точку бесконечного порядка, то f тождественно равна нулю.

Пусть $t_k=e^{\lambda\tau_k}$, $\lambda>1$. Введем множество

$$R_\lambda=R_\lambda(t_1,t_2)=\left\{(z,w),\ 0<|z|,|w|<1,\ 1/\lambda<\frac{|z|}{|w|}<\lambda\right\}.$$

$$z=t_1|z|,\quad w=t_2|w|.$$

Справедлива

Лемма 4. Для каждого $\lambda>1$ множество R_λ имеет хотя бы одну предельную точку бесконечного порядка.

Доказательство. Не ограничивая общности, можем положить, что $t_k=1$, $k=1,2$. Возьмем некоторую точку $(\ell_0, m_0)\in R_\lambda$ так, что $2/\lambda < \frac{\ell_0}{m_0} < 1/\lambda$, и положим $\alpha\in(1/2, 1)$. Пусть $\ell_n = \frac{n-1}{n}\ell_0$, $m_n = \frac{\alpha n-1}{\alpha n} m_0$, $n\geq 1$. Тогда

$$\frac{n-1}{n} : \frac{\alpha n-1}{\alpha n} = 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha n-1},$$ а потому

$$1/2 < \frac{n-1}{2} : \frac{\alpha n-1}{\alpha n} < 2, \quad n>1.$$

Теперь через точки (ℓ_0, m_0) и (ℓ_n, m_n) проведем комплексную плоскость

$$\mathcal{A}_n : \frac{z-\ell_n}{\ell_0-\ell_n} = \frac{w-m_n}{m_0-m_n}, \quad n\geq 1.$$

Заметим, что $1/\lambda < \frac{\ell_n}{m_n} < \lambda$, $n\geq 1$, то есть $(\ell_n, m_n)\in R_\lambda$, $n\geq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\ell_n = \ell_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = m_0$.

С другой стороны

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ell_0-\ell_n}{m_0-m_n} = \frac{\ell_0}{m_0}\alpha \quad 1/2 < \alpha < 1.$$

Так как α – произвольное число, то (ℓ_0, m_0) будет предельной точкой бесконечного порядка для множества R_λ, для любого λ, и лемма доказана.

§ 2. Нормальные семейства функций

1°. Введем понятие нормального семейства функций, которое впервые было исследовано в 1927 г. П.Монтелем /2/.

Пусть $\mathcal{F}=\{f\}$ есть семейство мероморфных функций в биобласти $G=G_1\times G_2$. Как известно, $\mathcal{F}$ составляет нормальное семейство функций на G, если из всякой последовательности (f_n), $f_n\in\mathcal{F}$, $n\geq 1$, можно выделить подпоследовательность (f_{n_k}), $k\geq 1$, которая сходится равномерно внутри G, при этом предельная функция может быть тождественна бесконечности. Семейство $\mathcal{F}$ нормально в точке $(z_0,w_0)\in G$, если $\mathcal{F}$ нормально в биобласти $K(z_0,w_0,r)$.

Справедливо следующее(/2/, стр.106)

<u>Предложение I</u>. Семейство $\mathcal{F}$ нормально в G, если все функции из $\mathcal{F}$ имеют три исключительных значения в G.

Заметим, что если $\mathcal{F}$ нормально в каждой точке области G, то (/2/, стр.37) семейство $\mathcal{F}$ будет нормальным в G. Таким образом, если $\mathcal{F}$ не является нормальным в G, то существует хотя бы одна точка $(z_0,w_0)\in G$, в которой $\mathcal{F}$ не будет нормальным. Следовательно, для $r>0$ существует последовательность (f_n), $f_n\in\mathcal{F}$, $n\geq 1$, такая, что любая последовательность не сходится равномерно в области $K(z_0,w_0,r)$. Заметим, что при изменении r, вообще говоря, будет изменяться и последовательность. В таких случаях говорят, что $\mathcal{F}$ не является нормальным около точки $P(z_0,w_0)$, а P называют $\mathcal{J}$ – точкой. Если же последовательность не меняется с изменением r, то говорят, что $\mathcal{F}$ не является нормальным в P, и эту точку называют σ – точкой. Справедливы (/2/, стр.106 и 107)

Предложение 2. Для семейства $\mathcal{F}$ мероморфных функций в G множества $\mathcal{J}$ и $\mathcal{O}$ точек совпадают и называются множеством иррегулярных точек.

Предложение 3. Для семейства $\mathcal{F}$ мероморфных функций точка $p \in G$ будет иррегулярной тогда и только тогда, когда из любой последовательности функций можно выделить подпоследовательность функций, которые принимают в области $K(z_0, w_0, r)$ все значения за исключением, быть может, двух.

В терминах сферического расстояния признак нормальности формулируется так (/2/, стр.108):

Предложение 4. Семейство мероморфных функций $\mathcal{F}$ нормально в G только тогда, когда функции этого семейства равностепенно, равномерно относительно сферического расстояния непрерывны в G, то есть для $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, зависящее только от ε и такое, что при $|z_K - w_K| < \delta$ $z_K \in G_K$, $w_K \in G_K$, $K = 1, 2$, имеем

$$k\left(f(z_1, w_1), f(z_2, w_2)\right) < \varepsilon$$

для всех $f \in \mathcal{F}$.

Имеет место следующее

Предложение 5. Пусть двойная последовательность мероморфных функций $(f_{m,n})$ образует нормальное семейство в области G. Если в каждой точке $(z, w) \in E$ существует двойной предел

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} f_{m,n}(z, w) = \varphi(z, w),$$

где $E \subset G$ имеет внутри G хотя бы одну предельную точку бесконечного порядка, то $(f_{m,n})$ сходится внутри G равномерно.

Теперь докажем одно существенное условие нормальности семейства функций двух переменных в терминах сферического верхнего дифференциала, которое имеет определенное сходство с результатом Альфорса (см. /3/, /4/, стр.153).

Теорема I.2. Пусть $\mathcal{F}=\{f\}$ – семейство мероморфных функций в G. $\mathcal{F}$ будет нормальным в G тогда и только тогда, когда для любого компактного множества $D \subset G$ существует постоянная $M>0$ такая, что для всех $(z,w)\in D$ и любой функции $\varphi\in\mathcal{F}$ имеем

$$\rho_0^*(\varphi,z,w) \leq M(\rho_0(\varphi,z,w) \leq M). \qquad (1.2)$$

Доказательство. Положим, значения рассматриваемых функций лежат на сфере Римана Σ. Допустим, $\mathcal{F}$ образует нормальное семейство на G и условие (I.2) не выполнено. Тогда существует хотя бы одна точка $(z_0,w_0)\in G$, такая, что

$$\sup_{\varphi\in\mathcal{F}} \rho_0^*(\varphi,z_0,w_0)=\infty.$$

Следовательно, для любого натурального n существует функция $f_n\in\mathcal{F}$, число $r_n>0$ так, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$ и

$$\frac{|f_n(z,w)-f_n(z_0,w_0)|}{(|z-z_0|+|w-w_0|)\sqrt{1+|f_n(z,w)|^2}\ \sqrt{1+|f_n(z_0,w_0)|^2}} \geq n \qquad (2.2)$$

для всех $(z,w)\in K(z_0,w_0,r_n)$, $n\geq 1$. Отсюда непосредственно получаем следующие неравенства:

$$\left|\frac{\partial f_n(z_0,w_0)}{\partial z}\right|\geq n\,;\quad \left|\frac{\partial f_n(z_0,w_0)}{\partial w}\right|\geq n, \qquad (3.2)$$
$$n\geq 1.$$

Так как $\mathcal{F}$ нормально, то из последовательности (f_n) можно выделить подпоследовательность $\varphi_k=f_{n_k}$, которая сходится равномерно внутри G, в частности, на множестве $\overline{K(z_0,w_0,r)}\subset G$, где $0<r<r_{n_1}$. Пусть $\lim \varphi_k(z,w)=\varphi(z,w)$ и положим, что φ является аналитической функцией в $\overline{K(z_0,w_0,r)}$. Тогда, как известно, справедливы равенства

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\partial\varphi_k(z_0,w_0)}{\partial z}=\frac{\partial\varphi(z_0,w_0)}{\partial z}, \qquad (4.2)$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\partial\varphi_k(z_0,w_0)}{\partial w}=\frac{\partial\varphi(z_0,w_0)}{\partial w}.$$

Из (4.2) и (3.2) получаем $\varphi'_z(z_0,w_0)=\varphi'_w(z_0,w_0)=\infty$, что невозможно. Теперь положим

$$\varphi(z,w)=\infty,\quad (z,w)\in\overline{K(z_0,w_0,r)}.$$

Так как значения функций лежат на сфере, то для всех $(z,w)\in K(z_0,w_0,r)$ имеем

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|\varphi_k(z,w)-\varphi_k(z_0,w_0)|}{(|z-z_0|+|w-w_0|)\sqrt{1+|\varphi_k(z,w)|^2}\sqrt{1+|\varphi_k(z_0,w_0)|^2}}=$$

$$= \frac{|\varphi(z,w)-\varphi(z_0,w_0)|}{(|z-z_0|+|w-w_0|)\sqrt{1+|\varphi(z,w)|^2}\;\sqrt{1+|\varphi(z_0,w_0)|^2}} = k(\infty,\infty)=0.$$

Последнее равенство несовместимо с неравенством (2.2). Итак, допущение неверно, а потому (I.2) выполнено. Теперь допустим, что выполнено условие (I.2) и семейство $\mathcal{F}$ не является нормальным в G. Следовательно, в силу предложений 2 и 3 существует точка $(z_0,w_0)\in G$, ее бикрестность $K(z_0,w_0,r)$ и исключительная последовательность (f_n), $n\geq 1$, таких, что каждая функция f_n в замкнутой области $\overline{K(z_0,w_0,r)}$ принимает все значения кроме, быть может, двух. Далее, в силу условия (I.2) существуют постоянная $M>0$ и замкнутая область D, такие, что $\overline{K(z_0,w_0,r)}\subseteq D\subset G$, и для всех $(z,w)\in D$ имеем

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \rho_0^*(f,z,w)\leq M.$$

Без ущерба можем положить, что исключительная последовательность сходится в точке (z_0,w_0). Возьмем произвольную точку $(z,w)\in K(z_0,w_0,r)$ и соединим точки (z_0,w_0), (z,w) отрезком прямой линии L. Тогда, в силу лемм 2 и I, имеем

$$k\left(f_n(z,w), f_n(z_0,w_0)\right)\leq 2\int_L \rho_0(f_n,t,\tau)\,ds\leq$$

$$\leq 2M|L|\leq 4Mr.$$

Положим $\alpha=\lim_{n\to\infty} f_n(z_0,w_0)$, а число $r>0$ подберем так, что $4Mr<\pi/8$. Тогда из последних соотношений для $n \geq N$ будем иметь

$$k(\alpha, f_n(z,w)) < \frac{\pi}{4}$$

для всех $(z,w) \in K(z_0, w_0, r)$. Отсюда следует, что функции f_n при $n \geq N$ не могут принимать значений a , удовлетворяющих условию

$$k(\alpha, a) > \frac{\pi}{4},$$

что противоречит выбору функции f_n . Таким образом, наше допущение неверно, то есть семейство $\mathcal{F}$ нормально в G . Теорема доказана.

Пусть $\mathcal{F} = \{f\}$ есть нормальное семейство в области $G = G_1 \times G_2$ и φ_k конформно отображает область D_k на G_k , $k = 1, 2$. Тогда семейство $\mathcal{F}_1 = \{F\}$, $F(\xi, \eta) = f(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\eta))$, $(\xi, \eta) \in D_1 \times D_2$, будет нормальным в области $D = D_1 \times D_2$ (см. /2/, стр. 37).

Это замечание позволяет рассмотреть нормальные семейства функций на бикруге.

2^0. В этом пункте введем нормальные функции и изучим их основные свойства. Указанные классы функций одной переменной рассматривались ранее (Багемиль /5/, Гаврилов В.И. /6/, /7/, Лехто, Олли и Виртанен /8/, Довбуш В.П./9/).

Обозначим через $S(G_k)$, $k = 1, 2$, семейство функций, конформно отображающих область G_k на себя. Пусть f - мероморфная функция на $G = G_1 \times G_2$ и для нее составим семейство

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0 = \{f(\varphi(z), \psi(w))\},$$

где $\varphi \in S(G_1)$, $\psi \in S(G_2)$. Говорят, что f нормальна в G или принадлежит классу N_0 $(f \in N_0)$, если семейство $\mathcal{F}_0$ нормально на области G. Очевидно, что для любой функции $F \in \mathcal{F}_0(f)$ имеем $\mathcal{F}_0(f) = \mathcal{F}_0(F)$.

Справедливы следующие утверждения.

Предложение 6. Пусть f – мероморфная функция и допускает три исключительных значения в области G. Тогда f будет нормальной в G.

Это предложение непосредственно вытекает из предложения I.

Предложение 7. Пусть f – мероморфная функция в G. Положим $z = \varphi(\xi)$ и $w = \psi(\eta)$ конформно отображают области G_k на D_k, $k = 1, 2$. Тогда функции $f(z, w)$, $(z, w) \in G$ и $F(\xi, \eta) = f(\varphi(\xi), \psi(\eta))$, $(\xi, \eta) \in D$, одновременно являются нормальными соответственно на областях G и D.

Доказательство. Пусть последовательность функций S_{kn}, $k = 1, 2$, $n = \overline{1, \infty}$, конформно отображают область D_k на себя. Рассмотрим выражение

$$F(S_{1n}(\xi), S_{2n}(\eta)) = f[\varphi S_{1n}(\xi), \psi S_{2n}(\eta)] = \tag{5.2}$$

$$= f(\varphi(\xi_n'), \psi(\eta_n')) = f(z_n', w_n') = f(\sigma_{1n}(z), \sigma_{2n}(w)),$$

где

$$z_n' = \varphi(\xi_n') = \varphi S_{1n}(\xi) = \varphi S_{1n}\varphi^{-1}(z) = \sigma_{1n}(z),$$

$$w_n' = \varphi(\eta_n') = \varphi S_{2n}(\eta) = \varphi S_{2n}\varphi^{-1}(w) = \sigma_{2n}(w).$$

Очевидно, что функции σ_{kn} , $k=1,2$, $n\geq 1$, конформно отображают область G_k на G_k , $k=1,2$. Положим последовательность $\left(f(\sigma_{1n}(z), \sigma_{2n}(w))\right)$, $n\geq 1$, равномерно сходится в замкнутой области $B\subset G$, $B=B_1\times B_2$, $B_k\subset G_k$, $k=1,2$. Заметим, что если $(z,w)\in B$, то соответствующая точка (ξ,η) , $\xi=\varphi^{-1}(z)$, $\eta=\varphi^{-1}(w)$, будет принадлежать замкнутой биобласти $Q=\varphi^{-1}(B_1)\times\varphi^{-1}(B_2)$. Отсюда и из равенств (5.2) вытекает, что последовательности $\left(F(S_{1n}(\xi), S_{2n}(\eta))\right)$ и $\left(f(\sigma_{1n}(z), \sigma_{2n}(w))\right)$ одновременно равномерно сходятся соответственно на областях B и Q. Таким образом, функции $f(z,w)$, $(z,w)\in G$ и $F(\xi,\eta)$, $(\xi,\eta)\in D=D_1\times D_2$, одновременно являются нормальными соответственно на областях G и D . Предложение доказано.

Доказанное предложение позволяет без ограничения общности рассмотреть нормальные функции в бикруге. Итак, пусть f - мероморфная функция в бикруге $D=D_1\times D_2$, $D_k=\{t:|t|<1\}$, $\varphi_k\in S(D_k)$, $k=1,2$, причем так, что $\xi_k=\varphi_k(0)$, $|\varphi_k'(0)|>0$. Положим $F(z_1,z_2)=f(\varphi(z_1),\varphi(z_2))$ и рассмотрим выражение

$$\rho_0(F, z_1, z_2) = \frac{|F_1'(z_1, z_2)| + |F_2'(z_1, z_2)|}{1+|F(z_1, z_2)|^2} =$$

(6.2)

$$= \frac{|f_1'(\varphi_1(z_1), \varphi_2(z_2))||\varphi_1'(z_1)| + |f_2'(\varphi_1(z_1), \varphi_2(z_2))||\varphi_2'(z_2)|}{1+|f(\varphi_1(z_1), \varphi_2(z_2))|^2} =$$

$$= \frac{|f_1'(z_1', z_2')|\left|\frac{dz_1'}{dz_1}\right| + |f_2'(z_1', z_2')|\left|\frac{dz_2'}{dz_2}\right|}{1+|f(z_1', z_2')|^2}, \quad z_K' = \varphi(z_K), \quad K=1,2,$$

где f_K' есть частная производная по z_K, $K=1,2$. Как известно

$$\left|\frac{dz_K'}{dz_K}\right| = \frac{1-|z_K'|^2}{1-|z_K|^2}, \quad K=1,2.$$

Тогда из последних равенств получаем

$$\rho_0(F, z_1, z_2)(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2) =$$

(7.2)

$$= \frac{|f_1'(z_1', z_2')|(1-|z_1'|^2)(1-|z_2|^2) + |f_2'(z_1', z_2')|(1-|z_1|^2)(1-|z_2'|^2)}{1+|f(z_1', z_2')|^2}.$$

Отсюда при $z_1 = z_2 = 0$ получаем равенство

$$\rho_0(F, 0, 0) = \rho_0(f, \varphi_1(0), \varphi_2(0)) = \quad (8.2)$$

$$= \frac{|f_1'(e^{i\alpha}\xi_1, e^{i\beta}\xi_2)||1-|\xi_1|^2| + |f_2'(e^{i\alpha}\xi_1, e^{i\beta}\xi_2)||1-|\xi_2|^2|}{1+|f(e^{i\alpha}\xi_1, e^{i\beta}\xi_2)|^2}.$$

Пусть f нормальна в $\mathcal{D}$. Тогда в силу теоремы (I.2) для любого компактного множества $Q \subset \mathcal{D}$ существует число $M>0$ такое, что

$$\rho_0(f, \varphi_1(z), \varphi_2(w)) < M$$

для всех $(z,w)\in Q$ любых $\varphi_k \in S(\mathcal{D}_k)$. Отсюда и из (2.2) получаем

$$\frac{|f_1'(e^{i\alpha}\xi_1, e^{i\beta}\xi_2)|(1-|\xi_1|^2)+|f_2'(e^{i\alpha}\xi_1, e^{i\beta}\xi_2)|(1-|\xi_2|^2)}{1+|f(e^{i\alpha}\xi_1, e^{i\beta}\xi_2)|^2} < M$$

для любых $(\xi_1,\xi_2)\in \mathcal{D}$ и $0<\alpha,\ \beta<2\pi$.

Таким образом, если f нормальна в $\mathcal{D}$, то существует константа $M>0$, такая, что для всех $(z_1,z_2)\in \mathcal{D}$ выполнено неравенство

$$\frac{|f_1'(z_1,z_2)|(1-|z_1|^2)+|f_2'(z_1,z_2)|(1-|z_2|^2)}{1+|f(z_1,z_2)|^2} < M. \tag{9.2}$$

Положим, выполнено условие (9.2). Тогда в силу (7.2) получим

$$\rho_0(F, z_1, z_2)(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2) <$$

$$< M(1-|z_1|^2+1-|z_2|^2) < 2M.$$

Отсюда, для всех $(z_1,z_2)\in \mathcal{D}$ имеем

$$\rho_0(F, z_1, z_2) = \rho_0(f, \varphi_1(z_1), \varphi_2(z_2)) \leq$$

$$\leq \frac{2M}{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)},$$

где константа M не зависит от φ_k, $k=1,2$. Стало быть, для семейства $\mathcal{F}_0(f) = \{f(\varphi_1, \varphi_2)\}$ выполнено условие теоремы (I.2), а потому $\mathcal{F}_0(f)$ – нормальное семейство в области D. Итак, f – нормальная функция в области D. Таким образом, доказана следующая

Теорема 2.2. Пусть f – мероморфная функция на $D = D_1 \times D_2$. Функция f будет нормальной в D тогда и только тогда, если существует константа $M>0$, такая, что для всех $(z, w) \in D$ имеем

$$\frac{|f_z'(z,w)|(1-|z|^2) + |f_w'(z,w)|(1-|w|^2)}{1+|f(z,w)|^2} \leq M.$$

3°. Изучение граничных свойств нормальных функций одной переменной существенно опирается на известную теорему Линделёфа (см. /4/, стр.I7). Многомерный аналог указанной теоремы имеет многочисленные варианты, рассмотренные, в частности, в работах /I0/, /II/. В указанных работах авторы налагают ограничения на гладкость границы и требуют ограниченности функции либо в целой области, либо на ее части.

Мы рассмотрим иной вариант теоремы Линделёфа. Для этого введем множества

$$B_k = \left\{ z_k,\ 0<|z_k|<\infty,\ 0<\arg z_k<\frac{\pi}{2} \right\},\quad k=1,2,$$
$$B = B_1 \times B_2 .$$

Справедлива следующая

Теорема 3.2. Пусть f – мероморфная и нормальная функция на B. Если

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x+ix,\ y+iy)=0, \tag{10.2}$$

то для любого $\delta>0$

$$\lim f(z_1, z_2)=0,$$

когда $z_1\to 0,\ z_2\to 0,\ \delta\le \arg z_k\le \frac{\pi}{2}-\delta,\ k=1,2.$

Доказательство. Введем семейство функций

$$\mathcal{F}=\left\{ \varphi_{m,n}(z,w)=f\left(\frac{z}{m},\frac{w}{n}\right)\right\},\quad m,n=\overline{1,\infty}, \tag{11.2}$$

где $(z,w)\in B$. Очевидно, что выражение $\frac{z}{m}$ конформно отображает область B_k на себя, $k=1,2$. Далее в силу леммы 4 множество

$$H=\left\{z;\ \arg z=\frac{\pi}{4}\right\}\times\left\{z;\ \arg z=\frac{\pi}{4}\right\}$$

имеет более чем одну предельную точку бесконечного порядка и на основании (10.2) для всех $(z,w)\in H$ имеем

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \varphi_{m,n}(z,w)=0.$$

Из последних замечаний, в силу предложения 5 и леммы 3, для любого $\delta>0$ на множестве

$$H_\delta=\{(z,w),\ \delta\leq \arg z,\ \arg w\leq\frac{\pi}{2}-\delta,\ \delta\leq|z|,|w|\leq\frac{1}{\delta}\}$$

двойная последовательность $(\varphi_{m,n})$ сходится равномерно к нулю. Допустим

$$\overline{\lim}\,|f(z,w)|=\eta>0,$$

когда $z\to 0,\ w\to 0$ и $\delta\leq\arg z,\ \arg w\leq\frac{\pi}{2}-\delta.$

Положим

$$B(\delta)=\{(z,w).\ \delta\leq\arg z,\ \arg w\leq\frac{\pi}{2}-\delta\}.$$

Для $\eta/2$ существует последовательность точек $(z_k,w_k)\in B(\delta)$, $k=1,2,$ таких, что $\lim z_k=\lim w_k=0$,

$$|f(z_k,w_k)|\geq\eta/2,\quad k=1,2. \tag{12.2}$$

Для каждой точки z_k, w_k существуют натуральные числа m_k и n_k такие, что

$$\delta\leq|z_k|n_k,\ |w_k|m_k\leq 1/\delta,\quad k\geq 1.$$

4

Пусть $u_k = n_k z_k$, $v_k = m_k w_k$. Очевидно, что $(u_k, v_k) \in H_\delta$ для всех $k \geq 1$. С другой стороны, в силу (II.2) и (I2.2) имеем

$$\left|\varphi_{n_k m_k}(u_k, v_k)\right| = \left| f\left(\frac{u_k}{n_k}, \frac{v_k}{m_k}\right)\right| \geq \eta, \quad k \geq 1.$$

Следовательно, двойная последовательность $(\varphi_{m,n})$ не сходится равномерно к нулю на множестве H_δ. Получили противоречие. Таким образом, допущение неверно и теорема доказана. Аналогично доказывается

Теорема 4.2. Пусть f – нормальная функция на B. Если выполнено равенство (I0.2) при $x \to 0$, $y \to 0$, $1/\lambda < \frac{x}{y} < \lambda$, то для любых $\delta > 0$, $1 < \lambda' < \lambda$ имеем

$$\lim f(z, w) = 0,$$

когда $z \to 0$, $w \to 0$, $\delta < \arg z$, $\arg w < \frac{\pi}{2} - \delta$, $1/\lambda' < \frac{x}{y} < \lambda'$.

Доказательство. В силу леммы 4 множество

$$H_\lambda = \left\{(z, w), \arg z = \arg w = \frac{\pi}{4}, (z, w) \in B, 1/\lambda < \frac{|z|}{|w|} < \lambda\right\},$$

$$\lambda > 1,$$

имеет более чем одну предельную точку бесконечного порядка и на основании условия теоремы для всех $(z, w) \in H'_\lambda$, $1 < \lambda' < \lambda$, имеем

$$\lim \varphi_{m,n}(z,w)=0,$$

когда $m\to\infty$, $n\to\infty$ и $\frac{\lambda'}{\lambda}<\frac{m}{n}<\frac{\lambda}{\lambda'}$. На основании последнего равенства и леммы 3 двойная последовательность $(\varphi_{m,n})$ сходится к нулю при $m\to\infty$, $n\to\infty$, $\frac{\lambda'}{\lambda}<\frac{m}{n}<\frac{\lambda}{\lambda'}$ равномерно на множестве

$$H(\delta,\mu,\lambda')=\{(z,w),\ \delta\le\arg z,\ \arg w\le\frac{\pi}{2}-\delta,\ \mu\le|z|,|w|\le$$

$$\le\frac{1}{\mu},\ 1/\lambda'\le\frac{|z|}{|w|}\le\lambda'\}.$$

Теперь допустим, что

$$\overline{\lim}\,|f(z,w)|=\eta>0, \tag{12.2}$$

когда $z\to 0$, $w\to 0$, $\delta\le\arg z$, $\arg w\le\frac{\pi}{2}-\delta$, $1/\lambda'<\frac{|z|}{|w|}<\lambda'$.

Пусть

$$B(\delta,\lambda)=\{(z,w),\ \delta\le\arg z,\ \arg w\le\frac{\pi}{2}-\delta,\ 1/\lambda<\frac{|z|}{|w|}<\lambda\}.$$

В силу (12.2) существует последовательность точек $(z_k,w_k)\in \overset{\circ}{B}(\delta,\lambda')$, $k>1$, таких, что

$$|f(z_k,w_k)|>\eta/2,\quad k=\overline{1,\infty}. \tag{13.2}$$

Для каждой точки z_k, как и выше, подберем число n_k так, чтобы

$$\delta \leq n_k |z_k| \leq 1/\delta, \quad k=\overline{1,\infty}.$$

Так как $(z_k, w_k) \in B(\delta, \Lambda')$, то имеем

$$|w_k n_k| \leq \Lambda' |z_k| n_k \leq \frac{\Lambda'}{\delta}, \ |w_k n_k| \geq \frac{1}{\Lambda'} |z_k| n_k \geq \frac{\delta}{\Lambda'}, \quad k \geq 1.$$

Таким образом, точки $(u_k, v_k) = (n_k z_k, n_k w_k)$ принадлежат множеству $H(\delta, 1/\delta, \Lambda')$, а потому

$$\lim_{k\to\infty} \left|\varphi_{n_k n_k}(u_k, v_k)\right| = \lim_{k\to\infty} \left|f\left(\frac{u_k}{n_k}, \frac{v_k}{n_k}\right)\right| = 0.$$

Последнее равенство противоречит (13.2). Стало быть, допущение неверно. Итак

$$\lim |f(z,w)| = 0,$$

когда $z \to 0$, $w \to 0$, $\delta \leq \arg z$, $\arg w \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, $1/\Lambda' < \frac{|z|}{|w|} < \Lambda'$.

Теорема доказана.

Применяя конформные отображения каждой области B_k, $k=1,2$, и учитывая предложение 7, условие (10.2) в теоремах (3.2) и (4.2) можно заменить соответственно на следующее

$$\lim f(x+i\varphi(x),\ y+i\psi(y)) = 0, \tag{10.2}$$

когда $x \to 0$, $y \to 0$ $\left(1/A < \frac{\sqrt{x^2+\varphi^2(x)}}{\sqrt{y^2+\psi^2(y)}} < A \right)$, где φ и ψ – непрерывные функции на некотором сегменте $(0,\delta)$, $\varphi(0)=\psi(0)=0$. Далее прямолинейные границы области B_K могут быть заменены непрерывными линиями L_1 и L_2, исходящими из начала координат, при этом L_1 и L_2 не должны касаться в точке $(0,0)$. Опираясь на приведенные замечания, легко доказать следующую теорему.

Теорема (5.2). Пусть f – мероморфная и нормальная в бикруге $D=D_1 \times D_2$. Если в некоторой точке $t_K \in \Gamma_K$, $K=1,2$, существует непрерывная простая линия $\ell_K \subset D_K$ и оканчивающаяся в точке t_K, $K=1,2$, так, что

$$\lim f(z,w)=a, \tag{14.2}$$

когда $z \to t_1$, $w \to t_2$, $(z,w) \in \ell_1 \times \ell_2$, то в точке (t_1,t_2) f имеет угловое граничное значение, равное a.

Если (14.2) имеет место при $z \to t_1$, $w \to t_2$, $(z,w) \in L$, $1/A < \frac{|z-t_1|}{|w-t_2|} < A$, то f будет иметь A – угловое граничное значение, равное a.

Теперь рассмотрим нормальные функции по каждой переменной в отдельности. Пусть f – мероморфная функция в $D=D_1 \times D_2$. Скажем, что f является нормальной в области D относительно переменной z, если семейство $\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_1(f)=$

$=\{f(\varphi(z),w)\}$, $\varphi \in S(D_1)$, нормально в облас–

ти D . Заметим, что приведенное определение существенно отличается от понятия нормальности функции f по переменной z при фиксированном $w=w_0$. Справедлива следующая

Теорема (6.2). Пусть f - мероморфная функция в D. Функция f будет нормальной в D относительно z тогда и только тогда, когда для любого компакта $Q\in D_2$ существует константа $M>0$ такая, что

$$\frac{|f_1'(z,w)|(1-|z|^2)+|f_2'(z,w)|}{1+|f(z,w)|^2}\le M \tag{15.2}$$

для всех $z\in D_1$, $w\in Q$.

Доказательство. Пусть f - нормальна в бицилиндре D. Тогда в силу теоремы (I.2) для любого компактного множества $Q=Q_1\times Q_2$, $Q_k\subset D_k$, $k=1,2$, существует константа $M>0$ такая, что

$$\frac{|f_1'(\varphi(z),w)|\,|\varphi'(z)|+|f_2'(\varphi(z),w)|}{1+|f(\varphi(z),w)|^2}\le M$$

для всех $z\in Q_1$; $w\in Q_2$ и любой функции $\varphi\in S(D_1)$. Отсюда получаем

$$\frac{|f_1'(e^{i\alpha}\xi,w)|(1-|\xi|^2)+|f_2'(e^{i\alpha}\xi,w)|}{1+|f(e^{i\alpha}\xi,w)|^2}\le M$$

для любой точки $\xi \in D_1$, $w \in Q_2$ и $0 \leq \alpha < 2\pi$. Итак, если f является нормальной функцией в D относительно z то выполнено (15.2). Теперь, допустим, выполнено (15.2). Тогда в силу (7.2) получаем

$$\frac{|f_1'(\varphi(z),w)\cdot w||\varphi'(z)|+|f_2'(\varphi(z),w)|}{1+|f(\varphi(z),w)|^2} \leq \frac{M}{1-|z|^2},$$

где $M>0$ не зависит от φ и точек $z \in D_1$, $w \in Q_2$. Отсюда и на основании теоремы (1.2) функция f нормальна в D относительно z и теорема доказана.

Тбилисский математический институт им. А.М.Размадзе АН ГССР

Литература

1. С.Сакс. Теория интеграла. И Л ,М.,1949.
2. П.Монтель. Нормальные семейства аналитических функций. М.-Л.,1936.
3. L.Ahlfors. Complex analysis. McGraw-Hill-Book Company. Inc. 1953.
4. К.Носиро. Предельные множества. ИЛ,М.,1963.
5. F.Bagemihl. Ann. Acad. Sci. Fen. Ser. AI, N 299, 1961, 1-6.
6. В.И.Гаврилов. ДАН СССР, 138, № 1, 1967, 16-18.
7. В.И.Гаврилов. ДАН СССР, 141, № 3, 1961, 525-526.
8. Lehto, Olli and Virtanen. Acta Math. 97, 1-2, 1957.
9. В.П.Довбуш. Вестник МГУ, серия I, № I, 1981, 38-42.

10. Е.М.Чирка. Мат.сб., 1973, т.92, № 4.
11. Ю.Н.Дрожжинов, Б.И.Завьялов. ДАН СССР, 1982, т.262, № 2.

ა. ჯვარშეიშვილი

ნორმალური ფუნქციები

რეზიუმე

სტატიაში განხილულია ორი ცვლადის ნორმალური ანალიზური ფუნქციები. მიღებულია ნორმალურობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები. შესწავლილია აღნიშნული კლასის ფუნქციების სასაზღვრო თვისებები.

A.Jvarsheishvili

NORMAL FUNCTIONS

Summary

Normal analytic functions of two variables are considered. The necessary and sufficient conditions for the function to be normal are obtained. The boundary properties of these functions are investigated.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
259, 1985

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ИЗОЛИРОВАННЫХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН

Л.Г.Добордгинидзе

В данной работе рассматривается плоская задача нелинейной теории прямолинейных трещин в упругих телах из материала гармонического типа /I/. При этом нелинейность задачи обусловлена нелинейностью упругого материала, окружающего трещину. Следовательно, рассматриваемый материал вне трещины мы принимаем за идеально хрупкий, т.е. способным сохранить свойство нелинейной упругости в смысле /I/, вплоть до разрушения.

Ниже, в условиях плоской деформации, будем рассматривать равновесные трещины (в нелинейно хрупких телах), т.е. трещины, которые сохраняют постоянные размеры в процессе деформации. Предполагается, что рассматриваемые силы в процессе деформации сохраняют свою ориентацию по отношению к деформируемому контуру.

Отметим, что линейным задачам прямолинейных равновесных трещин посвящен ряд исследований как в Советском Союзе, так и за рубежом. Библиографию и краткий обзор некоторых из этих работ можно найти, например, в /2/, /3/.

Следует заметить, что плоские задачи теории равновеных трещин носят нелинейный характер, поскольку в этих задачах граничные условия задаются на деформируемой поверхности исследуемого тела. Так что граница изучаемой физической области заранее не известна. А именно, определение размеров трещины как раз и является одной из основных задач теории трещин /2/.

Это замечание, конечно, нисколько не умаляет значения известных уже по этой тематике работ, выполненных по линейной теории трещин, особенно /2/, /3/, но тем не менее дает повод для рассмотрения этих задач в нелинейной постановке в указанном смысле.

§ I. Постановка задачи. Некоторые предположения

В бесконечной плоскости переменной $z=x+iy$ из гармонического упругого материала /2/ рассмотрим прямолинейную равновесную трещину, занимающую отрезок $[ab]$ действительной оси ox.

Предположим, что $F_н(x)$ характеризует распределение заданных на берегах щели нормальных напряжений, а на бесконечности реализуется двухосное растяжение с интенсивностями $N_1=const$ (вдоль оси ox) и $N_2=const$ (вдоль оси oy). Вращение на бесконечности принимается равным нулю.

Значит, на самой щели /4/

$$X_y=0, \qquad Y_y=F_н(x), \tag{I.I}$$

а на бесконечности

$$X_x^{(\infty)}=N_1, \quad Y_y^{(\infty)}=N_2, \quad X_y^{(\infty)}=0. \tag{I.2}$$

где X_x, Y_y, X_y – компоненты тензора напряжений Коши.

Далее мы принимаем следующие предположения /2/.

I. Ширина концевой области трещины, т.е. размеры той части контура трещины, на которой действуют силы сцепления, пренебрежимо мала по сравнению с размерами всей трещины.

2. Распределение смещений в концевой области трещины не зависит от действующих нагрузок и для данного материала и при данных условиях всегда одинаково.

3. Напряжения на концах трещины все время остаются конечными.

В этих условиях ищется неизвестная длина трещины, а также картина распределения напряжений и смещений в упругой области вне трещины.

§ 2. Сведение задачи к нелинейному функциональному уравнению. Вывод условия равновесия трещины

I. Для решения задачи используем выведенное в /5/ комплексное представление полей напряжений и смещений в области вне трещины через две комплексные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$:

$$X_x + Y_y + 4\mu = \frac{\lambda+2\mu}{\sqrt{J}} q\Omega(q),$$
$$Y_y - X_x - 2iX_y = -\frac{4(\lambda+2\mu)}{\sqrt{J}}\frac{\Omega(q)}{q}\frac{\partial z^*}{\partial z}\frac{\partial z^*}{\partial \bar{z}}, \tag{2.1}$$

$$u + iv = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\int \varphi'^2(z)\,dz + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\varphi(z)}{\overline{\varphi'(z)}} + \overline{\psi(z)}\right]. \tag{2.2}$$

Здесь введены обозначения:

$$\frac{\partial z^*}{\partial z}=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\varphi'^2(z)+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\varphi'(z)}{\overline{\varphi'(z)}},$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial \bar z}=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\varphi(z)\overline{\varphi''(z)}}{\overline{\varphi'^2(z)}}-\overline{\psi'(z)}\right], \tag{2.3}$$

$$q=2\left|\frac{\partial z^*}{\partial z}\right|, \quad \sqrt{J}=\frac{\partial z^*}{\partial z}\frac{\partial \bar z^*}{\partial \bar z}-\frac{\partial z^*}{\partial \bar z}\frac{\partial \bar z^*}{\partial z}, \quad z^*=z+u+iv, \tag{2.4}$$

$$\Omega(q)=q-\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}.$$

В этих соотношениях X_x, Y_y, X_y суть компоненты напряжений, а u, v - компоненты смещений в декартовых координатах, λ, μ - упругие постоянные Ламе.

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ при больших $|z|$ имеют представления

$$\varphi(z)=-\frac{X+iY}{8\pi\mu a_0}\ln z+a_0 z+\varphi_0(z), \tag{2.5}$$

$$\psi(z)=-\frac{X-iY}{4\pi}\left[\frac{1}{\lambda+\mu}+\frac{1}{2\mu a_0\varphi'(z)}\right]\ln z+b_0 z+\psi_0(z), \tag{2.6}$$

где X, Y - компоненты главного вектора всех внешних сил, приложенных к краям щели, а

$$a_0=\sqrt{\frac{\lambda+\mu}{\mu}\,\frac{2\mu(N_1+N_2)+N_1N_2+4\mu^2}{\lambda(N_1+N_2)-N_1N_2+4\mu(\lambda+\mu)}},$$

$$b_0=\frac{(\lambda+2\mu)(N_1-N_2)e^{i\alpha}}{\lambda(N_1+N_2)-N_1N_2+4\mu(\lambda+\mu)}. \tag{2.7}$$

В последнем соотношении α - угол, который главная ось, соответствующая главному напряжению N_1, образует с осью Ox. Кроме этого,

$$\varphi'(\zeta) \neq 0 \tag{2.8}$$

всюду в рассматриваемой области.

Распределение напряжений на контуре щели характеризуется соотношением /6/

$$\frac{\mu}{1+\mu}\varphi'^2(x) + \frac{\varphi'(x)}{\overline{\varphi'(x)}} - \frac{\varphi(x)\overline{\varphi''(x)}}{\overline{\varphi'^2(x)}} + \overline{\varphi'(x)} = \tag{2.9}$$

$$= \frac{1+2\mu}{1+\mu} f(x)\varphi'^2(x) \qquad \text{на} \quad [ab],$$

где $f(x)$ - заданная на $[ab]$ функция,

$$f(x) = \frac{2\mu}{2\mu + F_n(x)}. \tag{2.10}$$

Далее мы будем предполагать, что $X=0$, $Y=0$, $\alpha=0$, т.е. будем рассматривать случай симметричного нагружения.

С целью симметризации задачи введем новые координаты x', y' соотношением

$$x' = x - \frac{a+b}{2}, \quad y' = y. \tag{2.11}$$

Тогда, в новой системе координат рассматриваемая трещина будет расположена симметрично относительно точки $x'=0$.

2. Отобразим рассматриваемую физическую область вне трещины конформно и взаимно однозначно на внешность единичного круга $|\zeta|>1$ плоскости переменной $\zeta=\xi+i\eta=re^{i\theta}$. Такое преобразование, как известно, осуществляется функцией

$$z' = x' + iy' = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \quad R = \frac{\ell}{2}, \tag{2.12}$$

где ℓ – полудлина трещины. В преобразованной области сохраним для рассматриваемых функций старые обозначения (например, будем полагать $\varphi(\sigma) = \varphi(x') = \varphi(x)$ и т.д.).

Тогда на границе $|\zeta| = 1$, обозначаемой далее через γ , условие (2.9) примет вид:

$$\frac{\mu}{1+\mu}\,\frac{\varphi'^2(\sigma)}{\omega'(\sigma)} + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\overline{\omega'(\sigma)}\varphi(\sigma)}{\overline{\varphi'(\sigma)}}\right) - \tag{2.13}$$

$$-\frac{(1+2\mu)f(\sigma)\varphi'^2(\sigma)}{(1+\mu)\omega'(\sigma)} = \bar{\sigma}^2\,\overline{\varphi'(\sigma)}\,.$$

Отсюда с использованием известного метода Н.И.Мусхелишвили (метод конформных отображений и интегралов типа Коши) /4/ на основании (2.5), (2.6), (2.11), (2.12) (учитывая, что $T = 0$, $Y = 0$) получим после известных рассуждений и преобразований /6/

$$\frac{\mu}{1+\mu}\,\frac{\varphi'^2(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega'(\sigma)}\varphi(\sigma)\,d\sigma}{\overline{\varphi'(\sigma)}(\sigma-\zeta)^2} +$$

$$+\frac{1+2\mu}{2\pi i(1+\mu)}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\sigma)\varphi'^2(\sigma)\,d\sigma}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)} = \frac{\mu R a_0^2}{1+\mu} + \frac{b_0 R}{\zeta^2}$$

при $|\zeta| > 1$. (2.14)

Это равенство представляет собой нелинейное функциональное уравнение для определения функции $\varphi(\zeta)$ в области $|\zeta| > 1$.

Введем обозначение

$$F(\sigma) = 1 - f(\sigma) = \frac{F_H}{2\mu + F_H} \tag{2.15}$$

и заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi'^2(\sigma)d\sigma}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)} = -\frac{\varphi'^2(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + Ra_0^2. \tag{2.16}$$

Учитывая эти соотношения в (2.14), получим

$$\frac{\varphi'^2(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega'(\sigma)}\,\varphi(\sigma)d\sigma}{\overline{\varphi'(\sigma)}(\sigma-\zeta)^2} + \tag{2.17}$$

$$+\ \frac{1+2\mu}{2\pi i(1+\mu)}\int_\gamma \frac{F(\sigma)\varphi'^2(\sigma)d\sigma}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)} = R\left(a_0^2 - \frac{b_0}{\zeta^2}\right).$$

Как показано в работе /7/, условия (1.1) приводят к равенству

$$\int_\gamma \frac{\overline{\omega'(\sigma)}\,\varphi(\sigma)d\sigma}{\overline{\varphi'(\sigma)}(\sigma-\zeta)^2} = \int_\gamma \frac{\overline{\omega'(\sigma)}\,\varphi'(\sigma)d\sigma}{\overline{\varphi'(\sigma)}(\sigma-\zeta)} \tag{2.18}$$

при $|\zeta|>1$.

На основании (2.18) уравнение (2.17) можно представить в следующем окончательном виде:

$$\frac{\varphi'^2(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega'(\sigma)}\,\varphi'(\sigma)d\sigma}{\overline{\varphi'(\sigma)}(\sigma-\zeta)} + \frac{1+2\mu}{2\pi i(1+\mu)}\int_\gamma \frac{F(\sigma)\varphi'^2(\sigma)d\sigma}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)} =$$

$$= R\left(a_0^2 - \frac{b_0}{\zeta^2}\right) \quad \text{при } |\zeta|>1. \tag{2.19}$$

Это и есть наше основное соотношение, нелинейное функциональное уравнение для определения функции $\varphi(\zeta)$ в области $|\zeta|>1$.

Если нам удастся из (2.19) каким-либо способом найти $\varphi(\zeta)$, то другой искомый потенциал $\psi(\zeta)$ находим по формуле /6/ при $|\zeta|>1$:

$$\psi'(\zeta)=R\left(b_0-\frac{a_0^2}{\zeta^2}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\omega'(\sigma)\overline{\varphi(\sigma)}\,d\sigma}{\varphi'(\sigma)(\sigma-\zeta)^2}+$$

$$+\frac{1+2\mu}{2\pi i(1-\mu)}\int\limits_{\gamma}\frac{\bar{\sigma}^2\overline{f(\sigma)}\,\overline{\varphi'^2(\sigma)}\,d\sigma}{\overline{\omega'(\sigma)}(\sigma-\zeta)^2}. \qquad (2.20)$$

Примем теперь во внимание третье предложение (гипотеза С.А.Христиановича), оформулированное в начале статьи. На основании (2.1), (2.3), (2.12) ясно, что для соблюдения этого условия необходимо выполнение равенства

$$\varphi'(\pm 1)=0. \qquad (2.21)$$

После этого замечания в (2.19) перейдем к пределу, когда $\zeta\to 1$ из области $|\zeta|>1$ по любому пути, и используем известные соотношения Сохоцкого-Племеля. Тогда, с учетом (2.21), получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega'(\sigma)}\,\varphi'(\sigma)d\sigma}{\overline{\varphi'(\sigma)}(\sigma-1)}+$$

$$+\frac{1+2\mu}{2\pi i(1+\mu)}\int\limits_{\gamma}\frac{F(\sigma)\varphi'^2(\sigma)\,d\sigma}{\omega'(\sigma)(\sigma-1)}=R\left(a_0^2-b_0\right). \qquad (2.22)$$

Вернемся теперь к представлению (2.5) и вспомним, что в нашем случае главный вектор приложенных к контуру γ

всех внешних сил равен нулю. Тогда, с использованием (2.12), можно написать

$$\frac{\varphi'^2(\zeta)}{\omega'^2(\zeta)} = a_0^2 + \Phi_0(\zeta), \tag{2.23}$$

где $\Phi_0(\zeta)$ – голоморфная функция в области $|\zeta|>1$. При достаточно больших $|\zeta|$ она допускает представление

$$\Phi_0(\zeta) = \frac{a_2}{\zeta^2} + \frac{a_3}{\zeta^3} + \cdots \tag{2.24}$$

Подставим (2.23) в (2.22) и в полученном равенстве введем обозначение

$$A = \frac{2\pi i(1+\mu)}{1+2\mu}\left(\frac{b_0}{a_0^2} - 1\right) - \frac{1}{a_0^2}\int\limits_\gamma \frac{(1+\sigma)F(\sigma)\Phi_0(\sigma)\,d\sigma}{\sigma^2} - \frac{1+\mu}{(1+2\mu)a_0^2}\int\limits_\gamma \frac{(1+\sigma)\varphi'(\sigma)\,d\sigma}{\overline{\varphi'(\sigma)}}. \tag{2.25}$$

Тогда (2.22) примет вид

$$\int\limits_\gamma \frac{(1+\sigma)F(\sigma)\,d\sigma}{\sigma^2} = A. \tag{2.26}$$

Это условие является следствием условия конечности напряжений на концах трещины, т.е. в точках $\sigma = \pm 1$. Постоянная A в правой части (2.26) есть нелинейный функционал от $\varphi'(\sigma)$ и находится простыми вычислениями из (2.25), после решения нелинейного функционального уравнения (2.19).

В (2.26) перейдем к переменной x по формуле

$$x' = x - \frac{a+b}{2}, \quad x = \frac{a+b}{2} + \ell\cos\theta.$$

Тогда после некоторых вычислений, получим

$$\int\limits_a^b F(x)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx = iH. \tag{2.27}$$

Это и есть условие конечности напряжений на правом конце трещины $x=b$. На левом конце это условие выглядит так:

$$\int\limits_a^b F(x)\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\,dx = iA. \tag{2.28}$$

Заметим здесь же, что эти условия не только необходимы, но и достаточны для ограниченности напряжений на концах трещины. На основании (2.2), (2.12), (2.21) легко убедиться также в том, что эти соотношения обеспечивают плавное смыкание противоположных берегов разреза $[ab]$ на его концах ((2.27) – на правый конец, (2.28) – на левый).

Обозначим теперь через $N(x)$ нормальные напряжения, которые возникают в бесконечном теле на месте разреза $[ab]$ при действии заданных напряжений. Кроме этого введем обозначение

$$K_0 = \frac{1}{2\mu}K = \int\limits_0^d \frac{G(t)}{2\mu + G(t)}\cdot\frac{dt}{\sqrt{t}}, \tag{2.29}$$

где K – модуль сцепления, G – интенсивность сил сцепления, d – ширина концевой области.

Обратимся к левой части (2.27) и подвергнем его преобразованию с использованием предположений I и 2, сформулированных в начале статьи. Тогда, следуя рассуждению, приведенному в /3/, получим

$$\int_a^b N(x)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx = K_0\sqrt{b-a} + iA \qquad (2.30)$$

на конце $x=b$ и

$$\int_a^b N(x)\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\,dx = K_0\sqrt{b-a} + iA \qquad (2.31)$$

на кромке $x=a$.

Эти соотношения служат для определения концов трещины a и b. Здесь $N(x)$ считается известной в том смысле, что она должна быть определена после решения соответствующей нелинейной задачи теории упругости для материала гармонического типа.

В симметричном случае $(a=-l,\ b=l,\ N(x)=N(-x))$ (2.30) и (2.31) сводятся к следующему одному условию:

$$\int_{-l}^{l} N(x)\sqrt{\frac{l-x}{l+x}}\,dx = K_0\sqrt{2l} + iA, \qquad (2.32)$$

или

$$\int_{-l}^{l} \frac{N(x)\,dx}{\sqrt{l^2-x^2}} = \frac{K_0}{\sqrt{2l}} + iA. \qquad (2.33)$$

Этим исчерпывается решение задачи.

Как видно, главная трудность заключается в решении нелинейного функционального уравнения (2.19), из которого определяем значения $N(x)$ на щели и постоянную A.

В следующем параграфе ищется эффективный способ решения этой задачи.

§ 3. К нахождению точного решения нелинейного функционального уравнения (2.19)

Введенное в предыдущем параграфе уравнение нашей задачи имеет вид:

$$\frac{\varphi'^2(\zeta)}{\omega'(\zeta)}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega'(\sigma)}\,\varphi'(\sigma)\,d\sigma}{\overline{\varphi'(\sigma)}(\sigma-\zeta)}+ \tag{3.1}$$

$$+\frac{1+2\mu}{2\pi i(1+\mu)}\int_\gamma \frac{F(\sigma)\,\varphi'^2(\sigma)\,d\sigma}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)}=R\left(a_0^2-\frac{b_0}{\zeta^2}\right).$$

В дальнейшем будем предполагать, что напряжения на бесконечности отсутствуют $(a_0=1,\ b_0=0)$, а на контуре щели они распределены равномерно, т.е. принимают одно постоянное значение, допустим N_0.

Тогда будем иметь

$$\frac{\varphi'^2(\zeta)}{\omega'(\zeta)}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega'(\sigma)}\,\varphi'(\sigma)\,d\sigma}{\overline{\varphi'(\sigma)}(\sigma-\zeta)}+$$

$$+\frac{1+2\mu}{2\pi i(1+\mu)}\,\frac{N_0}{2\mu+N_0}\int_\gamma \frac{\varphi'^2(\sigma)\,d\sigma}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)}=R,$$

или, что все равно,

$$\frac{2\mu(1+\mu)-\mu N_0}{(1+\mu)(2\mu+N_0)}\,\frac{\varphi'^2(\zeta)}{\omega'(\zeta)}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega'(\sigma)}\,\varphi'(\sigma)\,d\sigma}{\overline{\varphi'(\sigma)}(\sigma-\zeta)}= \tag{3.2}$$

$$=\mu R\cdot\frac{2(1+\mu)-N_0}{(1+\mu)(2\mu+N_0)} \qquad \text{при } |\zeta|>1.$$

Обратимся к формуле (2.1) и учтем в ней (1.1). Тогда, после простых вычислений, получим на контуре щели $[a\,b]$

$$Y_y = \frac{2\mu(1+\mu)\left[\left|\varphi'^2(x)\right|-1\right]}{1+\mu+\mu\left|\varphi'^2(x)\right|}. \tag{3.3}$$

Учитывая, что на щели $Y_y = N_0$, из этого соотношения находим в преобразованной области

$$\left|\frac{\varphi'^2(\sigma)}{\omega'^2(\sigma)}\right| = \frac{1+\mu}{\mu}\,\frac{N_0+2\mu}{2(1+\mu)-N_0} = d = const \quad \text{на } \gamma. \tag{3.4}$$

Далее заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega'(\sigma)}\,\varphi'(\sigma)\,d\sigma}{\overline{\varphi'(\sigma)}\,(\sigma-\zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\left|\frac{\omega'(\sigma)}{\varphi'(\sigma)}\right|^2\frac{\varphi'^2(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\,\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i\alpha^2}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi'^2(\sigma)\,d\sigma}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)} = \frac{1}{\alpha^2}\left(-\frac{\varphi'^2(\zeta)}{\omega'(\zeta)}+R\right). \tag{3.5}$$

Учитывая это равенство в левой части (3.2), убеждаемся, что оно переходит в тождество. Это значит, что нелинейное функциональное уравнение (3.2) имеет следующее точное решение (из известного свойства голоморфной в области $|\zeta|\geq 1$ функции)

$$\varphi'(\zeta) = \sqrt{\alpha}\;\omega'(\zeta), \tag{3.6}$$

где α $(\alpha>0)$ определяется формулой

$$\alpha = \frac{\lambda+\mu}{\mu} \quad \frac{\nu_0+2\mu}{2(\lambda+\mu)-\nu_0} \tag{3.7}$$

Вернемся к условию (2.26). Из (2.23) и (3.6) ясно, что

$$\Phi_0(\zeta)=0$$

в рассматриваемой области. Затем, подставляя (3.6) в правую часть (2.25), легко убеждаемся после элементарных вычислений, что

$$A=0.$$

Следовательно, условие конечности напряжений (2.26) в нашем случае примет вид

$$\int_a^b F(x)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx=0 \quad \text{или} \quad \int_a^b F(x)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx=0. \tag{3.8}$$

Значит

$$\int_a^b N(x)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx=K_0\sqrt{b-a}$$

или

$$\int_a^b N(x)\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\,dx=K_0\sqrt{b-a}. \tag{3.9}$$

В симметричном же случае $(a=-\ell,\ b=\ell)$ будем иметь одно равенство

$$\int_{-\ell}^{\ell} N(x)\sqrt{\frac{\ell-x}{\ell+x}}\,dx=K_0\sqrt{2\ell}. \tag{3.10}$$

Проиллюстрируем сказанное на следующем примере.

§ 4. Трещина под действием равномерного давления, приложенного к ее краям

Пусть трещина образуется под действием нормального раскрывающего напряжения N_0, распределенного по всей длине трещины. Напряжения на бесконечности отсутствуют. Рассмотрим симметричный случай $(a=-\ell,\ b=\ell)$.

Имеем

$$N(x)=\frac{N_0}{2\mu+N_0}\,. \tag{4.1}$$

Подставим это выражение в левую часть (3.10). Тогда после элементарных вычислений получим

$$\ell=\frac{2K^2}{\pi^2}\left(\frac{2\mu+N_0}{2\mu N_0}\right)^2. \tag{4.2}$$

Это и есть искомая формула в нашем нелинейном случае. Она определяет полудлину ℓ трещины через действующую нагрузку и модуль сил сцепления. Для сравнения с линейным, классическим случаем представим ее так:

$$\ell=\frac{2K^2}{\pi^2 N_0^2}\left(1+\frac{N_0}{2\mu}\right)^2. \tag{4.3}$$

Напомним, что по линейной теории

$$\ell=\frac{2K_*^2}{\pi^2 N_0^2}\,, \tag{4.4}$$

где

$$K_* = \int_0^d G(t)\frac{dt}{\sqrt{t}} . \tag{4.5}$$

Из (2.29) следует

$$K = K_* + K_1 , \tag{4.6}$$

где K_* – модуль сцепления по линейной теории, а

$$K_1 = -\int_0^d \frac{G^2(t)}{2\mu + G(t)} \cdot \frac{dt}{\sqrt{t}} . \tag{4.7}$$

Тогда формулу (4.3) можно будет представить так:

$$\sqrt{\ell} = \frac{\sqrt{2}(K_* + K_1)}{\pi N_0}\left(1 + \frac{N_0}{2\mu}\right) = \frac{\sqrt{2}K_*}{\pi N_0} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{K_1 + K_*}{2\mu} + \frac{K_1}{N_0}\right) , \tag{4.8}$$

где первое слагаемое в последнем равенстве соответствует решению по линейной классической теории.

Наиболее характерным для формулы (4.3) по сравнению с (4.4) является зависимость размера трещины от упругих свойств материала.

§ 5. Случай кусочно-постоянного нагружения контура трещины

Рассмотрим случай, когда часть контура трещины длиной $2\ell_0$ подвергается действию равномерно растягивающего усилия с интенсивностью N_0 , а остальная часть – усилию с интенсивностью M_0 . Задачи такого рода возникают, например, в теории горных пород, при гидравлическом разрыве нефтеносного пласта /8/.

Пусть на части $L_1=[z_1 z_2]\cup[\bar{z}_1 \bar{z}_2]$ разреза $L=[ab]$ действует равномерное разрывающее давление с интенсивностью N_0, а на остальной части трещины – давление с интенсивностью M_0. Напряжения и вращение на бесконечности отсутствуют (рис.I).

Значит имеем

$$Y_y=\begin{cases} N_0 & \text{на } L_1, \\ M_0 & \text{на } L_2 . \end{cases} \tag{5.I}$$

Обозначим образы точек z_1, z_2 при отображения (2.II), (2.I2), через $\sigma_1=e^{i\theta_1}$ и $\sigma_2=e^{i\theta_2}$ соответственно. Очевидно $\sigma_1=-\bar{\sigma}_2$. Далее, пусть $\gamma_1=\breve{\sigma_1\sigma_2}\cup\breve{\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2}$, $\gamma_2=\gamma\setminus\gamma_2$ (рис.2). В этих условиях формула (3.3) дает

$$\left|\frac{\varphi'^2(\sigma)}{\omega'^2(\sigma)}\right|=\begin{cases} \dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\cdot\dfrac{N_0+2\mu}{2(\lambda+\mu)-N_0}=\alpha & \text{на } \gamma_1, \\[2ex] \dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\cdot\dfrac{M_0+2\mu}{2(\lambda+\mu)-M_0} & \text{на } \gamma_2 . \end{cases} \tag{5.2}$$

Функциональное уравнение (2.19) в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\frac{\varphi'^2(\zeta)}{\omega'(\zeta)}+\frac{1}{2\pi i\alpha}\int\limits_{\gamma_1}\frac{\varphi'^2(\sigma)\,d\sigma}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)}+\frac{1}{2\pi i\beta}\int\limits_{\gamma_2}\frac{\varphi'^2(\sigma)\,d\sigma}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)}+$$

$$+\frac{\lambda+2\mu}{2\pi i(\lambda+\mu)}\cdot\frac{N_0}{2\mu+N_0}\int\limits_{\gamma_1}\frac{\varphi'^2(\sigma)\,d\sigma}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)}+ \tag{5.3}$$

7

$$+\frac{1+2\mu}{2\pi i(1+\mu)}\cdot\frac{M_0}{2\mu+M_0}\int\limits_{\gamma_2}\frac{\varphi'^2(\sigma)d\sigma}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)}=R,$$

или, что все равно

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{\alpha}-1+\frac{(1+2\mu)N_0}{(1+\mu)(2\mu+N_0)}\right]\int\limits_{\gamma_1}\frac{\varphi'^2(\sigma)d\sigma}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{\beta}-1+\frac{(1+2\mu)M_0}{(1+\mu)(2\mu+M_0)}\right]\int\limits_{\gamma_2}\frac{\varphi'^2(\sigma)d\sigma}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)}=0 \quad (5.4)$$

при $|\zeta|>1$.

Подставляя сюда значение α и β из (5.2)

$$\alpha=\frac{1+\mu}{\mu}\cdot\frac{N_0+2\mu}{2(1+\mu)-N_0},\qquad \beta=\frac{1+\mu}{\mu}\cdot\frac{M_0+2\mu}{2(1+\mu)-M_0},\qquad (5.5)$$

убеждаемся, что уравнение (5.4) превращается в тождество. Это значит, что уравнение (5.4) имеет следующее точное решение

$$\varphi'(\zeta)=\sqrt{\alpha}\,\omega'(\zeta)\exp\chi(\zeta), \qquad (5.6)$$

где

$$\chi(\zeta)=\arg\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \qquad (5.7)$$

Любопытно отметить, что знание (5.7) для решения (5.4) не обязательно. Но оно необходимо для определения основных параметров задачи, а именно, размеров трещины (из (2.25), (2.26), (2.30), (2.31)) и полей смещений и напряжений в замкнутой области вне трещины (из (2.1), (2.2), (2.3), (2.4)).

Значит наша ближайшая задача состоит в определении голоморфной в области $|\zeta|>1$ функции $\dfrac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$, если на границе γ этой области

$$\left|\frac{\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\right| = \begin{cases} \sqrt{\alpha} = \alpha_0, & \text{когда } \sigma \in \gamma_1, \\ \sqrt{\beta} = \beta_0, & \text{когда } \sigma \in \gamma_2. \end{cases} \tag{5.8}$$

Эта задача, как легко убедиться, имеет (с учетом поведения $\varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta)$ при $\zeta \to \infty$) следующее решение:

$$\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \exp \Omega(\zeta), \tag{5.9}$$

где $\Omega(\zeta)$ определяется в виде

$$\Omega(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_0}{8\pi\zeta} \cdot \dfrac{tg\dfrac{\theta_1-\theta_0}{2} - tg\dfrac{\theta_2-\theta_0}{2}}{1+\dfrac{(\varkappa^2-1)^2}{16\varkappa^2}\left(tg\dfrac{\theta_1-\theta_0}{2} - tg\dfrac{\theta_2-\theta_0}{2}\right)^2} \times \\ \times\left[1+\varkappa^2+i(\varkappa^2-1)\left(tg\dfrac{\theta_1-\theta_0}{2}+tg\dfrac{\theta_2-\theta_0}{2}\right)\right] \\ \qquad\qquad \text{при } \theta_2<\theta_0<\theta_1, \\ \dfrac{\alpha_0}{8\pi\zeta} \cdot \dfrac{tg\dfrac{\theta_1+\theta_0}{2} - tg\dfrac{\theta_2+\theta_0}{2}}{1+\dfrac{(\varkappa^2-1)^2}{16\varkappa^2}\left(tg\dfrac{\theta_1+\theta_0}{2} - tg\dfrac{\theta_2+\theta_0}{2}\right)^2} \times \\ \times\left[1+\varkappa^2+i(\varkappa^2-1)\left(tg\dfrac{\theta_1+\theta_0}{2}+tg\dfrac{\theta_2+\theta_0}{2}\right)\right] \\ \qquad\qquad \text{при } -\theta_1<\theta_0<-\theta_2, \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\beta_0}{8\pi\varkappa}\,\dfrac{tg\,\frac{\theta_1+\theta_0}{2}-tg\,\frac{\theta_1-\theta_0}{2}}{1+\frac{(\varkappa^2-1)^2}{16\varkappa^2}\left(tg\,\frac{\theta_1+\theta_0}{2}+tg\,\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\right)^2}\times \\
\times\left[1+\varkappa^2+i(\varkappa^2-1)\left(tg\,\frac{\theta_1+\theta_0}{2}+tg\,\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\right)\right] \\
\qquad\qquad \text{при } \theta_1<\theta_0<\theta_1+\theta_2\,, \qquad\qquad (5.10) \\
\\
\dfrac{\beta_0}{8\pi\varkappa}\cdot\dfrac{tg\,\frac{\theta_2-\theta_0}{2}-tg\,\frac{\theta_2+\theta_0}{2}}{1+\frac{(\varkappa^2-1)^2}{16\varkappa^2}\left(tg\,\frac{\theta_2-\theta_0}{2}-tg\,\frac{\theta_2+\theta_0}{2}\right)^2}\times \\
\times\left[1+\varkappa^2+i(\varkappa^2-1)\left(tg\,\frac{\theta_2-\theta_0}{2}+tg\,\frac{\theta_2+\theta_0}{2}\right)\right] \\
\qquad\qquad \text{при } -\theta_2<\theta_0<\theta_2
\end{array}\right.$$

Теперь все неизвестные задачи могут быть найдены из указанных формул несложными вычислениями. В частности, непосредственной проверкой, из (2.25), (2.26), (5.9), (5.10) убеждаемся, что

$$A=0$$

и, следовательно

$$\int\limits_{\gamma}\frac{(1+\sigma)F(\sigma)d\sigma}{\sigma^2}=0.$$

В двух следующих параграфах, на интересных для практики случаях реализуются приведенные здесь рассуждения.

§ 6. Трещина, часть края которой подвержена равномерному давлению, а остальная часть свободна от внешних воздействий

Пусть на L_1 действует равномерно распределенное нормальное давление с интенсивностью N_0 , а остальная часть контура свободна от внешних усилий. Значит имеем

$$Y_y = \begin{cases} N_0 & \text{на } L_1, \\ 0 & \text{на } L_2. \end{cases} \tag{6.1}$$

Тогда на основании (5.2) будем иметь

$$\left| \frac{\varphi'^2(\sigma)}{\omega'^2(\sigma)} \right| = \begin{cases} \dfrac{1+\mu}{\mu} \dfrac{2\mu+N_0}{2(1+\mu)-N_0} = \alpha & \text{на } \gamma_1, \\ 1=\beta & \text{на } \gamma_2. \end{cases} \tag{6.2}$$

Тогда будем иметь (мы рассматриваем симметричный случай $a=-\ell$, $b=\ell$) равенство (см. соотношение (5.II))

$$\int_{-\ell_0}^{\ell_0} N(x) \sqrt{\frac{\ell - x}{\ell + x}}\, dx = \frac{K}{2\mu} \sqrt{2\ell}, \tag{6.3}$$

где (см. предыдущий параграф)

$$N(x) = \frac{N_0}{2\mu + N_0},$$

а K - модуль сил сцепления,

$$K = 2\mu \int_0^d \frac{G(t)}{2\mu + G(t)} \frac{dt}{\sqrt{t}}. \tag{6.4}$$

В последней формуле $G(t)$ характеризует распределение сил сцепления на концах трещины, d - ширина концевой области.

Внесем (6.4) в (6.3). Тогда, после элементарных вычислений получим

$$\frac{2\mu N_0}{2\mu + N_0} = \frac{K\sqrt{2\ell}}{2\ell \arcsin \frac{\ell_0}{\ell}} . \qquad (6.6)$$

Это и есть искомое соотношение, определяющее полудлину ℓ трещины через линейного размера загруженный участок контура, действующее на него усилие N_0 и упругую характеристику материала μ.

Вспомним, что по классической линейной теории аналогичная формула имеет вид

$$N_0 = \frac{K_* \sqrt{2\ell}}{2\ell \arcsin \frac{\ell_0}{\ell}} \qquad (6.7)$$

где K_* – модуль сцепления по линейной теории, определяемый равенством

$$K_* = \int_0^d G(t) \frac{dt}{\sqrt{t}} . \qquad (6.8)$$

§ 7. Трещина, образующаяся при помощи сосредоточенных сил, приложенных к противоположным точкам контура

Рассмотрим симметричную задачу, когда к трещине длиной 2ℓ и расположенной симметрично относительно точки $x=0$ в противоположных точках приложены равные по величине (N_0) и противоположные по направлению сосредоточенные силы (рис.3).

Для определения длины трещины из (6.7) перейдем к пределу, когда значение действующей силы стремится к бесконечности при одновременном стремлении к нулю размера участка действия сил. Тогда, после элементарных приведений, получим

$$\frac{2\mu N_0 \ell_0}{2\mu + N_0} = K\sqrt{2\ell}. \qquad (7.1)$$

С целью сравнения (7.1) с линейным классическим случаем представим его так:

$$\ell = \frac{1}{2K^2}\left(\frac{2\mu N_0}{2\mu + N_0}\right)^2 = \frac{N_0^2}{2K^2}\left(1 - \frac{N_0}{2\mu} + \frac{N_0^2}{4\mu^2} - \frac{N_0^3}{8\mu^3} + \cdots\right). \qquad (7.2)$$

По линейной теории, как известно,

$$\ell = \frac{N_0^2}{2K_*},$$

где K_* определяется формулой (6.8)

Тбилисский математический
институт им. А.М.Размадзе
АН ГССР

Литература

I. А.И. Лурье. Нелинейная теория упругости. М.,1980.
2. Г.И.Баренблатт. ПМТФ, № 4, 1961.
3. Г.И.Баренблатт. ПММ, т.XXШ, в. 4, 1959.
4. Н.И.Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математичес-

кой теории упругости. М., 1966.

5. Л.Г.Добордж**г**инидзе. Труды Тбилисского математического института, т. LXI, 1979.
6. Л.Г.Добордж**г**инидзе. Сообщ. АН ГССР, 73, № 3, 1974.
7. Л.Г.Добордж**г**инидзе. Труды Тбилисского математического института, т. LXV, 1983
8. Л.Г.Добордж**г**инидзе. Сообщ. АН ГССР, 71, № 2, 1983.

ლ.დობორჯგინიძე

წრფივი იზოლირებული ბზარების არაწრფივი თეორიის ზოგიერთი ამოცანა

რეზიუმე

ნაშრომში შესწავლილია წრფივი ბზარების არაწრფივი თეორიის ბრტყელი ამოცანა ჰარმონიული ტიპის არაწრფივი დრეკადი მასალისათვის. ამოცანის ამოსახსნელად გამოყენებულია ბზარის გარე არეში დრეკადი ელემენტების ველის კომპლექსური წარმოდგენა ორი ანალიზური ფუნქციის საშუალებით. გამოყვანილია ბზარის წონასწორობის პირობა, რომელშიც მონაწილეობს უცნობი ფუნქცია. ეს უკანასკნელი კი წარმოადგენს არაწრფივი ფუნქციონალური განტოლების ამონახსნს. დაწვრილებითაა განხილული რამდენიმე კერძო შემთხვევა, როცა შესაძლებელია აღნიშნული განტოლების ზუსტი ამონახსნის პოვნა.

L.Doborjginidze

SOME PROBLEMS OF THE NON-LINEAR THEORY OF ISOLATED RECTILINEAR CRACKS

Summary

The plane problem of the non-linear theory of rectilinear cracks in elastic bodies of a harmonic type material is investigated. In this connection the non-linearity of the problem is stipulated by the non-linearity of an elastic material surrounding the crack. Hence, the material exterior to the crack is assumed to be perfectly brittle, i.e. capable to preserve the property of non-linear elasticity up to the collapse. For the solution of the problem the complex representation of fields of elastic elements by two analytic functions in the domain under consideration is used.

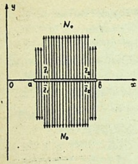


Рис. I

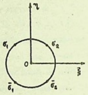


Рис. 2

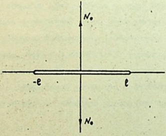


Рис. 3

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

УДК 539.3 259, 1985

ПОДКРЕПЛЕНИЕ КРАЯ ОТВЕРСТИЯ В ПЛАСТИНЕ

И.А.Зоненашвили, М.Л.Кац, А.Р.Папукашвили

В работах /I, 2/ изучались задачи о подкреплении пластины с отверстием, занимающей некоторую область, симметричную относительно осей OX, OY. Данная статья является обобщением полученных в /I, 2/ результатов - здесь рассматриваются задачи, в которых силовые и геометрические характеристики симметричны относительно лишь одной из осей (OX).

I. Рассмотрим плоское напряженное состояние изотропной пластины постоянной толщины с отверстием, внешность которого конформно отображается на внешность единичной окружности с помощью рациональной функции

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\sum_{j=1}^{m+1} a_j \zeta^{-j+1}\right), \qquad (I)$$

где $\zeta=\rho e^{i\theta}$, R - некоторый характерный размер отверстия.

Край отверстия подкреплен тонким стержнем, обладающим приведенными жесткостями $\delta_1(\theta)$ и $\delta_2(\theta)$ на растяжение и изгиб вокруг бинормали к контуру отверстия L. Считая, что сопряжение между ребром и пластиной происходит вдоль L, условие спая можно записать следующим образом /2/:

$$\delta_1(\theta)U(\theta)+F_2(\theta)+\rho^{-1}(\theta)\int_0^\theta|\omega'(\sigma)|F_1(\theta)d\theta=$$

$$=-\frac{R}{\rho(\theta)}C_2+C_1\left[\frac{Re\{\omega(\sigma)\}}{\rho(\theta)}-Im\{t\}\right], \tag{2}$$

$$\left[\delta_1(\theta)+\delta_2(\theta)\frac{R^2}{\rho^2(\theta)}\right]U(\theta)-\delta_2(\theta)\frac{R^2}{\rho(\theta)|\omega'(\sigma)|}\frac{dV}{d\theta}+$$

$$+F_2(\theta)=-C_1 Im\{t\},$$

где $t=\dfrac{i\sigma\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}$, $\sigma=e^{i\theta}$, ρ - радиус кривизны контура L.

Функции $F_1(\theta)$ и $F_2(\theta)$ связаны на контуре L с граничным значением комплексного потенциала $\varphi(\sigma)$ выражением

$$iF_1(\theta)-F_2(\theta)=\frac{|\omega'(\sigma)|}{\sigma\omega'(\sigma)}\left[\frac{2}{1+\nu}\frac{\varphi(\sigma)}{\mu}-\frac{g(\sigma)}{R}\right], \tag{3}$$

в котором

$$g(\sigma)=u+iv=\int\omega'(\sigma)\left(U+iV\right)d\sigma, \tag{4}$$

μ, ν - соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона пластины.

Учитывая условие симметрии задачи относительно оси OX, функции U и V на L представляем приближенно в виде следующих выражений:

$$U(\theta)=2\sum_{K=0}^{N}a_K\cos K\theta, \quad V(\theta)=2\sum_{K=1}^{N}b_K\sin K\theta. \tag{5}$$

Воспользовавшись формулой (4), выразим функцию $g(\theta)$ через параметры a_k и b_k. Представим затем комплексный потенциал $\varphi(\xi)$ в виде ряда

$$\varphi(\xi) = 2\mu R \sum_{j=1}^{\infty} d_j \xi^{-j} \qquad (6)$$

и с помощью процедуры, аналогичной методу Мусхелишвили решения второй основной задачи для областей, отображаемых на круг полиномами, запишем уравнения, связывающие первые $m-1$ коэффициентов ряда (6) и параметры a_k и b_k. К этим уравнениям надо добавить условие однозначности перемещений (4), имеющее здесь вид:

$$a_1 - b_1 = \sum_{k=1}^{m} k Q_{k+1} (a_k + b_k).$$

В результате функции $F_1(\theta)$ и $F_2(\theta)$, входящие в условия спая (2), выражаются посредством (3) через параметры a_k, b_k и d_j $(k = 1 \div N;\ j = 1 \div m-1)$.

Недостающие условия для определения a_k, b_k, d_j и неизвестных действительных постоянных C_1 и C_2 получаются из (2) с помощью метода граничной коллокации, который приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно искомых параметров.

2. По описанному в п.I алгоритму составлена программа на языке ФОРТРАН-IУ, ориентированная на использование ЭВМ ЕС-I022, проведен ряд численных экспериментов. В качестве тестовых рассматривались задачи для пластин с неподкрепленными отверстиями, исследованные в /3/, получено удовлетворительное совпадение результатов для пластин с треугольным, пятиугольным, прямоугольным, квадратным или эллиптическим

отверстиями. Так, например, для одностороннего растяжения напряжениями P пластины с треугольным отверстием (в формуле (I): $m=2,\ Q_1=Q_4=0,\ Q_3=1/3$, рис. I) результаты вычислений отличаются от опубликованных в /3/ не более, чем на два процента для $N=38$ (на рис. 2 это кривая I).

Рассмотрим задачу об одностороннем нагружении на бесконечности пластины с треугольным отверстием, край которого подкреплен ребром переменной жесткости. На рис. 2 – 4 кривые, соответствующие приведенным к P напряжениям $\widehat{\rho\rho}$, $\widehat{\theta\theta}$ и $\widehat{\rho\theta}$, помечены цифрами 2,3,4. Предполагалось, что подкрепляющий стержень имеет прямоугольное поперечное сечение, ширина ℓ которого постоянна, изменяется лишь высота. При этом, как известно, $\delta_2(\theta)=\varepsilon\delta_1(\theta)$ /4/, в расчетах принималось $\varepsilon=0.001$, что соответствует $\ell\simeq 0.11R$. На рисунках изображены распределения напряжений вдоль периметра отверстия, причем, для рис. 2: $\delta_1=0{,}5$; для рис. 3: $\delta_1=0{,}25$; для рис. 4: $\delta_1=0{,}25+0{,}2\cos 3\theta$. При увеличении жесткости подкрепляющего стержня напряжения $\widehat{\theta\theta}$ резко уменьшаются, но при этом увеличиваются напряжения $\widehat{\rho\rho}$ и, что особо важно для исследования прочности пластины, напряжения $\widehat{\rho\theta}$. Так, для пластины, критерий прочности которой вычисляется по формуле

$$\sigma_э=\sqrt{\widehat{\rho\rho}^2+\widehat{\theta\theta}^2-\widehat{\rho\rho}\cdot\widehat{\theta\theta}+3\widehat{\rho\theta}},$$

максимальные напряжения $\sigma_э^{max}$ для рис.2–4 соответственно равны 7.25, 6.09, 5.30. Наименьшее расчетное напряжение получено для пластины, подкрепленной ребром переменной жесткости.

В ряде исследований предполагалось, что подкрепляющий стержень сопротивляется лишь растяжению $(\delta_1 \neq 0,\ \delta_2 = 0)$, так как приведенное сопротивление изгибу δ_2 на несколько порядков меньше, чем δ_1 . Это утверждение несправедливо для подкрепления отверстия, контур которого имеет участки с малым радиусом кривизны. Действительно, из второго условия (3), в которое входят δ_2 , заключаем, что члены $\delta_2 R^2/\rho^2$ и $\delta_2 R^2/(\rho|\omega'|)$ соизмеримы при малых ρ с δ_2 . Именно из-за этих членов получается в расчетах соответствующая физическому смыслу концентрация напряжений $\widehat{\rho\theta}$ в углах отверстия вследствие их изгиба в плоскости xOy.

Кафедра теоретической механики ТГУ, Ворошиловградский машиностроительный институт, Институт прикладной математики ТГУ

Литература

I. И.А. Зоненашвили, М.Л.Кац. Труды XII Всесоюзн.конф. по теории оболочек и пластин, 2-й т., Ереван, 1980, с.164-170.

2. М.Л.Кац. Труды Тбил. ун-та, 1980, т.215, № 10, с.152-182.

3. Г.Н.Савин. Механика деформируемых тел. Киев, 1979.

4. Г.Н.Савин, Н.П.Флейшман. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Киев, 1964.

ი. ზონენაშვილი, მ. კაცი, ა. პაპუკაშვილი

ფირფიტის საზღვრის გამაგრება

რეზიუმე

შეისწავლება ცვლადი სიხისტის წიბოს გავლენა თხელი ფირფიტის დრეკად წონასწორობაზე. მაგალითის სახით განხილულია უსასრულო ფირფიტა სამკუთხოვანი ჭრილით, რომლის საზღვარი გამაგრებულია ცვლადი სიხისტის წიბოთი.

I.Zonenashvili, M.Kats, A.Papukashvili

SUPPORT OF THE HOLE BOUNDARY IN A PLATE

Summary

The problem on support of an infinite plate with a hole is investigated. The rigidity of a thin supporting rod varies along the hole perimeter. Numerical examples the support of a triangular cut are considered and the effective use of a rib of variable rigidity is shown.

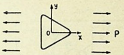
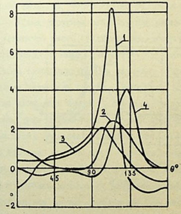


Рис. I



3/2)

9

Рис. 2

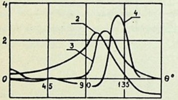


Рис. 3

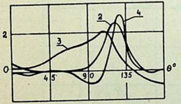


Рис. 4

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

259, 1985

УДК 539.3

СОПРЯЖЕНИЕ ОБОЛОЧЕК СО СМЕЩЕННЫМИ СРЕДИННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ ПОСРЕДСТВОМ РЕБРА ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

И.А.Зоненашвили

В различных отраслях машиностроения широко применяются тонкостенные элементы, состоящие из оболочек или пластин, усиленных тонкими упругими ребрами. Для увеличения жесткости таких элементов часто срединные поверхности оболочек, сопрягаемых с помощью ребра, смещаются друг относительно друга. Частным видом такой конструкции являются оболочки или пластины с малыми выдавками переменной глубины, которые встречаются в виде элементов кузовов автобусов, автомобилей, фюзеляжа самолета, днищ резервуаров и др. Выдавки в оболочках образовываются путем рельефного выдавливания, т.е. без снятия стружки и это дает значительную экономию материала. В связи с этим представляет интерес, в частности, исследование влияния формы и глубины выдавок на напряженно-деформированное состояние и спектр частот соответствующих тонкостенных элементов. Для решения задач статики и динамики таких структур необходимо вывести сначала соответствующие условия сопряжения.

I. Рассмотрим две изотропные или анизотропные оболочки O_k (k = 1,2), срединные поверхности которых (Π_k) смещены друг относительно друга, и предположим, что их края соединены посредством тонкого упругого изотропного ребра переменного сечения. Форма сечения ребра произвольна. Материал оболочек и ребра, вообще, говоря, различен. Ребро моделируется линейным элементом двоякой кривизны, упругое равновесие которого описывается теорией малых деформаций криволинейных стержней. Деформация оболочек описывается уравнениями двумерной теории, основанной на гипотезах Кирхгоффа-Лява.

Обозначим через Γ_κ кривую на поверхность Π_κ ,определяющую край оболочки O_κ , вдоль которого происходит ее спай о ребром. Пусть $\bar{n}_\kappa$, $\bar{b}_\kappa$ и $\bar{\tau}_\kappa$ - соответственно нормаль к поперечному сечению оболочки O_κ , нормаль к ее срединной поверхности и касательная к Γ_κ в точках этого контура. Введем также в рассмотрение подвижную систему координат (x , y , z), из которых оси x и y направлены по главным центральным осям инерции поперечного сечения ребра, а ось z - по касательной к его пространственной оси Γ . Оси ($\bar{n}_\kappa$, $\bar{b}_\kappa$, $\bar{\tau}_\kappa$) составляют с осями x , y , z углы, косинусы которых приведены ниже в таблице:

	$\bar{n}_\kappa$	$\bar{b}_\kappa$	$\bar{\tau}_\kappa$
x	$m_{\kappa 1}$	$l_{\kappa 1}$	$f_{\kappa 1}$
y	$m_{\kappa 2}$	$l_{\kappa 2}$	$f_{\kappa 2}$
z	$m_{\kappa 3}$	$l_{\kappa 3}$	$f_{\kappa 3}$

Величины m_{ki}, ℓ_{ki}, t_{ki} ($k = 1, 2$, $i = \overline{1, 3}$) полностью известны, как функции дуги s на Γ, если задана геометрия конструкции.

Упругое равновесие ребра описывается первой и второй группами соотношений Клебша, соотношениями Кирхгоффа и уравнениями равновесия /I, 2/. При этом приближенно учитывается растяжимость оси Γ.

Условия спая ребра с примыкающими к нему оболочками записываются в виде

$$\vec{u}_k = \vec{u} + \vec{\theta} \times \vec{r}_k , \qquad (1)$$

$$\theta_{\tau k} = \theta_z t_{k3} + \theta_y t_{k2} + \theta_x t_{k1} \quad (k=1,2), \qquad (2)$$

где

$$\theta_{\tau k} = \frac{\partial w_k}{\partial n_k} + \frac{u_{nk}}{R'_{k2}} - \frac{u_{\tau k}}{R^{(k)}_{12}} \qquad (3)$$

$\vec{u}_k = \vec{u}_k (u_{xk}, u_{yk}, u_{zk}) = \vec{u}_k (u_{nk}, w_k, u_{\tau k})$ – вектор перемещения точек граничной кривой оболочки Γ_k ; $\vec{r}_k = \vec{r}_k (x_k, y_k, 0)$ – радиус вектор точки на кривой Γ_k в нормальном сечении ребра, проведенный из его центра масс; $\vec{\theta} = \vec{\theta}(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ – вектор поворота подвижного трехгранника (x , y , z); $\vec{u} = \vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ – вектор смещения точек оси Γ ребра; $\theta_{\tau k}$ – упругий угол поворота нормального сечения оболочки вокруг касательной к линии Γ_k ; $(R'_{k2})^{-1}$ – кривизна нормального сечения срединной поверхности оболочки вдоль нормали n_k ; $(R^{(k)}_{12})^{-1}$ – величина, характеризующая степень несопряженности координатных линий на Π_k (см. /3/, стр. 26).

Кроме условий спая (I)-(2) необходимо записать еще статистические условия, выражающие связь между нагрузкой на ребро и усилиями $\bar{P}_K$ или изгибающими моментами $\bar{\mathcal{M}}_{nK}$, действующими вдоль Γ_K со стороны ребра на оболочку O_K. Имеем

$$\bar{P}_K = N'_K \bar{n}_K + Q'_K \bar{\ell}_K + T'_K \bar{\tau}_K , \tag{4}$$

$$\bar{\mathcal{M}}_{nK} = \mathcal{M}_{nK} \bar{\tau}_K \qquad (K=1,2). \tag{5}$$

Здесь через N'_K, T'_K и Q'_K обозначены соответственно обобщенные силы (нормальная, сдвигающая, перерезывающая);

Со стороны оболочек на ребро согласно закону Ньютона вдоль Γ_K действуют обратно направленные силы и моменты той же величины. После их приведения к оси ребра находим силу $\bar{P}_*(s)$ и момент $\bar{m}_*(s)$:

$$\begin{aligned} \bar{P}_*(s) &= \sum_{K=1}^{2} \bar{P}_K , \\ \bar{m}_*(s) &= -\sum_{K=1}^{2} \left[\bar{\mathcal{M}}_{nK} + \bar{r}_K \times \bar{P}_K \right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Заменяя распределенные моменты их статически эквивалентными силами, получаем в конечном итоге (в проекциях на оси x, y, z)

$$P_x = -\sum_{K=1}^{2} \left[\left(N'_K m_{K1} + Q'_K \ell_{K1} + T'_K f_{K1} \right) + \right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial s}\left(\mathcal{M}_{nk}\,\bar{y}^{\circ}-P_{kz}x_{k}\right)\Big],$$

$$P_y=-\sum_{k=1}^{2}\Big[\left(N_k'm_{k2}+Q_k'\ell_{k2}+T_k'f_{k2}\right)+ \qquad (7)$$

$$+\frac{\partial}{\partial s}\left(\bar{\mathcal{M}}_{nk}\,\bar{x}^{\circ}+P_{kz}y_{k}\right)\Big],$$

$$P_z=-\sum_{k=1}^{2}\left(N_k'm_{k3}+Q_k'\ell_{k3}+T_k'f_{k3}\right),$$

$$m_z=-\sum_{k=1}^{2}\left(\mathcal{M}_{nk}\,\bar{z}^{\circ}+P_{ky}x_k-P_{kx}y_k\right).$$

2. Используя уравнения теории малых деформаций тонких криволинейных стержней /I,2/, можно выразить левые части уравнений (7) в виде

$$P_x=\omega_z\left(\omega_y b_z-\omega_z b_y+\frac{\partial}{\partial s}b_x\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial s}\left(\omega_x b_z-\omega_z b_x-\frac{\partial}{\partial s}b_y\right)-\omega_y EF\varepsilon_o, \qquad (8)$$

$$P_y=\omega_z\left(\omega_z b_x-\omega_x b_z+\frac{\partial}{\partial s}b_y\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial s}\left(\omega_y b_z-\omega_z b_y+\frac{\partial}{\partial s}b_x\right)+\omega_x EF\varepsilon_o,$$

$$P_z = \left(\omega_z \omega_x - \omega_y \frac{\partial}{\partial s}\right) L_y - \frac{\partial}{\partial s}(EF\varepsilon_0) -$$

$$- \left(\omega_z \omega_y + \omega_x \frac{\partial}{\partial s}\right) L_x ,$$

$$m_z = \omega_y L_x - \omega_x L_y - \frac{\partial}{\partial s} L_z .$$

В формулах (8) фигурируют главные компоненты кривизны и кручения ребра ($\omega_x , \omega_y , \omega_z$), его относительное удлинение ε_0 и компоненты главного момента $\bar{L}$ (L_x , L_y , L_z) внутренних напряжений в его поперечном сечении s , а именно

$$
\begin{aligned}
L_x &= A\left(\frac{\partial}{\partial s}\theta_x + \omega_y \theta_z - \omega_z \theta_y\right), \\
L_y &= B\left(\frac{\partial}{\partial s}\theta_y + \omega_z \theta_x - \omega_x \theta_z\right), \qquad (9) \\
L_z &= C\left(\frac{\partial}{\partial s}\theta_z + \omega_x \theta_y - \omega_y \theta_x\right).
\end{aligned}
$$

Здесь A , B - жесткости ребра на изгиб относительно осей x , y ; C - жесткость при кручении.

Из условий спая (I) и (2) при $K = 1,2$ вычитанием (в проекциях на оси (x , y , z) легко вывести

$$
\begin{aligned}
u_{x1} - u_{x2} &= \theta_z (y_2 - y_1), \qquad (10) \\
u_{y1} - u_{y2} &= \theta_z (x_1 - x_2),
\end{aligned}
$$

$$u_{x1} - u_{x2} = \theta_x (y_1 - y_2) - \theta_y (x_1 - x_2),$$

$$f_{23}\theta_{x1} - f_{13}\theta_{x2} = \theta_y (f_{12} f_{23} - f_{22} f_{13}) + \theta_x (f_{11} f_{23} - f_{21} f_{13}).$$

Векторы $\bar{\theta}$, $\bar{u}$ и $\bar{\omega}$ (ω_x , ω_y , ω_z) связаны соотношениями Клебша

$$\theta_y \bar{x}^\circ - \theta_x \bar{y}^\circ + \varepsilon_0 \bar{z}^\circ = \frac{d\bar{u}}{ds} + \bar{\omega} \times \bar{u}, \qquad (11)$$

где $\bar{x}^\circ$, $\bar{y}^\circ$, $\bar{z}^\circ$ - орты осей x , y , z.

Кроме того из (10), (1) и (11) легко вывести, что

$$u_x = (u_{x1} y_2 - u_{x2} y_1)/(y_2 - y_1),$$

$$u_y = (u_{y1} x_2 - u_{y2} x_1)/(x_2 - x_1), \qquad (12)$$

$$u_z = \Big[u_{zk} + y_k\Big(\frac{du_y}{ds} + \omega_z u_k\Big) +$$
$$+ x_k\Big(\frac{du_k}{ds} - \omega_z u_y\Big)\Big] \Big/ (1 - x_k\omega_y + y_k\omega_x).$$

Правые части условий (8) и (10) выражаются через функции θ_x , θ_y , θ_z и ε_0 , которые в свою очередь согласно (11) и (2) зависят от u_x , u_y , u_z и θ_{xk} . Последние же величины выражаются согласно (3) и (12) через перемещения сопрягаемых оболочек на Γ_k : u_{xk} , u_{yk} , u_{zk} , $\partial w_k / \partial n_k$.

Учитывая сказанное, заключаем, что выведенные

10

шения (8) и (10) составляют систему восьми условий сопряжения оболочек (со смещенными срединными поверхностями) посредством тонкого ребра переменного сечения. Левые части условий (8), согласно (7), выражаются через усилия и моменты в оболочках O_K, а последние, по известным формулам теории оболочек (изотропных или анизотропных) выражаются через компоненты перемещений. Таким образом, в конечном итоге, восемь условий (10) и (8) связывают между собой перемещения u_{nK}, $u_{bK} = w_K$, $u_{\tau K}$ и углы поворота $\theta_{\tau K}$ оболочек на Γ_K (K =1,2).

Окончательные выражения, которые получаются в результате вышеуказанных подстановок, здесь не приводятся в силу их громоздкости.

3. При $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$, $m_{K3} = \ell_{K3} = f_{K1} = f_{K2} = 0$ и $f_{13} = -f_{23} = -1$ из (8), 10) после некоторых элементарных преобразований вытекают условия сопряжения для случая, рассмотренного в /2/, когда ось ребра Γ лежит в срединной поверхности, общей для обеих оболочек O_K.

При других частных значениях параметров задачи из (8) и (10) легко вывести условия сопряжения для таких задач, например: оболочка или пластинка с малой выдавкой переменной глубины, осесимметрическая задача для двух оболочек вращения, соединенных ребром постоянного сечения, оболочка с несимметричным (эксцентричным) ребром у края и др.

Кафедра
теоретической механики ТГУ

Литература

1. А.И. Лурье. Труды Ленинградского политехнического института, № 3, 1941.
2. Г.Н.Савин, Н.П.Флейшман. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Киев, 1964, 384 с.
3. А.Л.Гольденвейзер. Теория упругих тонких оболочек. М., ГИТТЛ, 1953,544 с.

ი.ბონენაშვილი

ერთმანეთის მიმართ დაპარალელებული შუა ზედაპირების მქონე გარსების შეერთება ცვლადი სიხისტის წიბოებით

რეზიუმე

განიხილება თხელი გარსი, შედგენილი რამდენიმე ნაწილისაგან, რომელთა შუა ზედაპირები დაპარალელებულია ერთმანეთის მიმართ. ამ ნაწილების შეერთების ადგილები გამაგრებულია ცვლადი სიხისტის წიბოებით. ასეთი სახის გარსებსა და ფირფიტებს დიდი გამოყენება აქვთ მანქანათმშენებლობაში, გემთმშენებლობაში, თვითმფრინავთმშენებლობაში და სხვა.

სიხისტის წიბოებსა და გარსების ურთიერთქმედების რეალური წონასწორობა აიგება კირხჰოფ-ლიავის ჰიპოთეზისა და მრუდწირული ძელების მცირე დეფორმაციების თეორიის საფუძველზე.

ნაშრომში გამოყვანილია წიბოსა და გარსების ურთიერთქმედების პირობები, რომელთაგან კერძო შემთხვევებში მიიღება ადრე ცნობილი შედეგები.

I.Zonenashvili

CONJUGATION OF SHELLS WITH DISPLACED MIDDLE SURFACES BY MEANS OF A RIB OF VARIABLE CROSS-SECTION

Summary

Thin-walled elements, consisting of shells or plates reinforced with thin elastic ribs, are widely used in different branches of machine-building. To increase the rigidity of such elements the middle surfaces of shells conjugated by means of a rib are displaced relative to each other. Shells or plates with small extrusions of variable depth which are used in the form of elements of bus and automobile bodies, airplaine fuselage, reservoir bottom and so on, are a particular form of such a structure. Extrusions in shells are formed by means of relief extruding, i.e. without removal of chips, which gives considerable saving of metal. In this connection it is of interest, in particular, to study the influence of the shape and depth of extrusions on a stressed-strained state and a frequency spectrum of the respective thinwalled elements. The respective conjugation conditions are derived to solve static and dynamic problems of such structures.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета .
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
259, 1985 .

УДК 517.9

УСРЕДНЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С РАЗРЫВНЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ

Г.А.Иосифьян, О.А.Олейник, А.С.Шамаев

Изучению физических процессов, происходящих в пористых средах, посвящено большое число работ. В качестве модели такой среды можно рассматривать сплошную среду с периодически расположенными мелкими полостями (в двумерном случае - отверстиями). В ряде работ выводятся дифференциальные уравнения, описывающие макроскопические усредненные свойства пористых сред, и доказываются теоремы о близости решений этих усредненных уравнений к решениям дифференциальных уравнений в области с полостями (отверстиями) (см., например, /I/-/7/). Работы /8/ - /II/ посвящены проблеме усреднения краевых задач на собственные значения в перфорированной области, т.е. области с мелкими полостями. В работе /II/ рассматривается вопрос о поведении собственных значений и собственных функций краевой задачи для системы теории упругости с быстро осциллирующими коэффициентами в перфорированной области. В работе /I2/ изучено поведение решений и собственных значений краевой задачи теории упругости с быстро осциллирующими коэффициентами в области без полостей (отверстий). В этом случае получены более полные по сравнению с /II/ результаты.

Результаты работы /II/, /I2/ получены в предположении, что коэффициенты системы теории упругости достаточно гладкие. Однако в задачах механики композитных материалов возникает необходимость построения усредненных уравнений и анализа скорости сходимости решений и собственных значений исходных уравнений к решениям и собственным значениям усредненных уравнений в случае, когда коэффициенты системы являются кусочно гладкими. Поверхности разрыва коэффициентов соответствуют при этом границам раздела между двумя различными материалами, из которых составлен композитный материал. Настоящая работа посвящена обобщению результатов работ /II/, /I2/ на случай системы уравнений теории упругости с периодическими кусочно гладкими коэффициентами.

Пусть G^0 - объединение конечного числа непересекающихся областей с границами класса C^∞, лежащих в единичном кубе $Q=\{x\in\mathbb{R}^n, 0<\xi_j<1, j=1,\dots,n\}$, причем расстояние от G^0 до ∂Q положительно. Обозначим через $X+z$ сдвиг множества $X\subset\mathbb{R}^n$ на вектор $z\in\mathbb{R}^n$, через εX - множество $\{x\in\mathbb{R}^n, \varepsilon^{-1}x\in X\}$.

Положим $G_1=\bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}^n}(G^0+m)$, где $\mathbb{Z}^n$ - множество векторов $z=(z_1,\dots,z_n)$ с целочисленными компонентами, $G_\varepsilon=\varepsilon G_1$, $\Omega^\varepsilon=\Omega\setminus\bar G_\varepsilon$, $S_\varepsilon=\partial\Omega^\varepsilon\setminus\partial\Omega$, $\Gamma_\varepsilon=\partial\Omega\cap\partial\Omega^\varepsilon$. Области типа Ω^ε называются перфорированными или же областями с мелкозернистой границей.

Пусть $u=(u_1,\dots,u_n)^*$ – столбец с компонентами $u_1,\dots,u_n$. Введем следующие пространства вектор-функций: $H^1(\Omega)$ – пространство С.Л.Соболева с нормой

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}=\left(\int_\Omega\left(|u|^2+\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right|^2\right)dx\right)^{1/2},$$

$H_{1/2}(\partial\Omega)$ – пространство следов на $\partial\Omega$ функций из $H^1(\Omega)$. В пространстве $H_{1/2}(\partial\Omega)$ норма определяется равенством

$$\|\varphi\|_{1/2,\,\partial\Omega}=\inf_w\left\{\|w\|_{H^1(\Omega)},\ w\big|_{\partial\Omega}=\varphi\right\}.$$

$\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ – пространство вектор-функций из $H^1(\Omega)$, равных нулю на $\partial\Omega$.

Рассмотрим краевую задачу теории упругости

$$\left.\begin{aligned}
&L_\varepsilon(u^\varepsilon)\equiv\frac{\partial}{\partial x_h}\left(C^{hk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\right)=f(x) \quad \text{в } \Omega^\varepsilon,\\
&u^\varepsilon=0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon,\quad \sigma_\varepsilon(u^\varepsilon)\equiv C^{hk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\nu_h=0 \quad \text{на } S_\varepsilon,
\end{aligned}\right\}\qquad (\mathrm{I})$$

где $C^{hk}(\xi)$ — $(n\times n)$ – матрицы, элементы которых $c^{hk}_{ij}(\xi)$ – -периодические по $\xi_1,\dots,\xi_n$ с периодом I (I-периодические по ξ) функции на $\mathbb{R}^n_\xi$, принадлежащие классу $C^\infty(\overline{Q\setminus Q_1})$ и классу $C^\infty(\overline{Q}_1)$, Q_1 принадлежит $Q\setminus G^0$ и представляет собой объединение конечного числа непересекающихся областей с гладкими границами, причем расстояние от Q_1 до $\partial(Q\setminus G^0)$ положительно; $u^\varepsilon=(u_1^\varepsilon,\dots,u_n^\varepsilon)^*$, $f=(f_1,\dots,f_n)^*$, $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$ - внешняя нормаль к S_ε . Здесь и далее предполагается суммирование повторяющимся индексам от I до n . Будем также предполагать, что коэффициенты $c_{ij}^{hk}(\xi)$ удовлетворяют условиям, принятым в теории упругости: для любого $\xi\in Q\setminus G^0$

$$c_{ij}^{hk}(\xi)=c_{ji}^{kh}(\xi)=c_{hj}^{ik}(\xi) \tag{2}$$

и при любой симметрической матрице $\eta=\{\eta_s^t\}$ выполняются неравенства

$$\varkappa_1\eta_i^h\eta_i^h \leqslant c_{ij}^{hk}(\xi)\eta_i^h\eta_j^k \leqslant \varkappa_2\eta_i^h\eta_i^h , \tag{3}$$

где $\varkappa_1, \varkappa_2$ - положительные постоянные.

Рассмотрим также более общую задачу

$$L_\varepsilon(w^\varepsilon)=f+\frac{\partial f^m}{\partial x_m} \quad \text{в} \quad \Omega^\varepsilon , \tag{4}$$

$$w^\varepsilon=\Phi(x) \text{ на } \Gamma_\varepsilon, \quad \sigma_\varepsilon(w^\varepsilon)=f^m\nu_m \text{ на } S_\varepsilon , \tag{5}$$

где вектор-функции f, $f^m\in L_2(\Omega)$, $\Phi\in H_{1/2}(\partial\Omega)$.

Обобщенным решением задачи (4), (5) называем вектор-функцию $w^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)$, удовлетворяющую граничному условию $w^\varepsilon = \Phi$ на Γ_ε и интегральному тождеству

$$-\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left[C^{hk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_k}, \frac{\partial v}{\partial x_h} \right] dx = $$

$$= \int\limits_{\Omega^\varepsilon} [f, v]\, dx - \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left[f^m, \frac{\partial v}{\partial x_m} \right] dx$$

при любой вектор-функции $v^\varepsilon \in H^1(\Omega)$, равной нулю на Γ_ε. Здесь $[u, v] \equiv u_j v_j$ для любых вектор-функций u, v.

В работе /II/ доказана следующая теорема об оценке обобщенного решения w^ε задачи (4), (5).

<u>Теорема I</u>. Для обобщенного решения w^ε задачи (4), (5) справедлива оценка

$$\|w^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \le M \Big(\sum_{m=1}^{n} \|f^m\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} +$$

$$+ \|\Phi\|^2_{1/2, \partial\Omega} \Big),$$

где $M = const > 0$ и не зависит от $\varepsilon, f, f^m, \Phi$.

Пусть матрицы $N_p(\xi)$ $(p = 1, \dots, n)$ являются I-периодическими по ξ обобщенными решениями следующих краевых задач:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(C^{kj}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} N_p(\xi) \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi_k} C^{kp}(\xi) \quad \text{в } \mathbb{R}^n \setminus G_1, \qquad (6)$$

$$\sigma(N_p) = -C^{kp} \nu_k \quad \text{на } \partial G_1, \quad \int\limits_{Q \setminus G^0} N_p(\xi)\, d\xi = 0. \qquad (7)$$

Существование обобщенного решения задачи (6), (7) доказано в /6/. Положим

II

$$h^{pq} = (\mathrm{mes}(Q\setminus G^\circ))^{-1} \int\limits_{Q\setminus G^\circ} \left(C^{pq}(\xi) + C^{pj}(\xi) \frac{\partial N_q}{\partial \xi_j} \right) d\xi ,$$

$p, q = 1, \dots, n$, и рассмотрим систему

$$\hat{L}(U^\circ) \equiv \frac{\partial}{\partial x_p} \left(h^{pq} \frac{\partial U^\circ}{\partial x_q} \right) = f(x) \quad \text{в} \quad \Omega \tag{8}$$

с граничными условиями

$$U^\circ = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega . \tag{9}$$

Система (8) является системой теории упругости с постоянными коэффициентами (см. /6/). Определим также матрицы $N_{pq}(\xi)$ $(p, q = 1, \dots, n)$ как I-периодические по ξ обобщенные решения краевых задач

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(C^{kj}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} N_{pq}(\xi) \right) = - \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(C^{kp}(\xi) N_q(\xi) \right) - \tag{10}$$

$$- C^{pj}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} N_q(\xi) - C^{pq}(\xi) + h^{pq} \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus G_1 ,$$

$$\sigma(N_{pq}) = - C^{kp} N_q \nu_k \quad \text{на} \quad \partial G_1 , \quad \int\limits_{Q\setminus G^\circ} N_{pq}(\xi) d\xi = 0 . \tag{11}$$

Существование решения задачи (10), (11) доказывается так же, как и существование решения задачи (6), (7) (см. /6/).

Для простоты будем считать, что область Ω имеет бесконечно гладкую границу $\partial\Omega$, а $f \in H^1(\Omega)$. При этих условиях, как известно, $U^\circ \in H^3(\Omega)$.

В работе /II/ рассматривается вопрос об оценке величины отклонения решения u^ε исходной задачи (I) от решения U^0 усредненной задачи (8), (9). Нетрудно проверить, что вектор-функция $u^0 = U^0 + \varepsilon N_q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial U^0}{\partial x_q}$ является обобщенным решением следующей краевой задачи:

$$L_\varepsilon u^0 = f + \varepsilon^2 C^{kj}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}N_{pq}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^3 U^0}{\partial x_k\,\partial x_p\,\partial x_q} +$$

$$+\varepsilon C^{kj}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)N_q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^3 U^0}{\partial x_j\,\partial x_k\,\partial x_q} -$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x_k}\left[C^{kj}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}N_{pq}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 U^0}{\partial x_p\,\partial x_q}\right] \text{ в } \Omega^\varepsilon, \tag{I2}$$

$$u^0 = \varepsilon N_q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial U^0(x)}{\partial x_q} \text{ на } \Gamma_\varepsilon,$$

$$\sigma_\varepsilon(u^0) = -\varepsilon^2 C^{kj}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}N_{pq}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 U^0}{\partial x_p\,\partial x_q}\nu_k \text{ на } S_\varepsilon.$$

Для любой $(n\times n)$ матрицы N с элементами N^{ts} положим $|N| = \sum_{s,t=1}^{n}(N^{ts})^2$.

Легко видеть (см. /I2/), что если выполнены оценки

$$|N_p(\xi)| \leq C,\quad \left|\frac{\partial}{\partial \xi_j}N_p(\xi)\right| \leq C,\quad |N_{pq}(\xi)| \leq C, \tag{I3}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \xi_j}N_{pq}\right| \leq C, \qquad \text{где } C = const > 0,$$

то вследствие теоремы I для $u^0 - u^\varepsilon$ справедлива оценка

$$\|u^0 - u^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leq M\,\varepsilon^4\sum_{j,k,p,q=1}^{n}\int_{\Omega^\varepsilon}\left|\frac{\partial N_{pq}}{\partial x_j}\frac{\partial^3 U^0}{\partial x_k\,\partial x_p\,\partial x_q}\right|^2 dx +$$

$$+\varepsilon^2\sum_{q,k,j=1}^{n}\int_{\Omega^\varepsilon}\left|N_q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2\left|\frac{\partial^3 U^0(x)}{\partial x_j\,\partial x_k\,\partial x_q}\right|^2 dx +$$

$$+\varepsilon^4 \sum_{j,p,q=1}^{n} \int_{\Omega\varepsilon} \left|\frac{\partial}{\partial x_j} N_{pq}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 \left|\frac{\partial^2 U^0(x)}{\partial x_p \partial x_q}\right|^2 dx + \tag{I4}$$

$$+\varepsilon^2 \left\| N_q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial U^0}{\partial x_q}\right\|^2_{H_{1/2}(\partial\Omega)} .$$

Можно доказать, что правая часть неравенства (I4) не превосходит $C\varepsilon\|f\|^2_{H^1(\Omega)}$, $C=const$.
Такая оценка получена в работе /I2/, где неравенства (I3) выполнялись вследствие гладкости коэффициентов $C^{kj}(\xi)$ и известных теорем о гладкости решений эллиптических краевых задач. В нашем случае коэффициенты системы (I) являются кусочно-гладкими функциями, поэтому неравенства (I3) требуют доказательства.

Лемма I. Пусть вектор-функция $W(\xi)\in H^1(Y)$, $Y=Q\setminus G^0$, является I-периодическим по ξ обобщенным решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial \xi_h}\left(C^{hk}(\xi)\frac{\partial W}{\partial \xi_k}\right) = \frac{\partial \mathcal{F}^m}{\partial \xi_m} + \mathcal{F} \quad \text{в } Y, \tag{I5}$$

$$\sigma(W) = \mathcal{F}^m \nu_m \quad \text{на } \partial G^0, \quad \int_Y W d\xi = 0,$$

где вектор-функции $\mathcal{F}^m$, $\mathcal{F}$ I-периодические по ξ, принадлежат классу $C^\infty(\overline{Y\setminus Q_1}) \cap C^\infty(\bar{Q}_1)$ и $\int_Y \mathcal{F} d\xi = 0$. Тогда $W(\xi)$ принадлежит тому же классу.

Для доказательства леммы I воспользуемся методом работы /I3/.

Обозначим через C^{hk}_δ, $\mathcal{F}^m_\delta$, $\mathcal{F}_\delta$ последовательности матриц и вектор-функций класса $C^{\infty}(\overline{Y})$, сходящиеся при $\delta \to 0$ в $L_2(Y)$ к $C^{hk}, \mathcal{F}^m, \mathcal{F}$ соответственно, причем для $C_{\delta}^{hk}(\xi)$ выполняются условия вида (2), (3) с некоторыми постоянными $\widetilde{\varkappa}_1$, $\widetilde{\varkappa}_2$, не зависящими от h. Определим $W^{\delta}(\xi) \in H^1(Y)$ как I-периодические по ξ вектор-функции, удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\int_Y \left[C_{\delta}^{hk}(\xi) \frac{\partial W^{\delta}}{\partial \xi_k}, \frac{\partial M}{\partial \xi_h} \right] d\xi = \tag{I6}$$
$$= \int_Y \left[\mathcal{F}_{\delta}^{m}(\xi), \frac{\partial M}{\partial \xi_m} \right] d\xi - \int_Y [\mathcal{F}_{\delta}(\xi), M] d\xi$$

для любой I-периодической по ξ вектор-функции $M \in H^1(Y)$ и условию $\int_Y W^{\delta} d\xi = 0$. Полагая $M = W^{\delta}$, получим

$$\int_Y \left[C_{\delta}^{hk}(\xi) \frac{\partial W^{\delta}}{\partial \xi_k}, \frac{\partial W^{\delta}}{\partial \xi_h} \right] d\xi = \tag{I7}$$
$$= \int_Y \left[\mathcal{F}_{\delta}^{m}, \frac{\partial W^{\delta}}{\partial \xi_m} \right] d\xi - \int_Y [\mathcal{F}_{\delta}, W^{\delta}] d\xi .$$

Отсюда, используя неравенство Корна для периодических вектор-функций (см. /I4/,/I5/), получим

$$\| W^{\delta} \|_{H^1(Y)} < C, \tag{I8}$$

где $C = const > 0$ не зависит от δ. Следовательно, существует подпоследовательность $\delta' \to 0$ такая, что $W^{\delta'} \to \widetilde{W}$ в $H^1(Y)$ слабо, где $\widetilde{W}(\xi) \in H^1(Y)$ - некоторая вектор-функция. Переходя к пределу при $\delta' \to 0$ в (I6) и пользуясь единственностью решения задачи (I5), получаем, что $\widetilde{W}(\xi) = W(\xi)$ и $W^{\delta'} \to W(\xi)$ в норме $L_2(Y)$ при $\delta' \to 0$.

Покажем теперь, что вектор-функция $W(\xi)$ принадлежит классу $C^{\infty}(\overline{Y \setminus Q_1}) \cap C^{\infty}(\overline{Q}_1)$. Введем в некоторой окрестности ω точки $P_0 \in \partial Q_1$ координаты $\eta_1, \dots, \eta_n$, так, чтобы в этих переменных граница ∂Q_1 задавалась уравнением $\eta_n = 0$.

Тогда в силу (I6) имеет место следующее интегральное тождество:

$$\int\limits_{\tilde{\omega}}\Big[B_\delta^{hk}(\eta)\frac{\partial U^\delta}{\partial \eta_k}, \frac{\partial w}{\partial \eta_h}\Big]d\eta = \tag{I9}$$

$$= \int\limits_{\tilde{\omega}}\Big[g_\delta^m(\eta), \frac{\partial w}{\partial \eta_m}\Big]d\eta + \int\limits_{\tilde{\omega}}[g_\delta(\eta), w]d\eta,$$

где $\tilde{\omega}$ – малая окрестность точки $P_0 \in \{\eta : \eta_n = 0\}$,

$$B_\delta^{hk}(\eta) = C^{ij}(\xi(\eta))\frac{\partial \eta_k}{\partial \xi_i}\cdot\frac{\partial \eta_h}{\partial \xi_j}|\mathcal{J}(\eta)|, \quad U^\delta(\eta) = W^\delta(\xi(\eta)),$$

$$g_\delta^m(\eta) = \mathcal{F}_\delta^k(\xi(\eta))\frac{\partial \eta_m}{\partial \xi_k}|\mathcal{J}(\eta)|, \quad g_\delta(\eta) = \mathcal{F}_\delta(\xi(\eta))|\mathcal{J}(\eta)|,$$

$\mathcal{J}(\eta)$ – якобиан преобразований $\xi = \xi(\eta)$, а w – произвольная вектор-функция из $\overset{\circ}{H}{}^1(\tilde{\omega})$.

Так как для любой вектор-функции $N \in \overset{\circ}{H}{}^1(\omega)$ имеет место первое неравенство Корна

$$\|N\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(\omega)} \leq C \int\limits_{\tilde{\omega}}\Big[C_\delta^{ij}(\xi)\frac{\partial N}{\partial \xi_i}, \frac{\partial N}{\partial \xi_j}\Big]d\xi,$$

где $C = const > 0$ не зависит от δ, то для любой $V \in \overset{\circ}{H}{}^1(\tilde{\omega})$ имеет место следующее неравенство:

$$\|V\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(\tilde{\omega})} \leq \tilde{C}\int\limits_{\tilde{\omega}}\Big[B_\delta^{ij}(\eta)\frac{\partial V}{\partial \eta_i}, \frac{\partial V}{\partial \eta_j}\Big]d\eta. \tag{20}$$

Подставляя в (I9) $w = \varphi w_1$ и затем $w = \varphi D^\alpha w_1$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ и $w_1 \in \overset{\circ}{H}{}^1(\tilde{\omega})$, получим интегральное тождество соответственно для φU^{δ} и $\mathcal{D}^{\alpha}(\varphi U^{\delta})$ при любой $\varphi \in C_0^{\infty}(\tilde{\omega})$. Из этих тождеств по индукции по $|\alpha|$ и с помощью неравенств (I8), (20) получим, аналогично тому, как в работе /I3/, оценку

$$\|\mathcal{D}^{\alpha} U^{\delta}(\eta)\|_{H^1(\omega_{|\alpha|})} \leq C_{|\alpha|}, \tag{21}$$

где $\omega_{|\alpha|}$ – достаточно малая окрестность точки $P_0 \in \partial Q_1$, постоянная $C_{|\alpha|} > 0$ не зависит от δ.

На основании теоремы о следах функции из $H^1(\omega)$ и неравенств (2I) следует, что найдется подпоследовательность $\delta' \to 0$, такая, что $\mathcal{D}^{\alpha} U^{\delta'} \to \mathcal{D}^{\alpha} U$ в норме $L_2(\omega_{|\alpha|} \cap \{\eta : \eta_n = 0\})$ и поэтому $U(\eta) = W(\xi(\eta))$ имеет на гиперповерхности $\eta_n = 0$ след, принадлежащий классу $C^{\infty}(\tilde{\omega} \cap \{\eta : \eta_n = 0\})$. В силу известной теоремы о гладкости обобщенного решения задачи Дирихле для эллиптической системы вблизи границы (см. /I4/) получаем, что $U(\eta) \in C^{\infty}(\tilde{\omega} \cap \{\eta_n \geq 0\})$ и $U(\eta) \in C^{\infty}(\tilde{\omega} \cap \{\eta_n \leq 0\})$. Переходя к исходным переменным $\xi_1, \dots, \xi_n$, получаем утверждение леммы I.

На основании леммы I имеют место неравенства (I3) и, следовательно, все результаты работы /II/ могут быть перенесены на рассматриваемый случай кусочно гладких коэффициентов системы (I).

<u>Теорема 2</u>. Для решений u^{ε} и U^{0} задач (I) и (8), (9) имеют место оценки

$$\left\| u^{\varepsilon} - U^{0} - \varepsilon N_s(\varepsilon^{-1}x) \frac{\partial U^{0}}{\partial x_s} \right\|_{H^1(\Omega^{\varepsilon})} \leq C\sqrt{\varepsilon} \|f\|_{H^1(\Omega)},$$

$$\| u^{\varepsilon} - U^{0} \|_{L_2(\Omega^{\varepsilon})} \leq C\sqrt{\varepsilon}\, \| f \|_{H^{1}(\Omega)} ,$$

где постоянная $C>0$ не зависит от ε и f.

Пусть $\{\lambda_k(\varepsilon)\}$ – последовательность собственных значений задачи

$$\left.\begin{array}{l} L_{\varepsilon}(u^{\varepsilon,k}) = \lambda_k(\varepsilon) u^{\varepsilon,k} \ \text{в}\ \Omega^{\varepsilon},\ \|u^{\varepsilon,k}\|_{L_2(\Omega^{\varepsilon})} = 1, \\ u^{\varepsilon,k} = 0 \ \text{на}\ \Gamma_{\varepsilon},\ \sigma_{\varepsilon}(u^{\varepsilon,k}) = 0 \ \text{на}\ S_{\varepsilon} \end{array}\right\} \qquad (22)$$

$$0 > \lambda_1(\varepsilon) \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k(\varepsilon) \geq \cdots$$

и $\{\hat{\lambda}_k\}$ – последовательность собственных значений задачи

$$\left.\begin{array}{l} \hat{L} u^{k} = \hat{\lambda}_k u^{k} \ \text{в}\ \Omega,\ \|u^{k}\|_{L_2(\Omega)} = 1, \\ u^{k} = 0 \ \text{на}\ \partial\Omega,\ 0 > \hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \cdots \geq \hat{\lambda}_k \geq \cdots \end{array}\right\} \qquad (23)$$

В последовательностях $\{\lambda_k(\varepsilon)\}$ и $\{\hat{\lambda}_k\}$ каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность.

<u>Теорема 3.</u> Для собственных значений $\{\lambda_k(\varepsilon)\}$ и $\{\hat{\lambda}_k\}$ соответственно задач (22) и (23) имеет место оценка

$$\left| \lambda_k(\varepsilon) - \hat{\lambda}_k \right| \leq C(k)\sqrt{\varepsilon}, \qquad (24)$$

где постоянная $C(k)$ не зависит от $\varepsilon > 0$. Если $G^{0} = \phi$ (т.е. полости или отверстия отсутствуют), то

$$\left| [\lambda_K(\varepsilon)]^{-1} - [\hat{\lambda}_K]^{-1} \right| \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\,, \qquad (25)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от $\varepsilon > 0$ и $K = 1, 2, \ldots$

Доказательство оценки (24) проводится так же, как доказательство теоремы 4 из /II/, а доказательство оценки (25) - так же, как теоремы 6 из /I2/.

Представляет интерес предельное (при $\varepsilon \to 0$) поведение вектор-функций $\sigma_\varepsilon^p(x) \equiv C^{pK}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_K}$,

компоненты которых являются компонентами тензора напряжений задачи (I). Определим матрицы $a^{ij}(\xi)$ по формуле

$$a^{ij}(\xi) = C^{ij}(\xi) + C^{iK}\frac{\partial N_j}{\partial \xi_K} - h^{ij}.$$

Имеет место следующая

Теорема 4. Пусть выполнены предположения теоремы I. Тогда имеет место оценка

$$\left\| \sigma_\varepsilon^p(x) - \hat{\sigma}^p(x) - a^{pj}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial U^0}{\partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\,,$$

где $\hat{\sigma}^p(x) \equiv h^{pq}\frac{\partial U^0}{\partial x_q}$, а постоянная $C > 0$ не зависит от ε.

Доказательство. Согласно теореме I

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_K} = \frac{\partial U^0}{\partial x_K} + \frac{\partial N_s}{\partial \xi_K}\frac{\partial U^0}{\partial x_s} + r_K^\varepsilon(x), \quad \left\| r_K^\varepsilon(x) \right\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\,.$$

Следовательно,

$$\sigma_\varepsilon^p(x) - \hat{\sigma}^p(x) - a^{pj}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial U^0}{\partial x_j} =$$

12

$$= C^{pq}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left[\frac{\partial U^{\circ}}{\partial x_{k}}+\frac{\partial N_{s}}{\partial \xi_{k}}\cdot\frac{\partial U^{\circ}}{\partial x_{s}}\right]-h^{pq}\frac{\partial U^{\circ}}{\partial x_{q}}-$$

$$-\left[C^{pj}(\xi)+C^{pk}(\xi)\frac{\partial N_{j}}{\partial \xi_{k}}-h^{pj}\right]\frac{\partial U^{\circ}}{\partial x_{j}}+$$

$$+C^{pk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)r_{k}^{\varepsilon}(x)=C^{pk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)r_{k}^{\varepsilon}(x).$$

Так как $\left|C^{pk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|\leq K=const$, то

$$\left\|C^{pk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)r_{k}^{\varepsilon}(x)\right\|_{L_{2}(\Omega^{\varepsilon})}\leq c\sqrt{\varepsilon}.$$

Теорема 4 доказана.

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Литература

I. В.А. Марченко, Е.Я.Хруслов. Краевые задачи с мелкозернистой границей, Киев, 1974.

2. D.Cioranescu, J.S.Paulin. J.Math. Anal. Appl. 1979, 71, 590-607.

3. G.Duvaut. Lect. Notes in Math., 594, 1976, 131-145.

4. J.-L.Lions. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1980, 10 : 1, 125-140.

5. С.Е.Пастухова. УМН, 1979, 34:4, 205-206.
6. О.А.Олейник, Г.А.Иосифьян. Г.П.Панасенко. Мат. сб., 1983, 120:1, 22-41.
7. О.А.Олейник, Г.А.Иосифьян. УМН, 1982, 37:5, 195-196.
8. M.Vanninathan. C.R.Acad. Sc. Paris, ser. A, 1978, t. 287, 403-406.
9. M.Vanninathan. C.R.Acad., Sc. Paris, ser. A, 1978, t. 287, 823-825.
10. А.С.Шамаев. УМН, 1982, 37:2, 243-244.
11. Г.А.Иосифьян, О.А.Олейник, А.С.Шамаев. Вестник МГУ, 1983, № 4.
12. Г.А.Иосифьян, О.А.Олейник, А.С.Шамаев. СМЖ, № 5, 1983.
13. О.А.Олейник. Изв.Акад.Наук. СССР, сер.матем.,25(1961), 3-20.
14. Г.Фикера. Теоремы существования в теории упругости. М., "Мир", 1975.
15. П.П.Мосолов, В.П.Мясников. ДАН СССР, 1971, 201:1, 36-39.

გ. იოსიფიანი, ო. ოლეინიკი, ა. შამაევი

სასაზღვრო ამოცანის გასაშუალოება და ამოცანები საკუთრივ მნიშვნელობებზე წყვეტილი პერიოდული სწრაფად ოსცილირებად კოეფიციენტებიან დრეკადობის თეორიის განტოლებათა სისტემისათვის პერფორირებულ არეში

რეზიუმე

ნაშრომში შესწავლილია დრეკადობის თეორიის პერიოდულ უბან-უბან გლუვი კოეფიციენტებიანი განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა და საკუთრივ რიცხვთა მისწრაფების ხარისხი გასაშუალოებული გან-

ფოლების ამონახსნისათვის და საკუთრივი რიცხვებისათვის კომ-
პოზიტური სხეულებისათვის.

G.Iosifyan, O.Oleinik, A.Shamaev

AVERAGING OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM AND OF THE CHARACTERISTIC VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF EQUATIONS OF THE ELASTICITY THEORY WITH DISCONTINUOUS PERIODIC FAST-OSCILLATING COEFFICIENTS IN THE PERFORATED DOMAIN

Summary

The behaviour of solutions and that of the characteristic values of the boundary value problem for a system of equations of the theory of elasticity with periodic piece-wise smooth coefficients are investigated in the perforated domain.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
259, 1985

УДК 517.54

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЯМИ ДЛЯ ДВУХ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ НА ОБЪЕДИНЕНИИ ОБЛАСТЕЙ

Р.С. Исаханов

В работе изучается граничная задача нахождения двух функций, каждая из которых голоморфна на множестве, представляющем собой объединение конечного числа областей, не имеющих между собой общих граничных точек. Оба множества ограничены одним и тем же числом замкнутых контуров. Граничным условием задается значение линейного интегродифференциального оператора от искомых и комплексно сопряженных с ними функций, вообще говоря в различных точках. Наивысшие порядки производных искомых функций могут быть различными. На разных контурах границы наивысшие порядки производных также могут быть различными.

Для исследования задачи построено интегральное представление в рассматриваемом общем случае, с помощью интегральных представлений для пар функций голоморфных в односвязных областях. Предварительно интегральные представления для всех возможных случаев односвязных областей и для различных случаев, отображающих функции, получены путем сведения этих случаев к одному.

Пусть L, L' и Γ – совокупности следующих n замкнутых контуров Ляпунова соответственно: $L_1, L_2, \dots, L_n$; $L'_1, L'_2, \dots, L'_n$ и $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$. Предполагается, что контуры, входящие в состав одной и той же линии L, L' или Γ, не пересекаются между собой. Линией L плоскость разбивается на $n+1$ областей. Эти области сгруппируем по две части – E и E_1 – так, чтобы области, принадлежащие одной и той же части E или E_1, не имели общих между собой граничных точек. По такому же правилу сгруппируем на две части E' и E'_1 области, на которые разбивается плоскость линией L'.

На линии $L(L')$ выберем положительное направление так, чтобы оно точки множества $E(E')$ оставляло слева. На линии Γ положительное направление выберем так, чтобы оно конечные области, ограниченные любым контуром Γ_k, $k=1,2,\dots,n$, оставляло слева.

Пусть m_k и n_k, $k=1,2,\dots,n$, – некоторые неотрицательные числа. Введем обозначения $m=\max\limits_k m_k$, $n=\max\limits_k n_k$, $k=1,2,\dots,n$.

Допустим, что $\alpha_j, \alpha_j^*, \beta_j, \beta_j^*$, $j=0,1,\dots,m$, – непрерывные по Гельдеру функции, определенные на тех контурах Γ_k, для которых индекс k удовлетворяет условию $m_k \geq j$.

Предположим, что эти функции взаимно однозначно отображают область своего определения на некоторую совокупность контуров, составляющих L. Мы допускаем, что любая из этих функций каждый контур Γ_k, который входит в область ее определения, отображает на один и тот же контур. Очевидно, можем считать, что образом контура Γ_k является L_k.

Пусть $\gamma_j, \gamma_j^*, \delta_j, \delta_j^*$, $j=0,1,\dots,n$, – непрерывные по

Гельдеру функции, определенные на тех контурах Γ_k, составляющих Γ, для которых индекс k удовлетворяет условию $n_k \geq j$. Допускаем, что эти функции взаимно однозначно отображают область своего определения на некоторую совокупность контуров, составляющих Γ. Мы также предполагаем, что любая из этих функций каждый контур Γ_k, который входит в область ее определения, отображает на один и тот же контур L_k'.

Далее мы допускаем, что функции $\alpha_{m_k}, \alpha^*_{m_k}, \beta_{m_k}, \beta^*_{m_k}$, $k=1,2,\ldots,n$, на контуре Γ_k принимают одинаковые значения. То же самое допускаем относительно функций $\gamma_{n_k}, \gamma^*_{n_k}, \delta_{n_k}, \delta^*_{n_k}$.

Введем обозначения:

$$\alpha(t)=\alpha_{m_k}(t), \ \gamma(t)=\gamma_{n_k}(t) \qquad \text{при} \quad t\in\Gamma_k, \ k=1,2,\ldots,n.$$

Очевидно, функции α и γ взаимно однозначно отображают линию Γ на L и L'. Мы допускаем, что существуют производные $\alpha'(t)$, $\gamma'(t)$, принадлежащие классу $H(\Gamma)$, $\alpha^{*\prime}_{m_k-1}(t), \beta^{*\prime}_{m_k-1}(t), \gamma^{*\prime}_{n_k-1}(t), \delta^{*\prime}_{n_k-1}(t)$, принадлежащие классу $H(\Gamma_k)$, $k=1,2,\ldots,n$, и что $\alpha'(t)\neq 0, \gamma'(t)\neq 0$ на Γ.

Рассмотрим следующую общую граничную задачу со смещением:

Найти функцию Φ, голоморфную на множестве E, и функцию Ψ, голоморфную на множестве E', удовлетворяющую следующим условиям:

I. Производная $\Phi^{(m_k)}(z)$ непрерывно продолжима на контуре L_k, $k=1,2,\ldots,n$;

2. Производная $\Psi^{(n_k)}(z)$ непрерывно продолжима на контуре L_k', $k=1,2,\ldots,n$;

3. Функции Φ и Ψ удовлетворяют граничному условию

$$(M\Phi)(t)+(N\Phi)(t)+(R\varphi)(t)+(S\varphi)(t)=g(t) \text{ на } \Gamma, \qquad (1)$$

где M, N, R, S – операторы, имеющие вид:

$$(M\varphi)(t)=\sum_{k=0}^{m}\left\{A_k(t)\varphi^{(k)}[\alpha_k(t)]+\int_\Gamma M_k(t,\tau)\varphi^{(k)}[\alpha_k^*(\tau)]d\tau\right\},$$

$$(N\varphi)(t)=\sum_{k=0}^{m}\overline{\left\{B_k(t)\varphi^{(k)}[\beta_k(t)]+\int_\Gamma N_k(t,\tau)\varphi^{(k)}[\alpha_k^*(\tau)]d\tau\right\}},$$

$$(R\varphi)(t)=\sum_{k=0}^{n}\left\{C_k(t)\varphi^{(k)}[\gamma_k(t)]+\int_\Gamma R_k(t,\tau)\varphi^{(k)}[\gamma_k^*(\tau)]d\tau\right\},$$

$$(S\varphi)(t)=\sum_{k=0}^{n}\overline{\left\{D_k(t)\varphi^{(k)}[\delta_k(t)]+\int_\Gamma S_k(t,\tau)\varphi^{(k)}[\delta_k^*(\tau)]d\tau\right\}}, \qquad (2)$$

A_k, B_k, C_k, D_k – заданные на Γ непрерывные по Гельдеру функции, $M_k(t,\tau)$, $N_k(t,\tau)$, $R_k(t,\tau)$, $S_k(t,\tau)$ имеют вид $h(t,\tau)|t-\tau|^{-\alpha}$, где $h\in H(\Gamma,\Gamma)$, $0\leq\alpha<1$. Кроме того, если $t\in\Gamma_k$, то

$$A_j(t)=0,\ B_j(t)=0,\ M_j(\tau,t)=0,\ N_j(\tau,t)=0$$

при $j>m_k$,

$$C_j(t)=0,\ D_j(t)=0,\ R_j(\tau,t)=0,\ S_j(\tau,t)=0$$

при $j>n_k$,

$k=1,2,\ldots,n.$

Случай, когда L является простым замкнутым контуром и совпадает с L' и Γ, исследован в работах /1/,/2/. Для нескольких неизвестных кусочно голоморфных функций, когда линия скачков есть один замкнутый контур, задача (I) изучена нами (результаты исследований подробно изложены в /3/, стр. 332–352). Задача (I) в случае, когда E и E_1 – многосвязные области, в операторах M и N, а также R и S, отображающие функции совпадают и, кроме того, наивысшие порядки производных на всех контурах, составляющих L, и на всех контурах, составляющих L', одни и те же, исследована /4/. В этой работе установлено условие нетеровости задачи и найден индекс.

Для исследования задачи, как обычно, мы должны получить формулы интегрального представления для искомых функций. Допустим пока, что L, L' и Γ состоят из одного замкнутого контура. Будем предполагать, что точка $z=0$ принадлежит конечным областям, ограниченным этими контурами.

Если E – конечная область, E' – бесконечная область, α сохраняет ориентацию, а γ меняет ориентацию, то искомые голоморфные (включая точку $z=\infty$) функции представляются в виде /5/, /3/

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^0} Q(z,t;m)\mu[\alpha^{-1}(t)]dt \quad \text{при } z\in E,$$

$$\Psi(z)=\frac{(-1)^n z}{2\pi i}\int\limits_{L} Q(t,z;n)\mu[\gamma^{-1}(t)]dt \quad \text{при } z\in E', \qquad (3)$$

где

$$Q(z,t;m)=\frac{(-1)^m(t-z)^{m-1}}{(m-1)!\,z^m}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\eta_{km}t^{m-k-1}}{z^{m-k}}$$

при $m\geq 1$, (4)

$$Q(z,t;0)=\frac{1}{t-z},$$

$$\eta_{om}=0,\quad \eta_{km}=\frac{(-1)^{m-k}}{k!(m-k)!}\left(\frac{1}{m-1}+\frac{1}{m-2}+\dots+\frac{1}{m-k}\right),$$

α^{-1}, γ^{-1} – функции, обратные α, γ,

μ – решение интегрального уравнения Фредгольма

$$(T\mu)(t)=\mu(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}-\frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)-\gamma(t)}\right]\mu(\tau)d\tau=$$

$$=\left(\tau^m\Phi(\tau)\right)^{(m)}_{\tau=\alpha(t)}-\left(\gamma(t)\right)^n\left(\frac{1}{\tau}\Psi(\tau)\right)^{(n)}_{\tau=\gamma(t)}. \qquad (5)$$

Уравнение $T\mu=0$ не имеет отличных от нуля решений. Кроме того, всякое решение уравнения (5) – непрерывная функция.

Предположим теперь, что α и γ меняют ориентации. Если Φ – голоморфная в области E, то функция Φ^*: $\Phi^*(z)=\overline{\Phi(\bar z)}$ будет голоморфной в области $\bar E$, симметричной области E относительно действительной оси. Пусть $\alpha_1(t)=\overline{\alpha(t)}$, $t\in\Gamma$. Тогда $\alpha_1(\Gamma)=\bar L$, где $\bar L$ – граница области $\bar E$. Функция α_1, отображает Γ на $\bar L$ с сохранением ориентации. Поэтому можем применить формулу (4). Заметим, что $\overline{Q(\bar z,\bar\tau;m)}=Q(z,\tau;m)$, после очевидных преобразований получим следующие формулы интегрального представления:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L Q(z,\tau;m)\mu\overline{[\alpha^{-1}(\tau)]}d\tau \qquad \text{при } z\in E,$$

$$\Psi(z)=\frac{(-1)^n z}{2\pi i}\int_{L'} Q(\tau,z;n)\mu[\gamma^{-1}(\tau)]d\tau \qquad \text{при } z\in E'.$$

Аналогично получаются формулы:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L Q(z,\tau;m)\mu[\alpha^{-1}(\tau)]d\tau \qquad \text{при } z\in E,$$

$$\Psi(z)=\frac{(-1)^n z}{2\pi i}\int_{L'} Q(\tau,z;n)\mu\overline{[\gamma^{-1}(\tau)]}d\tau \qquad \text{при } z\in E',$$

когда α и γ сохраняют ориентацию.

В случае, когда α меняет, а γ сохраняет ориентацию, получаем опять интегральное представление (3).

Рассмотрим теперь случаи, когда E и E' – конечные области $z=0\in E$, $z=0\in E'$. Заметив, что функция $\Psi^*(z)=\Psi\left(\frac{1}{z}\right)$ голоморфна в бесконечной области E'^*, являющейся образом области E' при отображении $\zeta=\frac{1}{z}$, после некоторых преобразований получаем следующие формулы интегрального представления:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L Q(z,\tau;m)\mu[\alpha^{-1}(\tau)]d\tau \qquad \text{при } z\in E,$$

$$\Psi(z)=\frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i}\int_{L'} \frac{1}{\tau}Q(z,\tau;n)\mu\overline{[\gamma^{-1}(\tau)]}d\tau \qquad \text{при } z\in E',$$

если α и γ сохраняют ориентацию.

Таким же способом можно получить формулы интегрального представления во всех других возможных случаях. Приведем окончательные формулы. Введем функции a и b, определенние на L' следующим образом:

$a(t)=1,\ b(t)=0$, если отображение $\alpha\circ\gamma^{-1}$ не меняет ориентацию,

$a(t)=0,\ b(t)=1$, если отображение $\alpha\circ\gamma^{-1}$ меняет ориентацию.

Если E - конечная область, а E' - бесконечная область, то

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L Q(z,\tau;m)\mu[\alpha^{-1}(\tau)]d\tau \quad \text{при } z\in E,$$

$$\Psi(z)=\frac{(-1)^n z}{2\pi i}\int_L Q(\tau,z;n)\Big(b(\tau)\mu[\gamma^{-1}(\tau)]+ + a(\tau)\overline{\mu[\gamma^{-1}(\tau)]}\Big)d\tau \quad \text{при } z\in E'. \tag{6}$$

Если E и E' - конечные области, то

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L Q(z,\tau;m)\mu[\alpha^{-1}(\tau)]d\tau \quad \text{при } z\in E,$$

$$\Psi(z)=\frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i}\int_{L'}\frac{1}{\tau}Q(z,\tau;n)\Big(b(\tau)\mu[\gamma^{-1}(\tau)]+a(\tau)\overline{\mu[\gamma^{-1}(\tau)]}\Big)d\tau \tag{7}$$

при $z\in E'$.

Если E и E' - бесконечные области, то

$$\Phi(z)=\frac{(-1)^m z}{2\pi i}\int_L Q(\tau,z;m)\mu[\alpha^{-1}(\tau)]d\tau \quad \text{при } z\in E,$$

$$\Psi(z)=-\frac{z}{2\pi i}\int_{L'}\frac{1}{\tau}Q(\tau,z;m)\Big(b(\tau)\mu[\gamma^{-1}(\tau)]+a(\tau)\overline{\mu[\gamma^{-1}(\tau)]}\Big)d\tau \tag{8}$$

при $z\in E'$.

Теперь построим формулы интегрального представления в общем случае.

Области, ограниченные замкнутыми контурами $L_k(L'_k)$, обозначим через $E_{k+}(E'_{k+})$ и $E_{k-}(E'_{k-})$, причем через $E_{k+}(E'_{k+})$ обозначим ту область, которая расположена слева от $L_k(L'_k)$. Возьмем по одной точке $a_k(a'_k)$ в конечных областях, ограниченных линией $L_k(L'_k)$, $k=1,2,...,n$. Обозначим через $S(L_k)$ ту из областей, составляющих множество E, для которой L_k является граничным контуром. Очевидно, $S(L_k)\subset E_{k+}$. Аналогично определяется область $S(L'_k)$, $k=1,2,...,n$.

Допустим (Φ,Ψ) – некоторое решение рассматриваемой задачи. Пусть E есть объединение конечных областей $S_1, S_2,...,S_q$ с границами $L^{(1)}, L^{(2)},..., L^{(q)}$. Если $z\in S_j$, $1\leq j\leq q$, то

$$\Phi(z)=\sum_{k=1}^{n}{}' \Phi_k(z), \tag{9}$$

где

$$\Phi_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{\Phi(t)dt}{t-z}$$

– голоморфная функция в области E_{k+}. Знак $'$ означает, что k принимает только те значения, для которых контур L_k является границей области S_j. Представление функции Φ в виде (9) имеет место и в том случае, когда E содержит точку $z=\infty$. Аналогичное представление имеем и для функции Ψ.

Так как производные $\Phi^{(n_k)}(z)$ и $\Psi^{(n_k)}(z)$ непрерывно продолжимы соответственно на L_k и L'_k, в силу формул (6), (7) и (8) получаем следующие формулы интегрального представления в общем случае:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L} Q(z,\tau)\mu[\alpha^{-1}(\tau)]d\tau \qquad \text{при } z\in E,$$

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L'} Q_1(z,\tau)\left[(1-a(\tau))\mu[\gamma^{-1}(\tau)]+\right. \tag{10}$$

$$\left.+a(\tau)\overline{\mu[\gamma^{-1}(\tau)]}\right]d\tau \qquad \text{при } z\in E',$$

где

$$Q(z,\tau)=\begin{cases} Q(z-a_k,\tau-a_k;m_k), & \text{если } E_{k+} \text{ – конечная область,} \\ (-1)^{m_k}(z-a_k)Q(\tau-a_k,z-a_k;m_k), & \text{если } E_{k+} \text{ – бесконечная область, } E'_{k+} \text{ – конечная область,} \\ -\frac{z-a_k}{\tau-a_k}Q(\tau-a_k,z-a_k;m_k), & \text{если } E_{k+} \text{ и } E'_{k+} \text{ – бесконечные области,} \end{cases}$$

когда $\tau\in L_k$, $z\in S(L_k)$,

$Q(z,\tau)=0$, когда $\tau\in L_k$, $z\bar{\in} S(L_k)$, $k=1,2,\dots,q$,

$$Q_1(\tau,z)=\begin{cases} \frac{(-1)^{n_k+1}}{\tau-a_k}Q(z-a'_k,\tau-a'_k;n_k), & \text{если } E_{k+} \text{ и } E'_{k+} \text{ –конечные области,} \\ (-1)^{n_k}(z-a_k)Q(\tau-a'_k,z-a'_k;n_k), & \text{если } E'_{k+} \text{ – бесконечная область} \\ Q(z-a'_k,\tau-a'_k;n_k), & \text{если } E_{k+} \text{ – бесконечная область, а } E'_{k+} \text{ – конечная область,} \end{cases}$$

когда $\tau \in L'_k$, $z \in S(L'_k)$,

$Q_1(z,\tau)=0$, когда $\tau \in L'_k$, $z \bar{\in} S(L'_k)$, $k=1,2,\ldots,n$.

На основании формул интегрального представления (I0) в силу граничного условия (I), после некоторых преобразований, относительно функции μ получаем следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$(K\mu)(t)=A_{(1)}(t)\mu(t)+A_{(2)}(t)\overline{\mu(t)}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{K_1(t,\tau)\mu(\tau)d\tau}{\tau-t}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\overline{\int\limits_{\Gamma}\frac{K_2(t,\tau)\mu(\tau)d\tau}{\tau-t}}=g(t), \quad t\in\Gamma, \qquad \text{(II)}$$

где при $t\in\Gamma_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$

$$A_{(1)}(t)=\frac{1}{2}A(t)\varphi[\alpha(t)]+\frac{1}{2}C(t)(1-a(t))\psi[\gamma(t)]+\frac{1}{2}D(t)a(t)\overline{\psi[\gamma(t)]},$$

$$A_{(2)}(t)=\frac{1}{2}B(t)\overline{\varphi[\alpha(t)]}+\frac{1}{2}C(t)a(t)\psi[\gamma(t)]+\frac{1}{2}D(t)(1-a(t))\overline{\psi[\gamma(t)]},$$

$$A(t)=A_{m_k}(t),\ B(t)=B_{m_k}(t),\ C(t)=C_{n_k}(t),\ D(t)=D_{n_k}(t),$$

$$\frac{K_1(t,\tau)}{\tau-t}=\frac{\pi i}{2}\Big[M(t,\tau)\varphi[\alpha(\tau)]+R(t,\tau)\psi[\gamma(\tau)](1-a(\tau))+$$

$$+\overline{S(t,\tau)}a(\tau)\overline{\psi[\gamma(\tau)]}\,\overline{\tau}'^{2}\Big]+\frac{1}{2}\big(MQ(t,\alpha(\tau))\big)(t)\alpha'(\tau)\eta(\tau)+$$

$$+\big(RQ_1(t,\gamma(t))\big)(t)(1-a(\tau))\zeta(\tau)\gamma'(\tau)-\big(SQ_1(t,\gamma(\tau))\big)(t)a(\tau)\zeta(\tau)\overline{\gamma'(\tau)}\,\overline{\tau}'^{2};$$

$$\frac{K_2(t,\tau)}{\tau-t} = -\frac{\pi i}{2}\Big[N(t,\tau)\varphi[\alpha(\tau)] + \overline{R(t,\tau)}\,\overline{\psi[\gamma(\tau)]}\,\alpha(\tau)\,\overline{\tau}'^{2} +$$

$$+ S(t,\tau)(1-\alpha(\tau))\psi[\gamma(\tau)]\Big] - \frac{1}{2}\overline{\big(NQ(t,\alpha(\tau))\big)(t)}\,\alpha'(\tau)\eta(\tau) +$$

$$+ \frac{1}{2}\big(RQ_1(t,\gamma(\tau))\big)(t)\,\alpha(\tau)\zeta(\tau)\overline{\gamma'(\tau)}\,\overline{\tau}'^{2} -$$

$$- \frac{1}{2}\overline{\big(SQ_1(t,\gamma(\tau))\big)(t)}\,(1-\alpha(\tau))\zeta(\tau)\gamma'(\tau).$$

В этих формулах введены обозначения: при $t\in L_k$ $(k=1,2,\dots,n)$

$$\varphi(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{(t-a_k)^{m_k}}, & \text{если } E_{k+} \text{ – конечная область,}\\[2mm] -\dfrac{1}{(t-a_k)^{m_k-1}}, & \text{если } E_{k+} \text{ – бесконечная область, а } E'_{k+} \text{ – конечная область,}\\[2mm] \dfrac{(-1)^{m_k}}{(t-a_k)^{m_k}}, & \text{если } E_{k+} \text{ и } E'_{k+} \text{ – бесконечные области;} \end{cases}$$

при $t\in L'_k$ $(k=1,2,\dots,n)$

$$\psi(t)=\begin{cases} \dfrac{(-1)^{n_k-1}}{(t-a'_k)^{n_k+1}}, & \text{если } E_{k+} \text{ и } E'_{k+} \text{ – конечные области,}\\[2mm] -\dfrac{1}{(t-a'_k)^{n_k-1}}, & \text{если } E'_{k+} \text{ – бесконечная область,}\\[2mm] \dfrac{1}{(t-a'_k)^{n_k}} & \text{если } E'_{k+} \text{ – конечная область, а } E_{k+} \text{ – бесконечная область;} \end{cases}$$

при $t\in\Gamma_k$ $(k=1,2,\dots,n)$

$$\eta(t)=\begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \text{ не меняет ориентацию на } \Gamma_k,\\ -1, & \text{если } \alpha \text{ меняет ориентацию на } \Gamma_k; \end{cases}$$

$$\zeta(t)=\begin{cases} 1, & \text{если } \gamma \text{ не меняет ориентацию на } \Gamma_k, \\ -1, & \text{если } \gamma \text{ меняет ориентацию на } \Gamma_k; \end{cases}$$

$$M(t,\tau)=M_{m_k}(t,\tau),\quad N(t,\tau)=N_{m_k}(t,\tau),\quad R(t,\tau)=R_{m_k}(t,\tau),$$

$$S(t,\tau)=S_{n_k}(t,\tau) \quad \text{при} \quad t\in\Gamma_k,\quad k=1,2,\ldots,n.$$

Для уравнения вида (II) справедливы теоремы Нетера (см. /I/,/3/). Для применения этих теорем следует вычислить определитель $T(t)$:

$$T(t)=\begin{Vmatrix} A_{(1)}(t)-K_1(t,t) & A_{(2)}(t)-\overline{K_2(t,t)} \\ \overline{A_{(2)}(t)}+K_2(t,t) & \overline{A_{(1)}(t)}+\overline{K_1(t,t)} \end{Vmatrix}$$

Здесь следует рассмотреть всевозможные случаи, когда области E_{k+} и E'_{k+} – обе конечные или обе бесконечные, или же когда одна из них – конечная, а другая – бесконечная; следует также учесть всевозможные случаи относительно ориентации отображений α и γ. Не приводя результатов всех этих вычислений, укажем окончательный результат.

Введем функцию G, определенную на Γ следующими равенствами:

I. Если области E_{k+} и E'_{k+} одновременно конечные или бесконечные при $t\in\Gamma_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$

$$G(t)=\begin{cases} \overline{B(t)}\overline{C(t)}-\overline{A(t)}D(t), & \text{когда } \alpha \text{ и } \gamma \text{ сохраняют ориентацию,} \\ \overline{B(t)}C(t)-A(t)\overline{D(t)}, & \text{когда } \alpha \text{ и } \gamma \text{ меняют ориентацию,} \\ A(t)\overline{C(t)}-\overline{B(t)}D(t), & \text{когда } \alpha \text{ меняют ориентацию, а } \gamma \\ & \text{сохраняет ориентацию,} \\ \overline{A(t)}C(t)-B(t)\overline{D(t)}, & \text{когда } \alpha \text{ сохраняет ориентацию, а} \\ & \gamma \text{ меняет ориентацию;} \end{cases}$$

14

II. Если одна из областей E_{k+} , E'_{k+} – конечная, а другая – бесконечная при $t\in\Gamma_k$ $(k=1,2,\dots,n)$

$$G(t)=\begin{cases} \overline{A(t)}D(t)-B(t)\overline{C(t)}, & \text{когда } \alpha \text{ и } \gamma \text{ не меняют ориентацию,}\\ A(t)\overline{D(t)}-\overline{B(t)}C(t), & \text{когда } \alpha \text{ и } \gamma \text{ меняют ориентацию,}\\ A(t)\overline{C(t)}-\overline{B(t)}D(t), & \text{когда } \alpha \text{ меняет ориентацию, а } \gamma \text{ не меняет ориентацию,}\\ \overline{A(t)}C(t)-B(t)\overline{D(t)}, & \text{когда } \alpha \text{ не меняет ориентацию, а } \gamma \text{ меняет ориентацию.} \end{cases}$$

Мы дополнительно требуем, что $G(t)\neq 0$ всюду на Γ. Так как μ – непрерывная на Γ функция, она удовлетворяет уравнению (II) почти всюду на Γ. Но из результатов работы /6/ следует, что решения этого уравнения являются непрерывными по Гельдеру функциями. Следовательно, μ удовлетворяет уравнению (II) всюду. Отсюда следует также, что граничные значения производных наивысшего порядка любого решения задачи (I) являются непрерывными по Гельдеру функциями.

Индекс функции T на Γ_k равен

$m_k+n_k+1+\mathrm{Ind}_{\Gamma_k} G(t)$, если E_{k+} и E'_{k+} – конечные области,

$-m_k-n_k+1+\mathrm{Ind}_{\Gamma_k} G(t)$, если E_{k+} и E'_{k+} –бесконечные области,

$m_k-n_k+1+\mathrm{Ind}_{\Gamma_k} G(t)$, если E_{k+} –конечная область, а E'_{k+} – бесконечная область,

$-m_k+n_k+1+\mathrm{Ind}_{\Gamma_k} G(t)$, если E_{k+} – бесконечная область, а E'_{k+} –конечная область.

Следовательно, индекс уравнения (II) вычисляется по формуле

$$\varkappa = \mathrm{Ind}_\Gamma T(t) = \sum_{k=1}^{n}{}' m_k - \sum_{k=1}^{n}{}'' m_k + \sum_{k=1}^{n}{}' n_k - \sum_{k=1}^{n}{}'' n_k + n + \mathrm{Ind}_\Gamma G(t), \tag{12}$$

где $\sum_{k=1}^{n}{}' m_k$ обозначает сумму тех чисел m_k, которым соответствуют конечные области E_{k+}, $\sum_{k=1}^{n}{}'' m_k$ обозначает сумму тех чисел m_k, которым соответствуют бесконечные области E_{k+}. Аналогичные значения имеют суммы $\sum_{k=1}^{n}{}' n_k$ и $\sum_{k=1}^{n}{}'' n_k$ по отношению областей E'_{k+}.

Из теорем Нетера для уравнений (II) следует, что если k обозначает число линейно независимых (над полем действительных чисел) решений однородной задачи, соответствующей задаче (I), то $k = 2\varkappa + k'$, где $\varkappa$ – индекс уравнения (II), который дается по формуле (I2), а k' – число линейно независимых решений уравнения $K'_\nu = 0$, союзного с уравнением (II).

Отсюда заключаем, что при $\varkappa > 0$ однородная задача имеет не менее $2\varkappa$ линейно независимых решений.

Для разрешимости задачи (I) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\mathrm{Re} \int_\Gamma g(t) \nu_j(t)\, dt = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, k',$$

где $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{k'}$ – полная система линейно независимых решений однородного уравнения $K'_\nu = 0$.

Для рассматриваемой общей задачи (I) устанавливаются результаты, аналогичные тем, которые приводятся в работах /I/, /2/.

В частности, уравнение $K'_\nu = 0$ заменяется функциональным уравнением, а затем в некоторых случаях строятся задачи, союзные с задачей (I).

Тбилисский математический
институт им.А.М.Размадзе
АН ГССР

Литература

I. Р.С.Исаханов. Труды Тбилисского математ.ин-та АН ГССР, т.28, 1962.
2. Р.С.Исаханов. Труды Груз.политехнического ин-та, № 3(96), 1964.
3. Н.П.Векуа. Системы сингулярных интегральных уравнений, "Наука",М.,1970.
4. А.В.Проценко. Краевые задачи теории аналитических функций, граничное условие которых содержит производные. Автореферат канд.диссерт.,Одесса, I98I.
5. Р.С.Исаханов. Сообщ.АН ГССР, т.2I, № I, 1958.
6. Б.В.Хведелидзе. Труды Тбилисского математ.ин-та АН ГССР, т.23, 1956.

რ. ისახანოვი

გადაადგილებიანი დიფერენციალური სასაზღვრო ამოცანა
ორი ფუნქციისათვის, რომლებიც კონფორმული არიან არეთა
გაერთიანებებზე

რეზიუმე

შესწავლილია ამოცანა სასრული რაოდენობის არეთა გაერთიანებებზე კონფორმული ორი ფუნქციის მოძებნის შესახებ სასაზღვრო პირობით, რომელიც წარმოადგენს საძიებელი ფუნქციებისა და მათი კომპლექსურად შეუღლებული ფუნქციებისაგან შედგენილ წრფივ ინტეგრო-დიფერენციალურ გამოსახულების მნიშვნელობას.

R.Isakhanov

THE DIFFERENTIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH DISPLACEMENTS FOR TWO FUNCTIONS HOLOMORPHIC ON THE UNION OF DOMAINS

Summary

The problem of finding two functions, holomorphic on the union of domains, by the given linear integro-differential operator of the unknown and complex conjugate functions is studied.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

259, 1985

УДК 517.927

ОБ ОДНОЙ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И.Т.Кигурадзе

§ 1. Формулировка теорем существования и единственности

В предлагаемой заметке рассматривается задача об отыскании решения дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1.1}$$

удовлетворяющего краевым условиям

$$x(t_0) = \sum_{i=1}^{m} H_i x(t_i) + c_0, \tag{1.2.}$$

где $-\infty < a < b < +\infty$, $f:[a,b]\times R^n \to R^n$ – вектор-функция из класса Каратеодори, $t_i \in [a,b]$ $(i=0,\dots,m)$, $c_0 \in R^n$, а H_i $(i=1,\dots,m)$ – постоянные действительные $n\times n$ матрицы. Установленные нами признаки существования и единственности решения этой задачи дополняют результаты работ /1,2/.

Ниже приняты следующие обозначения:

R^n – n – мерное вещественное евклидово пространство; $x=(\xi_i)_{i=1}^{n} \in R$ – вектор-столбец с элементами ξ_i $(i=1,\dots,n)$;

$$|x| = (|\xi_i|)_{i=1}^n, \quad \|x\| = \sum_{i=1}^n |\xi_i|;$$

$R^{n\times n}$ – множество всех матриц $\mathcal{X} = (\xi_{ik})_{i,k=1}^n$ с элементами $\xi_{ik} \in R$ $(i,k=1,\dots,n)$;

$$|\mathcal{X}| = (|\xi_{ik}|)_{i,k=1}^n, \quad \|\mathcal{X}\| = \sum_{i,k=1}^n |\xi_{ik}|;$$

R_+^n и $R_+^{n\times n}$ – множества тех векторов из R^n и тех матриц из $R^{n\times n}$, элементы которых неотрицательны;

$\widetilde{R}_+^{n\times n}$ – множество всех матриц из $R^{n\times n}$, все лежащие вне главной диагонали элементы которых неотрицательны, т.е. запись $\mathcal{X} = (\xi_{ik})_{i,k=1}^n \in \widetilde{R}_+^{n\times n}$ означает, что $\xi_{ik} \geq 0$ при $i \neq k$;

$r(\mathcal{X})$ – наибольший среди модулей собственных чисел квадратной матрицы $\mathcal{X}$.

Неравенства между векторами и матрицами понимаются покомпонентно, т.е. записи $x_1 \leq x_2$ и $\mathcal{X}_1 \leq \mathcal{X}_2$, где $x_i \in R^n$ и $\mathcal{X}_i \in R^{n\times n}$ $(i=1,2)$ означают, что $(x_2 - x_1) \in R_+^n$ и $(\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_1) \in R_+^{n\times n}$.

Если $x = (\xi_i)_{i=1}^n \in R^n$, то под $\mathrm{sign}(x)$ понимается диагональная $n\times n$ матрица с элементами $\mathrm{sign}\,\xi_i$ $(i=1,\dots,n)$ на главной диагонали.

$L([a,b];R_+^n)$ и $L([a,b];\widetilde{R}_+^{n\times n})$ – множества всех вектор-функций $q:[a,b] \to R_+^n$ и матричных функций $\mathcal{Y}:[a,b] \to \widetilde{R}_+^{n\times n}$ с интегрируемыми по Лебегу элементами.

$K([a,b]\times R^n; R^n)$ – класс Каратеодори, т.е. множество вектор-функций $g:[a,b]\times R^n \to R^n$ таких, что $g(\cdot,x): [a,b]\to R^n$ измерима при любом $x\in R^n$, $g(t,\cdot): R^n\to R^n$ непрерывна при почти всех $t\in[a,b]$ и для любого $\gamma\in R_+$.

$$\sup\{\|g(\cdot,x)\| : \|x\|\leq\gamma\}\in L([a,b];R_+).$$

Как об этом уже было сказано выше, всюду в этой заметке предполагается, что

$$f\in K([a,b]\times R^n; R^n), \tag{I.3}$$

а под решением дифференциальной системы (I.I) понимается абсолютно непрерывная вектор-функция $x:[a,b]\to R^n$, которая почти всюду на $[a,b]$ удовлетворяет этой системе.

Теорема I.I. Пусть на $[a,b]\times R^n$ соблюдается неравенство

$$\operatorname{Sign}((t-t_0)x)\cdot f(t,x)\leq \mathcal{P}|x|+q(t),$$

где $\mathcal{P}\in \tilde{R}_+^{n\times n}$, $q\in L([a,b];R_+^n)$ и

$$r\Big(\sum_{i=1}^{m}|H_i|\,e^{\mathcal{P}|t_i-t_0|}\Big)<1. \tag{I.4}$$

Тогда задача (I.I), (I.2) имеет хотя бы одно решение.

Теорема I.2. Пусть на $[a,b]\times R^n$ соблюдается условие

$$\operatorname{Sign}((t-t_0)(x-y))[f(t,x)-f(t,y)]\leq\mathcal{P}|x-y|,$$

где $\mathcal{P}\in \widetilde{R}_{+}^{n\times n}$, и выполняется неравенство (I.4). Тогда задача (I.I), (I.2) имеет единственное решение x и равномерно на $[a,b]$

$$\lim_{k\to+\infty} x_k(t)=x(t),$$

где $x_0(t)\equiv 0$, и при любом натуральном k вектор-функция x_k является решением дифференциальной системы (I.I), удовлетворяющим начальному условию

$$x_k(t_0)=\sum_{i=1}^{m} H_i x_{k-1}(t_i)+c_0 .$$

Замечание I. В теоремах I.I и I.2 строгое неравенство (I.4) нельзя заменить нестрогим, ибо если $H_i\in R_{+}^{n\times n}$ $(i=1,\dots,m)$, $\mathcal{P}\in \widetilde{R}_{+}^{n\times n}$, $r(H)=1$ и $c_0\in\{c-Hc : c\in R^n\}$, где $H=\sum_{i=1}^{m} H_i e^{\mathcal{P}|t_i-t_0|}$, то дифференциальная система

$$\frac{dx}{dt}=\left[\mathcal{P}\operatorname{sign}(t-t_0)\right]x$$

не имеет решения, удовлетворяющего краевым условиям (I.2), хотя вектор-функция $f(t,x)=\left[\mathcal{P}\operatorname{sign}(t-t_0)\right]x$ удовлетворяет всем условиям упомянутых теорем, кроме условия (I.4).

Замечание 2. В случае, когда $m=1$, $t_0=a$, $t_1=b$ $(t_0=b,\ t_1=a)$ и H_1 – единичная матрица, (I.2) превращаются в периодические краевые условия, а (I.4) принимает вид $r\left(e^{\mathcal{P}(b-a)}\right)<1$. Для выполнения последнего необходимо и достаточно, чтобы вещественные части собственных значений матрицы $\mathcal{P}$ были отрицательны.

15

§ 2. Вспомогательные предложения

Для дифференциальной системы (1.1) рассмотрим задачу Коши -

$$x(t_0)=c. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. Пусть на $[a,b]\times R^n$ соблюдается неравенство

$$\operatorname{sign}[(t-t_0)x]f(t,x)\leq \mathcal{P}(t)|x|+q(t), \tag{2.2}$$

где $\mathcal{P}\in L([a,b];\tilde{R}_+^{n\times n})$ и $q\in L([a,b];R_+^n)$. Тогда при любом $c\in R^n$ каждое максимально продолженное решение x задачи (1.1), (2.1) определено на всем отрезке $[a,b]$ и допускает оценку

$$|x(t)|\leq Y(t)\Big[|c|+\Big|\int_{t_0}^{t}Y^{-1}(\tau)q(\tau)d\tau\Big|\Big] \quad \text{при } a\leq t\leq b, \tag{2.3}$$

где Y - фундаментальная матрица дифференциальной системы

$$\frac{dy}{dt}=[\mathcal{P}(t)\operatorname{sign}(t-t_0)]y \tag{2.4}$$

такая, что

$$Y(t_0)=E, \tag{2.5}$$

а E - единичная матрица.

Доказательство. Пусть x - некоторое максимально продолженное решение задачи (1.1), (2.1), определенное в промежутке $I\subset[a,b]$. Ввиду (1.3) либо $I=[a,b]$, либо x является неограниченным (/3/, гл. П, теорема 3.1).

Согласно (2.2)

$$|x(t)|' \operatorname{sign}(t-t_0) \le \operatorname{sign}[(t-t_0)x(t)] f(t,x(t)) \le$$

$$\le \mathcal{P}(t)|x(t)| + q(t) \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Отсюда в силу леммы о дифференциальных неравенствах (/4/, лемма 4.3) и условия (2.1) находим

$$|x(t)| \le Y(t)\left(|c| + \left|\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau) q(\tau) d\tau\right|\right) \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Из полученной оценки очевидно, что решение x является ограниченным. Поэтому, согласно вышесказанному, $I=[a,b]$ и, следовательно, имеет место неравенство (2.3). Лемма доказана.

Лемма 2.2. Пусть на $[a,b]\times R^n$ соблюдается условие

$$\operatorname{sign}[(t-t_0)(x-y)] \cdot [f(t,x)-f(t,y)] \le \mathcal{P}(t)|x-y|, \tag{2.6}$$

где $\mathcal{P} \in L([a,b]; R_+^{n\times n})$. Тогда для любых определенных на $[a,b]$ решений x и $\bar{x}$ дифференциальной системы (1.1) имеем

$$|x(t)-\bar{x}(t)| \le Y(t)|x(t_0)-\bar{x}(t_0)| \quad \text{при} \quad a \le t \le b, \tag{2.7}$$

где Y – фундаментальная матрица дифференциальной системы (2.4), удовлетворяющая начальному условию (2.5).

Доказательство. Ввиду (2.6)

$$|x(t)-\bar{x}(t)|' \operatorname{sign}(t-t_0) =$$

$$= \operatorname{sign}[(t-t_0)(x(t)-\bar{x}(t))][f(t,x(t))-f(t,\bar{x}(t))] \leq$$
$$\leq \varphi(t)|x(t)-\bar{x}(t)| \qquad \text{при} \quad a \leq t \leq b.$$

Отсюда, согласно вышеупомянутой лемме о дифференциальных неравенствах вытекает оценка (2.7). Лемма доказана.

Замечание. Из лемм 2.I и 2.2, в частности, вытекает, что если соблюдается условие (2.6.), то при любом $c \in R^n$ задача (I.I), (2.I) имеет единственное решение, определенное на всем отрезке $[a,b]$.

§ 3. Доказательство теорем существования и единственности

Пусть $C([a,b];R^n)$ – банахово пространство непрерывных вектор-функций $x:[a,b] \to R^n$ с нормой

$$\|x\|_C = max\{\|x(t)\|: t \in [a,b]\},$$

а $\varphi: C([a,b];R^n) \to R^n$ – непрерывный оператор. Рассмотрим задачу об отыскании решения дифференциальной системы (I.I), удовлетворяющего краевым условиям

$$x(t_0) = \varphi(x). \tag{3.I}$$

Вместо теорем I.I и I.2 мы докажем несколько более общие предложения, касающиеся задачи (I.I), (3.I).

Для любой матричной функции $Y:[a,b] \to R_+^{n\times n}$ и любого вектора $\rho \in R_+^n$ определим множество

$$S(Y;\rho) = \{x \in C([a,b];R^n): |x(t)| \leq Y(t)\rho \quad \text{при} \quad t \in [a,b]\}.$$

Теорема 3.1. Пусть на $[a,b]\times R^n$ соблюдается неравенство (2.2) и для любого $\rho\in R_+^n$ имеем

$$|\varphi(x)|\leq H\rho+\rho_0 \quad \text{при} \quad x\in S(Y;\rho), \tag{3.2}$$

где $\mathcal{P}\in L([a,b];\tilde{R}_+^{n\times n})$, $q\in L([a,b];R_+^n)$, Y - фундаментальная матрица дифференциальной системы (2.4), удовлетворяющая начальному условию (2.5), $\rho\in R_+^n$ и $H\in R_+^{n\times n}$ не зависят от ρ и

$$r(H)<1. \tag{3.3}$$

Тогда задача (1.1), (3.1) имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Положим

$$\gamma=\|(E-H)^{-1}\|\Big(\|\rho_0\|+\int_a^b\|Y^{-1}(\tau)q(\tau)\|d\tau\Big)\max\Big\{\|Y(t)\|:t\in[a,b]\Big\},$$

$$\tilde{\mathcal{P}}(t)=\mathcal{P}(t)\,\mathrm{sign}(t-t_0),\ \chi(s)=\begin{cases}1 & \text{при } 0\leq s\leq\gamma,\\ 1+\gamma-s & \text{при } \gamma<s<1+\gamma,\\ 0 & \text{при } s>1+\gamma,\end{cases}$$

$$\tilde{f}(t,x)=\chi(\|x\|)\big[f(t,x)-\tilde{\mathcal{P}}(t)x\big]+\tilde{\mathcal{P}}(t)x, \tag{3.4}$$

$$\tilde{\varphi}(x)=\chi(\|x\|_C)\varphi(x), \tag{3.5}$$

и рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dx}{dt}=\tilde{f}(t,x), \tag{3.6}$$

$$x(t_0)=\tilde{\varphi}(x). \tag{3.7}$$

Согласно (2.2) и (3.4) на $[a,b]\times R^n$ соблюдаются неравенства

$$\operatorname{sign}[(t-t_0)x]\cdot f(t,x)\leq \mathcal{P}(t)|x|+q(t) \qquad (3.8)$$

и

$$\|\tilde{f}(t,x)-\mathcal{P}(t)x\|\leq f^*(t), \qquad (3.9)$$

где

$$f^*(t)=\sup\{\|f(t,x)\|:\|x\|\leq 1+\gamma\}+(1+\gamma)\|\mathcal{P}(t)\|.$$

В силу (3.2) и (3.5) для любого $\rho\in R^n_+$ имеем

$$|\tilde{\varphi}(x)|\leq H\rho+\rho_0 \quad \text{при} \quad x\in S(y;\rho) \qquad (3.10)$$

и

$$\sup\{\|\tilde{\varphi}(x)\|: x\in C([a,b];R^n)\}\leq \gamma_0<+\infty, \qquad (3.11)$$

где

$$\gamma_0=(1+\gamma)\|H\|\max\{\|Y^{-1}(t)\|: t\in[a,b]\}+\|\rho_0\|.$$

Пусть $Z:[a,b]\times[a,b]\to R^{n\times n}$ – матрица Коши дифференциальной системы (2.4). Ввиду (3.9) и (3.11) из принципа Шаудера вытекает, что система интегральных уравнений

$$x(t)=Z(t,t_0)\tilde{\varphi}(x)+\int_{t_0}^{t} Z(t,\tau)[\tilde{f}(\tau,x(\tau))-\tilde{\mathcal{P}}(\tau)x(\tau)]d\tau$$

и, следовательно, задача (3.6), (3.7) имеет решение x.

Согласно условию (3.8) и лемме 2.I x допускает оценку

$$|x(t)| \leq Y(t)\Big[|x(t_0)| + \int_a^b |Y^{-1}(\tau)q(\tau)|d\tau\Big] \quad \text{при} \quad a \leq t \leq b.$$

В силу этой оценки и условий (3.7) и (3.10) имеем

$$|x(t_0)| \leq H|x(t_0)| + H\int_a^b |Y^{-1}(\tau)q(\tau)|d\tau + \rho_0.$$

Отсюда согласно (3.3) находим

$$|x(t_0)| \leq H|x(t_0)| + H\int_a^b |Y^{-1}(\tau)q(\tau)|d\tau + \rho_0.$$

Поэтому

$$|x(t)| \leq Y(t)(E-H)^{-1}\Big[\rho_0 + \int_a^b |Y^{-1}(\tau)q(\tau)|d\tau\Big] \quad \text{при} \quad t \in [a,b]$$

и

$$\|x\|_C \leq \gamma. \tag{3.12}$$

В силу (3.12) из (3.4) и (3.5) вытекает, что $\tilde{f}(t, x(t)) \equiv \equiv f(t, x(t))$ и $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$. Следовательно, x является решением задачи (I.I), (3.I). Теорема доказана.

Согласно замечанию к лемме 2.2, если соблюдается условие (2.6), то можно составить последовательность $(x_k)_{k=1}^{+\infty}$, где каждая x_k является решением дифференциальной системы (I.I) при начальном условии

$$x_k(t_0) = \varphi(x_{k-1}) \tag{3.13}$$

и $x_0(t) \equiv 0$. Доказанная ниже теорема 3.2 содержит условия, при выполнении которых краевая задача (I.I), (3.I) имеет единственное решение, являющееся равномерным пределом упомянутой последовательности решений задачи Коши.

Теорема 3.2. Пусть на $[a,b]\times R^n$ соблюдается условие (2.6) и для любого $\rho\in R_+^n$ имеем

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leq H\rho \quad \text{при} \quad (x-y)\in S(Y;\rho), \tag{3.14}$$

где $\mathcal{P}\in L([a,b];\widetilde{R}_+^{n\times n})$, Y – фундаментальная матрица дифференциальной системы (2.4), удовлетворяющая начальному условию (2.5), $H\in R_+^{n\times n}$ не зависит от ρ и выполняется неравенство (3.3). Тогда задача (I.I), (3.I) имеет единственное решение x и равномерно на $[a,b]$

$$\lim_{k\to+\infty} x_k(t)=x(t), \tag{3.15}$$

где $x_0(t)=0$ и при любом натуральном k вектор-функция x_k является решением дифференциальной системы (I.I), удовлетворяющим начальному условию (3.13).

Доказательство. Из (2.6) и (3.14) вытекают условия (2.2) и (3.2), где $q(t)=|f(t,0)|$ и $\rho_0=|\varphi(0)|$. Поэтому согласно теореме 3.I задача (I.I), (3.I) имеет решение x. Покажем, что оно является единственным. Пусть $\bar{x}$ – произвольное решение этой задачи. Тогда согласно лемме 2.2 справедлива оценка (2.7). Из (2.7), (3.I) и (3.14) имеем

$$|x(t_0)-\bar{x}(t_0)|\leq H|x(t_0)-\bar{x}(t_0)|.$$

Отсюда в силу (3.3) вытекает, что $|x(t_0)-\bar{x}(t_0)|=0$ и, следовательно, $\bar{x}(t)\equiv x(t)$.

Для завершения доказательства теоремы нам остается показать, что имеет место (3.15).

Согласно лемме 2.2

$$|x(t)-x_\kappa(t)| \leq y(t)\,|x(t_0)-x_\kappa(t_0)|$$

при $a \leq t \leq b$ $(\kappa=1,2,\dots)$ (3.16)

Отсюда, ввиду (3.14), вытекает, что

$$|x(t_0)-x_\kappa(t_0)| \leq H^\kappa\,|x(t_0)| \quad (\kappa=1,2,\dots) \tag{3.17}$$

В силу (3.3) из (3.16) и (3.17) следует, что равномерно на $[a,b]$ соблюдается (3.15). Теорема доказана.

Если $\mathcal{P}(t) \equiv \mathcal{P} = const \in \tilde{R}_+^{n\times n}$ и $\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^{m} H_i\,x(t_i)+c_0$, то

$$y(t)=e^{\mathcal{P}|t-t_0|}$$

и при любом $\rho \in R_+^n$ соблюдаются условия (3.2) и (3.14), где $\rho_0=|c_0|$ и

$$H=\sum_{i=1}^{m}|H_i|\,e^{\mathcal{P}|t_i-t_0|}.$$

Поэтому ясно, что теоремы 1.1 и 1.2 являются следствиями теорем 3.1 и 3.2.

Институт прикладной
математики им. И.Н.Векуа
ТГУ

Литература

I. A. Lasota. Ann.Polon.Math., 1975, v. 29, N3, p. 391-396

2. И.Т.Кигурадзе, Б.Пужа. Дифференц.уравнения, I976, т.I2, с.2I39-2I48.

3. Ф.Хартман. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., "Мир", I970, 720 с.

4. И.Т.Кигурадзе. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси, Изд-во Тбилисского университета, I975, 352 с.

ი. კიღურაძე

ერთი მრავალწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანის შესახებ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემებისათვის

რეზიუმე

განხილულია დიფერენციალური სისტემა

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$$

სასაზღვრო პირობებით

$$x(t_0)=\sum_{i=1}^{m} H_i\, x(t_i)+c_0\,,$$

სადაც $-\infty<a<b<+\infty$, $f:[a,b]\times R^n\to R^n$ – კარათეოდორის კლასის ვექტორ-ფუნქციაა, $t_i\in[a,b]$ $(i=0,\dots,m)$, $c_0\in R^n$, ხოლო H_i $(i=1,\dots,m)$ ნამდვილ ელემენტებიანი $n\times n$ მატრიცებია. დადგენილია პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ამონახსნის არსებობასა და ერთადერთობას.

I.Kiguradze

ON A MULTI-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary

The differential system

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

under the boundary conditions

$$x(t_0) = \sum_{i=1}^{m} H_i\, x(t_i) + c_0$$

is considered, where $-\infty < a < b < +\infty$, $f : [a, b] \times R^n \to R^n$ is a vector function of the Caratheodory class, $t_i \in [a, b]$ $(i = 0, \dots, m)$, $c_0 \in R^n$ and H_i $(i = 1, \dots, m)$ are real $n \times n$ matrices.

The conditions of solution existence and uniqueness are established.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
259, 1985

УДК 517.948.3

БЕСКОНЕЧНЫЕ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СТРЕМЯЩИХСЯ К НУЛЮ СЕМЕЙСТВ

Р.А.Кордзадзе

В данной работе изучается широкий класс произвольного бесконечного семейства операторных уравнений второго рода в пространстве стремящихся к нулю семейств элементов банаховых пространств. Операторное изложение позволяет охватить различные классы бесконечных семейств интегральных уравнений, однако, следует отметить, что в этом случае в силу конкретности рассматриваемых функциональных пространств и действующих в них интегральных операторов некоторые полученные ниже результаты могут быть улучшены (см. /4/ - /7/).

Работа состоит из пяти параграфов. В § I приведены обозначения и определения, определены некоторые банаховы пространства и установлены вспомогательные предложения, необходимые для дальнейшего изложения. В § 2 устанавливается двойственность между некоторыми банаховыми пространствами ограниченных операторов, исследуются некоторые свойства суммируемых семейств определенного вида. На эти результаты существенно опираются результаты §§ 3-4, где исследуется вопрос о том, каким необходимым и достаточным условиям должно удовлетворять данное произвольное бесконечное семейство операторов, чтобы оно порождало ограниченный или вполне непрерывный оператор в пространстве стремящихся в нулю семейств. Эти вопросы представляют самостоятельный интерес и рассматриваются в более общей постановке, чем это необходимо, в § 5, где на их основе исследуются бесконечные семейства операторных уравнений, дается распространение основных теорем Рисса-Шаудера, обоснование прямого и обратного методов редукции как для неоднородных, так и однородных семейств уравнений. Некоторые, приведенные ниже результаты анонсированы в работах /8/ - /10/.

§ 1. Некоторые обозначения, определения и вспомогательные предложения

1^0. Введем некоторые обозначения и определения, которые в дальнейшем постоянно используются. Скалярное поле $\mathbb{K}$ - это либо поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_+$ и $\mathbb{Z}$ - соответственно множество всех натуральных чисел, множество всех неотрицател целых чисел и множество всех целых чисел, снабженные стандартным упорядочением. J - одно из множеств $\mathbb{N}_+$ и $\mathbb{Z}$, все равно какое, но одно и то же в данной формуле или предложении. Для каждого $s \in \mathbb{N}_+$ через J_s обозначается множество $J_s = \{n \in J;\ |n| \leqslant s\}$. ι и τ - произвольные (непустые) множества. $\mathcal{F}(\tau)$ - направленное множество всех конечных подмножеств множества τ, упорядоченное отношением включения $\supset$. $\mathcal{F}(\iota) \times \mathcal{F}(\tau)$ - направленное произведение направленных множеств $\mathcal{F}(\iota)$ и $\mathcal{F}(\tau)$. Если $(\iota, \geqslant)$ - направленное множество и η_0 - фиксированный элемент из ι, то $\iota_{\eta_0}=\{\eta\in\iota;\ \eta\geqslant\eta_0\}$; в частности, для каждого $\nu_0\in\mathcal{F}(\tau)$ $\mathcal{F}_{\nu_0}(\tau)=\{\nu\in\mathcal{F}(\tau);\ \nu\supset\nu_0\}$. ι_{η_0} является конфинальным подмножеством множества ι и, следовательно, само направлено заданным упорядочением.

Будем считать, что все встречающиеся ниже векторные пространства определены над одним и тем же полем скаляров $\mathbb{K}$. $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ $(\mathcal{L}(\mathcal{X})$, если $\mathcal{X}=\mathcal{Y})$ - векторное пространство всех линейных операторов, определенных на векторном пространстве $\mathcal{X}$ и отображающих это пространство в векторном пространстве $\mathcal{Y}$. Если $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ - нормированные пространства, то $\mathcal{L}[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ - нормированное пространство всех ограниченных операторов из $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ с обычной операторной нормой; в частности $\mathcal{X}'=\mathcal{L}[\mathcal{X},\mathbb{K}]$ - сопряженное пространство к пространству $\mathcal{X}$. $\tilde{\mathcal{L}}[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ - подпространство пространства $\mathcal{L}[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$, состоящее из всех вполне непрерывных операторов.

Далее всюду будем считать, что $(F_m)_{m\in\tau}$ и $(E_n)_{n\in\iota}$ - заданные семейства нормированных векторных пространств и что $\alpha_\tau=(\alpha_m)_{m\in\tau}$ и $\beta_\iota=(\beta_n)_{n\in\iota}$ - заданные семейства строго положительных чисел, параметризованные с теми же множествами параметров τ и ι соответственно. F_τ (F'_τ) и E_ι (E'_ι) - произведения векторных пространств F_m (F'_m), $m\in\tau$, и E_n (E'_n), $n\in\iota$, соответственно. Если $F_m=\mathcal{X}$ для всех $m\in\tau$, где $\mathcal{X}$ - фиксированное векторное пространство, то $F_\tau=\mathcal{X}^\tau$. Для каждого вектора $u=(u_m)_{m\in\tau}$ из F_τ и для каждого $\nu\in\mathcal{F}(\tau)$ через $[u]_\nu$ обозначается семейство $([u_m]_\nu)_{m\in\tau}$, где $[u_m]_\nu=u_m$, если $m \in \gamma$, и $[u_m]_\gamma = 0$, если $m \bar{\in} \gamma$. Через $\mathcal{X}_{l,\tau}$ ($\mathcal{X}_{l,\tau} \equiv \mathcal{X}_\tau$, когда $l = \tau$) обозначается произведение семейства векторных пространств $(\mathcal{X}[F_m, E_n])_{(m,n)\in\tau\times l}$; аналогично определяется $\tilde{\mathcal{X}}_{l,\tau}$. Для данного нормированного пространства G через $\mathcal{X}_{F_\tau, G}$ обозначается произведение семейства векторных пространств $(\mathcal{X}[F_m, G])_{m\in\tau}$.

2^0. Определим некоторые пространства, необходимые для дальнейшего изложения. $\ell_\infty(\alpha_\tau, F_\tau)$ – нормированное пространство всех семейств $u = (u_m)_{m\in\tau}$ из F_τ с конечными нормами $\|u\| = \sup_{m\in\tau} \alpha_m \|u\|$. Если τ – бесконечное множество, то $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ – подпространство пространства $\ell_\infty(\alpha_\tau, F_\tau)$, состоящее из всех векторов $u = (u_m)_{m\in\tau}$, для которых $\lim \alpha_m \|u_m\| = 0$ по фильтру дополнений конечных подмножеств множества τ. Если τ – конечное множество, то полагаем $\ell_\infty(\alpha_\tau, F_\tau) \equiv \ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$. Пространства $\ell_\infty(\alpha_\tau, F_\tau)$ и $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ являются банаховыми тогда и только тогда, когда все F_m $(m\in\tau)$ – банаховы пространства.

Для каждого $m \in \tau$ pr_m – проекция $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ на F_m, а j_m – инъекция F_m в $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$. Ясно, что $pr_m \in \mathcal{X}[\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau), F_m]$, $j_m \in \mathcal{X}[F_m, \ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)]$ $(m\in\tau)$. $\ell_1(\alpha_\tau, F_\tau)$ – нормированное пространство всех семейств $u = (u_m)_{m\in\tau}$ из F_τ таких, что семейство $(\alpha_m \|u_m\|)_{m\in\tau}$ суммируемо в $\mathbb{R}$ и с нормой $\|u\| = \sum_{m\in\tau} \alpha_m \|u_m\|$. Легко показать, что пространство $\ell_0'(\alpha_\tau, F_\tau)$, сопряженное с $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$, линейно изометрично пространству $\ell_1(\alpha_\tau^{-1}, F_\tau')$, где здесь и ниже всюду, $\alpha_\tau^{-1} = (\alpha_m^{-1})_{m\in\tau}$; при этом если $\mu \in \ell_0'(\alpha_\tau, F_\tau)$ и $(\mu_m)_{m\in\tau} \in \ell_1(\alpha_\tau^{-1}, F_\tau')$ –

соответствующие векторы, то для каждого вектора $u=(u_m)_{m\in\tau}$ из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ семейство $(f_m(u_m))_{m\in\tau}$ абсолютно суммируемо в K и

$$f(u)=\sum_{m\in\tau} f_m(u_m). \qquad (1)$$

Следующее предложение устанавливает критерии (относительно) компактности множеств из пространства $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$.

(I.I). Если τ - бесконечное множество, то для компактности ограниченного множества $M\subset\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ необходимо, а если F_n $(n\in\tau)$ - банаховы пространства, то и достаточно, чтобы для каждого $n\in\tau$ его проекции M_n на пространствах F_n соответственно были компактными множествами и равномерны относительно $u=(u_n)_{n\in\tau}$ из M $\lim \alpha_n\|u_n\|=0$ по фильтру дополнений конечных подмножеств множества τ.

Доказательство. Пусть M - компактное множество в пространстве $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$. Для каждого $n\in\tau$ операторы проектирования M в F_n непрерывны и, следовательно, M_n $(n\in\tau)$ - компактные множества в F_n соответственно. Для каждого $\varepsilon>0$ для M существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$ - сеть $u^{(i)}=(u_n^{(i)})_{n\in\tau}\in M$, $i=1,2,\dots,k$, и элемент $\gamma\in\mathcal{F}(\tau)$ такой, что для всех $i=1,\dots,k$ $\sup\limits_{n\in\gamma}\alpha_n\|u_n^{(i)}\|\leq\varepsilon/2$. Следовательно, если вектор $u=(u_n)_{n\in\tau}$ принадлежит множеству M, то при подходящем выборе вектора $u^{(i)}=(u_n^{(i)})_{n\in\tau}$ $(i=1,2,\dots,k)$ будем иметь:

$\sup\limits_{n\in\gamma}\alpha_n\|u_n\|\leq\|u-u^{(i)}\|+\sup\limits_{n\in\gamma}\alpha_n\|u_n^{(i)}\|\leq\varepsilon$ и необходимость условий теоремы доказана. Докажем достаточность.

Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть ν – такой элемент из множества $\mathcal{F}(\tau)$, что для всех векторов $u = (u_n)_{n\in\tau}$ из множества M $\sup\limits_{n\in\nu} \alpha_n \|u_n\| \leq \varepsilon/2$. Для каждого вектора $u = (u_n)_{n\in\tau}$ из M рассмотрим вектор $[u]_\nu$ и обозначим через $[M]_\nu$ множество всех таких векторов. Из условий теоремы следует, очевидно, что $[M]_\nu$ – компактное множество в $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ и потому для него существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$ – сеть $\overset{\vee}{u}^{(i)} = (\overset{\vee}{u}_n^{(i)})_{n\in\tau} \in [M]_\nu$, $i = 1, 2, \dots, K$. Эта же сеть будет ε – сетью для множества M, так как для любого вектора $u = (u_n)_{n\in\tau}$ из M имеем: $\|u - \overset{\vee}{u}^{(i)}\| \leq \|u - \overset{\vee}{u}\| +$

$$+ \|\overset{\vee}{u} - \overset{\vee}{u}^{(i)}\| = \|\overset{\vee}{u} - \overset{\vee}{u}^{(i)}\| + \sup_{n\in\nu} \alpha_n \|u_n\| \quad (i = 1, 2, \dots, K).$$

Теорема доказана.

Если G – нормированное векторное пространство, то через $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, \mathcal{L}_{F_\tau, G})$ обозначается нормированное пространство всех векторов $T = (T_n)_{n\in\tau}$ из $\mathcal{L}_{F_\tau, G}$ с конечными нормами $\|T\| = \sup\limits_{\nu\in\mathcal{F}(\tau)} \sup \|\sum\limits_{n\in\nu} T_n u_n\|$, где считается, что $\sum\limits_{n\in\varphi} T_n u_n = 0$ и внутренний $\sup$ берется по всем семействам $(u_n)_{n\in\tau} \in F_\tau$ таким, что $\sup\limits_{n\in\nu} \alpha_n \|u_n\| \leq 1$. Легко показать, что если G – банахово пространство, то $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, \mathcal{L}_{F_\tau, G})$ является банаховым пространством. В самом деле, пусть $\{T^{(i)}\}_{i\in N_+}$, где $T^{(i)} = (T_n^{(i)})_{n\in\tau}$, – последовательность Коши в пространстве $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, \mathcal{L}_{F_\tau, G})$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $i_\varepsilon \in N_+$ такое, что для любого $\nu \in \mathcal{F}(\tau)$ и для всех векторов $u = (u_n)_{n\in\tau}$ из F_τ таких, что $\sup\limits_{n\in\nu} \alpha_n \|u_n\| \leq 1$, имеем

$$\Big\| \sum_{n\in\nu} \left(T_n^{(i)} u_n - T_n^{(j)} u_n\right) \Big\| < \varepsilon, \qquad i \geq i_0, \quad j \geq j_0. \tag{2}$$

Отсюда следует, что при каждом фиксированном $n \in \tau$ $\alpha_n^{-1} \| T_n^{(i)} - T_n^{(j)} \| < \varepsilon, \quad i \geq i_0, \quad j \geq j_0,$ и, следовательно, для каждого $n \in \tau$ последовательности $\{T_n^{(i)}\}_{i\in N_+}$ являются последовательностями Коши соответственно в банаховых пространствах $\mathcal{L}[F_n, G]$ и, значит, сходятся к некоторым пределам $T_n \in \mathcal{L}[F_n, G]$ соответственно. Устремляя $\ell(2) j$ к ∞, получим, что для любого $\nu \in \mathcal{G}(\tau)$ и для всех $u = (u)_{n\in\tau}$ из F_τ таких, что $\sup_{n\in\nu} \alpha_n \|u_n\| < 1$, справедливы неравенства

$$\Big\| \sum_{n\in\nu} \left(T_n^{(i)} u_n - T_n u_n\right) \Big\| < \varepsilon, \quad i \geq i_0,$$

и, следовательно, $\|T^{(i)} - T\| < \varepsilon$, $i \geq i_0$ где $T = (T_n)_{n\in\tau}$. Отсюда следует, что $T = (T_n)_{n\in\tau}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, \mathcal{L}_{F_\tau, G})$ и что последовательность $\{T^{(i)}\}_{i\in N_+}$ сходится в этом пространстве к T.

Рассмотрим два примера. I. Пусть для каждого $n \in \tau$ $F_n = \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ – фиксированное нормированное пространство, Ω – некоторое множество, и пусть $G = (\mathcal{X}^\Omega)_b$ – нормированное пространство, состоящее из всех ограниченных отображений u множества Ω в $\mathcal{X}$ с нормой $\|u\| = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$. Тогда $F_\tau = \mathcal{X}^\tau$ и $\mathcal{L}_{F_\tau, G} = \mathcal{L}_{\mathcal{X}^\tau, (\mathcal{X}^\Omega)_b} = \mathcal{L}^\tau[\mathcal{X}, (\mathcal{X}^\Omega)_b]$. Предположим, что $(\alpha_n)_{n\in\tau}$ – заданное семейство из векторного пространства $(K^{\Omega})^{\tau}_{\ell}$, и для каждого $n \in \tau$ определим операторы $T_n : \mathcal{X} \to (\mathcal{X}^{\Omega})_{\ell}$, задаваемые соотношениями $(T_n u)(x) = a_n(x) u \quad (x \in \Omega, \ u \in \mathcal{X})$. Ясно, что семейство $T = (T_n)_{n \in \tau}$ принадлежит векторному пространству $\mathcal{L}^{\tau}[\mathcal{X}, (\mathcal{X}^{\Omega})_{\ell}]$. Это семейство принадлежит пространству $\mathcal{L}_{\infty}(\alpha_{\tau}, \mathcal{L}_{\Gamma, G}) \equiv \mathcal{L}_{\infty}(\alpha_{\tau}, \mathcal{L}^{\tau}[\mathcal{X}, (\mathcal{X}^{\Omega})_{\ell}])$ тогда и только тогда, когда для каждого $x \in \Omega$ семейство $(a_n(x))_{n \in \tau}$ принадлежит пространству $\ell_1(\alpha_{\tau}^{-1}, K^{\tau})$ и $\sup_{x \in \Omega} \|(a_n(x))_{n \in \tau}\| < \infty$; если это условие соблюдено, то

$$\|T\| = \sup_{x \in \Omega} \|(a_n(x))_{n \in \tau}\|_{\ell_1(\alpha_{\tau}^{-1}, K^{\tau})}.$$

В самом деле, для каждого $\nu \in \mathcal{G}(\tau)$ и для любого $(u_n)_{n \in \tau} \in \mathcal{X}^{\tau}$ имеем $\|\sum_{n \in \nu} T_n u_n\| \leq \sup_{x \in \Omega} \sum_{n \in \nu} |a_n(x)| \|u_n\| \leq$

$$\leq \sup_{x \in \Omega} \sum_{n \in \tau} \alpha_n^{-1} |a_n(x)| \cdot \sup_{n \in \nu} \alpha_n \|u_n\|$$

и, следовательно, $\|T\| \leq \sup_{x \in \Omega} \|(a_n(x))_{n \in \tau}\|$. Для получения обратного неравенства рассмотрим векторы $\tilde{u}_n(x_0) = \alpha_n^{-1} \operatorname{sgn}(a_n(x_0)) \tilde{u} \quad (n \in \tau)$, где $x_0 \in \Omega$ и $\tilde{u}$ – некоторый вектор из $\mathcal{X}$ с нормой, равной 1 . Эти векторы принадлежат $\mathcal{X}$ и для каждого $\nu \in \mathcal{G}(\tau)$ имеем

$$\sup_{x \in \Omega} \|\sum_{n \in \nu} a_n(x) \tilde{u}_n(x_0)\| \geq \|\sum_{n \in \nu} \alpha_n^{-1} |a_n(x_0)| \tilde{u}\| = \sum_{n \in \nu} \alpha_n^{-1} |a_n(x_0)| ;$$

следовательно,

$$\sum_{n\in\nu} \alpha_n^{-1}|a_n(x_0)| \leq \|\sum_{n\in\nu} T_n \tilde{u}_n(x_0)\| \leq \|T\| \sup_{n\in\nu} \alpha_n \|\tilde{u}_n(x_0)\| = \|T\|$$

и потому $\|T\| \geq \sup_{x\in\Omega} \|(a_n(x))_{n\in\tau}\|$.

2. Пусть Ω – бикомпактное хаусдорфовс пространство и $C(\Omega)$ – банахово пространство всех непрерывных функций и с нормой $\|u\| = \max_{x\in\Omega} |u(x)|$. Если T_n $(n\in\tau)$ – линейные ограниченные операторы, отображающие соответственно банаховы пространства F_n $(n\in\tau)$ в пространстве $C(\Omega)$, то существуют такие непрерывные соответственно в F_n -топологиях пространств F_n' $(n\in\tau)$ отображения $a_n \in (F_n')^{\Omega}$ что $(T_n u_n)(x) = a_n(x) u_n$ $(u_n \in F_n,\ n\in\tau,\ x\in\Omega)$ и $\|T_n\| = \sup_{x\in\Omega} \|a_n(x)\|$ $(n\in\tau)$; справедливо и обратное утверждение (см. /I/). Следовательно, если положим $G \equiv C(\Omega)$, то семейство $T = (T_n)_{n\in\tau}$ принадлежит векторному пространству $\mathcal{L}_{F_\tau, G} \equiv \mathcal{L}_{F_\tau, C(\Omega)}$. Это семейство принадлежит пространству $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, \mathcal{L}_{F_\tau, C(\Omega)})$ тогда и только тогда, когда для каждого $x\in\Omega$ семейство $(a_n(x))_{n\in\tau}$ принадлежит пространству $\ell_1(\alpha_\tau^{-1}, F_\tau')$ и его норма ограничена на Ω ; в этом случае $\|T\| = \sup_{x\in\Omega} \|(a_n(x))_{n\in\tau}\|$. В самом деле, неравенство $\|T\| \leq \sup_{x\in\Omega} \|(a_n(x))_{n\in\tau}\|$ доказывается так же, как и выше. Для получения неравенства обратного знака достаточно показать, что если x_0 – произвольно фиксированная точка из Ω и ν – произвольно фиксированный элемент из $\mathcal{Y}(\tau)$, то $\sum_{n\in\nu} \alpha_n^{-1} \|a_n(x_0)\| \leq$

$\leq \|T\|$. Если $a_n(x_0)=0$ для всех $n\in\nu$, то эти неравенства очевидны; пусть ν' – непустое подмножество множества ν, состоящее из всех $n\in\nu$ таких, что $a_n(x_0)\neq 0$, и пусть $\varepsilon_n=(1-\theta)\|a_n(x_0)\|$, $n\in\nu'$, где θ – произвольное фиксированное число, такое что $0<\theta<1$. Тогда существуют принадлежащие соответственно F_n $(n\in\tau)$ векторы $\overset{\circ}{u}_n$ $(n\in\tau)$ с нормами, равными 1, и такие, что $|a_n(x_0)\overset{\circ}{u}_n|>\theta\|a_n(x_0)\|$, $n\in\nu'$. Векторы $\tilde{u}_n(x_0)=\alpha_n^{-1}\,sgn\,(a_n(x_0)\overset{\circ}{u}_n)\,\overset{\circ}{u}_n$ $(n\in\tau)$ принадлежат пространствам F_n $(n\in\tau)$ соответственно, причем

$$\sup_{x\in S}\Big|\sum_{n\in\nu}a_n(x)\tilde{u}_n(x_0)\Big|\geq\Big|\sum_{n\in\nu}a_n(x_0)\tilde{u}_n(x_0)\Big|>\theta\sum_{n\in\nu}\alpha_n^{-1}\|a_n(x_0)\|,$$

и, следовательно, $\theta\sum_{n\in\nu}\alpha_n^{-1}\|a_n(x_0)\|\leq\Big\|\sum_{n\in\nu}T_n\tilde{u}_n(x_0)\Big\|\leq\|T\|$.

Из этого неравенства при $\theta\to 1$ получаем нужное неравенство.

§ 2. Двойственность между пространствами $\mathcal{L}[\ell_0(\alpha_\tau,F_\tau),G]$ и $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau,\mathcal{L}_{F_\tau,G})$

I°. Приведенные ниже теорема (2.I) и в некотором смысле обратная к ней теорема (2.2) дают полное описание линейных ограниченных операторов, действующих из пространства $\ell_0(\alpha_\tau,F_\tau)$ в банахово пространство G.

(2.I). Если G – банахово пространство, то между пространствами $\mathcal{L}[\ell_0(\alpha_\tau,F_\tau),G]$ и $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau,\mathcal{L}_{F_\tau,G})$ существует изометрический изоморфизм, при котором соответствующие оператор T и семейство $(T_n)_{n\in\tau}$ связаны соотношением: для каждого вектора $u=(u_n)_{n\in\tau}$ из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ семейство $(T_n u_n)_{n\in\tau}$ суммируемо в G и $Tu=\sum_{n\in\tau} T_n u_n$.

Доказательство. Если $T\in\mathcal{L}[\ell_0(\alpha_\tau,F_\tau), G]$, то $Tj_n\in\mathcal{L}[F_n, G]$ $(n\in\tau)$ и, как легко видеть, для каждого вектора $u=(u_n)_{n\in\tau}$ из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ семейство $(T_n u_n)_{n\in\tau}$ суммируемо в G и $Tu=\sum_{n\in\tau} T_n u_n$. Так как для любых $\nu\in\mathcal{F}(\tau)$ и $u=(u_n)_{n\in\tau}$ из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ имеем, очевидно,

$$\sup_{\|u\|_\nu\le 1}\Big\|\sum_{n\in\nu} T_n u_n\Big\|\le\sup_{\|u\|\le 1}\Big\|\sum_{n\in\tau} T_n u_n\Big\|=\|T\|,$$

то семейство $(T_n)_{n\in\tau}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau,\mathcal{L}_{F_\tau,G})$ и $\|(T_n)_{n\in\tau}\|\le\|T\|$.

Обратно, пусть $(T_n)_{n\in\tau}$ – произвольное семейство из $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau,\mathcal{L}_{F_\tau,G})$. Тогда для каждого вектора $u=(u_n)_{n\in\tau}$ из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ и для любого $\varepsilon>0$ существует $\nu_0\in\mathcal{F}(\tau)$ такое, что для любого $\nu\in\mathcal{F}(\tau)$, не имеющего общих элементов с ν_0 выполняется неравенство $\sup_{n\in\nu}\alpha_n\|u_n\|\le\varepsilon/\|(T_n)_{n\in\tau}\|$; следовательно,

$$\Big\|\sum_{n\in\nu} T_n u_n\Big\|\le\|(T_n)_{n\in\tau}\|\sup_{n\in\nu}\alpha_n\|u_n\|\le\varepsilon.$$

Отсюда, в силу полноты пространства G, следует, что для каждого вектора $u=(u_n)_{n\in\tau}$ из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ семейство $(T_n u_n)_{n\in\tau}$ суммируемо в G и отображение

$u \to Tu = \sum_{n\in\tau} T_n u_n$ определяет линейный оператор T, действующий из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ в G; этот оператор ограничен, так как для любого $u\in\ell_0(\alpha_\tau,F_\tau)$ $\|Tu\|\le\|(T_n)_{n\in\tau}\|\,\|u\|$. Из этого неравенства следует, что $\|T\|\le\|(T_n)_{n\in\tau}\|$, и, учитывая полученное выше аналогичное неравенство обратного знака, имеем: $\|T\|=\|(T_n)_{n\in\tau}\|$. Теорема доказана.

Ниже иногда, не оговаривая особо, на основе только что доказанной теоремы изометрически изоморфные пространства $\mathcal{L}[\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau), G]$ и $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, \mathcal{L}_{F_\tau,G})$ отождествляются и вектор $T=(T_n)_{n\in\tau}$ из пространства $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, \mathcal{L}_{F_\tau}, G)$ рассматривается как линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ в пространство G указанным в теореме образом.

(2.2). Пусть $(F_n)_{n\in\tau}$ – бесконечное семейство банаховых пространств, G – банахово пространство, и пусть $T_n\in\mathcal{L}[F_n, G]$, $n\in\tau$. Тогда, если для любого вектора $u=(u_n)_{n\in\tau}$ из пространства $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ семейство $(T_n u_n)_{n\in\tau}$ суммируемо в G, или когда $\tau = J$, ряд $\sum_{n\in J} T_n u_n$ сходится в G, то семейство $T=(T_n)_{n\in\tau}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, \mathcal{L}_{F_\tau,G})$ и

$$\|T\| = \sup_{\|u\|\le 1} \Big\|\sum_{n\in\tau} T_n u_n\Big\|.$$

Обратно, если вектор $T=(T_n)_{n\in\tau}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, \mathcal{L}_{F_\tau,G})$, то для каждого вектора $u=(u_n)_{n\in\tau}$ из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ семейство $(T_n u_n)_{n\in\tau}$

суммируемо в G.

Доказательство. Вторая часть теоремы и формула для $\|T\|$ следует из предыдущей теоремы. Докажем первую часть. Для каждого $\nu \in \mathcal{F}(\tau)$ отображения $u=(u_n)_{n\in\tau} \to T^{(\nu)}u = \sum_{n\in\tau} T_n u_n$ $(T^{(\emptyset)}=0)$ определяют операторы из $\mathcal{L}[\ell_o(\alpha_\tau, F_\tau), G]$. Пусть $\tau = J$ и ряд $\sum_{n\in J} T_n u_n$ сходится в G для каждого вектора $u=(u_n)_{n\in J}$ из $\ell_o(\alpha_J, F_J)$. Тогда для любого $\nu \in \mathcal{F}(J)$ и для любого J_s $(s\in \mathbb{N}_+)$, содержащего ν, имеем

$$\sup_{\|[u]_\nu\|\leq 1} \|\sum_{n\in\nu} T_n u_n\| \leq \sup_{\|[u]_{J_s}\|\leq 1} \|\sum_{n\in J_s} T_n u_n\|,$$

причем, согласно теореме Банаха-Штейнгауза, правая часть этого неравенства не превосходит некоторого постоянного числа, не зависящего от s. Следовательно, семейство $T=(T_n)_{n\in J}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_\infty(\alpha_J, \mathcal{L}_{F_J, G})$. Пусть теперь для каждого $u=(u_n)_{n\in\tau}$ из $\ell_o(\alpha_\tau, F_\tau)$ семейство $(T_n u_n)_{n\in\tau}$ суммируемо в G. Тогда для каждого $u=(u_n)_{n\in\tau}$ из $\ell_o(\alpha_\tau, F_\tau)$ семейство $(\|T^{(\nu)}u\|)_{\nu\in\mathcal{F}(\tau)}$ ограничено. В самом деле, в силу критерия Коши суммируемости семейства, существует $\nu_o \in \mathcal{F}(\tau)$ такое, что

$$\|\sum_{n\in\nu'} T_n u_n\| \leq 1$$

для любого $\nu' \in \mathcal{F}(\tau)$, не пересекающегося с ν_o; если γ - наибольшее из чисел

$$\|\sum_{n\in\nu''} T_n u_n\|,$$

где ν'' пробегает множество всех подмножеств конечного множества ν_o, то, очевидно, для любого $\nu \in \mathcal{F}(\tau)$ имеем

$$\|\sum_{n\in\nu} T_n u_n\| \leq \gamma+1.$$

Поэтому, согласно теореме Банаха-Штейнгауза, существует постоянное число M такое, что для любого $\nu\in\mathcal{F}(\tau)$ имеем

$$\sup_{\|(u_n)_\nu\|\leq 1} \|\sum_{n\in\nu} T_n u_n\| \leq M$$

и, следовательно, семейство $T=(T_n)_{n\in\tau}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, \mathcal{L}_{F_\tau}, G)$. Теорема доказана.

Если G совпадает с полем скаляров $\mathbb{K}$ (рассматриваемым как банахово пространство), то $\mathcal{L}[\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau), \mathbb{K}] \equiv \equiv \ell_0'(\alpha_\tau, F_\tau)$ и $\mathcal{L}_{F_\tau, \mathbb{K}} \equiv F_\tau'$; отождествляя изометрически изоморфные пространства, из (I) и теоремы (2.I), получаем, что $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, \mathcal{L}_{F_\tau, \mathbb{K}}) \equiv \mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, F_\tau') = \ell_1(\alpha_\tau^{-1}, F_\tau')$, что легко можно доказать и непосредственно. Поэтому (см. /I/) в этом случае $(G\equiv\mathbb{K})$ вторая часть теоремы (2.2) остается в силе, если в ней вместо пространства $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ рассмотреть пространство $\ell_\infty(\alpha_\tau, F_\tau)$. Это утверждение вообще говоря не справедливо в операторном случае: из суммируемости в G семейства $(T_n u_n)_{n\in\tau}$ для любого вектора $u=(u_n)_{n\in\tau}$ из $\ell_\infty(\alpha_\tau, F_\tau)$ следует, что $(T_n)_{n\in\tau}\in\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, \mathcal{L}_{F_\tau}, G)$, однако, обратное утверждение справедливо, если G - конечномерное пространство, что следует из доказанной ниже теоремы (2.5), и не всегда верно, если G - бесконечномерное пространство. В самом деле, возьмем $G=\ell_\infty(\alpha_\tau, F_\tau)$ и положим $T_n \equiv j_n$ $(n\in\tau)$; тогда семейство $(T_n)_{n\in\tau}$ принадлежит $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, \mathcal{L}_{F_\tau}, \ell_\infty(\alpha_\tau, F_\tau))$ и его норма равна 1, однако семейство $(T_n u_n)_{n\in\tau}$ не

18

суммируемо в $\ell_\infty(\alpha_\tau, F_\tau)$ для тех векторов $u=(u_n)_{n\in\tau}$ из $\ell_\infty(\alpha_\tau, F_\tau)$, которые не принадлежат пространству $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$.

В том случае, когда $\tau=\mathcal{N}_+$ и $F_n=G$ для всех $n\in\mathcal{N}_+$, Робинсон /2/ установил необходимые и достаточные условия того, чтобы для любой сходящейся последовательности $\{u_n\}_{n\in\mathcal{N}_+}$ элементов пространства G ряд $\sum_{n\in\mathcal{N}_+} T_n u_n$ сходился в G. Аналогичная теорема для того случая, когда $F_n=\mathcal{X}$ для всех $n\in\mathcal{N}_+$, где $\mathcal{X}$ - фиксированное банахово пространство, не обязательно совпадающее с G, независимо была доказана Мелвин-Мелвином /3/. Эти теоремы легко следуют из теоремы (2.2); мы сформулируем несколько более общее утверждение.

(2.3). Пусть $\mathcal{X}$ и G - банаховы пространства, τ - произвольное бесконечное множество и $T_n\in\mathcal{L}[\mathcal{X},G]$, $n\in\tau$. Тогда, для того чтобы для любого семейства $(u_n)_{n\in\tau}\in\mathcal{X}^\tau$ такого, что отображение $n\to u_n$ имеет предел в пространстве $\mathcal{X}$ по фильтру дополнений конечных подмножеств множества τ, семейство $(T_n u_n)_{n\in\tau}$ было суммируемо в G (или когда $\tau=J$, ряд $\sum_{n\in\tau} T_n u_n$ сходился бы в G), необходимо и достаточно выполнения условий: I) семейство $(T_n)_{n\in\tau}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, \mathcal{L}_{\tau,G})$ ($\alpha_n=1$, $n\in\tau$); 2) для любого $v\in\mathcal{X}$ семейство $(T_n v)_{n\in\tau}$ суммируемо в G (соответ. когда $\tau=J$, ряд $\sum_{n\in J} T_n v$ сходится в G).

<u>Доказательство</u>. Необходимость условия I) следует из теоремы (2.2), а необходимость условия 2) очевидна: достаточно рассмотреть семейство $(u_n)_{n\in\tau}$, где $u_n=v$ для каждо-

го $n \in \tau$ и v – произвольный вектор из $\mathcal{X}$. Достаточность условий теоремы также сразу следует из теоремы (2.2). В самом деле, пусть $(u_n)_{n\in\tau}$ – некоторое семейство векторов пространства $\mathcal{X}$ такое, что отображение $n \to u_n$ имеет предел $v \in \mathcal{X}$ по фильтру дополнений конечных подмножеств множества τ; тогда, в силу условия 1) и теоремы (2.2) семейство $(T_n(u_n - v))_{n\in\tau}$ суммируемо в пространстве G (или когда $\tau = J$, ряд $\sum_{n\in\tau} T_n(u_n - v)$ сходится в G), а в силу условия 2) семейство $(T_n v)_{n\in\tau}$ суммируемо в G (соотв. ряд $\sum_{n\in J} T_n v$ сходится в G) и, следовательно, сумма этих семейств $(T_n u_n)_{n\in\tau}$ суммируема в G (соотв. сумма этих рядов $\sum_{n\in J} T_n u_n$ сходится в G).

(2.4). Пусть $(F_n)_{n\in\tau}$ – бесконечное семейство нормированных пространств, G – нормированное пространство, и пусть $T_n \in \mathcal{L}[F_n, G]$, $n\in\tau$. Тогда, если для любого вектора $u = (u_n)_{n\in\tau}$ из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ семейство $(T_n u_n)_{n\in\tau}$ нормально суммируемо, то семейство $T = (T_n)_{n\in\tau}$ принадлежит пространству $\ell_1(\alpha_\tau^{-1}, \mathcal{L}_{F_\tau, G})$. Обратно, если G – банахово пространство и семейство $T = (T_n)_{n\in\tau}$ принадлежит пространству $\ell_1(\alpha_\tau^{-1}, \mathcal{L}_{F_\tau, G})$, то семейство $(T_n u_n)_{n\in\tau}$ нормально суммируемо для любого вектора $u = (u_n)_{n\in\tau}$ из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть u_n $(n\in\tau)$ – произвольно фиксированные векторы из F_n $(n\in\tau)$ соответственно, с нормами, равными 1, и пусть $\gamma = (\gamma_n)_{n\in\tau}$ – произвольный вектор из $\ell_0(\alpha_\tau, \mathbb{R}^\tau)$. Тогда, очевидно, вектор $(\gamma_n u_n)_{n\in\tau}$ принадлежит $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ и, по условию теоремы семейство $(\gamma_n \|T_n u_n\|)_{n\in\tau}$, $(u_n \in F_n, \|u_n\| = 1, n\in\tau)$ суммируемо.

Поэтому из теоремы (2.2) получаем, что суммируемо семейство $(\alpha_n^{-1}\|T_n u_n\|)_{n\in\tau}$ $(u_n\in F_n,\ \|u_n\|=1,\ n\in\tau)$. Отсюда и из того, что для каждого θ , $0<\theta<1$, существуют векторы $u_n\in F_n$, $\|u_n\|=1$ $(n\in\tau)$ такие, что $\|T_n u_n\|>\theta\|T_n\|$ $(n\in\tau)$, получаем, очевидно, первую часть теоремы. Вторая часть теоремы очевидна. Теорема доказана.

Если G – конечномерное пространство, то, как известно, бесконечное семейство элементов из G суммируемо тогда и только тогда, когда оно нормально суммируемо. Отсюда, из теоремы (2.2) и из только что доказанной теоремы получаем

(2.5.). Пусть $(F_n)_{n\in\tau}$ – бесконечное семейство банаховых пространств, и пусть G – конечномерное пространство. Тогда семейство $T=(T_n)_{n\in\tau}$ из векторного пространства $\mathcal{L}_{F_\tau,G}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau,\mathcal{L}_{F_\tau,G})$ тогда и только тогда, когда оно принадлежит пространству $\ell_1(\alpha_\tau^{-1},\mathcal{L}_{F_\tau,G})$.

§ 3. Порожденные семействами операторов ограниченные операторы

I°. В этом параграфе всюду будем считать, что $(F_m)_{m\in\tau}$ и $(E_n)_{n\in\iota}$ – бесконечные семейства банаховых пространств.

Пусть $T=(T_{n,m})_{(n,m)\in\iota\times\tau}$ – заданное семейство из $\mathcal{L}_{\iota,\tau}$ и пусть $D(A)$ – векторное подпространство в F_τ , состоящее из всех векторов $u=(u_m)_{m\in\tau}$ таких, что для каждого $n \in \iota$ семейства $(T_{n,m} u_m)_{m \in \tau}$ суммируемы в E_n соответственно. Тогда отображения $u \to A_n u \equiv \sum_{m \in \tau} T_{n,m} u_m$ $(n \in \iota)$ определяют линейные операторы A_n $(n \in \iota)$, действующие из $D(A)$ в E_n соответственно, а отображение $u \longrightarrow Au = (A_n u)_{n \in \iota}$ определяет линейный оператор A из $D(A)$ в E_ι. В этом случае будем говорить, что оператор A (с областью определения $D(A)$) соответствует (или порождается, определяется) семейству операторов (бесконечной матрице) $T = (T_{n,m})_{(n,m) \in \iota \times \tau}$ из $\mathcal{L}_{\iota,\tau}$, или что это семейство соответствует оператору A. Нетрудно видеть, что каждому оператору $A \in \mathcal{L}[\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau), \ell_0(\beta_\iota, E_\iota)]$ однозначно соответствует бесконечная матрица из $\mathcal{L}_{\iota,\tau}$, причем если A - вполне непрерывный оператор, то эта матрица принадлежит векторному пространству $\tilde{\mathcal{L}}_{\iota,\tau}$.

Опираясь на результаты предыдущего параграфа, в этом параграфе устанавливаем необходимые и достаточные условия, при соблюдении которых данная бесконечная матрица из $\mathcal{L}_{\iota,\tau}$ определяет линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ в пространство $\ell_0(\beta_\iota, E_\iota)$.

Введем некоторые определения и обозначения, которые необходимы для дальнейшего изложения.

Каждый бесконечной матрице $T = (T_{n,m})_{(n,m) \in \iota \times \tau} \in \mathcal{L}_{\iota,\tau}$ для каждых $\eta \in \mathcal{F}(\iota)$ и $\nu \in \mathcal{F}(\tau)$ поставим в соответствие (η,ν) - финитные матрицы $[T]_{\eta,\nu} = ([T_{n,m}])_{(n,m) \in \iota \times \tau}$, где

$$[T_{n,m}]_{\eta,\nu} = \begin{cases} T_{n,m}, & \text{если } n \in \eta,\ m \in \nu, \\ 0, & \text{если } n \bar{\in} \eta \ \text{ или } m \bar{\in} \nu, \end{cases}$$

и рассмотрим операторы $A_n^{\eta,\nu}$ и $A^{\eta,\nu}$ $(n\in\iota,\ \eta\in\mathcal{F}(\iota),\ \nu\in\mathcal{F}(\tau))$, определенные следующим образом: для каждого вектора $u=(u_m)_{m\in\tau}$ из F_τ

$$A_n^{\eta,\nu}u=\sum_{m\in\tau}[T_{n,m}]_{\eta,\nu}\,u_m\quad(n\in\iota),\qquad A^{\eta,\nu}u=(A_n^{\eta,\nu}u)_{n\in\iota}.$$

Ясно, что операторы $A^{\eta,\nu}$ $(\eta\in\mathcal{F}(\iota),\ \nu\in\mathcal{F}(\tau))$ порождаются (η,ν)-финитными матрицами $[T]_{\eta,\nu}$ соответственно; эти операторы в дальнейшем называются (η,ν)-финитными операторами, соответствующими бесконечной матрице T. Ясно, что $A^{\eta,\nu}\in\mathcal{L}[\ell_0(\alpha_\tau,F_\tau),\ \ell_0(\beta_\iota,E_\iota)]$ $(\eta\in\mathcal{F}(\iota),\ \nu\in\mathcal{F}(\tau))$.

2°. Имеет место следующая теорема

(3.I). Бесконечная матрица $T=(T_{n,m})_{(n,m)\in\iota\times\tau}$ из $\mathcal{L}_{\iota,\tau}$ определяет ограниченный оператор A, действующий из $\ell_0(\alpha_\tau,F_\tau)$ в $\ell_0(\beta_\iota,E_\iota)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

I) для каждого $n\in\iota$ семейства $T_{n,\cdot}=(T_{n,m})_{m\in\tau}$ принадлежат пространствам $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau,\mathcal{L}_{F_\tau,E_n})$ соответственно и

$$\sup_{n\in\iota}\beta_n\|T_{n,\cdot}\|<\infty$$

2) для каждого $m\in\tau$ и для каждого $u_m\in F_m$ $\lim\beta_n\|T_{n,m}u_m\|=0$ по фильтру дополнений конечных подмножеств множества ι

При соблюдении этих условий

$$\|A\|=\sup_{n\in\iota}\beta_n\|T_{n,\cdot}\|.$$

Доказательство. Докажем необходимость условий теоремы. Легко видеть, что для каждого $n\in\ell$ A_n являются линейными ограниченными операторами из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ в пространствах E_n соответственно, причем $\|A_n\| \leq \beta_n^{-1}\|A\|$ $(n\in\ell)$. Согласно теореме (2.I) для каждого $n\in\ell$ семейства $T_{n,\cdot} = (T_{n,m})_{m\in\tau}$ принадлежат пространствам $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, \mathcal{L}_{F_\tau, E_n})$ соответственно и $\|A_n\| = \|T_{n,\cdot}\|$ $n\in\ell$. Отсюда и из предыдущего неравенства следует необходимость условия I) и неравенство $\sup\limits_{n\in\ell}\beta_n\|T_{n,\cdot}\| \leq \|A\|$. Необходимость выполнения условия 2) теоремы очевидна, ибо если m – произвольно фиксированный элемент множества τ, и u_m – произвольно фиксированный вектор из F_m, то вектор $v = (v_k)_{k\in\tau}$, где $v_k = u_k$, когда $k = m$, и $v_k = 0$, когда $k \neq m$, принадлежит $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ и $\|A_n v\| = \|T_{n,m}u_m\|$, $n\in\ell$.

Докажем достаточность условий теоремы. Пусть $u = (u_m)_{m\in\tau}$ – произвольно фиксированный вектор из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ и пусть $\varepsilon > 0$ – заданное число. Тогда существуют $\eta_0\in\mathcal{F}(\ell)$ и $\nu_0\in\mathcal{F}(\tau)$ такие, что для любого содержащего ν_0 конечного подмножества множества τ имеем

$$\sum_{m\in\nu}\beta_n\|T_{n,m}\| < \varepsilon/2,$$

для всех не принадлежащих η_0 элементов $n\in\ell$ (в силу условия 2)

$$\sup_{m\in\tau\setminus\nu}\alpha_m\|u_m\| < \varepsilon/2\ \sup_{n\in\ell}\beta_n\|T_{n,\cdot}\|.$$

По условию для каждого $n \in \iota$ $T_{n,\cdot}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_{\infty}(\alpha_{\tau}, \mathcal{L}_{F_{\tau}}, E_n)$ соответственно, и потому, согласно теореме (2.I), семейства $(T_{n,m} u_m)_{m \in \tau}$ $(n \in \iota)$ суммируемы в пространствах E_n соответственно. Из предыдущих неравенств и из неравенств

$$\left\| \sum_{m \in \tau} T_{n,m} u_m \right\| \leq \sum_{m \in \nu} \| T_{n,m} u_m \| + \left\| \sum_{m \in C\nu} T_{n,m} u_m \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{m \in \nu} \| T_{n,m} u_m \| + \beta_n^{-1} \sup_{n \in \iota} \beta_n \| T_{n,\cdot} \| \sup_{m \in C\nu} \alpha_m \| u_m \|$$

следует, очевидно, что $\lim \beta_n \| \sum_{m \in \tau} T_{n,m} u_m \| = 0$ по фильтру дополнений конечных подмножеств множества ι. Следовательно, матрица T определяет линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий из $\ell_0(\alpha_{\tau}, F_{\tau})$ в $\ell_0(\beta_{\iota}, E_{\iota})$. Легко видеть, что этот оператор ограничен и $\| \mathcal{A} \| \leq \sup_{n \in \iota} \beta_n \| T_{n,\cdot} \|$; учитывая полученное выше неравенство обратного знака, получим нужное выражение для $\| \mathcal{A} \|$. Теорема доказана.

С помощью этой теоремы легко установить в терминах, соответствующих матрице T (η, ν) - финитных операторов $\mathcal{A}^{\eta,\nu}$, необходимые и достаточные условия для того, чтобы эта матрица определяла ограниченный оператор.

(3.2). Бесконечная матрица $T = (T_{n,m})_{(n,m) \in \iota \times \tau}$ из $\mathcal{L}_{\iota,\tau}$ определяет ограниченный оператор $\mathcal{A}$, действующий из $\ell_0(\alpha_{\tau}, F_{\tau})$ в $\ell_0(\beta_{\iota}, E_{\iota})$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) для каждого $m \in \tau$ и для каждого $u_m \in F_m$ $\lim_n \beta_n \|T_{n,m} u_m\| = 0$ по фильтру дополнений конечных подмножеств множества ι ;

2) $\sup\limits_{\eta \in \mathcal{F}(\iota),\, \nu \in \mathcal{F}(\tau)} \|A^{\eta,\nu}\| < \infty$.

<u>Доказательство</u>. Согласно предыдущей теореме достаточно доказать, что

$$\sup_{\eta \in \mathcal{F}(\iota),\, \nu \in \mathcal{F}(\tau)} \|A^{\eta,\nu}\| = \sup_{n \in \iota} \beta_n \|T_{n,\cdot}\|_{\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, \mathcal{L}_{F_\tau}, E_n)} .$$

Для каждых $\eta \in \mathcal{F}(\iota)$ и $\nu \in \mathcal{F}(\tau)$, учитывая теорему (2.I), имеем

$$\|A^{\eta,\nu}\| = \sup_{\|u\| \le 1} \sup_{n \in \eta} \beta_n \|\sum_{m \in \nu} T_{n,m} u_m\| \le$$

$$\le \sup_{n \in \iota} \beta_n \sup_{\|u\| \le 1} \|\sum_{m \in \tau} T_{n,m} u_m\| = \sup_{n \in \iota} \beta_n \|T_{n,\cdot}\|$$

$$(u = (u_m)_{m \in \tau} \in \ell_0(\alpha_\tau, F_\tau))$$

и, следовательно,

$$\sup_{\eta \in \mathcal{F}(\iota),\, \nu \in \mathcal{F}(\tau)} \|A^{\eta,\nu}\| \le \sup_{n \in \iota} \beta_n \|T_{n,\cdot}\| .$$

С другой стороны, для любых $\nu \in \mathcal{F}(\tau)$ и $n \in \iota$ имеем

19

$$\|T_{n,\cdot}\| \leq \sup_{\|[u]_\nu\|\leq 1} \|\sum_{m\in\nu} T_{n,m} u_m\| =$$

$$= \sup_{\|u\|\leq 1} \|\sum_{m\in\nu} T_{n,m} u_m\| \qquad (u=(u_m)_{m\in\tau} \in c_0(\alpha_\tau, F_\tau))$$

и, следовательно для любых $\eta \in \mathcal{F}(\iota)$ и $\nu \in \mathcal{F}(\tau)$

$$\sup_{n\in\eta} \beta_n \|T_{n,\cdot}\| \leq \sup_{\|u\|\leq 1} \sup_{n\in\eta} \beta_n \|\sum_{m\in\nu} T_{n,m} u_m\| = \|A^{\eta,\nu}\|.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{n\in\iota} \beta_n \|T_{n,\cdot}\| \leq \sup_{\eta\in\mathcal{F}(\iota),\ \nu\in\mathcal{F}(\tau)} \|A^{\eta,\nu}\|$$

и учитывая полученное выше аналогичное неравенство обратного знака, получим доказываемое равенство. Теорема доказана.

Легко видеть, что в том случае, когда множества ι и τ совпадают, справедливо равенство

$$\sup_{\nu\in\mathcal{F}(\tau)} \|A^{\nu,\nu}\| = \sup_{n\in\tau} \beta_n \|T_{n,\cdot}\|.$$

Отсюда следует, очевидно, что, когда $\iota = \tau$, теорема (3.2) в части ее достаточности может быть усилена: вместо условия 2) достаточно потребовать, чтобы

$$\sup_{\nu\in\mathcal{F}(\tau)} \|A^{\nu,\nu}\| < \infty .$$

Отметим, что из теоремы (3.I) следует справедливость следующего предложения

(3.3). Пусть $T=(T_{n,m})_{(n,m)\in\iota\times\tau}$ – бесконечная матрица из $\mathcal{L}_{\iota,\tau}$ такая, что для каждого $m\in\tau$

$\lim_{\Gamma} \beta_{\Gamma} \|T_{n,m}\| = 0$ по фильтру дополнений конечных подмножеств множества ι, для каждого $n \in \iota$ семейства $(\alpha_m^{-1} \|T_{n,m}\|)_{m \in \tau}$ суммируемы, и $M = \sup_{n \in \iota} \beta_n \sum_{m \in \tau} \alpha_m^{-1} \|T_{n,m}\| < \infty$. Тогда матрица T определяет линейный ограниченный оператор A, действующий из $\ell_c(\alpha_\tau, F_\tau)$ в $\ell_c(\beta_\iota, E_\iota)$ и $\|A\| \leq M$.

3°. Пусть $T = (T_{n,m})_{(n,m) \in \iota \times \tau}$ – бесконечная матрица из $\mathcal{L}_{\iota,\tau}$ и пусть A_H обозначает порожденный этой матрицей линейный оператор, действующий из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ в $\ell_0(\beta_\iota, E_\iota)$ и отличающийся от (определения) A тем, что в этом случае вместо суммируемости соответственно в пространствах E_n $(n \in \iota)$ семейств $(T_{n,m} u_m)_{m \in \tau}$ $(u = (u_m)_{m \in \tau} \in \ell_c(\alpha_\tau, F_\tau))$ требуется их нормальная суммируемость. Ясно, что если матрица T порождает линейный ограниченный оператор A_H, действующий из $\ell_c(\alpha_\tau, F_\tau)$ в $\ell_0(\beta_\iota, E_\iota)$, то она определяет и линейный ограниченный оператор A, действующий в тех же пространствах. Из теорем (2.2), (2.4) и (2.5) следует, очевидно, что обратное утверждение верно, если все пространства E_n $(n \in \iota)$ конечномерны и, вообще говоря, неверно, если для какого-нибудь значения индекса $n \in \iota$ пространство E_n бесконечномерно. Из теоремы (2.4) следует, очевидно, что теоремы (3.1) и (3.2), доказанные для оператора A, остаются в силе дословной формулировки и для оператора A_H лишь с той разницей, что к условиям этих теорем в части их достаточности нужно добавить условия (которые являются и необходимыми): для каждого $n \in \iota$ суммируемы семейства $(\alpha_m^{-1} \|T_{n,m}\|)_{m \in \tau}$.

4^0. Пусть множества индексов ι и τ совпадают с множеством J (т.е., либо $\iota=\tau=\mathcal{N}_+$, либо $\iota=\tau=\mathbb{Z}$), и пусть бесконечная матрица $T=(T_{n,m})_{(n,m)\in J\times J}$ из $\tilde{\mathcal{L}}_J$ порождает линейный оператор A, действующий из $\ell_0(\alpha_J,F_J)$ в векторном пространстве F_J. Тогда для любого $u=(u_m)_{m\in J}$ из $\ell_0(\alpha_J,F_J)$ семейства $(T_{n,m}u_m)_{m\in J}$ $(n\in J)$ суммируемы в E_n соответственно и, следовательно, ряды $\sum\limits_{m\in J}T_{n,m}u_m$ $(n\in J)$ сходятся в этих пространствах. Если теперь изменим определение оператора A в том смысле, что вместо суммируемости вышеуказанных семейств $(T_{n,m};u_m)_{m\in J}$ $(n\in J)$ потребуем сходимость в пространствах E_n соответственно (для любого $u=(u_m)_{m\in J}$ из $\ell_0(\alpha_J,F_J)$) рядов $\sum\limits_{m\in J}T_{n,m}u_m$ $(n\in J)$, то ничего нового не получим: из теоремы (2.2) следует, что если для любого $u=(u_m)_{m\in J}$ из $\ell_0(\alpha_J,F_J)$ ряды $\sum\limits_{m\in J}T_{n,m}u_m$ $(n\in J)$ сходятся в E_n соответственно, то семейства $(T_{n,m}u_m)_{m\in J}$ $(n\in J)$ суммируемы (для любого $u=(u_m)_{m\in J}$ из $\ell_0(\alpha_J,F_J)$) в E_n соответственно. Следовательно, теоремы (3.1) и (3.2) остаются в силе и в этом случае без всякого изменения.

§ 4. Порожденные семействами операторов вполне непрерывные операторы

1^0. Результаты предыдущих параграфов позволяют исследовать вопрос о том, при каких условиях данная бесконечная матрица из пространства $\tilde{\mathcal{L}}_{\iota,\tau}$ порождает вполне непрерывный оператор, действующий из $\ell_0(\alpha_\tau,F_\tau)$ в $\ell_0(\beta_\iota,E_\iota)$. В этом параграфе всюду будем считать, что $(F_m)_{m\in\tau}$ и

$(E_n)_{n \in \iota}$ – бесконечные семейства банаховых пространств.

Для дальнейшего понадобится следующее легко доказываемое предложение

(4.1). Если бесконечная матрица $T = (T_{n,m})_{(n,m) \in \iota \times \tau}$ принадлежит векторному пространству $\widetilde{\mathcal{L}}_{\iota,\tau}$, то соответствующие этой матрице (η, ν)– финитные операторы $A^{\eta,\nu}$ $(\eta \in \mathcal{F}(\iota),\ \nu \in \mathcal{F}(\tau))$ являются вполне непрерывными из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ в $\ell_0(\beta_\iota, E_\iota)$.

(4.2). Бесконечная матрица $T = (T_{n,m})_{(n,m) \in \iota \times \tau}$ из $\widetilde{\mathcal{L}}_{\iota,\tau}$ определяет линейный вполне непрерывный оператор A, действующий из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ в $\ell_0(\beta_\iota, E_\iota)$ тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \iota$ $T_{n,\cdot} = (T_{n,m})_{m \in \tau}$ принадлежат пространствам $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, \widetilde{\mathcal{L}}_{F_\tau, E_n})$ соответственно и $\lim \beta_n \|T_{n,\cdot}\| = 0$ по фильтру дополнений конечных подмножеств множества ι. В этом случае

$$\lim_{\eta \in \mathcal{F}(\iota)} \sup_{\nu \in \mathcal{F}(\tau)} \|A^{\eta,\nu} - A\| = 0.$$

<u>Доказательство</u>. Если матрица T определяет вполне непрерывный оператор A из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ в $\ell_0(\beta_\iota, E_\iota)$, то согласно теореме (3.1), для каждого $n \in \iota$ $T_{n,\cdot}$ принадлежит пространствам $\mathcal{L}_\infty(\alpha_\tau, \widetilde{\mathcal{L}}_{F_\tau, E_n})$ соответственно; при этом, согласно теоремам (1.1) и (2.1) имеем $(u = (u_m)_{m \in \tau} \in$ $\in \ell_0(\alpha_\tau, F_\tau))$:

$$\lim \beta_n \sup_{\|u\| \le 1} \left\| \sum_{m \in \tau} T_{n,m} u_m \right\| = \lim \beta_n \|T_{n,\cdot}\| = 0$$

по фильтру дополнений конечных подмножеств множества ι, и необходимость условий теоремы доказана.

Докажем достаточность. Из условий теоремы следует, очевидно, что условие 1) теоремы (3.I) выполняется. Условие 2) этой теоремы также выполняется. В самом деле, для любого вектора $u=(u_m)_{m\in\tau}$ из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ и для любого $n\in\iota$ имеем

$$\beta_n \|\sum_{m\in\tau} T_{n,m} u_m\| \leq \beta_n \|T_{n,\cdot}\| \, \|u\| ;$$

беря здесь в качестве u вектор $j_m(u_m)$, где m – произвольно фиксированный элемент множества τ, и u_m – произвольный вектор из F_m, получим

$$\beta_n \|T_{n,m} u_m\| \leq \beta_n \|T_{n,\cdot}\| \, \alpha_m \|u_m\| \qquad (n\in\iota)$$

и, следовательно, согласно условию теоремы, $\lim_n \beta_n \|T_{n,m} u_m\| = 0$ $(u_m\in F_m,\ m\in\tau)$ по фильтру дополнений конечных подмножеств множества ι. Поэтому, согласно теореме (3.I), матрица T определяет ограниченный оператор A, действующий из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ в $\ell_0(\beta_\iota, E_\iota)$. Далее, по условию теоремы для любого $\varepsilon>0$ существует $\eta_0\in\mathcal{F}(\iota)$ такое, что $\sup_{n\in\iota\setminus\eta_0} \beta_n \|T_{n,\cdot}\| \leq \varepsilon$. Тем более для любого $\eta\in\mathcal{F}(\iota)$, содержащего η_0, будем иметь $\sup_{n\in\iota\setminus\eta} \beta_n \|T_{n,\cdot}\| \leq \varepsilon$. Отсюда, учитывая, что для каждого вектора $u=(u_m)_{m\in\tau}$ из $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ и для любых $\eta\in\mathcal{F}(\iota)$ и $\nu\in\mathcal{F}(\tau)$ имеют место неравенства

$$\|\mathcal{A}u-\mathcal{A}^{\eta,\nu}u\|=\sup_{n\in C\eta}\beta_n\|\sum_{m\in C\nu}T_{n,m}u_m\|\leq$$

$$\leq\sup_{n\in C\eta}\beta_n\|T_{n,\cdot}\|\cdot\sup_{m\in C\nu}\alpha_m\|u_m\|\leq\sup_{n\in C\eta}\beta_n\|T_{n,\cdot}\|\ \|u\|,$$

получим

$$\lim_{\eta\in\mathcal{F}(\iota)}\ \sup_{\nu\in\mathcal{F}(\tau)}\|\mathcal{A}^{\eta,\nu}-\mathcal{A}\|=0.$$

Отсюда, согласно (4.1), следует полная непрерывность $\mathcal{A}$. Теорема доказана.

Из этой теоремы и из теоремы (3.2) легко следует следующее предложение:

(4.3). Бесконечная матрица $T=(T_{n,m})_{(n,m)\in\iota\times\tau}$ из $\tilde{\mathfrak{L}}_{\iota,\tau}$ определяет вполне непрерывный оператор $\mathcal{A}$, действующий из $\ell_0(\alpha_\tau,F_\tau)$ в $\ell_0(\beta_\iota,E_\iota)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) для каждого $m\in\tau$ и для каждого $u_m\in F_m$

$$\lim\|T_{n,m}u_m\|=0$$

по фильтру дополнений конечных подмножеств множества ι ;

2)
$$\sup_{\eta\in\mathcal{F}(\iota),\ \nu\in\mathcal{F}(\tau)}\|\mathcal{A}^{\eta,\nu}\|<\infty\ ;$$

3) направленное семейство $(\mathcal{A}^{\eta,\nu})_{(\eta,\nu)\in\mathcal{F}(\iota)\times\mathcal{F}(\tau)}$ является семейством Коши в пространстве $\mathcal{L}[\ell_0(\alpha_\tau,F_\tau),\ \ell_0(\beta_\iota,E_\iota)]$.

При выполнении этих условий

$$\lim_{\eta\in\mathcal{F}(\iota)}\ \sup_{\nu\in\mathcal{F}(\tau)} \|\mathcal{A}^{\eta,\nu}-\mathcal{A}\|=0.$$

Отметим, что если множества ι и τ совпадают, то утверждение этой теоремы остается в силе, если условие 2) заменить условием $\sup\limits_{\nu\in\mathcal{F}(\tau)}\|\mathcal{A}^{\nu,\nu}\|<\infty$, а в условии 3) вместо фундаментальности направленного семейства $(\mathcal{A}^{\eta,\nu})$ потребовать фундаментальность направленного семейства $(\mathcal{A}^{\nu,\nu})_{\nu\in\mathcal{F}(\tau)}$. При соблюдении этих условий

$$\lim_{\nu\in\mathcal{F}(\tau)}\|\mathcal{A}^{\nu,\nu}-\mathcal{A}\|=0.$$

При помощи доказанных выше теорем можно установить ряд удобных достаточных условий для того, чтобы бесконечная матрица из $\widetilde{\mathcal{L}}_{\iota,\tau}$ определяла вполне непрерывный оператор. Отметим, один из них.

(4.4). Пусть $T=(T_{n,m})_{(n,m)\in\iota\times\tau}$ – бесконечная матрица из $\widetilde{\mathcal{L}}_{\iota,\tau}$ такая, что для каждого $n\in\iota$ семейства $(\alpha_m^{-1}\|T_{n,m}\|)_{m\in\tau}$ суммируемы и

$$\lim \beta_n \sum_{m\in\tau}\alpha_m^{-1}\|T_{n,m}\|=0$$

по фильтру дополнений конечных подмножеств множества ι. Тогда T определяет вполне непрерывный оператор $\mathcal{A}$ действующий из $\ell_0(\alpha_\tau,F_\tau)$ в $\ell_0(\beta_\iota,E_\iota)$.

§ 5. Бесконечные семейства операторных уравнений в пространстве $\ell_o(\alpha_\tau, F_\tau)$

1^0. Ниже всюду будем считать, что $(F_n)_{n\in\tau}$ – бесконечное семейство банаховых пространств. Кроме того, условимся, что в том случае, когда исследуются поведения рассматриваемых ниже бесконечных семейств операторных уравнений от комплексного параметра, пространства F_n $(n\in\tau)$ считать комплексными банаховыми пространствами; это не ограничивает общности, ибо если F_n – вещественные банаховые пространства, то вместо рассматриваемых ниже операторов могли бы рассмотреть их комплексные расширения.

В этом параграфе рассмотрим бесконечное семейство линейных операторных уравнений

$$u_n - \lambda \sum_{m\in\tau} T_{n,m} u_m = v_n\ , \quad n\in\tau, \tag{3}$$

где $T_{n,m}\in \mathcal{L}[F_m, F_n]$ $(n,m\in\tau)$ – заданные операторы, $v_n\in F_n$ $(n\in\tau)$ – заданные векторы такие, что $(v_n)_{n\in\tau}\in \ell_o(\alpha_\tau, F_\tau)$, $\lambda\in K$ – числовой параметр, $u_n\in F_n$ $(n\in\tau)$ – искомые векторы такие, что $(u_n)_{n\in\tau}\in \ell_o(\alpha_\tau, F_\tau)$. Решением семейства уравнений (3) будем называть любой вектор $(u_n)_{n\in\tau}\in \ell_o(\alpha_\tau, F_\tau)$ такой, что при каждом $n\in\tau$ семейства $(T_{n,m} u_m)_{m\in\tau}$ суммируемы в пространствах F_n соответственно и все уравнения (3) обращаются в тождества.

Наряду с (3) для каждого $\nu\in\mathcal{F}(\tau)$ рассмотрим конечные системы операторных уравнений

$$\omega_n - \lambda \sum_{m\in\nu} T_{n,m}\,\omega_m = v_n, \quad n\in\nu, \ \nu\in\mathcal{F}(\tau), \tag{4}$$

причем, если $\nu=\varnothing$, то v_n и сумму стоящих в левой части будем считать равными нулю. Решение ω_n $(n\in\nu)$ системы уравнений (4) всегда будем искать в пространствах F_n $(n\in\nu)$ соответственно. Для каждого $\nu\in\mathcal{F}(\tau)$ через Λ_ν обозначаются характеристические значения системы уравнений (4).

Когда элемент ν пробегает все множество $\mathcal{F}(\tau)$, соотношение (4) представляет собой бесконечное семейство конечных систем операторных уравнений, которое будем называть ассоциированным с (3) семейством систем уравнений; если нужно подчеркнуть, что $\mathcal{F}(\tau)$ – направленное множество, будем говорить, что (4) – направленное семейство уравнений.

Ассоциированным с (3) направленным подсемейством уравнений будем называть всякое направленное семейство (конечных систем) уравнений

$$\omega_n - \lambda \sum_{m\in\nu_\eta} T_{n,m}\,\omega_m = v_n, \quad n\in\nu_\eta, \ \eta\in\iota, \tag{5}$$

где $(\iota,\geqslant)$ – направленное множество и $\eta\to\nu_\eta$ – отображение множества ι в множество $\mathcal{F}(\tau)$, обладающее свойством: для каждого $\nu\in\mathcal{F}(\tau)$ найдется $\eta\in\iota$ такой, что если $\eta_1\geqslant\eta$, то $\nu_{\eta_1}\supset\nu$. Легко видеть, что для всякого $\nu_0\in\mathcal{F}(\tau)$ направленное семейство уравнений

$$\omega_n - \lambda \sum_{m\in\nu} T_{n,m}\,\omega_m = v_n, \quad n\in\nu, \ \nu\in\mathcal{F}_{\nu_0}(\tau), \tag{6}$$

является ассоциированным с (3) направленным подсемейством уравнений. В частности, так как $\mathcal{F}_{\varphi}(\tau)=\mathcal{F}(\tau)$, ассоциированное с (3) направленное семейство уравнений (4) одновременно является и ассоциированным с тем же семейством уравнений направленным подсемейством уравнений. Также легко проверить, что для всякого $\eta_0\in\iota$, наряду с (5), направленное семейство уравнений

$$\omega_n-\lambda\sum_{m\in\nu_\eta}T_{n,m}\omega_m=v_n\,,\quad n\in\nu_\eta\,,\quad \eta\in\iota_{\eta_0}\,, \tag{7}$$

является ассоциированным с (3) направленным подсемейством уравнений.

Наконец, условимся о терминологии. Будем говорить, что система уравнений

$$\omega_n-\lambda\sum_{m\in\nu_\eta}T_{n,m}\omega_m=v_n\,,\qquad n\in\nu_\eta\,,$$

из ассоциированного с (3) направленного подсемейства уравнений (5) следует за системой уравнений

$$\omega_n-\lambda\sum_{m\in\nu_{\eta'}}T_{n,m}\omega_m=v_n\,,\qquad n\in\nu_{\eta'}\,,$$

из того же семейства уравнений тогда и только тогда, когда $\eta\geqslant\eta'$, где $\geqslant$ - отношение порядка в направленном множестве ι .

2^0. Естественным и единственно возможным, ведущим к распространению для бесконечного семейства операторных уравнений (3) основных теорем Рисса-Шаудера является установление ограниченности и полной непрерывности в пространстве $\ell_0(\alpha_\tau,F_\tau)$ оператора $\mathcal{A}$, порожденного бесконечной матрицей $T=(T_{n,m})_{(n,m)\in\tau\times\tau}$ семейства уравнений (3), что и было осуществлено в параграфах 2-4.

Если бесконечная матрица $T=(T_{n,m})_{(n,m)\in\tau\times\tau}\in\mathcal{X}_\tau$ удовлетворяет условиям теоремы (3.1) $\iota=\tau$, $\alpha_n=\beta_n$, $E_n=F_n$, $n\in\tau$), то нетрудно показать, что сопряженной системой уравнений для семейства уравнений (3) является бесконечное семейство операторных уравнений

$$f_n-\lambda\sum_{m\in\tau}T'_{m,n}f_m=\varphi_n,\quad n\in\tau, \tag{8}$$

где $T'_{m,n}$ $(n,m\in\tau)$ – сопряженные к $T_{n,m}$ соответственно операторы, $\varphi_n\in F'_n$ $(n\in\tau)$ – заданные функционалы, $f_n\in F'_n$ $(n\in\tau)$ – искомые функционалы такие, что семейства $(\varphi_n)_{n\in\tau}$ и $(f_n)_{n\in\tau}$ принадлежат пространству $\ell_1(\alpha^{-1}_\tau, F'_\tau)$, причем $(f_n)_{n\in\tau}\in\ell_1(\alpha^{-1}_\tau, F'_\tau)$ называется решением (8), если семейства $(T'_{m,n}f_m)_{m\in\tau}$ $(n\in\tau)$ суммируемы в F'_n соответственно и все уравнения (8) обращаются в тождества.

При тех же предположениях на $T=(T_{n,m})_{(n,m)\in\tau\times\tau}$ легко видеть, что для каждого $s\in\mathbb{N}$ операторы A^s, где $A^1\equiv A$ –порожденный матрицей $T^{(1)}\equiv T$ оператор, порождается бесконечной матрицей $T^{(s)}=(T^{(s)}_{n,m})_{(n,m)\in\tau\times\tau}$ $(T^{(1)}_{n,m}\equiv T_{n,m})$ из векторного пространства $\mathcal{X}_\tau$. Нетрудно показать, что для каждого $u_m\in F_m$ семейства $(T_{n,k}T^{(s-1)}_{k,m}u_m)_{k\in\tau}$ $(s=2,3,\dots,\ n,m\in\tau)$ суммируем в пространствах F_n $(n\in\tau)$ и их суммами являются $T^{(s)}_{n,m}u_m$ $(s=2,3,\dots,\ n,m\in\tau)$ соответственно.

Теперь мы можем сформулировать теорему Рисса-Шаудера для бесконечного семейства уравнений (3).

(5.I). Пусть матрица $T=(T_{n,m})_{(n,m)\in\tau\times\tau}$ из $\mathcal{L}_\tau$ удовлетворяет условиям теоремы (3.I) и пусть для некоторого $s\in\mathbb{N}$ матрица $T^{(s)}=(T^{(s)}_{n,m})_{(n,m)\in\tau\times\tau}\in\tilde{\mathcal{L}}_\tau$ и удовлетворяет условиям теоремы (4.2). Тогда бесконечные семейства операторных уравнений (3) и (8) образуют Фредгольмову пару семейства уравнений:

I) семейство уравнений (3) имеет не более чем счетное множество характеристических чисел, не имеющих точек накопления, кроме, быть может, бесконечно удаленной точки. Каждое число из этого множества является характеристическим значением конечной кратности семейства уравнений (3);

2) λ является характеристическим значением семейства уравнений (3) тогда и только тогда, когда оно является характеристическим значением той же кратности семейства уравнений (8);

3) семейство уравнений (3) имеет решение $(v_n)_{n\in\tau}\in\ell_0(\alpha_\tau,F_\tau)$ тогда и только тогда, когда для любого решения $(f_n)_{n\in\tau}\in\ell_1(\alpha_\tau^{-1},F_\tau')$ соответствующего (8) однородного $(\varphi_n=0,\ n\in\tau)$ семейства уравнений семейство $(f_n(v_n))_{n\in\tau}$ суммируемо и его сумма равна нулю;

4) семейство уравнений (8) имеет решение $(f_n)_{n\in\tau}\in\ell_1(\alpha_\tau^{-1},F_\tau')$ тогда и только тогда, когда для любого решения $(u_n)_{n\in\tau}\in\ell_0(\alpha_\tau,F_\tau)$ соответствующего (3) однородного $(v_n=0,\ n\in\tau)$ семейства уравнений семейство $(\varphi_n(u_n))_{n\in\tau}$ суммируемо и его сумма равна нулю.

Если множество параметров τ совпадает с множеством J, то из теоремы (2.2) следует, очевидно, что если определение решения бесконечного семейства уравнений (3) изменить в том смысле, что вместо суммируемости семейств $(T_{n,m}u_m)_{m\in\tau}$ в пространствах F_n $(n\in\tau)$ соответственно потребовать сходимость рядов $\sum\limits_{m\in J} T_{n,m}u_m$ в F_n $(n\in J)$, то все сказанное в этом пункте остается в силе без изменений. Наконец, отметим, что это замечание равным образом относится к следующему пункту.

3°. В этом пункте будем считать, что бесконечная матрица $T=(T_{n,m})_{(n,m)\in\tau\times\tau}$ семейства уравнений (3) принадлежит векторному пространству $\widetilde{\mathcal{L}}_\tau$ и удовлетворяет условиям теоремы (4.2).

Следующая теорема позволит решить два вопроса:

I) охарактеризовать класс тех конечных систем уравнений из ассоциированных с бесконечным семейством уравнений (3) направленных подсемейств уравнений, однозначная разрешимость которых следует из однозначной разрешимости семейства уравнений (3), и 2) выяснить, на какие вышеуказанные конечные системы уравнений и какие условия нужно наложить, чтобы однозначная разрешимость этих систем уравнений позволила судить об однозначной разрешимости бесконечного семейства уравнений (3).

(5.2). λ - нехарактеристическое значение бесконечного семейства уравнений (3) тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух эквивалентных условий:

I) в любом ассоциированном семейством уравнений (3) направленном подсемействе уравнений (5) существует система уравнений такая, что λ - нехарактеристическое значение и не является предельной точкой характеристических значений всех следующих за ней систем уравнений;

2) существует ассоциированное семейством уравнений (3) направленное подсемейство уравнений (5), в котором найдется система уравнений такая, что λ - нехарактеристическое значение и не является предельной точкой характеристических значений всех следующих за ней систем уравнений.

На основе этой теоремы доказываются приведенные ниже две теоремы, дающие обоснование прямого и обратного метода редукции (см. /8/) для неоднородного бесконечного семейства уравнений (3).

(5.3.). Если некоторое ассоциированное с бесконечным семейством уравнений (3) направленное подсемейство уравнений (5) таково, что все уравнения этого семейства имеют единственные решения $\omega_n^{\nu_\eta} \in F_n \quad (n \in \nu_\eta,\ \eta \in \iota)$ соответственно и λ не является предельной точкой характеристических значений этих систем уравнений, то семейство уравнений (3) имеет единственное решение $(u_n)_{n\in\tau} \in \ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$, направленное семейство $((\omega_n^{\nu_\eta})_{n\in\tau})_{\eta\in\iota}$, где $\omega_n^{\nu_\eta} = 0$, когда $n \bar{\in} \nu_\eta$ в пространстве $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ сходится к $(u_n)_{n\in\tau}$, причем существует элемент $\eta_0 \in \iota$ такой, что для всех $\eta \in \iota_{\eta_0}$ справедливы оценки

$$\|(\omega_n^{\nu_\eta})_{n\in\tau} - (u_n)_{n\in\tau}\| \le C \sup_{n\in\nu_\eta} \alpha_n \|v_n\| + C_{\nu_\eta} \sup_{n\bar{\in}\nu_\eta} \alpha_n \|v_n\|, \tag{9}$$

где C и C_{ν_η} - постоянные, причем $\lim\limits_{\eta\in\iota_{\eta_0}} C_{\nu_\eta} = 0.$

(5.4). Если бесконечное семейство уравнений (3) имеет единственное решение $(u_n)_{n\in\tau} \in \ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$, то для каждого ассоциированного подсемейства уравнений (5) существует элемент $\eta_0 \in \iota$ такой, что все системы уравнений (7) имеют единственные решения $\omega_n^{\nu_\eta} \in F_n$ $(n \in \nu_\eta,\ \eta \in \iota_{\eta_0})$ соответственно, направленное семейство $((\omega_n^{\nu_\eta})_{n\in\tau})_{\eta\in\iota_{\eta_0}}$, где $\omega_n^{\nu_\eta} = 0$, когда $n \bar{\in} \nu_\eta$, в пространстве $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ сходится к $(u_n)_{n\in\tau}$, причем для всех $\eta \in \iota_{\eta_0}$ справедливы оценки (9).

Следующая теорема дает обоснование метода редукции для однородного $(v_n = 0,\ n \in \tau)$ семейства уравнений.

(5.5). λ - характеристическое значение бесконечного семейства уравнений

$$u_n - \lambda \sum_{m\in\tau} T_{n,m} u_m = 0, \quad n \in \tau, \tag{10}$$

тогда и только тогда, когда существует ассоциированное с ним направленное подсемейство уравнений

$$\omega_n - \lambda \sum_{m\in\nu_\eta} T_{n,m}\,\omega_m = 0, \quad n \in \nu_\eta,\ \eta \in \iota,$$

каждая система уравнений которого имеет характеристическое значение λ_{ν_η} $(\eta \in \iota)$ соответственно такое, что направленное семейство $(\lambda_{\nu_\eta})_{\eta\in\iota}$ сходится к λ. При этом, если $\omega_n^{\nu_\eta} \in F_n$, $n \in \nu_\eta$ $(\eta \in \iota)$ - принадлежащие к λ_{ν_η} собственные векторы соответственно и направленное семейство $((\omega_n^{\nu_\eta})_{n\in\tau})_{\eta\in\iota}$, где $\omega_n^{\nu_\eta} = 0$, когда $n \bar{\in} \nu_\eta$ в пространстве $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ слабо сходится, то это семейство сходится по норме пространства $\ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ и предельный вектор $(u_n)_{n\in\tau} \in \ell_0(\alpha_\tau, F_\tau)$ является собственным вектором семейства уравнений (10), принадлежащим к характеристическому значению λ.

Литература

1. Н.Донфорд, Дж.Шварц. Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ , 1962.
2. A.Robinson., Proc. London. Math. Soc., 1950, V.2, N 52, p. 132-160
3. H.Melvin-Melvin. Proc. London. Math. Soc., 1951, V.2, N 53, -p.83-108.
4. Р.А. Кордзадзе. Докл. АН СССР, 1980, т.258, № I, с.22-25.
5. Р.А.Кордзадзе. В сб.: Краевые задачи для нелинейных уравнений. Новосибирск, 1982.
6. Р.А.Кордзадзе. Сообщения АН ГССР (в печати).
7. Р.А.Кордзадзе. В сб.: Некоторые задачи математической физики и анализа. Новосибирск, Наука (в печати).
8. Р.А.Кордзадзе. Препринт № 295. Новосибирск, 1981. Сиб. отд-ние, ВЦ.
9. Р.А.Кордзадзе. Препринт № 294. Новосибирск, 1981. Сиб. отд-ние, ВЦ.
10. Р.А.Кордзадзе. В сб.: Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск, 1980. с.102-106.

რ. კორძაძე

ოპერატორულ განტოლებათა უსასრულო ოჯახები წრისაკენ კრებად ოჯახთა სივრცეში

რეზიუმე

ნაშრომში შეისწავლება ფართო კლასის მეორე გვარის ოპერატორულ განტოლებათა ნებისმიერი უსასრულო ოჯახი ბანახის სივრცის ელემ-ტთა წრისაკენ კრებად ოჯახთა კლასში.

21

R.Kordzadze

INFINITE FAMILIES OF OPERATOR EQUATIONS IN A SPACE OF VANISHING FAMILIES

Summary

The paper deals with a wide class of arbitrary infinite spaces of 2nd order operator equations in a space of vanishing families of Banach space elements.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
259, 1985

УДК 517.9

К ТЕОРИИ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ НИКОЛАЯ ВЕКУА

Ю.Д.Латушкин, Г.С.Литвинчук, И.М.Спитковский

§ I. Введение

Пусть Γ – единичная окружность, α – ее H – гладкий гомеоморфизм, удовлетворяющий условию Карлемана
$$\alpha[\alpha(t)]=t, \quad t\in\Gamma.$$

Рассмотрим задачу об отыскании аналитической в единичном круге $\mathcal{D}$ функции φ^+, предельные значения которой на окружности удовлетворяют условию

$$\varphi^+[\alpha(t)] = a(t)\varphi^+(t) + b(t)\,\overline{\varphi^+(t)} + h(t). \tag{I.I}$$

Задача (I.I) поставлена Н.П.Векуа. В его работе /I/ рассматривалась задача об отыскании вектор-функции φ^+, предельные значения которой удовлетворяют условию Гельдера в предположениях, что матриц-функции a, b гельдеровы, а сдвиг α изменяет ориентацию контура. Задача (I.I) является переопределенной. Как показано в /I/, снимающими ее переопределенность условиями являются тождества.

$$a(t)\,a(\alpha(t)) + b(t)\,b(\alpha(t)) = 1, \tag{I.2}$$

$$a(t)\,b(\alpha(t)) + \overline{a(\alpha(t))}\,b(t) = 0, \qquad (I.3)$$

$$a(t)\,h(\alpha(t)) + b(t)\,\overline{h(\alpha(t))} + h(t) = 0. \qquad (I.4)$$

Н.П.Векуа при выполнении тождеств (I.2) - (I.4) указал условия нормальной разрешимости задачи (I.I) и дал алгоритм, позволяющий получить решения этой задачи из решения некоторой системы фредгольмовых интегральных уравнений.

Следующий шаг в исследовании задачи Н.П.Векуа был сделан в работе Г.С.Литвинчука и А.П.Нечаева /2/, в которой получен критерий нетеровости и вычислен индекс скалярной задачи (I.I) со сдвигом, сохраняющим, либо изменяющим ориентацию Γ, и гельдеровскими коэффициентами a, b. Эти и другие результаты, относящиеся к случаю гельдеровских a, b, h, отражены в монографии /3/.

В настоящей работе задача (I.I) рассматривается в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$ со степенным весом $\rho(t)=\prod_{j=0}^{\kappa}|t-t_j|^{\beta_j}$, $t_j\in\Gamma$. Это означает, что h задается в $L_p(\Gamma,\rho)$, а φ^+ ищется в подпространстве $H_{p,\rho}$, на которое $L_p(\Gamma,\rho)$ отображается проектором Рисса P ($P = \frac{1}{2}(I+S)$, где S - оператор сингулярного интегрирования с ядром Коши). Предполагаются выполненными условия

$$1<p<\infty, \quad -1<\beta_j<p-1 \quad (j=0,\dots,\kappa), \qquad (I.5)$$

обеспечивающие (см./4/) ограниченность оператора P и x)

---

x) Здесь обозначено $\beta(t_j)=\beta_j$, $\beta(t)=0$ при $t\neq t_j$, $j=0,\dots,\kappa$.

$\beta(\alpha(t))=\beta(t)$., необходимые и достаточные для ограниченности определяемого равенством $(W\varphi)(t)=\varphi(\alpha(t))$ оператора сдвига W.

Отметим, что при условиях (I.5)

$$H_{p,\rho}=\chi H_p\,, \tag{I.6}$$

где H_p – обычные классы Харди в единичном круге, $\chi(t)=\prod\limits_{j=0}^{k}(t-t_j)^{-\rho_j/p}$, а у дробной степени $t-t_j$ выбирается ветвь, аналитическая в $\bar{D}\setminus\{t_j\}$.

Коэффициенты a, b считаются измеримыми ограниченными функциями: $a, b\in L_\infty$. Условия (I.2.-I.3), снимающие переопределенность задачи (I.I), всюду в дальнейшем предполагаются выполненными.

Как оказалось, в указанной общей постановке при дополнительном условии $b^{-1}\in L_\infty$ задача (I.I) нетерова одновременно с задачей

$$\varphi^+(\alpha)=a\varphi^++b\varphi^-+h \qquad (\varphi^+,\ \bar{\varphi}^-\in H_{p,\rho}). \tag{I.7}$$

Дефектные числа и индекс задачи (I.I)[x] совпадают с дефектными числами и индексом задачи (I.7), подсчитанными над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Доказательству этого факта посвящен § 2 настоящей работы. Здесь же приведено описание функций a, b, ,удовлетворяющих условиям (I.2-I.3). § 3 посвящен исследованию задачи (I.I) (или, что эквивалентно, зада-

---

[x] Подчеркнем, что ввиду наличия в (I.I) комплексного сопряжения, дефектные числа и индекс задачи Н.П.Векуа (I.I) подсчитываются над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

чи (I.7)) в случае сохраняющего ориентацию сдвига. Как оказалось, в силу условий (I.2)-(I.4) исследование на нетеровость (I.7) эквивалентно исследованию обобщенной краевой задачи Римана (ОКЗР)

$$\varphi^+ = b\varphi^- + a\overline{\varphi^-} + h.$$

Этот факт позволяет привлечь к исследованию задачи (I.I) многочисленные результаты, касающиеся ОКЗР (см., например, /3,5/ и содержащуюся там библиографию), Так, в § 3 получен критерий нетеровости задачи (I.I) с коэффициентами a, b из класса $H_\infty + C$ – линейной суммы класса Харди H_∞ с классом C функций, непрерывных на Γ. Здесь же проводятся точные формулы для дефектных чисел задачи (I.I) в случае, когда $\alpha(t) = -t$. При этом используются результаты работы /6/ о точных оценках дефектных чисел ОКЗР. Завершает § 3 критерий нетеровости и формула для вычисления индекса задачи (I.I) с кусочно-непрерывными коэффициентами a, b. Отметим, что в отличие от случая непрерывных коэффициентов, на нетеровость задачи и величину ее индекса влияет не только коэффициент b, но и a.

§ 4 посвящен изучению задачи Н.П.Векуа с обратным сдвигом. Методом конформного склеивания задача (I.I) приводится к ОКЗР на разомкнутой дуге (ср. /7/, где рассматривался случай непрерывных коэффициентов a, b). Для случая кусочно-непрерывных коэффициентов a, b в § 4 получен эффективный критерий нетеровости и вычислен индекс задачи (I.I).

В качестве следствий получены результаты о нетеровости и вычислении индекса задачи Карлемана $(b \equiv 0)$ и типа задачи

Карлемана $(\alpha \equiv 0)$.

§ 2. Редукция задачи Н.П.Векуа к двусторонней краевой задаче

1^{0}. Условимся называть образом краевой задачи множество правых частей, при которых задача разрешима, ядром-множество решений однородной задачи. Задачу будем называть нормально разрешимой, если ее образ замкнут. Пусть образ задачи лежит в фиксированном подпространстве $\mathcal{X}$. Нормально разрешимую задачу будем называть нетеровой в $\mathcal{X}$, если ее дефектные числа (размерность ее ядра и дополнения к образу до $\mathcal{X}$) конечны. Разность дефектных чисел задачи называется ее индексом.

Пусть коэффициенты a, b задачи (I.I) – ограниченные измеримые функции, удовлетворяющие п.в на Γ тождествам (I.2)-(I.3). Предположим, кроме того, что

$$b^{-1} \in L_{\infty}. \qquad (2.1)$$

Рассмотрим задачу (I.7) с произвольным свободным членом $h \in L_p(\Gamma, \rho)$. Обозначим через

$$\mathcal{X}_p^{+}(\Gamma, \rho) \qquad (=\mathcal{X}^{+})$$

подпространство функций из $L_p(\Gamma, \rho)$, удовлетворяющих тождеству (I.4), и положим $\mathcal{X}^{-} = i\mathcal{X}^{+}$.

<u>Теорема 2.I.</u> Задача (I.I) нетерова в $\mathcal{X}_p^{+}(\Gamma, \rho)$ тогда и только тогда, когда задача (I.7) нетерова в $L_p(\Gamma, \rho)$. Дефектные числа и индекс (над $\mathbb{R}$) задачи (I.I) совпадают с дефектными числами и индексом (над $\mathbb{C}$) задачи (I.7).

Доказательство. Задача (I.I) эквивалентна задаче (I.7) с дополнительным условием $\varphi^+ = \overline{\varphi^-}$:

$$\begin{cases} \varphi^+(\alpha) = a\varphi^+ + b\varphi^- + h \\ \varphi^+ = \overline{\varphi^-}, \quad h \in \mathcal{X}^+ \end{cases} \qquad (I.7_+)$$

Рассмотрим также задачу

$$\begin{cases} \varphi^+(\alpha) = a\varphi^+ + b\varphi^- + h \\ \varphi^+ = -\overline{\varphi^-}, \quad h \in \mathcal{X}^- \end{cases} \qquad (I.7\ )$$

Обозначим через $\mathcal{N}$ (соотв. $\mathcal{R}$) и $\mathcal{N}^\pm$ (соотв. $\mathcal{R}^\pm$) ядро (соотв.образ) задач (I.7) и (I.7±). Пусть $\{\varphi^+, \varphi^-\} \in \mathcal{N}$. Записывая краевое условие однородной задачи (I.7) в точке $\alpha(t)$, получим $\varphi^+ = a(\alpha)\varphi^+(\alpha) + b(\alpha)\varphi^-(\alpha)$.

Умножая последнее равенство на $\bar{a}$ и складывая полученные краевые условия, с учетом (I.2)-(I.3) после простых преобразований получаем $b(\alpha)[\overline{\varphi^-(\alpha)} - \bar{a}\overline{\varphi^-} - \bar{b}\overline{\varphi^+}] = 0$.

Следовательно, $\{\overline{\varphi^-}, \overline{\varphi^+}\} \in \mathcal{N}$. Из представления

$$\varphi^\pm = \frac{1}{2}(\varphi^\pm + \overline{\varphi^\mp}) + \frac{1}{2}(\varphi^\pm - \overline{\varphi^\mp}) \qquad (2.2)$$

вытекает, что $\mathcal{N} = \mathcal{N}^+ \oplus \mathcal{N}^-$. Размерность $\mathcal{N}^\pm$ (над $\mathbb{R}$) одинакова, поскольку оператор умножения на i является изоморфизмом $\mathcal{N}^\pm$ на $\mathcal{N}^\mp$.

В силу (I.2), (I.3) и (2.I), формулой $Uh = \overline{b^{-1}(\alpha)[\overline{h(\alpha)}} + \overline{a(\alpha)}h]$ в $L_p(\Gamma, \rho)$ определяется ограниченный инволютивный оператор U. Дополнительные проекторы $U_\pm = \frac{1}{2}(I \pm U)$ проектируют $L_p(\Gamma, \rho)$ на $\mathcal{X}^\pm$

параллельно $\mathcal{X}^{\mp}$. Если $h=\varphi^{+}(\alpha)-a\varphi^{+}-b\varphi^{-}\in\mathcal{R}$, то $Uh=-(\varphi^{-}(\alpha)-a\overline{\varphi}^{-}-b\overline{\varphi}^{+})\in\mathcal{R}$. Значит, для $h\in\mathcal{R}\cap\mathcal{X}^{\pm}$ имеем $h=\frac{1}{2}(h\mp Uh)\in\mathcal{R}^{\pm}$. Из (I.2)-(I.3) непосредственно следует $\mathcal{R}^{\pm}\subset\mathcal{X}^{\pm}$. Значит, $\mathcal{R}^{\pm}=\mathcal{X}^{\pm}\cap\mathcal{R}$. Из (2.2) имеем $\mathcal{R}=\mathcal{R}^{+}\oplus\mathcal{R}^{-}$. Умножение на i переводит $\mathcal{X}^{\pm}$ на $\mathcal{X}^{\mp}$, а $\mathcal{R}^{\pm}$ на $\mathcal{R}^{\mp}$. Поэтому $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{X}^{+}/\mathcal{R}^{+}=\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{X}^{-}/\mathcal{R}^{-}=$ $=\dim_{\mathbb{C}}L_p(\Gamma,\rho)/\mathcal{R}$, причем линеалы $\mathcal{R}^{\pm}$ и $\mathcal{R}$ замкнуты лишь одновременно. Теорема доказана.

Задача (I.7) эквивалентна задаче

$$\varphi^{+}(\alpha)=a\varphi^{+}+tb\varphi^{-}+h, \qquad (\text{I}.7^{0})$$

решения которой ищутся в классе $\varphi^{+}\in I_m P\ (=H_{p,\rho})$, $\varphi^{-}\in I_m Q$, где $Q=I-P$ – дополнительный к P проектор. Нетеровость (I.7^0) эквивалентна нетеровости в $L_p(\Gamma,\rho)$ оператора

$$K=WP-aP+btQ, \qquad (2.3)$$

причем дефектные числа (I.7^0) и (2.3) совпадают.

2^0. В этом пункте мы укажем некоторые необходимые в дальнейшем следствия из тождества (I.2)-(I.3). Положим

$$\Delta(t)=|a(t)|^{2}-|b(t)|^{2},\quad \Gamma_{\pm}=\{t\in\Gamma:\Delta(t)\gtrless 0\},$$

$$\sigma(t)=|b(t)|,\quad \theta(t)=\arg a(t),\quad \eta(t)=\arg b(t)^{*}$$

* $\arg$ здесь и ниже выбирается из промежутка $[0,2\pi)$.

22

Из (1.2), (1.3) следует, что $\Delta(t)\Delta(\alpha(t))=1$, так что $\Delta^{-1}\in L_\infty$, множества $\Gamma_\pm$ инвариантны относительно α и (с точностью до множества меры нуль) $\Gamma_+\cup\Gamma_-=\Gamma$.

Решая теперь (1.2), (1.3) относительно $a(\alpha)$, $b(\alpha)$, находим: $a(\alpha)=\frac{\bar a}{\Delta}$, $b(\alpha)=-\frac{b}{\Delta}$ п.в. на Γ. Но тогда

$$a\,a(\alpha)=\frac{|a|^2}{\Delta},\qquad b\,\overline{b(\alpha)}=-\frac{|b|^2}{\Delta},$$

так что $a\,a(\alpha)$ и $b\,\overline{b(\alpha)}$ вещественнозначны. Точнее $\frac{1}{\pi}(Q(\alpha)+Q)$ четно при $t\in\Gamma_+$ и нечетно при $t\in\Gamma_-$,

$$\frac{1}{\pi}(\eta(\alpha)+\eta)\ \text{нечетно при}\ t\in\Gamma_+\ \text{и четно при}\ t\in\Gamma_-. \tag{2.4}$$

Наконец, $|a|=\sigma\sqrt{1+\frac{\operatorname{sgn}\Delta}{\sigma\sigma(\alpha)}}$. В соответствии с последним равенством,

$$\sigma\sigma(\alpha)\geqslant 1,\qquad t\in\Gamma_-. \tag{2.5}$$

Приведенная здесь характеристика функций a, b является исчерпывающей: если $\Gamma=\Gamma_+\cup\Gamma_-$ - разбиение окружности на два α - инвариантных множества, положительнозначная функция σ обладает свойством (2.5), а вещественнозначные θ,η - свойствами (2.4), то функции

$$b(t)=\sigma(t)e^{i\eta(t)},\quad a(t)=\sigma(t)\sqrt{1\pm\frac{1}{\sigma(t)\sigma(\alpha(t))}}\,e^{i\theta(t)},\qquad t\in\Gamma_\pm,$$

удовлетворяют тождествам (1.2), (2.3).

§ 3. Задача Н.П.Векуа со сдвигом, сохраняющим ориентацию контура

I°. Пусть сдвиг α сохраняет ориентацию контура. Как показано в п.2.I°, при условии (2.I) задача (I.I) и оператор (2.3) нетеровы лишь одновременно, а их дефектные числа совпадают. Но в случае прямого сдвига нетеровость оператора (2.3) эквивалентна нетеровости его сопутствующего

$$K' = WP + aP - btQ, \tag{2.3^{I}}$$

причем $ind\, K = ind\, K'$ /3/. Отсюда следует, что нетеровость задачи (I.I) эквивалентна нетеровости действующего в $L_p^2(\Gamma,\rho)$ оператора

$$\widetilde{K} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I & -I \\ W & W \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & W \\ I & -W \end{bmatrix},$$

а индекс $\varkappa$ этой задачи вычисляется по формуле $\varkappa = \frac{1}{2} ind\, \widetilde{K}$. В то же время непосредственно проверяется (см. /8/), что

$$\widetilde{K} = XP + \mathcal{Y}Q + T, \tag{3.I}$$

где $X = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ 1 & -a(\alpha) \end{bmatrix}$, $\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & \alpha(t)b(\alpha) \end{bmatrix}$, а $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha(t)b(\alpha)+a(\alpha) \end{bmatrix}(P - WPW)$ – вполне непрерывный оператор. В силу (I.2) и (2.I) матрица-функция X обратима в L_∞. Поэтому нетеровость оператора $\widetilde{K}$ равносильна нетеровости оператора $P + HQ$, где

$$H = X^{-1}Y = \bar{b}^{-1}\begin{bmatrix} -\bar{a} & 1 \\ |b|^2-|a|^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & \alpha(t) \end{bmatrix},$$

и $ind\,\tilde{K} = ind\,(P+HQ)$.

В свою очередь, действующий в $L^2_p(\Gamma,\rho)$ оператор $P+HQ$ лишь обратимыми сомножителями отличается от действующего в $L^2_p(\Gamma)$ оператора $P+H_\rho Q$. Здесь

$$H_\rho(t) = H(t)\cdot\prod_{j=0}^{K} t^{\beta_j/p}, \tag{3.2}$$

а функции $t^{\beta_j/p}$ выбираются непрерывными на $\Gamma\setminus\{t_j\}$.

Напомним (ср./4,9/), что нетеровость в $L_p(\Gamma)$ оператора $P+FQ$ с $n\times n$ - матрицей F эквивалентна существованию представления

$$F(t) = F_+(t)\Lambda(t)F_-^{*^{-1}}(t),$$

в котором $F_\pm\in H_p$, $F_\pm^{-1}\in H_q$, $\Lambda(t) = (\delta_{jk}t^{\varkappa_j})_{j,k=1}^n$ $(q=p/(p-1))$,

числа $\varkappa_j$, называемые частными индексами матрицы-функции F, целые), и оператор $F_-^*\Lambda^{-1}QF_+^{-1}$ ограничен в $L_p^n(\Gamma)$. Такое представление будем, как и в /10/, называть Φ - факторизацией F (в L_p $(=L_p(\Gamma))$). Если матрица F Φ - факторизуема, то ее суммарный индекс $(\varkappa_1+\cdots+\varkappa_n)$ совпадает с индексом оператора $P+FQ$.

<u>Теорема 3.1</u>. Пусть выполнено условие (2.1). Задача (1.1) с прямым сдвигом α нетерова в $\mathcal{L}_p^+(\Gamma,\rho)$ тогда и только тогда, когда Φ - факторизуема в L_p матрица-функция

$$G = \bar{b}_\rho^{-1} \begin{bmatrix} |a|^2 - |b|^2 & a \\ \bar{a} & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

(b_ρ связано с b формулой, аналогичной (3.2)).
Если это условие выполнено, то индекс задачи (I.I) есть

$$\varkappa = 1 + \frac{1}{2} k , \qquad (3.4)$$

где k - суммарный индекс матрицы (3.3).

В силу изложенного выше, для полного обоснования теоремы 3.I остается показать, что матрицы-функции H_ρ и G Φ-факторизуемы лишь одновременно, а их суммарные индексы отличаются на 2. Но это действительно так, поскольку

$$H_\rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G(t) \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & \alpha(t) \end{pmatrix} .$$

Интересно заметить, что вопрос о факторизуемости матриц-функций вида (3.3) возникает также при изучении еще одной известной граничной задачи - ОКЗР (см. /3,5/). А именно, Φ-факторизуемость в L_ρ матрицы (3.3) эквивалентна нетеровости в $L_\rho(\Gamma,\rho)$ ОКЗР

$$\varphi^+(t) = b(t)\varphi^-(t) + a(t)\bar{t}\ \overline{\varphi^-(t)} + h(t) . \qquad (3.5)$$

При этом величина k совпадает с индексом $\varkappa_M$ (над $\mathbb{R}$) задачи (3.5).

<u>Следствие 3.I</u>. При условии (2.I) задача (I.I) с прямым сдвигом α нетерова тогда и только тогда, когда нетерова ОКЗР (3.5), а индексы этих задач связаны соотношением $\varkappa = 1 + \frac{1}{2}\varkappa_M$.

2^0. Результаты предыдущего n^0 позволяют применить к исследованию задачи (I.I) о прямым сдвигом известные предложения о факторизации матриц вида (3.3) и об ОКЗР. На основании результатов /5/ получаем, например, следующие предложения:

Теорема 3.2. Если $a \in H_\infty + C$, $b^{-1} \in L_\infty$, то для нетеровости задачи (I.I) в $\mathcal{L}_p^+(\Gamma, \rho)$ необходимо и достаточно, чтобы функция b_ρ была Φ - факторизуема в L_p . Если это условие выполнено, то индекс задачи (I.I) на единицу превосходит индекс функции b_ρ.

Следствие 3.2. Пусть $a \in H_\infty + C$, а $b_\rho(\bar{b}_\rho)$ - обратимый элемент $H_\infty + C$. Тогда задача (I.I) нетерова, а ее индекс вычисляется по формуле $\mathscr{X} = 1 + \frac{1}{2\pi} \lim_{z \to 1} \{ \arg \tilde{b}_\rho(re^{i\theta}) \}_{\theta=0}^{2\pi}$, где $\tilde{b}_\rho$ - гармоническое продолжение функции b_ρ с окружности внутрь (во внешность) единичного круга.

Условие $a \in H_\infty + C$ очевидным образом выполняется, если $a \equiv 0$, т.е. для краевой задачи типа задачи Карлемана

$$\varphi^+(\alpha) = b\,\overline{\varphi^+} + h. \tag{3.6}$$

Теорема 3.2 доставляет, таким образом, критерий нетеровости этой задачи.

Остановимся теперь на случае кусочно-непрерывных a, b. Введем функции

$$R(t) = \frac{|b(t+0)|^2 + |b(t-0)|^2 - |a(t+0) - a(t-0)|^2}{|b(t+0)\, b(t-0)|},$$

$$\delta(t)=\frac{2\pi}{p}(1+\beta(t))-\arg\frac{b(t+0)}{b(t-0)}, \quad \zeta(t)=\begin{cases}\pi, & R(t)\leq -2\\ 0, & R(t)\geq 2\\ \arccos\frac{R(t)}{2}, & |R(t)|<2\end{cases}$$

$$\ell(t)=\begin{cases}0, & |\delta(t)|<\zeta(t)\\ \operatorname{sgn}\delta(t), & \zeta(t)\leq|\delta(t)|<2\pi-\zeta(t)\\ 2\operatorname{sgn}\delta(t), & 2\pi-\zeta(t)\leq|\delta(t)|<2\pi.\end{cases}$$

<u>Теорема 3.3</u>. Для нетеровости в $\mathcal{L}_p^+(\Gamma,\rho)$ задачи (I.I) с кусочно непрерывными коэффициентами a, b необходимо и достаточно, чтобы при $t\in\Gamma$

$$b(t\pm 0)\neq 0, \tag{3.7}$$

$$\cos\delta(t)\neq\cos\zeta(t). \tag{3.8}$$

Если условия (3.7), (3.8) выполнены, то индекс задачи (I.I) вычисляется по формуле

$$\varkappa = 1+\frac{1}{2\pi}\sum_j\{\arg b\}_{\gamma_j} + \sum_j\left(\frac{1}{2\pi}\arg\frac{b(t_j+0)}{b(t_j-0)}+\frac{\ell(t_j)-1}{2}\right). \tag{3.9}$$

Здесь первая сумма берется по дугам, на которые Γ разбивается точками разрыва функции b, вторая - по всем точкам разрыва функций a и b.

<u>Доказательство</u>. Предположим сначала, что условие (3.7) (эквивалентное для кусочно-непрерывной b условию (2.I)) выполнено. Тогда, согласно теореме 3.I, нетеровость задачи (I.I) эквивалентна Φ - факторизуемости кусочно-непрерывной матрицы (3.3). С помощью результатов /II/ устанавливает-

ся, что при соблюдении (3.7) условие (3.8) необходимо и достаточно для $\mathcal{F}$ - факторизуемости G в L_p, а при его выполнении из (3.4) следует (3.9).

Остается обосновать необходимость условий (3.7) для нетеровости задачи (I.I). Пусть задача (I.I) нетерова, т.е. нетеров действующий из $H_{p,\rho}$ в $\mathfrak{X}^+$ оператор Ω, определяемый равенством $\Omega\varphi = \varphi(\alpha) - a\varphi - b\overline{\varphi}$. Рассмотрим функции $\tilde{a}, \tilde{b}$, достаточно близкие к a, b соответственно (в метрике L_∞) и удовлетворяющие (I.2), (I.3). Из (I.2), (I.3) усматривается, что действующий по правилу $\mathcal{P}h = -ah(\alpha) - b\overline{h(\alpha)}$ оператор проектирует $L_p(\Gamma,\rho)$ на $\mathfrak{X}^+$. Аналогично определяемый оператор $\tilde{\mathcal{P}}$ проектирует $L_p(\Gamma,\rho)$ на $\tilde{\mathfrak{X}}^+ = \{h : \tilde{a}h(\alpha) + \tilde{b}\,\overline{h(\alpha)} + h = 0\}$. Из близости a к $\tilde{a}$, b к $\tilde{b}$ следует, что $\mathcal{P}$ и $\tilde{\mathcal{P}}$ близки в равномерной топологии. Оператор $\mathcal{P}\tilde{\Omega}$ поэтому близок по норме к Ω, действует в то же пространство, и, значит, нетеров вместе с Ω и имеет тот же индекс. Поскольку $\mathcal{P}|\tilde{\mathfrak{X}}^+$ является изоморфизмом $\tilde{\mathfrak{X}}^+$ на $\mathfrak{X}^+$ (см. /I2/), отсюда следует, что индексы операторов Ω и $\tilde{\Omega}$ также совпадают. Иными словами, для задачи (I.I) справедлива теорема об устойчивости индекса, невзирая на то обстоятельство, что изменения ее коэффициентов приводят к изменению подпространства, в котором она рассматривается. Теперь уже необходимость условий (3.7) доказывается стандартным рассуждением: если (3.7) нарушается, то малым возмущением коэффициентов a, b можно добиться того, чтобы все условия теоремы выполнялись, а формула (3.9) доставляла разные значения для $\mathcal{X}$. Последнее невозможно, если исходная задача (I.I) нетерова.

Следствие 3.3. Для нетеровости задачи (3.6) с кусочно-непрерывным коэффициентом b необходимо и достаточно, чтобы $b(t\pm 0)\neq 0$ и $b(t)\neq 0$ при всех $t\in\Gamma$. Если эти условия выполнены, то индекс задачи (3.6) есть

$$1+\frac{1}{2\pi}\sum_j\{\arg b\}_{\ell_j}+\sum_j\left(\frac{1}{2\pi}\arg\frac{b(t_j+0)}{b(t_j-0)}+\frac{\operatorname{sgn} b(t_j)-1}{2}\right).$$

Здесь первая сумма берется по дугам непрерывности функции b, вторая - по ее точкам разрыва.

В рамки теоремы 3.3 и следствия 3.3 укладываются известные результаты о задачах (I.I) и (3.6) с непрерывными коэффициентами.

3°. Разберем еще случай, когда $p=2$, а функция b_p принадлежит классу $\mathfrak{M}$ множителей, не влияющих на факторизуемость. Класс $\mathfrak{M}$ введен и подробно описан в /I3/. Здесь отметим лишь, что он содержит все функции вида $u\bar{v}$, где $u^{\pm 1}, v^{-1}\in H_\infty+C$. В случае $b_p\in\mathfrak{M}$ матрицы-функции (3.3) и

$$G_0=\begin{bmatrix}|a|^2-|b|^2 & a\\ \bar a & 1\end{bmatrix}$$

Φ - факторизуемы лишь одновременно /I4/, частные индексы матрицы G_0 взаимно противоположны, а частные индексы (3.3) получаются из них сдвигом на индекс функции b_p, который мы для удобства обозначим $m-1$. Введем еще функцию b_+, лежащую вместе с обратной в H_∞ и такую, что $|b_+(t)|=|b(t)|$ п.в. на Γ, после чего положим $\omega=a/b_+$. Применяя к G_0 теорему 3.I из /6/, получаем следующий результат.

Теорема 3.4. При условии $b_\rho \in \mathfrak{M}$ задача (I.I) нетерова в $\mathcal{L}_2^+(\Gamma,\rho)$ тогда и только тогда, когда для ганкелева оператора $H_\omega = Q\omega P$ единица является s - числом конечной кратности $\ell (\geq 0)$. Если это условие выполнено, то индекс задачи (I.I) равен m.

Следствие 3.4. Задача (I.I) нетерова, если $b_\rho \in \mathfrak{M}$ и

$$dist(\omega, H_\infty + C) < 1. \tag{3.10}$$

Отметим, что условие (3.10) заведомо выполнено, если $a \in H_\infty + C$. В этом случае результат следствия вытекает также из теоермы 3.2.

Для модельного сдвига $\alpha(t) = -t$ в условиях следствия 3.4 удается не только установить нетеровость задачи (I.I), но и подсчитать ее дефектные числа n и d. Чтобы сформулировать соответствующий результат, обозначим через μ наименьшее число совпадений (с учетом кратности) в $\mathcal{D}$ функций $\chi_1, \chi_2 \in M_\infty$, удовлетворяющих условиям $(\chi_1 - \chi_2)^{-1} \in M_\infty$ и

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\Gamma} \left| \frac{a(t)-\chi_1(t)}{b(t)} \right| < 1 < \operatorname*{ess\,inf}_{t\in\Gamma} \left| \frac{a(t)-\chi_2(t)}{b(t)} \right|$$

(здесь M_∞ - линейная сумма H_∞ с классом рациональных функций, не имеющих полюсов на Γ).

Теорема 3.5. При условиях $b_\rho \in \mathfrak{M}$,

$$\alpha(t) = -t \tag{3.11}$$

и (3.10) дефектные числа n и d вычисляются по формулам

$$n = max\{0, m\}, \quad d = max\{0, -m\}, \tag{3.12}$$

если $\mu \leq |m|$; $n = \frac{1}{2}(m+\mu)$, $d = \frac{1}{2}(-m+\mu)$, если $\mu > |m|$, μ и m одинаковой четности;

$$n = \frac{1}{2}(\mu+m+1),\ d = \frac{1}{2}(\mu-m+1) \quad \text{либо} \quad n = \frac{1}{2}(\mu+m-1),$$
$$d = \frac{1}{2}(\mu-m-1), \tag{3.13}$$

если $\mu > |m|$, μ и m разной четности.

<u>Доказательство</u>. Дефектные числа задачи (I.I) совпадают, как уже отмечалось, с дефектными числами оператора (2.3). При условии (3.II) оператор умножения на t осуществляет подобие операторов (2.3) и (2.3^{I}) с точностью до одномерного возмущения. Поэтому дефектные числа n' и d' оператора (2.3^{I}) удовлетворяют неравенствам

$$|n-n'| \leq 1, \quad |d-d'| \leq 1. \tag{3.14}$$

Кроме того,

$$n+n' = \tilde{n}, \quad d+d' = \tilde{d}, \tag{3.15}$$

где $\tilde{n}$, $\tilde{d}$ – дефектные числа оператора $\tilde{K}$.

Далее, в силу (3.II) операторы W и P коммутируют, так что слагаемое T в равенстве (3.I) отсутствует. Следовательно, $\tilde{n}$ и $\tilde{d}$ совпадают с дефектными числами оператора $P + H_P Q$ в $L_P^2(\Gamma)$. Последние, в свою очередь, выражаются через частные индексы $\kappa (\geq 0)$ и $-\kappa$ матрицы G_0 и индекс $m-1$ функции b_P следующим образом:

$$\tilde{n} = \max\{0, m+\kappa\} + \max\{0, m-\kappa\}, \tag{3.16}$$
$$\tilde{d} = \max\{0, -m-\kappa\} + \max\{0, -m+\kappa\}.$$

Но $\kappa = \mu$ по теореме 3.2 из /6/. Соотношения (3.14), (3.15), (3.16) приводят поэтому к искомым формулам для дефектных чисел.

Замечание. В случае (3.II) реализуются обе возможности (3.13). Действительно, если, скажем, $n=\frac{1}{2}(\varkappa+m+1)$, $d=\frac{1}{2}(\varkappa-m+1)$, то $n'=\frac{1}{2}(\varkappa+m-1)$, $d'=\frac{1}{2}(\varkappa-m-1)$. Изменение знака у коэффициентов a, b, не влияя на $\varkappa$ и m, приведет к перемене K и K' местами. Значит, для задачи (I.I) с измененными коэффициентами будут уже справедливы формулы $n=\frac{1}{2}(\varkappa+m-1)$, $d=\frac{1}{2}(\varkappa-m-1)$.

Мы не останавливаемся на вытекающих из теоремы 3.5 эффективно проверяемых оценках для n и d. Они могут быть сформулированы по аналогии с соответствующими результатами из /I5/.

§ 4. Задача Н.П.Векуа со сдвигом, изменяющим ориентацию контура

I°. Пусть теперь сдвиг α изменяет ориентацию контура. При условии (2.I), как и прежде, вопрос о нетеровости и индексе задачи (I.I) сводится к соответствующему вопросу для оператора (2.3). Исключение сдвига из оператора K приводит, однако, в случае изменения ориентации не к сингулярному интегральному оператору K, а к более сложному оператору из алгебры, порожденной сингулярными интегральными (см. /I8/). На этом пути можно до конца исследовать на нетеровость задачу (I.I) с кусочно-непрерывными коэффициентами при условии (2.I), но освободиться от этого условия, уже не являющегося необходимым для нетеровости, не удается. Мы здесь воспользуемся другим способом исследования задачи

(I.I), основанным на методе конформного склеивания.

Как известно /3/, обратный карлемановский сдвиг имеет ровно две неподвижные точки. Без ограничения общности можно считать, что ими являются точки t_0 и t_1.

Согласно теореме I3.4 из /3/, существует аналитическая в $\mathcal{D}$ за исключением простого полюса в нуле функция ω, предельные значения которой на Γ удовлетворяют условию склеивания $\omega(\alpha(t)) = \omega(t)$.

Эта функция однолистно отображает $\mathcal{D}$ на (расширенную) комплексную плоскость, разрезанную вдоль простой разомкнутой ляпуновской кривой $L = \omega(\Gamma)$. Концы u_0, u_1 кривой L являются образами при отображении ω неподвижных точек сдвига α; L считается ориентированной от $u_0 = \omega(t_0)$ $u_1 = \omega(t_1)$.

Обозначим через z функцию, обратную к ω, через $z^{\pm}$ – ее предельные значения на L. С помощью замены $\varphi = \psi \circ z$ задача (I.I) сводится к ОКЗР

$$\psi^{+}(u) = \tilde{a}(u)\psi^{-}(u) + \tilde{b}(u)\overline{\psi^{-}(u)} + \tilde{h}(u), \tag{4.1}$$

где

$$\tilde{a}(u) = a(z^{-}(u)), \quad \tilde{b}(u) = b(z^{-}(u)), \quad \tilde{h}(u) = h(z^{-}(u)), \quad u \in L. \tag{4.2}$$

Эквивалентность задач (I.I) и (4.I) в случае гельдеровских a, b, h установлена в /7/ (см. также /3/, с .3I2), рассуждения из /3/ переносятся на случай $a, b \in L_\infty$. Отметим, что при этом предположение о невырожденности a, которое предполагалось выполненным в /3/, по существу не используется.

Важно заметить, что задачу (4.I) следует рассматривать в пространстве $L_p(L,\tilde{\rho})$ с весом $\tilde{\rho}(u)=|u-u_0|^{\beta_0-1/2}\times$ $\times|u-u_1|^{\beta_1-1/2}\prod\limits_{j=2}^{1/2(k-1)}|u-u_j|^{\beta_j}$. Здесь $u_j=\omega(t_j)$, а t_j $(j=2,\dots,{}^{k-1}/_2)$ — те из весовых точек, которые расположены на дуге $\Gamma_0=(t_0,t_1)$ окружности Γ.

Действительно, $\int\limits_L|\Psi^+(u)|^p\tilde{\rho}(u)|du|+\int\limits_L|\Psi^-(u)|^p\tilde{\rho}(u)|du|=$ $\int\limits_L|\varphi(t)|^p\tilde{\rho}(\omega(t))\,|\omega'(t)|\,|dt|$, а в силу формулы (I3.36) из /3/ функции $\tilde{\rho}(\omega(t))\,|\omega'(t)|$ и $\rho(t)$ отличаются ограниченным отделенным от нуля множителем.

Дополним L до замкнутого положительно ориентированного ляпуновского контура $\tilde{L}$ и доопределим на $\tilde{L}$ функции $\hat{a},\hat{b},\hat{h}$ следующим образом:

$$\hat{a}(u)=1,\quad \hat{b}(u)=\hat{h}(u)=0,\quad u\in\tilde{L}\setminus L. \tag{4.3}$$

Тогда задача (4.I) очевидным образом эквивалентна ОКЗР с тем же граничным условием, но уже в классе $L_p(\tilde{L},\tilde{\rho})$, функцию Ψ^- следует при этом считать ограниченной на бесконечности.

Пусть теперь W — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\tilde{L}$ на Γ, отображающий L на Γ_0, при котором $W(u_j)=t_j$, $j=0,\dots,\frac{k-1}{2}$, $\hat{\rho}(t)=|t-t_0|^{\beta_0-1/2}|t-t_1|^{\beta_1-1/2}\times$ $\times\prod\limits_{j=2}^{1/2(k-1)}|t-t_j|^{\beta_j}$, $\hat{a}=\tilde{a}\circ W^{-1}$, $\hat{b}=\tilde{b}\circ W^{-1}$.

Как известно, задача (4.I) на $\tilde{L}$ нетерова лишь одновременно с ОКЗР

$$\chi^+(t)=\hat{a}(t)\chi^-(t)+\hat{b}(t)\overline{\chi^-(t)}+f(t)$$

в классе $L_p(\Gamma,\hat{\rho})$, а индексы этих задач совпадают. Поэтому на основании результатов /3,5/ можно сформулировать следующее предложение.

Теорема 4.1. Для нетеровости в $\mathcal{L}^{+}_{p}(\Gamma,\rho)$ задачи (I.I) с обратным сдвигом необходимо и достаточно, чтобы:
I) $a^{-1}\in L_\infty$, 2) $\mathcal{F}$ – факторизуема в L_p матрица

$$\frac{\bar{\hat{a}}^{-1}}{\hat{\rho}}\begin{vmatrix} |\hat{b}|^2-|\hat{a}|^2 & \bar{\hat{b}} \\ \hat{b} & 1 \end{vmatrix}, \qquad (4.4)$$

элементы которой определяются согласно формулам (4.2), (4.3), (3.2). Индекс задачи (I.I) при этом на 2 превосходит суммарный индекс матрицы (4.4).

2°. Пусть теперь коэффициенты a, b задачи (I.I) кусочно-непрерывны. Положим

$$R(t)=\begin{cases}\dfrac{|a(t+0)|^2+|a(t-0)|^2-|b(t+0)-b(t-0)|^2}{|a(t+0)a(t-0)|}, & t\in\Gamma\setminus\{t_0,t_1\}\\[2mm] \dfrac{1}{|a(t-0)|}+\dfrac{\operatorname{sgn}\Delta(t-0)}{|a(t+0)|}, & t=t_0\\[2mm] \dfrac{1}{|a(t+0)|}+\dfrac{\operatorname{sgn}\Delta(t+0)}{|a(t-0)|}, & t=t_1\end{cases}$$

$$\nu(t)=\begin{cases}\arg\dfrac{a(t-0)}{a(t+0)}, & t\in\Gamma\setminus\{t_0,t_1\}\\ \arg a(t-0), & t=t_0\\ \arg\overline{a(t+0)}, & t=t_1\end{cases}$$

$$\delta(t)=\begin{cases}2\pi/p\,(1+\beta(t))-\nu(t), & t\in\Gamma\setminus\{t_0,t_1\}\\ \pi/p\,(1+\beta(t))-\nu(t), & t=t_j\ (j=0,1)\end{cases}$$

$$\varsigma(t)=\begin{cases}0, & R(t)\geq 2\\ \pi, & R(t)\leq -2\\ \arccos\frac{R(t)}{2}, & |R(t)|<2\end{cases}\qquad \ell=\begin{cases}0, & |\delta|<\varsigma\\ \operatorname{sgn}\delta, & \varsigma\leq|\delta|<2\pi-\varsigma\\ 2\operatorname{sgn}\delta, & 2\pi-\varsigma\leq|\delta|<2\pi\end{cases}$$

Предельные значения матрицы (4.4) в точках $\tau=w(\omega(t))$, $t\in\Gamma_0$, совпадают с

$$-a_{\hat{\rho}}^{-1}(t\pm 0)\begin{bmatrix}1 & b(t\pm 0)\\ b(t\pm 0) & |b(t\pm 0)|^2-|a(t\pm 0)|^2\end{bmatrix}$$

Поэтому критерий Φ - факторизуемости кусочно-непрерывных матриц-функций в сочетании с теоремой 4.I приводит к следующему результату.

Теорема 4.2. Для нетеровости задачи (I.I) с кусочно-непрерывными коэффициентами a, b и обратным сдвигом необходимо и достаточно, чтобы при $t\in\Gamma$ $a(t\pm 0)\neq 0$, $\cos\delta(t)\neq\cos\varsigma(t)$. Если эти условия выполнены, то индекс задачи (I.I) вычисляется по формуле

$$\varkappa=-\frac{1}{2\pi}\sum_j\{\arg a\}_{\gamma_j}+\sum_j\left(\frac{1}{\pi}\nu(t_j)+\ell(t_j)-1\right)+$$
$$+\frac{\nu(t_0)+\nu(t_1)}{\pi}+\ell(t_0)+\ell(t_1).$$

Здесь первая сумма берется по всем дугам непрерывности функции a на Γ, вторая - по принадлежащим Γ_0 точкам разрыва коэффициентов a, b.

Следствие 4.I. Задача Карлемана

$$\varphi^+(\alpha)=a\varphi^+ + h \qquad (4.5)$$

с кусочно-непрерывным коэффициентом a нетерова в $\mathcal{L}_p(\Gamma,\rho)$ тогда и только тогда, когда $a(t\pm 0)\neq 0$ и $\delta(t)\neq 0$ при всех $t\in\Gamma$. При этих условиях индекс задачи (4.5) равен $-\frac{1}{2\pi}\sum_j \{\arg a\}_{\gamma_j} + \sum_j \left(\frac{1}{\pi}\nu(t_j) + \operatorname{sgn}\delta(t_j) - 1\right) +$

$$+ \operatorname{sgn}\delta(t_0) + \operatorname{sgn}\delta(t_1) + \frac{1}{\pi}\left(\nu(t_0) + \nu(t_1)\right),$$

где суммы понимаются в том же смысле, что и выше.

В рамки теоремы 4.2 и следствия 4.I укладываются известные /2,3/ результаты о задачах (I.I), (4.6) с непрерывными коэффициентами.

§ 5. Заключительные замечания

I. Случай единичной окружности рассматривался лишь для простоты изложения. Все результаты (с очевидными изменениями) переносятся с помощью конформного отображения на случай любой замкнутой ляпуновской кривой.

2. Теоремы 2.I, 3.I, 4.I переносятся на случай задачи (I.I) для вектор-функций. При этом, естественно, результаты для кусочно-непрерывного случая уже нельзя сформулировать непосредственно в терминах коэффициентов a, b.

3. Согласно следствию 3.I, при условии (2.I) задача (I.I) с прямым сдвигом нетерова лишь одновременно с ОКЗР (3.5). Условие (2.I) является необходимым для нетеровости (3.5). Представляется весьма вероятным, что оно необходимо и для нетеровости задачи (I.I). В случае кусочно-непрерывных коэффициентов, согласно теореме 3.3, это действительно так. Более того, авторам удалось показать, что задача (I.I) не может быть нетеровой, если хотя бы в одной точке $t \in \Gamma$ $\lim\limits_{\tau \to t+0} |b(\tau)| \cdot \lim\limits_{\tau \to t-0} |b(\tau)| = 0$

В общем же случае вопрос остается открытым.

4. Для случая гельдеровских коэффициентов a, b при условии $|a|<|b|$, если сдвиг прямой, и $|a|>|b|$, если сдвиг обратный, были вычислены дефектные числа задачи (I.I). А именно, в /2/ показано, что при указанных условиях одно из дефектных чисел равно нулю. Этот результат и метод доказательства переносятся на случай коэффициентов $a, b \in L_\infty$, если потребовать, чтобы $\operatorname{ess}\sup_{t\in\Gamma} \left|\frac{a(t)}{b(t)}\right| < \frac{2\varkappa}{1+\varkappa^2}$ в случае прямого, и $\operatorname{ess}\sup_{t\in\Gamma} \left|\frac{b(t)}{a(t)}\right| < \frac{2\varkappa}{1+\varkappa^2}$ в случае обратного сдвига. Здесь $\varkappa$ – норма оператора S' в пространстве $L_p(\Gamma,\rho)$. В случае $p=2$, $\alpha(t)=-t$ соответствующее утверждение следует также из теоремы 3.5.

Представляется весьма интересным отыскание аналогов теоремы 3.5 в случае произвольного сдвига.

Отделение экономики и экологии Мирового океана Морского гидрофизического института АН УССР

Литература

I. Н.П.Векуа. Изв.АН СССР. Сер.мат., 1956, т.20,№ 3, с.377-384.

2. Г.С.Литвинчук, А.П.Нечаев. Матем.сб.,1970,т.82, № I, с.30-54.

3. Г.С.Литвинчук. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М., Наука, 1977. - 448.

4. Б.В.Хведелидзе. Современные проблемы математики. М.,Издво ВИНИТИ, 1975, т.7, с.5-162.

5. И.М.Спитковский. Укр.мат.журн.,1979, т.31, № 1, с.63-73.
6. Г.С.Литвинчук, И.М.Спитковский. Матем. сб., 1982, т.117, № 2, с.196-215.
7. В.А.Чернецкий. Изв.ВУЗов, матем, 1972, № 11, с.80-89.
8. И.Ц.Гохберг, Н.Я.Крупник. Изв.АН Арм.ССР, сер.матем., 1973, т.8, № 1, с.3-12.
9. И.Б.Симоненко. Изв. АН СССР. Сер.мат.,1968, т.32, № 5, с.1138-1146.
10. И.М.Спитковский. ДАН СССР, 1976, т.297, № 3, с.576-579.
11. И.Ц.Гохберг, Н.Я.Крупник. Изв. АН СССР. Сер.мат.,1971, т.35, № 4, с.940-964.
12. М.Г.Крейн, М.А.Красносельский, Д.П.Мильман. Сб.трудов Ин-та математики АН УССР, 1948, т.11, с.97-112.
13. И.М.Спитковский. ДАН СССР, 1976, т.231, № 6, с.1300-1303.
14. И.М.Спитковский. Матем. заметки, 1980, т.27 , № 2, с.291-299.
15. А.М.Николайчук, И.М.Спитковский. Укр.мат. журн., 1975, т. 27, № 6, с.767-779.

ი. ლაცუშკინი, გ.ლიტვინჩუკი, ი.სპიტკოვსკი

ნიკო ვეკუას ერთი სასაზღვრო ამოცანის თეორიის შესახებ

რეზიუმე

$L_p(\partial D,\rho)$, $\rho(t)=\prod_{j=0}^{k-1}|t-t_j|^{\beta_j}$, $-1<\beta_j<p-1$, $j=0,\dots,k$, სივრცეში შესწავლილია ნ.ვეკუას მიერ დასმული ამოცანა – ერთეულოვან D არეში ანალიზური φ^+ ფუნქციის მოძებნის შესახებ შემდეგი სასაზღვრო პირობით:

$$\varphi^+(\alpha)=a\varphi^+ + b\overline{\varphi^+}+h,$$

აქ α არის კარლემანის გადატანა, რომელიც ინარჩუნებს ან ცვლის

წრეწირის ორიენტაციას; a, b კოეფიციენტები კი, საზოგადოდ, ზომადი შემოსაზღვრული ფუნქციებია.

Yu. Latushkin, G.Litvinchuk, I.Spitkovski

TO THE THEORY OF ONE N.P.VEKUA' S BOUNDARY VALUE PROBLEM

Summary

In the plane $L_p(\partial D, \rho)$, $\rho(t)=\prod\limits_{j=0}^{K-1}|t-t_j|^{\beta_j}$, $-1<\beta_j<p-1$, $j=0,\dots,K$, the problem of finding the function φ^+ analytic in the unit circle D, is investigated under the boundary condition

$$\varphi^+(\alpha)=a\varphi^+ + b\overline{\varphi^+}+h.$$

Here α is the Carleman displacement preserving or changing the orientation of the circumference and the coefficients a, b are, in general, measurable bounded functions.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
259, 1985

УДК 551.465.11

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ОКЕАНА

Г.И.Марчук, А.А.Кордзадзе

Настоящая работа посвящена изложению методов теории возмущений и постановкам обратных задач применительно к проблемам динамики океана /1-7/. Такие постановки задач особенно важны при решении сложных задач математической физики, в которых априори трудно оценить влияние тех или иных факторов на решение задачи. На основании этой теории для баротропных и бароклинных задач океанических циркуляций изучен вопрос об уточнении значений коэффициентов, входящих в системы дифференциальных уравнений. Разрешимость исследуемых задач установлена в работах /6,8-10/.

1. Формула теории малых возмущений

Рассмотрим функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$L\varphi(x)=f(x)\,, \tag{1.1}$$

где L – некоторый линейный оператор, $f(x)$ – некоторая известная функция, а под x будем понимать совокупность всех независимых переменных задачи (временная и пространственные координаты). Будем считать, что оператор L и функция φ являются действительными.

Введем гильбертово пространство вещественных функций Φ со скалярным произведением

$$(g,h)=\int g(x)\,h(x)\,dx, \tag{I.2}$$

где интегрирование ведется по всей области Ω определения функций g и h. Далее, обозначим через

$$J_p[\varphi]=(\varphi,P) \tag{I.3}$$

физические величины, где функция P является правой частью для сопряженного уравнения

$$L^*\varphi_p^*(x)=P(x). \tag{I.4}$$

Конкретный вид функции $P(x)$ будет определен позднее.

Здесь оператор L^* в (I.4) определен тождеством Лагранжа

$$(g,Lh)=(h,L^*g) \tag{I.5}$$

для любых функций g и h, а $\varphi_p^*\in\Phi$. Подставляя в формуле (I.5) вместо функций h и g решения уравнений (I.I) и (I.4), получаем

$$(\varphi_p^*,L\varphi)=(\varphi,L^*\varphi_p^*) \tag{I.6}$$

или, воспользовавшись уравнениями (I.I) и (I.4), имеем

$$(\varphi_p^*,f)=(\varphi,P), \tag{I.7}$$

т.е.

$$J_f[\varphi_p^*]=J_p[\varphi].$$

Таким образом, если нам нужно найти значение функционала $J_P[\varphi]$, то мы можем получить его двумя способами: либо решить уравнение (I.I) и определить эту величину по формуле

$$J_P[\varphi]=(\varphi,P) \tag{I.8}$$

либо решить уравнение (I.4) и определить ту же величину по формуле

$$J_P[\varphi]=J_f[\varphi_P^*]=(\varphi_P^*,f). \tag{I.9}$$

Следовательно, каждому линейному функционалу $J_P[\varphi]=(\varphi,P)$ могут быть поставлены в соответствие функции $\varphi_P^*(x)$, удовлетворяющие уравнению (I.4).

Рассмотрим теперь возмущенный оператор L' в следующем виде:

$$L'=L+\delta L.$$

Тогда, естественно, изменится и поле $\varphi(x)$ и значение функционала $J_P[\varphi]$:

$$\varphi(x)\to\varphi'(x)=\varphi+\delta\varphi,\quad J_P[\varphi]\to J_P'+\delta J_P.$$

Для того чтобы установить связь между изменением оператора δL и изменением функционала δJ_P, рассмотрим возмущенную систему, которая описывается уравнением

$$L'\varphi'\equiv(L+\delta L)\varphi'=f. \tag{I.10}$$

Далее, умножим скалярно уравнение (I.10) на φ_P^*, а уравнение (I.4) на φ', затем вычтем одно из другого, пользуясь тождеством Лагранжа (I.5) и выражением (I.7). В результате получим общее соотношение для приращения функционала

$$\delta J_p = -(\varphi_p^*, \delta L \varphi'), \qquad (I.11)$$

где

$$\delta J_p = J_p'[\varphi'] - J_p[\varphi].$$

Отметим важную особенность применения формул теории возмущений, а именно: так как формулы теории возмущений записаны применительно к вариации функционала, погрешность в которой обычно допустима в пределах нескольких процентов, то это значит, что для вычисления указанных вариаций нет необходимости знать точное решение основной и сопряженной задач, достаточно воспользоваться их приближенным решением.

Если возмущение оператора L мало, так, что оно не очень сильно искажает функцию φ, то в формуле (I.II) можно заменить приближенно $\varphi' \simeq \varphi$, не внося при этом заметной погрешности в δJ_p. Действительно,

$$\delta J_p = -(\varphi_p^*, \delta L \varphi') = -(\varphi_p^*, \delta L(\varphi + \delta\varphi)) =$$

$$= -(\varphi_p^*, \delta L \varphi) - (\varphi_p^*, \delta L \cdot \delta\varphi).$$

При малых возмущениях слагаемое $(\varphi_p^*, \delta L \cdot \delta\varphi)$ является величиной более высокого порядка малости, чем $(\varphi_p^*, \delta L \varphi)$, так что приближенно получаем формулу теории малых возмущений:

$$\delta J_p = -(\varphi_p^*, \delta L \varphi). \qquad (I.12)$$

Полученная формула теории возмущений, кроме прямого использования для оценки различных эффектов и для анализа измерений, может иметь и еще одно весьма важное применение.

При теоретических исследованиях и в практических расчетах часто пользуются приближенной заменой исследуемой сложной системы упрощенной моделью.

Необходимым условием такой замены является, очевидно, требование, чтобы она не приводила к изменению некоторых основных для рассматриваемого вопроса характеристик системы. Примерами такого подхода при исследовании задач математической физики могут служить:

1. Замена переменных коэффициентов постоянными.

2. Оптимизация коэффициентов, входящих в основной дифференциальный оператор, с помощью которых в дальнейшем производится уточнение физического решения задачи.

3. Конструирование модели на основе оценки вклада квазилинейных слагаемых, входящих в основной дифференциальный оператор, и их зависимости от выбранного шага сетки или порядка аппроксимации дифференциальной краевой задачи разностной.

4. Выбор эффективных граничных условий для того или иного дифференциального уравнения, заключающийся в замене истинных условий некоторыми упрощенными, но такими, которые приводят к правильному значению некоторого избранного функционала и др.

Формулы теории возмущений позволяют сформулировать весьма общий подход к такого рода задачам. Пусть оператор L приближенным образом описывает интересующий нас физический процесс. Тогда если искомая простая модель характеризуется оператором $L' = L + \delta L$, то для того чтобы величина не изменилась при переходе от истинной системы к модели, не-

25

обходимо чтобы

$$\delta J_p = -\left(\varphi_p^*, (L' - L)\varphi\right) = 0, \tag{I.13}$$

т.е.

$$\left(\varphi_p^*, L'\varphi\right) = \left(\varphi_p^*, L\varphi\right). \tag{I.14}$$

Если мы интересуемся несколькими величинами $J_{p_1}, J_{p_2}, \dots, J_{p_n}$, то получим несколько условий типа (I.13) с решени ми $\varphi_{p_1}^*, \varphi_{p_2}^*, \dots, \varphi_{p_n}^*$. Заметим, что условие (I.13) не определяет однозначно искомой эквивалентной модели, но является ее необходимым условием и вместе с другими соображениями может помочь ее нахождению.

Мы рассмотрели только случай, когда решение модельной задачи близко к реальной, т.е. можно заменить φ' на φ и, таким образом, воспользоваться теорией малых возмущений. Если невозмущенное состояние процесса существенно отличается от истинного, то рассмотренный выше алгоритм можно считать только первым приближением к решению обратной задачи. После того как найдено первое приближение вариаций, например, приращение коэффициентов, можно исправить коэффициенты в модельной задаче и после этого необходимо решать "возмущенную задачу"

$$L'\varphi' = f$$

и перейти к новому приближению в решении обратной задачи, вместо (I.12) приняв более общую формулу возмущений (I.II), и повторить цикл вычислений для уточнения вариаций выбранной величины. Это мы будем называть вторым приближением. Далее указанный процесс может быть продолжен.

2. Теория возмущений и обратная задача для стационарной баротропной модели океана

Рассмотрим квазилинейную задачу, которая описывает ветровую циркуляцию в водоеме Ω_0 с постоянной глубиной H и береговой поверхностью σ. Тогда в предположении теории полных потоков приходим к системе уравнений:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\ell v+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}-\nabla\mu\nabla u=\frac{\tau_x}{\rho_0 H}, \qquad (2.1)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\ell u+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y}-\nabla\mu\nabla v=\frac{\tau_y}{\rho_0 H},$$

$$\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0,$$

при граничных условиях

$$u=0,\quad v=0 \quad \text{на } \sigma, \qquad (2.2)$$

где u и v - средние по глубине составляющие вектора скорости $\vec{u}$, P - давление, $\rho_0=const$ - плотность воды, τ_x и τ_y - составляющие вектора напряжения ветра над поверхностью рассматриваемого водоема, $\ell=\ell(y)$,

$$\nabla\mu\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial}{\partial y}.$$

Предположим, что априори нам известно приближенное значение коэффициента турбулентного обмена $\mu>0$, который может быть как постоянным, так и функцией от переменных x и y, которую мы в дальнейшем будем уточнять.

Введем в рассмотрение гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{3} \iint_{\Omega_o} a_i\, b_i\, d\Omega_o . \tag{2.3}$$

где a_i, b_i – компоненты вектор-функций a и b. Если в качестве вектор-функции рассмотреть решение задачи (2.I) - (2.2), то имеем $\varphi = (u, v, p)'$. Пусть теперь

$$A_\mu = \begin{Vmatrix} -(\nabla\mu\nabla - R) & -l & \frac{1}{\rho_o}\frac{\partial}{\partial x} \\ l & -(\nabla\mu\nabla - R) & \frac{1}{\rho_o}\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho_o}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{\rho_o}\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad f = \begin{Vmatrix} \frac{\tau_x}{\rho_o H} \\ \frac{\tau_y}{\rho_o H} \\ 0 \end{Vmatrix}$$

где

$$R = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} .$$

Тогда система дифференциальных уравнений (2.I) в операторной форме примет следующий вид:

$$A_\mu \varphi = f \tag{2.4}$$

Кроме того, с помощью тождества Лагранжа (I.5) можно убедиться, что оператор A_μ^*, сопряженный к оператору A_μ, имеет следующий вид:

$$A_\mu^* = \begin{Vmatrix} -(\nabla\mu\nabla + R) & \ell & -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x} \\ -\ell & -(\nabla\mu\nabla + R) & -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{Vmatrix}$$

Далее, наряду с основной системой уравнений (2.I) приходим к системе сопряженных уравнений:

$$\begin{aligned} &-u\frac{\partial u_i^*}{\partial x} - v\frac{\partial u_i^*}{\partial y} + \ell v_i^* - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_i^*}{\partial x} - \nabla\mu\nabla u_i^* = P_i\,, \\ &-u\frac{\partial v_i^*}{\partial x} - v\frac{\partial v_i^*}{\partial y} - \ell u_i^* - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_i^*}{\partial y} - \nabla\mu\nabla v_i^* = q_i\,, \\ &-\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x} + \frac{\partial v_i^*}{\partial y}\right) = 0 \end{aligned} \qquad (2.5)$$

с граничными условиями

$$u_i^* = 0, \quad v_i^* = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (2.6)$$

на σ,

где P_i и q_i – пока произвольные функции.

В операторной форме система сопряженных уравнений (2.5) имеет следующий вид:

$$A_\mu^* \varphi_i^* = g_i\,, \qquad (2.7)$$

где

$$\varphi_i^* = (u_i^*, v_i^*, P_i^*)' \quad \text{и} \quad g_i = (P_i, q_i, 0)'.$$

Тогда соотношение (1.7) для данной задачи запишется в виде

$$J_i[\varphi] = (\varphi_i^*, f) = = \frac{1}{\rho_0 H} \iint\limits_{\Omega_0} (\tau_x u_i^* + \tau_y v_i^*) d\Omega_0 . \qquad (2.8)$$

Что касается функций P_i и q_i, то их можно выбрать различным образом. Наибольший интерес представляет (для основной задачи (2.1) – (2.2)) выбор в следующем виде:

$$P_i = \frac{u}{2},\ q = \frac{v}{2} \quad \text{в} \quad \Omega_0 \quad \text{и нуль вне ее.}$$

Здесь Ω_{0_i} – выбранная подобласть области Ω_0, а u и v являются решениями основной задачи (2.1)-(2.2). Если теперь учтем тот факт, что функционал $J_i[\varphi]$ можно определить двумя способами, то при таком выборе функций P_i и q_i основной функционал $J_i[\varphi]$ задачи (2.1) – (2.2) будет представлять собой среднюю кинетическую энергию в области Ω_{0_i}, т.е.

$$\bar{E}_i \equiv J_i[\varphi] = (\varphi, g_i) = \iint\limits_{\Omega_{0_i}} \frac{u^2 + v^2}{2} d\Omega_0 . \qquad (2.9)$$

Система основных и сопряженных уравнений позволяет получить формулу теории малых возмущений вида (1.12). Имеем

$$\delta \bar{E}_i = -(\varphi_i^*, \delta A \varphi), \qquad (2.10)$$

где

$$\delta \bar{E}_1 = \bar{E}_1'[\varphi'] - \bar{E}_1[\varphi]. \qquad (2.11)$$

Здесь значение функционала $\bar{E}_1'[\varphi']$ известно в результате непосредственного измерения, а значение функционала $\bar{E}_i[\varphi]$ находится по формуле (2.9) после решения основной задачи (2.1) - (2.2).

В формуле (2.10) оператор $\delta A = A' - A_\mu$ имеет вид

$$\delta A = \begin{Vmatrix} -\nabla \delta\mu \nabla & 0 & 0 \\ 0 & -\nabla \delta\mu \nabla & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (2.12)$$

где

$$\delta\mu = \mu' - \mu .$$

Учитывая (2.12) и краевые условия (2.6), из (2.10) получим

$$\delta \bar{E}_1 = -(\varphi_1^*, \delta A \varphi) = \iint_{\Omega_0} \delta\mu \nabla \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}_1^* \, d\Omega_0 , \qquad (2.13)$$

$$\underline{u} = (u . v)', \quad \underline{u}_1^* = (u_1^* . v_1^*)'.$$

Аналогичные формулы можно получить для любых других функционалов, формируемых заданием правых частей в уравнениях (2.5).

Формулу (2.13) будем теперь рассматривать как уравнение для $\delta\mu$ и в результате приходим к обратной задаче

$$\iint_{\Omega_0} \delta\mu \nabla \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}_i^* \, d\Omega_0 = \delta \bar{E}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \qquad (2.14)$$

где известная правая часть $\delta \bar{E}_i$, определенная формулой (2.II), есть разность между фактически измеренной средней кинетической энергией по области Ω_{o_i} и рассчитанной с помощью невозмущенной задачи (2.I) - (2.2).

Пусть $\Omega_o = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega_{o_i}$ и на каждой элементарной области Ω_{o_i} величина $\delta\mu(x,y)$ может быть аппроксимирована константой $\delta\mu_i$, тогда интеграл в (2.I4) заменим суммой

$$\sum_{j=1}^{n} \delta\mu_j \iint\limits_{\Omega_{o_j}} \nabla u \cdot \nabla u_i^* d\Omega_o = \delta \bar{E}_i \quad (i=1,2,\dots,n). \qquad (2.15)$$

Предполагая систему (2.I5) разрешимой, находим первое приближение для $\delta\mu(x,y)$. После этого решаем задачу

$$A'\varphi' \equiv (A_\mu + \delta A)\varphi' = f .$$

Этот процесс можно продолжить для последовательного уточнения функции $\mu(x,y)$.

Теория сопряженных функций и методы теории возмущений широко применяются в формировании вычислительных алгоритмов, особенно при решении сложных задач математической физики, в которых априори трудно оценить влияние тех или иных факторов на решение задачи. Для того чтобы это проиллюстрировать на примере, рассмотрим снова задачу (2.I) - (2.2) и поставим перед собой цель: оценить вклад квазилинейных членов в системе (2.I). Может оказаться, что при определенных шагах сетки Δx и Δy или точности аппроксимации дифференциального оператора разностным, вклад указанных членов будет несущественным. В этом случае естественно с целью упрощения численного алгоритма их либо не учитывать, либо найти подходящий шаг сетки области Ω_o^h или необходимую точность при аппроксимации системы дифференциальных уравнений разностными.

Для этой цели на основе вышеописанного метода теории малых возмущений введем в рассмотрение оператор δA, определенный следующим образом:

$$\delta A = \begin{Vmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

и наряду с невозмущенной задачей

$$-\nabla\mu\nabla u - \ell v + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\tau_x}{\rho_0 H}, \tag{2.16}$$

$$-\nabla\mu\nabla v + \ell u + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\tau_y}{\rho_0 H},$$

$$\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0,$$

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{на } \sigma, \tag{2.17}$$

которая в операторной форме имеет вид

$$A\varphi = f. \tag{2.18}$$

Рассмотрим возмущенную задачу

$$A'\varphi' = f \tag{2.19}$$

с краевыми условиями

$$u' = 0, \quad v' = 0 \quad \text{на } \sigma. \tag{2.20}$$

В уравнении (2.18) вектор-функции φ и f определены как и выше, а оператор A имеет следующий вид:

$$A = \begin{Vmatrix} -\nabla\mu\nabla & -\ell & \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x} \\ \ell & -\nabla\mu\nabla & \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{Vmatrix}$$

Кроме того

$$A' = A + \delta A \quad \text{и} \quad \varphi' = \varphi + \delta\varphi$$

Далее обычным методом построим сопряженную задачу

$$-\nabla\mu\nabla u_i^* + \ell v_i^* - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_i^*}{\partial x} = P_i \,, \tag{2.21}$$

$$-\nabla\mu\nabla v_i^* - \ell u_i^* - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_i^*}{\partial y} = q_i \,,$$

$$-\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x} + \frac{\partial v_i^*}{\partial y}\right) = 0 \,,$$

$$u_i^* = 0, \quad v_i^* = 0 \quad \text{на} \quad \sigma \,. \tag{2.22}$$

Запишем ее в операторной форме:

$$A^* \varphi_i^* = g_i \,, \tag{2.23}$$

где сопряженный к A оператор A^* определяется тождеством Лагранжа и имеет вид:

$$A^* = \begin{Vmatrix} -\nabla\mu\nabla & \ell & -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x} \\ -\ell & -\nabla\mu\nabla & -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{Vmatrix}$$

а вектор-функции φ_i^* и g_i, так же, как φ и f, определены выше.

Заметим, что если вклад квазилинейных членов в задаче (2.12) несущественен, то это значит, что не должно измениться значение основного функционала $J_i[\varphi] = (\varphi, g_i)$, соответствующего исходной задаче (2.16) - (2.17), а для этого необходимо, чтобы

$$\delta J_i = -(\varphi_i^*, (A' - A)\varphi) = 0,$$

т.е.

$$(\varphi_i^*, A'\varphi) = (\varphi_i^*, A\varphi)$$

или

$$\delta J_i = -(\varphi_i^*, \delta A\varphi) = 0.$$

Учитывая вид оператора δA и уравнение неразрывности из последнего имеем

$$(\varphi_i^*, \delta A\varphi) = \iint\limits_{\Omega_0} \Big[u_i^* \Big(\frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \Big) + v_i^* \Big(\frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} \Big) \Big] d\Omega_0 = 0. \tag{2.24}$$

Таким образом, для того чтобы проверить, вносят или нет какой-либо вклад квазилинейные члены в задаче (2.19) - (2.20) достаточно один раз решить линейную задачу (2.16) - (2.17), сопряженные задачи (2.21) - (2.22) и проверить выполнение условия (2.24).

3. Теория возмущений и обратная задача для стационарной трехмерной бароклинной модели океана

Рассмотренную в предыдущем параграфе теорию возмущения и обратную задачу для двумерной стационарной задачи океана можно обобщить и на трехмерные бароклинные модели.

Рассмотрим океанический бассейн Ω цилиндрической формы, глубины H, с боковой поверхностью σ и с границей S. Пусть $\bar{\Omega}$ - замыкание Ω, ось z направлена вертикально вниз, y - на север, а x - на восток. Тогда систему уравнений, описывающую установившееся течение в замкнутом бассейне Ω, запишем в следующем виде /4/:

$$
\begin{aligned}
&-\nabla\mu'\nabla u + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \ell v + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\nu'\frac{\partial u}{\partial z},\\
&-\nabla\mu'\nabla v + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \ell u + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\nu'\frac{\partial v}{\partial z},\\
&\frac{\partial P}{\partial z} = g\rho,\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\\
&-\nabla\mu'_T\nabla T + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_T w = \frac{\partial}{\partial z}\nu'_T\frac{\partial T}{\partial z},\\
&-\nabla\mu'_S\nabla S + u\frac{\partial S}{\partial x} + v\frac{\partial S}{\partial y} + w\frac{\partial S}{\partial z} + \gamma_S w = \frac{\partial}{\partial z}\nu'_S\frac{\partial S}{\partial z},\\
&\rho = \alpha_T T + \alpha_S S
\end{aligned}
\qquad (3.1)
$$

при краевых условиях

$$
\left.
\begin{aligned}
&\nu'\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-\tau_x}{\rho_0}, \quad \nu'\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{-\tau_y}{\rho_0}, \quad \nu'_T\frac{\partial T}{\partial z} = f_1,\\
&\nu'_S\frac{\partial S}{\partial z} = f_2, \quad w = 0
\end{aligned}
\right\} \quad \text{при } z = 0, \qquad (3.2)
$$

$$
\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \quad u = v = w = 0 \qquad \text{при } z = H,
$$

$$u=0,\quad v=0,\quad \frac{\partial T}{\partial n}=0,\quad \frac{\partial S}{\partial n}=0 \qquad \text{на } \sigma$$

с неизвестными коэффициентами турбулентного обмена: μ', μ'_T, μ'_S, ν', ν'_T, ν'_S, относительно которых предполагаем, что известны их приближенные значения $\bar{\mu}$, $\bar{\mu}_T$, $\bar{\mu}_S$, $\bar{\nu}'$, $\bar{\nu}'_T$ и $\bar{\nu}_S$, т.е.

$$\mu'=\bar{\mu}+\delta\mu,\quad \mu'_T=\bar{\mu}_T+\delta\mu,\quad \mu'_S=\bar{\mu}_S+\delta\mu_S, \tag{3.3}$$

$$\nu'=\bar{\nu}+\delta\nu,\quad \nu'_T=\bar{\nu}_T+\delta\nu_T,\quad \nu'_S=\bar{\nu}_S+\delta\nu_S.$$

В системе дифференциальных уравнений $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ – заданные на поверхности океана потоки тепла и солей. Далее на основе предварительного изучения проблемы делается вывод о возможности представления $\delta\mu$, $\delta\mu_T$, $\delta\mu_S$, $\delta\nu$, $\delta\nu_T$, $\delta\nu_S$ в виде конечной суммы

$$\delta\mu=\sum_{e=1}^{n} A_e\cdot\varphi_{1_e}(n),\quad \delta\mu_T=\sum_{e=1}^{n} B_e\cdot\varphi_{2_e}(n),\quad \delta\mu_S=\sum_{e=1}^{n} C_e\cdot\varphi_{3_e}(n),$$

$$\delta\nu=\sum_{e=1}^{n} a_e\cdot\varphi_{4_e}(n),\quad \delta\nu_T=\sum_{e=1}^{n} b_e\cdot\varphi_{5_e}(n),\quad \delta\nu_S=\sum_{e=1}^{n} c_e\cdot\varphi_{6_e}(n),$$

где $\{\varphi_{\alpha_e}(n)\}$ $(\alpha=1,2,\ldots,6)$ – некоторые полные ортонормированные системы функций (например, тригонометрические функции, полиномы Лежандра и т.д.)

Рассмотрим теперь невозмущенную задачу, соответствующую задаче (3.I):

$$-\nabla\bar{\mu}\nabla u+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\ell v+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}\bar{\nu}\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{3.5}$$

$$-\nabla\mu\nabla v + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + lu + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\bar{\nu}\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = g\rho,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad \rho = \alpha_T T + \alpha_S S,$$

$$-\nabla\mu_T\nabla T + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_T w = \frac{\partial}{\partial z}\bar{\nu}_T\frac{\partial T}{\partial z},$$

$$-\nabla\mu_S\nabla S + u\frac{\partial S}{\partial x} + v\frac{\partial S}{\partial y} + w\frac{\partial S}{\partial z} + \gamma_S w = \frac{\partial}{\partial z}\bar{\nu}_S\frac{\partial S}{\partial z}$$

с краевыми условиями (3.2). Здесь $\gamma_T = d\bar{T}(z)/dz$, $\gamma_S = d\bar{S}(z)/dz$.

Сформулируем n сопряженных задач, соответствующих избранной модели (3.5):

$$-\nabla\mu\nabla u_i^* - u\frac{\partial u_i^*}{\partial x} - v\frac{\partial u_i^*}{\partial y} - w\frac{\partial u_i^*}{\partial z} + l v_i^* - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_i^*}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\bar{\nu}\frac{\partial u_i^*}{\partial z} + p_i, \tag{3.6}$$

$$-\nabla\mu\nabla v_i^* - u\frac{\partial v_i^*}{\partial x} - v\frac{\partial v_i^*}{\partial y} - w\frac{\partial v_i^*}{\partial z} - l u_i^* - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_i^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\bar{\nu}\frac{\partial v_i^*}{\partial z} + q_i$$

$$-\frac{\partial P_i^*}{\partial z} + g\rho_i^* = 0,$$

$$-\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x} + \frac{\partial v_i^*}{\partial y} + \frac{\partial w_i^*}{\partial z}\right) = 0,$$

$$-\nabla\bar{\mu}_T\nabla T_i^* - u\frac{\partial T_i^*}{\partial x} - v\frac{\partial T_i^*}{\partial y} - w\frac{\partial T_i^*}{\partial z} - \gamma_T w_i^* = \frac{\partial}{\partial z}\bar{\nu}_T\frac{\partial T_i^*}{\partial z} + \xi_i ,$$

$$-\nabla\bar{\mu}_S\nabla S_i^* - u\frac{\partial S_i^*}{\partial x} - v\frac{\partial S_i^*}{\partial y} - w\frac{\partial S_i^*}{\partial z} - \gamma_S w_i^* = \frac{\partial}{\partial z}\bar{\nu}_S\frac{\partial S_i^*}{\partial z} + \zeta_i ,$$

$$\rho_i = \alpha_T T_i^* + \alpha_S S_i^*$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_i^*}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T_i^*}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial S_i^*}{\partial z} = 0, \quad w_i^* = 0$$

при $z = 0$,

$$\frac{\partial T_i^*}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial S_i^*}{\partial z} = 0, \quad u_i^* = v_i^* = w_i^* = 0 \tag{3.7}$$

при $z = H$,

$$u_i^* = v_i^* = 0, \quad \frac{\partial T_i^*}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial S_i^*}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \sigma .$$

Здесь

$$P_i = \begin{cases} \frac{u}{2} \text{ в } \Omega_i \\ 0 \text{ вне } \Omega_i \end{cases}, \qquad q_i = \begin{cases} \frac{v}{2} \text{ в } \Omega_i \\ 0 \text{ вне } \Omega_i \end{cases},$$

$$\xi_i = \begin{cases} \frac{T}{2} \text{ в } \Omega_i \\ 0 \text{ вне } \Omega_i \end{cases}, \qquad \zeta_i = \begin{cases} \frac{S}{2} \text{ в } \Omega_i \\ 0 \text{ вне } \Omega_i \end{cases}.$$

Пусть g_i, φ – вектор – функции с компонентами

$(P_i, q_i, 0, 0, \xi_i, \zeta_i)$ и (u, v, w, P, T, S) соответственно и предположим, что модельные задачи (3.2), (3.5) и (3.6) - (3.7) решены /4-7/. Тогда мы можем определить функционал J_i по формуле

$$J_i = \iiint\limits_{\Omega} g_i \varphi d\Omega = \frac{1}{2} \iiint\limits_{\Omega} (u_i^2 + v_i^2 + T_i^2 + S_i^2) d\Omega$$

и найти вариации функционала δJ_i

$$\delta J_i = J_i' - J_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.9}$$

где J_i' – измерение прибора в каждой элементарной области Ω_i $\left(\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega_i\right)$, а функционал J_i – теоретический, рассчитанный на основе соотношения (3.8).

Далее, рассматривая формулы теории малых возмущений (I.I0), где в данном случае

$$\delta L = \left\| \begin{matrix} -G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -G & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_s \end{matrix} \right\| \tag{3.I0}$$

а $G = \nabla \delta\mu \nabla + \frac{\partial}{\partial z} \delta\nu \frac{\partial}{\partial z}$, $\quad G_T = \nabla \delta\mu_T \nabla + \frac{\partial}{\partial z} \delta\nu_T \frac{\partial}{\partial z}$,

$G_S = \nabla \delta\nu_S \nabla + \frac{\partial}{\partial z} \delta\nu_S \frac{\partial}{\partial z}$, с учетом граничных условий (3.2) и (3.7) получим основную формулу малых возмущений

$$\delta J_1 = \iiint_{\Omega} \Big[\delta\mu\, \nabla \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}_1^* + \delta\mu_T \nabla T \cdot \nabla T_1^* + \delta\mu_S \nabla S \cdot \nabla S_1^* + \delta\nu \Big(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u_1^*}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v_1^*}{\partial z} \Big) + \delta\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial T_1^*}{\partial z} + \delta\nu_S \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial S_1^*}{\partial z} \Big] d\Omega. \tag{3.11}$$

Подставляя ряды (3.4) в (3.11), будем иметь

$$\sum_{e=1}^{m} \Big[A_e \iiint_{\Omega} \varphi_{1_e} \nabla \underline{u} \nabla \underline{u}_1^* d\Omega + B_e \iiint_{\Omega} \varphi_{2_e} \nabla T \cdot \nabla T_1^* d\Omega + C_e \iiint_{\Omega} \varphi_{3_e} \nabla S \cdot \nabla S_1^* d\Omega + a_e \iiint_{\Omega} \varphi_{4_e} \Big(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u_1^*}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v_1^*}{\partial z} \Big) d\Omega + b_e \iiint_{\Omega} \varphi_{5_e} \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial T_1^*}{\partial z} d\Omega + c_e \iiint_{\Omega} \varphi_{6_e} \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial S_1^*}{\partial z} d\Omega \Big] = \delta J_1 , \tag{3.12}$$

$$\underline{u} = (u, v)', \quad u_1^* = (u_1^*, v_1^*)' \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Если $n = 6m$ и система уравнений (3.12) имеет единственное решение, то в результате решения находим коэффициенты $A_e, B_e, C_e, a_e, b_e, c_e$ и на основе представления (3.4) получаем первое приближение для полных величин $\mu', \mu_T', \mu_S', \nu', \nu_T', \nu_S'$, которые можно уточнять на основе использования метода последовательных приближений.

Заметим, что здесь для уточнения коэффициентов $\mu, \mu_T, \mu_S, \nu, \nu_T, \nu_S$ (в отличие от п.2, где рассматривалась аналогичная задача в случае двумерной модели баротропного океана) мы предположим, что приращения коэффициентов $\delta\mu$, $\delta\mu_T, \delta\mu_S, \delta\nu, \delta\nu_T, \delta\nu_S$ являются функциями от аргументов x, y и z. Если же, как и в п.2, будем предполагать, что в области Ω_j величины $\delta\mu(x,y,z)$, $\delta\mu_T(x,y,z)$, $\delta\mu_S(x,y,z)$, $\delta\nu(x,y,z)$, $\delta\nu_T(x,y,z)$, $\delta\nu_S(x,y,z)$ являются константами $\delta\mu, \delta\mu_T, \delta\mu_S, \delta\nu, \delta\nu_T, \delta\nu_S$ соответственно, тогда из (3.II) имеем

$$\sum_{\alpha=1}^{6}\sum_{j=1}^{m}\Big[\delta\mu_{j_\alpha}\iiint_{\Omega_{j_\alpha}}\nabla\underline{u}\cdot\nabla\underline{u}_1^* d\Omega_{j_\alpha}+\delta\mu_{T_{j_\alpha}}\iiint_{\Omega_{j_\alpha}}\nabla T\cdot\nabla T_1^* d\Omega_{j_\alpha}+$$

$$+\delta\mu_{S_{j_\alpha}}\iiint_{\Omega_{j_\alpha}}\nabla S\cdot\nabla S_1^* d\Omega_{j_\alpha}+\delta\nu_{j_\alpha}\iiint_{\Omega_{j_\alpha}}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u_1^*}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v_1^*}{\partial z}\Big)d\Omega_{j_\alpha}$$

$$+\delta\nu_{T_{j_\alpha}}\iiint_{\Omega_{j_\alpha}}\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial T_1^*}{\partial z}d\Omega_{j_\alpha}+$$

$$+\delta\nu_{S_{j_\alpha}}\iiint_{\Omega_{j_\alpha}}\frac{\partial S}{\partial z}\frac{\partial S_1^*}{\partial z}d\Omega_{j_\alpha}\Big]=\delta J_1 ,$$

где $n = 6m$; δJ_1 - функционал, соответствующий некоторой подобласти

$$\Omega_{j_\alpha}; \quad \Omega = \bigcup_{j=1}^{m}\Big(\bigcup_{\alpha=1}^{6}\Omega_{j_\alpha}\Big); \quad \delta\mu_{j_\alpha} \equiv \delta\mu_j, \quad \delta\mu_{T_{j_\alpha}} \equiv \delta\mu_{T_j},$$

$$\delta\mu_{s_{j_\alpha}} \equiv \delta\mu_{s_j}, \quad \delta\nu_{j_\alpha} \equiv \delta\nu_j, \quad \delta\nu_{T_{j_\alpha}} \equiv \delta\nu_{T_j}, \quad \delta\nu_{s_{j_\alpha}} \equiv \delta\nu_{s_j}$$

для всех $1 \leq \alpha \leq 6$ и $1 \leq j \leq m$, а m - количество подобластей, в которых значения $\delta\mu_j$, $\delta\mu_{T_j}$, $\delta\mu_{s_j}$, $\delta\nu_j$, $\delta\nu_{T_j}$, $\delta\nu_{s_j}$ - постоянные.

Таким образом, и в этом случае получаем систему алгебраических уравнений, в результате решения которой находим приращения коэффициентов для их уточнения (см.п.2).

Изложенный в п.2 и п.3 метод успешно может быть применен и в нестационарных постановках задачи динамики океана.

Литература

1. Г.И. Марчук. Методы расчета ядерных реакторов.М.,Атомиздат, 1961, с.667.
2. Г.И.Марчук. ДАН СССР, т.156, № 3, 1964, 503-506 с.
3. Г.И.Марчук. Доклад на пятой конференции ИФИП по методам оптимизации, Рим, 7-11 мая 1973, с. 33.
4. Г.И.Марчук. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.,Гидрометеоиздат, 1974, с.303.
5. Г.И.Марчук. Математическое моделирование в проблеме окру-

жающей среды. М., Наука, 1982, с.319.
6. Г.И.Марчук, В.П.Кочергин, А.С.Саркисян и др. Математические модели циркуляции в океане. М., Наука, 1980, с.287.
7. Г.И.Марчук. Методы вычислительной математики. М., Наука, 1980, с.534.
8. О.А.Ладыженская. Математические вопросы в динамике несжимаемой жидкости. М., Наука, 1970, с.288.
9. А.А.Корзадзе. ДАН СССР, 1979, т.244, № 1, 52-56 с.
10. А.А.Кордзадзе. Математические вопросы решения задач динамики океана. М., 1982, с.152.

გ. მარჩუკი, ა. კორძაძე

შეშფოთების თეორია და ოკეანის დინამიკის შებრუნებულ ამოცანათა დასმა

ნაშრომი ეძღვნება შეშფოთებათა თეორიის მეთოდების გადმოცემას და შებრუნებული ამოცანების დასმას, რომლებიც გამოყენებადია ოკეანის დინამიკის პრობლემებისათვის. ამ თეორიაზე დაყრდნობით ოკეანის ცირკულაციის ბაროტროპული და ბაროკლინური ამოცანებისათვის შესწავლილია დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემებში შემავალი კოეფიციენტების მნიშვნელობათა დაზუსტების საკითხი.

G.Marchuk, A.Kordzadze

THE PERTURBATION THEORY AND FORMULATION OF INVERSE PROBLEMS FOR THE OCEAN DYNAMICS

Summary

The paper deals with methods of the perturbation theory and formulation of inverse problems for the ocean dynamics. Using this theory for barotropic and baroclinic problems of oceanic circulations, the question on a more precise definition of the coefficients included in differential equation systems has been studied.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

259, 1985

УДК 517.54

ОБЩАЯ ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Л.Г. Михайлов

§ I. Введение

Пусть Γ состоит из простых замкнутых контуров Ляпунова $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, причем Γ_0 содержит внутри себя все остальные. Области, ограничиваемые каждым из контуров, обозначим соответственно через $D_0^+, D_1^-, \ldots, D_m^-$ и, кроме того,

$$D^+ = \left\{ z : z \in \left(D_0^+ \setminus \bigcup_{k=1}^{m} D_k^- \right) \right\}, \quad 0 \in D^+$$

$$D^- = \left\{ z : z \in \left[E \setminus (D^+ \cup \Gamma) \right] \right\},$$

где E – полная комплексная плоскость.

Постановка задачи А. Требуется найти функции $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$, аналитические соответственно в D^+ и D^-, представимые интегралом типа Коши, допускающие всюду на Γ угловые граничные значения $\varphi^+(t), \varphi^-(t)$ и удовлетворяющие условию сопряжения

$$\varphi^+(t) = a(t)\cdot\varphi^-(t) + b(t)\cdot\overline{\varphi^-(t)} + c(t), \quad \varphi^-(\infty) = 0, \qquad \text{(A)}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ – заданные функции.

Подстановка в (A) $\varphi(z)=u+iv$ приводит к эквивалентным соотношениям

$$u^+=a_1u^-+b_1v^-+c_1, \quad v^+=a_2u^-+b_2v^-+c_2. \qquad (I)$$

Для двух сопряженно гармонических функций в форме (I) записываются общие линейные условия сопряжения, разрешенные относительно u^+, v^+. Если не требовать разрешенности, то в левых частях будут фигурировать $\mu_k u^+ + \nu_k v^+$, $k=1,2$, что для (A) соответствует $\mu\cdot\varphi^+ + \nu\cdot\overline{\varphi^+}$. Ясно, что вообще говоря эти случаи сводятся к предшествующим алгебраическим разрешениям, но здесь могут представиться и другие возможности (см. /I3/, /I6/).

Отмеченное соображение указывает на центральное положение задачи (A) среди большого круга задач сопряжения аналитических функций (а.ф.) и различного рода их обобщений. К этому следует причислить изученные недавно /I6/ задачи сопряжения для уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа на плоскости.

Однородная задача (A) допускает комбинации решений только с вещественными коэффициентами и соответственно этому линейную зависимость или независимость надо понимать над полем вещественных чисел.

Наряду с (A) будет рассматриваться также сопряженная задача

$$\psi^-(t)=a(t)\cdot\psi^+(t)+\overline{b(t)\cdot(t')^2}\,\overline{\psi^+(t)} \qquad (A^*)$$

которая может быть представлена также в форме

$$\Psi^*(t) = a^*(t)\cdot\Psi(t) + b^*(t)\cdot\overline{\Psi(t)},$$

$$a^* = \frac{\bar a}{|a|^2 - |b|^2}, \qquad b^* = \frac{(t')^2\cdot b(t)}{|a|^2 - |b|^2}. \qquad (A^*)$$

Здесь $t' = \frac{dt}{ds}$, где s – длина дуги контура Γ, а $t = t(s)$ – его уравнение.

Количества решений, линейно независимых над полем вещественных чисел, будем обозначать для (A) через ℓ, а для (A^*) – через ℓ^* либо ℓ' либо p, а для соответствующих интегральных уравнений через k и k' соответственно.

При $b(t) \equiv 0$ из (A) получаем простейшую линейную задачу сопряжения, рассматривающуюся еще Гильбертом, Карлеманом и др., впервые решенную Ф.Д.Гаховым в 1936–1937 гг. и названную им задачей Римана, см. /I/, /2/.

Фундаментальная роль, которую она сыграла в дальнейшем, объясняется простотой таблицы, характеризующей разрешимость задачи

$$\ell = max(0, 2\varkappa), \quad p = max(0, -2\varkappa), \qquad (2)$$

$$\varkappa = Ind_\Gamma\, a(t) = \frac{1}{2\pi}\{Arg\, a(t)\}_\Gamma .$$

И еще тем, что решения как однородной, так и неоднородной задач выражаются в явном виде через интегралы типа Коши.

С другой стороны, к задаче Римана достаточно просто сводится решение характеристического сингулярного интегрального уравнения (с.и.у), которое служит базой построения общей теории с.и.у, а также решение в круге второй основной краевой задачи теории а.ф. – задачи Гильберта в терминологии Ф.Д.

Гахова /I/.

Задача (A) ставилась А.И.Маркушевичем в 1946 г. и рассмотрена им в совершенно нетипичном частном случае, когда $a(t)\equiv 0,\ b(t)\equiv 1,\ c(t)\equiv 0$ (см. /3/).

Первое изучение общих вопросов разрешимости задачи (A), причем сразу для пар функций, проведено Н.П Векуа в 1952 г. /4/. Им найдено условие нормальности задачи $a(t)\neq 0$ и введена сопряженная задача (A^*). Сведя (A) к системе с.и.у. первого рода, он установил альтернативные утверждения типа теорем Нетера.

Поскольку центральной темой, рассматриваемой нами, является именно задача (A), то будет весьма кстати посвятить эту работу академику АН Грузинской ССР Николаю Петровичу Векуа, его 70-летию.

В те же пятидесятые годы создавалась теория обобщенных аналитических функций (о.а.ф.) и было завершено исследование простейшей задачи сопряжения (типа задачи Римана) в классе о.а.ф. /I2/. Вместе с построением общей теории И.Н.Векуа /5/ нашел интересные приложения к задачам бесконечно малых изгибаний поверхностей. Обнаружилось, в частности, что изгибания некоторых поверхностей, склеенных из двух выпуклых кусков, приводят к условию сопряжения типа (A). В связи с этим Б.В.Боярский вслед за Н.П.Векуа провел более конкретное исследование задачи (A). Существенно новым явилось введение условия $|a(t)|>|b(t)|$ и установление для (A) тех же точных результатов (2). Метод состоял во введении такой о.а.ф. $w^-(z)$, что $w^-(t)=a(t)\varphi^-(t)+b(t)\cdot\overline{\varphi^-(t)}$, так что условие сопряжения (A) запишется как условие непрерывного продолжения и дело сводится к применению теорем типа Лиувилля, а также формул о скачке обобщенного интеграла типа Коши. Указанный метод не является естественным для задачи (А) в классе а.ф. и потому не удивительно, что пришлось, в частности, наложить условие Гельдера с показателем $1-\varepsilon$, где ε достаточно мало.

В 1960-1964 гг. изучение задачи (А) было существенно продвинуто Л.Г.Михайловым /9/ - /15/. Развернутое изложение результатов дано в монографии 1963 г. /13/, которая в переводе на английский язык была издана в 1970 г. в Голландии и Германии /14/.

В задаче (А) различались три случая:

I) $|a(t)|>|b(t)|$, 2) $|a(t)|\equiv|b(t)|$, 3) $|a(t)|\leq|b(t)|$,

названных соответственно эллиптическим, параболическим и гиперболическим.

Для эллиптического случая разработан новый, непосредственный и конструктивный, способ решения, состоящий в максимальном упрощении краевого условия с последующим приведением его к эквивалентному с.и.у., для которого выполняется условие сжатости оператора (как следствие эллиптичности). По сравнению со способом Б.В.Боярского этот метод отличается несравненно большей естественностью и простотой. Следствием этого является значительное уменьшение ограничений на коэффициенты и области и доведение их до уровня, обычного в теории краевых задач.

О больших возможностях метода свидетельствует последующее его развитие различными авторами, причем оказалось, что метод имеет более широкую область применений, нежели только эллиптический случай.

Сказанное относится также ко второму способу, разработанному нами и названному качественным. Непосредственно сразу представляя пару искомых функций интегралом типа Коши, от (А) приведем к эквивалентному с.и.у., содержащему комплексно сопряженные значения искомой функции и сингулярного интеграла. Такой новый тип с.и.у. был впервые изучен нами приведением к эквивалентной системе двух обычных с.и.у. Изложение этого способа можно найти в последнем (1970 г.) издании книги Н.П.Векуа /8/, а в несколько более общей ситуации уравнений со сдвигом – в монографии Г.С.Литвинчука /21/; оно будет кратко описано ниже, в § 4.

Другой независимой составной частью описываемого второго способа является чисто качественный результат об отсутствии решений однородной задачи (А) при $|a(t)|>|b(t)|$ и $\varkappa\leq 0$.

Совершенно новым явилось исследование параболического случая (см. § 4).

Поскольку далеко не во всех публикациях, появившихся в нашей стране за последние 20 лет, обнаруживается хорошая информированность об этих наших исследованиях, то необходимо изложить основные результаты, наши идеи и методы, касающиеся задачи (А), а затем их дальнейшее развитие. Постараемся также указать на некоторые неизученные вопросы.

§ 2. Непосредственное решение задачи (А)

Пусть $a(t)\in C(\Gamma)$, $b(t)$ ограничена и измерима, $c(t)\in L^p(\Gamma)$, $p>1$, $\varphi(z)$ представима интегралом Коши, причем $\varphi^{\pm}(t)\in L^p$, $p>1$.

Если, как сказано, $0 \in D^+$, $z_k \in D_k^-$, $k=1,\dots,m$, то пусть $\varkappa_k = \operatorname{Ind}_{\Gamma_k} a(t)$, $\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1 + \dots + \varkappa_m$, $\Pi(z) = \prod_{k=1}^{m} (z - z_k)^{\varkappa_k}$, $P(z) \equiv P_{\varkappa-1}(z)$ – полином степени $\varkappa - 1$ с произвольными коэффициентами, а если $\varkappa \le 0$, то $P_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$.

Заменим одну из искомых функций по формуле

$$\varphi^+(z) = z^{\varkappa} \Pi^{-1}(z) \cdot \psi^+(z) + P(z). \tag{3}$$

Тогда из (A) получаем

$$\psi^+(t) = t^{-\varkappa} \Pi(t) \cdot a(t) \cdot \varphi^-(t) + \tag{4}$$
$$+ t^{-\varkappa} \Pi(t) \cdot b(t) \overline{\varphi^-(t)} + t^{-\varkappa} \Pi(t) \left[c(t) - P(t) \right].$$

Поскольку $\operatorname{Ind}_{\Gamma_k} t^{-\varkappa} \Pi(t) \cdot a(t) = 0$, $k = 0, 1, \dots, m$, то существует каноническая функция $X(z)$ такая, что

$$X^+(t) = t^{-\varkappa} \Pi(t) \cdot a(t) \cdot X^-(t), \quad X^{\pm}(t) \ne 0, \quad X^-(\infty) = 1.$$

Заменяя теперь

$$\varphi^{\pm}(z) = X^{\pm}(z) \cdot \omega^{\pm}(z),$$

из (4) получим

$$\omega^+(t) - \omega^-(t) = \frac{b(t)}{a(t)} \cdot \frac{\overline{X^-(t)}}{X^-(t)} \cdot \overline{\omega^-(t)} + \tag{5}$$
$$+ \frac{t^{-\varkappa} \Pi(t)}{X^+(t)} \cdot \left[c(t) - P(t) \right].$$

Представляя $\omega^{\pm}(z)$ интегралом Коши

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)\, d\tau}{\tau - z}, \quad 2\omega^{\pm} = \pm \mu + S_{\mu},$$
$$S_{\mu} \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)\, d\tau}{\tau - t}, \tag{6}$$

заменяем (4) эквивалентным с.и.у.

$$\mu = \frac{b(t)}{a(t)} \cdot \frac{\overline{X^-(t)}}{X^-(t)} \cdot \frac{1}{2}\left(-\bar{\mu} + \bar{S}\mu\right) + \\ + \frac{t^{-\varkappa}\Pi(t)}{X^+(t)} \cdot [c(t) - P(t)]. \tag{7}$$

Задача (А) полностью эквивалентна семейству с.и.у.(7).Если выполнено условие

$$\sup_{t \in \Gamma} \left|\frac{b(t)}{a(t)}\right| \cdot \frac{1+\sigma_p}{2} < 1, \quad \sigma_p = \|S\|_{L^p}, \tag{8}$$

то согласно принципу сжатых отображений для каждого конкретного свободного члена из (7) существует единственное решение, причем оно может быть найдено методом последовательных приближений.

Пусть $\varkappa \geq 0$. Полагая $c(t) \equiv 0$ и заменяя $P(t)$ на $1, i, t, it, \ldots, t^{\varkappa-1}, it^{\varkappa-1}$, получим $2\varkappa$ линейно независимых решений. Полагая же $P(t) \equiv 0$, но $c(t) \neq 0$, построим частное решение неоднородной задачи.

Пусть $\varkappa < 0$. В соответствии с (3) найденное частное решение будет иметь полюс, для устранения которого надо потребовать

$$\int_\Gamma t^{-\varkappa} R_k[c(t)] \cdot dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, |\varkappa| - 1, \tag{9}$$

где R_k — некоторые вполне определенные операторы.

<u>Теорема I</u>. Пусть $a(t)$ непрерывна и $a(t) \neq 0$, $b(t)$ ограничена, измерима и $c(t) \in L^p(\Gamma)$, $p > 1$. Рассматриваются решения, представимые интегралом Коши, причем $\varphi^{\pm}(t) \in L^p(\Gamma)$, $p > 1$.

Если выполнено условие (8) и $\varkappa = \operatorname{Ind}_\Gamma a(t)$, то при $\varkappa \geq 0$ однородная задача (А) имеет $2\varkappa$ линейно независимых решений, а неоднородная безусловно разрешима. Если же $\varkappa<0$, то однородная не имеет ненулевых решений, а для разрешимости неоднородной необходимо и достаточно выполнения $|\varkappa|$ комплексных условий (9).

Замечание. Если Γ – окружность, то $\theta_2=1$ и тогда условие (8) сводится к условию эллиптичности /при $p=2$/.

§ 3. Качественное исследование задачи (A)

3.I. Качественное исследование однородной задачи.

В условиях теоремы I пусть будет $p=2$, но контур остается произвольным многосвязным. Допустив, что задача имеет ненулевое решение, можем записать

$$\varphi^+(t)=a(t)\cdot\theta(t)\cdot\varphi^-(t),\ \theta(t)=1+\frac{b(t)}{a(t)}\cdot\frac{\overline{\varphi^-(t)}}{\varphi^-(t)}. \qquad (10)$$

Поскольку равенство $\varphi^-(t)=0$ возможно лишь на множестве меры нуль и $\left|\frac{\overline{\varphi^-(t)}}{\varphi^-(t)}\right|\equiv 1$, то при $|a(t)|>|b(t)|$ значения $\theta(t)$ заключены в секторе с углом раствора $<\pi$. В соответствии с современными результатами по задаче Римана с ограниченным измеримым коэффициентом /I/,/2/ задача (10) имеет только нулевое решение.

Теорема 2. Пусть $a(t)$ непрерывна и $a(t)\neq 0$, $b(t)$ ограничена, измерима и

$$\sup_{t\in\Gamma}\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right|<1.$$

Рассматриваются решения, представимые интегралом Коши, причем $\varphi^\pm(t)\in L^2(\Gamma)$. Если $\varkappa\leq 0$, то однородная задача (A) не имеет решений, отличных от нулевого.

3.2. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений

Речь идет об уравнениях вида

$$\alpha_1 \cdot \mu + \beta_1 \cdot S\mu + \alpha_2 \cdot \bar{\mu} + \beta_2 \cdot \overline{S\mu} + \mathcal{K}_1 \mu + \overline{\mathcal{K}_2 \mu} = f, \qquad \text{(II)}$$

$\mathcal{K}_i$ – несингулярные операторы, которые не были изучены до наших работ 1961-1963 гг., см. /13/. Оказалось, что (II) достаточно просто редуцируется к обычной системе двух с.и.у. Для этого следует добавить к (II) комплексно сопряженное уравнение, положить $\rho_1 = \mu$, $\rho_2 = \bar{\mu}$ и учесть, что $\overline{S\mu} = -S(\bar{\mu}) + R(\bar{\mu})$, где оператор

$$R(\bar{\mu}) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{d\tau}{\tau - t} - \overline{\left(\frac{d\tau}{\tau - t} \right)} \right] \cdot \bar{\mu}(\tau)$$

не сингулярен, если Γ – кривая Ляпунова. Специфика системы состоит в том, что вместе с ρ_1, ρ_2 ее решением будет также $\bar{\rho}_2$, $\bar{\rho}_1$, а тем самым также и $\frac{1}{2}(\rho_1 + \bar{\rho}_2) = \mu$, $\frac{1}{2}(\rho_2 + \bar{\rho}_1) = \bar{\mu}$. Поэтому уравнение (II) и указанная система эквивалентны.

Поскольку в издании 1970 г. своей книги /8/ Н.П.Векуа подробно излагает эти построения, то отсылая к /8/ и /13/, мы не будем далее касаться этого вопроса.

3.3. Связи задач (А) и (А*) с интегральными уравнениями

Непосредственное представление $\varphi^{\pm}(z)$ интегралом Коши приводит (А) к эквивалентному с.и.у.

$$(1+a) \cdot \mu + b \cdot \bar{\mu} + (1-a) \cdot S\mu - b \cdot \overline{S\mu} = c, \qquad \text{(12)}$$

а сопряженная задача посредством представления

$$\Psi^{\pm}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{[1-a(\tau)]\cdot\nu(\tau)-(\tau')^{2}\cdot b(\tau)\cdot\overline{\nu(\tau)}}{t-z}\cdot d\tau$$

преобразуется к эквивалентному (A^{*}) с.и.у.

$$(1+a)\cdot\nu(t)+(t')^{2}\cdot b(t)\cdot\overline{\nu(t)}-S[(1-a)\cdot\nu-\overline{(\tau')^{2}\cdot b(\tau)\cdot\nu}], \qquad (13)$$

причем (14) и (15) в свою очередь эквивалентны обычным союзным системам с.и.у.

Если k и k' – количества решений (12) и (13), а ℓ и ℓ' – соответственно (A) и (A^{*}), то $k=\ell$ и $k'=\ell'$; из теорем Нетера имеем $k-k'=\ell-\ell'=2\varkappa$, $\varkappa=\operatorname{Ind}_{\Gamma}a(t)$.

Пусть $\varkappa\leq 0$. Применяя теорему 2 к (A), получим $\ell=0$, так что $\ell'=2\cdot|\varkappa|$. Если же $\varkappa>0$, то применяя теорему 2 к (A^{*}), для которой $\varkappa^{*}=\operatorname{Ind}_{\Gamma}a^{*}(t)=-\operatorname{Ind}_{\Gamma}a(t)=-\varkappa<0$, получаем $\ell'=0$, так что $\ell=2\varkappa$.

<u>Теорема 3.</u> Пусть $a(t)$, $b(t)$ непрерывны, $a(t)\neq 0$ и $|a(t)|>|b(t)|$, $\varkappa=\operatorname{Ind}_{\Gamma}a(t)$, $\Psi^{\pm}(t)$ и $c(t)\in L^{2}(\Gamma)$.

Если $\varkappa\geq 0$, то однородная задача имеет $2\varkappa$ линейно независимых решений, а неоднородная безусловно разрешима.

Если $\varkappa<0$, то однородная имеет только нулевое решение, а для разрешимости неоднородной необходимы и достаточны условия

$$\operatorname{Re}\int\limits_{\Gamma}c(t)\cdot\Psi_{j}^{+}(t)\cdot dt=0,\quad j=1,\ldots,2\cdot|\varkappa|, \qquad (14)$$

где $\Psi_{j}^{+}(z)$ – решения сопряженной задачи.

§ 4. Параболический случай $|a(t)| \equiv |b(t)| > 0$.

4.1. Вспомогательная задача.

$$\varphi^+(t) = C(t)\cdot\overline{\varphi^+(t)} + g(t). \qquad (B)$$

После комплексного сопряжения и подстановки придем к необходимости выполнения условий

$$|C(t)| \equiv 1, \quad g(t) + C(t)\cdot\overline{g(t)} \equiv 0 \quad \left(\text{или } C(t) = \frac{-g(t)}{\overline{g(t)}}\right). \qquad (15)$$

Несколько необычным здесь является второе условие, связывающее коэффициент и свободный член. Пусть наложены условия гладкости $C(t)$, $g(t) \in \mathcal{H}(\Gamma)$.

Если $g(t) \neq 0$, то $\operatorname{Ind}_\Gamma C(t) = -2\operatorname{Ind}_\Gamma g(t)$ непременно четен и после умножения (B) на $\overline{g(t)}$ придем к задаче Гильберта

$$2\operatorname{Re}\left[\overline{g(t)}\cdot\varphi^+(t)\right] = |g(t)|^2, \qquad (16)$$

хорошо изученной как в случае односвязной, так и многосвязной областей /1/, /2/.

Если $g(t)$ имеет нули, то непосредственная редукция к задаче Гильберта (16) некорректна. Но мы утверждаем, что если область односвязна и выполнены условия гладкости $C(t)$, $g(t) \in \mathcal{H}(\Gamma)$, то для задачи (B) в полном объеме применим известный метод Н.И.Мусхелишвили решения задачи Гильберта введением функции $\varphi_*(z) = \overline{\varphi(1/\bar{z})}$, причем мы здесь имеем в виду как случай непрерывного, так и разрывного коэффициента, см. в /2/ сноски на стр.147 и 304, ибо:

во-первых, конформное отображение, оставляющее инвариантным вид условия (B), сводит дело к рассмотрению в единичном круге $|z|\leq 1$;

во-вторых, в самом деле случай обращения $g(t)$ в нуль может привнести осложнения, как, например, может сделать индекс $G(t)$ нечетным. Допуская, что $g(t)=(t-t_0)^n\cdot g_0(t)$, $g_0(t)\in \mathcal{H}(\Gamma)$ и $g_0(t)\neq 0$, будем иметь

$$-G(t)=\frac{g(t)}{\overline{g(t)}}=\frac{(t-t_0)^n}{\overline{(t-t_0)^n}}\cdot\frac{g_0(t)}{\overline{g_0(t)}}=e^{2in\theta(t)}\cdot\frac{g_0(t)}{\overline{g_0(t)}},\quad \theta(t)=\arg(t-t_0).$$

Все дело в том, что функция $\theta(t)$ разрывна в точке $t=t_0$, $t_0\in\Gamma$, со скачком $\theta(t_0+0)-\theta(t_0-0)=\pi$ вклад в индекс, привносимый особой точкой $t=t_0$, равен числу n, которое может быть нечетным.

Мы здесь отметили лишь основные факты и соображения относительно задачи (B), не отрицая необходимости более детального ее исследования, особенно это относится к случаям многосвязной области или разрывных коэффициентов.

4.2. Возвратимся к рассмотрению задачи (A) при $|a(t)|\equiv|b(t)|$. Если в равенствах

$$\varphi^+=a\cdot\varphi^-+b\cdot\overline{\varphi^-}+c,\qquad \overline{\varphi^+}=\bar{b}\cdot\varphi^-+\bar{a}\cdot\overline{\varphi^-}+\bar{c}$$

совершить умножения на $\bar{b}$ и a соответственно и затем вычитание, то будем иметь

$$\varphi^+=-\frac{a}{\bar{b}}\cdot\overline{\varphi^+}+\left(c-a\cdot\frac{\bar{c}}{\bar{b}}\right). \tag{17}$$

Получили задачу (B) для нахождения φ^+, после этого сама задача (A), переписанная в виде

$$\overline{\varphi^-}=-\frac{a}{b}\cdot\varphi^-+\left(\frac{\varphi^+-c}{b}\right), \tag{18}$$

может быть рассмотрена как внешняя задача (В). Выполнение первого из двух необходимых условий совместности (I5) очевидно, выполнение второго для (I7) проверяется непосредственно, а для (I8) оно приводит к (I7), иначе говоря, если φ^+ является решением (I7), то для (I8) оба условия (I5) будут выполнены.

Можно говорить, что задача (А) свелась к двум связанным задачам (В) или даже к двум задачам Гильберта, но из этого еще не произойдет полной ясности. Особенно это относится к случаям многосвязной области и разрывных коэффициентов. Ограничиваясь случаем односвязной области и гладких коэффициентов, приведем все же теорему из /I3/:

<u>Теорема 4</u>. Пусть в задаче (А) $|a(t)| \equiv |b(t)| > 0$, $a(t),\ b(t),\ c(t) \in \mathcal{H}(\Gamma)$, область односвязна и рассматриваются решения, ограниченные на бесконечности. Обозначим $\varkappa = \operatorname{Ind}_\Gamma a(t) + \operatorname{Ind}_\Gamma b(t)$, $\mu = \operatorname{Ind}_\Gamma a(t) - \operatorname{Ind}_\Gamma b(t)$, ℓ – число решений однородной задачи, а p – число условий разрешимости неоднородной.

Тогда:

1. если $\varkappa \geq 0$, $\mu \geq 0$, то $\ell = 2\varkappa + 2$, $p = 0$;
2. если $\varkappa < 0$, $\mu \geq 0$, то $\ell = \mu + 1$, $p = |\varkappa| - 1$;
3. если $\varkappa < 0$, $\mu < 0$, то $\ell = 0$, $p = 2|\varkappa| - 2$;
4. если $\varkappa \geq 0$, $\mu < 0$, то ℓ и p определяются из алгебраической линейной системы $|\mu| - 1$ уравнений с $\varkappa + 1$ неизвестными.

§ 5. Дальнейшие разработки

Оба описанных выше метода исследования задачи (A) в эллиптическом случае сразу же /I3/ были распространены на незамкнутые контуры или разрывные коэффициенты. В той же монографии 1963 г. /I3/ и в других вскоре последовавших публикациях как Л.Г.Михайлова и его ближайших сотрудников, так и других авторов были развернуты и другие обобщения и разработки: нелинейные задачи и задачи с производными, задача (A) в классе о.а.ф., задачи со сдвигом, особые случаи, приближенные методы и, наконец, задачи сопряжения для уравнений в частных производных второго порядка.

Важное продвижение в изучении задачи (A) принадлежит И.Х.Сабитову /I7/ - /I9/, начинавшему эти исследования в нашем научном коллективе. Пусть Γ - окружность $|t|=1$ и $b(t)$ разлагается в ряд Фурье $b(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} b_k\cdot t^k$. Тогда найдется такой номер N, что будет:

$$\left| b(t)-\sum_{-N}^{N} b_k\cdot t^k \right| < |a(t)|\,. \qquad (I9)$$

Если окажется $b_{-N}=0,\ldots$, но пусть $b_{-n}\neq 0$, то обозначая $s_n(t)=\sum_{-n}^{N} b_k t^k$, можем переписать (A) в виде

$$\varphi^+(t)-s_n(t)\cdot\overline{\varphi^-(t)}=a(t)\cdot\varphi^-(t)+[b(t)-s_n(t)]\cdot\overline{\varphi^-(t)}+c(t).$$

Для окружности левую часть можем переобозначить через новую а.ф. с полюсом в точке $z=0$, так что придем к задаче, для которой в силу (I9) выполнено условие эллиптичности.

<u>Теорема 5 (см. /I8/)</u>. Пусть Γ - окружность $|t|=1$ и $(-n)$ - номер старшей отрицательной степени, при которой $b_{-n}\neq 0$ и выполнено условие (I9). Тогда:

если $|\varkappa|>n-1$, то $\ell=\max(0,2\varkappa)$, $p=\max(0,-2\varkappa)$; если $0<\varkappa<n-1$, то $2\varkappa<\ell<n+\varkappa$ - если последнее число четное, если оно нечетно, то заменяется на $n+\varkappa-1$; если $-n+1<\varkappa<0$, то $0<\ell<n+\varkappa$, либо, как и выше, $0<\ell<n+\varkappa-1$. Во всех случаях $\ell-p=2\varkappa$.

Конечно, очень важно было бы получить подобные результаты для других контуров. Здесь можно заметить, что задача (A) для произвольного контура сводится к задаче на окружности, но это будет задача со сдвигом.

$$\varphi^+[\alpha(t)]=a(t)\cdot\varphi^-(t)+b(t)\cdot\overline{\varphi^-(t)}+c(t). \qquad (A_\alpha)$$

Действительно, производя конформные отображения $\mathcal{D}^+$ на круг, а $\mathcal{D}^-$ - на внешность круга, мы получим два различных отображения на окружность, а композиция одного из них с обратным к другому составит сдвиг $\alpha(t)$, отображающий окружность на себя. Без особых затруднений на (A_α) нами была перенесена теорема 2 из § 2, чего не скажешь о первом методе.

Краевым задачам и о.и.у. со сдвигом посвящена монография Г.С.Литвинчука /21/, где в едином плане с указанными рассматриваются краевые задачи с комплексным сопряжением. Специальный § 17 посвящен задаче (A), названной там обобщенной задачей Римана. Рассматривая задачу на окружности, автор приводит ее к матричной задаче Римана

$$\Phi^+(t)=G(t)\cdot\Phi^-(t)+g(t), \quad \Phi^\pm(z)=\left\{\varphi^\pm(z),\ 1/z\cdot\overline{\varphi^\mp(1/\bar z)}\right\},$$

$$G(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{|a|^2-|b|^2}{\overline{a(t)}}, & \dfrac{t\cdot b(t)}{\overline{a(t)}}\\[2mm] \dfrac{-\bar t\cdot\overline{b(t)}}{\overline{a(t)}}, & \dfrac{1}{\overline{a(t)}}\end{pmatrix}.$$

Такая редукция указывалась еще П.Я.Кочиной и осуществлялась в работе Л.И.Чибраковой и Л.Г.Салехова /20/.

Г.С.Литвинчуку /21/ принадлежит уточнение п.4 теоремы 4: пусть $\kappa = 1 + \operatorname{Ind}_{\Gamma} b(t)$, если $\kappa \geq -\mathfrak{x}$, то $\ell = \max(0, 2\mathfrak{x})$, $p = \max(0, -2\mathfrak{x})$, а если $\kappa < -\mathfrak{x}$, то $\ell = \mathfrak{x} - \kappa$, $p = -\mathfrak{x} - \kappa$. Не ставя себе цели дать сколько-нибудь полного обзора всех исследований различных авторов, мы приводили и приведем только краткие характеристики некоторых.

А.М.Николайчук /22/ доказал, что если существует такая а.ф. в круге $F(z)$, что на окружности $|a(t)| > |b(t) - F(t)|$, то дело сводится к эллиптическому случаю.

Ряд интересных результатов получен Г.С.Литвинчуком и И.М.Спитковским с помощью аппроксимации $b(t)$ рациональными функциями $r_1(t)$, $r_2(t)$:

$$|t \cdot b(t) - r_1(t)| < |a(t)| < |t \cdot b(t) - r_2(t)|.$$

В связи с этим введены понятия обобщенно эллиптического, параболического или гиперболического типов, см./23/.

5.2. Квазилинейные краевые задачи типа (А) и задачи с производными

Если $\mathcal{K}_i \varphi^-$, $i = 1,2$, - вполне непрерывные операторы на Γ, то первый из описанных выше методов будет полностью приложим к задаче

$$\varphi^+(t) = a(t) \cdot \varphi^-(t) + b(t) \cdot \overline{\varphi^-(t)} + \lambda \cdot [\mathcal{K}_1 \varphi^- + \overline{\mathcal{K}_2 \varphi^-}] + c(t). \qquad (21)$$

Вместо (7) получим уравнение

$$\mu - \frac{b(t)}{a(t)} \cdot \frac{1}{2}(-\overline{\mu} + \overline{S\mu}) = \frac{t^{-\varkappa} \cdot \Pi(t)}{X^{+}(t)} \cdot \left\{ \lambda \cdot \mathcal{K}_1 \left[\tfrac{1}{2} X^{-} \cdot (-\mu + S\mu) \right] + \right.$$

$$\left. + \lambda \cdot \mathcal{K}_2 \overline{\left[\tfrac{1}{2} X^{-} \cdot (-\mu + S\mu) \right]} + [c(t) - P(t)] \right.$$

с вполне непрерывными операторами в правой части. При условии эллиптичности в левой части имеем обратимый оператор, так что (2I) сведется к уравнению Фредгольма

$$\mu = \lambda\,(T_1\mu + \overline{T_2\mu}) + g(t) + \sum_{k=1}^{2\varkappa} \alpha_k \cdot g_k(t). \qquad (22)$$

<u>Теорема 6</u>. Пусть $|a(t)| > |b(t)|$, $a(t)$ непрерывна, $b(t)$ ограничена, измерима, $c(t)$ и $\varphi^{\pm}(t) \in L^2(\Gamma)$ и λ_i, $i = 1, 2, \dots$, – характеристические числа уравнения (2I). Тогда при всех $\lambda \neq \lambda_i$ для (2I) справедливы все утверждения теоремы 3.

Пусть область односвязна и $|a(t)| \equiv |b(t)| > 0$. Тогда при $\lambda \neq \lambda_i$ справедливы все утверждения теоремы 4.

Задача (А) в классе о.а.ф. благодаря представлениям первого и второго рода и благодаря обращению первого может быть приведена к задаче типа (2I); внимательный анализ позволяет, однако, перенести почти все утверждения из класса а.ф., включая теоремы I,2,3,4, см./I3/.

Что касается уравнения второго порядка

$$\Delta u + a(x,y) \cdot u_x + b(x,y) \cdot u_y + c(x,y) \cdot u = a(x,y), \qquad (23)$$

то при $c(x,y) \equiv 0$ класс его решений адекватен некоторому классу о.а.ф. Более существенного изучения требует общий случай, когда $c(x,y)\neq 0$, что было осуществлено совсем недавно в /16/.

Задача о производными

$$\varphi^+(t)=a(t)\cdot\frac{d\varphi^-}{dt}+b(t)\,\overline{\frac{d\varphi^-}{dt}}+ \\ +\lambda\cdot\left[p(t)\cdot\varphi^-(t)+q(t)\cdot\overline{\varphi^-(t)}\right]+c(t) \qquad (24)$$

благодаря хорошо известным интегральным представлениям /1/, /2/ также сводится к (21), так что для нее будут справедливы утверждения теоремы 6.

Мы не случайно назвали первый способ исследования задачи (A) в эллиптическом случае непосредственным решением задачи, ибо дело сводится к решению с.и.у (7) по методу последовательных приближений. В этом направлении исследования продолжены Н.Н.Юханоновым /24/.

Условие нормальности $a(t)\neq 0$ весьма существенно для всех отмеченных исследований, только в работе А.И.Маркушевича /3/ $a(t)\equiv 0$; не удивительно, что решение содержит произвольную функцию. С другой стороны, если $a(t)=0$ только в конечном числе отдельных точек, причем нули достаточно простой структуры, то в этих особых, или исключительных, случаях задача (A) изучалась Н.Н.Юханоновым,см. в /24/, а для более общих задач (21) и (24) – Н.Усмановым /25/.

Таджикский государственный
университет

Литература

1. Ф.Д. Гахов. Краевые задачи. М., Наука, 1977.

2. Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения,М., Наука, 1968.

3. А.И.Маркушевич. Уч.зап.Моск.ун-та, 100, 1946.

4. Н.П.Векуа. ДАН СССР, 86, № 3, 1953.

5. И.Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, 1959.

6. Б.В.Боярский. Сообщения АН Груз.ССР, XXV, № 4, 1960.

7. Н.П.Векуа. Труды Тбилисского математического ин-та им. А.М.Размадзе, т.34, 1968.

8. Н.П.Векуа. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М., Наука, 1970.

9. Л.Г.Михайлов. Тезисы докл.У Всесоюзной конференции по теории функций, Ереван, 1960.

10. Л.Г.Михайлов. Известия АН Тадж. ССР 3(5), 1961.

11. Л.Г.Михайлов. ДАН СССР, 139, № 2, 1961.

12. Л.Г.Михайлов. Уч.зап. Тадж.госуниверситета, 10, Душанбе, 1957.

13. Л.Г.Михайлов. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами, Душанбе, 1963.

14. L.G.Mikhailov, A new class of singular integral equations . . ., Wolters-Noord Hoff Publishing Groningen,1970, Academic - Verlag, Berlin, 1970.

15. Л.Г.Михайлов. В сб.: Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений, Душанбе, 1964.

16. Л.Г.Михайлов. ДАН СССР, 256, № 2, 1981.

17. И.Х.Сабитов. Изв. АН Тадж.ССР, 4(6), 1961.

18. И.Х.Сабитов. Сиб.математический журнал, У, № I, 1964.

19. И.Х.Сабитов. Математический сборник, 64(105), вып.2,1964.

20. Л.И.Чибрикова, Г.Н.Салехов. Изв. ВУЗов, матем, № 9,1968.

21. Г.С.Литвинчук. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, М., Наука, 1977.
22. А.М.Николайчук, И.М.Спитковский. Укр.матем.журн.27,№ 6, 1975.
23. Г.С.Литвинчук, И.М.Спитковский. ДАН СССР, 255, № 5, 1980.
24. Н.Н.Юханонов. Докл.АН Тадж.ССР, 22, № 12, 1979.
25. Н.Усманов. Докл. АН Тадж.ССР, том ХУП, № 10,1974.

ლ. მიხაილოვი

ანალიზურ ფუნქციათა შეუღლების ზოგადი წრფივი ამოცანა

რეზიუმე

სიბრტყეზე მოცემულია Γ წირით შემოსაზღვრული სასრული D^+ მრავლადბმული არე. $D^+ \cup \Gamma$-ს დამატება სრულ სიბრტყემდე აღვნიშნოთ D^--ით. შესწავლილია D^+ და D^--ში ანალიზური და კოშის ტიპის ინტეგრალით წარმოდგენადი $\varphi^+(z)$ და $\varphi^-(z)$ ფუნქციების მოძებნის ამოცანა

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + c(t), \quad \varphi^-(\infty) = 0$$

სასაზღვრო პირობით.

L.Mikhailov

GENERAL LINEAR PROBLEM OF CONJUGATION OF ANALYTIC FUNCTIONS

Summary

The finite multiply connected domain D^+ bounded by the line Γ is given on the plane. Let D^- be the complement of $D^+ \cup \Gamma$ with respect to the whole plane. The problem on finding the functions $\varphi^+(z)$ and $\varphi^-(z)$, analytic in D^+ and D^- respectively and representable by the Cauchy-type integral is investigated by the boundary condition.

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + c(t), \quad \varphi^-(\infty) = 0$$

30

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
259, 1985

УДК 531.534

О МНОЖЕСТВЕ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПОДВЕШЕННОГО НА СТРУНЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Г.Т.Нозадзе

I. Рассмотрим твердое тело массы M в однородном поле силы тяжести, подвешенное в точке O тела на безынерционной, абсолютно гибкой и нерастяжимой струне длины ℓ, второй конец которой закреплен в неподвижной точке O_1. Крепление в точках O и O_1 осуществляется при помощи сферических шарниров, в которых отсутствует трение. Струна рассматривается только как геометрическая связь, под влиянием которой точка O тела во все время движения находится на поверхности сферы радиуса ℓ с центром в точке O_1. Такая система имеет пять степеней свободы.

Пусть главные центральные моменты инерции тела удовлетворяют условию $J_2 = J_3 > J_1$, где J_2 и J_1 — соответственно экваториальный и аксиальный моменты инерции, а точка подвеса O находится на оси симметрии тела. Исследуем стационарные движения рассматриваемой системы.

Введем следующие системы осей координат: неподвижную $O_1\xi\eta\zeta$ с осью ζ, направленной вертикально вверх, и подвижные $G\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $Gx_1x_2x_3$ с началом в центре масс тела G . Оси ξ_1, η_1, ζ_1 направим параллельно соответствующим осям ξ, η, ζ , а оси z_1, z_2, z_3 – по главным центральным осям инерции тела при условии, что ось симметрии z_1 направлена в сторону точки O . Струну направим от точки O к точке O_1 (см.рис.I).

За обобщенные координаты примем углы нутации θ , прецессии ψ и собственного вращения φ твердого тела $(Gz_1z_2z_3)$ относительно системы осей координат $G\xi_1\eta_1\zeta_1$, а также углы нутации α и прецессии β струны в системе координат $O_1\xi\eta\zeta$.

Функция Лагранжа рассматриваемой механической системы имеет вид

$$L=\frac{1}{2}M[\ell^2\dot\alpha^2+e^2\dot\theta^2+\ell^2(\dot\gamma+\dot\psi)^2\sin^2\alpha+e^2\dot\psi^2\sin^2\theta+$$

$$+2e\ell\dot\alpha\dot\theta(\sin\alpha\sin\theta+\cos\alpha\cos\theta\cos\gamma)+$$

$$+2e\ell\dot\alpha\dot\psi\cos\alpha\sin\theta\sin\gamma-2e\ell\dot\theta(\dot\gamma+\dot\psi)\sin\alpha\cos\theta\sin\gamma+$$

$$+2e\ell\dot\psi(\dot\gamma+\dot\psi)\sin\alpha\sin\theta\cos\gamma]+\frac{1}{2}[J_2(\dot\theta^2+\dot\psi^2\sin^2\theta)+$$

$$+J_1(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)^2]+Mg(\ell\cos\alpha+e\cos\theta),$$

где угол $\gamma=\beta-\psi$, e – расстояние между точками G и O , g – ускорение силы тяжести.

Далее положения тела и струны будем характеризовать координатами $\alpha, \gamma, \theta, \psi, \varphi$. Очевидно, координаты φ, ψ являются циклическими. Им соответствуют интегралы

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = J_1(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) = p_1 = const,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = M[\ell^2(\dot\gamma + \dot\psi)\sin^2\alpha + e^2\dot\psi\sin^2\theta +$$

$$+ e\ell\dot\alpha\cos\alpha\sin\theta\sin\gamma - e\ell\dot\theta\sin\alpha\cos\theta +$$

$$+ e\ell(\dot\gamma + 2\dot\psi)\sin\alpha\sin\theta\cos\gamma] + J_2\dot\psi\sin^2\theta +$$

$$+ J_1(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)\cos\theta = p_2 = const.$$

Первый интеграл выражает постоянство момента количеств движения твердого тела относительно собственной оси симметрии, а второй интеграл - постоянство момента количеств движения тела относительно оси ζ.

Уравнения стационарного движения, полученные исключением циклических координат по способу Рауса, имеют вид

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \gamma} = 0,$$

$$W = -Mg(\ell\cos\alpha + e\cos\theta) + \frac{(p_2 - p_1\cos\theta)^2}{2(J_2\sin^2\theta + M\Phi)} + \frac{p_1^2}{2J_1},$$

$$\Phi = \ell^2\sin^2\alpha + e^2\sin^2\theta + 2e\ell\sin\alpha\sin\theta\cos\gamma.$$

Исследуем движения, для которых $\alpha \neq 0, \ \theta \neq 0$. Для таких движений $\gamma = 0$ /1/. Уравнения для определения α и θ принимают простой вид, если вместо p_1, p_2 в уравнениях стационарного движения представить их выражения через $\dot{\psi} = \omega = const$, $\dot{\varphi} = \Omega = const$ с учетом соотношений $\dot{\alpha} = \dot{\theta} = \dot{\gamma} = 0$ (которые имеют место для стационарных движений). Таким путем придем к уравнениям

$$\omega^2 \cos\alpha\,(\ell \sin\alpha + e \sin\theta) - g \sin\alpha = 0,$$

$$\omega^2 M e \cos\theta\,(\ell \sin\alpha + e \sin\theta) + \omega^2 (J_2 - J_1) \sin\theta \cos\theta -$$

$$- M g e \sin\theta - \omega \Omega J_1 \sin\theta = 0.$$

Из этих уравнений следует, что геометрическим образом множества стационарных движений служат поверхности $\alpha = \alpha(\omega, \Omega)$, $\theta = \theta(\omega, \Omega)$. При этом без ограничения общности можно предполагать, что $\omega \geq 0$, Ω принимает произвольные значения. Сечению $\Omega = 0$ поверхностей стационарных движений соответствуют относительные равновесия подвешенного на струне осесимметричного твердого тела в равномерно вращающейся вокруг неподвижной вертикали системе координат, а сечениям $\Omega = \Omega_0$ при $\Omega_0 > 0$ и $\Omega_0 < 0$ отвечают соответственно прямые и обратные прецессии твердого тела.

Отметим, что поскольку геометрическая связь реализуется гибкой струной (а не жестким стержнем), то в стационарном движении $|\alpha| \leq \pi/2$ /2/. Более того, в силу симметричности картины движения (см.рис.I) достаточно ограничиться значениями α из интервала $(0, \pi/2)$.

2. Исследуем поверхности стационарных движений $\alpha = \alpha(\omega, \Omega)$, $\theta = \theta(\omega, \Omega)$. Введем обозначения: $\sin\alpha = v$, $\sin\theta = w$. Тогда уравнения стацио-

нарного движения можно записать в виде /3/

$$w = \frac{gv}{e\omega^2(1-v^2)^{1/2}} - \frac{\ell}{e}v, \qquad (I)$$

$$v = \frac{(Mge+\omega\Omega J_1)w}{Me\ell\omega^2(1-w^2)^{1/2}} - \frac{J_2-J_1+Me^2}{Me\ell}. \qquad (2)$$

После дифференцирования получим

$$\frac{dw}{dv} = \frac{g}{e\omega^2(1-v^2)^{3/2}} - \frac{\ell}{e},$$

$$\frac{dv}{dw} = \frac{Mge+\omega\Omega J_1}{Me\ell\omega^2(1-w^2)^{3/2}} - \frac{J_2-J_1+Me^2}{Me\ell}, \qquad (3)$$

$$\frac{d^2w}{dv^2} = \frac{3gv}{e\omega^2(1-v^2)^{5/2}},$$

$$\frac{d^2v}{dw^2} = \frac{3(Mge+\omega\Omega J_1)w}{Me\ell\omega^2(1-w^2)^{5/2}}.$$

Исследование поверхностей стационарного движения проведем следующим образом: при помощи формул (3) построим графики функций (I), (2); их пересечения дадут нам искомые точки (α, θ) – решения уравнений стационарного движения. Если проследить за точками пересечения при конкретном значении $\Omega = \Omega_0$ и ω, изменяющемся от 0 до $+\infty$, то можно судить о виде сечений $\Omega = \Omega_0$ поверхностей

$\alpha=\alpha(\omega,\Omega)$, $\theta=\theta(\omega,\Omega)$. Таким способом нам удается выяснить качественную картину бифуркации стационарных движений в сечениях $\alpha=\alpha(\omega,\Omega_0)$, $\theta=\theta(\omega,\Omega)$ лишь для значений $0\leq\alpha\leq\pi/2$ и $|\theta|\leq\pi/2$, так как функции $v=\sin\alpha$, $w=\sin\theta$ не отображают взаимно однозначно интервал (-I,I).

На рис. 2,3 показаны графики функций (I) (сплошная линия) и (2) (пунктирная линия) для разных значений ω соответственно для случаев $Mga+\omega\Omega_0 J_1>0$ и $Mga+\omega\Omega_0 J_1<0$. Чем больше ω, тем ближе подходят кривая (I) к прямым $w=-\ell v/a$ и $v=1$, а кривая (2) - к прямым $w=\pm 1$, $v=-(J_2-J_1+Ma^2)w/Ma\ell$.
Когда $Mga+\omega\Omega_0 J_1\to 0$, то кривая (2) переходит в прямую $v=-(J_2-J_1+Ma^2)w/Ma\ell$.

Взаимное расположение указанных прямых зависит от соотношений параметров, характеризующих систему. Поскольку $J_2>J_1$, то $(J_2-J_1+Ma^2)/Ma\ell>a/\ell$ и возможны три случая:
I $a/\ell\geq 1$, 2) $(J_2-J_1+Ma^2)/Ma\ell>1>a/\ell$,
3) $(J_2-J_1+Ma^2)/Ma\ell\leq 1$. На рис. 2,3 представлен второй случай, так как он является наиболее сложным и богатым в том смысле, что в дополнение к трем точкам пересечения графиков функций (I), (2) на рис. 2, существующим в двух других случаях, в рассматриваемом случае существуют еще две точки пересечения.

Перед тем, как заняться исследованием точек пересечения графиков функций (I), (2), отметим следующее обстоятельство: зависимости (I), (2) представляют собой уравнения стационарного движения подвешенного на струне осесимметричного твердого тела, которые при $\Omega = 0$ переходят в уравнения относительного равновесия рассматриваемой системы. Применив изложенный выше способ построения бифуркационной картины движения в случае $\Omega = 0$, можно получить бифуркационные диаграммы для относительных равновесий. Такое исследование проведено в работе /3/, однако приведенные в ней бифуркационные диаграммы не являются полными. Полный вид бифуркационной картины с учетом результатов работы /4/ в случае осесимметричного тела, указан на рис.4 (для простоты ограничимся случаем, когда $a/\ell < 1 < (J_2 - J_1 + 2Ma^2)/2Ma\ell$). Здесь $\omega_1, \omega_2, \omega_*$ – бифуркационные значения ω, а α_*, θ_* – предельные значения α, θ, когда $\omega \to +\infty$ (способ вычисления значений $\omega_1, \omega_2, \omega_*, \alpha_*, \theta_*$ будет указан ниже).

В случае относительных равновесий величина $Mga + \omega\Omega J_1 = Mga > 0$, поэтому для построения бифуркационных диаграмм достаточно рис.2. Но вид рис.2 качественно не меняется, если $\Omega \neq 0$, $Mga + \omega\Omega J_1 > 0$. Следовательно, весь вид бифуркационной картины относительно равновесий сохранится и для стационарных движений до тех пор, пока $Mga + \omega\Omega J_1 > 0$. В частности, для прямых прецессий $(\Omega_0 > 0)$ бифуркационные диаграммы будут иметь тот же вид, что и для относительных равновесий. Разница состоит лишь в величинах бифуркационных и предельных значений α, θ, ω.

Что касается бифуркационной картины в случае обратных прецессий $(\Omega_0 < 0)$, то для малых значений ω и в этом случае остаются в силе рис. 2,4. Но при возрастании ω от 0 до $+\infty$ настает момент, когда $Mge+\omega\Omega_o J_1=0$, т.е. $\omega=\omega_o=-Mge/\Omega_o J_1$. Далее, при $\omega>\omega_o$, для построения искомых сечений $\alpha=\alpha(\omega,\Omega_o)$, $\theta=\theta(\omega,\Omega_o)$ вместо рис.2 мы должны исходить из рис.3. Окончательный вид бифуркационной картины, очевидно, зависит от соотношения значения $\omega=\omega_o$ и бифуркационных значений ω, когда происходит ветвление ветвей стационарных движений.

3. Исследуем взаимное расположение значения $\omega=\omega_o$ и бифуркационных значений ω, когда от вертикальных вращений ответвляются стационарные движения, для которых $\alpha>0,\ \theta\neq 0$.

Уравнение для определения таких бифуркационных значений получается из условия совпадения касательных к кривым (I), (2) в точке $v=w=0$

$$\left.\frac{dv}{dw}\right|_{w=0}=\left.\frac{1}{\frac{dw}{dv}}\right|_{v=0} \qquad (4)$$

После подстановки в равенство (4) значений производных из формул (3), получаем уравнение

$$f(\omega)=(J_2-J_1)\ell\omega^4-J_1\ell\Omega_o\omega^3-$$

$$-(J_2-J_1+Me^2+Me\ell)g\omega^2+J_1 g\Omega_o\omega+Meg^2=0.$$

Из уравнения $f(\omega)=0$ следует соотношение

$$\Omega_0 = \frac{(J_2-J_1)\ell\omega^4 - (J_2-J_1+Me^2+Me\ell)g\omega^2+Meg^2}{J_1\omega(\ell\omega^2-g)} = \Omega_0(\omega).$$

Функция $\Omega_0 = \Omega_0(\omega)$ дает возможность исследовать число и расположение корней уравнения $f(\omega)=0$, т.е. установить характер изменения бифуркационных значений ω в зависимости от угловой скорости собственного вращения Ω_0.

Действительно, в числителе выражения $\Omega_0 = \Omega_0(\omega)$ стоит полином относительно ω^2, имеющий два действительных корня ω_1^2 и ω_2^2, $0<\omega_1^2<g/\ell<\omega_2^2$. Кроме того, $\Omega_0(\omega)\to+\infty$ при $\omega\to+\infty$ или $\omega\to(g/\ell)_-^{1/2}$ и $\Omega_0(\omega)\to-\infty$ при $\omega\to 0+$ или $\omega\to(g/\ell)_+^{1/2}$. Поэтому график функции $\Omega_0=\Omega_0(\omega)$ имеет вид, показанный на рис. 5.

Из рис.5 видно, что уравнение $f(\omega)=0$ имеет два действительных корня для любого значения Ω_0. При возрастании Ω_0 от $-\infty$ до $+\infty$ меньший корень ω_1' монотонно увеличивается от 0 до $(g/\ell)^{1/2}$, а больший корень ω_2' - от $(g/\ell)^{1/2}$ до $+\infty$.

Тогда из соотношений

$$\omega_0^2 - g/\ell = \frac{(M^2e^2\ell g - \Omega_0^2 J_1^2)g}{\Omega_0^2 J_1^2 \ell},$$

$$f(\omega_0) = \frac{M^2 g^3 e^2}{\Omega_0^2 J_1^2}\left[\frac{(J_2-J_1)(M^2e^2\ell g-\Omega_0^2J_1^2)}{\Omega_0^2 J_1^2} - Me^2\right],$$

следует, что возможны два случая взаимного расположения значений ω_1', ω_2', ω_0:

1. $\omega_1' < \omega_0 < \omega_2'$, если $(J_2 - J_1)(M^2 e^2 \ell g -$
$- \Omega_0^2 J_1^2)/\Omega_0^2 J_1^2 - Me^2 < 0$;

2. $\omega_1' < \omega_2' \leq \omega_0$, если $(J_2 - J_1)(M^2 e^2 \ell g -$
$- \Omega_0^2 J_1^2)/\Omega_0^2 J_1^2 - Me^2 \geq 0$.

Относительно значения $\omega = \omega_*'$, когда происходит ветвление "изолированных" ветвей, которые не ответвляются от вертикальных вращений $(\alpha = \theta = 0)$, укажем, что для существования "изолированных" ветвей необходимо одновременное выполнение условий $w_{min} < w_{max}$, $v_{min} < v_{max}$ (см.рис.2). Так как при $\omega = \omega_2'$, кривые (I), (2) касаются друг друга в начале координат, то они находятся по разные стороны от касательной и условия $w_{min} < w_{max}$, $v_{min} < v_{max}$ не выполняются. Поэтому "изолированные" ветви появляются при угловой скорости, большей ω_2'. Значение ω_*' и соответствующие значения α, θ можно найти из условия, что касательные (в точке появления "изолированных" ветвей) к обеим кривым совпадают. Это условие при помощи формул (3) приводит к системе уравнений (I); (2) при $\Omega = \Omega_0$ и

$$\left[\frac{g}{e\omega^2(1-v^2)^{3/2}} - \frac{\ell}{e}\right]\left[\frac{Mge + \omega\Omega_0 J_1}{Me\ell\omega^2(1-w^2)^{3/2}} - \frac{J_2 - J_1 + Me^2}{Me\ell}\right] = 1.$$

Очевидно, что при $\Omega_0 = 0$ получим $\omega_*' = \omega_*$.

Таким образом, бифуркационные значения ω и значение ω_0 могут быть расположены на оси ω в следующем порядке:

1) $\omega_1' < \omega_0 < \omega_2' < \omega_*'$, 2) $\omega_1' < \omega_2' < \omega_0 < \omega_*'$,

3) $\omega_1' < \omega_2' < \omega_*' < \omega_0$. В каждом из этих трех случаев получим определенную бифуркационную картину обратных прецессий подвешенного на струне твердого тела.

4. Перейдем к построению бифуркационных диаграмм для стационарных движений (сечений $\Omega = \Omega_0$ поверхностей $\alpha = \alpha(\omega, \Omega)$, $\theta = \theta(\omega, \Omega)$). По-прежнему ограничимся случаем, когда $a/\ell < k < (J_2 - J_1 + 2Mc^2)/2Mc\ell$. В остальных случаях построение проводится аналогично.

Как уже отмечалось выше, для прямых прецессий $(\Omega_0 > 0)$ искомой диаграммой может служить рис. 4, где бифуркационные значения угловой скорости $\omega_1, \omega_2, \omega_*$ надо заменить соответственно на значения $\omega_1', \omega_2', \omega_*'$. Предельные значения α, θ , когда $\omega \to +\infty$, получаются из уравнений (I), (2) и равны

$$\alpha_* = \arcsin \frac{a}{\ell}, \quad \theta_* = -\arcsin \frac{Mc\ell}{J_2 - J_1 + Mc^2}.$$

Рассмотрим теперь обратные прецессии. Пусть $\omega_1' < \omega_0 < \omega_2' < \omega_*'$. Тогда для малых значений ω существуют только вертикальные вращения системы. При угловой скорости $\omega = \omega_1'$ от вертикальных вращений ответвляется ветвь стационарных движений, которую образуют точки типа T_1 на рис. 2. Для таких точек $\alpha > 0$, $\theta > 0$. Из рис.2 видно, что при $\omega \to \omega_0$ переменные α, θ стремятся по этой ветви к определенным предельным значениям: $\alpha \to \alpha_0 -$, $\theta \to \pi/2 -$, где значение α_0 является решением уравнения (I) при $\omega = \omega_0$, $\theta = \pi/2$.

Таким образом, ветвь стационарных движений, появившаяся при $\omega = \omega_1'$, после достижения угловой скоростью значения $\omega = \omega_0$ выходит за пределы области $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, $|\theta| \leq \pi/2$. Другими словами, ось симметрии тела отклоняется от вертикали на угол больше, чем $\pi/2$ при конечной величине ω. Такого явления для рассматриваемой ветви не наблюдалось в случае относительных равновесий. Изменение в расположении оси симметрии в стационарном движении можно объяснить действием гироскопического момента на твердое тело. Действительно, в обратной прецессии вектор угловой скорости прецессии направлен по оси ζ вертикально вверх $(\omega > 0)$, а вектор угловой скорости собственного вращения направлен в противоположную сторону оси ξ_1 $(\Omega < 0)$ (см. рис.I). Поэтому гироскопический момент направлен аналогично оси ξ_1 и воздействует на твердое тело так, чтобы совместить векторы угловой скорости собственного вращения и прецессии.

Далее, при значениях $\omega > \omega_0$, для построения бифуркационной картины в рассматриваемом случае будем исходить из рис.3. После достижения угловой скоростью прецессии значения $\omega = \omega_2'$ от вертикальных вращений ответвляется ветвь стационарных движений, на которой $\alpha > 0$, $\theta < 0$.
На этой ветви $\alpha \to \pi/2 -$, $\theta \to \theta_*+$ при $\omega \to +\infty$. Из

рис.3 видно, что в рассматриваемом случае "изолированные" ветви в области $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$, $|\theta| \leqslant \pi/2$ не существуют. Следовательно, в случае, когда $\omega_1' < \omega_0 < \omega_2' < \omega_*'$, имеем бифуркационную диаграмму А) на рис.6.

Пусть теперь $\omega_1' < \omega_2' < \omega_0 < \omega_*'$. Из рис. 2 видно, что ветвь стационарных движений, образованная точками типа T_1, не изменится по сравнению с предыдущим случаем: она по-прежнему ответвляется от вертикальных вращений при $\omega = \omega_1'$ и выходит за пределы области $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$, $|\theta| \leqslant \pi/2$ при $\omega > \omega_0$. Но, в отличие от предыдущего случая, ответвление второй ветви $(\alpha > 0,\ \theta < 0)$ от вертикальных вращений происходит до выхода первой ветви $(\alpha > 0,\ \theta > 0)$ за пределы рассматриваемой области изменения α, θ. Для значений $\omega_2' < \omega < \omega_0$ одновременно существуют три ветви стационарных движений. При $\omega > \omega_0$, согласно рис. 3, вторая ветвь продолжается непрерывно, оставаясь все время в области $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$, $|\theta| \leqslant \pi/2$. Предельные значения α, θ при $\omega \to +\infty$ остаются прежними. Таким образом, если $\omega_1' < \omega_2' < \omega_0 < \omega_*'$, то бифуркационная картина имеет вид, показанный на рис. 6 б).

Рассмотрим, наконец, случай, когда $\omega_1' < \omega_2' < \omega_*' < \omega_0$. Поскольку вид бифуркационной диаграммы относительных равновесий при $\omega < \omega_0$ сохраняется для стационарных движений, то остается при помощи рис.3 выяснить, как изменится рис.4 при $\omega \geqslant \omega_0$.

"Изолированные" ветви появляются при значении $\omega = \omega_*'$. Сравнением рис. 2,4 для относительных равновесий убеждаемся, что "изолированные" ветви образуются точками типа T_3, T_4

(см. рис.2). То же самое имеет место для стационарных движений, так как $\omega_*' < \omega_0$. Далее, из рис. 2,3 видно, что при $\omega > \omega_0$ в области $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, $|\theta| \leq \pi/2$ остается лишь та ветвь, которую образуют точки типа T_2. На этой ветви $\alpha \to \pi/2-$, $\theta \to \theta_*-$ при $\omega \to +\infty$. Остальные ветви выходят за пределы рассматриваемой области. Для значений $\omega_*' < \omega < \omega_0$ одновременно существуют пять ветвей стационарных движений. Следовательно, в случае, когда $\omega_1' < \omega_2' < \omega_*' < \omega_0$, бифуркационная картина имеет вид, показанный на рис. 6 в). Здесь α_1, α_2 – решения уравнения (I) при $\omega = \omega_0$, $\theta = -\pi/2$.

5. Таким образом, на рис. 6 представлены всевозможные картины бифуркации стационарных движений подвешенного на струне осесимметричного твердого тела в виде сечений $\Omega = \Omega_0$ поверхностей стационарных движений $\alpha = \alpha(\omega, \Omega)$, $\theta = \theta(\omega, \Omega)$ при $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, $|\theta| \leq \pi/2$ и условии $e/\ell < k (J_3 - J_1 + 2Me^2)/2Me\ell$. Сравнение полученных бифуркационных диаграмм с аналогичными диаграммами для относительных равновесий позволяет заключить, что в некоторых обратных прецессиях при увеличении угловой скорости прецессии центр масс тела под влиянием гироскопического момента поднимается выше точки крепления тела со струной. Для каждого фиксированного значения угловой скорости собственного вращения существует критическое значение угловой скорости прецессии ω_0, когда ось симметрии тела принимает горизонтальное положение. Вид бифуркационных диаграмм зависит как от соотношения параметров, характеризующих твердое тело и струну, так и от соотношения бифуркационных значений ω и критического

значения ω_0 . При увеличении угловой скорости собственного вращения увеличиваются и бифуркационные значения угловой скорости прецессии, когда происходит ответвление ветвей стационарных движений от вертикальных вращений.

Тбилисский математический
институт им. А.М.Размадзе
АН ГССР

Литература

I. В.И.Возлинский. ПММ, 1967, т.31, вып.5.

2. А.Ю.Ишлинский, В.А.Стороженко, М.Е.Темченко. Изв.АН СССР, МТТ, 1979, № 6.

3. Г.О.Бугаенко, Г.Г.Велигодский. Уч.зап. Черкасского пед. ин-та. Серия физ-мат.наук, 1963, т.17.

4. Г.Т.Нозадзе. Сообщения АН ГССР, 1982, т.107, № 3.

გ. ნოზაძე

სიმზე ჩამოკიდებული ღერძულად სიმეტრიული
მყარი სხეულის სტაციონარული მოძრაობათა
სიმყარის შესახებ

რეზიუმე

შესწავლილია სიმზე ჩამოკიდებული სიმეტრიული მყარი სხეულის სტაციონარული მოძრაობები. გამოკვლეულია მყარი სხეულის საკუთარი ბრუნვის გავლენა მექანიკური სისტემის თანაბარ ბრუნვაზე უძრავი ვერტიკალის გარშემო. დადგენილია სტაციონარული მოძრაობათა ბიფურკაციული სურათი.

G. Nozadze

ON A SET OF STATIONARY MOTIONS OF AN AXIALLY SYMMETRIC RIGID BODY, SUSPENDED ON THE STRING

Summary

The bifurcation situation of stationary motions is determined and the self-rotation influence on uniform rotation of the rigid body is investigated.

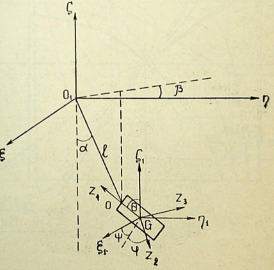
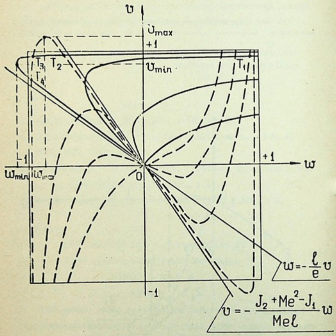
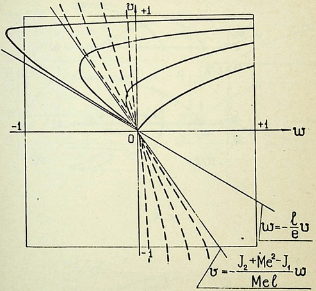


Рис. I



υ
$υ_{max}$
+1
T_3
T_2
T_4
$υ_{min}$
T_1
-1
w_{min}
w_{max}
0
+1
w
$w = -\frac{\ell}{e}υ$
-1
$υ = -\frac{J_2 + Me^2 - J_1}{Me\ell} w$

Рис. 2



υ
+1
-1
+1
w
0
-1
$w = -\frac{\ell}{e}\upsilon$
$\upsilon = -\frac{J_2 + Me^2 - J_1}{Me\ell} w$

Рис. 3

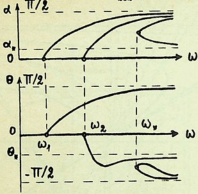


Рис. 4

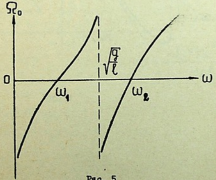


Рис. 5

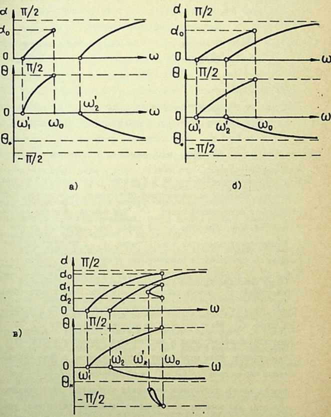


Рис. 6

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

259, 1985

УДК 531, 534

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОМЕРНОГО ВЕРТИКАЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА НИТИ

В.Н.Рубановский

Рассматривается задача о движении в однородном поле сил тяжести динамически симметричного твердого тела, которое подвешено к неподвижной точке O' при помощи нити или невесомого стержня, при этом другой конец нити закреплен на оси динамической симметрии тела в точке O. Исследуется вопрос об устойчивости равномерного вращения тела, когда точки O', O и центр C масс тела лежат на одной вертикали, причем точка O может находиться как ниже, так и выше точки O' (в этом случае тело подвешивается при помощи стержня), а точка C может находиться выше или ниже точки O. Дан анализ необходимых и достаточных условий устойчивости. Совокупность всех параметров системы сведена к трем независимым параметрам L, Ω, β и на плоскости (L, Ω) при фиксированных допустимых значениях параметра β указаны области, для которых невозмущенное движение устойчиво, устойчиво в первом приближении и неустойчиво. Обнаружены две области, для которых устойчиво в первом приближении вращение тела, подвешенного при помощи стержня, когда точка O

лежит выше точки O', а центр масс находится выше или ниже точки O.

Достаточные условия устойчивости вертикального вращения динамически симметричного тела, подвешенного на нити, ранее были получены в /I/ и исследованы для случаев, когда в невозмущенном движении центр масс C тела лежит ниже точки O крепления нити к телу, когда нить крепится к телу в центре масс и когда длина нити равна нулю (волчок Лагранжа). В /2/ дан анализ полученных в /I/ достаточных, а также указанных в /2/ необходимых условий устойчивости для случая, когда в невозмущенном движении центр масс тела лежит выше точки крепления нити к телу. Этот анализ опирается на ошибочный вывод /I, 2/ о том, что в указанном случае требование вещественности всех корней характеристического уравнения является как необходимым, так и достаточным условием устойчивости невозмущенного вращения.

I. Постановка задачи, уравнения движения, первые интегралы, частное решение.

Рассмотрим в однородном поле сил тяжести движение динамически симметричного твердого тела, которое подвешено к неподвижной точке O' при помощи гибкой нерастяжимой и нескручиваемой невесомой нити или тонкого невесомого стержня, при этом конец нити закреплен на оси динамической симметрии тела в точке O. Нить рассматривается как голономная двухсторонняя связь.

Пусть $Ox_1x_2x_3$ - система координат, оси которой неизменно связаны с телом и направлены по его главным осям инерции для точки O. Введем обозначения (рис.I): m, γ_c -

– масса и тензор инерции тела для его центра C масс с диагональными элементами $J_1 = J_2$, J_3; ω, $K_c = J_c \cdot \omega$ – угловая скорость и кинетический момент тела, вычисляемый для его центра масс; a – радиус-вектор центра масс относительно точки O ; v – скорость точки O ; γ – орт восходящей вертикали; ℓ – длина нити (или стержня); e – единичный вектор, направленный вдоль нити в точку O' ; g – ускорение силы тяжести; N – натяжение нити; все введенные векторы будем задавать их проекциями ω_i, $K_{ci} = J_i \omega_i$, v_i, γ_i, e_i, a_i на оси x_i (i =I, 2,3), при этом $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = a$.

Уравнения движения, отнесенные к системе координат $Ox_1x_2x_3$, можно записать в виде

$$m\left[\frac{d}{dt}(v+\omega\times a)+\omega\times(v+\omega\times a)\right]=-mg\gamma+Ne, \qquad (I.I)$$

$$\frac{dK_c}{dt}+\omega\times K_c=N(e\times a), \quad \frac{d\gamma}{dt}+\omega\times\gamma=0, \quad \ell\left(\frac{de}{dt}+\omega\times e\right)=-v.$$

Механический смысл уравнений (I.I) очевиден. Они допускают следующие первые интегралы:

$$V_1=\omega\cdot J_c\cdot\omega+m(v+\omega\times a)^2-2mg(\ell e-a)\cdot\gamma=const, \qquad (I.2)$$

$$V_2=\left[J_c\cdot\omega+m(a-\ell e)\times(v+\omega\times a)\right]\cdot\gamma=const,$$

$$V_3=\omega_3=const, \quad V_4=\gamma^2=1, \quad V_5=e^2=1, \quad V_6=v\cdot e=0.$$

Уравнения (I.I) имеют частные решения

$$v_i = \omega_i = \gamma_i = e_i = 0 \ (i=1,2), \quad v_3 = 0,$$
$$\omega_3 = \omega \geq 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad e_3 = \pm 1, \quad N = \pm mg, \tag{I.3}$$

описывающие равномерные вращения тела, для которых точки O', O и C лежат на одной вертикали, при этом для первого решения $(e_3 = 1,\ N = mg)$ точка O расположена ниже, а для второго $(e_3 = -1,\ N = -mg)$ выше точки O'. Для реализации второго решения следует считать, что тело подвешивается при помощи стержня. Решения (I.3) можно рассматривать как одно решение с e_3=I, если условиться формально считать, что для второго решения $\ell < 0$.

2. Необходимые условия устойчивости решения (I.3).

В возмущенном движении сохраним за переменными прежние обозначения. Тогда уравнения (I.I), линеаризованные в окрестности невозмущенного движения (I.3), принимают вид

$$\ell \ddot{e}_* + 2i\omega \ell \dot{e}_* + (g - \omega^2 \ell) e_* - i(\ell - a)\dot{\omega}_* - \omega(\ell - a)\omega_* - g\gamma_* = 0,$$
$$J_1 \dot{\omega}_* + i\omega (J_1 - J_3)\omega_* + imgae_* = 0, \tag{2.I}$$
$$\dot{\gamma}_* + i\omega\gamma_* - i\omega_* = 0, \quad e_* = e_1 + ie_2, \quad \omega_* = \omega_1 + i\omega_2,$$
$$\gamma_* = \gamma_1 + i\gamma_2,$$

при этом в первом приближении $e_3 = 1$, $\omega_3 = \omega$, $\gamma_3 = 1$, $N = mg \operatorname{sign} \ell$. Отыскивая решения уравнений (2.I) в виде

$$(\omega_*, \gamma_*, e) = (\omega_*^\circ, \gamma_*^\circ, e_*^\circ)\exp[i(\lambda-\omega)t],$$

для определения постоянной λ получаем характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2\ell(J_1\lambda^2 - J_3\omega\lambda + mga) - $$
$$- g(J_1^*\lambda - J_3\omega\lambda + mga) = 0. \qquad (2.2)$$

Итак, для устойчивости невозмущенного движения (I.3) по отношению к переменным $\omega_i, \gamma_i, e_i, v_i$ (i =I,2,3) необходимо, чтобы все четыре корня уравнения (2.2) были вещественными.

3. Достаточные условия устойчивости движения (I.3).

Достаточные условия устойчивости движения (I.3) получим из теоремы Рауса /3/ как условия положительной определенности связки интегралов (λ – параметр)

$$V = V_1 - 2\lambda V_2 - 2J_3(\omega - \lambda)V + $$
$$+ [J_3\omega\lambda + mg(\ell - a)]V_4 + mg\ell V_5$$

на линейном многообразии, определяемом уравнениями

$$\delta V_2 = J_3(\omega_3 + \omega\gamma_3) = 0, \quad \delta V_3 = \omega_3 = 0, \quad \delta V_4 = 2\gamma_3 = 0,$$
$$\delta V_5 = 2e_3 = 0, \quad \delta V_6 = v_3 = 0. \qquad (3.I)$$

Вводя вместо ω_i, e_i новые переменные Ω_i, ν_i $(i = 1,2)$: $\omega_i = \Omega_i + \lambda\gamma_i$, $e_i = \gamma_i + \nu_i$, представим V в виде

$$V\Big|_{(3.1)} = W(\Omega_1, \gamma_1, \nu_1, v_2) + W(\Omega_2, \gamma_2, \nu_2, v_1) + \ldots$$

$$W = J_1^*\Omega_1^2 + (-J_1^*\lambda^2 + J_3\omega\lambda - mga)\gamma_1^2 + mgl\nu_1^2 + \tag{3.2}$$

$$+ mv_2^2 - 2\lambda mal(\Omega_1 + \lambda\gamma_1)\nu_1 + 2\lambda ml\nu_1 v_2 - 2ma\Omega_1 v_2,$$

где не выписаны члены выше второго порядка малости. Условия положительной определенности квадратичной формы (3.2) приводятся к неравенствам

$$\Delta_1(\lambda) = -J_1^*\lambda^2 + J_3\omega\lambda - mga > 0,$$

$$\Delta_2(\lambda, l) = l[-\lambda^2 l(-J_1\lambda^2 + J_3\omega\lambda - mga) + \tag{3.3}$$

$$+ g(-J_1^*\lambda^2 + J_3\omega\lambda - mga)] > 0.$$

Итак, достаточные условия устойчивости невозмущенного движения (I.3) по отношению к ω_i, γ_i, e_i, v_i (i =I,2,3) состоят в том, чтобы для некоторого вещественного значения параметра λ одновременно выполнялись неравенства (3.3).

При анализе условий (2.2) и (3.3) условимся считать, что $a>0$ $(a<0)$, если в невозмущенном движения (I.3) центр масс тела находится выше (ниже) точки O крепления нити к телу.

Условиям (3.3) впервые получены в /I/ и исследованы для случаев, когда I) $l=0$; 2) $l>0,\ a<0$; 3) $l>0$, $a=0$. Для случая, когда $l>0,\ a>0$, в /I/ сделано ошибочное заключение о том, что условия (3.3) приводятся к требованию вещественности всех четырех корней уравнения $\Delta_2(\lambda, l) = 0$, совпадающего с уравнением (2.2), а в

/2/ ошибочно утверждается, что для движения (I.3) необходимые условия устойчивости совпадают с достаточными и приводятся к требованию вещественности всех корней уравнения (2.2)

4. Анализ условий (3.3).

Условия (3.3) не могут выполняться для $\ell<0$, так как тогда $\Delta_2<0$, если $\Delta_1>0$.

Для анализа условий (3.3) введем в рассмотрение функцию

$$\ell=\ell(\lambda)=\frac{g(-J_1^*\lambda^2+J_3\omega\lambda-mga)}{\lambda^2(-J_1\lambda^2+J_3\omega\lambda-mga)}, \qquad (4.I)$$

определяемую уравнением $\Delta_2(\lambda,\ell)=0$. На рис.2 указан график функции (4.I) для случая, когда

$$J_3^2\omega^2-4J_1^*mga>0, \qquad (4.2)$$

при этом через λ_1, λ_2 и λ_1', λ_2' обозначим корни уравнений

$J_1^*\lambda^2-J_3\omega\lambda+mga=0$ и $J_1\lambda^2-J_3\omega\lambda+mga=0$

соответственно, а через ℓ_* и ℓ^* $(\ell_*\leq\ell^*)$ - экстремальные значения функции (4.I).

Для выполнения условия $\Delta_1(\lambda)>0$ необходимо, чтобы имело место неравенство (4.2), и тогда $\Delta_1(\lambda)>0$, если $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$. Условие $\Delta_2(\lambda,\ell)>0$ эквивалентно условию $\ell>\ell(\lambda)$, если $\lambda<\lambda_1'$, $\lambda\neq0$, или

$\lambda > \lambda_2'$, и условию $0 < l < l(\lambda)$, если $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Поэтому условия (3.3) эквивалентны условиям

$$\Delta_1(\lambda) > 0, \quad l > l(\lambda), \quad \text{если} \quad \lambda < \lambda_1', \ \lambda \neq 0, \qquad (4.3)$$

$$\text{или} \quad \lambda > \lambda_2' ;$$

$$\Delta_1(\lambda) > 0, \quad 0 < l < l(\lambda), \quad \text{если} \quad \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 . \qquad (4.4)$$

Условия (4.3) не могут выполнятся ни для одного из значений $\lambda < \lambda_1'$, $\lambda \neq 0$, или $\lambda > \lambda_2'$, потому что $\Delta_1(\lambda) < 0$ для всех $\lambda < \lambda_1'$ и $\lambda > \lambda_2'$. Для анализа условий (4.4) возьмем произвольное значение l, $0 < l < l_*$, и обозначим через $\lambda_1(l)$ и $\lambda_2(l)$ корни уравнения $\Delta_2(\lambda, l) = 0$, удовлетворяющие неравенствам $\lambda_1 < \lambda_1(l) < \lambda_2(l) < \lambda_2$. Тогда для выбранного значения l условия (4.4) будут выполняться для всех значений λ , удовлетворяющих условиям $\lambda_1(l) < \lambda < \lambda_2(l)$. Далее, из рис.2 видим, что уравнение $\Delta_2(\lambda, l) = 0$ имеет четыре вещественных корня, если $l > l^*$ или $0 < l < l_*$, и два вещественных и пару комплексных корней, если $l_* < l < l^*$. При $l = l_*$ и $l = l^*$ это уравнение имеет два равных вещественных корня и пару комплексных. Ввиду того, что для $l \neq 0$ уравнение $\Delta_2(\lambda, l) = 0$ совпадает с уравнением (2.2), то отсюда следует, что необходимые условия устойчивости выполняются для $l > l^*$ и $0 < l < l_*$. Сопоставляя этот результат с приведенным выше анализом условий (4.3) и (4.4), окончательно заключаем, что I) для $l > l^*$ необходимые условия устойчивости выполняются, а достаточные условия (3.3) не выполняются; 2) для $0 < l < l_*$ одновременно выполняются необходимые и достаточные условия устойчивости.

Поучительно рассмотреть предельные случаи $\ell = 0$ (волчок Лагранжа с неподвижной точкой O) и $\ell = \infty$ (волчок Лагранжа на гладкой горизонтальной плоскости).

При $\ell = 0$ имеем $v \equiv 0$ и достаточные условия устойчивости движения (I.3) по отношению к ω_i, γ_i (i =I,2,3), представляющие собой условия знакоопределенности интеграла V, приводятся к неравенству $\Delta_1(\lambda) > 0$, а последние к условию (4.2). Далее, при $\ell = 0$ уравнение (2) принимает вид $\Delta_1(\lambda) = 0$ и требование вещественности его корней приводит к условию (4.2).

Итак, при $\ell = 0$ необходимые и достаточные условия устойчивости движения (I.3) по отношению к ω_i, γ_i (i = I, 2, 3) совпадают.

Пусть теперь $\ell >> 1$; тогда достаточные условия (3.3) устойчивости движения (I.3) по отношению к ω_i, γ_i, e_i, v_i (i =I,2,3) и, как следствие этого, по отношению к координатам точки O приводятся к виду $\Delta_1(\lambda) > 0$, $\Delta_1'(\lambda) = = J_1\lambda^2 - J_3\omega\lambda + mga > 0$ и одновременно выполняться не могут. Уравнение (2.2) в этом случае можно представить в виде $\lambda^2\Delta_1'(\lambda) + g\ell^{-1}\Delta_1(\lambda) = 0$ и требование вещественности его корней при $\ell >> 1$ приводит к условию

$$J_3^2\omega^2 - 4J_1 mga > 0. \tag{4.5}$$

Отсюда заключаем, что при $\ell >> 1$ необходимые условия устойчивости движения (I.3) по отношению к ω_i, γ_i, e_i, v_i (i =I,2,3) имеют вид (4.5), а достаточные условия устойчивости по отношению к тем же переменным не выполняются.

Этот результат допускает простое механическое истолкование. В самом деле, при $\ell=\infty$ предельная система представляет собой волчок Лагранжа, точка O которого может скользить по гладкой горизонтальной плоскости. В качестве обобщенных координат такого волчка можно взять три угла Эйлера и горизонтальные координаты точки O, при этом последние будут циклическими координатами и по отношению к ним стационарное движение (I.3) не может быть устойчиво /4/.

Можно показать, используя результаты п.п.I-3, что при $\ell=\infty$ необходимые и достаточные условия устойчивости движения (I.3) по отношению к части переменных ω_i, γ_i, v_i (i =I,2,3) совпадают и имеют вид (4.5). Условие (4.5) одновременно является необходимым и достаточным условием устойчивости вертикального вращения волчка Лагранжа на гладкой горизонтальной плоскости по отношению к ω_i, γ_i, v_i (i = I,2,3).

В самом деле, уравнения движения волчка на гладкой горизонтальной плоскости можно записать в виде

$$m\left(\frac{dv_c}{dt}+\omega\times v_c\right)=(-mg+N)\gamma, \tag{4.6}$$

$$\frac{d\mathcal{K}_c}{dt}+\omega\times\mathcal{K}_c=N(\gamma\times a), \qquad \frac{d\gamma}{dt}+\omega\times\gamma=0.$$

Эти уравнения имеют первые интегралы

$$V_1=\omega\cdot J_c\cdot\omega+mv_c^2+2mga\cdot\gamma=const,$$
$$V_2=\gamma\cdot J_c\cdot\omega=const,\quad V_3=\omega_3=const,\quad V_4=\gamma^2=1 \tag{4.7}$$

и частное решение

$$\omega_1 = \gamma_i = v_{ci} = 0 \quad (i=1,2), \quad \omega_3 = \omega > 0, \qquad \gamma_3 = 1, \quad v_{c3} = 0, \quad N = mg \tag{4.8}$$

В возмущенном движении сохраним за переменными их прежние обозначения. Тогда уравнения (4.6), линеаризованные в окрестности решения (4.8), принимают вид

$$J_1\dot{\omega}_* + i\omega(J_1 - J_3)\omega_* - i\,mga\,\gamma_* = 0, \quad \dot{\gamma}_* + i\omega\gamma_* - i\omega_* = 0.$$

Отыскивая решения этих уравнений в виде

$$(\omega_*, \gamma_*) = (\omega_*^\circ, \gamma_*^\circ)\exp[i(\lambda - \omega)t],$$

для определения постоянной λ получаем уравнение $J_1\lambda^2 - J_3\omega\lambda + mga = 0$ для вещественности корней которого необходимо выполнение условия (4.5). Достаточные условия устойчивости решения (4.8) по отношению к $\omega_i, \gamma_i, v_{ci}$ (i =1,2,3) получим из теоремы Рауса как условия положительной определенности связки интегралов (4.7) (λ параметр)

$$V = V_1 - 2\lambda V_2 - 2J_3(\omega - \lambda)V + (J_3\omega\lambda - mga)V_4$$

при условиях

$$\delta V_2 = J_3(\omega_3 + \omega\gamma_3) = 0, \quad \delta V_3 = \omega_3 = 0, \quad \delta V_4 = 2\gamma_3 = 0.$$

Эти условия приводятся к неравенству $- J_1\lambda^2 + J_3\omega\lambda -$

$-mga > 0$, для выполнения которого при некоторых вещественных значениях λ необходимо выполнение условия (4.5)

Итак, условие (4.5) является необходимым и достаточным условием устойчивости вертикального вращения волчка Лагранжа на гладкой горизонтальной плоскости по отношению к ω_i, γ_i, v_i $(i = 1,2,3)$.

5. Анализ корней уравнения (2.2).

Сделаем в уравнении (2.2) подставку $\lambda = J_3 J_1^{-1} \omega x$ и представим его в виде

$$
\begin{gathered}
a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0, \\
a_0 = -a_1 = L\Omega^2, \quad a_2 = (L - \beta)\Omega, \qquad (5.1) \\
a_3 = \Omega, \quad a_4 = -1, \\
L = \frac{mal}{J_1}, \qquad \Omega = \frac{J_3^2 \omega^2}{J_1 mga}, \qquad \beta = \frac{J_1^*}{J_1} \geq 1.
\end{gathered}
$$

Для того чтобы все четыре корня уравнения (5.1) были вещественными и различными, необходимо и достаточно, чтобы была иннорно положительной, если $a_0 > 0$, и иннорно отрицательной, если $a_0 < 0$, матрица /5, следствие 2.1, стр.60/

$$\Delta^{1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_0 & 3a_1 & 2a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 4a_0 & 3a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 4a_0 & 3a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 4a_0 & 3a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Эти условия для $\mathcal{L} > 0$ приводят к неравенствам

$$\Delta_3^1 = \mathcal{L}^2\Omega^5[(3\Omega-8)\mathcal{L}+8\beta] > 0, \tag{5.2}$$

$$\Delta_5^1 = \mathcal{L}^2\Omega^7\{3\Omega^2\mathcal{L}^2+[(\mathcal{L}-\beta)^2-8(\mathcal{L}-\beta)+6(\beta-3)]\Omega\mathcal{L}-$$
$$-4(\mathcal{L}-\beta)[(\mathcal{L}-\beta)^2+4\mathcal{L}]\} > 0,$$

$$\Delta_7^1 = \mathcal{L}^2\Omega^8\{4(\Omega-4)\mathcal{L}^4-4[2(\Omega-4)^2+\Omega+(3\Omega-16)\beta]\mathcal{L}^3+$$
$$+4[(\Omega-4)(\Omega^2+\Omega+16)+(64+7\Omega-5\Omega^2)\beta+3(\Omega-8)\beta^2]\mathcal{L}^2-$$
$$-[(27-18\beta-\beta^2)\Omega^2-4\Omega\beta(36-23\beta-\beta^2)+64(2-\beta)\beta^2]\mathcal{L}+$$
$$+4(\Omega-4\beta)\beta^3\} > 0.$$

Если $\mathcal{L} < 0$, то знаки всех трех неравенств (5.2) следует изменить на противоположные.

Если $\Delta_7^1 = 0$, то уравнение (5.I) имеет кратные корни. В случае, когда $L > 0$, уравнение (5.I) имеет два вещественных и пару комплексных корней, если $\Delta_7^1 < 0$, и не имеет вещественных корней, если $\Delta_7^1 > 0$ и не выполняется хотя бы одно из первых двух неравенств (5.2). В случае, когда $L < 0$, уравнение (5.I) имеет два вещественных и пару комплексных корней, если $\Delta_7^1 > 0$, и не имеет вещественных, если $\Delta_7^1 < 0$, и кроме того, имеет место хотя бы одно из неравенств $\Delta_3^1 > 0,\ \Delta_5^1 > 0$.

На плоскости параметров L, Ω при фиксированном значении параметра β границы областей выполнения первых двух неравенств (5.2) определяются уравнениями

$$L = 0;\quad \Omega = 0;\quad L = \frac{8\beta}{8 - 3\Omega};\quad \Omega = \frac{1}{6L}\Big\{-(L-\beta)^2 + 8(L-\beta) - 6(\beta-3) \pm \Big\{\big[(L-\beta)^2 - 8(L-\beta) + 6(\beta-3)\big]^2 + 48(L-\beta)\big[(L-\beta)^2 + 4L\big]\Big\}^{1/2}\Big\}. \tag{5.3}$$

На рис. 3. показан ряд кривыех (5.3) и указаны областа одновременного выполнения первых двух условий (5.2) (наклонная штриховка), при этом изображенные пунктирными линиями две ветви кривой, определяемой уравнением $\Delta_5^1 = 0$, существуют лишь тогда, когда в (5.3) выражение под знаком корня положительно при $L = 0$, т.е. когда $\varphi(\beta) = (\beta^2 + 14\beta - 18)^2 - 48\beta^3 > 0$. Уравнение $\varphi(\beta) = 0$ при $\beta \geq 1$ имеет только один вещественный корень $\beta = \beta_*$, $5 < \beta_* < 6$, так как $\varphi(5) = -71 < 0$, $\varphi(6) = 36 > 0$.

Для построения границы области выполнения последнего условия в (5.2) введем в рассмотрение вещественную алгебраическую функцию $\lambda = \lambda(\Omega, \beta)$, определяемую уравнением $\Delta_4^1 = 0$. Для ветвей этой функции получаем с использованием диаграммы Ньютона /6, § 38/ следующие разложения.

Для малых значений $|\Omega - 4|$

$$\lambda = \frac{a_{-1}^{(1)}}{\Omega - 4} + a_0^{(1)} + a_1^{(1)}(\Omega - 4) + a_2^{(1)}(\Omega - 4)^2 + \ldots$$

$$a_{-1}^{(1)} = -4(\beta - 1), \quad a_0^{(1)} = 1 + 3\beta, \quad a_1^{(1)} = 2,$$

$$a_2^{(1)} = -\frac{48\beta(\beta-1)^2 + 12(\beta-1)(\beta^2 - 9\beta + 9) + \beta^3}{16(\beta-1)^2};$$

$$\lambda = a_0^{(2)} + a_1^{(2)}(\Omega - 4) + a_2^{(2)}(\Omega - 4)^2 + \ldots$$

$$a_0^{(2)} = \beta + 3\left[(\beta-1)^{1/3} + (\beta-1)^{2/3}\right] > 0,$$

$$a_1^{(2)} = \frac{(\beta-1)^{1/3}\left[1 + (\beta-1)^{1/3} + (\beta-1)^{2/3}\right]\left\{\beta + 3\left[(\beta-1)^{1/3} + (\beta-1)^{2/3}\right]\right\}}{4\left[1 + (\beta-1)^{2/3} + (\beta-1)^{4/3}\right]} > 0;$$

для малых значений $|\Omega - 4\beta|$

$$\lambda = a_1^{(3)}(\Omega - 4\beta) + a_2^{(3)}(\Omega - 4\beta)^2 + a_3^{(3)}(\Omega - 4\beta)^3 + \ldots$$

$$a_1^{(3)} = \frac{\beta}{4(\beta-1)}, \quad a_2^{(3)} = \frac{\beta - 2}{16(\beta-1)^2}, \quad a_3^{(3)} = \frac{8\beta^3 - 9\beta^2 + 3\beta - 1}{64\beta(\beta-1)^3};$$

для больших значений $\Omega > 0$

$$L = a_2^{(4,5)}\Omega + a_1^{(4,5)}\Omega^{1/2} + a_0^{(4,5)} + a_{-1}^{(4,5)}\Omega^{-1/2} + a_{-2}^{(4,5)}\Omega^{-1} + \ldots$$

$$a_2^{(4)} = a_2^{(5)} = 1, \quad a_1^{(4)} = -a_1^{(5)} = -2\sqrt{2(\beta-1)},$$

$$a_0^{(4)} = a_0^{(5)} = -\frac{1}{2}(7-3\beta);$$

для больших значений $|\Omega|$ и $\beta > 9$

$$L = \frac{a_{-1}^{(6,7)}}{\Omega} + \frac{a_{-2}^{(6,7)}}{\Omega^2} + \frac{a_{-3}^{(6,7)}}{\Omega^3} + \ldots$$

$$8a_{-1}^{(6,7)} = 27 - 18\beta - \beta^2 \pm (\beta-1)^{1/2}(\beta-9)^{3/2} < 0,$$

$$8a_{-2}^{(6,7)} = -(\beta^3+\beta^2+63\beta-81) \pm (\beta^4-12\beta^3-54\beta^2+972\beta+2187) \times$$

$$\times \; (\beta-1)^{1/2}(\beta-9)^{-3/2};$$

остальные коэффициенты не приводятся в силу громоздкости их выражений.

Эти разложения позволяют построить график функции $L = L(\Omega, \beta)$. На рис. 3 показан вид границы области выполнения условия $\Delta_7^1 > 0$, если $L > 0$, и $\Delta_7^1 < 0$, если $L < 0$ (перекрестная штриховка), при этом пунктирные линии ограничивают области, которые существуют только для $\beta > 9$. Кроме того, на рис.3 схематично указано относительное расположение точек O', O и C в невозмущенном движении (I.3) для каждого из четырех квадрантов (L, Ω) - плоскости. Те части этой плоскости, которые не отмечены перекрестной штриховкой, соответствуют значениям параметров, для которых движение (I.3) неустойчиво и уравнение (2.2) имеет по крайней мере одну пару комплексных корней. Области $(\mathcal{L},\Omega)$ – плоскости, выделенные перекрестной штриховкой, соответствуют значениям параметров, для которых движение (I.3) устойчиво (весь третий квадрант и обширная область первого квадранта, которая ограничивается лучом $\mathcal{L}=0,\ \Omega\geq 4\beta$ и одной из ветвей кривой $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\Omega,\beta)$, уходящей в бесконечность при $\Omega\to\infty$), а также значениям параметров, для которых движение (I.3) устойчиво в первом приближении; таких областей три: одна из них лежит в первом квадранте и ограничена ветвью кривой $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\Omega,\beta)$, которая уходит в бесконечность при $\Omega\to 4\ (\Omega<4)$ и при $\Omega\to\infty$, а две другие, вытянутые в направлении оси Ω и сжатые в направлении оси $\mathcal{L}$, лежат во втором и четвертом квадрантах, причем эти две области существуют только для значений $\beta>9$.

Вычислительный центр
АН СССР

Литература

I. Е.П.Морозова. ПММ, т.XX, вып.5, 1956, с.621-626.
2. М.Е.Темченко. Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1969, № I, с.26-31.
3. В.Н.Рубановский, С.Я.Степанов. ПММ, т.33, вып.5, 1969, с.904-912.
4. Н.Г.Четаев. Устойчивость движения. М., "Наука", 1965.

208 с.

5. Э.Джури. Инноры и устойчивость динамических систем. М., "Наука", 1979, 304 с.
6. Н.Г.Чеботарев. Теория алгебраических функций. М.-Л., 1948, 396 с.

ვ. რუბანოვსკი

ძაფზე ჩამოკიდებული დინამიკურად სიმეტრიული მყარი სხეულის თანაბარი ვერტიკალური ბრუნვის მდგრადობის შესახებ

რეზიუმე

განხილულია ამოცანა ძაფზე ჩამოკიდებული სიმეტრიული მყარი სხეულის მოძრაობის შესახებ სიმძიმის ძალთა ერთგვაროვან ველში. გამოკვლეულია მექანიკური სისტემის ვერტიკალური თანაბარი ბრუნვის მდგრადობა და მოცემულია მდგრადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების ანალიზი.

V.Rubanovski

ON THE STABILITY OF A UNIFORM VERTICAL ROTATION OF A DYNAMICALLY SYMMETRIC RIGID BODY, SUSPENDED ON THE THREAD

Summary

The paper analyses the necessary and sufficient conditions of stability of a uniform vertical rotation of a symmetric rigid body, suspended on the thread.

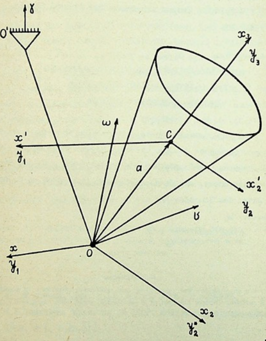


Рис. I

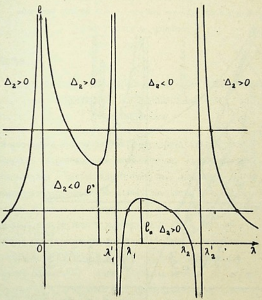
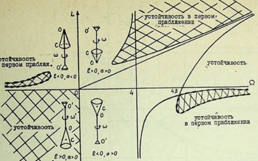

ρ
$\Delta_2>0$
$\Delta_2>0$
$\Delta_2<0$
$\Delta_2>0$
$\Delta_2<0$
ρ^*
ρ_*
$\Delta_2>0$
0
λ_1'
λ_1
λ_2
λ_2'
λ

Рис. 2



L
устойчивость в первом приближения
устойчивость в первом приближ.
устойчивость
Ω
0
4
4β
устойчивость в первом приближения
устойчивость
$\ell<0, a<0$
$\ell>0, a>0$
$\ell>0, a>0$
$\ell<0, a>0$

Рис. 3

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

259, 1985

УДК 517.9

АНАЛОГ ПРИНЦИПА СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ПЛОСКИХ НЕОДНОРОДНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ И НЕОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛ

И.Н.Тавхелидзе

В настоящей статье получены априорные оценки решений, аналогичные энергетическим неравенствам, выражающим принцип Вен-Венана в теории упругости (см., например, /1-6/). На основе этих оценок исследовано поведение решений эллиптического уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами в окрестности нерегулярных точек границы и в окрестности бесконечности, доказана теорема единственности решения задачи Дирихле в неограниченных областях.

Пусть область Ω лежит в полуплоскости $R^2_+ = \{x = (x_1, x_2): x_1 > 0\}$. В области Ω рассмотрим задачу плоской теории упругости неоднородных тел (см., например, /7/)

$$\Delta\big(a(x)\Delta u(x)\big) + \ell^{\alpha\beta}(x)\, u_{\alpha\beta}(x) = f(x) \qquad (1)$$

с граничными условиями Дирихле

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \varphi_0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = \varphi_1, \qquad (2)$$

где Δ - оператор Лапласа, греческие индексы α, β принимают значения 1,2 и предполагается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 2, ν - направление единичной нормали к границе области $\partial\Omega$, $u_\alpha = \partial u / \partial x_\alpha$, $u_{\alpha\beta} = \partial^2 u / \partial x_\alpha \partial x_\beta$. $a(x)$ - строго положительная и достаточно гладкая функция.

Через $H_2(\Omega, \gamma)$ будем обозначать пространство Соболева, полученное пополнением по норме

$$\| v \| = \Big(\int\limits_\Omega \sum_{|\ell| \leq 2} (D^\ell v)^2 dx \Big)^{1/2} \tag{3}$$

множества два раза непрерывно дифференцируемых в Ω функций $v(x)$, равных нулю в окрестности γ , где $\gamma \in \partial\Omega$, если Ω - ограниченная область. Если же Ω неограничена, то $v(x) = 0$ в пересечении Ω с некоторой окрестностью бесконечно удаленной точки. Здесь $\ell = (\ell_1, \ell_2)$, $D^\ell = D_1^{\ell_1} D_2^{\ell_2}$ и $D_i = \partial / \partial x_i$; $i = 1,2$.

I. Функцию $u(x)$ будем называть обобщенным решением уравнения (I) в ограниченной области Ω с граничными условиями $u = u_1 = u_2 = 0$ на γ , где γ - часть $\partial\Omega$, если $u(x) \in H_2(\Omega, \gamma)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_\Omega [a(x) E_2(u,v) + c^{\alpha\beta}(x) u_{\alpha\beta} v] dx = \int\limits_\Omega f v dx , \tag{4}$$

где $c^{11} = a_{22} + b^{11}$; $c^{12} = b^{12} - a_{12}$; $c^{22} = a_{11} + b^{22}$ (5)

при всех $v(x) \in H_2(\Omega, \partial\Omega)$; $f \in L_2(\Omega)$; $E_i(u,v) = \sum_{|\ell| = i} \frac{i!}{\ell!} D^\ell u D^\ell v$,

$i = 0,1,2$; $\ell! = \ell_1! \ell_2!$. Легко можно проверить, что классическое решение уравнения (I) в Ω , удовлетворяющее граничным условиям $u = u_1 = u_2 = 0$ на γ , является также обобщенным решением, если $\partial\Omega$ - достаточно гладкая.

Пусть функции $\mu(t)$ и $M_i(t)$ (i = 0,I,2) такие, что

$$0<\mu(t)\leq \lambda(t)\equiv$$
$$\equiv \inf_{u\in\mathfrak{M}}\left\{\int_{S_t} a(x)E_2(u)dx_2\left|\int_{S_t} a(x)B_2(u)dx_2\right|^{-1}\right\}, \tag{6}$$

$$0<M_i(t)\leq \Lambda_i(t)\equiv$$
$$\equiv \inf_{u\in\mathfrak{M}}\left\{\int_{S_t} a(x)E_2(u)dx_2\left|\int_{S_t} a(x)E_i(u)dx_2\right|^{-1}\right\}, \tag{7}$$

где $\mathfrak{M}$ – множество непрерывно дифференцируемых в окрестности $\bar{S}_t$ функций $u(x)$ таких, что $u=u_1=u_2=0$ на концах интервалов, входящих в $\bar{S}_t \cap \partial\Omega$; $S_t=\Omega\cap\{x: x_1=t\}$; $B_2(u)=u_1^2+u_2^2-u_{11}u$; $E_i(u)=E_i(u,u)$ при i =0,I,2. Легко видеть, что $M_2(t)\equiv$ I. Положим $\Omega_t=\Omega\cap\{x: x_1<t\}$.

<u>Теорема I</u>. Пусть Ω ограничена и лежит в $\mathbb{R}_+^2$. Множество S_t не пусто при всех $t\in(0,T)$, $T=const>0$, $f=0$ в Ω. Предположим, что для коэффициентов $a(x)$ и $b^{\alpha\beta}(x)$ выполнены следующие условия:

$$|c^{\alpha\beta}(x)|\leq \eta_0(x_1)a(x);\quad |a_1(x)|\leq \eta_1(x_1)a(x);$$
$$|a_{11}|\leq \eta_2(x_1)a(x), \tag{8}$$

где $\eta_0(t)\leq \min\left\{\frac{1}{4},\frac{M_0(t)}{16}\right\}$; $\eta_1(t)\leq \min\left\{\frac{1}{4},\frac{M_1(t)}{16}\right\}$; $\eta_2(t)\leq \frac{M_1(t)}{16}$.

Тогда для обобщенного решения $u(x)$ уравнения (I) в области Ω_T с граничными условиями $u(x)=\partial u/\partial\nu=0$ на $\partial\Omega\cap\partial\Omega_T$ справедливы неравенства

$$\varepsilon\int_{\Omega_T} a(x)M_i(x_1)E_i(u)\Phi(x_1,T,\varepsilon)dx\leq$$
$$\leq\int_{\Omega_T} a(x)(1-\kappa(x))E_2(u)dx \tag{9}$$

при всех i = 0,I,2 и $\varepsilon=const\in$ (0, I/2), где

$$0\leq\kappa(x_1)\equiv 2(\eta_2(x_1))\{M_1(x_1)\}^{-1}+4\eta_0(x_1)\{M_0(x_1)\}^{-1}\leq\frac{1}{2}. \tag{10}$$

$\Phi(x_1,T,\varepsilon)$ не возрастает и удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$2\left|\frac{d^2}{dx_1^2}\Phi(x_1,T,\varepsilon)\right|\leq(1-\varepsilon-\kappa(x_1))\mu(x_1)\Phi(x_1,T,\varepsilon) \qquad (11)$$

при $0\leq x_1\leq T$ с начальными условиями

$$\Phi(T,T,\varepsilon)=1;\qquad \frac{d}{dx_1}\Phi(T,T,\varepsilon)=0; \qquad (12)$$

$\mu(x_1)$ – ограниченная функция при $0<x_1\leq T$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $v(x)=u(x)[\Phi-1]\equiv u\Psi$. Легко видеть, что интегральное тождество (4) имеет вид

$$\int_{\Omega_T} a(x)E_2(u)\Psi dx=$$
$$=\int_{\Omega_T}(-a(x)u_{11}u\Psi_{11}'-a(x)(u_\alpha u_\alpha)_1\Psi_1+C^{\alpha\beta}(x)u_{\alpha\beta}u\Psi)dx. \qquad (13)$$

После элементарных преобразований и учета свойств (8) равенство (13) можно переписать следующим образом:

$$\int_{\Omega_T} a(x)E_2(u)\Psi dx\leq\int_{\Omega_T}a(x)B_2(u)\Psi_{11}'dx-\int_{\Omega_T}\eta_2(x_1)a(x)u_\alpha u_\alpha\Psi dx+$$

$$+\int_{\Omega_T}\eta_1(x_1)a(x)u_\alpha u_{\alpha 1}\Psi dx+\int_{\Omega_T}\eta_1(x_1)a(x)u_\alpha u_\alpha\Psi dx+$$

$$+\int_{\Omega_T}\frac{1}{2}\eta_0(x_1)a(x)E_2(u)\Psi dx+2\int_{\Omega_T}\eta_0(x_1)a(x)u^2\Psi dx.$$

Полученное неравенство можно переписать в виде

$$\int_{\Omega_T}a(x)E_2(u)\Psi dx\leq 2\int_{\Omega_T}a(x)B_2(u)\Psi_{11}dx+ \qquad (14)$$

$$+2\int\limits_{\Omega_T}(\eta_2(x_1)+\eta_1(x_1))a(x)E_1(u)\Psi dx+4\int\limits_{\Omega_T}\eta_0(x_1)a(x)E_0(u)\Psi dx.$$

Пусть $u_n(x)$ – последовательность дважды непрерывно дифференцируемых функций в $\overline{\Omega}_T$, равных нулю в окрестности множества $\partial\Omega\cap\partial\Omega_T$, сходящаяся при $n\to\infty$ к $u(x)$ по норме (3). Из соотношений (6), (7), (II) и неравенства (I4) получаем

$$\int\limits_{\Omega_T} a(x)E_2(u_n)\Psi dx \leqslant \int\limits_{\Omega_T} a(x)E_2(u_n)(1-\varepsilon)(\Psi+1)dx - \int\limits_{\Omega_T} a(x)K(x_1)E_2(u_n)dx, \qquad (I5)$$

где $K(x_1)$ определено соотношением (I0). В неравенстве (I5), устремляя $n\to\infty$, получим соотношение (9) при $i=2$. Остальные неравенства при $i=0,1$ вытекают из определения (7) и оценки (9) при $i=2$. Теорема I полностью доказана.

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

Теорема 2. В условиях теоремы I справедлива оценка

$$\int\limits_{\Omega_{t_0}} a(x)(1-K(x_1))E_2(u)dx \leqslant \frac{1}{\Phi(t_0,t_1)}\int\limits_{\Omega_{t_1}} a(x)(1-K(x_1))E_2(u)dx \qquad (I6)$$

при всех $0<t_0\leqslant t_1\leqslant T$, где функция $\Phi(x_1,t_1)$ удовлетворяет при $t_0\leqslant x_1\leqslant t_1$ дифференциальным неравенствам

$$2\left|\frac{d^2}{dx_1^2}\Phi(x_1,t_1)\right| \leqslant (1-K(x_1))\mu(x_1)\Phi(x_1,t_1);\quad \Phi_1(x_1,t_1)\leqslant 0;$$
$$\Phi(x_1,t_1)\geqslant 1$$

с начальными условиями

$$\Phi(t_1,t_1)=1; \quad \Phi_1(t_1,t_1)=0.$$

Неравенство (I6) является аналогом принципа Сен-Венана для неоднородных тел.

<u>Замечание</u>. Из неравенства (I6) и из свойств функции $K(x_1)$ легко получить оценку вида

$$\int_{\Omega_{t_0}} E_2(u)\,dx \leq 2\max_{\Omega_{t_1}}\{a(x)\}\Big[\Phi(t_0,t_1)\min_{\Omega_{t_0}}\{a(x)\}\Big]^{-1}\int_{\Omega_{t_1}} E_1(u)\,dx,$$

которая справедлива при всех $0<t_0\leq t_1\leq T$.

На основе доказанных выше оценок получим следующую теорему.

<u>Теорема 3 (единственности)</u>. Пусть Ω - неограниченная область в R^2_+ и для уравнения (I) справедлива теорема единственности решения задачи Коши. Предположим, что $u(x)$ является обобщенным решением уравнения (I) в области Ω_t с нулевыми граничными условиями $u=\partial u/\partial\nu=0$ на $\partial\Omega_t\cap\partial\Omega$ при любом $t>0$, $f(x)=0$ в Ω; коэффициенты уравнения (I) удовлетворяют условиям (8). Тогда, если для некоторой последовательности $t_n\to\infty$ и некоторого $d=const>0$ имеем

$$\int_{\Omega_{t_n}} a(x)E_2(u)(1-K(x_1))\,dx \leq \varepsilon(t_n)\Phi(d,t_n), \tag{I7}$$

где $\varepsilon(t_n)\to 0$ при $t_n\to\infty$, то $u(x)\equiv 0$ в Ω.

<u>Доказательство</u>. Согласно теореме 2 и условия (I7) находим, что

$$\int_{\Omega_d} a(x)(1-K(x_1))E_2(u)\,dx \leq$$

$$\Phi(d,t_n)^{-1}\int_{\Omega_{t_n}} a(x)(1-K(x_1))E_2(u)\,dx \leq \varepsilon_n(t)$$

при любом $t_n>d$. Отсюда вытекает, что левая часть полученного неравенства равна нулю. Следовательно, $u \equiv 0$ в Ω_d. Так как для уравнения (I) верна теорема единственности решения задачи Коши, то $u(x) \equiv 0$ в Ω.

<u>Замечание</u>. Как известно, теорема единственности для решения задачи Коши справедлива, если коэффициенты уравнения (I) аналитичны. При других условиях для коэффициентов уравнения (I) теорема единственности решения задачи Коши доказана в работе /8/.

Оценим снизу функции $\varkappa(t)$ и $\Lambda_i(t)$ при $i=0,\mathrm{I}$. Пусть $\hat{a}(t) = \max\limits_{S_t}\{a(x)\}$ и $\check{a}(t) = \min\limits_{S_t}\{a(x)\}$.

<u>Лемма</u>. Для любого $t>0$, для которого S_t не пусто,

$$\varkappa(t) \geq 2\pi^2 (\ell(t))^{-2}\, \hat{a}(t)(\check{a}(t))^{-1}; \tag{18}$$

$$\Lambda_1(t) \geq 2\pi^2 (\ell(t))^{-2}\, \hat{a}(t)(\check{a}(t))^{-1}; \tag{19}$$

$$\Lambda_0(t) \geq (4,73)^4 (\ell(t))^{-4}\, \check{a}(t)(\check{a}(t))^{-1}, \tag{20}$$

где $\ell(t)$ – длина наибольшего интервала, входящего в S_t.

<u>Доказательство</u>. Пусть $u \in C^2(\bar{\Omega}_T)$ и удовлетворяет условиям теоремы I. Воспользуемся очевидным неравенством $2ab \leq \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2$, $\varepsilon = const > 0$, и неравенствами из вариационной теории собственных функций

$$\begin{aligned}
&\int_{S_t} v_1^2\, dx_2 \leq \left(\frac{\ell(t)}{\pi}\right)^2 \int_{S_t} v_{12}^2\, dx_2; \\
&\int_{S_t} v^2\, dx_2 \leq \left(\frac{\ell(t)}{4,73}\right)^4 \int_{S_t} v_{22}^2\, dx; \\
&\int_{S_t} v_2^2\, dx_2 \leq \left(\frac{\ell(t)}{2\pi}\right)^2 \int_{S_t} v_{22}^2\, dx_2,
\end{aligned} \tag{2I}$$

где $v(x)$ такова, что $v=v_1=v_2=0$ на $\partial\Omega\cap\bar{S}_t$ (см., например, /9/). Имеем

$$\left|\int\limits_{S_t} a(x)B_2(u)dx_2\right| \leq \int\limits_{S_t} a(x)\left[u_1^2+u_2^2+\frac{\varepsilon(t)}{2}u_{11}^2+\frac{1}{2\varepsilon(t)}u^2\right]dx_2 \leq$$

$$\leq \check{a}(t)\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\ell(t)}{\pi}\right)^2\int\limits_{S_t} 2u_{12}^2dx_2+\left(\frac{\ell(t)}{2\pi}\right)^2\int\limits_{S_t} u_{22}^2dx_2+\frac{\varepsilon(t)}{2}\int\limits_{S_t} u_{11}^2dx_2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\varepsilon(t)}\left(\frac{\ell(t)}{4{,}73}\right)^4\int\limits_{S_t} u_{22}^2dx_2\right\},$$

где $\varepsilon(t)>0$. Выберем $\varepsilon(t)$ так, что $\frac{1}{2}\varepsilon(t)=\left(\frac{\ell(t)}{2\pi}\right)^2+\frac{1}{2\varepsilon(t)}\left(\frac{\ell(t)}{4{,}73}\right)^4$.
Легко подсчитать, что $\frac{1}{2}\left(\frac{\ell(t)}{\pi}\right)^2>\left(\frac{\ell(t)}{2\pi}\right)^2+\frac{1}{\varepsilon(t)}\left(\frac{\ell(t)}{4{,}73}\right)^4=\frac{\varepsilon(t)}{2}$.
Поэтому

$$\left|\int\limits_{S_t} a(x)B_2(u)dx_2\right| \leq \check{a}(t)\,\frac{1}{2}\left(\frac{\ell(t)}{\pi}\right)^2\int\limits_{S_t} E_2(u)dx_2 \leq$$

$$\leq \frac{\check{a}(t)}{\hat{a}(t)}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\ell(t)}{\pi}\right)^2\int\limits_{S_t} a(x)E_2(u)dx_2.$$

Итак, полученное неравенство доказывает справедливость оценки (18). Справедливость оценок (19) и (20) доказывается аналогично.

II. Рассмотрим случай, когда при $x_1 = 0$ на границе ограниченной области Ω имеются особые точки. В этом случае функция $\mathscr{H}(t)$, определенная соотношением (6), неограниченно возрастает при $t\longrightarrow 0$. Справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 4</u>. Пусть выполнены все условия теоремы I, кроме предположения об ограниченности функций Φ и μ при $0<x_1<T$. Будем полагать, что $\Phi \to \infty$ и $\mu \to \infty$ при $x_1 \to 0$ и функции Φ и μ ограничены при $\delta<x_1<T$ для любого $\delta>0$. Тогда справедливы оценки (9).

<u>Доказательство</u>. Для любого $\delta>0$ построим функцию

$$\mu(x_1,\delta)=\begin{cases} \mu(x_1) & \text{при } \delta<x_1\leq T \\ \min\{\mu(x_1),\ \mu(\delta)\} & \text{при } 0<x_1\leq\delta \end{cases}$$

Из построения функции $\mu(x_1,\delta)$ следует, что при любом фиксированном $\delta>0$ эта функция ограничена на $[0,T]$. Далее, пусть $\Phi_\delta(x_1,T,\varepsilon)$ такова, что при всех $\delta>0$

$$2\left|\frac{d^2}{dx_1^2}\Phi_\delta(x_1,T,\varepsilon)\right|\leq\mu(x_1,\delta)(1-\varepsilon-\kappa(x_1))\Phi_\delta(x_1,T,\varepsilon)$$

и выполнены начальные условия (12). Итак, при любом фиксированном $\delta>0$ выполняются все требования теоремы I для Φ_δ и поэтому

$$\varepsilon\int_{\Omega_T}a(x)\Phi_\delta(x_1,T,\varepsilon)M_1(x_1)E_1(u)dx\leq\int_{\Omega_T}a(x)(1-\kappa(x_1))E_2(u)dx.$$

Заметим, что $\Phi_\delta=\Phi$ при $x_1>\delta$. Поэтому из последнего неравенства вытекает, что при любом достаточно малом $\delta>0$

$$\int_{\Omega_T\setminus\Omega_\delta}a(x)\Phi(x_1,T,\varepsilon)M_1(x_1)E_1(u)dx\leq\int_{\Omega_T}a(x)\Phi_\delta(x_1,T,\varepsilon)M_1(x_1)E_1(u)dx\leq$$

$$\leq\varepsilon^{-1}\int_{\Omega_T}a(x)(1-\kappa(x_1))E_2(u)dx.$$

Из этого соотношения и следует справедливость оценок (9) при всех $i = 0,1,2$, что и доказывает теорему.

Из справедливости оценок (9) несложно доказать следующую теорему, доказательство которой аналогично доказательству (см., стр.249 /6/).

Теорема 5. Пусть выполнены все требования теоремы 4. Тогда $u(x) \in C(\Omega_T)$ и справедлива оценка

$$|u(x_1, x_2)|^2 \leq 3\left[\varepsilon \Phi(x_1, T, \varepsilon) \min_{\Omega_T} \{a(x)\}\right]^{-1} \times \times M_0^{-1/4}(x_1) M_1^{-1/2}(x_1) \int_{\Omega_T} a(x)(1-\kappa(x_1)) E_2(u) dx \qquad (22)$$

при всех $x \in \Omega_T$, $M_i(x_1)$ - неубывающие, непрерывно дифференцируемые при $0 < x_1 < T$ функции, удовлетворяющие соотношениям (7), $i = 0,1$.

Рассмотрим некоторые классы областей Ω и в условиях теоремы 4 изучим поведение решения уравнения вблизи нерегулярной точки границы.

а) Пусть область Ω_T в окрестности начала координат лежит внутри угла $\{x: |x_2| \leq 2^{-1} M x_1, M = const > 0\}$. Пусть $0 < N_1 \leq a(t) \leq N_2 < \infty$ при всех $0 < t < T$. Тогда согласно (18) можно положить $(\mu(x_1))^{-1} = N_2 M^2 (2 \pi^2)^{-1} x_1^2$ и решением задачи (11), (12) является функция

$$\Phi(x_1, T, \varepsilon) = (s_1 + s_2)^{-1} \left[s_2 \left(\frac{x_1}{T}\right)^{s_1} + s_1 \left(\frac{x_1}{T}\right)^{-s_2}\right],$$

где $s_1, s_2 = const > 0$ и $s_1, -s_2$ — корни уравнения $s(s-1) = 2\pi^2 (N_2 M^2)^{-1} (2^{-1} - \varepsilon)$. Очевидно, что $\Phi \longrightarrow \infty$ и $\mu \longrightarrow \infty$ при $x_1 \longrightarrow 0$. В этом случае оценка (22) принимает следующий вид:

$$|u(x_1,x_2)|^2 \leq C|x_1|^{2+\varsigma_2} N_2 \left(\min_{\Omega_T}\{a(x)\}\right)^{-1} \int_{\Omega_T} a(x) E_2(u)\,dx,$$

где $C>0$ – постоянная, зависящая от M. Полученная оценка показывает степенной характер убывания решения $u(x)$ при $x_1 \to 0$.

в) Пусть область Ω_T в окрестности начала координат лежит внутри острия $\{x:|x_2| \leq \mathfrak{M} M x_1^{1+p},\ M, p = const > 0\}$. Пусть $0 < N_1 \leq \hat{a}(t)/\hat{a}(t) \leq N_2 < +\infty$ при всех $t \in [0,T]$. Тогда согласно (18) можно положить $(\mu(x_1))^{-1} = N_2 M^2 x_1^{2(p+1)}$, и решением задачи (11), (12) является функция вида

$$\left(\Phi(x_1,T,\varepsilon)\right)^{-1} = c\ exp\left\{-\frac{3}{\sqrt{N_2}}\left(x_1^{-p} - T^{-p}\right)\right\},$$

где C и ς – положительные постоянные, зависящие от M и p. В рассматриваемом случае оценка (22) имеет вид

$$|u(x_1,x_2)|^2 \leq \bar{C} N_2 |x_1|^{2(p+1)} \left(\min_{\Omega_T}\{a(x)\}\right)^{-1} \times$$

$$\times\ exp\left\{-\frac{3}{\sqrt{N_2}}\left(x_1^{-p} - T^{-p}\right)\right\} \int_{\Omega_T} a(x) E_2(u)\,dx,$$

где $\bar{C}$ – постоянная, зависящая от M и p. Полученная оценка показывает, что решение уравнения (1) в Ω_T с граничными условиями $u = \partial u/\partial\nu = 0$ на $\partial\Omega \cap \partial\Omega_T$ и при $f(x) = 0$ в Ω_T стремится к нулю при $x_1 \to 0$.

III. Рассмотрим вопрос о поведении при $x_1 \to \infty$ решении задачи (1), (2) в неограниченной области Ω.

Пусть Ω – неограниченная область. Предположим, что пересечение S_t области Ω с прямой $x_1 = t$ не пусто при каждом $t > T > 0$. Положим $\Omega_t^+ = \Omega \cap \{x : x_1 > t\}$, $\Omega(t_0, t_1) = \Omega \cap \{x : t_0 < x_1 < t_1\}$. Будем говорить, что $u(x)$ является обобщенным решением уравнения (I) в Ω_T^+, удовлетворяющим граничным условиям $u = \partial u/\partial \nu = 0$ на $\partial\Omega \cap \partial\Omega_T^+$, если для любого $t > T > 0$ функция $u \in H_2(\Omega(T,t), \partial\Omega \cap \partial\Omega(T,t))$ и выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega(T,t)} [E_2(u,v)a(x) + c^{\alpha\beta}(x) u_{\alpha\beta}(x) v(x)]dx = \int\limits_{\Omega(T,t)} f(x) v(x) dx \qquad (23)$$

для любой $v \in H_2(\Omega(T,t), \partial\Omega(T,t))$, где $c^{\alpha\beta}$ выражаются соотношениями (5) $f \in L_2(\Omega)$.

<u>Теорема 6</u>. Пусть $u(x)$ – обобщенное решение уравнения (I) в Ω_T^+ с граничными условиями $u = \partial u/\partial \nu = 0$ на $\partial\Omega \cap \partial\Omega_T^+$, $f(x) = 0$ в Ω_T^+ и $u \in H_2(\Omega_T^+, \partial\Omega \cap \partial\Omega_T^+)$. Допустим, что коэффициенты уравнения (I) удовлетворяют условиям (8). Тогда справедливы оценки

$$\varepsilon \int\limits_{\Omega_T^+} a(x) M_i(x_1) \mathcal{F}(x_1, T, \varepsilon) E_i(u) dx \leqslant \int\limits_{\Omega_T^+} a(x)(1 - \kappa(x_1)) E_2(u) dx \qquad (24)$$

при всех $i = 0, 1, 2$ и

$$\int\limits_{\Omega_t^+} a(x)(1-\kappa(x_1)) E_2(u) dx \leqslant (F(t,T))^{-1} \int\limits_{\Omega_T^+} a(x)(1-\kappa(x_1)) E_2(u) dx, \qquad (25)$$

где $t > T$; функция $\mathcal{F}(x_1, T, \varepsilon)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$2\left|\frac{d^2}{dx_1^2}\mathcal{F}(x_1,T,\varepsilon)\right| \leq \mu(x_1)(1-\varepsilon-K(x_1))\mathcal{F}(x_1,T,\varepsilon) \tag{26}$$

при $x_1 > T$ с начальными условиями

$$\mathcal{F}(T,T,\varepsilon)=1; \quad \frac{d}{dx_1}\mathcal{F}(T,T,\varepsilon)=0, \tag{27}$$

$\mathcal{F}$ – неубывающая функция x_1, $F(x_1,T)=\mathcal{F}(x_1,T,0)$. Функции $\mu(x_1)$ и $M_i(x_1)$ (i = 0,I,2) удовлетворяют соотношениям (6), (7), $0<K(x_1)<1/2$, функция K определена соотношением (I0).

<u>Доказательство</u>. Пусть $\varphi(x_1)\in C^1([T,\infty))$ и φ'' кусочно непрерывна на $[T,\infty)$, $\varphi(T)=0$, $\varphi'(T)=0$, $\varphi(x_1)\geq 0$. Пусть при $x_1>T+\theta$ $(\theta>0)$ функция $\varphi(x_1)$ линейна, т.е. $\varphi=Px_1+Q$, $P,Q=const>0$ при $x_1>T+\theta$. Тогда функция $a(x)E_2(u)\varphi(x_1)$ суммируема в Ω_T^+ и для нее справедлива оценка

$$\int\limits_{\Omega_T^+} a(x)(1-K(x_1))E_2(u)\varphi(x_1)dx \leq 2\int\limits_{\Omega(T,T+\theta)} a(x)B_2(u)\varphi''(x_1)dx, \tag{28}$$

где $B_2(u)=u_1^2+u_2^2-u_{11}u$. Действительно, при каждом $6>T+\theta$ положим $\varphi^6(x_1)=\varphi(x_1)$, если $T<x_1<6$, $\varphi^6(x_1)=P\sin(x_1-6)+Px_1+Q$, если $6\leq x_1\leq 6+\pi/2$, $\varphi^6(x_1)=P(1+6)+Q$, если $x_1>6+\pi/2$, где P и Q – постоянные, при которых $\varphi^6(x_1)\in C^1([T,\infty))$. Подставляя в интегральное тождество (23) $v(x)=u(x)\varphi(x_1)$, интегрируя по частям и применяя рассуждения, которые использовались в доказательстве теоремы I, находим, что

$$\int\limits_{\Omega_T^+} a(x) E_2(u) \varphi^6(x_1)\,dx \le 2\int\limits_{\Omega(T,T+\theta)} a(x) B_2(u) (\varphi^6(x_1))''\,dx +$$

$$+ 2\int\limits_{\Omega(6,6+\pi/2)} a(x) B_2(u) (\varphi^6(x_1))''\,dx + \int\limits_{\Omega_T^+} a(x) k(x_1) \varphi^6(x_1) E_2(u)\,dx .$$

Заметим, что $k(x_1) \le 1/2$. Поэтому

$$\int\limits_{\Omega_T^+} a(x)(1-k(x_1))\varphi^6(x_1) E_2(u)\,dx \le$$

$$\le 2\int\limits_{\Omega(T,T+\theta)} a(x) B_2(u)(\varphi^6(x_1))''\,dx + 2\int\limits_{\Omega(6,6+\pi/2)} a(x) B_2(u)(\varphi^6(x_1))''\,dx .$$

Перейдем к пределу в полученном неравенстве при $6 \to \infty$. Заметим, что интеграл по $\Omega(6,6+\pi/2)$ в последнем неравенстве стремится к нулю при $6 \to \infty$, так как $(\varphi^6(x_1))''$ равномерно ограничены по 6 и $u \in H_2(\Omega_T^+, \partial\Omega \cap \partial\Omega_T^+)$. Поэтому справедливо неравенство (28).

Пусть $\theta = t$ и в (28) возьмем $\varphi(x_1) = (F(x_1,T)-1)$ при $T \le x_1 \le t$, $\varphi(x_1) = F_1'(t,T)(x_1-t) + F(t,T) - 1$; $(F_1' \equiv dF/dx_1)$ при $x_1 \ge t$. Получим

$$\int\limits_{\Omega_t^+} a(x)(\varphi(x_1)+1) E_2(u)\,dx + \int\limits_{\Omega(T,t)} a(x) F(x_1,T) E_2(u)\,dx \le \tag{29}$$

$$\le \int\limits_{\Omega_t^+} a(x) E_2(u)\,dx + \int\limits_{\Omega_t^+} a(x) k(x_1) \varphi(x_1) E_2(u)\,dx +$$

$$+ 2\int\limits_{\Omega(T,t)} a(x)B_2(u)F_{11}(x_1,T)dx.$$

Оценим последний интеграл в (29). Пусть $u_n(x)$ – последовательность дважды непрерывно дифференцируемых функций в $\Omega(T,t)$, равных нулю в окрестности множества $\partial\Omega\cap\partial\Omega(T,t)$, $u_n \to u(x)$ по норме (3) при $n\to\infty$. Легко видеть, что

$$2\int\limits_{\Omega(T,t)} a(x)B_2(u)F_{11}(x_1,T)dx =$$

$$= 2\int\limits_{\Omega(T,t)} a(x)B_2(u_n)F_{11}(x_1,T)dx + \varepsilon_n ,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n\to\infty$. Оценивая последний интеграл с учетом неравенства (26) при $\varepsilon = 0$ и условия (6) и переходя к пределу при $n\to\infty$, получим, что

$$\left| 2\int\limits_{\Omega(T,t)} a(x)B_2(u)F_{11}(x_1,T)dx \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega(T,t)} u(x)(1-k(x_1))F(x_1,T)E_2(u)dx.$$

Отсюда и из (29) вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega_t^+} a(x)(\varphi(x_1)+1)E_2(u)dx + \int\limits_{\Omega(T,t)} a(x)F(x_1,T)E_2(u)dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega_t^+} a(x)E_2(u)dx + \int\limits_{\Omega_t^+} a(x)k(x_1)(\varphi(x_1)+1)E_2(u)dx -$$

$$-\int\limits_{\Omega_t^+} a(x)\kappa(x_1)E_2(u)dx+\int\limits_{\Omega(T,t)} a(x)F(x_1,T)E_2(u)dx-$$

$$-\int\limits_{\Omega(T,t)} a(x)\kappa(x_1)F(x_1,T)E_2(u)dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega_t^+} a(x)(1-\kappa(x_1))(\varphi(x_1)+1)E_2(u)dx\leq\int\limits_{\Omega_t^+} a(x)(1-\kappa(x_1))E_2(u)dx.$$

Так как φ – возрастающая функция, то из последнего соотношения следует неравенство (25). Аналогичным образом доказываются оценки (24). Итак теорема 6 доказана.

Из справедливости оценок (24) (25) можно легко доказать следующую теорему.

Теорема. Пусть $u(x)$ – обобщенное решение уравнения (I) в Ω_T^+ с граничными условиями $u=\partial u/\partial\nu=0$ на $\partial\Omega\cap\partial\Omega_T^+$ и $u\in H_2(\Omega_T^+,\partial\Omega\cap\partial\Omega_T^+)$, $f=0$ в Ω_T^+, коэффициенты $a(x)$ и $b^{\alpha\beta}(x)$ удовлетворяют условиям (8). Тогда справедлива оценка

$$|u(x_1,x_2)|^2\leq c(\rho)\Big[1+\max_{x_1\leq t\leq x_1+2\rho}\{M_0(t)\}^{-1}\Big]\times \tag{30}$$

$$\times\Big[\varepsilon\mathcal{F}(x_1,T,\varepsilon)\min_{\Omega_{x_1}^+}\{a(x)\}\Big]^{-1}\int\limits_{\Omega_T^+} a(x)(1-\kappa(x_1))E_2(u)dx,$$

где ρ - произвольная постоянная, $\mathcal{F}$ - функция, определенная в теореме 6, $c(\rho)$ зависит только от ρ, функция $M_0(x_1)$ определена условием (7).

Доказательство. Продолжим функцию $u(x)$, полагая $u(x)=0$ вне Ω_T^+. Тогда $u(x)$ в полуплоскости $x_1>T$ имеет ограниченную норму (3). Пусть $x_1>T+\rho$, тогда по теореме вложения Соболева (см./I0/) имеем

$$|u(x_1,x_2)|^2 \leq c(\rho)\left[\int\limits_{V_\rho(x_1+\rho,x_2)} E_2(u)\,dx + \int\limits_{V_\rho(x_1+\rho,x_2)} u^2\,dx\right],$$

где $c(\rho)=const>0$; $V_\rho^{\tilde{x}}=\{x:|x-\tilde{x}|<\rho\}$.

Следовательно,

$$|u(x_1,x_2)|^2 \leq c(\rho)\Big[1+\max_{x_1\leq t\leq x_1+2\rho}\{M_0(t)\}^{-1}\Big]\Big[\min_{\Omega_{x_1}^+}\{a(x)\}\Big]^{-1}\int\limits_{\Omega_{x_1}^+} a(x)E_2(u)\,dx.$$

Здесь мы применили соотношение (7), определяющее функцию $M_0(t)$. Воспользуемся далее оценкой (24). Получим, что для $x\in\Omega_T^+$ верна оценка (3). Теорема доказана.

Рассмотрим некоторые классы областей Ω.

с) Пусть Ω при $x_1>T$ лежит внутри угла $\{x:|x_2|\leq \leq 2^{-1}\pi M x_1\}$, где $M>0$ достаточно малое число. Используя явный вид функции $\mathcal{F}(x_1,T,\varepsilon)$ (см. стр. 249 /6/), из оценки (30) получим, что

$$|u(x_1,x_2)|^2 \leq C(T)N_2\Big(\min_{\Omega_T^+}\{a(x)\}\Big)^{-1}\big(1+M^4(x_1+1)\big)x_1^{-s_1}\int\limits_{\Omega_T^+} a(x)E_2(u)\,dx,$$

где $0<N_1 \leqslant \breve{a}(t)/\hat{a}(t) \leqslant N_2$ при всех $t>T$, s_1 - положительный корень уравнения $s(s-1)=N_2 \mathfrak{P}^2 M^{-2}(2^{-1}-\varepsilon)$, $c(T)$ - постоянная, зависящая от T. Поэтому, если M - достаточно мало, так что $s_1>4$, то эта оценка указывает, что $u \to 0$ при $x_1 \to \infty$.

3) Пусть Ω при $x_1>T$ принадлежит области $\{x: |x_2| \leqslant 2^{-1} M x_1^{1-p},\ M=const>0,\ p=const>0\}$. Предположим, что $0<N_1 \leqslant \breve{a}(t)/\hat{a}(t) \leqslant N_2<+\infty$. Учитывая явный вид функции $\mathfrak{F}(x_1,T,\varepsilon)$ (см./6/), из оценки (30) в случае $0<p<1$ получим

$$|u(x_1,x_2)|^2 \leqslant \frac{c(T)N_2}{\min\limits_{\Omega_T^+}\{a(x)\}}\left(1+M^4(x_1+1)^{4(1-p)}\right)\times$$

$$\exp\left\{-\zeta\left(x_1^p-T^p\right)\right\}\int\limits_{\Omega_T^+}a(x)E_2(u)\,dx,$$

$c(T)$ - постоянная, зависящая от T. Если же $p \geqslant 1$, то оценка (30) принимает вид

$$|u(x_1,x_2)|^2 \leqslant \frac{c(T)N_2}{\min\limits_{\Omega_T^+}\{a(x)\}}\, x_1^{2(1-p)} \exp\left\{-\zeta\left(x_1^p-T^p\right)\right\}\int\limits_{\Omega_T^+}a(x)E_2(u)\,dx.$$

Эти оценки показывают различную скорость затухания функции $u(x)$ при $x_1 \to \infty$ в случае разных p.

Тбилисский математический
институт им. А.М.Размадзе
АН ГССР

Литература

1. Gaetano Fichera. Rend. di Mat., 1977, v. 10.
2. Gaetano Fichera. Rend. di Mat., 1979, v. 12, Serie 4.
3. О.А.Олейник, Г.А.Иосифьян. Сиб. матем.ж., 1978, т.19, № 5.
4. О.А.Олейник, Г.А.Иосифьян, И.Н.Тавхелидзе. Труды ММО, 1981, т.42.
5. И.Н.Тавхелидзе. ДАН СССР, 1979, т.247, № 2.
6. И.Н.Тавхелидзе. Мат. сборник, 1982, т.118, 2.
7. В.А.Ломакин. Теория упругости неоднородных тел. Изд.-во МГУ, 1976.
8. Ю.К.Герасимов. Мат.сборник, 1968, т.19, вып.4.
9. Л.Коллатц. Задачи на собственные значения. М., "Наука", 1968.
10. С.Л.Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950.
11. И.Н.Векуа. Новые методы решения эллиптических уравнений. М., Гостехиздат, 1948.

ი. თავხელიძე

სენ-ვენანის პრინციპის ანალოგი არაერთგვაროვანი დრეკადი შემოსაზღვრული და უსასრულო სხეულებისათვის

რეზიუმე

ნაშრომში არაერთგვაროვანი დრეკადი სხეულის განტოლების ამონახსნთათვის მიღებულია აპრიორული შეფასება, რომელიც ანალოგიურია იმ ენერგეტიკული შეფასებისა, რომელიც გამოსახავს სენ-ვენანის პრინციპს. ამ შეფასების საშუალებით შესწავლილია ამონახსნთა ყოფაქცევა საზღვრის არარეგულარული წერტილების მახლობლობაში და უსასრულო წერტილის მიდამოში.

I.Tavkhelidze

ANALOGUE OF SAINT-VENANT' S PRINCIPLE FOR PLANE INHOMOGENEOUS BOUNDED AND UNBOUNDED BODIES

Summary

The a priori estimates analogous to energetic inequalities expressing Saint-Venant' s principle are obtained to solve the equation of the plane elasticity theory of inhomogeneous bodies. These estimates are used to investigate the solution near the irregular points of the boundary and in the neighbourhood of infinity.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

259, 1985

УДК 532, 546

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

А.Р. Цицкишвили

Рассмотрим задачи плоского установившегося движения грунтовой несжимаемой жидкости, когда движение жидкости подчиняется закону Дарси. Считаем грунт несжимаемым и изотропным /1-5/.

Область движения жидкости отнесем к плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и введем комплексный потенциал $\omega(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$, где $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ – потенциал скорости и функция тока, соответственно, деленные на коэффициент фильтрации. Функции $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ связаны между собой условиями Коши-Римана.

Если найдем аналитическую функцию $\omega(z)$, то в силу зависимостей

$$\varphi(x,y) = -(\pm y + P/\gamma), \quad v_x - i v_y = \omega'(z), \tag{1}$$

где P – гидродинамическое давление, γ – удельный вес жидкости, v_x, v_y – составляющие скорости фильтрации, $\omega'(z)$ – комплексная скорость, могут быть определены все характеристики фильтрационного потока: скорость фильтрации, напор, давление, приведенный расход жидкости на фильтрацию и т.п. Если в составе границы имеется неизвестная часть – депрессионная кривая, тогда дополнительно нужно определить уравнение этой кривой, т.е. нужно определить область движения жидкости.

Для краткости, обозначим области движения жидкости, комплексного потенциала и комплексной скорости через: $S(z)$, $S(\omega)$, $S(\omega')$.

Ниже будем предполагать, что область $S(z)$ оганичена отрезками прямых, прямыми и депрессионными кривыми.

Введем определение: особыми точками границы области фильтрации будем называть точки границы, которым, по крайней мере, на одной из границ областей $S(z)$, $S(\omega)$, $S(\omega')$ могут соответствовать угловые точки.

Особые точки обозначим через $b_1, b_2, \ldots, b_m, b_{m+1}$; они пронумерованы в порядке их встречи при обходе области $S(z)$ в положительном направлении. Угловые точки границы области $S(\omega')$ обозначим через B_j, а соответствующие внутренние углы через $\pi\nu_j$.

Непосредственно найти функцию $\omega(z)$ в общем случае эффективно не удается. Поэтому вводят вспомогательную плоскость $\zeta = t + i\tau$. Производят конформное отображение полуплоскости $\mathcal{I}_m(\zeta) > 0$ на области $S(z)$, $S(\omega)$, находят соответственно две аналитические функции $z = z(\zeta)$, $\omega = \omega(\zeta)$, дающие параметрическое выражение искомого решения.

Пусть точки действительной оси t плоскости ζ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m, a_{m+1} = \infty$ $(-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_m < +\infty)$ переходят, соответственно, в точки $b_1, b_2, \ldots, b_m, b_{m+1}$.

Граничные условия для вышеуказанных областей можно записать так /I-4/:

$$R_e\left[m_{k1}(t)z(t)+m_{k2}(t)\omega(t)\right]=f_k^*(t), \tag{2}$$

$$k=1,2, \quad -\infty<t<+\infty,$$

где $m_{kj}(t)$, $f_k^*(t)$ – известные кусочно-постоянные функции с точками разрыва $t=a_k$, $f_k^*(t)$ зависит от неизвестного параметра Q, связанного с приведенным расходом жидкости, а $z(t)=x(t)+iy(t)$, $\omega(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ – искомые голоморфные функции ζ в полуплоскости $Jm(\zeta)>0$ и имеющие конечное число особых точек $t=a_k$, $t=\infty$, на оси t. Кроме того, часть параметров a_k и Q подлежат определению.

Точки $t=a_j$, не имеющие на контуре области $S(\omega')$ соответствующие угловые точки (им соответствуют угловые точки на границах областей $S(z)$ и $S(\omega)$), называются устранимыми особыми точками.

Фундаментальные исследования задачи (2) и решение целого ряда важных и трудных задач теории фильтрации принадлежит П.Я.Полубариновой-Кочиной /I-4/. Решению задачи (2) посвящены также работы /5-7, I4-I7/. Неполную библиографию по этим вопросам можно найти в работах /I-7/.

Исследование задачи (2) с точки зрения задачи Римана-Гильберта дается в работах Н.П.Векуа /II/, а также в работах /I2-I3/. Но, задача (2) отличается от задачи Римана-Гильберта, когда все $m_{kj}\neq 0$, среди точек $t=a_k$ имеются такие, которым на границах областей $S(z)$, $S(\omega)$ не соответствуют угловые точки, а на границе области $S(\omega')$ соответствуют концы разрезов с углом 2π. В этих точках $t=a_k$ функции $m_{kj}(t)$ непрерывны, поэтому на первый взгляд их можно как-будто не учитывать, но на самом деле, без учета этих точек пока не удается решить задачу. Это значит, что при всех $m_{kj}(t)\neq 0$ эквивалентность задачи (2) с задачей Римана-Гильберта нарушается. Кроме того, часть параметров a_k подлежит определению. Задача аналитического построения функций $z(\zeta)$, $\omega(\zeta)$, при всех $m_{kj}\neq 0$, когда число угловых точек B_j на контуре области $S(\omega')$ равно трем и дополнительно имеется конечное число устранимых особых точек, решается методом П.Я.Полубариновой-Кочиной, а обобщение этих результатов дается в работах автора /I4-I7/. В работах /I4-I7/ составляются все нужные уравнения для определения неизвестных параметров. После этого вся трудность решения задачи (2) сводится к решению полученной сложной системы уравнений относительно неизвестных параметров. Пока удается решать систему трех высших трансцендентных уравнений. Этому соответствуют задачи, для которых на контуре области $S(\omega')$, при всех $m_{kj}\neq 0$, имеется пять угловых точек и среди них хотя бы в одной точке имеется конец разреза с углом 2π, а остальные углы $\pi\gamma_j$ произвольны.

В работах /I4-I7/ предполагается, что точка $\zeta=\infty$ отображается в точку контура $S(z)$, отличную от всех точек b_k. Но, иногда целесообразно точку $\zeta=\infty$ отобразить в угловую точку b_{m+1}, которой соответствует точка B_j. Очевидно также, что этот случай с помощью дробно-линейного преобразования всегда можно свести к рассмотренному случаю /I4-I7/.

Мы ниже будем предполагать, что точка $\zeta=\infty$ переходит в точку ℓ_{m+1}.

Из аналитического представления функций $\varphi(\zeta)$, $\omega(\zeta)$, как частный случай, можно получить представление функций $\varphi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$, когда точка $\zeta=\infty$ будет переходить в точку контура области $S(z)$, отличную от точек ℓ_K. Зато число точек ℓ_K уже будет m.

Заметим, что когда в условии (2) какой-либо один или несколько коэффициентов $m_{kj}(t)=0$, причем $m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}\neq 0$, $-\infty<t<+\infty$, тогда решение (2) строится явно, с помощью интегралов типа Коши. С помощью метода С.Н.Нумерова, в основном, решаются именно такие задачи, когда некоторые $m_{kj}(t)=0$. Он также исследовал и такую задачу, когда все $m_{kj}\neq 0$ /7/.

Введем аналитический вектор $\Phi(\zeta)$ и вектор $f(t)$ /I6-I7/

$$\Phi(\zeta)=\left\{[\varphi(\zeta),\omega(\zeta)],\ \Im_m(\zeta)>0;\ [\overline{\varphi(\bar\zeta)},\overline{\omega(\bar\zeta)}],\ \Im_m(\zeta)<0\right\},\tag{3}$$

$$f(t)=[f_1^*(t),\ f_2^*(t)],\quad -\infty<t<+\infty.\tag{4}$$

Относительно искомого вектора $\Phi(\zeta)$ задачу (2) можно привести к задаче линейного сопряжения /I6-I7, II/.

$$\Phi^+(t)=g(t)\Phi^-(t)+f(t),\quad -\infty<t<+\infty,\tag{5}$$

где $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ – предельные значения вектора $\Phi(\zeta)$ соответственно с верхней и нижней полуплоскостей плоскости ζ

матрица $g(t)$ и вектор $f(t)$ - заданные кусочно-постоянные с точками разрыва $t=a_k$ и они определяются с помощью функций $m_{kj}(t)$, $f_k^*(t)$. В устранимых особых точках они непрерывны.

Рассмотрим следующие однородные граничные условия:

$$\Phi_o^+(t)=g(t)\Phi_o^-(t), \quad -\infty<t<+\infty, \tag{6}$$

$$\Phi_o'^+(t)=g(t)\Phi_o'^-(t), \quad -\infty<t<+\infty. \tag{7}$$

Условие (6) получается из (5) при $f(t)=0$, а условие (7) - дифференцированием (5) вдоль оси t .

Рассмотрим характеристическое уравнение для точки $t=a_j$

$$det\left\| g_j\, g_{j-1}^{-1} - \lambda E \right\| = 0, \tag{8}$$

где λ - параметр, а E - единичная матрица. Обозначим характеристические корни уравнения (8) через λ_{kj}, $k=1,2$, и рассмотрим числа $\alpha_{kj}=(2\pi i)^{-1}\ln\lambda_{kj}$, которые определяются с точностью до целых слагаемых чисел. О подборе этих чисел будет сказано ниже.

Допустим, что число устранимых особых точек равно m_1 . Для этих точек соседние матрицы g_{j-1}, g_j - диагональные и корни λ_{kj} - двукратные, $\lambda_{kj}=-1$. Тогда для этих точек числа α_{kj} подберем так, чтобы $\alpha_{kj}=1/2$.

Пронумеруем устранимые особые точки слева направо через $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{m_1}$, а оставшиеся точки - через $c_1,c_2,\dots,c_n$, $c_{n+1}=\infty$, $n=m-m_1$. Точка $t=\infty$ не является устранимой особой точкой. Среди точек $t=c_k$ есть такие, которым на плоскости $S(\omega)$ соответствуют концы разрезов с углом 2π, их обозначим по порядку через $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{m_2}$, а остальные – через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m_3}$.

Введем новый искомый вектор

$$\Phi_0(\zeta) = \mathcal{X}_0(\zeta)\Phi_{01}(\zeta), \tag{9}$$

где

$$\mathcal{X}_0(\zeta) = \prod_{k=1}^{m_1}(\zeta - \varepsilon_k)^{1/2}. \tag{10}$$

Для функции $\mathcal{X}_0(\zeta)$ можно взять любую ветвь.

Относительно нового искомого вектора $\Phi_{01}(\zeta)$ граничное условие (6) можно переписать так:

$$\Phi_{01}^+(t) = G(t)\Phi_{01}^-(t), \quad -\infty < t < +\infty, \tag{11}$$

где матрица

$$G(t) = [\mathcal{X}_0^-(t)]^{-1} g(t)\, [\mathcal{X}_0^-(t)], \quad -\infty < t < +\infty, \tag{12}$$

снова является кусочно-постоянной, но в устранимых особых точках $t = \varepsilon_k$ – непрерывной.

Обозначим элементы матрицы $G(t)$ так:

$$G(t) = \begin{Vmatrix} G_{11}(t), & G_{12}(t) \\ G_{21}(t), & G_{22}(t) \end{Vmatrix} \tag{13}$$

Условие (11) в проекциях запишем так:

$$\chi_{01}^+(t) = G_{11}(t)\chi_{01}^-(t) + G_{12}(t)\omega_{01}^-(t), \tag{14}$$

$$\omega_{01}^+(t) = G_{21}(t)\chi_{01}^-(t) + G_{22}(t)\omega_{01}^-(t). \tag{15}$$

Если составим отношение

$$\frac{\omega_{01}^{-}(t)}{\chi_{01}^{+}(t)} = \frac{G_{21}(t)+G_{22}(t)\omega_{01}^{-}(t)/\chi_{01}^{-}(t)}{G_{11}(t)+G_{12}(t)\omega_{01}^{-}(t)/\chi_{01}^{-}(t)}, \qquad (16)$$

получим параметрическое уравнение контура области $S(\omega')$. Напомним, что область $S(\omega')$ – это круговой многоугольник.

Для решения задачи (5) нужно построить каноническую матрицу определенного класса для задачи (6) (или (7)), а это сводится к построению такой матрицы сначала для задачи (II).

Определение и свойства канонической матрицы даются в работах Н.П.Векуа /II/. Известно, что каноническую матрицу построить явно не удается даже в случае кусочно-постоянной матрицы $G(t)$, а тем более это невозможно сделать в общем случае.

Ниже дается эффективный метод построения канонической матрицы определенного класса пока только для матриц $G(t)$, которые встречаются в теории фильтрации. Для этого мы должны построить функции, удовлетворяющие условиям (6) и (7) одновременно, кроме этого с помощью этих функций составляются функции, которые конформно отображают полуплоскость $\Im m(\zeta)>0$ на область $S(\omega')$. Значения матрицы $G(t)$ на различных участках (c_j, c_{j+1}) обозначим через $G(t)=G_j(t)$, а соответствующие элементы – через $G^j_{kn}(t)$.

Для фильтрационных задач, без ограничения общности, подбором и некоторыми преобразованиями координатных осей всегда можно добиться того, чтобы $G_n(t)=E$, $t\in(c_n, +\infty)$. Это мы и будем предполагать ниже. Тогда вектор $\Phi_{01}(\zeta)$ можно аналитически продолжить из полуплоскости $\Im_n(\zeta)$ в полуплоскость $\Im m(\zeta)<0$ через промежуток $(c_n, +\infty)$.

Если вне промежутка (a_1, a_m) $f(t)=0$, тогда элементы искомой канонической матрицы в точке $t=\infty$ могут иметь полюсы, а если точка $t=\infty$ причисляется к узлам /II,I2/, что и подразумевается в нашем случае, тогда они могут иметь полюсы в точке $\zeta=-i$, $i=\sqrt{-1}$.

При решении (2) будем пользоваться областью $S(\omega')$, когда все $m_{kj}\neq 0$, в случае же когда какой-либо элемент $m_{kj}(t)=0$, тогда нет необходимости для решения (2) рассматривать область $S(\omega')$, хотя независимо от этого, изучение области $S(\omega')$ входит в задачу теории фильтрации.

Для точек $t=c_j$ подберем α_{kj} так, чтобы $|\alpha_{2j}-\alpha_{1j}|=\nu_j$. В особых точках τ_k $\alpha_{1k}=0$, $\alpha_{2k}=2$. Сумма всех чисел α_{kj} должна удовлетворять условию Фукса:

$$\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{1j}+\alpha_{2j})+\alpha_{1\infty}+\alpha_{2\infty}=n-1. \tag{I7}$$

Заметим, что иногда не удается подбором целых чисел при определении α_{kj} удовлетворить условию Фукса (I7). В таких случаях приходится прибегать к преобразованию граничных условий (II). Для этого вводят новый искомый вектор $\Phi_{01}(\zeta)=\chi_{01}(\zeta)\Phi_{02}(\zeta)$, где функция $\chi_{01}(\zeta)$ составляется с помощью элементарных функций в виде: $\chi_{01}(\zeta)=[(\zeta-c_k)(\zeta-c_n)]^{1/2}$, как это было сделано в работах /I-4, I6-I7/. при составлении символа Римана. Относительно нового вектора $\Phi_{02}(\zeta)$ соответствующая матрица $G_1(t)=[\chi^+_{01}(t)]^{-1}G(t)[\chi^-_{01}(t)]$ – опять кусочно-постоянная, для нее точки $t=c_k$, $t=c_n$ опять являются точками разрыва непрерывности, зато соответствующие числа α_{kj} удается подбирать так, чтобы сумма всех чисел α_{kj} удовлетворяла условию Фукса.

Известным способом составим уравнение класса Фукса /I-4, 9, I4-I7/:

$$u''(\zeta)+P(\zeta)u'(\zeta)+q(\zeta)u(\zeta)=0, \qquad (18)$$

где

$$P(\zeta)=\sum_{j=1}^{n}\left[1-\alpha_{1j}-\alpha_{2j}\right](\zeta-e_j)^{-1} \qquad (19)$$

$$q(\zeta)=\sum_{j=1}^{n}\left[\alpha_{1j}\alpha_{2j}(\zeta-e_j)^{-2}+c_j(\zeta-e_j)^{-1}\right], \qquad (20)$$

где c_k – акцессорные параметры, которые пока удовлетворяют двум условиям:

$$\sum_{k=1}^{n}c_k=0, \quad \sum_{k=1}^{n}(e_k c_k+\alpha_{1k}\alpha_{2k})=\alpha_{1\infty}\alpha_{2\infty}. \qquad (21)$$

Построим локальные решения уравнения (I8) сначала для случая, когда $\nu_j\neq 0$, $n=0,1,2$. С этой целью уравнение (I8) вблизи точки $t=e_j$ перепишем так:

$$(t-e_j)^2u''(t)+(t-e_j)P_j^*(t)u'(t)+q_j^*(t)u(t)=0, \qquad (22)$$

где

$$P_j^*(t)=\sum_{m=0}^{\infty}P_{jm}(t-e_j)^m, \quad P_{j0}=1-\alpha_{1j}-\alpha_{2j}, \qquad (23)$$

$$P_{jm}=(-1)^{m-1}\sum_{k=1,k\neq j}^{n}\left[1-\alpha_{1k}-\alpha_{2k}\right](e_j-e_k)^{-m}, \qquad (24)$$

$$q_j^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}q_{jk}(t-e_j)^k, \quad q_{j0}=\alpha_{1j}\alpha_{2j}, \quad q_{j1}=c_j, \qquad (25)$$

$$q_{jK}(t)=(-1)^{K-1}\sum_{s=1,\,s\neq j}^{n}\left[\alpha_{1s}\alpha_{2s}(a_j-a_s)^{-K}(K-1)+c_s(a_j-a_s)^{-(K-1)}\right]. \qquad (26)$$

Локальные решения (22) имеют вид:

$$u_{Kj}(t)=(t-a_j)^{\alpha_{Kj}}\gamma_{0j}\,\tilde{u}_{Kj}(t)\,, \qquad (27)$$

$$\tilde{u}_{Kj}(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma^{K}_{nj}(t-a_j)^{n}. \qquad (28)$$

Коэффициенты γ^{K}_{nj} определяются по реккурентным формулам:

$$\gamma_{0j}f_{0j}(\alpha_{Kj})=\gamma_{0j}(\alpha_{Kj}-\alpha_{1j})(\alpha_{Kj}-\alpha_{2j})=0, \qquad (29)$$

$$\gamma^{K}_{1j}f_{0j}(\alpha_{Kj}+1)+f_{1j}(\alpha_{Kj})=0, \qquad (30)$$

$$\gamma^{K}_{2j}f_{0j}(\alpha_{Kj}+2)+\gamma^{K}_{1j}f_{1j}(\alpha_{Kj}+1)+f_{2j}(\alpha_{Kj})=0, \qquad (31)$$

$$\gamma^{K}_{nj}f_{0j}(\alpha_{Kj}+n)+\gamma^{K}_{(n-1)j}f_{1j}(\alpha_{Kj}+n-1)+\cdots+f_{nj}(\alpha_{Kj})=0, \qquad (32)$$

где

$$f_{nj}(\alpha_{Kj}+n)=(\alpha_{Kj}+n)P_{jn}+q_{jn}\,, \qquad (33)$$

а γ_{0j} – пока остаются неопределенными. Когда $\nu_j=m$, $m=0,1,2$, решения строятся для одного корня α_{2j} по формулам (30)–(32), при этом считаем, что $\alpha_{2j}>\alpha_{1j}$. Чтобы получить вторые решения, которые содержат логарифмические члены, нужно воспользоваться методом Фробениуса /10/. По этому методу в решение (27) вместо γ_{0j} нужно подставить γ^{*}_{0j}, которые определяются так: $\nu_j=2$, $\gamma^{*}_{0j}=-0{,}5\gamma_{0j}f_{0j}(\alpha_{Kj}+1)f_{0j}(\alpha_{Kj}+2)$;

$\nu_j = 1, \; \gamma_{oj}^{*} = \gamma_{oj} f_{oj}(\alpha_{kj}+1); \quad \nu_j = 0, \; \gamma_{oj}^{*} = \gamma_{oj}.$

После этого нужно продифференцировать $u_{kj}^{*}(t)$ по α_{kj}, а затем вычислить предел, когда $\alpha_{kj} \to \alpha_{1j}$, получим:

$$u_{1j}(t) = \lim_{\alpha_{kj} \to \alpha_{1j}} u_{2j}^{*}(t) \ln(t-a_j) + \tag{34}$$
$$+(t-a_j)^{\alpha_{1j}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \lim_{\alpha_{kj} \to \alpha_{1j}} \frac{d}{d\alpha_{kj}} \left[\gamma_{oj}^{*} \gamma_{nj}^{k} \right] (t-a_j)^n \right\}.$$

Для точек τ_k, где $\nu_k = 2$, в решениях (34) должен отсутствовать логарифмический член, как это было доказано П.Я.Полубариновой-Кочиной, а условия отсутствия логарифмического члена имеют вид /14-17/:

$$q_{k2} + c_k (c_k + P_{k1}) = 0. \tag{35}$$

Заметим, что из уравнения (31) невозможно определить γ_{2j}, так как $f_{oj}(\alpha_{kj}+2) = 0$, когда $\alpha_{kj} = 0$, но, если потребовать условие:

$$\gamma_{1j}^{k} f_{1j}(\alpha_{kj}+1) + f_{2j}(\alpha_{kj}) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_{kj} = 0, \tag{36}$$

тогда равенство (31) будет выполняться, а из (36) получим условие (35). После этого, при $\alpha_{kj} \neq 0$, из (31) нужно определить γ_{2j}, а затем перейти к пределу, когда $\alpha_{kj} \to 0$, получим:

$$\gamma_{2j}^{*} = -5 \left[P_{j1} (P_{j1} + 2q_{j1}) + P_{j2} \right]. \tag{37}$$

Остальные коэффициенты определяются по формуле (32) с учетом (37).

При построении решения (27) для неособенной точки, для которого $\alpha_{1j}=0$, $\alpha_{2j}=1$, поступаем так: решения для корня $\alpha_{2j}=1$ строятся по формулам (30) - (32), только нужно учесть, что $P_{j0}=q_{j0}=0$, $q_{j1}=c_j=0$, а для корня $\alpha_{1j}=0$ неопределенным остается γ'_{1j}, так как $f_{0j}(\alpha_{1j}+1)=0$, поэтому из (30), при $\alpha_{kj}\neq 0$, определим γ'_{1j}, а затем вычислим предел, когда $\alpha_{kj}\to 0$, получим: $\gamma^*_{1j}=-P_{j1}$.

Проведем разрез по действительной оси t, так, чтобы имело место равенство:

$$[\exp[\alpha_{kj}\ln(t-a_j)]]^+=[\exp[\alpha_{kj}\ln(t-a_j)]]^-,\quad t>a_j, \tag{38}$$

$$[\exp[\alpha_{kj}\ln(t-a_j)]]^{\pm}= \tag{39}$$

$$=[\exp[\pm i\pi\alpha_{kj}]][\exp[\alpha_{kj}\ln(a_j-t)]],\quad t<a_j.$$

Составим матрицы

$$\theta_j(t)=\begin{Vmatrix} u_{1j}(t), u'_{1j}(t) \\ u_{2j}(t), u'_{2j}(t)\end{Vmatrix}, t>a_j;\quad \theta^*_j(t)=\begin{Vmatrix} u^*_{1j}(t), u'^*_{1j}(t) \\ u^*_{2j}(t), u'^*_{2j}(t)\end{Vmatrix}, t<a_j \tag{40}$$

Для точки $t=\infty$ решения $u_{k\infty}(t)$ и матрицы $\theta_\infty(t)$, $\theta^*_\infty(t)$ определяются аналогично решениям (27) и матрицам (40).

Кроме этого имеют место следующие равенства:

$$\theta^{\pm}_j(t)=\mathcal{D}^{\pm}_j\theta^*_j(t),\ t<a_j;\quad \theta^{\pm}_\infty(t)=\mathcal{D}^{\pm}_\infty\theta^*_\infty(t),\ t<+\infty; \tag{41}$$

$$\theta^+_j(t)=\theta^-_j(t),\ t>a_j;\quad \theta^+_\infty(t)=\theta^-_\infty(t),\ -\infty<t<a_1; \tag{42}$$

$$u^*_{kj}(t)=(a_j-t)^{\alpha_{kj}}\gamma_{0j}\tilde{u}_{kj}(t), \tag{43}$$

$$u'^*_{kj}(t)=-(a_j-t)^{\alpha_{kj}-1}\gamma_{0j}\tilde{u}'^*_{kj}(t);$$

$$u'_{kj}(t)=du_{kj}(t)/dt,$$
$$\tilde{u}'^{*}_{kj}(t)=\alpha_{kj}+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma^{k}_{nj}(\alpha_{kj}+n)(t-a_j)^{n}; \tag{44}$$

$$\vartheta_j^{\pm}=\begin{Vmatrix} \exp[\pm i\pi\alpha_{1j}], & 0 \\ 0, & \exp[\pm i\pi\alpha_{2j}] \end{Vmatrix}, \quad \nu_j=n, \quad n=0,1,2. \tag{45}$$

Когда $\nu_j=0$, $\nu_j=2$, $\vartheta_j^{\pm}=\pm i\vartheta_{0j}^{\pm}$, а при $\nu_j=1$ $\vartheta_j^{\pm}=\vartheta_{0j}^{\pm}$, где матрицы $\vartheta_{0j}^{\pm}$ имеют вид:

$$\vartheta_{0j}^{\pm}=\begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ \pm i\pi, & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{Vmatrix} 1, & \pm i\pi \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}, \tag{46}$$

в зависимости от того, в каком из решений $u_{kj}(t)$ присутствует логарифмический член: во втором $u_{2j}(t)$, или в первом $u_{1j}(t)$ решениях. Для концов разреза $\vartheta_k^{\pm}=E$.

Пользуясь тождеством Лиувилля и выражением для матрицы $\theta_j(t)$, получим:

$$\gamma_{0j}^{2}(t-a_j)^{\alpha_{1j}+\alpha_{2j}-1}\left[\tilde{u}_{1j}(t)\tilde{u}'_{2j}(t)-\tilde{u}'_{1j}(t)\tilde{u}_{2j}(t)\right]= \\ =(t-a_j)^{\alpha_{1j}+\alpha_{2j}-1}\prod_{k=1,\,k\neq j}^{n}|t-a_k|^{\alpha_{1k}+\alpha_{2k}-1}. \tag{47}$$

Постоянный множитель, который может присутствовать в правой части (47), мы взяли равным единице. Разделим обе части (47) на $(t-a_j)^{\beta_j}$, $\beta_j=\alpha_{1j}+\alpha_{2j}-1$, а затем вычислим предел, когда $t\to a_j$, получим:

$$\gamma_{0j}=\left[\nu_j^{-1}\prod_{k=1}^{n}|a_j-a_k|^{\alpha_{1k}+\alpha_{2k}-1}\right]^{1/2}. \tag{48}$$

Формула (48) справедлива при $\nu_j\neq 0$, а когда $\nu_j=0$, тогда нужно вместо ν_j подставить $\nu_j=1$.

Уравнение (18) можно записать в виде системы:

$$[u(\zeta), u'(\zeta)]' = [u(\zeta), u'(\zeta)] \begin{Vmatrix} 0, & -q(\zeta) \\ 1, & -P(\zeta) \end{Vmatrix}, \tag{49}$$

где $[u(\zeta), u'(\zeta)]$ — вектор, а

$$\begin{Vmatrix} 0, & -q(\zeta) \\ 1, & -P(\zeta) \end{Vmatrix} \quad - \tag{50}$$

матрица.

Матрицы $\theta_j(t)$, $\theta_j^*(t)$, $\theta_\infty(t)$, $\theta_\infty^*(t)$ являются локальными решениями системы (49) соответственно вблизи точек $t=e_j$, $t=\infty$. Между матрицами $\theta_{j-1}(t)$, $\theta_j^*(t)$; если их области сходимости имеют общую часть, существует соответственно в промежутках (e_{j-1}, e_j), (e_n, ∞), $(-\infty, e_1)$ следующая связь:

$$\theta_j^*(t) = T_{j-1}\theta_{j-1}(t), \quad \theta_\infty^*(t) = T_\infty \theta_n(t), \quad \theta_1^*(t) = T_{-\infty}\theta_\infty(t), \tag{51}$$

где

$$T_j = \begin{Vmatrix} P_j, & q_j \\ r_j, & s_j \end{Vmatrix}, \quad T_\infty = \begin{Vmatrix} P_\infty, & q_\infty \\ r_\infty, & s_\infty \end{Vmatrix}, \quad T_{-\infty} = \begin{Vmatrix} P_{-\infty}, & q_{-\infty} \\ r_{-\infty}, & s_{-\infty} \end{Vmatrix}. \tag{52}$$

Но, если области сходимости матриц $\theta_j^*(t)$, $\theta_{j-1}(t)$ не имеют общую часть, тогда строим в обыкновенных точках $e_j^* = 0{,}5(e_{j-1}+e_j)$ матрицы $\theta_{j*}(t)$ по аналогии с матрицами $\theta_j(t)$. После этого переход от матрицы $\theta_j^*(t)$ к матрице $\theta_{j-1}(t)$ можно осуществить с помощью матрицы $\theta_{j*}(t)$ так: $\theta_j^*(t) = T_j^*\theta_{j*}(t)$, $\theta_{j*}(t) = T_{j-1}^*\theta_{j-1}(t)$.

Согласно нашему выбору ветвей многозначных функций, матрицы T_{j-1}, T_j^*, T_∞, $T_{-\infty}$ — действительные, так как матрицы $\theta_j^*(t)$, $\theta_{j-1}(t)$, $\theta_{j_*}(t)$, $\theta_\infty(t)$, $\theta_\infty^*(t)$ – действительные в указанные промежутки. Из равенства (51) всегда можно определить матрицы T_j, T_j^*, $T_{-\infty}$, T_∞, в зависимости от параметров e_κ, c_κ, ν_κ, а элементы матрицы T_n, которые играют роль неизвестных параметров, определяются после определений параметров a_κ, c_κ.

Рассмотрим матрицы

$$\chi^{\pm}(t) = T_n \theta_\infty^{\pm}(t), \quad \theta_n^+(t) = \theta_n^-(t), \quad t > e_n. \tag{53}$$

С помощью элементов первого столбца матрицы $\chi^+(t)$ строится функция, которая конформно отображает полуплоскость $\mathcal{J}_m(\varsigma) > 0$ на область $S(\omega')$, поэтому матрицы $\chi^{\pm}(t)$ должны удовлетворять граничному условию (II) /I4-I7/.

Как было сказано выше, с помощью матриц $\theta_{j_*}(t)$ переход от одной особой точки $t = e_j$ к точке $t = e_{j-1}$ всегда возможен, что и будем подразумевать ниже.

Для различных промежутков (e_{j-1}, e_j) матрицы $\chi^{\pm}(t)$ определяются так:

$$\chi^{\pm}(t) = \{T_n \vartheta_n^{\pm} \theta_n^{\pm}(t), t < e_n;\ T_n \vartheta_n^{\pm} T_{n-1} \theta_{n-1}^{\pm}(t), t > e_{n-1}\}, \tag{54}$$

$$\chi^{\pm}(t) = T_n \vartheta_n^{\pm} T_{n-1} \vartheta_{n-1}^{\pm} \theta_{n-1}^{*}(t), \quad t < e_{n-1}, \tag{55}$$

$$\chi^{\pm}(t) = T_n \vartheta_n^{\pm} T_{n-1} \vartheta_{n-1}^{\pm} T_{n-2} \theta_{n-2}(t), \quad t > e_{n-2}, \tag{56}$$

$$\chi^{\pm}(t) = T_n \vartheta_n^{\pm} T_{n-1} \vartheta_{n-1}^{\pm} T_{n-2} \cdots T_1 \theta_1(t), \quad t > e_1 \tag{57}$$

$$\chi^{\pm}(t) = T_n \vartheta_n^{\pm} T_{n-1} \vartheta_{n-1}^{\pm} \cdots T_1 \vartheta_1^{\pm} T_{-\infty} \theta_\infty(t), \quad t > -\infty, \tag{58}$$

$$\chi^{\pm}(t)=T_n\vartheta_n^{\pm}T_{n-1}\vartheta_{n-1}^{\pm}\cdots T_1\vartheta_1^{\pm}T_{-\infty}\vartheta_{\infty}^{\pm}\theta_{\infty}^{*}(t),\quad t<+\infty, \tag{59}$$

$$\chi^{\pm}(t)=T_n\vartheta_n^{\pm}T_{n-1}\vartheta_{n-1}^{\pm}\cdots T_1\vartheta_1^{\pm}T_{-\infty}\vartheta_{\infty}^{\pm}T_{\infty}\theta_n(t),\ t>e_n. \tag{60}$$

Обозначим элементы матриц $\chi^{\pm}(t)$ так:

$$\chi^{\pm}(t)=\begin{Vmatrix} u_1^{\pm}(t), & u_1'^{\pm}(t) \\ u_2^{\pm}(t), & u_2'^{\pm}(t)\end{Vmatrix}, \tag{61}$$

где $u_k'^{\pm}(t)=du_k^{\pm}(t)/dt$, а $u_k^{\pm}(t)$, $k=1,2$, – линейно-независимые решения уравнения (18), определенные вдоль всей оси t по формулам (54)-(60).

Например, функции $u_k^{\pm}(t)$, $k=1,2$, вблизи точки $t=e_n$ определяются так:

$$u_1^{\pm}(t)=p_n u_{1n}^{\pm}(t)+q_n u_{2n}^{\pm}(t),\quad t>e_n, \tag{62}$$

$$u_2^{\pm}(t)=r_n u_{1n}^{\pm}(t)+s_n u_{2n}^{\pm}(t),\quad t>e_n, \tag{63}$$

$$u_1^{\pm}(t)=p_n e^{\pm i\pi\alpha_{1n}}u_{1n}^{*}(t)+q_n e^{\pm i\pi\alpha_{2n}}u_{2n}^{*}(t),\quad t<e_n, \tag{64}$$

$$u_1^{\pm}(t)=r_n e^{\pm i\pi\alpha_{1n}}u_{1n}^{*}(t)+s_n e^{\pm i\pi\alpha_{2n}}u_{2n}^{*}(t),\quad t<e_n, \tag{65}$$

$$u_1^{\pm}(t)=A_j^{\pm}u_{1j}(t)+B_j^{\pm}u_{2j}(t),\quad t>e_j, \tag{66}$$

$$u_2^{\pm}(t)=C_j^{\pm}u_{1j}(t)+D_j^{\pm}u_{2j}(t),\quad t>e_j, \tag{67}$$

где $A_j^{\pm}$, $B_j^{\pm}$, $C_j^{\pm}$, $D_j^{\pm}$ – элементы матрицы

$$T_n\vartheta_n^{\pm}T_{n-1}\vartheta_{n-1}^{\pm}T_{n-2}\cdots\vartheta_{j-1}^{\pm}T_j\ . \tag{68}$$

В граничные условия (II) вместо векторов $\Phi^{\pm}(t)$ соответственно подставим матрицы $X^{\pm}(t)$, определенные с помощью формул (54)-(60). После этого от матриц $X^{\pm}(t)$ потребуем, чтобы за счет подбора параметров $a_k, c_k, P_n, q_n, \gamma_n, S_n$ они удовлетворяли граничному условию (II) для каждого промежутка (e_j, e_{j+1}) вдоль всей оси t. Очевидно, что матрицы $X^{\pm}(t)$ в промежутке $(e_n, +\infty)$, где $G_n = E$, будут удовлетворять условию (II), если матрица T_n будет действительной матрицей, а остальные матрицы $T_j, T_j^*, T_\infty, T_{-\infty}$, как было сказано выше, тоже действительные.

Подставим матрицы $X^{\pm}(t)$ в условие (II) для промежутка (e_{n-1}, e_n), получим

$$T_n \mathcal{G}_n^+ = G_{n-1} T_n \mathcal{G}_n^- . \tag{69}$$

Из матричного равенства (69) получим:

$$T_n \mathcal{G}_n^+ = G_{n-1} G_n^{-1} T_n \mathcal{G}_n^- , \quad G_n G_{n-1}^{-1} = T_n^{-1} (\mathcal{G}_n^-)^2 T_n , \tag{70}$$

следовательно, матрицы $(\mathcal{G}^-)^2$ и $G_n G_{n-1}^{-1}$ подобны. Далее, для промежутка (e_{n-2}, e_{n-1}) имеем:

$$T_n \mathcal{G}_n^+ T_{n-1} \mathcal{G}_{n-1}^+ = G_{n-2} T_n \mathcal{G}_n^- T_{n-1} \mathcal{G}_{n-1}^- . \tag{70$_I$}$$

Используя равенство (69), получим:

$$\mathcal{G}_n^+ T_n^{-1} G_{n-1} G_{n-2}^{-1} T_n \mathcal{G}_n^- = T_{n-1} (\mathcal{G}_{n-1}^-)^2 T_{n-1}^{-1} . \tag{71}$$

Из равенства (71) следует, что матрицы $G_{n-1} G_{n-2}^{-1}$, $(\mathcal{G}_{n-1}^-)^2$ подобны. Продолжая далее так, можно показать, что матрицы $G_{k-1} G_{k-2}^{-1}$, $(\mathcal{G}_{k-1}^-)^2$ подобны.

Сейчас для ясности установим связь между неизвестными параметрами $c_k, c_k, P_n, q_n, r_n, S_n$ и известными геометрическими характеристиками области $S(\omega')$. Для этого обозначим элементы матрицы $G_j(t),\ t\in(a_j, a_{j+1})$ так:

$$G_j = \left\| \begin{matrix} G_{11}^{j}, & G_{12}^{j} \\ G_{21}^{j}, & G_{22}^{j} \end{matrix} \right\| \qquad (72)$$

Из матричного равенства (69) получим:

$$P_n \exp(i 2\pi \alpha_{1n}) = G_{11}^{n-1} P_n + G_{12}^{n-1} r_n , \qquad (73)$$

$$r_n \exp(i 2\pi \alpha_{1n}) = G_{21}^{n-1} P_n + G_{22}^{n-1} r_n , \qquad (74)$$

$$q_n \exp(i 2\pi \alpha_{2n}) = G_{11}^{n-1} q_n + G_{12}^{n-1} S_n , \qquad (75)$$

$$S_n \exp(i 2\pi \alpha_{2n}) = G_{21}^{n-1} q_n + G_{22}^{n-1} S_n . \qquad (76)$$

Если разделить соответствующие части равенств (73) и (74), (75) и (76), убедимся, что P_n/r_n, q_n/S_n удовлетворяют уравнению контура области $S(\omega')$, этому же уравнению должны удовлетворять координаты точек B_n, B_n' где B_n' - другая, противоположная точка, в которой пересекаются соседние дуги окружностей контура области $S(\omega')$ /8/, следовательно:

$$P_n/r_n = B_n , \quad q_n/S_n = B_n' \qquad (77)$$

Без ограничения общности, в соответствии со сказанным выше, будем считать, что начало координат на плоскости z совпадает с точкой B_n, тогда $B_n = 0$. Из этого следует, что $P_n = 0$. Если точка B_n' совпадает с бесконечно удаленной точкой при $\nu_n \neq 0, 1, 2$, т.е. $B_n' = \infty$, тогда и $S_n = 0$.

Равенства (70) можно переписать так:

$$T^{*}_{n-1}\vartheta^{+}_{n-1} = G_{n-2}\overline{T}^{*}_{n-1}\vartheta^{-}_{n-1}, \quad T^{*}_{n-1} = T_n\vartheta^{+}_n T_{n-1}. \tag{78}$$

Из матричного равенства (78), если провести рассуждения, аналогичные при выводе равенств (77) и (78), получим:

$$P^{*}_{n-1}/r^{*}_{n-1} = B_{n-1}, \quad q^{*}_{n-1}/s^{*}_{n-1} = B'_{n-1}, \tag{79}$$

где P^{*}_{n-1}, q^{*}_{n-1}, r^{*}_{n-1}, s^{*}_{n-1} – элементы матрицы T^{*}_{n-1}.

Равенства (79) можно переписать так:

$$\frac{P_n P_{n-1} + q_n r_{n-1} exp(i\vartheta_n)}{r_n P_{n-1} + s_n r_{n-1} exp(i\vartheta_n)} = B_{n-1}, \tag{80}$$

$$\frac{P_n q_{n-1} + q_n s_{n-1} exp(i\vartheta_n)}{r_n q_{n-1} + s_n s_{n-1} exp(i\vartheta_n)} = B'_{n-1}. \tag{81}$$

Для этого примера используем условия $P_n = s_n = 0$, тогда (80) и (81) можно переписать так:

$$exp(i\vartheta_n) q_n r_{n-1} / [r_n P_{n-1}] = B_{n-1}, \tag{82}$$

$$exp(i\vartheta_n) q_n s_{n-1} / [r_n q_{n-1}] = B'_{n-1}. \tag{83}$$

Для совместимости равенств (82) и (83) относительно $q_n exp(i\vartheta_n)/r_n$ должно выполняться условие

$$P_{n-1} s_{n-1} / [r_{n-1} q_{n-1}] = B'_{n-1}/B_{n-1} \tag{84}$$

Равенство (84) является инвариантным соотношением четырех точек одного круга.

Можно проверить, что каждое из уравнений (82) и (83) является действительным.

Перейдем к следующей точке контура области $S(\omega')$. Рассуждая аналогично, как в предыдущем случае, получим

$$\frac{p^*_{n-1} p_{n-2} + q^*_{n-1} \tau_{n-2} \exp(i\pi\nu_{n-1})}{\tau^*_{n-1} p_{n-2} + s^*_{n-1} \tau_{n-2} \exp(i\pi\nu_{n-1})} = B_{n-2}, \tag{85}$$

$$\frac{p^*_{n-1} q_{n-2} + q^*_{n-1} s_{n-2} \exp(i\pi\nu_{n-1})}{\tau^*_{n-1} q_{n-2} + s^*_{n-1} s_{n-2} \exp(i\pi\nu_{n-1})} = B'_{n-2}. \tag{86}$$

Учитывая равенства (80) и (81), после несложных преобразований, из (85) и (86) получим:

$$\frac{\tau^*_{n-1} p_{n-2}}{s^*_{n-1} \tau_{n-2}} \exp(-i\pi\nu_{n-1}) = \frac{B_{n-2} - B_{n-1}}{B_{n-1} - B_{n-2}} \tag{87}$$

$$\frac{\tau^*_{n-1} q_{n-2}}{s^*_{n-1} s_{n-2}} \exp(-i\pi\nu_{n-1}) = \frac{B'_{n-2} - B'_{n-1}}{B_{n-1} - B'_{n-2}}. \tag{88}$$

Условие совместимости уравнений (87), (88) относительно $\exp(-i\pi\nu_{n-1})\tau^*_{n-1}/s^*_{n-1}$ имеет вид:

$$\frac{p_{n-2} s_{n-2}}{\tau_{n-2} q_{n-2}} = \frac{B_{n-2} - B'_{n-1}}{B_{n-1} - B_{n-2}} : \frac{B'_{n-2} - B'_{n-1}}{B_{n-1} - B'_{n-2}}. \tag{89}$$

Можно таким образом переходить к следующей точке и так далее до конца.

Уравнения (69), (71), (84), (89) и им подобные, составленные для других точек, дают возможность совершенно аналогично получить явно искомые уравнения относительно элементов матриц T_j, T_∞, $T_{-\infty}$, а неявно - относительно параметров e_k, C_k. Эти уравнения можно выписать и исследовать как в случае отыскания функций, конформно отображающих полуплоскость $\mathcal{J}_m(\zeta)>0$ на область $S(\omega')$

В нашем случае на плоскости $S(\omega')$ имеем круговой многоугольник /1-5/. Эти вопросы достаточно подробно изучены в работах /14-17/. Здесь заметим, что координаты точек $B_k(\tau_k)$ заранее неизвестны. Поэтому искомые уравнения можно получить только для точек $B(A_k)$, а для точек $B_k(\tau_k)$ мы пока получили только по одному уравнению (35). Чтобы получить вторые уравнения нужно найти окончательное решение задачи (5), а затем из условия разрешимости этой задачи получим нужные нам уравнения.

Иногда целесообразно получить искомые уравнения относительно e_k, c_k следующим образом. Допустим, что координаты точек B_k и B'_k известны. Для промежутка (e_j, e_{j+1}) отношение элементов $u_1(t)$, $u_2(t)$ первого столбца матрицы $X^+(t)$ представляется так:

$$\frac{u_1^+(t)}{u_2^+(t)} = \frac{A_j^+ u_{1j}^+(t) + B_j^+ u_{2j}^+(t)}{C_j^+ u_{1j}^+(t) + D_j^+ u_{2j}^+(t)}, \qquad t > e_j \tag{90}$$

где A_j^+, B_j^+, C_j^+, D_j^+ – постоянные, которые вычисляются явно через элементы p_j, q_j, r_j, s_j, а неявно – через e_k, c_k.

Если в формуле (90) перейдем к пределу, когда $t \to e_j$, получим:

$$B_j = A_j^+ / C_j^+, \tag{91}$$

при этом считаем, что $u_{2j}^+(t) / u_{1j}^+(t) = 0$, когда $t \to e_j$. В матрице $\theta_j(t)$ можно поменять местами $u_{1j}(t)$, $u_{2j}(t)$, а затем снова вычисляя предел, когда $t \to e_j$, получим

$$B'_j = B_j^+ / D_j^+ . \tag{92}$$

Резюмируя вышесказанное, можно заключить, что для каждой точки $t = \lambda_k$ мы получим по два действительных однородных уравнения относительно элементов T_j. Условия совместимости этих однородных уравнений при $\nu_j \neq 0, 1, 2$ дают ангармоническое отношение четырех точек одного круга, например (84), (89). За эти точки берутся точки, в которых пересекаются одна окружность с двумя соседними. Когда $\nu_j = 0, 1, 2$, тогда условия совместимости дают совершенно определенное условие /14-17/. Если условно включить в систему полученных уравнений частично и те уравнения, которые мы получим после окончательного решения задачи (5), тогда можно заключить, что для точек $t = e_k$ получается $2(n+1)$ уравнений. Из чисел $e_1, e_2, \cdots, e_n$ мы можем зафиксировать произвольно только два, например, $e_1 = -1$, $e_n = 1$. Тогда число неизвестных параметров (при этом пока не учитываются устранимые точки b_k) $e_2, e_3, \cdots, e_{n-1}, P_n, q_n, r_n, s_n$ $(P_n s_n - r_n q_n = 1)$ всего $2n-1$, а число уравнений будет $2(n+1)$ (число особых точек $n+1$). Это значит, что число уравнений больше числа неизвестных параметров $e_k, c_k, P_n, q_n, r_n, s_n$ на 3, чего мы должны были ожидать, так как обход всех особых точек $e_1, e_2, \cdots, e_n$ равносилен обходу точки $\zeta = \infty$. Следовательно, между матрицами T_j, T_∞, $T_{-\infty}$ существует одна матричная связь, так как $\det T_j = -1$, $\det T_\infty = \det T_{-\infty} = -1$, то это равносильно трем уравнениям. Если нам удастся найти неизвестные параметры a_k, c_k, подставим их в эти три уравнения. Они тоже будут удовлетворяться.

После этого элементы матрицы $\chi^+(t)$, $u_1^+(t)$, $u_2^+(t)$

нужно аналогически продолжить для всех $\vartheta_m(\varsigma)>0$, что можно осуществить известным путем /8/. Вслед за этим, нужно построить каноническую матрицу для задачи (5) с учетом устранимых особых точек ε_K , т.е. с учетом функции $\chi_0(\varsigma)$.

Здесь же заметим, что в точках $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \cdots, \tau_{m_2}$ $\det X^+(\tau_K)=0$, а в этих точках матрица $g(t)$ непрерывна, следовательно, нужно, чтобы детерминант искомой канонической матрицы в точках $t=\tau_K$ был бы отличным от нуля. С этой целью матрицу $X^+(t)$ сначала умножим справа на матрицу

$$\chi_1(\varsigma)=\begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & R(\varsigma) \end{Vmatrix}, \tag{93}$$

где

$$R(\varsigma)=\prod_{K=1}^{m_3}(\varsigma-\lambda_K), \tag{94}$$

чтобы элементы, стоящие в столбцах искомой канонической матрицы, в особых точках $t=\lambda_K$ имели бы один и тот же порядок разрыва.

После этого матрицу $\chi(\varsigma)\chi_1(\varsigma)$ умножим справа на матрицу

$$\chi^{(m_2)}(\varsigma)=\begin{Vmatrix} 1, & (\varsigma-\tau_{m_2})^{-1} \\ 0, & \gamma_{m_2}(\varsigma-\tau_{m_2})^{-1} \end{Vmatrix}, \tag{95}$$

где

$$\gamma_{m_2}=-\left[R(\tau_{m_2})C_{m_2}\right]^{-1}, \tag{96}$$

а C_{m_2} - аксессорный параметр, соответствующий точке τ_{m_2}.

Можно проверить непосредственно, что

$$\det[X(\zeta)X_1(\zeta)X^{m_2}(\zeta)]\neq 0 \quad \text{при} \quad \zeta=\tau_{m_2}.$$

После этого матрицу $X(\zeta)X_1(\zeta)X^{m_2}(\zeta)$ умножим справа на матрицу:

$$X^{(m_2-1)}(\zeta)=\begin{Vmatrix} 1, & (\zeta-\tau_{m_2-1})^{-1} \\ 0, & \gamma_{(m_2-1)}(\zeta-\tau_{m_2-1})^{-1} \end{Vmatrix}, \tag{97}$$

где
$$\gamma_{m_2-1}=-\frac{\tau_{m_2-1}-\tau_{m_2}}{R(\tau_{m_2-1})C_{m_2-1}+1}. \tag{98}$$

Продолжая так и далее, дойдем до точки τ_1.

Введем обозначение

$$X_2^*(\zeta)=X^{(m_2)}(\zeta)X^{(m_2-1)}(\zeta)\cdots X^{(1)}(\zeta), \tag{99}$$

где матрицы (99) определяются последовательно, по аналогичным формулам (95)-(97).

После этого определим порядок столбцов матрицы $X_*(\zeta)=$ $=X_0(\zeta)X_1(\zeta)X_2^*(\zeta)$ в точке $t=\infty$. Так как все матрицы $X_0(\zeta)$, $X_1(\zeta)$, $X_2^*(\zeta)$ строятся явно, то вычислить порядки столбцов этих матриц в точке $t=\infty$ всегда возможно. Допустим, что порядки столбцов определены и они равны соответственно $-æ_1-\alpha_{k\infty}, -æ_2-\alpha_{k\infty}$, $k=1,2$. Тогда числа $æ_1$, $æ_2$ будут частными индексами канонической матрицы определенного класса, а число $æ_1+æ_2=æ$ суммарным индексом матрицы $X_*(\zeta)$.

Умножим матрицу $X_*(\zeta)$ справа на матрицу

$$X_3^*(\zeta)=\begin{Vmatrix} (\zeta+i)^{æ_1}, & 0 \\ 0, & (\zeta+i)^{æ_2} \end{Vmatrix}, \tag{100}$$

матрица

$$X(\zeta) = X_*(\zeta) X_3^*(\zeta) \qquad (101)$$

является канонической матрицей для полуплоскости $\Im m(\zeta) > 0$ ограниченного класса /11,14-17/.

Каноническую матрицу $X(\zeta)$ обозначим так:

$$X(\zeta) = \begin{Vmatrix} X_1^1(\zeta), & X_1^2(\zeta) \\ X_2^1(\zeta), & X_2^2(\zeta) \end{Vmatrix} \qquad (102)$$

Решение задачи (5) дается по формуле

$$\Phi(\zeta) = \frac{X(\zeta)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta + i}{t + i} \frac{[X^+(t)]^{-1} f(t) dt}{t - \zeta}, \qquad (103)$$

при выполнении условий:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^n \frac{h_\alpha^+(t)}{(t+i)^2} dt = 0, \qquad n = 0,1,2,\cdots \varkappa_\alpha - 2, \quad \alpha = 1,2, \qquad (104)$$

где

$$h^+(t) = [h_1^+(t),\ h_2^+(t)] = [X^+(t)]^{-1} f(t). \qquad (105)$$

Напомним, что компоненты вектора (105), $h_1^+(t)$, $h_2^+(t)$, имеют, соответственно, множители вида $(t+i)^{-\varkappa_1}$, $(t+i)^{-\varkappa_2}$. Поэтому условия (104) для конкретных задач легко выписываются. Число действительных условий, которые получаются из (105), обычно соответствует числу неизвестных параметров, но иногда число этих условий меньше числа неизвестных параметров. Например, в наших работах /16,17/ указан такой случай. Тогда дополнительно следует отыскать нужные условия. Для этого из (103) надо определить функции $z = z(\zeta)$, $\omega = \omega(\zeta)$, а затем - уравнение кривой депрессии. После этого следует изучить $d\omega/dz$, составить уравнение касательной к депрессионной кривой и исследовать поведение касательной на концах этой кривой. Касательная должна составлять с осью

σx определенный угол, если же это условие нарушается, тогда нужно найти условие для выполнения этого условия.

Напомним, что именно из условий (104) получаются те уравнения, которые связывают параметры τ_K с заданными геометрическими параметрами.

Из аналитического представления вектора $\Phi(\varsigma)$, как частный случай, можно получить представление вектора $\Phi(\varsigma)$, или, что то же самое, представление функции $z = z(\varsigma)$, $\omega = \omega(\varsigma)$, когда точка $\varsigma = \infty$ отображается в обыкновенную точку контура области $S(z)$, зато число вершин B_K будет уже n. Чтобы в этом убедиться, достаточно из уравнения (18) получить соответствующее уравнение для этого случая. Для этого в точке B_{n+1} внутренний угол $\pi\nu_{n+1}$ нужно приравнивать к π, т.е. $\nu_{n+1} = 1$, тогда из второго условия (21) получим

$$\sum_{K=1}^{n}\left[e_K C_K + \alpha_{1K}\alpha_{2K}\right] = 0. \tag{106}$$

При этом $\alpha_{1\infty} = 0$, $\alpha_{2\infty} = 1$. В этом случае в одном из решений уравнения (18) для точки $t = \infty$ появится логарифмический член. Для того чтобы точка $\varsigma = \infty$ стала точкой голоморфности решения уравнения (18), в решениях для этой точки должен отсутствовать логарифмический член. Это условие имеет вид

$$\sum_{K=1}^{n}\left[e_K^2 C_K + 2e_K\alpha_{1K}\alpha_{2K}\right] = 0. \tag{107}$$

Следовательно, мы получили снова три условия голоморфности точки $\varsigma = \infty$ для уравнения (18).

Чтобы решить систему полученных трансцендентных уравнений, например, уравнения (84), (89) относительно a_k, c_k, нужно установить интервалы возможного изменения для акцессорных параметров c_k. Что касается интервалов изменения для параметров a_k, то они полностью зависят от нас и поэтому считаются известными.

Интервалы изменения акцессорных параметров, для задачи фильтрации через земляную плотину с пятью особыми точками, когда уравнение класса Фукса имеет другой вид, были установлены П.Я.Полубариновой-Кочиной /I/. Этот метод в измененной форме применителен к уравнению (I8), когда точка $\tau=\infty$ переходит в обыкновенную точку, отличную от b_k. Он будет изложен ниже.

Допустим, что в состав границы области $S(z)$ входит депрессионная кривая и на этой кривой имеется точка перегиба. Изменим непрерывно область фильтрации $S(z)$ так, чтобы сохранить на линии депрессии точку перегиба, если до этого имели такую точку на этой линии, а область $S(\omega')$ – относительно какой-либо точки так, чтобы она приводилась к линейному многоугольнику. Для этого случая матрица $G(t)$ должна стать треугольной. Обычно, для такого случая и область $S(\omega)$ становится линейным многоугольником, а, следовательно, матрица $G(t)$ принимает верхнетреугольную форму. Граничное условие (II) в проекциях принимает вид:

$$z_{01}^{+}(t)=G_{11}(t)z_{01}^{-}(t)+G_{12}(t)\omega_{01}(t), \quad -\infty<t<+\infty, \tag{108}$$

$$\omega_{01}^{+}(t)=G_{22}(t)\omega_{01}^{-}(t), \quad -\infty<t<+\infty, \tag{109}$$

где G_{ij} – элементы матрицы $G(t)$.

Напомним: для того чтобы для задачи (I08), (I09) получить соответствующее уравнение класса Фукса, нужно изменить некоторые параметры в уравнении (I8).

Построим решение задачи (I09) относительно $\omega_0(\varsigma)$. Для фильтрационных задач решение (I09) можно всегда записать в виде:

$$r(\varsigma) = \prod_{j=1}^{n} (\varsigma - e_j)^{\alpha_j}, \tag{II0}$$

где α_j – действительные постоянные, которые могут находиться в промежутке $(-1,1)$ и удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = 0. \tag{III}$$

Функция $r(\varsigma)$ является канонической функцией для задачи (I09) с индексом $\varkappa = 0$.

Преобразуем уравнение (I8) по формуле:

$$u(\varsigma) = r(\varsigma) u_1(\varsigma). \tag{II2}$$

Относительно функции $u_1(\varsigma)$ уравнение (I8) принимает вид:

$$u_1''(\varsigma) + P_{1*}(\varsigma) u_1'(\varsigma) + q_{1*}(\varsigma) u_1(\varsigma) = 0, \tag{II3}$$

где

$$P_{1*}(\varsigma) = P(\varsigma) + 2r'(\varsigma)/r(\varsigma), \tag{II4}$$

$$q_{1*}(\varsigma) = q(\varsigma) + P(\varsigma) r'(\varsigma)/r(\varsigma) + r''(\varsigma)/r(\varsigma). \tag{II5}$$

После этого вернемся к задаче (I08) и (I09). Для этой задачи, как системы, каноническую матрицу можно построить с помощью элементарных функций и интегралов типа Коши от элементарных функций. Каноническая матрица будет иметь верхнетреугольную форму. Такую матрицу можно построить и с помощью линейно-независимых решений уравнения (II3). Чтобы получить из этих решений каноническую матрицу, имеющую верхнетреугольную форму, одно решение (II3) должно быть постоянным, отличным от нуля. Подставляя эту постоянную в уравнение (II3), получим тождественное равенство относительно ς

$$q(\varsigma)+P(\varsigma)\tau'(\varsigma)/\tau(\varsigma)+\tau''(\varsigma)/\tau(\varsigma)=0. \tag{II6}$$

Тождество (II6) для задач теории фильтрации представляется всегда в таком виде:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{C_j^*}{\varsigma-e_j}=0, \tag{II7}$$

где C_j^* вычисляются с помощью параметров c_k, ν_k, a_k.

Из тождества (II7) следует

$$C_j^*=0. \tag{II8}$$

Из условий (II8) получим условия для параметров c_k.

С другой стороны, если рассмотрим второй крайний случай, когда область $S(z)$ становится полностью определенной, т.е. становится линейным многоугольником, найдем другие крайние значения для акцессорных параметров.

Для такого предельного случая депрессионная кривая исчезает вместе с точкой перегиба, а матрица $G(t)$ превращается в нижнетреугольную. Однородная задача (II) принимает вид:

$$z_{01}^+(t)=G_{11}(t)z_{01}^-(t), \quad -\infty<t<+\infty. \tag{II9}$$

$$\omega_{01}^{+}(t) = G_{21}(t)\chi_{0}^{-}(t) + G_{22}(t)\omega_{0}^{-}(t), \quad -\infty < t < +\infty. \tag{120}$$

Каноническая матрица для задачи (119) и (120) тоже будет нижнетреугольной.

Решение задачи (120) будет иметь вид:

$$\chi^{*}(\zeta) = \prod_{j=1}^{n}(\zeta - a_j)^{\delta_j}, \tag{121}$$

где δ_j – действительные числа, которые определяются известным методом и находятся в интервале $(-1,1)$. Мы опять берем решение (119) с индексом $\varkappa = 0$

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_j = 0. \tag{122}$$

Снова преобразуем уравнение (18) по формуле

$$u(\zeta) = \chi^{*}(\zeta) u_2(\zeta). \tag{123}$$

Относительно функции $u_2(\zeta)$ уравнение (18) принимает вид:

$$u_2''(\zeta) + p_{2*}(\zeta) u_2'(\zeta) + q_{2*}(\zeta) u_2(\zeta) = 0, \tag{124}$$

где

$$p_{2*}(\zeta) = p(\zeta) + 2[\chi^{*}(\zeta)]' / \chi^{*}(\zeta), \tag{125}$$

$$q_{2*}(\zeta) = q(\zeta) + p(\zeta)[\chi^{*}(\zeta)]' / \chi^{*}(\zeta) + [\chi^{*}(\zeta)]'' / \chi^{*}(\zeta). \tag{126}$$

Каноническую матрицу для задачи (119), (120) можно построить с помощью линейно-независимых решений уравнений (124). Но каноническая матрица здесь будет нижнетреугольной формы; чтобы она имела такую форму, одно из решений уравнений (124) должно быть постоянным, отличным от нуля. Подставляя это решение в уравнение (I24), мы получим тождественное равенство относительно

$$q(\varsigma)+P_2(\varsigma)[\gamma^*(\varsigma)]'/\gamma^*(\varsigma)+[\gamma^*(\varsigma)]''/\gamma^*(\varsigma)=0. \qquad (127)$$

Тождество (I27) всегда можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{C_{*j}}{\varsigma-\alpha_j}=0, \qquad (128)$$

где C_{*j} - постоянные, которые вычисляются явно через $c_\kappa, \nu_\kappa, a_\kappa$.

Из тождественного равенства (I28) следует:

$$C_{*j}=0, \qquad (129)$$

а из равенства (I29) мы получим искомые значения параметров C_κ, зависящие от ν_κ, a_κ.

Искомые параметры C_κ будут находиться между двумя крайними значениями параметров c_κ, полученными, соответственно, из равенств (II8) и (I29). Эти значения параметров C_κ тоже изменяются - они зависят либо от параметров α_κ, либо a_κ, но интервалы изменяемости a_κ нам известны.

Вышеизложенную схему отыскания промежутков изменения для параметров c_κ можно применить и в том случае, когда точка $\varsigma=\infty$ переходит в точку b_κ. Только в этом случае индексы соответствующих задач (I09) и (II8) уже будут отличными от нуля.

Наконец, отметим, что метод решения системы четырех высших трансцендентных уравнений относительно неизвестных параметров a_κ, c_κ, среди которых имеется хоть одно уравнение вида (35), дается в работах /I4-I7/. Это позволяет пока эффективно решать в общем случае те фильтрационные задачи, которым на годографе скорости соответствуют произвольные круговые треугольники, четырехугольники, а также пятиугольники, имеющие хотя бы в одной вершине разрез с углом 2π .

Тбилисский математический
институт им. А.М.Размадзе
АН ГССР

Литература

1. П.Я.Полубаринова-Кочина. Известия АН СССР, серия математическая, № 5-6, 1939, с. 579-602.

2. П.Я.Полубаринова-Кочина. Теория движения грунтовых вод. Издание 2-е, М., "Наука", 1977.

3. П.Я.Полубаринова-Кочина. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. Изд-во АН СССР, М., 1942.

4. П.Я.Полубаринова-Кочина, В.Г.Пряжинская, В.Н.Эмих. Математические методы в вопросах орошения. М., "Наука", 1969.

5. С.А.Христианович, С.Г.Михлин, Б.Б.Девисон. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Л., АН СССР, 1938, с.219-356.

6. Г.К.Михайлов. Прикл.мат. и мех., 1953, 17, № 2, с.189-199.

7. В.И.Аравин, С.Н.Нумеров. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М., Гостехиздат, 1953.

8. В.Коппенфельс, Ф.Штальман. Практика конформных отображений. Москва, Изд-во иностранной литературы, 1963.

9. В.В.Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Издание 2-е Москва–Ленинград, Гос.изд-во тех.теор.лит., 1950.

10. Э.Л.Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения, перевод с английского, Харьков, Гос. н.-тех.изд-во Украины, 1939.

11. Н.П.Векуа. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. Изд.2-е, М., "Наука", 1970.

12. Н.И.Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения. Изд.3-е, М., физ.мат.изд., 1968.

13. Ф.Д.Гахов. Краевые задачи. М., Изд.3-е, "Наука", 1977.

14. А.Р.Цицкишвили . Труды Тбилисского ун-та, т.185, 1977, с.65-89.

15. А.Р.Цицкишвили . Дифференциальные уравнения, 1976, т.XII, № 11, с.2044-2051.

16. А.Р. Цицкишвили . Труды Тбилисского математического ин-та, 1976 г., т.52, с.94-104.

17. А.Р.Цицкишвили . Труды Тбилисского ун-та, т.210, 1980, с.12-51.

ა. ციცქიშვილი

წრფივი დიფერენციალური განტოლებების თეორიის გამოყენებით ფილტრაციის თეორიის ზოგიერთი ბრტყელი ამოცანების ამოხსნა

რეზიუმე

ნაშრომში მოცემულია ფილტრაციის თეორიის ბრტყელი სტაციონარული ამოცანების ამოხსნის ახალი მეთოდი, როდესაც ფოროვან არეში სითხის მოძრაობა ემორჩილება დარსის კანონს. სითხის მოძრაობის არე შემოსაზღვრულია წრფის მონაკვეთებით, წრფეებით და უცნობი დეპრესიის მრუდებით. გამოიყენება ფუქსის კლასის წრფივი დიფერენციალური განტოლებე-

ბის ამონახსნები და რამოდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის წყვეტილ-კოეფიციენტებიანი წრფივი შეუღლების ამოხსნის თეორია.

A. Tsitskishvili

APPLICATION OF THE THEORY OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS TO THE SOLUTION OF SOME PLANE PROBLEMS OF THE FILTRATION THEORY

Summary

A new effective method of the solution of plane problems of stationary filtration is given. A fluid motion in a porous medium is assumed to obey the Darcy law, while the region of motion is bounded by straight line segments, slaight lines and unknown depressive curves. Use is made of the solitions of linear differential equations of the Fuchs class as well as of the theory of solutions of problems of linear conjugation for a system of functions with discontinuous coefficients.

42

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
259, 1985

УДК 517.9

ЗАМЕТКА О КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т.А. Чантурия

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$u^{(n)} + p(t)u = 0, \qquad (1)$$

где $n \geq 3$, $p: R_+ \longrightarrow R$ – локально интегрируемая функция. При этом будем предполагать, что p удовлетворяет одному из следующих двух неравенств:

$$p(t) \geq 0 \quad \text{при} \quad t \in R_+ \qquad (2)$$

или

$$p(t) \leq 0 \quad \text{при} \quad t \in R_+ . \qquad (3)$$

Сначала введем следующие определения.

Нетривиальное решение уравнения (1) называется к о л е б л ю щ и м с я, если оно имеет бесконечное число нулей, и н е к о л е б л ю щ и м с я – в противном случае.

Уравнение (1) называется к о л е б л ю щ и м с я, если оно имеет колеблющееся решение, и н е к о л е б л ю щ и м с я, если все его нетривиальные решения неколеблющиеся.

Уравнение (I) о б л а д а е т с в о й с т в о м $\mathcal{A}$, если каждое нетривиальное решение этого уравнения при четном n является колеблющимся, а при нечетном n – либо колеблющимся, либо удовлетворяющим условию

$$|u^{(i)}(t)| \downarrow 0 \quad \text{при} \quad t \uparrow +\infty \quad (i=0,\dots,n-1). \tag{4}$$

Уравнение (I) о б л а д а е т с в о й с т в о м $\mathcal{B}$, если каждое нетривиальное решение этого уравнения при четном n является либо колеблющимся, либо удовлетворяющим условию (4), либо условию

$$|u^{(i)}(t)| \uparrow +\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow +\infty \quad (i=0,\dots,n-1). \tag{5}$$

Пусть $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$. Уравнение (I) называется $(\ell, n-\ell)$ о с ц и л л я ц и о н н ы м (в окрестности $+\infty$), если для любого $t_0 > 0$ существуют $t_2 > t_1 \geq t_0$ и нетривиальное решение уравнения (I) такие, что

$$\begin{aligned} u^{(i)}(t_1) &= 0 \quad (i=0,\dots,\ell-1), \\ u^{(i)}(t_2) &= 0 \quad (i=0,\dots,n-\ell-1). \end{aligned} \tag{6_ℓ}$$

В противном случае уравнение (I) называется $(\ell, n-\ell)$ н е о с ц и л л я ц и о н н ы м (в окрестности $+\infty$).

По поводу наличия свойств $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$, колеблемости уравнений и $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$ осцилляционности уравнений четного порядка см /2,8,9/. Здесь же следует отметить работы /I,7/, в которых исследуется $(\ell, n-\ell)$ неосцилляционность на конечных промежутках.

В настоящей статье устанавливается связь $(\ell, n-\ell)$ осцилляционности с колеблемостью, а также наличием свойств

A или B (см. также /3,4/).

Известно (/5/, леммы I4.I и I4.2), что если p неотрицательна (неположительна), тождественно не равняется нулю ни в какой окрестности $+\infty$, а u – неколеблющееся решение уравнения (I), то существуют $t_0>0$, $\ell\in\{0,\dots,n\}$ такие, что $\ell+n$ – нечетное (четное) число и

$$u^{(i)}(t)\,u(t)>0 \quad \text{при} \quad t\geq t_0 \quad (i=0,\dots,\ell-1),$$
$$(-1)^{i+\ell}u^{(i)}(t)u(t)>0 \quad \text{при} \quad t\geq t_0 \quad (i=\ell,\dots,n-1), \tag{7_ℓ}$$
$$(-1)^{n+\ell}u^{(n)}(t)u(t)\geq 0 \quad \text{при} \quad t\geq t_0{}^{*}.$$

Лемма I. Пусть соблюдается неравенство (2) (неравенство (3)), p тождественно не равняется нулю ни в какой окрестности $+\infty$, $\ell\in\{1,\dots,n-1\}$, $\ell+n$ – нечетное (четное) число. Тогда для существования решения уравнения (I), удовлетворяющего условию (7_ℓ), необходимо и достаточно, чтобы это уравнение было $(\ell,n-\ell)$ неосцилляционным.

Доказательство. Необходимость. Допустим, что существует решение u_1 уравнения (I), удовлетворяющее условию (7_ℓ) и при некоторых $t_2>t_1\geq t_0$ краевая задача (I), (6_ℓ) имеет нетривиальное решение u_2 . Предположим, что u_2 в промежутке $]t_1,t_2[$ обращается в нуль в m различных точках, а s_0 – наименьший нуль u_2 в промежутке $]t_1,t_2]$. Без ограничения общности будем считать, что

---

* При $\ell=0$ ($\ell=n$) отпадают неравенства, выписанные в первой (второй) строке.

$$u_1^{(i)}(t)>0 \quad \text{при} \quad t \geq t_0 \quad (i=0,\dots,\ell-1),$$

$$(-1)^{i+\ell} u_1^{(i)}(t)>0 \quad \text{при} \quad t \geq t_0 \quad (i=\ell,\dots,n-1),$$

$$u_2(t)>0 \quad \text{при} \quad t\in]t_1, s_0[.$$

Поскольку u_2 удовлетворяет условию

$$u_2^{(i)}(t_1)=0 \quad (i=0,\dots,\ell-1), \qquad u_2^{(i)}(t_2)=0 \quad (i=0,\dots,n-\ell-1),$$

то $u_2^{(n-1)}$ в промежутке $]t_1, t_2[$ имеет по крайней мере $m+1$ нулей $s_{n-1}^1<\dots<s_{n-1}^{m+1}$. При этом

$$u_2^{(n-1)}(t)\neq 0 \quad \text{при} \quad t\in [s_{n-1}^j, s_{n-1}^{j+1}] \quad (j=1,\dots,m)$$

и поэтому $s_{n-1}^1 \in]t_1, s_0[$. Тогда нетрудно убедиться в существовании чисел $s_i \in]t_1, t_2[$ $(i=1,\dots,n-1)$ таких, что

$$s_\ell \leq s_{\ell-1} \leq \dots \leq s_1 \leq s_0, \qquad s_\ell < s_{\ell+1} < \dots < s_{n-1} < s_0,$$

$$u_2^{(i)}(s_i)=0 \quad (i=1,\dots,n-1),$$

$$u_2^{(i)}(t)<0 \quad \text{при} \quad s_i \leq t \leq s_{i-1} \quad (i=1,\dots,\ell).$$

Рассмотрим решение $v_\varepsilon = u_1 - \varepsilon u_2$. Пусть $\varepsilon=\varepsilon_0$ – наибольшее число, для которого соблюдаются неравенства

$$
\begin{aligned}
&v_\varepsilon^{(i)}(t)\geq 0 \quad \text{при} \quad t\in[t_1, s_i] \quad (i=0,\dots,\ell-1),\\
&(-1)^{i+\ell} v_\varepsilon^{(i)}(t)\geq 0 \quad \text{при} \quad t\in[t_1, s_i] \quad (i=\ell,\dots,n-1).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Тогда при $\varepsilon=\varepsilon_0$ хотя бы одно из неравенств (8) является нестрогим. С другой стороны, ввиду того, что

$$v_\varepsilon^{(i)}(t_1)>0 \quad (i=0,\cdots,l-1),\quad (-1)^{i+l} v_\varepsilon^{(i)}(s_i)>0 \quad (i=l,\cdots,n-1),$$

$$(-1)^{n+l} v_\varepsilon^{(n)}(t)\geq 0 \qquad \text{при} \quad t\in[t_1,s_0],$$

легко находим

$$v_\varepsilon^{(i)}(t)>0 \qquad \text{при} \quad t\in[t_1,s_i] \quad (i=0,\cdots,l-1),$$

$$(-1)^{i+l} v_\varepsilon^{(i)}(t)>0 \qquad \text{при} \quad t\in[t_1,s_i] \quad (i=l,\cdots,n-1).$$

Полученное противоречие доказывает необходимость.

<u>Достаточность</u>. Допустим, что уравнение (I) $(l,n-l)$ неосцилляционно, т.е. для любых $t_2>t_1\geq t_0$ краевая задача (I), (6_l) имеет только тривиальное решение. Пусть $s>t_0$ и u_s – решение уравнения (I), удовлетворяющее условиям

$$u_s^{(i)}(t_0)=0 \quad (i=0,\cdots,l-1),\qquad u_s^{(i)}(s)=0 \quad (i=0,\cdots,n-l-2),$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}|u_s^{(i)}(t_0)|=1,\qquad u_s(t)>0 \qquad \text{при} \quad t\in]t_0,t_0+\delta[,$$

где δ – достаточно малое число. Предположим, что для некоторого $s>t_0$ u_s на сегменте $[t_0,s]$ имеет по крайней мере n нулей. Пусть S – множество всех таких s и $\alpha=\inf S$. Легко проверить, что $\alpha\in S$ и $u_\alpha(t)\geq 0$ при $t\in[t_0,\alpha]$.

С другой стороны, ввиду того, что краевая задача (I), (6_l), где $t_1=t_0$, $t_2=\alpha$, имеет только тривиальное решение, $u_\alpha^{(n-l-1)}(\alpha)\neq 0$ и согласно лемме I.5 (лемме I.6) /9/

$$u_\alpha(t)>0 \qquad \text{при} \quad t\in]t_0,\alpha[,\quad u_\alpha^{(l)}(t_0)\neq 0.$$

Следовательно, $\alpha \notin S$. Полученное противоречие доказывает, что для любого $s > t_0$ u_s на сегменте $[t_0, s]$ имеет $n-l$ нуль. Таким образом, $u_s(t) > 0$ при $t \in]t_0, s[$. Очевидно, существует последовательность (s_k) такая, что $t_0 < s_1 < s_2 < \cdots$, $\lim\limits_{k \to +\infty} s_k = +\infty$ и равномерно на каждом ограниченном множестве из R_+ $\lim\limits_{k \to +\infty} u_{s_k} = u$. Тогда u будет решением уравнения (I), удовлетворяющим условию (7_l) (/9/, стр.32). Лемма доказана.

Поскольку краевая задача (I), (6_l) имеет лишь тривиальное решение тогда и только тогда, когда сопряженная краевая задача

$$u^{(n)} + (-1)^n p(t) u = 0, \qquad\qquad (9)$$

$$u^{(i)}(t_1) = 0 \quad (i = 0, \cdots, n-l-1), \quad u^{(i)}(t_2) = 0 \quad (i = 0, \cdots, l-1)$$

имеет лишь тривиальное решение, из леммы I получаем такое

Следствие. Пусть соблюдается неравенство (2) (неравенство (3)), $l \in \{1, \cdots, n-1\}$, $l+n$ – нечетное (четное) число. Тогда для существования решения уравнения (I), удовлетворяющего условию (7_l), необходимо и достаточно, чтобы уравнение (9) имело решение, удовлетворяющее условию (7_{n-l}).

Лемма 2. Пусть соблюдается неравенство (2) (неравенство (3)), p тождественно не равняется нулю ни в какой окрестности $+\infty$, $l \in \{2, \cdots, [\frac{n}{2}]\}$, $l+n$ – нечетное (четное) число и уравнение (I) имеет решение, удовлетворяющее условию (7_l). Тогда уравнение

$$u^{(n)} - p(t) u = 0 \qquad\qquad (10)$$

имеет решение, удовлетворяющее условию ($7_{\ell-1}$).

Доказательство. Будем предполагать, что

$$\int_0^{+\infty} t^{n-1}|p(t)|dt = +\infty ,$$

поскольку в противном случае уравнение (I0) является неколеблющимся и для любого $k\in\{1,\cdots,n-1\}$ таково, что $k+n$ – четное (нечетное) число, оно имеет решение, удовлетворяющее условию (7_k) и, следовательно, ($7_{\ell-1}$). Пусть u_0 – решение уравнения (I), удовлетворяющее условию (7_ℓ). Без ограничения общности будем считать, что

$$u_0^{(i)}(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \geq t_0 \quad (i=0,\cdots,\ell-1),$$

$$(-1)^{i+\ell} u_0^{(i)}(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \geq t_0 \quad (i=\ell,\cdots,n-1).$$

Согласно лемме I.4/6/ (см. также лемму I.2 из /9/) найдется $t_1 \geq t_0$ такое, что при $t \geq t_1$ соблюдаются неравенства

$$\ell u_0(t) \geq t u_0'(t) ,$$

$$u_0'(t) \geq u_0'(t_1) + \frac{1}{(\ell-2)!}\int_{t_1}^{t}(t-s)^{\ell-2} u_0^{(\ell)}(s)ds,$$

$$u_0^{(\ell)}(t) \geq \frac{(-1)^{\ell+n-1}}{(n-\ell-1)!}\int_t^{+\infty}(s-t)^{n-\ell-1} p(s)u_0(s)ds.$$

Из этих неравенств, так как $n \geq 2\ell$, получим

$$u_0'(t) \geq u_0'(t_1) +$$

$$+ \frac{(-1)^{\ell+n-1}}{(\ell-2)!(n-\ell)!}\int_{t_1}^{t}(t-s)^{\ell-2}\int_s^{+\infty}(\xi-s)^{n-\ell} p(\xi)u_0'(\xi)d\xi ds$$

при $t \geq t_1$.

Отсюда следует (см., напр./9/, лемма I.12), что уравнение (IO) имеет решение, удовлетворяющее условию $(7_{\ell,i})$. Лемма доказана.

Теорема I. Пусть соблюдается неравенство (2) (неравенство (3)). Тогда следующие предложения эквивалентны:

а) уравнение (I) обладает свойством A (свойством B);

б) для любого $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$ такого, что $\ell + n$ – нечетное (четное) число, уравнение (I) является $(\ell, n-\ell)$ осцилляционным;

в) уравнение (I) является $(n-1, 1)$ осцилляционным $\left(\left(\frac{3+(-1)^n}{2}, n-\frac{3+(-1)^n}{2}\right)\right.$ осцилляционным).

Эта теорема вытекает из теорем 2.I,2.2/9/ и леммы I.

Введем числа ℓ_n^* и ℓ_{*n} равенствами:

$$\ell_*^n = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1, & \text{если } n \equiv 0 \pmod 4, \\ \frac{n}{2}, & \text{если } n \equiv 2 \pmod 4, \\ \frac{n-1}{2}, & \text{если } n \equiv 1 \pmod 4, \\ \frac{n+1}{2}, & \text{если } n \equiv 3 \pmod 4, \end{cases}$$

$$\ell_{*n} = \begin{cases} n-1-\ell_n^*, & \text{если } n \equiv 0 \pmod 2, \\ n-\ell_n^*, & \text{если } n \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть соблюдается неравенство (2) (неравенство (3)). Тогда для колеблемости уравнения (I) необходимо и достаточно, чтобы оно было $(\ell_n^*, n-\ell_n^*)$ осцилляционным ($(\ell_{*n}, n-\ell_{*n})$ осцилляционным)

Доказательство. Необходимость. Допустим, что уравнение (I) является ($\ell_n^*, n-\ell_n^*$) неосцилляционным ($(\ell_{*n}, n-\ell_{*n})$ неосцилляционным). Без ограничения общности будем считать, что p тождественно не равняется нулю ни в какой окрестности $+\infty$. Тогда согласно леммам I и 2 легко покажем, что если $\ell \in \{1, \cdots, n-1\}$ и $\ell + n$ – нечетное (четное) число, то уравнение (I) имеет решение, удовлетворяющее условию (7_ℓ). Отсюда следует (см., напр., /9/, следствие 4.2) неколеблемость уравнения (I). Необходимость доказана.

<u>Достаточность</u> непосредственно вытекает из следствия 4.2/9/ и леммы I. Теорема доказана.

Поскольку $\ell_n^* + \ell_{*n} = n$, при нечетном n согласно лемме I и ее следствию из теоремы 2 вытекает

<u>Теорема 3</u>. Пусть n – нечетное число и соблюдается неравенство (2). Уравнение (I) является колеблющимся тогда и только тогда, когда уравнение (I0) является таковым.

Сформулированная ниже теорема 4 следует из теорем 3.3, 3.4 /9/ и теоремы I, а теоремы 5 и 6 – из теорем 4.I, 4.2, 4.6, 4.7 /9/ и теоремы 2.

<u>Теорема 4</u>. Пусть соблюдается неравенство (2) (неравенство (3)). Уравнение (I) является $(\ell, n-\ell)$ осцилляционным для любого $\ell \in \{1, \cdots, n-1\}$ такого, что $\ell + n$ – нечетное (четное) число, если соблюдается одно из следующих двух условий:

$$\liminf_{t \to +\infty} t^{n-1} \int_t^{+\infty} |p(s)|\, ds > \frac{M_n^*}{n-1} \left(> \frac{M_{*n}}{n-1} \right)$$

или

$$\limsup_{t \to +\infty} t \int_t^{+\infty} s^{n-2} |p(s)|\, ds > (n-1)!,$$

где M_n^* и M_{*n} – наибольшие из локальных максимумов полиномов

$$P_n^*(x) = -x(x-1) \cdots (x-n+1) \tag{II}$$

и

$$P_{*n}(x)=x(x-1)\cdots(x-n+1) \qquad \text{(I2)}$$

соответственно.

Следствие. Пусть p неотрицательна (неположительна) и существует непрерывная неубывающая функция $\omega : R_+ \to]0,+\infty[$ такая, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\,\omega(t)} < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{\omega(t)}|p(t)|dt = +\infty .$$

Тогда уравнение (I) является $(\ell, n-\ell)$ осцилляционным для любого $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$ такого, что $\ell+n$ – нечетное (четное) число.

Теорема 5. Пусть соблюдается неравенство (2) (неравенство (3)). Уравнение (I) является $(\ell_n^*, n-\ell_n^*)$ осцилляционным ($(\ell_{*n}, n-\ell_{*n})$ осцилляционным), если соблюдается одно из следующих двух условий:

$$\liminf_{t\to+\infty} t^{n-1}\int_t^{+\infty}|p(s)|ds > \frac{m_n^*}{n-1} \quad \left(> \frac{m_{*n}}{n-1}\right)$$

или

$$\limsup_{t\to+\infty} t\int_t^{+\infty} s^{n-2}|p(s)|ds > \mu_n^* \quad (>\mu_{*n}),$$

где m_n^* (m_{*n}) – наименьший из локальных максимумов полинома (II) (полинома (I2)), а

$$\mu_n^* = \ell_n^*!\,(n-\ell_n^*)!\,, \quad \mu_{*n} = \ell_{*n}!\,(n-\ell_{*n})!\,.$$

Замечание. Отметим, что

$$\mu_n^* = \min\{\ell!\,(n-\ell)! : \ell\in\{1,\dots,n-1\},\ \ell+n \text{ нечетно}\},$$

$$\mu_{*n} = \min\{\ell!\,(n-\ell)! : \ell\in\{1,\dots,n-1\},\ \ell+n \text{ четно}\}.$$

Теорема 6. а) Если p неотрицательна*,

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \ln t \int_t^{+\infty} s^{n-1} \left[p(s) - \frac{m_n^*}{s^n}\right]_+ ds = +\infty,$$

$$\int_1^{+\infty} t^{n-1} \left[p(t) - \frac{m_n^*}{t^n}\right]_- \ln^2 t\, dt < +\infty,$$

где m_n^* – наименьший из локальных максимумов полинома (II), то уравнение (I) является $(\ell_n^*, n-\ell_n^*)$ осцилляционным.

б) Если p неположительна,

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \ln t \int_t^{+\infty} s^{n-1} \left[p(s) + \frac{m_{*n}}{s^n}\right]_- ds = +\infty,$$

$$\int_1^{+\infty} t^{n-1} \left[p(t) + \frac{m_{*n}}{t^n}\right]_+ \ln^2 t\, dt < +\infty,$$

где m_{*n} – наименьший из локальных максимумов полинома (I2), то уравнение(I) является $(\ell_{*n}, n-\ell_{*n})$ осцилляционным.

В случае, когда $n \equiv 2 (mod 4)$ и p неотрицательна или $n \equiv 0 (mod 4)$ и p неположительна, теоремы 4,5 и 6 уточняют некоторые результаты И.М.Глазмана (/2/, теоремы 9, II и I2). Чтобы убедиться в этом, достаточно учесть, что для любого натурального ν справедливы соотношения

$$\frac{((\nu-1)!)^2}{2\nu-1} \left(\sum_{k=1}^{\nu} \frac{(-1)^{k-1}}{2\nu-k} C_{\nu-1}^{k-1} \right)^{-2} = \frac{[(2\nu-1)!]^2}{(2\nu-1)[(\nu-1)!]^2} \geqslant$$

$$\geqslant (2\nu-1)! \geqslant (\nu!)^2$$

---

* Здесь и ниже $[x(t)]_+ = max\{x(t), 0\}$, $[x(t)]_- = [x(t)]_+ - x(t)$.

и что если $n \equiv 2 \pmod 4$ и p неотрицательна, то

$$\ell_n^* = \frac{n}{2}, \quad m_n^* = 2^{-n}[(n-1)!!]^2, \quad \mu_n^* = \left(\frac{n}{2}!\right)^2,$$

а если $n \equiv 0 \pmod 4$ и p неположительна, то

$$\ell_{*n} = \frac{n}{2}, \quad m_{*n} = 2^{-n}[(n-1)!!]^2, \quad \mu_{*n} = \left(\frac{n}{2}!\right)^2.$$

Институт прикладной математики им. И.Н.Векуа Тбилисского гос.университета

Литература

1. Н.В.Азбелев, З.Б.Цалюк. Матем.сб., 1960, 51(93), № 4, 475–486.
2. И.М.Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., Физматгиз, 1963.
3. U. Elias. Proc. Amer. Math. Soc., 1977, 66, N2, 269–275.
4. U. Elias. Arch. Ration. Mech. and Anal., 1979, 71, N2, 177–198.
5. И.Т.Кигурадзе. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси, Изд-во Тбилисского ун-та, 1975.
6. Р.Г.Коплатадзе, Т.А.Чантурия. Об осцилляционных свойствах дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Тбилиси, Изд-во Тбилисского ун-та, 1977.
7. А.Ю.Левин. ДАН СССР, 1963, 148, № 3, 512–515.

8. W.T. Reid. Sturmian theory for ordinary differential equations. New York etc., Springer-Verlag, 1980.

9. Т.А.Чантурия. О колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков. Докл. семинара ИПМ им. И.Н.Векуа ТГУ, 1982, 16, 3-72.

თ. ჭანტურია

შენიშვნა წრფივ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა ამონახსნების რხევადობის შესახებ

რეზიუმე

განხილულია განტოლება

$$u^{(n)}+p(t)u=0,$$

სადაც $n\geq 3$, $p:R_+\longrightarrow R$ – ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციაა. დადგენილია აუცილებელი და საკმარისი პირობები იმისა, რომ მოცემული განტოლების ა) ერთი მაინც ამონახსნი იყოს რხევადი; ბ) ნებისმიერი არარხევადი ამონახსნისათვის გვქონდეს

$$|u^{(i)}(t)|\downarrow 0 \quad \text{როცა} \quad t\uparrow +\infty \quad (i=0,\dots,n-1)$$

ან

$$|u^{(i)}(t)|\uparrow +\infty \quad \text{როცა} \quad t\uparrow +\infty \quad (i=0,\dots,n-1).$$

T.Chanturia

A NOTE ON OSCILLATION OF SOLUTIONS OF LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary

The equation

$$u^{(n)}+p(t)u=0$$

is considered, where $n\geq 3$, and the function $p:R_+\to R$ is locally summable. The necessary and sufficient conditions are established under which a) every nonoscillatory solution satisfies either the condition

$$|u^{(i)}(t)|\downarrow 0 \quad \text{for} \quad t\uparrow +\infty \quad (i=0,\dots,n-1)$$

or

$$|u^{(i)}(t)|\uparrow +\infty \quad \text{for} \quad t\uparrow +\infty \quad (i=0,\dots,n-1);$$

b) there exists at least one oscillatory solution.

СОДЕРЖАНИЕ

შინაარსი

CONTENTS

გამომცემლობის რედაქტორი ლ.აბუაშვილი
ხელმოწერილია დასაბეჭდად 20.12.85.
უე 04194, საბეჭდი ქაღალდი 60X84. პირობითი
ნაბეჭდი თაბახი 21,75. სააღრ.-საგამომც.თაბახი 12,5.
ტირაჟი 300. შეკვეთის № 2222
ფასი 1 მან. 90 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი,14.
Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр.И.Чавчавадзе, I4.
საქ. სსრ მეცნ. აკად. სტამბა, თბილისი 60,
კუტუზოვის ქ. 19.
Типография АН Груз.ССР,Тбилиси 60,ул.Кутузова,I9.