

ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემია
საქართველოს საინჟინრო აკადემია
ფაზისის აკადემია

თამაზ ოზგაძე

კლასიკური მექანიკის მათემატიკური მეთოდები

II ტომი

ოპტიმიზაციის მეთოდები და დინამიკური სისტემები

თბილისი

2024

წიგნი წარმოადგენს მონოგრაფიის ტიპის სახელმძღვანელოს, მექანიკის მათემატიკური მეთოდებით დაინტერესებული ნიჭიერი მკითხველისათვის.

წიგნში მოცემული თეორიული მასალა, ილუსტრირებულია შესაბამისი მაგალითებით და ამოცანებით. ამოცანების ამოხსნისას, მკითხველი ნაბიჯ-ნაბიჯ შედის თანამედროვე მათემატიკური მექანიკის ულამაზესი სივრცის ლაბირინთებში.

მეორე ტომში შესწავლილია ფუქციონალური ანალიზის, განზოგადებული ფუნქციების, ოპტიმიზაციის მეთოდების და ვარიაციული აღრიცხვის მექანიკაში გამოყენების მეთოდები, რაც საშუალებას მისცემს მკითხველს, დაინახოს მექანიკური პროცესების მათემატიკური მოდელირების ულამაზესი მიმართულების ხვეულები და გაერკვეს იმ საკითხების სიღრმეშიც, რაც მექანიკის სფეროს განეკუთვნება.

რეცენზენტი: ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემიის
პრეზიდენტი, ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა
დოქტორი, პროფესორი თემურ ჩილაჩავა

საგამომცემლო სახლი “ტექნიკური უნივერსიტეტი”, 2024

ISBN 978-9941-8 – 6636-4 (სამივე ტომის)

ISBN 978-9941-8 – 6764-4 (მეორე ტომის)



ყველა საავტორო უფლება დაცულია. ამ წიგნის ნებისმიერი ნაწილის (ტექსტი, ფოტო, ილუსტრაცია თუ სხვა) გამოყენება არცერთი ფორმით და საშუალებით (ელექტრონული თუ მექანიკური) არ შეიძლება, გამომცემლის წერილობითი ნებართვის გარეშე. საავტორო უფლების დარღვევა ისჯება კანონით.

ეძღვნება ჩემი უდიდესი მასწავლებლის,
პროფესორ თეიმურაზ ვოინიჩ-სიანოჟენცკის
ნათელ ხსოვნას

წინასიტყვაობა

წინამდებარე წიგნი წარმოადგენს მექანიკის მათემატიკური მეთოდების კურსის მეორე ტომს, რომელიც ეძღვნება ფუნქციონალური ანალიზის, განზოგადებული ფუნქციების, ბიფურკაციების თეორიის და ატრაქტორების მექანიკაში გამოყენების თავისებურებებს.

პირველ თავში განხილულია სასრულგანზომილებიანი ვექტორული სივრცის გეომეტრია და ზოგიერთ, არსებულ ცნებათა განზოგადება ჰილბერტის სივრცისათვის.

მეორე თავში შესწავლილია განზოგადებული ფუნქციები და მათი თვისებები, რაც აუცილებელია ამ აპარატის მექანიკაში სწორი გამოყენებისათვის.

მესამე თავში განხილულია ოპტიმიზაციის მეთოდები რასაც დიდი გამოყენება აქვს მექანიკაში კონსტრუქციათა ოპტიმალური პროექტირებისას.

მეოთხე თავში შესწავლილია ვარიაციული აღრიცხვის მეთოდები და მათი პრაქტიკულად გამოყენების გზები.

მეხუთე თავში მოცემულია დინამიკური სისტემების კვლევის გეომეტრიული მეთოდები. ატრაქტორების სახეები და კლასიფიკაცია ლიაპუნოვის მაჩვენებლების საშუალებით.

წიგნი განკუთვნილია მათემატიკით დაინტერესებული ნიჭიერი უფროსი კურსის სტუდენტებისათვის. ის საინტერესო იქნება, აგრეთვე, მეცნიერებით დაინტერესებული ინჟინრებისა და ყველა იმ მკითხველისათვის, ვისაც თაამედროვე მექანიკის ახალი მეთოდები აინტერესებს.

I თავი. ჰილბერტის სივრცის გეომეტრია

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ სასრულგანზომილებიან ევკლიდურ სივრცეს; ჰილბერტის სივრცის აქსიომატიკას, შვარცის და სამკუთხედის უტოლობებს; პარალელოგრამის წესს და მის ურთიერთობას ბანახის სივრცესთან; l^2 სივრცის სისრულეს; ტრანსფინიტურ კარდინალურ რიცხვებს; სეპარაბელური ჰილბერტის სივრცეების ეკვივალენტობას; დიდი განზომილების ჰილბერტის სივრცეებს; ფოკის სივრცის სეპარაბელობას; ორთონორმირებული მიმდევრობების სისრულის კრიტერიუმს; წრფივ ფუნქციონალებს; რის-ფრეშეს თეორემას; ძლიერ და სუსტ კრებადობას.

1.1. მატრიცებისა და სასრულგანზომილებიანი სივრცეების ძირითადი ცნებები

ნამდვილ ან კომპლექსურ წევრებიანი $n \times n$ ზომის A მატრიცა, გამოსახავს n განზომილებიანი ნამდვილი ან კომპლექსური V^n ევკლიდური სივრცის წრფივ გარდაქმნას:

$x \rightarrow x' = Ax$. ამ ჩანაწერში x განიხილება როგორც მატრიცა სვეტი, განზომილებით $n \times 1$.

მოცემული წრფივი გარდაქმნა შეგვიძლია ჩავწეროთ კოორდინატებშიც: $x'_j = \sum_{k=1}^n A_{jk} x_k$.

M მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა აღინიშნება M^T სიმბოლოთი, ხოლო ერმიტულად შეუღლებული მატრიცა ჩაიწერება შემდეგნაირად: M^* . (ერმიტულად შეუღლებული მატრიცა მიიღება მოცემული მატრიცის ტრანსპონირებით და შემდგომ, ყოველი კომპონენტის შეცვლით, მისი შეუღლებული კომპლექსური რიცხვით).

ცხადია, რომ $(M^T)_{jk} = M_{kj}$; $(M^*)_{jk} = \bar{M}_{kj}$; კერძოდ, x^T და x^* ვექტორ-სტრიქონებს წარმოადგენენ.

თუ x და y წარმოადგენენ V^n სივრცის ვექტორებს, მაშინ მათი ერმიტული სკალარული ნამრავლი წარმოადგენს 1×1 ზომის მატრიცას ანუ რიცხვს და განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$(x, y) = x * y = \sum_{j=1}^n \bar{x}_j y_j$. ნამდვილი წევრებიანი ვექტორების შემთხვევაში, გვექნება რომ $(x, y) = x^T y = \sum_{j=1}^n x_j y_j = x \cdot y$.

უნდა აღინიშნოს, რომ xy^* წარმოადგენს $n \times n$ ზომის მატრიცას, რომლის რანგიც ერთის ტოლია. ეს ფაქტი უშუალოდ შეგვიძლია შევამოწმოთ სამგანზომილებიანი ვექტორების შემთხვევაში:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} (y_1 \ y_2 \ y_3) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix}. \quad \text{ცხადია, რომ ამ}$$

მატრიცის რანგიც ერთის ტოლია.

განსაზღვრებიდან გამომდინარე:

$$(x, ay) = a(x, y);$$

$$(ax, y) = \bar{a}(x, y).$$

განსაზღვრება. ვიტყვი, რომ x და y ვექტორები ორთოგონალურია, თუ $(x, y) = 0$.

განსაზღვრება. x ვექტორის სიგრძეს უწოდებენ $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ სიდიდეს, რომელსაც ზოგჯერ აღნიშნავენ შემდეგნაირად: $|x|$.

V^n სასრულ განზომილებიანი ვექტორული სივრცის ძირითადი გეომეტრიული ცნებებია: **წრფივად დამოუკიდებლობა** და **ორთოგონალობა**.

განსაზღვრება. x^1, x^2, \dots, x^k ვექტორებს ეწოდებათ **წრფივად დამოუკიდებელი**, თუ არსებობს ისეთი a_1, a_2, \dots, a_k რიცხვები, რომელთაგან არაა ყველა ნულოვანი, რომ მათი წრფივი კომბინაცია $\sum_{j=1}^n a_j x^j = 0$.

თუ სისტემა, არაა წრფივად დამოუკიდებელი, მას **წრფივად დამოუკიდებელი** ეწოდება.

P.S. თუ $k > n$, მაშინ x^1, x^2, \dots, x^k სისტემა ყოველთვის წრფივადაა დამოუკიდებელი V^n სივრცეში.

განსაზღვრება. მოცემული k ვექტორის წრფივი $\sum_{j=1}^n a_j x^j$ კომბინაციების სიმრავლეს, V^n სივრცის წრფივი ქვესივრცე ეწოდება, რომელიც წარმოადგენს x^1, x^2, \dots, x^k ვექტორთა სისტემის წრფივ გარსს.

თუ x^1, x^2, \dots, x^k წრფივად დამოუკიდებელი სისტემაა, მაშინ მათ მიერ წარმოქმნილი წრფივი ქვესივრცის განზომილებაა k .

P.S. წრფივ ალგებრაში ცნობილია, რომ თუ გვაქვს სხვა y^1, y^2, \dots, y^k წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემა, მაშინ მათ მიერ წარმოქმნილი წრფივი ქვესივრცე ემთხვევა x^1, x^2, \dots, x^k ვექტორთა სისტემის წრფივ გარსს.

თუ V^n ვექტორული სივრცე განსაზღვრულია ნამდვილ \mathbb{R} რიცხვთა ველს ზემოთ, მაშინ a_1, a_2, \dots, a_k ნამდვილ რიცხვებს წარმოადგენენ, ხოლო თუ, განსაზღვრულია \mathbb{C} კომპლექსურ რიცხვთა ველს ზემოთ, მაშინ - კომპლექსურ რიცხვებს. ზოგჯერ ამბობენ, რომ კომპლექსურ V^n სივრცეს აქვს $2n$ ნამდვილი განზომილება.

განსაზღვრება. V^n ვექტორული სივრცის $\{v^j\}_1^k$ ვექტორების სისტემას ეწოდება **ორთონორმირებული**, თუ $(v^i, v^j) = \delta_{ij}$, სადაც δ_{ij} კრონეკერის სიმბოლოა.

P.S. ცხადია, რომ $k \leq n$. თუ $k = n$, მაშინ ნებისმიერი x ვექტორი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით: $x = \sum_{j=1}^n a_j v^j$, სადაც $a_j = (v^j, x)$.

განსაზღვრება. V^n ვექტორული სივრცის, S ქვესივრცის **ორთოგონალური S^\perp** ეწოდება, ისეთი x ვექტორების სიმრავლეს, რომ :

$$S^\perp = \{x: (x, y) = 0 \forall y \in S\}. \quad (1.1)$$

P.S. ცხადია, რომ $(S^\perp)^\perp = S$; $\dim S + \dim S^\perp = n$. წრფივ ალგებრაში მტკიცდება **თეორემა პროექციის შესახებ**, რომ V^n ვექტორული სივრცის ნებისმიერი x ვექტორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ისეთ ორ შესაკრებად, რომელთაგან ერთი ეკუთვნის S ქვესივრცეს, ხოლო მეორე მის ორთოგონალურ S^\perp სივრცეს.

ამ თავში ხდება, ზემოთ მოყვანილი ცნებების განზოგადება, გარკვეული უსასრულო განზომილებიანი სივრცეებისათვის, რომელთაც **ჰილბერტის სივრცეს** უწოდებენ.

შემდგომში, ჩვენ განვაზოგადებთ რიგ ცნებებს, რომლებიც მატრიცებთან ანუ წრფივ გარდაქმნებთანაა დაკავშირებული, მათ **ჰილბერტის სივრცეში წრფივ ოპერატორებს** უწოდებენ. ახლა განვიხილოთ ეს ცნებები V^n ვექტორულ სივრცეში. თუმცა, რიგი ცნებებისა არ ზოგადდებიან.

განსაზღვრება. თუ მოცემული გვაქვს $n \times n$ ზომის A მატრიცა, $v \neq 0$ ვექტორი და λ რიცხვი, ხოლო $Av = \lambda v$, მაშინ λ რიცხვს ეწოდება A მატრიცის საკუთრივი რიცხვი, ხოლო v ვექტორს - მისი შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი.

P.S. $x \rightarrow x' = Ax$ წრფივ გარდაქმნას აქვს შებრუნებული $x' \rightarrow x = A^{-1}x'$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა **ნული არაა** A გარდაქმნის საკუთრივი მნიშვნელობა. მართლაც, საკუთრივი მნიშვნელობები წარმოადგენენ $\det(\lambda I - A) = 0$ განტოლების ამონახსნებს და თუ $\lambda = 0$, მაშინ $\det A = 0$, რაც იმას ნიშნავს რომ მატრიცა გადაგვარებულია და არ ექნება შებრუნებული.

A მატრიცის შებრუნებული A^{-1} მატრიცის საპოვნელად, **თეორიულად**, ვიყენებთ ალგებრულ დამატებებს, მაგალითად, მესამე რიგის მატრიცისათვის:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$$

პრაქტიკულად გამოთვლებისათვის კი ვიყენებთ გაუსის მეთოდს. ეს მეთოდები არ ზოგადდება, რადგან პრაქტიკულად გამოუყენებელია მაღალი რიგის მატრიცების შემთხვევაში.

თუ, A მატრიცა **ერმიტულია** ანუ $A^* = A$, მაშინ მისი ყველა საკუთრივი მნიშვნელობა **ნამდვილი** რიცხვია და მას აქვს **სრული** ორთონორმირებული $v^{(1)}; v^{(2)}; \dots; v^{(n)}$ ვექტორებისაგან შედგენილი ბაზისი.

თუ U არის $n \times n$ ზომის მატრიცა, რომლის სვეტებიც ბაზისური ვექტორების კოორდინატებია, მაშინ ეს მატრიცა **უნიტარულია**:

$UU^* = U^*U = I$, ხოლო $U^*AU = D$ არის დიაგონალური მატრიცა, რომლის მთავარ დიაგონალზე A მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობებია განლაგებული, ხოლო $A = UDU^*$.

თეორემა: A მატრიცის დიაგონალიზირებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ის იყოს **ნორმალური** ანუ $AA^* = A^*A$.

ორი კომპუტირებადი, ნორმალური A და B მატრიცა შეგვიძლია მივიყვანოთ დიაგონალურ სახეზე, ერთიდაიგივე უნიტარული U მატრიცის საშუალებით.

განსაზღვრება. A მატრიცას ეწოდება დადებითად განსაზღვრული, თუ $x^*Ax > 0 \quad \forall x \neq 0$.

განსაზღვრება. A მატრიცას ეწოდება დადებითად ნახევრად-განსაზღვრული, თუ $x^*Ax \geq 0 \quad \forall x \neq 0$.

ასეთ შემთხვევაში A მატრიცა ერმიტულია. ეს ცნებები განზოგადებადია ჰილბერტის სივრცისათვისაც.

1.2. წრფივი ნორმირებული სივრცე

ჩვენ განვიხილეთ V^n ვექტორული სივრცის რიგი თვისებები და ვექტორებს განვიხილავდით, როგორც გარკვეული რიცხვების ერთობლიობას. ახლა ვექტორული ან რაც იგივეა წრფივი სივრცე ავაგოთ აქსიომატურად, რაც საშუალებას მოგვცემს განვიხილოთ ერთდროულად მისი ყველა რეალიზაცია (ვექტორული სივრცე წრფივი სივრცის ერთ-ერთი რეალიზაციაა). ასეთ შემთხვევაში, უფრო მარტივი იქნება წრფივი სივრცის ცნებათა განზოგადება უსასრულო-განზომილებიანი სივრცეებისათვის.

წრფივი V სივრცის ელემენტები განსაზღვრული F ველს ზემოთ $=(\mathbb{R}$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ან \mathbb{C} კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის) და აკმაყოფილებენ შემდეგ აქსიომებს:

$$1) (u \in V \wedge v \in V) \wedge (\forall a, b \in F) \Rightarrow (au + bv \in V);$$

$$2) u + v = v + u; \quad u + (v + w) = (u + v) + w;$$

$$3) a(bu) = (ab)u;$$

$$4) a(u + v) = au + av; \quad (a + b)u = au + bu;$$

$$5) (\exists! 0 \wedge (\forall u \in V)) \Rightarrow (u + 0 = u);$$

$$6) (\exists! 1 \wedge (\forall u \in V)) \Rightarrow (1u = u) \wedge (0u = 0).$$

როგორც წესი, იყენებენ შემდეგ ჩანაწერებს:

$$(-1)u = -u; \quad u + (-1)v = u - v$$

განსაზღვრება. წრფივი V სივრცეს ეწოდება ნორმირებული, თუ $(\forall u \in V, \exists \|u\| \in \mathbb{R})$ ნამდვილი რიცხვი, რომელსაც $\|u\|$ ელემენტის ნორმას უწოდებენ და ადგილი აქვს შემდეგ თვისებებს:

$$7) (\mathbf{u} \neq \mathbf{0}) \Rightarrow \|\mathbf{u}\| > 0;$$

$$8) \|\mathbf{0}\| = 0;$$

$$9) \|a\mathbf{u}\| = |a|\|\mathbf{u}\|;$$

$$10) \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

P.S. ვექტორულ V^n სივრცეში $\|\mathbf{u}\|$ ვექტორის ნორმად განიხილება ვექტორის სიგრძე ანუ $\|\mathbf{u}\| = |u| = \sqrt{\sum_{j=1}^n u_j^2}$.

1.3. ჰილბერტის სივრცის აქსიომები

ჰილბერტის H სივრცე (ნამდვილი ან კომპლექსური) არის სრული წრფივი სივრცე, სკალარული ნამრავლით. ეს იმას ნიშნავს, რომ ჰილბერტის სივრცე არის წრფივი სივრცე, რომლის ყოველი ორი $\mathbf{u}; \mathbf{v}$ ელემენტებისათვის განსაზღვრულია სკალარული ნამრავლის ფუნქცია (\mathbf{u}, \mathbf{v}) სკალარულ $F = \mathbb{R}$ ან \mathbb{C} სიმრავლეში, რომელიც წრფივია \mathbf{v} ელემენტის მიმართ და ერმიტულად სიმეტრიულია: $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$ ანუ ნახევრადწრფივია \mathbf{u} ელემენტის მიმართ.

ცხადია რომ, მაშინ $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$ კვადრატული ფორმა დადებითად განსაზღვრულია. ასევე, H სივრცე სრულია $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$ ნორმის მიმართ ანუ ყოველი კოშის მიმდევრობა ჰილბერტის სივრცეში კრებადია. ეს ფაქტი, ხშირად, გამოიყენება კვანტურ მექანიკაში.

ნამდვილი ჰილბერტის სივრცე, არის V^n ევკლიდური სივრცის უსასრულოგანზომილებიანი ანალოგი. აქ, სკალარული (\mathbf{u}, \mathbf{v}) ნამრავლი, არის წრფივი და სიმეტრიული ორივე ცვლადის მიმართ.

კომპლექსურ შემთხვევაში, სკალარული ნამრავლი არის ერმიტული სკალარული ნამრავლის ანალოგი ანუ $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum \bar{u}_j v_j$.

დავამტკიცოთ სამკუთხედის უტოლობა: H სივრცეში ცხადია, რომ

$$0 \leq (\mathbf{u} + a\mathbf{v}, \mathbf{u} + a\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\mathbf{u}, a\mathbf{v}) + (a\mathbf{v}, \mathbf{u}) + (a\mathbf{v}, a\mathbf{v}),$$

რადგან $(a\mathbf{v}, \mathbf{u})$ კომპლექსურად შეუღლებულია $(\mathbf{u}, a\mathbf{v})$ ნამრავლთან,

$$-2\operatorname{Re}(\mathbf{u}, a\mathbf{v}) \leq \|\mathbf{u}\|^2 + |a|^2\|\mathbf{v}\|^2. \quad (1.2)$$

ვთქვათ

$a = -\frac{\overline{(u,v)}\|u\|}{|(u,v)|\|v\|}$, მაშინ (2) უტოლობის და $(u, av) = a(u, v)$ ტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$2|(u, v)| \frac{\|u\|}{\|v\|} \leq 2\|u\|^2$$

ანუ

$$|(u, v)| \leq \|u\|\|v\|. \quad (1.3)$$

ამ უტოლობას შვარცის უტოლობას უწოდებენ.

აქედან გამომდინარეობს სკალარული ნამრავლის ფუნქციის უწყვეტობა ორივე ცვლადის მიმართ.

შესაბამისად,

$$\begin{aligned} (u + v, u + v) &= \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}(u, v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|(u, v)| + \|v\|^2 \leq \\ &\leq (\|u\| + \|v\|)^2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

აქედან კი გამომდინარეობს სამკუთხედის უტოლობა:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \quad (1.5)$$

სკალარული ნამრავლის ნორმით განსაზღვრებიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2). \quad (1.6)$$

ამ ტოლობას პარალელოგრამის წესს უწოდებენ, რადგან ევკლიდეს სივრცეში, ის შეესაბამება პარალელოგრამის გვერდებსა და დიაგონალებს შორის არსებულ დამოკიდებულებას.

P.S. სრულ, ნორმირებულ წრფივ სივრცეს ბანახის B სივრცეს უწოდებენ. თუმცა, მისი ნორმა არაა აუცილებლად ინდუცირებული სკალარული ნამრავლით.

1.4. ჰილბერტის სივრცის მაგალითები

ჰილბერტის სივრცის მაგალითებია კვადრატით ინტეგრებადი განზოგადებული ფუნქციების სიმრავლეები: $L^2(a, b)$; $L^2(\mathbb{R}^n)$; ...

ამ სიმრავლეებისათვის სკალარული ნამრავლი განისაზღვრება, შესაბამისად, შემდეგნაირად:

$$(f, g) = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx. \quad (1.7)$$

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx. \quad (1.8)$$

განვიხილოთ l^2 კომპლექსური რიცხვების ისეთი $\xi = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობების სიმრავლე, რომელთათვისაც კრებადია შესაბამისი $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ მწკრივები.

x_n რიცხვებს შეიძლება გავუკეთოთ ξ წერტილის კოორდინატების ინტერპრეტაცია, მაშინ $\xi = \{x_n\}$; $\eta = \{y_n\}$, ხოლო $\alpha\xi + \beta\eta$ ჯამი განისაზღვრება, როგორც მიმდევრობა: $\alpha\xi + \beta\eta = \{\alpha x_n + \beta y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

ამ შემთხვევაში, სკალარული ნამრავლი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n. \quad (1.9)$$

l^2 სრული სივრცეა.

1.5. კარდინალური რიცხვები. სეპარაბელობა

სასრული ან უსასრულო სიმრავლის კარდინალური რიცხვი (სასრული ან ტრანსფინიტური) მიუთითებს სიმრავლის ელემენტების რაოდენობაზე.

განსაზღვრება. თუ, ორი A და B სიმრავლის ელემენტებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა $A \leftrightarrow B$ თანადობა, მაშინ ამბობენ, რომ ამ სიმრავლეებს შეესაბამებათ ერთიდაიგივე კარდინალური რიცხვი და წერენ $\overline{A} = \overline{B}$.

თუ A სასრული n ელემენტის სიმრავლეა, მაშინ $\overline{A} = n$. რაც შეეხება ტრანსფინიტურ (უსასრულო) კარდინალურ რიცხვებს, მათ ენიჭებათ შესაბამისი აღნიშვნები.

მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა \mathbb{N} სიმრავლის შესაბამის კარდინალურ რიცხვს (აღეფ ნული), აღნიშნავენ გოთური სიმბოლოთი $\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} \aleph_0$ ესაა თვლადი უსასრულობის შესაბამისი კარდინალური რიცხვი. ყველა სხვა A სიმრავლე, რომლის ელემენტების გადათვლაც შეიძლება ნატურალური რიცხვებით,

აგრეთვე, თვლად მიიჩნევა და მასაც იგივე კარდინალური რიცხვი შეესაბამება.

მაგალითად, მთელ რიცხვთა \mathbb{Z} სიმრავლე, ლუწ რიცხვთა სიმრავლე, კენტ რიცხვთა სიმრავლე, რაციონალურ \mathbb{Q} რიცხვთა სიმრავლე თვლადი სიმრავლეებია და მათაც იგივე კარდინალური რიცხვი შეესაბამება.

თეორემა. თვლადი სიმრავლეების თვლადი გაერთიანება თვლადი სიმრავლეა.

ფუნქციონალურ სივრცეთა თეორიაში, დიდი მნიშვნელობა აქვს n ცვლადის მქონე, რაციონალურ კოეფიციენტებიანი პოლინომების თვლად სიმრავლეს.

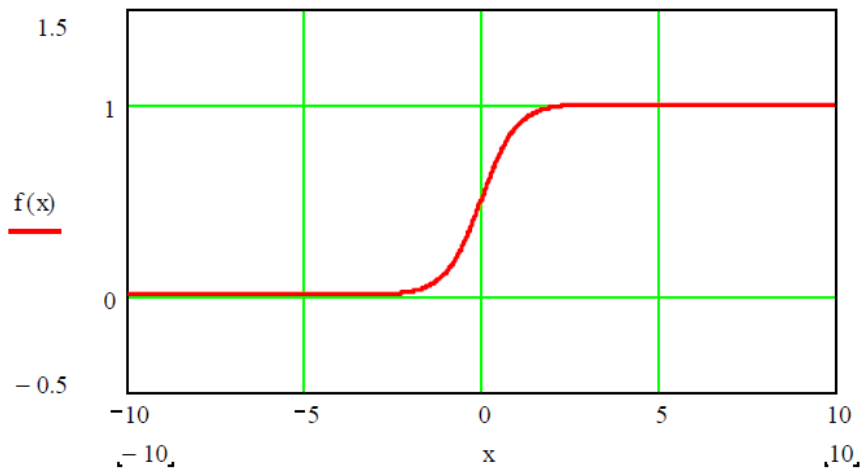
P.S. ნებისმიერი N ნატურალური რიცხვისათვის, იმ $p(x_1; x_2; \dots; x_n)$ პოლინომების სიმრავლე, რომელთა ხარისხი $\leq N$, ხოლო რაციონალურ $\frac{r}{s}$ კოეფიციენტებში, $|r| \leq N, 1 \leq s \leq N$ არის სასრული. მასასადამე, ყველა ასეთი პოლინომების სიმრავლეთა გაერთიანება იქნება თვლადი.

საყოველთაოდ ცნობილია, რომ $[0; 1]$ სეგმენტის შემადგენელ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. ამ სიმრავლის შესაბამის კარდინალურ რიცხვს **კონტინუუმ სიმძლავრე** ეწოდება და აღინიშნება c ასოთი. (სიმრავლის კარდინალურ რიცხვს, ზოგჯერ, ამ სიმრავლის სიმძლავრეს უწოდებენ).

განვიხილოთ $x \rightarrow \frac{1}{2}(1 + th x)$ გადასახვა ნახ. 1.1. როგორც ნახაზიდან ჩანს, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრე $[0; 1]$ სეგმენტის წერტილთა სიმძლავრის ტოლია ანუ $\overline{\mathbb{R}} = c$.

ანალოგიურად, არსებობს **პეანოს იტერაციული პროცესი**, რომელიც $[0; 1]$ სეგმენტს გადასახავს ერთეულოვან კვადრატში: $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$, რაც იმას ნიშნავს რომ $\overline{\mathbb{R}^2} = \overline{\mathbb{R}^3} = \overline{\mathbb{R}^n} = c$.

$$f(x) := \frac{1}{2} \cdot (1 + \tanh(x))$$



ნახ. 1.1. გადასახვა $\mathbb{R} \leftrightarrow [0; 1]$

მოცემული n ელემენტური სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა რაოდენობაა 2^n . თვლადი სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაოდენობა კი კონტინუუმ სიმძლავრის კარდინალური რიცხვია ანუ $c = 2^{\aleph_0}$.

ცერმელოს თეორემა. ნებისმიერი სიმრავლე სავსებით დალაგებადია.

რაც იმას ნიშნავს, რომ ყოველი ორი სიმრავლის კარდინალური რიცხვი, შეგვიძლია შევადაროთ ერთმანეთს. მაგალითად $c > \aleph_0$.

ბერნშტეინის თეორემა. თუ არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა, ყოველი ორი სიმრავლიდან მეორის ნაწილში, მაშინ არსებობს მათ შორის ურთიერთცალსახა თანადობაც და მათი სიმძლავრეები ერთნაირია.

P.S. ნებისმიერი ნამდვილი ცვლადის ფუნქცია არის გადასახვა: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. შესაბამისად ასეთი გადასახვების სიმრავლის სიმძლავრეა c^c ანუ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე, უფრო მეტია ვიდრე წრფის წერტილების სიმრავლე.

თუ გადასახვებს დავადებთ **უწყვეტობის პირობას**, მაშინ ასეთ გადასახვათა სიმრავლის კარდინალური რიცხვი იქნება: $c^{\aleph_0} = c$.

განსაზღვრება. A სიმრავლეს ეწოდება **მკვრივი H სიმრავლეში**, თუ H სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც A სიმრავლის ელემენტების მიმდევრობის ზღვარი.

განსაზღვრება. ჰილბერტის H სივრცეს ეწოდება **სეპარაბელური**, თუ, მასში არსებობს თვლადი მკვრივი ქვესიმრავლე.

მაგალითად, $L^2(a, b)$ სეპარაბელურია, რადგან ამ სიმრავლის ნებისმიერი ფუნქცია წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციას მიმდევრობის ზღვარს, უწყვეტ ფუნქციას კი ნებისმიერი სიზუსტით შეგვიძლია მივუახლოვდეთ რაციონალურკოეფიციენტებიანი პოლინომებით, რომელთა სიმრავლაც თვლადია.

ანალოგიურად მტკიცდება $L^2(\mathbb{R}^n)$ სივრცის სეპარაბელურობაც.

P.S. არასეპარაბელური ჰილბერტის სივრცეები, გვხვდება თითქმის-პერიოდული ფუნქციების განხილვისას, თუმცა, ასეთ ფუნქციებს კლასიკურ მექანიკაში არ განვიხილავთ.

1.6. ორთონორმირებული მიმდევრობები

განსაზღვრება. ჰილბერტის H სივრცის ორ f და g ელემენტს ეწოდებათ **ორთოგონალური** (ჩაიწერება $f \perp g$) თუ, მათი სკალარული ნამრავლი $(f, g) = 0$.

ასეთი სისტემის როლს, ჰილბერტის L^2 სივრცეში, ადგენს ნებისმიერი ორთოგონალურ ფუნქციათა სისტემა.

განსაზღვრება. $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ფუნქციათა სისტემას ეწოდება **ორთონორმირებული**, თუ $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$.

თუ $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ორთონორმირებული სისტემაა და $c_1; c_2; \dots; c_n; \dots$ რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობას: $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$, მაშინ $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i$ მწკრივის კერძო ჯამები წარმოადგენენ კოშის მიმდევრობას და მწკრივი კრებადია ჰილბერტის H სივრცის რომელიღაც ელემენტისაკენ.

განსაზღვრება. მოცემული $f \in H$ ფუნქციისათვის (φ_i, f) რიცხვებს ეწოდებათ f ფუნქციის **განზოგადებული ფურიეს კოეფიციენტები** $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ორთონორმირებული ბაზისის მიმართ.

რადგან

$$0 \leq \left(f - \sum_{i=1}^n (\varphi_i, f) \varphi_i; f - \sum_{i=1}^n (\varphi_i, f) \varphi_i \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n |(\varphi_i, f)|^2 + \sum_{i,j=1}^n \overline{(\varphi_i, f)} (\varphi_j, f) (\varphi_i, \varphi_j) = \\
&= \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n |(\varphi_i, f)|^2.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

მაშასადამე, ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\forall n: \sum_{i=1}^n |(\varphi_i, f)|^2 \leq \|f\|^2. \tag{1.11}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(\varphi_i, f)|^2 \leq \|f\|^2, \tag{1.12}$$

(12) უტოლობას ბესელის უტოლობა ეწოდება.

P.S. აქედან გამომდინარეობს, აგრეთვე, რომ მწკრივი $\sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i, f) \varphi_i$ კრებადია, თუმცა, არა აუცილებლად f ფუნქციისაკენ (თუ სისტემა არაა სრული).

განსაზღვრება. $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ორთონორმირებულ სისტემას ეწოდება სრული H ჰილბერტის სივრცეში, თუ, ამ სივრცეში არ არსებობს ისეთი არანულოვანი ელემენტი, რომელიც ორთოგონალურია სისტემის ყველა φ_i ფუნქციის მიმართ.

თეორემა 1. თუ $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ორთონორმირებული სისტემაა, მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

1) $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ სრული სისტემაა;

2) $f = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i, f) \varphi_i, \forall f \in H$;

3) $(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i, f) (\varphi_i, g)$;

4) $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(\varphi_i, f)|^2$. ბოლო ორ ტოლობას პარსევალის ტოლობები ეწოდებათ.

თეორემა 2. ჰილბერტის H სივრცე სეპარაბელურია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის შეიცავს სრულ ორთონორმირებულ სისტემას.

შედეგი. სეპარაბელური ჰილბერტის სივრცე, იზომორფულია ან სასრულგანზომილებიანი V^n ევკლიდის სივრცის ან l^2 ჰილბერტის სივრცის. იზომორფიზმის ქვეშ გვესმის არა მხოლოდ ურთიერთცალსახა დამოკიდებულება ოპერაციის შენახვით, არამედ, ნორმის შენახვითაც. ასე, რომ ეს თანადობა არის ჰომეომორფიზმიც.

იზომორფული ჰილბერტის სივრცეების განზომილებები ერთმანეთს ემთხვევა.

1.7. ქვესივრცე. თეორემა პროექციის შესახებ

ჰილბერტის H სივრცის ჩაკეტილ M წრფივ ქვესივრცეს ჩაკეტილ მრავალსახეობას უწოდებენ. M მრავალსახეობა თვითონაც ჰილბერტის სივრცეა. ვთქვათ S არის H ჰილბერტის სივრცის ნებისმიერი ქვესივრცე.

განსაზღვრება. თუ $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ არის S მეტრიკული სივრცის ელემენტების კრებადი მიმდევრობა, მაშინ $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i$ (საზოგადოდ არ ეკუთვნის S სივრცეს) ელემენტს S სივრცის **ზღვართი წერტილი** ეწოდება. თუ S სივრცე შეიცავს თავის ყველა ზღვართი წერტილს, მას ჩაკეტილი ეწოდება.

ვთქვათ M არის, H სივრცის ქვესივრცე. მაშინ, მისი ორთოგონალური M^{\perp} დამატება, განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$M^{\perp} = \{\varphi \in H: (\psi, \varphi) = 0 \forall \psi \in M\}. \quad (1.13)$$

M^{\perp} ჩაკეტილი წრფივი სივრცეა და მაშასადამე H სივრცის ქვესივრცე.

თეორემა პროექციის შესახებ. თუ M არის, H სივრცის ქვესივრცე, მაშინ H სივრცის ნებისმიერი ζ ელემენტი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით: $\zeta = \varphi + \psi$, $\varphi \in M$, $\psi \in M^{\perp}$.

1.8. წრფივი ფუნქციონალები. რის-ფრეშეს თეორემა

განსაზღვრება. H ჰილბერტის სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი, ეწოდება წრფივ ასახვას: $l(\varphi): H \rightarrow F$, სადაც F არის სკალარული ველი (\mathbb{R} ან \mathbb{C}).

$l(\varphi)$ ფუნქციონალის წრფივობიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ $l(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha l(\varphi) + \beta l(\psi)$.

განსაზღვრება. წრფივ $l(\varphi)$ ფუნქციონალს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ, არსებობს ისეთი მუდმივი K რიცხვი, რომ $\forall \varphi \in H$, ადგილი ექნება უტოლობას: $|l(\varphi)| \leq K\|\varphi\|$.

ფიქსირებული $\psi_0 \in H$ ელემენტისათვის, სკალარული ნამრავლი:

(ψ_0, φ) წარმოადგენს წრფივ შემოსაზღვრულ ფუნქციონალს.

რის-ფრეშეს თეორემა. H სივრცეზე განსაზღვრული ნებისმიერი წრფივი შემოსაზღვრული $l(\varphi)$ ფუნქციონალისათვის, მოიძებნება H სივრცის ერთადერთი $\psi_0 \in H$ ელემენტი, ისეთი, რომ ნებისმიერი $\varphi \in H$ ელემენტისათვის $l(\varphi) = (\psi_0, \varphi)$.

1.9. ძლიერი და სუსტი კრებადობა

ბოლცანო-ვეიერშტრასის თეორემის თანახმად, სასრულ განზომილებიან V^n ვექტორულ სივრცეში, ვექტორთა ნებისმიერი შემოსაზღვრული $\{u_k\}$ მიმდევრობა შეიცავს კრებად ქვემიმდევრობას.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, ჩაკეტილი ბირთვი $\{u: \|u\| \leq K\}$ კომპაქტურ სივრცეს წარმოადგენს. ამ სივრცეში, ნებისმიერი შემოსაზღვრული, ჩაკეტილი სიმრავლე კომპაქტს წარმოადგენს. ასეთ სივრცეებზე ამბობენ, რომ ის **ლოკალურად კომპაქტურია**.

უსასრულო განზომილებიანი, ჰილბერტის სივრცე არაა ლოკალურად კომპაქტური, რადგან მაგალითად ნებისმიერი ორთონორმირებული სისტემა შემოსაზღვრულია, მაგრამ არ შეიცავს კრებად ქვემიმდევრობას.

განსაზღვრება. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ კრებადობას, ძლიერი კრებადობა ეწოდება, თუ $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ როცა $n \rightarrow \infty$.

განსაზღვრება. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ კრებადობას, ეწოდება სუსტი კრებადობა, თუ $(v, u_n) \rightarrow (v, u) \forall v \in H$.

P.S. როცა საუბრობენ კრებადობაზე, როგორც წესი, იგულისხმება ძლიერი კრებადობა.

თეორემა 1. სუსტად კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

თეორემა 2. H სივრცე სუსტად სრულია იმ აზრით, რომ თუ $\{u_k\}$ მიმდევრობა ისეთია, რომ თუ $(u_k - u_l, v) \rightarrow 0, \forall v; k, l \rightarrow \infty$, მაშინ მოიძებნება ისეთი u , რომ $\forall v \in H, n \rightarrow \infty \Rightarrow (u_k - u, v) \rightarrow 0$.

P.S. ა) ძლიერი კრებადობიდან გამომდინარეობს სუსტი კრებადობაც;

ბ) სასრულგანზომილებიანი სივრცისათვის სუსტი და ძლიერი კრებადობა ეკვივალენტურია;

გ) ნებისმიერი უსასრულო ორთონორმირებული სისტემა სუსტად კრებადია;

დ) ჰილბერტის სივრცე სუსტად ლოკალურად კომპაქტურია;

ე) თუ $u_n \rightarrow u$ სუსტად და $(\|u_n\| \rightarrow \|u\|) \Rightarrow (u_n \rightarrow u)$ ძლიერი კრებადობაა.

II თავი. განზოგადებული ფუნქციები და მათი თვისებები

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ წრფივ ფუნქციონალებს; საცდელ ფუნქციებს; ორადწრფივ ფორმებს; საცდელი ფუნქციების კრებადობას; უწყვეტ ფუნქციონალებს; ნამდვილი და კომპლექსური ცვლადის განზოგადებულ ფუნქციებს; განზოგადებული ფუნქციების დიფერენცირებას და ინტეგრებას; ცვლადთა გარდაქმნას; განზოგადებულ ფუნქციათა კრებადობას; განსაკუთრებულობების დაგლუვების და რეგულარიზაციის ოპერატორებს.

2.1. განზოგადებული ფუნქციის ცნება

მექანიკაში და ფიზიკაში, ფუნქციონალური ანალიზის გამოყენებისათვის, მნიშვნელოვანია განვაზოგადოთ ფუნქციის კლასიკური ცნება ისე, როგორც ეს გააკეთა დირაკმა და დაასაბუთა ლორან შვარცმა.

კვანტური მექანიკის წარმოშობისას, დირაკმა შემოიყვანა $\delta(x)$ „ფუნქცია“, რომელიც უდრის ნულს თუ $x \neq 0$ და უდრის $+\infty$, როცა $x = 0$. ამასთან ერთად, ინტეგრალი ამ ფუნქციიდან ჩათვალა 1-ის ტოლად ანუ

$$\langle\langle \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx \rangle\rangle = \varphi(0), \quad (2.1)$$

ან უფრო ზოგად შემთხვევაში,

$$\langle\langle \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)dx \rangle\rangle = \varphi(a). \quad (2.2)$$

$\delta(x)$ ფუნქციის $\delta'(x)$ წარმოებული განისაზღვრება ისე, რომ შესაძლებელი იყოს ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენება:

$$\langle\langle \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-a)\varphi(x)dx \rangle\rangle = -\varphi'(a), \quad (2.3)$$

ნებისმიერი დიფერენცირებადი $\varphi(x)$ ფუნქციისათვის. უფრო მაღალი რიგის წარმოებულებიც ანალოგიურად გამოითვლება:

$$\langle\langle \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k)}(x-a)\varphi(x)dx \rangle\rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(a). \quad (2.4)$$

ახლა ვთქვათ $f(x)$ ნებისმიერი ფუნქციაა, ვთქვათ ალაგ-ალაგ უწყვეტი (რომელიც საზოგადოდ, არაა დიფერენცირებადი კლასიკური აზრით), მაშინ მისი განზოგადებული წარმოებული $f'(x)$ განისაზღვრება, როგორც ისეთი ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$\langle \langle \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx \rangle \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx, \quad (2.5)$$

ნებისმიერი უწყვეტად დიფერენცირებადი $\varphi(x)$ ფუნქციისათვის, რომელიც არანულოვანია, მხოლოდ მცირე ინტერვალის შიგნით და მის გარეთ ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს.

დირაკმა ასეთ $\delta(x); \delta'(x); f'(x)$ „ფუნქციებს არასაკუთრივი ფუნქციები“ უწოდა და აღნიშნა, რომ თუმცა, ზოგიერთ წერტილში ამ ფუნქციათა მნიშვნელობებზე ლაპარაკი არ შეიძლება, მაგრამ აზრი აქვს ინტეგრალის შიგნით მის განხილვას, სხვა ფუნქციებთან ნამრავლში. სწორედ, დირაკის ამ შენიშვნამ განაპირობა ლორან შვარცის მიერ განზოგადებულ ფუნქციათა თეორიის შექმნა.

P.S. როგორც ვხედავთ, $\delta(x); \delta'(x); f'(x)$ განზოგადებული ფუნქციები, გარკვეული ტიპის $\varphi(x)$ საცდელ ფუნქციათა სიმრავლეზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალებია, რომლებიც უწყვეტობის გარკვეულ პირობებს აკმაყოფილებენ.

ანალოგია განზოგადებულ ფუნქციებსა და ჩვეულებრივ ფუნქციებს შორის ცხადია. ჩვეულებრივი $f(x)$ ფუნქციისათვის x ცვლადის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება ფუნქციის ერთადერთი მნიშვნელობა. თუ $f(x)$ განზოგადებული ფუნქციაა, მაშინ ყოველ საცდელ $\varphi(x)$ ფუნქციას შეესაბამება გარკვეული რიცხვი. განზოგადებული ფუნქციისათვის შეუძლებელია ავირჩიოთ x ცვლადისთვის ზუსტად x_0 მნიშვნელობა. ამის მაგივრად, ჩვენ ვირჩევთ საცდელ $\varphi(x)$ ფუნქციას, რომელსაც აქვს მკვეთრი პიკი x_0 წერტილში და უდრის ნულს, ამ წერტილის შემცველი მცირე ინტერვალის გარეთ. მრავალი ფიზიკური ამოცანისათვის ეს ნიშნავს იმის შესაძლებლობას, რომ x შეგვიძლია გამოვთვალოთ მხოლოდ სასრული მიახლოებით.

ჩვეულებრივი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც განზოგადებული ფუნქციის კერძო შემთხვევა: როცა წრფივი ფუნქციონალი მოიცემა ინტეგრალით:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx. \quad (2.6)$$

$f(x)$ ფუნქციის (2.6) ფორმულით მოცემა რელევანტურია, რაზეც გვეუბნება შემდეგი თეორემა:

თეორემა. $(-\infty; \infty)$ შუალედზე განსაზღვრული უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები სრულად განსაზღვრულია, თუ განსაზღვრულია (2.6) ინტეგრალის მნიშვნელობა ყოველი უწყვეტი $\varphi(x)$ ფუნქციისათვის, რომელსაც აქვს მკვეთრი პიკი x_0 წერტილში და უდრის ნულს ამ წერტილის შემცველი მცირე ინტერვალის გარეთ.

თუ $f(x)$ და $g(x)$ განზოგადებული ფუნქციებია, მაშინ კონკრეტული x_0 წერტილისათვის აზრი არა აქვს წინადადებებს:

$$f(x_0) = g(x_0); \quad f(x_0) \geq g(x_0), \quad (2.7)$$

თუმცა, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ

$$f = g; \quad f \geq g, \quad (2.8)$$

რაიმე ღია $(a; b)$ შუალედზე. ასეთი წინადადება რელევანტურია ნებისმიერი ღია შუალედისათვის, მაგრამ არაა რელევანტური ისეთი სიმრავლებისათვის, რომლის ლებეგის ზომაც ნულის ტოლია. იმისათვის რომ გავარკვიოთ ეკუთვნის თუ არა x წერტილი ნულ-ლებეგის სიმრავლეს, საჭიროა ამ წერტილის ცოდნა უსასრულო სიზუსტით, რაც პრაქტიკული ამოცანების განხილვისას შეუძლებელია.

განზოგადებული ფუნქციების თეორიის არსიც იმაში მდგომარეობს, რომ ჩვენ უარს ვამბობთ იმ წერტილებში ფუნქციის მნიშვნელობებზე, რომელთა ლებეგის ზომაც ნულია, სამაგიეროდ, საშუალება გვაქვს ვიმუშაოთ განზოგადებული ფუნქციების ფართო კლასთან.

განზოგადებული ფუნქციები ისეთივე გამოყენებადი ობიექტები არიან, როგორც ჩვეულებრივი ფუნქციები. მაგალითად L^2 სივრცის ელემენტები წარმოადგენენ განზოგადებულ ფუნქციებს. ასეთი განზოგადებული ფუნქციები, ისევე, როგორც ჩვეულებრივი ფუნქციები, შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც კვანტური მექანიკის ტალღური ფუნქციები.

ფიზიკური ამოცანების განხილვისას, განსაკუთრებით დიფერენციალური ოპერატორების განხილვისას, განზოგადებული ფუნქციები გვიმარტივებენ გამოთვლებს, რადგან საშუალებას გვაძლევენ უგულებელვყოთ ლებეგის ნულზომის სიმრავლებზე

გამოთვლები. ცხადია, რომ ზემოთ განხილული საკითხები ადვილად განზოგადდება მრავალი ცვლადის შემთხვევაზეც.

2.2. საცდელი ფუნქციების C_0^∞ კლასი

საცდელი ფუნქციების სხვადასხვა კლასი, შესაბამისად წარმოქმნის განზოგადებული ფუნქციების სხვადასხვა კლასს. ყველა ზემოთგანხილული მაგალითიდან გამომდინარე, საცდელი ფუნქციები უნდა იყოს უსასრულოდ დიფერენცირებადი და მოცემული მცირე ინტერვალის გარეთ უნდა იყოს ნულოვანი. ყველა ასეთი $\varphi(x)$ ფუნქციების სიმრავლე ადგენს $C_0^\infty(\mathbb{R})$ ან $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ კლასს, იმის მიხედვით ერთუცნობიანია $\varphi(x)$ საცდელი ფუნქციები, თუ $\varphi(x) = \varphi(x_1; x_2; \dots; x_n)$ მრავალცვლადიანია. იმის გასარჩევად, რომ ნამდვილია თუ კომპლექსური, საცდელი ფუნქციების მნიშვნელობები წერენ შესაბამისად: $real_{C_0^\infty}$ ან $cp_{C_0^\infty}$. დამოუკიდებელი $x_1; x_2; \dots; x_n$ ცვლადები, ყოველთვის ნამდვილი რიცხვებია.

როგორც წესი, იყენებენ C^k აღნიშვნას იმ ფუნქციათა კლასისათვის, რომლებიც უწყვეტია თავის წარმოებულებთან ერთად k რიგამდე ჩათვლით (მრავალი ცვლადის ფუნქციებისათვის, ყველა k რიგამდე ჩათვლით კერძო წარმოებულებთან ერთად).

განსაზღვრება. $\varphi(x)$ საცდელი ფუნქციის გადამტანი ეწოდება იმ წერტილების სიმრავლის ჩაკეტვას, რომელთათვისაც $\varphi(x) \neq 0$.

P.S. ა) C_0^∞ აღნიშვნაში, ქვედა ნულოვანი ინდექსი მიუთითებს იმაზე, რომ ამ კლასის ნებისმიერი ფუნქციის გადამტანი არის შემოსაზღვრული. ზოგჯერ, იყენებენ საცდელ ვექტორ-ფუნქციებს.

განვიხილოთ $C_0^\infty(\mathbb{R})$ კლასის საცდელი ფუნქციის მაგალითი:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{თუ } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{თუ } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

ბ) ნებისმიერი წრფივი ფუნქციონალი, რომელიც განსაზღვრულია ყველა $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ საცდელი ფუნქციისათვის და აკმაყოფილებს უწყვეტობის პირობას, წარმოადგენს განზოგადებულ ფუნქციას \mathbb{R}^n სიმრავლეზე.

გ) არსებობს საცდელი ფუნქციების უფრო ფართო, შვარცის კლასი $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, მასში შემავალი საცდელი $\varphi(x)$ ფუნქციები არაა სავალდებულო, რომ იყვნენ მცირე ინტერვალის(გადამტანის) გარეთ ნულები, არამედ, მოითხოვება რომ ისინი ნულისაკენ მიისწრაფოდნენ სწრაფად, როცა $|x| \rightarrow \infty$. შესაბამის წრფივ ფუნქციონალებს, ნელი ზრდის განზოგადებულ ფუნქციებს უწოდებენ. ცხადია რომ $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

2.3. ორადწრფივი ფორმა

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ კლასში განსაზღვრული წრფივი F ფუნქციონალი ისეთი გადასახვია, რომელიც $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ საცდელ ფუნქციას შეუსაბამებს $F[\varphi]$ რიცხვს და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$F[a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2] = a_1F[\varphi_1] + a_2F[\varphi_2], \quad (2.10)$$

სადაც a_1 და a_2 ნებისმიერი მუდმივი რიცხვებია შესაბამისი სკალარული ველიდან.

განზოგადებული ფუნქციები \mathbb{R}^n სივრცეზე, სწორედ ასეთი წრფივი ფუნქციონალებია რომლებიც უწყვეტობის გარკვეულ პირობებს აკმაყოფილებენ. ამავე დროს, $\langle \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \rangle$ სახის გამოსახულებები წრფივია $f(x)$ განზოგადებული ფუნქციის მიმართ, აქედან გამომდინარე, განზოგადებული ფუნქციებისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ ორადწრფივი ფორმების თეორიაში მიღებული აღნიშვნები. წრფივ ფუნქციონალს, რომელიც განსაზღვრავს f განზოგადებულ ფუნქციას აღვნიშნავთ შემდეგნაირად: $\langle f, \cdot \rangle$, ხოლო განზოგადებული ფუნქციის მნიშვნელობას მოცემულ φ საცდელ ფუნქციაზე, აღვნიშნავთ $\langle f, \varphi \rangle$ გამოსახულებით.

თუ f და g განზოგადებული ფუნქციებია, ხოლო a და b მუდმივი რიცხვებია, მაშინ $af + bg$ ჩანაწერი აღნიშნავს შემდეგი სახის განზოგადებულ ფუნქციას:

$$\langle af + bg, \varphi \rangle = a\langle f, \varphi \rangle + b\langle g, \varphi \rangle. \quad (2.11)$$

მაგალითად, თუ $\delta(x)$ და $\delta'(x)$ არის დირაკის განზოგადებული ფუნქცია და მისი წარმოებული, მაშინ:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0); \quad \langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0). \quad (2.12)$$

ნებისმიერი a და b მუდმივი რიცხვებისათვის გამოსახულება:

$a\delta + b\delta'$ განზოგადებული ფუნქციაა და

$$\langle a\delta + b\delta', \varphi \rangle = a\langle \delta, \varphi \rangle + b\langle \delta', \varphi \rangle = a\varphi(0) - b\varphi'(0). \quad (2.13)$$

კომპლექსური ცვლადის შემთხვევაში, f განზოგადებული ფუნქციის შეუღლებულ განზოგადებულ ფუნქციას აღნიშნავენ \bar{f} სიმბოლოთი და ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულას:

$$\langle \bar{f}, \varphi \rangle = \overline{\langle f, \bar{\varphi} \rangle}. \quad (2.14)$$

მოცემული $f(x)$ განზოგადებული ფუნქციისთვის, შესაბამისი მნისვნიობა $\langle f, \varphi \rangle$, შეგვიძლია, აგრეთვე, ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx. \quad (2.15)$$

ასეთი ჩაწერა, საშუალებას გვაძლევს ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულის მეშვეობით, ჩავწეროთ რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(5x - 10)\varphi(x)dx = \varphi(2). \quad (2.16)$$

2.4. ფუნქციონალის უწყვეტობის ცნება

როგორც განზოგადებული ფუნქციის განსაზღვრებისას აღვნიშნეთ, საცდელ ფუნქციებზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი, იქნება განზოგადებული ფუნქცია, თუ ის, უწყვეტობის გარკვეულ პირობებს აკმაყოფილებს, რომელსაც ჩვენ ახლა განვიხილავთ. განზოგადებული ფუნქციების ელემენტარული თეორიის განხილვისას, უწყვეტობა დიდ როლს არ თამაშობს, თუმცა, ზოგიერთ შემთხვევაში, ის მეტად მნიშვნელოვანია.

განსაზღვრება. თუ განსაზღვრულია, საცდელი ფუნქციების კრებადობა $\varphi_j \rightarrow \psi$, მაშინ $\langle f, \cdot \rangle$ ფუნქციონალი უწყვეტი იქნება ამ კრებადობის მიმართ,

$$\text{თუ } \langle f, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle f, \psi \rangle. \quad (2.17)$$

საცდელი ფუნქციების კრებადობის გაძლიერება აფართოებს უწყვეტი ფუნქციონალების კლასს. განვიხილოთ ყველაზე ძლიერი \xrightarrow{D} კრებადობა.

განსაზღვრება. ვთქვათ $\psi, \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, ვიტყვი რომ $\varphi_j \xrightarrow{D} \psi$, თუ:

- ა) \mathbb{R}^n სიმრავლეში არსებობს ისეთი შემოსაზღვრული ქვესიმრავლე, რომელიც შეიცავს, ყველა საცდელი φ_j ფუნქციის გადამტანს;
- ბ) როცა $j \rightarrow \infty$ მაშინ $\varphi_j(x)$ ფუნქციები თანაბრად კრებადია $\psi(x)$ ფუნქციისაკენ $x \in \mathbb{R}^n$ ცვლადის მიმართ;
- გ) ანალოგიურად, $\varphi_j(x)$ საცდელი ფუნქციების ყველა კერძო წარმოებული $x \in \mathbb{R}^n$ ცვლადის მიმართ, თანაბრად კრებადია $\psi(x)$ ფუნქციის შესაბამისი წარმოებულისაკენ.

(2.17) პირობა განასხვავებს განზოგადებულ ფუნქციებს, სხვა წრფივი ფუნქციონალებისაგან. პრაქტიკა აჩვენებს, რომ ეს პირობა ყოველთვის სრულდება პრაქტიკული ამოცანების შემთხვევაში. თუ, საცდელი ფუნქციები წყვეტილი ფუნქციების სისტემიდანაა, მაშინ (2.17) პირობა აუცილებელია.

C_0^∞ სიმრავლეში, უფრო სუსტი კრებადობის შემთხვევაში, მიიღება განზოგადებული ფუნქციების უფრო ვიწრო კლასი. ყველაზე უფრო სუსტი საშუალო კვადრატული კრებადობა წარმოშობს განზოგადებული ფუნქციების L^2 ყველაზე უფრო ვიწრო კლასს.

2.5. განზოგადებული ფუნქციების მაგალითები

მაგალითი 1. თუ $f(x)$ რომელიმე უწყვეტი ფუნქციაა \mathbb{R}^n სიმრავლეზე, მაშინ ის შეგვიძლია გავაიგივოთ განზოგადებულ ფუნქციასთან, რომელიც შემდეგნაირად განისაზღვრება(რიმანის ინტეგრალით):

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)d^n x, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2.18)$$

დავამტკიცოთ, რომ $\langle f, \cdot \rangle$ ფუნქციონალი უწყვეტია. ვთქვათ $\varphi_j \xrightarrow{D} \psi$ და \mathcal{H} არის საკმაოდ დიდი ზომის კუბი $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ სივრცეში რომელიც მოიცავს ყველა φ_j და ψ ფუნქციის გადამტანს, მაშინ

$$\langle f, \varphi_j \rangle - \langle f, \psi \rangle = \int f(x)[\varphi_j(x) - \psi(x)]d^n x, \quad (2.19)$$

ინტეგრალი აიღება \mathcal{H} სიმრავლეზე. $\varphi_j(x) \rightarrow \psi(x)$ თანაბარი კრებადობა ნიშნავს იმას, რომ

$$(j \rightarrow \infty) \Rightarrow (M_j = \max |\varphi_j(x) - \psi(x)| \rightarrow 0). \quad (2.20)$$

რადგან ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|\langle f, \varphi_j \rangle - \langle f, \psi \rangle| \leq \int |f(x)| M_j d^n x, \quad (2.21)$$

ცხადია, რომ ადგილი აქვს ზღვარს

$$\langle f, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle f, \psi \rangle, \quad (2.22)$$

რაც ნიშნავს დასამტკიცებელს.

$f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა, სინამდვილეში, არაა აუცილებელი. ზემოთ მოყვანილი დამტკიცება სამართლიანია ნებისმიერი ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქციისათვის, რომლისთვისაც $\int |f(x)| M_j d^n x$ სასრულია ნებისმიერი \mathcal{H} შემოსაზღვრული კუბისათვის.

$f(x)$ ფუნქციას შეიძლება ქონდეს პირველი რიგის წყვეტა ან ინტეგრებადი განსაკუთრებულობები. მაგალითად, თუ $n \geq 2$,

$$\langle f, \varphi \rangle = \int \frac{1}{\|x\|} \varphi(x) d^n x, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (2.23)$$

განზოგადებული ფუნქცია, შეგვიძლია გავაიგივოთ ჩვეულებრივ $f = \frac{1}{\|x\|}$ ფუნქციასთან.

P. S. თუ $f(x)$ ფუნქცია არაა უწყვეტი, მაშინ ასეთ ფუნქციებსა და მათ შესაბამის განზოგადებულ ფუნქციებს შორის არაა ცალსახა დამოკიდებულება, რადგან $f(x)$ ფუნქციის ცვლილება წყვეტის წერტილებში, არ ცვლის შესაბამის განზოგადებულ ფუნქციას. ასევე თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს არაინტეგრებადი განსაკუთრებულობები, მაშინ ეს შესაბამისობაც არაა ერთმნიშვნელოვანი.

შემდეგი მაგალითები შეეხება **პოტენციალთა თეორიას**, სადაც $\rho(x)$ წარმოადგენს მუხტის სივრცული განაწილების სიმკვრივეს და ის როგორც წესი, უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციაა, თუმცა, წერტილოვანი, წირითი და ზედაპირული განაწილების შემთხვევაში აქვს პირველი გვარის წყვეტა. აქედან გამომდინარე, მას განიხილავენ როგორც განზოგადებულ ფუნქციას.

მაგალითი 2. მუხტების მარტივი ფენის სიმკვრივის განაწილება.

ვთქვათ \mathcal{N} არის შეკრული გლუვი ზედაპირი \mathbb{R}^3 სივრცეში. $\sigma(x)$ არის \mathcal{N} ზედაპირზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ

მუხტების განაწილების $\rho(\mathbf{x})$ სიმკვრივე ამ ზედაპირზე, წარმოადგენს განზოგადებულ ფუნქციას, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\langle \rho, \varphi \rangle = \int \sigma(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})dA, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2.24)$$

ინტეგრალი აიღება \mathcal{V} ზედაპირზე. ეს განაწილება მოგვაგონებს დირაკის δ ფუნქციის განაწილებას ზედაპირის ყოველ წერტილში

მაგალითი 3. ორმაგი ფენის მუხტების განაწილების სიმკვრივე.

განვიხილოთ იგივე \mathcal{V} ზედაპირი და $\sigma(\mathbf{x})$ ფუნქცია. ვთქვათ $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ არის \mathcal{V} ზედაპირის გარე ნორმალთა ვექტორული ველი. მაშინ მუხტების $\rho(\mathbf{x})$ განაწილების სიმკვრივე იქნება:

$$\langle \rho, \varphi \rangle = \int \sigma(\mathbf{x})\nabla\varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})dA, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2.25)$$

ეს განაწილება მოგვაგონებს დირაკის ფუნქციის δ' წარმოებულის განაწილებას ზედაპირის ყოველ წერტილში.

მაგალითი 4. წერტილოვანი მუხტის განაწილება მოცემულ ნულოვან წერტილში, მოიცემა ფორმულით:

$$\langle \rho, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2.26)$$

წერტილოვანი მუხტის განაწილების სიმკვრივე, შეგვიძლია ჩავწეროთ სხვანაირადაც:

$$\rho(\mathbf{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (2.27)$$

მაგალითი 5. ლორენცის გარდაქმნების მიმართ ინვარიანტული, დირაკის ერთერთი ფუნქცია, რომელიც კვანტურ ელექტროდინამიკაში გამოიყენება არის შემდეგი სახის:

$$\delta(t^2 - \|\mathbf{x}\|^2) = \frac{1}{2\|\mathbf{x}\|} [\delta(t - \|\mathbf{x}\|) + \delta(t + \|\mathbf{x}\|)]. \quad (2.28)$$

აქ სინათლის სიჩქარე მიღებულია ერთის ტოლად. შესაბამისი განზოგადებული D ფუნქცია ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\langle D, \varphi \rangle = \int \frac{1}{2\|\mathbf{x}\|} [\varphi(\|\mathbf{x}\|, \mathbf{x}) + \varphi(-\|\mathbf{x}\|, \mathbf{x})] d^3\mathbf{x}, \quad \forall \varphi(t, \mathbf{x}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4). \quad (2.29)$$

ეს განაწილება შეყურსულია სინათლის კონუსზე $t = \|\mathbf{x}\|$ ანუ

$\langle D, \varphi \rangle = 0$ ნებისმიერი $\varphi(t, \mathbf{x})$ ფუნქციისათვის რომლის გადამტანიც არ იკვეთება სინათლის კონუსთან.

მაგალითი 6. ზომა.

თუ ნამდვილი x ცვლადის $\sigma(x)$ ფუნქციას აქვს სასრული ვარიაცია, ნებისმიერ სასრულ ინტერვალზე, მაშინ სტილტიესის ინტეგრალით განსაზღვრული ფუნქციონალი:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) d\sigma(x) \quad (2.30)$$

არის განზოგადებული ფუნქცია და მას ზომას უწოდებენ.

მაგალითი 7. ნამრავლის შესახებ.

განზოგადებული ფუნქციებისათვის ჩვეულებრივი ნამრავლი არ განისაზღვრება (თუმცა, განისაზღვრება პირდაპირი ნამრავლი, როცა მათ სხვადასხვა ცვლადები აქვთ).

აზრი აქვს გლუვი $\alpha(x)$ ფუნქციის ნამრავლს განზოგადებულ $f(x)$ ფუნქციაზე αf :

$$\langle \alpha f, \varphi \rangle = \langle f, \alpha \varphi \rangle. \quad (2.31)$$

2.6. განზოგადებული ფუნქცია, როგორც ფუნქციონალური მიმდევრობის ზღვარი

დირაკის $\delta(x)$ ფუნქცია, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც $\{f_n(x)\}$ ფუნქციონალური მიმდევრობის ზღვარი, სადაც

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}, \quad (2.32)$$

რადგან, თუ $\varphi(x)$ ნებისმიერი საცდელი ფუნქციაა, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx = \varphi(0). \quad (2.33)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \rightarrow \delta(x). \quad (2.34)$$

განსაზღვრება. $\{f_n(x)\}$ ფუნქციონალურ მიმდევრობას, ეწოდება კრებადი $f(x)$ განზოგადებული ფუნქციისაკენ, თუ ნებისმიერი $\varphi(x)$ საცდელი ფუნქციისათვის არსებობს $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx$ ზღვარი და

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi. \quad (2.35)$$

განსაზღვრება. $\{f_n(x)\}$ განზოგადებულ ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვარი, ეწოდება ისეთ $f(x)$ განზოგადებულ ფუნქციას, რომლისთვისაც

$$\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi. \quad (2.36)$$

ამ განსაზღვრების საილუსტრაციოდ, გამოდგება უწყვეტი ფუნქციებისაგან შემდგარი, ფუნქციონალური $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობის $f(x)$ ზღვარი, თანაბარი კრებადობის პირობებში.

შვარცმა დაამტკიცა, რომ თუ f_n უწყვეტი წრფივი ფუნქციონალებია (განზოგადებული ფუნქციები) და ყოველი საცდელი $\varphi(x)$ ფუნქციისათვის, არსებობს $\langle f_n, \varphi \rangle$ მიმდევრობის ზღვარი, მაშინ ეს ზღვარიც იქნება წრფივი უწყვეტი ფუნქციონალი (განზოგადებული ფუნქცია).

ეს შედეგი შეგვიძლია გამოვიყენოთ დაგლუვების ამოცანაში.

ვთქვათ, $\rho(x)$ სფერულ-სიმეტრიული არაუარყოფითი ფუნქციაა $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ სიმრავლიდან, რომლის გადამტანიც ეკუთვნის ერთეულოვანი რადიუსის მქონე ბირთვს და ეს $\rho(x)$ ფუნქცია ნორმირებულია ანუ

$\int \rho(x) d^n x = 1$. ნებისმიერი $\delta > 0$ რიცხვისათვის, ვთქვათ

$$\rho_{y\delta}(x) = \rho\left(\frac{1}{\delta}(x - y)\right) \left(\frac{1}{\delta}\right)^n, \quad (2.37)$$

მაშინ

$$f_\delta(y) = \langle f, \rho_{y\delta}(x) \rangle \quad (2.38)$$

სიდიდეს f განზოგადებული ფუნქციის δ რადიუსით გასაშუალებული დაგლუვება ეწოდება.

P.S. ნებისმიერ f განზოგადებულ ფუნქციას შეგვიძლია მივუახლოვდეთ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციების მიმდევრობით.

2.7. განზოგადებული ფუნქციების დიფერენცირება და ინტეგრება

თუ f განზოგადებული ფუნქციაა \mathbb{R} სიმრავლეზე, მაშინ მისი f' წარმოებული განისაზღვრება ტოლობით:

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty. \quad (2.39)$$

თუ f და f' ჩვეულებრივი ფუნქციებია, მაშინ (2.39) ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას ემთხვევა.

ანალოგიურად განისაზღვრება მაღალი რიგის კერძო წარმოებულებიც, ნაწილობითი ინტეგრების საშუალებით. მაგალითად, თუ გვაქვს $f = f(x, y)$ განზოგადებული ფუნქცია, მაშინ

$$\langle \partial_x \partial_y f, \varphi \rangle = \langle f, \partial_x \partial_y \varphi \rangle, \forall \varphi \in C_0^\infty. \quad (2.40)$$

ფუნქციონალების უწყვეტობის შესახებ.

თუ $f(x)$ ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციაა \mathbb{R} სიმრავლეზე, მაშინ

$$(h \rightarrow 0) \Rightarrow \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \rightarrow 0 \right). \quad (2.41)$$

ეს წინადადება ჭეშმარიტია ნებისმიერი განზოგადებული ფუნქციისთვისაც, თუმცა, ამ ფაქტის დასამტკიცებლად, გვჭირდება $\langle f, \cdot \rangle$ ფუნქციონალის უწყვეტობა და შესაბამისი თეორემა დაამტკიცა მაისტერსმა.

ახლა განვიხილოთ განზოგადებული ფუნქციის ინტეგრებადობის საკითხი.

მტკიცდება, რომ \mathbb{R} სიმრავლეზე განსაზღვრული, ნებისმიერი $g(x)$ განზოგადებული ფუნქციისათვის, მოიძებნება ისეთი $f(x)$ განზოგადებული ფუნქცია, რომ $f' = g$. ასეთ $f(x)$ ფუნქციას, რომელიც მუდმივის სიზუსტით განისაზღვრება, განუსაზღვრელი ინტეგრალი ეწოდება $g(x)$ ფუნქციიდან.

ახლა განვიხილოთ ცვლდა გარდაქმნის საკითხი განზოგადებული ფუნქციებისათვის. $f(\alpha(x))$ გამოსახულებას, აზრი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $y = \alpha(x)$ ნამდვილი ცვლადის $\alpha(x): C^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ შებრუნებადი ფუნქციაა ანუ თუ არსებობს ცალსახა $x = \beta(y)$ ფუნქცია, რომელიც მისგან x ცვლადის მიმართ ამოხსნით მიიღება. მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha(x)) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \varphi(\beta(y)) |\beta'(y)| dy. \quad (2.42)$$

განზოგადებულ ფუნქციებს და ჩვეულებრივ ფუნქციებს ბევრი საერთო თვისება აქვთ. მაგალითად, განზოგადებული ფუნქციები შეგვიძლია გავაწარმოოთ ან ვაინტეგროთ და შედეგი, ისევე

განზოგადებული ფუნქცია იქნება. მაგრამ, არსებობს თავისებურებებიც:

ა) თუ $f(x)$ განზოგადებული ფუნქციაა, მაშინ $\langle f, g \rangle$ ყოველთვის არაა განსაზღვრული. მას აზრი აქვს, როცა $g(x) \in C_0^\infty$ ან უფრო ფართო კლასს, აქ ზღვრული შემთხვევაა, როცა f და g ეკუთვნის L^2 ჰილბერტის სივრცეს;

ბ) $f(x)g(x)$ ნამრავლს აქვს აზრი, როცა $g(x) \in C_0^\infty$ ან უფრო ფართო კლასს, აქ ზღვრული შემთხვევაა, როცა f და g ეკუთვნის L^2 ჰილბერტის სივრცეს;

გ) $f(g(x))$ გამოსახულებას აქვს აზრი, როცა $y = g(x)$ ნამდვილი ცვლადის $g(x): C^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ შებრუნებადი ფუნქციაა ანუ თუ არსებობს ცალსახა $x = \beta(y)$ ფუნქცია, რომელიც მისგან x ცვლადის მიმართ ამოხსნით მიიღება. სხვა ვარიანტები არ გვაქვს განზოგადებული ფუნქციებისათვის, გარდა იმ შემთხვევისა, როცა ისინი ჩვეულებრივი ფუნქციებია. გამოსახულებებს: $\delta(x^2)$; $e^{\delta(x)}$ აზრი არა აქვს;

დ) არაწრფივი ამოცანები. ზემოთ განხილული თავისებურებების გამო, განზოგადებული ფუნქციები გამოიყენება, მხოლოდ, წრფივი ამოცანებისათვის. მაგალითად, კვანტური მექანიკის წრფივი ამოცანებისათვის.

არაწრფივი ამოცანებისათვის, განზოგადებული ფუნქციების გამოყენებას, მივყავართ გაურკვეველობასთან.

2.8. განზოგადებული ფუნქციების ლოკალური თვისებები

განზოგადებული ფუნქციები, ყოველი ფიქსირებული წერტილებისათვის, არ იძლევიან მნიშვნელობის გამოთვლის საშუალებას, თუმცა, აზრი აქვს განზოგადებული ფუნქციის თვისებების შესწავლას, წერტილის მცირე მიდამოში ანუ მისი ლოკალური თვისებების შესწავლას.

თუ $f(x)$ და $g(x)$ ჩვეულებრივი ფუნქციებია \mathbb{R}^n სიმრავლეში და S მისი რაიმე ქვესიმრავლეა, მაშინ ცხადია რომ $f = g$ ნიშნავს იმას, რომ $f(x) = g(x), \forall x \in S$.

თუ $f(x)$ და $g(x)$ განზოგადებული ფუნქციებია, მაშინ $\forall x \in S$ სიმრავლისთვის ამის მტკიცება აზრს მოკლებულია. მაგალითად, თუ S შეიცავს მხოლოდ ერთ იზოლირებულ წერტილს, თუმცა, თუ S ღია სიმრავლეა, ამ წინადადებას შეგვიძლია მივცეთ აზრი.

განსაზღვრება 1. თუ $f(x)$ და $g(x)$ განზოგადებული ფუნქციებია \mathbb{R}^n სიმრავლეზე და Ω რაიმე ღია სიმრავლეა ამ სიმრავლიდან, მაშინ $f = g$ ამ ღია $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე ნიშნავს, რომ $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ ნებისმიერი საცდელი φ ფუნქციისათვის, რომლის გადამტანიც ეკუთვნის $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეს.

განსაზღვრება 2. თუ $f(x)$ და $g(x)$ განზოგადებული ფუნქციებია \mathbb{R}^n სიმრავლეზე და Ω რაიმე ღია სიმრავლეა ამ სიმრავლიდან, მაშინ $f \geq g$ ამ ღია $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე ნიშნავს, რომ $\langle f, \varphi \rangle \geq \langle g, \varphi \rangle$ ნებისმიერი საცდელი φ არაუარყოფითი ფუნქციისათვის, რომლის გადამტანიც ეკუთვნის $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეს.

2.9. მცირედ ზრდადი განზოგადებული ფუნქციები

არსებობს საცდელი ფუნქციების უფრო ფართო, შვარცის კლასიც $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, მასში შემავალი საცდელი $\varphi(x)$ ფუნქციები არაა სავალდებულო, რომ იყვნენ მცირე ინტერვალის(გადამტანის) გარეთ ნულები, არამედ, მოითხოვება რომ ისინი ნულისაკენ მიისწრაფოდნენ სწრაფად, როცა $|x| \rightarrow \infty$. შესაბამის წრფივ ფუნქციონალებს, **ნელი ზრდის განზოგადებულ ფუნქციებს** უწოდებენ. ცხადია რომ $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

განსაზღვრება. (კრებადობა) ვთქვათ $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ და ψ საცდელი ფუნქციებია $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ან $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ სიმრავლიდან. ვიტყვი, რომ $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{L}} \psi$ თუ ნებისმიერი p და k რიცხვებისათვის:

$$(j \rightarrow \infty) \implies \left(\sup |x^p \{ \varphi_j^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(x) \}| \rightarrow 0 \right). \quad (2.43)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერი p და k რიცხვებისათვის:

$$\|\varphi\|_{pk} = \sup |x^p \varphi^{(k)}(x)| \quad (2.44)$$

ფუნქცია აკმაყოფილებს ნორმის ყველა თვისებას. ასეთი ნორმები განსაზღვრავენ $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ სივრცის ტოპოლოგიას და $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{L}} \psi$ კრებადობა

არის კრებადობა ამ ტოპოლოგიით. ეს იმას ნიშნავს, რომ (2.43) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$(j \rightarrow \infty) \Rightarrow (\|\varphi_j - \psi\|_{pk} \rightarrow 0, \forall p, k). \quad (2.45)$$

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ყველგან მკვრივია $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ სიმრავლეში.

განსაზღვრება. მცირედ ზრდადი განზოგადებული $f \in \mathbb{R}$ ფუნქცია არის წრფივი, უწყვეტი ფუნქციონალური $\mathcal{L}(\mathbb{R}^1)$ სიმრავლეში (2.45) კრებადობის აზრით.

თუ ორი განზოგადებული ფუნქცია ემთხვევა C_0^∞ კლასში, მაშინ ისინი ერთმანეთს ემთხვევა \mathcal{L} კლასშიც.

მცირედ ზრდადი განზოგადებული ფუნქციები ხასიათდებიან იმით, რომ ნელა იზრდებიან უსასრულობისკენ.

განსაზღვრება. ამბობენ რომ $f(x)$ ნამდვილი ცვლადის ფუნქციას აქვს სუსტი ზრდა, თუ არსებობენ ისეთი ორი X და p დადებითი მუდმივი რიცხვები, რომ ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$-|x|^p \leq f(x) \leq |x|^p, x < -X \wedge x > X. \quad (2.46)$$

2.10. ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალური სივრცე

განსაზღვრება: G არეზე განსაზღვრულ $u(x)$ ფუნქციას კვადრატით ინტეგრებადი ეწოდება, თუ ლებეგის ინტეგრალები

$$\int_G u(x)dx; \quad \int_G u^2(x)dx; \quad (2.47)$$

ერთდროულად არსებობენ (არაიან კრებადი). კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციების სიმრავლე, უფრო ფართოა ვიდრე უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე.

P.S. თუ, $\int_G u^2(x)dx = 0$, მაშინ $u(x) = 0$ თითქმის ყველგან (გარდა ისეთი წერტილების სიმრავლისა, რომლის ლებეგის ზომაც უდრის ნულს). ეს ეხება მეტრიკასაც. თუ ორი ფუნქცია ერთმანეთისაგან განსხვავდება არაუმეტეს, ვიდრე ნულ ზომის სიმრავლის წერტილებში, მაშინ ამბობენ, რომ ეს ფუნქციები ემთხვევა ერთმანეთს თითქმის ყველგან.

განსაზღვრება: L ლინეალს, მასზე განსაზღვრული $L_2(G)$ ნორმით და შესაბამისი მეტრიკით, ჰილბერტისწინა(უნიტარული) S_2 სივრცე ეწოდება.

G არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლეს აღნიშნავენ $C(G)$ სიმბოლოთი; ხოლო, თუ ფუნქციების ნებისმიერი რიგის წარმოებულიც უწყვეტია, მაშინ შესაბამის ფუნქციათა კლასს(სიმრავლეს) აღნიშნავენ $C(G)$ სიმბოლოთი.

განვიხილოთ მიმდევრობის კრებადობის ცნება S_2 ფუნქციონალურ სივრცეში.

განსაზღვრება: ვიტყვი, რომ $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა (ფუნქციონალური) მიმდევრობა კრებადია $u(x)$ ფუნქციისაკენ თუ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n; u) = 0 \quad (2.48)$$

ანუ თუ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\int_G [u_n(x) - u(x)]^2 dx} = 0. \quad (2.49)$$

ფუნქციონალურ სივრცეებში ბუნებრივად ზოგადდებიან ის ტოპოლოგიური ცნებები, რასაც ადგილი აქვს რიცხვითი სიმრავლეებისათვის.

განსაზღვრება: $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა მიმდევრობას კოშის (ფუნდამენტალური) მიმდევრობა ეწოდება, თუ $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(u_m; u_n) = 0$.

განსაზღვრება: ვიტყვი, რომ $u(x)$ წარმოადგენს S_2 უნიტარული სივრცის ზღვართი წერტილს, თუ $u(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი მიდამოსათვის, მოიძებნება S_2 სივრცის ისეთი ელემენტები, რომლებიც ამ მიდამოს ეკუთვნიან.

თეორემა: $u(x)$ ფუნქცია არის S_2 უნიტარული სივრცის ზღვართი წერტილი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ამ სივრცის ელემენტების(ფუნქციების) ისეთი მიმდევრობა $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ რომელიც კრებადია $u(x)$ ფუნქციისაკენ.

P.S. ისევე, როგორც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის შემთხვევაში, S_2 უნიტარული სივრცის ზღვართი წერტილი შეიძლება არ ეკუთვნოდეს ამ სივრცეს.

განსაზღვრება: S_2 უნიტარული (ჰილბერტისწინა) სივრცის გაერთიანებას, მისი ზღვართი წერტილების სიმრავლესთან, ამ სივრცის ჩაკეტვა ეწოდება. ეს განსაზღვრება სიმბოლურად ასე ჩაიწერება:

$$\overline{S_2} = S_2 \cup \partial S_2. \quad (2.50)$$

განსაზღვრება: ჰილბერტისწინა (უნიტარული) სივრცის $\overline{S_2}$ ჩაკეტვას, ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცე ეწოდება.

განსაზღვრება: წრფივ, მეტრიკულ, ნორმირებულ სივრცეს, რომელიც სრულია ნორმით ინდუცირებული მეტრიკის მიმართ, ბანახის სივრცე ეწოდება.

P.S.ა) ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცე სრულია ანუ მასში ყველა კოშის (ფუნდამენტალური) მიმდევრობა კრებადია. სხვანაირად, ის შეიცავს თავის ყველა ზღვართი წერტილს. ისევე, როგორც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არის მკვრივი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში; ყველა რაციონალურკოეფიციენტებიანი პოლინომების (ფუნქციების) სიმრავლეს მკვრივია $L_2(G)$ ჰილბერტის სივრცეში.

ამიტომ, ჰილბერტის სივრცეც **სეპარაბელურია**, ისევე, როგორც ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. სივრცის სეპარაბელურობა საშუალებას იძლევა, მის ელემენტებს მიუახლოვდეთ მასში მოთავსებული მკვრივი ქვესიმრავლის ელემენტების კრებადი მიმდევრობით; რაც დიდ გამოყენებას პოულობს მიახლოებით ანალიზში. $L_2(G)$ ჰილბერტის სივრცე არის ბანახის სივრცეც. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე წარმოადგენს კვადრატითინტეგრებადი ფუნქციების (აღაგ-აღაგ უწყვეტი) სიმრავლეს.

ბ) უნდა აღინიშნოს, რომ ჰილბერტის სივრცე $L_2(G)$, ამავე დროს ბანახის სივრცეა. ხოლო ბანახის სივრცე ყოველთვის არაა ჰილბერტის სივრცე (რადგან ბანახის სივრცეში არაა სავალდებულო რომ გვექონდეს სკალარული ნამრავლი).

განსაზღვრება: ფუნქციათა სისტემას $\{u_n(x)\}_{n=1}^k$ ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ ამ სისტემის ერთი ფუნქცია მაინც, შეიძლება გამოვსახოთ, როგორც დანარჩენი ფუნქციების წრფივი კომბინაცია. თუ, ფუნქციათა სისტემა არაა წრფივად დამოკიდებული, მაშინ მას წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას უწოდებენ.

მაგალითი: ფუნქციათა სისტემა $u_1 = \sin^2 xy$; $u_2 = \cos^2 xy$; $u_3 = 4$ წრფივად დამოკიდებულია, რადგან $u_3 = 4u_1 + 4u_2$.

იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ ფუნქციათა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობის საკითხი, უნდა დავთვალოთ ამ სისტემის გრამის დეტერმინანტი.

თეორემა: ფუნქციათა სისტემა $\{u_n(x)\}_{n=1}^k$ წრფივად დამოუკიდებელია ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცეში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ სისტემის გრამის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნული-საგან ანუ

$$D(u_1; u_2; \dots; u_k) = \begin{vmatrix} (u_1; u_1) & (u_1; u_2) & \dots & (u_1; u_k) \\ (u_2; u_1) & (u_2; u_2) & \dots & (u_2; u_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_k; u_1) & (u_k; u_2) & \dots & (u_k; u_k) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.51)$$

მაგალითი: ფუნქციათა სისტემა $u_1 = \sin x$; $u_2 = \cos x$; $u_3 = 1$ წრფივად დამოუკიდებელია $L_2[0; \pi]$ სივრცეში, რადგან

$$(u_1; u_1) = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}; \quad (u_1; u_2) = \int_0^\pi \sin x \cos x dx = 0; \quad . \\ (u_1; u_3) = 2; \quad (u_2; u_2) = \pi;$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ 2 & 0 & \pi \end{vmatrix} = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi \neq 0.$$

განსაზღვრება: წრფივად დამოუკიდებელ $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ფუნქციათა სისტემას ეწოდება **სრული $L_2(G)$ სივრცეში**, თუ ამ სისტემის ყველა შესაძლო $\psi(x) = \sum_{i \in I} a_i u_i(x)$ წრფივი კომბინაციებით მიღებული $\psi(x)$ ფუნქციათა სიმრავლე მკვრივია $L_2(G)$ სივრცეში.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ფუნქციათა წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა წარმოადგენს **შაუდერის ბაზისს $L_2(G)$ სივრცეში**, თუ სივრცის ნებისმიერი ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ $\psi(x) = \sum_{i \in I} a_i u_i(x)$ სახით.

მაგალითი: $L_2(G)$ ფუნქციონალურ სივრცეში, **შაუდერის მრავალ-წევრა ბაზისია:** $1; x; y; x^2; xy; y^2; \dots$ როცა $G = \{(x; y) | a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$.

ასევე, $L_2(0, 2\pi)$ სივრცეში, არსებობს **ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ბაზისი:**

$$1; \sin x \cdot \cos y; \sin 2x \cdot \cos y; \sin x \cdot \cos 2y; \sin 2x \cdot \cos 2y; \dots$$

ცნობილია, რომ $L_2(\mathbb{R})$ სივრცეში შეიძლება აიგოს **ვეივლეტ ფუნქციებისაგან** შემდგარი ბაზისებიც.

P.S. მოცემული ამოცანისათვის, ბაზისის შერჩევა საკმაოდ რთული პრობლემაა, რადგან ჯერ-ჯერობით, შერჩევის ზოგადი პროცედურა არ არსებობს. სხვადასხვა ბაზისი კი განაპირობებს კრებადობის სხვადასხვა სიჩქარეს. ამ პრობლემის გადაჭრის გზაზე მიღწეულია გარკვეული წარმატება რვაჩე-ობგადის RO ფუნქციის მეთოდში,

სადაც ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილების ზოგადი ალგორითმია შემუშავებული, რამაც საშუალება მოგვცა ამოგვეხსნა პიდროდინამიკის სტაციონარული ამოცანები.

2.11. ანალოგია n განზომილებიან ვექტორულ და ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის

ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცის გეომეტრიის გასაგებად, განვიხილოთ ანალოგიები n განზომილებიან ვექტორულ სივრცესთან.

№	\mathbb{R}^n ვექტორული სივრცე	ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცე
1.	ელემენტები ვექტორებია: $\bar{x}(x_1; x_2; \dots; x_n)$	ელემენტები $f(x)$ ფუნქციებია
2.	ვექტორების სკალარული ნამრავლი $(\bar{x}; \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$	ფუნქციების სკალარული ნამრავლი $(f(x); g(x)) = \int_G f(x)g(x)dx$
3.	ვექტორის სიგრძე $ \bar{x} = \sqrt{(\bar{x}; \bar{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$	ფუნქციის ნორმა $\ f(x)\ = \sqrt{(f(x); f(x))} = \sqrt{\int_G f^2(x)dx}$
4.	მანძილი ორ წერტილს შორის $ \bar{x} - \bar{y} = \sqrt{(\bar{x} - \bar{y}; \bar{x} - \bar{y})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$	მეტრიკა $\rho(f(x); g(x)) = \ f(x) - g(x)\ = \sqrt{(f(x) - g(x); f(x) - g(x))} = \sqrt{\int_G (f(x) - g(x))^2 dx}$
5.	თუ, $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^n$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა \mathbb{R}^n - ში, მაშინ ნებისმიერი \bar{x} ელემენტი (ვექტორი) ამ სივრციდან წარმო- იდგინება სახით: $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{e}_i$	თუ, $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ შაუდერის ბაზისია $L_2(G)$ სივრცეში, მაშინ ამ სივრცის ნებისმიერი $f(x)$ ელემენტი (ფუნქცია) შეიძლება წარმოვადგინოთ სახით: $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i u_i(x)$

2.12. სობოლევის $W_2^k(G)$ ფუნქციონალური სივრცე

ჩვენ განვიხილეთ ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალური სივრცე. ოპერატორული განტოლებების ამოსახსნელად, ზოგჯერ, იყენებენ ისეთ ფუნქციონალურ სივრცეებს, რომლებიც უზრუნველყოფენ ეგრეთწოდებული განზოგადოებული და სუსტი ამონახსნის ცნებათა გამოყენებას.

ეს სივრცეები ისეთივე წესით იგება, როგორც ჩვენ ავაგეთ $L_2(G)$ ჰილბერტის სივრცე. განსხვავებაა მხოლოდ სკალარული ნამრავლის განსაზღვრის წესში.

თუ, სკალარულ ნამრავლს განვსაზღვრავთ ფორმულით :

$$(u; v) = \int_G u \cdot v dx + \int_G u'v' dx; \quad (2.52)$$

და გავიმეორებთ $L_2(G)$ ჰილბერტის სივრცის აგების ტექნიკას, მაშინ მივიღებთ სობოლევი სფუნქციონალურ სივრცეს $W_2^1(G)$.

ანალოგიურად, თუ სკალარულ ნამრავლს განვსაზღვრავთ ფორმულით :

$$(u; v) = \int_G u \cdot v dx + \int_G u'v' dx + \int_G u''v'' dx; \quad (2.53)$$

მაშინ, მივიღებთ $W_2^2(G)$ სობოლევის ფუნქციონალურ სივრცეს.

ასევე აიგება სობოლევის $W_2^k(G)$ ფუნქციონალური სივრცეც, შესაბამისი სკალარული (2.54) ნამრავლის შემოღებით :

$$(u; v) = \sum_{i=0}^k \int_G u^{(i)}v^{(i)} dx. \quad (2.54)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, სობოლევის ფუნქციონალური სივრცეები იგება, შესაბამისი $C^k[a; b]$ ფუნქციონალური სივრცეების იდეოლოგიიდან გამომდინარე.

2.13. დამოკიდებულება ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის

ჩვენ განვიხილეთ სხვადასხვა ფუნქციონალური სივრცეები, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან რიგი ტოპოლოგიური თვისებებით. ყველაზე უფრო “კარგი” ფუნქციები არიან მრავალწევრები და მათი სიმრავლე ქმნის პოლინომიალური ფუნქციების სივრცეს $P_n(x)$, სადაც არგუმენტი, საზოგადოდ, m -განზომილებიანი ვექტორია (ე.ი. $P_n(x) \in C^\infty(R^m)$ მრავალცვლადიანი პოლინომების სიმრავლეა). ეს ფუნქციათა სიმრავლე არის უწყვეტ ფუნქციათა $C^k(R^m)$ ფუნქციონალური სივრცის ქვესიმრავლე (ნაწილი). უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე არის წრფივიანის (ლინეალის) ქვესიმრავლე. ფუნქციათა ლინეალი არის წრფივი მეტრიკული სივრცის ნაწილი. ფუნქციათა წრფივი მეტრიკული სივრცე არის უნიტარული (ჰილბერტისწინა) სივრცის ნაწილი. ის კი, თავის მხრივ, ჰილბერტის

ფუნქციონალური სივრცის ნაწილია. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე კი ჩადგმულია სობოლევის $W_2^k(G)$ სივრცეში, თუ $k \geq 1$.

ამოცანები და სავარჯიშოები

ვარიანტი 1

1. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \bar{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 8$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2. $u(x) = x; v(x) = 1; G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.
4. გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.
5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:
 $u(x) = x; v(x) = 1; G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$?
6. რა განსხვავებაა უნიტარულ, ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 2

1. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \bar{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 9$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2. $u(x) = x^2; v(x) = 1; G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.
4. გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.
5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:
 $u(x) = x^2; v(x) = 1; G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$?
6. რა განსხვავებაა სობოლევის, ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 3

- ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \bar{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 6$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
- $u(x) = x^3; v(x) = 1; G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
- გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.
- გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.
- წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:
 $u(x) = x^3; v(x) = 1; G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$?
- რა განსხვავებაა ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 4

- ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \bar{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 66$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
- $u(x) = x^4; v(x) = 1; G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
- გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.
- გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.
- წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:
 $u(x) = x^4; v(x) = 1; G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$?
- რა განსხვავებაა ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 5

- ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \bar{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 88$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
- $u(x) = x^5; v(x) = 1; G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
- გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.
- გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:

$$u(x) = x^5; v(x) = 1; \quad G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}?$$

6.რა განსხვავებაა ჰილბერტის და სობოლევის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 6

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \bar{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 1$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x^8; v(x) = 1; \quad G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ

სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$ -ის აზრით.

3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4.გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:

$$u(x) = x^8; v(x) = 1; \quad G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}?$$

6.რა განსხვავებაა ჰილბერტის და სობოლევის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 7

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \bar{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 10$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x^6; v(x) = 1; \quad G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ

სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$ -ის აზრით.

3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4.გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:

$$u(x) = x^{16}; v(x) = 1; \quad G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}?$$

6.რა განსხვავებაა ბანახისა და სობოლევის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 8

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \bar{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 11$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x^{13}; v(x) = 1; G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.
4. გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.
5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:
 $u(x) = x^{13}; v(x) = 1; G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$?
6. რა არის გრამის დეტერმინანტი და რა ინფორმაციას იძლევა მისი მნიშვნელობა?

ლიტერატურა

1. **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике и технике, пер. с англ., Мир, М., 1985.
2. **Заманский М.** Введение в современную алгебру и анализ, пер. с франц., М, 1974.
3. **Пизо Ш., Заманский М.** Курс математики. Алгебра и анализ, пер. с франц., М., 1971.
4. **Шварц Л.** Анализ. Пер. с франц. по ред. С.Г. Крейна, т.1, т.2, Мир, М., 1972.
5. **Картан А.** Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. Пер. с франц. под ред. Б.А. Фукса, Мир, М., 1971.
6. **Рудин У.** Основы математического анализа. Пер. с англ. под ред. В.П. Хавина, Мир, М., 1966.
7. **ობგაძე თ.** მათემატიკური მოდელირების კურსი, რხევითი პროცესები, IV ტომი, სტუ, თ., 2010.
8. **ობგაძე თ.** მათემატიკური მოდელირება, მონოგრაფია, სტუ, თ., 2016.

III თავი. ოპტიმიზაციის მეთოდები

ცივილიზაციის განვითარების მთელი ისტორიის განმავლობაში აქტუალობას არ კარგავს იმ ამოცანების განხილვა, რომლებიც საშუალებას იძლევიან დავადგინოთ გარკვეულ სიდიდეთა უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები. დღეს ამ ამოცანების განხილვა განსაკუთრებულ მნიშვნელობას იძენს, რადგან დღის წესრიგში დგება: ბუნებრივი რესურსების, ადამიანური რესურსების, მატერიალური და ფინანსური რესურსების ეფექტურად გამოყენების ამოცანები. ყოველივე ამას, მივყავართ საუკეთესო გადაწყვეტილების, ან როგორც ამბობენ, **ოპტიმალური** გადაწყვეტილების მიღების აუცილებლობამდე. მაქსიმუმისა და მინიმუმის პოვნის ამოცანები დაისვა და ამოიხსნა ჯერ კიდევ მე-17-ე საუკუნეში. ამ ტიპის ამოცანების გადაწყვეტაზე მუშაობდნენ ისეთი ცნობილი მეცნიერები, როგორიც იყო პიერ ფერმა, ისაკ ნიუტონი, ლაიბნიცი, დანიელ ბერნული, იაკობ ბერნული, ლაგრანჟი, ლეონარდ ეილერი, ანრი პუანკარე, ფონ ნეიმანი, კანტოროვიჩი, პონტრიაგინი, რეზო გამყრელიძე, მიშიენკო, ბოლტიანსკი და სხვა.

აქედან გამომდინარე, თანამედროვე მექანიკოსისათვის ოპტიმიზაციის მეთოდების შესწავლა მეტად მნიშვნელოვანია და აუცილებელი.

3.1. უპირობო ექსტრემუმი \mathbb{R}^n სივრცეზე განსაზღვრული ფუნქციებისათვის

ვთქვათ მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია \mathbb{R}^n სივრცის რაიმე G არეში ანუ მისი ყოველი წერტილი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე: $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

ვიტყვიით რომ, მოცემული $f(x)$ ფუნქცია G სიმრავლის რაიმე x_0 წერტილში ($x_0 \in G$) აღწევს თავის უდიდეს (ან შესაბამისად, უმცირეს) მნიშვნელობას, თუ G სიმრავლის ნებისმიერი სხვა x წერტილისათვის ($x \in G$), ადგილი აქვს უტოლობას: $f(x) \leq f(x_0)$ (ან შესაბამისად $f(x) \geq f(x_0)$).

ვაიერშტრასის თეორემა: შემოსაზღვრულ, ჩაკეტილ სიმრავლეზე (კომპაქტზე) განსაზღვრული უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, ამ სიმრავლეზე აღწევს თავის უდიდეს (ან შესაბამისად, უმცირეს) მნიშვნელობას.

განსაზღვრება: ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია \mathbb{R}^n სივრცის რაიმე G არეში ანუ $G \subset \mathbb{R}^n$. მაშინ $x_0 \in G$ წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მკაცრი მაქსიმუმის (შესაბამისად, მკაცრი მინიმუმის) წერტილი, თუ ადგილი აქვს უტოლობას $f(x) < f(x_0)$

(ან შესაბამისად, $f(x) > f(x_0)$) ნებისმიერი $x \in G \cap \Omega(x_0)$ წერტილისათვის, სადაც $\Omega(x_0)$ არის x_0 წერტილის რაიმე მიდამო.

თუ ამ განსაზღვრებაში მკაცრ უტოლობებს, შევცვლით არამკაცრი უტოლობებით $f(x) \leq f(x_0)$ ან შესაბამისად $f(x) \geq f(x_0)$ მაშინ $x_0 \in G$ წერტილს უწოდებენ უბრალოდ მაქსიმუმის ან შესაბამისად მინიმუმის წერტილს.

განსაზღვრება: ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს ექსტრემუმის წერტილებს უწოდებენ.

ფერმას თეორემა (ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა): ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ექსტრემუმის $x_0 \in G$ წერტილის რაიმე $\Omega(x_0)$ მიდამოში, მაშინ თუ ამ წერტილში არსებობენ კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{x=x_0}$, ისინი ყველა ნულის ტოლია.

P.S. 1) თუ ფუნქცია დიფერენცირებადია ექსტრემუმის წერტილში, მაშინ მისი დიფერენციალი $df = 0$ ნულის ტოლია. მართლაც, $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ და რადგან $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{x=x_0} = 0$ ცხადია, რომ $df = 0$.

2) თუ გავაფართოებთ განსახილველი ფუნქციების კლასს და განვიხილავთ ($f(x) \in L_2(G)$) ჰილბერტის სივრცის ფუნქციებს, სადაც ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ნულ ზომის წვევების წერტილების სიმრავლე, მაშინ ფერმას თეორემა შეიძლება განზოგადდეს შემდეგნაირად: თუ x_0 არის $f(x) \in L_2(G)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილი, მაშინ ამ წერტილში ყველა კერძო წარმოებული $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{x=x_0}$ ან ნულის ტოლია ან არ არსებობს.

განსაზღვრება: იმ წერტილებს სადაც ადგილი აქვს ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობებს (ფერმას თეორემა) კრიტიკული წერტილები ეწოდება; ხოლო იმ წერტილებს, სადაც $df = 0$ სტაციონარულ წერტილებს უწოდებენ.

P.S. ის რომ x_0 წერტილი კრიტიკული წერტილია, ჯერ არ ნიშნავს იმას, რომ ის ექსტრემუმის წერტილია.

3.2. სილვესტრის კრიტერიუმი კვადრატული ფორმებისათვის

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ სიმეტრიულ $(a_{ij} = a_{ji})$ კვადრატულ ფორმას $A(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ეწოდება დადებითად განსაზღვრული, თუ $A(x) > 0, \forall x \neq 0$ და ნულის ტოლია მხოლოდ მაშინ, როცა $x_i = 0, \forall i = \overline{1, n}$.

ასევე, კვადრატულ ფორმას ეწოდება უარყოფითად განსაზღვრული, თუ $A(x) < 0, \forall x \neq 0$ და ნულის ტოლია მხოლოდ როცა $x_i = 0, \forall i = \overline{1, n}$.

დადებითად განსაზღვრულ და უარყოფითად განსაზღვრულ კვადრატულ ფორმებს განსაზღვრულ კვადრატულ ფორმებს უწოდებენ, რადგან, ისინი ინარჩუნებენ მუდმივ ნიშანს ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის და იღებენ ნულოვან მნიშვნელობას, მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა ცვლადი ნულოვანია.

არსებობენ განუსაზღვრელი კვადრატული ფორმებიც, რომლებიც იცვლიან ნიშანს ცვლადების სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის.

მაგალითად, $A(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმაა. $B(x) = -x_1^2 - 3x_2^2$ უარყოფითად განსაზღვრული ფორმაა, მაგრამ $C(x) = (x_1 + x_2)^2$ განუსაზღვრელი კვადრატული ფორმაა, რადგან ის ნულოვან მნიშვნელობას იღებს არა მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე ცვლადი ნულის ტოლია, არამედ სხვა შემთხვევებშიც, კერძოდ, როცა $x_1 = -x_2$.

იმისათვის რომ შევძლოთ დადგენა, მოცემული ფორმა დადებითადაა განსაზღვრული, უარყოფითადაა განსაზღვრული, თუ განუსაზღვრელია, უნდა გავიხსენოთ სილვესტრის კრიტერიუმი:

თეორემა: იმისათვის რომ, სიმეტრიული კვადრატული ფორმა: $A(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ იყოს დადებითად განსაზღვრული აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ქონდეს უტოლობებს:

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (3.1)$$

ხოლო, იმისათვის რომ, სიმეტრიული კვადრატული ფორმა $A(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ იყოს უარყოფითად განსაზღვრული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ქონდეს უტოლობებს:

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (-1)^n > 0. \quad (3.2)$$

3.3. მკაცრი ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები \mathbb{R}^n სივრცეზე განსაზღვრული ფუნქციებისათვის

თეორემა: ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 სტაციონარული წერტილის რაიმე $\Omega(x_0)$ მიდამოში და უწყვეტია თავის მეორე რიგის წარმოებულებამდე ჩათვლით, თუ ამ წერტილში, მეორე რიგის კვადრატული დიფერენციალური ფორმა:

$$A(dx) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \quad (3.3)$$

არის დადებითად განსაზღვრული, მაშინ x_0 მინიმუმის წერტილია, ხოლო თუ უარყოფითადაა განსაზღვრული მაშინ x_0 მაქსიმუმის წერტილია.

ცხადია, რომ $a_{ij} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$.

განვიხილოთ მაგალითები.

1. ვთქვათ გვაქვს ორი ცვლადის ფუნქცია $y = f(x_1, x_2)$. თუ $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0})$ სტაციონარული წერტილია, მაშინ ამ წერტილში ადგილი აქვს სისტემას:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \end{cases}; \quad (3.4)$$

სილვესტრის კრიტერიუმიდან გამომდინარე, გვუკვება რომ, თუ ამ წერტილში ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad (3.5)$$

ანუ ჩვენ შემთხვევაში,

$$f''_{x_1 x_1} > 0, \quad \begin{vmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} \\ f''_{x_1 x_2} & f''_{x_2 x_2} \end{vmatrix} > 0 \quad (3.6)$$

მაშინ $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0})$ მინიმუმის წერტილია, ხოლო თუ გვაქვს პირობები:

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad (3.7)$$

ანუ ჩვენ შემთხვევაში,

$$f''_{x_1x_1} < 0, \quad \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_1x_2} & f''_{x_2x_2} \end{vmatrix} > 0, \quad (3.8)$$

მაშინ $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0})$ მაქსიმუმის წერტილია.

P.S. აღსანიშნავია, რომ თუ $\begin{vmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_1x_2} & f''_{x_2x_2} \end{vmatrix} < 0$, მაშინ ამ წერტილში ექსტრემუმი არ გვაქვს, ხოლო, თუ

$$\begin{vmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_1x_2} & f''_{x_2x_2} \end{vmatrix} = 0,$$

მაშინ ეს წერტილი საჭიროებს დამატებით გამოკვლევას, რადგან ამ შემთხვევაში, შეიძლება იყოს ექსტრემუმი და შეიძლება არც იყოს.

2. იპოვეთ სამი ცვლადის ფუნქციის:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z \text{ ექსტრემუმი.}$$

ამოხსნა: ვიპოვოთ ამ ფუნქციის სტაციონარული წერტილები. ამისათვის ფერმას თეორემიდან გამომდინარე, შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2 = 0 \end{cases}, \quad (3.9)$$

სისტემის ამონახსნია წერტილი $(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1)$. ამ სტაციონარული წერტილის გამოსაკვლევად, შევადგინოთ შესაბამისი დიფერენციალური კვადრატული ფორმა (3.3).

$$a_{11} = f''_{xx} = 2, \quad a_{12} = f''_{xy} = -1, \quad a_{13} = f''_{xz} = 0,$$

$$a_{21} = f''_{yx} = -1, \quad a_{22} = f''_{yy} = 2, \quad a_{23} = f''_{yz} = 0,$$

$$a_{31} = f''_{zx} = 0, \quad a_{32} = f''_{zy} = 0, \quad a_{33} = f''_{zz} = 2.$$

შევამოწმოთ სილვესტრის კრიტერიუმის პირობები ამ სტაციონარული წერტილისათვის:

$$a_{11} = f''_{xx} = 2 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0. \quad (3.10)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1)$ სტაციონარული წერტილი არის მინიმუმის წერტილი და $f_{min} = f(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1) = -\frac{4}{3}$.

3.4. გრადიენტული სწრაფი დაშვების მეთოდი

როგორც ვხედავთ, თუ $\begin{vmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_1x_2} & f''_{x_2x_2} \end{vmatrix} = 0$ მაშინ ეს წერტილი

საჭიროებს დამატებით გამოკვლევას, რადგან ამ შემთხვევაში შეიძლება იყოს ექსტრემუმი და შეიძლება არც იყოს.

ასეთი შემთხვევებისათვის, აგრეთვე, ისეთი ამოცანების ამოხსნისას, როცა სტაციონარული წერტილის ანალიზურად პოვნა შეუძლებელია, იყენებენ სხვადასხვა მიახლოებით – რიცხვით მეთოდს, რომლებიც შედარებით ნაკლებადაა დასაბუთებული, თუმცა, ზოგჯერ იძლევა რეალურ შედეგს. ასეთი მიახლოებითი მეთოდების რიგს ეკუთვნიან **სწრაფი დაშვების გრადიენტული მეთოდებიც**.

ვთქვათ, გვინდა ვიპოვოთ $\min_{x \in G} f(x)$, $G \subset \mathbb{R}^n$. განვიხილოთ რაიმე $\bar{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \bar{G}$ წერტილი (საწყისი მიახლოება) და ამ წერტილში გამოვითვალოთ მოცემული ფუნქციის გრადიენტი:

$$\text{grad } f(\bar{x}^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_i} \bar{e}_i, \quad (3.11)$$

სადაც $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ – რაიმე ორთონომირებული ბაზისია \mathbb{R}^n სივრცეში.

თუ $\text{grad } f(\bar{x}^{(0)}) \neq 0$, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$x_k^{(1)} = x_k^{(0)} - h_1 \cdot (\text{grad } f(\bar{x}^{(0)}), \bar{e}_k), \quad k = \overline{1, n}; \quad (3.12)$$

სადაც $0 < h_1 < 1$, ხოლო $\bar{x}^{(1)}$ - პირველი მიახლოებაა მინიმუმის წერტილთან.

თუ $\text{grad } f(\bar{x}^{(1)}) \neq 0$, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$x_k^{(2)} = x_k^{(1)} - h_2 \cdot (\text{grad } f(\bar{x}^{(1)}), \bar{e}_k), \quad k = \overline{1, n}; \quad h_2 > 0, \quad (3.13)$$

და საზოგადოდ, თუ $\text{grad } f(\bar{x}^{(m-1)}) \neq 0$, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$x_k^{(m)} = x_k^{(m-1)} - h_m \cdot (\text{grad } f(\bar{x}^{(m-1)}), \bar{e}_k), \quad k = \overline{1, n}; \quad h_m > 0. \quad (3.14)$$

სადაც h_m მუდმივებს $0 < h_m < 1$ ვირჩევთ $\{f(\bar{x}^{(m)})\}_{m=0}^{\infty}$ იტერაციული პროცესის კრებადობის პირობიდან, სადაც $\bar{x}^{(m)}(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)$ მოცემული $f(x)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილის m -ური მიახლოებაა. მაშინ

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{grad } f(\bar{x}^{(m)}) \rightarrow 0, \quad (3.15)$$

რაც იმას ნიშნავს რომ, ზღვარით წერტილში $f(x)$ ფუნქცია აღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას.

ამ ფორმულებში m აღნიშნავს იტერაციათა რიცხვს. იტერაცია ჩერდება მაშინ, როცა მიიღწევა წინასწარ არჩეული ცდომილების ზღვრული ε მნიშვნელობა ანუ როცა ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\max_{i=1,n} |x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon. \quad (3.16)$$

განვიხილოთ მაგალითები:

1. იპოვეთ $\min_{x \in G} f(x)$, $G \subset \mathbb{R}^n$, სადაც $f(x) = x^2$.

ამოხსნა: ავირჩიოთ მინიმუმის წერტილის საწყისი მიახლოება $x^{(0)} = 1$. მაშინ (3.11) მიიღებს სახეს:

$$\text{grad } f(x^{(0)}) = 2x^{(0)}i = 2i \neq 0.$$

აქედან გამომდინარე (3.12) გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$x_k^{(1)} = x_k^{(0)} - h_1 \cdot 2x^{(0)} = 1 - 2h, \quad k = 1,$$

სადაც $0 < h_1 = h < 1$. რადგან $\text{grad } f(\overline{x^{(1)}}) \neq 0$ თუ $h \neq \frac{1}{2}$, გვექნება რომ

$$x^{(2)} = x^{(1)} - 2h(1 - 2h) = (1 - 2h)^2.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ რომ

$$x^{(m)} = (1 - 2h)^m.$$

ცხადია, რომ $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 - 2h)^m = 0$, თუ $h \neq \frac{1}{2}$, ხოლო თუ $h = \frac{1}{2}$ მაშინ $x^{(1)} = 0$ და მივიღებთ ნულოვანი ელემენტებისგან შემდგარ მიმდევრობას, რომლის ზღვარიც კვლავ ნულია, რომელიც მაშასადამე სტაციონარულ წერტილს წარმოადგენს. ამ წერტილში მიიღწევა $f(x)$ ფუნქციის მინიმუმი და $\min_{x \in G} f(x) = 0$.

2. იპოვეთ $\min_{x \in G} f(x)$, $G \subset \mathbb{R}^n$, სადაც $f(x, y) = x^2 + y^2$.

ამოხსნა: ავირჩიოთ მინიმუმის წერტილის საწყისი მიახლოება:

$x^{(0)} = (1, 1)$ ანუ $x^{(0)} = 1$ და $y^{(0)} = 1$. მაშინ (3.11) მიიღებს სახეს:

$$\text{grad } f(x^{(0)}) = 2x^{(0)}i + 2y^{(0)}j = 2i + 2j \neq 0,$$

აქედან გამომდინარე (3.12) გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - 2x^{(0)}h = 1 - 2h,$$

$$y^{(1)} = y^{(0)} - 2y^{(0)}h = 1 - 2h, \quad \text{სადაც } 0 < h_1 = h_2 = h < 1.$$

რადგან $\text{grad } f(\overline{x^{(1)}}) = 2(1 - 2h)i + 2(1 - 2h)j \neq 0$ თუ $h \neq \frac{1}{2}$, გვექნება რომ

$$x^{(2)} = x^{(1)} - 2h(1 - 2h) = (1 - 2h)^2,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} - 2h(1 - 2h) = (1 - 2h)^2.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ რომ

$$x^{(m)} = (1 - 2h)^m,$$

$$y^{(m)} = (1 - 2h)^m.$$

მაშინ $\lim_{m \rightarrow \infty} (x^{(m)}, y^{(m)}) = \lim_{m \rightarrow \infty} ((1 - 2h)^m, (1 - 2h)^m) = (0, 0)$, თუ

$h \neq \frac{1}{2}$, ხოლო თუ $h = \frac{1}{2}$ მაშინ $(x^{(1)}, y^{(1)}) = (0, 0)$ და მივიღებთ ნულოვანი ელემენტებისგან შემდგარ მიმდევრობას, რომლის ზღვარიც კვლავ ნულია და მაშასადამე სტაციონარულ წერტილს

წარმოადგენს. ამ წერტილში მიიღწევა $f(x, y)$ ფუნქციის მინიმუმი და $\min_{x \in G} f(x, y) = 0$.

3.5. მონტე-კარლოს მეთოდი

მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმიზაციისათვის, შემუშავებულია რიცხვითი მეთოდების დიდი სიმრავლე, რომელთა უმრავლესობაც დაკავშირებულია ფუნქციის გრადიენტის პოვნასთან. ამ მეთოდების გამოყენების ფარგლები შემოსაზღვრულია და სიზუსტეც, ხშირად, არაა დამაკმაყოფილებელი.

ამასთან, უფრო უნივერსალურია და ზუსტიც თუ მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის წერტილის საპოვნელად გამოვიყენებთ მონტე-კარლოს მეთოდს.

ამ მეთოდის არსი დაკავშირებულია ფუნქციის განსაზღვრის არის შემთხვევითი წესით დაყოფაზე სიმპლექსებად და სიმპლექსის თითოეულ საკვანძო წერტილში, ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლასთან. ამის შემდეგ, ხდება ფუნქციათა გამოთვლილი მნიშვნელობების თანმიმდევრული შედარება და იმ წერტილის შერჩევა, სადაც ფუნქცია იღებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

ამ მეთოდის სიზუსტე, დამოკიდებულია არჩეული საკვანძო წერტილების რაოდენობაზე და რაც მეტია შემთხვევით არჩეული წერტილების რაოდენობა, მით მეტია სიზუსტეც. თუმცა, დიდი რაოდენობის წერტილები ზრდიან გამოთვლების მოცულობას და მაშასადამე აღიდეგენ გამოთვლების წარმოების დროს.

ვთქვათ, გვინდა ვიპოვოთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ მინიმუმი. ამ ამოცანის მონტე-კარლოს მეთოდით ამოხსნისათვის ვირჩევთ მინიმუმის წერტილის საძიებელ სიმპლექსს:

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.17)$$

ა) საძიებელ სიმპლექსში შემთხვევით ვირჩევთ კვანძის წერტილებს ანუ ვირჩევთ $x_i^{(m)}$ ცვლადების მნიშვნელობებს:

$$x_i^{(m)} = a_i + (b_i - a_i) \text{random},$$

სადაც $i = \overline{1, n}$, ხოლო m -არჩეულ წერტილთა რიცხვია.

random - ოპერატორია, რომელიც გვაძლევს თანაბრად განაწილებულ შემთხვევით რიცხვს $[0; 1]$ შუალედიდან;

ბ) ვადარებთ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს სიმპლექსის სხვადასხვა წერტილში. თუ ადგილი აქვს უტოლობას:

$z^{(m)} \leq z^{(m+1)}$, მაშინ $z_{min} = z^{(m)}$, წინააღმდეგ შემთხვევაში –

$$z_{min} = z^{(m+1)} ;$$

გ) სიმპლექსის შემთხვევითი საკვანძო წერტილების შერჩევა ხორციელდება სასურველი ε სიზუსტის მიღწევამდე. პრაქტიკულად მიზანშეწონილია, რომ საკვანძო წერტილების m რაოდენობა აკმაყოფილებდეს პირობას: $m \geq \frac{(b-a)^n}{\varepsilon}$, სადაც $a = \inf(a_i)$ და $b = \sup(b_i)$.

P.S. მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენებისას უნდა გვახსოვდეს, რომ მინიმუმის ძებნისას, ჩვენ ვეძებთ არა ლოკალურ, არამედ გლობალურ მინიმუმს (უმცირეს მნიშვნელობას) არჩეულ შუალედში.

3.6. უპირობო ექსტრემუმის ამოცანების ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

იპოვეთ $\min_{x \in G} f(x)$, $G \subset \mathbb{R}^n$, ამ ამოცანების ამოხსნებად Mathcad-ის ბაზაზე, შევადგინოთ პროგრამა.

თუ მოცემულია რომ:

1. $f(x, y) = x^2 + 5y^2 + 2x + 10y + 25$;
2. $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 5)^2 + 10x^2 + 5$;
3. $f(x, y) = (x^2 + 1)^2 + y^2 + 5$;
4. $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 + 2x^2 + 2y^2}$;
5. $f(x, y) = x^2 e^{-x^2} + y^2 + 9$.

ამოხსნა:

1.

ORIGIN:= 1

```
f(x,y) := x2 + 5·y2 + 2·x + 10y + 25
x := 0 y := 0
Given
s1 := Minimize(f, x, y)
s =  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 
x1 := s1 y1 := s2
f(x,y) = 19
```

2.

ORIGIN:= 1

```
f(x,y) := (x - 1)2 + (y - 5)2 + 10x2 + 5
y := 0 x := 0
Given
```

$s := \text{Minimize}(f, x, y)$

$$s = \begin{pmatrix} 0.091 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$y := s_2 \quad x := s_1$

$$f(x, y) = 5.909$$

3.

ORIGIN = 1

$$f(x, y) := (x^2 + 1)^2 + y^2 + 5$$

$y := 0 \quad x := 0$

Given

$s := \text{Minimize}(f, x, y)$

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x := s_1 \quad y := s_2$

$$f(x, y) = 6$$

4.

ORIGIN = 1

$$f(x, y) := \frac{x^2 + y^2}{1 + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2}$$

$x := 0 \quad y := 0$

Given

$s := \text{Minimize}(f, x, y)$

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$y := s_2 \quad x := s_1$

$$f(x, y) = 0$$

5.

ORIGIN = 1

$$f(x, y) := x^2 \cdot e^{-x^2} + y^2 + 9$$

$y := 0 \quad x := 0$

Given

$s := \text{Minimize}(f, x, y)$

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x := s_1 \quad y := s_2$

$$f(x, y) = 9$$

3.7. პირობითი ექსტრემუმი \mathbb{R}^n სივრცეზე განსაზღვრული ფუნქციებისათვის, როცა შემოფარგვლის პირობებს აქვთ განტოლებების ფორმა (ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი)

ამოცანის დასმა:

ვთქვათ, მოცემულია მრავალი ცვლადის ფუნქცია $z = f(\mathbf{x})$, სადაც $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. გვაქვს ამ ფუნქციის მინიმიზაციის ამოცანა $\min_{\mathbf{x} \in G} f(\mathbf{x})$, $G \subset \mathbb{R}^n$, დამატებით, განტოლებების ფორმის შემოფარგვლის პირობებით:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.18)$$

ამოცანის ამოხსნა:

ამ ამოცანის ამოსახსნელად იყენებენ ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდს. ამ მეთოდის არსი მდგომარეობს შემდეგში:

აგებენ ახალ მიზნის ფუნქციას (ლაგრანჟის ფუნქციას) შემდეგნაირად:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(\mathbf{x}), \quad (3.19)$$

სადაც λ_i - ლაგრანჟის ახალი უცნობი მამრავლებია. ამის შემდეგ, (3.19) ფუნქციას იკვლევენ უპირობო ექსტრემუმზე. ამისათვის, ფერმას თეორემიდან გამომდინარე, კრიტიკული წერტილების საპოვნელად, ადგენენ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n} \\ \varphi_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (3.20)$$

ამ განტოლებათა სისტემიდან პოულობენ კრიტიკულ წერტილებს: λ_i და x_i^0 . ამ წერტილების გამოსაკვლევად, იყენებენ დიფერენციალურ კვადრატულ ფორმას, ისევე, როგორც უპირობო ექსტრემუმის ამოცანის შემთხვევაში. ამას გარდა დამატებით, კრიტიკულ წერტილებში უნდა განვიხილოთ შემოფარგვლის პირობებიც. შედეგად, გამოსაკვლევად მივიღებთ დიფერენციალურ კვადრატულ ფორმას:

$$d^2z = \sum_{i,j=1}^{n-m} b_{ij} dx_i dx_j. \quad (3.21)$$

მაგალითი: იპოვეთ $z = xy$ ფუნქციის მინიმუმი, თუ შემოფარგვლის პირობაა $y - x = 0$.

ამოხსნა: შევადგინოთ ამ ამოცანის შესაბამისი ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = xy + \lambda(y - x).$$

ფერმას თეორემიდან მივიღებთ, რომ ადგილი აქვს სისტემას:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = y - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = y - x = 0. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია (კრიტიკული წერტილი):

$x = -\lambda = -y = 0$. კრიტიკული წერტილის გამოსაკვლევა, შევადგინოთ დიფერენციალური კვადრატული ფორმა:

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 = 2 dx dy,$$

მაგრამ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = y - x = 0 \Rightarrow dy = dx$, ამიტომ კვადრატული დიფერენციალური ფორმა მიიღებს სახეს:

$$d^2L = 2(dx)^2 > 0.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $(0; 0)$ კრიტიკული წერტილი, $y - x = 0$ შემოფარგვლის პირობებში, არის $z = xy$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი.

3.8. მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის ამოცანა, როცა შემოფარგვლის პირობებს აქვთ უტოლობების ფორმა

ამოცანის დასმა:

ვთქვათ მოცემულია ფუნქცია $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. გვაქვს ამ ფუნქციის მინიმიზაციის ამოცანა $\min_{x \in G} f(x)$, $G \subset \mathbb{R}^n$, დამატებითი უტოლობების ფორმის შემოფარგვლის პირობებით:

$$\varphi_i(x) < 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.22)$$

ამოცანის ამოხსნა:

ეს ამოცანა შეიძლება დავიყვანოთ მინიმიზაციის ამოცანაზე განტოლებების ტიპის შემოფარგვლის პირობებით. ამისათვის საკმარისია დამატებითი τ_i^2 ცვლადების შემოღება:

$$\varphi_i(x) + \tau_i^2 = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.23)$$

ასეთ შემთხვევაში, მივიღებთ ამოცანას: ვიპოვოთ $\min_{x \in G} f(x, \tau^2)$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi_i(x) + \tau_i^2 = 0, i = \overline{1, m}$ შემოფარგვლის პირობებში, რომლის ამოხსნასაც ვაწარმოებთ ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით.

3.9. პირობითი ექსტრემუმის ამოცანების ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

განვიხილოთ პირობითი ექსტრემუმის ამოცანების ამოხსნის მაგალითები Mathcad-ის ბაზაზე.

იპოვეთ $\min_{x \in G} f(x)$, $G \subset \mathbb{R}^n$, თუ გვაქვს შემოფარგვლის პირობები $\varphi_i(x) = 0$, $i = \overline{1, m}$ სადაც:

1. $f(x, y) = xy$ და $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$;
2. $f(x, y) = x^2 + y^2$ და $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$;
3. $f(x, y, z) = xyz$ და $\varphi_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0$,
 $\varphi_2(x, y, z) = xy + yz + zx - 8 = 0$;
4. $f(x, y) = e^{-xy}$ და $x + y - 9 = 0$;
5. $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ და $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

ამოხსნა:

1.

```

ORIGIN:= 1
f(x,y) := x*y
x := 0 y := 0
Given
x2 + y2 - 1 = 0
smin := Minimize(f, x, y)
s = (0.707)
      (0.707)
xmin := s1 ymin := s2
f(x,y) = 0.5
    
```

2.

```

ORIGIN:= 1
f(x,y) := x2 + y2
y := 0 x := 0
Given
x/2 + y/3 - 1 = 0
smin := Minimize(f, x, y)
s = (1.385)
      (0.922)
ymin := s2 xmin := s1
f(x,y) = 2.769
    
```

3.

```

ORIGIN:= 1
f(x,y,z) := x*y*z
    
```

$$y := 0 \quad x := 0 \quad z := 0$$

Given

$$x + y + z - 5 = 0 \quad x \cdot y + y \cdot z + x \cdot z - 8 = 0$$

$$s := \text{Minimize}(f, x, y, z)$$

$$s = \begin{pmatrix} 2.002 \\ 1.998 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x := s_1 \quad y := s_2 \quad z := s_3$$

$$f(x, y, z) = 4$$

4.

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$f(x, y) := e^{-x \cdot y}$$

$$x := 0 \quad y := 0$$

Given

$$x + y - 9 = 0$$

$$s := \text{Minimize}(f, x, y)$$

$$s = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

$$y := s_2 \quad x := s_1$$

$$f(x, y) = 0$$

5.

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$f(x, y) := 6 - 4 \cdot x - 3 \cdot y$$

$$y := 0 \quad x := 0$$

Given

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$s := \text{Minimize}(f, x, y)$$

$$s = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

$$x := s_1 \quad y := s_2$$

$$f(x, y) = 1$$

3.10. წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

საინჟინრო პრაქტიკის ბევრ დარგში წამოიჭრება ამონახსნის ოპტიმიზაციის თავისებური ამოცანა, რომელისთვისაც დამახასიათებელია შემდეგი თვისებები:

ა) ეფექტურობის მაჩვენებელი $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ წარმოადგენს ამონახსნის ელემენტების წრფივ ფუნქციას;

ბ) შესაძლო ამონახსნებზე გავრცელებულ შეზღუდვის პირობებს აქვს წრფივი განტოლებების ან უტოლობების სახე.

ასეთ ამოცანებს, წრფივი დაპროგრამების ამოცანები ეწოდება. განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების კონკრეტული ამოცანები.

ამოცანა: მეცხოველეობის ფერმაში ძროხების კვების რაციონი შეიძლება შედგეს სამი პროდუქტისაგან – თივა, სილოსი და კონცენტრატები, რომლებიც შეიცავენ ცილებს, კალციუმსა და ვიტამინებს. რიცხვითი მონაცემები მოცემულია ცხრილში:

პროდუქტები	საკვები ნივთიერებები		
	ცილა (გ/კგ)	კალციუმი (გ/კგ)	ვიტამინები
თივა	$\alpha_{11} = 50$	$\alpha_{21} = 10$	$\alpha_{31} = 2$
სილოსი	$\alpha_{12} = 70$	$\alpha_{22} = 6$	$\alpha_{32} = 3$
კონცენტრატები	$\alpha_{13} = 180$	$\alpha_{23} = 3$	$\alpha_{33} = 1$

ცილისა და კალციუმის მოხმარების დღე-ღამური ნორმები ერთ სულ ძროხაზე გადაანგარიშებით შეადგენს არანაკლებ 2000გ და 210გ შესაბამისად. ვიტამინების მოხმარება მკაცრად დღობირებულია და უნდა შეადგენდეს 87მგ-ს დღე-ღამეში.

შევადგინოთ ყველაზე იაფი რაციონი, თუ ერთი კგ თივის ღირებულება 150 ფულის ერთეულია, სილოსისა – 200 ერთეული და კონცენ-ტრატისა – 600 ერთეული.

ამოხსნა: მოვახდინოთ ამოცანის ფორმალიზაცია ანუ შევადგინოთ შესატყვისი მათემატიკური მოდელი.

ვთქვათ, კვების რაციონის ოპტიმალური რაოდენობაა:

თივისა – x_1 კგ, სილოსისა – x_2 კგ და კონცენტრატისა – x_3 კგ. მაშინ მიზნის ფუნქცია (რაციონის ღირებულება დღე-ღამეში) იქნება:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = 150 \cdot X_1 + 200 \cdot X_2 + 600 \cdot X_3. \quad (3.24)$$

ამოცანის პირობებში, საჭიროა ამ ფუნქციის მინიმიზირება.

მოვახდინოთ შეზღუდვათა ფორმალიზება: დღე-ღამეში ცილის რაოდენობა 2000გ, კალციუმისა 210გ, ხოლო ვიტამინები ზუსტად არის 87მგ:

$$\begin{cases} 50 \cdot X_1 + 70 \cdot X_2 + 180 \cdot X_3 \geq 2000 \\ 10 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \geq 210 \\ 2 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 = 87 \\ X_1 > 0, X_2 > 0, X_3 > 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა Mathcad-ზე:

მიზნის ფუნქცია:

$$f(x_1, x_2, x_3) := 150 \cdot x_1 + 200 \cdot x_2 + 600 \cdot x_3$$

ჩველადების საწყისი მიახლოებები

$$x_1 := 1$$

$$x_2 := 1$$

$$x_3 := 1$$

ამოცანის ამოხსნისა და შეზღუდვების პროგრამული ბლოკი Mathcad-ში.

Given

$$x_1 \geq 1$$

$$x_2 \geq 1$$

$$x_3 \geq 1$$

$$50 \cdot x_1 + 70 \cdot x_2 + 180 \cdot x_3 \geq 2000$$

$$10 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \geq 210$$

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 87$$

$$R := \text{Minimize}(f, x_1, x_2, x_3)$$

იზნის ფუნქციის მინიმუმის წერტილია:

$$R = \begin{pmatrix} 5.833 \\ 24.778 \\ 1 \end{pmatrix}$$

იზნის ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობაა:

$$f(R_0, R_1, R_2) = 6430.556$$

3.11. სატრანსპორტო გადაზიდვების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

ვთქვათ, რაღაც პროდუქტი (ქვანახშირი, აგური, ბენზინი,...) ინახება m საწყობში და გამოიყენება n პუნქტში (ქარხნებში, მშენებლობაზე, მაღაზიებში, ბენზინგასამართ სადგურებში, ...).

a_i არის პროდუქტის მარაგი i -ურ საწყობში ($a_i > 0$);
 b_j – განაცხადები საქონელზე მოხმარების j -ურ პუნქტში;

c_{ij} – i -ური საწყობიდან მოხმარების j -ურ პუნქტში ერთეულოვანი რაოდენობის პროდუქტის გადაზიდვის ღირებულება, $c_{ij} > 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

ამასთან ითვლება, რომ ამოცანა დაბალანსებულია, ე.ი. ჯამური მარაგები ტოლია ჯამური მოთხოვნილებისა.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (3.26)$$

უნდა ავირჩიოთ გადაზიდვების ისეთი სტრატეგია, რომ სრულად დავაკმაყოფილოთ მოთხოვნილებები, ამასთან გადაზიდვების ჯამური ხარჯები იყოს მინიმალური.

ამოხსნა: ვთქვათ, x_{ij} საქონლის რაოდენობაა, რომელიც გადაიზიდება i -ური პუნქტიდან მოხმარების j -ურ პუნქტში, მაშინ მიზნის ფუნქციას (გადაზიდვების ჯამური ხარჯები) აქვს შემდეგი სახე:

$$L = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \quad (3.27)$$

გარდა ამისა, უნდა დავაკმაყოფილოთ ყველა განაცხადი, ე.ი.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (3.28)$$

რადგან გასახარჯია საწყობების მთელი მარაგი, გვექნება:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad (i = \overline{1, m}). \quad (3.29)$$

ცხადია, რომ

$$X_{ij} \geq 0. \quad (3.30)$$

ამრიგად ვლენულობთ წრფივი დაპროგრამების (3.27) - (3.30) ამოცანას, რომლის ამოხსნაც უკვე ვიცით.

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი:

ამოცანა: რეგიონში არის ორი ცემენტის ქარხანა და მათი პროდუქციის მომხმარებელი: სამი ბინათმშენებლობის კომბინატი. ცხრილში მოცემულია ცემენტის წარმოების დღე-ღამური მოცულობები, კომბინატების დღე-ღამური მოთხოვნილებები და თითოეული ქარხნიდან თითოეულ კომბინატამდე ერთი ტონა ცემენტის გადაზიდვის ღირებულება.

შევადგინოთ ცემენტის გადაზიდვების ოპტიმალური გეგმა სატრანსპორტო ხარჯების მინიმიზაციის მიზნით.

ქარხნები	ცემენტის წარმოება ტ/დღ	1ტ ცემენტის გადაზიდვის ღირებულება		
		კომბ.1	კომბ. 2	კომბ. 3
I ქარხანა	$a_1=40$	$c_{11}=10$	$c_{12}=15$	$c_{13}=25$
II ქარხანა	$a_2=60$	$c_{21}=20$	$c_{22}=30$	$c_{23}=30$
	ცემენტის მოხმარება ტ/დღ	$b_1=50$	$b_2=20$	$b_3=30$

ამოხსნა: ამოცანის ამოხსნისათვის ვადავსებთ მათემატიკურ მოდელს.

ვთქვათ, X_{ij} - ცემენტის რაოდენობაა ($i = \overline{1,2}$) ორი ქარხნიდან გადაზიდული ($j = \overline{1,3}$) სამ ბინათმშენებლო კომბინატში. მაშინ, მიზნის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$L(X) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 C_{ij} \cdot X_{ij} \rightarrow \min$$

გვაქვს შემდეგი სახის შეზღუდვები:

$$\sum_{i=1}^2 X_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1,3})$$

$$\sum_{j=1}^3 X_{ij} = a_i, \quad (i = \overline{1,2})$$

$$X_{ij} \geq 0.$$

სატრანსპორტო ამოცანის ამოსახსნელად **შეგადგინოთ შესაბამისი პროგრამა Mathcad-ზე:**

ინდექსაცია იწყება i=1-დან

ORIGIN= 1

ადაზიდვის ფასების მატრიცა

$$C := \begin{pmatrix} 10 & 15 & 25 \\ 20 & 30 & 30 \end{pmatrix}$$

ორ ქარხანაში ცემენტის საწყისი მარაგი

$$A := \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

სამიბინათსამშენებლო კომბინატის მოთხოვნა

$$B := \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

ადაზიდვების მიზნის ფუნქცია:

$$L(X) := \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 C_{i,j} \cdot X_{i,j}$$

ჩვლადების საწყისი მიახლოებები

$$i := 1..2$$

$$i := 1..2$$

$$j := 1..3$$

$$X_{i,j} := 1$$

შეზღუდვებისა და ამოცანის ამოსხნის პროგრამული ბლოკი

Given

$$\sum_{i=1}^2 X_{i,1} = B_1$$

$$\sum_{i=1}^2 X_{i,2} = B_2$$

$$\sum_{i=1}^2 X_{i,3} = B_3$$

$$\sum_{j=1}^3 X_{1,j} = A_1$$

$$\sum_{j=1}^3 X_{2,j} = A_2$$

$$X \geq 0$$

$$R := \text{Minimize}(L, X)$$

ამოცანის მინიმუმის წერტილი

$$R = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 \\ 30 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

აღაზიდვების ოპტიმალური ფასი

$$L(R) = 2000$$

3.12. რესურსების ოპტიმალური განაწილების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს გარკვეული რესურსები (ნედლეული, სამუშაო ძალა, დანადგარები):

$$R_1, R_2, \dots, R_m \quad (3.31)$$

შესაბამისი რაოდენობებით

$$b_1, b_2, \dots, b_m \quad (3.32)$$

ამ რესურსების გამოყენებით შეიძლება გაწარმოთ საქონელი:

$$T_1, T_2, \dots, T_n \quad (3.33)$$

T_j საქონლის ერთი ერთეულის საწარმოებლად საჭიროა R_i რესურსის a_{ij} , ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) ერთეული. R_i რესურსის თითოეული ერთეული ღირს d_i ლარი. T_j საქონლის თითოეული ერთეულის რეალიზაცია შესაძლოა C_j ($j = \overline{1, n}$) ლარად.

საქონლის თითოეული სახეობის წარმოებული ერთეულების რაოდენობა შემოფარგლულია მოთხოვნით. ცნობილია, რომ ბაზარი ვერ შთანთქავს T_j ($j = \overline{1, n}$) საქონლის K_j ერთეულზე მეტ რაოდენობას.

ისმის კითხვა: რომელი საქონელი და რა რაოდენობით უნდა იქნეს წარმოებული იმისათვის, რომ მოხდეს მაქსიმალური მოგების რეალიზება?

ამოხსნა: ამოცანის პირობები ჩავწეროთ წრფივი დაპროგრამების მათემატიკური მოდელის სახით.

მოთხოვნის პირობები აწესებს შეზღუდვებს:

$$X_i \leq K_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.34)$$

გარდა ამისა, რესურსები მოიხმარება არაუმეტეს იმ რაოდენობისა, ვიდრე გვაქვს საწყობში; ამიტომ დებულობენ შეზღუდვებს:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}). \quad (3.35)$$

შევადგინოთ მოგების მიზნის ფუნქცია. T_j სახის საქონლის ერთეული რაოდენობის s_j -თვითღირებულება უდრის

$$s_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} d_i \quad (j = \overline{1, n}). \quad (3.36)$$

T_j საქონლის, ერთი ერთეულის რეალიზებით მიღებული სუფთა q_j მოგება ტოლია მის გასაყიდ c_j ფასსა და s_j თვითღირებულებას შორის სხვაობისა:

$$q_j = c_j - s_j. \quad (3.37)$$

ყველა საქონლის რეალიზაციით მიღებული საერთო სუფთა მოგება იქნება:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n q_j x_j = \sum_{j=1}^n (c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} d_i) \cdot x_j \rightarrow \max. \quad (3.38)$$

განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა:

ამოცანა: სართავი ფაბრიკა ნართის ორი სახეობის საწარმოებლად იყენებს სამი ტიპის ნედლეულს – სუფთა შალს, კაპრონს და აკრილს.

ცხრილში ნაჩვენებია ნედლეულის ხარჯვის ნორმები, მისი საერთო რაოდენობა, რომელიც ფაბრიკამ წლის განმავლობაში უნდა გამოიყენოს და თითოეული სახის ნართის ერთი ტონის რეალიზაციით მიღებული მოგება.

ნედლეულის ტიპი	1 ტ ნართზე ნედლეულის ხარჯვის ნორმები		ნედლეულის რაოდენობა (ტ)
	სახეობა 1	სახეობა 2	
შალი	$\alpha_{11} = 0.5$	$\alpha_{12} = 0.2$	$b_1 = 600$
კაპრონი	$a_{21} = 0.1$	$a_{22} = 0.6$	$b_2 = 620$
აკრილი	$a_{31} = 0.4$	$a_{32} = 0.2$	$b_3 = 500$
1 ტ ნართის რეალიზაციით მიღებული მოგება	$q_1 = 1100$	$q_2 = 900$	

შევადგინოთ ნართის წარმოების ოპტიმალური წლიური გეგმა, მოგების მაქსიმიზაციისათვის.

ამოხსნა: ჩამოვაყალიბოთ ამოცანა მათემატიკის ენაზე. ვთქვათ, x_1 – პირველი სახის ნართის რაოდენობაა და x_2 – მეორე სახის ნართის რაოდენობა.

მაშინ შეზღუდვებს ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} 0.5 \cdot X_1 + 0.2 \cdot X_2 \leq 600 \\ 0.1 \cdot X_1 + 0.6 \cdot X_2 \leq 620 \\ 0.4 \cdot X_1 + 0.2 \cdot X_2 \leq 500 \end{cases}$$

მიზნის ფუნქციას (სუფთა მოგებას) ექნება შემდეგი სახე:

$$L(X_1, X_2) = 1100 \cdot X_1 + 900 \cdot X_2 \rightarrow \max$$

შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა Mathcad-ზე:

ამოცანის მიზნის ფუნქციაა:

$$f(x_1, x_2) := 1100 \cdot x_1 + 900 \cdot x_2$$

ცვლადების საწყისი მიახლოებები:

$$x_1 := 1$$

$$x_2 := 1$$

ამოცანის ამოხსნისა და შეზღუდვების პროგრამული ბლოკი

Given

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$0.5 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_2 \leq 600$$

$$0.1 \cdot x_1 + 0.6 \cdot x_2 \leq 620$$

$$0.4 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_2 \leq 500$$

$$R := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$$

მაქსიმუმის წერტილია:

$$R = \begin{pmatrix} 1199.664 \\ 0.839 \end{pmatrix}$$

მოცანის ამონახსნია:

$$f(R_0, R_1) = 1320385.9$$

3.13. არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანას აქვს შემდეგი სახე:

იპოვეთ მინიმუმის (მაქსიმუმის) წერტილი და მინიმალური (მაქსიმალური) მნიშვნელობა არაწრფივი ფუნქციისათვის:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.39)$$

როცა შეზღუდვების ერთი ნაწილი მოცემულია ტოლობების სახით:

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, k}, \quad (3.40)$$

ხოლო მეორე ნაწილი - უტოლობების სახით:

$$\Psi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, j = \overline{1, m}. \quad (3.41)$$

განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა:

ამოცანა: ვიპოვოთ არაწრფივი $f(x_1, x_2)$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა:

$$f(x_1, x_2) = 6x_1 - (x_1)^2 + x_2$$

შემდეგი შეზღუდვების პირობებში:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 24 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

ამოხსნა:

შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა Mathcad-ზე:

მიზნის ფუნქციაა:

$$f(x_1, x_2) := 6 \cdot x_1 + x_2 - x_1^2$$

მოცანის ცვლადების საწყისი მიახლოებები

$$x_1 := 1$$

$$x_2 := 1$$

შეზღუდვებისა და ამოცანის ამოხსნის პროგრამული ბლოკი

Given

$$x_1 \geq 0$$

$$4 \geq x_2 \geq 0$$

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 15$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 24$$

$$R := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$$

მაქსიმუმის წერტილია:

$$R = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ამოცანის ამონახსნი:

$$f(R_0, R_1) = 13$$

3.14. არაწრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

განვიხილოთ არაწრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანის ამოხსნის კონკრეტული მაგალითი. მაშასადამე, გვაქვს არაწრფივი მიზნის ფუნქცია და შემოფარგვლის პირობები, რომელთაგან ზოგი ტოლობის ფორმისაა და ზოგიც – უტოლობისა.

ამოცანა: იპოვეთ $\min f(x)$, თუ $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2$ და შეზღუდვის პირობებს აქვთ სახე:

$$\begin{cases} x_1 + x_2^2 + 3x_2 < 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_1x_3^2 - x_1x_2 > 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

ამოხსნა:

შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა Mathcad-ზე:

$$\text{ORIGIN} = 1 \\ f(x) := (x_1)^2 + 3 \cdot (x_2)^2 + 2 \cdot (x_3)^2 + (x_4)^2$$

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Given

$$x_1 + (x_2)^2 + 3 \cdot x_2 < 0$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 5$$

$$x_1 \cdot (x_3)^2 - x_1 \cdot x_2 > 0$$

$$\underline{x} := \text{Minimize}(f, x)$$

$$s = \begin{pmatrix} 1.286 \\ -0.518 \\ 0 \\ 4.232 \end{pmatrix} \quad \underline{x} := s$$

$$f(x) = 20.371$$

როგორც ვხედავთ, Mathcad პროგრამის მათემატიკური უზრუნველყოფა, საშუალებას იძლევა ამოვსხნათ ოპტიმიზაციის საკმაოდ რთული ამოცანებიც.

3.15. მრავალკრიტერიუმიანი ექსტრემალური ამოცანების ამოხსნის მეთოდები

პრაქტიკაში, ხშირად, გვხვდება ისეთი ექსტრემალური ამოცანებიც, როცა შემოფარგვლის პირობებთან ერთად, გვაქვს მრავალკრიტერიუმიანი მიზნის ფუნქციები ანუ გვაქვს რამდენიმე კრიტერიუმი, რომელთაგან ზოგი მოითხოვს მიზნის ფუნქციის მინიმიზაციას, ზოგიც – მაქსიმიზაციას. ასეთი ამოცანების ამოსახსნელად, შინაარსიდან გამომდინარე არსებობს რამდენიმე მიდგომა: 1) როცა შემოფარგვლის პირობებთან ერთად, გვაქვს ერთნაირი აზრის (*min* ან *max*) რამდენიმე მიზნის ფუნქცია, ვიყენებთ საჯარიმო, წონითი ფუნქციების მეთოდს ანუ შესაბამისად, გვაქვს მინიმიზაციის მრავალკრიტერიული ამოცანა ან მაქსიმიზაციის მრავალკრიტერიული ამოცანა; 2) როცა შემოფარგვლის პირობებთან ერთად, გვაქვს სხვადასხვა აზრის (*min* და *max*) რამდენიმე მიზნის ფუნქცია, ვიყენებთ სპეციალური ტიპის მიზნის ფუნქციის აგების მეთოდს.

3.16. მრავალკრიტერიული მაქსიმიზაციისა და მინიმიზაციის ამოცანები

განვიხილოთ მრავალკრიტერიული მაქსიმიზაციის ამოცანა:

იპოვეთ: $\max f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $\max g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ თუ შეზღუდვების ერთი ნაწილი მოცემულია განტოლებებით:

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, k}, \quad (3.43)$$

ხოლო შეზღუდვების მეორე ნაწილი მოიცემა უტოლობებით:

$$\Psi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, j = \overline{1, m}. \quad (3.44)$$

ასეთი ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად გვაქვს ორი ძირითადი მეთოდი:

1) ასეთ შემთხვევაში, ვადგენთ სპეციალური ტიპის მიზნის ფუნქციას:

$$I(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.45)$$

ცხადია, რომ ჯამი მიაღწევს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას მაშინ, როცა თითოეული შესაკრები მიაღწევს მაქსიმუმს. მაშასადამე, ჩვენი მრავალკრიტერიული ამოცანა შეგვიძლია დავიყვანოთ ცნობილ ერთკრიტერიულ არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანაზე:

$$\max I(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.46)$$

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, k}, \quad (3.47)$$

$$\Psi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, j = \overline{1, m}. \quad (3.48)$$

2) არსებობს სხვა მიდგომაც, როცა გვაქვს რამოდენიმე ერთი აზრის (\max ან \min) მიზნის $\min f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქცია, ადგენენ სპეციალური ტიპის მიზნის ფუნქციას:

$$I(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_i \alpha_i \cdot f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.49)$$

სადაც $\sum_i \alpha_i = 1, \alpha_i > 0$. ეს კოეფიციენტები შეირჩევა ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე. ის კოეფიციენტი იქნება უფრო მეტი სიდიდის, რომლის შესაბამისი $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციის მინიმიზაცია უფრო მნიშვნელოვანია.

ამ შემთხვევაში, ამოცანა დაისმის შემდეგნაირად:

$$\min I(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.50)$$

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, k}, \quad (3.51)$$

$$\Psi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, j = \overline{1, m}. \quad (3.52)$$

3.17. მრავალკრიტერიული, ურთიერთსაპირისპირო კრიტერიუმების მქონე ამოცანის ამოხსნა

განვიხილოთ მრავალკრიტერიული ურთიერთსაპირისპირო კრიტერიუმების მქონე ამოცანის ამოხსნის მეთოდი.

მოცემულია ამოცანა: იპოვეთ ისეთი (x_1, x_2, \dots, x_n) წერტილი, რომლისთვისაც, ჰილბერტის სივრცის წინასწარ მოცემული ორი $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციიდან, ერთი აღწევს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას $\max f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ხოლო მეორე მინიმალურს $\min g(x_1, x_2, \dots, x_n)$. ამასთანავე, ეს წერტილები უნდა აკმაყოფილებდნენ შემოფარგვლის (შეზღუდვების) პირობებს:

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, k}, \quad (3.53)$$

$$\Psi_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \leq 0, j = \overline{1, m}. \quad (3.54)$$

ამ ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად, ვადგენთ სპეციალური ტიპის ფუნქციას:

$$I(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.55)$$

ცხადია, რომ სხვაობა აღწევს მაქსიმუმს, როცა საკლებია მაქსიმალური და მაკლებია მინიმალური. მაშასადამე, ჩვენი ამოცანა შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად:

$$\max I(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.56)$$

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, k}, \quad (3.57)$$

$$\Psi_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \leq 0, j = \overline{1, m}. \quad (3.58)$$

3.18. დინამიკური დაპროგრამება

განვიხილოთ უპირობო ოპტიმიზაციის ამოცანა:

$$\min_{(t,x)} f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.59)$$

დინამიკური დაპროგრამების მეთოდი საშუალებას იძლევა $n + 1$ ცვლადის ფუნქციის ოპტიმიზაციის ამოცანა დაიყვანოს n ცვლადის ფუნქციის ოპტიმიზაციის ამოცანად, თუ შესაძლებელია საწყისი ფუნქციის განცალკევადი წარმოდგენა:

$$f(t, x) = f_1(t, f_2(x)). \quad (3.60)$$

ასეთ შემთხვევაში (3.59) ამოცანა დაიყვანება (3.61) ამოცანაზე:

$$\min_{(t,x)} f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \min_t f_1 \left(t, \min_x f_2(x) \right). \quad (3.61)$$

ისმის კითხვა: როდისაა შესაძლებელი (3.59) ამოცანის შეცვლა (3.61) ამოცანით ?

ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა მიტტენის თეორემა: თუ არსებობს

$f(t, x)$ ფუნქციის ისეთი განცალკეობადი (3.60) წარმოდგენა, რომ f_1 ფუნქცია არაა მონოტონურად კლებადი თავისი მეორე-ვექტორული x ცვლადის მიმართ, მაშინ

$$\text{Opt}_{(t,x)} f(t, x) = \text{Opt}_t \left(f_1 \left(t, \text{Opt}_x (f_2(x)) \right) \right). \quad (3.62)$$

$\text{Opt}_{(t,x)}$ – ოპტიუმის ქვეშ იგულისხმება მაქსიმუმიც და მინიმუმიც ანუ

(3.62) ფორმულა ძალაშია, როგორც მაქსიმიზაციის, ასევე, მინიმიზაციის ამოცანებისათვის.

იმ შემთხვევაში, როდესაც გვაქვს შეზღუდვები სივრცულ x ცვლადებზე ანუ პირობითი ექსტრემუმის ამოცანა, რომელიც გვეუბნება რომ $x \in \Omega_n \subset \mathbb{R}^n$, მაშინ (3.62) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$\text{Opt}_{(t,x)} f(t, x) = \text{Opt}_t \left(f_1 \left(t, \text{Opt}_{x \in \Omega_n} (f_2(x)) \right) \right). \quad (3.63)$$

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. იპოვეთ $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$ ფუნქციის ექსტრემუმები ანალიზურად;
2. იპოვეთ $f(x, y) = x^2 y^2 (6 - x - y)$ ფუნქციის ექსტრემუმები ანალიზურად;
3. იპოვეთ $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ ფუნქციის მაქსიმუმები და მინიმუმები;
4. იპოვეთ $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$ ფუნქციის მინიმუმი გრადიენტული დაშვების მეთოდით;
5. იპოვეთ $f(x, y, z) = xyz$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმები ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით, თუ შემოფარგვლის პირობებს აქვთ სახე: $\begin{cases} \varphi_1 = x + y - z - 3 = 0 \\ \varphi_2 = x - y - z - 8 = 0 \end{cases}$
6. იპოვეთ $g(x, y) = x^2 + y^2$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმი, თუ შემოფარგვლის პირობაა: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. ამოცანა ამოხსენით ანალიზურად და Mathcad პროგრამის გამოყენებით. გაანალიზეთ შედეგები;
7. იპოვეთ $g(x, y) = 6 - 4x - 3y$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმი, თუ შემოფარგვლის პირობაა: $x^2 + y^2 = 1$. ამოცანა ამოხსენით ანალიზურად და Mathcad პროგრამის გამოყენებით. გაანალიზეთ შედეგები;
8. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი მოცემული $A(1;0)$ წერტილიდან $4x^2 + 9y^2 = 36$ ელიფსამდე;

9. იპოვეთ მანძილი $y = x^2$ პარაბოლასა და $x - y = 5$ წრფეს შორის;
10. იპოვეთ $x^2 + y^2 = R^2$ წრეში ჩახაზული უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედის გვერდები;
11. იპოვეთ იმ ცილინდრის უდიდესი სრული ზედაპირის ფართობი, რომელიც ჩახაზულია R რადიუსიან ბირთვში;
12. იპოვეთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამონახსნი Mathcad პროგრამის გამოყენებით:

ა) $x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$, შემოფარგვლის პირობები:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3} \end{cases}$$

ბ) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$, შემოფარგვლის პირობები:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 1 \quad ; \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

გ) $2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \rightarrow \max$, შემოფარგვლის პირობები:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 30 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 40 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \quad ; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 25 \end{cases}$$

13. ვთქვათ მცირე საწარმოს საამქრომ უნდა დაამზადოს სამი ტიპის 100 ნაკეთობა. თითოეული ნაკეთობა უნდა დამზადდეს არანაკლებ 20 ცალისა. ნაკეთობაზე მიდის შესაბამისად 4, 3.4 და 2 კგ მეტალი, როცა მისი საერთო მარაგი 340 კგ-ა, აგრეთვე 4.75, 11 და 2 კგ პლასტმასა 700 კგ საერთო მოცულობით. თითოეული ტიპის X_1, X_2 და X_3 რამდენი ნაკეთობა უნდა დამზადდეს, რომ მივიღოთ გამოშვების მაქსიმალური მოცულობა ფულად გამოსახულებაში, თუ ნაკეთობის ფასები კალკულაციის მიხედვით შეადგენს 4, 3 და 2 ლარს;

14. სამი სახეობის A, B და C ნაკეთობის საწარმოებლად გამოიყენება T_1, T_2, T_3 ტიპის ნედლეული. ამასთან T_1 და T_3 ნედლეულის შესყიდვები შეზღუდულია მომწოდებლების შესაძლებლობებით. ცხრილში მოცემულია ნედლეულის ხარჯვის, ნედლეულსა და ნაკეთობაზე ფასების ნორმები და ნედლეულის შესყიდვის შეზღუდვები.

ნედლე ულის ტიპი	1კგ ნედლე ულის ფასი (ლარი)	ერთ ნაკეთობაზე ნედლეულის ხარჯვის ნორმები (კგ)			ნედლეულის შეძენის შეზღუდვები (კგ)
		A	B	C	
T ₁	d ₁ =2	a ₁₁ =1	a ₁₂ =3	a ₁₃ =a	b ₁ =3000
T ₂	d ₂ =1	a ₂₁ =4	a ₂₂ =1	a ₂₃ =3	-
T ₃	d ₃ =b	a ₃₁ =6	a ₃₂ =5	a ₃₃ =2	b ₃ =3320
ერთი ნაკეთობის ფასი (ლარი)		c ₁ =6b+12	c ₂ =5b+22	c ₃ =c	

განსაზღვრეთ მოგების მაქსიმიზაციის მიზნით პროდუქციის წარმოების ოპტიმალური გეგმა. შეადგინეთ ზოგადი სახის მათემატიკური მოდელი.

განიხილეთ (a,b,c) პარამეტრების მოცემის სხვადასხვა შემთხვევები:

a	b	c
2	1	17
2	2	19
2	3	21

15. იპოვეთ არაწრფივი ფუნქციის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობები:

$$f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2,$$

შემდეგი შეზღუდვებით:

$$3x_1 + 2x_2 \geq 7$$

$$10x_1 - x_2 \leq 8 \quad ;$$

$$-18x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0.$$

16. იპოვეთ არაწრფივი ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა:

$$f(x) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2,$$

შემდეგი შეზღუდვებით:

$$x_1 + x_2 = 180,$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0.$$

17. იპოვეთ არაწრფივი ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა:

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2^2 - x_1^2 - 2x_2^2,$$

თუ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases};$$

18. იპოვეთ f_{\max} , თუ

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases};$$

19. იპოვეთ f_{\min} , თუ

$$f(x) = (x_1 - 1)^4 + (x_2 - 3)^2$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \\ -3x_1^2 - 2x_2^2 + 21 \geq 0 \\ -4x_1 - 5x_2 + 20 \geq 0 \end{cases};$$

20. იპოვეთ f_{\min} , თუ

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2;$$

$$x_1 + x_2 - 5 = 0$$

21. იპოვეთ f_{\min} , თუ

$$f(x) = (x_1 - 1) \cdot (x_1 - 2) \cdot (x_1 - 3) + x_3$$

$$x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 \geq 0 \quad ;$$

$$5 - x_3 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

22. იპოვეთ f_{\max} , თუ

$$f(x) = -x_1^2 - x_2^2; \quad 18 - (x_1 - 7)^2 - (x_2 - 7)^2 \geq 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

23. იპოვეთ $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ ფუნქციის ექსტრემუმები;

24. იპოვეთ $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow exstr$, თუ $3x_1 + 4x_2 = 1$;

25. იპოვეთ $x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow exstr$, თუ
 $x_1 + x_2 - x_3 = 1$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$;
26. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow min$, თუ $2x_1 - x_2 + x_3 \leq 5$, $x_1 + x_2 + x_3 = 3$.
 ამოხსენით ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით და Mathcad პროგრამით. შედეგები შეადარეთ;
27. $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \rightarrow min$, თუ
 $x_1 - x_2 - x_3 + 1 \leq 0$, $-x_1 - 3x_2 + 3 \leq 0$.
 ამოხსენით ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით და Mathcad პროგრამით. შედეგები შეადარეთ;
28. $x_1 - x_2^2 \rightarrow exstr$, $\begin{cases} x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 5 \leq 0 \end{cases}$;
29. $x_1^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow min$, $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ 4x_1^2 + x_2^2 \geq 4 \end{cases}$.

ლიტერატურა

1. **Anrew F.Sigel.** Practical Buisness Statistics, Boston Burr Ridged,WI New York, San Francisco, Lisbon, London, Madrid, Toronto, 2000.
2. **А.А. Мицкевич.** Деловая математика в экономической теории и практике, Высшая школа экономики, М., 1995.
3. **Т.Пу.** Нелинейная экономическая динамика, пер. с англ., М., 2002.
4. **В.В. Лебедев.** Математическое моделирование социально-экономических процессов, М., 1997.
5. **О.Н. Салманов.** Математическая экономика с применением Mathcad и Excel, Санкт-Петербург, 2003.
6. **ბ.ჯიბლაძე, ა.თოფჩიშვილი.** სტატისტიკური ოპტიმიზაციის რიცხვითი მეთოდები, მართვის სისტემების ინსტიტუტი, თ., 2001.
7. **Gilbert A.Churchill.** Marketing Reserch, New York, Orlando, Toronto, Montreal, London, Sydney, Tokyo, 199.
8. **В. Дьяконов.** Mathcad 2001 учебный курс численные и символьные вычисления, "Питер", Санкт-Петербург, Москва, Харьков, Минск, 2001.
9. **Т.А. Обгадзе.** Высшая математика для экономистов, Министерство образования РФ, Институт гуманитарного образования, М., 2002.

10. **Т.А.Обгадзе, В.Г. Прокошев.** Вычислительная физика, Министерство образования РФ, ВлГУ, Владимир, 1999.
11. **Christopher Dougherty.** Introduction to econometrics, New York, Oxford University PRESS, 1992.
12. **В. Дьяконов.** Matlab, учебный курс универсальная интегрированная система компьютерной математики, "Питер", Санкт-Петербург, Москва, Харьков, Минск, 2001.
13. **Т.А. Обгадзе, З.Н.Цвераидзе.** Математические модели в экономике; 20 лабораторных работ на основе Mathcad 2001 Professional, ГТУ, Т., 2006.
14. **თამაზ ობგაძე.** მათემატიკური მოდელირების კურსი(უწყვეტი მათემატიკური მოდელები), I ტომი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, თ., 2006.
15. **Ф. Мостеллер.** Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями, пер. с англ., М., 1971.
16. **А.Я. Яглом, И.М. Яглом.** Вероятность и информация, М., 1973.
17. **Ю.В. Прохоров. Ю.А. Розанов.** Теория вероятностей, СМБ, М., 1973.
18. **В.Е. Гмурман.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике, учеб. пос., М., 1975.
19. **Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров.** Теория вероятностей, учеб. пос., задачи и упражнения, М., 1973.
20. **Т.А. Обгадзе.** Математическая модель Лоренца в экономике производства, ГЭНЖ, компьютерные науки и телекоммуникации, №4(11), 2006.
21. **Н.Н.Моисеев, Ю.П.Иванилов.** Методы оптимизации, Наука, М., 1978.
22. **Ф.П.Васильев.** Численные методы решения экстремальных задач, Наука, М.,1988.
23. **Э.Полак.** Численные методы оптимизации. Евиный подход, Мир, М., 1974.
24. **М.Атане, П.Фалб.** Оптимальное управление,Машиностроение,М.,1968.

25. **Э.П.Сейдж, Ч.С.Уайт.** Оптимальное управление системами, Мир, М., 1982.
26. **Э.М.Галеев, В.М.Тихомиров.** Оптимизация, теория, примеры, задачи, УРСС, М., 2000.
27. **М.Мину.** Математическое программирование. Теория и алгоритмы, пер. с франц., наука, М., 1990.
28. **L.G.Mitten.** Composition Principles for Synthesis of Optimal Multistage Processes, Operations Research 12, 1964.
29. **L.G.Mitten, A.R.Warburton.** Implicit Enumeration Procedures, Working Paper 251, Faculty of commerce and Business Administration, University of British Columbia, Vancouver, Canada, 1973.

IV თავი. ვარიაციული აღრიცხვა

ვარიაციული აღრიცხვა შეისწავლის ფუნქციონალების მაქსიმუმისა და მინიმუმის პოვნის მეთოდებს. იმ ამოცანებს, რომელშიც მოითხოვება ფუნქციონალის გამოკვლევა, მაქსიმუმზე ან მინიმუმზე ვარიაციული ამოცანები ეწოდებათ.

ფიზიკისა და მექანიკის ამოცანათა უმრავლესობა დაიყვანება რომელიღაც, შესაბამისი ფუნქციონალის ექსტრემუმის პოვნის ამოცანაზე. ასეთი ფორმულირების შემთხვევაში, ამ კანონებს შესაბამისად, ფიზიკის ან მექანიკის ვარიაციულ პრინციპებს უწოდებენ. ვარიაციულ პრინციპებს მიეკუთვნება: *უმცირესი ქმედების პრინციპი, ენერჯიის შენახვის კანონი, იმპულსის შენახვის კანონი, მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონი, მოძრაობის რაოდენობის მომენტის შენახვის კანონი, ველის სხვადასხვა კლასიკური და რელატივისტური თეორიის ვარიაციული პრინციპი, ფერმას ოპტიკური პრინციპი, კასტილიანოს ვარიაციული პრინციპი დრეკადობის თეორიაში* და ა.შ.

4.1. ვარიაციული აღრიცხვის კლასიკური ამოცანები

ვარიაციული აღრიცხვის განვითარება დაიწყო 1696 წლიდან და ჩამოყალიბდა დამოუკიდებელ მათემატიკურ დისციპლინად, საკუთარი კვლევის მეთოდებით, გენიალური ლეონარდ ეილერის და იოჰან ბერნულის მოღვაწეობის შედეგად.

იმისათვის, რომ ვიქონიოთ წარმოდგენა ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანებზე, განვიხილოთ რამდენიმე კლასიკური ამოცანა.

4.1.1. გედეზიური წირები სიბრტყეზე

დავიწყოთ უმარტივესი ამოცანით: რას წარმოადგენს ბრტყელი, უმოკლესი სიგრძის მქონე წირი, რომელიც სიბრტყის რომელიმე ორ წერტილს აერთებს?

ამ ამოცანის მათემატიკური ფორმულირებისათვის, ვაფიქსირებთ რაიმე, ორ $A(x_1; y_1)$ და $B(x_2; y_2)$ წერტილს XOY სიბრტყეზე. დავუშვათ, რომ $x_1 < x_2$ და განვიხილოთ ამ ორი წერტილის შემაერთებელი გლუვი $y = f(x)$ წირი $x \in [x_1; x_2]$, რომლისთვისაც $y_1 = f(x_1)$ და $y_2 = f(x_2)$.

ასეთ შემთხვევაში, ამ ორი წერტილის შემაერთებელი წირის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$I(f) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (4.1)$$

ამ ამოცანაში, საპოვნელია ისეთი $y = f(x)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც (4.1) ფუნქციონალი მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

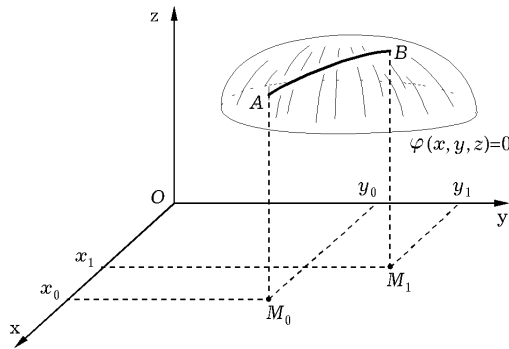
ცხადია, რომ ასეთი წირი ევკლიდურ სივრცეში, იქნება ამ ორი წერტილის შემაერთებელი წრფის მონაკვეთი.

4.1.2. გეოდეზიური წირები ნებისმიერ ზედაპირზე

ვთქვათ, გვაქვს ნებისმიერი ორი წერტილი რაიმე ზედაპირზე, რომელიც მოცემულია განტოლებით:

$$\varphi(x, y, z) = 0. \quad (4.2)$$

ვიპოვოთ ამ ზედაპირზე მდებარე და მოცემულ ორ წერტილზე გამავალი, უმცირესი სიგრძის მქონე წირი ნახ. 4.1.



ნახ. 4.1. გეოდეზიური წირის პოვნის სქემა

ასეთ წირებს, მოცემული ზედაპირის გეოდეზიური წირები ეწოდება. მაგალითად, სიბრტყეზე გეოდეზიური წირია წრფე, სფეროს ზედაპირზე გეოდეზიური წირია, ცენტრზე გამავალი დიდი კვეთის რკალი, რომელიც ამ ორ წერტილზე გადის.

ამ ამოცანის ფორმალიზაციისათვის, დავუშვათ რომ (4.2) ფუნქცია არის გლუვი და საძიებელი წირი, შეგვიძლია ჩავწეროთ განტოლებებით: $y = y(x)$ და $z = z(x)$ როცა $x \in [a; b]$. მაშინ საძიებელი წირის სიგრძე იქნება:

$$L[y(x); z(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} dx. \quad (4.3)$$

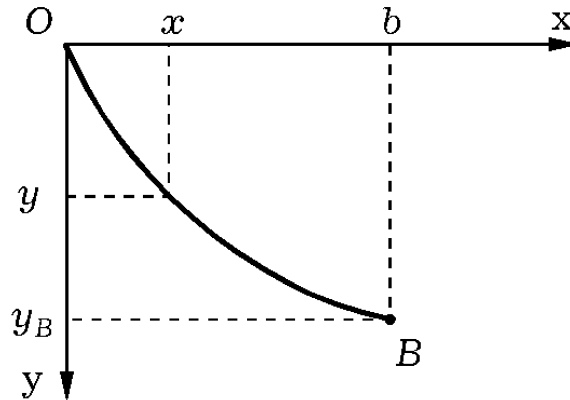
ამოცანა დაიყვანება $x \in [a; b]$ შუალედში, იმ ორი გლუვი $y = y(x)$ და $z = z(x)$ ფუნქციის პოვნაზე, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებებს:

$$F(x, y(x), z(x)) \equiv 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad z(x_1) = z_1, \quad (4.4)$$

და ანიჭებენ (4.3) ფუნქციონალს მინიმალურ მნიშვნელობას.

4.1.3. ამოცანა ბრახისტოხრონას შესახებ

მოცემულია ვერტიკალურ სიბრტყეში, ერთ ვერტიკალზე არა მდებარე ორი O და B წერტილი. მოცემულ სიბრტყეში, იპოვეთ ამ წერტილების შემაერთებელი ისეთი წირი OB , რომელზეც სიმძიმის გავლენით მოძრაობისას, მატერიალურ წერტილს დასჭირდება უმცირესი დრო O წერტილიდან B წერტილში მოსახვედრად ნახ. 4.2.



ნახ. 4.2. ბრახისტოხრონის ამოცანის სქემა

იგივე ამოცანა შეიძლება ასეც ჩამოვყალიბოთ: როგორ დავაპროექტოთ სახლის სახურავი, რომ წვიმის წვეთები სახურავიდან ჩამოცურდნენ უმცირეს დროში ?

დავუშვათ, რომ მატერიალური წერტილის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია და უგულვებელვყოთ ხახუნის ძალა. დროის იმ მომენტისათვის, როცა OXY სიბრტყეში მოძრავი სხეულის კოორდინატა OY ღერძზე იქნება y , სხეული დაკარგავს mgy

სიდიდის პოტენციურ ენერგიას (სადაც m მასაა, g —თავისუფალი ვარდნის აჩქარება). შესაბამისად, მიიღებს კინეტიკურ ენერგიას, რომლის სიდიდეც იქნება: $\frac{mv^2}{2}$ სადაც v —წერტილის სიჩქარეა. მაშინ, მექანიკური ენერგიის შენახვის კანონიდან გამომდინარე, გვექნება განტოლება:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy, \quad (4.5)$$

მივიღებთ რომ:

$$v = \sqrt{2gy}. \quad (4.6)$$

ჩათვალოთ, რომ საძიებელი წირის განტოლებაა $y = y(x)$, სადაც $y(x)$ მოცემულ $[a; b]$ შუალედზე განსაზღვრული, გლუვი წირია, მაშინ მივიღებთ რომ

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}dx}{dt}, \quad (4.7)$$

სადაც ds —წირის რკალის სიგრძის დიფერენციალია, t — დრო. თუ გავითვალისწინებთ (4.6) ტოლობას, მაშინ გვექნება

$$\sqrt{2gy}dt = \sqrt{1+(y')^2}dx, \quad (4.8)$$

აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ:

$$dt = \frac{\sqrt{1+(y')^2}dx}{\sqrt{2gy}}. \quad (4.9)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ O წერტილიდან, სიძიმის ძალის გავლენით B წერტილამდე დაშვებას დასჭირდება დრო:

$$t = \int_0^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}dx}{\sqrt{2gy}}. \quad (4.10)$$

საწყისი და საბოლოო წერტილების კოორდინატები გვაძლევს სასაზღვრო პირობებს:

$$y(0) = 0, \quad y(b) = y_B. \quad (4.11)$$

მაშასადამე, უნდა ვიპოვოთ (4.11) სასაზღვრო პირობების დამაკმაყოფილებელი, ისეთი გლუვი $y(x)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც $t \rightarrow \min$.

ეს ამოცანა ამოხსნეს იაკობ ბერნულმა, ლოპიტალმა და ისააკ ნიუტონმა.

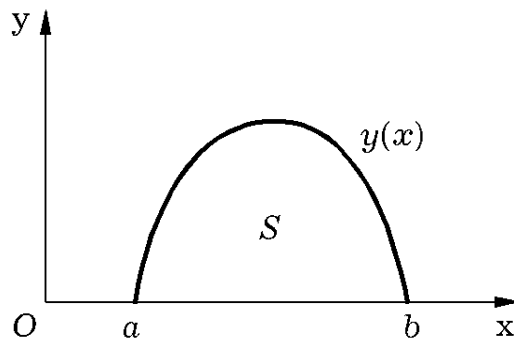
4.1.4. დიდონის იზოპერიმეტრული ამოცანა

ჩვენ წელთა აღრიცხვამდე IX საუკუნეში, ფინიკიელმა დედოფალმა დიდონმა, რომელიც გაურბოდა ქტირის წარჩინებულებს თანმხლებ პირებთან ერთად, მიმართა აფრიკის ჩრდილოეთით მდებარე, ხმელთაშუა ზღვის ნაპირებს. აქ მან გადაწყვიტა საბოლოოდ დასახლება.

დიდონმა ადგილობრივ მმართველს მიმართა თხოვნით, მიეცათ მისთვის დასახლებლად მიწის ნაკვეთი, რომელსაც შემოფარგლავდა მისი ხარის ტყავისაგან დამზადებული ქამარი. გულუბრყვილო მმართველი დათანხმდა. დიდონმა, ამის შემდეგ, ქამარი დაჭრა წვრილ ზოლებად და გადააბა ერთმანეთს. ამ ქამრით მან მიიზომა სანაპიროს საკმაოდ დიდი ტერიტორია და აქ დააარსა ქალაქი კართაგენი.

ამოცანა, რომელიც დასვა დიდონმა, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: ვიპოვოთ მოცემული L სიგრძის ისეთი წირი, რომელიც სიბრტყეზე შემოფარგლავს უდიდესი სიდიდის ფართობს.

მოვახდინოთ ამოცანის ფორმალიზება. ჩავთვალოთ რომ ზღვის ნაპირი სწორი ხაზია (წრფე). OXY მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა მოვგებოთ ისე, რომ OX ღერძი დაემთხვეს ზღვის ნაპირს. ჩავთვალოთ, რომ ზღვის სანაპიროს დიდონის ნაწილია $[a; b]$ მონაკვეთი, ხოლო მრუდწირული ნაწილი არის გლუვი $y = y(x)$ წირი ნახ. 4.3.



ნახ. 4.3. დიდონის ამოცანის სქემა

ცხადია, რომ

$$y(a) = y(b). \quad (4.12)$$

საზღვრის მრუდწირული ნაწილის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad (4.13)$$

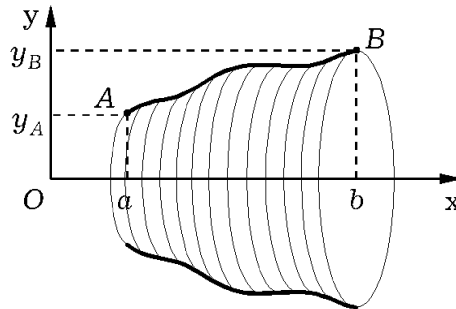
ხოლო მიწის შემოსაზღვრული ნაწილის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \int_a^b y(x) dx. \quad (4.14)$$

ამრიგად, გვაქვს ამოცანა: იპოვეთ ისეთი გლუვი $y(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (4.12) და (4.13) პირობებს (L ფიქსირებული რიცხვია) და (4.14) ინტეგრალს ანიჭებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

ასეთი ტიპის ამოცანებს ორიგინალურად ხსნიდნენ ჯერ კიდევ არისტოტელე და არქიმედი.

4.1.5. ამოცანა ბრუნვის ზედაპირის მინიმუმის შესახებ



ნახ. 4.4. ამოცანა ბრუნვითი ზედაპირის შესახებ

ვთქვათ, გვინდა XOY სიბრტყეში, ერთმანეთთან ისეთი წირით შევავერთოთ ორი $A(a; y_A)$ და $B(b; y_B)$ წერტილი, რომ მიღებული წირის OX ღერძის გარშემო ბრუნვის შედეგად მიღებული ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი იყოს მინიმალური ნახ. 4.4.

დავუშვათ, რომ საძიებელი $y = y(x)$ ფუნქცია არის გლუვი $[a; b]$ მონაკვეთზე. მაშინ გვექნება ამოცანა:

იპოვეთ ისეთი გლუვი $[a; b]$ მონაკვეთზე ფუნქცია, რომლის-თვისაც

$$y(a) = y_A, \quad y(b) = y_B, \quad (4.15)$$

და

$$S = 2\pi \int_a^b y ds = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx \rightarrow \min. \quad (4.16)$$

ამ ამოცანის განზოგადებას წარმოადგენს პლატოს პრობლემა, რომელიც ასე ჩამოყალიბდება:

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ჩაკეტილი ჟორდანის წირი. იპოვეთ, ამ წირზე გამავალი ისეთი ზედაპირი, რომლის მოცემული წირით შემოსაზღვრული ზედაპირის ფართობიც მინიმალურია.

ჩვენ განვიხილავთ, სხვადასხვა ტიპის ფუნქციონალების მაქსიმუმისა და მინიმუმის პოვნის მეთოდებს. მათ შორის, განვიხილავთ შემდეგი ტიპის ფუნქციონალებს, რომლებიც მოიცავს ყველა მოყვანილი კლასიკური ამოცანის ამოხსნის მეთოდს:

$$\int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (4.17)$$

$$\int_a^b F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx, \quad (4.18)$$

$$\int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x)) dx, \quad (4.19)$$

$$\iint F(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) dx dy. \quad (4.20)$$

4.2. ფუნქციონალის ვარიაცია

განვიხილოთ ფუნქციონალის მაგალითი:

$J[y] = \int_0^1 [y(x)]^2 dx$ და გამოვითვალოთ მისი ცვლილება ΔJ ანუ ვარიაცია, არგუმენტის ანუ $y(x)$ ფუნქციის მცირე δy ცვლილებისას (ფუნქციის ვარიაცია):

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int_0^1 (y + \delta y)^2 dx - \int_0^1 [y]^2 dx, \quad (4.21)$$

ამ ფორმულის გამარტივება გვაძლევს ფორმულას:

$$\Delta J = \int_0^1 (2y\delta y + (\delta y)^2) dx = 2 \int_0^1 y\delta y dx + \int_0^1 (\delta y)^2 dx. \quad (4.22)$$

(4.22) ფორმულა შედგება ორი ნაწილისაგან: პირველი წრფივი ნაწილია, $y(x)$ ფუნქციის δy ვარიაციის მიმართ და მას ფუნქციონალის δJ ვარიაცია ეწოდება, ხოლო მეორე შესაკრები, არაწრფივია δy ვარიაციის მიმართ და მაშასადამე, უფრო მცირეა (როცა δy მცირეა) წრფივ ნაწილთან შედარებით ანუ ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია იქნება:

$$\delta J = 2 \int_0^1 y\delta y dx. \quad (4.23)$$

ცხადია, რომ

$$\Delta J \approx \delta J. \quad (4.24)$$

საზოგადოდ, თუ $y(x)$ ფუნქციის მახლობელი ფუნქციებისათვის $J[y]$ ფუნქციონალი იღებს ექსტრემალურ მნიშვნელობას, მაშინ $\Delta J[y] < 0$ მაქსიმუმის შემთხვევაში და $\Delta J[y] > 0$ მინიმუმის შემთხვევაში. ფუნქციონალს, ფუნქციის მსგავსად შეიძლება

ქონდეს რამდენიმე მინიმუმი ან მაქსიმუმი. ორივე შემთხვევაში ΔJ ფუნქციონალი არ იცვლის ნიშანს. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\delta J = 0. \quad (4.25)$$

მართლაც (4.24) თანადობიდან, გვაქვს რომ ΔJ და δJ ერთნაირი ნიშნის სიდიდეებია. თუმცა, (4.23) ტოლობიდან გვაქვს რომ, ფუნქციის δy ვარიაციას შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი ნიშანი, მაშასადამე ფუნქციონალის δJ ვარიაციაც შეიცვლის ნიშანს, რაც ეწინააღმდეგება იმ ფაქტს, რომ ΔJ არ იცვლის ნიშანს.

მაშასადამე (4.25) პირობა, წარმოადგენს ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობას.

(4.25) პირობას, ფუნქციონალის სტაციონარულობის პირობასაც უწოდებენ. მრავალ ამოცანაში მნიშვნელოვანია, არა მარტო ექსტრემუმების პოვნა, არამედ, ფუნქციონალის სტაციონარული მნიშვნელობებიც.

P.S. თუ ფუნქციონალი შეესაბამება მექანიკური სისტემის პოტენციალურ ენერჯიას, მაშინ მისი სტაციონარული მნიშვნელობები გვაძლევს სისტემის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობებს, ხოლო, თუ გვაქვს პოტენციური ენერჯიის ფუნქციონალის მინიმუმი, მაშინ წონასწორობის მდგომარეობა მდგრადია.

ახლა, განვიხილოთ უმარტივესი ტიპის ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანა:

$$J[y] = \int_a^b F(x, y) dx, \quad (4.26)$$

სადაც $y = y(x)$. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $J[y]$ ფუნქციონალის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა, გამოვითვალოთ ΔJ :

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int_a^b F(x, y + \delta y) dx - \int_a^b F(x, y) dx. \quad (4.27)$$

თუ გამოვიყენებთ ტეილორის ფორმულას პირველი ინტეგრალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებისათვის, მივიღებთ რომ:

$$\Delta J = \int_a^b F'_y(x, y) \delta y dx + \int_a^b F''_{yy}(x, y) \frac{(\delta y)^2}{2!} dx + \dots \quad (4.28)$$

მივიღეთ რომ, $J[y]$ ფუნქციონალის ვარიაცია ანუ ΔJ ნაზრდის წრფივი ნაწილი ტოლია:

$$\delta J = \int_a^b F'_y(x, y) \delta y dx = 0. \quad (4.29)$$

აქედან გამომდინარე, რადგან δy ფუნქციის ნებისმიერი ნაზრდია, მივიღებთ რომ პირველი ვარიაციის ნულთან ტოლობა (ლაგრანჟის თეორემა) გვაძლევს დიფერენციალურ განტოლებას:

$$F'_y(x, y) = 0. \quad (4.30)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, ფუნქციის დიფერენციალსა და ფუნქციონალის ვარიაციას შორის სრული ანალოგიაა.

4.2.1. ანალოგია ფუნქციის დიფერენციალსა და ფუნქციონალის ვარიაციას შორის

ვარიაციული ამოცანების ამოხსნის მეთოდები ანუ ფუნქციონალების ექსტრემუმზე გამოკვლევის მეთოდები, მეტად წააგავს ფუნქციის მაქსიმუმზე და მინიმუმზე გამოკვლევის მეთოდებს. ამიტომ მიზანშეწონილია უფრო დეტალურად განვიხილოთ ეს ანალოგია.

<p>1. $z = f(x)$ ფუნქცია განიმარტება, როგორც ისეთი f ასახვა, რომელიც მოცემული X სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეუსაბამებს Z სიმრავლის ერთადერთ ელემენტს $f: X \rightarrow Z$</p>	<p>1. $J[y]$ ფუნქციონალი განიმარტება, როგორც ისეთი J ასახვა, რომელიც მოცემული M ფუნქციონალური სიმრავლის ყოველ $y(x)$ ფუნქციას შეუსაბამებს რაიმე ნამდვილ რიცხვს: $J: M \rightarrow \mathbb{R}$.</p>
<p>2. მოცემული $f(x)$ ფუნქციის არგუმენტის ნაზრდი Δx ეწოდება სხვაობას მის რომელიმე ორ მნიშვნელობას შორის: $\Delta x = x - x_1$. თუ x დამოუკიდებელი ცვლადია, მაშინ მისი დიფერენციალი ემთხვევა არგუმენტის ნაზრდს: $dx = \Delta x$</p>	<p>2. მოცემული $J[y]$ ფუნქციონალის $y(x)$ არგუმენტის ნაზრდი ანუ δy ვარიაცია ეწოდება M ფუნქციონალური სივრცის რომელიმე ორ ფუნქციას შორის სხვაობას: $\delta y = y - y_1$</p>
<p>3. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი, თუ x არგუმენტის მცირე ცვლილებას, შეესაბამება $f(x)$ ფუნქციის მცირე ცვლილება.</p>	<p>3. $J[y]$ ფუნქციონალს ეწოდება უწყვეტი, თუ $y(x)$ ფუნქციის მცირე δy ცვლილებას, შეესაბამება $J[y]$ ფუნქციონალის ΔJ მცირე ცვლილება.</p>
<p>4. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება წრფივი, თუ $f(ax + \beta y) = af(x) + \beta f(y)$, სადაც α და β ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. ერთი ცვლადის წრფივი ფუნქციის მაგალითია: $f(x) = kx$.</p>	<p>4. $J[y]$ ფუნქციონალს ეწოდება წრფივი, თუ ადგილი აქვს ტოლობას: $J[\alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha J[y_1] + \beta J[y_2]$, სადაც α და β ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. წრფივი ფუნქციონალის მაგალითია: $J[y] = \int_a^b (p(x)y + q(x)y') dx$.</p>
<p>5. თუ $f(x)$ ფუნქციის ნაზრდი: $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ</p>	<p>5. თუ $J[y]$ ფუნქციონალის ნაზრდი: $\Delta J = J[y + \Delta y] - J[y]$ შესაძლებელია, რომ წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:</p>

<p>$\Delta f = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x)\Delta x$ სახით, სადაც $A(x)$ არაა დამოკიდებული Δx-ზე და $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta(x, \Delta x) = 0$, მაშინ ფუნქციას უწოდებენ დიფერენცირებადს, და ფუნქციის ნაზრდის წარმოდგენის წრფივ ნაწილს – ფუნქციის დიფერენციალს: $\Delta f = A(x)\Delta x$, აქედან, თუ გავწოვთ Δx-ზე და გადავაღოთ ზღვარზე, როცა $\Delta x \rightarrow 0$, მივიღებთ, რომ $A(x) = f'(x)$ და მაშასადამე ფუნქციის დიფერენციალია: $dy = f'(x)dx$.</p>	<p>$\Delta J = L(y(x), \delta y) + \beta(y(x), \delta y) \max \delta y$, სადაც $L(y(x), \delta y)$ წრფივი ფუნქციონალია δy ვარიაციის მიმართ, ხოლო $\lim_{\max \delta y \rightarrow 0} \beta(y(x), \delta y) = 0$, მაშინ, ფუნქციონალის ნაზრდის წრფივ ნაწილს δy არგუმენტის (ფუნქციის ვარიაციის მიმართ), ფუნქციონალის ვარიაცია ეწოდება და აღინიშნება $\delta J_1[y, \delta y]$ სიმბოლოთი. მას ფრეშეს ძლიერ დიფერენციალს უწოდებენ.</p>
<p>6. მოცემული $f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი შეგვიძლია განვმარტოთ სხვანაირადაც, მაგალითად ტოლობით: $df = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x) _{\alpha=0}$</p>	<p>6. $J[y]$ ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია შეგვიძლია განვსაზღვროთ სხვანაირადაც: $\delta J[y, \delta y] = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha \delta y] _{\alpha=0}$ მას გატოს სუსტი დიფერენციალი ეწოდება.</p>
<p>თეორემა: თუ $J[y]$ ფუნქციონალი დიფერენცირებადია y წერტილში, მაშინ მისთვის გატოს დიფერენციალიც არსებობს და ის ემთხვევა ფრეშეს დიფერენციალს.</p>	
<p>7. თუ დიფერენცირებადი $f(x)$ ფუნქცია აღწევს მაქსიმუმს ან მინიმუმს განსაზღვრის არის რაიმე $x = x_0$ წერტილში, მაშინ ამ წერტილში ფუნქციის ფრეშეს დიფერენციალი აუცილებლად ნულის ტოლია: $df = 0$.</p>	<p>7. თუ $J[y]$ ფუნქციონალს გააჩნია ვარიაცია და ფუნქციონალი, მისი განსაზღვრის არის რაიმე $y = y_0$ წერტილში აღწევს მაქსიმუმს ან მინიმუმს, მაშინ ამ წერტილში მისი გატოს დიფერენციალი აუცილებლად ნულის ტოლია: $\delta J[y, \delta y] = 0$.</p>

ვაჩვენოთ, რომ დიფერენცირებადი ფუნქციისათვის, დიფერენციალის ორივე 5. და 6. განსაზღვრება ეკვივალენტურია. მართლაც,

$$df = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x)|_{\alpha=0} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}, \tag{4.31}$$

სადაც

$$u = x + \alpha \Delta x, \text{ მაშინ } \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\alpha=0} = f'(x) \text{ და } \left. \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \Delta x, \quad (4.32)$$

მაშინ, ცხადია რომ $df = f'(x)\Delta x$, რაც ემთხვევა დიფერენციალის ცნობილ ფორმულას: $df = f'(x)dx$.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი, ფუნქციონალის ნაზრდისა და ვარიაციის საპოვნელად:

მაგალითი 1: იპოვეთ $J[y(x)] = \int_a^b y(x)dx$ ფუნქციონალის ΔJ ნაზრდი და δJ ვარიაცია.

ამოხსნა: ა) $\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int_a^b [y(x) + \delta y]dx - \int_a^b y(x)dx$, ცხადია, რომ მაშინ $\Delta J = \int_a^b \delta y(x)dx$, რაც წარმოადგენს ფუნქციონალის წრფივ ნაწილს, მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ფუნქციონალის ნაზრდი ემთხვევა ფრეშეს დიფერენციალს ანუ ფუნქციონალის δJ ვარიაციას: $\delta J = \int_a^b \delta y(x)dx$.

ბ) ამოვხსნათ ეს ამოცანა მეორე მეთოდით ანუ ვიპოვოთ გატოს დიფერენციალი:

$$\delta J[y, \delta y] = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha \delta y] \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b [y(x) + \alpha \delta y]dx \right|_{\alpha=0} = \int_a^b \delta y dx.$$

როგორც ვხედავთ, ორივე მეთოდი ერთნაირ შედეგს იძლევა.

მაგალითი 2: იპოვეთ $J[y(x)] = \int_a^b y^2(x)dx$ ფუნქციონალის ΔJ ნაზრდი და δJ ვარიაცია.

ამოხსნა: ა) $\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int_a^b [y(x) + \delta y]^2 dx - \int_a^b y(x)dx$, ცხადია, რომ მაშინ $\Delta J = 2 \int_a^b y(x)\delta y(x)dx + \int_a^b (\delta y(x))^2 dx$. ამ ნაზრდის წრფივი ნაწილი $\delta y(x)$ -ის მიმართ, წარმოადგენს ფრეშეს დიფერენციალს, რომელიც ამ შემთხვევაში, მოცემული ფუნქციონალის ვარიაციასაც წარმოადგენს ანუ

$$\delta J = 2 \int_a^b y(x)\delta y(x)dx.$$

ბ) ახლა, ვიპოვოთ ფუნქციონალის ვარიაცია ამ ფუნქციის გატოს დიფერენციალის მეშვეობით:

$$\delta J[y, \delta y] = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha \delta y] \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b [y(x) + \alpha \delta y]^2 dx \right|_{\alpha=0}, \text{ ცხადია რომ}$$

$\delta J[y, \delta y] = 2 \int_a^b y(x) \delta y dx$, რაც ემთხვევა ფრეშეს დიფერენციალსაც. ეს ბუნებრივია, რადგან ორივე მაგალითში, განხილული ფუნქციონალი დიფერენცირებადია.

მაგალითი 3: იპოვეთ $J[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))dx$ ფუნქციონალის ΔJ ნაზრდი და პირველი δJ ვარიაცია.

ამოხსნა:

$$a) \Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int_a^b [L(x, y + \delta y, y' + \delta y') - L(x, y, y')] dx.$$

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია გავშალოთ ტეილორის ფორმულით:

$$L(x, y + \delta y, y' + \delta y') - L(x, y, y') = \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' + R(x, y, y', \delta y, \delta y'),$$

სადაც $R(x, y, y', \delta y, \delta y')$ ტეილორის ფორმულის ნაშთია. თუ, ამ გაშლას შევიტანთ ფუნქციონალის ნაზრდის ფორმულაში, მივიღებთ, რომ

$$\Delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' \right) dx + \int_a^b R(x, y, y', \delta y, \delta y') dx. \text{ ცხადია, რომ ამ წარმოდგენის წრფივი ნაწილი იქნება პირველი ვარიაცია ანუ ფრეშეს დიფერენციალი: } \delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' \right) dx.$$

ბ) ახლა, გამოვითვალოთ პირველი ვარიაცია, გატოს დიფერენციალის ფორმულიდან გამომდინარე:

$$\delta J[y, \delta y, \delta y'] = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y'] \Big|_{\alpha=0}. \text{ ცხადია რომ}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y'] = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} L(x, y(x) + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y') dx$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L(x, y(x) + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y') = \frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \text{ სადაც } u = y(x) + \alpha \delta y \text{ და } v = y' + \alpha \delta y'. \text{ მაშინ } \lim_{\alpha \rightarrow 0} u = y(x) \text{ და } \lim_{\alpha \rightarrow 0} v = y' \text{ ე.ი.}$$

$$\delta J = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} L(x, y(x) + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y') dx = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' \right) dx.$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაშიც ორივე მიდგომა ერთნაირად ეფექტურია.

ამ ზოგადი ფორმულიდან გამომდინარე, ამოვხსნათ შემდეგი

მაგალითი 4. იპოვეთ $J[y] = \int_{-1}^1 (y'e^y + xy^2) dx$ ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია.

ამოხსნა: წინა ამოცანის ფორმულიდან გამომდინარე, რადგან ამ შემთხვევაში, $L(x, y(x), y'(x)) = y'e^y + xy^2$ გვექნება, რომ

$$\delta J = \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' \right) dx = \int_{-1}^1 [(y'e^y + 2xy)\delta y + e^y \delta y'] dx.$$

მაგალითი 5. იპოვეთ $J[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx$ ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია.

ამოხსნა: პირველი ვარიაციის საპოვნელად, გამოვიყენოთ გატოს დიფერენციალის ფორმულა:

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y', \dots, y^{(n)} + \alpha \delta y^{(n)}] \Big|_{\alpha=0}. \text{ ცხადია, რომ მაშინ ამოცანა 3-ის ანალოგიურად გვექნება ფორმულა:}$$

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' + \dots + \frac{\partial L}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right) dx.$$

4.2.2. ფუნქციონალის მეორე ვარიაცია

ბანახის სივრცის რომელიმე ორ ფუნქციაზე დამოკიდებულ $J[x(t), y(t)]$ ფუნქციონალს ეწოდება ორად წრფივი, თუ ადგილი აქვს თანადობებს:

$$J[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t), y(t)] = \alpha_1 J[x_1(t), y(t)] + \alpha_2 J[x_2(t), y(t)],$$

$$J[x(t), \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)] = \alpha_1 J[x(t), y_1(t)] + \alpha_2 J[x(t), y_2(t)].$$

ორად წრფივ ფუნქციონალში, თუ დავუშვებთ რომ $y = x$, მაშინ მიღებულ $J[x, x]$ ფუნქციონალს კვადრატული ფუნქციონალი ეწოდება.

სასრულ განზომილებიან სივრცეში განსაზღვრულ, ორად წრფივ კვადრატულ ფუნქციონალს ორად წრფივი ფორმა ეწოდება.

$J[x, x]$ კვადრატულ ფუნქციონალს ეწოდება დადებითად განსაზღვრული, თუ $J[x, x] > 0$ ნებისმიერი არანულოვანი $x(t)$ ფუნქციისათვის.

მაგალითები:

1) $J[x(t), y(t)] = \int_a^b A(t)x(t)y(t)dt$ ფუნქციონალი, სადაც $A(t)$ ცნობილი უწყვეტი ფუნქციაა, წარმოადგენს ორად წრფივ ფუნქციას, ხოლო

2) $J[x(t), x(t)] = \int_a^b A(t)x^2(t)dt$ —კვადრატული ფუნქციონალია $C_0[a, b]$ სივრცეში და თუ დამატებით $A(t) > 0$ ნებისმიერი $t \in [a; b]$ ცვლადისათვის, მაშინ ეს კვადრატული ფუნქციონალი იქნება დადებითად განსაზღვრული;

3) $J[x, x] = \int_a^b [A(t)x^2(t) + B(t)x(t)x'(t) + C(t)x'^2(t)]dt$ არის გლუვი ფუნქციების $C^1[a, b]$ სივრცეში განსაზღვრული კვადრატული ფუნქციონალი.

განსაზღვრება: ვთქვათ $J[y]$ ბანახის სივრცეში განსაზღვრული ფუნქციონალია. ვიტყვი, რომ ფუნქციონალს აქვს მეორე ვარიაცია, თუ მისი ნაზრდი $\Delta J = J[y + \delta y] - J[y]$ ტეილორის ფორმულით, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Delta J = \delta y \cdot \delta J[y] + \frac{(\delta y)^2}{2!} \cdot \delta^2 J[y] + \frac{(\delta y)^3}{3!} \cdot \delta^3 J[y] + \dots \text{ ანუ}$$

$$\Delta J = L_1[\delta y] + \frac{1}{2}L_2[\delta y] + \beta \|\delta y\|. \quad (3.33)$$

სადაც $\delta J = L_1[\delta y]$ პირველი ვარიაციაა, ხოლო $\delta^2 J = L_2[\delta y]$ —მეორე ვარიაცია და $\lim_{\|\delta y\| \rightarrow 0} \beta = 0$.

მაგალითი:

მოცემულია ფუნქციონალი $J[y] = \int_0^1 (xy^2 + (y')^3)dx$, რომელიც განსაზღვრულია $C^1[0; 1]$ ($y(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, პირველი რიგის

წარმოებულთან ერთად) სივრცეში. ვიპოვოთ მისი ნაზრდი, პირველი ვარიაცია და მეორე ვარიაცია.

ამოხსნა: განვიხილოთ ფუნქციონალის ნაზრდი:

$$\Delta J = J[y + \Delta y] - J[y] = \int_0^1 [x(y + \delta y)^2 + (y' + \delta y')^3 - xy^2 - (y')^3] dx,$$

$$\Delta J = 2 \int_0^1 (xy\delta y + 3(y')^2) dx + 2 \int_0^1 [x(\delta y)^2 + 3y'(\delta y')^2] dx + \int_0^1 (\delta y')^3 dx$$

მაშასადამე, მოცემული ფუნქციონალის პირველი ვარიაციაა:

$$\delta J = 2 \int_0^1 (xy\delta y + 3(y')^2) dx,$$

ხოლო მეორე ვარიაცია იქნება:

$$\delta^2 J = 2 \int_0^1 [x(\delta y)^2 + 3y'(\delta y')^2] dx.$$

მოცემული $J[y]$ ფუნქციონალის მეორე ვარიაციის საპოვნელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ გატოს მეორე დიფერენციალის ცნებაც. მართლაც, შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\Phi(\alpha) = J[y + \alpha\delta y]$, მაშინ ფუნქციონალის მეორე ვარიაცია იქნება:

$$\delta^2 J = \left. \frac{d^2 \Phi(\alpha)}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0}. \quad (4.34)$$

4.3. ვარიაციული ამოცანები ფიქსირებული საზღვრებით

განვიხილოთ ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანა:

შევისწავლოთ ექსტრემუმზე შემდეგი ფუნქციონალი:

$$J[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (4.35)$$

რომელიც განსაზღვრულია ისეთ $y(x) \in C^1[a; b]$ ფუნქციონალურ სიმრავლეში, რომლის ელემენტებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2. \quad (4.36)$$

როგორც უკვე ვიცით: ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა პირველი ვარიაციის ნულთან ტოლობა ანუ ჩვენ შემთხვევაში გვექნება:

$$\delta J = \delta J[y, \delta y, \delta y'] = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y'] \right|_{\alpha=0} = 0. \quad \text{ცხადია რომ}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y'] = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} L(x, y(x) + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y') dx$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L(x, y(x) + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y') = \frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \quad \text{სადაც}$$

$$u = y(x) + \alpha\delta y \quad \text{და} \quad v = y' + \alpha\delta y'. \quad \text{მაშინ} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} u = y(x) \quad \text{და}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} v = y' \quad \text{ი.ო.}$$

$$\delta J = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} L(x, y(x) + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y') dx = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' \right) dx.$$

მივიღეთ, რომ ამ ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობას აქვს შემდეგი სახე:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0. \quad (4.37)$$

ამ პირობიდან შესაძლებელია გადავიდეთ შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებაზე, თუმცა, ამ ამოცანის გადასაწყვეტად დაგვჭირდება ორი დამხმარე თეორემა ანუ ლემა:

1. ლაგრანჟის ლემა: თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a; b]$ სეგმენტზე და ნებისმიერი $\eta(x) \in C^\infty[a; b]$ ფუნქციისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $\eta(a) = \eta(b) = 0$ პირობებს, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0, \quad (4.38)$$

მაშინ $f(x) \equiv 0$.

დამტკიცება: დავუშვათ, რომ რომელიღაც $x_0 \in [a; b]$ წერტილში $f(x_0) \neq 0$. ზოგადობის შეუზღუდავად, ვთქვათ $f(x_0) > 0$, მაშინ ამ ფუნქციის უწყვეტობის გამო, მოიძებნება მისი შემცველი ისეთი $[c; d] \subset [a; b]$, რომ ამ შუალედში $f(x) > 0$. ადვილი შესამოწმებელია რომ

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

ფუნქცია წარმოებადია ნებისმიერ რიგამდე ჩათვლით, ამიტომ

$$\eta(x) = \varphi(x - c)\varphi(d - x), \quad (4.40)$$

ფუნქცია, აგრეთვე წარმოებადია ნებისმიერ რიგამდე ჩათვლით და ნულისაგან განსხვავებულია მხოლოდ $(c; d)$ ინტერვალში. მაშასადამე,

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = \int_c^d f(x)\eta(x)dx > 0, \quad (4.41)$$

რადგან ინტეგრალქვეშა გამოსახულება უწყვეტია და დადებითი. ასე, რომ იმის დაშვება რომ $f(x)$ ფუნქცია არ უდრის ნულს რომელიმე წერტილში, არღვევს ლემის დაშვების პირობებს. რაც იმას ნიშნავს, რომ თუ ადგილი აქვს ლემის პირობებს, მაშინ

$$f(x) \equiv 0 \text{ რ.დ.გ.}$$

P.S. ლაგრანჟის დამტკიცებული ლემა ადვილად ზოგადდება მრავალი ცვლადის ფუნქციებზეც. მაგალითად, ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქციის შემთხვევაში: თუ $f(x, y)$ უწყვეტია შემოსაზღვრულ $G \in \mathbb{R}^2$ სიმრავლეში და ნებისმიერი $\eta(x, y) \in C^\infty(G)$ ფუნქციისათვის, რომელიც უწყვეტია \bar{G} ჩაკეტილ სიმრავლეზე და ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს, ამ არის $\partial \bar{G}$ საზღვარზე, ადვილი აქვს ტოლობას:

$$\iint f(x, y)\eta(x, y)dxdy = 0, \quad (4.42)$$

მაშინ $f(x, y) = 0$ ამ G სიმრავლეზე.

ეს თეორემა ანალოგიურად მტკიცდება, მხოლოდ საცდელ ფუნქციად უნდა განვიხილოთ $\varphi(r^2 - x^2 - y^2)$ ფუნქცია, რომელიც ნულის ტოლია $r^2 = x^2 + y^2$ წრის გარეთ.

2. დიუბუა-რაიმონის ლემა: ვთქვათ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები უწყვეტია $[a; b]$ შუალედში და ნებისმიერი $\eta(x) \in C^\infty[a; b]$ ფუნქციონისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $\eta(a) = \eta(b) = 0$ პირობებს, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_a^b (f(x)\eta'(x) + g(x)\eta(x))dx = 0, \quad (4.43)$$

მაშინ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია $[a; b]$ შუალედში და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$f'(x) - g(x) = 0. \quad (4.44)$$

ამ თეორემის დამტკიცება საკმაოდ შრომატევადია. მითუმეტეს, რომ ჩვენი ამოცანაა ვისწავლოთ ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანების ამოხსნა და არა რთული თეორემების დამტკიცება. ამიტომ გადავიდეთ აღნიშნული თეორემის გამოყენებაზე.

ჩვენ უკვე გვქონდა ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა (4.37):

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0. \quad (4.44)$$

ამ ტოლობისათვის გამოვიყენოთ დიუბუა-რაიმონის თეორემა.

ტოლობა (4.44) ძალაშია ნებისმიერი დასაშვები $\delta y = \eta(x)$ ვარიაციისათვის, სადაც $\delta y \in C^1[a; b]$ და $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. ამ შემთხვევაში, $f(x) = \frac{\partial L}{\partial y'}$ და $g(x) = \frac{\partial L}{\partial y}$. მაშასადამე, დიუბუა-რაიმონის თეორემის ძალით გვექნება ტოლობა:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0. \quad (4.45)$$

ამ ტოლობას ეილერის განტოლება ეწოდება (ეს განტოლება პირველად გამოქვეყნდა 1744 წელს). ამ განტოლების გლუვ ამონახსნებს (4.35) ფუნქციონალის ექსტრემალები ეწოდებათ.

ამრიგად, ფუნქციონალის ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ მის ექსტრემალებს შორის.

ფუნქციის სრული წარმოებულის ფორმულის გამოყენებით, განტოლება (4.45) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$y''(x)L''_{y'y'} + y'(x)L''_{yy'} + L''_{xy'} - L'_y = 0, \quad (4.46)$$

მეორე რიგის დიფერენციალური (4.46) განტოლების ზოგადი ამონახსნი, დამოკიდებულია ორ ნებისმიერ მუდმივზე, რომელთა შესარჩევად უნდა გამოვიყენოთ სასაზღვრო პირობები:

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2. \quad (4.47)$$

თუმცა, ამ ამოცანას ყოველთვის როდი აქვს ამონახსნი.

P.S. აქ ისეთივე სიტუაცია გვაქვს, როგორც ერთი ცვლადის დიფერენცირებადი ფუნქციის ექსტრემუმების პოვნისას, როცა ექსტრემუმის წერტილებს ვეძებთ მის სტაციონარულ წერტილებს შორის.

4.3.1. ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანების ამოხსნის მაგალითები

ამოცანა 1. რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმი ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_1^2 ((y')^2 - 2xy) dx, \quad (4.48)$$

თუ $y(1) = 0$ და $y(2) = -1$.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში, $L(x, y, y') = (y')^2 - 2xy$ ამიღომ ეილერის განტოლებას ექნება სახე: $y'' + x = 0$. ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია: $y = -\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$. მ მუდმივებს ვპოულობთ შესაბამისი სასაზღვრო პირობებიდან:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{6} \\ 2C_1 + C_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{6} \\ C_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ}$$

$$y = \frac{x}{6} - \frac{x^3}{6}.$$

განვიხილოთ ამ ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა **Mathcad** პროგრამის ბაზაზე.

ამისათვის (4.48) ფორმულაში შემავალ ინტეგრანტში, საძიებელი y ფუნქცია წარმოვადგინოთ მრავალწევრის სახით ანუ ვეძებთ შემდეგი სახით: $y = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$, მაშინ $J[y]$ ფუნქციონალი გადაიქცევა მრავალი ცვლადის $J(\alpha)$ ფუნქციად ანუ გვექნება შემდეგი სახის მიახლოების ფუნქცია:

$$J(\alpha) = \int_1^2 \left(\left(\sum_{i=1}^n i \alpha_i x^{i-1} \right)^2 - 2x \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i \right) dx$$

მაშინ, შესაბამის **Mathcad** პროგრამას ექნება სახე:

$n := 3$

$$J(\alpha) := \int_1^2 \left[\left[\sum_{i=1}^n (i \cdot \alpha_i \cdot x^{i-1}) \right]^2 - 2 \cdot x \cdot \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cdot x^i) \right] dx$$

$j := 0..3$

$$\alpha_j := 1$$

Given

$$\sum_{i=0}^n (\alpha_i \cdot 1^i) = 0 \quad \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cdot 2^i) = -1$$

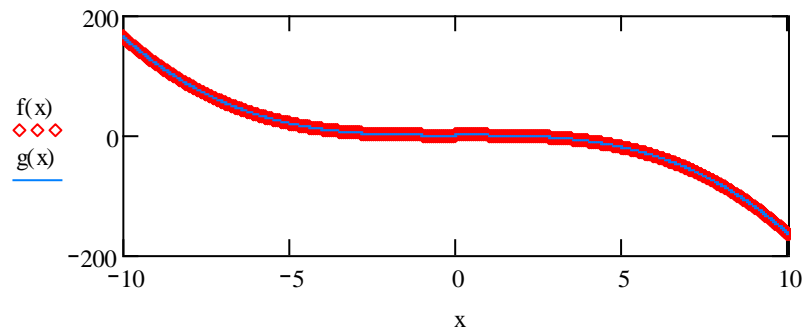
$$S := \text{Minimize}(J, \alpha)$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.167 \\ 0 \\ -0.167 \end{pmatrix}$$

$$\alpha := S$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.167 \\ 0 \\ -0.167 \end{pmatrix}$$

$$f(x) := \sum_{i=0}^n (\alpha_i x^i) \quad g(x) := \frac{x}{6} - \frac{x^3}{6}$$



როგორც ვხედავთ, მიახლოებითი ამონახსნი კარგად უახლოვდება ზუსტ ამონახსნს.

ანალოგიურად ამოიხსნება ვარიაციული აღრიცხვის ყველა უმარტივესი ამოცანა.

ამოცანა 2. რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((y')^2 - y^2) dx, \quad (4.49)$$

თუ $y(0) = 0$ და $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში, $L(x, y, y') = (y')^2 - y^2$ ამიტომ ეილერის განტოლებას ექნება სახე: $y'' + y = 0$. ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. თუ გამოვიყენებთ სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ რომ: $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ექსტრემალი იქნება: $y = \sin x$.

ამოცანა 3. რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_0^1 ((y')^2 + 12xy) dx, \quad (4.50)$$

თუ $y(0) = 0$ და $y(1) = 1$.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში, $L(x, y, y') = (y')^2 + 12xy$ ამიტომ ეილერის განტოლებას ექნება სახე: $y'' - 6x = 0$. ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია: $y = x^3 + C_1x + C_2$. თუ გამოვიყენებთ სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ რომ: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ექსტრემალი იქნება: $y = x^3$.

ამოცანა 3. რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_1^3 (3x - y)y dx, \quad (4.51)$$

თუ $y(1) = 1$ და $y(3) = 4.5$.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში, $L(x, y, y') = (3x - y)y$, ამიტომ ეილერის განტოლებას ექნება სახე: $3x - 2y = 0$. აქედან გამომდინარე მივიღებთ, რომ $y = 1.5x$. რადგან ეს ამონახსნი არ აკმაყოფილებს $y(1) = 1$ სასაზღვრო პირობას, ამ ვარიაციულ ამოცანას არა აქვს ამონახსნი.

ამოცანა 4. რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_0^{2\pi} ((y')^2 - y^2) dx, \quad (4.52)$$

თუ $y(0) = 1$ და $y(2\pi) = 1$.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში, $L(x, y, y') = (y')^2 - y^2$, ამიტომ ეილერის განტოლებას ექნება სახე: $y'' + y = 0$. ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. თუ გამოვიყენებთ სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ რომ: $y = \cos x + C \sin x$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. მაშასადამე, ამ ვარიაციულ ამოცანას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი.

ამოცანა 5. რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_1^2 ((y')^2 + 2yy' + y^2) dx, \quad (4.53)$$

თუ $y(1) = 1$ და $y(2) = 0$.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში, $L(x, y, y') = (y')^2 + 2yy' + y^2$, ამიტომ ეილერის განტოლებას ექნება სახე: $y'' - y = 0$. მისი ზოგადი ამონახსნია: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. მუდმივი კოეფიციენტების საპოვნელად ვისარგებლოთ სასაზღვრო პირობებით, მაშინ გვექნება

სისტემა:
$$\begin{cases} C_1 e + \frac{C_2}{e} = 1 \\ \frac{C_1}{e} + C_2 e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{e^3}{1-e^4} \\ C_2 = \frac{e}{1-e^4} \end{cases}; \quad \text{მაშასადამე გვექნება}$$

ამონახსნი: $y = -\frac{e^3}{1-e^4} e^x + \frac{e}{1-e^4} e^{-x}.$

P.S. უმეტეს წილად, ეილერის განტოლება გვაძლევს ზუსტ პასუხს ფუნქციონალის ექსტრემუმის შესახებ. თუ, ფუნქციონალის შინაარსიდან გამოდინარეობს რომ, ამოცანას აქვს ამონახსნი და ეილერის განტოლებას აქვს ერთადერთი ისეთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს, მაშინ ეს ექსტრემალი იქნება ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანის ამონახსნი.

ამოცანა 6. რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმი ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_0^2 (x(y')^3 - 3y(y')^2) dx, \quad (4.54)$$

თუ $y(0) = 4$ და $y(2) = 6$.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში, $L(x, y, y') = x(y')^3 - 3y(y')^2$, ამიტომ ეილერის $y''(x)L''_{y'y'} + y'(x)L''_{yy'} + L''_{xy'} - L'_y = 0$ განტოლებას ექნება სახე: $y''(xy' - y) = 0$. ეს დიფერენციალური განტოლება გვაძლევს ორ განტოლებას: $y'' = 0$ და $xy' - y = 0$. პირველი მათგანის ზოგადი ამონახსნია: $y = C_1 x + C_2$, ხოლო მეორესი – $y = Cx$. მეორე ამონახსნი არის პირველის ქვესიმრავლე, ამიტომ მოცემული ამოცანის ყველა ექსტრემალი მოიცემა მხოლოდ პირველი ზოგადი $y = C_1 x + C_2$ ამონახსნით. მუდმივებს ვპოულობთ სასაზღვრო პირობებიდან.

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 = 4 \\ C_1 \cdot 2 + C_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 4 \\ C_1 = 1 \end{cases};$$

მაშასადამე, მოცემული ამოცანის ამონახსნი იქნება $y = x + 4$ ფუნქცია.

თუ $y(x)$ ფუნქცია ორჯერ დიფერენცირებადია და $L''_{y'y'} \neq 0$, მაშინ ეილერის განტოლებისათვის კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ხოლო, თუ $L''_{y'y'} = 0$ (ინტეგრანტი გადაგვარებულია), მაშინ ეილერის განტოლება ან პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებაა, ან – ალგებრული განტოლება.

დაისმის კითხვა: რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს $L(x, y, y')$ ფუნქცია, რომ $y(x)$ ამონახსნი იყოს ორჯერ დიფერენცირებადი ?

ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი თეორემა:

ვთქვათ $y(x)$ არის ეილერის განტოლების ამონახსნი. თუ, $L(x, y, y')$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები მეორე რიგამდე ჩათვლით, მაშინ XOY სიბრტყის ყველა წერტილში, სადაც $L''_{y'y'} \neq 0$, ექსტრემალი $y(x)$ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადია.

ეილერის განტოლება იშვიათად იხსნება კვადრატურებში, რადგან არსებობს ისეთი ინტეგრალები, რომლებიც არ გამოისახება ელემენტარული ფუნქციებით. ასეთ შემთხვევაში, იყენებენ მიახლოებით მეთოდებს.

4.3.2. ეილერის განტოლების კერძო შემთხვევები

თუ მოცემული გვაქვს ფუნქციონალი: $J[y] = \int_a^b L(\cdot) dx$ მაშინ, ინტეგრალქვეშა $L(\cdot)$ ფუნქციას ინტეგრანტს უწოდებენ.

განვიხილოთ ეილერის განტოლების სხვადასხვა ტიპები, ინტეგრანტის სახის მიხედვით.

1. ინტეგრანტი არაა დამოკიდებული y' წარმოებულზე. ასეთ შემთხვევაში $J[y] = \int_a^b L(x, y) dx$, მაშინ $\frac{\partial L}{\partial y'} \equiv 0$. აქედან გამომდინარე, ეილერის განტოლებას ექნება სახე: $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ ანუ ალგებრული განტოლებაა $y(x)$ ფუნქციის მიმართ. მიღებული ექსტრემალები შეიძლება არც კი აკმაყოფილებდნენ სასაზღვრო პირობებს.

მაგალითი: იპოვეთ $J[y] = \int_a^b y^3 dx$ ფუნქციონალის ექსტრემალები, თუ $y(a) = y_1$ და $y(b) = y_2$.

ამოხსნა: ეილერის განტოლებას აქვს სახე: $3y^2 = 0$. ამ განტოლებას აქვს ერთადერთი $y \equiv 0$ ამონახსნი. აქედან გამომდინარე, თუ სასაზღვრო პირობებიდან, ერთი მაინც y_1 და y_2 რიცხვებიდან, განსხვავებულია ნულისგან, მაშინ ვარიაციულ ამოცანას არა აქვს ამონახსნი.

2. ინტეგრანტი წრფივადაა დამოკიდებული y' წარმოებულზე. ამ ტიპის ფუნქციონალებისათვის $J[y] = \int_a^b L(x, y, y') dx$ ინტეგრანტს აქვს სახე:

$$L(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y)y'. \quad (4.55)$$

მაშინ ცხადია, რომ $L''_{y'y'} \equiv 0$. ნათელია, რომ ეს შემთხვევა მოიცავს პირველ შემთხვევასაც. ასეთ ფუნქციონალებს, გადაგვარებული უწოდებენ. მაშინ ეილერის განტოლებას ექნება სახე:

$$Q'_x + Q'_y y' - P'_y - Q'_y y' = 0 \text{ ანუ } Q'_x - P'_y = 0. \quad (4.56)$$

ეს განტოლება, როგორც წინა შემთხვევაში, ალგებრულია. ამიტომ, მისმა ამონახსნმა შეიძლება ვერ დააკმაყოფილოს

სასაზღვრო პირობები და ასეთ შემთხვევაში, ვარიაციულ ამოცანას არ ექნება ამონახსნი.

P.S. თუ $Pdx + Qdy$ წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს, მაშინ ეილერის $Q'_x - P'_y = 0$ განტოლება იგივობას წარმოადგენს და მაშასადამე, ნებისმიერი $y(x) \in C^1[a; b]$ ფუნქცია იქნება მისი ამონახსნი ანუ ექსტრემალი.

3. ინტეგრანტი დამოკიდებულია მხოლოდ y' წარმოებულზე. ამ შემთხვევაში, ფუნქციონალს აქვს სახე: $J[y] = \int_a^b L(y')dx$, მაშინ ცნობილი $y''(x)L''_{y'y'} + y'(x)L''_{yy'} + L''_{xy'} - L'_y = 0$ ეილერის განტოლება მიიღებს სახეს: $y'' = 0$. მის ზოგად ამონახსნს აქვს წრფივი ფუნქციის სახე ნებისმიერი ორი მუდმივით: $y = C_1x + C_2$.

მაგალითი: იპოვეთ $J[y] = \int_a^b (y' - (y')^3)dx$ ფუნქციონალის ექსტრემალეები, თუ $y(a) = y_1$ და $y(b) = y_2$.

ამოხსნა: ეილერის განტოლებას აქვს სახე: $y'' = 0$. მის ზოგად ამონახსნს აქვს წრფივი ფუნქციის სახე ნებისმიერი ორი მუდმივით: $y = C_1x + C_2$. ამ მუდმივების განსაზღვრა წარმოებს სასაზღვრო პირობებიდან და გვექნება ექსტრემალი:

$$y(x) = \frac{y_2 - y_1}{b - a}(x - a) + y_1.$$

განვიხილოთ მეორე მაგალითი:

იპოვეთ მოცემული ფუნქციონალის ექსტრემალეები:

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}, \quad (4.57)$$

თუ $y(a) = A$ და $y(b) = B$.

ამოხსნა: ეს ფუნქციონალი განსაზღვრავს წირის სიგრძეს $(a; A)$ და $(b; B)$ წერტილებს შორის. გეომეტრიაულად ესაა ამოცანა ორ წერტილს შორის უმოკლესი მანძილის პოვნაზე. ეილერის განტოლებას აქვს სახე: $y'' = 0$, ზოგადი ამონახსნია: $y = C_1x + C_2$. სასაზღვრო პირობებიდან ვპოულობთ ექსტრემალს (წრფის მონაკვეთს) ამ წერტილებს შორის:

$$y = \frac{B - A}{b - a}(x - a) + A.$$

4. ინტეგრანტი არაა დამოკიდებული y ფუნქციაზე. ამ შემთხვევაში ინტეგრანტს აქვს სახე: $L(x, y')$, ხოლო $y''(x)L''_{y'y'} + y'(x)L''_{yy'} + L''_{xy'} - L'_y = 0$ ეილერის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$y''(x)L''_{y'y'} + L''_{xy'} = 0. \quad (4.58)$$

ეს შემთხვევა, თავის თავში მოიცავს წინა შემთხვევას.

მაგალითი: იპოვეთ $J[y] = \int_a^b ((y')^2 + 2xy')dx$ ფუნქციონალის ექსტრემალები, თუ $y(a) = y_1$ და $y(b) = y_2$.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $L(x, y') = (y')^2 + 2xy'$. შესაბამისად, ეილერის განტოლება მიიღებს სახეს: $y'' + 1 = 0$ ანუ

$y = -\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$. ნებისმიერი C_1 და C_2 მუდმივები, ცალსახად განისაზღვრებიან სასაზღვრო პირობებიდან, ყველა შემთხვევაში.

5. ინტეგრანტი არაა დამოკიდებული x არგუმენტზე. ასეთ შემთხვევაში, ინტეგრანტს აქვს სახე: $L(y, y')$, ხოლო ეილერის განტოლება, ამ შემთხვევაში, გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$y''(x)L''_{y'y'} + y'(x)L''_{yy'} - L'_y = 0. \quad (4.59)$$

თუ გავამრავლებთ ამ განტოლებას y' წარმოებულზე, მივიღებთ რომ (4.57) შეგვიძლია გადავწეროთ (4.59) ფორმით ანუ

$$\frac{d}{dx}(y'L'_{y'} - L) = 0,$$

მაშინ მივიღებთ, რომ შეგვიძლია ვიპოვოთ პირველი ინტეგრალი:

$$y'L'_{y'} - L = C_1. \quad (4.60)$$

მაგალითი: იპოვეთ $J[y] = \int_a^b ((y')^2 + yy')dx$ ფუნქციონალის ექსტრემალები.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $L(y, y') = (y')^2 + yy'$. შესაბამისად, ეილერის (4.57) განტოლება მიიღებს სახეს:

$2y'' + y' - y' = 0$ ანუ $y'' = 0$. მაშინ ზოგადი ამონახსნი დამოკიდებულია ორ მუდმივზე: $y = C_1x + C_2$.

მაგალითი: იოჰან ბერნულის ამოცანა ბრახისტოქრონას შესახებ.

იპოვეთ $J[y] = \int_0^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx \rightarrow \min$, თუ $y(0) = 0$ და $y(b) = y_B$.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $L(y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$, მაშინ ეილერის

$y''(x)L''_{y'y'} + y'(x)L''_{yy'} - L'_y = 0$ განტოლების პირველი ინტეგრალი $y'L'_{y'} - L = C_1$ მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} - y' \frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}} = C_1. \quad (4.61)$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}} = C_1. \quad (4.62)$$

თუ (4.62) ტოლობას ავიყვანთ კვადრატში და მამრავლს $2g$ შევიყვანოთ მუდმივში, მივიღებთ რომ

$$y(1 + (y')^2) = C, \quad (4.63)$$

სადაც $C = \frac{1}{2gC_1^2}$.

ამრიგად, მივიღეთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება არაცხადად მოცემული წარმოებულთ. ამ განტოლების ამოხსნა ხელსაყრელია პარამეტრის შემოყვანის გზით.

დავუშვათ, რომ $y' = \frac{dy}{dx} = \cot \beta$, მაშინ $1 + (y')^2 = \frac{1}{(\sin \beta)^2}$ ანუ (4.63)-ის გათვალისწინებით გვექნება, რომ

$$y = \frac{C}{1+(y')^2} = C(\sin \beta)^2 = \frac{C}{2}(1 - \cos 2\beta). \quad (4.64)$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C \sin \beta \cos \beta d\beta}{\cot \beta} = 2C(\sin \beta)^2 d\beta = C(1 - \cos 2\beta)d\beta. \quad (4.65)$$

აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$x = C\left(\beta - \frac{\sin 2\beta}{2}\right) + C_0. \quad (4.66)$$

გადავწეროთ ეს ფორმულა შემდეგი სახით:

$$x = \frac{C}{2}(2\beta - \sin 2\beta) + C_0, \quad (4.67)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$2\beta = t, \quad (4.68)$$

და გავითვალისწინებთ, რომ $y = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow C_0 = 0$

პირობას, მივიღებთ, რომ

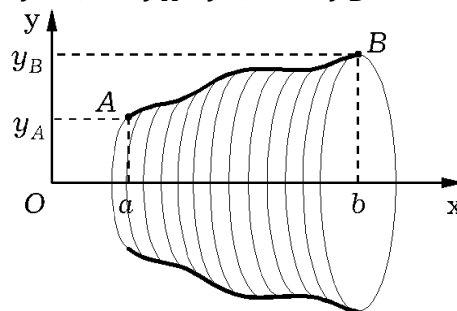
$$x = \frac{C}{2}(t - \sin t), \quad (4.69)$$

$$y = \frac{C}{2}(1 - \cos t). \quad (4.70)$$

ამრიგად, XOY სიბრტყეში მივიღეთ ციკლოიდის პარამეტრული განტოლება, რომელსაც აღწერს $\frac{C}{2}$ რადიუსის მქონე წრეწირი XOY სიბრტყეში გორვისას, ისე რომ, ციკლოიდა გადის $y(b) = y_B$ წერტილზე.

მაგალითი: ამოცანა მინიმალური ბრუნვითი ზედაპირის პოვნის შესახებ. იპოვეთ $[a; b]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული ისეთი გლუვი ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$y(a) = y_A, \quad y(b) = y_B. \quad (4.71)$$



ნახ. 4.4. მინიმალური ბრუნვითი ზედაპირი

და ამ ფუნქციის გრაფიკის OX ღერძის გარშემო ბრუნვის შედეგად მიღებული ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი არის მინიმალური.

$$S = 2\pi \int_a^b y ds = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx \rightarrow \min. \quad (4.72)$$

ამოხსნა: როგორც ვხედავთ, ინტეგრალქვეშა გამოსახულება (ინტეგრანტი) $L(y, y') = y\sqrt{1 + (y')^2}$ სახისაა. მაშასადამე, მას აქვს პირველი ინტეგრალი: $y'L'_{y'} - L = C_1$, რომელიც ჩვენი ამოცანის პირობებში მიიღებს სახეს:

$$\frac{y(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} - y\sqrt{1+(y')^2} = C_1. \quad (4.73)$$

თუ გავამარტივებთ ამ ინტეგრალს, მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}} = C. \quad (4.74)$$

ამ განტოლების ინტეგრებისათვის, შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$y' = \sinh t \Rightarrow y = C \cosh t. \quad (4.75)$$

ხოლო

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C \sinh t dt}{\sinh t} = C dt \Rightarrow x = Ct + C_0. \quad (4.76)$$

მაშასადამე, საძიებელი მინიმალური ბრუნვითი ზედაპირი მიიღება იმ წირის ბრუნვით აბსცისთა ღერძის გარშემო, რომლის პარამეტრული განტოლებებია:

$$\begin{cases} x = Ct + C_0 \\ y = C \cosh t \end{cases} \quad (4.77)$$

თუ ამ პარამეტრული განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ t პარამეტრს, მაშინ მივიღებთ საძიებელი წირის – ექსტრემალის განტოლებას:

$$y = C \cosh \frac{x-C_0}{C}. \quad (4.78)$$

ასეთ წირებს **კატენოიდებს** უწოდებენ. უცნობი მუდმივები განისაზღვრებიან სასაზღვრო $y(a) = y_A$, $y(b) = y_B$ პირობებიდან. **სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარე**, ამოცანას შეიძლება ქონდეს ერთი, ორი ან საერთოდ არ ქონდეს ამონახსნი.

4.3.3. რამდენიმე, ერთი ცვლადის ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალი

ახლა, განვიხილოთ ფუნქციონალი, რომელიც დამოკიდებულია x ცვლადის ორ სხვადასხვა y_1 და y_2 ფუნქციაზე:

$$J[y_1, y_2] = \int_a^b L(x, y_1, y_2, y_1', y_2') dx, \quad (4.79)$$

სადაც $L(x, y_1, y_2, y_1', y_2')$ ხუთი ცვლადის ორჯერ, უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა. y_1, y_2 ფუნქციათა განსაზღვრის არეა $C^1[a; b]$ ფუნქციონალური სიმრავლის, ისეთი ფუნქციების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს: $y_1(a) = y_{11}$, $y_1(b) = y_{12}$, $y_2(a) = y_{21}$, $y_2(b) = y_{22}$.

რადგან y_1, y_2 ფუნქციები სეგმენტის ბოლოებზე იღებენ ფიქსირებულ მნიშვნელობებს, მივიღებთ რომ δy_1 და δy_2 დასაშვები ვარიაციები არიან $C^1[a; b]$ კლასის ფუნქციები და აკმაყოფილებენ ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს:

$$\delta y_1(a) = \delta y_1(b) = \delta y_2(a) = \delta y_2(b) = 0.$$

ფუნქციათა ნებისმიერი δy_1 და δy_2 ვარიაციებისათვის განვიხილოთ ფუნქცია:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = J[y_1 + \alpha_1 \delta y_1, y_2 + \alpha_2 \delta y_2]. \quad (4.80)$$

ცხადია, რომ თუ y_1, y_2 ფუნქციებისათვის $J[y_1, y_2]$ ფუნქციონალური აღწევს თავის ექსტრემუმს, მაშინ $\varphi(\alpha_1, \alpha_2)$ ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი $(0; 0)$ წერტილში. ამ ფუნქციისათვის ფერმას თეორემიდან გამომდინარე, ადგილი აქვს ექსტრემუმის აუცილებელ პირობებს:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} \right|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = 0. \quad (4.81)$$

თუ გამოვიყენებთ ლაიბნიცის ფორმულას განსაზღვრული ინტეგრალის პარამეტრით გაწარმოების შესახებ, მაშინ (4.81) პირობებიდან მივიღებთ, რომ

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \int_a^b (L'_{y_1} \delta y_1 + L'_{y_1'} \delta y_1') dx = 0, \quad (4.82)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} \right|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \int_a^b (L'_2 \delta y_2 + L'_{y_2'} \delta y_2') dx = 0. \quad (4.83)$$

დიუბუა-რაიმონის თეორემიდან გამომდინარე (4.82),(4.83) ფორმულები შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\frac{d}{dx} L'_{y_1'} - L'_{y_1} = 0, \quad (4.84)$$

$$\frac{d}{dx} L'_{y_2'} - L'_{y_2} = 0. \quad (4.85)$$

P.S. ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი (4.84),(4.85) პირობები, შეიძლება განზოგადდეს ერთი ცვლადის n რაოდენობის ფუნქციებზე დამოკიდებული ფუნქციონალისთვის.

მართლაც, თუ მოცემული გვაქვს n რაოდენობის ერთი ცვლადის ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალი:

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b L(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx, \quad (4.86)$$

სადაც $L(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')$ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა და $J[y_1, \dots, y_n]$ აღწევს ექსტრემუმს $y_1, \dots, y_n \in C^1[a; b]$ ფუნქციათა სისტემაზე, მაშინ ფუნქციათა ეს სისტემა, აკმაყოფილებს განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{d}{dx} L'_{y_i'} - L'_{y_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.87)$$

ამ განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი გლუვი ამონახსნი J ფუნქციონალის ექსტრემალს წარმოადგენს. (4.87) განტოლებათა სისტემას ეილერის განტოლებები ეწოდებათ.

მაგალითი: იპოვეთ ფუნქციონალის ექსტრემალები:

$$J[y_1, y_2] = \int_a^b (2y_1 y_2 - 2y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2) dx, \quad (4.88)$$

ამონახსნა: ამ შემთხვევაში,

$L(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 2y_1 y_2 - 2y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2$. შესაბამის ეილერის განტოლებებს ექნებათ სახე:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} L'_{y_1'} - L'_{y_1} = 0 \\ \frac{d}{dx} L'_{y_2'} - L'_{y_2} = 0 \end{cases}; \quad (4.89)$$

ანუ

$$\begin{cases} y_1''(x)L'_{y_1' y_1'} + y_1'(x)L'_{y_1 y_1'} - L'_{y_1} = 0 \\ y_2''(x)L'_{y_2' y_2'} + y_2'(x)L'_{y_2 y_2'} - L'_{y_2} = 0 \end{cases}; \quad (4.90)$$

ჩვენი ამოცანისათვის, ეს სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} 2y_1'' + 2y_2 - 4y_1 = 0 \\ -2y_2'' + 2y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2'' - 2y_2'' + y_2 = 0 \\ y_1 = y_2'' \end{cases}. \quad (4.91)$$

(4.91) სისტემის პირველი ტოლობა, ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებაა მუდმივი კოეფიციენტებით. ამიტომ მისი ამონახსნი იქნება:

$$y_2 = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}, \quad (4.92)$$

თუ ჩავსვამთ (4.92) ამონახსნს (4.91) სისტემის მეორე განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 (2e^x + x e^x) + C_3 e^{-x} + C_4 (x e^{-x} - 2e^{-x}), \quad (4.93)$$

ანუ

$$y_1 = e^x (C_1 + 2C_2) + e^{-x} (C_3 - 2C_4) + x (C_2 e^x + C_4 e^{-x}). \quad (4.94)$$

4.3.4. უმარტივესი ტიპის ფუნქციონალი მაღალი რიგის წარმოებულებით

ვთქვათ $L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია $n + 2$ -ჯერ. განვიხილოთ $y(x) \in C^1[a; b]$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციონალი:

$$J[y] = \int_a^b L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx, \quad (4.95)$$

რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს:

$$y(a) = y_{10}, y'(a) = y_{11}, \dots, y^{(n-1)}(a) = y_{1, n-1}; \quad (4.96)$$

$$y(b) = y_{20}, y'(b) = y_{21}, \dots, y^{(n-1)}(b) = y_{2, n-1}. \quad (4.97)$$

ასეთ შემთხვევაში, y ფუნქციისთვის დასაშვები ვარიაცია შეიძლება იყოს ნებისმიერი $\delta y \in C^1[a; b]$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს:

$$\delta y(a) = 0, \delta y'(a) = 0, \dots, \delta y^{(n-1)}(a) = 0; \quad (4.98)$$

$$\delta y(b) = 0, \delta y'(b) = 0, \dots, \delta y^{(n-1)}(b) = 0. \quad (4.99)$$

ვთქვათ, $y(x)$ ფუნქცია ანიჭებს ექსტრემუმს $J[y]$ ფუნქციონალს. თუ ავირჩევთ ნებისმიერ დასაშვებ δy ვარიაციას და განვიხილავთ ფუნქციას:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= J[y + \alpha \delta y] = \\ &= \int_a^b L(x, y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'', \dots, y^{(n)} + \delta y^{(n)}) dx \end{aligned}$$

მივიღებთ რომ $\varphi(\alpha)$ ფუნქციასაც აქვს ექსტრემუმი $\alpha = 0$ წერტილში, რადგან ის დიფერენცირებადია ამ წერტილში, გვექნება ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა: $\varphi'(0) = 0$ ანუ

$$\varphi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} J[y + \alpha \delta y] = 0, \quad (4.100)$$

ცხადია, რომ

$$\varphi'(0) = \int_a^b (L'_y \delta y + L'_{y'} \delta y' + \dots + L'_{y^{(n)}} \delta y^{(n)}) dx = 0. \quad (4.101)$$

დავუშვათ, რომ $y(x) \in C^{2n}[a; b]$. მაშინ თუ, გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების მეთოდს (4.102) განტოლებაში ერთხელ, (4.103) განტოლებაში – ორჯერ და ა.შ.) და სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$\int_a^b L'_{y'} \delta y' dx = - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} L'_{y'} \right) \delta y dx, \quad (4.102)$$

$$\int_a^b L'_{y''} \delta y'' dx = \int_a^b \left(\frac{d^2}{dx^2} L'_{y''} \right) \delta y dx, \quad (4.103)$$

$$\int_a^b L'_{y^{(n)}} \delta y^{(n)} dx = (-1)^n \int_a^b \left(\frac{d^n}{dx^n} L'_{y^{(n)}} \right) \delta y dx. \quad (4.104)$$

თუ ამ ტოლობებს შევიტანთ (4.101) განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ:

$$\int_a^b \left(L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} L'_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} L'_{y^{(n)}} \right) \delta y dx = 0. \quad (4.105)$$

ეს განტოლება ძალაშია ნებისმიერი, უსასრულოდ დიფერენცირებადი δy ფუნქციისათვის, რომელიც ნულის ტოლ მნიშვნელობებს იღებს $[a; b]$ სეგმენტის ბოლოებზე. მაშინ, **ლაგრანჟის თეორემის თანახმად**, ექსტრემალების საპოვნელად, გვექნება **ილერ-პუასონის განტოლება**:

$$L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} L'_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} L'_{y^{(n)}} = 0. \quad (4.106)$$

ამ განტოლების $2n$ -ჯერ უწყვეტად დიფერენცირებად ამონახსნებს $J[y]$ ფუნქციონალის **ექსტრემალები** ეწოდებათ.

P.S. ამ შემთხვევაში, ფუნქციონალის აღწევს ექსტრემუმს ექსტრემალეზზე.

მაგალითი: იპოვეთ $J[y] = \int_a^b ((y''')^2 + y^2 - 2yx^3) dx$ ფუნქციონალის ექსტრემალეზი.

ამოხსნა: ჩავწეროთ $L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = (y''')^2 + y^2 - 2yx^3$ ფუნქციონალის გამომდინარე, მოცემული $J[y]$ ფუნქციონალისათვის ეილერ-პუასონის განტოლება:

$$-2y^{VI} + 2y - 2x^3 = 0. \quad (4.107)$$

ეს არის მუდმივკოეფიციენტებიანი, არაერთგვაროვანი, წრფივი დიფერენციალური განტოლება, სპეციალური სახის მარჯვენა ნაწილით. მის ამონახსნს აქვს სახე:

$$y(x) = x^3 + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \left(C_3 e^{\frac{x}{2}} + C_4 e^{-\frac{x}{2}} \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \left(C_5 e^{\frac{x}{2}} + C_6 e^{-\frac{x}{2}} \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x. \quad (4.108)$$

4.3.5. მრავალი ცვლადის ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალეზი

ა) განვიხილოთ ორი ცვლადის $z(x, y)$ ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალი:

$$J[z] = \iint L(x, y, z, z'_x, z'_y) dx dy, \quad (4.109)$$

ვთქვათ, $z(x, y) \in M \subset C^2(\bar{G})$ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციეზია, განსაზღვრული $G \subset \mathbb{R}^2$ არეზე. გამოვიკვლიოთ (4.109) ფუნქციონალი ექსტრემუმეზზე, თუ ორჯერადი ინტეგრეზა ხდება $D \subset \bar{D} \subset G$ არეზე, ხოლო $L(x, y, z, z'_x, z'_y)$ ინტეგრანტი ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა თავისი არგუმენტების მიმართ. ამ ფუნქციონალის განსაზღვრის არედ განვიხილოთ M ფუნქციონალური სიმრავლის იმ ელემენტებისაგან შემდგარი ქვესიმრავლე, რომლებიც მოცემული D არის საზღვარზე იღებენ ცნობილ $\varphi(x, y)$ მნიშვნელობებს ანუ

$$z(x, y)|_{\partial D} = \varphi(x, y). \quad (4.110)$$

ამ შემთხვევაში, ფუნქციის დასაშვები ვარიაციეზი იქნებიან, ისეთი $\delta z(x, y) \in C^2(G)$ ფუნქციეზი, რომლებიც D არის ∂D საზღვარზე იღებენ ნულის ტოლ მნიშვნელობებს.

როგორც ვიცით, ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა მისი პირველი ვარიაციის ნულთან ტოლობა:

$$\delta J[z] = 0. \quad (4.111)$$

ჩვენ ჩემთხვევაში, გვექნება რომ:

$$\delta J[z] = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J[z + \alpha \delta z] \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (4.112)$$

ეს ფუნქციონალი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\delta J[z] = \iint (L'_z \delta z + L'_p \delta p + L'_q \delta q) dx dy = 0, \quad (4.113)$$

სადაც

$$p = z'_x \text{ და } q = z'_y. \quad (4.114)$$

ცხადია, რომ თუ გამოვიყენებთ ნამრავლის წარმოებულის გამოსათვლელ ფორმულას, მივიღებთ:

$$\frac{\partial}{\partial x} (L'_p \delta z) = \frac{\partial L'_p}{\partial x} \delta z + L'_p \delta p, \quad (4.115)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (L'_q \delta z) = \frac{\partial L'_q}{\partial y} \delta z + L'_q \delta q. \quad (4.116)$$

ამ ფორმულებიდან გამოვსახოთ და გარდავქმნათ (4.113) ფორმულის ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ბოლო ორი წევრი შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \iint (L'_p \delta p + L'_q \delta q) dx dy &= \iint \left(\frac{\partial}{\partial x} (L'_p \delta z) + \frac{\partial}{\partial y} (L'_q \delta z) \right) dx dy - \\ &\quad - \iint \left(\frac{\partial L'_p}{\partial x} + \frac{\partial L'_q}{\partial y} \right) \delta z dx dy. \end{aligned} \quad (4.117)$$

თუ გამოვიყენებთ გრინის ფორმულას:

$$\oint (P dx + Q dy) = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (4.118)$$

სადაც მარცხენა წირითი ინტეგრალი ვრცელდება ∂D საზღვარზე, ხოლო მარჯვენა ორჯერადი ინტეგრალი კი $-D$ არეზე; მაშინ

$$\iint \left(\frac{\partial}{\partial x} (L'_p \delta z) + \frac{\partial}{\partial y} (L'_q \delta z) \right) dx dy = \oint \delta z (L'_p dy - L'_q dx) = 0, \quad (4.119)$$

რადგან $\delta z|_{\partial D} \equiv 0$. ცხადია, რომ აქ $Q = L'_p \delta z$ და $P = -L'_q \delta z$. მივიღეთ, რომ

$$\iint (L'_p \delta p + L'_q \delta q) dx dy = - \iint \left(\frac{\partial L'_p}{\partial x} + \frac{\partial L'_q}{\partial y} \right) \delta z dx dy. \quad (4.120)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი (4.113) პირობა გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\iint \left(L'_z - \frac{\partial L'_p}{\partial x} + \frac{\partial L'_q}{\partial y} \right) \delta z dx dy = 0. \quad (4.121)$$

რადგან (4.121) ფუნქციონალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულება (ინტეგრანტი) $\left(L'_z - \frac{\partial L'_p}{\partial x} + \frac{\partial L'_q}{\partial y} \right)$ უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო δz ვარიაცია ნებისმიერი, უწყვეტი და საზღვარზე ნულოვანი ფუნქციაა, ლაგრანჟის ლემის საფუძველზე მივიღებთ, რომ ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა ჩაიწერება განტოლების სახით:

$$\frac{\partial L'_p}{\partial x} + \frac{\partial L'_q}{\partial y} - L'_z = 0. \quad (4.122)$$

(4.122) განტოლებას, ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლება ეწოდება. ამ განტოლების ნებისმიერი გლუვი ამონახსნი ექსტრემალს წარმოადგენს.

მაგალითი: ჩავწერთ ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლება დირიხლეს ფუნქციონალისთვის:

$$J[z] = \frac{1}{2} \iint \left((z'_x)^2 + (z'_y)^2 \right) dx dy. \quad (4.123)$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $L(x, y, z, z'_x, z'_y) = p^2 + q^2$. მაშინ მივიღებთ, რომ $L'_p = 2p = 2z'_x$, ხოლო $L'_q = 2q = 2z'_y$, ასევე, $L'_z = 0$ ე.ი. ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლება ამ შემთხვევისთვის, მიიღებს ლაპლასის განტოლების სახეს:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \quad (4.124)$$

ლაპლასის განტოლებას მოკლედ ასეც წერენ: $\Delta z = 0$.

მაშასადამე, დირიხლეს ფუნქციონალისათვის ნებისმიერი ჰარმონიული ფუნქცია ექსტრემალი იქნება.

მაგალითი: ჩავწერთ ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლება პუასონის ფუნქციონალისთვის:

$$J[z] = \frac{1}{2} \iint \left((z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 2zf(x, y) \right) dx dy. \quad (4.125)$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $L(x, y, z, z'_x, z'_y) = p^2 + q^2 + 2zf(x, y)$. მაშინ $L'_p = 2p = 2z'_x$, $L'_q = 2q = 2z'_y$, $L'_z = f(x, y)$. მაშინ ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლებას ექნება პუასონის განტოლების სახე:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (4.126)$$

პუასონის განტოლებას, ზოგჯერ მოკლედაც წერენ შემდეგნაირად: $\Delta z = f$.

მაშასადამე, პუასონის ფუნქციონალისათვის, ექსტრემალები აკმაყოფილებენ პუასონის განტოლებას.

მაგალითი: განვიხილოთ პლატოს ვარიაციული ამოცანა: ვიპოვოთ ის ზედაპირი, რომელიც გავლებულია მოცემულ C შეკრულ ჟორდანის წირზე და აქვს მინიმალური ფართობი. ამ ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება შემდეგი ფუნქციონალის ექსტრემუმის პოვნის ამოცანაზე:

$$J[z] = \iint \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy. \quad (4.127)$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $L(x, y, z, z'_x, z'_y) = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$, შესაბამისად, $L'_p = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $L'_q = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ და $L'_z = 0$. მაშასადამე, ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right) = 0. \quad (4.128)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right) - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) = 0. \quad (4.139)$$

ანუ, რომ საშუალო სიმრუდე ყველა წერტილში ნულის ტოლი უნდა იყოს. ამ პირობას აკმაყოფილებს მოცემულ C კონტურზე გადაჭიმული საპნის ბუშტი.

ბ) თუ მოცემული გვაქვს მრავალი ცვლადის ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალი:

$$J[z] = \iiint \dots \int L(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_1, \dots, p_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \rightarrow extr. \quad (4.130)$$

სადაც $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$, მაშინ, მისი ექსტრემალეებისათვის ანალოგიურად ჩაიწერება ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლება:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} L'_{p_i} - L'_z = 0. \quad (4.140)$$

მაგალითი: განვიხილოთ ვარიაციული ამოცანა:

$$J[u] = \iiint \left((u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2 \right) dx dy dz \rightarrow extr. \quad (4.141)$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში:

$L(x, y, z, u, p_1, p_1, p_3) = (u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, სადაც $p_1 = u'_x$, $p_2 = u'_y$ და $p_3 = u'_z$. მაშინ $L'_{p_1} = 2p_1 = 2u'_x$, $L'_{p_2} = 2p_2 = 2u'_y$, $L'_{p_3} = 2p_3 = 2u'_z$, $L'_z = 0$. მაშინ მივიღებთ, რომ ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{\partial}{\partial x} L'_{p_1} + \frac{\partial}{\partial y} L'_{p_2} + \frac{\partial}{\partial z} L'_z = 0.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში, გვექნება ლაპლასის სამგანზომილებიანი განტოლება:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (4.142)$$

აქაც შეგვიძლია გამოვიყენოთ მოკლე ჩანაწერი: $\Delta u = 0$.

მაშასადამე, (4.141) ფუნქციონალის ექსტრემალი შეიძლება იყოს ნებისმიერი ჰარმონიული ფუნქცია.

გ) თუ ინტეგრანტი დამოკიდებულია მრავალი ცვლადის ფუნქციის მაღალი რიგის კერძო წარმოებულებზე, მაშინ ექსტრემალეებისათვის გვექნება ეილერ-ჰუასონის ფორმულის ანალოგიური ფორმულა. კერძოდ, განვიხილოთ ორი ცვლადის $z(x, y)$ ფუნქცია თავისი კერძო წარმოებულებით მეორე რიგამდე ჩათვლით ანუ განვიხილოთ ვარიაციული ამოცანა:

$$J[z] = \iint L \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) dx dy \rightarrow exstr. \quad (4.143)$$

მაშინ ექსტრემალეებისათვის მიიღება განტოლება:

$$\frac{\partial}{\partial x} L'_p + \frac{\partial}{\partial y} L'_q + \frac{\partial^2}{\partial x^2} L'_r + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} L'_s + \frac{\partial^2}{\partial y^2} L'_t - L'_z = 0. \quad (4.144)$$

სადაც $p = z_x$, $q = z_y$, $r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$.

მაგალითი. განვიხილოთ ვარიაციული ამოცანა:

$$J[z] = \iint \left(\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy \rightarrow \text{extr}. \quad (4.145)$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში, $L = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2$ ანუ

$L = r^2 + t^2 + 2s^2$. მაშინ $L'_p = 0$, $L'_q = 0$, $L'_r = 2r = 2z_{xx}$,

$L'_s = 4s = 4z_{xy}$, $L'_t = 2t = 2z_{yy}$, $L'_z = 0$. მაშასადამე, მივიღებთ

ექსტრემალების განტოლებას შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0. \quad (4.146)$$

ექსტრემალებისათვის მივიღეთ ბიჰარმონიული განტოლება.

ამ განტოლებას, ზგჯერ, მოკლედაც ჩაწერენ ხოლმე:

$$\Delta \Delta z = 0.$$

4.3.6. ეილერის განტოლებების კანონიკური სახე

განვიხილოთ $J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b L(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$ ფუნქციონალური, სადაც L ინტეგრანტი ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა. ჩვენ შეგვიძლია ეს ფუნქციონალური გადავწეროთ ვექტორების გამოყენებით შემდეგნაირად:

$$J[\mathbf{y}] = \int_a^b L(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') dx, \quad (4.147)$$

სადაც $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$. როგორც უკვე ვიცით, (4.147) სახის ფუნქციონალის ექსტრემალებისათვის ადგილი აქვს ეილერის განტოლებებს:

$$\frac{d}{dx} L'_{y'_i} - L'_{y_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.148)$$

ეს არის მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისაგან შემდგარი სისტემა. ეს სისტემა შეგვიძლია დავიყვანოთ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე, თუ შემოვიღებთ სათანადო აღნიშვნებს:

$$y'_i = z_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.149)$$

მაშინ $L'_{y'_i} = L'_{z_i}$ და ეილერის (4.148) განტოლებები გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dx} = z_i, & i = \overline{1, n} \\ \frac{d}{dx} L'_{z_i} - L'_{y_i} = 0, & i = \overline{1, n} \end{cases}. \quad (4.150)$$

მიღებული განტოლებათა სისტემა არაა ნორმალური სისტემა, ამიტომ მისი რიცხვითი რეალიზაცია არაა ხელსაყრელი, თუმცა,

შეგვიძლია ისე გრდავექმნათ ანალიზურად, რომ მრავალი ამოცანის ამოსხნა იქნება შესაძლებელი. მართლაც, შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$L'_{y'_i} = L'_{z_i} \equiv p_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.151)$$

ინტეგრანტის, მეორე რიგის კერძო წარმოებულებისაგან შემდგარი მატრიცის (ჰესის მატრიცა) დეტერმინანტი თუ განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემიდან გამომდინარე, $L'_{y'_i} = p_i, \quad i = \overline{1, n}$ განტოლებებიდან შეგვიძლია ძველი y'_i ცვლადები გამოვსახოთ ახალი ცვლადებით ანუ

$$y'_i = h_i(x, y, p), \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.152)$$

განვიხილოთ ფუნქცია:

$$H(x, y, p) = -L(x, y, h(x, y, p)) + \sum_{i=1}^n h_i(x, y, p)p_i. \quad (4.153)$$

ამ ფუნქციას, მოცემული (4.147) ფუნქციონალის ჰამილტონის ფუნქციას უწოდებენ, ხოლო x, y, p ცვლადებს, მოცემული ფუნქციონალის – კანონიკურ ცვლადებს.

ჰამილტონის ფუნქციის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$dH = -dL + \sum_{i=1}^n p_i dy'_i + \sum_{i=1}^n y'_i dp_i \quad \text{ანუ} \\ dH = -L'_x dx - \sum_{i=1}^n L'_{y_i} dy_i - \sum_{i=1}^n L'_{y'_i} dy'_i + \sum_{i=1}^n p_i dy'_i + \sum_{i=1}^n y'_i dp_i, \quad (4.154)$$

რადგან აღნიშვნის თანახმად $L'_{y'_i} = p_i, \quad i = \overline{1, n}$, ფორმულა (4.154)-ის მარჯვენა მხარის მესამე და მეოთხე წევრი, ერთმანეთს აბათილებს, შესაბამისად, მივიღებთ რომ

$$dH = -L'_x dx - \sum_{i=1}^n L'_{y_i} dy_i + \sum_{i=1}^n y'_i dp_i. \quad (4.155)$$

თუ ჰამილტონის ფუნქციას წარმოვადგენთ სტანდარტული ფორმით, მივიღებთ რომ

$$dH = H_x dx + \sum_{i=1}^n H_{y_i} dy_i + \sum_{i=1}^n H_{p_i} dp_i. \quad (4.156)$$

თუ შევადარებთ (4.155) და (4.156) ფორმულებს, მივიღებთ რომ

$$H_x = -L'_x, \quad H_{y_i} = -L'_{y_i}, \quad H_{p_i} = y'_i. \quad (4.157)$$

მაშასადამე, $L'_{y_i} = -H_{y_i}, \quad y'_i = H_{p_i}, \quad L'_{z_i} = p_i$, ტოლობების გათვალისწინებით, ეილერის (4.150) განტოლებები გადაიწერება კანონიკურ ცვლადებში:

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, & i = \overline{1, n}, \\ \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, & i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (4.158)$$

როგორც ვიცით, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების პირველი ინტეგრალი ეწოდება ისეთ ფუნქციას, რომელიც ამ სისტემის ნებისმიერი ინტეგრალური წირის გასწვრივ მუდმივ მნიშვნელობას ინარჩუნებს.

იმისათვის, რომ მოცემული გლუვი ფუნქცია იყოს ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების პირველი ინტეგრალი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ ფუნქციის სრული წარმოე-

ბული მოცემული დიფერენციალური განტოლებიდან გამომდინარე, იყოს ნულოვანი.

ზოგიერთი კერძო შემთხვევისათვის, შესაძლებელია ვიპოვოთ (4.158) სისტემის პირველი ინტეგრალი და მაშასადამე (4.150) სისტემისაც.

მაგალითი: ვთქვათ ინტეგრანტს აქვს სახე: $L(\mathbf{y}, \mathbf{y}')$ ანუ ცხადი სახით არ შეიცავს x ცვლადს. მაშინ შესაბამისი ჰამილტონის ფუნქციაც არ შეიცავს x ცვლადს, ცხადი სახით ანუ $\frac{\partial H}{\partial x} \equiv 0$. ე.ი. გვექნება, რომ

$$\frac{dH}{dx} = \sum_{i=1}^n H'_{y_i} \frac{dy_i}{dx} + \sum_{i=1}^n H'_{p_i} \frac{dp_i}{dx}, \quad (4.159)$$

შევიტანოთ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში H'_{y_i} და H'_{p_i} (4.158) განტოლებიდან, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{dH}{dx} = - \sum_{i=1}^n \frac{dp_i}{dx} \frac{dy_i}{dx} + \sum_{i=1}^n \frac{dy_i}{dx} \frac{dp_i}{dx} = 0. \quad (4.160)$$

ამრიგად, თუ ინტეგრანტი არაა ცხადად დამოკიდებული x ცვლადზე, მაშინ ნებისმიერი ექსტრემალის გასწვრივ, ჰამილტონის ფუნქცია მუდმივია. რაც იმას ნიშნავს, რომ თუ ინტეგრანტი არაა ცხადად დამოკიდებული x ცვლადზე, მაშინ ჰამილტონის ფუნქცია ეილერის განტოლების პირველი ინტეგრალია.

P.S. კანონიკურ ცვლადებში ჩაწერილი ეილერის (4.158) განტოლებიდან გამომდინარეობს იგივეობა: $\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x}$.

მაგალითი. ახლა დავსვათ ასეთი საკითხი: ვიპოვოთ რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს მოცემული $F(\mathbf{y}, \mathbf{p})$ ფუნქცია, რომ ის იყოს (4.158) სისტემის პირველი ინტეგრალი ?

ამოხსნა: ვიპოვოთ ამ ფუნქციის სრული წარმოებული:

$$\frac{dF}{dx} = \sum_{i=1}^n \left(F'_{y_i} \frac{dy_i}{dx} + F'_{p_i} \frac{dp_i}{dx} \right), \quad (4.161)$$

თუ გავითვალისწინებთ (4.158) განტოლებებს, მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{dF}{dx} = \sum_{i=1}^n \left(F'_{y_i} \frac{dy_i}{dx} + F'_{p_i} \frac{dp_i}{dx} \right) = \sum_{i=1}^n (F'_{y_i} H'_{p_i} - F'_{p_i} H'_{y_i}). \quad (4.162)$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგარ გამოსახულებას, პუასონის $[F, H]$ ფრჩხილებს უწოდებენ. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{dF}{dx} = [F, H]. \quad (4.163)$$

მაშასადამე, მოცემული $F(\mathbf{y}, \mathbf{p})$ ფუნქცია არის ეილერის განტოლების პირველი ინტეგრალი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა F და H ფუნქციების პუასონის ფრჩხილი $[F, H] = 0$ ნულის ტოლია.

მაგალითი. მოცემული ფუნქციონალისათვის:

$$J[y_1, y_2] = \int_0^\pi (2y_1y_2 - 2y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2) dx,$$

შეადგინეთ ეილერის კანონიკური განტოლებები.

ამოხსნა: ჩვენ შემთხვევაში

$L(x, y, y') = 2y_1y_2 - 2y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2$, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს: $L'_{y_1'} = p_1$, $L'_{y_2'} = p_2$. მაშინ მივიღებთ, რომ $2y_1' = p_1$, $-2y_2' = p_2$.

ამ შემთხვევაში, დეტერმინანტი: $\begin{vmatrix} L''_{y_1'y_1'} & L''_{y_1'y_2'} \\ L''_{y_2'y_1'} & L''_{y_2'y_2'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$.

თუ მიღებულ განტოლებებს ამოვხსნით y_1' და y_2' წარმოებულების მიმართ, მივიღებთ რომ $y_1' = \frac{p_1}{2}$ და $y_2' = -\frac{p_2}{2}$. მაშინ შეგვიძლია ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციონალის შესაბამისი ჰამილტონიანი:

$$H = \left(-L + y_1' L'_{y_1'} + y_2' L'_{y_2'}\right) \Big|_{y_1' = \frac{p_1}{2}, y_2' = -\frac{p_2}{2}} = 2y_1^2 - 2y_1y_2 + \frac{p_1^2}{4} - \frac{p_2^2}{4}.$$

შესაბამისად, ეილერის კანონიკურ განტოლებებს ექნებათ სახე:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = \frac{p_1}{2}, & \frac{dy_2}{dx} = -\frac{p_2}{2} \\ \frac{dp_1}{dx} = -4y_1 + 2y_2, & \frac{dp_2}{dx} = 2y_1 \end{cases}.$$

4.3.7. ფუნქციონალებისა და მათი შესაბამისი ექსტრემალების განტოლებათა ცხრილი

ფუნქციონალის სახე		ექსტრემალების დიფერენციალური განტოლებები
1	$J[y] = \int_a^b L(x, y, y') dx$	$\frac{d}{dx} L'_{y'} - L'_y = 0$ ეილერის განტოლება
1.2	$J[y] = \int_a^b L(x, y) dx$	$L'_y = 0$
1.3	$J[y] = \int_a^b (P(x, y) + Q(x, y)y') dx$	$Q'_x - P'_y = 0$
1.4	$J[y] = \int_a^b L(y') dx$	$\frac{d}{dx} L'_{y'} = 0$
1.5	$J[y] = \int_a^b L(x, y') dx$	$\frac{d}{dx} L'_{y'} = 0$
1.6	$J[y] = \int_a^b L(y, y') dx$	$y' L'_{y'} - L = C_1$
2	$J[y_1, y_2] = \int_a^b L(x, y_1, y_2, y_1', y_2') dx$	$\begin{cases} \frac{d}{dx} L'_{y_1'} - L'_{y_1} = 0 \\ \frac{d}{dx} L'_{y_2'} - L'_{y_2} = 0 \end{cases}$

3	$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b L(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$	$\frac{d}{dx} L'_{y_i'} - L'_{y_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}$
4	$J[y] = \int_a^b L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx$	$L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} L'_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} L'_{y^{(n)}} = 0$ ეილერ-პუასონის განტოლება
5	$J[y_1, y_2] = \int_a^b L(x, y, z, z'_x, z'_y) dx dy$	$\frac{\partial L'_p}{\partial x} + \frac{\partial L'_q}{\partial y} - L'_z = 0, p = z'_x, q = z'_y$. ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლება
5.1	$J[u] = \iiint ((u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2) dx dy dz$	$\Delta u = 0$ ლაპლასის განტოლება
5.2	$J[z] = \frac{1}{2} \iint ((z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 2zf(x, y)) dx dy$	$\Delta z = f(x, y)$ პუასონის განტოლება
5.3	$J[z] = \iint \left(\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy$	$\Delta \Delta z = 0$ ბიჰარმონიული განტოლება
6	$J[y] = \int_a^b L(x, y, y') dx$	$\begin{cases} \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \end{cases} i = \overline{1, n}, p_i = L'_{y_i}$. ეილერის კანონიკური განტოლებები

4.4. ვარიაციული ამოცანები მოძრავი საზღვრებით

ჩვენ უკვე განვიხილეთ ვარიაციული ამოცანები ფიქსირებული საზღვრებით, სადაც დასაშვები ფუნქციები განსაზღვრული იყო ფიქსირებულ $[a; b]$ მონაკვეთზე და გრაფიკის ბოლო $A(a, y_A)$ და $B(b, y_B)$ წერტილები იყო ფიქსირებული.

პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას, ზოგჯერ, საჭიროა ფუნქციონალის ექსტრემუმის პოვნა ისეთ პირობებში, როცა დასაშვები ფუნქციები განსაზღვრულია სხვადასხვა შუალედში და შუალედის ბოლოებზე მათი მნიშვნელობა წინასწარ არაა ცნობილი. ასეთ ამოცანებს, მოძრავ საზღვრებიან ვარიაციულ ამოცანებს უწოდებენ.

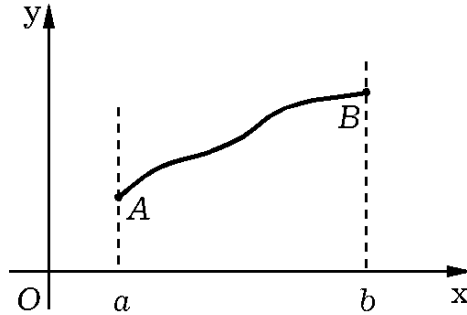
4.4.1. ვარიაციული ამოცანა, ექსტრემალის ფუნქციის გრაფიკის ორ პარალელურ, ვერტიკალურ წრფეზე მოძრავი ბოლოებით

განვიხილოთ ვარიაციული ამოცანა:

$$J[y] = \int_a^b L(x, y, y') dx, \quad (4.164)$$

ფუნქციონალის ექსტრემუმის შესახებ, სადაც ფუნქციონალის განსაზღვრის არეა $C^1[a; b]$ კლასის ფუნქციების სიმრავლე (ფუნქციონალური სივრცე). განსხვავება ადრე განხილულ ამოცანებთან შედარებით ისაა, რომ ამჯერად, დასაშვები ფუნქციებისათვის არ გვაქვს მოცემული სასაზღვრო პირობები.

გეომეტრიული თვალსაზრისით, ამოცანა მდგომარეობს ისეთი ფუნქციის პოვნაში, რომელიც (4.164) ფუნქციონალს ანიჭებს ექსტრემალურ მნიშვნელობას და რომლის გრაფიკის ბოლოებიც, კვთს $x = a$ და $x = b$ ვერტიკალურ წრფეებს. ასეთ ამოცანას ჩვენ ვუწოდებთ ვარიაციულ ამოცანას ექსტრემალის ფუნქციის გრაფიკის ორ პარალელურ, ვერტიკალურ წრფეზე მოძრავი ბოლოებითნახ. 3.5.



ნახ. 4.5. ვარიაციული ამოცანა წირის მოძრავი ბოლოებით

ჩავთვალოთ, რომ ფუნქციონალის ინტეგრანტი, ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა. ამ შემთხვევაში, დასაშვები ფუნქცია, შეიძლება იყოს $C^1[a; b]$ ფუნქციონალური სივრცის ნებისმიერი ელემენტი. ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია:

$$\delta J[y, \delta y] = \int_a^b (L'_y \delta y + L'_{y'} \delta y') dx. \quad (4.165)$$

ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობიდან გამომდინარე, როგორც ვიცით, ადგილი აქვს განტოლებას:

$$\delta J[y, \delta y] = \int_a^b (L'_y \delta y + L'_{y'} \delta y') dx = 0. \quad (4.166)$$

მაშინ დიუბუა-რაიმონის ლემიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ ექსტრემალეები აკმაყოფილებენ ეილერის განტოლებას:

$$\frac{d}{dx} L'_{y'} - L'_y = 0. \quad (4.167)$$

განტოლება (4.166) საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ დამატებითი პირობები, რომელთაც აუცილებლად, უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქციონალის ექსტრემალი.

თუ $J[y]$ ფუნქციონალი არაა გადაგვარებული ანუ $L''_{y'y'} \neq 0$, მაშინ მისი y ექსტრემალი არის ორჯერ, უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია. მაშინ, შეგვიძლია გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი (3.166) განტოლებისათვის და მივიღებთ, რომ:

$$\delta J[y, \delta y] = \int_a^b \left(L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} \right) \delta y dx + L'_{y'} \delta y \Big|_a^b \quad (4.168)$$

ანუ გვექნება ფორმულა:

$$\delta J[y, \delta y] = \int_a^b \left(L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} \right) \delta y dx + L'_{y'} \Big|_{x=b} \delta y(b) - L'_{y'} \Big|_{x=a} \delta y(a). \quad (4.169)$$

თუ $y(x)$ ექსტრემალია, მაშინ ის აკმაყოფილებს ეილერის განტოლებას და მაშასადამე, (4.169) ფორმულაში ინტეგრალი ნულის ტოლია. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$L'_{y'} \Big|_{x=b} \delta y(b) - L'_{y'} \Big|_{x=a} \delta y(a) = 0. \quad (4.170)$$

მოცემულ ამოცანაში, რადგან $\delta y(a)$ და $\delta y(b)$ სიდიდეებს შეუძლიათ ნებისმიერი მნიშვნელობის მიღება, ცხადია რომ (4.170) განტოლება გვაძლევს დამატებით აუცილებელ პირობებს იმისათვის, რომ $y(x)$ ფუნქცია იყოს მოცემული ფუნქციონალის ექსტრემალი. ამ პირობებს აქვთ სახე:

$$L'_{y'} \Big|_{x=b} = 0, \quad L'_{y'} \Big|_{x=a} = 0. \quad (4.171)$$

ამ პირობებს, **ბუნებრივ სასაზღვრო პირობებს** უწოდებენ.

ა) ამრიგად, ასეთი ამოცანის ამოსახსნელად, ჯერ უნდა ამოვხსნათ ეილერის განტოლება და ვიპოვოთ ექსტრემალები, ხოლო შემდეგ, მათგან უნდა ამოვირჩიოთ ის ექსტრემალები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ბუნებრივ სასაზღვრო პირობებს.

ბ) მოცემული (4.164) ტიპის ფუნქციონალისთვის შეგვიძლია დავსვათ შერეული ტიპის ამოცანაც ანუ მაგალითად, მოცემულია საძიებელი ფუნქციის გრაფიკის მარცხენა ბოლოს კოორდინატები $A(a; y_A)$ ხოლო მარჯვენა ბოლო თავისუფლად მოძრაობს $x = b$ ვერტიკალურ წრფეზე. მაშინ გვაქვს ერთი პირობა, რომელიც ავიწროებს დასაშვებ ფუნქციათა სიმრავლეს. დასაშვები ვარიაცია უნდა აკმაყოფილებდეს $\delta y(a) = 0$ პირობას, რადგან ყველა დასაშვები ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს ერთი და იგივე პირობას: $y(a) = y_A$.

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (3.170) პირობიდან მივიღებთ, რომ:

$$y(a) = y_A, \quad L'_{y'} \Big|_{x=b} = 0. \quad (4.172)$$

მაგალითი. იპოვეთ მოცემული ფუნქციონალის ექსტრემალები:

$$J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((y')^2 - y^2 + 4y \cos x) dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(0) = 0. \quad (4.173)$$

ამოხსნა: მოცემული ფუნქციონალისთვის ეილერის განტოლებას აქვს სახე: $y'' + y = 2 \cos x$. ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x$.

რადგან $y(0) = 0$, მივიღებთ რომ $C_1 = 0$. მეორე მუდმივის საპოვნელად, უნდა გამოვიყენოთ $L'_{y'} \Big|_{x=b} = 0$ პირობა, რომელსაც მოცემული ამოცანის პირობებში, აქვს სახე: $2y' \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = 0$ ანუ $y' \left(\frac{\pi}{4} \right) =$

0 მაშინ $C_2 = -1 - \frac{\pi}{4}$. მივიღეთ, რომ ბუნებრივ სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებს ექსტრემალი: $y = \left(x - 1 - \frac{\pi}{4}\right) \sin x$.

4.4.2. ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანა ნებისმიერ ორ წირზე მოძრავი საზღვრებით

ჩვენ უკვე განვიხილეთ ვარიაციული ამოცანა, ნებისმიერ ორ ვერტიკალურ წრფეზე მოძრავი საზღვრებით. ახლა, განვაზოგადოთ ეს ამოცანა იმ შემთხვევისათვის, როცა გრაფიკის ბოლოები გადაადგილდებიან არა მხოლოდ ვერტიკალურ წრფეებზე, არამედ ნებისმიერ ორ გლუვ წირზე.

დავსვათ ამოცანა. ვიპოვოთ

$$J[y] = \int_a^b L(x, y, y') dx, \quad (4.174)$$

ფუნქციონალის ექსტრემუმები, თუ L ფუნქციონალი ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, ხოლო a და b , $y(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ბოლოების უცნობი აბსცისებია, ხოლო ორდინატები კი, შესაბამისად $y(a)$ და $y(b)$. ამასთან ერთად, ცნობილია რომ $y(x)$ ფუნქციის ბოლოები განლაგებულია შესაბამისად, $y = \varphi(x)$ და $y = \psi(x)$ წირებზე ანუ $y(a) = \varphi(a)$ და $y(b) = \psi(b)$.

ასეთი ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად იყენებენ თეორემას:

თუ $y(x)$ არის (3.174) ფუნქციონალის ექსტრემალი, რომელიც $y = \varphi(x)$ წირის $(a, \varphi(a))$ წერტილს აერთებს $y = \psi(x)$ წირის $(b, \psi(b))$ წერტილთან, მაშინ ის აკმაყოფილებს ეილერის განტოლებას:

$$L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} = 0, \quad (4.175)$$

და ტრანსვერსალობის პირობებს:

$$\begin{cases} L + (\varphi' - y') L'_{y'} \Big|_{x=a} = 0 \\ L + (\psi' - y') L'_{y'} \Big|_{x=b} = 0 \end{cases} \quad (4.176)$$

ამრიგად, მოძრავ საზღვრებიანი ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა:

1) ამოვსნათ ფუნქციონალის შესაბამისი ეილერის განტოლება და ვიპოვოთ ორ ნებისმიერ ცვლადზე დამოკიდებული $y = f(x, C_1, C_2)$ ექსტრემალეების სიმრავლე;

2) ტრანსვერსალობის პირობებიდან გამომდინარე და ტოლობების:

$$\begin{cases} f(a, C_1, C_2) = \varphi(a) \\ f(b, C_1, C_2) = \psi(a) \end{cases} \quad (4.177)$$

გათვალისწინებით, ვიპოვოთ შესაბამისი a, b, C_1, C_2 ცვლადები.

მაგალითი.იპოვეთ მანძილი $y = x^2$ პარაბოლასა და $y = x - 5$ წრფეს შორის.

ამოხსნა:თუ განვიხილავთ მანძილს, ორ გადაკვეთის წერტილს შორის საძებნ $y(x)$ წირზე, რომელიც კვეთს მოცემულ პარაბოლასა და წრფეს, შესაბამისად, წერტილებში (a, a^2) და $(b, b - 5)$, მივიღებთ, რომ საძებნი წირი მინიმუმს უნდა ანიჭებდეს ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

ჩვენი ამოცანის პირობებში $\varphi(x) = x^2$ და $\psi(x) = x - 5$.

ამ შემთხვევაში, ეილერის განტოლება იქნება: $y'' = 0$ ანუ ზოგად ამონახსნს აქვს სახე: $y = C_1x + C_2$. მაშინ,

$$(L + (\varphi' - y')L'_{y'}) \Big|_{x=a} = 0$$

$$(L + (\psi' - y')L'_{y'}) \Big|_{x=b} = 0 \quad \text{ტრანსვერსალობის პირობებს აქვთ სახე:}$$

$$\left[\sqrt{1 + y'^2} + (2x - y') \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right]_{x=a} = 0$$

$$\left[\sqrt{1 + y'^2} + (1 - y') \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right]_{x=b} = 0$$

სადაც $y' = C_1$. ხოლო (3.177) განტოლებები მიიღებენ სახეს:

$$\begin{cases} C_1a + C_2 = a^2 \\ C_1b + C_2 = b - 5 \end{cases} \quad \text{მაშინ გვაქვს ოთხი განტოლება ოთხი უცნობით:}$$

(a, b, C_1, C_2) . ამ სისტემის ამონახსნი იქნება: $C_1 = -1$, $C_2 = \frac{3}{4}$, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{23}{8}$. მაშინ, ექსტრემალის განტოლება იქნება: $y = -x + \frac{3}{4}$. მაშინ, მანძილი ამ წირებს შორის იქნება:

$$l = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}} \sqrt{1 + (-1)^2} dx = \sqrt{2}x \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}} = \frac{19\sqrt{2}}{8}.$$

4.5. ფუნქციონალის პირობითი ექსტრემუმის ამოცანები

ჩვენს მიერ განხილულ ამოცანებში, ვეძებდით სხვადასხვა სახის ფუნქციონალის ექსტრემუმებს, გარკვეული ტიპის სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში, თუმცა, მრავალი პრაქტიკული

ამოცანა დაიყვანება ისეთი ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანაზე, როცა დასაკმაყოფილებელია გარკვეული ტიპის დამატებითი პირობები. მაგალითად, დიდონის ამოცანის განხილვისას, საქმე გვექონდა ისეთი ფუნქციონალის მაქსიმიზაციის ამოცანასთან, რომელსაც უნდა ქონოდა მოცემული სიგრძის პერიმეტრი. ასეთ ამოცანებს, **იზოპერიმეტრულ** ამოცანებს უწოდებენ.

განვიხილოთ, სხვადასხვა ტიპის ვარიაციული ამოცანა შემოფარგვლის (ბმის) პირობების მიხედვით. ასეთ ამოცანებს, ფუნქციონალის პირობითი ექსტრემუმის ამოცანები ეწოდება, ხოლო ფუნქციონალს – მიზნის ფუნქციონალი.

4.5.1. ლაგრანჟის ამოცანა

ვთქვათ, გვაქვს ამოცანა: ვიპოვოთ (4.178) ფუნქციონალის ექსტრემუმები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (4.179) სასაზღვრო და (3.180) ბმის პირობებს, სადაც f და g_j ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია.

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (4.178)$$

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2. \quad (4.179)$$

$$g_j(x, y, y') = 0, \quad j = \overline{1, k}, \quad (k < n), \quad x \in [a, b]. \quad (4.180)$$

(4.178),(4.179),(4.180) ამოცანას ლაგრანჟის ამოცანას უწოდებენ.

თუ g_j ბმის ფუნქციები არა არიან დამოკიდებული y' ფუნქციაზე, მაშინ ასეთ ბმებს მექანიკაში ჰოლონომურ ბმებს უწოდებენ, ხოლო ვარიაციულ აღრიცხვაში – ფაზურ შემოფარგვლის პირობებს.

ჩამოვყალიბოთ ლაგრანჟის (4.178),(4.179),(4.180) ამოცანის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა. ვთქვათ, g_j ფუნქციების y' ცვლადების მიმართ იაკობის მატრიცის რანგი მაქსიმალურია და უდრის k -ს. მაშინ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ

$$\left| \frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_k)}{\partial(y'_1, y'_2, \dots, y'_k)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y'_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y'_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y'_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y'_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y'_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y'_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y'_1} & \frac{\partial g_k}{\partial y'_2} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial y'_k} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.181)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ შესაძლებელია y' ცვლადები ამოვხსნათ g_j დიფერენციალური (ან ალგებრული) განტოლებებიდან.

თეორემა: თუ $y^*(x) = (y_1^*(x), \dots, y_n^*(x)) \in C^1[a, b, \mathbb{R}^n]$ არის (4.178),(4.179),(4.180) ამოცანის ამონახსნი და ადგილი აქვს (4.181) პირობას, მაშინ $y^*(x)$ წარმოადგენს სპეციალური სახის

$$J^*[y] = \int_a^b f^* dx, \quad (4.182)$$

ფუნქციონალის ექსტრემალს, სადაც

$$f^* = f + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j, \quad (4.183)$$

f^* ფუნქციას, მოცემული ამოცანის ლაგრანჟიანი ეწოდება, ხოლო λ_j კოეფიციენტებს – ლაგრანჟის მამრავლები.

ამ თეორემიდან გამომდინარე, $n + k$ ცვლადების საპონვლად გვაქვს ამდენივე განტოლება. ესაა ეილერის n განტოლება:

$$\frac{d}{dx} (f^*)'_{y_j} - (f^*)'_{y_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4.184)$$

და k ბმის პირობები:

$$g_j(x, y, y') = 0, \quad j = \overline{1, k}, \quad (k < n), \quad x \in [a, b]. \quad (4.185)$$

მაგალითი.იპოვეთ უმოკლესი მანძილი ორ $A(1; -1; 0)$ და $B(2; 1; -1)$ წერტილს შორის $15x - 7y + z - 22 = 0$ ზედაპირზე.

ამოხსნა: როგორც ცნობილია, ორ $A(x_1, y_1, z_1)$ და $B(x_2, y_2, z_2)$ წერტილს შორის მანძილი $\varphi(x, y, z) = 0$ ზედაპირზე, გამოითვლება ფორმულით:

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} dx. \quad (4.186)$$

ჩვენი ამოცანის პირობებში: $x_1 = 1, x_2 = 2,$

$\varphi(x, y, z) = 15x - 7y + z - 22$. შევადგინოთ ლაგრანჟიანი:

$$f^* = \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} + \lambda(x)(15x - 7y + z - 22).$$

მაშინ გვექნება სპეციალური სახის ფუნქციონალი:

$$J^*[y, z] = \int_1^2 [\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} + \lambda(x)(15x - 7y + z - 22)] dx, \quad (4.187)$$

ამ ფუნქციონალისათვის ეილერის განტოლებებს აქვს სახე:

$$\lambda(x) \cdot (-7) - \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = 0, \quad (4.188)$$

$$\lambda(x) \cdot 1 - \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = 0. \quad (4.189)$$

(3.188),(3.189) განტოლებათა სისტემას უნდა მივუერთოთ ბმის განტოლება: $15x - 7y + z - 22 = 0$

და სასაზღვრო პირობები:

$$y(1) = -1, y(2) = 1, z(1) = 0, z(2) = -1. \quad (4.190)$$

გავამრავლოთ (4.189) განტოლება 7-ზე და დავუმატოთ (4.188) განტოლებას. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{d}{dx} \frac{y' + 7z'}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = 0 \quad \text{ანუ} \quad \frac{y' + 7z'}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = C_1. \quad (4.191)$$

ბმის განტოლების გაწარმოებით, მივიღებთ:

$z' = 7y' - 15$. თუ ამ მნიშვნელობას, შევიტანოთ (4.191) პირველ ინტეგრალში, მივიღებთ:

$y(x) = C_1x + C_2$. სასაზღვრო (4.190) პირობებიდან მივირებთ, რომ $C_1 = 2$ და $C_2 = -3$. მაშასადამე, $y(x) = 2x - 3$. მაშინ $z(x) = 1 - x$ და $\lambda(x) = 0$. მაშასადამე, საძიებელი მანძილი იქნება:

$$l = \int_1^2 \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} dx = \sqrt{6}.$$

მაგალითი. იპოვეთ მოცემული ფუნქციონალის

$$J[y_1, y_2] = \int_0^1 [(y_1'(x))^2 + 2y_1(x)y_2(x) + (y_2'(x))^2], \quad (4.192)$$

ექსტრემალი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_1(1) = e$, $y_2(1) = \frac{1}{e}$, $y_1 - y_2 - e^x + e^{-x} = 0$.

ამოხსნა: რადგან $f = (y_1'(x))^2 + 2y_1(x)y_2(x) + (y_2'(x))^2$ და

$g = y_1 - y_2 - e^x + e^{-x}$, ლაგრანჟის ფუნქციას ექნება სახე:

$$f^* = f + \lambda g = (y_1'(x))^2 + 2y_1(x)y_2(x) + (y_2'(x))^2 + \lambda(x)(y_1 - y_2 - e^x + e^{-x}).$$

ახლა შევადგინოთ შესაბამისი ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებები:

$$(f^*)'_{y_1} - \frac{d}{dx}(f^*)'_{y_1'} = 2y_2 + \lambda(x) - 2y_1'' = 0,$$

$$(f^*)'_{y_2} - \frac{d}{dx}(f^*)'_{y_2'} = 2y_1 - \lambda(x) - 2y_2'' = 0.$$

ვიპოვოთ ამ სისტემის ზოგადი ამონახსნი და $\lambda(x)$.

სისტემას მივუერთოთ ბმის განტოლებაც:

$y_1 - y_2 - e^x + e^{-x} = 0$. მაშინ ეილერის განტოლებების შეკრება მოგვცემს, რომ $y_1 + y_2 - (y_1'' + y_2'') = 0$. მაშინ $y_1 + y_2 = C_1e^x + C_2e^{-x}$, ასევე ბმის პირობიდან გვაქვს, რომ $y_1 - y_2 = e^x - e^{-x}$.

მაშასადამე, ექსტრემალებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$y_1(x) = \frac{C_1+1}{2}e^x + \frac{C_2-1}{2}e^{-x}, \quad y_2(x) = \frac{C_1-1}{2}e^x + \frac{C_2+1}{2}e^{-x}.$$

ხოლო $\lambda(x) = 2y_1(x) - 2y_2''(x)$.

მაგალითი. იპოვეთ მოცემული ფუნქციონალის ექსტრემალეები:

$$J[y_1, y_2] = \int_0^1 [(y_1(x))^2 + 2(y_1')^2 + (y_2')^2] dx,$$

თუ $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $y_1(1) = e + e^{-1}$, $y_2(1) = 2e - e^{-1}$ და გვაქვს დიფერენციალური ბმის განტოლება: $y_1' - y_2 = 0$.

ამოხსნა: ა) შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია. რადგან

$f = (y_1(x))^2 + 2(y_1')^2 + (y_2')^2$, $g = y_1' - y_2$, გვექნება ლაგრანჟის ფუნქცია: $f^* = f + \lambda g$, რომელიც ჩვენი ამოცანის პირობებში იქნება:

$$f^* = (y_1(x))^2 + 2(y_1')^2 + (y_2')^2 + \lambda(x)(y_1' - y_2).$$

ბ) ჩავწეროთ ეილერისა და ბმის განტოლებები:

$$(f^*)'_{y_1} - \frac{d}{dx}(f^*)'_{y_1'} = 2y_1(x) - 4y_1'' - \lambda'(x) = 0,$$

$$(f^*)'_{y_2} - \frac{d}{dx}(f^*)'_{y_2'} = -\lambda(x) - 2y_2'' = 0,$$

$$y_1' - y_2 = 0.$$

გ) ვიპოვოთ მიღებული სისტემის ზოგადი ამონახსნი. დავიწყოთ მესამე განტოლებიდან, $y_1' = y_2$, მაშინ $y_2'' = y_1'''$, $\lambda = -2y_2'' = -2y_1'''$, ე.ი. $\lambda' = -2y_1^{(4)}$ და მივირებთ განტოლებას:

$y_1^{(4)} - 2y_1'' + y_1 = 0$. მახასიათებელ განტოლებას აქვს ჯერადი ფესვები, ე.ი. ზოგად ამონახსნს ექნება სახე:

$$y_1 = (C_1 + C_2x)e^x + (C_3 + C_4x)e^{-x}. \text{ მაშინ, რადგან } y_2 = y_1',$$

$$y_2 = (C_1 + C_2x + C_2)e^x + (C_4 - C_3 + C_4x)e^{-x}.$$

ვ) სასაზღვრო პირობებიდან ვპოულობთ, რომ

დ) $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 1$ და $C_4 = 0$.

ამრიგად, მივიღეთ ექსტრემალები:

$$y_1(x) = xe^x + e^{-x} \text{ და } y_2(x) = (x+1)e^x - e^{-x}.$$

შესაბამისად, $\lambda(x) = -2(x+3)e^x + 2e^{-x}$.

4.5.2. მაიერის ამოცანა

განვიხილოთ მიზნის ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანა იმ შემთხვევისათვის, როცა ბმის განტოლებებს აქვთ ინტეგრალური განტოლებების სახე.

მასშასადაამე, გვაქვს მიზნის ფუნქციონალი:

$$J[\mathbf{y}] = \int_a^b f(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') dx, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (4.193)$$

სასაზღვრო პირობები:

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_1, \quad \mathbf{y}(b) = \mathbf{y}_2. \quad (4.194)$$

ბმის ინტეგრალური პირობები:

$$L_i = \int_a^b h_i(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') dx, \quad i = \overline{1, s}. \quad (4.195)$$

აქ იგულისხმება რომ, f, h_i ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია და (4.194) სასაზღვრო პირობები არ ეწინააღმდეგება ბმის პირობებს. (4.195) სახის ბმებს ინტეგრალურ (იზოპერიმეტრულ) ბმებს უწოდებენ.

P.S. იზოპერიმეტრული ამოცანები წარმოიშვა კლასიკური გეომეტრიული ამოცანის განზოგადების შედეგად, როცა ეძებდნენ მოცემული პერიმეტრის მქონე ბრტყელ ფიგურებს შორის, უდიდესი ფართობის მქონე ფიგურას.

იზოპერიმეტრული ამოცანები, შეგვიძლია დავიყვანოთ ლაგრანჟის ამოცანაზე, თუ შემოვიღებთ ახალ ფუნქციებს:

$$\psi_i(x) = \int_a^x h_i(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') dx, \quad i = \overline{1, s}. \quad (4.196)$$

მაშინ (4.195) ინტეგრალური ბმის პირობების ნაცვლად, გვექნება დიფერენციალური განტოლებების ფორმით ჩაწერილი ბმები:

$$\psi'_i(x) = h_i(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}'), \quad i = \overline{1, s}. \quad (4.197)$$

ამასთან ერთად, გვექნება დამატებითი სასაზღვრო პირობები:

$$\psi_i(a) = 0, \quad \psi_i(b) = L_i, \quad i = \overline{1, s}. \quad (4.198)$$

მაშასადამე, იზოპერიმეტრული ამოცანის ამოსახსნელად,

1. უნდა შევადგინოთ შესაბამისი სპეციალური სახის ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$f^*(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}') = f(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') + \sum_{j=1}^s \lambda_j \left(h_j(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') - \psi'_j(x) \right), \quad j = \overline{1, s}. \quad (4.199)$$

2. უნდა შევადგინოთ შესაბამისი ეილერის განტოლებები:

$$\frac{d}{dx} (f^*)'_{y'_j} - (f^*)'_{y_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4.200)$$

$$\frac{d}{dx} (f^*)'_{\psi'_j} - (f^*)'_{\psi_j} = 0, \quad j = \overline{1, s}. \quad (4.201)$$

რადგან (4.199)-დან გამომდინარე,

$$(f^*)'_{\psi_j} = 0 \quad \text{და} \quad (f^*)'_{\psi'_j} = -\lambda_j(x),$$

ცხადია, რომ (4.201)-ის მეორე განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{d}{dx} \lambda_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, s}. \quad (4.202)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\lambda_j(x)$ მუდმივი რიცხვებია. ე.ი. საკმარისია განვიხილოთ ეილერის (4.200) განტოლება.

3. ეილერის განტოლების ზოგადი ამონახსნის მუდმივები უნდა განვსაზღვროთ, (4.198) და (4.194) სასაზღვრო პირობებიდან.

თეორემა: თუ $y(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (4.194),(4.195) პირობებს და ექსტრემუმს ანიჭებს (4.193) ფუნქციონალს, მაშინ ის აკმაყოფილებს ეილერის (4.200) განტოლებებს ლაგრანჟის F^* ფუნქციისათვის, სადაც $F^* = f + \sum_{j=1}^s \lambda_j \left(h_j(x, y, y') \right)$, $j = \overline{1, s}$.

მაგალითი. იპოვეთ ფუნქციონალის ექსტრემალი, თუ

$J(y) = \int_0^1 (y')^2 dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = 6$ და გვაქვს ინტეგრალური ბმის პირობა: $\int_0^1 y(x) dx = 3$.

ამოხსნა: ჩვენი ამოცანის პირობებში: $f = (y')^2$, $h_j = y(x)$, $s = 1$. შესაბამისად, $F^* = (y')^2 + \lambda y(x)$.

1. შევადგინოთ ეილერის განტოლებები: $(F^*)'_y = \lambda$, $(F^*)'_{y'} = 2y'$ და $\frac{d}{dx} (F^*)'_{y'} = 2y''$. მაშინ, $(F^*)'_y - \frac{d}{dx} (F^*)'_{y'} = \lambda - 2y'' = 0$.

ე.ი. $y(x) = \frac{\lambda}{4} x^2 + C_1 x + C_2$.

2. მაშინ, ინტეგრალური ბმის პირობიდან, მივიღებთ, რომ $\int_0^1 y(x) dx = 3 \Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{\lambda}{4} x^2 + C_1 x + C_2 \right) dx = 3 \Rightarrow \left(\frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2} + C_2 = 3 \right)$.

3. განვსაზღვროთ C_1, C_2, λ მუდმივები, სასაზღვრო და ბმის პირობებიდან:

$$y(0) = C_2 = 1, y(1) = \frac{\lambda}{4} + C_1 + C_2 = 6, \frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2} + C_2 = 3.$$

ამ სისტემის ამონახსნია: $C_1 = 2, C_2 = 1$ და $\lambda = 12$.

მაშასადამე, საძიებელი ექსტრემალი იქნება:

$$y(x) = 3x^2 + 2x + 1.$$

მაგალითი. განვიხილოთ დიდონის ამოცანა, რომელიც იზოპერიმეტრულ ამოცანას წარმოადგენს.

$$J[y] = \int_{-a}^a y dx \rightarrow \max, y(-a) = y(a) = 0,$$

$$L = \int_{-a}^a \sqrt{1 + (y')^2} dx, L > 2a.$$

ამოხსნა: შევადგინოთ სპეციალური სახის ფუნქციონალი:

$$J^*[y] = \int_{-a}^a (y + \lambda \sqrt{1 + (y')^2}) dx \text{ და ჩავწეროთ შესაბამისი ეილერ-}$$

ლაგრანჟის განტოლება: $\lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \right) - 1 = 0$. ცხადია, რომ გვაქვს

პირველი ინტეგრალი: $\lambda \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} - x = C_1$ ანუ $\frac{\lambda^2 (y')^2}{1+(y')^2} = (x + C_1)^2$. ამ

განტოლებიდან ამოვხსნათ y' :

$y' = \pm \frac{x+C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x+C_1)^2}}$. ამ განტოლებას განცალკეადი ცვლადებით, აქვს

ამონახსნი: $y = \pm \sqrt{\lambda^2 - (x + C_1)^2} + C_2$, აქედან გამომდინარე, გვექნება რომ $(x + C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \lambda^2$. სასაზღვრო პირობებიდან

მივიღებთ, რომ $C_1 = 0$ და $\lambda^2 = C_2^2 + a^2$. მაშასადამე, წირის განტოლებას ექნება სახე: $x^2 + (y - C_2)^2 = C_2^2 + a^2$. წრეწირის წირის

სიგრძე უშუალოდ შეგვიძლია გამოვითვალოთ და მივიღებთ

$$\text{ფორმულას: } 2\sqrt{C_2^2 + a^2} \arcsin \frac{a}{\sqrt{C_2^2 + a^2}} = L, \text{ რომელიც } t = \frac{L}{2\sqrt{C_2^2 + a^2}}$$

აღნიშნით $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$ მიიყვანება ტრანსცენდენტულ განტოლებამდე:

$$L \sin t = 2at. \text{ ამ ამოცანის ამონახსნი } (0, \frac{\pi}{2}] \text{ უშუალოდში, მოგვცემს } C_2$$

მუდმივის პოვნის საშუალებას როცა $L \leq \pi a$.

თუ ლაგრანჟის ამოცანაში ინტეგრალურ (4.193) მიზნის ფუნქციას, შევცვლით ტერმინალური მიზნის ფუნქციით:

$$T[y] = T(y(a), y(b)), \tag{4.203}$$

სადაც $T(y_1, y_2)$ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, მაშინ მივიღებთ მაიერის ამოცანას.

4.5.3. ბოლცას ამოცანა

განვიხილოთ $J[y]$ ლაგრანჟის ფუნქციონალისაგან განსხვავებული ფუნქციონალი:

$$B[y] = J[y] + T[y], \quad (4.204)$$

შესაბამისი სასაზღვრო და შემოფარგვლის პირობებით:

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2. \quad (4.205)$$

$$g_j(x, y, y') = 0, \quad j = \overline{1, k}, \quad (k < n), \quad x \in [a, b]. \quad (4.206)$$

შესაბამისი (4.204) ფუნქციონალი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$B[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx + T(y(a), y(b)). \quad (4.207)$$

ამოცანას (4.205),(4.206),(4.207) ბოლცას ამოცანა ეწოდება, ხოლო (4.207) ფუნქციონალს – ბოლცას ფუნქციონალი.

ბოლცას ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობას აქვს სახე:

$$\delta B[y] = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right] dx + \frac{\partial T}{\partial y(a)} \delta a + \frac{\partial T}{\partial y(b)} \delta b = 0. \quad (4.208)$$

ინტეგრალქვეშა გამოსახულების მეორე წევრი გარდაექმნათ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულით:

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' dx = \delta y \cdot \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y dx. \quad (4.209)$$

მაშინ მივიღებთ ფორმულას:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \delta y dx + \delta a \left[\frac{\partial T}{\partial y(a)} - \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=a} \right] + \delta b \left[\frac{\partial T}{\partial y(b)} + \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=b} \right] = 0. \quad (4.210)$$

რადგან $y(x)$ ექსტრემალია, (4.210) ფორმულის პირველი შესაკრები ნულის ტოლია. მაშასადამე, ადგილი აქვს განტოლებას:

$$\delta a \left[\frac{\partial T}{\partial y(a)} - \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=a} \right] + \delta b \left[\frac{\partial T}{\partial y(b)} + \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=b} \right] = 0. \quad (4.211)$$

(4.211) განტოლება განვიხილოთ ნებისმიერი $\delta a \neq 0$ და $\delta b = 0$ ვარიაციებისათვის. მაშინ გვექნება $\frac{\partial T}{\partial y(a)} = \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=a}$.

ანალოგიურად, თუ $\delta a = 0$ და $\delta b \neq 0$, მაშინ $\frac{\partial T}{\partial y(b)} = -\frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=b}$.

მაშასადამე, გვაქვს თეორემა: ფუნქცია, რომელიც ბოლცას ფუნქციონალს ანიჭებს ექსტრემუმს, აუცილებლად უნდა აკმაყოფილებდეს ეილერის განტოლებებს და ტრანსვერსალობის პირობებს:

$$\frac{\partial T}{\partial y(a)} = \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=a}, \quad \frac{\partial T}{\partial y(b)} = -\frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=b}. \quad (4.212)$$

ამოცანა. ამოხსენით ბოლცას ამოცანა ფიქსირებული მარცხენა საზღვრით:

$$B[y] = \int_0^1 (y')^2 dx + 5y^2(1) \rightarrow \text{extr}, \quad y(0) = 1.$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $f = (y')^2$, მაშასადამე ეილერის განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$y(x) = C_1 x + C_2$. $y(0) = 1$ სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარე, მივიღებთ, რომ $C_2 = 1$. მარჯვენა საზღვარი მოძრაობს $x = 1$ წრფეზე, მაშინ ტრანსვერსალობის პირობას ექნება სახე:

$$(f'_{y'} + \frac{\partial T}{\partial y}) \Big|_{x=1} = (2y' + 10y)|_{x=1} = 2y'(1) + 10y(1) = 0. \quad (4.213)$$

ვიპოვოთ C_1 განტოლებიდან: $2C_1 + 10C_1 + 10 = 0$ ანუ $C_1 = -\frac{5}{6}$. მაშასადამე, მივიღებთ **ექსტრემალს**: $y(x) = -\frac{5}{6}x + 1$.

ამოცანა. ამოხსენით ბოლცას ამოცანა ფიქსირებული მარცხენა საზღვრით:

$$B[y_1, y_2] = \int_0^1 (y'_1 y'_2 + y_1 y_2) dx + y_1(1) + y_2(1) \rightarrow \text{extr},$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0.$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $f = y'_1 y'_2 + y_1 y_2$, $f'_{y'_1} = y'_2$, $f'_{y'_2} = y'_1$, $f'_{y_1} = y_2$, $f'_{y_2} = y_1$. $\frac{d}{dx} f'_{y'_1} = y''_2$, $\frac{d}{dx} f'_{y'_2} = y''_1$. ეილერის განტოლებებს ექნებათ სახე: $f'_{y'_1} - \frac{d}{dx} f'_{y'_1} = y'_2 - y''_2 = 0$, $f'_{y'_2} - \frac{d}{dx} f'_{y'_2} = y'_1 - y''_1 = 0$. ამ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნია:

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad y_2 = C_3 e^x + C_4 e^{-x}.$$

ტერმინალურ წევრს აქვს სახე: $T = y_1 + y_2$. შესაბამისად, ტრანსვერსალობის პირობებს აქვს სახე:

$$(f'_{y'_1} + \frac{\partial T}{\partial y_1}) \Big|_{x=1} = y'_2(1) + 1 = 0, \quad (f'_{y'_2} + \frac{\partial T}{\partial y_2}) \Big|_{x=1} = y'_1(1) + 1 = 0. \quad \text{სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარე, მივიღებთ, რომ } C_1 + C_2 = 0 \text{ და } C_3 + C_4 = 0. \text{ ე.ი. } C_1 = -C_2 \text{ და } C_3 = -C_4. \text{ თუ გავითვალისწინებთ ტრანსვერსალობის პირობებს: } y'_2(1) + 1 = 0 \text{ და } y'_1(1) + 1 = 0, \text{ მივიღებთ რომ } C_1 = -\frac{e}{e^2+1}, C_2 = \frac{e}{e^2+1}, C_3 = -\frac{e}{e^2+1}, C_4 = \frac{e}{e^2+1}.$$

შესაბამისად, მივიღეთ **ექსტრემალები**:

$$y_1(x) = y_2(x) = -\frac{e}{e^2+1} e^x + \frac{e}{e^2+1} e^{-x}.$$

ამოცანა. იპოვეთ ფუნქციონალის ექსტრემალები:

$$B[y] = \int_a^2 x^2 (y')^2 dx - 2y(1) + y^2(2) \rightarrow \text{extr.}$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში, ლაგრანჟის ფუნქცია ემთხვევა ფუნქციონალის ინტეგრანტს: $L = f = x^2 (y')^2$. ამ ფუნქციონალისათვის ეილერის განტოლებას ექნება სახე:

$f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} = 0$ ანუ $\frac{d}{dx} f'_{y'} = \frac{d}{dx} (2x^2 y') = 0$. აქედან გამომდინარე, $2x^2 y' = C$, მივიღებთ რომ $y' = -\frac{C_1}{x^2}$, მაშინ $y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2$. ამ მუდმივების საპოვნელად, გამოვიყენებთ ტრანსვერსალობის პირობებს:

$$\frac{\partial T}{\partial y(a)} = \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=a} \quad \text{ანუ} \quad -2 = 2x^2 y' \Big|_{x=1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y(b)} = -\frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=b} \quad \text{ანუ} \quad -2y \Big|_{x=2} = 2x^2 y' \Big|_{x=2}$$

აქედან მივიღებთ, რომ ზოგადი ამონახსნის მუდმივებია $C_1 = 1$ და $C_2 = \frac{1}{2}$. ე.ი. მოცემული ფუნქციონალის ექსტრემალს აქვს სახე:
 $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$.

4.6. ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები

ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა, რომ მისი პირველი ვარიაცია უნდა იყოს ნულის ტოლი. ეს ფაქტი არის მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობის განზოგადება. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა, ემყარება მეორე რიგის დიფერენციალის ყოფაქცევას კრიტიკული წერტილში. ანალოგიური სიტუაციაა ვარიაციულ აღრიცხვაშიც. განიხილება ფუნქციონალის მეორე ვარიაციის ცნება, რომელიც აზოგადებს მეორე რიგის დიფერენციალის ცნებას. ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები ემყარება მეორე ვარიაციის ყოფაქცევას საკვლევი ექსტრემალის გასწვრივ. ვარიაციულ აღრიცხვაში განასხვავებენ ძლიერი ექსტრემუმის ცნებას, რომლის დროსაც განიხილავენ უწყვეტ $C[a; b]$ ფუნქციათა სიმრავლეს და სუსტი ექსტრემუმის ცნებას, რომელიც ემყარება უწყვეტად დიფერენცირებადი $C^1[a; b]$ ფუნქციების სიმრავლეს.

4.6.1. სუსტი ექსტრემუმები

ისეთ $f: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ გადასახვას, რომელიც E წრფივი სივრცის ნებისმიერ (x, y) წყვილს შეუსაბამებს $f(x, y)$ რიცხვს, **ორადწრფივი ფორმა** ეწოდება, თუ ის წრფივია ორივე არგუმენტის მიმართ ანუ

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 f(x_1, y) + \alpha_2 f(x_2, y), \quad (4.214)$$

$$f(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 f(x, y_1) + \alpha_2 f(x, y_2). \quad (4.215)$$

ვარიაციულ აღრიცხვაში ორადწრფივ ფორმებს, **ორადწრფივი ფუნქციონალები** ეწოდება. თუ, ორადწრფივ $J[y, z]$ ფუნქციონალში არგუმენტებს გაგუტოლებთ, მივიღებთ $G[y] = J[y, y]$ ფუნქციონალს, რომელსაც **კვადრატული ფუნქციონალი** ეწოდება.

კვადრატულ $G[y]$ ფუნქციონალს ეწოდება **დადებითად განსაზღვრული**, თუ $G[y] > 0$ ნებისმიერი $y \neq 0$ ფუნქციისათვის და ეწოდება **არაუარყოფითად განსაზღვრული**, თუ $G[y] \geq 0$ ნებისმიერი $y \neq 0$ ფუნქციისათვის.

მაგალითი. $C[a, b]$ წრფივ ფუნქციონალურ სივრცეში, ნებისმიერი უწყვეტი $A(x)$ ფუნქციისათვის, ფუნქციონალი:

$$J[y, z] = \int_a^b A(x)y(x)z(x)dx \text{ ორადწრფივია, ხოლო თუ } y = z, \text{ მაშინ}$$

მივიღებთ კვადრატულ $G[y] = J[y, y] = \int_a^b A(x)(y(x))^2 dx$ ფუნქციონალს. $G[y]$ კვადრატული ფუნქციონალი არის დადებითად განსაზღვრული, თუ $A(x) > 0$ ნებისმიერი $x \in [a; b]$ რიცხვისათვის.

ვიტყვიტ რომ, ნორმირებულ წრფივ სივრცეზე განსაზღვრული $J[y]$ ფუნქციონალი ორჯერ დიფერენცირებადია y წერტილში, თუ ფუნქციონალის ნაზრდი:

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y], \quad (4.216)$$

შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Delta J = \delta J[y, \delta y] + \delta^2 J[y, \delta y] + o(\|\delta y\|^2), \quad (4.217)$$

სადაც $\delta^2 J[y, \delta y]$ არის კვადრატული ფუნქციონალი δy ვარიაციის მიმართ, ამ ფუნქციონალს y წერტილში განსაზღვრული $J[y]$ ფუნქციონალის **მეორე ვარიაცია** ეწოდება. $o(\|\delta y\|^2)$ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეა $\|\delta y\|^2$ სიდიდესთან შედარებით.

თეორემა: თუ $J[y]$ ფუნქციონალი ორჯერ დიფერენცირებადია y წერტილში და აქვს მინიმუმი, მაშინ $\delta^2 J[y, \delta y] \geq 0$, ხოლო აქვს მაქსიმუმი თუ $\delta^2 J[y, \delta y] \leq 0$ ნებისმიერი δy ვარიაციისათვის.

P.S. მეორე ვარიაციის არაუარყოფითად განსაზღვრულობა არის ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი, მაგრამ არა საკმარისი პირობა.

ვიტყვი, რომ ნორმირებულ წრფივ სივრცეში განსაზღვრული $G[y]$ კვადრატული ფორმა არის ძლიერად დადებითი, თუ არსებობს ისეთი $K > 0$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი y ფუნქციისათვის ადგილი აქვს $G[y] \geq K\|y\|^2$ უტოლობას.

P.S. სასრულ განზომილებიან შემთხვევაში, კვადრატული ფუნქციონალის წარმოდგენს კვადრატულ ფორმას, ხოლო კვადრატული ფუნქციონალის ძლიერად დადებითობა, განაპირობებს დადებითად განსაზღვრულობას, თუმცა, უსასრულო განზომილებიან შემთხვევაში ეს ასე არაა.

თეორემა: თუ, წრფივ ნორმირებულ სივრცეში განსაზღვრული, y^* წერტილში ორჯერ დიფერენცირებადი $J[y]$ ფუნქციონალისათვის, პირველი ვარიაცია $\delta J = 0$, ხოლო მეორე ვარიაცია $\delta^2 J[y, \delta y]$ ძლიერად დადებითია, მაშინ y^* წერტილში $J[y]$ ფუნქციონალს აქვს მინიმუმი.

4.6.2. ლეჟანდრისა და იაკობის თეორემები

თეორემა: ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანისათვის, თუ $J[y]$ ფუნქციონალი აღწევს მინიმუმს $y(x)$ ფუნქციაზე, მაშინ ადგილი აქვს ლეჟანდრის პირობას:

$$f_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \geq 0. \quad (4.218)$$

ეს პირობა გამომდინარეობს ფუნქციონალის ნაზრდის (4.216) წარმოდგენიდან. მართლაც, თუ გამოვიყენებთ ტეილორის ფორმულას ფუნქციონალის ნაზრდისათვის, მაშინ მივიღებთ რომ $\Delta J = \int_a^b (f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y') dx + \frac{1}{2} \int_a^b (f''_{yy} (\delta y)^2 + 2f''_{yy'} \delta y \delta y' + f''_{y'y'} (\delta y')^2) dx + o(\|\delta y\|^2)$.

ეს წარმოდგენა გვიჩვენებს, რომ მეორე ვარიაცია იქნება:

$$\delta^2 J[y, \delta y] = \frac{1}{2} \int_a^b (f''_{yy} (\delta y)^2 + 2f''_{yy'} \delta y \delta y' + f''_{y'y'} (\delta y')^2) dx. \quad (4.219)$$

თუ გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების მეთოდს და სასაზღვრო პირობებს, ფუნქციის δy ვარიაციისათვის, მივიღებთ რომ

$$2 \int_a^b f''_{yy'} \delta y \delta y' dx = \int_a^b f''_{yy'} d((\delta y)^2) = f''_{yy'} (\delta y)^2 \Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} f''_{yy'} \right) (\delta y)^2 dx =$$

$$= - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} f''_{yy'} \right) (\delta y)^2 dx.$$

მაშასადამე,

$$\delta^2 J[y, \delta y] = \int_a^b (Q(\delta y)^2 + P(\delta y')^2) dx, \quad (4.220)$$

სადაც

$$Q = \frac{1}{2} \left(f''_{yy} - \frac{d}{dx} f''_{yy'} \right), \quad P = \frac{1}{2} f''_{y'y'}.$$

$$(4.220) \text{ ფორმულაში, რადგან } |\delta y| \leq \int_a^x |\delta y'| dt \leq \max_{[a;b]} |\delta y'| (b-a),$$

ცხადია, რომ ინტეგრანტის მეორე წევრი არის მთავარი გაკლების მომხდენი, საერთო მნიშვნელობაზე ანუ $f''_{y'y'}$ ფუნქციის ნიშანი განაპირობებს მეორე ვარიაციის ნიშანს.

(4.220) ფუნქციონალისათვის შევადგინოთ ეილერის განტოლება, მაშინ მივიღებთ ამოცანას:

$$\frac{d}{dx} (Ph') - Qh = 0, \quad h(a) = h(b) = 0. \quad (4.221)$$

ამ განტოლებას აქვს ტრივიალური ამონახსნი: $h(x) \equiv 0$. თუმცა შესაძლებელია სხვა ამონახსნების არსებობაც.

თუ $\tilde{x} \in (a; b]$ არის ისეთი წერტილი, რომ $h(\tilde{x}) = 0$ და $h(x) \neq 0$ არცერთი წერტილისათვის $(a; \tilde{x})$ შუალედიდან, მაშინ \tilde{x} წერტილს a წერტილის შეუღლებული წერტილი ეწოდება.

განვიხილოთ ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანა:

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (4.222)$$

სადაც f ორჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციაა, ხოლო $y \in C^1[a; b]$. პირველი ვარიაციის ნულთან ტოლობა, გვაძლევს ექსტრემალების სიმრავლეს შემდგომი გამოკვლევისათვის, რომელიც ემყარება მეორე ვარიაციის გამოთვლას:

$$\delta^2 J[y, \delta y] = \int_a^b (Q(\delta y)^2 + P(\delta y')^2) dx. \quad (4.223)$$

$\delta^2 J[y, \delta y]$ კვადრატულ ფუნქციონალს წარმოადგენს. აქ

$$P = P(x) = \frac{1}{2} f''_{y'y'}(x, y(x), y'(x)),$$

$$Q = Q(x) = \frac{1}{2} \left(f''_{yy}(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f''_{yy'}(x, y(x), y'(x)) \right). \quad (4.224)$$

(4.223) ფუნქციონალისათვის ეილერის განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{d}{dx} (P\delta y') - Q\delta y = 0. \quad (4.225)$$

ამ განტოლებას $J[y]$ ფუნქციონალის იაკობის განტოლება ეწოდება. პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას შემოაქვთ აღნიშვნა $\delta y = h$ და შესაბამისად $\delta y' = h'$. მაშინ გვაქვს იაკობის განტოლება:

$$\frac{d}{dx} (Ph') - Qh = 0, \quad h(a) = h(b) = 0. \quad (4.226)$$

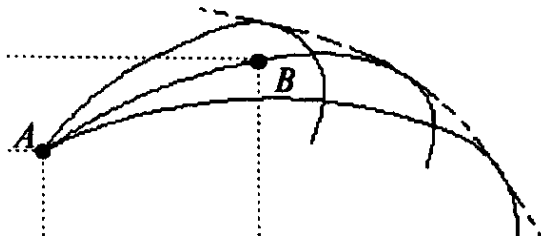
$\tilde{x} \in [a, b]$ წერტილს ეწოდება a წერტილის შეუღლებული $J[y]$ ფუნქციონალის აზრით, თუ ის შეუღლებულია $\delta^2 J[y, \delta y]$ კვადრატული ფუნქციონალის აზრით.

იაკობის განტოლება შეგვიძლია გადავწეროთ $J[y]$ ფუნქციონალის f ინტეგრანტის გამოყენებითაც:

$$\left(f''_{yy} - \frac{d}{dx} f''_{y'y}\right) h(x) - \frac{d}{dx} (f''_{y'y} h') = 0. \quad (4.227)$$

იაკობის პირობები: იაკობის განტოლება ძალაშია ისეთი ექსტრემალებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ ეილერის განტოლებას $J[y]$ ფუნქციონალისათვის, სასაზღვრო პირობებს და აქვთ არატრივიალური $h(x) \neq 0$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $h(a) = 0 \wedge (h(x) \neq 0, x \in (a, b])$ პირობებს.

იაკობის განტოლების პირობები განსაზღვრავს $y^*(x)$ ექსტრემალის ჩართვას *ექსტრემალების ცენტრალურ ველში*. **ექსტრემალების ცენტრალური ველი ეწოდება** ისეთი ექსტრემალების სიმრავლეს რომლებიც იკვეთებიან მხოლოდ ცენტრში და სხვა წერტილებში არ იკვეთებიან ნახ. 3.6.



ნახ. 4.6. ექსტრემალების ცენტრალური ველი

ექსტრემალების ცენტრალური ველი აღიწერება განტოლებით $y = y(x, C)$. ამ ექსტრემალთა ოჯახის ექსტრემალის რაიმე წერტილში გავლებული მხების $p(x, y)$ საკუთხო კოეფიციენტს, **ველის დახრილობა ეწოდება** შესაბამის წერტილში.

E ფუნქციას ეწოდება **ვაიერშტრასის ფუნქცია**, თუ ის მოიცემა ტოლობით:

$$E(x, y, y', p) = f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p) f'_p(x, y, p). \quad (4.228)$$

თეორემა (სუსტი მინიმუმის არსებობის საკმარისი პირობები):

$y^* \in C^1[a; b]$ ფუნქცია წარმოადგენს (4.222) ფუნქციონალის სუსტი ექსტრემუმის წერტილს, თუ ადგილი აქვს პირობებს:

- 1) $y(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს $J[y]$ ფუნქციონალის ექსტრემალს ანუ ამ ფუნქციისათვის, პირველი ვარიაცია ნულის ტოლია;
- 2) იაკობის პირობებს;
- 3) ამ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ლეჟანდრის გაძლიერებული პირობას: $P(x) = \frac{1}{2} f''_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \Big|_{y=y^*} > 0, x \in (a, b);$

ან

გაიერშტრასის პირობას: $E(x, y, y', p) \geq 0$ იმ (x, y) წერტილებისათვის, რომლებიც განლაგებულია ექსტრემალის სიახლოვეში და რომელთათვისაც y' ახლოსაა p დახრილობასთან;

P.S. თუ ამ თეორემაში ადგილი აქვს $E(x, y, y', p) \leq 0$ პირობას გაიერშტრასის ფუნქციისათვის, ან $f''_{y'y'} < 0$ ლეჟანდრის გაძლიერებულ პირობას, მაშინ გვაქვს სუსტი მაქსიმუმის არსებობის საკმარისი პირობები.

თეორემა (ძლიერი მინიმუმის არსებობის საკმარისი პირობები):
 $y^* \in C[a; b]$ ფუნქცია წარმოადგენს (4.222) ფუნქციონალის ძლიერი ექსტრემუმის წერტილს, თუ ადგილი აქვს პირობებს:

- 1) $y(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს $J[y]$ ფუნქციონალის ექსტრემალს ანუ ამ ფუნქციისათვის, პირველი ვარიაცია ნულის ტოლია;
- 2) იაკობის პირობებს;
- 3) ამ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ლეჟანდრის პირობას:

$$P(x) = \frac{1}{2} f''_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \geq 0, x \in (a; b),$$
 ნებისმიერი ექსტრემალისათვის;
 ან

გაიერშტრასის პირობას: $E(x, y, y', p) \geq 0$ იმ (x, y) წერტილებისათვის, რომლებიც განლაგებულია ექსტრემალის სიახლოვეში და რომელთათვისაც y' ნებისმიერია;

P.S. თუ ამ თეორემაში ადგილი აქვს $E(x, y, y', p) \leq 0$ პირობას, გაიერშტრასის ფუნქციისათვის, ან $f''_{y'y'} < 0$ ლეჟანდრის პირობას, მაშინ გვაქვს ძლიერი მაქსიმუმის არსებობის საკმარისი პირობები.

მაგალითი. იპოვეთ ფუნქციონალის ექსტრემუმი, თუ

$$J[y] = \int_1^2 (y' + 2(y')^3) dx, y(1) = 2, y(2) = 6. \quad (4.229)$$

ამოხსნა: ა) ვიპოვოთ ამ ფუნქციონალის y^* ექსტრემალები. ამისათვის ჩავწეროთ შესაბამისი ეილერის განტოლება. რადგან ინტეგრანტი $f = y' + 2(y')^3$ არაა დამოკიდებული x, y ცვლადებზე, მისი ეილერის განტოლება იქნება: $y'' = 0$ ანუ $y = C_1 x + C_2$.

ბ) სასაზღვრო პირობებიდან მივიღებთ, რომ

$$y(1) = C_1 + C_2 = 2,$$

$$y(2) = 2C_1 + C_2 = 6.$$

მაშასადამე, $C_1 = 4$ და $C_2 = -2$. შესაბამისად, მივიღეთ ექსტრემალი $y^*(x) = 4x - 2$.

შევამოწმოთ ძლირი ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები.

გ) იაკობის პირობები:

შევადგინოთ იაკობის (4.227) განტოლება:

$$\left(f''_{yy} - \frac{d}{dx}f''_{y'y}\right)h(x) - \frac{d}{dx}(f''_{y'y'}h') = 0.$$

ჩვენი ფუნქციონალისათვის: $y' = 4$, $f''_{yy} = 0$, $f''_{y'y} = 0$, $f''_{y'y'}|_{y=y^*} =$

$12y'|_{y=y^*} = 48$. მაშინ, იაკობის განტოლებას ექნება სახე: $\frac{d}{dx}(48h') = 0$ ანუ $h''(x) = 0 \Rightarrow h(x) = Ax + B$. იმ პირობიდან, რომ $h(a) = h(1) = 0$ გამომდინარეობს $A + B = 0$ ანუ $A = -B$. მაშინ გვექნება, რომ $h(x) = Ax + B \Rightarrow h(x) = A(x - 1)$. არატრივიალური იქნება ეს ამონახსნი თუ $A \neq 0$. მაში ტრივიალური იქნება მხოლოდ როცა $x = 1$, ხოლო თუ $x \in (1; 2]$ ის არაა ნული. მაშასადამე, იაკობის პირობები სრულდება.

დ) რადგან ინტეგრანტი სამჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციაა, ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ლეჟანდრის პირობა. ცხადია, რომ $f''_{y'y'} = 12y'$. ეს ფუნქცია კი ნიშანცვლადია, ამიტომ შესასწავლი ფუნქციონალის ძლირი მაქსიმუმის ან ძლიერი მინიმუმის საკითხი ღიაა.

შევისწავლოთ ახლა სუსტი ექსტრემუმის არსებობის საკითხი:

ა) იაკობის პირობები სრულდება;

ბ) გაძლიერებული ლეჟანდრის პირობა გვაძლევს, რომ

$$f''_{y'y'}|_{y=y^*} = 12y'|_{y^*(x)=4x-2} = 12 \cdot 4 = 48 > 0.$$

რაც იმის მანიშნებელია, რომ $y^*(x) = 4x - 2$ ექსტრემალზე ჩვენი ფუნქციონალი აღწევს სუსტ მინიმუმს:

$$\min J[y^*] = \int_1^2 (4 + 2 \cdot 4^3) dx = 132.$$

მაგალითი. იპოვეთ ფუნქციონალის ექსტრემუმი, თუ

$$J[y] = \int_0^1 (y^2 + (y')^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \quad (4.230)$$

ამოხსნა: ამ ფუნქციონალის ინტეგრანტი $f = y^2 + (y')^2$ არაა დამოკიდებული x ცვლადზე. მისთვის ეილერის განტოლების ამონახსნს აქვს სახე: $y^*(x) = \frac{e}{e^2-1}e^x + \frac{e}{1-e^2}e^{-x}$.

შევამოწმოთ ძლიერი ექსტრემუმის პირობები:

ა) შევადგინოთ იაკობის განტოლება:

$$\left(f''_{yy} - \frac{d}{dx}f''_{y'y}\right)h(x) - \frac{d}{dx}(f''_{y'y'}h') = 0.$$

ამისათვის გამოვთვალოთ შესაბამისი წარმოებულები: $f''_{yy} = 2$, $f''_{y'y} = 0$, $f''_{y'y'} = 2$. მაშინ იაკობის განტოლება მიიღებს სახეს;

$2h - 2h'' = 0$ ანუ $h'' - h = 0$. მასასადაამე, $h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. საწყისი პირობიდან $h(0) = 0$ ე.ი. $C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$ ანუ $h(x) = C_1 e^x - C_1 e^{-x} = C_1 (e^x - e^{-x})$. ცხადია, რომ თუ $C_1 \neq 0$ მაშინ $h(x) \neq 0, x \in (0; 1]$, რაც იმას ნიშნავს, რომ იაკობის პირობები სრულდება.

ბ) ინტეგრანტი სამჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციაა y' -ის მიმართ, ამიტომ შეგვიძლია შევამოწმოთ ლეჟანდრის პირობა: $f_{y'y'} = 2 > 0$ ნებისმიერი y' ფუნქციისათვის, მაშასადამე

$y^*(x) = \frac{e}{e^2-1} e^x + \frac{e}{1-e^2} e^{-x}$ ექსტრემალი მოცემული ფუნქციონალის ძლიერი მინიმუმის და მაშასადამე სუსტი მინიმუმის წერტილიცაა.

მაგალითი. იპოვეთ ფუნქციონალის ექსტრემუმი, თუ

$$J[y] = \int_{-1}^0 (12xy - (y')^2) dx, \quad y(-1) = 1, \quad y(0) = 0. \quad (4.231)$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში, გვაქვს ინტეგრანტი: $f = 12xy - (y')^2$.

ადვილი საპოვნელია შესაბამისი ეილერის განტოლების ამონახსნი: $y^*(x) = -x^3$. შევამოწმოთ ძლიერი ექსტრემუმის არსებობის პირობები:

ა) შევადგინოთ შესაბამისი იაკობის განტოლება:

$$\left(f_{yy}'' - \frac{d}{dx} f_{y'y}'' \right) h(x) - \frac{d}{dx} (f_{y'y}'' h') = 0$$

ჩვენი ინტეგრანტისათვის: $f_{yy}'' = 0, \quad f_{y'y}'' = 0, \quad f_{y'y'}'' = -2$.

მაშასადამე, $\frac{d}{dx} (2h') = 0 \Rightarrow h' = C_1 \Rightarrow h(x) = C_1 x + C_2$. სასაზღვრო პირობიდან $h(-1) = -C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = C_1$. ე.ი. $h(x) = C_1 (x + 1)$. ცხადია, რომ თუ $C_1 \neq 0$ მაშინ $h(x) \neq 0, x \in (-1; 0]$. რაც იმას ნიშნავს, რომ იაკობის პირობები შესრულებულია.

ბ) ინტეგრანტი სამჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციაა y' -ის მიმართ, ამიტომ შეგვიძლია შევამოწმოთ ლეჟანდრის პირობა: $f_{y'y'}'' = -2 < 0$ ნებისმიერი y' ფუნქციისათვის, მაშასადამე

$y^*(x) = -x^3$ ექსტრემალი ძლიერი მაქსიმუმის წერტილია მოცემული ფუნქციონალისათვის და $\max J[y^*] = \int_{-1}^0 (-12x^4 - 9x^4) dx = -\frac{21}{5}$

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. იპოვეთ მანძილი $y_1(x) = x^2$ და $y_2(x) = x^3$ ფუნქციებს შორის:

ა) $C[0; 1]$ ნორმით, ბ) $C^1[0; 1]$ ნორმით.

2. იპოვეთ $C^1[a; b]$ ბანახის სივრცეში განსაზღვრული ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია:

ა) $J[y] = \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + y^2} dx$; ბ) $J[y] = \int_{-1}^1 (y' e^y + x y^2) dx$;

გ) $J[y] = \int_0^\pi y' \sin y dx$; დ) $J[y] = \int_0^1 (xy + (y')^2) dx + y^2(0)$.

3.იპოვეთ ფრემეს და გატოს დიფერენციალი შემდეგი ფუნქციონალებისათვის:

ა) $J[y] = \int_a^b (x + y) dx$; ბ) $J[y] = \int_a^b (y^2 - (y')^2) dx$;

გ) $J[y] = y^2(0) + \int_0^1 (2xy + 3(y')^2) dx$;

დ) $J[y] = \int_a^b L(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$.

3.იპოვეთ მოცემული ვარიაციული ამოცანის ექსტრემალები:

ა) $J[y] = \int_0^1 ((y')^2 + 12xy) dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$;

ბ) $J[y] = \int_\pi^{2\pi} (4(y')^2 - 7yy' - y^2) dx$, $y(\pi) = 0$, $y(2\pi) = 0$;

გ) $J[y] = \int_0^1 (y')^2 e^{\cos y'} dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = -4$;

დ) $J[y] = \int_0^1 ((y')^2 - x^6 y' - 2xy) dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = -\frac{1}{6}$;

4.სიბრტყეზე მდებარე ორი (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილის შემავრთებელ წირებს შორის, ვიპოვოთ ისეთი წირი, რომელიც აბსცისთა ღერძის გარშემო ბრუნვისას, შემოწერს უმცირესი ფართობის ზედაპირს.

5.ახვევით, რომ ნებისმიერი $y'' = \varphi(x, y, y')$ სახის დიფერენციალური განტოლებისათვის, რომლის მარჯვენა მხარეც ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, შესაძლებელია ისეთი $L(x, y, y')$ ფუნქციის პოვნა, რომ მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნები, იქნებიან $J[y] = \int_a^b L(x, y, y') dx$ ფუნქციონალის ექსტრემალები.

6.იპოვეთ მოცემული ფუნქციონალების ექსტრემალები:

ა) $J[y_1, y_2] = \int_1^3 (x(y_1')^2 (y_2')^2 + xy_1 y_2) dx$, $y_1(1) = 1$, $y_1(3) = \ln 3 + 1$, $y_2(1) = 0$, $y_2(3) = 0$.

ბ) $J[y_1, y_2] = \int_0^\pi (2y_1 - 4y_2^2 + (y_2')^2 - (y_1')^2) dx$, $y_1(0) = 0$, $y_1(\frac{\pi}{4}) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_2(\frac{\pi}{4}) = 1$.

გ) $J[y_1, y_2] = \int_0^1 ((y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1) dx$, $y_1(0) = 1$, $y_1(1) = 1.5$, $y_2(0) = 1$, $y_2(1) = 1$.

დ) $J[y_1, y_2] = \int_0^3 \sqrt{1 + (y_1')^2 + (y_2')^2} dx$, $y_1(0) = 1$, $y_1(3) = 7$, $y_2(0) = -2$, $y_2(3) = 1$.

7.იპოვეთ მოცემული ფუნქციონალების ყველა ექსტრემალი:

ა) $J[y] = \int_0^1 (120xy - y'') dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y'(0) = 0$, $y'(1) = 6$;

ბ) $J[y] = \int_0^b ((y')^2 + (y'')^2) dx$, $y(0) = 0$, $y(b) = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(b) = 0$;

გ) $J[y] = \int_0^1 ((y''')^2 - (y'')^2) dx$, $y(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y'(1) = ch1$, $y(1) = y''(1) = sh1$;

დ) $J[y] = \int_0^1 (y''')^2 dx$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 4$,

$$y''(1) = 12;$$

8. მოცემული ფუნქციონალებისათვის შეადგინეთ ეილეროსტროგრაფის განტოლება:

ა) $J[z] = \iint \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$, სადაც ინტეგრება ხორციელდება ბრტყელ $D \subset \mathbb{R}^2$ არეზე;

ბ) $J[u] = \iiint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2uf(x, y, z) \right] dx dy dz$, სადაც ინტეგრება ხორციელდება სამგანზომილებიან $D \subset \mathbb{R}^3$ არეზე.

9. ვთქვათ მოცემული $F(x, y, p)$ და $H(x, y, p)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ პირობებს: $F'_x \neq 0$ და $H'_x \neq 0$. დაამტკიცეთ, რომ თუ $H(x, y, p)$ რომელიმე ვარიაციული ამოცანის ჰამილტონიანია, მაშინ ეილერის განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ინტეგრალური წირისათვის ადგილი აქვს განტოლებას:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + [F, H].$$

9. იპოვეთ მოძრავ საზღვრებიანი ფუნქციონალების ექსტრემალები:

ა) $\int_0^b (y')^2 dx \rightarrow \text{extr}$, $y(0) = 0$, $y(b) + b + 1 = 0$;

ბ) იპოვეთ უმოკლესი მანძილი $y = x^2$ და $y = x - 5$ ფუნქციის გრაფიკებს შორის სიბრტყეზე;

გ) $J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \rightarrow \text{extr}$, მარცხენა საზღვარი a მოძრაობს $y = \varphi(x) = x^2$ პარაბოლაზე, ხოლო მარჯვენა საზღვარი b — $y = \psi(x) = x$ წრფეზე;

10. ამოხსენით პირობითი ექსტრემუმის ამოცანები ფუნქციონალებისათვის:

ა) $J[y, z] = \int_0^1 y' z' dx$, $y(0) = y(1) = z(0) = 0$, $z(1) = 1$, $\int_0^1 xy dx = 0$, $\int_0^1 xz dx = 0$;

ბ) $J[y, z] = \int_0^1 ((y')^2 + (z')^2) dx$, $y(0) = y(1) = z(0) = z(1) = 0$, $\int_0^1 yz dx = -2$;

გ) $J[y] = \int_0^\pi y \sin x dx \rightarrow \text{extr}$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = \pi$, $\int_0^\pi (y')^2 dx = \frac{3\pi}{2}$.

11. გამოიკვლიეთ ექსტრემუმზე ფუნქციონალები:

ა) $J[y] = \int_0^a ((y')^2 + 2yy' - 16y^2) dx$, $y(0) = 0$, $y(a) = 0$, $a > 0$;

ბ) $J[y] = \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx$, $y(1) = 3$, $y(2) = 5$;

გ) $J[y] = \int_0^1 ((y')^2 + y^2 + 2ye^{2x}) dx$, $y(0) = \frac{1}{3}$, $y(1) = \frac{1}{3}e^2$;

დ) $J[y] = \int_0^1 (x^2 + \varepsilon(y')^2 + y^2) dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. გამოიკვლიეთ ε პარამეტრის მიხედვით.

ლიტერატურა

1. **Васильков Ю.В., Василькова Н.Н.** Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании, уч. пос., финансы и статистика, М., 1999,
2. **Охорзин В.А.** Прикладная математика в системе Mathcad, уч. пос., изд. „Лан“, СПб, 2008,
4. **Пантелеев А.Б., Летова Т.А.** Методы оптимизации в примерах и задачах, уч. пос., М, 2005,
5. **Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И.** Вариационное исчисление, Наука, М., 1973,
6. **Эльсгольц Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, учебник МГУ им. М.В. Ломоносова, М., 1958,
7. **Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н.** Вариационное исчисление и оптимальное управление, учебник для вузов, изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, М, 2006,
8. **Пантелеев А.В.** Вариационное исчисление в примерах и задачах, уч. пос., МАИ, М., 2000.
9. **ფრანგიშვილი ა., ოზგაძე თ., ჯიბლაძე ნ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., მოსაშვილი ი.** ბეგრამდელი თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ოპტიმიზაცია, მონოგრაფია, თბილისი, 2009.
10. **ოზგაძე თ.** მათემატიკური მოდელირება, მონოგრაფია, თბილისი, 2016.
11. **ოზგაძე თ.** ჰიდროდინამიკის სტაციონარული ამოცანების ამოხსნა რვაჩოვ-ოზგაძის RO - მეთოდის ბაზაზე, მონოგრაფია, თბილისი, 2017.
12. **ოზგაძე თ., ფრანგიშვილი ა., კემულარია ო., რაშოიანი მ., ვარიაციული მეთოდები,** მონოგრაფია, თბილისი, 2019.
13. **ოზგაძე თ., ფრანგიშვილი ა.** უწყვეტ გარემოთა დინამიკის მათემატიკური მოდელირება, მონოგრაფია, თბილისი, 2019.
14. **ოზგაძე თ., ფრანგიშვილი ა., ყულოშვილი ნ.** წყალ-ტალახოვანი სელური ნაკადის დინამიკის მათემატიკური მოდელირება, მონოგრაფია, თბილისი, 2020.

V თავი. დინამიკური სისტემების კვლევის გეომეტრიული მეთოდები

დინამიკური სისტემის ფაზურ სივრცეში გამოკვლევა, საშუალებას იძლევა, სისტემის ანალიზურად ამოუხსნელად იქნას შესწავლილი, ამ სისტემის ამონახსნების ძირითადი თვისებები: განსაკუთრებული წერტილები, ბიფურკაციები, ზღვართი ციკლები და ა.შ. განსაკუთრებულად ხელსაყრელია ფაზური სივრცის ცნება იმ შემთხვევაში, როცა ცვლადების რიცხვია ორი და მაშასადამე, ფაზური სივრცე ფაზურ სიბრტყეს წარმოადგენს.

5.1. წრფივი დინამიკური სისტემების ფაზური ტრაექტორიების აგების ალგორითმი

განვიხილოთ წრფივი დინამიკური სისტემა:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad (5.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy, \quad (5.2)$$

1. ამ დინამიკური სისტემის შესასწავლად, უნდა ამოვიწეროთ სისტემის კოეფიციენტების მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

ვიპოვოთ ამ მატრიცის კვალი და დეტერმინანტი:

$$\text{tr}A = a + d; \quad \det A = ad - bc; \quad (5.4)$$

2. ცხრილი 5.1 მიხედვით, დავადგინოთ განსაკუთრებული წერტილის (0;0) ტიპი;

ცხრილი 5.1

$\det A > 0$	$\text{tr}A < 0$	$\det A < \frac{(\text{tr}A)^2}{2}$	მდგრადი კვანძი
$\det A > 0$	$\text{tr}A < 0$	$\det A > \frac{(\text{tr}A)^2}{2}$	მდგრადი ფოკუსი
$\det A > 0$	$\text{tr}A > 0$	$\det A < \frac{(\text{tr}A)^2}{2}$	არამდგრადი კვანძი
$\det A > 0$	$\text{tr}A > 0$	$\det A > \frac{(\text{tr}A)^2}{2}$	არამდგრადი ფოკუსი
$\det A < 0$	ჰიპერბოლური-უნაგირა წერტილი		
$\det A > 0$	$\text{tr}A = 0$	ცენტრი	

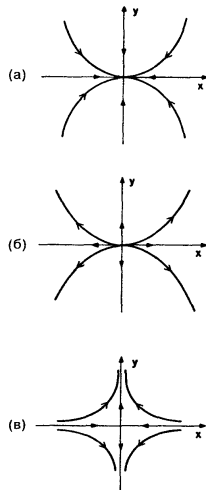
3. ვიპოვოთ განსაკუთრებული მიმართულებები:

$$\frac{dx}{dt} = 0; \quad \frac{dy}{dt} = 0. \quad (5.5)$$

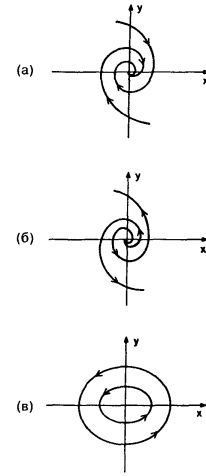
$$y = -\frac{a}{b}x; \quad y = -\frac{c}{d}x. \quad (5.6)$$

4. თუ, განსაკუთრებული წერტილი კვანძია ან უნაგირა წერტილი, მაშინ ვპოულობთ ასიმპტოტებს ჩასმით $y = kx$;
 5. ვპოულობთ ფაზური ტრაექტორიების მიმართულებებს.

განსაკუთრებული წერტილების მახლობლობაში, ორი ცვლადის მქონე დინამიკური სისტემის ფაზურ ნაკადს, შეიძლება ქონდეს ერთ-ერთი სახე ნახ.5.1 და ნახ.5.2-დან:



ნახ.5.1. ლოკალური ფაზური ნაკადები
 ა) მდგრადი კვანძი; ბ) არამდგრადი კვანძი;
 გ) ჰიპერბოლური (უნაგირა) წერტილი.



ნახ.5.2. ლოკალური ფაზური ნაკადები
 ა) მდგრადი ფოკუსი; არამდგრადი
 ბ) ფოკუსი; გ) ცენტრი.

კვლევის ეს სქემა ძალაშია, ზოგადად, ყველა წრფივი ავტონომიური სისტემისათვის

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i=\overline{1,n}. \quad (5.7)$$

ამ შემთხვევაში,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad trA = \sum_{i=1}^n a_{ii}. \quad (5.8)$$

განვიხილოთ პრაქტიკული მაგალითი:

1. ვთქვათ, მოცემულია დინამიკური სისტემა

$$y' = \frac{2x+y}{3x+4y}. \quad (5.9)$$

გადავწეროთ სისტემა ნორმალური სახით

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 4y; \quad (5.10)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + y. \quad (5.11)$$

სისტემის კოეფიციენტების მატრიცას აქვს სახე:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

$$\det A = -5; \quad \operatorname{tr} A = 4$$

2. რადგან (5.10)-(5.11) სისტემის დეტერმინანტი უარყოფითია, ცხრილი 5.1 გვადლევს, რომ განსაკუთრებული (0;0) წერტილი ჰიპერბოლური- უნაგირის ტიპს მიეკუთვნება;

3. განსაკუთრებულ მიმართულებებს მივიღებთ (5.10) და (5.11) განტოლებების მარჯვენა მხარეების ნულთან გატოლებით და ამოხსნით y ცვლადის მიმართ:

$$y = -\frac{3}{4}x; \quad y = -2x. \quad (5.13)$$

პირველ წრფეს ფაზური ტრაექტორიები კვეთენ ვერტიკალური მიმართულებით, ხოლო მეორეს ჰორიზონტული მიმართულებით.

4. ვპოულობთ ასიმპტოტებს:

$$k = \frac{2x+kx}{3x+4kx} = \frac{2+k}{3+4k}; \quad (5.14)$$

ამ ტოლობიდან ვიღებთ კვადრატულ განტოლებას

$$4k^2 + 2k - 2 = 0, \text{ ანუ, } 2k^2 + k - 1 = 0. \quad (5.15)$$

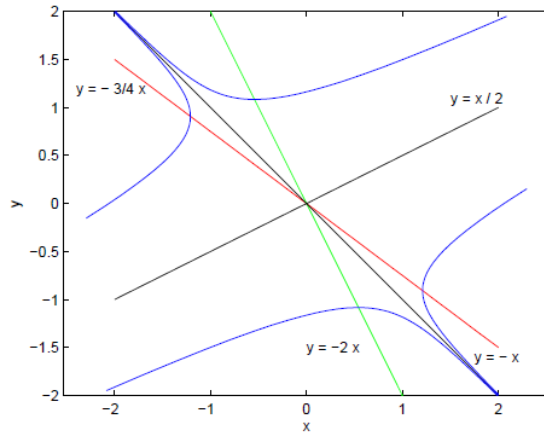
ამ განტოლების ფესვებია $k_1 = -1$, $k_2 = \frac{1}{2}$. რაც იმას ნიშნავს რომ გვაქვს ასიმპტოტები: $y = -x$ და $y = \frac{1}{2}x$.

5. ეხლა განვსაზღვროთ ფაზური ტრაექტორიების მიმართულებები (ნახ.5.3) ამისათვის ავიღოთ რაიმე წერტილი ასიმპტოტზე,

მაგალითად (1;-1) და გამოვითვალოთ y' ამ წერტილში (5.9) ფორმულიდან გამომდინარე

$$y' = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1)} = -1 < 0,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ფუნქცია y კლებადია x -ის ზრდისას და უახლოვდება განსაკუთრებულ (0;0) წერტილს.



ნახ.5.3. უნაგირის ტიპის განსაკუთრებული წერტილის ფაზური ტრაექტორიები

5.2. ფაზური ტრაექტორიები და ფაზური პორტრეტი

დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნის შესახებ ყველაზე სრულ ინფორმაციას იძლევა მისი გამოკვლევა ფაზურ სიბრტყეზე. ორი x და y ცვლადი, საშუალებას გვაძლევს, შევისწავლოთ (5.1),(5.2) სისტემის ამონახსნის ყოფაქცევა - ფაზურ სივრცეში და რადგან ცვლადების რაოდენობა ორია, ფაზური სივრცე წარმოადგენს ფაზურ სიბრტყეს.

იმ შემთხვევაში, თუ, საქმე გვაქვს n პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების სისტემასთან (5.7), ან უფრო ზოგად, არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემასთან

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n} \quad (5.16)$$

მაშინ თითოეული x_1, x_2, \dots, x_n ცვლადებიდან, შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც n განზომილებიანი ფაზური სივრცის დამოუკიდებელი ცვლადი. ფაზური სივრცის ცნებას აზრი აქვს ნებისმიერი დიფერენციალური განტოლებისათვის, თუმცა, როგორც დავინახავთ, მას განსაკუთრებულად მდიდარი გეომეტრიული სტრუქტურა აქვს ჰამილტონური სისტემებისათვის.

მოცემული მომენტისათვის, ფაზური x და y კოორდინატების ნებისმიერი მნიშვნელობა ფაზურ სიბრტყეზე, მთლიანად განსაზღვრავს (5.1),(5.2) სისტემის მდგომარეობას, დროის ამ მომენტისათვის. როგორც წესი, ამ სისტემის ნებისმიერ ამონახსნს, ფაზურ სიბრტყეზე შეესაბამება გლუვი წირი, რომელსაც **ფაზურ ტრაექტორიას** (ან დონის წირს) უწოდებენ. ხოლო ამ ტრაექტორიის გასწვრივ მოძრაობას - **ფაზურ ნაკადს** ეძახიან. რადგან დიფერენციალური განტოლებების ფუნდამენტური თვისებაა, ამონახსნის ცალსახა ხასიათი, ნათელია, რომ სხვადასხვა ფაზური ტრაექტორიები არ იკვეთებიან.

თუ, ერთ ნახაზზე დავიტანთ, სხვადასხვა საწყისი პირობების შესაბამის ფაზურ ტრაექტორიებს, მაშინ მივიღებთ მოცემული სისტემის ფაზური ტრაექტორიებისაგან შემდგარ რთულ სურათს, რომელსაც სისტემის **ფაზურ პორტრეტს** უწოდებენ. განვიხილოთ მაგალითები:

1. განვიხილოთ თავისუფალი რხევითი სისტემა-წრფივი ოსცილატორი (ამ სახით რხევითი სისტემის წარმოდგენა ხელსაყრელია ჰამილტონური სისტემებისათვის, რომლებსაც შემდგომში დაწვრილებით განვიხილავთ):

$$\dot{x} = y, \tag{5.17}$$

$$\dot{y} = -\omega^2 x. \tag{5.18}$$

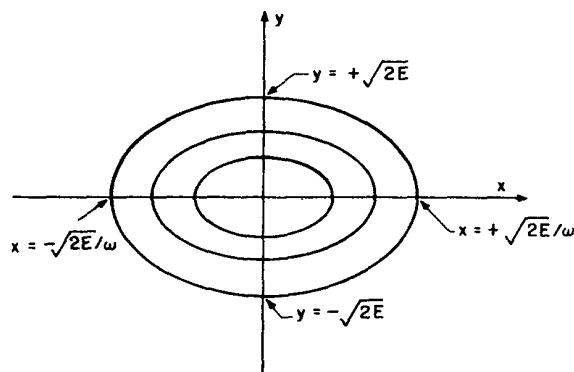
გავამრავლოთ (5.17) განტოლების ორივე მხარე $\omega^2 x$ გამოსახულებაზე, ხოლო (5.18) განტოლების ორივე მხარე y -ზე. მიღებული შედეგები შევკრიბოთ, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$y\dot{y} + \omega^2 x\dot{x} = 0. \quad (5.19)$$

იმისათვის, რომ გავარკვიოთ ფაზური ტრაექტორიებისა და ნაკადის სახე, განვიხილოთ, ამ სისტემის პირველი ინტეგრალი. ჩვენი სისტემის შემთხვევაში, ის ადვილად მიიღება (5.19) განტოლების ინტეგრებით

$$E = \frac{1}{2}(y^2 + \omega^2 x^2). \quad (5.20)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ეს ინტეგრალი სისტემის მექანიკურ ენერგიას წარმოადგენს. პირველი ინტეგრალი (5.20) საშუალებას გვაძლევს, ფაზური x და y კოორდინატების სიბრტყეში, წარმოვადგინოთ სისტემის ფაზური პორტრეტი, რომლის თითოეული ფაზური ტრაექტორია ელიფსია და ნახევარღერძების სიდიდე, დამოკიდებულია საწყის პირობებზე, რომლებიც განსაზღვრავენ სისტემის ენერგიის სიდიდეს. ხოლო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები კი, ადვილად განისაზღვრება (5.20) თანადობიდან ნახ.5.4.



5.4. თავისუფალი რხევითი სისტემის ფაზური პორტრეტი

თავისუფალი რხევითი სისტემის ფაზური ნაკადი, შემოსაზღვრულია ფაზურ სივრცეში, სისტემის საწყისი ენერგიის შესაბამისი ელიფსური ფაზური ტრაექტორიით. ფაზური ნაკადი, წარმოადგენს კონცენტრული ელიფსების ერთობლიობას, რომლებიც ფაზურ სივრცეში განლაგებული არიან განსაკუთრებული წერტილის $(0;0)$ გარშემო. განსაკუთრებული წერტილი ამ ელიფსების ცენტრს წარმოადგენს. ჩაკეტილი ფაზური ტრაექტორიები ფაზურ სიბრტყეში,

შეესაბამება პერიოდულ რხევებს. ასეთი ტიპის განსაკუთრებულ წერტილს - ცენტრს უწოდებენ.

2. განვიხილოთ ეხლა დემპფირებული რხევითი სისტემა

$$\dot{x} = y, \tag{5.21}$$

$$\dot{y} = -\omega^2 x - \lambda y. \tag{5.22}$$

რომელიც მიიღება დემპფირებული რხევითი სისტემის მოდელიდან

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{5.23}$$

როგორც ვიცით, ამ განტოლების ამონახსნი, მოიცემა ფორმულით

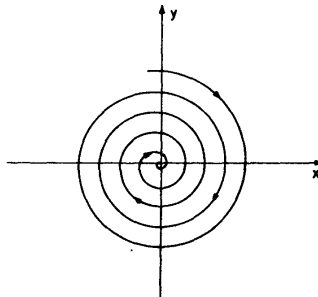
$$x(t) = ae^{-\lambda t/2} \sin(\nu t + \delta). \tag{5.24}$$

სადაც $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \lambda^2}$, თუ, ფესქვემა გამოსახულება მეტია ნულზე, ხოლო, δ განისაზღვრება ამოცანის საწყისი პირობებით.

ამ სისტემისათვის, მექანიკური ენერგია აღარაა მუდმივი და ის ექსპონენციალურად კლებულობს

$$E(t) = E(0)e^{-\lambda t}. \tag{5.25}$$

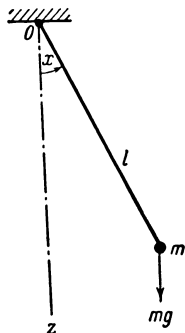
განსაკუთრებული წერტილის (0;0) ირგვლივ, ამონახსნები ეხვევა სპირალურად ნახ.5.5.



ნახ.5.5.დემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემის ფაზური ტრაექტორიები

ამ ტიპის განსაკუთრებულ წერტილებს - მდგრად ფოკუსს უწოდებენ.

3. მათემატიკური ქანქარის რხევითი სისტემის აგება



ნახ.5.6 მათემატიკური ქანქარას სქემა

მათემატიკური ქანქარას, რხევითი სისტემის შესაბამისი დიფერენციალური განტოლება, ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანია იმ არაწრფივი განტოლებებიდან, რომლის ანალიზური ამოხსნაც შეუძლებელია აიგოს იაკობის ელიფსური ფუნქციების მეშვეობით. ნახ.5.6 გათვალისწინებით და ნიუტონის მეორე კანონზე დაყრდნობით, ადვილად ავაგებთ მათემატიკური ქანქარის რხევითი სისტემის დინამიკის, დიფერენციალურ განტოლებას

$$ml\ddot{x} + mg\sin x = 0, \quad (5.26)$$

სადაც, m – დაკიდული ტვირთის მასაა; l –საკიდელის სიგრძეა; x –ქანქარას ვერტიკალიდან გადახრის კუთხეა.

თუ, (5.26) განტოლების ორივე მხარეს, შევკვეცავთ მასაზე და გავყოფთ საკიდელი სიგრძეზე, გვექნება

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}\sin x = 0. \quad (5.27)$$

თუ, განვიხილავთ მცირე გადახრების შემთხვევას $x \ll 1$, მაშინ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\sin x \approx x$. ასეთ შემთხვევაში, ქანქარის არაწრფივი განტოლება (5.27) გარდაიქმნება წრფივ განტოლებად და ის შეესაბამება, ცნობილ თავისუფალ, არადემპფირებულ რხევით სისტემას

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0. \quad (5.28)$$

ამ სისტემის საკუთრივი რხევის სიხშირე იქნება

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (5.29)$$

საწყისი (5.27) არაწრფივი სისტემის პირველი ინტეგრალი, შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც სისტემის დაყვანილი მექანიკური ენერგია და ჩავწეროთ სახით

$$\frac{1}{2}(\dot{x})^2 - \frac{g}{l} \cos x = E', \quad (5.30)$$

მართლაც, (5.30) პირველი ინტეგრალის წარმოებული გვაძლევს (5.27) განტოლებას, რაც იმას ნიშნავს, რომ (5.27) განტოლების ინტეგრებით, შეიძლება მიღებულ იქნას (5.30) პირველი ინტეგრალი. (5.30) პირველი ინტეგრალის ამოხსნით მივიღებთ

$$t = \int \frac{dx'}{\sqrt{2(E' + \frac{g}{l} \cos x')}}. \quad (5.31)$$

გარდავქმნათ ეს ინტეგრალი პირველი გვარის ელიფსურ ინტეგრალად. ამისათვის, ჯერ შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\cos \omega = -E' \frac{l}{g}, \quad (5.32)$$

მაშინ (5.31) ინტეგრალი გადაიწერება სახით

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\cos x' - \cos \omega}}. \quad (5.33)$$

თუ, გამოვიყენებთ ცვლადთა გარდაქმნას $\cos x = 1 - 2k^2(\sin \varphi)^2$, სადაც $k = \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$, მივიღებთ

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k^2(\sin \varphi')^2}}. \quad (5.34)$$

სადაც მოდულის ცხადი სახე იქნება $k = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{E'l}{g}\right)} = \sin \frac{\omega}{2}$. იაკობის ელიფსური ფუნქციების გამოყენებით, შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ

$sn\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}, k\right) = \sin \varphi = \frac{1}{k} \sin \frac{x}{2}$ და ჩვენ მივდივართ გადახრის კუთხის, ცხადად გამოსახვის ფორმულაზე დროის მიხედვით, რასაც ვეძებდით

$$x(t) = 2 \arcsin \left[k \operatorname{sn} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}}, k \right) \right]. \quad (5.35)$$

ეხლა ავაგოთ მათემატიკური ქანქარის (5.27) რხევითი სისტემის ფაზური პორტრეტი. ამისათვის, გადავწეროთ ის ნორმალური ფორმით

$$\dot{x} = y, \quad (5.36)$$

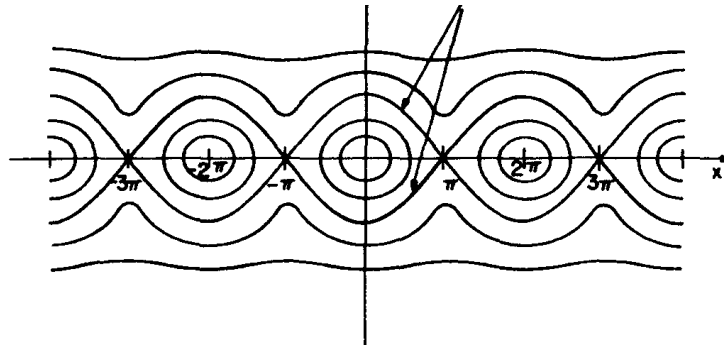
$$\dot{y} = -\frac{g}{l} \sin x. \quad (5.37)$$

ამ განტოლებათა სისტემას შეესაბამება პირველი ინტეგრალი

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{g}{l} \cos x = E'. \quad (5.38)$$

ცხადია, რომ ენერგიის მცირე სიდიდის მნიშვნელობებისათვის, $(0;0)$ წონასწორობის წერტილის მახლობლობაში, გვექნება წრფივი პერიოდული ხასიათის რხევები. გასაგებია, რომ ამ დროს ფაზური პორტრეტი წარმოადგენს კონცენტრულ წრეწირებს ცენტრით წონასწორობის წერტილში. ენერგიის სიდიდის ზრდის შემთხვევაში, რხევის ამპლიტუდებიც გაიზრდება, ვიდრე არ მიაღწევს ისეთ ენერგიას როდესაც სურათი მკვეთრად იცვლება და ქანქარა აცდება ჩვეულებრივ რხევის რეჟიმს და ენერგიის შემდგომი ზრდისას, იწყებს ბრუნვით მოძრაობებს საკიდელი წერტილის მიმართ. ეს მოხდება, მაშინ როცა სხეული $x = 0$ წონასწორობის მდგომარეობიდან გადადის $x = \pm\pi$ კუთხის შესაბამის მდგომარეობაში და ეს მოხდება როცა ენერგია იქნება $E' = \frac{g}{l}$. წერტილი $x = \pm\pi$, როცა ქანქარა ყირამალა დგას და $y = 0$ ქანქარას არამდგრადი წონასწორობის მდგომარეობა უკავია. შემდგომ, დამაბრუნებელი ძალის პერიოდულობის გამო, ფაზური პორტრეტი პერიოდულად უნდა გამეორდეს $(0;0)$ წერტილიდან მარჯვნივ და მარცხნივ 2π პერიოდით. ამგვარად, $x = \pm 2\pi n$ წერტილები მდგრადი წონასწორობის წერტილებია და $x = \pm(2n + 1)\pi$ არამდგრადი წონასწორობის წერტილებია. უნდა აღინიშნოს, რომ არამდგრადი წონასწორობის წერტილებში ადგილი აქვს რხევითი მოძრაობის გადასვლას ბრუნვით მოძრაობაში. რაც გამოიხატება ფაზური ტრაექტორიების გაშლაში. მთლიანად, მათემატიკური ქანქარის ფაზურ პორტრეტს აქვს სახე ნახ. 5.7

სეპარატრისები



ნახ.5.7.მათემატიკური ქანქარის ფაზური პორტრეტი

ფაზური ტრაექტორიების წყვილს, რომლებიც ერთმანეთისაგან გამოყოფენ რხევითი და ბრუნვითი მოძრაობის შესაბამის ტრაექტორიებს და იკვეთებიან არამდგრადი წონასწორობის შესაბამის წერტილებში - სეპარატრისები ეწოდებათ. ფაზურ სიბრტყეზე, სეპარატრისის გასწვრივ მოძრაობას შეესაბამება მოძრაობა უსასრულო პერიოდით. სეპარატრისები გამოყოფენ, სისტემის მუშაობის თვისობრივად სხვადასხვა რეჟიმებს. ასე, რომ ისინი ბიფურკაციის მრუდებს წარმოადგენენ.

5.3. კონსერვატიული სისტემების ფაზური პორტრეტი

წინა განხილულ მაგალითებში არსებობდა მუდმივი პირველი ინტეგრალი სისტემის მექანიკური ენერჯის სახით, რაც გვიმარტივებდა სისტემისათვის გლობალური ფაზური პორტრეტის აგებას.

ისეთ სისტემებს, რომლებისთვისაც ენერჯია წარმოადგენს პირველ ინტეგრალს - კონსერვატიული სისტემები ეწოდებათ.

იმ შემთხვევებში, როდესაც სისტემის მთლიანი ენერჯია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ (ტრადიციული ფორმით), როგორც კინეტიკური და პოტენციალური ენერჯიების ჯამი, ფაზური ტრაექტორიების სტრუქტურა (რომლებსაც ამ შემთხვევაში დონის

წირებს უწოდებენ) განსაკუთრებულად მარტივდება. ასეთი სისტემებისათვის, შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ

$$E = E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x), \quad (5.39)$$

სადაც, „პოტენციალური $V(x)$ ფუნქცია“, როგორც წესი x ცვლადის არაწრფივი ფუნქციაა. მაგალითად, მათემატიკური ქანქარისათვის $V(x) = -\frac{g}{l} \cos x$; ხოლო კუბური ოსცილატორისათვის $V(x) = ax^2 + bx^4$. თუ, გავითვალისწინებთ, რომ დინამიკის განტოლება ჩაწერილი სახით

$$\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x}(x) = 0, \quad (5.40)$$

შესაბამება ნაწილაკის მოძრაობას პოტენციალურ ორმოში $V(x)$, (სადაც, სრულებით არაა სავალდებულო, რომ ეს განტოლება მექანიკურ პროცესებს აღწერდეს), ფიზიკური ინტუიციით ადვილად ავაგებთ შესაბამის დონის წირებს.

მაგალითები:

1. განვიხილოთ თავისუფალი, არადემპფირებული რხევითი სისტემა (წრფივი ოსცილატორი).

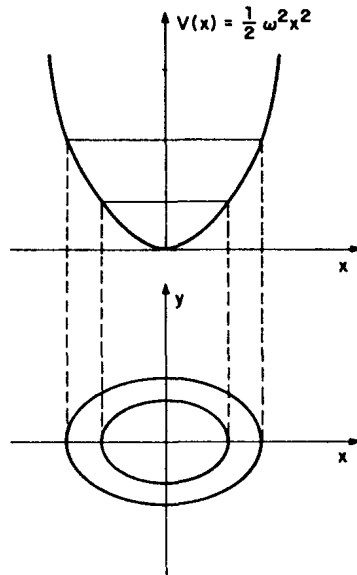
მოძრაობის განტოლება

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

გადავწეროთ (5.40) სახით

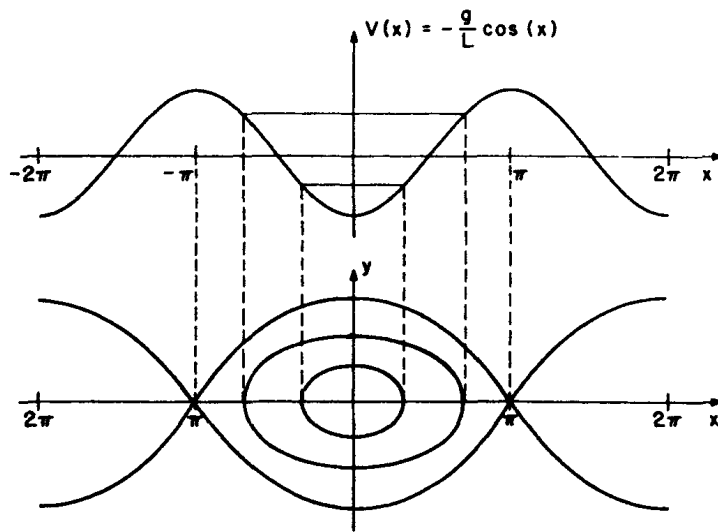
$$\ddot{x} + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = 0.$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$. ავაგოთ ამ კვადრატული ფუნქციის შესაბამისი დონის წირები და შესაბამისი ფაზური პორტრეტი ნახ.5.8.



ნახ.5.8 თავისუფალი, არადემპფირებული რხევითი სისტემის (კონსერვატიული სისტემა) ფაზური პორტრეტის აგება

2. მათემატიკური ქანქარის შემთხვევაში, გვაქვს პერიოდული პოტენციური ორმო $V(x) = -\frac{g}{l} \cos x$. შესაბამის ფაზურ პორტრეტსაც ადვილად ავაგებთ ანალოგიურად, ნახ.5.9.



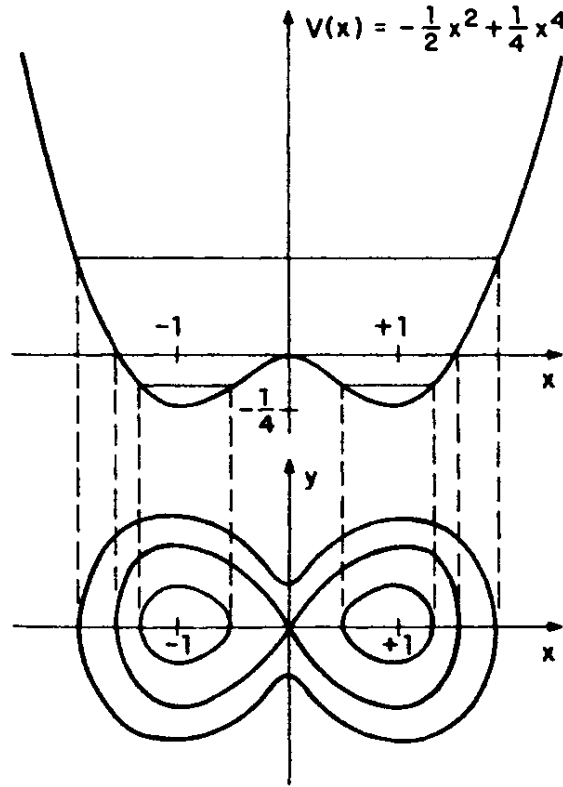
ნახ.5.9 მათემატიკური ქანქარას (კონსერვატიული სისტემის) ფაზური პორტრეტის აგება პოტენციური ორმოს გრაფიკის საშუალებით

3. კუბური ოსცილატორის ფაზური პორტრეტი
 განვიხილოთ კუბური ოსცილატორი რომლის დინამიკის განტოლებას აქვს სახე
 $\ddot{x} - x + x^3 = 0,$

მაშინ შესაბამის პოტენციალურ ფუნქციას აქვს სახე:

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4.$$

პოტენციალის ფუნქციის გრაფიკის მეშვეობით ადვილად ავაგებთ სისტემის ფაზურ პორტრეტსაც ნახ. 5.10



ნახ.5.10 კუბური ოსცილატორის ფაზური პორტრეტი

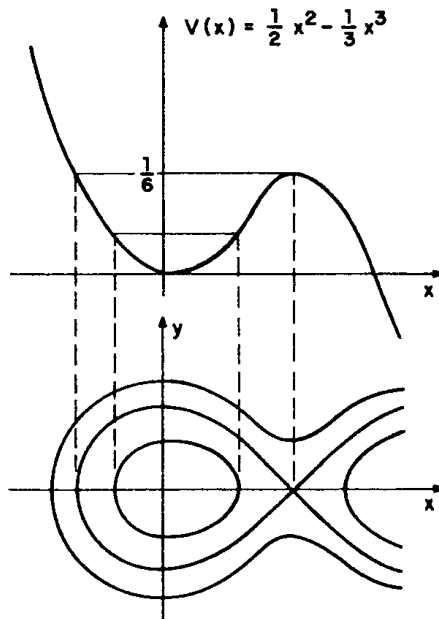
4. კვადრატული ოსცილატორის ფაზური პორტრეტი
განვიხილოთ სისტემა

$$\ddot{x} + x - x^2 = 0,$$

ამ სისტემის პოტენციალურ ფუნქციას ექნება სახე:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

ამ პოტენციალური ფუნქციის დონის წირები, საშუალებას გვაძლევენ ავაგოთ სისტემის ფაზური პორტრეტი ნახ. 5.11



ნახ.5.11 კვადრატული ოსცილატორის ფაზური პორტრეტი

5.4. სისტემის მდგომარეობის განმსაზღვრელი, განსაკუთრებული წერტილების მდგრადობის გამოკვლევა

გლობალური ფაზური პორტრეტის აგება, განსაკუთრებულად მარტივია ერთგანზომილებიანი კონსერვატიული სისტემებისათვის. მნიშვნელოვანი როლი უკავიათ განსაკუთრებულ (წონასწორობის) წერტილებს, რომლებიც ხასიათდებიან ცნობილი ლოკალური ყოფაქცევით: მდგრადი წონასწორობის წერტილების გარშემო წარმოიქმნებიან ფაზური, შეკრული მრუდები; ხოლო, არამდგრადი წერტილების გარშემო წარმოიქმნებიან ჰიპერბოლური ფაზური წირები. არაკონსერვატიული სისტემების შემთხვევაში, თუ, ზუსტი ამონახსნი არაა ცნობილი, ფაზური პორტრეტის შედგენა მეტად რთული პროცესია. თუმცა, ყოველთვის შესაძლებელია მიახლოებითი ლოკალური ფაზური პორტრეტის შედგენა, თუ, განვსაზღვრავთ წონასწორობის წერტილებს (რომლებსაც, შემდგომში უძრავ წერტილებს ვუწოდებთ) მათ გარშემო გამოვხაზავთ შესაბამის ფაზურ ტრაექტორიებს. უძრავი წერტილები შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ფაზური ტრაექტორიების მაორგანიზებელი ფაქტორები. ასე, რომ თუ, ვიპოვით უძრავ წერტილებს და გამოვიკვლევთ მათი

მდგრადობის საკითხს, მაშინ შესაძლებელი ხდება ავადგომის სისტემის გლობალური ფაზური პორტრეტი.

განვიხილოთ ზოგადი სახის, მეორე რიგის სისტემები:

$$\dot{x} = f(x, y), \quad (5.41)$$

$$\dot{y} = g(x, y), \quad (5.42)$$

სადაც f და g ნებისმიერი ორი ცვლადის, საზოგადოდ, არაწრფივი გლუვი ფუნქციებია.

უძრავი ეწოდებათ ისეთ (x_0, y_0) წერტილებს, რომელთათვისაც ფაზური ნაკადი სტაციონარულია (ანუ, $x = y = 0$):

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad (5.43)$$

$$g(x_0, y_0) = 0. \quad (5.44)$$

P.S. მაშასადამე, უძრავი წერტილების საპოვნელად, უნდა ამოვხსნათ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა (5.43),(5.44). ამ განტოლებათა სისტემას, საზოგადოდ, შეიძლება ქონდეს ნებისმიერი რაოდენობის ამონახსნი.

მას შემდეგ, რაც ვიპოვით ყველა უძრავ წერტილს, უნდა მოვახდინოთ თითოეული მათგანის გამოკვლევა მდგრადობაზე.

სისტემის უძრავი (x_0, y_0) წერტილის მდგრადობაზე გამოკვლევისათვის, უნდა შევისწავლოთ სისტემის ყოფაქცევა, ამ წერტილის მცირე მიდამოში $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y)$. ამისათვის f და g ფუნქციები გავშალოთ ამ ნაზრდების მიმართ ტეილორის მწკრივებად, უძრავი წერტილის მიდამოში

$$\delta \dot{x} = f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\delta x + f_y(x_0, y_0)\delta y + \dots \quad (5.45)$$

$$\delta \dot{y} = g(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - g(x_0, y_0) = g_x(x_0, y_0)\delta x + g_y(x_0, y_0)\delta y + \dots \quad (5.46)$$

თუ, შემოვიფარგლებით, მხოლოდ პირველი რიგის წევრებით, მაშინ არაწრფივი სისტემა (5.45),(5.46), შეგვიძლია გადავწეროთ წრფივი მიახლოების სახით (5.47)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}, \quad (5.47)$$

სადაც 2×2 მატრიცას, რომელსაც ავლნიშნავთ A ასოთი, მდგრადობის მატრიცას უწოდებენ. უძრავი წერტილების მდგრადობის შესასწავლი, (5.47) პირველი რიგის, წრფივ, დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა ადვილად ზოგადდება იმ შემთხვევისათვის, როცა ცვლადთა რაოდენობაა n და მოცემული გვაქვს განტოლებათა სისტემა

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.48)$$

უძრავი წერტილების მდგრადობის პირობების ჩამოყალიბება ადვილად ზოგადდება (5.47) სისტემიდან (5.48) სისტემისათვის, საკუთრივი რიცხვების ენაზე.

შემოვიღოთ აღნიშვნები $\delta X = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}$; ხოლო ორი საკუთრივი ვექტორია D_1 და D_2 , რომლებიც შეესაბამებიან, შესაბამისად, ორ საკუთრივ λ_1 და λ_2 რიცხვს. მაშინ (5.47) სისტემის ზოგადი ამონახსნი, როგორც ვიცით, მოიცემა ფორმულით

$$\delta X = c_1 D_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 D_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (5.49)$$

სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივი რიცხვებია, ხოლო საკუთრივი რიცხვები წარმოადგენენ მდგრადობის მატრიცის მახასიათებელი (5.50) განტოლების ფესვებს

$$\det|A - \lambda I| = 0, \quad (5.50)$$

I - ერთეულოვანი მატრიცაა. ჩვენი წინა მსჯელობებიდან ცხადია, რომ თუ, λ_1 და λ_2 საკუთრივი რიცხვები წმინდა წარმოსახვითი კომპლექსური რიცხვებია, მაშინ შესაბამისი უძრავი წერტილის მახლობელი წერტილებიდან დაწყებული ლოკალური ფაზური

ტრაექტორიები, წარმოადგენენ ელიფსებს და შეესაბამებიან მდგრად უძრავ წერტილებს. ხოლო, თუ საკუთრივ რიცხვებს გააჩნიათ არანულოვანი ნამდვილი ნაწილი, მაშინ შესაბამისი უძრავი წერტილის მდგრადობა-არამდგრადობის საკითხი დამოკიდებულია მის ნიშანზე. აქ ბევრი სხვადასხვა შემთხვევაა და ჩვენ მათ შვეისწავლით, მაგრამ არ უნდა დაგვავიწყდეს D_1 და D_2 საკუთრივ ვექტორების წვლილიც. მათი მიმართულებები მიუთითებენ, ლოკალური ფაზური ტრაექტორიების მიმართულებებზე.

5.4.1. უძრავი წერტილების კლასიფიკაცია

1. თუ, $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, მაშინ გვაქვს *მდგრადი კვანძი* ნახ.5.1.ა, ლოკალური ფაზური ნაკადი ორივე მხრიდან ჩაქრობადია უძრავი წერტილისაკენ;

2. თუ, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, მაშინ - *არამდგრადი კვანძი* ნახ.5.1.ბ, ლოკალური ფაზური ნაკადი ორივე მხარეს ექპონენციალურად იზრდება, უძრავი წერტილიდან გამოსვლისას;

3. თუ, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, მაშინ - *უნაგირა(ჰიპერბოლური)* წერტილია. ექსპონენციალური ზრდა გვაქვს ერთ მხარეს და ექსპონენციალური კლება მეორე მხარეს ნახ. 5.1.გ. სწორედ ასეთ ტიპს მიეკუთვნებიან მათემატიკური ქანქარასა და ზოგიერთი სხვა, არაწრფივი ოსცილატორის განხილული, არამდგრადი უძრავი წერტილები. უძრავ წერტილში შემავალ და გამომავალ მიმართულებებს, ხშირად, მდგრად და შესაბამისად, არამდგრად მრავალსახეობებს (სეპარატრისები) უწოდებენ;

4. თუ, $\lambda_1 = -\alpha + i\beta$, $\lambda_2 = -\alpha - i\beta$, ($\alpha, \beta > 0$), მაშინ - *მდგრადი ფოკუსია*. ნაკადი ეხვევა და შედის უძრავ წერტილში ნახ. 5.2.ა;

5. თუ, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, ($\alpha, \beta > 0$), მაშინ - *არამდგრადი ფოკუსი*. ასეთ შემთხვევაში საკუთრივ რიცხვის ნამდვილი ნაწილი

დადებითია, რაც იმას ნიშნავს, რომ სპირალი გამოდის უძრავი წერტილიდან და თანდათან იხსნება ნახ.5.2.ბ;

6. თუ, $\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta$, ($\alpha, \beta > 0$), მაშინ - მდგრადი ელიფსური (ცენტრი) წერტილი. ასეთ შემთხვევაში გვაქვს ელიფსური ფაზური ტრაექტორიები უძრავი წერტილის გარშემო.

P.S. ზოგჯერ, მაგალითად 4,5,6 შემთხვევებში ისმის კითხვა, თუ საითაა მიმართული ფაზური ტრაექტორიები, საათის ისრის მიმართულებით, თუ მის საწინააღმდეგოდ. ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად მოცემული უძრავი წერტილისათვის, უნდა განვიხილოთ გაწრფივებული (5.47) განტოლება. დავუშვათ, რომ $\delta y = 0 \wedge \delta x > 0$. თუ, აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ $\delta \dot{y} < 0$, მაშინ „გვაქვს დაღმასვლითი მოძრაობა“, ანუ ლოკალურად, ფაზური ტრაექტორიები მოძრაობენ საათის ისრის მიმართულებით, ხოლო თუ, $\delta \dot{y} > 0$, მაშინ გვაქვს „აღმასვლითი მოძრაობა“ და მაშასადამე, საათის ისრის საწინააღმდეგოდ.

აქამდე განვიხილავდით არაგადაგვარებული λ_1 და λ_2 ფესვების შემთხვევებს.

თუ, ფესვები გადაგვარებულია, მაშინ (5.47) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება ფორმულით

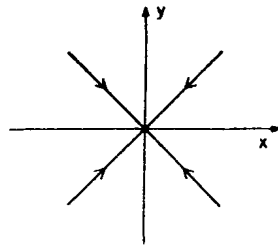
$$\delta X = (c_1 D_1 + c_2 (D_2 + D_1 t)) e^{\lambda t}. \quad (5.51)$$

ასეთ შემთხვევებში, უძრავი წერტილის ტიპი, ცხადია, რომ დამოკიდებულია D_1 და D_2 საკუთრივი ვექტორების ნიშანზე და ტიპზე.

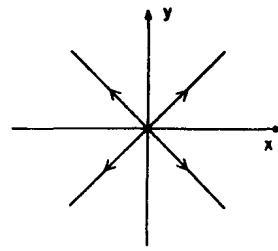
7. თუ, $D_2 = (0,0) \wedge (\forall D_1)$, მაშინ ნაკადის წირები წარმოადგენენ დამოუკიდებელ ურთიერთმკვეთ წრფეებს, რომლებიც ქმნიან:

a) მდგრად ვარსკვლავს, თუ $\lambda < 0$, ნახ.5.12a;

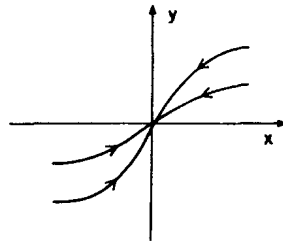
ბ) არამდგრად ვარსკვლავს, თუ $\lambda > 0$, ნახ.5.12ბ.



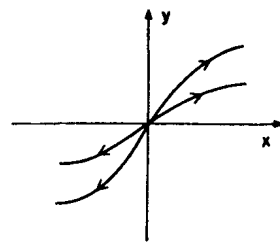
(a)



(b)



(B)



(r)

ნახ. 5.12.ლოკალური ფაზური ნაკადები: a)მდგრადი ვარსკვლავი;
 ბ)არამდგრადი ვარსკვლავი; B)მდგრადი არასაკუთრივი კვანძი;
 რ)არამდგრადი არასაკუთრივი კვანძი

8. თუ, საკუთრივი ვექტორი $D_2 \neq (0,0)$, მაშინ ფაზური ტრაექტორიები იქნებიან მრუდი წირები და წარმოქმნიან:

a) მდგრად არასაკუთრივ კვანძს, თუ $\lambda < 0$, ნახ.5.12.ბ;

ბ) არამდგრად არასაკუთრივ კვანძს, თუ $\lambda > 0$, ნახ.5.12.რ

5.4.2. უძრავი წერტილების ანალიზის მაგალითები

ეხლა განვიხილოთ ზემოთმოცემული მეთოდების გამოყენება ჩვენს ნაცნობ რხევით სისტემებზე.

a) დემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემა

ასეთ სისტემას, აქვს ერთადერთი უძრავი წერტილი

$(x_0, y_0) = (0,0)$. სისტემის შესაბამისი მოდელი წრფივია და გაწრფივება აღარ ჭირდება

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

მდგრადობის მატრიცაა $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{bmatrix}$. მისი საკუთრივი რიცხვებია $\lambda_1 = -\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}$ და $\lambda_2 = -\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}$. იმის მიხედვით, თუ, როგორია ფესქვემა გამოსახულება, გვაქვს სხვადასხვა ვარიანტები:

- თუ, $\lambda^2 > 4\omega^2$, მაშინ $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, შესაბამისად წერტილი $(0,0)$ მდგრადი კვანძია;
- თუ, $\lambda^2 < 4\omega^2$, მაშინ $\lambda_1 = \lambda_2^* = -\frac{\lambda}{2} + i\frac{\sqrt{4\omega^2 - \lambda^2}}{2}$ და შესაბამისად გვაქვს მდგრადი სპირალი(ფოკუსი);თუ (5.52) ტოლობაში დავუშვებთ, რომ $\delta y = 0 \wedge \delta x > 0$, მაშინ მივიღებთ, რომ $\delta \dot{y} < 0$, აქედან გამომდინარეობს, რომ მოძრაობა წარმოებს საათის ისრის მიმართულებით ნახ. 5.5;
- თუ, $\lambda^2 = 4\omega^2$, მაშინ $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\lambda}{2}$, შესაბამისად, ამ შემთხვევაში, გვაქვს არასაკუთრივი მდგრადი კვანძი.

ბ) მეორე მაგალითია თავისუფალი მათემატიკური ქანქარა

ამ სისტემას აქვს უძრავი წერტილების უსასრულო რაოდენობა $(x_n, y_n) = (\pm\pi n, 0), n \in \mathbb{N}$ და გაწრფივებულ მოდელს აქვს სახე

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}, \quad (5.53)$$

საკუთრივი რიცხვები იქნება $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{l} \cos x_n}$. როცა $x_n = 2\pi n$, მაშინ $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში გვაქვს მდგრადი, ელიფსური (ცენტრი) უძრავი წერტილები, ხოლო, როცა $x_n = (2n + 1)\pi$, მაშინ $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$, რაც შეესაბამება ჰიპერბოლურ (უნაგირა) არამდგრად უძრავ წერტილებს.

ბ) ეხლა განვიხილოთ მათემატიკური ქანქარის თავისუფალი, დემპფირებული რხევითი სისტემა

შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე

$$\dot{x} = y, \tag{5.54}$$

$$\dot{y} = -\frac{g}{l} \sin x - \lambda y. \tag{5.55}$$

ამ სისტემას იგივე $(x_n, y_n) = (\pm\pi n, 0), n \in \mathbb{N}$ უძრავ წერტილთა სისტემა აქვს, რაც თავისუფალ მათემატიკურ ქანქარას. მაგრამ შესაბამის გაწრფივებულ სისტემას აქვს სახე

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_n & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}. \tag{5.56}$$

სისტემის მდგრადობის მატრიცის საკუთრივი რიცხვებია:

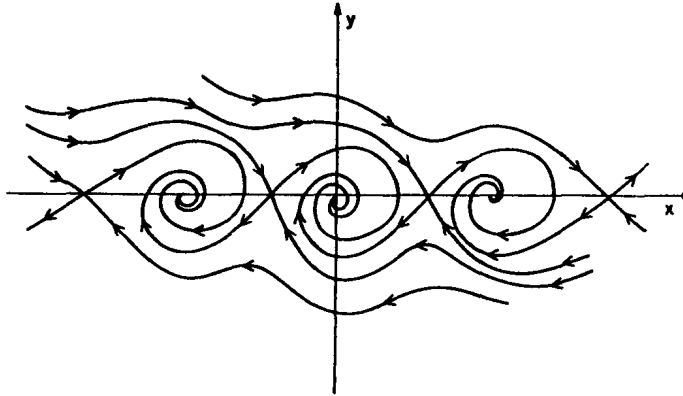
$$\lambda_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - \frac{4g}{l} \cos x_n}.$$

უძრავ წერტილებში $(x_n, y_n) = (\pm(2n+1)\pi, 0)$ კვლავ აქვს ადგილი უტოლობებს $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, რაც იმას ნიშნავს რომ ეს წერტილები, ჰიპერბოლური (უნაგირა) ტიპს განეკუთვნებიან. ხოლო წერტილებში $(x_n, y_n) = (\pm 2\pi n, 0)$ კი ადგილი აქვს რამოდენიმე შემთხვევას:

- $\lambda^2 < \frac{4g}{l}$, $\lambda_1 \wedge \lambda_2$ კომპლექსურად შეუღლებული ფესვებია უარყოფითი ნამდვილი ნაწილით, მაშინ გვაქვს მდგრადი ფოკუსი მბრუნავი საათის ისრის მიმართულებით ნახ. 5.13;
- $\lambda^2 > \frac{4g}{l}$, რასაც მივყავართ უტოლობებამდე $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ გვაქვს მდგრადი კვანძი;
- $\lambda^2 = \frac{4g}{l}$, მაშინ ჩვენ გვაქვს გადაგვარებული შემთხვევა, როცა $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\lambda}{2}$, რაც შეესაბამება მდგრად არასაკუთრივ კვანძს.

რადგან ამ შემთხვევაში, ენერგია არაა მუდმივი, დონის წირებს ზუსტად ვერ დავხაზავთ, როცა არ ვიცით ზუსტი ამონახსნი, თუმცა,

უძრავი წერტილების იდენტიფიკაცია და ფაზური ტრაექტორიების ლოკალური ანალიზი, საშუალებას გვაძლევს, მიახლოებით ავაგოთ სისტემის გლობალური ფაზური პორტრეტი.



ნახ. 5.13. ჩაქრობადი(დემპფირებული) მათემატიკური ქანქარას ფაზური პორტრეტი იმ შემთხვევაში, როცა $\lambda^2 < \frac{4g}{l}$

r) განსაკუთრებულ ყურადღებას იმსახურებს მტაცებელი-მსხვერპლის მოდელი

ეს მოდელი პირველად ააგო ვოლტერამ პოპულაციური დინამიკის შესასწავლად. განვიხილოთ ერთ-ერთი, ამ ტიპის მოდელებიდან

$$\dot{x} = x - xy, \tag{5.57}$$

$$\dot{y} = -y + xy. \tag{5.58}$$

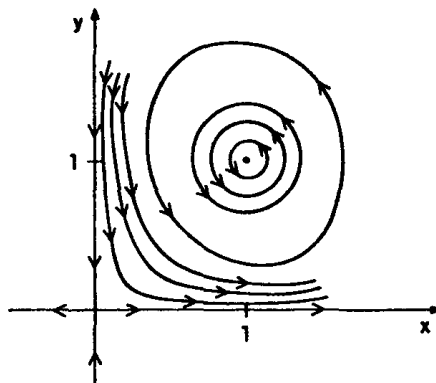
სადაც x შეიძლება აღნიშნავდეს, მაგალითად კურდღლების პოპულაციას (კურდღლების ზუსტ რაოდენობას პოპულაციაში), ხოლო y მელიების პოპულაციას. შესაძლოა ტრივიალური შემთხვევა, როცა $y = 0$, $x > 0$, მაშინ კურდღლების პოპულაცია უსასრულოდ იზრდება, რადგან მელიები არ არიან. შებრუნებულ შემთხვევაში, როცა $x = 0$, და $y > 0$, მელიები განწირული არიან შიმშილით სიკვდილისათვის, რადგან არ არიან მათი საკვები კურდღლები. ორივე პოპულაციის თანაცხოვრებისათვის, არსებობს ბალანსის შესაძლებლობა, რადგან მელიები ამცირებენ კურდღლების პოპულაციას და თუ ბევრს შეჭამენ თვითონ კი გამრავლდებიან, მაგრამ შემდგომში საჭმელი აღარ ეყოფათ და მათი პოპულაციაც შემცირდება.

(5.57),(5.58) განტოლებათა სისტემა უმარტივესია და მისი უფრო დაზუსტება მარტივია იმის გათვალისწინებით, რომ კურდღლების კვების არეალიც შეზღუდულია, არსებობს ავადმყოფობა, უჭკუო საქციელი, კურდღლების მიერ კურდღლების დახოცვა . . .

სისტემას აქვს ორი უძრავი წერტილი $(x_1, y_1) = (0,0)$ და $(x_2, y_2) = (1,1)$. გაწრფივებულ განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - y_i & -x_i \\ y_i & -1 + x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1,2} \quad (5.59)$$

პირველი უძრავი წერტილის შესაბამისი საკუთრივი რიცხვებია $\lambda = \pm 1$, რაც იმის მიმანიშნებელია რომ $(x_1, y_1) = (0,0)$ ჰიპერბოლური (უნაგირა) წერტილია. ხოლო მეორე უძრავი წერტილის შესაბამისი საკუთრივი რიცხვებია $\lambda = \pm i$, რაც შეესაბამება ელიფსურ წერტილს. შესაბამის მიახლოებით ფაზურ პორტრეტს აქვს სახე ნახ. 5.14



ნახ. 5.14. მტაცებელი-მსხვერპლის მოდელის ფაზური პორტრეტი

P.S. უნდა აღინიშნოს, რომ გაწრფივებული მოდელით მდგრადობის შესწავლა, ყოველთვის არ იძლევა რეალურ შედეგს არაწრფივი სისტემებისათვის.

5.4.3. ზღვართი ციკლები

ზღვართი ციკლი, წარმოადგენს ფაზური ტრაექტორიების განსაკუთრებულ ტიპს, რომელსაც ჩვენ ვერ ავაგებთ გაწრფივებული ანალიზის მეშვეობით. ყველაზე უფრო პოპულარულია ზღვართი ციკლი, რომელიც აქვს ვან-დერ-პოლის ცნობილ რხევით სისტემას:

$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (5.60)$$

გაწრფივებული, პირველი რიგის მიახლოების დონეზე ჩატარებული მდგრადობის ანალიზი ამ სისტემისათვის

$$\dot{x} = y, \tag{5.61}$$

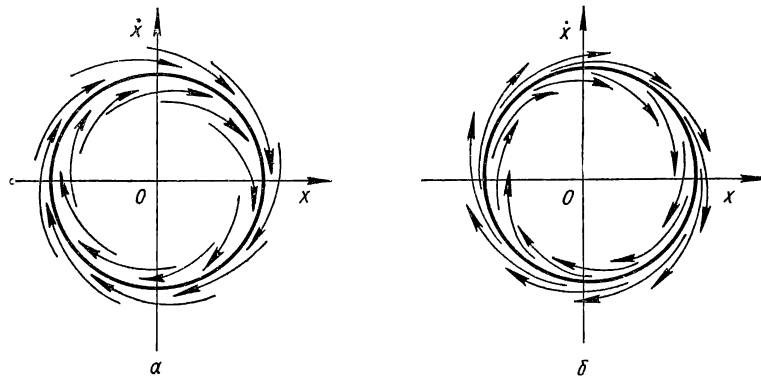
$$\dot{y} = \lambda(1 - x^2)y - \omega^2 x, \tag{5.62}$$

გვიჩვენებს, რომ სისტემას აქვს უძრავი წერტილი $x = y = 0$, რომელიც წარმოადგენს არამდგრად კვანძს, თუ $\lambda^2 > 4\omega^2$ და წარმოადგენს არამდგრად ფოკუსს, თუ $\lambda^2 < 4\omega^2$. განვიხილოთ აქედან მეორე შემთხვევა. რადგან (5.62) განტოლების მარჯვენა ნაწილში, x და y ცვლადების ზრდისას, დომინირებს არაწრფივი წევრი

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \dot{y} = -\lambda x^2 y, \text{ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ პირიქით, უძრავი}$$

წერტილისაკენ მიახლოებისას, ხდება არაწრფივი წევრის ჩაქრობა. ასე, რომ უძრავი წერტილიდან მოშორებით, ხდება ფაზური ტრაექტორიების მოძრაობა პერიფერიიდან ცენტრისაკენ. ამონახსნის უწყვეტობა ითხოვს, რომ არსებობდეს ამონახსნი მათ შორისაც. ეს ამონახსნი არის ზღვართი ციკლი, რომელიც წარმოადგენს უძრავი წერტილის მომცველ შეკრულ მრუდს. სისტემის სხვა ამონახსნები, რომლებიც გამოდიან ამ მრუდის გარედან, ასევე, შიგნიდან მიიზიდებიან ზღვართი ციკლის მიერ. მისკენ მიისწრაფიან, მაგრამ არასოდეს არ კვეთენ. ამ სისტემის ზუსტი ამონახსნი ცნობილი არ არის, თუმცა, უბრალო ფიზიკურ მსჯელობას მივყავართ ზღვართი ციკლამდე. მისი ზუსტი გეომეტრიული ფორმის დადგენა შესაძლებელია მხოლოდ სისტემის მიახლოებითი ამოხსნით სხვადასხვა საწყისი პირობების შემთხვევაში.

საზოგადოდ, ზღვართი ციკლი შეიძლება იყოს მდგრადი (როდესაც შიგნითაც და გარეთაც დაწყებული ფაზური ტრაექტორიები ზღვართი ციკლისაკენ მიისწრაფიან) ნახ.5.15a, ან არამდგრადი, როცა ზღვართი ციკლის მახლობლობაში დაწყებული ტრაექტორიები თანდათან სცილდებიან მას, ნახ. 5.15b.



ნახ. 5.15 ზღვართი ციკლის სქემატური ნახაზები:ა)მდგრადი ზღვართი ციკლი; ბ)არამდგრადი ზღვართი ციკლი

5.5. შეშფოთებათა თეორია და ჰამილტონური სისტემები

ბოლომდე ინტეგრებადი ჰამილტონური სისტემები, გამონაკლისს წარმოადგენს. მიუხედავად ამისა, ისინი დიდ როლს თამაშობენ, არაინტეგრებადი ჰამილტონური სისტემების სტრუქტურული თავისებურებების შესწავლის საქმეში. ეს ხდება იმიტომ, რომ ზოგჯერ ხელსაყრელია არაინტეგრებადი ჰამილტონური სისტემის წარმოდგენა, ინტეგრებადი H_0 და მცირე H_1 შეშფოთების ჯამის სახით,

$$H(p, q) = H_0(p, q) + \varepsilon H_1(p, q), \quad (5.63)$$

სადაც $\varepsilon \ll 1$. ესაა შეშფოთებათა თეორიის იდეა და დიდი გამოყენება აქვს მზის სისტემის პლანეტების მოძრაობის დინამიკის შესწავლის საქმეში. თუ, შევისწავლით ორი სხეულის ამოცანას, მაგალითად, დედამიწის მოძრაობას მზის გარშემო, ეს ამოცანა იხსნება ბოლომდე და მივიღებთ, რომ დედამიწა მოძრაობს მზის გარშემო კეპლერის ელიფსურ ტრაექტორიებზე, მაგრამ მის მოძრაობაზე მცირე შეშფოთების სახით, გავლენას ახდენს იუპიტერი, რომლის ზემოქმედებაც მცირე შეშფოთების სახით ემატება ორი სხეულის პრობლემის ამონახსნს. ასეთი, თითქოს მარტივი ამოცანაც კი, არაა დღემდე ამოხსნილი ბოლომდე. რადგან აქ მიიღება სუსტად კრებადი მწკრივები და მათი კრებადობის დაცქარება დიდ სიძნელეებს აწყდება.

მიუხედავად ამისა, შემფოთებათა თეორია საჭიროებს შესწავლას, თუნდაც იმიტომ რომ გავერკვეთ, სამი სხეულის პრობლემაში არსებულ სირთულეებში.

შემფოთებათა თეორიის ძირითადი იდეაა, ამონახსნის წარმოდგენა სახით, სადაც $\varepsilon \ll 1$

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots + \varepsilon^n x_n(t) + \dots \quad (5.64)$$

$x_0(t)$ - ინტეგრებადი სისტემის ზუსტი ამონახსნია. ხოლო დანარჩენი $x_i, i = \overline{1, n}$ მიახლოებების პოვნა წარმოებს რეკურენტული ფორმულებით. აქ არის იმის მოლოდინი, რომ როცა $\varepsilon \rightarrow 0$ (5.64) ამონახსნი მიისწრაფის ზუსტი $x_0(t)$ ამონახსნისაკენ, თანაც დამატებითი წევრები დააზუსტებენ შემფოთებულ ამონახსნამდე. თუმცა, ამის იმედია ვერ გვექნება დროის დიდ შუალედების შემთხვევაში. ასე, რომ ნებისმიერი ამოცანის ამონახსნის (5.64) წარმოდგენისათვის, დგება მისი ფიზიკური კრებადობის საკითხი.

5.5.1. შემფოთებათა რეგულარული მწკრივები

განვიხილოთ უბრალო კვადრატული განტოლება

$$x^2 + x - 6\varepsilon = 0. \quad \varepsilon \ll 1 \quad (5.65)$$

ნულოვან მიახლოებაში, გვაქვს „ინტეგრებადი“ შემთხვევის ანალოგი განტოლება

$$x^2 + x = 0, \quad (5.66)$$

მისი ამონახსნებია $x = 0$ და $x = -1$. ეხლა შევეცადოთ შემფოთებულ (5.65) ამოცანის ამონახსნის წარმოდგენა მწკრივის სახით

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon^n, \quad (5.67)$$

სადაც a_0 „ინტეგრებადი“ განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია.

თუ, ჩავსვამთ (5.67) წარმოდგენას (5.65) განტოლებაში და გავუტოლებთ კოეფიციენტებს ε ცვლადის ერთნაირ ხარისხებთან, მაშინ მივიღებთ $O(\varepsilon^2)$ სიზუსტის ფარგლებში განტოლებებს, გამლის კოეფიციენტებისათვის

$$O(\varepsilon^0): \quad a_0^2 + a_0 = 0; \quad (5.68)$$

$$O(\varepsilon^1): \quad 2a_0a_1 + a_1 - 6 = 0; \quad (5.69)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad a_1^2 + 2a_0a_2 + a_2 = 0. \quad (5.70)$$

ამ განტოლებების მიმდევრობით ამოხსნა გვადლევს საშუალებას წარმოვადგინოთ (5.65) განტოლების ამონახსნები შესაბამისი მწკრივებით

$$x_1 = 6\varepsilon - 36\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (5.71)$$

$$x_2 = -1 - 6\varepsilon + 36\varepsilon^2 - O(\varepsilon^3). \quad (5.72)$$

ეს არის შეშფოთებათა რეგულარული მწკრივი. ადვილი შესამჩნევია, რომ როცა $\varepsilon \rightarrow 0$, (5.71),(5.72) მიახლოებები მიისწრაფიან შესაბამისი „ინტეგრებადი“ განტოლების ზუსტი ამონახსნებისაკენ.

5.5.2. შეშფოთებათა სინგულარული მწკრივები

ეხლა განვიხილოთ სინგულარული განტოლება

$$\varepsilon x^2 + x - 1 = 0. \quad (5.73)$$

ეს ამოცანა არაა რეგულარული, რადგან ზღვარში როცა $\varepsilon \rightarrow 0$ განტოლებას აქვს ერთი ამონახსნი, მაშინ როცა შეშფოთებულ (5.73) ამოცანას აქვს ორი ამონახსნი. ასეთ ამოცანებს, შეშფოთებათა თეორიის სინგულარული ამოცანები ეწოდებათ. ასეთ შემთხვევაში ამოცანის ყველა ამონახსნი შეიძლება ვერ წარმოდგეს ხარისხოვანი (5.67) მწკრივის სახით.

ამ განტოლების არაშეშფოთებული ნაწილის $x - 1 = 0$ ამონახსნია $x = 1$. ამ ამონახსნის პოვნა ადვილად შეგვიძლია (5.67) მწკრივის სახით, რადგან ეს რეგულარული ნაწილის ფესვია. მისი ჩასმა (5.73) განტოლებაში, საშუალებას მოგვცემს ვიპოვოთ წარმოდგენა

$$x_1 = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (5.74)$$

ამოცანის სინგულარული ნაწილი დაკავშირებულია მეორე ფესვთან, რომელიც უსასრულობისაკენ მიისწრაფის, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $x_2 = O(\varepsilon^{-n})$. ეს იმაზე მიუთითებს, რომ მიზანშეწონილია ცვლადთა გარდაქმნა ფორმულით $x = \frac{y}{\varepsilon^n}$, თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ როცა $\varepsilon \rightarrow 0$, განტოლებაში (5.73) წევრებმა εx^2 და x ერთმანეთი უნდა დააბალანსონ უსასრულობისაკენ სწრაფვის სიჩქარის თვალსაზრისით, ანუ, $\varepsilon \frac{y^2}{\varepsilon^{2n}}$ და $\frac{y}{\varepsilon^n}$ ერთნაირი სისწრაფით უნდა მიისწრაფოდნენ უსასრულობისაკენ, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $2n - 1 = n \Leftrightarrow n = 1$, ანუ, ერთადერთი მისაღები ცვლადთა გარდაქმნაა $x = \frac{y}{\varepsilon^1}$. მაშინ (5.73) განტოლება გარდაიქმნება განტოლებად

$$y^2 + y - \varepsilon = 0. \quad x = \frac{y}{\varepsilon^1}. \quad (5.75)$$

ეხლა უკვე მივიღეთ რეგულარული ამოცანა და მისი წარმოდგენა შეგვიძლია სტანდარტული ხარისხოვანი მწკრივებით

$$y_1 = \varepsilon - \varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \quad (5.76)$$

$$y_2 = -1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - 2\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \quad (5.77)$$

თუ, გამოვიყენებთ უკუ გარდაქმნას (5.75), მივიღებთ საწყისი სინგულარული ამოცანის ამონახსნების წარმოდგენებს

$$x_1 = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (5.78)$$

$$x_2 = -\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (5.79)$$

5.5.3 რეგულარული შეშფოთებათა მწკრივები დიფერენციალური განტოლებებისათვის

განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x} = x + \varepsilon x^2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (5.80)$$

და საწყისი პირობები

$$x(0) = A. \quad (5.81)$$

თუ, გამოვიყენებთ ამონახსნის (5.67) წარმოდგენას, ჩავსვამთ (5.80) განტოლებაში და გავუტოლებთ კოეფიციენტებს ε ცვლადის ერთნაირ ხარისხებთან, მივიღებთ სისტემას

$$O(\varepsilon^0): \quad \dot{x}_0 = x_0, \quad (5.81)$$

$$O(\varepsilon^1): \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_0^2, \quad (5.82)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad \dot{x}_2 = x_2 + 2x_1x_0. \quad (5.83)$$

ამოცანის ინტეგრებადი ნაწილი (5.81), ადვილად ინტეგრდება და მივიღებთ

$$x_0(t) = Ae^t, \quad (5.84)$$

ამ ამონახსნის ჩასმა (5.82) განტოლებაში გვადლევს განტოლებას

$$\dot{x}_1 = x_1 + Ae^t, \quad (5.85)$$

განტოლებას, საწყისი პირობით

$$x_1(0) = 0. \quad (5.86)$$

ასეთ, ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს ვსვამთ ყველა შემდგომი მიახლოებისათვის, რათა მთლიანმა შეშფოთებულმა წარმოდგენამ დააკმაყოფილოს (5.81) პირობა. (5.85),(5.86) ამოცანის ამოხსნაა

$$x_1(t) = A^2e^t(e^t - 1), \quad (5.87)$$

თავის მხრივ, თუ, ამ ამონახსნს ჩავსვამთ (5.83) განტოლებაში, მივიღებთ

$$x_2(t) = A^3e^t(e^t - 1)^2. \quad (5.88)$$

ასე, რომ $O(\varepsilon^2)$ სიზუსტით (5.80),(5.81) ამოცანის ამონახსნს აქვს სახე

$$x(t) = Ae^t[1 + \varepsilon A(e^t - 1) + \varepsilon^2 A^2(e^t - 1)^2] + O(\varepsilon^3). \quad (5.89)$$

P.S. აქ მოყვანილი განტოლებების ამოხსნიდან, შეიძლება შეიქმნას შთაბეჭდილება, რომ შეშფოთებათა თეორია ყოველთვის

წარმატებით ხსნის ამოცანებს, მაგრამ სამწუხაროდ ასე არაა. როგორც არაერთმა მცდელობებმა აჩვენა, მრავალგანზომილებიანი ჰამილტონური სისტემებისათვის, შეშფოთებათა თეორიას შევყავართ პუანკარეს „მცირე მნიშვნელების“ ჩიხში და მხოლოდ კოლმოგოროვ-არნოლდ-მოზერის ეგრეთწოდებულმა KAM თეორიამ შეძლო ამ ჩიხიდან ნაწილობრივი გამოსვლა. თუმცა, ეს თეორია გვერდს უქცევს, ჰამილტონური სისტემების ამოცანის გლობალური ამოხსნის ამოცანას და კმაყოფილდება კერძო ამოცანებით ფაზური ტრაექტორიების ტორზე ყოფაქცევის შესახებ.

5.5.4. ლოკალური ქაოსის წარმოქმნის კრიტერიუმი

ლიაპუნოვის მაჩვენებლები

ჰამილტონურ სისტემებში, ქაოსური მოძრაობის დამახასიათებელი თვისებაა, ძლიერი დამოკიდებულება საწყის პირობებზე. ქაოსურობის შემთხვევაში, საწყის პირობებში ახლოსმდგომი ინტეგრალური წირები, შემდგომში, ექსპონენციალური სისწრაფით შორდებიან. თუმცა, ფაზური სივრცის შემოფარგულობის გამო, ისინი უსასრულოდ ვერ დაშორდებიან. დაშორების სიჩქარის შესაფასებლად, იყენებენ **ლიაპუნოვის მაჩვენებლებს**.

მათი გამოყენების არეალი, სცილდება ჰამილტონურ სისტემებს და ისინი გამოიყენება საზოგადოდ, ყველა სახის დინამიკური სისტემებისათვის.

როგორც ვიცით, ატრაქტორები არსებობს სხვადასხვა სახის: მდგრადი ფოკუსი, ზღვართი ციკლი, ტორი და ბოლოს, უცნაური ატრაქტორი. ისმის კითხვა: როგორი იქნება კრიტერიუმი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს განვასხვავოთ ეს ატრაქტორები ერთმანეთისაგან ? ასეთ კრიტერიუმს გვადლევს **ლიაპუნოვის მაჩვენებლის ცნება**, რომლის შესწავლასაც ვაპირებთ ამ პარაგრაფში.

ზოგადობის შეუზღუდავად, განვიხილოთ ავტონომიური დინამიკური სისტემა

$$\dot{q} = F(q). \quad (5.90)$$

ამ შემთხვევაში, ერთადერთი შესაძლო ატრაქტორი არის, მდგრადი უძრავი წერტილი (ერთგანზომილებიანი კვანძი). ხოლო, მისი ტრაექტორია, არის ერთი უძრავი წერტილი $q = q_0$. იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ ამ უძრავი წერტილის მდგრადობა, გამოვიყენოთ ჩვენს მიერ უკვე შესწავლილი, გაწვრივებული სისტემის მდგრადობის ანალიზის მეთოდი. ამისათვის, განვიხილოთ უძრავი წერტილის მცირე შემფოთება

$$q(t) = q_0 + \delta q(t). \quad (5.91)$$

ჩავსვათ ეს ფუნქცია (5.90) განტოლებაში და მარჯვენა მხარე გავშალოთ მწკრივად უძრავი წერტილის მიდამოში. მიღებულ გაშლაში, შევინარჩუნოთ მხოლოდ წრფივი წევრები შემფოთების მიმართ. მაშინ გვექნება განტოლება

$$\frac{d}{dt} \delta q = L \delta q, \quad (5.92)$$

სადაც $L = \frac{\partial F}{\partial q}_{q=q_0}$ - მუდმივი სიდიდეა. ცხადია, რომ (5.92) განტოლების ამონახსნს აქვს სახე

$$\delta q(t) = \delta q(0) e^{Lt}. \quad (5.93)$$

თუ, $L < 0$ მაშინ უძრავი წერტილი მდგრადია. ამ მარტივ ამოცანაში L სიდიდის პოვნა, არ წარმოადგენს არავითარ სირთულეს, თუმცა სხვა შემთხვევაში, მის საპოვნელად კომპიუტერი დაგვჭირდებოდა. თუმცა, იმ რთული შემთხვევებისათვისაც კი შეგვიძლია ვიპოვოთ L სიდიდე, საკმაოდ მარტივი ფორმულით

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\delta q(t)|. \quad (5.94)$$

ლიაპუნოვის მაჩვენებლის ცნება, აზოგადებს (5.94) ფორმულას ორი მიმართულებით

- 1) ტრაექტორიები შეიძლება მოძრაობდნენ მრავალგანზომილებიან სივრცეში: $q(t)$ - რადიუს-ვექტორია, რომლის ბოლოც t დროის განმავლობაში, მოძრაობს ტრაექტორიის გასწვრივ;

2) სისტემის მდგომარეობის მდგრადობას ვსწავლობთ $q_0(t)$ ცნობილი ამონახსნის მახლობლობაში.

წინა მაგალითის ანალოგიურად, განვიხილოთ შემფოთებული ამონახსნი, მხოლოდ, ეხლა უკვე *ვექტორული ტოლობა* გვექნება, რადგან მრავალგანზომილებიან ამოცანას ვიხილავთ

$$q(t) = q_0 + \delta q(t). \quad (5.95)$$

$\delta q(t)$ - შემფოთების დინამიკა გვიჩვენებს, თუ, როგორია q_0 ამონახსნის მეზობელი, $q(t)$ ტრაექტორიის დინამიკა. ის, დროთა განმავლობაში შორდება, თუ, უახლოვდება q_0 ტრაექტორიას. $\delta q(t)$ სიდიდის დინამიკის შესასწავლად, ჩავსვათ (5.95) ტოლობები ვექტორულ, არაწრფივ სისტემაში

$$\dot{q}(t) = F(q(t)), \quad (5.96)$$

სადაც q_0 ამ სისტემის ამონახსნია. მარჯვენა ნაწილი, გავშალოთ მწკრივად $\delta q(t)$ შემფოთების მიმართ და მოვახდინოთ მისი გაწრფივება. მაშინ მივიღებთ განტოლებათა წრფივ სისტემას

$$\frac{d}{dt} \delta q_i(t) = \sum_k \frac{\partial F_i(q(t))}{\partial q_k} \Big|_{q=q_0} \delta q_k(t). \quad (5.97)$$

თუ, განვაზოგადებთ (5.94) თანადობას, მივიღებთ **ლიაპუნოვის მაჩვენებლების გამოსათვლელ ფორმულას**

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \ln |\delta q(t)|. \quad (5.98)$$

ეხლა ჩვენ უკვე შეგვიძლია ჩამოვაცალიბოთ კრიტერიუმი, სხვადასხვა ტიპის ატრაქტორების განსხვავებისათვის.

1. **ერთგანზომილებიან შემთხვევაში** არსებობენ მხოლოდ ისეთი მდგრადი, უძრავი წერტილები, რომელთათვისაც ლიაპუნოვის მაჩვენებელი უარყოფითია (-);

2. **ორგანზომილებიან შემთხვევაში**, შესაძლებელია, მხოლოდ ორი ტიპის ატრაქტორები: **მდგრადი უძრავი წერტილები და ზღვართი ციკლები.**

თუ, ატრაქტორი მდგრადი, უძრავი წერტილია (ფოკუსი), მაშინ ლიაპუნოვის ორივე მაჩვენებელი უარყოფითია (-, -).

თუ, ატრაქტორი **ზღვართი ციკლია**, მაშინ მისი ტრანსვერსალური შემფოთების შესაბამისი ლიაპუნოვის მაჩვენებელი უარყოფითია, ხოლო ტანგენციალურისა - ნულის ტოლი (-, 0). თუმცა, ასეთივე მნიშვნელობები შეიძლება გვექონდეს „პათოლოგიურ“

შემთხვევაშიც, როცა გვაქვს წირი, რომელიც უძრავი წერტილებისაგან შედგება;

3. სამგანზომილებიან შემთხვევაში,

გვაქვს მდგრადი ფოკუსი, თუ, ლიაპუნოვის მაჩვენებლებია $(-, -, -)$;

მდგრადი ზღვართი ციკლი, თუ, $(-, -, 0)$;

მდგრადი ტორი, თუ, $(-, 0, 0)$;

თუ, ლიაპუნოვის რომელიმე მაჩვენებელი დადებითია, შეიძლება გვქონდეს სისტემაში ქაოსი. თუ, გვაქვს $(+, 0, 0)$ მაშინ შეიძლება გვქონდეს არამდგრადი ტორი, რომელიც არაა ატრაქტორი.

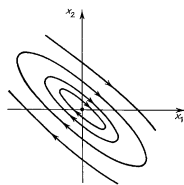
თუ, სისტემის ატრაქტორის ლიაპუნოვის მაჩვენებლებია $(+, 0, -)$, მაშინ ის ითვლება უცნაურ ატრაქტორად. უცნაური ატრაქტორის მეზობელი ტრაექტორიები სწრაფად შორდებიან მას.

ამოცანები და სავარჯიშოები:

1. შეადგინეთ მოცემული სისტემების ფაზური პორტრეტები და პასუხი დაასაბუთეთ:

ა)

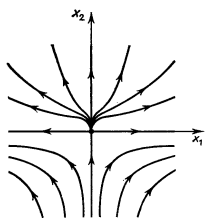
$$\dot{x}_1 = 3x_1 + 4x_2, \quad \dot{x}_2 = -3x_1 - 3x_2.$$



პასუხი:

ბ)

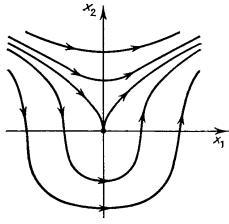
$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2^2.$$



პასუხი:

გ)

$$\dot{x}_1 = x_2^2, \quad \dot{x}_2 = x_1.$$



პასუხი:

2. ჩამოაყალიბეთ უძრავი წერტილების მდგრადობის გამოკვლევის ალგორითმი და განიხილეთ უძრავი წერტილების კლასიფიკაცია;
3. შეადგინეთ კონსერვატიული სისტემის მაგალითები, ააგეთ შესაბამისი პოტენციალური ორმო და ფაზური პორტრეტი.
4. შეშფოთებათა თეორიის მეშვეობით ამოხსენით განტოლება:
 $x^2 + \varepsilon x - 1 = 0$;
5. შეშფოთებათა თეორიის მეშვეობით ამოხსენით განტოლება:
 $\varepsilon^2 x^2 - 2x + 2 = 0$;

სარჩევი

წინასიტყვაობა		გვ.
I თავი	ჰილბერტის სივრცის გეომეტრია	4
	1.1 მატრიცებისა და სასრულგანზომილებიანი სივრცეების ძირითადი ცნებები	4
	1.2 წრფივი ნორმირებული სივრცე	8
	1.3 ჰილბერტის სივრცის აქსიომები	9
	1.4 ჰილბერტის სივრცის მაგალითები	11
	1.5 კარდინალური რიცხვები. სეპარაბელობა	11
	1.6 ორთონორმირებული მიმდევრობები	14

	1.7	ქვესივრცე. თეორემა პროექციის შესახებ	16
	1.8	წრფივი ფუნქციონალები. რის-ფრემეს თეორემა	16
	1.9	ძლიერი და სუსტი კრებადობა	17
II თავი	განზოგადებული ფუნქციები და მათი თვისებები		19
	2.1	განზოგადებული ფუნქციის ცნება	19
	2.2	საცდელი ფუნქციების C_0^∞ კლასი	22
	2.3	ორადწრფივი ფორმა	23
	2.4	ფუნქციონალის უწყვეტობის ცნება	24
	2.5	განზოგადებული ფუნქციების მაგალითები	25
	2.6	განზოგადებული ფუნქცია, როგორც ფუნქციონალური მიმდევრობის ზღვარი	28
	2.7	განზოგადებული ფუნქციების დიფერენცირება და ინტეგრება	29
	2.8	განზოგადებული ფუნქციების ლოკალური თვისებები	31
	2.9	მცირედ ზრდადი განზოგადებული ფუნქციები	32
	2.10	ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალური სივრცე	33
	2.11	ანალოგია n განზომილებიან ვექტორულ და ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის	37
	2.12	სობოლევის $W_2^k(G)$ ფუნქციონალური სივრცე	38
	2.13	დამოკიდებულება ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის	38
ამოცანები და სავარჯიშოები			39
ლიტერატურა			42
III თავი	ოპტიმიზაციის მეთოდები		43
	3.1	უპირობო ექსტრემუმი \mathbb{R}^n სივრცეზე განსაზღვრული ფუნქციებისათვის	43
	3.2	სილვესტრის კრიტერიუმი კვადრატული ფორმებისათვის	45
	3.3	მკაცრი ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები \mathbb{R}^n სივრცეზე განსაზღვრული ფუნქციებისათვის	46
	3.4	გრადიენტული სწრაფი დაშვების მეთოდი	48

	3.5	მონტე-კარლოს მეთოდი	50
	3.6	უპირობო ექსტრემუმის ამოცანების ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე	51
	3.7	პირობითი ექსტრემუმი \mathbb{R}^n სივრცეზე განსაზღვრული ფუნქციებისათვის, როცა შემოფარგვლის პირობებს აქვთ განტოლებების ფორმა (ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი)	53
	3.8	მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის ამოცანა, როცა შემოფარგვლის პირობებს აქვთ უტოლობების ფორმა	54
	3.9	პირობითი ექსტრემუმის ამოცანების ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე	55
	3.10	წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე	56
	3.11	სატრანსპორტო გადაზიდვების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე	59
	3.12	რესურსების ოპტიმალური განაწილების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე	62
	3.13	არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე	66
	3.14	არაწრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე	67
	3.15	მრავალკრიტერიუმიანი ექსტრემალური ამოცანების ამოხსნის მეთოდები	68
	3.16	მრავალკრიტერიული მაქსიმიზაციისა და მინიმიზაციის ამოცანები	69
	3.17	მრავალკრიტერიული, ურთიერთსაპირისპირო კრიტერიუმების მქონე ამოცანის ამოხსნა	70
	3.18	დინამიკური დაპროგრამება	70
ამოცანები და სავარჯიშოები			71
ლიტერატურა			75
IV თავი	ვარიაციული აღრიცხვა		78
	4.1	ვარიაციული აღრიცხვის კლასიკური ამოცანები	78
	4.1.1	გედეზიური წირები სიბრტყეზე	78
	4.1.2	გეოდეზიური წირები ნებისმიერ ზედაპირზე	79
	4.1.3	ამოცანა ბრახისტოხრონას შესახებ	80
	4.1.4	დიდონის იზოპერიმეტრული ამოცანა	82

	4.1.5	ამოცანა ბრუნვის ზედაპირის მინიმუმის შესახებ	83
	4.2	ფუნქციონალის ვარიაცია	84
	4.2.1	ანალოგია ფუნქციის დიფერენციალსა და ფუნქციონალის ვარიაციას შორის	86
	4.2.2	ფუნქციონალის მეორე ვარიაცია	90
	4.3	ვარიაციული ამოცანები ფიქსირებული საზღვრებით	91
	4.3.1	ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანების ამოხსნის მაგალითები	94
	4.3.2	ეილერის განტოლების კერძო შემთხვევები	98
	4.3.3	რამდენიმე, ერთი ცვლადის ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალი	102
	4.3.4	უმარტივესი ტიპის ფუნქციონალი მაღალი რიგის წარმოებულებით	104
	4.3.5	მრავალი ცვლადის ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალები	106
	4.3.6	ეილერის განტოლებების კანონიკური სახე	110
	4.3.7	ფუნქციონალებისა და მათი შესაბამისი ექსტრემუმების განტოლებათა ცხრილი	113
	4.4	ვარიაციული ამოცანები მოძრავი საზღვრებით	114
	4.4.1	ვარიაციული ამოცანა, ექსტრემუმის ფუნქციის გრაფიკის ორ პარალელურ, ვერტიკალურ წრფეზე მოძრავი ბოლოებით	114
	4.4.2	ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანა ნებისმიერ ორ წირზე მოძრავი საზღვრებით	117
	4.5	ფუნქციონალის პირობითი ექსტრემუმის ამოცანები	118
	4.5.1	ლაგრანჟის ამოცანა	119
	4.5.2	მაიერის ამოცანა	122
	4.5.3	ბოლცას ამოცანა	125
	4.6	ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები	127
	4.6.1	სუსტი ექსტრემუმები	128
	4.6.2	ლეჟანდრისა და იაკობის თეორემები	129
ამოცანები და სავარჯიშოები			134
ლიტერატურა			137
V თავი	დინამიკური სისტემების კვლევის გეომეტრიული მეთოდები		138

	5.1	წრფივი დინამიკური სისტემების ფაზური ტრაექტორიების აგების ალგორითმი	138
	5.2	ფაზური ტრაექტორიები და ფაზური პორტრეტი	141
	5.3	კონსერვატული სისტემების ფაზური პორტრეტი	148
	5.4	სისტემის მდგომარეობის განმსაზღვრელი, განსაკუთრებული წერტილების მდგრადობის გამოკვლევა	152
	5.4.1	უძრავი წერტილების კლასიფიკაცია	155
	5.4.2	უძრავი წერტილების ანალიზის მაგალითები	157
	5.4.3	ზღვართი ციკლები	161
	5.5	შეშფოთებათა თეორია და ჰამილტონური სისტემები	163
	5.5.1	შეშფოთებათა რეგულარული მწკრივები	164
	5.5.2	შეშფოთებათა სინგულარული მწკრივები	165
	5.5.3	რეგულარული შეშფოთებათა მწკრივები დიფერენციალური განტოლებებისათვის	166
	5.5.4	ლოკალური ქაოსის წარმოქმნის კრიტერიუმი ლიაპუნოვის მაჩვენებლები	168
ამოცანები და სავარჯიშოები			171