

ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემია  
საქართველოს საინჟინრო აკადემია  
ფაზისის აკადემია

თამაზ ოზგაძე

კლასიკური მექანიკის მათემატიკური  
მეთოდები

I ტომი

ტენზორები, კვატერნიონები და ლის ჯგუფები

თბილისი

2024

UDC (უაკ) 531/534:51

ო – 125

წიგნი წარმოადგენს მონოგრაფიის ტიპის სახელმძღვანელოს, მექანიკის თანამედროვე მათემატიკური მეთოდებით დაინტერესებულ ნიჭიერი მკითხველისათვის.

წიგნში მოცემული თეორიული მასალა, ილუსტრირებულია შესაბამისი მაგალითებით და ამოცანებით. ამოცანების ამოხსნისას, მკითხველი ნაბიჯ-ნაბიჯ შედის მექანიკის მათემატიკური სივრცის ულამაზეს ლაბირინთებში. წიგნში შესწავლილია მექანიკის თანამედროვე მათემატიკური მეთოდები, რაც საშუალებას მისცემს მკითხველს, დაინახოს მექანიკური პროცესების მათემატიკური მოდელირების ულამაზესი მიმართულების ხვეულები და გაერკვეს იმ საკითხების სიღრმეშიც, რაც მექანიკის სფეროს განეკუთვნება.

პირველ ტომში განხილულია ტენზორების, კვატერნიონებისა და ლის ჯგუფების მექანიკაში გამოყენების საკითხები

რეცენზენტი: ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემიის  
პრეზიდენტი, ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა  
დოქტორი, პროფესორი თემურ ჩილაჩავა

საგამომცემლო სახლი “ტექნიკური უნივერსიტეტი”, 2024

ISBN 978-9941-8 – 6636-4 (სამივე ტომის)

ISBN 978-9941-8 – 6637-1 (პირველი ტომის)

©

ყველა საავტორო უფლება დაცულია. ამ წიგნის ნებისმიერი ნაწილის (ტექსტი, ფოტო, ილუსტრაცია თუ სხვა) გამოყენება არცერთი ფორმით და საშუალებით (ელექტრონული თუ მექანიკური) არ შეიძლება, გამომცემლის წერილობითი ნებართვის გარეშე. საავტორო უფლების დარღვევა ისჯება კანონით.

ემღვნება ჩემი უდიდესი მასწავლებლის,  
პროფესორ თეიმურაზ ვოინიჩ-სიანოჟენცკის  
ნათელ ხსოვნას

**წინასიტყვაობა**

წინამდებარე წიგნი წარმოადგენს კლასიკური მექანიკის მათემატიკური მეთოდების კურსის პირველ ტომს, რომელიც ეძღვნება მექანიკის თანამედროვე მათემატიკური მეთოდების შესწავლას.

პირველ თავში განხილულია ველის თეორია. ნებისმიერი ფიზიკური პროცესი, რომელიც მიმდინარეობს სივრცესა და დროში, აუცილებლად ქმნის ველს. აქედან გამომდინარე, მიზანშეწონილია, ველის ზოგადი თვისებების შესწავლა და შემდეგ, ამ თეორიის გამოყენება გრავიტაციის თეორიაში, ელექტრო-მაგნეტიზმსა და ჰიდრო-აეროდინამიკაში. ველის თეორია ფიზიკისა და გეომეტრიის საზღვრითი მეცნიერებაა და მის შესწავლას თან ახლავს სივრცის გეომეტრიის მათემატიკური სირთულეებიც. აქედან გამომდინარე, მიზანშეწონილია გავაცალკევოთ სივრცის გეომეტრიის და საკუთრივ, ფიზიკური პროცესის სირთულეები.

მეორე თავში მოცემულია ტენზორული ალგებრა და ანლიზი, რაც მნიშვნელოვანია ფიზიკური პროცესების მოდელირებისას.

მესამე - მეცხრე თავები ეძღვნება კლასიკური მექანიკის ტრადიციულ ამოცანებს და პროცესების მათემატიკური მოდელირების საკითხებს. შესწავლილია კვანძებისა და ლის ჯგუფების მექანიკაში გამოყენების საკითხები. განხილულია, აგრეთვე, რიგი ისეთი საკითხებისა, რაც წარმოადგენს ავტორის მეცნიერული შრომის შედეგებს.

წიგნი განკუთვნილია მექანიკით დაინტერესებული, ნიჭიერი სტუდენტებისათვის. ის საინტერესო იქნება აგრეთვე, კლასიკური მექანიკით დაინტერესებული ინჟინრებისა და ყველა იმ მკითხველისათვის, ვისაც თანამედროვე დინამიკის ახალი მეთოდები აინტერესებს.

## I თავი. ველის თეორია ევკლიდურ სივრცეში

ველი მატერიის არსებობის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ფორმაა. თეორიულ ფიზიკაში, დიდი ადგილი უკავია ველის თეორიას. განიხილება როგორც გრავიტაციული, ასევე, ელექტროსტატიკური, წნევათა, სიჩქარეთა, ტემპერატურათა ველი და მათი საერთო თვისებები.

### 1.1. სკალარული და ვექტორული სიდიდეები

მექანიკაში განიხილება ორი ტიპის სიდიდე: სკალარული და ვექტორული.

სკალარული ეწოდება სიდიდეს, რომელიც ხასიათდება მხოლოდ საკუთარი რიცხვითი მნიშვნელობით.

სკალარული სიდიდეების მაგალითებია: დრო, გავლილი გზა, მასა, სიმკვრივე, მუშაობა, სიმძლავრე, ენერჯია და ა.შ. მათზე სრულდება არითმეტიკული ოპერაციები (შეკრება, გამოკლება, გამრავლება, გაყოფა) ისე, როგორც ჩვეულებრივ რიცხვებზე.

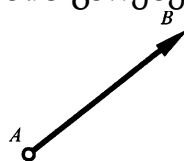
ვექტორული ეწოდება სიდიდეს, რომელიც ხასიათდება როგორც საკუთარი რიცხვითი მნიშვნელობით (ვექტორის სიგრძე), ასევე, მიმართულებით სივრცეში.

ვექტორული სიდიდეების მაგალითებია: გადაადგილება, სიჩქარე, აჩქარება, ძალა, წონა და ა.შ.

ვექტორულ სიდიდეებს გამოსახავენ მუქი ასოებით ან ასოს ზემოდან ახატავენ ვექტორის სიმბოლოს. მაგალითად:  $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{F}, \vec{P}$  ...ზოგჯერ კი, უბრალოდ, ზემოდან ხაზით გამოსახავენ:  $\bar{r}, \bar{v}, \bar{a}, \bar{F}, \bar{P}$ .

$\overline{AB}$  ვექტორის სიგრძე  $|\overline{AB}|$  სკალარული სიდიდეა და ის ყოველთვის არაუარყოფითი ( $|\overline{AB}| \geq 0$ ) სიდიდეა.

ნახაზზე ვექტორებს გამოსახავენ შესაბამისი მიმართულების მონაკვეთის საშუალებით, რომლის სიგრძეც მასშტაბში შეესაბამება ამ ვექტორის სიგრძეს (შესაბამისი მექანიკური სიდიდის რიცხვით მნიშვნელობას) ნახ.1.1. ზოგჯერ ვექტორის სიგრძეს გამოსახავენ იმავე ასოებით ვექტორის ნიშნის გარეშე ანუ წერენ  $|\overline{AB}| = AB$ .



ნახ. 1.1.  $\overline{AB}$  ვექტორის გეომეტრიული გამოსახვა

ორ ვექტორს ეწოდებათ ტოლი, თუ მათი სიგრძეებიც ერთნაირია და მიმართულებებიც. ამ შემთხვევაში წერენ  $\vec{A} = \vec{B}$ , რაც იმას ნიშნავს რომ

$$A = B, \vec{A} \uparrow \uparrow \vec{B};$$

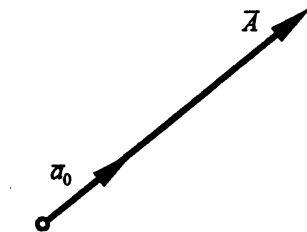
თუ ორი ვექტორი სიდიდით ტოლია, მაგრამ მათი მიმართულებები პარალელურ წრფეებზეა, ხოლო მიმართულება საპირისპირო, მაშინ წერენ რომ  $A = B, \vec{A} \updownarrow \vec{B}$  და მაშასადამე  $\vec{A} = -\vec{B}$ .

ერთ სიბრტყეში მდებარე ვექტორებს კომპლანარულს უწოდებენ.

თუ ორი ვექტორი ერთ სიბრტყეშია და პარალელურ წრფეებზე მდებარეობენ  $\vec{A} \parallel \vec{B}$  მაშინ მათ კოლინეარულს უწოდებენ.

ასეთი ვექტორები შეიძლება იყვნენ ერთი მიმართულების ან საპირისპირო მიმართულების.

$\vec{a}_0$  ვექტორს ეწოდება  $\vec{A}$  ვექტორის მიმმართველი ერთეულოვანი ვექტორი ანუ ორტა, თუ მას იგივე მიმართულება აქვს რაც  $\vec{A}$  ვექტორს და მისი სიგრძე ერთის ტოლია. ასეთ შემთხვევაში  $\vec{a}_0 = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ .



ნახ. 1.2.  $\vec{A}$  ვექტორი და მისი  $\vec{a}_0$  ორტა

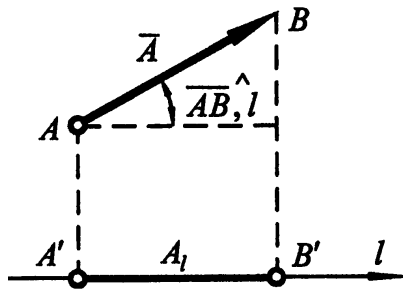
ვექტორი შეგვიძლია გამოვსახოთ ორტის საშუალებით შემდეგნაირად:

$$\vec{A} = |\vec{A}| \cdot \vec{a}_0 = A \cdot \vec{a}_0.$$

### ვექტორის პროექცია რიცხვით ღერძზე (წრფეზე) და სიბრტყეზე

რიცხვითი ღერძი ეწოდება წრფეს, რომელზედაც არჩეულია დადებითი მიმართულება, სათავე და მასშტაბი.

მოცემული  $\vec{AB}$  ვექტორის გეგმილი  $l$  რიცხვით ღერძზე ეწოდება  $A'B'$  მონაკვეთს, სადაც  $A'$  და  $B'$  ამ ვექტორის ბოლოების ორთოგონალური გეგმილებია ამ ღერძზე ნახ. 1.3.

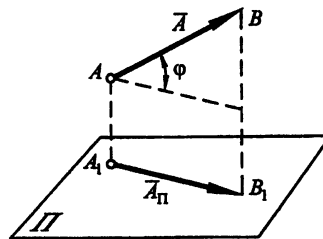


ნახ. 1.3.  $\overline{AB}$  ვექტორის გეგმილი  $l$  რიცხვით ღერძზე

ცხადია, რომ  $A'B' = |\overline{AB}| \cdot \cos(\overline{AB} \wedge l)$ . ვექტორის გეგმილი ღერძზე, შეიძლება იყოს უარყოფითი ან დადებითი, რაც დამოკიდებულია ვექტორის მიმართულებასა და ღერძის მიმართულებას შორის არსებული კუთხის სიდიდეზე.

მოცემული  $\overline{AB}$  ვექტორის გეგმილი  $\Pi$  სიბრტყეზე ეწოდება  $\overline{A'B'}$  ვექტორს, რომელიც მიიღება ამ ვექტორის ბოლოების ორთოგონალური დაგეგმილებით  $\Pi$  სიბრტყეზე ნახ. 1.4. გეგმილის  $\overline{A'B'}$  ვექტორის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$|\overline{A'B'}| = |\overline{AB}| \cdot \cos \varphi$$



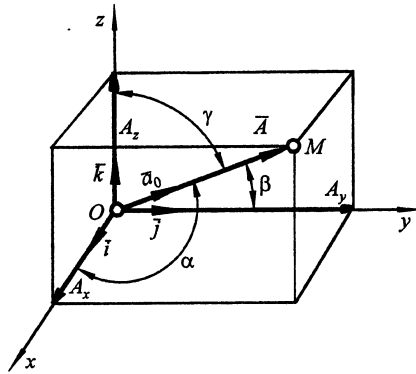
ნახ. 1.4. ვექტორის გეგმილი სიბრტყეზე

### ვექტორის კოორდინატები

ითვლება რომ  $\overline{A} = \overline{OM}$  ვექტორი მოცემულია, თუ ვიცით მისი სიგრძე და მიმართულება სივრცეში (ანუ ვექტორსა და საკოორდინატო ღერძების დადებით მიმართულებებს შორის არსებული  $\alpha, \beta, \gamma$  კუთხეების მიმმართველი კოსინუსები) ნახ. 1.5.

$$\cos \alpha = \cos(x, \overline{OM}), \quad \cos \beta = \cos(y, \overline{OM}),$$

$$\cos \gamma = \cos(z, \overline{OM}).$$



ნახ. 1.5.  $\vec{A} = \vec{OM}$  ვექტორის კოორდინატები და მიმართველი კუთხეების კოსინუსები

როგორც ნახ. 1.5 გვიჩვენებს,  $\vec{A} = \vec{OM}$  ვექტორის კოორდინატები მოიცემა ფორმულებით:

$$\begin{aligned} A_x &= |\vec{A}| \cdot \cos \alpha \\ A_y &= |\vec{A}| \cdot \cos \beta \\ A_z &= |\vec{A}| \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$

ცხადია რომ, შეგვიძლია ვექტორი წარმოვადგინოთ ორტების ბაზისის საშუალებით:

$$\vec{A} = A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j} + A_z \cdot \vec{k}.$$

მოცემული ვექტორი შეგვიძლია, აგრეთვე, წარმოვადგინოთ მისი კოორდინატებით საკოორდინატო ღერძებზე:

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z);$$

ნახ. 1.5.-დან ცხადია, რომ ვექტორის სიგრძე შეგვიძლია გამოვითვალოთ ფორმულით:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.$$

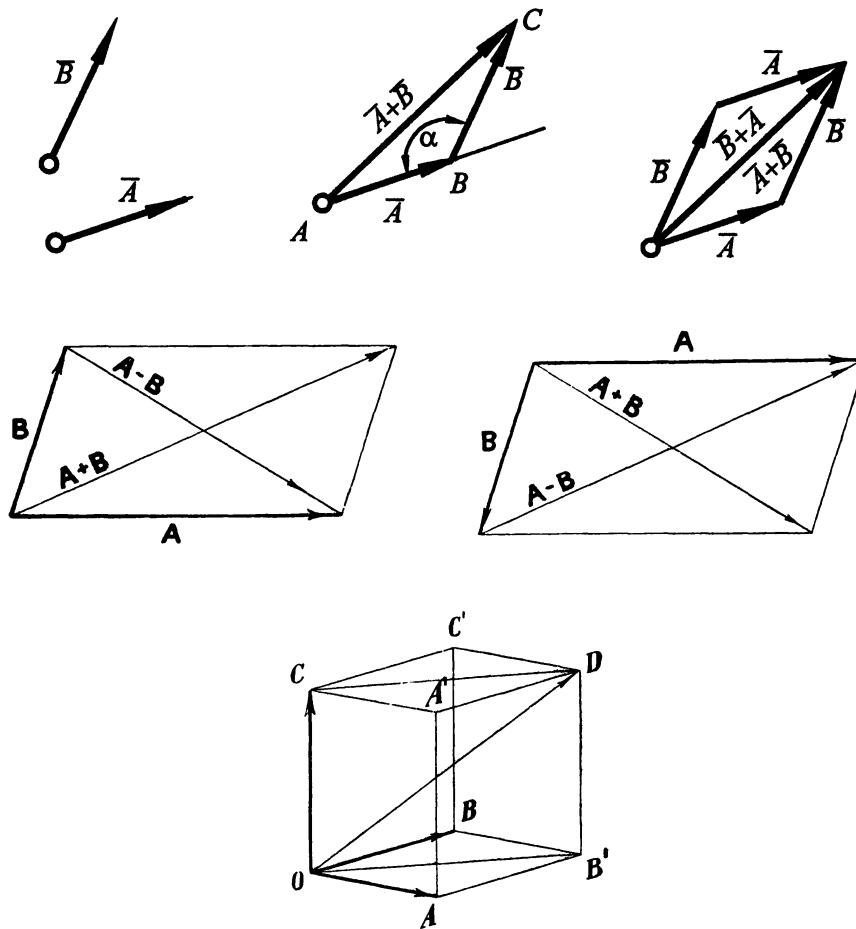
მიმართველი კუთხეების კოსინუსები კი წარმოადგენენ მოცემული ვექტორის ორტის კოორდინატებს:

$$\vec{a}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

### ვექტორების შეკრება - გამოკლება

ორი  $\vec{A}$  და  $\vec{B}$  ვექტორის ჯამი ეწოდება ვექტორს, რომლის სათავეც ემთხვევა  $\vec{A}$  ვექტორის სათავეს, ხოლო ბოლო ემთხვევა  $\vec{B}$  ვექტორის ბოლოს (სამკუთხედის წესი), ვექტორების შეკრება ხდება პარალელოგრამის წესითაც, როცა ორივე ძალა ერთ წერტილშია მოდებული; ერთ წერტილში მოდებული სამი ვექტორის შეკრებისას,

ჯერ შევკრებენ ორ ვექტორს და მიღებულ ჯამს, მიუმატებენ მესამე ვექტორს ნახ. 1.6.



$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{D}$$

ნახ. 1.6. ვექტორების შეკრების სამკუთხედისა და პარალელოგრამის წესი

ამ ნახაზებიდან ჩანს რომ,  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ . ადვილი მისახვედრია, რომ ორი ვექტორის ჯამის სიგრძის გამოთვლა ხორციელდება კოსინუსების თეორემით. მართლაც  $\Delta ABC$  - დან გამომდინარე, მივიღებთ, რომ რადგან  $\alpha = \pi - (\vec{A} \wedge \vec{B})$  გვექნება ფორმულა:

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2 \cdot |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha} = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2 \cdot |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos(\vec{A} \wedge \vec{B})}$$

### ვექტორის გამრავლება სკალარზე

ვექტორის გამრავლება რაიმე  $\lambda$  სკალარზე იწვევს ვექტორის სიგრძის გაზრდას  $\lambda$ -ჯერ თუ  $|\lambda| > 1$  და იწვევს მისი სიგრძის



შემცირებას თუ,  $|\lambda| < 1$ . ამასთან თუ  $\lambda < 0$ , მაშინ ვექტორის მიმართულება საპირისპიროთი იცვლება.

მაგალითად, თუ გვაქვს  $\bar{A} = (A_x, A_y, A_z)$  ვექტორი, მაშინ  $\lambda \cdot \bar{A} = (\lambda \cdot A_x, \lambda \cdot A_y, \lambda \cdot A_z)$ ; შესაბამისად,  $|\lambda \cdot \bar{A}| = |\lambda| \cdot \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ . რაც

იმას ნიშნავს, რომ მაგალითისათვის

$5 \cdot \bar{A} = (5 \cdot A_x, 5 \cdot A_y, 5 \cdot A_z)$  და შესაბამისად

$$|5 \cdot \bar{A}| = 5 \cdot \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში, ვექტორის სიგრძე გაიზრდება 5-ჯერ, მიმართულება კი არ შეიცვლება. თუ  $\lambda = \frac{1}{2}$  მაშინ, ვექტორის სიგრძე შემცირდება 2-ჯერ.

ორი  $\bar{A}$  და  $\bar{B}$  ვექტორის კოლინეარობის (პარალელობის) პირობა იმაში მდგომარეობს, რომ უნდა არსებობდეს ისეთი  $\lambda$  რიცხვი, რომლისთვისაც ადგილი ექნება ტოლობას  $\bar{A} = \lambda \cdot \bar{B}$ , რაც იმას ნიშნავს რომ

$$A_x = \lambda \cdot B_x; \quad A_y = \lambda \cdot B_y; \quad A_z = \lambda \cdot B_z.$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, ამ ვექტორების შესაბამისი კომპონენტების ფარდობები უნდა იყოს  $\lambda$  სიდიდის ტოლი ანუ

$$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} = \lambda.$$

### ვექტორების სკალარული ნამრავლი

ორი  $\bar{A}$  და  $\bar{B}$  ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება სკალარულ სიდიდეს, რომელიც მიიღება ამ ვექტორების სიგრძეთა გამრავლებით მათ შორის კუთხის კოსინუსზე. ეს განსაზღვრება ფორმულებით ასე ჩაიწერება:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = |\bar{A}| \cdot |\bar{B}| \cdot \cos(\bar{A} \wedge \bar{B}).$$

ცხადია რომ სკალარული ნამრავლისათვის გვაქვს ფორმულები:

$$\cos(\bar{A}, \bar{B}) = 1, \quad \bar{A} \cdot \bar{B} = AB \quad \text{при } \bar{A} \uparrow \uparrow \bar{B};$$

$$\cos(\bar{A}, \bar{B}) = -1, \quad \bar{A} \cdot \bar{B} = -AB \quad \text{при } \bar{A} \uparrow \downarrow \bar{B};$$

$$\cos(\bar{A}, \bar{B}) = 0, \quad \bar{A} \cdot \bar{B} = 0 \quad \text{при } \bar{A} \perp \bar{B};$$

$$\cos(\bar{A}, \bar{B}) = 1, \quad \bar{A} \cdot \bar{B} = A^2 \quad \text{при } \bar{A} = \bar{B}.$$

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{i} = 0;$$

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1.$$

თუ გავიხსენებთ ვექტორის წარმოდგენას ორტების საშუალებით  $\bar{A} = A_x \cdot \bar{i} + A_y \cdot \bar{j} + A_z \cdot \bar{k}$ ;  $\bar{B} = B_x \cdot \bar{i} + B_y \cdot \bar{j} + B_z \cdot \bar{k}$  და გავითვალისწინებთ ორტების სკალარული ნამრავლის თვისებებს, მივიღებთ რომ სკალარული ნამრავლი შეგვიძლია გამოვსახოთ კოორდინატებითაც.

მართლაც,

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = (A_x \cdot \bar{i} + A_y \cdot \bar{j} + A_z \cdot \bar{k}) \cdot (B_x \cdot \bar{i} + B_y \cdot \bar{j} + B_z \cdot \bar{k}).$$

ამ ნამრავლის გარდაქმნით მივიღებთ, რომ

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z.$$

აქედან გამომდინარე, ორი ვექტორის ორთოგონალობის (ურთიერთ-პერპენდიკულარობის) პირობა იმაში მდგომარეობს, რომ მათი სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია ანუ

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z = 0.$$

ასევე, სკალარული ნამრავლის ორნაირი განსაზღვრა საშუალებას გვაძლევს ჩავწეროთ რომ

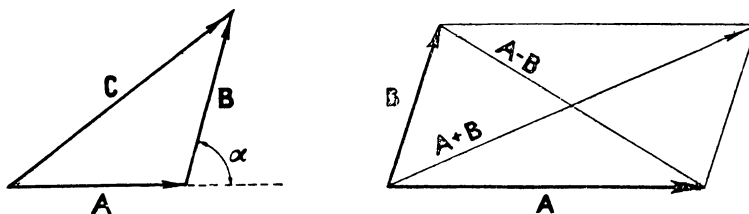
$$\bar{A} \cdot \bar{B} = |\bar{A}| \cdot |\bar{B}| \cdot \cos(\bar{A} \wedge \bar{B}) = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z.$$

თუ გავითვალისწინებთ ვექტორის სიგრძის გამოსახულებას კოორდინატების საშუალებით  $|\bar{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ , მაშინ მივიღებთ ორ ვექტორს შორის არსებული კუთხის კოსინუსისათვის ფორმულას:

$$\cos(\bar{A} \wedge \bar{B}) = \frac{\bar{A} \cdot \bar{B}}{|\bar{A}| \cdot |\bar{B}|} = \frac{A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \cdot \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}.$$

ვექტორების გამოყენებით, ადვილად მტკიცდება მრავალი გომეტრიული თეორემა. მაგალითად, განვიხილოთ კოსინუსების თეორემა:  $C^2 = A^2 + 2AB \cos(\angle A) + B^2$ .

$$C = A + B.$$



მართლაც, თუ ავიყვანთ კვადრატში ორი ვექტორის ჯამს მივიღებთ, რომ  $C^2 = (A + B)^2 = A^2 + 2(AB) + B^2$ . თუ ამ ტოლობაში, შემავალ ნამრავლს შევცვლით სკალარულ ნამრავლით, მივიღებთ დასამტკიცებელს. თუ,  $A \perp B$ , მაშინ მივიღებთ პითაგორას თეორემას.

ახლა განვიხილოთ ზემოთ მოყვანილი პარალელოგრამის დიაგონალები, მაშინ ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} (A + B)^2 + (A - B)^2 &= 2(A^2 + B^2), \\ (A + B)^2 - (A - B)^2 &= 4(AB), \\ (A + B)(A - B) &= A^2 - B^2. \end{aligned}$$

პირველი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ პარალელოგრამის დიაგონალების კვადრატების ჯამი, მისი გვერდების კვადრატების ჯამის ტოლია.

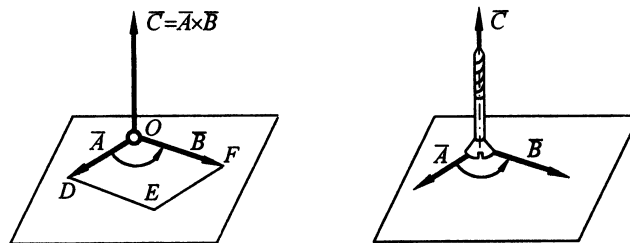
მეორე ტოლობა გვეუბნება, რომ პარალელოგრამის დიაგონალების კვადრატების სხვაობა უდრის მისი გვერდების გაოთხკეცებულ ნამრავლს, მათ შორის კუთხის კოსინუსზე.

მესამე ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ თუ პარალელოგრამი რომშია ანუ  $A = B$  მაშინ დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

### ვექტორების ვექტორული ნამრავლი

ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი ეწოდება ვექტორს, რომლის სიგრძეც უდრის ამ ვექტორების სიგრძეთა ნამრავლს გამრავლებულს მათ შორის არსებული კუთხის სინუსზე, ხოლო მიმართულება განისაზღვრება ისე რომ, ის პერპენდიკულარულია საწყის ვექტორებზე გამავალი სიბრტყისა და როცა დავყურებთ ნამრავლი ვექტორის ბოლოდან პირველი თანამამრავლიდან მეორესკენ მიმავალ მცირე კუთხეს, ის უნდა ბრუნავდეს საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით ნახ. 1.7. ანუ თუ გვაქვს ვექტორული ნამრავლი  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ , მაშინ

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin(\angle \vec{A} \vec{B}) = S_{\Delta ODEF}$$

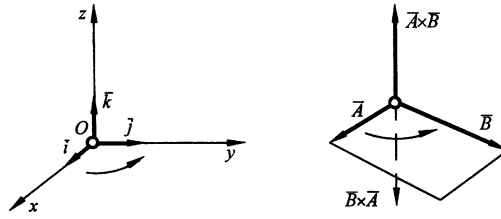


ნახ. 1.7. ვექტორული ნამრავლის განსაზღვრებისათვის

ვექტორული ნამრავლის სიდიდე, ამ ვექტორებზე როგორც გვერდებზე აგებული პარალელოგრამის  $S_{\Delta ODEF}$  ფართობის ტოლია.

მიმართულების განსაზღვრიდან გამომდინარე, ცხადია რომ

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$



ნახ. 1.8. ვექტორული ნამრავლის თვისებები

ერთეულოვანი  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  ვექტორებისათვის გვექნება ფორმულები:

$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0;$$

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}.$$

თუ გავითვალისწინებთ ვექტორების წარმოდგენას ორტების საშუალებით  $\bar{A} = A_x \cdot \bar{i} + A_y \cdot \bar{j} + A_z \cdot \bar{k}$ ;  $\bar{B} = B_x \cdot \bar{i} + B_y \cdot \bar{j} + B_z \cdot \bar{k}$ , მივიღებთ რომ

$$\bar{A} \times \bar{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \bar{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \bar{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \bar{k},$$

რაც გვაძლევს ვექტორული ნამრავლის წარმოდგენას ორტების ბაზისის მიმართ. ამ წარმოდგენას, ზოგჯერ მესამე რიგის მატრიცის დეტერმინანტის საშუალებითაც წერენ:

$$\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

ამ ჩანაწერის გაშლა ლაპლასის თეორემის საფუძველზე პირველი სტრიქონის მიმართ, გვაძლევს ვექტორული ნამრავლის წარმოდგენას მეორე რიგის დეტერმინანტებით:

$$(\bar{A} \times \bar{B})_x = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}; \quad (\bar{A} \times \bar{B})_y = \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix}; \quad (\bar{A} \times \bar{B})_z = \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}.$$

ამოცანა 1. მოცემულია ორი ვექტორი:  $\vec{a}(1; 5; -2)$  და  $\vec{b}(2; 4; -3)$ . იპოვეთ  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ .

ამოხსნა:  $2\vec{a} + 3\vec{b} = 2 \cdot (1; 5; -2) + 3 \cdot (2; 4; -3) = (2 \cdot 1; 2 \cdot 5; 2 \cdot (-2)) + (3 \cdot 2; 3 \cdot 4; 3 \cdot (-3)) = (2; 10; -4) + (6; 12; -9) = (2 + 6; 10 + 12; -4 - 9) = (8; 22; -13)$ .

**ამოცანა 2.** მოცემულია ორი ვექტორი:  $\vec{a}(1; y; -2)$  და  $\vec{b}(2; 4; z)$ . იპოვეთ  $y$  და  $z$ , თუ ცნობილია რომ ეს ვექტორები კოლინეარულია (პარალელური).

**ამოხსნა:** ორი ვექტორის კოლინეარობის პირობაა:  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$  რაც იმას ნიშნავს, რომ  $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$  ანუ  $\frac{1}{2} = \frac{y}{4} = \frac{-2}{z}$ . აქედან ცხადია, რომ  $y = 2$ ;  $z = -4$ .

**ამოცანა 3.** მოცემულია ორი ვექტორი:  $\vec{a}(1; 3m; -2)$  და  $\vec{b}(2; 4; 2m)$ . იპოვეთ  $m$ , თუ ცნობილია რომ ეს ვექტორები ორთოგონალურები არიან (ურთიერთპერპენდიკულარული).

**ამოხსნა:** ორი ვექტორის პერპენდიკულარობის (ორთოგონალობის პირობას), აქვს სახე:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  ანუ  $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ . რაც იმას ნიშნავს, რომ  $1 \cdot 2 + 3m \cdot 4 + (-2) \cdot 2m = 0$  ანუ  $8m = -2$  ე.ი.  $m = -0.25$ .

### სამი ვექტორის ვექტორულ-სკალარული ნამრავლი (შერეული ნამრავლი)

ვექტორების შერეულ ნამრავლს უწოდებენ  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  ნამრავლს, სადაც ფრჩხილებში მოთავსებული ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი, სკალარულად მრავლდება მესამე ვექტორზე. სამი ვექტორის ვექტორულ-სკალარული ნამრავლი წარმოადგენს სკალარულ სიდიდეს, რომელიც გამოსახავს ამ ვექტორებზე, როგორც გვერდებზე, აგებული პარალელებიპედის მოცულობას. მის გამოთვლას აწარმოებენ შემდეგი დეტერმინანტის საშუალებით:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

**P.S.** შერეულ ნამრავლში: ა) თუ რომელიმე ორი თანამამრავლი კოლინეარულია, მაშინ ეს სამი ვექტორი კომპლანარულია (ერთ სიბრტყეში დევს) და შესაბამისად, შერეული ნამრავლი ნულის ტოლია; ბ) მამრავლთა ციკლური გადაადგილებით, შერეული ნამრავლი არ იცვლება.

## სამი ვექტორის ვექტორულ-ვექტორული ნამრავლი

ასეთი დასახელება აქვს სამი ვექტორის შემდეგი სახის ნამრავლს:

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ . ამ ნამრავლს, ზოგჯერ ორმაგ ვექტორულ ნამრავლსაც უწოდებენ და ის გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

### 1.2. სკალარული ველი ევკლიდეს სივრცეში. სკალარული ველის გრადიენტი

ევკლიდური სივრცის  $D \subset \mathbb{R}^3$  ქვესივრცელს ეწოდება  $f = f(x, y, z)$  ფუნქციით განსაზღვრული სკალარული ველი, თუ  $D$  სივრცის ყოველი წერტილისათვის განსაზღვრულია  $f = f(x, y, z)$  ფუნქცია ანუ  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . ამ ფუნქციას  $D$  სკალარული ველის პოტენციალი ეწოდება. სკალარული ველის  $f(x, y, z)$  პოტენციალის მაგალითებია: ელექტროსტატიკური ველის პოტენციალი, გრავიტაციული ველის პოტენციალი, წნევათა ველის პოტენციალი . . .

თუ, სკალარულ ველს შეესაბამება ცალსახა  $f(x, y, z)$  პოტენციალი, მაშინ იმ წერტილების სივრცელს, სადაც მოცემული ფუნქცია ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას, სკალარული ველის დონის ზედაპირები (ეკვიპოტენციალური ზედაპირები) ეწოდებათ. დონის ზედაპირები განისაზღვრება განტოლებით:  $f(x, y, z) = C$ , სადაც  $C$  - მუდმივი რიცხვია. თუ ამ მუდმივს მივცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობებს, მივიღებთ დონის ზედაპირების ერთობლიობას. სკალარული ველის ყოველ წერტილზე გადის ერთადერთი დონის ზედაპირი. დონის ზედაპირის ყოველ წერტილში გვაქვს სკალარული ველის ერთნაირი პოტენციალი ანუ შესაბამისი ფიზიკური მოვლენა ერთნაირად მიმდინარეობს დონის ზედაპირის ყოველ წერტილში.

მაგალითად, თუ გვაქვს სკალარული ტემპერატურული ველი  $T(x, y, z)$ , მაშინ მისი დონის წირები იქნება იზოთერმული ზედაპირები  $T(x, y, z) = C$  ანუ ის ზედაპირები, რომლის ყოველ წერტილში ტემპერატურა ერთნაირია.

თუ გვაქვს უწყვეტი გარემოს წნევათა სკალარული ველი  $p(x, y, z)$ , მაშინ მისი დონის ზედაპირები იქნება იზობარული ზედაპირები  $p(x, y, z) = C$  ანუ ის ზედაპირები, რომლის ყოველ წერტილში წნევა ერთნაირია.

სკალარული ველის შესწავლისათვის, ხშირად, განიხილავენ სკალარული  $\varphi(x, y, z)$  ველის წარმოებულს, მოცემული  $\vec{l}$  ვექტორის მიმართულებით, რომელიც პრაქტიკულად, გვიჩვენებს ამ ველის  $\varphi(x, y, z)$  პოტენციალის ცვლილების სიჩქარეს, მოცემული მიმართულებით და ის მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(\vec{l}, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(\vec{l}, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(\vec{l}, z). \quad (1.1)$$

P.S. ცხადია, რომ სკალარული ველის წარმოებული, მოცემული ვექტორის მიმართულებით, დამოკიდებულია წერტილის კოორდინატებზე, რომლებშიც ითვლება კერძო წარმოებულები და  $\vec{l}$  ვექტორის მიმართველ კოსინუსებზე.

### სკალარული ველის გრადიენტი

სკალარული  $\varphi(x, y, z)$  ველის გრადიენტი ეწოდება ვექტორს, რომელიც ჩაიწერება ამ ველის, კოორდინატების მიხედვით კერძო წარმოებულებით, შემდეგი სახით:

$$\text{grad } \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \quad (1.2)$$

აქ იგულისხმება, რომ  $\varphi(x, y, z)$  სკალარული ველი ცალსახაა და უწყვეტი, თავის პირველი რიგის წარმოებულებთან ერთად.

სკალარული ველის გრადიენტით მოცემული ველი უკვე ვექტორული ველია და მისი სიგრძე, ველის ყოველ წერტილში, გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$|\text{grad } \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}. \quad (1.3)$$

ცხადია, რომ  $\vec{l}$  ვექტორის მიმართველი ერთეულოვანი  $\vec{l}_0$  ვექტორი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\vec{l}_0 = \cos(\vec{l}, x)\vec{i} + \cos(\vec{l}, y)\vec{j} + \cos(\vec{l}, z)\vec{k}, \quad (1.4)$$

მაშინ, ადვილი მისახვედრია რომ (1.1) ფორმულა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \text{grad } \varphi \cdot \vec{l}_0, \quad (1.5)$$

მაგრამ  $|\vec{l}_0| = 1$ , მაშინ (1.5) ტოლობიდან სკალარული ნამრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = |\text{grad } \varphi| \cdot \cos(\text{grad } \varphi, \vec{l}_0) = \text{გეგმილი}_l(\text{grad } \varphi). \quad (1.6)$$

(1.6) ტოლობიდან ნათლად ჩანს, რომ სკალარული ველის წარმოებული მოცემული მიმართულებით, ამ წერტილში გამოთვლილი გრადიენტის გეგმილის ტოლია მოცემული ვექტორის მიმართულებაზე. სკალარული ველის წარმოებულის მაქსიმალური  $|\text{grad } \varphi|$  მნიშვნელობა მიიღწევა მაშინ, როცა კოსინუსი ერთის ტოლია და მაშასადამე, როცა  $\vec{l}_0$  ვექტორის მიმართულება სკალარული ველის გრადიენტის მიმართულებას ემთხვევა.

რადგან მიმართულებით წარმოებული გვიჩვენებს სკალარული ველის ცვლილების სიჩქარეს ამ მიმართულებით, შეგვიძლია დავასკვნათ რომ, სკალარული ველის გრადიენტის მიმართულება შეესაბამება სკალარული ველის ცვლილების მაქსიმალურ სიჩქარეს.

განვიხილოთ სკალარული ველის ცვლილების სიჩქარე დონის წირის  $\vec{s}$  მხების მიმართულებით, მაშინ გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \text{grad } \varphi \cdot \vec{s}_0$ , სადაც  $\vec{s}_0$  დონის წირის მხების მიმართული ვექტორია. რადგან ვექტორული ველი დონის წირის გასწვრივ არ იცვლება, ცხადია, რომ  $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ , რაც იმას ნიშნავს რომ  $\text{grad } \varphi \cdot \vec{s}_0 = 0$ .

P.S. ე.ი. სკალარული ველის გრადიენტი, დონის წირის პერპენდიკულარულია მოცემულ წერტილში ანუ აქვს დონის წირის ნორმალის მიმართულება.

განვიხილოთ მაგალითები:

1. განვიხილოთ კოორდინატთა სათავეში მოთავსებული  $q$  წერტილოვანი მუხტის ველის  $\varphi = \frac{q}{r}$  პოტენციალის დონის წირები და გრადიენტი, სადაც  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  მანძილია კოორდინატთა



სათავიდან მოცემულ  $(x, y, z)$  წერტილამდე, სადაც პოტენციალის სიდიდე ითვლება.

**ამოხსნა.** ელექტროსტატიკური ველის დონის ზედაპირების საპოვნელად, ჩავწეროთ დონის ზედაპირების განტოლება

$$\varphi = \frac{q}{r} = C \Rightarrow r = \frac{q}{C} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{q}{C}, \quad (1.7)$$

(1.7) განტოლება გადავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{q^2}{C^2}. \quad (1.8)$$

ამრიგად, მივიღეთ დონის ზედაპირების ერთობლიობა, რომელიც გეომეტრიულად კონცენტრული სფეროს ზედაპირებს წარმოადგენენ საერთო ცენტრით იმ წერტილში სადაც ველის წარმომქმნელი მუხტია.

მოცემული სკალარული  $\varphi = \frac{q}{r}$  ველის გრადიენტის საპოვნელად, ვისარგებლოთ (1.2) ფორმულით:  $grad \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$ . მაშინ გვექნება, რომ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -q \frac{x}{r^3}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = -q \frac{y}{r^3}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = -q \frac{z}{r^3}. \quad (1.9)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$grad \varphi = -\frac{q}{r^3} (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}) = -\frac{q}{r^3} \vec{r}. \quad (1.10)$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ  $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{r}_0$  არის  $\vec{r}$  რადიუს-ვექტორის მიმმართველი ვექტორი, საბოლოოდ გვექნება, რომ

$$grad \varphi = -\frac{q}{r^2} \vec{r}_0. \quad (1.11)$$

ცხადია, რომ

$$|grad \varphi| = \frac{q}{r^2}, \quad \vec{r}_0 = \frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{z}{r} \vec{k}.$$

### სკალარული ველის გრადიენტის თვისებები

$$1. grad(\varphi + \psi) = grad\varphi + grad\psi; \quad (1.12)$$

$$2. grad(\varphi \cdot \psi) = \varphi grad\psi + \psi grad\varphi; \quad (1.13)$$

$$3. \operatorname{grad} F(\varphi) = F'(\varphi) \operatorname{grad} \varphi. \quad (1.14)$$

**1.3. ვექტორული ველი. ვექტორული ველის პოტენციალი.  
 ვექტორული ველის ძალწირები. გრიგალის ცნება და მისი  
 ჰიდროდინამიკური შინაარსი. ვექტორული ველის ცირკულაცია  
 შერეულ წირზე**

ევკლიდური სივრცის  $D \subset \mathbb{R}^3$  ქვესიმრავლეს, ეწოდება  $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$  ვექტორ-ფუნქციით განსაზღვრული ვექტორული ველი თუ,  $D$  სიმრავლის ყოველი წერტილისათვის განსაზღვრულია  $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$  ვექტორი ანუ  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ . ვექტორული ველის მაგალითებია: მოძრავი სითხის სიჩქარეთა ველი, დეფორმირებულ სხეულში წერტილთა გადაადგილებათა ვექტორული ველი . . .

ვექტორული ველი შეგვიძლია ჩავწეროთ საკოორდინატო ღერძების ორტების მიმართ შემდეგი ფორმით:

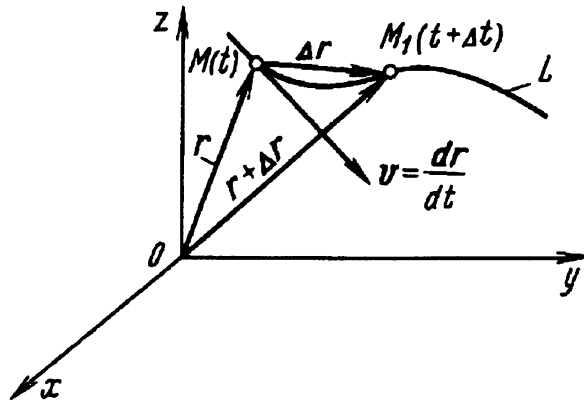
$$\vec{f}(x, y, z) = f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k}. \quad (1.15)$$

სადაც  $f_x(x, y, z)$  არის  $\vec{f}(x, y, z)$  ვექტორ-ფუნქციის გეგმილი აბსცისთა ღერძზე,  $f_y(x, y, z)$  - გეგმილია ორდინატთა ღერძზე, ხოლო  $f_z(x, y, z)$  აპლიკატის ღერძზე.

იგულისხმება, რომ ვექტორული ველის კომპონენტები უწყვეტია თავის კერძო წარმოებულებთან ერთად.

**სკალარული არგუმენტის ვექტორ-ფუნქციის წარმოებული**

განვიხილოთ სკალარული  $t$  არგუმენტის  $r(t)$  ვექტორ-ფუნქცია. მექანიკაში სკალარულ  $t$  არგუმენტად, როგორც წესი, განიხილება დრო; ხოლო  $r(t)$  აღნიშნავს დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ მოძრავი, მატერიალური  $M$  წერტილის გადაადგილების ვექტორს.



ნახ. 1.9. სკალარული არგუმენტის ვექტორ-ფუნქციის წარმოებული

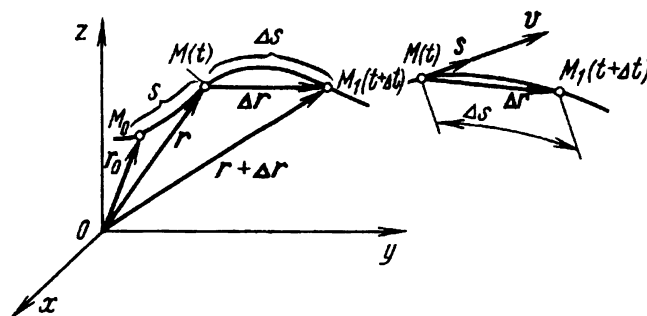
ვექტორის გოდოგრაფი ეწოდება ამ ვექტორის ბოლოს მიერ შემოწერილ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს. ნახ. 1.9 -ზე გადაადგილების  $r(t)$  ვექტორის გოდოგრაფს წარმოადგენს  $M$  წერტილის მოძრაობის  $L$  ტრაექტორია.

გადაადგილების  $r(t)$  ვექტორ-ფუნქციის წარმოებული  $M$  წერტილში, სკალარული  $t$  არგუმენტით განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$v = \frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

ესაა სიჩქარის ვექტორი მოცემულ  $M$  წერტილში. ცხადია, რომ სიჩქარის მიმართულება გადაადგილების გოდოგრაფის მოცემულ წერტილში, მხების მიმართულებას ემთხვევა ნახ. 1.9.

გადაადგილების რადიუს-ვექტორის დროზე დამოკიდებულება შეიძლება მოცემული იყოს ნატურალური პარამეტრის (გადაადგილების ტრაექტორიის  $s$  რკალის) საშუალებით ნახ. 1.10



ნახ. 1.10. გადაადგილების დამოკიდებულება რკალის სიგრძეზე

ვთქვათ, რკალის სიგრძის ათვლის წერტილია  $M_0$ , ხოლო რკალის სიგრძე არის დროის ფუნქცია ანუ გვაქვს დამოკიდებულება  $r[s(t)]$ . მაშინ, რთული ფუნქციის გაწარმოების წესიდან გამომდინარე მივიღებთ რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = sv,$$

სადაც  $v = \frac{ds}{dt}$  სიჩქარის სიდიდეა, ხოლო  $s = \frac{dr}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s}$  წარმოადგენს მხების მიმართულების ერთეულოვან ვექტორს ტრაექტორიის მოცემულ წერტილში, რადგან როცა  $\Delta s \rightarrow 0$  მაშინ გოდოგრაფის  $\Delta r$  მკვეთი მიისწრაფის ამ წერტილში მხების მდგომარეობისაკენ და მათი სიგრძეებიც უტოლდებიან ანუ  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta r|}{\Delta s} = 1$ .

### ვექტორული ველის პოტენციალი

$\vec{f}(x, y, z)$  ვექტორულ ველს ეწოდება პოტენციალური, თუ არსებობს ისეთი  $\varphi(x, y, z)$  სკალარული ველი, რომლის გრადიენტული ველიც ემთხვევა მოცემულ ვექტორულ ველს ანუ თუ გვაქვს, შემდეგი ტოლობა:

$$\vec{f}(x, y, z) = \text{grad } \varphi(x, y, z). \quad (1.16)$$

თეორემა.  $\vec{f}(x, y, z)$  ვექტორული ველის პოტენციალურობისათვის აუცილებელია და საკმარისი შემდეგი პირობების შესრულება:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

### ვექტორული ველის ცირკულაცია და წირითი ინტეგრალი

$\vec{f}(x, y, z)$  ვექტორული ველის  $G_L$  ცირკულაცია  $L$  კონტურის გასწვრივ, ეწოდება შემდეგი სახის წირით ინტეგრალს:

$$G_L = \oint f_x(x, y, z)dx + f_y(x, y, z)dy + f_z(x, y, z)dz, \quad (1.18)$$

სადაც  $L$  კონტურის გავლა მარჯვენა კოორდინატთა სისტემაში, უნდა ხდებოდეს საათის ისრის მიმართულების საწინააღმდეგოდ.

თუ  $L$  კონტური არაა შეკრული, მაშინ (1.18) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგარ ინტეგრალს  $\vec{f}$  ვექტორული ველის წირით ინტეგრალს უწოდებენ და ჩაწერენ შემდეგი ფორმით:

$$u = \int \vec{f} \cdot \vec{dr}, \quad (1.19)$$

სადაც  $\vec{dr}$  მოცემულ ინტეგრირების  $AB$  წირზე მოძრავი წერტილის რადიუს-ვექტორია ანუ  $\vec{dr} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$ .

თუ  $\vec{f}$  ძალაა, მაშინ (1.19) არის ის მუშაობა, რომელიც უნდა შეასრულოს ამ ძალამ წერტილის გადასაადგილებლად  $AB$  წირზე.

### ვექტორული ველის ძალწირები

**განსაზღვრება.** ისეთ წირებს, რომლის ყოველ წერტილში, მხების მიმართულება ემთხვევა ამ წერტილში განსაზღვრული  $\vec{f}$  ვექტორული ველის მიმართულებას,  $\vec{f}$  ვექტორული ველის ძალწირები ეწოდებათ.

განსაზღვრებიდან გამომდინარე:

$$\vec{dr} = t \cdot \vec{f} \Leftrightarrow (dx; dy; dz) = t \cdot (f_x; f_y; f_z).$$

შესაბამისად, ვექტორული ველის ძალწირებისათვის გვექნება შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები:

$$\frac{dx}{f_x} = \frac{dy}{f_y} = \frac{dz}{f_z} = t. \quad (1.20)$$

### ვექტორული ველის გრიგალის ცნება და მისი ჰიდროდინამიკური შინაარსი

$\vec{f}$  ვექტორული ველის გრიგალი ანუ როტორი  $rot \vec{f}$  ეწოდება ვექტორულ ველს, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$rot \vec{f} = \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (1.21)$$

ამ ფორმულას ზოგჯერ წერენ დეტერმინანტის საშუალებითაც:

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}. \quad (1.22)$$

**P.S.** თუ, სითხის სიჩქარის ვექტორული ველის გრიგალი ნულის ტოლია  $\operatorname{rot} \vec{f} = 0$ , მაშინ მის დინება უგრიგალოა ანუ ფენა ფენას მიჰყვება და არ ხდება ფენების ერთმანეთში არევა. ასეთ შემთხვევაში, სითხის დინება პოტენციალურია ანუ არსებობს ისეთი  $\varphi$  ფუნქცია - პოტენციალი, რომ  $\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$ . ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ დინება პოტენციალურია, მაშინ ის უგრიგალოც იქნება ანუ მაშინ  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ . მართლაც  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = 0$  ამ ტოლობის შემოწმება მკითხველისათვის მიმინდია.

**ამოცანა.** დაამტკიცეთ, რომ უგრიგალო მოძრაობის შემთხვევაში ველის სიჩქარის ცირკულაცია, ნებისმიერი შეკრული წირისათვის ნულის ტოლია.

**ამოხსნა.** უგრიგალო დინების შემთხვევაში  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ , რაც იმას ნიშნავს რომ ადვილი აქვს ველის პოტენციალურობისათვის არსებულ (1.17) აუცილებელ და საკმარის პირობებს. მაშასადამე არსებობს ისეთი  $\varphi$  ფუნქცია, რომ  $\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$ . მაშინ ცხადია, რომ ადვილი იქნება ტოლობას:

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi. \quad (1.23)$$

მაშინ (1.19) წირითი ინტეგრალი  $AB$  წირის გასწვრივ მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$u = \int d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A). \quad (1.24)$$

**P.S.** ეს იმას ნიშნავს, რომ სითხის პოტენციალური დინების შემთხვევაში, სიჩქარეთა ველის ცირკულაცია, არაა დამოკიდებული  $AB$  წირზე და დამოკიდებულია, მხოლოდ, მისი ბოლოების კოორდინატებზე.

თუ, ეს კონტური შეკრულია ანუ  $A$  და  $B$  წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ ცირკულაცია ნულის ტოლია.

ამოცანა. სითხის მოძრაობის აჩქარების კოორდინატები მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{cases} a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \\ a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z \\ a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z \end{cases} \quad (1.25)$$

დაამტკიცეთ, რომ თუ სითხის სიჩქარეთა ველი პოტენციალურია, მაშინ აჩქარებათა ვექტორული ველიც პოტენციალური იქნება.

დამტკიცება. რადგან სიჩქარეთა ველი პოტენციალურია, გვექნება რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:  $\vec{v} = \text{grad } \varphi$  ანუ სიჩქარის ვექტორის კომპონენტები გამოისახება პოტენციალის კერძო წარმოებულებით. ამის გათვალისწინებით (1.25) განტოლებებში შემავალი წარმოებულების გარდაქმნით მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}$$

მაშინ გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\text{რადგან } \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2.$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$a_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad (1.27)$$

$$a_z = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (1.28)$$

ამრიგად, მივიღეთ რომ აჩქარების ვექტორული ველიც პოტენციალურია და ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულას:

$$\vec{a} = \text{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (1.29)$$

ცხადია, რომ აჩქარებათა ველის პოტენციალია  $\Phi = \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  ფუნქცია და ადგილი აქვს ტოლობას:  $\vec{a} = \text{grad} \Phi$ , რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

**ამოცანა.** ველის არაკუმშვადობის პირობა ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (1.30)$$

გამოიყვანეთ სიჩქარეთა ველის პოტენციალის დიფერენციალური განტოლება, თუ ველი არაკუმშვადია და პოტენციალური.

**ამოხსნა.** რადგან ველი პოტენციალურია:

$$\vec{v} = \text{grad} \varphi \text{ ანუ } v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ და } v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

მაშინ (1.30) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ ადგილი აქვს დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.31)$$

ამ განტოლებას ლაპლასის განტოლება ეწოდება და მას, ზოგჯერ, მოკლედ ასე ჩაწერენ:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (1.32)$$

ფუნქციებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ ლაპლასის განტოლებას, ჰარმონიულ ფუნქციებს უწოდებენ.

**ამოცანა.** მოცემულია ვექტორული ველი:

$$\vec{f} = 2x \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.$$

იპოვეთ ამ ველის ძალწირები.

**ამოხსნა.** ვექტორული ველის ძალწირების დიფერენციალური განტოლება  $\frac{dx}{f_x} = \frac{dy}{f_y} = \frac{dz}{f_z}$ , ჩვენი ამოცანის პირობებში ჩაიწერება



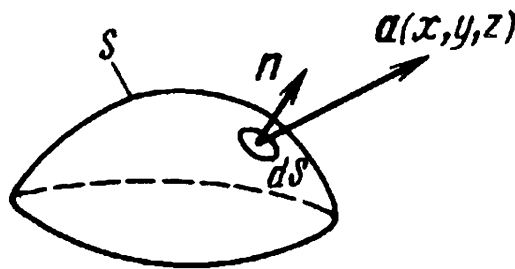
შემდეგნაირად:  $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z}$ . მისი დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნები იქნება:  $y^2 = \frac{C}{x}$  და  $z^2 = C_1x$ . ამ ვექტორულ ველს აქვს განსაკუთრებული წერტილი, რადგან როცა  $x \rightarrow 0$  მაშინ  $y \rightarrow \infty$  თუ  $C \neq 0$ .

### 1.3.1. ვექტორული ველის ნაკადი. დივერგენცია. გაუსის ფორმულა

მოცემული  $\vec{a}(x, y, z)$  ვექტორული ველის ნაკადი  $S$  ზედაპირის ფართობი ეწოდება სკალარს, რომელიც წარმოიდგინება შემდეგი ზედაპირული ინტეგრალით:

$$\Pi = \iint a_n ds = \iint \vec{a} \cdot \vec{n} ds, \quad (1.33)$$

სადაც  $a_n$  არის  $\vec{a}(x, y, z)$  ვექტორის გეგმილი  $S$  ზედაპირის ნორმალზე. ნორმალი აირჩევა შესაბამისი მიმართულებით ნახ. 1.9.



ნახ. 1.9. ვექტორული ველის ნაკადი

ვექტორული ველის ნაკადს აქვს ფიზიკური აზრი. თუ განვიხილავთ სითხის მოძრაობის სიჩქარეთა ვექტორულ ველს, მაშინ ამ ველის  $\Pi$  ნაკადი შეესაბამება დროის ერთეულში  $S$  ზედაპირის ფართობი გამავალი სითხის რაოდენობას. თუ, ეს რაოდენობა დადებითია, მაშინ ამ ფართობი გამოდის უფრო მეტი სითხე, ვიდრე შედის რაც იმას ნიშნავს რომ ფართის შიგნით გვაქვს სითხის წყარო. თუ, უარყოფითია, მაშინ ფართის შიგნით გვაქვს უარყოფითი წყარო ანუ დრენაჟი.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ განვიხილავთ სითხის მოძრაობის სიჩქარის ვექტორულ  $\vec{v}$  ველს, მაშინ  $S$  ზედაპირით შემოფარგლული  $V$  მოცულობის შემთხვევაში, ამ ზედაპირის გამჭოლი ვექტორული

ველის ნაკადი, სითხის  $V$  მოცულობის ცვლილების სიჩქარის ტოლია ანუ

$$\Pi = \iint v_n ds = \iint \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \dot{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \oiint \vec{v} \cdot \vec{n} ds. \quad (1.34)$$

**მაგალითი.** იპოვეთ წერტილის რადიუს-ვექტორის ნაკადი წრიული ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართში, თუ ცილინდრის ქვედა ზედაპირი ძევს  $OXY$  სიბრტყეში და მისი ცენტრი მდებარეობს კოორდინატთა სათავეში, ცილინდრის ფუძის რადიუსია  $R$  და სიმაღლე  $H$ .

**ამოხსნა.** ცილინდრის სრულ პირეულში ნაკადი გამოითვლება (1.33) ფორმულით, სადაც უნდა გავითვალისწინოთ, რომ

$$\Pi_{\text{სრული}} = \Pi_{\text{გვერდითი}} + \Pi_{\text{ქვედა}} + \Pi_{\text{ზედა}}. \quad (1.35)$$

უნდა გავითვალისწინოთ, რომ გვერდითი ზედაპირის ნორმალური პერპენდიკულარულია  $OZ$  ღერძის, ამიტომ მისი ყოველი წერტილის რადიუს-ვექტორის  $r_n$  გეგმილი ნორმალის მიმართულებაზე იქნება ცილინდრის  $R$  რადიუსის ტოლი ანუ  $r_n = R$ . მაშინ ცხადია, რომ

$$\Pi_{\text{გვერდითი}} = \iint r_n ds = R \cdot \iint ds = R \cdot 2\pi RH = 2\pi R^2 H. \quad (1.36)$$

ცილინდრის ქვედა ზედაპრზე ცილინდრის წერტილების რადიუს-ვექტორები პერპენდიკულარულია ამ ზედაპირის გარე ნორმალის, ამიტომ ამ რადიუს-ვექტორის გეგმილი გარე ნორმალზე ნულის ტოლია და შესაბამისად:

$$\Pi_{\text{ქვედა}} = 0. \quad (1.37)$$

ცილინდრის ზედა ზედაპირის წერტილების რადიუს-ვექტორების გეგმილები მისი ნორმალის მიმართულებით ცილინდრის სიმაღლის ტოლია, მაშასადამე

$$\Pi_{\text{ზედა}} = \iint H ds = H \cdot \iint ds = H \cdot \pi R^2. \quad (1.38)$$

საბოლოოდ მივიღებთ რომ, ცილინდრის სრული პირეულში რადიუს-ვექტორის სკალარული ველის ნაკადი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\Pi_{\text{სრული}} = \Pi_{\text{გვერდითი}} + \Pi_{\text{ქვედა}} + \Pi_{\text{ზედა}} = 2\pi R^2 H + 0 + H \cdot \pi R^2 = 3\pi R^2 H. \quad (1.39)$$

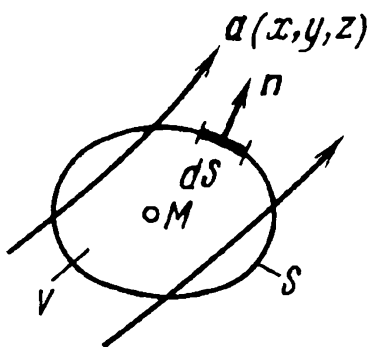
## ვექტორული ველის დივერგენცია

$\vec{a}(x, y, z)$  ვექტორული ველის დივერგენცია  $div \vec{a}$  მოცემულ  $M$  წერტილში (ნახ. 1.10) ეწოდება, ამ წერტილის გარემომცველი  $V$  მოცულობის არის, შემომფარგლავი  $S$  ზედაპირის, გამჭოლი ვექტორული ველის ნაკადის,  $V$  მოცულობასთან ფარდობის ზღვარს, როცა მოცულობა მიისწრაფის ნულისაკენ ანუ

$$div \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint \vec{a} \cdot \vec{n} ds}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\dot{V}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{m}{\rho}\right)'}{\frac{m}{\rho}} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}. \quad (1.40)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, ვექტორული ველის დივერგენცია მოცემულ წერტილში, ამ წერტილის მიდამოს მოცულობის, ფარდობითი ცვლილების სიჩქარის ტოლია.

თუ განვიხილავთ სითხის სიჩქარეთა ვექტორულ ველს, მაშინ რადგან  $V = \frac{m}{\rho}$  სადაც  $\rho$  მოცემულ  $V$  მოცულობაში მოთავსებული სითხის სიმკვრივეა, ხოლო  $m$  მისი მუდმივი მასა, მაშინ მივიღებთ რომ დივერგენცია მოცემულ წერტილში არის ამ წერტილში სითხის სიმკვრივის ცვლილების ფარდობითი სიჩქარე.



ნახ. 1.10. ვექტორული ველის დივერგენცია

ვექტორული ველის დივერგენცია გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$div \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (1.41)$$

## გაუსის ფორმულა

ვექტორული ველის დივერგენციასა და ნაკადს შორის კავშირს ამყარებს გაუსის ფორმულა:

$$\oiint \vec{a} \cdot \vec{n} ds = \iiint \operatorname{div} \vec{a} dV, \quad (1.42)$$

რომელიც ამბობს: მოცემული შეკრული  $S$  ზედაპირის გამჭოლი ვექტორული ველის ნაკადი ტოლია, ამ ზედაპირით შემოსაზღვრული  $V$  მოცულობითი ინტეგრალს ვექტორული ველის დივერგენციიდან.

ამოცანა. გაუსის ფორმულის საშუალებით გარდაქმნით ზედაპირული ინტეგრალი:  $\oiint (\operatorname{gradu} \cdot \vec{n}) ds$ .

$$\text{ამოხსნა. } \oiint (\operatorname{gradu} \cdot \vec{n}) ds = \iiint \operatorname{div}(\operatorname{gradu}) dV = \iiint \Delta u dV.$$

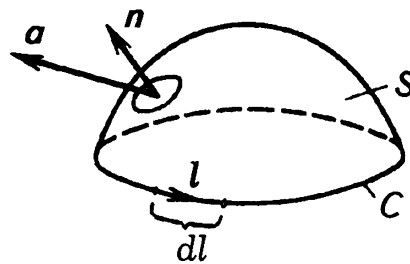
P.S. თუ  $u$  არის სითხის სიჩქარეთა ველის პოტენციალი, მაშინ მისი სიჩქარეთა ვექტორული ველის შეკრული ზედაპირის გამჭოლი ნაკადი ნულის ტოლია, რადგან მაშინ პოტენციალი ჰარმონიული ფუნქციაა.

ამოცანა. დაამტკიცეთ, რომ ვექტორული ველის როტორის შეკრული  $S$  ზედაპირის გამჭოლი ნაკადი ნულის ტოლია.

$$\text{ამოხსნა. } \oiint (\operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n}) ds = \iiint \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) dV = \iiint 0 dV = 0 \text{ რ.დ.გ.}$$

### 1.3.2. სტოქსის ფორმულა. დივერგენციის თვისებები

ვექტორულ ანალიზში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია (ნახ. 1.11). სტოქსის თეორემას:



ნახ. 1.11. სტოქსის თეორემა

$\vec{a}$  ვექტორული ველის ცირკულაცია შეკრულ  $C$  წირზე, ამ წირზე მოჭიმული  $S$  ზედაპირის გამჭოლი ვექტორული ველის როტორის ნაკადის ტოლია ანუ

$$\oint \vec{a} \cdot \vec{l} dl = \iint \text{rot} \vec{a} \cdot \vec{n} ds. \quad (1.43)$$

განვიხილოთ დივერგენციის, როტორისა და გრადიენტის ზოგადი თვისებები, რომლებიც განსაზღვრებიდან გამომდინარე ადვილი დასამტკიცებელია და მკითხველისთვის მიგვინდია სავარჯიშოდ:

ამოცანები და სავარჯიშოები

1.  $\text{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{div} \vec{a} + \text{div} \vec{b};$
2.  $\text{div}(U(x, y, z) \cdot \vec{a}) = U \text{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \text{grad} U;$
3.  $\text{div}(\text{grad} U) = \Delta U;$
4.  $\text{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{rot} \vec{a} + \text{rot} \vec{b};$
5.  $\text{rot}(U(x, y, z) \cdot \vec{a}) = \text{grad} U \times \vec{a} + U \text{rot} \vec{a};$
6.  $\text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b};$
7.  $\text{div}(\text{grad} f) = \Delta f;$
8.  $\text{div}(\text{rot} \vec{v}) = 0;$
9.  $\text{rot}(\text{grad} f) = 0;$
10.  $\text{rot}(\text{rot} \vec{a}) = \text{grad}(\text{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}.$

### 1.3.3. ჰამილტონის $\nabla$ ოპერატორი და მისი თვისებები

ჰამილტონის  $\nabla$  ოპერატორი, სიმბოლური ვექტორული ოპერატორია, რომელიც შეიცავს კერძო წარმოებულებს კოორდინატთა ღერძების მიმართულებით:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (1.44)$$

ამ ოპერატორის საშუალებით, შედარებით მარტივად ჩაიწერება ველის ოპერატორები:

$$\text{grad} \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}. \quad (1.45)$$

$$\text{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (1.46)$$

$$\mathit{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \quad (1.47)$$

P.S. უნდა აღინიშოს, რომ ინგლისურეოვან ლიტერატურაში, ველის  $\mathit{rot} \vec{v}$  გრიგალისათვის იყენებენ ჩანაწერს:  $\mathit{curl} \vec{v}$ .

11. ამოცანა. სითხის მოძრაობის აჩქარების კოორდინატები მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{cases} a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \\ a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z \\ a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z \end{cases}$$

ჩაწერეთ ეს ფორმულები ჰამილტონის  $\nabla$  ოპერატორის საშუალებით.

ამოხსნა: ადვილი მისახვედრია, რომ სითხის მოძრაობის აჩქარებათა ველი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{v}. \quad (1.48)$$

## II თავი. ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები

ტენზორული ალგებრა და ტენზორული ანალიზი - მექანიკის შესწავლის, ბუნებრივი მათემატიკური აპარატია, რადგან იძლევა საშუალებას, რომ გამოვყოთ შესასწავლი ფიზიკური პროცესების ის ძირითადი არსი, რაც არაა დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე.

ისტორიულად, ჩამოყალიბდა ტენზორული აღრიცხვის გადმოცემის **ორნაირი** მიდგომა. **პირველი მიდგომისას**, ტენზორებს წარმოადგენენ როგორც ისეთ ობიექტებს, რომლებზედაც სრულდება გარკვეული ფორმალური ოპერაციები, მეორე ტიპის მიდგომისას კი, ტენზორებზე განსაზღვრული ოპერაციები, დაიყვანება მათი კომპონენტების გარდაქმნის ფორმაზე. ჩვენ გამოვიყენებთ პირველი ტიპის მიდგომას, თუმცა, გზადაგზა, აღვნიშნავთ მეორე ტიპის მიდგომის თავისებურებებსაც.

### 2.1. ტენზორები

ვთქვათ, სამგანზომილებიან ევკლიდურ  $\mathbb{R}^3$  სივრცეში მოცემულია სამი წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორისაგან შემდგარი ბაზისი  $e_i$ , რომელსაც ძირითად ბაზისს ვუწოდებთ. ძირითადი ბაზისის **ორადული ბაზისი** ეწოდება, ისეთ  $e^j$  ბაზისს, რომლისთვისაც ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

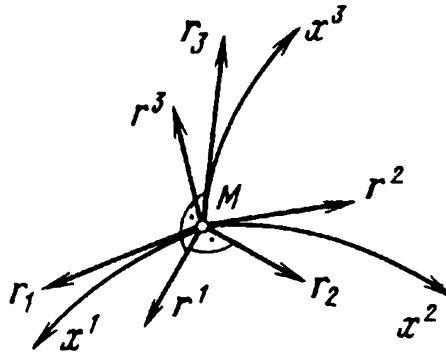
$$e_i \cdot e^j = \delta_i^j; \quad (2.1)$$

სადაც მარცხენა მხარეს მოცემულია ძირითადი ბაზისის ვექტორების სკალარული ნამრავლები, ხოლო მარჯვენა მხარეს დგას  $\delta_i^j$  კრონეკერის სიმბოლო და  $i, j = \overline{1,3}$ . როგორც ვიცით, კრონეკერის სიმბოლო წარმოადგენს ერთეულოვანი მატრიცის სიმბოლურ ჩანაწერს ანუ

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (2.2)$$

ძირითადი ბაზისის  $e_i$  ვექტორთა სისტემა, საზოგადოდ, არაა ორთოგონალური (კოორდინატთა ღერძები საერთო წვეროს მქონე არაორთოგონალური მრუდი წირებია, ხოლო ძირითადი ბაზისის

ვექტორები, ამ საერთო წვეროდან გამოსული ერთეულოვანი სიგრძის, შესაბამისი ღერძის მრუდი წირის მხები მიმართულების ვექტორებია (ნახ. 2.1). მართლაც, ვთქვათ მოცემული წერტილის რადიუს-ვექტორია  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1; x^2; x^3)$ , მაშინ  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = \mathbf{r}_i \equiv \mathbf{e}_i$ .



ნახ. 2.1.  $\mathbf{a}$  ვექტორის კოვარიანტული ბაზისი  $\mathbf{r}_i = \mathbf{e}_i$

რაც შეეხება, ორადული ბაზისის ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას  $\mathbf{e}^j$ , ისინი გამოისახება ძირითადი ბაზისის ელემენტების საშუალებით შემდეგნაირად:

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}; \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}; \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}. \quad (2.3)$$

(2.3) ფორმულების მნიშვნელში დგას ძირითადი ბაზისის ვექტორების შერეული ნამრავლი, რომელიც ცხადია ნულისგან განსხვავებულია, რადგან ძირითადი ბაზისის ვექტორები დაშვების თანახმად არაა კომპლანარული. ასევე, რადგან ძირითადი ბაზისის ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, წრფივად დამოუკიდებელი იქნება ორადული ბაზისის ვექტორთა სისტემაც.

განსაზღვრის თანახმად, ადვილი მისახვედრია რომ, დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში, ორადული ბაზისი - ემთხვევა ძირითად ბაზისს.

### 2.1.1. ვექტორი, როგორც პირველი რანგის ტენზორი

ვექტორი შეგვიძლია განვსაზღვროთ, როგორც სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცის ელემენტი  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ , რომელიც ერთადერთი გზით წარმოიდგინება ძირითადი  $\mathbf{e}_i$  ბაზისის ან შესაბამისი  $\mathbf{e}^j$  ორადული ბაზისის მიმართ შემდეგი ფორმით:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3; \quad (2.4)$$



$$\mathbf{a} = a_j \mathbf{e}^j = a_1 \mathbf{e}^1 + a_2 \mathbf{e}^2 + a_3 \mathbf{e}^3. \quad (2.5)$$

ამ ფორმულებში გამოვიყენეთ ეინშტეინის შეთანხმება ყრუ ინდექსით შეჯამებადობის შესახებ ანუ როცა სიმბოლურ ჩანაწერში ინდექსი ორჯერ მეორდება, იგულისხმება რომ ამ ინდექსით ხდება შეჯამება, ისე, როგორც (2.4) და (2.5) ფორმულებშია.

ადვილი მისახვედრია, რომ (2.4) წარმოდგენიდან გამომდინარე, ადვილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^1 = a^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^1 = a^i \delta_i^1 = a^1. \quad (2.6)$$

ანალოგიურად, მივიღებთ რომ

$$a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^2; \quad a^3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^3 \quad \text{ანუ} \quad a^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i. \quad (2.7)$$

ასევე, მივიღებთ რომ

$$a_j = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_j. \quad (2.8)$$

ამრიგად, შეგვიძლია ვექტორი წარმოვადგინოთ ორნაირად:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i) \mathbf{e}_i = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}^j. \quad (2.9)$$

ვექტორის  $a^i$  კომპონენტებს კონტრავარიანტულს უწოდებენ (ძირითადი ბაზისის მიმართ), ხოლო  $a_j$  კომპონენტებს - კოვარიანტულს (ორადული ბაზისის მიმართ). როგორც ვხედავთ, ვექტორის კომპონენტები მოიცემა ერთი თავისუფალი ინდექსის საშუალებით, ამიტომ მას პირველი რანგის ტენზორს უწოდებენ.

ეხლა, გამოვიყენოთ (2.9) ფორმულები ბაზისური ვექტორებისათვის, მაშინ მივიღებთ რომ ადვილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$\mathbf{e}_i = g_{ik} \mathbf{e}^k; \quad (2.10)$$

$$\mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j; \quad (2.11)$$

სადაც  $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ ;  $g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j$ .  $g_{ij}$  და  $g^{ij}$  რიცხვებს, მეტრიკული ტენზორის კომპონენტებს უწოდებენ. ცხადია, რომ მეტრიკული ტენზორების მატრიცა სიმეტრიულია სკალარული ნამრავლის კომუტაციურობის გამო.

მაშასადამე, ადვილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$e^i = g^{ij} e_j = g^{ij} g_{jk} e^k = g_k^i e^k = \delta_k^i e^k; \quad (2.12)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i. \quad (2.13)$$

მივიღეთ რომ, მეტრიკული ტენზორის კომპონენტების კონტრავარიანტული და კოვარიანტული მატრიცები ურთიერთშებრუნებული მატრიცებია.

ვექტორი შეგვიძლია განვსაზღვროთ სხვანაირადაც. ვთქვათ, გადავდივართ  $e_l$  ბაზისიდან სხვა  $e_{l'}$  ბაზისზე, მაშინ გვექნება, რომ

$$e_{l'} = A_{l'}^l e_l; \quad e_l = A_l^{l'} e_{l'}. \quad (2.14)$$

სადაც  $A_{l'}^l$  ძველი ბაზისიდან ახალზე გადასვლის მატრიცაა, ხოლო  $A_l^{l'}$  - ახალი ბაზისიდან ძველზე გადასვლის მატრიცა.

ვექტორი ეწოდება სამ  $a_l$  რიცხვს (კოვარიანტული კომპონენტები), რომლებიც  $e_l$  ბაზისიდან სხვა  $e_{l'}$  ბაზისზე გადასვლისას გარდაიქმნება ფორმულებით:  $a_{l'} = A_{l'}^l a_l$ ; ან სამ  $a^{l'}$  რიცხვს (კონტრავარიანტული კომპონენტები), რომლებიც კოორდინატთა სისტემის შეცვლისას, იცვლებიან შემდეგი ფორმულებით:  $a^{l'} = A_l^{l'} a^l$ .

ცხადია, რომ ვექტორის ეს ორი განსაზღვრება, დიდად არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან, თუმცა, ტენზორების განსაზღვრისას გამოგვადგება.

### 2.1.2. ტენზორის ცნება. მაღალი ვალენტობის ტენზორები

განვიხილოთ სამგანზომილებიანი ვექტორული  $\mathbb{R}^3$  სივრცის ნებისმიერი ორი ვექტორი  $\mathbf{a}$  და  $\mathbf{b}$ . ვთქვათ, მოცემული გვაქვს წესი, რომელიც ამ ორ ვექტორს, ერთადერთი სახით შეუსაბამებს ცხრაგანზომილებიანი  $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  სივრცის, რაღაც  $\mathbf{ab}$  ელემენტს, რომელსაც ამ ორი ვექტორის დიადური (ტენზორული) ნამრავლი (ან უბრალოდ დიადა) ეწოდება. დავუშვათ, რომ ეს შესაბამისობა არის ორადწრფივი ანუ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2) \mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{b} + \lambda_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{b}; \quad (2.15)$$

$$a(\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2) = \lambda_1 a\mathbf{b}_1 + \lambda_2 a\mathbf{b}_2. \quad (2.16)$$

$\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  ახალი ცხრაგანზომილებიანი სივრცის ბაზისი  $D$ , შედგება საწყისი ვექტორული სივრცის ბაზისური ვექტორების დიადური ნამრავლებისაგან (ბაზისური დიადიკა):

$$D = \begin{pmatrix} e_1 e_1 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_2 e_1 & e_2 e_2 & e_2 e_3 \\ e_3 e_1 & e_3 e_2 & e_3 e_3 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

$\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  სივრცის ელემენტებს მეორე რანგის ტენზორები ეწოდება. (ზოგჯერ ამბობენ რომ ეს ტენზორები ორვალენტიანია).

მეორე რანგის ტენზორი (ვექტორის ანალოგიურად) წარმოიდგინება, როგორც ბაზისური  $D$  დიადიკის ელემენტების წრფივი კომბინაცია.

მაგალითად, თუ გვაქვს მეორე რანგის რაიმე  $T$  ტენზორი, მაშინ ის შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$T = T^{ij} e_i e_j = T^{11} e_1 e_1 + T^{12} e_1 e_2 + \dots + T^{33} e_3 e_3. \quad (2.18)$$

$T^{ij}$  რიცხვებს, მეორე რანგის  $T$  ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტები ეწოდება.

ზემოთ განხილული ვექტორებისაგან შედგენილი დიადა, მეორე რანგის ტენზორის კერძო შემთხვევაა, მართლაც

$$ab = a^i e_i b^j e_j = a^i b^j e_i e_j; \quad (2.19)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ დიადას კონტრავარიანტული კომპონენტებია რიცხვები, რომლებიც მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$c^{ij} = a^i b^j. \quad (2.20)$$

უნდა აღვნიშნოთ, რომ ტენზორები და მათ შორის ვექტორებიც გამოისახება გამუქებული სიმბოლოებით:  $T, \varepsilon, \sigma, a, \dots$ , ხოლო შესაბამისი კომპონენტები, ჩვეულებრივი შრიფტით:  $T^{ij}; \varepsilon^{ij}; \sigma^{ij}; a^i \dots$

ტენზორის ვალენტობა (რანგი) განისაზღვრება შინაარსიდან გამომდინარე ან „თავისუფალი“ (არაგანმეორებადი) ინდექსების რაოდენობით.

მაგალითად, უწყვეტ გარემოთა მექანიკაში (ჰიდრო-აერომექანიკა, დრეკადობის თეორია, პლასტიკურობის თეორია . . .) ფართოდ გამოიყენება მექანიკური ძაბვის  $\sigma$  და დეფორმაციის  $\epsilon$  ტენზორები. მათი შესაბამისი კონტრავარიანტული კომპონენტები აღინიშნება  $\sigma^{ij}$  და  $\epsilon^{ij}$  სიმბოლოებით. გადაადგილების ვექტორს აღვნიშნავთ  $u$  ასოთი, ხოლო სიჩქარის ვექტორს  $v$  ასოთი. მათი შესაბამისი კონტრავარიანტული კომპონენტები იქნება:  $u^i$  და  $v^i$ .

ანალოგიურად, შეგვიძლია განვსაზღვროთ მაღალი რანგის ტენზორებიც. ამისათვის, საჭირო იქნება განვიხილოთ შესაბამისი ბაზისური პოლიადები: ტრიადები  $e_i e_j e_k$ , ტეტრადები  $e_i e_j e_k e_l$  და ა.შ.

მათი წრფივი კომბინაციები გვაძლევს შესაბამისად მესამე რანგის ტენზორს:

$$E = E^{ijk} e_i e_j e_k; \quad (2.21)$$

მეოთხე რანგის ტენზორს:

$$M = M^{ijkl} e_i e_j e_k e_l. \quad (2.22)$$

სამვალენტიანი ტენზორები წარმოადგენენ 27 განზომილებიანი სივრცის ელემენტებს, ხოლო ოთხვალენტიანი ტენზორები - 81 განზომილებიანი სივრცის და ა.შ. ტერმინები რანგი და ვალენტობა არიან ეკვივალენტური. სკალარი განიხილება, როგორც ნულ-რანგის ტენზორი.

### 2.1.3. ტენზორის კომპონენტები. მეტრიკული ტენზორი

განვიხილოთ მეორე რანგის ტენზორი  $a = a^{ij} e_i e_j$  და გამოვიყენოთ (2.10) ფორმულა ანუ  $e_i = g_{ik} e^k$ . მაშინ, მივიღებთ რომ  $a = a^{ij} g_{ik} e_j e^k$ . მაშასადამე, ნებისმიერი მეორე რანგის ტენზორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც  $e_j e^k$  დიადიკური ბაზისის წრფივი კომბინაცია ანუ

$$a = a^{ij} g_{ik} e_j e^k = a^j_{.k} e_j e^k, \quad (2.23)$$

სადაც

$$a^j_{.k} = a^{ij} g_{ik}. \quad (2.24)$$

$a_{.k}^j$  კოეფიციენტებს უწოდებენ  $a$  ტენზორის შერეულ კომპონენტებს (ერთჯერ კოვარიანტული და ერთჯერ კონტრავარიანტული).  $a^{ij}$  კომპონენტებს კი ორჯერ კონტრავარიანტული ეწოდებათ.

ამრიგად, ნებისმიერი მეორე რანგის (ვალენტობის) ტენზორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ოთხი სხვადასხვა ფორმით:

$$\mathbf{a} = a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = a_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = a_{.i}^j \mathbf{e}_j \mathbf{e}^i = a_i^j \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j. \quad (2.25)$$

ეს ფორმულები არის ერთვალენტიანი ტენზორებისათვის (ვექტორები) ადრე განხილული (2.4)-(2.5) ფორმულების

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a_j \mathbf{e}^j \text{ ანალოგიური.}$$

ცხადია რომ, მართკუთხა დეკარტული კოორდინატების შემთხვევაში, ძირითადი და მისი ორადული ბაზისი ერთმანეთს ემთხვევა. აქედან გამომდინარე, დეკარტული ტენზორებისათვის კონტრავარიანტული, კოვარიანტული და შერეული კომპონენტები ერთმანეთს ემთხვევა. ამიტომ, ასეთ შემთხვევაში, კომპონენტების ინდექსები შეგვიძლია ვწეროთ ან სულ ზედა (კონტრავარიანტული) ან სულ ქვედა (კოვარიანტული) ფორმით.

ერთი და იმავე ტენზორის სხვადასხვა ტიპის კომპონენტები ერთმანეთთან დაკავშირებულია (2.24) ფორმულის ანალოგიური დამოკიდებულებებით:

$$a^{ij} g_{jk} = a_{.k}^i; \quad a^{ij} g_{.j}^k = a^{ik}; \quad a_{ij} g^{jk} = a_i^k; \quad a_{ij} g_k^j = a_{ik}; \quad \dots \quad (2.26)$$

ამრიგად, მოცემული ტენზორის კომპონენტების გამრავლება მეტრიკული ტენზორის შესაბამის კომპონენტებზე, იწვევს მოცემული ტენზორის კომპონენტებში ინდექსის აწევ-დაწევას.

$\mathbf{g} = g^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  ტენზორს მეტრიკული ტენზორი ეწოდება. ამ ტენზორის დასახელება შემოსულია რიმანის გეომეტრიიდან და ის დაკავშირებულია ორ მახლობელ წერტილს შორის მანძილის გამოთვლასთან.

მართლაც, განვიხილოთ ორი „უსასრულოდ მახლობელი“ წერტილი  $A(x^1; x^2; x^3)$  და  $B(x^1 + dx^1; x^2 + dx^2; x^3 + dx^3)$ . მათი შემაერთებელი უსასრულოდ მცირე ვექტორი იქნება  $d\mathbf{r} = dx^i \mathbf{e}_i$ . ამ ვექტორის სიგრძის კვადრეტი იქნება წირითი ელემენტი:

$$ds^2 = drdr = dx^i e_i dx^j e_j = g_{ij} dx^i dx^j = g^{ij} dx_i dx_j.$$

ამრიგად, მეტრიკული ტენზორი განსაზღვრავს განსახილველი სივრცის გეომეტრიას და ევკლიდური სივრცის შემთხვევაში, ის კრონეკერის სიმბოლოს ტოლია ანუ  $g_{ij} = \delta_{ij}$  და შესაბამისად:

$$ds^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2.$$

## 2.2. ოპერაციები ტენზორებზე. ტენზორული ნამრავლი. სიმეტრირება და ალტერნირება

ა) ტენზორების შეკრება. შეკრების ოპერაცია განიმარტება მხოლოდ ერთნაირი ვალენტობის ტენზორებისათვის. ორი ტენზორის ჯამის კომპონენტები რომ ვიპოვოთ, ისინი უნდა ჩავწეროთ კომპონენტებში ერთნაირი ფორმით და შევკრიბოთ შესაბამისი კომპონენტები ანუ თუ  $\mathbf{a} = a^{ij} e_i e_j$  და  $\mathbf{b} = b^{ij} e_i e_j$ , მაშინ

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a^{ij} + b^{ij}) e_i e_j. \quad (2.27)$$

ასე რომ, ორი ტენზორის ჯამის ვალენტობა შესაკრებთა ვალენტობების ტოლია და ჯამის კომპონენტები, მიიღება შესაკრებთა შესაბამისი კომპონენტების შეჯამებით.

ბ) ტენზორის გამრავლება რიცხვზე. ნებისმიერი ფორმით ჩაწერილი ტენზორი შეგვიძლია გავამრავლოთ რიცხვზე. შედეგად მივიღებთ იგივე ვალენტობის ტენზორს, ხოლო მისი კომპონენტები იქნება მოცემული რიცხვის და ტენზორის კომპონენტების ნამრავლები ანუ თუ გვაქვს მოცემული ტენზორი  $\mathbf{E} = E^{ijk} e_i e_j e_k$ , მაშინ მისი ნამრავლი  $\lambda$  რიცხვზე იქნება ახალი ტენზორი:

$$\lambda \mathbf{E} = \lambda E^{ijk} e_i e_j e_k. \quad (2.28)$$

გ) ამ ორი ოპერაციის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს ორი ტენზორის სხვაობის ოპერაცია. ორი ერთნაირი ვალენტობის ტენზორის სხვაობა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}). \quad (2.29)$$

დ) ორი ტენზორის ტენზორული ნამრავლი.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორი ტენზორი:

$$\mathbf{A} = A^{i_1 i_2 \dots i_m} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_m} \text{ და } \mathbf{B} = B_{j_1 j_2 \dots j_n} \mathbf{e}^{j_1} \mathbf{e}^{j_2} \dots \mathbf{e}^{j_n}. \quad (2.30)$$

მაშინ მათი ტენზორული ნამრავლი იქნება ახალი  $\mathbf{C}$  ტენზორი, რომელიც მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = A^{i_1 i_2 \dots i_m} B_{j_1 j_2 \dots j_n} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_m} \mathbf{e}^{j_1} \mathbf{e}^{j_2} \dots \mathbf{e}^{j_n}. \quad (2.31)$$

მაშასადამე, ორი ტენზორის ტენზორული ნამრავლის ვალენტობა თანამამრავლთა ვალენტობების ჯამი იქნება ანუ თავისუფალ ინდექსთა რაოდენობა აქ იქნება  $m + n$ . რადგან გვაქვს პოლიადური ბაზისი, ტენზორული ნამრავლი არაა კომუტაციური ანუ თანამამრავლების რიგს აქვს მნიშვნელობა, ისევე, როგორც მატრიცებში.

**მაგალითები:** 1. თუ გვაქვს ორი მეორე რანგის ტენზორი რომელთა კომპონენტებია  $a_{ij}$  და  $b_{mn}$ , მაშინ მათი ტენზორული ნამრავლი მოგვცემს მეოთხე რანგის ტენზორს კომპონენტებით  $C_{ijmn} = a_{ij} b_{mn}$ .

2. თუ გვაქვს მეორე რანგის ტენზორი კომპონენტებით  $M^{ij}$  და პირველი რანგის ტენზორი კომპონენტებით  $v_k$ , მაშინ მათი ტენზორული ნამრავლი იქნება მესამე რანგის  $\mathbf{W} = \mathbf{Mv}$  ტენზორი და მისი კომპონენტები იქნება:  $W^{ij}_{\cdot k} = M^{ij} v_k$ .

ე) სიმეტრიზება და ალტერნირება. მეორე რანგის ტენზორს  $\mathbf{a} = a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  ეწოდება სიმეტრიული, თუ მისი კომპონენტები აკმაყოფილებენ  $a^{ij} = a^{ji}$  პირობას და ეწოდება ანტისიმეტრიული, თუ ადგილი აქვს პირობას  $a^{ij} = -a^{ji}$ .

ცხადია, რომ თუ ტენზორი ერთდროულად სიმეტრიულიცაა და ანტისიმეტრიულიც, მაშინ ის ნულოვანი ტენზორია, რომლის ყველა კომპონენტი ნულოვანია.

**თეორემა.** ნებისმიერი მეორე რანგის ტენზორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ მისგან წარმოქმნილი სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ნაწილების ჯამის სახით.

**დამტკიცება.** განვიხილოთ მეორე რანგის რაიმე  $\mathbf{a} = a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  ტენზორი. მაშინ მისგან წარმოქმნილი  $\mathbf{a}_s = \frac{1}{2}(a^{ij} + a^{ji}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  ტენზორი იქნება სიმეტრიული, ხოლო  $\mathbf{a}_a = \frac{1}{2}(a^{ij} - a^{ji}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  ტენზორი

ანტისიმეტრიული, რაც ადვილი შესამოწმებელია. ამავე დროს, ცხადია რომ  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_s + \mathbf{a}_G$ . რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ტენზორიდან მისი სიმეტრიული ნაწილის გამოყოფას სიმეტრიზებას უწოდებენ, ხოლო ანტისიმეტრიული ნაწილის გამოყოფას - ალტერნირებას.

### 2.2.1. ტენზორების სკალარული ნამრავლი

ტენზორების სკალარული ნამრავლი, წარმოადგენს ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის განზოგადებას.

მოცემული ორი

$$\mathbf{A} = A^{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_n} \text{ და } \mathbf{B} = B^{j_1 j_2 \dots j_m} e_{j_1} e_{j_2} \dots e_{j_m} \quad (2.32)$$

ტენზორის სკალარული ნამრავლი (ნახვევი) განსაზღვრის თანახმად არის ტენზორი, რომელიც მიიღება მათგან არებული თითო ინდექსების გატოლებით და ამ ინდექსით აჯამვის შედეგად:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^{i_1 i_2 \dots i_n} B^{j_1 j_2 \dots j_m} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_{n-1}} (e_{i_n} \cdot e_{j_1}) e_{j_2} \dots e_{j_m} \quad (2.33)$$

ანუ

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^{i_1 i_2 \dots i_n} B^{j_1 j_2 \dots j_m} g_{i_n j_1} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_{n-1}} e_{j_2} \dots e_{j_m}. \quad (2.34)$$

ტენზორების სკალარული ნამრავლის ტენზორის რანგი, ორი ერთეულით ნაკლებია თანამამრავლთა რანგების ჯამზე, რადგან ინდექსების გატოლებით და აჯამვით ეს ინდექსები მუნჯდება (აღარაა თავისუფალი) ანუ

$$\text{rang}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{rang}(\mathbf{A}) + \text{rang}(\mathbf{B}) - 2 = m + n - 2.$$

საზოგადოდ, თანამამრავლთა თანმიმდევრობას აქვს მნიშვნელობა ანუ ორი ტენზორის სკალარული ნამრავლი, საზოგადოდ, არაა კომუტაციური (კომუტაციურობას ადვილი აქვს დეკარტული ტენზორებისათვის).

მაგალითები.

1. ორი  $\mathbf{a}$  და  $\mathbf{b}$  ვექტორის, როგორც პირველი რანგის ტენზორების სკალარული ნამრავლი იქნება რიცხვი ანუ სკალარი:



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i e_i b^j e_j = a^i b^j g_{ij} = a^i b_i = a_j b^j. \quad (2.35)$$

2. მეორე რანგის ტენზორის სკალარული ნამრავლი ვექტორზე იქნება პირველი რანგის ტენზორი ანუ ვექტორი:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = T^{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \cdot a^i \mathbf{e}_i = T^{kl} a^i g_{li} \mathbf{e}_k = T^{kl} a_l \mathbf{e}_k. \quad (2.36)$$

3. ვექტორის სკალარული ნამრავლი მეორე რანგის ტენზორზე იქნება პირველი რანგის ტენზორი ანუ ვექტორი :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = a^i \mathbf{e}_i \cdot T^{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = a^i T^{kl} g_{ik} \mathbf{e}_l = a_k T^{kl} \mathbf{e}_l. \quad (2.37)$$

4. ორი მეორე რანგის ტენზორის სკალარული ნამრავლი იქნება მეორე რანგის ტენზორი:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \cdot B^{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = A^{mn} B^{kl} g_{nk} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_l \quad (2.38)$$

ანუ

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^m_k B^{kl} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_l. \quad (2.39)$$

ანალოგიურად, მივიღებთ რომ

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = B^{lk} A_k^m \mathbf{e}_l \mathbf{e}_m. \quad (2.40)$$

ამრიგად, ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი არის სკალარი; მეორე რანგის ტენზორის სკალარული ნამრავლი ვექტორზე არის ვექტორი; ორი მეორე რანგის ტენზორის სკალარული ნამრავლი არის მეორე რანგის ტენზორი. უნდა აღინიშნოს, რომ ტენზორის სკალარული ნამრავლი მარცხნიდან ან მარჯვნიდან მეტრიკულ ტენზორზე, თვით ამ ტენზორის ტოლია.

მართლაც, განვიხილოთ მაგალითები.

5. ვექტორის ნამრავლი მეტრიკულ ტენზორზე მარცხნიდან და მარჯვნიდან (კომუტაციურია):

$$a) \mathbf{g} \cdot \mathbf{a} = g^{ik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \cdot a^j \mathbf{e}_j = g^{ik} a^j \mathbf{e}_i g_{kj} = g^{ik} a_k \mathbf{e}_i = a^i \mathbf{e}_i = \mathbf{a}; \quad (2.41)$$

$$b) \mathbf{a} \cdot \mathbf{g} = a^k \mathbf{e}_k \cdot g^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = a^k g^{ij} \mathbf{e}_j g_{ki} = a_i g^{ij} \mathbf{e}_j = a^j \mathbf{e}_j = \mathbf{a}. \quad (2.42)$$

### 2.2.2. ტენზორის ახარისხება

როგორც უკვე ვიცით, ორი მეორე რანგის ტენზორის სკალარული ნამრავლი, ისევ მეორე რანგის ტენზორია. თუ, განვიხილავთ მეორე

რანგის  $T$  ტენზორის ნამრავლს თავის თავზე, მაშასადამე, მივიღებთ ახალ, მაგრამ ისევ მეორე რანგის  $T^2$  ტენზორს, რომელსაც საწყისი ტენზორის კვადრატი ეწოდება. თუ ტენზორის კვადრატს გავამრავლებთ კიდევ ერთხელ  $T$  ტენზორზე, მივიღებთ ტენზორის კუბს ანუ  $T^2 \cdot T = T^3$  და ა.შ. შეგვიძლია გამოვითვალოთ მეორე რანგის ტენზორის ხარისხები.

**მაგალითები.**

1. მეორე რანგის ტენზორის კვადრატი.

$$T^2 = T \cdot T = T^{mn} e_m e_n \cdot T^{kl} e_k e_l = T^{mn} T^{kl} g_{nk} e_m e_l = T^m T_n^l e_m e_l. \quad (2.43)$$

2. მეორე რანგის ტენზორის კუბი.

$$T^3 = T^{in} T_{i \cdot}^k T_{\cdot}^m e_m e_n. \quad (2.44)$$

ტენზორების სკალარული ნამრავლის ცნებიდან გამომდინარე, შეგვიძლია მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების შემდეგნაირად ინტერპრეტირება. თუ მოცემული გვაქვს მეორე რანგის რაიმე ტენზორი  $T = T^{ij} e_i e_j$  და მას მარცხნიდან სკალარულად გავამრავლებთ  $e^m$ , ხოლო მარჯვნიდან  $e^n$  -ზე, მაშინ მივიღებთ შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$T^{mn} = e^m \cdot T \cdot e^n. \quad (2.45)$$

ანალოგიურად,

$$T_{ij} = e_i \cdot T \cdot e_j; \quad T_i^j = e_i \cdot T \cdot e^j; \quad T^i_j = e^i \cdot T \cdot e_j. \quad (2.46)$$

ამ ფორმულებიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულას:

$$T = (e^i \cdot T \cdot e^j) e_i e_j. \quad (2.47)$$

ტენზორების სკალარული ნამრავლი აკმაყოფილებს ყველა იმ თვისებას, რასაც ვექტორების სკალარული ნამრავლი, გარდა იმისა, რომ ტენზორების სკალარული ნამრავლი, საზოგადოდ არაა კომუტაციური.

### 2.2.3. ტენზორების ორმაგი სკალარული ნამრავლი. ტენზორის კვალი

ორი  $A$  და  $B$  ტენზორის ორმაგი სკალარული ნამრავლი (ორმაგი ნახვევი) ეწოდება ტენზორს  $A : B$ , რომელიც განისაზღვრება ტოლობით:

$$A : B = A^{i_1 i_2 \dots i_m} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m} : B_{j_1 j_2 \dots j_n} e^{j_1} e^{j_2} \dots e^{j_n} =$$

$$= A^{i_1 i_2 \dots i_m} B_{j_1 j_2 \dots j_n} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_{m-2}} (e_{i_{m-1}} \cdot e^{j_2}) (e_{i_m} \cdot e^{j_1}) e^{j_3} e^{j_4} \dots e^{j_n}. \quad (2.48)$$

ორი ტენზორის ორმაგი სკალარული ნამრავლის რანგი (ვალენტობა) ოთხი ერთეულით ნაკლებია მათ ტენზორულ ნამრავლთან შედარებით.

აქედან გამომდინარე, ცხადია რომ, ორმაგი სკალარული ნამრავლის პოვნა რომ შეიძლებოდეს, აუცილებელია რომ თანამამრავლ ტენზორთა რანგი არ იყოს ორზე ნაკლები.

მაგალითები.

1. მეორე რანგის ტენზორების ორმაგი სკალარული ნამრავლი:

$$A : B = A^{ij} e_i e_j : B^{mn} e_m e_n = A^{ij} B^{mn} g_{in} g_{jm} = A^i_m B^m_i. \quad (2.49)$$

ანალოგიურად,

$$B : A = B^i_m A^m_i. \quad (2.50)$$

2. მეორე რანგის ტენზორის ორმაგი სკალარული ნამრავლი თავის თავზე:

$$T : T = T^i_m T^m_i. \quad (2.51)$$

ორივე შემთხვევაში, მეორე რანგის ტენზორების ორმაგი სკალარული ნამრავლი, წარმოადგენს სკალარს.

განსაზღვრება.  $T$  ტენზორის კვალი (პირველი ინვარიანტი) ეწოდება ამ ტენზორის ორმაგ სკალარულ ნამრავლს მეტრიკულ ტენზორზე ანუ

$$Sp T = T : g. \quad (2.52)$$

3. გამოვთვალოთ მეორე რანგის ტენზორის კვალი:

$$Sp T = T : g = T^{ij} e_i e_j : g^{mn} e_m e_n = T^{ij} g^{mn} g_{in} g_{jm} = T^i_m g^m_i = T_j^j. \quad (2.53)$$

ტენზორის კვალის პოვნის ოპერატორი  $Sp T$  წრფივია ანუ ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$Sp(T_1 + T_2) = Sp T_1 + Sp T_2; \quad (2.54)$$

$$Sp(\lambda T) = \lambda Sp T. \quad (2.55)$$

სადაც  $\lambda$  ნამდვილი რიცხვია, ხოლო  $T_1$  და  $T_2$  ერთნაირი ვალენტობის ტენზორებია.

## 2.2.4. ტენზორის ნახვევის ოპერაცია

### 1. ტენზორის ნახვევი ორი ინდექსით:

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს შემდეგი ტენზორი:

$$T = T_{\dots i_3 i_4}^{i_1 i_2 \dots i_5} e_{i_1} e_{i_2} e^{i_3} e^{i_4} e_{i_5}. \quad (2.56)$$

ამ ტენზორიდან  $i_2$  და  $i_3$  ინდექსების გატოლებით  $\alpha$ -სთან (ინდექსების დამუხრება) და შესაბამისად, ამ ინდექსით შეჯამებით მიღებულ ტენზორს:

$$T_{\dots i_3 i_4}^{i_1 i_2 \dots i_5} e_{i_1} (e_{i_2} e^{i_3}) e^{i_4} e_{i_5} = T_{\dots \alpha i_4}^{i_1 \alpha \dots i_5} e_{i_1} e^{i_4} e_{i_5}; \quad (2.57)$$

ეწოდება  $T$  ტენზორის ნახვევი  $i_2$  და  $i_3$  ინდექსებით.

რომელიმე ორი პარამეტრით ტენზორის ნახვევით მიღებული ახალი ტენზორის რანგი, ორით ნაკლებია საწყისი ტენზორის რანგთან შედარებით.

### 2. ორი ტენზორის ნახვევი:

განვიხილოთ ორი მეორე რანგის ტენზორის ტენზორული ნამრავლი:

$$ab = a^{ij} e_i e_j b_{mn} e^m e^n = a^{ij} b_{mn} e_i (e_j e^m) e^n; \quad (2.58)$$

ამ ტენზორულ ნამრავლზე თუ გამოვიყენებთ ნახვევის ოპერაციას  $j$  და  $m$  ინდექსებით, მივიღებთ ამ ტენზორების სკალარულ ნამრავლს:

$$a \cdot b = a^{ij} b_{mn} e_i g_j^m e^n = a^{ij} b_{mn} g_j^m e_i e^n = a^{ij} b_{jn} e_i e^n. \quad (2.59)$$

ამრიგად, ორი ტენზორის ნახვევის ოპერაცია იძლევა მათ სკალარულ ნამრავლს.

ანალოგიურად, ორი ტენზორის ორმაგი ნახვევის ოპერაცია იძლევა მათ ორმაგ სკალარულ ნამრავლს.

## 2.2.5. ფსევდოტენზორები. ლევი-ჩივიტას ტენზორი. ტენზორების ვექტორული ნამრავლი

ტენზორის ცნება უზრუნველყოფს მის ინვარიანტობას კოორდინატთა სისტემის ცვლილების მიმართ, რაც დიდ გამოყენებას პოულობს მათემატიკურ ფიზიკაში.

განვიხილოთ, ფსევდოტენზორის ცნება. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორთონორმირებული ბაზისი  $e_1, e_2, e_3$ . ამ კოორდინატთა სისტემაში განვიხილოთ ბაზისური პოლიადის წრფივი კომბინაცია:

$$T = T^{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_n}; \quad (2.60)$$

ჩავთვალოთ, რომ ახალ  $e_{i_1'}, e_{i_2'}, e_{i_3}'$  სისტემაზე გადასვლისას,  $T$  მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$T = T^{i_1' i_2' \dots i_n'} e_{i_1'} e_{i_2'} \dots e_{i_n'}; \quad (2.61)$$

თუ, კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნისას, მარჯვენა სისტემა იცვლება მარცხენა სისტემით ან პირიქით, მაშინ  $T$  გადადის

$$-T^{i_1' i_2' \dots i_n'} e_{i_1'} e_{i_2'} \dots e_{i_n'}; \quad (2.62)$$

კომბინაციაში (განსხვავებაა ნიშანში). ასეთ შემთხვევაში  $T$ -ს,  $n$  რანგის ფსევდოტენზორს უწოდებენ.

ფსევდოტენზორის კომპონენტები მარჯვენა სისტემიდან მარცხენაზე გადასვლისას იცვლიან ნიშანს, ამიტომ მათ ფსევდოსკალარებს უწოდებენ. ფსევდოტენზორები ინვარიანტული არიან კოორდინატთა სისტემის ბრუნვის მიმართ, მაგრამ არ არიან ინვარიანტული კოორდინატთა სისტემის არეკვლის გარდაქმნის მიმართ.

### მაგალითები.

1. ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი, თავისი განსაზღვრებიდან გამომდინარე, არის პირველი რანგის ფსევდოტენზორი;
2. ლევი-ჩივიტას მესამე რანგის ფსევდოტენზორი:

$$\varepsilon = \varepsilon_{ijk} e^i e^j e^k; \quad (2.63)$$

რომლის  $\varepsilon_{ijk}$  კომპონენტებსაც ლევი-ჩივიტას სიმბოლოებს უწოდებენ.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{თუ } i, j, k \text{ წარმოადგენს ლუწ გადანაცვლებას} \\ 0, & \text{თუ } i, j, k \text{ ინდექსებიდან რომელიმე ორი ემთხვევა} \\ & \text{ერთმანეთს} \\ -1, & \text{თუ } i, j, k \text{ წარმოადგენს კენტ გადანაცვლებას} \end{cases}. \quad (2.64)$$

ფსევდოტენზორებზე ოპერაციები განისაზღვრება ისევე, როგორც ტენზორებზე. თუ ოპერაცია ბინარულია და ერთ-ერთი ფსევდოტენზორია, მაშინ შედეგიც ფსევდოტენზორი იქნება.

3. ორი საბაზისო ვექტორის ვექტორული ნამრავლი ფსევდოტენზორია :

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{kij} \mathbf{e}^k. \quad (2.65)$$

4. ორი ტენზორის ვექტორული ნამრავლი ფსევდოტენზორია:

$$\mathbf{T} \times \mathbf{U} = T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} U^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} \mathbf{e}_{\alpha_1} \mathbf{e}_{\alpha_2} \dots \mathbf{e}_{\alpha_{m-1}} (\mathbf{e}_{\alpha_m} \times \mathbf{e}_{\beta_1}) \mathbf{e}_{\beta_2} \dots \mathbf{e}_{\beta_n}. \quad (2.66)$$

(2.63) ფორმულიდან გამომდინარე, (2.66) ფორმულის ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება უდრის  $\varepsilon_{k\alpha_m\beta_1} \mathbf{e}^k$ .

### 2.3. მეორე რანგის ტენზორების ალგებრა

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ნებისმიერი მეორე რანგის  $\mathbf{T}$  ტენზორი:

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = T_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = T^i_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = T_i^j \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j. \quad (2.67)$$

განსაზღვრება. თუ ნებისმიერი  $\mathbf{a}$  ვექტორისათვის და მეორე რანგის  $\mathbf{T}$  ტენზორისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}^*; \quad (2.68)$$

მაშინ  $\mathbf{T}^*$  მეორე რანგის ტენზორს, მოცემული  $\mathbf{T}$  ტენზორის შეუღლებული ტენზორი ეწოდება.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ რადგან  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = T^{ik} a_k \mathbf{e}_i$  და  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{S} = S^{ki} a_k \mathbf{e}_i$ ; მოცემული  $\mathbf{T}$  ტენზორის  $\mathbf{T}^*$  შეღლებული ტენზორი იქნება:

$$\mathbf{T}^* = T^{ji} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = T_{ji} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = T_j^i \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = T_i^j \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j. \quad (2.69)$$

ცხადია, რომ შეუღლებული ტენზორის შეუღლებული, საწყისი ტენზორის ტოლია ანუ

$$(\mathbf{T}^*)^* = \mathbf{T}. \quad (2.70)$$

განსაზღვრება. მეორე რანგის  $\mathbf{T}$  ტენზორს თვითშეუღლებული ეწოდება, თუ  $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}$ .

თვითშეუღლებული მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების მატრიცა სიმეტრიულია ანუ  $T^{ij} = T^{ji}$ .

**განსაზღვრება.** მეორე რანგის  $T$  ტენზორს ეწოდება ანტისიმეტრი-ული, თუ  $T^* = -T$ .

შესაბამისად, ანტისიმეტრიული ტენზორის კომპონენტების მატრიცის ელემენტები აკმაყოფილებენ  $T^{ij} = -T^{ji}$  განტოლებებს.

შეუღლებული ტენზორის ცნებაზე დაყრდნობით, შეგვიძლია ნებისმიერი მეორე რანგის ტენზორი წარმოვადგინოთ მისი სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ნაწილების ჯამის ფორმით:

$$T = \frac{1}{2}(T + T^*) + \frac{1}{2}(T - T^*). \quad (2.71)$$

### 2.3.1. მეორე რანგის ტენზორის მთავარი მიმართულებები და მთავარი მნიშვნელობები. ინვარიანტები

განვიხილოთ მეორე რანგის  $T$  ტენზორი.

**განსაზღვრება.** თუ არანულოვანი  $a$  ვექტორისა და  $\lambda$  რიცხვისათვის ადგილი აქვს განტოლებას:

$$T \cdot a = \lambda a; \quad (2.72)$$

მაშინ  $a$  ვექტორს  $T$  ტენზორის მთავარი ვექტორი ეწოდება, მის მიმართულებას - მთავარი მიმართულება, ხოლო  $\lambda$  რიცხვს - მთავარი მნიშვნელობა (მახასიათებელი რიცხვი).

განტოლება (2.72) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$(T - \lambda g)a = 0. \quad (2.73)$$

თუ (2.73) განტოლებას გადავწეროთ კომპონენტებში, მაშინ მივიღებთ წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$(T^i_j - \lambda \delta^i_j)a^j = 0; \quad (2.74)$$

$a$  ვექტორის კომპონენტების მიმართ, რომლის არანულოვანი ამონახსნების არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ სისტემის დეტერმინანტი იყოს ნულის ტოლი ანუ ადგილი ჰქონდეს შემდეგ მახასიათებელ განტოლებას:

$$\lambda^3 - J_1(T)\lambda^2 + J_2(T)\lambda - J_3(T) = 0, \quad (2.75)$$

სადაც  $J_1(\mathbf{T})$ ;  $J_2(\mathbf{T})$  და  $J_3(\mathbf{T})$  არ იცვლებიან კოორდინატთა სხვა სისტემაზე გადასვლისას და მათ  $\mathbf{T}$  ტენზორის ინვარიანტებს უწოდებენ და გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{cases} J_1(\mathbf{T}) = Sp \mathbf{T} \\ J_2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2} [(Sp \mathbf{T})^2 - Sp(\mathbf{T}^2)] \\ J_3(\mathbf{T}) = \frac{1}{3} Sp(\mathbf{T}^3) - \frac{1}{2} Sp \mathbf{T} \cdot Sp(\mathbf{T}^2) + \frac{1}{6} (Sp \mathbf{T})^3 \end{cases} ; \quad (2.76)$$

თუ გავითვალისწინებთ რომ:

$$Sp \mathbf{T} = T_{ii}; \quad Sp(\mathbf{T}^2) = T_i^k T_k^i; \quad Sp(\mathbf{T}^3) = T_i^k T_k^l T_l^i. \quad (2.77)$$

დეკარტული ბაზისისათვის გვექნება ფორმულები:

$$Sp \mathbf{T} = T_{ii}; \quad Sp(\mathbf{T}^2) = T_{ik} T_{ik}; \quad Sp(\mathbf{T}^3) = T_{ik} T_{kj} T_{ji}. \quad (2.78)$$

ამრიგად, ტენზორის მთავარი მნიშვნელობები არიან (2.75) მახასიათებელი განტოლების ფესვები  $\lambda_1$ ;  $\lambda_2$ ;  $\lambda_3$ .

ინვარიანტები, მთავარი მნიშვნელობების საშუალებით შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3; \quad J_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1; \quad J_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (2.79)$$

(2.76) განტოლებათა სისტემიდან შეგვიძლია ამოვხსნათ  $Sp \mathbf{T}$ ;  $Sp(\mathbf{T}^2)$  და  $Sp(\mathbf{T}^3)$ , მაშინ (2.79) ფორმულებიდან გამომდინარე მივიღებთ, რომ

$$Sp \mathbf{T} = J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3; \quad (2.80)$$

$$Sp(\mathbf{T}^2) = J_1^2 - 2J_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2; \quad (2.81)$$

$$Sp(\mathbf{T}^3) = 3J_3 - 3J_1 J_2 + J_1^3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3. \quad (2.82)$$

### 2.3.2. დეკარტული ტენზორების ალგებრა

წრფივი მართკუთხა დეკარტული კოორდინატების შემთხვევაში, ძირითადი და მისი ორთონორმალური ბაზისი ერთმანეთს ემთხვევა. აქედან გამომდინარე, დეკარტული ტენზორებისათვის კონტრავარიანტული, კოვარიანტული და შერეული კომპონენტები ერთმანეთს ემთხვევა. ასეთ შემთხვევაში, კომპონენტების ინდექსები შეგვიძლია ვწეროთ ან სულ ზედა (კონტრავარიანტული) ან სულ



ქვედა (კოვარიანტული). ჩვენ გამოვიყენებთ ქვედა ანუ კოვარიანტულ ინდექსებს. მითუმეტეს, რომ არარელატივისტური უწყვეტ გარემოთა დინამიკის მათემატიკური მოდელირებისათვის, დეკარტული ტენზორების აპარატი სავსებით საკმარისია. თუმცა, ჩვენ შევისწავლით არადეკარტული ტენზორების ანალიზსაც.

ა) დეკარტული ტენზორების შეკრება-გამოკლება. დეკარტული ტენზორების შეკრება-გამოკლება სრულდება მხოლოდ ერთნაირი რანგის ტენზორებზე, შესაბამისი კომპონენტების შეკრება-გამოკლებით და შედეგად მიიღება იგივე რანგის ტენზორი:

$$A_{ijk} \pm B_{ijk} = T_{ijk}; \quad (2.83)$$

ბ) დეკარტული ტენზორის ნამრავლი სკალარზე(რიცხვზე). სკალარზე გამრავლებისას, ტენზორის ყველა კომპონენტი მრავლდება ამ რიცხვზე და შედეგში იგივე რანგის ტენზორი მიიღება:

$$\lambda A_{ij} = B_{ij}. \quad (2.84)$$

გ) დეკარტული ტენზორების ტენზორული (გარე) ნამრავლი. ორი ტენზორის ტენზორული ანუ გარე ნამრავლი არის ტენზორი, რომლის კომპონენტებიც მიიღება პირველი თანამამრავლის ყველა კომპონენტის გადამრავლებით, მეორე თანამამრავლის ყველა კომპონენტზე. ტენზორული ნამრავლის რანგი, თანამამრავლი ტენზორების რანგების ჯამის ტოლია:

მაგალითები.

1.  $a_i b_j = T_{ij}$ ;
2.  $v_i F_{jk} = E_{ijk}$ ;
3.  $D_{ij} T_{km} = M_{ijkm}$ ;
4.  $\sigma_{ij} \varepsilon_{kmn} = \Omega_{ijkmn}$ .

სწორედ ეს ოპერაცია გვადლევს საშუალებას ორი ვექტორიდან მივიღოთ დიადა.

დ) დეკარტული ტენზორების ნახვევის ოპერაცია. ტენზორის რომელიმე ორი ინდექსით ნახვევის ოპერაცია ეწოდება ისეთ ოპერაციას, რომლის დროსაც ერთმანეთს უტოლდება ეს ორი ინდექსი, აღინიშნება ერთნაირი ასოთი და ხდება შეჯამება ამ ცვლადით. შედეგად, მიიღება ტენზორი, რომლის რანგიც ორი ერთეულით ნაკლებია საწყისი ტენზორის რანგზე:

### მაგალითები.

1.  $T_{ij}$  ტენზორის ნახვევი იქნება:  
 $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33};$
2.  $u_i v_j$  დიადის ნახვევი იქნება:  
 $u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3;$
3.  $E_{ij} F_k$  ტენზორის ნახვევები იქნება:  
 $E_{ij} F_j = a_i;$   
 $E_{ij} F_i = b_j;$   
 $E_{ii} F_k = c_k;$

ე) დეკარტული ტენზორების სკალარული (შიდა ნამრავლი) ნამრავლი. ორი ტენზორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება ისეთ ნახვევის ოპერაციას ამ ტენზორების ტენზორულ ნამრავლზე, რომლის დროსაც უტოლდებიან ერთმანეთს ორი ინდექსი სხვადასხვა თანამამრავლებიდან.

### მაგალითები.

1.  $a_i b_j$  საწყისი დიადა. სკალარული(შიდა) ნამრავლი:  
 $a_i b_i;$
2.  $a_i B_{jk}$  საწყისი დიადა. სკალარული(შიდა) ნამრავლები:  
 $a_i B_{ik} = f_k$  და  $a_i B_{ji} = h_j;$
3.  $E_{ij} E_{km}$  საწყისი დიადა. სკალარული(შიდა) ნამრავლი:  
 $E_{ij} E_{jm} = B_{im}$  ანუ  $E^2;$

ვ) დეკარტული ტენზორების ორმაგი სკალარული მანრავლი. როცა ორჯერ ხდება ნახვევის ოპერაცია მეოთხე ან უფრო მაღალი რანგის ტენზორზე.

### მაგალითები.

1.  $E_{ij} F_{km}$  საწყისი დიადა. ორმაგი სკალარული(შიდა) ნამრავლი:  
 $E_{ij} F_{ij}$  ანუ  $E:F$ .
2.  $E_{ij} E_{km} E_{pq}$  საწყისი დიადა. სამმაგი სკალარული ნამრავლი:  
 $E_{ij} E_{jm} E_{mi}$  ანუ  $E^3$ .

ზ) დეკარტული ტენზორების ვექტორული ნამრავლი. ლევი-ჩივიტას ფსევდოტენზორის კომპონენტების საშუალებით, ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$  ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\varepsilon_{ijk} a_j b_k = c_i. \quad (2.85)$$

ასევე, შეგვიძლია სიმბოლურად გამოვსახოთ სამი ვექტორის შერეული ნამრავლიც  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \lambda$  სიმბოლური აღნიშვნებით კომპონენტებით:

$$\varepsilon_{ijk} a_j b_k c_k = \lambda. \quad (2.86)$$

მეორე რანგის ტენზორს შეესაბამება კომპონენტებისაგან შედგენილი მატრიცა. აქედან გამომდინარე, მათზე მოქმედებებს გააჩნიათ შესაბამისი მატრიცული ინტერპრეტაციაც.

### 2.3.2.1. მეორე რანგის სიმეტრიული დეკარტული ტენზორის მთავარი მიმართულებები და მთავარი მნიშვნელობები. ინვარიანტები

სივრცის რომელიმე წერტილში განსაზღვრული, ნებისმიერი სიმეტრიული  $T_{ij}$  ტენზორისა და ამ წერტილში განსაზღვრული მიმართულებისათვის, რომელიც მოიცემა  $n_j$  ერთეულოვანი ვექტორით, არსებობს ვექტორი რომელიც მოიცემა მათი სკალარული (შიდა) ნამრავლით:

$$v_i = T_{ij} n_j; \quad (2.87)$$

აქ  $T_{ij}$  შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც წრფივი ვექტორული ოპერატორი, რომელიც  $n_j$  მიმართულებას შეუსაბამებს  $v_i$  ვექტორს. თუ მიმართულება ისეთია, რომ  $v_i$  ვექტორი პარალელურია  $n_i$  მიმართულების, მაშინ მოიძებნება ისეთი სკალარი  $\lambda$ , რომ ადგილი ექნება შემდეგ განტოლებას:

$$T_{ij} n_j = \lambda n_i. \quad (2.88)$$

ასეთ შემთხვევაში,  $n_i$  მიმართულებას ეწოდება  $T_{ij}$  ტენზორის მთავარი მიმართულება (მთავარი ღერძი). თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $n_i = \delta_{ij} n_j$ ; მაშინ (2.88) განტოლება შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_i = 0; \quad (2.89)$$

მივიღეთ სამი განტოლება ოთხი  $n_i$  და  $\lambda$  უცნობით; რომელიც შეესაბამება ნებისმიერ მთავარ მიმართულებას. ამ სისტემას შეგვიძლია მივცეთ ჩვეული ფორმა:

$$\begin{cases} (T_{11} - \lambda)n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 = 0 \\ T_{21}n_1 + (T_{22} - \lambda)n_2 + T_{23}n_3 = 0. \\ T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + (T_{33} - \lambda)n_3 = 0 \end{cases} \quad (2.90)$$

ცხადია, რომ ნებისმიერი  $\lambda$  რიცხვისათვის არსებობს ტრიავიალური(ნულოვანი) ამონახსნი  $n_i = 0$ ; თუმცა ჩვენი მიზანია, ვიპოვოთ არატრიავიალური ამონახსნები. რადგან სისტემა (2.90) ერთგვაროვანია, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია მოვითხოვოთ  $n_i n_i = 1$  პირობის შესრულება (ანუ ვითხოვთ, რომ მთავარი მიმართულებების ვექტორის სიგრძე იყოს ერთის ტოლი).

იმისათვის, რომ (2.90) სისტემას ჰქონდეს არატრიავიალური ამონახსნები, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი მთავარი დეტერმინანტი იყოს ნულის ტოლი ანუ ადგილი ჰქონდეს შემდეგ განტოლებას:

$$|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0. \quad (2.91)$$

თუ ამ დეტერმინანტს გავშლით და დავალაგებთ  $\lambda$  რიცხვის ხარისხების მიხედვით, მივიღებთ  $T_{ij}$  ტენზორის მახასიათებელ განტოლებას:

$$\lambda^3 - J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda - J_3 = 0. \quad (2.92)$$

მახასიათებელი განტოლების კოეფიციენტები ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნების მიმართ, რის გამოც, მათ მეორე რანგის ტენზორის ინვარიანტებს უწოდებენ. ინვარიანტები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$J_1 = Sp T_{ij} = tr T_{ij} = T_{ii}. \quad (2.93)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ij}). \quad (2.94)$$

$$J_3 = |T_{ij}| = \det T_{ij}. \quad (2.95)$$

(2.92) განტოლების სამ ფესვს, რომელსაც აღვნიშნავთ შემდეგნაირად:  $\lambda_1$ ;  $\lambda_2$ ;  $\lambda_3$  და მათ ტენზორის მთავარ მნიშვნელობებს უწოდებენ.

ნამდვილკომპონენტებიანი სიმეტრიული ტენზორის მთავარი მნიშვნელობები ნამდვილი რიცხვებია. თუ ისინი ერთმანეთისაგან

განსხვავებულია, მაშინ შესაბამისი მთავარი მიმართულებები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

მთავარ ღერძებში, კომპონენტებისაგან შემდგარ მატრიცას აქვს დიაგონალური ფორმა:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (2.96)$$

თუ  $\lambda_1 = \lambda_2$  მაშინ ტენზორის დიაგონალური სახე არაა დამოკიდებული ამ მნიშვნელობების შესაბამის მიმართულებებზე და საპოვნელია მხოლოდ  $\lambda_3$ -ის შესაბამისი მთავარი მიმართულება. თუ ყველა მთავარი მნიშვნელობა ერთმანეთის ტოლია  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , მაშინ ყველა მიმართულება მთავარი მიმართულებაა. თუ, მთავარი მნიშვნელობები განსხვავებულია, მაშინ მათ ნუმერაციას ისე ირჩევენ რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3. \quad (2.97)$$

$Ox_1x_2x_3$  კოორდინატთა სისტემიდან მთავარი ღერძების  $Ox_1^*x_2^*x_3^*$  სისტემაზე გადასვლის მატრიცას 2.1 აქვს შემდეგი ფორმა:

ცხრილი 2.1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x_1^*$	$a_{11} = n_1^1$	$a_{12} = n_2^1$	$a_{13} = n_3^1$
$x_2^*$	$a_{21} = n_1^2$	$a_{22} = n_2^2$	$a_{23} = n_3^2$
$x_3^*$	$a_{31} = n_1^3$	$a_{32} = n_2^3$	$a_{33} = n_3^3$

სადაც  $n_i^j$  არის  $j$ -ური მთავარი მიმართულების მიმართული კოსინუსები.

იმისათვის, რომ მეორე რანგის  $T$  ტენზორის კომპონენტები გადავიყვანოთ მთავარ ღერძებზე (მთავარი მიმართულებებით)  $T^*$ , საჭიროა გამოვიყენოთ შემდეგი გარდაქმნა:

$$T^* = A \cdot T \cdot A^T; \quad (2.98)$$

სადაც

$$A = \begin{pmatrix} n_1^{(1)} & n_2^{(1)} & n_3^{(1)} \\ n_1^{(2)} & n_2^{(2)} & n_3^{(2)} \\ n_1^{(3)} & n_2^{(3)} & n_3^{(3)} \end{pmatrix}; \quad (2.99)$$

მთავარ ღერძებზე გადასვლის მატრიცაა, პირველ სტრიქონში გვაქვს  $\lambda_1$  მთავარი მნიშვნელობის შესაბამისი მთავარი მიმართულების ვექტორის კომპონენტები, მეორე სტრიქონში  $\lambda_2$ -ის შესაბამისი მთავარი მიმართულების ვექტორის კომპონენტები და მესამე სტრიქონში  $\lambda_3$ -ის შესაბამისი ვექტორის კომპონენტები, ხოლო  $A^T$  - მისი ტრანსპონირებული მატრიცაა.

### 2.3.2.2. მეორე რანგის სიმეტრიული დეკარტული ტენზორის ხარისხები. ჰამილტონ-კელის თეორემა

გამოვითვალოთ  $T_{ij}$  ტენზორის ხარისხები. მატრიცული ინტერპრეტაცია-ციიდან გამომდინარე, ან ტენზორების სკალარული ნამრავლის ფორმულის ბაზაზე გვაქვს, რომ ამ ტენზორის კვადრატის  $T^2$  კომპონენტები იქნება:

$$T_{ij}T_{jk} = C_{ik}; \quad (2.98)$$

ამ ტენზორის კუბის  $T^3$  კომპონენტები იქნება:

$$T_{ij}T_{jk}T_{km} = M_{im}. \quad (2.99)$$

თუ, მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორის შესაბამისი მატრიცა მიყვანილია დიაგონალურ სახეზე, მაშინ მისი ხარისხები გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$T^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

როგორც ვხედავთ მეორე რანგის ტენზორს და მისი ნატურალური ხარისხის მატრიცებს აქვთ საერთო მთავარი ღერძები.

ტენზორის ყველა მთავარი მნიშვნელობა აკმაყოფილებს მახასიათებელ (2.92) განტოლებას. აქედან გამომდინარე, თუ მატრიცებზე ოპერაციებსაც გავიხსენებთ, მივიღებთ რომ თვით  $T$  ტენზორიც აკმაყოფილებს მახასიათებელ განტოლებას ანუ ადგილი აქვს შემდეგ განტოლებას:

$$T^3 - J_1 T^2 + J_2 T - J_3 E = \mathbf{0}. \quad (2.101)$$

ამ განტოლებას ჰამილტონ-კელის განტოლებას უწოდებენ, ხოლო დამტკიცებულ თეორემას - ჰამილტონ-კელის თეორემას. ცხადია, რომ  $E$  ერთეულოვანი ტენზორია, რომლის კომპონენტებიც კრონეკერის სიმბოლოა, ხოლო  $0$ -ნულ მატრიცაა (ყველა ელემენტი ნულოვანია).

ადვილი მისახვედრია, რომ თუ მოცემული გვაქვს  $T$  ტენზორი და მასასადამე, მისი კომპონენტების მატრიცა  $T_{ij}$ ; ჩვენ ადვილად ვიპოვით ამ ტენზორის კვადრატის კომპონენტების  $T_{ij}T_{jk}$  მატრიცასაც მათი გადამრავლებით მატრიცული წესით, ხოლო ტენზორის კუბის კომპონენტებს ადვილად გამოვსახავთ ჰამილტონ-კელის განტოლებიდან:

$$T^3 = J_1 T^2 - J_2 T + J_3 E. \quad (2.102)$$

თუ ამ განტოლებას გავამრავლებთ  $T$  ტენზორზე, მაშინ მივიღებთ რომ

$$T^4 = J_1 T^3 - J_2 T^2 + J_3 T \quad (2.103)$$

თუ (2.103) განტოლებაში შევიტანთ  $T^3$  მნიშვნელობას, მივიღებთ რომ

$$T^4 = (J_1 - J_2) T^2 + (J_3 - J_1 J_2) T + J_1 J_3 E. \quad (2.104)$$

ამრიგად, თუ გავაგრძელებთ პროცესს, მივიღებთ რომ  $T$  ტენზორის ნებისმიერი ხარისხი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც,  $T^2$ ,  $T$  და  $E$  ტენზორების წრფივი კომბინაცია, სადაც კოეფიციენტები იქნებიან  $T$  ტენზორის ინვარიანტების უწყვეტი ფუნქციები:

$$(T_{ij})^n = \varphi_0(J_1; J_2; J_3) \cdot E + \varphi_1(J_1; J_2; J_3) \cdot T_{ij} + \varphi_2(J_1; J_2; J_3) \cdot (T_{ij})^2. \quad (2.105)$$

### 2.3.3. ნოლის თეორემა. რივლინ-ერიკსენის თეორემა

**ნოლის თეორემა.** თუ გვაქვს ფუნქციონალური დამოკიდებულება ნებისმიერ ორ სიმეტრიულ ტენზორს შორის  $\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij})$ , სადაც  $f$  უწყვეტია თავის წარმოებულებთან ერთად, მაშინ ამ ფუნქციის ყველაზე ზოგადი სახის წარმოდგენას აქვს შემდეგი სახე:

$$\sigma_{ij} = M_0 \delta_{ij} + M_1 \varepsilon_{ij} + M_2 (\varepsilon_{ij})^2 \quad . \quad (2.106)$$

სადაც  $M_i = \psi(J_{1\varepsilon}, J_{2\varepsilon}, J_{3\varepsilon})$ .

**დამტკიცება.** გავშალოთ  $\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij})$  მარჯვენა ნაწილის მატრიც-ფუნქცია ტეილორის მწკრივად  $\varepsilon_{ij}$ -ს მიმართ, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\sigma_{ij} = \varphi_0 \delta_{ij} + \varphi_1 \varepsilon_{ij} + \varphi_2 (\varepsilon_{ij})^2 + \varphi_3 (\varepsilon_{ij})^3 + \dots \quad (2.107)$$

სადაც  $\varphi_i$  სკალარული მატრიცებია. თუ გავითვალისწინებთ (2.105) განტოლებას, რომელიც საშუალებას იძლევა, რომ  $(\varepsilon_{ij})^n$  იქნას წარმოდგენილი შესაბამისი სახით, მივიღებთ რომ

$$\sigma_{ij} = M_0 \delta_{ij} + M_1 \varepsilon_{ij} + M_2 (\varepsilon_{ij})^2, \quad (2.108)$$

სადაც  $M_i = \psi(J_{1\varepsilon}, J_{2\varepsilon}, J_{3\varepsilon})$ . რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

**ნოლის თეორემა** ფუნდამენტური თეორემაა, რომელიც განსაზღვრავს უწყვეტ გარემოთა რეოლოგიური განტოლების შესაძლო ზოგად სახეს.

არსებობს ამ თეორემის განზოგადებებაც, როცა სიმეტრიული ტენზორი დამოკიდებულია რამდენიმე სხვა სიმეტრიულ ტენზორზე. მაგალითად, როცა გვაქვს ორი დამოუკიდებელი ცვლადი ადგილი აქვს რივლინ-ერიკსენის შემდეგ თეორემას:

**რივლინ-ერიკსენის თეორემა.**

თუ გვაქვს იზოტროპული ფუნქცია  $H = f(T; P)$  სადაც  $H$ ,  $T$  და  $P$  მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორებია, მაშინ ამ ფუნქციის ყველაზე ზოგადი სახის წარმოდგენას აქვს შემდეგი სახე:

$$H = M_0 \delta_{ij} + M_1 T + M_2 P + M_3 T^2 + M_5 P^2 + M_6 (T \cdot P + P \cdot T) + M_7 (T^2 \cdot P + P \cdot T^2) + M_8 (T \cdot P^2 + P^2 \cdot T) + M_9 (T^2 \cdot P^2 + P^2 \cdot T^2).$$

სადაც  $M_i = \psi(J_{1T}, J_{2T}, J_{3T}, J_{1P}, J_{2P}, J_{3P})$ .



### 2.3.4. დეკარტული ტენზორული ველი და სიმბოლური აღნიშვნები

ტენზორული ველი  $D$  სივრცის ნებისმიერ  $x \in D$  წერტილს, დროის ნებისმიერ  $t \in [0; \tau]$  მომენტში შეუსაბამებს  $T(x, t)$  ტენზორს. ტენზორულ ველს ეწოდება უწყვეტი, თუ უწყვეტია  $T(x, t)$  ტენზორული ველის ყველა კომპონენტის ფუნქცია. ტენზორულ ველს ეწოდება სტაციონარული, თუ ტენზორული ველი დამოკიდებულია მხოლოდ სივრცით  $x \in D$  კოორდინატზე და არაა დამოკიდებული დროზე.

ორთოგონალურ წრფივ დეკარტულ კოორდინატთა სისტემაში  $x \in D$  ვექტორი შეგვიძლია ჩავწეროთ სიმბოლურ ან ინდექსურ აღნიშვნებში:

$$x = x_i e_i; \quad (2.109)$$

შესაბამისად, სკალარული ველი შეგვიძლია გამოვსახოთ ორნაირად:

$$\varphi = \varphi(x, t) \text{ ან } \varphi = \varphi(x_i, t); \quad (2.110)$$

ვექტორული ველი:

$$v = v(x, t) \text{ ან } v_i = v_i(x, t); \quad (2.111)$$

მეორე რანგის ტენზორის ველი:

$$T = T(x, t) \text{ ან } T_{ij} = T_{ij}(x, t). \quad (2.112)$$

ინდექსური აღნიშვნები ფართოდ გამოიყენება წარმოებულების აღსანიშნავადაც, კერძოდ, წარმოებული  $x_i$  ცვლადით, აღინიშნება როგორც შესაბამისი ფუნქციის ქვედა ინდექსი მძიმის შემდეგ:

მაგალითები.

1.  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi_{,i}$  ;
2.  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i}$ ;
3.  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j}$  ;
4.  $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = v_{i,jk}$ ;
5.  $\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k} = T_{ij,k}$ .

ინდექსური აღნიშვნები ფართოდ გამოიყენება ველის ფუნქციებისათვისაც:

$$1. \text{grad} \varphi = \nabla \varphi = \varphi_{,i} ; \quad (2.113)$$

$$2. \text{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = v_{i,i} ; \quad (2.114)$$

$$3. \text{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \varepsilon_{ijk} v_{k,j} ; \quad (2.115)$$

$$4. \nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \Delta \varphi = \varphi_{,ii} . \quad (2.116)$$

ინდექსური აღნიშვნებით სტოქსის ინტეგრალური თეორემა, იმის შესახებ, რომ ნებისმიერი, წერტილში მოჭიმვადი შეკრული  $C$  წირის გასწვრივ აღებული წირითი ინტეგრალი, მოცემული  $F$  ვექტორული ფუნქციიდან, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც ზედაპირული ინტეგრალი, ამ წირზე მოჭიმული ორმხრივი  $S$  ზედაპირის გასწვრივ,  $F$  ფუნქციის როტორის ნორმალური მდგენელიდან, ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\oint_C F_i dx_i = \int_S n_i \varepsilon_{ijk} F_{k,j} dS. \quad (2.117)$$

გაუსის თეორემა დივერგენციის შესახებ, რომ მოცულობითი ინტეგრალი მოცემული  $\mathbf{v}$  ვექტორული ფუნქციის დივერგენციიდან, გამოითვლება როგორც ამ მოცულობის შემომსაზღვრელი ზედაპირის გასწვრივ აღებული ზედაპირული ინტეგრალი, ამ ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ გამჭოლი ნაკადიდან, ასევე, მარტივად ჩაიწერება ინდექსური აღნიშვნებით:

$$\iiint_V v_{i,i} dv = \iint_S v_i n_i dS. \quad (2.118)$$

#### 2.4. არადეკარტული ტენზორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული წარმოებულები. რიჩის ლემა

როცა საქმე გვაქვს მრუდწირულ კოორდინატებთან, ტენზორის კონტრავარიანტული და კოვარიანტული კომპონენტები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, რაც იწვევს შესაბამის შინაარსობლივ გართულებას. განვიხილოთ  $\mathbf{a}(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$  ვექტორული ველი და მისი წარმოდგენა როგორც ძირითად  $\mathbf{e}_i$ , ასევე, ორადულ  $\mathbf{e}^i$  ბაზისში:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a_j \mathbf{e}^j. \quad (2.119)$$

$\mathbf{a}$  ვექტორის წარმოებულები  $\xi^n$  ცვლადით იქნება:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \xi^n} = \frac{\partial a^i}{\partial \xi^n} \mathbf{e}_i + a^i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \xi^n}; \quad (2.120)$$

ან

$$\frac{\partial a}{\partial \xi^n} = \frac{\partial a_j}{\partial \xi^n} e^j + a_j \frac{\partial e^j}{\partial \xi^n}. \quad (2.121)$$

$\frac{\partial e_i}{\partial \xi^n}$  წარმოებულები გავშალოთ  $e_k$  ბაზისში:

$$\frac{\partial e_i}{\partial \xi^n} = G_{in}^k e_k; \quad (2.122)$$

სადაც  $G_{in}^k$  გაშლის კოეფიციენტებს კრისტოფელის მეორე გვარის სიმბოლოებს უწოდებენ. მათთვის ცხადია რომ ადგილი აქვს განტოლებას:

$$G_{in}^k = \frac{\partial e_i}{\partial \xi^n} \cdot e^k. \quad (2.123)$$

მაშინ (2.120) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ კონტრავარიანტული ვექტორის კოვარიანტულ წარმოებულს აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial a}{\partial \xi^n} = \left( \frac{\partial a^i}{\partial \xi^n} + a^m G_{mn}^i \right) e_i. \quad (2.124)$$

მეორე მხრივ, თუ ანალოგიურად ვიმოქმედებთ (2.121) ფორმულიდან, მივიღებთ რომ კოვარიანტული ვექტორის კოვარიანტულ წარმოებულს აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial a}{\partial \xi^n} = \left( \frac{\partial a_i}{\partial \xi^n} - a_l G_{ik}^l \right) e^i. \quad (2.125)$$

გაწარმოების შედეგად, ტენზორის რანგი ერთით იზრდება, ამასთან, თუ საქმე გვაქვს არა მრუდწირულ კოორდინატებთან, არამედ, დეკარტულ კოორდინატებთან, მაშინ კრისტოფელის სიმბოლოები ნულის ტოლია და ორივე წარმოებული ერთნაირი იქნება.

მეორე რანგის  $A = A^{mn} e_m e_n$  კონტრავარიანტული ტენზორის კოვარიანტული წარმოებულიც ანალოგიურად გამოითვლება და გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$\frac{\partial A}{\partial \xi^k} = \left( \frac{\partial A^{mn}}{\partial \xi^k} + A^{ln} G_{lk}^m + A^{ml} G_{lk}^n \right) e_m e_n; \quad (2.126)$$

მეორე რანგის კოვარიანტული  $A = A_{mn} e^m e^n$  ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული იქნება:

$$\frac{\partial A}{\partial \xi^k} = \left( \frac{\partial A_{mn}}{\partial \xi^k} - A_{ln} G_{mk}^l - A_{ml} G_{nk}^l \right) e^m e^n. \quad (2.127)$$

ამ ფორმულების საშუალებით, უშუალოდ შემოწმებით მტკიცდება რიჩის ლემა.

**რიჩის ლემა.** მეტრიკული ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული ნულის ტოლია ანუ  $g^{ij}_{,k} = 0$  და  $g_{ij,k} = 0$ .

რაც იმას ნიშნავს, რომ ნამრავლის გაწარმოებისას, თუ ერთ-ერთი თანამამრავლი მეტრიკული ტენზორია, ის შეიძლება ჩავთვალოთ მუდმივ სიდიდედ.

კლასიკურ მექანიკაში დინამიკის მათემატიკური მოდელების აგებისათვის, სავსებით საკმარისია დეკარტული ტენზორების მათემატიკური აპარატი. ამიტომ ტენზორული ანალიზის საკითხებში უფრო ჩაღრმავება, ამ ეტაპზე არაა მიზანშეწონილი.

მრუდწირული კოორდინატების და შესაბამისად, არადეკარტული ტენზორების აუცილებლობა თავს იჩენს რთული ფორმის გარსების შესწავლისას, ან რელატივისტური კოსმოლოგიური მოდელების შესწავლისას, რაც ცალკე კვლევის ობიექტია და ამ წიგნში არ განიხილება.

### ამოცანები ამოხსნებით

**2.1.** დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში იპოვეთ:

ა) მოცემული  $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$  ვექტორის მიმმართველი ვექტორი.

ბ) ორი წერტილის  $A(1; 0; 3)$  და  $B(0; 2; 1)$ . შემაერთებელი  $\overrightarrow{AB}$  ვექტორის ორტა.

**ამოხსნა.** ა) მოცემული  $\mathbf{v}$  ვექტორის სიგრძე იქნება:

$$v = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7.$$

მაშინ  $\mathbf{v}$  ვექტორის მიმმართველი ვექტორი იქნება:

$$\frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{7} = \frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}.$$

ბ)  $\overrightarrow{AB} = (0 - 1; 2 - 0; 1 - 3) = (-1; 2; -2),$

მაშინ  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3,$  ხოლო ორტა იქნება  $\frac{\overrightarrow{AB}}{3} = \frac{-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{3}$  ანუ ორტა იქნება ვექტორი:  $-\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}.$

2.2. ჩაწერეთ გაშლილად მოცემულ ტენზორების კომპონენტები: ა)  $a_{ii}$ ;  $B_{2jj}$ ;  $C_{i1i}$ . ბ)  $T_{1j}a_j$ ;  $n_i x_{2i}$ .

ამოხსნა. ა)  $a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ ;

$$B_{2jj} = B_{211} + B_{222} + B_{233};$$

$$C_{i1i} = C_{111} + C_{212} + C_{313}.$$

$$ბ) T_{1j}a_j = T_{11}a_1 + T_{12}a_2 + T_{13}a_3;$$

$$n_i x_{2i} = n_1 x_{21} + n_2 x_{22} + n_3 x_{23}.$$

2.3. ჩაწერეთ გაშლილად განტოლებათა სისტემა:  $a_{ij}x_j = b_i$ .

ამოხსნა.  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

2.4. სამგანზომილებიან სივრცეში გამოთვალეთ ტოლობების მნიშვნელობა კრონეკერის სიმბოლოს კომპონენტების მეშვეობით: ა)  $\delta_{ii}$ ; ბ)  $\delta_{ij}\delta_{ij}$ ; გ)  $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}$ ; დ)  $\delta_{ij}\delta_{jk}$ ; ე)  $\delta_{ij}A_{ik}$ .

ამოხსნა. ა)  $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3$ ;

$$ბ) \delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{1j}\delta_{1j} + \delta_{2j}\delta_{2j} + \delta_{3j}\delta_{3j} = 3;$$

$$გ) \delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{1j}\delta_{1k}\delta_{jk} + \delta_{2j}\delta_{2k}\delta_{jk} + \delta_{3j}\delta_{3k}\delta_{jk} = 3;$$

$$დ) \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{i1}\delta_{1k} + \delta_{i2}\delta_{2k} + \delta_{i3}\delta_{3k} = \delta_{ik};$$

$$ე) \delta_{ij}A_{ik} = A_{jk}.$$

2.5. ლევი-ჩივიტას ტენზორისათვის აჩვენეთ, რომ: ა)  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = 6$ ;

ბ)  $\varepsilon_{ijk}a_j a_k = 0$ .

ამოხსნა. ა)  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{1jk}\varepsilon_{k1j} + \varepsilon_{2jk}\varepsilon_{k2j} + \varepsilon_{3jk}\varepsilon_{k3j}$ ;

ეხლა შევაჯამოთ  $j$  ინდექსით და ამოვწეროთ მხოლოდ არანულოვანი წევრები:  $\varepsilon_{21k}\varepsilon_{k21} + \varepsilon_{31k}\varepsilon_{k31} + \varepsilon_{12k}\varepsilon_{k12} + \varepsilon_{32k}\varepsilon_{k32} + \varepsilon_{13k}\varepsilon_{k13} + \varepsilon_{23k}\varepsilon_{k23}$ ;

ეხლა შევაჯამოთ  $k$  ინდექსის მიხედვით და ამოვწეროთ მხოლოდ არანულოვანი წევრები:

$$\varepsilon_{321}\varepsilon_{132} + \varepsilon_{231}\varepsilon_{123} + \varepsilon_{312}\varepsilon_{231} + \varepsilon_{312}\varepsilon_{231} + \varepsilon_{213}\varepsilon_{321} + \varepsilon_{123}\varepsilon_{312} = 6;$$

ბ)  $\varepsilon_{ijk} a_j a_k = \varepsilon_{i1k} a_1 a_k + \varepsilon_{i2k} a_2 a_k + \varepsilon_{i3k} a_3 a_k = \varepsilon_{i12} a_1 a_2 + \varepsilon_{i13} a_1 a_3 + \varepsilon_{i21} a_2 a_1 + \varepsilon_{i23} a_2 a_3 + \varepsilon_{i31} a_3 a_1 + \varepsilon_{i32} a_3 a_2$ ; მაშინ მივიღებთ, რომ

თუ,  $i = 1$  მაშინ  $\varepsilon_{ijk} a_j a_k = \varepsilon_{123} a_2 a_3 + \varepsilon_{132} a_3 a_2 = 0$ ;

თუ,  $i = 2$  მაშინ  $\varepsilon_{ijk} a_j a_k = \varepsilon_{213} a_1 a_3 + \varepsilon_{231} a_3 a_1 = 0$ ;

თუ,  $i = 3$  მაშინ  $\varepsilon_{ijk} a_j a_k = \varepsilon_{312} a_1 a_2 + \varepsilon_{321} a_2 a_1 = 0$ .

**2.6.** დაამტკიცეთ, რომ თუ  $A_{ij} = A_{ji}$  და  $B_{ij} = -B_{ji}$ ; მაშინ  $A_{ij} B_{ij} = 0$ .

**ამოხსნა.**  $A_{ij} B_{ij} = -A_{ji} B_{ji} \Rightarrow A_{ij} B_{ij} + A_{ji} B_{ji} = A_{ij} B_{ij} + A_{pq} B_{pq} = 0$ .  
რადგან აქ ყველა ინდექსი მუხჯია ანუ მეორდება და შეჯამების ინდექსია, მათი შეცვლა კი სხვა იდექსებით არაფერს ცვლის ანუ  $A_{pq} B_{pq} = A_{ij} B_{ij}$ . ამიტომ  $2A_{ij} B_{ij} = 0 \Rightarrow A_{ij} B_{ij} = 0$  რ.დ.გ.

**2.7.** აჩვენეთ, რომ მესამე რიგის დეტერმინანტი

$$\det A_{ij} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

შეგვიძლია გამოვსახოთ ლევი-ჩივიტას ფსევდოტენზორით შემდეგი სახით:  $\det A_{ij} = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$ .

**ამოხსნა.** როგორც ვიცით სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი ჩაიწერება ლევი-ჩივიტას ფსევდოტენზორის საშუალებით ანუ

$$[\mathbf{abc}] = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \text{ ეხლა თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:}$$

$a_i = A_{1i}$ ;  $b_i = A_{2i}$  და  $c_i = A_{3i}$  მაშინ მივიღებთ რომ დეტერმინანტი შეგვიძლია ჩავწეროთ  $\det A_{ij} = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$  ფორმით რ.დ.გ.

**2.8.** იპოვეთ მოცემული მეორე რანგის  $T$  ტენზორის მთავარი მნიშვნელობები და მთავარი მიმართულებები, თუ მისი კომპონენტების მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**ამოხსნა.** მთავარი მნიშვნელობების საპოვნელად  $T$  ტენზორისათვის, შევადგინოთ (2.91) მახასიათებელი განტოლება:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) = 0 \text{ ანუ}$$

$[(3-\lambda)^2 - 1](1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) = 0$ . მაშასადამე, გვაქვს სამი მთავარი მნიშვნელობა:  $\lambda_1 = 1$ ;  $\lambda_2 = 2$  და  $\lambda_3 = 4$ .

ვიპოვოთ თითოეული მთავარი მნიშვნელობის შესაბამისი მთავარი მიმართულების ერთეულოვანი ვექტორები.

$\lambda_1 = 1$  მნიშვნელობის საპოვნელ განტოლებათა სისტემას (2.90) ექნება სახე:

$$\begin{cases} 2n_1^{(1)} - n_2^{(1)} = 0 \\ -n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} = 0 \\ (n_1^{(1)})^2 + (n_2^{(1)})^2 + (n_3^{(1)})^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1^{(1)} = 0 \\ n_2^{(1)} = 0 \\ n_3^{(1)} = \pm 1 \end{cases}$$

$\lambda_2 = 2$  მნიშვნელობის საპოვნელ განტოლებათა სისტემას (2.90) ექნება სახე:

$$\begin{cases} n_1^{(2)} - n_2^{(2)} = 0 \\ -n_1^{(2)} + n_2^{(2)} = 0 \\ (n_1^{(2)})^2 + (n_2^{(2)})^2 + (n_3^{(2)})^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1^{(2)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ n_2^{(2)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ n_3^{(2)} = 0 \end{cases}$$

$\lambda_3 = 4$  მნიშვნელობის საპოვნელ განტოლებათა სისტემას (2.90) ექნება სახე:

$$\begin{cases} -n_1^{(3)} - n_2^{(3)} = 0 \\ -n_1^{(3)} - n_2^{(3)} = 0 \\ (n_1^{(3)})^2 + (n_2^{(3)})^2 + (n_3^{(3)})^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1^{(3)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \\ n_2^{(3)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ n_3^{(3)} = 0 \end{cases}$$

ამრიგად, მივიღეთ რომ მოცემული მეორე რანგის ტენზორის მთავარ ღერძებზე გადამყვანი (2.99) მატრიცა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \mp \frac{1}{\sqrt{2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

**2.9.** აჩვენეთ, რომ 2.8 ამოცანის  $T$  ტენზორი შეიძლება მივიყვანოთ დიაგონალურ სახეზე, თუ მოვახდენთ კოორდინატთა სისტემის გადაყვანას მთავარ მიმართულების ღერძებზე ფორმულით:

$$T^* = A \cdot T \cdot A^T.$$

**ამოხსნა.**

$$\begin{aligned} (T^*_{ij}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ამრიგად, მეორე რანგის ტენზორი მივიყვანეთ დიაგონალურ სახეზე.

**2.10.** ჰამილტონ-კელის თეორემიდან გამომდინარე, იპოვეთ მეორე რანგის  $B$  ტენზორის მეოთხე ხარისხის კომპონენტების  $B^4$  მატრიცა, თუ მოცემულია, რომ

$$(B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

**ამოხსნა.**  $B$  ტენზორის მახასიათებელ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0. \text{ ჰამილტონ-კელის}$$

თეორემის თანახმად, მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორის კომპონენტების მატრიცა, აკმაყოფილებს მის მახასიათებელ განტოლებას ანუ  $B^3 - 2B^2 - 6B + 9E = 0$ . თუ ამ განტოლებას გავამრავლებთ  $B$  ტენზორზე მივიღებთ, რომ  $B^4 = 2B^3 + 6B^2 - 9B$ . თუ ამ გამოსახულების მარჯვენა ნაწილში შევიტანთ  $B^3$ -ის მნიშვნელობას ჰამილტონ-კელის განტოლებიდან, მივიღებთ რომ  $B^4 = 10B^2 + 3B - 18E$ .

მაშასადამე, მივიღებთ რომ



$$((\mathbf{B}^4)_{ij}) = 10 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 9 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

$$((\mathbf{B}^4)_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 81 & 0 \\ 7 & 0 & 26 \end{pmatrix}.$$

### III თავი. კვანტერნიონები და მყარი სხეულის სამგანზომილებიანი კინემატიკა

თანამედროვე მექანიკაში გამოიყენება სხვადასხვანაირი მათემატიკური მეთოდები და ცნებები: ტენზორები, კვანტერნიონები, დიფერენცირებადი მრავლსახეობები, ლის ჯგუფები და ალგებრები, სიმპლექტიკური გეომეტრია, დიფერენციალური განტოლებები, ერგოდულობის თეორია, ფუნქციონალური ანალიზი, ტოპოლოგია, ოპერატორების თეორია, შემფოთებათა თეორია, კატასტროფების თეორია და ა.შ.

მრავალი თანამედროვე მათემატიკური თეორია წარმოიშვა მექანიკის პრობლემების შესწავლის პროცესში და შემდგომ მიიღო, ის აქსიომატური სახე, რაც ასე ართულებს მათ შესწავლას.

წინამდებარე წიგნის გასაგებად, საკმარისია: წრფივი ალგებრის, დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის პირველი ორი კურსის პროგრამის ცოდნა.

#### 3.1. კლასიკური მექანიკის აქსიომატიზაციის საკითხები.

##### მექანიკის განტოლებების ინვარიანტულობა და კოვარიანტულობა

კლასიკური მექანიკა წარმოადგენს აქსიომატურ სისტემას. თავიდან ყველაფერი იწყება სასრული რაოდენობის საწყისი ცნებებით, როგორცაა: მატერიალური წერტილი, მასა, ძალა და ა.შ.

ამ ცნებებით წარმოდგენილი ობიექტები, ინდივიდუალურ თვისებებს იძენენ მას შემდეგ, რაც მათ შორის ჩამოყალიბდება აზრობრივი კავშირი აქსიომების საშუალებით. თუ, ჩამოყალიბებულ საწყის ცნებებზე და ობიექტებზე აგებულ აქსიომებზე ლოგიკის კანონების მიხედვით ავაგებთ თეორიას, მისთვის არ ექნება მნიშვნელობა არც ექსპერიმენტს და არც თვალსაჩინობას.

ასევე, თუ აღმოჩნდა რომ რომელიღაც სხვა სფეროში არსებულ, საწყის ცნებებსა და ობიექტებთან არსებობს იზომორფიზმი, მაშინ აგებული აქსიომატური სისტემის საშუალებით მიღებული თეორიის დებულებები ამ ახალ სფეროზეც ვრცელდება. ასეთ შემთხვევაში, ამბობენ, რომ ეს არის აგებული აქსიომატური სისტემის რეალიზაცია.

თუმცა, ვიდრე სხვა სფეროზე გავავრცელებთ, უნდა დავრწმუნდეთ, რომ აგებული აქსიომატური სისტემა „გამოყენებადია“ ანუ პრაქტიკულად ღირებულია. ამისათვის, უნდა შესწავლილი იქნას, **ჰილბერტის** მიერ შემოტანილი სამი აუცილებელი პრობლემის შესწავლა:

1. აქსიომათა სისტემის არაწინააღმდეგობრიობის პრობლემა;
2. აქსიომათა სისტემის მინიმალურობის პრობლემა;
3. აქსიომათა სისტემის სისრულის პრობლემა.

აქსიომათა სისტემის არაწინააღმდეგობრიობის პრობლემა მდგომარეობს იმაში, რომ წინააღმდეგობის ლოგიკური კანონიდან გამომდინარე, შეუძლებელი უნდა იყოს, ლოგიკურად სწორად აგებული მსჯელობის შედეგად, აქსიომათა სისტემიდან ურთიერთსაწინააღმდეგო დებულებების დამტკიცება.

აქსიომათა სისტემის მინიმალურობა ნიშნავს იმას, რომ ამ სისტემის არცერთი აქსიომა არაა დანარცენი აქსიომების ლოგიკური შედეგი.

აქსიომათა სისტემის სისრულე ნიშნავს იმას, რომ მოცემული თეორიის ელემენტებთან შემხებლობაში მყოფ, ნებისმიერ წინადადებაზე, შესაძლებელია გაეცეს პასუხი: ჭეშმარიტია ის, თუ მცდარი.

ფიზიკა - მათემატიკური დისციპლინების აქსიომატურ სისტემაზე დაყრდნობის კონცეფცია, ეკუთვნის მეოცე საუკუნის უდიდეს მათემატიკოს **დავიდ ჰილბერტს** (**ჰილბერტის მეექვსე პრობლემა**). ის თვლიდა, რომ ეს აუცილებელია მათემატიკური სიზუსტის მისაღწევად.

მექანიკის აქსიომათა სისტემა გარკვეული ფორმით პირველად ჩამოაყალიბა დიდმა ისააკ ნიუტონმა 1687 წელს. **ჰილბერტის** მიერ, მეოცე საუკუნეში ჩამოაყალიბებული პრობლემების შემდეგ, მეცნიერთა არაერთი მცდელობა იყო, გადაეჭრათ **მეექვსე პრობლემა** [18,20], თუმცა, ამ პრობლემის გადაწყვეტა, მრავალი მცდელობის მიუხედავად, დღემდე ვერავინ შეძლო.

გიოდელმა დაამტკიცა, რომ ნებისმიერი საკმაოდ მძლავრი აქსიომათა სისტემა (კლასიკური მექანიკა სწორედ ასეთ სისტემებს ეკუთვნის) არაა სრული.

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ, დავრჩებით სისტემის შიგნით, მაშინ შეუძლებელია ამ სისტემის არაწინააღმდეგობრიობის დამტკიცებაც.

თუმცა, აღმოჩნდა რომ ადგილი აქვს, მექანიკის პირობით არაწინააღმდეგობრიობას. მაგალითად, დამტკიცებულია, რომ „კლასიკური მექანიკა არაწინააღმდეგობრივია, თუ, არაწინააღმდეგობრივია არითმეტიკა“.

ისააკ ნიუტონმა მექანიკის ძირითადი კანონები ჩამოაყალიბა ნაშრომში „ნატურალური ფილოსოფიის მათემატიკური საწყისები“. თუმცა, ამ ნაშრომში არაა ინერციული სისტემის ცნება, მაგრამ ნიუტონი საუბრობს აბსოლუტურ დროზე და აბსოლუტურ სივრცეზე.

ის რომ „მექანიკის კანონები ერთნაირადაა ძალაში ყველა ისეთი ათვლის სისტემისათვის, რომელიც მოცემულის მიმართ, თანაბრად და წრფივად მოძრაობს, პირველად შენიშნა გალილეიმ“.

ამიტომ, ერთი ინერციული სისტემიდან, მეორეზე გადასვლის ფორმულებს გალილეის (3.1), (3.2) გარდაქმნას უწოდებენ. მათემატიკურად ეს გარდაქმნა შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\{t; x; y; z\} \rightarrow \{t'; x'; y'; z'\}. \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} t' = t + \tau \\ x' = a + v_x t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' = b + v_y t + v_x t + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' = c + v_z t + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases} \quad (3.2)$$

ამ ფორმულებში  $\tau; a; b; c$  პარამეტრები ახასიათებენ დროის და სივრცული კოორდინატების წანაცვლებას;  $v_x; v_y; v_z$  მუდმივი სიდიდეები შეესაბამება ახალი კოორდინატთა სისტემის ძველის მიმართ, თანაბრად და წრფივად მოძრაობის სიჩქარის კომპონენტებს; ხოლო  $a_{ik} = a_{ki}$  მატრიცის კომპონენტები კი, შეესაბამება ახალი კოორდინატთა სისტემის მობრუნებას, ძველის მიმართ. (ეკვლიდეს სივრცეში, ნებისმიერი წრფივი გარდაქმნა შეიძლება

წარმოვადგინოთ, როგორც გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობების კომპოზიცია).

რადგან მობრუნების მატრიცაში დამოუკიდებელი ელემენტების რაოდენობა სულ სამია (იმის მიხედვით, თუ რომელი ღერძის მიმართ გვაქვს მობრუნება), გვაქვს 10 დამოუკიდებელი პარამეტრი:

$$a; b; c; v_x; v_y; v_z; a_{12}; a_{13}; a_{23}. \quad (3.3)$$

მაშასადამე, გვაქვს გალილეის 10 - პარამეტრიან გარდაქმნათა ჯგუფი.

თანამედროვე მათემატიკურ ენაზე, ზემოთ მოყვანილი ტექსტი მოკლედ ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად: კლასიკური მექანიკის კანონები ინვარიანტულია გალილეის გარდაქმნების ჯგუფის მიმართ.

მექანიკაში ინვარიანტულობის ცნებასთან ერთად, განიხილება განტოლებათა კოვარიანტულობის ცნებაც. ეს ორი სხვადასხვა და მეტად მნიშვნელოვანი ცნებებია.

ამ ცნებების გასამოჯნად, განვიხილოთ ზოგად შემთხვევაში, დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$F_i(t; q; \dot{q}; \dots; q^{(n)}) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.4)$$

სადაც  $t$  დამოუკიდებელი ცვლადია, მექანიკაში - დრო,  $q$  არის  $n$  კომპონენტინი დროზე დამოკიდებული ვექტორი, ხოლო  $q^{(n)} = \frac{d^n q}{dt^n}$ .

ვთქვათ დამოუკიდებელ და დამოკიდებულ ცვლადებზე ვახდენთ გარდაქმნას:  $(t; q) \rightarrow (t'; q')$ , ისე რომ

$$\begin{cases} t = t(t'; q') \\ q = q(t'; q') \end{cases} \quad (3.5)$$

განხილულ (3.4) განტოლებათა სისტემას ეწოდება ინვარიანტული (3.5) გარდაქმნების მიმართ, თუ, ცვლადთა გარდაქმნის შემდეგ, მიიღება იგივე  $F_i$  ფუნქციებით შედგენილი სისტემა ახალი ცვლადების მიმართ ანუ მიიღება შემდეგი სისტემა:

$$F_i \left( t'; q'; \frac{dq}{dt}; \dots; \frac{d^n q}{dt^n} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.6)$$

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი: ვთქვათ, მოცემული გვაქვს დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q-t}{q+t}$$

მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა:

$$(t; q) \rightarrow (t'; q')$$

შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{cases} t = q' + t' \\ q = q' - t' \end{cases}$$

ამ ფორმულებით გარდაქმნის შედეგად, მივიღებთ განტოლებას:

$$\left(\frac{dq'}{dt'} - 1\right) / \left(\frac{dq'}{dt'} + 1\right) = -\frac{t'}{q'}$$

საიდანაც, წარმოებულის მიმართ ამოხსნის შედეგად, მივიღებთ შემდეგი სახის განტოლებას:

$$\frac{dq'}{dt'} = \frac{q' - t'}{q' + t'}$$

როგორც ვხედავთ, ახალ ცვლადებში, განტოლებას იგივე სახე აქვს, რაც ქონდა ძველ ცვლადებში.

იმ გარდაქმნებს, რომელთა მიმართაც განტოლებები ინვარიანტულია, ამ განტოლებების სიმეტრიებს ეძახიან.

სიმეტრიებს ის თვისება აქვთ, რომ განტოლებათა ამონახსნები გადაყავთ ამავე განტოლების სხვა ამონახსნებში.

მაგალითად, თუ  $q = f(t)$  არის  $\frac{dq}{dt} = \frac{q-t}{q+t}$  განტოლების რაიმე ამონახსნი, ამ ამონახსნში ინვარიანტული გარდაქმნის ფორმულების ჩასმა, მოგვცემს განტოლებას:  $q' - t' = f(q' + t')$  საიდანაც ვპოულობთ ახალ ამონახსნს:  $q' = g(t')$ , მაშინ, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ  $q = g(t)$  ახალი ამონახსნია.

გალილეის ფარდობითობის პრინციპში, საუბარია კლასიკური მექანიკის კანონების ინვარიანტულობაზე და არა იმ განტოლებების ინვარიანტულობაზე, რომელიც ამა თუ იმ ამოცანისათვის შეიძლება

ჩაიწეროს. კანონის ინვარიანტულობა ნიშნავს იმ წესების ინვარიანტულობას, რომლებითაც დიფერენციალური განტოლებები ჩაიწერება და არა თვით განტოლებების ინვარიანტულობას.

კონკრეტულად, ნიუტონის მეორე კანონის ინვარიანტულობა ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლისას, ნიშნავს რომ ახალ სისტემაშიც ისევე, როგორც ძველში, მასისა და აცქარების ნამრავლი უნდა გავუტოლოთ ძალების ტოლქმედს. თუმცა, ძალას ახალ სისტემაში შეიძლება ქონდეს სხვანაირი ანალიზური ჩანაწერი.

კანონების დიფერენციალური განტოლებების ჩაწერის წესის ინვარიანტულობას, სხვა ინერციულ სისტემაზე გადასვლისას დიფერენციალური განტოლებების კოვარიანტულობას უწოდებენ.

ამრიგად, დიფერენციალური განტოლებების კოვარიანტულობა ნიშნავს, იმ კანონების ინვარიანტულობას, რომელთა მეშვეობითაც ეს განტოლებები ჩაიწერება და არა თვით განტოლებების ინვარიანტულობას.

### 3.2. მატერიალური წერტილის კინემატიკა ბუნებრივ კოორდინატებში

მატერიალური წერტილის კინემატიკის ამოცანაა ისეთი ცნებების განსაზღვრება, როგორცაა მატერიალური წერტილი მდებარეობა, სიჩქარე და აჩქარება; ასევე, ამ მახასიათებლებს შორის კავშირის დადგენა, წერტილის მოძრაობის აღწერის სხვადასხვა მეთოდის შემთხვევაში.

მატერიალური წერტილის მდებარეობა განსაზღვრულია, თუ, მოცემულია ამ წერტილის მდებარეობის შესაბამისი  $r$  რადიუს-ვექტორი, რომელიც ფიქსირებული კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

მატერიალური წერტილის მოძრაობა, აღიწერება დროში ცვლადი  $r(t)$  რადიუს-ვექტორით, რასაც შეესაბამება სამი სკალარული ფუნქცია:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t); \\ z = z(t) \end{cases} \quad (3.7)$$

ანუ

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \quad (3.8)$$

წირს, რომელსაც სივრცეში შემოწერს მოძრავი წერტილი ტრაექტორია ეწოდება.

წერტილის სიჩქარე ეწოდება ვექტორს:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}. \quad (3.9)$$

დროზე დამოკიდებული ფუნქციები:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (3.10)$$

წარმოადგენენ სიჩქარის ვექტორის გეგმილებს კოორდინატთა ღერძებზე. სიჩქარის ვექტორის მოდული გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$v = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (3.11)$$

წერტილის აჩქარება ეწოდება ვექტორს:

$$\mathbf{w}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}. \quad (3.12)$$

აჩქარების კომპონენტები საკოორდინატო ღერძებზე იქნება:

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad w_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (3.13)$$

აჩქარების ვექტორის მოდული იქნება:

$$w = |\mathbf{w}(t)| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}. \quad (3.14)$$

თუ, მოცემული გვაქვს სიჩქარე, როგორც დროის ფუნქცია და გვინდა განვსაზღვროთ წერტილის მდებარეობა, მაშინ საჭირო იქნება ამოვხსნათ სამი დიფერენციალური განტოლებისაგან შემდგარი სისტემა:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x(t) \\ \frac{dy}{dt} = v_y(t); \\ \frac{dz}{dt} = v_z(t) \end{cases} \quad (3.15)$$



რომელსაც წერტილის მოძრაობის კინემატიკურ განტოლებებს უწოდებენ. ისინი, განსხვავდებიან ნიუტონის დინამიკის განტოლებებისაგან.

კინემატიკური განტოლებების ამონახსნები, განსაზღვრავენ მოძრაობის კანონს:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t) dt \\ y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(t) dt; \\ z(t) = z_0 + \int_0^t v_z(t) dt \end{cases} \quad (3.16)$$

ისევე, როგორც მოძრაობის ტრაექტორია პარამეტრულ კოორდინატებში.

*ჩვენ გავეცანით წერტილის კინემატიკის ძირითად ცნებებს. ახლა, გადავიდეთ მატერიალური წერტილის მოძრაობის კინემატიკის აღწერაზე ბუნებრივ კოორდინატებში.*

ვთქვათ, ცნობილია მოძრაობის კანონი:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \\ z = z(t) \end{cases}$$

ტრაექტორიაზე ავირჩიოთ ნებისმიერი წერტილი, საიდანაც ავითვლით ტრაექტორიის გასწვრივ გავლილ გზას:  $s(t)$ . თუ,  $s$  - ს ჩავთვლით ტრაექტორიის ახალ პარამეტრად, მაშინ წერტილის სიჩქარე გამოისახება შემდეგნაირად:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}[s(t)]}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{ds}{dt}. \quad (3.17)$$

$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  ერთეულოვანი სიგრძის ვექტორია ტრაექტორიის მხები მიმართულებით, რაც იმას ნიშნავს რომ სიჩქარის მოდული უდრის გავლილი გზის დროით წარმოებულს ანუ

$$v = |\mathbf{v}(t)| = \frac{ds}{dt}. \quad (3.18)$$

გამოვითვალთ წერტილის აჩქარება ბუნებრივ კოორდინატებში.

$$\mathbf{w}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\tau} \cdot v) = \frac{dv}{dt} \cdot \boldsymbol{\tau} + v \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \boldsymbol{\tau} + v^2 \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}. \quad (3.19)$$

$\frac{d\tau}{ds}$  გამოსახულებას ტრაექტორიის სიმრუდეს უწოდებენ. დიფერენციალური გეომეტრიიდან გამომდინარე, როგორც ვიცით

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}, \quad (3.20)$$

ამ ფორმულაში  $\mathbf{n}$  ერთეულოვანი ვექტორია ტრაექტორიის ნორმალის მიმართულებით, ხოლო  $R$  ტრაექტორიის წირის სიმრუდის რადიუსია მოცემულ წერტილში.

ამრიგად, აჩქარების ვექტორი დაიშალა ორი ურთიერთპერპენდიკულარული  $\tau$  და  $\mathbf{n}$  ერთეულოვანი ვექტორების მიმართულებით:

$$\mathbf{w}(t) = \frac{dv}{dt} \cdot \tau + \frac{v^2}{R} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.21)$$

დავუმატოთ ორ ერთეულოვან ურთიერთპერპენდიკულარულ  $\tau$  და  $\mathbf{n}$  ვექტორებს მესამე ერთეულოვანი სიგრძის ვექტორი  $\mathbf{b}$ , ისე, რომ ამ სამმა ვექტორმა შეადგინონ მარჯვენა სისტემა (ბურღის წესი). მაშინ მივიღებთ წერტილის ტრაექტორიის თანამდევ ფრენეს სამწახნაგას.

$\mathbf{w}(t)$  აჩქარების  $w_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}$  მდგენელს ტანგენციალურ ანუ მხებ აჩქარებას უწოდებენ, ხოლო  $w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\dot{s}^2}{R}$  მდგენელს - ნორმალურ აჩქარებას.

$\mathbf{b}$  ვექტორის (ბინორმალის) მიმართულებით წერტილს არა აქვს აჩქარება.

ამრიგად,

$$\mathbf{v}(t) = v_\tau \cdot \tau + 0 \cdot \mathbf{n} + 0 \cdot \mathbf{b};$$

$$\mathbf{w}(t) = w_\tau \cdot \tau + w_n \cdot \mathbf{n} + 0 \cdot \mathbf{b};$$

სადაც

$$v_\tau = \dot{s}; \quad w_\tau = \ddot{s}; \quad w_n = \frac{\dot{s}^2}{R}. \quad (3.22)$$

განვიხილოთ მაგალითი:

ვთქვათ, წერტილის მოძრაობის ტრაექტორიაა ჯაჭვური წირი:

$$\begin{cases} x = h \cos t \\ y = h \sin t. \\ z = l \cdot t \end{cases}$$

მაშინ, წერტილის მიერ გავლილი  $s$  გზა გამოითვლება ფორმულით:

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \sqrt{h^2 + l^2} \cdot t;$$

ეს დამოკიდებულება, საშუალებას გვაძლევს ტრაექტორია გამოვსახოთ ნატურალური  $s$  პარამეტრით, მართლაც

$$t = \frac{s}{\sqrt{h^2 + l^2}}.$$

ამ ახალი ნატურალური პარამეტრის მიმართ გვექნება ტრაექტორიის განტოლებები შემდეგი ფორმით:

$$\begin{aligned} x &= h \cos \frac{s}{\sqrt{h^2 + l^2}} \\ y &= h \sin \frac{s}{\sqrt{h^2 + l^2}}; \\ z &= l \cdot \frac{s}{\sqrt{h^2 + l^2}} \end{aligned}$$

გამოვითვალოთ თანამდები საბაზისო სამწახნაგას საბაზისო ვექტორები:

$$\boldsymbol{\tau} = \left( \frac{dx}{ds}; \frac{dy}{ds}; \frac{dz}{ds} \right) = \left( -\frac{h}{\sqrt{h^2 + l^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{h^2 + l^2}}; \frac{h}{\sqrt{h^2 + l^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{h^2 + l^2}}; \frac{l}{\sqrt{h^2 + l^2}} \right)$$

$$\boldsymbol{n} = R \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = - \left( \cos \frac{s}{\sqrt{h^2 + l^2}}; \sin \frac{s}{\sqrt{h^2 + l^2}}; 0 \right); R = \frac{h^2 + l^2}{h};$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n} = \left( \frac{l}{\sqrt{h^2 + l^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{h^2 + l^2}}; -\frac{l}{\sqrt{h^2 + l^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{h^2 + l^2}}; \frac{h}{\sqrt{h^2 + l^2}} \right).$$

თანამდები სამწახნაგას ბაზისში სიჩქარის ვექტორის კოორდინატებია:

$$v_\tau = \dot{s} = \sqrt{h^2 + l^2}; v_n = 0; v_b = 0$$

ამავე ღერძებზე აჩქარების კოორდინატებია:

$$w_\tau = \ddot{s} = 0; w_n = \frac{\dot{s}^2}{R}; w_b = 0.$$

### 3.2.1. მატერიალური წერტილის კინემატიკა მრუდწირულ კოორდინატებში

მატერიალური წერტილი მდებარეობა  $\boldsymbol{r}(t)$  შეგვიძლია ჩავწეროთ არა მხოლოდ დეკარტულ  $x; y; z$  კოორდინატებში, არამედ,

ნებისმიერი სამი ისეთი  $q_1; q_2; q_3$  ცვლადით, რომელთა საშუალებითაც დეკარტული კოორდინატები ცალსახად გამოისახება ფორმულებით:

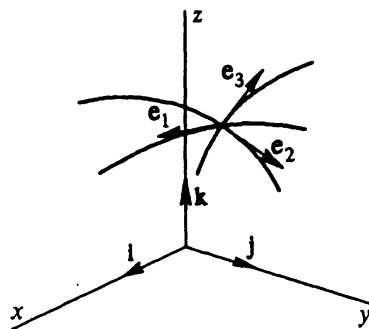
$$\begin{cases} x = x(q_1; q_2; q_3) \\ y = y(q_1; q_2; q_3) \\ z = z(q_1; q_2; q_3) \end{cases} \quad (3.23)$$

იმისათვის, რომ (3.23) ფორმულები იძლეოდეს ურთიერთცალსახა თანადობას, ეს გარდაქმნა უნდა იყოს არაგადაგვარებული ანუ გარდაქმნის იაკობიანი არ უნდა უდრიდეს ნულს და თუ გვინდა ახალ ცვლადებსი სიჩქარეებისა და აჩქარების გამოთვლა, მაშინ უნდა არსებობდეს შესაბამისი რიგის წარმოებულებიც.

თუ, წერტილი მოძრაობს, მაშინ ახალ ცვლადებში მოძრაობის განტოლებები იქნება:

$$\begin{cases} q_1 = q_1(t) \\ q_2 = q_2(t) \\ q_3 = q_3(t) \end{cases} \quad (3.24)$$

ჩვენი ამოცანაა გამოვსახოთ  $v(t)$  სიჩქარე და  $w(t)$  აჩქარება ახალ ცვლადებში. ცვლადთა გარდაქმნის (3.23) ფორმულებში  $r = r(q_1; q_2; q_3)$  თუ თითოეულ  $q_k$  ცვლადს ცალ-ცალკე განვიხილავთ ახალ პარამეტრად და დავაფიქსირებთ დანარჩენ ცვლადებს, მაშინ მივიღებთ წირთა ოჯახს, რომლებსაც მრუდწირულ საკოორდინატო წირებს ვუწოდებთ, ხოლო თვით  $q_1; q_2; q_3$  ცვლადებს კი - მრუდწირულ კოორდინატებს.



ნახ. 3.1. მრუდწირული კოორდინატები

მატერიალური წერტილის ფიქსირებული მდებარეობისას, განვიხილოთ საკოორდინატო წირების მხებები ნახ. 3.1 და მხებთა მიმართულებით ავიღოთ ერთეულოვანი ბაზისური  $e_1; e_2; e_3$  ვექტორები (ორტები). მაშინ, მივიღებთ რომ

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \mathbf{k} = H_1 \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = \frac{\partial x}{\partial q_2} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_2} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \mathbf{k} = H_2 \mathbf{e}_2; \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} = \frac{\partial x}{\partial q_3} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_3} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_3} \mathbf{k} = H_3 \mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (3.25)$$

სადაც

$$H_k = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)^2}, \quad (3.26)$$

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}$  ვექტორების ნორმის სიდიდეებია და მათ ლამეს კოეფიციენტები ეწოდება.

მრუდწირულ კოორდინატებს ეწოდებათ ორთოგონალური, თუ, ადგილი აქვთ ტოლობებს:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0. \quad (3.27)$$

ეს პირობები შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial x}{\partial q_l} \frac{\partial x}{\partial q_m} + \frac{\partial y}{\partial q_l} \frac{\partial y}{\partial q_m} + \frac{\partial z}{\partial q_l} \frac{\partial z}{\partial q_m} = 0, \quad l \neq m. \quad (3.28)$$

რკალის წირითი ელემენტი

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.29)$$

შეგვიძლია გმოვსახოთ მრუდწირულ კოორდინატებში, თუ, ამ ფორმულაში მოვახდენთ ჩასმას დეკარტული კოორდინატების დიფერენციალების ფორმულებიდან:

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 \\ dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3. \\ dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3 \end{cases} \quad (3.30)$$

თუ (3.30) ფორმულებს შევიტანთ (3.29) ფორმულაში, მივიღებთ რომ

$$ds^2 = g_{ij} dq_i dq_j. \quad (3.31)$$

(3.31) ფორმულა გამოსახავს ორ წერტილს შორის მანძილის ანუ მეტრიკის კვადრატს მრუდწირულ კოორდინატებში, ხოლო  $g_{ij}$  წარმოადგენს მეტრიკული ტენზორის კომპონენტებს მატერიალური წერტილის მდებარეობის მახლობლობაში.

თუ, მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემა ორთოგონალურია, მაშინ

$$ds^2 = H_i H_j \delta_{ij} dq_i dq_j = H_i^2 dq_i^2. \quad (3.32)$$

გამოვსახოთ მრუდწირულ კოორდინატებში მატერიალური წერტილის მოძრაობის სიჩქარე.

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial r}{\partial q_3} \dot{q}_3 = H_i \dot{q}_i \mathbf{e}_i. \quad (3.33)$$

მასასადამე, სიჩქარე გამოისახა ახალი ნახ. 3.1, ერთეულოვანი ვექტორების მიხედვით:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3. \quad (3.34)$$

რომლის კომპონენტებია:

$$v_i = H_i \dot{q}_i. \quad (3.35)$$

სიჩქარის მოდული იქნება:

$$v = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{(H_1 \dot{q}_1 \mathbf{e}_1 + H_2 \dot{q}_2 \mathbf{e}_2 + H_3 \dot{q}_3 \mathbf{e}_3)^2}; \quad (3.36)$$

თუ, მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემა ორთოგონალურია, მაშინ

$$v = \sqrt{H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \quad (3.37)$$

მოძრავი წერტილის აჩქარება მრუდწირულ კოორდინატებში, ასევე, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ახალი ლოკალური ბაზისის მიმართ:

$$\mathbf{w} = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 + w_3 \mathbf{e}_3.$$

აჩქარების  $w_k$  კომპონენტების საპოვნელად, უნდა გამოვიდეთ ფორმულიდან:

$$\mathbf{w} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}; \quad (3.38)$$

სადაც წარმოებულები დეკარტის კოორდინატებში, უნდა შევცვალოთ შესაბამისი მნიშვნელობებით მრუდწირულ კოორდინატებში:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial x}{\partial q_k} \ddot{q}_k \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial y}{\partial q_k} \ddot{q}_k \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial z}{\partial q_k} \ddot{q}_k \end{cases} \quad (3.39)$$

$i; j; k$  ინდექსებით სრულდება შეჯამება ეინშტეინის შეთანხმების საფუძველზე.

ამის შემდეგ, (3.38) ფორმულაში შემავალი ძველი ბაზისის ორტები  $i; j; k$  უნდა გამოვსახოთ ახალი ბაზისის  $e_1; e_2; e_3$  ორტებით, რისთვისაც გამოვიყენებთ შემდეგ წრფივ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{\partial x}{\partial q_k} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_k} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_k} \mathbf{k} = H_k \mathbf{e}_k. \quad k = \overline{1,3}. \quad (3.40)$$

ასეთნაირად მიღებული აჩქარების კომპონენტები, ანალიზურად რთული ფორმულებით ჩაიწერება და თეორიული ღირებულება არა აქვს.

უფრო მიზანშეწონილია, განვიხილოთ აჩქარების ვექტორის გეგმილები ახალ  $e_1; e_2; e_3$  ორთოგონალურ სისტემაში.

$$w_{e_k} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_k. \quad (3.41)$$

ამ ფორმულებში სკალარული ნამრავლის ქვეშ, გვესმის ევკლიდური სივრცის ვექტორების სკალარული ნამრავლი.

**თუ ახალი საბაზისო სისტემა ორთოგონალურია, მაშინ**

$$w_{e_k} = w_k. \quad (3.42)$$

გამოვთვალოთ  $w_{e_k}$  კომპონენტები ზოგად შემთხვევაში, რისთვისაც გამოვიყენებთ  $e_k$  ბაზისის ელემენტების წარმოდგენებს:

$$H_k w_{e_k} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right). \quad (3.43)$$

რადგან  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3$ ; მივიღებთ რომ

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}. \quad (3.44)$$

ამას გარდა, ცხადია რომ

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial r}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial v}{\partial q_k}. \quad (3.45)$$

მაშასადამე,

$$H_k w_{e_k} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \dot{q}_k} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial q_k}. \quad (3.46)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:  $T = \frac{mv^2}{2}$  (მატერიალური წერტილის კინეტიკური ენერგია), მაშინ (3.46) განტოლებიდან მივიღებთ აჩქარების კომპონენტებისათვის შემდეგ ფორმულებს:

$$w_{e_k} = \frac{1}{mH_k} \cdot \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right). \quad (3.47)$$

ამ შედეგის ერთ-ერთი გამოყენება მდგომარეობს იმაში, რომ მისი დახმარებით, ნიუტონის მეორე კანონი  $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$ , შეგვიძლია ჩავწეროთ ზოგად კოვარიანტული ფორმით:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = H_k F_{e_k}. \quad (3.48)$$

სადაც  $T = \frac{mv^2}{2}$ .

ზოგადი კოვარიანტული ფორმით ჩაწერა ნიშნავს იმას, რომ განტოლება არ იცვლის სახეს, ნებისმიერ სხვა დასაშვებ მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლისას. დასაშვები ქვია მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემას, თუ, ის მიიღება მოცემულისაგან ჰომეომორფული (ორმხრივ გლუვი ბიექციით) ასახვით.

მაგალითისათვის, განვიხილოთ სფერული კოორდინატთა სისტემა:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

ამ შემთხვევაში, ახალი მრუდწირული კოორდინატების როლს ასრულებენ:

$$(q_1; q_2; q_3) = (\varphi; \theta; r).$$

$$\varphi \in [0; 2\pi); \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \quad r \in (0; \infty).$$



გამოვითვალოთ ლამეს კოეფიციენტები:

$$H_k = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)^2}$$

$$\begin{cases} H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r \cos \theta \\ H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = r \\ H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1 \end{cases} .$$

ახალი ლოკალური ბაზისი იქნება:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = (-\sin \varphi; \cos \varphi; 0) \\ \mathbf{e}_2 = (-\cos \varphi \sin \theta; -\sin \varphi \sin \theta; \cos \theta) \\ \mathbf{e}_3 = (\cos \varphi \cos \theta; \sin \varphi \cos \theta; \sin \theta) \end{cases}$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ახალი ბაზისი ორთოგონალურია.

ახალ ლოკალურ ბაზისში სიჩქარის კომპონენტებია:

$$v_1 = r\dot{\varphi} \cos \theta; \quad v_2 = r\dot{\theta}; \quad v_3 = \dot{r}.$$

სიჩქარის მოდული იქნება:

$$v = \sqrt{r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2}.$$

კინეტიკური ენერგია იქნება:

$$T = \frac{m}{2} (r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2).$$

$$w_{e_1} = 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \theta + r\ddot{\varphi} \cos \theta - 2r\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta;$$

$$w_{e_2} = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + r\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta;$$

$$w_{e_3} = \ddot{r} - r(\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2).$$

### 3.3. მყარი სხეულის კინემატიკა. მყარი სხეულის ორიენტაციის აღწერის მეთოდები

მატერიალურ წერტილთა ერთობლიობას, რომელიც ერთზე მეტი წერტილისაგან შედგება, ეწოდება მყარი სხეული (აბსოლუტურად მყარი სხეული), თუ მოძრაობისას, მის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი არ იცვლება.

მყარი სხეულის ბრუნვა ეწოდება ისეთ მოძრაობას, რომლის დროსაც, მყარი სხეულის ერთი წერტილი მაინც რჩება უძრავი მოძრაობის მთელი პროცესის განმავლობაში მოცემულ კოორდინატთა სისტემაში.

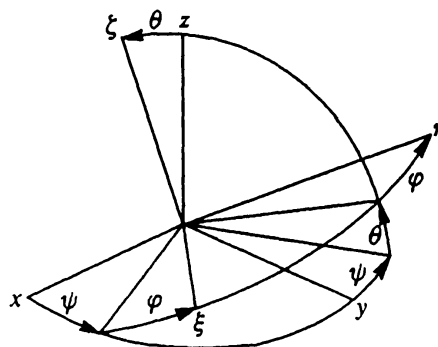
მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა შედგება, მისი ერთი რომელიმე წერტილის გადატანითი მოძრაობისა და ამ წერტილის გარშემო ბრუნვისაგან.

წერტილის მოძრაობის კინემატიკა უკვე შევისწავლეთ. გადავიდეთ ბრუნვითი მოძრაობის კინემატიკაზე.

ნებისმიერ მყარ სხეულს შეგვიძლია შევუსაბამოთ საკოორდინატო სამწახნაგა (ტრიედრი), რომლის მიმართაც სხეულის ყველა წერტილი უძრავია. ამ კოორდინატთა სისტემის სათავედ, ავირჩიოთ მისი უძრავი წერტილი.

მყარი სხეულის ორიენტაცია განისაზღვრება, როგორც სხეულთან ჩაზრდილი კოორდინატთა სისტემის ორიენტაცია, საწყისი უძრავი საკოორდინატო სისტემის მიმართ.

მყარი სხეულის ორიენტაციის განსაზღვრის, ისტორიულად პირველი იყო ეილერის  $\psi$ ;  $\theta$ ;  $\varphi$  კუთხეების მეთოდი ნახ. 3.2.



ნახ. 3.2. ეილერის კუთხეები

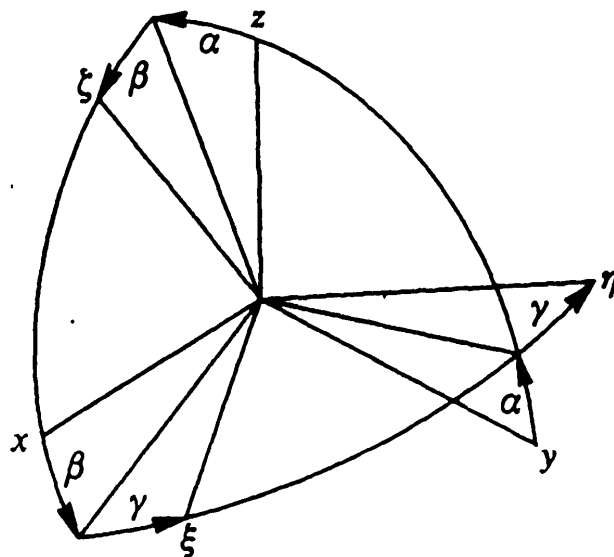
$\psi$ ;  $\theta$ ;  $\varphi$  კუთხეები იძლევიან მოძრავი  $\xi\eta\zeta$  ტრიედრის ორიენტაციას, საწყისი  $xyz$  ტრიედრის მიმართ. ეს არის ის კუთხეები, რომლითაც უნდა მოვაბრუნოთ საწყისი კოორდინატა სისტემა, იმისათვის, რომ დაემთხვეს კოორდინატა სისტემის ახალ მდებარეობას. ამასთან, პირველი მობრუნება ხდება  $xy$  სიბრტყეში  $\psi$  კუთხით, მეორე მობრუნება  $yz$  სიბრტყეში  $\theta$  კუთხით და მესამე მობრუნება  $xz$  სიბრტყეში  $\varphi$  კუთხით.

$\psi$  კუთხეს პრეცესიის კუთხეს უწოდებენ;

$\theta$  ნუტაციის კუთხეა;

$\varphi$  საკუთრივი ბრუნვის კუთხე.

გარდა ეილერის კუთხეებისა, არსებობს ბრუნვითი მოძრაობის ორიენტაციის აღწერის სხვა მეთოდებიც. მაგალითად საერთო სათავის მქონე ორი საკოორდინატო სისტემა შეგვიძლია ერთმანეთს დავამთხვიოთ კრილოვის წესით, თუ, ჯერ მოვაბრუნებთ უძრავ სისტემას  $\alpha$  კუთხით პირველი ღერძის გარშემო, მერე  $\beta$  კუთხით მეორე ღერძის გარშემო და შემდეგ  $\gamma$  კუთხით მესამე ღერძის გარშემო ნახ. 3.3



ნახ.3.3. მყარი სხეული ორიენტაციის კრილოვის წესი

ცხადია, რომ სართოწვეროს მქონე ორი ტრიედრის თანხვედრისათვის მობრუნებათა 20 სხვადასხვა თანმიმდევრობა არსებობს, თუმცა, მათ შორის მხოლოდ ოთხი ვარიანტია არსებითად განსხვავებული.

ჟურავლიოვის თეორემა. მყარი სხეულის ნებისმიერი მდებარეობა, შეგვიძლია მივიღოთ ნებისმიერი საწყისი მდებარეობიდან სამი მობრუნების საშუალებით.

### 3.3.1. ბრუნვის აღწერა კუთხეებით. ორთოგონალური მატრიცები

მყარი სხეულის მობრუნება მათემატიკურად შეიძლება განვიხილოთ, როგორც სამგანზომილებიანი ევკლიდის სივრცის ისეთი ასახვა  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  თავის თავზე, რომლის დროსაც არ იცვლება წერტილებს შორის მანძილები. ასეთ ასახვას ორთოგონალურს უწოდებენ.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს  $R$  სამგანზომილებიანი ვექტორი საწყისი ორთონორმირებული ბაზისია მიმართ:

$$R = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

მაშინ  $R \cdot R = R^T \cdot R$ . მობრუნების  $R$  გარდაქმნას ეს ვექტორი გადაჰყავს  $R'$  ვექტორში:

$$R' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

თვით გარდაქმნა  $xyz$  სისტემაში მოიცემა  $A$  მატრიცით:

$$R' = AR,$$

სადაც

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

რადგან გვაქვს ორთოგონალური გარდაქმნა ანუ არ იცვლება წერტილებს შორის მანძილები, არ იცვლება ვექტორთა სიგრძეც და მაშასადამე სკალარული ნამრავლებიც ანუ

$$R \cdot R = R' \cdot R' \Rightarrow |R| \cdot |R| \cos 0 = |R'| \cdot |R'| \cos 0 \Leftrightarrow |R| = |R'|.$$

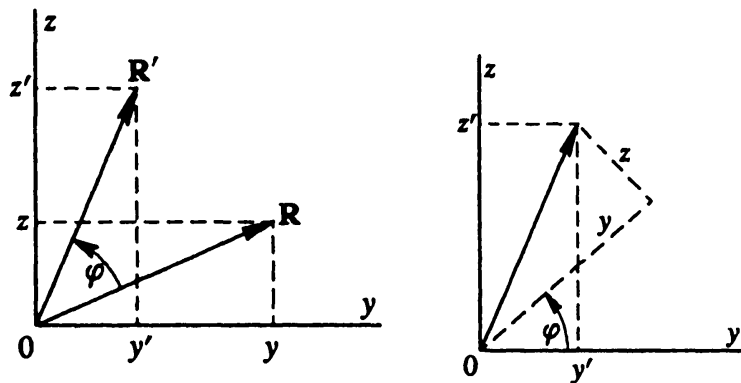
ჩავწერთ ორთონორმირებული ვექტორების სკალარული ნამრავლი მატრიცების ნამრავლის სახით:  $R \cdot R = R^T R$ .

მაშინ მივიღებთ, რომ

$$R^T R = (R')^T R' = (AR)^T AR = R^T A^T AR$$

მაშასადამე,  $A^T \cdot A = E$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ  $A^T = A^{-1}$  ანუ  $A$  მატრიცა ორთოგონალურია.

მაგალითი 1. განვიხილოთ  $\varphi$  კუთხით მობრუნება  $x$  ღერძის გარშემო ნახ. 3.4. რადგან პირველი კოორდინატი, ამ შემთხვევაში არ იცვლება, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ის დევს  $yz$  სიბრტყეში.



ნახ. 3.4. მობრუნება  $x$  ღერძის გარშემო

გარდაქმნილი ვექტორის  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  კოორდინატების დასაკავშირებლად საწყის  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  კოორდინატებთან, სამკუთხედო  $OyR$  მოვაბრუნოთ  $\varphi$  კუთხით, ისე, რომ  $R$  დაემთხვეს  $R'$  - ს. ნახაზიდან ჩანს, რომ მაშინ  $y' = y \cos \varphi - z \sin \varphi$ ;  $z' = y \sin \varphi + z \cos \varphi$ .

თუ,  $R$  ვექტორი არ ძევს ბრუნვის სიბრტყეში, მაშინ ამ განტოლებებს უნდა დაემატოს  $x' = x$  განტოლება და მივიღებთ  $x$  ღერძის გარშემო მობრუნების მატრიცას:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

2. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ  $y$  და  $z$  ღერძების გარშემო ბრუნვის მატრიცებია, შესაბამისად:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ორთოგონალური მესამე რიგის მატრიცების სიმრავლე წარმოადგენს ჯგუფს, რომელსაც აღნიშნავენ  $O(3)$  სიმბოლოთი. ხოლო, ისეთი ორთოგონალური მატრიცების ქვეჯგუფს, რომლის დეტერმინანტიც დადებითია აღნიშნავენ შემდეგნაირად  $SO(3)$ .

**თეორემა.** დადებით დეტერმინანტიანი ( $\det A = 1$ ) ორთოგონალური მატრიცების სიმრავლესა და მყარი სხეულის ბრუნვათა სიმრავლეებს შორის, არსებობს ურთიერთცალსახა დამოკიდებულება.

**დამტკიცება:** მართლაც, განვიხილოთ  $xyz$  ტრიედრის პირველი ერთეულო-ვანი ვექტორის სახე:

$$\mathbf{i}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}.$$

ასე, რომ პირველი ორტა გადადის გარდაქმნის მატრიცის პირველ სვეტში, ანალოგიურად, მეორე ორტა - მეორე სვეტში და მესამე - მესამეში. ასე, რომ თუ გვაქვს ბრუნვის მატრიცა, მაშინ ცალსახად განისაზღვრება ახალი ტრიედრი.

ასევე, თუ, მოცემულია ახალი ტრიედრი, მაშინ მის ორტებს ავირჩევთ მატრიცის სვეტებად და ცალსახად მივიღებთ, გარდაქმნის მატრიცას. რ.დ.გ.

**P.S.** ევკლიდური სივრცის ნებისმიერი ორთოგონალური გარდაქმნა, ეკვივალენტურია ამ სივრცის მობრუნებისა საკუთრივი ვექტორის გარშემო გარკვეული  $\varphi$  კუთხით.

ამგვარად,  $SO(3)$  ჯგუფი წარმოადგენს მყარი სხეულის ბრუნვების ძირითად მათემატიკურ მოდელს. ის არის ერთი უძრავი წერტილის მქონე მყარი სხეულის კონფიგურაციული მრავალსახეობა.

**ეილერის თეორემა.** ერთი უძრავი წერტილის მქონე სხეულის ნებისმიერი გადაადგილება, შეგვიძლია შევცვალოთ ბრტყელი მობრუნებით რომელიმე ღერძის გარშემო, გარკვეული კუთხით.

### 3.4. კვატერნიონის ცნება

მყარი სხეულის მოძრაობის კინემატიკის აღსაწერად, პრაქტიკულად ხელსაყრელია, უილიამ ჰამილტონის მიერ შემოყვანილი ჰიპერკომპლექსური რიცხვების ერთ-ერთი სახის - კვატერნიონების აპარატის გამოყენება.

1835 წელს ჰამილტონმა შეისწავლა კომპლექსური რიცხვები, რომელთა საშუალებითაც ადვილად იხსნება ორგანზომილებიანი გეომეტრიული ამოცანები. მან მოინდომა კომპლექსური რიცხვის ცნების განზოგადება, სამგანზომილებიანი ევკლიდეს სივრცის გეომეტრიული ამოცანებისათვის, მაგრამ ასეთი რიცხვების აღგებრის შექმნა მან ვერ შეძლო, რადგან სამგანზომილებიანი ნორმირებული ალგებრა გაყოფის ოპერაციით არ არსებობს. თუმცა, 1843 წელს მან აღმოაჩინა კომპლექსური რიცხვების ცნების განზოგადება, რომელსაც დღეს კვატერნიონებს უწოდებენ.

მყარი სხეულის მოძრაობა აღიწერება, როგორც გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობების კომპოზიცია. აქედან გამომდინარე, კვატერნიონის ცნება, მჭიდროდ უკავშირდება მყარის სხეულის მოძრაობის გეომეტრიას  $\mathbb{R}^3$  - ში ანუ კინემატიკას.

**განსაზღვრება.** კვატერნიონი ეწოდება, ოთხგანზომილებიან  $q$  ჰიპერკომპლექსურ რიცხვს, სამი წარმოსახვითი  $i; j; k$  ერთეულით.

კვატერნიონის  $q_i$  კომპონენტებად  $i = 0; 1; 2; 3$ , განვიხილავთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ელემენტებს:

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k. \quad (3.49)$$

$q_0$ - ს კვატერნიონის ნამდვილ ნაწილს უწოდებენ, ხოლო  $(q_1; q_2; q_3)$  კომპონენტებს - წარმოსახვით ელემენტებს.

კვატერნიონის  $q_0$  ნამდვილ ნაწილს, სკალარულ ნაწილს უწოდებენ, ხოლო წარმოსახვით  $q_1 i + q_2 j + q_3 k$  ნაწილს - ვექტორულს.

კვატერნიონი წარმოადგენს, კომპლექსური რიცხვის ცნების განზოგადებას, თუმცა, კომპლექსური რიცხვებისაგან განსხვავებით, კვატერნიონების წარმოსახვითი ერთეულების ნამრავლი არაა

კომპუტაციური. მათი გამრავლების ცხრილი, მოცემულია ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში 3.1:

ცხრილი 3.1

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

კვატერნიონების შეკრება და გამოკლება, ხორციელდება კომპონენტების მიხედვით ანუ

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_0 \pm b_0) + \mathbf{i}(a_1 \pm b_1) + \mathbf{j}(a_2 \pm b_2) + \mathbf{k}(a_3 \pm b_3). \quad (3.50)$$

### 3.5. ოპერაციები კვატერნიონებზე

კვატერნიონს ზოგჯერ ჩაწერენ შემდეგი ოთხეულის ფორმით:

$$\mathbf{q} = (q_0; q_1; q_2; q_3), \quad (3.51)$$

რომელიც თავისში აერთიანებს ინფორმაციას, სკალარზე და სამგანზომილებიან ვექტორზე.

კვატერნიონში განიხილავენ მის სკალარულ ნაწილს (scalar -part):

$$\text{scal } \mathbf{q} = q_0 \quad (3.52)$$

და ვექტორულ ნაწილს (vector-part):

$$\text{vect } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

კვატერნიონს, რომელიც შეიცავს მხოლოდ სკალარულ ნაწილს:

$$\mathbf{q} = (q_0; 0; 0; 0) \quad (3.54)$$

წმინდად სკალარულ კვატერნიონს უწოდებენ (scalar quaternion),

ხოლო კვატერნიონს, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ვექტორულ ნაწილს:

$$\mathbf{q} = (0; q_1; q_2; q_3) \quad (3.55)$$



წმინდად ვექტორული კვატერნიონი ეწოდება (right quaternion).

კვატერნიონებისათვის განისაზღვრება რამდენიმე სკალარული რიცხვითი მახასიათებელი:

ა) კვატერნიონის ნორმა (*norm*):

$$\|q\| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2; \quad (3.56)$$

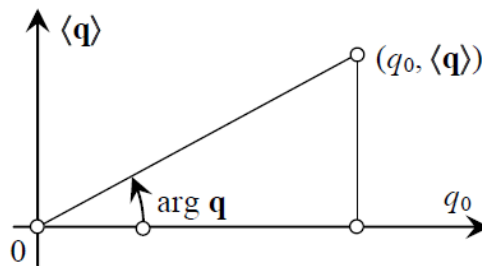
ბ) მოდული (*modulus*):

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}; \quad (3.57)$$

გ) ვექტორული ნაწილის მოდული:

$$\langle q \rangle = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}; \quad (3.58)$$

დ) კვატერნიონის არგუმენტი (*argument, phase*) ანუ იმ კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი  $[0; \pi]$  შუალედიდან, რომლის ნამდვილი ნაწილია  $q_0$ , ხოლო წარმოსახვითი ნაწილი კი უდრის  $\langle q \rangle$  ვექტორული ნაწილის მოდულს:



ნახ. 3.5. კვატერნიონის არგუმენტი

კვატერნიონის არგუმენტი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\arg q == \arg(q_0 + i \cdot \langle q \rangle) = \arccos \frac{q_0}{|q|}. \quad (3.59)$$

ზემოთ მოყვანილი ფორმულებიდან გამომდინარე, ცხადია რომ კვატერნიონის ნორმა და მოდული ნულოვანია, მხოლოდ ნულოვანი

$$\mathbf{0} = (0; 0; 0; 0) \quad (3.60)$$

კვატერნიონისათვის. ნულოვანი კვატერნიონისათვის არგუმენტი არ განისაზღვრება.

ე) კვატერნიონს ეწოდება ნორმირებული (*normed*), თუ მისი ნორმა ერთის ტოლია. კვატერნიონის ვერზორი (*versor*) ანუ ნიშანი (*sign*) ეწოდება მისი საშუალებით მიღებულ ნორმირებულ

$$\text{vers } \mathbf{q} = \text{sgn } \mathbf{q} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} \quad (3.61)$$

კვატერნიონს.

კვატერნიონის შეუღლებული კვატერნიონი ეწოდება კვატერნიონს, რომლის ვექტორული ნაწილის კოეფიციენტების ნიშნებიც, საპირისპიროა საწყის კვატერნიონთან შედარებით ანუ

$$\bar{\mathbf{q}} = [q_0; -q_1; -q_2; -q_3]. \quad (3.62)$$

ორი კვატერნიონის ჯამი კომუტაციურია, რადგან კომპონენტები ნამდვილი რიცხვებია:

$$\mathbf{q} + \mathbf{p} = \begin{bmatrix} q_0 + p_0 \\ q_1 + p_1 \\ q_2 + p_2 \\ q_3 + p_3 \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$\overline{\mathbf{p} \pm \mathbf{q}} = \bar{\mathbf{p}} \pm \bar{\mathbf{q}}. \quad (3.64)$$

რიცხვის ნამრავლი კვატერნიონზე კომუტაციურია და წარმოადგენს ახალ კვატერნიონს, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \cdot q_0 \\ a \cdot q_1 \\ a \cdot q_2 \\ a \cdot q_n \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

(Grassmann multiplication) ორი კვატერნიონის გრასმანის ნამრავლს აღნიშნავენ  $\circ$  სიმბოლოთი და ეს ნამრავლი არაა კომუტაციური ანუ ნამრავლი დამოკიდებულია თანამამრავლთა რიგზე ნამრავლში:

$$\mathbf{q} \circ \mathbf{p} = \begin{bmatrix} q_0 \cdot p_0 - q_1 \cdot p_1 - q_2 \cdot p_2 - q_3 \cdot p_3 \\ q_0 \cdot p_1 + q_1 \cdot p_0 + q_2 \cdot p_3 - q_3 \cdot p_2 \\ q_0 \cdot p_2 - q_1 \cdot p_3 + q_2 \cdot p_0 + q_3 \cdot p_1 \\ q_0 \cdot p_3 + q_1 \cdot p_2 - q_2 \cdot p_1 + q_3 \cdot p_0 \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

კვატერნიონების გრასმანის ნამრავლი ასოციაციურია და დისტრიბუციული შეკრების ოპერაციის მიმართ.

ორი კვატერნიონის ნამრავლის სკალარული ნაწილი არაა დამოკიდებული თანამამრავლთა რიგზე ანუ

$$\text{scal}(\mathbf{q} \circ \mathbf{p}) = \text{scal}(\mathbf{p} \circ \mathbf{q}). \quad (3.67)$$

ორი კვატერნიონის გრასმანის ნამრავლის შეუღლებული კვატერნიონი უდრის მათი შეუღლებულების ნამრავლს შებრუნებული რიგით ანუ

$$\overline{\mathbf{q} \circ \mathbf{p}} = \overline{\mathbf{p}} \circ \overline{\mathbf{q}}. \quad (3.68)$$

ორი კვატერნიონის გრასმანის ნამრავლის ნორმა, მათი ნორმების ნამრავლის ტოლია:

$$\|\mathbf{q} \circ \mathbf{p}\| = \|\mathbf{q}\| \cdot \|\mathbf{p}\|. \quad (3.69)$$

გამრავლების ოპერაციის მიმართ ერთეულოვანი კვატერნიონია:

$$\mathbf{I} = (1; 0; 0; 0). \quad \mathbf{I} \circ \mathbf{q} = \mathbf{q} \circ \mathbf{I} = \mathbf{q}. \quad (3.70)$$

კვატერნიონის გრასმანის ნამრავლი თავის შეუღლებულზე გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$\mathbf{q} \circ \overline{\mathbf{q}} = \overline{\mathbf{q}} \circ \mathbf{q} = [\|\mathbf{q}\|, \mathbf{0}; \mathbf{0}; \mathbf{0}] = \|\mathbf{q}\| \cdot \mathbf{I}. \quad (3.71)$$

კვატერნიონებისათვის განიხილება სკალარული ნამრავლი, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით და იძლევა სკალარულ კვატერნიონს:

$$\mathbf{s} = \frac{\overline{\mathbf{p}} \circ \mathbf{q} + \overline{\mathbf{q}} \circ \mathbf{p}}{2} = \begin{bmatrix} p_0 \cdot q_0 + p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

ორი კვატერნიონის ვექტორული ნამრავლი განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} \circ \mathbf{q} - \mathbf{q} \circ \mathbf{p}}{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2 \\ p_3 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_3 \\ p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1 \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

(3.73) ფორმულა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\text{vect} \frac{\mathbf{p} \circ \mathbf{q} - \mathbf{q} \circ \mathbf{p}}{2} = \text{vect } \mathbf{p} \times \text{vect } \mathbf{q}. \quad (3.74)$$

ორ კვატერნიონს ეწოდებათ კოლინეარული, თუ კოლინეარულია მათი ვექტორული ნაწილი ანუ როცა მათი ვექტორული ნამრავლი ნულის ტოლია:

$$v = \frac{p \circ q - q \circ p}{2} = 0. \quad (3.75)$$

კოლინეარული კვატერნიონების ნამრავლი კომუტაციურია.

კვატერნიონის შებრუნებული კვატერნიონი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|}. \quad (3.76)$$

$$q \circ q^{-1} = q^{-1} \circ q = I. \quad (3.77)$$

$$(p \circ q)^{-1} = q^{-1} \circ p^{-1}. \quad (3.78)$$

როგორც ვხედავთ კვატერნიონები წარმოადგენენ კომპლექსური რიცხვების განზოგადებას.

ა) საინტერესოა, ვექტორული კვატერნიონების ნამრავლი:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 \\ p_2q_3 - p_3q_2 \\ p_3q_1 - p_1q_3 \\ p_1q_2 - p_2q_1 \end{pmatrix}. \quad (3.79)$$

ამ ოპერაციის შედეგად ვიღებთ ზოგად კვატერნიონს, რომლის სკალარული ნაწილიც წარმოადგენს თანამამრავლი კვატერნიონების ვექტორული ნაწილების სკალარულ ნამრავლს უარყოფითი ნიშნით, ხოლო ნამრავლის ვექტორული ნაწილი უდრის თანამამრავლი კვატერნიონების ვექტორული ნაწილების ვექტორულ ნამრავლს.

ბ) საინტერესოა, ისეთი კვატერნიონების ნამრავლი, რომელთა ვექტორული ნაწილების ორი კომპონენტი ნულის ტოლია:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0q_0 - p_1q_1 \\ p_0q_1 + p_1q_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ასეთი კვატერნიონები ერთმანეთზე მრავლდებიან ისევე, როგორც კომპლექსური რიცხვები:

$$p = p_0 + ip_1; \quad q = q_0 + iq_1 \Rightarrow p \circ q = p_0q_0 - p_1q_1 + i(p_0q_1 + p_1q_0). \quad (3.81)$$

3.6. კვატერნიონების გეომეტრიულ - რიცხვითი ინტერპრეტაცია  
 კვატერნიონების განხილულ ალგებრას, აქვს რამდენიმე ინტერპრეტაცია.

განვიხილოთ, კვატერნიონების გეომეტრიულ - რიცხვითი ინტერპრეტაცია. ამ ინტერპრეტაციის დროს კვატერნიონს წარმოვადგენთ შემდეგი ფორმით:

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3 = \lambda_0 + \lambda; \lambda_0 \in \mathbb{R}^1; \lambda \in \mathbb{R}^3. \quad (3.82)$$

თუ, შემოვიღებთ სამგანზომილებიანი ორტების ნამრავლს შემდეგი ფორმულებით:

$$i_k \circ i_k = -1; i_k \circ i_l = i_k \times i_l \quad (k \neq l), \quad (3.83)$$

სადაც  $i_k \times i_l$  ჩვეულებრივი ვექტორების ვექტორული ნამრავლია  $\mathbb{R}^3$ -ში. შემდგომში, გამოვიყენებთ ტრადიციულ აღნიშვნებს ორტებისათვის:

$$i_1 = i; i_2 = j; i_3 = k. \quad (3.84)$$

ამ ინტერპრეტაციით, კვატერნიონების ნამრავლი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda; \mathbf{M} = \mu_0 + \mu. \quad (3.85)$$

$$\Lambda \circ \mathbf{M} = \lambda_0 \mu_0 - \lambda \mu + \lambda_0 \mu + \mu_0 \lambda + \lambda \times \mu. \quad (3.86)$$

ფრობენიუსის თეორემა. ალგებრა გაყოფის ოპერაციით არსებობს მხოლოდ სამი სახით: ნამდვილ რიცხვთა ალგებრა, კომპლექსურ რიცხვთა ალგებრა და კვატერნიონების ალგებრა.

ამ ინტერპრეტაციისას, შეუღლებული კვატერნიონის ცნება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda \Rightarrow \bar{\Lambda} = \lambda_0 - \lambda. \quad (3.87)$$

შესაბამისად, კვატერნიონის ნორმა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\|\Lambda\| = \Lambda \circ \bar{\Lambda} = \bar{\Lambda} \circ \Lambda = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2. \quad (3.88)$$

განვიხილოთ, კვატერნიონების ნამრავლის თვისებები ამ ინტერპრეტაციის პირობებში:

1. კვატერნიონების ნამრავლი არაა კომუტატური:

$$\Lambda \circ M \neq M \circ \Lambda;$$

2. კვატერნიონების ნამრავლის შეუღლებული კვატერნიონი, თანამამრავლი კვატერნიონების შეუღლებულ კვატერნიონთა შებრუნებული რიგით ნამრავლის ტოლია:

$$\overline{\Lambda \circ M} = \bar{M} \circ \bar{\Lambda};$$

მართლაც

$$\begin{aligned} \overline{(\lambda_0 + \lambda) \circ (\mu_0 + \mu)} &= \lambda_0 \mu_0 - \lambda \cdot \mu - \lambda_0 \mu - \mu_0 \lambda - \lambda \times \mu, \\ \overline{(\mu_0 + \mu) \circ (\lambda_0 + \lambda)} &= \lambda_0 \mu_0 - \lambda \cdot \mu - \lambda_0 \mu - \mu_0 \lambda + \mu \times \lambda. \end{aligned}$$

3. კვატერნიონების ნამრავლის ნორმა, თანამამრავლი კვატერნიონების ნორმათა ნამრავლის ტოლია:

$$\|\Lambda \circ M\| = (\Lambda \circ M) \circ \overline{(\Lambda \circ M)} = \Lambda \circ M \circ \bar{M} \circ \bar{\Lambda} = \|\Lambda\| \|M\|.$$

4. კვატერნიონების ნამრავლი ინვარიანტულია, მისი ვექტორული ნაწილის ორთოგონალური გარდაქმნის მიმართ.

5. ნებისმიერ არანულოვან კვატერნიონს აქვს შებრუნებული კვატერნიონი:

$$\Lambda^{-1} = \frac{\bar{\Lambda}}{\|\Lambda\|}.$$

კვატერნიონების რიცხვით ინტერპრეტაციას, ჰიპერკომპლექსურ რიცხვებს უწოდებენ.

ჰიპერკომპლექსური რიცხვებისათვის ალგებრის ძირითად თეორემას არა აქვს ადგილი.

მაგალითად: განვიხილოთ შემდეგი კვადრატული განტოლება:

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

ა) ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამ განტოლებას ამონახსნი არა აქვს;

ბ) კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში ალგებრის ძირითადი თეორემის თანახმად, გვაქვს ორი განსხვავებული ამონახსნი:

$$x = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

გ) ვიპოვოთ ყველა ამონახსნი ჰიპერკომპლექსურ რიცხვთა - კვატერნიონების სიმრავლეში  $x = x_0 + \mathbf{x}$ :

$$x^2 = (x_0 + \mathbf{x}) \circ (x_0 + \mathbf{x}) = x_0^2 - \mathbf{x}^2 + 2x_0\mathbf{x}$$

თუ, ამ გამოსახულებას ჩავსვამთ კვადრატულ განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ რომ

$$x_0^2 - \mathbf{x}^2 + 2x_0\mathbf{x} + x_0 + \mathbf{x} + 1 = 0$$

კვატერნიონი ნულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნულია მისი სკალარული და ვექტორული ნაწილი ერთდროულად, ე.ი.

$$x_0^2 - \mathbf{x}^2 + x_0 + 1 = 0, \quad (2x_0 + 1)\mathbf{x} = 0.$$

თუ  $\mathbf{x} = 0$ , მაშინ პირველი განტოლება  $x_0$  ცვლადის მიმართ არ ამოიხსნება. თუ,  $\mathbf{x} \neq 0$  მაშინ მეორე განტოლებიდან  $x_0 = -\frac{1}{2}$  და პირველი განტოლებიდან  $\mathbf{x}^2 = \frac{3}{4}$ . მაშასადამე, ამ კვადრატულ განტოლებას დააკმაყოფილებს ნებისმიერი

$$x = -\frac{1}{2} + \mathbf{x}$$

სახის კვატერნიონი, რომლის ნორმაც  $\|\mathbf{x}\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . ამ შემთხვევაში, ამონახსნების რაოდენობა უსასრულოა.

კვატერნიონები კარგად აღწერენ საფრენი აპარატების ბრუნვით მოძრაობას და ფართოდ გამოიყენება ინჟინერიაში.

### 3.7. კვატერნიონთან მიერთებული გარდაქმნა

ერთი უძრავი წერტილის მქონე სხეულის, მდებარეობის მოცემისათვის, კვატერნიონების გამოყენება დამყარებულია კვატერნიონთან მიერთებული გარდაქმნის ცნებასთან.

განვიხილოთ,  $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  კვატერნიონთა ალგებრის გადასახვა თავის თავში:

$$\mathcal{R}' = \Lambda \circ \mathcal{R} \circ \bar{\Lambda}, \quad (3.89)$$

სადაც  $\Lambda$  ერთეულოვანი ნორმის მქონე ფიქსირებული კვატერნიონია.

კვატერნიონთან მიერთებულ (3.89) გადასახვას, აქვს რიგი თვისებებისა, რაც ხელსაყრელს ხდის მის გამოყენებას, უძრავი წერტილის მქონე სხეულის მდებარეობის აღსაწერად:

1. კვატერნიონთან მიერთებული  $\mathcal{R}' = \Lambda \circ \mathcal{R} \circ \bar{\Lambda}$  ასახვა არ ცვლის  $\mathcal{R}$  კვატერნიონის სკალარულ ნაწილს:

$$\Lambda \circ \mathcal{R} \circ \bar{\Lambda} = \Lambda \circ (r_0 + \mathbf{r}) \circ \bar{\Lambda} = \Lambda \circ r_0 \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \bar{\Lambda} = r_0 + \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \bar{\Lambda}.$$

უნდა ვაჩვენოთ, რომ  $\Lambda \circ \mathbf{r} \circ \bar{\Lambda}$  შესაკრებს არა აქვს სკალარული ნაწილი ანუ მისი შეუღლებული კვატერნიონი მისგან მხოლოდ ნიშნით განსხვავდება, მართლაც

$$\overline{\Lambda \circ \mathbf{r} \circ \bar{\Lambda}} = \Lambda \circ \bar{\mathbf{r}} \circ \bar{\Lambda} = -\Lambda \circ \mathbf{r} \circ \bar{\Lambda}.$$

2. პირველი თვისებიდან გამომდინარე, მიერთებული გარდაქმნა მოქმედებს ისე, რომ კვატერნიონის ვექტორული ნაწილი იცვლება წრფივი გარდაიქმნით:

$$\mathbf{r}' = A\mathbf{r}.$$

ამასთან ერთად,  $A$  ორთოგონალური მატრიცაა. მართლაც,

$$\|\mathcal{R}'\| = \|\Lambda \circ \mathcal{R} \circ \bar{\Lambda}\| = \|\Lambda\| \cdot \|\mathcal{R}\| \cdot \|\bar{\Lambda}\| = \|\mathcal{R}\|.$$

შესაბამისად,

$$r_0'^2 + r_1'^2 + r_2'^2 + r_3'^2 = r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2.$$

რადგან  $r_0' = r_0$ , ცხადია, რომ  $\|\mathbf{r}'\| = \|\mathbf{r}\|$ .

მაშასადამე, ორთოგონალური გარდაქმნა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც ორთოგონალური მატრიცით, ასევე, ერთეულოვანი კვატერნიონით  $\|\Lambda\| = 1$ .

ჩავწეროთ ერთეულოვანი  $\Lambda$  კვატერნიონი შემდეგი ფორმით:

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda e, \tag{3.90}$$

სადაც  $\lambda$  არის  $\lambda$  ვექტორის მოდული, ხოლო  $e$  მისი მიმართულების მგეზავი ორტა.

$\|\Lambda\| = 1$  პირობიდან გამომდინარეობს, რომ  $\lambda_0^2 + \lambda^2 = 1$ . მაშინ, როგორც ვიცით, ორი სკალარული სიდიდე თუ, მდებარეობს



ერთეულოვან წრეწირზე, ისინი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით:

$$\lambda_0 = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \lambda = \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (3.91)$$

მაშინ

$$\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + e \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (3.92)$$

სადაც  $\|e\| = 1$ .

(3.92) წარმოადგენს ერთეულოვანი კვატერნიონის ზოგად სახეს.

თეორემა.  $\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + e \sin \frac{\varphi}{2}$  კვატერნიონი  $\mathbb{R}^3$  სივრცეში ახდენს  $e$  ვექტორის გარშემო  $\varphi$  კუთხით მობრუნებას  $\mathcal{R}' = \Lambda \circ \mathcal{R} \circ \bar{\Lambda}$ .

**დამტკიცება:** დასამტკიცებლად, გამოვიანგარიშოთ მობრუნების  $A$  მატრიცის ელემენტები, რომლებიც შეესაბამება  $\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + e \sin \frac{\varphi}{2}$  კვატერნიონს.  $A$  მატრიცის სვეტები შეესაბამება გარდაქმნილი ორტების კოორდინატებს.

კვატერნიონების ნამრავლის თვისებებიდან გამომდინარე, საწყისი ბაზისის არჩევას არა აქვს მნიშვნელობა. აქედან გამომდინარე, ავირჩიოთ  $i_1 = e$ ;  $i_2 \perp e$ ;  $i_3 \perp e$ . მაშინ

$$\begin{aligned} i'_1 &= \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i_1 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \circ i_1 \circ \left( \cos \frac{\varphi}{2} - i_1 \sin \frac{\varphi}{2} \right) = i_1, \\ i'_2 &= \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i_1 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \circ i_2 \circ \left( \cos \frac{\varphi}{2} - i_1 \sin \frac{\varphi}{2} \right) = i_2 \cos \varphi + i_3 \sin \varphi, \\ i'_3 &= \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i_1 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \circ i_3 \circ \left( \cos \frac{\varphi}{2} - i_1 \sin \frac{\varphi}{2} \right) = -i_2 \sin \varphi + i_3 \cos \varphi. \end{aligned}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ გარდაქმნის მატრიცას ექნება შემდეგი სახე:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ რ.დ.გ.}$$

მაშასადამე,  $\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + e \sin \frac{\varphi}{2}$  ერთეულოვანი კვატერნიონის ჩანაწერში  $e$  არის ეილერის ბრუნვის ღერძის მიმმართველი ერთეულოვანი ვექტორი, ხოლო  $\varphi$  ამ ღერძის გარშემო მობრუნების კუთხე.

ეს კვატერნიონი კომპონენტებში შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\Lambda = \left( \cos \frac{\varphi}{2}; x \sin \frac{\varphi}{2}; y \sin \frac{\varphi}{2}; z \sin \frac{\varphi}{2} \right). \quad (3.93)$$

ამ კვატერნიონის კომპონენტებს:

$$\lambda_0 = \cos \frac{\varphi}{2}; \lambda_1 = x \sin \frac{\varphi}{2}; \lambda_2 = y \sin \frac{\varphi}{2}; \lambda_3 = z \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (3.94)$$

როდრიგ-ჰამილტონის პარამეტრებს უწოდებენ.

### 3.8. კვატერნიონების ინტერპრეტაცია პაულის მატრიცებით

პაულის სპინის მატრიცები, საშუალებას იძლევიან მოვახდინოთ კვატერნიონების მატრიცული ინტერპრეტაცია.

განვიხილოთ, კვატერნიონის ორტების, პაულის მატრიცული ინტერპრეტაცია:

$$i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; i_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; i_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; i_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (3.95)$$

ამ მატრიცებში  $i = \sqrt{-1}$  წარმოსახვითი ერთეულია. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ორტებისათვის ზემოთ მოყვანილი გამრავლების წესი შენარჩუნებული იქნება, თუ, ორტების გამრავლებას შევცვლით მატრიცების გამრავლების წესით.

მაშასადამე, ნებისმიერი კვატერნიონი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ პაულის მატრიცებით, შემდეგი სახით:

$$\Lambda = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (3.96)$$

ცხადია, რომ მატრიცის თვისებების გამოყენებით (3.96) კვატერნიონი, შეგვიძლია ჩავწეროთ ერთი მატრიცით:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 + i\lambda_3 & \lambda_1 i - \lambda_2 \\ \lambda_1 i + \lambda_2 & \lambda_0 - i\lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (3.97)$$

კვატერნიონების გამრავლება კი, მატრიცების გამრავლებაზე დაიყვანება, რაც ამარტივებს გამოთვლებს.

კვატერნიონის შეუღლებული კვატერნიონი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\bar{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_0 - i\lambda_3 & \lambda_2 - \lambda_1 i \\ -\lambda_1 i - \lambda_2 & \lambda_0 + i\lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (3.98)$$

როგორც ვხედავთ, ადრე განსაზღვრული ერთეულოვანი ნორმის მქონე კვატერნიონის შებრუნებული კვატერნიონი, მატრიცულად ჩაწერის შემთხვევაში, წარმოადგენს **ერმიტულად შეუღლებულ მატრიცას** ანუ კომპლექსურად შეუღლებული და შემდეგ ტრანსპონირებული მატრიცაა:

$$\bar{\Lambda} = \Lambda^*. \quad (3.99)$$

ამასთან ერთად, კვატერნიონის ნორმა შესაბამისი პაულის მატრიცის დეტერმინანტის ტოლია ანუ

$$\|\Lambda\| = \det \Lambda. \quad (3.100)$$

ამრიგად, ერთეულოვანი ნორმის მქონე კვატერნიონები, რომლებიც გამოიყენება მყარი სხეულის მდებარეობის დასახასიათებლად, წარმოადგენს  $2 \times 2$  ზომის კომპლექსურწევრებიანი მატრიცით, რომლებიც აკმაყოფილებენ ორ პირობას:

$$\Lambda \Lambda^* = E; \det \Lambda = 1. \quad (3.101)$$

### 3.9. მობრუნებათა შეკრება კვატერნიონებით

მობრუნებათა შეკრებას შეესაბამება კვატერნიონების ნამრავლის ოპერაცია, ისევე, როგორც მატრიცული რეალიზაციის შემთხვევაში.

ვთქვათ, პირველი მობრუნება მოიცემა  $\Lambda$  კვატერნიონით ანუ

$$\mathcal{R}' = \Lambda \circ \mathcal{R} \circ \bar{\Lambda}. \quad (3.102)$$

ამის შემდეგ, ხდება მეორე მობრუნება ( $\mathcal{M}$  კვატერნიონით) ანუ

$$\mathcal{R}'' = \mathcal{M} \circ \mathcal{R}' \circ \bar{\mathcal{M}}, \quad (3.103)$$

მაშინ ჯამური მობრუნება იქნება:

$$\mathcal{R}'' = \mathcal{M} \circ \Lambda \circ \mathcal{R} \circ \bar{\Lambda} \circ \bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \circ \Lambda \circ \mathcal{R} \circ \overline{(\mathcal{M} \circ \Lambda)}. \quad (3.104)$$

### 3.10. მყარი სხეულის კუთხური სიჩქარე და კვატერნიონები

ვთქვათ სხეული ბრუნავს უძრავი წერტილის გარშემო. განვსაზღვროთ მყისი კუთხური სიჩქარე დროის მოცემულ  $t$  მომენტში. დროის ამ მომენტში სხეულის მდებარეობა, ჩავთვალოთ საწყის მდებარეობად. დროის ამ მომენტის სიახლოვეს  $t + \Delta t$  მომენტში, მყარი სხეულის მდებარეობა ეილერის თეორემის თანახმად, შეგვიძლია მივიღოთ რაღაც  $\Delta\varphi(t + \Delta t)$  კუთხით მობრუნებად, რომელიღაც  $\varepsilon(t + \Delta t)$  ღერძის გარშემო, რაც იმას ნიშნავს, რომ ეს მოძრაობა შეგვიძლია აღვწეროთ  $\Delta\varphi(t + \Delta t)\varepsilon(t + \Delta t)$  სასრული მობრუნების კუთხით.

მყარი სხეულის მყისი კუთხური სიჩქარე ეწოდება ზღვარს:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi(t+\Delta t)}{\Delta t} \varepsilon(t + \Delta t), \quad (3.105)$$

თუ, ეს ზღვარი არსებობს. გამოვსახოთ მყარი სხეულის კუთხური სიჩქარე კვატერნიონებით.

მყარი სხეულის მიმდინარე მდგომარეობა გამოვსახოთ შესაბამისი კვატერნიონით:

$$\Lambda(t) = \cos \frac{\varphi(t)}{2} + \mathbf{e}(t) \sin \frac{\varphi(t)}{2}. \quad (3.106)$$

დროის  $t + \Delta t$  მომენტში სხეული იმყოფება

$$\Lambda(t + \Delta t) = \cos \frac{\varphi(t + \Delta t)}{2} + \mathbf{e}(t + \Delta t) \sin \frac{\varphi(t + \Delta t)}{2}. \quad (3.107)$$

მდგომარეობაში. მცირედ მობრუნების კვატერნიონი, რომელსაც სხეული გადაყავს პირველიდან მეორე მდგომარეობაში, იქნება

$$\Delta\Lambda = \cos \frac{\Delta\varphi}{2} + \varepsilon \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \simeq 1 + \varepsilon \frac{\Delta\varphi}{2}. \quad (3.108)$$

ბრუნვათა შეკრება გვადლევს ფორმულას:

$$\Lambda(t + \Delta t) = \Delta\Lambda \circ \Lambda(t) = \left( 1 + \varepsilon \frac{\Delta\varphi}{2} \right) \circ \Lambda(t). \quad (3.109)$$

(3.109) - დან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\dot{\Lambda} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Lambda(t+\Delta t) - \Lambda(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \omega \circ \Lambda(t). \quad (3.110)$$

მაშასადამე, მყარი სხეულის მყისიერი კუთხური სიჩქარე გამოისახება კვატერნიორის წარმოებულთ შემდეგნაირად:

$$\omega = 2\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}. \quad (3.111)$$

### 3.11. ეილერის ფორმულა და კვატერნიონები

ეილერის ფორმულა გამოსახავს, ბრუნვით მოძრაობაში მყოფი მყარი სხეულის წერტილების წირით სიჩქარეს. ვთქვათ, სხეულის რომელიღაც  $\mathbf{r}'(t)$  წერტილი წარმოადგენს  $xyz$  სივრცეში არსებული საწყისი  $\mathbf{r}$  წერტილის სახეს, მაშინ

$$\mathbf{r}'(t) = \Lambda(t) \circ \mathbf{r} \circ \bar{\Lambda}(t) \quad (3.112)$$

ამ წერტილის წირითი სიჩქარე იქნება:

$$\dot{\mathbf{r}}'(t) = \dot{\Lambda}(t) \circ \mathbf{r} \circ \bar{\Lambda}(t) + \Lambda(t) \circ \mathbf{r} \circ \dot{\bar{\Lambda}}(t) \quad (3.113)$$

ამ ფორმულაში, თუ, შევიტანთ  $\mathbf{r} = \bar{\Lambda} \circ \mathbf{r}' \circ \Lambda$  მნიშვნელობას, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} \circ \mathbf{r}' + \mathbf{r}' \circ \Lambda \circ \dot{\bar{\Lambda}} = \frac{1}{2} (\omega \circ \mathbf{r}' + \mathbf{r}' \circ \bar{\omega}) = \omega \times \mathbf{r}' \quad (3.114)$$

მაშასადამე,

$$\dot{\mathbf{r}}' = \omega \times \mathbf{r}'. \quad (3.115)$$

(3.115) ფორმულას, ეილერის ფორმულას უწოდებენ. ეს ფორმულა ინვარიანტულია ორთოგონალური გარდაქმნის მიმართ. შესაძლებელია მისი მატრიცული ჩაწერაც:

$$\dot{\mathbf{r}}' = \Omega \mathbf{r}', \quad (3.116)$$

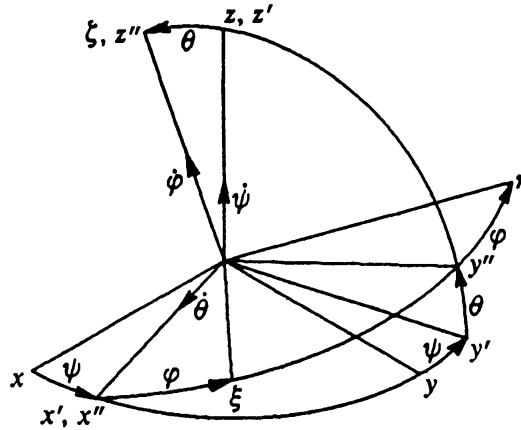
სადაც  $\Omega$  კუთხური სიჩქარეების ირიბ-სიმეტრიული მატრიცაა და მას  $xyz$  კოორდინატებში აქვს შემდეგი სახე:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.117)$$

### 3.12. ეილერის კინემატიკური განტოლებები

ეილერის კინემატიკური განტოლებები ამყარებენ კავშირს, კუთხური სიჩქარის კომპონენტებსა და ეილერის კუთხეებს შორის.

კავშირს ადვილად დავამყარებთ, თუ, ყოველ ბრუნვას წარმოვადგენთ სამი ბრტყელი ბრუნვის ჯამად ნახ. 3.6.



ნახ. 3.6. ეილერის კინემატიკა

$$xyz \xrightarrow{\psi} x'y'z' \xrightarrow{\theta} x''y''z'' \xrightarrow{\varphi} \xi\eta\zeta.$$

ბრუნვის კუთხური სიჩქარის კომპონენტებია:

$$\dot{\Psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}, \quad x'y'z' \text{ სისტემაში;}$$

$$\dot{\Theta} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}, \quad x''y''z'' \text{ სისტემაში;}$$

$$\dot{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \xi\eta\zeta \text{ სისტემაში.}$$

ეს სიჩქარეები უნდა დავაგეგმილოთ  $\xi\eta\zeta$  სისტემაში და შევკრიბოთ, მაშინ მივიღებთ რომ:

$$\omega = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}.$$

$$\omega = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{pmatrix}. \quad (3.118)$$

როგორც ვხედავთ, კვატერნიონების აპარატი ამარტივებს მყარი სხეულის კინემატიკის შესწავლას და შესაბამისი ამოცანების გადაწყვეტას. მას დიდი გამოყენება აქვს საფრენი აპარატების კინემატიკის შესასწავლად და რთული ფორმის სამშენებლო კონსტრუქციათა პროექტირებისას.

ამოცანები და სავარჯიშოები.

1. მოცემულია ვექტორი  $a = (1; 2; 3)$ . აღწერეთ ამ ვექტორის გარშემო  $\frac{\pi}{6}$  კუთხით მობრუნების კვატერნიონი;
2. მოცემულია ვექტორი  $b = (1; 0; 1)$ . აღწერეთ ამ ვექტორის გარშემო  $\frac{\pi}{3}$  კუთხით მობრუნების კვატერნიონი;
3. მოცემულია ვექტორი  $m = (0; 1; 0)$ . აღწერეთ ამ ვექტორის გარშემო  $\frac{\pi}{4}$  კუთხით მობრუნების კვატერნიონი;
4. იპოვეთ  $p = a + ib + jc + kd$  კვატერნიონის წარმოდგენა პაულის მატრიცული ბაზისის მიმართ;
5. იპოვეთ  $q = m + in + jh + kw$  კვატერნიონის წარმოდგენა პაულის მატრიცული ბაზისის მიმართ.

## IV თავი. ლის ალგებრები და ლის ჯგუფები

ჯგუფთა თეორიის გამოყენება დიფერენციალური განტოლებების ამოსახსნელად ჩამოყალიბდა როგორც ახალი მეცნიერული მიმართულება სოფუს ლის შრომებში და, თავდაპირველად, უწყვეტი ჯგუფების თეორიის სახელით იყო ცნობილი. პირველი ძირითადი ამოცანები, დიფერენციალური განტოლებების კვადრატურებში ამოსხნადობასთან დაკავშირებით, თვით ს. ლის შრომებში იქნა გადაწყვეტილი. მოგვიანებით, ლ.ოვსიანიკოვისა და ნ.იბრაგიმოვის შრომებში ლის თეორიის მეშვეობით, მიღწეულ იქნა მრავალი წარმატება მექანიკისა და მათემატიკური ფიზიკის დიფერენციალურ განტოლებათა ზუსტი ამონახსნების კლასების პოვნის საქმეში.

### 4.1. გარდაქმნების ერთპარამეტრიანი ჯგუფი

განვიხილოთ გარდაქმნათა ერთპარამეტრიანი ჯგუფები ნამდვილი პარამეტრით. ყოველი ასეთი ჯგუფი განისაზღვრება მისი პარამეტრის მიმართ ტეილორის მწკრივად გაშლის პირველი წევრით, ანუ, მისი მხები ვექტორული ველის სივრცით, რომელსაც ზოგჯერ ჯგუფის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორსაც უწოდებენ. ჯგუფის მაგივრად, მისი ინფინიტეზიმალური ოპერატორის გამოყენება უფრო მიზანშეწონილია.

განვიხილოთ  $T$  გარდაქმნა:

$$z' = f(z), \quad (4.1)$$

რომელსაც  $\mathbb{R}^n$  ევკლიდური სივრცის  $z = (z^1, \dots, z^n)$  წერტილი გადაჰყავს ახალ  $z' = (z'^1, \dots, z'^n) \in \mathbb{R}^n$  წერტილში ერთი და იმავე კოორდინატთა სისტემის მიმართ. ჩავთვალოთ, რომ (4.1) გარდაქმნა შექცევადია და მის შებრუნებულ გარდაქმნას, რომელსაც  $z'$  წერტილი გადაჰყავს კვლავ  $z$  წერტილში, აღვნიშნავთ  $T^{-1}$  სიმბოლოთი.  $T$  და  $T^{-1}$  გადაქმნების მიმდევრობით შესრულებას, ნებისმიერი თანმიმდევრობით, მივყავართ იგივე  $I$  გარდაქმნამდე, რომელსაც ნებისმიერი წერტილი თავის თავში გადაჰყავს.

განვიხილოთ ახლა  $\{T_a\}$  ერთპარამეტრიან გარდაქმნათა ერთობლიობა:



$$z' = f(z, a), \quad (4.2)$$

სადაც  $a \in \mathbb{R}$  პარამეტრი უწყვეტად იცვლება რაღაც  $\Delta \subset \mathbb{R}$  შუალედში. ამ პარამეტრის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება კონკრეტული გარდაქმნა ერთპარამეტრიან გარდაქმნათა ოჯახიდან. ჩავთვალოთ, რომ როცა  $a = 0$  მისი შესაბამისი გარდაქმნა არის იგივეური გარდაქმნა  $T_0 = I$  და ნებისმიერი არანულოვანი  $a \neq 0$  მნიშვნელობისათვის, შესაბამისი  $T_a \neq I$  ნებისმიერი  $a \in \Delta \subset \mathbb{R}$  მნიშვნელობისათვის ჩავთვალოთ, რომ ნებისმიერ  $T_a$  გარდაქმნასთან ერთად, გარდაქმნათა ერთპარამეტრიანი ოჯახი შეიცავს მის შებრუნებულ  $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$  გარდაქმნასაც, სადაც  $a^{-1}$  აღნიშნავს პარამეტრის იმ მნიშვნელობას, რომელიც  $\{T_a\}$ -ში შეესაბამება შებრუნებულ  $T_a^{-1}$  გარდაქმნას.

მაგალითად, თუ გვაქვს გაჭიმვის  $z' = az$  გარდაქმნა, მაშინ  $a = 1$  მნიშვნელობას შეესაბამება იგივეური გარდაქმნა. თუ გადავანაცვლებთ პარამეტრს, მივიღებთ გარდაქმნას

$$z' = z + az, \quad (4.3)$$

სადაც  $T_0 = I$ . ვიპოვოთ (4.3) გარდაქმნის შებრუნებულ გარდაქმნა, ამისათვის, შევუცვალოთ  $z'$  და  $z$  კოორდინატებს ადგილი და ამოვხსნათ მიღებული ტოლობა  $z'$ -ის მიმართ, მივიღებთ  $z' = \frac{z}{1+a}$  ანუ,  $T_a^{-1} = \frac{z}{1+a}$ . ახლა შევეცადოთ, ვიპოვოთ  $a$  -ს ის  $a^{-1}$  მნიშვნელობა, როცა (4.3) გარდაიქმნება  $T_a^{-1} = \frac{z}{1+a}$  ფორმულად ანუ

$$\frac{z}{1+a} = z + a^{-1}z. \quad (4.4)$$

აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$a^{-1} = -\frac{a}{1+a}. \quad (4.5)$$

ასე რომ, ნებისმიერი  $a \in (-1, +\infty)$  მნიშვნელობისათვის არსებობს შესაბამისი შებრუნებულ  $T_{a^{-1}}$  გარდაქმნა.

ახლა განვიხილოთ პარამეტრის რაიმე ორი სხვადასხვა  $a$  და  $b$  მნიშვნელობა მოცემული ინტერვალიდან და მიმდევრობით შევას-რულოთ მათი შესაბამისი (4.3) გარდაქმნები. პირველი

გარდაქმნის შემდეგ  $z$  წერტილი გადავა  $z' = z + az$  წერტილში, რომელსაც მეორე გარდაქმნა გადაიყვანს  $z''$  წერტილში

$$z'' = z' + bz' = z + az + b(z + az) = z + (a + b + ab)z. \quad (4.6)$$

ასე რომ, (4.3) გარდაქმნის ორჯერ მიმდევრობით შესრულებას, მიყვართ ისევე იმავე ტიპის გარდაქმნამდე, პარამეტრის ახალი  $c = a + b + ab$  მნიშვნელობისათვის. სიმბოლურად ამ თვისებას წერენ  $T_b T_a = T_{a+b+ab}$  ფორმით და ამბობენ, რომ (4.3) გარდაქმნები ქმნიან ერთპარამეტრიან ჯგუფს.

საზოგადოდ (4.2) გარდაქმნის შემთხვევაში, ვიტყვით რომ ის ქმნის ერთპარამეტრიან ჯგუფს, თუ ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებების გარდა, მართებულია ტოლობა

$$T_b T_a = T_{\varphi(a,b)}, \quad (4.7)$$

სადაც  $\varphi(a,b)$  ფუნქციები დიფერენცირებადია საჭირო რიგამდე ჩათვლით. ამ ჩანაწერის აზრი იგივეა, რაც წინა მაგალითში. რაც იმას ნიშნავს, რომ  $T_a$  და  $T_b$  გარდაქმნების მიმდევრობით შესრულების შედეგად მივიღებთ ახალ იმავე სახის გარდაქმნას ახალი  $c = \varphi(a,b)$  პარამეტრით.

ვთქვათ, (4.2) გარდაქმნის შემთხვევაში, სრულდება გარდაქმნათა ჯგუფის (4.7) თვისება და  $T_0 = I$  საწყისი პირობა. მაშინ

$$T_0 T_a = T_a, \quad T_b T_0 = T_b. \quad (4.8)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\varphi(a,0) = a, \quad \varphi(0,b) = b. \quad (4.9)$$

მაგალითად, (4.3) გარდაქმნისათვის  $\varphi(a,b) = a + b + ab$  და (4.9) ფორმულების მართებულობა ადვილი შესამოწმებელია.

ერთპარამეტრიანი ჯგუფის უმარტივეს მაგალითს წარმოადგენს წრფის გასწვრივ გადატანათა ჯგუფი, სადაც გარდაქმნას აქვს შემდეგი სახე:

$$x' = x + a. \quad (4.10)$$

$x$  წერტილის ორი მიმდევრობითი გადატანის შედეგი იქნება

$$x'' = x + a + b. \quad (4.11)$$

ამ შემთხვევაში,  $\varphi(a, b) = a + b$  და  $a^{-1} = -a$ .

ამრიგად, ერთპარამეტრიანი ჯგუფის თვისებები შეგვიძლია ჩამოვყალიბოთ შემდეგნაირად:

- 1)  $T_0 = I$  ერთეულოვანი ელემენტის არსებობა;
- 2)  $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$  შებრუნებული ელემენტის არსებობა;
- 3)  $T_c(T_b T_a) = (T_c T_b) T_a$
- 4) ჯგუფის ოპერაციის ასოციაციურობა. (4.12)

ჯგუფთა აბსტრაქტულ თეორიაში, ჯგუფის განსაზღვრისათვის ეს სამი თვისებაა ძირითადი. ჩვენ კი, პარამეტრის მიმართ უწყვეტობის თვისებაც გვჭირდება. ამიტომ გადავდივართ ლის თეორიის ელემენტების განხილვაზე.

## 4.2. ლის განტოლება

ვთქვათ,  $z' = f(z, a)$  გარდაქმნები აღგენენ ჯგუფს და ერთპარამეტრიანი ჯგუფის (4.7) თვისებას აქვს მარტივი სახე

$$T_b T_a = T_{a+b} \text{ ანუ } \varphi(a, b) = a + b. \quad (4.13)$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, დაეუშვათ, რომ

$$f(f(z, a), b) = f(z, a + b), \quad (4.14)$$

ასეთ შემთხვევაში ცხადია, რომ  $a^{-1} = -a$ . ასეთნაირად შესაძლებელია აღვწეროთ ყველა ერთპარამეტრიანი ჯგუფი და გამრავლების ნებისმიერ წესს შეგვიძლია მივცეთ (4.14) სახე ახალი პარამეტრიზაციის (ჯგუფის პარამეტრის არაგადაგვარებული გარდაქმნით) საშუალებით. ამ ჯგუფს აღვნიშნავთ  $G$  სიმბოლოთი.

გავშალოთ  $f(z, a)$  ფუნქცია ტეილორის მწკრივად,  $a$  პარამეტრის მიმართ,  $a = 0$  წერტილის მიდამოში. პირობის თანახმად  $T_0 = I$  და, მაშასადამე,  $f(z, 0) = z$ . ამიტომ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\xi(z) = \frac{\partial f(z,a)}{\partial a} \Big|_{a=0}, \quad (4.15)$$

მაშინ (4.2) გარდაქმნა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$z' = z + \xi(z)a + o(a). \quad (4.16)$$

ლის თეორემა ამტკიცებს, რომ გაშლის ამ ორი წევრით შეგვიძლია ცალსახად განვსაზღვროთ  $f(z, a)$  ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (4.14) პირობას. ასევე ამბობენ, რომ  $G$  ჯგუფი ცალსახად განისაზღვრება მხები ვექტორული  $\xi$  ველით, რადგან (4.15) წარმოადგენს  $z$  წერტილში გავლებულ მხებ ვექტორს იმ წირის მიმართ, რომელიც აიწერება  $z'$  წერტილებით (4.2) გარდაქმნისას.

თეორემა: თუ  $f(z, a)$  ფუნქცია აკმაყოფილებს

$$f(f(z, a), b) = f(z, a + b),$$

ტოლობას და აქვს  $z' = z + \xi(z)a + o(a)$  წარმოდგენა, მაშინ ის აკმაყოფილებს ლის განტოლებას საწყისი პირობით:

$$\frac{df}{da} = \xi(f), \quad f|_{a=0} = z. \quad (4.17)$$

პირიქითაც, ნებისმიერი გლუვი  $\xi(z)$  ვექტორული ველისათვის (4.17) კოშის ამოცანის ამონახსნი აკმაყოფილებს

$$f(f(z, a), b) = f(z, a + b)$$

პირობას.

დამტკიცება: ვთქვათ სრულდება  $f(f(z, a), b) = f(z, a + b)$  პირობა.  $a$  პარამეტრს მივცეთ  $\Delta a$  ნაზრდი, მაშინ გვექნება  $f(z, a + \Delta a) = f(f(z, a), \Delta a)$ . თუ ამ ტოლობაში მისი მწკრივად გაშლის შემდეგ გამოვყოფთ წრფივ ნაწილს  $\Delta a$ -ს მიმართ, მივიღებთ

$$f(z, a + \Delta a) = f(z, a) + \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a + o(\Delta a),$$

$$f(f(z, a), \Delta a) = f(z, a) + \frac{\partial f}{\partial a} \Big|_{a=0} \Delta a + o(\Delta a).$$

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნას  $\frac{\partial f(f(z,a),\Delta a)}{\partial \Delta a} \Big|_{\Delta a=0} = \xi(f(z,a))$  და გავითვალისწინებთ (4.15) ტოლობას, მივიღებთ ლის განტოლებას

$$\frac{\partial f(z,a)}{\partial a} = \xi(f(z,a)).$$

დავამტკიცოთ ახლა თეორემის მეორე ნაწილი. ვთქვათ,  $f(z,a)$  არის (4.17) ამოცანის ამონახსნი. დავაფიქსიროთ პარამეტრის მნიშვნელობა  $a=0$  მნიშვნელობის მახლობლობაში და განვიხილოთ ორი ფუნქცია:

$u(b) = f(z',b) = f(f(z,a),b)$  და  $v(b) = f(z,a+b)$ . ლის განტოლებიდან გამომდინარე,

$$\frac{du}{db} = \frac{df(z',b)}{db} = \xi(u), \quad u|_{b=0} = f(z,a),$$

$$\frac{dv}{db} = \frac{df(z,a+b)}{db} = \xi(v), \quad v|_{b=0} = f(z,a).$$

ასე რომ,  $u(b)$  და  $v(b)$  აკმაყოფილებენ ერთი და იმავე დიფერენციალურ განტოლებას ერთნაირი საწყისი პირობით, რადგან ასეთ კოშის ამოცანას, აქვს ერთადერთი ამონახსნი, გვექნება რომ  $u(b) = v(b)$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ  $f(f(z,a),b) = f(z,a+b)$ . რ.დ.გ.

**განვიხილოთ მაგალითები:**

1) გადატანათა ჯგუფს  $x' = x + a$  აქვს მხები ვექტორი  $\xi(x) = 1$ . მართებულია ლის განტოლება, რომელსაც ამ შემთხვევაში

$$\text{აქვს სახე } \frac{dx'}{da} = 1;$$

2) ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განვიხილოთ ვექტორული ველი  $\xi(x) = x$  და ამოვხსნათ შესაბამისი ლის განტოლება, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:  $\frac{dx'}{da} = x'$ ,  $x'|_{a=0} = x$ . ეს ამოცანა ადვილად იხსნება და გვაძლევს გაჭიმვების ჯგუფს  $x' = xe^a$ ;

### 4.3. ინვარიანტები. ჯგუფის ინვინტივიზაციური ოპერატორი

$F(z)$  ფუნქციას ეწოდება  $z' = f(z, a) = z + \xi(z)a + o(a)$  გარდაქმნათა ჯგუფის ინვარიანტი, თუ, ყველა დასაშვები  $z, a$  მნიშვნელობებისათვის მართებულია ტოლობა

$$F(f(z, a)) = F(z). \quad (4.18)$$

**თეორემა:**  $F(z)$  ფუნქცია ინვარიანტია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\xi^i(z) \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} = 0. \quad (4.19)$$

ინვარიანტობის ეს კრიტერიუმი წარმოადგენს პირველი რიგის კერძო წარმოებულთან, წრფივ, ერთგვაროვან განტოლებას. ამიტომ, გარდაქმნათა ნებისმიერ ერთპარამეტრიან ჯგუფს  $\mathbb{R}^n$  სივრცეში გააჩნია  $n - 1$  წრფივად დამოუკიდებელი ინვარიანტი, ისე, რომ ნებისმიერი სხვა ინვარიანტი ამ ბაზისური ინვარიანტების ფუნქციაა. ასეთ ბაზისურ ინვარიანტებად, შეგვიძლია ავირჩიოთ (4.19) განტოლების მახასიათებელი განტოლების

$$\frac{dz^1}{\xi^1(z)} = \frac{dz^2}{\xi^2(z)} = \dots = \frac{dz^n}{\xi^n(z)}, \quad (4.20)$$

პირველი ინტეგრალების მარცხენა მხარეები

$$J_i(z) = C_i, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (4.21)$$

**განვიხილოთ მაგალითები:**

გაჭიმვის ჯგუფისათვის  $\mathbb{R}^3$  სივრცეში

$$x' = xe^a, \quad y' = ye^{2a}, \quad z' = ze^{-2a},$$

გვაქვს  $\xi = (x, 2y, -2z)$  მხევი ვექტორი, ამიტომ მის შესაბამის (4.19) განტოლებას აქვს ასეთი სახე:

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + 2y \frac{\partial F}{\partial y} - 2z \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad (4.22)$$

შესაბამის მახასიათებელ განტოლებას კი – ასეთი:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{-2z},$$

რომლის პირველი ინტეგრალებია

$$\frac{y}{x^2} = C_1, \quad x^2 z = C_2.$$

ინვარიანტებს აქვს ასეთი სახე:

$$J_1 = \frac{y}{x^2}, \quad J_2 = x^2 z.$$

ზოგად ინვარიანტს კი - ასეთი:  $F = F\left(\frac{y}{x^2}, x^2 z\right)$ .

თუ შემოვიტანთ დიფერენციალურ ოპერატორს

$$X = \xi^i(z) \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad (4.23)$$

მაშინ ინვარიანტობის კრიტერიუმი შეგვიძლია გადავწეროთ სახით

$$XF = 0. \quad (4.24)$$

ამ  $X$  ოპერატორს გარდაქმნათა  $G$  ჯგუფის ინფინიტეზიმალური ოპერატორი ეწოდება.

შემდგომ, გარდაქმნათა ჯგუფის მხები  $\vec{\xi}$  ვექტორის ნაცვლად, ძირითადად, გამოვიყენებთ ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს.

თუ, მოცემულია ჯგუფის ინფინიტეზიმალური ოპერატორი, მაშინ ჯგუფის გარდაქმნის კანონის საპოვნელად, უნდა ამოვხსნათ ლის შესაბამისი განტოლება.

განვიხილოთ მაგალითები:

1) ვიპოვოთ ჯგუფი, რომლის ოპერატორია (ბრუნვის ჯგუფი):  $X = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$ . თუ შევადარებთ (4.23) ტოლობას, ადვილად ვიპოვით, რომ საქმე გვაქვს  $\xi = (y; -x)$  მხებ ვექტორთან. ამიტომ ლის განტოლებას ექნება ასეთი სახე:

$$\frac{dx'}{da} = y', \quad \frac{dy'}{da} = -x',$$

საიდანაც საწყისი პირობების გათვალისწინებით, მივიღებთ რომ გარდაქმნის ჯგუფი მოიცემა ფორმულებით:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos a + y \sin a, \\ y' &= y \cos a - x \sin a. \end{aligned}$$

ინვარიანტი იქნება  $J = x^2 + y^2$ .

2) განვიხილოთ  $x$  ღერძის გასწვრივ გადატანათა ჯგუფი:

$$x' = x + a,$$

$$y' = y.$$

მაშინ ამ ჯგუფის ინვინტივიზიმალური ოპერატორი

იქნება:  $X = \frac{\partial}{\partial x}$ , ხოლო ინვარიანტი -  $J = y$ .

3) განვიხილოთ  $y$  ღერძის გასწვრივ გადატანათა ჯგუფი:

$$y' = y + a,$$

$$x' = x.$$

მაშინ ამ ჯგუფის ინვინტივიზიმალური ოპერატორი

იქნება:  $X = \frac{\partial}{\partial y}$ , ხოლო ინვარიანტი -  $J = x$ .

4) განვიხილოთ  $kx + ly = 0$  წრფის პარალელურად

გადატანათა ჯგუფი:  $x' = x + la$ ,  $y' = y - ka$ . შესაბამისი

ინვინტივიზიმალური ოპერატორი იქნება:  $X = l \frac{\partial}{\partial x} - k \frac{\partial}{\partial y}$ ,

ხოლო ინვარიანტი -  $J = kx + ly$ .

5) ლორენცის გარდაქმნათა ჯგუფისათვის:

$$x' = x \operatorname{cha} + y \operatorname{sha},$$

$$y' = y \operatorname{cha} + x \operatorname{sha}.$$

შესაბამისი ინვინტივიზიმალური ოპერატორი იქნება:

$X = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ , ხოლო ინვარიანტი -  $J = x^2 - y^2$ .

6) გალილეის გარდაქმნათა ჯგუფისათვის:

$$x' = x + ay,$$

$$y' = y,$$

ინვინტივიზიმალური ოპერატორია:

$X = y \frac{\partial}{\partial x}$ , ხოლო ინვარიანტი -  $J = y$ .

7) ერთგვაროვანი გაჭიმვების ჯგუფისათვის გვაქვს

გარდაქმნები:  $x' = xe^a$ ,  $y' = ye^a$ . შესაბამისი

ინვინტივიზიმალური ოპერატორია:  $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ , ხოლო

ინვარიანტი -  $J = \frac{x}{y}$ .

8) არაერთგვაროვანი გაჭიმვების ჯგუფისათვის:

$$x' = xe^a,$$

$$y' = ye^{ka}.$$

შესაბამისი ინვინტივიზიმალური ოპერატორია:

$X = x \frac{\partial}{\partial x} + ky \frac{\partial}{\partial y}$ .

ხოლო ინვარიანტი -  $J = \frac{x^k}{y}$ .



#### 4.4. გარდაქმნების ერთპარამეტრიანი ჯგუფის ექსპონენციალური წარმოდგენა

ზოგჯერ ხელსაყრელია გარდაქმნის  $z' = f(z, a)$  ჯგუფისა და  $F(z') = F(f(z, a))$  ინვარიანტის წარმოდგენა ჯგუფის  $a$  პარამეტრის ხარისხოვანი მწკრივის სახით. როგორც უკვე ვიცით, არსებობს გაშლა

$$z' = f(z, a) = z + \xi(z)a + o(a), \quad (4.25)$$

$$F(z') = F(z) + a\xi^i(z) \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} + o(a). \quad (4.26)$$

ახლა ვიპოვოთ (4.26) გაშლის შემდგომი წევრები  $a$  პარამეტრის მიმართ. ჩანაწერის შემოკლების მიზნით შემოვიღოთ აღნიშვნები  $F(z) \equiv F$ ;  $F(z') \equiv F'$ ;  $X \equiv \xi^i(z) \frac{\partial}{\partial z^i}$ ;  $X' \equiv \xi'^i(z') \frac{\partial}{\partial z'^i}$ .

მაშინ (4.26) ჩაიწერება ასე:

$$F' = F + aXF + o, \quad (4.26')$$

სოლო ტოლობა  $\frac{dF(f(z,a))}{da} = \xi'^i(z') \frac{\partial F(z')}{\partial z'^i}$ , გადაიწერება ასეთი ფორმით:

$$\frac{dF'}{da} = X'F'. \quad (4.27)$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ (4.27) განტოლების მარჯვენა ნაწილი კვლავ წარმოადგენს  $z'$  ცვლადის ფუნქციას, კვლავ შეგვეძლება გამოვიყენოთ ეს ფორმულა და მივიღოთ შემდეგი ფორმულები

$$\frac{d^2F'}{da^2} = \frac{d}{da}(X'F') = X'(X'F') = X'^2F', \quad (4.28)$$

$$\frac{d^3F'}{da^3} = X'^3F', \dots \quad (4.29)$$

თუ ამ ფორმულებს შევიტანთ ტეილორის გაშლაში:

$$F' = [F']_{a=0} + a \left[ \frac{dF'}{da} \right]_{a=0} + \frac{a^2}{2!} \left[ \frac{d^2F'}{da^2} \right]_{a=0} + \dots, \quad (4.30)$$

მივიღებთ შემდეგ წარმოდგენას

$$F' = F + aXF + \frac{a^2}{2!}X^2F + \dots, \quad (4.31)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$F(z') = \left(1 + aX + \frac{(aX)^2}{2!} + \dots\right)F(z) \equiv e^{aX}F(z). \quad (4.32)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა  $F = z$ , ფორმულა (4.32)-ს აქვს შემდეგი სახე:

$$z' = e^{aX}(z). \quad (4.33)$$

ამ წარმოდგენას ერთპარამეტრიანი გარდაქმნების ჯგუფის ექსპონენციალურ წარმოდგენას უწოდებენ.

განვიხილოთ მაგალითები:

1) ვთქვათ, გვაქვს  $G$  გადატანათა ჯგუფი ნამდვილ რიცხვთა ღერძის გასწვრივ, მაშინ  $X = \frac{d}{dx}$  და (4.32) ფორმულა გვაძლევს  $F(x+a)$  ფუნქციის გაშლას ტეილორის მწკრივად  $x$  წერტილში

$$F(x+a) = F(x) + aF'(x) + \frac{a^2}{2!}F''(x) + \frac{a^3}{3!}F'''(x) + \dots \quad (4.34)$$

2) ვთქვათ,  $G$  არის წრფივი გაჭიმვის გარდაქმნების ჯგუფი, რომლის ინფინიტეზიმალური ოპერატორია  $X = x \frac{d}{dx}$ , მაშინ

$$X^2 = x \frac{d}{dx} \cdot x \frac{d}{dx} = x \frac{d}{dx} + x^2 \frac{d^2}{dx^2}, \quad (4.35)$$

$$X^3 = x \frac{d}{dx} \cdot \left(x \frac{d}{dx} + x^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) = x \frac{d}{dx} + 3x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^3 \frac{d^3}{dx^3}, \dots \quad (4.36)$$

შესაბამის (4.32) გაშლას აქვს ასეთი სახე:

$$F(xe^a) = F(x) + axF'(x) + \frac{a^2}{2!}(xF'(x) + x^2F''(x)) + \frac{a^3}{3!}(xF'(x) + 3x^2F''(x) + x^3F'''(x)) + \dots \quad (4.37)$$

შემდგომ დაგვეჭირდება თეორემა:

გარდაქმნათა ნებისმიერი ერთპარამეტრიანი ლოკალური ჯგუფი  $\mathbb{R}^n$  სივრცეში, შესაბამისი არაგადაგარებული  $\bar{z}^i = \bar{z}^i(z)$  გარდაქმნით მიიყვანება გადატანათა ჯგუფამდე  $\bar{z}^n$  ღერძის მიმართ.

დამტკიცება: ვთქვათ, მოცემული  $G$  ჯგუფის შესაბამისი ოპერატორია:

$$X = \xi^i(z) \frac{\partial}{\partial z^i}. \quad (4.38)$$

მაშინ, რადგან  $\xi^i(z) \frac{\partial}{\partial z^i} = \xi^i(z) \frac{\partial z^j}{\partial z^i} \frac{\partial}{\partial z^j}$ , ცხადია, ცვლადთა გარდაქმნა  $\bar{z}^i = \bar{z}^i(z)$ , (4.38) ოპერატორს მიიყვანს

$$\bar{X} = X(\bar{z}^i) \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} \quad (39)$$

სახემდე.

ავირჩიოთ მოცემული ჯგუფის ნებისმიერი  $n - 1$  რაოდენობის ფუნქციონალურად დამოუკიდებელი ინვარიანტები:

$$J_1, J_2, \dots, J_{n-1}, \quad (4.40)$$

ახალ საკოორდინატო  $\bar{z}^i$  ცვლადებად, ხოლო  $\bar{z}^n$  ცვლადი განესაზღვროთ განტოლებიდან

$$X(\bar{z}^n) = 1. \quad (4.41)$$

ეს ახალი ცვლადები

$$\bar{z}^i = J_i(z), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \bar{z}^n = \bar{z}^n(z), \quad (4.42)$$

ფუნქციონალურად დამოუკიდებელნი არიან და გვაძლევენ შესაბამის გარდაქმნას. მართლაც, ამ ცვლადებში ჩვენი ჯგუფის (4.38) ოპერატორი მიიღებს სახეს  $\bar{X} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}$ , რაც, როგორც უკვე ვიცით, შეესაბამება გადატანათა ჯგუფს  $\bar{z}^n$  ღერძის გასწვრივ. რ.დ.გ.

**განვიხილოთ მაგალითი:**

ვთქვათ  $G$  არის გაჭიმვის ჯგუფი  $\mathbb{R}^3$  სივრცეში

$$x' = xe^a, \quad y' = ye^{2a}, \quad z' = ze^{-2a}$$

გვაქვს  $\xi = (x, 2y, -2z)$  მხები ვექტორი, ამიტომ მის შესაბამის (4.19) განტოლებას აქვს ასეთი სახე:

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + 2y \frac{\partial F}{\partial y} - 2z \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (4.43)$$

მის ოპერატორს კი – ასეთი:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y} - 2z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.44)$$

შესაბამისი  $\bar{z}^i = \bar{z}^i(z)$  გარდაქმნა:  $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$ , სადაც ახალ ცვლადებად ვირჩევთ ინვარიანტებს:  $u = \frac{y}{x^2}$ ,  $v = x^2 z$ . ხოლო მესამე ცვლადის საპოვნელად უნდა გამოვიყენოთ (4.41) განტოლება, რომელსაც ამ შემთხვევაში (4.44) ოპერატორის გათვალისწინებით, აქვს შემდეგი სახე:

$$x \frac{\partial w}{\partial x} + 2y \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial w}{\partial z} = 1. \quad (4.45)$$

ცხადია, რომ კერძო ამონახსნის საპოვნელად, ხესაყრელია  $w$  ჩავთვალოთ მხოლოდ  $x$  ცვლადის ფუნქციად. მაშინ (4.45) განტოლებიდან გვექნება, რომ  $x \frac{\partial w}{\partial x} = 1$ . რაც იმას ნიშნავს, რომ  $w = \ln x$ . ასე რომ, ცვლადთა გარდაქმნა

$$u = \frac{y}{x^2}, \quad v = x^2 z, \quad w = \ln x. \quad (4.46)$$

გვაძლევს ახალ ცვლადებში გადატანათა ჯგუფს

$$u' = u, \quad v' = v, \quad w' = w + a. \quad (4.47)$$

#### 4.5. ინვარიანტული განტოლებები

განვიხილოთ  $(n - s)$  – განზომილებიანი  $M \subset \mathbb{R}^n$  ზედაპირი, განსაზღვრული განტოლებათა სისტემით

$$F_1(z) = 0, \dots, F_s(z) = 0, \quad s \leq n. \quad (4.48)$$

ჩავთვალოთ, რომ ზედაპირის ასეთი მოცემა არის რეგულარული ანუ  $\left\| \frac{\partial F_k}{\partial z^i} \right\|_M$  ( $k = 1, \dots, s$ ;  $i = 1, \dots, n$ ) მატრიცის რანგი არის  $s$ .

$M$  ზედაპირს ეწოდება ინვარიანტული  $G$  გარდაქმნის

$$z' = f(z, a) \equiv z + a\xi(z) + o(z), \quad (4.49)$$

ჯგუფის მიმართ, თუ, ამ გარდაქმნის შედეგად ზედაპირის ყოველი წერტილი ისევ ამ ზედაპირის წერტილში გადადის.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ  $z$  არის (4.48) სისტემის ამონახსნი, მაშინ  $z'$  -ც აგრეთვე ამონახსნია ანუ

$$F_k(z') = 0, \quad k = 1, \dots, s. \quad (4.50)$$

ამის გამო ამბობენ, რომ (4.48) განტოლებათა სისტემა ინვარიანტულია  $G$  ჯგუფის მიმართ, ანუ, ეს სისტემა უშვებს  $G$  ჯგუფს. თუ  $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial z^i}$  გარდაქმნის  $G$  ჯგუფის ინვინტივობის მაქსიმალური ოპერატორია მაშინ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ

**თეორემა:** (4.48) განტოლებათა სისტემა ინვარიანტულია გარდაქმნის  $G$  ჯგუფის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$[XF_k]_M = 0, \quad k = 1, \dots, s. \quad (4.51)$$

გარდაქმნის ჯგუფის ბაზისური ინვარიანტების საშუალებით შესაძლებელია ყველა ინვარიანტული ზედაპირი აღვწეროთ. მართლაც, მართებულია თეორემა:

$G$  ჯგუფის ინვარიანტული ზედაპირი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Phi_k(J_1(z), \dots, J_{n-1}(z)) = 0, \quad k = \overline{1, s}, \quad (4.52)$$

სადაც  $J_1(z), \dots, J_{n-1}(z)$  წარმოადგენს ჯგუფის ინვარიანტების ბაზისს, თუ შესაბამისი ინვინტივობის მაქსიმალური ოპერატორი არ ხდება ნული ზედაპირის წერტილებისათვის.

#### 4.6. დიფერენციალური განტოლებების დასაშვები ჯგუფი

დასაშვები ჯგუფი შეესაბამება დიფერენციალური განტოლების სიმეტრიის თვისებებს. ის გამოიყენება დიფერენციალური განტოლების სრულად ინტეგრირებისათვის, ან მისი ამონახსნების გარკვეული კლასების საპოვნელად და თვისობრივი გამოკვლევისათვის.

#### 4.6.1. სითბოგამტარობის განტოლების დასაშვები ჯგუფი

განვიხილოთ სითბოგამტარობის განტოლება

$$u_t - u_{xx} = 0. \quad (4.53)$$

ცხადია, რომ ამ განტოლების სახე არ იცვლება დროისა და სივრცის ცვლადთა გადატანის გარდაქმნით:

$$t' = t + a; \quad x' = x + a. \quad (4.54)$$

ასევე, განტოლების წრფივობისა და ერთგვაროვნებიდან გამომდინარე, არ იცვლება განტოლების სახე უფრო ზოგადი გარდაქმნისას

$$u' = u + a\varphi(t, x), \quad \text{ან, } u' = ue^a, \quad (4.55)$$

სადაც  $\varphi(t, x)$  ნებისმიერი ცნობილი ამონახსნია განტოლებისათვის. (4.53)

ყოველ ისეთ გარდაქმნას, რომელიც არ ცვლის საწყისი დიფერენციალური განტოლების სახეს, დიფერენციალური განტოლების დასაშვებ გარდაქმნას უწოდებენ.

მაშასადამე, ჩვენ მიერ მოყვანილი ოთხი ერთპარამეტრიან გარდაქმნათა ჯგუფი დასაშვებია სითბოგამტარობის განტოლებისათვის.

უფრო ნაკლებად ცხადია, რომ სითბოგამტარობის განტოლებას აქვს აგრეთვე, ერთპარამეტრიან გარდაქმნათა შემდეგი ჯგუფი:

$$t' = t, \quad x' = x + 2at, \quad u' = ue^{-(ax+a^2t)}. \quad (4.54)$$

ვაჩვენოთ სითბოგამტარობის განტოლების ინვარიანტულობა (4.54) გარდაქმნების მიმართ. ამისათვის, გამოვიყენოთ წარმოებულის გარდაქმნის ფორმულები ცვლადთა შესაბამისი გარდაქმნის დროს:

$$u'_{t'} = (u_t + a^2u - 2au_x)e^{-(ax+a^2t)}, \quad (4.55)$$

$$u'_{x'} = (u_x - au)e^{-(ax+a^2t)}, \quad (4.56)$$

$$u'_{x'x'} = (u_{xx} + a^2u - 2au_x)e^{-(ax+a^2t)}. \quad (4.57)$$

მაშინ მივიღებთ, რომ

$$u'_t - u'_{x'x'} = (u_t - u_{xx})e^{-(ax+a^2t)}, \quad (4.58)$$

რაც იმას გვიჩვენებს, რომ (4.54) გარდაქმნის შედეგად, განტოლება (4.53) გადადის იმავე სახის

$$u'_t - u'_{x'x'} = 0, \quad (4.59)$$

განტოლებაში. ამ ფაქტის გამოყენებითი მნიშვნელობა ის არის, რომ თუ გვაქვს სითბოგამტარობის განტოლების რაიმე ამონახსნი

$$u = \varphi(t, x), \quad (4.60)$$

მაშინ

$$u = e^{-(ax+a^2t)}\varphi(t, x + 2at) \quad (4.61)$$

ფუნქციაც იქნება მისი სხვა ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრავს ამონახსნთა ერთპარამეტრიან ჯგუფს. როგორც ვხედავთ, გვაქვს გარდაქმნათა ხუთი სხვადასხვა ერთპარამეტრიანი ჯგუფი. თითოეული მათგანი შეიცავს ამონახსნების უსასრულო რაოდენობას.

**ჩნდება კითხვა:** მიღებული ხუთი გარდაქმნა, რომლებიც გვაძლევს დასაშვებ ჯგუფებს, ყველა შესაძლო გარდაქმნაა, თუ არსებობს სხვა გარდაქმნებიც? თუ არსებობს, როგორ ვიპოვოთ ისინი და როგორ დავამტკიცოთ, რომ ეს უკვე ყველა დასაშვები ჯგუფია?

ამ საკითხის გადასაწყვეტად კონსტრუქციული მიდგომა იქნება 4.1 თეორემის გამოყენება და დიფერენციალურ განტოლებათა ალგებრული ინტერპრეტაცია, სადაც დიფერენციალურ განტოლებებს განიხილავენ, როგორც ზედაპირებს გაფართოებულ სივრცეში.

სანამ ამ ზოგად ინტერპრეტაციას განვიხილავთ, ჯერ (4.54) გარდაქმნის მაგალითზე განვიხილოთ მიდგომის ძირითადი არსი, რაც საშუალებას მოგვცემს გავიგოთ ზოგადი ინტერპრეტაცია.

(4.54) - (4.57) გარდაქმნები ადგენენ ერთპარამეტრიან ჯგუფს  $z = (t, x, u, u_t, u_x, u_{xx})$  ცვლადების მიმართ  $\mathbb{R}^6$  სივრცეში. სითბოგამტარობის განტოლებას, ამ შემთხვევაში, აქვს შემდეგი სახე:

$F_1(z) = 0, \dots, F_s(z) = 0, s \leq n$ , სადაც  $s = 1$  და განსაზღვრავს ხუთ-განზომილებიან ზედაპირს  $M \subset \mathbb{R}^6$ , რომელიც განტოლებათა წრფივობის გამო, წარმოადგენს ხუთგანზომილებიან ჰიპერსიბრტყეს. ამ (4.54) გარდაქმნების მიმართ სითბოგამტარობის განტოლების ინვარიანტულობა, განაპირობებს ჰიპერსიბრტყის ინვარიანტობას (4.54) - (4.57) გარდაქმნების მიმართ. რადგან ეს გარდაქმნები ადგენენ ჯგუფს, სრულდება ინვარიანტობის ინფინიტეზიმალური (4.51) კრიტერიუმი. ამოვწეროთ ეს კრიტერიუმი ამ შემთხვევაში. ამისათვის, გავიხსენოთ, რომ (4.54) გარდაქმნისათვის შესაბამის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს აქვს ასეთი სახე:

$$X = 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u}, \quad (4.62)$$

ხოლო გაფართოებული (4.54) - (4.57) გარდაქმნების მიმართ შესაბამისი ოპერატორი ჩაიწერება ასე:

$$X_2 = X - (xu_t + 2u_x) \frac{\partial}{\partial u_t} - (xu_x + u) \frac{\partial}{\partial u_x} - (xu_{xx} + 2u_x) \frac{\partial}{\partial u_{xx}}, \quad (4.63)$$

ამ ფორმულაში ინდექსი 2 იმას ნიშნავს, რომ (4.63) ოპერატორი მიიღება (4.62) ოპერატორისაგან მისი გაფართოებით მეორე რიგის წარმოებულებამდე ჩათვლით.

$X_2$  ოპერატორი მოქმედებს  $z = (t, x, u, u_t, u_x, u_{xx})$  ცვლადების ფუნქციებზე ისე, რომ ამ ცვლადებს განიხილავს, როგორც დამოუკიდებელ ცვლადებს, ამიტომ გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} X_2(u_t - u_{xx}) &= -(xu_t + 2u_x) \frac{\partial}{\partial u_t} (u_t - u_{xx}) - (xu_{xx} + 2u_x) \frac{\partial}{\partial u_{xx}} (u_t - \\ &u_{xx}) = -(xu_t + 2u_x) + (xu_{xx} + 2u_x) = \\ &-x(u_t - u_{xx}). \end{aligned} \quad (4.64)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ინვარიანტობის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს, აქვს შემდეგი სახე:

$$X_2(u_t - u_{xx}) = 0. \quad (4.65)$$



თუ, ამ კრიტერიუმს გავყვებით უკან (4.65)-დან (4.62) ოპერატორისაკენ, მივიღებთ ყველა დასაშვებ ჯგუფს.

#### 4.6.2. წერტილოვანი გარდაქმნები და გაფართოების ფორმულები

შემდგომში,  $z$  ვექტორის კომპონენტებისათვის გამოვიყენებთ ასეთ აღნიშვნებს:

$$x = \{x^i\}, u = \{u^\alpha\}, u_1 = \{u_i^\alpha\}, u_2 = \{u_{ij}^\alpha\}, \dots \quad (4.66)$$

სადაც  $i = \overline{1, n}$  ხოლო  $\alpha = \overline{1, m}$ . ეს ცვლადები ალგებრულად დამოუკიდებელია ერთმანეთისაგან, თუმცა დაკავშირებული არიან დიფერენციალური ტოლობებით

$$u_i^\alpha = D_i(u^\alpha), u_{ij}^\alpha = D_j(u_i^\alpha) = D_j D_i(u^\alpha), \dots \quad (4.67)$$

სადაც

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \dots \quad (4.68)$$

$x^i$  დამოუკიდებელი ცვლადებია;  $u^\alpha$  - დიფერენციალური, ხოლო,  $u_i^\alpha, u_{ij}^\alpha, \dots$  - დიფერენციალური ცვლადების პირველი რიგის, მეორე რიგის და ა.შ. წარმოებულებია.

დიფერენციალურ  $f = f(x, u, u_1, u_2, \dots, u_p)$  ფუნქციაში შემავალი ცვლადების უმაღლესი რიგის წარმოებულის  $p$  რიგს, ამ ფუნქციის რიგი ეწოდება.

ყველა დიფერენციალური ფუნქციის სიმრავლეს აღვნიშნავთ  $\mathcal{A}$  სიმბოლოთი. ვთქვათ,  $F \in \mathcal{A}$  არის  $p$  რიგის დიფერენციალური ფუნქცია. მაშინ განტოლება

$$F(x, u, u_1, u_2, \dots, u_p) = 0, \quad (4.69)$$

გამოსახავს ზედაპირს შესაბამის ფაზურ სივრცეში. ამ განტოლებას განვიხილავთ მის ყველა დიფერენციალურ შედეგთან ერთად

$$D_i F = 0, D_i D_j F = 0, \dots \quad (4.70)$$

და ვიტყვით, რომ მოცემული გვაქვს დიფერენციალური მრავალსახეობა  $M$ .

ანალოგიურად განიმარტება დიფერენციალური მრავალსახეობა, რომელიც აიწერება არა ერთი განტოლებით, არამედ, განტოლებათა სისტემით. დასაშვებია ჯგუფის საპოვნელად, ჩვენ ვივიწყებთ ამონახსნის ცნებას და მანიპულაციებს ვახდენთ შესაბამის მრავალსახეობაზე. ამიტომ ამ სისტემას შეგვიძლია შევხედოთ, როგორც უბრალოდ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას შესაბამის ფაზურ სივრცეში, სადაც ის შეესაბამება რაღაც ზედაპირს და, მაშასადამე, შეგვიძლია გამოვიყენოთ ინვარიანტობის კრიტერიუმი.

ვთქვათ,  $z = (x, u)$  და ჩავწეროთ გარდაქმნის ფორმულები

$$x'^i = f^i(x, u, a), \quad f^i(x, u, 0) = x', \quad (4.71)$$

$$u'^\alpha = \varphi^\alpha(x, u, a), \quad \varphi^\alpha(x, u, 0) = u^\alpha. \quad (4.72)$$

ამ ფორმულებს, **წერტილოვან გარდაქმნებს** უწოდებენ.

ვთქვათ, ამ გარდაქმნებისათვის მართებულია ჯგუფის (4.14) ფორმულები, მაშინ (4.71) და (4.72) გარდაქმნათა ერთპარამეტრიანი  $G$  ჯგუფის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს ექნება შემდეგი სახე:

$$X = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (4.73)$$

სადაც

$$\xi^i = \frac{\partial f^i}{\partial a} |_{a=0}, \quad \eta^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial a} |_{a=0}. \quad (4.74)$$

წარმოებულების გარდაქმნის ფორმულებია:

$$D_i = D_i(f^j) D'_j. \quad (19.75)$$

სადაც შტრიხიანი ცვლადებისათვის მართებულია გარდაქმნის (4.67) ფორმულები

$$u_i'^\alpha = D'_i(u'^\alpha), \dots \quad (4.76)$$

ახლა გავაწარმოოთ (4.72) ტოლობა და გამოვიყენოთ (4.75),(4.76) ტოლობები:

$$D_i(\varphi^\alpha) = D_i(f^j)D_j'(u'^\alpha) = u_j'^\alpha D_i(f^j). \quad (4.77)$$

ასე რომ, (4.71), (4.72) წერტილოვანი გარდაქმნებისათვის წარმოებულები გარდაიქმნიან ფორმულებით:

$$u_j'^\alpha D_i(f^j) = D_i(\varphi^\alpha) \quad (4.78)$$

ან, უფრო დეტალურად,

$$\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} + u_i^\beta \frac{\partial f^j}{\partial u^\beta}\right) u_j'^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} + u_i^\beta \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta}. \quad (4.79)$$

აქედან ვპოულობთ  $u_j'^\alpha$  ცვლადებს  $(x, u, u_1)$  არგუმენტებისა და  $a$  პარამეტრის საკმაოდ მცირე მნიშვნელობებისათვის. მეორე რიგის წარმოებულების გარდაქმნის ფორმულებს მივიღებთ (4.78) ფორმულების გაწარმოებით.

**შემდეგ, დაგვჭირდება არა გარდაქმნების, არამედ ინფინიტეზიმალური ოპერატორის გაფართოება.**

ჩავწერთ ამ ოპერატორის გაფართოება პირველი რიგის წარმოებულებამდე

$$X_1 = X + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}, \quad (4.80)$$

სადაც  $\zeta_i^\alpha = \frac{\partial u_i'^\alpha}{\partial a} |_{a=0}$  დამატებითი კოორდინატებია, რომლებიც უნდა ვიპოვოთ. თუ გავაწარმოებთ (4.78) ფორმულებს პარამეტრის მიმართ,  $a = 0$  პირობებში, მივიღებთ:

$$D_i(\eta^\alpha) = \zeta_j^\alpha D_i(x^j) + u_j^\alpha D_i(\xi^j) = \zeta_j^\alpha \delta_i^j + u_j^\alpha D_i(\xi^j). \quad (4.81)$$

აქედან მივიღებთ ინფინიტეზიმალური ოპერატორის გაფართოების ფორმულას პირველ წარმოებულამდე

$$\zeta_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i(\xi^j). \quad (4.82)$$

როგორც ამ ფორმულებიდან ჩანს, ინფინიტეზიმალური ოპერატორის (4.80) გაფართოების საპოვნელად საჭიროა მხოლოდ საწყისი  $X = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$  ოპერატორის  $\xi^i$  და  $\eta^\alpha$  კოორდინატების ცოდნა.

ანალოგიურად, თუ გვინდა ინფინიტეზიმალური ოპერატორის გაფართოება მეორე რიგის წარმოებულამდე

$$X_2 = X_1 + \zeta_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{ij}^\alpha}, \quad (4.83)$$

სადაც  $\zeta_{ij}^\alpha = \frac{\partial u_{ij}^{\prime\alpha}}{\partial a} |_{a=0}$ , მაშინ უნდა გავიმეოროთ წინა პროცედურა უკვე (4.83) ფორმულისათვის და მივიღებთ, რომ

$$\zeta_{ij}^\alpha = D_j(\zeta_i^\alpha) - u_{ik}^\alpha D_j(\zeta^k). \quad (4.84)$$

**განვიხილოთ მაგალითი:**

ვთქვათ, გვინდა ვიპოვოთ  $X = 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u}$  ოპერატორის გაფართოება მეორე რიგის წარმოებულამდე, ზემოთ მოყვანილი ფორმულების საშუალებით.

შემოვიღოთ აღნიშვნები -  $t = x^1$ ,  $x = x^2$ . მაშინ ამ ოპერატორი-სათვის გვექნება  $X\xi^1 = 0$ ,  $\xi^2 = 2t$ ,  $\eta = -xu$ . ამიტომ (4.82) ფორმულებიდან მივიღებთ, რომ

$$\zeta_1 = D_t(-xu) - u_x D_t(2t) = -xu_t - 2u_x,$$

$$\zeta_2 = D_x(-xu) - u_x D_x(2t) = -u - xu_x,$$

ხოლო (4.84) ფორმულებიდან მივიღებთ, რომ

$$\zeta_{22} = D_x(-u - xu_x) - u_{xx} D_x(2t) = -2u_x - xu_{xx}.$$

შესაბამისად მივიღებთ გაფართოებულ ოპერატორს მეორე რიგის წარმოებულამდე, სახით

$$X_2 = X + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_{22} \frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

### 4.6.3. განმსაზღვრელი განტოლებები

დავუბრუნდეთ  $M$  დიფერენცირებად მრავალსახეობას, რომელიც წარმოიქმნება  $F_i(x, u, u_1, u_2, \dots, u_{p_i}) = 0$ ,  $i = \overline{1, s}$  დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებისაგან. რადგან ამ

განტოლებათა სისტემაში გვხვდება წარმოებულები  $p$  რიგამდე ჩათვლით, საჭიროა, რომ  $x^i = f^i(x, u, a)$ ,  $f^i(x, u, 0) = x^i$ ,

$u'^\alpha = \varphi^\alpha(x, u, a)$ ,  $\varphi^\alpha(x, u, 0) = u^\alpha$  გარდაქმნები გავაფართოთ  $u_j'^\alpha D_i(f^j) = D_i(\varphi^\alpha)$  ფორმულების  $p$ -ჯერ დიფერენცირების საშუალებით და  $D_i = D_i(f^j)D_j'$  ფორმულის გამოყენებით. თუ, საწყისი გარდაქმნები წარმოადგენს ერთპარამეტრიან  $G$  ჯგუფს, მაშინ გაფართოების შედეგად მიღებულ ჯგუფს აღვნიშნავთ  $G_p$  სიმბოლოთი. ეს ჯგუფი მოქმედებს  $(x, u, u_1, u_2, \dots, u_p)$  ცვლადების სივრცეში. ამ  $p$ -ჯერ გაფართოებული ჯგუფის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე:

$$X_p = X + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \dots + \zeta_{i_1 \dots i_p}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_p}^\alpha}. \quad (4.85)$$

ეს ოპერატორი მიღებულია  $X = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$  ოპერატორის  $p$ -ჯერ გაფართოებით. მაღალი რიგის გაფართოების ფორმულა მსგავსია  $\zeta_{ij}^\alpha = D_j(\zeta_i^\alpha) - u_{ik}^\alpha D_j(\xi^k)$  ფორმულასა, რომელიც გვქონდა მეორე რიგის წარმოებულამდე გაფართოების შემთხვევაში. საზოგადოდ, გვექნება

$$\zeta_{i_1 \dots i_k}^\alpha = D_{i_k}(\zeta_{i_1 \dots i_{k-1}}^\alpha) - u_{j_{i_1 \dots i_{k-1}}}^\alpha D_{i_k}(\xi^j). \quad (4.86)$$

ვიტყვი, რომ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის

$$F_i(x, u, u_1, u_2, \dots, u_{p_i}) = 0, \quad i = \overline{1, s}, \quad (4.87)$$

დასაშვებია გარდაქმნათა ერთპარამეტრიანი ჯგუფი

$$x^i = f^i(x, u, a), \quad f^i(x, u, 0) = x^i, \quad u'^\alpha = \varphi^\alpha(x, u, a),$$

$$\varphi^\alpha(x, u, 0) = u^\alpha, \quad (4.88)$$

თუ, ამ გარდაქმნებით წარმოქმნილი  $M$  მრავალსახეობა ინვარიანტულია გაფართოებული  $G_p$  ჯგუფის მიმართ, სრულდება ინვარიანტულობის კრიტერიუმი, რომელიც გვიადვილებს გარდაქმნათა დასაშვები ჯგუფის გამოთვლას.

**თეორემა(კრიტიკიუმი).** დიფერენციალურ განტოლებათა (4.87) სისტემა უშვებს  $G$  ჯგუფს,  $X$  ინფინიტეზიმალური ოპერატორით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მართებულია განტოლებები:

$$X_p F_k = 0, \quad k = \overline{1, s}, \quad (4.89)$$

მრავალსახეობის ყველა წერტილისათვის.

ეს თეორემა, ლის თეორემასთან ერთად, საშუალებას გვაძლევს მოცემული დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის, დასაშვებ გარდაქმნათა ერთპარამეტრიანი ჯგუფის პოვნის ამოცანა, დავიყვანოთ (4.89) განტოლებათა სისტემის ამოხსნამდე, რის გამოც ამ განტოლებებს განმსაზღვრელ განტოლებებს უწოდებენ.

#### 4.7. ლის ალგებრა

კამილ ჟორდანის ნორვეგიელმა მოწაფემ სოფუს ლიმ შეძლო განეზოგადებინა გალუას ალგებრულ განტოლებათა თეორია, დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის. მანვე შეისწავლა იმ გარდაქმნათა უწყვეტი ჯგუფები, რომელთა მიმართაც ინვარიანტულია დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა.

სოფუს ლიმ შეძლო ლის ალგებრის ბაზისის პოვნის ალგორითმის ჩამოყალიბება, რაც საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის დასაშვები ჯგუფი და, მაშასადამე, ყველა ის გარდაქმნა, რომლის მიმართაც ინვარიანტულია მოცემული დიფერენციალური განტოლება. ლის თეორია ლოკალურია ანუ მასში შეისწავლება გარდაქმნები, რომლებიც ახლოსაა იგივე გარდაქმნასთან. დასაშვები ჯგუფის პოვნის პროცესი ვითარდება დიფერენცირებადი  $M$  მრავალსახეობის  $TM$  მხებ სივრცეში და მხოლოდ ბოლო ეტაპზე ხდება დაშვება თვით მრავალსახეობაში, რომელსაც ქმნიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაში შემავალი ყველა ცვლადისა და მათი წარმოებულების ერთობლიობა, რომელიც გაფართოებულია, მასში შემავალი უმაღლესი წარმოებულის რიგამდე ჩათვლით.

გამოთვლების შედეგად მიღებული ინფინიტეზიმალური ოპერატორები ქმნიან ლის ალგებრას ანუ სიმრავლეს, რომელშიც გვაქვს წრფივი ვექტორული სივრცის სტრუქტურა ერთი დამატებითი ოპერაციით, რომელსაც კომუტირებას უწოდებენ.

$A$  და  $B$  ოპერატორების კომუტირებას უწოდებენ ანტისიმეტრიულ  $[A, B] = -[B, A]$  ორადწრფივ ოპერაციას, რომლისთვისაც მართებულია იაკობის ტოლობა

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0, \quad (4.90)$$

ეკრძოდ,  $A$  და  $B$  ოპერატორების კომუტატორად შეგვიძლია განვიხილოთ მათი სუპერპოზიცია:

$$[A, B] = AB - BA, \quad (4.91)$$

სადაც ოპერატორების ნამრავლი ნიშნავს მათ მიმდევრობით შესრულებას.

დავამტკიცოთ, რომ მაშინ მართებულია (4.90) იაკობის ტოლობა. მართლაც,

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] &= [A, BC - CB] + [B, CA - AC] + \\ [C, AB - BA] &= [A, BC] - [A, CB] + [B, CA] - [B, AC] + [C, AB] - \\ [C, BA] &= ABC - BCA - ACB + CBA + BCA - CAB - BCA + ACB + \\ CAB - ABC - CBA + BAC &= 0. \text{ რ.დ.გ.} \end{aligned}$$

#### 4.7.1. გაფართოების კოორდინატული გადმოცემა

ვთქვათ, გვაქვს საწყისი  $q$  რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა  $m$  დამოუკიდებელი ცვლადით და  $k$  უცნობი ფუნქციით. ჩვენი ცვლადების  $M$  მრავალსახეობა განისაზღვრება  $(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_k)$  კოორდინატების სივრცით, სადაც  $x_i, i = \overline{1, m}$  დამოუკიდებელი ცვლადებია, ხოლო  $u_j, j = \overline{1, k}$  - საძებნი ფუნქციები, რომელთათვისაც მართებულია განტოლებათა სისტემა  $L^q(x, u) = 0$ . ვეძებთ ისეთი გარდაქმნების ჯგუფს, რომლის მიმართაც ეს სისტემა ინვარიანტული იქნება ანუ სახეს არ იცვლის.

საძებნი გარდაქმნები, ცვლადთა  $(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_k)$  სივრცეში წარმოიქმნება შესაბამისი ინფინიტეზიმალური ოპერატორებით

$$X = \sum_{i=1}^m \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k \eta_j(x, u) \frac{\partial}{\partial u_j}, \quad (4.92)$$

სადაც  $\xi_i(x, u)$  და  $\eta_j(x, u)$  (ჯერ-ჯერობით) უცნობი ფუნქციებია.

#### 4.7.2. პირველი გაფართოება

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$p_i^j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (4.93)$$

ლის თეორიაში პირველი გაფართოების სივრცე ეწოდება

$$(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_j; p_i^j), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, k}, \quad (4.94)$$

ცვლადების სივრცეს.

ამ გაფართოების ცვლადების სივრცეში (4.92) ინფინიტეზიმალური ოპერატორის შესაბამის გარდაქმნების ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე:

$$X_1 = X + \sum_{i,j} \zeta_i^j(x, u, p) \frac{\partial}{\partial p_i^j}, \quad (4.95)$$

სადაც დამატებითი  $\zeta_i^j$  კოორდინატები განისაზღვრება გამოსახულებებიდან

$$\zeta_i^j = D_i(\eta_j) - \sum_{s,j} p_s^j D_i(\xi_s), \quad (4.96)$$

ხოლო  $x_i$  ცვლადით სრული წარმოებულის გამოსათვლელი ფორმულაა:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_t p_i^t \frac{\partial}{\partial u^t}. \quad (4.97)$$



### 4.7.3. მეორე გაფართოება

თუ  $L^q(x, u) = 0$  განტოლებაში შემავალი ფუნქციების წარმოებულის უმაღლესი  $q$  რიგი მეტია ერთზე, მაშინ ცვლადების სივრცე  $(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_k)$ , შესაბამისად, უნდა გაგაფართოოთ  $q$ -ჯერ, რათა შევავსოთ ის, საძებნი ფუნქციების წარმოებულებით  $q$  რიგამდე ჩათვლით.

ღის თეორიაში მეორე გაფართოების სივრცედ ითვლება  $(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_k; p_i^j, r_{si}^l)$  ცვლადების სივრცე, სადაც

$$r_{si}^l = \frac{\partial^2 u^l}{\partial x_s \partial x_i}, \quad s, i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, k}. \quad (4.98)$$

მეორე გაფართოების  $(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_k; p_i^j, r_{si}^l)$  ცვლადების სივრცეში, შესაბამის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს აქვს ასეთი სახე:

$$X_2 = X_1 + \sum_{i,s} \sigma_{is}^l(x, u, p, r) \frac{\partial}{\partial r_{is}^l}, \quad (4.99)$$

სოლო დამატებითი  $\sigma_{is}^l$  კოორდინატები განისაზღვრება განტოლებებით:

$$\sigma_{is}^l = \tilde{D}_i(\zeta_s^l) - \sum_{i,s} r_{si}^l \tilde{D}_i(\xi_s), \quad (4.100)$$

სადაც

$$\tilde{D}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_q p_i^q \frac{\partial}{\partial u^q} + \sum_{i,s,l} r_{is}^l \frac{\partial}{\partial p_s^l}, \quad (4.101)$$

სრული დიფერენცირების ოპერატორია. ცხადია, რომ

$$\tilde{D}_i(\xi_s) \equiv D_i(\xi_s). \quad (4.102)$$

ამიტომ, ფორმულა (4.100) მიიღებს საბოლოოდ ასეთ სახეს:

$$\sigma_{is}^l = \tilde{D}_i(\zeta_s^l) - \sum_{i,s} r_{si}^l D_i(\xi_s). \quad (4.103)$$

## 4.8. ღის მეთოდის გამოყენების მაგალითები

განვიხილოთ უმარტივესი მეორე რიგის განტოლება:

$$u'' = 0. \quad (4.104)$$

ამ შემთხვევაში გვაქვს  $(x, u)$  ცვლადთა სივრცე. შესაბამისი ინფინიტეზიმალური ოპერატორია

$$X = \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (4.105)$$

**პირველი გაფართოება:** შემოგვაქვს აღნიშვნა პირველი რიგის წარმოებულისათვის

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (4.106)$$

პირველი გაფართოების ცვლადთა სივრცეა

$$(x, u, p). \quad (4.107)$$

$x$  ცვლადის მიმართ სრული წარმოებულის ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial u}. \quad (4.108)$$

პირველი გაფართოების შედეგად მიღებული ინფინიტეზიმალური ოპერატორია

$$X_1 = X + \zeta(x, u, p) \frac{\partial}{\partial p}, \quad (4.109)$$

სადაც დამატებითი  $\zeta$  კოორდინატის საპოვნელად გვაქვს ფორმულა

$$\zeta = D(\eta) - pD(\xi) = \frac{\partial \eta}{\partial x} + p \frac{\partial \eta}{\partial u} - p \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + p \frac{\partial \xi}{\partial u} \right) = \frac{\partial \eta}{\partial x} + p \left( \frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - p^2 \frac{\partial \xi}{\partial u}. \quad (4.110)$$

რადგან  $\xi(x, u)$  და  $\eta(x, u)$  ცვლადები არ არის დამოკიდებული  $p$  ცვლადზე, (4.110) განტოლება  $p$  ცვლადის მიმართ მხოლოდ კვადრატულ ფუნქციას წარმოადგენს.

**მეორე გაფართოება:** შემოგვაქვს დამატებითი აღნიშვნა მეორე რიგის წარმოებულისათვის

$$r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.111)$$

მეორე გაფართოების ცვლადთა სივრცეა

$$(x, u, p, r). \quad (4.112)$$

$x$  ცვლადის მიმართ სრული წარმოებულის ფორმულას, მეორე გაფართოების შემდეგ ექნება შემდეგი სახე:

$$\tilde{D} = D + r \frac{\partial}{\partial p}. \quad (4.113)$$

მეორე გაფართოების შედეგად მიღებული ინფინიტეზიმალური ოპერატორია

$$X_2 = X_1 + \sigma \frac{\partial}{\partial r}, \quad (4.114)$$

სადაც დამატებითი  $\sigma$  კოორდინატის საპოვნელად გვაქვს ფორმულა

$$\begin{aligned} \sigma = \tilde{D}(\zeta) - rD(\xi) = \left( \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial u} + r \frac{\partial}{\partial p} \right) \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} + p \left( \frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - p^2 \frac{\partial \xi}{\partial u} \right] - \\ - r \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + p \frac{\partial \xi}{\partial u} \right). \end{aligned} \quad (4.115)$$

ახლა უნდა ვიმოქმედოთ  $X_2$  ოპერატორით (4.104) განტოლების მარცხენა მხარეზე

$$X_2 r = 0 = \sigma_{r=0}. \quad (4.116)$$

რადგან  $X_1$  ოპერატორი არ შეიცავს წარმოებულს  $r$  ცვლადით, (4.116) ტოლობიდან გამომდინარე გვექნება

$$X_1 + \sigma \frac{\partial r}{\partial r} = \sigma_{r=0} = 0. \quad (4.117)$$

ანუ (4.115) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$[\tilde{D}(\zeta) - rD(\xi)]_{r=0} = 0 \quad (4.118)$$

ანუ

$$\tilde{D}(\zeta) = 0. \quad (4.119)$$

$$[\tilde{D}(\zeta)]_{r=0} = \left[ D + r \frac{\partial}{\partial p} \right]_{r=0} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial u}, \quad (4.120)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial u}\right) \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + p \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - p^2 \frac{\partial \xi}{\partial u}\right] = 0, \quad (4.121)$$

ანუ გამარტივებით მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} + p \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) + p^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u}\right) - p^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u} - p^3 \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = 0. \quad (4.122)$$

ამ განტოლებაში  $\xi$  და  $\eta$  ცვლადები დამოკიდებულია მხოლოდ  $(x, u)$  ცვლადებზე, ამიტომ (4.122) განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს იგივერად ნულის ტოლ კუბურ მრავალწევრს  $p$  ცვლადის მიმართ. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია.

$$p^3 \text{ ხარისხის კოეფიციენტი: } \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = 0; \quad (4.123)$$

$$p^2 \text{ ხარისხის კოეფიციენტი: } \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u} = 0; \quad (4.124)$$

$$p^1 \text{ ხარისხის კოეფიციენტი: } 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0; \quad (4.125)$$

$$p^0 \text{ ხარისხის კოეფიციენტი: } \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0. \quad (4.126)$$

(4.123) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$\xi = A(x)u + B(x). \quad (4.127)$$

(4.126) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$\eta = C(u)x + D(u). \quad (4.128)$$

(4.124) განტოლებიდან გვექნება

$$C''(u)x + D''(u) = 2A'(x). \quad (4.129)$$

(4.125) განტოლებიდან მივიღებთ

$$A'(x)u + B''(x) = 2C'(u). \quad (4.130)$$

გავაწარმოთ (4.129)  $u$  ცვლადით, მაშინ მივიღებთ განტოლებას

$$C'''(u)x + D'''(u) = 0. \quad (4.131)$$

გავაწარმოთ (4.130)  $x$  ცვლადით, მაშინ მივიღებთ

$$A'''(x)u + B'''(x) = 0. \quad (4.132)$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$C'''(u) = 0, \quad D'''(u) = 0, \quad A'''(x) = 0, \quad B'''(x) = 0. \quad (4.133)$$

შესაბამისად, გვუქნება, რომ

$$C(u) = c_0 + c_1u + c_2u^2, \quad (4.134)$$

$$D(u) = d_0 + d_1u + d_2u^2, \quad (4.135)$$

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad (4.136)$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2. \quad (4.137)$$

თუ გავითვალისწინებთ (4.127)-(4.137) განტოლებებს, მივიღებთ, რომ

$$A(x) = a_0 + a_1x, \quad (4.138)$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2, \quad (4.139)$$

$$C(u) = c_0 + b_2u, \quad (4.140)$$

$$D(u) = d_0 + d_1u + a_1u^2, \quad (4.141)$$

სადაც კოეფიციენტები ნებისმიერი მუდმივებია. შესაბამის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს აქვს ასეთი სახე:

$$X = \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (4.142)$$

$$\xi = (a_0 + a_1x)u + b_0 + b_1x + b_2x^2, \quad (4.143)$$

$$\eta = (c_0 + b_2u)x + d_0 + d_1u + a_1u^2. \quad (4.144)$$

თუ (4.142)-(4.144) ფორმულებში დაეუშვებთ, რომ ერთი კოეფიციენტი უდრის 1, ხოლო დანარჩენები – 0-ს, მივიღებთ ლის ალგებრის ბაზისურ ოპერატორებს, რომელთაც უშვებს განტოლება (4.104). მართლაც, გვუქნება, რომ

$$L_1 = xu \frac{\partial}{\partial x} + u^2 \frac{\partial}{\partial u}, \quad (4.145)$$

$$L_2 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + ux \frac{\partial}{\partial u}, \quad (4.146)$$

$$L_3 = u \frac{\partial}{\partial x}, \quad (4.147)$$

$$L_4 = x \frac{\partial}{\partial u}, \quad (4.148)$$

$$L_5 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad (4.149)$$

$$L_6 = u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (4.150)$$

$$L_7 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (4.151)$$

$$L_8 = \frac{\partial}{\partial u}. \quad (4.152)$$

ოპერატორების სიმრავლე, რომლისთვისაც (4.145)-(4.152) ბაზისია, წარმოადგენს წრფივ ვექტორულ სივრცეს. კომუტირების ოპერაციის მიმართ ეს სივრცე ჩაკეტილია ანუ წარმოადგენს ლის ალგებრას.

ინფინიტეზიმალურ ოპერატორებს, საზოგადოდ, აქვთ ასეთი სახე:

$$X = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial u}. \quad (4.153)$$

თუ, გვაქვს გარდაქმნის კანონიკური ფორმულებით მოცემული ჯგუფი

$$x' = f(x, u, \alpha), \quad (4.154)$$

$$u' = \varphi(x, u, \beta). \quad (4.155)$$

მაშინ

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad B = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right|_{\beta=0}. \quad (4.156)$$

#### 4.8.1. ბიურგერსის განტოლების ბაზისური ლის ალგებრა

განვიხილოთ ბიურგერსის განტოლება

$$u_t + uu_x = u_{xx}. \quad (4.157)$$

თუ, ცვლადებს გარდაექმნით ხოპფი-კოულის ფორმულით

$$u = -2\delta \frac{\partial(\ln v)}{\partial x}, \quad (4.158)$$

მაშინ, ბიურგერსის განტოლება გარდაიქმნება სითბოგამტარობის განტოლებად

$$v_t = \delta v_{xx}. \quad (4.159)$$

ბიურგერსის განტოლების შესაბამისი ლის ალგებრის ბაზისია

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (4.160)$$

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.161)$$

$$L_3 = \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (4.162)$$

$$L_4 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad (4.163)$$

$$L_5 = tx \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} + (x - tu) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (4.164)$$

ბიურგერსის განტოლების ლის ალგებრა ხუთგანზომილებიანი მრავალსახეობაა კომუტირების ოპერაციით. ხოლო სითბოგამტარობის განტოლების დასაშვები ლის ალგებრა ექვსგანზომილებიანი მრავალსახეობაა, რაც იმას ნიშნავს, რომ ლის ეს ორი ალგებრა არ არის იზომორფული.

#### 4.8.2. კორტევევა-დე-ფრიზის განტოლების ბაზისური ლის ალგებრა

განვიხილოთ კორტევევა-დე-ფრიზის განტოლება

$$u_t + uu_x = u_{xxx}. \quad (4.165)$$

ამ განტოლებისათვის არ არსებობს ხოპფი-კოულის გარდაქმნის ანალოგიური გარდაქმნა, რომელიც მას გარდაქმნიდა წრფივ სითბოგამტარობის განტოლებად.

კორტევევა-დე ფრიზის განტოლებით დასაშვები ლის ალგებრის ბაზისი ოთხგანზომილებიანია და შედგება შემდეგი ოპერატორებისაგან

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (4.166)$$

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.167)$$

$$L_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + 3t \frac{\partial}{\partial t} - 2u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (4.168)$$

$$L_4 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}. \quad (4.169)$$

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. აჩვენეთ რომ გარდაქმნა, რომელიც მოიცემა ფორმულით  $x' = x + a + a^2$ , ქმნის ჯგუფს. იპოვეთ შესაბამისი  $\varphi(a, b)$  და  $a^{-1}$ ;

2. გამოიკვლიეთ, ადგენენ თუ არა ჯგუფს  $x' = x + a$ ,  $y' = y + a^2$  გარდაქმნები  $(x, y)$  სიბრტყეზე;

3. ამოხსენით ლის განტოლებები  $\frac{dx'}{da} = y'$ ,  $\frac{dy'}{da} = -x'$  ბრუნვის გარდაქმნისთვის და იპოვეთ გარდაქმნის ჯგუფის ინვარიანტი და ინფინიტეზიმალური ოპერატორი;

4. იპოვეთ ლორენცის გარდაქმნების ჯგუფის ინვარიანტი და ინფინიტეზიმალური ოპერატორი;

5. იპოვეთ გალილეის გარდაქმნის ჯგუფის ინვარიანტი და ინფინიტეზიმალური ოპერატორი;

6. იპოვეთ ერთგვაროვანი გაჭიმვების გარდაქმნის ჯგუფის ინვარიანტი და ინფინიტეზიმალური ოპერატორი;

7. იპოვეთ  $kx + ly = 0$  წრფის პარალელურ გადატანათა გარდაქმნის ჯგუფის ინფინიტეზიმალური ოპერატორი და ინვარიანტი;

8. იპოვეთ არაერთგვაროვანი გაჭიმვების გარდაქმნის ჯგუფის ინვარიანტი და ინფინიტეზიმალური ოპერატორი;

9. აჩვენეთ, რომ  $t' = t$ ,  $x' = x + 2at$ ,  $u' = ue^{-(ax+a^2t)}$ ,

$$u'_t = (u_t + a^2u - 2au_x)e^{-(ax+a^2t)},$$



$$u'_{x'} = (u_x - au)e^{-(ax+a^2t)},$$

$u'_{x'x'} = (u_{xx} + a^2u - 2au_x)e^{-(ax+a^2t)}$  გარდაქმნები აღგენენ ჯგუფს, ექვსგანზომილებიან  $z = (t, x, u, u_t, u_x, u_{xx})$  ცვლადთა სივრცეში და იპოვეთ შესაბამისი ინფინიტეზიმალური ოპერატორი;

10. შეამოწმეთ, რომ თუ  $u = \varphi(t, x)$  ფუნქცია არის სითბოგამტარობის განტოლების რაიმე ცნობილი ამონახსნი, მაშინ  $u = e^{-(ax+a^2t)}\varphi(t, x + 2at)$  ფუნქციაც აკმაყოფილებს სითბოგამტარობის  $u_t - u_{xx} = 0$  განტოლებას.

11. იპოვეთ,  $X_1 = X + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}$  ოპერატორის გაფართოება მეორე რიგის წარმოებულებამდე ჩათვლით  $X_2 = X_1 + \zeta_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{ij}^\alpha}$  სახით და აჩვენეთ, რომ  $\zeta_{ij}^\alpha = D_j(\zeta_i^\alpha) - u_{ik}^\alpha D_j(\zeta^k)$ .

12. გამოთვალეთ  $u'' + u = 0$  განტოლების დასაშვები ლის ალგებრა.

13. გამოთვალეთ  $u_t + uu_x = u_{xx}$  ბიურგერსის განტოლების დასაშვები ლის ალგებრა.

14. გამოთვალეთ  $u_t + uu_x = u_{xxx}$  კორტევეგა-დე-ფრიზის განტოლების დასაშვები ლის ალგებრა.

## V თავი. ლაგრანჟის ფორმალიზმი და ჰამილტონური სისტემები

სივრცეში, მატერიალური წერტილის მდგომარეობის დასახასიათებლად გამოიყენება  $\vec{r}$  რადიუს-ვექტორი, რომლის კოორდინატებიც ემთხვევა ამ წერტილის დეკარტულ კოორდინატებს  $\vec{r}(x, y, z)$ . ამას გარდა, მატერიალური წერტილის დინამიკის დასახასიათებლად გამოიყენება  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$  სიჩქარე და  $\vec{W} = \ddot{\vec{r}}(t)$  აჩქარება. თუ, მოცემული გვაქვს  $n$ -მატერიალური წერტილი, მაშინ მათი განლაგების დასახასიათებლად დაგვჭირდება  $n$  - ცალი რადიუს-ვექტორი და მაშასადამე,  $3n$ -კოორდინატი.

**განსაზღვრება:** იმ პარამეტრების მინიმალურ რაოდენობას, რომლებიც ცალსახად ახასიათებენ სისტემის განლაგებას - მისი თავისუფლების ხარისხი ეწოდება.

$n$  - მატერიალური წერტილის შემთხვევაში, სამგანზომილებიან სივრცეში სისტემის თავისუფლების ხარისხი  $3n$  - ის ტოლია.

**P.S.** ეს პარამეტრები არაა აუცილებელი, რომ წერტილთა დეკარტის კოორდინატები იყვნენ.

**განსაზღვრება:** ნებისმიერ  $q_1, q_2, \dots, q_n$  პარამეტრების ერთობლიობას, რომლებიც ცალსახად ახასიათებენ სისტემის განლაგებას,  $n$  - თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის განზოგადებულ კოორდინატებს უწოდებენ, ხოლო მათი, დროით წარმოებულების ერთობლიობას:  $\dot{q}_i$ , განზოგადებულ სიჩქარეებს.

### 5.1. ლაგრანჟის ფუნქცია და ჰამილტონის პრინციპი

სისტემის მხოლოდ კონფიგურაციის ცოდნა, არაა საკმარისი იმის გასაგებად, თუ რა მდგომარეობა ექნება სისტემას დროის სხვა მომენტებში. როგორც ექსპერიმენტებით იქნა დადგენილი, მექანიკური სისტემის მდგომარეობის საპოვნელად დროის ნებისმიერ მომენტში, უნდა ვიცოდეთ სისტემის საწყისი კონფიგურაცია  $q_i(0)$  და შემადგენელი მატერიალური წერტილების საწყისი  $\dot{q}_i(0)$  სიჩქარეები. ამ ორი ძირითადი ფიზიკური პარამეტრის ცოდნა, კლასიკურ

მექანიკაში, საშუალებას გვაძლევს, ვიპოვოთ  $\ddot{q}_i$  აჩქარებებიც დროის ნებისმიერ მომენტში.

თუ, სისტემა გადაადგილდება  $q_i(t_1)$  მდგომარეობიდან  $q_i(t_2)$  მდგომარეობაში, მაშინ ჭეშმარიტი მოძრაობის საპოვნელად, უნდა ვისარგებლოთ ჰამილტონის უმცირესი ქმედების პრინციპით.

ეს პრინციპი მოითხოვს რომ, თუ, სისტემა გადაადგილდება  $q_i(t_1)$  მდგომარეობიდან, რომელიც დროის  $t_1$  მომენტში ეკავა, ახალ,  $q_i(t_2)$  მდგომარეობაში დროის  $t_2$  მომენტისათვის, მაშინ ინტეგრალს ამ დროის მომენტებს შორის მოცემული  $L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$  ფუნქციიდან, რომელსაც ლაგრანჟიანს უწოდებენ, იყოს ექსტრემალური, ანუ, ნულს უნდა უდრიდეს ქმედების  $W$  ინტეგრალის პირველი ვარიაცია  $\delta W = 0$ .

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (5.1)$$

ახლა, ჰამილტონის პრინციპზე დაყრდნობით, გამოვიყვანოთ მოძრაობის განტოლება.

სიმარტივისათვის, ზოგადობის შეუზღუდავად, განვიხილოთ ისეთი სისტემა, რომლის თავისუფლების ხარისხიც ერთის ტოლია. ასე, რომ საპოვნელია  $q(t)$  ფუნქცია, რომელიც ექსტრემუმს მიაწიჭებს  $W$  ქმედების ინტეგრალს ლაგრანჟიანიდან და სისტემას გადაიყვანს  $q(t_1)$  მდგომარეობიდან, რომელიც დროის  $t_1$  მომენტში ეკავა, ახალ,  $q(t_2)$  მდგომარეობაში დროის  $t_2$  მომენტისათვის .

ვთქვათ  $q(t)$  ჩვენი საძებნი ფუნქციაა. მივცეთ მას მცირე  $\delta q(t)$  ნაზრდი-ვარიაცია, მაშინ გვექნება ახალი  $q(t) + \delta q(t)$  ფუნქცია. რადგან ამ ფუნქციამ უნდა გაიაროს  $q(t_1)$  და  $q(t_2)$  წერტილებში, ცხადია რომ

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (5.2)$$

შესანიშნავია ის ფაქტი, რომ ჩვენ ვეძებთ გადაადგილების ვარიაციას და თვითონ გადაადგილება ჯერ არ ვიცით. ქმედების ინტეგრალის ექსტრემუმის საპოვნელად, მისი პირველი ვარიაცია ნულს უნდა გავუტოლოთ

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0. \quad (5.3)$$

თუ, პირველი ინტეგრალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას გავშლით ტეილორის ფორმულით და შევინარჩუნებთ, მხოლოდ წრფივ წევრებს, გვექნება

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0, \quad (5.4)$$

სადაც  $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q)$ , ამ ფაქტის გათვალისწინებით და (5.4) ინტეგრალქვეშა გამოსახულების მეორე წევრის ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$\delta W = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt = 0. \quad (5.5)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (5.2) სასაზღვრო პირობებს გადაადგილების პირველი ვარიაციისათვის, მივიღებთ რომ (5.5) ფორმულაში პირველი შესაკრები ნულის ტოლია. მაშინ ცხადია, რომ მეორე ინტეგრალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაც უნდა ნულის ტოლი იყოს. ამრიგად, მივიღეთ დინამიკის განტოლება ლაგრანჟის ფორმით

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (5.6)$$

$n$  თავისუფლების ხარისხის შემთხვევაში  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ცვლადებისათვის, ცალ-ცალკე უნდა შევადგინოთ ვარიაციები  $q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_n + \delta q_n$ . მაშინ, ანალოგიურ პროცედურას, მივყავართ ლაგრანჟის ცნობილ განტოლებებამდე

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.7)$$

თუ, მოცემული სისტემისათვის ცნობილია ლაგრანჟიანის სახე, მაშინ (5.7) განტოლებები წარმოადგენენ მოძრაობის განტოლებებს და ცნობილი საწყისი პირობების  $q_i(0); \dot{q}_i(0)$  შემთხვევაში ცალსახად განსაზღვრავენ სისტემის ევოლუციას.

ლ.ლანდაუსა და ე.ლიფშიცის წიგნში დასაბუთებულია, რომ თავისუფალი, არაურთიერთქმედი ნაწილაკებისათვის, ერთგვაროვან, იზოტროპულ სივრცეში, ლაგრანჟიანი პირდაპირპროპორციული განზოგადებული სიჩქარეების

კვადრატისა და თუ, პროპორციულობის კოეფიციენტად მასის ნახევარს ავიღებთ, მივიღებთ რომ ლაგრანჟიანი, სისტემის კინეტიკური ენერჯის ტოლია

$$L = T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2}. \quad (5.8)$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც მატერიალური ნაწილაკები ურთიერთქმედებენ გარკვეული კანონით, რომელიც მოიცემა პოტენციური ენერჯის  $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$  ფუნქციით, როგორც ექსპერიმენტებმა აჩვენეს, ლაგრანჟიანს აქვს სახე

$$L = T - V = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2} - V(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (5.9)$$

პოტენციური ენერჯის ფუნქცია ისეთია, რომ სისტემის თითოეულ ნაწილაკზე მოქმედი ძალა გამოითვლება ფორმულით

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (5.10)$$

როცა, პოტენციური ენერჯია არაა დამოკიდებული სიჩქარეებზე, (5.7) განტოლებებიდან (5.9) და (5.10) ფორმულების გათვალისწინებით, მიიღება ნიუტონის დინამიკის ცნობილი განტოლებები მართკუთხა კოორდინატთა სისტემისათვის

$$m_i \ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (5.11)$$

## 5.2. ლაგრანჟიანის თვისებები

განვიხილოთ, ურთიერთქმედი ნაწილაკებისაგან შემდგარი სისტემის ლაგრანჟიანი. მისი სრული წარმოებული იქნება

$$\frac{d}{dt} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (5.12)$$

ასე, რომ

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (5.13)$$

ა) ჩაკეტილი სისტემების შემთხვევაში, ანუ, როდესაც ნაწილაკები არ ურთიერთქმედებენ გარე ძალებთან, ლაგრანჟიანი, არაა დამოკიდებული დროზე ( $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ). ამიტომ, ასეთი სისტემის ენერგია მუდმივი სიდიდეა (სისტემა კონსერვატულია)

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{const.} \quad (5.14)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (5.9) ტოლობას, მივიღებთ

$$E = T + V. \quad (5.15)$$

ბ) ანუ, ჩაკეტილი სისტემის მთლიანი მექანიკური ენერგია, კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამის ტოლია.

თუ, გავითვალისწინებთ ლაგრანჟიანის განსაზღვრებას, შეგვიძლია განვსაზღვროთ განზოგადებული ძალები ფორმულით

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (5.16)$$

ასევე, განისაზღვრება განზოგადებული იმპულსები

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (5.17)$$

რომელთათვისაც ტოლობა  $p_i = m_i \dot{q}_i$  სრულდება, მხოლოდ დეკარტულ კოორდინატებში. ამ ორი განსაზღვრების შემდეგ, ლაგრანჟის განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ ფორმით

$$\dot{p}_i = F_i. \quad (5.18)$$

ცხადია, რომ თუ, რომელიმე განზოგადებული  $q_k$  კოორდინატა, არ შედის ლაგრანჟიანში, მაშინ მისი შესაბამისი განზოგადებული ძალაც არ შედის (3.383) განტოლებათა სისტემაში და მაშასადამე, შესაბამისი იმპულსი  $p_k = \text{const.}$

**განსაზღვრება:** იმ კოორდინატებს, რომლებიც არ შედიან ლაგრანჟიანში, ციკლურ კოორდინატებს უწოდებენ.

ცხადია, რომ ციკლური კოორდინატების არსებობა, გვიმარტივებს დინამიკის განტოლებების ამოხსნას. ზემოთმოყვა-

ნილი, იმპულსის (5.17) განსაზღვრის გათვალისწინებით, მექანიკური სისტემის ენერჯიის ფორმულა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$E = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L. \quad (5.19)$$

თუ, სისტემა ჩაკეტილია და სივრცე ერთგვაროვანია, მაშინ სისტემის შიგნით ნაწილაკებზე მოქმედი ძალების ჯამი ნულის ტოლია  $\sum_i F_i = 0$ . ამ კანონს ჩვენ ვიცნობთ ორი ძალისათვის ნიუტონის მესამე კანონის სახელწოდებით. ამ შემთხვევაში, ჩვენ მივიღებთ (5.18) ტოლობის გათვალისწინებით, რომ

$$\sum_i \dot{p}_i = 0. \quad (5.20)$$

გ) ანუ, ჩაკეტილი სისტემის იმპულსების ჯამი მუდმივი სიდიდეა.

**P.S.** როგორც ვხედავთ, ჩაკეტილი სისტემისათვის, სივრცისა და დროის ერთგვაროვნების თვისებიდან, გამომდინარეობს ენერჯიისა და იმპულსის შენახვის კანონები.

ეს შედეგები არიან, უფრო ზოგადი ნიოტერის თეორემის კერძო შემთხვევები. რომელიც ამბობს რომ ლაგრანჟიანის გარდაქმნის ყოველი ჯგუფისათვის, დამახასიათებელია ამ გარდაქმნასთან დაკავშირებული ინვარიანტები. სივრცის ტრანსლაციის ჯგუფები გვაძლევენ ენერჯიისა და იმპულსის შენახვის კანონებს; ბრუნვითი მოძრაობის ინვარიანტები - იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონს  
...

### 5.3. განზოგადებული იმპულსის თვისებები

განზოგადებული კოორდინატები და სიჩქარეები ლაგრანჟის ფორმალიზმში, განიხილებიან, როგორც დამოუკიდებელი ცვლადები. ამას გარდა, ჩვენ განვიხილეთ განზოგადებული იმპულსის ცნებაც. მისი ღრმა და არატრივიალური ხასიათი ნათლად

ჩანს ჰამილტონური სისტემების ფაზური სივრცის გეომეტრიის განხილვისას.

იმპულსების კოვარიანტული ხასიათის ყველაზე უფრო ნათელი გამოვლინებაა, ის ფაქტი, რომ შესაძლებელია მათი წარმოდგენა, სკალარული ველის გრადიენტულ ველად. ამის დასამტკიცებლად, დავუბრუნდეთ ქმედების ინტეგრალს. მოცემული ექსტრემალური წირისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს ლაგრანჟის განტოლებებს, განვიხილოთ ახალი ექსტრემალური ამოცანა. სხვადასხვა ექსტრემალეებისათვის, რომელთაც საერთო საწყისი წერტილი აქვთ. ბოლო წერტილს კი ვაძლევთ მცირე ვარიაციას და ვხსნით იგივე ვარიაციულ ამოცანას

$$\delta W = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt = 0. \quad (5.21)$$

რადგან ვხსნით იგივე ამოცანას, ინტეგრალი ნულის ტოლია და (5.21) განტოლებაში გვრჩება მხოლოდ საზღვრის წერტილებში მნიშვნელობები. საწყისი წერტილი დაფიქსირებულია  $\delta q(t_1) = 0$ . აღვნიშნოთ  $\delta q(t_2)$  როგორც  $\delta q$  და გავითვალისწინოთ, რომ  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ . მაშინ (5.21) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ  $\delta W = p \delta q$ , ან სხვანაირად,  $n$  თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემისათვის გვექნება

$$\delta W = \sum_i p_i \delta q_i, \quad (5.22)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}. \quad (5.23)$$

მაშასადამე, იმპულსები წარმოადგენენ ქმედების სკალარული ველის გრადიენტს, მოცემული ექსტრემალის გასწვრივ, დროის მოცემულ მომენტში.

რაც შეეხებათ, განზოგადებულ სიჩქარეებს მათი ველი, საზოგადოდ, არაა კოვარიანტული, ანუ, მათი წარმოდგენა გრადიენტულ ველად საზოგადოდ შეუძლებელია.



#### 5.4. ჰამილტონის ფორმალიზმი

ჰამილტონის მექანიკაში, მოძრაობა აღიწერება განზოგადებული  $q_i$  კოორდინატებისა და განზოგადებული  $p_i$  იმპულსების ცვლადებში. თუმცა, ფიზიკური შინაარსის მიხედვით, ჰამილტონური ფორმალიზმი, არ განსხვავდება ლაგრანჟის ფორმალიზმისაგან, მაგრამ უფრო ესადაგება კვანტური მექანიკის, სტატისტიკური მექანიკისა და შეშფოთებათა თეორიის გადმოცემის სილამაზეს. კერძოდ, ჰამილტონური ფაზური სივრცის ცნება, გაცილებით ამარტივებს ჰამილტონური სისტემების ინტეგრებადობის საკითხის შესწავლასა და იმ ქაოსური რეჟიმების აღწერას, რომლებიც შეიძლება არსებობდეს არაინტეგრებად სისტემებში.

ლაგრანჟის  $(q_i; \dot{q}_i)$  ცვლადებიდან, ჰამილტონის  $(p_i; q_i)$  ცვლადებზე გადასვლა, ხორციელდება **ლეჟანდრის გარდაქმნით**

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (5.24)$$

აქ,  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  არიან  $n$  განზომილებიანი ვექტორები, ხოლო  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$  სიდიდეს ჰამილტონიანი ეწოდება. როგორც ვიცით,

$$p_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t), \quad (5.25)$$

არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემის თანახმად, (5.25) ფუნქციას აქვს შექცეული ფუნქცია, რომელიც საშუალებას გვაძლევს  $\dot{q}_i$  გამოვსახოთ  $p_i$  ცვლადის საშუალებით, თუ,  $\det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right| \neq 0$ .

განვიხილოთ მაგალითი, თუ როგორ უნდა გადავიდეთ ლაგრანჟის ფორმალიზმიდან, ჰამილტონის ფორმალიზმზე:

განვიხილოთ ლაგრანჟიანი

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2} - V(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (5.26)$$

ვიპოვოთ შესაბამისი იმპულსები

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i. \quad (5.27)$$

შებრუნებული გარდაქმნა გვაძლევს

$$\dot{q}_i = \frac{p_i}{m_i}. \quad (5.28)$$

მაშასადამე, შესაბამის ჰამილტონიანს ექნება სახე

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{p_i}{m_i} \right) - \left\{ \frac{1}{2} m_i \left( \frac{p_i}{m_i} \right)^2 - V(q_1, q_2, \dots, q_n) \right\}. \quad (5.29)$$

### 5.5. ჰამილტონის განტოლებები

ლაგრანჟის განტოლებები, მიიღებოდა სისტემის ლაგრანჟიანზე ჰამილტონის პრინციპის გამოყენებით. ახლა ცხადია, რომ ჩვენ გვინდა მოძრაობის განტოლებები გამოვიყვანოთ ჰამილტონის ფორმალიზმის ფარგლებში. (5.24) ფორმულიდან გამომდინარე, ვიპოვოთ ჰამილტონის ფუნქციის სრული დიფერენციალი

$$dH = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (5.30)$$

მარჯვენა მხარეში, პირველი და მესამე წევრი ერთმანეთს აბათილებენ, რადგან  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ . ამას გარდა  $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ (5.30) მიიღებს სახეს

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (5.31)$$

მაგრამ, რადგან

$$dH(p, q, t) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (5.32)$$

ცხადია, რომ (5.31), (5.32) განტოლებებიდან, შეგვიძლია ჩავწეროთ ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (5.33)$$

ამას გარდა, თუ, სისტემის ლაგრანჟიანი და ჰამილტონიანი ცხადადაა დამოკიდებული დროზე, გვექნება დამატებითი თანადობა:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (5.34)$$

**P.S.** ჰამილტონის კანონიკური (5.33) განტოლებათა სისტემა შედგება  $2n$  პირველი რიგის განტოლებისაგან, მაშინ როცა შესაბამისი ლაგრანჟის განტოლებათა სისტემა შედგებოდა  $n$  ცალი მეორე რიგის განტოლებისაგან.

ჰამილტონის (5.33) განტოლებებს, გააჩნიათ რიგი საინტერესო თვისებებისა. ჩვენ ჯერ-ჯერობით განვიხილავთ ისეთ ჰამილტონიანებს, რომლებიც დროზე არა არიან ცხადად დამოკიდებული. ამ სისტემის კანონიკური ცვლადები  $p_i$  და  $q_i$ , რომელთა სერთო რაოდენობაა  $2n$ , ქმნიან ფაზურ სივრცეს. დროის განმავლობაში  $\mathbf{p}(t)$  და  $\mathbf{q}(t)$  ცვლადები  $2n$  განზომილებიან ფაზურ სივრცეში, შემოწერენ გარკვეულ არეს. ისმის კითხვა, თუ როგორია ეს არე და რა ზოგადი თვისებები შეიძლება ქონდეს მას.

ადვილი შესამჩნევია, რომ (5.33) განტოლებებიდან მიიღება ლიუვილის ცნობილი ფორმულა „უკუმშვადი სითხეებისათვის“, ამჯერად, სითხის როლს, თამაშობს ფაზური სივრცის ნაკადის „ნაწილაკი“

$$\sum_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = 0. \quad (5.35)$$

**P.S.** ასე, რომ ჰამილტონური სისტემის ფაზური ნაკადის ელემენტის მოცულობა არ იცვლება, თუმცა, დეფორმირდება გადაადგილებისას.

ჰამილტონის განტოლებები, იმდენად სიმეტრიულია  $\mathbf{p}(t)$  და  $\mathbf{q}(t)$  ცვლადების მიმართ, რომ ზოგჯერ მათ თვლიან თანაბარი უფლებებისმქონე დამოუკიდებელ ცვლადებად და განიხილავენ ახალ ცვლადს,  $2n$  კომპონენტით  $\mathbf{z} = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ . ეს, საშუალებას იძლევა ახალი ჰამილტონიანისათვის  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H(\mathbf{z})$ , ჰამილტონის განტოლება ჩაიწეროს მოკლედ

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \cdot \nabla H(\mathbf{z}), \quad (5.36)$$

სადაც  $\mathbf{J}$  სიმპლექტური მატრიცაა ზომებით  $2n \times 2n$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

1 - ერთეულოვანი მატრიცაა.

## 5.6. პუასონის ფრჩხილები

ჰამილტონის განტოლებების ინტეგრებადობის ამოცანა, ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი საკითხია. თუ, სისტემის თავისუფლების ხარისხია ერთი და მაშასადამე, აღიწერება ორი კანონიკური ცვლადით  $(p, q)$ , მაშინ ის ინტეგრებადია. ასეთი შემთხვევები, ჩვენ უკვე განვიხილეთ კურსის მეორე ნაწილში. თავისუფლების ხარისხის რიცხვის მიუხედავად, სისტემის ამოხსნისას, ყველაზე მნიშვნელოვანია ინტეგრალების პოვნის პროცედურა. ჰამილტონის მიდგომას, მივყავართ, დინამიკური ცვლადების დროზე დამოკიდებულების, მოხდენილად პოვნამდე.

განვიხილოთ რაიმე ფუნქცია  $f = f(p, q, t)$ , ვიპოვოთ მისი სრული წარმოებული დროით

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{dq_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{dH}{dp_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{dH}{dq_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = [H, f] + \frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

სადაც  $[H, f]$  - პუასონის ფრჩხილებია  $H$  და  $f$  ფუნქციებისათვის. მჭიდრო კავშირი არსებობს, კლასიკური მექანიკის პუასონის ფრჩხილებსა და კვანტური მექანიკის კომუტატორის ცნებებს შორის. მართლაც, პუასონის ფრჩხილები, შეგვიძლია ჩავწეროთ ნებისმიერი ორი ფუნქციისათვის

$$[g, f] = \sum_{i=1}^n \left( \frac{dg}{dp_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{dg}{dq_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \quad (5.39)$$

თუ, რომელიმე დინამიკური ცვლადი არაა დამოკიდებული დროზე, ანუ,  $f = f(p, q)$  მაშინ მისი პუასონის ფრჩხილები ნულის ტოლია და მაშასადამე, ის მუდმივი სიდიდეა, რაც ნათლად ჩანს (5.38)

ფორმულიდან. ცხადია, რომ დროზე დამოუკიდებელი სისტემებისათვის, სისტემის ენერგია  $E = H$  მუდმივი სიდიდეა, რადგან ჰამილტონიანის თავის თავთან პუასონის ფრჩხილები, ნულის ტოლია.

პუასონის ფრჩხილების განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ნებისმიერი სამი ფუნქციისათვის, შეგვიძლია ჩამოვაცალიბოთ რიგი თვისებებისა

$$[f, g] = -[g, f]; \quad (5.40)$$

$$[f + g, h] = [f, h] + [g, h]; \quad (5.41)$$

$$[fg, h] = f[g, h] + g[f, h]; \quad (5.42)$$

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0. \quad (5.43)$$

პუასონის ფრჩხილების (5.43) თვისებას იაკობის იგივეობას უწოდებენ. ეს თვისებები, ნათელყოფს, რომ პუასონის ფრჩხილები შეესაბამება ლის ალგებრის ოპერაციის განმსაზღვრელ სტრუქტურას.

თუ,  $f, g$  მოძრაობის ინვარიანტული ფუნქციებია, მაშინ მათი პუასონის ფრჩხილებიც მუდმივი იქნება მოძრაობის მიმართ. მართლაც, თუ, განვიხილავთ პუასონის ფრჩხილების (5.43) თვისებას, მაშინ იქიდან რომ  $f, g$  ინვარიანტებია, გამოდის რომ  $[g, H] = 0$ ,  $[f, H] = 0$ , მაგრამ მაშინ  $[f, [g, H]] + [g, [H, f]] + [H, [f, g]] = 0$  იაკობის იგივეობიდან მივიღებთ, რომ  $[H, [f, g]] = 0$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ  $[f, g]$  აგრეთვე ინვარიანტია. ეს იმას ნიშნავს, რომ ორი ნაპოვნი ინტეგრალის პუასონის ფრჩხილები ისევ სისტემის ინტეგრალი იქნება. თუმცა, ინტეგრალების ასეთი მეთოდით ძებნა, არაა ეფექტური.

საზოგადოდ,  $n$  პირველი რიგის განტოლებათა სისტემის ბოლომდე ანალიზურად ამოსახსნელად, საჭიროა  $n - 1$  ინტეგრალის პოვნა. მაგრამ ჰამილტონური სისტემების სიმპლექტიკური სტრუქტურის გამო  $2n$  პირველი რიგის ჰამილტონური სისტემებისათვის საკმარისია  $n$  ინტეგრალის პოვნა.

## 5.7. ჰამილტონ-იაკობის განტოლებები

ჰამილტონური სისტემების ამოსახსნელად ეძებენ კანონიკურ გარდაქმნებს, ანუ ისეთ გარდაქმნებს, რომლებიც სისტემას ისე გაამარტივებს, რომ შევძლებთ მის ინტეგრებას. თუ, კანონიკური გარდაქმნა არაა დამოკიდებული დროზე, მაშინ ძველი ჰამილტონიანიდან ახალზე გადასვლა, ხორციელდება უბრალოდ ცვლადთა გარდაქმნით

$$H'(P, Q) = H(p(P, Q), q(P, Q)). \quad (5.44)$$

თუ, გამოვიყენებთ გარდაქმნის ფორმულებს

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} W(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha, \dots, \alpha_n), \quad (5.45)$$

$$\beta_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} W(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha, \dots, \alpha_n), \quad (5.46)$$

სადაც  $\beta_i$  არიან ახალი კოორდინატები, შეუღლებულები  $\alpha_i$  ძველ იმპულსებთან. შესაბამისად, (5.44) განტოლებიდან მივიღებთ

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, q_2, \dots, q_n\right) = H'(\alpha_1, \alpha, \dots, \alpha_n). \quad (5.47)$$

ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილს, უნდა ვუყუროთ, როგორც მუდმივ სიდიდეს, ჰამილტონიანის მნიშვნელობას. ამ, პირველი რიგის კერძოწარმოებულის განტოლებაში, უცნობია  $W$  სიდიდე, ხოლო  $q_1, q_2, \dots, q_n$  დამოუკიდებელი ცვლადებია. ამ განტოლებას ეძახიან სტაციონარულ ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას.

ასეთი განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიცავს  $n$  ნებისმიერ მუდმივს, რომელთა როლშიც შეგვიძლია განვიხილოთ  $\alpha_i$  სიდიდეები. ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ამოხსნა, ექვივალენტურია შესაბამისი ჰამილტონის განტოლებათა სისტემის ამოხსნისა. **სეპარაბელური სისტემების** გარდა, ასეთი განტოლებების ამოხსნა საკმაოდ რთულია, თუმცა, თუ, გავითვალისწინებთ (5.45) ფორმულებს, დაფიქსირებული  $\alpha_i$  სიდიდეების შემთხვევაში, შეგვიძლია, საზოგადოდ შევხედოთ ამონახსნის სტრუქტურას. მართლაც

$$dW = \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i = \sum_i p_i dq_i, \quad (5.48)$$

ასე, რომ თუ, (5.48) ტოლობას ვაინტეგრებთ ფაზური ტრაექტორიის გასწვრივ, მივიღებთ წირით ინტეგრალს

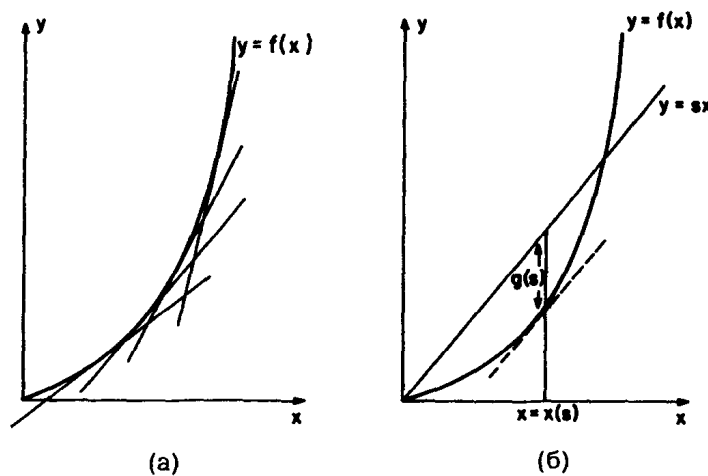
$$W = \int_{q_0}^q \sum_i p_i dq_i. \quad (5.49)$$

### 5.8. ლეჟანდრის გარდაქმნების გეომეტრია

ლაგრანჟის  $(q_i; \dot{q}_i)$  ცვლადებიდან, ჰამილტონის  $(p_i; q_i)$  ცვლადებზე გადასვლა, ხორციელდება ლეჟანდრის გარდაქმნით. ამიტომ, საინტერესოა თვით ამ გარდაქმნის გეომეტრიული აზრი და სტრუქტურა.

მრუდი წირი შეიძლება აღვწეროთ, როგორც წერტილების ერთობლიობით, ასევე, მხები სიბრტყეების ერთობლიობითაც. ლეჟანდრის გარდაქმნა კი კავშირს ამყარებს ამ ორ წარმოდგენას შორის. ამ საკითხში, გავყვეთ ვარნოლდის გადმოცემის ფორმას, ვინაიდან ის საუკეთესოა მეთოდური თვალსაზრისით.

განვიხილოთ  $y = f(x)$  ფუნქცია. დავუშვათ, რომ ის ამოზნექილია ან ჩაზნექილი. ამ ფუნქციის ლეჟანდრის გარდაქმნა, გვამღევს სხვა  $g(s)$  ფუნქციას ნახ. 5.1



ნახ. 5.1. ა)  $y = f(x)$  ფუნქცია და მასთან დაკავშირებული მხებები; ბ) ლეჟანდრის გარდაქმნის აგება  $g(s)$

ჩვენ ვხედავთ, რომ  $g(s)$  წარმოადგენს უდიდეს მანძილს ვერტიკალის გასწვრივ  $y = f(x)$  ფუნქციის გრაფიკსა და  $y = sx$  წრფეს შორის, ანუ,

$$g(s) = sx - f(x) = G(s, x(s)). \quad (5.50)$$

რადგან  $x(s)$  წერტილი განისაზღვრება მაქსიმუმის პირობებიდან,

$$\frac{\partial G}{\partial x} = s - f'(x) = 0. \quad (5.51)$$

ასე, რომ ახალი  $s$  ცვლადი წარმოადგენს,  $f(x)$  ფუნქციის მხეზის დახრის კუთხეს  $s = f'(x)$ .

განვიხილოთ, მექანიკური ინტერპრეტაცია. ვთქვათ, გვაქვს ჰამილტონიანი  $y = H(p)$  ზემოთმოყვანილი ალგორითმით მივიღებთ, რომ ახალ  $L(s)$  ფუნქციას აქვს სახე

$$L(s) = sp - H(p). \quad (5.52)$$

ამ შემთხვევაში, ახალი ცვლადი  $s = \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$ , ასე, რომ ლეჟანდრის გარდაქმნა ამ შემთხვევაში, შეგვიძლია გადავწეროთ ფორმით

$$L(\dot{q}) = \dot{q}p - H(p). \quad (5.53)$$

ეს მაგალითი არის, ჩვენს მიერ უკვე განხილული ფორმულების ნათელი ილუსტრაცია:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, t); \quad (5.54)$$

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t). \quad (5.55)$$

## 5.9. კლასიკური მექანიკის გეომეტრია

ტენზორულ ალგებრაში  $\vec{a}$  ვექტორის კომპონენტების აღსაწერად გამოიყენებენ სიმბოლურ აღნიშვნებს

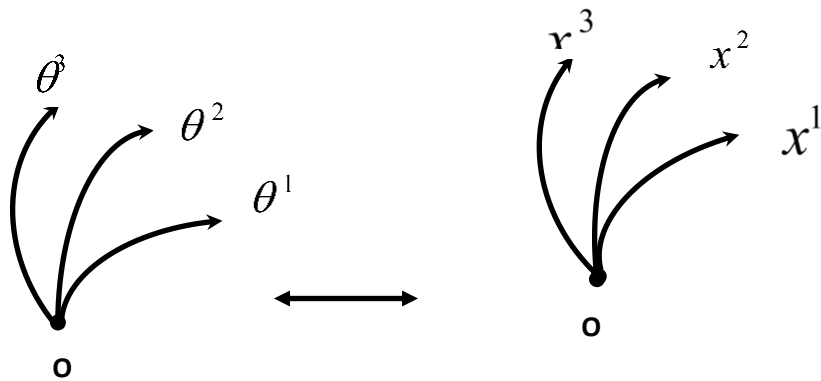
$$a_i \text{ და } a^i; \quad (5.56)$$



თუ, ინდექსები ჩაწერილია ზემოთ  $a^i$ , მაშინ ის მიუთითებს კონტრავარიანტულ კომპონენტებზე, ხოლო თუ,  $a_i$  - ქვემოთ, მაშინ კოვარიანტულ კომპონენტებზე.

ერთგანზომილებიან ტენზორს ვექტორს უწოდებენ. განვიხილოთ ვექტორის კონტრავარიანტული და კოვარიანტული კომპონენტების ცნებები.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ერთი  $\theta^i$  მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემიდან, მეორე  $x^i$  კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლის ფორმულები



ნახ. 5.2.  $\theta^i$  და  $x^i$  მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემები

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= x^1(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ x^2 &= x^2(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ x^3 &= x^3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

ეს სამი ფორმულა სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება ერთ სტრიქონში

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (5.58)$$

ჩავთვალოთ, რომ (5.58) გარდაქმნები არიან ჰომეომორფული **P** წერტილის მიდამოში. მაშინ, ცხადია რომ გარდაქმნის იაკობიანი ამ წერტილში განსხვავდება ნულისაგან, ანუ

$$J = \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \theta^i} \right\|, \quad \det J \neq 0. \quad (5.59)$$

ამ შემთხვევაში, არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემის ძალით, (5.58)  $\theta^i$  კოორდინატების მიმართ

$$\theta^i = \theta^i(x^1, x^2, x^3). \quad (5.60)$$

დავადგინოთ, თუ როგორ გარდაიქმნებიან შესაბამისი კოორდინატების დიფერენციალები ლოკალურად. (5.58) ფორმულიდან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^1} d\theta^1 + \frac{\partial x^i}{\partial \theta^2} d\theta^2 + \frac{\partial x^i}{\partial \theta^3} d\theta^3. \quad (5.61)$$

სიმბოლური აღნიშვნებით (5.61) გადაიწერება მოკლედ

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} d\theta^j. \quad (5.62)$$

ამ ფორმულაში გამოყენებულია აინშტაინის შეთანხმება შეჯამების შესახებ. ე.ი. როცა რომელიმე ჩანაწერის ერთ წევრში, ორჯერ მეორდება რომელიმე ინდექსი, მაშინ იგულისხმება რომ ამ ინდექსით ხდება შეჯამება.

**განსაზღვრება:** იმ ინდექსს, რომლითაც ხდება შეჯამება **ყრუ ინდექსი** ეწოდება. იმ ინდექსს, რომელიც ერთწევრში გვხვდება ერთხელ, თავისუფალი ინდექსი ქვია.

**განსაზღვრება:** ტენზორის თითოეულ წევრში, თავისუფალ ინდექსთა რაოდენობას, ტენზორის რანგი ეწოდება.

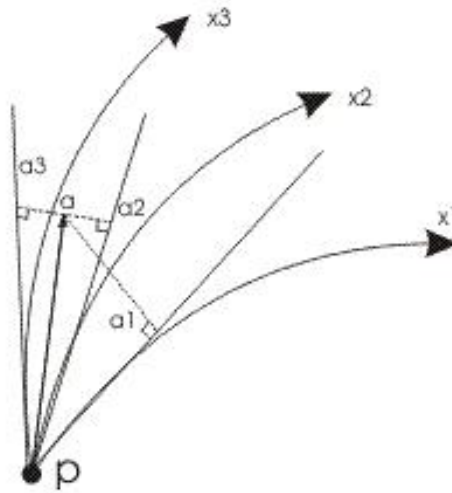
მაგალითად, ვექტორი-პირველი რანგის ტენზორია; სკალარული ფუნქცია - ნულ რანგის ტენზორია . . .

**განსაზღვრება:** P-წერტილში განსაზღვრულ  $a^i$  სიდიდეებს ეწოდებათ პირველი რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტები, თუ, კოორდინატთა სისტემის შეცვლისას, ისინი

გარდაიქმნებიან, ისევე, როგორც გარდაქმნის ფორმულების დიფერენციალები (5.62) ანუ,

$$a'^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} a^j. \quad (5.63)$$

იმისათვის, რომ გავარკვიოთ ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული შინაარსი, ავაგოთ მრუდწირული კოორდინატთა სისტემა P-წერტილში ნახ.5.3, სადაც მოდებულია ეს ვექტორი



ნახ. 5.3.  $\vec{a}$  ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

გავავლოთ მრუდწირული  $x^i$  ღერძების მხებები P წერტილში. მაშინ  $\vec{a}$  ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტები წარმოადგენენ მის ორთოგონალურ პროექციებს შესაბამისი მრუდწირული ღერძების მხებების მიმართულებებზე, რომლებიც გავლებულია P წერტილში.

განვიხილოთ ოპერატორი

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (5.64)$$

ახალ  $y$  კოორდინატებზე გადასვლას მივყავართ ფორმულამდე

$$\xi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad (5.65)$$

სადაც

$$\bar{\xi}_j = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \quad (5.66)$$

როგორც ვხედავთ,  $\xi_i$  კომპონენტები გარდაიქმნებიან როგორც კონტრავარიანტული ტენზორის კომპონენტები.

ეხლა განვიხილოთ პირველი რანგის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტები. ამისათვის, დაგვჭირდება  $\varphi$  ფუნქციის გრადიენტის გარდაქმნის ფორმულების შესწავლა. თუ მოცემული გვაქვს  $\varphi(x^1, x^2, x^3)$  სკალარული ფუნქცია, მაშინ მისი გრადიენტი სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება შემდეგნაირად  $\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$ . ცხადია რომ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i}. \quad (5.67)$$

**განსაზღვრება:** P წერტილში განსაზღვრულ  $a_i$  სიდიდეებს ეწოდებათ პირველი რანგის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტები, თუ კოორდინატთა მრუდწირული ღერძების გარდაქმნისას, ისინი გარდაიქმნებიან, როგორც სკალარული ფუნქციის გრადიენტის კომპონენტები

$$a'_i = \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} a_j. \quad (5.68)$$

როგორც ვნახეთ, განზოგადებული იმპულსები ქმედების გრადიენტებს წარმოადგენენ, ამიტომ ცხადია, რომ განზოგადებული იმპულსები კოვარიანტულ ვექტორს წარმოადგენენ.

**P.S.** ოპერატორი (5.64) წარმოადგენს მხევი ვექტორის მაგალითს. მოცემულ  $x = X$  წერტილში, რომელიმე სკალარულ  $h = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ფუნქციაზე ამ ოპერატორის მოქმედების შედეგია მოცემული ფუნქციის ზედაპირის მხევი მოცემულ წერტილში

$$\xi h = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial h}{\partial x_i} I_{x=X}. \quad (5.69)$$

განვიხილოთ ახლა, რაიმე წირი  $\varphi = \varphi(s)$ , რომელიც პარამეტრიზებულია  $s$  ცვლადით, ისე, რომ გადის მოცემულ  $x = X$  წერტილზე, როცა  $s = 0$ . თუ,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ , ფუნქციის კოორდინატული წარმოდგენაა  $\varphi_i(s) = x_i$ , მაშინ ნებისმიერი სიდიდის წარმოებული  $\varphi(s)$  -ის გასწვრივ, მოცემულ  $x = X$  წერტილში განისაზღვრება მხები ვექტორით

$$\xi = \frac{d}{ds} I_{s=0} = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} I_{x=X}, \quad (5.70)$$

სადაც

$$\xi_i = \frac{d\varphi_i}{ds} I_{s=0}. \quad (5.71)$$

ცხადია, რომ თუ  $\varphi(s)$  მოცემული  $q(t)$  სისტემის ტრაექტორიაა, სადაც  $s$  დროა, მაშინ  $\xi_i$  სხვა არაფერია, თუ არა  $\dot{q}_i(t)$  სიჩქარის კომპონენტები. აქედან გამომდინარეობს სიჩქარის ვექტორის კონტრავარიანტულობა.

მოცემულ  $x = X$  წერტილზე შეიძლება გაიაროს მრავალმა სხვადასხვა ტრაექტორიამ და ყოველივე მათგანს შეესაბამება თავისი მხები ვექტორი. ამ ვექტორების ერთობლიობა მოცემულ წერტილში ქმნის ვექტორულ სივრცეს, რომელსაც მხები სივრცე ეწოდება. ამ სივრცეს აღნიშნავენ სიმბოლოურად  $TM_x$ , სადაც  $M$  მრავალსახეობაა, ანუ სისტემის მიერ დაკავებული  $n$  განზომილებიანი სივრცე. მხები განფენის სივრცე აერთიანებს ყველა მხებ სივრცეს, მრავალსახეობის ყველა წერტილისათვის და მას აღნიშნავენ როგორც  $TM$ .

**P.S. 1. ლაგრანჟის ფორმალიზმში,** სისტემის მდგომარეობა ხასიათდება განზოგადებული  $q_i$  კოორდინატებითა და  $\dot{q}_i$  სიჩქარეებით. ამ დროს ნებისმიერ  $Q$  წერტილში, დროის ნებისმიერ მომენტში გვაქვს მხები ვექტორი

$$\xi = \sum_i \dot{q}_i(t) \frac{\partial}{\partial q_i} I_{q=Q}. \quad (5.72)$$

ასე, რომ სისტემის მდგომარეობა შეიძლება დავახასიათოთ წერტილის მეშვეობით მხები განფენის სივრცეში. ლაგრანჟიანი კი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მხები განფენის სივრცის გადასახვა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე, ანუ,  $L: TM \rightarrow \mathbb{R}$ .

2. ჰამილტონურ ფორმალიზმში მოძრაობა აღიწერება განზოგადებული  $q_i$  კოორდინატებითა და მათი შეუღლებული  $p_i$  იმპულსებით. შესაბამისი ფაზური სივრცე წარმოადგენს სიმპლექტიკურ სივრცეს და ხასიათდება რიგი თვისებებით. ჰამილტონური სისტემების განსაკუთრებული თვისებაა, ფაზური მოცულობის შენარჩუნება ჰამილტონური ნაკადის ზემოქმედებისას.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. ლაგრანჟის ფორმალიზმი და ლაგრანჟის განტოლების გამოყვანა;
2. ჰამილტონის ფორმალიზმი და ჰამილტონის განტოლებების გამოყვანა;
3. ჰუსონის ფრჩხილების თვისებები;
4. ლაგრანჟიანისა და ჰამილტონიანის გეომეტრიული შინაარსი;
5. ლეჟანდრის გარდაქმნის გეომეტრიული აზრი.

## VI თავი. მექანიკური ძაბვის თეორია

უწყვეტ გარემოში ძაბვის დასახასიათებლად, საჭიროა განვიხილოთ რამდენიმე დამხმარე ცნება.

განვიხილოთ ერთგვაროვანი, იზოტროპული უწყვეტი გარემო.

**განსაზღვრება.** ერთგვაროვანი ეწოდება მასალას, რომლის ყველა წერტილს ერთნაირი თვისება აქვს (ერთი მასალისგან შედგება).

ცხადია, რომ თუ მასალა სხვადასხვა ადგილებზე შეიცავს სხვადასხვა ნივთიერებების ჩანართს, ის არ იქნება ერთგვაროვანი.

**განსაზღვრება.** მასალას ეწოდება **იზოტროპული** მოცემული თვისების მიმართ, თუ ეს თვისება თანაბრად ვრცელდება ყველა მიმართულებით. მასალას ეწოდება **ანიზოტროპული** მოცემული თვისების მიმართ, თუ ეს თვისება სხვადასხვანაირად ვლინდება მიმართულების არჩევის მიხედვით.

ერთგვაროვანი, უწყვეტი გარემოს მოცემულ წერტილში,  $V$  მოცულობის ერთეულში მოქცეული მასალის  $m$  რაოდენობის რიცხობრივ მაჩვენებლად განიხილება  $\rho$  **სიმკვრივის** ცნება. აქ უნდა აღვნიშნოთ, რომ წერტილის ქვეშ ჩვენ გვესმის მასალის მცირე ნაწილაკი.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \quad (6.1)$$

მასური **სიმკვრივის**  $\rho$  მაჩვენებელი სკალარული სიდიდეა და მისი განზომილებაა  $\frac{\text{კილოგრამი}}{\text{მეტრი}^3} = \frac{\text{კგ}}{\text{მ}^3}$ .

სხეულთა ურთიერთქმედების რიცხობრივად დასახასიათებლად შემოდის **ძალის** ცნება. ჩვენ განვიხილავთ **მასურ** და **ზედაპირულ** ძალებს.

**განსაზღვრება.** მასური ეწოდება ძალას, რომელიც მოქმედებს მოცემული სხეულის(მასის) ყველა წერტილზე.

**მაგალითი.** მასური ძალებია გრავიტაციული და იერციის ძალები.

მასურ ძალებს აღვნიშნავთ  $b_i$  სიმბოლოთი (ძალა რომელიც მოქმედებს მასის ერთეულზე ანუ მისი განზომილებაა  $\frac{\text{ნიუტონი}}{\text{კილოგრამი}} = \frac{\text{ნ}}{\text{კგ}}$ )

ან  $p_i$  სიმბოლოთი (ძალა რომელიც მოქმედებს მოცულობის ერთეულზე ანუ მისი განზომილებაა  $\frac{\text{ნიუტონი}}{\text{მეტრი}^3} = \frac{\text{ნ}}{\text{მ}^3}$ ). ეს ძალები ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი ფორმულით:

$$\rho b_i = p_i. \quad (6.2.)$$

**განსაზღვრება.** იმ ძალებს, რომლებიც მოქმედებენ საზღვრის ან რაიმე შიდა ზედაპირის ელემენტზე, **ზედაპირულ ძალებს** უწოდებენ.

**მაგალითი.** ზედაპირული ძალის მაგალითია ორი სხეულის შეხებისას წარმოქმნილი კონტაქტური ურთიერთქმედების ძალები.

ზედაპირულ ძალას აღნიშნავენ  $f_i$  სიმბოლოთი (ერთეულ ფართზე მოსული ძალაა ანუ მისი განზომილებაა  $\frac{\text{ნიუტონი}}{\text{მეტრი}^2} = \frac{\text{ნ}}{\text{მ}^2}$ ).

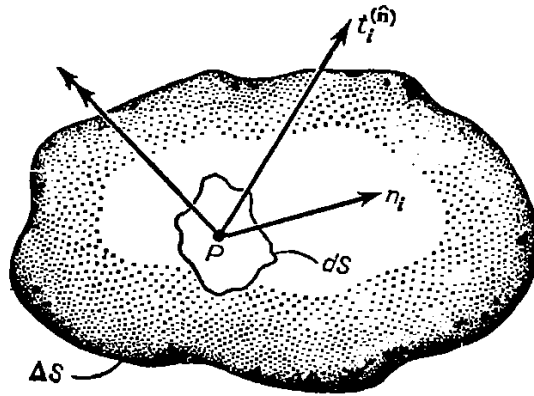
### 6.1. მექანიკური ძაბვის ტენზორი

განვიხილოთ უწყვეტი გარემო (მასალა), რადგან ძალის მოქმედება მასალის შიგნით, წერტილიდან წერტილს გადაეცემა, თითოეულ წერტილში გვაქვს გარკვეული ზემოქმედება. მის დასახასიათებლად, სხეულის შიგნით გამოვყოთ ამწერტილზე გამავალი რაიმე  $\Delta S$  ზედაპირი, რომლის ნორმალური მიმართველი ვექტორიც აღვნიშნოთ  $\mathbf{n}$  ასოთი. ცხადია, რომ იმის მიხედვით, თუ როგორაა მიმართული  $\Delta S$  ზედაპირი გვექნება შესაბამისი საშუალო ძალა  $\Delta f_i$ . მოცემულ  $P$  წერტილში ზემოქმედების დასახასიათებლად, განვიხილოთ კოშის დამაბულობის პრინციპი, რომლის თანახმად:  $\Delta S$  ზედაპირის ფართის ერთეულზე მოქმედი საშუალო  $\Delta f_i$  ძალის ფარდობის ზღვარი არსებობს, როცა  $\Delta S$  მიისწრაფის ნულისაკენ და საშუალო ძალის მომენტის ზღვარი კი  $P$  წერტილის მიმართ ნულისკენ მიისწრაფის ანუ გვაქვს შემდეგი ტოლობები:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S} = \frac{df_i}{dS} = t_i^{(n)}. \quad (6.3)$$

$t_i^{(n)}$  ვექტორს ძაბვის ვექტორს უწოდებენ ნახ. 3.1. რა თქმა უნდა არსებობს მოდელები, სადაც მომენტების ჯამს მიეწერება გარკვეული არანულოვანი მნიშვნელობა და იგება შესაბამისი მომენტური თეორიები, თუმცა, ჩვენ ასეთ თეორიებს არ განვიხილავთ.



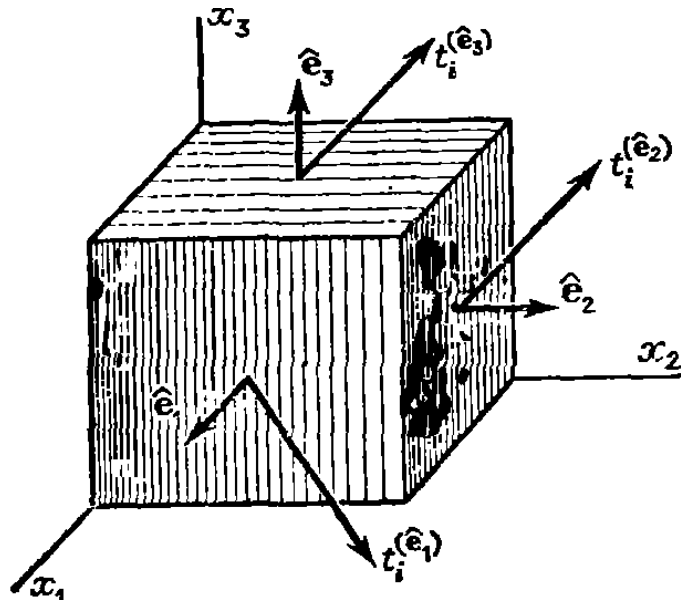


ნახ. 6.1. კოშის პრინციპი და ძაბვის ვექტორი

ამრიგად, კოშის პრინციპის თანახმად, უწყვეტი გარემოს ნებისმიერ  $P$  წერტილს და ამ წერტილზე გამავალ ზედაპირს, რომლის მოგეზულობას ახასიათებს მისი ერთეულოვანი სიგრძის  $\mathbf{n}$  ნორმალი, შეესაბამება ძაბვის  $t_i^{(n)}$  ვექტორი. მოცემულ წერტილზე გამავალი ყველა შესაძლო ზედაპირების ერთობლიობას შეესაბამება  $t_i^{(n)}$  ძაბვის ვექტორებისა და შესაბამისი  $\mathbf{n}$  ნორმლების სიმრავლე, რომლებიც განსაზღვრავენ ამ წერტილში დამაბულ მდგომარეობას. აღმოჩნდა, რომ მოცემულ წერტილში დამაბული მდგომარეობის დასახასიათებლად, არაა აუცილებელი ყველა შესაძლო  $t_i^{(n)}$ ;  $\mathbf{n}$  წყვილების განხილვა. მოცემულ წერტილში დამაბული მდგომარეობის დასახასიათებლად, საკმარისია ამ წერტილზე გამავალ სამ ურთიერთპერპენდიკულარულ ზედაპირზე გვექონდეს მოცემული ძაბვის  $t_i^{(n)}$  ვექტორი.

მოცემულ წერტილში დამაბული მდგომარეობის დასახასიათებლად, ავირჩიოთ ამ წერტილზე გამავალი და საკოორდინატო ღერძების პერპენდიკულარული სამი სიბრტყე ნახ. 6.2.

საკოორდინატო სიბრტყეების პარალელურ ზედაპირებზე მოქმედი ძაბვის ვექტორები გავშალოთ საბაზისო ვექტორთა სისტემის მიმართ. მაშინ მივიღებთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:



ნახ. 6.2. წერტილში ძაბვის შესწავლის სქემა

$$\begin{cases} \mathbf{t}^{(e_1)} = t_1^{(e_1)} \mathbf{e}_1 + t_2^{(e_1)} \mathbf{e}_2 + t_3^{(e_1)} \mathbf{e}_3 = t_i^{(e_1)} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{t}^{(e_2)} = t_1^{(e_2)} \mathbf{e}_1 + t_2^{(e_2)} \mathbf{e}_2 + t_3^{(e_2)} \mathbf{e}_3 = t_i^{(e_2)} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{t}^{(e_3)} = t_1^{(e_3)} \mathbf{e}_1 + t_2^{(e_3)} \mathbf{e}_2 + t_3^{(e_3)} \mathbf{e}_3 = t_i^{(e_3)} \mathbf{e}_i \end{cases} \quad (6.4)$$

უწყვეტი გარემოს წერტილში განსაზღვრული ძაბვის ვექტორის ცხრა კომპონენტი, წარმოადგენს ძაბვის მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტებს:

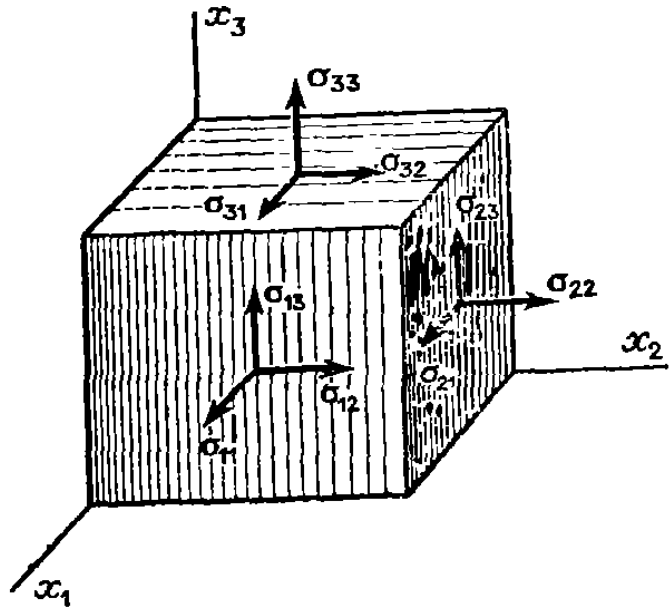
$$t_j^{(e_i)} = \sigma_{ij}. \quad (6.5)$$

ძაბვის ტენზორის მატრიცულ წარმოდგენას აქვს შემდეგი სახე:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

ნახ. 6.3 მოცემულია ძაბვის ტენზორის კომპონენტების მიმართულებები.  $\sigma_{11}$ ;  $\sigma_{22}$ ;  $\sigma_{33}$  კომპონენტებს ნორმალური ძაბვები ეწოდებათ, რადგან ისინი მიმართული არიან შესაბამისი ზედაპირის ნორმალური მიმართულებით, ხოლო  $\sigma_{12}$ ;  $\sigma_{13}$ ;  $\sigma_{21}$ ;  $\sigma_{23}$ ;  $\sigma_{31}$ ;  $\sigma_{32}$  კომპონენტებს მხები ძაბვები (ძვრის ძაბვები) ეწოდებათ.

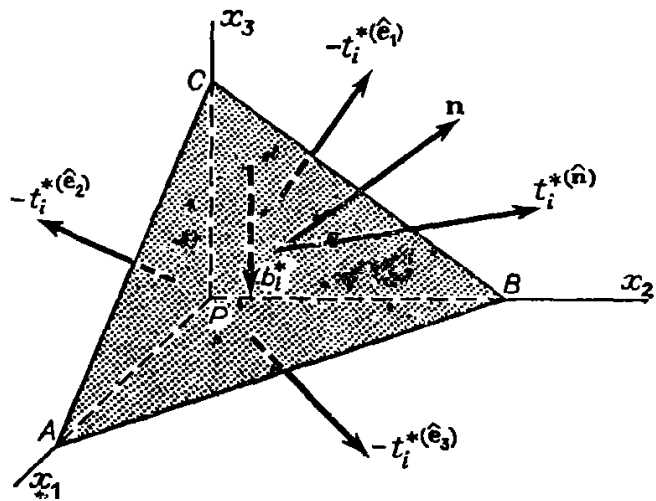
$\sigma_{ij}$  არის ძალა, რომელიც მიმართულია  $j$ -ური ღერძის მიმართულებით და მოქმედებს  $i$ -ური ღერძის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში.



ნახ. 6.3. ძაბვის ტენზორის კომპონენტების მიმართულებები

## 6.2. კავშირი ძაბვის ტენზორსა და ძაბვის ვექტორს შორის

სხეულის ნებისმიერ  $P$  წერტილში, კავშირი ძაბვის ტენზორის  $\sigma_{ij}$  კომპონენტებსა და ამ წერტილზე გამავალ ნებისმიერი მოგეზულობის ზედაპირზე მოქმედ ძაბვის  $t_i^{(n)}$  ვექტორს შორის, შეიძლება ვიპოვოთ ძალთა წონასწორობის ან მოძრაობის რაოდენობის განტოლებიდან იმ ელემენტარული ტეტრაედრისათვის, რომლის წვეროც მოთავსებულია  $P$  წერტილში. ტეტრაედრის ფუძედ ავირჩიოთ ზედაპირი რომლის ნორმალია  $n_i$ ; ხოლო დანარჩენი სამი წახნაგი პერპენდიკულარულია კოორდინატთა ღერძების ნახ. 6.4.



ნახ. 6.4. უწყვეტი გარემოს ელემენტარული ტეტრაედრი

ვთქვათ, ტეტრაედრის  $ABC$  ფუძის ფართობია  $dS$ . მაშინ გვერდითი წახნაგების ფართობები, როგორც ფუძის გეგმილები კოორდინატთა სიბრტყეებზე იქნება:  $CPB$  წახნაგისათვის  $dS_1 = dSn_1$ ;  $APC$  წახნაგისათვის  $dS_2 = dSn_2$  და  $BPA$  წახნაგისათვის  $dS_3 = dSn_3$  ანუ

$$dS_i = dS(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) = dS \cos(\mathbf{n}; \mathbf{e}_i) = dSn_i. \quad (6.7)$$

თუ გავითვალისწინებთ ტეტრაედრზე მოქმედ ძალებს, რაც აღნიშნულია ნახ. 6.4-ზე და აგრეთვე, მასურ ძალებს, მაშინ მივიღებთ ტეტრაედრის წონასწორობის განტოლებას:

$$t_i^{(n)} dS - t_i^{(e_1)} dS_1 - t_i^{(e_2)} dS_2 - t_i^{(e_3)} dS_3 + \rho b_i^* dV = 0. \quad (6.8)$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა ტეტრაედრის წირითი ზომები მიისწრაფის ნულისაკენ, დავინახავთ, რომ მასური ძალები უფრო სწრაფად მცირდება ზედაპირულ ძალებთან შედარებით. მაშასადამე, (6.8) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$t_i^{(n)} dS = t_i^{(e_1)} dSn_1 + t_i^{(e_2)} dSn_2 + t_i^{(e_3)} dSn_3 = t_i^{(n_j)} n_j dS. \quad (6.9)$$

თუ (6.9) განტოლებას შევკვეცავთ  $dS$ -ზე და გავითვალისწინებთ, რომ  $t_j^{(e_i)} = \sigma_{ji}$ ; მივიღებთ, რომ

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j. \quad (6.10)$$

### 6.3. ძაბვის ტენზორის სიმეტრიულობა. უწყვეტი გარემოს წონასწორობის განტოლებები კოშის ფორმით

უწყვეტი  $V$  მოცულობის გარემოს წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მასზე მოქმედი  $t_i^{(n)}$  ზედაპირული ძალების და მასური  $b_i$  ძალების ტოლქმედი, შესაბამის ნაკრებ მომენტთან ერთად იყოს ნულის ტოლი.

ზედაპირული და მასური ძალების შეჯამებას მივყევართ შემდეგ ინტეგრალურ თანადობამდე:

$$\int_S \mathbf{t}^{(n)} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV = 0. \quad (6.11)$$

გადავწეროთ (6.11) განტოლება კომპონენტებში, მაშინ მივიღებთ რომ

$$\int_S \mathbf{t}_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dV = 0. \quad (6.12)$$

თუ (6.12) განტოლებაში შევიტანთ  $\mathbf{t}_i^{(n)}$ -ის მნიშვნელობას  $\sigma_{ji}n_j$  და ზედაპირულ ინტეგრალს გარდავქმნით გაუსის ფორმულით, მივიღებთ წონასწორობის განტოლებას ინტეგრალური ფორმით

$$\int_S \mathbf{t}_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dV = \int_S \sigma_{ji}n_j dS + \int_V \rho b_i dV = \int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i) dV = 0. \quad (6.13)$$

რადგან (6.13) განტოლება სრულდება ნებისმიერი  $V$  მოცულობისთვის, ცხადია რომ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება უნდა იყოს ნულის ტოლი ანუ უწყვეტი გარემოს წონასწორობის განტოლებას კოშის ფორმით, აქვს შემდეგი სახე:

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0. \quad (6.14)$$

განტოლება (6.14) ჩაწერილია ინდექსური ფორმით და მისი გამწვანებული ჩაწერა იძლევა შემდეგი სახის განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho b_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho b_2 = 0. \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 = 0 \end{cases} \quad (6.15)$$

კოშის პრინციპის თანახმად, ჩვენ უგულებელვყავით განაწილებული მომენტების არსებობა, მაშინ უწყვეტი გარემოს წონასწორობისათვის საჭიროა, რომ კოორდინატთა სათავის მიმართ მოდებული ძალების მომენტების ჯამიც იყოს ნულის ტოლი ანუ

$$\int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t}^{(n)} dS + \int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} dV = 0. \quad (6.16)$$

გადავწეროთ (6.16) განტოლება ინდექსურ აღნიშვნებში:

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = 0. \quad (6.17)$$

თუ (6.17) განტოლებაში შევიტანთ  $t_k^{(n)}$ -ის მნიშვნელობას  $\sigma_{pk}n_p$  მივიღებთ რომ

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = \int_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{pk} n_p dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = 0.$$

ზედაპირულ ინტეგრალს გარდავექმნით გაუსის ფორმულით, მაშინ გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{pk} n_p dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = \int_V (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{pk})_{,p} dV + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = 0.$$

გარდავექმნათ წარმოებულის გამოსახულება, მაშინ მივიღებთ:

$$\int_V (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{pk})_{,p} dV + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = \int_V \varepsilon_{ijk} [x_{j,p} \sigma_{pk} + x_j (\sigma_{pk,p} + \rho b_k)] dV = \int_V \varepsilon_{ijk} \delta_{jp} \sigma_{pk} dV = \int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0. \quad (6.18)$$

გარდაქმნებისას, ჩვენ გავითვალისწინეთ წონასწორობის განტოლებაც  $\sigma_{pk,p} + \rho b_k = 0$ .

ამრიგად, მომენტების ნულთან ტოლობამ მოგვცა შემდეგი განტოლება:

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0. \quad (6.19)$$

ამ განტოლებიდან კი ცხადია, რომ

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (6.20)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ მექანიკური ძაბვის ტენზორი სიმეტრიულია.

#### 6.4. მთავარი ძაბვები და ძაბვის ტენზორის ინვარიანტები

$P$  წერტილში ძაბვის ტენზორის კომპონენტები მოიცემა  $(\sigma_{ij})$  მატრიცით, ხოლო ძაბვის  $t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$  ვექტორი შეესაბამება  $n_j$  ვექტორს ანუ ძაბვის ტენზორის ზემოქმედებით უწყვეტი გარემოს ნებისმიერ წერტილში მოდებულ  $n_j$  ვექტორს შეესაბამება გარკვეული მიმართულების  $t_i^{(n)}$  ძაბვის ვექტორი.

**განსაზღვრება.** უწყვეტ გარემოში მოცემული  $P$  წერტილისათვის, ისეთ  $n_i$  მიმართულებებს, რომელთათვისაც ძაბვის  $t_i^{(n)}$  ვექტორი კოლინეარულია  $n_i$  მიმართულების, მთავარი მიმართულებები (მთავარი ღერძები) ეწოდებათ.

მთავარი მიმართულებებისათვის ადგილი აქვს შემდეგ კოლინეარობის პირობას:

$$t_i^{(n)} = \sigma n_i; \quad (6.21)$$

სადაც  $\sigma$  რიცხვებს მთავარ ძაბვებს უწოდებენ.

როგორც უკვე ვიცით,  $t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$  და  $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$  მაშასადამე,  $t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$ . ასევე, ვიცით რომ  $n_i = \delta_{ij} n_j$ ; თუ შევიტანთ ამ გამოსახულებებს (6.21) განტოლებაში, მივიღებთ რომ

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma \delta_{ij} n_j; \quad (6.22)$$

თუ (6.22) განტოლებაში მარჯვენა მხარეს გადმოვიტანთ ტოლობის მარცხენა მხარეს და გავიტანთ საერთო მამრავლს, გვექნება შემდეგი ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემა, მთავარი მიმართულებებისა და მთავარი მნიშვნელობების საპოვნელად:

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0. \quad (6.23)$$

(6.23) განტოლებათა სისტემა შეიცავს ოთხ უცნობს, სამი მიმართული ვექტორის კოორდინატები  $n_j$  და ერთი მთავარი ძაბვა  $\sigma$ .

ამ განტოლებას ყოველთვის აქვს ტრივიალური ანუ ნულოვანი ამონახსნი, მაგრამ ჩვენ მხოლოდ არატრივიალური ამონახსნები გვინტერესებს. არატრივიალური ამონახსნების არსებობისათვის კი აუცილებელია და საკმარისი ამ სისტემის მთავარი დეტერმინანტის ნულთან ტოლობა ანუ ადგილი აქვს შემდეგ მახასიათებელ განტოლებას:

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0. \quad (6.24)$$

ეს განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ გაშლილად:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (6.25)$$

(6.25) განტოლების გაშლა გვაძლევს მახასიათებელ განტოლებას შემდეგი ფორმით:

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0; \quad (6.26)$$

სადაც

$$J_1 = \sigma_{ii}; J_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ij}); J_3 = \det(\sigma_{ij}). \quad (6.27)$$

$J_1$ ;  $J_2$  და  $J_3$  კოეფიციენტებს ძაბვის ტენზორის ინვარიანტები ეწოდებათ. რადგან ძაბვის ტენზორი სიმეტრიულია, მის მახასიათებელ განტოლებას ყოველთვის აქვს ნამდვილი სამი ფესვი.

(6.26) განტოლების  $\sigma_1$ ;  $\sigma_2$  და  $\sigma_3$  ფესვებს, მთავარ ძაბვებს უწოდებენ. თითოეულ მათგანს შეესაბამება  $n_j^{(k)}$  მთავარი მიმართულება (მთავარი ღერძი), რომელთა საპოვნელადაც უნდა ამოიხსნას შესაბამისი განტოლებათა სისტემა:

$$(\sigma_{ij} - \sigma^{(k)}\delta_{ij})n_j^{(k)} = 0. \quad (6.28)$$

შედეგის ნორმირებისათვის უმატებენ ხოლმე პირობას:  $n_i n_i = 1$ .

### 6.5. ძაბვის ტენზორის დაშლა სფერულ და დევიატორულ ნაწილებად

ზოგჯერ, მიზანშეწონილია ძაბვის ტენზორის დაშლა ორ შესაკრებად, რომელთაგან ერთს ეწოდება სფერული (ჰიდროსტატიკური) ნაწილი, ხოლო მეორეს - დევიატორი.

**განსაზღვრება.** ძაბვის ტენზორის სფერული ნაწილი ეწოდება ტენზორს, რომლის კომპონენტებისაგან შემდგარი მატრიცა არის დიაგონალური და დიაგონალის ელემენტები უდრის მოცემული ტენზორის კვალის მესამედს ანუ  $\sigma_M = \frac{\sigma_{ii}}{3}$  საშუალო ნორმალური ძაბვაა.

ცხადია, რომ ძაბვის ტენზორის სფერულ ნაწილს აქვს შემდეგი კომპონენტების მატრიცა:

$$\sigma_M \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

შესაბამის დევიატორს აქვს კომპონენტების შემდეგი სახის მატრიცა:

$$(s_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_M & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_M & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_M \end{pmatrix}. \quad (6.30)$$



სხვანაირად, რომ ვთქვათ ძაბვის ტენზორის კომპონენტები შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით:

$$\sigma_{ij} = \sigma_M \delta_{ij} + s_{ij}. \quad (6.31)$$

### 6.6. ძაბვის ვექტორის დაშლა ნორმალურ და მხებ მდგენელებად

ზოგჯერ, საჭიროა ძაბვის ვექტორის დაშლა მოცემული ზედაპირის ნორმალურ და მხებ მდგენელებად ნახ. 6.5. განვიხილოთ ძაბვის  $t_i^{(n)}$  ვექტორი. ძაბვის ვექტორი მოქმედებს მოცემული  $n$  ნორმალის მქონე ზედაპირზე, თუმცა მისი მიმართულება საზოგადოდ, არაა ზედაპირის მართობული. ნორმალური ძაბვის ვექტორის მისაღებად, ძაბვის ვექტორი უნდა დავაგეგმილოთ ნორმალის მიმართულებაზე ანუ ზედაპირის მიმართ ნორმალის გასწვრივ ძაბვის ვექტორის მდგენელი იქნება:

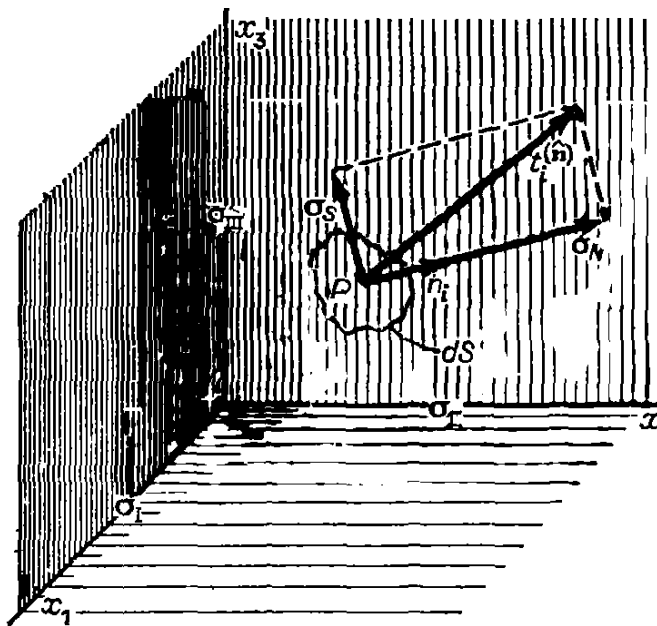
$$\sigma_N = t_i^{(n)} n_i. \quad (6.32)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j; \quad (6.33)$$

მაშინ, მივიღებთ რომ ძაბვის ვექტორის ნორმალური მდგენელი იქნება:

$$\sigma_N = \sigma_{ij} n_j n_i. \quad (6.34)$$



ნახ. 6.5. ძაბვის ვექტორის დაშლა ზედაპირის ნორმალურ და მხებ მდგენელებად

მაშინ, ძაბვის ვექტორის მხები მდგენელის კვადრატი იქნება:

$$\sigma_S^2 = t_i^{(n)} t_i^{(n)} - \sigma_N^2. \quad (6.35)$$

თუ განვიხილავთ ძაბვის ვექტორს, ძაბვის ტენზორის მთავარი მიმართულებების კოორდინატთა სისტემაში ნახ. 6.5, მაშინ მივიღებთ რომ

$$t_1^{(n)} = \sigma_1 n_1; \quad t_2^{(n)} = \sigma_2 n_2; \quad t_3^{(n)} = \sigma_3 n_3; \quad (6.36)$$

მაშინ (6.32) ფორმულიდან, გვექნება ძაბვის ვექტორის ნორმალური მდგენელი შემდეგი ფორმით:

$$\sigma_N = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2. \quad (6.37)$$

შესაბამისად, მხები მდგენელის კვადრეტი იქნება შემდეგი სახის:

$$\sigma_S^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2. \quad (6.38)$$

**ამოცანები ამოხსნებით.**

**6.1.** ძაბვის ტენზორს მოცემულ  $P$  წერტილში შეესაბამება კომპონენტების  $A$  მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ იპოვეთ } P \text{ წერტილში ძაბვის } t_i^{(n)} \text{ ვექტორი იმ}$$

ზედაპირისათვის, რომლის ნორმალიცაა  $\mathbf{n} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$ .

**ამოხსნა.** ძაბვის ვექტორი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

მაშასადამე, ძაბვის ვექტორი იქნება:  $\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{4}{3}\mathbf{j}$ .

**6.2.** უწყვეტი გარემოს ნებისმიერ წერტილში დამაბული მდგომარეობა მოიცემა ძაბვის ტენზორის კომპონენტების შემდეგი მატრიცით:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 3x_1 x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}. \text{ იპოვეთ ძაბვის ვექტორი } P(2; 1; \sqrt{3})$$

წერტილში, ამ წერტილში ცილინდრული  $x_2^2 + x_3^2 = 4$  ზედაპირისადმი გავლებული მხები ფართისათვის.

**ამოხსნა.** ძაბვის ტენზორის კომპონენტების მატრიცას  $P(2; 1; \sqrt{3})$  წერტილში ექნება სახე:

$$(\sigma_{ij}^{(P)}) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

ცილინდრული ზედაპირისადმი ნორმალური ვექტორის საპოვნელად ვიპოვოთ ამზედაპირის გრადიენტი:

$grad\varphi = grad(x_2^2 + x_3^2 - 4) = (0; 2x_2; 2x_3)$ . ამ ვექტორის მნიშვნელობა  $P(2; 1; \sqrt{3})$  წერტილში ექნება:  $(0; 2; 2\sqrt{3})$ . მაშინ, მისი მიმართველი ერთეულოვანი ვექტორი იქნება:  $(0; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ . მაშასადამე, უკვე შეგვიძლია ვიპოვოთ საძიებელი ძაბვის ვექტორის კომპონენტებიც:

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

ძაბვის ვექტორი იქნება:  $\frac{5}{2}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}$ .

**6.3.** როგორი კომპონენტები უნდა ქონდეს მასური ძალის ვექტორს, რომ სისტემა იყოს წონასწორობაში, თუ ძაბვის ტენზორის კომპონენტები მოიცემა შემდეგი მატრიცით:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}?$$

**ამოხსნა.** წონასწორობის განტოლებათა სისტემაში

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho b_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho b_2 = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 = 0 \end{cases}$$

თუ გავითვალისწინებთ მოცემული ტენზორის სახეს, მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} 3x_2 + 10x_2 + 0 + \rho b_1 = 0 \\ 0 + 0 + 2 + \rho b_2 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + \rho b_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = -\frac{13x_2}{\rho} \\ b_2 = -\frac{2}{\rho} \\ b_3 = 0 \end{cases}.$$

**6.4.** ძაბვის ტენზორის კომპონენტებს მოცემულ წერტილში  $Ox_1x_2x_3$  დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში აქვს კომპონენტების შემდეგი მატრიცა:

$A = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . იპოვეთ მთავარი ძაბვები და ძაბვის ტენზორის მთავარი ღერძების მიმართულებები  $Ox'_1x'_2x'_3$  სისტემისთვის.

**ამოხსნა.** მთავარი ძაბვები განისაზღვრება მახასიათებელი განტოლები-დან:

$$\begin{vmatrix} 3 - \sigma & 1 & 1 \\ 1 & -\sigma & 2 \\ 1 & 2 & -\sigma \end{vmatrix} = 0. \quad \text{ლაპლასის თეორემიდან გამომდინარე,}$$

დეტერმი-ნანტი გავშალოთ პირველი სტრიქონის მიხედვით:

$$(3 - \sigma)(\sigma^2 - 4) - (-\sigma - 2) + (2 + \sigma) = (\sigma + 2)(\sigma - 1)(\sigma - 4) = 0.$$

მაშასადამე, მთავარი ძაბვებია  $\sigma_1 = -2$ ;  $\sigma_2 = 1$ ;  $\sigma_3 = 4$ .

თითოეული  $\sigma_{(k)}$  მთავარი ძაბვისათვის, ვიპოვოთ შესაბამისი მთავარი  $n_j^{(k)}$  მიმართულება ანუ ამოვხსნათ შესაბამისი განტოლებათა სისტემა:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{(k)}\delta_{ij})n_j^{(k)} = 0.$$

$\sigma_1 = -2$  ამ მთავარი ძაბვის შესაბამისი მთავარი ღერძის საპოვნელად გვექნება შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{pmatrix} 3 - \sigma_1 & 1 & 1 \\ 1 & -\sigma_1 & 2 \\ 1 & 2 & -\sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^{(1)} \\ n_2^{(1)} \\ n_3^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ანუ} \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^{(1)} \\ n_2^{(1)} \\ n_3^{(1)} \end{pmatrix} = 0;$$

გადავწეროთ ეს მატრიცული განტოლება წრფივ განტოლებათა სისტემის სახით:

$$\begin{cases} 5n_1^{(1)} + n_2^{(1)} + n_3^{(1)} = 0 \\ n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} + 2n_3^{(1)} = 0 \\ n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} + 2n_3^{(1)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5n_1^{(1)} + n_2^{(1)} + n_3^{(1)} = 0 \\ n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} + 2n_3^{(1)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1^{(1)} = 0 \\ n_2^{(1)} = -n_3^{(1)} \end{cases}$$

რადგან ვეძებთ მთავარი ღერძის მიმმართველ ვექტორს (მისი სიგრძე ერთეულოვანია), გვაქვს დამატებითი პირობა  $n_i n_i = 1$ , მაშინ  $n_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  და  $n_3^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  ანუ გვაქვს შესაბამისი მთავარი ღერძის მიმმართველი ვექტორი:  $(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$ .

ანალოგიურად ვიპოვოთ  $\sigma_2 = 1$  მთავარი ძაბვის შესაბამისი მთავარი ღერძის მიმმართველი ვექტორი. გვექნება განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} 2n_1^{(2)} + n_2^{(2)} + n_3^{(2)} = 0 \\ n_1^{(2)} - n_2^{(2)} + 2n_3^{(2)} = 0 \\ n_1^{(2)} + 2n_2^{(2)} - n_3^{(2)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1^{(2)} = -n_3^{(2)} \\ n_1^{(2)} = -n_2^{(2)} \end{cases}.$$

რადგან ვეძებთ მთავარი ღერძის მიმმართველ ვექტორს (მისი სიგრძე ერთეულოვანია), გვაქვს დამატებითი პირობა  $n_i n_i = 1$ , მაშინ  $n_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $n_2^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  და  $n_3^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  ანუ გვაქვს შესაბამისი მთავარი ღერძის მიმმართველი ვექტორი:  $(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}})$ .

ანალოგიურად ვიპოვოთ  $\sigma_3 = 4$  მთავარი ძაბვის შესაბამისი მთავარი ღერძის მიმმართველი ვექტორი. გვექნება განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} -n_1^{(3)} + n_2^{(3)} + n_3^{(3)} = 0 \\ n_1^{(3)} - 4n_2^{(3)} + 2n_3^{(3)} = 0 \\ n_1^{(3)} + 2n_2^{(3)} - 4n_3^{(3)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_2^{(3)} = n_3^{(3)} \\ n_1^{(3)} = 2n_2^{(3)} \end{cases}.$$

რადგან ვეძებთ მთავარი ღერძის მიმმართველ ვექტორს (მისი სიგრძე ერთეულოვანია), გვაქვს დამატებითი პირობა  $n_i n_i = 1$ , მაშინ  $n_1^{(3)} = -\frac{2}{\sqrt{6}}$ ,  $n_2^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$  და  $n_3^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$  ანუ გვაქვს შესაბამისი მთავარი ღერძის მიმმართველი ვექტორი:  $(-\frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}})$ .

**6.5.** აჩვენეთ, რომ თუ კოორდინატა  $Ox_1x_2x_3$  სისტემიდან გადავალთ მთავარი მიმართულებების  $Ox'_1x'_2x'_3$  სისტემაზე, მაშინ წინა ამოცანის

ტენზორის კომპონენტების მატრიცა მიიღებს შესაბამის დიაგონალურ სახეს.

**ამოხსნა.** როგორც ვიცით, ახალ სისტემაზე გადასვლისას მიღებული  $A^*$  მატრიცა დაკავშირებულია ტენზორის კომპონენტების საწყის  $A$  მატრიცთან შემდეგი ფორმულით:  $A^* = \mathcal{A}A\mathcal{A}^T$ ; სადაც  $\mathcal{A}$  მთავარი მიმართულებების კომპონენტებისაგან შემდგარი მატრიცაა ანუ წინა მაგალითის შემთხვევაში:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \quad \text{ამ მატრიცაში პირველი სტრიქონი,}$$

პირველი მთავარი ძაბვის შესაბამისი მთავარი მიმართულების მიმართული ვექტორის კოორდინატებია; მეორე სტრიქონისა - მეორესი და ა.შ.

$$\begin{aligned} A^* &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{8}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

მივიღეთ მოცემული ტენზორის კომპონენტების მატრიცის მთავარ მიმართულებებში გადაყვანის შედეგად მიღებული დიაგონალური ფორმა:

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad \text{როგორც ვხედავთ დიაგონალზე მოცემული ტენზორის მთავარი ძაბვების მნიშვნელობებია განლაგებული.}$$

**6.6.** გამოთვალეთ ტენზორის ინვარიანტები ცნობილი (3.27) ფორმულების დახმარებით, თუ მისი კომპონენტების მატრიცაა (პირველი მეთოდი):

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}. \text{ იპოვეთ მთავარი ძაბვები და მათი}$$

საშუალებით გამოთვლილი ინვარიანტები (მეორე მეთოდი) შეადარეთ ფორმულებით გამოთვლილს.

**ამოხსნა.**

**პირველი მეთოდი.** ძაბვის ტენზორის ინვარიანტების გამოსათვლელი (3.27) ფორმულებით ვაწარმოთ გამოთვლა:

$$J_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 6 + 6 + 8 = 20;$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}) = \frac{1}{2}[(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 - \sigma_{11}^2 - \sigma_{22}^2 - \sigma_{33}^2 - 2\sigma_{12}^2 - 2\sigma_{13}^2 - 2\sigma_{23}^2] = (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2) = 36 + 48 + 48 - 9 = 123;$$

$$J_3 = \det(\sigma_{ij}) = 36 \cdot 8 + 0 + 0 - 0 - 72 - 0 = 216.$$

**მეორე მეთოდი.** ვიპოვოთ მთავარი ძაბვები. ამისათვის უნდა ამოვხსნათ შემდეგი მახასიათებელი განტოლება:

$$\begin{vmatrix} 6 - \sigma & -3 & 0 \\ -3 & 6 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 8 - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

$$(6 - \sigma)^2(8 - \sigma) + 0 + 0 - 0 - 0 - 9(8 - \sigma) = 0;$$

$$(8 - \sigma)((6 - \sigma)^2 - 9) = 0;$$

$$(8 - \sigma)(3 - \sigma)(9 - \sigma) = 0.$$

ამრიგად, მთავარი ძაბვებია:  $\sigma_1 = 9$ ;  $\sigma_2 = 8$ ;  $\sigma_3 = 3$ . მაშინ მივიღებთ, რომ

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 9 + 8 + 3 = 20;$$

$$J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = 72 + 24 + 27 = 123;$$

$$J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 9 \cdot 8 \cdot 3 = 216.$$

როგორც ვხედავთ, ორივე მეთოდით ერთნაირი შედეგები მივიღეთ.

**6.7. მოცემულია ტენზორის კომპონენტების მატრიცა:**

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

დაშალეთ ეს ტენზორი სფერულ და დევიატორულ ნაწილებად. აჩვენეთ, რომ დევიატორის პირველი ინვარიანტი ნულის ტოლია.

**ამოხსნა.** საშუალო ნორმალური ძაბვა იქნება  $\sigma_M = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{12+9+3}{3} = 8$ ; მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\sigma_{ij} = \sigma_M \delta_{ij} + s_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \text{ დევიატორის პირველი ინვარიანტი იქნება:}$$

$$J_{1s} = 4 + 1 + (-5) = 0.$$

ძაბვის დევიატორის პირველი ინვარიანტი ყოველთვის ნულის ტოლია.



## VII თავი. უწყვეტი გარემოს კინემატიკა

უწყვეტი გარემო აღწერის ორი მეთოდი არსებობს. ეს არის ლაგრანჟის და ეილერის მეთოდები. ორივე ეს მეთოდი იდენტურ შედეგს იძლევა, თუმცა, ამოცანიდან გამომდინარე, ზოგჯერ ხელსაყრელია ლაგრანჟის მიდგომა და ზოგჯერ ეილერის.

### 7.1. მოძრაობის აღწერის ლაგრანჟის და ეილერის წესი

კლასიკური მექანიკის თვალსაზრისით, უწყვეტი გარემოს ყოველი წერტილი (ნაწილაკი) ინდივიდუალიზირებულია, ანუ განირჩევა სხვა წერტილებისაგან. თითოეულ ინდივიდუალურ (მატერიალურ) წერტილს შეესაბამება სამი რიცხვი ( $\xi_1; \xi_2; \xi_3$ ). ამ სამ რიცხვს, მატერიალური წერტილის (ნაწილაკის) ლაგრანჟის კოორდინატებს უწოდებენ. ლაგრანჟის კოორდინატები წარმოადგენენ მოცემული ნაწილაკის ინდივიდუალურ „სახელს“. როგორც წესი, ეს იმ წერტილის კოორდინატებია, სადაც მატერიალური ნაწილაკი იმყოფებოდა დროის საწყის მომენტში.

უწყვეტ გარემოთა მოძრაობისა და მასში მიმდინარე პროცესების აღწერა ხდება შესაბამისი განმსაზღვრელი პარამეტრების (სიჩქარეების, წნევის, ტემპერატურის და ა.შ.) ველების საშუალებით. თუ ეს პარამეტრები განიხილება როგორც ლაგრანჟის ( $\xi_1; \xi_2; \xi_3$ ) კოორდინატების და  $t$  დროის ფუნქცია, მაშინ მოძრაობის შესწავლის შესაბამის მეთოდს ლაგრანჟულს ანუ მატერიალურს უწოდებენ. ამ მიდგომისას ყველა პროცესი დაკავშირებულია კონკრეტულ ინდივიდუალურ ნაწილაკთან და მთავარ კინემატიკურ მახასიათებელს წარმოადგენს უწყვეტი გარემოს მოძრაობის კანონი:

$$x_i = f_i(\xi_1; \xi_2; \xi_3; t). \quad (7.1)$$

ლაგრანჟის კოორდინატებში, უწყვეტი გარემოს ნაწილაკების სიჩქარე და აჩქარება განისაზღვრება კერძო წარმოებულებით:

$$\mathbf{v}(\xi; t) = \frac{\partial \mathbf{r}(\xi; t)}{\partial t}, \quad \mathbf{a}(\xi; t) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}(\xi; t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{v}(\xi; t)}{\partial t}, \quad (7.2)$$

სადაც  $\xi = (\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ .

არსებობს ეილერის მიდგომა. ამ შემთხვევაში, უწყვეტი გარემოს მოძრაობას და მიმდინარე პროცესებს სწავლობენ სივრცის  $(x_1; x_2; x_3)$  მოცემულ წერტილებში  $t$  დროის მიხედვით.

ეილერის ცვლადებში, მოცემული  $A(x_1; x_2; x_3; t)$  სიდიდის ინდივიდუალური წარმოებული დროის მიხედვით, წარმოადგენს რთული ფუნქციის სრულ წარმოებულს:

$$\frac{dA(x;t)}{dt} = \frac{\partial A(x;t)}{\partial t} + v_1 \frac{\partial A(x;t)}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial A(x;t)}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial A(x;t)}{\partial x_3}. \quad (7.3)$$

სადაც  $v(x; t) = (v_1; v_2; v_3)$  სიჩქარის ვექტორია.

მაგალითად, აჩქარების ვექტორი ეილერის კოორდინატებში მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$a(x; t) = \frac{\partial v(x;t)}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v(x;t)}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v(x;t)}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v(x;t)}{\partial x_3}. \quad (7.4)$$

ეილერის და ლაგრანჟის მიდგომები ერთმანეთის ეკვივალენტურია. თუ რაიმე პროცესი აღწერილია ერთ-ერთ მათგანში, მეორეზე გადასვლა ხდება მარტივი პროცედურების საშუალებით.

იმისათვის, რომ ლაგრანჟის ცვლადებიდან გადავიდეთ ეილერის ცვლადებზე, საჭიროა მოძრაობის (7.1) კანონი ამოვხსნათ ლაგრანჟის კოორდინატების მიმართ ანუ ვიპოვოთ ფუნქციები:

$$\xi_i = \varphi_i(x_1; x_2; x_3; t). \quad (7.5)$$

მაშინ ნებისმიერი  $A(\xi_1; \xi_2; \xi_3; t)$  სიდიდისათვის, რომელიც ლაგრანჟის ცვლადებშია მოცემული, ეილერის ცვლადებში მისი გამოსახულება იქნება შესაბამისი რთული ფუნქცია:

$$A(\varphi_1(x; t); \varphi_2(x; t); \varphi_3(x; t); t). \quad (7.6)$$

იმისათვის, რომ ეილერის ცვლადებიდან გადავიდეთ ლაგრანჟის ცვლადებზე, საჭიროა ამოვხსნათ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1; x_2; x_3; t); \quad i = \overline{1,3}. \quad (7.7)$$

საწყისი პირობებით:

$$x_i|_{t=0} = \xi_i; \quad i = \overline{1,3}. \quad (7.8)$$

ამრიგად, მიიღება  $x_i = f_i(\xi_1; \xi_2; \xi_3; t)$  მოძრაობის კანონი ლაგრანჟის კოორდინატებში.

მაშინ ნებისმიერი  $B(x_1; x_2; x_3; t)$  სიდიდისათვის ეილერის ცვლადებში, თუ შევიტანთ მიღებული მოძრაობის კანონიდან მნიშვნელობებს მივიღებთ ამ გამოსახულებას ლაგრანჟის ცვლადებში:

$$B(f_1(\xi; t); f_2(\xi; t); f_3(\xi; t); t). \quad (7.9)$$

**მაგალითები.**

**7.1.** უწყვეტი გარემოს მოძრაობის კანონი მოცემულია ლაგრანჟის კოორდინატებში:

$$x_1 = \xi_1 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right); \quad x_2 = \xi_2 \left(1 + \frac{2t}{\tau}\right); \quad x_3 = \xi_3 \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right);$$

ა) იპოვეთ სიჩქარისა და აჩქარების ველები ლაგრანჟის კოორდინატებში;

ბ) სადაა ის ნაწილაკი დროის  $t = 3\tau$  მომენტში, რომელიც  $t = \tau$  მომენტში იყო  $(a; b; c)$  წერტილში?

**ამოხსნა.**

ა) (7.2) ფორმულებიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ სიჩქარეთა ველი იქნება:

$$v_1 = \frac{\partial x_1(\xi; t)}{\partial t} = \frac{\xi_1}{\tau}; \quad v_2 = \frac{\partial x_2(\xi; t)}{\partial t} = \frac{2\xi_2}{\tau}; \quad v_3 = \frac{\partial x_3(\xi; t)}{\partial t} = \frac{2\xi_3 t}{\tau}.$$

აჩქარებათა ველი კი მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$a_1 = \frac{\partial v_1(\xi; t)}{\partial t} = 0; \quad a_2 = \frac{\partial v_2(\xi; t)}{\partial t} = 0; \quad a_3 = \frac{\partial v_3(\xi; t)}{\partial t} = \frac{2\xi_3}{\tau}.$$

ბ) დროის  $t = \tau$  მომენტში გვაქვს შემდეგი განტოლებები:

$$a = 2\xi_1; \quad b = 3\xi_2; \quad c = 2\xi_3 \Leftrightarrow \xi_1 = \frac{a}{2}; \quad \xi_2 = \frac{b}{3}; \quad \xi_3 = \frac{c}{2};$$

მაშინ დროის  $t = 3\tau$  მომენტში გვექნება, რომ

$$x_1 = \xi_1 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) = \frac{a}{2} (1 + 3) = 2a;$$

$$x_2 = \xi_2 \left(1 + \frac{2t}{\tau}\right) = \frac{b}{3} (1 + 6) = \frac{7b}{3};$$

$$x_3 = \xi_3 \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right) = \frac{c}{2} (1 + 9) = 5c.$$

მაშასადამე, დროის  $t = 3\tau$  მომენტში საძიებელი წერტილის კოორდინატები იქნება:  $\left(2a; \frac{7b}{3}; 5c\right)$ .

**7.2.** ლაგრანჟის ცვლადებში ინდივიდუალური ნაწილაკების მოძრაობა მოცემულია განტოლებებით:

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2(e^t - 1);$$

$$x_2 = \xi_1(e^{-t} - 1) + \xi_2;$$

$$x_3 = \xi_3.$$

ჩაწერეთ ეს მოძრაობა ეილერის ცვლადებში.

**ამოხსნა.**

თუ, მეორე განტოლებიდან განვსაზღვრავთ  $\xi_2$  ცვლადს და ჩავსვამთ პირველ განტოლებაში და მას ამოვხსნით  $\xi_1$  ცვლადის მიმართ, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\xi_1 = \frac{-x_1 + x_2(e^t - 1)}{1 - e^t - e^{-t}};$$

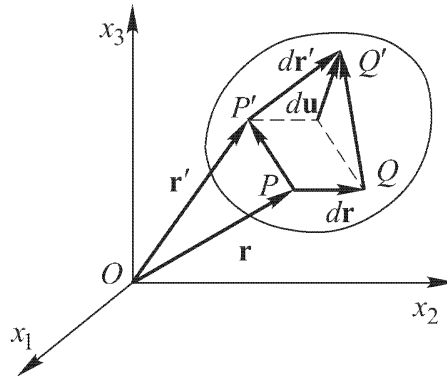
$$\xi_2 = \frac{x_1(e^{-t} - 1) - x_2}{1 - e^t - e^{-t}};$$

$$\xi_3 = x_3.$$

## 7.2. დეფორმაციის ტენზორი

**განსაზღვრება.** მყარი სხეულის ფორმისა და მოცულობის ცვლილებას გარე ძალების ან ტემპერატურის მოქმედების შედეგად დეფორმაცია ეწოდება.

განვიხილოთ დეფორმირებადი მყარი სხეული დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ნახ. 7.1.



ნახ. 7.1. დეფორმირებადი მყარი სხეული დეკარტის კოორდინატა სისტემაში

გვაქვს კოორდინატა  $x_i$  სისტემა. გამოვყოთ სხეულის უსასრულოდ მცირე მოცულობის ელემენტი, რომელიც შეიცავს  $P$  წერტილს  $\mathbf{r}(x_1; x_2; x_3)$  რადიუს-ვექტორით. ვთქვათ, სხეული უძრავია არჩეული კოორდინატა სისტემის მიმართ. გარე ძალის მოდების შედეგად, სხეული დეფორმირდება და  $P$  წერტილი გადადის სხვა  $P'$  წერტილში, რომელიც ხასიათდება  $\mathbf{r}'$  რადიუს-ვექტორით და შესაბამისი  $(x'_1; x'_2; x'_3)$  კოორდინატებით.  $P$  წერტილის გადაადგილებას:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}' - \mathbf{r}; \quad u_i(\mathbf{r}) = x'_i - x_i; \quad (7.10)$$

გადაადგილების ვექტორს, დეფორმაციას უწოდებენ. დეფორმაცია არის  $P$  წერტილის კოორდინატების ფუნქცია ანუ სხვა წერტილში, ის შეიძლება სხვა სიდიდის იყოს.  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  დამოკიდებულების მოცემა, მთლიანად ახასიათებს სხეულის დეფორმაციას ყველა წერტილში.

განვიხილოთ სხეულის დეფორმაცია  $P$ -ს მახლობელ  $Q(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$  წერტილში. დეფორმაციის შედეგად  $Q$  წერტილი გადავა  $Q'$  წერტილში. საზოგადოდ,  $Q$  წერტილის დეფორმაცია არ უდრის  $P$  წერტილის დეფორმაციას. როგორც ნახ. 7.1-დან ჩანს, ამ ორი წერტილის დეფორმაციები დაკავშირებული არიან შემდეგი განტოლებით:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) + d\mathbf{u}; \quad u_i(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}) + du_i. \quad (7.11)$$

$d\mathbf{u}$  ვექტორს ფარდობით გადაადგილებას უწოდებენ. ;  $u_i(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$  გავშალოთ ტეილორის ფორმულით და შევინარჩუნოთ მხოლოდ წრფივი წევრები  $dx_i$  ცვლადების მიმართ. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$u_i(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}) + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k + \dots \quad (7.12)$$

ამ ფორმულის მარჯვენა ნაწილის მეორე წევრში იგულისხმება შეჯამება  $k$  ინდექსით. თუ სხეულის დეფორმაციები აკმაყოფილებენ (7.12) განტოლებას, მაშინ ამბობენ რომ ადგილი აქვს **ერთგვაროვან წრფივ დეფორმაციებს**. ამ გაშლის  $dx_i$  ცვლადების მიმართ არაწრფივი წევრების გათვალისწინება, საჭიროა მხოლოდ **სასრული სიდიდის დეფორმაციების** შესწავლისას. **კლასიკური დრეკადობის თეორია** კი, ემყარება წრფივ დამოკიდებულებას და განიხილავს, მხოლოდ უსასრულოდ მცირე დეფორმაციებს.

**განსაზღვრება.** დრეკადი ეწოდება სხეულს, რომელიც გარე ძალის მოქმედების მოხსნის შემდეგ, უბრუნდება საწყის მდგომარეობას (მოცულობას და ფორმას).

თუ გავითვალისწინებთ (7.11) და (7.12) განტოლებებს, მივიღებთ რომ

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k = A_{ik} dx_k; \quad A_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (7.13)$$

მეორე რანგის  $A_{ik}$  ტენზორს **ფარდობითი დეფორმაციების** ტენზორს უწოდებენ. ეს ტენზორი ახასიათებს მოცულობის გამოყოფილ ნაწილში  $Q$  წერტილის დეფორმაციას  $P$  წერტილის მიმართ.  $A_{ik}$  ტენზორის კომპონენტები დამოკიდებულია სივრცით კოორდინატებზე და დროზე. მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში, ფარდობითი დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას:  $A_{ik} \ll 1$ . დავშალოთ ეს ტენზორი სიმეტრიულ და ანტისიმეტრიულ ნაწილებად:

$$A_{ik} = \frac{1}{2}(A_{ik} + A_{ki}) + \frac{1}{2}(A_{ik} - A_{ki}) = \varepsilon_{ik} + \varphi_{ik}. \quad (7.14)$$

ამ ტენზორის სიმეტრიულ ნაწილს  $\varepsilon_{ik}$  **დეფორმაციის ტენზორი** ეწოდება:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right); \quad \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}. \quad (7.15)$$

$A_{ik}$  ტენზორის ანტისიმეტრიულ ნაწილს  $\varphi_{ik}$  **ბრუნვის ტენზორს** უწოდებენ.

$$\varphi_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right); \quad \varphi_{ik} = -\varphi_{ki}. \quad (7.16)$$

### 7.2.1. ბრუნვის ტენზორი

განვიხილოთ ბრუნვის ტენზორის მექანიკური შინაარსი. დავუშვათ, რომ დეფორმაციის ტენზორის ყველა კომპონენტი ნულის ტოლია. მაშინ (7.13), (7.14) განტოლებებიდან გამომდინარე, ფარდობითი გადაადგილების ვექტორი მთლიანად განისაზღვრება ბრუნვის ტენზორით ანუ

$$du_i = \varphi_{ik} dx_k. \quad (7.17)$$

$\varphi_{ik}$  ტენზორის კომპონენტები განისაზღვრება შემდეგი მატრიცის კომპონენტებით:

$$(\varphi_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & 0 & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.18)$$

რადგან  $\varphi_{ik}$  ანტისიმეტრიული ტენზორია, ამ მატრიცაში მხოლოდ სამი კომპონენტი დამოუკიდებელი:

$$\varphi_{32} = -\varphi_{23} = \varphi_1; \quad \varphi_{13} = -\varphi_{31} = \varphi_2; \quad \varphi_{21} = -\varphi_{12} = \varphi_3. \quad (7.19)$$

მაშინ ფარდობითი გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები განისაზღვრება შემდეგი ტოლობებით:

$$du_1 = -\varphi_3 dx_2 + \varphi_2 dx_3; \quad (7.20)$$

$$du_2 = \varphi_3 dx_1 - \varphi_1 dx_3; \quad (7.21)$$

$$du_3 = -\varphi_2 dx_1 + \varphi_1 dx_2. \quad (7.22)$$

თუნ მობრუნების კუთხისათვის შემოვიღებთ  $\boldsymbol{\varphi}$  აღნიშვნას, მაშინ (7.20)-(7.22) განტოლებები შეგვიძლია ჩავწეროთ ვექტორულად:

$$d\mathbf{u} = [\boldsymbol{\varphi} \times d\mathbf{r}]. \quad (7.23)$$

როგორც თეორიული მექანიკიდანაა ცნობილი, სწორედ, ასე ჩაიწერება მყარი სხეულის მცირე  $\varphi$  კუთხით მობრუნება.

ასე რომ, ნახ. 7.1-დან გამომდინარე, (7.23) აღწერს  $Q$  წერტილის შემცველი ნაწილაკის მობრუნებას  $P$  წერტილის გარშემო მცირე  $\varphi$  კუთხით.

მამასადამე, ბრუნვის ტენზორის კომპონენტები აღწერენ არა დეფორმაციას, არამედ, მისი მყარი სხეულივით მობრუნებას.

ცხადია რომ,

$$\varphi_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = -\varphi_3 = -\frac{1}{2} \text{rot}_3 \mathbf{u}; \quad (7.24)$$

$$\varphi_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = -\varphi_1 = -\frac{1}{2} \text{rot}_1 \mathbf{u}; \quad (7.25)$$

$$\varphi_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = -\varphi_2 = -\frac{1}{2} \text{rot}_2 \mathbf{u}. \quad (7.26)$$

ვექტორული აღნიშვნებით (7.24)-(7.26) განტოლებები გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u}. \quad (7.27)$$

მაშასადამე, ბრუნვის ტენზორის კომპონენტები გადაადგილების ვექტორის როტორის ტოლია.

## 7.2.2. დეფორმაციის ტენზორის მთავარი მნიშვნელობები და მთავარი ღერძები

ვთქვათ, ბრუნვის ტენზორის ყველა კომპონენტი ნულის ტოლია, ასეთ შემთხვევაში, გადაადგილების ვექტორი მთლიანად განისაზღვრება დეფორმაციის ტენზორით:

$$du_i = \varepsilon_{ik} dx_k. \quad (7.28)$$

დეფორმაციის ტენზორი, როგორც ნებისმიერი სიმეტრიული ტენზორი, შეგვიძლია მივიყვანოთ მთავარ ღერძებზე. მაშასადამე, არსებობს ისეთი კოორდინატთა ( $x_1^0; x_2^0; x_3^0$ ) სისტემა, რომელშიდაც დეფორმაციის ტენზორს შეესაბამება კომპონენტების დიაგონალური მატრიცა.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^0 \end{pmatrix}. \quad (7.29)$$

$x_i^0$  საკოორდინატოღერძებს მთავარ ღერძებს უწოდებენ, ხოლო  $\varepsilon_{11}^0; \varepsilon_{22}^0; \varepsilon_{33}^0$  მნიშვნელობებს - მთავარ დეფორმაციებს.

დეფორმაციები მთავარ ღერძებში ჩაიწერება შემდეგნაირად:



$$du_1^0 = \varepsilon_{11}^0 dx_1^0; \quad du_2^0 = \varepsilon_{22}^0 dx_2^0; \quad du_3^0 = \varepsilon_{33}^0 dx_3^0. \quad (7.30)$$

აქ  $du_i^0$  არის  $dx_i^0$  მონაკვეთის დეფორმაცია. ყველა დეფორმაცია მიმართულია მთავარი ღერძების მიმართულებით. აქედან ნათლად ჩანს, რომ მთავარი დეფორმაციები აღწერს მოცულობის ელემენტის ლოკალურ გაჭიმვა-შეკუმშვის დეფორმაციას მთავარი ღერძების მიმართულებით.

**განსაზღვრება.** გაჭიმვა-შეკუმშვის დეფორმაციას სამი ურთიერთპერპენდიკულარული მიმართულებით, სუფთა დეფორმაცია ეწოდება.

თუ, მოცემულ ელემენტარულ,  $P$  წერტილის შემცველ მოცულობაში, ბრუნვის ტენზორის ყველა კომპონენტი ნულის ტოლია, მაშინ შესაძლებელია დეფორმაციის მთავარი ღერძების პოვნა ისე, რომ ამ მოცულობისთვის გვექნება სუფთა დეფორმაცია. თუ, ბრუნვის ტენზორის კომპონენტები არ უდრის ნულს, მაშინ გვექნება  $P$  წერტილის გარშემო ბრუნვაც.

მაშასადამე, უწყვეტი გარემოს მოცულობის რომელიმე ელემენტის დეფორმაცია დაიყვანება: სუფთა დეფორმაციაზე ანუ გაჭიმვა-შეკუმშვის ოპერაციაზე მთავარი ღერძების მიმართულებით და ამ მთავარი კოორდინატთა სისტემის მობრუნებაზე მცირე კუთხით  $P$  წერტილის გარშემო.

### 7.2.3. მოცულობის ცვლილება დეფორმაციისას

ბრუნვის ტენზორი იწვევს უწყვეტი გარემოს მოცულობის ელემენტის მყარ ბრუნვას მოცულობის ცვლილების გარეშე. მაშასადამე, მოცულობის ცვლილების გამოწვევა შეუძლია მხოლოდ სუფთა დეფორმაციას. ამიტომ განვიხილოთ სუფთა დეფორმაცია მთავარ ღერძებში.

გამოვყოთ მოცულობის მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის მცირე ელემენტი. მისი საწყისი მოცულობა იქნება:

$$\Delta V_0 = \Delta x_1^0 \Delta x_2^0 \Delta x_3^0. \quad (7.31)$$

დეფორმაციისას, პარალელეპიპედის წიბოები მიიღებენ ნაზრდებს და მათი სიგრძე გახდება:

$$\Delta x_i^{0'} = \Delta x_i^0 + du_i^0. \quad (7.32)$$

დეფორმაციის წრფივობიდან გამომდინარე, წიბოს წაგრძელება იქნება

$$du_i^0 = \varepsilon_{ii}^0 \Delta x_i^0. \quad (7.33)$$

(ამ ფორმულაში არ ხდება შეჯამება).

თუ შევიტანთ (7.33) მნიშვნელობას (7.32) განტოლებებში, მივიღებთ რომ

$$\Delta x_i^{0'} = (1 + \varepsilon_{ii}^0) \Delta x_i^0. \quad (7.34)$$

მაშინ ცხადია, რომ მოცულობის ახალი მნიშვნელობა იქნება:

$$\Delta V_0' = (1 + \varepsilon_{11}^0)(1 + \varepsilon_{22}^0)(1 + \varepsilon_{33}^0) \Delta V_0. \quad (4.35)$$

რადგან საქმე გვაქვს მცირე დეფორმაციებთან ანუ  $|\varepsilon_{ik}^0| \ll 1$ , თუ უგულვებელვყოფთ კვადრატულ და უფრო მაღალი რიგის მცირე სიდიდეებს, მივიღებთ რომ

$$\Delta V_0' = (1 + \varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0 + \varepsilon_{33}^0) \Delta V_0. \quad (7.36)$$

მაშინ მოცულობის ფარდობითი ცვლილებისათვის გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$$\frac{\Delta V_0' - \Delta V_0}{\Delta V_0} = \varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0 + \varepsilon_{33}^0 = tr \varepsilon_{ii}^0. \quad (7.37)$$

ცხადია რომ, მოცულობის ფარდობითი ცვლილება არაა დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე ანუ დეფორმაციის ტენზორის კვალი (დიაგონალური ელემენტების ჯამი) ინვარიანტია:

$$tr \varepsilon_{ii}^0 = \varepsilon_{ii}. \quad (7.38)$$

მაშასადამე, მოცულობის ელემენტის ფარდობითი ცვლილების საპოვნელად, არაა სავალდებულო მისი მთავარ ღერძებზე მიყვანა. გარდავქმნათ მოცულობის ფარდობითი ცვლილების ფორმულა (7.37):

$$\frac{\Delta V'_0 - \Delta V_0}{\Delta V_0} = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (7.39)$$

მაშასადამე, უწყვეტი გარემოს ელემენტარული ნაწილის მოცულობის ფარდობითი ცვლილება მოიცემა დეფორმაციის ტენზორის დიაგონალური ელემენტებით, ხოლო არადიაგონალური ელემენტები აღწერენ ძვრის დეფორმაციებს ანუ ფორმის ცვლილებას.

#### 7.2.4. წრფივი დეფორმაციების გეომეტრიული თვისებები

**თეორემა 1.** წრფივი დეფორმაციისას, ერთ სიბრტყეში მდებარე წერტილები გადადიან ისევ ერთ, მხოლოდ სხვა სიბრტყეში.

**დამტკიცება.** მართლაც, სიბრტყის განტოლებას მთავარ ღერძებში აღწერს შემდეგი განტოლება:

$$ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d = 0. \quad (7.40)$$

წრფივი დეფორმაციის შემდეგ ახალი კოორდინატები გამოისახება ძველით შემდეგი ფორმულებით:

$$x_1^{0'} = x_1^0 + \varepsilon_{11}^0 x_1^0; \quad x_2^{0'} = x_2^0 + \varepsilon_{22}^0 x_2^0; \quad x_3^{0'} = x_3^0 + \varepsilon_{33}^0 x_3^0. \quad (7.41)$$

მაშინ, დეფორმაციის შემდეგ წერტილთა კოორდინატები დააკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{a}{1+\varepsilon_{11}^0} x_1^{0'} + \frac{b}{1+\varepsilon_{22}^0} x_2^{0'} + \frac{c}{1+\varepsilon_{33}^0} x_3^{0'} + d = 0. \quad (7.42)$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

**თეორემა 2.** ერთ წრფეზე მდებარე წერტილები, წრფივი დეფორმაციისას, ისევ ერთ, თუმცა, სხვა წრფეზე გადალაგდებიან.

**თეორემა 3.** დეფორმაციამდე ორი პარალელური სიბრტყე, წრფივი დეფორმაციისას, ისევ პარალელურ სიბრტყეებად რჩებიან.

ამრიგად, წრფივი დეფორმაცია უჭიმად ღუნვას წარმოადგენს ანუ ჰომეომორფიზმია.

### 7.2.5. ტემპერატურული დეფორმაცია

სხეულის დეფორმაცია ხდება არა მხოლოდ გარე ძალების ზემოქმედების შედეგად, არამედ, ტემპერატურის ცვლილების გამოც. ვთქვათ, უწყვეტი გარემოს განსახილველ ელემენტარულ მოცულობაში ტემპერატურა ერთნაირია ანუ ტემპერატურული ველი ერთგვაროვანია. ვთქვათ, საწყისი ტემპერატურა იყო  $T_0$ ; ხოლო ტემპერატურის ცვლილების შემდეგ, მისი ტემპერატურა გახდა  $T$  ანუ ტემპერატურის ცვლილებაა  $\Delta T = T - T_0$ . ელემენტის შიგნით ტემპერატურის ერთგვაროვნების გამო ტემპერატურული ძაბვები არ წარმოიქმნება და ხდება მხოლოდ ამ მოცულობის ტემპერატურული გაფართოება ან შეკუმშვა. თუ, ტემპერატურის ფარდობითი ცვლილება მცირეა  $\left| \frac{\Delta T}{T_0} \right| \ll 1$ ; მაშინ, მოცულობის ელემენტის დეფორმაცია შეგვიძლია ჩავთვალოთ ტემპერატურის პროპორციულად ანუ

$$du_i^T = \varepsilon_{ik}^T dx_k; \quad \varepsilon_{ik}^T = \alpha_{ik} \Delta T. \quad (7.43)$$

დეფორმაციის ტენზორის როლს ასრულებს  $\varepsilon_{ik}^T$ ; რომელსაც სითბური გაფართოების ტენზორს უწოდებენ;  $\alpha_{ik}$  კოეფიციენტებს კი - წრფივი სითბური გაფართოების კოეფიციენტებს. შესაბამისად, სითბური დეფორმაცია ხდება მობრუნების გარეშე და ის იწვევს სითბურ გაფართოება-შეკუმშვას დეფორმაციის მთავარი ღერძების მიმართულებით.

მთავარ ღერძებში  $\alpha_{ik}$  სითბური გაფართოების ტენზორის მატრიცას აქვს დიაგონალური სახე:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33}^0 \end{pmatrix}. \quad (7.44)$$

თუ, სხეული იზოტროპულია, მაშინ  $\alpha_{11}^0 = \alpha_{22}^0 = \alpha_{33}^0 = \alpha$  და მასალის ელემენტში სფერო გადადის სხვა ზომის, ისევე სფეროში.

იზოტროპული მასალისათვის სითბური გაფართოების ტენზორს აქვს შემდეგი სახე:

$$\varepsilon_{ik}^T = \alpha \delta_{ik} \Delta T. \quad (7.45)$$

დეფორმაციის ვექტორის კომპონენტებისათვის გვექნება განტოლებები:

$$du_i = \alpha \Delta T dx_i. \quad (7.46)$$

ამრიგად, ნებისმიერი  $l$  სიგრძის მონაკვეთისათვის გვექნება:

$$\Delta l = \alpha \Delta T l. \quad (7.47)$$

შესაბამისად, მოცულობის ფარდობითი ცვლილება სითბური დეფორმაციისას იქნება:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{ii}^T = \alpha \delta_{ii} \Delta T = 3\alpha \Delta T. \quad (7.48)$$

$\beta = 3\alpha$  მოცულობითი გაფართოების კოეფიციენტი.

### 7.2.6. დეფორმაციის ტენზორის დაშლა სფერულ და დევიატორულ ნაწილებად

დეფორმაციის  $\varepsilon_{ij}$  ტენზორი მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორია. შესაბამისად, მისი სფერული ნაწილი იქნება:

$$(\varepsilon_M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_M & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_M & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_M \end{pmatrix}; \quad (7.49)$$

სადაც  $\varepsilon_M = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii}$ .

შესაბამისად, დეფორმაციის ტენზორი დაიშლება სფერული და დევიატორული ნაწილების ჯამის სახით:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_M \delta_{ij} + d_{ij}. \quad (7.50)$$

### 7.3. დეფორმაციათა თავსებადობის სენ-ვენანის პირობები

თუ, მოცემული გვაქვს დეფორმაციის ტენზორის ცხადი სახის დამოკიდებულება, გადაადგილების კომპონენტებზე, მაშინ მოცემული ექვსი დამოუკიდებელი განტოლებიდან:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (7.51)$$

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის საშუალებით, უნდა ვიპოვოთ გადაადგილების ვექტორის სამი კომპონენტი.

სისტემა განუსაზღვრელია და საზოგადოდ, მას ყოველთვის როდი აქვს ამონახსნი. ყველაფერი დამოკიდებულია დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტებზე. მაშასადამე, დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტები გარკვეულ დამატებით პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ, რომ არსებობდეს ერთადერთი ამონახსნი გადაადგილებების მიმართ.

**თეორემა.** იმისათვის რომ (7.51) განტოლებიდან, არსებობდეს გადაადგილების ვექტორისთვის ერთადერთი ამონახსნი, აუცილებელია და ცალადბმული არისათვის საკმარისიც, რომ დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტები აკმაყოფილებდნენ სენ-ვენანის შემდეგ პირობებს:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jm}}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \quad (7.52)$$

აქ გვაქვს 81 განტოლება, საიდანაც, მხოლოდ ექვსია დამოუკიდებელი.

ამ ექვს დამოუკიდებელ განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}; \quad (7.53)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}; \quad (7.54)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}; \quad (7.55)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}; \quad (7.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1}; \quad (7.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (7.58)$$

#### 7.4. უწყვეტი გარემოს მოძრაობის განმსაზღვრელი პარამეტრები. მატერიალური წარმოებულები

როგორც უკვე ვიცით, უწყვეტი გარემოს მოძრაობა შეგვიძლია აღვწეროთ მატერიალურ (ლაგრანჟის) კოორდინატებში:

$$x_i = x_i(\xi_1; \xi_2; \xi_3; t); \quad (7.59)$$

ან, ამოვხსნათ ეილერის სივრცული კოორდინატების მიმართ:

$$\xi_i = \xi_i(x_1; x_2; x_3; t). \quad (7.60)$$

(7.60) შებრუნებული ფორმულების არსებობისათვის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ გარდაქმნის იაკობიანი განსხვავდებოდეს ნულისაგან ანუ

$$I = \left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right| \neq 0. \quad (7.61)$$

თუ მოცემული გვაქვს უწყვეტი გარემოს რომელიმე განმსაზღვრელი პარამეტრი ლაგრანჟის კოორდინატებში, მაგალითად სიმკვრივე  $\rho$ ,

$$\rho = \rho(\xi_1; \xi_2; \xi_3; t), \quad (7.62)$$

მაშინ, მისი გამოსახვისათვის ეილერის კოორდინატებში, საკმარისია (7.60) ფორმულებიდან ჩავსვათ კოორდინატების შესაბამისი გამოსახულებები და მაშინ სიმკვრივე იქნება:

$$\rho = \rho(\xi_1(x_1; x_2; x_3; t); \xi_2(x_1; x_2; x_3; t); \xi_3(x_1; x_2; x_3; t); t). \quad (7.63)$$

ინდივიდუალურ ნაწილაკში ნებისმიერი თვისების ცვლილების სიჩქარეს, ამ თვისების მატერიალურ (ინდივიდუალურ) წარმოებულს უწოდებენ დროით ანუ ეს სიჩქარეა ნაწილაკთან ერთად მოძრავ კოორდინატთა სისტემაში. ნაწილაკის მყისიერი კოორდინატა  $x_i$  შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც ნაწილაკის თვისება. ნაწილაკის მყისიერი კოორდინატის დროით წარმოებულს მხისიერ შიჩქარეს უწოდებენ. ამრიგად, ნაწილაკის მყისიერი სიჩქარე იქნება;

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i. \quad (7.64)$$

საზოგადოდ, თუ  $A_{ij} \dots$  არის უწყვეტი გარემოს რაიმე სკალარული, ვექტორული ან ტენზორული მახასიათებელი რიმელიც ლოკალურ ლაგრანჟის ცვლადებში შეიძლება ღწერილ იქნას შემდეგი ფორმულით :

$$A_{ij} \dots = A_{ij} \dots(\xi; t); \quad (7.65)$$

მაშინ ამ სიდიდის ინდივიდუალური (ლაგრანჟის, მატერიალური) წარმოებული დროით, იქნება:

$$\frac{dA_{ij\dots}}{dt} = \frac{\partial A_{ij\dots}(\xi;t)}{\partial t}. \quad (7.66)$$

თუ, რომელიმე თვისება მოცემულია სივრცულ (ეილერის) კოორდინატებში,

$$A_{ij\dots} = A_{ij\dots}(\mathbf{x}; t); \quad (7.67)$$

მაშინ მისი მატერიალური წარმოებული გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\frac{dA_{ij\dots}(\mathbf{x};t)}{dt} = \frac{\partial A_{ij\dots}(\mathbf{x};t)}{\partial t} + \frac{\partial A_{ij\dots}(\mathbf{x};t)}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}. \quad (7.68)$$

ამ ფორმულის მარჯვენა ნაწილის მეორე წევრს კონვექტიურ წევრს უწოდებენ, რადგან ის გამოწვეულია მოცემული თვისების ველში ნაწილაკის მოძრაობით. თუ გავითვალისწინებთ (7.64) ფორმულას, მაშინ (7.68) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{dA_{ij\dots}(\mathbf{x};t)}{dt} = \frac{\partial A_{ij\dots}(\mathbf{x};t)}{\partial t} + \frac{\partial A_{ij\dots}(\mathbf{x};t)}{\partial x_k} v_k. \quad (7.69)$$

ამ (7.69) ფორმულიდან გამომდინარე, შეგვიძლია შემოვიღოთ მატერიალური წარმოებულის ოპერატორი შემდეგი სახით:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k}; \quad (7.70)$$

რომელიც გამოიყენება სივრცულ (ეილერის) ცვლადებში მოცემული, განმსაზღვრელი პარამეტრების ინდივიდუალური წარმოებულის გამოსათვლელად დროით.

თუ, მოცემული გვაქვს კავშირი სივრცულ და ლაგრანჟის კოორდინატებს შორის  $u_i$  გადაადგილების საშუალებით:  $x_k = u_k + \xi_k$ ; მაშინ სიჩქარე შეგვიძლია განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{du_i}{dt}; \quad (7.71)$$

რადგან  $\xi_k$  ლაგრანჟის კოორდინატებში არაა დამოკიდებული დროზე.

თუ გადაადგილება მოცემულია ეილერის კოორდინატებში:

$$u_i = u_i(\mathbf{x}, t); \quad (7.72)$$

მაშინ სიჩქარე იქნება:



$$v_i(x, t) = \frac{du_i(x, t)}{dt} = \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} + v_k \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_k}. \quad (7.73)$$

ამ ფორმულაში სიჩქარე გამოსახულია არაცხადი სახით.

$v_i = v_i(x, t)$  გამოსახავს სიჩქარეთა ვექტორულ ველს. სიჩქარის წარმოებულს დროით  $a$  აჩქარება ეწოდება. ლაგრანჟის კოორდინატებში აცქარება იქნება:

$$a_i = \dot{v}_i = \frac{\partial v_i(\xi; t)}{\partial t}. \quad (7.74)$$

ეილერის (სივრცულ) კოორდინატებში, აჩქარება გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$a_i(x, t) = \frac{dv_i(x, t)}{dt} = \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x_k}. \quad (7.75)$$

**განსაზღვრება.** წირს რომელსაც შემოწერს სივრცეში მოძრავი ნაწილაკი ტრაექტორია ეწოდება.

**განსაზღვრება.** წირებს რომლის ყოველ წერტილშიც, სიჩქარის ვექტორს მხების მიმართულება აქვს დენის წირები ეწოდებათ.

**განსაზღვრება.** უწყვეტი გარემოს მოძრაობას ეწოდება დამყარებული (სტაციონარული), თუ სიჩქარეთა ველი არაა დამოკიდებული დროზე ანუ  $\frac{\partial v_i(x, t)}{\partial t} = 0$ .

დამყარებული დინებისას, დენის წირები და ტრაექტორია ერთმანეთს ემთხვევა.

#### 7.4.1. დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორი და გრიგალი

მყისიერ სიჩქარეთა ველის, სივრცული გრადიენტი იძლევა სიჩქარეთა ველის გრადიენტის ტენზორს  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ . ეს ტენზორი შეგვიძლია დავშალოთ სიმეტრიულ და ანტისიმეტრიულ ნაწილებად:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\omega}_{ij}. \quad (7.76)$$

სიმეტრიულ  $\dot{\epsilon}_{ij}$  ტენზორს, დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორს უწოდებენ, ხოლო ანტისიმეტრიულ  $\dot{\omega}_{ij}$  ტენზორს კი - გრიგალის ტენზორს.

დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის დიაგონალური ელემენტები შეესაბამება მთავარი ღერძების მიმართულებით გაჭიმვა-შეკუმშვის დეფორმაციების ცვლილების სიჩქარეს, ხოლო მისი არადიაგონალური წევრები, აღწერს ძვრის დეფორმაციების ცვლილების სიჩქარეებს ანუ მთავარი ღერძების საწყისი მართი კუთხეების ცვლილების სიჩქარეს.

რაც შეეხება გრიგალის ტენზორს, ის აღწერს ნაწილაკის „მყარი მობრუნების“ სიჩქარეს. გრიგალის ტენზორთან ასოცირებულ ვექტორს

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} v_{k,j}; \quad (7.77)$$

სიჩქარის გრიგალის ვექტორი ეწოდება ანუ  $\Omega = \frac{1}{2} rot v$ .

#### 7.4.2. მოცულობითი ინტეგრალის წარმოებული დროით, როცა ინტეგრების მოცულობა დროის ფუნქციაა

უწყვეტ გარემოთა მექანიკაში ხშირად გამოიყენება ინდივიდუალური მოცულობის ცნება ანუ ისეთი მოცულობის, რომლის შემადგენელი ნაწილაკები არ იცვლება. ასეთი მოცულობის შემომსახურელი ზედაპირის გამჭოლი ნივთიერების ნაკადი ნულის ტოლია; თუმცა მოძრაობისას მისი მოცულობა და ფორმა იცვლება - დეფორმირდება.

ვთქვათ, გვაქვს რაიმე  $f(\mathbf{r}; t)$  ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებულია სივრცით კოორდინატებზე და დროზე. განვიხილოთ ამ ფუნქციიდან ინტეგრალის, დროის მიხედვით წარმოებული როცა ინტეგრების მოცულობა  $V(t)$  დროზეა დამოკიდებული:

$$\frac{d}{dt} \int_V f(\mathbf{r}; t) dV = \int_V \left( \frac{df}{dt} dV + f \frac{d}{dt} dV \right). \quad (7.78)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ დეკარტულ კოორდინატებში მოცულობა მოიცემა შემდეგი ფორმულით :

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3; \quad (7.79)$$

მაშინ, ადვილად გარდავქმნით ინტეგრალქვეშა გამოსახულების მეორე წევრს:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} dV &= d \frac{dx_1}{dt} dx_2 dx_3 + d \frac{dx_2}{dt} dx_1 dx_3 + d \frac{dx_3}{dt} dx_2 dx_1 = \\ &= dv_1 dx_2 dx_3 + dv_2 dx_1 dx_3 + dv_3 dx_2 dx_1 = \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV. \end{aligned} \quad (7.80)$$

მაშინ (7.78) განტოლება ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\frac{d}{dt} \int_V f(\mathbf{r}; t) dV = \int_V \left( \frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV. \quad (7.81)$$

ეს ფორმულა ნათლად გვიჩვენებს, თუ როგორ უნდა ვიპოვოთ მოცულობითი ინტეგრალიდან მატერიალური წარმოებული დროით, როცა ინტეგრების მოცულობა განიცდის დეფორმაციას.

**ამოცანები ამოხსნებით.**

7.1. მოცემულია მოძრაობის აღწერა სივრცულ კოორდინატებში (ეილერის):

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 e^t + \xi_3 (e^t - 1) \\ x_2 = \xi_3 (e^t - e^{-t}) + \xi_2; \\ x_3 = \xi_3 \end{cases} \quad (*)$$

დაამტკიცეთ, რომ ასეთი გარდაქმნის იაკობიანი განსხვავებულია ნულისაგან და აღწერეთ მოძრაობა ლაგრანჟის ცვლადებში.

**ამოხსნა.** ამ გარდაქმნის იაკობიანს აქვს შემდეგი სახე:

$$I = \left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right| = \begin{vmatrix} e^t & 0 & e^t - 1 \\ 0 & 1 & e^t - e^{-t} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^t \neq 0. \quad \text{რ.დ.გ. რადგან იაკობიანი}$$

განსხვავებულია ნულისაგან, ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ (\*) სისტემიდან ლაგრანჟის ცვლადები:

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 e^{-t} - x_3 (1 - e^{-t}) \\ \xi_2 = x_2 - x_3 (e^t - e^{-t}) \\ \xi_3 = x_3 \end{cases} .$$

7.2. მოცემულია სიჩქარეთა ველი: 
$$\begin{cases} v_1 = \frac{x_1}{1+t} \\ v_2 = \frac{2x_2}{1+t} \\ v_3 = \frac{3x_3}{1+t} \end{cases};$$
 იპოვეთ შესაბამის

აჩქარებათა ველი.

ამოხსნა.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{dv_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{x_1}{1+t} \right) = \frac{d}{dt} (x_1) \frac{1}{1+t} + x_1 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1+t} \right) = v_1 \frac{1}{1+t} + x_1 \left( -\frac{1}{(1+t)^2} \right) = \\ &= \frac{x_1}{(1+t)^2} - \frac{x_1}{(1+t)^2} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{dv_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{2x_2}{1+t} \right) = \frac{d}{dt} (2x_2) \frac{1}{1+t} + 2x_2 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1+t} \right) = \\ &= 2v_2 \frac{1}{1+t} + 2x_2 \left( -\frac{1}{(1+t)^2} \right) = \\ &= \frac{4x_2}{(1+t)^2} - \frac{2x_2}{(1+t)^2} = \frac{2x_2}{(1+t)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{dv_3}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{3x_3}{1+t} \right) = \frac{d}{dt} (3x_3) \frac{1}{1+t} + 3x_3 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1+t} \right) = \\ &= 3v_3 \frac{1}{1+t} + 3x_3 \left( -\frac{1}{(1+t)^2} \right) = \\ &= \frac{9x_3}{(1+t)^2} - \frac{3x_3}{(1+t)^2} = \frac{6x_3}{(1+t)^2}. \end{aligned}$$

7.3. დინება მოცემულია სიჩქარეთა შემდეგი ველით:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = A(x_1x_2 - x_3^2)e^{-Bt} \\ v_3 = A(x_2^2 - x_1x_3)e^{-Bt} \end{cases}$$

იპოვეთ ამ მოძრაობისთვის  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  გრადიენტი. გამოთვალეთ დეფორმაციის ტენზორისა და გრიგალის ტენზორის კომპონენტები დროის  $t = 0$  მომენტში  $P(1; 0; 3)$  წერტილში.

ამოხსნა.

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & -2x_3 \\ -x_3 & 2x_2 & -x_1 \end{pmatrix} A e^{-Bt};$$
 გამოვთვალოთ ეს ტენზორი დროის  $t = 0$  მომენტში  $P(1; 0; 3)$  წერტილში. მაშინ, ამ წერტილში გვექნება სიჩქარის გრადიენტის ველი:

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & -6A \\ -3A & 0 & -A \end{pmatrix}.$$
 დავშალოთ ეს ტენზორი სიმეტრიულ (დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორი) და ანტისიმეტრიულ (გრიგალის ტენზორი) ნაწილებად:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & -6A \\ -3A & 0 & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1.5A \\ 0 & A & -3A \\ -1.5A & -3A & -A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.5A \\ 0 & 0 & -3A \\ -1.5A & 3A & 0 \end{pmatrix}.$$

მაშასადამე, დეფორმაციის სიჩქარის  $\dot{\epsilon}_{ij}$  ტენზორის კომპონენტებია:

$$\left(\dot{\epsilon}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1.5A \\ 0 & A & -3A \\ -1.5A & -3A & -A \end{pmatrix}; \quad \dot{\omega}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.5A \\ 0 & 0 & -3A \\ -1.5A & 3A & 0 \end{pmatrix}$$

ხოლო,  $\dot{\omega}_{ij}$  გრიგალის ტენზორის კომპონენტებია.

## VIII თავი. უწყვეტ გარემოთა დინამიკის ძირითადი კანონები

უწყვეტ გარემოთა დინამიკის მოდელირებისათვის გამოიყენება ხუთი ძირითადი კანონი: 1. მასის შენახვის კანონი; 2. მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების კანონი (დინამიკის განტოლება); 3. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების კანონი; 4. ენერჯის შენახვის კანონი (თერმოდინამიკის პირველი კანონი); 5. ენტროპიის შენახვის კანონი (თერმოდინამიკის მეორე კანონი).

### 8.1. უწყვეტობის განტოლება

უწყვეტობის განტოლება გამოსახავს მასის მუდმივობის კანონს, უწყვეტი გარემოს ნებისმიერი ინდივიდუალური მოცულობისათვის. მოძრავე გარემოში, გამოვყოთ რაიმე ინდივიდუალური  $V$  მოცულობა, რომლის შიგნით მოთავსებული  $\rho$  სიმკვრივის მასალის მასაა:

$$M = \int_V \rho dV. \quad (8.1)$$

ცხადია, რომ რადგან მოცულობის შემომსაზღვრელი ზედაპირის გამჭოლი მასის ნაკადი ნულის ტოლია (ინდივიდუალური მოცულობაა), მის შიგნით მოთავსებულის მასის სიდიდე არ იცვლება ანუ

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_V \rho dV \right) = 0. \quad (8.2)$$

თუ გამოვიყენებთ (7.81) ფორმულას, მაშინ გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$\int_V \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = 0. \quad (8.3)$$

რადგან, ეს განტოლება უნდა სრულდებოდეს უწყვეტი გარემოს ნებისმიერი ინდივიდუალური მოცულობისათვის, ცხადია რომ აუცილებელია ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ნულთან ტოლობა ანუ

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (8.4)$$

ამ განტოლებას, უწყვეტობის განტოლებას უწოდებენ.

თუ გამოვიყენებთ (7.70) ფორმულას სიმკვრივის მატერიალური წარმოებულისათვის (8.4) ფორმულაში, მაშინ გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (8.5)$$

თუ, დივერგენციას გადავწერთ ინდექსური აღნიშვნებით, მივიღებთ უწყვეტობის განტოლებას შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho v_{k,k} = 0. \quad (8.6)$$

ცხადია, რომ ეს განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad (8.7)$$

ანუ შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (8.8)$$

თუ მოძრაობა დამყარებულია, მაშინ  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  და მუდმივი  $\rho$  სიმკვრივის პირობებში გვექნება  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  ანუ უკუმში უწყვეტი გარემო. უკუმში გარემოს სიჩქარეთა ველი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით:

$$v_i = \varepsilon_{ijk} \varphi_{k,j} \quad (8.9)$$

ანუ  $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}$ ; რაც იმას ნიშნავს რომ, უკუმში მასალების სიჩქარეთა ველს გააჩნია  $\boldsymbol{\varphi}$  ვექტორული პოტენციალი.

## 8.2. უწყვეტი გარემოს მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების კანონი

უწყვეტი გარემოს მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების კანონი ემყარება ნიუტონის მეორე კანონს და ამბობს, რომ: უწყვეტი გარემოს რომელიმე ინდივიდუალური ნაწილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე უდრის გარემოს ამ ნაწილზე მოქმედი ყველა ძალების ჯამს.

ეს კანონი ინტეგრალური ფორმით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V \rho v_i dV \right) = \int_S t_i^{(n)} ds + \int_V \rho b_i dV. \quad (8.10)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $t_i^{(n)} = \sigma_{ji}n_j$ ; მაშინ გაუსის თეორემის თანახმად გარდავქმნით ზედაპირულ ინტეგრალს მოცულობით ინტეგრალად ანუ (8.10) განტოლების მარჯვენა ნაწილი გარდაიქმნება შემდეგნაირად:

$$\int_S \sigma_{ji} n_j dS + \int_V \rho b_i dV = \int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i) dV. \quad (8.11)$$

ეხლა გარდავქმნათ (8.10) განტოლების მარცხენა ნაწილი. თუ გამოვიყენებთ ფუნქციიდან ინტეგრალის, დროის მიხედვით წარმოებულის ფორმულას, როცა ინტეგრების მოცულობა  $V(t)$  დროზეა დამოკიდებული (7.81), მივიღებთ რომ :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V \rho v_i dV \right) = \int_V \left( \frac{d(\rho v_i)}{dt} + (\rho v_i) \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV. \quad (8.12)$$

თუ, მარჯვენა მხარის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას გარდავქმნით და გავითვალისწინებთ უწყვეტობის განტოლებას, მაშინ გვექნება:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V \rho v_i dV \right) = \int_V \left( \rho \frac{dv_i}{dt} + v_i \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \right) dV = \int_V \left( \rho \frac{dv_i}{dt} \right) dV. \quad (8.13)$$

თუ, (8.13) და (8.11) მნიშვნელობებს შევიტანთ (8.10) განტოლებაში, გვექნება, რომ

$$\int_V \left( \rho \frac{dv_i}{dt} \right) dV = \int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i) dV. \quad (8.14)$$

თუ, გადავიტანთ ერთ მხარეს და მოვაქცევთ ერთი მოცულობითი ინტეგრალის ქვეშ, მივიღებთ რომ

$$\int_V \left( \sigma_{ji,j} + \rho b_i - \rho \frac{dv_i}{dt} \right) dV = 0. \quad (8.15)$$

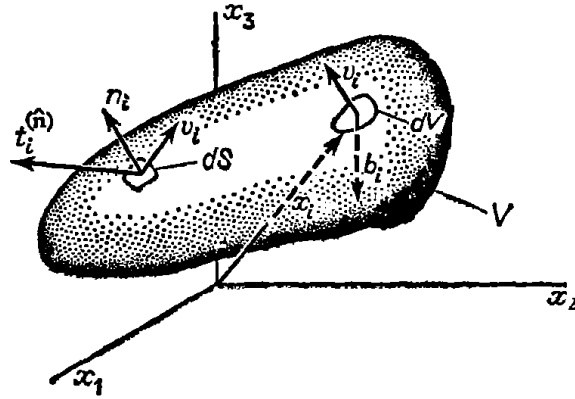
რადგან ეს ტოლობა სამართლიანია უწყვეტი გარემოს ნებისმიერი ინდივიდუალური მოცულობისათვის, ინტეგრალქვეშა გამოსახულება უნდა იყოს ნულის ტოლი და მაშასადამე, მივიღეთ დინამიკის განტოლება კოშის ფორმით:

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i. \quad (8.16)$$



### 8.3. უწყვეტი გარემოს მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების კანონი

უწყვეტი გარემოს მოძრაობის რაოდენობის მომენტი გავუტოლოთ სხეულის მოძრაობის რაოდენობის ვექტორის მომენტს რაიმე არჩეული წერტილის მიმართ ნახ. 8.1.



ნახ. 8.1. უწყვეტი გარემოს მოძრაობის რაოდენობის მომენტი

მაგალითად, ნახ. 8.1-ზე გამოსახული სხეულისათვის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტი კოორდინატთა სათავის წერტილის მიმართ იქნება:

$$N_i(t) = \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j v_k dV \text{ ანუ } N = \int_V \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV; \quad (8.17)$$

სადაც  $x_j$  არის  $dV$  მოცულობის ელემენტის რადიუს-ვექტორი.

უწყვეტი გარემოს მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების კანონი:

რაიმე წერტილის მიმართ, უწყვეტი გარემოს მოცულობის ელემენტის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების სიჩქარე უდრის მოცულობის ამ ელემენტზე მოქმედი ზედაპირული და მასური ძალების ნაკრებ მომენტს ანუ ინდექსურ აღნიშვნებში გვაქვს განტოლება

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} dS + \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j b_k dV = \frac{d}{dt} \left( \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j v_k dV \right); \quad (8.18)$$

ან სიმბოლურ აღნიშვნებში, შემდეგი განტოლება:

$$\int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t}^{(n)} dS + \int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} dV = \frac{d}{dt} \left( \int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dV \right). \quad (8.19)$$

ეს განტოლებები ძალაშია მხოლოდ ისეთი მასალებისათვის, სადაც ნიუტონის მესამე კანონი მოქმედებს და განაწილებული

მომენტები არ გვაქვს. ეს განტოლებები არ არიან დამოუკიდებელი. მაგალითად, თუ ვიცით რომ ძაბვის ტენზორი სიმეტრიულია, მაშინ ეს განტოლებები ემთხვევა დინამიკის განტოლებებს.

#### 8.4. ენერჯის შენახვის კანონი. თერმოდინამიკის პირველი კანონი

თუ საქმე გვაქვს მხოლოდ მექანიკურ პროცესებთან, მაშინ ენერჯის შენახვის კანონის მისაღებად, საჭიროა დინამიკის (8.16) განტოლებები სკალარულად გავამრავლოთ  $v_i$  ვექტორზე და შედეგიდან ავიღოთ მოცულობითი ინტეგრალი ანუ ჩავწეროთ განტოლება:

$$\int_V \rho v_i \dot{v}_i dV = \int_V v_i \sigma_{ji,j} dV + \int_V \rho v_i b_i dV. \quad (8.20)$$

ინტეგრალი მარცხენა მხარეში წარმოადგენს კინეტიკური ენერჯის ცვლილების სიჩქარეს, მართლაც

$$\int_V \rho v_i \dot{v}_i dV = \frac{d}{dt} \left( \int_V \frac{\rho v_i v_i}{2} dV \right) = \frac{d}{dt} \left( \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV \right) = \frac{dK}{dt}. \quad (8.21)$$

შევნიშნავთ, რომ  $v_i \sigma_{ji,j} = (v_i \sigma_{ji})_{,j} - v_{i,j} \sigma_{ji}$ . ამას გარდა,  $v_{i,j} = \dot{\epsilon}_{ij} + \omega_{ij}$  და  $\omega_{ij} \sigma_{ji} = 0$ . მაშინ (8.20) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$\frac{dK}{dt} + \int_V \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ji} dV = \int_V (v_i \sigma_{ji})_{,j} dV + \int_V \rho v_i b_i dV. \quad (8.22)$$

თუ, გავიხსენებთ, რომ  $t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$  და (8.22) ფორმულის მარჯვენა მხარეში, პირველ ინტეგრალს გარდავქმნით ზედაპირულ ინტეგრალად გაუსის თეორემით, მივიღებთ თერმოდინამიკის პირველ კანონს:

$$\frac{dK}{dt} + \int_V \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ji} dV = \int_S v_i t_i^{(n)} dS + \int_V \rho v_i b_i dV. \quad (8.23)$$

ამრიგად, უწყვეტი გარემოს მთლიანი მექანიკური ენერჯის ცვლილების სიჩქარე, უდრის ზედაპირული და მასური ძალების ჯამურ სიმძლავრეს.

$\int_V \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ji} dV$  ინტეგრალს შინაგანი მექანიკური ენერჯის ცვლილების სიჩქარეს უწოდებენ.

უწყვეტი გარემოსათვის  $U$  შინაგანი ენერჯის ცვლილების სიჩქარეს გამოხატავენ ფორმულით:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_V \rho u dV \right) = \int_V \rho \dot{u} dV; \quad (8.24)$$

სადაც  $u$ -ს, კუთრ შინაგან ენერგიას უწოდებენ.

ვთქვათ  $c_i$  ახასიათებს დროის ერთეულში სითბურ ნაკადს, ფართის ერთეულში სითბოგამტარობის გამო, ხოლო  $z$  დროის ერთეულში, მასის ერთეულიდან გამოსხივებული სითბური მუდმივია. მაშინ უწყვეტ გარემოზე სითბოს მიწოდების სიჩქარე იქნება:

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_S c_i n_i dS + \int_V \rho z dV. \quad (8.25)$$

თერმოდინამიკური კონტინუუმის ენერგიის ცვლილების კანონი ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{\delta W}{dt} + \frac{\delta Q}{dt}. \quad (8.26)$$

თუ ამ ფორმულაში ყველა სიდიდეს გამოვსახავთ შესაბამისი ინტეგრალებით და გამოვიყენებთ გაუსის ფორმულას, მივიღებთ რომ

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z. \quad (8.27)$$

ეს განტოლება ამბობს, რომ შინაგანი ენერგიის ცვლილების სიჩქარე უდრის, ძაბვის სიმძლავრისა და უწყვეტ გარემოზე გადაცემული სითბური ნაკადის ჯამს.

### 8.5. თერმოდინამიკის მეორე კანონი. ენტროპია. კლაუზიუს-დიუგემის უტოლობა

მდგომარეობის პარამეტრების ცვლილებისას, ადგილი აქვს თერმოდინამიკულ პროცესს. თერმოდინამიკული მდგომარეობის განმსაზღვრელ პარამეტრებს შორის კავშირს ამყარებს მდგომარეობის განტოლება. ნებისმიერ პარამეტრს, რომელიც ცალსახად განისაზღვრება მდგომარეობის სხვა პარამეტრების საშუალებით მდგომარეობის ფუნქცია ეწოდება.

როგორც უკვე ვნახეთ, თერმოდინამიკის პირველი კანონი პოსტულირებს მექანიკური და სითბური ენერგიის ერთმანეთში გადასვლის შესაძლებლობას. თუმცა, თერმოდინამიკის პირველი კანონი, ღიად ტოვებს საკითხს: შეუქცევადია თერმოდინამიკული

პროცესი, თუ არა? ყველა რეალური პროცესი შეუქცევადია, თუმცა, ზოგჯერ ენერჯის დისიპაციის პროცესი იმდენად მცირეა, რომ პროცესი შეგვიძლია ჩავთვალოთ შექცევადად. შეუქცევადობის ძირითადი პრინციპი პოსტულირებულია თერმოდინამიკის მეორე კანონში, რომელიც აწესებს შეზღუდვას ენტროპიაზე.

თერმოდინამიკის მეორე კანონი პოსტულირებს ორი მდგომარეობის ფუნქციის არსებობას. ესენია  $T$  აბსოლუტური ტემპერატურა და  $s$  ენტროპია.

აბსოლუტური ტემპერატურა დადებითი სიდიდეა, რომელიც წარმოადგენს მხოლოდ ემპირიული ტემპერატურის ფუნქციას.

ენტროპია ადიტიური ფუნქციაა ანუ სისტემის ენტროპია, მისი შემადგენელი ნაწილების ენტროპიების ჯამის ტოლია. უწყვეტ გარემოთა მექანიკაში განიხილავენ კუთრ  $s$  ენტროპიას (მასის ერთეულზე), ამიტომ სისტემის მთლიანი  $S$  ენტროპია გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$S = \int_V \rho s dV. \quad (8.28)$$

ენტროპია შეიძლება შეიცვალოს გარე სამყაროსთან ურთიერთქმედებით ან უწყვეტი გარემოს შიგნით მიმდინარე პროცესების გამო. ამიტომ წერენ, რომ

$$ds = ds^{(e)} + ds^{(i)}; \quad (8.29)$$

სადაც  $ds^{(e)}$  არის ენტროპიის გარე სამყაროსთან ურთიერთობის შედეგად მიღებული ცვლილება, ხოლო  $ds^{(i)}$  დაკავშირებულია სისტემის შიდა პროცესებთან. პოსტულირდება, რომ  $ds^{(i)} \geq 0$ ; ტოლობას აქვს ადგილი მხოლოდ შექცევადი პროცესებისათვის.

თუ შექცევადი პროცესისას, უწყვეტი გარემოს მასის ერთეულზე მოსულ სითბოს რაოდენობას აღვნიშნავთ  $dq$  -თი, მაშინ

$$ds^{(e)} = \frac{dq}{T}. \quad (8.30)$$

თერმოდინამიკის მეორე კანონი:

მოცემული  $V$  მოცულობის უწყვეტი გარემოს სრული ენტროპიის ცვლილების სიჩქარე, არ შეიძლება იყოს ნაკლები, ვიდრე მოცულობის საზღვარზე გავლით შემოსული ენტროპიისა და

მოცულობის შიგნით გარე წყაროების ზემოქმედებით წარმოქმნილი ენტროპიების ჯამისა.

ეს კანონი აღიწერება კლაუზიუს-დიუგემის შემდეგი უტოლობით:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V \rho s dV \right) \geq \int_V \rho e dV - \int_S \frac{c_i n_i}{T} dS; \quad (8.31)$$

სადაც  $e$  ენტროპიის გარე წყაროების სიმძლავრეა, მოსული მასის ერთეულზე.

ეს უტოლობა ძალაშია ნებისმიერი  $V$  მოცულობისათვის, ამიტომ, თუ ზედაპირულ ინტეგრალს გარდავქმნით მოცულობით ინტეგრალად, შეგვიძლია ჩავწეროთ კლაუზიუს-დიუგემის უტოლობა ლოკალური ფორმით:

$$\frac{ds}{dt} - e - \frac{1}{\rho} \left( \frac{c_i}{T} \right)_{,i} \geq 0. \quad (8.32)$$

## 8.6. უწყვეტი გარემოს დინამიკის განმსაზღვრელი ძირითადი განტოლებების შესახებ

ჩვენ უკვე გამოვიყვანეთ უწყვეტ გარემოთა დინამიკის ძირითადი განტოლებები, რომლებიც სრულდება ნებისმიერი თერმოდინამიკური უწყვეტი მასალებისათვის. ეხლა ჩამოვყალიბოთ ერთად, ყველა ეს განტოლება და დავსახოთ მათემატიკური მოდელირების შემდგომი ეტაპები.

ა) უწყვეტობის განტოლება:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0; \quad (8.33)$$

ბ) დინამიკის განტოლებები კოშის ფორმით:

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i; \quad (8.34)$$

გ) ენერჯიის განტოლება:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z. \quad (8.35)$$

თუ დავუშვებთ, რომ  $b_i$  მასური ძალები და  $z$  სითბოს განაწილებული წყაროები ცნობილია, მაშინ (8.33)-(8.35) ხუთი

განტოლება შეიცავს თოთხმეტ უცნობ ფუნქციას, რომლებიც დამოკიდებული არიან სივრცით კოორდინატებზე და დროზე.

უცნობებია:  $\rho$  სიმკვრივე, სიჩქარის სამი  $v_i$  მდგენელი (ან გადაადგილების ვექტორის სამი კომპონენტი),  $\sigma_{ij}$  სიმეტრიული ძაბვის ტენზორის ექვსი კომპონენტი, სითბური ნაკადის ვექტორის სამი  $c_i$  მდგენელი და  $u$  შინაგანი ენერჯიის სიმკვრივე.

ამასთან ერთად, უნდა სრულდებოდეს კლაუზიუს-დიუგემის უტოლობა ენტროპიის არაუარყოფითობის შესახებ:

$$\frac{ds}{dt} - e - \frac{1}{\rho} \left( \frac{c_i}{T} \right)_{,i} \geq 0. \quad (8.36)$$

ეს უტოლობა გვიმატებს კიდევ ორ უცნობს: ენტროპიის  $s$  სიმკვრივე და  $T$  აბსოლუტური ტემპერატურა.

მაშასადამე, უკვე გვაქვს 16 უცნობი და 5 განტოლება, რაც იმას ნიშნავს რომ სისტემის ჩასაკეტად საჭიროა, კიდევ 11 განტოლება. 6 მათგანი იქნება განმსაზღვრელი განტოლებები, რომლებიც ახასიათებენ მოცემული სისტემის ფიზიკურ თვისებებს. დარჩენილი 5 განტოლებიდან 3 იქნება სითბოგამტარობის დამახასიათებელი, ხოლო 2 თერმოდინამიკური მდგომარეობის დამახასიათებელი (კალორიული განტოლება, ენტროპიის განტოლება).

განმსაზღვრელი განტოლებები ამყარებენ კავშირს მასალის კინემატიკურ, თერმოდინამიკურ და სტატიკურ პარამეტრებს შორის, რომლებიც აღწერს მასალის რეაქციას მექანიკურ და თერმოდინამიკურ ზემოქმედებაზე. რეალური მასალები სხვადასხვა ტიპის ზემოქმედებისას რთულად რეაგირებენ და შეუძლებელია ყველა შესაძლო სიტუაციის ზედმიწევნით გადმოცემა. აქედან გამომდინარე, პრაქტიკული ამოცანების გადასაწყვეტად, ადგენენ გარკვეულ იდეალიზირებულ მათემატიკურ მოდელებს, რომლებიც მოქმედებენ გარკვეული ძაბვებისა და ტემპერატურების დიაპაზონში, რაც საშუალებას იძლევა შესწავლილი იქნას რთული პროცესები.

იზოთერმული პროცესების შესწავლისას, ტემპერატურა მუდმივია და მაშინ ამოცანა სრულად მექანიკური ხდება.

განმსაზღვრელი განტოლებების დასადგენად, იყენებენ ფიზიკურ ექსპერიმენტებს და ექსპერიმენტების შედეგების სტატისტიკური დამუშავების მეთოდებს.

### 8.6.1. გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი და ექსპერიმენტის მასალების დამუშავება. წრფივი და არაწრფივი რეგრესია. ამოცანების ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი, საშუალებას გვაძლევს ოპტიმალურად მივუახლოვდეთ ექსპერიმენტების შედეგად მიღებულ წერტილებს და ვიპოვოთ ისეთი წირი, რომელიც „საუკეთესო“ იქნება ყველა სხვა წირთან შედარებით წინასწარ არჩეულ ფუნქციათა კლასში. ფუნქციათა კლასის შერჩევა ხდება ექსპერიმენტული წერტილების სიბრტყეზე დატანის სურათიდან გამომდინარე. თუ, ექსპერიმენტის შედეგად მიღებული წერტილები თავს იყრის გარკვეული წრფის მახლობლობაში, მაშინ საძიებელ ფუნქციათა კლასი იქნება წრფივ  $y = a \cdot x + b$  ფუნქციათა სიმრავლე და მაშინ, მისი პოვნის მეთოდს წრფივ რეგრესიას უწოდებენ; ხოლო, თუ საძიებელ  $f(x)$  ფუნქციათა კლასი არაწრფივია, მაშინ მისი პოვნის მეთოდს არაწრფივ რეგრესიას უწოდებენ.

განვიხილოთ წრფივი რეგრესიის ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი დეტალურად.

**ამოცანა.** ვთქვათ გვაქვს რაიმე სიდიდის გაზომვის ექსპერიმენტული შედეგები მოცემული ცხრილით:

X	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	..	X <sub>n</sub>
y	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	..	y <sub>n</sub>

საძიებელი გვაქვს ანალიზური დამოკიდებულება  $y = f(x) = ax + b$

**ამოხსნა:** ამ ამოცანის ამოსახსნელად, ყოველი  $(x_i, y_i)$  ექსპერიმენტული წერტილისათვის განიხილავენ  $r_i$  გადახრას თეორიულ (წრფივი ფუნქციის)  $f(x_i) = ax_i + b$  მნიშვნელობასა და შესაბამის ექსპერიმენტულ  $y_i$  მნიშვნელობას შორის:

$$r_i = ax_i + b - y_i. \tag{8.37}$$

გაუსის კრიტერიუმის თანახმად, საუკეთესოდ ითვლება ის  $f(x) = ax + b$  მიახლოება, რომლის დროსაც გადახრების კვადრატების ჯამი იქნება უმცირესი ანუ ვეძებთ  $a$  და  $b$

კოეფიციენტების ისეთ მნიშვნელობებს, რომელთათვისაც მინიმალურია შემდეგი ჯამი:

$$G(a, b) = \sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2. \quad (8.38)$$

როგორც ვხედავთ წრფივი რეგრესიის ამოცანა დაიყვანება მრავალი ცვლადის  $G(a, b)$  ფუნქციის მინიმუმის წერტილის პოვნის ამოცანაზე.

როგორც ვიცით, ურუცნობიანი ფუნქციის მინიმუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა ფერმას თეორემა. აქედან გამომდინარე, ექსტრემუმის წერტილის საპოვნელად, გვექნება შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

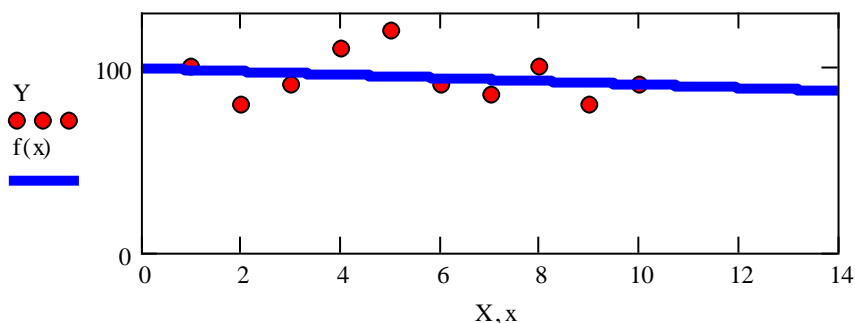
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G_1^2}{\partial a} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial G_1^2}{\partial b} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n (a \cdot x_i + b - y_i) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.39)$$

სისტემა (8.39) ადვილიად გარდაიქმნება წრფივ განტოლებათა შემდეგ სისტემად:

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^n X_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n X_i y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^n X_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (8.40)$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი გვამღებს მინიმუმის წერტილს  $(a_{\min}, b_{\min})$  და მაშასადამე, ერთობლიობაში საუკეთესო  $f(x) = ax + b$  მიახლოებას ექსპერიმენტების შედეგად მიღებულ ცხრილთან.

გრაფიკულად, გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი შეგვიძლია გამოვსახოთ შემდეგნაირად:



ნახ. 8.1. უმცირეს კვადრატთა მეთოდი

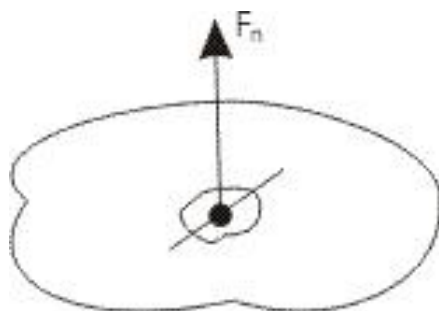
უწყვეტი წრფე იძლევა ერთობლიობაში, ექსპერიმენტების წერტილების საუკეთესო მიახლოებას.



### 8.6.2. დამოკიდებულება ძელის გაჭიმვისას ძაბვებსა და მცირე დეფორმაციებს შორის (ჰუკის კანონი)

განსაზღვრება: მექანიკური ძაბვა  $\sigma$  არის სიდიდე, რომელიც იზომება ზედაპირის  $\vec{n}$  ნორმალის მიმართულებით  $S$  ფართის ერთეულზე მოქმედი  $F_n$  ძალის სიდიდით.

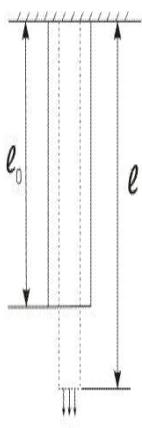
$$\sigma = \frac{F_n}{S}. \quad (8.41)$$



ნახ. 8.2. მექანიკური ძაბვა

განსაზღვრება: ძელის ფარდობით  $\varepsilon$  წაგრძელებას დეფორმაციას უწოდებენ. ძელის გაჭიმვის დეფორმაცია გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}. \quad (8.42)$$



ნახ. 8.3. ძელის დეფორმაცია

როგორც ვიცით, მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში ( $\varepsilon \ll 1$ ) დრეკადი სხულების უმრავლესობა ემორჩილება ჰუკის წრფივ კანონს, რომელსაც აქვს შემდეგი ფორმა.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon; \quad (8.43)$$

სადაც  $E$  იუნგის მოდულია. იუნგის მოდული იმ ძაბვის ტოლია, რომელიც იწვევს ერთეულოვან დეფორმაციას ანუ საწყისი სიგრძის გაორმაგებას:

$$\varepsilon = 1 \Leftrightarrow e = 2l_0. \quad (8.44)$$

ჰუკის კანონს, ზოგჯერ წერენ დეტალურადაც, შემდეგი ფორმით:

$$\frac{F_n}{S} = E \cdot \frac{l - l_0}{S}. \quad (8.45)$$

ეხლა, წრფივი რეგრესიის მეთოდიდან გამომდინარე, დავადგინოთ ჰუკის კანონის სახე მოცემული მასალისათვის, თუ, მოცემული გვაქვს ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის, კავშირის დადგენისათვის ჩატარებულ-ი ექსპერიმენტების შედეგები ცხრილი 8.1.

ცხრილი 8.1

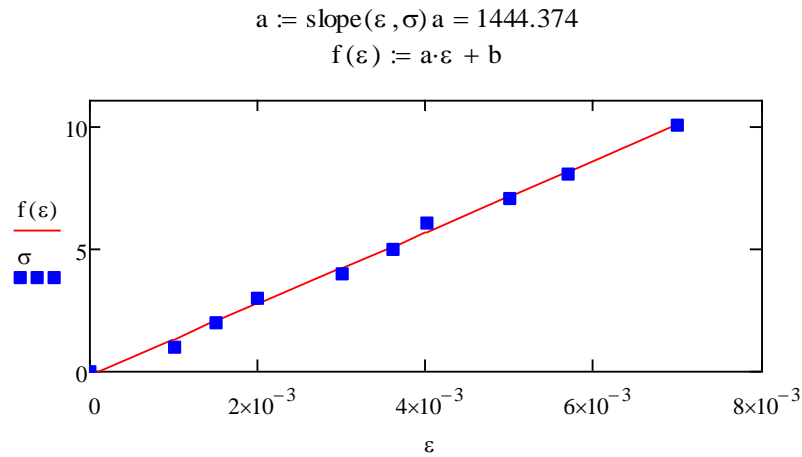
$\sigma$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10
$\varepsilon$	0.	0.00	0.001	0.00	0.00	0.003	0.00	0.00	0.005	0.00
	0	1	5	2	3	6	4	5	7	7

შევადგინოთ პროგრამა **Mathcad-ზე** და დავადგინოთ  $\sigma = f(\varepsilon)$  კავშირი, წრფივი რეგრესიის მეთოდით ანუ ვეძებოთ  $f$  ფუნქციის საუკეთესო მიახლოება, საძიებელ სიდიდეებს შორის ანალიზური დამოკიდებულებისათვის ცხრილი 8.1-დან გამომდინარე ისე, რომ ვეძებოთ ეს დამოკიდებულება წრფივ  $\sigma = f(\varepsilon) = a\varepsilon + b$  ფუნქციათა შორის.

$$\varepsilon := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.001 \\ 0.0015 \\ 0.002 \\ 0.003 \\ 0.0036 \\ 0.004 \\ 0.005 \\ 0.0057 \\ 0.007 \end{pmatrix} \quad \sigma := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$b := \text{intercept}(\varepsilon, \sigma)$$

$$b = -0.138$$



ნახ. 8.4. ჰუკის კანონი ექსპერიმენტში გამოკვლეული მასალისათვის. უწყვეტი წირი შეესაბამება თეორიულ მრუდს, ხოლო დისკრეტულად გაზნეული წერტილები - ექსპერიმენტების შედეგებს

ამ გათვლებიდან გამომდინარე, ჰუკის კანონს ექნება შემდეგი სახე:

$$\sigma = 1444.4\varepsilon - 0.1. \tag{8.46}$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ 0.1 მცირე სიდიდისაა დაბვის სხვა მნიშვნელობებთან შედარებით, მაშინ შეგვიძლია მოცემული სიზუსტის ფარგლებში ის უგულებელვყოთ და მივიღოთ ჰუკის კანონი  $\sigma = 1444.4\varepsilon$  სახით. მაშინ ჩვენი მონაცემებიდან გამომდინარე, გვექნება რომ იუნგის მოდული იმ მასალისათვის, რომლისგანაცაა დამზადებული ექსპერიმენტში განხილული ძელი უდრის  $E = 1444.45/\text{მ}^2$ .

ეხლა, ექსპერიმენტის მონაცემებიდან გამომდინარე, ვიპოვოთ იუნგის მოდულის მნიშვნელობა  $\frac{\sigma}{\varepsilon}$  სტატისტიკური მეთოდით. ცხრილი 8.1-დან გამომდინარე გვექნება შემდეგი ცხრილი 8.2:

ცხრილი 8.2

$\sigma$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10
$\varepsilon$	0.0	0.001	0.0015	0.002	0.003	0.0036	0.004	0.005	0.0057	0.007
$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$	-	1000	1333.3	1500	1333.3	1388.9	1500	1400	1403.5	1428.6

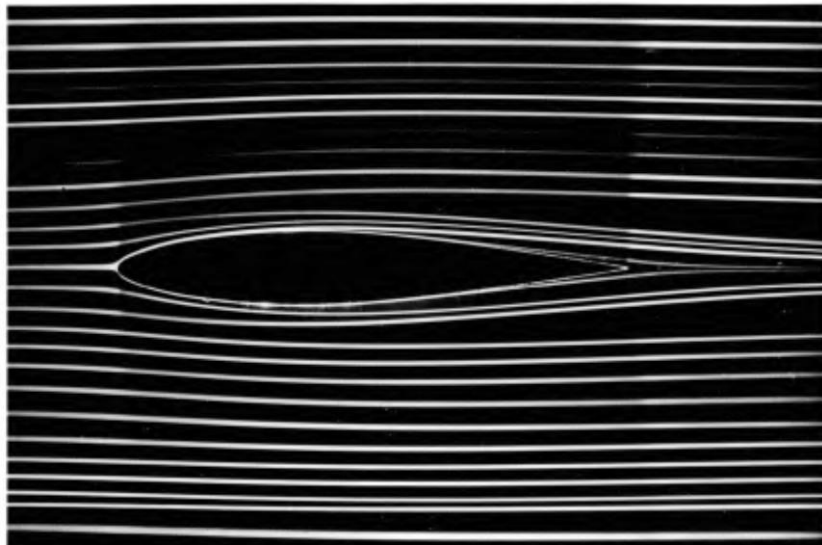
ვპოულობთ იუნგის მოდულის საშუალო მნიშვნელობას და საშუალო კვადრატულ გადახრას, რაც საშუალებას გვაძლევს ჩავწეროთ, რომ  $E = 1228.8 \pm 431/\text{მ}^2$ . ასე რომ, წრფივი რეგრესიით მიღებული მნიშვნელობა  $E = 1444.45/\text{მ}^2$  ეკუთვნის სტატისტიკური მეთოდით მიღებულ შუალედს  $(1228.8 - 431; 1228 + 431)$  ანუ  $1444.4 \in (797; 1659)$ .

### 8.6.3. სიჩქარის ეპიურის აგება ნიუტონური სითხეებისათვის

დრეკადობის ჰუკის კანონის ანალოგიურად, ნიუტონური სითხეები-სათვის გვაქვს წრფივი დამოკიდებულება სითხის სიჩქარესა და საყრდენი კედლიდან მანძილს შორის. ბლანტი, ნიუტონური სითხეები (წყალი, ნავთი, ზეთი, ბენზინი, . . .) კედელს ეკვრიან სიბლანტის გამო და რაც უფრო შორდებიან კედელს, მით უფრო იზრდება ლამინარული (ფენები არ ერევა ერთმანეთს ნახ. 8.5) ნაკადის სასაზღვრო ფენის მოძრაობის სიჩქარეც ნახ. 8.6.

**განსაზღვრება.** ლამინარული ეწოდება სითხის ისეთ დინებას, როცა ფენა ფენას მიჰყვება და არ ხდება ფენების ერთმანეთში არევა.

**განსაზღვრება.** სასაზღვრო ფენი ეწოდება კედლისა და სითხის შებების ზონაში თხელ ფენას, სადაც სიბლანტეს გადამწყვეტი მნიშვნელობა აქვს სიჩქარეთა ველის განაწილებაზე.



ნახ. 8.5. ფრთის პროფილის ლამინარული გარსდენის სურათი



ნახ. 8.6. სიჩქარეთა ველის ეპიურა ფირფიტის სასაზღვრო ფენში

როგორც ნახ. 8.6-დან ჩანს, კედლის (ფირფიტის) მახლობლობაში (ლამინარულ სასაზღვრო ფენში) სიჩქარე წრფივად იზრდება, ხოლო როცა გასცდება, სასაზღვრო ფენის ეპიურა ხდება თითქმის ვერტიკალური ანუ სიჩქარე მუდმივ რეჟიმზე გადის და სითხის სიბლანტის გავლენა თითქმის ქრება.

ვთქვათ, გავზომეთ  $v$  სიჩქარეები ექსპერიმენტულად, ფირფიტადან  $y$  დაშორების მიხედვით ერთ კვეთში და გვაქვს ცხრილი 8.3.

ცხრილი 8.3

$v$	0	0.01	0.018	0.020	0.023	0.026	0.05	0.045	0.05
$y$	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.008	0.009	0.01

შევადგინოთ პროგრამა Mathcad-ზე და დავადგინოთ  $v = f(y)$  კავშირი, წრფივი რეგრესიის მეთოდით ანუ ვეძებოთ  $f$  ფუნქციის საუკეთესო მიახლოება, საძიებელ სიდიდეებს შორის ანალიზური დამოკიდებულებისათვის ცხრილი 8.3-დან გამომდინარე. ვეძებოთ ეს დამოკიდებულება წრფივ  $v = f(y) = ay + b$  ფუნქციათა შორის.

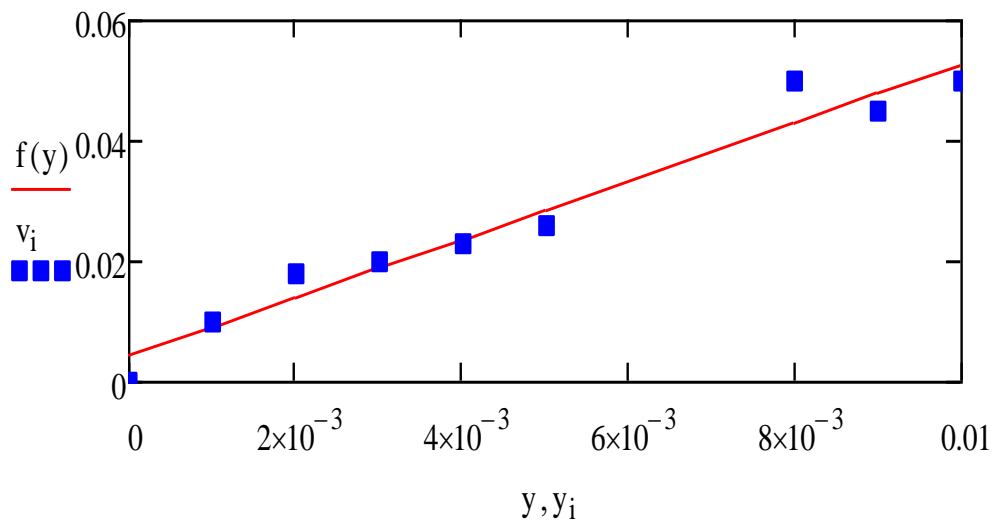
$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.001 \\ 0.002 \\ 0.003 \\ 0.004 \\ 0.005 \\ 0.008 \\ 0.009 \\ 0.01 \end{pmatrix} \quad v := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \\ 0.018 \\ 0.020 \\ 0.023 \\ 0.026 \\ 0.05 \\ 0.045 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

$$a := \text{slope}(y, v)$$

$$a = 4.843 \quad b := \text{intercept}(y, v)$$

$$b = 0.004$$

$$f(y) := a \cdot y + b \quad i := 0..8$$



ნახ. 8.7. ნიუტონური სითხის სიჩქარეთა ეპიურა ფირფიტის სასაზღვრო ფენში

უწყვეტი წირი შეესაბამება თეორიულ მრუდს, ხოლო დისკრეტულად გაზნეული წერტილები - ექსპერიმენტების შედეგებს

ამრიგად, მივიღეთ სითხის კედლის სიახლოვეს მოძრაობის სიჩქარის ეპიურა წრფივი რეგრესიის მეთოდით ანუ გვაქვს შემდეგი დამოკიდებულება:  $v = 4.8y + 0.004$ . ამ შემთხვევაშიც 0.004 გაცილებით ნაკლებია სიჩქარის საშუალო მნიშვნელობაზე. ამიტომ შეგვიძლია ის უგულებელვყოთ, მითუმეტეს, რომ სითხის სიჩქარე ნულია ფირფიტის გასწვრივ ანუ როცა  $y = 0$ . მაშინ გვექნება დამოკიდებულება  $v = 4.8y$ .

### ამოცანები ამოხსნებით.

**8.1.** ჩაწერეთ უწყვეტობის განტოლება უგრიგალო უწყვეტი გარემოსათვის.

**ამოხსნა.** უგრიგალო უწყვეტი გარემოსათვის  $rot \mathbf{v} = 0$ , მაშინ სიჩქარეთა ველი ყოფილა პოტენციალური ანუ რაღაც  $\varphi$  სკალარული ველის გრადიენტული ველი. მაშინ  $v_i = \varphi_{,i}$ ; ასეთ შემთხვევაში, უწყვეტობის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho v_{i,i} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \varphi_{,ii} = 0 \text{ ანუ } \frac{d\rho}{dt} + \rho \Delta \varphi = 0.$$

**8.2.** აჩვენეთ რომ  $v_i = \frac{Ax_i}{r^3}$ ; სადაც  $r^2 = x_i x_i$  ფუნქცია აკმაყოფილებს უკუმში სითხის უწყვეტობის განტოლებას.

**ამოხსნა.** უკუმში სითხის უწყვეტობის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:  $v_{i,i} = 0$ . ჩვენ შემთხვევაში  $v_i = \frac{Ax_i}{r^3}$ . გამოვითვალოთ  $v_{i,k}$  მაშინ გვექნება:

$$\begin{aligned} v_{i,k} &= \left( \frac{Ax_i}{r^3} \right)_{,k} = (Ax_i)_{,k} \frac{1}{r^3} + (Ax_i) \left( \frac{1}{r^3} \right)_{,k} = Ax_{i,k} \frac{1}{r^3} - (Ax_i) \frac{1}{r^6} (r^3)_{,k} = \\ &= A\delta_{ik} \frac{1}{r^3} - (Ax_i) \frac{1}{r^6} (3r^2) \frac{x_k}{r}. \text{ მაშინ, ცხადია რომ} \\ v_{i,i} &= A\delta_{ii} \frac{1}{r^3} - (Ax_i) \frac{1}{r^6} (3r^2) \frac{x_i}{r} = A \left( \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right) = 0. \text{ რ.დ.გ.} \end{aligned}$$

**8.3.** უწყვეტი გარემოს რომელიღაც წერტილში, მოცემულია დეფორმაციის სიჩქარისა და ძაბვების ტენზორის კომპონენტები:

$$(\dot{\epsilon}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \text{ იპოვეთ ამ წერტილში ძაბვების } \lambda \text{ სიმძლავრე: } \lambda = \dot{\epsilon}_{ij}\sigma_{ij}.$$

**ამოხსნა.** დეფორმაციის ტენზორის ყოველი ელემენტი მრავლდება ძაბვის ტენზორის შესაბამის ელემენტზე და იკრიბება. აქედან გამომდინარე, მივიღებთ, რომ:  $\lambda = \dot{\epsilon}_{ij}\sigma_{ij} = 4 + 0 - 4 + 0 - 6 + 14 - 4 + 14 + 40 = 58$ .

**8.4.** აჩვენეთ, რომ თუ  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$  მაშინ ძაბვების სიმძლავრე იქნება:

$$\dot{\epsilon}_{ij}\sigma_{ij} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}.$$

**ამოხსნა.** როგორც ვიცით  $v_{i,j} = \dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\omega}_{ij} \Leftrightarrow \dot{\epsilon}_{ij} = v_{i,j} - \dot{\omega}_{ij}$  მაშინ ძაბვების სიმძლავრე იქნება:  $\dot{\epsilon}_{ij}\sigma_{ij} = v_{i,j}\sigma_{ij} - \dot{\omega}_{ij}\sigma_{ij}$ .

რადგან  $\dot{\omega}_{ij}$  ანტისიმეტრიული ტენზორია, ხოლო  $\sigma_{ij}$  არის სიმეტრიული, მათი ნამრავლი იქნება ანტისიმეტრიული. მაშასადამე მთავარ დიაგონალზე ნულოვანი ელემენტებია, ხოლო მთავარი დიაგონალის სიმეტრიულად მდგარი ელემენტები იქნება ურთიერთმოპირადპირე, რაც იმას ნიშნავს რომ  $\dot{\omega}_{ij}\sigma_{ij} = 0$  ნამრავლის ელემენტების ჯამი ნულის ტოლია. მაშასადამე, გვექნება რომ  $\dot{\epsilon}_{ij}\sigma_{ij} = v_{i,j}\sigma_{ij} = v_{i,j}(-p\delta_{ij}) = -pv_{i,i}$ . თუ გავითვალისწინებთ უწყვეტობის განტოლებას:  $\frac{d\rho}{dt} + \rho v_{i,i} = 0$ ; მაშინ გვექნება, რომ  $v_{i,i} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ ; რაც იმას ნიშნავს, რომ  $\dot{\epsilon}_{ij}\sigma_{ij} = v_{i,j}\sigma_{ij} = v_{i,j}(-p\delta_{ij}) = -pv_{i,i} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ . რ.დ.გ.

## IX თავი. უწყვეტ გარემოთა დინამიკის კლასიკური მათემატიკური მოდელები

საინჟინრო პრაქტიკაში, ფართო გამოყენება აქვს რთული ფორმისა და სტრუქტურის მასალებს. მანქანათმშენებლობასა და სამშენებლო საქმეში შეუძლებელია ახალი დანადგარების, ხელსაწყოებისა თუ, ნაგებობების აშენება, მათი წინასწარი მოდელირებისა და სხვადასხვა რეჟიმში მუშაობის შესწავლის გარეშე. უწყვეტ გარემოთა დინამიკა საშუალებას იძლევა, მყარ მათემატიკურ ფუნდამენტზე იქნას აგებული, დრეკადობის თეორიის, ჰიდროაეროდინამიკისა და რთული რეოლოგიის მქონე მასალების მუშაობის მათემატიკური მოდელები, ძაბვების, დეფორმაციების და ტემპერატურის სხვადასხვა რეჟიმების გათვალისწინებით, რაც საშუალებას იძლევა სულ სხვა ეტაპზე ავიყვანოთ რთული საინჟინრო ობიექტების პროექტირებისა და საინჟინრო გაანგარიშების ამოცანების გადაწყვეტის საქმე.

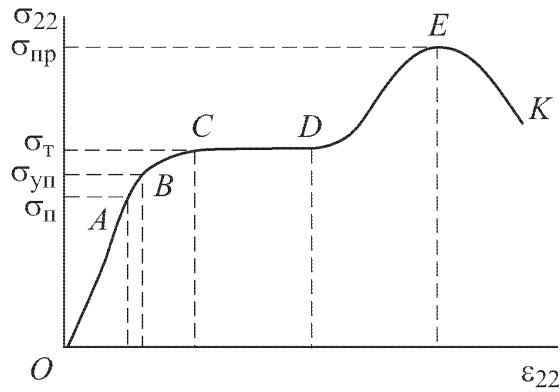
### 9.1. ჰუკის განზოგადებული კანონი

მასალის მექანიკური მუშაობის განმსაზღვრელი განტოლებები, როგორც წესი, დგინდება ექსპერიმენტების საშუალებით. ჩვენ უკვე განვიხილეთ წრფივი დრეკადი მასალის რეოლოგიური განტოლების (ჰუკის კანონი) აგების მეოთხედი.

**განსაზღვრება.** დრეკადი ეწოდება მასალას, რომელიც გარე ძალების მოქმედების შეწყვეტის შემდეგ სრულად აღიდგენს საწყის მდგომარეობას.

საზოგადოდ, მასალების მიხედვით, დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა სხვადასხვანაირ სურათს იძლევა. დიდი მნიშვნელობა აქვს კავშირს ძელის გამჭიმავ ძაბვასა და მის დეფორმაციას შორის ანუ დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის დიაგრამას ნახ. 9.1.





ნახ. 9.1. მასალის დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის დიაგრამა

ამ დიაგრამაზე, გრაფიკის  $OA$  ნაწილი შეესაბამება **წრფივ დეფორმაციას (ჰუკის კანონი)** ანუ წრფივია დამოკიდებულება ძელზე წარმოებულ ძაბვასა და ძელის ფარდობით წაგრძელებას შორის.  $A$  წერტილს **პროპორციულობის ზღვარს** უწოდებენ.

თუ ძაბვის სიდიდეს გავზრდით, მაშინ გრაფიკის  $AB$  ნაწილი, ძაბვა-დეფორმაციის არაწრფივ კავშირს გვიჩვენებს (ალარ სრულდება ჰუკის კანონი) თუმცა, ძაბვის მოხსნის შემდეგ, სხეული აღიდგენს საწყის მდგომარეობას ანუ ჯერ ისევ დრეკადია დეფორმაცია (არაწრფივი დეფორმაცია). ასეთ შემთხვევაში,  $B$  წერტილს **დრეკადობის ზღვარს** უწოდებენ.

თუ ისევ გავზრდით ძაბვას, მაშინ გადავალთ არადრეკად  $BC$  ზონაში და გარკვეული ძაბვის მიღწევისას, გრაფიკულად,  $C$  წერტილიდან იწყება მასალის **დენადობა** ანუ დეფორმაცია იზრდება ძაბვის გაზრდის გარეშე. ასეთ დეფორმაციას **CD პლასტიკურს** უწოდებენ. პლასტიკური მასალებია: **ოქრო, ალუმინი, სპილენძი . . .** მაგრამ არსებობენ მასალები, რომლებსაც დიაგრამაზე  $CD$  პლასტიკური უბანი არა აქვთ ან ძალიან მოკლე აქვთ ანუ ისინი იმსხვრევიან. ასეთი მასალებია: **მინა, ბეტონი, თუჯი . . .** მსხვრევადი მასალები უძლებენ, მხოლოდ მცირე დეფორმაციებს.

ძაბვის შემდგომი გაზრდისას, ძელის დეფორმაცია ხდება არაერთგვაროვანი, წარმოიქმნება ეგრეთწოდებული „ყელი“ შევიწროვება და გარკვეული ძაბვისას რომელსაც **სიმტკიცის ზღვარს** ვუწოდებთ  $E$  წერტილია გრაფიკზე, ხდება ძელის რღვევა ანუ გაწყვეტა.

**განსაზღვრება.** ძაბვის იმ მნიშვნელობას, რომლის ატანაც შეუძლია ნაკეთობას ექსპლუატაციისას, პლასტიკური დეფორმაციების გამოწვევის გარეშე, **დასაშვები ძაბვა** ეწოდება.

იმისათვის, რომ თავიდან ავიცილოთ მოსალოდნელი ზარალი, ცდილობენ ისე დააპროექტონ ნაგებობები, რომ დასაშვები ძაბვა რამდენჯერმე მცირე იყოს პროპორციულობის ზღვარზე.

**განსაზღვრება.** რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს თუ რამდენჯერ მეტია პროპორციულობის კოეფიციენტი დასაშვებ ძაბვაზე, **სიმტკიცის მარაგი** ეწოდება.

მასალის ხარისხისა, ძაბვების ხასიათისა და ნაგებობის მნიშვნელობიდან გამომდინარე, სიმტკიცის მარაგს ირჩევენ [2; 10] დიაპაზონში.

**დრეკადობის კლასიკური თეორია** შეესაბამება სწორედ იმ დაძაბულ-დეფორმირებულ მდგომარეობას, რომელიც შეესაბამება დიაგრამის **OA** წრფივ ნაწილს.

დრეკადობის თეორიაში, სხეულის დაძაბულ - დეფორმირებული მდგომარეობის აღწერა, ხდება ჰუკის განზოგადებული კანონის საშუალებით, რომელსაც ტენზორულად ჩაწერენ შემდეგი ფორმით:

$$\sigma_{ij} = B_{ijmn} \varepsilon_{mn} \quad (9.1)$$

სადაც  $\sigma_{ij}$  და  $\varepsilon_{mn}$  სიმეტრიული ტენზორებია. აქედან გამომდინარე, 81  $B_{ijmn}$  კოეფიციენტიდან მხოლოდ 36 იქნება დამოუკიდებელი. თუ დავუშვებთ, რომ უწყვეტი გარემო არის იზოტროპული, მაშინ კოეფიციენტების მატრიცას ერთნაირი წევრები ექნება დეკარტის კოორდინატების სამივე მიმართულებით და თუ კოორდინატთა სისტემის ღერძებს ციკლურად გადავაადგილებთ, აგრეთვე გამოვიყენებთ არეკვლისა და მობრუნების გარდაქმნებს, მივიღებთ რომ დამოუკიდებელი კოეფიციენტების რაოდენობა იქნება 2.  $B_{ijmn}$  მატრიცას **დრეკადობის კოეფიციენტების მატრიცას** უწოდებენ.

თუ უწყვეტი გარემო არაა იზოტროპული, მაშინ მას **ანიზოტროპულს** უწოდებენ. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ იზოტროპულ მასალებს.

იზოტროპული დრეკადი მასალისათვის ჰუკის კანონს აქვს შემდეგი სახე:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (9.2)$$

სადაც  $\varepsilon_{kk} = J_{1\varepsilon}$  დეფორმაციის ტენზორის პირველი ინვარიანტია.

(9.2) განტოლებათა სისტემა წრფივია და თუ ამოვხსნით დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების მიმართ, მაშინ მივიღებთ რომ

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}. \quad (9.3)$$

სადაც  $\sigma_{kk} = J_{1\sigma}$  ძაბვის ტენზორის პირველი ინვარიანტია.

თუ გვაქვს ძელის გაჭიმვა  $x_1$  ღერძის მიმართულებით, მაშინ შეგვიძლია შემოვიტანოთ ტექნიკური მუდმივები  $E$  და  $\nu$ , რომლებიც წარმოადგენენ კოეფიციენტებს შემდეგ ფორმულებში:

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}; \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11}. \quad (9.4)$$

ამ ფორმულაში  $E$ -ს უწოდებენ იუნგის მუდმივას, ხოლო  $\nu$ -ს პუასონის კოეფიციენტს.

ამ მუდმივების საშუალებით შეგვიძლია გამოვსახოთ ჰუკის კანონი შემდეგი სახით:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right). \quad (9.5)$$

თუ, ამოვხსნით დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების მიმართ, მაშინ გვექნება

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk}. \quad (9.6)$$

### 9.1.1. დრეკადობის თეორიის სტატიკური და დინამიკური ამოცანების დასმა

დრეკადობის თეორიის სტატიკური ამოცანების დასმისას გამოიყენება შემდეგი განტოლებები, რომლებიც უნდა სრულდებოდეს უწყვეტი გარემოს ყველა შიგა წერტილში:

ა) წონასწორობის განტოლება:

$$\sigma_{j,i,j} + \rho b_i = 0; \quad (9.7)$$

ბ) ჰუკის კანონი:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}; \quad (9.8)$$

გ) კავშირი დეფორმაციებსა და გადაადგილებებს შორის:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (9.9)$$

ამას გარდა, უწყვეტი გარემოს შემომსაზღვრელ ზედაპირზე, უნდა სრულდებოდეს სასაზღვრო პირობები ძაბვებზე ან გადაადგილებებზე:

დრეკადობის თეორიის ამოცანების კლასიფიკაცია წარმოებს ამ სასაზღვრო პირობების მიხედვით:

- 1.) მთელ საზღვარზე მოცემულია გადაადგილებები;
- 2.) მთელ საზღვარზე მოცემულია ძაბვები (ზედაპირული ძალები);
- 3.) საზღვრის ნაწილზე მოცემულია გადაადგილებები და მეორე ნაწილზე ძაბვები.

სამივე ამოცანის განხილვისას, იგულისხმება რომ მასური ძალები ცნობილია უწყვეტი გარემოს ყველა შიგა წერტილისათვის.

პირველი ამოცანის განხილვისას, როცა საზღვრის ყველა წერტილში მოცემულია გადაადგილებები, გამოყავთ ნავიე-კოშის განტოლებები გადაადგილებების მიმართ. ამისათვის, (9.9) განტოლებები უნდა ჩავსვათ (9.8) ფორმულებში, მივიღებთ რომ

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{1}{2} (u_{k,k} + u_{k,k}) + 2\mu \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (9.10)$$

შედეგი შევითანოთ წონასწორობის განტოლებებში. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\lambda \delta_{ij} u_{k,kj} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ij} + \rho b_i = 0 \quad (9.11)$$

ანუ

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i = 0. \quad (9.12)$$

(9.12) განტოლებებს ნავიე-კოშის განტოლებებს უწოდებენ. ზოგჯერ კი ლამეს განტოლებებს.

მეორე ტიპის ამოცანების განხილვისას, როცა მთელ საზღვარზე მოცემულია ზედაპირული ძალები  $t_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j$ ; ცდილობენ გამოიყვანონ დიფერენციალური განტოლება ძაბვებისათვის ბელტრამი-მიჩელას განტოლებები. ამისათვის იყენებენ სენ-ვენანის პირობებს დეფორმაციების თავსებადობის შესახებ, ჰუკის კანონს და წონასწორობის განტოლებებს.

ბელტრამი-მიჩელას განტოლებებს აქვს შემდეგი სახე:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} + \rho(b_{i,j} + b_{j,i}) + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \rho b_{k,k} = 0. \quad (9.13)$$

ამ ტიპის ამოცანების ამოხსნისას ვეძებთ ძაბვების ტენზორის ისეთ კომპონენტებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ (9.13) და (9.7) განტოლებებს არის შიგნით და  $t_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j$  პირობებს საზღვრის წერტილებში.

მესამე ტიპის ანუ შერეული ამოცანების ამოხსნისას, ერთდროულად ეძებენ (9.7),(9.8),(9.9) განტოლებათა სისტემების ამონახსნს ანუ ძაბვებს და გადაადგილებებს არის შიგნით ისე, რომ საზღვრის ნაწილზე სრულდება  $t_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j$  პირობები, ხოლო მეორე ნაწილზე მოცემულია გადაადგილებები.

დინამიკური ამოცანების განხილვისას, წონასწორობის განტოლება იცვლება დინამიკის განტოლებით ანუ

$$\sigma_{j,i} + \rho b_i = \rho \dot{u}_i. \quad (9.14)$$

შესაბამისად, სასაზღვრო პირობებთან ერთად, უნდა განვიხილოთ საწყისი პირობებიც.

ამ შემთხვევაში გადაადგილებებისათვის გვაქვს ნავიე-კოშის (ლამეს) განტოლებები შემდეგი ფორმით:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (9.15)$$

ამ განტოლებებთან ერთად, ამონახსნები უნდა აკმაყოფილებდნენ როგორც საწყისი პირობებს, ასევე, სასაზღვრო პირობებს.

## 9.2. ნიუტონის განზოგადებული რეოლოგიური კანონი

სითხეების (გაზების) დინამიკას შეისწავლის ჰიდრო-აეროდინამიკა. ისევე, როგორც დრეკადი მასალების შემთხვევაში, ჰიდროაეროდინამიკაშიც, სითხისა და გაზის დინამიკის მათემატიკური მოდელირება იწყება ექსპერიმენტებით, მოცემული სითხის (აირის) რეოლოგიური კანონის დასადგენად.

ნიუტონური სითხეებისათვის გვაქვს ნიუტონის განზოგადებული რეოლოგიური კანონი:

$$\sigma_{ij} = H_{ijmn} \dot{\epsilon}_{mn}. \quad (9.16)$$

სადაც  $\dot{\epsilon}_{mn}$  დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის კომპონენტებია, ხოლო  $H_{ijmn}$  მუდმივთა მატრიცაა, რომლებიც ახასიათებენ, მოცემული სითხის (აირის) მექანიკურ თვისებებს. საზოგადოდ, მუდმივთა მატრიცა შეიცავს 81 მუდმივს, თუმცა, იზოტროპული, ერთგვაროვანი სითხეებისათვის, როგორცაა: წყალი, ზეთი, მაზუთი . . . ამ მუდმივთა მატრიცას სიმეტრიის თვისებებიდან გამომდინარე, დაიყვანენ ორ დამოუკიდებელ  $\lambda^*$  და  $\mu^*$  მუდმივზე.

ასეთ შემთხვევაში, ნიუტონის რეოლოგიურ კანონს ექნება შემდეგი სახე:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu^* \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (9.17)$$

სადაც  $\lambda^*$  და  $\mu^*$  სითხის (გაზის) სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტებია.

საშუალო ნორმალური ძაბვა იქნება:

$$\frac{1}{3} \sigma_{ii} = -p + \frac{1}{3} (3\lambda^* + 2\mu^*) \dot{\epsilon}_{ii} = -p + \chi^* \dot{\epsilon}_{ii}. \quad (9.18)$$

სადაც  $\chi^*$  სიბლანტის სივრცული კოეფიციენტია. თუ, მივიღებთ სტოქსის პირობას და დავუშვებთ, რომ  $\chi^* = 0$ , მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{3} \sigma_{ii} = -p \quad (9.19)$$

რაც იმას ნიშნავს რომ, ბლანტ სითხეში, წონასწორობის პირობებში, ჰიდროსტატიკური წნევა, საშუალო ნორმალური ძაბვის ტოლია და მიმართულია სითხის შიგნით.

ამით აიხსნება სითხის წვეთის წონასწორობა სიბრტყეზე. ასეთ შემთხვევაში, თერმოდინამიკური წნევა მთლიანად განისაზღვრება მექანიკური სიდიდეებით.

რეოლოგიური (9.17) კანონის გარდა, იზოტროპული, ნიუტონური სითხეების მათემატიკური მოდელის ასაგებად საჭიროა: მოძრაობის განტოლებები კოშის ფორმით, მასის შენახვის კანონი (უწყვეტობის განტოლება), ენერჯის შენახვის კანონი და მდგომარეობის განტოლება.

### 9.2.1. იზოტროპული ნიუტონური სითხეების დინამიკის მათემატიკური მოდელები

მოძრაობის განტოლებას კოშის ფორმით აქვს შემდეგი სახე:

$$\sigma_{j,i,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i; \quad (9.20)$$

სადაც  $v_i$  სითხის სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია.

უწყვეტობის განტოლება ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0. \quad (9.21)$$

ენერჯის შენახვის კანონს აქვს სახე:

$$U = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z; \quad (9.22)$$

სადაც  $U$  სითხის შინაგანი ენერჯიაა,  $c_i$  სითბური ნაკადის ვექტორის კომპონენტები, რომელიც გადის ფართის ერთეულში, სითბოგამტარობის ხარჯზე დროის ერთეულში,  $z$  ერთეულ დროში გამოსხივებული სითბური მუდმივაა გაანგარიშებული მასის ერთეულზე.

მდგომარეობის განტოლება (დგინდება ექსპერიმენტებით).

$$p = p(\rho; T). \quad (9.23)$$

თუ საჭიროა სითბური ეფექტების გათვალისწინებაც, მაშინ მოცემულ განტოლებათა სისტემას უნდა მივუერთოთ ფურიეს სითბოგამტარობის განტოლება და კალორიული განტოლება.

ფურიეს სითბოგამტარობის განტოლებას ჩაწერენ შემდეგი ფორმით:

$$c_i = -kT_{,i}; \quad (9.24)$$

სადაც  $k$  სითბოგამტარობის კოეფიციენტი.

კალორიული განტოლებაც ემყარება ექსპერიმენტებს:

$$U = U(\rho; T). \quad (9.25)$$

მივიღეთ 16 განტოლება 16 უცნობით ანუ სისტემა არის ჩაკეტილი. ამ განტოლებათა სისტემას მიუერთებენ სასაზღვრო და საწყის პირობებს.

ჰიდროდინამიკაში, ბლანტი სითხეებისათვის გამოიყენება სპეციფიკური სასაზღვრო პირობები, რომელთაც სითხის მიკვრის პირობებს უწოდებენ:

$$v_i|_{\partial\Omega} = 0. \quad (9.26)$$

#### ა) ნავიე-სტოქს-დიუგემის განტოლება

განვიხილოთ ბლანტი სითხის მათემატიკური მოდელი იმ შემთხვევისათვის, როცა სითბური ეფექტები იმდენად უმნიშვნელოა, რომ შეიძლება მათი უგულებელყოფა.

თუ დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის ფორმულიდან მოსულ კინემატიკურ თანადობებს

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}); \quad (9.27)$$

შევიტანთ ნიუტონის რეოლოგიურ განტოლებაში, მივიღებთ რომ

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \lambda^* \frac{1}{2}(v_{k,k} + v_{k,k})\delta_{ij} + 2\mu^* \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = \\ &= -p\delta_{ij} + \lambda^* v_{k,k}\delta_{ij} + \mu^*(v_{i,j} + v_{j,i}). \end{aligned} \quad (9.28)$$



შევიტანოთ ეს ფორმულა დინამიკის განტოლებაში. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \lambda^* v_{k,kj} \delta_{ij} + \mu^* (v_{i,jj} + v_{j,ij}) + \rho b_i. \quad (9.29)$$

ანუ საბოლოოდ, გვექნება ნავიე-სტოქს-დიუგემის განტოლება ბლანტი სითხეებისათვის შემდეგი სახით:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + (\lambda^* + \mu^*) v_{j,ji} + \mu^* v_{i,jj} + \rho b_i. \quad (9.30)$$

ბ) თუ სითხე უკუმშია, მაგალითად წყალი, მაშინ

$$v_{i,i} = 0. \quad (9.31)$$

უკუმში სითხეებისათვის (9.30) დინამიკის განტოლება გარდაიქმნება და მას ნავიე-სტოქსის განტოლებას უწოდებენ უკუმში ბლანტი სითხეებისათვის.

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \mu^* v_{i,jj} + \rho b_i. \quad (9.32)$$

### 9.3. რეინერის დრეკადი მასალის მათემატიკური მოდელი

რთული რეოლოგიის მასალებისათვის ხშირად იყენებენ რეინერის ელასტიკური მასალის მათემატიკურ მოდელს (კომპოზიტები, მრავალფაზიანი მასალები და ა. შ.), რომელსაც აქვს სახე:

დინამიკის განტოლება:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i; \quad (9.33)$$

კინემატიკური თანადობები:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (9.34)$$

რეინერის რეოლოგიური განტოლება:

$$\sigma_{ij} = \varphi_0 \delta_{ij} + \varphi_1 \varepsilon_{ij} + \varphi_2 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj}; \quad (9.35)$$

სადაც  $\varphi_i$  დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების მატრიცის ინვარიანტებზე დამოკიდებული ფუნქციებია.

ამ ფუნქციების კონკრეტული სახე დგინდება ხანგრძლივი და მძიმე ექსპერიმენტების შედეგად.

სასაზღვრო და საწყისი პირობები აქ დაისმის ისეთივე სახით, როგორც წრფივად-დრეკადი მასალების შემთხვევაში.

#### 9.4. რეინერ-რივლინის სითხის მათემატიკური მოდელი

თუ ნოლის თეორემას გამოვიყენებთ რთული რეოლოგიის მქონე სითხეებისათვის  $\sigma_{ij} = f(\dot{\epsilon}_{ij})$ ; მაშინ მივიღებთ ყველაზე ზოგადი სითხის რეოლოგიურ განტოლებას:

$$\sigma_{ij} = \psi_0 \delta_{ij} + \psi_1 \dot{\epsilon}_{ij} + \psi_2 \dot{\epsilon}_{ik} \dot{\epsilon}_{kj}; \quad (9.36)$$

სადაც  $\psi_i = \psi_i(J_1 \dot{\epsilon}; J_2 \dot{\epsilon}; J_3 \dot{\epsilon})$ .

**განსაზღვრება.** სითხეებს, რომლებიც ემორჩილებიან (9.36) რეოლოგიურ კანონს რეინერ-რივლინის ბლანტი სითხეები ეწოდებათ.

ნიუტონური სითხეები წარმოადგენენ რეინერ-რივლინის სითხის კერძო შემთხვევას, როცა  $\psi_2 = 0$  და  $\psi_1 = const$ ;  $\psi_0 = -p$ .

რეინერ-რივლინის მოდელში არსებული მეორე რიგის წევრი იძლევა საშუალებას შევადგინოთ ისეთი სითხეების მათემატიკური მოდელები, რომელთაც ახასიათებთ დილატაციის თვისება ანუ ფხვიერი, სითხით გაჟღენთილი მასალების თვისება მოძრაობისას „ისუნთქონ-იზუყბუყონ“ სიჩქარის პერპენდიკულარული მიმართულებით.

**რეინერ-რივლინის სითხეებისათვის**, ასევე, სრულდება საწყისი პირობები და სასაზღვრო მიკვრის პირობები.

## 9.5. რთული რეოლოგიური მასალების კლასიფიკაცია

უფრო რთული რეოლოგიის მქონე ელასტიური მასალების მუშაობის მათემატიკური მოდელის შესადგენად, იყენებენ რივლინის რეოლოგიურ კანონს. რივლინმა დაუშვა, რომ რთული რეოლოგიის მასალა თავის თავში აერთიანებს როგორც დრეკად, ასევე, სიბლანტის თვისებებს ანუ გვაქვს შემდეგი დამოკიდებულება:

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}; \dot{\varepsilon}_{ij}). \quad (9.37)$$

რივლინ-ერიკსენის თეორემის თანახმად, (9.37) რეოლოგიურ კანონს, ყველაზე უფრო ზოგად შემთხვევაში, აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \psi_0 \delta_{ij} + \psi_1 \varepsilon_{ij} + \psi_2 \dot{\varepsilon}_{ij} + \psi_3 (\varepsilon_{ij})^2 + \psi_4 (\dot{\varepsilon}_{ij})^2 + \psi_5 (\varepsilon_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{\varepsilon}_{ij} \varepsilon_{ij}) + \\ & + \psi_6 (\varepsilon_{ij}^2 \dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{\varepsilon}_{ij} \varepsilon_{ij}^2) + \psi_7 (\varepsilon_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^2 + \dot{\varepsilon}_{ij}^2 \varepsilon_{ij}) + \psi_8 (\varepsilon_{ij}^2 \dot{\varepsilon}_{ij}^2 + \\ & \dot{\varepsilon}_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^2). \end{aligned} \quad (9.38)$$

**ტრუსდელმა** იგივე მეთოდების საშუალებით ააგო **ჰიპოდრეკადი** მასალი მათემატიკური მოდელი:

$$\dot{\sigma}_{ij} = f(\dot{\varepsilon}_{ij}; \sigma_{ij}). \quad (9.39)$$

მასალებისათვის, რომელთაც ახასიათებთ ბლანტი-ელასტიურობა (ცოცვადობა, მასალები მეხსიერებით), შესაბამის რეოლოგიურ კანონს აქვს შემდეგი სახე:

$$\sigma_{ij} = f(t; \varepsilon_{ij}; \dot{\varepsilon}_{ij}). \quad (9.40)$$

ასეთი მასალებისათვის რეოლოგიურ კანონს ჩაწერენ შემდეგი ფორმით:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t C_{ijmn}(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{mn}}{d\tau} d\tau; \quad (9.41)$$

სადაც  $C_{ijmn}(t)$  ფუნქციას, მასალის რელაქსაციის ფუნქციას უწოდებენ. ზოგჯერ, (9.41) რეოლოგიური განტოლების ნაცვლად, იყენებენ შემდეგ ფორმულას:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t Q_{ijmn}(t - \tau) \frac{d\sigma_{mn}}{d\tau} d\tau; \quad (9.42)$$

სადაც  $Q_{ijmn}(t)$  ცოცვადობის ფუნქციაა.

პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით, ყველაზე უფრო ზოგადია ტრუსდელის რეოლოგიური კანონი:

$$F(t; \sigma_{ij}; \varepsilon_{ij}; \dot{\sigma}_{ij}; \dot{\varepsilon}_{ij}; \ddot{\sigma}_{ij}; \ddot{\varepsilon}_{ij}) = 0. \quad (9.43)$$

რეოლოგიური კანონის დადგენა ხდება ექსპერიმენტის მეშვეობით, რასაც წინ უძღვის პროცესებისა და მასალების მეცნიერული ანალიზი. ექსპერიმენტის მასალების დამუშავება კი ხდება სტატისტიკის მეთოდებით.

ამ ტიპის მოდელებს განეკუთვნება ბინგამის ცნობილი რეოლოგიური მოდელიც, ისეთი მასალებისათვის როგორცაა ზეთიანი საღებავი, ქაობი, პულპა . . ., რომელთა მოძრაობის დასაწყებად, აუცილებელია ძვრის გარკვეული სასრული სიდიდის მძვინვარება დაძლევა.

## 9.6. გენიევ-გოგოლაძის ბარობლანტი სითხის რეოლოგიური განტოლება

ეკოლოგიურ და ანტროპოგენური პროცესების შესწავლისას, ხშირად, საქმე გვაქვს მცირე მყარი ნაწილაკების, წყალთან ან ჰაერთან ურთიერთქმედებასთან. მაგალითად, როგორცაა ქარბორბალა - ტორნადო, ღვარცოფული ნაკადი - სელი, პნევმოტრანსპორტი, აეროზოლების დალექვა, სასარგებლო წიაღისეულის გამდიდრება და ა.შ.

ასეთი ამოცანების შესასწავლად შემუშავებული იქნა გენიევ - გოგოლაძის ცნობილი რეოლოგიური მოდელი:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + (\mu_0 + \lambda p)(v_{i,j} + v_{j,i}). \quad (9.44)$$

ამ ფორმულაში  $\lambda$  ბარო-სიბლანტის კოეფიციენტია. (9.44) რეოლოგიური განტოლების ბაზაზე, შემუშავებული იქნა მათემატიკური მოდელი, რომელმაც დიდი გამოყენება ჰპოვა მაღალი წნევებით გამორჩეული სითხეების შესწავლისას, რის გამოც მას გენიევ-გოგოლაძის ბარობლანტი სითხის მათემატიკური მოდელი ეწოდა.

## 9.7. ვოინიჩ-სიანოჟენცკი-ობგადის (VSO) მოდელი სუსპენზიებისათვის

ეკოლოგიური პროცესების შესასწავლად, ვოინიჩ-სიანოჟენცკის იდეაზე დაყრდნობით, გენიევ-გოგოლაძის მოდელის განვითარების გზაზე, შემუშავებული იქნა ვოინიჩ-სიანოჟენცკი-ობგადის (VSO) მოდელი სუსპენზიებისათვის.

მართლაც, ჩვენს მიერ გენიევ-გოგოლაძის რეოლოგიურ განტოლებაში (9.44) გამოყენებული იქნა ა. ეინშტეინის [6] იდეა, იმის შესახებ, რომ ორკომპონენტური ქიმიურად არაურთიერთქმედ ნარევეში, რომელსაც ჩვენ სუსპენზიას ვუწოდებთ, სიბლანტის კოეფიციენტი დამოკიდებულია მყარი ნაწილაკების კონცენტრაციაზე ანუ

$$\lambda = f(s). \quad (9.45)$$

გავშალოთ ეს დამოკიდებულება ტეილორის მწკრივად:

$$\lambda = f(s) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}s + O(s^2). \quad (9.46)$$

თუ, მყარი ნაწილაკების კონცენტრაცია  $s = 0$ , მაშინ ჩვენ მივიღებთ მხოლოდ თხევად კომპონენტს.

$$\lambda = 0 \Rightarrow f(0) = 0. \quad (9.47)$$

აქედან გამომდინარე,

$$\frac{f'(0)}{1!} = \lambda_0 = \text{const}. \quad (9.48)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$f(s) \cong \lambda_0 s. \quad (9.49)$$

თუ, მასშტაბის არჩევის შედეგად, ჩავთვლით რომ  $\lambda_0 = 1$ , მაშინ სუსპენზიისათვის მივიღებთ ვოინიჩ-სიანოჟენცკი-ობგადის რეოლოგიურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + (\mu_0 + sp)(v_{i,j} + v_{j,i}). \quad (9.50)$$

სუსპენზიის ყოველი მცირე  $V$  მოცულობა შედგება  $\rho_w$  სიმკვრივის სითხისა და  $\rho_s$  სიმკვრივის შეტივტივებული მყარი ნაწილაკებისაგან ანუ ამ მოცულობის  $m$  მასა, წარმოადგენს  $\rho_w V(1 - s)$  სითხისა და შესაბამის მოცულობაში მოთავსებული  $\rho_s V s$  შეტივტივებული ნაწილაკების მასების ჯამს:  $\rho V = \rho_w V(1 - s) + \rho_s V s$ ;

რაც იმას ნიშნავს, რომ სუსპენზიის ნაკადის სიმკვრივე, გამოისახება თხევადი და მყარი ნაწილაკების შესაბამისი სიმკვრივეების საშუალებით შემდეგნაირად:

$$\rho = s\rho_s + (1 - s)\rho_w. \quad (9.51)$$

აქედან გამომდინარე, დინამიკის  $\sigma_{j,i,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i$  განტოლებებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$-p_{,j} \delta_{ij} + (\lambda_0 \cdot s_{,j})(v_{i,j} + v_{j,i}) + (\mu_0 + \lambda_0 s)(v_{i,jj} + v_{j,ij}) + \rho b_i = \rho \dot{v}_i. \quad (9.52)$$

რადგან სუსპენზიის სიმკვრივე

$$\rho = s\rho_s + (1 - s)\rho_w = s(\rho_s - \rho_w) + \rho_w,$$

უწყვეტობის  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho v_{i,i} = 0$  განტოლება, შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v_k \frac{\partial s}{\partial x_k} + \frac{s\rho_s + (1-s)\rho_w}{\rho_s - \rho_w} \cdot v_{i,i} = 0. \quad (9.53)$$

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ჩაკეტვას, ვაღწევთ ვოინიჩ-სიანოჟენცკის იდეით: მყარი დისპერსიული ფაზის დიფუზიის განტოლების საშუალებით:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v_k \frac{\partial s}{\partial x_k} = D S_{,ii}. \quad (9.54)$$

სადაც  $D$  მექანიკური დიფუზიის კოეფიციენტი. სუსპენზიაში არ გვაქვს ქიმიური ურთიერთქმედება კომპონენტებს შორის.

ამრიგად, სუსპენზიის ნაკადის დინამიკის მათემატიკური მოდელი (9.52),(9.53),(9.54), რომელიც შედგება 5 განტოლებისაგან, შეიცავს 5 უცნობს:  $v_1; v_2; v_3; p; s$ .

ამ განტოლებათა სისტემას უნდა მივუერთოთ მყარ საზღვრებთან მიკვრის დირიხლეს ერთგვაროვანი პირობები:

$$v_{i|_{\partial\Omega}} = 0; \quad (9.55)$$

საწყისი პირობები:

$$v_{i|_{t=0}} = v_i(x_1, x_2, x_3); \quad s|_{t=0} = s(x_1, x_2, x_3); \quad (9.56)$$

და ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე, კინემატიკური პირობები, მაგალითად, წნევა თავისუფალ ზედაპირზე უდრის ატმოსფერულ წნევას:

$$p|_{\partial\Omega_0} = p_{atm}; \quad (9.57)$$

ადვილი საპოვნელია, რომ ჰიდროსტატიკური მდგომარეობის შემთხვევაში გვექნება სიღრმის მიხედვით წნევის შემდეგი განაწილება:

$$p = p_{atm.} + \rho_w g h + \frac{h}{2}(\rho_s - \rho_w)g, \quad (9.58)$$

ამოცანები ამოხსნებით.

**9.1. იპოვეთ ჰუკის კანონის შებრუნებული კანონი ანუ დეფორმაციები გამოსახეთ ძაბვებით.**

ამოხსნა. ჰუკის კანონს აქვს სახე:  $\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$ . თუ  $i = j$  მაშინ

$\sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{ii}$ ; მაშასადამე,  $2\mu\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} = \sigma_{ij} - \frac{\lambda\delta_{ij}}{3\lambda+2\mu}\sigma_{kk}$   
ანუ

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda\delta_{ij}}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{kk}$ . დეფორმაციები გამოვსახეთ ძაბვებით.

**9.2. გამოიყვანეთ ნავიე-კოშის განტოლებები.**

ამოხსნა. ჰუკის კანონის თანახმად,  $\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$ ; რადგან  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  მივიღებთ, რომ  $\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}u_{k,k} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})$ . თუ ამ ფორმულას შევიტანთ დინამიკის განტოლებაში მივიღებთ, რომ

$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} + \rho b_i = 0$ . მივიღეთ ნავიე-კოშის განტოლებები (ლამეს განტოლებები).

**9.3. ვონიზ-სიანოჟენცკი-ობგაძის (VSO) მოდელის ფარგლებში, ამოხსენით მყარი ნაწილაკების სედიმენტაციის (დალექვის) ამოცანა.**

ამოხსნა: სედიმენტაციის ამოცანის პირობებში ნაკადის სიჩქარე ნულის ტოლია, შესაბამისად, გვექნება შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$-p_{,i} + \rho b_i = 0;$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 0;$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = D s_{,ii}.$$

ამის გარდა, უნდა დავაკმაყოფილოთ სასაზღვრო და კინემატიკური პირობები:

$$\begin{cases} s|_{x_3=h} = 1 \\ s|_{x_3=0} = 0 \\ p|_{x_3=0} = p_{atm}. \end{cases};$$

ამ ამოცანის ამოხსნას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{h} x_3; \\ \rho &= \frac{1}{h} x_3 (\rho_s - \rho_w) + \rho_w; \\ p &= p_{atm.} + \rho_w g x_3 + \frac{x_3^2}{2h} (\rho_s - \rho_w) g. \end{aligned}$$

როგორც ვხედავთ, მყარი ნაწილაკების განაწილების კონცენტრაცია სიღრმის მიხედვით წრფივი კანონით იმატებს, ისევე როგორც სუსპენზიის სიმკვრივე, ხოლო წნევა სიღრმის მიხედვით იზრდება კვადრატული კანონით.

## ლიტერატურა

1. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред, пер. с англ., Мир, Москва, 1974.
2. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред, пер. с англ, ИЛ, Москва, 1954.
3. Жермен С. Механика сплошных сред, пер. с франц., Мир, Москва, 1965.
4. Кристенсен Р. Введение в теорию вязко упругости, пер. с англ., Мир, Москва, 1974.
5. Прагер В., Ходж Ф.Г. Теория идеально-пластических тел, пер. с англ., Мир, Москва, 1956.
6. Эйнштейн А. Новое определение размеров молекул/ А. Эйнштейн // Собр. науч. трудов. Под редакцией И.Е. Тамма, Я. А. Смородинского, Б.Г. Кузнецова, Москва, Наука, 1965, т. 3.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика, Наука, Москва, 1986.



8. Eirich F.R. Rheology, Theory and Applications, v.1., Academic Press, New York, 1956.
9. Гениев Г.А., Гоголадзе Р.В. Одномерное установившееся движение несжимаемой бара-вязкой среды, Доклады АН Грузии, т.128, №2, 1987.
10. Roahe P.J. Computational fluid dynamics, Albuquerque, New Mexico, 1976.
11. Sebeci T., Bradshaw P. Physical and computational aspects of convective heat transfer, New York, 1984.
12. Коул Дж., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика, пер. с англ., Мир, Москва, 1989.
13. Хемш М., Нилсен Дж. Аэродинамика ракет, том 1, том 2, пер. с англ., Мир, Москва, 1989.
14. Краснов Н.Ф., Кошевой В.Н., Данилов А.Н. и др. Аэродинамика в вопросах и задачах: учеб. пос., Москва, 1985.
15. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости, Москва, 1976.
16. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости, Москва, 1979.
17. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. Введение в аэроавтоупругость, Москва, 1980.
18. Hamel G. Theoretische mechanic, Berlin, 1949.
19. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике, ч.V, Харьков, 1972.
20. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред, пер. с англ., Мир, 1973.
21. Синг Дж. Классическая динамика, пер. с англ., Москва, 1963
22. Арнольд В.И. Математические методы классической механики, Москва, 1974.
23. Журавлёв В.Ф. Основы теоретической механики, Москва, 2001.
24. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновых жидкостей, пер. с англ., Мир, Москва, 1978.
25. ფრანგიშვილი ა., ობგაძე თ., ჯიბლაძე ნ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., მოსაშვილი ი. ბგერამდელი თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ოპტიმიზაცია, მონოგრაფია, თბილისი, 2009.

26.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირება, მონოგრაფია, თბილისი, 2016.

27.ობგაძე თ. ჰიდროდინამიკის სტაციონარული ამოცანების ამოხსნა რვაჩოვ-ობგაძის RO - მეთოდის ბაზაზე, მონოგრაფია, თბილისი, 2017.

28.ობგაძე თ., ფრანგიშვილი ა., კემულარია ო., რაშოიანი მ., ვარიაციული მეთოდები, მონოგრაფია, თბილისი, 2019.

29.ობგაძე თ., ფრანგიშვილი ა. უწყვეტ გარემოთა დინამიკის მათემატიკური მოდელირება, მონოგრაფია, თბილისი, 2019.

30.ობგაძე თ., ფრანგიშვილი ა., ყულოშვილი ნ. წყალ-ტალახოვანი სელური ნაკადის დინამიკის მათემატიკური მოდელირება, მონოგრაფია, თბილისი, 2020.

31.კემულარია ო., ობგაძე თ. უპილოტო საფრენი აპარატების ავტომატიზებული პროექტირების საფუძვლები, მონოგრაფია, თბილისი, 2022.

32.ობგაძე თ. სითხეებისა და გაზების დინამიკის მათემატიკური მოდელირება, მონოგრაფია, 2024.

### სარჩევი

წინასიტყვაობა		ბვ.
		3
I თავი	ველის თეორია ევკლიდურ სივრცეში	4
	1.1 სკალარული და ვექტორული სიდიდეები	4
	1.2 სკალარული ველი ევკლიდეს სივრცეში. სკალარული ველის გრადიენტი	14
	1.3 ვექტორული ველი. ვექტორული ველის პოტენციალი. ვექტორული ველის ძალწირები. გრიგალის ცნება და მისი ჰიდროდინამიკური შინაარსი. ვექტორული ველის ცირკულაცია შეკრულ წირზე	18
	1.3.1 ვექტორული ველის ნაკადი. დივერგენცია. გაუსის ფორმულა	25

	1.3.2	სტოქსის ფორმულა. დივერგენციის თვისებები	28
	1.3.3	ჰამილტონის $\nabla$ ოპერატორი და მისი თვისებები	29
ამოცანები და სავარჯიშოები			29
II თავი	ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები		31
	2.1	ტენზორები	31
	2.1.1	ვექტორი, როგორც პირველი რანგის ტენზორი	32
	2.1.2	ტენზორის ცნება. მაღალი ვალენტობის ტენზორები	34
	2.1.3	ტენზორის კომპონენტები. მეტრიკული ტენზორი	36
	2.2	ოპერაციები ტენზორებზე. ტენზორული ნამრავლი. სიმეტრირება და ალტერნირება	38
	2.2.1	ტენზორების სკალარული ნამრავლი	40
	2.2.2	ტენზორის ახარისხება	41
	2.2.3	ტენზორების ორმაგი სკალარული ნამრავლი. ტენზორის კვალი	42
	2.2.4	ტენზორის ნახვევის ოპერაცია	44
	2.2.5	ფსევდოტენზორები. ლევი-ჩივიტას ტენზორი. ტენზორების ვექტორული ნამრავლი	44
	2.3	მეორე რანგის ტენზორების ალგებრა	46
	2.3.1	მეორე რანგის ტენზორის მთავარი მიმართულებები და მთავარი მნიშვნელობები. ინვარიანტები	47
	2.3.2	დეკარტული ტენზორების ალგებრა	48
	2.3.2.1	მეორე რანგის სიმეტრიული დეკარტული ტენზორის მთავარი მიმართულებები და მთავარი მნიშვნელობები. ინვარიანტები	51
	2.3.2.2	მეორე რანგის სიმეტრიული დეკარტული ტენზორის ხარისხები. ჰამილტონ-კელის თეორემა	54
	2.3.3	ნოლის თეორემა. რივლინ-ერიკსენის თეორემა	56

	2.3.4	დეკარტული ტენზორული ველი და სიმბოლური აღნიშვნები	57
	2.4	არადეკარტული ტენზორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული წარმოებულნი. რიჩის ლემა	58
ამოცანები ამოხსნებით			60
III თავი	კვატერნიონები და მყარი სხეულის სამგანზომილებიანი კინემატიკა		66
	3.1	კლასკური მექანიკის აქსიომატიზაციის საკითხები. მექანიკის განტოლებების ინვარიანტულობა და კოვარიანტულობა	66
	3.2	მატერიალური წრტილის კინემატიკა ბუნებრივ კოორდინატებში	71
	3.2.1	მატერიალური წრტილის კინემატიკა მრუდწირულ კოორდინატებში	75
	3.3	მყარი სხეულის კინემატიკა. მყარი სხეულის ორიენტაციის აღწერის მეთოდები	82
	3.3.1	ბრუნვის აღწერა კუთხეებით. ორთოგონალური მატრიცები	84
	3.4	კვატერნიონის ცნება	87
	3.5	ოპერაციები კვატერნიონებზე	88
	3.6	კვატერნიონების გეომეტრიულ - რიცხვითი ინტერპრეტაცია	92
	3.7	კვატერნიონთან მიერთებული გარდაქმნა	95
	3.8	კვატერნიონების ინტერპრეტაცია პაულის მატრიცებით	98
	3.9	მობრუნებათა შეკრება კვატერნიონებით	99
	3.10	მყარი სხეულის კუთხური სიჩქარე და კვატერნიონები	100
	3.11	ეილერის ფორმულა და კვატერნიონები	101
	3.12	ეილერის კინემატიკური განტოლებები	102
ამოცანები ამოხსნებით			103
IV თავი	ლის ალგებრები და ლის ჯგუფები		104
	4.1	გარდაქმნების ერთპარამეტრიანი ჯგუფი	104
	4.2	ლის განტოლება	107
	4.3	ინვარიანტები. ჯგუფის ინფინიტეზიმალური ოპერატორი	110

	4.4	გარდაქმნების ერთპარამეტრიანი ჯგუფის ექსპონენციალური წარმოდგენა	113
	4.5	ინვარიანტული განტოლებები	116
	4.6	დიფერენციალური განტოლებების დასაშვები ჯგუფი	117
	4.6.1	სითბოგამტარობის განტოლების დასაშვები ჯგუფი	118
	4.6.2	წერტილოვანი გარდაქმნები და გაფართოების ფორმულები	121
	4.6.3	განმსაზღვრელი განტოლებები	124
	4.7	ლის ალგებრა	126
	4.7.1	გაფართოების კოორდინატული გადმოცემა	127
	4.7.2	პირველი გაფართოება	128
	4.7.3	მეორე გაფართოება	129
	4.8	ლის მეთოდის გამოყენების მაგალითები	129
	4.8.1	ბიურგერსის განტოლების ბაზისური ლის ალგებრა	134
	4.8.2	კორტევევა-დე-ფრიზის განტოლების ბაზისური ლის ალგებრა	135
ამოცანები და სავარჯიშოები			136
V თავი	ლაგრანჟის ფორმალიზმი და ჰამილტონური სისტემები		138
	5.1	ლაგრანჟის ფუნქცია და ჰამილტონის პრინციპი	138
	5.2	ლაგრანჟიანის თვისებები	141
	5.3	განზოგადოებული იმპულსის თვისებები	143
	5.4	ჰამილტონის ფორმალიზმი	145
	5.5	ჰამილტონის განტოლებები	146
	5.6	პუასონის ფრჩხილები	148
	5.7	ჰამილტონ-იაკობის განტოლებები	150
	5.8	ლეჟანდრის გარდაქმნების გეომეტრია	151
	5.9	კლასიკური მექანიკის გეომეტრია	152
ამოცანები და სავარჯიშოები			158
VI თავი	მექანიკური ძაბვის თეორია		159
	6.1	მექანიკური ძაბვის ტენზორი	160
	6.2	კავშირი ძაბვის ტენზორსა და ძაბვის ვექტორს შორის	163
	6.3	ძაბვის ტენზორის სიმეტრიულობა. უწყვეტი გარემოს წონასწორობის განტოლებები კომის ფორმით	164

	6.4	მთავარი ძაბვები და ძაბვის ტენზორის ინვარიანტები	166
	6.5	ძაბვის ტენზორის დაშლა სფერულ და დევიატორულ ნაწილებად	168
	6.6	ძაბვის ვექტორის დაშლა ნორმალურ და მხებ მდგენელებად	169
ამოცანები ამოხსნებით			170
VII თავი	უწყვეტი გარემოს კინემატიკა		176
	7.1	მოძრაობის აღწერის ლაგრანჟის და ეილერის წესი	176
	7.2	დეფორმაციის ტენზორი	180
	7.2.1	ბრუნვის ტენზორი	183
	7.2.2	დეფორმაციის ტენზორის მთავარი მნიშვნელობები და მთავარი ღერძები	184
	7.2.3	მოცულობის ცვლილება დეფორმაციისას	185
	7.2.4	წრფივი დეფორმაციების გეომეტრიული თვისებები	187
	7.2.5	ტემპერატურული დეფორმაცია	188
	7.2.6	დეფორმაციის ტენზორის დაშლა სფერულ და დევიატორულ ნაწილებად	189
	7.3	დეფორმაციათა თავსებადობის სენ-ვენანის პირობები	189
	7.4	უწყვეტი გარემოს მოძრაობის განმსაზღვრელი პარამეტრები. მატერიალური წარმოებულები	190
	7.4.1	დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორი და გრიგალი	193
	7.4.2	მოცულობითი ინტეგრალის წარმოებული დროით, როცა ინტეგრების მოცულობა დროის ფუნქციაა	194
ამოცანები ამოხსნებით			195
VIII თავი	უწყვეტ გარემოთა დინამიკის ძირითადი კანონები		198
	8.1	უწყვეტობის განტოლება	198
	8.2	უწყვეტი გარემოს მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების კანონი	199
	8.3	უწყვეტი გარემოს მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების კანონი	201

	8.4	ენერჯის შენახვის კანონი. თერმოდინამიკის პირველი კანონი	202
	8.5	თერმოდინამიკის მეორე კანონი. ენტროპია. კლაუზიუს-დიუგემის უტოლობა	203
	8.6	უწყვეტი გარემოს დინამიკის ძირითადი განმსაზღვრელი განტოლებების შესახებ	205
	8.6.1	გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი და ექსპერიმენტის მასალების დამუშავება. წრფივი და არაწრფი რეგრესია. ამოცანების ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე	207
	8.6.2	დამოკიდებულება ძელის გაჭიმვისას ძაბვებსა და მცირე დეფორმაციებს შორის (ჰუკის კანონი)	209
	8.6.3	სიჩქარის ეპიურის აგება ნიუტონური სითხეებისათვის	212
ამოცანები ამოხსნებით			214
IX თავი	უწყვეტ გარემოთა დინამიკის კლასიკური მათემატიკური მოდელები		216
	9.1	ჰუკის განზოგადებული კანონი	216
	9.1.1	დრეკადობის თეორიის სტატიკური და დინამიკური ამოცანების დასმა	219
	9.2	ნიუტონის განზოგადებული რეოლოგიური კანონი	222
	9.2.1	იზოტროპული ნიუტონური სითხეების დინამიკის მათემატიკური მოდელი	223
	9.3	რეინერის დრეკადი მასალის მათემატიკური მოდელი	225
	9.4	რეინერ-რივლინის სითხის მათემატიკური მოდელი	226
	9.5	რთული რეოლოგიური მასალების კლასიფიკაცია	227
	9.6	გენიევ-გოგოლადის ბარობლანტი სითხის რეოლოგიური განტოლება	228
	9.7	ვოინიჩ-სიანოჟენცკი-ობგადის (VSO) მოდელი სუსპენზიებისათვის	229
ამოცანები ამოხსნებით			231
ლიტერატურა			232