ვ. შონია

ალგებრა და ელემენტარული ფუნქციები

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ საშუალო სპეციალური სასწავლებლებისათვის.

გამომცემლობა „განათლება“

თბილისი—1975

512 (075)
ზ 828

წინამდებარე ნაშრომი „ალგებრა და ელემენტარული ფუნქციები“ განკუთვნილია საშუალო სპეციალური და ტექნიკური სასწავლებლების I და II კურსის სტუდენტებისათვის. სახელმძღვანელო შედგენილია ამჟამად მოქმედი პროგრამის მიხედვით და ქართულ ენაზე ორიგინალური სახელმძღვანელოს შექმნის პირველ ცდას წარმოადგენს.

20202—006
Ш ————————232—75
М—602 (08)-75

I თავი

მიახლოებითი გამოთვლები

§ 1. სიდიდის ზუსტი და მიახლოებითი მნიშვნელობანი

არითმეტიკიდან ვიცით, რომ სიგრძის, წონის, ტემპერატურის, ფართობის, მოცულობისა და სხვა სიდიდეების გაზომვა იძლევა მხოლოდ მიახლოებით რიცხვებს. მაგრამ, თუ ლაპარაკია კლასში მოსწავლეთა რაოდენობაზე, წიგნში გვერდების რაოდენობაზე, მუშის თვიურ ხელფასზე, აქ ყოველთვის ზუსტ რიცხვებთან გვაქვს საქმე.

ყოველგვარი გაზომვა, რომელსაც ვაწარმოებთ პრაქტიკაში, ხდება განსაზღვრული სიზუსტით. ეს დამოკიდებულია იმაზე, თუ რას ვზომავთ, რითი ვზომავთ და რისთვის ვზომავთ.

მაგალითად, როდესაც იზომება მანძილი რკინიგზის ორ A და B სადგურს შორის კილომეტრობით, მაშინ საკმარისია დავიცვათ სიზუსტე ათეულ მეტრამდე. მაგრამ, თუ ვზომავთ ფეხბურთის ან კალათბურთის მოედნის სიგრძეს და სიგანეს, მაშინ სიზუსტე 1 დმ-მდე მაინც უნდა დავიცვათ, ხოლო, თუ ვზომავთ საკლასო დაფის ან ფანჯრის მინის სიგრძეს ან სიგანეს, მაშინ სიზუსტე 1 სმ-მდე მაინც უნდა ავიღოთ და ა. შ.

როგორც ვხედავთ, სხვადასხვა სახის სიდიდეთა გაზომვა-გამოანგარიშებისას მიღებული შედეგები ზოგჯერ აბსოლუტურად ზუსტია, ხშირ შემთხვევაში კი —მიახლოებითი.

§ 2. ათწილადები და ნიშნადი ციფრები

ვთქვათ, რაიმე მონაკვეთის სიგრძის შეუიარაღებელი თვალით გაზომვისას მივიღეთ 18,7 სმ, ხოლო შეიარაღებული თვალით გაზომვისას 18,735. ცხადია, მეორე გაზომვისას მიღებული შედეგი უფრო ზუსტია, ვიდრე პირველი. როგორც ვხედავთ, პირველი შედეგი ერთ ათობით ნიშანს შეიცავს, ხოლო მეორე — სამ ათობით ნიშანს.

მიახლოებითი რიცხვი მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო მეტ ათობით ნიშანს შეიცავს. მაგალითად, 2,7.2,71. 2,718. 2,7182, 2,71828 რიცხვებიდან ყველაზე ზუსტია 2,71828.

1,2....,9 ციფრებს ნიშნადი ციფრები ეწოდება. ნულიც ნიშნად ციფრად ჩაითვლება, თუ ის მოთავსებულია ნიშნადი ციფრების მარჯვნივ და არ უჭირავს უკუგდებული ციფრის ადგილი. მაგალითად, 3,1 შეიცავს ორ ნიშნად ციფრს, 0,201-სამ ნიშნად ციფრს, 0,02030 — ოთხ ნიშნად ციფრს და ა. შ.

ამრიგად, მიახლოებით რიცხვში ნიშნადი ციფრი ეწოდება ყველა ციფრს, რომელიც მოთავსებულია პირველი ნულისაგან განსხვავებული ციფრის მარჯვნივ, ამ ციფრის ჩათვლით.

§ 3. სანდო და საეჭვო ციფრები მიახლოებით რიცხვებში

მიახლოებით გამოთვლებში დიდი მნიშვნელობა აქვს რიცხვებში სანდო და საეჭვო ციფრების დადგენას.

განვიხილოთ, რომელიმე ზუსტი რიცხვი 5,76543 და ვიპოვოთ ამ რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობანი სიზუსტით 0,1-მდე, 0,01-მდე, 0,001-მდე და ა. შ. მიახლოებითი რიცხვების დამრგვალების წესის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$5{,}7<5{,}76543<5{,}8;$$
$$5{,}76<5{,}76543<5{,}77;$$
$$5{,}765<5{,}76543<5{,}766;$$
$$5{,}7654<5{,}76543<5{,}7655.$$

როგორც ხედავთ, მარცხენა სვეტის თითოეული რიცხვი ნაკლებია მოცემულ ზუსტ რიცხვზე — 5,76543და წარმოადგენს მის მიახლოებას ნაკლებობით ანუ ე. წ. დანაკლისით, ხოლო მარჯვენა სვეტის თითოეული რიცხვი მეტია მოცემულ ზუსტ რიცხვზე და წარმოადგენს მის მიახლოებას ნამეტით ანუ მეტობით.

რიცხვის ნაკლებობით აღებულ მიახლოებით მნიშვნელობას ეწოდება ზუსტი რიცხვის ქვედა საზღვარი, ხოლო ნამეტით აღებულ მიახლოებით მნიშვნელობას—ზედა საზღვარი.

თუ დავაკვირდებით ცხრილს, შევამჩნევთ, რომ პირველ სტრიქონში ერთმანეთს ემთხვევა მიახლოებითი რიცხვების და ზუსტი რიცხვის მთელი ნაწილები, ე. ი. 5; 5 და 5, ერთმანეთისაგან განსხვავდება ამ რიცხვების მეათედები. მეორე სტრიქონში ერთმანეთს ემთხვევა მთელები და მეათედები, ხოლო განსხვავდებიან მეასედები. მესამე სტრიქონში ერთმანეთს ემთხვევა როგორც მთელები, ისე მეათედები და მეასედებიც. ერთმანეთისაგან განსხვავდება მხოლოდ მეათასედები და ა. შ. ეს იმას ნიშნავს, რომ თითოეულ შემთხვევაში რიცხვის იმ მიახლოებით მნიშვნელობათა ციფრებია სანდო, რომლებიც ემთხვევა ზუსტი რიცხვის ციფრებს, ხოლო დანარჩენი ციფრები საეჭვოა.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

ა) იპოვეთ 3,64541 და 7,63258 ზუსტ რიცხვთა მიახლოებითი მნიშვნელობები სიზუსტით 0,1-მდე, 0,01-მდე, 0,001-მდე, 0,0001-მდე და ამოწერეთ ამ მნიშვნელობათა სანდო ციფრები.

ბ) იპოვეთ 5,43263 და 6,56432 ზუსტი რიცხვების მიახლოებითი მნიშვნელობები სიზუსტით 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001-მდე და განსაზღვრეთ ამ მნიშვნელობათა ქვედა და ზედა საზღვრები.

§ 4. რიცხვთა დამრგვალების წესი

როგორც იცით, წრეწირის სიგრძის შეფარდება თავის დიამეტრთან გამოისახება უსასრულო არაპერიოდული ათწილადით:

$$\pi = 3{,}14159253\ldots$$

პრაქტიკაში π რიცხვის მნიშვნელობა მიღებულია $\frac{1}{100}$-ის სიზუსტით, ე. ი. $\pi \approx 3,14$.

წელიწადში არის 365, 242199... დღე-ღამე, პრაქტიკულად იხმარება 365 დღე-ღამე.

ხშირად, პრაქტიკული თვალსაზრისით, მიზანშეწონილია მოცემული რიცხვი შეიცვალოს სხვა ისეთი რიცხვით ,რომელიც მოცემულ რიცხვთან ახლოსაა; ამასთან, ადვილია როგორც ჩასაწერად, ისე წარმოსათქმელადაც. რიცხვის ასეთ შეცვლას რიცხვის დამრგვალება ეწოდება.

მაგალითად, თუ 76,6534 -ის ნაცვლად ავიღებთ 76,653-ს, მაშინ მოცემული რიცხვი დამრგვალებული იქნება სიზუსტით $\frac{1}{1000}$-მდე. აქ დამრგვალება შესრულებულია ნაკლებობით. თუ მოცემული რიცხვის მაგივრად ავიღებთ 76,7-ს, დამრგვალება შესრულებული იქნება $\frac{1}{10}$-მდე სიზუსტით, ამასთან მეტობით.

რიცხვის დამრგვალებას საერთოდ ვაწარმოებთ შემდეგი წესით:.

თუ პირველი უკუგდებული ციფრი 5-ის ტოლია ან 5-ზე მეტია, მაგრამ მომდევნო ციფრებიდან ზოგიერთი მაინც განსხვავდება 0-საგან, მაშინ ბოლო დატოვებულ ციფრს ერთი ერთეულით ვადიდებთ. თუ უკუგდებული პირველი ციფრი 5-ის ტოლია, ხოლო შემდეგი ციფრები ნულებია, მაშინ ბოლო დატოვებულ ციფრს არ ვცვლით, თუ ის ლუწია, ხოლო ვადიდებთ ერთი ერთეულით, თუ ის კენტია.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი: 1) $368354 \approx 368350 = 3,6835 \cdot 10^5$

$368400 = 3,684 .\ 10^5$

$368000 = 3,68 .\ 10^5$

$370000 = 3,77 \quad 10^5.$

2) $6,76504 \approx 6,7650$

$6,765$

$6,77$

$6,8$

§ 5. აბსოლუტური ცდომილება და მისი საზღვარი

ვთქვათ, a რიცხვი რომელიმე სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობაა, ხოლო A მისი ზუსტი მნიშვნელობა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 1. **სიდიდის ზუსტ A და მიახლოებით a მნიშვნელობათა შორის სხვაობის $|A-a|$ აბსოლუტურ მნიშვნელობას a რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება ეწოდება.**

a რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება აღინიშნება Δa-თი.

ამრიგად,

$$\Delta a = |A - a|.$$

მაგალითად, თუ რიცხვს 3,25347 დავამრგვალებთ სამ ნიშნად ციფრამდე, მივიღებთ 3,25-ს. დაშვებული ცდომილება ტოლია:

$$3,25347-3,25=0,00347.$$

ამ შემთხვევაში

$$\Delta a = 0,00347.$$

უმეტეს შემთხვევაში აბსოლუტურ ცდომილებას განსაზღვრავენ მიახლოებით. მაგალითად, თუ სხეულს ავწონით და მივიღებთ 500 გრამს ან მონაკვეთს გავზომავთ სანტიმეტრებიანი სახაზავით და მივიღებთ 17 სმ-ს, ამ შემთხვევებში ჩვენ ვერ ვიტყვით, რას უდრის აბსოლუტური ცდომილებები, რადგან არ ვიცით, რას უდრის სხეულის ზუსტი წონა ან მონაკვეთის ზუსტი სიგრძე, მაგრამ ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება პირველ მაგალითში 1-გრამს, მეორეში — $\frac{1}{2}$ სმ-ს.

აბსოლუტური ცდომილების დაუდგენლობის გამო მისი შემოღება არაა პრაქტიკული, მაგრამ ამა თუ იმ გაზომვის დროს შეგვიძლია წარმოდგენა ვიქონიოთ იმ რიცხვზე, რომელსაც არ აღემატება აბსოლუტური ცდომილება, ასეთ რიცხვს **ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება** ეწოდება.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 2. **ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება ეწოდება იმ რიცხვს, რომელსაც არ აღემატება მიახლოებითი რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება.**

ზღვრულ აბსოლუტურ ცდომილებას აღნიშნავენ α-თი.

ადვილი შესამჩნევია, რომ განხილულ $\Delta a \leqslant \alpha$ (1) მაგალითებში ერთ შემთხვევაში $\alpha = 1$ გრ, მეორე შემთხვევაში $\alpha = \frac{1}{2}$ სმ-ს.

(1)-დან გვაქვს

$$|A-a| \leqslant \alpha,$$

საიდანაც

$$-\alpha \leqslant A-a \leqslant \alpha.$$

$$a-\alpha \leqslant A \leqslant a+\alpha. \qquad (2)$$

(2) უტოლობა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$A \approx a(\pm\alpha). \qquad (3)$$

(3) ტოლობა ნიშნავს: A ეტოლება a-ს ცდომილებით, რომელიც, როგორც მეტობით, ისე ნაკლებობით, არ აღემატება α-ს. ანუ $A \approx a$, α ცდომილებით.

თუ ცნობილია A-ს ზედა M და ქვედა m საზღვრები, მაშინ მის მიახლოებით მნიშვნელობად მივიღებთ ამ საზღვრების საშუალო არითმეტიკულს, ე. ი.

$$a = \frac{M+m}{2},$$

მასთან, ცხადია,

$$\alpha = \frac{M-m}{2}.$$

მაგალითად, ვთქვათ, რომელიმე x სიდიდე განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$10,15<x<10,17.$$

მაშინ x-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა იქნება

$$a=\frac{10,15+10,17}{2}=10,16;$$

ხოლო 10,16-ის ზღვრული ცდომილება α განისაზღვრება ტოლობით:

$$\alpha=\frac{10,17-10,15}{2}=0,01,$$

ამიტომ

$$x=10,16\ (\pm 0,01).$$

ვინაიდან პრაქტიკაში ყოველთვის საქმე გვაქვს არა აბსოლუტურ ცდომილებასთან, არამედ ზღვრულ აბსოლუტურ ცდომილებასთან, ვიხმართ სიტყვას „აბსოლუტურ ცდომილებას“ და ვიგულისხმებთ ზღვრულ აბსოლუტურ ცდომილებას.

მაგალითად, თუ მხედველობაში არ ვიქონიებთ სიგრძის გაზომვისას $\frac{1}{2}$ სმ-ს, სხეულის აწონისას 3 გრ-ს, კუთხის გაზომვისას 5″-ს, ტემპერატურის გაზომვისას 0,5°-ს, დროის გაზომვისას 15 წამს, გვექნება აბსოლუტური ცდომილებანი:

$\frac{1}{2}$ სმ, 3 გრ, 5″, 0,5°, 15 წამი.

§ 6. ფარდობითი ცდომილება

თუ საჭირო ხდება ორი ან რამოდენიმე მიახლოებითი რიცხვის შედარება, მაშინ საკმარისი არაა აბსოლუტური ცდომილების ცოდნა. მაგალითად, ვთქვათ, მაგიდის სიგრძე არის 1,66 მ, აბსოლუტური ცდომილებით 0,02 მ, ხოლო მანძილი ორ დასახელებულ პუნქტს შორის—3,55 კმ, აბსოლუტური ცდომილებით 5 მ. თუ დავსვამთ კითხვას, ამ ორი გაზომვის შედეგებიდან რომელია უფრო ზუსტი, ცხადია, ამ კითხვაზე პასუხს ვერ მოგვცემს აბსოლუტური ცდომილების ცოდნა.

ამ კითხვაზე პასუხს მივიღებთ, თუ მოვახდენთ აბსოლუტური ცდომილებების შეფარდებას გაზომვის შედეგებთან.

პირველ შემთხვევაში გვექნება:

$$\frac{0,02\ \text{მ}}{1,66\ \text{მ}}=\frac{2\ \text{სმ}}{166\ \text{სმ}}=\frac{1}{83}\approx 0,0132.$$

მეორე შემთხვევაში,

$$\frac{5\ \text{მ}}{3,55\ \text{კმ}}=\frac{5\ \text{მ}}{3550\ \text{მ}}\approx 0,0014.$$

როგორც ვხედავთ, მეორე გაზომვის შედეგი გაცილებით უფრო ზუსტია, ვიდრე პირველი, რაც ერთი შეხედვით არ ჩანდა.

ამ მიზეზის გამო საჭირო ხდება შემოვიღოთ ცდომილების დამახასიათებლად ე. წ. ფარდობითი ცდომილება.

განსაზღვრა. A ხიდიდის მიახლოებითი a რიცხვის ფარდობითი ცდომილება ეწოდება a-ს აბსოლუტური ცდომილების შეფარდებას თვით a რიცხვთან.

თუ ფარდობით ცდომილებას δ-თი აღვნიშნავთ, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{a}$$

პრაქტიკაში ფარდობითი ცდომილება პროცენტობით გამოისახება.

მაგალითი 1. $A = 20(\pm 1)$;

მაშინ

$$\delta = \frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\%.$$

მაგალითი 2. $A = 25(\pm 3)$;

$$\delta = \frac{3}{25} = 0{,}12 = 12\%.$$

მაგალითი 3. ტვირთი 5 გრ. სიზუსტით აწონეს და მიიღეს 3,4 კგ. გავიგოთ ფარდობითი ცდომილება.

$$\delta = \frac{5}{3400} \approx 0{,}0014 = 0{,}14\%.$$

სავარჯიშო

1. იპოვეთ აბსოლუტური ცდომილება π რიცხვისა, თუ მის მიახლოებით მნიშვნელობად ჩავთვლით 3,14-ს, ხოლო უფრო ზუსტ მნიშვნელობად 3,1415-ს.
2. იპოვეთ ფარდობითი ცდომილება, თუ:

ა) $A = 5(\pm 0{,}1)$; ბ) $A = 15(\pm 0{,}05)$.

3. იპოვეთ e რიცხვის ფარდობითი ცდომილება, თუ e-ს მიახლოებით მნიშვნელობად მივიღებთ 2,718-ს, ხოლო მის ზუსტ მნიშვნელობად 2,71828-ს.

§ 7. აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილების დამოკიდებულება მიახლოებითი რიცხვის სანდო ციფრების რიცხვზე

ვთქვათ, ლითონის ნაჭერი ლაბორატორიული სასწორით აწონა სამმა მოსწავლემ. მასთან, ერთმა მიიღო 168,58 გრამი, მეორემ—168,73 გრ. და მესამემ—168,67 გრ. რკინის ნაჭრის წონად, ბუნებრივია, უნდა მივიღოთ წონის მიღებულ მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკული:

168,58 გრ + 168,73 გრ + 168,67 გრ = 505,98. გრ.

505,96 გრ : 3 = 168,66 გრ.

მივიღებთ რა რკინის ნაჭრის ზუსტ წონად 168,66 გრ-ს, ვიპოვით მიახლოებით და ზუსტ წონას შორის სხვაობებს:

168,66 გრ—168,58 გრ = 0,08 გრ.
168,73 გრ—168,66 გრ = 0,07 გრ.
168,67 გრ—168,66 გრ = 0,01 გრ.
0,16 გრ.

ვიპოვოთ სხვაობათა ჯამის საშუალო არითმეტიკული, $0,16:3 \approx 0,05$ გრ. 0,05 გრ იქნება აწონის აბსოლუტური ცდომილება და ვწერთ:

$$\text{ნაჭერის წონა} \approx 168,66 (\pm 0,05 \text{ გრ}).$$

ახლა ისმება კითხვა: როგორ დავადგინოთ, მიახლოებით რიცხვში რომელია სანდო და რომელია საეჭვო ციფრი?

თუ გვსურს მიახლოებით რიცხვში მივიღოთ სანდო ციფრი, ამ მიახლოებითი მნიშვნელობის აბსოლუტური ცდომილება არ უნდა აღემატებოდეს იმ თანრიგის ერთეულის ნახევარს, რომელსაც ეს ციფრი მიეკუთვნება.

თუ აბსოლუტური ცდომილება მეტია ამ თანრიგის ერთეულის ნახევარზე, მაშინ ამ თანრიგის ციფრი საეჭვოა.

ვთქვათ, ოთახის სიგრძის გაზომვისას მივიღეთ მიახლოებითი მნიშვნელობა 6,62 მ და აბსოლუტური ცდომილება 0,05. როგორც ვიცით, ეს ჩაიწერება შემდეგი სახით: 6,52 ($\pm$0,05).

ახლა დავადგინოთ 6,52 მიახლოებით რიცხვში, რომელი ციფრია სანდო, რომელია საეჭვო. ციფრი 6 სანდოა, ვინაიდან ის არის ერთეულის თანრიგში. ამ თანრიგის ერთეულის ნახევარი არის 0,5, ხოლო აღებულ მაგალითში აბსოლუტური ცდომილება $0,05 < 0,5$. სანდოა აგრეთვე ციფრი 5-იც, ვინაიდან იგი არის მეათედების თანრიგში, ხოლო მეათედების თანრიგის ერთეულის ნახევარი არის $\frac{0,1}{2} = 0,05$, ხოლო აბსოლუტური ცდომილება $0,05 = 0,05$.

ციფრი 2 მეასედების თანრიგის ციფრია. მეასედების თანრიგის ერთეულის ნახევარი იქნება: $\frac{0,01}{2} = 0,005$. მაშასადამე, აბსოლუტური ცდომილება $0,05 > 0,005$, ამიტომ ციფრი 2 საეჭვოა.

ამრიგად, გაზომვის შედეგად მიღებულ მიახლოებით რიცხვში 6,52 სანდო აღმოჩნდა 6 და 5, ხოლო 2 აღმოჩნდა საეჭვო.

* * *

რაიმე სიდიდის ზუსტი მნიშვნელობა იყოს x. ვთქვათ, ამ რიცხვში 10-ის უდიდესი ხარისხია m, მაშინ რიცხვი x შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$x = a_m 10^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots, a_{m-n+1} 10^{m-n+1} + a_{m-n} 10^{m-n} + \dots + a_c \quad (1)$$

სადაც a_m, a_{m-1}, a_{m-3}, ..., a_0 ნიშნადი ციფრებია.

ახლა დავამრგვალოთ x რიცხვი n ნიშნად ციფრამდე დამატებითი წესით გვექნება:

$$a = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + \bar{a}_{m-n+1} 10^{m-n+1}, \quad (2)$$

სადაც $\bar{a}_{m-n+1}$ მიღებულია a_{m-n+1}-დან შესწორებით. რადგანაც დამრგვალებით დატოვებულია $a_{m-n+1} 10^{m-n+1}$, ამიტომ a რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება Δa არ აღემატება სიდიდეს: $\alpha_1 = \frac{1}{2} \quad 10^{m-n+1}$.

ხოლო, თუ დამრგვალება შესრულებულია დამატებითი წესის გარეშე, მაშინ Δa არ აღემატება შემდეგ სიდიდეს:

$$\alpha_2 = 10^{m-n+1}.$$

გამოვთვალოთ a რიცხვის ფარდობითი ცდომილება. (2) ფორმულის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ a-ს ფარდობითი ცდომილება არ აღემატება სიდიდეს:

$$\frac{\alpha_1}{a_m 10^m} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{m-n+1}}{a_m 10^m} = \frac{1}{2\,a_m 10^{n-1}}$$

ე. ი. ფარდობითი ცდომილება,

$$\delta \leqslant \frac{1}{2\,a_m 10^{n-1}}$$

თუ კი დამრგვალება დამატებითი წესის გარეშე შევასრულეთ, მაშინ მივიღებთ, რომ a-ს ფარდობითი ცდომილება არ აღემატება სიდიდეს:

$$\frac{\alpha_2}{a_m 10^m} = \frac{10^{m-n+1}}{a_m 10^m} = \frac{1}{a_m 10^{n-1}}.$$

ე. ი. გვექნება

$$\delta \leqslant \frac{1}{a_m 10^{n-1}}$$

მაშასადამე, თუ a რიცხვი x-ის მიახლოებითი მნიშვნელობაა n ნიშნადი ციფრით, მაშინ a-ს ფარდობითი ცდომილება არ აღემატება $\frac{1}{2a_m 10^{n-1}}$-ს (დამატებითი წესით დამრგვალების დროს) ან $\frac{1}{a_m 10^{n-1}}$-ს(დამატებითი წესით დამრგვალების გარეშე), სადაც a_m არის a რიცხვის პირველი ნიშნადი ციფრი.

მაგალითად, თუ π-ს მნიშვნელობად მივიღებთ 3,14-ს, მაშინ, ცხადია,

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 10^{3-1}} < 0{,}0017 \quad \text{ანუ} \quad \delta < 0{,}17\%.$$

მაშასადამე, მიახლოებითი a რიცხვის პირველი ნიშნადი a_m ციფრით და ნიშნადი ციფრების n რაოდენობით შეგვიძლია (3) ფორმულის საშუალებით გამოვთვალოთ სათანადო ფარდობითი ცდომილება.

მაგალითად, თუ გვაქვს სამი ნიშნადი ციფრით შედგენილი მიახლოებითი რიცხვი, ე ი. $n=3$, მასთან, პირველი ნიშნადი ციფრი $a_m=1$, მაშინ ფარდობითი ცდომილება δ განისაზღვრება უტოლობით:

$$\delta < \frac{1}{2\cdot 1\cdot 10^{3-1}} = \frac{1}{200} = 0{,}005 = 0{,}5\%.$$

სავარჯიშო

განსაზღვრეთ სანდო და საეჭვო ციფრები მიახლოებით რიცხვებში:

5,36(±0,5); 12,48(±0,05);25,357(±0,03);

30,304(±0,02), 65,45(±0,08); 43,26(±0,12).

§ 8. მიახლოებითი რიცხვების შეკრება და გამოკლება

ჯერ განვიხილოთ მიახლოებით რიცხვთა შეკრების ისეთი შემთხვევა, სადაც შესაკრებებში ათწილად ნიშანთა რაოდენობა ტოლია.

ავიღოთ ჩვეულებრივი წილადები $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$ და $\frac{1}{9}$, ვაქციოთ ისინი ათწილადებად სიზუსტით 0,0001-მდე და მიღებული მიახლოებითი რიცხვები შევკრიბოთ:

$$\frac{1}{3}=0,33\ldots\approx 0,33$$

$$\frac{1}{7}=0,1428\ldots\approx 0,14$$

$$\frac{1}{9}=0,111\ldots\approx 0,11$$

$$\overline{0,58.}$$

ახლა ვიპოვოთ აღებული ჩვეულებრივი წილადების ზუსტი ჯამი, შემდეგ ვაქციოთ იგი ათწილადად 0,0001-მდე სიზუსტით:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}=\frac{21+9+7}{63}=\frac{37}{63}\approx 0,5873.$$

თუ მიღებულ ჯამს შევადარებთ მიახლოებითი შეკრებით მიღებულ ჯამს, ვნახავთ, რომ ერთმანეთს ემთხვევა მთელები, მეათედები და მეასედები. ერთმანეთისაგან განსხვავდება მეათასედები და მეათიათასედები, ამიტომ ბუნებრივია, სანდო ციფრებად მივიღოთ 0; 5 და 8, ხოლო 7 და 2 უნდა მივაკუთვნოთ საეჭვო ციფრს. ამიტომ:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}=0,33+0,14+0,11=0,58.$$

ამრიგად, ისეთი მიახლოებითი რიცხვების ჯამში, რომელთაც ერთი და იგივე ათობითი ნიშნები აქვთ, შეიძლება ყველა ათობითი ნიშანი სანდო იყოს.

განვიხილოთ სხვადასხვა ათობითნიშნიანი მიახლოებითი რიცხვების ჯამი (უკუგდებული ციფრები აღვნიშნოთ „?“ ნიშნით).

მაგალითი 1.

$$\begin{array}{r}
25,1\ ???\\
16,27??\\
+14,243?\\
37,51??\\
\hline
93,123\approx 93,1.
\end{array}$$

ცხადია, მიღებულ ჯამში 3 არაა სანდო ციფრი, რადგან ზოგიერთ შესაკრებში მძიმის შემდეგი მეორე ციფრი სავსებით უცნობია. ასევე საეჭვოა 2-იც, ამიტომ ეს ციფრები უკუგდებულ უნდა იქნას. მივიღებთ 93,1-ს ე.ი. ჯამში იმდენი ათობითი ნიშანი დარჩა სანდო, რამდენიც იყო ერთ შესაკრებში, სახელდობრ, 25, 1.

მაშასადამე, მიახლოებით რიცხვთა შეკრებისას ჯამში უნდა დავტოვოთ იმ შესაკრების ათწილადის ნიშანთა რაოდენობა, რომელშიაც ათწილადის ნიშანთა რაოდენობა უმცირესია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.

$$\begin{array}{r} 5{,}43 \\ 4{,}156 \\ +7{,}2077 \\ 6{,}13342 \\ \hline 22{,}92712 \approx 22{,}93. \end{array}$$

ამ მაგალითში შეგვეძლო პირველი შესაკრების გარდა ყველა სხვა შესაკრებები დაგვემრგვალებინა სამი ათობით ნიშნამდე, მივიღებდით (დანარჩენ შესაკრებებში ერთი ათობითი ნიშნით მეტს ვტოვებთ):

$$\begin{array}{r} 5{,}43 \\ 4{,}156 \\ +7{,}208 \\ 6{,}133 \\ \hline 22{,}927 \approx 22{,}93 \end{array}$$

სავსებით ანალოგიურად ვიქცევით მიახლოებით რიცხვთა გამოკლებისას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.

$$\begin{array}{r} -3{,}8??? \\ 1{,}237? \\ \hline 2{,}563? \approx 2{,}6, \end{array}$$

სხვაობაში მიღებული ციფრები 6 და 3 არაა სანდო, ამიტომ ისინი უნდა უკუვაგდოთ დამრგვალების წესით.

როგორც შეკრების დროს, ამ მაგალითშიც შეგვეძლო დაგვემრგვალებინა საკლები ან მაკლები, მხოლოდ დამრგვალების დროს უნდა შევინარჩუნოთ ერთით მეტი ციფრი.

გვექნება:

$$\begin{array}{r} -3{,}8 \\ 1{,}24 \\ \hline 2{,}56 \approx 2{,}6. \end{array}$$

მაშასადამე, მიახლოებითი რიცხვების შეკრებისა და გამოკლების შედეგში უნდა შევინარჩუნოთ იმ მოცემული რიცხვის ათწილადის ათობით ნიშანთა რაოდენობა, რომელშიც ათწილადის ნიშანთა რაოდენობა უმცირესია.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

გამოიანგარიშეთ:
ა) 5,125+35,24+0,6079+3,4263.
ბ) 0,34+0,567+6,3.
გ) 65,27+0,003+0,692+2,5.
დ) 3,8+4,3586+12,462+8,72+0,3+16,5+0,5782.
ე) 3,518—1,143, ვ) 6,354—5,13,
ზ) 45,77—2,3765, თ) 7,74587—2,84632,
ი) 24,65—13,27874, კ) 12,031—5,67.

გამოიანგარიშეთ სხვაობა იმ სიზუსტით, რომელიც მოცემულ ათწილადშია:

$$5\frac{1}{9}-3,7815;\quad 4\frac{5}{7}-2,1245;\quad 15,236-10\frac{5}{13};$$

§ 8. მიახლოებით რიცხვთა გამრავლება და გაყოფა

ვთქვათ, უნდა გადავამრავლოთ ორი მიახლოებითი რიცხვი 53,4 და 34,8. ჩვეულებრივი წესით ამ რიცხვების გამრავლება მოგვცემს: 53,4.34,8=1858,32.

რომ გავარკვიოთ, მიღებულ ნამრავლში თუ რომელი რიცხვია სანდო, ამისათვის მოვიქცეთ შემდეგნაირად: სამრავლში და მამრავლში უკუგდებული ციფრების ნაცვლად ჩავსვათ „?" და შევასრულოთ გამრავლება ჩვეულებრივად, მხოლოდ „?"-ის რაიმე რიცხვზე ნამრავლად კვლავ „?" დავწეროთ:

```
×  53,4?
   34,8?
  ?????
+  4 272?
  21 36?
 160 2?
 1858,32?? ≈ 1860
```

აშკარად ჩანს, რომ ნამრავლში სანდო არაა 8; 3 და 2. ამ ციფრების შენარჩუნებას აზრი არა აქვს ე. ი. უკუვაგდებთ 2,3 და 8-ს, ამიტომ საძებნი ნამრავლი იქნება 1860.

როგორც ჩანს, პირველ შესაკრებში 5 კითხვის ნიშანი დავწერეთ, ეს იმიტომ, რომ რიცხვის ერთნიშნა რიცხვზე ნამრავლი უმეტესად ერთი ციფრით მეტს შეიცავს, ვიდრე მოცემული რიცხვი.

მიღებული ნამრავლიდან ჩანს, რომ ის სამ ნიშნად ციფრს შეიცავს 1,8 და 6-ს (0— ამ შემთხვევაში თანახმად წესისა არ ითვლება ნიშნად ციფრად, რადგანაც, მას უკუგდებელი 8-იანის ადგილი უჭირავს). ე. ი. ნამრავლში იმდენი ნიშნადი ციფრი გვაქვს, რამდენი ნიშნადი ციფრითაცაა მოცემული თითეული თანამამრავლი.

ახლა განვიხილოთ სხვადასხვა ნიშნადციფრებიანი მიახლოებითი რიცხვების გადამრავლების შემთხვევა:

```
×   2, 324?
    8, 2???
     ? ?????
    ?? ????
+  ??? ???
   464 8?
  18592?
  19,2568???? ≈ 19
```

ცხადია, ნამრაელში ორ ნიშნად ციფრზე მეტის შენარჩუნებას აზრი არა აქვს, ვინაიდან ისინი ყველა საეჭვოა.

მოვიგონოთ, რომ, თუ მიახლოებით რიცხვში ნაკლები რაოდენობის ნიშნადი ციფრია, მაშინ ეს რიცხვი ნაკლებად ზუსტია.

ზემოთ განხილული მაგალითის მიხედვით შეგვიძლია ვთქვათ: მიახლოებით რიცხვთა ნამრავლში უნდა შევინარჩუნოთ იმდენი ნიშნადი ციფრი, რამდენიცაა უმცირესი სიზუსტის მამრავლში.

უნდა აღინიშნოს, რომ მიახლოებით რიცხვებზე გამრავლების ოპერაციის დროს გვიხდება ზედმეტი მოქმედებების შესრულება. ამ მოქმედებების თავიდან აცილების მიზნით შემდეგნაირად ვიქცევით. თუ უმცირესი სიზუსტის მქონე თანამამრავლში n ნიშნადი ციფრია, მაშინ მეორე თანამამრავლს დავამრგვალებთ $(n+2)$ ნიშნად ციფრამდე. სამრავლად $(n+2)$ ნიშნადციფრიან რიცხვს ავიღებთ, ხოლო მამრავლად n ნიშნადციფრიან რიცხვს.

მიახლოებითი რიცხვების გამრავლებას უფრო მარტივად შევასრულებთ, თუ გამოვიყენებთ ე.წ. „მარჯვნიდან მარცხნივ" გამრავლების წესს. „მარჯვნიდან მარცხნივ" გამრავლების ხერხი ვაჩვენოთ ზუსტ რიცხვებზე:

$$\begin{array}{r l}
\times\ 542 & \\
32 & \\
\hline
1626 & = 542.3 \\
1084 & = 542.2 \\
\hline
17344. &
\end{array}$$

ამ შემთხვევაში 542-ს ვამრავლებთ 3 ათეულზე, მივიღებთ 1626 ათეულს შემდეგ 542-ს ვამრავლებთ 2 ერთეულზე, მივიღებთ 1084-ს, რის შემდეგაც 1626 ათეულს ვუმატებთ 1084-ს. ეს შეკრება შემდეგნაირად უნდა ჩაიწეროს:

$$\begin{array}{r}
+\ 16260 \\
1084
\end{array}$$

გამრავლების დროს პირველ შესაკრებში 0-ს არ ვწერთ, მხოლოდ ვგულისხმობთ, ხოლო მის ქვეშ იწერება მეორე შესაკრების ერთეულები (აღებული მაგალითში 4). მაშასადამე, „მარჯვნიდან მარცხნივ" გამრავლება შემდეგნაირად სრულდება: სამრავლი მრავლდება მამრავლის უდიდესი თანრიგის ერთეულებზე, შემდეგ სამრავლი მრავლდება მომდევნო თანრიგის ერთეულებზე და მიეწერება წინა ნამრავლს ისე, რომ თანრიგობრივი ერთეულები წინა ნამრავლის თანრიგობრივ ერთეულების ქვეშ მოხვდეს, რისთვისაც საკმარისია მეორე ნამრავლი პირველი ნამრავლიდან ერთი ციფრით მარჯვნივ გადავწიოთ. შემდეგ სამრავლი უნდა გამრავლდეს მესამე მომდევნო ციფრზე და მიღებული შედეგი უნდა დაიწეროს მეორე ნამრავლის ქვეშ ერთი ციფრი მარჯვნივ გადაწეულად და ა. შ.

$$\begin{array}{r}
\times\ 527 \\
234 \\
\hline
1054 \\
+\ 1581 \\
2108 \\
\hline
123318
\end{array}$$

ახლა გადავამრავლოთ ორი მიახლოებითი რიცხვი:

$$\begin{array}{r l}
5{,}23425\cdot 2{,}3 = 5{,}234 & \\
2{,}3 & \\
\hline
10468 & = 5234\cdot 2 \\
15702 & = 5234\cdot 3 \\
\hline
12{,}0382 \approx 12. &
\end{array}$$

ამ მაგალითში მიახლოებითი რიცხვი 5,23425 დავამრგვალეთ 4 ნიშნად ციფრამდე, ვინაიდან მამრავლი ორ ნიშნად ციფრს შეიცავს (თუ უმცირესი სიზუსტის თანამამრავლი n ნიშნად ციფრს შეიცავს, მაშინ მეორე თანამამრავლი უნდა დამრგვალდეს $(n+2)$ ნიშნად ციფრიან რიცხვამდე).

მეორე შუალედურ ჯამში 2 ზედმეტია, იგი მიღებულია 3-ის 4-ზე გამრავლებით, ამიტომ 4-ს 3-ზე ნუ გავამრავლებთ, 4 უკუვაგდოთ. მამრავლში თუ მესამე ციფრი გვექნება, მაშინ ამ მესამე ციფრზეც ნუ გავამრავლებთ სამმრავლს 3-ს, იგი უკუვაგდოთ. მაგრამ ნამრავლში რომ ციფრთა რაოდენობა ზუსტად განვსაზღვროთ, შუალედურ ჯამებში უკუგდებული ციფრების მაგივრად ნულები ვწეროთ.

განვიხილოთ მაგალითი.

$$\begin{array}{rl}
3,14152 & \\
4,123 & \\
\hline
125\,6608 & =3,14152\cdot 4\\
3\,14150 & =3,1415\cdot 1\\
628200 & =3,141\cdot 2\\
942000 & =3,141\cdot 3\\
\hline
12,95247000 & =12,95.
\end{array}$$

თუ რაიმე საშუალებით დავადგენთ ციფრთა რაოდენობას ნამრავლში, მაშინ ნულების ხმარება შუალედურ ჯამებში არ დაგვჭირდება.

მაგალითად:

$$\begin{array}{r}
\times\ 3,76214\\
2,321\\
\hline
75\,2428\\
11\,2263\\
7524\\
376\\
\hline
8,72591 \approx 8,73.
\end{array}$$

როგორც განხილული მაგალითებიდან ჩანს, ნამრავლში ციფრთა რაოდენობა უდრის თანამამრავლებში ციფრთა რაოდენობის ჯამს ან ამ ჯამზე ერთით ნაკლებია.

ახლა განვიხილოთ მიახლოებითი რიცხვების გაყოფა. ჯერ ავიღოთ ტოლნიშნადციფრიანი მიახლოებითი რიცხვების გაყოფის შემთხვევა: 40, 1 :12,3. უკუგდებული ციფრების ნაცვლად ვწერთ „?“ ნიშანს. შუალედური ოპერაციების დროს იგი ვიგულისხმოთ, როგორც 0.

$$40,1 \quad 12,3 = 401? : 123? = 3,26$$

$$\begin{array}{rl}
-\ 369? & \\
\hline
-\ 32 & |\,??\\
24 & |\,6?\\
\hline
7 & |\,4??\\
7 & |\\
\hline
& 2?
\end{array}$$

უკანასკნელ ნაშთში მიღებული ციფრები არც ერთი არ არის სანდო, ამიტომ გაყოფის გაგრძელებას აზრი არა აქვს. ამიტომ გვექნება:

$$40{,}1 : 12{,}3 \approx 3{,}26.$$

ვხედავთ, რომ სამნიშნადი ციფრიანი მიახლოებითი რიცხვების განაყოფი სამ სანდო ნიშნად ციფრს შეიცავს.

განვიხილოთ მაგალითი სხვადასხვა ნიშნადციფრიანი მიახლოებითი რიცხვების გაყოფაზე.

$$51{,}74 : 3{,}2 = 517{,}4? : 32? = 16{,}1$$

$$\begin{array}{r}
-\,32? \\
\hline
19|74 \\
19|2? \\
\hline
|54\ ? \\
|3{,}2? \\
\hline
2{,}2?
\end{array}$$

გაყოფით მიღებულ პირველ ნაშთში ციფრი 7 საეჭვოა, მეორე ნაშთში ციფრები 5 და 4 ორივე საეჭვოა, ამიტომ განაყოფში მხოლოდ ორი ციფრია სანდო, ე. ი.

$$51{,}74 : 3{,}2 = 16.$$

მაშასადამე, მიახლოებითი რიცხვების გაყოფის დროს განაყოფში უნდა შევინარჩუნოთ იმდენი ნიშნადი ციფრი, რამდენი ნიშნადი ციფრიცაა მოცემული რიცხვებიდან უმცირესი სიზუსტის რიცხვში.

განხილული მაგალითები ცხადყოფენ, რომ ვიდრე გაყოფას დავიწყებდეთ, საჭიროა განვსაზღვროთ ნიშნად ციფრთა რაოდენობა განაყოფში. მოვახდინოთ გაყოფა ისე, რომ განაყოფში მივიღოთ $(n+1)$ ნიშნადი ციფრი, შემდეგ კი განაყოფი n ნიშნად ციფრამდე დავამრგვალოთ.

მაგალითად, 917,8 : 2,34 განაყოფში საჭიროა სამი ნიშნადი ციფრის შენარჩუნება, ამიტომ გაყოფას ოთხ ნიშნად ციფრამდე შევასრულებთ და მერე დავამრგვალებთ სამ ნიშნად ციფრამდე.:

$$917{,}8 : 2{,}34 = 91780 : 234 = 392{,}2$$

$$\begin{array}{r}
702 \\
\hline
2158 \\
2106 \\
\hline
520 \\
468 \\
\hline
52.
\end{array}$$

ამრიგად, $917{,}8 : 2{,}34 \approx 392.$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. პრაქტიკული საქმიანობისათვის მეტად დიდი ნიშნადციფრებიანი რიცხვები საჭირო არაა. მათი ხმარება მხოლოდ გამოთვლებს ართულებს და მეტად შრომატევადს ხდის.

შეკრებისა და გამოკლების დროს სიზუსტეს ათობითი ნიშნების რაოდენობით ვაფასებთ, ხოლო გამრავლებისა და გაყოფის დროს — ნიშნად ციფრთა რაოდენობით. ამიტომ მიახლოებითი რიცხვების შეკრება-გამოკლების დროს შედეგის n

ათობითი ნიშნით მიღებისათვის აუცილებელია, რიცხვები მოცემული იყოს $(n+1)$ ათობითი ნიშნით, ხოლო გამრავლება-გაყოფის დროს n ნიშნადი ციფრით. შედეგის მიღებისათვის საჭიროა $(n+1)$ ან $(n+2)$ რიცხვები ნიშნადი ციფრით იყოს მოცემული.

თუ ორიეე საფეხურის მოქმედებით გვინდა შედეგი n ნიშნადი ციფრით მივიღოთ, მაშინ კომპონენტები იმდენი ათობითი ნიშნით უნდა ავიღოთ, რომლებიც უზრუნველყოფენ შედეგში n ნიშნადი ციფრის მიღებას.

მაგალითად, რამდენი ნიშნადი ციფრით უნდა ავიღოთ $\frac{2}{3}$ და $\frac{3}{5}$, რომ ნამრავლში ორი სანდო ციფრი მივიღოთ?

წესის თანახმად ნამრავლში ორი სანდო ციფრის მისაღებად საჭიროა თითოეული თანამამრავლი ავიღოთ სამ-სამი ნიშნადი ციფრებით:

$$\frac{2}{3} \approx 0,667, \quad \frac{5}{7} \approx 0,714.$$

მიახლოებითი რიცხვთა გამრავლების წესი იძლევა:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = 0,667 \cdot 0,714$$

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 0,667 \\ 0,714 \end{array} \\ \hline 4669 \\ + \quad 66 \\ 24 \\ \hline 0,4759 \approx 0,48. \end{array}$$

ზუსტი გამოთვლები გვაძლევს:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21} = 10 : 21 \approx 0,476 \approx 0,48\,.$$

$$\begin{array}{r} -\,100 \\ 84 \\ \hline -\,160 \\ 147 \\ \hline -\,130 \\ 126 \\ \hline 4 \end{array}$$

ზუსტი გამოთვლების შედეგი ემთხვევა მიახლოებითი გამოთვლების შედეგს.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

ა) გამოთვალეთ: 30,252. 5,373; 2,785 · 0,3623;

0,158 · 0,12; 23,3 · 6,4;

ბ) გამოთვალეთ ორი ნიშნადი ციფრით:

15,278 · 9,64; 3,278 · 5,634; 2,78 · 6,2485; 24.6 · 3,4;

გ) ერთი ლიტრი სითხე იწონის 0,93 კგ-ს. იპოვეთ ამ სითხის 3,78 ლიტრის წონა.

დ) მონახეთ 58,46: 3,7; 38,56 : 1,2; 9,1 : 0,009; 1 : 0,009675.

ე) მონახეთ 3,5; 0,00257, 6,35-ის შებრუნებული რიცხვები.

§ 10. მიახლოებითი რიცხვების კვადრატში და კუბში ახარისხება. მიახლოებითი რიცხვების ამოფესვა

მიახლოებითი რიცხვების კვადრატში და კუბში ახარისხება წარმოადგენს გამრავლების კერძო შემთხვევას. ამიტომ ადვილი დასადგენია ახარისხების შემთხვევაში ნიშნად ციფრთა რაოდენობა.

მ ა გ ა ლ ი თ ა დ: $2,16^2=2,16 \cdot 2,16\approx4,65.$

$$8,4^2=8,4 \cdot 8,4\approx70.$$

$$(0,132)^3=0,132 \cdot 0,132 \cdot 0,132\approx0,00230.$$

მაშასადამე, მიახლოებითი რიცხვის კვადრატი და კუბი შეიცავს იმდენ ნიშნად ციფრს, რამდენსაც მოცემული რიცხვი.

მიახლოებითი რიცხვების ახარისხებას მიეყვეართ იმ დასკვნამდე, რომ n ნიშნადციფრიანი რიცხვის კვადრატში n-ური ციფრი ყოველთვის სანდო არაა. ცხადია, თუ ხარისხის მაჩვენებელს ვზრდით, მაშინ მასთან ერთად ცდომილებაც გაიზრდება. ამის გამო მიახლოებითი რიცხვის დიდ ხარისხში ახარისხებას ფრთხილად უნდა მოვეკიდოთ (მოცემული რიცხვი ერთ სათადარიგო ციფრს მაინც უნდა შეიცავდეს).

როგორც აღვნიშნეთ, მიახლოებითი რიცხვების ახარისხებისას სიზუსტე მცირდება, ფესვის ამოღების შემთხვევაში კი ამას ადგილი არა აქვს. მაგალითად, ვთქვათ, მიახლოებითი რიცხვი 9,3 მიღებულია რიცხვთა დამრგვალებით, მაშინ რიცხვის ზუსტი მნიშვნელობა აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობას:

$$9,26\leqslant x \leqslant9,34.$$

ამ უტოლობიდან გვაქვს:

$$\sqrt{9,26} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{9,34},$$

საიდანაც

$$3,04 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3,06.$$

ამრიგად, კვადრატული ფესვი ორნიშნადი რიცხვიდან კვლავ ორ სანდო ნიშნად ციფრს შეიცავს. ასე რომ, მიახლოებითი რიცხვიდან ფესვის ამოღებით მიღებული შედეგის სიზუსტე არაა ნაკლები მოცემული რიცხვის სიზუსტეზე.

მაგალითად, $\sqrt{12,5}=3,54$, $\sqrt[3]{3,75}=1,55.$

§ 11. მოქმედებათა წარმოება ნიშნადი ციფრების დათვლის წესით

ავიღოთ მაგალითი: მყარი სხეულის სითბოტევადობა განისაზღვრება ფორმულით:

$$x=\frac{(m_2-m_1+m_1\eta)\ (t_2-t_1)}{P\ (T-t_2)} \tag{1}$$

სადაც m_1 არის კალორიმეტრის შიდა ჭურჭლის წონა წყლის გარეშე, m_2 არის ჭურჭლის წონა წყალთან ერთად. t_1 წყლის საწყისი ტემპერატურაა, t_2—წყლის საბოლოო ტემპერატურა, T—წყლის დუღილის ტემპერატურა, n—კალორიმეტრისა და სარეველის სითბოტევადობა, P არის იმ სხეულის წონა, რომლის სითბოტევადობასაც ვეძებთ. ცდის მიხედვით მიღებულია შემდეგი მონაცემები:

$$P=403{,}7;\ m_1=119;\ m_2=673;\ n=0{,}094;\ t_1=9{,}5;\ t_2=12{,}8;\ T=100{,}11.$$

აღებულ მაგალითში n და t_1-ის მნიშვნელობებს გააჩნიათ ორი ნიშნადი ციფრი. ამიტომ სხვა მონაცემები, რომლებიც უფრო ზუსტნი არიან, წინასწარ დავამრგვალოთ, მათში 3—3 ნიშნადი ციფრების შენარჩუნებით: $P=404$ და $T=100$. შუალედური გამოთვლები შევასრულოთ სამი ნიშნადი ციფრებით გამოსახულ რიცხვებზე, საბოლოო შედეგში შევინარჩუნოთ ორი ნიშნადი ციფრი.

ჩავსვათ რიცხვითი მონაცემები (1) ფორმულაში:

$$x=\frac{(673-119+119\cdot 0{,}094)\,(12{,}8-9{,}5)}{404\,(100-12{,}8)}=\frac{(554+119\cdot 0{,}094)\cdot 3{,}3}{404\cdot 87{,}2}$$

შევასრულოთ გამოთვლები:

$$119\cdot 0{,}094=11{,}186\approx 11{,}2.$$

$$554+11{,}2=565{,}2\approx 565.$$

$$565\cdot 3{,}3=1864{,}5\approx 186\cdot 10.$$

$$404\cdot 87{,}2=35228{,}8\approx 35200=352\cdot 10^2.$$

$$\frac{186\cdot 10}{352\cdot 10^2}=\frac{186}{353\cdot 10}=\frac{18{,}6}{352}\approx 0{,}0528\approx 0{,}053.$$

პ ა ს უ ხ ი: $x=0{,}053$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ცვლადი დენის წრედში ჩართულია კოჭი და კონდენსატორი. წრედის სრული წინაღობა განისაზღვრება ფორმულით: $Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ სადაც R არის წრედის შიდა ნაწილის წინაღობა, $\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$ — რეაქციული წინაღობა. გამოვთვალოთ Z, თუ $R=41{,}4$, $\omega=0{,}75$, $L=18$, $C=0{,}52$. უმცირესი სიზუსტის მქონე მონაცემები გამოსახულია ორი ნიშნადი ციფრით, ამიტომ საბოლოო შედეგში ვინარჩუნებთ ორ ნიშნად ციფრს. საშუალედო მოქმედებებს ვაწარმოებთ 3—3 ნიშნადი ციფრებით გამოსახულ რიცხვებზე.

1. $\omega L-\frac{1}{\omega C}=0{,}75\cdot 18-\frac{1}{0{,}75\cdot 0{,}52}=13{,}5-2{,}56=10{,}9;$

2. $(10{,}9)^2=118{,}8=119.$

3. $41{,}4^2\approx 1714\approx 171\cdot 10,$

4. $119+1710=1829\approx 1830=180\cdot 10,$

5. $\sqrt{1830}\approx 42{,}8\approx 43$ (ომი).

§ 12. გამოთვლები წინასწარ მოცემული სიზუსტის მიხედვით

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება საკითხი: რა სიზუსტით ავიღოთ წინასწარი მონაცემები, რომ საბოლოო შედეგში ცდომილება არ აღემატებოდეს წინასწარ მოცემულ საზღვარს.

განვიხილოთ მაგალითები:

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. როგორც ვიცით, საქანის სრული რხევის პერიოდი T გამოითვლება ფორმულით: $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, სადაც l — საქანის სიგრძეა სანტიმეტრებში, g სიმძიმის ძალის აჩქარება სმ/სეკ^2-ში.

როგორი სიზუსტით უნდა გაიზომოს l და რამდენი ნიშნადი ციფრით ავიღოთ რიცხვები π და g, რომ ფარდობითი ცდომილება პერიოდის გამოთვლისას არ აღემატებოდეს 0,5%-ს.

საქანის სიგრძე $l=80$ სმ. π და g-ს მნიშვნელობები ავიღოთ დამრგვალებულად: $\pi=3$; $g=1000$, მაშინ

$$T=2\cdot3\cdot\sqrt{\frac{80}{1000}}=6\cdot0{,}28\approx1{,}7,$$

1,7-ის $0{,}5\%=0{,}005\cdot1{,}7=0{,}0085$.

ფარდობითი ცდომილების მიხედვით ჩვენ მოვძებნეთ აბსოლუტური ცდომილების საზღვარი: $\Delta T=0{,}0085$. დაშვებული აბსოლუტური ცდომილების მიხედვით შეგვიძლია ვიმსჯელოთ იმაზე, რომ T პერიოდს უნდა ჰქონდეს სამი ნიშნადი ციფრი, ამიტომ სიგრძე l უნდა გამოისახოს მიახლოებითი რიცხვით სამი ნიშნადი ციფრით, ე. ი. უნდა გაიზომოს სანტიმეტრის მეათედით, ხოლო π უნდა ავიღოთ ოთხი ნიშნადი ციფრით ანუ ერთი სათადარიგო ციფრით, g კი — სამი ნიშნადი ციფრით, (981). საშუალედო მოქმედებები უნდა ვაწარმოოთ ოთხი ნიშნადი ციფრით გამოხატულ მნიშვნელობებზე, საბოლოო შედეგში შევინარჩუნებთ სამ ნიშნად ციფრს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. როგორი სიზუსტით უნდა გაიზომოს მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები a და b, რომ შევძლოთ $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ჰიპოტენუზის გამოთვლა ფარდობითი ცდომილებით δi, რომელიც არ აღემატება 2%-ს.

ვთქვათ, $a\approx50$ სმ; $b\approx80$ სმ (ე. ი. ორივეს აქვს ნიშნადი ციფრების ტოლი რაოდენობა), მაშინ

$$C=\sqrt{50^2+80^2}=\sqrt{100(25+64)}=10\sqrt{89}\approx10\cdot9{,}4=94.$$

94-ის $2\%=94\cdot0{,}02=1{,}88\approx2$.

ამრიგად აბსოლუტური შეფარდება $\Delta C=2$ სმ-ს. ეს იმას ნიშნავს, რომ საბოლოო რეზულტატში ერთეულის გამომსახველი ციფრი საეჭვოა, ამიტომ საჭიროა კათეტები a და b ავიღოთ ორი ზუსტი ნიშნადი ციფრით, ე. ი. 0,5 სმ-ის სიზუსტემდე. საშუალედო გარდაქმნები უნდა ვაწარმოოთ სამნიშნადციფრიან მნიშვნელობებზე, ხოლო ჰიპოტენუზის მნიშვნელობა უნდა დამრგვალდეს ორნიშნად ციფრამდე.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. სხეულის ხვედრითი წონის განსაზღვრისათვის დადგენილი იყო, რომ მისი წონაა 117,8 გრ. წყალში ჩაძირვისას სხეულმა გამოდევნა 54, 7 სმ^3 წყალი. როგორი სიზუსტით შეიძლება განისაზღვროს ხვედრითი წონა?

პ ა ს უ ხ ი: (სამი ზუსტი ციფრით).

2. როგორი ფარდობითი ცდომილებით შეიძლება გამოითვალოს ცილინდრის მოცულობა, თუ ფუძის რადიუსი $r=15,4$ სმ, სიმაღლე $h=28,2$ სმ.

პ ა ს უ ხ ი: სიზუსტით 0,5%-მდე.

3. 32,4 ჰა ფართობიდან აიღეს 4580 ც. ქერი. რამდენი ცენტნერი ქერია აღებული საშუალოდ 1-ჰექტარიდან?

პ ა ს უ ხ ი: 14 ც.

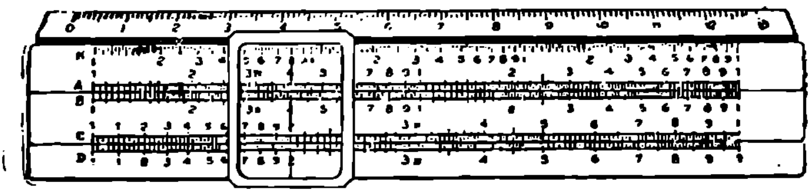
4. მიახლოებითი მნიშვნელობა ცილინდრის რადიუსისა არის 20 სმ, სიმაღლისა — 30 სმ. როგორი სიზუსტით უნდა ვაწარმოოთ გაზომვა, რომ ფარდობითი ცდომილება მოცულობის გამოთვლის დროს არ აღემატებოდეს 1%-ს?

პ ა ს უ ხ ი: სიზუსტით 0,1 სმ-მდე.

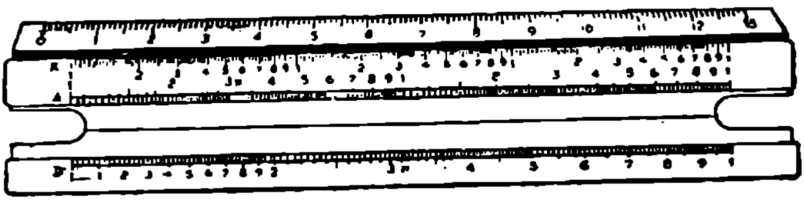
§ 10. საანგარიშო (ლოგარითმული) სახაზავი და მისი აგებულება

ამ პარაგრაფში მოკლედ შევეხებით საანგარიშო სახაზავის აგებულებას. გავარჩევთ მასზე სკალებს, სკალებზე რიცხვთა დანიშვნის და წაკითხვის წესს. გავიმეორებთ სახაზავის საშუალებით რიცხვთა გამრავლების, გაყოფის, ახარისხებისა და ამოფესვის ოპერაციების შესრულებას.

ლოგარითმული სახაზავი სამი ძირითადი ნაწილისაგან შედგება:



ნახ. 1.



ნახ. 2.

ნ.3

1. კორპუსი, რომელზედაც აღნიშნულია სკალები: D (ძირითადი) სკალა, A სკალა (კვადრატების სკლა) და k სკალა (კუბების სკალა) (ნახ. 1).

2. კორპუსში ჩასმულია მარჯვნივ და მარცხნივ თავისუფლად მოსრიალე დანაყოფებიანი სახაზავი ანუ ძერია. საწყის მდგომარეობაში ძერიის C სკალის ყველა დანაყოფი ემთხვევა კორპუსის ძირითადი D სკალის დანაყოფს (ნახ. 2).

3. ლითონის ჩარჩო, რომელშიც ჩასმულია მინის ნაჭერი. მინის ნაჭრის შუაზე გავლებულია ე. წ. სამიზნებელი ხაზი. ჩარჩო თავისუფლად მოძრაობს კორპუსზე და აფიქსირებს სკალაზე რიცხვებს (ნახ. 3). ამ ჩარჩოს მორბედი (Бегунок) ეწოდება.

1. ძირითადი D სკალა,

სახაზავის კორპუსზე არის D (ძირითადი) სკალა, მასზე ვხედავთ 10 ძირითად შტრიხს, რომლებიც დიდი ციფრებითაა აღნიშნული 1, 2, 3,..10 (ნახ. 4). შტრიხებს შორის, როგორც ვხედავთ, შუალედები არაა ტოლი. ყველაზე დიდი შუალედი არის 1—2.

მომდევნო შუალედები კი თანდათანობით მცირდება. ეს შტრიხები შეესაბამება რიცხვებს: 1,2,3,...,10, აგრეთვე ეთანადება რიცხვებს, რომლებიც ამ რიცხვებზე მეტია ან ნაკლებაა 10-ჯერ, 100-ჯერ, 1000-ჯერ და ა. შ. ეს ნიშნავს, რომ, მაგალითად, 3-ით აღნიშნული შტრიხი შეიძლება ნიშნავდეს დასმული საკითხის შინაარსის მიხედვით 3-ს, 30-ს, 300-ს; 0,3-ს, 0,03-ს და ა. შ.

შუალედები შტრიხებს შორის დაყოფილია უფრო წვრილ ნაწილად. ამ სკალაზე ადვილად შეგვიძლია წავიკითხოთ ორი და სამი ნიშნადი ციფრით ჩაწერილი რიცხვები, 1—2 შუალედზე, უფრო მცირე ციფრებით, აღნიშნულია რიცხვები: 1,1; 1,2.., 1,9 და მათ შორის მანძილები კვლავ იყოფა 10 ტოლ ნაწილად.

ადვილი მისახვედრია, რომ 1—2 შუალედი დაყოფილია 100 ტოლ ნაწილად და 1 დან 2—მდე ერთი დანაყოფის ფასი უდრის 0, 01-ს. მომდევნო შტრიხები 1; 1,01; 1,02; ... 1,98; 1,99; 2 რიცხვებს აღნიშნავენ.

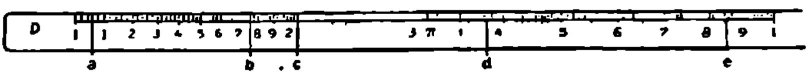
D სკალის შემდეგი 2—3 და 3—4 უბნიდან თითოეული დაყოფილია არა 100, არამედ 50 ნაწილად და ამიტომ ერთი დანაყოფის ფასი აქ იქნება არა 0,01, არამედ 0, 02. მაშასადამე, ორიდან დაწყებული მომდევნო შტრიხები აღნიშნავენ რიცხვებს: 2,02, 2,04, 2,06... 2,98; 3. ამ შტრიხებს შორის იმყოფება რიცხვები: 2,01, 2,03, 2,05 და ა. შ. ასეთივე წესით წაიკითხება დანაყოფები 3-დან 4-მდე.

D სკალის დანარჩენი ნაწილი 4-დან 10-მდე ძირითად შტრიხებს შორის დაყოფილია ჯერ 10 ნაწილად და შემდეგ თითოეული ნაწილი კიდევ შუაზე ე. ი. სულ 20 ნაწილად, ამიტომ აქ თითოეული დანაყოფის ფასია 0,05. 4-დან დაწყებული მომდევნო შტრიხები აღნიშნავს რიცხვებს: 4,05; 4,10; 4,15; 9,00; 9,05; 9,10...., 9,95; 10. საანგარიშო სახაზავზე მოქმედებათა წარმოების დაწყებამდე საჭიროა დაწვრილებით გავიხსენოთ ძირითად სკალაზე რიცხვების სწორად წაკითხვა.

სამიზნებლის *a*) მდებარეობას 1 — 0 — 6 შეიძლება ეთანადებოდეს რიცხვები: 1,06, 10,6, 106. 1060, 0,106, 0,0106 და ა. შ. ანალოგიურად შეიძლება წავიკითხოთ რიცხვები, რომლებიც შეესაბამება სამიზნებლის *b*) მდებარეობას

1 — 7 — 6, c) მდებარეობას 2 — 0 — 5, d) მდებარეობას 3 — 8 — 4. e) მდებარეობას 8 — 5 — 5 და ა. შ.

რა თქმა უნდა, სახაზავის საწყის უბანზე წარმოებული გამოთვლები იძლევა რამდენადმე მეტ სიზუსტეს, ვიდრე სკალის ბოლო უბანზე წარმოებული გამოთვლები. საერთოდ, სახაზავზე ვანგარიშობთ სიზუსტით, რომელიც სამი ნიშნადი ციფრით გამოიხატება გამოთვლების ფარდობითი ცდომილება 3%-ს არ აღემატება, რაც საინჟინრო და სხვა პრაქტიკული გაანგარიშებისათვის სავსებით საკმარისია.

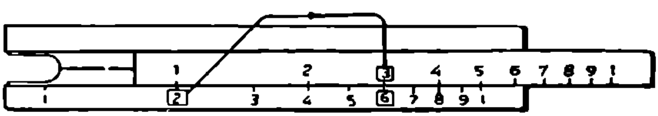


ნახ. 4.

§ 14. გამრავლება და გაყოფა ლოგარითმული სახაზავის საშუალებით.

რიცხვების გამრავლებას ვაწარმოებთ ძირითადი D სკალითა და ძვრიის c სკალით.

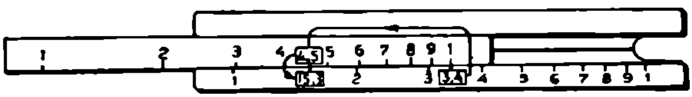
მაგალითად, რომ ვიპოვოთ ნამრავლი 2.3, საკმარისია სამიზნებელი ხაზი დავაყენოთ ძირითადი სკალის შტრიხზე, სადაც აწერია 2. შემდეგ ძვრია გავწიოთ მარჯვნივ ისე, რომ ძვრიის წარწერა 1 დადგეს სამიზნებელი ხაზის ქვეშ. შემდეგ კი მორბედი გადავაადგილოთ მარჯვნივ ისე, რომ სამიზნებელი ხაზი დადგეს ძვრიის იმ წერტილზე, სადაც წერია მეორე თანამამრავლი 3, მაშინ კორპუსის ძირითად სკალაზე სამიზნებელის ქვეშ წავიკითხავთ შედეგს 6-ს (ნახ. 5).



ნახ. 5.

ვიპოვოთ ნამრავლი $x=3{,}4.\ 4{,}5$.

დავაყენოთ ძვრიის ციფრი 1 ძირითადი სკალის 3,4-ზე, მაშინ ვნახავთ, რომ ზედა (c) სკალის ნიშანი 4,3 გადავა სახაზავის კორპუსის გარეთ. ასეთ შემთხვევაში ძირითადი სკალის 3,4-ზე უნდა დავაყენოთ არა ძვრიის დასაწყისი ნიშანი 1, არამედ ძვრიის ბოლო — მარჯვენა ნიშანი — 1, მაშინ ძვრიის 4,5 დანაყოფის ქვეშ წავიკითხავთ: 15,3. (ნახ. 6).



ნახ. 6.

ჩვეულებრივი წესით 3,4-ის გამრავლება 4,3-ზე გვაძლევს 15,30-ს. განხილული მაგალითების შემდეგ შეიძლება დავიმახსოვროთ სახაზავზე ორი რიცხვის გადამრავლების წესი:

1. სამიზნებელი ხაზით დავნიშნავთ ძირითად სკალაზე ერთ-ერთი თანამამრავლის შესაბამის დანაყოფს და დავაყენებთ მასზე ძვრიის დასაწყისს ან ბოლოს.

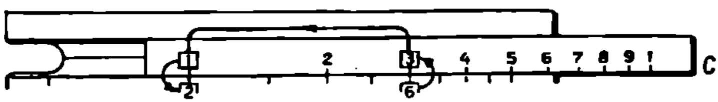
2. დავაყენოთ სამიზნებელი ხაზი ძვრიის ***c*** **სკალაზე აღნიშნულ მეორე თანამამრავლის შესაბამის შტრიხზე, მაშინ ძირითად (*D*) სკალაზე სამიზნებელი ხაზის ქვეშ წავიკითხავთ ნამრავლს.**

ვიპოვით რა ნამრავლს, მაგალითად, 3,4. 4,5-ს, შედეგს ვკითხულობთ, როგორც ციფრთა თანმიმდევრობას: 1 — 5 — 3. ეს შეიძლება იყოს: 153, 15,3, 1,53. და ა. შ. მაგრამ უხეში მიახლოება გვიჩვენებს, რომ ეს შეიძლება იყოს მხოლოდ 15,3 და არა 153 ან 1,53. მოქმედების შედეგი ყოველთვის საჭიროა შეფასდეს უხეში მიახლოებით.

თუ ამოვხსნით ამოცანას, ვთქვათ, მანქანის სიჩქარის შესახებ და მივიღებთ 5 ან 6 კმ/სთ., მაშინ ადვილი მისახვედრია, რომ მანქანის სიჩქარე საათში შეიძლება იყოს 56 კმ და არა 5,6 კმ. ან 560 კმ.

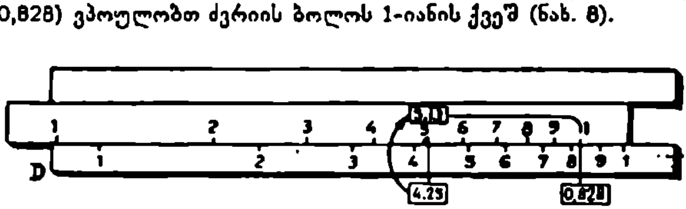
გაყოფა ლოგარითმულ სახაზავზე სრულდება უფრო მარტივად, ვიდრე გამრავლება. 6 გავყოთ 3-ზე.

სამიზნებელი ხაზით ძირითად სკალაზე დავინიშნოთ 6. დავაყენოთ სამიზნებელი ხაზის ქვევით ძვრიის *c* სკალის დანაყოფი 3... მაშინ ძვრიის 1-ის (საწყისის) ქვეშ წავიკითხავთ შედეგს 2-ს (ნახ. 7).



ნახ. 7.

4,25 რომ გაიყოს 5,13-ზე, მაშინაც ისეთნაირად უნდა მოვიქცეთ და შედეგს (0,828) ვპოულობთ ძვრიის ბოლოს 1-იანის ქვეშ (ნახ. 8).



ნახ. 8.

განხილული მაგალითების მიხედვით შეიძლება გამოვთქვათ შემდეგი წესი:

სამიზნებელი ხაზით დავინიშნავთ კორპუსის ძირითად სკალაზე გასაყოფ რიცხვს. სამიზნებელი ხაზის ქვეშ ვაყენებთ ძვრიის დანაყოფს, რომელიც გამყოფს შეესაბამება, რის შემდეგ ძირითად (D) სკალაზე ძვრიის საწყის ან ბოლო 1-იანის ქვეშ წავიკითხავთ შედეგს.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

ა) აღნიშნეთ სახაზავის ძირითად სკალაზე შემდეგი რიცხვები: 123, 15,3, 0,186, 1,34, 1,08, 104, 175, 0,0135, 0,00159, 254, 2,76, 2,28, 0,294.

ბ) შემდეგ მაგალითებში სამრავლი აღნიშნეთ ძვრიას მარჯვენა ბოლოთი: 2,5. 4,8; 3,8. 3,5; 1,2. 5,1; 2,5. 6,4; 8,5. 7; 1,9. 8,8; 1,6. 9,5;

გ) შეასრულეთ ნაჩვენები მოქმედება და მიღებული შედეგი შეადარეთ პასუხს:

რიგის №	მაგალითი	პასუხი	რიგის №	მაგალითი	პასუხი
1	2,96·7,5	22,2	6	2,18.4,65	10,1
2	6,98·3,05	21,3	7	0,095.17,8	1,69
3	1,54·3,26	5,02	8	6,55.2,42	15,9
4	0,433.19,8	8,57	9	0,546·91,8	50,1
5	0,015.3,5	0,0525	10	0,016.0,173	0,00277

რიგის №	მაგალითი	პასუხი	რიგის №	მაგალითი	პასუხი
1	72,36 : 2,56	28,3	5	77,3 : 0,546	142
2	635 : 72	8,82	6	0,439 : 264	0,00166
3	0,541 : 0,0238	22,7	7	0,321 : 0,0125	25,7
4	54,2 : 6,92	7,83	8	0,0921 : 0,176	0,523

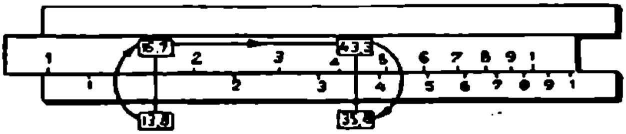
§ 15. კომბინირებული მოქმედების შესრულება ლოგარითმული სახაზავის საშუალებით. პროპორციის უცნობი წევრის პოვნა

ლოგარითმული სახაზავის საშუალებით შეიძლება ერთდროულად ვაწარმოოთ რამდენიმე მოქმედება. განვიხილოთ მაგალითი.

ვთქვათ, გვინდა გამოვთვალოთ შემდეგი გამოსახულების მნიშვნელობა:

$$x = \frac{13,8 \cdot 43,3}{16,7}$$

მოქმედებები უნდა ვაწარმოოთ შემდეგი მიმდევრობით: ჯერ 13,8 გავყოთ 16,7-ზე, შემდეგ კი შედეგის წაუკითხავად გავამრავლოთ 43,3-ზე. პასუხს (35,8) მივიღებთ ძვრიის მხოლოდ ერთხელ გადაადგილებით (ნახ. 9).



ნახ. 9.

$\frac{a\cdot b\cdot c}{d\cdot e}$ სახის გამოსახულება უნდა გამოვთვალოთ შემდეგი სქემით:

$$\frac{a\cdot b\cdot c}{d}\ .$$

განხილული მაგალითი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც შემდეგი სახის პროპორცია: $43{,}3 : 16{,}7 = x : 13{,}8$

მაშასადამე, პროპორციის უცნობი წევრი $x=\frac{43{,}3\cdot 13{,}8}{16{,}7}$

ამრიგად, ლოგარითმული სახაზავით ადვილად შეიძლება მოინახოს პროპორციის უცნობი წევრი.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

საანგარიშო სახაზავის საშუალებით შეასრულეთ შემდეგი მოქმედებანი შუალედური მოქმედების წაუკითხავად:

1. $\frac{0{,}214\cdot 17{,}5}{0{,}019}$. პას. 198; $\frac{1{,}05\cdot 42{,}4}{157}$. პას. 0,284;

$\frac{108\cdot 0{,}208}{308}$. პას. 0,00729.

შედეგი შეამოწმეთ პასუხით.

2. შემდეგი პროპორციები ამოხსენით ლოგარითმული სახაზავის საშუალებით:

$0{,}15 : x=3 : 8$, $x : 4{,}15=14{,}7 : 18{,}9$, $1{,}15 : 0{,}032=x : 0{,}7$,

$0{,}56 : 1{,}5=2{,}0 : x$.

§ 10. რიცხვის კვადრატში და კუბში ახარისხება ლოგარითმული სახაზავის საშუალებით

ლოგარითმულ სახაზავზე ნებისმიერი რიცხვის კვადრატის პოვნა შეიძლება მარტივად შესრულდეს რიცხვების კვადრატში ახარისხება წარმოებს კვადრატების (A) სკალის და ძირითადი (D) სკალის გამოყენებით. კვადრატების (A) სკალა (ნახ 10). ორი ნაწილისაგან შედგება: მარცხენაზე არის დანაყოფები 1-დან 10-მდე, მარჯვენაზე 10-დან 100-მდე. მარჯვენა ზუსტად იმეორებს პირველ ნაწილს.

ნახ. 10.

თითოეული ამ ნაწილთაგანი წარმოადგენს ორჯერ შემცირებულ ძირითად (D) სკალას.

თუ სამიზნებელ ხაზს ძირითადი D სკალის ნებისმიერ რიცხვზე დავაყენებთ, მაშინ კვადრატების A სკალაზე წავიკითხავთ ამ რიცხვის კვადრატს, ხოლო კუბე-

ბის k სკალაზე ამ რიცხვის კუბს. 10-ე ნახაზზე ვკითხულობთ $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $2^3=8$, $3^3=27$-ს, $4^3=64$-ს და ა. შ.

თუ სამიზნებელ ხაზს დავაყენებთ 3,4-ზე, მაშინ მის პირდაპირ ზევით A სკალაზე წავიკითხავთ 11,6-ს, ხოლო კუბების k სკალაზე 39,5-ს.

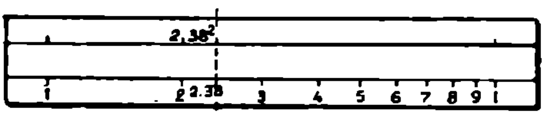
სახაზავზე კვადრატში ახარისხების შემდეგ შედეგში მძიმის ადგილი განისაზღვრება უხეში მიახლოებით ისე, როგორც გამრავლება-გაყოფის დროს. $3{,}4^2$-სათვის ვპოულობთ 1—1—6. ცხადია, რომ $3{,}4^2$ არ შეიძლება იყოს 1,16 ან კიდევ 116, ამიტომ $3{,}4^2=11{,}6$.

მეტად მოხერხებულად გამოითვლება სახაზავზე რამდენიმე მოქმედების კომბინაცია. ვიპოვოთ x-ის მნიშვნელობა, თუ $x=4{,}53 \cdot 2{,}38^2$.

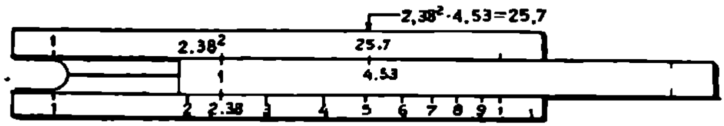
დავაყენოთ სამიზნებელი ხაზი ძირითადი D სკალის 2,38-ზე. მაშინ კვადრატების A სკალაზე სამიზნებელი ხაზი გვიჩვენებს $2{,}38^2$-ს.

ეს რიცხვი არ წავიკითხოთ და მორბედს ხელი არ ვახლოთ, ძერია კი გადავაადგილოთ ისე, რომ მისი დასაწყისი 1 დაემთხვეს სამიზნებლის ხაზს. შემდეგ მორბედი დავაყენოთ B სკალის რიცხვზე — 4,53, მაშინ A სკალაზე წავიკითხავთ საბოლოო შედეგს — 25,7.

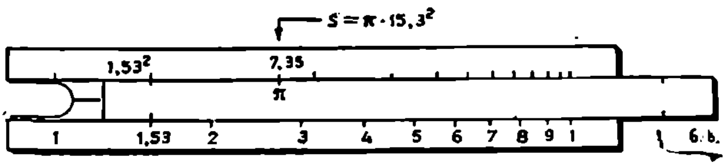
აღნიშნული ოპერაციები იმ მიმდევრობით, როგორც ეს აღვწერეთ, ნაჩვენებია მე-11, მე-12, და მე-13 ნახაზებზე.



ნ.ხ. 11.



ნ.ხ. 12.



ნ.ხ. 13

§ 17. კვადრატული და კუბური ამოფესვა ლოგარითმული სახაზავის საშუალებით

კვადრატში ახარისხება და კვადრატული ამოფესვა ურთიერთშებრუნებული მოქმედებებია, ამიტომ ლოგარითმულ სახაზავზე რიცხვებიდან კვადრატული ამოფესვისათვის იმავე სკალებით (D და A) ვსარგებლობთ, მხოლოდ მოქმედება ამოფესვას ვაწარმოებთ შებრუნებული თანმიმდევრობით, ვიდრე კვადრატში ახარისხებისას.

კვადრატში ახარისხების დროს სამიზნებელი ხაზით ვიღებდით ფუძეს ძირითად D სკალაზე და შედეგს ვკითხულობდით A სკალაზე. აქ კი ვიქცევით პირიქით. ფესვქვეშა რიცხვს ვიღებთ A სკალაზე და სამიზნებელი ხაზის ქვეშ ძირითად (D) სკალაზე ვკითხულობთ ფესვის მნიშვნელობას (ნახ. 2): $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$ და ა. შ.

თუ გვინდა ორნიშნა რიცხვის ამოფესვა, მაგალითად $\sqrt{42}$, მაშინ სამიზნებელ ხაზს ვაყენებთ კვადრატების (A) სკალის მარჯვენა ნახევარზე 42-თან და ძირითად სკალაზე ვკითხულობთ პასუხს: 6,48.

ნებისმიერი რიცხვის კვდრატული ამოფესვა დაიყვანება განხილული შემთხვევებიდან ერთ-ერთზე.

კუბური ფესვის ამოღების დროს ვსარგებლობთ (k) კუბების სკალითა და ძირითადი (D) სკალით, ანალოგიურად კვადრატული ამოფესვისა.

წ ე ს ი: 1. ფესვქვეშა რიცხვს წარმოვადგენთ ერთნიშნა ან ორნიშნა რიცხვის სახით, რისთვისაც მას ვამრავლებთ (ან ვყოფთ) ათის ლუწ ხარისხზე.

2. თუ ფესვქვეშა რიცხვი წარმოდგენილია ერთნიშნა რიცხვით, მას ვიღებთ სამიზნებელი ხაზით A სკალის მარცხენა ნახევარზე და თუ ის წარმოდგენილია ორნიშნა რიცხვით, მაშინ კვადრატების სკალის მარჯვენა ნახევარზე.

3. შედეგს წავიკითხავთ სამიზნებელი ხაზის ქვეშ ძირითად სკალაზე.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 8

ა) იპოვეთ საანგარიშო სახაზავით: 26^2, $4,5^2$, $6,4^2$, $8,5^2$, $4,4^2$, $76,2^2$, 143^2;

ბ) იპოვეთ საანგარიშო სახაზავის საშუალებით შემდეგი რიცხვების კვადრატები და პასუხები შეადარეთ ცხრილით მიღებულ კვადრატებს:

a	2,4	7,6	8,4	9,8	1,46	1,85	2,63
a^2 სახაზავით							
a^2 ცხრილით	5,760	57,76	70,56	96,04	2,132	3,423	6,917

გ) იპოვეთ საანგარიშო სახაზავის საშუალებით შემდეგი რიცხვების კვადრატები, წინასწარ დაამრგვალეთ ეს რიცხვები სამნიშნად ციფრამდე, ჩანაწერები დაალაგეთ შემდეგი ნიმუშის მიხედვით:

1	2,346	3,748	3,563	24,81	12,56	0,2484	
ს.ხაზ ვით	5,50						
ცხრილით	5,504						
განსხვავება	0,004						

დ) იპოვეთ საანგარიშო სახაზავის საშუალებით რიცხვების კუბები და შეადარეთ პასუხები ცხრილში მოყვანილ ამავე რიცხვების კუბებს:

a	6	7	8	9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,5	2,8
a^3 სახაზ. ვით										
a^3 ცხრილით	216	343	512	229	1,728	3,375	5,832	9,261	15,62	21,95

a	3,5	4,3	4,5	5,2	6,5	7,3	8,5
a^3 სახაზავით							
a^3 ცხრილით	42,88	79,51	91,13	140,6	247,6	389,0	614,1

II თავი

§ 18. პირველი ხარისხის განტოლებანი

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 1. **ორ ალგებრულ გამოსახულებას, შეერთებულს „=“ ნიშნით ტოლობა ეწოდება.** ტოლობანი შეიძლება იყოს ორი სახის: იგივობა და განტოლება.

იგივობა ისეთი ტოლობაა, რომელიც სწორია მასში შემავალი ასოების ნებისმიერი (დასაშვები) მნიშვნელობებისათვის. მაგალითად, ჩვენთვის ცნობილი შემოკლებული გამრავლების ფორმულები:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2, \quad (a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3 \text{ და ა. შ.}$$

წარმოადგენენ იგივობებს. ადვილად შეიძლება დავადგინოთ, რომ ყოველთვის, როგორი მნიშვნელობაც არ უნდა ჰქონდეს a და b რიცხვებს, თითოეული ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილი უდრის მარჯვენას. შეამოწმეთ ეს აღებულ მაგალითებზე, როცა $a=-2$ და $b=5$ (ან a და b-ს მიეცით ნებისმიერი რიცხვითი მნიშვნელობები).

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 2 **ასოთი გამოსახული უცნობი რიცხვის შემცველ ტოლობას განტოლება ეწოდება.**

მაგალითად $3a-5=a+15$ ტოლობა წარმოადგენს განტოლებას ერთი a უცნობით. იგი სამართლიანია მხოლოდ მაშინ, როცა $a=10$.

$a^2=25$ ტოლობა წარმოადგენს განტოლებას, იგი სამართლიანია მხოლოდ მაშინ, როცა $a=5$ და $a=-5$.

$x+2y^2=9$ ტოლობა წარმოადგენს განტოლებას ორი x და y უცნობით. იგი სამართლიანია, მაგალითად, თუ $x=1$ და $y=2$.

მიღებულია, რომ განტოლებაში უცნობი რიცხვები ლათინური ანბანის უკანასკნელი x, y, z,.... ასოებით აღინიშნოს.

ნაცვლად გამოთქმისა „განტოლება სამართლიანია, როცა $x=1$, $y=2$". ხშირად მიღებულია გამოთქმა „განტოლებას აკმაყოფილებს უცნობის მნიშვნელობები $x=1$ და $y=2$".

განსაზღვრა 3. **უცნობის მნიშვნელობებს, რომელნიც აკმაყოფილებენ განტოლებას, მისი ამონახსნები ანუ ფესვები ეწოდება.**

$a^2=25$ განტოლებას აქვს ორი ფესვი: $a=5$ და $a=-5$, ხოლო $3a-5=a+15$ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი: $a=10$, $x^3+x^2-4x-4=0$ განტოლებას კი — სამი ფესვი: $x_1=-1$, $x_2=-2$ და $x_3=2$.

განსაზღვრა 4. **ამოვხსნათ განტოლება ან განტოლებათა სისტემა ნიშნავს, ვიპოვოთ უცნობის ყველა ის მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ მოცემულ განტოლებას ან სისტემას.**

განტოლებას შეიძლება სრულიად არ ჰქონდეს ფესვი. ავილოთ, მაგალითად, განტოლება

$$x+3=x-1.$$

როგორი მნიშვნელობაც არ უნდა მივცეთ x-ს, ამ განტოლების მარცხენა ნაწილი მუდამ 2-ით მეტი იქნება მარჯვენაზე. მაშასადამე, არ არსებობს x-ის ისეთი მნიშვნელობანი, რომლებიც ამ განტოლებას დააკმაყოფილებენ, ე. ი. ამ განტოლებას ფესვები არა აქვს.

განტოლებაში შემავალი უცნობების რიცხვის მიხედვით არჩევენ განტოლებებს: ერთუცნობიანს, ორუცნობიანს, სამუცნობიანს და ა. შ.

ყველა შესაძლო გამარტივების შემდეგ განტოლებაში შემავალი უცნობის უმაღლეს ხარისხს განტოლების ხარისხი ეწოდება.

განტოლების ზემოთ მოყვანილი მაგალითებიდან პირველი განტოლება მეორე ხარისხისაა, მეორე — პირველი ხარისხის, ხოლო მესამე — მესამე ხარისხის.

განტოლების ფესვების რიცხვი მუდამ განტოლების ხარისხის ტოლია.

განსაზღვრა 5. **ტოლი ხარისხის მქონე ერთნაირი უცნობის შემცველ ორ განტოლებას ტოლფასი ეწოდება.** მაშინ, თუ პირველი განტოლების ყველა ფესვი წარმოადგენს მეორის ფესვებს და პირიქით — მეორე განტოლების ყველა ფესვი წარმოადგენს პირველის ფესვებს, ან არც ერთს არა აქვს ამონახსნი.

მაგალითად, განტოლებანი:

$$1\cdot 2x-5=11 \text{ და } 7x+6=62$$

წარმოადგენს ტოლფას განტოლებებს, რადგან ორივეს ერთი და იგივე ფესვი აქვს. სახელდობრ, $x=8$.

$2x-3=7$ და $(2x-3)(x+1)=7(x+1)$ განტოლებანი არ არიან ტოლფასნი: პირველს აქვს ერთადერთი ფესვი $x=5$, ხოლო მეორეს, გარდა $x=5$ ფესვისა, აქვს კიდევ ფესვი $x=-1$, რომელიც არ წარმოადგენს პირველი განტოლების ფესვს.

$x+3=x-2$ და $x(x-2)=x^2+5-2x$ განტოლებები ტოლფასია, რადგან არც ერთ მათგანს ამონახსნი არა აქვს.

§ 10. პირველი ხარისხის ერთუცნობიანი განტოლება

პირველი ხარისხის ერთუცნობიანი განტოლების ზოგადი სახეა:

$$ax=b. \quad (1)$$

ამ სახეზე შეიძლება დაყვანილი იქნას ნებისმიერი სახით მოცემული პირველი

ხარისხის ერთუცნობიანი განტოლება, თუკი მასზე მოვახდენთ სათანადო გარდაქმნებს. ეს გარდაქმნები ემყარება განტოლების შემდეგ ძირითად თვისებებს:

თ ვ ი ს ე ბ ა 1. თუ განტოლების ორივე ნაწილს ერთსა და იმავე რიცხვს ან ერთი და იმავე უცნობის შემცველ მრავალწევრს მივუმატებთ, მაშინ მიღებული განტოლება მოცემულის ტოლფასი იქნება.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი :

1. ვთქვათ, მოცემულია განტოლება: $3x+7=19$.

ამოვხსნით მას და ვიპოვით ერთადერთ ფესვს $x=4$. განტოლების ორივე მხარეს დავუმატოთ 7:

$$3x+14=26.$$

ამოვხსნით ამ უკანასკნელს და ვიპოვით, რომ მასაც ერთადერთი ფესვი აქვს: $x=4$.

2. ავიღოთ განტოლება:

$$2x-5=9$$

ამოვხსნით მას და ვიპოვით მის ერთადერთ ფესვს $x=7$. ამ განტოლების ორივე ნაწილს $-3x$ მივუმატოთ, მივიღებთ განტოლებას:

$$2x-5-3x=9-3x$$

$$-x-5=9-3x$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მიღებული განტოლების ფესვიც ერთადერთია: $x=7$.

განტოლების ზემოთ განხილული თვისებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი დასკვნები:

1. თუ განტოლების ორივე ნაწილში არის ერთნაირი წევრები, ისინი ერთმანეთს აბათილებენ.

მართლაც, ავიღოთ განტოლება:

$$2x-5+5x=47+5x$$

თუ განტოლების ორივე ნაწილს მივუმატებთ $-5x$, მაშინ მივიღებთ განტოლებას $2x-5=47$, რომელიც მოცემულის ტოლფასია.

2. განტოლების ყოველი წევრი შეგვიძლია ერთი ნაწილიდან მეორეში გადავიტანოთ ნიშნის შეცვლით.

მაგალითად, $3x+1=2x+3$ განტოლების ორივე ნაწილს მივუმატოთ $-2x-3$, გვექნება

$$3x+1-2x-3=2x+3-2x-3,$$

$$3x+1-2x-3=0.$$

$$x-2=0.$$

მიღებული განტოლება მოცემულის ტოლფასია.

თ ვ ი ს ე ბ ა 2 თუ განტოლების ორივე ნაწილს გავამრავლებთ ერთსა და იმავე ნულის არატოლ რიცხვზე, მაშინ მიღებული განტოლება მოცემულის ტოლფასი იქნება.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

1. ავიღოთ, მაგალითად, განტოლება:

$$3x-4=14.$$

მას ერთადერთი ფესვი აქვს $x=6$. მისი ორივე ნაწილი გავამრავლოთ სამზე, მივიღებთ: $9x-12=42$.

თუ ამოვხსნით უკანასკნელ განტოლებას, დავინახავთ, რომ მასაც ერთადერთი ფესვი აქვს $x=6$, მაშასადამე, ორივე ეს განტოლება ტოლფასია. თუ მოცემული განტოლების ორივე ნაწილს გავამრავლებთ —2-ზე და $\frac{1}{3}$ ზე, მივიღებთ განტოლებებს:

$$-6x+8=-28$$

$$x-\frac{4}{3}=\frac{14}{3}$$

თითოეულის ამოხსნა იძლევა ერთადერთ ფესვს $x=6$. მაშასადამე, ყველა ეს განტოლება მოცემულის ტოლფასია.

განტოლების მე-2 თვისებიდან გამომდინარეობს შემდეგი დასკვნები:

1. განტოლების ყველა წევრი შეიძლება დაყვანილი იქნას საერთო მნიშვნელზე.

2. განტოლების ყველა წევრი შეიძლება შევკვეცოთ ერთსა და იმავე ნულის არატოლ რიცხვზე.

ამოვხსნათ განტოლება ეს ნიშნავს, ვიპოვოთ განტოლების ყველა ფესვი ან უცნობის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლებიც განტოლებას აკმაყოფილებენ

განვიხილოთ წრფივი ერთუცნობიანი განტოლების ამოხსნის მაგალითები:

$$\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-3}{x+2}=\frac{10}{x^2-4}.$$

უნდა აღინიშნოს, რომ $x=2$ და $x=-2$ არ წარმოადგენს x-ის დასაშვებ მნიშვნელობებს, რადგან ამ მნიშვნელობათა დროს განტოლება აზრს კარგავს.

საერთო უმცირესი მნიშვნელია $(x-2)(x+2)=x^2-4$. თუ განტოლების ორივე ნაწილს მასზე გავამრავლებთ და შეკვეცას ჩავატარებთ, მივიღებთ:

$$(x+1)(x+2)-(x-3)(x-2)=10$$

$$x^2+3x+2-x^2+5x-6=10$$

$$8x=14$$

$$4x=7$$

$$x=1\frac{3}{4}$$

დ ა ვ ა ლ ე ბ ა

შეამოწმეთ ამოხსნის სისწორე

$$3ax+b=cx+4,$$

უცნობის შემცველი წევრები გადავიტანოთ განტოლების ერთ-ერთ ნაწილში (მაგალითად, მარცხენაში), ხოლო თავისუფალი წევრები — მეორეში (მარჯვენაში):

$$3ax-cx=4-b.$$

განტოლების მარცხენა ნაწილში ფრჩხილებს გარეთ გავიტანოთ x:

$$(3a-c)x=4-b.$$

უცნობი x უნდა დაიწეროს ფრჩხილის შემდეგ, რადგან $3a-c$ წარმოადგენს კოეფიციენტს, ხოლო კოეფიციენტი ყოველთვის იწერება უცნობის წინ.

მიღებული განტოლების ორივე ნაწილი გავყოთ $(3a-c)$-ზე, მივიღებთ:

$$x=\frac{4-b}{3a-c}.$$

მივიღეთ მოცემული განტოლების ფესვი შემდეგი პირობებით:

$$3a-c\neq 0 \text{ ან } 3a\neq c.$$

დ ა ვ ა ლ ე ბ ა

შეამოწმეთ ამოხსნის სისწორე:

განვიხილოთ პირველი ხარისხის ერთუცნობიანი განტოლება ზოგადი სახით:

$$ax+b=0.$$

ცხადია, რომ:

1. თუ $a\neq 0$, მაშინ განტოლების ფესვი არის $-\dfrac{b}{a}$.

2. თუ $a=0$ და $b\neq 0$, მაშინ განტოლებას ამოხსნა არა აქვს.

3. თუ $a=0$ და $b=0$, მაშინ განტოლების ფესვად შეიძლება აღებული იქნას ნებისმიერი რიცხვი. ამ შემთხვევაში განტოლებას განუზღვრელი ეწოდება.

ვთქვათ, მოცემულია განტოლება $2x-1=\dfrac{1}{2}x+5$.

ვხედავთ, რომ როგორც მარჯვენა, ისე მარცხენა ნაწილები ამ განტოლებისა წარმოადგენს წრფივ ფუნქციებს. ამ განტოლების ამოხსნა, ცხადია, ნიშნავს მოიძებნოს x-ის ისეთი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ორივე ფუნქცია რიცხობრივად ტოლი იქნება.

ამ თვალსაზრისით განტოლების განხილვას ბუნებრივად მივყევართ მისი ამოხსნის შემდეგ ხერხამდე:

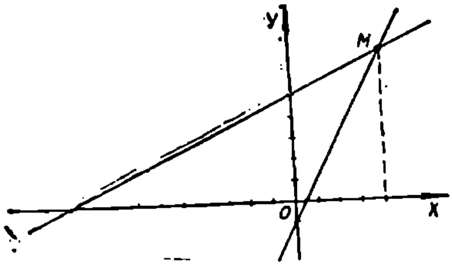
ვაგებთ გრაფიკს წრფივი ფუნქციებისას:

$$y=2x-1 \quad \text{და} \quad y=\frac{1}{2}x+5.$$

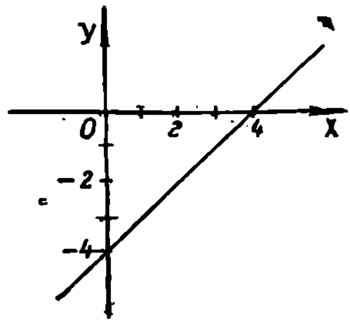
როგორც ცნობილია, მათი გრაფიკები წარმოადგენს წრფეებს. სწორედ წრფეთა გადაკვეთის M წერტილის აბსცისა წარმოადგენს მოცემული განტოლების ფესვს, ვინაიდან ამ აბსცისას (ნახ. 14) ეთანადება ორივე წრფის ერთი და იგივე ორდინატი, ანუ x აბსცისის ამ მნიშვნელობისათვის განტოლების ორივე მხარე ტოლია.

ნახაზიდან ჩანს, რომ წრფეთა გადაკვეთის წერტილის აბსცისა, ანუ განტოლების ფესვი, $x=4$.

ჩვენ შეგვიძლია აღებული განტოლება დავიყვანოთ უმარტივეს სახეზე, სახელდობრ, $y=x-4=0$, მაშინ განტოლების გრაფიკულ ამონახსნს ექნება მე-15



ნახ. 14.



ნახ. 15.

ნახაზზე გამოსახული სახე. უნდა აღინიშნოს, რომ განტოლების ამოხსნის ზემოთ განხილულ შემთხვევებს შეესაბამება

$$y=ax+b$$

წრფის სამი სხვადასხვა მდებარეობა აბსცისათა ღერძის მიმართ, სახელდობრ, პირველ შემთხვევაში $y=ax+b$ წრფე აბსცისათა ღერძს კვეთს (განხილულ მაგალითში $y=x-4$ წრფე აბსცისათა ღერძს კვეთს $x=4$ წერტილში); განტოლებას აქვს ერთადერთი ფესვი. მეორე შემთხვევაში — განტოლებას არც ერთი ფესვი არა აქვს, $y=ax+b$ წრფე აბსცისათა ღერძის პარალელურია. მესამე შემთხვევაში $y=ax+b$ წრფე ემთხვევა აბსცისათა ღერძს (განტოლებას გააჩნია უსასრულო სიმრავლე ფესვებისა).

§ 10. წრფივ განტოლებათა სისტემა

წრფივი ორუცნობიანი განტოლება ეწოდება

$$ax+by=c \qquad (1)$$

სახის განტოლებას, სადაც x და y უცნობებია, a და b კი (უცნობთა კოეფიციენტები) —მოცემული რიცხვები, c (თავისუფალი წევრი) ნებისმიერი მოცემული რიცხვია.

ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ იმაში, რომ ამ განტოლებას აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე. მართლაც, თუ x და y უცნობთაგან ერთ-ერთს, მაგალითად, x-ს მივცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობას რიცხვთა რაიმე სიმრავლიდან, მაშინ შესაბამისი მნიშვნელობები უცნობი y.-ისათვის მოიძებნება (1) განტოლებიდან.

მართლაც, თუ $2x+y=5$ განტოლებაში x იღებს მნიშვნელობებს: —1,0, 2,5, მაშინ y-ის შესაბამისი მნიშვნელობები იქნება: 7,5 · 1,—5, რიცხვთა ყოველი წყვილი: (—1,7, (0,5,) (2,1), (5,—5) წარმოადგენს მოცემული განტოლების ამონახსნებს. ცხადია, არსებობს რიცხვთა ასეთი წყვილების უსასრულო სიმრავლე. სწორედ

ამიტომ ამბობენ, რომ ერთი ორუცნობიანი წრფივი განტოლება განუზღვრელია. ეს უკანასკნელი ადვილად წარმოსადგენია გრაფიკულად. მართლაც, $2x+y=5$ განტოლებას მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში შეესაბამება წრფე. ეს წრფე წარმოადგენს $y=-2x+5$ წრფივი ფუნქციის გრაფიკს.

აღებული წრფის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები წარმოადგენს განტოლების ამონახსნებს და რადგანაც წრფეზე გვაქვს წერტილთა უსასრულო სიმრავლე, ამიტომ მოცემულ განტოლებას ექნება უსასრულო სიმრავლე ამონახსნებისა.

თუ ერთად განვიხილავთ პირველი ხარისხის ორუცნობიან განტოლებას, სადაც ერთსახელა უცნობები ერთსა და იმავე რიცხვებს აღნიშნავს, გვექნება ე. წ. განტოლებათა სისტემა.

ასეთი სისტემა ზოგადი სახით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \tag{3}$$

უცნობთა მნიშვნელობების ყოველ წყვილს, რომელიც სისტემის შემადგენელ ორივე განტოლებას აკმაყოფილებს, მოცემული სისტემის ამონახსნი ეწოდება.

სანამ განვიხილავდეთ (3) სისტემის ამონახსნს ზოგადი სახით, მოვიგონოთ რიცხვითკოეფიციენტიან ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ცნობილი ხერხები.

1. ჩასმის ხერხი

ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} 3x-2y=6, \\ 5x+4y=32. \end{cases}$$

გამოვსახოთ ერთ-ერთი განტოლებიდან რომელიმე უცნობი მეორის საშუალებით. მაგალითად, პირველი განტოლებიდან y გამოვსახოთ x-ის საშუალებით

$$y=\frac{3x-6}{2}, \tag{4}$$

y-ის მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ სისტემის მეორე განტოლებაში:

$$5x+4\cdot\frac{3x-6}{2}=32.$$

მივიღეთ ერთუცნობიანი ერთი წრფივი განტოლება, რომლის ამოხსნაც მოგვცემს:

$$x=4.$$

მიღებული $x=4$ მნიშვნელობა ჩავსვათ (4-ში);

$$y=\frac{3\cdot4-6}{2}, \qquad y=3;$$

მიღებულ მნიშვნელობათა $x=4$ და $y=3$ წყვილი წარმოადგენს მოცემული სისტემის ამონახსნს.

ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} ax+2y=c, \\ bx-y=d. \end{cases}$$

მეორე განტოლებიდან ვპოულობთ $y=bx-d$. y-ის მნიშვნელობა ჩავსვათ სისტემის პირველ განტოლებაში:

$$ax+2(bx-d)=c,$$

საიდანაც:

$$ax+2bx-2d=c,$$
$$(a+2b)x=c+2d,$$
$$x=\frac{c+2d}{a+2b}.$$

x-ის მნიშვნელობის ჩასმა სისტემის მეორე განტოლებაში მოგვცემს:

$$y=b\cdot\frac{c+2d}{a+2b}-d;$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$y=\frac{bc-2d}{a+2b}.$$

II. ალგებრული შეკრების ხერხი

ამოვხსნათ სისტემა:
$$\begin{cases} 7x+3y=8, \\ 5x+2y=5,5. \end{cases}$$

პირველი განტოლების ორივე ნაწილი გავამრავლოთ 2-ზე, ხოლო მეორისა —3-ზე, მივიღებთ სისტემას:
$$\begin{cases} 14x-6y=16 \\ -15x+6y=-16,5. \end{cases}$$

სისტემის განტოლებათა წევრები შევკრიბოთ წევრ-წევრად, მივიღებთ $-x = -0,5$, საიდანაც $x=0,5$.

შემდეგ სისტემის ერთ-ერთ რომელიმე განტოლებაში x-ის ნაპოვნი მნიშვნელობის ჩასმით ვპოულობთ $y=1,5$.

ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a-b}+\dfrac{y}{a+b}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}, \\[2ex] \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=1. \end{cases}$$

სისტემის თითეული განტოლება დავიყვანოთ საერთო მნიშვნელზე, შემდეგ პირველი განტოლება გავამრავლოთ $(a-b)$-ზე, მეორე კი—$(a+b)$-ზე, რის შემდეგ მიღებულ განტოლებებს შევკრებთ წევრ-წევრად:

$$\begin{cases} (a+b)x+(a-b)y=a^2+b^2, \\ (a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} a-b \\ -(a+b) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} (a^2-b^2)x+(a-b)^2y=(a^2+b^2)(a-b), \\ -(a^2-b^2)x-(a+b)^2y=-(a^2-b^2)(a+b) \end{cases}$$

$$(a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2)y=(a-b)(a^2+b^2-a^2-2ab-b^2)$$
$$-4aby=(a-b)(-2ab);$$
$$y=\frac{a-b}{2}$$

x-ის განსაზღვრის მიზნით y-ის მნიშვნელობა ჩავსვათ სისტემის მეორე განტოლებაში:

$$\frac{x}{a+b}+\frac{a-b}{2}\cdot\frac{1}{a-b}=1;\qquad \frac{x}{a+b}=\frac{1}{2};\qquad x=\frac{a+b}{2}$$

ამრიგად, x და y-ის მნიშვნელობები $x=\dfrac{a+b}{2}$ და $y=\dfrac{a-b}{2}$ წარმოადგენს მოცემული სისტემის ამონახსნებს.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

ამოხსენით შემდეგი სისტემები:

1. $\begin{cases} 2x-3y=19, \\ 7x+2y=4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=1, \\ bcx+acy=ab. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{5}+\dfrac{5x-3y}{3}=x+1, \\ \dfrac{2x-3y}{3}+\dfrac{4x-3y}{2}=y+1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x}{a-b}+\dfrac{y}{a}=a, \\ \dfrac{x}{b}-\dfrac{y}{a-b}+b=0. \end{cases}$

§ 21. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა დეტერმინანტების საშუალებით

ვთქვათ, მოცემულია განტოლებათა წრფივი სისტემა ზოგადი სახით:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

განვსაზღვროთ y მეორე განტოლებიდან:

$$b_2y=c_2-a_2x,\qquad y=\frac{c_2-a_2x}{b_2} \tag{4}$$

x-ის მნიშვნელობა ჩავსვათ სისტემის პირველ განტოლებაში:

$$a_1x+b_1\,\frac{c_2-a_2x}{b_2}=c_1.$$

მივიღებთ ერთუცნობიან წრფივ განტოლებას x-ის მიმართ.

ამოვხსნათ ეს უკანასკნელი:

$$a_1b_2x+b_1c_2-a_2b_1x=b_2c_1;\qquad (a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2;$$

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1} \tag{5}$$

x-ის მნიშვნელობა ჩავსვათ (4)-ში და განვსაზღვროთ y.

$$y=\frac{c_2-a_2\cdot\dfrac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}}{b_2};\qquad y=\frac{a_1b_2c_2-a_2b_1c_2-a_2b_2c_1+a_2b_1c_2}{b_2\,(a_1b_2-a_2b_1)}$$

სათანადო გარდაქმნების შესრულების შემდეგ მივიღებთ

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{6}$$

ამრიგად, მოცემული სისტემისათვის მივიღეთ მნიშვნელობათა წყვილი x-ისა და y-ისათვის:

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}, \qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1};$$

რომლებიც წარმოადგენენ მოცემული სისტემის ამონახსნებს.

თუ დავაკვირდებით x-ისა და y-ის მნიშვნელობებს, შევნიშნავთ, რომ მათი მნიშვნელები ერთნაირია. სახელდობრ, ის ტოლია $a_1b_2-a_2b_1$-ისა, ეს უკანასკნელი კი შედგენილია მოცემულ სისტემაში შემავალი უცნობების — x-ისა და y-ის კოეფიციენტებისაგან. მოცემულ სისტემას აქვს ერთადერთი ამოხსნა, თუკი $a_1b_2-a_2b_1\neq0$, x და y-ის მნიშვნელობანი გამოითვლება (5) და (6) ფორმულებით.

ამოვწეროთ მოცემული სისტემის კოეფიციენტები იმავე მიმდევრობით, როგორც ისინი არიან მოცემული, და მივცეთ მას კვადრატული ცხრილის ფორმა. მივიღებთ:

$$\begin{matrix} a_1 & & b_1 \\ & \times & \\ a_2 & & b_2 \end{matrix} \tag{7}$$

თუ ვაწარმოებთ გამრავლებას ისე, როგორც ისრებია ნაჩვენები, და პირველ შედეგს გამოვაკლებთ მეორეს, მივიღებთ $a_1b_2-a_2b_1$; მიღებულ გამოსახულებას ეწოდება წრფივ განტოლებათა მოცემულ სისტემის II რიგის დეტერმინანტი და აღინიშნება შემდეგნაირად:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1;$$

თუ დავაკვირდებით x-ისა და y-ის (5) და (6) გამოსახულებების მრიცხველებს, ადვილად შევნიშნავთ, რომ ისინი წარმოადგენენ მეორე რიგის დეტერმინანტებს:

$$\Delta x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-b_1c_2; \quad \Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1:$$

Δ_x დეტერმინანტი მიიღება სისტემის დეტერმინანტისაგან

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

თუ პირველ სვეტის ელემენტებს შევცვლით თავისუფალი წევრებით, Δy დეტერმინანტი მიიღება აგრეთვე სისტემის დეტერმინანტისაგან მეორე სვეტის ელემენტების თავისუფალი წევრებით შეცვლის გზით.

ამრიგად, მოცემული

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

სისტემის ამოხსნა შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}; \qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta}$$

ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} 3x+4y=17 \\ 2x+3y=13 \end{cases}$$

შევადგინოთ სისტემის დეტერმინანტი;

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3\cdot 3-2\cdot 4=9-8=1;$$

ვინაიდან $\Delta\neq 0$, ამიტომ სისტემას ექნება ერთადერთი ამოხსნა. (5) და 6 ფორმულების გამოყენებით გამოვთვალოთ Δx და Δy დეტერმინანტები:

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 17 & 4 \\ 13 & 3 \end{vmatrix}=51-52=-1; \qquad \Delta y=\begin{vmatrix} 3 & 17 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}=39-34=5;$$

ამრიგად,

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-1}{1}=-1. \qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{5}{1}=5.$$

2. ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=c+d, \\ \dfrac{x}{c}+\dfrac{y}{d}=m+n \end{cases}$$

შევადგინოთ სისტემის დეტერმინანტი

$$\Delta=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{m} & \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{c} & \dfrac{1}{d} \end{vmatrix}=\frac{1}{dm}-\frac{1}{cn}=\frac{cn-dm}{cdmn} \; (c\neq 0,\ d\neq 0,\ m\neq 0 \text{ და } n\neq 0).$$

გამოვთვალოთ Δx და Δy:

$$\Delta x=\begin{vmatrix} c+d & \dfrac{1}{n} \\ m+n & \dfrac{1}{d} \end{vmatrix}=\frac{c+d}{d}-\frac{m+n}{n}=\frac{cn+dn-dm-dn}{dn}=$$

$$=\frac{cn-dm}{dn}$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{m} & c+d \\ \dfrac{1}{c} & m+n \end{vmatrix}=\frac{m+n}{m}-\frac{c+d}{c}=\frac{cm+cn-cm-dm}{cm}=\frac{cn-dm}{cm}.$$

ვპოულობთ x-ისა და y-ის მნიშვნელობებს:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{\dfrac{cn-dm}{dn}}{\dfrac{cn-dm}{cdmn}}=cm; \qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{\dfrac{cn-dm}{mc}}{\dfrac{cn-dm}{cdmn}}=dn.$$

§ 22. წრფივ განტოლებათა სისტემის გამოკვლევა დეტერმინანტის მიხედვით

ვთქვათ, მოცემულია წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

წრფივ განტოლებათა სისტემის გამოკვლევისას განიხილება შემდეგი შემთხვევები.

I შემთხვევა. სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, ე. ი.

$$\Delta=a_1b_2-a_2b_1=0.$$

ცხადია, რომ მაშინ $a_1b_2=a_2b_1$, საიდანაც $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$. როგორც ვხედავთ, თუ სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, მაშინ განტოლებათა სისტემის ერთსახელა უცნობების კოეფიციენტები პროპორციულია.

პირიქით, თუ ერთსახელა უცნობების კოეფიციენტები პროპორციულია, მაშინ სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია. მართლაც, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ პროპორციიდან უშუალოდ გამომდინარეობს $a_1b_2=a_2b_1$, რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$a_1b_2-a_2b_1=0.$$

ახლა დავუშვათ, რომ Δx და Δy დეტერმინანტებიდან ერთი რომელიმე ნულის ტოლია.

ვთქვათ, $\Delta x=0$, ე. ი. $c_1b_2-c_2b_1=0$, საიდანაც გამომდინარეობს პროპორცია

$$\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

ამრიგად, იქიდან რომ $\Delta=0$ და $\Delta x=0$, უშუალოდ გამომდინარეობს სისტემის ერთსახელა უცნობების კოეფიციენტებისა და თავისუფალი წევრების პროპორციულობა:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2} \qquad (2)$$

თითოეულ ამ შეფარდების მნიშვნელობა ავღნიშნოთ k-თი ($k\neq 0$):

$$\frac{a_1}{a_2}=k; \quad \frac{b_1}{b_2}=k; \quad \frac{c_1}{c_2}=k.$$

მივიღებთ:

$$a_1=ka_2; \; b_1=kb_2; \; c_1=kc_2;$$

a_1 b_1 და c_1-ის მნიშვნელობებს თუ ჩავსვამთ (1) სისტემის პირველ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\begin{cases} ka_2x+kb_2y=kc_2 \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

თუ მიღებული სისტემის პირველ განტოლების ყველა წევრს შევკვეცავთ k თანამამრავლზე, მაშინ მიღებული სისტემა შედგენილ იქნება ორი ერთნაირი გან-

ტოლებისაგან, ე. ი. ფაქტიურად გვექნება ერთი განტოლება 2 უცნობით. მე-3 პარაგრაფში აღნიშნული გვქონდა, რომ ერთ განტოლებას ორი უცნობით შეიძლება ჰქონდეს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე.

ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ სისტემა განუზღვრელია.

განვიხილოთ მაგალითი:

$$\begin{cases} 4x-3y=13, \\ 8x-6y=26. \end{cases}$$

როგორც ვხედავთ სისტემის ერთსახელა უცნობების კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრები პროპორციულია.

ცხადია, $k=\frac{1}{2}$. თუ სისტემის პირველ განტოლებას გავამრავლებთ 2-ზე ან მეორე განტოლებას $\frac{1}{2}$-ზე, მაშინ მივიღებთ ორ ერთნაირ განტოლებას, სახელდობრ, $4x-3y=13$. ერთ განტოლებას ორი უცნობით, როგორც ვიცით, აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე (ე. ი. იგი განუზღვრელია).

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\Delta=0$, მაგრამ $\Delta x\neq 0$ (მაშინ Δy-იც $\neq 0$). იქიდან რომ სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, გამომდინარეობს $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$. თუ $\Delta x\neq 0$, მაშინ $\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$. აქაც პირველი პროპორციის შეფარდებები აღვნიშნოთ k-თი ($k\neq 0$), გვექნება

$$a_1=ka_2 \text{ და } b_1=kb_2.$$

შეფარდების $\frac{c_1}{c_2}$ სიდიდე აღვნიშნოთ m-ით, სადაც $m\neq k$, მაშინ $c=mc_2$. თუ სისტემის პირველ განტოლებაში გავითვალისწინებთ მიღებულ აღნიშვნებს, გვექნება

$$\begin{cases} (a_2x+b_2y)k=c_2m, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \qquad (k\pm m)$$

თუ მიღებულ სისტემის მეორე განტოლების ყველა წევრს გავამრავლებთ k-ზე, მაშინ

$$\begin{cases} (a_2x+b_2y)\ k=c_1m, \\ (a_2x+b_2y)\ k=c_2k \end{cases}$$

საიდანაც გამომდინარეობს $c_2m=c_2k$ და $m=k$ ($c_2\neq 0$), მაგრამ სინამდვილეში $m\neq k$. მიღებული წინააღმდეგობიდან გამომდინარეობს, რომ სისტემას ამოხსნა არა აქვს.

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ განტოლებათა სისტემა არათავსებადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი:

$$\begin{cases} 2x+3y=5, \\ 4x+6y=8. \end{cases}$$

სისტემის ერთსახელა უცნობებთან მდგომი კოეფიციენტები პროპორციულია:

$$\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\ .$$

მაგრამ თავისუფალი წევრები არაა კოეფიციენტების პროპორციული:
$\frac{2}{4} \neq \frac{5}{8}$

მოცემული სისტემის მეორე განტოლების მარცხენა ნაწილი მიღებულია პირველი განტოლების მარცხენა ნაწილის 2-ზე გამრავლებით, მარჯვენა კი — $\frac{8}{5}$-ზე გამრავლებით. სისტემა არათავსებადია და ამოხსნა არ გააჩნია.

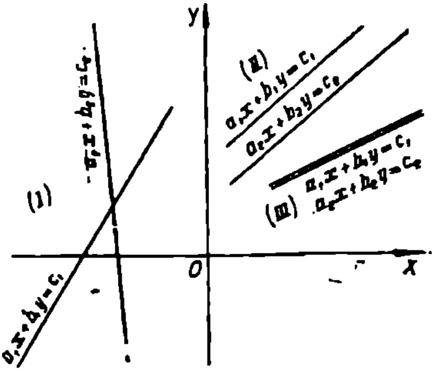
ახლა გავაკეთოთ საბოლოო დასკვნა იმაზე, რაც ვილაპარაკეთ წრფივ განტოლებათა (1) სისტემის ამოხსნის შესახებ.

1) თუ სისტემის დეტერმინანტი $\Delta \neq 0$, მაშინ სისტემა განსაზღვრულია, ე. ი. მას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

2) თუ $\Delta=0$ და $\Delta x=0$ (რაც გულისხმობს $\Delta y=0$), მაშინ სისტემა განუსაზღვრელია ე. ი. გააჩნია ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე.

3) თუ $\Delta=0$ და $\Delta x \neq 0$, მაშინ სისტემა არათავსებადია, ე. ი. მას ამოხსნა არ გააჩნია.

სამივე განხილულ შემთხვევას შეიძლება მივცეთ გეომეტრიულად თვალსაჩინო ახსნა (ნახ. 16).



ნახ. 16.

1) თუ $\Delta \neq 0$, სისტემაში შემავალი განტოლებებით გამოსახული წრფეები თანაიკვეთება. სწორედ გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები წარმოადგენს სისტემის ამონახსნებს.

2) თუ $\Delta=0$, $\Delta x=0$, მაშინ წრფეები ერთიმეორეს უთავსდება, ე. ი. მათ გააჩნიათ უსასრულო სიმრავლე საერთო წერტილებისა და, მაშასადამე, სისტემას აქვს უსასრულო სიმრავლე ამონახსნებისა.

3) თუ $\Delta=0$ და $\Delta x \neq 0$, მაშინ წრფეები პარალელურია, ე. ი. მათ არც ერთი საერთო წერტილი არ გააჩნიათ და, ამრიგად, სისტემას ამონახსნი არა აქვს.

§ 28. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ზოგიერთი მაგალითი

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1, \\ \frac{5}{x} - \frac{6}{y} = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

მოცემული განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის მიზანშეწონილი არაა მისი წინასწარ დაყვანა საერთო მნიშვნელზე.

ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა ალგებრულ შეკრების ხერხით:

$$\begin{cases} \frac{4}{x}+\frac{6}{y}=2, \\ \frac{5}{x}-\frac{6}{y}=\frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$\frac{9}{x}=2\frac{1}{4}; \quad x=4.$$

x-ის მნიშვნელობა შევიტანოთ მოცემულ სისტემის პირველ განტოლებაში და განვსაზღვროთ y:

$$\frac{2}{4}+\frac{3}{y}=1, \quad \frac{3}{y}=\frac{1}{2}; \quad y=6;$$

ამრიგად, სისტემის ამონახსნები იქნება: $x=4$ და $y=6$.

დ ა ვ ა ლ ე ბ ა. იგივე სისტემა ამოხსენით დეტერმინანტის ხერხით.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. წინასწარ შემოიღეთ აღნიშვნა $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} \frac{18}{x-y}+\frac{20}{x+y}=5, \\ \frac{24}{x-y}-\frac{30}{x+y}=1. \end{cases}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$x+y=u, \quad x-y=v,$$

რის შემდეგ მოცემული სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} \frac{18}{v}+\frac{20}{u}=5, \\ \frac{24}{v}-\frac{30}{u}=1. \end{cases}$$

ამოვხსნათ მიღებული სისტემა ალგებრული შეკრების ხერხით:

$$\begin{cases} \frac{18}{v}+\frac{20}{u}=5, \\ \frac{24}{v}-\frac{30}{u}=1. \end{cases} \left| \begin{array}{l} 3 \\ \\ 2 \end{array} \right. \qquad \begin{cases} \frac{54}{v}+\frac{60}{u}=15, \\ \frac{48}{v}-\frac{60}{u}=2. \end{cases}$$

$$\frac{202}{v}=17; \quad v=6.$$

v-ს მნიშვნელობა შევიტანოთ პირველ განტოლებაში და გავიგოთ u;

$$\frac{18}{6}+\frac{20}{u}=5; \quad \frac{20}{u}=2; \quad u=10.$$

თუ u და v-ს მნიშვნელობებს გავითვალისწინებთ მიღებულ აღნიშვნებში, გვექნება:

$$\begin{cases} x+y=10, \\ x-y=6. \end{cases}$$

ამ უკანასკნელის ამოხსნა მოგვცემს $x=8$ და $y=2$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+y+v=b \\ x+z+v=c \\ y+z+v=d \end{cases}$$

მოცემულ სისტემის განტოლებათა შეკრებით ვპოულობთ:

$$3x+3y+3z+3v=a+b+c+d,$$

საიდანაც

$$x+y+z+v=\frac{a+b+c+d}{3},$$

ცხადია, რომ

$$v=(x+y+z+v)-(x+y+z)=\frac{a+b+c+d}{3}-a=\frac{b+c+d-2a}{3}$$

დ ა ვ ა ლ ე ბ ა. ანალოგიური გზით მიიღეთ z, y და x-ის მნიშვნელობები.

პ ა ს უ ხ ი:

$$z=\frac{a+c+d-2b}{3}, \qquad y=\frac{a+b+d-2c}{3}, \qquad x=\frac{a+b+c-2d}{3}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} ay+bx=c \\ cx+az=b \\ bz+cy=a \end{cases}$$

გავყოთ სისტემის პირველი განტოლება ab-ზე, მეორე—ac-ზე, მესამე—bc-ზე (ვგულისხმობთ, რომ $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$), მივიღებთ:

$$\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=\frac{c}{ab}, \quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{b}{ac}, \quad \frac{z}{c}+\frac{y}{b}=\frac{a}{bc}.$$

შევკრიბოთ მიღებული განტოლებები წევრ-წევრად:

$$2\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\frac{c}{ab}+\frac{b}{ac}+\frac{a}{bc}; \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{ab}+\frac{b}{ac}+\frac{a}{bc}\right),$$

საიდანაც

$$\frac{z}{c}=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{ab}+\frac{b}{ac}+\frac{a}{bc}\right)-\frac{c}{ab}=$$

$$=\frac{a^2+b^2-c_2}{2abc}$$

ამრიგად,

$$z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

დ ა ვ ა ლ ე ბ ა. ანალოგიური გზით იპოვეთ x და y-ის მნიშვნელობები. პასუხი:

$$y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \qquad x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{a}{b-c}; \\[2mm] \dfrac{x+c}{y+b}=\dfrac{a+b}{a+c}. \end{cases}$$

თუ გამოვიყენებთ წარმოებული პროპორციის თვისებას,* სისტემის პირველი განტოლებიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{2x}{2y}=\frac{a+b-c}{a+c-b}, \quad \text{საიდანაც} \quad x=\frac{a+b-c}{a+c-b}\cdot y. \tag{1}$$

თუ x-ის მნიშვნელობას ჩავსვამთ სისტემის მეორე განტოლებაში, გვექნება

$$\frac{\dfrac{(a+b-c)\,y}{a+c-b}+c}{y+b}=\frac{a+b}{a-c}, \quad \text{საიდანაც} \quad (a+b)(y+b)=$$

$$=\frac{(a+c)(a+b-c)\,y}{a+c-b}+c(a+c),$$

$$(a+b)\,y-\frac{(a+c)(a+b-c)\,y}{a+c-b}=c\,(a+c)-b\,(a+b),$$

$$\frac{(a+b)(a+c)-b\,(a+b)-(a+c)(a+b)+c\,(a+c)}{a+c-b}\;y=c\,(a+c)-b\,(a+b),$$

$$\frac{[\,c\,(a+c)-b\,(a+b)\,]\,y}{a+c-b}=c\,(a+c)-b(a+b).$$

მიღებული განტოლების ორივე მხარე შევკვეცოთ $c(a+c)-b(a+b)$ -ზე, მივიღებთ:

$$\frac{y}{a+c-b}=1, \quad y=a+c-b.$$

y-ის მნიშვნელობა შევიტანოთ (1) განტოლებაში და გამოვთვალოთ x, მივიღებთ

$$x=a+b-c.$$

---

* თუ გვაქვს პროპორცია $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, მაშინ $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$ და $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ ანუ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ და $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$. ამ ორი ტოლობის წევრობრივი გაყოფა მოგვცემს.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

სავარჯიშო

1. ამოხსენით განტოლებები:

1) $x-\dfrac{1-\dfrac{3}{2}x}{4}-\dfrac{2-\dfrac{x}{4}}{3}=2;$ 2) $\dfrac{1{,}8-8x}{1{,}2}-\dfrac{1{,}3-3x}{2}=\dfrac{5x-0{,}4}{0{,}3};$

3) $\dfrac{kx+m}{n}+\dfrac{kx-n}{m}=2;$ 4) $\dfrac{a-x}{b-a}-\dfrac{x+a}{a+b}=\dfrac{2ax}{a^2-b^2};$

5) $\dfrac{x-ab}{a+b}+\dfrac{x-ac}{a+c}+\dfrac{x-bc}{b+c}=a+b+c.$ 6) $\dfrac{2x+a}{b}+\dfrac{x-b}{a}=\dfrac{3ax+(a-b)^2}{ab}.$

პასუხები: 1) 2. 2) 0,1; 3) $\dfrac{n-m}{k}$; 4) $\dfrac{a^2}{b-a}$ 5) $ab+ac+bc$; 6) $\dfrac{2ab}{a+b}$.

ამოხსენით განტოლებათა შემდეგი სისტემები:

1) $\begin{cases} 2x-3y=19 \\ 7x+2y=7 \end{cases}$ პას. $x=2,\quad y=-5.$

2) $\begin{cases} x+y=1 \\ bcx+acy=ab. \end{cases}$ პას. $x=\dfrac{a(c-b)}{c(a-b)},\quad y=\dfrac{b(a-c)}{c(a-b)}.$

3) $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{5}+\dfrac{5x-3y}{3}=x+1 \\ \dfrac{2x-3y}{3}+\dfrac{4x-3y}{2}=y+1 \end{cases}$ პას: $x=3;\quad y=2.$

4) $\begin{cases} \dfrac{x}{a-b}+\dfrac{y}{a}=a. \\ \dfrac{x}{b}-\dfrac{y}{a-b}+b=0, \end{cases}$ პას: $x=b(a-b),\ y=a(a-b).$

5) $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=2a, \\ x-y=4ab. \end{cases}$ პას: $x=(a+b)^2,\quad y=(a-b)^2$

6) $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-1=0, \\ \dfrac{x}{b}-\dfrac{y}{a}-1=0. \end{cases}$ პას: $x=\dfrac{a+b}{a^2+b^2},\quad y=\dfrac{a-b}{a^2+b^2}$

7) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=a, \\ \dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=b, \\ \dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=c, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{v}=d. \end{cases}$ პას: $x=\dfrac{3}{a+b+c-2d},\ y=\dfrac{3}{a+b+d-2c},$
$z=\dfrac{3}{a+c+d-2b},\ v=\dfrac{3}{b+c+d-2a}.$

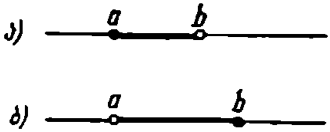
§ 24. უტოლობის ცნება. რიცხვითი უტოლობანი

განსაზღვრა. 1. **ორი რიცხვი ან ორი ალგებრული გამოსახულება, შეერთებული > („მეტია“) ან < („ნაკლებია“) ნიშნით, წარმოადგენს უტოლობას.**

თუ a და b რიცხვების სხვაობა დადებითია, მაშინ, ცხადია, a მეტი იქნება b-ზე, ე. ი. თუ $a-b>0$, მაშინ $a>b$ და, თუ a და b რიცხვების სხვაობა უარყოფითია, ე. ი. $a-b<0$, მაშინ $a<b$. ეს უტოლობები რიცხვით უტოლობებს წარმოადგენს.

მაგალითად, $12-5=7>0$, ამიტომ $12>5$; $3-5=-2<0$, ამიტომ $3<5$; უტოლობათა მაგალითებია: $2>-3$; $-10<-3$, $1+a^2>a$.

რიცხვითი უტოლობები გეომეტრიულად შემდეგნაირად შეიძლება წარმოვადგინოთ. თუ რიცხვით წრფეზე a და b რიცხვებს შეესაბამება A და B წერტილები და, ამასთან, $a>b$, მაშინ A წერტილი წრფეზე მდებარეობს B წერტილის მარჯვნივ (ნახ. 17, ა); თუ $a<b$, მაშინ A წერტილი წრფეზე მდებარეობს B წერტილის მარცხნივ (ნახ. 17, ბ). როგორც განტოლებას, ისე უტოლობასაც გააჩნია ორი ნაწილი — მარჯვენა და მარცხენა. განხილულ მაგალითებში უტოლობათა ორივე ნაწილი განსაზღვრულ რიცხვებს წარმოადგენს.



ნახ. 17.

მათემატიკაში, ხშირად საქმე გვაქვს ისეთი სახის უტოლობებთან, რომელთა ცალკეულ წევრებს, გამოსახულს ასოებით, შეუძლიათ მიიღონ განსხვავებული რიცხვითი მნიშვნელობები. მაგალითად,

$$1-a<a,\quad 3a<1,\quad \sqrt{a}>a,\quad a-1<a,\quad \sqrt{a}+\sqrt{b}<2 \quad \text{და ა. შ.}$$

განსაზღვრა. 2. **უტოლობაში შემავალი ასოების ისეთ მნიშვნელობებს, რომელთათვისაც უტოლობას აზრი აქვს, უტოლობაში შემავალი ასოების დასაშვები მნიშვნელობები ეწოდება.**

$1-a>a$ და $3a<1$ უტოლობებში a შეიძლება იყოს ნებისმიერი უარყოფითი რიცხვი, $\sqrt{a}<a$ უტოლობაში კი ნებისმიერი 1-ზე მეტი დადებითი რიცხვი ნულის ჩათვლით. $\sqrt{a}+\sqrt{b}<2$ უტოლობაში a და b რიცხვებისათვის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე შედგება არაუარყოფით რიცხვთა წყვილებისაგან.

$\sqrt{a}>a$ უტოლობაში თუ მივიღებთ, რომ $a=\frac{1}{9}$, მაშინ, ცხადია, $\sqrt{\frac{1}{9}}>\frac{1}{9}$ ანუ $\frac{1}{3}>\frac{1}{9}$. მაგრამ, თუ $a=9$, მაშინ a-ს ეს მნიშვნელობა არ დააკმაყოფილებს უტოლობას, რადგან $\sqrt{9}<9$.

მაშასადამე, ასოს შემცველ უტოლობას შეიძლება აკმაყოფილებდეს ამ ასოს ზოგიერთი მნიშვნელობა და შეიძლება არ აკმაყოფილებდეს ამავე ასოს სხვა დასაშვები მნიშვნელობა.

განსაზღვრა 3. **უტოლობას, რომელსაც აკმაყოფილებს მასში შემავალი ასოების ყველა დასაშვები მნიშვნელობა, იგივური უტოლობა ეწოდება.**

მაგალითად, $a-1<a$ უტოლობას აკმაყოფილებს a-ს ყველა მნიშვნელობა, ამიტომ იგი იგივურია. განხილული $3a<1$ უტოლობა კი არაიგივურია, ვინაიდან მას არ აკმაყოფილებს, მაგალითად, $a=1$, $a=2$ მნიშვნელობები.

განსაზღვრა 4. ორი $a>b$, $c>d$ ან $a<b$ და $c<d$ უტოლობა წარმოადგენს ერთნაირი აზრის უტოლობებს. მაგალითად, $2>1$ და $3>0,5$ ან $-1<0$ და $1\frac{1}{3}<2$ უტოლობები ერთნაირი აზრისაა.

განსაზღვრა 5. $a>b$ და $c<d$ უტოლობებს მოპირდაპირე აზრის უტოლობები ეწოდება. მაგალითად, $3>2$ და $5<7$ უტოლობები მოპირდაპირე აზრისაა.

სავარჯიშო.

ა) აჩვენეთ ქვემოთ მოყვანილ უტოლობების მიხედვით ასოს მდებარეობა რიცხვთა ღერძზე:

$$a>0,\ a<0,\ a>1,\ 3<a,\ a>-2,5.$$

ბ) ჩაწერეთ უტოლობის ნიშნის გამოყენებით: a დადებითია, a უარყოფითია, a-სა და b-ს საშუალო არითმეტიკული მეტია მათ საშუალო გეომეტრიულზე.

გ) დაადგინეთ ქვემოთ მოცემულ უტოლობებში ასოების დასაშვები მნიშვნელობანი:

$$\frac{\sqrt{a}}{a}>5, \qquad \frac{1}{a^2+b^2}>\frac{1}{a^2+b^2+1}, \qquad \sqrt{b}<\frac{1}{1-b}$$

დ) შეიძლება თუ არა, ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს:

$$\sqrt{a}+3>1, \qquad \frac{a^2-1}{a+1}<a, \qquad \frac{a^3-1}{a-1}<a^2+a+1.$$

ე) იპოვეთ და აჩვენეთ რიცხვთა ღერძზე a-ს მთელი მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს:

$$0,2<a<4, \quad -3\leqslant x<2, \quad \frac{1}{2}<x\leqslant 5, \quad -1\leqslant x<3$$

§ 25. რიცხვით უტოლობათა ძირითადი თვისებები

თვისება 1. თუ $a>b$, მაშინ $b<a$. მაგალითად, $5>3$, ამიტომ $3<5$.

თვისება 2. თუ $a>b$ და $b>c$, მაშინ $a>c$ (უტოლობების ტრანზიტიულობის თვისება).

მაგალითად, $-3>-5$ და $-5>-7$, ამიტომ $-3>-7$; ასევე $-0,5>-1,5$, $-1,5>-2$, ამიტომ $-0,5>-2$;

თვისება 3. **თუ $a>b$, მაშინ ნებისმიერი c რიცხვისათვის $a+c>b+c$ და $a-c>b-c$, სხვანაირად, თუ უტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატებთ ან გამოვაკლებთ ერთსა და იმავე რიცხვს, ამით უტოლობა არ დაირღვევა.**

მაგალითად, თუ $7>5$ უტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატებთ $1\frac{1}{3}$-ს, მივიღებთ $8\frac{1}{3}>6\frac{1}{3}$, თუკი გამოვაკლებთ, მივიღებთ $5\frac{2}{3}>3\frac{2}{3}$.

შედეგი 1. **ნებისმიერი შესაკრები შეგვიძლია გადავიტანოთ რიცხვითი უტოლობის ერთი ნაწილიდან მეორე ნაწილში, თუ ამ შესაკრების ნიშანს მოპირდაპირე ნიშნით შევცვლით.**

მაგალითად, თუ $a+b>c$ უტოლობის ორივე ნაწილს დავუმატებთ $-b$-ს, მივიღებთ $a>b-c$.

თ ე ო რ ე მ ა 4. თუ $a>b$ და $m>0$, მაშინ $am>bm$, ხოლო თუ $m<0$, მაშინ $am<bm$. სხვა სიტყვებით, თუ რიცხვითი უტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ დადებით რიცხვზე, ამით უტოლობის აზრი არ შეიცვლება (ე. ი. მივიღებთ იმავე აზრის უტოლობას). ხოლო, თუ რიცხვითი უტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ უარყოფით რიცხვზე, მოცემული უტოლობა შეიცვლება მოპირდაპირე აზრის უტოლობით.

მაგალითად, თუ $7>5$ უტოლობას წევრ-წევრად გავამრავლებთ 3-ზე, გვექნება $21>15$, ე. ი. მივიღეთ იმავე აზრის უტოლობა, როგორიც გვქონდა.

ახლა, თუ მოცემულ უტოლობას წევრ-წევრად გავამრავლებთ -3-ზე, მივიღებთ მოცემული უტოლობის მოპირდაპირე აზრის უტოლობას: $-21<-15$.

შ ე დ ე გ ი. 2. უტოლობის აზრი შენარჩუნებული იქნება, თუ მის ორივე ნაწილს წევრ-წევრად გავყოფთ დადებით რიცხვზე, ხოლო უტოლობა შეიცვლება მოპირდაპირე აზრის უტოლობით, თუ მის ორივე ნაწილს წევრ-წევრად გავყოფთ უარყოფით რიცხვზე.

ეს შედეგი გამომდინარეობს იქიდან, რომ $m\neq 0$ რიცხვზე მოცემული უტოლობის წევრ-წევრად გაყოფა შეიძლება შევცვალოთ $\frac{1}{m}$-ზე წევრ-წევრად გამრავლებით.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

ა) გაამრავლეთ უტოლობის ორივე ნაწილი ფრჩხილში ჩასმულ თანამამრავლზე:

$-3<1(5)$; $\quad 2<5(-1)$; $\quad x>2(x)$;

$a<-1(a)$; $\quad b<-3(-b)$; $\quad x-2>1(x)$;

ბ) გაყავით უტოლობათა ორივე ნაწილი ფრჩხილში მოთავსებულ რიცხვებზე:

$-6<3\left(\frac{1}{3}\right)$; $\quad 4>-1{,}5(-1)$; $\quad a<-2a^2(x)$;

$a>a^1(a)$; $\quad a^3>a^2(-a)$;

მოქმედებანი უტოლობებზე

1. შ ე კ რ ე ბ ა

ერთნაირი აზრის უტოლობანი შეიძლება წევრ-წევრად შევკრიბოთ.

$$\left.\begin{array}{r} a>b \\ +\ c>d \\ \hline a+c>b+d \end{array}\right. \qquad \text{მაგალითად:}\quad \begin{array}{r} +2>-7 \\ -5>-10 \\ \hline -3>-17 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0<4 \\ +\ -3<-2 \\ \hline -3<2 \end{array}$$

2. გ ა მ ო კ ლ ე ბ ა

მოპირდაპირე აზრის ორი უტოლობა შეიძლება წევრ-წევრად გამოვაკლოთ იმ უტოლობის ნიშნის შენარჩუნებით, საიდანაც ვაკლებთ.

$$\begin{array}{r} a>b \\ -\ c<d \\ \hline a-c>b-d. \end{array} \qquad \text{მაგალითად:}\quad \begin{array}{r} 2>1 \\ -\ -3<5 \\ \hline 5>-4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8<10 \\ -\ 2{,}5>2 \\ \hline 5{,}5<8. \end{array}$$

3. გამრავლება

ერთნაირი აზრის უტოლობანი, რომელთა ნაწილები დადებითია, შეიძლება წევრ-წევრად გადავამრავლოთ.

$$\left\{\begin{array}{l}\times\begin{array}{r} a<b \\ c<d \end{array} \\ \hline ac<bd \end{array}\right. \quad (a>0,\ b>0).$$

მაგალითად:

$$\left\{\begin{array}{l}\times\begin{array}{r} 2<5 \\ 1<2 \end{array} \\ \hline \quad 2<10 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\times\begin{array}{r} 5>3 \\ 10>7 \end{array} \\ \hline \quad 50>21. \end{array}\right.$$

4. გაყოფა

მოპირდაპირე აზრის ორი უტოლობიდან ერთი შეიძლება წევრ-წევრად გავყოთ მეორეზე, თუ უტოლობათა ყველა წევრი დადებითია, ამასთან, უნდა შევინარჩუნოთ იმ უტოლობის ნიშანი, რომელსაც ვყოფთ.

$$\left\{\begin{array}{l} a<b \\ c<d \\ \hline \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{d} \end{array}\right. \quad (a>0,\quad b>0).$$

მაგალითად:

$$\left\{\begin{array}{l} 3>2 \\ 1<5 \\ \hline \dfrac{3}{1}>\dfrac{2}{5} \end{array}\right.$$

სავარჯიშო

ა) შეკრიბეთ წევრ-წევრად შემდეგი უტოლობები:

$12>11$ და $1>-3$; $\quad -5<2$ და $4<8,2$;

$a-2<8+b$ და $-2a<-b$.

ბ) გამოაკელით წევრ-წევრად შემდეგი უტოლობები:

$5>2$; $-3<1$; $\quad 0,2<3$; $\quad 0,3>-2$;

$7<11$; $-4<-3$; $\quad 2a-1>3b$; $\quad 2b>3$;

გ) გაამრავლეთ წევრ-წევრად შემდეგი უტოლობები:

$7>5$ და $3>2$; $3<5$ და $\dfrac{2}{3}<2$; $-6<-2$ და $-3<-1$. $a>2$ და $b<-2$;

დ) მოცემულია $a>b$ უტოლობა; ყოველთვის მართებული იქნება თუ არა უტოლობა: $a^2>b^2$?

ე). რომელია მეტი, $(0,3)^{20}$ თუ $(0,1)^{10}$?

მითითება. $(0,3)^{20}=[|1,3|^2]^{10}$.

§ 28. ორმაგი უტოლობანი, მკაცრი და არამკაცრი უტოლობები

ორი $a<m$ და $m<b$ უტოლობა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად: $a<m<b$. ეს უტოლობა წარმოადგენს ორმაგ უტოლობას. ორმაგი უტოლობებისათვის ვრცელდება რიცხვით უტოლობებზე გამოთქმული ყველა თვისება.

მაგალითად, თუ n არის ნებისმიერი რიცხვი, მაშინ:

$$a+n<m+n<b+n.$$

ორმაგი უტოლობის ყველა წევრი შეიძლება გავამრავლოთ ნებისმიერ დადებით k რიცხვზე:

$$ak<mk<bk.$$

უტოლობის ყველა წევრის გამრავლებით n-ზე ($n<0$) მივიღებთ:

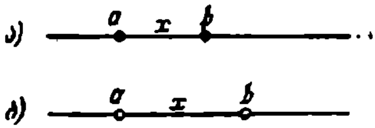
$$an>mn>bn.$$

თუ საჭიროა ჩაწერა„ a რიცხვი არაა ნაკლები b რიცხვზე", წერენ $a\geqslant b$ (მეტია ან ტოლი), თუკი საჭიროა ჩაწერა: „a არაა მეტი b-ზე", მაშინ წერენ $a\leqslant b$ (a ნაკლებია ან ტოლი b-ზე.) $a\leqslant b$ და $a\geqslant b$ უტოლობებს არამკაცრი უტოლობები ეწოდება. ხოლო. $a<b$ ან $a>b$ უტოლობებს— მკაცრი უტოლობები.

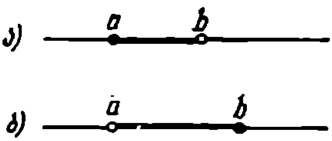
განსაზღვრა 1. ყველა იმ x რიცხვის სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ $a\leqslant x\leqslant b$ უტოლობას, ეწოდება მონაკვეთი ან სეგმენტი, ან კიდევ, დახურული შუალედი და $[a, b]$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

სეგმენტი ანუ დახურული შუალედი, გეომეტრიულად წარმოადგენს რიცხვითი ღერძის ab მონაკვეთის წერტილთა სიმრავლეს a და b წერტილების ჩათვლით (ნახ. 18, ა).

განსაზღვრა 2. ყველა იმ x რიცხვის სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ $a<x<b$ უტოლობას, ეწოდება ღია შუალედი ანუ ინტერვალი და (a, b) სიმბოლოთი აღინიშნება.



ნახ. 18.



ნახ. 19.

ინტერვალი წარმოადგენს რიცხვითი წრფის ab მონკვეთის წერტილთა სიმრავლეს a და b-ს ჩაუთვლელად (ნახ. 18, ბ).

თუკი x რიცხვთა სიმრავლე აკმაყოფილებს $a\leqslant x<b$ უტოლობას, მაშინ ვამბობთ, რომ რიცხვი ეკუთვნის ნახევრად ღია (მარჯვნიდან ღია) $[a, b)$ ინტერვალს, თუკი ადგილი აქვს $a<x\leqslant b$ დამოკიდებულებას, მაშინ ვიტყვით, რომ x ეკუთვნის მარცხნიდან ღია $(a, b]$ ინტერვალს.

მარჯვნიდან და მარცხნიდან ღია ინტერვალები გამოსახულია 19. ა და 19, ბ ნახაზებზე.

სავარჯიშო

ა.) აჩვენეთ, რომ, თუ $|x|<a$, მაშინ $-a<x<a$;

ბ.) შემდეგი უტოლობები ჩაწერეთ ორმაგი უტოლობის სახით:

$$|m|<1, \quad |a-2|<2;$$

გ.) გამოყავით რიცხვით წრფეზე იმ x რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს:

$$|x|<2, \quad |x|\leqslant 1, \quad |x|>-3, \quad |x-1|<1.$$

დ.) შეცვალეთ შემოკლებული ჩანაწერით ორმაგი უტოლობები:

$$-2\leqslant a\leqslant 2, \quad -1\leqslant 2n\leqslant 1, \quad 1<x<3;$$

ე) ლითონის ღეროს l სიგრძე განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$l=24{,}08 \quad (\pm 0{,}01 \text{ მმ}).$$

დაადგინეთ ღეროს სიგრძის საზღვრები.

§ 27. უტოლობათა დამტკიცება

ასოითი გამოსახულების შემცველი უტოლობის დამტკიცება ნიშნავს, ვაჩვენოთ, რომ მას დააკმაყოფილებს ასოს ნებისმიერი დასაშვები მნიშვნელობები.

უტოლობათა დამტკიცების ხერხებს გავეცნოთ კონკრეტული მაგალითების განხილვით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი $a>0$ და $b>0$ რიცხვებისათვის ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab} \qquad (1)$$

I ხერხი. ვთქვათ, მოცემული უტოლობა მართებულია დადებითი a და b რიცხვებისათვის. თუ უტოლობის ორივე ნაწილს ავიყვანთ კვადრატში, ამით მივიღებთ იმავე აზრის უტოლობას, რაც მოცემულია:

$$\frac{(a+b)^2}{4}\geqslant ab, \quad \text{ანუ} \quad a^2+2ab+b^2\geqslant 4ab.$$

$$a^2-2ab+b^2\geqslant 0, \quad \text{საიდანაც} \quad (a-b)^2\geqslant 0.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ უკანასკნელი წარმოადგენს ცხად უტოლობას, მაგრამ ეს ჯერ კიდევ არ ნიშნავს (1) უტოლობის მართებულობას. ჩატარებული მსჯელობა (1) უტოლობის მართებულობის დამტკიცების გზის გამონახვაა. ახლა, თუ ვაჩვენებთ, რომ (1) უტოლობის მიმართ ჩატარებული ოპერაციების შედეგები ძალაში დარჩება ოპერაციათა გზების უკუსვლის გზით განმეორებისას, მაშინ ვაჩვენებთ (1) უტოლობის მართებულობას. მართლაც, გვაქვს:

$(a-b)^2\geqslant 0$, ანუ $a^2+b^2\geqslant 2ab$, ამ უკანასკნელი უტოლობის ორივე ნაწილს დავუმატოთ დადებითი სიდიდე $2ab$, მივიღებთ:

$$(a+b)^2\geqslant 4ab \quad \text{ანუ} \quad \frac{(a+b)^2}{4}\geqslant ab;$$

თუ უკანასკნელი უტოლობის ორივე ნაწილიდან ამოვიღებთ კვადრატულ ფესვს, გვექნება:

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ცხადია, ტოლობას ექნება ადგილი მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, თუ $a=b$.

II ხერხი (საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხი). დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ დადებითი a და b რიცხვებისათვის არაა მართებული (1) უტოლობა და ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{ab} \qquad (2)$$

განვიხილოთ სხვაობა:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\leqslant 0. \tag{3}$$

$$\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}\leqslant 0, \tag{4}$$

საიდანაც

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\leqslant 0.$$

ეს უკანასკნელი კი შეუძლებელია, მამასადამე, შეუძლებელია (4) უტოლობაც და ადგილი ექნება უტოლობას:

$$\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}\geqslant 0,$$

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geqslant 0.$$

და

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

III ხერხი (უტოლობის განმარტების გამოყენებით). შევადგინოთ მარცხენა და მარჯვენა ნაწილების სხვაობა და განვსაზღვროთ მისი ნიშანი:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqslant 0.$$

ამრიგად,

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geqslant 0,\quad \text{ანუ}\quad \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\,.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. დავამტკიცოთ უტოლობა:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}>3,$$

სადაც a, b და c დადებითი განსხვავებული რიცხვებია. ეს უტოლობა შეიძლება დამტკიცდეს სხვადასხვა გზით; აგილოთ ერთ-ერთი.

ვთქვათ, $b=c+d_1$ და $a=b+d_2$. ($d_1>0$, $d_2>0$) ანუ $a>b>c$,

მაშინ გვექნება:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{b+d_2}{b}+\frac{c+d_1}{c}+\frac{c}{a}=2+\frac{d_2}{b}+\frac{d_1}{c}+\frac{c}{a}>2+$$

$$+\frac{c+d_1+d_2}{a}=2+\frac{c+b-c+a-b}{a}=2+1=3.$$

ამრიგად,

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}>3.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. დავამტკიცოთ, რომ, თუ $a>0$, $b>0$, $c>0$, მაშინ

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა.

გამოვიყენოთ შემდეგი ცხადი უტოლობები:

$$\begin{aligned} &(a-b)^2\geqslant 0, && a^2+b^2\geqslant 2ab, \\ &(a-c)^2\geqslant 0, && a^2+c^2\geqslant 2ac, \\ &(b-c)^2\geqslant 0, && b^2+c^2\geqslant 2bc. \end{aligned} \tag{1}$$

პირველი უტოლობათა შეკრება გვაძლევს:

$$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+ac+bc),$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. დავამტკიცოთ, რომ, თუ $x+y+z=1$, სადაც $x>0$, $y>0$ და $z>0$, მაშინ

$$(1-x)(1-y)(1-z)\geqslant 8xyz.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა.

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ დამტკიცებულ უტოლობას, დავწერთ:

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}, \quad \frac{x+z}{2}\geqslant\sqrt{xz}, \quad \frac{y+z}{2}\geqslant\sqrt{yx},$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} x+y&\geqslant 2\sqrt{xy} \\ x+z&\geqslant 2\sqrt{xz} \\ y+z&\geqslant 2\sqrt{yz}. \end{aligned}$$

პირობის ძალით

$$\begin{aligned} x+y&=1-z \\ x+z&=1-y \\ y+z&=1-x, \end{aligned}$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} 1-z&\geqslant 2\sqrt{xy} \\ 1-y&\geqslant 2\sqrt{xz} \\ 1-x&\geqslant 2\sqrt{yz}. \end{aligned} \tag{2}$$

(2)-ის წევრ-წევრად გადამრავლებით მივიღებთ:

$$(1-x)(1-y)(1-z)\geqslant 8xyz.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. დავამტკიცოთ უტოლობა:

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\geqslant 2.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა.

გამოვიყენოთ გარდაქმნა

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მიმართ გამოვიყენოთ ცნობილი უტოლობა:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

გვექნება

$$\frac{\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{a^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}} = 1.$$

ამიტომ

$$\frac{\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}}{2} \geqslant 1,$$

ანუ

$$\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \geqslant 2, \qquad \frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geqslant 2.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. აჩვენეთ შემდეგ უტოლობათა მართებულობა მაშინ, როცა $x>1$;

ა) $1+\frac{1}{x}<2$; ბ) $\frac{4}{x^2}-\frac{x}{2}<3\frac{1}{2}$; გ) $3x-\frac{2}{x^2}>1$;

2. რომელია მეტი,

ა) $\frac{7}{\sqrt{195}}$ თუ $\frac{1}{2}$; ბ) $\sqrt{5}+\sqrt{6}$ თუ $\sqrt{21}$;

მ ი თ ი თ ე ბ ა. $\frac{7}{\sqrt{195}}>\frac{7}{\sqrt{196}}$; მ ი თ ი თ ე ბ ა. შეადარეთ $(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2$ და $(\sqrt{21})^2$.

3) დაამტკიცეთ უტოლობები:

ა) $x^3+y^3 \geqslant x^2y+xy^2 \qquad (x>0,\ y>0)$;

ბ) $\frac{a^4+1}{a^2} \geqslant 2$, მ ი თ ი თ ე ბ ა: $\frac{a^4+1}{a^2}=a^2+\frac{1}{a^2}$ $\left(\text{გამოიყენეთ } \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}\right)$;

გ) $\frac{a^2}{1+a^4} \leqslant \frac{1}{2}$; დ) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$, სადაც $a>0$, $b>0$;

დ) $\frac{p}{q}+\frac{q}{p} \geqslant 2$, სადაც $p>0$ და $q>0$.

§ 28. თეორემა საშუალო არითმეტიკულისა და საშუალო გეომეტრიულის შესახებ

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 1). $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ნებისმიერი რიცხვების საშუალო არითმეტიკული ეწოდება $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ რიცხვს.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 2) $a_1, a_2 \ldots, a_n \ldots$ დადებითი რიცხვების საშუალო გეომეტრიული ეწოდება $\sqrt{a_1a_2\ldots a_n}$ რიცხვს.

მაგალითად, 3-ისა და 5-ის საშუალო არითმეტიკული იქნება $\frac{3+5}{2}=4$, საშუალო გეომეტრიული კი $\sqrt{3\cdot5}=\sqrt{15}$;

3-ის, 3-ისა და 3-ის საშუალო არითმეტიკული იქნება $\frac{3+3+3}{3}=3$, ხოლო საშუალო გეომეტრიული $\sqrt[3]{3\cdot3\cdot3}=3$;

ორი $a>0$ და $b>0$ რიცხვისათვის დავამტკიცეთ, რომ მათი საშუალო არითმეტიკული მეტია ან ტოლია მათი საშუალო გეომეტრიულისა, ე. ი.

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$$

ამ უტოლობის განზოგადება დადებითი რიცხვის ნებისმიერი რაოდენობისათვის მოცემული იყო ფრანგი მათემატიკოსის კოშის (1789—1857) მიერ, რაც შემდეგნაირად გამოითქმება:

n დადებითი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული არაა ნაკლები მათ საშუალო გეომეტრიულზე:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ldots a_n}.$$

ტოლობას ექნება ადგილი იმ შემთხვევაში, როცა $a_1=a_2=\ldots=a_n$. კოშის უტოლობის გამოყენებით ადვილად მტკიცდება ჩვენ მიერ დამტკიცებული უტოლობა: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant3$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. დავამტკიცოთ $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant3$ უტოლობა; თუ გამოვიყენებთ კოშის უტოლობას სამი რიცხვის შემთხვევისათვის, გვექნება:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=1.$$

ე. ი.

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3}\geqslant1,$$

ამიტომ

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant3.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. დავამტკიცოთ $999a+1\geqslant1000\sqrt[1000]{a^{999}}$ უტოლობა: თუ გამოვიყენებთ საშუალო არითმეტიკულისა და საშუალო გეომეტრიულის შესახებ კოშის თეორემას (ათასი რიცხვის შემთხვევაში), დავწერთ:

$$\frac{999a+1}{1000}\geqslant\sqrt[1000]{a^{999}},$$

საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს დასამტკიცებელი უტოლობის მართებულობა. ტოლობას ადგილი ექნება, როცა $a=1$.

შ ე დ ე გ ი. თუ n დადებითი რიცხვის ნამრავლი 1-ის ტოლია, მაშინ მათი ჯამი არაა ნაკლები n-ზე

ე. ი., თუ $a_1 \cdot a_2 \ldots a_n = 1$, მაშინ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geqslant n$. (1)

მართლაც, თუ კოშის უტოლობაში

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n}$$

გავითვალისწინებთ მოცემულობას $a_1 \cdot a_2 \ldots a_n = 1$, მივიღებთ (1) უტოლობას.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო:

1. $\sqrt{(a+m)(b+n)} \leqslant \frac{a+b}{2} + \frac{m+n}{2}$, $(a>0,\ b>0,\ m>0,\ n>0)$

2. $\sqrt[n+1]{ab^n} \leqslant \frac{a+bn}{n+1}$;

3. $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc \quad (a>0,\ b>0,\ c>0)$

მ ი თ ი თ ე ბ ა: $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$; $b+c \geqslant 2\sqrt{bc}$. $c+a \geqslant 2\sqrt{ca}$.

4. $a+b+c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{bc} \quad (a>0,\ b>0,\ c>0)$

6. $\left(1 + \frac{1}{1+n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, სადაც n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია.

§ 20. ერთუცნობიანი წრფივი უტოლობანი

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 1. ამოვხსნათ უცნობის შემცველი უტოლობა ნიშნავს ვიპოვოთ ამ უცნობის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც მოცემული უტოლობა სრულდება.

განტოლებათა ამოხსნის მსგავსად, უტოლობებიც ამოიხსნება უფრო მარტივ. ტოლფას (ეკვივალენტურ) უტოლობებზე დაყვანის გზით.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. 2. ერთი და იმავე უცნობის შემცველ ორ უტოლობას ეწოდება ტოლფასი (ეკვივალენტური), თუ ისინი სრულდებიან ამ უცნობის ერთი და იმავე მნიშვნელობებისათვის.

მაგალითად, $5x>0$ და $-2x<0$ უტოლობები ეკვივალენტურია x-ის ყველა დადებითი მნიშვნელობებისათვის. $2x^2>0$ და $3x>0$ უტოლობები არ არიან ეკვივალენტურნი, ვინაიდან პირველი სრულდება x-ის როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის, ხოლო მეორე — მხოლოდ $x>0$ მნიშვნელობებისათვის.

უტოლობათა ამოხსნა ემყარება ტოლფას უტოლობათა შემდეგ ძირითად თვისებებს, რომლებსაც მოვიყვანთ დაუმტკიცებლად.

თ ვ ი ს ე ბ ა 1. თუ უტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატებთ ან გამოვაკლებთ ერთსა და იმავე რიცხვს, ან უცნობის ყველა მნიშვნელობებისათვის განსაზღვრულ გამოსახულებას, მივიღებთ უტოლობას, რომელიც მოცემულის ტოლფასია.

მაგალითები: 1. თუ $3-x<x$ უტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატებთ -1, შედეგში მივიღებთ $2-x<x-1$, ეს უტოლობა ტოლფას უტოლობათა პირველი თვისების ძალით უნდა იყოს მოცემულის ტოლფასი.

2. $2<x$ უტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატოთ $\frac{3}{x^2+5}$, მივიღებთ;

$$2+\frac{3}{x^2+5}<x+\frac{3}{x^2+5}. \qquad (1)$$

რადგანაც გამოსახულება $\frac{3}{x^2+5}$ განსაზღვრულია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, ამიტომ (1) უტოლობა მოცემულის ტოლფასი უნდა იყოს.

თუკი გამოსახულება, რომელსაც ვუმატებთ უტოლობის ორივე ნაწილს, განსაზღრული არაა, მაშინ, ცხადია, მიღებული უტოლობა მოცემულის ტოლფასი არ აღმოჩნდება. მაგალითად, თუ მოცემული უტოლობის ორივე ნაწილს დავუმატებთ $\frac{1}{x^2-4}$ გამოსახულებას, მაშინ მიღებული უტოლობა არ იქნება მოცემულის ტოლფასი, რადგან $\frac{1}{x^2-4}$ არაა განსაზღვრული, როცა $x=2$.

ტოლფას უტოლობათა პირველი თვისებიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგი:

შ ე დ ე გ ი. **უცნობის ყველა მნიშვნელობისათვის განსაზღვრული ნებისმიერი შესაკრები უტოლობის ერთი ნაწილიდან ნიშანშეცვლილად შეიძლება გადავიტანოთ მეორე ნაწილში.**

მაგალითად, თუ მოცემულია $3x+5>x+7$ უტოლობა, პირველი შედეგის ძალით გვექნება: $3x-x>7-5$

თ ვ ი ს ე ბ ა 2. **თუ უტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ დადებით რიცხვზე ან გამოსახულებაზე, რომელიც ღებულობს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობას და განსაზღვრულია უცნობის ყველა მნიშვნელობისათვის, მივიღებთ მოცემულის ეკვივალენტურ უტოლობას.**

მ ა გ ა ლ ი თ ი. თუ $3-x<x$, უტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ 2-ზე, მივიღებთ $6-2x<2x$ უტოლობას, რომელიც მოცემულის ეკვივალენტურია.

განსაკუთრებით უნდა გაესვას ხაზი, რომ გამოსახულება, რომელზედაც ვამრავლებთ მოცემული უტოლობის ორივე ნაწილს, უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ მოთხოვნებს:

ა) იგი უნდა ღებულობდეს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს;

ბ) განსაზღვრული უნდა იყოს უცნობის ყველა მნიშვნელობისათვის. ამ პირობებიდან თუნდაც ერთიც რომ არ შესრულდეს, მოცემული და მისგან მიღებული უტოლობა შეიძლება არაეკვივალენტური აღმოჩნდეს.

მაგალითად, $x>0$ უტოლობა მხოლოდ x-ის დადებითი მნიშვნელობისათვის სრულდება. თუ მას წევრ-წევრად გავამრავლებთ x-ზე, მივიღებთ $x^2>0$ უტოლობას, იგი სრულდება x-ის როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის. ამიტომ $x^2>0$ არაა ეკვივალენტური $x>0$ უტოლობისა. ეს აიხსნება იმით, რომ $x>0$ უტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლეთ x-ზე, რომელიც ღებულობს როგორც

დადებით, ისე უარყოფით მნიშვნელობებსაც. ასევე, თუ $x>0$ უტოლობას წევრ-წევრად გავამრავლებთ $\frac{1}{(x-2)^2}$-ზე, გვექნება $\frac{x}{(x-2)^2}>0$; ეს უკანასკნელი კი არაეკვივალენტურია $x>0$ უტოლობისა. ეს მოხდა იმიტომ, რომ $\frac{1}{(x-2)^2}$ გამოსახულება არაა განსაზღვრული, როცა $x=2$.

თ ე ო ს ე ბ ა 3. თუ უტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ უარყოფით რიცხვზე ან გამოსახულებაზე, რომელიც განსაზღვრულია უცნობის ყველა მნიშვნელობისათვის და ღებულობს მხოლოდ უარყოფით მნიშვნელობებს, ხოლო უტოლობის ნიშანს შევცვლით მოპირდაპირე ნიშნით ($>$ ნიშანს $<$ ნიშნით და $<$ ნიშანს $>$ ნიშნით), მივიღებთ მოცემული უტოლობის ტოლფას უტოლობას.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. ეკვივალენტურია თუ არა უტოლობები:

ა) $x^2+2>x$ და $x^2>x-2$; ბ) $2x+3<0$ და $2x+3+\frac{5}{x}<\frac{5}{x}$; გ) $x-3<0$ და $(x-3)+\frac{1}{x-1}<\frac{1}{x-1}$; დ) $5x-1>0$ და $(5x-1)+(x+2)>x+2$.

2. ეკვივალენტურია თუ არა უტოლობანი:

ა) $3x>2$ და $2\cdot 3x>2\cdot 2$; ბ) $2x>5$ და $(-3)\cdot 2x<5\cdot(-3)$;

გ) $5x>3$ და $5x^2>3x^2$ დ) $2x>3$ და $\frac{2x}{x-3}>\frac{3}{x-3}$.

§ 10. წრფივი უტოლობანი და მათი ამოხსნა

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 1. წრფივი ეწოდება უტოლობებს, რომელთა ორივე ნაწილი (მარჯვენა და მარცხენა) უცნობის მიმართ წრფივ ფუნქციებს წარმოადგენს.

წრფივი უტოლობის მაგალითებია:

$$3x-1>5x-2,\ 3x<0,\ 7>x-4 \text{ და ა. შ.}$$

ამ პარაგრაფში გარკვეულობის მიზნით განვიხილოთ $>$ („მეტია") ნიშნის შემცველი უტოლობანი.

ამრიგად, წრფივი უტოლობა ზოგადი სახით ჩაიწერება ასე:

$$ax+b>0, \tag{1}$$

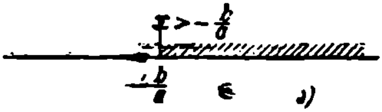
სადაც a და b გარკვეული რიცხვებია, მასთან $a\neq 0$. თუ (1) უტოლობის მარცხენა ნაწილიდან b-ს მარჯვენაში გადავიტანთ, გვექნება:

$$ax>-b \text{ და } x>-\frac{b}{a}.$$

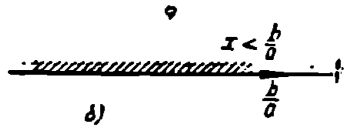
უკანასკნელი განსაზღვრავს x-ის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლეს, რომელთათვისაც სრულდება (1) უტოლობა. გეომეტრიულად ეს სიმრავლე შეიძლება გამოისახოს რიცხვითი წრფის იმ ნაწილით, რომელიც $-\frac{b}{a}$ აბსცისის მქონე წერ-

ტილის მარჯვნივ მდებარეობს (ნახ. 20, ა). თვით $-\frac{b}{a}$ წერტილი ამ სიმრავლეში არ შედის.

თუ $a<0$, მაშინ (1) უტოლობის ორივე მხარის a-ზე გაყოფით და მასთან უტოლობის ნიშნის მოპირდაპირეთი შეცვლით მივიღებთ: $x<\frac{b}{a}$ (ნახ. 20, ბ). $\frac{b}{a}$ წერტილი ამონახსნთა სიმრავლეში არ შევა.



ნახ. 20 ა.



ნახ; 20 ბ.

(1) უტოლობის ამოხსნა, რაც გეომეტრიულად ნაჩვენებია 20 ა, და 20. ბ ნახაზებზე, სიმბოლურად შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$a>0\Rightarrow X=\left(-\frac{b}{a},\ +\infty\right),\quad a<0\Rightarrow X=\left(-\infty,\ -\frac{b}{a}\right).$$

განვიხილოთ წრფივ უტოლობათა ამოხსნის მაგალითები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ უტოლობა:

$$7x-6>x+12;$$

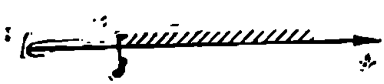
x გადავიტანოთ უტოლობის მარჯვენა ნაწილიდან მარცხენაში, ხოლო 6 მარჯვენაში, გვექნება:

$$7x-x>12+6,$$

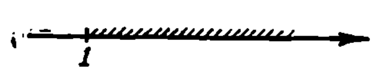
საიდანაც

$$6x>18 \text{ და } x>3.$$

რიცხვით წრფეზე (ნახ. 21) აღნიშნულია x-ის ყველა მნიშვნელობა, რომლებიც აკმაყოფილებენ მოცემულ უტოლობას. $x=3$ წერტილი ამოხსნათა სიმრავლეს არ მიეკუთვნება.



ნახ. 21.



ნახ. 22.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ უტოლობა: $1-2x\geqslant 4-5x$.

$5x-2x\geqslant 4-1$ (5x გადმოვიტანეთ უტოლობის მარცხენა ნაწილში, ხოლო 1 — მარჯვენა ნაწილში)

$3x\geqslant 3$

$x\geqslant 1$ (ორივე ნაწილი გავყოთ სამზე).

x-ის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ მოცე-

მულ უტოლობას, გამოსახულია რიცხვით წრფეზე (ნახ. 22), მასთან წერტილი $x=1$ მიეკუთვნება ამონახსნთა სიმრავლეს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ამოვხსნათ უტოლობა:

$$1-x\geqslant 2x+3.$$

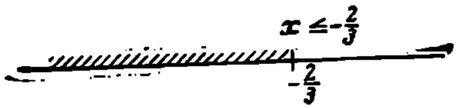
$2x$ გადავიტანოთ უტოლობის მარცხენა ნაწილში, 1 — მარჯვენაში, მივიღებთ:

$$-3x\geqslant 2.$$

უკანასკნელი უტოლობის ორივე ნაწილი გავყოთ —3-ზე, ამ შემთხვევაში უტოლობის ნიშანი შეიცვლება და გვექნება:

$$x\leqslant -\frac{2}{3}.$$

x-ის ყველა ასეთ მნიშვნელობათა სიმრავლე გამოსახულია რიცხვით წრფეზე (ნახ. 23). თვით რიცხვი $x=-\frac{2}{3}$ მიეკუთვნება ამონახსნთა სიმრავლეს.



ნახ. 23.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. ამოხსენით უტოლობანი და მიღებული შედეგები აღნიშნეთ რიცხვით წრფეზე:

ა) $3-2x<12-5x$ ბ) $2x-3<7(1+x)$

გ) $3{,}5(x+1)>4x-\frac{x-1}{2}$; დ) $\frac{x+1}{2}-\frac{x+2}{3}<2+\frac{x}{6}$;

ე) $\frac{3x+5}{4}-1\leqslant\frac{x-2}{3}+x$; ვ) $4(x+1)+3x>7x+2$

ზ) $\frac{37-3x}{2}+9<\frac{2x-7}{4}-2x$; თ) $\frac{x+1}{x-2}-\frac{1}{2}>\frac{3}{x-2}$;

ი) $\frac{ax+b}{a-b}>\frac{ax-b}{a+b}$ $(a>0,\quad b>0)$; კ) $x-\frac{x-1}{2}>\frac{x-3}{4}-\frac{x-2}{3}$.

2) x-ის როგორი მნიშვნელობისთვისაა განსაზღვრული მოცემული გამოსახულებანი:

ა) $\sqrt{7+3x}$, $\sqrt{5-x}$, $\sqrt{2x+4}$, $\sqrt{1-2x}$,

§ 81. წრფივ უტოლობათა სისტემები და მათი ამოხსნა

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 1. ერთი და იმავე უცნობის შემცველ ორი ან მეტი წრფივი უტოლობის ერთობლიობას წრფივ უტოლობათა სისტემა ეწოდება.

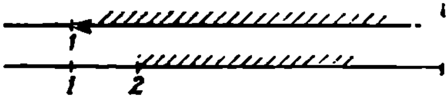
წრფივ უტოლობათა სისტემის მაგალითებია:

$$\begin{cases}2x-2>1,\\3x-x>0.\end{cases}\qquad\begin{cases}1-2x<-5,\\3x+1<13.\end{cases}$$

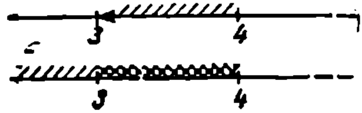
ამოვხსნათ უტოლობათა სისტემა ნიშნავს, ვიპოვოთ უცნობის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლებიც აკმაყოფილებენ სისტემის თითოეულ უტოლობას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. $\begin{cases} 2x-2>0, \\ 3x-6>0. \end{cases}$

განვიხილოთ ერთმანეთის პარალელური ორი წრფე, ერთ-ერთზე, მაგალითად, ზედაზე აღვნიშნოთ x-ის ის მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც სრულდება მოცემული სისტემის პირველი უტოლობა ($x>1$), ხოლო ქვედაზე აღვნიშნოთ x-ის ის



ნახ. 24.



ნახ. 25.

მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც სრულდება მოცემული სისტემის მეორე უტოლობა ($x>2$); მიღებული შედეგების შედარება რიცხვით წრფეზე გვარწმუნებს, რომ ორივე უტოლობა ერთსა და იმავე დროს კმაყოფილდება, როცა $x>2$ (ნახ. 24).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. $\begin{cases} 1-2x<-5, \\ 3x+1<13. \end{cases}$

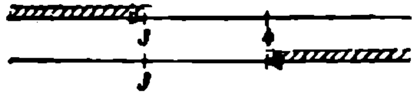
პირველი უტოლობის ამოხსნა იძლევა $x>3$; მეორის ამოხსნა გვაძლევს $x<4$. თუ გამოვსახავთ მათ რიცხვით წრფეზე, გვექნება 25-ე ნახაზზე ნაჩვენები დამოკიდებულება. ეს კი გვიჩვენებს, რომ x მოთავსებულია 3-სა და 4-ს შორის. x-ის ასეთ მნიშვნელობათა სიმრავლე ჩაიწერება ორმაგი უტოლობის სახით:

$$3<x<4.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. $\begin{cases} x+4<2x, \\ 1-x>-2. \end{cases}$

პირველი უტოლობის ამოხსნა გვაძლევს:

$4<x$ ანუ $x>4$; მეორე უტოლობის ამოხსნა გვაძლევს: $-x>-3$ ანუ $x<3$. მაშასადამე, ნებისმიერი რიცხვი, რომელიც დააკმაყოფილებს მოცემული სისტემის ორივე უტოლობას, ნაკლები უნდა იყოს 3-ზე, და მეტი 4-ზე, მაგრამ ასეთი რიცხვები არ შეიძლება არსებობდეს. აქედან დავასკვნით რომ უტოლობათა მოცემული სისტემა არ სრულდება x-ის არც ერთი მნიშვნელობისათვის (ნახ. 26). უტოლობათა ასეთ სისტემებს არათავსებადი სისტემები ეწოდება.



ნახ. 26.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. ამოხსენით უტოლობათა სისტემები და რიცხვით წრფეზე გამოყავით წერტილთა სიმრავლე, რომელიც ამოხსნას შეესაბამება:

ა) $\begin{cases} 3x-5>23-4x, \\ 7x+3<9x-1 \end{cases}$ · (პას. $x>4$) ბ) $\begin{cases} 2x+1>3x+4, \\ 5x+3\geqslant 8x+21. \end{cases}$ (პას: $x<-6$)

გ) $\begin{cases} 5x-2\geqslant 2x+1, \\ 2x+3<18-3x. \end{cases}$ (პას. $1\leqslant x<3$) დ) $\begin{cases} x-1>2x-3, \\ 4x+5\geqslant x+17. \end{cases}$ (არათავსებადია)

ე) $\begin{cases} 10(x-1)+11>4x+5(x+1), \\ 3x-5<2(x-1). \end{cases}$ (პას: არათავსებადია).

2. იპოვეთ შემდეგ სისტემათა მთელი ამონახსნები:

ა) $\begin{cases} 2(3x-4)<3(4x-3)+16, \\ 4(1+x)<3x+5. \end{cases}$ (პას. $0;\ -1;\ -2$).

ბ) $\begin{cases} 3x>2-\dfrac{2x-13}{11}, \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{2}{3}(x-7)<\dfrac{3x-20}{9} \end{cases}$ (პას. $2;\ 3;\ 4$);

გ) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3}\geqslant\dfrac{x-3}{4}-x, \\ 1-0{,}5x>x-4. \end{cases}$ (პას. $1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3$):

დ) $\begin{cases} x-\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x+2}{3}\leqslant\dfrac{x-3}{4}, \\ 1{,}5x-5{,}05<x. \end{cases}$ (პას $7;\ 8;\ 9;\ 10$).

III თავი

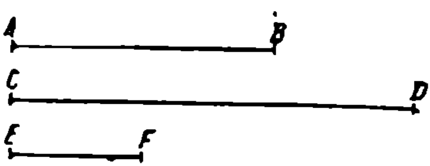
ნამდვილი რიცხვები

§ 12. ორი მონაკვეთის საერთო საზომი

ვთქვათ, მოცემულია AB, CD და EF მონაკვეთები (ნახ. 27).

განსაზღვრა. 1. **EF მონაკვეთს ეწოდება AB და CD მონაკვეთების საერთო საზომი, თუ ის მთელ რიცხვჯერ თავსდება თითოეულ ამ მონაკვეთში.**

27-ე ნახაზზე გამოსახული EF მონაკვეთი წარმოადგენს AB და CD მონაკვეთების საერთო საზომს, ვინაიდან EF მონაკვეთი AB-ში თავსდება 2-ჯერ, ხოლო CD-ში — სამჯერ.


ნახ. 27.

იბადება კითხვა: ნებისმიერ ორ მონაკვეთს აქვს თუ არა საერთო საზომი? სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, არის თუ არა ნებისმიერი ორი მონაკვეთი თანაზომადი? ამ კითხვაზე უარყოფითად პასუხობს შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 1. **ნებისმიერი კვადრატის დიაგონალი მისი გვერდის უთანაზომოა.**

ვიდრე ამ თეორემის დამტკიცებას შევუდგებოდეთ დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 2. **არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი უდრიდეს 2-ს.**

ამ თეორემის დამტკიცებისათვის დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს რაციონალური $\frac{p}{q}$ რიცხვი, რომლის კვადრატი უდრის 2-ს.

ე. ი.

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2. \qquad (1)$$

ვიგულისხმება, რომ $\frac{p}{q}$ უკვეცი წილადია, წინააღმდეგ შემთხვევაში p და q შეიკვეცებოდა საერთო თანამამრავლზე. (1)-დან

$$p^2=2q^2 \qquad (2)$$

(2) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი $2q^2$ გამოსახავს ლუწ რიცხვს. ამიტომ p^2-იც ლუწი უნდა იყოს, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ p რიცხვიც ლუწი იქნება, ე. ი. $p=2k$, სადაც k რაიმე მთელი რიცხვია. თუ p-ს მნიშვნელობას შევიტანთ (2) ტოლობაში, გვექნება:

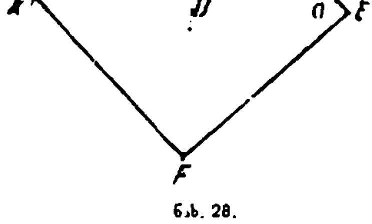
$$4k^2=2q^2$$

და $q^2=2k^2$;

ე. ი. q^2-იც წარმოადგენს ლუწ რიცხვს, რაც იმას ნიშნავს, რომ q-ც ლუწი რიცხვია. გამოდის, რომ p და q ლუწი რიცხვებია, ეს კი ეწინააღმდეგება პირობას იმის შესახებ, რომ $\frac{p}{q}$ წილადი უკვეცია.

მაშასადამე, ჩვენი დაშვება, რომ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$ პირობას, არ არის მართებული. აქედან დავასკვნით: რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში არ მოიპოვება ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი უდრის ორს.

შენიშვნა. ზემოთ დამტკიცებული თეორემა ტოლფასია შემდეგი წინადადებისა: **რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში არ არსებობს რიცხვი** $\sqrt{2}$.



ნახ. 28.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა: **კვადრატის დიაგონალს და მის გვერდს საერთო საზომი არა აქვს.**

თეორემის დამტკიცების მიზნით დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, $ABCD$ კვადრატის AC დიაგონალს და მის AB (ნახ. 28) გვერდს გააჩნია საერთო საზომი, ე.ი. არსებობს ისეთი მონაკვეთი, რომელიც AB-ში მოთავსდება n-ჯერ, ხოლო AC-ში m-ჯერ. თუ ამ მონაკ-

ვეთ ჩავთვლით სიგრძის ერთეულად, მაშინ AB-ს სიგრძე გამოისახება n რიცხვით, ხოლო AC-ს სიგრძე m-ით.

AC დიაგონალზე ავაგოთ $ACEF$ კვადრატი. ცხადია, $ACEF$-ის ფართობი ორჯერ აღემატება $ABCD$ კვადრატის ფართობს.

მაგრამ ფართ. $ABCD=n^2$, ფართ. $ACEF=m^2$,

ამიტომ $m^2=2n^2$, საიდანაც:

$$\frac{m^2}{n^2}=2,\ \left(\frac{m}{n}\right)^2=2. \tag{3}$$

(3) ტოლობა ეწინააღმდეგება 2-ე თეორემას.

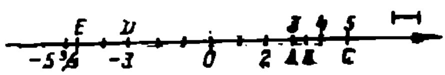
მაშასადამე, ჩვენმა დაშვებამ მიგვიყვანა უმართებულო დასკვნამდე, რომ კვადრატის გვერდს და მის დიაგონალს არ შეიძლება ქონდეს საერთო საზომი.

განსაზღვრა 2. **ორ მონაკვეთს, რომელთაც საერთო საზომი აქვთ, თანაზომადი მონაკვეთები ეწოდება.**

განსაზღვრა 3. **ორ მონაკვეთს, რომელთაც საერთო საზომი არა აქვთ, უთანაზომო მონაკვეთები ეწოდება.**

§ 33. რაციონალური რიცხვების გეომეტრიული გამოსახვა

ავიღოთ რიცხვითი წრფე, მასზე დავნიშნოთ O წერტილი (ნახ. 29).



ნახ. 29.

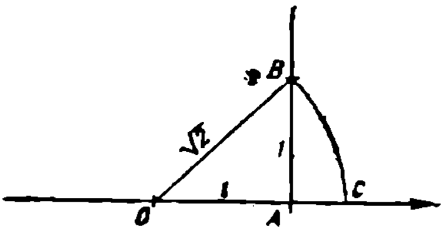
ყოველ რაციონალურ $\frac{m}{n}$ რიცხვს შევუსაბამოთ რიცხვითი წრფის წერტილი, რომელიც მდებარეობს O წერტილიდან $\frac{m}{n}$ მანძილზე. თუ $\frac{m}{n}>0$, მაშინ წერტილი იქნება O წერტილის მარჯვნივ, თუ $\frac{m}{n}<0$, მაშინ — მარცხნივ. მაგალითად, რიცხვს 3-ს ეთანადება A წერტილი, რომელიც მდებარეობს O წერტილიდან სიგრძის სამი ერთეულის ტოლ მანძილზე, ასევე $3\frac{1}{2}$-ს ეთანადება B წერტილი, 5-ს — C წერტილი, —3-ს — D წერტილი $-5\frac{3}{5}$-ს — E წერტილი და ა. შ.

მასთან, თუ $\frac{m}{n}$ რიცხვი ნაკლებია $\frac{p}{q}$-ზე, მაშინ $\frac{m}{n}$ რიცხვის შესაბამისი წერტილი მდებარეობს $\frac{p}{q}$ რიცხვის შესაბამისი წერტილის მარცხნივ. მაგალითად, $3<5$, ამიტომ წერტილი A მდებარეობს C წერტილის მარცხნივ. ასევე, $-3>-5\frac{3}{5}$, ამიტომ წერტილი D მდებარეობს E წერტილის მარჯვნივ.

როგორც ვხედავთ, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლიდან აღებული ნებისმიერი რიცხვი გეომეტრიულად შეიძლება გამოისახოს რიცხვითი წრფის სრულიად გარკვეული წერტილით. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლიდან აღებულ ყოველ რიცხვს რიცხვით წრფეზე მოეძებნება შესაბამისი წერტილი.

იბადება კითხვა: მართებულია თუ არა შებრუნებული დასკვნა? კერძოდ, წრფის ყოველი წერტილი შეიძლება თუ არა განვიხილოთ, როგორც რომელიმე რაციონალური რიცხვის გეომეტრიული სახე?

ამ საკითხის გარკვევის მიზნით ჩავატაროთ შემდეგი სახის მსჯელობა. ავიღოთ რიცხვითი წრფე, წრფეზე ავიღოთ O წერტილი (ნახ. 30).



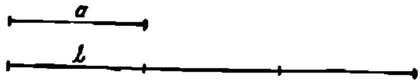
ნახ. 30.

O წერტილიდან გადავზომოთ სიგრძის ერთეულის ტოლი OA მონაკვეთი. A წერტილიდან აღვმართოთ პერპენდიკულარი და მასზე მოვზომოთ $OA=AB$ მონაკვეთი. ცხადია, რომ $|OB|=\sqrt{2}$-ს. O წერტილიდან OB რადიუსით შემოვწეროთ რკალი $\breve{BC}$. ცხადია $OC=OB$. ამიტომ C წერტილის შესაბამისი რიცხვი სიდიდით ტოლი უნდა იყოს $\sqrt{2}$ რიცხვითი მნიშვნელობის, მაგრამ § 32-ში დამტკიცებული თეორემის და იქვე გაკეთებული შენიშვნის თანახმად C წერტილის შესაბამისი რიცხვი არ შეიძლება იყოს რაციონალური (ვინაიდან მისი კვადრატი 2-ის ტოლი აღმოჩნდებოდა).

მაშასადამე, გამოდის, რომ რიცხვით წრფეზე აღმოვაჩინეთ ისეთი წერტილი, რომლის შესაბამისი რიცხვი რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში არ არის. ამ უკანასკნელ გარემოებას ბუნებრივად მივყავართ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოების საჭიროებამდე.

§ 34. მონაკვეთების გაზომვის ცნება

ვთქვათ, a არის სიგრძის ერთეულად მიღებული მონაკვეთი, ხოლო b — გასაზომი მონაკვეთი (ნახ 31). აქ შეიძლება წარმოგვიდგეს ორი შემთხვევა;



ნახ. 31.

1) a და b მონაკვეთები თანაზომადია;
2) a და b მონაკვეთები უთანაზომოა.

პირველ შემთხვევაში b მონაკვეთის ზომა გამოისახება $\frac{m}{n}$ სახის რაციონალური რიცხვით. მეორე შემთხვევაში b მონაკვეთის ზომა არ გამოისახება არავითარი რაციონალური რიცხვით.

მაშასადამე, მონაკვეთების გასაზომად რაციონალური რიცხვები არ კმარა. სწორედ ეს გარემოება გვაიძულებს გავაფართოოთ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, ე ი. შემოვიღოთ ახალი ბუნების რიცხვი, რომელიც განსხვავებულია რაციონალური რიცხვებისაგან. ასეთი სახის რიცხვებს ირაციონალური ანუ არარაციონალური რიცხვები ეწოდება.

ისმება კითხვა: რა სახით წარმოვადგინოთ ირაციონალური რიცხვი? ამ კითხვაზე პასუხის გაცემის მიზნით განვიხილოთ მონაკვეთების გაზომვის ის შემთხვევა, როცა გასაზომი მონაკვეთი ზომის ერთეულის უთანაზომოა.

ვთქვათ, b მონაკვეთი სიგრძის ერთეულად შერჩეული a მონაკვეთის უთანაზომოა (ნახ. 31). გადავზომოთ b მონაკვეთზე a მონაკვეთი. ვთქვათ, a მონაკვეთი b-ში მოთავსდა 2-ჯერ და b-სგან მოგვრჩა კიდევ ნაშთი c, მაშინ, ცხადია, b-ს ზომა მიახლოებით იქნება რიცხვი 2. ახლა სიგრძის ერთეულად მიღებული a მონაკვეთი დავყოთ 10 ტოლ ნაწილად და გადავზომოთ a მონაკვეთის $\frac{1}{10}$ ნაწილი c ნაშთზე. ვთქვათ, c-ში $\frac{a}{10}$ მოთავსდა ოთხჯერ და მოგვრჩა ნაშთი c' რომელიც ნაკლებია $\frac{a}{10}$-ზე, მაშინ, ცხადია, b მონაკვეთის სიგრძე გამოისახება რიცხვით 2,4. ახლა a-ს $\frac{1}{10}$ ნაწილიც გავყოთ 10 ტოლ ნაწილად, რითაც მივიღებთ a-ს $\frac{1}{100}$ ნაწილს. ვთქვათ, a-ს $\frac{1}{100}$ c'-ში 5-ჯერ გადაზომეს და კიდევ დარჩა ნაშთი c'' ახლა, ცხადია, b მონაკვეთის მიახლოებითი ზომა იქნება რიცხვი 2,45. ეს პროცესი შეიძლება გავაგრძელოთ უსასრულოდ. ამით მივიღებთ b მონაკვეთის სულ უფრო და უფრო ზუსტ ზომებს:

2; 2,4; 2,45; 2.453; 2,4532... და ა. შ.

მართლაც, რომ ეს პროცესი დასრულდეს რომელიმე ნაბიჯზე, მაგალითად, მე-4-ზე, მაშინ b მონაკვეთის სიგრძე გამოსახული იქნება ზუსტად 2,453-ით. ამ შემთხვევაში a მონაკვეთის $\frac{1}{1000}$ ნაწილი a-ში მოთავსდება 1000-ჯერ, ხოლო b-ში 2453-ჯერ. მაშასადამე, a მონაკვეთის $\frac{1}{1000}$ ნაწილი გამოვა a და b-ს საერთო ზომა. ეს კი ეწინააღმდეგება თავიდან აღებულ პირობას, რომ a და b მონაკვეთები უთანაზომოა.

ამრიგად, ეს პროცესი გაგრძელდება უსასრულოდ და b მონაკვეთის სიგრძე გამოსახული იქნება უსასრულო ათწილადით, მასთან ეს ათწილადი არ შეიძლება იყოს პერიოდული, რადგანაც ყოველი პერიოდული ათწილადი შეიძლება წარმოვიდგინოთ $\frac{m}{n}$ რაციონალური რიცხვის სახით და a-ს n-ური ნაწილი a-ში მოთავსდება n-ჯერ, ხოლო b-ში m-ჯერ, რაც ეწინააღმდეგება აგრეთვე a და b მონაკვეთების უთანაზომობის მოცემულ პირობას.

მაშასადამე, თუ მონაკვეთი სიგრძის ერთეულის უთანაზომოა, მაშინ მისი სიგრძე გამოისახება უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის სახით.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. 3. რიცხვებს, რომლებიც შეიძლება წარმოვადგინოთ უსასრულო არაპერიოდული ათწილადების სახით, ეწოდება ირაციონალური რიცხვები.

როგორც ვხედავთ, ერთეულთან უთანაზომო მონაკვეთის გაზომვის ცდამ მაგვიყვანა ირაციონალური რიცხვის ცნებამდე.

ირაციონალური რიცხვის ცნებამდე მივყავართ აგრეთვე არაზუსტი კვადრატიდან კვადრატული ამოფესვის ოპერაციასაც. ირაციონალურია $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ და ა. შ. რიცხვები.

ყველა ესენი გამოისახებიან უსასრულო არაპერიოდული ათწილადით.

ახლა, თუ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს დავუმატებთ ირაციონალურ რიცხვებსაც, მაშინ, ცხადია, რიცხვით წრფეზე არ დარჩება არც ერთი „ცარიელი" წერტილი, ე. ი. ისეთი წერტილი, რომელსაც არ შეესაბამება რიცხვი.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 4. რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს, ერთად აღებულს, ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ოთხი არითმეტიკული მოქმედების: შეკრების, გამოკლების, გამრავლების და გაყოფის ოპერაციების გარდა სრულდება ამოფესვის ოპერაციაც.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. თანაზომადია თუ არა a მონაკვეთი სიგრძის ერთეულად მიღებული b მონაკვეთისა, თუ a მონაკვეთის სიგრძე გამოისახება:

ა) სასრული ათწილადით;

ბ) უსასრულო პერიოდული ათწილადით;

გ) უსასრულო არაპერიოდული ათწილადით;

2. ა) არის თუ არა ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი ნამდვილი და პირიქით?

ბ) არის თუ არა ნებისმიერი ირაციონალური რიცხვი ნამდვილი და პირიქით?

3. გამოისახება თუ არა ნებისმიერი მონაკვეთის სიგრძე:

ა) რაციონალური რიცხვით;

ბ) ირაციონალური რიცხვით;

გ) ნამდვილი რიცხვით?

4. დაამტკიცეთ ა) რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში არ არსებობს უმცირესი რაციონალური რიცხვი;

ბ) რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში არ არსებობს უდიდესი რაციონალური რიცხვი.

5. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედში 60°-იანი კუთხის პირდაპირ მდებარე კათეტი ჰიპოტენუზის უთანაზომოა.

6. დაამტკიცეთ, რომ, თუ a მონაკვეთი თანაზომადია b-სი, b მონაკვეთი კი c-სი, მაშინ a თანაზომადია c-სი.

7. დაამტკიცეთ, რომ, თუ a მონაკვეთი თანაზომადია b-სი, მაგრამ უთანაზომოა c-სი, მაშინ b და c უთანაზომოა.

§ 35. ნამდვილი რიცხვები და მათი გეომეტრიული გამოსახვა

ა) იმის შემდეგ, რაც შემოვიღეთ ნამდვილი რიცხვის ცნება, ბუნებრივად დგება საკითხი სიდიდის მიხედვით მათი შედარების შესახებ. როცა ლაპარაკი ეხება ნამდვილ რიცხვებს, ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ისინი მოცემული არიან უსასრულო ათწილადის სახით.

განსაზღვრა 5. ორ დადებით ნამდვილ რიცხვს ეწოდება ტოლი, თუ მათი ყველა შესაბამისი ათწილადი ნიშანი ტოლია, ხოლო, თუ ერთ-ერთი რიცხვი შეიცავს ნიშანს, რომელიც არ ემთხვევა მეორე რიცხვის შესაბამის ნიშანს, ასეთ რიცხვებს არატოლი ეწოდება.

მაგალითად, რიცხვი 2,356... არ უდრის 2,423... ასევე რიცხვი 3,14... არ უდრის 1,23...

თუ α და β ნამდვილი რიცხვები ერთმანეთის ტოლი არაა, მაშინ მათგან ისაა მეტი, რომლის მთელი ნაწილიც მეტია. თუ კი მთელი ნაწილები ტოლია, მაშინ ისაა მეტი, რომელიც შეიცავს მეათედების მეტ რიცხვს, თუ მეათედებიც ტოლია, მაშინ ის იქნება მეტი, რომელიც შეიცავს მეასედების მეტ რიცხვს და ა. შ.

მაგალითად: $3,5643 > 2,6532...$

$3,5643 > 3,4321...$

$3,5643 > 3,5563...$

$3,5643 > 3,5653...$ და ა. შ.

განსაზღვრა 6. α და β უარყოფითი ნამდვილი რიცხვები ტოლია, თუ ტოლია მათი აბსოლუტური მნიშვნელობები.

ე. ი.

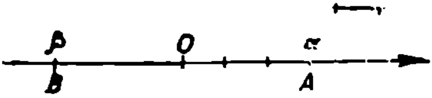
$$|\alpha| = |\beta|.$$

თუ $|\alpha| \neq |\beta|$, მაშინ α და β ნამდვილი რიცხვები არაა ტოლი.

ორი უარყოფითი ნამდვილი რიცხვიდან უდიდესად ითვლება ის, რომლის აბსოლუტური სიდიდეც ნაკლებია. მაგალითად, $-3,564... > -3,654...$, საიდანაც $3,564... < 3,654$. ასევე, $-4,2321... < -2,3211...$ ვინაიდან $4,2321 > 2,3211$.

ნებისმიერი ნამდვილი დადებითი რიცხვი მეტია ნებისმიერ უარყოფით რიცხვზე და ნულზე. ნული კი მეტია ნებისმიერ უარყოფით რიცხვზე.

ბ) ისე როგორც რაციონალური რიცხვები, ნამდვილი რიცხვებიც გამოისახება რიცხვითი წრფის წერტილებით.



ნახ. 32.

ყოველ დადებით α რიცხვს შევუსაბამოთ A წერტილი, რომელიც მდებარეობს O წერტილის მარჯვნივ სიგრძის α ერთეულის ტოლ მანძილზე (ნახ. 32). მაგალითად, თუ $\alpha = 3,1415...$,

მაშინ

$$3 < \alpha < 4,$$
$$3,1 < \alpha < 3,2,$$
$$3,14 < \alpha < 3,15$$

და ა. შ.

ადვილი მისახვედრია, რომ რიცხვით წრფეზე *A* წერტილი უნდა მდებარეობდეს იმ წერტილების მარჯვნივ, რომლებიც შეესაბამებიან

$$3;\quad 3{,}1;\quad 3{,}14\ldots$$

რიცხვებს და იმ წერტილების მარცხნივ, რომლებიც შეესაბამებიან:

$$4;\quad 3{,}2;\quad 3{,}15\ldots$$

რიცხვებს.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ეს პირობა რიცხვით წრფეზე განსაზღვრავს ერთადერთ წერტილს. რომელსაც განვიხილავთ, როგორც $\alpha=3{,}1415\ldots$ ნამდვილი რიცხვის გეომეტრიულ სახეს.

სავსებით ანალოგიურად, ნებისმიერ უარყოფით β ნამდვილ რიცხვს შევუსაბამებთ *B* წერტილს, რომელიც მდებარეობს *O* წერტილის მარცხნივ, მისგან $|\beta|$ ტოლ მანძილზე.

მაშასადამე, ყოველ ნამდვილ α რიცხვს შეგვიძლია შევუსაბამოთ სრულიად გარკვეული წერტილი რიცხვით წრფეზე. ეს წერტილი *O* წერტილიდან დაშორებული იქნება სიგრძის ერთეულის $|\alpha|$ ტოლ მანძილზე და მდებარეობდეს იქნება: *O* წერტილის მარჯვნივ, თუ $\alpha>0$, და *O* წერტილის მარცხნივ, თუ $\alpha<0$.

§ 34-ში ჩვენ მივედით იმ დასკვნამდე, რომ რიცხვითი წრფის ყოველ წერტილს შეესაბამება სრულიად გარკვეული რიცხვი — ან რაციონალური ან ირაციონალური. როგორც ვიცით, რაციონალური და ირაციონალური რიცხვთა სიმრავლეები ქმნიან ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს. ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რიცხვითი წრფის ყოველ წერტილს ეთანადება გარკვეული ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი და, პირიქით, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლიდან აღებულ ყოველ ნამდვილ რიცხვს წრფეზე მოეძებნება სრულიად გარკვეული ერთადერთი წერტილი. აქედან შეიძლება დავასკვნათ: **ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლისა და რიცხვითი წრფის წერტილთა სიმრავლეს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა დამოკიდებულება.**

§ 30. მოქმედებანი ნამდვილ რიცხვებზე

ვთქვათ, მოცემულია α და β ნამდვილი რიცხვები. თუ α და β რაციონალური რიცხვებია, მაგალითად, $\alpha=\frac{m}{n}$ და $\beta=\frac{p}{q}$, მაშინ მათი ჯამი მოინახება რაციონალურ რიცხვთა შეკრების წესით:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq},\quad \text{მაგალითად,}\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{7+3}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}$$

მაგრამ შეიძლება α და β რიცხვებიდან ერთ-ერთი ან ორივე იყოს ირაციონალური.

ვთქვათ, $\alpha=\sqrt{3}$, $\beta=\sqrt{2}$.

α და β-სათვის შევადგინოთ მიახლოებითი მნიშვნელობები და შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი:

ნამდვილი რიცხვის ათწილადი მიახლ.	0,1-მდე	0,01-მდე	0,001-მდე	0,0001-მდე
α ნამდვილი რიცხვები	1,7	1,73	1,732	1,7320
β ნამდვილი რიცხვები	1,4	1,41	1,414	1,4142

ნამეტით აღებულ α და β-ს მნიშვნელობები მიიღება ამ რიცხვებიდანვე, მათი უკანასკნელი ათობითი ნიშნის 1-ით გადიდებით.

მაშასადამე, α და β ნამდვილ რიცხვთა შეკრება ნიშნავს ისეთი რიცხვის პოვნას, რომელიც (1) გამოსახულების თითოეულ ჯამზე მეტია და თითოეულ (2)-ის ჯამზე ნაკლებია:

$$1{,}7+1{,}4=3{,}1$$
$$1{,}73+1{,}41=3{,}14 \qquad (1)$$
$$1{,}732+1{,}414=3{,}146$$

$$1{,}8-1{,}5=3{,}3$$
$$1{,}74+1{,}42=3{,}16 \qquad (2)$$
$$1{,}733+1{,}415=3{,}148$$

მაშასადამე, α და β ნამდვილი რიცხვების შეკრება ნიშნავს ისეთი მესამე γ რიცხვის პოვნას, რომელიც მეტი იქნება ნებისმიერი სიზუსტით, მაგრამ ნაკლებობით აღებულ მათ მიახლოებით მნიშვნელობათა ჯამზე, ხოლო ნაკლები იქნება ნებისმიერი სიზუსტით მაგრამ მეტობით აღებულ მათ მიახლოებით მნიშვნელობათა ჯამზე.

დაუმტკიცებლად მივიღოთ, რომ α და β რიცხვების $\gamma=\alpha+\beta$ ჯამი* არსებობს და მასთან მხოლოდ ერთი.

α და β რიცხვების ზემოთ მოყვანილი მიახლოებითი მნიშვნელობების მიხედვით შეგვიძლია განვსაზღვროთ α და β ნამდვილი რიცხვების ნამრავლი.

$\alpha\cdot\beta$ არის რიცხვი, რომელიც თითოეულ ამ ნამრავლზე მეტია:

$$1{,}7\cdot 1{,}4=2{,}38,$$
$$1{,}73\cdot 1{,}41=2{,}4393,$$
$$1{,}732\cdot 1{,}414=2{,}449048,$$

$\alpha\cdot\beta$ არის რიცხვი, რომელიც თითოეულ ამ ნამრავლზე ნაკლებია:

$$1{,}8\cdot 1{,}5=2{,}70,$$
$$1{,}74\cdot 1{,}42=2{,}4708,$$
$$1{,}733\cdot 1{,}415=2{,}452195.$$

მაშასადამე, α და β ნამდვილი რიცხვების გამრავლება ნიშნავს ისეთი** მესამე γ რიცხვის პოვნას, რომელიც მეტია ნებისმიერი სიზუსტით, მაგრამ ნაკლებობით აღებულ მათ მიახლოებით მნიშვნელობების ნამრავლზე და ნაკლებია ნებისმიერი სიზუსტით. მაგრამ მეტობით აღებულ მათ მიახლოებით მნიშვნელობების ნამრავლზე.

დაუმტკიცებლად მივიღოთ, რომ $\alpha\cdot\beta=\gamma$ რიცხვი არსებობს და მასთან ერთადერთი.

α ნამდვილი რიცხვის კვადრატში, კუბში, მეოთხე ხარისხში და ა. შ. ახარისხება ნიშნავს, ვიპოვოთ α-ს ტოლი ორი, სამი, ოთხი და ა. შ. რიცხვების ნამრავლი.

---

* ვგულისხმობთ, რომ α და β ირაციონალურია. რადგან, როცა ისინი რაციონალურია მათი შეკრების წესი ცნობილია.

** როცა ნამდვილ რიცხვზე მოქმედებებს განვმარტავთ, ყოველთვის ვგულისხმობთ ირაციონალურ რიცხვებს.

ირაციონალური რიცხვებისათვის შებრუნებული მოქმედებები ისევე განისაზღვრება, როგორც რაციონალური რიცხვებისათვის. მაგალითად, α ირაციონალური რიცხვიდან β ირაციონალური რიცხვის გამოკლება ნიშნავს ისეთი x რიცხვის პოვნას, რომელიც შეკრებილი β-თან მოგვცემს α-ს, ე. ი. $\beta+x=\alpha$

თუ α და β რიცხვებიდან ერთ-ერთი რაციონალურია, მაშინ, ცხადია, ის განსაზღვრული იქნება ზუსტად და ზემოდ მოცემულ განსაზღვრებში რაციონალური რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობების ნაცვლად მისი ზუსტი მნიშვნელობა უნდა ავიღოთ.

ირაციონალური α რიცხვის 0-ზე ნამრავლი ნულის ტოლადაა მიღებული ე. ი.

$$\alpha .0=\alpha.$$

უარყოფით ირაციონალურ რიცხვებზე მოქმედებები იმავე წესით სრულდება, როგორც მოქმედებები უარყოფით რაციონალურ რიცხვებზე.

ირაციონალურ რიცხვებზე მოქმედებებს ახასიათებს იგივე თვისებები, რაც რაციონალურ რიცხვებზე მოქმედებებს.

მაგალითად, შეკრებისას გვაქვს:

ა) გადანაცვლების კანონი $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

ბ) ჯუფთებადობის კანონი $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

ე. ი. ირაციონალურ რიცხვთა შეკრებისას სრულდება გადანაცვლებისა და ჯუფთებადობის კანონები.

α და β ირაციონალურ რიცხვთა გამრავლების შემთხვევაში სრულდება შემდეგი კანონები:

ა) გამრავლების გადანაცვლების კანონი:

$$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha;$$

ბ) ჯუფთებადობის კანონი:

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma).$$

გ) გამრავლების განრიგებადობის კანონი შეკრების მიმართ:

$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. მოცემული ჯამები წარმოადგინეთ ათწილადების სახით, მძიმის შემდეგ სამი სანდო ციფრის ჩვენებით:

ა) $\sqrt{3}+\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}+\sqrt{5}$; $\frac{11}{9}+(-\sqrt{3})$; $-\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

2. მოცემული ნამრავლები წარმოადგინეთ ათწილადების სახით, მძიმის შემდეგ არანაკლებ ორი სანდო ციფრის ჩვენებით:

$$\sqrt{3}\ \ \sqrt{5};\quad \sqrt{2}\ \ \frac{5}{8};\quad -\sqrt{2}\ \ \sqrt{3};\quad \frac{1}{3}\sqrt{2}\ \ \sqrt{7}.$$

ხარისხი რაციონალური მაჩვენებლით

§ 27. n-ური ხარისხის ფესვი რიცხვიდან

როგორც არითმეტიკიდან ვიცით, შეკრება და გამოკლება ურთიერთშებრუნებული მოქმედებებია.

ასევე, გამრავლება და გაყოფაც წარმოადგენს ურთიერთშებრუნებულ მოქმედებებს.

ახარისხების ერთ-ერთ შებრუნებულ მოქმედებას ამოფესვა* ეწოდება. ამოფესვის ოპერაციას $\sqrt{\ }$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, მას რადიკალის ანუ ფესვის ნიშანი ეწოდება, ფესვის მაჩვენებელი იწერება რადიკალის ნიშნის ზევით. მაგალითად, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{b}$, $\sqrt[n]{a}$ იკითხება „კუბიკური ფესვი a-დან“, „მე-5-ე ხარისხის ფესვი b-დან“, „n-ური ხარისხის ფესვი a-დან“, მეორე ხარისხის ფესვის ნიშანს რადიკალის ნიშნის ზევით არ ვწერთ, არამედ ვგულისხმობთ. მაგალითად, მეორე ხარისხის ანუ კვადრატული ფესვი a რიცხვიდან დაიწერება ასე: $\sqrt{a}$. თუ ახარისხებისას ფუძით ან ხარისხის მაჩვენებლით ვეძებთ ხარისხს, ამოფესვის დროს მოცემული ხარისხით და ხარისხის მაჩვენებლით ვეძებთ თვით ფუძეს. მაგალითად:

თუ $2^3=8$, მაშინ $\sqrt[3]{8}=2$.

$a^2=9$, მაშინ $\sqrt{9}=a$.

$b^3=27$, მაშინ $\sqrt[3]{27}=b$

$x^3=-8$, მაშინ $\sqrt[3]{-8}=x$.

განსაზღვრა 1. a რიცხვიდან n ხარისხის ფესვი ეწოდება ისეთ რიცხვს, რომლის ახარისხება n ხარისხში მოგვცემს a რიცხვს.

განსაზღვრის თანახმად, $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

ამ განსაზღვრის მიხედვით ადვილად შეიძლება შემოწმდეს შესრულებული ამოფესვის სისწორე. მაგალითად, ვთქვათ, ვიპოვეთ $\sqrt[5]{32}=2$; შემოწმების მიზნით 2 უნდა ავახარისხოთ მე-5 ხარისხში, მივიღებთ $2^5=32$.

მაშასადამე, ფესვი სწორადაა ნაპოვნი.

§ 28. ნიშანთა წესი ამოფესვის დროს

ა) ლუწი ხარისხის ფესვს დადებითი რიცხვიდან აქვს ორი ნამდვილი ერთიმეორის მოპირდაპირე მნიშვნელობა:

$\sqrt{25}=\pm 5$, რადგან $(\pm 5^2)=25$;

$\sqrt[4]{16}=\pm 2$, რადგან $(\pm 2)^4=16$.

* ახარისხებას ორი შებრუნებული მოქმედება აქვს: ამოფესვა და ლოგარითმის მოძებნა.

ა) კენტი ხარისხის ფესვს აქვს იგივე ნიშანი, რაც ფესვქვეშა გამოსახულებას:

$$\sqrt[3]{27}=3. \quad \text{რადგან } 3^3=27, \quad \sqrt[3]{-27}=-3, \quad \text{რადგან } (-3)^3=-27;$$

$$\sqrt[5]{-32}=-2, \quad \text{რადგან } (-2)^5=32.$$

ბ) ლუწი ხარისხის ფესვი უარყოფითი რიცხვიდან არ წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვს. მაგალითად, $\sqrt{-16}$ არ შეიძლება იყოს არც -4 და არც 4, რადგან $(\pm4)^2$ უდრის 16-ს და არა -16-ს. უარყოფითი რიცხვებიდან ლუწი ხარისხის ფესვი წარმოადგენს ე. წ. წარმოსახვით რიცხვს.

§ ჯი. არითმეტიკული ფესვი

განსაზღვრა 2. დადებითი რიცხვიდან ლუწი ხარისხის დადებით ფესვს ეწოდება მისი არითმეტიკული მნიშვნელობა ანუ არითმეტიკული ფესვი. ასე მაგალითად, $\sqrt{25}$-ის არითმეტიკული მნიშვნელობა არის 5, $\sqrt[4]{81}$-ის არითმეტიკული მნიშვნელობა არის 3.

ამასთან დაკავშირებით მეტად სასარგებლოა დაეიმახსოვროთ შემდეგი მნიშვნელოვანი ფორმულა:

$$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & \text{თუ } x>0, \\ -x, & \text{თუ } x<0, \\ 0, & \text{თუ } x=0. \end{cases}$$

ანუ სხვანაირად $\sqrt{x^2}=|x|$.

არასწორი იქნება თუ დავწერთ $\sqrt{x^2}=x$, ვინაიდან x-ის უარყოფითი მნიშვნელობისათვის საქმე გვექნებოდა უარყოფით (არაარითმეტიკულ) ფესვთან.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

$$1.\ \sqrt{(3-x)^2}=|3-x|=\begin{cases} 3-x, & \text{თუ } x<3, \\ x-3, & \text{თუ } x>3, \\ 0 & \text{თუ } x=3. \end{cases}$$

$$2.\ \sqrt{(x^2+2x+5)^2}=x^2+2x+5.$$

ამ შემთხვევაში შეგვიძლია არ დავწეროთ მოდულის ნიშანი, ვინაიდან $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$. ეს გამოსახულება კი დადებითია x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

იპოვეთ ფესვის არითმეტიკული მნიშვნელობანი:

ა) $\sqrt{(a-1)^2}$;   დ) $\sqrt{16-x^2)}$;

ბ) $\sqrt{(a+3)^2}$;   ე) $\sqrt{(3x^2+2x+1)^2}$;

გ) $\sqrt{(3-x)^2}$;   ვ) $\sqrt{(-5x^2+x+1)^2}$.

§ ჯბ. არითმეტიკული ფესვის ძირითადი თვისებები

განვიხილოთ ნამრავლის, წილადის და ხარისხის ამოფესვის საკითხი ცალ-ცალკე.

ა) ვთქვათ, უნდა ვიპოვოთ abc ნამრავლის n ხარისხის არითმეტიკული ფესვი. ვიცით, რომ ნამრავლის ახარისხებისათვის საჭიროა, ავახარისხოთ იმავე ხარისხში

თითოეული თანამამრავლი და მიღებული შედეგები გადავამრავლოთ. ვინაიდან ამოფესვის ოპერაცია ახარისხების ოპერაციის შებრუნებული ოპერაციაა, ამიტომ შეიძლება ნამრავლის ამოფესვისას დაგვჭირდეს თითოეული თანამამრავლის ცალ-ცალკე ამოფესვა და მიღებული შედეგების გადამრავლება, ე. ი. საჭიროა ვაჩვენოთ მართებულობა ტოლობისა:

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}. \tag{1}$$

(1) ტოლობის მართებულობაში დარწმუნების მიზნით მარჯვენა ნაწილი ავიყვანოთ n ხარისხში:

$$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n\cdot(\sqrt[n]{c})^n=abc$$

მაშასადამე, $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c})^n=abc.$

$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c})$ ნამრავლის n ხარისხის abc-სთან ტოლობა ნიშნავს, რომ, ეს ნამრავლი წარმოადგენს abc-დან n ხარისხის ფესვს. დამტკიცებული წინადადება შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგი წესის სახით: **n-ური ხარისხის ფესვი დადებითი რიცხვების ნამრავლიდან უდრის ამ თანამამრავლებიდან n-ური ხარისხის ფესვების ნამრავლს.**

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. $\sqrt{4\cdot16\cdot25}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{16}\cdot\sqrt{25}=2\cdot4\cdot5=40;$

2. $\sqrt{25\cdot100}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{100}=5\cdot10=50.$

ახლა, თუ (1) ტოლობას წავიკითხავთ მარჯვნიდან მარცხნივ, ე. ი.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{abc}$$

მაშინ დავასკვნით, რომ ტოლმაჩვენებლიანი ფესვების გადამრავლებისათვის საჭიროა, გადავამრავლოთ ფესვქვეშა გამოსახულებები და ნამრავლიდან ამოვიღოთ იმავე ხარისხის ფესვი.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot8}=\sqrt{16}=4;$

2. $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{27}=3;$

3. $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x\cdot x^2}=\sqrt[3]{x^3}=x.$

ბ) **n-ური ხარისხის ფესვი წილადიდან უდრის მრიცხველიდან n-ური ხარისხის ფესვს, გაყოფილს მნიშვნელიდან იმავე ხარისხის ფესვზე.**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \tag{2}$$

(2) ტოლობის სისწორეში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ მარჯვენა ნაწილს ავახარისხებთ n ხარისხში. მართლაც,

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b};$$

ამრიგად,

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{a}{b},$$

ე. ი. (2) ფორმულა მართებულია.

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ, როცა $n=2k$ (n ლუწია), მაშინ მოთხოვნა $a>0$, $b>0$ არსებითია, თუკი $n=2k+1$ (n კენტია) მაშინ (2) ფორმულა მართებულია a და b-ს როგორც დადებით ისე უარყოფით მნიშვნელობებისათვისაც.

მაგალითები:

1) $\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$; $\sqrt{\frac{16}{49}}=\frac{4}{7}$; $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}=-\frac{2}{3}$.

თუ (2) ტოლობას წავიკითხავთ მარჯვენიდან მარცხნივ, ე. ი.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \tag{3}$$

შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი წესი: **ერთნაირმაჩვენებლიანი ფესვების გაყოფისას საკმარისია, ერთმანეთზე გავყოთ ფესქვეშა გამოსახულებანი, ხოლო ფესვის მაჩვენებელი უცვლელად დავტოვოთ.**

მაგალითები:

1) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{27}{3}}=\sqrt{9}=3$

2) $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\frac{24}{3}}=\sqrt[3]{8}=2.$

გ) **რომ ამოვფესვოთ დადებითი რიცხვის ისეთი ხარისხიდან, რომლის მაჩვენებელი მთლიანად იყოფა ფესვის მაჩვენებელზე, საკმარისია ფესქვეშა გამოსახულების მაჩვენებელი გავყოთ ფესვის მაჩვენებელზე, ხარისხის ფუძე კი უცვლელი დავტოვოთ.**

ვთქვათ, a ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, m და n კი — ნატურალური რიცხვები. მასთან, m უნაშთოდ იყოფა n-ზე, მაშინ

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}},$$

ხარისხის ახარისხების წესის გამოყენებით დავწერთ:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{mn}{n}}=a^m.$$

მაგრამ ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 1. ამოფესვეთ:

ა) $\sqrt{25a^4b^2}$;

ბ) $\sqrt[3]{125a^6b^9}$;

გ) $\sqrt{\frac{9a^6b^4}{16x^2y}}$

2. x-ის რომელი მნიშვნელობისათვისაა მართებული შემდეგი ტოლობები:

ა) $\sqrt{x^2-25}=\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{x-5}$;

ბ) $\sqrt[4]{(x-2)(8-x)}=\sqrt[4]{x-2}\cdot\sqrt[4]{8-x}$;

გ) $\sqrt[3]{(x+1)(x-5)}=\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x-5}$.

დ) ფესვის სიდიდე არ შეიცვლება, თუ ფესვის მაჩვენებელს და ფესქვეშა გამოსახულების ხარისხის მაჩვენებელს გავამრავლებთ ერთსა და იმავე რიცხვზე.

ე. ი. $\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^m}$. მართლაც, შემოვიღოთ აღნიშვნა $x=\sqrt[n]{a}$, მაშინ $x^n=a$. თუ ამ უკანასკნელი ტოლობის ორივე ნაწილს ავახარისხებთ m-ხარისხში, გვექნება $x^{mn}=a^m$, საიდანაც $x=\sqrt[mn]{a^m}$, ე. ი. $\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^m}$.

ე) თუ ფესქვეშა გამოსახულება წარმოადგენს ისეთ ხარისხს, რომლის მაჩვენებელსაც ფესვის მაჩვენებელთან საერთო გამყოფი აქვს, მაშინ ამ საერთო გამყოფზე შეიძლება გავყოთ ორივე მაჩვენებელი: მასთან თუ $a>0$, მაშინ m შეიძლება იყოს ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვი, მაგრამ თუ $a<0$, მაშინ m აუცილებლად უნდა იყოს კენტი.

მაგალითები:

1. $\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[3]{x}$; 2. $\sqrt[6]{(1+x)^3}=\sqrt{1+x}$;

3. $\sqrt[mn]{a^{2m}}=\sqrt[n]{a^2}$; 4. $\sqrt[6]{8a^6x^3}=\sqrt[6]{(2a^2x)^3}=\sqrt{2a^2x}$.

ვ) დადებითი რიცხვიდან ფესვი რომ ავახარისხოთ, საკმარისია ამ ხარისხში ავახარისხოთ ფესქვეშა გამოსახულება, ფესვის მაჩვენებელი კი უცვლელად დავტოვოთ, ე. ი. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$,

მაგალითები:

$$(\sqrt[4]{2})^3=\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{8}$$
$$(\sqrt[3]{-2})^5=\sqrt[3]{-2^5}=\sqrt[3]{-32}.$$

ზ) ფესვიდან რომ ფესვი ამოვიღოთ, საკმარისია გადავამრავლოთ აწ ფესვების მაჩვენებლები ფესქვეშა გამოსახულების შეუცვლელად.

ე.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

მაგალითები:

$$\sqrt{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[6]{4},\quad \sqrt[3]{\sqrt[5]{3}}=\sqrt[15]{3};\quad \text{და ა. შ.}$$

სავარჯიშო:

$$\sqrt[3]{\sqrt{6}};\quad \sqrt[4]{\sqrt{8}};\quad \sqrt[5]{\sqrt[3]{5}};\quad \sqrt{\sqrt[3]{-3}};\quad \sqrt[4]{\sqrt[3]{-243}}$$

§ 41. რადიკალის დაყვანა საერთო მაჩვენებელზე

სხვადასხვა მაჩვენებლიანი რადიკალები შეიძლება დაიყვანოთ საერთო მაჩვენებელზე, რისთვისაც საკმარისია ვიპოვოთ ყველა რადიკალის მაჩვენებლის უმცირესი საერთო ჯერადი, მოცემული რადიკალების თითოეული მაჩვენებელი გა-

ვამრავლოთ სათანადო დამატებით მამრავლზე, მასთან რადიკალქვეშა გამოსახულება ავახარისხოთ სათანადო ხარისხში.

ყოველივე ზემოთ თქმული ავხსნათ კონკრეტულ მაგალითებზე:

$$\sqrt{ab}\ ; \quad \sqrt[3]{ax}\ ; \quad \sqrt[6]{a}$$

როგორც ვხედავთ, რადიკალის მაჩვენებლების 2-ის, 3-ისა, და 6-ის უმცირესი საერთო ჯერადია 6, დამატებითი თანამამრავლებია, შესაბამისად, 3, 2 და 1, ამიტომ გვექნება:

$$\sqrt{ab}=\sqrt[6]{(ab)^3}=\sqrt[6]{a^3b^3}\ ; \qquad \sqrt[3]{ax}=\sqrt[6]{(ax)^2}=\sqrt[6]{a^2x^2};$$

$$\sqrt[6]{a}=\sqrt[6]{(a)^1}=\sqrt[6]{a}.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

დაიყვანეთ საერთო მაჩვენებელზე:

1. $\sqrt[3]{(a+b)^2}$; $\sqrt[4]{ax^3}$ და $\sqrt[5]{(a-b)^2}$

2. $\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{\dfrac{m}{n}}$ და $\sqrt[4]{\dfrac{p}{q}}$.

3. $\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ და $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$.

§ 12. ფესვების ალგებრული მნიშვნელობა

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 3. ფესვს ეწოდება ალგებრული, თუ არ არის მოთხოვნილი, რომ ის იყო ამოღებული დადებითი რიცხვიდან და თვითონაც იყოს დადებითი.

ამრიგად, თუ $\sqrt[n]{a}$ გამოსახულებაში ვგულისხმობთ n-ური ხარისხის ალგებრულ ფესვს, ეს იმას ნიშნავს, რომ როგორც a რიცხვი ისე, $\sqrt[n]{a}$ შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითიც.

აღსანიშნავია ალგებრული ფესვის შემდეგი თვისებები:

ა) კენტი ხარისხის ფესვი დადებითი რიცხვიდან დადებითია:

$$\sqrt[3]{8}=2; \quad \sqrt[5]{32}=2; \quad \sqrt[3]{27}=3.$$

როგორც ვხედავთ, ფესვის მნიშვნელობები დადებითი რიცხვებია და სხვანაირად არც შეიძლებოდა, ვინაიდან უარყოფითი რიცხვის კენტი ხარისხი ყოველთვის უარყოფით რიცხვს გვაძლევს.

ბ) კენტი ხარისხის ფესვი უარყოფითი რიცხვიდან უარყოფითია:

$$\sqrt[3]{-8}=-2, \quad \sqrt[5]{-243}=-3.$$

ეს თავისთავად ცხადია, რადგანაც დადებითი რიცხვის ნებისმიერი ხარისხი იძლევა ისევ დადებით რიცხვს, და არა უარყოფითს.

გ) ლუწი ხარისხის ფესვს დადებითი რიცხვიდან ორი აბსოლუტურად ტოლი და ნიშნით მოპირდაპირე მნიშვნელობა აქვს;

$\sqrt{+9}=+3$, და $\sqrt{+9}=-3$, ვინაიდან $(+3)^2=9$ და $(-3)^2=9$, ასევე $\sqrt[4]{+16}=+2$ და $\sqrt[4]{+16}=2$, რადგან $(+2)^4=+16$; და $(-2)^4=+16$.

დადებითი რიცხვიდან ლუწი ხარისხის ფესვის მნიშვნელობას აღნიშნავენ შემდეგნაირად:

$$\sqrt[4]{16}=\pm 2;\ \sqrt{4}=\pm 2;\ \sqrt{9}=\pm 3;\ \sqrt{16x^{10}}=\pm 4x^{5}$$ და ა. შ.

ლუწი ხარისხის ფესვი უარყოფითი რიცხვიდან შეუძლებელია იყოს დადებითი ან უარყოფითი რიცხვი, ვინაიდან ორივე რიცხვის, როგორც დადებითის, ისე უარყოფითის, ლუწი ხარისხი იძლევა დადებით რიცხვს და არა უარყოფითს. მაგალითად, $\sqrt{-25}$ არ უდრის არც $+5$-ს და არც -5-ს.

ლუწი ხარისხის ფესვი უარყოფითი რიცხვიდან წარმოადგენს წარმოსახვით რიცხვს.*

სავარჯიშო

გამოიანგარიშეთ:

1. $\sqrt{100}$, $\sqrt{0{,}01}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{1}{16}}$, $\sqrt{\frac{9}{25}}$, $\sqrt{a^2}$, $\sqrt{b^2}$;

2. $(\sqrt{3})^2$, $(\sqrt[3]{27})^3$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$, $\sqrt[4]{81}$,

§ 13. ფესვის უმარტივესი გარდაქმნა

ა) თანამამრავლის გამოტანა რადიკალის ნიშნის გარეთ.

ფესვქვეშა გამოსახულება ხშირად შეიძლება დაიშალოს ისეთ თანამამრავლებად, რომ ზოგი მათგანიდან შევძლოთ ზუსტად ამოფესვა. ასეთ შემთხვევაში ეს თანამამრავლები ამოფესვის შემდეგ რადიკალის ნიშნის წინ გამოიტანება.

მაგალითები:

1. $\sqrt{a^5}=\sqrt{a^4\cdot a}=\sqrt{a^4}\ \sqrt{a}=a^2\sqrt{a}$;

2. $\sqrt[3]{a^{11}}=\sqrt[3]{a^9\cdot a^2}=\sqrt[3]{a^9}\ \sqrt[3]{a^2}=a^3\sqrt[3]{a^2}$;

3. $\sqrt[5]{a^{11}b^{12}}=\sqrt[5]{a^{10}ab^{10}b^2}=a^2b^2\sqrt[5]{ab^2}$.

ბ) თანამამრავლების შეტანა რადიკალის ნიშნის ქვეშ

ზოგჯერ საჭირო ხდება რადიკალის წინ დაწერილი თანამამრავლი რადიკალის ნიშნის ქვეშ შევიტანოთ: ასეთ შემთხვევაში საკმარისია რადიკალის ნიშნის წინ დაწერილი თითოეული თანამამრავლი ავახარისხოთ ფესვის მაჩვენებლის ტოლ ხარისხში და გავამრავლოთ ფესვქვეშა გამოსახულებაზე.**

მაგალითები: 1.

1. $a\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^3\cdot a}=\sqrt[3]{a^4}$;

2. $-a\sqrt{a}=-\sqrt{a^3}$;

3. $2a^2b\sqrt[3]{ab^2}=\sqrt[3]{(2a^2b)^3\cdot ab^2}=\sqrt[3]{8a^6b^3\cdot ab^2}=\sqrt[3]{8a^7b^5}$;

4. $3a^mb^n\sqrt[k]{a^{2m}b^3}=\sqrt[k]{(3a^mb^n)^k\cdot a^{2m}b^3}=\sqrt[k]{3^ka^{km}b^{kn}\cdot a^{2m}b^3}=\sqrt[k]{3^ka^{m(k+2)}b^{kn+3}}$.

---

* წარმოსახვითი რიცხვები განხილული იქნება ცალკე თავში.

** $a\cdot\sqrt[2n]{b}=\begin{cases}\sqrt[2n]{a^{2n}\cdot b} & \text{თუ } a\geqslant 0\\ -\sqrt[2n]{a^{2n}b} & \text{თუ } a<0,\end{cases}$

სადაც $b\geqslant 0$ და a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

სავარჯიშო.

1. გამოიტანეთ თანამამრავლები ფესვის ნიშნის გარეთ:

ა) $\sqrt{8a^3}$; $\sqrt{32a^5b^7}$; $\sqrt{72a^6b^5c^7}$; $\sqrt{\frac{1}{18}a^3b^3}$

ბ) $\sqrt[3]{81x^6y^4}$; $\sqrt{98(a+b)^3}$ $\sqrt{0,25x^3y^{5n}}$,

გ) გამოიანგარიშეთ ზეპირად, რომელია მეტი $2\sqrt{3}$ თუ $3\sqrt{2}$: $2\sqrt[3]{3}$ თუ $3\sqrt[3]{2}$; $5\sqrt{7}$ თუ $8\sqrt{3}$;

შეიტანეთ თანამამრავლები ფესვის ნიშნის ქვეშ:

ა) $3a\sqrt{\frac{1}{9}ab}$ $\frac{1}{3}\sqrt{18x^3y}$; $2a^2b\sqrt[3]{3ab^6}$;

ბ) $(a+b)^2\sqrt[3]{a+b}$; $3(x+y)\sqrt{a+b}$;

გ) გამოიანგარიშეთ: $\sqrt{50}-5\sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{128}$; $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{686}-\sqrt[3]{16}$;

დ) გაამარტივეთ:

$$\sqrt{5\sqrt[3]{625}} \quad \sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}}; \quad \sqrt[5]{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{8}}}$$

გ) ფესვქვეშა გამოსახულების განთავისუფლება მნიშვნელისაგან ვთქვათ, საჭიროა $\sqrt{\frac{40}{5}}$ გამოსახულების მნიშვნელისაგან განთავისუფლება. ასეთ შემთხვევაში ფესვქვეშა წილადი უნდა გარდავქმნათ ისე, რომ მნიშვნელიდან ამოდიოდეს კვადრატული ფესვი.

მაგალითები:

$$1.\quad \sqrt{\frac{2a}{5}}=\sqrt{\frac{2a\cdot 5}{5\cdot 5}}=\sqrt{\frac{10a}{25}}=\frac{\sqrt{10a}}{5}=\frac{1}{5}\sqrt{10a}:$$

$$2.\quad \sqrt{\frac{3}{4a^3bc}}=\sqrt{\frac{3abc}{4a^3bc\cdot abc}}=\sqrt{\frac{3abc}{4a^4b^2c^2}}=\frac{1}{2a^2bc}\cdot\sqrt{3abc}.$$

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ, თუ ფესვქვეშა გამოსახულება წარმოადგენს ალგებრულ ჯამს, თითოეული შესაკრებიდან ცალ-ცალკე ამოფესვა არ შეიძლება.
მაგალითად, $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ და არა $\sqrt{16}+\sqrt{9}=7$. აქედან ჩანს, რომ მოქმედება ამოფესვას შეკრების მიმართ განრიგებადობის თვისება არ ახასიათებს (ასეა ახარისხების შემთხვევაშიც).

სავარჯიშო

1 გაათავისუფლეთ მნიშვნელისაგან ფესვქვეშა გამოსახულებები:

ა) $\sqrt{\frac{2}{7}}$; $\sqrt{\frac{3}{5}}$; $\sqrt{\frac{3}{7}}$; $\sqrt{1\frac{1}{2}}$; $\sqrt{3\frac{1}{3}}$; $\sqrt{2\frac{1}{7}}$.

ბ) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{\frac{5}{12}}$; $\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$.

გ) $x\sqrt{\frac{1}{8}}$; $n\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$; $b\sqrt[4]{\frac{a}{b^3}}$; $y\sqrt[5]{\frac{x^5}{y^3}}$; $6n\sqrt{\frac{m}{2n}}$.

დ) $\frac{4a}{3m}\sqrt[3]{\frac{3m}{2a}}$; $15mn\sqrt[4]{\frac{n^3m}{27m^2n^3}}$; $(a+b)\sqrt{\frac{1}{a+b}}$;

$(m-n)\sqrt[8]{\frac{m+n}{(m-n)^2}}$

§ 11. ფესვების მსგავსება

განსაზღვრა 1. მსგავსი ეწოდება ისეთ ფესვებს, რომლებსაც ფესვის მაჩვენებლები და ფესვქვეშა გამოსახულებები ერთნაირი აქვთ.

მაგალითად, მსგავსია შემდეგი ფესვები:

$$2x\sqrt{3ab},\quad -3a^2b\sqrt{3ab},\quad \frac{2}{5}xy\sqrt{3ab}.$$

საერთოდ, ფესვების მსგავსება რომ დავადგინოთ, საჭიროა მიმდევრობით შევასრულოთ შემდეგი სახის გარდაქმნები:

ა) გამოვიტანოთ ფესვის ნიშნის წინ თანამამრავლები (თუ ეს შეიძლება);

ბ) ფესვქვეშა გამოსახულება გავათავისუფლოთ წილადისაგან;

გ) ფესვის მაჩვენებელი და ფესვქვეშა გამოსახულების ხარისხის მაჩვენებელი შევკვეცოთ მათს უდიდეს საერთო გამყოფზე (თუ ეს შესაძლებელია).

ყველა ამ გარდაქმნების შემდეგ ფესვი ღებულობს უმარტივეს სახეს და შეიძლება გამოვლინდეს მათი მსგავსებაც.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

დავიყვანოთ უმარტივეს სახეზე და დავადგინოთ მსგავსია თუ არა ფესვები:

1. $\sqrt{1\frac{1}{3}}$, $\sqrt{5\frac{1}{3}}$ და $\sqrt{16\frac{1}{3}}$;

$$\sqrt{1\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{4\cdot3}{3\cdot3}}=\sqrt{\frac{12}{9}}=\frac{\sqrt{12}}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{4\cdot3}=\frac{2}{3}\sqrt{3};$$

$$\sqrt{5\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{16}{3}}=\sqrt{\frac{16\cdot3}{3\cdot3}}=\sqrt{\frac{16\cdot3}{9}}=\frac{4}{3}\sqrt{3},$$

$$\sqrt{16\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{49}{3}}=\sqrt{\frac{49\cdot3}{3\cdot3}}=\sqrt{\frac{49\cdot3}{9}}=\frac{7}{3}\sqrt{3}$$

ვხედავთ, რომ მოცემული ფესვები მსგავსია.

2. $\sqrt{a^3x}$, $\sqrt{ax^3}$ და $\sqrt{ax}$;

$$\sqrt{a^3x}=\sqrt{a^2\cdot a\cdot x}=a\sqrt{ax}.$$

$$\sqrt{ax^3}=\sqrt{ax^2x}=x\sqrt{ax}.$$

როგორც ვხედავთ, მოცემული რადიკალებიც მსგავსი აღმოჩნდა.

3. $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b^4}{a^2}}$; $\frac{a^3}{b}\sqrt[3]{\frac{a^7}{b^2}}$ და $\frac{b}{a^2}\sqrt[3]{\frac{a^{10}}{b^5}}$.

$$\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b^4}{a^2}}=\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{ab^3\cdot b}{a^3}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{ab};$$

$$\frac{a^2}{b}\sqrt[3]{\frac{a^7}{b^2}}=\frac{a^2}{b}\sqrt[3]{\frac{a^6\cdot a\quad b}{b^3}}=\frac{a^2}{b^2}\cdot a^2\sqrt{ab}=\frac{a^4}{b^2}\sqrt[3]{ab}.$$

$$\frac{b}{a^2}\sqrt[3]{\frac{a^{10}}{b^5}}=\frac{b}{a^2}\sqrt[3]{\frac{a^9\,ab}{b^6}}=\frac{b}{a^2}\cdot\frac{a^3}{b^2}\sqrt[3]{ab}=\frac{a}{b}\sqrt[3]{ab}.$$

ვხედავთ, რომ ეს უკანასკნელი ფესვებიც მსგავსია.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო:

(ზეპირად) დაამტკიცეთ მსგავსება ფესვებისა:

1. ა) $\sqrt{2}$ და $\sqrt{8}$; $\sqrt{3}$ და $\sqrt{75}$;

ბ) $3\sqrt{12}$ და $2\sqrt{48}$; $5\sqrt{63}$ და $4\sqrt{28}$.

2. ა) $2\sqrt[3]{250}$ და $3\sqrt[3]{128}$; ბ) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{108}$ და $\frac{3}{2}\sqrt[3]{32}$;

3. ა) $\sqrt[3]{1\frac{1}{8}}$ და $\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$; ბ) $\sqrt[3]{\frac{72}{343}}$ და $\sqrt[3]{41\frac{2}{3}}$;

გ) $\sqrt{\frac{1}{125}}$ და $\sqrt[4]{\frac{80}{81}}$;

4. ა) $2\sqrt{a^3b^3c}$, $3\sqrt{a^3bc^3}$ და $4\sqrt{ab^3c^3}$;

ბ) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y}}$ და $\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}$;

გ) $\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$ $\sqrt[5]{ab^4}$ და $\sqrt[5]{\frac{b^4}{a^4}}$;

დ) $\sqrt[3]{\frac{x+y}{(x-y)^2}}$ და $\sqrt[3]{\frac{1}{y}-\frac{x}{y^3}}$;

ე) $\sqrt[3]{\frac{x^5}{(x^2-1)^2}}$ და $\sqrt[3]{\frac{x^3+x^2}{(x-1)^2}}$;

ვ) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}-1}$ და $\frac{a-b}{b}\sqrt{\frac{1}{ab-b^2}}$;

ზ) $\sqrt{\frac{1}{a^3b^2-a^2b}}$; $\sqrt{4a^3b^2-4a^2b^3}$ და $\sqrt{a^3+a^2b-ab^2-b^3}$;

თ) $\sqrt[n]{x^{n+1}y^{n+2}}$ და $\sqrt[n]{\frac{x^{2n+1}}{y^{n-2}}}$.

§ 46. ფესვებზე მოქმედება

1. ფესვების შეკრება-გამოკლება

ფესვებზე შეკრება-გამოკლების ოპერაცია რომ ვაწარმოოთ, ამისათვის საჭიროა წინასწარ დავიყვანოთ ისინი უმარტივეს სახეზე, მივუწეროთ ერთიმეორეს თავიანთი ნიშნით, ბოლოს, შევაერთოთ მსგავსი წევრები.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

$$1.\quad (5\sqrt{a}-3\sqrt{25a})+(2\sqrt{36a}+2\sqrt{9a})=5\sqrt{a}-15\sqrt{a}+12\sqrt{a}+$$
$$+6\sqrt{a}=\sqrt{a}\,(5-15+12+6)=8\sqrt{a}.$$

$$2)\quad 6a\sqrt{63ab^3}-3\sqrt{112a^3b^3}+2ab\sqrt{343ab}-5b\sqrt{28a^3b}=6a\sqrt{9\cdot 7ab^2b}-$$
$$-3\sqrt{16\cdot 7a^2\cdot ab^2\cdot b}+2ab\sqrt{49\cdot 7ab}-5b\sqrt{4\cdot 7a^2ab}=6a\cdot 3b\sqrt{7ab}-$$
$$-3\cdot 4ab\sqrt{7ab}+2ab\cdot 7\sqrt{7ab}-5b\cdot 2a\cdot\sqrt{7ab}=$$
$$=(18ab-12ab+14ab-10ab)\cdot\sqrt{7ab}=10ab\sqrt{7ab}.$$

2. ფესვების გამრავლება

§ 39-ში განვიხილეთ ნამრავლისა და წილადის ამოფესვის საკითხი, მასთან დაკავშირებით ჩამოვაყალიბეთ ერთნაირმაჩვენებლიანი რადიკალების გამრავლებისა და გაყოფის წესები.

ახლა განვიხილოთ სხვადასხვა მაჩვენებლიანი ფესვების გამრავლების და გაყოფის საკითხი.

ვთქვათ, გვინდა გადავამრავლოთ $\sqrt[n]{a}$ და $\sqrt[m]{b}$. თუ გამოვიყენებთ § 39-ის დ) თვისებას, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^m};\quad \sqrt[m]{b}=\sqrt[mn]{b^n},$$

საიდანაც

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[mn]{a^m}\cdot\sqrt[mn]{b^n}=\sqrt[mn]{a^m\cdot b^n}$$

მაგალითად,

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{4\cdot 75}=\sqrt[6]{(2\cdot 5)^2 5}=\sqrt[3]{50};$$

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ $\sqrt[n]{a}$ და $\sqrt[m]{b}$ ფესვებისათვის საერთო მაჩვენებლად ყველაზე ხელსაყრელია n და m რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადის აღება. მაგალითად, თუ გვინდა $\sqrt[4]{3}$ და $\sqrt[6]{2}$ ფესვების გადამრავლება, მაშინ საერთო მაჩვენებლად უნდა ავიღოთ 4 და 6-ის უმცირესი ჯერადი, ე. ი. 12.

მაშასადამე,

$$\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{27};\qquad \sqrt[6]{2}=\sqrt[12]{2^2}=\sqrt[12]{4};$$

ამიტომ

$$\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[6]{2}=\sqrt[12]{27}\cdot\sqrt[12]{4}=\sqrt[12]{108}.$$

3. ფესვების გაყოფა

§ 39-ში განხილული გვაქვს ერთნაირმაჩვენებლიანი ფესვების გაყოფის წესი:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

სხვადასხვა მაჩვენებლიანი ფესვების გაყოფისათვის საჭიროა წინასწარ დავიყვანოთ ისინი საერთო მაჩვენებელზე და შემდეგ გავყოთ, როგორც ერთნაირმაჩვენებლიანი ფესვები.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

1. $\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}:\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{8:4}=\sqrt[6]{2};$

2. $\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[3]{a}=\sqrt[12]{a^9}:\sqrt[12]{a^4}=\sqrt[12]{a^9:a^4}=\sqrt[12]{a^5};$

3. $$\frac{a}{b}\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^3}}:a\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}=\left(\frac{a}{b}:a\right)\sqrt[15]{\left(\frac{a^3}{b^3}\right)^3}:\sqrt[15]{\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^5}=$$
$$=\frac{a}{ab}\cdot\sqrt[15]{\frac{a^9}{b^9}:\frac{a^{10}}{b^{10}}}=\frac{1}{b}\sqrt[15]{\frac{a^9\cdot b^{10}}{a^{10}b^9}}=\frac{1}{b}\sqrt[15]{\frac{b}{a}};$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. შეასრულეთ ნაჩვენები მოქმედება:

ა) $(2\sqrt{18}+3\sqrt{8})+(3\sqrt{32}-\sqrt{50});$

ბ) $(0{,}5\sqrt{24}-3\sqrt{40})-(\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{1000});$

გ) $(\sqrt[3]{125x}-\sqrt[3]{8x})-(\sqrt[3]{27x}-\sqrt[3]{64x});$

დ) $(\sqrt{9x}-\sqrt[3]{8y})-(\sqrt[3]{27y}-\sqrt{16x});$

ე) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{4{,}5}-\sqrt{12{,}5}-0{,}5\sqrt{200}+\sqrt{242}+6\sqrt{1\frac{1}{8}}-\sqrt{24{,}5};$

ვ) $4b\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}+\frac{2}{a}\sqrt{a^3b}-3a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}-\sqrt[3]{a^2b^4};$

ზ) $\sqrt[4]{\frac{1}{x^2y}}-\sqrt[4]{\frac{x^6}{y^5}}-\sqrt[4]{x^{10}y^7}+\sqrt[4]{\frac{y^3}{x^6}};$

თ) $\sqrt{(1+x)^2y}+\sqrt{(1-x)^2y}-\sqrt{(x-y)^2}-\sqrt{4y}+\sqrt{(x+y)^2}.$

ი) $\sqrt{a^2x-2abx+b^2x}-\sqrt{a^2x-2acx+c^2x}+\sqrt{b^2x+2bcx+c^2x};$

კ) $$3a\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}-3x\sqrt{\frac{a-x}{a^2-x^2}}-2a\sqrt{\frac{(a+x)(a-x)}{(a+x)^2}}+$$
$$+\frac{4x}{a+x}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{4}};$$

2. შეასრულეთ გამრავლება

ა) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{ab}$; $5\sqrt[4]{2a}\cdot 2\sqrt[4]{8a^2}$; $(\sqrt{12}-3\sqrt{75})\sqrt{3}$;

ბ) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{a}+\frac{3}{4}\sqrt{a^3}-\frac{7}{8}\sqrt{a^5}\right)\cdot(-16\sqrt{a^3})$;

$(4x\sqrt[3]{x^2}-5y\sqrt[3]{xy}+xy\sqrt[3]{y^2})\cdot 2xy\sqrt[3]{xy}$.

გ) გადაამრავლეთ ზეპირად: $(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})$; $(\sqrt{a}+\sqrt{x})(\sqrt{a}-\sqrt{x})$;

დ) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}$; $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}$; $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[5]{y}$;

ე) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{4}$; $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[6]{2}$;

ვ) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^5}$; $a^2b\sqrt[6]{16a^5b}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{2ab}\cdot b\sqrt[3]{4ab^2}$;

ზ) $\frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{81x^5}{25y^4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{3y}{5x}}$; $0{,}2\sqrt[5]{\frac{ab^3}{cd^4}}\cdot 5\sqrt[10]{\frac{c^3d^2}{a^3b}}$;

თ) $(2\sqrt[3]{m^4}+\sqrt[3]{\ }\quad 3\sqrt{m})(\sqrt[12]{m^4}-\sqrt[3]{m})$.

3. შეასრულეთ ფესვების გაყოფა:

ა) $\sqrt{90}:\sqrt{18}$; $\sqrt{3a}:\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{6a^4}:\sqrt[3]{2a}$; $\sqrt[4]{a^5}:\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[4]{9a^3}:\sqrt[4]{\frac{a}{9}}$;

ბ) $\sqrt[3]{1\frac{1}{8}}\ \sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$; $\sqrt[3]{0{,}2}:\sqrt[3]{25}$; $0{,}75\sqrt[3]{9}:0{,}25\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$;

გ) $(\sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}):\sqrt{xy}$; $(\sqrt{a^5b^3}-\sqrt{a^3b^5}):\sqrt{a^3b^3}$;

დ) $\sqrt[6]{3}:\sqrt[12]{18}$; $\sqrt{a}:\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[12]{n^{11}}:\sqrt[4]{n^3}$; $\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[3]{a}$;

ე) $\sqrt[3]{\frac{a}{x^2}}\ \sqrt[4]{\frac{x}{a^3}}$; $\frac{a}{b}\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^3}}:a\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$; $\frac{4a^2}{15b}\sqrt[4]{\frac{a^2}{a-b}}$

$:\frac{2a}{5b}\sqrt{\frac{a^3}{a-b}}$;

ვ) $6ab\sqrt[9]{a^8b^3}:\frac{2a}{3b}\sqrt[6]{a^2b^5}$; $(10\sqrt[3]{9}+5\sqrt{3}):\sqrt[3]{3}$;

ზ) $\left(\frac{a}{b^3}\sqrt{ab}-6a^3b^2\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[8]{a^4b^3}\right):\frac{a^2}{b}\sqrt[6]{ab^2}$;

§ 48. წილადის მნიშვნელის განთავისუფლება რადიკალისაგან

ზოგჯერ საჭირო ხდება წილადის მნიშვნელის განთავისუფლება რადიკალისაგან, რასაც ვაღწევთ მოცემული გამოსახულების სათანადო გარდაქმნით. განვიხილოთ ეს საკითხი კონკრეტულ მაგალითზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გავათავისუფლოთ რადიკალისაგან $\frac{3}{\sqrt{5}}$ წილადის მნიშვნელი. წილადის ძირითადი თვისების გამოყენებით, ეს წილადი შეგვიძლია გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

2. გავათავისუფლოთ $\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$ წილადის მნიშვნელი რადიკალისაგან:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9}}=\frac{2\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}}=\frac{2\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}}=\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}.$$

3. გავათავისუფლოთ რადიკალისაგან $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{8}}$ წილადის მნიშვნელი. ასეთ შემთხვევაში მოცემული წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი უნდა გავამრავლოთ $\sqrt{5}+\sqrt{8}$ გამოსახულებაზე. $\sqrt{5}+\sqrt{8}$ გამოსახულებას ეწოდება $\sqrt{5}-\sqrt{8}$ გამოსახულების შეუღლებული.

ამრიგად გვექნება:

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{8}}=\frac{6\sqrt{5}+\sqrt{8}}{(\sqrt{5}-\sqrt{8})(\sqrt{5}+\sqrt{8})}=\frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{8})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{8})^2}=$$

$$=\frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{8})}{5-8}=-2(\sqrt{5}+\sqrt{8});$$

4. გავათავისუფლოთ რადიკალისაგან $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$ წილადის მნიშვნელი:

$$\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}=\frac{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2}{(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})}=$$

$$=\frac{a+b-2\sqrt{(a+b)(a-b)}+a-b}{(\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{a-b})^2}=\frac{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}{a+b-a+b}=$$

$$=\frac{2(a-\sqrt{a^2-b^2})}{2b}=\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

5. გავათავისუფლოთ რადიკალისაგან $\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ წილადის მნიშვნელი:

$$\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{12[(3+\sqrt{2})+\sqrt{3}]}{[(3+\sqrt{2})-\sqrt{3}][(3+\sqrt{2})+\sqrt{3}]}=\frac{12(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=$$

$$=\frac{12(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{9+6\sqrt{2}+2-3}=\frac{12(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{8+6\sqrt{2}}=\frac{6(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4+3\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{6(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})(4-3\sqrt{2})}{(4+3\sqrt{2})(4-3\sqrt{2})}=\frac{6(12-9\sqrt{2}+4\sqrt{2}-6+4\sqrt{3}-3\sqrt{6})}{16-9\cdot 2}=$$

$$=-3(6-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}-3\sqrt{6}).$$

6. გავათავისუფლოთ რადიკალისაგან $\frac{6}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{4}}$ წილადის მნიშვნელი:

$$\frac{6}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{4}}=\frac{6(\sqrt[3]{7^2}-\sqrt[3]{7\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2})}{(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{7^2}-\sqrt[3]{7\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2})}=\frac{6(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16})}{(\sqrt[3]{7})^3+(\sqrt[3]{4})^3}=$$

$$=\frac{6(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16})}{11};$$

საზოგადოდ, თუ გვაქვს წილადი $\frac{n}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}$, მაშინ მისი მრიცხველი და მნიშვნელი უნდა გამრავლდეს ისეთ თანამამრავლზე, რომ მნიშვნელში გვქონდეს $(\sqrt[3]{a})^3\pm(\sqrt{b})^3$; კერძოდ, $\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$;

ხოლო, თუ გვაქვს წილადი $\frac{n}{\sqrt[3]{a^2}\pm\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$, მაშინ მრიცხველსა და მნიშვნელს გავამრავლებთ $\sqrt[3]{a}\mp\sqrt[3]{b}$ გამოსახულებაზე.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

გაათავისუფლეთ წილადის მნიშვნელები რადიკალებისაგან:

1. $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$; $\frac{x}{\sqrt[4]{x^3}}$; $\frac{9}{\sqrt[4]{9}}$; $\frac{a}{\sqrt[7]{x^3}}$; $\frac{a}{\sqrt{a+b}}$; $\frac{a+1}{\sqrt[3]{a^2-9}}$;

2. $\frac{2}{2+\sqrt{2}}$; $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; $\frac{m+n+\sqrt{m^2-n^2}}{m+n-\sqrt{m^2-n^2}}$; $\frac{a\sqrt{x}-b\sqrt{y}}{a\sqrt{x}+b\sqrt{y}}$;

3. $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$; $\frac{2}{\sqrt[3]{4}-1}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$; $\frac{n}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$.

§ 47. „რთული" კვადრატული რადიკალის გარდაქმნის ფორმულა

ასე ეწოდება ფორმულას:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}, \tag{1}$$

სადაც $a>0$, $b>0$ და $a^2>b$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა.

ვთქვათ, $\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=x$.

ავახარისხოთ კვადრატში ორივე ნაწილი, მივიღებთ:

$$x^2=2a+2\sqrt{a^2-b}, \quad \text{საიდანაც} \quad x=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}.$$

მაშასადამე,

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}=2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \qquad (2)$$

ამრიგად,

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

ანალოგიურად ვიპოვით:

$$\sqrt{a^2+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=2\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}. \qquad (3)$$

2) და (3) ფორმულებს თუ წევრ-წევრად ჯერ შევკრებთ და შემდეგ კი გამოვაკლებთ, მაშინ მივიღებთ (1) ფორმულას.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

1. გავამარტივოთ გამოსახულება

$$x=(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2}).$$

მოცემული რადიკალები წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=2\sqrt{2}; \quad \sqrt{72}=\sqrt{36\cdot 2}=6\sqrt{2}; \quad \sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=2\sqrt{5};$$

ამიტომ

$$2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2}=4\sqrt{2}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2}=3\sqrt{5}-3\sqrt{2}=$$

$$=3(\sqrt{5}-\sqrt{2}); \quad \sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2}=4\sqrt{2}-10\sqrt{5}=2(2\sqrt{2}-5\sqrt{5}).$$

ამრიგად,

$$x=6(\sqrt{5}-\sqrt{2})(2\sqrt{2}-5\sqrt{5})=6(2\sqrt{10}-5\sqrt{5^2}-2\sqrt{2^2}+5\sqrt{10})=$$

$$=12\sqrt{10}-150-24+30\sqrt{10}=42\sqrt{10}-174;$$

2. დავადგინოთ, $2\sqrt{8-\sqrt{15}}$ და $\sqrt{30}+\sqrt[3]{3}$ რიცხვებიდან რომელია მეტი. ავახარისხოთ ორივე რიცხვი კვადრატში

$$4(8-\sqrt{15}), \quad 30+2\sqrt{30}\cdot\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}.$$

ცხადია, პირველი გამოსახულება ან ნაკლებია, ან მეტია, ან ტოლია მეორე გამოსახულებისა:

$$4(8-\sqrt{15})\gtreqless 30+2\sqrt{30}\cdot\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}.$$

საიდანაც

$$-2\sqrt{30}\cdot\sqrt[3]{3}-4\sqrt{15}\gtreqless\sqrt[3]{9}-2,$$

ვინაიდან უკანასკნელი გამოსახულების მარცხენა ნაწილი ნაკლებია 0-ზე, ამიტომ ადგილი უნდა ჰქონდეს თანაფარდობას

$$2\sqrt{8-\sqrt{15}} < \sqrt{30}+\sqrt[3]{3}.$$

3. გარდავქმნათ ნამრავლი

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\;\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\times$$
$$\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

1-ლი, მე-2 და მე-3 თანამამრავლთა ფესვქვეშა გამოსახულებები დადებითია.

შევამოწმოთ მე-4 თანამამრავლი; მე-4 თანამამრავლის ფესვქვეშა გამოსახულება რომ დადებითი იყოს, საჭიროა ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$2>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

მართლაც, თუ ორივე მხარეს ავახარისხებთ კვადრატში, გვექნება:

$$4>2+\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

საიდანაც

$$2>\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

თუ ისევ ავახარისხებთ კვადრატში, გვექნება:

$$4>2+\sqrt{3} \text{ ანუ } 2>\sqrt{3}.$$

გამოვთვალოთ ახლა მე-3 და მე-4 თანამამრავლთა ნამრავლი:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\;\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

თუ ამ უკანასკნელს გადავამრავლებთ მე-2 თანამამრავლზე, გვექნება:

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\;\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

დასასრულ, მიღებული შედეგის გამრავლება 1-ლ თანამამრავლზე მოგვცემს:

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}\;\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{4-3}=1.$$

ამრიგად,

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\;\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\;\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$
$$\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1.$$

4. გავამარტივოთ გამოსახულება

$$S=\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$$

თანმიმდევრობით გამოვიყენოთ რთული რადიკალის გარდაქმნის ფორმულა:

$$\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{9+\sqrt{81-32}}{2}}+\sqrt{\frac{9-\sqrt{81-32}}{2}}=2\sqrt{2}+1,$$

$$(a=9,\quad b=32)$$

$$\sqrt{2+(2\sqrt{2}+1)}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{9-8}}{2}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{9-8}}{2}}=$$

$$=\sqrt{2}+1\quad(a=3,\quad b=8);$$

$$S=\sqrt{13+30(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{43+30\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{43+7}{2}}+\sqrt{\frac{43-7}{2}}=$$

$$=5+3\sqrt{2}\quad(a=43,\ b=1800).$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. მოახდინეთ გარდაქმნა რთული რადიკალის ფორმულის გამოყენებით:

ა) $\sqrt{8-\sqrt{15}}$;

ბ) $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$

დაამტკიცეთ უტოლობა:

$$\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1},\quad n>2.$$

§ 18. ხარისხის ცნების განზოგადოება

1. ნ უ ლ მ ა ჩ ვ ე ნ ე ბ ლ ი ა ნ ი ხ ა რ ი ს ხ ი

ტოლფუძიანი ხარისხების გაყოფის დროს შეიძლება გასაყოფის ხარისხის მაჩვენებელი აღმოჩნდეს გამყოფის მაჩვენებელზე მეტი, ტოლი ან ნაკლები.

პირველ შემთხვევაზე აქ არ შევჩერდებით, ვინაიდან ეს შემთხვევა კარგადაა ცნობილი წინა კლასებიდან.

განვიხილოთ მეორე შემთხვევა, ე. ი. როცა ხარისხის მაჩვენებლები ტოლია:

$$a^3:a^3=a^{3-3}=a^0;\quad a^6:a^6=a^{6-6}=a^0,$$

საზოგადოდ,

$$a^n:a^n=a^{n-n}=a^0.$$

a^0 გამოსახულებას გარკვეული აზრი რომ მივცეთ, ამისათვის საჭიროა გავიხსენოთ შემდეგი წესი: ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვის მისსავე ტოლ რიცხვზე გაყოფით მიიღება 1.

ასე რომ, $a^n:a^n=1$ $(a\neq 0)$.

ამის გამო, შეთანხმების საფუძველზე, a^0 1-ის ტოლია.

ნულისაგან განსხვავებული ყოველი რიცხვი ნულ ხარისხში ერთის ტოლია, ე. ი. თუ $a\neq 0$, მაშინ $a^0=1$.

2. უ ა რ ყ ო ფ ი თ მ ა ჩ ვ ე ნ ე ბ ლ ი ა ნ ი ხ ა რ ი ს ხ ე ბ ი

განვიხილოთ ტოლფუძიანი ხარისხების გაყოფის ერთი შემთხვევა, როცა გა-

საყოფის ხარისხის მაჩვენებელი ნაკლებია გამყოფის ხარისხის მაჩვენებელზე. მაგალითად,

$$a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}.$$
$$a : a^3 = a^{1-3} = a^{-2}.$$

საზოგადოდ, $a^n : a^{n+2} = a^{n-(n+2)} = a^{n-n-2} = a^{-2}$

$$a^n : a^{2n} = a^{n-2n} = a^{-n}. \quad \text{და ა. შ.}$$

ამრიგად, როცა გამყოფის ხარისხის მაჩვენებელი აღემატება გასაყოფისას, მაშინ გამყოფში ვღებულობთ ასოს (ფუძეს) უარყოფითი მაჩვენებლით.

ახლა დავუბრუნდეთ მოყვანილ მაგალითებს:

$a^2 : a^5 = a^{-3}$, მაგრამ $a^2 : a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3}$, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}.$$

ასევე $a : a^3 = a^{-2}$, მაგრამ $a : a^3 = \frac{a}{a^3} = \frac{1}{a^2}$, ამიტომ $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

ზოგადად, $a^n : a^{2n} = a^{-n}$, მაგრამ $a^n : a^{2n} = \frac{a^n}{a^{2n}} = \frac{1}{a^n}$, ამიტომ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

განხილული მაგალითების მიხედვით შეიძლება გაკეთდეს შემდეგი დასკვნა: **ნულისაგან განსხვავებული ყოველი რიცხვი უარყოფით მთელ ხარისხში უდრის წილადს, რომლის მრიცხველია 1, ხოლო მნიშვნელი იგივე ხარისხი დადებითი მაჩვენებლით. ე. ი. თუ $a \neq 0$ და m მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.**

ადვილად შეგვიძლია დავრწმუნდეთ იმაში, რომ უარყოფითმაჩვენებლიან ხარისხებზე შეგვიძლია ვაწარმოოთ ყველა მოქმედება იმავე წესით, რა წესითაც მას ვაწარმოებთ დადებითმაჩვენებლიან ხარისხებზე.

1. $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-(m+n)}$.

მართლაც,

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}.$$

ასევე, $a^{-m} \cdot a^n = a^{-m+n}$, რადგან $a^{-m} \cdot a^n = \frac{1}{a^m} \cdot a^n = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n}$.

2. $(a^{-m})^{-n} = a^{(-m)\cdot(-n)} = a^{mn}$;

მართლაც,

$$(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{mn}.$$

ასევე, $(a^m)^{-n} = a^{-mn}$, რადგან $(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$;

ჩვენ განვიხილეთ უარყოფითმაჩვენებლიანი ხარისხების გამრავლებისა და ახარისხების შემთხვევები, რადგანაც მათი შებრუნებული მოქმედებების —გაყოფისა და ამოფესვის წესები პირდაპირი მოქმედების წესების შებრუნებულს წარმოადგენს, ამიტომ მათ ცალკე არ განვიხილავთ.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. $a^{-3}b^{-4}=\frac{1}{a^3b^4}$;

2. $(2ax^{-3})^{-2}=2^{-2}a^{-2}x^6=\frac{x^6}{4a^2}$.

3. $(3x^3y^{-4})^{-3}=3^{-3}x^{-9}y^{12}=\frac{y^{12}}{27x^9}$.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. გამოიანგარიშეთ შემდეგი გამოსახულებანი:

ა) $(100)^0$; $\left(\frac{4}{9}\right)^0$; 3^{-2}; 10^{-3} $(-1)^{-4}$; $(-2)^{-2}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ $(0,1)^{-3}$.

2. წარმოადგინეთ მთელის სახით შემდეგი გამოსახულებანი:

$\frac{1}{a^3b^2}$; $\frac{3a}{2x^2y^3}$; $\frac{2x}{5a^2y^3z^5}$; $\frac{5}{a-2b}$; $\frac{2ab}{(1+x)^3(1-x)^3}$.

3. გამოიანგარიშეთ:

ა) $10a^3b^{-2}\cdot 5a^{-2}b^3$; $\frac{3}{4}a^{-2}\cdot\frac{2}{3}a^3b^6$; $0,3x^{-3}y^2\cdot 2x^3y^3$;

ბ) $x^{-2}:x^2$; $2a^{-3}b^{-2}:5a^4b^2$; $6c^2d^4:3c^{-1}d^{-2}$; $0,8x^{-1}:0,4^{n-1}$.

3. წ ი ლ ა დ მ ა ჩ ვ ე ნ ე ბ ლ ი ა ნ ი   ხ ა რ ი ს ხ ი.

1. როგორც ცნობილია, ხარისხის ამოფესვისათვის საჭიროა, ხარისხის მაჩვენებელი გავყოთ ფესვის მაჩვენებელზე, თუ გაყოფა შესაძლებელია უნაშთოდ. მაგალითად: $\sqrt{x^4}=x^2$, $\sqrt[3]{a^{12}}=a^4$; $\sqrt[3]{x^{15}}=x^5$ და ა. შ.

თუ ამ წესს გავავრცელებთ იმ შემთხვევაზეც, როცა ხარისხის მაჩვენებელი არ იყოფა ფესვის მაჩვენებელზე, მაშინ გვექნება:

$$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}\quad \sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}},\quad \sqrt[5]{a^3}=a^{\frac{3}{5}}\quad \text{და ა. შ.}$$

საზოგადოდ, გამოსახულება $a^{\frac{m}{n}}$, სადაც m და n მთელი რიცხვებია, აღნიშნავს n ხარისხის ფესვს a^m-დან,

ე. ი.

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\qquad (a>0).$$

შევთანხმდეთ აგრეთვე, რომ უარყოფით წილადმაჩვენებლები ვიხმაროთ იმ აზრით, რა აზრითაც ვხმარობდით უარყოფით მთელ მაჩვენებლებს.

მაგალითად, შევთანხმდეთ, რომ:

$$a^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}, \qquad a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

2. **წილადური მაჩვენებლის ძირითადი თვისება.** წილადმაჩვენებლიანი ხარისხის სიდიდე არ შეიცვლება, თუ მისი წილადური მაჩვენებლის მრიცხველსა და მნიშვნელს გავამრავლებთ ან გავყოფთ ნულისაგან განსხვავებულ ერთსა და იმავე რიცხვზე.

ასე მაგალითად,

$$a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{8}{12}}\ldots \quad \text{და ა. შ.} \quad x^{\frac{9}{12}}=x^{\frac{3}{4}}; \qquad x^{\frac{4}{6}}=x^{\frac{2}{3}};$$

ზოგადად,

$$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}$$

3. **მოქმედებანი წილადმაჩვენებლიან ხარისხებზე.**

ა) გ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ა:

$$a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\cdot\sqrt[nq]{a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq}\cdot a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}=$$
$$=a^{\frac{mq+np}{nq}}=a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

როგორც ვხედავთ, წილადმაჩვენებლიანი ხარისხების გამრავლებისას ხარისხის მაჩვენებლები იკრიბება ისე, როგორც მთელმაჩვენებლიანი ტოლფუძიანი ხარისხების გამრავლებისას.

მაგალითად,

$$a^{-\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{-3}{4}+\frac{2}{3}}=a^{\frac{-9+8}{12}}=a^{-\frac{1}{12}}.$$
$$5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{3}{5}}=5^{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}}=5^{\frac{5+6}{10}}=5^{\frac{11}{10}}.$$

ბ) გ ა ყ ო ფ ა:

$$a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}:\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}:\sqrt[nq]{a^{pn}}=$$
$$=\sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{pn}}}=\sqrt[nq]{a^{mq-pn}}=a^{\frac{mq-pn}{nq}}=a^{\frac{mq}{nq}-\frac{pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

ამრიგად, წილადმაჩვენებლიანი ხარისხების გაყოფის დროს ხარისხის მაჩვენებლები უნდა გამოვაკლოთ ისევე, როგორც ტოლფუძიანი ხარისხების გაყოფისას.

გ) ანალოგიურად, წილადმაჩვენებლიანი ხარისხების გამრავლების წესისა, შეიძლება გამოვიყვანოთ წილადმაჩვენებლიანი ხარისხების ახარისხების წესები.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო:

ა) ჩავწეროთ შემდეგი რადიკალები წილადური მაჩვენებლის სახით:

1. $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{a^5}$; $\sqrt[5]{a^2}$; $\sqrt{a-b}$; $\sqrt{a^2+b^2}$; $\sqrt[3]{x+y}$.

2. $\sqrt[5]{a^2b^3}$; $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$; $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^3b^3}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$; $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-y^2}}$; $\dfrac{2ab}{\sqrt[7]{(a+b)^6}}$.

ბ) წილადური მაჩვენებლები შეცვალეთ სათანადო რადიკალებით და გამოიანგარიშეთ შემდეგ გამოსახულებათა მნიშვნელობები:

1. $4^{\frac{1}{2}}$; $8^{\frac{1}{3}}$; $16^{\frac{3}{4}}$; $64^{-\frac{1}{2}}$, $(0{,}26)^{-\frac{1}{2}}$; $(0{,}36)^{\frac{1}{2}}$; $(-2)^{-\frac{2}{3}}$;

2. $(x-y)^{\frac{2}{3}}$, $(a-b)^{-\frac{3}{2}}$; $(-27)^{-\frac{4}{3}}$; $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ $(32)^{-\frac{1}{5}}$;

3. $(125)^{\frac{2}{3}}+(0{,}01)^{-0{,}5}$; $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$ $(0{,}81)^{-\frac{1}{2}}$

4. $x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{4}}$; $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{3}{4}}$; $a^{\frac{3}{2}}\;b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{3}{2}}$;

$a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}c^{\frac{5}{6}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{-\frac{1}{3}}$;

გ) აწარმოეთ ნაჩვენები მოქმედებები:

1. $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}\;ab^{\frac{1}{2}}$; $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\;a^{\frac{1}{2}}$; $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)$;

2. $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3$; $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2$; $\left(a+a^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(a-a^{\frac{1}{2}}+1\right)$;

3. $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$; $\left(125^{\frac{2}{3}}+16^{\frac{1}{2}}+343^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$;

$\left[\frac{1}{4}\left(0{,}027^{\frac{2}{3}}+15\cdot 0{,}0016^{\frac{3}{4}}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

4. $\left(x^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)\left(x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{4}\right)$; $\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}}\cdot a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{2}}\sqrt{a^{-1}b^{\frac{2}{3}}}$;

დ) გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებები:

1. $$\left(\frac{x^{\frac{4}{3}}+8x^{\frac{1}{2}}y}{x^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{xy}+4y^{\frac{2}{3}}}-2\sqrt[3]{xy}\right)^6$$

2. $$\frac{(a^{-1}+b^{-1})(a+b)^{-1}}{\sqrt[6]{a^4\sqrt[5]{a^{-2}}}};$$

3. $\left(a^{-\frac{2}{3}}-b^{-\frac{2}{3}}\right)ab(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^{-1}+\sqrt[3]{ab^2}$ $(a\neq b)$.

§ 48. წილადი მაჩვენებლების გამოყენება რადიკალებზე მოქმედებისას

რადიკალებზე ყველა განხილული მოქმედებები შეგვიძლია ვაწარმოოთ წილადი მაჩვენებლების გამოყენებით:

1. მაგალითად, ვთქვათ უნდა გავამრავლოთ რადიკალები: $\sqrt[4]{a^2}$ და $\sqrt[4]{a^3}$ გვექნება:

1. $\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}=\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}=a^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{a^5}=a\sqrt[4]{a}$.

2. $\sqrt[3]{c}\cdot\sqrt[4]{c}=c^{\frac{1}{3}}\cdot c^{\frac{1}{4}}=c^{\frac{7}{12}}=\sqrt[12]{c^7}$;

3. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=2^{\frac{6+4+3}{12}}=2^{\frac{13}{12}}=\sqrt[12]{2^{12}\cdot 2}=2\sqrt[12]{2}$;

4. $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^5}=a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{6}}=a^{\frac{8+9+10}{12}}=a^{\frac{27}{12}}=\sqrt[12]{a^{24}\cdot a^3}=a^2\sqrt[12]{a^3}=$
$=a^2\sqrt[4]{a}$.

2) რადიკალების გაყოფა.

1. $\sqrt[4]{a^5}:\sqrt[4]{a}=a^{\frac{5}{4}}:a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{4}{4}}=a$;

2. $\sqrt[4]{9a^3}:\sqrt[4]{\frac{a}{9}}=3^{\frac{2}{4}}a^{\frac{3}{4}}:3^{-\frac{2}{4}}\cdot a^{\frac{1}{4}}=3^0a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$;

3. $\sqrt[5]{m^4}:\sqrt[15]{m^2}=m^{\frac{4}{5}}:m^{\frac{2}{15}}=m^{\frac{12}{15}}:m^{\frac{2}{15}}=m^{\frac{10}{15}}=m^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{m^2}$;

4. $\frac{4a^2}{15b}\sqrt[4]{\frac{a^2}{a-b}}:\frac{2a}{5b}\sqrt{\frac{a^3}{a-b}}=\frac{4a^2\cdot 5b}{15b\cdot 2a}\cdot\frac{a^{\frac{2}{4}}}{(a-b)^{\frac{1}{4}}}:\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(a-b)^{\frac{1}{2}}}=$

$$=\frac{2a}{3}\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}(a-b)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}(a-b)^{\frac{1}{4}}}=\frac{2a}{3}\cdot a^{-1}(a-b)^{\frac{1}{4}}=\frac{2a}{3a}\sqrt[4]{a-b}=\frac{2}{3}\sqrt[4]{a-b}.$$

3. რადიკალების ახარისხება

1) $\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^2=\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)^2=a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^3\cdot a\cdot b^2}=a\sqrt[3]{ab^2}$;

2) $\left(-\frac{3}{5}\sqrt[4]{x^3y}\right)^3=\left(-\frac{3}{5}\right)^3\left(x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}\right)^3=-\frac{27}{125}x^{\frac{9}{4}}y^{\frac{3}{4}}=-$
$-\frac{27}{125}\sqrt[4]{x^8\cdot x\cdot y^3}=-\frac{27}{125}x^2\sqrt[4]{xy^3}$;

3) $\left(\frac{ab}{c}\sqrt[5]{a^3b^2c^4}\right)^2=\frac{a^2b^2}{c^2}\cdot\left(a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{4}{5}}\right)^2=\frac{a^2b^2}{c^2}\cdot a^{\frac{6}{5}}b^{\frac{4}{5}}c^{\frac{8}{5}}=$
$=\frac{a^2b^2}{c^2}\sqrt[5]{a^5\cdot ab^4c^5c^3}=\frac{a^3b^2}{c}\cdot\sqrt[5]{ab^4c^3}$;

4) $\left(\frac{a^2}{a+x}\sqrt[3]{\frac{a+x}{a^2}}\right)^4 = \frac{a^8}{(a+x)^4}\cdot\frac{(a+x)^{\frac43}}{a^{\frac83}} = \frac{a^8(a+x)^{\frac43}}{a^{\frac83}(a+x)^4} =$

$= a^{\frac{16}{3}}(a+x)^{-\frac83} = \frac{\sqrt[3]{a^{15}a}}{\sqrt[3]{(a+x)^6(a+6x)^2}} = \frac{a^5\sqrt[3]{a}}{(a+x)^2\sqrt[3]{(a+x)^2}} = \frac{a^5}{(a+x)^2}\sqrt[3]{\frac{a}{(a+x)^2}} =$

$= \frac{a^5}{(a+x)^2}\cdot\frac{\sqrt[3]{a(a+x)}}{a+x} = \frac{a^5}{(a+x)^3}\sqrt[3]{a^2+ax}.$

4. რადიკალების ამოფესვა.

1. $\sqrt{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt{x^{\frac23}} = x^{\frac23:2} = x^{\frac26} = x^{\frac13} = \sqrt[3]{x}$;

2. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{m^3}} = \sqrt[3]{m^{\frac34}} = m^{\frac34:3} = m^{\frac{3}{12}} = m^{\frac14} = \sqrt[4]{m}$;

3. $\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x^3\cdot x^{\frac12}} = \sqrt[4]{x^{\frac72}} = x^{\frac72:4} = x^{\frac78} = \sqrt[8]{x^7}$;

4. $\sqrt[4]{\frac{a^2}{b}\sqrt{\frac{b^2}{a}}} = \sqrt[4]{\frac{a^2}{b}\cdot\frac{b}{a^{\frac12}}} = \sqrt[4]{\frac{a^2b}{a^{\frac12}b}} = \sqrt[4]{a^{\frac32}} = a^{\frac32:4} =$

$= a^{\frac38} = \sqrt[8]{a^3}$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

წილადმაჩვენებლების გამოყენებით შეასრულეთ მოქმედებანი რადიკალებზე.

ა) გადაამრავლეთ რადიკალები

1. $\sqrt{\frac34}\cdot\sqrt[4]{\frac43}$; 2. $\sqrt{a}\,\sqrt[4]{\frac{x}{a}}$; 3. $\sqrt{\frac23}\cdot\sqrt[3]{\frac32}$;

4. $m\sqrt{3m}\cdot\sqrt[4]{3m}$; 5. $2m^2n\sqrt[4]{mn^3}\cdot 5mn^3\sqrt{mn}\cdot 3mn\sqrt[5]{m^{3n}}$;

ბ) მოახდინეთ რადიკალების გაყოფა:

1. $\sqrt[3]{1\frac18}:\sqrt[3]{2\frac23}$; 2. $\sqrt[3]{0,2}:\sqrt[3]{25}$; 3. $0,75\sqrt[3]{9}:0,25\sqrt[3]{2\frac23}$;

4. $\sqrt[6]{x^5}:\sqrt[3]{x^2}$; 5. $\sqrt[3]{\frac{a}{x^2}}:\sqrt[4]{\frac{x}{a^3}}$; 6. $\frac ab\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^3}}:a\sqrt[3]{\frac{a^{12}}{b^2}}$;

7. $a^2x:\sqrt[3]{ax^2}$; 8) $\left(2a\sqrt[6]{\frac{a^2}{3b^3}}+\frac{3a}{b}-5\sqrt[3]{ab}\right):\frac{3a}{2b}\sqrt{ab}$;

გ) ახარისხეთ რადიკალები:

1. $(m^2\sqrt[3]{m^2n})^2$; 2) $(-2a\sqrt[5]{a^3b^3})^4$; 3) $\frac{abc}{d}\sqrt[3]{a^2b^2c^4}$;

4. $\left(-3m\sqrt[3]{\frac{m^2}{n}}\right)^2$; 5) $\left(-\frac{2a}{3b}\sqrt[6]{a^5b^3}\right)^2$; 6) $\left(-\frac{x}{2y}\sqrt[4]{\frac yx}\right)^5$

დ) მოახდინეთ რადიკალების ამოფესვა:

1) $\sqrt[5]{a^4\sqrt{a}}$; 2) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6b^3c^3}}$ 3) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}$; 4) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

5. $\sqrt[3]{m\sqrt[3]{m\sqrt[3]{m}}}$; 6) $\sqrt{\frac{m}{n}\sqrt{\frac{n}{m}\sqrt{\frac{m}{n}}}}$; 7) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2}{a}\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$;

§ 50. ხარისხოვანი ფუნქცია

$y=x^n$ სახის ფუნქციას, სადაც n ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, ეწოდება **ხარისხოვანი ფუნქცია.**

განვიხილოთ ხარისხოვანი ფუნქცია, როცა $n=1$, 2, 3.

1. როცა $n=1$, მაშინ ხარისხოვანი ფუნქცია მიიღებს სახეს: $y=x$.

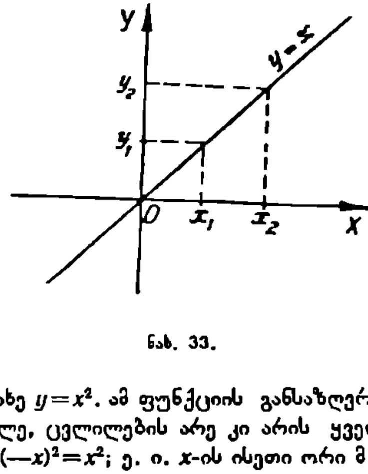
ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეს (არგუმენტის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს) წარმოადგენს ყველა რიცხვის სიმრავლე ანუ $(-\infty, +\infty)$ შუალედი.

როგორც ვხედავთ, მოცემული ფუნქცია ღებულობს ნებისმიერ რიცხვით მნიშვნელობას. ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ამ ფუნქციის ცვლილების არე, აგრეთვე, ყველა რიცხვის სიმრავლეა, ე. ი. $(-\infty, +\infty)$ შუალედი.

$y=x$ ფუნქციის გრაფიკი გამოსახულია 33-ე ნახაზზე. გრაფიკი წარმოადგენს წრფეს, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე და წარმოადგენს I და III საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისას.

$y=x$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია, ვინაიდან, როცა $x_2>x_1$, მაშინ $y_2>y_1$ (ნახ. 33).

$y=x$ ფუნქცია კენტია, ვინაიდან არგუმენტის ნიშნის შეცვლისას იცვლება თვით ფუნქციის ნიშანიც, ნახაზიდან უშუალოდ ჩანს, რომ $y=x$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.



ნახ. 33.

2. როცა $n=2$, $y=x^n$ ფუნქციას ექნება სახე $y=x^2$. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე არის ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, ცვლილების არე კი არის ყველა არაუარყოფითი რიცხვის სიმრავლე, რადგან $(-x)^2=x^2$; ე. ი. x-ის ისეთი ორი მნიშვნელობისათვის, რომლებიც ერთმანეთისაგან მხოლოდ ნიშნით განსხვავდება, მივიღებთ y-ის ორ ერთნაირ დადებით მნიშვნელობას. მაგალითად, როცა $x=-3$ და $x=+3$, y-სათვის ვღებულობთ ერთსა და იმავე მნიშვნელობას 9-ს. ყოველივე ამის გამო, $y=x^2$ ფუნქცია არის ლუწი და მისი გრაფიკი მთლიანად მდებარეობს აბსცისათა ღერძის ზევით.

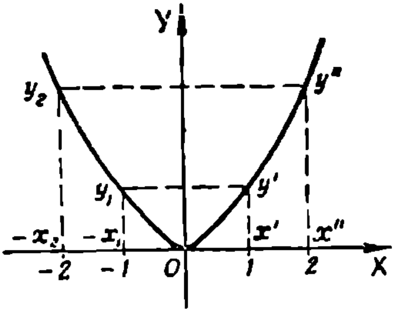
ახლა ავაგოთ $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკი და გამოვიკვლიოთ მისი ძირითადი თვისებები*, რისთვისაც შევადგინოთ ცხრილი:

---

* კვადრატულ ფუნქციას დეტალურად შევისწავლით კვადრატული განტოლებების შესწავლის შემდეგ.

x	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$	2
y	4	$\frac{9}{4}$	1	0	1	$\frac{9}{4}$	4

34-ე ნახაზიდან უშუალოდ ჩანს, რომ არგუმენტის ორი უარყოფითი მნიშვნელობიდან უმცირესს ეთანადება ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა. მაგალითად, $x_2 < x_1$ მნიშვნელობას ეთანადება $y_2 > y_1$. ეს ნიშნავს, რომ $y=x^2$ ფუნქცია $(-\infty, 0)$ შუალედში მონოტონურად კლებადია.



ნახ. 34.

არგუმენტის დადებითი მნიშვნელობისათვის, ე. ი. $(0, +\infty)$ შუალედში ფუნქცია ზრდადია. მართლაც, არგუმენტის $x'' > x'$ მნიშვნელობას ეთანადება ფუნქციის $y'' > y'$ მნიშვნელობა.

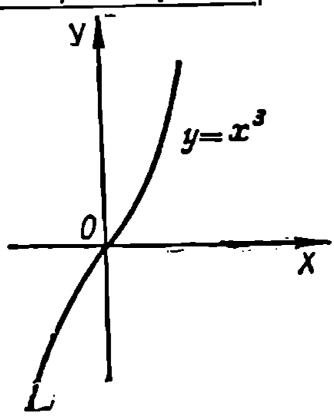
არგუმენტის $x=0$ მნიშვნელობისათვის ფუნქცია ღებულობს უმცირეს მნიშვნელობას $y=0$; უდიდესი მნიშვნელობა $y=x^2$ ფუნქციას არ გააჩნია. 34-ე ნახაზზე გამოსახული $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკი პარაბოლაა. ეს მრუდი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ.

3. $y=x^3$ ფუნქცია. ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, ე. ი. $(-\infty, +\infty)$ შუალედი. ავაგოთ ამ ფუნქციის გრაფიკი და გამოვიკვლიოთ მისი ძირითადი თვისებები.

გრაფიკის აგების მიზნით შევადგინოთ ცხრილი:

	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y=x^3$	0	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$	1	8	27

35-ე ნახაზზე გამოსახულია $y=x^3$ ფუნქციის გრაფიკი. ეს მრუდი კუბური პარაბოლაა. გრაფიკი ნათლად გვიჩვენებს, რომ $y=x^3$ ფუნქცია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის მონოტონურად ზრდადია. ფუნქცია კენტია, არგუმენტის ნიშნის შეცვლა ნიშანს უცვლის ფუნქციასაც. $(-x)^3=-x^3$ ფუნქციის ცვლილების არეა ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, ანუ $(-\infty, +\infty)$ შუალედი. საყურადღებოა ამ ფუნქციის ყოფაქცევა სათავის მახლობლობაში. გრაფიკი გვიჩვენებს, რომ სათავესთან კუბური პარაბოლა მიემართება x ღერძისაკენ, თითქოს ერთდროულად კიდევაც ეხება მას და კიდევაც ჰკვეთს.



ნახ. 35.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

ააგეთ შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკები:

ა) $y=x^2+1$, $y=x^2-1$.

ბ) $y=x^3+1$; $y=x^3-1$; $y=|x^3|$.

4. $y=x^{-1}$ ფუნქცია.

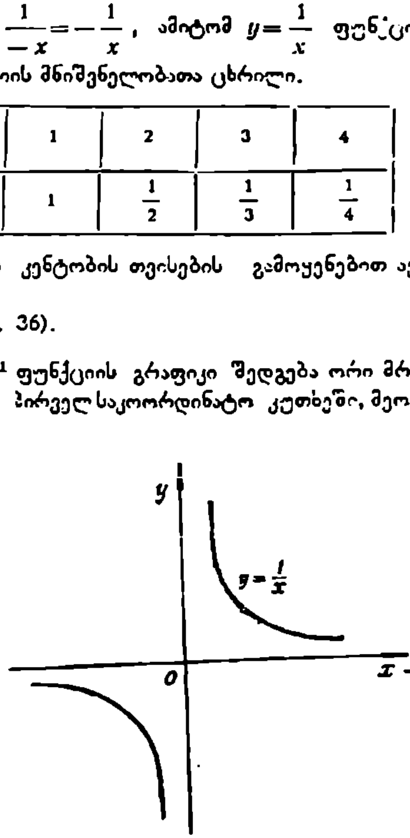
$y=x^{-1}$ ანუ $y=\frac{1}{x}$ ფუნქცია განსაზღვრულია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა $x=0$-ისა, ე. ი. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე ნულის გამოკლებით.

$y=\frac{1}{x}$ ფუნქცია კენტია, რადგან $\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$, ამიტომ $y=\frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად შევადგინოთ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი.

	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	3	4
y	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

ამ ცხრილის და $y=\frac{1}{x}$ ფუნქციის კენტობის თვისების გამოყენებით ავაგებთ $y=\frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს (ნახ. 36).

როგორც ნახაზი გვიჩვენებს, $y=x^{-1}$ ფუნქციის გრაფიკი შედგება ორი მრუდისაგან, რომელთაგან ერთი მდებარეობს პირველ საკოორდინატო კუთხეში, მეორე კი — III-ში. ორივე შტო სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ. ამ მრუდებს ერთად ჰიპერბოლა ეწოდება, ცალ-ცალკე აღებულს კი — ჰიპერბოლის შტოები. ე. ი. ჰიპერბოლა ორი შტოსაგან შედგება. ისინი სიმეტრიული არიან კოორდინატთა სათავის მიმართ. x-ის როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის, $y=x^{-1}$ ფუნქცია მონოტონურად კლებადია. მაგრამ უნდა შევნიშნოთ, რომ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის ეს ასე არაა. მაგალითად, არგუმენტის $x_1=-1$ მნიშვნელობას ეთანადება ფუნქციის მნიშვნელობა $y_1=-1$, ხოლო არგუმენტის $x_2=1$ მნიშვნელობას ფუნქციის მნიშვნელობა $y_2=1$.



ნახ. 36.

მაშასადამე, გვაქვს $x_2>x_1$, მაგრამ $y_2>y_1$. ეს კი მონოტონურად ზრდადობას ნიშნავს, ამრიგად, იმის თქმა, რომ $y=x^{-1}$ ფუნქცია ყველგან მონოტონურად კლებულობს, არაა სწორი.

$y=x^{-1}$ ფუნქცია ღებულობს ნებისმიერ რიცხვით მნიშვნელობას, გარდა ნულისა. მაშასადამე, მისი ცვლილების არე, ისე როგორც განსაზღვრის არე, არის ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, გარდა ნულისა.

აღსანიშნავია $y=x^{-1}$ ფუნქციის ყოფაქცევა სათავის მახლობლობაში. როცა $x\to 0$ და მასთან რჩება დადებითი, მაშინ $y\to\infty$, თუკი $x\to 0$ და მასთან რჩება უარყოფითი, მაშინ y-ის შესაბამისი მნიშვნელობები უსასრულოდ კლებულობს, ე. ი. $y\to-\infty$.

4. $y=x^{-2}$ ფუნქცია. $y=x^{-2}$ ანუ $y=\frac{1}{x^2}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, გარდა ნულისა.

$y=\frac{1}{x^2}$ ფუნქცია ლუწი ფუნქციაა, ვინაიდან $(-x)^{-2}=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$. ამ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად შევადგინოთ მის მნიშვნელობათა ცხრილი:

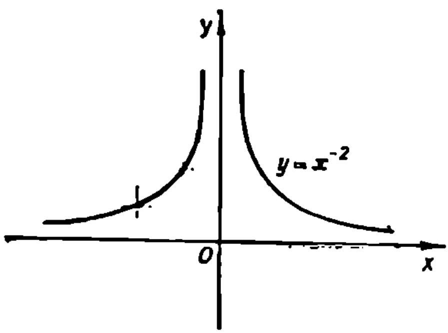
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	3
$y=x^{-2}$	16	4	$\frac{16}{9}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

$y=x^{-2}$ ფუნქციის ლუწობის გამო არგუმენტის უარყოფითი მნიშვნელობისათვის ფუნქციის მნიშვნელობა უდრის არგუმენტის უარყოფითი მნიშვნელობისათვის ფუნქციის იგივე მნიშვნელობას.

მაგალითად,

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16.$$

თუ ვისარგებლებთ შედგენილი ცხრილით და $y=x^{-2}$ ფუნქციის ლუწობის თვისებით, შეგვიძლია ავაგოთ მისი გრაფიკი (ნახ. 37).



ნახ. 37.

$y=x^{-2}$ ფუნქციის გრაფიკი შედგება ორი შტოსაგან, რომელთაგან ერთი მდებარეობს I საკოორდინატო კუთხეში, ხოლო მეორე — მეორეში. ეს შტოები ერთმანეთის სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ.

ამრიგად, $y=x^{-2}$ ფუნქციის გრაფიკი შედგება ორი შტოსაგან, მასთან ცალ-ცალკე არც ერთი შტო არ ითვლება $y=x^{-2}$ ფუნქციის გრაფიკად.

ვინაიდან $y=x^{-2}$ ფუნქცია ღებულობს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს, ამიტომ მისი გრაფიკი (ორივე შტო) მთლიანად მდებარეობს აბსცისათა ღერძის ზემოთ (ნახ. 37).

გრაფიკიდან უშუალოდ შეიმჩნევა შემდეგი: როცა x არგუმენტის მნიშვნელო-

ლობები უსასრულოდ იზრდება ან უსასრულოდ კლებულობს, მაშინ y-ის მნიშვნელობები უსასრულოდ უახლოვდება 0-ს.

როდესაც $x \to 0$, როგორც, მარცხნიდან ისე მარჯვენიდან, მაშინ $y \to \infty$. ამავე ნახაზიდან ჩანს, რომ $y=x^{-2}$ ფუნქციის ცვლილების არეა ყველა დადებითი რიცხვის სიმრავლე.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო.

ააგეთ ფუნქციათა გრაფიკები:

$$y=(x-1)^{-1};\quad y=(x+1)^{-1};\quad y=|x^{-1}|;\quad y=x^{-2}-2;\quad y=x^{-2}+1$$

5. $y=x^{\frac{1}{2}}$ ფუნქცია. $y=x^{\frac{1}{2}}$ ანუ $y=\sqrt{x}$ ფუნქცია განსაზღვრულია x არგუმენტის მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობებისათვის, ამიტომ მისი განსაზღვრის არეს წარმოადგენს ყველა დადებითი რიცხვის სიმრავლე, ე. ი. $(0, +\infty)$ შუალედი. $y=x^{\frac{1}{2}}$ ფუნქციის გრაფიკი გამოსახულია 38-ე ნახაზზე.

$y=x^{\frac{1}{2}}$ ფუნქცია ღებულობს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობას, ამიტომ მისი ცვლილების არე იქნება აგრეთვე ყველა დადებით რიცხვთა სიმრავლე, ე. ი. $(0, +\infty)$ შუალედი.

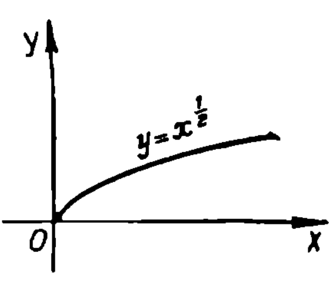
ნახაზიდან ნათლად ჩანს, რომ $y=x^{\frac{1}{2}}$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია.

$y=x^{\frac{1}{2}}$ ფუნქციის მონოტონურად ზრდადობა ადვილი საჩვენებელია იმით, რომ ორი რიცხვიდან უფრო მეტს მეტი კვადრატული ფესვი შეესაბამება. მაგალითად, თუ $x_2>x_1$, მაშინ

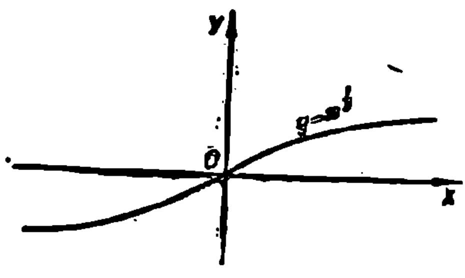
$$x_2^{\frac{1}{2}} > x_1^{\frac{1}{2}}.$$

$y=x^{\frac{1}{2}}$ ფუნქცია აღწევს უმცირეს მნიშვნელობას, როცა $x=0$; უდიდესი მნიშვნელობა ამ ფუნქციას არ გააჩნია.

6. $y=x^{\frac{1}{3}}$ ფუნქცია. $y=x^{\frac{1}{3}}$ ანუ $y=\sqrt[3]{x}$ ფუნქცია განსაზღვრულია x არგუმენტის ყველა ნამდვილი მნიშვნელობისათვის. (x შეიძლება უარყოფითიც იყოს).



ნღხ. 38.



ნახ. 39.

$y=x^{\frac{1}{3}}$ ფუნქციის გრაფიკი გამოსახულია 39-ე ნახაზზე. ნახაზიდან უშუალოდ ჩანს, რომ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია x არგუმენტის ყველა ნამდვილი მნიშვნელობისათვის.

ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, ანუ $(-\infty, +\infty)$ შუალედი. ვინაიდან ფუნქცია იღებს ყველა მნიშვნელობას $(-\infty, +\infty)$ შორის ამიტომ მისი ცვლილების არეც ემთხვევა ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრაელეს, ანუ $(-\infty, +\infty)$ შუალედს. ამ ფუნქციას არ გააჩნია არც უმცირესი და არც უდიდესი მნიშვნელობა.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

ააგეთ შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკები:

$y=\sqrt{x-1}$; $y=\sqrt{x}+2$; $y=\sqrt{x}-1$;

$y=-2\sqrt{x}$; $y=\sqrt[3]{x}+1$; $y=\sqrt[3]{x+1}$.

V თ ა ვ ი

კვადრატული განტოლებანი და განტოლებები, რომლებიც კვადრატულზე დაიყვანებიან

§ 31. კვადრატული განტოლების სახეები და მათი ამოხსნა

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. 1. **განტოლებას, რომლის მარცხენა ნაწილი მეორე ხარისხის მრავალწევრია უცნობის მიმართ, მარჯვენა კი—ნული, კვადრატული განტოლება ეწოდება.**

1. კვადრატული განტოლების ზოგადი სახეა:

$$ax^2+bx+c=0. \tag{1}$$

a, b და c მუდმივი რიცხვები კვადრატული განტოლების კოეფიციენტებია. მასთან, a ნულის არატოლი ნებისმიერი რიცხვია, b და c კი ნებისმიერი მუდმივი რიცხვები.

a-ს ეწოდება პირველი კოეფიციენტი, b-ს — მეორე კოეფიციენტი, c-ს კი— თავისუფალი წევრი.

x_0 რიცხვს, რომელიც ax^2+bx+c გამოსახულებას აქცევს ნულად, ეწოდება $ax^2+bx+c=0$ კვადრატული განტოლების ფესვი.

მაგალითად, x^2-6x+5 გამოსახულებას ნულად აქცევს 5 და 1, ამიტომ ვიტყვით, რომ $x^2-6x+5=0$ კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი ფესვი, სახელდობრ, $x_1=5$ და $x_2=1$.

VIII კლასიდან ცნობილია, რომ, თუ $ax^2+bx+c=0$ კვადრატულ განტოლებაში, b ან c ან ორივე ერთად შეიძლება იყოს ნულის ტოლი, მაშინ განტოლებას **არასრული კვადრატული განტოლება** ეწოდება. არასრული კვადრატული განტოლება შეიძლება იყოს შემდეგი სახის:

1. $ax^2+bx=0$ $(c=0,\ a\neq0,\ b\neq0)$;
2. $ax^2+c=0$ $(b=0,\ a\pm0,\ c\neq0)$;
3. $ax^2=0$ $(b=c=0,$ და $a\neq0)$.

თუ (1) განტოლებაში პირველი კოეფიციენტი $a=1$, მაშინ განტოლებას დაყვანილი ეწოდება. დაყვანილი კვადრატული განტოლება შემდეგი სახისაა:

$$x^2+px+q=0, \qquad (2)$$

სადაც p და q ნებისმიერი მუდმივი რიცხვებია. (1) სახის კვადრატული განტოლება ყოველთვის შეიძლება დავიყვანოთ (2) სახეზე. ამისათვის საკმარისია, მისი ყველა წევრი გავყოთ a-ზე:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$, მივიღებთ:

$$x^2+px+q=0.$$

2. $ax^2+bx=0$ განტოლება ამოიხსნება მარცხენა ნაწილის მამრავლებად დაშლით:

$$x(ax+b)=0. \qquad (3)$$

ნამრავლი მაშინ უდრის ნულს, როცა ერთ-ერთი თანამამრავლი უდრის ნულს, ამიტომ ან $x=0$ ან $ax+b=0$, აქედან $x=-\frac{b}{a}$.

ამრიგად, (3) განტოლებას აქვს ორი ფესვი: $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$.

3. $ax^2+c=0$ განტოლების ამოხსნის მიზნით თავისუფალი წევრი გადავიტანოთ განტოლების მარჯვენა ნაწილში, შემდეგ კი ორივე ნაწილი გავყოთ a-ზე: $ax^2=-c$, $x^2=-\frac{c}{a}$, საიდანაც $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ აქ შეიძლება წარმოგვიდგეს შემდეგი შემთხვევები:

ა) a და c კოეფიციენტებს ერთნაირი ნიშანი აქვთ, მაშინ $\frac{c}{a}>0$ და $-\frac{c}{a}<0$, ასეთ შემთხვევაში $ax^2+c=0$ განტოლებას ამონახსნი არა აქვს.

მაგალითად, ავიღოთ განტოლება $2x^2+5=0$. ამ განტოლბის მარცხენა ნაწილი x-ის ყოველ მნიშვნელობისათვის დადებითი რიცხვია, ამიტომ ის არ შეიძლება უდრიდეს ნულს.

ბ) a და c კოეფიციენტებს მოპირდაპირე ნიშნები აქვთ, მაშინ $\frac{c}{a}<0$ და $-\frac{c}{a}>0$. ასეთ შემთხვევაში განტოლებას ორი ფესვი აქვს:

$$x_1=-\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{და} \quad x_2=\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

მაგალითად, $4x^2-9=0$; $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}$.

3. $ax^2=0$. ვიცით, რომ $a\neq0$, ამიტომ x^2 უნდა იყოს ნულის ტოლი. ამ შემთხვევაში $x_1=x_2=0$.

§ ნე. დაყვანილი კვადრატული განტოლების ამოხსნა

$x^2+px+q=0$ განტოლების მარცხენა ნაწილი გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

$$x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0. \qquad (1)$$

თუ (1) განტოლებაში ბოლო ორ შესაკრებს გადავიტანთ მარჯვენა ნაწილში, მივიღებთ:

$$x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q, \quad \text{ანუ} \quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

ამ უკანასკნელში თუ ვიგულისხმებთ, რომ $x+\frac{p}{2}\geqslant 0$, მაშინ ვიპოვით

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

საიდანაც

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \qquad (2)$$

(2) ფორმულის შინაარსი სიტყვიერად გამოითქმება შემდეგნაირად:

დაყვანილი კვადრატული განტოლების ფესვი უდრის მეორე კოეფიციენტის ნახევარს მოპირდაპირე ნიშნით, პლუს-მინუს კვადრატული ფესვი ამ ნახევრის კვადრატიდან თავისუფალი წევრის გამოკლებით.

მაგალითები.

1. $x^2-6x+8=0.$

$x=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm 1$

$x_1=4,\ \ x_2=2.$

2. $x^2-7x+10=0$

$$x=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-10}=\frac{7}{2}\pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{49}{4}-10}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49-40}{9}}=\frac{7}{2}\pm\frac{3}{2}$$

$x_1=5,\quad x_2=2.$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. $x^2+10x+5=2x^2-6x+53$ პას.: 12 და 4.

2. $\frac{x}{7}+\frac{21}{x+5}=6\frac{5}{7}$ პას. 8 და $-2\frac{1}{4}$.

3, $\frac{x}{7}+\frac{21}{x+5}=6\frac{5}{7}$ პას. 44 და -2.

4. $\frac{x-5}{4}-\frac{4}{5-x}=\frac{3x-1}{4}$ პას. 6 და -3

5. $\frac{2x}{x-d}=\frac{x-d}{d}$ პას. $d\,(2\pm 3)$;

§ 30. კვადრატული განტოლების ფესვების ზოგადი ფორმულა

$ax^2+bx+c=0$ განტოლების ყოველ წევრს თუ გავყოფთ a-ზე ($a\neq 0$), მივიღებთ დაყვანილი სახის კვადრატულ განტოლებას:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0. \tag{3}$$

ამოვხსნათ ეს განტოლება (2) ფორმულის გამოყენებით:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}$$

გავამარტივოთ უკანასკნელი:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=$$

$$=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{4}$$

(4) ფორმულის შინაარსი გამოითქმება შემდეგნაირად:

სრული კვადრატული განტოლების ფესვები უდრის წილადს, რომლის მნიშვნელია გაორკეცებული პირველი კოეფიციენტი, მრიცხველი კი — მეორე კოეფიციენტი მოპირდაპირე ნიშნით, პლუს-მინუს კვადრატული ფესვი ამავე კოეფიციენტის კვადრატიდან კიდური კოეფიციენტების გაოთხკეცებული ნამრავლის გამოკლებით.

(4) ფორმულა წარმოადგენს ზოგად ფორმულას, ვინაიდან მისი საშუალებით შეიძლება ამოიხსნას, როგორც დაყვანილი, ისე არასრული სახის კვადრატული განტოლებაც.

(4) ფორმულა მარტივდება, როცა მეორე კოეფიციენტი b ლუწია. თუ (4) ფორმულაში ვიგულისხმებთ, რომ $b=2k$, მაშინ გვექნება:

$$x=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

ამრიგად,

$$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}. \tag{5}$$

(5) ფორმულით სარგებლობა მიზანშეწონილია, როცა b ლუწი რიცხვია.

ავიღოთ (4) ფორმულა:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$ax^2+bx+c=0$ განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს ნამდვილი ფესვები მხოლოდ მაშინ, როდესაც $b^2-4ac\geqslant 0$.

b^2-4ac გამოსახულებას $ax^2+bx+c=0$ განტოლების დისკრიმინანტი ეწოდება.

თუ $b^2-4ac<0$, მაშინ $ax^2+bx+c=0$ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს ნამდვილი ფესვები.

ამრიგად, შეიძლება შეგვხვდეს შემდეგი შემთხვევები:

ა) $b^2-4ac>0$, მაშინ $ax^2+bx+c=0$ განტოლებას აქვს ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნამდვილი ფესვი, სახელდობრ:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{და} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

ბ) $b^2-4ac=0$, მაშინ $ax^2+bx+c=0$ განტოლებას ექნება ერთმანეთის ტოლი ორი ნამდვილი ფესვი, კერძოდ,

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

გ) $b^2-4ac<0$, მაშინ $ax^2+bx+c=0$ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს ნამდვილი ფესვები. ამ შემთხვევაში ორივე ფესვი კომპლექსურია და ერთმანეთისაგან განსხვავებული.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. $5x^2-8x-4=0$ განტოლებისათვის დისკრიმინანტი

$$b^2-4ac=(-8)^2-4\cdot 5\cdot(-4)=64+80=144>0,$$

ამიტომ აღებულ განტოლებას ექნება ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფესვი:

$$\underline{x=\frac{8\pm 12}{10}}; \quad \underline{x_1=2}; \quad \underline{x_2=-\frac{2}{5}}$$

2. $3x^2-6x+3=0$ განტოლებისათვის დისკრიმინანტი $b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot 3\cdot 3=0$, ამიტომ მოცემულ განტოლებას ექნება ერთმანეთის ტოლი ორი ნამდვილი ფესვი.

$$x_1=x_2=\frac{6}{2\cdot 3}=1.$$

3. $2x^2-3x+5=0$ განტოლებისათვის დისკრიმინანტი $b^2-4ac=(-3)^2-4\times 2\cdot 5=9-40=-31<0$, ამ განტოლებას ნამდვილი ფესვები არ ექნება.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1). $3x^2+8x=4$.

2) $4x^2+9x+2=0$,

3) $3x^2-5x-2=0$.

4. $4x^2+x-3=0$.

5) $2mx^2+nx-p=0$.

6) $\frac{14}{x^2-9}+\frac{4-x}{3+x}=\frac{7}{x+3}-\frac{1}{3-x}$; პას. 4 და -5;

7) $\frac{2x}{x+b}+\frac{x}{x-b}=\frac{b^2}{4x^2-4b^2}$; პას. $\frac{b}{2}$ და $-\frac{b}{6}$.

8. $\frac{x}{x-a}-\frac{2a}{x+a}=\frac{8a^2}{x^2-a^2}$; პას. $3a$; $-2a$.

§ 54. ასოითკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლების ამოხსნა

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ასოითკოეფიციენტიან კვადრატულ განტოლებათა ამოხსნის რამდენიმე მაგალითს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.

$$\frac{ax+b}{a}=\frac{ab}{a^2-x}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა

$(ax+b)(a^2-x)=a^2b,$

$a^3x-ax^2+a^2b-bx=a^2b,$

$a^3x-ax^2-bx=0,$

$-ax^2-(b-a^3)x=0,$

$ax^2+(b-a^3)x=0,$

$x(ax+b-a^3)=0;$

$x_1=0;$ $ax+b-a^3=0$ საიდანაც, $ax=a^3-b,$ და $x_2=\dfrac{a^3-b}{a}$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.

$$\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}=\frac{a(3x+2a)}{x^2-a^2}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა

$(x+a)^2+(x-a)^2=a(3x+2c),$

$x^2+2ax+a^2+x^2-2ax+a^2=3ax+2a^2,$

$2x^2+2a^2=3ax+2a^2,$

$2x^2-3ax=0$

$x(2x-3a)=0$

$x_1=0;$ $2x-3a=0;$ $x_2=\dfrac{3a}{2}.$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.

$$\frac{2x}{x-b}+\frac{12x^2}{b^2-x^2}=\frac{b-x}{x+b}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა

$$\frac{2x}{x-b}-\frac{12x^2}{x^2-b^2}=\frac{b-x}{x+b};$$

$2x(x+b)-12x^2=(b-x)(x-b),$

$-10x^2+2bx=-x^2+2bx-b^2,$

$9x^2-b^2=0,$

$9x^2=b^2$

$x^2=\dfrac{b^2}{9}$

$x=\pm\dfrac{b}{3};$ $x_1=\dfrac{b}{3};$ $x_2=-\dfrac{b}{3}$

მაგალითი 4.

$$\frac{x}{a}+\frac{1}{ax-bx}+\frac{b}{a^2x-abx}=\frac{2}{a-b}.$$

ამოხსნა

$x^2(a-b)+a+b=2ax,$ $\qquad$ $ax-bx=x(a-b)$

$(a-b)x^2-2ax+(a+b)=0.$ $\qquad$ $(a^2x-abx=ax(a-b)$

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-a^2+b^2}}{a-b}=\frac{a\pm b}{a-b}. \qquad a-b$$

$$x_1=\frac{a+b}{a-b}, \quad x_2=1.$$

მაგალითი 5.

$$\frac{a}{bx}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{b\,(x+2)}{a}-\frac{a\,(x-2)}{b}.$$

ამოხსნა

$$\frac{a^2-b^2}{abx}=\frac{b\,(x+2)}{a}-\frac{a\,(x-2)}{b};$$

$$a^2-b^2=b^2x^2+2bx-a^2x^2+2ax,$$

$$(b^2-a^2)\,x^2+2\,(b+a)\,x+b^2-a^2=0$$

$$x=\frac{-(b+a)\pm\sqrt{(b+a)^2-(b^2-a^2)^2}}{b^2-a^2}=\frac{-(b+a)\pm\sqrt{(b+a)^2[1-(b-a)^2]}}{b^2-a^2}=$$

$$=\frac{-(b+a)\pm(b+a)\sqrt{1-(b-a)^2}}{b^2-a^2};$$

$$x_1=\frac{-(b+a)+(b+a)\sqrt{1-(b-a)^2}}{b^2-a^2}=\frac{-1+\sqrt{1-(b-a)^2}}{b-a}$$

$$x_2=\frac{-(b+a)-(b+a)\sqrt{1-(b-a)^2}}{b^2-a^2}=\frac{-1-\sqrt{1-(b-a)^2}}{b-a}.$$

სავარჯიშო

1. $\dfrac{2x}{x+b}+\dfrac{x}{x-b}=\dfrac{b^2}{4x^2-4b^2}$ $\qquad$ პას. $\dfrac{b}{2}$ და $-\dfrac{b}{6}$

2. $\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{2a}{x+a}=\dfrac{8a^2}{x^2-a^2}$ $\qquad$ პას. $3a;\ -2a.$

3. $\dfrac{a-x}{x-b}-\dfrac{x-b}{x-a}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}.$ $\qquad$ პას. $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ და $\dfrac{2ab}{a+b}.$

4. $\dfrac{2x\,(x+1)}{6x+3}-\dfrac{(a+2)\,(2-a)}{6a}=\dfrac{1}{4x+2}.$

5. $\frac{1}{cx+nx}-\frac{1}{ac+an}=\frac{a-x}{2ax^2}$. პას. a და $\frac{c+n}{2}$.

6. $\frac{1}{ax-cx^2}-\frac{1}{a-c}=\frac{d(x-1)}{a^2-acx-ac+c^2x}$. პას. $\frac{a-c}{c-d}$; 1.

§ 66. ვიეტის თეორემა (კვადრატული განტოლების ფესვთა თვისება)

$x^2+px+q=0$ განტოლების ფესვებსა და კოეფიციენტებს შორის არსებობს დამოკიდებულება, რომელიც გამოითქმის შემდეგნაირად:

თეორემა (ვიეტის). დაყვანილი სახის კვადრატული განტოლების ფესვთა ჯამი ეტოლება მეორე კოეფიციენტს მოპირდაპირე ნიშნით, ამ ფესვთა ნამრავლი კი — თავისუფალ წევრს.

დამტკიცება

როგორც ვიცით $x^2+px+q=0$ განტოლების ფესვები გამოისახება შემდეგნაირად:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad \text{და} \quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};$$

თუ ამ ტოლობებს შევკრებთ წევრ-წევრად, მივიღებთ:

$$x_1+x_2=-P.$$

ამ ტოლობათა წევრ-წევრად გამრავლება მოგვცემს;

$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2$$

$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q,$$

$$x_1\cdot x_2=q.$$

მაგალითი:

$$x^2-5x+6=0\cdot$$

აღებული განტოლების დისკრიმინანტი $b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=1>0$, ამიტომ ამ განტოლებას ექნება ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნამდვილი ფესვი x_1 და x_2. ვიეტის თეორემის ძალით,

$$x_1+x_2=5, \qquad x_1\cdot x_2=6.$$

მკითხველს ევალება დარწმუნდეს ამ უკანასკნელის სისწორეში.

ავილოთ ზოგადი სახის კვადრატული განტოლება:

$$ax^2+bx+c=0. \tag{1}$$

ამ განტოლების ყველა წევრი გავყოთ a-ზე

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0. \tag{2}$$

თუ (1) განტოლებას აქვს ნამდვილი x_1 და x_2 ფესვები, მაშინ იგივე ფესვები ექნება (2) განტოლებასაც და ვიეტის თეორემის ძალით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad \text{და} \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი:

$$3x^2-5x+2=0.$$

ამ განტოლებისათვის $b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot3\cdot2=1>0$
ამიტომ განტოლებას აქვს ორი ნამდვილი x_1 და x_2 ფესვი.
მასთან,

$$x_1+x_2=\frac{5}{3} \quad \text{და} \quad x_1\cdot x_2=\frac{2}{3}.$$

მართლაც. $3x^2-5x+2=0$ განტოლების ამოხსნა გვაძლევს

$$x_1=1, \quad x_2=\frac{2}{3}$$

და

$$x_1+x_2=1+\frac{2}{3}=1\frac{2}{3}=\frac{5}{3}; \quad x_1\cdot x_2=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო:

ამოხსენით ზეპირად განტოლებანი:

1. $x^2-7x-8=0$, 4. $3x^2+x-2=0$,
2. $x^2-7x+12=0$, $x^2-5x+6=0$,
3. $x^2+99x-100=0$. 6. $-x^2+6x-5=0$.

შეადგინეთ განტოლება მოცემული ფესვების მიხედვით:

1. $x_1=3;\quad x_2=5$,
2. $x_1=2-\sqrt{3};\ x_2=2+\sqrt{3}$.
3. $x_1=a+b$ და $x_2=a+2b^2$.
4. $x_1=7a;\ x_2=5b;$
5. $x_1=-2m;\ x_2=-5n;$
6. $x_1=\sqrt{a}-b;\ x_2=\sqrt{a}+b$.
7. $x_1=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ და $x_2=\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

§ 36. კვადრატული სამწევრის დაშლა წრფივ თანამამრავლებად

როგორც მე-8 კლასიდან ვიცით, კვადრატული სამწევრი ეწოდება $y=ax^2+bx+c$ სახის ფუნქციას, სადაც a, b და c რომელიმე მოცემული მუდმივი რიცხვებია, ხოლო x დამოუკიდებელ ცვლადს წარმოადგენს.

ვიცით, რომ $ax^2+bx+c=0$ კვადრატულ განტოლებაში x აღნიშნავს იმ რიცხვებს, რომლებიც განტოლებას აკმაყოფილებს. ax^2+bx+c სამწევრში კი ის ნებისმიერ ნამდვილ რიცხვს წარმოადგენს.

x-ის იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც ax^2+bx+c სამწევრს ნულად აქცევენ, მისი ფესვები ეწოდება. ამრიგად, ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრის ფესვები $ax^2+bx+c=0$ განტოლების ფესვებია.

ვთქვათ, ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი $b^2-4ac>0$, მაშინ ამ სამწევრს ექნება ნამდვილი x_1 და x_2 ფესვები, თუ გავითვალისწინებთ ვიეტის თეორემას, მივიღებთ:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right]=$$

$$=a\left[(x^2-x_1x)-(x_2x-x_1x_2)\right]=a\left[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right]=$$

$$=a(x-x_1)(x-x_2).$$

მაშასადამე,

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

როგორც ვხედავთ, ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრი წარმოდგენილია ნამდვილკოეფიციენტიანი ორი წრფივი თანამამრავლის ნამრავლის სახით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ კვადრატული სამწევრი დაყვანილი სახისაა $(a=1)$, მაშინ დაშლას ექნება შემდეგი სახე:

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. დავშალოთ წრფივ მამრავლებად $6x^2-7x+2$ სამწევრი. ამ კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი $b^2-4ac=(-7^2)-4\cdot 6\cdot 2=1>0$, ამიტომ მას ექნება x_1 და x_2 ნამდვილი ფესვები:

$$x_1=\frac{2}{3};\quad x_2=\frac{1}{2}$$

და

$$6x^2-7x+2=6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. $2x^2-5x+5$. ამ სამწევრის დისკრიმინანტი $b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 5<0$, ამიტომ მოცემული სამწევრი ნამდვილკოეფიციენტიან წრფივ მამრავლებად არ დაიშლება.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

დაშალეთ მამრავლებად:

1. $x^2-2x-35$. პას. $(x-7)(x+5)$.
2. $x^2+7x+10$. პას. $(x+2)(x+5)$
3. $3x^2-7x-40$. პას. $3(x-5)\left(x+\frac{8}{3}\right)$.
4. $4x^2-2ax+9a^2$. პას. $(2x-9a)(2x-a)$.

შეკვეცეთ წილადები:

ა) $\frac{a^2-9ab+14b^2}{a^2-ab+2b^2}$. პას. $\frac{a-7b}{a+b}$.

ბ) $\frac{12a^2-a-1}{3a^2+5a-2}$.

§ 57. კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფა

მოვახდინოთ ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრის გარდაქმნა შემდეგნაირად:

ა) გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ x^2-ის კოეფიციენტი:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

ბ) გამოსახულება $\frac{b}{a}x$ წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$2\cdot\frac{b}{2a}\ x,$$

გვექნება

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right).$$

გ) უკანასკნელი გამოსახულების ფრჩხილში მდგომ ნაწილს მივუმატოთ და გამოვაკლოთ $\frac{b}{2a}$ რიცხვის კვადრატი, მივიღებთ:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b_2}{4a_2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right].$$

თუ შევნიშნავთ იმას, რომ

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

გვექნება:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

მაშასადამე,

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}. \qquad (1)$$

კვადრატულის სამწევრის (1) სახით გარდაქმნას სრული კვადრატის გამოყოფა ეწოდება.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. გამოვყოთ სრული კვადრატი $2x^2+4x-3$ სამწევრიდან.

$$2x^2+4x-3=2\left(x^2+2x-\frac{3}{2}\right)=2\left[\left(x^2+2\cdot x\cdot 1+1\right)-1-\frac{3}{2}\right]=$$
$$=2\left[(x+1)^2-\frac{5}{2}\right].$$

ამრიგად,

$$2x^2+4x-3=2(x+1)^2-5\,.$$

2. $-5x^2+20x-13$ სამწევრიდან გამოვყოთ სრული კვადრატი.

$$-5x^2+20x-13=-5\left(x^2-4x+\frac{13}{5}\right)=-5\left[(x^2-2\cdot 2x+4)-4+\frac{13}{5}\right]=$$

$$=-5\left[(x-2)^2+\frac{-20+13}{5}\right]=-5\left[(x-2)^2-\frac{7}{2}\right]=-5\,(x-2)^2+7.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

გამოყავით სრული კვადრატები შემდეგ გამოსახულებებში:

1. $\frac{1}{3}\,x^2-4x+16$,
2. $-2x^2-4x+5$,
3. $0{,}5x-0{,}25\,x^2-2{,}25$,
4. $ax^2-4a^2x+4a^3+3$
5. $6a^2x-9a^3-ax^2+a+1$
6. $\frac{x^2}{3}-5x+7$.

§ 38. კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი და თვისებები

კვადრატული სამწევრის გრაფიკის აგება და თვისებების შესწავლა დავიწყოთ მისი კერძო შემთხვევების განხილვით.

ვთქვათ, გვაქვს ფუნქცია $y=ax^2$, ადვილი შესამჩნევია ამ ფუნქციის შემდეგი თვისებები:

1. $y=ax^2$ ფუნქცია განსაზღვრულია x-ის ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის, ე. ი. $(-\infty, +\infty)$ შუალედი წარმოადგენს ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეს.

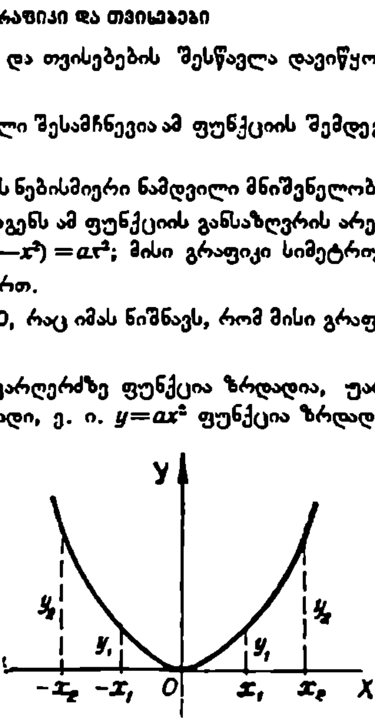
2. $y=ax^2$ ფუნქცია ლუწია, რადგან $a(-x)^2=ax^2$; მისი გრაფიკი სიმეტრიულად იქნება განლაგებული OY ღერძის მიმართ.

3. $y=ax^2$ ფუნქცია ხდება 0, როცა $x=0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ მისი გრაფიკი გაივლის კოორდინატთა სათავეში.

4. როცა $a>0$, დადებით მარჯვენა ნახევარღერძზე ფუნქცია ზრდადია, უარყოფითზე (მარცხენა ნახევარღერძი) — კლებადი, ე. ი. $y=ax^2$ ფუნქცია ზრდადია $[0, \infty)$ შუალედში, კლებადი $(-\infty, 0]$ შუალედში. მართლაც, თუ ავიღებთ არგუმენტის ორ დადებით მნიშვნელობას x_1-სა და x_2-ს, სადაც $x_2>x_1$, მაშინ y_2 მეტი იქნება y_1-ზე (ნახ. 40), ვინაიდან $a\,(x_2^2-x_1^2)>0$.

უარყოფით ნახევარღერძზე გვექნება $x_1>x_2$, მაშინ $y_1<y_2$.

$y=ax^2$ ფუნქციის ზემოჩამოთვლილი თვისებების გათვალისწინების შემდეგ ადვილი ასაგებია მისი გრაფიკი (ნახ. 40).

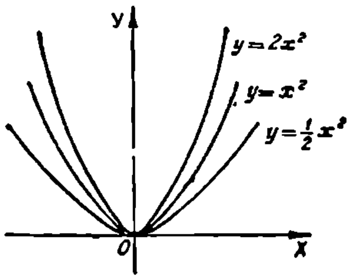


ნახ. 40.

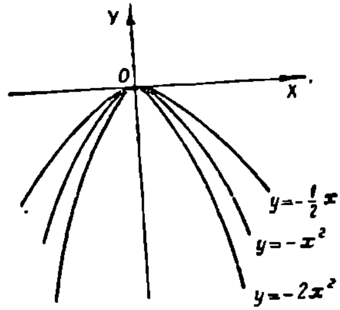
$y=ax^2$ ფუნქციის გრაფიკს პარაბოლა ეწოდება. 41-ე ნახაზზე გამოსახულია სამი სხვადასხვა პარაბოლა:

$$y=x^2, \quad y=2x^2, \quad \text{და} \quad y=\frac{1}{2}x^2$$

ნახაზიდანაც უშუალოდ ჩანს, რომ x არგუმენტის ერთი და იმავე მნიშვნელობის დროს y-ის მნიშვნელობა მეორე $y=2x^2$ ფუნქციაში ორჯერ მეტია, ხოლო მესამეში $\left(y=\frac{1}{2}x^2\right)$—ორჯერ ნაკლები, ეს იმას ნიშნავს, რომ მე-2 ფუნქციის გრაფიკის ყოველი წერტილის ორდინატი I ფუნქციის გრაფიკის იმავე აბცისის შესაბამისი ორდინატის გაორკეცებით მიიღება, ხოლო III ფუნქციის გრაფიკის ყოველი წერტილის ორდინატი პირველი ფუნქციის იმავე აბსცისის შესაბამისი ორდინატის ორზე გაყოფით მიიღება.



ნახ. 41.



ნახ. 42.

აქედან შეიძლება გაკეთდეს შემდეგი დასკვნა:

$y=2x^2$ და $y=\frac{1}{2}x^2$ ფუნქციების გრაფიკის აგების მიზნით ვაგებთ $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკს, შემდეგ თითოეული მისი წერტილის ორდინატის ორჯერ გამრავლებით ვღებულობთ $y=2x^2$-ის გრაფიკს, ხოლო ორჯერ შემცირებით — $y=\frac{1}{2}x^2$-ის გრაფიკს.

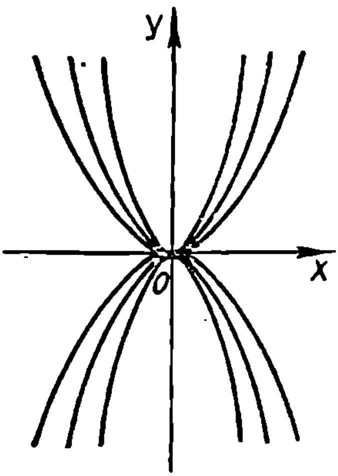
გრაფიკი გვიჩვენებს, რომ, რაც უფრო მეტია a კოეფიციენტის რიცხვითი მნიშვნელობა, შტოები მით უფრო ციცაბოდ მიემართება ზევითკენ, ხოლო რაც უფრო ნაკლებია a-ს რიცხვითი მნიშვნელობა, შტოები მით უფრო იხრება OY ღერძისაკენ. $y=ax^2$ და $y=-ax^2$ ფუნქციებში x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის y-ის მნიშვნელობები აბსოლუტური სიდიდით ტოლია და ნიშნით მოპირდაპირე, ეს იმას ნიშნავს, რომ მათი გრაფიკები სიმეტრიულად იქნება განლაგებული აბსცისათა ღერძის მიმართ.

ამრიგად, $y=-ax^2$ ფუნქციის გრაფიკის მიღება შეგვიძლია სიბრტყეზე $y=ax^2$ ფუნქციის გრაფიკის 180°-ით შემობრუნებით. სხვანაირად, $y=-ax^2$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=ax^2$ ფუნქციის გრაფიკის სარკისებრი ასახვით აბსცისათა ღერძის

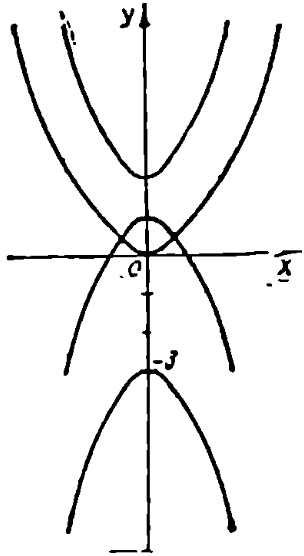
მიმართ. 43-ე ნახაზზე მოცემულია $y=-x^2$, $y=-2x^2$ და $y=-\frac{1}{2}x^2$ ფუნქციათა გრაფიკები.

43-ე ნახაზზე მოცემულია $y=ax^2$ პარაბოლები a-ს სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

2. $y=ax^2+n$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საკმარისია პარაბოლა გადავიტანოთ თავის თავის პარალელურად მასშტაბის n ერთეულით ორდინატთა ღერძის



ნახ. 43.



ნახ. 44.

გასწვრივ, დადებითი მიმართულებით (ზევით), თუ $n>0$, და უარყოფითი მიმართულებით (ქვევით), თუ $n<0$. 44-ე ნახაზზე ნაჩვენებია $y=2x^2+2$, $y=2x^2-3$ და $y=-\frac{1}{2}x^2+1$ პარაბოლების აგება.

I პარაბოლის წვერო მდებარეობს O წერტილში, კოორდინატებია (0,0), სიმეტრიის ღერძს წარმოადგენს $x=0$ წრფე (ორდინატთა ღერძი).

II პარაბოლის წვეროა 0, (0; 2), სიმეტრიის ღერძი იგივეა, ე ი. $x=0$ წრფე.

III პარაბოლის წვერო მდებარეობს წერტილში, რომლის კოორდინატებია (0, —3).

IV პარაბოლის წვეროს კოორდინატებია (0, 1); სიმეტრიის ღერძს როგორც I და II პარაბოლისათვის, ისევე III და IV-სათვის წარმოადგენს $x=0$ წრფე.

3. $y=a(x-m)^2$ ფუნქციის გრაფიკი

შევადაროთ ერთმანეთს ორი ფუნქცია $y_1=a(x-m)^2$ და $y_2=ax^2$, სადაც $m>0$.

ვთქვათ, A_1 (x_0, y_0) არის $y=a(x-m)^2$ ფუნქციის გრაფიკის ნებისმიერი წერ-

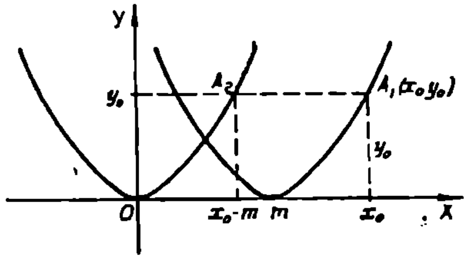
ტილი (ნახ. 45), მაშინ A_1 წერტილის კოორდინატებს შორის არსებული კავშირი გამოისახება განტოლებით:

$$y_0=a(x_0-m)^2. \tag{1}$$

(1) თანაფარდობა გვიჩვენებს, რომ $A_2(x_0-m,\ y_0)$ უნდა ეკუთვნოდეს $y_3=ax^2$ ფუნქციის გრაფიკს.

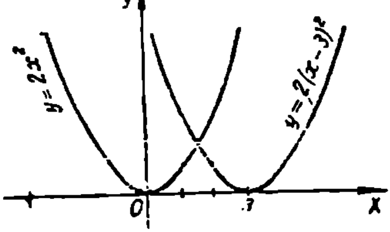
აქედან შეიძლება დავასკვნათ:

$y=a(x-m)^2$ მრუდის თითოეული წერტილი მიიღება $y=ax^2$ მრუდის შესაბამისი წერტილის აბსცისათა ღერძის გასწვრივ მარჯვნივ, m-ის ტოლ მანძილზე გადატანით. მაშასადამე, $y=a(x-m)^2$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=ax$ ფუნქციის გრაფიკის აბსცისათა ღერძის გასწვრივ თავის თავის პარალელურად m მანძილზე მარჯვნივ გადატანით.

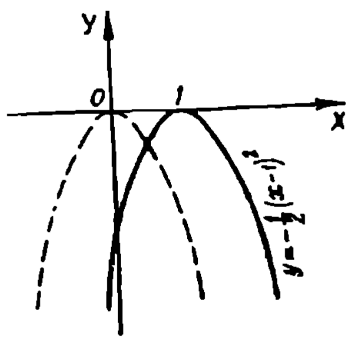


ნახ. 45.

მაგალითად, $y=2(x-3)^2$ მრუდი მიიღება $y=2x^2$ მრუდისაგან, თუ მას გადავიტანთ სამი ერთეულით მარჯვნივ, თავის თავის პარალელურად აბსცისათა ღერძის გასწვრივ (ნახ. 46).



ნახ. 46.



ნახ. 47.

$y=-\dfrac{1}{2}(x-1)^2$ მრუდი მიიღება $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ მრუდის ერთი ერთეულით მარჯვნივ თავის თავის პარალელურად აბსცისათა ღერძის გასწვრივ გადატანით. (ნახ. 47).

$y=ax^2$ პარაბოლის წვეროს წარმოადგენს O წერტილი, რომლის კოორდინატებია (0,0), სიმეტრიის ღერძი არის $x=0$ წრფე (ორდინატთა ღერძი), თუ $y=ax^2$ მრუდს მარჯვნივ გადავაადგილებთ m მანძილით, მაშინ წვერო O (0,0) გადავა $O'(m,0)$ წერტილში, ხოლო სიმეტრიის ღერძი ამ ახალი მდებარეობის დროს იქნება არა $x=0$ წრფე, არამედ $x=m$ წრფე (ორდინატთა ღერძის პარალელური წრფე, დაშორებული, სათავიდან m მანძილით). მაშასადამე, $y=a(x-m)^2$ პარაბოლის წვერო იქნება $O'(m;\ 0)$ წერტილში, ხოლო სიმეტრიის ღერძი იქნება $x=m$ წრფე.

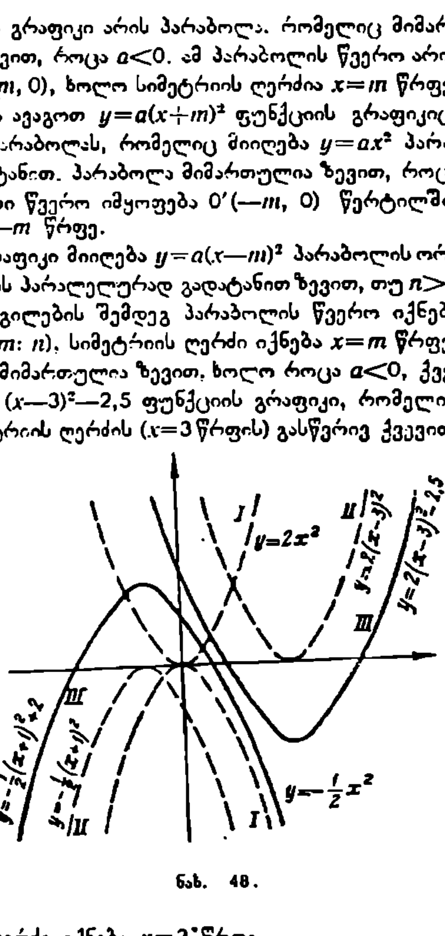
როგორც ვიცით, $y=ax^2$ პარაბოლა მიმართულია ზევით, როცა $a>0$, და — ქვევით, როცა $a<0$. სწორედ ასეთივე მიმართულება ექნება $y=a(x-m)^2$ პარაბოლასაც.

ამრიგად, $y=a(x-m)^2$ ფუნქციის გრაფიკი არის პარაბოლა, რომელიც მიმართულია ზევით, როცა $a>0$, და — ქვევით, როცა $a<0$. ამ პარაბოლის წვერო არის წერტილი, რომლის კოორდინატებია $(m,0)$, ხოლო სიმეტრიის ღერძია $x=m$ წრფე.

ზუსტად ანალოგიურად შეიძლება ავაგოთ $y=a(x+m)^2$ ფუნქციის გრაფიკიც. ამ ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს პარაბოლას, რომელიც მიიღება $y=ax^2$ პარაბოლის m ერთეულით მარცხნივ გადატანით. პარაბოლა მიმართულია ზევით, როცა $a>0$, და — ქვევით, როცა $a<0$. მისი წვერო იმყოფება $O'(-m,\ 0)$ წერტილში. სიმეტრიის ღერძს წარმოადგენს $x=-m$ წრფე.

4. $y=a(x-m)^2+n$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=a(x-m)^2$ პარაბოლის ორდინატთა ღერძის გასწვრივ თავის თავის პარალელურად გადატანით ზევით, თუ $n>0$ და — ქვევით, თუ $n<0$. ამ გადაადგილების შემდეგ პარაბოლის წვერო იქნება წერტილი, რომლის კოორდინატებია $(m;\ n)$, სიმეტრიის ღერძი იქნება $x=m$ წრფე.

როცა $a>0$, პარაბოლის შტოები მიმართულია ზევით, ხოლო როცა $a<0$, ქვევით. 48-ე ნახაზზე გამოსახულია $y=2(x-3)^2-2{,}5$ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც მიიღება $y=2(x-3)^2$ პარაბოლის სიმეტრიის ღერძის ($x=3$ წრფის) გასწვრივ ქვევით, 2,5-ის ტოლ მანძილზე გადაადგილებით. $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+2$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ პარაბოლის ზევითკენ გადაადგილებით 2 ერთეულით.



ნახ. 48.

ამრიგად, $y=2(x-3)^2-2{,}5$ პარაბოლის ასაგებად საჭიროა:

ა) $y=2x^2$ პარაბოლის აგება (მრუდის I მდებარეობა).

ბ) $y=2x^2$ პარაბოლის გადატანა სამი ერთეულით მარჯვნივ თავისთავის პარალელურად (მრუდის II მდებარეობა). წვერო გადაადგილდება წერტილში, რომლის კოორდინატები იქნება (3, 0), სიმეტრიის ღერძი იქნება $x=3$ წრფე.

გ) ამ პარაბოლის სიმეტრიის ღერძის გასწვრივ ქვევით 2,5 ერთეულით დაწევა (მრუდის III მდებარეობა).

ასეთივე წესით მიიღება $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+2$ პარაბოლაც.

5. $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკი.

როგორც ვიცით, ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს: $-\frac{b}{2a}=m$; $-\frac{b^2-4ac}{4a}=n$, მაშინ $y=ax^2+bx+c$ კვადრატული სამწევრი მიიღებს შემდეგ სახეს:

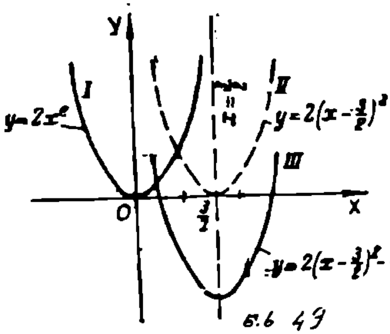
$$y=a(x-m)^2+n$$

ამრიგად, $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკის აგება შეიძლება $y=ax^2$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით. მასთან, $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს პარაბოლას, რომლის წვერო მდებარეობს $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ წერტილში, ხოლო მისი სიმეტრიის ღერძს წარმოადგენს $x=-\frac{b}{2a}$ წრფე. როცა $a>0$, პარაბოლის შტოები მიმართულია ზევით, ხოლო, როცა $a<0$ — ქვევით.

§ ნII. კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის აგების მაგალითები

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ავაგოთ $y=2x^2-6x+7$ ფუნქციის გრაფიკი. მოცემული კვადრატული სამწევრიდან გამოვყოთ სრული კვადრატი:

$$2x^2-6x+7=2\left(x^2-3x+\frac{7}{2}\right)=2\left[\left(x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}+\frac{7}{2}\right]=$$
$$=2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right]$$



ნახ. 49.

საბოლოოდ,

$$y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$$

გრაფიკის აგებას ვასრულებთ შემდეგი თანამიმდევრობით:

ა) ვაგებთ $y=2x^2$ პარაბოლას (მრუდის I მდებარეობა); წვერო მდებარეობს (0, 0) წერტილში, სიმეტრიის ღერძია $x=0$ წრფე (OY ღერძი).

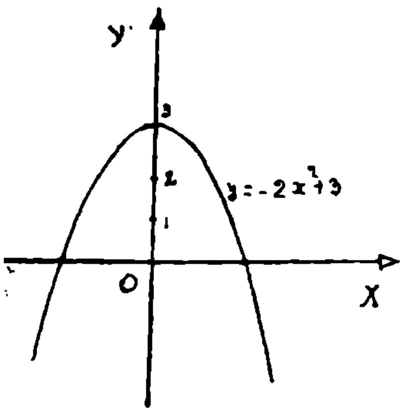
ბ) $y=2x^2$ პარაბოლა გადავიტანოთ მარჯვნივ წერტილში, რომლის კოორდინატებია $\left(\frac{3}{2};\ 0\right)$, სიმეტრიის ღერძია $x=\frac{3}{2}$ წრფე.

გ) $y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)$ პარაბოლა გადავაადგილოთ ახალი სიმეტრიის ღერძის გასწვრივ ქვევით, $\frac{5}{2}$-ის ტოლი მანძილით.

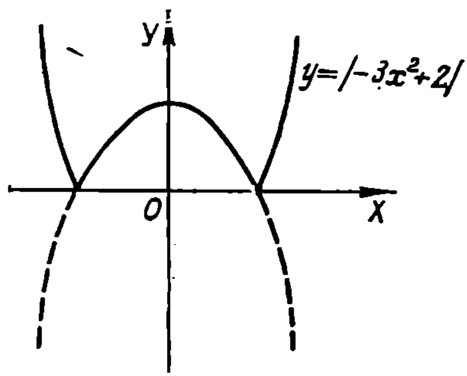
პარაბოლის წვეროს კოორდინატები იქნება $\frac{3}{2}$ და $-\frac{5}{2}$, სიმეტრიის ღერძია იგივე წრფე.

ამრიგად, პარაბოლის III მდებარეობა შეესაბამება $y=2x^2-6x+7$ ფუნქციას და წარმოადგენს მის გრაფიკს (ნახ.49).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ავაგოთ $y=|-3x^2+2|$ ფუნქციის გრაფიკი. საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგოთ $y=-3x^2+2$ ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. 50).



ნახ. 50 ა.



ნახ. 50 ბ.

$y=-3x^2+2$ პარაბოლის იმ ნაწილს, რომელიც აბსცისათა ღერძის ზევით მდებარეობს, ვტოვებთ უცვლელად, ხოლო პარაბოლის იმ ნაწილს, რომელიც მდებარეობს აბსცისათა ღერძის ქვევით (ნახ. 50, ბ-ზე წყვეტილადაა ნაჩვენები), სიმეტრიულად გადავსახავთ აბსცისათა ღერძის მიმართ. მიღებული მრუდი (ნახ. 50, ბ) წარმოადგენს $y=|-3x^2+2|$ ფუნქციის გრაფიკს.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

ააგეთ შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკები:

1. $y=2x^2+12x+17$.
2. $y=2x^2-3x-2$.
3. $y=-3x^2+8x+3$.
4. $y=|-x^2+2|$.
5. $y=|3x^2-1|$.
6. $y=|-x^2+3x-2|$.
7. ნახაზზე გამოსახეთ შემდეგი პარაბოლების ურთიერთგანლაგება:

1. $y=3x^2$ და $y=-3x^2$;
2. $y=(x-1)^2$ და $y=-(x-1)^2$
3. $y=(x+2)^2+3$ და $y=-(x+2)^2+3$.

§ 60. პარაბოლის მახასიათებელი წერტილები

$y=ax^2+bx+c$ პარაბოლის მახასიათებელი წერტილები ეწოდება მისი წვეროს და კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებს. თუ ax^2+bx+c სამწევრიდან მოვახდენთ სრული კვადრატის გამოყოფას, მივიღებთ პარაბოლის წვეროს კოორდინატებს:

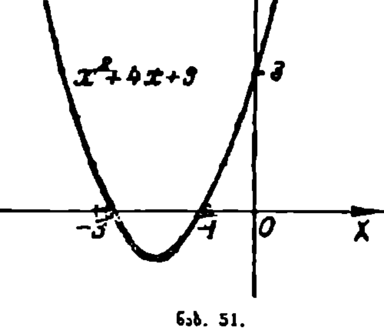
$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

$$x=-\frac{b}{2a} \quad \text{და} \quad y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

მაგალითად, თუ $y=x^2+4x+3$ პარაბოლის წვეროს კოორდინატების მოსაძებნად გამოვყოფთ მისგან სრულ კვადრატს

$$x^2+4x+3=(x+2)^2-1,$$

წვეროს აბსცისა იქნება —2, ხოლო ორდინატი —1 (ნახ. 51).



ნახ. 51.

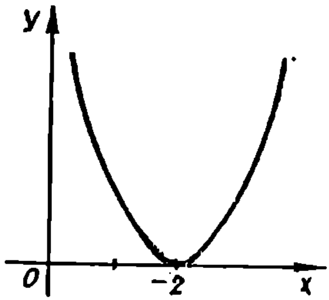
ორდინატთა ღერძთან გადაკვეთა აქვს ნებისმიერ $y=ax^2+bx+c$. პარაბოლას. ცხადია, პარაბოლის OY ღერძთან გადაკვეთის აბსცისა უდრის ნულს, ორდინატი კი — c-ს. იგი მიიღება, თუ $y=ax^2+bx+c$ გამოსახულებაში ჩავსვამთ $x=0$. განხილულ მაგალითში თუ ვიგულისხმებთ $x=0$, მივიღებთ $y=3$. მართლაც, $y=x^2+4x+3$ პარაბოლა ორდინატთა ღერძს კვეთს $y=3$ წერტილში (ნახ. 51), ე. ი. ორდინატა ღერძთან პარაბოლის გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებია (0, 3).

აბსცისათა ღერძთან გადაკვეთის წერტილები $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლას ყოველთვის არა აქვს. თუ ax^2+bx+c გამოსახულების დისკრიმინანტი $b^2-4ac>0$, მაშინ, როგორც ვიცით, ax^2+bx+c განტოლებას აქვს ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფესვი x_1 და x_2. სწორედ ამ წერტილებში გადაკვეთს აბსცისათა ღერძს $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლა.

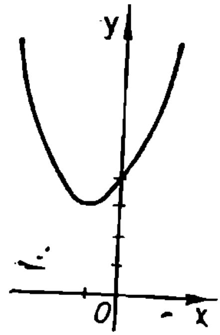
მაგალითად, x^2+4x+3 კვადრატული სამწევრისათვის $b^2-4ac=4>0$. ამ სამწევრს აქვს ფესვები $x_1=-1$, $x_2=3$, ამიტომ $y=x^2+4x+3$ პარაბოლა აბსცისათა ღერძს გადაკვეთს $x=-1$ და $x=-3$ წერტილებში (ნახ. 51).

თუ ax^2+bx+c გამოსახულების დისკრიმინანტი $b^2-4ac=0$, მაშინ $ax^2+bx+c=0$ განტოლებას ექნება ერთი ნამდვილი ფესვი $x=\frac{-b}{2a}$ და პარაბოლის განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით: $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ეს პარაბოლა ეხება აბსცისა-

თა ღერძს $\left(-\frac{b}{2a};\ 0\right)$ წერტილში. მაგალითად, x^2-4x+4 კვადრატული სამწევრისათვის დისკრიმინანტი $b^2-4ac=0$, ამიტომ $x^2-4x+4=0$ განტოლებას აქვს ერთი ნამდვილი ფესვი $x=2$. ამიტომ $y=x^2-4x+4$ პარაბოლა ეხება აბსცისათა ღერძს წერტილში, რომლის აბსცისაა 2 (ნახ. 52). თუ ax^2+bx+c სამწევრის დისკრიმინანტი $b^2-4ac<0$, მაშინ ax^2+bx+c განტოლებას, როგორც ვიცით, არა აქვს ნამდვილი ფესვები. ეს იმას ნიშნავს, რომ პარაბოლა არ კვეთს აბსცისათა ღერძს. მაგალითად, x^2+2x+5 სამწევრისათვის $b^2-4ac=4-20=-16<0$.



ნახ. 52.



ნახ. 53.

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $x^2+2x+5=0$ განტოლებას არა აქვს ნამდვილი ფესვები და $y=x^2+2x+5$ პარაბოლა კვეთს აბსცისათა ღერძს (ნახ. 53).

$y=ax^2+bx+c$ პარაბოლის გრაფიკის აგებისას უნდა მოვძებნოთ პარაბოლის მახასიათებელი წერტილები, ე. ი. პარაბოლის წვეროს კოორდინატები და საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები. ამით შეიძლება პარაბოლა საკმაო სიზუსტით იქნას აგებული.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

ააგეთ პარაბოლები მახასიათებელი წერტილების და სიმეტრიის ღერძების ჩვენებით:

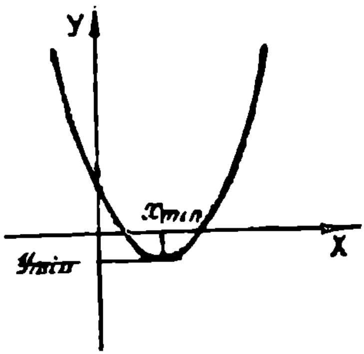
1. $y=3(x-2)^2-1$.
2. $y=2x^2+x+1$.
3. $y=2x^2-2x-4$.
4. $y=x^2+12x+22$.

§ 61. კვადრატული სამწევრის ექსტრემალური მნიშვნელობები

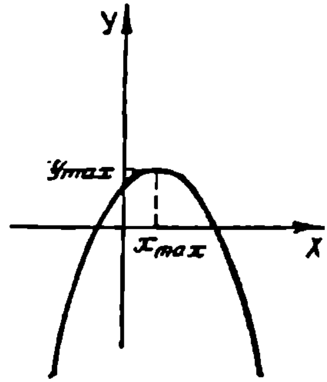
$y=ax^2+bx+cx$ კვადრატული ფუნქცია არგუმენტის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის მიიღებს ერთმანეთისაგან განსხვავებულ მნიშვნელობებს. ამ მნიშვნელობებიდან უმცირესი ანუ მინიმალური მნიშვნელობა გეომეტრიულად შეიძლება განვიხილოთ როგორც $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლის ყველაზე „დაბალი“ წერტილის ორ-

ორდინატი (ნახ 54. ა), ხოლო უდიდესი ანუ მაქსიმალური მნიშვნელობა — როგორც $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლის ყველაზე „მაღალი“ წერტილის ორდინატი (ნახ. 54, ბ).

იმ შემთხვევაში, როცა $a>0$, პარაბოლას ექნება 54, ა ნახაზზე მოცემული სახე, როგორც ნახაზიდან ჩანს, პარაბოლას არ გააჩნია ყველაზე „მაღალი“ წერტილი, რაც იმას ნიშნავს, რომ $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციას ამ შემთხვევაში არ გააჩნია მაქსიმალური მნიშვნელობა.



ნახ. 54 ა.



ნახ. 54-ბ.

იგივე ნახაზი გვეუბნება, რომ პარაბოლას გააჩნია ყველაზე „დაბალი“ წერტილი — მისი წვერო, ე. ი ამ შემთხვევაში ფუნქციას გააჩნია მინიმალური მნიშვნელობა, რაც სიდიდით $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლის წვეროს ორდინატის ტოლია და აღნიშნული გვაქვს y_{min}-ით. წვეროს აბსცისა — x_{min} გამოსახავს x არგუმენტის იმ მნიშვნელობას, რომელზედაც $y=ax^2+bx+c$ ფუნქცია აღწევს მინიმუმს.

თუ $a<0$, მაშინ პარაბოლას ექნება 54, ბ ნახაზზე მოცემული სახე. ნახაზიდან უშუალოდ ჩანს, რომ ამ შემთხვევაში არ არსებობს პარაბოლის ყველაზე „დაბალი“. წერტილი. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ არ არსებობს $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა. იგივე ნახაზი გვიჩვენებს, რომ ამ შემთხვევაში არსებობს პარაბოლის ყველაზე „მაღალი“ წერტილი — მისი წვერო. მაშასადამე, არსებობს $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა. ეს მნიშვნელობა სიდიდით უდრის წვეროს ორდინატს და მას y_{min}-ით აღვნიშნავთ. წვეროს აბსცისა x_{min} არის x არგუმენტის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y=ax^2+bx+c$ ფუნქცია აღწევს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

ჩვენ ვნახეთ, რომ $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლის წვეროს, იმისგან დამოუკიდებლად დადებითია a თუ უარყოფითი, აქვს კოორდინატები:

$$x=-\frac{b}{2a};\quad y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

ამიტომ შეიძლება ვთქვათ: თუ $a>0$, მაშინ $y=ax^2+bx+c$. ფუნქცია ღებულობს მინიმალურ მნიშვნელობას: $y_{min}=-\frac{b^2-4ac}{4a}$. როცა $x_{min}=-\frac{b}{2a}$, ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა არ არსებობს.

თუ $a<0$, მაშინ $y=ax^2+bx+c$ ფუნქცია იღებს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას $y_{max}=-\frac{b^2-4ac}{4a}$, როცა $x_{min}=-\frac{b}{2a}$, ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა არ არსებობს.

განსაზღვრა. **ფუნქციის მინიმალურ და მაქსიმალურ მნიშვნელობებს ექსტრემალური მნიშვნელობები ეწოდება.**

მაგალითები.

1. ვიპოვოთ $y=2x^2+12x+13$ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობა და მივუთითოთ x-ის რა მნიშვნელობისათვის ღებულობს ფუნქცია ამ მნიშვნელობას.

როგორც ვხედავთ, x^2-ის კოეფიციენტი $a=2>0$, ამიტომ $y=2x^2+12x+13$ ფუნქციას ექნება მინიმალური მნიშვნელობა. მაქსიმალური მნიშვნელობა მას არ ექნება.

მინიმალური მნიშვნელობის განსაზღვრის მიზნით ვიპოვოთ წვეროს კოორდინატები, რისთვისაც საჭიროა $2x^2+12x+13$ სამწევრიდან გამოიყოს სრული კვადრატი:

$$2x^2+12x+13=2\left(x^2+6x+\frac{13}{2}\right)=2\left[(x+3)^2-9+\frac{13}{2}\right]=$$
$$=2\left[(x+3)^2-\frac{18-13}{2}\right]=2(x+3)^2-5.$$

ამრიგად, პარაბოლის წვეროს კოორდინატებია $x=-3$; $y=-5$. ვხედავთ, რომ $y=2x^2+12x+13$ ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობაა $y=-5$; ფუნქცია მას აღწევს მაშინ, როცა $x=-3$.

2. ვიპოვოთ $y=-2x^2-4x-5$ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობები. გამოვყოთ სრული კვადრატი:

$$-2\left(x^2+2x+\frac{5}{2}\right)=-2\left[(x+1)^2-1+\frac{5}{2}\right]=-2\left[(x+1)^2+\frac{5}{2}\right]=$$
$$=-2(x+1)^2-5.$$

ამრიგად, $y_{max}=-5$. მას ფუნქცია აღწევს მაშინ, როცა $x=-1$. მინიმუმი ამ ფუნქციას არა აქვს.

სავარჯიშო

იპოვეთ მოცემული ფუნქციების ექსტრემალური მნიშვნელობები და აჩვენეთ არგუმენტის რა მნიშვნელობისათვის მიიღებენ ისინი მას:

1. $y=2x^2-4x-17$.
2 $y=-x^2-4x+6$.
3. $y=|6x^2-x-1|$
4. $y=|4x^2-4x-3|$.

§ 62. კვადრატული უტოლობანი

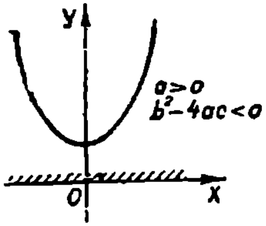
$$ax^2+bx+c>0,$$
$$ax^2+bx+c<0$$

სახის უტოლობებს, სადაც $a\neq 0$ და a, b, c კოეფიციენტები რაიმე მუდმივი რიცხვებია, ეწოდება კვადრატული, ანუ მეორე ხარისხის, უტოლობანი. განვიხი-

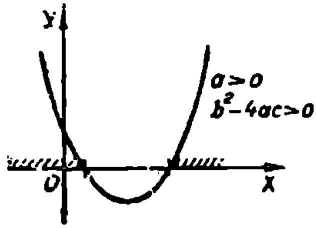
ლოთ უტოლობა $ax^2+bx+c>0$. აქ შეიძლება წარმოგვიდგეს შემთხვევები, როცა $a>0$ და $a<0$.

ა) $a>0$, მაშინ, ცხადია, $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლის შტოები მიემართება ზევით. თუ ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი $b^2-4ac<0$, მაშინ, სამწევრს არ ექნება ნამდვილი ფესვები, რაც იმას ნიშნავს, რომ $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლა არ გადაკვეთს აბსცისათა ღერძს და მდებარეობს მთლიანად ამ ღერძის ზევით (ნახ. 55, ა). ამ შემთხვევაში $ax^2+bx+c>0$ უტოლობა სრულდება x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. თუ დისკრიმინანტი $b^2-4ac>0$, მაშინ პარაბოლა კვეთს აბსცისათა ღერძს x_1 და x_2 წერტილებში (ნახ. 55, ბ):

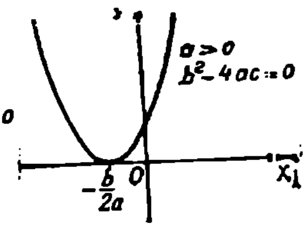
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$



ნახ. 55, ა.



ნახ. 55, ბ.



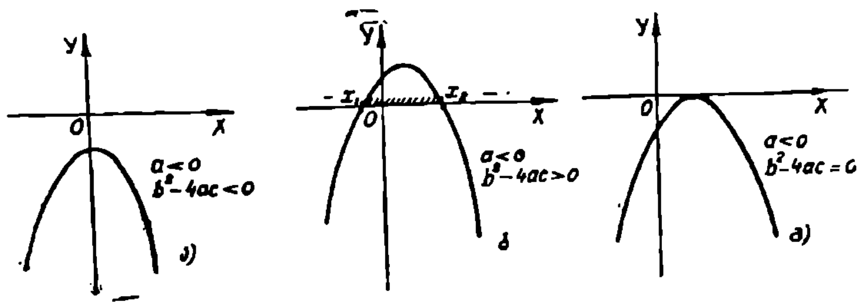
ნახ. 55, გ.

როდესაც $x<x_1$ და $x>x_2$, სრულდება $ax^2+bx+c>0$ უტოლობა. ბოლოს, თუ ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრის $b^2-4ac=0$, მაშინ სამწევრს აქვს ერთადერთი ფესვი $x=-\frac{b}{2a}$ და, როგორც ვიცით, იგი წარმოიდგინება $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ სახით. ამ შემთხვევაში პარაბოლა ეხება აბსცისათა ღერძს $x=-\frac{b}{2a}$ წერტილში, ამიტომ $ax^2+bx+c>0$ უტოლობა სრულდება x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა $x=-\frac{b}{2a}$ (ნახ. 55, ბ).

ბ) $a<0$, ამ შემთხვევაში, როგორც ვიცით, $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლის შტოები მიემართება ქვევით.

თუ $b^2-4ac<0$, მაშინ, ცხადია, $ax^2+bx+c=0$ განტოლებას არა აქვს ნამდვილი ფესვები, ეს კი ნიშნავს, რომ პარაბოლა არ გადაკვეთს აბსცისათა ღერძს და მთლიანად მდებარეობს მის ქვემოთ (ნახ. 56, ა). ამიტომ $ax^2+bx+c>0$ უტოლობა არ შესრულდება x-ის არც ერთი მნიშვნელობისათვის.

თუ $b^2-4ac>0$, მაშინ, როგორც ვიცით, $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლა კვეთს აბსცისათა ღერძს x_1 და x_2 წერტილებში, $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ და $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (ნახ. 56, ბ). ამ შემთხვევაში $ax^2+bx+c>0$ უტოლობა სრულდება x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომლებიც მდებარეობენ x_1 და x_2 შორის, ე. ი. როცა $x_1<x<x_2$.



ნახ. 56.

ბოლოს, თუ $b^2-4ac=0$, მაშინ, როგორც ვიცით, $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლა ეხება აბსცისათა ღერძს $x=-\dfrac{b}{2a}$ წერტილში და $ax^2+bx+c>0$ უტოლობა არ სრულდება x-ის არც ერთი მნიშვნელობისათვის (ნახ. 56, გ).

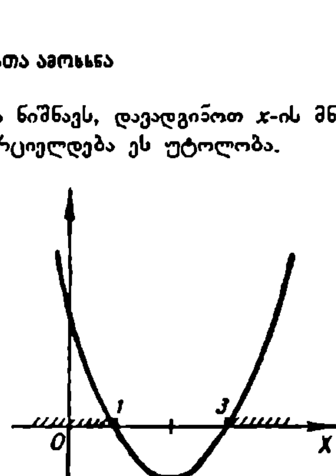
როგორც ვნახეთ, თუ ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი $b^2-4ac>0$, მაშინ სამწევრს შეუძლია მიიღოს როგორც დადებითი ისე უარყოფითი მნიშვნელობაც, ამის ილუსტრაციას წარმოადგენს 56 ბ, და 56, გ ნახაზები.

თუკი $b^2-4ac<0$, მაშინ ax^2+bx+c სამწევრის ყველა მნიშვნელობას ერთი და იგივე ნიშანი აქვს, სახელდობრ, x^2-ის კოეფიციენტის ნიშანი.

§ ია. კვადრატულ უტოლობათა ამოხსნა

ამოვხსნათ $ax^2+bx+c>0$ სახის უტოლობა ნიშნავს, დავადგინოთ x-ის მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლისთვისაც განხორციელდება ეს უტოლობა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ უტოლობა $x^2-4x+3>0$. ვინაიდან x^2-4x+3 სამწევრის დისკრიმინანტი $b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=4>0$, ამიტომ $x^2-4x+3=0$ განტოლებას ექნება ფესვები $x_1=3$ და $x_2=1$; ვინაიდან $a=1>0$, ამიტომ პარაბოლის შტოები მიმართული იქნება ზევით (ნახ. 57).



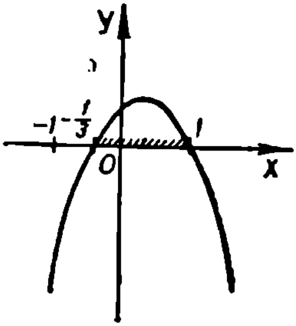
ნახ. 57.

ნახაზიდან ნათლად ჩანს, რომ $x^2-4x+3>0$ (ე. ი. უტოლობა სრულდება). მაშინ, როცა $x<1$ და $x>3$. ე. ი. $3<x<1$ ანუ $1>x>3$ (ნახ. 57).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ უტოლობა $-3x^2+2x+1>0$; $-3x^2+2x+1$ სამწევრის დისკრიმინანტი $b^2-4ac=4-4\cdot(-3)\cdot 1=4+12=16>0$. ამიტომ $-3x^2+2x+1=0$ განტოლებას ექნება ორი ნამდვილი ფესვი $x_1=1$ და

$x_2 = -\frac{1}{3}$, ვინაიდან $a=-3<0$, ამიტომ $y=-3x^2+2x+1$ პარაბოლის შტოები მიმართული იქნება ქვევით (ნახ. 58.)

ბოლოს $-3x^2+2x+1>0$ უტოლობა სრულდება მაშინ, როცა $x>-\frac{1}{3}$ და $x<1$, ე. როცა $-\frac{1}{3} < x < 1$.



ნახ. 58.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ამოვხსნათ უტოლობა

$$\frac{x^2+2x-15}{x+1}<0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა;

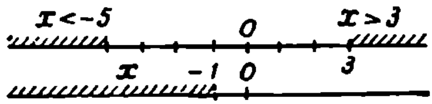
მოცემულია:

$$\frac{x^2+2x-15}{x+1}<0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-15>0 \\ x+1<0. \end{cases}$$

$$\text{ან} \begin{cases} x^2+2x-15<0 \\ x+1>0. \end{cases}$$

ამოვხსნათ პირველი სისტემის პირველი უტოლობა: $x^2+2x-15>0$ $a=1>0$, $b^2-4ac=16>0$, ამიტომ $x^2+2x-15$ კვადრატულ სამწევრს ექნება ორი ნამდვილი ფესვი: $x_1=-5$ და $x_2=3$. პირველი სისტემის მეორე უტოლობის ამოხსნა იძლევა $x<-1$. როგორც ვხედავთ, $y=x^2+2x-15$ პარაბოლა გადაჰკვეთს აბსცისათა ღერძს $x=-5$ და $x=3$ წერტილებში.*

$x^2+2x-15>0$ უტოლობის ამონახსნებია $x<-5$; $x>3$. ხოლო პირველი სისტემის საერთო ამონახსნი იქნება



ნახ. 58 ა.

$$\begin{cases} x<-5 \\ x>3 \\ x<-1. \end{cases}$$

ე. ი. ამონახსნი იქნება $x<-5$. ახლა განვიხილოთ მე-2 სისტემა. ვხედავთ, რომ იგი აზრით პირველის მოპირდაპირეა ამიტომ მისი ამონახსნი იქნება:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>-5, \\ x<3. \end{array}\right. \\ x>-1 \end{cases}$$

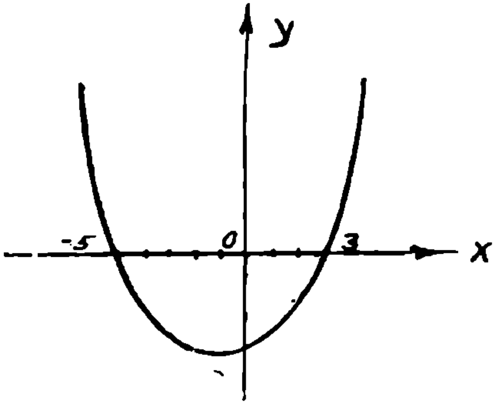
საბოლოოდ გვაქვს: $x<-5$ და $-1<x<3$.

---

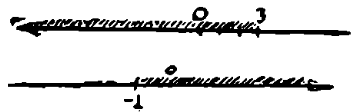
* კვადრატულ უტოლობათა ამოხსნის დროს სავალდებულო არაა წვერის კოორდინატების მოძებნა და წვერის ზუსტად აგება.

59 ნახაზიდან უშუალოდ ჩანს, რომ $x^2+2x-15<0$ უტოლობა შესრულდება მაშინ, როცა $x>-5$ და $x<3$.

ხოლო მოცემული უტოლობის ამონახსნი იქნება ან $x<-5$ ან $-1<x<3$.



ნახ. 59. ა.



ნახ. 59. ბ.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

ამოხსენით მოცემული უტოლობანი:

1. $x^2-6x+5<0.$
2. $2x^2+4x-6>0.$
3. $-5x^2+3x+2>0.$
4. $x^2+x+1<0.$
5. $-3x^2+2x+1>0.$
6. $x^2-6x+10<0$
7. $\dfrac{x^2-6x-16}{-x^2+8x-12}>0.$
8. $5x^2-8x+2<0.$

§ 44. ტოლძალოვანი განტოლებანი. თეორემები განტოლებათა ტოლძალოვნების შესახებ

წინა კლასებიდან ვიცით, რომ ასოს შემცველი ყველა ტოლობა იყოფა ორ კლასად — იგივეობებად და განტოლებებად.

იგივეობები ისეთი ტოლობებია, რომელთა ორივე ნაწილი ღებულობს ერთნაირ რიცხვით მნიშვნელობებს ასოს ნებისმიერი დასაშვები მნიშვნელობებისათვის.

მაგალითად, ტოლობები:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2, \quad a^2-1=(a-1)(a+1), \quad a^3\pm 1=(a\pm 1)(a^2\pm a+1)$$

წარმოადგენს იგივეობებს.

შეიძლება საქმე გვექნეს ისეთ ტოლობასთან, რომლის ორივე ნაწილი ღებულობდეს სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობებს, ასოს თუნდაც ერთი დასაშვები მნიშვნელობისათვის. ასეთ ტოლობებს მიეკუთვნება, მაგალითად, ტოლობები:

$$x+4=5, \quad x^2+1=-3.$$

ასოს შემცველი ტოლობის განხილვისას თუ მოვითხოვეთ, ასოს რომელი

დასაშვები მნიშვნელობისათვის ღებულობს ამ ტოლობის ორივე ნაწილი ერთნაირ რიცხვით მნიშვნელობას, მაშინ საქმე გვექნება განტოლებასთან.

მაგალითად თუ $x+3=2$ ტოლობას განვიხილავთ როგორც განტოლებას x-ის მიმართ, მაშინ ადვილი მისახვედრია, რომ აღებული ტოლობის ორივე ნაწილი მიიღებს ერთსა და იმავე რიცხვით მნიშვნელობას მხოლოდ მაშინ, როცა $x=-1$. მართლაც, $-1+3=2$; $2=2$;

განსაზღვრა 1. ასოთი გამოსახული უცნობი რიცხვის შემცველ ტოლობას განტოლება ეწოდება.

განტოლებათა მაგალითებია:

$$2a+5=2;\quad \frac{1}{4}x+3=2;\quad x^2=5x+1 \text{ და ა. შ.}$$

განსაზღვრა 2. უცნობის მნიშვნელობებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას, მისი ამონახსნი ანუ ფესვები ეწოდება.

ასე მაგალითად, $2a+5=2$ განტოლების ფესვი არის $-\frac{3}{2}$, ვინაიდან აღებულ განტოლებაში a-ს შეცვლა $-\frac{2}{3}$-ით აკმაყოფილებს განტოლებას.

განსაზღვრა. 3. ამოვხსნათ განტოლება ნიშნავს, ვიპოვოთ უცნობის მნიშვნელობანი, რომელთა დროსაც განტოლების ორივე ნაწილი ერთი და იმავე რიცხვს უდრის.

განსაზღვრა 4. ერთი და იგივე უცნობი სიდიდის მიმართ ორ განტოლებას ტოლფასი (ანუ ეკვივალენტური) ეწოდება, თუ პირველი განტოლების თითოეული ფესვი იმავე დროს მეორე განტოლების ფესვია, ხოლო მეორე განტოლების თითოეული ფესვი იმავე დროს პირველი განტოლების ფესვიცაა.

ტოლფასია, მაგალითად განტოლებები: $x+2=3$ და $x-1=0$. თითოეულს ამ განტოლებათგან აქვს ერთადერთი ფესვი 1. ეკვივალენტურია $x^2=9$ და $2x^2-18=0$ განტოლებებიც, ვინაიდან თითოეულ მათგანს აქვს ფესვი $x=\pm 3$, ტოლფასად ჩაითვლება ის განტოლებებიც, რომელთაც სულ არა აქვთ ფესვები. მაგალითად, $2x^2=-5$ და $x^2+2=-1$.

განტოლებათა ამოხსნის დროს ყოველთვის მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ ტოლფას განტოლებათა თვისებები, რომლებიც ჩამოყალიბდება შემდეგი თეორემების სახით.

თეორემა 1. თუ განტოლების ორივე ნაწილს მივუმატებთ ერთსა და იმავე რიცხვს ან ერთსა და იმავე მრავალწევრს, მაშინ მივიღებთ განტოლებას, რომელიც მოცემულის ტოლფასი იქნება.

დამტკიცება

ვთქვათ, მოცემულია განტოლება:

$$f(x)=\varphi(x). \tag{1}$$

უნდა დავამტკიცოთ, რომ (1) განტოლების ორივე ნაწილისთვის $p(x)$-ის მიმატებით მიღებული განტოლება:

$$f(x)+P(x)=\varphi(x)+p(x) \tag{2}$$

ტოლფასია მოცემული განტოლებისა.

ვთქვათ, x_0 არის (1) განტოლების ფესვი, მაშინ გვექნება შემდეგი რიცხვითი ტოლობა:

$$f(x_0)=\varphi(x_0). \tag{3}$$

ახლა, თუ (3) ტოლობის ორივე ნაწილს დავუმატებთ $P(x)_0$ რიცხვს, მივიღებთ:

$$f(x_0)+P(x_0)=\varphi(x_0)+P(x_0). \tag{4}$$

(4) ტოლობა გვეუბნება, რომ x_0 არის (2) ტოლობის ფესვი.
ამრიგად, ნაჩვენებია, რომ (1) განტოლების ყოველი ფესვი იმავე დროს არის (2) განტოლების ფესვიც.

ახლა ვაჩვენოთ შებრუნებული გამოთქმა: (2) განტოლების ყოველი ფესვი აგრეთვე არის (1) განტოლების ფესვიც.

ვთქვათ, რიცხვი x_0 არის (2) განტოლების ფესვი. მაშინ გვექნება შემდეგი რიცხვითი ტოლობა:

$$f(x_0)+p(x_0)=\varphi(x_0)+P(x_0). \tag{5}$$

მაგრამ როგორც ვიცით, თუ ტოლ რიცხვებს გარკვეულ ტოლ რიცხვებს გამოვაკლებთ, ამით ტოლობა არ ირღვევა. ე. ი. თუ (5) ტოლობის ორივე მხარეს გამოვაკლებთ $P(x_0)$-ს, მივიღებთ:

$$f(x_0)=\varphi(x_0).$$

ეს უკანასკნელი კი ნიშნავს, რომ რიცხვი x_0 არის (1) განტოლების ფესვი.

ამით დავამტიცეთ (1) და (2) განტოლებათა ტოლფასობა.

თ ე ო რ ე მ ა 2. თუ განტოლების ორივე ნაწილს გავამრავლებთ ან გავყოფთ ნულისაგან განსხვავებულ ერთსა და იმავე რიცხვზე, მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს განტოლება:

$$f(x)=\varphi(x) \tag{1}$$

და $A\neq 0$. თუ გავამრავლებთ (1) განტოლების ორივე მხარეს A-ზე, მივიღებთ

$$A\cdot f(x)=A\cdot\varphi(x). \tag{2}$$

უნდა დავამტკიცოთ, რომ (1) და (2) განტოლება ტოლფასია.

x_0 იყოს (1) განტოლების ფესვი, მაშინ გვექნება შემდეგი ცხადი რიცხვითი ტოლობა: $f(x_0)=\varphi(x_0)$. როგორც ვიცით, ტოლი რიცხვების ნულის არა ტოლ ერთსა და იმავე რიცხვზე გამრავლება ტოლობას არ ცვლის, ამიტომ გვექნება:

$$A\cdot f(x_0)=A\cdot\varphi(x_0). \tag{3}$$

(3) ტოლობა ნიშნავს იმას რომ x_0 არის (2) განტოლების ფესვი.

ახლა შებრუნებით, თუ x_0 არის (2) განტოლების ფესვი, გვექნება რიცხვითი ტოლობა:

$$A\cdot f(x_0)=A\cdot\varphi(x_0). \tag{4}$$

სადაც $A\neq 0$. (4) რიცხვითი ტოლობა შეიძლება გაიყოს ნულის არატოლ A რიცხვზე და გვექნება:

$$f(x_0)=\varphi(x_0).$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ x_0 არის (1) განტოლების ფესვი.

ამით მეორე თეორემის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

§ 65. ფესვების დაკარგვის და გარეშე ფესვების მიღების შემთხვევები

ზემოთ დამტკიცებული ორი თეორემა მიუთითებს იმაზე, თუ განტოლების წევრებზე რომელი მოქმედებების წარმოება არ არღვევს განტოლებათა ტოლფასობას. ახლა განვიხილოთ განტოლების წევრებზე ისეთი მოქმედებები, რომლებმაც შეიძლება გამოიწვიოს ფესვების დაკარგვა ან გარეშე ფესვის მიღება.

ჯერ ეს საკითხი განვიხილოთ კონკრეტულ მაგალითებზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. $3x(x-2)=4(x-2)$, ამ განტოლებას გამარტივების შემდეგ ექნება სახე $3x^2-10x+8=0$. მისი ფესვებია: $x_1=2$; $x_2=\frac{4}{3}$. თუკი მოცემულ განტოლებას შევკვეცავთ საერთო თანამამრავლზე, მივიღებთ $3x=4$, საიდანაც $x=\frac{4}{3}$. როგორც ჩანს, $3x=4$ განტოლება მოცემულის ტოლფასი არაა, ვინაიდან მას აქვს მხოლოდ ერთი ფესვი $x=\frac{4}{3}$; მეორე $x=2$ ფესვი მას არ აკმაყოფილებს. ასეთ შემთხვევაში იტყვიან, საქმე გვაქვს ფესვის დაკარგვის შემთხვევასთან.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. $3x-1=5$ განტოლებას აქვს ფესვი $x=2$.

ახლა, თუ მოცემული განტოლების ორივე ნაწილს ავახარისხებთ კვადრატში, გვექნება $9x^2-6x-24=0$, საიდანაც $x_1=2$; $x_2=-\frac{4}{3}$

როგორც ვხედავთ, მიღებული განტოლება მოცემულის არატოლფასია, რაც გამოიწვია ორივე ნაწილის კვადრატში ახარისხებამ. $x_2=-\frac{4}{3}$ არ აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას, ამიტომ ის წარმოადგენს ე. წ. გარეშე ფესვს. მიღებული გარეშე ფესვი ეკუთვნის განტოლებას $3x-1=-5$, რომლის ორივე ნაწილის კვადრატში ახარისხებით მივიღებთ იმავე $9x^2-6x-24=0$ განტოლებას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. $2x-1=3$ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი $x=2$. თუ ამ განტოლებას გავამრავლებთ $x+2$-ზე, მივიღებთ: $(2x-1)(x+2)=3(x+2)$, საიდანაც

$$(2x-1)(x+2)-3(x+2)=0,$$

$$(x+2)(2x-1-3)=0,$$

$$2(x+2)(x-2)=0,$$

რაც გვაძლევს $x=-2$, $x=2$.

ფესვი $x=-2$ არ აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას, რომელსაც აქვს ერთადერთი ფესვი $x=2$. მიღებული გარეშე ფესვი ეკუთვნის განტოლებას: $x+2=0$

განხილული მაგალითების მიხედვით დავასკვნით: გარეშე ფესვი შეიძლება მივიღოთ განტოლების ორივე ნაწილის კვადრატში (საზოგადოდ ლუწ ხარისხში) ახარისხებით, აგრეთვე, ორივე ნაწილის უცნობის შემცველ თანამამრავლზე გამრავლებით, რომელიც ნული ხდება უცნობის ნამდვილი მნიშვნელობისათვის.

§ 99. ირაციონალური განტოლებანი

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. ირაციონალური განტოლებები ეწოდება ისეთ განტოლებებს, რომლებიც უცნობს შეიცავენ რადიკალის ნიშნის ქვეშ.

მაგალითად,

$$\sqrt{1-3x}=3+x, \quad 21+\sqrt{2x-7}=x, \quad \sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$$

განტოლებები ირაციონალურია.

აქ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ისეთ ირაციონალურ განტოლებებს, რომლებიც მხოლოდ კვადრატულ რადიკალებს შეიცავენ. როგორც ვიცით, კვადრატული ფესვის ამოღება შეიძლება მხოლოდ არაუარყოფითი რიცხვებიდან, ე. ი. ფესვქვეშა გამოსახულება იყოს დადებითი, წარმოადგენს ძირითადად მოთხოვნას, რომელიც მუდამ უნდა გავითვალისწინოთ. მაგალითად, აზრს მოკლებულია $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-20}$ და ა. შ. გამოსახულებები. გარდა ამისა, დადებითი რიცხვიდან კვადრატული ფესვი მუდამ უნდა ვიგულისხმოთ დადებითი ე. ი. მხედველობაში უნდა გვქონდეს მისი არითმეტიკული მნიშვნელობა. ასე მაგალითად, $\sqrt{9}=+3$ და არა -3-ს $\sqrt{16}=+4$ და არა -4-ს და ა. შ.

ყოველივე ზემოთ აღნიშნულის გამო საჭიროა, სანამ ამა თუ იმ ირაციონალური განტოლების ამოხსნას შევუდგებოდეთ, დავრწმუნდეთ, აქვს თუ არა აზრი მოცემულ განტოლებას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1: $\sqrt{x-9}=5-x$ განტოლებისაგან ჩვენ მოვითხოვთ ფესვქვეშა გამოსახულება იყოს არაუარყოფითი, ე. ი. $x-9\geqslant 0$, ანუ $x\geqslant 9$, გარდა ამისა, მოვითხოვთ, რომ $\sqrt{x-9}$ რადიკალი იყოს არითმეტიკული, ეს მოთხოვნა, როგორც განტოლების მარჯვენა ნაწილი გ იჩვენებს, დაკმაყოფილდება როცა $x\leqslant 5$, ე. ი. ვღებულობთ ერთმანეთის მოპირდაპირე აზრის ორ მოთხოვნას:

$$x\geqslant 9 \quad \text{და} \quad x\leqslant 5.$$

ცხადია, ერთდროულად ეს პირობები არ შეიძლება შესრულდეს. ამიტომ ამ შემთხვევაში უცნობის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე ცარიელია. ე. ი, იგი არ შეიცავს არც ერთ რიცხვს. ამიტომ აღნიშნულ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს ნამდვილი ფესვები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.

$\sqrt{x^2+2x+1}=-\sqrt{2x^2-47}$ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს რაიმე ფესვები, ვინაიდან მისი მარცხენა ნაწილი $x^2+2x+1=(x+1)^2$ არაუარყოფითია, მარჯვენა კი — უარყოფითი, ამიტომ აღებული განტოლების ამოხსნას არ უნდა შევუდგეთ, მას აზრი არა აქვს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}=-1$ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს ფესვები, ვინაიდან ჩვენ ვგულისხმობთ: $x-3>0$ და $x+3>0$. გარდა ამისა, ვიღებთ $\sqrt{x-3}$-ის და $\sqrt{x+3}$-ის არითმეტიკულ მნიშვნელობებს. მათი ჯამი, როგორც დადებითი რიცხვების ჯამი, არ შეიძლება უარყოფითი იყოს (-1-ის ტოლი იყოს).

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

აჩვენეთ, რომ მოცემულ განტოლებებს ფესვები არა აქვს:

1. $\sqrt{3x-5}+\sqrt{6-x}=-7$; 2. $\sqrt{4-4x}+\sqrt{x-2}=6$;

3. $\sqrt{2x-7}+\sqrt{x}=0$; 4. $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=-2$.

ირაციონალური განტოლების ამოხსნა უნდა დავიწყოთ რადიკალისაგან განთავისუფლებით. თუ განტოლების რომელიმე ნაწილში რადიკალის გარდა შედის რაციონალური გამოსახულებაც, მაშინ უმჯობესია რადიკალი გავაცალკევოთ, ე. ი. რაციონალური წევრი გადავიტანოთ განტოლების მეორე ნაწილში. სათანადო გარდაქმნების შემდეგ ვღებულობთ წრფივ ან კვადრატულ განტოლებას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ განტოლება:

$$21+\sqrt{2x-7}=x.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა

$$\sqrt{2x-7}=x-21.$$

ცხადია, x-ის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე განისაზღვრება $2x>7$, ანუ $x>\frac{7}{2}$ და $x>21$ უტოლობებით. ამ მნიშვნელობათა შორის რომ ვიპოვოთ მოცემული განტოლების ფესვები, საჭიროა ავახარისხოთ ორივე ნაწილი კვადრატში

$$(\sqrt{2x-7})^2=(x-21)^2,$$

$$2x-7=x^2-42x+441,$$

$$x^2-44x+448=0 \quad (2),$$

საიდანაც $x_1=28$; $x_2=16$.

შემოწმება გვიჩვენებს, რომ პირველი ფესვი $x=28$ განტოლებას აკმაყოფილებს. რაც შეეხება მეორე $x=16$ ფესვს განტოლებას არ აკმაყოფილებს. მართლაც:

$$\sqrt{2\cdot 16-7}=16-21,$$

$$5\neq-5.$$

ეს მოხდა იმიტომ რომ (2) განტოლება მივიღეთ (1) განტოლების კვადრატში ახარისხებით, მაგრამ იგივე შედეგს მივიღებდით, რომ კვადრატში აგვეხარისხებინა არა (1) განტოლება, არამედ მისგან განსხვავებული $\sqrt{2x-7}=-(x-21)$ განტოლება. ამრიგად, $x=16$ ფესვი მოცემულ განტოლებას არ აკმაყოფილებს, ის წარმოადგენს ე. წ. გარეშე ფესვს. $x=16$ არის $\sqrt{2x-7}=-(x-21)$ განტოლების ფესვი, მართლაც:

$$\sqrt{2\cdot 16-7}=-(16-21)$$

$$\sqrt{25}=-(-5)$$

$$5=5.$$

გარეშე ფესვის წარმოშობა გამოიწვია (1) განტოლების კვადრატში ახარისხებამ.

ირაციონალური განტოლების ამოხსნისას აუცილებლად საჭიროა შემოწმდეს მიღებული ფესვები და ამით დადგინდეს, რომელია მოცემული განტოლების ფესვი და რომელია გარეშე ფესვი (თუკი ასეთი არსებობს).

2. ამოვხსნათ განტოლება $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2.$

განტოლებაში შემავალი უცნობისათვის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე განისაზღვრება $4x+8>0$ და $3x-2>0$ უტოლობებიდან, რაც გვაძლევს $x>2$.

თუ ავახარისხებთ განტოლების ორივე ნაწილს კვადრატში, გვექნება:

$$4x+8-2\sqrt{(4x+8)(3x-2)}+3x-2=4.$$

$$2\sqrt{(4x+8)\ (3x-2)}=7x+2,$$

უკანასკნელი გამოსახულების ხელახლა კვადრატში ახარისხება მოგვცემს:

$$4(4x+8)(3x-2)=(7x+2)^2,$$

რომლის გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$x^2+36x+68=0,$$

საიდანაც $x_1=34$ და $x_2=2$. შემოწმება გვიჩვენებს, რომ $x_1=34$ და $x_2=2$ მოცემული განტოლების ფესვებია.

§ 08. ირაციონალური განტოლების გარეშე ფესვები

ავიღოთ ირაციონალური განტოლება $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$. გადავიტანოთ $-\sqrt{x+5}$ გამოსახულება მეორე ნაწილში, მივიღებთ $\sqrt{2x-4}=1+\sqrt{x+5}$ თუკი ამ განტოლებას აქვს ფესვი, რასაც ადგილი ექნება მაშინ, როცა $x>2$, შეგვიძლია განტოლების ორივე ნაწილი ავახარისხოთ კვადრატში, რადგანაც, როცა $x>2$, განტოლების ორივე ნაწილს ექნება ერთნაირი ნიშანი.

მივიღებთ:

$$x-10=2\sqrt{x+5}. \tag{1}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ უკანასკნელ განტოლებას აზრი ექნება მაშინ, როცა $x>10$. თუ დავუშვებთ, რომ $x>10$ და განტოლების ორივე ნაწილს ავახარისხებთ კვადრატში და შევასრულებთ სათანადო გარდაქმნებს, მივიღებთ:

$$x^2-24x+80=0.$$

ამ განტოლების ფესვებია $x_1=20$ და $x_2=4$. შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ $x_1=20$ ფესვი განტოლებას აკმაყოფილებს, ხოლო $x_2=4$—არა, რადგან x უნდა იყოს ათზე მეტი, რომ (1) განტოლებას აზრი ექნეს. ამრიგად მეორე ფესვი წარმოადგენს გარეშე ფესვს.

ახლა თეორიულად ავხსნათ, რა იწვევს გარეშე ფესვის მიღებას, ვთქვათ, გვაქვს განტოლება $A=B$. თუ ამ განტოლების ორივე ნაწილს ავახარისხებთ კვადრატში, გვექნება: $A^2=B^2$. ამ გამოსახულების მამრავლებად დაშლა გვაძლევს: $(A-B)(A+B)=0$, ამ განტოლებას როგორც $A=B$ განტოლების ისე $A=-B$ განტოლების ფესვი — აკმაყოფილებს.

მაშასადამე, მოცემული $A=B$ განტოლება და მიღებული $A^2=B^2$ განტოლება არატოლფასია, ამიტომ $A^2=B^2$ განტოლების ამოხსნის დროს შეიძლება მივიღოთ ისეთი ფესვებიც, რომლებიც არ დააკმაყოფილებენ $A=B$ განტოლებას, როგორც ეს კონკრეტულ მაგალითების განხილვით ვნახეთ.

თუ $A=B$ განტოლების ამოხსნისას დაგვჭირდა განტოლების ორივე ნაწილის კუბში ახარისხება, მაშინ მივიღებთ განტოლებას $A^3=B^3$. ადვილად შეიძლება ვა-

ჩვენოთ, რომ $A=B$ და $A^3=B^3$ განტოლებები ტოლფასია (ტოლძალოვანი). მართლაც, $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$. თანამამრავლი $A^2+AB+B^2\neq0$, რადგანაც $A^2+AB+B^2=\left(A+\frac{B}{2}\right)^2+\frac{3}{4}B^2$, ამიტომ ნულს შეიძლება უდრიდეს მხოლოდ $A-B$ თანამამრავლი, მაშასადამე, $A^3-B^3=0$ განტოლების ფესვები იქნება აგრეთვე $A-B=0$ განტოლების ფესვებიც.

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ კუბური რადიკალების შემცველ ირაციონალურ განტოლებაში სავალდებულო არ არის, რომ რადიკალები იყოს არითმეტიკული. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, კუბური რადიკალის ქვეშ მყოფი გამოსახულება შეიძლება იყოს უარყოფითიც.

მაგალითი.

ამოვხსნათ განტოლება $\sqrt[3]{-(x^2-6x)}=2$.

$$-(x^2-6x)=8,$$
$$-x^2+6x-8=0,$$
$$x^2-6x+8=0,$$

საიდანაც $x_1=4$, $x_2=2$.

შემოწმება გვიჩვენებს, რომ ორივე ფესვი აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას, ე. ი. მოცემული განტოლება ტოლფასია განტოლებისა:

$$-(x^2-6x)=8.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო.

ამოხსენით ირაციონალური განტოლებები:

1. $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{2x+2}=x+1$. პას. 7 და 3.
2. $\sqrt{4x-3}=\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x-5}}$ პას. 7 და 4.
3. $\sqrt{3x-1}+\dfrac{2}{\sqrt{3x-1}}=\sqrt{5x+3}$. პას. 1.
4. $\sqrt{2x+15}-\dfrac{10}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2x-1}$. პას. ფესვები არა აქვს.
5. $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8$. პას. 10.
6. $\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2=0$. პას. 1.
7. $\sqrt{5x+4}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x+1}$ პას. 1.
8. $\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}$. პას. a და b.
9. $\sqrt{x^2+3a^2}-\sqrt{x^2-3a^2}=x\sqrt{2}$. პას. $a\sqrt{3}$.

§ [illegible]. მეორე ხარისხის ორუცნობიან განტოლებათა სისტემები

1. ორუცნობიანი ორი განტოლების სისტემა, რომელშიც ერთი განტოლება მეორე ხარისხისაა, ხოლო მეორე — პირველის, ზოგადად ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\begin{cases} Ax^2+Bxy+cy^2+Ey+F=0, \\ ax+by+C=0. \end{cases} \qquad (1)$$

(1) სისტემა ამოიხსნება ჩასმის ხერხით, რისთვისაც საკმარისია (1) სი სტემის მეორე განტოლებიდან განვსაზღვროთ x ან y და მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ (1) სისტემის პირველ განტოლებაში. სათანადო გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ ერთუცნობიან კვადრატულ განტოლებას, რომლის ამოხსნაც მოგვცემს ერთ-ერთი უცნობის მნიშვნელობას. თუ უცნობის მოძებნილ მნიშვნელობას მეორე განტოლებაში შევიტანთ, ვიპოვით მეორე უცნობის სათანადო მნიშვნელობას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x^2+3xy-y^2+2x-5y=-64, \\ x-y=-7. \end{cases}$$

მეორე განტოლებიდან გვაქვს

$$x=y-7.$$

x-ის ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ მოცემული სისტემის პირველ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$(y-7)^2+3y(y-7)-y^2+2(y-7)-5y=-64.$$

გამარტივების შემდეგ გვექნება

$$3y^2-38y+99=0,$$

საიდანაც

$$x_1=2;\quad x_2=-\frac{10}{3};\quad y_1=9;\quad y_2=\frac{11}{3}.$$

2. ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა, რომლის თითოეული განტოლება მეორე ხარისხისაა.

ორუცნობიანი არაწრფივი ორი განტოლების სისტემის ზოგადი სახეა

$$\begin{cases} A_1x^2+B_1y^2+c_1xy+E_1y+F_1=0, \\ A_2x^2+B_2y^2+c_2xy+E_2y+F_2=0. \end{cases} \tag{1}$$

მეორე ხარისხის ზოგადი სახის განტოლების ამოხსნა შეისწავლება უმაღლეს ალგებრაში. ჩვენ აქ მხოლოდ მის ისეთ კერძო შემთხვევებს განვიხილავთ, რომელთა ამოხსნა შესაძლებელია ელემენტარული ალგებრის მეთოდებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} 2x^2-3xy-19y^2=25, \\ x^2-6y^2=250. \end{cases} \tag{2}$$

როგორც ვხედავთ, მოცემული სისტემის განტოლებებში შედის მხოლოდ x^2, y^2 და xy, რომლებშიც x-ისა და y-ის შეჯამებული ხარისხები მუდმივია.

მოცემულ სისტემაში საჭიროა მოვახდინოთ ისეთი გარდაქმნა, რომ მივიღოთ ერთგვაროვანი განტოლება. რისთვისაც საჭიროა (2) სისტემის მეორე განტოლებას წევრ-წევრად გამოვაკლოთ 10-ზე გამრავლებული პირველი განტოლება:

$$\begin{gathered} -19x^2+30xy+184y^2=0, \\ 19x^2-30xy-184y^2=0. \end{gathered} \tag{3}$$

(3) წარმოადგენს ერთგვაროვან განტოლებას x-ისა და y-ის მიმართ. $x\neq0$: წინააღმდეგ შემთხვევაში (3) განტოლებიდან მივიღებდით, რომ $y=0$. ეს კი ეწინააღმდეგება (2) სისტემის განტოლებებს.

ამრიგად, თუ $x\neq 0$, მაშინ (3) განტოლება წევრ-წევრად შეგვიძლია გავყოთ x^2-ზე, რაც მოგვცემს:

$$19-\frac{30y}{x}-184\left(\frac{y}{x}\right)^2=0.$$

ავღნიშნოთ $\frac{y}{x}=z$, გვექნება

$$-184z^2-30z+19=0.$$

$$184z^2+30z-19=0,$$

საიდანაც $z_1=\frac{1}{4}$ და $z_2=-\frac{19}{46}$;

ამრიგად, $\frac{y}{x}=\frac{1}{4}$; $x=4y$.

ამ უკანასკნელის შეტანა მოცემული სისტემის პირველ განტოლებაში გვაძლევს:

$2\cdot 16y^2-3\cdot 4y^2-19y^2=25,$

$32y^2-12y^2-19y^2=25.$

$y^2=25,\ y=\pm 5.$ თუ $y_1=5$, მაშინ $x_1=20$,

$y_1=5;\ y_2=-5;$ თუ $y_2=-5$, მაშინ $x_2=-20.$

ახლა, თუ $\frac{y}{x}=-\frac{19}{46}$ ტოლობიდან განვსაზღვრავთ x-ს, გვექნება $x=-\frac{46}{19}y$, რომლის ჩასმა მოცემული სისტემის მეორე განტოლებაში გვაძლევს:

$$-50y^2=250\cdot 361;$$

საიდანაც $y_1=\sqrt{-1805}$, $y_2=-\sqrt{-1805}$;

ამონახსნთა მეორე სერია იქნება:

$$x_1=-\frac{46}{19}\sqrt{-1805}\quad y_1=\sqrt{-1805}\quad x_2=\frac{46}{19}\sqrt{-1805}\ \text{და}$$

$$y_2=-\sqrt{-1805}\,!$$

2. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases}3x^2-2xy+5y^2=35,\\5x^2-10y^2=5.\end{cases}$$

მოცემული სისტემის მეორე განტოლება გავამრავლოთ 7-ზე და წევრ-წევრად გამოვაკლოთ პირველს, მივიღებთ:

$$-32x^2-2xy+75y^2=0.$$

გავყოთ მიღებული განტოლების ყველა წევრი x^2-ზე:

$$75\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\left(\frac{y}{x}\right)-32=0.$$

თუ $\frac{y}{x}=z$, მაშინ $75z^2-2z-32=0.$

საიდანაც გვექნება

$$\frac{y}{x}=\frac{2}{3}$$

ახლა ამოვხსნით განტოლებათა სისტემებს:

$$\begin{cases} 5x^2-10y^2=5 \\ \frac{y}{x}=\frac{2}{3}. \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} 5x^2-10x^2=5, \\ \frac{y}{x}=-\frac{16}{25}. \end{cases}$$

გვექნება:

$$x_1=3;\ \ y_1=2;\ \ x_2=-3;\ \ y_2=-2;\ \ x_3=\frac{25}{\sqrt{113}},$$

$$y_3=\frac{-16}{\sqrt{113}},\quad x_4=-\frac{25}{\sqrt{113}}\ \ \text{და}\ \ y_4=\frac{16}{\sqrt{113}}.$$

3. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=2, \\ x^3-y^3=4. \end{cases}$$

მოცემული სისტემის განტოლებები გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

$$x^2-xy+y^2=(x-y)^2+xy.$$

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=(x-y)\,[(x-y)^2+3xy],$$

რის შემდეგაც მოცემული სისტემა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} (x-y)^2+xy=2. \\ (x-y)[(x-y)^2+3xy]=4. \end{cases}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს $x-y=u$ და $xy=v$, გვექნება

$$\begin{cases} u^2+v=2, \\ u(u^2+3v)=4. \end{cases} \tag{4}$$

ამ სისტემის ამოხსნა უფრო მარტივად ხდება ჩასმის ხერხით

$v=2-u^2$; v-ს მნიშვნელობას თუ ჩავსვამთ მეორე განტოლებაში და გავამარტივებთ, გვექნება

$$u^3-3u+2=0.$$

საიდანაც

$$u^3-3u+2=u^3-u-2u+2=u(u^2-1)-2(u-1)=u(u-1)(u+1)-$$
$$-2(u-1)=(u-1)(u^2+u-2).$$

ამრიგად, გვექნება შემდეგი განტოლება

$$(u-1)(u^2+u-2)=0.$$

საიდანაც

$$u_1=1,\ u_2=1;\ u_3=-2.$$

(4) ტოლობიდან ვპოულობთ:

$$v=2-u^2$$

$$v_1=1,\ v_2=1,\ v_3=-2$$

საბოლოოდ განტოლებათა მოცემული სისტემა დაიყვანება შემდეგ მარტივ სისტემებამდე:

ა) $\begin{cases} x-1=u, \\ xy=1; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} x-y=1, \\ xy=1; \end{cases}$ გ) $\begin{cases} x-y=-2, \\ xy=-2. \end{cases}$

პირველი სისტემის ამონახსნებია:

$$x_1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad y_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \quad x_2=-\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \quad y_2=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

მეორე სისტემას იგივე ამონახსნი ექნება.

მესამე სისტემის ამონახსნები წარმოსახვითია.

§ 70. არაწრფივ განტოლებათა სისტემები, რომლებიც ამოიხსნებიან ხელოვნური ხერხებით

ამოვხსნათ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases}$$

ვინაიდან მოცემული გვაქვს x და y-ის ჯამი და ნამრავლი, ამიტომ x და y შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ფესვები შემდეგი კვადრატული განტოლებისა (ვიეტის თეორემის შებრუნებული თეორემა):

$$z^2-az+b=0.$$

საიდანაც:

$$z_1=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \text{ და } z_2=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

მაშასადამე, $x=z_1$; $y=z_2$; $x=z_2$, $y=z_1$.

მაგალითი 1.

$$\begin{cases} x+2y=13, \\ xy=15. \end{cases}$$

მოცემული სისტემის მეორე განტოლებას თუ გავამრავლებთ 2-ზე, გვექნება

$$\begin{cases} x+2y=13, \\ x\cdot 2y=30. \end{cases}$$

x და $2y$ შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც $z^2-13z+30=0$ (1) განტოლების ფესვები. (1) განტოლების ამოხსნა გვაძლევს:

$$z_1=10, \quad z_2=3;$$

თუ $x=10$, მაშინ $2y=3$ და $y=\frac{3}{2}$;

ამრიგად, გვაქვს შემდეგი ამოხსნა

$$x=10, \quad y=\frac{3}{2}; \quad x=3; \quad y=5.$$

2. ამოვხსნათ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ xy=b. \end{cases}$$

გავამრავლოთ მოცემული სისტემის მეორე განტოლება 2-ზე და შევკრიბოთ პირველთან:

$$x^2+y^2+2xy=a+2b,$$

ანუ

$$(x+y)^2=a+2b.$$

საიდანაც

$$x+y=\pm\sqrt{a+2b}.$$

შემდეგ, თუ პირველ განტოლებას გამოვაკლებთ მეორის გაორკეცებულს, გვექნება:

$$(x-y)^2=a-2b$$

საიდანაც

$$x-y=\pm\sqrt{a-2b}.$$

მაშასადამე, მოცემული სისტემის ამოხსნა დაიყვანება წრფივ განტოლებათა შემდეგი ოთხი სისტემის ამოხსნამდე:

1) $\begin{cases} x+y=\sqrt{a+2b}, \\ x-y=\sqrt{a-2b}. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2b}, \\ x-y=\sqrt{a-2b}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=\sqrt{a+2b}, \\ x-y=-\sqrt{a-2b}. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2b}. \\ x-y=-\sqrt{2-2b}. \end{cases}$

რომელთა ამოხსნა ადვილად ხდება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=-2 \end{cases}$$

გავამრავლოთ მეორე განტოლება 2-ზე, შემდეგ კი ჯერ მივუმატოთ, ხოლო შემდეგ გამოვაკლოთ პირველ განტოლებას, გვექნება:

$$(x+y)^2=1; \qquad (x-y)^2=9.$$

საიდანაც: $x+y=\pm 1, \qquad x-y=\pm 3.$

მივიღებთ წრფივ განტოლებათა შემდეგ სისტემებს:

ა) $\begin{cases} x+y=1, \\ x-y=3. \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} x+y=1, \\ x-y=-3. \end{cases}$ გ) $\begin{cases} x+y=-1, \\ x-y=3. \end{cases}$

დ) $\begin{cases} x+y=-1, \\ x-y=-3. \end{cases}$ $\begin{matrix} x=2; & y=-1; \\ x=-2 & y=1; \end{matrix}$ $\begin{matrix} x=-1; & y=2; \\ x=-2 & y=1. \end{matrix}$

ამრიგად გვაქვს შემდეგი ამონახსნი:

$x_1=2, \qquad y_1=-1;$

$x_2=-1, \qquad y_2=2;$

$x_3=-2, \qquad y_3=1;$

$x_4=-2, \qquad y_4=1.$

3. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} x^2-y^2=a, \\ xy=b \end{cases}$$

განტოლებათა ეს სისტემა შეიძლება ამოიხსნას ჩასმის ხერხითაც. ჩვენ ამოვხსნათ მოცემული სისტემა ხელოვნური ხერხით. ავახარისხოთ სისტემის მეორე განტოლების ორივე ნაწილი კვადრატში და სისტემა წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} x^2+(-y^2)=a, \\ x^2(-y)^2=-b^2. \end{cases}$$

უკანასკნელ სისტემაში შემავალი x^2 და $-y^2$ შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც ფესვები $z^2-at-b^2=0$ განტოლებისა:

$$x^2=z_1=\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2},$$

$$-y^2=z_2=\frac{a-\sqrt{a^2+4b^2}}{2} \quad \text{ანუ} \quad y^2=\frac{\sqrt{a^2+4b^2}-a}{2}$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$x_1=+\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}}, \qquad x_2=-\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}};$$

$$y_1=+\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4b^2}-a}{2}}, \qquad y_2=-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4b^2}-a}{2}};$$

აქ შეიძლება შეგვხვდეს 2 შემთხვევა: $b>0$ და $b<0$, თუ $b>0$, მაშინ სისტემის ამონახსნები იქნება: 1) x_1; y_1 2) x_2, y_2. თუ კი $b<0$, მაშინ სისტემის ამონახსნები იქნება: 1) x_2, y_1; 2) x_1, y_2, რადგანაც xy ნამრავლს უნდა ქონდეს b-ს ნიშანი..

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ მოცემული სისტემის ამოსახსნელად მოგვიხდა მეორე განტოლების კვადრატში ახარისხება, რასაც შეიძლებოდა წარმოეშვა გარეშე ფესვები, ამიტომ ყოველთვის საჭიროა მიღებული ფესვების შემოწმება.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო.

ამოხსენით განტოლებათა შემდეგი სისტემები:

1) $\begin{cases} x^2+3y^2-xy+2x+1=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ პასუხი: $x_1=\frac{4}{3}$, $y_1=\frac{1}{3}$, $x_2=1$, $y_2=0$.

2) $\begin{cases} 14x^2-5xy+3y^2=16 \\ 6x^2-xy+y^2=8. \end{cases}$ პასუხი: 1. $x_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $y_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$;

2. $x_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. $x_3=1$, $y_3=2$, 4. $x_4=-1$, $y_4=-2$.

3) $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=74 \\ 2x^2+xy+y^2=58. \end{cases}$ პასუხი; $x_1=3$; $y_1=5$.

4) $\begin{cases} x+xy+y=11 \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$

მითითება: სისტემის თითოეული განტოლებები წარმოადგინეთ შემდეგნაირად:

$x+xy+y=(x+y)+xy; \quad x^2y+xy^2=xy(x+y).$

შემოიღეთ აღნიშვნა: $x+y=U, \quad xy=V.$

პასუხი: 1. $x_1=5; y_1=1;$ 2. $x_2=1; \quad y_2=5;$
3. $x_3=2; \quad y_3=3; \quad$ 4. $x_4=3; \quad y_4=2.$

5) $\begin{cases} x+y+xy=19 \\ xy(x+y)=84 \end{cases}$

მითითება: $x+y=U; \quad xy=V;$

პასუხი: 1. $x_1=3; \quad y_1=4;$ 2. $x_2=4; \quad y_2=3;$
$x_3=6+\sqrt{29}, \quad y_3=6-\sqrt{29}, \quad x_4=6-\sqrt{29}$
$y_4=6+\sqrt{29}.$

6) $\begin{cases} x^3-y^3=19 \\ x^2y-xy^2=6. \end{cases}$

მითითება: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=$
$=(x-y)[(x-y)^2+3xy], \quad x^2y-xy^2=xy(x-y).$

აღვნიშნოთ $x-y=U, \quad xy=V.$

პასუხი: 1. $x_1=3, \quad y_1=2,$ 2. $x_2=-2,$
$y_2=-3.$

7) $\begin{cases} x^2-y^2=8 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{10}{3}. \end{cases}$

მითითება: $\dfrac{x}{y}=U$, მაშინ $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{U}$ და გვექნება

$U+\dfrac{1}{U}=\dfrac{10}{3}$

პასუხი: $x_1=3, \quad y_1=1, \quad x_2=-3, \quad y_2=1.$

§ 71. ამოცანები არაწრფივ განტოლებათა სისტემის შედგენაზე

განვიხილოთ რამდენიმე ტიპობრივი სახის ამოცანა არაწრფივ განტოლებათა სისტემის შედგენაზე.

ამოცანა 1. ორნიშნა რიცხვის ციფრთა კვადრატების ჯამია 34. თუ ამ რიცხვს გავამრავლებთ ამავე ციფრებით, მხოლოდ შებრუნებული მიმდევრობით დაწერილ რიცხვზე, მივიღებთ 1855-ს. ვიპოვოთ ეს რიცხვი.

განტოლებათა სისტემის შედგენა

ორნიშნა რიცხვის ერთეულების გამომსახველი ციფრი აღვნიშნოთ x-ით, ათეულებისა კი — y-ით, მაშინ ეს რიცხვი ათობით სისტემაში ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$10y+x.$$

ამავე ციფრებით მხოლოდ შებრუნებული მიმდევრობით დაწერილი რიცხვი იქნება $10x+y$.

ამოცანის I პირობის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$x^2+y^2=34.$$

მეორე პირობის ძალით დავწერთ:

$$(10y+x)(10x+y)=1855.$$

ამრიგად, გვაქვს განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ (10y+x)(10x+y)=1855. \end{cases}$$

სისტემის ამოხსნა

ამ სისტემის თითოეული განტოლება გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy,$$

$$10x^2+10y^2+101xy=10(x+y)^2-20xy+101xy=10(x+y)^2+81xy.$$

ამრიგად გვექნება სისტემა

$$\begin{cases} (x+y)^2-2xy=34, \\ 10(x+y)^2+81xy=1855. \end{cases}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები $x+y=u$ და $xy=v$, გვექნება:

$$\begin{cases} u^2-2v=34. \\ 10u^2+81v=1855. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნა მოგვცემს $u=\pm 8$; $v=15$.

ე. ი.

$$\begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases} \quad (1)$$

ვინაიდან x და y ორნიშნა რიცხვის ციფრებს გამოხატავს, ამიტომ მათ ჯამს ვიღებთ მხოლოდ დადებითს.

(1) სისტემაში x და y შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ფესვები შემდეგი განტოლებისა:

$$z^2-8z+15=0,$$

საიდანაც $z_1=5$; $z_2=3$; ე. ი. $x=5$ და $y=3$.

შემოწმება. თუ ათეულების ციფრი იქნება 3 და ერთეულების — 5. მაშინ საძებნი რიცხვი შეიძლება გამოისახოს შემდეგნაირად:

$$3 \cdot 10+5=35.$$

იმავე ციფრებით მაგრამ შებრუნებული მიმდევრობით დაწერილი რიცხვი იქნება $5 \cdot 10+3=53$. ამოცანის პირობის ძალით მათი ნამრავლი უნდა იყოს 1855. მართლაც $35 \cdot 53=1855$. ხოლო ციფრების კვადრატული ჯამი უნდა იყოს 34, მართლაც

$$3^2+5^2=9+25=34,$$

რაც ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს.

ამოცანა 2. A და B ქალაქებიდან ერთდროულად ერთმანეთის შესახვედრად გამოვიდა ორი ველოსიპედისტი. ერთი საათის შემდეგ ისინი შეხვდნენ ერთმანეთს და შეუჩერებლივ განაგრძეს გზა. პირველი B ქალაქში მივიდა 35 წუთით ადრე, ვიდრე მეორე A ქალაქში. ვიპოვოთ თითოეულის სიჩქარე და მანძილი, რომელიც გაიარა თითოეულმა შეხვედრამდე, თუ ქალაქებს შორის მანძილი 28 კილომეტრია.

განტოლებათა სისტემის შედგენა

ამოცანის პირობის ძალით ტურისტები ერთი საათის შემდეგ ხვდებიან ერთმანეთს, ამიტომ თუ ერთის სიჩქარეს საათში აღვნიშნავთ x-ით, მეორისას კი — y-ით, გვექნება: $x+y=28$.

28 კმ-ს ერთი (A-დან გამოსული) დაფარავს $\frac{28}{x}$ საათში, მეორე კი (B-დან გამოსული) — $\frac{28}{y}$ საათში. ამოცანის პირობის ძალით ვწერთ:

$$\frac{28}{y}-\frac{28}{x}=\frac{7}{12}.$$

ამრიგად გვაქვს შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} x+y=28, \\ \frac{28}{y}-\frac{28}{x}=\frac{7}{12}. \end{cases}$$

რომლის ამოხსნაც გვაძლევს 1) 16 კმ/სთ. და 12 კმ/სთ. 2) 16 კმ და 12 კმ (შეამოწმეთ!).

ამოცანა 3.

აუზში გაყვანილია ორი მილით ერთი მათგანი ცლის, მეორე კი ავსებს მას. თუ ორივე მილი ღიაა, აუზი 24 საათში აივსება. თუ ამ მილების განივკვეთებს გავადიდებთ ისე, რომ პირველი მილი ორი საათით ადრე ცლიდეს, ხოლო მეორე — ორი საათით ადრე ავსებდეს აუზს, მაშინ ორივე მილის ერთად მოქმედებით აუზი 12 საათში აივსება. რამდენ საათში ცლის პირველი მილი აუზს და რამდენ საათში ავსებს მას მეორე?

განტოლებათა სისტემის შედგენა

ვთქვათ, მეორე მილით აუზი ივსება x საათში, ხოლო პირველით იცლება y საათში. მეორე მილით ერთ საათში აივსება აუზის $\frac{1}{x}$ ნაწილი, ხოლო პირველი მილი დაცლის სავსე აუზის $\frac{1}{y}$ ნაწილს.

ამო ანის პირობის თანახმად, ორივე მილის ერთდროული მოქმედებით აუზი ივსება 24 საათში, ამიტომ შეგვიძლია შევადგინოთ განტოლება:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{24}.$$

მილების განივკვეთის ფართის შეცვლის შემდეგ ორივე მილის ერთდროული მოქმედებით აუზი ივსება 12 საათში, ამიტომ ვადგენთ განტოლებას:

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{y-2}=\frac{1}{12}.$$

ამრიგად, გვექნება განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{24}, \\ \frac{1}{x-2}-\frac{1}{y-2}=\frac{1}{12}. \end{cases}$$

ს ი ს ტ ე მ ი ს   ა მ ო ხ ს ნ ა

პირველი განტოლება მოგვცემს

$$24y-24x=xy; \qquad 24(y-x)=xy.$$

მეორე განტოლებიდან მივიღებთ

$$12(y-2)-12(x-2)=(x-2)(y-2),$$

საიდანაც

$$12(y-x)=xy-2(x+y)+4.$$

ამრიგად, გვაქვს სისტემა

$$\begin{cases} 24(y-x)=xy, \\ 12(y-x)=xy-2(x+y)+4. \end{cases}$$

თუ მეორე განტოლებას გავამრავლებთ 2-ზე და შემდეგ მას წევრ-წევრად გამოვაკლებთ პირველს, გვექნება:

$$xy-4(x+y)+8=0.$$

ამ უკანასკნელში თუ ჩავსვამთ პირველიდან ნაპოვნ $y=\frac{24x}{24-x}$ მნიშვნელობას და გავამარტივებთ, მივიღებთ განტოლებას

$$7x^2-50x+48=0,$$

საიდანაც $x_1=6; \quad x_2=\frac{8}{7}$.

$$y_1=\frac{24\cdot 6}{24-6}=8; \quad y=\frac{6}{5}$$

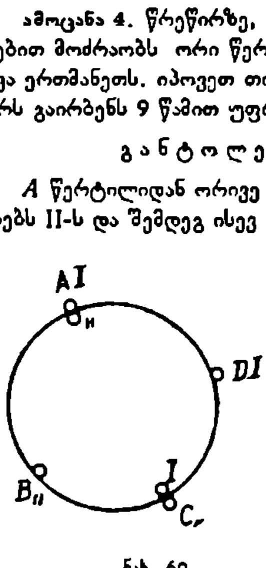
x_2 და y_2 ამოცანის პასუხისათვის უვარგისია. უნდა შემოწმდეს $x=6$ და $y=8$.

შ ე ა მ ო წ მ ე თ!

ამოცანა 4. წრეწირზე, რომლის სიგრძე 72 მეტრია, ერთი და იმავე მიმართულებით მოძრაობს ორი წერტილი, რომლებიც ყოველ ოთხ წამში ერთხელ ემთხვევა ერთმანეთს. იპოვეთ თითოეული წერტილის სიჩქარე, თუ ერთი მათგანი წრეწირს გაირბენს 9 წამით უფრო ჩქარა, ვიდრე მეორე.

გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა თ ა   ს ი ს ტ ე მ ი ს   შ ე დ გ ე ნ ა

A წერტილიდან ორივე წერტილი იწყებს მოძრაობას (ნახ. 60). I წერტილი უსწრებს II-ს და შემდეგ ისევ უბრუნდება A-ს, აგრძელებს მოძრაობას და ეწევა II-ს C წერტილში, ე. ი. I წერტილმა გაიარა წრეწირის სიგრძის ტოლი მანძილი და კიდევ რკალი ABC, მეორემ კი — მარტო რკალი ABC, ამიტომ A წერტილთან (მოძრაობის დაწყების წერტილთან) ხელახლა შეხვედრამდე გადის 4 წუთი (პირობის ძალით).



ნახ. 60.

ახლა თუ I წერტილის სიჩქარეს x-ით აღვნიშნავთ, მეორისას y-ით, მაშინ 4 წამში I წერტილი გაივლის $4x$-ის ტოლ მანძილს, მეორე კი $4y$-ის ტოლს. შეგვიძლია დავწეროთ განტოლება:

$$4x+4y=72 \text{ ანუ } x+y=18. \qquad (1)$$

II წერტილი მთელი წრეწირის შემოვლას მოანდომებს $\frac{72}{y}$ წამს, პირველი კი $\frac{72}{x}$ წამს, ამოცანის პირობის ძალით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{72}{y}-\frac{72}{x}=9.$$

ამრიგად, გვაქვს განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} x+y=18 \\ \frac{72}{y}-\frac{72}{x}=9, \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნა გვაძლევს $x=24$ მ/წმ. $y=6$ მ/წმ (შეამოწმეთ!)

ამოცანა 5. ორმა მუშამ სამუშაო შეასრულა 12 საათში. მარტო პირველს რომ სამუშაოს ნახევარი შეესრულებინა, დანარჩენი კი — მეორეს, სამუშაო შესრულდებოდა 25 საათში. რამდენ საათში შეასრულებს ამ სამუშაოს თითოეული მუშა ცალ-ცალკე?

განტოლებათა სისტემის შედგენა

ვთქვათ, ერთი მუშა მთელ სამუშაოს შეასრულებს x საათში, მეორე კი — y საათში. ერთი მუშა ერთ საათში შეასრულებს მთელი სამუშაოს $\frac{1}{x}$ ნაწილს, მეორე კი — $\frac{1}{y}$ ნაწილს. ორივე ერთად ერთ საათში შეასრულებს $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ ნაწილს. ვინაიდან ორივე მუშა ერთად სამუშაოს ასრულებს 12 საათში, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ განტოლება:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}.$$

თუ ერთ მუშას მოუხდება სამუშაოს ნახევრის შესრულება, მაშინ ის ერთ საათში შეასრულებს სამუშაოს $\frac{1}{2}:\frac{1}{x}=\frac{x}{2}$ ნაწილს, ხოლო მეორე მუშა ერთ საათში შეასრულებს მთელი სამუშაოს $\frac{1}{2}:\frac{1}{y}=\frac{y}{2}$ ნაწილს.

ამოცანის პირობის ძალით ვწერთ:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=25.$$

ამრიგად, გვაქვს განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}, \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=25, \end{cases} \quad \text{ანუ} \quad \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12} \\ x+y=50. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნა გვაძლევს $x=20$; $y=30$; შეამოწმეთ!

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. ორნიშნა რიცხვის ციფრთა ნამრავლი ნაკლებია თვით ამ რიცხვზე, თუ ამ რიცხვს მივუმატებთ 18-ს, მივიღებთ იმავე ციფრებით, მაგრამ შებრუნებულ მიმდევრობით დაწერილ რიცხვს. იპოვეთ ეს რიცხვი.

პასუხი: 24.

2. ორ ქალაქს შორის დადის სახალხო და საბარგო მატარებელი. სახალხო მატარებელი მთელი მანძილის გავლას ანდომებს 8 საათით ნაკლებ დროს, ვიდრე საბარგო. თუ ორივე მატარებლის სიჩქარე საათში 5 კმ-ით გაიზრდება, მაშინ სახალხო მატარებელი მთელ მანძილს გაივლის 6 საათით ნაკლებ დროში, ვიდრე საბარგო. რამდენ კილომეტრს გადის თითოეული მათგანი საათში, თუ ამ ქალაქებს შორის მანძილი 250 კმ-ია.

პასუხი: სახ. მატარებლის სიჩქარეა 45 კმ/სთ.
საბარგოსი 25 კმ/სთ.

3. 18 მ. მანძილზე ეტლის წინა თვალი ათით მეტ ბრუნს აკეთებს, ვიდრე უკანა თვალი, თუ უკანა თვალის წრეწირის სიგრძეს 6 დმ-ით შევამცირებთ, ხოლო წინა თვალის წრეწირის სიგრძეს 6 დმ-ით გავადიდებთ, მაშინ იმავე მანძილზე წინა თვალი 4-ით მეტ ბრუნს გააკეთებს, ვიდრე უკანა თვალი. გაიგეთ უკანა და წინა თვლების წრეწირთა სიგრძეები.

პას. 12 დმ და 36 დმ.

§ 72. შექცეული ანუ სიმეტრიული განტოლება

მე-4 ხარისხის შექცეული ანუ სიმეტრიული განტოლება ეწოდება შემდეგი სახის განტოლებას

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0. \qquad (1)$$

როგორც ვხედავთ, (1) განტოლების ბოლოებიდან ტოლად დაშორებული წევრების კოეფიციენტები ტოლია.

(1) განტოლების ფესვები არ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი, წინააღმდეგ შემთხვევაში კოეფიციენტი a-ც ნულის ტოლი იქნებოდა, რაც შეუძლებელია.

ახლა დავამტკიცოთ სიმეტრიულ განტოლების შესახებ შემდეგი თეორემა: თუ α არის (1) განტოლების ფესვი, მაშინ $\frac{1}{\alpha}$ აგრეთვე იქნება ამავე განტოლების ფესვი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ α არის (1) განტოლების ფესვი, მაშინ ადგილი ექნება ტოლობას:

$$a\alpha^4+b\alpha^3+c\alpha^2+b\alpha+a=0.$$

ახლა, თუ (1) განტოლებაში x-ს შევცვლით $\frac{1}{\alpha}$-თი და გავითვალისწინებთ (2)-ს, გვექნება:

$$a\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4+b\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+c\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+b\cdot\frac{1}{\alpha}+a=$$

$$=\frac{a+b\alpha+c\alpha^2+b\alpha^3+a\alpha^4}{\alpha^4}$$

ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ $\frac{1}{\alpha}$ არის (1) განტოლების ფესვი.

(1) განტოლების ამოხსნის მიზნით განტოლების ყველა წევრი გავყოთ x^2-ზე, შევასრულოთ სათანადო გარდაქმნები, გვექნება:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0. \tag{2}$$

თუ შევნიშნავთ, რომ $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ და შემოვიღებთ აღნიშვნას $x+\frac{1}{x}=y$, გვექნება:

$$a(y^2-2)+by+c=0,$$

საიდანაც

$$ay^2+by+c-2a=0.$$

როგორც ხედავთ, მიღებული განტოლება კვადრატული განტოლებაა y-ის მიმართ, ამიტომ გვექნება:

$$y_1=\frac{-b+\sqrt{b^2+8a^2-4ac}}{2a}, \quad y^2=\frac{-b-\sqrt{b^2+8a^2-4ac}}{2a}.$$

აღნიშვნის თანახმად გვექნება:

$$x+\frac{1}{x}=y_1, \quad x+\frac{1}{x}=y_2.$$

ეს განტოლებები დაიყვანება კვადრატულ განტოლებებამდე, რომლებსაც ამოვხსნით ჩვეულებრივი წესით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. $x^4+8x^3+14x^2+8x+1=0$,

გავყოთ ტოლობის ყველა წევრი x^2-ზე:

$$x^2+8x+14+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}=0,$$

აქედან

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+8\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0.$$

თუ გავითვალისწინებთ $x+\frac{1}{x}=y$ აღნიშვნას, გვექნება

$$(y^2-2)+8y+14=0,$$
$$y^2+8y+12=0;$$

აქედან

$$y=-4\pm2; \quad y_1=-2, \quad y_2=-6.$$

ამრიგად, გვექნება

$$x+\frac{1}{x}=-2; \quad x+\frac{1}{x}=-6;$$

ეს განტოლებები გადავწეროთ ასე:

$$x^2+2x+1=0 \text{ და } x^2+6x+1=0;$$

საიდანაც

$$x_{1,2}=1,\quad x_{3,4}=-3\pm\sqrt{8}=-3\pm2\sqrt{2}.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

ამოხსენით განტოლებები:

1. $25x^4-100x^3-106x^2-100x+25=0$:

2. $2x^4+2\frac{1}{21}x^3-84x^2-2\frac{1}{21}x+2=0$.

§ 73. უმაღლესი ხარისხის განტოლებანი, რომელთა მარცხენა ნაწილი მამრავლებად იშლება, მარჯვენა კი ნულის ტოლია

1. ორწევრა განტოლება. ორწევრა განტოლება ეწოდება შემდეგი სახის განტოლებას:

$$x^n=b, \tag{1}$$

სადაც n ერთზე მეტ მთელ რიცხვს წარმოადგენს, ხოლო b ნამდვილი ან კომპლექსური რიცხვია.

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ მხოლოდ იმ შემთხვევას, როცა b ნამდვილი რიცხვია:

$x^n\pm a=0$ (2) (a არის ნამდვილი დადებითი რიცხვი)

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $x=y\sqrt[n]{a}$, სადაც $\sqrt[n]{a}$ არის არითმეტიკული ფესვი, მაშინ განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$y^n\pm1=0. \tag{3}$$

განვიხილოთ ორწევრა განტოლების ამოხსნის რამდენიმე კონკრეტული მაგალითი:

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. $x^2-1=0$, მაშინ $x^2=1$; $x_1=1$; $x_2=-1$;

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. $x^2+1=0$, მაშინ $x^2=-1$; $x_1=+i$, $x_2=-i$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. $x^3-1=0$. დავშალოთ მარცხენა ნაწილი მარტივ მამრავლებად:

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1);$$

ამრიგად,

$$(x-1)(x^2+x+1)=0,$$

საიდანაც $x-1=0$ ან $x^2+x+1=0$, პირველი განტოლებიდან $x_1=1$. მეორედან $x^2+x+1=0$.

საბოლოოდ,

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2};\quad x_2=\frac{-1+i\sqrt{-3}}{2};\quad x_3=\frac{-1-i\sqrt{-3}}{2};$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. $x^4-1=0$, განტოლების მარცხენა ნაწილი დავშალოთ მამრავლებად

$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1).$$

ამრიგად, $(x^2-1)(x^2+1)=0$, საიდანაც $x^2-1=0$ ან $x^2+1=0$. პირველი განტოლება გვაძლევს $x_1=1$, $x_2=-1$. მეორე განტოლებიდან

$$x_3=i,\ x_3=-i.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. $x^4+1=0$. მარცხენა ნაწილი გარდავქმნათ, შემდეგ კი დავშალოთ მამრავლებად:

$$x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x).^2$$

ამრიგად, მოცემული განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=0,$$

ანუ

$$(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)=0,$$

საიდანაც

$$x^2+\sqrt{2}x+1=0 \text{ ან } x^2-\sqrt{2}x+1=0.$$

პირველი განტოლების ამოხსნა იძლევა

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}, \qquad x_{3,4}=\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$$

. მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. $x^5-1=0$ განტოლების მარცხენა მხარე დავშალოთ ბეზუს თეორემის გამოყენებით, გვექნება:

$$x^5-1 = (x-1)\,(x^4+x^3+x^2+x+1),$$

ამრიგად

$$(x-1)\,(x^4+x^3+x^2+x+1)=0,$$

საიდანაც $x-1=0$ და $x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

პირველი განტოლებიდან

$$x_1=1;$$

მეორე განტოლება წარმოადგენს სიმეტრიულ განტოლებას, როგორც ვიცით მისი ამოხსნისათვის საჭიროა, ყველა წევრი გავყოთ x^2-ზე:

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0.$$

საიდანაც

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $x+\dfrac{1}{x}=y$, გვექნება $y^2+y+1=0$,

საიდანაც

$$y_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \qquad y_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2};$$

ამრიგად, გვექნება შემდეგი ორი განტოლება

$$x+\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\qquad x+\frac{1}{x}=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

ეს განტოლებები გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$2x^2-(\sqrt{5}-1)x+2=0,$$

$$2x^2+(\sqrt{5}+1)x+2=0.$$

პირველი განტოლების ამოხსნით მივიღებთ

$$x_{2,3}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

მეორე განტოლების ამოხსნა მოგვცემს

$$x_{4,5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pm\frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

სავარჯიშო

ამოხსენით ორწევრა განტოლებები:

1. $x^3+8=0,$
2. $27x^3-125=0,$
3. $x^4-16=0,$
4. $x^6-64=0,$
5. $8x^3-3=0.$

დ. სამწევრა განტოლება. სამწევრა განტოლება ეწოდება შემდეგი სახის განტოლებას:

$$ax^{2n}+bx^n+c=0. \tag{1}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $x^n=y$, მაშინ (1) განტოლების ამოხსნა დაიყვანება $ay^2+by+c=0$ განტოლების ამოხსნამდე.

განვიხილოთ მაგალითები:

მაგალითი 1. $8x^6-9x^3+1=0.$

თუ აღვნიშნავთ $x^3=y$, მაშინ გვექნება:

$$8y^2-9y+1=0,$$

საიდანაც

$$y=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{16}=\frac{9\pm7}{16}.$$

$$y_1=1;\quad y_2=\frac{1}{8}$$

$$x_1=1,\quad x_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x_4=\frac{1}{2},\quad x_{5,6}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{4}.$$

სავარჯიშო

ამოხსენით განტოლებები:

1. $x^6-7x^3-8=0$,
2. $16x^8-257x^4+16=0$,
3. $(x+3)^6-9(x+3)^3+8=0$,
4. $(x-\sqrt{3})^4-5(x-\sqrt{3})^2+4=0$.

VI თავი

§ 74. ვექტორის ცნება

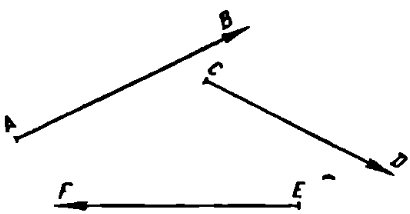
ზოგიერთი სიდიდე, რომლებთანაც საქმე აქვს ფიზიკას და მათემატიკას, სავსებით განისაზღვრება მათი რიცხვითი მნიშვნელობებით, მაგალითად, როგორიცაა სიგრძე, ფართობი, მოცულობა, დრო, მასა, პოტენციალი და სხვა. ასეთი სახის სიდიდეებს სკალარული სიდიდეები ეწოდება.

გამოყენებითი მათემატიკის სხვადასხვა დარგებში და ფიზიკაში, გარდა სკალარული სიდიდეებისა, გვხვდება ისეთი სახის სიდიდეები, რომლებიც შეუძლებელია სრულად დახასიათდეს მარტო რიცხვითი მნიშვნელობებით. მაგალითად, ფიზიკიდან ცნობილია, რომ ძალა, სიჩქარე, აჩქარება და სხვა, ხასიათდება არა მარტო მათი რიცხვითი მნიშვნელობებით, არამედ გარკვეული მიმართულებითაც. ამიტომ ასეთი სიდიდეების სრულად დახასიათებისათვის საჭიროა მათი რიცხვითი მნიშვნელობებთან ერთად ვიცოდეთ მათი მიმართულებაც. ასეთი სახის სიდიდეებს ვექტორული სიდიდეები ეწოდება.

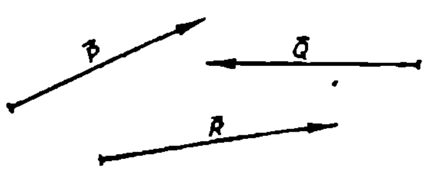
მაშასადამე, ვექტორის ცნება წარმოადგენს რიცხვის და მიმართულების ცნებათა გაერთიანებას.

განსაზღვრა 1. ვექტორი ეწოდება წრფის მონაკვეთს, რომელსაც აქვს განსაზღვრული სიგრძე და განსაზღვრული მიმართულება.

ვექტორების აღნიშვნაში პირველად იწერება მისი სათავის აღმნიშვნელი ასო, ხოლო შემდეგ — მისი ბოლოს აღმნიშვნელი ასო. ვექტორის მიმართულებად მიღებულია მისი მიმართულება სათავიდან ბოლოსაკენ. ვექტორების აღნიშვნა მოცემულია 61-ე ნახაზზე. AB, CD და EF ვექტორები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მოძრავი სხეულის მიერ გავლილი გზა A მდებარეობიდან B მდებარეობამდე, ასევე C-დან D-მდე, E-დან F-მდე.



ნახ. 61.



ნახ. 62.

ვექტორის აღსანიშნავად იხმარება პატარა ისარი, რომელიც იწერება სათავისა და ბოლოს აღმნიშვნელი ასოების ზევით, მაგალითად, $\overline{AB}$, იკითხება „ვექტორი AB“.

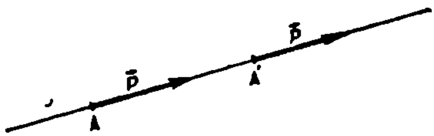
შეიძლება ვექტორი ერთი ასოთიც აღვნიშნოთ. მაგალითად, $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}$ და ა. შ. (ნახ. 62).

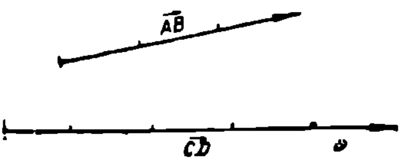
როგორც ვიცით, წრფის მონაკვეთის ერთ-ერთი მახასიათებელია მისი სიგრძე. ვექტორს კი, როგორც ვნახეთ, რამდენიმე მახასიათებელი აქვს: სათავე, მიმართულება და სიგრძე. $\overline{AB}$ ვექტორის სიგრძის გამომსახველ რიცხვს მოდული ეწოდება. მოდული აღინიშნება შემდეგნაირად: $|\overline{AB}|$. მაგალითად, $|\overline{AB}|=3$; $|\overline{CD}|=5$ (ნახ. 63).

იმისდა მიხედვით, თუ რა სახის სიდიდეს გამოსახავს აღებული ვექტორი, განასხვავებენ სამი სახის ვექტორებს: თავისუფალს, სრიალას და ბმულს.

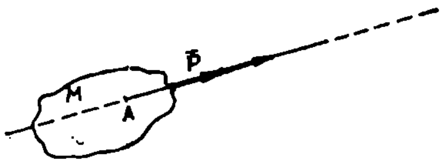
ა) თუ ვექტორი განსაზღვრულია მხოლოდ სიგრძით და მიმართულებით, ხოლო სათავის (მოდების წერტილის) მდებარეობას ყურადღება არ ექცევა, მაშინ ვექტორს თ ა ვ ი ს უ ფ ა ლ ი ეწოდება, ე. ი. თავისუფალი ვექტორი შეგვიძლია გადავიტანოთ თავისთავის პარალელურად სიბრტყის ნებისმიერ წერტილში. თავისუფალი ვექტორის მაგალითად შეგვიძლია დავასახელოთ სიჩქარე და აჩქარება სხეულის გადატანითი მოძრაობის დროს.

ბ) თუ ვექტორი განსაზღვრულია მისი ფუძით, ე. ი. წრფით, რომელზედაც ვექტორი ძევს და რომლის გასწვრივ მას შეუძლია იმოძრაოს, მაშინ ვექტორს სრიალა ე წ ო დ ე ბ ა. სრიალა





ნახ. 63.

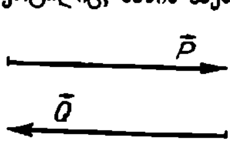


ნახ. 64 ა-ბ.

ვექტორი შეიძლება გადავიტანოთ მისი ფუძის გასწვრივ (ნახ. 64, ა). $\bar{P}$ ვექტორი A წერტილიდან გადატანილია A' წერტილში.

სრიალა ვექტორის მაგალითს წარმოადგენს მყარ სხეულზე მოდებული ძალა (ნახ. 64, ბ). $\bar{P}$ ვექტორი მოდების წერტილიდან შეგვიძლია გადავიტანოთ A' წერტილში.

გ) თუ ვექტორის განსაზღვრისას არსებითია მის სიგრძესთან ერთად მოდების წერტილიც, მაშინ ასეთ ვექტორებს ბმული ვექტორები ეწოდება.



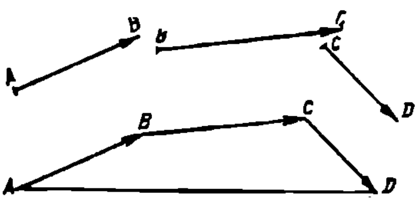
ნახ. 65.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 2. $\bar{P}$ და $\bar{Q}$ ვექტორებს (ნახ. 65), რომელთაც ტოლი სიგრძეები აქვთ, ხოლო მიმართულება მოპირდაპირე, შებრუნებული ვექტორები ეწოდება.

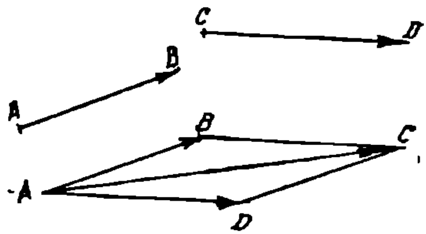
ამ თავში ჩვენ მხოლოდ თავისუფალ ვექტორებს განვიხილავთ.

ისევე, როგორც რიცხვებზე ანუ სკალარებზე, ვექტორებზეც შეიძლება ვაწარმოოთ არითმეტიკული მოქმედებები.

1. ვექტორების შეკრება. ვთქვათ, მოცემულია სამი ვექტორი: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ და $\overline{BC}$. ამ ვექტორების ჯამს ვღებულობთ შემდეგი წესით: ვიღებთ სიბრტყეზე ნებისმიერ A' წერტილს და ამასთან ვაგებთ $\overline{AB}$ ვექტორს ($\overline{AB}$ ვექტორი თავის თავის პარალელურად გადაგვაქვს A' წერტილში). ამავე წესით, $\overline{AB}$ ვექტორის B' ბოლოზე ვაგებთ $\overline{BC}$ ვექტორს და ბოლოს კი $\overline{CD}$ ვექტორს. $ABCD$ ტეხილის შემაერთებელ $\overline{AD}$ ვექტორს, რომლის სათავე ემთხვევა $\overline{AB}$-ს სათავეს და ბოლო კი $\overline{CD}$ ვექტორის ბოლოს, ეწოდება $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ და $\overline{CD}$ ვექტორების ჯამი და ჩაიწერება შემდეგნაირად: $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{AD}$ (ნახ. 66). ასეთივე წესით შეიძლება მოიძებნოს ნებისმიერი სასრული რაოდენობის ვექტორთა ჯამი.



ნახ. 66.



ნახ. 67.

ორი ვექტორის შემთხვევაში ჯამის პოვნა მოხერხებულია ე. წ. პარალელოგრამის წესით. ამ შემთხვევაში ორივე შესაკრებ ვექტორს მოდებენ ერთ წერტილზე და მათზე აგებენ პარალელოგრამს.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამ პარალელოგრამის დიაგონალი იქნება მოცემული ვექტორების ჯამი (ნახ. 67):

$$\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}.$$

საყურადღებოა ის გარემოება, რომ ვექტორების ჯამს, ისევე როგორც სკალარების ჯამს, ახასიათებს კომუტატიურობისა და ასოციატიურობის თვისება.

ვექტორთა ჯამი დამოუკიდებელია შესაკრებთა რიგისაგან: $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AD}+\overline{AB}$ (კომუტატიურობის თვისება)

ვექტორთა შეკრება შეიძლება შესრულდეს შესაკრებთა ნებისმიერ ჯგუფებად შეერთებით: $(\overline{AB}+\overline{BC})+\overline{CD}=\overline{AB}+(\overline{BC}+\overline{CD})$ (ასოციატიურობის თვისება).

2. ვექტორების გამოკლება. ორი $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ ვექტორის სხვაობა ეწოდება ისეთ მესამე $\overline{EF}$ ვექტორს, რომელიც შეკრებილი $\overline{CD}$ ვექტორთან მოგვცემს $\overline{AB}$-ს.

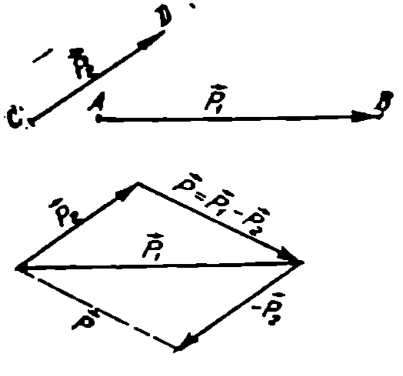
ე. ი. $\overline{EF}$ ვექტორი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$\overline{AB}=\overline{CD}+\overline{EF}.$$

თუ ვექტორს აღვნიშნავთ თითო ასოთი, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\overline{P}=\overline{P}_1-\overline{P}_2 \text{ ანუ } \overline{P}=\overline{P}_1+(-\overline{P}_2).$$

ამრიგად, ორი ვექტორის სხვაობა რომ ვიპოვოთ, საჭიროა პირველ ვექტორს მივუმატოთ მეორე ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი (ნახ. 68).



ნახ. 68.

კითხვები და სავარ-ჯიშო

1. რას ეწოდება ვექტორი? როგორ აღინიშნება ვექტორი?

2. როგორ აღინიშნება ვექტორის მოდული?

3. იპოვეთ შემდეგი სამი ნებისმიერი $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ და $\overline{P}_3$ ვექტორების ჯამი.

4. ააგეთ $|\overline{P}|=5$ და $|\overline{Q}|=3$ ვექტორები და იპოვეთ მათი ჯამი და სხვაობა.

5. ABC სამკუთხედის გვერდებზე აგებულია ვექტორები $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ და $\overline{CB}$, მასთან $|\overline{AB}|=a$, $|\overline{BC}|=b$ და $|\overline{CA}|=C$, რას უდრის $a+b+c$ ჯამი?

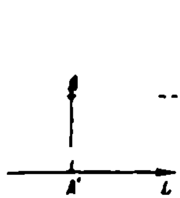
6. დაამტკიცეთ, რომ, თუ $\overline{OA}$ და $\overline{OB}$ ორი ვექტორი O წერტილს აერთებს A და B წერტილებთან, მაშინ ვექტორი $\overline{OC} = \frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})$ AB მონაკვეთს ყოფს ორ ტოლ ნაწილად.

§ 76. ვექტორის გეგმილი ღერძზე

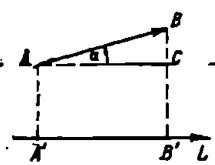
ავიღოთ სიბრტყეზე L ღერძი და მის გარეთ A წერტილი.

განსაზღვრა 1. A წერტილის გეგმილი L ღერძზე ეწოდება A წერტილიდან L ღერძზე დაშვებული პერპენდიკულარის A' ფუძეს (ნახ. 69, ა).

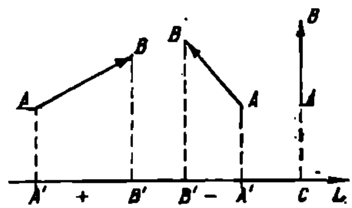
განსაზღვრა 2. $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილი L ღერძზე ეწოდება იმ A_1B_1 მონაკვეთის სიგრძეს, რომელიც აერთებს ამ ვექტორის სათავის გეგმილს მისი ბოლო წერტილის გეგმილთან L ღერძზე (ნახ. 69, ბ).



ნახ. 69, ა.



ნახ. 69, ბ.



ნახ. 69, გ.

გეგმილის სიდიდე ითვლება დადებითად, თუ $\overline{AB}$ ვექტორის მიმართულება ემთხვევა L ღერძის მიმართულებას, და უარყოფითად—წინააღმდეგ შემთხვევაში (ნახ. 69, გ).

თუ AB ვექტორი პერპენდიკულარულია L ღერძისა, მაშინ ვექტორის A სათავე და B ბოლო ერთ C წერტილში გეგმილდება (ნახ. 69, გ), ამიტომ ღერძის პერპენდიკულარული ვექტორის გეგმილი ამ ღერძზე ნულის ტოლია.

$\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილი L ღერძზე არის სკალარი ანუ რიცხვი, რომელიც გამოსახავს $A'B'$ მონაკვეთის სიგრძეს.

ეს უკანასკნელი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\text{გეგ}_L \overline{AB} = A'B'. \qquad (1)$$

ABC მართკუთხა სამკუთხედიდან (ნახ. 69, ბ) შეგვიძლია განვსაზღროთ $A'B'$ მონაკვეთის სიგრძე:

$$AC = |\overline{AB}| \cos\alpha.$$

მაგრამ $AC=A'B'$, ამიტომ $A'B'=|\overline{AB}| \cos\alpha$. თუ ამ ტოლობას შევადარებთ (1)-ს, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\text{გეგ}_L \overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot \cos\alpha.$$

მაშასადამე, $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილი L ღერძზე ($A'B'$) უდრის $\overline{AB}$ ვექტორის სიგრძეს, გამრავლებულს იმ კუთხის კოსინუსზე, რომელსაც ეს ვექტორი ადგენს L ღერძთან.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. როგორ შეიცვლება ვექტორის გეგმილი ღერძზე, თუ:

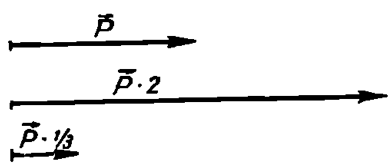
ა) ვექტორის სიგრძე გადიდდება ორჯერ? სამჯერ?

ბ) ვექტორის მიმართულება შეიცვლება მოპირდაპირეთი, ხოლო ღერძის მიმართულება დარჩება უცვლელი?

2. $\overline{AB}$ ვექტორი, რომლის მოდული 6 სმ-ია, L ღერძთან ადგენს 30°-იან კუთხეს. იპოვეთ მისი გეგმილის სიდიდე L ღერძზე.

§ 77. ვექტორის ნამრავლი სკალარზე

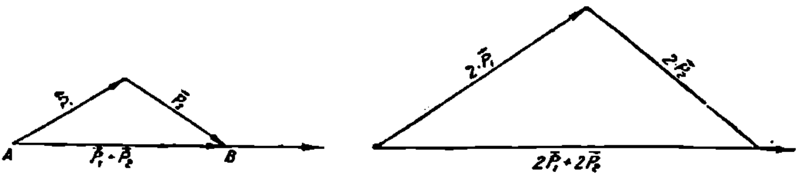
ვთქვათ, მოცემულია $\bar{P}$ ვექტორი და k სკალარი. $K\bar{P}$ ნამრავლი განიხილება, როგორც ვექტორი, რომლის სიგრძე ტოლია $\bar{P}$ ვექტორის სიგრძის და K რიცხვის აბსოლუტური მნიშვნელობის ნამრავლისა. $K\bar{P}$ ვექტორს აქვს $\bar{P}$ ვექტორის მიმართულება, თუ $k>0$, და საწინააღმდეგო მიმართულება, თუ $k<0$. 70-ე ნახაზზე წარმოდგენილია ვექტორები:



ნახ. 70.

$\bar{P}\cdot 2$; $\bar{P}\ \frac{1}{3}$; $\bar{P}(-2)$. ნებისმიერი ვექტორისათვის შეიძლება ავაგოთ ერთეულოვანი $\bar{e}$ ვექტორი, რომლის სიგრძე ერთეულის ტოლია და აქვს იგივე მიმართულება, რაც მოცემულ ვექტორს, ამიტომ $\bar{P}=P\cdot\bar{e}$, სადაც $P=|\bar{P}|$. **მაშასადამე, ყოველი ვექტორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც მისი მოდულის და ერთეულოვანი ვექტორის ნამრავლი.**

71-ე ნახაზზე გამოსახულია ორი ვექტორის ჯამის სკალარზე გამრავლება: $(\bar{P}_1+\bar{P}_2)\cdot 2=\bar{P}$.

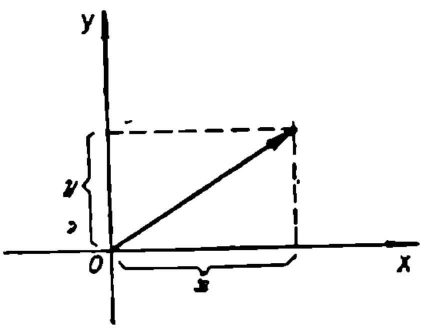


ნახ. 71.

§ 76. ვექტორის კოორდინატები სიბრტყეზე

ვთქვათ, მოცემულია xoy მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. M იყოს სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი.

განსაზღვრა 1. OM **ვექტორს, რომელიც კოორდინატთა სათავეს აერთებს M წერტილთან, M წერტილის რადიუს-ვექტორი ანუ მოძრავი რადიუსი ეწოდება.** (ნახ. 72) და აღინიშნება $\overline{OM}=r$.



ნახ. 72.

განსაზღვრა 2. $\overline{OM}$ **ვექტორის x და y გეგმილებს OX და OY ღერძებზე ამ ვექტორის კოორდინატები ეწოდება.**

ვექტორის კოორდინატები ჩაიწერება $\{x, y\}$ სახით, თვით ვექტორი კი სახით

$$\overline{OM}=\{x,\ y\},$$

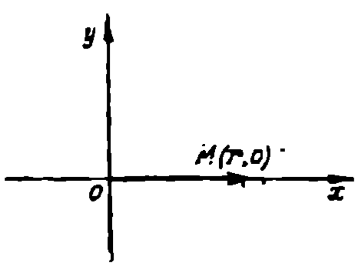
სადაც

$$x=\text{გეგ}_{ox}\,\overline{OM} \quad \text{და} \quad y=\text{გეგ}_{oy}\,\overline{OM}.$$

განვიხილოთ OM ვექტორის მდებარეობის, სხვადასხვა შემთხვევები.

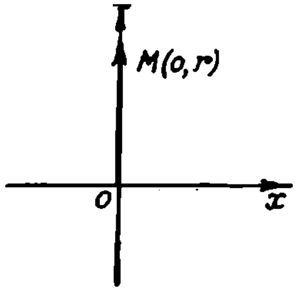
1. თუ $\overline{OM}$ ვექტორი ძევს OX ღერძზე და აქვს OX ღერძის მიმართულება, მაშინ $\overline{OM}=\{r, o\}$ (ნახ. 73, ა). თუკი ვექტორს ექნება ox ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულება, მაშინ $\overline{OM}=\{-r,\ o\}$ (ნახ. 73, ბ). ნახ. 73, გ და ნახ. 73, დ-ზე წარმოდგენილ შემთხვევებში

$$\overline{OM}=\{o,\ r\} \ \text{და} \ \overline{OM}=\{0, -r\}.$$

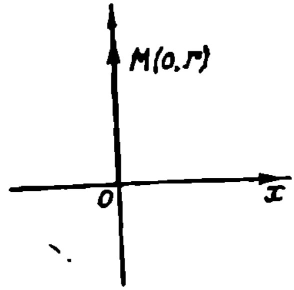


ნახ. 73, ა.

ნახ. 73, ბ.



ნახ. 73, გ.



ნახ. 73, დ.

თუკი ვექტორის სათავე არ ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს, მაშინ ვექტორის კოორდინატები და ვექტორის ბოლო წერტილის კოორდინატები ერთი და იგივე არ იქნება (ნახ. 74).

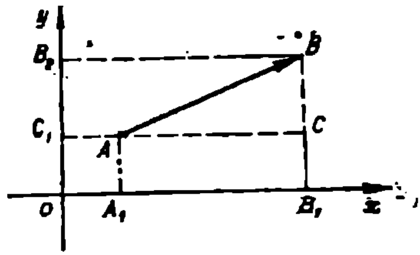
ამ შემთხვევაში $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილი OX ღერძზე იქნება A_1B_1 მონაკვეთი, OY ღერძზე კი — C_1B_2 მონაკვეთი.

$$A_1B_1 = OB_1 - OA_1 = x_B - x_A;$$

$$C_1B_2 = OB_2 - OC_1 = y_B - y_A.$$

ამიტომ

$$\overline{AB} = \{x_B - x_A, \quad y_B - y_A\}.$$



ნახ. 74.

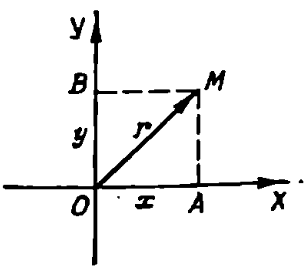
ყოველი ვექტორი ამომწურავად ხასიათდება თავისი კოორდინატებით, ვინაიდან, თუ გვეცოდინება ვექტორის კოორდინატები, ამით ადვილად ავაგებთ თვით ვექტორს და ვიპოვით მის სიგრძესაც.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა, რომელიც გამოსახავს ვექტორის სიგრძეს მისი კოორდინატების საშუალებით.

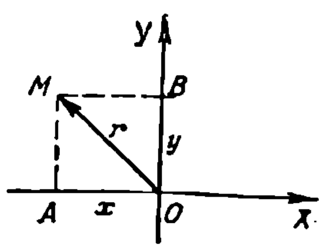
თ ე ო რ ე მ ა. **ნებისმიერი ვექტორის სიგრძის კვადრატი უდრის მისი კოორდინატების კვადრატების ჯამს.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, მოცემულია $\overline{OM}$ ვექტორი. თუ მისი კოორდინატებია x და y, ხოლო სიგრძე r, მაშინ ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას:

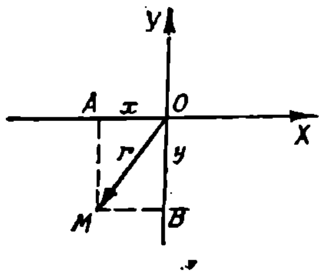
$$r^2 = x^2 + y^2.$$



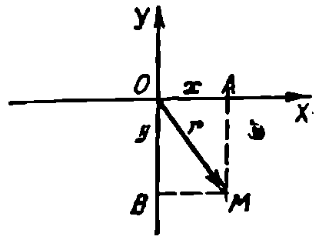
ნახ. 75.



ნახ. 75, ა.



ნახ. 75, ბ.



ნახ. 75, გ.

თუ $\overline{OM}$ ვექტორი რომელიმე საკოორდინატო ღერძზე ძევს, მაშინ, როგორც ზევით ვნახეთ, მისი ერთ-ერთი კოორდინატი იქნება 0, ხოლო მეორე კი r ან $-r$. ამ შემთხვევაში თეორემა სამართლიანია. თუკი ვექტორი ძევს I მეოთხედში (ნახ. 75), მაშინ მართკუთხა ΔOMA-დან პითაგორის თეორემის ძალით დავწერთ:

$$r^2=x^2+y^2.$$

თუ ვექტორი ძევს რომელიმე სხვა მეოთხედში, მაშინაც იგივე შედეგს მივიღებთ.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. ააგეთ ვექტორები, თუ მოცემულია მისი კოორდინატები:

$$\{3;\ 2\};\quad \{0;\ 1\};\quad \{3;\ 0\};\quad \{-2;\ 1\};\quad \{-3;\ -2\};\quad \{0;\ -3\}.$$

2. როგორ შეიცვლება ვექტორის კოორდინატები, თუ ვექტორის მიმართულებას შევცვლით მოპირდაპირეთი.
3. იპოვეთ ვექტორის სიგრძე, თუ ცნობილია მისი კოორდინატები:

$$\{2;\ 1\},\ \{-5;\ 4\};\ \{-2;\ 1\},\ \{0,\ -5\},\ \{1;\ \sqrt{2}\}.$$

4. რას წარმოადგენს ვექტორების ბოლო წერტილთა სიმრავლე, თუ ამ ვექტორთა $\{x;\ y\}$ კოორდინატები აკმაყოფილებენ განტოლებას:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

§ 70. რამდენიმე ვექტორის ჯამის გეგმილი ღერძზე

თ ე ო რ ე მ ა: 1. ვექტორთა ჯამის გეგმილი რაიმე ღერძზე ტოლია შესაკრებ ვექტორთა გეგმილების ჯამისა. ვთქვათ, $\overline{AD}$ ვექტორი წარმოადგენს შემდეგი სამი ვექტორის ჯამს. $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$ (ნახ. 76).

ცხადია,

$$\text{გეგ}_L\,\overline{AD}=A_1D_1, \tag{1}$$

ახლა დავაგეგმილოთ თითოეული შესაკრები იმავე ღერძზე:

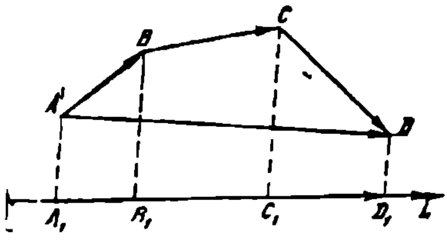
$$\text{გეგ}_L\overline{AB}=A_1B_1;\quad \text{გეგ}_L\overline{BC}=B_1C_1\quad \text{გეგ}_L\overline{CD}=C_1D_1.$$

თუ ამ ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ:

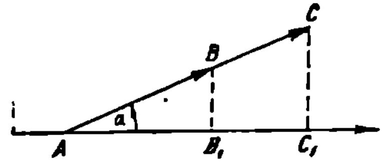
$$\text{გეგ}_L\overline{AB}+\text{გეგ}_L\overline{BC}+\text{გეგ}_L\overline{CD}=A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1=A_1D_1 \tag{2}$$

(1) და (2) ტოლობის მარჯვენა ნაწილების ტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$\text{გეგ}_L\overline{AD}=\text{გეგ}_L\overline{AB}+\text{გეგ}_L\overline{BC}+\text{გეგ}_L\overline{CD}.$$



ნახ. 76.



ნახ. 77.

თ ე ო რ ე მ ა 2. თუ OM ვექტორი L ღერძთან ქმნის α კუთხეს, მაშინ L ღერძზე OM ვექტორის გეგმილის შეფარდება $\overline{OM}$ ვექტორის სიგრძესთან არის გარკვეული რიცხვი, რომელიც არაა დამოკიდებული OM ვექტორის სიგრძეზე.

77-ე ნახაზზე მოცემულია AB და AC ვექტორები, რომლებიც L ღერძთან ქმნიან α კუთხეს.

$$\text{გეგ}_L\overline{AB}=AB_1;\quad \text{გეგ}_L\overline{AC}=AC_1;\quad \triangle ABB_1\sim ACC_1.$$

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

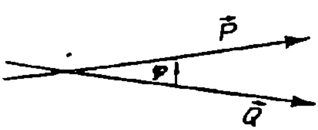
$$\frac{AB_1}{AB}=\frac{AC_1}{AC}.$$

§ 80. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

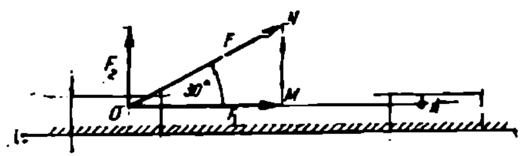
გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. ორი $\bar{P}$ და $\bar{Q}$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება მათი სიგრძეებისა და მათ შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლს. $\bar{P}$ და $\bar{Q}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი აღინიშნება შემდეგნაირად: $\bar{P}\cdot\bar{Q}$ განმარტების თანახმად,

$$\bar{P}\cdot\bar{Q}=|\bar{P}|\cdot|\bar{Q}|\cos\varphi.$$

სადაც $|\bar{P}|$ და $|\bar{Q}|$ შესაბამისად გამოსახავს $\bar{P}$ და $\bar{Q}$ ვექტორების სიგრძეებს, ხოლო φ არის კუთხე მათ შორის.



ნახ. 78.



ნახ. 79.

ორი ვექტორის სკალარულ ნამრავლს მარტივი მექანიკური შინაარსი აქვს. ვნახოთ ეს კონკრეტულ მაგალითზე.

ამოცანა. F ძალის მოქმედებით სხეული ასრულებს გადატანით მოძრაობას ისე, რომ მისი სიმძიმის ცენტრი O გადაადგილდება A წერტილში, მასთან, F ძალის მოქმედების მიმართულებასთან ადგენს $30°$-იან კუთხეს. ვიპოვოთ F ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, თუ $|F|=10$ კგ, ხოლო $OA=9$ მ. (ნახ. 79).

F ძალა იშლება ორ F_1 და F_2 მდგენელად. F_2-ის მოქმედება ბათილდება სხეულის სიმძიმის ძალით და მის გადატანით მოძრაობაში მონაწილეობას არ ღებულობს. სხეულის გადატანით მოძრაობას იწვევს F_1 ძალა. F_1 ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა OA მანძილზე იქნება $A=F_1 \cdot OA=F_1 \cdot 9$ მ. ΔOMN-დან $F_1=F \cdot \cos 30°$, ამიტომ F_1 ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა OA გზაზე იქნება:

$$A = F \cdot \cos 30° \quad OA \quad \text{ანუ} \quad A=10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ კგ} \cdot 9 \text{ მ} = 45\sqrt{3} \text{ კგ მ.}$$

ამრიგად F ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა არის F ძალის გამომსახველი ვექტორისა და OA ვექტორული გადაადგილების სკალარული ნამრაელი.

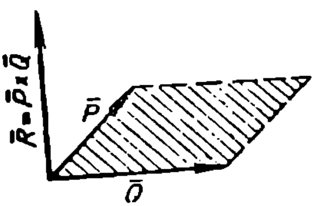
§ 81. ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი

როგორც ზემოთ ვნახეთ, ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის მექანიკური შინაარსი არის ძალის მუშაობა გადაადგილების მიმართ.

ახლა განვიხილოთ ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი: **ორი $\bar{P}$ და $\bar{Q}$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი არის ისეთი მესამე $\bar{R}$ ვექტორი, რომელიც შემდეგი პირობებითაა განსაზღვრული:**

1. $\bar{R}$ ვექტორის სიგრძე უდრის $\bar{P}$ და $\bar{Q}$ ვექტორების სიგრძეებისა და მათ შორის φ კუთხის სინუსის ნამრავლს:

$$|\bar{R}| = |\bar{P}| \quad |\bar{Q}| \sin\varphi,$$



ნახ. 80.

ე. ი. $\bar{P}$ და $\bar{Q}$-ზე აგებული პარალელოგრამის ფართობს (ნახ. 80).

2. $\bar{R}$ ვექტორი პერპენდიკულარულია $\bar{P}$ და $\bar{Q}$ ვექტორებზე გამავალი სიბრტყისა.

3. $\bar{R}$ ვექტორის მიმართულება ისეთია, რომ $\bar{P}$, $\bar{Q}$ და $\bar{R}$ ვექტორები ადგენენ მარცხენა სისტემას.

მესამე პირობა ნიშნავს შემდეგს: **დამკვირვებლისათვის, რომელიც $\bar{R}$ ვექტორის გასწვრივ დგას და უყურებს P ვექტორს, მისი უმცირესი კუთხით მობრუნება $\bar{Q}$ ვექტორთან შესათავსებლად საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით უნდა ხდებოდეს.**

$\bar{P}$ და $\bar{Q}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი აღინიშნება ასე $\bar{P} \times \bar{Q}$.

§ 82. ვექტორული ნამრავლის მექანიკური მნიშვნელობა

ვთქვათ, მოცემულია $\bar{F}$ ძალა, რომელიც მოდებულია A წერტილზე, და O წერტილი (ნახ. 81). $\bar{F}$ ძალის ვექტორული მომენტი O წერტილის მიმართ არის ვექტორი, რომელიც მოდებულია მომენტის O ცენტრზე, და განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

1. ვექტორული მომენტის სიგრძე უდრის F ძალის სიგრძისა და h მხარის (მართობი O ცენტრიდან ძალის ფუძეზე) ნამრავლს:

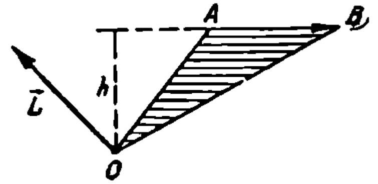
$$|\bar{L}|=h|\bar{F}|=2S,$$

ე. ი. $\bar{F}$ ძალასა და O ცენტრზე აგებული სამკუთხედის გაორკეცებულ ფართობს (ანუ სათანადო პარალელოგრამის ფართობს).

2. ვექტორული მომენტი $\bar{F}$ ძალაზე და O წერტილზე გამავალი სიბრტყის პერპენდიკულარულია.

3. ვექტორული მომენტის მიმართულება ისე უნდა შეირჩეს, რომ $\bar{F}$ ძალა მას საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით უვლიდეს.

ვექტორული $\bar{L}$ მომენტის ამ განმარტებას თუ შევადარებთ ვექტორული ნამრავლის ზემოთ მოყვანილ განმარტებას, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ



ნახ. 81.

$$\bar{L} = \text{მომ}\,\bar{F} = \overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OA} \times (\overline{OA} + \bar{F}) =$$
$$\overline{OA} \times \overline{OA} + \overline{OA} \times \bar{F}$$

მაგრამ $\overline{OA} \times \overline{OA} = 0,$

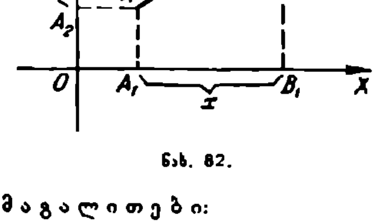
ამიტომ $\bar{L} = \overline{OA} \times \bar{F}.$

ამრიგად, $\bar{F}$ ძალის ვექტორული $\bar{L}$ მომენტი რაიმე O წერტილის მიმართ არის $\overline{OA}$ რადიუს-ვექტორისა და $\bar{F}$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი.

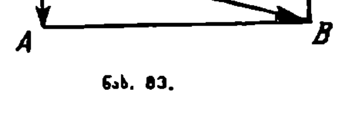
§ 89. ვექტორის დაშლა კოორდინატთა ღერძების მიხედვით

განსაზღვრა. ვექტორს, რომლის სიგრძე ერთეულის ტოლია, მგეზავი ანუ ორტი* ეწოდება. ღერძების მგეზავებად მიღებულია $\bar{i}$ და $\bar{j}$ ვექტორები. ყოველი ვექტორი შეიძლება დავშალოთ კოორდინატთა ღერძების მიმართ. ამისათვის საკმარისია დავაგეგმილოთ იგი OX და OY ღერძებზე და მიღებული გეგმილები გავამრავლოთ სათანადო მგეზავზე.

მაგალითად, ვთქვათ, $\overline{AB} = \{x, y\}$, მაშინ $\overline{AB} = x\bar{i} + y\bar{j}$ (ნახ. 83).



ნახ. 82.



ნახ. 83.

მაგალითები:

1. $ABCD$ მართკუთხედის გვერდებზე აგებულია ვექტორი $\overline{AB} = \bar{P}$; $\overline{BC} = \bar{Q}$. გამოვსახოთ $\bar{P}$ და $\bar{Q}$ ვექტორების საშუალებით $\overline{MB}$ ვექტორი, თუ M AD გვერდის შუაწერტილია (ნახ. 83).

---

* სიტყვა orientation-დან.

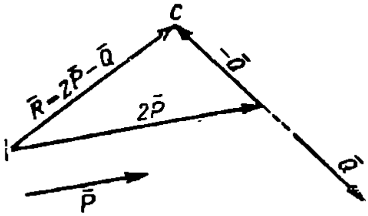
ამოხსნა:

$$\overline{MB}=\overline{MA}+\overline{AB},\quad \text{მაგრამ}\quad \overline{MA}=-\frac{1}{2}\,\overline{Q}\quad \text{და}\quad \overline{AB}=\overline{P},$$

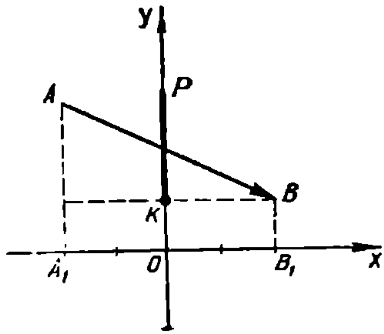
ამიტომ

$$\overline{MB}=-\frac{1}{2}\,\overline{Q}+\overline{P}.$$

2. ავაგოთ $\overline{R}$ ვექტორი, თუ $R=2\overline{P}-\overline{Q}$.



ნახ. 84.



ნახ. 85.

ამოხსნა. ჯერ ავაგებთ $\overline{P}$ ვექტორის გაორკეცებულ ვექტორს (მოდების წერტილი ნებისმიერია). შემდეგ ვუმატებთ მას ნებისმიერი $\overline{Q}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორს, ე. ი. $-\overline{Q}$-ს, მაშინ (ნახ. 84) გვექნება:

$$\overline{R}=2\overline{P}+(-\overline{Q})=2\overline{P}-\overline{Q}.$$

3. მოცემულია $\overline{AB}$ ვექტორის სათავისა და ბოლო წერტილების კოორდინატები: $A(-2;\ 3)$, $B(2,\ 1)$. ვიპოვოთ:

ა) $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილი OX და OY ღერძებზე; ბ) $\overline{AB}$ ვექტორის მოდული (სიგრძე).

ამოხსნა

$\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილი OX ღერძზე უდრის A_1B_1 მონაკვეთის რიცხვით მნიშვნელობას:

$$|A_1B_1|=2-(-2)=4.$$

$\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილი OY ღერძზე უდრის KP მონაკვეთის რიცხვით მნიშვნელობას:

$$|KP|=3-1=2$$

$\overline{AB}$ ვექტორის სიგრძე ანუ მოდული იქნება:

$$|\overline{AB}|=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}.$$

ამოცანა 4. მოცემულია $\overline{P}=\{-2,4\}$, $\overline{Q}=\{3;\ 2\}$.

ვაჩვენოთ, რომ $\overline{R}=\overline{P}+\overline{Q}=\{1;\ 7\}$.

ამოხსნა

თუ გამოვიყენებთ თეორემას ვექტორთა ჯამის გეგმილის შესახებ, გვექნება:

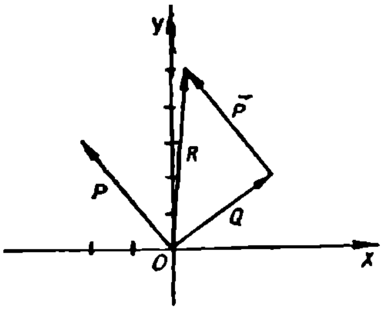
$$\text{გეგ}_X(\bar P+\bar Q)=\text{გეგ}_X\bar P+\text{გეგ}_X\bar Q=-2+3=1.$$

განვიხილოთ გეგმილი OY ღერძის მიმართ:

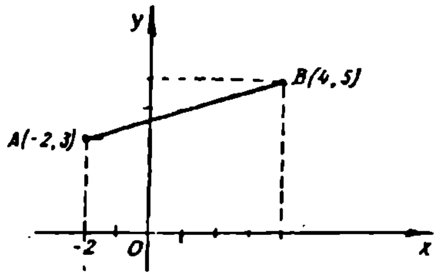
$$\text{გეგ}_Y(\bar P+\bar Q)=\text{გეგ}_Y\bar P+\text{გეგ}_Y\bar Q=4+2=6.$$

ამრიგად,

$$\bar R=\bar P+\bar Q=\{1,\ 6\}.$$



ნახ. 86.



ნახ. 87.

ამოცანა 5. დავშალოთ მოცემული $\overline{AB}$ ვექტორი კოორდინატთა ღერძის მიმართ i და j ერთეულოვანი ვექტორების მიხედვით, თუ $A(-2;\ 3)$, $B(4;\ 5)$.

ამოხსნა.

განვიხილოთ $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილი OX და OY ღერძებზე:

$$\text{გეგ}_X\overline{AB}=X_B-X_A=4-(-2)=6.$$

$$\text{გეგ}_Y\overline{AB}=Y_B-Y_A=5-3=2.$$

ამრიგად,

$$\overline{AB}=6i+2j.$$

სავარჯიშო.

1. მოცემულია $\bar P$ ვექტორი, რომლის სათავის და ბოლოს კოორდინატებია შესაბამისად: $A(3,\ -5)$; $B(-2,\ 4)$.

იპოვეთ: ა) $\bar P$ ვექტორის გეგმილი კოორდინატთა OX და OY ღერძებზე, ბ) $\bar P$ ვექტორის მოდული.

გ) დაშალეთ $\bar P$ ვექტორი OX და OY ღერძების მიხედვით:

პას. ა) 5; 9. ბ) $\sqrt{106}$. გ) $\overline{AB}=5i+9j$.

2. დაამტკიცეთ, რომ $A(3;-1)$, $B(1;\ 2)$, $C(-1;\ 1)$ და $D(1;\ -2)$ წარმოადგენს პარალელოგრამის წვეროებს.

მითითება. პარალელურ ვექტორებს ერთსახელა კოორდინატები პროპორციული აქვთ.

3. მოცემულია ვექტორები: $\bar{P}=3i+5j$, და $\bar{Q}=i-2j$ იპოვეთ სკალარული ნამრავლი $\bar{P}\cdot Q$.

პას. $\bar{P}\cdot\bar{Q} = -\sqrt{170}\cdot\frac{7}{\sqrt{34}+\sqrt{5}}$

4. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის განსაზღვრის მიხედვით იპოვეთ $\bar{P}=4i+j$ და $\bar{Q}=2j-3$ ვექტორებს შორის კუთხე.

პას. $\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{175}}$.

5. ორ $\bar{P}=\{2;\ 1\}$ და $\bar{Q}=\{-1;\ 5\}$ ვექტორზე აგებულია პარალელოგრამი. იპოვეთ კუთხე მის დიაგონალებს შორის.

პას: $\cos\varphi=\frac{-21}{5\sqrt{37}}$.

6. მოცემულია ორი ვექტორი: $\bar{P}=\{5;\ 2\}$, $\bar{Q}=\{2;\ -3\}$. იპოვეთ მისი ვექტორული ნამრავლი.

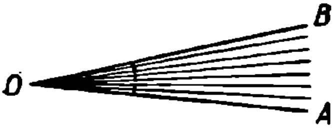
თავი VII

ნებისმიერი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

§ 64. კუთხის ცნების განზოგადება

გეომეტრიაში კუთხე განიხილება როგორც ფიგურა, რომელიც შედგენილია ერთი წერტილიდან გამოსული ორი სხივით.

ყოველი კუთხე შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ფიგურა, რომელიც მიიღება თავისი საწყისი წერტილის გარშემო სიბრტყეში მბრუნავი სხივით. მაგალითად, O წერტილის გარშემო სხივის მობრუნებით OA საწყისი მდებარეობიდან OB საბოლოო მდებარეობამდე მიიღება AOB კუთხე (ნახ. 88).



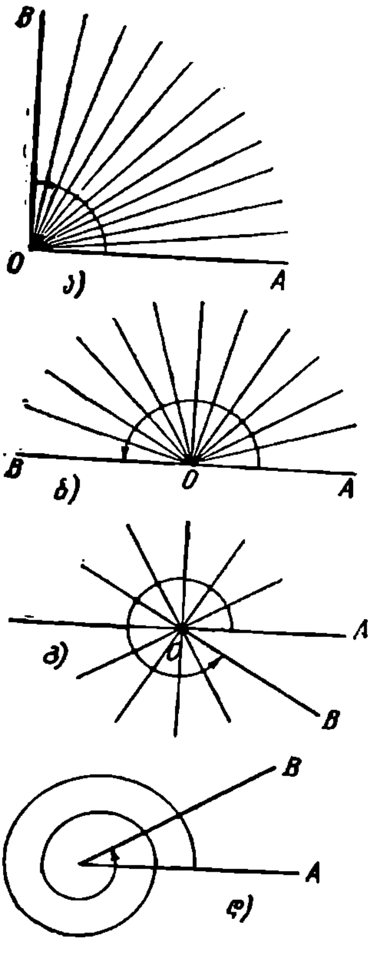
ნახ. 88.

სხივის ბრუნვის დროს შეიძლება შეიქმნას მართი კუთხე, გაშლილი კუთხე, გაშლილ კუთხეზე მეტი კუთხე. თუ სხივი შეასრულებს ერთ სრულ ბრუნს, მაშინ OB გვერდი შეუთავსდება OA საწყის მდებარეობას. სხივის მობრუნება თავისი საწყისი მდებარეობიდან შეიძლება შედგებოდეს ერთი ან რამდენიმე სრული ბრუნისა და იმ კუთხისაგან, რომელიც სრული ბრუნის ნაწილია (ნახ. 89, ა, ბ, გ, დ).

სიბრტყეზე სხივის ბრუნვა შეიძლება ორი ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებით.

სიბრტყეზე სხივის ბრუნვის ორი შესაძლებელი მიმართულებიდან ერთს თვლიან დადებითად, მეორეს კი — უარყოფითად.

შეთანხმების საფუძველზე ბრუნვის დადებით მიმართულებად თვლიან ბრუნვის სიბრტყეზე მოთავსებულ და ციფერბლატით დამკვირვებლისაკენ მიმართული, საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებას.

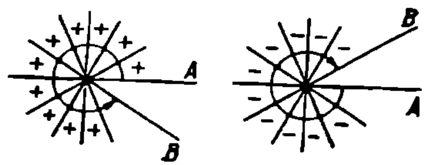


ნახ. 89.

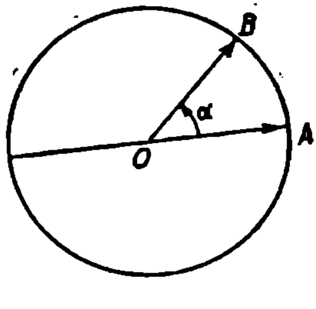
ამრიგად, თუ სხივი ბრუნავს საწყისი მდებარეობიდან საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაშინ მიიღება დადებითი კუთხე, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში — უარყოფითი (ნახ. 90).

თუ OA სხივი არავითარი კუთხით არ მობრუნებულა საწყისი მდებარეობიდან, ე. ი. დარჩა საწყის მდებარეობაში, მაშინ ვიტყვით, რომ სხივის მობრუნების კუთხე 0-ის ტოლია.

მბრუნავი სხივის საწყის მდებარეობას ეწოდება შესაბამისი მობრუნების კუთხის საწყისი გვერდი, ხოლო სხივის საბოლოო მდებარეობას ამ კუთხის საბოლოო გვერდი.



ნახ. 90.



ნახ. 91.

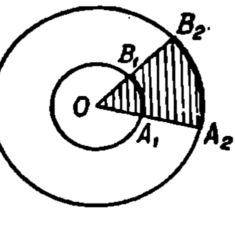
OA სხივს (ნახ. 91) შეუძლია ნებისმიერ რიცხვჯერ შეასრულოს სრული ბრუნი და შემდეგ კვლავ აღმოჩნდეს OB მდებარეობაში, ე. ი. არსებობს, როგორც სასრული, ისე უსასრულო სიმრავლე კუთხეებისა, რომელთათვისაც საწყის და საბოლოო გვერდებს OA-ს და OB-ს მდებარეობა აქვს. ეს კუთხეები შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\beta=\alpha+k\cdot 360^\circ, \text{ სადაც } k=0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots$$

§ 85. კუთხეებისა და რკალების რადიანული გაზომვა

კუთხეების გაზომვის დროს წინასწარ საჭიროა კუთხის საზომი ერთეულის შერჩევა. კუთხის საზომ ერთეულად შეიძლება ავიღოთ სხვადასხვა სახის კუთხე. პრაქტიკაში კუთხის საზომ ერთეულად უფრო მეტად ხმარობენ გრადუსს, რომელიც სრული ბრუნვის $\frac{1}{360}$ ნაწილს შეადგენს. როცა გაზომვა უფრო მეტი სიზუსტითაა საჭირო, მაშინ ერთეულად იღებენ გრადუსის $\frac{1}{60}$ ნაწილს — წუთს და წუთის $\frac{1}{60}$ ნაწილს — წამს.

გეომეტრიაში ხშირად კუთხეებს ზომავენ d-ს ნაწილებში, ამ შემთხვევაში საზომ ერთეულად აღებულია მართი კუთხე.



ნახ. 92.

არტილერიაში კუთხის საზომად ღებულობენ სრული ბრუნვის $\frac{1}{60}$ ნაწილს ე. ი. $\frac{360°}{60}=6°$, ამ კუთხეს კუთხსაზომის დიდი დანაყოფი ეწოდება. როცა უფრო მეტი სიზუსტეა საჭირო, მაშინ კუთხსაზომის დიდ დანაყოფს ყოფენ 100 ტოლ ნაწილად; კუთხეს $\frac{6°}{100}=3'36''$ ეწოდება კუთხსაზომის მცირე დანაყოფი.

ვინაიდან სიბრტყეში სხივის ბრუნვის შედეგად შეიძლება მივიღოთ ნებისმიერი სიდიდის კუთხე, ამიტომ კუთხის ზომები შეიძლება გამოვსახოთ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებით, მასთან, დადებითი კუთხის სიდიდე გამოისახება დადებითი რიცხვით, უარყოფითისა კი — უარყოფითით.

რკალების გაზომვისას ერთეულად იღებენ ე. წ. რკალურ გრადუსს. ეს არის რკალი, რომელსაც ეყრდნობა ერთგრადუსიანი ცენტრალური კუთხე. როგორც ცენტრალური კუთხის, ისე მისი შესაბამისი რკალის სიდიდე გამოისახება ერთი და იმავე ნამდვილი რიცხვით.

გეომეტრიიდან ვიცით, რომ ერთი და იმავე ცენტრალური კუთხისათვის ორი წრეწირის რკალის სიგრძე ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც მათი რადიუსები (ნახ. 92).

$$\frac{\overset{\smile}{A_1B_1}}{\overset{\smile}{A_2B_2}}=\frac{R_1}{R_2}$$

ანუ

$$\frac{\overset{\smile}{A_1B_1}}{R_1}=\frac{\overset{\smile}{A_2B_2}}{R_2}$$

ამრიგად, ერთი და იმავე ცენტრალური კუთხისათვის წრეწირის რკალის სიგრძის შეფარდება რადიუსთან დამოკიდებული არაა რადიუსის სიდიდეზე.

მაგრამ, ცხადია, ცენტრალური კუთხის სიდიდის შეცვლასთან ერთად იცვლება ამ შეფარდების სიდიდეც.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. კუთხის რადიანული ზომა ეწოდება წრეწირის იმ რკალის სიგრძის შეფარდებას მისი რადიუსის სიგრძესთან, რომლისთვისაც ეს კუთხე ცენტრალურია.

კუთხეების რადიანული გაზომვის დროს საზომ ერთეულად იღებენ რადიუსის სიგრძის ტოლი რკალის შესაბამის ცენტრალურ კუთხეს. ამ კუთხეს რადიანი ეწოდება.

წრეწირის რკალების რადიანული გაზომვისას ერთეულად მიღებულია რკალური რადიანი, ე. ი. რკალი, რომლის სიგრძე რადიუსის სიგრძის ტოლია.

§ 80. კუთხის რადიანულ და გრადუსულ ზომებს შორის დამოკიდებულება

ა) **კუთხის გრადუსული ზომიდან რადიანულზე გადასვლა.** განსაზღვრის თანახმად, სრული კუთხის (ბრუნის) რადიანული ზომა უდრის წრეწირის სიგრძის შეფარდებას რადიუსის სიგრძესთან:

$$\frac{2\pi R}{R}=2\pi=6{,}2831\ldots$$

1°-იანი კუთხის რადიანული ზომა იქნება: $\frac{2\pi}{360^\circ}=\frac{\pi}{180^\circ}$ თუ კი კუთხე A°-ს შეიცავს, მაშინ მისი რადიანული ზომა ტოლი იქნება:

$$a=\frac{\pi}{180}\cdot A^\circ.$$

სასარგებლოა ვიცოდეთ ცხრილში მოცემული კუთხეთა რადიანული ზომები:

გრადუსები	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
რადიანები	$\frac{\pi}{6}=0{,}5236$	$\frac{\pi}{4}=0{,}7854$	$\frac{\pi}{3}\approx1{,}0472$	$\frac{\pi}{2}=1{,}5708$	$\pi=3{,}1416$	$\frac{3\pi}{2}\approx4{,}7124$	$2\pi=6{,}2832$

ბ) **რადიანული ზომიდან გრადუსულზე გადასვლა.** A°-იანი კუთხის რადიანული ზომის ფორმულიდან $a=\frac{\pi}{180^\circ}\cdot A^\circ$ გამომდინარეობს:

$$A^\circ=\frac{180^\circ}{\pi}\cdot a.$$

1. რადიანის ტოლი კუთხის გრადუსული ზომაა $\frac{180^\circ}{\pi}\approx57^\circ17'45''$

2. რადიანის ტოლი კუთხის გრადუსული ზომაა $\frac{180^\circ}{\pi}\cdot2\approx57^\circ\,17'\,45''\cdot2\approx$

$$\approx114^\circ36'$$

გრადუსული ზომიდან რადიანულზე გადასასვლელად მოხერხებულია ვისარგებლოთ ცხრილებით: (ვ. ბრადისის ცხრილი 11, გვ. 60, 1963 წ.).

რადიანებში გამოსახული კუთხის ან რკალის სიდიდე ჩაიწერება რიცხვით სახელწოდების გარეშე. მაგალითად „კუთხე, რომელიც იზომება a რიცხვით", მოკლედ ვიტყვით, „a კუთხე", კუთხე რომლის სიდიდე არის $\frac{1}{3}$, 2,5, $3\frac{1}{7}$, რადიანი, ვიტყვით: „კუთხე $\frac{1}{3}$", „კუთხე 2,5", „კუთხე $3\frac{1}{7}$" და ა. შ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი: გამოვსახოთ გრადუსებში კუთხე, რომლის რადიანული ზომაა 2, 0176. რადგან ასეთი კუთხე ცხრილში არაა, ამიტომ ეს სრულდება 2 ეტაპად:

$$\begin{array}{l} 1{,}5691 - 90^\circ 54' \\ 0{,}4485 - 83^\circ \\ \hline 2{,}0176^\circ - 173^\circ 54'. \end{array}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ ვიცით წრეწირის რადიუსი R და რკალის რადიანული ზომა a, შეიძლება გამოვთვალოთ ამ რკალის სიგრძე l. მართლაც, განსაზღვრის თანახმად,

$$a = \frac{l}{R}, \quad \text{აქედან კი } l = a \cdot R.$$

ამრიგად, **წრეწირის რკალის სიგრძე უდრის მისი რადიანული ზომისა და რადიუსის სიგრძის ნამრავლს.**

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი:

ცხრილების გამოყენებით გადაიყვანეთ შემდეგი კუთხეები რადიანულ ზომებში:

1. $27^\circ 18'$; $35^\circ 34'$; $145^\circ 36'$; $183^\circ 38'$

2. გადაიყვანეთ ცხრილების საშუალებით რადიანული ზომიდან გრადუსულში:

1,1537; 0,3681; 1,3716.

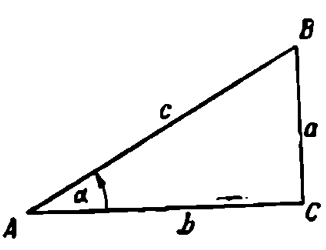
2,1716; 2,5; 2,14; 1,313.

§ 67. ნებისმიერი არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა განსაზღვრა

VIII კლასის გეომეტრიის სახელმძღვანელოში განმარტებულია მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები: სინუსი, კოსინუსი, ტანგენსი და კოტანგენსი.

ეს განსაზღვრა ემყარება მართკუთხა ABC სამკუთხედის გვერდების შეფარდებას:

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha; \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha; \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha; \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha;$$

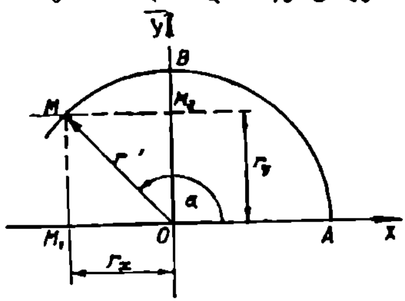


ნახ. 93.

თუ გავითვალისწინებთ ამ განსაზღვრებს, მაშინ, ცხადია, აზრს კარგავს 0-იანი, 90°-იანი, 120°-იანი, 180°-იანი და ა. შ. კუთხეთა ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განხილვა, ვინაიდან დასახელებული კუთხეებიდან არც ერთი არაა მახვილი. ეს გარემოება გვაიძულებს მივმართოთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ისეთ განსაზღვრას, სადაც არგუმენტი შეიძლება იყოს არა მარტო მახვილი, არამედ ნებისმიერი კუთხე.

ავიღოთ სიბრტყეზე ox და oy ურთიერთპერპენდიკულარული ღერძები. მათი გადაკვეთის O წერტილიდან ნებისმიერი რადიუს-ვექტორით შემოვხაზოთ წრეწირი, რომელიც გადაკვეთს ox და oy ღერძებს, შესაბამისად, A და B წერტილებში

OM რადიუს-ვექტორი OA საწყისი მდებარეობიდან OM საბოლოო მდებარეობამდე აღწერს α კუთხეს (ბრუნვის დადებითი მიმართულება); M წერტილის კოორდინატები იყოს x და y, ხოლო OM რადიუს-ვექტორის მოდული $|\overline{OM}|=r$.



ნახ. 94.

განსაზღვრა 1. α კუთხის სინუსი ეწოდება მოძრავი რადიუს-ვექტორის ბოლო წერტილის ორდინატის შეფარდებას ამავე რადიუს-ვექტორის მოდულთან (სიგრძესთან), თუ ეს რადიუს-ვექტორი აბსცისათა ღერძთან α კუთხეს ადგენს, ე. ი.

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}. \tag{1}$$

განსაზღვრა 2. α კუთხის კოსინუსი ეწოდება მოძრავი რადიუს-ვექტორის ბოლო წერტილის აბსცისის შეფარდებას ამავე რადიუს-ვექტორის მოდულთან (სიგრძესთან), თუ ეს რადიუს-ვექტორი აბსცისათა ღერძთან α კუთხეს ადგენს,

ე. ი.

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}; \tag{2}$$

(1) და (2)-დან მივიღებთ

$$y=z\sin\alpha \text{ და } x=r\cdot\cos\alpha.$$

განსაზღვრა 3. კუთხის ტანგენსი ეწოდება ამ კუთხის სინუსის შეფარდებას ამავე კუთხის კოსინუსთან,

ე. ი.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

განსაზღვრა 4. კუთხის კოტანგენსი ეწოდება კუთხის კოსინუსის შეფარდებას ამავე კუთხის სინუსთან, ე. ი.

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

შენიშვნა. ტანგენსის და კოტანგენსის განმარტებებიდან გამომდინარეობს, რომ α კუთხის ტანგენსი უდრის მოძრავი რადიუს-ვექტორის ბოლო წერტილის ორდინატის შეფარდებას ამავე წერტილის აბსცისასთან, ხოლო კოტანგენსი უდრის მოძრავი რადიუს ვექტორის ბოლო წერტილის აბსცისის შეფარდებას ორდინატთან, თუ მოძრავი რადიუს-ვექტორი ox ღერძთან α კუთხეს ადგენს.

ე.

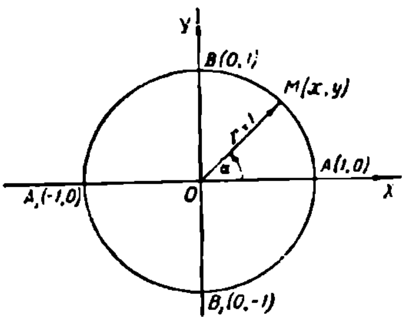
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x};\quad \text{და}\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{x}{y}\ (1').$$

ა) განხილული ოთხი ფუნქციის გარდა, კიდევ განიხილება ორი ფუნქცია ს ე კ ა ნ ს ი და კ ო ს ე კ ა ნ ს ი:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{r}{x}\quad \text{და}\quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{x}{y}$$

მაგრამ ამ ორ ფუნქციას ფართო გამოყენება არა აქვს.

§ 6-ის მეორე თეორემის ძალით შეიძლება დავასკვნათ, რომ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მნიშვნელობანი არ არიან დამოკიდებულნი მოძრავი რადიუს-ვექტორის სიგრძეზე, ამიტომ ეს რადიუს-ვექტორი ყოველთვის შეიძლება ერთი და იმავე სიგრძის ავიღოთ.



ნახ. 95.

ჩვეულებრივ იღებენ $|\overline{OM}| = r = 1$; ასეთ შემთხვევაში OM რადიუს-ვექტორი საკოორდინატო სიბრტყეზე შემოხაზავს ე. წ. ერთეულოვან წრეწირს (ნახ. 95). ამ შემთხვევაში

$$\sin\alpha = y, \cos\alpha = x; \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x};\ \operatorname{ctg}\alpha \frac{x}{y}$$

ამრიგად, α კუთხის სინუსი და კოსინუსი უდრის ერთეულოვანი წრეწირის მოძრავი რადიუს-ვექტორის ბოლოს ორდინატს და აბსცისას, ტანგენსი და კოტანგენსი კი უდრის მოძრავი რადიუს-ვექტორის ბოლოს ორდინატის შეფარდებას აბსცისასთან და აბსცისის შეფარდებას ორდინატთან, თუ მათი მოძრავი რადიუს-ვექტორი აბსცისათა ღერძთან α კუთხეს ქმნის.

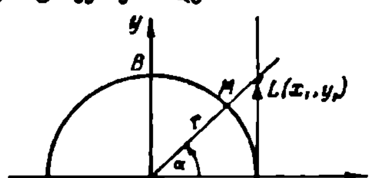
ავიღოთ ერთეულოვანი წრეწირი.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ე რ ა. **ერთეულოვანი წრეწირის მხებს, გავლებულს ჰორიზონტალური დიამეტრის (1; 0) წერტილზე, ეწოდება ტანგენსების ღერძი.**

ტანგენსების ღერძზე ისეთსავე დადებით მიმართულებას ვიღებთ, როგორსაც ორდინატთა ღერძზე (ქვევიდან ზევით).

M წერტილი იყოს α კუთხის შესაბამისი ერთეულოვანი წრეწირის წერტილი; თუ განვაგრძობთ $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორს ტანგენსების ღერძის გადაკვეთამდე, ამ ღერძზე მივიღებთ L წერტილს*.

α კუთხის ტანგენსი უდრის ტანგენსების ღერძის შესაბამისი წერტილის ორდინატს. მართლაც, თუ α კუთხე მთავრდება



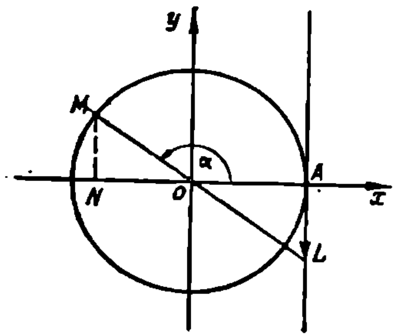
ნახ. 96.

* ამ აგების შესრულება შეუძლებელი გახდება, თუ M წერტილი ორდინატთა ღერძზე ძევს.

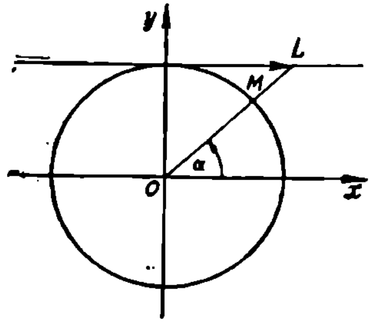
მარჯვენა ნახევარსიბრტყეში, მაშინ $\overline{OL}$-ს ავიღებთ მოძრავ რადიუს-ვექტორად და გვექნება:.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|\overline{AL}|}{OA} = \frac{y_1}{1} = y_1,$$

სადაც y_1 არის L წერტილის ორდინატი.



ნახ. 97, ა.



ნახ. 97, ბ.

თუკი α კუთხე მთავრდება მარცხენა ნახევარსიბრტყეში, მაშინ M და L წერტილების ერთსახელა კოორდინატები საწინააღმდეგო ნიშნებისაა. OMN და OAL სამკუთხედების მსგავსების გამო ორდინატის შეფარდება აბსცისასთან ორივე წერტილისათვის ერთნაირია:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{MN}{ON} = \frac{AL}{OA} = \frac{y_1}{1} = y_1;$$

თუ M წერტილი ძევს ორდინატთა ღერძზე, მაშინ L წერტილი არ არსებობს და მასთან $\operatorname{tg}\alpha$-ც.

კოტანგენსების ღერძი ეწოდება ერთეულოვანი წრეწირის მხებს, გავლებულს ვერტიკალური დიამეტრის $B(0,1)$ ბოლოში. დადებითი მიმართულება ამ ღერძზე ემთხვევა დადებით მიმართულებას OX ღერძზე.

α კუთხის კოტანგენსი არის კოტანგენსების ღერძის შესაბამისი წერტილის x აბსცისა (ნახ. 106).

(1′) ფორმულაში $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ შეიძლება არსებობდეს მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $x \neq 0$.

თუკი $x=0$, მაშინ $\frac{y}{x}$ აზრს კარგავს (ნულზე გაყოფა არ შეიძლება). ამ შემთხვევაში $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორის მიმართულება ემთხვევა OY ღერძის მიმართულებას (ნახ. 98).

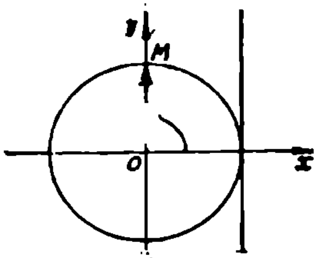
α კუთხე კი შეიძლება ზოგადად შემდეგნაირად წარმოვიდგინოთ:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

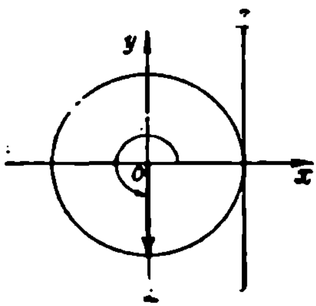
სადაც $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

ამრიგად, $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ კუთხეთათვის ფუნქცია ტანგენსი არ არსებობს (OM რადიუს-ვექტორი ტანგენსების ღერძის პარალელურია, ე. ი. მას არ კვეთს) (ნახ. 98,ა და 98, ბ).

ახლა, თუ $\alpha = k\pi$, მაშინ OM რადიუს-ვექტორის მიმართულება ემთხვევა ox ღერძის მიმართულებას და შეფარდება $\frac{x}{y}$ აზრს კარგავს. ($y=0$), ე. ი. $\alpha = k\pi$ კუთხეთათვის კოტანგენსი არ არსებობს (ნახ. 98, გ).



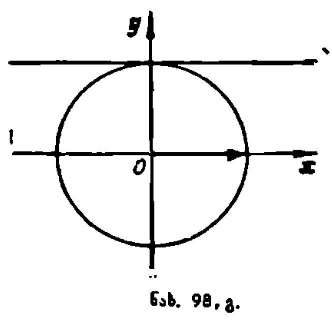
ნახ. 98, ა.



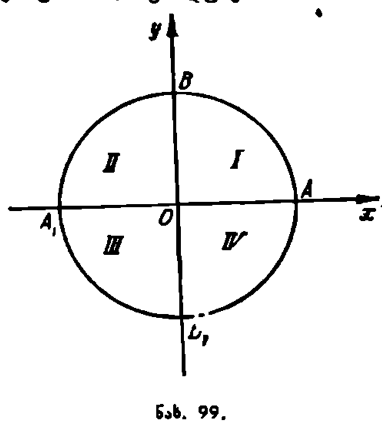
ნახ. 98, ბ.

განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ ერთეულოვანი წრეწირი კოორდინატთა ღერძებით იყოფა 4 ტოლ ნაწილად. I და II მეოთხედი ერთად შეადგენს ზედა ნახევარწრეწირს. III და IV მეოთხედი — ქვედა ნახევარწრეწირს. I და IV მეოთხედი შეადგენს მარჯვენა ნახევარ-წრეწირს, III და II მეოთხედი — მარცხენა ნახევარწრეწირს.

ჰორიზონტალური დიამეტრის მარჯვენა ბოლოში (A წერტილი) ბოლოვდება რკალებით, რომლებიც $2k\pi$ (ან გრადუსებში $360^\circ k$) რიცხვებით იზომება, ამ დიამეტრის მარცხენა A_1 ბოლოში კი — რკალები, რომლებიც იზომება რიცხვებით:



ნახ. 98, გ.



ნახ. 99.

$\pi + 2k\pi = \pi(2k+1)$ ან გრადუსებით $180^\circ(2k+1)$, სადაც $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

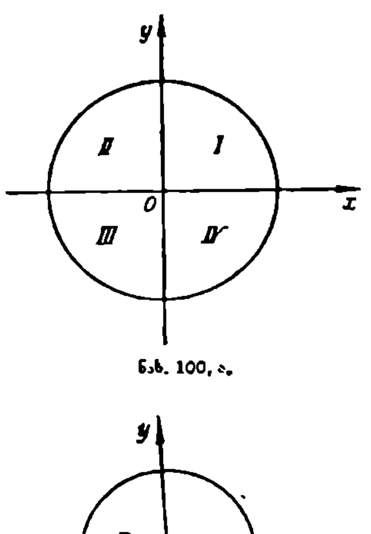
აქედან ვასკვნით: $n\pi$ და 180 n რკალები (სადაც n მთელი რიცხვია) ბოლოვდება ჰორიზონტალური (AA_1) დიამეტრის ბოლოებში: როცა n ლუწია, A წერტილში, და როცა n კენტია A_1 წერტილში.

B წერტილში, ვერტიკალური დიამეტრის ზედა ბოლოში, ბოლოვდება რკალები $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (ან $90^\circ+360k$). B_1 წერტილში (ვერტიკალური დიამეტრის ქვედა ბოლო) ბოლოვდება რკალები $-\frac{\pi}{2}+2k\pi=\frac{\pi}{2}+(2k-1)\pi$.

აქედან დავასკვნით, რომ ვერტიკალური დიამეტრის ბოლოში ბოლოვდება $\frac{\pi}{2}+\pi n$ რკალები, მასთან, B წერტილში, როცა $n=2k$, და B_1-ში, როცა $n=2k-1$.

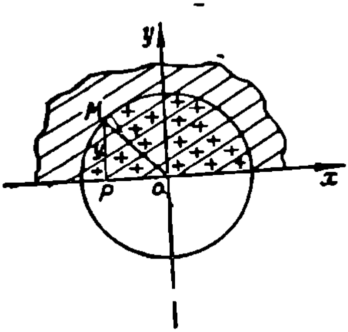
§ 88. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნიშნები

როგორც ვიცით, კოორდინატთა OX და OY ღერძები ერთეულოვანი წრეწირს ყოფენ 4 ტოლ ნაწილად. თითოეულ ნაწილს მეოთხედები ეწოდება (I, II, III, IV მეოთხედებს, (ნახ. 100 ა). ვინაიდან $\sin\alpha$ ფუნქცია არის ერთეულოვანი წრეწირის მოძრავი რადიუს-ვექტორის ბოლო წერტილის ორდინატი, როცა რადიუს-ვექტორი ox ღერძთან α კუთხეს ადგენს, ამიტომ სინუსის მნიშვნელობანი დადებითია იმ მეოთხედში დამთავრებული კუთხეებისათვის, რომელშიც რადიუს-ვექტორის ბოლო წერტილის ორდინატები დადებითია, ხოლო უარყოფითი — სადაც ეს ორდინატები უარყოფითია.

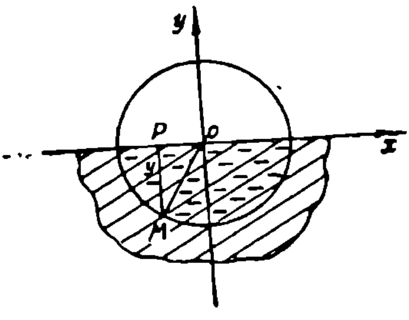


ნახ. 100, ა.

ამრიგად, ზედა ნახევარსიბრტყეში (I და II მეოთხედები) სინუსი დადებითია (ნახ. 100, ბ), ხოლო ქვედა ნახევარსიბრტყეში (III და IV მეოთხედი) უარყოფითია (ნახ. 100გ). კერძოდ, 0-სა და π-ს შორის მოთავსებული კუთხეებისათვის, ე. ი. $0<\alpha<\pi$ $\sin\alpha>0$, ხოლო $\pi<\alpha<2\pi$ კუთხეებისათვის, $\sin\alpha<0$.

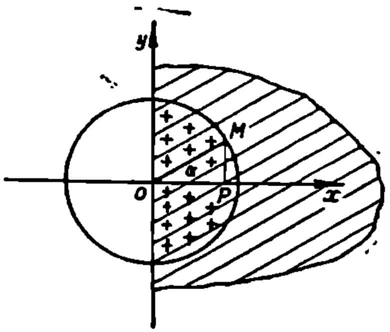


ნახ. 100, ბ.

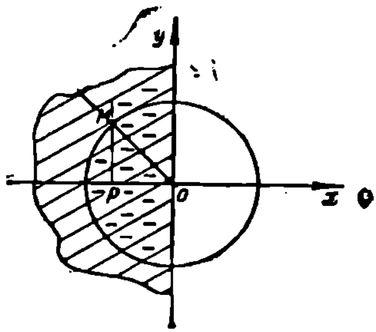


ნახ. 100, გ.

ვიცით, რომ $\cos\alpha$ არის ერთეულოვანი წრეწირი რადიუს-ვექტორის ბოლო წერტილის აბსცისა, თუ ეს ვექტორი ox თან α კუთხეს ადგენს. ამიტომ ფუნქცია $\cos\alpha$ დადებითი იქნება იმ მეოთხედში დამთავრებული კუთხეებისათვის, რომელშიც მოძრავი რადიუს-ვექტორის ბოლო წერტილის აბსცისა დადებითია, ხოლო უარყოფითი — სადაც ეს აბსცისა უარყოფითია. ე. ი. მარჯვენა ნახევარსიბრტყეში (I და IV მეოთხედები) ფუნქცია კოსინუსი დადებითია (ნახ. 101, ა) ხოლო მარცხენა ნახევარსიბრტყეში (III და II მეოთხედები) — უარყოფითი. (ნახ. 101, ბ).



ნახ. 101, ა.



ნახ. 101, ბ.

კერძოდ, კოსინუსი დადებითია $-\frac{\pi}{2}$ და $\frac{\pi}{2}$-ს შორის მოთავსებული კუთხეებისათვის, ე. ი. $\cos\alpha>0$, თუ $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$; ხოლო $\cos\alpha<0$, თუ $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. ვინაიდან

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{y}{x} \quad \text{და} \quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{x}{y}$$

ამიტომ ტანგენსის და კოტანგენსის მნიშვნელობანი დადებითია იმ მეოთხედში დამთავრებული კუთხეებისათვის, რომლებშიც მოძრავი რადიუს-ვექტორის ბოლო წერტილის ორდინატებს ერთნაირი ნიშნები აქვთ, ხოლო უარყოფითია იმ მეოთხედში დამთავრებული კუთხეთათვის, სადაც ეს ორდინატები საწინააღმდეგო ნიშნებისაა.

ამრიგად, I და III მეოთხედებში დამთავრებული კუთხეების ტანგენსი და კოტანგენსი დადებითია, II და IV მეოთხედებში დამთავრებული კუთხეებისა კი—უარყოფითი.

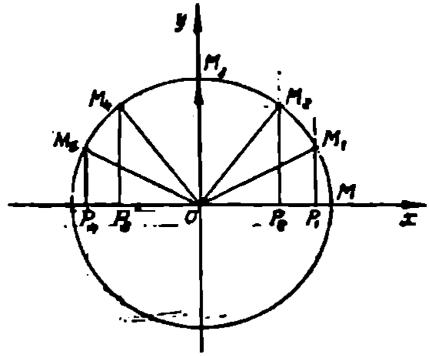
ჩატარებული მსჯელობის მიხედვით ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნიშნებისათვის შეგვიძლია შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი:

მეოთხედი / ფუნქციები	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	−	+	−

უნდა შევნიშნოთ, რომ ხინუსის ნიშნები მეოთხედების მიხედვით ემთხვევა კოსეკანსის ნიშნებს, კოსინუსისა — სეკანსისას, ხოლო ტანგენსისა — კოტანგენსისას.

§ 69. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცვლილება, როცა არგუმენტი იცვლება 0-დან 2π-მდე

ავიღოთ ერთეულოვანი წრეწირი. როგორც ვიცით, $\sin\alpha = y$ და $\cos\alpha = x$, ე. ი. ერთეულოვანი წრეწირის მოძრავი რადიუს-ვექტორის ბოლო წერტილის ორდინატი არის α კუთხის სინუსი, აბსცისა კი — კოსინუსი, თუ რადიუს ვექტორი OX ღერძთან α კუთხეს ქმნის.



ნახ. 102.

როცა α იცვლება 0-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე, მაშინ სინუსი იზრდება 0-დან M_1P_1-მდე, M_2P_2-მდე, და ბოლოს, როცა $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (90°), მაშინ $\overline{OM}$ ვექტორს ექნება $\overline{OM_3}$ მდებარეობა და $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. როდესაც კუთხე იზრდება $\frac{\pi}{2}$ (90°)-დან π (180)-მდე, მაშინ სინუსი კლებულობს 1-დან M_4P_3-მდე M_5P_4-მდე და ა. შ. ბოლოს, როცა $\alpha = \pi$, მაშინ სინუსი 0-ის ტოლი ხდება. ე. ი. $\sin\pi = 0$;

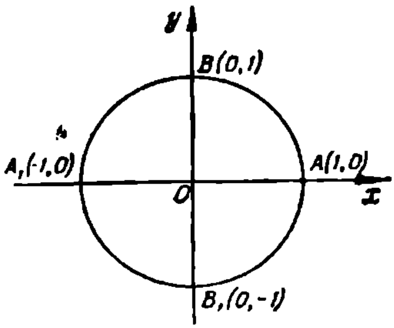
α კუთხის π-დან $\frac{3\pi}{2}$ (270°) ცვლილების დროს სინუსი კლებულობს 0-დან—1-მდე, ე. ი. როცა $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, მაშინ მოძრავი რადიუსი იქნება $\overline{OM_6}$ მდებარეობაში, ამიტომ $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$; $\frac{3\pi}{2}$-დან 2π-მდე. α კუთხის ცვლილებისას სინუსი კვლავ იზრდება —1-დან 0-მდე, და როცა $\alpha = 2\pi$ (360°), კვლავ უბრუნდება საწყის $\overline{OM}$ მდებარეობას. ამიტომ $\sin 2\pi = 0$.

ბ) ფუნქცია კოსინუსის ცვლილება. თუ $\alpha = 0$ მაშინ $\cos\alpha = |\overline{OM}| = 1$. როცა α იზრდება, მაშინ $\cos\alpha$ კლებულობს 1-დან OP_1-მდე, OP_2-მდე და ა. შ. და ბოლოს, როცა $\alpha = \frac{\pi}{2}$, მაშინ $\cos\alpha$ 0-ის ტოლი ხდება. $\frac{\pi}{2}$-დან π-მდე α-ს ცვლილებისას კოსინუსი კვლავ კლებულობს 0-დან —1-მდე. შემდეგ, როცა α იცვლება π-დან $\frac{3\pi}{2}$-მდე, კოსინუსი კვლავ იზრდება—1-დან 0-მდე. $\frac{3\pi}{2}$-დან 2π-მდე α-ს ცვლილების დროს ის კვლავ იზრდება 0-დან 1-მდე. მეტად სასარგებლოა A, B, A_1, და B_1 წერტილების კოორდინატების დამახსოვრება. ამ წერტილების კოორდინატების ცოდნით და კუთხის ცალკეული მნიშვნელობების დროს მოძრავი რადიუს-ვექტო-

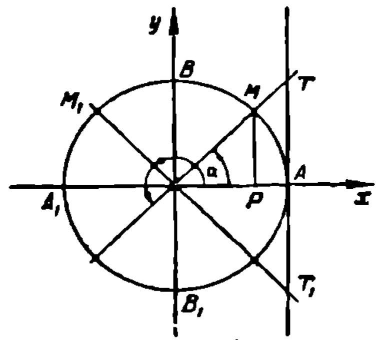
რის მდებარეობის გათვალისწინებით პირდაპირ შეიძლება 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ და 2π კუთხეების, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობების განსაზღვრა (ნახ. 103). მაგალითად, როცა $\alpha=0$, მაშინ მოძრავ რადიუს-ვექტორს უჭირავს OA საწყისი მდებარეობა, ამიტომ A წერტილის კოორდინატები იქნება $0°$-იანი კუთხის სინუსი და კოსინუსი, ე. ი.

$$\sin 0°=0 \text{ და } \cos 0°=1.$$

როცა $\alpha=90°$, მაშინ რადიუს-ვექტორის ბოლო იქნება B წერტილში, ამიტომ $\cos 90°=0$ და $\sin 90°=1$; როცა $\alpha=180°$, მაშინ რადიუს-ვექტორი იქნება OA_1 მდებარეობაში, ამიტომ $\cos 180°=-1$ და $\sin 180°=0$; თუ $\alpha=270°$, მაშინ რადიუს-ვექტორს ექნება OB_1-ის მდებარეობა, ამიტომ $\cos 270°=0$ და $\sin 270°=-1$; როცა $\alpha=360°$, რადიუს-ვექტორი აკეთებს რა ერთ სრულ ბრუნს, კვლავ საწყის მდებარეობაშია, ამიტომ $\cos 360°=1$, $\sin 360°=0$.



ნახ. 103.



ნახ. 104.

თუ ვიცით სინუსისა და კოსინუსის მნიშვნელობანი, შეგვიძლია გავიგოთ ტანგენსის და კოტანგენსის მნიშვნელობები:

$$\operatorname{tg} 0°=\frac{\sin 0°}{\cos 0°}=\frac{0}{1}=0.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\frac{\sin 90°}{\cos 90°}=\frac{1}{0} \text{ (არ არსებობს).}$$

მართლაც 104-ე ნახაზი გვიჩვენებს, რომ, როცა $\alpha\to 90$, მაშინ $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორი ტანგენსების წრფის, (AT) პარალელური ხდება, ამიტომ წერენ, როცა $\alpha\to 90$, მაშინ $\operatorname{tg}\alpha\to\infty$,

$$\operatorname{tg}\pi=\frac{\sin 180°}{\cos 180°}=\frac{0}{-1}=0.$$

$$\operatorname{tg} 270°=\frac{\sin 270°}{\cos 270°}=\frac{-1}{0} \text{ (არ არსებობს).}$$

ამიტომ წერენ: $\operatorname{tg} 270°=-\infty$.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო:

გამოიანგარიშეთ:

1. $\sin 0° - 5\cos 0° + 7\,\mathrm{tg}\,0°$.

2. $\sin\frac{\pi}{2} - 6\cos\frac{\pi}{2} + 3\,\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2} + 5\,\mathrm{cosec}\,0$.

3. $\sin\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} - \mathrm{ctg}\,2\pi$.

4. $\frac{1}{2}\sin\pi - \sqrt{3}\cos\pi + \frac{1+\mathrm{tg}\,\pi}{1-\mathrm{tg}\,\pi}$

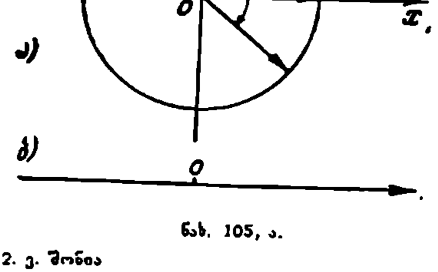
§ ııს. არგუმენტის დასაშვები მნიშვნელობები ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებში

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა განსაზღვრის დროს, როგორც ვნახეთ, არგუმენტად აიღება კუთხე ან რკალი, მაგრამ თუ კუთხე ან რკალი გაზომილია რადიანებში, მაშინ მოხერხებულია არგუმენტად ჩავთვალოთ არა თვით კუთხე ან რკალი, არამედ რადიანებში მისი სიდიდის გამომსახველი რიცხვი. ასე მაგალითად, $\sin 1$ ნიშნავს იმ კუთხის ან რკალის სინუსს, რომლის სიდიდე არის 1 რადიანი, ასევე, $\cos 7$ არის იმ კუთხის ან რკალის კოსინუსი, რომლის რადიანული ზომა 7-ის ტოლია და ა. შ.

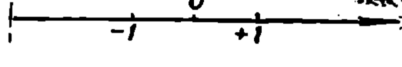
ალგებრიდან ცნობილია ფუნქციის ცნება, აგრეთვე, ფუნქციის განსაზღვრის და ცვლილების არეები. კერძოდ, **არგუმენტის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს** ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება. ამ პარაგრაფში შევისწავლით ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა განსაზღვრის არეებს, ე. ი. არგუმენტის დასაშვებ მნიშვნელობებს.

ა) სინუსისა და კოსინუსის განსაზღვრის არეები

ავიღოთ ერთეულოვანი წრეწირი (ნახ. 115, ა). (1, 0) საწყისი წერტილიდან შეიძლება $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორით აღვწეროთ როგორც დადებითი ისე უარყოფითი α კუთხე, რომლის რადიანული ზომა ნებისმიერი a რიცხვით გამოისახება. მასთან, $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორის ბოლო M წერტილის x და y კოორდინატები გამოსახავს $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$ ფუნქციათა მნიშვნელობებს. ვინაიდან a შეიძლება იყოს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი. ამიტომ $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$ ფუნქციათა განსაზღვრის არე იქნება ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე ანუ $(-\infty, +\infty)$ შუალედი; გეომეტრიულად $\sin\alpha$ და



ნახ. 105, ა.



ნახ. 105, ბ.

cos α ფუნქციათა განსაზღვრის არე გამოისახება მთელი რიცხვითი ღერძით. (ნახ. 105, ბ).

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ sin α და cos α ფუნქციათა ცვლილების ანუ არსებობის არეს წარმოადგენს [—1; +1] სეგმენტი ანუ მონაკვეთი. (ნახ. 105, გ.)

დასკვნა: როცა α არგუმენტს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვის მნიშვნელობა, მაშინ sin α და cos α ფუნქციები იღებს —1 და +1—ის შორის არსებულ ყველა მნიშვნელობას.

ბ) ტანგენსის განსაზღვრის არე.

tgα ფუნქციას გააჩნია სასრული მნიშვნელობა ნებისმიერი კუთხის ან რკალისათვის, გარდა იმ კუთხეების (ან რკალებისა) მნიშვნელობებისა, რომლებიც იზომებიან $\frac{\pi}{2}+k\pi$ რიცხვებით, სადაც $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

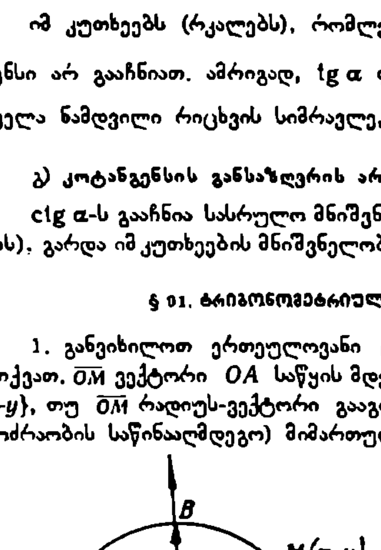
იმ კუთხეებს (რკალებს), რომლებიც იზომებიან $\frac{\pi}{2}+k\pi$ რიცხვებით, ტანგენსი არ გააჩნიათ. ამრიგად, tg α ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, $\frac{\pi}{2}+k\pi$ სახის რიცხვების გამოკლებით.

გ) კოტანგენსის განსაზღვრის არე

ctg α-ს გააჩნია სასრული მნიშვნელობა ნებისმიერი კუთხეების (რკალებისათვის), გარდა იმ კუთხეების მნიშვნელობებისა, რომლებიც იზომებიან $k\pi$ რიცხვებით.

§ 91. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა პერიოდულობა

1. განვიხილოთ ერთეულოვანი ტრიგონომეტრიული წრეწირი, (ნახ. 106). ვთქვათ, $\overline{OM}$ ვექტორი OA საწყის მდებარეობასთან ადგენს φ კუთხეს; $\overline{OM}=\{x—y\}$, თუ $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორი გააგრძელებს ბრუნვას დადებითი (საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო) მიმართულებით და დაუბრუნდება $\overline{OM}$-ის მდებარეობას, მაშინ მას აღწერილი ექნება φ = 360°-იანი კუთხე. ვინაიდან, $\overline{OM}$ ვექტორმა კვლავ დაიკავა თავისი პირვანდელი მდებარეობა, ამიტომ მისი M წერტილის კოორდინატები x და y არ შეიცვლება და გვექნება:



ნახ. 106.

$$y=\sin\varphi=\sin(\varphi+360^\circ),$$
$$x=\cos\varphi=\cos(\varphi+360^\circ).$$

ეს უკანასკნელი გვიჩვენებს, რომ sinφ და cos φ ფუნქციათა მნიშვნელობები უცვლელი რჩება, თუ φ არგუმენტს დავუმატებთ 360°-ს.

ახლა თუ $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორი შეასრულებს n ბრუნს დადებითი მიმართულებით, მაშინ მივიღებთ $\varphi+n\cdot 360^\circ$ კუთხეს, ხოლო, თუ $\overline{OM}$ შეასრულებს n ბრუნს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით (უარყოფითი მიმართულება) მა-

შინ მივიღებთ $-\varphi-n\cdot360°$ კუთხეს. თითოეულ ამ შემთხვევაში M წერტილის x და y კოორდინატები უცვლელი რჩება და ამიტომ $\sin\varphi$ და $\cos\varphi$ არ განიცდის ცვლილებას.

მაშასადამე,

$$\sin\varphi=\sin(\varphi+n\cdot360°),$$
$$\cos\varphi=\cos(\varphi+n\cdot360°), \qquad (1)$$

სადაც n ნებისმიერი მთელი რიცხვია, დადებითი ან უარყოფითი. (1) თანაფარდობა გვიჩვენებს, რომ კუთხეები:

$$\pm360°;\ \pm720°,\ \pm1080°,\dots\ (n=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \dots)$$

წარმოადგენს $\sin\varphi$ და $\cos\varphi$ ფუნქციათა პერიოდებს.

განსაზღვრა. თუ φ არგუმენტის ნებისმიერი დასაშვები მნიშვნელობისათვის $f(\varphi+T)=f(\varphi)$, სადაც T ნულისაგან განსხვავებული რომელიმე რიცხვია, მაშინ $f(\varphi)$ ფუნქციას პერიოდული ფუნქცია ეწოდება, ხოლო T რიცხვს მისი პერიოდი. ეს უკანასკნელი განსაზღვრა გვიჩვენებს, რომ $\sin\varphi$ და $\cos\varphi$ პერიოდულ ფუნქციებს წარმოადგენს, $T=360°$ პერიოდით.

მაშასადამე, პერიოდულ $\sin\varphi$ და $\cos\varphi$ ფუნქციებს გააჩნიათ პერიოდთა უსასრულო სიმრავლე.

როდესაც ფუნქციათა პერიოდზეა ლაპარაკი, ყოველთვის პერიოდად ვირჩევთ პერიოდთა შორის უმცირესს. როგორც ვხედავთ, კოსინუსისათვის და სინუსისათვის უმცირეს დადებით პერიოდს წარმოადგენს 360°.

ბუნებრივად იბადება კითხვა, ხომ არ არსებობს ამ ფუნქციებისათვის 360°-ზე უფრო ნაკლები პერიოდი?

ამ საკითხის გარკვევის მიზნით, ვთქვათ, $\sin x$ ფუნქციის უმცირესი პერიოდია T, მაშინ ნებისმიერი φ კუთხისათვის გვექნება:

$$\sin(\varphi+T)=\sin\varphi$$

და, როცა $\varphi=0$, მივიღებთ

$$\sin(0+T)=\sin0°,$$
$$\sin T=\sin0°=0.$$

მაგრამ, როგორც ვიცით 0°-ს უდრის იმ დადებითი კუთხის სინუსები, რომლებიც 180°-ის ჯერადია, ასეთი კუთხეებია 180°, 360°, 540° და ა. შ. ამ მსჯელობიდან ვასკვნით, რომ 180°-იანი კუთხე წარმოადგენს ერთ-ერთ „მეტოქეს". ახლა საინტერესოა, შეადგენს თუ არა 180°-იანი კუთხე სინუსის პერიოდს?

180°-იანი კუთხე რომ წარმოადგენდეს $\sin\varphi$ ფუნქციის პერიოდს, მაშინ φ ყოველი მნიშვნელობისათვის უნდა შესრულდეს ტოლობა:

$$\sin(\varphi+180°)=\sin\varphi.$$

მაგრამ ეს ასე არ ხდება, მართლაც, სადაც $\varphi=90°$-ს, მაშინ მივიღებთ

$$\sin(90°+180°)=\sin90°.$$

ანუ

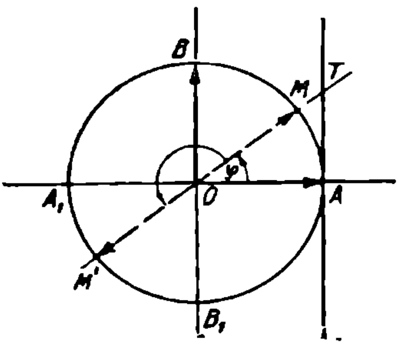
$$\sin270°=\sin90°.$$

როგორც ვიცით, $\sin 270° = -1$, ხოლო $\sin 90° = 1$, ამიტომ 180°-იანი კუთხე არ შეიძლება იყოს $\sin \varphi$ ფუნქციის პერიოდი.

ამით დამტკიცდა, რომ სინუსის უმცირესი პერიოდი არის 360°. სრულიად ანალოგიური მსჯელობით შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ კოსინუსის უმცირესი დადებითი პერიოდი არის 360°-იანი კუთხე.

2) $\operatorname{tg} \varphi$ და $\operatorname{ctg} \varphi$ ფუნქციების პერიოდულობა. განვიხილოთ ერთეულოვანი წრეწირის $\overline{MO}$ რადიუს-ვექტორი, რომელიც OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან φ კუთხეს ადგენს (ნახ. 107).

ცხადია, $\operatorname{tg} \varphi = AT$. ახლა, თუ $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორს მოვაბრუნებთ 180°-ით, მაშინ $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორი აღმოჩნდება $\overline{OM_1}$ მდებარეობაში. $\overline{OM'}$ ვექტორის მიმართულება $\overline{OM}$ ვექტორის მიმართულების საწინააღმდეგოა, მაგრამ ტანგენსების ღერძზე მისი შესაბამისი T წერტილი უცვლელი დარჩება, ამიტომ არც $\varphi + 180°$ კუთხის ტანგენსი შეიცვლება.



ნახ. 107.

მაშასადამე, ნებისმიერი φ-სათვის გვექნება: $\operatorname{tg}(\varphi + 180°) = \operatorname{tg} \varphi$.

ამრიგად, ფუნქცია ტანგენსი არის პერიოდული ფუნქცია, პერიოდით 180°. წინა პარაგრაფის მსგავსად შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ 180° იქნება ტანგენსის და კოტანგენსის უმცირესი პერიოდი.

სავარჯიშო

დაამტკიცეთ:

1. $\sin 740° = \sin 20°$;
2. $\cos 54° = \cos(-1026°;)$

3. მოცემული გამოსახულებანი გარდაქმენით ისე, რომ მათში შემავალი კუთხეები იყოს დადებითი და არ აღემატებოდეს 360°-ს:

ა) $\sin 820°$, $\cos(7363°)$, $\sin(-600°)$;

4. მოცემული გამოსახულებანი გარდაქმენით ისე, რომ მათში შემავალი კუთხეები აბსოლუტური სიდიდით არ აღემატებოდეს 180°-ს.

ა) $\cos 729°$, $\sin 1268°$, $\sin(-535°)$, $\cos(1001°)$;

5) მოცემული გამოსახულებანი გარდაქმენით ისე, რომ მასში შემავალი კუთხეები იყოს დადებითი და არ აღემატებოდეს 180°-ს:

$$\operatorname{tg} 205°,\ \operatorname{tg}(-185°),\ \operatorname{ctg} 300°,\ \operatorname{ctg}(-210°);$$

6. მოცემული გამოსახულებანი, გარდაქმენით ისე, რომ მათში შემავალი კუთხეები აბსოლუტური სიდიდით არ აღემატებოდეს 90°-ს.

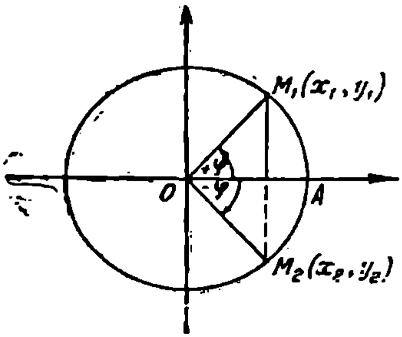
$$\operatorname{tg} 375°,\ \operatorname{ctg}(-93°),\ \operatorname{ctg} 530°.$$

§ 82. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ლუწობა და კენტობა

განვიხილოთ ერთეულოვანი წრეწირი და მასთან მოძრავი რადიუს-ვექტორი $\overline{OM_1}$, რომელიც ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან φ კუთხეს ადგენს. ახლა, თუ $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორს მოვაბრუნებთ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით

OA საწყისი მდებარეობიდან, მაშინ $\overline{OM_1}$ ვექტორი, შემოწერს რა φ კუთხეს, მიიღებს $\overline{OM_2}$-ის მდებარეობას (ნახ. 108).

ვექტორები $\overline{OM_1}=\{x_1, y_1\}$ და $\overline{OM_2}=\{x_2, y_2\}$,



ნახ. 108.

მასთან, $x_1=x_2$ და $y_1=-y_2$,

საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს:

$$\cos(-\varphi)=\cos\varphi,$$

$$\sin(-\varphi)=-\sin\varphi.$$

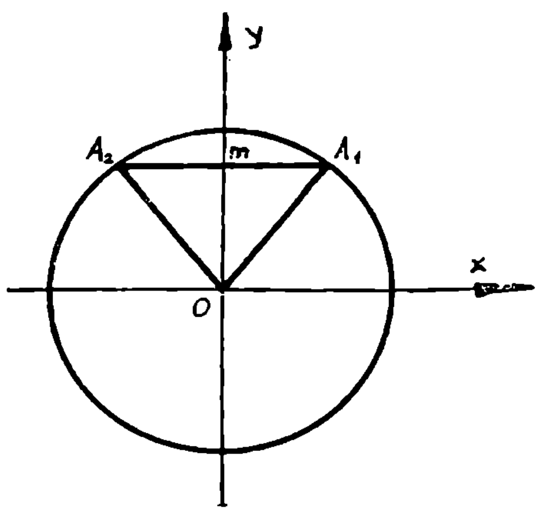
როგორც ვხედავთ, **სინუსი კუთხის კენტი ფუნქციაა, ხოლო კოსინუსი — ლუწი.**

დ ა ვ ა ლ ე ბ ა. დაადგინეთ დანარჩენ ფუნქციათა ლუწობისა და კენტობის საკითხი.

§ [illegible]. კუთხის აგება მისი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მოცემული მნიშვნელობის მიხედვით

ამოცანა 1. ავაგოთ α კუთხე, რომლის სინუსი უდრის m-ს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ $|m|>1$, მაშინ ასეთი კუთხის აგება შეუძლებელია, ვინაიდან იგი არ არსებობს. თუკი $|m|\leqslant 1$, მაშინ ვიქცევით შემდეგნაირად: ვიღებთ ერთეულოვან წრეწირს, OY ღერძზე ავაგებთ M წერტილს, რომლის ორდინატი უდრის m-ს (ნახ. 109, ა).

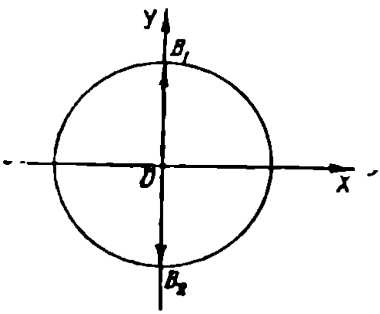


ნახ. 109, ა.

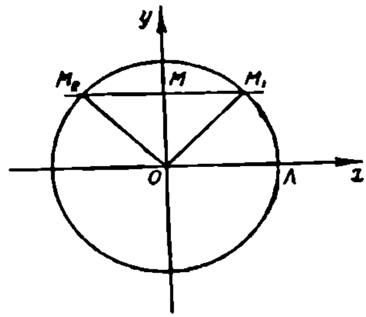
M წერტილზე გავატარებთ OX ღერძის პარალელურ წრფეს. ამ წრფის წრეწირთან გადაკვეთის წერტილები იყოს A_1 და A_2. ცხადია, OA_1 და OA_2 ვექტორების სი-

გრძედები ერთეულის, ხოლო მათი ორდინატები m-ის ტოლია. ყოველ α კუთხეს, რომლისთვისაც $\overline{OA_1}$ და $\overline{OA_2}$ საბოლოო გვერდს წარმოადგენს, ექნება m-ის ტოლი სინუსი: $\sin\alpha=m$. თუ $m=\pm1$, მაშინ α კუთხის საბოლოო გვერდისათვის შესაძლებელია ერთი მდებარეობა: OB_1, როცა $m=1$, და OB_2, როცა $m=-1$ (ნახ. 108, ბ).

როდესაც $m=+1$, მაშინ ყველა იმ კუთხეთა სიმრავლე, რომელთა სინუსი 1-ის ტოლია, გამოისახება შემდეგნაირად: $\alpha=90°+360°n$ ანუ $\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi n$. თუ $m=-1$, მაშინ $\alpha=-90°+360°n$ ანუ $\alpha=-\frac{\pi}{2}+\pi n$ ყველა იმ კუთხიდან (რკალიდან), რომელთა სინუსი უდრის m-ს, სადაც $|m|\leqslant 1$, მთავარ კუთხედ ითვლება უმცირესი თავისი აბსოლუტური მნიშვნელობით. ეს კუთხე მოთავსებულია $-\frac{\pi}{2}$-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე შუალედში (მარჯვენა ნახევარსიბრტყე) და იგი აღინიშნება ასე: $\alpha_0=\text{arc}\sin m$. *



ნახ. 109, ბ.



ნახ. 109, გ.

განსაზღვრა.

მთავარი კუთხე (რკალი) $\text{arcsin}\, m$ არის ის კუთხე (რკალი), მოთავსებული $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედებში, რომლის სინუსი უდრის m-ს.

მაგალითი 1. ავაგოთ კუთხე, რომლის სინუსი არის $\frac{1}{2}$.

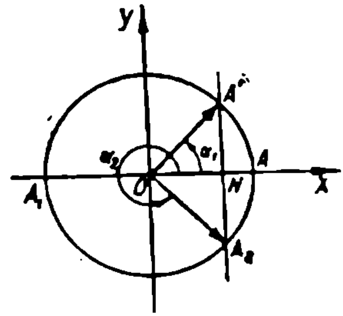
ამოხსნა: ვაგებთ M წერტილს, რომლის ორდინატი უდრის $\frac{1}{2}$-ს. ვავლებთ M წერტილზე აბსცისათა ღერძის პარალელურ წრფეს, ამ წრფის წრეწირთა გადაკვეთის წერტილებს ვაერთებთ O წერტილთან, მივიღებთ $\alpha_1=30°$ და $\alpha_2=150°$, ასე რომ, საძებნი კუთხე $\alpha=360°\cdot n+30°$ და $360°\cdot n+180°-30°=180°(2n+1)-30°$, ე. ი. $\text{arc}\sin\frac{1}{2}=30°$

* arc ლათინური სიტყვის arcus-ის (რკალი) პირველი სამი ასოა. იკითხება „არკუს სინუს m", ე. ი. კუთხე ან რკალი, რომლის სინუსი m-ს ეტოლება.

ამოცანა 2. ავაგოთ α კუთხე, რომლის კოსინუსი უდრის m-ს.

ამოხსნა. პირველი ამოცანის მსგავსად, საჭირო აგება შეიძლება შევასრულოთ მაშინ, როცა $|m| \leqslant 1$. OX ღერძზე ვიღებთ N წერტილს, რომლის აბსცისა $x=m$, და გავატარებთ მასზე OY ღერძის პარალელურ წრფეს.

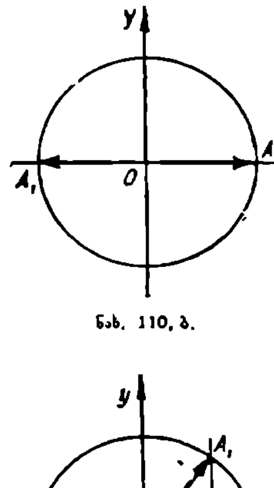
OY ღერძის პარალელური წრფე ერთეულოვან წრეწირს გადაკვეთს ორ სხვადასხვა წერტილში, რომელთაგან ერთი A_1 ძევს ზედა ნახევარწრეწირზე, მეორე A_2 კი ქვედაზე. ყველა α კუთხეს, რომლებისთვისაც $\overline{OA_1}$ და $\overline{OA_2}$ რადიუს-ვექტორები წარმოადგენს საბოლოო გვერდს, ექნება m-ის ტოლი კოსინუსი:



ნახ. 110, ა.

$$\cos \alpha = m.$$

თუ $m=\pm 1$, მაშინ $N(m, 0)$ წერტილი მდებარეობს ჰორიზონტალური დიამეტრის ერთ-ერთ ბოლოში, ორდინატთა ღერძის პარალელური წრფე კი ეხება ერთეულოვან წრეწირს. ამ შემთხვევაში ასაგები კუთხის საბოლოო გვერდისათვის შესაძლებელია მხოლოდ ერთი მდებარეობა: OA, როცა $m=1$, და OA_1, როცა $m=-1$. (ნახ. 110, ბ). როცა $m=+1$, მაშინ ყველა იმ კუთხეთა სიმრავლე, რომელთა კოსინუსი m-ის ტოლია, გამოისახება ასე:



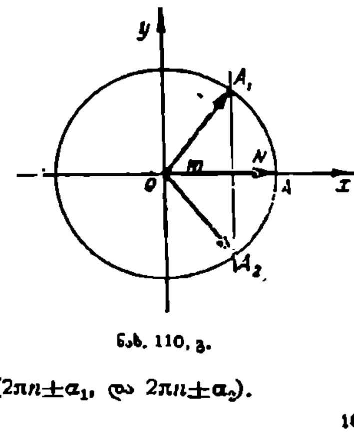
ნახ. 110, ბ.

$$\alpha=360^\circ \cdot n \text{ ან } \alpha=2\pi \cdot n$$

ხოლო, როცა $m=-1$, $\alpha=360^\circ \cdot n+180^\circ$ ან

$$\alpha=2\pi n+\pi=(2n+1)\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2 \ldots).$$

მაგალითი. ავაგოთ α კუთხე, თუ $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. ერთეულოვანი წრეწირის რადიუსს ვყოფთ 3 ტოლ ნაწილად 0-წერტილთან, $\frac{2}{3}$-ის ტოლ მანძილზე (N წერტილზე) ვატარებთ OY-ის პარალელურ წრფეს, რომელიც წრეწირს გადაჰკვეთს ორ A_1 და A_2 წერტილებში (ნახ. 110, გ).



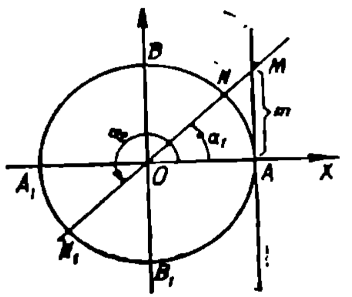
ნახ. 110, გ.

$\overline{OA_1}$ და $\overline{OA_2}$ წარმოადგენს ასაგები კუთხის საბოლოო გვერდებს. ამოცანას ექნება ორი α_1 და α_2 ამონახსნები, რომლებიც I და IV მეოთხედში ბოლოვდებიან:

$$x=360^\circ \cdot n \pm \alpha_1 \quad \text{და} \quad x=360^\circ \cdot n \pm \alpha_2 \quad (2\pi n \pm \alpha_1, \text{ და } 2\pi n \pm \alpha_2).$$

ამოცანა 8. ავაგოთ α კუთხე, რომლის ტანგენსი m-ის ტოლია.

ა მ ო ხ ს ნ ა: ავაგოთ ტანგენსების ღერძზე $M(1, m)$ წერტილი (ნახ. 110, გ). წრფე, რომელიც M წერტილს კოორდინატთა სათავესთან აერთებს, ერთეულოვან წრეწირს კვეთს ორ დიამეტრულად საწინააღმდეგო N და M წერტილებში. $\overline{ON}$ და $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორები ასაგები კუთხის საბოლოო გვერდის ორ სხვა და სხვა მდებარეობას გამოსახავს. ასე რომ, საძებნი კუთხე იქნება

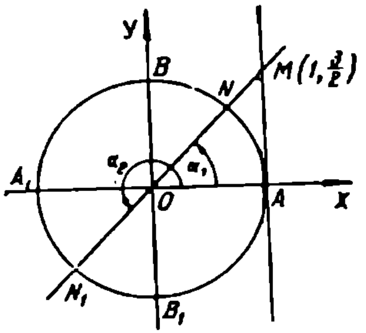


ნახ. 111.

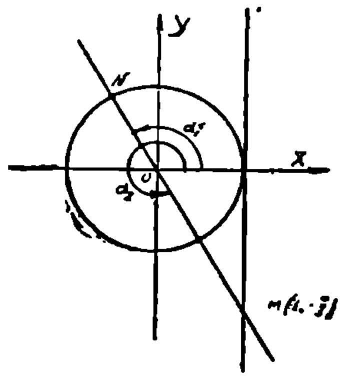
$$\alpha_1 = AOM \text{ და } \alpha_2 = A_1ON_1$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5 = \frac{3}{2}$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ტანგენსების ღერძზე აღვნიშნავთ $M\left(1; \frac{3}{2}\right)$ წერტილს. (ნახ. 111). M წერტილის O ცენტრთან შემაერთებელი წრფე წრეწირს კვეთს N და N_1 წერტილებში. მივიღებთ α_1 და α_2 კუთხეებს.



ნახ. 112, ა.



ნახ. 112, ბ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ტანგენსების ღერძზე ვაგებთ წერტილს $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ (ნახ. 112, ა).

საძებნი კუთხეები იქნება:

$$\alpha_1 = AON \text{ და } \alpha_2 = AOM_1.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა მოცემული კოტანგენსით, სეკანსით და კოსეკანსით კუთხის აგება შეიძლება შევცვალოთ ტანგენსით, კოსინუსით და სინუსით კუთხის აგებაზე.

ასე მაგალითად, თუ $\sec\alpha=2$, მაშინ $\frac{1}{\cos\alpha}=2$ და $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, ამის აგება უკვე ცნობილია.

მოსწავლეებს ევალებათ ააგონ ასევე $\operatorname{cosec}\alpha=3$ და $\operatorname{ctg}\alpha=5$.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

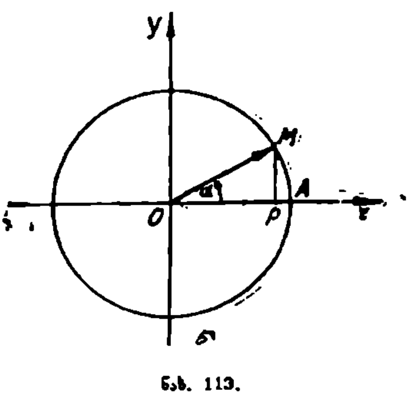
ააგეთ α კუთხე შემდეგი მონაცემების მიხედვით:

1. $\sin\alpha=\frac{2}{3}$;
2. $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$;
3. $\sin\alpha=-1$;
4. $\cos\alpha=\frac{3}{5}$;
5. $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$;
6. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{3}$;
7. $\operatorname{tg}\alpha=-2$;
8. $\operatorname{ctg}\alpha=-3$;
9. $\sec\alpha=\frac{3}{2}$;
10. $\operatorname{cosec}\alpha=-2$.

ახლა ვთქვათ, $\alpha=30°\left(\frac{\pi}{6}\right)$, მაშინ ერთეულოვანი წრეწირის $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორი OX ღერძთან ქმნის $30°$-იან კუთხეს, $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორის ორივე კოორდინატი დადებითია და წარმოადგენს მართკუთხა OPM სამკუთხედის კათეტებს, რომლის ჰიპოტენუზა $r=1$ (ნახ. 113). გვაქვს $OP^2+MA^2=OM^2$ ანუ $x^2+y^2=1$, მაგრამ $MP=\frac{OP}{2}$ (30°-იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი უდრის ჰიპოტენუზის ნახევარს):

$$y=\frac{1}{2} \text{ და } x=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2};$$



ნახ. 113.

მაშასადამე,

$$\sin 30°=\frac{1}{2},\ \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg}30°=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \operatorname{ctg}30°=\sqrt{3}.$$

სავალდებულოა ზეპირად ვიცოდეთ 0°, 30°, 45°; 60°; 90°; 180°; 270°; 360°-იანი კუთხეთა ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მნიშვნელობები. შევადგინოთ მათი მნიშვნელობათა ცხრილი:

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	არ არსებობს	0	არ არსებობს	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	არ არსებობს	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	არ არსებობს	0	არ არსებობს

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. გამოიანგარიშეთ:

1. $2\sin 30° + 3\cos 30° - 2\operatorname{tg} 30° - 4\operatorname{ctg} 30° + \sec 30° - \operatorname{coses} 30°$;

პას. $-\frac{2+5\sqrt{3}}{2}$.

2. $5\sin 45° + 2\cos 45° + 3\operatorname{ctg} 45° - 10\operatorname{ctg} 45° - 4\sec 45° - 7\operatorname{cosec} 45°$;

პას. $\frac{-14+15\sqrt{2}}{2}$

3. $\sin 60 + \cos 60° - \operatorname{tg} 60° - \operatorname{ctg} 60° + \sec 60° - \operatorname{cosec} 60°$;

პას. $\frac{5-3\sqrt{3}}{2}$.

4. $3\sin 0° - 5\cos 0° + 7\operatorname{tg} 0° + \sec 0°$; პას. -4.

5. $\sin 90° - 6\cos 90° + 3\operatorname{ctg} 0° + 5\operatorname{cosec} 0°$; პას. არაა განსაზღვრული.

6. $\sin 270° + \cos 270° - \operatorname{ctg} 270°$; პას. -1.

$\frac{1}{2}\sin 180° - \sqrt{3}\cos 180° + \frac{1+\operatorname{tg} 180°}{1-\operatorname{tg} 180°} + \sec 180°$; პას. $\sqrt{3}$.

8. $\frac{\sin 45° \cdot 6\cos 0° - \cos(-45°) \cdot \sin(-60°)}{\operatorname{tg}^2 30° - \sin^2 90° \cdot \cos^2 270°}$ პას. $\frac{3}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

§ 64. კუთხეთა ზოგადი გამოსახულებები

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1 $\sin x = \frac{1}{2}$

ცხადია, ერთ-ერთი კუთხე, რომლის სინუსი არის $\frac{1}{2}$, არის $30°$, მეორე კი $150°$. რადგანაც ფუნქცია სინუსი არის პერიოდული ფუნქცია, პერიოდით 2π, ამიტომ სხვა ამონახსნების მისაღებად ამ ორ კუთხეს უნდა დაემატოს $360°n$, სადაც n ნებისმიერი მთელი დადებითი ან უარყოფითი რიცხვია.

ამრიგად გვექნება:

$$x = \begin{cases} 350^\circ \cdot n + 30^\circ, \\ 360^\circ \cdot n + 150^\circ. \end{cases}$$

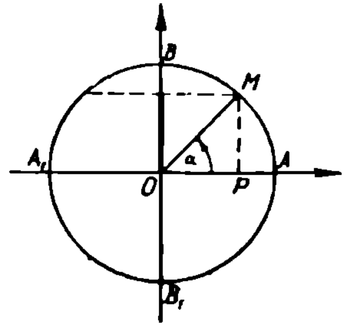
მოვახდინოთ შემდეგი სახის გარდაქმნა:

1. $360^\circ n + 30^\circ = 180^\circ \cdot 2n + 30^\circ$;

2. $360^\circ \cdot n + 150^\circ = 180^\circ \cdot 2n + 180 - 30^\circ = 180^\circ(2n+1) - 30^\circ$;

ამიტომ

$$x = \begin{cases} 180^\circ \cdot (2n + 30^\circ), \\ 180^\circ (2n+1) - 30^\circ. \end{cases}$$



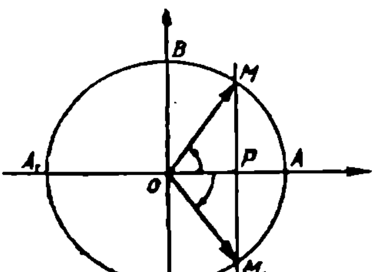
ნახ. 114.

x-ის მნიშვნელობა შეიძლება ზოგადი სახით ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$x = 180^\circ k + (-1)^k \alpha \quad (x = k\pi + (-1)^k \alpha)\ ^*$$

როცა $k=2n$, მივიღებთ $x=180^\circ \cdot 2n+30^\circ$, ხოლო როცა $k=2n+1$, გვექნება $x=180^\circ(2k+1)-30^\circ$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ავაგოთ კუთხე, რომლის კოსინუსი არის $\frac{1}{2}$, ე. ი. $\cos x = \frac{1}{2}$.



ნახ. 115.

ცხადია, $x_1=60^\circ$, $x_2=-60^\circ$.

თუ მივიღებთ მხედველობაში კოსინუსის პერიოდულობას, გვექნება:

$$x = \begin{cases} 360^\circ \cdot n + 60^\circ, \\ 360 \cdot n - 60^\circ. \end{cases}$$

ანუ $x=360^\circ \cdot n \pm 60^\circ$ ანუ $x=2\pi n \pm 60^\circ$.

თუკი $\cos x = k$ და მისი ერთ—ერთი ამონახსნი იქნება α, მივიღებთ

$$x=360^\circ n \pm \alpha \quad \text{ანუ} \quad x = 2\pi n \pm \alpha\ ^{**}$$
$$(n=0, \pm 1, \pm 2; \ldots).$$

3. ავიღოთ: $\operatorname{tg} x = 1$.

ცხადია, $x_1=45^\circ$, მაგრამ, რადგან $\operatorname{tg} x$ პერიოდული ფუნქციაა პერიოდით 180°, ამიტომ $x_2=180^\circ+45^\circ$.

ყველა კუთხის ზოგადი გამოსახულება, რომელთა ტანგენსი 1-ის ტოლია, დაიწერება შემდეგნაირად:

$$x=180^\circ n+45^\circ \text{ ან } x=\pi n+45^\circ;$$

ზოგადად $x=\pi n+\alpha$.

მიღებული ფორმულა წარმოადგენს კუთხეთა ზოგად გამოსახულებას ტანგენსისათვის.

---

* მიღებულ ფორმულას ეწოდება კუთხეთა ზოგადი გამოსახულება სინუსისათვის.

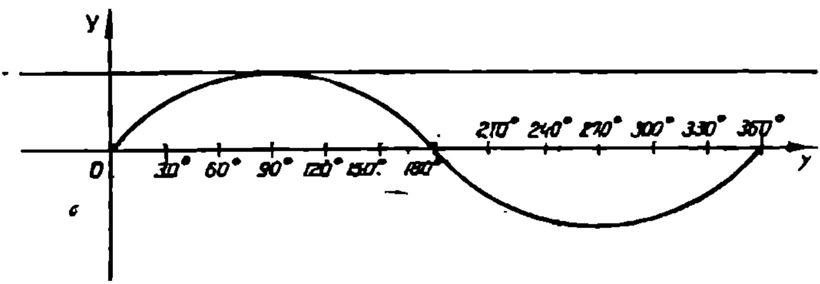
** ფორმულას ეწოდება კუთხეთა ზოგადი გამოსახულება ფუნქცია კოსინუსისათვის.

1. ფუნქცია $y=\sin x$-ის გრაფიკის აგება შეიძლება ორნაირი ხერხით:

ა) $\sin x$ ფუნქციის ნატურალური მნიშვნელობათა ტაბულის გამოყენებით შევადგენთ ცხრილს, სადაც აღნიშნული იქნება არგუმენტებისა და შესაბამის ფუნქციათა მნიშვნელობანი 0-დან 360°-მდე. იხ. ცხრილი

	ფუნქციის მნიშვნელობა												
გრადუსები	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
რადიანები	0,0	0,5	1,0	1,6	2,1	2,6	3,1	3,7	4,1	4,7	5,2	5,2	6,3
ფუნქც. მნიშ.	0,0	0,5	0,9	1,0	0,9	0,5	0,0	−0,5	−0,9	−1,0	−0,9	−0,5	

ვიღებთ კოორდინატთა მართკუთხა სისტემას აბსცისათა (OX) ღერძზე რაიმე მასშტაბით. გადავზომავთ მასზე არგუმენტის მნიშვნელობებს, ორდინატთა (OY) ღერძზე კი — ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობებს და ამ წესით ავაგებთ წერტილებს. წერტილები დალაგდებიან გარკვეულ მრუდზე (ნახ. 116). მიღებული მრუდი წარმოადგენს $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკს. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ არაა სავალდებულო ox და oy ღერძებზე მონაკვეთების გადაზომვისას ერთნაირი მასშტაბი გვქონდეს.



ნახ. 116.

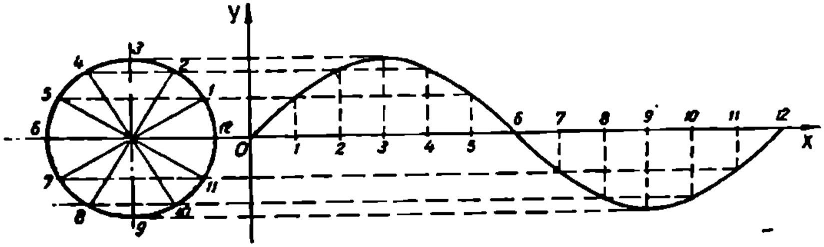
ბ) OX ღერძის ნებისმიერ წერტილზე, როგორც ცენტრიდან, ერთეულის ტოლი რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირი, დავყოთ ეს წრეწირი რამდენიმე ტოლ ნაწილად (აღებულ მაგალითებში 12 ნაწილად). დაყოფის წერტილები გადავნომროთ ისე, როგორც ეს 117-ე ნახაზზეა მოცემული.

ამ შემთხვევაში დაყოფის შედეგად მიღებული რკალი ეტოლება 30°-ს $\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

0 წერტილიდან მარჯვნივ გადავზომოთ 30°-იანი რკალის სიგრძის მონაკვეთები, მაშინ, ცხადია, OA მონაკვეთი გამოსახავს აღებული წრეწირის სიგრძეს.

0 წერტილიდან A წერტილისაკენ გადაზომილი გვაქვს არგუმენტის მნიშვნელობები, რომელთა შესაბამისი სინუსის მნიშვნელობები გამოისახება მონაკვეთე-

ბით: 0, 1, 2, 3 და ა. შ. მაშასადამე, ox ღერძისა და წრეწირის დაყოფის შესაბამისი წერტილებიდან კოორდინატთა ღერძებისადმი გავლებული პარალელური წრფეების გადაკვეთის წერტილები იქნება $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილები, რომელთა შეერთება გვაძლევს მრუდს. ეს მრუდი წარმოადგენს $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკს. 116-ე და 117-ე ნახაზებზე მოცემულია სინუსის გრაფიკის ის ნაწილი, რომელიც შეესაბამება არგუმენტის ცვლილებას 0-დან 360°-მდე, (0- და 2π-მდე).



ნახ. 117.

რაც შეეხება გრაფიკის სხვა ნაწილებს, მათი აგება არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს. მართლაც, ცნობილია, რომ ფუნქცია სინუსი პერიოდული ფუნქციაა პერიოდით 2π. ამიტომ არგუმენტის ცვლილებას 2π-დან 4π-მდე შეესაბამება ისეთივე მრუდი, როგორც მივიღეთ არგუმენტის ცვლილებისას 0-დან 2π-მდე. გრაფიკის სხვა ნაწილების აგებისათვის საკმარისია მიღებული მრუდი oy ღერძთან ლეკალოს საშუალებით გადავანაცვლოთ მარჯვნივ. 2π, 4π, 6π და ა. შ. მანძილებით. ამით მივიღებთ $y=\sin x$ ფუნქციის ცვლილების გრაფიკს. ამ მრუდს სინუსოიდი ეწოდება. მიღებული გრაფიკის მიხედვით ადვილად შეიძლება დავადგინოთ $y=\sin x$ ფუნქციის თვისებები:

1. $y=\sin x$ ფუნქცია განსაზღვრულია x არგუმენტის ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის, ანუ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე.

2. $y=\sin x$ ფუნქციის ყველა მნიშვნელობის სიმრავლე ავსებს $[-1,1]$ სეგმენტს, ანუ $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$.

3. $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, ე. ი. ფუნქცია კენტია, $\sin(-x)=-\sin x$.

4. $y=\sin x$ ფუნქცია $\left(-\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში იზრდება -1-დან $+1$-მდე, $\left(\frac{\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2}\right)$ შუალედში კი კლებულობს 1-დან -1-მდე.

5. $y=\sin x$ ფუნქცია აღწევს თავის უდიდეს მნიშვნელობას $(+1)$, როცა $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, სადაც $k=0, \pm 1, \pm 2\ldots$ ხოლო აღწევს უმცირეს მნიშვნელობას (-1), როცა $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2\ldots)$.

6. $y=\sin x$ ფუნქცია ხდება 0, როცა $x=k\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2...$).

7. $y=\sin x$ ფუნქცია უწყვეტი ფუნქციაა, რაც გრაფიკზე ნათლად ჩანს (სინუსოიდი არსად განიცდის წყვეტას).

2). $y=\cos$ ფუნქციის გრაფიკი

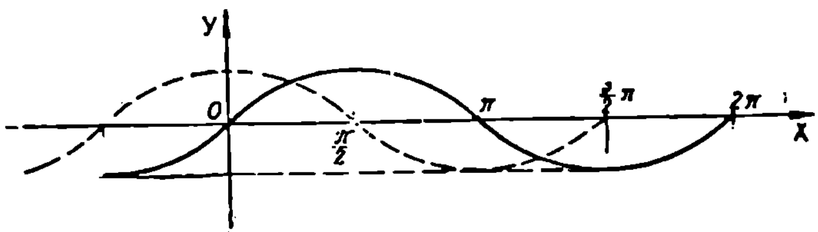
თუ ცნობილია $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი, მაშინ

$$\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

ფორმულის გამოყენებით ადვილად შეგვიძლია მივიღოთ $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამრიგად, კოსინუსის გრაფიკის ასაგებად საკმარისია, სინუსის გრაფიკი გადავწიოთ ox ღერძის გასწვრივ, $\frac{\pi}{2}$ მანძილით მარცხნივ, ე. ი. კოსინუსის გრაფიკი არსებითად არის სინუსის გრაფიკი. (ნახ. 118). ამ მრუდს კოსინუსოიდი ეწოდება.

$y=\cos x$ ფუნციის გრაფიკიდან ნათლად ჩანს ამ ფუნქციის შემდეგი თვისებები:



ნახ. 118.

1. $\cos x$ ფუნქცია განსაზღვრულია მთელს რიცხვით ღერძზე, ვინაიდან x-ის ყოველ ნამდვილ რიცხვით მნიშვნელობას (რომელიც მიიღება კუთხის ან რკალის რადიანულ ზომად) შეესაბამება კოსინუსის სრულიად განსაზღვრული მნიშვნელობა.

2. $\cos x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე მთლიანად ავსებს $[-1;\ 1]$ სეგმენტს.

3. $\cos x$ ლუწი ფუნქციაა, ვინაიდან $\cos(-x)=\cos x$ (გრაფიკი სიმეტრიულია oy ღერძის მიმართ).

4. $\cos x$ ფუნქცია კლებულობს $(0, \pi)$ შუალედში 1-დან -1-მდე, $(-\pi, 0)$ შუალედში კი იზრდება -1-დან 1-მდე.

5. $\cos x$-ის უდიდესი მნიშვნელობა უდრის 1-ს, რომელსაც აღწევს $x=2k\pi$ წერტილებში ($k=0, \pm1, \pm2...$).

$\cos x$-ის უმცირესი მნიშვნელობა უდრის -1-ს. ამ მნიშვნელობას იგი აღწევს $(2k+1)\pi$ წერტილებში ($k=0, \pm1, \pm2,...$).

6. ფუნქცია 0-ის ტოლი ხდება $\frac{\pi}{2}(2k+1)$ წერტილებში და უწყვეტია მთელს ღერძზე.

3. $y=tg\,x$ ფუნქციის გრაფიკი.

$\operatorname{tg} x$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად შეგვიძლია მოვიქცეთ ისე, როგორც მოვიქეცით $\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის აგებისას. ამ შემთხვევაში უნდა გავითვალისწინოთ ის გარემოება, რომ $\operatorname{tg} x$-ის პერიოდი არის $180°$ (π).

გრაფიკის ასაგებად აქაც შეიძლება გამოვიყენოთ ორი ხერხი: შეგვიძლია ვისარგებლოთ ტანგენსის ნატურალურ მნიშვნელობათა ცხრილით. ox ღერძზე 0 წერტილიდან მარჯვნივ რაიმე მასშტაბით გადავზომავთ არგუმენტის მნიშვნელობებს. მიღებულ წერტილზე აღვმართავთ პერპენდიკულარებს. მათზე მოვზომავთ ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობებს, მიღებულ წერტილებს შევაერთებთ მრუდი ხაზით.

შეიძლება ვისარგებლოთ მეორე ხერხით, ე. წ. გეომეტრიული ხერხით (ზუსტად ისე, როგორც ეს გამოყენებულია $\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის აგებისას).

ტანგენსის გრაფიკის წერტილების ასაგებად ox ღერძის დაყოფის წერტილებიდან უნდა აღვმართოთ პერპენდიკულარები და მათზე გადავზომოთ ცენტრალური კუთხეების ტანგენსების შესაბამისი მნიშვნელობები. მივიღებთ ტანგენსის გრაფიკს $(0, \pi)$ შუალედში.

ვინაიდან ტანგენსი პერიოდული ფუნქციაა π პერიოდით, ამიტომ $(\pi, 2\pi)$ შუალედისათვის გრაფიკს ზუსტად ისეთივე მოხაზულობა ექნება, ე. ი. აგებული გრაფიკი საკმარისია გადავწიოთ π მანძილით მარჯვნივ, მაშინ მივიღებთ გრაფიკს $(\pi, 2\pi)$ შუალედში და ა. შ.

ახლა დავადგინოთ $\operatorname{tg}x$ ფუნქციის თვისებები:

1) $\operatorname{tg} x$ ფუნქცია განსაზღვრულია მთელს რიცხვით ღერძზე, გარდა $\frac{\pi}{2}(2k+1)$ წერტილებისა ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$).

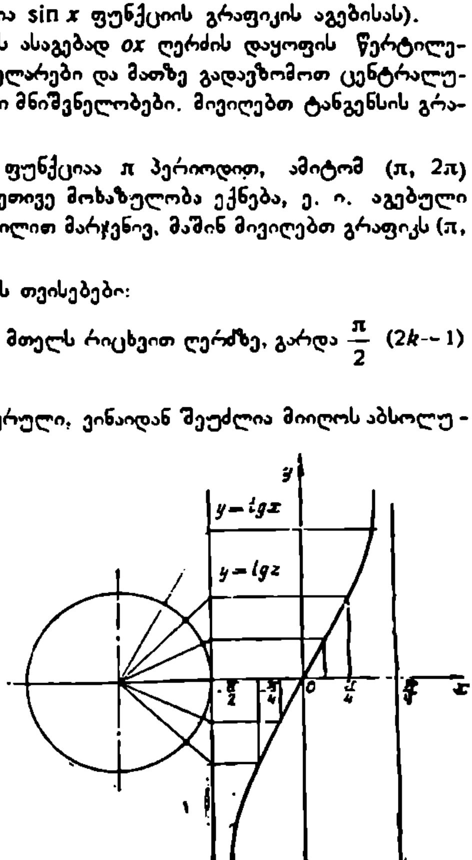
2) $\operatorname{tg} x$ ფუნქცია არაა შემოსაზღვრული, ვინაიდან შეუძლია მიიღოს აბსოლუტური სიდიდით ნებისმიერად დიდი რიცხვითი მნიშვნელობა.

3) $\operatorname{tg} x$ კენტი ფუნქციაა, ე. ი. $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$, რასაც გრაფიკი ნათლად ადასტურებს (მრუდი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ).

4) $\operatorname{tg} x$ იზრდება, $k\pi-\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\frac{\pi}{2}$

5) უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა ტანგენსს არა აქვს.

6) ფუნქცია ხდება ნულის ტოლი, როცა $x=k\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$).



ნახ. 119.

4) $y = \operatorname{ctg} x$ ფუნქციის გრაფიკი ადვილად აიგება $\operatorname{tg} x$-ის გრაფიკის მიხედვით.

სავარჯიშო

1. $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ $\left[-\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2}\right]$ ინტერვალიდან რომელი რიცხვის სინუსია: ა) 0,6; ბ) —0,8.

2. $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ, რომელ რიცხვს აქვს $\frac{1}{2}$-ის ტოლი სინუსი.

3. $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ, $[0, \pi]$ ინტერვალიდან რომელი რიცხვის კოსინუსია: ა) 0,6; ბ) —0,8.

4. $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ, რომელ რიცხვს აქვს $\frac{1}{2}$-ის ტოლი კოსინუსი.

§ ით. დამოკიდებულება ერთი და იმავე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის

ვთქვათ, α ნებისმიერი კუთხეა, რომელსაც $\overline{OM}$ ვექტორი ადგენს OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან. X და Y იყოს $\overline{OM}$ ვექტორის გეგმილები შესაბამისად OX და OY ღერძებზე, $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორის სიგრძე იყოს r.
მაშინ

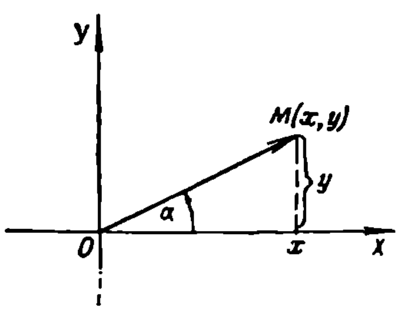
$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \qquad \sin \alpha = \frac{y}{r}. \tag{1}$$

(1) ტოლობის ორივე მხარეს კვადრატში თუ ავიყვანთ და წევრ-წევრად შევკრებთ, გვექნება:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{y^2 + x^2}{r^2}.$$

მაგრამ $\overline{OM}$ ვექტორის x და y კოორდინატების კვადრატების ჯამი ტოლია $\overline{OM}$ ვექტორის კვადრატის ანუ r^2-ის, ამიტომ

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \tag{2}$$



ნახ. 120.

ერთი და იმავე არგუმენტის კოსინუსის და სინუსის კვადრატების ჯამი უდრის ერთს.

განსაზღვრის თანახმად, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$;

თუ $\frac{y}{x}$ წილადის მრიცხველს და მნიშვნელს გავყოფთ ნულის არატოლ r რიცხვზე, მივიღებთ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \tag{3}$$

ამრიგად, კუთხის ტანგენსი არის ამ კუთხის სინუსის შეფარდება ამავე კუთხის კოსინუსთან.

განსაზღვრის თანახმად,

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\quad(r\neq0).$$

ამრიგად,

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,. \tag{4}$$

კუთხის კოტანგენსი არის ამ კუთხის კოსინუსის შეფარდება ამავე კუთხის სინუსთან.

(3) და (4) იგივეობათა წევრ-წევრად გადამრავლება მოგვცემს:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1. \tag{5}$$

თუ (2) ტოლობის ორივე მხარეს წევრ-წევრად გავყოფთ ჯერ $\cos^2\alpha$-ზე, შემდეგ კი $\sin^2\alpha$-ზე, მივიღებთ:

$$1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\quad\text{და}\quad\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}\,,$$

ანუ

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha\quad\text{და}\quad1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha \tag{6}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა (2) (3) (4) გამოსახულებები წარმოადგენს ე. წ. ძირითად ტრიგონომეტრიულ იგივობებს, ხოლო რაც შეეხება (5) და (6) იგივობებს, ისინი მიიღებიან პირველი სამიდან.

ყოველი ტრიგონომეტრიული იგივობა α არგუმენტის ყველა დასაშვები მნიშვნელობისათვის მართებული ტოლობაა. ის მართებულია არგუმენტის ყველა იმ მნიშვნელობისათვის, რომლის დროსაც მარჯვენა და მარცხენა მხარეს აზრი აქვს. მაგალითად, (5) იგივობა სრულდება α-ს ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა $\alpha=$ $=k\cdot\frac{\pi}{2}$ მნიშვნელობისა. ამ დროს α კუთხე მთავრდება ან ვერტიკალურ ან ჰორიზონტალური დიამეტრის ბოლოებში. თუ α მოთავსდება ჰორიზონტალური დიამეტრის ბოლოებში (A და A_1 წერტილებში), მაშინ $\operatorname{cgt}\alpha$ აზრს კარგავს, ხოლო თუ α მთავრდება ვერტიკალური დიამეტრის ბოლოებში (B და B_1 წერტილებში, მაშინ $tg\ \alpha$ კარგავს აზრს.

ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივობათა გამოყენებით შეგვიძლია ერთ-ერთი ფუნქციის მოცემული მნიშვნელობის მიხედვით გავიგოთ სხვა ფუნქციათა მნიშვნელობა, ვაწარმოოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შემცველ გამოსახულებათა იგივური გარდაქმნები და დავამტკიცოთ აგრეთვე სხვა ტრიგონომეტრიული იგივობანი. ცხადია, ამ დროს გამოვიყენებთ ალგებრულ გამოსახულებებზე მოქმედებათა საერთო წესს.

§ 97. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობათა გამოთვლა ერთ-ერთი მათგანის მნიშვნელობის მიხედვით

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. მოცემულია $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. გამოვთვალოთ დანარჩენ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მნიშვნელობები, თუ $90° < \alpha < 180°$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემულია, რომ α კუთხე მთავრდება მეორე მეოთხედში. მეორე მეოთხედში კოსინუსი, ტანგენსი და კოტანგენსი უარყოფითია, ამიტომ

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}; \ \sec\alpha = -\frac{5}{4};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{5}{3}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. $\sin\alpha = 0{,}6$. ვიპოვოთ ყველა სხვა ფუნქციის მნიშვნელობები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქ არაა მოცემული, თუ რომელ მეოთხედში მთავრდება α კუთხე, ამიტომ ფუნქციათა მნიშვნელობების წინ საჭიროა ავიღოთ 2 ნიშანი: + და —.*

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-0{,}36} = \pm\sqrt{0{,}64} = \pm 0{,}8.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{+0{,}6}{-0{,}8} = \pm\frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{4}{3}; \quad \sec\alpha = \pm\frac{5}{4};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{5}{3}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}5 \quad (90° < \alpha < 180°)$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{-2{,}5} = -\frac{2}{5}$.

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$ დამოკიდებულებიდან ვპოულობთ:

$$\sec\alpha = -\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -\sqrt{1+(2{,}5)^2} = -\sqrt{7{,}25} \approx -2{,}6;$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{-2{,}6} = -\frac{5}{13}; \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}.$$

სასარგებლოა ვიცოდეთ ერთი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის სხვა ფუნქციით გამოსახვის შემდეგი ცხრილი:

---

* $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$ ფუნქციათა მნიშვნელობების წინ აღებულია — ნიშანი, ხოლო კოსეკანსის წინ მარტო +, ეს იმიტომ, რომ $\operatorname{cosec}\alpha$-ს, $\sin\alpha$-ს ნიშანი აქვს მეოთხედებში.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha$

ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობანი საშუალებას გვაძლევს გავამარტივოთ ზოგიერთი ტრიგონომეტრიული გამოსახულება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გავამარტივოთ: $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$

ა მ ო ხ ს ნ ა:

$$\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}=1+\cos\alpha.$$

ამრიგად,

$$\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=1+\cos\alpha\,.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გავამარტივოთ: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$.

ა მ ო ხ ს ნ ა:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha.$$

ამრიგად,

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებები:

1. $1-\cos^2\alpha$.
2. $\sin^2\alpha-1$.
3. $\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha}$.
4. $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$.
5. $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$.
6. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$
7. $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}$.
8. $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.
9. $\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha}$
10. $\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

2. მოცემული ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მიხედვით გამოთვალეთ დანარჩენის მნიშვნელობები:

1. $\sin\alpha = -0{,}6.\quad \left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$; პას: $\cos\alpha = 0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$;
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$;

2. $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi\right)$; პას. $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$;
$\operatorname{ctg}\alpha = -2$;

3. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; პას. $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -2$.

4. $\sin\alpha = 0{,}96$; $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$; პას. $\cos\alpha = -0{,}28$; $\operatorname{tg}\alpha = -3{,}43$;
$\operatorname{ctg}\alpha = -0{,}29$.

5. $\sin\alpha = -0{,}8$; $\left(\frac{3\pi}{2} < \alpha > 2\pi\right)$; პას. $\cos\alpha = 0{,}60$; $\operatorname{tg}\alpha = -1\frac{1}{3}$;
$\operatorname{ctg}\alpha = -0{,}75$.

6. $\sin\alpha = -0{,}3$; $\left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$; პას. $\cos\alpha = -0{,}95$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}32$;
$\operatorname{ctg}\alpha = 3{,}18$;

7. $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$; $\left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$; პას. $\sin\alpha = 0{,}94$; $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}86$;
$\operatorname{ctg}\alpha = -0{,}35$.

8. $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$; პას. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$;
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{2}$.

9. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{40} \cdot \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$; პას. $\cos\alpha = \frac{40}{41}$; $\sin\alpha = \frac{9}{40}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{40}{9}$.

10. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3} \cdot \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$; პას. $\operatorname{ctg}\alpha = 3$; $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$;
$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

11. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$; $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$; პას. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ - $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$;

12. $\operatorname{ctg}\alpha = 2{,}4$; $\left(\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}\right)$; პას. $\sin = -\dfrac{5}{13}$; $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5}{12}$; $\operatorname{ctg}\alpha = 2{,}4$.

§ 68. ტრიგონომეტრიულ იგივობათა დამტკიცების მაგალითები

განვიხილოთ ტრიგონომეტრიულ იგივობათა დამტკიცების რამდენიმე მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. დავამტკიცოთ იგივობა:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა

ტოლობის მარჯვენა ნაწილი გარდავქმნათ იგივობად:

$$(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha + 2 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 +$$

$$+ \operatorname{tg}^2\alpha + 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}$$

ამრიგად, მივიღეთ იგივე გამოსახულება, რაც დასამტკიცებელი იგივობის მარცხენა მხარეში გვაქვს, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. დავამტკიცოთ იგივობა:

$$\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1+\operatorname{ctg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა

$$\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha$$

$$\left((\alpha \neq k\frac{\pi}{2},\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots\right)$$

ახლა გარდავქმნათ მარჯვენა ნაწილი:

$$\frac{1+\operatorname{ctg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha\left(\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}+\operatorname{ctg}^2\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha$$

$$\left(\alpha \neq k\frac{\pi}{2},\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots\right).$$

როგორც ვხედავთ, მარჯვენა და მარცხენა მხარეებში მიღებულია ერთი და იგივე გამოსახულება, ე. ი. $\operatorname{ctg}^2\alpha$, ამით იგივობა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. დავამტკიცოთ იგივეობა

$$\frac{2-\operatorname{cosec}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-1}-\operatorname{cosec}^2\alpha+1=\operatorname{ctg}\alpha.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა

გარდავქმნათ იგივეობის მარცხენა ნაწილი:

$$\frac{2-\operatorname{cosec}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-1}-\operatorname{cosec}^2\alpha+1=\frac{1-(\operatorname{cosec}^2\alpha-1)}{\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}-1}-(\operatorname{cosec}^2\alpha-1)=$$

$$=\frac{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\dfrac{1-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}}-\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\,(1-\operatorname{ctg}\alpha)\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)}{1-\operatorname{ctg}\alpha}-\operatorname{ctg}^2\alpha=$$

$$=\operatorname{ctg}\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)-\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{ctg}\alpha.$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

4. დავამტკიცოთ იგივეობა:

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა

გარდავქმნათ მარჯვენა ნაწილი:

$$\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha=$$

$$=\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. დავამტკიცოთ იგივეობა:

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{1}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}$$

გადავწეროთ იგი შემდეგი სახით:

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{1}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$$

გარდავქმნათ მარცხენა ნაწილი:

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha+1-\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha\,(\sin\alpha+1)}{\cos^3\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

ახლა გარდავქმნათ მარჯვენა ნაწილი:

$$\frac{1}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{1-\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos\alpha\,(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

როგორც ვხედავთ, იგივობის ორივე ნაწილის გარდაქმნით ვღებულობთ ერთსა და იმავე გამოსახულებას. ამით მოცემული იგივობა დამტკიცებულია.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

დაამტკიცეთ შემდეგი იგივობათა მართებულობა:

1. $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
2. $\dfrac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}$.
3. $1-\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.
4. $\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$.
5. $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\cos^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha$.
6. $\dfrac{1+\operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$
7. $\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}=2\sec\alpha\quad\left(0<a<\dfrac{\pi}{2}\right)$.
8. $\sin\alpha\,(2\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\,(\operatorname{cosec}\alpha-2\operatorname{ctg}\alpha)=2\sin\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha$.
9. $1+\dfrac{\cos\alpha\,\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\cos\alpha}=\sec\alpha$.
10. $(\sin x+\operatorname{cosec}x)^2+(\cos x+\sec x)^2-(\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x)=7$.
11. $2(\sin^6x+\cos^6x)+3(\sin^4x+\cos^4x)+1=0$.
12. $\sin^6x+\cos^6x+3\sin^3x\cos^2x=1$.

§ 90. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა დაყვანის ფორმულები

თეორემა. ნებისმიერი α კუთხისათვის

$$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha. \tag{1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. აქ განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

ა) α კუთხე ბოლოვდება I მეოთხედში. ავიღოთ ერთეულოვანი წრეწირი (ნახ. 121, ა). ნახაზიდან ჩანს, რომ

$\sin(90^\circ+\alpha)=M_1P_1$ და $\cos\alpha=OP$, მაგრამ $\triangle OMP=\triangle OM_1P_1$,

ამიტომ

$$M_1P_1 = OP_1,$$

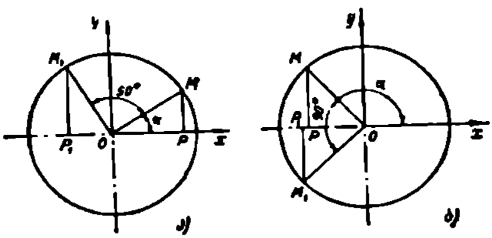
საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha.$$

ბ) α კუთხე ბოლოვდება II მეოთხედში (ნახ. 121, ბ). ნახაზი გვიჩვენებს, რომ $\sin(90^\circ+\alpha) = -M_1P_1$ და $\cos\alpha = -OP$, მაგრამ $\triangle OMP = \triangle OM_1P_1$, ამიტომ $M_1P_1 = OP_1$ ანუ

$$\sin(90^\circ+\alpha) = \cos\alpha. \tag{1}$$

იმ შემთხვევაში, როცა α კუთხე ბოლოვდება III და IV მეოთხედებში, მაშინაც ანალოგიური მსჯელობით იგივე შედეგი მიიღება.



ნახ. 121.

მოსწავლეებს ევალებათ, შეამოწმონ (1) იგივობის მართებულობა იმ შემთხვევაში, როცა α კუთხის საბოლოო გვერდი მდებარეობს OX ან OY ღერძზე.

ახლა, თუ (1) იგივობაში α-ს შევცვლით $-\alpha$-თი, გვექნება:

$$\sin(90^\circ-\alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

ე. ი.

$$\sin(90^\circ-\alpha) = \cos\alpha \tag{2}$$

ანალოგიური ფორმულის მისაღებად $\cos(90^\circ-\alpha)$-სათვის საჭიროა (2) ფორმულაში α შევცვალოთ $(90-\alpha)$—თი.

ე. ი.

$$\sin[90^\circ-(90^\circ-\alpha)] = \cos(90^\circ-\alpha)$$

ანუ

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ-\alpha).$$

ამრიგად,

$$\cos(90^\circ-\alpha) = \sin\alpha. \tag{3}$$

(2) და (3) ფორმულებიდან შეგვიძლია მივიღოთ:

$$\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha) = \frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\cos(90^\circ-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha. \tag{4}$$

ასევე,

$$\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)=\frac{\cos(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha. \qquad (5)$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: ორ კუთხეს, რომელთა ჯამი უდრის 90°-ს, ერთი მეორის დამატებით კუთხეებს უწოდებენ. ე. ი. α და $90-\alpha$ — ურთიერთდამატებითია, ვინაიდან $\alpha+90^\circ-\alpha=90^\circ$. ასევე ურთიერთდამატებითია 20° და 70°, 15° და 75°, 30° და 60° და ა. შ.

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$$

ფორმულებს დამატებითი კუთხის ფორმულებსაც უწოდებენ. როგორც ჩანს მათი დამახსოვრება მეტად მარტივია, ე. ი. ერთი ფუნქცია იცვლება მეორე მისი მსგავსი ფუნქციით: სინუსი — კოსინუსით, კოსინუსი-სინუსით და ა. შ.

მაგალითად, $\sin 30^\circ$ იგივეა, რაც 30° კუთხის დამატებითი 60°-იანი კუთხის კოსინუსი, ე. ი. $\sin 30^\circ=\cos 60^\circ\left(\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\right)$, ასევე, $\cos 30^\circ=\sin 60^\circ\left(\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ და ა. შ.

ჩვენ მიღებული გვქონდა ფორმულა

$$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha.$$

ახლა თუ გამოვიყენებთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ლუწობა-კენტობის თვისებებს და დამატებით კუთხეთა ფორმულებს, ადვილად შეგვიძლია მივიღოთ დაყვანის ფორმულები $(90^\circ+\alpha)$ კუთხისათვის.

მაგალითად,

$$\cos(90^\circ+\alpha)=\cos[90^\circ-(-\alpha)]=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$$

$$\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha. \qquad (6)$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}[90^\circ-(-\alpha)]=\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

ე. ი. $\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$ (7)

$$\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}[90^\circ-(-\alpha)]=\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha.$$

ამრიგად,

$$\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha. \qquad (8)$$

(1), (6) (7) და (8) ფორმულის გამოყენებით ადვილად შეგვიძლია მივიღოთ დაყვანის ფორმულები $180^\circ\pm\alpha$ კუთხეთათვის.

მართლაც,

$$\sin(180^\circ+\alpha)=\sin[90^\circ+(90^\circ+\alpha)]=\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha.$$

მაშასადამე,

$$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha \tag{9}$$

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin[90^\circ+(90^\circ-\alpha)]=\cos(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha.$$

ამრიგად,

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\cos\alpha. \tag{10}$$

დ ა ვ ა ლ ე ბ ა. (9) და (10) ფორმულების ანალოგიურად დამოუკიდებლად მიიღეთ

$$\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha \text{ და } \cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha. \tag{11}$$

ახლა თუ გავიხსენებთ იმას, რომ ტანგენსი და კოტანგენსი პერიოდული ფუნქციებია, პერიოდით —180°, მაშინ ადვილად დავასკვნით, რომ:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tg}(180^\circ+\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha.\\
&\mathrm{tg}(180^\circ-\alpha)=\mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha.\\
&\mathrm{ctg}(180^\circ+\alpha)=\mathrm{ctg}\,\alpha.\\
&\mathrm{ctg}(180^\circ-\alpha)=\mathrm{ctg}(-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha.
\end{aligned} \tag{12}$$

დ ა ვ ა ლ ე ბ ა. (9) (10) და (11) ფორმულების გამოყენებით და $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ გათვალისწინებით მიიღეთ (12) ფორმულები.

დაყვანის ფორმულების მიღება $270^\circ\pm\alpha$ და $360^\circ\pm\alpha$ არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს.

მ ა გ ა ლ ი თ ა დ,

$$\sin(270^\circ+\alpha)=\sin[90^\circ+(180^\circ+\alpha)]=\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha.$$

$$\sin(270^\circ-\alpha)=\sin[90^\circ+(180^\circ-\alpha)]=\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha.$$

ანალოგიური წესის გამოყენებით მიიღება ფორმულები:

$$\begin{aligned}
&\cos(270^\circ+\alpha)=\sin\alpha.\\
&\cos(270^\circ-\alpha)=-\sin\alpha.\\
&\mathrm{tg}(270^\circ+\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha.\\
&\mathrm{tg}(270-\alpha)=\mathrm{ctg}\,\alpha.
\end{aligned}$$

დაყვანის ფორმულების დაზეპირება არაა სავალდებულო, მაგრამ მისი სწრაფად მიღების წესი კი აუცილებელია ვიცოდეთ.

ეს წესი მდგომარეობს შემდეგში:

თუ ფორმულა შეიცავს 90° და 270°-იან კუთხეებს, მაშინ ფუნქციის დასახელება იცვლება მსგავსი დასახელებით. კერძოდ სინუსი—კოსინუსით, ტანგენსი—კოტანგენსით და ა. შ. ხოლო თუკი ფორმულა შეიცავს 180°-იან და 360°-იან კუთხეებს, მაშინ ფუნქციის დასახელება იგივე რჩება.

მარჯვენა ნაწილში + ან — იწერება იმისდა მიხედვით, თუ რომელ მეოთხედშია ასაყვანი არგუმენტი და რა ნიშანი აქვს ამ მეოთხედში ფუნქციას (მასთან ვგულისხმობთ $\alpha<90°$).

ასე მაგალითად, ვთქვათ, საჭიროა განისაზღვროს $\sin(360^\circ-\alpha)$, ამისათვის ვმსჯელობთ შემდეგნაირად: რადგან ფორმულაში შედის 360°, ამიტომ სინუსი უც-

ვლელი დარჩება. კუთხე $360°-\alpha$ არის მეოთხე მეოთხედში, ამ მეოთხედში კი სინუსი უარყოფითია, ამიტომ მარჯვენა მხარეში გვექნება ნიშანი —. ამრიგად,

$$\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha.$$

ასევე, ვთქვათ, უნდა განისაზღვროს $\cos(270+\alpha)$. აქ კოსინუსი შეიცვლება სინუსით, რადგან ფორმულა შეიცავს 270°-ს, $270+\alpha$ არის IV მეოთხედში, IV მეოთხედში კოსინუსი, ე. ი. მარცხენა ნაწილში მყოფი ფუნქცია დადებითია, ამიტომ მარჯვენა ნაწილში გვექნება დადებითი ნიშანი, ე. ი.

$$\cos(270°+\alpha)=\sin\alpha.$$

განხილული წესით შეიძლება სწრაფად დავწეროთ დაყვანის ყველა ფორმულა.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. დაიყვანეთ შემდეგ კუთხეთა ტრიგონომეტრიული ფუნქციები მახვილი კუთხის ფუნქციებზე:

1) $\sin 165°$;
2) $\cos 210°$;
3) $\operatorname{tg} 135°$;
4) $\operatorname{tg} 200°$;
5) $\operatorname{ctg} 240°$;
6) $\cos 315°$;
7) $\sin \frac{5}{4}\pi$;
8) $\cos \frac{5}{3}\pi$;
9) $\operatorname{tg}\frac{7}{8}\pi$;
10) $\operatorname{ctg}\frac{8}{5}\pi$;
11) $\sin(-300°)$;
12) $\cos(-400)$;
13) $\operatorname{tg}(-960°)$
14) $\operatorname{ctg}(-3,2\ \pi)$;
15) $\sin(-5,4\ \pi)$;
16) $\operatorname{tg}(-2,3\ \pi)$;

2. გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებანი:

1) $\operatorname{ctg}675°\cdot\operatorname{cosec}280°-\operatorname{tg}1845°\cdot\sin 460°$;

2) $\cos x\cdot\operatorname{tg}(180°+x)\cdot\operatorname{tg}(270°-x)\cdot\operatorname{cosec}(90°-x)$;

3. $$\frac{\sin(\pi-x)\quad\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cdot\operatorname{ctg}(\pi-x)}$$

4) $\sin\frac{3\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{5}$.

3. გამოიანგარიშეთ ზეპირად:

1. $\sin(180°+\alpha)-\cos(90°+\alpha)-\operatorname{tg}(270°+\alpha)+\operatorname{ctg}(180°-\alpha)$.
2. $\cos(180°-\alpha)+\sec(360°-\alpha)+\operatorname{cosec}(270°-\alpha)-\sin(270°+\alpha)$.
3. $\sin(360-\alpha)\cdot\sec(270°-\alpha)+\cos(90°+\alpha)\cdot\operatorname{cosec}(180°-\alpha)$.
4. $\sin(90°-\alpha)\cdot\cos(360°-\alpha)-\sin(180°-\alpha)\cdot\cos(90°+\alpha)+\operatorname{tg}^2(180°-\alpha)$.

4. დაამტკიცეთ.

1. $$\frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)}\cdot\frac{\operatorname{ctg}(90-\alpha)}{\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}\cdot\frac{\cos(360^\circ-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\sin\alpha.$$

2. $$\frac{\sin(\pi-\alpha)\quad\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=1.$$

3. $$\frac{\sin^2(-\alpha)}{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}+\frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^2(x-2\pi)}=1.$$

5. უპასუხეთ ზეპირად. შეიძლება თუ არა, რომ:

1. უარყოფითი კუთხის კოსინუსი იყოს უარყოფითი რიცხვი?
2. უარყოფითი კუთხის სინუსი იყოს დადებითი რიცხვი?
(მოიყვანეთ მაგალითები)

3. სამკუთხედის ორი კუთხის ჯამის კოსინუსი უდრის $\frac{1}{2}$-ს, რას უდრის მესამე კუთხე?

4. სამკუთხედის ორი კუთხის ჯამის სინუსი უდრის 1-ს. რას უდრის მესამე კუთხე?

5. სამკუთხედის ორი კუთხის ჯამის კოსინუსი უდრის 0-ს, რას უდრის მესამე კუთხე?

6. მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთი მახვილი კუთხის ტანგენსი უდრის 3-ს. რას უდრის მეორე მახვილი კუთხე?

თავი VIII

შებრუნებული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

§ 100. შებრუნებული ფუნქციის ცნება

განვიხილოთ პირველი ხარისხის ერთუცნობიანი განტოლება:

$$ax+by=c. \tag{1}$$

ცხადია, აქ არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს, x-ს მივიღებთ არგუმენტად და y-ს მის ფუნქციად, თუ პირიქით, y-ს მივიღებთ არგუმენტად და x-ს მის ფუნქციად.

განვსაზღვროთ (1) განტოლებიდან ჯერ y, შემდეგ კი x:

$$y=\frac{c-ax}{b}, \tag{2}$$

$$x=\frac{c-by}{a} \tag{3}$$

(2) ტოლობაში x არის არგუმენტი, ხოლო y — მისი ფუნქცია, (3)-ში კი პირიქით.

აშკარაა, რომ ორივე ფუნქცია, ისე როგორც თვით მოცემული განტოლება, არსებითად გამოხატავს ერთსა და იმავე დამოკიდებულებას ცვლადებს შორის.

(2) და (3) ფუნქციებს ურთიერშებრუნებულს უწოდებენ.

ავილოთ კონკრეტული მაგალითი:

$$5x+3y-30=0.$$

ცხადია,

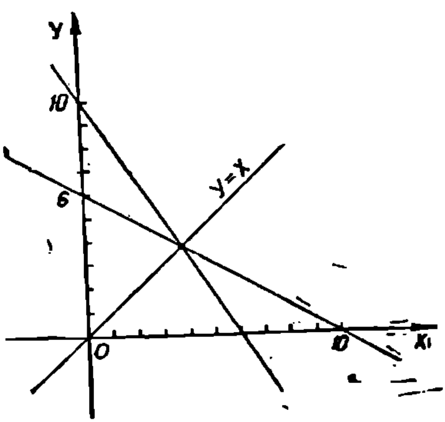
$$y=-\frac{5}{3}x+10, \tag{4}$$

$$x=-\frac{3}{5}y+6. \tag{5}$$

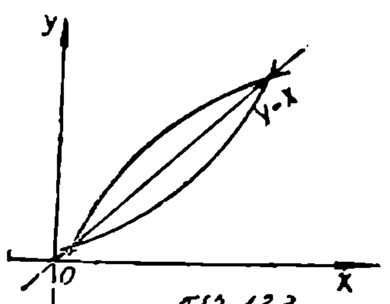
(4) და (5), ისე როგორც (2) და (3), ურთიერთშებრუნებული ფუნქციებია. ახლა, თუ (5)-ში არგუმენტს აღვნიშნავთ ისევ x-ით, როგორც ეს საერთოდაა მიღებული, მაშინ გვექნება

$$y=-\frac{3}{5}x+6. \tag{6}$$

ახლა თუ (4) და (6) ფუნქციებს გამოვსახავთ გრაფიკულად, ვნახავთ, რომ ისინი წარმოადგენენ $y=x$ წრფის (I და III საკოორდინატო სიბრტყის ბისექტრისის) მიმართ სიმეტრიულ წრფეებს (ნახ. 122).



ნახ. 122.



ნახ. 123.

თუ მოცემული გვექნება ზოგადი სახით $y=f(x)$ (7) ფუნქცია და მისგან შესაძლებელია x-ის განსაზღვრა y-ის საშუალებით, ე. ი. თუ გვაქვს

$$x=\varphi(y), \tag{8}$$

მაშინ (7) და (8) ფუნქციები ურთიერთშებრუნებული იქნება. თუ (8)-ში არგუმენტს ისევ აღვნიშნავთ x-ით, მაშინ გვექნება

$$y=\varphi(x). \tag{9}$$

(7) და (9) ფუნქციათა გრაფიკები, ისე როგორც წინა მაგალითში, სიმეტრიული წირები იქნება I და III საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისის მიმართ (ნახ. 123).

ცალსახა ფუნქციის (ე. ი. ისეთი ფუნქციის, რომელიც არგუმენტის მოცემული მნიშვნელობისათვის ღებულობს ერთ სრულიად გარკვეულ მნიშვნელობას) შებრუნებული ფუნქცია შეიძლება იყოს მრავალსახაც, ისე როგორც, მაგალითად, $y=x^2$ და მისი შებრუნებული $y=\pm\sqrt{x}$ ფუნქციები.

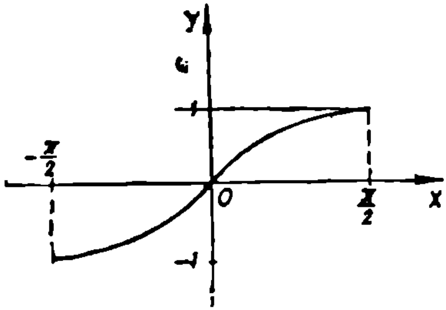
აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ შებრუნებული ფუნქციის ცალსახობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ პირდაპირი ფუნქცია არგუმენტის განსაზღვრული მნიშვნელობებისათვის ღებულობდეს განსხვავებულ მნიშვნელობებს. უწყვეტი ფუნქციისათვის ეს პირობა შესრულებულია მხოლოდ მაშინ, როცა ის მონოტონურია. (ე. ი. ან ზრდადია ან კლებადი).

§ 101. შებრუნებული ტრიგონომეტრიული ფუნქციის განსაზღვრა

1. განვიხილოთ $y=\sin x$ ფუნქცია. როგორც ვიცით, ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს ყველა ნამდვილ რიცხვის სიმრავლე. x არგუმენტის ყოველ ნამდვილ მნიშვნელობას შეესაბამება y ფუნქციის ერთადერთი ნამდვილი მნიშვნელობა $[-1;\ 1]$ სეგმენტიდან, მაგრამ შებრუნებულ დასკვნას ადგილი არა აქვს, ე. ი. y ფუნქციის ნებისმიერ მნიშვნელობას ამ სეგმენტიდან, როგორც ცნობილია, შეესაბამება x-ის მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლე. ასე მაგალითად, თუ თუ $\sin x=\frac{1}{2}$, ე. ი. $y=\frac{1}{2}$, მაშინ

$$x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{2}\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots).$$

თუ $y=\sin x$ ფუნქციას განვიხილავთ $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე, ე. ი. $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, მაშინ ადვილი მისახვედრია, რომ x და y ცვლადებს შორის ადგილი ექნება ურთიერთცალსახა დამოკიდებულებას. ე. ი. x-ის ყოველ ცალკეულ მნიშვნელობას $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტიდან შეესაბამება y-ის ერთი და მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა $[-1;\ 1]$ სეგმენტიდან და, პირიქით, y-ის ყოველ მნიშვნელობას $[-1;\ 1]$ სეგმენტიდან შეესაბამება x-ის ერთი და მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტიდან.



ნახ. 124.

x და y ცვლადებს შორის არსებული ურთიერთცალსახა დამოკიდებულება ნათლად ჩანს

გრაფიკზე (ნახ. 124). $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ შუალედში ფუნქცია ზრდადია და შუალედის ნებისმიერი წერტილიდან OY ღერძის პარალელურად გავლებული წრფე გადაკვეთს $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკს ერთადერთ წერტილში.

ამრიგად, $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ შუალედში არსებობს $y=\sin x$ ფუნქციის შებრუნებული ცალსახა ფუნქცია, რაც სიმბოლურად შემდეგნაირად აღინიშნება:

$$x=\arcsin y \tag{1}$$

თუ ახლა არგუმენტს, როგორც ეს მიღებულია, x-ით აღვნიშნავთ, მაშინ $y=\sin x$ ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია ჩაიწერება ასე:

$$y=\arcsin x.$$

განსაზღვრა. ***x რიცხვის არკსინუსი ეწოდება $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედის რკალს, რომლის სინუსი არის x;*** $\sin y=x$;

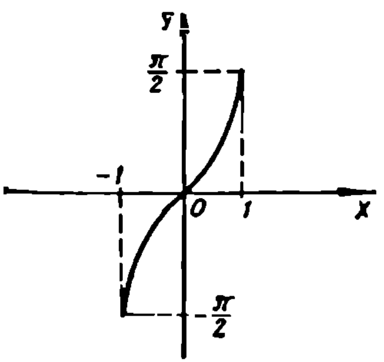
როგორც ჩანს $y=\arcsin x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს (არგუმენტის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს) წარმოადგენს $[-1; 1]$ სეგმენტი, ხოლო ცვლილების არეს (ფუნქციის მიერ მიღებულ მნიშვნელობათა სიმრავლეს) წარმოადგენს $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტი:

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$$

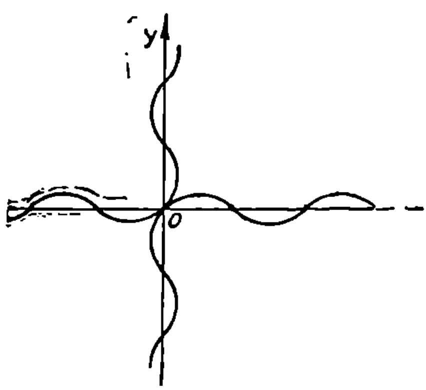
განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ:

$$\arcsin(\sin x)=x, \quad \text{თუ} \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2} \quad \text{და}$$

$$\sin(\arcsin x)=x.$$



ნახ. 125.



ნახ. 126.

თუ გავითვალისწინებთ § 98-ში გაკეთებულ შენიშვნებს შებრუნებული ფუნქციის გრაფიკის შესახებ, მაშინ ადვილად შეგვიძლია ავაგოთ $y=\arcsin x$ ფუნქ-

ციის გრაფიკი. ამისათვის საჭიროა ავაგოთ $x=\sin y$ სინუსოიდა და გამოვყოთ გრაფიკზე მისი ნაწილი $\left(-1;-\frac{\pi}{2}\right)$ და $\left(1;\ \frac{\pi}{2}\right)$ წერტილებს შორის. სინუსოიდის ეს ნაწილი იქნება სწორედ $y=\arcsin x$ ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. 125).

ცხადია, მიღებული წირი იქნება $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ ფუნქციის შებრუნებული ფუნქციის გრაფიკი და ორივე წირი იქნება $y=\arcsin x$.
$y=\arcsin x$ ფუნქცია, მსგავსად $y=\sin x$ ფუნქციისა, კენტია

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1. $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$. 2. $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$. 3. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

1. განმარტეთ შემდეგი გამოსახულებების აზრი:

1. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

2. $\arcsin(-30^\circ)=-\frac{1}{2}$,

3. $\arcsin-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi}{4}$.

11. აქვს თუ არა აზრი შემდეგ გამოთქმებს:

1) $\arcsin 2$?

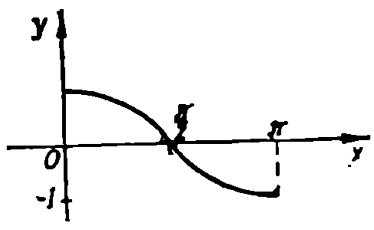
2. $\arcsin\frac{a^2}{a^2+1}$? $\arcsin(\sqrt{2}-1)$?

II. განვიხილოთ ფუნქცია

$$y=\cos x. \tag{2}$$

როგორც ვიცით, ეს ფუნქცია არ ამყარებს ურთიერთცალსახა დამოკიდებულებას, ერთი მხრივ, x-ის ნამდვილ მნიშვნელობებსა და, მეორე მხრივ, $[-1,\ 1]$ სეგმენტიდან y-ის მნიშვნელობებს შორის, ე. ი. y-ის ყოველ მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია $[-1;\ 1]$ სეგმენტზე, შეესაბამება x-ის უამრავი მნიშვნელობა, სახელდობრ,

$$x=2k\pi\pm\alpha.$$



ნახ. 126, ა.

სადაც α არის $y=\cos x$ განტოლების ფესვი და მოთავსებულია 0-სა და π-ს შორის, ხოლო k ნებისმიერი მთელი რიცხვია. იმისათვის რომ $\cos x$ ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია ცალსახად იქნას განსაზღვრული, საჭიროა (2) განტოლებაში x-სათვის ისეთი შუალედი ავირჩიოთ, რომელშიაც $\cos x$ მონოტონურია; მაგალითად,

ასეთ შუალედად შეიძლება ავიღოთ [0, π] სეგმენტი. ამ შუალედში $\cos x$ კლებადია და მხოლოდ თითოჯერ ღებულობს ყოველ მნიშვნელობას, -1-სა და $+1$-ს შორის, ე. ი. $-1 \leqslant y \leqslant 1$, ამიტომ y-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც მოთავსებულია -1-სა და $+1$-ს შორის, არსებობს [0, π] შუალედში x-ის ერთი მნიშვნელობა, რომლის კოსინუსიც ეტოლება y-ს. ამ შემთხვევაში, ცხადია, x-ს და y-ს შორის მყარდება ურთიერთცალსახა შესაბამისობა და x წარმოადგენს y-ის ცალსახა ფუნქციას, რომელიც აღინიშნება შემდეგნაირად:

$$x = \operatorname{arc\,cos} y.$$

განსაზღვრა. x რიცხვის არკკოსინუსი ეწოდება y რკალს $(0 \leqslant y0 \leqslant \pi)$, რომლის კოსინუსიც არის x.

$$\cos y = x.$$

ახლა თუ არგუმენტს ისევ x-ით აღვნიშნავთ და მის ფუნქციას y-ით, როგორც ეს საერთოდაა მიღებული, გვექნება: $y = \operatorname{arc\,cos} x$.

როგორც განმარტებიდან გამომდინარეობს, $y = \operatorname{arc\,cos} x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა (არგუმენტის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე) $-1 \leqslant x \leqslant 1$ სეგმენტი, ხოლო ცვლილების (ფუნქციის მიერ მიღებული მნიშვნელობათა სიმრავლე)

$0 \leqslant y \leqslant \pi$ სეგმენტი:

$$0 \leqslant \operatorname{arc\,cos} x \leqslant \pi.$$

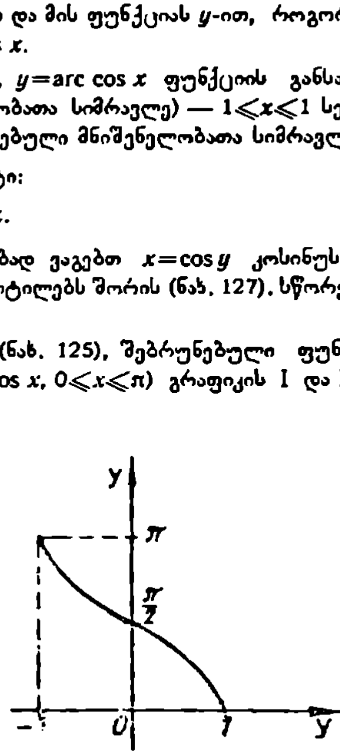
$y = \operatorname{arc\,sin} x$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად ვაგებთ $x = \cos y$ კოსინუსოიდას და ვიღებთ მის ნაწილს $(-1, \pi)$ და $(1, 0)$ წერტილებს შორის (ნახ. 127). სწორედ ეს იქნება ასაგები გრაფიკი.

ცხადია, აქაც, როგორც წინა მაგალითში (ნახ. 125), შებრუნებული ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია პირდაპირი ($y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$) გრაფიკის I და III საკოორდინატო კუთხეთა ბისექტრისის, ე. ი. $y = x$ წრფის მიმართ.

$y = \operatorname{arc\,cos} x$ ფუნქცია არ წარმოადგენს არც ლუწ და არც კენტ ფუნქციას, ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\operatorname{arc\,cos}(-x) = \pi - \operatorname{arc\,cos} x.$$

განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ
$\cos(\operatorname{arc\,cos} x) = x$ თუ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ და
$\operatorname{arc\,cos}(\cos x) = x$ თუ $0 \leqslant x \leqslant \pi$.



ნახ. 127.

მაგალითები

1. $\operatorname{arc\,sin} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$,

2. $\operatorname{arc\,cos} 1 = 0$.

სავარჯიშოები:

1. განმარტეთ შემდეგი გამოსახულებების აზრი:

ა) $\operatorname{arc\,cos} \frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$, ბ) $\operatorname{arc\,cos}(-1) = \pi$, გ) $\operatorname{arc\,cos} \frac{\sqrt{3}}{2} = 30°$.

2. აქვს თუ არა აზრი შემდეგ გამოსახულებას?

ა) $\arccos \dfrac{a^2+1}{a^2}$, ბ) $\arccos (\sqrt{2}-1)^2$, გ) $\arccos \sqrt{3}$.

3. იპოვეთ მოცემული ფუნქციების შებრუნებული ფუნქცია და უჩვენეთ არგუმენტის როგორი მნიშვნელობისათვის აქვს აზრი ამ ფუნქციას:

ა) $x=\dfrac{1}{3}\sin \alpha$; გ) $x=3\sin \alpha$;

ბ) $x=\dfrac{1}{2}\cos x$; დ) $x=2\cos \alpha$.

4. იპოვეთ:

ა) $\arcsin\left(\sin \dfrac{\pi}{2}\right)$; ე) $\sin(\arcsin 1)$;

ბ) $\arccos\left(\cos \dfrac{\pi}{3}\right)$; ვ) $\cos(\arccos 0)$;

გ) $\arcsin\left[\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$; ზ) $\sin\left[\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]$;

დ) $\arccos(\cos 2\pi)$; თ) $\cos\left(\arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5. გამოსახეთ x რკალი შებრუნებული ტრიგონომეტრიული ფუნქციის საშუალებით:

ა) $\sin x=\dfrac{3}{5}$;

ბ) $\cos x=\dfrac{4}{5}$;

გ) $\sin 2x=0,6$;

დ) $\cos 4x=0,8$;

ე) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=0,3$;

ვ) $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$;

ზ) $\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{3}$;

თ) $\cos\dfrac{x}{3}=\dfrac{1}{4}$.

6. შემდეგი ტოლობებიდან გამოსახეთ x, როგორც y-ის ფუნქცია:

ა) $y=\sin x$;

ბ) $y=2\sin 3x$;

გ) $y=3\cos\dfrac{x}{2}$;

დ) $y=2\arcsin\dfrac{x}{2}$;

ე) $y=\dfrac{1}{2}\arccos 2x$;

ვ) $y=\dfrac{1}{3}\arcsin 3x$;

ზ) $\dfrac{y}{2}=\dfrac{3}{4}\arcsin 2x$;

თ) $\dfrac{y}{3}=\dfrac{1}{5}\arccos\dfrac{x}{5}$;

III. განვიხილოთ ფუნქცია

$$y=\operatorname{tg} x. \tag{4}$$

ადვილად შესამჩნევია, რომ y-ის ყოველ მნიშვნელობას (4) ტოლობის მიხედვით ეთანადება x-ის უსასრულოდ მრავალი მნიშვნელობა.

სახელდობრ, $x=k\pi+\alpha$.

სადაც α არის (4) განტოლების ფესვი $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში, ხოლო $k=0, \pm 1, \pm 2\ldots$ იმისათვის, რომ $\operatorname{tg} x$ ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია ცალსახად იყოს განსაზღვრული, საჭიროა (4) განტოლებაში x განვიხილოთ ისეთ შუალედში, სადაც $\operatorname{tg} x$ იღებს ერთმანეთისაგან განსხვავებულ მნიშვნელობებს. ასეთ შუალედად ავიღოთ $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. ამ შუალედში $\operatorname{tg} x$ ფუნქცია ზრდადია და ის მხოლოდ ერთხელ მიიღებს ყველა მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია $(-\infty, +\infty)$ შუალედში.

ამრიგად, y-ის ყოველ მნიშვნელობას $(-\infty, \infty)$ შუალედიდან შეესაბამება x-ის სრულიად გარკვეული მნიშვნელობა $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედიდან, რომლის ტანგენსიც y-ის ტოლია.

ე. ი. $y=\operatorname{tg} x$ ამყარებს ურთიერთცალსახა დამოკიდებულებას x და y ცვლადებს შორის, თუ $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ ინტერვალში არსებობს (4) ფუნქციის შებრუნებული ცალსახა ფუნქცია, რომელიც შემდეგნაირად აღინიშნება:

$$x=\operatorname{arc\,tg} y$$

ანუ $y=\operatorname{arc\,tg} x$.

განსაზღვრა. x რიცხვის არკტანგენსი ეწოდება y რკალს, რომლის ტანგენსი არის x, როცა $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$, ე. ი.

$$\operatorname{tg} y=x.$$

$y=\operatorname{arc\,tg} x$ ფუნქციის განსაზღვრის არე არის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო ცვლილების არე $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედი:

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg} x<\frac{\pi}{2}$$

განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)=x$$

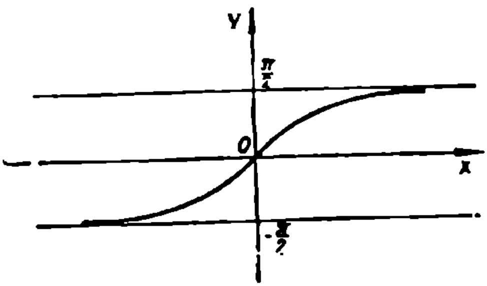
სადაც x ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია და $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)=x$, თუ $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

$y=\text{arc tg}\, x$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $y=\text{tg}\, x$ ფუნქციის გრაფიკისა $y=x$ წრფის მიმართ, სადაც $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$. $y\leqslant\text{arc tg}\, x$ ფუნქცია, ისე როგორც $y=\text{tg}\, x$, კენტია და მისი გრაფიკის სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ (ნახ. 128).

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. $\text{arc tg}\, 1=\frac{\pi}{4}$; 2. $\text{arc tg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$

1. აქვს თუ არა აზრი შემდეგ გამოსახულებებს:



ნახ. 128.

$$\text{arc tg}\, 3; \quad \text{arc tg}\, 2; \quad \text{arc tg}\, \frac{a^2}{a^2+1};$$

$$\text{arc tg}(\sqrt{2}\pm 1)^2?$$

2. იპოვეთ მოცემული ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია და აჩვენეთ არგუმენტის როგორი მნიშვნელობისათვის აქვს აზრი ამ შებრუნებულ ფუნქციებს.

$$x=\frac{1}{5}\,\text{tg}\,\alpha; \qquad x=4\,\text{tg}\,\alpha.$$

3. იპოვეთ:

$$\text{arc tg}\left(\text{tg}\,\frac{\pi}{4}\right); \quad \text{arc tg}\left[\text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]; \quad \text{tg}\left(\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right);$$

$$\text{tg}\left[\text{arc tg}\,(-\sqrt{3})\right].$$

4. შემდეგი ტოლობებიდან გამოსახეთ x, როგორც y-ის ფუნქცია:

$$y=2\,\text{arc tg}\,3x; \quad y=\frac{2}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{2}; \quad y=\sqrt{2}\,\text{arc tg}\,\sqrt{3}\,x;$$

$$y=\frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

IV. $y=\text{ctg}\, x$ ფუნქცია ამყარებს ურთიერთცალსახა დამოკიდებულებას x და y ცვლადებს შორის $0<x<\pi$ შუალედში, მაშასადამე, ამ ინტერვალში არსებობს $y=\text{ctg}\, x$ ფუნქციის შებრუნებული ცალსახა ფუნქცია, რომელიც აღინიშნება შემდეგნაირად:

$$y=\text{arc ctg}\, x.$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. x რიცხვის არკკოტანგენსი ეწოდება y რკალს ($0<y<\pi$), რომლის კოტანგენსი არის x; $\text{ctg}\, y=x$.

$y=\text{arc ctg}\, x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, ხოლო ცვლილების არეს $0<y<\pi$ შუალედი.

ამრიგად,

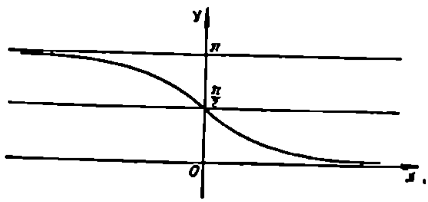
$$0<\operatorname{arc\,ctg} x<\pi.$$

$\operatorname{arc\,ctg} x$ ფუნქციის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x)=x,$$

სადაც x ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლიდან, აგრეთვე

$$\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{ctg} x)=x, \text{ თუ } 0<x<\pi.$$



ნახ. 129.

$y=\operatorname{arc\,ctg} x$ ფუნქციის გრაფიკი ემთხვევა $x=\operatorname{ctg} y$ ფუნქციის გრაფიკს $0<y<\pi$ შუალედში (ნახ. 129).

ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $y=\operatorname{ctg} x$ ფუნქციის გრაფიკისა $y=x$ წრფის მიმართ. $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ არ წარმოადგენს არც ლუწ და არც კენტ ფუნქციას, მისთვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\operatorname{arc\,ctg}(-x)=\pi-\operatorname{arc\,ctg} x.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

$$\operatorname{arc\,tg}(1)=\frac{\pi}{4}; \quad \operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6} \text{ და ა. შ.}$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი.

ა) (ზეპირად) გამოიანგარიშეთ შემდეგი გამოსახულებანი:

1. $y=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}\pm\operatorname{arc\,tg} 1;$

2. $y=2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{3}+\operatorname{arc\,tg} 1;$

3. $y=\arcsin\frac{1}{2}+2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2};$

4. $y=3\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-\arccos\frac{1}{2};$

5. $y=\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$

6. $y=\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}\right);$

7. $y=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3};$

8. $y=3\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{3};$

9. $y=\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$

10. $y=\sin\left[\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})\right];$

ბ) შეამოწმეთ შემდეგ ტოლობათა მართებულობა:

1. $1{,}5 \operatorname{arc} \sin \frac{1}{2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1;$

2. $\operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arc} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{arc} \sin 1;$

3. $3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arc} \sin 1;$

4. $\frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{arc} \cos 0° = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{3}.$

§ 102. ძირითადი ფორმულები

1. დავამტკიცოთ შემდეგი იგივობები:

$$\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2}, \quad (x) \leqslant 1 \tag{1}$$

და

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

ჯერ დავამტკიცოთ პირველი იგივობის მართებულობა.

ვთქვათ,

$$\operatorname{arc} \sin x = \alpha, \tag{3}$$

საიდანაც ცხადია, რომ $x = \sin \alpha$ და

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

(4) გავამრავლოთ (—1)-ზე მივიღებთ:

$$\frac{\pi}{2} \geqslant -\alpha \geqslant -\frac{\pi}{2},$$

ანუ რაც იგივეა:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant -\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

ამ უკანასკნელიდან

$$0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \pi.$$

დაყვანის ფორმულების გამოყენებით დავწერთ:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = x.$$

რადგანაც $\frac{\pi}{2} - \alpha$ რკალი ეკუთვნის $[0, \pi]$ შუალედს, ამიტომ

$$\operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2} - \alpha. \tag{6}$$

(3) და (6) ტოლობების შეკრება გვაძლევს

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

ანალოგიური მსჯელობით დაამტკიცეთ (2) ტოლობის მართებულობა.

§ 108. ნებისმიერი შებრუნებული ტრიგონომეტრიული ფუნქციის გამოსახვა სხვა ფუნქციებით (ძირითადი ტოლობები)

I. arc sin x-ის გამოსახვა არკკოსინუსით, არკტანგენსით და არკკოტანგენსით. ვთქვათ,

$$\sin\alpha=x \qquad (0<x\leqslant 1).$$

მაშინ

$$\cos\alpha=\sqrt{1-x^2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{1}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

(1) ტოლობები ტოლძალოვანია შემდეგი ტოლობებისა:

$$\alpha=\arcsin x.$$

$$\alpha=\arccos\sqrt{1-x^2},$$

$$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2}$$

$$\alpha=\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

როგორც ვხედავთ, (2) ტოლობის მარცხენა ნაწილები ტოლია, ამიტომ ტოლი იქნება მარჯვენა ნაწილებიც:

$$\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

მაგალითი:

$$\arcsin\frac{2}{3}=\operatorname{ar\,cos}\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1-\frac{4}{9}}}=$$

$$=\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-\frac{4}{9}}}{\frac{2}{3}},$$

ანუ

$$\arcsin\frac{2}{3}=\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}=\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{5}}{5}=\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

II. arc tg x-ის გამოსახვა სხვა შებრუნებული ფუნქციების საშუალებით. ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია

$$\operatorname{tg} \alpha = x \left(x > 0 \text{ და } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right).$$

მაშინ, ცხადია, რომ

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{x},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},} \tag{3}$$

ამავე გზით გავიგებთ:

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},} \tag{4}$$

ამიტომ

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} x;$$

$$\alpha = \operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{x};$$

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$\alpha = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

მაშასადამე,

$$\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{x} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{2}{5} = \operatorname{arc\,ctg} \frac{5}{2} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{25}}} =$$

$$= \arcsin \frac{\frac{2}{5}}{\sqrt{1 + \frac{4}{25}}}.$$

ანუ

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{2}{5} = \operatorname{arc\,ctg} \frac{5}{2} = \arccos \frac{5}{\sqrt{29}} = \arcsin \frac{2}{\sqrt{29}}.$$

ზემოთ მოყვანილი ხერხით ადვილად შეიძლება ვაჩვენოთ შემდეგი ტოლობათა სამართლიანობა:

$$\operatorname{arc}\cos x = \operatorname{arc}\sin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arc}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

და

$$\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{x} = \operatorname{arc}\sin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arc}\cos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x>0)$$

ამ ტოლობათა დამტკიცება ევალება მოსწავლეებს.

* * *

შებრუნებულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის დამოკიდებულება შეიძლება გავაერთიანოთ შემდეგი სახით:

$$\operatorname{arc}\sin x = \begin{cases} \operatorname{arc}\cos\sqrt{1-x^2} & x\in[0,1] \\ -\operatorname{arc}\cos\sqrt{1-x^2} & x\in[-1,0] \\ \operatorname{arc}\operatorname{tg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & x\in[-1;1] \\ \operatorname{arc}\operatorname{ctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} & x\in[0,1] \\ -\pi+\operatorname{arc}\operatorname{ctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} & x\in[-1,0] \end{cases} \tag{5}$$

$$\operatorname{arc}\cos x = \begin{cases} \operatorname{arc}\sin\sqrt{1-x^2} & x\in[0,1] \\ \pi-\operatorname{arc}\sin\sqrt{1-x^2} & x\in[-1,0] \\ \operatorname{arc}\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} & x\in[0,1] \\ \pi+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} & x\in[-1,0] \\ \operatorname{arc}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & x\in[-1,1] \end{cases} \tag{6}$$

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = \begin{cases} \operatorname{arc}\sin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} & x\ \text{ნებისმიერია.} \\ \operatorname{arc}\cos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & x\geqslant 0 \\ -\operatorname{arc}\cos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & x<0 \\ \operatorname{arc}\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x} & x<0 \\ -\pi+\operatorname{arc}\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x} & x<0 \end{cases} \tag{7}$$

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \begin{cases} \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & x \geqslant 0 \\ \pi - \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & x < 0 \\ \arccos \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} & x \text{ ნებისმიერია} \\ \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x} & x > 0 \\ \pi + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x} & x < 0 \end{cases} \tag{8}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ

$$\sin(\arcsin x + \arcsin y).$$

აღვნიშნოთ

$$\alpha = \arcsin x \quad \text{და} \quad \beta = \arcsin y.$$

თუ გამოვიყენებთ

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

ფორმულას, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sin(\arcsin x + \arcsin y) = \sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin y) +$$
$$+\cos(\arcsin x)\cdot\sin(\arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

ამრიგად,

$$\sin(\arcsin x + \arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \tag{9}$$

ანალოგიური მსჯელობით მიიღება შემდეგი ფორმულები:

$$\sin(\arccos x + \arccos y) = y\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-y^2} \tag{10}$$

$$\sin(\arcsin x + \arccos y) = xy + \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} \tag{11}$$

$$\cos(\arcsin x \pm \arcsin y) = \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} \pm xy, \tag{12}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x \pm \operatorname{arc\,tg} y) = \frac{x \pm y}{1 \mp xy}. \tag{13}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ

$$\sin(2\arcsin x)$$

თუ ვისარგებლებთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის ცნობილი დამოკიდებულებით

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}, \tag{14}$$

მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2};$$

ამრიგად,

$$\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ $\sin(2 \operatorname{arc\,tg} x)$.

(14) ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\sin(2 \operatorname{arc\,tg} x)=\frac{2 \operatorname{arc\,tg} x}{1+\operatorname{arc\,tg}^2 x}=\frac{2x}{1+x^2}.$$

ამრიგად,

$$\sin(2 \operatorname{arc\,tg} x)=\frac{2x}{1+x^2}. \tag{16}$$

ასევე, რადგან

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

ამიტომ

$$\cos(2 \arcsin x)=1-2x^2, \tag{17}$$

$$\cos(2 \arccos x)=2x^2-1, \tag{18}$$

$$\cos(2 \operatorname{arc\,tg} x)=\frac{1-x^2}{1+x^2} \tag{19}$$

რადგან

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$

ამიტომ

$$\operatorname{tg}(2 \operatorname{arc\,tg} x)=\frac{2x}{1-x^2} \quad |x|\neq 1. \tag{20}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გამოვთვალოთ $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)$.

თუ გამოვიყენებთ $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ ფორმულას, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-1+x^2}{2(1+\sqrt{1-x^2})}}=$$

$$=\pm\frac{|x|}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}.$$

ამრიგად,

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\pm\frac{|x|}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}. \tag{21}$$

რადგანაც $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)$ ფუნქციის ნიშანი ემთხვევა x-ის ნიშანს, ამიტომ

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\frac{x}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}};$$

ასევე, თუ გამოვიყენებთ ფორმულებს:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

შეგვიძლია გამოვთვალოთ:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc}\cos x\right)=\sqrt{\frac{1-x}{2}}\tag{22}$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc}\cos x\right)=\sqrt{\frac{1+x}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc}\cos x\right)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc}\operatorname{tg}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}.$$

მეტად დიდი პრაქტიკული ღირებულება აქვს ამ ფორმულების დამახსოვრებას, რომელიც მოცემულია შემდეგ ცხრილში:

α	arc sin x	arc cos x	arc tg x	arc ctg x
sin α	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
cos α	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
tg α	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$		$\frac{1}{x}$
ctg α	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x

აღნიშნული გვქონდა, რომ $y=\sin x$ $(-\infty<x<\infty)$ ფუნქცია არ ამყარებს ურთიერთცალსახა დამოკიდებულებას x და y ცვლადებს შორის, სწორედ ამიტომ მისი ცალსახა შებრუნებული ფუნქციის განმარტების მიზნით განვიხილოთ $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტი.

ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია

$$y=\sin x,\qquad -\infty<x<\infty$$

ყველა იმ კუთხის (რკალის) სიმრავლეს, რომლის სინუსი მოცემული m რიცხვის $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ ტოლია, აღნიშნავენ Arc sin m-ით. ასე რომ,

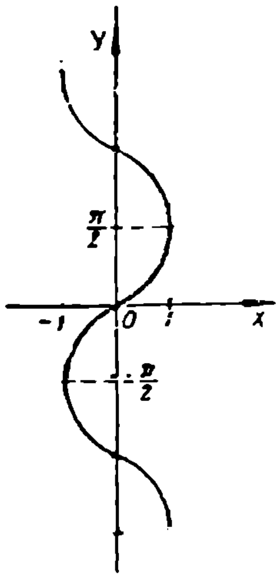
$$y=\operatorname{Arc}\sin m\tag{23}$$

ფუნქცია ყოველ x $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ რიცხვს შეუსაბამებს მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლეს, ეს სიმრავლე გამოისახება შემდეგნაირად:

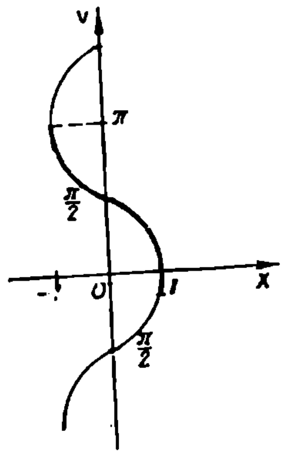
$$\mathrm{Arc}\sin x=k\pi+(-1)^k\arcsin x \tag{24}$$

როგორც ვხედავთ, $\arcsin x$ არის $\mathrm{Arc}\sin x$-ის ის მნიშვნელობა, რომელიც მიიღება (24)-დან, როცა $k=0$.

$\arcsin x$-ს $\arcsin x$ ფუნქციის მთავარ მნიშვნელობას უწოდებენ. (23) ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად ვიღებთ $y=\sin x$ $(-\infty<x<\infty)$ ფუნქციის გრაფიკს და ვაგებთ მის სიმეტრიულ წირს $y=x$ წრფის მიმართ. ნახაზზე (ნახ. 130) გამოყოფილია $y=\arcsin x$ ფუნქციის გრაფიკი.



ნახ. 130.



ნახ. 131.

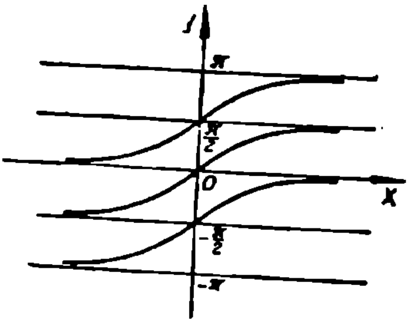
ანალოგიურად განიმარტება და აიგება $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}\, x$, $y=\mathrm{ctg}\, x$ ფუნქციათა შებრუნებული ფუნქციების $y=\arccos x$ და $y=\mathrm{arc\,tg}\, x$ გრაფიკები.

$y=\mathrm{Arc}\cos x$ არის ყველა იმ კუთხის (რკალის) სიმრავლე, რომლის კოსინუსიც მოცემული x რიცხვის ტოლია. $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

ყველა იმ კუთხის (რკალის) სიმრავლე, რომელიც x რიცხვის ტოლია, ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\mathrm{Arc}\cos x=2k\pi\pm\arccos x.$$

ცხადია, $\arccos x$ არის $\mathrm{Arc}\cos x$-ის ის მნიშვნელობა, როცა $k=0$. ამ მნიშვნელობას $\mathrm{Arc}\cos x$-ის მთავარ მნიშვნელობას უწოდებენ. 131-ე ნახაზზე მოცემულია $y=\mathrm{Arc}\cos x$-ის გრაფიკი, მასზე გამოყოფილია $\arccos x$-ის მნიშვნელობა.



Нах. 132.

$y = \mathrm{Arc\,tg}\, x$ არის ყველა იმ კუთხის (რკალის სიმრავლე), რომლის ტანგენსი მოცემული x ნამდვილი რიცხვის ტოლია (ნახ. 132).

ყველა ის კუთხე (რკალი), რომელთა ტანგენსი მოცემული x რიცხვის ტოლია, ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\mathrm{Arc\,tg}\, x = k\pi + \mathrm{arc\,tg}\, x$$

$\mathrm{arc\,tg}\, x$-ს $y = \mathrm{Arc\,tg}\, x$ ფუნქციის მთავარი მნიშვნელობა ეწოდება.

§ 104. შებრუნებულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა შემცველი გამოსახულებები

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\sin(\mathrm{arc\,cos}\, 0,5)$.

ვთქვათ,

$$\alpha = \mathrm{arc\,cos}\, 0,5,$$

მაშინ

$$\cos\alpha = 0,5$$

და

$$\alpha = \frac{\pi}{3}.$$

გვექნება

$$\sin(\mathrm{arc\,cos}\, 0,5) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ამრიგად,

$$\sin(\mathrm{arc\,cos}\, 0,5) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $\cos\left(\frac{1}{2}\mathrm{arc\,sin}\, 1\right)$.

აღვნიშნოთ

$$\frac{1}{2}\mathrm{arc\,sin}\, 1 = \alpha,$$

მაშინ

$$\mathrm{arc\,sin}\, 1 = 2\alpha$$

და

$$\sin 2\alpha = 1, \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

ამიტომ

$$\cos\left(\frac{1}{2}\mathrm{arc\,sin}\, 1\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ამრიგად,

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin 1\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ

$$\operatorname{tg}\left[\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$$

ალვნიშნოთ

$$\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\alpha,$$

მაშინ

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\alpha,$$

და

$$\cos 3\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad 3\alpha=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4},\qquad \alpha=\frac{\pi}{4}.$$

ამიტომ

$$\operatorname{tg}\left[\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$$

ამრიგად,

$$\operatorname{tg}\left[\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=1.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ

$$\sin\left(2\operatorname{arctg} 1-\arccos\frac{5}{19}\right).$$

ვთქვათ,

$$2\operatorname{arctg} 1=\alpha,\quad \arccos\frac{5}{19}=\beta.$$

მაშინ

$$\operatorname{arctg} 1=\frac{\alpha}{2},\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1,\quad \frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{4},\quad \alpha=\frac{\pi}{2}.$$

გვექნება

$$\sin\left(2\operatorname{arctg} 1-\arccos\frac{5}{19}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{5}{19}\right)=$$

$$=\cos\left(\arccos\frac{5}{19}\right)=\frac{5}{19}.$$

ამრიგად,

$$\sin\left(2\operatorname{arctg} 1-\arccos\frac{5}{19}\right)=\frac{5}{19}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გამოვთვალოთ

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\right).$$

აღვნიშნოთ

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}=\alpha, \quad \arccos\frac{3}{4}=\beta.$$

მაშინ

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2} \quad \text{და} \quad \cos\beta=\frac{3}{4}.$$

აგრეთვე,

$$2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}=2\alpha \quad \text{და} \quad \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}=\frac{\beta}{2}.$$

ახლა მაგალითი შეიძლება გადაიწეროს შემდეგნაირად:

$$\sin\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{ars\,cos}\frac{3}{4}\right)=\sin\left(2\alpha-\frac{\beta}{2}\right).$$

მაგრამ

$$\sin\left(2\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\sin 2\alpha\cos\frac{\beta}{2}-\cos 2\sin\frac{\beta}{2}.$$

გამოვთვალოთ ცალ-ცალკე $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin\frac{\beta}{2}$ და $\cos\frac{\beta}{2}$. რადგანაც α და β მახვილი კუთხეებია, ამიტომ

$$\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\sin 2\alpha=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5},$$

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{3}{5},$$

$$\cos 2\alpha=\frac{3}{5},$$

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{4}}{2}}=\frac{1}{4}\sqrt{2},$$

$$\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{4}}{2}}=\frac{1}{4}\sqrt{14},$$

საბოლოოდ,

$$\sin\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\right)=\frac{4}{5}\,\frac{1}{4}\sqrt{14}-\frac{3}{5}\,\frac{1}{4}\sqrt{2}=$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{14}-\frac{3}{20}\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{14}-3\sqrt{2}}{20}\approx 0{,}21.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. გამოვთვალოთ

$$\cos\,[3\ \operatorname{arc\,ctg}(\sqrt{2}+1)-\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}-1)]. \tag{1}$$

ვინაიდან $\sqrt{2}+1$ და $\sqrt{2}-1$-დან თითოეული მეტია ნულზე (დადებითია), ამიტომ

$$\operatorname{arc\,ctg}(\sqrt{2}+1) \text{ და } \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}-1)$$

რკალები ეკუთვნის 1 მეოთხედს.

გამოვთვალოთ თითოეული ამ რკალის გაორკეცებული მნიშვნელობების ტანგენსები:

$$\operatorname{tg}\left[2\operatorname{arc\,ctg}(\sqrt{2}+1)\right]=\operatorname{arc\,tg}\frac{2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}}{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}}{\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2-1}{(\sqrt{2}+1)^2}}=$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{2(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)(2+2\sqrt{2})}=\operatorname{arc\,tg}1.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. 2 arc ctg $(\sqrt{2}+1)$ კუთხე (რკალი), როგორც I მეოთხედის კუთხის (რკალის) გაორკეცებული, შეიძლება ეკუთვნოდეს მხოლოდ I მეოთხედს, ვინაიდან მისი ტანგესი აღმოჩნდა დადებითი.

ამიტომ

$$(2\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{2}+1)=\frac{\pi}{4}$$

და

$$\operatorname{arc\,ctg}(\sqrt{2}+1)=\frac{\pi}{8}. \tag{2}$$

ასევე გამოვთვალოთ

$$\operatorname{tg}\,[2\ \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}-1)].$$

$$2\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}-1)=\operatorname{arc\,tg}\frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-2+2\sqrt{2}-1}=$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)}=\operatorname{arc\,tg}1=\frac{\pi}{4},$$

საიდანაც

$$\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}-1)=\frac{\pi}{8}$$

და

$$\cos\left[3\operatorname{arc\,ctg}(\sqrt{2}+1)-\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}-1)\right]=\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ამრიგად.

$$\cos\left[3\,\mathrm{arc\,ctg}(\sqrt{2}+1)-\mathrm{arc\,tg}(\sqrt{2}-1)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7.

გამოვთვალოთ

$$\mathrm{tg}\left(5\arccos\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right).$$

ვინაიდან

$$0<\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}<1,$$

ამიტომ

$$\arccos\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ და } \arcsin\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

რკალები ეკუთვნის I მეოთხედს. გამოვთვალოთ ამ რკალების გაორკეცებული მნიშვნელობების კოსინუსი და სინუსი. ვისარგებლოთ ცნობილი ფორმულებით:

$$\cos(2\arccos x)=2x^2-1 \text{ და } \cos(2\arcsin x)=1-2x^2$$

$$\cos\left(2\arccos\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)=2\cos^2\left(\arccos\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{4}-1=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

და

$$\cos\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)=1-2\sin^2\left(\arcsin\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)=$$

$$=1-2\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

რადგან

$$2\arcsin\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\quad\in(0,\ \pi)$$

და

$$2\arccos\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\quad\in(0,\ \pi),$$

ამიტომ

$$\arccos\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}=\frac{\pi}{8},\quad \text{და}\quad \arcsin\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{8}=\frac{3\pi}{8}.$$

ამრიგად,

$$\mathrm{tg}\left(5\arccos\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)=\mathrm{tg}\left(\frac{5\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}\right)=\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}=1.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 8. გამოვთვალოთ

$$\operatorname{tg}\left[2\arcsin 0{,}6+\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right]. \tag{1}$$

აღვნიშნოთ

$$\alpha=2\arcsin 0{,}6 \quad \text{და} \quad \beta=\arccos\left(-\frac{12}{13}\right).$$

თუ ვისარგებლებთ ფორმულით

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},$$

მივიღებთ

$$\operatorname{tg}\left[2\arcsin 0{,}6+\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right]=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}(2\arcsin 0{,}6)+\operatorname{tg}\left[\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right]}{1-\operatorname{tg}(2\arcsin 0{,}6)\cdot\operatorname{tg}\left[\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right]}$$

გამოვთვალოთ ცალ-ცალკე:

$$\operatorname{tg}(2\arcsin 0{,}6) \quad \text{და} \quad \operatorname{tg}\left[\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right]$$

$$\operatorname{tg}(2\arcsin 0{,}6)=\frac{2\operatorname{tg}(\arcsin 0{,}6)}{1-\operatorname{tg}^2(\arcsin 0{,}6)}. \tag{3}$$

მაგრამ

$$\operatorname{tg}(\arcsin 0{,}6)=\frac{0{,}6^{*}}{\sqrt{1-0{,}6^2}}=\frac{0{,}6}{0{,}8}=\frac{3}{4} \quad \text{და} \quad 1-\operatorname{tg}^2(\arcsin 0{,}6)=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}.$$

ამიტომ

$$\operatorname{tg}(2\arcsin 0{,}6)=\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{\frac{7}{16}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}}=\frac{48}{14}=\frac{24}{7}.$$

ამრიგად,

$$\operatorname{tg}(2\arcsin 0{,}6)=\frac{24}{7}. \tag{4}$$

$$\operatorname{tg}\left[\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right]=-\frac{\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}}{\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12}.^{**} \tag{5}$$

---

* $\operatorname{tg}(\arcsin x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

** $\operatorname{tg}(\arccos x)=-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

(4) და (5)-ს თუ შევიტანთ (2)-ში გვექნება

$$\operatorname{tg}\left[2\arcsin 0{,}6+\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right]=\frac{\frac{24}{7}+\left(-\frac{5}{12}\right)}{1-\frac{24}{7}\cdot\left(-\frac{5}{12}\right)}=$$

$$=\frac{253}{204}=1\frac{49}{204}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 9. გამოვთვალოთ

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}8).$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}8)\neq 8$. როგორც განმარტებიდან ვიცით $\operatorname{arc\,tg}x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, ამიტომ $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}8)$ უნდა ეკუთვნოდეს $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედს, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}8)\neq 8,$$

ასეთ შემთხვევაში ვიქცევით შემდეგნაირად:

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $\alpha=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}8)$ და ავიღოთ ორივე ნაწილის ტანგენსი:

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}[\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}8)],$$

სადაც

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}8 \qquad [\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}m)=m].$$

ორი კუთხის (რკალის) ტანგენსების ტოლობიდან დავასკვნით, რომ

$$\alpha=k\pi+8;\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$$

α რიცხვი რომ ეკუთვნოდეს $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედს, საჭიროა გვქონდეს:

$$-\frac{\pi}{2}<k\pi+8<\frac{\pi}{8},$$

საიდანაც

$$\frac{-\frac{\pi}{2}-8}{\pi}<k<\frac{\frac{\pi}{2}-8}{\pi}.$$

აქედან კი

$$k=-3.$$

მაშასადამე,

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}8)=8-3\pi.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 10. შევამოწმოთ შემდეგი ტოლობის მართებულობა:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{11}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\alpha = \operatorname{arc} tg \frac{2}{11}, \quad \beta=\operatorname{arc} tg \frac{1}{7},$$

საიდანაც

$$tg\, \alpha=\frac{2}{11}, \quad tg\, \beta = \frac{1}{7}, \text{ ე. ი. } \alpha<\frac{\pi}{4}, \quad \beta < \frac{\pi}{4} \text{ და } \alpha + 2\beta<\frac{\pi}{2}.$$

განვიხილოთ მარცხენა ნაწილის ტანგენსი

$$tg \left(\operatorname{arc} tg \frac{2}{11} + 2 \operatorname{arc} tg \frac{1}{7}\right)=tg\, (\alpha + 2\beta) = \frac{tg\, \alpha + tg\, 2\beta}{1-tg\, \alpha \cdot tg 2\, \beta}$$

მაგრამ

$$tg\, 2\, \beta = \frac{2\, tg\, \beta}{1-tg^2\, \beta} = \frac{2 \cdot \frac{1}{7}}{1-\frac{1}{49}} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{48}{49}} = \frac{2 \cdot 49}{48 \cdot 7} = \frac{7}{24}.$$

ამიტომ

$$tg \left(\operatorname{arc} tg \frac{2}{11} + 2 \operatorname{arc} tg \frac{1}{7}\right) = \frac{\frac{2}{11}+\frac{7}{24}}{1-\frac{2}{11} \cdot \frac{7}{24}} = \frac{\frac{48+77}{11 \cdot 24}}{\frac{11 \cdot 24 - 2 \cdot 7}{11 \cdot 24}} =$$

$$= \frac{125}{250} = \frac{1}{2}.$$

მარჯვენა ნაწილი გვაძლევს

$$tg \left(\operatorname{arc} tg \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

ორი მახვილი კუთხის ტანგენსების ტოლობიდან გამოდის თვით კუთხეთა ტოლობა, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 14. შევამოწმოთ შემდეგი ტოლობის მართებულობა:

$$ctg \left(\frac{1}{8} \operatorname{arc} ctg a \right) - tg \left(\frac{1}{8} \operatorname{arc} ctg a \right) - 2\, tg \left(\frac{1}{4} \operatorname{arc} ctg a \right) -$$

$$- 4\, tg \left(\frac{1}{2} \operatorname{arc} tg\, a \right) = 8a.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\frac{1}{8} \operatorname{arc} ctg\, a=\alpha, \quad \operatorname{arc} ctg\, a=8\alpha, \quad ctg\, 8\alpha=a.$$

გვექნება:

$$ctg\, \alpha - tg\, \alpha - 2\, tg\, 2\, \alpha - 4\, tg\, 4\alpha = 8\, ctg\, 8\alpha.$$

კავამარტივოთ ამ გამოსახულების მარცხენა ნაწილი:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-2\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}-4\frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha-\sin^2 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha-2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos 4\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos^2 2\alpha\cdot\cos 4\alpha}-$$

$$-\frac{4\cdot\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\sin 4\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cos 4\alpha}=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-\sin^2 2\alpha\cdot\cos 4\alpha-2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha}=$$

$$=\frac{\cos 4\alpha(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha)-\sin^2 4\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha}=\frac{\cos^2 4\alpha-\sin^2 4\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha}=$$

$$=\frac{\cos 8\alpha}{\frac{1}{4}\sin 4\alpha\cdot\cos 4\alpha}=\frac{\cos 8\alpha}{\frac{1}{8}\sin 8\alpha}=8\,\mathrm{ctg}\,8\alpha.$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

გამოთვალეთ:

1. $\sin(\arccos 1+\mathrm{arc\,tg}\,1)$.
2. $\mathrm{arc\,tg}(-\sqrt{3})+\mathrm{arc\,ctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
3. $\cos[3\,\mathrm{arc\,ctg}(\sqrt{2}+1)-\mathrm{arc\,tg}(\sqrt{2}-1)]$
4. $\cos(2\,\mathrm{arc\,ctg}\,0{,}5)=\sin[3\pi-4\,\mathrm{arc\,ctg}\,0{,}(3)]$.

აჩვენეთ შემდეგ ტოლობათა მართებულობა:

1. $2\arccos x=\arccos(2x^2-1),\quad 0\leqslant x\leqslant 1$
2. $\mathrm{arc\,tg}\,1+\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{2}=\mathrm{arc\,tg}\,3$.
3. $\arccos 0{,}6+\arccos 0{,}8=\arccos 0$.
4. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3}\arccos 0=\mathrm{arc\,tg}\sqrt{3}$.
5. $\sin(2\arcsin a)+\sin(2\arccos a)=4a\sqrt{1-a^2},\quad 0<a<1$.

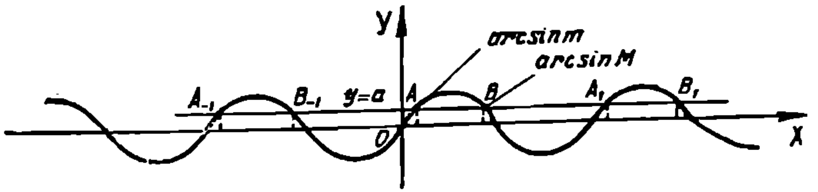
§ 106. ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოხსნა

ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა შესწავლა დავიწყოთ ე. წ. უმარტივესი სახის ტრიგონომეტრიული განტოლებებით.

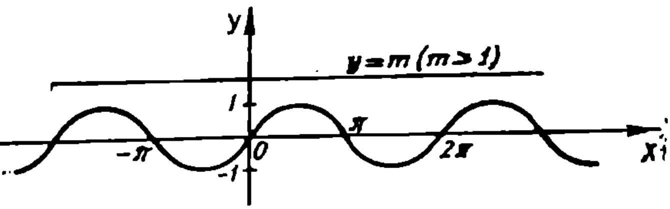
უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებები ეწოდება შემდეგი სახის განტოლებებს

$$\sin x=m;\quad \cos x=m;\quad \operatorname{tg} x=m;\quad \operatorname{ctg} x=m$$

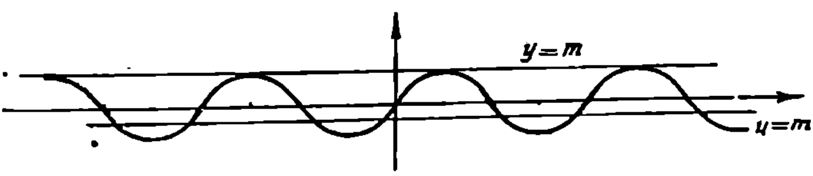
სადაც m მოცემული რიცხვია.



ნახ. 133.



ნახ. 133, ბ.



ნახ. 133, გ.

უმარტივესი სახის ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნა ნიშნავს, ვიპოვოთ ყველა იმ კუთხეთა სიმრავლე, რომელთაც აქვთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მოცემული m მნიშვნელობა.

1. გვაქვს განტოლება $\sin x=m$. თუ $|m|\leqslant 1$. მაშინ როგორც § 92-ში გვქონდა განხილული $\arcsin m$ და $\pi\cdot\arcsin m$ რკალების სინუსებს აქვთ მოცემული m-ის მნიშვნელობა. ამ განტოლების თითოეული ფესვი (კუთხის ან რკალის მნიშვნელობა) შეიძლება განვიხილოთ $y=\sin x$ სინუსოიდის $y=m$ წრფესთან გადაკვეთის რომელიმე წერტილის აბსცისა და, პირიქით, გადაკვეთის ყოველი წერტილის აბსცისა $\sin x=m$ განტოლების ერთ-ერთი ფესვია (ნახ. 133, ა). ზოგადი სა-

ხით, ყველა იმ კუთხის (რკალის) სიმრავლე, რომელთა სინუსი m-ის ტოლია, ჩაიწერება შემდეგნაირად.

$$x=k\pi+(-1)^k\arcsin m \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$$

როცა $|m|>1$, განტოლებას ამონახსნი არ ექნება (ნახ. 133, ბ).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

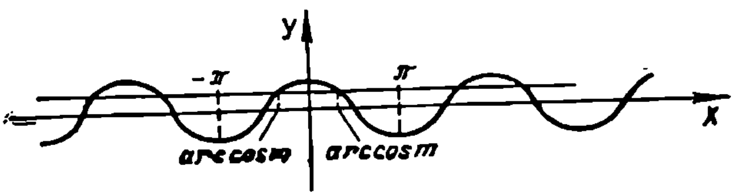
ცხადია, $x_1=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

ამიტომ ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$x_k=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{3} \text{ (რადიანებში)},$$

$$x_k=180^\circ k+(-1)^k 60^\circ \text{ (გრადუსებში)}.$$

2. $\cos x=m$ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა. თუ $|m|\leqslant1$, მაშინ იარსებებს კუთხეები (რკალები) $\arccos m$ და $-\arccos m$, რომელთა კოსინუსს ექნება მოცემული m მნიშვნელობა. $\cos x=m$ განტოლების ფესვი, წინა მაგალითის მსგავსად, შეიძლება განვიხილოთ, როგორც $y=\cos x$ კოსინუსოიდის $y=m$ წრფესთან გადაკვეთის რომელიმე წერტილის აბსცისა და, პირიქით, გადაკვეთის თითოეული წერტილის აბსცისა შეიძლება განვმარტოთ როგორც $\cos x=m$ განტოლების ერთ-ერთი ფესვი. ასე რომ, მოცემული განტოლების ყველა ამონახსნთა სიმრავლე შეადგენს $y=\cos x$ კოსინუსოიდის $y=m$ წრფესთან გადაკვეთის ყველა წერტილის აბსცისათა სიმრავლეს (ნახ. 134).



ნახ. 134.

განტოლების ზოგადი ამონახსნი გამოისახება ფორმულით:

$$x=2k\pi\pm\arccos m \quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$$

თუკი $|m|>1$, განტოლებას ამონახსნი არ ექნება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი:

$$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

$$x_k=2\pi k\pm\frac{\pi}{6} \text{ (რადიანებში)}, \quad x_k=360^\circ k\pm30^\circ \text{ (გრადუსებში)}.$$

3. $\operatorname{tg} x = m$ განტოლება.

როგორც ვიცით, m-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში არსებობს ერთადერთი კუთხე (რკალი) $\operatorname{arc\,tg} m$, რომელსაც მოცემული ტანგენსი აქვს.

ყველა საძიებელი კუთხის (რკალის) მიღება შეიძლება, თუ $\operatorname{arc\,tg} m$ რკალს მივუმატებთ ტანგენსის პერიოდს, აღებულს მთელ რიცხვზე. ასე, რომ, ყველა საძებნი კუთხის (რკალის) სიმრავლე შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი ფორმულით:

$$x = k\pi + \operatorname{arc\,tg} m.$$

მაგალითი: $\operatorname{tg} x = 1$,

$$x = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

ამიტომ $x_k = k\pi + \frac{\pi}{4}$ (რადიანებში); $x_k = k \cdot 180° + 45°$ (გრადუსებში).

4. $\operatorname{ctg} x = m$ განტოლება.

ვინაიდან კუთხეთა ზოგადი გამოსახულება $\operatorname{tg} x$ და $\operatorname{ctg} x$ ფუნქციებისათვის ერთი და იგივეა, ამიტომ $\operatorname{ctg} x = m$ განტოლების ყველა ამონახსნის სიმრავლე ჩაიწერება შემდეგნაირად: (135, ა).

$$x_k = k\pi + \operatorname{arc\,tg} m \text{ (რადიანებში)}.$$

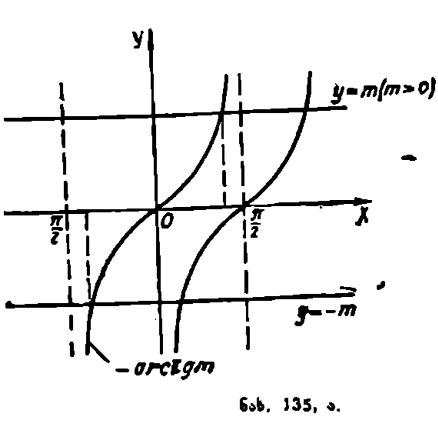
მაგალითი: $\operatorname{ctg} x = -1$.

$$x = \operatorname{arc\,ctg}(-1) = \frac{3\pi}{4},$$

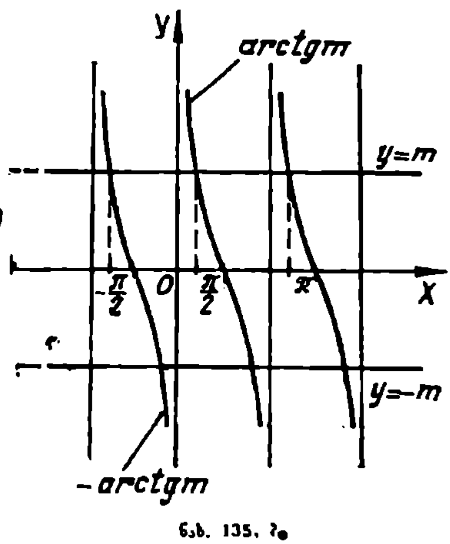
ამიტომ

$$x_k = k\pi + \frac{3\pi}{4} \text{ (რადიანებში)}.$$

$$x_k = 180°k + 135° \text{ (გრადუსებში)}.$$



ნახ. 135, ა.



ნახ. 135, ბ.

უმარტივესი სახის ტრიგონომეტრიული განტოლებათა ამოხსნა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ცხრილით:

განტოლება	ზოგადი ამონახსნი
$\sin x=m$	$x=k\pi+(-1)\arcsin m,\quad \lvert m\rvert\leqslant 1\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$
$\cos x=m$	$x=2k\pi\pm\arccos m,\quad \lvert m\rvert\leqslant 1\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$
$\sin x=m,\quad \cos x=m$	არა აქვთ ამონახსნი, თუ $\lvert m\rvert>1$
$\operatorname{tg} x=m$	$x=k\pi+\operatorname{arc\,tg} m,$ სადაც $-\infty<m<+\infty\quad k=0,\ \pm1,\ \mp2\ldots$
$\operatorname{ctg} x=m$	$x=k\pi+\operatorname{arc\,ctg} m,$ სადაც $-\infty<m<+\infty\quad k>0,\ \pm1,\ \mp2,\ldots$

§ 100. ტრიგონომეტრიულ. განტოლებათა ამოხსნის ზოგიერთი მაგალითი

ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოხსნისას ჩვენი მიზანი იქნება იგივური გარდაქმნების საშუალებით დავიყვანოთ ისინი ჩვენთვის უკვე ცნობილ უმარტივესი სახის განტოლებაზე; მაგრამ აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ ყოველი იგივური გარდაქმნისას საჭიროა გავითვალისწინოთ, ხომ არ დაუკარგავს აზრს მოცემულ განტოლებას ესა თუ ის გარდაქმნა? შესაძლოა იგივური გარდაქმნების დროს ადგილი ექნეს დამატებით ამონახსნების წარმოშობას ან ფესვების დაკარგვის შემთხვევას.

პირველს ადგილი ექნება, თუ უცნობის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე გაფართოვდა, მეორეს — თუ ეს სიმრავლე შევიწროვდა. მანამ, სანამ ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ტიპებს და მათი ამოხსნის სპეციალურ ხერხებს განვიხილავდეთ, განვიხილოთ ტრიგონომეტრიული განტოლებათა ამოხსნის რამდენიმე მარტივი მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ განტოლება:

$$\sin 2x\cdot\cos x=\cos x.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა

გადავიტანოთ $\cos x$ განტოლების მარცხენა ნაწილში და მიღებული გამოსახულებიდან გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ $\cos x$, გვექნება:

$$\cos x(\sin 2x-1)=0$$

ორი გამოსახულების ნამრავლი მაშინ და მხოლოდ მაშინ უდრის ნულს, როცა ერთი თანამამრავლი მაინც უდრის ნულს.

აქედან ან $\cos x=0$ ან $\sin 2x-1=0.$

თუ $\cos x=0$, მაშინ $x=\frac{\pi}{2}$ და ზოგად ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე

$$\boxed{x_k=k\pi+\frac{\pi}{2}} \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots).$$

თუკი $2x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{4}$ და

$$\boxed{x_k=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}} \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots).$$

მოცემული განტოლება რომ შეგვეკვეცა $\cos x$-ზე, მაშინ მივიღებდით $\sin 2x=1$ განტოლებას და ამით დავკარგავდით $x_k=k\pi+\frac{\pi}{2}$ სახის ფესვებს.

2. მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ განტოლება

$$2\cos^2 x+3\cos x=2.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\cos x=t$ და 2 გადმოვიტანოთ განტოლების მარცხენა ნაწილში, მივიღებთ:

$$2t^2+3t-2=0,$$

საიდანაც,

$$t=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm5}{4},\quad t_1=\frac{1}{2};\quad t_2=-2.$$

ვინაიდან $\cos x\neq-2$, ამიტომ გვექნება:

$$\cos x=\frac{1}{2}.$$

საიდანაც,

$$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ამოვხსნათ განტოლება

$$2\cos^2 x=3\sin x.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა

$$2(1-\sin^2 x)-3\sin x=0,$$
$$2-2\sin^2 x-3\sin x=0.$$

აღვნიშნოთ $\sin x=t$, გვექნება:

$$2t^2+3t-2=0.$$

$$t=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm5}{4},\quad t_1=\frac{1}{2};\quad t_2=-2.$$

$$\sin x\neq-2,\quad \text{ე. ი. } \sin x=\frac{1}{2},$$

საიდანაც $x=\frac{\pi}{6}$ და $x_k=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,)\ldots$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.

ამოვხსნათ განტოლება

$$\frac{\sin 2x}{\sin x}=0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა

როგორც ვიცით, წილადი იმ შემთხვევაში შეიძლება უდრიდეს 0-ს, როცა მისი მრიცხველი ეტოლება 0-ს,

ე. ი.

$$\sin x=0,$$

საიდანაც $2x=k\pi$,

$$x=k\cdot\frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

მოცემული განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეს უნდა ჩამოშორდეს ის ფესვები, რომელთათვისაც მნიშვნელი, ე. ი. $\sin x$ იქცევა ნულად (ვინაიდან წილადს აზრი არა აქვს, როცა მნიშვნელი უდრის ნულს). ეს მოხდება მაშინ, როცა x-ს ექნება π-ს ჯერადი მნიშვნელობები. x-ის ეს მნიშვნელობები მიიღება მაშინ, როცა k არის ლუწი რიცხვი (ეს ფესვები იქნება გარეშე ფესვები).

ამრიგად, მოცემული განტოლების ფესვები გამოისახება შემდეგნაირად:

$$x=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ამოვხსნათ განტოლება

$$\cos x+\sin x=1.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა

კოსინუსი გამოვსახოთ სინუსით:

$$\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\sin x=t$, მივიღებთ:

$$t\pm\sqrt{1-t^2}=1.$$

რადიკალისაგან განთავისუფლების შემდეგ გვექნება:

$$2t^2-2t=0, \text{ საიდანაც } t_1=0,\ t_2=1.$$

ე.

$$\sin x=0 \text{ და } \sin x=1.$$

ამ უკანასკნელ განტოლებათა ამოხსნა იძლევა ამონახსნთა ორ სერიას:

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \quad \text{და} \quad x=k\pi \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2\ldots),$$

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა. ამონახსნთა პირველი სერიისათვის გვექნება:

$$\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad \cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

რაც განტოლებას აკმაყოფილებს.

ამონახსნთა მეორე სერიისათვის:

$$\sin k\pi=0, \quad \cos k\pi= \begin{cases} 1, & \text{თუ } k \text{ ლუწია.} \\ -1, & \text{თუ } k \text{ კენტია.} \end{cases}$$

როგორც ვხედავთ, განტოლება კმაყოფილდება მხოლოდ $k=2n$ (ლუწი) მნიშვნელობებისათვის, მეორე სერიის ამონახსნები, როცა $k=2n+1$, გარეშეა, ამრიგად, მოცემული განტოლების ამონახსნები შედგება ორი სერიისაგან:

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \quad \text{და} \quad x=2k\pi$$

ერთგვაროვანი განტოლებანი

ერთგვაროვანი ტრიგონომეტრიული განტოლებები ისეთ განტოლებებს ეწოდება, რომელთა ყველა წევრს $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციათა მიმართ ერთი და იგივე საერთო ხარისხი აქვთ.

ერთგვაროვან ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა მაგალითებს წარმოადგენს შემდეგი განტოლებები:

$$\sin x-\cos x=0$$

$$\sin^2 x-3\cos x\cdot\sin x+5\cos^2 x=0$$

$$\cos^2 x=-\sin x\cdot\cos x=0$$

და ა. შ.

განვიხილოთ ერთგვაროვანი ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოხსნის რამდენიმე მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ განტოლება

$$\cos x-\sqrt{2}\sin x=0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა

$$2\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=0,$$

საიდანაც

$$\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=0. \tag{1}$$

$\cos x\neq 0$, რადგან, თუ $\cos x$ ნულის ტოლი იქნება, მაშინ $\sin x$-იც 0-ის ტოლი აღმოჩნდება, ეს კი ნიშნავს, რომ ვერ შესრულდება $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ იგივობა.

ე. ი. განსახილველ შემთხვევაში $\cos x\neq 0$ და შეგვიძლია

(1) განტოლების ყველა წევრი გავყოთ $\cos x$-ზე,

გვექნება:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}x=1, \quad \operatorname{tg}x=\sqrt{2}, \quad x=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2},$$

და

$$x^k=k\pi+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}\cdot$$

2. მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$\sqrt{3}\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+\sqrt{3}\cdot\cos^2 x=0.$$

ამოხსნა.

$\cos x \neq 0$, ამიტომ განტოლების ყველა წევრი გავყოთ $\cos^2 x$-ზე, მივიღებთ:

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - 4\,\mathrm{tg}\,x + \sqrt{3} = 0,$$

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \pm 1}{\sqrt{3}},$$

$$(\mathrm{tg}\,x)_1 = \sqrt{3}, \quad x = \mathrm{arc\,tg}\,\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$x_k' = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

$$(\mathrm{tg}\,x)_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad x = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}, \text{ ამიტომ}$$

$$x_k'' = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots).$$

სავარჯიშო

ამოვხსნათ ტრიგონომეტრიული განტოლებები:

1. $\sin x \cdot \mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,x = 0,$ პას: $k\pi,\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$
2. $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 0,$ პას: $\pi + 2k\pi,$
3. $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 0,$ პას: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$
4. $\cos x \cdot \mathrm{tg}\,x = 0$ პას: $k\pi,$
5. $\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\,x - 3 = 0$ პას: $\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k\pi - \mathrm{arc\,tg}\,3,$
6. $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$ პას: $2k\pi \pm \frac{\pi}{3},$
7. $2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0$ პას: $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ $(360°n \pm 60°),$
8. $2\sin^2 x = 2 + 5\cos x$ პას: $\frac{\pi}{2} + k\pi.$
9. $\sin x + \cos x = 3$ პას: (ფესვები არა აქვს).
10. $\sin x - \cos x = 1$
11. $\sin x = \cos x.$
12. $3\sin x + 5\cos x = 0$
13. $\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$
14. $2\sin x - \cos x \cdot \sin x = 0$
15. $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos^2 x.$
16. $\cos^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + 1 = 0$
17. $\sin x \cdot \cos x = -0{,}25.$

შეკრების თეორემები და მათი შედეგები

§ 107. ორი კუთხის ჯამისა და სხვაობის კოსინუსი

თეორემა. ორი კუთხის ჯამის კოსინუსი უდრის ამ კუთხეების კოსინუსების ნამრავლს, მინუს ამავე კუთხეების სინუსების ნამრავლი,

ე. ი.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

დამტკიცება.

ავიღოთ ერთეულოვანი წრეწირი (ნახ. 136).

$$\angle AOM=\alpha,\quad \angle MOP=\beta,$$
$$\angle AOP=\alpha+\beta.$$

განვიხილოთ ურთიერთპერპენდიკულარული OX' და OY' ღერძები.

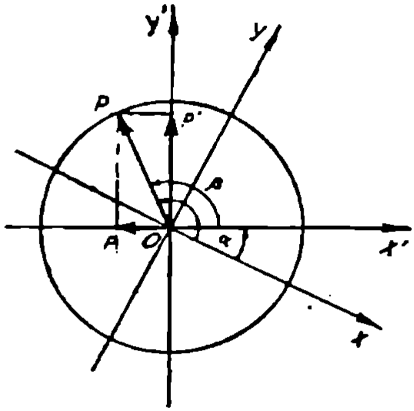
$\overline{OP}$ ვექტორი დავშალოთ $\overline{OP}$ და $\overline{OP'}$ მდგენელებად

$$\overline{OP}=\overline{OP'}+\overline{OP}. \qquad (1)$$

(1) ტოლობა დავაგეგმილოთ OX ღერძზე, გვექნება:

$$\text{გეგმ}_{OX}\,\overline{OP}=\text{გეგმ}_{OX}\,\overline{OP}+\text{გეგმ}_{OX}\,\overline{OP}. \quad (1)$$

თუ გავიხსენებთ ვექტორის გეგმილის განსაზღვრას ღერძზე, (1 და 3 თავები), მაშინ დავწერთ:



ნახ. 136.

$$\text{გეგმ}_{OX}\,\overline{OP}=|\overline{OP}|\cdot\cos(\alpha+\beta)=1\cdot\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta), \qquad (2)$$

$$\text{გეგმ}_{OX}\,OP'=|\overline{OP}|\cdot\cos(90^\circ+\alpha)=|\overline{OP'}|(-\sin\alpha)=-|\overline{OP'}|\sin\alpha,$$

მაშინ

$$|OP'|=|PP|=\sin\beta,$$

ამიტომ

$$\text{გეგმ}_{OX}\,\overline{OP'}=-\sin\alpha\cdot\sin\beta. \qquad (3)$$

ხოლო

$$\text{გეგმ}_{OX}\,\overline{OP}=|OP|\cdot\cos\alpha=\cos\beta\cdot\cos\alpha=\cos\alpha\cdot\cos\beta. \qquad (4$$

თუ (2) (3) და (4) ტოლობებს გავითვალისწინეთ (1), გვექნება

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

მიღებულ ფორმულაში β-ს შევცვალოთ $-\beta$-თი, გვექნება:

$$\cos[\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

ე. ი.

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

მიღებული ფორმულები შეიძლება გაერთიანდეს შემდეგნაირად:

$$\boxed{\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\pm\sin\alpha\cdot\sin\beta.}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. $\cos 105^\circ=\cos(45^\circ+60^\circ)=\cos 45^\circ\cdot\cos 60^\circ-\sin 45^\circ\cdot\sin 60^\circ=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3}).$$

2. $\cos 75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)=\cos 30^\circ\cdot\cos 45^\circ-\sin 30^\circ\cdot\sin 45^\circ=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}\ \sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1).$$

3. $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

4. გამოვთვალოთ ტრიგონომეტრიული ცხრილების გარეშე:

$$\cos 17^\circ\cdot\cos 43^\circ-\sin 17^\circ\cdot\sin 43^\circ=\cos(17^\circ+43^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

გამოთვალეთ ცხრილების გარეშე:

1. $\cos 12^\circ\cdot\cos 18^\circ-\sin 12^\circ\cdot\sin 18^\circ$; პას: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\sin 3^\circ\cdot\sin 42^\circ-\cos 3^\circ\cdot\cos 42^\circ$; პას: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $\cos 74^\circ\cdot\cos 29^\circ+\sin 74^\circ\cdot\sin 29^\circ$; პას: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. $\sin 97^\circ\cdot\sin 37^\circ+\cos 97^\circ\cdot\cos 37$; პას: $\frac{1}{2}$.
5. $\sin\frac{3}{5}\pi\cdot\sin\frac{7}{5}\pi-\cos\frac{7}{5}\pi\quad\cos\frac{3}{5}\pi$; პას: -1.
6. $\cos\frac{3}{8}\pi\cdot\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{3}{8}\pi\cdot\sin\frac{\pi}{8}$; პას: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

გაამარტივეთ გამოსახულებანი:

1. $\cos(24^\circ-\alpha)\cdot\cos(36^\circ+\alpha)-\sin(24^\circ-\alpha)\sin(36^\circ+\alpha)$; პას: $\frac{1}{2}$.

2. $\text{ocs}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$; პას. $\cos\alpha\ \frac{1}{1}$,

3. $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\alpha\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; პას. 0.

4. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$; პას. 1 $\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\beta\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$.

5. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\cdot\sin\alpha}$, პას. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$.

გამოთვალეთ:

1. $\cos(\alpha-\beta)$ და $\cos(\alpha+\beta)$, თუ $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, $\sin\beta=-\frac{5}{13}$

$$0<\alpha-\beta<90^\circ \quad \text{და} \quad 90^\circ<\alpha+\beta\ 180^\circ.$$

2. $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$ თუ $\cos\alpha=0{,}3$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. პას. $\dfrac{6\sqrt{3}-\sqrt{91}}{20}$.

გ ა მ ო თ ვ ა ლ ე თ:

$$\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2}{3}\right);\qquad \text{პას.}\ \frac{1}{9}(4\sqrt{2}-\sqrt{5});$$

$$\cos\left[\arcsin\frac{1}{3}-\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right];\quad \text{პას.}\ \frac{\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{9};$$

$$\cos\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}(-2)\right];\qquad \text{პას.}\ \frac{4}{5}.$$

§ 108. ორი კუთხის ჯამისა და სხვაობის სინუსი

ორი კუთხის ჯამისა და სხვაობის სინუსის ფორმულის გამოსაყვანად ვისარგებლოთ ორი კუთხის ჯამისა და სხვაობის კოსინუსების ფორმულებით, მასთან, დაგვეჭირდება დაყვანილი ფორმულებით სარგებლობაც.

$\sin(\alpha+\beta)$ წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right],$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right];$$

თუ გამოვიყენებთ ორი კუთხის სხვაობის კოსინუსის ფორმულას, გვექნება:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+$$

$$+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\beta=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

მაშასადამე,

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta} \qquad (1)$$

ორი კუთხის ჯამის სინუსი უდრის პირველი კუთხის სინუსის მეორე კუთხის კოსინუსზე ნამრავლს, პლუს მეორე კუთხის სინუსისა და პირველი კუთხის კოსინუსის ნამრავლი.

განვიხილოთ მაგალითი.

$$\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cdot\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\cdot\sin 45^\circ=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

ახლა, თუ (1) ფორმულაში β-ს შევცვლით $-\alpha$-თი, გვექნება:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\sin(-\beta)\cdot\cos\alpha=$$
$$=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

ამრიგად,

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta} \qquad (2)$$

(1) და (2) ფორმულები შეიძლება წარმოვადგინოთ ერთი ფორმულით.

$$\boxed{\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta.}$$

მაგალითი:

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

სავარჯიშო

1. გამოთვალეთ:

ა) $\sin 25^\circ\cdot\cos 20^\circ+\cos 25^\circ\cdot\sin 20^\circ$, პას. $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

ბ) $\sin 17^\circ\cdot\cos 43^\circ+\cos 17^\circ\cdot\sin 43$, პას. $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

გ) $\sin 18^\circ\cdot\cos 12^\circ+\cos 18^\circ\cdot\sin 12^\circ$, პას. $\frac{1}{2}$,

დ) $\sin 65^\circ\cdot\cos 20^\circ-\cos 65^\circ\cdot\sin 20^\circ$, პას. $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

ე) $\sin 37\cdot\cos 7^\circ-\cos 37^\circ\cdot\sin 7^\circ$, პას. $\frac{1}{2}$.

2. გაამარტივეთ გამოსახულებანი:

ა) $\cos(25^\circ+\alpha)\cdot\sin(20^\circ-\alpha)+\sin(25^\circ+\alpha)\cdot\cos(20^\circ-\alpha)$, პას. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ბ) $\sin(96^\circ-\alpha)\cdot\cos(36^\circ+\alpha)-\cos(36^\circ-\alpha)\cdot\sin(96^\circ+\alpha)$. პას. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

გ) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$, პას: 1,

დ) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cdot\cos\beta}$; პას: $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$.

ე) იპ. $\sin(\alpha+\beta)$ და $\sin(\alpha-\beta)$, თუ $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$ და $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{13}}{4}$,

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ და $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$. პას: 0 და $\frac{\sqrt{39}}{8}$.

ვ) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2}{3}\right)$, პას: $\frac{2}{9}(1+\sqrt{10})$.

ზ) $\sin\left[\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$, პას: $\frac{1}{6}(\sqrt{15}-1)$.

§ 100. ორი კუთხის ჯამისა და სხვაობის ტანგენსი

ორი კუთხის ჯამისა და სხვაობის ტანგენსისა და კოტანგენსის ფორმულის მისაღებად, საჭიროა ვისარგებლოთ ამავე კუთხეების ჯამისა და სხვაობის სინუსისა და კოსინუსის ფორმულებით.

ა მ რ ი გ ა დ,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

ვიგულისხმოთ, რომ α და β კუთხეებიდან არც ერთი მთავრდება ვერტიკალური დიამეტრის ბოლოებზე, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\cos\alpha$; $\cos\beta$ და $\cos(\alpha+\beta)$ გამოსახულებებიდან არც ერთი არ უდრის ნულს. ეს კი თავის მხრივ გულისხმობს იმას, რომ $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, და $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ განსაზღვრულია. თუ უკანასკნელი წილადის მრიცხველს და მნიშვნელს წევრ-წევრად გავყოფთ $\cos\alpha\cdot\cos\beta\neq0$-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\quad\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

მაშასადამე,

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}\qquad(1)$$

ამრიგად, ორი კუთხის ჯამის ტანგენსი უდრის ამავე კუთხეების ტანგენსების ჯამს, გაყოფილს ერთისა და ამავე კუთხეთა ტანგენსების ნამრავლის სხვაობაზე.

(1) ფორმულაში β შევცვალოთ $-\beta$-თი, მასთან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $y=\operatorname{tg} x$ კენტი ფუნქციაა, მივიღებთ:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

ამრიგად,

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}\,.$$

მაშასადამე, ორი კუთხის სხვაობის ტანგენსი უდრის ამავე კუთხეების ტანგენსების სხვაობას, გაყოფილს ერთისა და ამავე კუთხეების ტანგენსების ნამრავლის ჯამზე.

ზუსტად ანალოგიურად მიიღება ორი კუთხის ჯამის და სხვაობის კოტანგენსების სხვაობას, გაყოფილს ერთისა და ამავე კუთხეების ტანგენსების ნამრავმისი ფორმულები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

ამოხსნა

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო:

1) ა) იპოვეთ $\operatorname{tg} 75°$, ბ) $\operatorname{tg} 105°$ პას. $\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$; და $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$;

2. გამოთვალეთ:

ა) $\dfrac{\operatorname{tg} 43°+\operatorname{tg} 27°}{1-\operatorname{tg} 43°\cdot\operatorname{tg} 17°}$, პას. $\sqrt{3}$.

ბ) $\dfrac{1-\operatorname{tg} 32°\ \operatorname{tg} 28°}{\operatorname{tg} 32°+\operatorname{tg} 28}$, პას. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

გ) $\dfrac{1-\operatorname{tg} 3°\cdot\operatorname{tg} 27°}{\operatorname{tg} 3°+\operatorname{tg} 27°}$, პას. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

დ) $\dfrac{1+\operatorname{tg} 6°\cdot\operatorname{tg} 39°}{\operatorname{tg} 39°-\operatorname{tg} 6°}$, პას. 1.

3. იპოვეთ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ და $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, თუ $\sin\alpha=0{,}6$, $\cos\beta=-\frac{12}{13}$; $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$, პას. $-\frac{16}{63}$ და $-\frac{36}{63}$.

4. გამოთვალეთ:

ა) $\operatorname{tg}[\operatorname{arc}\operatorname{tg}2+\operatorname{arc}\operatorname{tg}3]$. პას. -1.

ბ) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{\pi}{3}\right)$; პას. $\frac{2}{3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$.

§ 119. ორმაგი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

თუ დავუშვებთ, რომ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$ ფორმულაში $\alpha=\beta$, მაშინ მივიღებთ:

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot\sin\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha.$$

ანუ

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha. \qquad (1)$$

ამრიგად, ორმაგი კუთხის სინუსი უდრის მოცემული კუთხის სინუსისა და კოსინუსის გაორკეცებულ ნამრავლს.

ახლა თუ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta$ ფორმულაში დავუშვებთ $\alpha=\beta$, მივიღებთ:

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\ \cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin\alpha=\cos^2-\sin^2\alpha.$$

ანუ

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} \qquad (2)$$

ამრიგად, ორმაგი კუთხის კოსინუსი უდრის მოცემული კუთხის კოსინუსისა და სინუსის კვადრატების სხვაობას.

ანალოგიურად მიიღება ორმაგი კუთხის ტანგენსისათვის შემდეგი ფორმულა

$$\boxed{\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}} \qquad (3)$$

ორმაგი კუთხის ტანგენსი უდრის მოცემული კუთხის გაორკეცებულ ტანგენსს, გაყოფილს ერთისა და მოცემული კუთხის ტანგენსის კვადრატის სხვაობაზე.

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ ორმაგი არგუმენტის ქვეშ შეიძლება ვიგულისხმოთ არა მარტო გრადუსებისა და რადიანების ლუწი რიცხვი, არამედ ყოველი კუთხე, ასე მაგალითად;

$$15^\circ=2\left(\frac{15^\circ}{2}\right),\quad 37^\circ=2\cdot\left(\frac{37^\circ}{2}\right)\ \text{და ა. შ.}$$

ზოგადად, $\alpha=2\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

თუ ამ შენიშვნას გავითვალისწინებთ, მაშინ შეგვიძლია ფუნქციები გამოვსახოთ ნახევარი არგუმენტის ფუნქციებით, მართლაც;

$$\sin\alpha = \sin 2\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

$$\boxed{\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\quad\cos\frac{\alpha}{2}} \tag{4}$$

ასევე,

$$\boxed{\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}} \tag{5}$$

და

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}} \tag{6}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. გამოვთვალოთ $\sin 2\alpha$ და $\cos 2\alpha$, თუ $\sin\alpha=0{,}6$, მასთან, $0<\alpha<\pi$

ა მ ო ხ ს ნ ა

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}6^2} = -\sqrt{1-0{,}36} = -\sqrt{0{,}64} = -0{,}8,$$

ამიტომ

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot 0{,}6\cdot(-0{,}8) = -0{,}96.$$

ამრიგად,

$$\sin 2\alpha = -0{,}96.$$

ხოლო

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0{,}64 - 0{,}36 = 0{,}28$$

$$\cos 2\alpha = 0{,}28.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ $\cos 3\alpha$ და $\sin 3\alpha$-ს მნიშვნელობები:

ა) $$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cdot\cos\alpha - \sin 2\alpha\cdot\sin\alpha =$$
$$=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cos - 2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha.$$

თუ $\sin^2\alpha$-ს შევცვლით $1-\cos^2\alpha$-თი, გვექნება:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

ბ) $$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cdot\cos\alpha + \cos 2\alpha\cdot\sin\alpha =$$
$$=2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha = 3\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha - \sin^3\alpha.$$

თუ $\cos^2\alpha$-ს შევცვლით $1-\sin^2\alpha$-თი, მივიღებთ

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. იპოვეთ $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ და $\operatorname{tg} 2\alpha$, თუ $\sin\alpha=0,8$ და $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

პას. $-0,96$, $-0,28$; $\frac{24}{7}$.

2. იპოვეთ $\cos\alpha$ თუ $\sin\frac{\alpha}{2}=-0,1$ და $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$. პას: 0,98.

3. გამოთვალეთ:

ა) $\sin 22°30' \cos 22°30'$, პას: $\frac{\sqrt{2}}{4}$,

ბ) $\cos^2 15°-\sin^2 15°$, პას: $\frac{\sqrt{3}}{4}$,

გ) $\frac{\operatorname{tg} 15°}{1-\operatorname{tg}^2 15°}$, პას: $\frac{\sqrt{3}}{6}$,

დ) $\frac{1-\operatorname{tg}^2 30°}{\operatorname{tg} 30°}$, პას: $\sqrt{3}$,

4. დაამტკიცეთ შემდეგი იგივობანი:

ა) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin 2\alpha$;

ბ) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$;

გ) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg} 2\alpha$.

5. გაამარტივეთ გამოსახულებანი:

ა) $\sin^2(\alpha-45°)-\cos^2(\alpha-45°)$;

ბ) $\sin(45°-\alpha)\cdot\cos(45°-\alpha)$;

გ) $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; პას: $\operatorname{tg} 2\alpha$.

დ) $\left(\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\right)$; პას: $\cos\frac{\alpha}{2}$.

ე) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$; პას: $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2\alpha$ $(\alpha\neq k\pi+45°)$

6. გამოსახეთ $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$

ა) $\sin\frac{\alpha}{2}$ და $\cos\frac{\alpha}{2}$-ით; ბ) $\sin\frac{\alpha}{2}$-ით; გ) $\cos\frac{\alpha}{2}$-ით.

7. გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებანი:

ა) $\frac{\sin^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{\sin 2\alpha}$; პას: $\frac{1}{2}\left(\alpha\neq\frac{k\pi}{2}\right)$.

ბ) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$, პას: 2; $\left(\alpha\neq\frac{k\pi}{2}\right)$.

გ) $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha$ პას: 1,

დ) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ პას: $\cos 2\alpha$; $\left(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$.

ე) $\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$, პას: $\sin\alpha+\cos\alpha$, $\alpha\neq\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$.

8. გამოიანგარიშეთ:

ა) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arc}\operatorname{tg}3)$, პას: $-\frac{3}{4}$,

ბ) $\operatorname{tg}\left[2\operatorname{arc}\cos\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$, პას: $\frac{24}{7}$,

გ) $\cos\left(2\operatorname{arc}\sin\frac{1}{2}\right)$, პას: $\frac{1}{2}$.

§ 111. ნახევარი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

ორმაგი კუთხის კოსინუსის ფორმულაში α შევცვალოთ $\frac{\pi}{2}$ -ით. მივიღებთ (5) ფორმულას

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2} \tag{7}$$

გამოვიყენოთ ძირითადი იგივეობა

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1. \tag{8}$$

თუ (7) და (8) იგივეობებს წევრ-წევრად შევკრებთ და გამოვაკლებთ, მივიღებთ:

$$\boxed{2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha}\qquad\boxed{2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha} \tag{9}$$

(9) ფორმულიდან უშუალოდ გამომდინარეობს:

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}\qquad\boxed{\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\sin\alpha}}} \tag{10}$$

ნიშანი რადიკალის ნიშნის წინ შეირჩევა იმის მიხედვით, თუ რომელ მეოთხედში მთავრდება კუთხე $\frac{\alpha}{2}$.

ხშირად საჭირო ხდება ნახევარი არგუმენტის ფუნქციათა ფორმულების გამოყენება იმ სახით, როგორც ეს (9) ფორმულაშია მოცემული, ამიტომ მისი დამახსოვრება სავალდებულოა.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. გამოვთვალოთ $\sin\frac{\pi}{8}$ და $\cos\frac{\pi}{8}$

ა მ ო ხ ს ნ ა

$\frac{\pi}{8}$ (რად)$=22°30'$, რადგან $\frac{\pi}{8}$ მახვილია, ამიტომ რადიკალის ნიშნის წინ მივიღებთ პლუს ნიშანს, ამიტომ:

$$\cos 22°\,30'=\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

ამრიგად,

$$\cos 22°\,30'=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \qquad \sin 22°\,30'=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

ე. ი.

$$\sin 22°\,30'=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

2. გამოვთვალოთ $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ და $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, თუ $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ და $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

ა მ ო ხ ს ნ ა

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$. ვინაიდან კუთხე $\frac{\alpha}{2}$ ბოლოვდება II მეოთხედში, ამიტომ $\cos\frac{\alpha}{2}<0$, $\sin\frac{\alpha}{2}>0$ და $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<0$.

გვექნება:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10} \quad \text{და} \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-3.$$

სავარჯიშო

1. დაამტკიცეთ იგივეობანი:

ა) $1+2\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=4\cos^2\alpha\cdot\cos 2\alpha$.

ბ) $1-2\cos 3\alpha+\cos 6\alpha=-4\cos^2\frac{3\alpha}{2}\cdot\cos 3\alpha$.

გ) $1+\sin\alpha=2\cos^2\alpha\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

დ) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

ე) გაამარტივეთ გამოსახულება $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$. პას: $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\alpha\neq 2k\pi+\frac{\pi}{\alpha}$.

2. იპოვეთ:

ა) $\sin\alpha$, და $\cos\alpha$, თუ $\cos 2\alpha=-0{,}6$.

ბ) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ და $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, თუ ცნობილია, რომ $\cos\alpha=-0{,}6$.

3. გამოთვალეთ:

ა) $\sin\left[\frac{1}{2}\arcsin 0{,}8\right]$, გ) $\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\arcsin(-0{,}8)\right]$,

ბ) $\cos\left[\frac{1}{2}\arcsin 0{,}8\right]$, დ) $\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-0{,}75)\right]$.

§ 112. sinα და cos α-ს გამოსახვა ნახევარი კუთხის ტანგენსით

როგორც ვიცით,

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1}$$

ამრიგად,

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}\qquad(1)$$

ახლა გამოვსახოთ $\cos\alpha$ $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$-ით. როგორც ცნობილია, $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

ანალოგიურად წინა მაგალითისა გვექნება:

$$\cos\alpha=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

ამრიგად,

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}} \qquad (2)$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. (1) და (2) ფორმულას აზრი აქვს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $\frac{\alpha}{2}\neq0$, ე. ი. როცა $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ განსაზღვრულია.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=t$, მაშინ (1) და (2) ფორმულები გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}} \quad \text{და} \quad \boxed{\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}} \qquad (3)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$, თუ $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$.

გვექნება

$$\sin\alpha=\frac{2\cdot3}{1+3^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}; \qquad \cos\alpha=\frac{1-9}{1+9}=-\frac{4}{5}.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. დაამტკიცეთ იგივეობა: $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$.

2. $\frac{1+\sin2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

§ 113. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნამრავლის გარდაქმნა ჯამად

ავიღოთ ორი კუთხის ჯამისა და სხვაობის სინუსის ფორმულები:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

შევკრიბოთ უკანასკნელი იგივობები წევრ-წევრად:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta,$$

საიდანაც,

$$\boxed{\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]}$$

ამრიგად, ერთი კუთხის სინუსისა და მეორე კუთხის კოსინუსის ნამრავლი უდრის ამ კუთხეების ჯამის სინუსისა და სხვაობის კოსინუსის ნახევარჯამს.

მაგალითად,

$$\sin 75^\circ\cdot\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\left[\sin(75^\circ+15^\circ)+\sin(75^\circ-15^\circ)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 90^\circ+\sin 60)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

თუ წევრ-წევრად შევკრებთ იგივობებს;

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

მივიღებთ:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta.$$

საიდანაც

$$\boxed{\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]}$$

ორი კუთხის კოსინუსების ნამრავლი უდრის ამავე კუთხეების ჯამის კოსინუსისა და სხვაობის კოსინუსის ნახევარჯამს.

თუკი

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

იგივობას გამოვაკლებთ

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

იგივობას, მივიღებთ:

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

საიდანაც

$$\boxed{\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]}$$

ორი კუთხის სინუსების ნამრავლი უდრის ამავე კუთხეების სხვაობის კოსინუსისა და ჯამის კოსინუსის ნახევარსხვაობას.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. გამოიანგარიშეთ ცხრილების გარეშე:

ა) $\sin 37°30'\quad \cos 7°30,$ პას: $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$

ბ) $\sin 52°30' \cdot \cos 7°30,'$ პას: $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$.

გ) $\cos 37°30' \cdot \cos 7°30',$ ხას: $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$

დ) $\sin 52°30' \cdot \sin 7°30'$ პას: $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$

ე) $\cos 75° \cdot \cos 15°,$ პას: $\frac{\sqrt{8}-2}{4}$

ვ) $\sin 45° \cdot \sin 15°.$ პას: $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

2) ქვემოთ მოცემული ნამრავლები წარმოადგინეთ ჯამის სახით:

ა) $\sin 10° \cdot \cos 5°.$

ბ) $\sin(x+\alpha) \cdot \sin(x-\alpha),$

გ) $\sin(x+\alpha) \cdot (\cos(x-\alpha).$

დ) $\cos(x+\alpha) \cdot \cos(x-\alpha).$

ე) $4\sin 20° \cdot \cos 50° \cdot \cos 80°$ პას: $-\sin 10°+\cos 20°+\sin 50°.$

3) $4\cos 15° \cdot \sin 20° \cdot \sin 40°$ პას: $\cos 5°-\cos 75°+\cos 35°-\frac{\sqrt{2}}{2}$

§ 114. ორი კუთხის სინუსების ჯამისა და სხვაობის გარდაქმნა ნამრავლად

როგორც ვიცით,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta. \tag{1}$$

იგივეობათა წევრ-წევრად შეკრებით და მერე გამოკლებით მიღებული გვქონდა:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta.$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\sin\beta. \tag{2}$$

(2) ტოლობაში თუ დავუშვებთ

$$\alpha+\beta=x,\qquad \alpha-\beta=y,$$

მაშინ მივიღებთ

$$\alpha=\frac{x+y}{2}\quad \text{და}\quad \beta=\frac{x-y}{2}. \tag{3}$$

თუ (3)-ს გავითვალისწინებთ (2)-ში, მივიღებთ:

$$\boxed{\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}}$$

$$\boxed{\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}} \tag{4}$$

ორი კუთხის სინუსების ჯამი უდრის ამავე კუთხეების ნახევარჯამის სინუსისა და ნახევარსხვაობის კოსინუსის გაორკეცებულ ნამრავლს.

ორი კუთხის სინუსების სხვაობა უდრის ამავე კუთხეების ნახევარჯამის კოსინუსისა და ნახევარსხვაობის სინუსის გაორკეცებულ ნამრავლს.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. $\sin 40^\circ+\sin 50^\circ=2\sin\frac{40^\circ+50^\circ}{2}\cdot\cos\frac{40^\circ-50^\circ}{2}=2\sin 45^\circ\cdot\cos 5^\circ=$

$=\sqrt{2}\cdot\cos 5^\circ.$

2. $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ=2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cdot\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=2\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ=$

$=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\;\;\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$

3. $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ=2\cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2},$

4. $\sin\frac{5}{12}\pi-\sin\frac{\pi}{12}=2\cos\frac{\frac{5}{12}\pi+\frac{\pi}{12}}{2}\cdot\sin\frac{\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{2}}{2}=$

$=2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. გამოიანგარიშეთ ცხრილების გარეშე ორი კუთხის სინუსების ჯამისა და სხვაობის ფორმულების გამოყენებით:

ა) $\sin 105^\circ+\sin 75^\circ.$

ბ) $\sin 105^\circ-\sin 75^\circ.$

გ) $\sin\frac{11}{12}\pi+\sin\frac{5}{12}\pi.$

დ) $\sin\frac{11}{12}\pi-\sin\frac{5}{12}\pi.$

ე) $\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{7}{12}\pi.$

ვ) $\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{7}{12}\pi.$

2. გაამარტივეთ მოცემული გამოსახულებანი:

ა) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$ ბ) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$

3. დაამტკიცეთ იგივეობანი:

ა) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. ბ) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

4. წარმოადგინეთ ნამრავლის სახით შემდეგი გამოსახულებები:

ა) $\sin\alpha+\frac{1}{2}$; ბ) $\sqrt{3}-2\sin\alpha$.

§ 116. ორი კუთხის ჯამის და სხვაობის კოსინუსების გარდაქმნა ნამრავლად

როგორც ვიცით,

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]. \qquad (1)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\alpha+\beta=x, \qquad \alpha-\beta=y.$$

მივიღებთ:

$$\alpha=\frac{x+y}{2} \quad \text{და} \quad \beta=\frac{x-y}{2}. \qquad (2)$$

(2) ჩავსვათ (1) ში, მივიღებთ:

$$\boxed{\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}} \qquad (3)$$

3) ფორმულა შეიძლება მივიღოთ სხვა გზითაც.
მართლაც, თუ წინა პარაგრაფში დამტკიცებულ

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ფორმულაში $\alpha=x+\frac{\pi}{2}$, $\beta=y+\frac{\pi}{2}$, მაშინ მივიღებთ:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right)=2\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

თუ გავითვალისწინებთ დაყვანის ფორმულებს, მივიღებთ (3) ფორმულას.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. გამოიანგარიშეთ ცხრილების გარეშე:

ა) $\cos 75^\circ+\cos 105^\circ$, პას: 0,

ბ) $\cos 75^\circ-\cos 105^\circ$, პას: $\sqrt{2-\sqrt{3}}$,

გ) $\cos\frac{11}{12}\pi+\cos\frac{5}{12}\pi$, პას: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

დ) $\cos\frac{11}{12}\pi-\cos\frac{5}{12}\pi$, პას: $-\frac{\sqrt{6}}{2}$,

ე) $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ$, პას: $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ვ) $\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{11}{12}\pi$, პას: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. გაამარტივეთ მოცემული გამოსახულებანი:

ა) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$. ბ) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

3. დაამტკიცეთ იგივეობანი:

ა) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

ბ) $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

4. მიეცით ნამრავლის სახე:

ა) $\sqrt{2} + 2\cos\alpha$ პას: $4\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)$,

ბ) $\sqrt{3}-2\cos\alpha$, პას: $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$,

გ) $\sin\alpha + \cos\beta$, პას: $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$,

დ) $\sin\alpha - \cos\beta$, პას: $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

5. დაშალეთ მამრავლებად შემდეგი გამოსახულებანი:

ა) $1+\sin\alpha-\cos\alpha$. გ) $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$.

ბ) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$. დ) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$.

6. დაამტკიცეთ იგივეობანი:

ა) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg} 2\alpha$. გ) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}=-\operatorname{ctg}\alpha$.

ბ) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\alpha$. დ) $\frac{\sin\alpha-2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha-2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=-\operatorname{tg}2\alpha$.

§ 118. ორი კუთხის ტანგენსების ჯამისა და სხვაობის გარდაქმნა ნამრავლად

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

ამრიგად,

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} \qquad (1)$$

ანალოგიურად მიიღება ფორმულა

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} \tag{2}$$

ორი კუთხის ტანგენსების ჯამი უდრის ამ კუთხეების ჯამის სინუსს, გაყოფილს ამავე კუთხეების კოსინუსების ნამრავლზე.

ორი კუთხის ტანგენსების სხვაობა უდრის ამ კუთხეების სხვაობის სინუსს, გაყოფილს ამავე კუთხეების კოსინუსების ნამრავლზე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. α და β კუთხეებისათვის დასაშვებია ნებისმიერი მნიშვნელობანი, რომლებიც განსხვავდებიან $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$-საგან.

მოსწავლეებს ვავალებთ მიიღონ ორი კუთხის კოტანგენსების ჯამის და სხვაობის ფორმულები:

$$\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო.

1. გარდაქმენით შემდეგი გამოსახულებანი:

ა) $\operatorname{tg}70°+\operatorname{tg}20°$; ბ) $\operatorname{tg}70°-\operatorname{tg}30°$; გ) $\operatorname{tg}130°+\operatorname{tg}50°$; დ) $\operatorname{tg}100°-\operatorname{tg}10°$; ე) $\operatorname{tg}65°+\operatorname{tg}25°$; პას: $2\sec40°$; ვ) $\operatorname{ctg}80°+\operatorname{ctg}10°$; ზ) $\operatorname{ctg}70°-\operatorname{ctg}10°$; თ) $\operatorname{tg}3\alpha+\operatorname{tg}\alpha$; ი) $\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}2\alpha$; კ) $\operatorname{ctg}5\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$; ლ) $\operatorname{ctg}4\alpha-\operatorname{ctg}3\alpha$.

2. გარდაქმენით:

ა) $1+\operatorname{tg}\alpha$. ბ) $1-\operatorname{tg}\alpha$, გ) $1+\operatorname{ctg}\alpha$, დ) $1-\operatorname{ctg}\alpha$.

3. დაამტკიცეთ იგივობა:

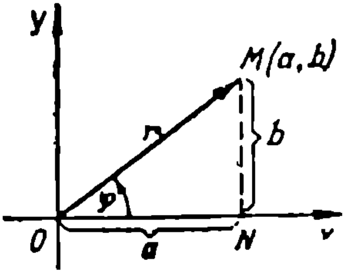
ა) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, გ) $\dfrac{\sin3\alpha+\sin\alpha}{\cos3\alpha+\cos\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$,

ბ) $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; დ) $\dfrac{\sin\frac{4\alpha}{3}+\sin\frac{2\alpha}{3}}{\cos\frac{4\alpha}{3}+\cos\frac{2\alpha}{3}}=\operatorname{tg}\alpha$.

§ 117. $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ გამოსახულების გარდაქმნა დამხმარე კუთხის შემოტანით

ვთქვათ, a და b რიცხვები განსხვავებულია ნულისაგან. განვიხილოთ კოორდინატთა მართკუთხა სისტემა და ავაგოთ სიბრტყეზე წერტილი $M(a, b)$. აღვნიშნოთ φ-თი კუთხე, რომელსაც $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორი ადგენს OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან. a არის M წერტილის აბსცისა, b კი — ორდინატი. $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორის სიგრძეა

$$|\overline{OM}|=r=\sqrt{a^2+b^2}.$$



ნახ. 137.

$\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორის მიერ შექმნილი φ კუთხის სინუსი და კოსინუსი უდრის:

$$\sin\varphi = \frac{a}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

ახლა მოცემული $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ გამოსახულება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\cdot\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi).$$

ამრიგად,

$$\boxed{a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi)}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1. $\sqrt{3} + 2\cos\alpha = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\alpha\right) = 2\,(\cos 30^\circ + \cos\alpha) =$

$4\cos\left(15^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\ \cos\left(15^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$

2. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{3}\cdot\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) =$

$$= 2\,(\cos 60^\circ\cdot\sin x + \sin 60^\circ\cdot\cos x) = 2\sin(60^\circ + x).$$

3. ვიპოვოთ $\sin x + \cos x$ გამოსახულების უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{2}(\sin x\cdot\sin 45^\circ + \cos x\cdot\sin 45^\circ) = \sqrt{2}\sin(x + 45^\circ).$$

ვინაიდან $\sin(x+45^\circ)$ გამოსახულებას შეუძლია მიიღოს უდიდესი მნიშვნელობა 1 და უმცირესი მნიშვნელობა —1, ამიტომ $\sin x + \cos x$ გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობა შეიძლება იყოს $\sqrt{2}$, ხოლო უმცირესი მნიშვნელობა —2.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. გარდაქმენით მოცემული გამოსახულებანი დამხმარე კუთხის შემოტანის ხერხით

ა) $\sin x - \cos x$, პას; $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,

ბ) $3\sin x+4\cos x$, პას: $5\sin\left(x+\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\right)$.

გ) $4\sin x-3\cos x$ პას: $5\sin\left(x-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$.

დ) $5\sin x-12\cos x$, პას: $13\sin\left(x-\operatorname{arc\,tg}\frac{12}{5}\right)$.

ე) $3\sin 3x+2\sqrt{2}\cos 3x$,

ე) $\sin 5x+\cos 5x$.

2. რა უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მიღება შეუძლია გამოსახულებებს:

ა) $3\sin x+4\cos x$; პას: 5 და -5. გ) $\sqrt{\sin x-\cos x}$, პას: $\sqrt[4]{2}$ და 0.

ბ) $13\sin x-4\cos x$, პას: -5 და 0, დ) $\dfrac{1}{|\sin x+\cos x|}$, პას: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
მაქსიმუმი არ არსებობს

§ 118. ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გარდაქმნის მაგალითები

ამ პარაგრაფში განხილული იქნება ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გარდაქმნისა, იგივეობათა დამტკიცებისა და გამოსახულებისათვის სალოგარითმო სახის მიღების შედარებით უფრო რთული მაგალითები.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1. მივცეთ ნამრავლის სახე გამოსახულებას: $1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}$. თუ გამოვიყენებთ $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ ფორმულას, მივიღებთ:

$$1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos 60^\circ\right)=2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{4}+30^\circ\right)\sin$$

$$\left(\frac{\alpha}{4}-30^\circ\right)=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{4}+30^\circ\right)\sin\left(\frac{\alpha}{4}-30^\circ\right).$$

2. მივცეთ ნამრავლის სახე გამოსახულებას:

$$\sin 5x\cdot\sin 4x+\sin 4x\cdot\sin 3x-\sin 2x\cdot\sin x.$$

თუ გამოვიყენებთ ნამრავლის ჯამად გარდაქმნის შემდეგ ფორმულას:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right],$$

მაშინ მივიღებთ:

$$\sin 5x \cdot \sin 4x = \frac{1}{2} (\cos x - \cos 9x),$$

$$\sin 4x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2} (\cos x - \cos 7x),$$

$$\sin 2x \cdot \sin x = \frac{1}{2} (\cos x - \cos 3x).$$

თუ ამ უკანასკნელ გამოსახულებებს გავითვალისწინებთ მოცემულ მაგალითში მივიღებთ:

$$\frac{1}{2} (\cos x - \cos 9x + \cos x - \cos 7x - \cos x + \cos 3x) = \frac{1}{2} (\cos x + \cos 3x) -$$

$$- \frac{1}{2} (\cos 7x + \cos 9x) = \cos 2x \cdot \cos x - \cos 8x \cdot \cos x =$$

$$= \cos x (\cos 2x - \cos 8x) = 2\cos x \cdot \sin 5x \cdot \sin 3x.$$

3. მივცეთ ნამრავლის სახე გამოსახულებას:

$1 - \sqrt{2}\cos\alpha + \cos 2\alpha.$

თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$, მივიღებთ

$$2\cos^2\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha = 2\cos\alpha \left(\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\cos\alpha (\cos\alpha - \cos 45^\circ) =$$

$$= 2\cos\alpha \cdot 2\sin\frac{\alpha + 45^\circ}{2} \cdot \sin\frac{45^\circ - \alpha}{2} = 4\cos\alpha \cdot \sin\frac{\alpha + 45^\circ}{2} \cdot \sin\frac{45^\circ - \alpha}{2}.$$

4. მივცეთ ნამრავლის სახე გამოსახულებას:

$$1 - \sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta); \qquad 1 - \sin^2(\alpha + \beta) = \cos^2(\alpha + \beta),$$

ამიტომ

$$1 - \sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = \cos^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) =$$

$$= \frac{1 + \cos(2\alpha + 2\beta)}{2} - \frac{1 - \cos(2\alpha - 2\beta)}{2} = \frac{\cos(2\alpha + 2\beta) + \cos(2\alpha - 2\beta)}{2} =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta}{2} =$$

$$= \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta.$$

5. მივცეთ ნამრავლის სახე გამოსახულებას:

$$1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha.$$

მოცემული გამოსახულება დავაჯგუფოთ შემდეგნაირად:

$$(1 + \cos\alpha) + (\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha) = (1 + \cos\alpha) + \operatorname{tg}\alpha\,(1 + \cos\alpha) =$$

$$= (1+\cos\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)=2\cos^2\frac{\alpha}{2}(\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha)=2\cos^2\frac{\alpha}{2}\times$$

$$\times\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ\cdot\cos\alpha}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha}=\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}.$$

6. მივცეთ ნამრავლის სახე გამოსახულებას:

$$\frac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

აღებულ გამოსახულებაში გავითვალისწინოთ, რომ $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ გვექნება.

$$\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\left[\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]=2\cdot2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-45^\circ\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

7. მივცეთ ნამრავლის სახე გამოსახულებას:

$$\frac{\sqrt{2}-\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$$

$$\frac{\sqrt{2}-\left[\cos\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{\sin\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\sqrt{2}-2\cos45^\circ\cdot\cos(\alpha-45^\circ)}{2\cos45^\circ\cdot\sin(\alpha-45^\circ)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,[1-\cos(\alpha-45^\circ)]}{\sqrt{2}\sin(\alpha-45^\circ)}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha-45^\circ}{2}}{2\sin\frac{\alpha-45^\circ}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-45^\circ}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha-45^\circ}{2}.$$

8. მივცეთ ნამრავლის სახე გამოსახულებას:

$$2+\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha.$$

$$2+\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha=2+\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}+\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=2+\frac{\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha}{\cos2\alpha\cdot\sin2\alpha}=2+$$

$$+\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 4\alpha}=2+\frac{2}{\sin 4\alpha}=2\cdot\frac{1+\sin 4\alpha}{\sin 4\alpha}=2\cdot\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)}{\sin 4\alpha}=$$

$$=\frac{2\cdot 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\sin 4\alpha}=\frac{4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\sin 4\alpha}.$$

9. მივცეთ ნამრავლის სახე გამოსახულებას:

$$\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$$

$$\frac{(1+\cos 2\alpha)+(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}{2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1}=\frac{2\cos^2\alpha+2\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha}{1+\cos 2\alpha+\cos\alpha-1}=$$

$$=\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\cos 2\alpha)}{\cos\alpha+\cos 2\alpha}=2\cos\alpha.$$

10. გარდავქმნათ ნამრავლად გამოსახულება:

$$1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\sin^2\beta-\cos^4\alpha.$$

$$1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\sin^2\beta-\cos^4\alpha=(1-\sin^2\beta)-\frac{1}{4}\cdot 4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-$$

$$-\cos^4\alpha=\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-\cos^4\alpha=\cos^2\beta-\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=$$

$$\cos^2\beta-\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\beta}{2}-\frac{1+\cos 2\alpha}{2}=\frac{1}{2}(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta).$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

მიეცით ნამრავლის სახე შემდეგ გამოსახულებებს:

1. $1-\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha.$ პას: $\dfrac{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$,

2. $\cos\alpha+\sin 2\alpha-\cos 3\alpha,$ პას: $4\sin 2\alpha\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}+15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-15^\circ\right),$

3. $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right),$ პას: $2\operatorname{tg}2\alpha,$

4. $\dfrac{2\sin\beta-\sin 2\beta}{2\sin\beta+\sin 2\beta},$ პას: $\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2},$

5. $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{cosec}2\alpha,$ პას: $2\operatorname{ctg}\alpha.$

6. $\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha.$ პას: $1.$

7. $2\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha-1$, პას: $2\sin(2\alpha-30°)$.

8. $\dfrac{1+\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}$, პას: $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha$,

9. $\operatorname{tg}x-1+\sin x(1-\operatorname{tg}x)+\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2x}$, პას: $4\operatorname{tg}x\cdot\cos^2\dfrac{x}{2}\cdot\sin^2\left(45°-\dfrac{x}{2}\right)$,

10. $1+\cos 2\alpha-2\sin^2\alpha$, პას: $2\cos 2\alpha$,

11. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$, პას: $\operatorname{tg}2\alpha$,

12. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$. პას: $\operatorname{ctg}2\alpha$.

§ 110. ტრიგონომეტრიულ იგივობათა დამტკიცების მაგალითები

ტრიგონომეტრიულ იგივობათა დამტკიცებისათვის არ არსებობს დადგენილი გზა, როგორც მაგალითად ეს არსებობს კვადრატული განტოლების ამოხსნისას ან პროგრესიების ჯამის მოძებნისას.

ტრიგონომეტრიული იგივობის დამტკიცებისათვის საჭიროა ვიცოდეთ ყველა ტრიგონომეტრიული ფორმულა, გარდა ამისა საჭიროა მოსწავლე კარგად ერკვეოდეს იგივურ გარდაქმნებში. განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. დავამტკიცოთ იგივობა:

$$\sec\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\sec\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sec 2\alpha$$

გარდავქმნათ იგივობის მარცხენა ნაწილი

$$\sec\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\sec\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\cdot\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=$$

$$=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha}\times$$

$$\times\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)}=$$

$$=\frac{4}{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}=\frac{2}{\cos 2\alpha}=2\sec 2\alpha;$$

2. $$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

გარდავქმნათ მარცხენა ნაწილი:

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin(2\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha};$$

ცალკე გარდავქმნათ მრიცხველში არსებული მაკლები შემდეგნაირად:

$$2\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)=\sin[\alpha+(\alpha+\beta)]+\sin[\alpha-(\alpha+\beta)]=$$
$$=\sin(2\alpha+\beta)+\sin(-\beta),$$

გვექნება.

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)-\sin(2\alpha+\beta)-\sin(-\beta)}{\sin\alpha}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \qquad \text{რ. დ. გ.}$$

3. $$2(\operatorname{cosec}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha)=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

გარდავქმნათ მარცხენა ნაწილი:

$$2(\operatorname{cosec}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha)=2\left(\frac{1}{\sin2\alpha}+\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}\right)=2\cdot\frac{1+\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=$$
$$=\frac{2\cdot2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=2\operatorname{ctg}\alpha.$$

ახლა თუ გამოვიყენებთ $\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$ იგივობას, გვექნება:

$$2\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

4. $$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=\frac{\sin2\alpha}{\sqrt2}.$$

გარდავქმნათ მარცხენა ნაწილი, თუ გამოვიყენებთ ფორმულას

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}.$$

გვექნება:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\sigma\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)-1+\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{2}=$$
$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{2}=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\quad\sin2\alpha}{2}=\frac{\sqrt2}{2}\sin2\alpha=$$
$$=\frac{\sin2\alpha}{\sqrt2}.$$

5. $$\frac{\cos2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{4}\sin^22\alpha.$$

გარდავქმნათ მარცხენა ნაწილი:

$$\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\dfrac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\dfrac{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\ (\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}}=\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}}=\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha=$$

$$=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha.$$

6. $\dfrac{\sin\alpha-\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha.$

გარდავქმნათ მარცხენა გამოსახულების მნიშვნელი და მრიცხველი:

$\sin\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha=2\sin 3\alpha\cdot\cos 2\alpha-\sin 3\alpha=\sin 3\alpha\,(2\cos 2\alpha-1);$

$\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha=2\cos 2\alpha\cdot\cos 3\alpha-\cos 3\alpha=\cos 3\alpha(2\cos 2\alpha-1).$

ამრიგად,

$$\frac{\sin\alpha-\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\frac{\sin 3\alpha\,(2\cos 2\alpha-1)}{\cos 3\alpha\,(2\cos 2\alpha-1)}=\operatorname{tg} 3\alpha. \quad \text{(რ. დ. გ.)}$$

7. დავამტკიცოთ, რომ

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma=2,$ თუ $\alpha+\beta+\gamma=180°.$

დამტკიცება

მოცემული გამოსახულება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma.$$

უკანასკნელი გამოსახულება გარდავქმნათ ასე:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\beta}{2}+\sin^2\gamma=1-$$

$$-\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}+\sin^2[180°-(\alpha+\beta)]=1-\frac{2\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}{2}+$$

$$+\sin^2(\alpha+\beta)=1-\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)+[1-\cos^2(\alpha+\beta)]=$$

$$=2-\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]=2-\cos(\pi+\gamma)\cdot 2\cos\alpha\cdot\cos\beta=$$

$$=2+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\beta,$$

რაც მოცემული იგივეობის სისწორეს ადასტურებს.

8. დავამტკიცოთ, რომ

$\operatorname{ctg} A\cdot\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} A\cdot\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} B\cdot\operatorname{ctg} C=1,$ თუ $A+B+C=180°.$

დამტკიცება:

მარცხენა ნაწილი წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B+(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B)\operatorname{ctg} C=1.$$

ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება:

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B=\frac{\sin (A+B)}{\sin A \cdot \sin B}$$

ხოლო მამრავლი

$$\operatorname{ctg} C=\operatorname{ctg}[\pi-(A+B)]=-\operatorname{ctg}(A+B).$$

ამიტომ, ცხადია, მოცემული გამოსახულება

$$\operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B-\frac{\sin(A+B)}{\sin A \cdot \sin B}\cdot\frac{\cos (A+B)}{\sin (A+B)}=\operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B-\frac{\cos (A+B)}{\sin A \cdot \sin B}=$$

$$=\operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B-\left(\frac{\cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}-\frac{\sin A \cdot \sin B}{\sin A \cdot \sin B}\right)=\operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B-\operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B+1.$$

ამრიგად, მოცემული გამოსახულების მარცხენა მხარე ეტოლება ერთს.

9. დავამტკიცოთ, რომ

$$\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}.$$

დამტკიცება

მარცხენა ნაწილის თითოეული თანამამრავლი წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}},$$

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{2\pi}{5}}=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}{2\cdot\sin\frac{2\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{2\pi}{5}}.$$

ამრიგად,

$$\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{2\pi}{5}}=\frac{1}{4}\quad \text{რ. დ. გ.}$$

10. დავამტკიცოთ, რომ

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$$

მარცხენა ნაწილი გარდავქმნათ კოსინუსების ჯამის ფორმულის მიხედვით:

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=2\cos\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}$$

წინა მაგალითის მიხედვით,

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}},\qquad \cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{2\pi}{5}},$$

ამიტომ

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=2\cos\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}=2\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{2\cdot\sin\frac{\pi}{5}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\cdot\sin\frac{2\pi}{5}}=\frac{1}{2}$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

დაამტკიცეთ:

1. $$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\right)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\cos\alpha+\cos\beta.$$

2. $\cos 4\alpha\cdot\cos 6\alpha-\cos 10\alpha=\sin 4\alpha\cdot\sin 6\alpha.$

3. $$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. მარცხენა ნაწილის მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ $\cos\alpha$-ზე, შემდეგ გავითვალისწინოთ, რომ $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$

4. $$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha+\sec 2\alpha.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გაამრავლეთ მრიცხველი და მნიშვნელი მნიშვნელის შეუღლებულზე, გამარტივების შემდეგ მიიღება $\frac{1+\sin\alpha}{\cos 2\alpha}$.

5. $$\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=1.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. მრიცხველი უდრის $\cos2\alpha$-ს, მნიშვნელი გარდაქმენით ასე

$$2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin^2\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]=$$

$$=2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

ამ უკანასკნელში $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ შევცვალოთ $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$-თი და ა. შ.

6. $$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\quad(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ისარგებლეთ ფორმულით: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$ და იგულისხმეთ $\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}=\frac{\psi}{2}$.

7. $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\quad\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=1.$$

8. $$\sin(a-b)+\sin(a-c)+\sin(b-c)=4\cos\frac{a-b}{2}\cdot\sin\frac{a-c}{2}\cdot\cos\frac{b-c}{2}.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. პირველი ორი შესაკრებისათვის გამოვიყენოთ სინუსების ჯამის ფორმულა, ხოლო მესამე შესაკრები წარმოვადგინოთ როგორც ორმაგი კუთხის სხვაობის სინუსი.

9. $$2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)+1=0.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3$.

10. $$\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. პირველი ორი შესაკრებისათვის გამოვიყენოთ სინუსების ჯამის ფორმულა.

11. $$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2(30^\circ-\alpha)-\sin 15^\circ\cdot\cos(15^\circ+2\alpha)=\sin 2\alpha.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა.

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}-\frac{1-\cos 2\beta}{2}=\frac{\cos 2\beta-\cos 2\alpha}{2}=$$
$$=\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta).$$

X თავი

ტრიგონომეტრიული განტოლებანი

§ 120. ერთგვაროვანი ტრიგონომეტრიული განტოლებანი sinx-ისა და cosx-ის მიმართ

ჩვენ განვიხილეთ ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოხსნის სხვადასხვა სახის მაგალითები. მათ შორის ერთგვაროვან განტოლებათა ამოხსნა. ამ პარაგრაფში განხილული იქნება უფრო რთული მაგალითები,

ერთგვაროვანი ტრიგონომეტრიული განტოლება ეწოდება ისეთ განტოლებას, რომლის ყოველ წევრში შემავალი სინუსისა და კოსინუსის ხარისხის მაჩვენებლების ჯამი ერთი და იგივეა.

მაგალითად,

$$3\cos^2 x+2\cos x\cdot\sin x+\sin^2 x=0 \qquad (1)$$

წარმოადგენს ერთგვაროვან განტოლებას, სადაც ერთგვაროვნობის მაჩვენებელი უდრის 2-ს.

თუ (1) განტოლებაში დავუშვებთ, რომ $\sin x=0$, მაშინ გვექნება $\cos x=0$, რაც შეუძლებელია (ერთი და იმავე კუთხის სინუსი და კოსინუსი არ შეიძლება უდრიდეს ნულს).

ამრიგად, თუ $\sin x=0$, მაშინ $\cos x\neq 0$, და თუ, $\cos x\neq 0$, მაშინ $\sin x\neq 0$. ერთგვაროვანი ტრიგონომეტრიული განტოლებათა ამოხსნისას განტოლების ყველა წევრს ვყოფთ ერთგვაროვნების ხარისხში აყვანილ სინუსზე ან კოსინუსზე. აღნიშნული ოპერაციის შედეგად მივიღებთ ალგებრულ განტოლებას $\operatorname{tg} x$-ის ან $\operatorname{ctg} x$-ის მიმართ.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

$$1.\ \ 3\sin^2 x+4\sin x\cdot\cos x-2\cos^2 x=0.$$

განტოლების ყველა წევრი გავყოთ $\cos^2 x$-ზე, მივიღებთ: $3\operatorname{tg}^2 x+4\operatorname{tg} x-2=0$, საიდანაც:

$$\operatorname{tg} x=\frac{-2\pm\sqrt{4+6}}{3}=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{3}.$$

$$\operatorname{tg} x_1=\frac{-2+\sqrt{10}}{3}, \qquad \operatorname{tg} x_2=\frac{-2-\sqrt{10}}{3}.$$

$$x_k'=k\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{-2+\sqrt{10}}{3} \qquad (k=0,\ \pm 1\ \pm 2,\ldots).$$

$$\operatorname{tg} x_2=\frac{-2-\sqrt{10}}{3}.$$

$$x''_k=k\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{2+\sqrt{10}}{3} \qquad (k=0,\pm 1,\ \pm 2,\ldots).$$

2. $\frac{1}{2}\sin 2x+\sin^2 x=2\cos^2 x.$

ა მ ო ხ ს ნ ა

$\sin x\cos x+\sin^2 x=2\cos^2 x.$

$\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-2=0,$

$\operatorname{tg} x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}.$

$\operatorname{tg} x_1=1, \qquad x'_k=k\pi+\frac{\pi}{4}; \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots).$

$\operatorname{tg} x_2=-2, \quad x''_k=k\pi-\operatorname{arc\,tg} 2 \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots).$

3. $4+\frac{3}{2}\sin 4x=11\cos^2 2x.$

ა მ ო ხ ს ნ ა

მოცემული განტოლება დავიყვანოთ ერთგვაროვან განტოლებაზე:

$4-4\cos^2 2x+3\sin 2x\cos 2x=7\cdot\cos^2 2x.$

$4(1-\cos^2 2x)+3\sin 2x\,.\,\cos 2x-7\cos^2 2x=0.$

$4\cdot\sin^2 2x+3\sin 2x\cdot\cos 2x-7\cos^2 2x=0.$

$4\mathrm{tg}^2 2x+3\mathrm{tg}2x-7=0.$

$$\mathrm{tg}2x=\frac{-3\pm\sqrt{9+112}}{8}=\frac{-3\pm\sqrt{121}}{8}=\frac{-3\pm 11}{8};$$

$(\mathrm{tg}\,2x)_1=1;$

$(2x)'_k=k\pi+\frac{\pi}{4}.\qquad x'_k=k\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8};\qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,..).$

$(\mathrm{tg}\,2x)_2=-\frac{7}{4};$

$(2x)''_k=k\pi-\mathrm{arc\,tg}\,\frac{7}{4};$

$x''_k=k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{arc\,tg}\frac{7}{4}.$

4. $5\sin^2 x-4\cos^2 x=0.$

ამოხსნა

$5\,\mathrm{tg}^2 x-4=0;$

$\mathrm{tg}^2\,x=\frac{4}{5}=0{,}8;$

$\mathrm{tg}\,x=\pm\sqrt{0{,}8}$

$x_k'=k\pi\pm\mathrm{arctg}\sqrt{0{,}8}\approx 180^\circ\cdot k\pm 41^\circ\cdot 48'(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა

$$5\sin^2(180^\circ\cdot k+\mathrm{arctg}\sqrt{0{,}8})-4\cos^2(180^\circ\cdot k+\mathrm{arctg}\sqrt{0{,}8})=$$

$$=5\sin^2(\mathrm{arctg}\sqrt{0{,}8})-4\cos^2(\mathrm{arctg}\sqrt{0{,}8}=$$

$$=5\cdot\frac{\mathrm{tg}^2(\mathrm{arc\,tg}\sqrt{0{,}8})^*}{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arc\,tg}\sqrt{0{,}8})}-4\cdot\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arc\,ctg}\sqrt{0{,}8})}=\frac{5\cdot(\sqrt{0{,}8})^2}{1+(\sqrt{0{,}8})^2}-$$

$$-\frac{4}{1+(\sqrt{0{,}8})^2}=\frac{5\cdot 0{,}8-4}{1+0{,}8}=\frac{4-4}{1.8}=0.$$

---

* $\sin^2 x=\frac{\mathrm{tg}^2 x}{\sec^2 x}$,

5. $3\sin^2 x - 2\sin 2x + 5\cos^2 x = 2.$

ამოხსნა

დავიყვანოთ მოცემული განტოლება ერთგვაროვან განტოლებაზე:

$$3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 2(1-\cos^2 x),$$

$$\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0,$$

$$\mathrm{tg}^2 x - 4\,\mathrm{tg} x + 3 = 0;$$

$$\mathrm{tg}\, x = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm 1;$$

$$(\mathrm{tg}\, x)_1 = 3; \qquad (\mathrm{tg}\, x)_2 = 1.$$

$$x_k' = k\pi + \mathrm{arctg} 3 \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

$$x_k'' = k\pi + \frac{\pi}{4} \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots).$$

შემოწმება

$x_k' = k\pi + \mathrm{arctg}\, 3 \approx 180^\circ k + 71^\circ 30' \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots).$

$x_k'' = k\pi + \frac{\pi}{4} = 180^\circ k + 45^\circ \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots).$

მოვახდინოთ ჩასმა

$$3\sin^2(180^\circ k + \mathrm{arctg} 3) - 4\sin(180^\circ k + \mathrm{arctg} 3) \cdot \cos(180^\circ k + \mathrm{arctg} 3) +$$
$$+ 5\cos^2(180^\circ k + \mathrm{arctg}\, 3) = 3\sin^2(\mathrm{arctg} 3) - 4\sin(\mathrm{arctg}\, 3) \cdot \cos(\mathrm{arctg}\, 3) +$$
$$+ 5\cos^2(\mathrm{arc\,tg} 3) = 3 \cdot \frac{\mathrm{tg}^2(\mathrm{arc\,tg} 3)}{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arc\,tg} 3)} - 4 \cdot \frac{\mathrm{tg}(\mathrm{arc\,tg} 3)}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2(\mathrm{arc\,tg} 3)}} \times$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\, 3)}} + 5 \cdot \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arc\,tg}\, 3)} = \frac{3 \cdot 3^2}{1+3^2} - \frac{4 \cdot 3}{1+3^2} +$$
$$+ \frac{5}{1+3^2} = \frac{27-12+5}{10} = 2.$$

6. $\sin^6 x - \sin^4 x \cdot \cos x = 2\sin^3 x \cdot \cos^2 x.$

ამოხსნა

$\sin^3 x(\sin^3 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x) = 0.$

$\sin^3 x = 0$, საიდანაც: $\sin x_{1,2,3} = 0$ და

$x_k' = x_k'' = x_k''' = k\pi \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots),$

ფრჩხილებში მოთავსებული განტოლება წარმოადგენს ერთგვაროვან განტოლებას, რომელიც ამოიხსნება წინა განტოლების ანალოგიურად.

პას: $\qquad x^{\mathrm{IV}}_k = k\pi + \mathrm{arc\,tg}\, 2 \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots).$

$$x_k^{\mathrm{V}} = k\pi - \frac{\pi}{4} \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots).$$

7. $\sin^4 x \cdot \cos^2 x + \sin^2 x \cdot \cos^4 x = \sin^3 x \cdot \cos^3 x + \sin x \cdot \cos^5 x.$

ა მ ო ხ ს ნ ა

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x — \operatorname{tg}^3 x — \operatorname{tg} x = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg}^2 x + 1) — \operatorname{tg} x(\operatorname{tg}^2 x + 1) = 0.$$

$$\operatorname{tg} x\,(\operatorname{tg}^2 x + 1)\ (\operatorname{tg} x - 1) = 0.$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x \cdot (\operatorname{tg} x — 1) = 0;$$

რადგანაც $\sec^2 x \neq 0$,

ამიტომ

$$\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x — 1) = 0,$$

საიდანაც

$$\operatorname{tg} x = 0, \qquad x_k' = k\pi \qquad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

$$\operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

$$\operatorname{tg} x = 1, \qquad x_k'' = k\pi + \frac{\pi}{4}, \qquad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2).$$

§ 121. განტოლებები, რომლებიც ამოიხსნებიან ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნამრავლის ალგებრულ ჯამად წარმოდგენის ხერხით.

ამ პარაგრაფში განიხილება ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოხსნის ისეთი მაგალითები, სადაც დაგვჭირდება შემდეგი ფორმულების გამოყენება:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\ [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)], \tag{1}$$

$$\cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\ [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)], \tag{2}$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\ [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \tag{3}$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\ [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]. \tag{4}$$

1. $\sin x — \sin 7x = \sin 3x \cdot \sin 5x.$

ა მ ო ხ ს ნ ა

$$\frac{1}{2}\,[\cos(x - 7x) - \cos(x + 7x)] = \frac{1}{2}\,[\cos(3x - 5x) - \cos(3x + 5x)],$$

$$\cos 6x — \cos 8x = \cos 2x — \cos 8x.$$

$$\cos 6x — \cos 2x = 0,$$

მაგრამ

$$\cos 6x — \cos 2x = — 2\sin 4x \cdot \sin 2x,$$

ამიტომ

$$2\sin 4x \cdot \sin 2x = 0,$$

საიდანაც $\sin 4x = 0$ და $\sin 2x = 0$.

მეორე განტოლების ყველა ფესვი შევა

$$\sin 4x=0$$

განტოლების ფესვებში, ამიტომ

$$4x=0,$$

საიდანაც

$$4x_k=k\pi.$$

$$x_k=k\frac{\pi}{4}; \quad (k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \dots)$$

2. $\cos x \cdot \sin 7x=\cos 3x \cdot \sin 5x.$

ამოხსნა

$$\frac{1}{2}[\sin 8x+\sin 6x]=\frac{1}{2}[\sin 8x+\sin 2x],$$

საიდანაც

$$\sin 6x-\sin 2x=0.$$

მაგრამ

$$\sin 6x-\sin 2x=2\sin 4x \cdot \sin 2x.$$

ამრიგად, მივიღებთ განტოლებას:

$$2\cos 4x \cdot \sin 2x=0$$

ა) $\sin 2x=0$

$$2x=k\pi.$$

$$x_k'=\frac{k\pi}{2} \quad (k=0, \ \pm 1, \ \pm 2 \dots),$$

ბ) $\cos 4x=0,$

$$\cos^2 2x-\sin^2 2x=0,$$

$$1-2\sin^2 2x=0,$$

$$2\sin^2 2x=1,$$

$$\sin^2 2x=\frac{1}{2},$$

$$\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$2x=\frac{\pi}{4},$$

$$x=\frac{\pi}{8}.$$

ზოგადი ამონახსნი კი იქნება

$$x_k''=\frac{\pi}{8}(2k+1);$$

3. $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$.

ამოხსნა

$$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x.$$

$$\sin 2x(2\sin x \cdot \sin 3x - \cos 2x) = 0,$$

$$\sin 2x(\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x) = 0,$$

$$\sin 2x(-\cos 4x) = 0.$$

ა) $\sin 2x = 0.$

$$2x = k\pi.$$

$$x_k' = k \cdot \frac{\pi}{2}. \qquad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots).$$

ბ) $\cos 4x = 0$. ეს განტოლება კი ამოხსნილი გვაქვს წინა მაგალითში.

§ 188. ტრიგონომეტრიული განტოლებანი, რომლებიც ამოიხსნებიან მარცხენა ნაწილის თანამამრავლებად დაშლით

1. $1 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2}$,

ამოხსნა

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2},$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0,$$

$$\sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - 1 \right) = 0,$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0, \quad \left(\frac{x}{2} \right)_k' = k\pi, \quad x_k' = 2k\pi. \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots),$$

$$\sin \frac{x}{2} - 1 = 0.$$

$$\sin \frac{x}{2} = 1, \quad \left(\frac{x}{2} \right)_k'' = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad x_k'' = 4k\pi + \pi \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots)$$

2. $\cos x + \cos 2x + \cos 4x = 0$

ამოხსნა

$\cos x + (\cos 2x + \cos 4x) = 0.$

$\cos x + 2\cos 3x \cdot \cos x = 0,$

$\cos x(1 + 2\cos 3x) = 0.$

$\cos x = 0, \ x_k' = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (k = 0, \pm 1, \ \pm 2, \ldots)$

$2 \cos 3x + 1 = 0;$

$\cos 3x = -\frac{1}{2}.$

$(3x)_k''=2k\pi\pm\frac{2}{3}\pi,\quad x_k''=\frac{2}{3}k\pi\pm\frac{2}{9}\pi\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$

3. $\sqrt{2}\cos 2x=\sin x+\cos x.$

ამოხსნა

$\sqrt{2}\,(\cos^2 x-\sin^2 x)=\sin x+\cos x,$

$\sqrt{2}\,(\cos x-\sin x)\,(\cos x+\sin x)-(\sin x+\cos x)=0,$

$(\cos x+\sin x)\left[\sqrt{2}\,(\cos x-\sin x)-1\right]=0,$

ა) $\sin x+\cos x=0,$

$\operatorname{tg} x=-1,$

$x_k'=k\pi-\frac{\pi}{4},\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$

ბ) $\sqrt{2}\,(\cos x-\sin x)-1=0,$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\frac{1}{2},$

$\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin x=\frac{1}{2},$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{2},$

$\frac{\pi}{4}+x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3},$

$x_k''=2k\pi+\frac{\pi}{12},\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2\ldots)$

$x_k'''=2k\pi+\frac{7\pi}{12},\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots),$

4. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0,$

ამოხსნა.

$(\sin x+\sin 3x)+(\sin 2x+\sin 4x)=0,$

$2\sin 2x\cdot\cos x+2\sin 3x\cdot\cos x=0,$

$2\cos x\,(\sin 2x+\sin 3x)=0,$

საიდანაც

ა) $\cos x=0.$

$x=\frac{\pi}{2}.$

$x_k'=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$

ბ) $\sin 2x+\sin 3x=0.$

$2\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0,$

$\cos\frac{x}{2}=0,$

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2},$

$$\left(\frac{x_k}{2}\right)'' = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x_k'' = \pi + 2k\pi; \quad (k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots),$$

$$\sin\frac{5x}{2} = 0.$$

$$\frac{5x}{2} = k\pi.$$

$$5x = 2k\pi.$$

$$x_k''' = \frac{2}{5}k\pi. \quad (k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots).$$

5. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

ამოხსნა

$$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x,$$

$$2\sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = 2\cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x,$$

$$\sin 2x(2\cos x + 1) - \cos 2x(2\cos + 1) = 0,$$

$$(2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0.$$

ა) $2\cos x + 1 = 0$.

$$\cos x = -\frac{1}{2},$$

$$x_k' = 2k\pi \pm \frac{2}{3}\pi, \quad (k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots).$$

ბ) $\sin 2x - \cos 2x = 0$.

$$\operatorname{tg} 2x = 1,$$

$$2x_k'' = k\pi + \frac{\pi}{4},$$

$$x_k'' = k \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}.$$

6. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.

ამოხსნა

$$2\sin\frac{3x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{3x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2},$$

$$\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0.$$

ა) $\sin\frac{3x}{2} = 0$. (დაასრულეთ),

ბ) $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} = 0$.

$\sin\frac{x}{2}$ შევცვალოთ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)$ გამოსახულებით, შემდეგ გამოიყენეთ კოსინუსების სხვაობის ფორმულა და დაასრულეთ.

პას: $x_k' = \frac{2}{3}k\pi$; $x_k''=2k\pi-\frac{\pi}{2}$; $x_k'''=k\pi+\frac{\pi}{4}$, $(k=0, \pm 1, \pm 2,\ldots)$.

7. $\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} x\cdot \operatorname{tg}(45°-x)\cdot \operatorname{tg}(45°+x)$.

ამოხსნა

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}(45°-x)\cdot\operatorname{tg}(45°+x).$$

$$\operatorname{tg} x\left[\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2 x}-\operatorname{tg}(45°-x)\cdot\operatorname{tg}(45°+x)\right]=0.$$

ა) $\operatorname{tg} x=0$,

$x_k'=k\pi$; $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

ბ) $\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\operatorname{tg}(45°-x)\cdot\operatorname{tg}(45°+x)=\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=1.$

$$\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2 x}=1.$$

$$1+\operatorname{tg}^2 x=0$$

ანუ $sec^2 x=0$, რაც შეუძლებელია, ვინაიდან სეკანსი ერთზე ნაკლები არ შეიძლება იყოს.

ამიტომ განტოლებას ექნება მხოლოდ ერთადერთი ამონახსნი

$$x_k=k\pi,\qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

8. $\sin x+\cos x=1$.

ამოხსნა

$\sin x=1-\cos x$.

$\sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$,

$\sin x$ შევცვალოთ $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

გვექნება

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=2\sin^2\frac{x}{2},$$

$$\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=0,$$

ა) $\sin\frac{x}{2}=0$; $\frac{x}{2}=k\pi$, $x'_k=2k\pi$, $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

ბ) $\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0.$

$$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=1,$$

$$\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{4},$$

$$x_k''=2k\pi+\frac{\pi}{2}. \quad (k=0,\ \pm1,\ \ \pm2,\ldots).$$

§ 128. განტოლებანი, რომლებიც ამოიხსნებიან ე. წ. უნივერსალური ჩასმით

უნივერსალურ ჩასმას მივმართავთ მაშინ, როცა შეუძლებელია განტოლებაში ერთი ფუნქციის მეორეთი რაციონალურად გამოსახვა.

აქ დაგვჭირდება გავიხსენოთ ფორმულები:

$$\sin x=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \tag{1}$$

მაგალითები:

1. $\frac{5}{2}\sin x=1+\cos x.$

ვისარგებლოთ (1) ფორმულებით:

$$\frac{\frac{5}{2}\cdot 2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=1+\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\frac{5\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\frac{5\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$$\frac{5\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{2}{\sec^2\frac{x}{2}};$$

ვინაიდან

$$\sec^2\frac{x}{2}\neq 0,$$

ამიტომ

$$5\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2,$$

საიდანაც

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{2}{5}.$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)=\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{5}\approx 21°48'.$$

$$x\approx 21°48'\cdot 2\approx 43°36'.$$

$$x_k=2k\pi+43°36'=2k\pi+43°36'. \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$$

2. $\sin x-\sqrt{7}\cos x=\sqrt{7}$.

ა მ ო ხ ს ნ ა

ვისარგებლოთ უნივერსალური ჩასმით:

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-\sqrt{7}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\sqrt{7},$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{7}+\sqrt{7}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\sqrt{7},$$

$$2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{7}+\sqrt{7}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\sqrt{7}+\sqrt{7}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2},$$

$$2\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2\sqrt{7},$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{7}.$$

$$\frac{x}{2}=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{7},$$

$$x_k=2k\pi+2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{7}.$$

ზოგიერთი სახის განტოლების ამოხსნა მიზანშეწონილია წარმოებული პროპორციების გამოყენებით. ასე მაგალითად,

3. $3\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$.

ა მ ო ხ ს ნ ა

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}-2x\right)}=\frac{4}{3};$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)}=\frac{7}{1};$$

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos 2x}{2\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin 2x}=7;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}2x=7;$$

$$\operatorname{ctg}2x=\frac{7}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}};$$

$$2x_k=k\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{7}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}};$$

$$x_k=k\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{7}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}},\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

4. $3\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

ამოხსნა

$$\frac{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=3;$$

$$\frac{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1+3}{3-1};$$

$$\frac{2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{8}}{-2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{8}}=2;$$

$$-\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}=2;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)=-\frac{2}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}}=-\frac{2}{\operatorname{ctg}22^\circ 30'};$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)_k - \frac{3\pi}{8} = k\pi - \operatorname{arc\,ctg} \frac{2}{\operatorname{ctg} 22^\circ 30'};$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)_k = k\pi - \operatorname{arc\,ctg} \frac{2}{\operatorname{ctg} 22^\circ 30'} + \frac{3\pi}{8};$$

$$x_k = 2\pi k - 2\operatorname{arc\,ctg} \frac{2}{\operatorname{ctg} 22^\circ 30'} + \frac{3\pi}{84}. \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

§ 184. ტრიგონომეტრიული განტოლებათა ამოხსნა ზოგადი სახით

1. $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

ა მ ო ხ ს ნ ა

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\cos x = t$. მივიღებთ:

$$2t^2 + 3t - 2 = 0. \qquad \text{პას: } x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

დაასრულეთ!

2. $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0.$

აღვნიშნოთ $\operatorname{tg} x = t$, გვექნება:

$$t^3 + t^2 - 3t - 3 = 0.$$

მიღებული განტოლება დავშალოთ თანამამრავლებად:

$$(t+1)(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3}) = 0.$$

$$\operatorname{tg} x_1 = -1; \quad \operatorname{tg} x_2 = \pm\sqrt{3},$$

საიდანაც

$$x'_k = k\pi - \frac{\pi}{4}; \quad x''_k = k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

3. $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$

ა მ ო ხ ს ნ ა

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

გვექნება

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \sin 2x + a = 0.$$

$$\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2(1+a) = 0.$$

ვთქვათ, $\sin 2x = t$, გვექნება:

$$t^2 - 2t - 2(a+1) = 0,$$

$$t = 1 \pm \sqrt{2a+3}.$$

t-ს მიღებული მნიშვნელობა ნამდვილია, თუ $2a+3\geqslant 0$, საიდანაც $a\geqslant -\frac{3}{2}$.

ამრიგად,

$$x_k = k\pi + (-1)^k \arcsin[1+\sqrt{2a+3}].$$

4. $2\cos^2 4x + \sin^2 3x = 1.$

ა მ ო ხ ს ნ ა

ავღნიშნოთ $\cos 2x = t$, გვექნება:

$$2\cos^2 4x = 2(\cos^2 2x - \sin^2 2x)^2 = 2(2\cos^2 2x - 1)^2 = 2(2t^2-1)^2 = 8t^4 - 8t^2 + 2.$$

$$\sin^2 3x = \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{1}{2}[1-\cos(3\cdot 2x)] = \frac{1}{2}\ (1 - 4\cos^3 2x + 3\cos 2x) =$$

$$= \frac{1}{2} 2t^3 + 3t.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$16t^4 - 4t^3 - 16t^2 + 3t + 3 = 0.$$

$$(4t^2-3)(4t^2-t-1) = 0.$$

$4t^2 - 3 = 0,$

$t = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},$

$\cos 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},$

$(2x_k) = k\pi \pm \frac{\pi}{6},$

$x_k' = k\cdot\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12},$

$4t^2 - t - 1 = 0,$

$t = \frac{1\pm\sqrt{17}}{8},$

$x = 2\pi k \pm \arccos\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}.$

5. $\sin^3 \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x = \frac{3}{8}.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. $\sin 3x$ და $\cos 3x$ შეცვალეთ მათი მნიშვნელობებით:

$$3\sin x - 4\sin^3 x \text{ და } 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

ჩასმის შემდეგ მივიღებთ

$3\sin x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{8}$, ანუ $\sin 4x = \frac{1}{2}$.

დაასრულეთ!

6. $3 - 7\cos^2 x \cdot \sin x - 3\sin^3 x = 0.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. შემოიღეთ აღნიშვნა $\sin x = t$, შემდეგ დაშალეთ მამრავლებად და მიიღებთ: $(t-1)[4t(t+1)-3]=0.$

დაასრულეთ!

7. $\sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = 1.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გადაიტანეთ $\sin x \cdot \cos x$ განტოლების მარჯვენა ნაწილში. შემდეგ აახარისხეთ ორივე ნაწილი კვადრატში. დაასრულეთ!

8. $\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\operatorname{tg} x.$

ა მ ო ხ ს ნ ა

ამ განტოლების ამოხსნა შეიძლება ჩასმით $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t.$

მაგრამ მისი ამოხსნა უფრო ადვილად შეიძლება შემდეგი გზით:

$$\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\times$$

$$\times\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}}=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1-2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos x}=$$

$$=\frac{(1-\sin x)^2}{(1+\sin x)\cos x}.$$

ამრიგად:

$$\frac{(1-\sin x)^2}{(1+\sin x)\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x};$$

$$(1-\sin x)^2=\sin x(1+\sin x)$$

$$1-2\sin x+\sin^2 x=\sin x+\sin^2 x.$$

$$3\sin x=1.$$

$$\sin x=\frac{1}{3},$$

$$x=\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$x_k=k\pi+(-1)^k\cdot\arcsin\left(\frac{1}{3}\right).$$

9. $\sin^3x+\cos^3x=1.$

$\sin^3x-\sin^2x+\cos^3x-\cos^2x=0,$

$\sin^2x(\sin x-1)+\cos^2x(\cos x-1)=0,$

$$\sin^2 x\left(\sin x-\sin\frac{\pi}{2}\right)+\cos^2x\,(\cos x-\cos 0^\circ)=0.$$

$$\sin^2 x\cdot 2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2x\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}=0.$$

გამოვთვალოთ ცალ-ცალკე

$$2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos x.$$

ამიტომ გვექნება

$$\sin^2 x\cdot\cos x-\cos^2 x\cdot 2\cdot\sin^2\frac{x}{2}=0.$$

$$\cos x\left(\sin^2 x-2\sin^2\frac{2x}{2}\right)=0.$$

$(\cos x)=0,$

$x_n=k\pi,$

$$\sin^2 x-2\sin^2\frac{x}{2}=0,$$

$$4\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}=0,$$

$$2\sin^2\frac{x}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)=0,\qquad 2\cos^2\frac{x}{2}-1=0,$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=0,\qquad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{x}{2}=0,\qquad \cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{x}{2}=k\pi,\qquad \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4},$$

$$x=\frac{k\pi}{2}.\qquad x=\frac{\pi}{2};\quad x_k=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

10. $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

ა მ ო ხ ს ნ ა:

მ ი თ ი თ ე ბ ა: მარცხენა ნაწილი გამოვსახოთ ორმაგი არგუმენტის ფუნქციის ფორმულის გამოყენებით:

$$\sin^4 x = \frac{(1-\cos 2x)^2}{4},$$

$$\sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\left[1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2}{4} = \frac{(1+\sin 2x)^2}{4},$$

დაასრულეთ!

11. $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16}\cos^4 2x$.

ა მ ო ხ ს ნ ა

მარცხენა ნაწილი გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

$$(\sin^2 x)^5 + (\cos^2 x)^5 = \frac{(1-\cos 2x)^5}{32} + \frac{(1+\cos 2x)^5}{32} =$$

$$= \frac{1-5\cos 2x+10\cos^2 2x-10\cos^3 2x+5\cos^4 2x-\cos^5 x+1+5\cos 2x+}{32}$$

$$\frac{+10\cos^2 2x+10\cos^3 2x+5\cos^4 2x+\cos^5 2x}{32} = \frac{1+10\cos^2 2x+5\cos^4 2x+\cos^5 2x}{16}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\cos^2 2x = t$,

გვექნება:

$$\frac{1+10t+5t^2}{16} = \frac{29}{16}t^2.$$

$$24t^2 - 10t - 1 = 0;$$

$$t_1 = \frac{1}{2}; \qquad t_2 = -\frac{1}{12},$$

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2};$$

$$\cos 2x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2x = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \qquad x = \frac{(2k+1)\pi}{8}.$$

12. $\cos^2 x \cdot \cos 2x + \cos 4x + \cos 3x \cdot \cos x + 2\cos^4 x = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$;

ა მ ო ხ ს ნ ა.

განტოლების მარცხენა მხარე გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

$$\cos^2x\cdot\cos2x+\cos4x+\cos3x\cdot\cos x+2\cos^4x=\cos^2x\cdot\cos2x+\cos4x+\cos 3x\times$$
$$\times\cos x+\cos^2x(1+\cos2x)=\cos x(2\cos x\cdot\cos 2x+\cos 3x+\cos x)+\cos 4x=$$
$$=\cos x(\cos 3x+\cos x+\cos 3x+\cos x)+\cos 4x=\cos x(2\cos3x+2\cos x)+$$
$$+\cos4x=2\cos x\cdot\cos 3x+2\cos^2x+\cos4x=\cos4x+\cos2x+1+\cos2x+$$
$$+\cos4x=1+2(\cos2x+\cos4x)=1+4\cos3x\cdot\cos x.$$

ამის შემდეგ, მოცემული განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$1+4\cos3x\cdot\cos x=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

უკანასკნელი განტოლების ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $\sin x$-ზე.

$$\sin x+2\sin2x\cdot\cos3x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}};$$

$$\sin x+2\sin2x\cos3x=\cos\frac{x}{2};$$

$$\sin x+\sin5x-\sin x=\cos\frac{x}{2};$$

$$\sin5x=\cos\frac{x}{2};$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=\cos\frac{x}{2};$$

$$\pm\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-5x+2k\pi;$$

$$x_k'=\frac{4k+1}{11}\cdot\pi;\quad x_k''=\frac{(4k+1)\pi}{9}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. განტოლების ორივე ნაწილის $\sin x$-ზე გამრავლებამ შეიძლება წარმოშვას გარეშე ფესვები.

13. $\log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x=2.$

ა მ ო ხ ს ნ ა

მარცხენა ნაწილი გარდავქმნათ:

$$\log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x=\log_{\cos x}\sin x+\frac{1}{\log_{\cos x}\sin x};$$

ამრიგად,

$$\log_{\cos x}\sin x + \frac{1}{\log_{\cos x}\sin x} = 2;$$

$$(\log_{\cos x}\sin x)^2 - 2\log_{\cos x}\sin x + 1 = 0.$$

აღვნიშნოთ $\log_{\cos x}\sin x = t$.

$$t^2 - 2t + 1 = 0;$$
$$t = 1 \pm \sqrt{1-1};$$
$$t_1 = t_2 = 1.$$
$$\log_{\cos x}\sin x = 1;$$
$$\cos x = \sin x;$$
$$\operatorname{tg} x = 1.$$
$$x_k' = 2k\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{8k\pi + \pi}{4} = \frac{(8k+1)\pi}{4};$$

აქ შეიძლება დავწეროთ $x_k = k\pi + \frac{\pi}{4}$, ვინაიდან $\sin x$ და $\cos x$ წარმოადგენს ლოგარითმის ფუძეებს და ისინი დადებითი უნდა იყვნენ.

14. $|\sin x^2| = 1$.

ამოხსნა

მოცემული განტოლება ტოლფასია შემდეგი ორი განტოლებისა:

$\sin x^2 = 1$ და $\sin x^2 = -1$, ან იგი ტოლფასია ერთი განტოლებისა: $\sin^2 x^2 = 1$. უკანასკნელიდან

$$\frac{1-\cos 2x^2}{2} = 1.$$

$$\cos 2x^2 = 1,$$

$$2x^2 = (2k+1)\pi,$$

$$x^2 = \frac{2k+1}{2}\pi,$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2k+1}{2}\cdot\pi} \qquad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2 \ldots),$$

15. $0{,}31^{2\cos x - 2\cos 2x} = 0{,}0961$.

ამოხსნა

$$0{,}31^{2\cos x - 2\cos 2x} = (0{,}31)^2,$$

ამიტომ

$$2\cos x - 2\cos 2x = 2,$$

$\cos x - \cos 2x = 1$ (დაასრულეთ!). პას: $x'_k = k\pi + \frac{\pi}{2}$; $x_k'' = 2k\pi + \frac{\pi}{8}$,

16. $1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots = 2$.

ამოხსნა

განტოლების მარცხენა ნაწილი შეიძლება განვიხილოთ როგორც უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესია, სადაც $a_1=1$ და $q=\sin x$. მარცხენა ნაწილის ჯამის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფორმულით: $s=\frac{a_1}{1-q}$;

$$\frac{1}{1-\sin x}=2;$$

$$2-2\sin x=1;$$

$$-2\sin x=-1;$$

$\sin x=\frac{1}{2}$ (დაასრულეთ!).

17. $\sqrt{3}\sin x-\cos x-1.$

მითითება. ისარგებლეთ ფორმულებით

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \quad \text{და} \quad \cos=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

(დაასრულეთ!) პას: $x_k=2k\pi+\frac{1}{3}\pi \quad (k=0,\ \pm1;\ \pm2,\ldots).$

§ 126. ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა სისტემები

1. $$\begin{cases}\sin x\cdot\cos y=a;\\ \cos x\cdot\sin y=b.\end{cases}$$

შევკრიბოთ და გამოვაკლოთ მოცემულ სისტემაში შემავალი განტოლებები წევრ-წევრად:

$$\begin{cases}\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y=a+b,\\ \sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y=a-b;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(x+y)=a+b;\\ \sin(x-y)=a-b.\end{cases}$$

$$x+y=\arcsin(a+b)\cdot(-1)^k+k\pi,$$

$$x-y=\arcsin(a-b)\cdot(-1)^k+k\pi.$$

$$x_k=k\pi+\frac{(-1)^k}{2}[\arcsin(a+b)+\arcsin(a-b)];$$

$$y_k=+(-1)^k[\arcsin(a+b)-\arcsin(a-b)]\cdot(k=0,\ \pm1,\ \pm2\ldots).$$

2. $$\begin{cases}\sin x+\sin y=a.\\ x+y=a.\end{cases}$$

ამოხსნა

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\quad\cos\frac{x-y}{2}$$

მაგრამ, რადგან

$$\frac{x+y}{2}=\frac{\alpha}{2},$$

ამიტომ

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}.$$

ამრიგად,

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}=a;\quad \cos\frac{x-y}{2}=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

საიდანაც

$$\frac{x-y}{2}=\arccos\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}};\quad x-y=2\arccos\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

გვექნება სისტემა

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=2\arccos\dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}; \end{cases}$$

$$2x=a+2\arccos\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

$$x=\frac{a}{2}+\arccos\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

$$2y=a-2\arccos\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

$$y=\frac{a}{2}-\arccos\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\cos y}=\dfrac{5}{3}, \\ x+y=\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა

$$\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{\cos x+\cos y}{\cos x-\cos y}=\frac{5+3}{5-3}.$$

$$\frac{\cos x+\cos y}{\cos x-\cos y}=4,$$

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{y-x}{2}}=4.$$

$$\operatorname{ctg}\frac{x+y}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{y-x}{2}=4;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{ctg}\frac{y-x}{2}=4;$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{y-x}{2}=4;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{y-x}{2}=4\sqrt{3};$$

$$\frac{y-x}{2}=k\pi+\operatorname{arc\,ctg}4\sqrt{3}.$$

$$y-x=2k\pi+2\operatorname{arc\,tg}4\sqrt{3}.$$

ამრიგად,

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3}; \\ y-x=2k\pi+\operatorname{arc\,tg}\ 4\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$2y=\frac{\pi}{3}+2k\pi+2\operatorname{arcctg}4\sqrt{3}.$$

$$y=\frac{(6k+1)\pi}{6}+\operatorname{arc\,ctg}\ 4\sqrt{3};$$

$$2x=\frac{\pi}{3}-2k\pi-2\operatorname{arc\,ctg}\ 4\sqrt{3};$$

$$x=-\frac{\pi(6k-1)}{6}-\operatorname{arc\,ctg}\ 4\sqrt{3}.$$

4. $\begin{cases} 2^{\sin x+\cos y}=1, \\ 16^{\sin^2x+\cos^2y}=4. \end{cases}$

ამოხსნა:

$$\begin{cases} 2^{\sin x+\cos y}=2^0, \\ 4^{2(\sin^2x+\cos^2y)}=4^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x+\cos y=0, \\ 2(\sin^2x+\cos^2y)=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x=-\cos y; \\ \sin^2x+\cos^2y=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

$$(-\cos y)^2+\cos^2y=\frac{1}{2},$$

$$2\cos^2y=\frac{1}{2}$$

$$\cos^2 y = \frac{1}{4}, \qquad \cos y = \pm\frac{1}{2}, \qquad y_1 = \frac{\pi}{3}, \qquad y_2 = \frac{2\pi}{3};$$

$$\sin x = -\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}; \qquad x_1 = -\frac{\pi}{6}, \qquad x_2 = \frac{\pi}{6}.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო:

1. $3\operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x = 1$.
2. $(1+\cos 4x)\sin 4x = \cos^2 2x$.
3. $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$.
4. $3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$.
5. $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x = 1$.
6. $6\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 5\cos^2 x = 2$.
7. $\sin^2 x + \frac{3}{2}\cos^2 x = \frac{5}{2}\sin x \cdot \cos x$.
8. $\sin 2x \cdot \cos x = \sin 4x \cdot \cos 3x$.
9. $\cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 5x$. პას: $x_k' = k\cdot\frac{\pi}{3}$; $x_k'' = k\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.
10. $\sin(x+30^\circ)\cdot\sin(x-30^\circ) = \sin 30^\circ$. პას: $x_k = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.
11. $\cos x \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$. პას. $x_k' = k\frac{\pi}{5}$, $x_k'' = k\pi$, $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.
12. $\sin 3x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}\sin 5x$. პას: $x_k = k\pi$, $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.
13. $\sin(2x+70^\circ)\cdot\sin(2x-50^\circ) = \frac{1}{4}$. პას: $x_k = \frac{k\pi}{2} \mp 15^\circ$, $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.
14. $\sin x \sin(\pi - 4x) = \sin 2x \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi + 3x\right)$. პას: $x_k' = k\frac{\pi}{2}$, $x_k' = k\pi$.
15. $\sin 2x = 4\sin^2 x$.
16. $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$.
17. $\sqrt{3}\sin x = \sin 2x$.
18. $\sin x + \sin 3x = \sin 2x + \sin 4x$.
19. $\cos x + \cos 7x = \cos 4x$.
20. $\sin 2x + \cos 2x + \sin x + \cos x = 0$.
21. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$, პას: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$.
22. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$, პას: $2k\pi + \frac{\pi}{12}$; $2k\pi + \frac{7\pi}{12}$.

23. $4\sin x + 5\cos x = 4$. პას: $x_k' = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$; $\quad 2k\pi - 2\,\text{arc tg}\,\frac{1}{9}$.

24. $3\sin\left(\frac{\pi}{6} + 3x\right) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)$. პას: $x_k = \frac{k\pi}{3} + \frac{1}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{5}{3} - \frac{\pi}{18}$.

25. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$;

მითითება. მარცხენა ნაწილი წარმოადგინეთ შემდეგნაირად:

$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x - \frac{1}{2}$; პას: $x_k = k\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$.

26. $4\sin^2 x + \sin^2 2x = 3$; პას: $x_k' = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$; $x_k'' = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$.

27. $1 - \text{tg}\,x = \cos 2x$;

მითითება. $\cos 2x$ შეცვალეთ $\frac{1-\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x}$ -ით $\left(\cos x = \frac{1-\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}\frac{x}{2}}\right)$.

პას: $x_k' = k\pi + \frac{\pi}{4}$; $x_k'' = k\pi$.

28. $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 3\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

მითითება. მოახდინეთ შეცვლა:

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \text{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}.$$

პას: $x_k' = k\pi + \frac{\pi}{12}$; $x_k'' = k\pi - \frac{7}{12}\pi$.

29. $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$; პას. $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

30. $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \text{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 4$. პას: $x_k' = k\pi + \frac{\pi}{6}$; $x_k'' = k\pi - \frac{\pi}{6}$

31. $5(1 + \sin 2x) - 12(\sin x + \cos x) + 7 = 0$.

მითითება. მოახდინეთ შეცვლა $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$ და შემოიღეთ აღნიშვნა $\sin x + \cos x = t$.

32. $\sin(x + \alpha) - \sin(x - \alpha) = \sin(2x + \alpha) - \sin(2x - \alpha) + \sin\alpha$.

33. $(1 - \text{tg}\,x)(1 + \sin 2x) = 1 + \text{tg}\,x$,

მითითება. შეცვალეთ $1 + \sin 2x = 1 + \frac{2\,\text{tg}\,x}{1 + \text{tg}^2 x}$.

პას: $x_k' = k\pi - \frac{\pi}{4}$; $x_k'' = k\pi$.

34. $5\cdot 2^{1-\cos 2x} - 7\cdot 2^{\sin 2x} = 6.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. $1-\cos 2x$ შეცვალეთ $2\sin^2 x$-ით და შემოიღეთ აღნიშვნა $2^{\sin 2x}=t$.

35. $\begin{cases} \operatorname{tg} x\cdot \operatorname{tg} y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}; \\ x+y=\dfrac{5}{12}\pi. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \sin x+\sin y = \dfrac{1}{2}; \\ x+y=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

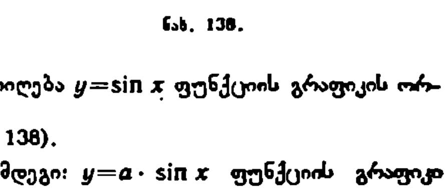
XI თ ა ვ ი

ჯერადი კუთხეების ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გრაფიკები

§ 126. $y=a\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი

თუ შევადარებთ $y=2\sin x$ და $y=\dfrac{1}{2}\sin x$ ფუნქციებს $y=\sin x$ ფუნქციას, ვნახავთ, რომ x არგუმენტის ერთი და იმავე მნიშვნელობისათვის $y=2\sin x$ ფუნქციის მნიშვნელობა ორჯერ მეტია $y=\sin x$ ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობაზე, ხოლო $y=\dfrac{1}{2}\sin x$ ფუნქციის მნიშვნელობა ორჯერ ნაკლებია $y=\sin x$ ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობაზე.

გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ $y=2\sin x$ მრუდის ორდინატები შეიძლება მივიღოთ $y=\sin x$ ფუნქციის შესაბამისი ორდინატებიდან, მათი Oy ღერძის გასწვრივ ორჯერ „გაჭიმვით" (მასთან დადებითი ორდინატები გაიჭიმება ზევით, უარყოფითები — ქვევით).



ნახ. 138.

$y=\dfrac{1}{2}\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის ორჯერ „შეკუმშვით" oy-ის გასწვრივ (ნახ. 138).

ამრიგად, შეგვიძლია დავასკვნათ შემდეგი: $y=a\cdot\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=\sin x$-ის გრაფიკიდან მისი OY ღერძის გასწვრივ a-ჯერ გაჭიმვით, თუ $a>1$, და a-ჯერ შეკუმშვით, თუ $0<a<1$.

a რიცხვს ეწოდება $y=a\sin x$ სინუსოიდის ამპლიტუდა, რაც აღნიშნავს OX ღერძიდან $y=a\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილთა უდიდეს გადახრას (ანუ ორდინატის უდიდეს მნიშვნელობას აბსოლუტური სიდიდით).

§ 127. $y=\sin kx$ ფუნქციის გრაფიკი

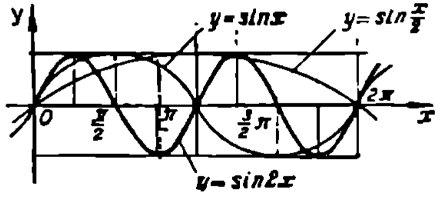
$y=\sin kx$ ფუნქციის გრაფიკის აგების მიზნით შევადაროთ ეს ფუნქცია $y=\sin x$ ფუნქციას. როცა არგუმენტი მიიღებს x_0-ის ტოლ მნიშვნელობას, ცხადია, ფუნქცია მიიღებს y_0-ის მნიშვნელობას, ე. ი. როცა $x=x_0$, მაშინ $y_0=\sin x_0$. ეს უკანასკნელი წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$y_0=\sin\left[k\left(\frac{x_0}{k}\right)\right].$$

აქედან დავასკვნით, რომ $y=\sin kx$ ფუნქცია, როცა $x=\frac{x_0}{k}$, ღებულობს იმავე y_0-ის ტოლ მნიშვნელობას, რასაც $y=\sin x$ ფუნქცია, როცა $x=x_0$.

ეს უკანასკნელი მიუთითებს იმაზე, რომ $y=\sin kx$ ფუნქცია k-ჯერ უფრო ხშირად იმეორებს თავის მნიშვნელობებს, ვიდრე $y=\sin x$ ფუნქცია. ამიტომ, ცხადია, $y=\sin kx$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება OX ღერძის გასწვრივ $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის k-ჯერ „შეკუმშვით“.

მაგალითად, განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $k=2$. $y=\sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკის მისაღებად საჭიროა $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი (სინუსოიდა) ორჯერ შეიკუმშოს აბსცისათა ღერძის გასწვრივ (ნახ. 139).



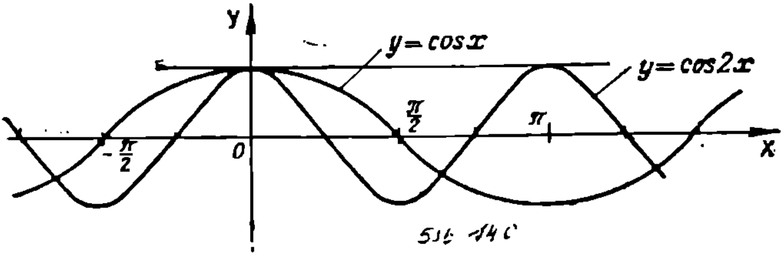
ნახ. 139.

ხოლო $y=\sin\frac{x}{2}$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის OX ღერძის გასწვრივ ორჯერ „გაჭიმვით“ (ნახ. 140).

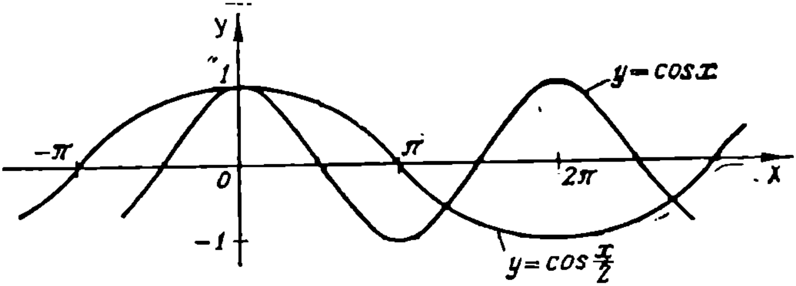
რადგანაც $y=\sin kx$ ფუნქცია თავის მნიშვნელობებს k-ჯერ უფრო ჩქარა იმეორებს, ვიდრე $y=\sin x$ ფუნქცია, ამიტომ მისი პერიოდი k-ჯერ ნაკლებია, ვიდრე $y=\sin x$ ფუნქციის პერიოდი.

მართლაც, $y=\sin 2x$-ის პერიოდი უდრის $\frac{2\pi}{2}=\pi$-ს, ხოლო $y=\sin\frac{x}{2}$ ფუნქციის პერიოდი უდრის $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$-ს.

ანალოგიურად აიგება $y=\cos kx$ და $y=\cos\frac{x}{k}$ ფუნქციათა გრაფიკები. $y=\cos kx$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკის ორჯერ „შეკუმშვით“ ox-ის გასწვრივ (ნახ. 141). ხოლო $y=\cos\frac{x}{k}$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=\cos x$-ის გრაფიკის ორჯერ „გაჭიმვით“ ox-ის გასწვრივ (ნახ. 142).



ნახ. 140.

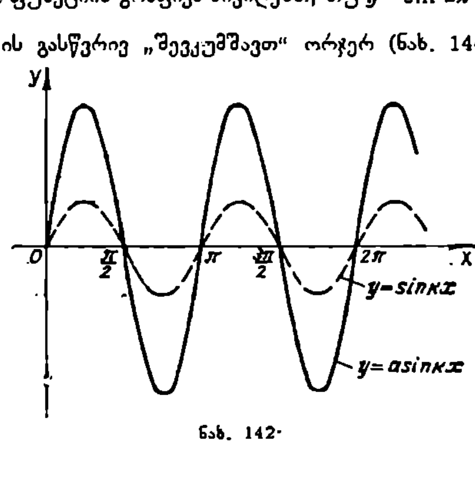


ნახ. 141.

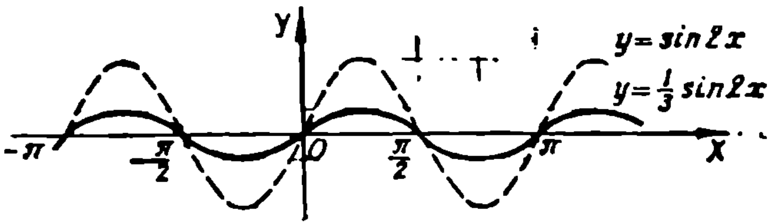
§ 128. $y=a\sin kx$ ფუნქციის გრაფიკი

თუ $a>0$, მაშინ $y=a\sin kx$ ფუნქციის მნიშვნელობა a-ჯერ აღემატება $y=\sin kx$ ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობას. ცხადია, ამის გამო $y=a\sin kx$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=\sin kx$ ფუნქციის გრაფიკის oy ღერძის გასწვრივ a-ჯერ „გაჭიმვით".

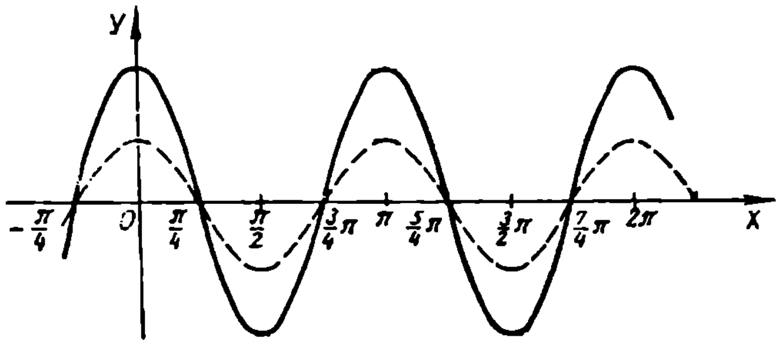
მაგალითად, $y=2\sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=\sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკის 2-ჯერ „გაჭიმვით" ორდინატთა ღერძის გასწვრივ (ნახ. 143). მსგავსად ამისა, $y=\frac{1}{2}\sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკს მივიღებთ, თუ $y=\sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკს ორდინატთა ღერძის გასწვრივ „შევკუმშავთ" ორჯერ (ნახ. 144).



ნახ. 142.



ნახ. 143.



ნახ. 144.

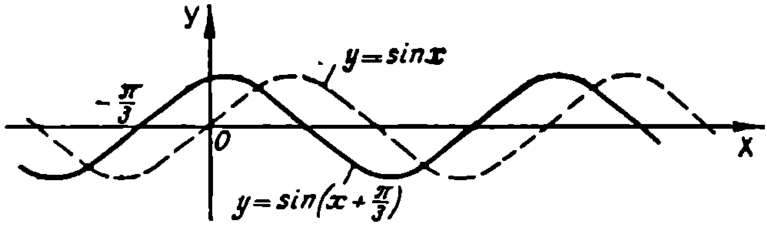
§ 120. $y=a\sin[k(x+\alpha)]$ და $y=a\cos[k(x+\alpha)]$ ფუნქციათა გრაფიკები

აღნიშნულ ფუნქციათა გრაფიკების ასაგებად წინასწარ განვიხილოთ უფრო მარტივი შემთხვევა. კერძოდ, $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ფუნქციის გრაფიკი. ფუნქციათა გრაფიკების აგებისას § 93-ში განვიხილეთ, თუ როგორ მიიღება $\sin\left(x\pm\frac{\pi}{2}\right)$ და $\cos\left(x\pm\frac{\pi}{2}\right)$ ფუნქციათა გრაფიკები $y=\sin x$ და $y=\cos x$ ფუნქციათა გრაფიკებიდან.

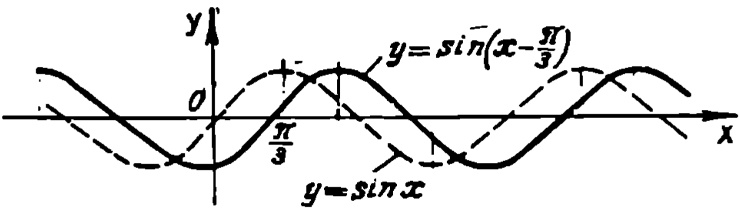
ზუსტად ასევე, $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის გადაწევით OX ღერძის გასწვრივ $\frac{\pi}{3}$ მანძილზე (თუ $\frac{\pi}{3}>0$. მაშინ მარცხნივ გადაწევით, წინააღმდეგ შემთხვევაში—მარჯვნივ გადაწევით).

თუ x-ს განვიხილავთ როგორც დროს, მაშინ თითოეული მნიშვნელობას $y=$ $=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ფუნქცია ღებულობს დროის $\frac{\pi}{3}$ ერთეულით უფრო ადრე

$\left(\text{თუ } \frac{\pi}{3} > 0\right)$, ვიდრე $y = \sin x$ ფუნქცია, ან $\frac{\pi}{3}$ ერთეულით უფრო გვიან თუ $\left(\frac{\pi}{3} < 0\right)$ (ნახ. 145, 146).



ნახ. 145.

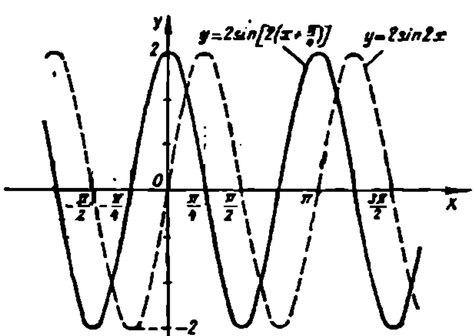


ნახ. 146.

ახლა განვიხილოთ $y=a\sin[k(x+\alpha)]$ ფუნქციის გრაფიკი, ამ ფუნქციის გრაფიკის აგების მიზნით შევადაროთ ეს ფუნქცია $y=a\sin kx$, ფუნქციას, რომლის გრაფიკის აგებაც ჩვენთვის ცნობილია. ვთქვათ, $y=a\sin[k(x+\alpha)]$ ფუნქცია, როცა $x=x_0$, ღებულობს y_0-ის ტოლ რომელიმე მნიშვნელობას:

$$y_0=a\sin[k(x_0+\alpha)]. \tag{1}$$

(1) გვიჩვენებს, რომ $y=a\sin kx$ ფუნქცია, როცა $x=x_0+\alpha$, ღებულობს იმავე y_0-ის ტოლ მნიშვნელობას, ამიტომ ყველა მნიშვნელობას, რომლებსაც ღებულობს $y=a\sin[k(x+\alpha)]$ ფუნქცია, მიიღებს აგრეთვე $y=a\sin kx$ ფუნქციაც, მასთან, თუ x-ს განვიხილავთ, როგორც დროს, მაშინ თითოეულ მნიშვნელობას პირველი ფუნქცია მიიღებს დროის α ერთეულით უფრო ადრე, ვიდრე მეორე. ეს უკანასკნელი მიგვითითებს იმაზე, რომ $y=a\sin[k(x+\alpha)]$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=a\sin kx$ ფუნქციის გრაფიკის OX ღერძის გასწვრივ α ერთეულით მარცხნივ გა-



ნახ. 147.

დაწევით. მაგალითად, $y = 2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=2\sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკის მარცხნივ გადაწევით ox-ის გასწვრივ $\frac{\pi}{4}$ ერთეულით (ნახ. 147).

სრულიად ანალოგიურად აიგება $y=a\cos[k(x+\alpha)]$ ფუნქციის გრაფიკიც.

§ 130. $y=a\sin(kx+\alpha)$ ფუნქციის გრაფიკი

ეს საკითხი განვიხილოთ კონკრეტულ მაგალითზე. ვთქვათ, უნდა აიგოს $y=3\sin(2x+3)$ ფუნქციის გრაფიკი. მოცემული ფუნქცია გარდავქმნათ შემდეგი სახით:

$$y=3\sin\left[2\left(x+\frac{3}{2}\right)\right].$$

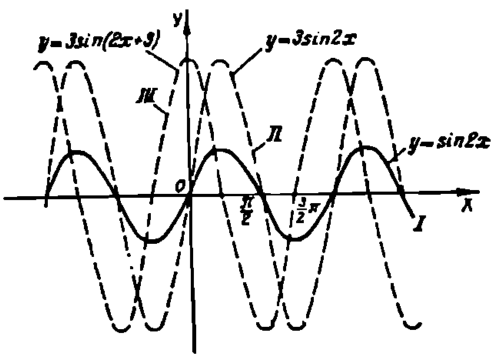
აგება შევასრულოთ შემდეგი თანმიმდევრობით:

1. თუკი $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკს „შევკუმშავთ" ორჯერ აბსცისათა ღერძის გასწვრივ (ჰორიზონტალურად), ამით მივიღებთ $y=\sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკს. (I მეოთხედი) (ნახ. 147).

2. თუ $y=\sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკს სამჯერ „გავჭიმავთ" ორდინატთა ღერძის გასწვრივ (ვერტიკალურად), ამით მივიღებთ $y=3\sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკს (II მეოთხედი) (ნახ. 148).

3. ახლა, თუ $y=3\sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკს მარცხნივ გადავწევთ $\frac{3}{2}$ ერთეულით, მივიღებთ სწორედ $y=3\sin(2x+3)$ ფუნქციის გრაფიკს. (III მეოთხედი) (ნახ. 147).

ანალოგიურად აიგება $y=a\cos(kx+\alpha)$ ფუნქციის გრაფიკიც a, k და α-ს სხვა მნიშვნელობისათვისაც.



ნახ. 148.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო:

ააგეთ შემდეგი ფუნქციათა გრაფიკები:

1. $y=\sin 3x$, 2. $y=\frac{1}{2}\sin 3x$, 3. $y=-3\sin 2x$, 4. $y=-\frac{1}{3}\cos 2x$.

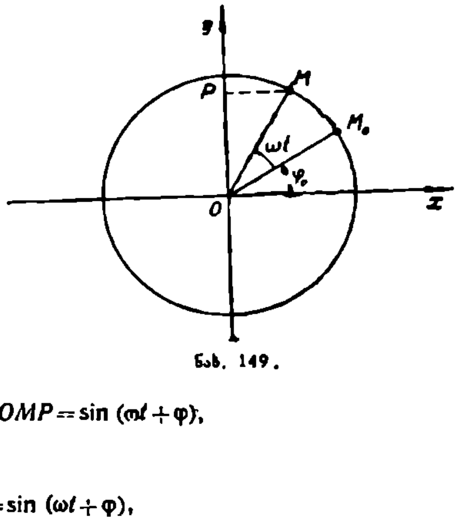
5. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, 7. $y=2\sin(3x-2)$,

6. $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. 8. $y=\frac{1}{2}\sin(3x+3)$.

§ 131. ჰარმონიული რხევა და მისი გრაფიკი

განვიხილოთ A რადიუსიანი წრეწირი. ვთქვათ, ამ წრეწირზე რომელიმე M წერტილი მოძრაობს თანაბრად ω რადიანი კუთხური სიჩქარით. დროის საწყის მომენტში ($t=0$) M წერტილს, ვთქვათ, უჭირავს φ კუთხით განსაზღვრული რაიმე M_0 მდებარეობა (ნახ. 149). ცხადია, დროის t მონაკვეთის ბოლოს ის დაიჭერს $\omega t+\varphi_0$ კუთხით განსაზღვრულ M მდებარეობას.

მაშინ, როცა M წერტილი თანაბრად მოძრაობს წრეწირზე, M წერტილის P გეგმილი ორდინატთა ღერძის გასწვრივ, BB_1 დიამეტრზე ასრულებს რხევით მოძრაობას B და B_1 წერტილებს შორის. მერხევი P წერტილის y ორდინატი შეგვიძლია გამოვსახოთ φ კუთხით, ω კუთხური სიჩქარითა და t ცვლადი დროით.



ნახ. 149.

ცხადია, P წერტილის ორდინატის შეფარდება OM რადიუსთან წარმოადგენს $\omega t+\varphi$ კუთხის სინუსს. $\triangle OPM$-დან:

$$\frac{OP}{OM}=\sin\angle OMP=\sin(\omega t+\varphi),$$

ანუ

$$\frac{y}{A}=\sin(\omega t+\varphi),$$

საიდანაც

$$y=A\sin(\omega t+\varphi) \tag{1}$$

უკანასკნელი ფორმულა გამოსახავს BB_1 დიამეტრზე M წერტილის რხევის კანონს. M წერტილის რხევა BB_1 დიამეტრზე წარმოადგენს ე. წ. ჰარმონიულ რხევას.

როგორც ჩანს, მიღებული ფორმულა წარმოადგენს t დროის ფუნქციას, მისი მაქსიმალური მნიშვნელობა იქნება A, ხოლო მინიმალური $-A$, A სიდიდეს, რომელიც გამოსახავს მერხევი წერტილის მაქსიმალურ გადახრას წონასწორობის მდგომარეობიდან, ეწოდება ჰარმონიული რხევის ამპლიტუდა.

$\omega t+\varphi$ კუთხეს ეწოდება რხევის ფაზა, φ-ს — საწყისი ფაზა. საწყისი ფაზა მუდამ დადებითია და 2π-ზე ნაკლებია. T დროს, რომლის განმავლობაშიც M წერტილი აკეთებს ერთ სრულ ბრუნს, ანუ რაც იგივეა, P წერტილი ასრულებს ერთ სრულ რხევას, ეწოდება ჰარმონიული რხევის პერიოდი.

ჰარმონიული რხევის პერიოდი შეგვიძლია გამოვსახოთ A ამპლიტუდის, ω კუთხური სიჩქარისა და საწყისი φ ფაზის საშუალებით.

ცხადია, დროის T მონაკვეთში M წერტილი წრეწირზე გაივლის ωT რადიან გზას, მაგრამ, როგორც ზემოთ შევნიშნეთ, დროის T მონაკვეთში M წერტილი შემოწერს სრულ წრეწირს, ე. ი. 2π რადიანს.

ამრიგად,

$$\omega T = 2\pi,$$

საიდანაც

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2}$$

როგორც ვხედავთ, ჰარმონიული რხევის პერიოდი კუთხური სიჩქარის უკუპროპორციულია. იგი არაა დამოკიდებული არც რხევის A ამპლიტუდაზე და არც საწყის ფაზაზე.

ადვილად შეიძლება გაჩვენოთ, რომ ჰარმონიული რხევის $T=\frac{2\pi}{\omega}$ პერიოდი არის $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ ფუნქციის პერიოდიც. მართლაც,

$$A\sin\,]\omega(t+T)+\varphi] = A\sin\left[\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right] =$$

$$= A\sin(\omega t+\varphi+2\pi) = A\sin[2\pi+(\omega t+\pi)] = A\sin(\omega t+\varphi).$$

რხევის პერიოდის შებრუნებულ სიდიდეს რხევის სიხშირე ეწოდება და γ ასოთი აღინიშნება.

ე. ი.

$$\nu = \frac{1}{T}\,. \tag{3}$$

მაგრამ ვიცით, რომ $\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$,

ამიტომ

$$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi}.} \tag{4}$$

გვიჩვენებს, თუ რამდენ რხევას ასრულებს მერხევი წერტილი ერთი წამის განმავლობაში.

(4) ფორმულიდან გვაქვს:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\cdot\frac{1}{T} = \frac{2\pi}{T}$$

ამრიგად,

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}.} \tag{5}$$

ამის შემდეგ ჰარმონიული რხევის კანონი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\boxed{y = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)}$$

ჰარმონიული რხევის გრაფიკი იმ შემთხვევისათვის, როცა $A=3$ $\omega=2$რად. და $\varphi=\frac{3}{2}$ რადიანს, გამოსახულია 158-ე ნახაზზე, საზოგადოდ ჰარმონიული რხევების გრაფიკები სინუსოიდას წარმოადგენს.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო:

მოცემულია ჰარმონიული რხევები:

1. $y=\frac{1}{2}\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$. პას: $A=\frac{1}{2}$, $\omega=3$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$
2. $y=3\cos 3t$, პას: $A=3$. $\omega=3$ რად. $\varphi=0$;
3. $y=7\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$. პას: $A=7$, $\omega=2$ რად. $\varphi=\frac{\pi}{6}$ რად;
4. $y=2\sin(3\pi t+1)$; პას: $A=2$, $\omega=3\pi$ რად. $\varphi=1$ რად.

თითოეულისათვის განსაზღვრეთ A ამპლიტუდა, T პერიოდი, ν სიხშირე და φ საწყისი ფაზა.

XII თავი

პროგრესიები

§ 182. რიცხვთა მიმდევრობები

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 1. თუ ყოველ ნატურალურ n რიცხვს ეთანადება გარკვეული a_n რიცხვი, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია რიცხვთა მიმდევრობა:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \qquad (1)$$

(1) მიმდევრობა კიდევ შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად: $\{a_n\}$.

მაგალითად, $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots,$ წარმოადგენს რიცხვთა მიმდევრობას. ნატურალურ $n=4$ რიცხვს ეთანადება რიცხვი $a_4=\frac{1}{4}$ და, პირიქით, რიცხვს $a_4=\frac{1}{4}$ ეთანადება ნატურალური რიცხვი $n=4$.

(1)-ში a_1-ს ეწოდება მიმდევრობის პირველი წევრი, a_2-ს მეორე — წევრი და

ა. შ. a_n-ს მიმდევრობის ზოგადი წევრი. (1) მაგალითში ზოგად წევრს წარმოადგენს $\frac{1}{n}$.

რიცხვთა მიმდევრობა მოცემულად ჩაითვლება, თუ ცნობილია მისი ზოგადი წევრი.

მიმდევრობის ზოგადი წევრი საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ ამ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი.

მაგალითად, თუ ცნობილია, რომ ყოველი n-სათვის $a_n = \frac{1}{2n}$, მაშინ $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{6}$ და ა. შ. როცა $a_n = \frac{n-1}{n}$, მაშინ გვექნება მიმდევრობა:

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ldots,\frac{n-1}{n},\ldots,$$

აღსანიშნავია, რომ ყოველთვის არ ხერხდება მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულის დადგენა. მაგალითად, თუ ავიღებთ $\sqrt{2}$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობათა მიმდევრობას (ნაკლებობებით):

$$1,\ 1{,}4\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ \ldots$$

ჩვენ არ შეგვიძლია შევადგინოთ ფორმულა, რომლის მიხედვითაც შესაძლებელი გახდება ამ მიმდევრობის, ვთქვათ, მე-5; მე-10 ან მე-12 წევრის გამოთვლა. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, მიმდევრობა განსაზღვრულია არა ფორმულით, არამედ მიახლოებითი კვადრატული ფესვის ამოღების წესით.

მიმდევრობა შეიძლება შეიცავდეს წევრების როგორც სასრულო, ისე უსასრულო რიცხვს.

განსაზღვრა. **მიმდევრობას, რომელიც შედგება წევრთა სასრულო რიცხვისაგან, ეწოდება სასრულო, ხოლო მიმდევრობას, რომელიც შედგება წევრთა უსასრულო რიცხვისაგან, ეწოდება უსასრულო.** მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა

1, 2, 3,..... უსასრულოა;

უსასრულოა ლუწ დადებით რიცხვთა მიმდევრობა

2, 4, 6, 8 და ა. შ.

მაგალითად, სასრულოა ერთნიშნა კენტ ან ლუწ რიცხვთა მიმდევრობა.

1, 3, 5, 7, 9.
2, 4, 6, 8. და ა. შ.

სავარჯიშო

დაწერეთ ზოგადი წევრის ფორმულა შემდეგი მიმდევრობებისათვის:

1. 1, 1, 1, ...1 (პას: $a_n = 1^n$).
2. 2, 6, 18, 5, (პას: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$).
3. 1, 0,1 0,01, 0,001, ..- $\left(\text{პას: } a_n = \frac{1}{10^{n-1}}\right)$;

4. $\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{27}, \ldots \qquad \left(\text{პას. } a_n = \frac{1}{3^n}\right);$

5. $1,\ 9,\ 25,\ 49, \ldots \qquad$ პას. $a_n=(2n+1)^2;$

6. $1, 2,\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{3}{5},\ 2\frac{2}{3},\ 2\frac{5}{7},\ 2\frac{3}{4}, \ldots \quad \left(\text{პას. } a_n=3-\frac{2}{n}=\frac{3n-2}{n}\right).$

§ 138. ზრდადი და კლებადი მიმდევრობები

ვთქვათ, მოცემულია მიმდევრობა

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots a_n \ldots \tag{1}$$

განსაზღვრა 1. (1) მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი, თუ $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n<\ldots$ ხოლო კლებადი თუ $a_1>a_2>a_3>\ldots>a_n\ldots$

განსაზღვრა 2. (1) მიმდევრობას ეწოდება არაკლებადი, თუ

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\ldots\leqslant a_n\leqslant\ldots$$

ხოლო არაზრდადი, თუ

$$a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\ldots\geqslant a_n\geqslant\ldots$$

განსაზღვრა 3. ზრდად და კლებად მიმდევრობებს მონოტონური მიმდევრობები ეწოდება.

მონოტონურად ზრდადი რიცხვითი მიმდევრობის მაგალითად. შეიძლება დავასახელოთ ნატურალურ რიცხვთა 1, 2, 3, 4, 5,.... მწკრივი, აგრეთვე, წრეწირში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის, ოთხკუთხედის და ა. შ. პერიმეტრების მიმდევრობა, როცა გვერდების რიცხვს ვაორკეცებთ:

$$P_3,\ P_6,\ P_{12}, \ldots, P_{2n}, \ldots \quad P_4,\ P_8,\ P_{16}, \ldots, P_{2n}, \ldots$$

მონოტონურად კლებადი რიცხვითი მიმდევრობის მაგალითად გამოდგება მიმდევრობა:

$$1, \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

და, აგრეთვე, წრეწირზე შემოხაზული წესიერი სამკუთხედის, ოთხკუთხედის და ა. შ. პერიმეტრების მიმდევრობა, როცა გვერდების რიცხვი ორკეცდება:

$$P_3,\ P_6,\ P_{12}, \ldots, P_{2n}, \ldots \quad P_4,\ P_8,\ P_{16}, \ldots P_{2n}, \ldots$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ ყოველი რიცხვითი მიმდევრობა არაა მონოტონური, მაგალითად, —1, 1, —1 და 1....

მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $a_n=(-1)^n$, არაა არც მონოტონურად ზრდადი და არც მონოტონურად კლებადი. ასეთივე სახის იქნება მიმდევრობა:

$$1, \ -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \ldots$$

რომლის ზოგადი წევრია

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

ასეთი სახის მიმდევრობებს მერხევი მიმდევრობები ეწოდება.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

მოცემულია მიმდევრობის ზოგადი წევრები, დაწერეთ მიმდევრობა და გამოიცანით, რომელია ზრდადი, რომელია კლებადი და რომელია მერხევი:

1. $a_n=2n-1$, პ ა ს უ ხ ე ბ ი: 1. $1,\ 3,\ 5,\ \dots,\ 2_n-1,\ \dots$ (ზრდადი)

2. $a_n=\frac{1}{n}$, 2. $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \dots,\ \frac{1}{n},\ \dots$ (კლებადი)

3. $a_n=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3n}$, 3. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3},\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{6},\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{9},\ \dots,\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{3n},\ \dots$ (კლებადი).

4. $a_n=n^2$, 4. $1,\ 4,\ 9,\ \dots,\ n^2,\ \dots$ (ზრდადი).

5. $a_n=(-0{,}1)^{n-1}$, 5. $1.\ -0{,}1,\ 0{,}01,\ -0{,}001,\dots\ (-0{,}1)^{n-1},\dots$ (მერხევი):

§ 184. შემოსაზღვრულ და არა შემოსაზღვრულ რიცხვთა მიმდევრობები

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 1. **რიცხვთა $\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული, თუ მისი ყოველი წევრი ნაკლებია რომელიმე M რიცხვზე:**

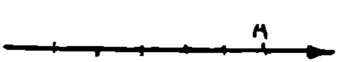
$$a_n<M\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\dots).$$

ასეთი მიმდევრობის მაგალითად გამოდგება:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\dots,\frac{n}{n+1},\dots$$

მიმდევრობა, რომლის ყოველი წევრი ნაკლებია 1-ზე (ამ შემთხვევაში $M=1$), აგრეთვე, მიმდევრობა ყველა უარყოფითი ნამდვილი რიცხვისა ზემოდანაა შემოსაზღვრული, რადგან ყველა მისი წევრი ნაკლებია ნულზე (ამ შემთხვევაში $M=0$). ზემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობის მაგალითად გამოდგება წრეწირში ჩახაზული წესიერი n-კუთხედის პერიმეტრების მიმდევრობა, როცა გვერდების რიცხვი ორკეცდება.

თუ ზემოდან შემოსაზღვრულ რიცხვთა მიმდევრობის წევრებს გამოვსახავთ რიცხვითი ღერძის წერტილებით, მაშინ ყველა წერტილი დალაგდება M რიცხვის შესაბამისი წერტილის მარცხნივ (ნახ. 150, ა).



ნახ. 150, ა.

ნახ. 150, ბ.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 2. **რიცხვთა $\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება ქვემოდან შემოსაზღვრული, თუ მისი ყველა წევრი მეტია რომელიმე N რიცხვზე:**

$$a_n>N\ (n=1,\ 2,\ 3,\dots)$$

ასეთი მიმდევრობის მაგალითად გამოდგება რიცხვთა ნატურალური მწკრივი:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots \qquad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

რადგანაც მისი ყველა წევრი მეტია ნულზე (ამ შემთხვევაში $M=0$).

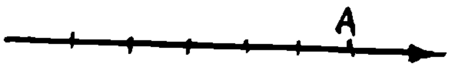
ქვემოდან შემოსაზღვრული რიცხვთა მიმდევრობის მაგალითს წარმოადგენს წრეწირზე შემოხაზული წესიერი n-კუთხედის პერიმეტრების მიმდევრობა, როცა გვერდების რიცხვი ორკეცდება.

თუ ქვემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობის წევრებს გამოვსახავთ რიცხვითი ღერძის წერტილებით, მაშინ ეს წერტილები დალაგდებიან N რიცხვის შესაბამისი წერტილის მარჯვნივ (ნახ. 150, ბ).

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 2. რიცხვთა $\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი M და N რიცხვები, რომ ადგილი ექნება უტოლობას:

$$M<a_n<N \qquad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

რიცხვთა ღერძზე შემოსაზღვრული მიმდევრობის წევრები მთლიანად მოთავსდებიან იმ წერტილებს შორის, რომელთაც ეთანადება M და N რიცხვები (ნახ. 150, გ).



ნახ. 150, გ.

შემოსაზღვრული მიმდევრობა კიდევ შეიძლება განისაზღვროს შემდეგნაირად. $\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ მისი ნებისმიერი წევრის აბსოლუტური მნიშვნელობა არ აღემატება რომელიმე M დადებით რიცხვს, ე. ი. $|a_n|\leqslant A$:

წინააღმდეგ შემთხვევაში მიმდევრობა არაშემოსაზღვრულია. ასეთი მიმდევრობის მაგალითებია: $a_n=n$; $a_n=n(n-1)$; $a_n=\sqrt{n}$ ($n=0, \pm 1, \pm 2$) და ა. შ.

არაშემოსაზღვრული მიმდევრობა არ უნდა აგვერიოს უსასრულო მიმდევრობაში, რომელსაც აქვს ელემენტთა უსასრულო სიმრავლე, მაგრამ იგი მაინც შეიძლება შემოსაზღვრული იყოს. მაგალითად,

$$0{,}3,\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ 0{,}3333, \ldots$$

ან კიდევ

$$0{,}9\ 0{,}99,\ 0{,}999,\ 0{,}9999, \ldots$$

ამ მიმდევრობის ელემენტების რიცხვი უსასრულოა, მაგრამ ისინი მაინც შემოსაზღრული არიან.

§ 136. არითმეტიკული პროგრესია

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. არითმეტიკული პროგრესია ეწოდება რიცხვთა ისეთ მიმდევრობას, რომლის თითოეული წევრი, დაწყებული მეორიდან, უდრის წინა წევრს, გადიდებულს ერთი და იმავე რიცხვით.

არითმეტიკული პროგრესიის მაგალითად გამოდგება ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა:

$$1, 2, 3, 4, \ldots.$$

ამ მიმდევრობის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორიდან, უდრის თავის წინა წევრს, გადიდებულს ერთი ერთეულით.

არითმეტიკულ პროგრესიას წარმოადგენს აგრეთვე შემდეგი მიმდევრობები:

$$5;\ 8;\ 11; \ldots \tag{1}$$

$$7;\ 5;\ 3;\ 1;\ -1;\ -3. \tag{2}$$

(1) მიმდევრობის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორიდან, მიიღება მისი წინა წევრზე 3-ის მიმატებით, ხოლო (2) მიმდევრობის ყოველი წევრი მიიღება თავის წინაზე —2-ის მიმატებით.

არითმეტიკული პროგრესია ზოგადად ჩაიწერება შემდეგი მიმდევრობის სახით:

$$\div a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n \ldots$$

ნიშანი $\div$ გამოსახავს იმას, რომ მიმდევრობა წარმოადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას. a_1 წარმოადგენს არითმეტიკული პროგრესიის პირველ წევრს, a_n — კი უკანასკნელ წევრს. იმ რიცხვს, რომელსაც ვუმატებთ, ეწოდება პროგრესიის სხვაობა და აღვნიშნავთ d-თი. არითმეტიკული პროგრესიის განსაზღვრის თანახმად:

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=a_1+d+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=a_1+2d+d=a_1+3d.$$

ადვილი შესამჩნევია შემდეგი წესი: არითმეტიკული პროგრესიის იმ წევრის მისაღებად, რომლის ნომერიც არის მაგალითად, k, საჭიროა პირველ წევრს დავუმატოთ სხვაობისა და k—1-ის ნამრავლი. ასე რომ,

$$a_k=a_1+(k-1)d. \tag{1}$$

ვთქვათ, მართებულია (1) ტოლობა, ე. ი. ძალაშია ზემოთ აღნიშნული წესი პროგრესიის იმ წევრისათვის, რომლის ნომერიც არის k, და ვაჩვენოთ, რომ ეს წესი მართებულია იმ წევრისთვისაც, რომლის ნომერი არის $k+1$, ე. ი.

$$a_{k+1}=a_1+kd \tag{2}$$

მართლაც,

$$a_{k+1}=a_k+d=a_1+(k-1)\,d+d\ =a_1+kd.$$

ამრიგად,

$$a_{k+1}=a_1+kd,$$

ამით (2) ტოლობის მართებულობა დამტკიცებულია.

უშუალოდ დავრწმუნდით, რომ (1) ფორმულა მართებულია, როცა $k=2$ და $k=3$, ასევე იგი მართებული იქნება, როცა $k=4$, და თუკი ის მართებულია, როცა $k=5$, მაშინ მართებული იქნება მაშინაც, როცა $k=6$ და, საზოგადოდ, მართებული იქნება ნებისმიერი მთელი დადებითი $k=n$-სათვის. ამიტომ

$$a_n=a_1+(n-1)\,d. \tag{3}$$

(3) ფორმულა წარმოადგენს არითმეტიკული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულას. (3) ფორმულის საშუალებით ადვილად შეიძლება ვიპოვოთ არითმეტიკუ-

ლი პროგრესიის ნებისმიერი წევრი, თუ ცნობილია პირველი წევრი a_1 და სხვაობა — d.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. $\div 15, 10, 5, \ldots$

ვიპოვოთ ამ პროგრესიის მე-17 წევრი. როგორც უშუალოდ ჩანს,

$$a_1=15, \qquad d=-5.$$

ამიტომ:

$$a_{17}=a_1+16\,d=15+16\cdot(-5)=15-80=-65.$$

2. $\div -7,\ -6\frac{1}{2},\ -6, \ldots$

ვიპოვოთ ამ პროგრესიის 35-ე წევრი. ვხედავთ, რომ $a_1=-7$, $d=\frac{1}{2}$.

$$a_{35}=a_1+34\,d=-7+34\cdot\frac{1}{2}=-7+17=10.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. $a_1=10$, $d=-3$. შეადგინეთ არითმეტიკული პროგრესია და იპოვეთ a_{37}. პასუხი: $\div 10, 7, 4, \ldots, a_{37}=-98$.
2. $a_1=6$, $a_{10}=33$. შეადგინეთ არითმეტიკული პროგრესია და იპოვეთ მე-100 წევრი. პას: $\div 6, 9, 12, \ldots\ a_{100}=303$.
3. $a_3=12$, $a_6=27$, იპოვეთ d, პას.: $d=5$
4. $a_4=3m$, $a_7=2m$, იპოვეთ d, პას.: $d=-\frac{m}{3}$

5. დაამტკიცეთ, რომ, თუ $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{b+a}$ რიცხვები შეადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას, მაშინ a^2, b^2, c^2 რიცხვები შეადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას.

§ 186. საშუალო არითმეტიკული

თ ე ო რ ე მ ა. არითმეტიკული პროგრესიის

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, a_{n+1} \ldots$$

თითოეული წევრი, დაწყებული მეორიდან, მისი წინა და მომდევნო წევრების საშუალო არითმეტიკულის ტოლია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა

მართლაც, არითმეტიკული პროგრესიის განსაზღვრის ძალით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$a_n=a_{n-1}+d \quad \text{და} \quad a_n=a_{n+1}-d.$$

ამ ტოლობათა წევრ-წევრად შეკრება გვაძლევს

$$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1},$$

საიდანაც $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$,

რითაც თეორემა დამტკიცებულია.

მოსწავლეებს წინადადება ეძლევათ დაამტკიცონ ამ თეორემის შებრუნებული თ ე ო რ ე მ ა. **თუ რიცხვთა მიმდევრობის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორიდან, ტოლია მისი წინა და მომდევნო წევრების საშუალო არითმეტიკულისა, მაშინ ეს მიმდევრობა არითმეტიკულ პროგრესიას წარმოადგენს.**

მაგალითები: 7-სა და 35-ს შორის მოათავსეთ 6 რიცხვი ისე, რომ მივიღოთ არითმეტიკული პროგრესია.

$a_1=7,\ a_8=35,$

$a_8=a_1+7d.$

$35=7+7d.$

$7d=28.$

$d=4.$

საძებნი პროგრესია იქნება:
7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. იპოვეთ 5 რიცხვი, რომლებიც უნდა მოთავსდეს 1-სა და 25-ს შორის, ისე რომ მივიღოთ არითმეტიკული პროგრესია.

პასუხი. $d=4$; $\div 1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ 25.$

2. მოცემულია მწკრივი 2, 14, 26. მის ყოველ ორ მომდევნო წევრს შორის ჩასვით საშუალო არითმეტიკული. შეადგინეთ საძებნი მწკრივი.

პას. $d_1=2$; $\div 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14$; $d_2=2$; $\div 14,\ 16,\ 18,\ 20,\ 22,\ 24,\ 26.$

3. a და b რიცხვებს შორის მოათავსეთ m რიცხვი, რომლებიც მოცემულ რიცხვებთან ერთად შეადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას.

განსაზღვრეთ ამ პროგრესიის პირველი სამი წევრი.

პას. a; $\dfrac{am+b}{m+1}$; $\dfrac{a(m-1)+2b}{m+1}$.

§ 137. არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი

ვიდრე არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულას გამოვიყვანდეთ, გავეცნოთ ისეთი არითმეტიკული პროგრესიის ერთ საინტერესო თვისებას, რომელთა წევრთა რიცხვი სასრულოა. ვთქვათ, გვაქვს:

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17.$$

შევკრიბოთ თავიდან და ბოლოდან თანასწორი რიგით დაშორებული წევრები:

$$3+17=20, \qquad 5+15=20.$$
$$7+13=20, \qquad 9+11=20.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ თავიდან და ბოლოდან ერთნაირი რიგით დაშორებული წევრების ჯამი უდრის კიდურა წევრების ჯამს.

ეს ასეც უნდა ყოფილიყო, ვინაიდან 1 შესაკრებები 2-ით იზრდება (3, 5, 7, 9), მეორე შესაკრებები 2-ით კლებულობს (17, 15, 13, 11).

ახლა გადავიდეთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულის გამოყვანაზე.

ვთქვათ, მოცემულია n წევრისაგან შემდგარი არითმეტიკული პროგრესია:

$$\div a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

აღვნიშნოთ ამ პროგრესიის წევრთა ჯამი S_n-ით,

ე. ი.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \quad (1)$$

თუ (1)-ის ჯამის შესაკრებებს დავწერთ ადგილების შეცვლით, ამით, ცხადია, ჯამი არ შეიცვლება და გვექნება:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1. \quad (2)$$

(1) და (2) ტოლობების წევრ-წევრად შეკრება მოგვცემს

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

თითოეულ ფრჩხილში გვაქვს თავიდან და ბოლოდან თანასწორად დაშორებული წევრების ჯამი, ცხადია, ეს ჯამი ეტოლება კიდურა წევრების ჯამს. ასე რომ, გვექნება:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = a_{n-2} + a_3 = a_{n-1} + a_2 = a_n + a_1,$$

ამიტომ

$$2\,S_n = (a_1 + a_n) \cdot n,$$

საიდანაც

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}. \quad (3)$$

სასრული არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა ჯამი უდრის მისი კიდურა წევრების ნახევარჯამისა და წევრთა რიცხვის ნამრავლს.

მიღებულ ფორმულაში თუ გავითვალისწინებთ არითმეტიკული პროგრესიის ზოგადი a_n წევრის მნიშვნელობას, ($a_n = a_1 + (n-1)\,d$), გვექნება

$$S_n = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)\,d]\quad n}{2} = \frac{[\,2a_1 + (n-1)\,d]\,n}{2},$$

ანუ

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)\,d\,]\,n}{2}. \quad (4)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. ვიპოვოთ $\div 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, \ldots$

პროგრესიის პირველი 8 წევრის ჯამი.

აღებულ მაგალითში $a_1 = 3$, $d = 4$, $a_n = 31$.

ვისარგებლოთ ჯამის ფორმულით

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$$

ჩავსვათ ცნობილი სიდიდეები:

$$S_8 = \frac{(3 + 31)\,8}{2} = 17 \cdot 8 = 136. \qquad S_8 = 136.$$

2. ვიპოვოთ $\div 4, 3\frac{1}{2}, 3, \dots$

პროგრესიის 20 წევრის ჯამი

მოცემულია $a_1=4$; $d=-\frac{1}{2}$, $n=20$.

ამ მაგალითში მოხერხებულია გამოვიყენოთ ჯამის (4) ფორმულა:*

$$S_n=\frac{[2a_1+d(n-1)]n}{2}$$

$$S_{20}=\frac{\left[2\cdot 4-\frac{1}{2}(20-1)\right]20}{2}=\left(8-\frac{19}{2}\right)\cdot 10=-\frac{3}{2}\cdot 10=-15.$$

$$S_{20}=-15.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო.

1. იპოვეთ ნატურალურ რიცხვთა მწკრივის ჯამი 1-დან 100-მდე. პას: 5050

2. იპოვეთ სხვაობა და წევრთა ჯამი არითმეტიკული პროგრესიისა, რომელშიც $a_1=5$, $a_n=105$ და $n=26$. პას: $d=4$, $S=1365$.

3. ამოხსენით განტოლებები:

a) $1+7+13+\dots+x=280$ პას: $x=55$.

b) $1+4+7+\dots+x=117$ პას: $x=25$

c) $(x+1)+(x+4)+(x+7)+\dots+(x+28)=155$ პას: $x=1$.

4. იპოვეთ ჭაბურღილის სიღრმე, თუ ჩაგდებული კენჭი ფსკერზე ეცემა 6—წუთის შემდეგ (ჰაერის წინააღმდეგობა მხედველობაში არ მიიღება).

§ 188. გეომეტრიული პროგრესია. გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულა

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. გეომეტრიული პროგრესია ეწოდება რიცხვთა ისეთ მიმდევრობას, რომლის თითოეული წევრი, დაწყებული მეორიდან, უდრის წინა წევრს, გამრავლებულს ამ მიმდევრობისათვის მუდმივ, ნულისაგან განსხვავებულ რაიმე რიცხვზე.

მაგალითად, გეომეტრიულ პროგრესიას წარმოადგენს რიცხვთა შემდეგი მიმდევრობები:

$$\div\div\ 15,\ 3,\ \frac{3}{5},\qquad \div\div\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \dots\qquad \div\div\ 3,\ 6,\ 12,\ \dots$$

---

* აღებული პროგრესიის ჯამის გამოთვლა შეიძლება (3) ფორმულითაც, მაგრამ ამისათვის წინასწარ უნდა გავიგოთ პროგრესიის მე-20 წევრი, რისთვისაც გამოვიყენებთ $a_n=a_1+(n-1)d$ ფორმულას.

÷÷ ნიშნავს გეომეტრიულ პროგრესიას. დასახელებული მიმდევრობებიდან თითოეული, დაწყებული მეორიდან, მიიღება წინა წევრის გამრავლებით პირველ მაგალითში $\frac{1}{5}$-ზე, მეორეში $\frac{1}{3}$-ზე, მესამეში 2-ზე.

გეომეტრიული პროგრესია ზოგადად ჩაიწერება შემდეგი მიმდევრობის სახით: ÷÷ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

a_1-ს პროგრესიის პირველი წევრი ეწოდება, a_n-ს — ზოგადი წევრი.

იმ რიცხვს, რომელზედაც უნდა გადავამრავლოთ გეომეტრიული პროგრესიის ყოველი წევრი მომდევნო წევრის მისაღებად, ეწოდება პროგრესიის მნიშვნელი და აღინიშნება q ასოთი.

თუ პროგრესიის პირველი წევრი დადებითია და $0<q<1$, მაშინ პროგრესია კლებადია. მაგალითად გეომეტრიული პროგრესია ÷÷ $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \ldots$ კლებადია.

კლებადია პროგრესია მაშინაც, როცა პირველი წევრი უარყოფითია ($a_1<0$) და $|q|>1$.

მაგალითად, ÷÷ $-3, -6, -12, \ldots$ პროგრესია კლებადია.

თუ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი წევრი უარყოფითია და $0<q<1$, მაშინ პროგრესია ზრდადია.

მაგალითად, ÷÷ $-12, -4, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{9}, \ldots$ პროგრესია ზრდადია; იმ შემთხვევაში, როცა პირველი წევრი დადებითია ($a_1>0$) და პროგრესიის მნიშვნელი უარყოფითია ($q<0$), მაშინ პროგრესიის წევრები რიგრიგობით იცვლიან ნიშანს. ასეთ შემთხვევაში გეომეტრიული პროგრესია არც ზრდადია და არც კლებადი. მაგალითად:

$$5, -10, 20, -40, \ldots$$

გეომეტრიული პროგრესიის განმარტების ძალით შეგვიძლია ვწეროთ

$$a_2=a_1\cdot q,$$
$$a_3=a_2\cdot q=a_1\cdot q\cdot q=a_1q^2,$$
$$a_4=a_3\cdot q=a_1q^2\cdot q=a_1q^3.$$

ადვილი შესამჩნევია შემდეგი წესი: **პროგრესიის რომელიმე წევრის მისაღებად საკმარისია, პირველი წევრი გადავამრავლოთ მნიშვნელის იმ ხარისხზე, რამდენი წევრიც წინ უძღვის ამ წევრს.**

მაგალითად, მე-10 წევრს მივიღებთ ასე: $a_{10}=a_1q^9$.

მე-100 წევრს მივიღებთ ასე: $a_{100}=a_1q^{99}$.

ვთქვათ, ეს წესი სამართლიანია k-ური რიგის წევრისათვის ე. ი.

$$a_k=a_1\cdot q^{k-1}. \qquad (1)$$

დავამტკიცოთ მისი სამართლიანობა $k+1$ რიგის წევრისათვის, ე. ი.

$$a_{k+1}=a_1\,q^k.$$

მართლაც, გეომეტრიული პროგრესიის განმარტების ძალით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$a_{k+1}=a_k\cdot q = a_1 q^{k-1}\cdot q = a_1 q^k,$$
$$a_{k+1} = a_1\cdot q^k;$$

(1) ტოლობის სამართლიანობა ჩვენ უშუალოდ შევამოწმეთ იმ შემთხვევისათვის, როცა $k=4$, ცხადია ახლა დამტკიცებულის ძალით ის სამართლიანი იქნება მაშინ, როცა $k=5$. მაგრამ თუ ის სამართლიანია, როცა $k=5$, სამართლიანი იქნება მაშინაც, როცა $k=6$, და ა. შ. საზოგადოდ დამტკიცებული წესი სამართლიანი იქნება ყოველი მთელი დადებითი $k=n$ რიცხვისათვის ($k>1$).
ე. ი.

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1} \qquad (2)$$

ამრიგად, გეომეტრიული პროგრესიის n-ური წევრი უდრის მის პირველ წევრს, გამრავლებულს პროგრესიის მნიშვნელზე $n-1$ ხარისხში.

(2) ფორმულა წარმოადგენს გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულას.

მაგალითები:

1. იპოვეთ ∺3, 6, 12,...

გეომეტრიული პროგრესიის მე-6 წევრი. ვისარგებლოთ (2) ფორმულით:

$$a_6=a_1\cdot q^5,$$
$$a_1=3;\ q=2.$$

ამიტომ $a_6=3\cdot 2^5=3\cdot 2^5=3\cdot 32=96$.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. გამოიანგარიშეთ მე-6 წევრი გეომეტრიული პროგრესიებისა:

ა) ∺ 8, 4, 2, ... პას. $a_6=\frac{1}{4}$,

ბ) ∺ $5\frac{5}{8}$, $3\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}$, ... პას. $a_6=\frac{20}{27}$.

2. იპოვეთ მე-10 წევრი გეომეტრიული პროგრესიისა:

∺ $2,\ -\sqrt{2},\ 1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots$ პას. $a_{10}=\frac{1}{8}\sqrt{2}$.

3. იპოვეთ იმ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი წევრი, რომელშიც

ა) $a_8=384$, $q=2$. პას: $a_1=6$.

ბ) $a_9=\frac{4}{9}$, $q=-\frac{1}{9}$ პას: $a_1=2916$.

§ 180. საშუალო გეომეტრიული

თ ე ო რ ე მ ა. დადებითწევრებიანი

$$\div\div a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n,\ a_{n+1}, \ldots$$

გეომეტრიული პროგრესიის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორედან, უდრის მისი წინა და მომდევნო წევრების საშუალო გეომეტრიულს.

ე. ი.

$$a_n=\sqrt{a_{n-1}\quad a_{n+1}}\cdot$$

მართლაც, როცა $n\geqslant 2$,

$$a_n=a_{n-1}\cdot q. \qquad (1)$$

(1) ტოლობის ორივე ნაწილი ავიყვანოთ კვადრატში:

$$a_n^2=a^2_{n-1}\cdot q^2.$$

ანუ

$$a^2_n=a_{n-1}\cdot(a_{n-1}\cdot q)\,q=a_{n-1}\cdot(a_n\cdot q)=a_{n-1}\cdot a_{n+1}.$$

ამრიგად,

$$a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1},$$

საიდანაც

$$a_n=\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}.$$

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ, თუ გეომეტრიული პროგრესია უარყოფით წევრებს შეიცავს, მაშინ ეს თეორემა არ გამოგვადგება, ვინაიდან საშუალო გეომეტრიული მხოლოდ დადებითი რიცხვებისათვისაა განსაზღვრული.

მაგალითად, $\div\!\div$ 2, —4. 8, ... პროგრესიისათვის მივიღებთ არასწორ ტოლობას.

$$-4=\sqrt{2\cdot 8}=4;$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. 2-ს და 486-ს შორის ჩასვით 4 ისეთი რიცხვი, რომლებიც მათთან ერთად შეადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას.

ცხადია, $a_1=2.$ და $a_6=486.$

$$a_6=a_1q^5;\; 486=2\cdot q^5;\; q^5=243;\; q=\sqrt[5]{243}=3.$$

გვექნება შემდეგი პროგრესია: $\div\!\div$ 2, 6, 18, 54, 162, 486.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი:

1. 9-სა და 243-ს შორის ჩასვით 2 რიცხვი, რომლებიც მოცემულ რიცხვებთან ერთად შეადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას. პას. 9, 27, 81, 243.

2. 160-სა და 5-ს შორის ჩასვით 4 საშუალო გეომეტრიული
პას. 160, 80, 40, 20, 10, 5;

3. 1-სა და 7 შორის ჩასვით 6 საშუალო გეომეტრიული,

პას. 1, $\sqrt[7]{7}$, $\sqrt[7]{7^2}$, $\sqrt[7]{7^3}$, $\sqrt[7]{7^4}$, $\sqrt[7]{7^5}$, $\sqrt[7]{7^6}$, 7.

§ 140. გეომეტრიული პროგრესიის ჯამის ფორმულა

ვთქვათ, მოცემულია $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

ავღნიშნოთ ამ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი S_n-ით:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n. \qquad (1)$$

გავამრავლოთ პირველი ტოლობის ორივე ნაწილი q-ზე, სადაც $q\neq 1$,

$$S_nq=a_1q+a_2q+a_3q+\ldots+a_nq.$$

ვინაიდან

$$a_1 q = a_2$$
$$a_2 q = a_3$$
$$a_3 q = a_4$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1} q = a_n$$

გვექნება

$$S_n q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots a_n + a_n q. \tag{2}$$

(2) ტოლობას გამოვაკლოთ (1):

$$S_n q - S_n = a_n q - a_1,$$
$$S_n (q-1) = a_n q - a_1,$$

საიდანაც

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} \quad (q \neq 1). \tag{3}$$

(3) ფორმულა წარმოადგენს გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულას. **გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი უდრის წილადს, რომლის მრიცხველია უკანასკნელი წევრისა და პროგრესიის მნიშვნელის ნამრავლს გამოკლებული პირველი წევრი, ხოლო წილადის მნიშვნელია პროგრესიის მნიშვნელი ერთის გამოკლებით.**

თუ (3) ფორმულაში $a_n = a_1 q^{n-1}$, გვექნება

$$S_n = \frac{a_1 q^{n-1} \cdot q - a_1}{q-1} = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1} = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1},$$

ე. ი.

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1} \quad (q \neq 1). \tag{4}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი $|q| < 1$, უფრო მოხერხებულია ჯამის (3) და (4) ფორმულები გამოვიყენოთ შემდეგი სახით:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q} \quad \text{და} \quad S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1-q}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1. იპოვეთ იმ გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამი, რომელშიც

$$a_1 = 3, \; q = 2, \; n = 6.$$
$$S_6 = \frac{3 (2^6 - 1)}{2-1} = 3.$$

2. განსაზღვრეთ იმ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი და უკანასკნელი წევრი, რომელშიც: $n = 8$, $q = 2$, $S_8 = 765$.

$S = \dfrac{a_1 (q^n - 1)}{q-1};$ $\qquad a_8 = a_1 q^7;$

$765 = \dfrac{a_1 (2^8 - 1)}{2-1};$ $\qquad a_8 = 3 \cdot 2^7 = 384;$

$765 - 255\, a_1;$ $\qquad a_8 = 384.$

$a_1 = 3.$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

იპოვეთ ჯამები:

1) $1+2+2^2+\ldots+2^{10}$; 5) $1+x+x^2+\ldots+x^{100}$ $(x\neq 1)$

2) $1-2+2^2+2^3\ldots+2^{12}$; 6) $x-x^3+x^5\ldots+x^{19}$

3) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\ldots-\frac{1}{2^{10}}$; 7) $\begin{cases} a_5-1=15 \\ a_4-a_2=6 \end{cases}$ იპ. a_1 და q; პას. 1; 2. $-16, \frac{1}{2}$.

4) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\quad+\frac{1}{3^8}$; 8) $\begin{cases} a_7-a_5=48, \\ a_6+a_5=48, \\ S_n=1023. \end{cases}$ იპ: a_1 და q.

პას: 1; 2.

პ ა ს უ ხ ე ბ ი:

1) 1024, 2) 2731, 3) $-\frac{2043}{4096}$, 4) $\frac{3280}{6561}$, 5) $\frac{x^{101}-1}{x-1}$.

5. ცხრილში მოცემული სამი სიდიდის მიხედვით განსაზღვრეთ ორი დანარჩენი.

№	a_1	q	n	a_n	s_n	№	a_1	q	n	a_n	s_n	№	a_1	q	n	a_n	s
1	1	3	10			4		3		567	847	7		−2	19	262144	
2		$\frac{1}{2}$	8	2		5	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{128}$	$\frac{127}{128}$	8		−3	4	121,3	
3	2		7	1458		6	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6561}$		9	0,8	0,5	57		

§ 141. უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესია

ჯამის განსაზღვრის განხილულ მაგალითებში იგულისხმებოდა, რომ შესაკრებთა რიცხვი იყო სასრული. ახლა განვიხილოთ ჯამის მოძებნის ის შემთხვევა, როდესაც შესაკრებთა რიცხვი უსასრულოა. ვთქვათ,

$$S=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\ldots \qquad (1)$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა: $a_1, a_2, a_3,\ldots,a_n,\ldots$ რიცხვთა უსასრულო მიმდევრობის ჯამი ეწოდება ამ მიმდევრობის პირველი n წევრის ჯამის ზღვარს, როცა $n\to\infty$, ე. ი.

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\ldots) \qquad (2)$$

(2) ზღვარი შეიძლება არსებობდეს და შეიძლება არც არსებობდეს, თუ (2) ზღვარი არსებობს, მაშინ ამბობენ, რომ (1) ჯამი არსებობს, თუკი (2) ზღვარი არ არსებობს, მაშინ არც (1) ჯამი არსებობს.

(1) მიმდევრობის ჯამის არსებობის კრიტერიუმები განიხილება უმაღლესი მათემატიკის იმ განყოფილებაში, რომელსაც „მწკრივთა თეორია“ ეწოდება.

ჩვენ აქ განვიხილავთ რიცხვთა უსასრულო მიმდევრობის ჯამის განსაზღვრის ერთ-ერთ კერძო შემთხვევას — უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის განსაზღვრის შემთხვევას.

ვთქვათ, მოცემულია უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესია

$$\div\div a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n, \ldots$$

ცხადია,

$$a_2=a_1q,\ a_3=a_1q^2, \ldots, a_n=a_1q^{n-1}, \ldots$$

ანუ

$$\div\div a_1,\ a_1q,\ a_1q^2, \ldots,\ a_1q^{n-1},$$

როგორც ვიცით, ამ პროგრესიის პირველი წევრის ჯამი გამოითვლება ცნობილი ფორმულით:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\ .$$

თუ ამ უკანასკნელ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, გვექნება:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n)=\frac{a_1}{1-q}\left(\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}q^n\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}1=1,\qquad \lim_{n\to\infty}q^n=0\qquad (|q|<1),$$

ამიტომ

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}\ .$$

$$\boxed{S=\frac{a_1}{1-q}}$$

ამრიგად, უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი უდრის ამ პროგრესიის პირველ წევრს, გაყოფილს ერთისა და პროგრესიის მნიშვნელის სხვაობაზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

ვიპოვოთ ჯამი უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიებისა:

1. $\div\div 1,\ \frac{1}{2},\ \ \frac{1}{4}, \ldots \qquad S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$

2. $\div\div 14,\ -7,\ 3\frac{1}{2}, \ldots \quad S=\frac{14}{1+\frac{1}{2}}=\frac{14}{\frac{3}{2}}=\frac{14\cdot 2}{3}=\frac{28}{3}=9\ \frac{1}{3}\ .$

3. მარტივი პერიოდული ათწილადი

$$0,\ 13,\ 13,\ 13\ldots$$

ვაქციოთ ჩვეულებრივ წილადად.

მოცემული მარტივი პერიოდული წილადი წარმოვადგინოთ უსასრულო ჯამის სახით:

$$0,131313\ldots=\frac{13}{100}+\frac{13}{1030}+\frac{13}{1000000}+\ldots$$

ცხადია, ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს იმ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამს, რომლის პირველი წევრი არის $\frac{13}{100}$, ხოლო მნიშვნელი $\frac{1}{100}$. ამიტომ

$$0,131313=\frac{\frac{13}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{13}{99}.$$

ამ ხერხით მივიღეთ მარტივი პერიოდული ათწილადის ჩვეულებრივ წილადად გადაქცევის წესი:

მარტივი პერიოდული ათწილადი ჩვეულებრივ წილადად რომ გადავაქციოთ მრიცხველში ვწერთ ათწილადის პერიოდს, ხოლო მნიშვნელში იმდენი ცხრიანისაგან შედგენილ რიცხვს, რამდენი ნიშანიცაა ათწილადის პერიოდში.

4. შერეული პერიოდული წილადი 0,2888... ვაქციოთ ჩვეულებრივ წილადად. ალებული წილადი წარმოვადგინოთ შემდეგი ჯამის სახით:

$$\frac{2}{10}+\frac{8}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{8}{10000}+\ldots$$

ამ ჯამის შესაკრებები, დაწყებული მეორიდან, წარმოადგენს უსასრულოდ კლებად გეომეტრიული პროგრესიის წევრებს. ამ პროგრესიაში მნიშვნელი $q=\frac{1}{10}$, ამიტომ

$$\frac{2}{10}+\frac{8}{100}+\frac{8}{1000}+\ldots+\ldots=\frac{2}{10}+\frac{\frac{8}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{2}{10}+\frac{8}{100-10}=$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{8}{90}=\frac{2\cdot9+8}{90}=\frac{2\cdot10-2+8}{90}=\frac{28-2}{90}=\frac{26}{90}=\frac{13}{45}.$$

5. ასევე, თუ გვაქვს წილადი 0,354545...

გვექნება

$$\frac{3}{10}+\frac{54}{1000}+\frac{54}{1000000}+\ldots=\frac{3}{10}+\frac{\frac{54}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{3}{10}+\frac{54}{990}=$$

$$=\frac{3\cdot99+54}{990}=\frac{3\cdot100-3+54}{990}=\frac{354-3}{990}=\frac{354-3}{990}=\frac{351}{990}=\frac{39}{110}.$$

განხილული მაგალითებიდან ჩანს, რომ შერეული პერიოდული წილადი უდრის ისეთ ჩვეულებრივ წილადს, რომლის მრიცხველი მიღებულია მეორე პერიოდამდე დაწერილი რიცხვიდან, პირველ პერიოდამდე დაწერილი რიცხვის გამოკლებით, ხოლო მნიშვნელი ისეთი რიცხვით, სადაც 9 მეორდება იმდენჯერ, რამდენი ციფრიცაა პერიოდში, იმდენი ნულით ბოლოში, რამდენი ციფრიცაა ერთიდან პერიოდამდე.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

იპოვეთ შემდეგი გეომეტრიული პროგრესიების ჯამები:

1. $6\frac{2}{3}, \quad 1\frac{1}{3}, \quad \frac{4}{15}, \ldots$

2. $3\sqrt{2}, \quad \sqrt{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{3}, \ldots$

3. $\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, \ldots$

4. $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}, \quad 1, \quad \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, \ldots$

5. შემდეგი პერიოდული ათწილადებიდან თითოეული წარმოადგინეთ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამის სახით და განსაზღვრეთ ამ ჯამის ზღვარი:

1) 0,444, ... 2) 15,666, ...

XIII თავი

მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები

§ 142. ირაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის ცნება

ჩვენ გავეცანით ნულოვანი, წილადი და უარყოფითმაჩვენებლიან ხარისხებს. ახლა განვიხილოთ ხარისხი, რომლის მაჩვენებელი ირაციონალური რიცხვია.

ვთქვათ, მოცემულია ხარისხი a^{α}, სადაც $a \neq 1$ და α რაიმე ირაციონალური რიცხვია. აქ შეიძლება შეგვხვდეს შემდეგი შემთხვევები:

1. $a > 1$ და $\alpha > 0$.

α_1 იყოს α ირაციონალური რიცხვის ნებისმიერი მიახლოებითი რაციონალური მნიშვნელობა, აღებული ნაკლებობით, ხოლო α_2 ნებისმიერი მიახლოებითი მნიშვნელობა მეტობით, მაშინ a^{α} გამოსახულების ქვეშ გვესმის რიცხვი, რომელიც მეტია ყოველი a^{α_1} ხარისხზე და ნაკლებია a^{α_2} ხარისხზე. მაგალითად, $3^{\sqrt{2}}$ ნიშნავს ისეთ რიცხვს, რომელიც მეტია შემდეგი რიცხვთა მიმდევრობის თითოეულ წევრზე:

$$3^{1,4}, \quad 3^{1,41}, \quad 3^{1,414} \qquad (1)$$

ხოლო ნაკლებია შემდეგი მიმდევრობის თითოეულ წევრზე:

$$3^{1.5},\quad 3^{1.4},\quad 3^{1.416},\ \ldots \tag{2}$$

(1) მიმდევრობის წევრთა ხარისხის მაჩვენებლები წარმოადგენენ $\sqrt{2}$-ის მიახლოებით მნიშვნელობებს ნაკლებობით.

(2) მიმდევრობის წევრთა ხარისხის მაჩვენებლები არის $\sqrt{2}$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობები, აღებული მეტობით.

2. $a<1$ და $\alpha>0$,

ე. ი. a დადებითია და ნაკლებია 1-ზე და α-ც დადებითია.

მაგალითად,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$$

მაშინ a^{α} გამოსახულების ქვეშ გვესმის ისეთი რიცხვი, რომელიც ნაკლებია ყოველ a^{α_1} ხარისხზე და მეტია a^{α_2} ხარისხზე.

ე. ი. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ არის რიცხვი, რომელიც ნაკლებია

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1.4}\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{1.41}\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{1.414}\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{1.4142}$$

მიმდევრობის თითოეულ წევრზე. ხოლო მეტია

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1.5}\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{1.42}\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{1.425}\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{1.4143}$$

მიმდევრობის თითოეულ წევრზე.

3. $a\gtreqless 1$, მაგრამ $\alpha<0$ (α უარყოფითი ირაციონალური რიცხვია); ამ შემთხვევაში a^{α} გამოსახულებას ეძლევა ისეთი აზრი, რაც აქვს უარყოფით რაციონალურმაჩვენებლიან ხარისხს.

მაგალითად,

$$3^{-\sqrt{2}}=\frac{1}{3^{\sqrt{2}}}\quad \text{და}\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}}.$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ ირაციონალურმაჩვენებლიან ხარისხებზე ვრცელდება ყველა ის თვისება, რაც მიღებული გვქონდა რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხებისათვის.

მაგალითად, თუ α და β ირაციონალური რიცხვებია, მაშინ

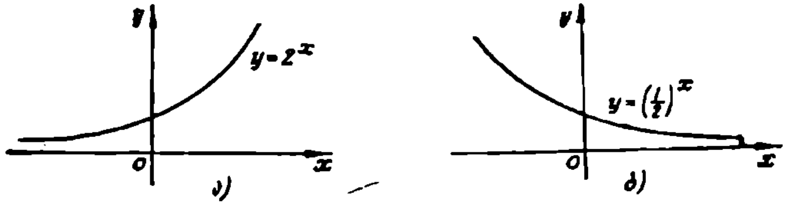
$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta};\quad a^{\alpha}:a^{\beta}=a^{\alpha-\beta};\quad (a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}.$$

§ 148. მაჩვენებლიანი ფუნქცია

განსაზღვრა 1. $y=a^{x}$ სახის ფუნქციას, სადაც $a>0$ და $a\neq 1$, ხოლო x-ს **შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლიდან, ეწოდება მაჩვენებლიანი ფუნქცია.**

თუ ფუძე 1-ის ტოლი იქნება, მაშინ გვექნება $y=1^{x}=1$, ეს კი ჩვენთვის საინ-

ტერესო არაა. ფუძე a ასევე უნდა ვიგულისხმოთ დადებითად, ვინაიდან, როცა a უარყოფითია, a^x ხარისხი x-ის ზოგიერთი მნიშვნელობებისათვის ვერ მოგვცემს ნამდვილ რიცხვს. ასე, მაგალითად, როცა $a=-9$ და $x=\frac{1}{2}$, ხარისხი a^x მიიღებს სახეს: $(-9)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-9}$, რასაც ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში აზრი არა აქვს. განვიხილოთ მაჩვენებლიანი ფუნქციის რამდენიმე თვისება.



ნახ. 151.

თვისება 1. **მაჩვენებლიან ფუნქციას შეუძლია მიიღოს მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობები.**

ე. ი. $a^x>0$, a რიცხვის ყოველი დადებითი მნიშვნელობისათვის. მართლაც, თუ $x>0$, მაშინ $a^x>0$ (ვინაიდან $a>0$). ახლა, ვთქვათ, x არის რაიმე უარყოფითი რიცხვი. მაგალითად, $x=-p$, მაშინ $a^x=a^{-p}=\frac{1}{a^p}$. ცხადია, $a^p>0$, ამიტომ $\frac{1}{a^p}>0$.

ე. ი. a^x ფუნქცია დადებითია x-ის ყოველი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის, ეს თვისება ნათლად ჩანს $y=a^x$ ფუნქციის გრაფიკზე (ნახ. 151, ა, ბ).

თ ვ ი ს ე ბ ა II. **მაჩვენებლიანი ფუნქციის განსაზღვრის არე არის ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, ე. ი. $(-\infty, +\infty)$ შუალედი.**

მართლაც, როცა $a>0$, a^x გამოსახულება განსაზღვრული იქნება $(-\infty, +\infty)$ შუალედიდან აღებული x-ის ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვითი მნიშვნელობისათვის.

თ ვ ი ს ე ბ ა III. **თუ $a>1$, მაშინ $a^x>1$, თუ $x>0$, და $a^x<1$ თუ $x<0$.** თუ x **რაციონალური რიცხვია, მაგალითად,** $x=\frac{m}{n}$, **მაშინ, ცხადია,**

$$a^x=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

ვინაიდან $a>1$, ამიტომ $a^m>1$. ერთზე მეტი რიცხვიდან n ხარისხის ფესვიც, აგრეთვე, 1-ზე მეტი იქნება. ამრიგად, $a^x>1$.

ახლა ვთქვათ, x რაიმე ირაციონალური რიცხვია. მაშინ, როგორც ვიცით, არსებობს დადებითი რაციონალური x_1 და x_2 რიცხვები, რომლებიც წარმოადგენენ x რიცხვის ათწილად მიახლოებებს, ისე რომ

$$x_1<x<x_2.$$

თუ გავიხსენებთ ირაციონალურმაჩვენებლიან ხარისხის განსაზღვრას, გვექნება:

$$a^{x_1}<a^x<a^{x_2}$$

მაგრამ $a^{x_1}>1$, ამიტომ a^x-იც მეტი იქნება — 1-ზე.

ამრიგად, დამტკიცდა, რომ x-ის ნებისმიერი დადებითი მნიშვნელობისათვის, როცა $a>1$, $a^x>1$.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა x უარყოფითია და უდრის $-p$-ს.

მაშინ $a^x=a^{-p}=\frac{1}{a^p}$, მაგრამ $a^p>1$, ამიტომ $\frac{1}{a^p}<1$, ე. ი. როცა $a>1$ და x ნებისმიერი უარყოფითი რიცხვია, $a^x<1$.

ის შემთხვევა, როცა $0<a<1$, შეიძლება ადვილად დავიყვანოთ განხილულ შემთხვევამდე.

თ ვ ი ს ე ბ ა IV. **როცა $a>1$, $y=a^x$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია, ხოლო როცა $a<1$, — მონოტონურად კლებადი.**

მართლაც, ვთქვათ, $a>1$ და $x_2>x_1$. დავამტკიცოთ, რომ $a^{x_2}>x^{x_1}$. რადგანაც $x_2>x_1$, ამიტომ x_2 შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$x_2=x_1+m, \text{ სადაც } m>0.$$

ცხადია,

$$a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1+m}-a^{x_1}=a^{x_1}(a^m-1).$$

ზემოთ განხილული თვისების ძალით $a^{x_1}>0$. რადგან $m>0$, $a^m>1$ და სხვაობა $a^m-1>0$, ამიტომ ნამრავლი $a^{x_1}\cdot(a^m-1)>0$,

ე. ი.

$$a^{x_2}-a^{x_1}>0,$$

საიდანაც $a^{x_2}>a^{x_1}$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

მოსწავლეებს ევალებათ განიხილონ და დაამტკიცონ მე-4 თვისების ის შემთხვევა, როცა $a<1$.

თ ვ ი ს ე ბ ა V. **თუ $a>1$, მაშინ x არგუმენტის უსასრულოდ ზრდასთან ერთად $y=a^x$ ფუნქციის მნიშვნელობაც უსასრულოდ იზრდება. x არგუმენტის უსასრულოდ კლებასთან ერთად $y=a^x$ ფუნქცია უსასრულოდ კლებულობს და მასთან რჩება დადებითი.** ეს თვისება ნათლად ჩანს ნახაზზე (ნახ. 152, ა).

6) $y=a^x$ ფუნქციის ცვლილების არეა ყველა დადებითი რიცხვის სიმრავლე, ე. ი. შუალედი $(0, +\infty)$.

ამრიგად $y=ax$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა (x არგუმენტის მნიშვნელობათა სიმრავლე) $(-\infty, +\infty)$ შუალედი, ხოლო ცვლილების არე $(0, +\infty)$ შუალედი.

როგორც ვნახეთ, მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებები შემდეგია:

1. **$y=a^x$ ფუნქციას შეუძლია მიიღოს მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობები** ($a>0$, $a\neq1$).

2. **თუ $a>1$, მაშინ $a^x>1$, როცა $x>0$, და $a^x<1$, როცა $x<0$.**

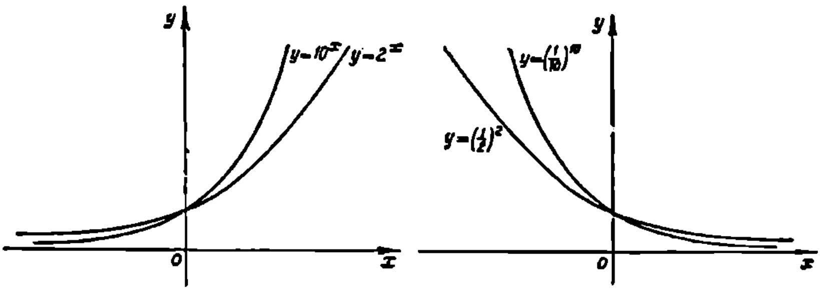
3. **როცა $a>1$, $y=a^x$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია, ხოლო, როცა $a<1$, მონოტონურად კლებადი.**

4. **თუ $a>1$, მაშინ x არგუმენტის უსასრულოდ ზრდასთან ერთად $y=a^x$ ფუნქცია უსასრულოდ იზრდება. x არგუმენტის უსასრულოდ კლებასთან ერთად $y=a^x$ ფუნქცია უსასრულოდ კლებულობს, მასთან რჩება მუდამ დადებითი.**

5. $y=a^x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს (არგუმენტის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს) წარმოადგენს ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, ე. ი. $(-\infty\ +\infty)$ შუალედი.

ცვლილების არეს (ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს) წარმოადგენს ყველა დადებითი რიცხვის სიმრავლე, ე. ი. $(0,\ +\infty)$ შუალედი.

§ 144. მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკი



ნახ. 152 ა, ბ.

$y=2x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	იზრდება
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	იზრდება

$y=10^x$

x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	იზრდება
y	0,1	0,17	0,32	0,56	1	1,78	3,16	5,62	10	იზრდება

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	იზრდება
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	კლებულობს

$y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$

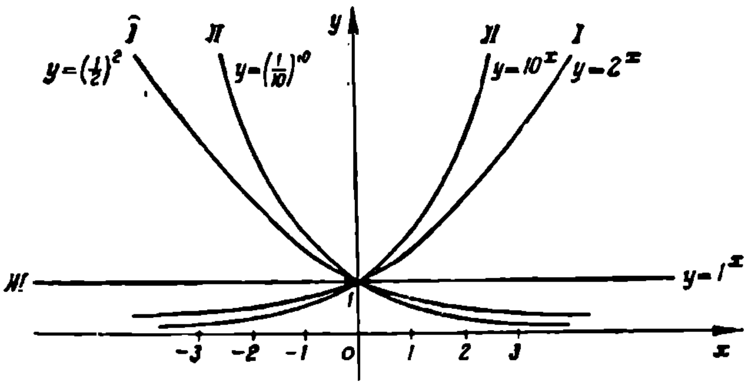
x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	იზრდება
y	10	5,8	3,2	1,8	1	0,6	0,3	0,17	0,1	კლებულობს

უფრო თვალსაჩინოდ წარმოდგენის და ერთი მეორესთან შედარების მიზნით ყველა განხილული შემთხვევა გავაერთიანოთ ერთ ნახაზში.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. მოცემულია მაჩვენებლიანი ფუნქციები:

ა) $y=2^x$, ბ) $y=3^{x-1}$, $y=0,5^{3x}$.



ნახ. 152 გ.

აჩვენეთ, რომ x არგუმენტის მნიშვნელობებისათვის ($x=0, 1, 2, 3, 4,\ldots$) a^x ფუნქციის მნიშვნელობები შეადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას.

2. დაადგინეთ არგუმენტის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე შემდეგი ფუნქციებისათვის: $y=a^x$; $y=a^{-x}$; $y=a^{\frac{3}{x}}$; $y=a^{\sqrt{x}}$ $y=a^{\sqrt[3]{x}}$; $y=a^{\frac{3}{2x-3}}$.

3. დაადგინეთ შემდეგ ხარისხებში:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{4}}; \quad \left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{4}}; \ (0{,}26)^{-0{,}6}; \ (0{,}15)^{0{,}3}; \ (2{,}12)^{-0{,}5}.$$

რომელია ერთის ტოლი, რომელია ერთზე ნაკლები და რომელია 1-ზე მეტი.

4. მაჩვენებლიანი ფუნქციის რომელი თვისების ძალით შეიძლება მტკიცება, რომ

ა) $\left(\frac{5}{7}\right)^{2{,}5}<\left(\frac{5}{7}\right)^{2{,}4}$ ბ) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1{,}3}>\left(\frac{4}{3}\right)^{1{,}2}$?

5. რომელი რიცხვია მეტი

ა) $\pi^{-\sqrt{3}}$ თუ $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{3}}$ ბ) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1+\sqrt{3}}$ თუ $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2}$?

§ 148. ლოგარითმული ფუნქცია

როგორც ცნობილია მოცემული ხარისხით და ხარისხის მაჩვენებლით ადვილად შეიძლება ვიპოვოთ ხარისხის ფუძე.

მაგალითად, $8=x^3$, ცხადია, $x=\sqrt[3]{8}=2$ ან $4=x^2$, $x=\sqrt{4}=2$.
8 არის ხარისხი, x ხარისხის ფუძე და 3 კი ხარისხის მაჩვენებელი.

ახლა დავსვათ საკითხი ასე: რა ხარისხში უნდა ავახარისხოთ 2 ან 3, რომ მივიღოთ 8 ან 9?

ამის მიხედვით უნდა შევადგინოთ განტოლება, ამ შემთხვევაში x-ის პოვნა ფესვის ამოღებით შეუძლებელი ხდება. ერთ შემთხვევაში გვექნება განტოლება, $2^x=8$, მეორეში $3^x=9$,

ე. ი. მოცემული ხარისხით და მოცემული ფუძით უნდა ვიპოვოთ ხარისხის მაჩვენებელი.

მოქმედებას, რომლის საშუალებითაც მოცემული ხარისხით და მოცემული ფუძით მოიძებნება ხარისხის მაჩვენებელი, ეწოდება მოცემული რიცხვის ლოგარითმის პოვნა მოცემული ფუძით.

ამრიგად მოქმედება ახარისხებას ახასიათებს 2 შებრუნებული მოქმედება — ამოფესვა და გალოგარითმება.

განსაზღვრა: მოცემული b რიცხვის ლოგარითმი, მოცემული a ფუძით, ეწოდება ხარისხის მაჩვენებელს, რომელშიც უნდა ავახარისხოთ a, რომ მივიღოთ b რიცხვი:

$$a^x=b. \tag{1}$$

ის ფაქტი, რომ x არის b რიცხვის ლოგარითმი a ფუძით, ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\log_a b=x. \tag{2}$$

(2) იკითხება ასე: b რიცხვის ლოგარითმი a ფუძით უდრის x-ს.

(1) და (2) ტოლობებიდან ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$a^{\log_a b}=b. \tag{3}$$

(3)-ს ძირითადი ლოგარითმული იგივეობა ეწოდება. ამ იგივობის გამოყენებით ადვილად შეიძლება გამოვთვალოთ: $2^{\log_2 8}=8$, ასევე

$$2^{5\log_2 3}=\left(2^{\log_2 3}\right)^5=3^5=243.$$

თუ ფუძედ ავიღებთ 4-ს, მაშინ:

16-ის ლოგარითმი	4-ის ფუძით უდრის	2-ს, ვინაიდან	$4^2=16$, ანუ $2=\log_4 16$
64-ის	"	3-ს	$4^3=64$, ანუ $3=\log_4 64$
4-ის		1-ს	$4^1=4$, ანუ $1=\log_4 4$
2-ის		$\frac{1}{2}$-ს	$4^{\frac{1}{2}}=2$, ანუ $\frac{1}{2}=\log_4 2$
$\frac{1}{4}$-ის		-1-ს	$4^{-1}=\frac{1}{4}$ ანუ $-1=\log_4\frac{1}{4}$
32-ის	2-ის "	5-ს	$2^5=32$, ანუ $5=\log_2 32$
100-ის	10-ის	2-ს	$10^2=100$, ანუ $2=\log_{10} 100$
81-ის	3-ის	4-ს	$3^4=81$, ანუ $4=\log_4 81$
8-ის	$\frac{1}{2}$-ის "	3-ს	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$, ანუ $-3=\log_{\frac{1}{2}} 8$.

სავარჯიშო:

1. იპოვეთ შემდეგი რიცხვების ლოგარითმები, თუ ფუძე უდრის 2-ს;

$$4;\ 16;\ 32;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}125;\ \sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 2\sqrt{2}.$$

2. იპოვეთ შემდეგი რიცხვების ლოგარითმები, თუ ფუძე 3-ის ტოლია:

$3;\ 1;\ 27;\ \frac{1}{3};\quad \frac{1}{243};\ \sqrt{3};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ 3\ \sqrt{3}.$

3. იპოვეთ შემდეგი რიცხვების ლოგარითმები, თუ ფუძე უდრის $\frac{1}{2}$-ს:

$2;\ 32;\ 0{,}25;\ \frac{1}{16};\quad \frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{2};\ 4\sqrt{2}.$

4. იპოვეთ შემდეგი რიცხვების ლოგარითმები, თუ ფუძე უდრის $\frac{1}{3}$-ს:

$\frac{1}{3};\quad \frac{1}{27},\quad \frac{1}{81};\ 3;\ 27;\quad \frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3};\quad \frac{1}{3\sqrt{3}}.$

5. დაამტკიცეთ იგივობა $\log_{a^n}(a^m)=\frac{m}{n}$.

ამ იგივეობის გამოყენებით გამოიანგარიშეთ:

$$\log_2 16;\quad \log_2 2\sqrt{2};\quad \log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2};\quad \log_{16} 64;\quad \log_3 27;$$

$$\log_{27} 243;\quad \log_{\frac{1}{5}} 125;$$

6. ძ. ლ. ი-ს გამოყენებით გამოიანგარიშეთ:

1. $5^{\frac{1}{2}\log_5 49}\qquad 2^{-4\log_2};\qquad 3^{-\frac{1}{3}\log_3 8};\qquad 4^{\log_2 7}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}\qquad \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 1}\qquad \left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 12}$$

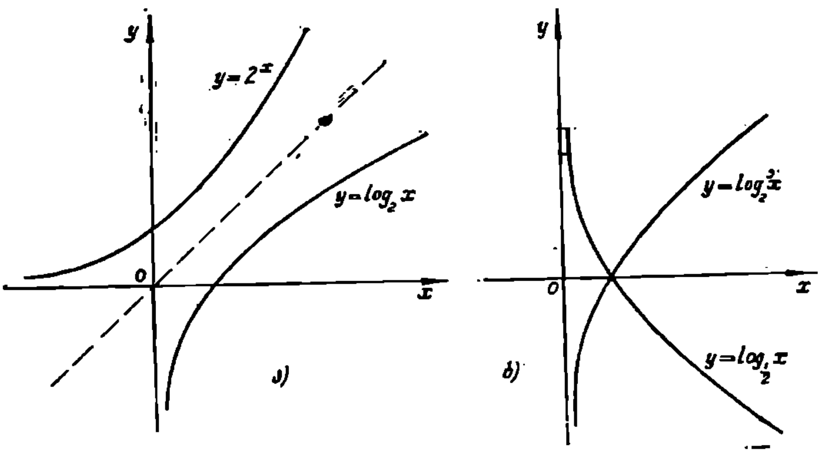
§ 140. ლოგარითმული ფუნქცია და მისი გრაფიკი

განსაზღვრა. ლოგარითმული ფუნქცია ეწოდება $y=\log_a x$ სახის ფუნქციას, სადაც a ერთისგან განსხვავებული რაიმე მუდმივი რიცხვია. ფორმულა $y=\log_a x$ იგივეს გამოსახავს, რასაც $a^y=x$. ცხადია, ადვილი დასაკავშირებელია ლოგარითმული და მაჩვენებლიანი $y=a^x$ ფუნქციები.

თუკი ფუნქცია $y=a^x$ გვიჩვენებს ხარისხის ცვლილებას, ხარისხის მაჩვენებლის ცვალებადობის მიხედვით, $a^y=x$ ფუნქცია, პირიქით, გვიჩვენებს ხარისხის მაჩვენებლის ცვალებადობას ხარისხის ცვლილებასთან დაკავშირებით.

ყოველივე ამის გამო, ბუნებრივია, $y=\log_a x$ (ლოგარითმულ) ფუნქციას ვუწოდოთ მაჩვენებლიანი $y=a^x$ ფუნქციის შებრუნებულ ფუნქცია. ადვილი შესამჩნევია, რომ $a^y=x$ ფუნქცია მიიღება $a^x=y$ ფუნქციიდან, თუ ამ უკანასკნელში x-სა და y-ს ადგილებს შევუცვლით. ეს გარემოება მიუთითებს იმაზე, რომ $y=\log_a x$ ფუნქციის მნიშვნელობები შეგვიძლია მივიღოთ $y=a^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქციის მნიშვნელობებიდან, თუ იმას, რაც მაჩვენებლიანი ფუნქციისათვის იყო y, ლოგარითმული ფუნქციისათვის განვიხილავთ, როგორც x-ს, ხოლო იმას, რაც მაჩვენებლიანი ფუნქციისათვის იყო x, ლოგარითმული ფუნქციისათვის განვიხილავთ, როგორც y-ს.

ეს გარემოება პირდაპირ მიუთითებს იმაზე, რომ ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკი შეიძლება მიღებული იქნას მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკიდან, თუ კოორდინატთა სიბრტყეს გავკეცავთ I და III მეოთხედების ბისექტრისაზე. ნახაზზე ნაჩვენებია, თუ როგორ მიიღება $y=2^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკიდან მისი შებრუნებული $y=\log_2 x$ ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკი. (ნახ. 153).



ნახ. 153.

§ 147. ლოგარითმული ფუნქციის თვისებები

მაჩვენებლიანი ფუნქცია

1. $y=a^x$ ფუნქციას შეუძლია მიიღოს მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობები, ე. ი. ფუნქციის ცვლილების არეა ყველა დადებითი რიცხვის სიმრავლე, ანუ $(0, +\infty)$ შუალედი, რაც იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციას შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობები მხოლოდ $(0, +\infty)$ შუალედიდან.

2. თუ ფუძე ერთზე მეტია, $a^x<1$, როცა $x>0$, ხოლო $a^x<1$, როცა $x<0$,

ლოგარითმული ფუნქცია

1. $y=\log_a x$ ფუნქცია იღებს ნამდვილ მნიშვნელობას არგუმენტის მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობებისათვის, ანუ რაც იგივეა, ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს ყველა დადებითი რიცხვთა სიმრავლე, ანუ $(0, +\infty)$ შუალედი, რაც ნიშნავს, რომ არგუმენტს შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობები მხოლოდ $(0, +\infty)$ შუალედიდან.

გრაფიკი მოთავსებულია OY ღერძის მარჯვნივ (ნახ. 153, ა).

2. თუ ფუძე ერთზე მეტია მაშინ ერთზე მეტი რიცხვების ლოგარითმი დადებითია, ხოლო ერთზე ნაკლები რიცხვების ლოგარითმი უარყოფითია.

ლოგარითმული ფუნქციის ამ თვისებას აქვს მარტივი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. ასე მაგალითად, როცა $a>1$, მაშინ $y=\log_a x$ ფუნქციის შესაბამისი

მრუდის ის ნაწილი, რომელიც ეთანადება $x>1$ მნიშვნელობებს, მთლიანად მოთავსდება OX ღერძის ზემოთ, ხოლო ამ მრუდის ის ნაწილი, რომელიც ეთანადება $0<x<1$ მნიშვნელობებს, მოთავსდება ღერძის ქვემოთ.

ანალოგიური სურათი გვექნება, როცა $a<1$ (ნახ. 153, ბ).

3. როცა $a>1$, მაშინ a^x ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია, ხოლო, როცა $a<0$, მონოტონურად კლებადი.	3. როცა $a>1$, მაშინ ლოგარითმული ფუნქცია $y=\log_a x$ მონოტონურად ზრდადია, ხოლო, როცა $0<a<1$, მონოტონურად კლებადი. ლოგარითმული ფუნქციის ეს თვისება თვალსაჩინოდ ჩანს გრაფიკზე. როცა $a>1$, $y=\log_a x$ ფუნქციის გრაფიკი x-ის ზრდასთან ერთად მიემართება ზევით (ნახ. 153, ა).
4. $y=a^x$ მაჩვენებლიან ფუნქციაში თუ $x=0$, მაშინ $y=1$.	4. ერთის ლოგარითმი ნებისმიერი ფუძით უდრის 0-ს.
5. $y=a^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქციის განსაზღვრის არეს (არგუმენტის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს) წარმოადგენს ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, ე. ი. $(-\infty, +\infty)$ შუალედი. ცვლილების არეს კი (ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს) წარმოადგენს ყველა დადებითი რიცხვის სიმრავლე.	5. $y=\log_a x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს (არგუმენტის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს) წარმოადგენს ყველა დადებითი რიცხვის სიმრავლე, ე. ი. $(0, +\infty)$ შუალედი, ცვალებადობის არეს კი — ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, ანუ $(-\infty, +\infty)$ შუალედი.

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ ფუძის ლოგარითმი ერთის ტოლია.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1) იპოვეთ განსაზღვრის არეები შემდეგი ფუნქციებისათვის:

ა) $y=\log_a\sqrt{x}$, პას.: $x>0$. ვ) $y=\log_a \sin x$, პას.: $2k\pi<x<2k\pi+\pi$.

ბ) $y=\log_a(x+1)$, პას.: $x>-1$. ზ) $y=\log_a(x-1)$, პას.: $x>1$.

გ) $y=\log_a x^2$, პას.: $x\neq 0$. თ) $y=\log_a(x^2+1)$, პას: $-\infty, +\infty$

დ) $y=\log_a(-x)$, პას.: $x<0$. ი) $y=\log_3(x^2+x-2)$. პას.: $x<-2$.

ე) $y=\log_a(x^2-1)$, პას.: $|x|>1$.

2) რომელი რიცხვია მეტი:

ა) $\log_2 5$ თუ $\log_2 6$. გ) $\log_{\frac{1}{4}} 2$, თუ $\log_{\frac{1}{4}} 4$,

ბ) $\log_5\frac{1}{2}$, თუ $\log_5\frac{1}{3}$. დ) $\log_{\frac{1}{7}}\frac{4}{5}$, თუ $\log_{\frac{1}{7}}\frac{5}{6}$.

3) რა შეიძლება ითქვას a რიცხვის შესახებ, თუ:

ა) $\log_a 7>\log_a 6$. გ) $\log_a\frac{1}{3}<\log_a\frac{1}{2}$.

ბ) $\log_a 5<\log_a 4$. დ) $\log_a 5>0$?

4) ამოხსენით უტოლობები:

ა) $\log_3 x^2 > \log_3 4$, პას: $|x| > 2$. გ) $\log_{10}(x^2-1) \geqslant \log_{10}(4x+4)$.

პას: $x \geqslant 5$.

ბ) $\log_4 x > \log_4 3$, პას: $x > 3$. დ) $\log_2 \dfrac{4x-1}{4x+8} > 0$, პას: $\dfrac{1}{4} < x < 2$.

5) რა შეიძლება ითქვას a ფუძის შესახებ, თუ x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის

$$\log_a(x^2+1) > \log_a x?$$

6) მოცემული რიცხვებიდან, რომელია დადებითი და რომელი უარყოფითი:

ა) $\log_3 6$; ბ) $\log_2 \dfrac{1}{2}$; გ) $\log_4 5$; დ) $\log_4 \dfrac{1}{2}$; ე) $\log_7 1$; ვ) $\log_{\frac{\pi}{n}} n$?

§ 148. ნამრავლის, განაყოფის, ხარისხისა და ფესვის ლოგარითმები

1. ორი ან რამდენიმე დადებითი რიცხვის ნამრავლის ლოგარითმი თანამრავლთა ლოგარითმების ჯამის ტოლია.

ვთქვათ, M და N მთელი დადებითი რიცხვებია, მასთან

$$\log_a M = x, \quad \log_a N = y.$$

ლოგარითმის განსაზღვრის ძალით ვწერთ

$$M = a^x, \tag{1}$$

$$N = a^y. \tag{2}$$

ამ ტოლობების წევრ-წევრად გადამრავლება გვაძლევს:

$$MN = a^{x+y} \quad \text{ანუ} \quad M \cdot N = a^{\log_a M + \log_a N},$$

საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს:

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N.$$

2. ორი დადებითი რიცხვის განაყოფის ლოგარითმი უდრის გასაყოფისა და გამყოფის ლოგარითმების სხვაობას.

(1) ტოლობა გავყოთ (2)-ზე

$$\frac{M}{N} = a^{x-y}.$$

ლოგარითმის განსაზღვრის ძალით;

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = x - y, \text{ ანუ } \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N.$$

3. დადებითი რიცხვის ხარისხის ლოგარითმი უდრის ამ ხარისხის მაჩვენებლისა და მისი ფუძის ლოგარითმის ნამრავლს.

ვთქვათ, $\log_a N = x$, მაშინ $N = a^x$, ავახარისხოთ ორივე ნაწილი n ხარისხში ($n \neq 1$, $n > 0$):

$$N^n = a^{nx}.$$

ლოგარითმის განსაზღვრის ძალით ვწერთ:

$$\log(N^n) = nx,$$

საიდანაც

$$\log_a(N^n) = n \cdot \log_a N.$$

ამით მტკიცდება გამოთქმული დებულება.

4. დადებითი რიცხვიდან ფესვის ლოგარითმი უდრის ფესქვეშა გამოსახულების ლოგარითმს, გაყოფილს ფესვის მაჩვენებელზე.

ვიცით, რომ

$$\sqrt[n]{N} = N^{\frac{1}{n}}.$$

თუ გამოვიყენებთ ხარისხის გალოგარითმების წესს, გვექნება:

$$\log_a \sqrt[n]{N} = \log_a N^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a N;$$

ეს უკანასკნელი ადასტურებს გამოთქმულ დებულებას.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. როგორ შეიცვლება მოცემული რიცხვის ლოგარითმი, თუ ფუძის შეუცვლელად:

ა) რიცხვს გავამრავლებთ M-ზე, გავყოფთ M-ზე.,

ბ) რიცხვს ავახარისხებთ m ხარისხში:

გ) რიცხვიდან ამოვიღებთ n ხარისხის ფესვს?

2. დაამტკიცეთ, რომ გეომეტრიული პროგრესიის მომდევნო წევრების ლოგარითმები შეადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას.

3. განსხვავდებიან თუ არა ერთმანეთისაგან ფუნქციები

ა) $y = \log_5 x^5$ და $y = 3 \log_5 x$; ბ) $y = \log_3 \sqrt[5]{x}$ და $y = \frac{1}{5} \log_3 x$?

4. იპოვეთ დაშვებული შეცდომები შემდეგ მტკიცებებში:

ა) $\frac{1}{3} < \frac{1}{9}$; $\frac{1}{3} > \left(\frac{1}{3}\right)^2$; $\log_a\left(\frac{1}{3}\right) > 2 \log_a \left(\frac{1}{3}\right)$; $1 > 2$.

ბ) $\log_3 \frac{1}{5} = \log_3 \frac{1}{5}$; $\log_3 \frac{1}{5} < 2\log_3 \frac{1}{5}$;

$$\log_3 \frac{1}{5} < \log_3 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \text{ ანუ } \frac{1}{5} < \frac{1}{25}.$$

§ 149. ლოგარითმების ერთი ფუძიდან მეორეზე გადასვლა

პრაქტიკაში ხშირად გვიხდება ერთი ფუძით აღებული ლოგარითმიდან სხვა ფუძით აღებულ ლოგარითმზე გადასვლა.

ავიღოთ ძირითადი ლოგარითმული იგივეობა: $a^{\log_a b} = b$.

გავალოგარითმოთ ეს იგივეობა c ფუძით:

$$\log_c (a^{\log_a b}) = \log_c b; \quad \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b,$$

საიდანაც

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \tag{1}$$

(1) ფორმულის საშუალებით შეგვიძლია a ფუძით აღებული b რიცხვის ლოგარითმი გადავიყვანოთ ახალი c ფუძით აღებული b რიცხვის ლოგარითმზე.

თუ (1) ტოლობაში c ფუძეს შევცვლით b-თი, გვექნება:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}; \quad \text{ამრიგად } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \tag{2}$$

როგორც (1), ისე (2) ფორმულას დიდი პრაქტიკული გამოყენება აქვს.

მაგალითები:

1. ა) $\log_{16} 2 = \frac{1}{\log_2 16} = \frac{1}{4}$; ბ) $\log_{125} 5 = \frac{1}{\log_5 125} = \frac{1}{3}$.

გ) $\log_{27} \frac{1}{3} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} 27} = -\frac{1}{3}$;

2. (3) ფორმულის გამოყენებით გამოვთვალოთ $\log_{a^n} b$

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{\log_b a^n} = \frac{1}{n \cdot \log_b a} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{n} \log_a b;$$

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b.$$

მაგალითები

ა) $\log_{a^2} x = \frac{1}{2} \log_a x$. ბ) $\log_{a^3} x^3 = \frac{1}{3} \log_a x^3 = \log_a x$.

ამოვხსნათ განტოლება:

$$\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x + \log_4 x + \log_{\sqrt{2}} x = \frac{15}{2};$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{2^{-1}} x = -1 \cdot \log_2 x = -\log_2 x;$$

$$\log_4 x = \log_{2^2} x = \frac{1}{2} \log_2 x; \quad \log_{\sqrt{2}} x = \log_{2^{\frac{1}{2}}} x = \frac{1}{2} \log_2 x = 2\log_2 x.$$

ამიტომ გვექნება

$$\log_2 x - \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + 2 \log_2 x = \frac{15}{2}.$$

$$\frac{5}{2} \log_2 x = \frac{15}{2}.$$

$$\log_2 x = 3.$$

$$x = 2^3 = 8.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი.

1. როგორ შეიცვლება რიცხვის ლოგარითმი თუ მის ფუძეს ავახარისხებთ მე-4, მე-5, მე-10 ხარისხში?

2. როგორ შეიცვლება რიცხვის ლოგარითმი თუ ამ რიცხვს და ლოგარითმის ფუძეს ავახარისხებთ მე-5 ხარისხში?

იპოვეთ შემდეგი წილადების მნიშვნელობები:

ა) $\frac{\log_4 64}{\log_2 64}$, ბ) $\frac{\log_2\sqrt{2}}{\log_{32}\sqrt{2}}$; გ) $\frac{\log_a x}{\log_{a^2} x}$, დ) $\frac{\log_{\sqrt{3}} 81}{\log_3 81}$.

2) ამოხსენით განტოლებები:

ა) $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$.

ბ) $\log_{64} x + \log_8 x = 0,5$.

§ 150. გალოგარითმება და პოტენცირება

წინა პარაგრაფში განვიხილეთ ნამრავლის, განაყოფის, ხარისხის და ფესვის ლოგარითმები. თუ ალგებრული გამოსახულება შედგენილია გამრავლების, გაყოფის, ახარისხების და ამოფესვის ოპერაციების საშუალებით, მაშინ ზემოთ განხილული წესები საშუალებას გვაძლევს ასეთი გამოსახულების ლოგარითმი გამოვსახოთ მასში შემავალი ცალკეული რიცხვების ლოგარითმების საშუალებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. $x=\frac{m^2n^2}{a\sqrt{b}}$;

წილადის ლოგარითმის შესახებ განხილული წესის ძალით,

$\log_a x=\log_a(m^2n^3)-\log_a(a\sqrt{b})$.

ნამრავლის ლოგარითმის შესახებ განხილული წესის თანახმად ვწერთ:

$\log_a(m^2\cdot n^3)=\log_a m^2+\log_a n^3$,

$\log(a\sqrt{b})=\log_a a+\log_a\sqrt{b}$.

ახლა გამოვიყენოთ ხარისხის და ფესვის ლოგარითმების შესახებ არსებული წესი, გვექნება:

$\log_a m^2=2\log_a m$;

$\log_a n^3=3\log_a n$;

$\log_a a=1$;

$\log_a\sqrt{b}=\frac{1}{2}\log_a b$.

ყოველივე ამის გათვალისწინების შემდეგ x-ის ლოგარითმი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\log_a x=2\log_a m+3\log_a n-1-\frac{1}{2}\log_a b.$$

გამოსახულებიდან მის ლოგარითმზე გადასვლას ამ გამოსახულების გალოგარითმება ეწოდება.

$$x = \frac{5ab^2}{6\sqrt{5ab}};$$

$$\log_a x = \log_a(5ab^2) - \log_a(6\sqrt{5ab});$$

$$\log_a(5ab^2) = \log_a 5 + \log_a a + 2\log_a b;$$

$$\log_a(6\sqrt{5ab}) = \log_a 6 + \frac{1}{2}\log_a 5 + \frac{1}{2}\log_a a + \frac{1}{2}\log_a b.$$

ამიტომ

$$\log_a x = \log_a 5 + 1 + 2\log_a b - \log_a 6 - \frac{1}{2}\log_a 5 - \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\log_a b =$$

$$= \frac{1}{2}\log_a 5 + 1\frac{1}{2}\log_a b - \log_a 6 + \frac{1}{2};$$

ამრიგად

$$\log_a x = \frac{1}{2}\log_a 5 + 1\frac{1}{2}\log_a b - \log_a 6 + \frac{1}{2};$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ ლოგარითმების ფუძედ აღებული არის 10, მაშინ ლოგარითმს ათობითი ლოგარითმი ეწოდება. ათობითი ლოგარითმების დროს ფუძეს არ მიეუწერთ, მაგრამ log ნიშნის ნაცვლად ვწერთ lg ნიშანს.

გალოგარითმების შებრუნებულ მოქმედებას პოტენცირება ეწოდება.

განვმარტოთ ეს კერძო მაგალითზე:

ვთქვათ,

$$\log_a x = \frac{1}{2}\log_a(m+n) + \frac{1}{3}(2\log_a m + 2\log_a n).$$

თუ გამოვიყენებთ ხარისხის, ფესვის და ნამრავლის ლოგარითმების შესახებ არსებულ წესს, გვექნება:

$$\frac{1}{2}\log_a(m+n) = \log_a(m+n)^{\frac{1}{2}} = \log_a\sqrt{m+n},$$

$$\frac{1}{3}(2\log_a m + 2\log_a n) = \log_a(m^2\cdot n^2)^{\frac{1}{3}} = \log_a\sqrt[3]{m^2\cdot n^2},$$

რის შემდეგ $\log_a x$ შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\log_a x = \log_a\left(\sqrt{m+n}\cdot\sqrt[3]{m^2n^2}\right).$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

გაალოგარითმეთ 10-ის ფუძით:

1. ა) $x = 5ab$, ბ) $x = 3a(b+c)$, გ) $x = 4(a^2 - b^2)$.

2. ა) $x = \frac{2ab}{3mn}$; ბ) $x = \frac{3(a+b)}{4a(a-b)}$; გ) $x = \frac{4(m+n)}{5(m^2+n^2)}$.

3. ა) $x=\frac{2\pi R}{T}$; ბ) $R=\frac{pl}{s}(1+\alpha l)$; გ) $a=\omega^2 R$; დ) $W=\frac{mv^2}{2}$.

4. ა) $x=\frac{3a^2}{2(1-a^2)}$; ბ) $x=\frac{a^2 b}{2\cos a}$; გ) $x=\frac{2}{3}h^2\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma$.

5. ა) $x=3m^2\sqrt[3]{3n^2}$; ბ) $x=\frac{m^2n^2}{a\sqrt{b}}$; გ) $x=4a^2\sqrt[4]{\frac{c^3}{d}}$;

6. ა) $x=\frac{5a^2b^3}{6\sqrt[3]{a^2b^2}}$; ბ) $x=\frac{\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt[3]{a^2b}}$; გ) $x=\frac{a^{-1}\sqrt[3]{3b\sin^2\alpha}}{3b\sqrt{a}}$.

7. ა) $x=\frac{a^3\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot a^5\ \sqrt[5]{a^7}\ a^8}{\sqrt[3]{a}}$; ბ) $x=\sqrt{\frac{15\sqrt{3\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{25\sqrt{3}}}}$.

ამოხსენით განტოლებები:

1. $\log_a x=2\log_a(m+n)+\frac{2}{3}(\log_a m-\log_a n)$. პას: $x=(m+n)^2\sqrt[3]{\frac{m^2}{n^2}}$.

2. $\log_a x=\frac{\log_a m}{4}+\log_a 10-\frac{\log_a(m-n)}{3}$. პას: $x=\frac{\sqrt[4]{m}\cdot 10}{\sqrt[3]{m-n}}$.

3. $\log x=\frac{1}{2}\log 9-\log 5+\log 2$. პას: $x=1\frac{1}{5}$

$\log x=\frac{2}{5}\log 32-\frac{1}{3}\log 64+\log 10$. პას: $x=10$.

5. $\log_3 x=\frac{2}{3}\log_3 8+\frac{1}{2}\log_3 16$. პას: $x=16$.

6. $\log_5 x=\frac{2\log_5 7}{5}-\frac{\log_5 7}{10}$. პას: $x=\sqrt[10]{\frac{81}{7}}$.

7) $\log_2 x=\log_2 a+n\log_2(a+b)-\frac{1}{n}\log_2(a-b)$. პას: $x=\frac{a(a+b)^n}{\sqrt[n]{a-b}}$.

8. $\log_3 x=-\frac{1}{2}\log_3 b+\frac{1}{4}\Big[\log_3 b-\frac{2}{3}\log_3 a+\frac{2}{3}\log_3(a-b)-$

$-\frac{1}{2}\log_3(a+b)\Big]$. პას: $x=\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt[24]{\frac{b^6(a-b)^4}{a^4(a+b)^3}}$.

9. $\log_a x=\frac{2}{3}\log_a\sin\varphi+\frac{1}{3}\log_a\operatorname{tg}\varphi-\frac{2}{3}\log_a\cos\varphi$. პას. $x=\operatorname{tg}\varphi$.

§ 161. ათობითი ლოგარითმების სისტემა

განსაზღვრა. რიცხვთა ლოგარითმებს 10-ის ფუძით ათობითი ლოგარითმები ეწოდება.

ათობითი ლოგარითმების აღსანიშნავად მიღებულია სიმბოლო „lg" და არა „log", ათობითი ლოგარითმების სისტემაში ფუძეს არ წერენ, იგი თავისთავად იგულისხმება. მაგალითად, lg 53 ნიშნავს $\log_{10}53$. lg 125 ნიშნავს $\log_{10}125$ და ა. შ.

ათობით ლოგარითმებს ახასიათებს ყველა ის თვისება, რომლებიც ზემოთ განვიხილეთ. მაგალითად, ათობითი ოგარითმები განსაზღვრულია მხოლოდ დადებითი რიცხვებისათვის; ერთზე მეტი რიცხვების ათობითი ლოგარითმები დადებითია, ხოლო ერთზე ნაკლებისა—უარყოფითი; ორი დადებითი რიცხვიდან უდიდესს უდიდესი ლოგარითმები შეესაბამება და ა. შ. მაგრამ, გარდა ამ თვისებებისა, ათობით ლოგარითმებს ახასიათებს ზოგიერთი ისეთი თვისება, რომლებიც მათ ხდიან მეტად მოხერხებულს, პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით.

თ ვ ი ს ე ბ ა 1. ერთიანითა და მისი მომდევნო ნულებით გამოსახული რიცხვის ათობითი ლოგარითმი არის მთელი დადებითი რიცხვი, რომელიც უდრის ამ რიცხვის ჩანაწერში ნულების რაოდენობას.

ასე მაგალითად,

ვინაიდან $10^1=10$, $\quad \lg 10=1.$

$10^2=100$, $\quad \lg 100=2$

. . . .

$10^4=10000$ $\quad \lg 10000=4.$

საზოგადოდ, თუ $a=10^n=100\ldots0$, $\lg a=\lg 10^n=n \lg 10=n\cdot 1=n.$

თ ვ ი ს ე ბ ა 2. ერთიანითა და მისი წინამდებარე ნულებით გამოსახული დადებითი ათწილადის ლოგარითმი არის მთელი უარყოფითი რიცხვი, რომელიც იმდენ უარყოფით ერთეულს შეიცავს, რამდენი ნულიცაა ამ ათწილადის ჩანაწერში ნული მთელის ჩათვლით,

ვინაიდან $10^{-1}=0{,}1$ $\quad \lg 0{,}1=-1$

$10^{-2}=0{,}01$ $\quad \lg 0{,}01=-2$

$10^{-3}=0{,}001.$ $\quad \lg 0{,}001=-3$

. . . .

$10^{-n}=\underbrace{0{,}00\ldots0}_{n}1$ $\quad \lg \underbrace{0{,}00\ldots0}_{n}1=-n.$

უნდა შევნიშნოთ, რომ ათობითი ლოგარითმები იმ რაციონალური რიცხვებისა, რომელთა წარმოდგენა არ შეიძლება 10^n და 10^{-n} სახით, არ შეიძლება გამოისახოს არც მთელითა და არც სასრულო ათწილადით. ასეთი სახის რიცხვთა ლოგარითმები ირაციონალურ რიცხვებს წარმოადგენს.

მაგალითისათვის ვაჩვენოთ, რომ $\lg 3$ არ შეიძლება ეტოლებოდეს $\frac{p}{q}$ სახის რაციონალურ რიცხვს, სადაც p და q მთელი დადებითი და ურთიერთთანამარტივი რიცხვებია.

თუ დავუშვებთ, რომ $\lg 3=\frac{p}{q}$, მაშინ ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას $10^{\frac{p}{q}}=3$, ანუ $10^p=3^q$. ეს უკანასკნელი ტოლობა კი შეუძლებელია, ვინაიდან მარცხენა ნაწილი (10^p) არის რიცხვი, რომელიც გამოისახება ერთიანით და „p“ ნულით.

$$10^p=(5\cdot 2)^p=5^p\cdot 2^p.$$

მარჯვენა ნაწილის დაშლა ასეთი სახით შეუძლებელია. ამრიგად, იმის დაშვება, რომ $\lg 3$ არის $\frac{q}{q}$ რაციონალური რიცხვი, არაა სწორი.

იმ რიცხვების ათობითი ლოგარითმები, რომლებიც არ გამოისახებიან 10^n სახით, (სადაც n მთელი დადებითი ან უარყოფითი რიცხვეია) შეიძლება ვიპოვოთ მიახლოებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი: 1) ვთქვათ, საჭიროა ვიპოვოთ 196-ის ათობითი ლოგარითმი. დავწეროთ შემდეგი ცხადი უტოლობა

$$100<196<1000.$$

მაშინ

$$\lg 100<\lg 196<\lg 1000$$

ანუ

$$2<\lg 196<3,$$

საიდანაც დავასკვნით,

$\lg 196=2$ (პლუს დადებითი წესიერი წილადი).

2. ასევე, ვთქვათ, გვაქვს $\lg 72,3$. მაშინ $10<72,3<100$: $\lg 10<\lg 72,3<\lg 100$; $1<\lg 72,3<2$, ამიტომ, $\lg 72,3=1$ (პლუს წესიერი წილადი).

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. ლოგარითმის მთელ ნაწილს მახასიათებელი ეწოდება, წილად ნაწილს — მანტისა. ცხრილში ვპოულობთ

$$\lg 196=2,2923; \quad \lg 72,3=1,8591.$$

მიღებულ მაგალითებში მახასიათებელი შესაბამისად ეტოლება 2-ს და 1-ს, მანტისა კი 0,2923-სა და 0,8591-ს.

თ ე ო ს ე მ ა 3. ერთზე მეტი დადებითი რიცხვის ათობითი ლოგარითმის მახასიათებელი უდრის ციფრების რაოდენობას ამ რიცხვის მთელ ნაწილში, ერთის გამოკლებით.

თ ე ო ს ე მ ა 4. ერთზე ნაკლები ათწილადი ლოგარითმის მახასიათებელი არის უარყოფითი რიცხვი, რომელიც იმდენად უარყოფით ერთეულს შეიცავს, რამდენი ნულიცაა მოცემულ ათწილადში პირველი ნიშნადი ციფრის წინ, ნული მთელის ჩათვლით.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

ა) $\lg 0,025$ ლოგარითმის მახასიათებელი არის -2.

მართლაც,

$$0,001<0,025<0,01,$$
$$\lg 0,001<\lg 0,025<\lg 0,01,$$
$$-3<\lg 0,025<-2.$$

ამრიგად, $\lg 0,025=-3+$ წესიერი დადებითი წილადი.

2. $\lg 0,00055=-4+$ წესიერი დადებითი წილადი.

მართლაც, $0,0001<0,00055<0,001$,

საიდანაც $\lg 0,0001<\lg 0,00055<\lg 0,001$.

$$-4<\lg 0,00055<-3.$$

საერთოდ, თუ α ათწილადის პირველ ნიშნად ციფრს წინ უძღვის n ნული, ნული მთელის ჩათვლით, მაშინ

$$\underbrace{0,00\ldots0}_{n \text{ ნული}}1\leqslant\alpha<\underbrace{0,0\ldots0}_{n-1 \text{ ნული}}1$$

$$-n\leqslant\lg\alpha<-(n-1).$$

აქედან ჩანს, რომ

$$\lg \alpha = -n + \text{ წესიერი დადებითი წილადი.}$$

ე. ი. უმცირეს რიცხვს პლუს დადებითი წესიერი წილადი, ამ შემთხვევაში მახასიათებელი, უარყოფითი რიცხვია, მანტისა კი — დადებითი.

მიღებულია, რომ უარყოფითი მთელი რიცხვის და დადებითი წესიერი წილადის ალგებრული ჯამი შემოკლებით ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$-2+0{,}5743=\overline{2}{,}5743,$$

$$-3+0{,}1234=\overline{3}{,}1234.$$

მთელი ციფრის ზევით მინუსი იმას ნიშნავს, რომ უარყოფითია მხოლოდ მახასიათებელი, ხოლო მანტისა დადებითია.

აღნიშნული წესით ლოგარითმების ჩაწერას ხელოვნური ხერხი (ფორმა) ეწოდება. ასეთი ფორმით ჩაიწერება ერთზე ნაკლები რიცხვების ლოგარითმები.

უარყოფითი ლოგარითმები ყოველთვის შეგვიძლია ჩავწეროთ ხელოვნური ფორმით. ასე მაგალითად:

ა) $$-3{,}4561=-3-0{,}4561+1-1=(-3-1)+(1-0{,}4561)=$$
$$=-4+0{,}5439=\overline{4}{,}5439.$$

ბ) $$-4{,}3254=-4-0{,}3254+1-1=(-4-1)+(1-0{,}3254)=-5+0{,}6746=$$
$$=\overline{5}{,}6746.$$

ე. ი. უარყოფითი ლოგარითმის ხელოვნური ფორმით ჩაწერის მიზნით ჩვენ დავუმატეთ 1 და გამოვაკელით 1. ამით მივიღეთ შემდეგი პრაქტიკული წესი:

უარყოფითი ლოგარითმი რომ ვაქციოთ უარყოფით მახასიათებლიან და დადებით მანტისიან ლოგარითმად, საჭიროა უარყოფით მახასიათებელს მივუმატოთ უარყოფითი 1 და მინუსი დავწეროთ მხოლოდ ზევით, ხოლო მანტისის ყოველი ციფრი გამოვაკლოთ 9-ს, უკანასკნელი კი 10-ს.

პირიქით, თუ ლოგარითმი ჩაწერილია ხელოვნური ფორმით, და გვინდა მისი გარდაქმნა, უარყოფით ლოგარითმად, ვიქცევით შემდეგნაირად: **უარყოფით მახასიათებელს ვუმატებთ დადებით ერთს, ხოლო მანტისის ყოველ ციფრს ვაკლებთ 9-ს, უკანასკნელს კი 10-ს.**

მაგალითად,

$$\overline{3}{,}2437=-2{,}7563,$$

$$\overline{5}{,}3574=-4{,}6426.$$

თვისება 5. **თუ რიცხვს გავამრავლებთ ან გავყოფთ 10-ზე, 100-ზე, 1000-ზე და ა. შ. მაშინ მისი ლოგარითმის მანტისა უცვლელი რჩება, ხოლო მახასიათებელი დიდდება ან მცირდება, შესაბამისად, ერთი, ორი, სამი და ა. შ. ერთეულით.**

შევნიშნოთ, რომ 10, 100, 1000 და ა. შ. რიცხვები წარმოადგენს 10-ის მთელ დადებით ხარისხებს, ე. ი. 10^n სახის რიცხვებს, ამიტომ

$$\lg(M\cdot 10^n)=\lg M+n\lg 10=\lg M+n;$$

ე. ი. M რიცხვის გამრავლებით 10^n-ზე ლოგარითმი გადიდდა n ერთეულით, ხოლო წილადი ნაწილი (მანტისა) დარჩა უცვლელი.
ასევე,

$$\lg\left(\frac{M}{10^n}\right)=\lg M-n\lg 10=\lg M-n;$$

ე. ი. რიცხვის 10^n-ის გაყოფით ლოგარითმი შემცირდა n ერთეულით, ხოლო წილადი ნაწილი — მანტისა დარჩა უცვლელი.

მაგალითად:

$\lg 15{,}5=1{,}1903.$ $\lg 15\,500=4{,}1903$
$\lg 155=2{,}1903,$ $\lg 1{,}55=0{,}1903$
$\lg 1550=3{,}1903$ $\lg 0{,}155=\overline{1},...1903$ და ა. შ.

ლოგარითმის მახასიათებელი დამოკიდებულია მხოლოდ მძიმის ადგილზე მოცემულ რიცხვში და არა იმ ციფრებზე, რომლითაც ჩაწერილია ეს რიცხვი.

მაგალითად, ლოგარითმის მახასიათებელი შემდეგი რიცხვებისა:

257,3; 764,95; 943,0741, 123, 7945

არის ერთი და იგივე რიცხვი — 2. ცხადია, მათი მანტისები სხვადასხვაა.

ათწილადი რიცხვის ლოგარითმის მანტისა არ შეიცვლება ამ რიცხვში მძიმის გადატანით.

მართლაც, მძიმის გადატანა მარჯვნივ იგივეა, რაც ამ რიცხვის გამრავლება 10-ზე, 100-ზე, 1000-ზე და ა. შ. მძიმის გადატანა მარცხნივ იგივეა, რაც ამ რიცხვის გაყოფა 10-ზე, 100-ზე და 1000-ზე. და ა. შ.

ამრიგად, შემდეგი რიცხვების ლოგარითმები:
0,00231; 0,0231; 0,231; 2,31; 23,1; 231; 2310; 0,000231; 0,0000231 და ა. შ. ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ მახასიათებლებით და არა მანტისებით.

მაშასადამე, ლოგარითმის მანტისები ერთნაირი იქნება, თუ ამ რიცხვის ნიშნადი ნაწილები არ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

ზემოთ მოყვანილი ათობითი ლოგარითმების თვისებებიდან ჩანს, რომ ნებისმიერი მოცემული რიცხვის ლოგარითმის მახასიათებელი შეგვიძლია ვიპოვოთ ზეპირად, ცხრილის გარეშე, ამიტომ ცხრილში მხოლოდ მანტისებია მოცემული. გარდა ამისა, წილადის ლოგარითმის პოვნა დაიყვანება მრიცხველისა და მნიშვნელის ლოგარითმების პოვნაზე. ამიტომ ცხრილებში მოცემულია მხოლოდ მთელ რიცხვთა ლოგარითმების მანტისები.

§ 162. ოთხნიშნა ათობითი ლოგარითმების ცხრილები

ათობითი ლოგარითმების მანტისები მოცემულია ვ. მ. ბრადისის ოთხნიშნა მათემატიკურ ცხრილებში. (68—71 გვ. 1963 წ.)

ნებისმიერი სამნიშნა რიცხვის ათობითი ლოგარითმის მანტისა მოინახება შემდეგნაირად, მოცემული სამნიშნა რიცხვის პირველ ორ ნიშნად ციფრს ვეძებთ ათობითი ლოგარითმის მანტისების N ვერტიკალურ სვეტში, მესამე ციფრს ვეძებთ ჰორიზონტალურ სტრიქონში, ხოლო მათს გადაკვეთაზე გვექნება საძებნი მანტისა.

მაგალითად. ვთქვათ, გვინდა ვიპოვოთ lg 235. ცხადია, მახასიათებელს ვიპოვით ზეპირად: lg 235=2....

ვერტიკალურ სვეტში ვეძებთ 23-ს, ჰორიზონტალურ სტრიქონში კი 5-ს, მათ გადაკვეთაზე ვპოულობთ მანტისას 0,3711. ამრიგად, lg 235=2,3711.

ოთხნიშნა მთელი რიცხვების ათობითი ლოგარითმების მანტისის მოსაძებნად საჭიროა ვიპოვოთ სამნიშნა რიცხვის მანტისა და მას დავუმატოთ შესწორება, რომელიც მოცემულია ცხრილის მარჯვენა ნაწილში მეოთხე ციფრებისათვის.

მაგალითად. ვთქვათ, გვინდა ვიპოვოთ lg 5378, ჯერ ვიპოვით 537-ის მანტისას. იგი უდრის 0,7300-ს. გავყვებით იმავე სტრიქონს, ვიდრე არ მივაღწევთ ზედა სტრიქონში დაწერილ ციფრ 8-ს. 8-იანის ქვევით ვეძებთ შესწორებას 0006-სს, (ცხრილში 0,0006-ის ნაცვლად წერენ 6-ს).

ყოველივე ამის შემდეგ გამოვთვლით 5378-ის მანტისას:

$$\begin{array}{r} 0,7300 \\ +\,0,0006 \\ \hline 0,7306 \end{array}$$

ცხადია, 5378-ის ლოგარითმის მახასიათებელი უდრის 3-ს, ამიტომ:

$$\lg 5378=3,7306.$$

ზუსტად ასევე:

$$\begin{array}{r} \lg 3245=3,5104 \\ +0,0007 \\ \hline 3,5111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \lg 8693=3,9390. \\ +0,0002 \\ \hline 3,9392 \end{array}$$

თუ მოცემული მთელი რიცხვი შეიცავს ოთხ ციფრზე მეტს, მაშინ ის უნდა დავამრგვალოთ ისე, რომ ყველა ციფრი, დაწყებული მეხუთედან, იყოს ნული. თუ მეხუთე ციფრი 5-ზე ნაკლებია, მაშინ პირველ ოთხ ციფრს უცვლელს ვტოვებთ. თუ კი მეხუთე ციფრი უდრის 5-ს ან მეტია 5-ზე, მაშინ მეოთხე ციფრს 1-ით ვადიდებთ.

მაგალითად: $\lg 54374 \approx \lg 54370.$

$\lg 79438 \approx \lg 79440.$

$\lg 643275 \approx \lg 643300.$

$\lg 29996 \approx \lg 30\,000.$

1, 2, 3....9 ერთნიშნა რიცხვების მანტისების მოძებნა ადვილია, ათობითი ლოგარითმების მე-5 თვისების ძალით.

1, 2, 3.... 9 რიცხვების მანტისები იგივე იქნება, რაც 10, 20, 30, 90 რიცხვების მანტისები. ამიტომ მათ პირდაპირ ვპოულობთ ცხრილში.

ასევე 10-დან 99-მდე ორნიშნა რიცხვების ათობითი ლოგარითმების მანტისები მოიძებნება ცხრილში „0-სვეტში".

ვთქვათ, უნდა მოინახოს წილადი რიცხვის ათობითი ლოგარითმის მანტისა, lg743,24 ამ ლოგარითმის მახასიათებელი, ცხადია, უდრის 2-ს, ვინაიდან მოცემული რიცხვის მთელი ნაწილი შეიცავს 3-ციფრს, ამ რიცხვის ათობითი ლოგარითმის მანტისა იგივე იქნება, რაც 74320-ის ლოგარითმის მანტისა. ცხრილში ვპოულობთ მანტისას 0,8711. მაშასადამე.

$$\lg 743,24 \approx 2,8711.$$

ვთქვათ, გვინდა მოვძებნოთ ათობითი ლოგარითმი რიცხვისა: 0,0072. ცხადია, მახასიათებელი არის —3. ხოლო მანტისა იქნება იგივე, რაც 72-ისა 720-ისა, 7200-ისა და ა. შ.

ასე რომ,

$$\lg 0{,}0072=-3+0{,}8573=-2{,}1427;$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

ა) იპოვეთ შემდეგი რიცხვების ათობითი ლოგარითმები:

391; 243; 27; 34; 5; 7; 6; 5746; 5849; 60076.

39907; 41365; 0,076; 0,56; 0,0063.

0,008643, 0,00027645.

ბ) ცხრილების გამოყენებით გამოიანგარიშეთ:

$$\log_2 5;\quad \log_3 15;\quad \log_{0,17} 0{,}017;\quad \log_{0,12} 0{,}005.$$

§ 158. ანტილოგარითმების ცხრილით სარგებლობის წესი

იმ რიცხვის მოსაძებნად, რომლის ლოგარითმი არის, მაგალითად, 1,3742, ვიქცევით შემდეგნაირად: ანტილოგარითმების XIV-ე ცხრილში (გვ. 69) N სვეტში ვპოულობთ 37-ს, ზევიდან კი 4-ს, მათ გადაკვეთაში გვაქვს 2366, რომელსაც უნდა დაემატოს ორის შესწორება 1. ასე რომ, გვექნება: 2367. მოცემული ლოგარითმის მახასიათებელი არის 1 მთელი. ეს იმას ნიშნავს, რომ საძიებელი რიცხვის მთელი ნაწილი ორი ნიშნადი ციფრისაგან უნდა შედგებოდეს, კერძოდ, საძიებელი რიცხვი იქნება 23, 67, მოცემული ლოგარითმის მახასიათებელი რომ ყოფილიყო 2 მთელი, ე. ი. 2,3742, მაშინ საძიებელი რიცხვი იქნებოდა არა 23,67, არამედ 236,7.

მოცემული ლოგარითმის მახასიათებელი რომ ყოფილიყო 3 მთელი, მაშინ საძიებელი რიცხვი იქნებოდა 2367.

თუ კი მოცემული ლოგარითმის მახასიათებელი იქნებოდა 5 მთელი, მაშინ საძიებელი რიცხვი იქნებოდა 236700 და ა. შ.

ვიპოვოთ რიცხვი, რომლის ლოგარითმი არის —35, 643. უარყოფითი ლოგარითმი საჭიროა წინასწარ გარდავქმნათ უარყოფითმახასიათებლიან და დადებითმანტისიან ლოგარითმად:

$$-3{,}5643=-4+0{,}4357=\overline{4}{,}4357.$$

ამრიგად, მახასიათებელი არის —4, მანტისა კი +0,4357. ახლა მოვნახოთ რიცხვი, რომელიც შეესაბამება მანტისას: 0,4357. ცხადია, ეს რიცხვი იქნება 2727, რადგანაც საძიებელი რიცხვის ლოგარითმის მახასიათებელია —4. ამიტომ საძიებელი რიცხვი უნდა ჩავწეროთ ათწილადის სახით, ოთხი ნულით პირველი ნიშნადი ციფრის წინ: 0,0002727.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

ოთხნიშნა ლოგარითმული ცხრილების დახმარებით გამოვიანგარიშოთ

$$x=\frac{1{,}56^3\cdot 0{,}00364^2\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{7}}}{4{,}668^2\cdot\sqrt{0{,}0467}}$$

გავალოგარითმოთ ორივე ნაწილი:

$$\lg x = 3\lg 1{,}56 + 2\lg 0{,}00364 + \frac{1}{3}(\lg 3 - \lg 7) - 2\lg 4{,}658 - \frac{1}{2}\lg 0{,}0467$$

$3 \cdot \lg 1{,}56 = 3 \cdot 0{,}1931 \qquad = 0{,}5793$

$2 \quad \lg 0{,}00364 = 2 \quad \overline{3},5611 = \overline{5},1222 \qquad = \overline{5},1222$

$\frac{1}{3}(\lg 3 - \lg 7) = \frac{1}{3}(0{,}4771 - 0{,}8451) = \frac{1}{3} \cdot (-0{,}368) = \overline{1},8773$

$-2 \cdot \lg 4{,}658 = -2 \cdot 0{,}6682 = -1{,}3364 = \overline{2},6636$

$-\frac{1}{2}\lg 0{,}0467 = -\frac{1}{2} \cdot \overline{2},6693 = -\frac{1}{2}(-1{,}3307) = 0{,}6653.$

$\lg x = \overline{6},9077$

907 —— 8072
7 —— 13

9077 —— 8085

ვინაიდან $\lg x$-ის მახასიათებელი — 6 მთელს წარმოადგენს, ამიტომ

$$x = 0{,}000008085.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

ოთხნიშნა ლოგარითმული ცხრილის დახმარებით გამოიანგარიშეთ:

1) $\sqrt[3]{\frac{23{,}6}{18{,}3}}$;

2) $\frac{37{,}26}{28{,}75}\sqrt{48.31}$;

3) $\sqrt[5]{0{,}42\sqrt{0{,}0275}}$;

4) $\sqrt[4]{0{,}275} \cdot \sqrt[4]{7{,}386}$;

5) $\frac{\sqrt[3]{2{,}5\sqrt[4]{0{,}0125}}}{\sqrt[4]{0{,}0125} \cdot \sqrt[3]{0{,}25}}$; პას. $\approx 3{,}55$.

6) $\frac{12{,}48^3\sqrt[4]{5{,}76}}{\sqrt[3]{673{,}8 \cdot 1{,}842}}$; პას. $\approx 186{,}5$.

7) $\sqrt{\frac{2{,}591^4 \cdot \sqrt[4]{0{,}0836}}{1{,}147^2}}$; პას. $\approx 3{,}870$.

8) $\frac{3{,}89^{-2} \cdot \sqrt[3]{-0{,}1536}}{0{,}924^2}$; პას. ≈ -0.4146.

9. $\sqrt[3]{5\sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{3} - 2\sqrt[5]{5}}$; პას. $\approx 1{,}617$.

ანტილოგარითმების ცხრილების გამოყენებით ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1) $\lg x = 2{,}3464$; პას. $x \approx 222{,}0$.

2) $\lg x = 0{,}03215$, პას.: $x \approx 2{,}096$.

3) $\lg x = 0,7432$, პას.: $x \approx 5,5537..$

4) $\lg x = -2,4741$ პას.: $x \approx 0,03357$.

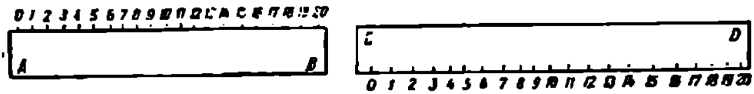
5) $\lg x = -0,7632$. პს.: $x \approx 0,1725$.

6) $\lg x = -3,4578$. პას.: $x \approx 0,0003485$.

§ 164. მოქმედებათა დასაბუთება ლოგარითმულ სახაზავით

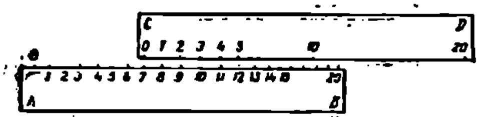
ლოგარითმების ჩვენთვის უკვე ცნობილი თვისებების გამოყენებით საესებით მარტივად შეიძლება დავასაბუთოთ ყველა ის მოქმედებათა წესები რომლებიც სრულდება ლოგარითმულ სახაზავზე. სიმარტივისათვის განვიხილოთ ორი მოქმედება, გამრავლება და გაყოფა. წინასწარ ვაჩვენოთ, თუ როგორ შეიძლება ვაწარმოოთ რიცხვების შეკრება და გამოკლება.

ავიღოთ ერთი და იგივე სიგრძის ორი სახაზავი. თითოეული დავყოთ 20 ტოლ ნაწილად ისე, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები. (AB გაყოფილია ზემოდან, CD ქვემოდან).



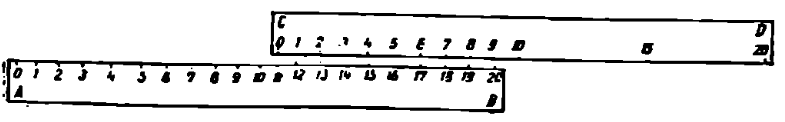
ნახ. 154.

ვთქვათ, რიცხვი 7 უნდა მივუმატოთ 5-ს. CD სახაზავზე აღნიშნულ წერტილს, სადაც აწერია 0, ვაყენებთ AB სახაზავის იმ წერტილის პირდაპირ, სადაც აწერია 7. მაშინ CD სახაზავის იმ წერტილის ქვეშ, სადაც აწერია 5, AB სახაზავზე ვკითხულობთ: $7+5=12$. (ნახ. 155). ასევე მარტივად შეიძლება შესრულდეს რიცხვების გამოკლებაც.



ნახ. 155.

ვთქვათ, 15-ს უნდა გამოვაკლოთ 4. AB სკალის იმ წერტილთან, რომელსაც აწერია 15, ვაყენებთ CD სკალის იმ წერტილს, რომელსაც აწერია 4, მაშინ AB სკალაზე CD სკალის იმ წერტილის ქვეშ, რომელსაც აწერია 0, ვკითხულობთ: $15-4=11$.



ნახ. 156.

აღწერილ პრინციპს ემყარება ლოგარითმული სახაზავის აგება, მხოლოდ დაყოფის წერტილებზე დასმული ციფრები გამოსახავს არა რიცხვებს, არამედ მათ ლოგარითმებს.

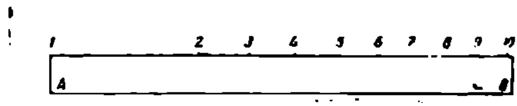
ლოგარითმების შესახებ ცნობილია, რომ

$$\log a+\log b=\log (a \cdot b)$$

და

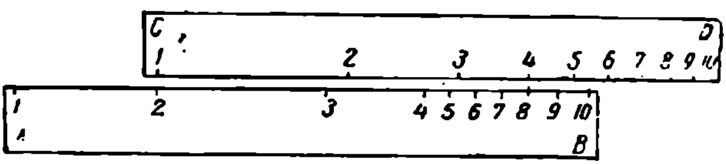
$$\log a-\log b=\log \frac{a}{b},$$

ახლა თუ სახაზავზე აღვნიშნავთ არა თვით რიცხვებს, არამედ მათ ლოგარითმებს, მაშინ ასეთი სახაზავების საშუალებით შეგვიძლია შევასრულოთ რიცხვების გამრავლება და გაყოფა.



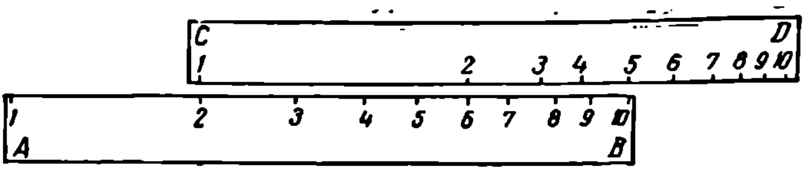
ნახ. 157.

AB სახაზავის სიგრძე მივიღოთ ერთეულად. 1 დავაწეროთ წერტილს, რომელიც ეთანადება რიცხვს $\log 1=0$; 2 დავაწეროთ წერტილს, რომელიც ეთანადება რიცხვს $\lg 2\approx0{,}3010$; 3 დავაწეროთ წერტილს, რომელიც ეთანადება რიცხვს $\lg 3\approx$ $\approx0{,}4771$ და ა. შ. მარჯვენა ბოლო წერტილზე აწერია 10, რომელიც შეესაბამება რიცხვს $\lg 10=1$. ასეთი წესით შედგენილი სკალა წარმოადგენს ე. წ. ლოგარითმულ სკალას. სწორედ ასეთი წესით დამზადებული ორი სკალის საშუალებით შეიძლება რიცხვების გამრავლება და გაყოფა. მაგალითად, ვთქვათ, გვინდა 2 გავამრავლოთ 3-ზე. ამისათვის CD სკალის იმ წერტილს, რომელსაც აწერია 1, დავაყენებთ AB სკალის წერტილთან, რომელსაც აწერია 2, მაშინ CD სკალის იმ წერტილის ქვევით, რომელსაც აწერია 3, წავიკითხავთ ნამრავლს $2\times3=6$.



ნახ. 158.

ასეთივე წესით შეიძლება შესრულდეს რიცხვების გაყოფა. ვთქვათ, 8 უნდა გავყოთ 4-ზე. CD სკალის წერტილს, რომელსაც აწერია 4, ვაყენებთ AB სკალის წერტილთან 8, მაშინ CD სკალის წერტილი 1-ის ქვევით, AB-ზე წავიკითხავთ განაყოფს $8:4=2$ (ნახ. 159).



ნახ. 159.

§ 156. მაჩვენებლიანი განტოლებები და მათი ამოხსნა

განსაზღვრა 1. **მაჩვენებლიანი განტოლება ეწოდება ისეთ განტოლებას, რომელიც უცნობს შეიცავს ხარისხის მაჩვენებელში.**

მაჩვენებლიანი განტოლების მაგალითებია: $4^x=2^{x-1}$; $5^x=125$.

$$3^x=\frac{1}{81};\quad \sqrt[4]{7^x}=\sqrt[5]{343}\quad \text{და ა. შ.}$$

მაჩვენებლიანი განტოლების ამოხსნისათვის არსებობს ორი ძირითადი ხერხი: ერთნაირ ფუძეზე დაყვანისა და განტოლების ორივე ნაწილის გალოგარითმებისა. განვიხილოთ თითოეული კონკრეტულ მაგალითებზე.

I. ტოლფუძიან ხარისხებზე დაყვანის ხერხი.

ა) $2^{x+3}=32$; $\quad 2^{x+3}=2^5$.

გავიხსენოთ ხარისხის შემდეგი თვისება: „ერთისაგან განსხვავებული ერთი და იგივე დადებითი რიცხვის ორი ხარისხი თუ ტოლია, მაშინ ტოლი იქნება მათი მაჩვენებლებიც“.

განხილულ შემთხვევაში ხარისხების ამ თვისების ძალით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$x+3=5,$$

საიდანაც

$$x=2.$$

შემოწმება:

$$2^{2+3}=2^5=32.$$

ბ) $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{3^x}=36.$

გვაქვს:

$$\sqrt{2^x\cdot3^x}=36.\quad \sqrt{(2\cdot3)^x}=36.\quad \sqrt{6^x}=36,\quad 6^{\frac{x}{2}}=6^2.$$

საიდანაც

$$\frac{x}{2}=2,\quad x=4.$$

შემოწმება

$$\sqrt{2^4}\cdot\sqrt{3^4}=2^2\cdot3^2=4\cdot9=36.$$

გ) $a^{(x-2)(x-3)}=1\quad(a>0).$

გვაქვს:

$$a^{(x-2)(x-3)}=a^0,$$

საიდანაც

$$(x-2)(x-3)=0$$
$$x^2-3x-2x+6=0$$
$$x^2-5x+6=0$$
$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}$$
$$x_1=3,\quad x_2=2.$$

შემოწმება

$$a^{(2-2)(2-3)}=a^{0(-1)}=a^0=1.$$
$$a^{(3-2)(3-3)}=a^{1\cdot0}=a^0=1.$$

დ) $5^{x+1}+3\cdot5^{x-1}-6\cdot5^x+10=0.$

განტოლება გარდავქმნათ ასე

$$5^x\cdot(5+3\cdot5^x\cdot5^{-1}-6\cdot5^x=-10$$
$$5^x(5+3\cdot5^{-1})=-10$$
$$5^x\cdot\left(\frac{3}{5}-1\right)=-10.$$
$$5^x\quad\left(-\frac{2}{5}\right)=-10.$$
$$5^x=-10:\left(-\frac{2}{5}\right)=25.$$
$$5^x=5^2$$

საიდანაც

$$x=2.$$

შემოწმება

$$5^{2+1}+3\cdot5^{2-1}-6\cdot5^2+10=5^3+3\cdot5-6\cdot25+10=$$
$$=125+15-150+10=0.$$

ხშირ შემთხვევაში, მაჩვენებლიანი განტოლების ამოხსნისას მიზანშეწონილია დამხმარე უცნობის შემოტანა.

ვთქვათ, მაგალითად, უნდა ამოიხსნას შემდეგი მაჩვენებლიანი განტოლება:

ე) $5^{2x}-5^x-600=0.$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $5^x=y$. მაშინ $5^{2x}=(5^x)^2=y^2$, ამიტომ მოცემული მაჩვენებლიანი განტოლება დაიყვანება შემდეგ კვადრატულ განტოლებაზე:

$$y^2-y-600=0;$$

საიდანაც

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1+2400}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{2401}}{2}=\frac{1\pm49}{2};$$
$$y_1=25.$$
$$y_2=-24.$$
$$5^x=5^2,$$

საიდანაც $x=2$, კვადრატული განტოლების მეორე ფესვი -24 უვარგისია.

შემოწმება

$$5^{2\cdot2}-5^2-600=625-25-600=0.$$

3) ამოვხსნათ მაჩვენებლიან განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 3\cdot 2^x+2\cdot 3^y=\frac{11}{4}, \\ 2^x-3^y=-\frac{3}{4}. \end{cases}$$

პირველი განტოლების ორივე ნაწილი გავყოთ 3-ზე და მიღებულ განტოლებას წევრ-წევრად გამოვაკლოთ მეორე განტოლება:

$$\begin{cases} 2^x+2\cdot 3^y=\frac{11}{12}, \\ 2^x\mp 3^y=\pm\frac{3}{4}, \end{cases}$$

$$2\cdot 3^{y-1}+3^y=\frac{5}{3},$$

$$3^{y-1}(2+3)=5\cdot 3^{-1},$$

$$3^{y-1}\cdot 5=5\cdot 3^{-1},$$

$$3^{y-1}=3^{-1}.$$

$$y-1=-1,$$

$$y=0.$$

y-ის მნიშვნელობა შევიტანოთ პირველ განტოლებაში:

$$3\cdot 2^x+2\cdot 3^0=\frac{11}{4};$$

$$3\cdot 2^x+2=\frac{11}{4}.$$

$$3\cdot 2^x=\frac{11}{4}-2.$$

$$3\cdot 2^x=\frac{3}{4}.$$

$$3\cdot 2^x=3\cdot 4^{-1}.\quad 2^x=2^{-2}.\quad x=-2.$$

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა

$$3\cdot 2^{-2}+2\cdot 3^0=3\cdot\frac{1}{4}+2=\frac{11}{4}.$$

II. მაჩვენებლიანი განტოლების ამოხსნა ორივე ნაწილის გალოგარითმების ხერხით.

მაგალითი $12{,}5^x=1{,}9^{x+1}$.

გავალოგარითმოთ მოცემული განტოლების ორივე ნაწილი

$$x\cdot \lg 2{,}5=(x+1)\lg 1{,}9;$$

$$x\lg 2{,}5=x\lg 1{,}9+\lg 1{,}9$$

$$x(\lg 2{,}5-\lg 1{,}9)=\lg 1{,}9.$$

საიდანაც

$$x=\frac{\lg 1{,}9}{\lg 2{,}5-\lg 1{,}9}\approx\frac{0{,}2788}{0{,}3979-0{,}2788}=\frac{0{,}2788}{0{,}1191}\approx 2.$$

2. $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=576. \\ x-y=3. \end{cases}$

ა მ ო ხ ს ნ ა

მეორე განტოლებიდან გვექნება:

$$x=y+3$$

მაშინ

$$3^{y+3}\cdot 2^y=576,\quad 6^y\cdot 27=576,\quad 6^y=\frac{64}{3},\quad y\lg 6=\lg\frac{64}{3}.$$

საიდანაც $y=\frac{\lg 64-\lg 3}{\lg 6}$. დაასრულეთ!

სავარჯიშო

ამოხსენით მაჩვენებლიანი განტოლებები:

1. $4^x=64$, პას. $x=3$.

2. $3^x=\frac{1}{81}$, პას. $x=-4$.

3. $25^x=\frac{1}{5}$, პას. $x=-\frac{1}{2}$.

4. $2^{x+3}=32$, პას. $x=2$.

5. $9^{-x}=27$, პას. $x=-\frac{3}{2}$.

6. $\sqrt{7^x}=\sqrt[5]{343}$, პას. $x=2\frac{2}{5}$.

7. $2^{x^2-6x-2,5}=16\sqrt{2}$, პას. $x=7$.

8. $5^2\cdot 5^4\cdot 5^6 \quad 5^{2x}=0{,}04^{-28}$, პას. $x=7$.

9. $\left(\frac{4}{9}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^5$ პას. $x=-2\frac{1}{2}$.

10. $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$, პას. $x=3$.

11. $3^x+3^{x+1}=108$, პას. $x=3$.

12. $7^x-7^{x-1}=6$, პას. $x=1$.

13. $2^{5-x}=2^{3x-3}$, პას. $x=2$.

14. $7^{x+2}+4\cdot 7^{x-1}=347$, პას. $x=1$.

15. $(0{,}25)^{2-3}=\frac{256}{2^{x+3}}$, პას. $x=\frac{4\lg 0{,}5-5\lg 2}{2\lg 0{,}5-\lg 2}$.

16. $5^x\ \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}=\left(\frac{1}{125}\right)^x$ პას. $x=-1$.

17. $2^x\cdot 5^x=0{,}1\quad(10^{x-1})^5$, პას. $x=\frac{3}{2}$.

18. $\sqrt{27^{x-1}}=\sqrt[3]{9^{2-x}}$, პას. $x=\frac{17}{13}$.

19. $\sqrt[4]{a^{x+1}}=\sqrt[5]{a^{x-2}}$; $(a>0)$; პას. $x=-13$.

20. $\sqrt[x]{\sqrt[3]{4^{x+1}}}=\sqrt[3]{\sqrt[x]{(0{,}5)^{2-4x}}}$, $x=\frac{2\lg 0{,}5-\lg 4}{\lg 4-4\lg 0{,}5}$.

21. $4^{\sqrt{x+1}}=64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$ პას. $x=24$.

22. $\sqrt[16]{(0{,}25)^{5+\frac{x}{4}}}=2^{\sqrt{x+1}}$ პას. $x=-6$.

23. $9^x-3^x-6=0$, პას. $x=1$.

24. $4^x+2^{x+1}=80$, პას. $x=3$.

25. $3^x+9^{x-1}-810=0$, პას. $x=4$.

26. $5^{2x}-7^x-5^{2x}\cdot 17+7^x\cdot 17=0$ პას. $x=0$.

27. $9^x = \left(\frac{1}{243}\right)^{5x}$ პას. $x=0$.

28. $13^x = 19^{-4x}$,   პას. $x=0$.

29. $3\cdot 2^x = 2\cdot 3^x$,   პას. $x=1$.

30. $7\cdot 2^x = 5\cdot 3^x$.   პას. $x = \dfrac{\lg 7 - \lg 5}{\lg 3 - \lg 2}$.

31. $\sqrt{9^{x(x+1)-\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{3}$;   პას. $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$.

ამოხსენით მაჩვენებლიან განტოლებათა სისტემები:

32. $\begin{cases} 2^x + 3^y = 8\frac{1}{9} \\ 2^x \cdot 3^y = \frac{8}{9} \end{cases}$ პას. $\begin{cases} x=3 \\ y=-2. \end{cases}$

33. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 648 \\ 3^x \cdot 2^y = 432, \end{cases}$ პას. $\begin{cases} x=3 \\ y=4. \end{cases}$

34. $\begin{cases} 5^x - 5^y = 100^{*} \\ 5^{x-1} + 5^{y-1} = 20, \end{cases}$ სისტემა უთავსებადია.

35. $\begin{cases} \sqrt[x-1]{49} = \sqrt[y-1]{343} \\ 3^y = 9^{2x-y}, \end{cases}$ პას. $\begin{cases} x=3 \\ y=4. \end{cases}$

36. $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y. \\ y^{\sqrt{y}} = x^4. \end{cases}$

§ 138. ლოგარითმული განტოლებანი

ლოგარითმული განტოლება ეწოდება ისეთ განტოლებას, რომელიც უცნობს ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ შეიცავს.

ასეთია, მაგალითად, განტოლებები:

$$\lg_3 x = 7; \quad \lg_x (x-2) = 0; \quad \lg\left(\frac{1}{2} + x\right) = \lg\frac{1}{2} - \lg x \quad \text{და ა. შ.}$$

უმარტივესი ლოგარითმული განტოლების ზოგადი სახეა:

$$\lg_a x = b \qquad (1)$$

სადაც a და b მოცემული რიცხვებია, ხოლო x — უცნობი.
თუ $a>0$ და განსხვავებულია ერთისაგან, მაშინ (1) განტოლებას ექნება ერთადერთი ამოხსნა. კერძოდ: $x=a^b$

რთული სახის ლოგარითმული განტოლებების ამოხსნა დაიყვანება (1) სახის ალგებრული სახის განტოლების ამოხსნაზე. განვიხილოთ ლოგარითმული განტოლების ამოხსნის რამდენიმე მაგალითი.

1. $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 7) = 1$.

---

* უნდა მოვახდინოთ ორივე განტოლების გალოგარითმება ნებისმიერი ფუძით.

ლოგარითმის განსაზღვრის ძალით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$(x-1)^1=x^2-5x+7.$$

$$x-1=x^2-5x+7.$$

$$x^2-6x+8=0$$

საიდანაც

$$x_1=4,\ \ x_2=2. \tag{2}$$

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა.

როცა $x=4$,

$$\lg_{x-1}(x^2-5x+7)=\lg_3(16-20+7)=\lg_3 3=1.$$

მეორე ფესვი $x=2$ უვარგისია, რადგან მოცემულ ლოგარითმულ განტოლებაში, როცა $x=2$, ფუძე ერთის ტოლი ხდება. $x=2$ არის (2) განტოლების ფესვი, ე. ი. (2) და მოცემული განტოლება არაა ერთიმეორის ტოლძალოვანი. ფესვი $x_2=2$, არის მოცემული განტოლებისათვის გარეშე ფესვი. ამრიგად, $x=4$ არის მოცემული განტოლების ფესვი.

2. $\lg(x+6)-\dfrac{1}{2}\lg(2x-3)=2-\lg 25.$

ცხადია, რომ

$$\lg(x+6)-\frac{1}{2}\lg(2x-3)=\lg\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}}.$$

ხოლო

$$2-\lg 25=\lg 100-\lg 25=\lg\frac{100}{25}=\lg 4.$$

ამრიგად, გვექნება:

$$\lg\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}}=\lg 4.$$

ასეთი სახის განტოლების ამოხსნა ემყარება ლოგარითმების შემდეგ ცნობილ თვისებას: თუ ერთი და იმავე ფუძით აღებული ორი რიცხვის ლოგარითმები ტოლია, მაშინ თვით ეს რიცხვებიც ტოლია.

ლოგარითმების ამ თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ, თუკი მოცემულ განტოლებას ფესვები აქვს, მაშინ ისინი უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}}=4.$$

ამ ირაციონალური განტოლების ამოხსნა გვაძლევს

$$x_1=6;\ x_2=14.$$

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა

როცა $x_1=6$, მაშინ

$$\lg(x+6)-\frac{1}{2}\lg(2x-3)=\lg 12-\frac{1}{2}\lg 9=\lg 12-\lg 3=\lg 4.$$

როცა $x_2=14$, მაშინ

$$\lg(x+6)-\frac{1}{2}\lg(2x-3)=\lg 20-\frac{1}{2}\lg 25=\lg 20-\lg 5=\lg\frac{20}{9}=\lg 4.$$

ამრიგად, ორივე ფესვი აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას.

3. $2\lg(x-1) = \frac{1}{2}\lg x^5 - \lg\sqrt{x}$

განტოლების თითოეული ნაწილის ცალ-ცალკე პოტენცირება მოგვცემს:

$$2\lg(x-1) = \lg(x-1)^2.$$

$$\frac{1}{2}\lg x^5 - \lg\sqrt{x} = \lg x^{\frac{5}{2}} - \lg x^{\frac{1}{2}} = \lg\frac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \lg x^2.$$

ამრიგად, მოცემული განტოლებიდან მივიღებთ

$$\lg(x-1)^2 = \lg x^2. \qquad (1)$$

საიდანაც

$$(x-1)^2 = x^2$$

ამ განტოლების ამოხსნა გვაძლევს $x = \frac{1}{2}$.

უნდა შევნიშნოთ, რომ, როცა $x = \frac{1}{2}$, მოცემული განტოლების მარცხენა ნაწილი არაა განსაზღვრული $\left(x-1 = -\frac{1}{2}, \text{რაც} < 0\text{-ზე}\right)$. ამით ირკვევა, რომ მოცემულ განტოლებას ფესვები არა აქვს. $x = \frac{1}{2}$ არის (1) განტოლების ფესვი. ეს მიუთითებს იმაზე, რომ მოცემული განტოლება და (1) განტოლება არ არიან ტოლძალოვანი.

ლოგარითმული განტოლებების ამოხსნისას ყოველთვის უნდა შევამოწმოთ ფესვები, ვინაიდან შეიძლება მიღებული ამონახსენი მოცემული განტოლებისათვის გარეშე ფესვი აღმოჩნდეს.

ლოგარითმული განტოლების ამოხსნის დროს ხშირად მიზანშეწონილი ხდება დამხმარე უცნობის შემოტანა, განვიხილოთ ამის კონკრეტული მაგალითი:

4. $2\lg\lg x = \lg(7-2\lg x) - \lg 5.$

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას, $\lg x = y$, გვექნება

$$2\lg y = \lg(7-2y) - \lg 5.$$

ანუ

$$\lg y^2 = \lg\frac{7-2y}{5};$$

საიდანაც

$$y^2 = \frac{7-2y}{5}.$$

ამ განტოლების ამოხსნა გვაძლევს: $y_1 = 1$; $y_2 = -\frac{7}{5}$ (y_2 ფესვი უვარგისია, ვინაიდან ამ შემთხვევაში $\lg y$ არ არსებობს)

თუ $y_1 = 1$, მაშინ $\lg x = 1$ და $x = 10$.

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა. თუ $x=10$, მაშინ მოცემული განტოლება გვაძლევს:

$$2\lg\lg 10=\lg(7-2\lg 10)-\lg 5;$$
$$2\lg 1=\lg(7-2)-\lg 5;$$
$$0=0.$$

ზოგიერთი ლოგარითმული განტოლების ამოხსნა მიზანშეწონილია წევრ-წევრად გალოგარითმების გზით. განვიხილოთ ეს ხერხი კონკრეტულ მაგალითზე:

5. $x^{\lg x-1}=100.$

ორივე ნაწილის გალოგარითმება მოგვცემს:

$$(\lg x-1)\lg x=2.$$

თუ ახლა შემოვიღებთ აღნიშვნას $\lg x=y$, მაშინ ამით ეს შემთხვევა დაყვანილი იქნება მე-4 მაგალითზე.

განვიხილოთ ლოგარითმული განტოლების ამოხსნის ასეთი მაგალითი:

6. $\lg_9 x+\lg_{x^2}3=1.$

როგორც ცნობილია,

$$\lg_9 x=\lg_{3^2}x=\frac{1}{2}\lg_3 x\,^*.$$

და

$$\lg_{x^2}3=\frac{1}{2}\lg_x 3.$$

თუ გავითვალისწინებთ აგრეთვე იმასაც, რომ $\lg_x 3=\dfrac{1}{\lg_3 x}$, **

მოცემული განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{1}{2}\lg_3 x+\frac{1}{2}\,\frac{1}{\lg_3 x}=1;\quad \frac{1}{2}\lg_3 x+\frac{1}{2\lg_3 x}=1;$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას, $\lg_3 x=y$, გვექნება:

$$\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}=1;$$

საიდანაც

$$y+\frac{1}{y}=2;$$

$$y^2-2y+1=0;$$

ამ განტოლების ამოხსნა გვაძლევს

$$y_1=y_2=1;$$

ე. ი.

$$\lg_3 x=1;$$

საიდანაც

$$x=3.$$

---

* $\lg_{a^n}b=\dfrac{1}{n}\lg_a b;$

** $\lg_a b=\dfrac{1}{\lg_b a}.$

შემოწმება.

$$\frac{1}{2}\log_3 3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log_3 3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

ზოგიერთი ლოგარითმული განტოლების ამოხსნისას მიზანშეწონილია ლოგარითმის ერთი ფუძიდან მეორეზე გადასვლა.

განვიხილოთ ეს შემთხვევა კონკრეტულ მაგალითზე

6. $\log_3 x+\log_5 x=\log_3 15$;

ცნობილი ფორმულის:

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ,

$$\log_3 x=\frac{\log x}{\log 3};\ \log_5 x=\frac{\log x}{\log 5}\ \text{და}\ \log_3 15=\frac{\log 15}{\log 3};$$

ამის გათვალისწინებით მოცემული განტოლება გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{\log x}{\log 3}+\frac{\log x}{\log 5}=\frac{\log 15}{\log 3};$$

$$\log x\cdot\log_5+\log x\cdot\log 3=\log 5\quad\log 15.$$

$$\log x=\frac{\log 5\cdot\log 15}{\log 5+\log 3}=\frac{\log 5\cdot\log 15}{\log 15}=\log 15.$$

$$\log x=\log 5.$$

საიდანაც $x=5$.

შემოწმება

$$\log_3 5+\log_5 5=\log_3 5+1=\log_3 5+\log_3 3=\log_3 5\cdot 3=\log_3 15.$$

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი.

7. $\log_2 x+\log_3 x=1$.

$$\log_2 x=\frac{\log x}{\log 2};\quad \lg_3 x=\frac{\log x}{\log 3};$$

ამიტომ მოცემული განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\log x}{\log_2}+\frac{\log x}{\log 3}=1.$$

$$\log x\,(\log 3+\log 2)=\log 2\cdot\log 3.$$

$$\log x=\frac{\log 2\cdot\log 3}{\log 6};$$

საიდანაც

$$x=10^{\frac{\log 2\cdot\log 3}{\log 6}}=(10^{\log 2})^{\frac{\log 3}{\log 5}}=2^{\frac{\log 3}{\log 6}}.$$

$$x=2^{\frac{\log 3}{\log 6}}.$$

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა.

$$\log_2 x=\frac{\lg x}{\lg 2}=\frac{\lg\left(2^{\frac{\lg 3}{\lg 6}}\right)}{\lg 2}=\frac{\lg 3}{\lg 6}\cdot\frac{\lg 2}{\lg 2}=\frac{\lg 3}{\lg 6};$$

$$\log_3 x=\frac{\lg x}{\lg 3}=\frac{\lg\left(2^{\frac{\lg 3}{\lg 6}}\right)}{\lg 3}=\frac{\frac{\lg 3}{\lg 6}\cdot\lg 2}{\lg 3}=\frac{\lg 3\cdot\lg 2}{\lg 3\cdot\lg 6}=\frac{\lg 2}{\lg 6}.$$

ამიტომ

$$\log_2 x+\log_3 x=\frac{\lg 3}{\lg 6}+\frac{\lg 2}{\lg 6}=\frac{\lg 3+\lg 2}{\lg 6}=\frac{\lg 6}{\lg 6}=1.$$

როგორც ვხედავთ x-ის ნაპოვნი მნიშვნელობა აკმაყოფილებს განტოლებას.

პ ა ს უ ხ ი:

$$x=2^{\frac{\lg 3}{\lg 6}}$$

განვიხილოთ ლოგარითმული განტოლებათა სისტემის ამოხსნის კონკრეტული მაგალითი.

8. $$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=512; \\ \lg\sqrt{xy}=1+\lg 2. \end{cases}$$

მოცემული სისტემა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=512. \\ \lg\sqrt{xy}=\lg 10+\lg 2, \end{cases}$$

ანუ

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=2^9; \\ \lg\sqrt{xy}=\lg 20. \end{cases}$$

საიდანაც გვექნება:

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=9; \\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=20. \end{cases}$$

$\sqrt{x}$ და $\sqrt{y}$ წარმოადგენს ფესვებს შემდეგი კვადრატული განტოლებისა:

$$z^2-9z+20=0.$$

ამ განტოლების ამოხსნა მოგვცემს

$$z_1=4;\ \ z_2=5,$$

ე. ი.

$$\sqrt{x}=4; \sqrt{y}=5,$$

საიდანაც

$$x=16;\ y=25.$$

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა

$$2^{4+5}=2^9=512.$$

$$\lg\sqrt{16\cdot 25}=\lg 4\cdot 5=\lg 20=\lg 10\cdot 2=1+\lg 2.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. $2\lg\sqrt{x}=\lg(15-2x)$; პას: 5.
2. $\dfrac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1$; პას: 4.
3. $2\log_5 x=\dfrac{7}{4}\log_5\dfrac{x}{5}$; პას: $\dfrac{1}{78125}$.
4. $2\lg x=-\lg(6-x^2)$;
5. $0{,}5\lg(2x-1)=1-\lg(\sqrt{x-9})$ პას: 13.
6. $\lg(x+6)-2=\dfrac{1}{2}\lg(2x-3)-\lg 25$; პას: 14.
7. $\dfrac{1}{5-\lg x}+\dfrac{2}{1+\lg x}=1$; პას: 100.
8. $0{,}1\lg^4 x-\lg^2 x+0{,}9=0$; პას: 0,001.
9. $5^{3\lg x}=12{,}5x$; პას: 10.
10. $0{,}1x^{\lg x-2}=100$; პას: 0,1.
11. $\log_2 x\cdot\log_3 x=\log_2 3$; პას: $\dfrac{1}{3}$.
12. $\log_{16} x+\log_4 x+\log_2 x=7$; პას: 16.
13. $\begin{cases} x^{\sqrt{y}}=y, \\ y^{\sqrt{y}}=x^4. \end{cases}$ პას: თუ $x=4$, მაშინ $y=2$; თუ $x=1$, მაშინ $y=1$
14. $\begin{cases} xy=40; \\ x^{\lg y}=4. \end{cases}$ პას: (10, 4).
15. $\begin{cases} x+y=34; \\ \log_2 x+\log_2 y=6. \end{cases}$ პას: $\begin{cases} x=2, \\ y=32. \end{cases}$

§ 167. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებების გრაფიკული ხერხით ამოხსნა

განვიხილოთ მაჩვენებლიანი განტოლება:

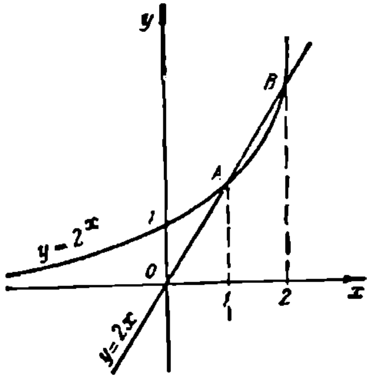
1) $2^x=2x$,

ერთსა და იმავე ნახაზზე ავაგოთ ორი $y=2^x$ და $y=2x$ ფუნქციის გრაფიკები.

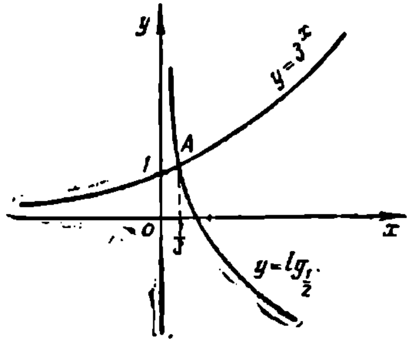
ეს გრაფიკები იკვეთება ორ წერტილში: A-ში რომლის აბსცისაა 1, და B-ში, რომლის აბცისია 2. თუ ნახაზს ზუსტად ავაგებთ, დავინახავთ, რომ $x=1$, $x=2$.

2. $\log_{\frac{1}{2}} x=3^x$;

ავაგოთ $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ და $y=3^x$ ფუნქციათა გრაფიკები, როგორც ეს მოცემულია 161-ე ნახაზზე.



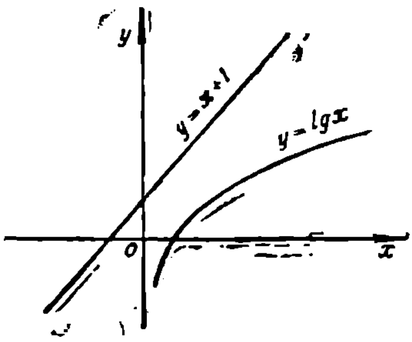
ნახ. 160.



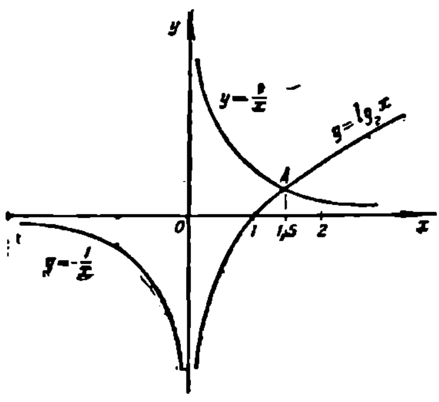
ნახ. 161.

გრაფიკების გადაკვეთის A წერტილის აბსცისაა $x=\frac{1}{3}$, რომელიც წარმოადგენს მოცემული განტოლების ფესვს.

3. ავიღოთ ლოგარითმული განტოლება $\lg x=x+1$. ავაგოთ გრაფიკები $y=\lg x$ და $y=x+1$ (ნახ. 162).



ნახ. 162.



ნახ. 163.

როგორც ვხედავთ, $y=\lg x$ და $y=x+1$ ფუნქციათა გრაფიკები არ გადაიკვეთებიან, რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემულ განტოლებას ფესვები არა აქვს.

4. ავიღოთ განტოლება $\log_2 x=\frac{1}{x}$, ავაგოთ $y=\log_2 x$ და $y=\frac{1}{x}$ ფუნქციათა გრაფიკები (ნახ. 163).

როგორც ნახაზიდან ჩანს, $y=\log_2 x$ და $y=\dfrac{1}{x}$ ფუნქციათა გრაფიკები იკვეთება ერთ (A) წერტილში, რომლის x_0 აბსცისა მოთავსებულია (1,2) შუალედში, ე. ი. $1<x_0<2$.

ავიღოთ (1,2) შუალედის ის წერტილი, რომლისთვისაც $x_0=1,5$, და ვიპოვოთ ამ წერტილისათვის $y=\log_2 x$ და $y=\dfrac{1}{x}$ ფუნქციათა მნიშვნელობები.

$$[\log_2 x]_{x=1,5}=\log_2 1,5=\frac{\lg 1,5}{\lg 2}\approx\frac{0,1761}{0,3010}\approx 0,58.$$

$$\left[\frac{1}{x}\right]_{x=1,5}=\frac{1}{1,5}\approx 0,66.$$

როგორც ვხედავთ, როცა $x=1,5$.

$$\log_2 x<\frac{1}{x};$$

ამიტომ x_0 წერტილი უფრო მარჯვნივ იქნება ვიდრე 1,5 წერტილი, ე. ი. $1,5<$ $<x_0<2$ (ნახ. 163).

ახლა, თუ ამავე გზით გავსინჯავთ $x=1,7$ წერტილს, აღმოჩნდება, რომ

$$\log_2 1,7>\frac{1}{1,7};$$

ამიტომ წერტილი მდებარეობდეს იქნება $x-1,7$ წერტილის მარცხნივ, ე. ი.

$$1,5<x_0<1,7.$$

აქედან ადვილი მისახვედრია, რომ x_0-ის მნიშვნელობა 0,1-მდე სიზუსტით იქნება 1,6,

ე. ი. $x_0\approx 1,6$.

თუ ზემოთ აღნიშნული წესით გამოვთვლით $y=\log_2 x$ და $y=\dfrac{1}{x}$ ფუნქციათა მნიშვნელობებს (1,5, 1,7) შუალედის წერტილებისათვის, შეგვიძლია მივიღოთ x_0-ის უფრო ზუსტი მნიშვნელობები.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

ამოხსენით გრაფიკულად განტოლებანი

1) $3^x=x$;

2) $2^x=x^2+1$;

3) $\log_2 x=x-1$;

4) $\log_2(x+3)=3-x$.

5) იპოვეთ $2^x=2-x$ განტოლების ფესვი სიზუსტით 0,1-მდე.

§ 168. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული უტოლობანი

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. ისეთ უტოლობას, რომელშიც უცნობი შედის ხარისხის მაჩვენებელში ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ, ეწოდება მაჩვენებლიანი ან ლოგარითმული უტოლობა.

მაჩვენებლიან და ლოგარითმულ უტოლობათა ამოხსნა ემყარება მაჩვენებლიან $y=a^x$ და ლოგარითმულ $y=\log_a x$ ფუნქციათა ცნობილ თვისებას, კერძოდ, იმას რომ $y=a^x$ და $y=\log_a x$ ფუნქციები, როცა $a>1$, მონოტონურად ზრდადია, ხოლო, როცა $0<a<1$, მონოტონურად — კლებადი.

ჯერ გავიხილოთ მაჩვენებლიან უტოლობათა ამოხსნის მაგალითები.

1. ამოვხსნათ უტოლობა: $3^x>\frac{1}{9}$;

$\frac{1}{9}$ წარმოვადგინოთ როგორც 3^{-2}, მაშინ გვექნება

$$3^x>3^{-2},$$

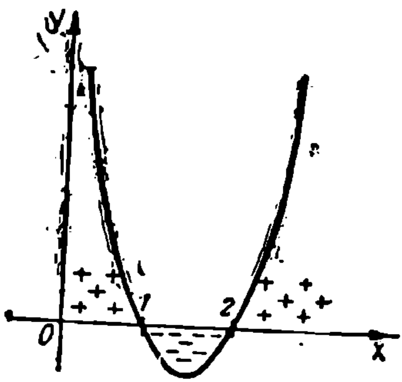
ვინაიდან $y=3^x$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია, ამიტომ ამ ფუნქციის უდიდეს მნიშვნელობას უნდა ეთანადებოდეს არგუმენტის უდიდესი მნიშვნელობა, ე. ი. $x>-2$

2. ამოვხსნათ უტოლობა: $2^{x^2-3x}>\frac{1}{4}$;

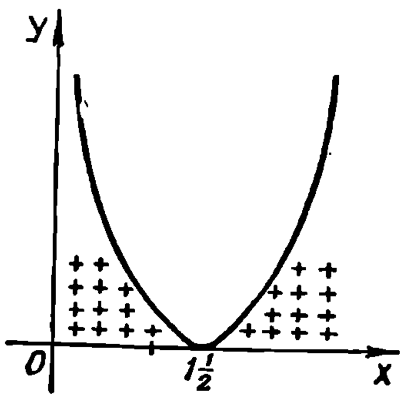
$\frac{1}{4}$ წარმოვადგინოთ როგორც 2^{-2}, მაშინ გვექნება

$$2^{x^2-3x}>2^{-2};$$

საიდანაც $x^2-3x>-2$ ანუ $x^2-3x+2>0$. $y=x^2-3x+2$ პარაბოლა ox ღერძს კვეთს $x_1=1$ და $x_2=2$ წერტილებში და ვინაიდან $a>0$, იგი მიმართული იქნება ზევითკენ (ნახ. 164). როგორც ჩანს, $x^2-3x+2>0$ უტოლობა ყოველთვის შესრულდება, როცა $x<1$ და $x>2$.



ნახ. 164.



ნახ. 165.

3. ამოვხსნათ უტოლობა: $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x^2-15x+13}<\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3x}$; ვინაიდან $y=a^x$ ფუნქცია, როცა $0<a<1$, მონოტონურად კლებადია, ამიტომ ფუნქციის ნაკლებ მნიშვნელობას არგუმენტის მეტი მნიშვნელობა უნდა ეთანადებოდეს, ე. ი.

$$4x^2-15x+13>4-3x$$

ანუ

$$4x^2-12x+9>0; \quad y=4x^2-12x+9.$$

კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი $D=0$, ამიტომ $x_1=x_2=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ და, მაშასადამე, კვადრატულ სამწევრს წარმოვადგენთ შემდეგნაირად.

$$4x^2-12x+9=4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2,$$

ამ შემთხვევაში, როგორც ვიცით, $y=4x^2-12x+9$ პარაბოლა ეხება OX ღერძს $x=\frac{3}{2}$ წერტილში, ამიტომ $4x^2-12x+9>0$ უტოლობა სრულდება x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა, როცა $x=\frac{3}{2}$ (ნახ. 165).

4. ამოვხსნათ უტოლობა: $4^x-2\cdot 5^{2x}<10^x$. მოცემული უტოლობის ორივე ნაწილს თუ გავყოფთ 10^x-ზე $(10^x>0)$, მაშინ უტოლობა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x-2\left(\frac{5}{2}\right)^x<1.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\left(\frac{2}{5}\right)^x=t \quad (t>0)$,

გვექნება

$$t-2\cdot\frac{1}{t}<1 \text{ ანუ } \frac{t^2-t-2}{t}<0.$$

თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ $t>0$, გვექნება

$$\begin{cases} t^2-t-2<0 \\ t>0 \end{cases}$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$0<t<2$$

მაშინ

$$0<\left(\frac{2}{5}\right)^x<2.$$

ანუ $+\infty>x>\log_{0,4}2$

მაგრამ

$$\log_{0,4}2=\frac{\lg 2}{\lg 4-\lg 10}=-\frac{\lg 2}{1-2\lg 2};$$

ამიტომ

$$-\frac{\lg 2}{1-2\lg 2}<x<+\infty,$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$x>-\frac{\lg 2}{1-2\lg 2}.$$

5. ამოვხსნათ უტოლობა: $0,6^{\left|\frac{x}{x-1}\right|}<0,6^{x}$.

ვინაიდან ფუძე $0,6<1$, $0<a<1$,

ამიტომ

$$\left|\frac{x}{x-1}\right|>x.$$

ამ უტოლობის ამოხსნა, როგორც ვიცით, დაიყვანება ორი უტოლობის სისტემის ამოხსნაზე

$$\begin{cases}\dfrac{x}{x-1}\geqslant 0;\\ \dfrac{x}{x-1}>x,\end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases}\dfrac{x}{x-1}<0;\\ \dfrac{x}{1-x}>x.\end{cases}$$

საიდანაც, მივიღებთ $x<0$, $0<x<1$, და $1<x<2$.

პასუხი: $x<0$; $0<x<1$; $1<x<2$.

6. ამოვხსნათ ლოგარითმული უტოლობა:

$$\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$$

გვაქვს

$$3x-2>6-5x,$$

გარდა ამისა, არ უნდა დავივიწყოთ პირობა:

$$3x-2>0 \text{ და } 6-5x>0. \qquad (2)$$

(1) უტოლობიდან მივიღებთ $x>1$;

უტოლობათა სისტემა $\begin{cases}3x-2>0;\\ 6-5x>0\end{cases}$

გვაძლევს

$3x>2.$

$x>\dfrac{2}{3}$;

$6-5x>0,$

$6>5x$, ანუ $5x<6$

$x<\dfrac{6}{5}=1,2.$

ამრიგად; მოცემულ განტოლებას დააკმაყოფილებს ფესვთა სიმრავლე, რომლებიც მოთავსდება $(1;\ 1,2)$ შუალედში, ანუ x შეიძლება განისაზღვროს ორმაგი უტოლობით:

$$1<x<1,2.$$

7. ამოვხსნათ უტოლობა: $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5)<-2$.

უნდა შევნიშნოთ, რომ უტოლობას აზრი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $2x+5>0$

-2 წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით: $\log_{\frac{1}{3}}9$.

მაშინ გვექნება:

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+5) < \lg_{\frac{1}{2}}9.$$

როგორც ვიცით, $y=\log_a x$ ფუნქცია, როცა $0<x<1$, კლებადია, ამიტომ ფუნქციის ნაკლებ მნიშვნელობას არგუმენტის მეტი მნიშვნელობა უნდა ეთანადებოდეს ე. ი.

$$2x+5>9;$$

საიდანაც

$$x>2.$$

8. ამოვხსნათ უტოლობა: $\log_{\frac{1}{2}}|2x-3|>-3.$

ალებულ მაგალითში x-ს შეუძლია მიიღოს ყველა ნამდვილი რიცხვითი მნიშვნელობა, გარდა $x=\frac{3}{2}$-ისა.

განტოლების მარჯვენა ნაწილი წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$-3=\log_{\frac{1}{2}}8.$$

ამის შემდეგ მოცემული უტოლობა გადაიწერება ასე:

$$\log_{\frac{1}{2}}|2x-3|>\log_{\frac{1}{2}}8$$

ორივე ნაწილის პოტენცირება გვაძლევს

$$|2x-3|<8^{*}.$$

ა) თუ $2x-3>0$, მაშინ

$$|2x-3|=2x-3$$

და გვექნება უტოლობათა შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases} 2x-3>0. \\ 2x-3<8. \end{cases}$$

საიდანაც

$$x>\frac{3}{2} \quad \text{და} \quad x<\frac{11}{2},$$

ე. ი.

$$\frac{3}{2}<x<\frac{11}{2};$$

ბ) თუ $2x-3<0$, მაშინ $|2x-3|=3-2x$.

გვექნება უტოლობათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} 2x-3<0. \\ 3-2x<8, \end{cases}$$

საიდანაც $x<\frac{3}{2}$ და $x>-\frac{5}{2}$, ე. ი. $-\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}$;

პ ა ს უ ხ ი:

$$\frac{3}{2}<x<\frac{11}{2} \quad \text{და} \quad -\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}.$$

---

* $y=\log_a x$ ფუნქცია, როცა $0<a<1$, კლებადია.

9. ამოვხსნათ უტოლობა:

$$x^{2-\log_2^2 x-\log_2 x^2}>\frac{1}{x} \quad (x>0),$$

აქ შესაძლოა გვექნეს სამი სხვადასხვა შემთხვევა, კერძოდ,

$$0<x<1, \ x>1 \ \text{და} \ x=.1.$$

განვიხილოთ ეს შემთხვევები ცალ-ცალკე

ა) თუ $0<x<1$, მაშინ, ცხადია,

$$2-\log_2{}^2x-\text{olg}_2x^2<-1,$$

ანუ

$$\log_2{}^2x+2\log_2x-3>0.$$

მარცხენა ნაწილი შეგვიძლია დავშალოთ თანამამრავლებად:

$$(\log_2 x+3)\ (\log_2x-1)>0.$$

საიდანაც

$$\log_2x+3<0, \ \text{და} \ \log_2x-1<0. \ \text{ან} \ \log_2 x+3>0 \ \text{და} \ \log_2x-1>0$$

$$\log_2x<-3, \qquad \log_2x<1; \qquad \log_2x>-3, \qquad \log_2x>1$$

ანუ

$$x<\frac{1}{8}, \qquad x<2. \qquad x>\frac{1}{8}; \qquad x>2$$

მაგრამ თავიდან დაშვებული გვქონდა, რომ $0<x<1$, ამიტომ $x>2$ არ გამოდგება, ე. ი. უნდა განვიხილოთ $x<\frac{1}{8}$.

პ ა ს უ ხ ი:

$$0<x<\frac{1}{8}.$$

ბ) თუ $x>1$, მაშინ მოცემული უტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$2-\log_2{}^2x-\log_2x>-1 \ \text{ანუ} \ \log_2{}^2x+2\log_2x-3<0 \ \text{და}$$

$$(\log_2x+3)(\log_2x-1)<0.$$

საიდანაც $\log_2x+3>0$ და $\log_2x-1<0$ ანუ $\log_2x>-3$ და $\log_2x<1$.

ანუ

$$-3<\log_2x<1,$$

საიდანაც $\frac{1}{8}<x<2$.

მაგრამ დაშვებული გვაქვს $x>1$, ამიტომ პასუხი იქნება:

$$1<x<2.$$

10. ამოვხსნათ უტოლობა: $\log_{0,5}(5x+10)<\log_{0,5}(x^2+6x+8)$.

ჯერ დავადგინოთ მოცემული უტოლობის განსაზღვრის არე, ცხადია, ეს იქნება:

$$\begin{cases} 5x+10>0. \\ x^2+6x+8>0. \end{cases}$$

აქედან გამომდინარეობს $x>-2$

ვინაიდან ლოგარითმის ფუძე $a=0{,}5<1$, ამიტომ

$$5x+10>x^2+6x+8\,^*$$

ანუ $x^2+x-2<0$. (1) განტოლებით გამოსახული პარაბოლა OX ღერძს კვეთს ორ წერტილში: $x_1=1$ და $x_2=-2$. ამრიგად, (1) უტოლობა შესრულდება x-ის მნიშვნელობებისათვის, რომელიც მიეკუთვნება (1, —2) შუალედს ანუ $-2<x<1$.

x-ის ეს მნიშვნელობები ეკუთვნის მოცემული უტოლობის განსაზღვრის არეს.

პ ა ს უ ხ ი: $-2<x<1$.

1. ამოვხსნათ უტოლობა:

$$\log_3[\log_4(x^2-5)]>0.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ეს უტოლობა ტოლფასია შემდეგი უტოლობისა:

$$0<\lg_4(x^2-5)<1;$$

აქედან

$$1<x^2-5<4$$

ანუ

$$6<x^2<9,$$

ანუ

$$\sqrt{6}<|x|<3;$$

პ ა ს უ ხ ი: $\sqrt{6}<x<3$ და $-3<x<-\sqrt{6}$.

§ 169. მაჩვენებლიან და ლოგარითმულ განტოლებათა და უტოლობათა გრაფიკული ამოხსნა

განვიხილოთ ეს საკითხი კონკრეტულ მაგალითებზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ამოვხსნათ გრაფიკული ხერხით შემდეგი მაჩვენებლიანი განტოლება:

$$2^{x+1}-x\cdot 2^x-1=0.$$

$y=2^{x+1}-x\cdot 2^x-1$ ფუნქციის გრაფიკის აგება რთულია, ამიტომ მოცემული განტოლება გავამარტივოთ. გავყოთ ყველა წევრი 2^x-ზე ($2^x\neq 0$), გვექნება:

$$2-x=2^{-x};$$

ახლა ავაგოთ $y=2-x$ და $y=2^{-x}$ ფუნქციათა გრაფიკები (ნახ. 166). გრაფიკების გადაკვეთის წერტილთა აბსცისებია $x_1=-2$ და $x_2\approx 1{,}7$.

დ ა ვ ა ლ ე ბ ა. x_1 და x_2 მნიშვნელობათა მოცემულ განტოლებაში ჩასმით დარწმუნდით, რომ პირველი ფესვი $x_1=-2$ ზუსტია, ხოლო $x_2\approx 1{,}7$ მიახლოებითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ გრაფიკული ხერხით განტოლება:

$$\log_2(x+2)^3+2x-3=0.$$

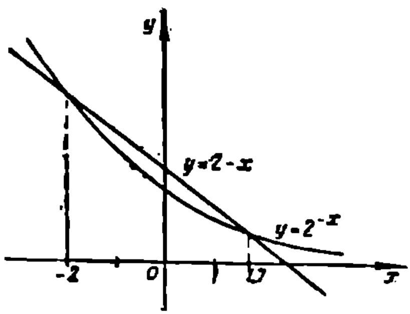
---

* როცა $0<a<1$, მაშინ $y=\log_a x$ ფუნქცია მონოტონურად კლებადია.

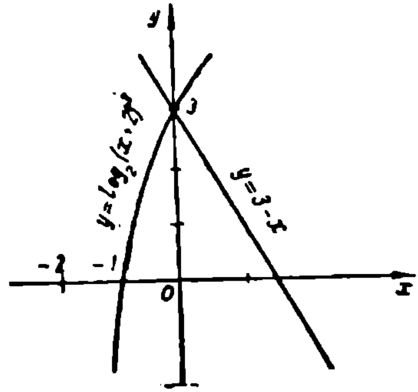
მოცემული განტოლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$3\log_2(x+2)=3-2x.$$

ავაგოთ $y=3\log_2(x+2)$ და $y=3-2x$ ფუნქციათა გრაფიკები (ნახ. 167).



ნახ. 166.



ნახ. 167.

როგორც ჩანს, ამ ფუნქციათა გრაფიკებს აქვს ერთი საერთო წერტილი, რომლის აბსცისა არის 0, ხოლო ორდინატი 3;

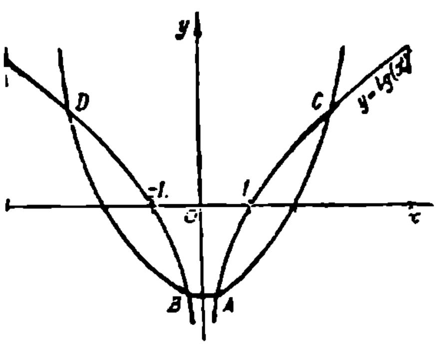
ამრიგად, $x=0$.

დ ა ვ ა ლ ე ბ ა. შეამოწმეთ ფესვის სიზუსტე.

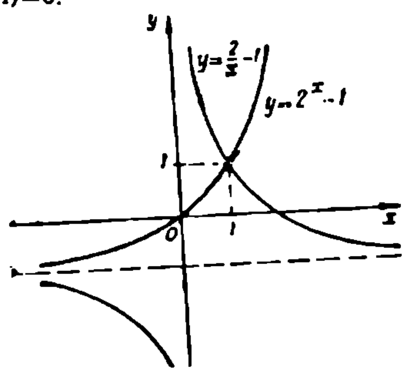
3. ა მ ო ც ა ნ ა. გრაფიკულად განვსაზღვროთ $\lg|x|=x^2-5$ განტოლების ნამდვილ ფესვთა რაოდენობა. ავაგოთ გრაფიკები ფუნქციებისა $y=\lg|x|$ და $y=x^2-5$. როგორც ნახაზიდან ჩანს, $y=\lg|x|$ და $y=x^2-5$ ფუნქციათა გრაფიკები იკვეთებიან 4 წერტილში, კერძოდ, A, B, C და D წერტილებში. აქედან დავასკვნით, რომ მოცემულ განტოლებას ექნება 4 ნამდვილი ფესვი.

4. ამოვხსნათ გრაფიკული ხერხით განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} xy+x-2=0, \\ x-\log_2(y+1)=0. \end{cases}$$



ნახ. 168.



ნახ. 169.

განტოლებათა სისტემა გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} xy=2-x, \\ \log_2(y+1)=x, \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{2-x}{x}. \\ y+1=2^x. \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{2}{x}-1. \\ y=2^x-1. \end{cases}$$

ავაგოთ $y=\dfrac{2}{x}-1$ და $y=2^x-1$ ფუნქციათა გრაფიკები (ნახ. 169). ნახაზიდან ჩანს, რომ $x\approx1$ და $y\approx1$.

დ ა ვ ა ლ ე ბ ა. შეამოწმეთ x და y-ის მნიშვნელობები და დაადგინეთ სისტემის ზუსტი ფესვები.

პ ა ს უ ხ ი: $x=1$ და $y=1$.

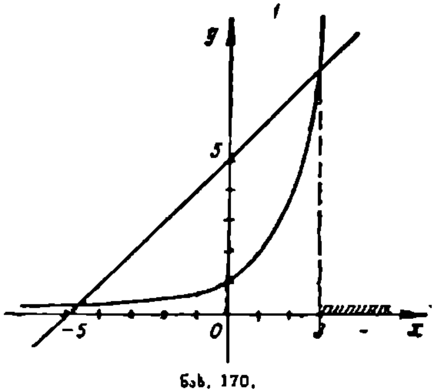
5. ამოვხსნათ $x+5<2^x$ უტოლობა გრაფიკული ხერხით.

ავაგოთ $y=x+5$ და $y=2^x$ ფუნქციათა გრაფიკები (ნახ. 170).
ნახაზიდან ჩანს, რომ $x<-5$ და $x>3$.

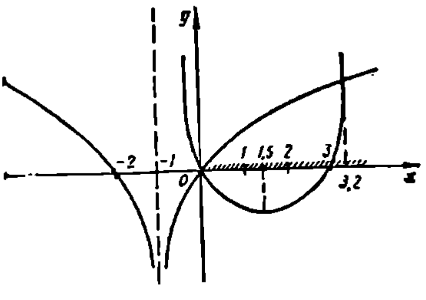
მოცემული უტოლობის ამონახსნი იქნება x-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $y=x+5$ ფუნქციის გრაფიკი მდებარეობს $y=2^x$ ფუნქციის გრაფიკის ქვევით.

6. ამოვხსნათ უტოლობა: $\lg|x+1|>x^2-3x$.

ავაგოთ $y=\lg|x+1|$ და $y=|x^2-3x|$ ფუნქციათა გრაფიკები (ნახ. 171).



ნახ. 170.



ნახ. 171.

როგორც ნახაზიდან ჩანს, $x>0$ და $x<3{,}2$; ე. ი. $0<x<3{,}2$.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

ამოხსენით უტოლობები

1. $0{,}2^{2-\frac{x-3}{x+2}}<0{,}2^{\frac{x-2}{x+1}}$; პას: $\left(-2,\ -\dfrac{11}{8}\right)$, $(-1,\ +\infty)$;

2. $2^{2x+3}-0{,}75\cdot2^{x+2}+1$; პას: $(-\infty,\ 0)$;

3. $\log_{u(3)}(x^2+2x-1)\leqslant1$; პას: $\left(-\infty,\dfrac{-3-\sqrt{121}}{3}\right)$ $\left(\dfrac{-3+\sqrt{121}}{3},\ +\infty\right)$

4. $\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_{0,3}\frac{2x+1}{2x-3}} < 1$;   პას: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$;

5. $x^{\log_{0,6} x+1} > 0{,}36\, x$.

ამოხსენით გრაფიკული ხერხით განტოლებათა სისტემები:

1. $\begin{cases} xy = 2 - y, \\ y = \log_3(x+2). \end{cases}$ პას: (1; 1).   2. $\begin{cases} 3x - 2^y + 2 = 0, \\ 2\log_3(x+7) - y - 10. \end{cases}$ პას: (2; 3).

ამოხსენით გრაფიკულად უტოლობები:

1. $2^{|x|} - \log_3 x^2 - 6 > 0$,   პას: $x < -3$, $x > 3$.

2. $3\lg|x+5| > x - 2$,   პას: $-5 < x < 5$.

XIV თავი

კომპლექსური რიცხვები

§ 160. კომპლექსური რიცხვის ცნება

როგორც I თავში იყო აღნიშნული, საგანთა დათვლის საჭიროებამ ადამიანი მიიყვანა ნატურალური რიცხვის აღმოჩენამდე, გაყოფის და გამოკლების ოპერაციის შესრულებამ — რაციონალური რიცხვის აღმოჩენამდე, ამოფესვის ოპერაციის შესრულებამ — ირაციონალური რიცხვის ცნებამდე.

ასევე, პრაქტიკულმა საჭიროებამ ადამიანი მიიყვანა წარმოსახვითი რიცხვის აღმოჩენამდე. $x^2 + a^2 = 0$ ($a \neq 0$) სახის კვადრატული განტოლების ამოხსნის საჭიროება გახდა წარმოსახვითი რიცხვის შემოღების ერთ-ერთი საფუძველი.

მართლაც, $x^2 = -a^2$, $x = \pm\sqrt{-a^2} = \pm\sqrt{(-1)\cdot a^2} = \pm a\sqrt{-1}$;

რიცხვს $\sqrt{-1}$ აღნიშნავენ i ასოთი (i არის ფრანგული სიტყვის „imaginaire" პირველი ასო, რაც წარმოსახვითს ნიშნავს) ამ რიცხვს წარმოსახვითი ერთეული ეწოდება.

მაშასადამე, შემოვიტანეთ ახალი რიცხვი i — წარმოსახვითი ერთეული, რომელიც ხასიათდება შემდეგნაირად:

$$i^2 = -1.$$

განსაზღვრა 1. $a + bi$ **სახის რიცხვს, სადაც** a **და** b **ნამდვილი რიცხვებია, ეწოდება კომპლექსური რიცხვი.** სიტყვა კომპლექსური ნიშნავს შედგენილს. ეს სახელწოდება პირველად შემოღებული იყო გერმანელი მათემატიკოსის გაუსის (1777—1855) მიერ. სიტყვა „imaginaire" შემოღებული იყო 1637 წელს ფრანგი მეცნიერის დეკარტის მიერ.

a-ს ეწოდება ნამდვილი ნაწილი, ხოლო bi-ს — წარმოსახვითი ნაწილი.

b-ს უწოდებენ კოეფიციენტს წარმოსახვით ნაწილთან.

როდესაც $a = 0$, მაშინ $a + bi$ კომპლექსური რიცხვი გადაიქცევა ე. წ. წმინდა

წარმოსახვით bi რიცხვად. თუ კი $b=0$, მაშინ $a+bi$ კომპლექსური რიცხვი ღებულობს $a+0i$ სახეს, ეს კი ნამდვილ a რიცხვს წარმოადგენს.

განსაზღვრა 2. **ორი კომპლექსური რიცხვი ტოლად ითვლება, თუ მათი ნამდვილი ნაწილები და წარმოსახვით ნაწილებთან მდგომი კოეფიციენტები ტოლია.**

ე. ი. $a+bi=a_1+b_1i$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a=a_1$ და $b=b_1$. კომპლექსური რიცხვი $a+bi$ ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a=0$ და $b=0$.

აღსანიშნავია ის ფაქტი, რომ ნამდვილი რიცხვებისათვის ყოველთვის განსაზღვრულია თანაფარდობა „მეტი" ან „ნაკლები". მაგალითად, $10>3$, $-3<0$ და ა. შ. არატოლი კომპლექსური რიცხვებისათვის არ არის მიღებული რომელი მათგანი ჩაითვალოს მეტად, მაგალითად, არ შეიძლება ითქვას, რომელია მეტი $3+5i$ თუ $7-3i$ ან $2-2i$ თუ $0+3i$ და ა. შ.

ეს აიხსნება იმით, რომ კომპლექსური რიცხვების შესაბამისი რადიუს-ვექტორები, როგორც მომდევნო პარაგრაფში ვნახავთ, მდებარეობენ სიბრტყეზე და არა ერთი მიმართულების მქონე წრფეზე.

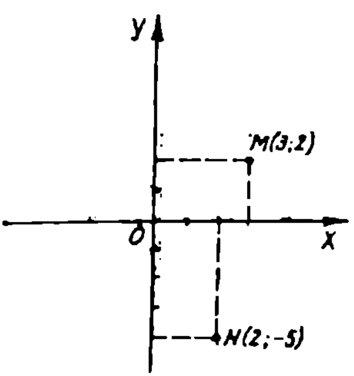
§ 101. კომპლექსური რიცხვის გეომეტრიული გამოსახვა

I თავში ნამდვილი რიცხვის ცნების განსაზღვრის დროს ვნახეთ, რომ ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე ურთიერთცალსახა შესაბამისობაშია რიცხვითი ღერძის ყველა წერტილის სიმრავლესთან.

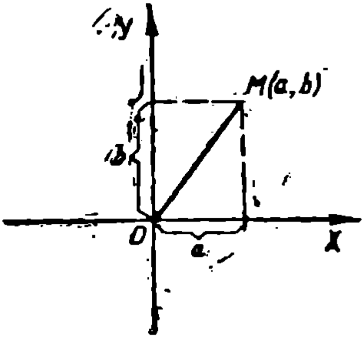
როგორც ნამდვილი რიცხვები შეიძლება გამოისახოს რიცხვითი ღერძის წერტილებით, ასევე კომპლექსური რიცხვები შეიძლება წარმოდგენილი იქნას სიბრტყის წერტილებით.

ავიღოთ სიბრტყეზე კოორდინატთა მართკუთხა სისტემა. ავირჩიოთ სიგრძის ერთეული (სანტიმეტრი) და გამოვსახოთ ნამდვილი რიცხვები OX ღერძზე, ხოლო წარმოსახვითი — OY ღერძზე.

ამ გზით ყოველ $a+bi$ კომპლექსურ რიცხვს შეიძლება შევუსაბამოთ სიბრტყის გარკვეული წერტილი, კოორდინატებით $(a; b)$.



ნახ. 172.



ნახ. 173.

მაგალითად $3+2i$ კომპლექსურ რიცხვს შეესაბამება M წერტილი, ასევე $2-5i$ რიცხვს — N წერტილი და ა. შ. პირიქით, $M(3; 2)$ და $N(2; -5)$ წერტილებს ყთანადება კომპლექსური რიცხვები:

$$3+2i \text{ და } 2-5i.$$

როგორც ვხედავთ, ყოველ $a+bi$ კომპლექსურ რიცხვს სიბრტყის ერთი, სრულიად განსაზღვრული წერტილი შეესაბამება, კერძოდ, წერტილი, რომლის კოორდინატებია $(a; b)$.

პირიქით, სიბრტყის ყოველ $(a'; b')$) წერტილს ერთი სრულიად განსაზღრული კომპლექსური რიცხვი შეესაბამება, კერძოდ, $a'+b'i$.

ამრიგად, ყველა კომპლექსური რიცხვის სიმრავლე და სიბრტყის ყველა წერტილის სიმრავლე ურთიერთცალსახა შესაბამისობაში იმყოფება.

• სიბრტყის ყოველ M წერტილს შეიძლება დავუკავშიროთ $\overline{OM}$ ვექტორი, რომელიც გამოდის კოორდინატთა სათავიდან და მთავრდება M წერტილში.

როგორც ვხედავთ, შეგვიძლია კომპლექსურ რიცხვებს მივცეთ მეორენაირი გეომეტრიული-ინტერპრეტაცია. სახელდობრ, ყოველი $a+bi$ კომპლექსური რიცხვი შეგვიძლია განვმარტოთ, როგორც $\overline{OM}$ ვექტორი, კოორდინატებით (a, b), მასთან, $\overline{OM}$ ვექტორის კოორდინატები იგივე იქნება, რაც M წერტილის კოორდინატები.

განსაზღვრა 3. **$a+bi$ კომპლექსური რიცხვის მოდული ეწოდება $r=\sqrt{a^2+b^2}$ ნამდვილ რიცხვს.**

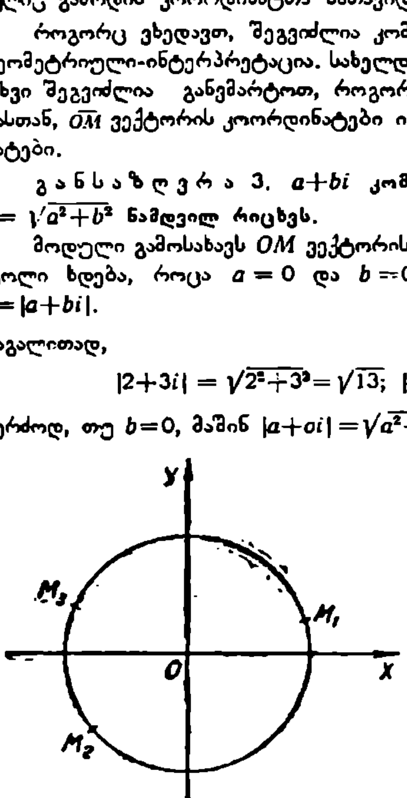
მოდული გამოსახავს OM ვექტორის სიგრძეს. რიცხვი r დადებითია და ნულის ტოლი ხდება, როცა $a=0$ და $b=0$; მოდულს აღნიშნავენ შემდეგნაირად: $r=|a+bi|$.

მაგალითად,

$$|2+3i|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13};\quad |-2-i|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}.$$

კერძოდ, თუ $b=0$, მაშინ $|a+0i|=\sqrt{a^2+0^2}=|a|$,

ე. ი. ნამდვილი რიცხვის მოდული არის ამ რიცხვის აბსოლუტური სიდიდე. კომპლექსური რიცხვის მოდულს უწოდებენ ამ რიცხვის აბსოლუტურ მნიშვნელობასაც.



ნახ. 174.

აღსანიშნავია ის გარემოება, რომ კომპლექსური რიცხვები, რომელთა მოდული ერთეულის ტოლია, გამოისახება ერთეულოვანი წრის წერტილებით.

მაგალითად, კომპლექსური რიცხვები:

$$\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ და } \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$$

გამოისახება M_1, M_2 და M_3 წერტილებით.

§ 162. მოქმედებანი კომპლექსურ რიცხვებზე

1. კომპლექსური რიცხვების შეკრება

განსაზღვრა 4. ორი $a+bi$ და $c+di$ კომპლექსური რიცხვების ჯამი ეწოდება $(a+c)+(b+d)i$ კომპლექსურ რიცხვს.

ამრიგად,

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

დასკვნა. კომპლექსური რიცხვების შეკრების დროს მათი ნამდვილი ნაწილები და წარმოსახვით ნაწილებთან მდგომი კოეფიციენტები იკრიბება.

მაგალითები:

1. $(1+4i)+(2+3i)=(1+2)+(4+3)i=3+7i$;
2. $(5+4i)+(3-7i)=(5+3)+(4-7)i=8-3i$;
3. $(2+9i)+(-3+i)=(2-3)+(9+1)i=-1+10i$;
4. $(3-5i)+(-2+7i)=(3-2)+(-5+7)i=1+2i$.

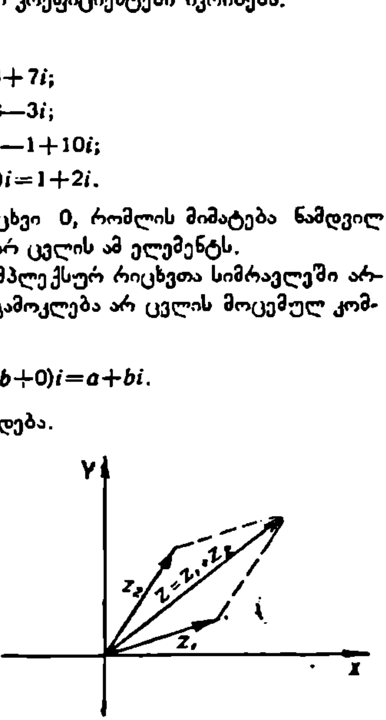
ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში არის რიცხვი 0, რომლის მიმატება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტთან არ ცვლის ამ ელემენტს.

ანალოგიურად ზემოთ აღნიშნულისა, კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში არსებობს რიცხვი $0+0i$, რომლის მიმატება ან გამოკლება არ ცვლის მოცემულ კომპლექსურ რიცხვს. მართლაც,

$$(a+bi)+(0+0i)=(a+0)+(b+0)i=a+bi.$$

$0+0i$ რიცხვს კომპლექსური ნული ეწოდება.

ცნობილია, რომ ორ ნამდვილ a და b რიცხვს, რომელთა ჯამი ნულის ტოლია, მოპირდაპირე რიცხვები ეწოდება. ანალოგიურად, $a+bi$ და $-a-bi$ კომპლექსურ რიცხვებს მოპირდაპირე კომპლექსური რიცხვები ეწოდება. $a+bi$ და $a-bi$ კომპლექსურ რიცხვებს ურთიერთშეუღლებული ეწოდება.



ნახ. 175.

რამდენადაც კომპლექსური რიცხვები გამოისახება ვექტორის სახით, კომპლექსური რიცხვების შეკრება გეომეტრიულად შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც ვექტორების შეკრება. ასე მაგალითად, 185-ე ნახაზზე გამოსახულია $z_1=4+2i$ და $z_2=2+5i$ კომპლექსური რიცხვების ჯამი.

2. კომპლექსური რიცხვების გამოკლება

განსაზღვრა 5. $z_1=a_1+b_1i$ კომპლექსური რიცხვიდან $z_2=a_2+b_2i$ კომპლექსური რიცხვის გამოკლება ნიშნავს, მოვძებნოთ ისეთი $z=a+bi$ რიცხვი, რომ მიმატებული z_2-სთან გვაძლევდეს z_1-ს.

ამრიგად,

$$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=a+bi$$

ნიშნავს იმას, რომ

$$a+bi+a_2+b_2i=a_1+b_1i,$$
$$(a+a_2)+(b+b_2)i=a_1+b_1i.$$

თუ გავიხსენებთ კომპლექსური რიცხვების ტოლობის პირობებს, დავწერთ:

$$a+a_2=a_1,$$
$$b+b_2=b_1,$$

საიდანაც

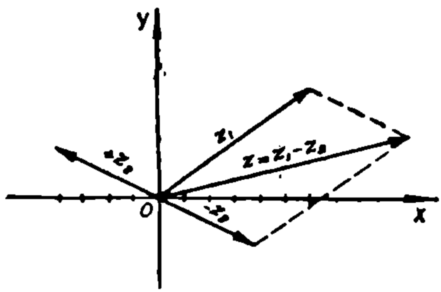
$$a=a_1-a_2, \qquad b=b_1-b_2.$$

ერთ კომპლექსურ რიცხვს რომ გამოვაკლოთ მეორე, საკმარისია გამოკლება შევასრულოთ ცალ-ცალკე ნამდვილ ნაწილებზე და წარმოსახვით ნაწილთა კოეფიციენტებზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. $(5+3i)-(2+5i)=(5-2)+(3-5)i=3-2i;$
2. $(2+3i)-(3-i)=(2-3)+(3+1)i=-1+4i;$
3. $(5+7i)-(1-i)=(5-1)+(7+1)i=4+8i;$
4. $(10-3i)+(7-4i)=(10-7)+(-3+4)i=3+i.$

176-ე ნახაზზე წარმოდგენილია $z_1=4+3i$ და $z_2=-3+2i$ კომპლექსური რიცხვების გამოკლება.



ნახ. 176.

აღსანიშნავია, რომ ორი კომპლექსური რიცხვის ჯამი ან სხვაობა შეიძლება იყოს ნამდვილი რიცხვი. მაგალითად, შეუღლებული კომპლექსური რიცხვების ჯამი არის ნამდვილი რიცხვი:

$$(a+bi)+(a-bi)=a+a+ +bi-bi=2a.$$

3. კომპლექსური რიცხვების გამრავლება

ორი $a+bi$ და a_1+b_1i კომპლექსური რიცხვის გამრავლება ხდება მრავალწევრთა გამრავლების ჩვეულებრივი წესის მსგავსად. მიღებულ შედეგში საჭიროა i^2 ყველგან შეიცვალოს -1-ით.

$$(a+bi)(a_1+b_1i)=aa_1+ab_1i+a_1bi+bb_1i^2=(aa_1-bb_1)+(ab_1+a_1b)i,$$

როგორც ვხედავთ, ორი კომპლექსური რიცხვის ნამრავლი კვლავ კომპლექსური რიცხვია. შევნიშნოთ, რომ ნულის არატოლი ორი შეუღლებული კომპლექსური რიცხვის ნამრავლი ნამდვილი რიცხვია.

მაგალითად,

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-abi+abi-b^2i^2=a^2+b^2.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. $(3+2i)(5-3i)=15-9i+10i-6i^2=15+i+6=21+i$;

2. $(2+5i)(3-i)=6-2i+15i-5i^2=6+13i-5i^2=11+13i$.

ცნობილია, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ადგილი აქვს ტოლობას: $a\cdot 0=0$ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში კომპლექსურ ნულს ($0+0i$-ს) ანალოგიური თვისება აქვს:

$$(a+bi)(0+oi)=0+oi.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. $(3+2i)(0+0i)=0+0i$;

2. $(2-i)(0+oi)=o+oi$.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

გამოთვალეთ:

1. $(5+i)(-2+3i)$.
2. $(3+4i)(6-5i)$.
3. $(0,5+0,2i)(2+3i)$.
4. $(\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+2i)$.

4. კომპლექსური რიცხვების გაყოფა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 6. $a+bi$ კომპლექსური რიცხვის განაყოფი $c+di$ კომპლექსურ რიცხვზე ეწოდება ისეთ $x+yi$ რიცხვს, რომელიც გამრავლებული $c+di$ ზე მოგვცემს $a+bi$-ს.

ასე რომ, თუ ერთდროულად c და d კოეფიციენტები არ უდრის ნულს, გვექნება:

$$\frac{a+bi}{c+di}=x+yi. \tag{1}$$

საიდანაც

$$a+bi=(c+di)(x+yi),$$

$$a+bi=cx+cyi+xdi+dyi^2=cx-dy+(cy+dx)i.$$

თუ გავიხსენებთ კომპლექსურ რიცხვთა ტოლობის პირობებს, გვექნება:

$$\begin{cases} cx-dy=a, \\ dx+cy=b. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნა გვაძლევს:

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2},$$

თუ x-ისა და y-ის მიღებულ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (1)-ში, გვექნება:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$$

ამ ფორმულის დაზეპირება არაა სავალდებულო, მხოლოდ საჭიროა ვიცოდეთ მისი მიღების წესი.

მიღებული შედეგი შეგვიძლია მივიღოთ უფრო მარტივად, თუ (1) გამოსახულების მარცხენა ნაწილს გავამრავლებთ გამყოფის შეუღლებულ რიცხვზე. მოსწავლეებს ევალებათ გააკეთონ ეს დამოუკიდებლად.

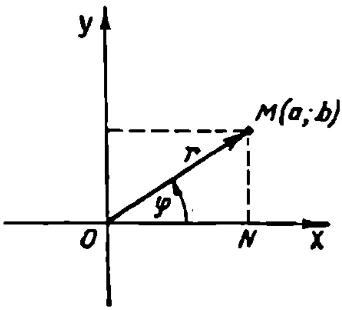
მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. $$\frac{5+2i}{1-2i}=\frac{(5+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{5+10i+2i+4i^2}{1^2-(2i)^2}=\frac{1+12\,i}{3}.$$

2. $$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}=\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{1+3}=\frac{1+2i\sqrt{3}-3}{4}=$$
$$=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

§ 163. კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული სახე

როგორც ვიცით, $a+bi$ კომპლექსურ რიცხვს სიბრტყე ეთანადება ვექტორი (ნახ. 177), კოორდინატებით (a, b). აღვნიშნოთ $\overline{OM}$ ვექტორის სიგრძე r-ით, ხოლო კუთხე, რომელსაც $\overline{OM}$ ვექტორი ადგენს ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან, φ-თი.



ნახ. 177.

φ კუთხის ფუნქციების — სინუსის და კოსინუსის განსაზღვრის ძალით, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{a}{r}=\cos\varphi;\qquad \frac{b}{r}=\sin\varphi, \tag{1}$$

საიდანაც: $a=r\cos\varphi$ და $b=r\sin\varphi$.

ამრიგად, ნებისმიერი $a+bi$ კომპლექსური რიცხვი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$a+bi=r\cos\varphi+r\sin\varphi\cdot i$$

ანუ

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

ამ შემთხვევაში კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული სახითაა ჩაწერილი. $a+bi$ კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიულ ფორმაში შემავალ r რიცხვს ეწოდება მოდული, ხოლო φ კუთხეს—არგუმენტი.

§ 164. კომპლექსური რიცხვის ალგებრული სახიდან ტრიგონომეტრიულზე გადასვლა და პირიქით

როგორც ვნახეთ,

$$\frac{a}{r}=\cos\varphi \quad \text{და} \quad \frac{b}{r}=\sin\varphi,$$

საიდანაც

$$a=r\cos\varphi \tag{1}$$

$$b=r\sin\varphi \tag{2}$$

ამ გამოსახულებათა ორივე ნაწილს თუ ავიყვანთ კვადრატში და შევკრებთ, მივიღებთ:

$$a^2+b^2=r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$$

ანუ

$$r^2=a^2+b^2,$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2}. \qquad (3)$$

თუ (2) გამოსახულებას გავყოფთ (1)-ზე, გვექნება:

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\operatorname{tg}\varphi.$$

ამრიგად,

$$\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi. \qquad (4)$$

(1), (2), (3) და (4) ფორმულების დახმარებით ყოველთვის შეგვიძლია ალგებრული სახით მოცემულ კომპლექსურ რიცხვს მივცეთ ტრიგონომეტრიული სახე.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. მივცეთ ტრიგონომეტრიული სახე კომპლექსურ რიცხვს:

$$-1+i\sqrt{3}$$

ა) გამოვთვალოთ მოდული, რისთვისაც ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

ვაწარმოოთ ჩასმა:

$$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=2.$$

ბ) ვიპოვოთ არგუმენტი:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a},$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3};\quad \varphi=-\frac{\pi}{3}.$$

მაგრამ, როგორც ვიცით, ტანგენსის ასეთივე სიდიდე აქვს

$\pi+\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$ კუთხესაც.

ისმება კითხვა, რომელი მათგანი უნდა ავიღოთ?

აღნიშნული საკითხის გარკვევის მიზნით გავარკვიოთ, როგორი ნიშნები ექნება $\sin\varphi$ და $\cos\varphi$-ს, ამით დავადგენთ, თუ რომელი მეოთხედის კუთხის აღება იქნება საჭირო. ვიცით, რომ

$$\sin\varphi=\frac{b}{r}\quad \text{და}\quad \cos\varphi=\frac{a}{r};\quad \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\varphi=-\frac{1}{2}.$$

ამრიგად, კუთხე უნდა იქნას აღებული მეორე მეოთხედში, რადგანაც II მეოთხედში სინუსი დადებითია და კოსინუსი — უარყოფითი.

$$\varphi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi+\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}.$$

ამრიგად,

$$\varphi=\frac{2\pi}{3};$$

მოცემული $-1+i\sqrt{3}$ კომპლექსური რიცხვი გამოისახება შემდეგნაირად:

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

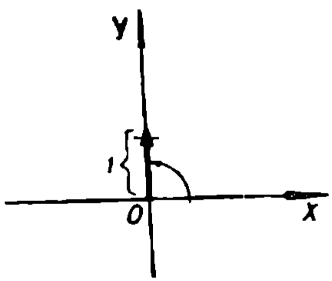
2. მივცეთ ტრიგონომეტრიული სახე i რიცხვს. i კომპლექსურ რიცხვს, ანუ რაც იგივეა, $0+1i$-ს ეთანადება ვექტორი, კოორდინატებით (0;1) (ნახ. 178). ცხადია, ამ ვექტორის სიგრძე 1-ის ტოლია, ხოლო $\overline{OA}$ ვექტორის მიერ ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შექმნილი კუთხეა $\frac{\pi}{2}$, ამიტომ i რიცხვის ტრიგონომეტრიული სახე იქნება:

$$0+1i=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2};$$

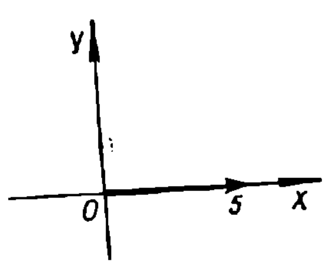
მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ჩავწეროთ ტრიგონომეტრიული სახით რიცხვი 5; ცხადია, კომპლექსურ $5+0i$ რიცხვს შეესაბამება $\overline{OM}$ ვექტორი, რომელიც ბოლოვდება ox ღერძის იმ წერტილში, რომლის აბსცისაა 5. ამ ვეტორის სიგრძე იქნება 5 ერთეულის ტოლი, ხოლო კუთხე φ, რომელსაც ეს ვექტორი შეადგენს OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან, უდრის 0-ს (ნახ. 179).

ამიტომ

$$5+0i=5(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ).$$



ნახ. 178.



ნახ. 179.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ჩავწეროთ ტრიგონომეტრიული სახით რიცხვი -3, ადვილი მისახვედრია, რომ კომპლექსურ $-3+0i$ რიცხვს შეესაბამება $\overline{OM}$ ვექტორი, რომელიც ბოლოვდება OX ღერძის იმ წერტილში, რომლის აბსცისა უდრის -3-ს; $\overline{OM}$ ვექტორის სიგრძე უდრის 3 ერთეულს, ხოლო φ კუთხე, რომელსაც ეს

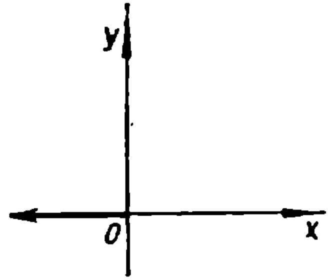
ვექტორი შეადგენს OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან, უდრის π-ს (ნახ. 180) ამიტომ

$$-3+0i=3(\cos\pi+i\sin\pi).$$

ახლა განვიხილოთ საკითხი, თუ როგორ შეიძლება ტრიგონომეტრიული სახით მოცემული კომპლექსური რიცხვი ჩაიწეროს ალგებრული სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1. ჩავწეროთ ალგებრული სახით კომპლექსური რიცხვი

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$



ნახ. 180.

ვიცით, რომ

$$\frac{a}{r}=\cos\varphi \text{ და } \frac{b}{r}=\sin\varphi,$$

$$r=\sqrt{2};\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \frac{b}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad b=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}=1.$$

$$a=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}=1;\qquad b=1.$$

$$a=1;$$

ამრიგად,

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i.$$

2. ჩავწეროთ ალგებრული სახით კომპლექსური რიცხვი:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

$$r=2;\quad \varphi=\frac{\pi}{6};$$

$$\frac{a}{2}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \frac{b}{2}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \frac{b}{2}=\frac{1}{2};$$

$$a=\sqrt{3};\qquad b=1.$$

ამრიგად,

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. მიეცით ტრიგონომეტრიული სახე კომპლექსურ რიცხვებს:

პასუხები:

1. $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

2. $-2-2i\sqrt{3}$, $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

3. $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

4. $4+3i$, $5\left(\cos\frac{9{,}2\pi}{45}+i\sin\frac{9{,}2\pi}{45}\right)$.

5. $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$; $2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$.

2. მიეცით ალგებრული სახე ტრიგონომეტრიული სახით მოცემულ შემდეგ კომპლექსურ რიცხვებს:

1. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$, პას: $-1-i$.

2. $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, პას: $\sqrt{3}+i$.

3. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, პას: $-1+i$.

§ 165. წარმოსახვითი ერთეულის ხარისხები

კომპლექსური რიცხვის ცნების შემოტანის დროს განსაზღვრული გვქონდა რიცხვი i—წარმოსახვითი ერთეული — იმ გაგებით, რომ

$$i^2=-1.$$

წარმოსახვითი ერთეულის ხარისხების გამოთვლისას ეს უკანასკნელი მივიღოთ მხედველობაში.

$$i^1=i,$$
$$i^2=-1,$$
$$i^3=i^2\cdot i=(-1)i=-i,$$
$$i^4=i^3\cdot -i=\cdot i=-i^2=-(-1)=+1,$$
$$i^5=i^4\cdot i=(+1)i=i,$$
$$i^6=i^5\cdot i=i\cdot i=i^2=-1,$$
$$i^7=i^6\cdot i=(-1)i=-i;\qquad i^8=i^7\ (i)=-i\cdot i=-i^2=1 \text{ და ა. შ.}$$

თუ დავაკვირდებით მიღებულ შედეგებს, ჩვენ ვნახავთ, რომ წარმოსახვითი ერთეულის ახარისხებისას მონაცვლებით მიიღება: i; -1; $-i$ და $+1$.

მიღებული წესის მიხედვით ადვილად დავასკვნით, რომ ყოველი ნატურალური n-სათვის გვექნება: $i^{4n}=i$; $-i^{4n+2}=-1$; $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+3}=-i$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. i^0 მიღებულია ერთის ტოლად.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

აახარისხეთ:

1. i^9.
2. i^{14}
3. i^{31}
4. $(1+i)^2$
5. $(3+2i)^2$
6. $(2-i\sqrt{3})^3$
7) $\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$.
8) $(1+i)^3+(2+3i)^2$
9) $(3+i\sqrt{2})^6$

§ 149. ტრიგონომეტრიული სახით მოცემული კომპლექსური რიცხვების გამრავლება და გაყოფა

ავიღოთ კომპლექსური რიცხვები:

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

გადავამრავლოთ ისინი მრავალწევრთა გამრავლების წესის მიხედვით, მივიღებთ:

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1\cdot r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2)=$$
$$=r_1\cdot r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)]=$$
$$=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

თუ დავაკვირდებით მიღებულ შედეგს, ადვილად დავასკვნით, რომ z_1z_2 ნამრავლის მოდული z_1და z_2 რიცხვთა მოდულების ნამრავლის ტოლია, ხოლო არგუმენტი z_1 და z_1 რიცხვთა არგუმენტების ჯამისა.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. $2(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ)\cdot 2(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ)=4(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)=$
$$=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=2\sqrt{3}+2i.$$

2. $\sqrt{2}(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)\cdot\sqrt{3}(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)=\sqrt{6}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)=$
$$=\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

აღსანიშნავია, რომ ტრიგონომეტრიული სახით მოცემული კომპლექსურ რიცხვთა გამრავლების წესი მართებულია თანამამრავლთა ნებისმიერი სასრულო n რიცხვისათვის, ე. ი.

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\ldots r_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)=$$
$$=r_1\cdot r_2\ldots r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)];$$

თუკი ყველა თანამამრავლი ტოლია, მაშინ მივიღებთ

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad (1)$$

მიღებული (1) ფორმულა ცნობილია მ უ ა ვ რ ი ს ფორმულის სახელწოდებით.

თუ $r=1$, მაშინ მუავრის ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$(\cos\varphi+i\ \sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi; \qquad (2)$$

(2) ფორმულის გამოყენებით ადვილად გამოითვლება $\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$, $\sin 3\varphi$, $\cos 3\varphi$ ფუნქციათა მნიშვნელობები.

მართლაც,

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2=\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi,$$

ვინაიდან

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2=\cos^2\varphi+i\,2\cos\varphi\sin\varphi-\sin^2\varphi.$$

ამიტომ გვექნება

$$\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+i\,2\cos\varphi\sin\varphi.$$

თუ გავიხსენებთ ორი კომპლექსური რიცხვის ტოლობის პირობებს, ადვილად დავასკვნით:

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi, \qquad (1)$$

და

$$\sin 2\varphi=2\cos\varphi\sin\varphi. \qquad (2)$$

ახლა გამოვთვალოთ $\cos 3\varphi$ და $\sin 3\varphi$,

ცხადია, $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi$,

ვინაიდან

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi+i\,(3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi),$$

ამიტომ

$$\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi+i(3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi);$$

საიდანაც

$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi, \qquad (3)$$

$$\sin 3\varphi=3\cos^2\rho\sin\varphi-\sin^3\varphi \qquad (4)$$

(4)-ში თუ ჩავსვამთ $\cos^2\varphi=1-\sin^2\varphi$, გვექნება

$$\sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi. \qquad (5)$$

ადვილად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ტრიგონომეტრიული სახით მოცემული კომპლექსურ რიცხვთა ახარისხების მიღებული წესი მართებულია უარყოფითი მთელი n რიცხვისათვისაც; მართლაც,

$$[(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-1}]=[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]^n=\cos(-n\varphi)+i\sin(-n\varphi).$$

ამრიგად,

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-n}=\cos(-n\varphi)+i\sin(-n\varphi).$$

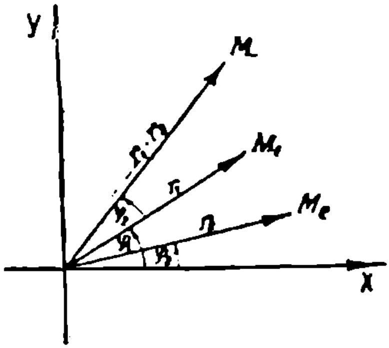
§ 167. ტრიგონომეტრიული სახით მოცემული კომპლექსური რიცხვების ნამრავლის გეომეტრიული გამოსახვა

ვთქვათ, $z_1=r(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ კომპლექსურ რიცხვს შეესაბამება $\overline{OM}_1$ ვექტორი, ხოლო $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ რიცხვს $\overline{OM}_2$ ვექტორი.

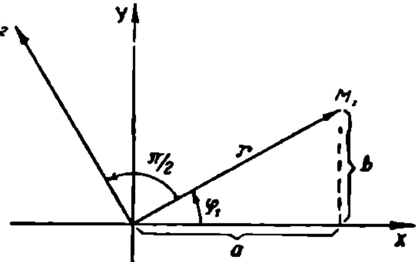
მაშინ ნამრავლს: $z_1\cdot z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$ ეთანადება $\overline{OM}$ ვექტორი.

$\overline{OM}$ ვექტორი მიიღება φ კუთხით OM_1 ვექტორის მობრუნებით საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით და მისი სიგრძის (r) შეცვლით r_2-ჯერ. თუ $r_2>1$, მაშინ ამბობენ, რომ OM_1 ვექტორი განიცდის გაჭიმვას, ხოლო, თუ $r_2<1$, განიცდის შეკუმშვას.

კერძოდ, თუ კომპლექსური რიცხვი მრავლდება წარმოსახვით ერთეულზე, i-ზე, მაშინ OM_1 ვექტორი მობრუნდება $\frac{\pi}{2}$ კუთხით ისე, რომ მისი სიგრძე უცვლელი რჩება.



ნახ. 181.



ნახ. 182.

§ 109. ტრიგონომეტრიული სახით მოცემული კომპლექსური რიცხვების გაყოფა

ვთქვათ, მოცემულია ორი კომპლექსური რიცხვი

$$z_1=z_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1) \text{ და } z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

საჭიროა მოიძებნოს მოდული და არგუმენტი

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}$$

შეფარდებისა.

უკანასკნელი გამოსახულების მნიშვნელი და მრიცხველი გავამრავლოთ $\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2$-ზე, მივიღებთ

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2=1$, მასთან, ორი არგუმენტის სხვაობის სინუსის და კოსინუსის ფორმულებს, გვექნება:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]. \qquad (1)$$

(1) ფორმულის მიხედვით დავასკვნით:

ტრიგონომეტრიული სახით მოცემული კომპლექსური რიცხვების განაყოფის მოდული ტოლია გასაყოფის მოდულის შეფარდებისა გამყოფის მოდულთან, ხოლო არგუმენტი — გასაყოფისა და გამყოფის არგუმენტების სხვაობისა.

ამ წესის გამოყენებით ადვილად დავასკვნით:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-1}=\frac{1}{\cos\varphi+i\sin\varphi}=\frac{\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ}{\cos\varphi+i\sin\varphi}=$$

$$=\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)=\cos\varphi-i\sin\varphi.$$

ამრიგად,

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-1}=\cos\varphi-i\sin\varphi.$$

§ 109. ფესვის ამოღება კომპლექსური რიცხვიდან

ამოვიღოთ n ხარისხის ფესვი კომპლექსური რიცხვიდან $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ნიშნავს, ვიპოვოთ ისეთი $\rho(\cos\Theta+i\sin\Theta)$ კომპლექსური რიცხვი, რომელიც ახარისხებული n ხარისხში მოგვცემს $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ რიცხვს.

ე. ი.

$$[\rho(\cos\Theta+i\sin\Theta)]^n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

ანუ

$$\rho^n(\cos n\Theta+i\sin n\Theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

კომპლექსურ რიცხვთა ტოლობის პირობების ძალით $\rho^n=r$, ხოლო არგუმენტები შეიძლება განსხვავებული იყვნენ მხოლოდ 2π-ს ჯერადი რიცხვით,

ე. ი.

$$n\Theta=\varphi+2k\pi.$$

ამრიგად,

$$\rho=\sqrt[n]{r}\,^{*} \quad \text{და} \quad \Theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

ცხადია, n ხარისხის ფესვს მოცემული კომპლექსური რიცხვიდან ექნება შემდეგი სახე:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \qquad (1)$$

თუ (1) ფორმულაში k-ს მივცემთ მნიშვნელობებს: $0, 1, 2, \ldots, n-1$, მივიღებთ ფესვის შემდეგ n მნიშვნელობებს:

$$k=0, \text{ მაშინ } z_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

$$k=1, \text{ მაშინ } z_1=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right),$$

$$k=2, \text{ მაშინ } z_2=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+4\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+4\varphi}{n}\right). \text{ და ა. შ.}$$

მართალია, k რიცხვის ზრდასთან ერთად იზრდება არგუმენტის მნიშვნელობებიც, მაგრამ არც ერთი მათგანი არ აღემატება 2π-ს. ამ აზრის ნათელსაყოფად საკმარისია ვაჩვენოთ არგუმენტთა მიმდევრობის ყველაზე მეტი მნიშვნელობა $\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}<2\pi$.

---

* $\sqrt[n]{r}$ გამოსახულებაში იგულისხმება არითმეტიკული ფესვი.

მართლაც, კომპლექსური რიცხვის არგუმენტის მთავარი მნიშვნელობა ნაკლებია 2π-ზე, ე. ი.

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

ამიტომ

$$\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n} \leqslant \frac{2\pi+2(n-1)\pi}{n}=2\pi.$$

ამრიგად,

$$\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}<2\pi.$$

ვინაიდან ერთი სრული კუთხის ფარგლებში ორ სხვადასხვა α და β კუთხეს არ შეიძლება ერთდროულად ჰქონდეს როგორც სინუსის ასევე, კოსინუსის ერთი და იგივე მნიშვნელობები, ამიტომ, ცხადია, ფესვის ყველა n მნიშვნელობა ერთმანეთისაგან განსხვავებული იქნება.

ადვილი საჩვენებელია, რომ k რიცხვის მომდევნო მნიშვნელობებისათვის, მაგალითად: $k=n$, $n+1,\ldots$ ფესვის ახალ მნიშვნელობებს ვერ მივიღებთ:

მაგალითად,

$$z_n=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi n}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi n}{n}\right)=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)\right]=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)=z_0,$$

ე. ი. მივიღეთ n-ური ხარისხის ის მნიშვნელობა, რაც მიღებული გვქონდა $k=0$-ის დროს. ასევე $k=n+1$ მნიშვნელობისათვის, მივიღებთ z_1-ს, $k=n+2$-სათვის z_2-ს და ა. შ. უკანასკნელის შემოწმება ევალებათ მოსწავლეებს.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

ეთქვათ, გვაქვს

1. $\sqrt{i}$.

i წარმოვიდგინოთ ტრიგონომეტრიული სახით:

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} \qquad (r=1),$$

ამიტომ

$$\sqrt{i}=\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}$$

როცა $k=0$, გვექნება

$$\sqrt{i}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

როცა $k=1$, გვექნება:

$$\sqrt{i}=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\ (1+i).$$

2. ვიპოვოთ i რიცხვიდან მე-4 ხარისხის ფესვის ყველა მნიშვნელობა, i წარმოვადგინოთ ტრიგონომეტრიული სახით:

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}, \qquad r=\sqrt[4]{1}=1.$$

არგუმენტი იქნება:

როცა $k=0$; მაშინ $\frac{\pi}{8}$;

როცა $k=1$; $\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{4}=\frac{5\pi}{8}$;

როცა $k=2$; $\frac{\pi}{8}+\frac{4\pi}{4}=\frac{9\pi}{8}$;

როცა $k=3$; $\frac{\pi}{8}+\frac{6\pi}{4}=\frac{13\pi}{8}$.

ამრიგად, i რიცხვიდან მე-4 ხარისხის ფესვის მნიშვნელობები იქნება:

$$\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}; \quad \cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}; \quad \cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}$$

$$\text{და } \cos\frac{13\pi}{2}+i\sin\frac{13\pi}{8}.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

იპოვეთ ყველა მნიშვნელობები:

ა) $\sqrt{i}$, პას: $\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}$.

ბ) $\sqrt{1+i}$, პას: $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)$.

გ) $\sqrt[3]{i}$, პას: $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$;

XIV თ ა ვ ი

ფუნქციები და ზღვრები

§ 170. აბსოლუტური სიდიდეები და მათთან დაკავშირებული თანაფარდობანი

a რიცხვის აბსოლუტური მნიშვნელობა აღინიშება $|a|$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ თუ } a>0; \\ -a, \text{ თუ } a<0, \\ 0, \text{ თუ } a=0 \end{cases}$$

მაგალითად,

$$|5|=5, \quad \left|-\frac{2}{5}\right|=\frac{2}{5}, \quad |-20|=20 \text{ და ა. შ.}$$

მოვიყვანოთ აბსოლუტურ სიდიდეთა ძირითადი თვისებები დაუმტკიცებლად.

თ ვ ი ს ე ბ ა I. თუ $|a|<\alpha$, სადაც $\alpha>0$, მაშინ a-სათვის ვღებულობთ

$$-\alpha<a<\alpha.$$

თ ვ ი ს ე ბ ა II. რამდენიმე შესაკრებთა ჯამის აბსოლუტური მნიშვნელობა არ აღემატება ცალკეულ შესაკრებთა აბსოლუტური მნიშვნელობის ჯამს:

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|^{*}$$

ამ ტოლობას შეიძლება ადგილი ექნეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ორივე შესაკრების ნიშნით ერთნაირია.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. $|(-5)+(-10)|=|-5|+|-10|, \qquad 15=15;$
2. $|10+(-3)|<|10|+|-3|, \qquad 7<13.$

თ ვ ი ს ე ბ ა III. ორი ნამდვილი რიცხვის სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა არაა ნაკლები ამ რიცხვების აბსოლუტურ მნიშვნელობათა სხვაობაზე:

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. $|20-5|=|20|-|5|=15, \qquad 15=15;$
2. $|5-(-2)|>|5|-|-2| \qquad 7>3.$

თ ვ ი ს ე ბ ა IV. ნამდვილ რიცხვთა ნამრავლის აბსოლუტური მნიშვნელობა თანამამრავლთა აბსოლუტური მნიშვნელობების ნამრავლის ტოლია.

$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$$

ეს წესი შეიძლება გავავრცელოთ თანამამრავლთა ნებისმიერი რიცხვისათვის.

თ ვ ი ს ე ბ ა V. ნამდვილ რიცხვთა ფარდობის აბსოლუტური მნიშვნელობა გასაყოფისა და გამყოფის აბსოლუტურ მნიშვნელობათა ფარდობის ტოლია:

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}.$$

§ 171. ფუნქცია და არგუმენტი

ფუნქციონალური დამოკიდებულების იდეას არითმეტიკის დაწყებითი კურსის შესწავლიდანვე ეყრება საფუძველი. მე-8 კლასში მოსწავლეთათვის ცნობილია ცვლადი და მუდმივი სიდიდეების, ფუნქციის განსაზღვრა, ფუნქციის განსაზღვრისა და ცვლილების არეები, ზოგიერთი ფუნქციის გრაფიკის აგება.

ამ თავში ფუნქციის ცნებას განვიხილავთ უფრო ღრმად, ვიდრე ეს საშუალო სკოლის მე-8 კლასში ისწავლებოდა.

* ეს თვისება ძალაში რჩება შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რიცხვისათვის.

მუდმივი და ცვლადი სიდიდეები. სიდიდეები, რომელთაც მათემატიკა განიხილავს, ორგვარია: მუდმივი და ცვლადი.

სიდიდეს ეწოდება მუდმივი, თუ იგი მოცემულ პირობებში მუდამ ინარჩუნებს ერთსა და იმავე რიცხვით მნიშვნელობას. მაგალითად, წრეწირის სიგრძის შეფარდება მისივე დიამეტრთან მუდმივი სიდიდეა (ის უდრის π-ს), სამკუთხედის შიგა კუთხეთა ჯამი მუდმივი სიდიდეა (უდრის $180°$-ს) და ა. შ.

სიდიდეს ეწოდება ცვლადი, თუ იგი მოცემულ პირობებში ღებულობს სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობებს, მაგალითად, ჰაერის ტემპერატურა, წნევა, მატერიალური წერტილის სიჩქარე, აჩქარება და ა. შ.

ჩვეულებრივ, მუდმივი სიდიდეები აღინიშნება ლათინური ანბანის პირველი (პატარა) ასოებით:

$$a, b, c, d \text{ და ა. შ.}$$

ცვლადი სიდიდეები კი ამავე ანბანის უკანასკნელი ასოებით:

$$x, y, z, u, v \text{ და ა. შ.}$$

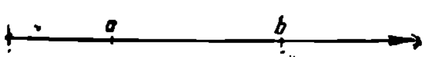
x ცვლადი მოცემულად ჩაითვლება, თუ ცნობილია მნიშვნელობათა ის სიმრავლე, საიდანაც ის იღებს თავის მნიშვნელობებს.

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა რაიმე E სიმრავლე. თუ x ცვლადს შეუძლია მიიღოს E სიმრავლეში შემავალი ყოველი რიცხვის მნიშვნელობა, მაშინ ვიტყვით, რომ x არის E სიმრავლეზე განსაზღვრული ნამდვილი ცვლადი. თვით E სიმრავლე კი, საიდანაც x ცვლადი იღებს თავის მნიშვნელობებს, ეწოდება x ცვლადის ცვლილების არე.

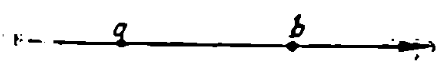
ამრიგად, x ცვლადი მოცემულად ჩაითვლება, თუ ცნობილია მისი ცვლილების არე.

მუდმივი სიდიდე შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც, აგრეთვე, ცვლადი სიდიდე, რომლის ცვლილების არე შედგება მხოლოდ ერთი რიცხვისაგან.

განსაზღვრა 1. იმ x რიცხვთა ერთობლიობას, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს $a \leqslant x \leqslant b$, სადაც a და b ნამდვილი რიცხვებია, ეწოდება დახურული შუალედი ანუ სეგმენტი და აღინიშნება $[a, b]$ სიმბოლოთი. სეგმენტი გეომეტრიულად წარმოადგენს რიცხვითი წრფის ab მონაკვეთს. მასთან წერტილები a და b მიეკუთვნება თვით ამ მონაკვეთს (ნახ. 183). $[a, b]$ სეგმენტი შეიძლება განვიხილოთ, აგრეთვე, როგორც წერტილთა სიმრავლე, რომელსაც a და b წერტილებიც მიეკუთვნება.



ნახ. 183.



ნახ. 184.

განსაზღვრა 2. იმ რიცხვთა ერთობლიობას, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს $a<x<b$, ეწოდება შუალედი და აღინიშნება (a, b) სიმბოლოთი. შუალედი გეომეტრიულად წარმოადგენს რიცხვითი წრფის ab მონაკვეთს, მასთან a და b წერტილები მონაკვეთს არ მიეკუთვნება (ნახ. 184).

(ab) შუალედი წარმოადგენს წერტილთა სიმრავლეს, რომელსაც a და b წერტილები არ მიეკუთვნება.

განსაზღვრა 3. იმ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს $a \leqslant x < b$ და $a < x \leqslant b$, ეწოდება ნახევრად ღია შუალედი და აღინიშნება $[a, b)$ და $(a, b]$ სიმბოლოთი, მასთან $[a, b)$ წარმოადგენს ნახევრად ღია შუალედს მარჯვნიდან, ხოლო $(a, b]$ — ნახევრად ღია შუალედს მარცხნიდან.

სეგმენტს სხვანაირად დახურულ შუალედს უწოდებენ, ხოლო ინტერვალს — ღია შუალედს.

განსაზღვრა 4. შუალედს უწოდებენ ყველა იმ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $x < b$ ან $x > a$. მათ აღნიშნავენ შესაბამისად $(-\infty, b)$ და $(a, +\infty)$.

განსაზღვრა 5. ყველა ნამდვილ რიცხვთა ერთობლიობას უწოდებენ $(-\infty, +\infty)$ შუალედს.

ვთქვათ, მოცემულია ნამდვილი x ცვლადი, განსაზღვრული რომელიმე E სიმრავლეზე, და ცნობილია რაიმე წესი, რომლის ძალითაც x ცვლადის ყოველ მნიშვნელობას ეთანადება გარკვეული ნამდვილი y რიცხვი. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ y ცვლადი x-ის ფუნქციაა ანუ x-სა და y-ს შორის დამყარებულია ფუნქციონალური დამოკიდებულება.

ცვლადს, რომელსაც ნებისმიერად ვაძლევთ ამა თუ იმ რიცხვით მნიშვნელობას თავისი ცვლილების არიდან, ეწოდება დამოუკიდებელი ცვლადი ანუ არგუმენტი, y ცვლადს კი, რომლის მნიშვნელობები დამოკიდებულია x-ის ცალკეულ მნიშვნელობებზე, ეწოდება დამოკიდებული ცვლადი ანუ ფუნქცია.

x არგუმენტის მნიშვნელობათა სიმრავლეს y ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება, ე. ი. არგუმენტის ცვლილების არე ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს.

ყველა იმ y მნიშვნელობის სიმრავლეს, რომლებიც x-ის სხვადასხვა მნიშვნელობებს ეთანადება, ეწოდება ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე ანუ ფუნქციის ცვლილების არე

განსაზღვრა 6. y ცვლადს ეწოდება დამოუკიდებელი x ცვლადის ფუნქცია, თუ x-ის ყოველ მნიშვნელობას მისი ცვლილების არიდან ეთანადება y-ის ერთადერთი გარკვეული ნამდვილი მნიშვნელობა.

როგორც ჩატარებული მსჯელობიდან ირკვევა, ფუნქციის განსაზღვრაში უნდა გამოვყოთ ორი ძირითადი მომენტი: პირველი — x არგუმენტის მნიშვნელობათა E სიმრავლე ანუ x არგუმენტის ცვლილების არე, რომელიც ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს, და მეორე ის წესი, რომელიც ამყარებს შესაბამისობას x-ისა და y-ის მნიშვნელობებს შორის.

ის ფაქტი, რომ y წარმოადგენს x-ის ფუნქციას, ჩაიწერება ასე

$$y = f(x),$$

მაგალითად, წრეწირის სიგრძე რადიუსის ფუნქციაა:

$$y = 2\pi x.$$

სადაც x-ით აღნიშნულია რადიუსი, ხოლო y-ით — წრეწირის სიგრძე. ასევე გავლილ მანძილსა და დროს შორის არსებობს ფუნქციონალური დამოკიდებულება

$$S = vt \text{ (}v\text{ მუდმივი სიდიდეა).}$$

შეიძლება ფუნქციის ცვლილება დამოკიდებული იყოს ერთდროულად ორ, სამ და მეტ დამოუკიდებელ ცვლადებზე.

მაგალითად, ცვლადი სიჩქარის შემთხვევაში, გავლილი მანძილი ორი ცვლადის — სიჩქარის და დროის ფუნქციას წარმოადგენს.

იმ გარემოებას, რომ y არის რამდენიმე დამოკიდებული ცვლადის ფუნქცია, ჩაიწერება ასე:

$$y = F(x_1 x_2, \ldots, x_n).$$

მოვიყვანოთ ფუნქციის რამდენიმე მაგალითი

1. ყოველ ნამდვილ x რიცხვს შევუსაბამოთ მისი კვადრატი, ე. ი. ამით მივიღებთ $y=x^2$ ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე არის ნამდვილი რიცხვთა $\{x\}$ სიმრავლე.

2. ყოველ x რიცხვს $[-1; 1]$ სეგმენტისას შევუსაბამოთ $\sqrt{1-x^2}$, გვექნება $y=\sqrt{1-x^2}$ ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არე არის $[-1, 1]$ სეგმენტის წერტილთა სიმრავლე.

§ 172. ფუნქციის მოცემის ძირითადი ხერხები

როგორც აღნიშნული გვქონდა, ფუნქცია განსაზღვრულად ჩაითვლება, თუ ცნობილია წესი, რომლის მიხედვითაც არგუმენტის ყოველ შესაძლო მნიშვნელობას (ფუნქციის განსაზღვრის არიდან) ეთანადება ფუნქციის გარკვეული მნიშვნელობა. სხვადასხვა კონკრეტულ შემთხვევაში ეს წესი შეიძლება სხვადასხვანაირად იქნეს განხორციელებული.

პრაქტიკაში უფრო ხშირად გვხვდება ფუნქციის მოცემის სამი ხერხი: ანალიზური, ცხრილური და გრაფიკული.*

1. ფუნქცია მოცემულია ანალიზურად, თუ ცნობილია ის მათემატიკური ოპერაციები, რომლებიც უნდა შევასრულოთ გარკვეული თანმიმდევრობით, დამოუკიდებელ ცვლადზე, რომ მივიღოთ ფუნქციის სათანადო მნიშვნელობა.

ფუნქციის ასეთი სახით მოცემის ერთ-ერთი საშუალება არის ფორმულა. **ფორმულას, რომლითაც ფუნქცია განისაზღვრება, ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება ეწოდება.**

მაგალითად, ზემოთ განხილული $y=x^2$ და $y=\sqrt{1-x^2}$ ფუნქციები მოცემულია ანალიზურად (ფორმულით).

განხილულ მაგალითებში თუ x-ს მივცემთ სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობებს, ნაჩვენები ოპერაციების შესრულებით მივიღებთ y ფუნქციის სათანადო მნიშვნელობებს. ასეთ შემთხვევაში იტყვიან, რომ ფუნქციონალური დამოკიდებულება მოცემულია ცხადი სახით.

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ ფუნქციონალური დმოკიდებულება შეიძლება მოცემული იყოს ე. წ. არა ცხადი სახით. ე.ი. ხშირად ვხვდებით ისეთ შემთხვევებს, როცა ფუნქციონალური დამოკიდებულების გამომსახველი განტოლება ამოუხსნელია თვით ფუნქციის მიმართ.

ვთქვათ, მაგალითად მოცემულია განტოლება:

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

რომელიც აკავშირებს ორ ნამდვილ x და y ცკლადს. თუ არსებობს x-ის ისეთი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც ჩასმულია (1) განტოლებაში, მას აქცევს იგივეობად, მაშინ

---

* შეიძლება ფუნქცია მოცემული იყოს აღწერილობით.

ვიტყვით, რომ (1) განტოლებით განსაზღვრულია y, როგორც x-ის არაცხადი ფუნქცია.

მაგალითად, $x^2+y^2=1$ გამოსახავს x და y ცვლადებს შორის ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას არა ცხადი სახით, მაშინ, როცა $y=\pm$ $\mp\sqrt{1-x^2}$ გამოსახავს იმავე დამოკიდებულებას ცხადი სახით.

ფუნქციონალური დამოკიდებულების ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრის დროს მოვითხოვდით, რომ არგუმენტის ყოველ დასაშვებ მნიშვნელობას ეთანადებოდეს ფუნქციის ერთი ნამდვილი მნიშვნელობა. შეიძლება არგუმენტის რომელიმე დასაშვებ მნიშვნელობას შევუსაბამოთ ერთი ნამდვილი რიცხვის ნაცვლად რამდენიმე ნამდვილი რიცხვი (მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლეც კი). თუ დამოკიდებულება ისეთია, რომ არგუმენტის ერთ მნიშვნელობას ეთანადება არა ნაკლებ ორ ნამდვილი რიცხვი, მაშინ მას მრავალსახა ფუნქცია ეწოდება.

მაგალითად, განტოლება

$$y = \frac{y^2}{9}$$

განსაზღვრავს y-ს, როგორც x-ის ორსახა ფუნქციას, ვინაიდან

$$y=\pm 3\sqrt{x}.$$

შემდეგში, როცა ნახსენები იქნება ფუნქცია, მხედველობაში გვექნება ცალსახა ფუნქცია, თუ რაიმე შენიშვნა არაა გაკეთებული.

2. **ფუნქცია მოცემულია ცხრილური ხერხით** ნიშნავს იმას, რომ შედგენილია გარკვეული ცხრილი, რომელშიც ამოწერილია არგუმენტის მნიშვნელობათა სიმრავლე და მასთან ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

მაგალითად,

	1	2	3	4	5
y	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$

ცხრილით მოცემულია ფუნქციონალური დამოკიდებულება, რომელიც ანალიზურად შემდეგნაირად გამოისახება

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

ისეთი ფუნქციებისთვის, რომლებიც ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში, არგუმენტის საკმაოდ ბევრი მნიშვნელობებისათვის გამოთვლიან ფუნქციის მნიშვნელობებს და ამგვარად ადგენენ ცხრილებს. შემდეგ ასეთი ცხრილებით სარგებლობენ კონკრეტული ამოცანების გადაწყვეტისას. მაგალითად, ასეთი ცხრილები შედგენილია $y=x^2$, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$ და სხვა ფუნქციებისათვის.

§ 178. ფუნქციონალური დამოკიდებულების გამოსახვის გრაფიკული ხერხი

ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$y=f(x),$$

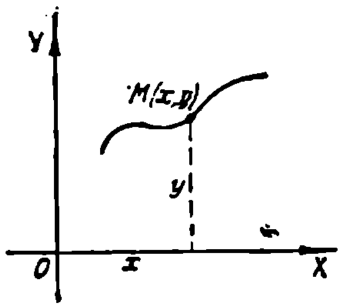
რომელიც აკავშირებს x არგუმენტს y ფუნქციასთან. ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად x-ის ყოველ მნიშვნელობას არგუმენტის მნიშვნელობათა სიმრავლიდან y-ის

სრულიად გარკვეული მნიშვნელობა ეთანადება. ამ გზით მივიღებთ ნამდვილ რიცხვთა (x, y) წყვილს.

თუ ავიღებთ სიბრტყეზე მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას და ნამდვილ რიცხვთა ყოველ (x, y) წყვილს შევუსაბამებთ სიბრტყის M წერტილს, რომლის აბსცისაა x, ორდინატი კი y, მაშინ სიბრტყეზე მივიღებთ წერტილთა ერთობლიობას, რომელსაც ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად, როცა მოცემულია განტოლება, რომელიც ფუნქციას და არგუმენტს ერთმანეთთან აკავშირებს, საჭიროა შევადგინოთ არგუმენტის და ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი, ცხრილის მიხედვით სიბრტყეზე ავაგოთ წერტილები და მიღებული წერტილები უწყვეტი წირით შევაერთოთ.

4. შეიძლება ფუნქციონალური დამოკიდებულება ორ ცვლადს შორის მოცემული იყოს აღწერით.



ნახ. 185.

მაგალითად, ვთქვათ, $[0,1]$ სეგმენტზე $y=D(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია შემდეგნაირად: ამ სეგმენტის ყოველ ირაციონალურ რიცხვს ეთანადება y-ის მნიშვნელობა 0, ხოლო ყოველ რაციონალურ x რიცხვს—y-ის მნიშვნელობა 1, მაგალითად, $D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$ და $D(1)=1$.

როგორც ვხედავთ, ამ ფუნქციის განსაზღვრის წესი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$y=D(x)=\begin{cases} 0, & \text{როცა } x \text{ ირაციონალურია,} \\ 1, & \text{როცა } x \text{ რაციონალურია.} \end{cases}$$

ამ ფუნქციას დ ი რ ი ხ ლ ე ს ფუნქცია ეწოდება. ეს ფუნქცია ფორმულით არ განისაზღვრება.

5. ვთქვათ, ნამდვილ რიცხვთა E სიმრავლეზე y ფუნქცია განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$y=\begin{cases} 1, & \text{როცა } x>0, \\ 0, & \text{როცა } x=0. \\ -1, & \text{როცა } x<0. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია აღინიშნება *signum*-ით (იკითხება, „სიგნუმ" x) და შემოღებული იყო კ რ ო ნ ე კ ე რ ი ს მიერ, როგორც ვხედავთ ფუნქციის განსაზღვრისათვის არ არის აუცილებელი, რომ იგი განსაზღვრული იყოს რაიმე ფორმით.

მაგალითები:

1. $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ფორმულით

$$f(x)=\sqrt{9-x^2}.$$

ვიპოვოთ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ცხადია, აღებულ ფუნქციას ექნება ნამდვილი მნიშვნელობები ისეთი x-ისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას

$$9-x^2 \geqslant 0,$$

---

* L. Dirichlet (1805—1852)—გამოჩენილი გერმანელი მათემატიკოსი.

** Cronecer (1823—1891)—გამოჩენილი გერმანელი მათემატიკოსი.

საიდანაც ვღებულობთ

$$|x| \leqslant 3.$$

ეს უტოლობა ტოლფასია უტოლობისა

$$-3 \leqslant x \leqslant 3.$$

ამრიგად, მოცემული $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება $[-3;\ 3]$ სეგმენტი.

2. ვიპოვეთ $y=(x-3)^2-5$ ფუნქციის განსაზღვრისა და ცვლილების არეები.

როგორც ვხედავთ, ფუნქცია განსაზღვრულია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, ამიტომ მისი განსაზღვრის არე იქნება $(-\infty,\ +\infty)$ შუალედი, ე. ი. $-\infty < x < \infty$-

ხოლო ცვლილების არე იქნება $[-5, \infty)$ ნახევრად ღია შუალედი. ეს ფაქტი კიდევ შეიძლება ჩაიწეროს ასე $-5 \leqslant x < +\infty$.

3. ვიპოვოთ $y=\dfrac{1}{1-x}$ ფუნქციის განსაზღვრის და ცვლილების არეები.

მოცემული ფუნქცია განსაზღვრული იქნება x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის გარდა $x=1$ მნიშვნელობისა. ამიტომ მისი განსაზღვრის არე შედგება ორი შუალედისაგან $(-\infty, 1)$ და $(1,\ +\infty)$.

ხოლო ცვლილების არე იქნება $[0,1)$ და $(1,0]$ ნახევრად ღია შუალედები, ანუ სხვანაირად, $0 \leqslant x < 1$ და $1 < x \leqslant 0$;

ს ა ვ ა ჯ ი შ ო

აჩვენეთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრისა და ცვლილების არეები

1. $y=\dfrac{x-1}{x}$, პას. $x \neq 0,\ y \neq 0$;

2. $y=x^2-4x+7$, პას. $-\infty < x < \infty,\ 3 \leqslant y < \infty$;

3. $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$, პას. $x=1,\ x \neq 2$;

4. $y=\operatorname{tg}\dfrac{1}{x^3}$, პას. $x \neq 0,\quad x^3 \neq \dfrac{2}{\pi(2n+1)},\quad -\infty < y < \infty$;

5. $y=\dfrac{1}{\sqrt{7-2x}}$, პას. $x < \dfrac{7}{2},\quad y > 0$.

6. $y=\dfrac{x}{|x|}$, პას. $x \neq 0,\ y=\pm 1$;

7. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$, პას. $-\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty$.

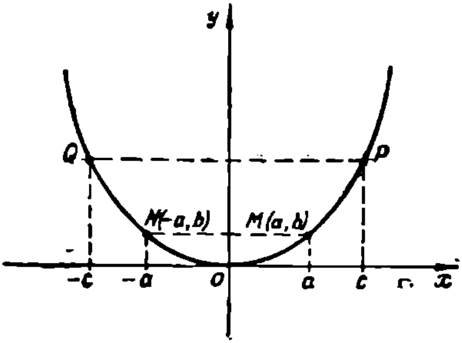
§ 174. ლუწი და კენტი ფუნქციები

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 1. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ლუწი, თუ x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის ამ ფუნქციის განსაზღვრის არიდან შესრულებულია პირობა

$$f(-x)=f(x).$$

ლუწი ფუნქციის მაგალითებია: $y=x^2$, $y=|x|$, $y=\cos x$ და ა. შ. განვიხილოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 186). ვთქვათ, xoy სიბრტყე-

ზე აღებული $M(a, b)$ წერტილი ეკუთვნის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს. მაშინ, ცხადია, $b=f(a)$. რადგანაც $y=f(x)$ ფუნქცია ლუწია, ამიტომ $f(-a)=f(a)=b$. ეს უკანასკნელი ნიშნავს იმას, რომ $M(a, b)$ წერტილთან ერთად $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს უნდა ეკუთვნოდეს $N(-a, b)$ წერტილიც.



ნახ. 186.

ამრიგად, როგორც ვხედავთ, M და N წერტილები y ღერძის მიმართ სიმეტრიულად არიან განლაგებული.

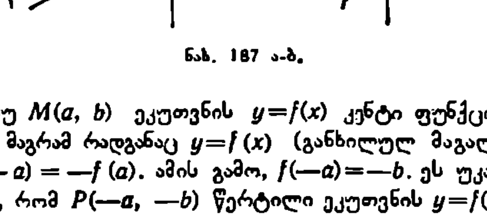
ანალოგიურად, P წერტილს, რომელიც აღებულია ლუწი ფუნქციის გრაფიკზე, მოეძებნება y ღერძის მიმართ სიმეტრიული Q წერტილი და ა. შ.

სწორედ ამ თვისების გამო ლუწი ფუნქციის გრაფიკი ორდინატთა ღერძის მიმართ სიმეტრიული წირი.

განსაზღვრა 2. $y=f(x)$. **ფუნქციას ეწოდება კენტი, თუ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის ამ ფუნქციის განსაზღვრის არიდან**

$$f(-x)=-f(x).$$

კენტი ფუნქციის მაგალითებია: $y=x$, $y=x^3$; $y=\sin x$ და ა. შ. $y=x$ და $y=x^3$ ფუნქციათა გრაფიკები ნაჩვენებია 187-ე ნახაზზე. 187ა და 187 ბ ნახაზებიდან ნათლად ჩანს, რომ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე აღებულ ყოველ M და N წერტილებს მოეძებნება სათავის მიმართ სიმეტრიული წერტილები.



ნახ. 187 ა-ბ.

მართლაც, თუ $M(a, b)$ ეკუთვნის $y=f(x)$ კენტი ფუნქციის გრაფიკს, მაშინ ცხადია, $b=f(a)$, მაგრამ რადგანაც $y=f(x)$ (განხილულ მაგალითში $y=x$) კენტია, ამიტომ $f(-a)=-f(a)$. ამის გამო, $f(-a)=-b$. ეს უკანასკნელი ტოლობა მოწმობს იმას, რომ $P(-a, -b)$ წერტილი ეკუთვნის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს.

ამრიგად, თუ $M(a, b)$ წერტილი ეკუთვნის $y=f(x)$ კენტი ფუნქციის გრაფიკს, მაშინ, ამ გრაფიკს უნდა ეკუთვნოდეს $P(-a, -b)$ წერტილიც.

ასეთივე მსჯელობით დავადგენთ: რომელი წერტილიც არ უნდა ავიღოთ კენტი ფუნქციის გრაფიკზე, მასზე აუცილებლად მოიძებნება მეორე წერტილი, რომელიც

პირველის სიმეტრიულია სათავის მიმართ. სწორედ ამიტომ არის ნებისმიერი კენტი ფუნქციის გრაფიკი სათავის სიმეტრიული.

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ არსებობს ისეთი ფუნქციებიც, რომლებიც არც ლუწი არიან და არც კენტი. მაგალითად, განვიხილოთ $f(x)=x+x^2$ და $f(x)=-x+x^2$ ფუნქციები. როგორც ვხედავთ, ორი ტოლობიდან: $f(-x)=f(x)$ და $f(-x)=-f(x)$ არც ერთს არა აქვს ადგილი, რაც იმას ნიშნავს, რომ აღებული ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი.

ამრიგად, არ უნდა ვიფიქროთ, რომ ყოველი ფუნქცია უსათუოდ ან ლუწია ან კენტი· ლაპარაკი იმაზე რომელიმე ფუნქცია ლუწია თუ კენტი, შეგვიძლია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე (არგუმენტის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე) სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

ეს უკანასკნელი იმას ნიშნავს, რომ, თუ $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $x=a$-სათვის, მაშინ ის განსაზღვრული უნდა იყოს $x=-a$-სათვისაც. წინააღმდეგ შემთხვევაში $f(x)$ და $f(-x)$ გამოსახულებათა შედარებას აზრი არ ექნება.

როგორც ვიცით, $y=\lg x$ ფუნქცია განსაზღვრულია მხოლოდ არგუმენტის დადებითი მნიშვნელობისათვის. ამიტომ $\lg x$ და $\lg(-x)$ გამოსახულებათა შორის ერთ-ერთს აზრი არა აქვს. ამიტომ თქმა იმისა, რომ ფუნქცია კენტია ან ლუწი, აზრს მოკლებულია.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

მოცემულ ფუნქციათა შორის უჩვენეთ რომელია ლუწი და რომელი კენტი.

1. $y=x^{120}$;	7. $y=x^4-3x+1$;
2. $y=x^{111}$;	8. $y=x+\sin x$;
3. $y=x^{-5}$;	9. $y=2^x+2^{-x}$;
4. $y=\sqrt{x}$;	10. $y=\dfrac{\sin x}{x}$;
5. $y=\sqrt[3]{x}$;	11. $y=\dfrac{\cos x}{x}$;
6. $y=x^4-2x^2+5$;	12. $y=\sin(x^2)$.

§ 175. ფუნქციის პერიოდულობა

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 3. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება პერიოდული, თუ არსებობს ისეთი რიცხვი $T\neq 0$, რომ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის ამ ფუნქციის განსაზღვრის არიდან

$$f(x+T)=f(x).$$

$T\neq 0$ რიცხვს ამ შემთხვევაში ეწოდება ფუნქციის პერიოდი.

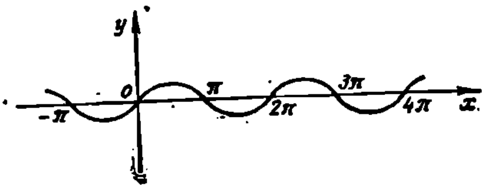
პერიოდულია, მაგალითად, $y=\sin x$ და $y=\cos x$ ფუნქციები. მათი პერიოდია 2π.

ვინაიდან

$$\sin(x+2\pi)=\sin x \text{ და}$$
$$\cos(x+2\pi)=\cos x,$$

$y=f(x+T)=f(x)$ ტოლობა მიუთითებს იმაზე, რომ $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები პერიოდულად მეორდება პერიოდით T.

ეს გარემოება ნათლად ჩანს $y=\sin x$ პერიოდული ფუნქციის გრაფიკულ გამოსახულებაზე (ნახ. 188). თუ დავაკვირდებით სინუსოიდას, ვნახავთ, რომ მას $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე ისეთი მოხაზულობა აქვს, როგორიც $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$ და ა. შ. სეგმენტებზე.



ნახ. 188.

ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ თუ T წარმოადგენს $y=f(x)$ ფუნქციის პერიოდს, მაშინ

$$2T,\quad 3T,\quad 4T,\dots,nT\dots$$
$$-T,\ -2T,\ -3T,\dots,-nT$$

წარმოადგენს აგრეთვე ამ ფუნქციის პერიოდებს. მართლაც,

$$f(x+2T)=f[(x+T)+T]=f(x+T)=f(x);$$
$$f(x+3T)=f[(x+2T)+T]=f(x+2T)=f(x)$$

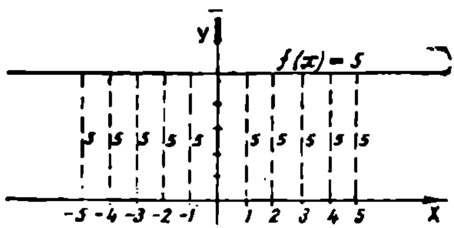
და ა. შ.

$$f(x-T)=f[(x-T)+T]=f(x);$$
$$f(x-2T)=f[(x-2T)+2T]=f(x).$$

და ა. შ.

ამრიგად, თუ T რიცხვი არის $y=f(x)$ ფუნქციის პერიოდი, მაშინ როგორიც არ უნდა იყოს მთელი n რიცხვი, nT რიცხვიც ამ ფუნქციის პერიოდი იქნება. აქედან დავასკვნით, რომ $y=f(x)$ პერიოდულ ფუნქციას პერიოდთა უსასრულო სიმრავლე გააჩნია.

საერთოდ, როდესაც ლაპარაკია $y=f(x)$ ფუნქციის პერიოდზე, **მაშინ ყოველთვის ვგულისხმობთ უმცირეს დადებით პერიოდს**. მაგალითად, $y=\sin(x)$ ფუნქციისათვის უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π, $y=tg\,x$-სათვის კი π და ა. შ.



ნახ. 189.

ამ საკითხთან დაკავშირებით უნდა შევნიშნოთ, რომ პერიოდულ ფუნქციას შეიძლება არც გააჩნდეს უმცირესი დადებითი პერიოდი.

ასე მაგალითად, $f(x)=5$ ფუნქციისათვის ნებისმიერი ნამდვილი დადებითი რიცხვი წარმოადგენს პერიოდს, მაგრამ, როგორც ვიცით, დადებით ნამდვილ რიცხვთა შორის უმცირესი არ არსებობს, ე. ი. $f(x)=5$ ფუნქციისათვის უმცირესი დადებითი პერიოდი არ არსებობს, მიუხედავად იმისა, რომ მას გააჩნია პერიოდთა უსასრულო სიმრავლე, რაც შეიძლება ჩავწეროთ ასე: $-\infty<T<+\infty$,

სავარჯიშო

შემდეგი ფუნქციებისათვის იპოვეთ უმცირესი დადებითი პერიოდი:

1) $y=\sin 2x$; პას. π.

2) $y=\sin 3x$; პას. $\frac{2\pi}{3}$.

3. $y=\cos\frac{x}{2}$; პას. 4π.

4) $y=\cos(1-2x)$; პას. π.

5. $y=\operatorname{tg} 3x$; პას. $\frac{\pi}{3}$.

6. $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$; პას. $\frac{2\pi}{3}$.

7) $y=\sin^2 x$; პას. π.

§ 178. ზრდადი და კლებადი ფუნქციები

ვთქვათ, მოცემულია $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $y=f(x)$ ფუნქცია.

განსაზღვრა 1. **$[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი (ან არაკლებადი), თუ x არგუმენტის ორ ნებისმიერ x_1 და x_2 მნიშვნელობისათვის $x_1<x_2$ უტოლობა იწვევს $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ უტოლობას, ე. ი. არგუმენტის ზრდასთან ერთად იზრდება ფუნქციის მნიშვნელობაც.**

თუ $x_1<x_2$ უტოლობას მოსდევს $f(x_1)<f(x_2)$ უტოლობა, მაშინ $y=f(x)$ ფუნქციას მკაცრად ზრდადი ეწოდება.

განსაზღვრა 2. **$[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება კლებადი (არაზრადადი), თუ $x_1<x_2$ უტოლობა იწვევს უტოლობას $f(x_1)\geqslant f(x_2)$.***

თუ $x_1<x_2$ უტოლობა იწვევს $f(x_1)>f(x_2)$ უტოლობას, მაშინ $y=f(x)$ ფუნქციას მკაცრად კლებადი ეწოდება.

განსაზღვრა. 3. ზრდად და კლებად ფუნქციებს მონოტონური ფუნქციები ეწოდება.

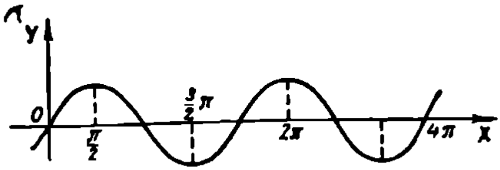
უნდა შევნიშნოთ, რომ, თუ $y=f(x)$ ფუნქცია ზრდადია რომელიმე შუალედში, მაშინ $y=-f(x)$ კლებადი იქნება იმავე შუალედში.

გარდა ამისა, $y=f(x)$ ფუნქცია ყოველთვის არაა მუდამ ზრდადი ან მუდამ კლებადი განსახილველ შუალედში, შესაძლებელია შუალედის ზოგიერთ ნაწილში იყოს ზრდადი, ზოგიერთშიც — კლებადი.

---

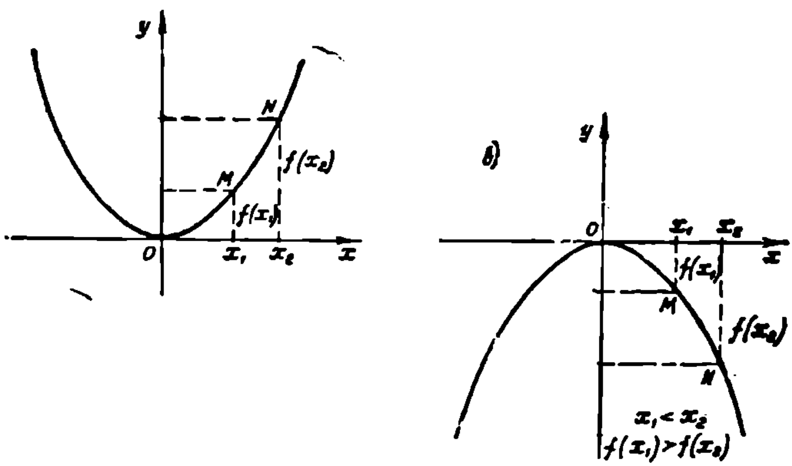
* ცხადია, $x_1>x_2$ უტოლობა იწვევს $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ უტოლობას.

1) მაგალითად, $y=\sin(x)$ ფუნქცია $[0, 2\pi]$ სეგმენტის $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ნაწილში ზრდადია (ნახ. 190), $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ნაწილში—კლებადი, ხოლო $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ნაწილში—ისევ ზრდადი.



ნახ. 190.

2) ფუნქცია $y=x^2$ მკაცრად ზრდადია $(0, \infty)$ შუალედში (ნახ. 290, ა), ხოლო $y=-x^2$ მკაცრად კლებადია იმავე შუალედში (ნახ. 200 ბ).



ნახ. 191.

§ 177. ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობები

ვთქვათ, მოცემულია $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $y=f(x)$ ფუნქცია;

განსაზღვრა 1. $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ* $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა შორის უდიდესს, ამ ფუნქციის აბსოლუტურ მაქსიმუმს უწოდებენ.

---

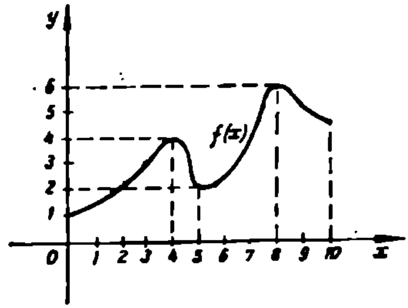
* $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე გულისხმობს იმას, რომ ის განსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტის ყველა წერტილზე, ე. ი. ფუნქცია ღებულობს სასრულო მნიშვნელობას ყოველი x-ისათვის, რომელიც $[a, b]$ სეგმენტს მიეკუთვნება.

თუ დავაკვირდებით $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს, ადვილად მივხვდებით, რომ $y=f(x)$ ფუნქცია [0, 10] სეგმენტის $x=8$ წერტილზე აღწევს აბსოლუტურ მაქსიმუმს და $f(8)=6$, ხოლო $x=5$ წერტილზე — აბსოლუტური მინიმუმს და $f(5)=2$.

გრაფიკზე თვალსაჩინოდ ჩანს, რომ $y=f(x)$ ფუნქცია [0,5] სეგმენტის $x=4$ წერტილზე ღებულობს აგრეთვე მაქსიმალურ მნიშვნელობას, ამიტომ აბსოლუტური მაქსიმუმისა და აბსოლუტური მინიმუმის გარდა განიხილავენ აგრეთვე ე. წ. ლოკალურ (ადგილობრივ) მაქსიმუმსა და მინიმუმს.

განსაზღვრა 2. [a, b] **სეგმენტის $x=x_0$ წერტილს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი, თუ x-ის ყველა იმ მნიშვნელობისათვის, რომლებიც საკმაოდ ახლოს არიან x_0-თან, ადგილი აქვს უტოლობას;**

$$f(x) \leqslant f(x_0).$$



ნახ. 192.

$y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს ლოკალური მაქსიმუმების წერტილებზე ამ ფუნქციის ლოკალურ მაქსიმუმებს უწოდებენ.

192-ე ნახაზზე წარმოდგენილია $y=f(x)$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილები $x=4$ და $x=8$; ლოკალური მაქსიმუმის მნიშვნელობები ამ წერტილებისათვის იქნება $f(4)=4$ და $f(8)=6$; გრაფიკი გვიჩვენებს, რომ $x=4$ და $x=8$ წერტილებზე $y=f(x)$ ფუნქცია ღებულობს უფრო დიდ მნიშვნელობებს, ვიდრე მასთან საკმაოდ ახლოს მდებარე სხვა წერტილებზე.

განსაზღვრა 3. [a, b] **სეგმენტის $x=x_0$ წერტილს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილი, თუ x-ის ყველა იმ მნიშვნელობისათვის, რომლებიც საკმაოდ ახლოს არიან x_0-თან, ადგილი აქვს უტოლობას:**

$$f(x) \geqslant f(x_0).$$

განსაზღვრა 4. ფუნქციის მნიშვნელობებს ლოკალური მინიმუმის წერტილზე ამ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმი ეწოდება.

მაგალითად, გრაფიკზე (ნახ. 192) ჩანს, რომ $x=5$ წერტილი არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი. ლოკალური მინიმუმის მნიშვნელობა $x=5$ წერტილზე იქნება $f(5)=2$.

$y=f(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმს და მინიმუმს ამ ფუნქციის ექსტრემუმი ეწოდება.

$y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე (ნახ. 192) თვალსაჩინოდ შეიძლება ენახოთ განსხვავება აბსოლუტურ და ლოკალურ ექსტრემუმებს შორის, ამ ფუნქციას $x=4$ წერტილზე აქვს ლოკალური მაქსიმუმი, რომელიც [0, 10] სეგმენტზე აბსოლუტურ მაქსიმუმს არ წარმოადგენს, სწორედ ასევე, $x=5$ წერტილზე გვექნება ლოკალური მინიმუმი, რომელიც [0, 10] სეგმენტზე აბსოლუტურ მინიმუმს არ წარმოადგენს.

თუ $y=f(x)$ ფუნქცია [a, b] სეგმენტის შიგა წერტილში აღწევს აბსოლუტურ მაქსიმუმს, მაშინ ეს ლოკალური მაქსიმუმიც იქნება. მაგალითად (ნახ. 192),

$[5, 10]$ სეგმენტზე ფუნქცია აღწევს აბსოლუტური მაქსიმუმს, რაც ამ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმი იქნება.

ჩატარებული მსჯელობიდან შეიძლება დავადგინოთ $y=f(x)$ ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმის მოძებნის პრაქტიკული წესი:

1. ვიპოვით $y=f(x)$ ფუნქციის ყველა ლოკალურ მაქსიმუმს მოცემულ სეგმენტზე.

2. ლოკალურ მაქსიმუმებთან ერთად განვიხილავთ $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს სეგმენტის $f(a)$ და $f(b)$ ბოლო წერტილებში.

ყველა ამ მნიშვნელობებიდან უდიდესი, ცხადია, იქნება $y=f(x)$ ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმი $[a, b]$ სეგმენტში.

ანალოგიური წესით მოიძებნება $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $y=f(x)$ ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმიც.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

იპოვეთ ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები, თვით ლოკალური ექსტრემუმები და გაარკვიეთ, რომელია მაქსიმუმები და რომელია მინიმუმები:

1. $y=(x-1)^2+5,$ პას. $x_{\min}=1;\quad y_{\min}=5.$

2. $y=3-(x+2)^2,$ პას. $x_{\max}=-2;\quad y_{\max}=3.$

3. $y=(x-1)(x-2),$ პას. $x_{\max}=-2;\quad y_{\max}=-3.$

4. $y=\dfrac{1}{2-\cos x},$ პას. $x_{\min}=\dfrac{\pi}{2};\quad y_{\min}=\dfrac{1}{2}.$

5. $y=\sqrt{x^2-2x+8}$ პას. $x_{\min}=1;\quad y_{\min}=7.$

6. $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right),$ პას. $x_{\min}=\dfrac{\pi}{4};\quad y_{\min}=0.$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების აბსოლუტური ექსტრემუმები:

7) $y=-2x^2-3x-1;\quad |x|\leqslant 2$ შუალედში. პას. $x_{\min}=0\ \ y_{\min}=-1.$

8) $y=|x^2+5x+6|;\quad [-5,4]$ შუალედში.

პ ა ს უ ხ ი.

აბსოლუტურ მნიშვნელობას ფუნქცია იღებს $x=-\dfrac{5}{2}$ წერტილზე,

აბსოლუტურ მაქსიმუმს კი — $x=4$ წერტილზე,

აბსოლუტურ $\min=-\dfrac{1}{4},$

აბსოლუტურ $\max=42.$

§ 178. შებრუნებული ფუნქციის ცნება

ვთქვათ, მოცემულია $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ფუნქცია

$$y=f(x). \qquad (1)$$

როგორც ვიცით, x ცვლადის ყოველ დასაშვებ მნიშვნელობას $[a, b]$ სეგმენტიდან, (1) ფორმულის ძალით, შეესაბამება y-ის სრულიად განსაზღვრული მნიშვნელობა.

ხშირად საჭირო ხდება საკითხი დავაყენოთ შემდეგნაირად: y ცვლადის ყოველ მნიშვნელობას (1) ფორმულა შეუსაბამებს x ცვლადის სრულიად განსაზღვრულ მნიშვნელობას.

განვიხილოთ ეს საკითხი კონკრეტულ მაგალითზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ავიღოთ პირველი ხარისხის ორუცნობიანი განტოლება:

$$y=5x+1. \tag{2}$$

ცხადია, (2) ტოლობა x-ის ყოველ დასაშვებ მნიშვნელობას, აღებულს მისი ცვლილების არიდან, შეუსაბამებს y-ის სრულიად გარკვეულ მნიშვნელობას, მაგალითად, როცა $x=0$, $y=1$, როცა $x=1$, $y=6$ და ა. შ...

x	0	1	2	3	4	
y	1	6	11	16	21	

იგივე (2) ტოლობა y-ის ყოველ მნიშვნელობას, აღებულს მისი ცვლილების არიდან, შეუსაბამებს x-ის შემდეგ მნიშვნელობას.

$$x=\frac{y-1}{5}. \tag{3}$$

მართლაც, თუ $y=1$, $x=0$; $y=6$, $x=1$ და ა. შ. ამრიგად, (3) ფორმულა განსაზღვრავს x ცვლადს, როგორც y ცვლადის გარკვეულ ფუნქციას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. $y=2^x$ ტოლობა y-ის ყოველ დადებით მნიშვნელობას შეუსაბამებს x-ის შემდეგ მნიშვნელობას:

$$x=\log_2 y.$$

მართლაც, თუ $y=1$, $x=\log_2 1=0$; თუ $y=2$, მაშინ $x=\log_2 2=1$; თუ $y=3$, მაშინ $x=\log_2 3$ და ა. შ.

ამრიგად, $y=2^x$ ტოლობა განსაზღვრავს x-ს როგორც y ცვლადის გარკვეულ ფუნქციას ცხადი სახით. ეს ფუნქცია ასე ჩაიწერება:

$$x=\log_2 y.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვთქვათ, განტოლება $y=\sin x$ ფუნქციაა, სადაც ცვლადი მოცემულია შემდეგნაირად:

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

y-ის ყოველ მნიშვნელობას $[-1,\ 1]$ სეგმენტიდან, $y=\sin x$ ფორმულის ძალით, შეესაბამება x-ის გარკვეული მნიშვნელობა $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტიდან, კერძოდ, რიცხვი $x=\arcsin y$. მაგალითად, როცა $y=-1$, $x=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$; როცა $y=0$, $x=\arcsin 0=0$; როცა $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$, მაშინ $x=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=$ $=\frac{\pi}{4}$ და ა. შ. ამრიგად, $y=\sin x$ ტოლობა, როცა $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ განსაზღვრე-

რავს x-ს, როგორც y ცვლადის რაღაც ფუნქციას, რომელიც ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$x = \arcsin y.$$

საზოგადოდ, თუ $y=f(x)$ ტოლობის მიხედვით შესაძლებელია y ცვლადის ყოველი დასაშვები მნიშვნელობისათვის x ცვლადის ერთი და მხოლოდ ერთი მნიშვნელობის აღდგენა, მაშინ ეს ტოლობა განსაზღვრავს x ცვლადს, როგორც y ცვლადის რაღაც ფუნქციას. აღვნიშნოთ ეს ფუნქცია φ ასოთი, გვექნება:

$$x = \varphi(y).$$

ამ ფორმულაში y გვევლინება, როგორც არგუმენტი, ხოლო x — როგორც y-ის ფუნქცია. თუ x-სა და y-ს როლებს შევუცვლით, მაშინ ფუნქციონალური დამოკიდებულებას ჩავწერთ ასე:

$$y = \varphi(x).$$

ამნაირად განსაზღვრულ $y=\varphi(x)$ ფუნქციას $y=f(x)$ ფუნქციის შებრუნებული ეწოდება.

განვიხილოთ მაგალითები;

1. $y=5x+1$ განტოლებიდან $x=\dfrac{y-1}{5}$, ამიტომ $y=\dfrac{x-1}{5}$ ფუნქცია მოცემული $y=5x+1$ ფუნქციის შებრუნებული ფუნქციაა.

2. $y=2^x$ განტოლებიდან $x=\log_2 y$, ამიტომ $y=\log_2 x$ ფუნქცია მოცემული ფუნქციის შებრუნებულია.

3. როცა $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $y=\sin x$ ტოლობიდან მივიღებთ $x=\arcsin y$, ამიტომ $y=\arcsin x$ ფუნქცია $y=\sin x$ ფუნქციის შებრუნებულია.

თუ დავაკვირდებით, ადვილად შევნიშნავთ, რომ $y=f(x)$ ფუნქციის და მისი შებრუნებული $y=\varphi(x)$ ფუნქციის განსაზღვრისა და ცვლილების არეები, ასე ვთქვათ, როლებს იცვლიან. კერძოდ, ის რაც $y=f(x)$ ფუნქციისათვის არის განსაზღვრის არე, შებრუნებული $y=\psi(x)$ ფუნქციისათვის არის ცვლილების არე, ხოლო ის რაც $y=f(x)$ ფუნქციისათვის არის ცვლილების არე, შებრუნებული $y=\varphi(x)$ ფუნქციისათვის იქნება განსაზღვრის არე.

მაგალითად, $y=2^x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, ანუ $(-\infty, \infty)$ შუალედი, ხოლო ცვლილების არეა დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ანუ $(0, \infty)$ შუალედი. შებრუნებული $y=\log_2 x$ ფუნქციისათვის განსაზღვრის არე იქნება დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ანუ $(0, \infty)$ შუალედი, ხოლო ცვლილების არე ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ანუ $(-\infty, \infty)$ შუალედი. ასევე, $y=\sin x$ ფუნქციაში, თუ $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, მაშინ მისი ცვლილების არე იქნება $[-1, 1]$ სეგმენტი.

შებრუნებული $y=\arcsin x$ ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება $[-1, 1]$ სეგმენტი, მაშინ, როცა ცვლილების არეა $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტი.

ბუნებრივად იბადება კითხვა: არსებობს თუ არა ნებისმიერი $y=f(x)$ ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია?

მათემატიკაში მტკიცდება შემდეგი დებულება:

თუ $y=f(x)$ ფუნქცია მონოტონურია (a, b) შუალედში, მაშინ $a \leqslant x \leqslant b$ მნიშვნელობებისათვის არსებობს მისი შებრუნებული ფუნქცია.

განვიხილოთ $y=f(x)$ ფუნქციის შებრუნებული $y=f(x)$ ფუნქციის არსებობის საკითხი კონკრეტულ მაგალითზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. განვიხილოთ ფუნქცია.

$$y=x^2. \tag{1}$$

ცხადია, (1) ფორმულის მიხედვით y-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება x-ის ორი მნიშვნელობა. მართლაც, თუ $y=1$, მაშინ $x=\pm 1$; თუ $y=4$, მაშინ $x=\pm\ 2$ და ა. შ.

ამიტომ $y=x^2$ ფუნქციას თუ განვიხილავთ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის ანუ მთელს რიცხვით წრფეზე, მაშინ მის შებრუნებული ფუნქცია არ იარსებებს. მაგრამ, თუ ამ ფუნქციას განვიხილავთ x-ის მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობებისათვის, მაშინ იარსებებს მისი შებრუნებული ფუნქცია, რომელიც შეიძლება ჩავწეროთ ასე: $y=\sqrt{x}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. როგორც ვიცით, y-ის ყოველ მნიშვნელობას, რომელიც აღებულია $[-1, 1]$ სეგმენტიდან, $y=\sin x$ ფორმულის ძალით, x-ის მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლე შეესაბამება. მაგალითად, თუ $y=0$, მაშინ x-ის მნიშვნელობები იქნება $0, 2\pi, 3\pi \ldots$ და ა. შ. ამიტომ, თუ $y=\sin x$ ფუნქციას განვიხილავთ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, ანუ მთელს რიცხვით წრფეზე, მაშინ მას არ ექნება შებრუნებული ფუნქცია. მაგრამ თუ ამ ფუნქციას განვიხილავთ მხოლოდ $\left[-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე, მაშინ y-ის მნიშვნელობათა მიხედვით x-ის მნიშვნელობები ცალსახად აღსდგება.

ამრიგად, როცა $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, მაშინ $y=\sin x$ ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია იქნება $y=\operatorname{arc\,sin} x$.

ამ ორი მაგალითიდანაც კი ნათლად ჩანს ზემოთ გამოთქმული ზოგადი დებულების სისწორე, კერძოდ, ის, რომ ორივე მაგალითში შებრუნებული ფუნქციის მოძებნისათვის საჭირო შეიქმნა მონოტონურობის შუალედების გამოყოფა.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა შებრუნებული ფუნქციები:

1. $y=x^2\ (x<1)$, პას: $y=\sqrt{-x}$.

2. $y=x^3$, პას. $y=\sqrt[3]{x}$.

3. $y=\log_{\frac{1}{3}} x$, პას. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

3. არსებობს თუ არა $y=\cos x$ ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია შუალედში:

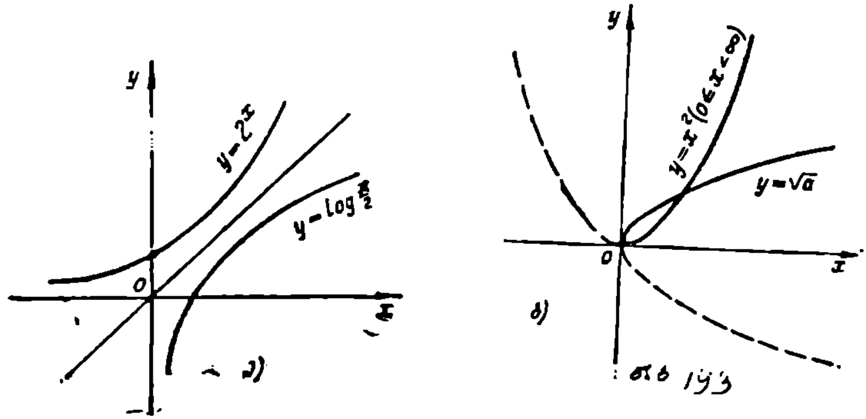
ა) $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$;

ბ) $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$;

გ) $0 \leqslant x \leqslant \pi$?

როგორც აღნიშნული გვ ქონდა, $y=f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე შებრუნებული $y=\varphi(x)$ ფუნქციისათვის ცვლილების არეს წარმოადგენს და $y=f(x)$ ფუნქციის ცვლილების არე კი შებრუნებული $y=\varphi(x)$ ფუნქციისათვის განსაზღვრის არეა (ე. ი. x და y ცვლადები, ასე ვთქვათ, როლებს იცვლიან).

აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი შებრუნებული $y=\varphi(x)$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიულია.



ნახ. 193 ა,ბ

მართლაც, $y=2^x$ ფუნქციის გრაფიკიდან შეგვიძლია მივიღოთ $y=\log_2 x$ ფუნქციის გრაფიკი. ამისათვის საჭიროა ავაგოთ $y=2^x$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიული მრუდი I და III საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისის მიმართ, ანუ, თუ გადავკეცავთ I და III საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისაზე საკოორდინატო სიბრტყეს, მაშინ $y=2^x$ ფუნქციის გრაფიკი მოგვცემს $y=\log_2 x$ ფუნქციის გრაფიკს (ნახ. 193,ა).

ასევე 193, ბ ნახაზზე გამოსახულია $y=x^2$ ფუნქციის შებრუნებული $y=\sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკი.

§ 178. ელემენტარულ ფუნქციათა თვისებები და გრაფიკები

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ადრე შესწავლილ ელემენტარულ ფუნქციებს და მათ გრაფიკებს. ამა თუ იმ ფუნქციის განხილვისას შევეხებით მისი განსაზღვრისა და ცვლილების არეებს, ლუწობა-კენტობას, ზრდადობა-კლებადობას, პერიოდულობას, ნიშან-მუდმივობის შუალედებს, ფუნქციის ნულებს, ე. ი. არგუმენტის იმ მნიშვნელობებს, რომლებისთვისაც მოცემული ფუნქცია ნულად იქცევა და ა. შ.

კვადრატული ფუნქცია.

როგორც ვიცით, კვადრატულ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

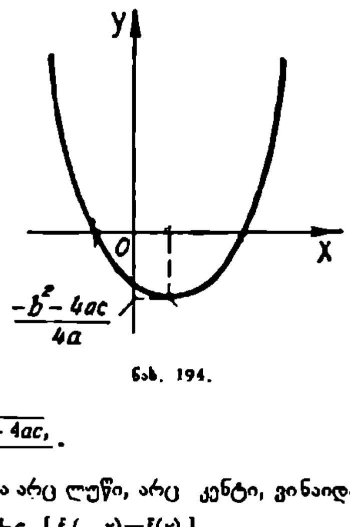
$$y=ax^2+bx+c$$

სადაც a, b და c კოეფიციენტები ნულისაგან განსხვავებული მუდმივი რიცხვებია, ხოლო x ღებულობს ყველა ნამდვილი რიცხვის მნიშვნელობას $(-\infty, \infty)$ შუალედში.

56-დან ცნობილია, რომ კვადრატული სამწევრი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი შედგება ორი შესაკრებისაგან, რომელთაგან პირველი დამოკიდებულია x ცვლადზე, ხოლო მეორე არაა დამოკიდებული x-ზე, ე. ი. წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, ე. ი. მისი განსაზღვრის არეს წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი, როგორც ცნობილია, არის პარაბოლა, რომლის წვეროს კოორდინატებია $-\frac{b}{2a}$ და $-\frac{b^2-4ac}{4a}$. თუ $a>0$, პარაბოლა მიმართულია ზევით, ხოლო, თუ $a<0$ — ქვევით (ნახ. 194). ფუნქციის ცვლილების არეს, როცა $a>0$, წარმოადგენს ყველა იმ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც მეტი ან ტოლია $\frac{-b^2-4ac}{4a}$-სი, ხოლო, თუკი $a<0$ მაშინ მისი ცვლილების არე იქნება ყველა იმ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც ნაკლები ან ტოლია $\frac{-b^2-4ac}{4a}$-სი. ორივე განხილულ შემთხვევაში, როცა დისკრიმინანტი $b^2-4ac>0$, პარაბოლა კვეთს OX ღერძს ორ წერტილში, რომლებიც დაშორებული არიან სათავიდან x_1 და x_2 მანძილებით. სწორედ, ეს რიცხვები წარმოადგენს კვადრატული სამწევრის ფესვებს:



ნახ. 194.

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

როცა $b\neq0$, $y=ax^2+bx+c$ ფუნქცია არ იქნება არც ლუწი, არც კენტი, ვინაიდან

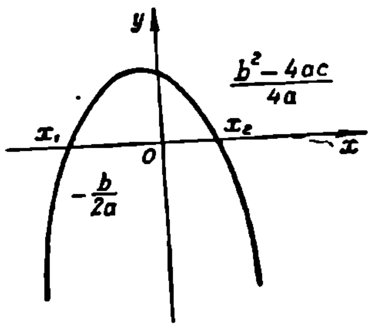
$$a(-x)^2+b(-x)+c=ax^2-bx+c,\ [f(-x)=f(x)]$$

და

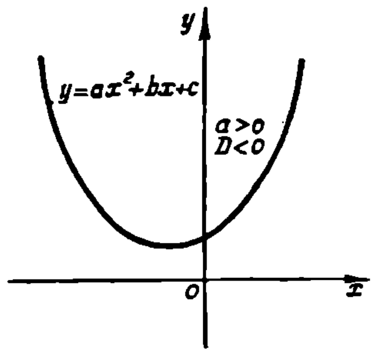
$$a(-x)^2+b(-x)+c=-(ax^2+bx+c),\ [f(-x)=-f(x)]$$

ტოლობებიდან იგივურად არც ერთი არ სრულდება. თუ $b=0$, მაშინ კვადრატული ფუნქცია ღებულობს სახეს $y=ax^2+c$; ამ შემთხვევაში ფუნქცია იქნება ლუწი. $y=ax^2+bx+c$ ფუნქცია არაპერიოდულია. თუ დისკრიმინანტი $b^2-4ac<0$, მაშინ კვადრატულ სამწევრს ნამდვილი ფესვები არ ექნება, ე. ი. პარაბოლა არც მაშინ, როცა $a>0$ და არც მაშინ, როცა $a<0$, OX ღერძს არ გადაკვეთს. ამ შემთხვევაში კვადრატული ფუნქციის ყველა მნიშვნელობა ინარჩუნებს ერთსა და იმავე ნიშანს, კერძოდ, a კოეფიციენტის ნიშანს (ნახ. 195 ბ, გ).

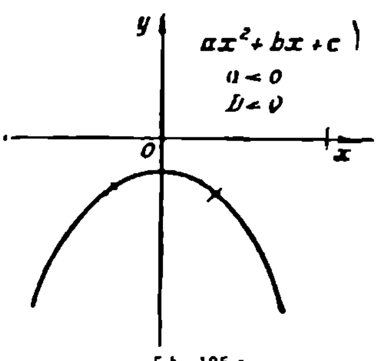
როგორც აღვნიშნეთ. თუ $b^2-4ac>0$, მაშინ ფუნქციის გრაფიკი OX ღერძს კვეთს $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ და $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ წერტილებში, მასთან, თუ $a>0$, მაშინ ფუნქცია დადებითია, როცა $x<x_1$ და $x>x_2$, ხოლო უარყოფითია, როცა $x_1<x<x_2$ (ნახ. 194).



ნახ. 195,ა.



ნახ. 195,ბ.



ნახ. 195,გ.

თუკი $a<0$ და $b^2-4ac>0$, მაშინ ფუნქცია დადებითია, როცა $x_1<x<x_2$, ხოლო უარყოფითია, როცა $x<x_1$ და $x>x_2$ (ნახ. 195, ა).

იმ შემთხვევაში, როცა $b^2-4ac=0$, პარაბოლა ეხება OX ღერძს $x=-\frac{b}{2a}$ წერტილში, ყველა $x\neq-\frac{b}{2a}$ მნიშვნელობისათვის ფუნქცია ინარჩუნებს ერთსა და იმავე ნიშანს, კერძოდ, a კოეფიციენტის ნიშანს.

$y=ax^2+bx+c$ ფუნქცია, როცა $a>0$, მონოტონურად კლებადია, თუ $x<-\frac{b}{2a}$, ხოლო მონოტონურად ზრდადია, თუ $x>-\frac{b}{2a}$; $x=-\frac{b}{2a}$ წერტილში აღწევს თავის მინიმალურ მნიშვნელობას: $-\frac{b^2-4ab}{4a}$ (ნახ. 194 და 195, ბ). იმ შემთხვევაში, როცა $a<0$, ფუნქცია მონოტონურად იზრდება, თუ $x<-\frac{b}{2a}$, და მონოტონურად კლებულობს, თუ $x>-\frac{b}{2a}$. იგი წერტილთან $x=-\frac{b}{2a}$ აღწევს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას: $\frac{-b^2-4ab}{4a}$ (ნახ. 195).

გრაფიკი ნათლად გვიჩვენებს, რომ $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციას აქვს ერთადერთი ექსტრემუმი: $-\frac{b^2-4ac}{4a}$. მას აღწევს ფუნქცია $x=-\frac{b}{2a}$ წერტილზე. იგი მაქსიმუმია, თუ $a<0$, ხოლო მინიმუმი, თუ $a>0$.

როგორც ვიცით, $y=x^n$ სახის ფუნქციას, სადაც n ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, ეწოდება ხარისხოვანი ფუნქცია.

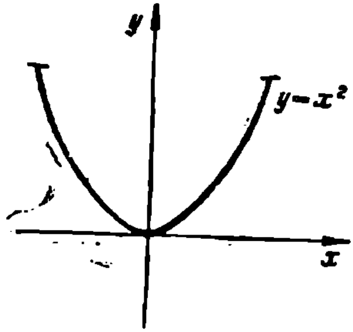
ა) ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა n მთელი დადებითი რიცხვია. ხარისხოვანი ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება მთელი რიცხვითი წრფე, ანუ $(-\infty, \infty)$ შუალედი.

თუ n ლუწი რიცხვია ($n=2k$), მაშინ x^n იქნება ლუწი, რადგან $(-x)^{2k}=x^{2k}$.

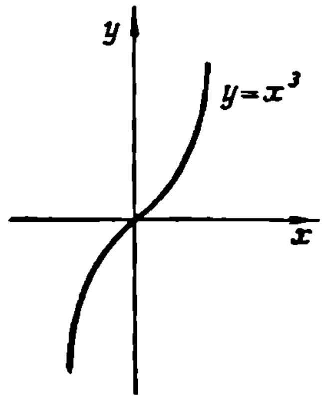
თუ n კენტია ($n=2k+1$), მაშინ x^n იქნება კენტი. მართლაც,

$$(-x)^{2k+1}=-x^{2k+1}$$

ფუნქცია $y=x^n$ ნებისმიერი მთელი დადებითი n-სათვის $(0, \infty)$ შუალედში იქნება ზრდადი.



ნახ. 196, ა.



ნახ. 196, ბ.

196,ა და 196,ბ ნახაზებზე მოცემულია $y=x^2$ და $y=x^3$ ფუნქციათა გრაფიკები, რომლებიც თვალსაჩინოდ ასახავენ ზემოთ ნათქვამს.

თუ n ლუწია, მაშინ $y=x^n$ ფუნქცია $(-\infty, 0)$ ინტერვალში კლებადია, თუკი n კენტია, მაშინ $y=x^n$ ფუნქცია $(-\infty, 0)$ ინტერვალში ზრდადია.

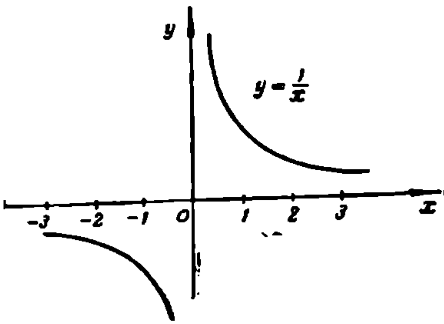
ბ) განვიხილოთ შემთხვევა, როცა n უარყოფითი რიცხვია, ე. ი.

$$x=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

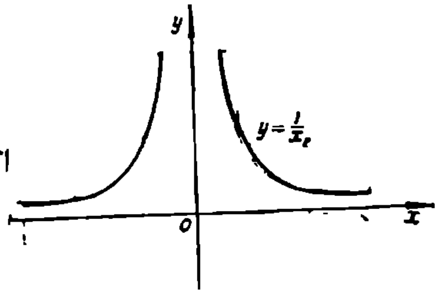
$y=x^{-n}$ ფუნქცია განსაზღვრულია x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, გარდა $x=0$-ისა, და $y=x^{-n}$ ფუნქცია $(0, +\infty)$, ინტერვალში კლებადია. მართლაც, რადგან $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ და x^n $(0, +\infty)$ ინტერვალში ზრდადია, ამიტომ $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ იქნება კლებადი. თუ n ლუწია, მაშინ $y=x^{-n}$ იქნება ლუწი, მართლაც, $(-x)^{-n}=\frac{1}{(-x^n)}=$ $=\frac{1}{x^n}=x^{-n}=y$. თუკი n კენტია, მაშინ $y=x^{-n}$ ფუნქციაც კენტი იქნება, მართლაც,

$$(-x)^{-n}=\frac{1}{(-x)^n}=\frac{1}{-x^n}=-x^{-n}=-y.$$

შეიძლება დავრწმუნდეთ იმაში, რომ $(-\infty, 0)$ ინტერვალში $y=x^{-n}$ ფუნქცია, თუ n ლუწია, ზრდადია, ხოლო, თუ n კენტია, კლებადია. ასევე ცხადია, $(-\infty, 0)$ ინტერვალში $y=x^{-n}$ ფუნქცია დადებითი იქნება, თუ n ლუწია, ხოლო უარყოფითი, თუ n კენტია. თუ $x\to 0$ მარჯვნიდან, ე. ი. ისე, რომ x მუდამ და-



ნახ. 197, ა.



ნახ. 197, ბ.

დებითი რჩება, მაშინ $x^{-n}\to+\infty$. მართლაც, $x^{-n}=\frac{1}{x^n}\to+\infty$; თუკი $x\to 0$ მარცხნიდან, ე. ი. ისე რომ მუდამ უარყოფითი რჩება, მაშინ $x^{-n}\to+\infty$, თუ n ლუწია, და $x^{-n}\to-\infty$, თუ n კენტია.

ბოლოს შევნიშნოთ; რომ, თუ $x\to-\infty$, მაშინ $x^{-n}\to 0$. მართლაც,

$$x^{-n}=\frac{1}{x^n}=\to 0, \quad \text{თუ} \quad x\to\pm\infty.$$

ყოველივე ზემოთ ნათქვამი $y=x^{-n}$ ფუნქციაზე შეიძლება თვალსაჩინოდ ვნახოთ $y=\frac{1}{x}$ და $y=\frac{1}{x^2}$ ფუნქციათა გრაფიკებზე (ნახ. 197, ა, 197, ბ).

დ) განვიხილოთ ახლა შემთხვევა, როცა ხარისხის მაჩვენებელი არის $\frac{p}{q}$ სახის უკვეცი წილადი.

ე. ი.

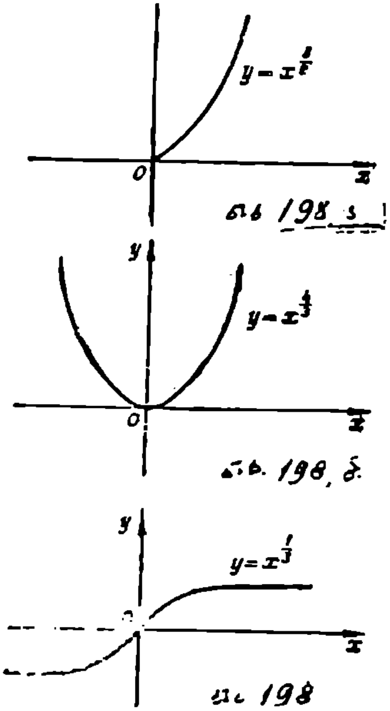
$$y=x^{\frac{p}{q}}.$$

წინასწარ შევთანხმდეთ, რომ, თუ $q>0$, მაშინ $\frac{p}{q}$ წილადის ნიშანს განსაზღვრავს P-ს ნიშანი.

როგორც ვიცით, $x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$ x-ის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომელთათვის არსებობს $\sqrt[q]{x^p}$. იმ შემთხვევაში, როცა q ლუწია, ვიხილავთ არითმეტიკულ ფესვს. ცალ-ცალკე განვიხილოთ ორი შემთხვევა: $p>0$ და $p<0$.

თუ $p>0$, მაშინ ჩვენ გვექნება ხარისხოვანი ფუნქცია დადებითი წილად მაჩვენებლით, ამ შემთხვევაში ფუნქცია მარჯვნიდან ღია შუალედში $(0, +\infty)$ ზრდადი

იქნება. თუ q ლუწია, მაშინ ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება ნახევრად ღია შუალედი $[0, +\infty)$. თუ q კენტია, მაშინ ფუნქცია განსაზღვრული იქნება მთელს რიცხვით წრფეზე, ანუ $(-\infty, +\infty)$ შუალედში, ვინაიდან არსებობს კენტი ხარისხის ფესვი უარყოფითი რიცხვებიდან.



ნახ. 198 ა, ბ, გ.

მ ა გ ა ლ ი თ ა დ:

1) $y=\sqrt[4]{x^3}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა მარჯვენიდან ნახევრად ღია შუალედი $[0, +\infty)$ (ნახ. 198, ა).

2) $y=\sqrt[3]{x^4}$ ფუნქცია განსაზღვრულია მთელს რიცხვით ღერძზე (ნახ. 198, ბ).

3) $y=x=\sqrt[3]{x}$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნებისმიერი x-სათვის (ნახ. 198, გ).

თუ p და q კენტი რიცხვებია, მაშინ $y=x^{\frac{p}{q}}$ ფუნქციაც კენტი იქნება. მართლაც,

$$(-x)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(-x)^p}=\sqrt[q]{-x^p}=\sqrt[q]{x^p}=$$

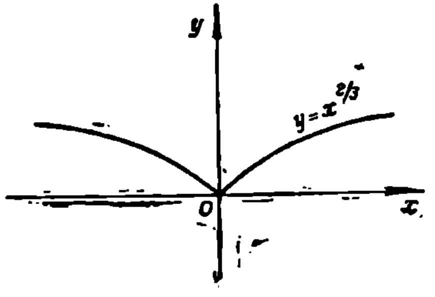
$$=-x^{\frac{p}{q}}=-y.$$

ვთქვათ, p ლუწი რიცხვია მასთან თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ $\frac{p}{q}$ წილადი უკვეცია, დავასკვნით, რომ q კენტი რიცხვი იქნება. ამ შემთხვევაში $y=x^{\frac{p}{q}}$ ფუნქცია იქნება ლუწი. მართლაც,

$$(-x)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(-x)^p}=\sqrt[q]{x^p}=x^{\frac{p}{q}}=y.$$

ასეთ შემთხვევაში ფუნქცია კლებადი იქნება $(-\infty, 0)$ შუალედში.

ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ $y=x^{\frac{p}{q}}$ ლუწი ფუნქციაა.



ნახ. 199.

თუკი p და q ორივე კენტია, მაშინ $y=x^{\frac{p}{q}}$ ფუნქცია $(-\infty, 0)$ ინტერვალში იქნება ზრდადი. მაგალითად (ნახ. 198,გ), ადვილი შესამჩნევია, რომ ნებისმიერი მთელი დადებითი p და q-სათვის, თუ $x\to\infty$, მაშინ $y\to\infty$. იმ შემთხვევაში, როცა q კენტია და p ლუწი, მაშინ, თუ $x\to-\infty$, $y=x^{\frac{p}{q}}\to+\infty$. მაგალითად, $y=x^{3}=\sqrt[3]{x^2}$ (ნახ. 199).

როცა p და q კენტი რიცხვებია, მაშინ, თუ $x\to-\infty$, $y\to-\infty$ (მაგალითად, $y=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$) (ნახ. 198, გ). ზოგიერთ ხარისხოვან ფუნქციას, მაგალითად, $y=-x^2$, $y=x^4$ ფუნქციებს გააჩნია ლოკალური მინიმუმი $x=0$ წერტილზე.

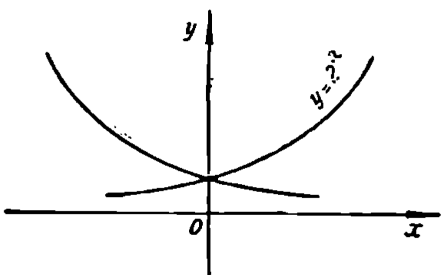
§ 181. მაჩვენებლიანი ფუნქცია

როგორც განმარტებული გვქონდა, $y=a^x$ სახის ფუნქციას, სადაც a ერთისაგან განსხვავებული დადებითი რიცხვია, მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება.

ვიცით, რომ მაჩვენებლიან ფუნქციას ახასიათებს შემდეგი თვისებები:

1) მაჩვენებლიანი ფუნქცია განსაზღვრულია მთელს რიცხვით ღერძზე, ანუ $(-\infty, +\infty)$ შუალედში.

2) $y=a^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქცია დადებითია x-ის ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის (ე. ი. მისი გრაფიკი მთლიანად მდებარეობს საკოორდინატო სიბრტყის ზედა ნახევარში).



ნახ. 200.

3) თუ $x=0$, მაშინ $y=a^0=1$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $y=a^x$ ფუნქციის გრაფიკი კვეთს OY ღერძს $(0,1)$ წერტილში.

4) თუ $a>1$, მაშინ $y=a^x>1$ როცა $x>0$, და $a^x<1$, როცა $x<0$.

5) თუ $a>1$, $y=a^x$ ფუნქცია ზრდადია.

6) თუ $0<a<1$, მაშინ $a^x<1$, როცა $x>0$, და $a^x>1$, როცა $x<0$.

7) თუ $0<a<1$, $y=a^x$ ფუნქცია კლებადია.

მაჩვენებლიანი ფუნქციის ყველა ჩამოთვლილი თვისება ნათლად ჩანს მის გრაფიკზე (ნახ. 201). $y=a^x$ ფუნქციას ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები არ გააჩნია. ეს ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი, იგი არც პერიოდულია.

§ 182. ლოგარითმული ფუნქცია

განსაზღვრა 1. ფუნქციას, რომელიც განისაზღვრება $y=\log_a x$ ტოლობით, სადაც a დადებითია და $a\neq 1$, ეწოდება ლოგარითმული ფუნქცია,

ცხადია, ფუნქციის ყოველი მნიშვნელობა იქნება x ცვლადის ლოგარითმი აღებული a ფუძით. ვინაიდან ლოგარითმული ფუნქცია მაჩვენებლიანი ფუნქციის შებრუნებულია, ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკი მაჩვენებლიან ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიული იქნება (ნახ. 202).

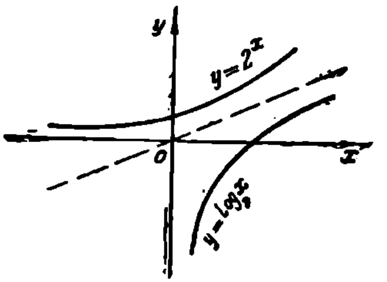
გავიხსენოთ ლოგარითმული ფუნქციის შემდეგი თვისებები:

1. $y=\log_a x$ ლოგარითმული ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა დადებითი რიცხვის სიმრავლე, ხოლო ცვლილების არე— ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე $(0<x<+\infty)$.

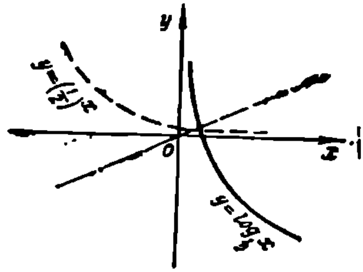
2. თუ $a>1$, მაშინ $y=\log_a x>0$, როცა $x>1$, ხოლო $y=\log_a x<0$. თუ $0<x<1$ და უდრის ნულს, თუ $x=1$.

3. თუ $a>1$, ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია, ხოლო, თუ $0<a<1$, მაშინ ფუნქცია მონოტონურად კლებადია.

4. თუ $0<a<1$ და $0<x<1$, მაშინ ლოგარითმული ფუნქცია დადებითია, ხოლო, თუ $0<a<1$ და $x>1$, მაშინ—უარყოფითი, და უდრის ნულს, როცა $x=1$. თუ დავაკვირდებით გრაფიკს, შევამჩნევთ, რომ მრუდი ამოზნექილია, როცა $a>1$ (ნახ. 202), და ჩაზნექილია, როცა $a<1$ (ნახ. 202):



ნახ. 201.



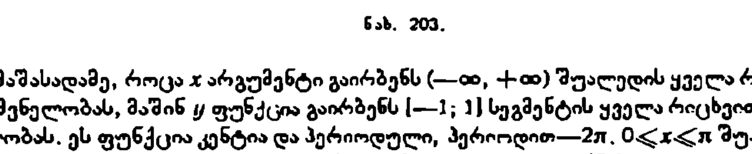
ნახ. 202.

$y=\log_a x$ ფუნქციას ლოკალური ექსტრემუმები არ გააჩნია. რადგან x ყოველთვის დადებითია, ამიტომ ფუნქციის ლუწ-კენტობაზე საკითხის დასმას აზრი არა აქვს, ფუნქცია არც პერიოდულია.

ნახაზიდან ნათლად ჩანს, რომ თუ $a>1$ და $x\to 0$, მაშინ $y\to\infty$, ხოლო თუ $a<1$ და $x\to 0$, მაშინ $y\to\infty$ (ნახ. 202).

§ 188. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

1. $y=\sin x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, ანუ $(-\infty, +\infty)$ შუალედი, ხოლო მისი ცვლილების არეს წარმოადგენს ყველა იმ რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც მოთავსებულია $[-1, 1]$ სეგმენტში.



ნახ. 203.

მაშასადამე, როცა x არგუმენტი გაირბენს $(-\infty, +\infty)$ შუალედის ყველა რიცხვით მნიშვნელობას, მაშინ y ფუნქცია გაირბენს $[-1; 1]$ სეგმენტის ყველა რიცხვით მნიშვნელობას. ეს ფუნქცია კენტია და პერიოდული, პერიოდით—2π. $0\leqslant x\leqslant\pi$ შუალედში იგი დადებითია, მისი პერიოდულობის გამო იგი ასეთივე იქნება $2k\pi\leqslant x\leqslant\pi+2k\pi$ შუალედშიც, სადაც $k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3\ldots$

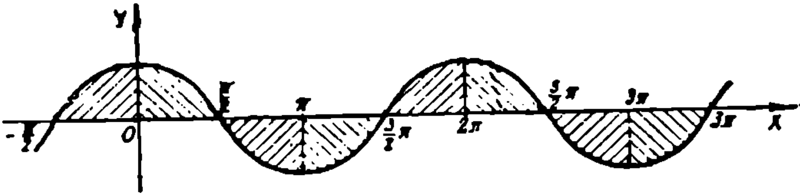
$y=\sin x$ ფუნქცია უარყოფითი იქნება $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ შუალედში. მისი პერიოდულობის გამო იგი უარყოფითი იქნება $\pi+2k\pi\leqslant x\leqslant 2\pi+2k\pi$ შუალედშიც.

$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ შუალედში ფუნქცია მონოტონურად იზრდება, ასეთივეა იგი $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+2k\pi$ შუალედშიც. $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$ შუალედში ფუნქცია იქნება მონოტონურად კლებადი, ამიტომ მონოტონურად კლებადი იქნება იგი $\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{3}{2}\pi+2k\pi$ შუალედშიც.

$y=\sin x$ ფუნქციისათვის $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ და $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ წერტილები ლოკალური ექსტრემუმის წერტილებია. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ წერტილებზე ფუნქცია აღწევს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას $+1$-ს, ხოლო $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ წერტილებზე — მინიმალურს -1-ს (ნახ. 203).

2. $y=\cos x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, ანუ $(-\infty, \infty)$ შუალედი, ხოლო ცვლილებისას $[-1, 1]$ სეგმენტი.

მაშასადამე, როცა x არგუმენტი გაირბენს ყველა ნამდვილი რიცხვის მნიშვნელობებს, მაშინ y მიიღებს შესაბამისად ყველა მნიშვნელობებს $[-1, 1[$ სეგმენტიდან.



ნახ. 204.

$y=\cos x$ ფუნქცია ლუწია და პერიოდული, პერიოდით 2π. ვინაიდან $\cos\varphi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$, ამიტომ $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის $\frac{\pi}{2}$-ით OX ღერძის გასწვრივ გადატანით ან მიმართულების შეუცვლელად კოორდინატთა სათავის გადატანით $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ წერტილში.

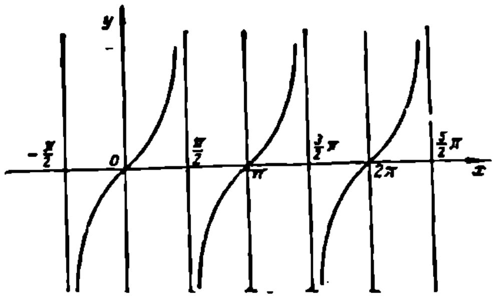
$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ შუალედში ფუნქცია დადებითია მისი პერიოდულობის გამო. იგი დადებითი იქნება $\frac{\pi}{2}+2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+2k\pi$ შუალედშიც. ვინაიდან ეს ფუნქცია $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ შუალედში უარყოფითია, ამიტომ იგი უარყოფითი იქნება $\frac{\pi}{2}+2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi+2k\pi$ შუალედშიც. $y=\cos x$ ფუნქცია

$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0$ შუალედში მონოტონურად ზრდადია, ამიტომ მონოტონურად ზრდადი იქნება ეს ფუნქცია $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi$ შუალედშიც. $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ შუალედში ფუნქცია მონოტონურად კლებადია, ამიტომ მონოტონურად კლებადი იქნება იგი $2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ შუალედშიც.

$x = 2k\pi$ წერტილებზე ფუნქცია აღწევს ლოკალურ მაქსიმუმს $+1$-ს, ხოლო $x = (2k+1)\pi$ წერტილზე ლოკალურ მინიმუმს -1-ს (ნახ. 204).

3. $y = \operatorname{tg} x$, ანუ $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ ფუნქცია განსაზღვრულია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ მნიშვნელობებისა, ე. ი გარდა იმ წერტილებისა, სადაც $\cos x = 0$, ამ ფუნ ქციის ცვლილების არეს წარმოადგენს $(-\infty, +\infty)$ შუალედი. ეს ფუნქცია კენტია და პერიოდული, პერიოდით π. $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ შუალედში იგი დადებითია, ამიტომ დადებითი იქნება $k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + k\pi$ შუალედშიც. ხოლო ვინაიდან იგი უარყოფითია $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0$ შუალედში, ამიტომ უარყოფითი იქნება $-\frac{\pi}{2} + k\pi \leqslant x \leqslant k\pi$ შუალედშიც.

$y = \operatorname{tg} x$ ფუნქცია ნულის ტოლი ხდება, მაშინ, როცა $x = k\pi$. ყველა იმ შუალედში, რომლებიც $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ წერტილებს არ შეიცავს, იგი მონოტონურად ზრდადია. ამ ფუნქციას ლოკალური ექსტრემუმები არ გააჩნია. იმ შემთხვევაში, როცა $x \to \frac{\pi}{2} + k\pi$, და მასთან $x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, y-ის მნიშვნელობა უსაზღვროდ იზრდება, ხოლო, როცა $x \to \frac{\pi}{2} + k\pi$, მაგრამ $\frac{\pi}{2} + k\pi < x$ $\left(x\text{ არგუმენტი მუდამ მეტი რჩება } \frac{\pi}{2} + k\pi\text{-ზე}\right)$, $y = \operatorname{tg} x$ ფუნქცია უსაზღვროდ კლებულობს, ე. ი. $y \to -\infty$.



ნახ. 205.

1. რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი

ადრე ჩვენ დაწვრილებით გავეცანით რიცხვით მიმდევრობებს. მიმდევრობანი განვიხილეთ, როგორც რიცხვითი არგუმენტის ფუნქცია, ე. ი. ისეთი ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე. ლაპარაკი გვქონდა მიმდევრობის შემოსაზღვრულობაზე, ზრდადობა და კლებადობაზე, ზუსტ ქვედა და ზედა საზღვარზე და ა. შ.

განვიხილოთ კლებადი მიმდევრობის მაგალითი:

1) α ცვლადი, რომელიც მიმდევრობით ღებულობს მნიშვნელობებს:

$$-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ldots,\ -\frac{1}{n},$$

ნომრის გადიდებასთან ერთად აბსოლუტური მნიშვნელობით მცირდება და ნულს უახლოვდება.

ალსანიშნავია ის გარემოება, რომ რა გინდ მცირე დადებითი ε რიცხვიც არ უნდა ავიღოთ, თითოეულ დასახელებულ ამ მიმდევრობაში მოიძებნება ისეთი რიცხვი, რომლიდანაც დაწყებული α-ს ყოველი მნიშვნელობა აბსოლუტური სიდიდით ε-ზე ნაკლები ალმოჩნდება. მაგალითად, თუ ავიღებთ $\varepsilon=\frac{1}{100}$, მაშინ განხილული მიმდევრობაში შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი წევრი, რომლის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლები იქნება $\frac{1}{100}$-ზე. ცხადია, პირველი ასეთი წევრი იქნება $\frac{1}{101}$ და აქედან დაწყებული თითოეულის აბსოლუტური მნიშვნელობა აგრეთვე ნაკლებია $\frac{1}{100}$- ზე. ახლა თუ ავიღებთ, მაგალითად, $\varepsilon=0{,}001$, მაშინ ცხადია, მიმდევრობაში ალმოჩნდება ისეთი წევრი, რომლიდანაც მოყოლებული თითოეული წევრის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლები ალმოჩნდება 0,001-ზე. ცხადია, პირველი ასეთი წევრი იქნება $\frac{1}{1001}$. მართლაც, თუ მიმდევრობის ის წევრი რომლის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია 0,001-ზე იქნება n-ური წევრი, ე. ი. $\frac{1}{n}$-ზე, მაშინ, პირობის ძალით, $\left|-\frac{1}{n}\right|<0{,}001$ ანუ $\frac{1}{n}<0{,}001$, საიდანაც $n>\frac{1}{0{,}001}$ ანუ $n>1000$.

მაშასადამე, აღნიშნული პირობა რომ დაკმაყოფილდეს, საჭიროა ნატურალური რიცხვი n უნდა იყოს 1001, 1002, 1003 და ა. შ. ე. ი. აღებულ მაგალითში პირველი წევრი, რომლის აბსოლუტური მნიშვნელობაც 0,001-ზე ნაკლებია, არის 1001-ე წევრი, ე. ი. $\frac{1}{1001}$. მართლაც, $\left|-\frac{1}{1001}\right|=\frac{1}{1001}<\frac{1}{1000}$. ცხადია 1001-დან დაწყებული ყოველი წევრი აბსოლუტური მნიშვნელობით აგრეთვე,

ნაკლები იქნება 0,001-ზე. α ცვლადი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ზემოთ დასახელებული მიმდევრობის ზოგადი წევრი.

განხილული α ცვლადის მიმართ იტყვიან, რომ იგი უსაზღვროდ უახლოვდება ნულს ან, სხვა სიტყვებით, α სიდიდე მიისწრაფვის ნულისაკენ, რასაც ჩაწერენ შემდეგნაირად $\alpha \to 0$.

ასეთი სახის ცვლადებს, რომელთა მიერ თანმიმდევრობით მიღებული რიცხვითი მნიშვნელობები უსაზღვროდ უახლოვდება ნულს, მათემატიკაში განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭებათ. ამ სახის ცვლადებს სხვა სახის ცვლადებისაგან განსხვავებით „უსასრულოდ მცირეებს“ უწოდებენ.

განსაზღვრა 1. **α ცვლადს ეწოდება უსასრულოდ მცირე, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის (რაგინდ მცირეც არ უნდა იყოს ის) არსებობს α-ს ისეთი მნიშვნელობა, რომლიდანაც დაწყებული α-ს ყოველი მნიშვნელობა აბსოლუტური სიდიდით ε-ზე ნაკლებია: $|\alpha| < \varepsilon$.**

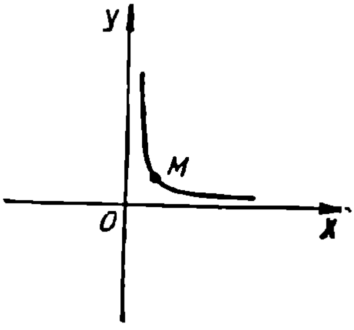
უსასრულოდ მცირის განსაზღვრის საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობისა და უსასრულოდ მცირე ფუნქციების უფრო მკაცრი განსაზღვრები.

განსაზღვრა. 2. $x_1, x_2, \ldots, x_n,$ **მიმდევრობას ეწოდება უსასრულოდ მცირე, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ მიმდევრობის ყოველი წევრი, $n \geqslant N$ ნომრიდან დაწყებული, აბსოლუტური მნიშვნელობით ნაკლები იყოს ε-ზე, ე. ი. $|x_n| < \varepsilon$.**

განსაზღვრა. 3. **უსასრულოდ მცირის შებრუნებულ სიდიდეს უსასრულოდ დიდი ეწოდება.**

მაგალითად, თუ $\alpha \to 0$ (ე. ი. უსასრულოდ მცირეა) მაშინ $\frac{1}{\alpha}$ მიღებულია აღინიშნოს ∞ სიმბოლოთი, რაც უსასრულოდ დიდს აღნიშნავს.

უსასრულოდ მცირესა და უსასრულოდ დიდს შორის დამოკიდებულება ნათლად შეიძლება ვნახოთ $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკზე, როცა $x \to 0$. როცა M წერტილი ისე მოძრაობს გრაფიკზე, რომ აბსცისის მნიშვნელობა უახლოვდება ნულს, მაშინ ორდინატი $y \to \infty$. როცა $x \to \infty$, მაშინ $y \to 0$.



ნახ. 206.

ყურადღება უნდა გავამახვილოთ იმაზე, რომ სულ სხვა და სხვაა „უსასრულოდ მცირე“ და „ძალზე მცირე“, უსასრულო მცირის ქვეშ გვესმის ცვლადი სიდიდე, რომელიც ნულისაკენ მიისწრაფვის და ძლიერ მცირე სიდიდე კი მუდმივია.

ასევე განსხვავებულია ძალზე დიდი რიცხვი და უსასრულოდ დიდი, ვინაიდან პირველი მუდმივია, მეორე კი ცვლადი, რომელიც უსაზღვროდ იზრდება.

განსაზღვრა. 4. **a რიცხვს ეწოდება $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ $x_1 - a, x_2 - a, \ldots, x_n - a, \ldots$ მიმდევრობა წარმოადგენს უსასრულოდ მცირეს.**

ახლა განვსაზღვროთ ცვლადი სიდიდის ზღვარი. განვიხილოთ x ცვლადი და მასთან ერთად მუდმივი a სიდიდე.

განსაზღვრა 5. ამბობენ, რომ x ცვლადის ზღვარი არის a მუდმივი რიცხვი ან x ცვლადი მიისწრაფვის a-საკენ, თუ x-ის მნიშვნელობები თანდათანობით უახლოვდება a-ს, ისე, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი, იარსებებს x-ის ისეთი მნიშვნელობა, რომ ყოველი მომდევნო მნიშვნელობისათვის ადგილი ექნება უტოლობას $|x-a|<\varepsilon$.

იმ გარემოებას, რომ x ცვლადის ზღვარი არის a მუდმივი, ჩაწერენ $\lim x=a$ იკითხება „ლიმეს x უდრის a-ს" (Limmes ზღვარს ნიშნავს).

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\sqrt{2}$ ერთეულის, მეათედის, მეასედის და შ. სიზუსტით.

ამოხსნა:

მიახლოებითი მნიშვნელობები $\sqrt{2}$ სიზუსტით ერთამდე, მეათედამდე და ა. შ. აღვნიშნოთ შესაბამისად $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ცხადია, გვექნება: $x_1=1$; $x_2=1{,}4$; $x_3=1{,}41, \ldots$ ამ მიმდევრობის წევრები n-ის ზრდასთან ერთად უახლოვდებიან $\sqrt{2}$-ს ისე, რომ

$$|x_1-\sqrt{2}|<1; \; |x_2-\sqrt{2}|<\frac{1}{10}, \; |x_3-\sqrt{2}|<\frac{1}{100}, \ldots$$

$$|x_n-\sqrt{2}|<\frac{1}{10^{n-1}}$$

ავიღოთ ნებისმიერად მცირე დადებითი ε რიცხვი, ის შეიძლება იყოს ძალზე მცირე, მაგალითად $\varepsilon=\frac{1}{10^{100}}$, მაშინ

$$|x_{101}-\sqrt{2}|<\frac{1}{10^{100}}; \; |x_{102}-\sqrt{2}|<\frac{1}{10^{101}}<\frac{1}{10^{100}},$$

$$|x_{103}-\sqrt{2}|<\frac{1}{10^{102}}<\frac{1}{10^{101}}<\frac{1}{10^{100}}.$$

ზოგადად $n>100$-სათვის გვექნება

$$|x_n-\sqrt{2}|<\frac{1}{10^{100}}=\varepsilon.$$

ამრიგად, აღებული ε რიცხვისათვის ვიპოვეთ ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ $N>n$-სათვის სრულდება უტოლობა

$$|x_n-\sqrt{2}|<\varepsilon, \quad \text{ე. ი.} \; \lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2}.$$

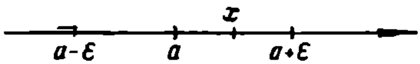
§ 186. ცვლადის ზღვრის განმარტების გეომეტრიული წარმოდგენა

ზღვრის განმარტება შეიძლება გეომეტრიულად ნათელვყოთ შემდეგნაირად: ავიღოთ რიცხვით წრფეზე a წერტილი და მისი ε მიდამო (ნახ. 207.) ვთქვათ, x ცვლადი უახლოვდება a რიცხვს. ცხადია, $|x-a|$ სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა გამოსახავს მანძილს x და a წერტილებს შორის. უტოლობა:

$$|x-a|<\varepsilon$$

ნიშნავს, რომ იარსებებს x-ის ისეთი მნიშვნელობა, რომლის ყველა მომდევნო მნიშვნელობები მთლიანად მოთავსდება a წერტილის ε მიდამოში.

ამრიგად, x ცვლადის ზღვარი არის a მუდმივი რიცხვი გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ რაგინდ მცირე არ უნდა იყოს a წერტილის ε მიდამო, იარსებებს x-ის ისეთი მნიშვნელობა, რომლის მომდევნო მნიშვნელობები ვერ გამოვლენ აღნიშნული მიდამოდან.



ნახ. 207.

ზღვრის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ერთსა და იმავე ცვლადს არ შეიძლება ჰქონდეს ორი განსხვავებული a და b ზღვარი. მართლაც, თუ $b>a$ და ε-ს ავირჩევთ $\frac{b-a}{2}$ ტოლს, მაშინ შეუძლებელია ერთდროულად ადგილი ქონდეს უტოლობებს:

$$|x-a|<\varepsilon \quad \text{და} \quad |x-b|<\varepsilon.$$

უნდა შევნიშნოთ ის, რომ ცვლადის მისწრაფება თავისი ზღვრისაკენ შეიძლება სხვადასხვა ხასიათის იყოს. ხშირ შემთხვევაში ცვლადი ისე უახლოვდება თავის ზღვარს, რომ მუდამ ამ უკანასკნელზე ნაკლები რჩება, მაგალითად, წრეწირში ჩახაზული მრავალკუთხედის პერიმეტრი, როცა გვერდების რიცხვი უსასრულოდ ორკეცდება.

არის შემთხვევა როცა ცვლადის ცალკეული მნიშვნელობები ზღვარზე მუდამ მეტი რჩება, მაგალითად, წრეწირზე შემოხაზულ მრავალკუთხედის პერიმეტრი, როცა გვერდების რიცხვი უსასრულოდ ორკეცდება. შესაძლებელია ისიც, რომ ცვლადი სიდიდე თავის ზღვარზე ხან მეტი, ხან ნაკლები იყოს. ასე რომ ცვლადი სიდიდე შეიძლება თავისი ზღვარის გარშემო რხევას განიცდიდეს. ასეთია, მაგალითად, ცვლადი რომელიც ღებულობს მნიშვნელობებს:

$$x_1=1, \quad x_2=-\frac{1}{2}, \quad x_3=\frac{1}{3}, \quad x_4=-\frac{1}{4}, \ldots, x_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{n},$$

ამ ცვლადის ზღვარი არის ნული, მაგრამ აქ როგორც ვხედავთ, ცვლადის მნიშვნელობები ხან ნულზე მეტია, ხან კი ნაკლები.

§ 186. უსასრულოდ მცირე სიდიდეთა ძირითადი თვისებები

ამ პარაგრაფში მოვიყვანთ უსასრულოდ მცირეთა ძირითად თვისებებს დაუმტკიცებლად.

თ ვ ი ს ე ბ ა 1. **უსასრულოდ მცირეთა ჯამი უსასრულოდ მცირეა, თუ შესაკრებთა რიცხვი სასრულია.**

ვთქვათ, გვაქვს რამდენიმე უსასრულოდ მცირე: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, მაშინ მათი ჯამიც $x_1+x_2+\ldots+x_n$ უსასრულოდ მცირე იქნება.

თ ვ ი ს ე ბ ა 2. **მუდმივი სიდიდის და უსასრულოდ მცირის ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა.**

ვთქვათ, x უსასრულოდ მცირეა, ხოლო a რაიმე მუდმივი რიცხვი. მაშინ $a\cdot x$ უსასრულო მცირე იქნება.

თ ვ ი ს ე ბ ა 3. **უსასრულოდ მცირეთა ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა.**

ვთქვათ, x_1 და x_2 უსასრულოდ მცირეებია. მაშინ მათი ნამრავლი $x_1 \cdot x_2$ აგრეთვე უსასრულოდ მცირე იქნება.

თ ვ ი ს ე ბ ა 4. **უსასრულოდ მცირეთა შეფარდება შეიძლება იყოს როგორც უსასრულოდ მცირე, ისე სასრული და უსასრულოდ დიდიც.**

ვთქვათ, x უსასრულოდ მცირეა, მაშინ მე-3 დებულების ძალით x^2-იც უსასრულოდ მცირე იქნება და ფარდობაც $\frac{x^2}{x} = x$ იქნება უსასრულოდ მცირე.

ავიღოთ რაიმე სასრული სიდიდე a. მეორე თვისების ძალით $a \cdot x$ ნამრავლი უსასრულოდ მცირე იქნება, ხოლო $\frac{a \cdot x}{x}$ ფარდობა სასრულია, რადგან ის a-ს ტოლია.

ბოლოს განვიხილოთ ორი უსასრულოდ მცირის ფარდობა $\frac{x}{x^2}$. ეს ფარდობა იქნება უსასრულოდ დიდი, ვინაიდან იგი $\frac{1}{x}$-ის ტოლია და თუ x უსასრულოდ მცირეა, მაშინ, როგორც ცნობილია, $\frac{1}{x}$ უსასრულოდ დიდი იქნება.

თ ვ ი ს ე ბ ა 5. **ორი უსასრულოდ დიდის ფარდობა შეიძლება იყოს, როგორც უსასრულოდ დიდი, ისე სასრული და უსასრულოდ მცირეც.**

ვთქვათ, y_1 და y_2 უსასრულოდ დიდი სიდიდეებია. განვიხილოთ ფარდობა $\frac{y_1}{y_2}$. ეს ფარდობა ტოლია

$$\frac{\frac{1}{y_2}}{\frac{1}{y_1}}$$

ფარდობისა, მაგრამ ეს უკვე ორი უსასრულოდ მცირის ფარდობაა, ამიტომ მე-5 დებულება სამართლიანია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი თვისებები:

თ ვ ი ს ე ბ ა 6. **უსასრულოდ მცირის და უსასრულოდ დიდის ნამრავლი შეიძლება იყოს უსასრულოდ მცირე, სასრული და უსასრულოდ დიდიც.**

§ 187. ზღვრის წარმოდგენა ტოლობის საშუალებით

ვთქვათ, განიხილება x ცვლადი, რომელსაც ზღვრად აქვს a მუდმივი. ზღვრის განმარტება, რომელიც მოყვანილი გვქონდა ზემოთ, ძირითადად გულისხმობს იმას, რომ თუ $x—a$ სხვაობა არის უსასრულოდ მცირე, მაშინ a იქნება x ცვლადის ზღვარი და პირიქით, თუ a არის x-ის ზღვარი, მაშინ $x—a$ სხვაობა უსასრულოდ მცირე იქნება.

ამრიგად, ის გარემოება, რომ x ცვლადის ზღვარი არის a მუდმივი, შეიძლება შემდეგნაირად გამოვსახოთ

$$x-a=\alpha,$$

ანუ
$$x=a+\alpha, \tag{1}$$

სადაც α უსასრულოდ მცირეა.

(1) ტოლობის შინაარსი მეტად საინტერესოა. კერძოდ, ის გვეუბნება, რომ **ცვლადი უდრის თავის ზღვარს, დამატებული უსასრულოდ მცირე.**

§ 188. ფუნქციის ზღვარი

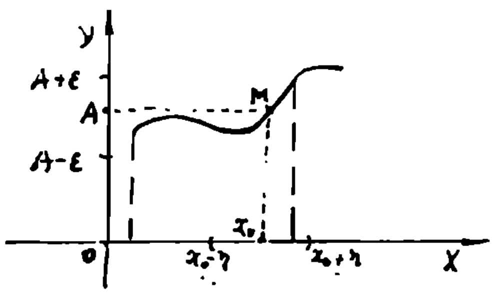
ჩვენ განვიხილეთ რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი. მიმდევრობა კი განსაზღვრული გვქონდა, როგორც ნატურალური არგუმენტის ფუნქცია. ე. ი. მიმდევრობა წარმოადგენს ფუნქციის კერძო სახეს. ახლა განვიხილოთ ნამდვილი x ცვლადის ფუნქცია და განვმარტოთ ასეთი ფუნქციის ზღვარი.

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტი და ვთქვათ x_0 ამ სეგმენტიდან აღებული წერტილია, ე. ი.

$$a<x_0<b$$

ავიღოთ $y=f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია* $[a, b]$ სეგმენტის ყველა წერტილზე, გარდა შესაძლოა x_0 წერტილისა.**

ვთქვათ, x არგუმენტი მიისწრაფვის x_0-საკენ (ნახ. 207,ა), მაგრამ არ ხდება მისი ტოლი. ამ დროს, თუ $f(x)$ ფუნქციის სათანადო მნიშვნელობები თავის მხრივ



ნახ. 207, ა.

მოისწრაფვიან გარკვეული A რიცხვისაკენ, მაშინ A რიცხვს უწოდებენ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარს x_0 წერტილზე.

განსაზღვრა. **ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილზე არის A რიცხვი, თუ ყოველი ნებისმიერად მცირე დადებითი ε რიცხვს ისეთი მცირე დადებითი η რიცხვი ეთანადება, რომ, როდესაც $|x-x_0|<\eta$ და $x\neq x_0$, ადგილი აქვს უტოლობას**

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

---

* ფუნქციას ეწოდება განსაზღვრული $[ab]$ სეგმენტში, თუ სეგმენტის ყოველ წერტილზე ის ღებულობს სასრულო მნიშვნელობას.

** x_0 წერტილზე ფუნქცია შეიძლება არც იყოს განსაზღვრული.

ფუნქცია შესაძლოა არც იყოს განსაზღვრული რომელიმე წერტილზე, მაგრამ მას შეიძლება ჰქონდეს გარკვეული ზღვარი. მაგალითად, ცხადია, ფუნქცია $\frac{x^2-1}{x-1}$ $x=1$ წერტილზე არაა განსაზღვრული, რადგან ვღებულობთ $\frac{x^2-1}{0}$, მაგრამ, როგორც ახლა ვნახავთ, ამ ფუნქციას $x=1$ წერტილზე აქვს ზღვარი:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1.$$

ვინაიდან $x\neq 1$, ამიტომ ჩვენ უფლება გვაქვს წილადი შევკვეცოთ $(x-1)$-ზე. ამრიგად მივიღებთ:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim(x+1)=1+1=2,$$

რაც გამოთქმული წინადადების სისწორეს ადასტურებს.

§ 169. ძირითადი დებულებები ზღვართა შესახებ

1. მუდმივი სიდიდის ზღვარი თვით ამ მუდმივის ტოლია $\lim a=a$.

2. მუდმივი თანამამრავლი ზღვრის ნიშნის წინ გამოიტანება:

$$\lim a\cdot x=a\cdot\lim x.$$

3. რამდენიმე ცვლადის ალგებრული ჯამის ზღვარი ამ ცვლადთა ზღვრების ჯამის ტოლია:

$$\lim(x+y-z)=\lim x+\lim y-\lim z.$$

4. ნამრავლის ზღვარი თანამამრავლთა ზღვრების ნამრავლის ტოლია:

$$\lim(x\cdot y)=\lim x\cdot\lim y.$$

5. ცვლადის მთელი დადებითი ხარისხის ზღვარი ზღვრის იმავე ხარისხის ტოლია:

$$\lim x^n=(\lim x)^n.$$

6. ფარდობის ზღვარი უდრის მრიცხველის ზღვარს, გაყოფილს მნიშვნელის ზღვარზე, თუ მნიშვნელის ზღვარი განსხვავებულია ნულისაგან:

$$\lim\frac{x}{y}=\frac{\lim x}{\lim y},\quad \text{თუ } \lim y\neq 0.$$

თუ რომელიმე z ცვლადის მნიშვნელობები მოთავსებულია ისეთი ორი x და y ცვლადის მნიშვნელობებს შორის, რომლებიც ერთი და იმავე ზღვრებისაკენ მიისწრაფვიან, მაშინ z ცვლადიც იმავე ზღვრისაკენ მიისწრაფვის,

ე. ი. თუ $x<z<y$ და $\lim x=\lim y=a$, მაშინ $\lim z=a$.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-1)$.

თუ გამოვიყენებთ დებულებას ალგებრული ჯამის ზღვრის შესახებ, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\lim_{x\to 2}(x^2+2x-1)=\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}2x-\lim 1=(\lim_{x\to 2}x)^2+$$

$$+2\lim_{x\to 2}x-1=2^2+2\cdot 2-1=7.$$

2. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x}{2x+1}$.

ვიდრე გამოვიყენებდეთ დებულებას ფარდობის ზღვრის შესახებ, დავადგინოთ, მნიშვნელის ზღვარი ხომ არ იქნება ნული, როცა $x=2$.

$$\lim_{x\to 2}(2x+1)=\lim_{x\to 2}2x+\lim_{x\to 2}1=2\lim_{x\to 2}x+1=2\cdot 2+1=5.$$

ამრიგად $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)\neq 0$.

ამიტომ აღებული მაგალითისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ დებულება ფარდობის ზღვრის შესახებ;

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2)+\lim\limits_{x\to 2}(3x)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x)+\lim 1}=$$

$$=\frac{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2+3\lim\limits_{x\to 2}x}{2\quad\lim\limits_{x\to 2}x}=\frac{2^2+3\cdot 2}{2\cdot 2+1}=\frac{10}{5}=2.$$

განვიხილოთ ახლა ისეთი ფარდობის მაგალითი, რომელშიც მნიშვნელის ზღვარი ნულის ტოლი ხდება.

3. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3}{2x-6}$.

ჯერ ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 3}(2x-6)=\lim\limits_{x\to 3}2x-\lim 6=2\lim\limits_{x\to 3}x-6=2\cdot 3-6=0$.

როგორც ვხედავთ, ფარდობის ზღვრის შესახებ არსებული დებულების გამოყენება შეუძლებელი ხდება, რადგანაც $\lim\limits_{x\to 3}(2x-6)=0$, ამიტომ $2x-6$ არის უსასრულოდ მცირე სიდიდე, ხოლო, როგორც ვიცით, მისი შებრუნებული სიდიდე იქნება უსასრულოდ დიდი. ამიტომ $\dfrac{1}{2x-6}$, როცა $x\to 0$, უსასრულოდ დიდი ხდება, ასევე უსასრულოდ დიდი იქნება $\dfrac{1}{2x-6}\cdot 3$ ნამრავლიც.

ამრიგად,

$$\lim_{x\to 3}\frac{3}{2x-6}=\infty.$$

ახლა განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როდესაც როგორც მრიცხველის ისე მნიშვნელის ზღვარი ნულის ტოლია.

4. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+2x}{x^2+x}$

ამოხსნა

$$\lim_{x\to 0}(x^2+2x)=\lim_{x\to 0} x^2+\lim_{x\to 0} 2x=0.$$

ასევე,

$$\lim_{x\to 0}(x^2+x)=\lim_{x\to 0} x^2+\lim_{x\to 0} x=0$$

ამრიგად, ვღებულობთ $\frac{0}{0}$ სახის განუზღვრელობას.

მიუხედავად ამისა, მოცემულ ფარდობას შეიძლება ჰქონდეს გარკვეული ზღვარი. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საჭიროა მოცემული გამოსახულება წინასწარ გარდავქმნათ, კერძოდ, მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ x-ზე. ეს შესაძლებელია, ვინაიდან ზღვრულ მნიშვნელობაზე გადასვლამდე $x\neq 0$.

ამრიგად გვექნება:

$$\frac{x^2+2x}{x^2+x}=\frac{x+2}{x+1}.$$

$\frac{x+2}{x+1}$ გამოსახულებისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ დებულება ფარდობის ზღვრის შესახებ, რადგან მნიშვნელის ზღვარი, როცა $x\to 0$, არ უდრის ნულს.

გვექნება

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+2}{x+1}=\frac{0+2}{0+1}=2.$$

საბოლოოდ გვექნება

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x^2+x}=2.$$

5. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

ამოხსნა

პირდაპირ ზღვარზე გადასვლით ვღებულობთ $\frac{0}{0}$ სახის განუზღვრელობას, ამიტომ მოცემული გამოსახულება უნდა გარდაიქმნას წინასწარ, რისთვისაც საჭიროა მოვსპოთ ირაციონალობა მოცემული გამოსახულების მრიცხველში:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{\sqrt{1+3}+2}=\frac{1}{4}.$$

ამრიგად

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{1}{4}.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო:

1. $\lim\limits_{x\to2}(2x^2-3x+4)$, პას. 6;

2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x-3}{2x-1}$, პას. 1;

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+x^2}{3x+2x^2}$, პას. $\dfrac{1}{3}$,

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}$, პას. $\dfrac{1}{4}$.

§ 190. წრეწირის სიგრძე

გამოვიყენოთ ზღვართა მეთოდი წრეწირის სიგრძის, წრის ფართობის და უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის გამოსათვლელად.

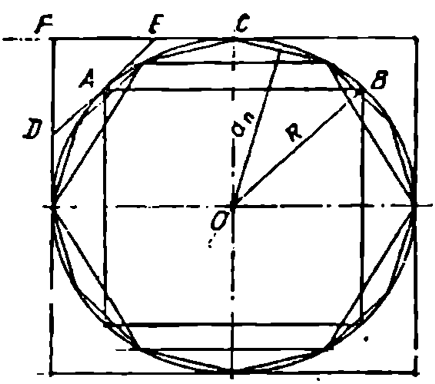
ავაგოთ ერთეულოვანი წრე, ჩავხაზოთ და შემოვხაზოთ მასზე წესიერი მრავალკუთხედები (მაგალითად, კვადრატი) (ნახ. 208).

აღვნიშნოთ შესაბამისად ჩახაზული და შემოხაზული კვადრატთა პერიმეტრები p_n და P_n-ით.

როგორც ვიცით,

$$AB<AC+CB \text{ და } DE<DF+FE.$$

აქედან დავასკვნით, რომ ჩახაზული მრავალკუთხედის პერიმეტრი გვერდების გაორკეცებისას იზრდება, მაგრამ წრეწირის სიგრძეზე მუდამ ნაკლები რჩება, შემოხაზულისა კი — მცირდება, მაგრამ წრეწირის სიგრძეზე მუდამ მეტი რჩება. ასე რომ, ჩახაზული მრავალკუთხედის პერიმეტრების p_1, p_2,... p_n,... მიმდევრობა ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრული, ხოლო შემოხაზული მრავალკუთხედის პერიმეტრების P_1, P_2,..., P_n,... მიმდევრობა კლებადია და ქვემოდან შემოსაზღვრული.



ნახ. 208.

ამრიგად, გვექნება პერიმეტრების შემდეგი მიმდევრობა:

$$p_1<p_2\dots<p_n<\dots$$

$$P_1>P_2>P_3>\dots>P_n>\dots$$

ვაჩვენოთ, რომ შემოხაზული და ჩახაზული მრავალკუთხედების პერიმეტრების მიმდევრობებს ერთი და იგივე ზღვარი აქვს, ე. ი.

$$\lim_{x\to\infty}p_n=\lim_{x\to\infty}P_n.$$

ჩახაზული მრავალკუთხედის აპოთემა აღვნიშნოთ a_n-ით, შემოხაზული მრავალკუთხედის აპოთემა ეტოლება წრეწირის R რადიუსს. თუ გავითვალისწინებთ ცნობილ თეორემას მსგავსი მრავალკუთხედების პერიმეტრებსა და აპოთემების შეფარდების შესახებ, დავწერთ:

$$\frac{p_n}{P_n}=\frac{a_n}{R}.$$

გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $n\to\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{P_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{R},$$

ანუ

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} p_n}{\lim\limits_{n\to\infty} P_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} R};$$

მაგრამ $\lim\limits_{n\to\infty} R=R$ (მუდმივის ზღვარი თვით მუდმივის ტოლია) და $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=R$ (როცა ჩახაზული მრავალკუთხედის გვერდების რიცხვი უსასრულოდ ორკეცდება, მაშინ აპოთემა $a_n\to\infty$), ამიტომ

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} p_n}{\lim\limits_{n\to\infty} P_n}=\frac{R}{R}=1$$

და

$$\lim_{n\to\infty} p_n=\lim_{n\to\infty} P_n.$$

ამრიგად, p_n და P_n მიმდევრობებს საერთო ზღვარი აქვს.

განსაზღვრა. წრეწირის სიგრძედ მიღებულია ზღვარი, რომლისკენაც მიისწრაფვის მასში ჩახაზული და შემოხაზული წესიერი მრავალკუთხედების პერიმეტრების მიმდევრობა, როცა გვერდების რიცხვი უსასრულოდ ორკეცდება.

ე. ი. წრეწირის სიგრძეს თუ აღვნიშნავთ C-თი, დავწერთ:

$$C=\lim_{n\to\infty} p_n=\lim_{n\to\infty} P_n$$

ახლა დავამტკიცოთ დებულება: *წრეწირის სიგრძის შეფარდება თავის დიამეტრთან მუდმივი სიდიდეა.* ავიღოთ ორი წრეწირი, რომელთა რადიუსებია R და r. ჩავხაზოთ მათში წესიერი მრავალკუთხედები. აღვნიშნოთ ამ მრავალკუთხედების პერიმეტრები შესაბამისად p_n და P_n-ით. წრეწირთა სიგრძეები იყოს შესაბამისად C და c. თუ გავითვალისწინებთ გეომეტრიიდან ცნობილ დებულებას წესიერი ერთსახელა მრავალკუთხედების პერიმეტრებსა და მათზე შემოწერილი წრეწირის რადიუსებს შორის დამოკიდებულების შესახებ, დავწერთ:

$$\frac{P_n}{p_n}=\frac{R}{r} \qquad (1)$$

ჩახაზული მრავალკუთხედების გვერდების უსაზღვროდ გადიდებისას მათი პერიმეტრები p_n და P_n ხდება ცვლადი სიდიდეები, ხოლო R და r რადიუსები მუდმივი რჩება.

განვიხილოთ (1) ფარდობის ორივე ნაწილის ზღვარი, როცა $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{R}{r},$$

ანუ

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} P_n}{\lim\limits_{n\to\infty} p_n} = \frac{R}{r};$$

მაგრამ, როგორც ზემოთ ვნახეთ,

$$\lim_{n\to\infty} P_n = C \quad \text{და} \quad \lim_{n\to\infty} p_n = .c$$

ამრიგად,

$$\frac{C}{c} = \frac{R}{r} \quad \text{ანუ} \quad \frac{C}{c} = \frac{2R}{2r}.$$

თუ უკანასკნელ პროპორციაში გადავანაცვლებთ შუა წევრებს, გვექნება:

$$\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r} = \text{const.}$$

ეს მუდმივი სიდიდე მიღებულია აღინიშნოს π ასოთი,

$$\frac{C}{2R} = \pi. \qquad (2)$$

საიდანაც $C = 2\pi R$.

(2) ფორმულა გამოსახავს წრეწირის სიგრძეს რადიუსის საშუალებით. π რიცხვი ირაციონალური რიცხვია, იგი გამოისახება უსასრულო არაპერიოდული ათწილადით. მისი მიახლოებითი მნიშვნელობა 0,0001 სიზუსტით უდრის 3,1416-ს. პრაქტიკული გამოთვლების დროს საკმარისია ავიღოთ $\pi = 3,14$.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

1. ვიპოვოთ წრეწირის სიგრძე, რომლის რადიუსი $R = 1,7$. ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$C = 2\pi R; \quad C = 2\pi \cdot 1,7 = 3,4 \cdot 3,14 \approx 10,676 \text{ სიგრძის ერთეული.}$$

2. ვიპოვოთ წრეწირის სიგრძე, რომლის დიამეტრი უდრის a-ს;

$$C = 2\pi \cdot \frac{a}{2} = \pi a;$$

§ 101. წრეწირის რკალის სიგრძე

როგორც ვიცით, R-რადიუსიანი წრეწირის სიგრძე გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$C = 2\pi R.$$

ცხადია, ამ წრეწირის 1°-იანი რკალის სიგრძე იქნება

$$\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180},$$

ხოლო n°-იანი რკალის სიგრძე იქნება

$$\frac{\pi R n}{180}.$$

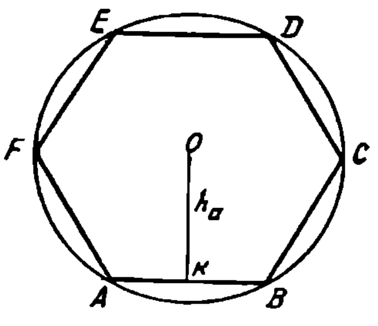
თუ n°-იანი რკალის სიგრძეს l-ით აღვნიშნავთ, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$l=\frac{\pi R n}{180}$$

§ 102. წრის ფართობი

განსაზღვრა. წრის ფართობად მიღებულია ზღვარი, რომლისკენაც მიისწრაფვის მასში ჩახაზული ან მასზე შემოხაზული წესიერი მრავალკუთხედის ფართობი, როცა გვერდების რიცხვი უსასრულოდ ორკეცდება.

ჩავხაზოთ R-რადიუსიან წრეში წესიერი მრავალკუთხედი. როგორც გეომეტრიიდან ვიცით, წესიერი მრავალკუთხედის ფართობი უდრის პერიმეტრისა და აპოთემის ნამრავლის ნახევარს.



ნახ. 209.

აღვნიშნოთ აღებული მრავალკუთხედის ფართობი, პერიმეტრი და აპოთემა, შესაბამისად S_n, P_n და a_n-ით, გვექნება

$$S_n=\frac{1}{2}P_n a_n. \qquad (1)$$

თუ მრავალკუთხედის გვერდების რიცხვს უსასრულოდ გავაორკეცებთ, მაშინ S_n, P_n და a_n სიდიდეები ცვლადი გახდება. გადავიდეთ (1) ტოლობაში ზღვარზე, როცა $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} P_n \lim_{n\to\infty} a_o. \qquad (2)$$

მაგრამ, როგორც ვიცით,

$$\lim_{n\to\infty} P_n=C \quad \lim_{n\to\infty} a_n=R \qquad \text{(წრეწირის სიგრძეა).}$$

განსაზღვრის თანახმად $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ წარმოადგენს წრის ფართობს.

აღვნიშნოთ იგი k-თი, ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty} S_n=k.$$

თუ გავითვალისწინებთ ყოველივე ამას, (2) ტოლობა გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$k=\frac{1}{2}CR; \quad C=2\pi R.$$

ამიტომ

$$k = \frac{1}{2} \quad 2\pi R \cdot R = \pi R^2. \quad k=\pi R^2. \tag{3}$$

თუ რადიუსს შევცვლით $\frac{D}{2}$ -ით, გვექნება:

$$k = \frac{\pi D^2}{4}; \tag{4}$$

(3) და (4) ფორმულებით გამოითვლება R-რადიუსიანი წრის ფართობი.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი

1. გამოვიანგარიშოთ წრის ფართობი, რომლის რადიუსი $R=0{,}7\ \sqrt{2}$;

$$S=\pi R^2=\pi \cdot 2.0{,}49=0{,}98\pi \text{ კვ. ერთ.}$$

2. გამოვიანგარიშოთ წრის ფართობი, რომლის რადიუსი $R=a\sqrt{6}$:

$$S=\pi R^2=\pi \cdot a^2 \cdot b=\pi a^2 b.$$

შ ე დ ე გ ი. ორი წრის ფართობები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც მათი რადიუსების ან დიამეტრების კვადრატები.

ვთქვათ, მოცემულია ორი წრე, რომელთა რადიუსები ან დიამეტრებია R_1 და R_2 ან D_1 და D_2.

პირველი წრის ფართობი

$$k_1=\pi R^2, \quad \text{ანუ} \quad k_1=\pi \frac{D_1^2}{4},$$

მეორე წრის ფართობი

$$k_2=\pi \cdot R_2^2 \quad \text{ანუ} \quad k_2=\frac{\pi D_2^2}{4};$$

თუ მოვახდენთ წევრ-წევრად გაყოფას, გვექნება:

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2}=\frac{R_1^2}{R_2^2}; \quad \text{ანუ} \quad \frac{k_1}{k_2}=\frac{\pi D_1^2}{4}:\frac{\pi D_2^2}{4}=\frac{D_1^2}{D_2^2};$$

ამრიგად,

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{D_1^2}{D_2} \quad \text{ან} \quad \frac{k_1}{k_2}=\frac{D_1^2}{D_2^2};$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო. 1) იპოვეთ წრის ფართობი თუ ა) $R=0.3$; ბ) $R=0{,}2\sqrt{5}$; გ) $R=2\sqrt{2}$.

§ 103. სექტორის ფართობი

1°-იანი რკალის შემცველი სექტორის ფართობი იქნება $\frac{\pi R^2}{360}$, ხოლო n°-ისა— $\frac{\pi R^2 n}{360}$.

ამრიგად,

$$S_{\text{სექ.}}=\frac{\pi R^2 n}{360}.$$

მარჯვენა ნაწილი ამ ტოლობისა წარმოავადგინოთ ნამრავლად.

$$\frac{\pi R^n}{180}\cdot\frac{R}{2}.$$

მაგრამ $\frac{\pi R_n}{180}$ არის $n°$-იანი რკალის e სიგრძე, ამიტომ სექტორის ფართობისათვის მივიღებთ ფორმულას:

$$S_{\text{სექ}}=e\cdot\frac{R}{2}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. იპოვეთ 11°-იანი რკალის შემცველი a რადიუსიანი წრის სექტორის ფართობი.

$$S_{\text{სექტ.}}=\frac{\pi\cdot a\cdot 11}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{11\pi a^2}{2}.$$

§ 184. უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამის ფორმულა

ჩვენ გამოყვანილი გვქონდა გეომეტრიული პროგრესიისჯამისფორმულა, როცა პროგრესიის მნიშვნელი $|q|<1$, სადაც წევრთა რიცხვი იყო სასრული:

$$S_n=\frac{a-aq^{n-1}}{1-q}.$$

უკანასკნელი ჯამი წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$S_n=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^{n-1}}{1-q}. \qquad (1)$$

როცა პროგრესიის წევრთა რიცხვი უსასრულოდ იზრდება, მაშინ პროგრესი უსასრულოდ კლებადია.

გადავიდეთ (1) ტოლობაში ზღვარზე, როცა $n\to\infty$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-q}-\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-q}\cdot q^{n-1}.}$$

$\frac{a}{1-q}$ წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს, ამიტომ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{1-q}=\frac{a}{1-q}$;

ხოლო $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n-1}=0$ (რადგან $q<1$).

ზღვარი $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ მიღებულია უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამად. აღვნიშნოთ იგი S-ით, გვექნება:

$$S=\frac{a}{1-q}-\frac{a}{1-q}\cdot 0=\frac{a}{1-q};$$

ამრიგად,

$$S=\frac{a}{1-q};$$

ს ა ვ ა ო ჯ ი შ ო ე ბ ი. იპოვეთ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი;

1. $3, \ -1, \ \frac{1}{3}, \ -\frac{1}{2}$; პას. $\frac{4}{4}$.

2. $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}, \ 1, \ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; პას. $\frac{5+8\sqrt{3}}{2}$.

§ 196. $\frac{\sin x}{x}$ ფარდობის ზღვარი, როცა $x \to 0$

ამ მაგალითში შეუძლებელია გამოყენებული იქნას დებულება ფარდობის ზღვრის შესახებ, რადგან $x \to 0$, მასთან, ზღვრის გამოთვლის მიზნით არც რაიმე გარდაქმნაა შესაძლებელი. ამიტომ საჭირო ხდება მივმართოთ გეომეტრიულ გზას. ავიღოთ R-რადიუსიანი წრე და კუთხე $x < \frac{\pi}{2}$; გავავლოთ AM ქორდა და AN მხები, რომელიც OM რადიუსის გაგრძელებას კვეთს N წერტილში (ნახ. 210).

ნახაზიდან ნათლად ჩანს, რომ

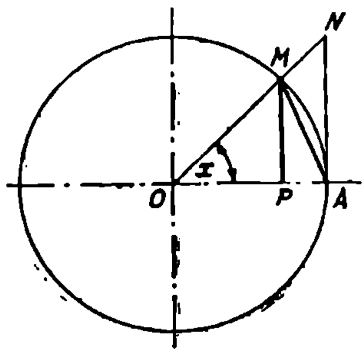
ფართ. $OMP <$ ფართ. სექ. $OAM <$
$<$ ფართ. OAN

ანუ

$$\frac{OA \cdot MP}{2} < \frac{OA \cdot \breve{AM}}{2} < \frac{OA \cdot AN}{2}.$$

თუ მიღებულ უტოლობას შევკვეცავთ, მივიღებთ:

$$MP < \breve{AM} < AN.$$



ნახ. 210.

გავყოთ ყველა წევრი R-ზე:

$$\frac{MP}{R} < \frac{AM}{R} < \frac{AN}{R};$$

მაგრამ

$$\frac{MP}{R} = \sin x, \qquad \frac{AM}{R} = x \ \text{და} \ \frac{AN}{R} = \operatorname{tg} x,$$

ამიტომ გვექნება:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

უტოლობის ორივე ნაწილის $\sin x$-ზე გაყოფით უტოლობის აზრი არ შეიცვლება. რადგან $\sin x > 0$,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

ანუ

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

მაგრამ, როცა $x \to 0$, მაშინ $\cos x \to 1$,
ამიტომ ზღვართა შესახებ ცნობილი დებულების ძალით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

§ 108. ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეები

განსაზღვრა. **უსასრულო მცირეებს ტოლფასი ანუ ეკვივალენტური ეწოდება, თუ მათი ფარდობის ზღვარი ერთის ტოლია.**

ჩვენ განვიხილეთ $\sin x$ და x ორი უსასრულო მცირის ფარდობის ზღვარი, რომელიც 1-ის ტოლი აღმოჩნდა. ამიტომ, როცა $x \to 0$, $\sin x$ და x ტოლფასი უსასრულო მცირეები იქნება.

ტოლფასი უსასრულოდ მცირეებია, მაგალითად, $\operatorname{tg} x$ და x, როცა $x \to 0$. მართლაც,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

მაგალითები

1. ვიპოვოთ $\lim \dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$

ამოხსნა. როგორც ვიცით, $\sin x$ და x, როცა $x \to 0$, ტოლფასი უსასრულოდ მცირეებია, ამიტომ აღებულ მაგალითში $\sin \dfrac{x}{2}$ შეიძლება შევცვალოთ $\dfrac{x}{2}$ არგუმენტით:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{4x^2} = \lim \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

2. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

ამოხსნა: როცა $x \to 0$, მაშინ $ax \to 0$ და $bx \to 0$, ამიტომ $\sin a x$ და $\sin bx$ უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია. თუ $\sin a x$ და $\sin bx$-ის შევცვლით მათი ეკვივალენტური ax და bx უსასრულო მცირეებით, გვექნება:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \to 0} \frac{a x}{b x} = \lim \frac{a}{b} = \frac{a}{b};$$

სავარჯიშო

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x}$; 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\cos x}$ 3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$; 4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{sim}\, \frac{x}{2}}{2}$; 5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{6x}$; 7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$; 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\lg x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x$; 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\sin x}{x^2}$; 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos x}{x}$.

§ 197. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ გამოსახულების ზღვარი, როცა $n\to\infty$

მათემატიკური ანალიზის კურსში მტკიცდება, რომ არსებობს $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ გამოსახულების ზღვარი და, მასთან, ის 2-ზე მეტია და სამზე ნაკლები. ეს ზღვარი გამოისახება უსასრულო არაპერიოდული ათწილადით.

გამოთქმული აზრის ნათელსაყოფად შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი:

n	1	2		4	5		10	100
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2,25	2,37	2,44	2,49		2,59	2,705

ცხრილიდან ჩანს, რომ n-ის ზრდასთან ერთად $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ გამოსახულებაც იზრდება, მხოლოდ გაცილებით უფრო ნელა, ვიდრე n. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ გამოსახულების ზღვარი, როცა $n\to 0$, მიახლოებით $\dfrac{1}{100000}$-მდე სიზუსტით, ტოლია 2,71828-ისა. მიღებულია ეს ზღვარი აღინიშნოს e ასოთი. ასე რომ,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\approx 2{,}71828.$$

e რიცხვს აქვს მეტად დიდი გამოყენება, როგორც თვით მათემატიკაში, ისე მთელ რიგ სხვა დარგებშიც.

უმაღლეს მათემატიკაში e რიცხვი მიღებულია ლოგარითმების ფუძედ. ლოგარითმებს, რომელშიც ფუძედ მიღებულია e რიცხვი, ნატურალური ლოგარითმები ეწოდება. ნატურალური ლოგარითმების აღსანიშნავად იხმარება სიმბოლო „ln".

ერთი და იგივე რიცხვის ნატურალური და ათობითი ლოგარითმები ერთმანეთთან გარკვეულ კავშირშია. ამ კავშირის დადგენის მიზნით ავიღოთ რიცხვი N. ვთქვათ, x და y შესაბამისად იყოს ამ რიცხვის ათობითი და ნატურალური ლოგარითმი (ნატურალურ ლოგარითმებს აგრეთვე ნეპერის ლოგარითმებს უწოდებენ) ასე რომ:

$$N=10^x \quad (\lg N=x),$$
$$N=e^y \quad (\ln N=y).$$

საიდანაც დავწერთ:

$$10^x=e^y.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი გავალოგარითმოთ ათის ფუძით:

$$x \lg 10 = y \lg e.$$

$$x = y \cdot \lg e,$$

საიდანაც

$$y = \frac{x}{\lg e}.$$

თუ x-სა და y-ს შევცვლით მათი მნიშვნელობებით: $x = \lg N$ და $y = \ln N$, მაშინ მივიღებთ:

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e};$$

ამრიგად, N რიცხვის ნატურალური ლოგარითმის მისაღებად საკმარისია ამ რიცხვის ათობითი ლოგარითმი გავამრავლოთ $\frac{1}{\lg e}$ გამოსახულებაზე.

$\frac{1}{\lg e}$ გამოსახულებას ათობითი ლოგარითმიდან ნატურალურ ლოგარითმზე გადასვლის **მოდული** ეწოდება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი

1. ვიპოვოთ $\ln 2$.

$\ln 2 = \frac{\lg 2}{\lg e}$ ცხრილიდან ვიპოვოთ $\lg e = 0,4393$, ხოლო $\frac{1}{e} \approx 2,303$.

ამიტომ

$$\ln 2 = 0,3010 \cdot 2,303 \approx 0,693.$$

§ 198. რიცხვთან დაკავშირებული ზღვრები

1. ვიპოვოთ $\lim\limits_{n\to 0}\left(1+\frac{a}{m}\right)^m$

აღვნიშნოთ $\frac{a}{m} = \frac{1}{n}$. აქედან (როცა $m\to\infty$ მაშინ $n\to\infty$) $an = m$.

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები მოცემულ მაგალითში

$$\left(1+\frac{a}{m}\right)^m = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{an} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^a$$

ე. ი.

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{a}{m}\right)^m = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^a = e^a,$$

ამრიგად,

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{a}{m}\right)^m = e^a.$$

2. ვიპოვოთ $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{8}{m}\right)^{3m}$

აღვნიშნოთ

$$\frac{8}{m}=\frac{1}{n};\ m=8n,\ \text{როცა}\ m\to\infty,\ \text{მაშინ}\ n\to\infty.$$

გვექნება

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{8}{m}\right)^{3m}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3\cdot 8n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{24}=e^{24};$$

ამრიგად,

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{8}{m}\right)^{3m}=e^{24}.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო.

იპოვეთ შემდეგი გამოსახულებათა ზღვრები:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}$; პას. e.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{m+3}{m}\right)^{3m}$ პას. e

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x}{x^2}\right)^{x}$; პას. e^4.

თავი XVI

წარმოებული

§ 188. არგუმენტისა და ფუნქციის ნაზრდი

ვთქვათ, განიხილება $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $y=f(x)$ ფუნქცია. ავიღოთ x არგუმენტის ორი x_1 და x_2 მნიშვნელობა. სხვაობას x_2-x_1 ეწოდება x არგუმენტის ნაზრდი და იგი Δx სიმბოლოთი აღინიშნება:

$$x_2-x_1=\Delta x.$$

აქედან $x_2=x_1+\Delta x$.

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ Δx მთლიანი სიმბოლოა და არა Δ და x-ის ნამრავლი. ახლა განვსაზღვროთ ფუნქციის ნაზრდი. დავუშვათ, x არის არგუმენტის მნიშვნელობა $[a, b]$ სეგმენტში და ვთქვათ შემდეგ x ღებულობს Δx ნაზრდს, მაშინ, ცხადია, არგუმენტის ახალი მნიშვნელობა იქნება $x+\Delta x$, ხოლო ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები $f(x+\Delta x)$ და $f(x)$. სხვაობას $f(x+\Delta x)-f(x)$ ეწოდება ფუნქციის ნაზრდი და აღინიშნება Δy სიმბოლოთი:

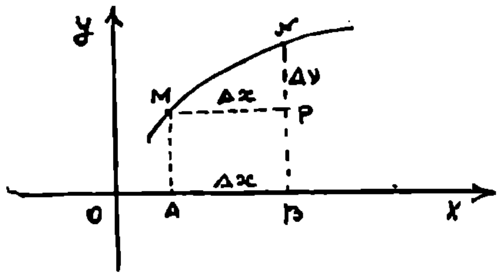
ამრიგად:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

არგუმენტისა და ფუნქციის ნაზრდის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია მოცემულია 211-ე ნახაზზე, ავხსნათ იგი.

ვთქვათ, არგუმენტის x-ს მნიშვნელობას ეთანადება ox ღერძზე A წერტილი, მაშინ ცხადია, AM ორდინატი იქნება $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა A წერტილში. ახლა თუ x არგუმენტს მივანიჭებთ Δx ნაზრდს, მაშინ არგუმენტის ახალი მნიშვნელობა იქნება $x+\Delta x$, ხოლო $x=B$ წერტილი კი მისი შესაბამისი წერტილი ox ღერძზე. ცხადია, AB მონაკვეთის სიდიდე იქნება Δx. BN მონაკვეთი გვიჩვენებს არგუმენტის ახალი $x+\Delta x$ მნიშვნელობის შესაბამისი ორდინატის სიდიდეს ე. ი. $f(x+\Delta x)$. ამრიგად,

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$



ნახ. 211.

იქნება ფუნქციის ნაზრდი. M წერტილზე თუ გავატარებთ ox ღერძის პარალელურ წრფეს, მაშინ მივიღებთ $MABP$ მართკუთხედს, რადგანაც $MA=BP$, ამიტომ

$$\Delta y = NP.$$

როგორც ვხედავთ, x არგუმენტის ნაზრდი გამოისახება AB მონაკვეთით, ხოლო ფუნქციის ნაზრდი NP მონაკვეთით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ, განიხილება $y=2x^2+3$ ფუნქცია და აღებულია არგუმენტის ორი მნიშვნელობა: $x_1=3$ და $x_2=3{,}01$, მაშინ

$$\Delta x=3{,}01-3=0{,}01.$$

ფუნქციის საწყისი მნიშვნელობა იქნება $y_1=2\cdot 3^2+3=21$, ფუნქციის შეცვლილი მნიშვნელობა $y_2=2\cdot 3{,}01^2+3=21{,}1202$.

ამრიგად, $\Delta y=y_2-y_1=21{,}1202-21=0{,}1202$.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო.

1. მოცემულია $y=x+1$ ფუნქცია. იპოვეთ მისი ნაზრდი თუ x გადადის:

ა) 2-დან 2,2-ზე, ბ) 0,3-დან 0,5-ზე, გ) 4-დან 4,03.

2. იპოვეთ $y=3x^2+1$ ფუნქციის ნაზრდი, თუ x გადადის

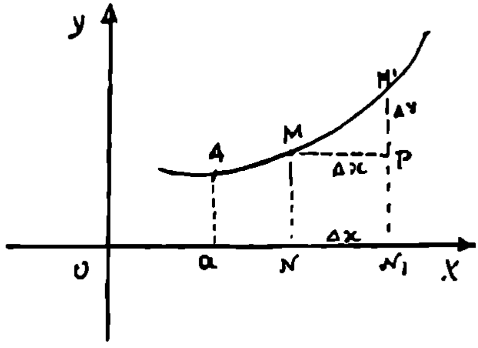
ა) 1-დან 1,3-ზე. ბ) 0,5-დან 0,2-ზე. გ) 0-დან 0,01 დ) 0-დან $a+0{,}1$-ზე.

2. იპოვეთ კვადრატის ფართობის ცვლილება, თუ მისი x გვერდი იცვლება $x+\Delta x$-ით.

§ 200. ფუნქციის უწყვეტობა

ვთქვათ, AB რკალი წარმოადგენს $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს. (ნახ. 212). ავიღოთ AB რკალზე ნებისმიერი $M(x;\ y)$ წერტილი და x არგუმენტს მივეცეთ $NN_1=\Delta x$ ნაზრდი, მაშინ y მიიღებს სათანადო $PM_1=\Delta y$ ნაზრდს. დავუშვათ, $\Delta x\to 0$

და მასთან $\Delta y \to 0$ ანუ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. თუ დავაკვირდებით, ადვილად შევნიშნავთ, რომ, როცა $\Delta x \to 0$, მაშინ M_1N_1 ორდინატი უსაზღვროდ უახლოვდება MN ორდინატს, ხოლო წერტილი M_1 წერტილი M-ს. ეს იმას ნიშნავს, რომ AB რკალზე მოიძებნება წერტილი, რომელიც რაგინდ ახლოს იქნება M წერტილთან; ასეთ შემთხვევაში იტყვიან, რომ $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x-ის მოცემული მნიშვნელობისათვის.



ნახ. 212.

განსაზღვრა. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x არგუმენტის მოცემული მნიშვნელობისათვის, თუ x-ის უსასრულოდ მცირე Δx ნაზრდს ეთანადება y-ის უსასრულოდ მცირე Δy ნაზრდი.

ე. ი.

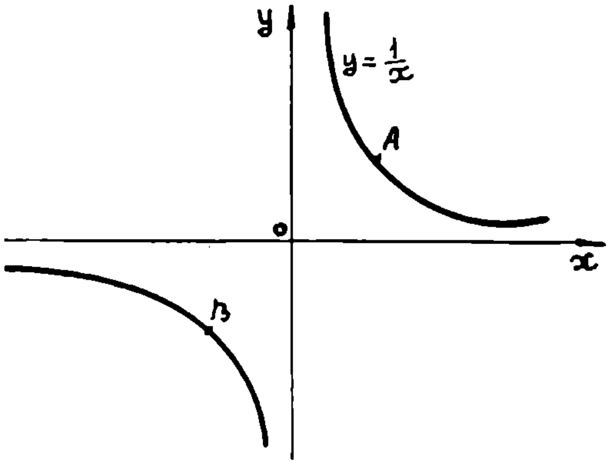
$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (1)$$

თუ $[a; b]$ სეგმენტის ყველა წერტილზე დაცულია აღნიშნული პირობა, მაშინ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $[a; b]$ სეგმენტზე. ცხადია, უწყვეტი $y=f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკი (AB რკალი) შეიძლება დაიხაზოს ფანქრის უწყვეტი მოძრაობით ქაღალდზე, ე. ი. ქაღალდიდან ფანქრის აუღებლად.

ახლა განვიხილოთ ფუნქცია $y=\dfrac{1}{x}$. როგორც ვიცით, ამ ფუნქციის გრაფიკი არის ტოლფერდა ჰიპერბოლა, რომელიც ორი შტოსაგან შედგება. ცხადია, ქაღალდზე ფანქრის უწყვეტი მოძრაობით შეიძლება დაიხაზოს ჰიპერბოლის მხოლოდ რომელიმე ერთი შტო, მაგრამ ერთ შტოზე. მაგალითად, ზედაზე გაყოლებით არ შეიძლება A წერტილიდან ფანქრის ქაღალდიდან მოუწყვეტლად გადავიდეთ მეორე შტოს B წერტილზე.

$y=\dfrac{1}{x}$ ფუნქცია უწყვეტია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა $x=0$ მნიშვნელობისა. $x=0$ წერტილზე, როგორც იტყვიან, ეს ფუნქცია განიცდის წყვეტას. აღებულ მაგალითში წყვეტის შინაარსი მდგომარეობს იმაში, რომ x არგუმენტის მარცხნიდან მარჯვნივ მოძრაობისას 0-ზე გავლით, ფუნქცია ნახტომისებურად იცვლება ∞-დან $\to\infty$-მდე. ასეთი სახის წყვეტა ახასიათებს წილად ფუნქციებს არგუმენტის იმ მნიშვნელობისათვის, სადაც მნიშვნელი იქცევა ნულად.

მაგალითად, ფუნქციას $y=\frac{5x}{x-2}$ აქვს წყვეტა, როცა $x=2$. ფუნქციას $y=\frac{3}{x^2-9}$ აქვს წყვეტა, როცა $x_1=3$ და $x_2=-3$ და ა. შ.



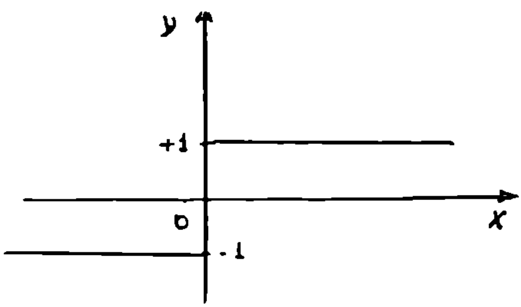
ნახ. 213.

არსებობს ისეთი სახის წყვეტაც, სადაც რომელიმე მნიშვნელობაზე გავლით არგუმენტის ერთი მნიშვნელობიდან მეორეზე გადასვლისას ფუნქცია ერთი სასრული მნიშვნელობიდან ნახტომისებურად გადადის მეორე სასრულო მნიშვნელობაზე, ასეთი სახის წყვეტას პირველი გვარის წყვეტა ეწოდება. მოვიყვანოთ ასეთი წყვეტის მაგალითი.

ავიღოთ ფუნქცია

$$y=\begin{cases}+1, & \text{თუ } x\geqslant 0,\\ -1, & \text{თუ } x<0.\end{cases}$$

აღებულ მაგალითში, როცა არგუმენტი 0-ზე გავლით გადადის ერთი მნიშვნელობიდან მეორეზე, ფუნქცია იცვლის მნიშვნელობას -1 დან $+1$-მდე (ნახ. 214).



ნახ. 214.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვიკვლიოთ უწყვეტობაზე $y=x^3$ ფუნქცია.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^3$$

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-x^3=3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3.$$

განვიხილოთ Δy-ის ზღვარი, როცა $\Delta x\to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[3x^2(\Delta x)+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]=3x^2\cdot 0+3x\cdot 0^2+0^3=0$$

როგორც ვხედავთ, x არგუმენტის უსასრულოდ მცირე Δx ნაზრდს ეთანადება ფუნქციის უსასრულოდ მცირე ნაზრდი Δy, რაც ნიშნავს იმას, რომ $y=x^3$ ფუნქცია უწყვეტია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, ე. ი. მთელს რიცხვით წრფეზე. ნახაზზე გამოსახულია $y=x^3$ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც ადასტურებს ზემოთ მიღებულ შედეგს (ნახ. 215).

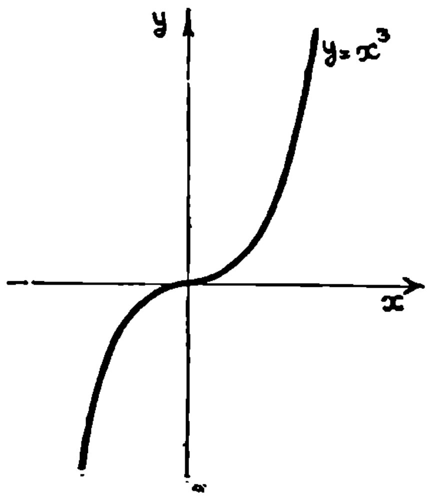
ახლა განვიხილოთ ფუნქციის უწყვეტობის განსაზღვრა, რომელიც მტკიცედ უკავშირდება ზემოთ მოცემულს.

დავწეროთ $y=f(x)$ ფუნქციის ნაზრდის მნიშვნელობა, როცა x არგუმენტი იცვლება $x=x_0$-დან $x=x_0+\Delta x$. ცხადია, გვექნება:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

თუ მოცემული ფუნქცია უწყვეტია $x=x_0$ წერტილზე, მაშინ (1) ტოლობაში Δy-ის მიღებული მნიშვნელობის ჩასმით გვექნება:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$



ნახ. 215.

მაგრამ

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)-\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0)=0.$$

ანუ

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=\lim_{\Delta x_0\to 0}f(x_0).$$

მაგრამ $f(x_0)$ მუდმივი სიდიდეა, ამიტომ

$$\lim_{x\to x_0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0), \qquad (2)$$

თუ $x_0+\Delta x=x$, მაშინ პირობიდან $\Delta x\to 0$ გამომდინარეობს: $x\to x_0$ ხოლო (2) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \qquad (3)$$

ამრიგად, (1) ტოლობიდან გამომდინარეობს (3). შეიძლება ვუჩვენოთ პირიქით— (3) გამომდინარეობს (1)-დან..

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ $y=f(x)$ ფუნქციას

ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილში, თუ $f(x_0)$ სასრულოა და x_0 წერტილში ფუნქციის ზღვარი და ფუნქციის მნიშვნელობა თანატოლია.

ე. ი. ყოველი რაგინდ მცირე დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, როცა $|x-x_0|<\eta$.

გავაშუქოთ გეომეტრიულად $y=f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის საკითხი $x=x_0$ წერტილზე.

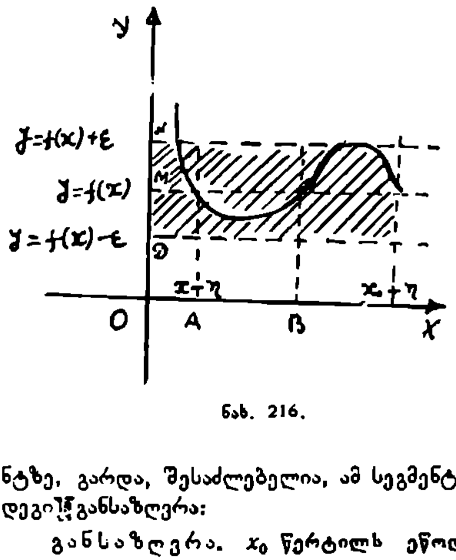
როგორც ვიცით, $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი XOY სისტემის მიმართ გამოისახება გარკვეული წირით. თუ $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, მაშინ, როგორც ზემოდ გვქონდა აღნიშნული, ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\eta>0$ რიცხვი, რომ x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$x_0-\eta<x<x_0+\eta,$$

მართებულია უტოლობები:

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon.$$

ახლა OX ღერძზე თუ ავიღებთ x წერტილს, η მიდამოს, მაშინ OY ღერძზე გვექნება შესაბამისად $y=f(x_0)$-ის ε მიდამო $f(x_0)+\varepsilon$ და $f(x_0)-\varepsilon$, ახლა თუ გავატარებთ OX ღერძის პარალელურ წრფეებს D და N წერტილებზე (ნახ. 216), მაშინ მივიღებთ ზოლს, რომლის სიგანეა 2ε, რადგან $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, ამიტომ OX ღერძზე ყოველთვის იარსებებს x_0 წერტილის შემცველი $|x_0-\eta, x_0+\eta|$ მიდამო, რომ $y=f(x)$ წირის ყველა წერტილი, რომელთა აბსცისები აღებულია ამ მიდამოდან მოთავსდება დაშტრიხულ ზოლში.



ნახ. 216.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ ის უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილზე.

ახლა ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b)$ სეგმენტზე, გარდა, შესაძლებელია, ამ სეგმენტის $x=x_0$ წერტილისა, შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრა:

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი, თუ შესრულებულია ერთ-ერთი შემდეგი პირობებიდან:

ა) x_0 წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არაა;

ბ) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ არ არსებობს;

გ) x_0 წერტილში ფუნქცია განსაზღვრულია, არსებობს $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, მაგრამ

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0);$$

ე. ი. ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილზე არ უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას ამ წერტილზე.

განსაზღვრა. ფუნქციას, რომელსაც $[a, b]$ სეგმენტზე აქვს წყვეტის რაიმე x_0 წერტილი, ამ სეგმენტზე წყვეტილი ფუნქცია ეწოდება.

§ 201. უწყვეტ ფუნქციათა ძირითადი თვისებები

აქ მოვიყვანთ უწყვეტ ფუნქციათა ძირითად თვისებებს დამტკიცების გარეშე.

1. უწყვეტი ფუნქციის მუდმივ რიცხვზე ნამრავლი კვლავ უწყვეტი ფუნქციაა, ე. ი. თუ $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ $f(x)\cdot A=\varphi(x)$ კვლავ უწყვეტი იქნება.

2. უწყვეტ ფუნქციათა სასრული რიცხვის ალგებრული ჯამი უწყვეტი ფუნქციაა.

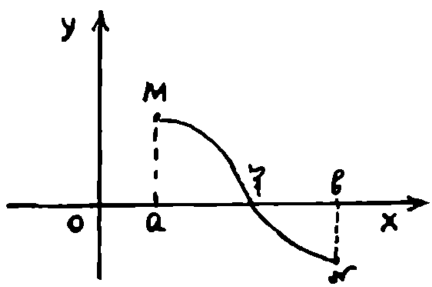
3. უწყვეტ ფუნქციათა სასრული რიცხვის ნამრავლი უწყვეტი ფუნქციაა.

4. უწყვეტ ფუნქციათა შეფარდება უწყვეტია ყველა წერტილებში, სადაც მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისაგან.

5. თეორემა (ბოლცანო)* თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტის ბოლო წერტილებზე ფუნქციას აქვს საწინააღმდეგო ნიშნები ($f(a)$ და $f(b)$ სხვადასხვა ნიშნები აქვთ), მაშინ $[a, b]$ სეგმენტის შიგნით იარსებებს ერთი ისეთი წერტილი მაინც, რომელზედაც $f(x)$ ფუნქცია ნულის ტოლი ხდება, ე. ი. $f(\xi)=0$.

სხვა სიტყვით რომ ვთქვათ, უწყვეტ ფუნქციას ნიშნის შეცვლა შეუძლია მხოლოდ 0 მნიშვნელობის გავლით.

217 ნახაზზე ნაჩვენებია ბოლცანოს თეორემის გეომეტრიული შინაარსი.



ნახ. 217.

6. თეორემა (კოში)**

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და სეგმენტის ბოლოებზე მას სხვადასხვა მნიშვნელობა აქვს, ე. ი. $f(a)\neq f(b)$, მაშინ ეს ფუნქცია მიიღებს ყველა მნიშვნელობებს $f(a)$ და $f(b)$-ს შორის.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი.

გამოიკვლიეთ უწყვეტობა შემდეგი ფუნქციებისა:

1. $y=2x$
2. $y=x^2-3$.
3. $y=x-2x^2$
4. $y=\sin x$;
5. $y=\cos x$.

უჩვენეთ შემდეგი ფუნქციების წყვეტის წერტილები:

1) $y=\frac{1}{1-x}$; 2) $y=\frac{x}{x-2}$; 3) $y=\frac{2x}{x+1}$; 4) $y=\operatorname{tg} x$;

* ბოლცანო—ნორვეგიელი მათემატიკოსი.

** კ ო შ ი — ცნობილი ფრანგი მათემატიკოსი.

ფუნქციის წარმოებული. გაწარმოების ძირითადი წესები.

§ 202. არათანაბარი მოძრაობა, მისი საშუალო სიჩქარე და სიჩქარე მოცემულ მომენტში

სხეული როცა თანაბარი სიჩქარით მოძრაობს, მაშინ ის გადის დროის ტოლ შუალედებში ტოლ მანძილებს, ამიტომ თანაბარი მოძრაობისას სხეულის სიჩქარე

$$v=\frac{s}{t}.$$

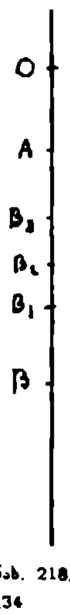
გარდა თანაბარი მოძრაობისა, პრაქტიკაში ხშირად გვაქვს საქმე არათანაბარ მოძრაობასთან. სხეული, რომელიც არათანაბრად მოძრაობს, ცხადია, დროის სხვა და სხვა მომენტში სხვა და სხვა გზას გაივლის. ამიტომ არათანაბარი მოძრაობა თანაბრისაგან განსხვავებით მთლიანად ვერ დახასიათდება დროის რომელიმე ერთეულში გავლილი გზის სიგრძით.

არათანაბარი მოძრაობა ხასიათდება ე. წ. საშუალო სიჩქარით დროის გარკვეულ შუალედში.

სადგურიდან გასვლის მომენტში მატარებელი ნელა მოძრაობს, ის ნელნელა უმატებს სიჩქარეს. ყოველ მომდევნო წუთში განავითარებს რა გარკვეულ სიჩქარეს, შემდეგ იგი მოძრაობს თანაბარი სიჩქარით მომდევნო გაჩერების ადგილას მიახლოებისას, მატარებელი ანელებს სიჩქარეს, ყოველ მომდევნო წუთში მატარებლის სიჩქარე სულ უფრო მცირდება და ბოლოს ის ჩერდება. იგივე ითქმის ავტომანქანაზე, გემზე და ა. შ.

ვთქვათ, მატარებელმა ხუთ საათში დაფარა მანძილი A და B ქალაქებს შორის არსებული 350 კმ. მანძილი, მაშინ მატარებლის საშუალო სიჩქარე

$$v_{საშ}=\frac{350}{5}\text{ კმ/სთ}=70\text{ კმ/სთ}.$$



ცხადია, ეს სრულებით არ ნიშნავს იმას, რომ მატარებელი ყოველ საათში თითქოს 70 კმ-ს გადიოდეს, მოძრაობის პირველ საათში, ე. ი. როცა მატარებელი სიჩქარეს ავითარებს, გაივლის ნაკლებს, ვიდრე 70 კმ-ს. მაგრამ მომდევნო საათში კი გაივლის 70 კმ-ზე უფრო მეტს, ხოლო ბოლოს გაჩერების წინ კვლავ ანელებს სიჩქარე, და გაივლის საათში 70 კმ-ზე ნაკლებს და ა. შ. ეს მაგალითი ნათლად გვიჩვენებს რომ საშუალო სიჩქარე ვერ გამოდგება არათანაბარი მოძრაობის სრული დახასიათებისათვის.

საშუალო სიჩქარე მით უფრო სრულყოფილად დაახასიათებს არათანაბარ მოძრაობას, რაც უფრო მცირეა გზის ის უბანი, რომელზეც განსაზღვრულია ეს სიჩქარე. როგორც ფიზიკიდან ვიცით, თავისუფლად ვარდნილი სხეულის მოძრაობა არის არათანაბარი მოძრაობა, ის გამოისახება შემდეგი კანონით:

ვთქვათ, ვარდნის დასაწყის ში სხეული იმყოფებოდა O წერტილში (ნახ. 218) t დროის შემდეგ ის მიაღწევს A წერტილს, ამასობაში გაივლის გზას, რომელიც ტოლი იქნება:

ნახ. 218.

$$S_1=4,9\,t^2.$$

დროის მომდევნო $t+\Delta t$ მომენტში ის მიაღწევს B წერტილს და გავლილი ექნება გზა: $S_2=4{,}9(t+\Delta t)^2$.

Δt დროის განმავლობაში გავლილი მონაკვეთი

$$AB=S_2-S_1=4{,}9(t+\Delta t)^2-4{,}9t^2=4{,}9t^2+9{,}8t\cdot\Delta t+4{,}9(\Delta t)^2-4{,}9t^2=$$
$$=9{,}8t\cdot\Delta t+4{,}9(\Delta t)^2.$$

თუ გავლილ მანძილს $\Delta S=S_2-S_1$ გავყოფთ Δt დროზე, მივიღებთ

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{9{,}8t\cdot\Delta t+4{,}9\cdot(\Delta t^2)}{\Delta t}=9{,}8t+4{,}9\Delta t$$

შეფარდებას $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ ეწოდება ვარდნის საშუალო სიჩქარე, გზის $AB=\Delta S$ უბანზე.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, საშუალო სიჩქარე მით უფრო სრულად ახასიათებს მოძრაობას, რაც უფრო მცირეა იმ გზის უბანი, რომელზეც განსაზღვრულია ეს სიჩქარე. ამიტომ, ვთქვათ, სხეულის ვარდნის დროის შუალედი Δt მცირდება, მაშინ $AB=\Delta S$ გზაც შესაბამისად შემცირდება და მიიღებს მნიშვნელობებს AB AB_2, AB_3,... და ა. შ. (ნახ. 218) და Δt-ს ყოველი ახალი მნიშვნელობისათვის ფარდობა $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ სულ უფრო და უფრო ზუსტად განსაზღვრავდეს იქნება გზის სათანადო უბანზე სხეულის ვარდნის საშუალო სიჩქარეს. დავუშვათ, $\Delta t\to 0$, მაშინ, ცხადია, $t+\Delta t\to t$, ხოლო ფარდობა $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ მიისწრაფოდეს იქნება სიდიდისაკენ, რომელსაც ეწოდება სხეულის მოძრაობის მყისი სიჩქარე დროის t მომენტისათვის. თუ ამ სიჩქარეს აღვნიშნავთ v-თი, გვექნება:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (2)$$

ამრიგად, მოძრაობის მყისი სიჩქარე დროის t მომენტში ეწოდება t-დან $t+\Delta t$ მომენტამდე მოძრაობის საშუალო სიჩქარის ზღვარს, როცა Δt მიისწრაფვის ნულისაკენ.

(1) და (2) ტოლობების საშუალებით ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ ვარდნილი სხეულის სიჩქარე, დროის t მომენტისათვის:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}(9{,}8\cdot t+4{,}9\,\Delta t)=9{,}8t.$$

ამრიგად.

$$v=9{,}8t.$$

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ საშუალო სიჩქარე იმ სხეულისა, რომელიც მოძრაობს შემდეგი კანონის მიხედვით $S=2t^2$, დროის შემდეგი შუალედებისათვის:

ა) $t_1=2$-დან $t_2=4$-მდე. პას. $v_{საშ}=12$.

ბ) $t_1=6$-დან $t_2=10$-მდე. პას. $v_{საშ}=32$.

2. სხეულის მოძრაობის კანონი გამოისახება შემდეგი ფორმულით: $S=t^2+1$ იპოვეთ სხეულის საშუალო სიჩქარე დროის შემდეგი შუალედებისათვის:

ა) $t_1=2$, $t_2=3$; პას: 5. გ) $t_1=2$, $t_2=2{,}01$. პას: 4,01.

ბ) $t_1=2$, $t_2=2$, პას: 4,1. დ) $t_1=2$, $t_2=2{,}001$. პას: 4,001.

გამოთვლის შედეგები ჩაწერეთ ცხრილის სახით და მიაქციეთ ყურადღება საშუალო სიჩქარის ცვლილებას.

§ 208. ფუნქციის ცვალებადობის სიჩქარე

სიჩქარის განსაზღვრის საკითხი შეიძლება შეგვხვდეს არა მარტო სხეულის მოძრაობის შემთხვევაში, არამედ ფიზიკური შინაარსის მქონე სხვა სახის ცვლადი სიდიდის ცვალებადობის დროსაც, მაგალითად, როგორიცაა, სითხის აორთქლების სიჩქარე, რომელიმე რეაქციის სიჩქარე, სხეულის გათბობის სიჩქარე და ა. შ. ვთქვათ, ცვლადი y, რომლითაც ხასიათდება რომელიმე ცვალებადი პროცესი, არის x არგუმენტის წრფივი ფუნქცია;

$$y=kx+b$$

მაშინ ფარდობა $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ისე, როგორც თანაბარი მოძრაობის დროს, იქნება მუდმივი სიდიდე, რომელიც k-ს ტოლია, ე. ი.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=k. \tag{1}$$

მუდმივ სიდიდეს k-ს, რომელიც გვიჩვენებს წრფივი ფუნქციის ნაზრდის რამდენი ერთეული მოდის არგუმენტის ნაზრდის ერთ ერთეულზე, ეწოდება წრფივი ფუნქციის სიჩქარე ნებისმიერი x-სათვის.

თუ კი სიდიდე y წარმოადგენს სხვა სახის ფუნქციას, მაშინ ფარდობა $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ანალოგიურად არათანაბარი მოძრაობის შემთხვევისა, განსაზღვრავს y-ის ცვლილების საშუალო სიჩქარეს. არგუმენტის x-დან $x+\Delta x$-მდე ცვლილების დროს თუ $\Delta x\to 0$, მაშინ გვექნება $x+\Delta x\to x$, ასეთ შემთხვევაში ფუნქციის ცვალებადობის საშუალო სიჩქარე მიისწრაფვოდეს იქნება სიდიდისაკენ, რომელსაც ფუნქციის ცვალებადობის მყისი სიჩქარე ეწოდება მოცემული x-სათვის. თუ ამ სიჩქარეს აღვნიშნავთ v-თი, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$v=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2}$$

ამრიგად, ფუნქციის ცვალებადობის მყისი სიჩქარე მოცემული x-თვის არის მისი საშუალო სიჩქარის ზღვარი, როცა $\Delta x\to 0$. განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. ერთგვაროვანი მავთულის წონა კილოგრამებით გამოისახება შემდეგი ფორმულით: $P=0{,}5l$, სადაც l მავთულის სიგრძეა მეტრებით გამოსახული. განვსაზღვროთ მავთულის წონის, ზრდის სიჩქარე მისი სიგრძის ზრდასთან დაკავშირებით.

ა მ ო ხ ს ნ ა

ვინაიდან P წარმოადგენს l-ის მიმართ წრფივ ფუნქციას, საქმე გვექნება წონის თანაბარ ცვალებადობასთან. ცხადია, P წონის ცვალებადობის სიჩქარე სიგრძის ნებისმიერი l მნიშვნელობისათვის (1) ფორმულის ძალით იქნება::

$$\frac{\Delta P}{\Delta l}=0{,}5.$$

ეს უკანასკნელი კი გვეუბნება, რომ მავთულის სიგრძის ერთი მეტრით გადიდებისას მისი წონა 0,5 კგ-ით გადიდდება.

მაგალითი 2. სხეულის გახურებისას მისი ტემპერატურა T იცვლება გახურების t დროსთან დაკავშირებით შემდეგი კანონის მიხედვით:

$$T=0{,}4t^2.$$

როგორი სიჩქარით ხურდება სხეული იმ მომენტისათვის, როცა $t=10$ სეკ.?

ამოხსნა

მოცემული ფუნქცია მეორე ხარისხისაა და გამოსახავს არათანაბარი ცვალებადობის კანონს. ამიტომ გამოვიყენოთ (2) ფორმულა, მასთან ზღვრის მოძებნისას მოვიქცეთ, ისე როგორც ეს გავაკეთეთ ვარდნილი სხეულის სიჩქარის განსაზღვრისას.

იმ მომენტში, როცა $t=10$, სხეულის ტემპერატურა $T_1=0{,}4\cdot 10^2=40$.

იმ მომენტში, როცა $t=10+\Delta t$, სხეულის ტემპერატურა $T_2=0{,}4(10+\Delta t)^2$.

თუ T_2-ს გამოვაკლებთ T_1-ს, გვექნება

$$\Delta T=T_2-T_1=0{,}4(10+\Delta t)^2-40=40+8\Delta t+0{,}4(\Delta t)^2-40=8\Delta t+0{,}4(\Delta t)^2.$$

საიდანაც

$$\frac{\Delta T}{\Delta t}=8+0{,}4\cdot\Delta t;$$

ფარდობა $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ გამოსახავს სხეულის გახურების საშუალო სიჩქარეს $t=10$ სეკუნდიდან $t=10+\Delta t$ სეკუნდამდე. რომ მოვნახოთ სხეულის გახურების სიჩქარე $t=10$ სეკ. მომენტისათვის, საჭიროა ვიპოვოთ სხეულის გახურების საშუალო სიჩქარის ზღვარი პირობებში, როცა $\Delta t\to 0$, გვექნება:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t}=\lim_{\Delta t=0}(8+0{,}4\,\Delta t)=8;$$

ამრიგად, $t=10$ სეკ. მომენტისათვის სხეული ხურდება დროის ერთეულში 8°-ით. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ $t=10$ სეკ. მომენტამდე სხეული ხურდებოდა თანაბრად, $t=10$ მომენტიდან დაწყებული დროის ყოველ ტოლ მონაკვეთში მისი ტემპერატურა გაიზრდება 8°-ით.

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ $y=2x$ ფუნქციის ცვალებადობის სიჩქარე ნებისმიერი x-სათვის. პას. $=2$.
2. გაზის მოცულობა V, t ტემპერატურის დროს განისაზღვრება ფორმულით

$$V=1+0{,}0075t.$$

განსაზღვრეთ გაზის მოცულობითი გაფართოების სიჩქარე ნებისმიერი ტემპერატურის დროს. პას. 0,0075.

3. იპოვეთ ფუნქციის $y=x^2$-ის ცვალებადობის სიჩქარე

ა) $x=1$, ბ) $x=3$ მნიშვნელობისათვის.

4. დენის ძალა, გამოსახული ამპერებით, იცვლება დროისაგან დამოკიდებულად შემდეგი კანონის მიხედვით $I=0,2t^2$, სადაც t არის დრო, გამოსახული წამებით. იპოვეთ დენის ძალის ცვლილების სიჩქარე $t=4$ სეკუნდის ბოლოს. პას: 1,6.

§ 204. ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ, განიხილება ნებისმიერი $y=f(x)$ ფუნქცია. ცხადია, როცა x არგუმენტის ფიქსირებული მნიშვნელობაა x_0, მაშინ მოცემული ფუნქცია მიიღებს $f(x_0)$-ის ტოლ მნიშვნელობას. მივცეთ არგუმენტის x_0 მნიშვნელობას Δx_0 ნაზრდი. ასე, რომ x_0-ის ნაცვლად განვიხილოთ $x_0+\Delta x_0$ მნიშვნელობა. მაშინ ცხადია, $f(x)$ ფუნქცია მიიღებს $f(x_0+\Delta x_0)$-ის ტოლ მნიშვნელობას. ახლა გამოვთვალოთ $f(x)$ ფუნქციის ნაზრდი, როცა x არგუმენტი იზრდება x_0-დან $x_0 - \Delta x_0$-მდე:

$$\Delta y_0=f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0).$$

წინა პარაგრაფიდან ვიცით, რომ შეფარდება

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0}$$

იქნება $f(x)$ ფუნქციის x_0-დან $x_0+\Delta x_0$-მდე შუალედში ცვლილების საშუალო სიჩქარე. ახლა თუ $\Delta x_0 \to 0$, მაშინ $x_0+\Delta x_0 \to x_0$ და მივიღებთ $f(x)$ ფუნქციის ცვლილების მყის სიჩქარეს $x=x_0$ წერტილისათვის. თუ აღვნიშნავთ ამ სიჩქარეს V-თი, გვექნება:

$$V_{x=x_0}=\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}=\lim\frac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0}.$$

მოცემული $f(x)$ ფუნქციისათვის ეს ზღვარი (თუ კი არსებობს) დამოკიდებულია x_0-ზე და ეწოდება $y=f(x)$ **ფუნქციის წარმოებული** $x=x_0$ წერტილში. ცხადია, x_0-ის თითოეულ მნიშვნელობას შეესაბამება $f(x)$ ფუნქციის ცვლილების მყისი სიჩქარის სათანადო მნიშვნელობა, ამიტომ ზღვარი (თუ კი იგი არსებობს)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

რომელიც იქნება $f(x)$ ფუნქციის ცვლილების მყისი სიჩქარე ნებისმიერ წერტილში, შეიძლება განხილულ იქნას, როგორც x არგუმენტის ახალი ფუნქცია. ამ ახალ ფუნქციას ეწოდება მოცემული $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული.

ამრიგად, ფუნქციის წარმოებული არის ფუნქციის ნაზრდის და არგუმენტის ნაზრდის ფარდობის ზღვარი, როდესაც არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისაკენ.

მათემატიკაში გამოიყენება $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის რამდენიმე აღნიშვნა.

1. $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში აღინიშნება შემდეგნაირად: y' ან $y'(x_0)$. x_0 რომელიც ფრჩხილშია ჩასმული, აღნიშნავს იმ წერტილს, რომელზედაც განხილულია წარმოებული. იკითხება „y პრიმ" ან „y პრიმ x ნული".

2. ზოგჯერ y'-ის ნაცვლად წერენ y'_x. ამით ხაზგასმულია, რომ წარმოებული აღებულია x ცვლადით.

3. $f'(x)$, იკითხება „ეფ პრიმ იქსით."

4. $\frac{dy}{dx}$, იკითხება „დე იგრეკ დე იქსით".

სიმბოლო y' შემოღებული იყო ლაგრანჟის* მიერ, ხოლო $\frac{dy}{dx}$ კი ლაიბნიცის** მიერ. ამრიგად, y', $f'(x)$ და $\frac{dy}{dx}$ ერთი და იმავე $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის ფორმით სხვა და სხვა, მაგრამ შინაარსით ტოლფასი აღნიშვნებია.

როგორც შემდეგში ენახავთ, მათემატიკის სხვადასხვა განყოფილებებში მოხერხებული და მიზანშეწონილია გამოყენებული იქნას წარმოებულის სხვა და სხვა აღნიშვნა.

ფუნქციის წარმოებულის განმარტებიდან გამომდინარეობს მისი მოძებნის შემდეგი წესი ანუ სქემა:

1. x არგუმენტს ვაძლევთ Δx ნაზრდს და ვეძებთ ფუნქციის ახალ მნიშვნელობას:

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x).$$

2. ფუნქციის ახალ მნიშვნელობას ვაკლებთ წინა მნიშვნელობას და ამით ვეძებთ ფუნქციის ნაზრდს Δy-ს

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

3. ვეძებთ ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან ფარდობას

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

(ეს იქნება ფუნქციის ცვლილების საშუალო სიჩქარე).

4. ვეძებთ ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისაკენ:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y', \quad \text{ან} \quad f'(x).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1. ვიპოვოთ $y=x$-ის წარმოებული.

ა მ ო ხ ს ნ ა

მივცეთ x არგუმენტს ნაზრდი Δx, მაშინ y მიიღებს Δy ნაზრდს, ასე, რომ გვექნება $y+\Delta y=x+\Delta x$.

აქედან $\Delta y=x+\Delta x-x=\Delta x$, $\Delta y=\Delta x$, ამიტომ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$.

ამრიგად, x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1.$$

---

* Lagrande (1936—1813) — გამოჩენილი ფრანგი მათემატიკოსი.

** ვილჰელმ ლაიბნიცი (1947—1716) — გამოჩენილი გერმანელი მათემატიკოსი.

მაშასადამე, იმ ფუნქციის წარმოებული, რომელიც არგუმენტის ტოლია, უდრის ერთს.

2. ვიპოვოთ $y=x^2+x$-ის წარმოებული.

ამოხსნა

$$y+\Delta x=(x+\Delta x)^2+x+\Delta x$$

$$\Delta y=(y+\Delta y)-y=(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)-(x^2+x)=$$
$$=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2+x+\Delta x-x^2-x=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2+\Delta x.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}=2x+\Delta x+1.$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim(2x+\Delta x+1)=2x+1,\quad \text{ე. ი. } (x^2+x)'=2x+1.$$

3. ვიპოვოთ $y=x^3$-ის წარმოებული.

ამოხსნა:

ცხადია, ნებისმიერი ფიქსირებული x-სათვის გვექნება

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)^3,$$

ხოლო $\Delta y=f(x+\Delta x)^3-x^3=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3,$

აქედან $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x\cdot\Delta x+\Delta x^2.$

თუ ზღვარზე გადავალთ, როცა $\Delta x\to 0$, მივიღებთ.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2.$$

ე. ი. $(x^3)'=3x^2$, მსგავსად განხილული მაგალითებისა მიიღება $y=x^n$ ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებულის ფორმულა:

$$(x^m)'=mx^{m-1}$$

სავარჯიშოები

იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა წარმოებული:

1. $y=4x.$
2. $y=-2x^3.$
3. $y=x^5.$

§ 205. კავშირი ფუნქციის წარმოებულობასა და მის უწყვეტობას შორის

თეორემა. თუ $y=f(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული x-ის რომელიმე მნიშვნელობისათვის, მაშინ ის უწყვეტი იქნება x-ის ამ მნიშვნელობისათვის.

დამტკიცება: ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x-ის რომელიმე მნიშვნელობისათვის, ე.. არსებობს წარმოებული

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

ზღვრის განმარტების თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha. \qquad (1)$$

სადაც α უსასრულოდ მცირეა Δx-თან. ერთად, ე. ი. $\alpha \to 0$, როცა $\Delta x \to 0$

(1)-დან:
$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha \Delta x.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim (y' \Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} (\alpha \cdot \Delta x) = 0.$$

ამრიგად,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

მიღებული ტოლობა გვეუბნება, რომ არგუმენტის უსასრულოდ მცირე ნაზრდს ეთანადება ფუნქციის უსასრულოდ მცირე ნაზრდი. მაგრამ, როგორც ვიცით, ეს ნიშნავს $y=f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობას არგუმენტის ამ მნიშვნელობისათვის.

უნდა შევნიშნოთ, რომ შებრუნებული დებულება ყოველთვის არაა მართებული, ვინაიდან არსებობს ისეთი სახის ფუნქციები, რომლებიც უწყვეტი არიან, მაგრამ x-ის ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის არა აქვთ წარმოებული.

მაგალითი 1. განვიხილოთ ფუნქცია $y=|x|$. ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ იმაში, რომ ამ ფუნქციას $x=0$ წერტილზე არ გააჩნია წარმოებული. მართლაც, წერტილზე ფუნქცია წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად.

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

ამრიგად,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}. \qquad (2)$$

აქ უნდა გავარჩიოთ ორი შემთხვევა. ერთი: შეიძლება Δx ისე მიისწრაფოდეს ნულისაკენ, რომ მუდამ რჩებოდეს დადებითი, მაშინ $|\Delta x| = \Delta x$ და

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1.$$

მეორე: $\Delta x \to 0$ და მასთან ყოველთვის $\Delta x < 0$, მაშინ $|\Delta x| = -\Delta x$ და

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1.$$

თუ კი (2) ფორმულაში იარსებებდა ზღვარი, მაშინ იგი არ იქნებოდა დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორ მიისწრაფვის Δx ნულისაკენ. სინამდვილეში კი ვხედავთ, რომ ეს ასე არაა. ეს უკანასკნელი კი მოწმობს, რომ (2) ფორმულაში ზღვარი არ არსებობს.

ამრიგად: $y=|x|$ ფუნქციისათვის $x=0$ წერტილში წარმოებული არ არსებობს. ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ყველა დანარჩენ წერტილში $y=|x|$ ფუნქციის წარმოებული არსებობს და უდრის:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x > 0, \\ -1, & \text{თუ } x < 0. \end{cases}$$

ე. ი. ჩვენ ვნახეთ, რომ $y=|x|$ ფუნქცია უწყვეტია $x=0$ წერტილში. მაგრამ მას ამ წერტილში არავითარი წარმოებული არა აქვს.

მაგალითი 2. განვიხილოთ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$y = \begin{cases} x, & \text{როცა } 0 < x \leqslant 1, \\ 2-x, & \text{როცა } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია $x=1$ წერტილზე, მაგრამ მას $x=1$ წერტილზე არა აქვს წარმოებული (ნახ. 219).

მართლაც,

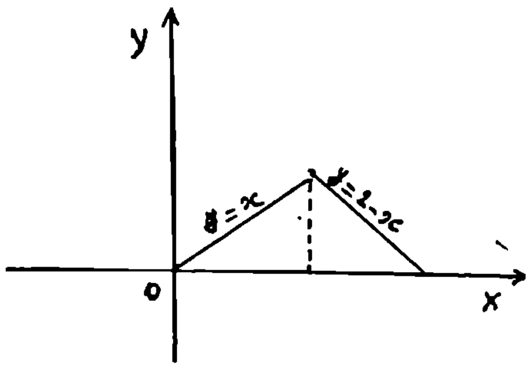
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2-(1+\Delta x)-1}{\Delta x} = -1,$$

როცა $\Delta x > 0$.

როცა $\Delta x < 0$, მაშინ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{1+\Delta x-1}{\Delta x} = 1,$$

ე. ი. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ფარდობის ზღვარი დამოკიდებულია Δx-ის ნიშანზე, ე. ი. $x=1$ წერტილზე ფუნქციას წარმოებული არა აქვს. ე. ი. უწყვეტობა წარმოებულის არსებობის აუცილებელი პირობაა, მაგრამ არაა საკმარისი.



ნახ. 219.

უფრო მეტიც, შეიძლება ფუნქცია არსად არ იყოს წყვეტილი, მაგრამ არსად არ გააჩნდეს წარმოებული.*

განსაზღვრა 1. ფუნქციას, რომელსაც $x=x_0$ წერტილში აქვს წარმოებული, ამ წერტილში წარმოებადი ეწოდება.

განსაზღვრა 2. თუ ფუნქცია წარმოებადია რომელიმე შუალედის თითოეულ წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ იგი წარმოებადია მთელს ამ შუალედში.

მაგალითად, ზემოთ განხილული $y=|x|$ ფუნქცია წარმოებადია ყველგან შუალედში, რომელიც $x=0$ წერტილს არ შეიცავს. $y=x$ ფუნქცია ყველგან წარმოებადია.

---

* ამ საკითხის დეტალურად გარჩევა პროგრამის ფარგლებს სცილდება.

§ ႱႧ. ფუნქციის წარმოებულის მექანიკური და გეომეტრიული შინაარსი

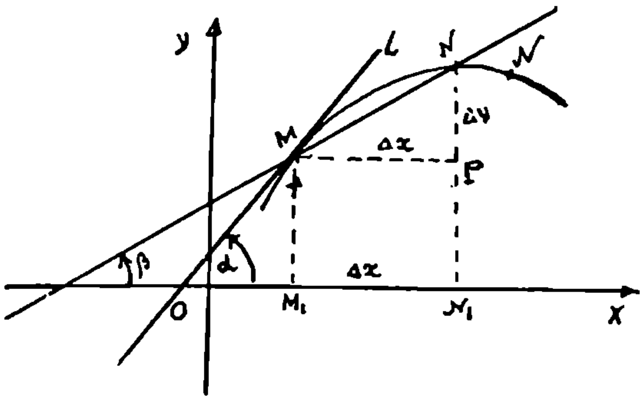
ა) თუ § 199-დან გავიხსენებთ არათანაბარი მოძრაობის დროს სხეულის მყისი სიჩქარის განსაზღვრას, ადვილად დავასკვნით, რომ წარმოებულის მექანიკური მნიშვნელობა სხვა არაფერია, თუ არა და სხეულის მოძრაობის კანონის ამსახველი $S=f(t)$ ფუნქციის წარმოებული $x=t$ წერტილში.

ამრიგად,

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=S_t';$$

ანუ

$$v=\frac{dS}{dt}.$$



ნახ. 220.

ბ) ვთქვათ, განიხილება უწყვეტი $y=f(x)$ ფუნქცია, რომლის გრაფიკი მოცემულია 220-ე ნახაზზე. ავიღოთ მასზე $M(x, y)$ წერტილი, ისე რომ $OM_1=x$, და $MM_1=y$. მივცეთ x არგუმენტს $M_1N_1=\Delta x$ ნაზრდი. ცხადია, არგუმენტის $x+\Delta x$ მნიშვნელობის შესაბამისი ფუნქციის მნიშვნელობა იქნება ორდინატი $NN_1=f(x+\Delta x)$. M წერტილიდან გავატაროთ $MP \parallel ON_1$, მივიღებთ მართკუთხა MNP სამკუთხედს, სადაც $MP=\Delta x$.

$$NP=NN_1-PN_1=f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y.$$

MN მკვეთის დახრილობის კუთხე აღვნიშნოთ β-თი.
ΔMNP-დან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\beta.$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა გვეუბნება, რომ ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან ფარდობა ტოლია იმ კუთხის ტანგენსისა, რომელსაც MN მკვეთი ადგენს OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან.

ახლა თუ $\Delta x\to 0$, მაშინ $\Delta y\to 0$ (მოცემული ფუნქციის უწყვეტობის გამო). ამის შედეგად N წერტილი უსასრულოდ დაუახლოვდება M წერტილს, ხოლო MN მკვეთი დაიწყებს ბრუნვას M წერტილის გარშემო და ზღვარზე გადასვლის შემდეგ დაიწყებს მისწრაფებას ML მხების მდებარეობისაკენ. კუთხე β გახდება ცვლადი და მასთან $\beta\to\alpha$,

ე. ი.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\beta=\alpha,$$

ამრიგად, გვექნება:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\lim_{\Delta x\to 0}\beta=\operatorname{tg}\alpha,$$

ამიტომ

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y,$$

მაშასადამე, $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული წერტილზე არის იმ კუთხის ტანგენსი, რომელსაც ფუნქციის გრაფიკზე მდებარე და $x=a$ აბსცისის მქონე წერტილზე გატარებული მხები ადგენს ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან.

$y=f(x)$ ფუნქციის $x=a$ წერტილში წარმოებულის მნიშვნელობის გეომეტრიული შინაარსის განხილვა საშუალებას გვაძლევს შევადგინოთ მრუდის მოცემული წერტილისათვის მხების განტოლება. განვიხილოთ ეს საკითხი კონკრეტულ მაგალითზე.

ამოცანა. ვიპოვოთ $y=x^2$ პარაბოლის მხების განტოლება იმ წერტილში, რომლის აბსცისა $x=2$.

ა მ ო ხ ს ნ ა: $y=x^2$ პარაბოლის მხების განტოლებას ექნება სახე $y=kx+b$, სადაც კუთხური კოეფიციენტი იქნება $y=x^2$ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა $x=2$ წერტილზე.

ე. ი.

$$k=y'_{x=2}=(x^2)'_{x=2}=(2x)_{x=2}=2\cdot 2=4.$$

ამრიგად, მხების განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$y=4x+b.$$

ვინაიდან შეხების წერტილი ერთდროულად მდებარეობს როგორც მხებზე, ისე პარაბოლაზე, ამიტომ $y=2^2=4$, ე. ი.

$$4=4\cdot 2+b,\ \text{საიდანაც}\ b=-4.$$

მაშასადამე საძიებელი მხების განტოლება იქნება

$$y=4x-4$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

1. დაწერეთ $y=x^2$ პარაბოლის მხების განტოლება იმ წერტილისათვის, რომლის აბსცისაა ა) -1, ბ) 0 და გ) 1.

პას: ა) $y=-2x-1$, ბ) $y=0$, გ) $y=2x-1$.

2. განსაზღვრეთ $y=2x^2$ მრუდის იმ წერტილზე გატარებული მხების დახრილობის კუთხე, რომლის აბსცისაა $x=\frac{1}{4}$. პას: 45°.

3. $y=3x^2+x$ მრუდის იმ წერტილზე, რომლის აბსცისა არის -1, გატარებულია მხები. იპოვეთ მისი განტოლება. პას: $y=-5x-3$.

სარჩევი

I თავი

მიახლოებითი გამოთვლები

II თავი

III თავი

ნამდვილი რიცხვები

IV თავი

ხარისხი რაციონალური მაჩვენებლით

V თავი

კვადრატული განტოლებანი და ისეთი განტოლებები, რომლებიც კვადრატულზე დაიყვანებიან

VI თავი

ვექტორები

VII თავი

ნებისმიერი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

VIII თავი

შებრუნებული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

IX თავი

შეკრების თეორემები და მათი შედეგები

X თავი

ტრიგონომეტრიული განტოლებანი

XI თავი

ჯერადი კუთხეების ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გრაფიკები

XII თავი

პროგრესიები

XIII თავი

მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები

XIV თავი

კომპლექსური რიცხვები

XV თავი

ფუნქციები და ზღვრები

XVI თავი

წარმოებული

რედაქტორი შ. მირცხულავა
მხატვრული რედაქტორი მ. ასათიანი
ტექრედაქტორი ი. ბასილია
კორექტორი ზ. მახარაშვილი
გამომშვები მ. ყულოშვილი

გადაეცა წარმოებას 19/IV-74 წ. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 20/IV-75 წ. ქაღალდის ზომა 70×108. პირ. ნაბეჭდი თაბახი 39.55. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 25,2.

ტირაჟი 2 000. შეკვ. № 100.

ფასი 1 მან. 13 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება", თბილისი, მარჯანიშვილის 5

Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Марджанишвили, 5.
1975

საქართველოს სსრ მინისტრთა საბჭოს გამომცემლობათა, პოლიგრაფიისა და წიგნის ვაჭრობის საქმეთა სახელმწიფო კომიტეტის ბეჭდვითი სიტყვის კომბინატი, თბილისი, კამოს ქ. № 18.

Комбинат печати Государственного комитета Совета Министров Грузинской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Тбилиси ул. Камо № 18.