თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

т. 315

ISSN 0376—2637

კიბერნეტიკა. გამოყენებითი მათემატიკა
КИБЕРНЕТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
GYBERNETICS. APPLIED MATHEMATICS

15

თბილისი Тбилиси Tbilisi
1993

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
TBILISI UNIVERSITY PRESS

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

315

კიბერნეტიკა
გამოყენებითი მათემატიკა
CYBERNETICS
APPLIED MATHEMATICS

თბილისი 1993 Tbilisi

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

315

КИБЕРНЕТИКА
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Тбилиси 1993

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.А.Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

315, 1993

К ВОПРОСУ О НАХОЖДЕНИИ ОТРЕЗКА ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИНОК

Д.Г.Пеградзе

В настоящей работе дается обобщение приведенной в /I/ задачи оценки отрезка времени существования решения некоторой начально-краевой задачи.

Рассмотрим задачу об осесимметричной деформации трехслойной пластинки в модели Рейсснера /2,3/. Соответствующая система уравнений может быть представлена в виде

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\alpha^2\theta=\alpha^2\lambda\frac{\partial w}{\partial x}, \tag{I.I}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2=0, \tag{I.2}$$

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\left[\lambda\frac{\partial u}{\partial x}+6\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+3\frac{\partial\theta}{\partial x}+3\alpha^2\lambda\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-3\alpha^2\frac{\partial\theta}{\partial x}=q. \tag{I.3}$$

Искомыми являются $\theta=\theta(x,t)$ – функция, описывающая изменение положения нормали к срединной поверхности, и функции $u=u(x,t)$, $w=w(x,t)$ - перемещения средних линий x и z, задана $q=q(x,t)$ - функция, определяемая нагрузкой, приложенной к внешним слоям, x - пространственная переменная, $0\leq x\leq 1$, t - время, $0\leq t\leq T$, α, λ и ρ - заданные кусочно-постоянные положительные функции со значениями, соответствующими каждому слою. Для упрощения задачи будем считать, что α, λ и ρ - положительные константы.

Пусть решение системы (I) ищется при следующих граничных и начальных условиях

$$\theta(0,t)=\theta(1,t)=0,\quad u(0,t)=u(1,t)=0,$$
$$w(0,t)=w(1,t)=0,\quad \frac{\partial^m w}{\partial t^m}(x,0)=\varphi_m(x), \tag{2}$$
$$m=0,1,$$

где φ_m - заданные функции.

Применяя в (I.I) функцию Грина задачи $\frac{d^2v}{dx^2}-\alpha^2 v=f$, $v(0)=v(1)=0$ и интегрируя (I.2) с учетом (2), приходим к соотношениям

$$\theta=\frac{\alpha^2\lambda}{sh\,\alpha}\Big[sh\,\alpha(1-x)\int_0^x w(\xi,t)\,ch\,\alpha\xi\,d\xi - sh\,\alpha x\int_x^1 w(\xi,t)\,ch\,\alpha(1-\xi)\,d\xi\Big], \tag{3}$$

$$u=-6\int_0^x\left(\frac{\partial w(\xi,t)}{d\xi}\right)^2 d\xi+6x\int_0^1\left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{4}$$

В силу (I.I)

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\alpha^2\Lambda\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\alpha^2\theta\frac{\partial w}{\partial x}$$

Используя эту формулу и (4) в (I.3), будем иметь

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\left[6\Lambda\int_0^1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dx+3\alpha^2\Lambda\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+ \tag{5}$$

$$+3\alpha^2\left[\Lambda\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial w}{\partial x}\theta-\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]=q.$$

Заметим, что главная часть (5) имеет дивергентную структуру.

С помощью (3) устраним из (5) θ и $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$. В результате получим уравнение, содержащее только одну из неизвестных функций

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\left[\gamma_0+\gamma_1\int_0^1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dx+\gamma(x,t,w)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\gamma_2\gamma(x,t,w)-q, \tag{6}$$

где

$$\gamma_0=3\alpha^2\Lambda,\quad \gamma_1=6\Lambda,\quad \gamma(x,t,w)=\gamma_0 w-$$

$$-\gamma_3\left[ch\,\alpha(1-x)\int_0^x w(\xi,t)\,ch\,\alpha\xi\,d\xi+ch\,\alpha x\int_x^1 w(\xi,t)\,ch\,\alpha(1-\xi)\,d\xi\right],$$

$$\gamma_2=\alpha^2,\qquad \gamma_3=3\,\frac{\alpha^3\Lambda}{sh\,\alpha}.$$

Выделим из (2) условия

$$w(0,t)=w(1,t)=0,$$

$$\frac{\partial^m w}{\partial t^m}(x,0)=\varphi_m(x), \qquad m=0,1. \tag{7}$$

Итак, две искомые функции, θ и u, выражаются в явном виде (3), (4) через третью неизвестную функцию w, а относительно последней формулируется самостоятельная начально-краевая задача (6), (7). В /I/ доказана

Теорема. Пусть

$$q\in C^1(0,T;L_2(0,1)), \quad \varphi_0\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\cap W_2^2(0,1), \quad \varphi\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$$

и

$$\Delta_\alpha^2 \equiv \frac{\alpha^2}{32}\left(\varphi_{1\alpha}^2+\frac{1}{3}\varphi_{2\alpha}^2\right)<1,$$

где

$$\varphi_{\ell_\alpha}=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{\alpha^2+\pi^2}\left(1+\dfrac{\alpha}{\pi}h_{\ell_\alpha}\right), & \text{если } \alpha_0\leq 1,\\[2mm] \dfrac{1}{2}\left(1+(1+h_{\ell_\alpha}^2)^{1/2}\right), & \text{если } \alpha_0>1,\end{cases}$$

$$\alpha_0=\frac{\alpha\left(1+(1+h_{\ell_\alpha}^2)^{1/2}\right)}{\pi h_{\ell_\alpha}}, \qquad h_{\ell_\alpha}=\frac{1}{th\,\alpha}+\frac{(-1)^{\ell-1}}{sh\,\alpha}, \quad \ell=1,2.$$

Тогда существуют положительная постоянная $T_0\leq T$ и единственное решение w на $[0,1]\times[0,T_0]$ задачи (6),(7) такое, что

$$w\in L_2\left(0,T_0;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\cap W_2^2(0,1)\right), \quad \frac{\partial w}{\partial t}\in L_2\left(0,T_0;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\right).$$

Приближенное решение может быть найдено методом Бубнова-Галеркина. Совокупность приближенных решений w_n, $n=1,2,\dots$, слабо компактна в пространстве $L_2(0,T_0:\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\cap W_2^2(0,1))$. Каждый слабый предел w_n есть обобщенное решение задачи (6),(7).

В качестве T_0 в /I/ предложено брать точную верхнюю границу некоторой функции от двух переменных. К такому результату приходим при условии выполнения определенных соотношений пропорциональности для свободных параметров, применяемых в оценке нормы w_n. Здесь мы приведем доказательство сформулированной теоремы, сняв ограничения, связанные с пропорциональностью свободных параметров. Как следствие задача оценки T_0 будет дана в более общем, чем в /I/, виде.

Обозначим через $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ скалярное произведение и норму в пространстве $L_2(0,1)$. Посредством $\|\cdot\|_B$ и $\|\cdot\|_{B_1\cap B_2}$ будем обозначать нормы в пространствах $B(0,1)$ и $B_1(0,1)\cap B_2(0,1)$.
Условимся считать

$$\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}=\left(\int_0^1\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2dx\right)^{1/2},\quad \|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1\cap W_2^2}=\left(\int_0^1\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2dx\right)^{1/2}.$$

Для сокращения записи эти нормы будут обозначаться соответственно через $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Далее при обозначении скалярного произведения и норм будем опускать фразу "при каждом фиксированном значении аргумента времени".

Предположим, что всюду ниже параметры i и j принимают значения от 1 до n, а параметр m меняется от 1 до ∞. Под $\chi(i,m)$ будем подразумевать отношение $\frac{(i\pi)^m}{\alpha^2+i^2\pi^2}$.

Пользуясь методом Бубнова-Галеркина, для произвольного n, $n=1,2,\dots$, построим приближенное решение задачи (6), (7) по формуле $W_n=\sum\limits_i W_{ni}(t)\nu_i$, $\nu_i=\sin i\pi x$. где коэффициенты W_{ni} являются решением системы уравнений.

$$\rho\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2},\nu_j\right)+\left(\left[\gamma_0+\gamma_1\|w_n\|_1^2+\gamma(x,t,w_n)\right]\frac{\partial w_n}{\partial x},\frac{d\nu_j}{dx}\right) \tag{8}$$
$$\left(\frac{\partial\gamma(x,t,w_n)}{\partial x}\,\frac{\partial w_n}{\partial x}-\gamma_2\gamma(x,t,w_n),\nu_j\right)=(q,\nu_j)$$

при следующих начальных условиях

$$\frac{\partial^m w_n}{\partial t^m}(x,0)=\varphi_{mn}(x),\qquad m=0,1, \tag{9}$$

$$\varphi_{mn}\equiv\sum_i(\varphi_m,\nu_i)\nu_i,\ \varphi_{on}(x)\to\varphi_o(x).\quad \text{в}\quad \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\cap W_2^2(0,1),$$

$$\varphi_{1n}(x)\to\varphi_1(x)\quad \text{в}\quad \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\quad.\quad \text{при}\quad n\to\infty.$$

(8),(9) образуют задачу Коши для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая разрешима на $[0,t_n)$.

Лемма I (Беллман, Бихари). Предположим, что $y:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ — непрерывная функция и $\tau:(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$ — непрерывная неубывающая функция. Тогда из неравенства $y(t) \leq c + \int_0^t \varkappa(y(\tau))\, d\tau, \quad 0 \leq t < \infty$, где c - положительная постоянная, следует $y(t) \leq \mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{Z}_0) < \infty, \quad 0 \leq t \leq \mathcal{Z}_0$, для произвольного числа $\mathcal{Z}_0$, меньшего чем $\mathcal{Z}(\infty)$, $\mathcal{Z}(t) = \int_c^t \frac{d\tau}{\varkappa(\tau)}, \quad t \geq c$.

Убедиться в справедливости леммы нетрудно. Введем функцию $v(t) = c + \int_0^t \varkappa(y(\tau))\, d\tau$. Непосредственной проверкой получаем $\frac{d}{dt}\mathcal{Z}(v(t)) = \frac{\varkappa(y(t))}{\varkappa(v(t))} \leq 1$, и поэтому $\mathcal{Z}(v(t)) \leq t$ ввиду того, что $\mathcal{Z}(v(0)) = \mathcal{Z}(c) = 0$. Это означает, что $y(t) \leq v(t) \leq \mathcal{Z}^{-1}(t) \quad \forall t < \mathcal{Z}(\infty)$. Для завершения доказательства надо учесть, что $\mathcal{Z}^{-1}$ монотонно растет.

Лемма 2. Справедливо неравенство

$$\left\| \frac{\partial^m \gamma(x,t,w_n)}{\partial t^m} \right\|_c \leq (\gamma_0 - \delta_0) + (\gamma_1 - \delta_1) \left\| \frac{\partial^m w_n}{\partial t^m} \right\|_1^2 \tag{10}$$

при $m = 0,1$ и произвольных постоянных δ_0, δ_1, удовлетворяющих условиям $0 < \delta_m < \gamma_m$, $\left(1 - \frac{\delta_0}{\gamma_0}\right)\left(1 - \frac{\delta_1}{\gamma_1}\right) \geq \Delta_\alpha^2$.

Схема вывода (10) такова /I/. За основу берется формула

$$\frac{\partial^m \gamma(x,t,v_n)}{\partial t^m} = \sum_1^{-} \left[\gamma_0 \nu_i - \gamma_3 \varkappa(i,1) \left(\frac{\alpha}{i\pi} \nu_i \, sh\, \alpha + \right.\right.$$

$$\left.\left. + ch\, \alpha (1-x) + (-1)^{i-1} ch\, \alpha x \right) \right] \frac{d^m v_{ni}}{dt^m}, \tag{11}$$

$$\forall v_n = \sum_1^{-} v_{ni}(t) \nu_i, \quad m = 0,1.$$

С её помощью находим

$$\left\| \frac{\partial^m \gamma(x,t,w_n)}{\partial t^m} \right\|_C = \gamma_0 \max_{x\in[0,1]} \left| \sum_i \chi(i,2) \frac{d^m w_{ni}}{dt^m} f_\alpha(i,x) \right|,$$

где $f_\alpha(i,x) = \lambda_i - \dfrac{\alpha[ch\alpha(1-x) + (-1)^{i-1} ch\alpha x]}{i\pi\, sh\alpha}$.

Затем надо воспользоваться неравенствами

$$\left| \chi(i,2) f_\alpha(i,x) \right| \le \left| \chi(i,2) \left[1 + \frac{\alpha(ch\alpha + (-1)^{\ell-1})}{i\pi\, sh\alpha} \right] \right| \le \varphi_{\ell\alpha},$$

где $\ell = 1$, если i – чётно и равно 2 в случае, когда i – нечетно.

Далее, умножим обе части (8) на $2j^2\pi^2 \dfrac{dw_{nj}(t)}{dt}$ и просуммируем по j . Получим

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big[\rho \left\| \frac{\partial w_n}{\partial t} \right\|_1^2 + (\gamma_0 + \gamma_1 \|w_n\|_1^2) \|w_n\|_2^2 + \\ &+ \left(\gamma(x,t,w_n), \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\right)^2 \right) - \gamma_0 \gamma_2 \|w_n\|_1^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \alpha\, sh\alpha \sum_i \chi(i,3) w_{ni}^2 + \sigma_0(t) \Big] = \\ &= \gamma_1 \|w_n\|_2^2 \frac{d}{dt}\|w_n\|_1^2 + \left(\frac{\partial \gamma(x,t,w_n)}{\partial t}, \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\right)^2 \right) + \sigma_1(t), \end{aligned} \tag{I2}$$

где

$$\sigma_m(t) = 2\gamma_2\gamma_3 \sum_i \chi(i,1) \frac{d^m w_{ni}(t)}{dt^m} \sum_j \chi(j,3) \Big[(1 + (-1)^{i+j}) ch\alpha + (-1)^{i-1} + (-1)^{j-1} \Big] w_{nj}(t) + 2\left(\frac{\partial^m q}{\partial t^m}, \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \right), \quad m = 0, 1.$$

Обозначим через ξ часть выражения, заключенного в квадратных скобках в (9), а именно,

$$\left(\gamma_0 + \gamma_1 \|w_n\|_1^2\right)\|w_n\|_2^2 + \left(\gamma(x,t,w_n),\ \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\right)^2\right).$$

В силу леммы 2

$$\left|\left(\gamma(x,t,w_n),\ \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\right)^2\right)\right| \leq \left[(\gamma_0 - \delta_0) + (\gamma_1 - \delta_1)\|w_n\|_1^2\right]\|w_n\|_2^2 .$$

Поэтому

$$\xi \geq \left(\delta_0 + \delta_1 \|w_n\|_1^2\right)\|w_n\|_2^2 . \tag{13}$$

Как явствует из нижеследующих рассуждений, величина T_0 тем больше, чем больше значение параметров δ_0 и δ_1. Поэтому будем считать, что выполняется равенство

$$\left(1 - \frac{\delta_0}{\gamma_0}\right)\left(1 - \frac{\delta_1}{\gamma_1}\right) = \Delta_\alpha^2 . \tag{14}$$

Оценим теперь ряд других членов в (12). Так как

$$\left\|\frac{\partial^m w_n}{\partial t^m}\right\|_K^2 = \frac{\pi^{2K}}{2}\sum_i i^{2K}\left(\frac{d^m w_{ni}}{dt^m}\right)^2, \quad m = 0,1, \quad K = 1,2,$$

$$\chi(i,m) \leq (i\pi)^{m-2}, \quad m = 1,2,3, \quad \eta_1 \equiv \sum_\eta \frac{1}{\eta^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\eta_2 \equiv \sum \frac{1}{\eta^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

то имеет место для $m = 0,1$

$$|\sigma_m(t)| \leq \left(æ \left\| \frac{\partial^m w_n}{\partial t^m} \right\|_1 + 2 \left\| \frac{\partial^m q}{\partial t^m} \right\| \right) \|w_n\|_2 , \qquad (I5)$$

$$æ = \frac{4}{3\sqrt{15}} \gamma_2 \gamma_3 (ch\alpha + 1).$$

Проинтегрируем обе части (I2) и используем (I3),(I5), лемму 2 и неравенство $\|w_n\|_1 \leq \frac{1}{\pi} \|w_n\|_2$. В результате получим

$$\rho \left\| \frac{\partial w_n}{\partial t} \right\|_1^2 + \left[(\delta_0 - \varepsilon_0) + (\delta_1 - \varepsilon_1) \|w_n\|_1^2 \right] \|w_n\|_2^2 \leq c + \frac{1}{\varepsilon_0} \|q\|^2 +$$

$$+ \frac{1}{4\varepsilon_1} \left(æ + \frac{\gamma_0 \gamma_2}{\pi} \right)^2 + \int_0^t \Big\{ 2\gamma_1 \|w_n(x,\tau)\|_2^2 \|w_n(x,\tau)\|_1 \left\| \frac{\partial w_n(x,t)}{\partial \tau} \right\|_1 +$$

$$+ (\gamma_0 - \delta_0) + (\gamma_1 - \varepsilon_1) \left\| \frac{\partial w_n(x,\tau)}{\partial \tau} \right\|_1^2 \|w_n(x,\tau)\|_2^2 + \sigma_1(\tau) \Big\} d\tau ,$$

$$0 < \forall \varepsilon_m < \delta_m , \qquad m = 0.1 ,$$

причем

$$c = \rho \frac{\pi^2}{2} \sum_n n^2 (\varphi_1, v_2)^2 + \left[(2\gamma_0 - \delta_0) + (2\gamma_1 - \delta_1) R_1^2 \right] R_2^2 - \qquad (I6)$$

$$\gamma_0 \gamma_2 R_1^2 + \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 a \, sh\alpha \sum_n \chi(n,2) (\varphi_0, v_1)^2 +$$

$$+ (æ R_1 + 2 \|q(x,0)\|) R_2 .$$

где

$$R_m = \left(\frac{1}{2} \pi^{2m} \sum_{r} r^{2m} (\varphi_0, \nu_r)^2 \right)^{1/2}, \quad m=1,2.$$

Преобразования под знаком интеграла в последнем неравенстве с учетом (15) позволяют записать

$$\rho \left\| \frac{\partial w_n}{\partial t} \right\|_1^2 + \left[(\sigma_0 - \varepsilon_0) + (\sigma_1 - \varepsilon_1) \| w_n \|_1^2 \right] \| w_n \|_2^2 \leq c_0 + c +$$

$$+ \int_0^t \left\{ \frac{\pi^2}{4c_1} \left\| \frac{\partial w_n(x,\tau)}{\partial \tau} \right\|_1^2 + \left((\gamma_0 - \delta_0) + c_1 + c_2 + \right. \right. \tag{17}$$

$$\left. \left. + c_3 \| w_n(x,\tau) \|_1^2 \right) \| w_n(x,\tau) \|_2^2 + \left(\frac{\gamma_1^2}{c_3} + (\gamma_1 - \delta_1) \right) \left\| \frac{\partial w_n(x,\tau)}{\partial \tau} \right\|_1^2 \| w_n(x,\tau) \|_2^2 \right\} d\tau$$

$\forall c_m > 0, \quad m = 1,2,3,$ где

$$c_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \max_{t \in [0,T]} \| q \|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1} \left(\pi + \frac{\gamma_0 \gamma_2}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{c_2} \int_0^T \left\| \frac{\partial q(x,\tau)}{\partial \tau} \right\|^2 d\tau. \tag{18}$$

Придадим (17) вид, согласуемый с леммой 1. Для этого, во-первых, воспользуемся неравенством

$$a_1 a_2 \leq \frac{1}{4\alpha_1 \alpha_2} (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)^2 \quad \forall a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0.$$

Получим

$$\rho \left\| \frac{\partial w_n}{\partial t} \right\|_1^2 + \left[(\sigma_0 - \varepsilon_0) + (\sigma_1 - \varepsilon_1) \| w_n \|_1^2 \right] \| w_n \|_2^2 \leq c_0 + c +$$

$$+ \int_0^t \left\{ \frac{\pi^2}{4c_1} \left\| \frac{\partial w_n(x,\tau)}{\partial \tau} \right\|_1^2 + \left((\gamma_0 - \delta_0) + c_1 + c_2 + \right. \right. \tag{19}$$

$$+c_3\|w_n(x;\tau)\|_1^2)\|w_n(x;\tau)\|_2^2+\frac{1}{4\rho(\delta_0-\varepsilon_0)}\left(\frac{\gamma_1^2}{c_3}+\right.$$

$$\left.+(\gamma_1-\delta_1)\right)\left[\rho\left\|\frac{\partial w_n(x;\tau)}{\partial\tau}\right\|_1^2+(\delta_0-\varepsilon_0)\|w_n(x;\tau)\|_2^2\right]^2\Big\}d\tau.$$

И, во-вторых, подчиним выбор параметров

$$\delta_0,\ \delta_1,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ c_1,\ c_2,\ c_3 \tag{20}$$

в (I9) следующим условиям

$$\frac{\pi^2}{4c_1\rho}=\frac{(\gamma_0-\delta_0)+c_1+c_3}{\delta_0-\varepsilon_0}=\frac{c_3}{\delta_1-\varepsilon_1}=K \qquad \forall_K>0, \tag{2I}$$

где K - коэффициент пропорциональности. Ясно, что посредством (2I) устанавливается пропорциональность в (I9) между коэффициентами членов в левой части с коэффициентами подобных им членов в выражении под знаком интеграла.

Принимая во внимание (I4) и (2I), заключаем, что параметры (20) однозначно определяются заданием величин δ_0, ε_0, ε_1, K, которые будем считать свободными параметрами.

Применяя (2I) в (I9), получим

$$y_n(t)\le c_0+c+\int_0^t\Big[Ky_n(\tau)+\frac{1}{4\rho(\delta_0-\varepsilon_0)}\left(\frac{\gamma_1^2}{c_3}+\right.$$
$$\left.+(\gamma_1-\delta_1)\right)y_n^2(\tau)\Big]d\tau, \tag{22}$$

причем

$$y_n(t)=\rho\left\|\frac{\partial w_n}{\partial t}\right\|_1^2+\left[(\delta_0-\varepsilon_0)+(\delta_1-\varepsilon_1)\|w_n\|_1^2\right]\|w_n\|_2^2.$$

Так как $2\gamma_1-\delta_1>\delta_1>\varepsilon_1$ и $P_1\le\frac{1}{\pi}K_2$, то

$$c_0+c>0. \tag{23}$$

На основании (22), (23) и леммы I

$$y_n(t) \leq \mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{Z}_o) < \infty, \quad 0 \leq t \leq \mathcal{Z}_o, \tag{24}$$

где

$$\mathcal{Z}(t) = \int_{c_o + c}^{t} \left\{ \kappa\tau + \frac{1}{4\rho(\delta_o - \varepsilon_o)} \left[\frac{\gamma_1^2}{(\delta_1 - \varepsilon_1)\kappa} + (\gamma_1 - \delta_1) \right] \tau^2 \right\}^{-1} d\tau .$$

Интерес представляет величина $\mathcal{Z}^{-1}(\infty)$ в том смысле, что в (24) $\mathcal{Z}_o$ – произвольное фиксированное число, меньшее чем $\mathcal{Z}_o$. Поэтому важно так подобрать параметры $\delta_o, \varepsilon_o, \varepsilon_1, \kappa$, чтобы достигалась точная верхняя граница величины $\mathcal{Z}(\infty)$. Для этого требуется решить следующую задачу:

в области $\mathcal{D} = \left\{ (\delta_o, \varepsilon_o, \varepsilon_1, \kappa) \,\middle|\, 0 < \varepsilon_m < \delta_m < \gamma_m,\ m = 0, 1, \right.$
$\left. \kappa > 0,\ \delta_o - \varepsilon_o > \frac{\gamma_o - \delta_o}{\kappa} + \frac{a^2}{4\kappa^2\rho} \right\}$

найти $\sup \Phi(\delta_o, \varepsilon_o, \varepsilon_1, \kappa)$, (25)

где

$$\Phi(\delta_o, \varepsilon_o, \varepsilon_1, \kappa) = \frac{1}{\kappa} \ln \left\{ 1 + (\delta_o - \varepsilon_o)\kappa^2 \left[\left(\frac{a}{\delta_1 - \varepsilon_1} + b(\gamma_1 - \delta_1)\kappa \right) \left(c + \frac{d}{\varepsilon_o} + \frac{e}{\varepsilon_1} + \frac{f_\kappa}{(\delta_o - \varepsilon_o)\kappa^2 - (\gamma_o - \delta_o)\kappa - g} \right) \right]^{-1} \right\},$$

$a=\frac{\gamma_1^2}{4\rho}$, $b=\frac{1}{4\rho}$, c находится по формуле (I8), $d=\max_{t\in[0,T]}\|q\|^2$,

$e=\frac{1}{4}\left(a+\frac{\gamma_0\gamma_2}{\pi}\right)^2$, $f=\int_0^T\left\|\frac{\partial q(x,\tau)}{\partial\tau}\right\|^2 d\tau$, $g=\frac{\varkappa^2}{4\rho}$,

параметр δ_1 определяется из соотношения (I4), а $\varkappa$ задается равенством из (I5).

О том, как получены область $\mathcal{D}$ и функция Φ. В определении $\mathcal{D}$ пояснению подлежит лишь происхождение неравенства $\delta_0-\varepsilon_0>\frac{\gamma_0-\delta_0}{K}+\frac{\varkappa^2}{4K^2\rho}$. Оно является результатом применения (2I) к условию $c_2>0$. Выполнение же двух других требований $c_1>0$, $c_3>0$ очевидно.

Что касается $\Phi(\delta_0,\varepsilon_0,\varepsilon_1,K)$, то это ни что иное, как $Z(\infty)$. В самом деле, принимая во внимание равенство

$$\int_{\tau_0}^{\infty}\frac{d\tau}{v_1\tau+v_2\tau^2}=\frac{1}{v_1}\ln\left(1+\frac{v_1}{v_2\tau_0}\right),\quad \tau_0,v_1,v_2>0,$$

будем иметь

$$Z(\infty)=\frac{1}{K}\ln\left\{1+(\delta_0-\varepsilon_0)K^2\left[\left(\frac{a}{\varepsilon_1-\varepsilon_1}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+b(\gamma_1-\delta_1)K\right)(c_0+c)\right]^{-1}\right\}.\tag{26}$$

Если теперь в (26) c_0 выразить согласно (I8) и применить затем (2I), то получим функцию $\Phi(\delta_0,\varepsilon_0,\varepsilon_1,K)$.

Отметим некоторые свойства функции Φ, которые несколько облегчают решение задачи (25). Из (26),(23) и неравенств $a,\ b,\ K,\ \delta_m-\varepsilon_m,\ \gamma_1-\delta_1>0,\quad m=0.1$, получаем $\Phi>0$ в $\mathcal{D}$. Кроме того, вблизи границы области $\mathcal{D}$ и при $K \to \infty$ функция Φ сколь угодно мало отличается от нуля. Следовательно, для нахождения $\sup \Phi$ следует решить систему уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \delta_0} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_m} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial K} = 0, \qquad m = 0,1,$$

и рассмотреть те из её корней, которые принадлежат области $\mathcal{D}$. Остальное ясно.

Продолжим доказательство теоремы. В силу (24) и (9) при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} &w_n \text{ ограничены в } L_2(0,T_0; \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1) \cap W_2^2(0,1)), \\ &\frac{\partial w_n}{\partial t} \text{ ограничены в } L_2(0,T_0; \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)), \\ &\frac{\partial w_n}{\partial t}(x,0) \text{ ограничены в } \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1). \end{aligned} \tag{27}$$

Исходя из (27), области $[0,1] \times [0, t_n)$, на которых определены $w_n(x,t)$, можно продолжить на $[0,1] \times [0,T_0]$.

Переходя, если потребуется, к подпоследовательности, на основании (27) получаем

$$\begin{aligned} &w_n \xrightarrow{\text{сл.}} w \quad \text{в } L_2(0,T_0; \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1) \cap W_2^2(0,1)), \\ &\frac{\partial w_n}{\partial t} \xrightarrow{\text{сл.}} \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{в } L_2(0,T_0; \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)), \\ &\frac{\partial w_n}{\partial t}(x,0) \xrightarrow{\text{сл.}} \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) \quad \text{в } \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1). \end{aligned} \tag{28}$$

Введем функции $\beta_m \in C^1[0,T_0]$, $m=1,2,\ldots,m_0$, такие, что $\beta_m(T_0)=0$, и определим функцию $\beta(x,t)=\sum_{m=1}^{m_0}\beta_m(t)v_m$. Благодаря (8) имеем

$$\int_0^{T_0}\left\{-\rho\left(\frac{\partial w_n}{\partial t},\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)+\left(\left[\gamma_0+\gamma_1\|w_n\|_1^2+\gamma(x,t,w_n)\right]\frac{\partial w_n}{\partial x},\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)+\right. \tag{29}$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\gamma(x,t,w_n)}{\partial x}\frac{\partial w_n}{\partial x}-\gamma_2\gamma(x,t,w_n),\beta\right)\right\}dt=$$

$$=\int_0^{T_0}(q,\beta)dt+\rho\left(\frac{\partial w_n}{\partial t}(x,0),\beta(x,0)\right).$$

Из (28) заключаем, что при произвольном $p>1$ $w_n \longrightarrow w$ в $L_2(0,T_0;\overset{\circ}{W}{}_p^1(0,1))$, $\frac{\partial w_n}{\partial x}\longrightarrow\frac{\partial w}{\partial x}$ в $L_2(0,T_0;L_p(0,1))$. Поэтому учитывая вид $\frac{\partial^m\gamma(x,t,w_n)}{\partial x^m}$, $m=0,1$, получаем $\frac{\partial^m\gamma(x,t,w_n)}{\partial x^m}\frac{\partial w_n}{\partial x}\longrightarrow\frac{\partial^m\gamma(x,t,w_n)}{\partial x^m}\frac{\partial w}{\partial x}$ в $L_2(0,T_0;L_p(0,1))$.

Применение и некоторых других более очевидных соотношений при переходе к пределу в (29), когда $n\longrightarrow\infty$, позволяет записать

$$\int_0^{T_0}\left\{-\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t},\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)+\left(\left[\gamma_0+\gamma_1\|w\|_1^2+\gamma(x,t,w)\right]\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)+\right. \tag{30}$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\gamma(x,t,w)}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}-\gamma_2\gamma(x,t,w),\beta\right)\right\}dt=$$

$$=\int_0^{T_0}(q,\beta)dt+\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}(x,0),\beta(x,0)\right).$$

Переход теперь к пределу относительно $m_0 \to \infty$ влечет выполнение (30) при произвольном $\beta \in L_2(0,T_0; \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1) \cap W_2^2(0,1))$, если $\frac{\partial \beta}{\partial t} \in L_2(0,T_0; \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1))$ и $\beta(x,T_0) = 0$. Это означает, что w является слабым решением задачи (6), (7) на $[0,1]\times[0,T_0]$.

Удостоверимся в единственности решения. Пусть w^1 и w^2 – два различных решения задачи (6),(7). Тогда для разности $\omega = w^1 - w^2$ имеет место

$$\rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \left[\gamma_0 + \gamma_1 \|w^1\|_1^2 + \gamma(x,t,w^1)\right]\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \gamma_2 \gamma(x,t,\omega) =$$

$$= \left[\gamma_1\left(\|w^1\|_1^2 - \|w^2\|_1^2\right) + \gamma(x,t,\omega)\right]\frac{\partial^2 w^2}{\partial x^2}, \tag{31}$$

$$\omega \in L_2\left(0,T_0; \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\cap W_2^2(0,1)\right), \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} \in L_2\left(0,T_0; \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\right),$$

$$\frac{\partial^m \omega}{\partial t^m}(x,0) = 0, \qquad m = 0,1,$$

Умножив обе части (31) на $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ и проинтегрировав по x на отрезке $[0,1]$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\rho\left\|\frac{\partial \omega}{\partial t}\right\|^2 + \left(\gamma_0 + \gamma_1\|w^1\|_1^2\right)\|\omega\|_1^2 + \left(\gamma(x,t,w^1), \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2\right)\right] =$$

$$= \gamma_1\left(\frac{\partial w^1}{\partial x}, \frac{\partial^2 w^1}{\partial x \partial t}\right)\|\omega\|_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma(x,t,w^1)}{\partial t}, \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2\right) + \tag{32}$$

$$+ \left(-\frac{\partial \gamma(x,t,w^1)}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \gamma_2 \gamma(x,t,\omega) + \left[\gamma_1\left(\|w^1\|_1^2 - \|w^2\|_1^2\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \gamma(x,t,\omega)\right]\frac{\partial^2 w^2}{\partial x^2}\frac{\partial \omega}{\partial t}\right).$$

Пусть W_n^1 и W_n^2 – n-ые галеркинские приближения для W^1 и W^2. Обозначим их разность $W_n^1 - W_n^2$ через ω_n. Будем обозначать одной и той же буквой C различные положительные постоянные, не зависящие от n.

Применяя (10), (27) и соотношение

$$\max_{x\in[0,1]} \left| \frac{\partial^s \gamma(x,t,v_n)}{\partial x^s} \right| \le C \sum_i i^s |v_{ni}| \le C \|v_n\|_{s+1}, \quad s=0,1,$$

которое при $m=0$ следует из (11), приходим к совокупности неравенств

$$\left| \left(\frac{\partial^m \gamma(x,t,W_n^1)}{\partial t^m}, \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 \right) \right| \le \left[(\gamma_0 - \delta_0) + (\gamma_1' - \delta_1) \left\| \frac{\partial^m W_n^1}{\partial t^m} \right\|_1^2 \right] \|\omega\|_1^2 \le$$

$$\le \ell \|\omega\|_1^2, \qquad m = 0, 1,$$

$$\left| \left(\frac{\partial \gamma(x,t,W_n^1)}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) \right| \le C \|W_n^1\|_2 \left(\left|\frac{\partial \omega}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \omega}{\partial t}\right| \right) \le C \left(\|\omega\|_2^1 + \left\| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right.\right.$$

$$\left| \left(\gamma(x,t,\omega_n), \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) \right| \le C \|\omega_n\|_1 \left(\left| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right|, 1 \right) \le C \left(\|\omega_n\|_1^2 + \left\| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right\|^2 \right),$$

$$\left| \left(\|W_n^1\|_1^2 - \|W_n^2\|_1^2 \right) \left(\frac{\partial^2 W_n^2}{\partial x^2}, \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) \right| \le C \|\omega_n\|_1 \left(\left| \frac{\partial^2 W_n^2}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right| \right) \le$$

$$\le C \left(\|\omega_n\|_1^2 + \left\| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right\|^2 \right),$$

$$\left| \left(\gamma(x,t,\omega_n) \frac{\partial^2 \omega^2}{\partial x^2}, \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) \right| \le C \left(\|\omega_n\|_1^2 + \left\| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right\|^2 \right).$$

Переходя в этих соотношениях к пределу по $n \to +\infty$, что в силу (28) допустимо, получаем оценки, применение которых в (32) приводит к неравенству

$$\Omega(t) \leqslant C\int_0^t \Omega(\tau)\,d\tau, \qquad \text{где } \Omega(t) = \rho\left\|\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|^2 + \left(\delta_0 + \delta_1 \|w^1\|_1^2\right)\|\omega\|_1^2, \quad \delta_0, \delta_1 > 0.$$

Отсюда вытекает $\Omega = 0$ и как следствие $\omega = 0$.

Теорема доказана.

Поступила 6.IУ.1992

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

Литература

1. Peradze J.G. The Dynamic Problem for Reissner's One-Dimensional System. Numer.Funct.Anal. and Optimiz., 1991, v.12, N5 and 6, 551-562.
2. Ramachandra N., Valsarajan K. Large Deflection Analysis of Clamped Skew Sandwich Plates by Parametric Differentiation. Comp. and Struct., 1983, 17, N4, 599-602.
3. Wang C.T. Principle and Application of Complementary Energy Method for Thin Homogeneous and Sandwich Plates and Shells with Finite Deflections. Nat.Advis.Comm.Aeronaut., 1952, 2620.

ჯ. ფერაძე

ფირფიტების თეორიის ერთი ამოცანის ლოკალური ამონახსნის არსებობის დროის ინტერვალის პოვნის საკითხის შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

რეისნერის ფირფიტების არაწრფივი თეორიის საწყის-სასაზღვრო ამოცანა დაიყვანება $w(x,t)$, $0\leq x\leq 1$, $0\leq t\leq T$, ფუნქციის მიმართ ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლების ამოხსნაზე. მტკიცდება $w(x,t)$ სუსტი ამოხსნის არსებობა $[0,1]\times[0,T_0]$-ზე, $T_0\leq T$. ჩამოყალიბებულია T_0-ის გამოთვლის ამოცანა, ამასთან უფრო ზოგად დასმაში ვიდრე ავტორის ერთ-ერთ წინა ნაშრომში.

J. Peradze

TOWARDS FINDING THE INTERVAL OF TIME FOR THE EXISTENCE OF A LOCAL SOLUTION OF ONE PROBLEM OF THE PLATE THEORY

S u m m a r y

The initial-boundary value problem of Reissner's non-linear theory of plates is reduced to the solution of an integro-differential equation with respect to some function $w(x,t)$, $0\leq x\leq 1$, $0\leq t\leq T$.

The existence of a weak solution $w(x,t)$ on $[0,1]\times[0,T_0]$, $T_0\leq T$, is proved. The problem of calculating T_0 is formulated in a more general way than it was in one of the author's previous papers.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.А.Джавахишвили
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

315, 1993

ПРИМЕНЕНИЕ ПОНЯТИЯ УПЛОТНЯЮЩЕГО ОПЕРАТОРА К СИСТЕМЕ РЕЙССНЕРА

В.Ш.Одишария

Рассмотренная в данной статье математическая модель деформации пластинки представляет интерес ввиду сложной нелинейности соответствующей системы дифференциальных уравнений, вопрос разрешимости которой до сих пор является непреодоленной проблемой /1, с.349/. Для поставленной краевой задачи с помощью теории уплотняющих операторов доказывается существование решения при достаточно малых исходных параметрах и правых частях в гладких векторных пространствах.

Использован способ доказательства работы /2/, в которой изучена система Тимошенко.

Система уравнений, описывающая деформацию трехслойной пластинки в модели Рейсснера, имеет вид /3-5/

$$\frac{\partial N_i}{\partial x_i} + \frac{\partial T}{\partial x_j} = P_i \, ,$$

$$\sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(N_i + M_i) \frac{\partial w}{\partial x_i} + (T + H) \frac{\partial w}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} - \right. \qquad (1)$$

$$-Q_i \frac{\partial w}{\partial x_i} \Big\} = q,$$

$$\frac{\partial M_i}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial x_j} - Q_i = 0.$$

Здесь и всюду далее $i, j = 1, 2, \quad i \neq j,$

$$N_i = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 + \nu \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_j} \right)^2 \right] \right\},$$

$$T = \frac{Eh}{1+\nu} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right), \quad H = D \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right),$$

$$Q_i = (h+t) G \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} + \varphi_i \right),$$

$$M_i = D \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} \right).$$

Искомыми являются функции $u_i = u_i(x)$, $w = w(x)$ и $\varphi_i = \varphi_i(x)$, где u_i и w представляют собой перемещения точек срединной поверхности вдоль линии x_i и x_3, а φ_i – компонента изменения положения нормали $P_i = P_i(x)$ и $q = q(x)$ – заданные функции, соответствующие внешнему воздействию, x_i – пространственная переменная, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, Ω – область, занимаемая пластинкой в плане, с границей $\partial\Omega$, h, t – толщины сердцевины и лицевых слоев, G – модуль жесткости внутреннего слоя, E – модуль упругости наружных слоев, ν – коэффициент Пуассона внешних слоев $0 < \nu < \frac{1}{2}$, $D = Eh(h+t)^2/2(1-\nu^2)$.

Рассмотрим случай, когда пластинка жестко закреплена по контуру

$$u_1\Big|_{\partial\Omega} = w\Big|_{\partial\Omega} = \varphi_i\Big|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (2)$$

Обозначим через $\left(C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})\right)^n$, $0<\alpha<1$, пространство n-мерных вектор-функций с компонентами из $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ /6, с.58/ и нормой

$|V|_{1,m,\alpha} = |V_1|_{m,\alpha} + |V_2|_{m,\alpha} + \dots + |V_n|_{m,\alpha}$ для $V=(V_1, V_2, \dots, V_n) \in$
$\in \left(C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})\right)^n$, где $x=(x_1, x_2)$, $\ell=(\ell_1, \ell_2)$,

$$\langle \omega_i \rangle_{\Omega}^{(\alpha)} = \sup \frac{\omega_i(x) - \omega_i(x')}{|x-x'|^{\alpha}}.$$

Найдем решение задачи (I),(2) в $\left(C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})\right)^5$, $0<\alpha<1$.

Допустим ограниченность норм операторов обратных к L, Δ и $aL-I$, при однородных граничных условиях первого рода

$$|L^{-1}|_{1,0,\alpha} \leq \sigma_1, \qquad (3.1)$$

$$|\Delta^{-1}|_{0,\alpha} \leq \sigma_2, \qquad (3.2)$$

$$|(aL-I)^{-1}|_{1,0,\alpha} \leq \sigma_3. \qquad (3.3)$$

Здесь $L = \frac{1}{1+\nu}\Delta + \frac{1}{1-\nu}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}$ – оператор плоской теории упругости, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа, I – единичный оператор, $a = Eh(h+t)/4G$.

Имеется в виду, что операторы L^{-1} и $(aL-I)^{-1}$ переводят $\left(C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})\right)^2$ в $\left(C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})\right)$, а Δ^{-1} переводит $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ в $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Нам потребуются следующие величины и обозначения:

$$m_1=\frac{4\sigma_2 DS}{G(h+t)^3}\left(\frac{1}{2}+\frac{2\sigma_1 S}{1-\nu^2}\right), \qquad m_2=\frac{\sigma_2\sigma_1 S^2 Eh(h+t)}{2G(1-\nu^2)},$$

$$m_3=1-\sigma_2 S\left[\frac{|P|_{1,0,\alpha}}{G(h+t)}\left(1+\frac{\sigma_1}{1-\nu^2}\right)+\sigma_3 S\right],$$

$$m_4=\frac{\sigma_2|q|_{0,\alpha}}{G(h+t)}, \qquad m_5=1+\frac{2\sigma_1 S}{1-\nu^2},$$

$$m_6=\max\left(1,\frac{(h+t)^2}{4}\right)+\sigma_3 S\frac{(h+t)^2}{4},$$

$$m_7=\frac{1-\nu^2}{\sigma_2 CS}-\frac{\sigma_1|P|_{1,0,\alpha}}{2Eh},$$

$$r_1=\inf_{r\in R}\{r\}, \qquad r_2=\sup_{r\in R}\{r\},$$

$$R=\{r\,|\,r>0,\ m_1r^3+m_2r^2-m_3r+m_4<0\},$$

$$r_3=\frac{-m_6+\sqrt{m_6^2+4m_5m_7}}{2m_5}, \qquad S=\max\left(1,(\operatorname{diam}\Omega)^{1-\alpha}\right),$$

$\rho=(\rho_1,\rho_2)$. Под $B_n(0,\rho)$ подразумевается шар в $\left(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\right)^n$ с центром в нуле и радиусом ρ.

Теорема. Допустим, что

1) $P\in\left(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\right)^2$, $q\in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$,

2) Ω – выпуклая область и $\partial\Omega\in C^{1,\alpha}$,

3) в случае существования L^{-1}, Δ^{-1} и $(aL-I)^{-1}$ справедливы неравенства (3),

4) $m_3>0$,

5) $[2m_2^3-2(m_2^2+3m_1m_3)^{3/2}+9m_1m_2m_3]/(27m_1^2)+m_4<0$,

6) $r_1<r_3$.

Тогда задача (I), (2) разрешима в $\left(C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})\right)^5$, причем

$$u=(u_1,u_2)\in B_2\left(0,\frac{2\sigma_1 r^2 S}{1-\nu^2}+\frac{\sigma_1 |P|_{1,2,\alpha}}{2Eh}\right),$$

$$w\in B_1(0,r),$$

$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)\in B_3(0,\sigma_3 rS)$, где $r=\min(r_2,r_3)$.

Доказательство теоремы разобьем по пунктам.

I. Получение уравнения относительно w.

Перепишем систему (I) в виде

$$Lu=f(w), \tag{4.I}$$

$$\Delta w=\Phi(u,w,\varphi), \tag{4.2}$$

$$(aL-I)\varphi=g(w), \tag{4.3}$$

где

$$f=(f_1,f_2),\qquad g=(g_1,g_2),$$

$$f_1=-\frac{\lambda+2\mu}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2-\frac{\nu}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2-$$

$$-\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)+bP_1,$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

$$\varphi_1 = \varphi_1(u, w, \varphi) = -bc\left[(N_1 + M_1)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2(T+H)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \right.$$
$$\left. + (N_2 + M_2)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right],$$

$$\varphi_2 = \varphi_2(w, \varphi) = -bc\left(P_1\frac{\partial w}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial w}{\partial x_2} - q\right) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2},$$

$$g = (g_1, g_2), \quad g_i = \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad b = \frac{1}{2Eh}, \quad C = \frac{2Eh}{G(h+t)}.$$

На основании условия 2) теоремы

$$\exists\, L^{-1}, \Delta^{-1}, (aL - I)^{-1}, \tag{5}$$

такие, что

$$L^{-1}, (aL-I)^{-1} \in \mathcal{L}\left(\left(C^{0,\alpha}(\bar\Omega)\right)^2, \left(C^{2,\alpha}(\bar\Omega)\right)^2\right) \; [7],$$
$$\Delta^{-1} \in \mathcal{L}\left(C^{0,\alpha}(\bar\Omega), C^{2,\alpha}(\bar\Omega)\right) \; [8, \text{с.} 96], \tag{6}$$

где $\mathcal{L}(X, Y)$ – пространство линейных ограниченных операторов из X в Y.

Учитывая (4.I), (4.3) и (5), имеем

$$u_i = A^1_{i1} f_1 + A^1_{i2} f_2, \tag{7}$$

$$\varphi_i = A^2_{i1} g_1 + A^2_{i2} g_2. \tag{8}$$

Здесь

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} A^1_{11} & A^1_{12} \\ A^1_{21} & A^1_{22} \end{pmatrix}, \quad (aL-I)^{-1} = \begin{pmatrix} A^2_{11} & A^2_{12} \\ A^2_{21} & A^2_{22} \end{pmatrix}.$$

Поэтому, если в выражения для N_i, T, H, M_i, $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}$ подставить (7) и (8), то приходим к равенствам $N_i = N_{i1}(w)$, $T = T_1(w)$, $H = H_1(w)$, $M_i = M_{i1}(w)$, $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i} = S_i(w)$, где N_{i1}, T_1, H_1, M_{i1}, S_i – действующие на w операторы, вид которых очевиден.

Примем во внимание полученные в уравнении (4.2) соотношения и подействуем на него оператором Δ^{-1}, в результате чего будем иметь

$$w = \Phi(w), \tag{9}$$

где

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

$$\Phi_1(w) = -bc\,\Delta^{-1}\Big[\big(N_{11}(w) + M_{11}(w)\big)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2\big(T_1(w) + H_1(w)\big)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + N_{21}(w) + M_{21}(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\Big],$$

$$\Phi_2(w) = -\Delta^{-1}\Big[bc\Big(P_1\frac{\partial w}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial w}{\partial x_2} - q\Big) + S_1(w) + S_2(w)\Big]$$

Выделим из (2) условие для w

$$w\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{10}$$

Используя теорию /9,с.27/, обоснуем разрешимость задачи (9),(10), что в свою очередь будет означать существование решения исходной системы (1) при условии (2). Для этого надо показать, что оператор Φ переводит некоторый шар в себя и является χ – уплотняющим.

2. Перевод Φ оператором шара $B_1(0,r)$ в себя.

В ходе доказательства понадобятся вспомогательные утверждения.

Лемма I. Пусть $v=(v_1, v_2)$, $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2)\in (C^{2,\alpha}(\bar\Omega))^2$, $\omega_1, \omega_2, w\in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$,

$$\gamma(v_1, v_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2)=\sum_{k_1=1}^{2}\sum_{k_2=1}^{2}\left(\alpha_{k_1k_2}+\right.$$

$$\left.+\beta_{k_1k_2}\right)\frac{\partial^2\omega_2}{\partial x_{k_1}\partial x_{k_2}},$$

где

$$\alpha_{ii}=\frac{2}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial v_j}{\partial x_j}+\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_j}\right],$$

$$\alpha_{ij}=\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_j}+\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\right),$$

$$\beta_{ii}=\frac{(h+t)^2}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_j}\right),$$

и

$$\beta_{ij}=\frac{(h+t)^2}{4(1+\nu)}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right),$$

тогда $\gamma\in C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$ и $|\gamma|_{0,\alpha}\le\frac{25}{1-\nu^2}\Big(|v|_{1,2,\alpha}+$
$+\frac{(h+t)^2}{4}|\varphi|_{1,2,\alpha}+|w|_{2,\alpha}|\omega_1|_{2,\alpha}\Big)|\omega_2|_{2,\alpha}$.

Доказательство леммы I. Справедливость включения $\gamma\in C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$ следует непосредственно из условия, а оценка нормы получается следующим образом:

$$|\gamma|_{0,\alpha} \leq \frac{2}{1-\nu^2}\left[\sum_{\ell_1=1}^{2}\sum_{|\ell_2|=1}\left(\sup\left|D^{\ell_2}v_{\ell_1}\right| + \frac{(h+t)^2}{4}\sup\left|D^{\ell_2}\varphi_{\ell_1}\right|\right)+\right.$$

$$+\sum_{|\ell_1|=1}\sum_{|\ell_2|=1}\sup\left|D^{\ell_1}w\right|\sup\left|D^{\ell_2}\omega_1\right|\Bigg]\sum_{|\ell_3|=2}\sup\left|D^{\ell_3}\omega_2\right|+$$

$$+\sum_{\kappa_1=1}^{2}\sum_{\kappa_2=1}^{2}\left(\langle\alpha_{\kappa_1\kappa_2}\rangle_{\overline{\Omega}}^{(\alpha)}+\langle\beta_{\kappa_1\kappa_2}\rangle_{\overline{\Omega}}^{(\alpha)}\right)\sup\left|\frac{\partial^2\omega_2}{\partial x_{\kappa_1}\partial x_{\kappa_2}}\right|+$$

$$\left.+\left(\sup\left|\alpha_{\kappa_1\kappa_2}\right|+\sup\left|\beta_{\kappa_1\kappa_2}\right|\right)\left\langle\frac{\partial^2\omega_2}{\partial x_{\kappa_1}\partial x_{\kappa_2}}\right\rangle_{\overline{\Omega}}^{(\alpha)}\right].$$

Здесь и далее под знаком $\sup$ опущено $x, x'\in\overline{\Omega}$.

Учитывая, что при $\kappa_1, \kappa_2 = 1, 2$

$$\langle\alpha_{\kappa_1\kappa_2}\rangle_{\overline{\Omega}}^{(\alpha)}+\langle\beta_{\kappa_1\kappa_2}\rangle_{\overline{\Omega}}^{(\alpha)} \leq \frac{2}{1-\nu^2}\left(\operatorname{diam}\Omega\right)^{1-\alpha}\left[\sum_{\ell_1=1}^{2}\sum_{|\ell_2|=2}\left(\sup\left|D^{\ell_2}v_{\ell_1}\right|+\right.\right.$$

$$+\frac{(h+t)^2}{4}\sup\left|D^{\ell_2}\varphi_{\ell_1}\right|\Bigg)+\sum_{|\ell_1|=1}\left(\sup\left|D^{\ell_1}\left(\frac{\partial w}{\partial x_{\kappa_1}}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_{\kappa_2}}\right)\right|+\right.$$

$$\left.\left.+\sup\left|D^{\ell_1}\left(\frac{\partial w}{\partial x_{3-\kappa}}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_{3-\kappa_2}}\right)\right|\right)\right] \leq$$

$$\leq\frac{2}{1-\nu^2}\left(\operatorname{diam}\Omega\right)^{1-\alpha}\left[\sum_{\ell_1=1}\sum_{|\ell_2|=2}\left(\sup\left|D^{\ell_2}v_{\ell_1}\right|+\right.\right.$$

$$+\left.\frac{(h+t)^2}{4}\sup D^{\ell_2}\varphi_{\ell_1}\right)+\sum_{|\ell_1|=2}\sum_{|\ell_2|=1}\left(\sup\left|D^{\ell_1}w\right|\sup\left|D^{\ell_2}\omega_1\right|+\right.$$

$$+ \sup|D^{\ell_2}w| \sup|D^{\ell_1}\omega_1|\Big)\Big],$$

а также

$$\sup|\alpha_{K_1K_2}| + \sup|\beta_{K_1K_2}| \leq \frac{2}{1-\nu^2}\Big[\sum_{\ell_1=1}^{2}\sum_{|\ell_2|=1}\Big(\sup|D^{\ell_2}\psi_{\ell_1}| +$$

$$+ \frac{(h+t)^2}{4}\sup|D^{\ell_2}\varphi_{\ell_1}|\Big) + \sum_{|\ell_1|=1}\sum_{|\ell_2|=1}\sup|D^{\ell_1}w|\sup|D^{\ell_2}\omega_1|\Big],$$

получим требуемое неравенство.

Лемма 2. Пусть $w \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, где

$$\theta_i = \frac{\partial w}{\partial x_i}\Big[\frac{2}{1-\nu^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}\Big] + \frac{1}{1-\nu}\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2},$$

тогда $\theta \in (C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}))$ и $|\theta|_{1,0,\alpha} \leq \frac{2S}{1-\nu^2}|w|^2_{2,\alpha}$.

Доказательство леммы 2 в принципе не отличается от доказательства предыдущей леммы, поэтому мы его опускаем.

Вернемся непосредственно к доказательству теоремы. Оценим нормы векторов u и φ. На основании (4.I), (4.3), (3.I), (3.3) и (5) имеем $|u|_{1,2,\alpha} \leq \sigma_1 |f|_{1,0,\alpha}$, $|\varphi|_{1,2,\alpha} \leq \sigma_3 |g|_{1,0,\alpha}$. Поэтому имеем

$$|u|_{1,2,\alpha} \leq \sigma_1\Big(\frac{2S}{1-\nu^2}|w|^2_{2,\alpha} + |P|_{1,0,\alpha}\Big), \tag{II}$$

$$|\varphi|_{1,2,\alpha} \leq \sigma_3\, S|w|_{2,\alpha}. \tag{I2}$$

(II) выводится с помощью леммы 2, а неравенство (I2) элементарно.

Теперь получим оценку нормы $\Phi(w)$. С этой целью рассмотрим сумму $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Понятно, что φ_1 совпадает с функцией $f(u_1, u_2, \frac{1}{2}w, \varphi_1, \varphi_2)$ из леммы I умноженной на $-C$. Поэтому

$$|\varphi_1|_{0,\alpha} \leq \frac{cs}{1-\nu^2}\left(|u|_{1,2,\alpha} + \frac{(\vartheta_1+t)^2}{4}|\varphi|_{1,2,\alpha} + \frac{1}{2}|w|^2_{2,\alpha}\right)|w|_{2,\alpha}.$$

Кроме того очевидно, что

$$|\varphi_2|_{0,\alpha} \leq 6c\left(s|P|_{0,\alpha}|w|_{2,\alpha} + |q|_{0,\alpha}\right) + s|\varphi|_{1,2,\alpha}.$$

Вид оператора $\Phi(w)$, с учетом (3.2), (I.I) и (I2), позволяет записать

$$|\Phi(w)|_{2,\alpha} \leq 6_2\left(|\varphi_1|_{0,\alpha} + |\varphi_2|_{0,\alpha}\right) \leq m_1|w|^3_{2,\alpha} +$$
$$+ m_2|w|^2_{2,\alpha} + (1-m_3)|w|_{2,\alpha} + m_4.$$

Отсюда ясно, что если выполняется неравенство

$$m_1 r^3 + m_2 r^2 - m_3 r + m_4 < 0, \qquad (I3)$$

то оператор Φ переводит $B_1(0,r)$ шар в себя.

3. $\mathcal{X}$ - уплотняемость оператора Φ.

Покажем, что Φ при определенных условиях $\mathcal{X}$ -уплотняющий оператор. Для этого достаточно убедиться в том, что Φ_1 - сжимающий, а Φ_2 - вполне непрерывный операторы /9/. Сжимаемость оператора Φ_1 гарантируется выполнением следующего неравенства /10,с.117/

$$|\Phi_1'|_{2,\alpha} \leq \sigma < 1. \tag{14}$$

По определению $\Phi_1(w)$ является результатом подстановки в $\Delta^{-1}\varphi(u,w,\varphi)$ выражений (7) и (8) вместо u и φ соответственно. Поэтому для нахождения σ из (14) достаточно найти верхнюю границу нормы $(\Delta^{-1}\varphi_1)' = \Delta^{-1}\varphi_1' \in \mathcal{L}\left((C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}))^5, C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})\right)$ и затем $|u|_{1,2,\alpha}$ и $|\varphi|_{1,2,\alpha}$ оценить согласно (11) и (12).

Учитывая лемму I, можно проверить, что для $\delta\varphi_1 = \varphi_1(u+\delta u, w+\delta w, \varphi+\delta\varphi) - \varphi_1(u,w,\varphi)$ справедливо $\delta\varphi_1 = d\varphi_1 + \mathcal{J}$, где

$$d\varphi_1 = -c\left[\gamma\left(u_1, u_2, \tfrac{1}{2}w, \tfrac{1}{2}\delta w, \varphi_1, \varphi_2\right) + \gamma\left(\delta u_1, \delta u_2, \delta w, \tfrac{1}{2}w, \delta\varphi_1, \delta\varphi_2\right)\right], \tag{15}$$

$|\mathcal{J}|_{0,\alpha} = o(|\delta|_{1,2,\alpha})$, $\delta = (\delta u, \delta w, \delta\varphi)$, а $\delta u = (\delta u_1, \delta u_2)$,

δw и $\delta\varphi = (\delta\varphi_1, \delta\varphi_2)$ - приращения $u = (u_1, u_2)$, w и $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ соответственно.

Выполнив простые, но трудоемкие преобразования, схематически схожие с доказательством леммы I, получаем неравенство $|d\varphi_1|_{0,\alpha} \leq \varkappa |\delta|_{1,2,\alpha}$, где

$$\varkappa = \frac{cs}{1-\nu^2}\left[|u|_{1,2,\alpha} + \max\left(1, \frac{(h+t)^2}{4}\right)|w|_{2,\alpha} + \right. \tag{I6}$$

$$\left. + |w|^2_{2,\alpha} + \frac{(h+t)^2}{4}|\varphi|_{1,2,\alpha}\right].$$

Исходя из вышесказанного заключаем, что $|\varphi_1'|_{2,\alpha} \leq \varkappa$.

Примем к сведению, что было бы легче на основании (I5) использовать неравенство треугольника и далее оценить каждое слагаемое, применяя лемму I. Однако это привело бы к худшему, чем (I6), результату, а именно,

$$\varkappa = \frac{cs}{1-\nu^2}\left[|u|_{1,2,\alpha} + \max\left(1, \frac{(h+t)^2}{4}\right)|w| + \frac{3}{2}|w|^2_{2,\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{(h+t)^2}{4}|\varphi|_{1,2,\alpha}\right].$$

Теперь оценим $|\varphi_1'|_{2,\alpha}$. С помощью (3.2),(II),(I2) и (I6) будем иметь

$$|\varphi_1'|_{2,\alpha} \leq \sigma_2 \varkappa \leq \tau\left[m_5 |w|^2_{2,\alpha} + m_6 |w|_{2,\alpha} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{\tau} - m_7\right)\right], \qquad \tau = \frac{\sigma_2 cs}{1-\nu^2}.$$

Очевидно, что если

$$m_5 r^2 + m_6 r - (m_7 - \varepsilon) < 0, \qquad (17)$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то неравенство (14) будет справедливо в $B_1(0,r)$.

Таким образом, радиус шара $B_1(0,r)$ помимо того, что должен быть положительным

$$r > 0, \qquad (18)$$

надо, чтобы удовлетворял ограничениям (13) и (17).

Покажем, что требования, выдвигаемые в формулировке теоремы, обеспечивают выполнение (13), (17) и (18). Ясно, что (17) будет иметь место, если выполнятся $m_5 r^2 + m_6 r - m_7 < 0$. Последнее неравенство имеет множество положительных решений $(0, r_3)$, так как $m_7 > \frac{m_3}{\tau} > 0$, в силу того, что $m_3 > 0$ (условие 4) и $\tau > 0$. Понятно, что для существования радиуса r, удовлетворяющего (13), (17) и (18), непустым должно быть пересечение $(0, r_3)$ с R, множеством положительных решений неравенства (13).

Убедимся теперь в существовании множества R. Функция $y(r) = m_1 r^3 + m_2 r^2 - m_3 r + m_4$ в точке 0 принимает положительное значение и стремится к ∞, когда $r \longrightarrow \infty$. Эта функция должна иметь критическую точку на положительной полуоси и принимать в ней отрицательное значение. Условия 4) и 5) гарантируют требуемое.

Пересечение $(0, r_3)$ с R будет непустым, если r_1, левая граничная точка множества R, попадет в отрезок

$(0, r_3)$, что и обеспечивается условием 6).

Обоснование выполнимости условий 4)-6) отнесем на конец работы, а сейчас покажем, что оператор Φ_2 -- вполне непрерывный.

Ограниченность в $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ множества $\{w\}$ гарантирует компактность в $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ множества $\left\{\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\}$ /II,с.9I/. Так как $P_i \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$,то компактны в $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ и $\left\{P_i \frac{\partial w}{\partial x_i}\right\}$. Следствием этого является компактность (комп.) в $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ множеств (мн.) $\left\{\Delta^{-1}\left(P_i \frac{\partial w}{\partial x_i}\right)\right\}$. Получив из (8) равенство $S_i(w) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A^2_{i1}\frac{\partial w}{\partial x_1} + A^2_{i2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)$ и проведя аналогичные рассуждения, можно определить компактность множеств $\{\Delta^{-1} S_i(w)\}$. В самом деле, $|w|_{2,\alpha} \leq const \Longrightarrow \left\{\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\}$ комп. в $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \left\{A^2_{i1}\frac{\partial w}{\partial x_1} + A^2_{i2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right\}$ комп. в $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \Longrightarrow \{S_i(w)\}$ комп. в $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \Longrightarrow$ мн. $\{\Delta^{-1} S_i(w)\}$ комп.в $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Итак, доказательство разрешимости задачи (9),(I0) и принадлежности решения w шару $B_1(0,r)$ закончено. Из этого, а также из (5) и неравенств (II),(I2) вытекает существование решения исходной задачи (I),(2) и вхождение u и φ в соответствующие шары.

Величина $min(r_1, r_3)$ представляет собой точную верхнюю границу множества решений системы неравенств (I7) при $\varepsilon = 0$ с (I3) и (I8).

Теорема доказана.

Теперь, что касается реальности требований 4)-6). Нет надобности уточнять, в каких случаях выполняется условие

$m_3 > 0$. Далее, для достижения 5) требуется достаточная малость m_2 и m_4 . И, наконец, для обеспечения 6) достаточно большим должно быть m_3 и достаточно малым m_4 .

В заключение отметим, что величины r_1 и r_2 могут быть найдены по формулам Кардано /12,с.245/.

Поступила 20.V.1992

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

Литература

1. Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М., 1989.
2. Перадзе Д.Г. Уплотняющий оператор одной системы уравнений и ее разрешимость //Труды ТГУ. 1990. т.300, с.37-49.
3. Reissner E. Finite Deflections of Sandwich Plates. J.Aeronav.Sci., 1943. V.15. N7. P.435-446.
4. Reissner E. Errata - "Finite Deflections of Sandwich Plates". J.Aeronav.Sci., 1950. V.15. N1. P.125.
5. Wang C.T. Principle and Application of Complementary Energy Method for Thin Homogeneous and Sandwich Plates and Shells with Finite Deflections. NACA TN, 1952. N2620. P.1-94.
6. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.
7. Morrey C. Multiple Integrals in the Calculus of Variations. "Sprin-

ger-Verlag". Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

8. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957.
9. Ахмеров Р.Р., Каменский М.Н., Потапов А.С. и др. Меры некомпактности и уплотняющие операторы. Новосибирск, 1986.
10. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978.
11. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М., 1966.
12. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., 1975.

ვ.ოლიმარია

შემამჭიდროებელი ოპერატორის ცნების გამოყენება რეისნერის სისტემისათვის

რ ე ზ ი უ მ ე

შემამჭიდროებელი ოპერატორის თეორიის გამოყენებით მტკიცება რეისნერის არაწრფივი განტოლებათა სისტემის ამოხსნადობა საკმარისად მცირე საწყისი პარამეტრებისა და მარჯვენა მხარეებისათვის ბავე ვექტორულ სივრცეებში.

V.Odisharia

APPLICATION OF THE CONCEPT OF CONDENSING OPERATOR TO THE REISSNER SYSTEM

S u m m a r y

The existence of the solution of a nonlinear system of Reissner equations for sufficiently small initial parameters and right hand sides in smooth vector spaces is proved by means of the theory of condensing operators.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.А.Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

315, 1993

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ИГРЫ "ЭКОЛОГИЯ"

А.Б.Корнеева, А.Я.Шурупова

Целью деловой игры является имитация коллективной профессиональной деятельности при разрешении проблемной ситуации. Очевидно, что конструирование профессиональной игры необходимо должно включать:

1. выбор объекта игры,
2. разработку методики организации и проведения игры,
3. создание и описание блок-схемы игры,
4. создание графической модели взаимодействия участников игры,
5. разработку правил игры,
6. разработку инструкций участникам игры,
7. создание информационной поддержки игры,
8. подготовку технического обеспечения игры.

Ниже рассматриваются некоторые вопросы, связанные с разработкой профессиональной игры, предназначенной для решения задач прикладной экологии.

В качестве проблемной ситуации участниками игры рассматривается некоторая экологическая ситуация, связанная с отклонением от нормы ряда параметров, характеризующих состояние среды. Непринятие соответствующих защитных мер может привести к катастрофическим последствиям. Необходимо провести анализ ситуации и предложить план предотвращения или ликвидации катастрофы.

На рис. приведена блок-схема профессиональной игры "ЭКОЛОГИЯ".

Для информационной поддержки игры предполагается создание базы данных.

Реализация центральных этапов игры, отображенных на рис. блоками "Анализ и оценка экологической ситуации" и "Выработка решения", требует многоаспектного исследования проблемы. Обеспечить последнее представляется возможным с помощью морфологического анализа систем, предложенного Ф.Цвикки /I/.

Выбор метода морфологического ящика или метода морфологических таблиц предопределяется тем, что решение проблемы в процессе игры является результатом коллективной профессиональной деятельности, а метод Ф.Цвикки обеспечивает предельно полное и наглядное представление данных, необходимых для анализа ситуации и поиска решения.

Морфологическое исследование включает в себя следующие этапы:

1. Формулировка поставленной проблемы.
2. Определение параметров, от которых зависит решение проблемы.
3. Определение возможных значений выделенных параметров и

сведение их в таблицу (эта таблица и называется морфологическим ящиком, или морфологической таблицей).

Пусть решение проблемы зависит от n параметров $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Параметру P_1 отвечает K_1 значений, параметру P_2 – K_2 значений,..., параметру P_n – K_n значений. Тогда морфологический ящик представляется следующей структурой:

$$P_1^1, P_1^2, \ldots, P_1^{K_1}$$
$$P_2^1, P_2^2, \ldots, P_2^{K_2}$$
$$\ldots$$
$$P_n^1, P_n^2, \ldots, P_n^{K_n},$$

где P_i^j – j-е значение i-го параметра, $j = 1,2,\ldots, K_i$.

Каждый набор значений параметров $P_1^{j_1}, P_2^{j_2}, \ldots, P_n^{j_n}$ ($j_1 = 1,\ldots, K_1, \ldots, j_n = 1,\ldots, K_n$) называется вариантом решения. Общее число вариантов решения, содержащихся в морфологическом ящике, определяется произведением $K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_n$.

4. Оценка вариантов, имеющихся в морфологическом ящике.
5. Выбор оптимального варианта – решение проблемы.

Если анализ ситуации и анализ возможных решений проблемы в процессе профессиальной игры проводить, опираясь на принципы морфологического анализа, то в качестве базы данных, предназначенной для информационной поддержки игры, целесообразно выбрать реляционную базу данных. Это следует из того, что структура морфологического ящика полностью соответствует структуре реляционной модели данных /2/.

Реляционная база данных представляется множеством двумерных таблиц различного предметного наполнения, и каждая таблица соответствует некоторому отношению.

Дадим некоторые определения, которые делают наглядной тождественность формы представления данных в морфологическом ящике и в реляционной базе данных.

Атрибутом называется поименованная характеристика объекта.

Роли атрибута:

1. определение свойства объекта,
2. идентификация объекта,
3. представление связей между объектами.

Домен-множество значений атрибута (признаку P_i соответствует множество значений $\{P_i^1, P_i^2, \ldots, P_i^{K_i}\}$, обозначим его через D_i).

Декартово произведение n доменов ($D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$) - множество всех кортежей вида ($P_1^{j_1}, P_2^{j_2}, \ldots, P_n^{j_n}$) длины n, где $P_1^{j_1} \in D_1$, $P_2^{j_2} \in D_2, \ldots, P_n^{j_n} \in D_n$.

Отношением называется подмножество декартова произведения доменов.

Из вышеприведенных определений следует, что структура морфологического ящика в его полном объеме отвечает декартову произведению доменов, относящихся к признакам, фиксируемым на втором этапе морфологического анализа. А схемой отношения /2/:

имя _ отношения ($P_1, P_2, \ldots, P_n$)

где $P_1, P_2, \ldots, P_n$ - имена атрибутов, определяются подмножества морфологической таблицы.

Для создания конкретной базы данных, используемой для информационной поддержки профессиональной игры, целесообразно применить программный пакет dBASE III / 3 /.

В системе dBASE III отношение может быть представлено файлом соответствующего имени.

Файл состоит из записей, запись соответствует кортежу. Число записей практически не ограничено.

Структура записи зависит от определения полей. В полях могут размещаться данные 5 типов: C = строка символов, N - число, D = дата, L = логическая величина, M = текст.

Таким образом, файл можно рассматривать как прямоугольную таблицу, каждая строка которой есть запись, а каждое поле записи – элемент таблицы.

Организуя файл, необходимо дать описание полей записи. Последнее включает: имя поля (не более 8 символов – буквы, цифры, знак подчеркивания), тип поля (C, N, D, L, m, по умолчанию задается тип C), длину поля, количество цифр после десятичной точки (только для данных типа N, не более 15).

При организации файлов необходимо учитывать три правила нормализации, связанные с понятием ключа /2/. Ключ – это атрибут, который можно использовать для идентификации записи.

Правила нормализации состоят в следующем /3/:

I) записи должны содержать одинаковое число полей;

2) ни одно неключевое поле не должно содержать информации о подмножестве ключа (правило применимо для составного ключа /2/);

3) любое неключевое поле не должно содержать информации о другом неключевом поле.

Таким образом, пользуясь программным пакетом dBASE III, можно описывать данные в любой форме, включая вербальную. dBASE III позволяет менять структуру данных уже после того, как она сформирована.

Как было отмечено выше, конструирование игры начинается с выбора объекта игры, с которым связываются разыгрываемые проблемные ситуации.

Выберем в качестве объекта игры загрязнение атмосферы/4,5/.

"Загрязнение атмосферы – любое постороннее вещество или изменение естественного состава воздуха, способное вызвать вредные эффекты или же создать затруднения для человека" (Европейский Совет, 1967) /4/.

Исходя из этого определения, представляется целесообразным организовать для информационной поддержки игры файлы, содержащие данные о составе атмосферного воздуха, об источниках загрязнения, о загрязнителях.

Чтобы организовать файл, необходимо задать схему отношения, отображаемого этим файлом, и описание полей записи.

Рассмотрим организацию файла, описывающего состав атмосферного воздуха /6/.

Схема отношения:

ВОЗДУХ (НАИМЕН, ОБЪЕМ, МАССА)

Здесь:

ВОЗДУХ - имя файла (состав атмосферного воздуха),

НАИМЕН - наименование компоненты,

ОБЪЕМ - содержание в нижних слоях атмосферы по объему в %,

МАССА - содержание в нижних слоях атмосферы по массе в %.

Описание полей записи:

НАИМЕН	С	30	
ОБЪЕМ	N	IO	6
МАССА	N	IO	7

Содержание файла ВОЗДУХ:

НАИМЕН	ОБЪЕМ	МАССА
Азот	78.084000	75.5000000
Кислород	20.946000	23.1400000
Аргон	0.934000	1.2800000
Неон	0.001800	0.0012000
Гелий	0.000524	0.0000700
Криптон	0.000II4	0.0003000
Водород	0.000050	0.0000050
Углекислый газ	0.034000	0.0466000

Водяной пар в поляр.шир.	0.200000	
Водяной пар у экватора	2.600000	
Озон в тропосфере	0.000001	
Озон в стратосфере	0.000100	
Метан	0.000160	0.0000900
Окись азота	0.000001	0.0000003
Окись углерода	0.000008	0.0000078

Рассмотрим организацию файла, содержащего сведения об источниках загрязнения атмосферы.

Будем рассматривать антропогенные и естественные источники загрязнения /4,5/. Основными антропогенными источниками загрязнения воздуха являются тепловые электростанции, промышленные предприятия, транспорт, предприятия атомной энергетики, сельскохозяйственное производство /4,5,7/.

Схема отношения, отображаемого файлом:

Источник (НАИМЕН, ПРОИСХ, ВЫБРОСЫ)

Здесь:

ИСТОЧНИК - имя файла,

НАИМЕН - наименование источника загрязнения,

ПРОИСХ - происхождение загрязнения - антропогенное или естественное,

ВЫБРОСЫ - наименование выделений и выбросов.

Описание полей записи:

НАИМЕН	C	60
ПРОИСХ	C	1
ВЫБРОСЫ	C	250

Фрагмент файла ИСТОЧНИК:

НАИМЕН	ПРОИСХ	ВЫБРОСЫ
Тепловые электростанции	А	Окислы азота, диоксид серы, зола

Предприятия черной металлургии	А	Пыль, оксид углерода, диоксид серы, оксиды азота, фенол, аммиак, углеводороды, сероводород, соляная кислота, твердые частицы
Доменные печи ЧМ	А	Пыль, сернистый газ, марганец, соединения мышьяка, фосфора, сурьмы, свинца, пары ртути и редких металлов, цианистый водород, смолистые вещества
Агломерационные фабрики ЧМ	А	Сернистый газ
Мартеновские цехи ЧМ	А	Пыль из оксида железа и оксида алюминия, оксид углерода, сернистый газ
Конверторные цехи ЧМ	А	Оксиды кремния, марганца, фосфора, оксид углерода

В поле ПРОИСХ через А отмечено антропогенное происхождение выделений или выбросов. В поле НАИМЕН сокращения обозначают: ЧМ - черная металлургия.

Приведенный выше файл ИСТОЧНИК должен быть уточнен, дополнен, он может меняться и совершенствоваться, возможности этого представляются системой dBASE III.

Рассмотрим организацию файла, описывающего загрязнители. Характеризуя последние, будем рассматривать следующие атрибуты:

1. Название.
2. Тип загрязнения (физическое, химическое, биологическое, наносящее эстетический вред / 4 /).
3. Агрегатное состояние загрязнителя (газ, пар, аэрозоль).
4. Класс опасности / 5 /.
5. Естественная концентрация загрязнителя.

6. Разовая ПДК (предельно допустимая концентрация) / 5 /.

7. Средняя суточная ПДК / 5 /.

8. ПДК рабочей зоны / 5 /.

9. Способность к суммации действия / 4,5 /.

10. Вещества, в отношении которых возможна суммация действия.

11. Вещества, в отношении которых невозможна суммация действия.

12. Возможные источники загрязнения.

13. Влияние рельефа на загрязняющий агент.

14. Влияние метеорологических условий на загрязняющий агент.

15. Вредные воздействия загрязнителя.

16. Нейтрализация загрязнителя.

17. Технические средства измерения.

Схема отношения, отображаемого файлом:
ЗАГР_АТМ (НАЗВАНИЕ, ТИП, АГР_СОСТ, КЛАСС, ЕСТ_КОНЦ, РАЗ_ПДК, СУТ_ПДК, ПДК_РЗ, СУММАЦИЯ, НАД_СУМ, ОТС_СУМ, ИСТОЧНИК, РЕЛЬЕФ, МЕТ_УСЛ, ВОЗДЕЙСТ, НЕЙТРАЛ, ИЗМЕРИТ)

ЗАГР_АТМ - имя файла (загрязнители атмосферы), имена атрибутов соответствуют вышеперечисленным характеристикам загрязнителей.

Параметры: естественная концентрация загрязнителя (ЕСТ_КОНЦ), разовая ПДК (РАЗ_ПДК), средняя суточная ПДК (СУТ_ПДК), ПДК рабочей зоны (ПДК_РЗ) измеряются в мг/м^3.

Описание полей записи:

НАЗВАНИЕ	C	20	
ТИП	C	5	
АГР_СОСТ	C	8	
КЛАСС	N	1	
ЕСТ_КОНЦ	N	10	8
РАЗ_ПДК	N	5	3
СУТ_ПДК	N	5	2

ПДК_РЗ	N	5	2
СУММАЦИЯ	L	1	
НАЛ_СУМ	C	100	
ОТС_СУМ	C	100	
ИСТОЧНИК	C	250	
РЕЛЬЕФ	C	80	
МЕТ_УСЛ	C	80	
ВОЗДЕЙСТ	C	150	
НЕЙТРАЛ	C	200	
ИЗМЕРИТ	C	80	

Самыми распространенными веществами, загрязняющими атмосферу, являются оксид углерода, диоксид серы, оксиды азота и пыль / 5,8 /.

Приведем пример заполнения файла, рассмотрев запись, отвечающую оксиду углерода.

В связи с тем, что запись содержит 17 полей, ее неудобно располагать строкой. Поместим ее вертикально.

НАЗВАНИЕ	Оксид углерода
ТИП	Хим
АГР_СОСТ	Газ
КЛАСС	4
ЕСТ_КОНЦ	0.0000002
РАЗ_ПДК	5.
СУТ_ПДК	3.
ПДК_РЗ	
СУММАЦИЯ	1
НАЛ_СУМ	Диоксид серы,фенол,пыль конверторного производства
ОТС_СУМ	Диоксид серы; диоксид азота, диоксид серы
ИСТОЧНИК	Вулканическая деятельность,брожение в анаэробной среде,электрические разряды в тропосфере,морские

организмы, лесные пожары, двигатели внутреннего сгорания, сжигание угля, дров, отходов

РЕЛЬЕФ

МЕТ_УСЛ

ВОЗДЕЙСТ Угнетение ЦНС, фитотоксичность (торможение дыхательных процессов)

НЕЙТРАЛ Бактериальная флора почв, дыхание растений

ИЗМЕРИТ Оптико-акустический газоанализатор ГМК-3

Известно около 400 наименований примесей, загрязняющих атмосферу /8/. Сведения о них должны быть занесены в банк данных. Для этого разрабатывается картотека, куда в настоящий момент помещены:

1) азота оксид, 2) азота диоксид, 3) аммиак, 4) бензпирен, 5) метилмеркаптан, 6) озон, 7) пыль неорганическая, 8) пыль органическая, 9) сажа, 10) сероводород, 11) серы диоксид, 12) углеводороды, 13) углерода оксид, 14) углерода диоксид, 15) фенол, 16) хлор.

Целесообразно организовать файл, содержащий рекомендации по оздоровлению воздушного бассейна. В частности, последние должны указывать на мероприятия по снижению выбросов вредных веществ.

Разрабатывается файл ОХР_ВОЗД (воздухоохранные мероприятия).

Проблемные ситуации, которые должны разыгрываться в ходе игры, могут отражать задачи разной сложности и касаться загрязнений локального, регионального или глобального масштаба.

Пример проблемной ситуации.

Задана карта промышленного района. Данные сети стационарных постов наблюдения в расчетном поле концентрации оксида углерода выделяют поле повышенных концентраций /5/ :

	5.5	7.5	9.0	I2.5	8.5	5.5		
9.0	5.4	5.0	II.5	II.0	7.0			
6.3	I5.0	7.5	6.0	7.0	6.5	7.0	7.0	5.5
	7.5	I3.5	I2.5	II.0	I3.2	6.5	5.0	
			6.I	5.5	5.5	5.5	5.0	

Требуется нормализовать ситуацию.

Для решения задачи необходимо выявить источники загрязнения и, учитывая объемы выбросов, топографические особенности местности, метеорологические явления, а также специфику конкретных производств, предложить воздухоохранные мероприятия.

Для организации игры, касающейся катастроф глобального масштаба, возможно использовать динамическую модель Дж.Форрестера / 9 /. Согласно концепции последнего, напряженность глобального масштаба может быть обусловлена ростом населения, возрастающим загрязнением, различием в уровнях жизни. Воздейств на один сектор мировой системы может вызывать непредвиденные последствия в другом. Поэтому динамическая мировая модель учитывает взаимосвязь населения, капиталовложений, географическо го пространства, природных ресурсов, загрязнений, производст продуктов питания.

При разыгрывании ситуаций-катастроф: взрыв атомной элект станции, пожар нефтяного месторождения, землетрясение и т.п. следует учитывать аспекты, отмечаемые в модели Дж.Форрестера.

Поступила 3.XI.1992

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

Литература

I.В.М.Одрин, С.С.Картавов. Морфологический анализ систем. Киев, "Наукова думка", 1977.

2.Ю.М.Полищук, В.Б.Хон. Теория автоматизированных банков информации. М.,"Высшая школа", 1989.

3.Р.Крамм. Системы управления базами данных dBASE II и dBASE III для персональных компьютеров. М.,"Финансы и статистика", 1988.

4.Ф.Рамад. Основы прикладной экологии. Л.,Гидрометеоиздат, 1981.

5.А.А.Беккер, Т.Б.Агаев. Охрана и контроль загрязнения природной среды. Л.,Гидрометеоиздат,1989.

6.Н.Ф.Реймерс. Природопользование. М.,"Мысль", 1990.

7.Л.П.Никитин, Ю.В.Новиков. Окружающая среда и человек. М., "Высшая школа", 1986.

8.Д.А.Бронштейн, Н.Н.Александров. Современные средства измерения загрязнения атмосферы.Л.,Гидрометеоиздат,1989.

9.Дж.Форрестер. Мировая динамика. М.,"Наука", 1978.

ა.კორნეევა, ა.შურუპოვა

პროფესიული თამაშის "ეკოლოგია" ორგანიზაცია

რეზიუმე

ნაშრომში განხილულია პროფესიული თამაშის "ეკოლოგია" ორგანიზაციის ძირითადი საკითხები. შემოთავაზებულია ასეთი თამაშის მოდელი.

A.Korneeva, A.Shurupova

ORGANIZATION OF THE PROFESSIONAL GAME: "ECOLOGY"

S u m m a r y

Some questions of organization of the professional game "Ecology" are discussed.

The model of such a game is suggested.

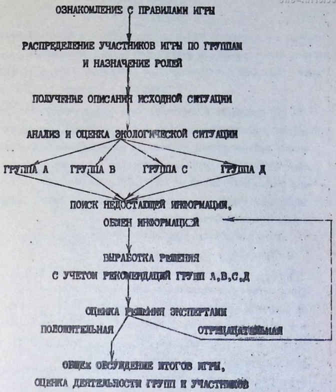


Рис. БЛОК-СХЕМА ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ИГРЫ "ЭКОЛОГИЯ"

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили
ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
315,1993

О НЕКОТОРЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ МЕРАХ ИНФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ НЕЧЁТКИХ ПОДМНОЖЕСТВ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Т.Г.Гачечиладзе, [illegible], [illegible]

I.ВВЕДЕНИЕ

Для понимания и количественной оценки нечёткости существенную роль играют различные меры информации, позволяющие сравнивать информационное содержание расщеплённых /I/ и классических подмножеств. Ниже мы рассмотрим направленное информационное расхождение Каллбека /2/, информацию степени β Реньи/3/, обобщённое направленное расхождение типа β Рати и Каннапана /4/ и взаимную информацию типа (α, β) .

Пусть имеются системы чисел: $P=(P_1,\dots,P_N)$; $P_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{N} P_i=1$,
$Q=(q_1,\dots,q_N)$, $q_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{N} q_i=1$,
$\tilde{Q}=(\tilde{q}_1,\dots,\tilde{q}_N)$, $\tilde{q}_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{N} \tilde{q}_i \leq 1$.

Пусть первые две являются некими распределениями вероятностей на конечном множестве случайных событий $X=\{x_1,\dots,x_N\}$, а третья – результатом расщепления одного из распределений/I/, скажем Q ; следовательно, $\tilde{Q}_i=\mu_i q_i$, где $\mu_i \in [0;1]$, $i=1,\dots,N$, функция принадлежности нечёткого подмножества $\tilde{X}$. Информационное расхождение Каллбека в рассматриваемом случае даётся формулой:[*]

$$I\begin{pmatrix} P_1,\dots,P_N \\ \mu_1 q_1,\dots,\mu_N q_N \end{pmatrix}=-\sum_{i=1}^{N} P_i \log \frac{\mu_i q_i}{P_i} . \qquad (I.I)$$

Прирост информации Реньи степени β :

$$I_N^{\beta}(P\|\tilde{Q})=\frac{1}{\beta-1}\log\sum_{i=1}^{N} P_i^{\beta}\mu_i^{1-\beta}q_i^{1-\beta}, \quad \beta \neq 1 . \qquad (I.2)$$

Это выражение является обобщением (I.I).

---

[*] Здесь и ниже [illegible]

Информационное расхождение Рати и Каннапана

$$I_N^\beta\begin{pmatrix}P_1,\dots,P_N\\ \mu_1 q_1,\dots,\mu_N q_N\end{pmatrix}=\frac{1}{2^{\beta-1}-1}\left(\sum_{i=1}^{N}P_i^\beta\mu_i^{1-\beta}q_i^{1-\beta}-1\right),\quad \beta\neq 1. \qquad (I.3)$$

Заметим, что последнее выражение является решением функционального уравнения Дароци /7/, однако мы это выражение получим исходя из четырёх постулатов (основываясь на /8/ и /9/). Между (I.2) и (I.3) существует связь:

$$I_N^\beta\begin{pmatrix}P_1,\dots,P_N\\ \mu_1 q_1,\dots,\mu_N q_N\end{pmatrix}=\frac{1}{2^{\beta-1}-1}\left(2^{(\beta-1)I_N^\beta(P\|\widetilde{Q})}-1\right),\quad \beta\neq 1. \qquad (I.4)$$

И, наконец, мы докажем теорему, дающую простой метод построения выражения для взаимной информации типа (α,β) /8/.

$$I_N^{(\alpha,\beta)}(P\|\widetilde{Q})=\frac{1}{2^{\beta-1}-1}\left(\sum_{i=1}^{N}P_i^\beta\mu_i^{\alpha-\beta}q_i^{\alpha-\beta}-1\right),\quad \alpha\neq\beta. \qquad (I.5)$$

Если $\widetilde{Q}=\widetilde{P}$, то формулы (I.I), (I.2), (I.3) и (I.5) примут вид:

$$I\begin{pmatrix}P_1,\dots,P_N\\ \mu_1 P_1,\dots,\mu_N P_N\end{pmatrix}=-\sum_{i=1}^{N}P_i\log\mu_i, \qquad (I.1)$$

$$I_N^\beta(P\|\widetilde{P})=\frac{1}{\beta-1}\log\sum_{i=1}^{N}P_i\mu_i^{1-\beta}, \qquad (I.2)$$

$$I_N^\beta\begin{pmatrix}P_1,\dots,P_N\\ \mu_1 P_1,\dots,\mu_N P_N\end{pmatrix}=\frac{1}{2^{\beta-1}-1}\left(\sum_{i=1}^{N}P_i\mu_i^{1-\beta}-1\right), \qquad (I.3)$$

$$I_N^{(\alpha,\beta)}(P\|\widetilde{P})=\frac{1}{2^{\beta-\alpha}-1}\left(\sum_{i=1}^{N}P_i^\alpha\mu_i^{\alpha-\beta}-1\right). \qquad (I.5)$$

2. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НАПРАВЛЕННОГО РАСХОЖДЕНИЯ ТИПА β.

Пусть функция $I_N^\beta\begin{pmatrix}\xi_1,\dots,\xi_n\\ \eta_1,\dots,\eta_n\end{pmatrix}$ удовлетворяет постулатам:

(P1) $I_1^\beta\binom{1}{1}=0;\quad I_2^\beta\begin{pmatrix}1, & 0\\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=1.$

(P2) $$I_{N+1}^\beta\begin{pmatrix}\xi_1,\dots,\xi_{i-1}, & \varphi_{i1}, & \varphi_{i2}, & \xi_{i+1},\dots,\xi_N\\ \eta_1,\dots,\eta_{i-1}, & \mu\theta_{i1}, & \mu\theta_{i2}, & \eta_{i+1},\dots,\eta_N\end{pmatrix}=$$

$$=I^\beta\begin{pmatrix}\xi_1,\dots,\xi_{i-1}, & \xi_i, & \xi_{i+1},\dots,\xi_N\\ \eta_1,\dots,\eta_{i-1}, & \mu\eta_i, & \eta_{i+1},\dots,\eta_N\end{pmatrix}+K\xi_i^\beta\mu^{1-\beta}\eta_i^{1-\beta}I_2^\beta\begin{pmatrix}\varphi_{i1}/\xi_i, & \varphi_{i2}/\xi_i\\ \theta_{i1}/\eta_i, & \theta_{i2}/\eta_i\end{pmatrix}$$

для $\varphi_{i1}+\varphi_{i2}=\xi_i>0,\ \theta_{i1}+\theta_{i2}=\eta_i>0,\ \mu>0,\ i=1,\dots,N.$

Тогда справедливы следующие предложения

<u>Лемма 2.I.</u> $K=1$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим $(P2)$ для случая $N=1$.

$$I_2^\beta\begin{pmatrix}1, & 0\\ 1/2, & 1/2\end{pmatrix}=I_1^\beta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+K\,I_2^\beta\begin{pmatrix}1, & 0\\ 1/2, & 1/2\end{pmatrix}$$

Учитывая $P(1)$, получим $K=1$.

<u>Лемма 2.2.</u> Если $\varphi_{ik}\geq 0,\ \theta_{ik}\geq 0,\ k=1,\dots,m,\ \sum\limits_{k=1}^{m}\theta_{ik}=\eta_i>0,$ $\sum\limits_{k=1}^{m}\varphi_{ik}=\xi_i>0,\ i=1,\dots,N,$ то

$$I^\beta_{N+m-1}\begin{pmatrix}\xi_1,\dots,\xi_{i-1}, & \varphi_{i1},\dots,\varphi_{im}, & \xi_{i+1},\dots,\xi_N\\ \eta_1,\dots,\eta_{i-1}, & \mu\theta_{i1},\dots,\mu\theta_{im}, & \eta_{i+1},\dots,\eta_N\end{pmatrix}=$$

$$=I_N^\beta\begin{pmatrix}\xi_1,\dots, & \xi_i & ,\dots, & \xi_N\\ \eta_1,\dots,\eta_{i-1}, & \mu\eta_i, & \eta_{i+1},\dots, & \eta_N\end{pmatrix}+$$

$$+\xi_i^\beta\mu^{1-\beta}\eta_i^{1-\beta}I_m^\beta\begin{pmatrix}\varphi_{i1}/\xi_i,\dots,\varphi_{im}/\xi_i\\ \theta_{i1}/\eta_i,\dots,\theta_{im}/\eta_i\end{pmatrix}.$$

Доказательство проведём по индукции. Для $m=2$ лемма совпадает с $(P2)$. Пусть лемма справедлива для некоторого $m\geq 2$. Покажем, что она справедлива и для $m+1$. Согласно $(P2)$ имеем

$$I^\beta_{N+m}\begin{pmatrix}\xi_1,\dots,\xi_{i-1}, & \varphi_{i1},\dots,\varphi_{im-1}, & \varphi_{im}, & \varphi_{im+1}, & \xi_{i+1},\dots,\xi_N\\ \eta_1,\dots,\eta_{i-1}, & \mu\theta_{i1},\dots,\mu\theta_{im-1}, & \mu\theta_{im}, & \mu\theta_{im+1}, & \eta_{i+1},\dots,\eta_N\end{pmatrix}=$$

$$=I^\beta_{N+m-1}\begin{pmatrix}\xi_1,\dots,\xi_{i-1}, & \varphi_{i1},\dots,\varphi_{im-1}, & (\varphi_{im}+\varphi_{im+1}), & \xi_{i+1},\dots,\xi_N\\ \eta_1,\dots,\eta_{i-1}, & \mu\theta_{i1},\dots,\mu\theta_{im-1}, & \mu(\theta_{im}+\theta_{im+1}), & \eta_{i+1},\dots,\eta_N\end{pmatrix}+$$

$$+(\varphi_{im}+\varphi_{im+1})^\beta\mu^{1-\beta}(\theta_{im}+\theta_{im+1})^{1-\beta}I_2^\beta\begin{pmatrix}\varphi_{im}/\varphi_{im}+\varphi_{im+1}, & \varphi_{im+1}/\varphi_{im}+\varphi_{im+1}\\ \theta_{im}/\theta_{im}+\theta_{im+1}, & \theta_{im+1}/\theta_{im}+\theta_{im+1}\end{pmatrix}=$$

$$=I_N^\beta\begin{pmatrix}\xi_1,\dots,\xi_{i-1}, & \xi_i, & \xi_{i+1},\dots,\xi_N\\ \eta_1,\dots,\eta_{i-1}, & \mu\eta_i, & \eta_{i+1},\dots,\eta_N\end{pmatrix}+$$

$$+\xi_i^\beta\mu^{1-\beta}\eta_i^{1-\beta}I_m^\beta\begin{pmatrix}\varphi_{i1}/\xi_i,\dots,\varphi_{im-1}/\xi_i, & \varphi_{im}+\varphi_{im+1}/\xi_i\\ \theta_{i1}/\eta_i,\dots,\theta_{im-1}/\eta_i, & \theta_{im}+\theta_{im+1}/\eta_i\end{pmatrix}+$$

$$+(\varphi_{im}+\varphi_{im+1})^\beta\mu^{1-\beta}(\theta_{im}+\theta_{im+1})^{1-\beta}I_2^\beta\begin{pmatrix}\varphi_{im}/\varphi_{im}+\varphi_{im+1}, & \varphi_{im+1}/\varphi_{im}+\varphi_{im+1}\\ \theta_{im}/\theta_{im}+\theta_{im+1}, & \theta_{im+1}/\theta_{im}+\theta_{im+1}\end{pmatrix}.$$

Здесь $\xi_i=\sum\limits_{k=1}^{m+1}\varphi_{ik}$ и $\eta_i=\sum\limits_{k=1}^{m+1}\theta_{ik}$. Рассмотрим выражение

$$I^{\beta}_{m+1}\begin{pmatrix}\varphi_{i1}/\xi_i,\dots,\varphi_{im-1}/\xi_i,\ \varphi_{im}/\xi_i,\ \varphi_{im+1}/\xi_i\\ \theta_{i1}/\eta_i,\dots,\theta_{im-1}/\eta_i,\ \theta_{im}/\eta_i,\ \theta_{im+1}/\eta_i\end{pmatrix}=$$

$$=I^{\beta}_{m}\begin{pmatrix}\varphi_{i1}/\xi_i,\dots,\varphi_{im-1}/\xi_i,\ \varphi_{im}+\varphi_{im+1}/\xi_i\\ \theta_{i1}/\eta_i,\dots,\theta_{im-1}/\eta_i,\ \theta_{im}+\theta_{im+1}/\eta_i\end{pmatrix}+$$

$$+\left(\varphi_{im}+\varphi_{im+1}/\xi_i\right)^{\beta}\left(\theta_{im}+\theta_{im+1}/\eta_i\right)^{1-\beta}I^{\beta}_{2}\begin{pmatrix}\varphi_{im}/\varphi_{im}+\varphi_{im+1},\ \varphi_{im+1}/\varphi_{im}+\varphi_{im+1}\\ \theta_{im}/\theta_{im}+\theta_{im+1},\ \theta_{im+1}/\theta_{im}+\theta_{im+1}\end{pmatrix}.$$

Из этого соотношения определим I^{β}_{2}:

$$\left(\varphi_{im}+\varphi_{im+1}\right)^{\beta}\mu^{1-\beta}\left(\theta_{im}+\theta_{im+1}\right)^{1-\beta}I^{\beta}_{2}\begin{pmatrix}\varphi_{im}/\varphi_{im}+\varphi_{im+1},\ \varphi_{im+1}/\varphi_{im}+\varphi_{im+1}\\ \theta_{im}/\theta_{im}+\theta_{im+1},\ \theta_{im+1}/\theta_{im}+\theta_{im+1}\end{pmatrix}=$$

$$=\xi_1^{\beta}\mu^{1-\beta}\eta_1^{1-\beta}I^{\beta}_{m+1}\begin{pmatrix}\varphi_{i1}/\xi_i,\dots,\varphi_{im+1}/\xi_i\\ \theta_{i1}/\eta_i,\dots,\theta_{im-1}/\eta_i\end{pmatrix}-$$

$$-\xi_1^{\beta}\mu^{1-\beta}\eta_1^{1-\beta}I^{\beta}_{m}\begin{pmatrix}\varphi_{i1}/\xi_i,\dots,\varphi_{im-1}/\xi_i,\ \varphi_{im}+\varphi_{im+1}/\xi_i\\ \theta_{i1}/\eta_i,\dots,\theta_{im-1}/\eta_i,\ \theta_{im}+\theta_{im+1}/\eta_i\end{pmatrix}.$$

Подставляя это выражение в I^{β}_{N+m}, завершаем доказательство леммы 2.2.

Лемма 2.3. Если $\xi_{ij}\geqslant 0$, $j=1,\dots,m_i$, $i=1,\dots,N$, $\sum\limits_{j=1}^{m_i}\xi_{ij}=\xi_i>0$, $\sum\limits_{i=1}^{N}\xi_i=1$, $\eta_{ij}\geqslant 0$, $j=1,\dots,m_i$, $i=1,\dots,N$, $\sum\limits_{j=1}^{m_i}\eta_{ij}=\eta_i>0$, $\sum\limits_{j=1}^{N}\eta_i=1$, то

$$I^{\beta}_{\sum_{i=1}^{N}m_i}\begin{pmatrix}\xi_{11},\dots,\xi_{1m_1},\ \xi_{21},\dots,\xi_{2m_2},\dots,\xi_{N1},\dots,\xi_{Nm_N}\\ \mu_1\eta_{11},\dots,\mu_1\eta_{1m_1},\ \mu_2\eta_{21},\dots,\mu_2\eta_{2m_2},\dots,\mu_N\eta_{N1},\dots,\mu_N\eta_{Nm_N}\end{pmatrix}=$$

$$=I^{\beta}_{N}\begin{pmatrix}\xi_1,\dots,\xi_N\\ \mu_1\eta_1,\dots,\mu_N\eta_N\end{pmatrix}+\sum_{i=1}^{N}\xi_i^{\beta}\mu_i^{1-\beta}\eta_i^{1-\beta}I^{\beta}_{m_i}\begin{pmatrix}\xi_{i1}/\xi_i,\dots,\xi_{im_i}/\xi_i\\ \eta_{i1}/\eta_i,\dots,\eta_{im_i}/\eta_i\end{pmatrix}.$$

Доказательство сводится к последовательному применению леммы 2.2 к отдельным группам аргументов функции $I^{\beta}_{\sum_{i=1}^{N} m_i}$. Когда $m_i = M$ для $\forall_i = \overline{1,N}$, эта лемма сводится к утверждению:

$$I^{\beta}_{MN}\begin{pmatrix} \xi_1, \dots, \xi_{1M}, \dots, \xi_{N1}, \dots, \xi_{NM} \\ \mu_1\eta_{11}, \dots, \mu_1\eta_{1M}, \dots, \mu_N\eta_{N1}, \dots, \mu_N\eta_{NM} \end{pmatrix} = I^{\beta}_{N}\begin{pmatrix} \xi_1, \dots, \xi_N \\ \mu_1\eta_1, \dots, \mu_N\eta_N \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \xi_i^{\beta} \mu_i^{1-\beta} \eta_i^{1-\beta} I^{\beta}_{M}\begin{pmatrix} \xi_{i1}/\xi_i, \dots, \xi_{iM}/\xi_i \\ \eta_{i1}/\eta_i, \dots, \eta_{iM}/\eta_i \end{pmatrix}.$$

Пусть функция I^{β}_{N} наряду с постулатами $(P1)$ и $(P2)$ удовлетворяет условию $(P3)$:

$$(P3) \qquad I^{\beta}_{N}\begin{pmatrix} \xi_1, \dots, \xi_{i-1}, 0, \xi_{i+1}, \dots, \xi_N \\ \eta_1, \dots, \eta_{i-1}, \eta_i, \eta_{i+1}, \dots, \eta_N \end{pmatrix} = I^{\beta}_{N-1}\begin{pmatrix} \xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_N \\ \eta_1, \dots, \eta_{i-1}, \eta_{i+1}, \dots, \eta_N \end{pmatrix}.$$

Тогда выполняются следующие предложения:

<u>Лемма 2.4</u> /9/. Для $1 \le R \le N$, $1 \le S \le M$, $N \le M$ (R, N, S, M – целые) имеем:

$$\varphi^{\beta}(RS, MN) = \varphi^{\beta}(S, M) + (M/S)^{\beta}\varphi(RN), \tag{2.3}$$

где

$$\varphi^{\beta}(M,N) \underset{\Delta}{=} I^{\beta}_{N}\begin{pmatrix} 1/M, 1/M, \dots, 1/M \\ 1/N, 1/N, \dots, 1/N \end{pmatrix}.$$

<u>Доказательство</u>. Пусть в (2.2) $\xi_{ij} = 1/RS$, $j = 1, \dots, S$, $i = 1, \dots,$ и $\xi_{ij} = 0$ в других случаях; $\mu_i\eta_{ij} = 1/MN$ для $\forall i = \overline{1,N}$ и $\forall_j =$

Согласно (2.3) и (2.2) имеем:

$$\varphi^{\beta}(RS, MN) = \varphi^{\beta}(R, N) + \sum_{i=1}^{N} \frac{N^{\beta-1}}{R^{\beta}}\varphi^{\beta}(S, M) = \tag{2.4}$$

$$= \varphi^{\beta}(R, N) + \left(\frac{N}{R}\right)^{\beta}\varphi^{\beta}(S, M).$$

В самом деле

$$I^{\beta}_{MN}\begin{pmatrix} 1/RS \cdots 1/RS, 0, \ldots, & 1/RS, \ldots, 1/RS, 0, \ldots, 0 \\ 1/MN, \cdots & \cdots \qquad \cdots, 1/MN \end{pmatrix} =$$

$$= I^{\beta}_{N}\begin{pmatrix} 1/R, \cdots, 1/R, \cdots 0, \ldots, 0 \\ 1/N, \cdots \quad \cdots \quad \cdots, 1/N \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} (1/R)^{\beta} (1/N)^{1-\beta} I^{\beta}_{M}\begin{pmatrix} 1/S, \cdots, 1/S, 0, \ldots, 0 \\ 1/M, \cdots \qquad \cdots, 1/M \end{pmatrix} = I^{\beta}_{N}\begin{pmatrix} 1/R, \cdots, 1/R \\ 1/N, \cdots, 1/N \end{pmatrix} +$$

$$+ (N/R)^{\beta} I^{\beta}_{M}\begin{pmatrix} 1/S, \cdots, 1/S \\ 1/M, \cdots, 1/M \end{pmatrix}, \qquad \sum_{i=1}^{R} \frac{1}{R} = 1, \qquad \sum_{i=1}^{R} \frac{1}{N} \leq 1 .$$

Симметрично

$$\Phi^{\beta}(RS, MN) = \Phi^{\beta}(S, M)\,(M/S)^{\beta}\,\Phi^{\beta}(R, N). \tag{2.5}$$

<u>Лемма 2.5</u> /9/. Если $\beta \neq 1$, то

$$\Phi^{\beta}(R, N) = c(\beta)\left[1 - (N/R)^{\beta}\right].$$

где $c(\beta)$ является функцией характеристического параметра β. Из (2.4) и (2.5) получаем:

$$\Phi^{\beta}(RS, MN)\left[1 - (N/R)^{\beta}\right] = \Phi^{\beta}(R, N)\left[1 - (MN/RS)^{\beta}\right]. \tag{2.6}$$

Поэтому

$$\left[1 - (N/R)^{\beta}\right]^{-1} \Phi^{\beta}(R, N) =$$

$$\left[1 - (MN/RS)^{\beta}\right]^{-1} \Phi^{\beta}(RS, MN) = c(\beta),$$

где $RS < MN$. В случае, когда $RS = MN$, положим $RS = MN = R' = N'$, можно написать $R' = rm$, $N' = nS$, $r \neq m$, $S \neq n$.

Если $r < n$, то $S < m$ и (2.6) дает:

$$\Phi^{\beta}(R', N')\left[1 - (n/r)^{\beta}\right] = \Phi(r, n)\left[1 - (N'/R')^{\beta}\right] \Longrightarrow \Phi^{\beta}(R, N) = c(\beta)\left[1 - (N/R)^{\beta}\right].$$

Пусть даны конечное множество случайных событий $\mathfrak{X}=\{x_1,\ldots,x_N\}$ и распределение вероятностей на нём $P=(p_1,\ldots,p_N)$, а также его расщепление $\tilde{\mathfrak{X}}$ и соответствующая мера $\tilde{Q}=(\mu_1 q_1,\ldots,\mu_N q_N)$.

Теорема 2.I. Если функция $I_N^\beta\begin{pmatrix}\xi_1,\ldots,\xi_N\\ \eta_1,\ldots,\eta_N\end{pmatrix}$, удовлетворяющая постулатам $P1$, $P2$, $P3$, в то же время непрерывна в области

$$\xi_i,\ \eta_i \geq 0,\quad \sum_{i=1}^N \xi_i = 1,\quad \sum_{i=1}^N \eta_i \leq 1,$$

то I_N^β однозначно определяется формулой (I.3).

Доказательство. Если r_i, s_i, R и S – положительные целые числа

$$R \leq S,\quad \frac{r_i}{R}=p_i,\quad \left(\sum_{i=1}^N \frac{r_i}{R}=1\right),\quad \frac{s_i}{S}=\mu_i q_i,$$

$$\left(\sum_{i=1}^N \frac{s_i}{S}=1\right),\quad r_i \leq s_i,\quad i=\overline{1,N},$$

то, согласно лемме 2.3, имеем:

$$\Phi_S^\beta\begin{pmatrix}1/R,\ldots,1/R,0,\ldots,0,1/R,\ldots,1/R;0,\ldots,0,\ldots,1/R,\ldots,1/R,0,\ldots,0\\ 1/S,\ldots,1/S,1/S,\ldots \quad\quad \ldots \quad\quad \ldots,1/S,1/S,\ldots,1/S\end{pmatrix}$$

$$=I_N^\beta\begin{pmatrix}p_1,\ldots,p_N\\ \mu_1 q_1,\ldots,\mu_N q_N\end{pmatrix}+\sum_{i=1}^N p_i^\beta \mu_i^{1-\beta} q_i^{1-\beta} I_{s_i}^\beta\begin{pmatrix}1/r_i,\ldots,1/r_i\\ 1/s_i,\ldots,1/s_i\end{pmatrix}$$

В левой части этого равенства имеется N групп аргументов как в верхней, так и в нижней строках, в верхней i-ой группе имеется r_i отличных от нуля аргументов, в соответствующей нижней группе – s_i аргументов.

Согласно (2.3) и лемме 2.5 последнее соотношение можно записать в виде:

$$\Phi^\beta(R,S)=I_N^\beta\begin{pmatrix}p_1,\ldots,p_N\\ \mu_1 q_1,\ldots,\mu_N q_N\end{pmatrix}+\sum_{i=1}^N p_i^\beta \mu_i^{1-\beta} q_i^{1-\beta}\Phi^\beta(r_i,s_i),$$

$$c(\beta)\left[1-\left(\frac{S}{R}\right)^{\beta}\right]=I_N^{\beta}\begin{pmatrix}p_1,\dots,p_N\\ \mu_1 q_1,\dots,\mu_N q_N\end{pmatrix}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{r_i}{R}\right)^{\beta}\left(\frac{s_i}{S}\right)^{\beta-1}c(\beta)\left[1-\left(\frac{s_i}{r_i}\right)^{\beta}\right]$$

откуда

$$I_N^{\beta}\begin{pmatrix}p_1,\dots,p_N\\ \mu_1 q_1,\dots,\mu_N q_N\end{pmatrix}=c(\beta)\left[1-\left(\frac{S}{R}\right)^{\beta}-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{r_i}{R}\right)^{\beta}\left(\frac{s_i}{S}\right)^{1-\beta}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{r_i}{R}\right)^{\beta}\left(\frac{s_i}{S}\right)^{1-\beta}\left(\frac{s_i}{r_i}\right)^{\beta}\right]=c(\beta)\left[1-\sum_{i=1}^{N}p_i^{\beta}\mu_i^{1-\beta}q_i^{1-\beta}\right].$$

Используя $(P1)$, мы получим:

$$c(\beta)=\frac{1}{1-2^{\beta-1}}.$$

Таким образом, для рациональных значений p_i и $\mu_i q_i\ (i=\overline{1,N})$ мы приходим к (I.3). Ввиду непрерывности I_N^{β}, это же выражение будет иметь место для любых p_i, μ_i, q_i из $[0;1]$, $i=\overline{1,N}$.

3. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ВЗАИМНОЙ ИНФОРМАЦИИ ТИПА β.

Выражение (I.5) при $\alpha=1$ совпадает с (I.3). В общем случае имеет место

Теорема 3.1. Если $X=\{x_1,\dots,x_N\}$ - множество случайных событий, $P=(p_1,\dots,p_N)$, $Q=(q_1,\dots,q_N)$ - распределения вероятностей на нём, $\tilde{X}$ - расщепление X, $\tilde{Q}$ - расщепление Q, соответствующее функции принадлежности $\mu(x_i)\in[0;1]$, $i=\overline{1,N}$, и функция $I_N^{(\alpha;\beta)}\begin{pmatrix}p_1,\dots,p_N\\ \mu_1 q_1,\dots,\mu_N q_N\end{pmatrix}$ удовлетворяет условиям:

(P1') $I_N^{(\alpha;\beta)}\begin{pmatrix}p_1,\dots,p_N\\ \mu_1 q_1,\dots,\mu_N q_N\end{pmatrix}$ непрерывна в области $p_i\geqslant 0,\ q_i\geqslant 0$

$\mu_i\in[0;1]$, $\sum_{i=1}^{N}p_i=\sum_{i=1}^{N}q_i=1$, $\sum_{i=1}^{N}\mu_i q_i\leqslant 1$;

$$(P2')\quad I_2^{(\alpha;\beta)}\begin{pmatrix}1\,;\,0\\ 1/2,\,1/2\end{pmatrix}=1\,;$$

$$(P3')\quad I_N^{(\alpha;\beta)}\begin{pmatrix}p_1,\ldots,\ p_{i-1}\ ,\ 0\ ,\ p_{i+1},\ldots,p_N\\ \mu_1q_1,\ldots,\mu_{i-1}q_{i-1},\mu_iq_i,\mu_{i+1}q_{i+1},\ \ \mu_Nq_N\end{pmatrix}=$$

$$=I_N^{(\alpha;\beta)}\begin{pmatrix}p_1,\ldots,\ p_{i-1}\ ,\ p_{i+1},\ldots,p_N\\ \mu_1q_1,\ldots,\mu_{i-1}q_{i-1},\mu_{i+1}q_{i+1},\ldots,\mu_Nq_N\end{pmatrix},\ \forall i=\overline{1,N}\,;$$

$$(P4')\quad I_N^{(\alpha;\beta)}\begin{pmatrix}p_1,\ldots,\ p_{i-1},\ u_{i1},\ u_{i2},\ p_{i+1},\ldots,p_N\\ \mu_1q_1,\ldots,\mu_{i-1}q_{i-1},\mu_iv_{i1},\mu_iv_{i2},\mu_{i+1}q_{i+1},\ldots,\mu_Nq_N\end{pmatrix}=$$

$$=I_N^{(\alpha;\beta)}\begin{pmatrix}p_1,\ldots,\ p_{i-1},\ \ p_i\ ,\ \ p_{i+1},\ldots,p_N\\ \mu_1q_1,\ldots,\mu_{i-1}q_{i-1},\mu_iq_i,\mu_{i+1}q_{i+1},\ldots,\mu_Nq_N\end{pmatrix}+$$

$$+\,p_i^{\beta}\mu_i^{\alpha-\beta}q_i^{\alpha-\beta}\,I_2^{(\alpha;\beta)}\begin{pmatrix}u_{i1}/p_i\,,&u_{i2}/p_i\\ v_{i1}/q_i\,,&v_{i2}/q_i\end{pmatrix}.$$

при $\forall u_{i1},u_{i2},v_{i1},v_{i2}\geq 0$, $u_{i1}+u_{i2}=p_i>0$, $v_{i1}+v_{i2}=q_i>0$, $\mu_i,\alpha,\beta>0$, $\alpha\neq\beta$, то она единственным образом определяется формулой (I.5).

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 2.I.

Поступила 9.XI.1992

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

I. Т.Гачечиладзе, Т.Манджапарашвили. О нечётких подмножествах, Тр.Тбилисского университета, сер.кибернетики и прикл. математики, 209 /1977/.

2. С.Кульбак. Теория информации и статистика, "Наука", М./1967/.

3. A.Rényi. "Proc.Four.Berc.Symp." (1961).

4. P.N.Rathie, Kannappan. Inf.and Control, 20, 38-45 (1972).

5. Sharma, Autar. Math.Band, 21 (1974)

6. Т.Гачечиладзе, Т.Манджапарашвили. Нечёткие случайные события и соответствующие относительные вероятностные меры, Сообщ. АН Грузии /1989/, I34, № 3.

7. Daróczy. Generalized Information Functions, Inf.and Control, 16, 36-51 (1970)

8. Havzda, Charvát. Quantification Method of Classification Process, Concept of Structural α-entropy, Kybernetica, 3. (1967).

9. G.C.Patni, K.C.Jain. On Some Information Measures, Inf.and Control, 31, 185 (1976).

თ.გაჩეჩილაძე, თ.მანჯაფარაშვილი, გ.კაშმაძე

სასრულ არამკაფიო შემთხვევით ხდომილებათა კლასიფიკაციების ინფორმაციის ზოგიერთი ფარდობითი ზომის შესახებ

რ ე ზ ი უ მ ე

განხილულია აქსიომათა სისტემები და შესაბამისი თეორემები ს.კულბეკის, ა.რენის და პ.რათისა და ნ.კანაპანის ფარდობითი ინფორმაციის ზომებისათვის.

T.Gachechiladze, T.Manjaparashvili, G.Kashmadze

SOME RELATIVE INFORMATION MEASURES OF FINITE FUZZY SUBSETS OF RANDOM EVENT

S u m m a r y

Characterization theorems are considered for relative information measures of S.Cullback, A.Renyi and P.Rathie, and N.Cannappan.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

315, 1993

О ГРУППИРОВКЕ НЕЧЁТКИХ ДАННЫХ

Т.Г.Гачечиладзе, Т.В.Манджапарашвили, Г.Ш.Кашмадзе

Информационную энтропию Шеннона нерасщеплённого множества /1/ $\mathcal{X}$ $H(\mathcal{X})$ интерпретируют как энтропию распределения вероятностей P на $\mathcal{X}$, в то время как энтропию Заде /2/,/3/ $\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{X}})$ – как энтропию нечёткого подмножества $\tilde{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{X}$ по отношению к P.

В работе /2/ дан аксиоматический вывод $\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{X}})$, получена формула, отражающая связь энтропий Шеннона, Заде и Де Люка и Термини /4/:

$$S(\tilde{\mathcal{X}}, \mathcal{X}^D) = H(\tilde{\mathcal{X}} \oplus \tilde{\mathcal{X}}^D) = H(\tilde{x}_1 \oplus \tilde{x}_1^D, \ldots, \tilde{x}_n \oplus x_m^D) = \mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{X}}) + \mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{X}}^D) + L(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{X}}^D), \tag{I}$$

где $S(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{X}}^D)$ – энтропия Шеннона расщеплённого множества, $\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{X}})$ и $\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{X}}^D)$ – энтропии Заде нечёткого подмножества $\tilde{\mathcal{X}}$ и дуального $\tilde{\mathcal{X}}^D$

$$\left(\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{X}}) + \mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{X}}^D) = H(\mathcal{X})\right),$$

$L(\tilde{\mathcal{X}}, \mathcal{X}^D)$ – энтропия Де Люка и Термини, причём

$$S(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{X}}^D) = -\sum_{\mathcal{X}} \left(\mu(x)p(x) \log \mu(x)p(x) + \mu^D(x)p(x) \log \mu^D(x)p(x)\right)^*, \tag{2}$$

---

* Здесь и ниже $\log(\cdot) = \log_2(\cdot)$

$$\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{X}}) = -\sum_{\mathcal{X}} \mu(x) P(x) \log P(x), \tag{3}$$

$$\mathcal{Z}(\tilde{\mathcal{X}}^{D}) = -\sum_{\mathcal{X}} \mu^{D}(x) P(x) \log P(x), \tag{4}$$

$$L(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{X}}^{D}) = -\sum_{\mathcal{X}} P(x)\left(\mu(x)\log\mu(x) + \mu^{D}(x)\log\mu^{D}(x)\right) \tag{5}$$

Нечёткие данные - это исходные нечёткие данные и нечёткие результаты наблюдений. Группировка таких данных означает расщепление разбиения множества исходных данных $\mathcal{X}$ и множества результатов наблюдений $\mathcal{Y}$. Получены выражения вышеуказанных энтропийных мер в случае группировки нечётких данных, а также некоторые неравенства, отображающие свойства этих мер.

1. Пусть даны системы чисел $\{P_i\}_1^n$, $P_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ и $\{\mu_i\}_1^n$, $\mu_i \in [0;1]$, тогда

$$H(\{\tilde{P}_i\}_1^n) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i P_i\right)^{-1} \mathcal{Z}(\{\tilde{\mathcal{X}}\}), \tag{6}$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда все μ_i равны; $H(\{P_i\}_1^n)$ - энтропия Шеннона расщеплённой части множества $\tilde{\mathcal{X}}$.

Доказательство элементарно.

Рассмотрим числа $\tilde{P}_i = \dfrac{P_i \mu_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_k P_k}$ $(i = \overline{1,n})$, $\sum_{i=1}^{n} \tilde{P}_i = 1$;

согласно известному неравенству (5)

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i P_i}{\sum_{k=1}^{n} \mu_k P_k} \log P_i \geq -\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i P_i}{\sum_{k=1}^{n} \mu_k P_k} \log \frac{\mu_i P_i}{\sum_{k=1}^{n} \mu_k P_k}, \tag{7}$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда все μ_i равны. Из этого неравенства, согласно определениям, следует (6).

2. Пусть даны системы чисел $\{P_i\}_1^n$, $P_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$,

$\{P_i'\}_1^n$; $P_i' \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} P_i' = 1$, $\{\mu_i\}_1^n$, $\mu_i \in [0;1]$ $(i = \overline{1,n})$

и пусть для заданных μ_i $\sum_{i=1}^{n}\mu_i P_i=\sum_{i=1}^{n}\mu_i P_i'$, тогда

$$\mathcal{Z}\left(\{P_i\}_1^n;\mu\right)\leqslant-\sum_{i=1}^{n}\mu_i P_i\log P_i', \qquad (6)$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда $P_i=P_i'$ $(i=\overline{1,n})$. Действительно, согласно неравенству (5), можем написать:

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i P_i}{\sum_{k=1}^{n}\mu_k P_k}\log\frac{\mu_i P_i}{\sum_{k=1}^{n}\mu_k P_k}\leqslant-\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i P_i}{\sum_{k=1}^{n}\mu_k P_k}\log\frac{\mu_i P_i'}{\sum_{k=1}^{n}\mu_k P_k'},$$

откуда, учитывая условия п.2, получаем:

$$-\sum_{i=1}^{n}\mu_i P_i\log P_i\leqslant-\sum_{i=1}^{n}\mu_i P_i\log P_i',$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда $P_i=P_i'$ $(i=\overline{1,n})$.

<u>Замечание I</u>. Из неравенства (7) следует, что

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i P_i}{\sum_{k=1}^{n}\mu_k P_k}\log\frac{\mu_i}{\sum_{k=1}^{n}\mu_k P_k}\leqslant 0,$$

т.е. хотя бы одно

$$\mu_i\geqslant\sum_{k=1}^{n}\mu_k P_k. \qquad (9)$$

<u>Замечание 2</u>. Используя неравенство (5), можем написать

$$-\sum_{i=1}^{n}P_i\log P_i\leqslant-\sum_{i=1}^{n}P_i\log\frac{\mu_i P_i}{\sum_{k=1}^{n}\mu_k P_k},$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n}P_i\log\mu_i\leqslant\log\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k P_k\right), \qquad (\mathrm{I}0)$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда все μ_i равны.

Замечание 3. Использование нормированных вероятностей на $\tilde{X}$ влечёт за собой необходимость определенного согласования между обычными вероятностями и функцией принадлежности нечёткого множества. Приведённые в замечаниях I и 2 неравенства надо рассматривать в качестве условий такого согласования.

3. Если даны системы чисел п.2, причём $\mu_i P_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mu_j P_j$, где $a_{ij} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ является собственным числом матрицы $\|a_{ij}\|$, то

$$\mathcal{Z}\left(\{P_i'\}_1^n\right) \geq \mathcal{Z}\left(\{P_i\}_1^n\right), \tag{II}$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда все μ_i $(i=\overline{1,n})$ равны, а система чисел $\{P_i'\}_1^n$ совпадает с системой $\{P_i\}_1^n$ с точностью до перестановки.

Из условий утверждения немедленно вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i P_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i P_i'.$$

Далее

$$\mathcal{Z}\left(\{P_i'\}_1^n\right) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i P_i' \log P_i' =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mu_j P_j \log P_i' = -\sum_{j=1}^{n} \mu_j P_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \log P_i' =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \mu_j P_j \log \prod_{i=1}^{n} P_i'^{a_{ij}} \geq -\sum_{j=1}^{n} \mu_j P_j \log \sum_{i=1}^{n} a_{ij} P_i'.$$

Последнее неравенство есть следствие неравенства Пойя /6/. Т.к. числа

$$\tau_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} P_i' \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} \tau_j = 1,$$

то, согласно п.2,

$$\mathcal{Z}\left(\{P_i'\}_1^n\right) \geq -\sum_{j=1}^{n} \mu_j P_j \log \tau_j \geq -\sum_{j=1}^{n} \mu_j P_j \log P_j = \mathcal{Z}\left(\{P_i\}_1^n\right).$$

Когда все μ_i $(i=\overline{1,n})$ равны, это неравенство сводится к известному неравенству

$$H\left(\{P_i'\}_1^n\right) \geq H\left(\{P_i\}_1^n\right).$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда системы чисел $\{P_i'\}_1^n$ и $\{P_i\}_1^n$ совпадают с точностью до перестановки /5/.

4. Рассмотрим последовательное расщепление декартова произведения двух множеств, обозначаемое через $\widetilde{\widetilde{\mathcal{X}\times\mathcal{X}'}}=\widetilde{\mathcal{X}}\odot\widetilde{\mathcal{X}}'$ /I/. Пусть элементарные случайные события, изображаемые точками этих подмножеств, независимы. Тогда, как нетрудно проверить на основе непосредственной подстановки величин согласно их определению,

$$Z(\{P_iP_j'\}_1^{n\cdot n})=\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_j'P_j'\right)Z(\{P_i\}_1^n)+\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_iP_i\right)Z(\{P_j'\}_1^n). \tag{I2}$$

В этом равенстве функция принадлежности подмножества $\widetilde{\mathcal{X}}\odot\widetilde{\mathcal{X}}'$ по определению равна:

$$\mu_{\widetilde{\mathcal{X}}\odot\widetilde{\mathcal{X}}'}(x_ix_j')=\mu_{\widetilde{\mathcal{X}}}(x_i)\mu_{\widetilde{\mathcal{X}}'}(x_j')\quad (i,j=\overline{1,n}).$$

5. Классическое выражение для шенноновской энтропии в случае группировки исходных данных таково:

$$H(x_{11},\dots,x_{1m_1};\dots;x_{n1},\dots,x_{nm_n})=$$
$$=H\left(\bigcup_{j=1}^{m_1}\{x_{1j}\},\dots,\bigcup_{j=1}^{m_n}\{x_{nj}\}\right)+\sum_{i=1}^{n}P_iH\left(x_{i1},\dots,x_{im_i}\Big/\bigcup_{j=1}^{m_i}\{x_{ij}\}\right), \tag{I3}$$

где

$$P_i=P\left(\bigcup_{j=1}^{m_i}x_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{m_i}P(x_{ij})\quad (i=\overline{1,n}),$$

эту же формулу можно записать и так /5/:

$$H(P_{11},\dots,P_{1m_1};P_{n1};\dots,P_{nm_n})=$$
$$=H(P_1,\dots,P_n)+\sum_{i=1}^{n}P_iH\left(\frac{P_{i1}}{P_i},\dots,\frac{P_{im_i}}{P_i}\right). \tag{I4}$$

Произведем расщепление исходных данных x_{ij} и соответствующих вероятностей*:

$$H\left(\mu_{11}P_{11}+\mu_{11}^{D}P_{11},\dots,\mu_{1m_1}P_{1m_1}+\mu_{1m_1}^{D}P_{1m_1};\dots;\mu_{n1}P_{n1}+\mu_{n1}^{D}P_{n1},\dots,\mu_{nm_n}P_{nm_n}+\mu_{nm_n}^{D}P_{nm_n}\right)=$$

$$=H\left(\tilde{P}_1+\tilde{P}_1^{D},\dots,\tilde{P}_n+\tilde{P}_n^{D}\right)+ \qquad (15)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}P_i H\left(\left(\frac{\tilde{P}_{i1}}{P_i}\right)+\left(\frac{\tilde{P}_{i1}}{P_i}\right)^{D},\dots,\left(\frac{\tilde{P}_{im_i}}{P_i}\right)+\left(\frac{P_{im_i}}{P_i}\right)^{D}\right).$$

Чтобы получить окончательную формулу для расщепления шенноновской энтропии при группировке исходных данных, необходимо предварительно решить вопрос о расщеплении вероятностей $P_1,\dots,P_n$ и условных вероятностей

$$\left(\frac{P_{i1}}{P_i}\right),\dots,\left(\frac{P_{im_i}}{P_i}\right), \qquad i=1,n.$$

---

* Так как для нечетких случайных событий мы исходим из модели (7), всюду подразумевается процедура последовательного расщепления.

P_i является вероятностью объединения $\bigcup\limits_{j=1}^{m_i}\{x_{ij}\}$. Как известно /I/,

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{m_i}\{x_{ij}\}\right)=\bigvee_{j=1}^{m_i}\mu(x_{ij})\ ^{*}. \tag{16}$$

Поэтому для $\forall_i$, $i=\overline{1,n}$, имеем

$$P_i=\left(\bigvee_{j=1}^{m_i}\mu_{ij}\right)P_i+\left(\bigvee_{j=1}^{m_i}\mu_{ij}\right)^{D}P_i. \tag{17}$$

Следовательно,

$$H(P_1+P_1^D,\ldots,P_n+P_n^D)=$$
$$=H(P_1,\ldots,P_n)+\sum_{i=1}^{n}P_iH\left(\left(\bigvee_{j=1}^{m_i}\mu_{ij}\right),\left(\bigvee_{j=1}^{m_i}\mu_{ij}\right)^{D}\right) \tag{18}$$

или, согласно (I),

$$S\left(\bigcup_{i=1}^{n}\widetilde{\{x_i\}}\right),\ \bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}$$
$$+Z\left(\bigcup_{i=1}^{n}\widetilde{\{x_i\}}\right)^{D}+L\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n}\widetilde{\{x_i\}}\right),\left(\bigcup_{i=1}^{n}\widetilde{\{x\}}\right)^{D}\right). \tag{19}$$

Расщепление условных вероятностей – процедура более сложная. Здесь возможны два случая: расщепление при чётком условии и расщепление при нечётком.

В первом случае

$$\mu\left(\left(\widetilde{x_{ij}/x_i}\right)\right)=\mu_{ij},\qquad j=\overline{1,m_i}\ .\ i=\overline{1,n}, \tag{20}$$

---

* В общем случае $\mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{m_i}\{x_{ij}\}\right)=\boxed{\Sigma}_{j=1}\{x_{ij}\}$, где $\boxed{\Sigma}$ соответствует операции $\oplus$, однако в силу того, что $\{x_{ij}\}\cap\{x_{ik}\}=\phi$, $j\neq k$, имеет место формула (I6) (см./I/ и /5/).

где $\{x_i\}=\bigcup_{j=1}^{m_i}\{x_{ij}\}$. Поэтому

$$\frac{P_{ij}}{P_i}=\mu_{ij}\frac{P_{ij}}{P_i}+\mu_{ij}^{D}\frac{P_{ij}}{P_i}. \tag{21}$$

Следовательно,

$$H\left(\left(\frac{\widetilde{P_{i1}}}{P_i}\right)+\left(\frac{\widetilde{P_{i1}}}{P_i}\right)^{D},\ldots,\left(\frac{\widetilde{P_{im_i}}}{P_i}\right)+\left(\frac{\widetilde{P_{im_i}}}{P_i}\right)^{D}\right)= \\ =H\left(\frac{P_{i1}}{P_i},\ldots,\frac{P_{im_i}}{P_i}\right)+\sum_{j=1}^{m_i}\frac{P_{ij}}{P_i}H\left(\mu_{ij},\mu_{ij}^{D}\right). \tag{22}$$

Второй член формулы (15) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{n}P_iH\left(\left(\frac{\widetilde{P_{i1}}}{P_i}\right)+\left(\frac{\widetilde{P_{i1}}}{P_i}\right)^{D},\ldots,\left(\frac{\widetilde{P_{im_i}}}{P_i}\right)+\left(\frac{\widetilde{P_{im_i}}}{P_i}\right)^{D}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P_iH\left(\frac{P_{i1}}{P_i},\ldots,\frac{P_{im_i}}{P_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}P_{ij}H\left(\mu_{ij},\mu_{ij}^{D}\right).$$

Вставив это выражение в (15), получаем:

$$H\left(P_{11}\mu_1+P_{11}\mu_1^{D};\ldots;P_{1m_1}\mu_{1m_1}+P_{1m_1}\mu_{1m_1}^{D};\ldots;P_{n1}\mu_{n1}+\right.$$

$$\left.+P_{n1}\mu_{n1}^{D},\ldots,P_{nm_n}\mu_{nm_n}+P_{nm_n}\mu_{nm_n}^{D}\right)=$$

$$=H(P_1,\ldots,P_n)+\sum_{i=1}^{n}P_iH\left(\frac{P_{i1}}{P_i},\ldots,\frac{P_{im_i}}{P_i}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}P_iH\left(\left(\bigvee_{j=1}^{m_i}\mu_{ij}\right),\left(\bigvee_{j=1}^{m_i}\mu_{ij}\right)^{D}\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}P_{ij}H\left(\mu_{ij},\mu_{ij}^{D}\right)=$$

$$=H\left(P_{11},\ldots,P_{1m_1};\ldots;P_{n1},\ldots,P_{nm_n}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}P_iH\left(\left(\bigvee_{j=1}^{m_i}\mu_{ij}\right),\left(\bigvee_{j=1}^{m_i}\mu_{ij}\right)^{D}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} H(\mu_{ij}, \mu^{\mathcal{D}}_{ij}). \tag{23}$$

Итак, если в множестве $\mathcal{X}$ отдельные его элементы группируются, т.е. $\mathcal{X}_i = \bigcup_{j=1}^{m_i}\{x_{ij}\}$ и, $\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{n}\{\mathcal{X}_i\}$, то формула (23) определяет количество информации после поточечного расщепления $\mathcal{X}$. Иначе

$$S\left(\left(\widetilde{\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m_i}\{x_{ij}\}}\right), \left(\widetilde{\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m_i}\{x_{ij}\}}\right)^{\mathcal{D}}\right) = Z\left(\widetilde{\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m_i}\{x_{ij}\}}\right) + Z\left(\left(\widetilde{\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m_i}\{x_{ij}\}}\right)^{\mathcal{D}}\right) +$$

$$+ L\left(\left(\widetilde{\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}}\right), \left(\widetilde{\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}}\right)^{\mathcal{D}}\right) + L\left(\left(\widetilde{\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m_i}\{x_{ij}\}}\right), \left(\widetilde{\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m_i}\{x_{ij}\}}\right)^{\mathcal{D}}\right). \tag{24}$$

Замечание 4. Формула (24) соответствует поточечному расщеплению множества исходных данных. Если же исходные данные являются чёткими и лишь группировка нечёткая, то имеет место формула:

$$H\left(\widetilde{P_{11},\dots,P_{1m_1}}, \widetilde{P_{11},\dots,P_{1m_1}}^{\mathcal{D}}; \dots; \widetilde{P_{n1},\dots,P_{nm_n}}, \widetilde{P_{n1},\dots,P_{nm_n}}^{\mathcal{D}}\right) =$$

$$= H(P_{11},\dots,P_{1m_1};\dots;P_{n1},\dots,P_{nm_n}) + \sum_{i=1}^{n} P_i H\left(\mu_{\tilde{\mathcal{X}}_i}, \mu_{\tilde{\mathcal{X}}_i^{\mathcal{D}}}\right), \tag{25}$$

или

$$S\left(\bigcup_{i=1}^{n}\widetilde{(x_{i1},\dots,x_{im_i})}, \bigcup_{i=1}^{n}\widetilde{(x_{i1},\dots,x_{im_i})}^{\mathcal{D}}\right)$$

$$= H(\mathcal{X}) + L\left(\widetilde{\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}}, \widetilde{\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}}^{\mathcal{D}}\right). \tag{26}$$

В этих формулах выражение $H\left(\widetilde{P_{11},\dots,P_{1m_1}},\dots,\widetilde{P_{n1},\dots,P_{nm_n}}^{\mathcal{D}}\right)$ обозначает энтропию расщеплённых групп (функция принадлежности i-й группы – $\mu_{\tilde{\mathcal{X}}_i} = \mu(\bigcup_{j=1}^{m}\{x_{ij}\})$, $i = \overline{1,n}$, $H(\mathcal{X})$ – энтропия Шеннона нерасщеплённого множества $\mathcal{X}$.

Во втором случае (нечёткие условия) вместо формулы (21) надо воспользоваться формулой:

$$P_{\tilde{\mathcal{I}}_i}(\{x_{ij}\}) = P_{\tilde{\mathcal{I}}_i}(\{\widetilde{x_{ij}}\}) + P_{\tilde{\mathcal{I}}_i}(\{\widetilde{x_{ij}}\}^{\mathcal{D}}). \qquad (27)$$

Пусть $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in_i}$ $(\tau_i \leqslant m_i,\ i = \overline{1,n})$ – отличные друг от друга значения функции принадлежности $\mu_{\tilde{\mathcal{I}}}(\{x_{ij}\})$ в группе исходных данных $\mathcal{I}_i = \bigcup_{j=1}^{m_i}\{x_{ij}\}$, $A\alpha_{ij}$ $(j = \overline{1,\tau_i})$ – множества элементов $x_{ik} \in \mathcal{I}_i$ с одинаковыми значениями функции принадлежности α_{ij} $(j = \overline{1,\tau_i})$ (количество элементов в этом множестве обозначим через $m_{\alpha_{ij}}$), тогда /7/

$$P_{\tilde{\mathcal{I}}}(\{x_{ij}\}) = \sum_{j'=1}^{\tau_i} \frac{\alpha_{ij'}\, P(A\alpha_{ij'})}{\sum\limits_{k=1}^{\tau_i} \alpha_{ik} P(A\alpha_{ik})} P_{A\alpha_{ij'}}(\{x_{ij}\}), \qquad (28)$$

где

$$P_{A\alpha_{ij'}}(\{x_{ij}\}) = \frac{P(A\alpha_{ij'} \circledcirc \{x_{ij}\})}{P(A\alpha_{ij'})} =$$

$$= \begin{cases} \left(\sum\limits_{x \in A\alpha_{ij'}} P_{ij'}\right)^{-1} P_{ij}, & A\alpha_{ij'} \cap \{x_{ij}\} = \{x_{ij}\} \\ 0, & A\alpha_{ij'} \cap \{x_{ij}\} = \phi \end{cases} \qquad (29)$$

а $\circledcirc$ – операция последовательного расщепления пересечения нечётких подмножеств.

Общая формула расщепления условия, согласно /7/, такова:

$$P_A(\Lambda) = \frac{P(A \circledcirc \Lambda)}{P(A)} = \frac{P(\tilde{A} \circledcirc \Lambda) + P(\tilde{A}^{\mathcal{D}} \circledcirc \Lambda)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(\tilde{A})}{P(A)} P_{\tilde{A}}(\Lambda) + \frac{P(\tilde{A}^{\mathcal{D}})}{P(A)} P_{\tilde{A}^{\mathcal{D}}}(\Lambda). \qquad (30)$$

Поэтому вероятность при нечётком условии (27) удовлетворяет соотношению:

$$\frac{P_{ij}}{P_i} = \mu_{\tilde{\mathcal{I}}_i} P_{\tilde{\mathcal{I}}_i}(\{x_{ij}\}) + \mu_{\tilde{\mathcal{I}}_i^{\mathcal{D}}} P_{\tilde{\mathcal{I}}_i^{\mathcal{D}}}(\{x_{ij}\}). \qquad (31)$$

Шенноновская информационная энтропия фиксированной группы исходных данных расщепляется согласно (31), (28) и (29) так:

$$H\left(\mu_{\tilde{\mathfrak{X}}_i} P_{\tilde{\mathfrak{X}}_i}(\{x_{i1}\}) + \mu_{\tilde{\mathfrak{X}}_i^D} P_{\tilde{\mathfrak{X}}_i^D}(\{x_{i1}\}), \ldots, \mu_{\tilde{\mathfrak{X}}_i} P_{\tilde{\mathfrak{X}}_i}(\{x_{im_i}\}) + \mu_{\tilde{\mathfrak{X}}_i^D} P_{\tilde{\mathfrak{X}}_i^D}(\{x_{im_i}\})\right) =$$

$$= H\left(\frac{P_{i1}}{P_i}, \ldots, \frac{P_{im_i}}{P_i}\right) + \sum_{j=1}^{m_i} \frac{P_{ij}}{P_i} H\left(\frac{P_i \mu_{\tilde{\mathfrak{X}}_i}}{P_{ij}} P_{\tilde{\mathfrak{X}}_i}(\{x_{ij}\}), \frac{P_i \mu_{\tilde{\mathfrak{X}}_i^D}}{P_{ij}} P_{\tilde{\mathfrak{X}}_i^D}(\{x_{ij}\})\right) =$$

$$= H\left(\frac{P_{i1}}{P_i}, \ldots, \frac{P_{im_i}}{P_i}\right) + \sum_{j=1}^{m_i} \frac{P_{ij}}{P_i} H\left(\mu_{\tilde{\mathfrak{X}}_i} P_i \frac{1}{\sum\limits_{j' \in M_{\alpha ik}} P_{ij'}}, \mu_{\tilde{\mathfrak{X}}_i^D} P_i \frac{1}{\sum\limits_{j' \in M_{\alpha ik}} P_{ij'}}\right). \qquad (32)$$

Пользуясь формулой расщепления при нечётких условиях (32), легко получить (I9), (24) и (25) в этом случае.

6. Энтропия Заде последовательно расщеплённого декартова произведения двух множеств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ определяется по формуле:

$$\mathcal{Z}(\widetilde{\widetilde{\mathfrak{X}\cdot\mathfrak{Y}}}) = -\sum_{\mathfrak{X}} \sum_{\mathfrak{Y}} \mu_{\tilde{\mathfrak{X}} \circ \tilde{\mathfrak{Y}}}(x,y) P(x,y) \log P(x,y). \qquad (33)$$

Очевидно, что имеет место неравенство:

$$\mathcal{Z}(\widetilde{\widetilde{\mathfrak{X}\cdot\mathfrak{Y}}}) \leq \mathcal{Z}(\tilde{\mathfrak{X}}) + \mathcal{Z}(\tilde{\mathfrak{X}}^D) + \mathcal{Z}(\tilde{\mathfrak{Y}}) + \mathcal{Z}(\tilde{\mathfrak{Y}}^D). \qquad (34)$$

Действительно,

$$-\sum_{\mathfrak{X}} \sum_{\mathfrak{Y}} \mu_{\tilde{\mathfrak{X}}}(x) \mu_{\tilde{\mathfrak{Y}}}(y) P(x,y) \log P(x,y) \leq$$

$$\leq -\sum_{\mathfrak{X}} \sum_{\mathfrak{Y}} \mu_{\tilde{\mathfrak{X}}}(x) \mu_{\tilde{\mathfrak{Y}}}(y) P(x,y) \log\left(P(x)P(y)\right) =$$

$$= -\sum_{\mathfrak{X}} P(x) \log P(x) + \sum_{\mathfrak{X}} \sum_{\mathfrak{Y}} \mu_{\tilde{\mathfrak{X}}^D}(x) P(x,y) \log P(y) -$$

$$+ \sum_{\mathfrak{X}} \sum_{\mathfrak{Y}} \mu_{\tilde{\mathfrak{Y}}^D}(y) P(x,y) \log P(x) \leq H(\mathfrak{X}) + H(\mathfrak{Y}),$$

т.к. в этих неравенствах двойные суммы неположительны. При независимости $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ формула (33) соответствует формуле (I2). Равенство в (34) имеет место только в случае, когда $\mu_{\tilde{\mathfrak{X}}}, \mu_{\tilde{\mathfrak{Y}}} = 1$ для $\forall x, y$ и независимых $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, т.е. в классическом случае.

7. Расщепление классической формулы Шеннона производим в двух случаях: при чётких условиях и при нечётких.

Будем исходить из формулы:

$$H(X/Y) = H(X \times Y) - H(Y). \tag{35}$$

Поэтому, согласно обозначениям формулы (I) имеем:

$$S(\tilde{X}, \tilde{X}^D / \tilde{Y}, \tilde{Y}^D) = \mathcal{H}(\widetilde{\tilde{X} \times \tilde{Y}}) + \mathcal{H}(\widetilde{\tilde{X} \times \tilde{Y}^D}) - \mathcal{H}(\tilde{Y}) - \mathcal{H}(\tilde{Y}^D). \tag{36}$$

Выражение

$$H^{\sim}(X/Y) = \left[\mathcal{H}(\widetilde{\tilde{X} \times \tilde{Y}}) - \mathcal{H}(\tilde{Y})\right]$$

можно рассматривать в качестве расщеплённой части $H(X/Y)$, а

$$H^{\sim D}(X/Y) = \left[\mathcal{H}(\widetilde{\tilde{X} \times \tilde{Y}^D}) - \mathcal{H}(\tilde{Y}^D)\right]$$

– в качестве соответствующей дуальной.

Согласно формуле (34), имеем:

$$H^{\sim}(X/Y) \leq \mathcal{H}(\tilde{X}) + \mathcal{H}(\tilde{X}^D) + \mathcal{H}(\tilde{Y}^D) \tag{37}$$

и

$$H^{\sim D}(X/Y) \leq \mathcal{H}(\tilde{X}) + \mathcal{H}(\tilde{X}^D) + \mathcal{H}(\tilde{Y}). \tag{38}$$

При чётком условии

$$S(\tilde{X}, \tilde{X}^D / Y) = \mathcal{H}(\tilde{X} \times Y) + \mathcal{H}(\tilde{X}^D \times Y) - H(Y), \tag{39}$$

где

$$\mathcal{H}(\tilde{X} \times Y) = \mathcal{H}(\tilde{X}) + \sum_{x} \mu_{\tilde{x}}\, P(x) H(Y/x), \tag{40}$$

$$\mathcal{H}(\tilde{X}^D \times Y) = \mathcal{H}(\tilde{X}^D) + \sum_{x} \mu_{\tilde{x}^D}\, P(x) H(Y/x). \tag{41}$$

Если для условной энтропии воспользоваться формулой (5)

$$H(\mathcal{I}/y) = \sum_{y} P(y) H(\mathcal{I}/y), \qquad (41)$$

то можно написать:

$$S(\tilde{\mathcal{I}}, \tilde{\mathcal{I}}^{D}/\mathcal{Y}) = \sum_{y} P(y) S(\tilde{\mathcal{I}}, \tilde{\mathcal{I}}^{D}/y) = \\ = \sum_{y} P(y) \left[\mathcal{I}(\tilde{\mathcal{I}}/y) + \mathcal{I}(\tilde{\mathcal{I}}^{D}/y) + L(\tilde{\mathcal{I}}, \tilde{\mathcal{I}}^{D}/y) \right]. \qquad (42)$$

При нечётких условиях, согласно (31) и (32)

$$P(x/y) = \mu_{\tilde{y}}(y) P_{\tilde{y}}(x) + \mu_{\tilde{y}^{D}}(y) P_{\tilde{y}^{D}}(x) \qquad (31')$$

и
$$S(\tilde{\mathcal{I}}, \tilde{\mathcal{I}}^{D}/\tilde{y}, \tilde{y}^{D}) = \mathcal{I}(\tilde{\mathcal{I}}/y) + \mathcal{I}(\tilde{\mathcal{I}}^{D}/y) -$$

$$- \sum_{x} \left[\frac{\mu_{\tilde{y}}(y) P_{\tilde{y}}(x)}{P(x/y)} \log \frac{\mu_{\tilde{y}}(y) P_{\tilde{y}}(x)}{P(x/y)} + \frac{\mu_{\tilde{y}^{D}}(y) P_{\tilde{y}^{D}}(x)}{P(x/y)} \log \frac{\mu_{\tilde{y}^{D}}(y) P_{\tilde{y}^{D}}(x)}{P(x/y)} \right] =$$

$$= \mathcal{I}(\tilde{\mathcal{I}}/y) + \mathcal{I}(\tilde{\mathcal{I}}^{D}/y) + H\left(\frac{\mu_{\tilde{y}}(y) P_{\tilde{y}}(x)}{P(x/y)}, \frac{\mu_{\tilde{y}^{D}}(y) P_{\tilde{y}^{D}}(x)}{P(x/y)} \Big/ y \right). \qquad (43)$$

8. Разбиение множества результатов наблюдений $\mathcal{Y}$ на любое число непересекающихся подмножеств A_i называется группировкой наблюдений /5/. Расщепление этого разбиения будет называться группировкой нечётких наблюдений. Если расщепление A_i индуцировано расщеплением отдельных результатов наблюдений, то

$$\mu_{\mathcal{A}}(A_i) = \bigvee_{y \in A_i} \mu_{\tilde{y}}(y), \qquad \mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_M\},$$

а M - произвольное натуральное число.

При чётких исходных данных имеем (согласно (39)):

$$S(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{A}}^{D}/\mathcal{I}) = \mathcal{I}(\tilde{\mathcal{A}} \times \mathcal{I}) + \mathcal{I}(\tilde{\mathcal{A}}^{D} \times \mathcal{I}) - H(\mathcal{I}). \qquad (44)$$

При нечётких исходных данных, согласно (43), имеем:

$$S(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{A}}^D/\tilde{X}, \tilde{X}^D) = \sum_x P(x)\left[\tilde{Z}(\tilde{\mathcal{A}}/x) + \tilde{Z}(\tilde{\mathcal{A}}^D/x)\right] -$$

$$- \sum_x P(x) \sum_{i=1}^{M} \left[\frac{\mu_{\tilde{X}}(x) P_{\tilde{X}}(\mathcal{A}_i)}{P(\mathcal{A}_i/x)} \log \frac{\mu_{\tilde{X}}(x) P_{\tilde{X}}(\mathcal{A}_i)}{P(\mathcal{A}_i/x)} + \right. \tag{45}$$

$$\left. + \frac{\mu_{\tilde{X}^D}(x) P_{\tilde{X}^D}(\mathcal{A}_i)}{P(\mathcal{A}_i/x)} \log \frac{\mu_{\tilde{X}^D}(x) P_{\tilde{X}^D}(\mathcal{A}_i)}{P(\mathcal{A}_i/x)} \right].$$

Очевидно, в обоих случаях нерасщеплённая условная энтропия не превосходит расщеплённую:

$$H(\mathcal{A}/x) \leq S(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{A}}^D/x)$$

и

$$H(\mathcal{A}/x) \leq S(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{A}}^D/\tilde{X}, \tilde{X}^D). \tag{46}$$

Это утверждение следует из (I9) и неотрицательности энтропии Де Люка и Термини, или второго слагаемого в (45).

Поступила 9.XI.1992

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

Литература

I. Т.Гачечиладзе, Т.Манджапарашвили, О нечётких множествах, Труды Тбилисского университета, серия кибернетики и прикл.математики, 279, № 9, 235 (1988).

2. Т.Гачечиладзе, Т.Манджапарашвили, Конечные нечёткие подмножества и энтропия, Труды Тбилисского университета, серия кибернетики и прикл. математики, 300, № I3, IOI (I990).

3. L.Zadeh Probability Measures of Fuzzy Events, J.Math.Analysis and Appl., [illegible], 421 ([illegible]).

4. A.de Luca, S.Termini. A Definition of Non-Probabilistic Entropy in the Setting of Fuzzy Sets. Inform. and Control, 20, 301 (1972).

5. А.Файнстейн. Основы теории информации, ИЛ, Москва (I960).

6. Г.Г.Харди, Д.Е.Литтлвуд, Д.Пойя. Неравенства, ИЛ, Москва (I956).

7. Т.Гачечиладзе, Т.Манджапарашвили. Нечёткие случайные события и соответствующие относительные вероятностные меры, Сообщения АН Грузии, I34, # 3, (I989).

თ.გაჩეჩილაძე, თ.მანჯაფარაშვილი, გ.კაშმაძე

არამკაფიო მონაცემთა დაჯგუფება

რ ე ზ ი უ მ ე

შემოტანილია არამკაფიო მონაცემთა დაჯგუფების ცნება. განხილულია ზოგიერთი ტოლობა და უტოლობა, დაკავშირებული დაჯგუფების პროცედურასთან.

T.Gachechiladze, T.Manjaparashvili, G.Kashmadze

GROUPING OF FUZZY DATA

S u m m a r y

The concept of fuzzy data grouping is introduced. Some equalities and inequalities related to the grouping procedure are considered.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
315, 1993

გამოსახულებითი ინფორმაციის დამუშავების და მეხსიერების ველის ორგანიზების ამოცანისათვის

რ. მეგრელიშვილი

წინამდებარე გამოკვლევის ძირითად მიზანს რთული ინფორმაციული სისტემის ზოგიერთი საკითხის შესწავლა წარმოადგენს.

ისეთი საკითხების გამოკვლევას, როგორიცაა კლასიფიკაციის პრობლემები, ძებნის მეტაპროცედურების შექმნა და სემანტიკური და პროცედურული ცოდნის წარმოდგენა, ადამიანის და კომპიუტერის ურთიერთობის მეთოდოლოგიის კვლევა და, ბოლოს, მეტაპროცედურების შექმნა, რომლებიც უზრუნველყოფენ ადამიანის რეალურ გარემოში მოქმედების იმიტაციას, მივყავართ "გონიერი ქცევის სისტემის" კვლევის ამოცანებამდე, თუმცა გასაგებია, რომ უკანასკნელი პრობლემის გადაწყვეტა არ შეიძლება ახლო მომავალში ვივარაუდოთ.

საინტერესოა შემდეგი სამი მიმართულება კვლევებისა: 1) ცნებათა (განსაზღვრებათა) ფორმირების საკითხები. უნდა შეიქმნას ნათელი წარმოდგენა ვერბალური ველის გამოყენების აუცილებლობის შესახებ კვლევების ისეთ სფეროში, როგორიცაა ცნებათა ფორმირების პროცესი. ქვემოთ აღწერილი გამოყენება /1,2/ ალგორითმებისა შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც ამ პროცესის ერთი რგოლი (ბუნებრივი ენის სიტყვათა შემადგენელი ასო-ნიშნების როგორც კერძო სახის გამოსახულებათა წარმოქმნა და ამოცნობა); 2) ერთი გარკვეული დაშვების (გამო-ყვანილების) პრიორიტეტის საკითხი მეორის მიმართ, როდესაც ორივე დაშვება განეკუთვნება ერთსა და იმავე სიტუაციას (ეს საკითხი დაის

როგორც ცნების ფორმირებამდე, ისე მის შემდეგაც). 3. საჭიროა პასუხი გაეცეს კითხვას: რა აიძულებს "სისტემას" მიიღოს ესა თუ ის გადაწყვეტილება? არსებობს რაიმე "გენერატორი", რომელიც აიძულებს "სისტემას" გადაწყვეტილების მიღებას, თუ ეს პროცესი არის შედეგი "გარემოსა" და "სისტემის " ურთიერთქმედებისა? ორივე შემთხვევაში აუცილებელია ცნებათა ფორმირების საკითხის გადაწყვეტა.

ალგორითმები, რომლებიც ქვემოთ არის განხილული, რა თქმა უნდა, არ წარმოადგენენ აღნიშნული ამოცანების უშუალო გადაწყვეტას, მაგრამ ისინი შეიძლება გამოვიყენოთ მეტაპროცედურების და სისტემის ცალკეული ნაწილის განხორციელების დროს.

მეხსიერების ველის სტრუქტურა და მოქმედების წესი გარკვეულწილად განსაზღვრავს ცნებათა ფორმირების პროცესს. ცხადია, რომ სისტემის მეხსიერებაში სიტყვათა ქსელის სტრუქტურა შეიცავს ობიექტის ამოცნობის ელემენტს, მაგრამ უპირველესად საჭიროა ვუპასუხოთ კითხვას: როგორ ხორციელდება მიმართვა მეხსიერებაში ჩაწერილი სიტყვებისადმი - მიმდევრობით, თუ პარალელურად?

მიმდევრობითი გადასინჯვა პრაქტიკულად განუხორციელებელია (სიტყვათა საკმაოდ დიდი რაოდენობის დროს). პარალელური მიმართვის შესრულება მოითხოვს თვით ეგმ-ის აგებას ახალი, პარალელური ქმედების პრინციპით. ასეთ შესაძლებლობას იძლევა, მაგალითად, ბგერითი, ოპტიკური და სხვა საშუალებები /3/ (სურ.1-ზე ნაჩვენებია პარალელური მიმართვის სქემა)*.

----
* პარალელური სისტემის განხორციელება ეგმ-ში მხოლოდ ელექტრონული და ელექტრული ელემენტების ბაზაზე, როგორც ჩანს, შეუძლებელია /3/ .

ბუნებრივ ენაზე ჩაწერილი ტექსტის ან რაიმე გამოსახულების ეგმ-ში შეყვანისა და ძებნის ოპერატიულ გამარტივებას იძლევა ასოციატიური დამისამართების პრინციპი, რომლის საშუალებით მიმართვა მეხსიერების ნებისმიერ უბანზე ჩაწერილი სიტყვისადმი ხორციელდება პრაქტიკულად ერთი ნაბიჯის შედეგად გადასინჯვის პროცედურის გამოყენების გარეშე /1,2/,რაც სრულყოფილების თვალსაზრისით ტოლფასია პარალელური ძებნის პრინციპის განხორციელებისა.

განვიხილოთ რაიმე L გამოსახულების (ფიზიკური ინფორმაციის /3/), ვთქვათ, სამკუთხედის, ეგმ-ის მეხსიერებაში ჩაწერის, ანუ "დამახსოვრების" საკითხი იმ მეთოდის შესაბამისად, რომელიც გამოყენებულია /1,2/ ალგორითმებში.

დავუშვათ, რომ გამოსახულება მოთავსებულია $i \times j$ განზომილების ეკრანზე, რაც ნიშნავს, რომ ეკრანი წარმოადგენს $i \times j$ განზომილების ბადეს. თუ ბადის იმ უჯრაში, რომელსაც ფარავს გამოსახულება, ჩავწერთ. ერთიანს და დანარჩენ უჯრებს შევავსებთ ნოლებით, მაშინ L გამოსახულების ერთი გარკვეული რეალიზაცია (მისი კონკრეტული სახე) შეიძლება ჩაიწეროს $GF(2)$ ველზე განსაზღვრული V_n ვექტორული სივრცის $v=(v_1,\dots,v_n)$ ვექტორის სახით ($n=i$). ვთქვათ, $\mathcal{L}$ არის $L^{(1)}, L^{(2)}, \dots$ გამოსახულებების სხვადასხვა კონკრეტული სახეთა სიმრავლე, ე.ი.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(1)} \cup \mathcal{L}^{(2)} \cup \cdots \quad , \tag{1}$$

სადაც $\mathcal{L}^{(i)}$ $(i=1,2,\dots)$ ქვესიმრავლე არის $L^{(i)}$ გარკვეული გამოსახულების (მაგალითად, იგივე სამკუთხედის) შესაძლო სხვადასხვა კონკრეტული სახეების შემცველი სიმრავლე.

ცხადია, არ არის აუცილებელი, რომ $\mathcal{L}$ სიმრავლეში შემავალ კონკრეტულ სახეთა რიცხვი იყოს წინასწარ განსაზღვრული. ამიტომ, ზოგადად, ეს სიმრავლე არ არის წინასწარ აუცილებლად შემოსაზღვრული. აგრეთვე ცხადია, რომ მიუთითებელი იქნება, რომელიც $\mathcal{L}$ -

შემოსაზღვრულია ზემოდან, თუ არა, ვინაიდან ნიღბის კონკრეტულ სახეთა E სიმრავლე ყოველთვის შემოსაზღვრულია, რადგან ამ სიმრავლის შემადგენელ სახეთა საერთო რაოდენობა ეკრანზე არ შეიძლება აღემატებოდეს დისკრეტული ეკრანის შესაძლო ვევარობას (ანუ V ვექტორთა შესაძლო რაოდენობას), ე.ი. სამართლიანია უტოლობა

$$N(E) \leqslant 2^{n}. \tag{2}$$

ამ უტოლობის არსებობა აღნიშნავს იმ ფაქტს, რომ არსებობს ასახვა $\mathcal{L}$ სიმრავლისა E სიმრავლეზე, რომელიც, საზოგადოდ, სურიექციულია (თუმცა კერძო შემთხვევაში ინექციური შეიძლება იყოს).

ყოველთვის, როდესაც ლაპარაკია $\mathcal{L}$ სიმრავლის E სიმრავლეზე ასახვის არსებობაზე და (2) პირობის სამართლიანობაზე, უნდა მივიღოთ გარკვეული წესი იმის შესახებ, თუ როდის უნდა ჩაითვალოს ბადურის უჯრაში ერთიანი და როდის - ნოლი*.

გავეცნოთ გამოსახულების (ფიგურის) ცნების ფორმირების შესაძლო ვარიანტი სისტემის მეხსიერების ველში. დავუშვათ $L^{(1)}$ არის ჩვენთვის საინტერესო ფიგურა (სამკუთხედი). არსებობს სამკუთხედის გამოსახვის უამრავი შესაძლებლობა. თეორიულად ნებისმიერ (არა ნულოვან და არა ბადურიან) ეკრანზე შეიძლება მოთავსდეს უსასრულოდ დიდი რიცხვი ასეთი გამოსახულებებისა. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, $\mathcal{L}^{(1)}$ სიმრავლეში შემავალ კონკრეტულ სახეთა რაოდენობის შესაბამისი რიცხვი არ არის ზემოდან შემოსაზღვრული. მაგრამ ამ სიმრავლის შესაბამისი $E^{(1)}$ სიმრავლე დისკრეტული ეკრანის ბადურაზე, ან V ვექტორის სახით ჩაწერილი, სასრულ სიმრავლეს წარმოადგენს. ეს არის n განზომილების ვექტორთა რაოდენობა, რომელიც (2) პირობის თანახმად

---

* მეცნიერების სხვადასხვა სფეროში ანალოგიურ შემთხვევებში, საზოგადოდ, მიღებულია მაჟორული პრინციპი, რომელიც ჩვენს შემთხვევაში ასე გამოიყურება: თუ გამოსახულება ფარავს უჯრის ნახევარს, მასში ჩაიწერება ერთიანი, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი - ნოლი.

(მაკ-ლეინი გამოსახულების [illegible]) არ შეიძლება აღემატებოდეს 2^n სიდიდეს.

მთლიანად $\mathcal{E}^{(i)}$ სიმრავლეს და, შესაბამისად, $\mathcal{L}^{(i)}$ სიმრავლეს შეიძლება შევუსაბამოთ ერთი გარკვეული ვექტ[ორი] ან სიმბოლო. ასეთ სიმბოლოს შეიძლება წარმოადგენდეს ვერბალური დასახელება ფიგურის-სიტყვა, ასო-ნიშნებით ჩაწერილი ან ბგერებით წარმოთქმული. ორივე შემთხვევაში (სიმბოლოა, თუ სიტყვა) მნიშვნელოვანია ის გარემოება, რომ ეს ვერბალური სიმბოლო სასრული, კომპაქტური (სტანდარტული) სიდიდეა. ამრიგად, უსასრულოდ დიდი სიმრავლე ($\mathcal{L}^{(i)}$ სიმრავლე) შეიძლება წარმოდგენილი იყოს სასრული კომპაქტური სიმბოლოს სახით (ასეთია, მაგალითად, სიტყვა "სამკუთხედი").

როგორც ცნობილია, არასტანდარტულ ანალიზში გამოყენებული უსასრულოდ მცირე სიდიდის განმარტება არღვევს არქიმედის აქსიომას. კერძოდ, სამართლიანია უტოლობა:

$$\underbrace{\varepsilon+\varepsilon+\cdots+\varepsilon}_{n} < 1 ; \tag{3}$$

აქ ε უსასრულოდ მცირე რიცხვია, რომელიც ნაკლებია $1/n$ სტანდარტულ რიცხვზე (n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია).

თუ (3) უტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ ε-ზე, მივიღებთ

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n} < 1/\varepsilon , \tag{4}$$

სადაც $H = 1/\varepsilon$ უსასრულოდ დიდი ჰიპერნამდვილი რიცხვია /4/.

ფორმალურად (3) და (4) უტოლობებს და, შესაბამისად, უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი რიცხვების განმარტებებს შეიძლება შევადაროთ ქვემომოყვანილი ცნების ფორმირების პროცედურა. კერძოდ, თუ დავუშვებთ, რომ ვერბალური სიტყვა-ცნების "ფასადობა" სასრული სტანდარტული რიცხვის ტოლია, მაშინ მოცემული გამოსახულების [illegible] კომპაქტური სახის "სიდიდე", ან გაგებით, მაგალითად უსასრულოდ მცირე (3) რიცხვთაშია შედარებადი; ხოლო თუ დავუშვებთ, რომ გამოსახულების

კონკრეტული სახე შეიძლება წარმოდგენილი იყოს რაიმე სტანდარტული რიცხვის ტოლი სიდიდით, მაშინ შესაბამისი მოქალი ცნების აღმნიშვნელი ვერბალური სიმბოლოს (სიტყვის) მნიშვნელობის სიდიდე შედარებადი იქნება უსასრულოდ დიდ ჰიპერნამდვილ (4) რიცხვთან.

ვიდრე ხელნაწერი ტექსტის წაკითხვას და ანონიმური ავტორის ამოცნობის საკითხებს შევეხებოდეთ, განვიხილოთ ეკრანზე ასახული გამოსახულების ცალკეულ კლასებად – კონფიგურაციებად – დაყოფის (საკითხი).

კონფიგურაცია წარმოადგენს V ვექტორის ურთიერთმეზობელ (ურთიერთდაკავშირებულ) ერთეულოვან სიმბოლოთა ($V_i = 1$) სიმრავლეს. ბადურის (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილები (ანუ უჯრები შესაბამისი კოორდინატებით) ურთიერთმეზობლნი არიან, თუ $|x_1-x_2|\leq 1$ და $|y_1-y_2|\leq 1$, სადაც $x, y = 1, \ldots, n$. ერთეულოვან კომპონენტთა სრული სიმრავლიდან ცალკეული კონფიგურაციის გამოყოფის ამოცანა წარმოადგენს სიმრავლის ექვივალენტობის კლასებად დაყოფის ამოცანას, თუ ექვივალენტობის დამოკიდებულებად განვიხილავთ ბადურის უჯრების, ანუ V ვექტორის ერთეულოვან კომპონენტთა ურთიერთმეზობლობას.

ვთქვათ, M არის სიმრავლე იმ (x, y) წერტილებისა, რომლებიც შეესაბამებიან V ვექტორის ერთეულოვან სიმბოლოებს, ხოლო $\{S[(x;y)\in D]\}$ – სიმრავლე ყველა იმ წერტილებისა, რომლებიც მეზობელი არიან D სიმრავლის რომელიმე წერტილთან. ვთქვათ $(x,y)\in M$; განვიხილოთ M სიმრავლის შემდეგი თანაუკვეთავი ქვესიმრავლეები:

$$M'_1=\{(x_1,y_1)\},$$
$$M'_2=\{S[(x,y)\in M'_1]\}-M'_1,$$
$$M'_3=\{S[(x,y)\in M'_2]\}-M'_1-M'_2,$$
$$M'_4=\{S[(x,y)\in M'_3]\}-M'_2-M'_3, \qquad (5)$$
$$\text{-------------------------}$$
$$M'_t=\{S[(x;y)\in M'_3]\}-M'_{t-2}-M'_{t-1}$$

$M'=M_1'\cup\cdots\cup M_t'$ წარმოქმნის კონფიგურაციას, რომელსაც ეკუთვნის $(x_1,y_1)\in M$ წერტილები, სადაც t მინიმალური მნიშვნელობის რიცხვია ისეთი, რომ $M_{t+1}'=\varnothing$.

განვიხილოთ კონფიგურაციების გამოყოფის პროცესი. ვთქვათ, გვინდა V ვექტორის ერთეულოვან წერტილების M სიმრავლიდან გამოვყოთ ურთიერთმეზობელ წერტილთა M' სიმრავლე (კონფიგურაცია), რომელიც წარმოადგენს რომელიმე L გამოსახულების კონკრეტულ სახეს (ან, შესაძლოა, მის ნაწილს). ამისათვის ავიღოთ რომელიმე (x_1,y_1) წერტილი (რომელიც წარმოქმნის საძიებელ M' კონფიგურაციას). უპირველესად გამოვყოთ $M_1'=\{(x_1,y_1)\}$ სიმრავლე, რომელიც შედგება ერთადერთი (x_1,y_1) წერტილისაგან. შემდეგ ვიღებთ სხვა რომელიმე $(x_2,y_2)\in M$ წერტილს, რომელიც არ ეკუთვნის M_1' სიმრავლეს; (5) სისტემის შესაბამისად ის წარმოქმნის M_2' სიმრავლეს (M_2' არის (x_1,y_1) წერტილთან მეზობელ წერტილთა სიმრავლე); იმავე წესით მიიღება M_3' ქვესიმრავლე საძიებელი კონფიგურაციისა და ა.შ. ამრიგად, ურთიერთმეზობელ წერტილთა სიმრავლე არის $M'=M_1'\cup\cdots\cup M_t'$ კონფიგურაცია.

განვიხილოთ ხელნაწერი ტექსტის ნაკითხვის და ანონიმური ავტორის ამოცნობის საკითხები. ხელნაწერი ტექსტის ნაკითხვის ამოცანის გადაწყვეტას ართულებს ის გარემოება, რომ ასო-ნიშნები (ხელნაწერ ტექსტში) შეიძლება იყოს (სურ.2): ა) სხვადასხვა ფორმის, მაგრამ ერთიდაიგივე დასახელების (შინაარსის); ბ) სხვადასხვა დასახელების, მაგრამ მსგავსი ფორმის; გ) სხვადასხვა სიდიდის და გამოსახულების; დ) დაწერილი გადაუბმელად (ცალ-ცალკე) და გადაბმულად და ა.შ.

ამოცანა სიძნელის მიხედვით უნდა დავყოთ სამ ეტაპად (სადეხური; სურ.3): ა) ასო-ნიშნები არ არიან გადაბმული; ამავე დროს

მათი განცალკევება (მათ შორის საზღვრის გავლება) შეიძლება შევ-ული წრფის საშუალებით (სურ.3 ა) ; ბ) ასო-ნიშნები არ არიან გადაბმული, (სურ.3 ბ) ; გ) ასო-ნიშნები გადაბმული არიან (სურ. 3 გ) .

ამოცანის დაყოფა სამ საფეხურად პირობითია და ახასიათებს მისი გადაწყვეტის სირთულის ხარისხს. ქვემოთ განხილულია ნაკლები სიძნელის ამოცანის გადაწყვეტის შესაძლებლობა, თუმცა შესაბამისი ალგორითმი, გარკვეული ცვლილებების შემდეგ, საშუალებას იძლევა, რომ ამოცანა სრულად იყოს გადაწყვეტილი.

ვთქვათ, A_0 არის $\alpha^{(k)}, (k=1,\dots,t)\in A_0$, ასო-ნიშნების სიმრავლე (მოცემული ალფავიტი); t ასო-ნიშნების საერთო რაოდენობაა A_0 სიმრავლეში. განვიხილოთ ასო-ნიშნების გამოსახულებები $i\times j$ განზომილების ბადურაზე. ცხადია, ეკრანზე გამოსახული ყოველი ასო-ნიშანი ჩაიწერება $n=ij$ განზომილების $v\in V_n$ ვექტორის სახით. ვთქვათ, სხვადასხვა ავტორის მიერ ჩაწერილი $\alpha^{(k)}$ ასო-ნიშნები ქმნიან $\alpha^{(k,e)}$ კონკრეტულ სახეთა A_0 სრულ სიმრავლეს, რომლის შესაბამისია ეკრანზე $v^{(k,e)}$ ვექტორთა სიმრავლე*. კონკრეტულ სახეთა საერთო რაოდენობაა:

$$N\left(v^{(k,e)}\right)=\sum_{k=1}^{t}\sum_{e=1}^{d_k} v^{(k,e)} ; \qquad (6)$$

(2) პირობის თანახმად $d_k<2^n$, თუმცა რეალურად d_k ბევრად ნაკლებია 2^n სიდიდეზე.

ასო-ნიშანთა ამოცნობის, ანუ მათი წაკითხვის ამოცანა შეიძლება გადაწყდეს შემდეგი თანმიმდევრობით.

----

* როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, A სიმრავლე შემოსაზღვრული არ არის მაშინ, როდესაც $v^{(k,e)}$ $(e=1,\dots,d_k)$ ვექტორთა რაოდენობა შემოსაზღვრულია.

<u>ორგანიზების ეტაპი</u>. ეგმ-ის მეხსიერებაში ჩაიწერება (6) გამოსახულების ყოველ ვექტორს /1,2/ ალგორითმის მიხედვით. ყოველ მისამართზე ჩაიწერება $\alpha^{(k,e)}$ ასო-ნიშნის კერძო გამოსახულების შესაბამისი $V^{(k,e)}$ ვექტორი და $\alpha^{(k)}$ ასო-ნიშნის შესაბამისი [illegible]ობითი ვექტორი $V^{(k)}$ (ანუ $\alpha^{(k)}$-ს "დასახელება", ე.ი. მეხსიერებაში ჩაიწერება ($V^{(k,e)}$, $V^{(k)}$) წყვილი, რაც ცალსახად აღნიშნავს გარკვეულ ასო-ნიშანს). ამრიგად, ორგანიზაციის პროცესში ვღებულობთ $\mathcal{A}_0$ სიმრავლის სურექციულ ასახვას A_0 სიმრავლეზე. ორგანიზების ეტაპი, როგორც ვხედავთ, წარმოადგენს სწავლების ეტაპს, რომელსაც ხდება მეხსიერებაში ასო-ნიშნების კონკრეტული სახეთა "დასახსოვრება" და "დასწავლა" იმისა, თუ რომელ ასო-ნიშანს შეესაბამება ეს კონკრეტული სახე. უნდა აღინიშნოს, რომ "სწავლების" პროცესი შეიძლება გაგრძელდეს ალგორითმის ფუნქციონირების დროსაც (2) პუნქტის გათვალისწინებით

<u>ფუნქციონირების ეტაპი</u>. მიღებული ასო-ნიშნის $\bar{\alpha}$ კონკრეტული სახის შესაბამისი ვექტორისათვის მოიძებნება მისამართი, ანუ მოიძებნება ($V^{(k,e)}$, $V^{(k)}$)წყვილი და, მაშასადამე, α ასო-ნიშანი. როგორც ვხედავთ, განხილულ შემთხვევაში $\mathcal{A}_0$ სიმრავლე წარმოადგენს ფიგურათა კონკრეტულ გამოსახულებათა სრულ $\mathcal{L}$ სიმრავლეს, $\alpha^{(k)}$ ასო-ნიშნები კი $L^{(i)}$ ფიგურების შესაბამისი ობიექტები არიან.

<u>ანონიმური ავტორის ამოცნობა</u>. ეს ამოცანა დაკავშირებულია ზემოთ განხილულ ამოცანასთან. ცხადია, რომ თითოეულ f ავტორს აქვს თავისი ხელწერა, რაც აისახება ცალკეულ ასო-ნიშანთა დაწერილობაში. ერთიდაიგივე ასო-ნიშნების განსხვავებული დაწერილობა, შესრულებული სხვადასხვა ავტორის მიერ, ქმნის სხვადასხვა სიმრავლეს. ვთქვათ $\alpha^{(k)}$ რომელიმე ასო-ნიშანია. f ავტორის მიერ ჩაწერილი კონკრეტული სახე ამ ასო-ნიშნებისა არის $\alpha^{(k,e)}$; მათი სრული სიმრავლე

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_d \,. \qquad (7)$$

ყოველი $\mathcal{A}_f$ ($f=1,\dots,d$) ქვესიმრავლის ეკრანზე შესაბამისია $V^{(k,e)}_{(f)}$ ვექტორთა სიმრავლე, რომელთა საერთო რაოდენობა (ერთი რომელიმე ასო-ნიშნისათვის) არის

$$N\left(V^{(k,e)}_{(f)}\right) = \sum_{f=1}^{d} \sum_{e=1}^{d_k} V^{(k,e)}_{(f)} \,. \qquad (8)$$

აღნიშნული ავტორის ამოცნობის თანმიმდევრობა ასეთია. ეგმ-ის მეხსიერებაში /1,2/ ალგორითმების მიხედვით შეიტანება სხვადასხვა ავტორის მიერ შესრულებულ ტექსტებიდან ამოკრეფილი ასო-ნიშნებს (დაახლოებით თანაბარი რაოდენობით). ვღებულობთ (7) და (8) გამოსახულებების შესაბამის სიმრავლეებს (ანუ კლასებს). ამასთან ერთად, ყოველ $V^{(k,e)}_{(f)}$ ვექტორს თან ერთვის $V^{(k)}_{(f)}$ ვექტორი – რომელიც კლასის წარმომადგენელი და $\alpha_f^{(k)}$ ასო-ნიშნის შესაბამისი სიმბოლო, ე.ი. მეხსიერებაში ჩაიწერება ($V^{(k,e)}_{(f)}$, $V^{(k)}_{(f)}$) წყვილი (ანუ ყოველი ვექტორი, ჩაწერილი [illegible] მისამართზე, დამატებით ღებულობს ავტორის შესაბამის ინდექსს). საკითხი იმის შესახებ, თუ რომელ ავტორს მიეკუთვნება ტექსტის ფრაგმენტი, შესაძლოა გადაწყდეს თანხვედრის ფარდობითი რიცხვების მიხედვით (ცალკეული თანხვედრილი ასო-ნიშნების რიცხვის ფარდობით შესაბამისი ქვესიმრავლის ასო-ნიშნების რაოდენობასთან; თანხვედრილი ასო-ნიშნების რიცხვის ფარდობით საერთო რაოდენობასთან და ა.შ.). საზოგადოდ, აღნიშნული ავტორის ამოცნობის ამოცანა წარმოადგენს ტექსტის წაკითხვის პირდაპირი ამოცანის შებრუნებულ ამოცანას და მისი გადაწყვეტის ალგორითმი გარკვეულწილად დამოკიდებულია პირდაპირი ამოცანის გადაწყვეტის მეთოდებზე, და, მაშასადამე, გამოსახულებათა ამოცნობის ზოგად ალგორითმზე.

შემოვიდა 16.XI.1982

ფიზიკური კიბერნეტიკის
[illegible]

ლიტერატურა

1. რ. მეგრელიშვილი. ეგმ-ით ბუნებრივ ენაზე ურთიერთობის სისტემებში პირდაპირი დამისამართების მეთოდის შესახებ. თსუ შრომები. კიბერნეტიკა-გამოყენებითი მათემატიკა, ტ.294, III, 1989.
2. Р.И.Мегрелишвили. К вопросу компактной записи слов и сведений в системах хранения и обработки информации. IУ республиканская конференция по проблемно-ориентированным диалоговым системам (Батуми, I6-I8.X.90), Тбилиси,I990.
3. А.И.Пранкишвили. Разработка принципов и средств представления и параллельной обработки информации на клеточных автоматах. Докторская диссертация. Грузинский технический университет, I992.
4. В.А.Успенский. Нестандартный, или неархимедов, анализ,М., I983.

Р.И.Мегрелишвили

К ЗАДАЧЕ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ ОБРАЗНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ОРГАНИЗАЦИИ ПАМЯТИ ЭВМ

Резюме

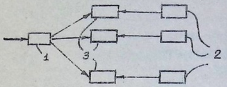
Рассмотрены вопросы записи и поиска информации образного представления в памяти ЭВМ, формирования понятий и распознавания образов.

R.Megrelishvili

TOWARDS PROCESSING OF PATTERN INFORMATION AND ORGANIZATION OF COMPUTER MEMORY

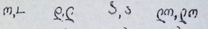
S u m m a r y

Questions of recording and search of pattern information in a computer, concept formation and pattern recognition are considered.



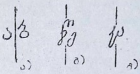
სურ. I

I – ინფორმაცია შესასვლელზე; 2 – ინფორმაცია მეხსიერებაში; 3 – შემოსული და მეხსიერებაში არსებული ინფორმაციის შედარება.



ა) ბ) გ) დ)

სურ. 2



ა) ბ) გ)

სურ. 3

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.Джавахишвили
ი.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

315,1993

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Н.В.Бокучава

§ I. Введение

Задачей принятия решений назовём пару $\langle \Omega, \text{ОП} \rangle$, где Ω – множество вариантов (альтернатив), ОП – принцип оптимальности, позволяющий выбрать из множества имеющихся вариантов наилучший; решением задачи $\langle \Omega, \text{ОП} \rangle$ является множество $\Omega_{оп} \subset \Omega$, полученное с помощью принципа оптимальности ОП.

Математическим выражением принципа оптимальности ОП служит функция выбора $C_{оп}$. Она сопоставляет любому подмножеству $X \subset \Omega$ его часть $C_{оп}(X)$. Решением $\Omega_{оп}$ исходной задачи является множество $C_{оп}(\Omega)$.

Те свойства альтернатив из Ω, для которых существует отображение $\varphi: \Omega \longrightarrow E_m$[*], называют критериями, а число (x) – оценкой альтернатив $x \subset \Omega$ по критерию или просто критерием качества.

Различают три вида задачи принятия решений:

а) задачи с неизвестными Ω и ОП – именуемые общими задачами принятия решений;

б) задачи с известными Ω – именуемые задачами выбора;

---

[*] E_m – m-мерное действительное пространство.

в) задачи с известными Ω и ОП – именуемые общими задачами оптимизации.

Следовательно, задачи выбора и задачи оптимизации являются частными случаями задач принятия решений.

Будем называть динамическими многокритериальными задачами оптимального управления задачи, в которых:

а) управление представимо в виде последовательности действий;

б) критерий качества аддитивен относительно частных управлений;

в) бинарное отношение ρ **) инвариантно относительно переноса.

§ 2. Динамические задачи выбора и оптимизации

Общая постановка вопроса. Рассмотрим задачи выбора и оптимизации, в которых заданы множество управлений U , отображение $\varphi: U \to E_m$ и вектор $\varphi(u \in U) \in E_m$, интерпретируемый как критерий качества. В этих условиях принцип оптимальности определяется не на множестве U , а на множестве критериев качества $\Phi = \varphi(U) \subseteq E_m$.

Для решения этих задач необходимо найти все или некоторые $u^* \in U$, для которых $\varphi(u^*) \subseteq C_{оп}(\Phi)$.

Однокритериальная задача. Пусть $x(t) = \langle x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t) \rangle$ – n-мерный вектор пространства $X \subset \Omega$ динамической системы. $u(t) = \langle u_1(t), u_2(t), \ldots, u_q(t) \rangle$ — q – мерный вектор управления множества возможных управлений $U \subseteq E_q$, $f(x(t), u(t), t)$ – вектор-функция этих переменных с координатами $\langle f_1, f_2, \ldots, f_n \rangle$, которые связаны между собой соотношением

$$x(t) = f(x(t), u(t), t), \qquad (\;)$$

**) Бинарным отношени[illegible] Ω [illegible] о
жество R [illegible]

Управление в (I) выбирается из условия достижения некоторой цели выбором критерия качества $\varphi(x(t),\ u(t))$.

В теории оптимального управления лучшим решением (I) считается решение, для которого функционал $\varphi(x, u)$ принимает экстремальное значение (максимальное или минимальное в зависимости от поставленной цели) при переходе исследуемой системы из начального состояния $x(t_0)$ в конечное состояние $x(t_1)$, где $t_0 < t < t_1$.

Будем считать, что управлением может быть любая кусочно-непрерывная вектор-функция $u(t)$ на отрезке [OT] со значениями из U, и зададим критерий качества управления в виде

$$\varphi(x(t),\ u(t)) = \int_0^T f_0(x(t),\ u(t),\ t)\, dt, \tag{2}$$

тогда задача типа

$$\begin{gathered} \varphi(x(t),\ u(t)) = \int_0^T f_0(x(t),\ u(t), t)\, dt \longrightarrow max, \\ \dot{x}(t) = f(x(t),\ u(t), t), \\ x(0) = x^0, \quad u \in U, \end{gathered} \tag{3}$$

будет представлять собой однокритериальную задачу оптимального управления, которая для $(n+1)$ - мерного фазового пространства X с координатами $x(t) = \langle x_0(t),\ x_1(t), \ldots, x_n(t)\rangle$ и вектор-функцией $f = \langle f_0, f_1, \ldots, f_n\rangle$, где

$$x_0(t) = \int_0^t f_0(x(\tau),\ u(\tau), \tau)\, d\tau,$$

$$x^0 = \langle 0,\ x_1^0(t), \ldots, x_n^0(t)\rangle,$$

переходит в каноническую форму однокритериальной задачи оптимального управления:

$$\begin{gathered} x_0(T) \longrightarrow max, \\ \dot{x}(t) = f(x(t),\ u(t), t), \\ x(0) = x^0, \quad u \in U. \end{gathered} \tag{4}$$

Обобщением задачи (4) является задача

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x_i(T) \longrightarrow max,$$
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \qquad (5)$$
$$x(0) = x^0, \quad u \in U.$$

Ясно, что задача (5) эквивалентна задаче (4) при $c_0 = 1$, $c_i = 0$ ($i > 0$). Для решения задачи (5), т.е. для определения оптимального управления $\overline{U}(t)$ и соответствующей ему траектории $\overline{x}(t)$ целесообразно пользоваться принципом максимума Понтрягина /I/. Для этого необходимо:

I) ввести вектор-функции $\varphi(t) = \langle \varphi_0(t), \ldots, \varphi_n(t) \rangle$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\dot{\varphi}_i(t) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(t) \frac{\partial f_j(x, u, t)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{(0,n)} \qquad (6)$$

и конечным условиям

$$\varphi_i(T) = c_i \quad (i = 0, n); \qquad (7)$$

2) определить функцию $H(x, u, \varphi, t)$ в виде

$$H(x, u, \varphi, t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i f_i(x, u, t); \qquad (8)$$

3) из условия

$$H(x, u, \varphi, t) \longrightarrow max$$

определить u как функцию остальных переменных, т.е.

$$u = u(x, \varphi, t); \qquad (9)$$

4) из соотношений (8) и (7) с учётом (6) сформировать систему

$$\dot{\varphi}(t) = -\partial H / \partial x_i; \quad \varphi_i(T) = c_i, \quad i = \overline{(0,n)};$$
$$\dot{x}_i(t) = \partial H / \partial \varphi, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{(0,n)}; \qquad (10)$$

5) подставить в систему (I0) управление (9) и найти её решения $\langle \bar{x}(t), \bar{\varphi}(t) \rangle$;

6) подставить найденные функции $\bar{x}(t)$, $\bar{\varphi}(t)$ в (9) и получить управление $\bar{u}(t)$.

Таким образом, принцип максимума Понтрягина дает необходимые условия оптимальности, позволяющие свести задачу (5) к известной краевой задаче (I0).

<u>Многокритериальная задача</u>. Пусть на множестве E_m задано бинарное отношение R. Управление $u^* \in U$ является оптимальным, если при всех других значениях $u \in U$ нельзя получить вектор $\varphi(u)$, более предпочтительный по отношению R, чем $\varphi(u^*)$, т.е. $\varphi(u) \bar{R} \varphi(u^*)$ ***) для всех $u \in U$. Будем называть такие отношения R-оптимальными. Обозначим множество всех R-оптимальных управлений через $G(U)$.

Многокритериальная задача оптимального управления состоит в том, чтобы при заданных U, φ, R выделить $G(U)$. Основным способом решения многокритериальной задачи оптимального управления является переход к однокритериальной задаче с помощью $\mathcal{A}$-свёртки ****).

Имея m критериев вида:

$$\varphi_i(x, u) = \int_0^T f_i(x(t), u(t), t)\,dt \qquad (i = \overline{1,m}) \tag{II}$$

управления $u \in U$, являющиеся кусочно-непрерывными вектор-функциями, определёнными на отрезке $[0\ T]$, и дополнительные переменные:

***) Отношение $\bar{R}$ – это дополнительное отношение R и выполняется для тех и только для тех пар, для которых не выполняется отношение R.

****) $\mathcal{A}$-свёрткой многокритериальной задачи $\langle U, \varphi, R \rangle$ [illegible] $\langle U, g-\mathcal{A}\,\varphi \rangle$, $\mathcal{A} \in E$ [illegible]

$$x(t)=\int_0 f_i\,(x(\tau),\,u(\tau),\tau)\,d\tau \tag{12}$$

при условии:

$$t\in[0,T],\quad x_i(0)=0\qquad (i=\overline{1,m}), \tag{13}$$

математическую модель многокритериальной задачи оптимального управления можем представить в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i\varphi_i(x,u)=\sum_{i=0}^{m}\int_0^T c_i f_i(x(t),u(t),t)\,dt \to \max\qquad (i=1,m)$$

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i(t)=f_i(x,u,t) && (i=\overline{1,m+n}),\\ &x_i(0)=x_i^0 && (i=\overline{m+1,m+n}),\\ &x_i(0)=0 && (i=\overline{1,m}),\\ &u(t)\in U && (t\in[0,1]), \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$f=\langle f_1,f_2,\ldots,f_{m+n}\rangle,\quad x^0=\langle 0,\ldots,0,x^0_{m+1},\ldots,x^0_{m+n}\rangle,$$

$$x=\langle x_1,\ldots,x_{m+n}\rangle.$$

Для поиска решения модели (I4) воспользуемся λ - свёрткой. С учётом (I2) и λ - свёртки математическая модель (I4) преобразуется в следующую однокритериальную оптимальную модель:

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i(T)\longrightarrow \max$$

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i(t)=f_i(x,u,t) && (i=\overline{1,m+n}),\\ &x_i(0)=0 && (i=\overline{1,m}),\\ &x_i(0)=x^0 && (i=\overline{m+1,m+n}),\\ &u(t)\in U, \end{aligned}$$

где

$$c=\langle\lambda_1,\ldots,\lambda_m,0,\ldots,0\rangle.$$

Решение задачи (I4) будем искать с помощью принципа максимума Понтрягина, который в отличие от задачи (5) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi}_i(t)=\sum_{i=1}^{m+n}\varphi(t)\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x_i} && (i=\overline{1,m+n}),\\ &\varphi_i(T)=\lambda_i && (i=\overline{1,m}),\\ &\varphi_i(T)=0 && (i=\overline{m+1,m+n}). \end{aligned} \tag{16}$$

$$H(x,u,\varphi,t)=\sum_{i=1}^{m+n}\varphi_i f_i(x,u,t) \longrightarrow \max,$$

$$\bar{u}(t)\in \operatorname{Arg\,max} H(\bar{x}(t),u,\bar{\varphi}(t),t),\quad t\in[0\,T],$$

где $\bar{x}(t)$, $\bar{\varphi}(t)$ – оптимальные значения вектор-функций $x(t)$, $\varphi(t)$, а $\bar{u}(t)$ – соответствующее оптимальное управление.

§ 3. Оптимизация производственно-потребительской задачи i.

Рассмотрим модель трёхотраслевой экономики. Будем считать, что первая отрасль производит средства производства, которые могут расходоваться на развитие всех трёх отраслей. Две другие отрасли будем считать потребительскими. Обозначим через $x_i(t)$ (i =I,2,3) мощность i-ой отрасли в момент t. Сказанное математически представим следующим образом:

$$\dot{x}_i(t)=u_i(t)x_i(t) \qquad (i=1,2,3), \tag{I7}$$

где $u_i(t)$ означает долю продукта x_1, поступающую на развитие i-ой отрасли в момент времени t. Введём ограничение

$$u_1+u_2+u_3=1, \qquad u_i\geq 0 \quad (i=1,2,3), \tag{I8}$$

которое означает, что продукт x_1 [illegible] используется целиком.

Рассматриваемая задача является многокритериальной задачей, для которой модели (I5) и (I6) при условиях

$$x_1(0)=1, \qquad x_2(0)=x_3(0)=0,$$

$\lambda=\langle 0,\lambda_2,\lambda_3\rangle$ при $\lambda_2+\lambda_3=1$ соответственно примут следующий вид:

$$\dot{x}_1=u_1x_1,$$
$$\dot{x}_2=u_2x_2,$$
$$\dot{x}_3=(1-u_1-u_2)x_{[illegible]},$$
$$x_1(0)=1,\quad x_2(0)=x_3(0)=0,$$

$$u_1+u_2=1,\quad u_1\geqslant 0,\quad u_2\geqslant 0, \tag{19}$$
$$\lambda_2 x_2(2)+\lambda_3 x_3(2) \longrightarrow max,\quad t\in[0,2],$$

$$\begin{aligned}
&H=\varphi_1 u_1 x_1+\varphi_2 u_2 x_1+\varphi_3(1-u_1-u_2)x_1,\\
&-\dot\varphi_1=\varphi_1 u_1+\varphi_2 u_2+\varphi_3(1-u_1-u_2),\\
&\dot\varphi_2=0,\quad \dot\varphi_3=0,\\
&\varphi_1(2)=0,\quad \varphi_2(2)=\lambda_2,\quad \varphi_3(2)=\lambda_3,\\
&\bar u(t)\in Arg\max H(\bar x(t),u,\varphi(t)),\quad t\in[0,2].
\end{aligned} \tag{20}$$

Из третьего соотношения (20) следует

$$\varphi_2(t)=\lambda_2,\quad \varphi_3(t)=\lambda_3. \tag{21}$$

С учётом (21) и того факта, что в нашем случае $x_1(t)>0$, $t\in[0T]$, модель (20) преобразуется в следующий вид:

$$\begin{aligned}
&H=(\varphi_1-\lambda_3)u_1+(\lambda_2-\lambda_3)u_2 \longrightarrow max,\\
&-\dot\varphi_1=\varphi_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3(1-u_1-u_2),\\
&\varphi_1(2)=0,\quad \varphi_2(2)=\lambda_2,\quad \varphi_3(2)=\lambda_3,\\
&\bar u(t)\in Arg\max H(\bar x(t),u,\bar\varphi(t),t),\quad t\in[0,2],\\
&u_1+u_2\leqslant 1,\quad u_1>0,\quad u_2\geqslant 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Рассмотрим три случая: $\lambda_2>\lambda_3$, $\lambda_2<\lambda_3$, $\lambda_2=\lambda_3$.

I) Из первого соотношения (22) следует, что $\varphi_1\geqslant\lambda_2$ и $\varphi_1-\lambda_3\geqslant\lambda_2-\lambda_3$, которое с учётом $1-u_1\geqslant u_2$ даёт

$$(\varphi_1-\lambda_2)(1-u_1)\geqslant(\lambda_2-\lambda_3)u_2,$$

откуда

$$\varphi_1-\lambda_3\geqslant(\varphi_1-\lambda_2)u_1+(\lambda_2-\lambda_3)u_2$$

и, следовательно,

$$u_1=\begin{cases}1, & \varphi_1\geqslant\lambda_2\\ 0, & \varphi_1<\lambda_2\end{cases},\qquad u_2=\begin{cases}0, & \varphi_1\geqslant\lambda_2\\ 1, & \varphi_1<\lambda_2\end{cases} \tag{23}$$

С учетом (23) второе уравнение из (22) примет следующий вид:

$$\dot\varphi_1=-\varphi_1 u_1-\lambda_2 u_2=\begin{cases}-\varphi_1, & \varphi_1\geqslant\lambda_2\\ -\lambda_2, & \varphi_1<\lambda_2\end{cases}, \tag{24}$$

откуда, учитывая $\varphi_1(2)=0$ и $\varphi_1(1)=\lambda_2$ получим

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}-\lambda_2 t+2\lambda_2 & , \quad \varphi_1\geqslant\lambda_2\\ \lambda_2 e^{-t+1} & \end{cases} \tag{25}$$

Для определения координат траектории поведения рассматриваемой экономической системы воспользуемся соотношениями (I0) и (23), получим:

$$\dot{x}_1=\begin{cases}x_1\ , & \varphi_1\geqslant\lambda_2\\ 0\ , & \varphi_1<\lambda_2\end{cases}$$

$$\dot{x}_2=\begin{cases}0\ , & \varphi_1\geqslant\lambda_2\\ 1\ , & \varphi_1<\lambda_2\end{cases}$$

откуда

$$x_1=\begin{cases}e^{t}, & \varphi_1\geqslant\lambda_2\\ 0\ , & \varphi_1<\lambda_2\end{cases}$$

$$x_2=\begin{cases}0\ , & \varphi_1\geqslant\lambda_2\\ x_1 t, & \varphi_1<\lambda_2\end{cases}$$

Следовательно, при $\lambda_2>\lambda_3$ оптимальные управления и траектории не зависят от значений параметров λ_2 и λ_3.

Расчёты для случаев $\lambda_2<\lambda_3$ и $\lambda_2=\lambda_3=\lambda$ аналогичны рассмотренному $\lambda_2>\lambda_3$ случаю. Результаты для $\lambda_2<\lambda_3$ симметричны результатам $\lambda_2>\lambda_3$, а для случая $\lambda_2=\lambda_3$ разница в том, что

$$H_{max}=(\varphi_1-\lambda)u_1\ ,$$

$$u_1=\begin{cases}1\ , & \varphi_1\geqslant\lambda\\ 0\ , & \varphi_1<\lambda\end{cases}, \qquad u_2=\begin{cases}0\ , & \varphi_1\geqslant\lambda\\ \text{любые} & u_2\in[0,1]\end{cases}$$

Таким образом, в зависимости от вида неравенства между параметрами λ_2 и λ_3 существует либо единственное оптимальное управление, либо множество оптимальных управлений, приводящих к любой точки из Ω.

Поступила I6.XII.1992

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

Литература

I. Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р [illegible]икрелидзе, У.Ф.Ми[illegible]ко. Математическая теория оптимальных процессов. М.,Наука, 1983.

ნ.ბოკუჩავა

გადაწყვეტილებათა მიღების ამოცანების მათემატიკური მოდელები

რ ე ზ ი უ მ ე

ნაშრომში წარმოდგენილია გადაწყვეტილებათა მიღების ძირითადი ამოცანები,

მოცემულია შესაბამისი მათემატიკური მოდელები და ამოხსნის მეთოდები.

N.Bokuchava

MATHEMATICAL MODELS OF DECISION-MAKING PROBLEMS

S u m m a r y

The paper presents the basic decision-making problems with rele[illegible] mathematical models and methods of their solution.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

315, 1993

СИНТЕЗ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ АВТОМАТОВ ПРИ ТРЕХ ТИПАХ РЕАКЦИЙ СТАЦИОНАРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЫ

Т.Д. Хведелидзе, Г.Н. Церцвадзе

Рассматривая классическую схему поведения автомата в стационарной случайной среде /1/, будем полагать, что среда при взаимодействии с автоматом формирует входную переменную S автомата, которая может принимать три значения: $S=+1$ (нештраф, выигрыш), $S=-1$ (штраф, проигрыш) и $S=0$ (безразличие). Автомат выполняет некоторый конечный набор действий (одно действие в данный момент времени), на каждое из которых среда реагирует либо выигрышем, либо проигрышем, либо безразличием. Без ограничения общности будем полагать, что выходная переменная f автомата, называемая действием, принимает два значения – f_1 и f_2. При этом, если автомат производит действие f_i ($i=1,2$), то среда C, в которой функционирует автомат, формирует на входе автомата значение $S=-1$ с вероятностью $q_i=\frac{1+a_i}{2}(1-r_i)$, $S=-1$ – с вероятностью $p_i=\frac{1-a_i}{2}(1-r_i)$ и $S=0$ – с вероятностью $r_i=1-q_i-p_i$. Здесь величина $a_i=\frac{q_i-p_i}{q_i+p_i}$ ($|a_i|<1$) имеет смысл среднего условного выигрыша автомата за действие f_i в среде $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$.

В работах /2-5/ приведены результаты анализа поведения автоматов в таких стационарных случайных средах.

В настоящей работе приводятся результаты решения задачи синтеза оптимальных конструкций автоматов при трех типах реакций стационарной случайной среды в предп... ании, как и в /6, 7/, что параметры среды априорно известны.

Разобьем множество L состояний синтезируемого автомата на два подмножества: подмножество L_1, состояния которого отмечены выходным сигналом (действие) f_1, и подмножество L_2, состояния которого отмечены выходным сигналом (действие) f_2.

Перед началом функционирования автомата производится опыт A с исходами A_1 и A_2, с вероятностями исходов $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$. Под исходом A_1 понимается состояние случайной среды $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$, а под исходом A_2 – состояние среды $C(a_2,r_2;a_1,r_1)$. Для определенности в дальнейшем будем полагать, что $a_1>a_2$, а между параметрами r_1 и r_2 может иметь место любое из следующих трёх соотношений: $r_1<r_2$, $r_1=r_2$, $r_1>r_2$.

Пусть в процессе функционирования автомата в среде значения входной переменной S распределились следующим образом: в подмножество L_1 поступило ℓ_{+1} значений $S=+1$, ℓ_{-1} значений $S=-1$ и ℓ_0 значений $S=0$, а в подмножество L_2 поступило m_{+1} значений $S=+1$, m_{-1} значений $S=-1$ и m_0 значений $S=0$. В этих предположениях определим, в какое подмножество состояний должен перейти синтезируемый автомат в очередном такте, чтобы средний условный выигрыш был бы наибольшим.

Допустим, что автомат функционирует в среде $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$. Это означает, что вероятности значений -I, 0, +I входной переменной S в подмножестве L_1 соответственно равны p_1, r_1 и q_1, а в подмножестве L_2-p_2, r_2 и q_2. Тогда выражение для вероятности $F_1(S)$ приведенного выше распределения различных значений входной переменной S по подмножествам состояний L_1 и L_2 будет иметь вид

$$F_1(S)=q_1^{l_1} P_1^{l-1} r_1^{l_0} q_2^{m_1} P_2^{m-1} r_2^{m_0} . \tag{1}$$

Если же автомат функционирует в среде $C(a_2, r_2; a_1, r_1)$, т.е. P_1, r_1 и q_1 – вероятности значений –1, 0, +1 соответственно входной переменной S в подмножестве L_2, а P_2, r_2 и q_2 – вероятности этих же значений для S в подмножестве L_1, то вероятность $F_2(S)$ распределения различных значений S по подмножествам L_1 и L_2 равна

$$F_2(S)=q_1^{m} P_1^{m_1} r_1^{m_0} q_2^{l_1} P_2^{l-1} r_2^{l_0} . \tag{2}$$

На основании (1) и (2) составим отношение статистического правдоподобия:

$$\alpha(S)=\frac{q_1^{l_1} P_1^{l-1} r_1^{l_0} q_2^{m_1} P_2^{m-1} r_2^{m_0}}{q_1^{m_1} P_1^{m-1} r_1^{m_0} q_2^{l_1} P_2^{l-1} r_2^{l_0}} . \tag{3}$$

Если учтем условие

$$a_1 > a_2 , \tag{4}$$

то при $\alpha(S)>1$ автомат в следующем такте должен находиться в подмножестве L_1, при $\alpha(S)<1$ – в подмножестве L_2, а при $\alpha(S)=1$ подмножество состояний может быть выбрано произвольно.

С учетом (4) рассмотрим следующие различные возможные случаи соотношений между параметрами q_1 и q_2, P_1 и P_2, r_1 и r_2:

$$
\begin{array}{llll}
1. & q_1 > q_2, & P_1 < P_2, & r_1 < r_2, \\
2. & q_1 > q_2, & P_1 < P_2, & r_1 > r_2, \\
3. & q_1 > q_2, & P_1 < P_2, & r_1 = r_2, \\
4. & q_1 < q_2, & P_1 < P_2, & r_1 > r_2, \\
5. & q_1 = q_2, & P_1 < P_2, & r_1 > r_2, \\
6. & q_1 > q_2, & P_1 = P_2, & r_1 < r_2, \\
7. & q_1 > q_2, & P_1 = P_2, & r_1 = r_2,
\end{array} \tag{5}
$$

Логарифмируя отношение правдоподобия (3), получим следующие алгоритмы поведения автомата в случайной среде: в случаях I-5 при

$$\ell_{-1}-m_{-1}-(\ell_1-m_1)\cdot\kappa+(\ell_0-m_0)\cdot\mu<0 \tag{6}$$

автомат переходит в состояния, принадлежащие подмножеству L_1, а при

$$\ell_{-1}-m_{-1}-(\ell_1-m_1)\cdot\kappa+(\ell_0-m_0)\cdot\mu>0 \tag{7}$$

- в состояния, принадлежащие подмножеству L_2. В случае 7 условие (6) надо заменить условием (7) и наоборот. В случае же 6 при

$$-(\ell_1-m_1)+(\ell_0-m_0)\cdot\nu<0 \tag{8}$$

автомат переходит в состояния, принадлежащие подмножеству L_1, а при

$$-(\ell_1-m_1)+(\ell_0-m_0)\cdot\nu>0 \tag{9}$$

- в состояния, принадлежащие подмножеству L_2.

В соотношениях (6) - (9) величины κ, μ и ν определены формулами:

$$\kappa=\frac{\ln\frac{q_2}{q_1}}{\ln\frac{p_1}{p_2}}, \qquad \mu=\frac{\ln\frac{r_1}{r_2}}{\ln\frac{p_1}{p_2}}, \qquad \nu=\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{\ln\frac{q_1}{q_2}}. \tag{10}$$

Учитывая (5), легко заметить, что $\nu>0$, а величины κ и μ, кроме значения нуль, могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Автоматы, функционирующие в соответствии с вышеприведенными алгоритмами, будем называть автоматами типа $W(\nu)$ в случае 6 и автоматами типа $W(\kappa,\mu)$ во всех остальных случаях.

Отметим, что /7/ содержит результаты решения задачи синтеза оптимальных конструкций автоматов в случаях I - 3.

Введя обозначения

$$\varphi=\varphi(l_{-1},l_0,l_1,m_{-1},m_0,m_1)=l_{-1}-m_{-1}-(l_1-m_1)\cdot k+(l_0-m_0)\cdot\mu,$$

$$\psi=\psi(l_{-1},l_0,l_1,m_{-1},m_0,m_1)=-(l_1-m_1)+(l_0-m_0)\cdot\nu,$$

легко заметить, что выполняются следующие соотношения

$$\varphi(l_{-1+1},l_0,l_1,m_{-1},m_0,m_1)=\varphi+1,\quad \varphi(l_{-1},l_0,l_1,m_{-1+1},m_0,m_1)=\varphi-1,$$
$$\varphi(l_{-1},l_{0+1},l_1,m_{-1},m_0,m_1)=\varphi+\mu,\quad \varphi(l_{-1},l_0,l_1,m_{-1},m_{0+1},m_1)=\varphi-\mu,$$
$$\varphi(l_{-1},l_0,l_{1+1},m_{-1},m_0,m_1)=\varphi-k,\quad \varphi(l_{-1},l_0,l_1,m_{-1},m_0,m_{1+1})=\varphi+k,$$
$$\psi(l_{-1+1},l_0,l_1,m_{-1},m_0,m_1)=\psi(l_{-1},l_0,l_1,m_{-1+1},m_0,m_1)=\psi, \tag{11}$$
$$\psi(l_{-1},l_{0+1},l_1,m_{-1},m_0,m_1)=\psi+\nu,\quad \psi(l_{-1},l_0,l_1,m_{-1},m_{0+1},m_1)=\psi-\nu,$$
$$\psi(l_{-1},l_0,l_{1+1},m_{-1},m_0,m_1)=\psi-1,\quad \psi(l_{-1},l_0,l_1,m_{-1},m_0,m_{1+1})=\psi+1.$$

В дальнейшем будем полагать, что соотношения (5) между вероятностями P_1 и P_2, q_1 и q_2, r_1 и r_2 таковы, что величины k, μ и ν, определяемые из (10), являются целыми числами. Тогда из (6) – (9) следует, что функции φ и ψ в случаях 1–6 будут принимать только целые положительные значения в подмножестве L_2 и целые отрицательные значения в подмножестве L_1. В случае 7 функция φ будет принимать целые положительные значения в подмножестве L_1 и целые отрицательные значения в подмножестве L_2.

Поставим в соответствие каждому числовому значению функции $\varphi=j$ ($\psi=j$) ($j=0,\pm1,\pm2,\dots$) состояния a_j искомого автомата $W(k,\mu)$ $(W(\nu))$.

Переходы между состояниями подмножества L_i ($i=1,2$) определяются следующим образом: при поступлении сигнала $S=+1$ совершаются переходы на k состояний вглубь подмножества в случаях 1 – 3 или по направлению из подмножества в случае 4; в случае 5 состояния не меняются, а в случаях 6 и 7 совершаются переходы вглубь подмножества на одно состояние и на k со-тояний соответственно. При сигнале $S=-1$ совершаются переходы на одно состояние по направлению и вглубь подмножества в случаях I-5 и 7 соответственно, а в случае 6 состояния не меняются. При сигнале $S=0$ состояния не меняются, если $\mu=0$ (случай 3) или совершаются переходы вглубь или по направлению из подмножества в зависимости от параметров n_i $(i=1,2)$ следующим образом: при $n_1<n_2$ совершаются переходы по направлению из подмножества на μ (ν) состояний в случаях I и 7 (6), а при $n_1>n_2$ - вглубь подмножества на μ состояний (случаи 2,4,5).

Определим теперь переходы состояний автоматов $W(K,\mu)$ и $W(\nu)$ из одного подмножества в другое.

Прежде всего заметим, что переходы между состояниями подмножеств L_1 и L_2 (смена действий) происходят в следующих случаях: при сигнале $S=0$ смена действий имеет место в случаях I,6 и 7; при сигнале $S=-1$ - в случаях I-5, а при сигнале $S=+1$ - в случае 4. Если при этом $|K|>1$ или $|\mu|>1$, то автоматы $W(K,\mu)$ являются многовыходовыми, а при $|K|=1$ или $|\mu|=1$ - одновыходовыми. Аналогично при $\nu>1$ автомат $W(\nu)$ является многовыходовым, а при $\nu=1$ - одновыходовым.

Рассмотрим отдельно эти случаи.

<u>Случай I (случай 7)</u>. В этом случае $\mu>0$ $(\mu<0)$ и пусть автомат находится в состоянии $x_{-\mu+i}\in L_1$ или $x_{\mu-i}\in L_2$ $(x_{-\mu-i}\in L_1$ или $x_{\mu-i}\in L_2)$, $i=1,2,\ldots,|\mu|-1$, т.е. $\varphi(\ell_{-1},\ell_0,\ell_1,m_{-1},m_0,m_1)=-\mu+i$ или $\varphi(\ell_{-1},\ell_0,\ell_1,m_{-1},m_0,m_1)=\mu-i$ $(\varphi(\ell_{-1},\ell_0,\ell_1,m_{-1},m_0,m_1)=-\mu-i$ или $\varphi(\ell_{-1},\ell_0,\ell_1,m_{-1},m_0,m_1)=\mu+i)$. Тогда при поступлении на вход автомата сигнала $S=0$ $\varphi(\ell_{-1},\ell_{0+1},\ell_1,m_{-1},m_0,m_1)=i$ или $\varphi(\ell_{-1},\ell_0,\ell_1,m_{-1},m_{0+1},m_1)=-i$

$\varphi(\ell_{-1}, \ell_{0+1}, \ell_1, m_{-1}, m_0, m_1) = -i$ или $\varphi(\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1, m_{-1}, m_{0+1}, m_1) = i$), т.е. состояние $x_{-\mu+i}$ $(x_{-\mu-i})$ переходит в состояние $x_i \in b_2$ $(x_{-i} \in b_2)$. а состояние $x_{\mu-i}$ $(x_{\mu+i})$ – в состояние $x_{-i} \in b_1$ $(x_i \in b_1)$.

Случай 4. В этом случае $\kappa < 0$ и пусть автомат находится в состоянии $x_{\kappa+j} \in b_1$ или $x_{-\kappa-j} \in b_2$, $j = 1, 2, \ldots, |\kappa| - 1$, т.е. $\varphi(\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1, m_{-1}, m_0, m_1) = \kappa + j$ или $\varphi(\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1, m_{-1}, m_0, m_1) = -\kappa - j$. Тогда при поступлении на вход автомата сигнала $S = +1$ $\varphi(\ell_{-1}, \ell_0, \ell_{1+1}, m_{-1}, m_0, m_1) = j$ или $\varphi(\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1, m_{-1}, m_0, m_{1+1}) = -j$, т.е. состояние $x_{\kappa+j}$ переходит в состояние $x_j \in b_2$, а состояние $x_{-\kappa-j}$ – в состояние $x_{-j} \in b_1$.

Случай 6. В этом случае $\nu > 0$ и если автомат находится в состоянии $x_{-\nu+e} \in b_1$ или $x_{\nu-e} \in b_2$, то при поступлении сигнала. $S = 0$ состояние $x_{-\nu+e}$ переходит в состояние $x_e \in b_2$, а состояние $x_{\nu-e}$ – в состояние $x_{-e} \in b_1$, $e = 1, 2, \ldots, \nu - 1$.

Выделим ситуации неопределенности относительно подмножеств состояний, в которые должен перейти автомат.

Пусть автомат находится в состоянии x_{-1} или x_1 (т.е. $\varphi(\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1, m_{-1}, m_0, m_1) = -1$ или $\varphi(\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1, m_{-1}, m_0, m_1) = 1$) и на его вход поступает сигнал $S = -1$. Тогда во всех случаях, кроме случая 6,

$$\varphi(\ell_{-1+1}, \ell_0, \ell_1, m_{-1}, m_0, m_1) = \varphi(\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1, m_{-1+1}, m_0, m_1) = 0.$$

Если же автомат находится в состоянии $x_{-\mu}$ или x_μ и на его вход поступает сигнал $S = 0$, то при $\mu > 0$ (случай I) и при $\mu < 0$ (случай 7) $\varphi(\ell_{-1}, \ell_{0+1}, \ell_1, m_{-1}, m_0, m_1) = \varphi(\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1, m_{-1}, m_{0+1}, m_1) = 0$. Если автомат находится в состоянии $x_{-\nu}$ или x_ν, то при сигнале $S = 0$ (случай 6) $\varphi(\ell_{-1}, \ell_{0+1}, \ell_1, m_{-1}, m_0, m_1) = \varphi(\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1, m_{-1}, m_{0+1}, m_1) = 0$. В случае 4 при входном сигнале $S = +1$ $\varphi(\ell_{-1}, \ell_0, \ell_{1+1}, m_{-1}, m_0, m_1) = \varphi(\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1, m_{-1}, m_0, m_{1+1}) = 0$, если $\varphi(\ell_{-1},\ell_0,\ell_1,m_{-1},m_0,m_1)=-K$ или $\varphi(\ell_{-1},\ell_0,\ell_1,m_{-1},m_0,m_1)=K$.

Следует заметить, что вышеописанные ситуации переходов состояний соответствуют случаю $\alpha(S)=1$ в (3) и, следовательно, подмножество состояний, в которое должен перейти автомат, может быть выбрано произвольно.

Укажем на три варианта выбора переходов из этих состояний в зависимости от значений сигнала S:

I. Автомат переходит в состояние x_0, принадлежащее одному произвольно выбранному подмножеству: при $S=-1$ из состояний x_{-1} и x_1, при $S=0$ из состояний $x_{-\mu}$ и x_μ, $x_{-\nu}$ и x_ν и при $S=1$ из состояний x_{-K} и x_K;

2. Выбираются два состояния $x_{01}\in L_1$ и $x_{02}\in L_2$, соответствующие значению $\varphi(\ell_{-1},\ell_0,\ell_1,m_{-1},m_0,m_1)=0$ или $\varphi(\ell_{-1},\ell_0,\ell_1,m_{-1},m_0,m_1)$ и назначаются переходы в состояние x_{01} из состояния x_1 при $S=-1$, из состояния x_μ и x_ν при $S=0$ и из состояния x_K при $S=+1$, а переходы в состояние x_{02} назначаются из состояния x_{-1} при $S=-1$, из состояния $x_{-\mu}$ и $x_{-\nu}$ при $S=0$ и из состояния x_{-K} при $S=+1$;

3. Этот вариант отличается от варианта 2 тем, что автомат из состояний x_{-1}, $x_{-\mu}$, $x_{-\nu}$, x_{-K} переходит в состояние x_{01}, а из состояний x_1, x_μ, x_ν, x_K – в состояние x_{02}.

Из вышеописанных алгоритмов следует, что при поступлении на вход автомата сигнала $S=0$ автоматы типа $W(K,\mu)$ и $W(\nu)$ или производят переходы из глубоких в неглубокие состояния, стремясь сменить действие при $\tau_1<\tau_2$, или переходят вглубь подмножества состояний, подкрепляя совершаемое действие при $\tau_1>\tau_2$ или не меняют состояния, проявляя безразличие к выбору действия при $\tau_1=\tau_2$. Поэтому существуют три основные формы (тактики) поведения автомата в стационарной случайной среде в зависимости от соотношений между параметрами r_1 и r_2 :

$r_1 < r_2$ (случаи 1,6 и 7) – активная форма поведения,

$r_1 > r_2$ (случаи 2,4 и 5) – пассивная форма поведения,

$r_1 = r_2 = r$ (случай 3) – естественная форма поведения.

Используя связь между блужданиями и поведением автомата в случайной среде, можно получить, как и в /8/, условие строгой оптимальности автоматов типа $W(K,\mu)$ при целых K и μ в следующем виде:

$$\begin{aligned} &Kq_1 - \mu r_1 - P_1 > 0, \\ &Kq_2 - \mu r_2 - P_2 < 0 \end{aligned} \tag{12}$$

в случаях 1-5 и

$$\begin{aligned} &Kq_1 - \mu r_1 - P_1 < 0, \\ &Kq_2 - \mu r_2 - P_2 > 0 \end{aligned} \tag{13}$$

в случае 7.

Условие строгой оптимальности для автоматов типа $W(\nu)$ при целых $\nu \geq 1$ получается аналогичным образом и имеет вид

$$\begin{aligned} &q_1 - \nu r_1 > 0, \\ &q_2 - \nu r_2 < 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Учитывая соотношения (10),(12) и (13), можно выписать условия строгой оптимальности в зависимости от значений величин μ для различных форм поведения автоматов $W(K,\mu)$ в виде неравенств:

при $\mu = 0$ (естественная форма поведения)

$$\frac{P_1}{q_1} < \frac{\ln q_2/q_1}{\ln P_1/P_2} < \frac{P_2}{q_2},$$

при $\mu = 1$ (активная форма поведения)

$$\frac{1-q_1}{q_1} < \frac{\ln q_2/q_1}{\ln P_1/P_2} < \frac{1-q_2}{q_2},$$

при $\mu = -K$ (пассивная форма поведения)

$$\frac{P_1}{1-P_1} < \frac{\ln q_2/q_1}{\ln P_1/P_2} < \frac{P_2}{1-P_2}.$$

Заметим, что автоматы $W(\nu)$ зав... обладают активной формой поведения и для них условие строгой оптимальности (I4) можно переписать в виде

$$\frac{q_2}{r_2} < \frac{\ln r_2/r_1}{\ln q_1/q_2} < \frac{q_1}{r_1}.$$

В частных случаях при $K=1$ и $\mu=1$, $K=1$ и $\mu=0$, $K=1$ и $\mu=-1$ в (I0) и назначений переходов между подмножествами состояний по первому варианту получается соответственно линейный автомат с активной, естественной и пассивной формами поведения.

В этих случаях

$$q_1 + q_2 = 1 \quad (I5)$$

для линейных автоматов с активной формой поведения,

$$P_1 + P_2 = 1 - r \quad (I6)$$

для линейных автоматов с естественной формой поведения и

$$P_1 + P_2 = 1 \quad (I7)$$

для линейных автоматов с пассивной формой поведения.

Таким образом, линейный автомат с активной, естественной и пассивной формами поведения является строго оптимальным (в смысле функционирования в соответствии с отношением правдоподобия) только при соблюдении условий (I5), (I6) и (I7) соответственно.

Методика построения автоматов по приведенным алгоритмам при таких соотношениях между вероятностями P_1, P_2, q_1 и q_2, r_1 и r_2, что величины K, μ и ν – рациональные числа, не отличается от приведенных выше.

Поступила 21.XI.1992

Проблемная лаборатория
[illegible] кибернетики

Литература

I. М.Л.Цетлин. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М.,"Наука", 1969.

2. Е.И.Пальцев. Проблемы передачи информации, т.XI, вып.3,1975.

3. Т.Д.Хведелидзе. Труды ТГУ, т.279,1988.

4.Г.Н. Церцвадзе, Т.Д.Хведелидзе. Труды ТГУ, т.294,1989.

5.Т.Д.Хведелидзе. Труды ТГУ, т.297, 1990.

6. В.А.Андрющенко, Е.П.Вавилов, Л.Н.Лобанов. Кибернетика,№ I, 1972.

7. Т.Д.Хведелидзе, Г.Н Церцвадзе. Сообщения АН [illegible], т.I45, № I, 1992.

8.В.С.Королюк, А.Н.Плетнев, С.Д.Эйдельман. Усп. мат. наук, т.43, вып.I (259), 1988.

თ.ხვედელიძე, გ.ცერცვაძე

ასიმპტოტურად ოპტიმალური ავტომატების სისტემის სტაციო-ნარული მახასიათებლები გარემოს სამი სახის რეაქციის დროს

რ ე ზ ი უ მ ე

სტატიაში დასმულია სტაციონარულ შემთხვევით გარემოში [illegible] ოპტიმალური ავტომატების კონსტრუქციების სინთეზის ამო-ცანა. ნაჩვენებია, რომ არსებობს ავტომატების ქცევის სამი ძირი-თადი ტიპი: აქტიური, პასიური და ბუნებრივი.

T.Khvedelidze, G.Tsertsvadze

SYNTHESIS OF ASYMPTOTICALLY OPTIMAL AUTOMATA IN THREE TYPES OF REACTION OF A RANDOM MEDIUM

S u m m a r y

The problem of the synthesis of the designs of strictly optimal automata in a stationary random medium is solved. The existence of three basic forms of automata behaviour is shown: active, passive, and natural.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
315, 1993

ეკონომიკური პროცესის კვლევისა და მოდელირების მეთოდური საკითხის შესახებ

რ. მეგრელიშვილი

გამოსაკვლევი პრობლემა დამუშავების ეტაპების თვალსაზრისით უნდა დაიყოს სამ ნაწილად*.

პირველი ნაწილი მოიცავს ეკონომიკური სქემის აგებას (მასში მიმდინარე პროცესების გამოკვლევას და წონასწორული პირობების დადგენას).

მეორე ნაწილი გამოკვლევისა უნდა დაეფუძნოს პირველ ნაწილში შესწავლილი ეკონომიკური სისტემების თვისებებს, რათა პასუხი გაეცეს შემდეგ კითხვას: არის თუ არა მიზანშეწონილი (მომგებიანი და რამდენად ან რა დროის განმავლობაში) გარკვეული სუბიექტისათვის, გარკვეულ ეკონომიკურ გარემოში, ეკონომიკური სახსრების დაბანდება (ინვესტიციების გაწევა, საფირმო საქმიანობის დაწყება ან არსებულისათვის მხარდაჭერა და ა.შ.), ე.ი. უნდა აიგოს ეკონომიკური პროცესის მოდელი.

მესამე ნაწილი კვლევებისა უნდა შეეხოს იმ საკითხების გადაწყვეტას, რაც დაკავშირებულია ამ მოდელის კომპიუტერულ რეალიზაციასთან გარკვეული ალგორითმების გამოყენებით.

----

* წინამდებარე შრომაში ძირითადი ყურადღება ეთმობა არა საკუთრივ ეკონომიკური სისტემის ინფორმაციულ უზრუნველყოფას, არამედ ეკონომიკური მოდელის აგებისათვის საჭირო ალგორითმების და ინფორმაციული ტექნოლოგიის დამუშავების საკითხებს.

პირველი ნაწილი პრობლემისა შეისწავლება ეკონომიკურ თეორია-ში /1,2/. ეს სისტემები დეცენტრალიზებულია, ე.ი. შედგება დამოუკი-დებელი ელემენტებისაგან, რომლებთაგან ერთი წარმოქმნის და მეორე მო-იხმარს მატერიალურ სიკეთეს, ხოლო ერთობლივი გადაწყვეტილებების პირობები გახსნილია, როგორც შედეგი ამ პროცესის წინასწარი მიმ-დინარეობისა. ამ გზებით, უპირველესად საინტერესოა ზოგადი სტრუქ-ტურა (ძირითადი პროცესის შესაფერისი სქემა, რომელიც დამახასიათე-ბელია რიგი ეკონომიკური ურთიერთობისათვის) და მხოლოდ მას შემდეგ განიხილება ის კავშირ-ურთიერთობები, რომლებიც ითვალისწინებენ კონ-კრეტული სფეროებისათვის დამახასიათებელ განსაკუთრებულ ასპექტებს.

მეორე ნაწილი გამოკვლევისა მოიცავს ეკონომიკური პროცესების თეორიული და პრაქტიკული გაანგარიშებების მეთოდების ისეთ ფორმალი-ზებას, რომელიც შეესაბამება ამოცანას, ე.ი. აქ იგულისხმება ის გარემოება, რომ ამ ნაწილში დასმულ კითხვაზე არსებითად სწორი პასუ-ხის მისაღებად საჭიროა განხილულ იქნას ეკონომიკური სფეროს სტრუქტუ-რული თავისებურებანი, რისი მიღწევა შესაძლებელია ორი ძირითადი მი-ზნების გათვალისწინებით: 1) ეკონომიკური სისტემის რაოდენობრივი მა-ხასიათებლების მოპოვება (იგულისხმება კავშირ-ურთიერთობების გეოგ-რაფია, სატრანსპორტო საშუალებები, ობიექტებზე არსებული სიკეთის, პროდუქტების, ნედლეულის რაოდენობა და ფასები; კავშირ-ურთიერთო-ბები საზღვარგარეთის რეგიონებთან და ქვეყნებთან და ა.შ.);2) ეკო-ნომიკური ურთიერთობების ფუნქციონალური სქემის შედგენა, რომლის დამუშავება მოიცავს, ერთის მხრივ, პროდუქციის წარმოებისათვის სა-ჭირო სიკეთის, მუშახელის აღჭურვილობის და სხვა რესურსების მი-წოდების და, მეორე მხრივ, წარმოებული და რეალიზებული (გასა-ღებული) პროდუქციის ფასების მაქსიმიზაციის ამოცანების გადაწყვე-ტას, რაც გარკვეულწილად ითვალისწინებს არსებული მეთოდოლოგიის გამოყენებას და საკუთრივ დიალოგური სისტემის ალგორითმები და პრო-

ცრამული ნაწილების დამუშავებასაც. ამასთან, საჭიროა აღინიშნოს, რომ არსებობს გარკვეული კავშირი მეორე და მესამე ნაწილებს შორის, რადგან ალგორითმული და პროგრამული საკითხების დამუშავება დაკავშირებულია მეხსიერების ორგანიზების სისტემასთან, რომელიც დაედება საფუძვლად ეგმ-თან დიალოგის განხორციელებას.

მესამე ნაწილი მოიცავს სისტემის პროგრამულ რეალიზაციას ეგმ-ზე. სისტემის ცალკეულ კვანძების პროგრამული უზრუნველყოფის განხორციელების პროცესში დაისმის ამოცანები, რომელთა გადაწყვეტა დამოკიდებული იქნება აღნიშნული კვანძების მეთოდურ და ალგორითმულ შესრულებაზე. ამასთან უნდა მოხერხდეს მნიშვნელოვანი თავისებურება შეიძლება იყოს /3,4/ სისტემის თვისებების სრული გამოყენება. აქ პირველ რიგში საჭიროა უზრუნველყოფა მიეცეს ცალკეულ არქივებს შორის მარტივი შეერთების ასოციაციური კავშირების შესრულებას, რომელთა ფუნქციონალურ სქემასთან მიახლოებული განხორციელება გარკვეულ სარგებლობას მოუტანს ეკონომიკური სისტემის ადეკვატური მოდელის მიღების საჭიროებას.

ყოველივე ზემოთქმულისათვის საჭიროა გავაკეთოთ შემდეგი შენიშვნები: 1) სიკეთეთა სიმრავლე ჩაიწერება ვექტორების სახით. ეკონომიკური სქემის ძირითადი ელემენტებია: სიკეთე, მწარმოებლები და მომხმარებლები. სიკეთე წარმოიდგინება ვექტორის სახით, რომლის კომპონენტებია სხვადასხვა ნაირეობის სიკეთეთა ერთეულობა – $z_1, z_2, \dots, z_m$. ამრიგად, სიკეთის ვექტორი $z=(z_1,\dots,z_m)$ არის m განზომილების ვექტორი, რომელიც ეკუთვნის R^m ვექტორულ სივრცეს, სასრულის $GF(q)$ ველზე. იმისათვის, რომ მწარმოებლებსა და მომხმარებლებს შორის მოხდეს სიკეთეთა გაცვლა, საჭიროა სიკეთეთა სიმრავლეზე ფასების განსაზღვრა, რაც ხორციელდება ფასების ვექტორის მეშვეობით. ამიტომ, ყველა საჭირო ოპერაცია სრულდება R^m სივრცის ვექტორებზე; 2) მეხსიერების ორგანიზების ალგორითმი ახორციელებს

ასოციატიურ დამისამართებას, რაც პრაქტიკულად გამორიცხავს ბადა-სიტყვის ოპერაციების არსებობას მეხსიერების ველში; 3) განხილუ-ლია ისეთი ამოცანები, როგორიცაა ვერტიკალური [illegible] შეკუმშვა და კო-მპაქტური ჩაწერა მეხსიერებაში; იგივე ოპერაციის განხორციელება განისაზღვრებით (ანუ ფიგურული) ინფორმაციის მიმართ; საზოგადოდ, სხვადასხვა კონცეფციათა, თუ ფაქტორთა, შორის პრიორიტეტის საკითხი და სხვა. ყოველივე ეს წარმოადგენს ცალკეულ რგოლებს რთული ეკონომი-კურ-ინფორმაციული სისტემების სინთეზისათვის.

გარდა ზემოაღნიშნული საკითხებისა, არანაკლებ მნიშვნელოვანია იმ კანონზომიერებების შესწავლა, რომლებიც იწვევენ სისტემის წონას-წორული მდგომარეობიდან გადახრას, რათა გაკეთდეს მომავლის ეკონო-მიკური პროგნოზი არა მარტო მოცემული გარკვეული წონასწორული მდგო-მარეობის მიხედვით, არამედ იმ კანონზომიერებების და შეშფოთებე-ბის გათვალისწინებით, რომელთაგან ზოგი დამახასიათებელია ეკონო-მიკური პროცესისათვის და ზოგიც, გარკვეულწილად, უნდა იყოს გათ-ვალისწინებული იმ არასაწარმოო შეშფოთებებით გამოწვეული სიტუაცი-ებისათვის (ეკოლოგია, გეოპოლიტიკური ვითარება, მიგრაცია და სხვა) რომელთა სრული ასახვა მიღებულ სამუშაო მოდელში, რა თქმა უნდა, შეუძლებელია, მაგრამ გარკვეული ალბათობით მათი მხედველობაში მი-ღება საერთოდ მომავალ პერიოდებში პროცესების შესაძლო განვითარე-ბის პროგნოზირებისათვის.

წინამდებარე შრომა არ ისახავს მიზნად ამ ძირითადი ეტაპე-ბის ან მხოლოდ რომელიმე მათგანის სრულ განხილვას და გადაწყვეტას. მითუმეტეს, ბუნებრივია, შეუძლებელია მას ჰქონდეს ამ პრობლემებ-თან დაკავშირებით არსებული შედეგების ყოვლისმომცველი განხილვის პრეტენზია. ძირითადი საკითხი, რომელზედაც მასში არის გამახვილე-ბული ყურადღება, შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგნაირად: არსებობს ემმ-თან ბუნებრივ ენაზე ურთიერთობის ალგორითმი, რომელიც იძლევა

მანქანური მეხსიერების რაციონალური (კომპაქტურობისა და დროის რეალური მასშტაბების ეკონომიის საზრისით) ორგანიზებისა და ფუნქციონირების შესაძლებლობას /3,4/. საინტერესოა, როგორია აღნიშნული ალგორითმის გამოყენების შემთხვევაში ეკონომიკური პროცესის ფორმალიზებისათვის საჭირო ის ძირითადი მოთხოვნილებანი, რომელთა შესრულება შესაძლებლობას მოგვცემს განხორციელდეს მოდელის ზოგიერთი ელემენტის პროგრამული რეალიზაცია კომპიუტერზე.

განვიხილოთ ეკონომიკური პროცესი ზოგადი სქემის მიხედვით (სურ.1): ეს სქემა ერთგვაროვანია ყოველი M_i სუბიექტის მიმართ, ანუ ცალკეული პროცესის მონაწილე ინდივიდუუმებისათვის. აქ M_1 სუბიექტი მხოლოდ ფორმალურადაა გამოყოფილი დანარჩენებისაგან, თუმცა სქემატურად ისევეა დაკავშირებული სხვა სუბიექტებთან, როგორც თითოეული მათგანი - სხვებთან. ბუნებრივია, შეიძლება, სქემა სხვაგვარად წარმოვიდგინოთ - გამოვაცალკევოთ სიკეთის წარმოებლები, მომხმარებლები, რომლებიც მხოლოდ მოიხმარენ პროდუქციას, პროდუქციის წყაროები, ტრანსპორტის საშუალებები, საზღვარგარეთის რეგიონები და ა.შ. ნაცვლად სქემის ასეთი წარმოდგენა არ ცვლის პროცესის ფორმალიზებას. ჩვენის აზრით უმჯობესია კავშირ-ურთიერთობების თავისებურებები აისახოს არა სქემატურად (თუმცა, რა თქმა უნდა, სხვადასხვა სქემა გამოყენებული იქნება საკითხების დამუშავების პროცესში), არამედ საკუთრივ სიკეთის ვექტორის მეშვეობით. ამისათვის ყოველი ვექტორი უნდა შეფასდეს. შეფასება უნდა მოხდეს იმის მიხედვით, თუ როგორია მისი ღირებულება, რომელსაც სიკეთე მიეწოდება M_i სუბიექტისაგან M_j სუბიექტს (უფრო სწორია ითქვას, რომელსაც სიკეთეს მიიღებს M_j) და, პირიქით, - რომელსაც სიკეთე მიეწოდება M_j სუბიექტისაგან M_i სუბიექტს ($i \neq j = 1, 2, \ldots, K$). ამიტომ, საზოგადოდ $z^{(ij)}$ სიკეთის ვექტორთა რაოდენობა შეადგენს $K(K-1)$-ს, ნაცვლად თუ პროცესს განვიხილავთ ერთი რომელიმე M_1 სუბიექტის.

რესურსების მომხმარებლების მიმართ, მაშინ საინტერესო იქნება მივიღოთ K ვექტორი:

$$
\begin{aligned}
z^{(1)} &= \left(z_1^{(1)}, \dots, z_m^{(1)}\right), \\
&\;\;\vdots \\
z^{(K)} &= \left(z_1^{(K)}, \dots, z_m^{(K)}\right),
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

სადაც z_j^{i} ($i=1,\dots,K;\ j=1,\dots,m$) კომპონენტი აღნიშნავს, რომ $z_j^{(i)}$ რაოდენობის j-ური სიკეთე შეიძლება მიიღოს M_1-მა სუბიექტმა i-ური სუბიექტისაგან.

ვექტორის ღირებულებას განვსაზღვრავთ ფასის $P^{(i)}=(P_1^{(i)},\dots,P_m^{(i)})$ ვექტორით; აქ $P_j^{(i)}$ კომპონენტი აღნიშნავს, თუ რა ფასად (ფულის ერთეულებში) შეიძლება მიიღოს M_1-მა სუბიექტმა i-ური სუბიექტისაგან j-ური სიკეთის ერთეულოვანი რაოდენობა. აღვნიშნოთ

$$x^{(i)} = P^{(i)} z^{(i)} = \left(P_1^{(i)} z_1^{(i)}, \dots, P_m^{(i)} z_m^{(i)}\right) \qquad (2)$$

წარმოადგენს სიკეთის ღირებულების ვექტორს. $x_j^{(i)}=P_j^{(i)} z_j^{(i)}$ კომპონენტი აღნიშნავს იმას, რომ M_1-მა სუბიექტმა i-ური სუბიექტისაგან შეიძლება მიიღოს $x_j^{(i)}$ ღირებულების (ფასის) j-ური სიკეთე (რა თქმა უნდა, - სხვა სიკეთესთან ერთად, $z^{(i)}$ ვექტორის სხვა კომპონენტების შესაბამისად), ე.ი. M_i-ური სუბიექტისაგან j-ური სიკეთის შესაძენად M_1-ი სუბიექტი დახარჯავს $x_j^{(i)}$ რაოდენობის ფულს. მთლიანად $z^{(i)}$ ვექტორის შესაბამისი სიკეთის ღირებულებაა

$$P\left(x^{(i)}\right) = \sum_{j=1}^{m} P_j^{(i)} z_j^{(i)} . \qquad (3)$$

იმისათვის, რომ M_1-მა მიაღწიოს თავის მიზანს, საჭირო სიკეთე მან უნდა შეიძინოს მინიმალური დანახარჯებით. ვთქვათ, M_1-ი სუბიექტი (1) სისტემით წარმოდგენილ სუბიექტებისაგან საჭიროებს

სიკვეთა ერთობლიობას, რომელსაც დაფარავს $b=(b_1,\dots,b_m)$ ვექტო-რი. ეს ნიშნავს, რომ (i) სისტემიდან უნდა ამოვარჩიოთ ℓ ცალი

$$z^{(v_1)}=\left(z_1^{(v_1)},\dots,z_m^{(v_1)}\right),$$
$$\vdots$$
$$z^{(v_\ell)}=z_1^{(v_\ell)},\dots,z_m^{(v_\ell)}. \qquad (4)$$

ვექტორი, რომ შესრულდეს შემდეგი ორი პირობა:

$$z_1^{(v_1)}+z_1^{(v_2)}+\dots+z_1^{(v_\ell)}\geq b_1, \qquad (5)$$
$$z_m^{(v_1)}+z_m^{(v_2)}+\dots+z_m^{(v_\ell)}\geq b_m,$$

და

$$P(z)=P(\bar{z})_{min}=\min_{v}\sum_{v_t=v_1}^{v_\ell}\sum_{j=1}^{m}P_j^{(v_j)}z^{(v_j)}, \qquad (6)$$

სადაც $P(z)$ არის საჭირო სიკვეთა შესაძლო გაჭრილი ხარჯების საერთო რაოდენობა $(1<v_t\leq K)$.

ეს არის მინიმიზაციის ამოცანა, რომელიც უნდა გადაწყვიტოს M_1-მა საწარმოებმა, რათა შეიძინოს b ვექტორის შესაბამისი სა-ჭირო პროდუქცია. არის მეორე ამოცანაც, რაც დაკავშირებულია M_i საწარმოების მიერ წარმოებული პროდუქციის გაყიდვა-გასაღებასთან. ეს არის მაქსიმუმის პოვნის ამოცანა, რომლის ფორმალიზება ანალოგიურია (1)-(6) გამოსახულებებისა, თუმცა აქ მიზანი პირველი ამოცანის საპირისპიროა და გულისხმობს აღნიშნული ოპერაციით მიღებული შემოსავლის მაქსიმიზაციას.

დავუბრუნდეთ /1,2/ ალგორითმების გამოყენების საკითხს, ანუ მოდელის რეალიზაციას ეგმ-ზე. ცხადია, რომ ლაპარაკია მოდელის ადეკვატ ელემენტებზე და მათ ალგორითმულ უზრუნველყოფაზე. აქ მთავარი საკითხია, თუ როგორია M_i $(i=1,\dots,K)$ საწარმოების და მათ შორის ურთიერთკავშირების მეხსიერებაში ჩაწერისა და ორგანიზების

პრინციპი. ჩვენის აზრით, ამ საკითხთან დაკავშირებით პასუხი ასეთი შეიძლება იყოს: ყოველი M_i სუბიექტი შეიძლება წარმოდგენილ იყოს, როგორც ცალკეული გამოსახულება (ფიგურა) /5/. ყოველი M_i სუბიექტს ახასიათებს მრავალმხრივი ინფორმაცია. ამიტომ, ბუნებრივია, ისმის საკითხი ინფორმაციის აგრეგაციის შესახებ. ამავე დროს, რადგან საძიებელი სისტემა დეცენტრალიზებულია (შედგება დამოუკიდებელი ელემენტებისაგან), საჭირო ხდება მივმართოთ ცალკეულ პარამეტრებსა თუ ფაქტორებს, რომლებიც ჩაწერილი არიან მსხვილ ერთობლიობებში (ფიგურებში). ასეთი მიდგომა არ არის ძნელი, რადგან /5/ ალგორითმის მიხედვით მეხსიერების ველში ხდება ცალკეული პარამეტრების დაფიქსირება ხოლო შემდეგ, ასოციაციური კავშირების გამოყენებით, - მათი გაერთიანება ერთ ცალკეული დასახელების ფიგურის, ანუ - სუბიექტის სახით.

მიღებულია 22.XII.1992

ფიზიკური კიბერნეტიკის
პრობლემური ლაბორატორია

ლიტერატურა

1. რ. მეგრელიშვილი. ეგმ-თან ბუნებრივ ენაზე ურთიერთობის სისტემებ-ში პირდაპირი დამისამართების მეთოდის შესახებ, თსუ შრომები. კიბერნეტიკა-გამოყენებითი მათემატიკა, ტ.294, #11, 1989.

2. Р.П.Мегрелишвили. К вопросу компактной записи слов и сведений в системах хранения и обработки информации. IУ республиканская конференция по проблемно-ориентированным диалоговым системам (Батуми, 16 - 18.X.90), Тбилиси, 1990.

3. Э.Маленво. Лекции по микроэкономическому анализу. М., "Наука", 1985.

4. Э.Маленво. Статистические методы эконометрии. М., "Статистика", 1975.

5. რ. მეგრელიშვილი. გამოსახულებითი ინფორმაციის დამუშავების და მეხსიერების ველის ორგანიზების ამოცანისათვის (ამავე ტომში).

Г.П.Мегрелишвили

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Резюме

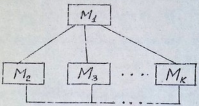
Рассмотрены вопросы построения и реализации на ЭВМ модели систем экономики.

R.Megrelishvili

ON SOME QUESTIONS OF THE STUDY AND MODELLING OF ECONOMIC PROCESSES

S u m m a r y

The questions of modelling an economic system and its computer realization are considered.



ნახ. 1

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.А.Джавахишвили

ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
315, 1993

სტრესული რისკ-ფაქტორების გავლენა ცხოვრების პირობებსა და შრომის ადაპტაციაზე

ა.ღუნდუა

თანამედროვე პირობებში განსაკუთრებით დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ადამიანის არა მარტო ფიზიკურ გადარჩენას, არამედ მისთვის ნორმალური ფსიქოლოგიური გარემოს შექმნას, რაც ფსიქოლოგიური ეკოლოგიის პრობლემას შეადგენს.

ფსიქოლოგიური ეკოლოგიის პრობლემების მოუგვარებლობის შედეგად ადამიანის ცხოვრება ივსება უარყოფითი სტრესული განცდებით, რასაც გამოუსწორებელ შედეგამდე მივყავართ.

ფსიქოლოგიური ეკოლოგიის მთავარი რისკ-ფაქტორებია: არსებობის გარემო, ბუნებრივი გარემოცვა და ხმაური, სამუშაო გარემო და ადამიანის შინაგანი სამყარო.

იმის დასადგენად, თუ რა როლს ასრულებს თითოეული რისკ-ფაქტორი დღევანდელი ადამიანის ცხოვრებაში, ჩატარებული იქნა სპეციალური ტესტური გამოკვლევა. ტესტი შედგენილი იქნა ჩვენს მიერ ადრე გამოყენებული ტესტის საფუძველზე /I/. 83 კითხვისაგან შედგენილი ტესტი დაყოფილი იყო რისკ-ფაქტორების მიხედვით. გამოკვლევა ჩატარდა არასტანდარტულ პირობებში. სხვადასხვა ასაკის, სქესისა და საქმიანობის ცდისპირები გამოკვლეული იქნენ ოჯახის პირობებში, სამუშაო ადგილებზე, ბუნებაში.

გამოკითხვით დადგენილია, რომ რესპონდენტთა 100%-სათვის უდი-ესი მნიშვნელობის ფაქტორია გარემომცველი სამყარო, 90%-სათვის-სამუშაო გარემოსა და სულიერი სამყაროს [illegible]კეები, ხოლო 60% არ აქვს გულგრილი სტერილი გარემოს შეღწეული გამღიზიანებელი ზემოქმე-დების მიმართ.

ტესტის შედეგების დამუშავებით მივიღეთ, რომ გამოკითხულთა ქალთა 80%-მდე ფსიქოლოგიურად ძაბ-ნაკლები სფეროს მდგომარეობაში იმყოფება. (1990 წლის მონაცემებით ეს ციფრი 70%-მდე იყო /2/). ეს ყველაფერი – კვების ხარისხით დაწყებული საბინაო პირობებით დამთავრებული. რესპონდენტთა უმრავლესობისთვის მწვავე პრობლემაა ქმედით: მხოლოდ 33% თვლის, რომ აქვს ნორმალური ცხოვ-რებისათვის საჭირო მატერიალური საშუალებები; 45%-ს არ ეყოფა მი-ნიმუმ და ძილის ამას; მხოლოდ 15% შეუძლია ნორმალურად მუშაობა, რაც ძალზედ ხშირია; 98%-ს სამუშაო ადგილზეც ოჯახზე ფიქრობს; 50%-ს არა აქვს ნორმალური საბინაო პირობები; 65%- უკმაყოფილოა მა-ტერიალური ანაზღაურებით და ა.შ. და მაინც, ხაზგასმით უნდა აღინიშ-ნოს, რომ ყველა მათგანისათვის უპირველესი სფეროს რისკ-ფაქტორი ადამიანთა შორის დაძაბული ურთიერთობებია. ურთიერთკეთილგანწყობი-ლების, ერთმანეთის წუხილის გაზიარების, სიყვარულის, ნდობისა და ოჯახის დეფიციტი დღევანდელი ადამიანის მუდმივი დისფუნქციის საფუ-ძველია: 52% განიცდის მარტოობის გრძნობას, მხოლოდ 20%-ს აქვს ურთიერთობა თანამშრომლებთან, 50%-ს არა აქვს მეგობრების, ნაცნობების უარი, 62%-ს აქვს დაძაბული ოჯახური ურთიერთობები, მხოლოდ 62%-ს მიუხარია ოჯახში.

გამოკითხვა ჩატარდა 1992 წლის გაზაფხულში. აღსანიშნავია, რომ აღწერილი სურათი ჯერჯერობით მხოლოდ მძიმეა, მაგრამ, როგორც რესპონდენტთა 89%, ჩვენც იმედი უნდა ვიქონიოთ, რომ მომავალი ეკო-სი ცვლილებები და ფსიქოლოგიური რისკ-ფაქტორებიც, თუ არ მოიხსნება, შესუსტდება მაინც.

როგორც აღვნიშნეთ, ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი რისკ-ფაქტორი ფსიქოლოგიური ეკოლოგიის თვალსაზრისით არის სამუშაო გარემო და მასთან დაკავშირებული პრობლემები.

მოწიფული ადამიანი თავისი ცხოვრების დიდ ნაწილს სამუშაო ადგილებზე, კოლექტივში ატარებს. აქ წარმატებულ მუშაობაზეა დამოკიდებული პირდაპირ მისი და მისი ოჯახის კეთილდღეობა, რაც, თავის მხრივ, ხელს უწყობს იმას, რომ ადამიანი მშვიდად, მთელი დატვირთვით მუშაობდეს სამუშაო ადგილზე.

შრომა ადამიანის ძირითადი მოთხოვნილებაა. ნორმალური ფუნქციონირებისათვის მას შრომა ისევე ესაჭიროება, როგორც ჰაერი, საკვები, ძილი, ადამიანებთან კონტაქტი. მთავარი ისაა, შრომის რომელი სახე სჭირდება ადამიანს ყველაზე მეტად. ბ.შოუს ეკუთვნის გამოთქმა: "მოვალეობით შრომა მუშაობაა, სიყვარულით მუშაობა კი – განცხრომა". სიყვარულით მუშაობას კი ადამიანი მხოლოდ მაშინ შესძლებს, როცა იგი თავისი მონაცემებით მთლიანად შეესაბამება სამუშაოს და სიამოვნებით ასრულებს მას. გარდა ამისა, კიდევ მრავალი პირობაა საჭირო იმისათვის, რომ შრომა საზოგადოებრივად სასარგებლო და ეფექტური იყოს. მოუწესრიგებელი სამუშაო პირობები ხშირად პიროვნული დისტრესის მიზეზი ხდება.

შრომის ეფექტიანობაზე გავლენას ახდენს საწარმოში არსებული ფსიქოლოგიური კლიმატი, რომელიც მატერიალური და სოციალური დაინტერესების ფაქტორებთან ერთად არსებითად განსაზღვრავს საწარმოში დასაქმებული ადამიანების დამოკიდებულებას შრომითი პროცესისადმი. დიდი მნიშვნელობა აქვს კოლექტივში ადამიანებს შორის წარმოშობილ გარკვეულ ურთიერთობებს, რომლებიც ცდება წმინდა ოფიციალური კავშირების ფარგლებს და დიდ გავლენას ახდენს შრომითი პროცესის ეფექტიანობაზე.

შრომის ეფექტიანობაზე სხვადასხვა სპეციფიკური ფაქტორების გავლენის, შესწავლის მიზნით ჩვენს მიერ სპეციალურად შედგენილი ფეს-ქით მოვახდინეთ გამოკითხვა. ფესტი შედგებოდა 80 კითხვისაგან. ამ კითხვების შერჩევისას გათვალისწინებულია ფსიქოლოგიური სფეროსა და ფსიქოლოგიური ეკოლოგიის სფეროს მკვლევარ-მეცნიერთა მიერ მიღე-ბული საგულისხმო შედეგები /2,3/.

კითხვები დავყავით იმ ფაქტორების მიხედვით, რომლებიც გავლე-ნას ახდენენ შრომის ეფექტიანობაზე. ასეთი ფაქტორებია: სოციალური, პირადული, მატერიალური, შემოქმედებითი, სპეციფიკური.

გამოკითხვა ჩატარდა პრივატიზებულ და არაპრივატიზებულ საწარ-მოებში, კერძოდ, საწარმო "ნარიყალასა" და ფეხსაცმელების ფაბრიკა "ისანში".

ცდისპირთა უდიდესმა უმრავლესობამ ორივე საწარმოდან თითქმის ერთნაირი რეაქციები გამოავლინა შრომითი პროცესისადმი: ისინი ძალიან იღლებიან სამსახურში, აწუხებთ ოჯახზე ფიქრი, არ ყოფნით ანაზღაურება და ა.შ.

მიუხედავად იმისა, რომ პრივატიზებული და არაპრივატიზებული საწარმოების შრომის ანაზღაურება მკვეთრად განსხვავებულია, გამოკით-ხვის შედეგები მაინც ძალიან ჰგავს ერთმანეთს.

ეს ადამიანები შეწუხებულნი არიან თავიანთი სოციალური და მა-ტერიალური მდგომარეობით. მხოლოდ 50% დადის სამსახურში ხალისით, 36%-სათვის აქვს მნიშვნელობა საამქროს მიზნებსა და ამოცანებს, პრი-ვატიზებულ საწარმოში 32%, ხოლო არაპრივატიზებულში 28% თვლის, რომ მათი შრომა სათანადოდ ანაზღაურდება. ეს მაშინ, როცა არცერთ გამო-კითხულს არ შეუძლია იარსებოს მატერიალურად ამ სამსახურის ხარჯ-ზე. თითქმის 60% თვლის, რომ სჭირდება კვალიფიკაციის ამაღლება, მაგრამ საწარმოში არ არის პროფესიული სრულყოფის პირობები. მეტად საგულისხმოა ის ფაქტი, რომ პრივატიზებულ საწარმოში 84-ს ხოლო არაპრივატიზებულში 90%-ს აქვს სამსახურის შეცვლის სურვილი.

როგორც გამოკვლევით დადგინდა, უმთავრესი ფაქტორები, რომ-ლებიც გავლენას ახდენს შრომის ეფექტიანობასა და მუშა-მოსამსახუ-რეთა-ჯანმრთელობა-განწყობილებაზე, არის ეკონომიკური, მატერიალური და სოციალური ფაქტორები. ამ სამი ფაქტორის პერსპექტიული განვითარე-ბის შემთხვევაში შრომის ნაყოფიერებაც მეტი იქნება და ნაწარმიც - კონკურენტუნარიანი. ესეც, თავის მხრივ, გააუმჯობესებს მუშა-მო-სამსახურეთა ყოფა-ცხოვრების პირობებს, ხელს შეუწყობს მათ დასვე-ნებას სამუშაო ადგილებზე.

ერთადერთი მკვეთრი განსხვავება პრივატიზებულ და სახელმწიფო საწარმოებს შორის არის ის, რომ პრივატიზებულ საწარმოში დასაქმებუ-ლთა 98% თვლის, რომ პრივატიზება დადებით შედეგებს მოუტანს მის მუშა-მოსამსახურეებს, ხოლო არაპრივატიზებულში მხოლოდ 4% ფიქრობს ასე. აქ აშკარად იგრძნობა უნდობლობა ახალი ეკონომიკური ძვრებისა-დმი, ხოლო მოძველებული ტექნიკის, დაბალი ხელფასისა და ჯამური განწყობილების შემთხვევაში შრომის ეფექტიანობასა და ნაწარმის ხა-რისხზე ლაპარაკიც კი უსაფუძვლოა.

ტესტური გამოკვლევის მონაცემთა მოდელების სხვადასხვა სფეროში საშუალებას გვაძლევს ჩავიხედოთ იმ პრობლემებში, რაც ამა თუ იმ სფეროში დასაქმებულ ადამიანებს აწუხებთ, მათი თვალით დავინახოთ ამ პრობლემების მოგვარების გზები და საშუალებები, რაც აუცილებელია საერთო სოციალური და ფსიქოლოგიური კლიმატის გაჯანსა-ღებისათვის.

თბილისი 24.XII.1992.

საქართველოს მეცნ.აკადემიის
მართვის სისტემების ინსტიტუტი

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1. ა.დუმბაძე. სოციალურ-ფსიქოლოგიური კლიმატის პრობლემები. თბ., მეცნიერება, 1991, გ.14.

2. ვ.სელიე. სტრესი დაზჯვის გარეშე, თბილისი, 1992.
3. Г.А.Китаев-Смык. Стресс и психологическая экология. Ж."Природа". Ио 7, I989.

А.Г.Дундуа

ВЛИЯНИЕ СТРЕССОВЫХ РИСК-ФАКТОРОВ НА УСЛОВИЯ ЖИЗНИ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ ТРУДА

Резюме

В статье даны результаты исследования проблем психологической экологии, связанных с условиями жизни человека и эффективностью его трудовой деятельности.

A.Dundua

THE INFLUENCE OF RISK FACTORS ON CONDITIONS OF LIFE AND LABOUR EFFICIENCY

S u m m a r y

The paper presents the results of a study of problems of psychological ecology related to human life conditions and labour efficiency.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И.А.Джавахишвили
ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
315, 1993

დინამიკის შერეული ტიპის ზოგი სასაზღვრო ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა

ჯ.გაბრიჭიძე

1. ამოცანის დასმა

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა. ცილინდრში $D^+[0,\infty)$ ვიპოვოთ $\vec{u}(\vec{x},t)$ რეგულარული ვექტორი $C^1(\bar{D}^+\times[0,\infty))\cap C^2(D^+[0,\infty))$ კლასიდან, რომელიც არის შემდეგი განტოლების ამონახსნი:

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=\mu\Delta\vec{u}+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}+\vec{P}_0(x,t) \qquad (1)_1$$

და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\{T(\partial\vec{z},\vec{n})\vec{u}(\vec{z},t)\}^+=\lim_{D\ni x\to z\in S} T(\partial\vec{x},\vec{n})\vec{u}(\vec{x},t)=0, \qquad (2)_1$$

$\forall(\vec{z},t)\in S\times[0,\infty)$,

S არის D არის საზღვარი,

$$\vec{u}(\vec{x},0)=0,$$
$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}(\vec{x},0)=0, \quad \forall\vec{x}\in D^+, \qquad (3)_1$$

სადაც

$$T(\partial\vec{x},\vec{n}(\vec{x}))=\|T_{ij}(\partial\vec{x},\vec{n}(\vec{x}))\|_{3\times3}\ ,$$

$$T_{ij}(\partial\vec{x},\vec{n}(\vec{x}))=\lambda n_i(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x_j}+\mu n_j(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x_i}+\mu\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial\vec{n}(\vec{x})}, \qquad (4)_1$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}(x)}=\sum_i n_i(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \vec{n}(\vec{x})=(n_1(\vec{x}), n_2(\vec{x}), n_3(\vec{x}))$$ –

ერთეულოვანი ვექტორია, რომელიც S-ის მართობია $\vec{x}$ წერტილში. $\vec{u}(\vec{x},t)=(u_1(x_1,x_2,x_3,t), u_2(x_1,x_2,x_3,t), u_3(x_1,x_2,x_3,t))$ – სამგანზომილებიანი ვექტორ-ფუნქციაა, $\lambda=const>0$ და $\mu=const>0$ – ლამეს კოეფიციენტებია. ყოველ ასეთ ამოცანას ემატება შეთანხმებულობის პირობები:

$$T'\vec{\varphi}^{(m)}(\vec{x})=0, \quad t\in S, \quad m=0,1,2,3,4,5,$$

სადაც

$$\vec{\varphi}^{(0)}(\vec{x})=\vec{\varphi}^{(1)}(\vec{x})=0, \quad \vec{\varphi}^{(m)}(\vec{x})=A(\partial\vec{x})\vec{\varphi}^{(m-2)}(\vec{x})+\left(\frac{\partial^{m-2}\vec{P}_0(\vec{x},t)}{\partial t^{m-2}}\right)_{t=0},$$
$$m=2,3,4,5, \tag{5$_1$}$$

$A(\partial\vec{x})\equiv\mu\Delta+(\lambda+\mu)\,grad\,div.$

$\vec{\varphi}^{(m)}(\vec{x})$ ფუნქციები უწყვეტად წარმოებადია $\vec{x}$-ით ($\vec{x}-m$) რიგამდე.

დასმული ამოცანის ამონახსნი არსებობს და ერთადერთია /1/.

2. სხვაობიანი სქემა

დრეკადობის თეორიის განტოლებათა სისტემა $(1)_1$, ცხადია, არის კერძო შემთხვევა ჰიპერბოლურ განტოლებათა ზოგადი სისტემის /2/ :

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=L\vec{u}+f(\vec{x},t), \quad (\vec{x},t)\in D^+[0,\infty) \tag{1$_2$}$$

სანამ ავაგებთ დასმული ამოცანის შესაბამის სხვაობიან სქემას, შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$(((u(x,y,t), v(x,y,t))))=$$

$$\sum_{i=1}^{N_x-1}\sum_{j=1}^{N_y-1}\sum_{k=1}^{N_z-1} u(x_i,y_j,z_k)\,v(x_i,y_j,z_k)\,h_x h_y h_z ,$$

$$(((u(x,y,z),v(x,y,z)))) = \qquad (2)_2$$

$$\sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y-1}\sum_{k=1}^{N_z-1} u(x_i,y_j,z_k)\,v(x_i,y_j,z_k)\,h_x h_y h_z$$

და ა.შ. აქ u და v – ბადური ფუნქციებია.

ცხადია, რომ

$$(((u(x,y,z),v(x,y,z)))) = \sum_{i=1}^{N_x-1}((u(x_i,y,z),v(x_i,y,z)))\,h_x$$

და ა.შ.

ადვილი გამოსაყვანია ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულები:

$$(((u,v_x))) = ((u(x_N;y,z),v(x_N;y,z))) - ((u(x_0;y,z),v(x_1;y,z))) -$$

$$- (((u_{\bar x},v)));$$

$$(((u,v_{\bar x}))) = ((u(x_N;y,z),v(x_{N-1};y,z))) - ((u(x_0;y,z),v(x_0;y,z))) -$$

$$- (((u_{\bar x},v))). \qquad (3)_2$$

გაუსის ფორმულის რიცხვით ანალოგს აქვს სახე:

$$(((\varphi_x(x,y,z)))) = ((\varphi(x_N;y,z))) - ((\varphi(x_1;y,z))),$$

$$(((\varphi_{\bar x}(x,y,z)))) = ((\varphi(x_{N-1};y,z))) - ((\varphi(x_0;y,z))). \qquad (4)_2$$

შემდეგში ჩვენ დაგვჭირდება აგრეთვე ოპერატორები:

$$\hat{\ell}_{\bar x}\, u(x,y,z) = u_{\bar x}(x,y,z).$$

ანალოგიურად განისაზღვრება ოპერატორები $\hat{\ell}_y,\ \hat{\ell}_{\bar z}$.

განვსაზღვროთ L ოპერატორის შესაბამისი რიცხვითი ოპერატორი Λ^* შემდეგნაირად:

$$(\Lambda^{*}\vec{u})_i=(\Lambda\vec{u})_i+(\Delta\Lambda\vec{u})_i,$$

სადაც Λ ოპერატორი განსაზღვრულია /2/ -ში, ხოლო $\Delta\Lambda$ მოცემულია I დანართში, $i=1,2,3$.

აგრეთვე შემოვიღოთ T ოპერატორის შესაბამისი რიცხვითი ოპერატორი $\overset{\wedge}{\tau}{}^{*}$ ან $\hat{\tau}^{*}$ შემდეგნაირად:

$$\left(\overset{\wedge}{\tau}{}^{*}\vec{u}\right)_i=\left(\overset{\wedge}{\tau}\vec{u}\right)_i+\left(\Delta\overset{\wedge}{\tau}\vec{u}\right)_i,\quad \left(\hat{\tau}^{*}\vec{u}\right)_i=\left(\hat{\tau}\vec{u}\right)_i+\left(\Delta\hat{\tau}\vec{u}\right)_i, \tag{6$_2$}$$

$$\begin{aligned}\overset{\wedge}{\tau}\vec{u}=\Big(&\left[(2\mu+\lambda)u_{1\bar{x}}+\lambda u_{2\bar{y}}+\lambda u_{3\bar{z}}\right]n_1+\mu\left(u_{1\bar{y}}+u_{2\bar{x}}\right)n_2+\mu\left(u_{1\bar{z}}+u_{3\bar{x}}\right)n_3;\\ &\mu\left(u_{2\bar{x}}+u_{1\bar{y}}\right)n_1+\left[\lambda u_{1\bar{x}}+(\lambda+2\mu)u_{2\bar{y}}+\lambda u_{3\bar{z}}\right]n_2+\mu\left(u_{2\bar{z}}+u_{3\bar{y}}\right)n_3;\\ &\mu\left(u_{3\bar{x}}+u_{1\bar{z}}\right)n_1+\mu\left(u_{3\bar{y}}+u_{2\bar{z}}\right)n_2+\left[\lambda u_{1\bar{x}}+\lambda u_{2\bar{y}}+(\lambda+2\mu)u_{3\bar{z}}\right]n_3\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\tau}\vec{u}=\Big(&\left[(2\mu+\lambda)u_{1x}+\lambda u_{2y}+\lambda u_{3z}\right]n_1+\mu\left(u_{1y}+u_{2x}\right)n_2+\mu\left(u_{1z}+u_{3x}\right)n_3;\\ &\mu\left(u_{2x}+u_{1y}\right)n_1+\left[\lambda u_{1x}+(\lambda+2\mu)u_{2y}+\lambda u_{3z}\right]n_2+\mu\left(u_{2z}+u_{3y}\right)n_3;\\ &\mu\left(u_{3x}+u_{1z}\right)n_1+\mu\left(u_{3y}+u_{2z}\right)n_2+\left[\lambda u_{1x}+\lambda u_{2y}+(\lambda+2\mu)u_{3z}\right]n_3\Big).\end{aligned} \tag{7$_2$}$$

სადაც $\Delta\overset{\wedge}{\tau}\,(\Delta\hat{\tau})$ მოცემულია I დანართში.

$(1)_1-(3)_1$ ამოცანის შესაბამისი სხვაობიანი სქემა განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$(\hat{E}+\tau^2R)\vec{y}_{\bar{t}t}=\Lambda^{*}\vec{y}+\vec{\varphi}, \tag{8$_2$}$$

$$\overset{\wedge}{\tau}{}^{*}\vec{y}(\vec{x},t)=\vec{\varkappa},\quad \vec{x}\in S,\quad t\in\overline{\omega}_{\tau}, \tag{9$_2$}$$

$$\begin{aligned}&\vec{y}(\vec{x},0)=0,\\ &\vec{y}_t(\vec{x},0)=\frac{1}{2}\tau\vec{P}_0(\vec{x},0),\quad \vec{x}\in\overline{\omega}_h,\end{aligned} \tag{10$_2$}$$

სადაც R განსაზღვრულია /2/ -ში,

$$\vec{\varphi}_K=\vec{P}_{0K},\quad \vec{\varkappa}_K=0,\qquad K=1,2,3. \tag{11$_2$}$$

ვაჩვენოთ, რომ Λ^{*} – თვითშეუღლებული და დადებითი ოპერატორია. $(2)_2$, $(3)_2$, $(4)_2$ ფორმულების გამოყენებით შეიძლება გამოვიყვანოთ გრინის განზოგადებული ფორმულის რიცხვითი ანალოგი Λ^{*} ოპერატორისათვის:

$$\left(\!\left(\vec v, \Lambda^* \vec u\right)\!\right) - \left(\!\left(\vec u, \Lambda^* \vec v\right)\!\right) =$$

$$= \left(\!\left(\vec v, \hat{\tau}^* \vec u\right)\!\right)_S - \left(\!\left(\vec u, \hat{\tau}^* \vec v\right)\!\right)_S - \qquad (12)_2$$

$$-\mu \left(\!\left(\overline{\operatorname{div}}\ \overline{\operatorname{rot}}\,[\vec u, \vec v]\right)\!\right),$$

სადაც ოპერატორები $\overline{\operatorname{rot}}$ და $\overline{\operatorname{div}}$ განისაზღვრებიან ასე:

$$(\overline{\operatorname{rot}}\ \vec u)_1 = u_{3\bar y} - u_{2\bar z} ,$$

$$(\overline{\operatorname{rot}}\ \vec u)_2 = u_{1\bar z} - u_{3\bar x} ,$$

$$(\overline{\operatorname{rot}}\ \vec u)_3 = u_{2\bar x} - u_{1\bar y} ,$$

ხოლო $\overline{\operatorname{div}}\ \vec u = u_{1\bar x} + u_{2\bar y} + u_{3\bar z}$.

აღვნიშნოთ, რომ თუ შევადგენთ გრინის განზოგადებულ ფორმულას L ოპერატორისათვის, რომლის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს ფუნქციათა კლასი, რომელთათვისაც სრულდება პირობა $T\vec u|_\Gamma = 0$, მაშინ, ამ ფორმულიდან გამომდინარე, მივიღებთ, რომ L ოპერატორი თვითშეუღლებულია.

ცხადია, რომ

$$\overline{\operatorname{div}}\ \overline{\operatorname{rot}}\ \vec u = 0.$$

თუ $\vec u$ და $\vec v$ ფუნქციებს ავიღებთ კლასიდან, რომელიც განისაზღვრება პირობით:

$$\hat{\tau}^* \vec u = 0,$$

მაშინ $(12)_2$-ის საფუძველზე გვექნება:

$$\left(\!\left(\vec v, \Lambda^* \vec u\right)\!\right) = \left(\!\left(\vec u, \Lambda^* \vec v\right)\!\right),$$

რაც ნიშნავს, რომ ოპერატორი Λ^* თვითშეუღლებულია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\Lambda^* > 0$.

გავიხსენოთ ორი მუდმივა: $0 < c_1 < \mu$ და $c_2 > \lambda + 2\mu$.

მაშინ გვექნება /2/ :

$$c_1 \left(\!\left(\Lambda^{(0)} \vec u, \vec u\right)\!\right) < \left(\!\left(-\Lambda \vec u, \vec u\right)\!\right) < c_2 \left(\!\left(-\Lambda^{(0)} \vec u, \vec u\right)\!\right). \qquad (13)_2$$

ვიღებთ $\Lambda^{*}=\Lambda+\Delta\Lambda=\Lambda+h\Delta\tilde{\Lambda}$, სადაც $h\to 0$ და $\Delta\tilde{\Lambda}$ - შემოსაზღვრული ოპერატორია /4/ , ამიტომ

$$c_1\left(\left(\left(-\Lambda^{(0)}\vec{u},\vec{u}\right)\right)\right)\leq\left(\left(\left(-\Lambda^{*}\vec{u},\vec{u}\right)\right)\right)\leq c_2\left(\left(\left(-\Lambda^{(0)}\vec{u},\vec{u}\right)\right)\right). \qquad (14)_2$$

ეს ნიშნავს, რომ $\Lambda^{*}>0$.

ცხადია, რომ $(14)_2$ სრულდება მხოლოდ h-ის ისეთი მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც გარკვეულ სიდიდეს არ აღემატება. პრაქტიკული გამოთვლებისათვის აუცილებელია $\hat{h}$-ის ზედა ზღვრის შეფასება.

3. სხვაობიანი სქემის კრებადობა

ჩვენ ვიხილავთ სქემას:

$$\mathcal{D}\vec{y}_{\bar{t}t}+A\vec{y}=\vec{\varphi}, \qquad (1)_3$$

$$\vec{y}(\vec{x},0)=0;\quad \vec{y}_t(\vec{x},0)=\frac{1}{2}\tau\vec{P}_0(\vec{x},0),$$

სადაც $\mathcal{D}=E+\tau^2R$ განსაზღვრულია /2/ -ში,

$$A=-\Lambda'=\begin{cases}\Lambda^{*}, & \text{იმ ფუნქციათა კლასზე, რომლებიც განსაზღვრულია } \mathcal{D}\text{-ზე},\\ \hat{\tau}^{*}, & \text{იმ ფუნქციათა კლასზე, რომლებიც განსაზღვრულია } S\text{-ზე}.\end{cases}$$

ცხადია, ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$[[[\vec{v},\Lambda'\vec{u}]]]=\left(\left(\left(\vec{v},\Lambda^{*}\vec{u}\right)\right)\right)+\left(\left(\vec{v},\hat{\tau}^{*}\vec{u}\right)\right)_S;$$

$$[[[\vec{v},\Lambda'\vec{u}]]]-[[[\vec{u},\Lambda'\vec{v}]]]=$$

$$=\left(\left(\left(\vec{v},\Lambda^{*}\vec{u}\right)\right)\right)+\left(\left(\vec{v},\hat{\tau}^{*}\vec{u}\right)\right)_S-\left(\left(\left(\vec{u},\Lambda^{*}\vec{v}\right)\right)\right)\cdot$$

$$=\left(\left(\vec{u},\hat{\tau}^{*}\vec{v}\right)\right)_S=0\Longrightarrow\Lambda'=\Lambda'^{*}.$$

აგრეთვე ცხადია, რომ $\Lambda'^{t} > 0$.

$(1)_3$ სქემა მიეკუთვნება ე.წ. ამოსავალ სქემათა ოჯახს /2/. ამ სქემის მდგრადობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ სრულდება პირობა /2/:

$$D \geq \frac{1+\varepsilon}{4}\tau^2 A, \qquad (2)_3$$

ანუ

$$((D\vec{y},\vec{y})) \geq \frac{1+\varepsilon}{4}\tau^2((A\vec{y},\vec{y})), \qquad (3)_3$$

$$((\vec{y},\vec{y})) + \tau^2((R\vec{y},\vec{y})) \geq \frac{1+\varepsilon}{4}\tau((A\vec{y},\vec{y})). \qquad (4)_3$$

ვინაიდან ადგილი აქვს $(14)_2$-ს, ამიტომ საკმარისია ავიღოთ $\sigma = -\frac{c_1(1+\varepsilon)}{4}$, რომ შესრულდეს $(2)_3$ პირობა. ეს უკანასკნელი მოწმდება $(4)_3$-ის საფუძველზე, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $R = -\sigma\Lambda^{(0)}$ /2/.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ვინაიდან ჩვენს შემთხვევაში A და D – მუდმივი ოპერატორებია, ადგილი აქვს შემდეგ აპრიორულ შეფასებას /2/:

$$((D\vec{y}^{\,n+1},\vec{y}^{\,n+1})) \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\Big(((D\vec{y}^{\,0},\vec{y}^{\,0})) + ((A^{-1}D\vec{y}^{\,0}_t, D\vec{y}^{\,0}_t)) + \sum_{s=1}^{n}\tau((A^{-1}\vec{\varphi}^{\,s},\vec{\varphi}^{\,s}))\Big). \qquad (5)_3$$

ახლა გამოვთვალოთ $(8)_2$, $(9)_2$, $(10)_2$ სქემის აპროქსიმაციის ცდომილება. აპროქსიმაციის ცდომილება

$$\vec{\varphi} = \Lambda^{*}\vec{u} - (\hat{E} + \tau^2 R)\vec{u}_{\bar{t}t} + \vec{\varphi} \qquad (6)_3$$

$(9)_2$ განტოლებისა და $(1)_1$-ის $\vec{u}$ ამონახსნზე არის $O(h+\tau^2)$. მართლაც,

$$\Lambda^{*} = \Lambda + \Delta_1 = \Lambda + h\Delta\tilde{\Lambda},$$

სადაც $\Delta\tilde{\Lambda}$ – შემოსაზღვრული ოპერატორია /4/ და, როგორც ცნობილია, $\vec{\varphi} = O(h^2+\tau^2)$ /2/, თუ $(6)_3$-ში Λ^{*}-ის ნაცვლად არის ოპერატორი Λ.

$(5)_2$ სასაზღვრო პირობის აპროქსიმაციის ცდომილებას $(1)_1$, $(2)_1$,$(3)_1$ ამოცანის ამონახსნზე აქვს სახე:

$$\vec{y}=\vec{x}-\hat{\hat{\tau}}^{*}\vec{u}, \qquad (6)_4$$

$$\dot{\hat{\tau}}^{*}=\hat{\tau}+\Delta\hat{\tau}+h\Delta\hat{\hat{\tau}}, \qquad (6)_5$$

სადაც $\Delta\hat{\hat{\tau}}$ - შესაბამისი ოპერატორია /4/.

ჩვენ განვიხილოთ გამოსახულება $\vec{x}-\hat{\tau}\vec{u}$. თუ $\hat{\tau}\vec{u}$ -ს ყოველი კომპონენტისთვის გამოვიყენებთ ტეილორის ფორმულას (მრავალი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევისათვის), მაშინ ($\vec{x}-\hat{\tau}\vec{u}$) იქნება $O(h^2+\tau^2)$-ის რიგის ($\vec{x}=0$). ხოლო $(6)_5$ -ის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ $\vec{y}$ არის $O(h+\tau^2)$-ის რიგის

ამრიგად, ვინაიდან სქემა მდგრადია და მისი აპროქსიმაცია $O(h+\tau^2)$ რიგისაა, ამიტომ იგი კრებადია სიზუსტით $O(h+\tau^2)$.

4. სხვაობიანი სქემის რიცხვითი ამოხსნა

$(8)_2$-ში $\hat{E}+\tau^4 R=\hat{E}+\tau\sum_{\alpha=1}^{3}R_\alpha$ შევცვალოთ ფაქტორიზებული ოპერატორით, სადაც R_α განსაზღვრულია /2/ -ში:

$$D=\prod_{\alpha=1}^{3}(\hat{E}+\tau^2 R_\alpha), \quad R_\alpha\vec{y}=-\sigma\vec{y}_{\bar{x}_\alpha x_\alpha},$$

$$\sigma=\frac{(\lambda+2\mu)(1+\varepsilon)}{4}, \quad \varepsilon=const>0.$$

$\vec{y}^{\,j+1}$ -ის მოძებნა ხდება შემდეგი ალგორითმით:

$$(\hat{E}+\tau^2 R_1)\vec{w}_{(1)}=\vec{F}; \quad \vec{F}=\prod_{\alpha=1}^{3}(\hat{E}+\tau^2 R_\alpha)\vec{y}_{\bar{t}}+\tau(\Lambda^{*}\vec{y}+\vec{\varphi}),$$

$$(\hat{E}+\tau^2 R_\alpha)\vec{w}_{(\alpha)}=\vec{w}_{(\alpha-1)}, \quad \alpha=2,3;$$

$$\vec{y}^{\,j+1}=\vec{y}^{\,j}+\tau\vec{w}_{(3)}. \qquad (1)_4$$

$\vec{W}_{(\alpha)}$ -თვის გვექნება შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$
\begin{aligned}
&\vec{W}_{(1)}=(\hat{E}+\tau^2R_2)(\hat{E}+\tau^2R_3)\vec{\mu}_{\bar{t}}\,, \quad x_1=0,\ell_1\,;\\
&\vec{W}_{(2)}=(\hat{E}+\tau^2R_3)\vec{\mu}_{\bar{t}}\,, \quad x_2=0,\ell_2\,;\\
&\vec{W}_{(3)}=\vec{\mu}_{\bar{t}}=\frac{\vec{y}^{\,j}-\vec{y}^{\,j-1}}{\tau}\,,
\end{aligned}
\qquad (2)_4
$$

სადაც $\vec{y}^{\,j}$ უნდა განისაზღვროს $(9)_2$-ისა და $(10)_2$-ის საფუძველზე, $(9)_2$ პირობა ჩავწეროთ ასეთი სახით:

$$\hat{\tau}\,\vec{u}=-\Delta\hat{\tau}\,\vec{u}\,. \qquad (3)_4$$

ეს გამოსახულება j-ური რიგის შრეზე გაშლილი სახით ჩაიწერება ასე:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)n_1(\vec{z})\left(y^j_{1x_1}\right)^{+}+\mu n_2(\vec{z})\left(y^j_{1x_2}\right)^{+}+\mu n_3(\vec{z})\left(y^j_{1x_3}\right)^{+}+\\
&+\lambda n_1(\vec{z})\left(y^j_{2x_2}\right)^{+}+\mu n_2(\vec{z})\left(y^j_{2x_1}\right)^{+}+\lambda n_1(\vec{z})\left(y^j_{3x_3}\right)^{+}+\mu n_3(\vec{z})\left(y^j_{3x_1}\right)^{+}=-(\Delta\hat{\tau}\vec{u})_1\,;\\[2mm]
&\lambda n_2(\vec{z})\left(y^j_{1x_1}\right)^{+}+\mu n_1(\vec{z})\left(y^j_{1x_2}\right)^{+}+\mu n_1(\vec{z})\left(y^j_{2x_1}\right)^{+}+\\
&+(\lambda+2\mu)n_2(\vec{z})\left(y^j_{2x_2}\right)^{+}+\mu n_3(\vec{z})\left(y^j_{2x_3}\right)^{+}+\lambda n_2(\vec{z})\left(y^j_{3x_3}\right)^{+}+\\
&+\mu n_3(\vec{z})\left(y^j_{3x_2}\right)^{+}=-(\Delta\hat{\tau}\vec{u})_2\,;\\[2mm]
&\lambda n_3(\vec{z})\left(y^j_{1x_1}\right)^{+}+\mu n_1(\vec{z})\left(y^j_{1x_3}\right)^{+}+\lambda n_3(\vec{z})\left(y^j_{2x_2}\right)^{+}+\\
&+\mu n_2(\vec{z})\left(y^j_{2x_3}\right)^{+}+\mu n_1(\vec{z})\left(y^j_{3x_1}\right)^{+}+\mu n_2(\vec{z})\left(y^j_{3x_2}\right)^{+}+\\
&+(\lambda+2\mu)n_3(\vec{z})\left(y^j_{3x_3}\right)^{+}=-(\Delta\hat{\tau}\vec{u})_3\,.
\end{aligned}
\qquad (4)_4
$$

ამ განტოლებებში

$$\left(y^j_{kx_n}\right)^{+}=\frac{\delta_n}{h}\left(y^j_k(x_n)-y^j_k(x_n-\delta_n h)\right),\quad k=1,2,3$$

$$\delta_n\equiv\delta_n(x_n,x_n-h,x_n+h)=\begin{cases}1, & x_n=z_n,\ x_n-h\in D,\ x_n+h\bar{\in} D\\ -1, & x_n=z_n,\ x_n-h\bar{\in} D,\ x_n+h\in D\end{cases}$$

$\vec{\mu}_{\bar t}$ -ის განსაზღვრისათვის ჩვენ დაგვჭირდება $(4)_4$ სი-სტემიდან ვიპოვოთ $(y^j_{k\bar{x}_n})^+$ -ები. ცხადია, ასეთი პირობები მიდგომით ცხრილური ამოცანის სიზუსტე იქნება ექსპონენციალური [3], მაგრამ ჩვენ შევეცდებით მივმართოთ მეტად სხვა ხერხს. მეთოდის მიხედვით კვანძის წერტილებში $(x_n-\delta_n h)$- ში j-ური შრისათვის დავწეროთ:

$$y^j_k(x_n-\delta_n h)=y^{j-1}_k(x_n-\delta_n h)+\tau y^{j-1}_{k\bar t}(x_n-\delta_n h). \qquad (5)_4$$

თუ $(5)_4$ იგივეს ვიღებთ $y^{j-1}_{k_t}(x_n-\delta_n h)$ -ს შევცვლით $y^{j-1}_{k\bar t}(x_n-\delta_n h)$- -ით და გავითვალისწინებთ, რომ

$$y_t=y_{\bar t}+\tau y_{\bar t t},$$

მივიღებთ:

$$y^j_k(x_n-\delta_n h)=y^{j-1}_k(x_n-\delta_n h)+\tau y^{j-1}_{k\bar t}(x_n-\delta_n h)+O(\tau^2). \qquad (6)_4$$

$(6)_4$-ის საფუძველზე (თუ გადავაგდებთ $O(\tau^2)$-ს) შეგვიძლია დავწეროთ:

$$(y^j_{k\bar{x}_n})^+=\frac{\delta_n}{h}y^j_k(x_n)-\frac{2\delta_n}{h}y^{j-1}_k(x_n-\delta_n h)+\frac{\delta_n}{h}y^{j-2}_k(x_n-\delta_n h). \qquad (7)_4$$

რაც შეეხება $(4)_4$ -ის მარჯვენა მხარეს, ადვილად მოწმდება, რომ იგი შეიძლება წარმოდგენილი ასე:

$$(\Delta\hat{\tau}\vec{u})^j_k=(\Delta\hat{\tau}\vec{u})^{j-1}_k+\tau(\Delta\hat{\tau}\vec{u}_{\bar t})^{j-1}_k. \qquad (8)_4$$

$(7)_4$ და $(8)_4$ შევიტანოთ $(4)_4$-ში, მივიღებთ:

$$[(\lambda+2\mu)\delta_1 n_1(\vec{x})+\mu\delta_2 n_2(\vec{x})+\mu\delta_3 n_3(\vec{x})]y^j_1(\vec{x})+[\lambda\delta_2 n_1(\vec{x})+$$
$$+\mu\delta_1 n_1(\vec{x})]y^j_2(\vec{x})+[\lambda\delta_3 n_1(\vec{x})+\mu\delta_1 n_3(\vec{x})]y^j_3(\vec{x})=\tilde{b}^j_1;$$

$$[\lambda\delta_1 n_2(\vec{x})+\mu\delta_2 n_1(\vec{x})]y^j_1(\vec{x})+[\mu\delta_1 n_1(\vec{x})+(\lambda+2\mu)\delta_2 n_2(\vec{x})+$$

$$+\mu\delta_3 n_3(\vec{x})]\, y_2^j(\vec{x}) + [\lambda\delta_3 n_2(\vec{x}) + \mu\delta_2 n_3(\vec{x})]\, y_3^j(\vec{x}) = \tilde{b}_2^j\,;$$

$$[\lambda\delta_1 n_3(\vec{x}) + \mu\delta_3 n_1(\vec{x})]\, y_1^j(\vec{x}) + [\lambda\delta_2 n_3(\vec{x}) + \mu\delta_3 n_2(\vec{x})]\, y_2^j(\vec{x}) +$$
$$+ [\mu\delta_1 n_1(\vec{x}) + \mu\delta_2 n_2(\vec{x}) + (\lambda+2\mu)\delta_3 n_3(\vec{x})]\, y_3^j(\vec{x}) = \tilde{b}_3^j\,;$$

$$\tilde{\vec{b}}_k^{\,j} = \vec{b}_k^{\,j} - (\Delta\hat{\tau}\vec{u})_k^{j-1} - \tau(\Delta\hat{\tau}\vec{u}_{\bar{t}})_k^{j-1}, \quad k=1,2,3,$$

სადაც $\vec{b}_k^{\,j}$ მოცემულია II დანართში,

კერძოდ, როდესაც $j=1$, გვექნება:

$$(y^1_{k x_n})^{+} = \frac{\delta_n}{h}\, y_k^1(\vec{x}_n) - \frac{1}{2}\tau^2 \frac{\delta_n}{h} P^0_{0k}(\vec{x}_n - \delta_n h), \quad k, n = 1,2,3. \qquad (10)_4$$

და $(10)_4$-ს შევიყვანთ $(4)_4$-ში მივიღებთ:

$$[(\lambda+2\mu)\delta_1 n_1(\vec{x}) + \mu\delta_2 n_2(\vec{x}) + \mu\delta_3 n_3(\vec{x})]\, y_1^1(\vec{x}) + [\lambda\delta_2 n_1(\vec{x}) + \mu\delta_1 n_2(\vec{x})]\, y_2^1(\vec{x}) +$$
$$+ [\lambda\delta_3 n_1(\vec{x}) + \mu\delta_1 n_3(\vec{x})] = \tilde{b}_1^1\,;$$

$$[\lambda\delta_1 n_2(\vec{x}) + \mu\delta_2 n_1(\vec{x})]\, y_1^1(\vec{x}) + [\mu\delta_1 n_1(\vec{x}) + (\lambda+2\mu)\delta_2 n_2(\vec{x}) +$$
$$+ \mu\delta_3 n_3(\vec{x})]\, y_2^1(\vec{x}) + [\lambda\delta_3 n_2(\vec{x}) + \mu\delta_2 n_3(\vec{x})]\, y_3^1(\vec{x}) = \tilde{b}_2^1\,;$$

$$[\lambda\delta_1 n_3(\vec{x}) + \mu\delta_3 n_1(\vec{x})]\, y_1^1(\vec{x}) + [\lambda\delta_2 n_3(\vec{x}) + \mu\delta_3 n_2(\vec{x})]\, y_2^1(\vec{x}) +$$
$$+ [\mu\delta_1 n_1(\vec{x}) + \mu\delta_2 n_2(\vec{x}) + (\lambda+2\mu)\delta_3 n_3(\vec{x})]\, y_3^1(\vec{x}) = \tilde{b}_3^1\,;$$

$$\tilde{\vec{b}}_k^{\,1} = \vec{b}_k^{\,1} - \frac{\tau^2}{2}\left(\Delta\hat{\tau}\vec{P}_0(x,y,z)\right),$$

სადაც b_k^1, $k=1,2,3$, მოცემულია II დანართში.

შევნიშნოთ, რომ $(9)_4$ და $(11)_4$ სისტემები იშლება დამოუკიდებელ სისტემებად სამი განტოლებით და სამი უცნობით, საიდანაც $y^j_{k x_n}$-ები განისაზღვრება კრამერის ფორმულების საშუალებით. ამ სისტემების დეტერმინანტს აქვს სახე:

$$\Delta = 3\mu^2(2\mu+\lambda)\left(\sigma_1 n_1(\vec{x})+\sigma_2 n_2(\vec{x})+\sigma_3 n_3(\vec{x})\right)+$$
$$+12\mu^2(\lambda+\mu)\sigma_1\sigma_2\sigma_3 n_1(\vec{x}) n_2(\vec{x}) n_3(\vec{x})-$$
$$-4\mu^2(\lambda+\mu)\left(\sigma_1 n_1^3(\vec{x})+\sigma_2 n_2^3(\vec{x})+\sigma_3 n_3^3(\vec{x})\right). \qquad (12)_4$$

არსებობს μ, λ -ს და n_1, n_2, n_3 -ის მნიშვნელობები, რომლისათვისაც $\Delta=0$. ამიტომ ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის დროს უნდა შემოწმდეს პირობა $\Delta\neq 0$. საბოლოოდ $\vec{\mu}_{k\tau}$, $k=1,2,3$, -ს ექნება შემდეგი სახე:

$$\vec{\mu}_{k\tau}=\frac{(-1)^{k-1}}{\Delta\cdot\tau}\left[d_1^{(k)}\left(b_1^j-b_1^{j-1}\right)-d_2^{(k)}\left(b_2^j-b_2^{j-1}\right)+d_3^{(k)}\left(b_3^j-b_3^{j-1}\right)\right]$$
$$k=1,2,3, \qquad (13)_4$$

სადაც $d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, d_3^{(k)}$ დეტერმინანტები მოყვანილია III დანართში.

შევნიშნოთ, რომ ცდომილება, გამოწვეული $(6)_4$-ში $O(\tau^2)$ -ის გადაგდებით, არ ცვლის $(8)_2$, $(9)_2$, $(10)_2$ სქემის აპროქსიმაციის ცდომილებას.

საბოლოოდ, შეგვიძლია განვიხილოთ ასეთი იტერაციული პროცესი:

1) $(9)_4$, $(11)_4$ -ის საფუძველზე განვსაზღვროთ $\vec{\mu}_{\tau}$,
2) $(1)_4$, $(2)_4$-ის საფუძველზე განვსაზღვროთ $\vec{y}^{j+1}$ -ები.
3) მე-2 ეტაპზე მიღებული $\vec{y}^{j+1}$ -ები გამოვიყენოთ კვლავ $\vec{\mu}_{\tau}$-ის განსაზღვრისათვის $(9)_4$-ისა და $(11)_4$-ის საფუძველზე.
4) დავუბრუნდეთ მე-2 ეტაპს.

დანართი I

$$(\Delta\wedge\vec{u})_1=-\frac{\lambda+\mu}{2}\Big(\ell_y^2\delta^{h_y}_{yy_{N-1}}\hat{\ell}^{+}_{\bar{x}}(\hat{E}+h_y\hat{\ell}_y)^{+}\hat{\ell}_{\bar{y}}(\hat{E}+h_y\hat{\ell}_y)u_2+$$

$$+h_y^2\delta^{h_y}_{yy_1}\hat{\ell}^{+}_{x}(E-h_y\hat{\ell}_{\bar{y}})^{+}\hat{\ell}_y(\hat{E}-h_y\hat{\ell}_{\bar{y}})u_2+$$

$$+h_z^2\delta^{h_z}_{zz_{N-1}}\hat{\ell}^{+}_{\bar{x}}(\hat{E}+h_z\hat{\ell}_z)^{+}\hat{\ell}_{\bar{z}}(\hat{E}+h_z\hat{\ell}_z)u_3+$$

$$+h_z^2\delta^{h_z}_{zz_1}\hat{\ell}^{+}_{x}(\hat{E}-h_z\hat{\ell}_{\bar{z}})^{+}(\hat{E}-h_z\hat{\ell}_{\bar{z}})u_3\Big);$$

$$(\Delta\wedge\vec{u})_2=-\frac{\lambda+\mu}{2}\Big(h_x^2\delta^{h_x}_{xx_{N-1}}\hat{\ell}^{+}_{\bar{y}}(\hat{E}+h_x\hat{\ell}_x)^{+}\hat{\ell}_{\bar{x}}(\hat{E}+h_x\hat{\ell}_x)u_1+$$

$$+h_x^2\delta^{h_x}_{xx_1}\hat{\ell}^{+}_{y}(\hat{E}-h_x\ell_{\bar{x}})^{+}(E-h_x\hat{\ell}_{\bar{x}})u_1+$$

$$+h_z^2\delta^{h_z}_{zz_{N-1}}\hat{\ell}^{+}_{\bar{y}}(\hat{E}+h_z\hat{\ell}_z)^{+}\hat{\ell}_{\bar{z}}(\hat{E}+h_z\hat{\ell}_z)u_3+$$

$$+h_z^2\delta^{h_z}_{zz_1}\hat{\ell}^{+}_{y}(\hat{E}-h_z\hat{\ell}_{\bar{z}})^{+}\hat{\ell}_z(\hat{E}-h_z\hat{\ell}_{\bar{z}})u_3\Big);$$

$$(\Delta\wedge\vec{u})_3=-\frac{\lambda+\mu}{2}\Big(h_x^2\delta^{h_x}_{xx_{N-1}}\hat{\ell}^{+}_{\bar{z}}(\hat{E}+h_x\ell_x)^{+}\hat{\ell}_{\bar{x}}(\hat{E}+h_x\hat{\ell}_x)u_1+$$

$$+h_x^2\delta^{h_x}_{xx_1}\hat{\ell}^{+}_{z}(\hat{E}-h_x\hat{\ell}_{\bar{x}})^{+}\hat{\ell}_x(\hat{E}-h_x\hat{\ell}_{\bar{x}})u_1+$$

$$+h_y^2\delta^{h_y}_{yy_{N-1}}\hat{\ell}^{+}_{\bar{z}}(\hat{E}+h_y\hat{\ell}_y)^{+}\hat{\ell}_{\bar{y}}(\hat{E}+h_y\hat{\ell}_y)u_2+$$

$$+h_y^2\delta^{h_y}_{yy_1}\hat{\ell}^{+}_{z}(\hat{E}-h_y\hat{\ell}_{\bar{y}})^{+}\hat{\ell}_y(\hat{E}-h_y\hat{\ell}_{\bar{y}})u_2\Big).$$

$$\delta^{h_x}_{xx_{N-1}}=\begin{cases}1/h_x\,, & x=x_{N-1}\\ 0\,, & x\neq x_{N-1}\end{cases}$$

$\lim \delta^{h_x}_{xx_{N-1}}=\delta(x-x_N)$ – დირაკის ფუნქცია

და ა.შ.

$$(\Delta^{\hat{t}}\vec{T})_1=\mu h_y\hat{\ell}_y^{\dagger}\hat{\ell}_y u_2(x_N;y,z)-\mu h_y\hat{\ell}_{\bar{y}}^{\dagger}\hat{\ell}_{\bar{y}}u_2(x_0;y,z)+$$

$$+\mu h_z\hat{\ell}_z^{\dagger}\hat{\ell}_z u_3(x_N;y,z)-\mu h_z\hat{\ell}_{\bar{z}}^{\dagger}\hat{\ell}_{\bar{z}}u_3(x_0;y,z)-$$

$$-(\lambda+\mu)h_x(\hat{E}+h_x\hat{\ell}_x)\hat{\ell}_{\bar{x}}(\hat{\ell}_{\bar{y}}u_2(x_0;y,z)+\hat{\ell}_{\bar{z}}u_3(x_0;y,z))-$$

$$-\mu\{-h_x^2h_y(\hat{E}+h_x\hat{\ell}_x)\delta^{h_x}_{xx_{N-1}}\delta^{h_y}_{yy_{N-1}}\hat{\ell}_{\bar{x}}u_2(x,y,z)+$$

$$+h_x^2h_z(\hat{E}+h_x\hat{\ell}_x)\delta^{h_x}_{xx_{N-1}}\delta^{h_z}_{zz_{N-1}}\hat{\ell}_{\bar{z}}u_3(x,y,z)+$$

$$+h_x^2h_z(\hat{E}+h_x\hat{\ell}_x)(\hat{E}-h_z\hat{\ell}_z)^{\dagger}(\hat{E}-h_z\hat{\ell}_{\bar{z}})\delta^{h_x}_{xx_{N-1}}\delta^{h_z}_{zz_1}\hat{\ell}_{\bar{x}}u_3(x,y,z)+$$

$$+h_y^2\ell_x(\hat{E}+h_y\hat{\ell}_y)\delta^{h_x}_{xx_{N-1}}\delta^{h_y}_{yy_{N-1}}\hat{\ell}_{\bar{y}}u_2(x,y,z)-$$

$$-h_y^2h_x(\hat{E}-h_x\hat{\ell}_{\bar{x}})^{\dagger}(\hat{E}-h_x\hat{\ell}_{\bar{x}})(\hat{E}+h_y\hat{\ell}_y)\delta^{h_x}_{xx_1}\delta^{h_y}_{yy_{N-1}}\hat{\ell}_{\bar{y}}u_2(x,y,z)+$$

$$+h_z^2h_x(\hat{E}+h_z\hat{\ell}_z)\delta^{h_x}_{xx_{N-1}}\delta^{h_z}_{zz_{N-1}}\hat{\ell}_{\bar{z}}u_3(x,y,z)-$$

$$-h_z^2h_x(\hat{E}-h_x\hat{\ell}_{\bar{x}})^{\dagger}(\hat{E}-h_x\hat{\ell}_{\bar{x}})(\hat{E}+h_z\hat{\ell}_z)\delta^{h_x}_{xx_1}\delta^{h_z}_{zz_{N-1}}\hat{\ell}_{\bar{z}}u_3(x,y,z)+$$

$$+h_x^2h_y(\hat{E}+h_x\hat{\ell}_x)(\hat{E}-h_y\hat{\ell}_{\bar{y}})^{\dagger}(\hat{E}-h_y\hat{\ell}_y)\delta^{h_x}_{xx_{N-1}}\delta^{h_y}_{yy_1}\hat{\ell}_{\bar{x}}u_2(x,y,z)\};$$

$$(\Delta^{\hat{t}}\vec{u})_2=\mu h_x\hat{\ell}_x^{\dagger}\hat{\ell}_x u_1(y_N;x,z)-\mu h_x\hat{\ell}_{\bar{x}}^{\dagger}\hat{\ell}_{\bar{x}}u_1(y_0;x,z)+$$

$$+\mu h_z\hat{\ell}_z^{\dagger}\hat{\ell}_z u_3(y_N;x,z)-\mu h_z\hat{\ell}_{\bar{z}}^{\dagger}\hat{\ell}_{\bar{z}}u_3(y_0;x,z)-$$

$$-(\lambda+\mu)h_y(\hat{E}+h_y\hat{\ell}_y)\hat{\ell}_{\bar{y}}(\hat{\ell}_{\bar{x}}u_1(y_0;x,z)+\hat{\ell}_{\bar{z}}u_3(y_0;x,z))-$$

$$-\mu\{h_x^2h_y(\hat{E}+h_x\hat{\ell}_x)\delta^{h_x}_{xx_{N-1}}\delta^{h_y}_{yy_{N-1}}\hat{\ell}_{\bar{x}}u_1(x,y,z)-$$

$$-h_x^2 h_y (\hat{E}+h_x\hat{\ell}_x)(\hat{E}-h_y\hat{\ell}_y)^{\dagger}(\hat{E}-h_y\hat{\ell}_{\bar{y}})\delta^{h_x}_{xx_{N-1}}\delta^{h_y}_{yy_1}\hat{\ell}_{\bar{x}}u_1(x,y,z)-$$

$$-h_y^2 h_z (\hat{E}+h_y\hat{\ell}_y)\delta^{h_y}_{yy_{N-1}}\delta^{h_z}_{zz_{N-1}}\hat{\ell}_{\bar{y}}(u_3(x,y,z))+$$

$$+h_y^2 h_z (\hat{E}+h_y\hat{\ell}_y)(\hat{E}-h_z\hat{\ell}_{\bar{z}})^{\dagger}(\hat{E}-h_z\hat{\ell}_{\bar{z}})\delta^{h_y}_{yy_{N-1}}\delta^{h_z}_{zz_1}\hat{\ell}_{\bar{y}}u_3(x,y,z)-$$

$$-h_y^2 h_x (\hat{E}+h_y\hat{\ell}_y)\delta^{h_x}_{xx_{N-1}}\delta^{h_y}_{yy_{N-1}}\hat{\ell}_{\bar{y}}u_1(x,y,z)+$$

$$+h_y^2 h_x (\hat{E}+h_y\hat{\ell}_y)(\hat{E}-h_x\hat{\ell}_{\bar{x}})^{\dagger}(\hat{E}-h_x\hat{\ell}_{\bar{x}})\delta^{h_x}_{xx_1}\delta^{h_y}_{yy_{N-1}}\hat{\ell}_{\bar{y}}u_1(x,y,z)+$$

$$+h_z^2 h_y (\hat{E}+h_z\hat{\ell}_z)\delta^{h_y}_{yy_{N-1}}\delta^{h_z}_{zz_{N-1}}\hat{\ell}_{\bar{z}}u_3(x,y,z)-$$

$$-h_z^2 h_y (\hat{E}+h_z\hat{\ell}_z)(\hat{E}-h_y\hat{\ell}_{\bar{y}})^{\dagger}(\hat{E}-h_y\hat{\ell}_{\bar{y}})\delta^{h_y}_{yy_1}\delta^{h_z}_{zz_{N-1}}\hat{\ell}_{\bar{z}}u_3(x,y,z)\};$$

$$(\Delta\hat{\vec{\tau}}\vec{u})_3=\mu h_x\hat{\ell}^{\dagger}_{\bar{x}}\hat{\ell}_{\bar{x}}u_1(x_N,y,z)-\mu h_x\hat{\ell}^{\dagger}_{\bar{x}}\hat{\ell}_{\bar{x}}u_1(z_0;x,y)+$$

$$+\mu h_y\hat{\ell}^{\dagger}_{\bar{y}}\hat{\ell}_{\bar{y}}u_2(z_N;x,y)-\mu h_y\hat{\ell}^{\dagger}_{\bar{y}}\hat{\ell}_{\bar{y}}u_2(z_0;x,y)-$$

$$(\lambda+\mu)h_z(\hat{E}+h_z\hat{\ell}_z)\hat{\ell}_{\bar{z}}(\hat{\ell}_{\bar{x}}u_1(z_0;x,y,z)+\hat{\ell}_{\bar{y}}u_2(z_0;x;y))-$$

$$-\mu\{h_x^2 h_z(\hat{E}+h_x\hat{\ell}_x)\delta^{h_x}_{xx_{N-1}}\delta^{h_z}_{zz_{N-1}}\hat{\ell}_{\bar{x}}u_1(x,y,z)-$$

$$-h_x^2 h_z(\hat{E}+h_x\hat{\ell}_x)(\hat{E}-h_z\hat{\ell}_{\bar{z}})^{\dagger}(\hat{E}-h_z\hat{\ell}_{\bar{z}})\delta^{h_x}_{xx_{N-1}}\delta^{h_z}_{zz_1}\hat{\ell}_{\bar{x}}u_1(x,y,z)+$$

$$+h_y^2 h_z(\hat{E}+h_y\hat{\ell}_y)\delta^{h_y}_{yy_{N-1}}\delta^{h_z}_{zz_{N-1}}\hat{\ell}_{\bar{y}}u_2(x,y,z)-$$

$$-h_y^2 h_z(\hat{E}+h_y\hat{\ell}_y)(\hat{E}-h_z\hat{\ell}_{\bar{z}})^{\dagger}(\hat{E}-h_z\hat{\ell}_{\bar{z}})\delta^{h_y}_{yy_{N-1}}\delta^{h_z}_{zz_1}\hat{\ell}_{\bar{y}}u_2(x,y,z)-$$

$$- h_z^2 h_x (\hat{E} + h_x \hat{\ell}_x) \delta^{h_x}_{x x_{N-1}} \delta^{h_z}_{z z_{N-1}} \hat{\ell}_{\bar{z}} u_1(x,y,z) +$$

$$+ h_z^2 h_x (\hat{E} + h_z \hat{\ell}_z)(\hat{E} - h_x \hat{\ell}_{\bar{x}})^{+} (\hat{E} - h_x \hat{\ell}_{\bar{x}}) \delta^{h_x}_{x x_1} \delta^{h_z}_{z z_{N-1}} \hat{\ell}_{\bar{z}} u_1(x,y,z) -$$

$$- h_z^2 h_y (\hat{E} + h_z \hat{\ell}_z) \delta^{h_y}_{y y_{N-1}} \delta^{h_z}_{z z_{N-1}} \hat{\ell}_{\bar{z}} u_2(x,y,z) +$$

$$+ h_z^2 h_y (\hat{E} + h_z \hat{\ell}_z)(\hat{E} - h_y \hat{\ell}_{\bar{y}})^{+} (\hat{E} - h_y \hat{\ell}_{\bar{y}}) \delta^{h_y}_{y y_1} \delta^{h_z}_{z z_{N-1}} \hat{\ell}_{\bar{z}} u_2(x,y,z) \} .$$

დანართი II

$$b_1^j = (\lambda+2\mu)\sigma_1 n_1(\vec{x})\left[2y_1^{j-1}(x_1-\sigma_1 h) - y_1^{j-2}(x_1-\sigma_1 h)\right] +$$
$$+\mu\sigma_2 n_2(\vec{x})\left[2y_1^{j-1}(x_2-\sigma_2 h) - y_1^{j-2}(x_2-\sigma_2 h)\right] +$$
$$+\mu\sigma_3 n_3(\vec{x})\left[2y_1^{j-1}(x_3-\sigma_3 h) - y_1^{j-2}(x_3-\sigma_3 h)\right] +$$
$$+\lambda\sigma_2 n_1(\vec{x})\left[2y_2^{j-1}(x_2-\sigma_2 h) - y_2^{j-2}(x_2-\sigma_2 h)\right] +$$
$$+\mu\sigma_1 n_2(\vec{x})\left[2y_2^{j-1}(x_1-\sigma_1 h) - y_2^{j-2}(x_1-\sigma_1 h)\right] +$$
$$+\lambda\sigma_3 n_1(\vec{x})\left[2y_3^{j-1}(x_3-\sigma_3 h) - y_3^{j-2}(x_3-\sigma_3 h)\right] +$$
$$+\mu\sigma_1 n_3(\vec{x})\left[2y_3^{j-1}(x_1-\sigma_1 h) - y_3^{j-2}(x_1-\sigma_1 h)\right];$$

$$b_2^j = \lambda\sigma_1 n_2(\vec{x})\left[2y_1^{j-1}(x_1-\sigma_1 h) - y_1^{j-2}(x_1-\sigma_1 h)\right] +$$
$$+\mu\sigma_2 n_1(\vec{x})\left[2y_1^{j-1}(x_2-\sigma_2 h) - y_1^{j-2}(x_2-\sigma_2 h)\right] +$$
$$+\mu\sigma_1 n_1(\vec{x})\left[2y_2^{j-1}(x_1-\sigma_1 h) - y_2^{j-2}(x_1-\sigma_1 h)\right] +$$
$$+(\lambda+2\mu)\sigma_2 n_2(\vec{x})\left[2y_2^{j-1}(x_2-\sigma_2 h) - y_2^{j-2}(x_2-\sigma_2 h)\right] +$$
$$+\mu\sigma_3 n_3(\vec{x})\left[2y_2^{j-1}(x_3-\sigma_3 h) - y_2^{j-2}(x_3-\sigma_3 h)\right] +$$
$$+\lambda\sigma_3 n_2(\vec{x})\left[2y_3^{j-1}(x_3-\sigma_3 h) - y_3^{j-2}(x_3-\sigma_3 h)\right] +$$
$$+\mu\sigma_2 n_3(\vec{x})\left[2y_3^{j-1}(x_2-\sigma_2 h) - y_3^{j-2}(x_2-\sigma_2 h)\right];$$

$$b_3^j = \lambda\sigma_1 n_3(\vec{x})\left[2y_1^{j-1}(x_1-\sigma_1 h) - y_1^{j-2}(x_1-\sigma_1 h)\right] +$$
$$+\mu\sigma_3 n_1(\vec{x})\left[2y_1^{j-1}(x_3-\sigma_3 h) - y_1^{j-2}(x_3-\sigma_3 h)\right] +$$
$$+\lambda\sigma_2 n_3(\vec{x})\left[2y^{j-1}(x_2-\sigma_2 h) - y_2^{j-2}(x_2-\sigma_2 h)\right] +$$
$$+\mu\sigma_3 n_2(\vec{x})\left[2y_2^{j-1}(x_3-\sigma_3 h) - y_2^{j-2}(x_3-\sigma_3 h)\right] +$$
$$+\mu\sigma_1 n_1(\vec{x})\left[2y_2^{j-1}(x_1-\sigma_1 h) - y^{j-2}(x_1-\sigma_1 h)\right] +$$

$$+\mu\sigma_2 n_2(\vec{x})\left[2y_3^{j-1}(x_2-\sigma_2 h)-y_3^{j-2}(x_2-\sigma_2 h)\right]+$$

$$+(\lambda+2\mu)\sigma_3 n_3(\vec{x})\left[2y_3^{j-1}(x_3-\sigma_3 h)-y_3^{j-2}(x_3-\sigma_3 h)\right].$$

$$b_1^1=\frac{1}{2}\tau^2\left[(\lambda+2\mu)\sigma_1 n_1(\vec{x})P_{01}^{0}(x_1-\sigma_1 h)+\mu\sigma_2 n_2(\vec{x})P_{01}^{0}(x_2-\sigma_2 h)+\right.$$

$$+\mu\sigma_3 n_3(\vec{x})P_{01}^{0}(x_3-\sigma_3 h)+\lambda\sigma_2 n_1(\vec{x})P_{02}^{0}(x_2-\sigma_2 h)+$$

$$+\mu\sigma_1 n_2(\vec{x})P_{02}^{0}(x_1-\sigma_1 h)+\lambda\sigma_3 n_1(\vec{x})P_{03}^{0}(x_3-\sigma_3 h)+$$

$$\left.+\mu\sigma_1 n_3(\vec{x})P_{03}^{0}(x_1-\sigma_1 h)\right];$$

$$b_2^1=\frac{1}{2}\tau^2\left[\lambda\sigma_1 n_2(\vec{x})P_{01}^{0}(x_1-\sigma_1 h)+\mu\sigma_2 n_1(\vec{x})P_{01}^{0}(x_2-\sigma_2 h)+\right.$$

$$+\mu\sigma_1 n_1(\vec{x})P_{02}^{0}(x_1-\sigma_1 h)+(\lambda+2\mu)\sigma_2 n_2(\vec{x})P_{02}^{0}(x_2-\sigma_2 h)+$$

$$+\mu\sigma_3 n_3(\vec{x})P_{02}^{0}(x_3-\sigma_3 h)+\lambda\sigma_3 n_2(\vec{x})P_{03}^{0}(x_3-\sigma_3 h)+$$

$$\left.+\mu\sigma_2 n_3(\vec{x})P_{03}^{0}(x_2-\sigma_2 h)\right];$$

$$b_3^1=\frac{1}{2}\tau^2\left[\lambda\sigma_1 n_3(\vec{x})P_{01}^{0}(x_1-\sigma_1 h)+\mu\sigma_3 n_1(\vec{x})P_{01}^{0}(x_3-\sigma_3 h)+\right.$$

$$+\lambda\sigma_2 n_3(\vec{x})P_{02}^{0}(x_2-\sigma_2 h)+\mu\sigma_3 n_2(\vec{x})P_{02}^{0}(x_3-\sigma_3 h)+$$

$$+\mu\sigma_1 n_1(\vec{x})P_{03}^{0}(x_1-\sigma_1 h)+$$

$$\left.+\mu\sigma_2 n_2(\vec{x})P_{03}^{0}(x_2-\sigma_2 h)+(\lambda+2\mu)\sigma_3 n_3(\vec{x})P_{03}^{0}(x_3-\sigma_3 h)\right].$$

დანართი III

$$d_1^{(1)}=\mu^2 n_1^2+2\mu^2 n_2^2+2\mu^2 n_3^2+\mu(\lambda+3\mu)\delta_1\delta_2 n_1 n_2+\mu(\lambda+3\mu)\delta_1\delta_3 n_1 n_3+$$
$$+4\mu(\lambda+\mu)\delta_2\delta_3 n_2 n_3;$$

$$d_2^{(1)}=\mu\lambda\delta_1\delta_2 n_1^2+\mu^2\delta_1\delta_2 n_2^2-\lambda\mu\delta_1\delta_2 n_3^2+\mu^2 n_1 n_2+2\mu\lambda\delta_2\delta_3 n_1 n_3+$$
$$+\mu(\lambda+\mu)\delta_1\delta_3 n_2 n_3;$$

$$d_3^{(1)}=-\mu\lambda\delta_1\delta_3 n_1^2+\lambda\mu\delta_1\delta_3 n_2^2-\mu^2\delta_1\delta_3 n_3^2-2\mu\lambda\delta_2\delta_3 n_1 n_2-\mu^2 n_1 n_3-$$
$$-\mu(\lambda+\mu)\delta_1\delta_2 n_2 n_3;$$

$$d_1^{(2)}=\mu^2\delta_1\delta_2 n_1^2+\lambda\mu\delta_1\delta_2 n_2^2-\lambda\mu\delta_1\delta_2 n_3^2+\mu^2 n_1 n_2\mu(\lambda+\mu)\delta_2\delta_3 n_1 n_3+$$
$$+2\lambda\mu\delta_1\delta_3 n_2 n_3;$$

$$d_2^{(2)}=2\mu^2 n^2+\mu^2 n_2^2+2\mu^2 n_3^2+\mu(\lambda+3\mu)\delta_1\delta_2 n_1 n_1+4\mu(\lambda+\mu)\delta_1\delta_3 n_1 n_3+$$
$$+\mu(\lambda+3\mu)\delta_2\delta_3 n_2 n_3;$$

$$d_3^{(2)}=-\lambda\mu\delta_2\delta_3 n_1^2+\lambda\mu\delta_2\delta_3 n_2^2+\mu^2\delta_2\delta_3 n_3^2+2\mu\lambda\delta_1\delta_3 n_1 n_2+$$
$$+\mu(\lambda+\mu)\delta_1\delta_2 n_1 n_3+\mu^2 n_2 n_3;$$

$$d_1^{(3)}=-\mu^2\delta_1\delta_3 n_1^2+\lambda\mu\delta_1\delta_3 n_2^2-\lambda\mu\delta_1\delta_3 n_3^2-\mu(\lambda+\mu)\delta_2\delta_3 n_1 n_2-$$
$$-\mu^2 n_1 n_3-2\mu\lambda\delta_1\delta_2 n_2 n_3;$$

$$d_2^{(3)}=-\lambda\mu\delta_2\delta_3 n_1^2+\mu^2\delta_2\delta_3 n_2^2+\lambda\mu\delta_2\delta_3 n_3^2+\mu(\lambda+\mu)\delta_1\delta_3 n_1 n_2+$$
$$+2\mu\lambda\delta_1\delta_2 n_1 n_3+\mu^2 n_2 n_3;$$

$$d_3^{(3)}=2\mu^2 n_1^2+2\mu^2 n_2^2+\mu^2 n_3^2+4\mu(\lambda+\mu)\delta_1\delta_2 n_1 n_2+\mu(\lambda+3\mu)\delta_1\delta_3 n_1 n_3+$$
$$+\mu(\lambda+3\mu)\delta_2\delta_3 n_2 n_3,$$

$$n_k\equiv n_k(\vec{x}),\quad k=1,2,3.$$

შემოსულია 5.I.1993

საქართველოს მეცნ.აკადემიის
გეოფიზიკის ინსტიტუტი

ლიტერატურა

I. Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В., Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости, М., Наука, 1976.

2. Самарский А.А., Теория разностных схем, М., Наука, I983.

3. М.Гэри, Д.Джонсон, Вычислительные машины и труднорешаемые задачи, М., Мир, I982.

4. Г.Корн, Т.Корн, Справочник по математике, М., Наука, I974.

Дж.Гечечиладзе

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ СМЕШАННОГО ТИПА

Резюме

Построена экономичная разностная схема с факторизованным оператором для решения второй основной задачи динамики смешанного типа в трехмерном случае. Доказана сходимость этой схемы.

J.Gachechiladze

NUMERICAL SOLUTION OF THE SECOND MIXED-TYPE BASIC PROBLEM OF DYNAMICS

Summary

An economical difference scheme with a factorized operator is constructed for the solution of the second mixed-type basic problem of dynamics in the three-dimensional case. The convergence of this scheme is proved.

Труды Тбилисского государственного университета
им. И. Джавахишвили

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
ტომ, 1993

არაწრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა მრავალბიჯი სპლაინ-ინტერპოლაციის მეთოდით

ჯ. გაჩეჩილაძე

ნაშრომში განხილულია ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მეთოდი, რომელიც დამყარებულია p-წრფივი სპლაინებით შებრუნებულ ინტერპოლებზე. ეს პროცესი შეიძლება განვიხილოთ როგორც უშუალო განზოგადება $F(x)=0$ განტოლების ფესვის მოძებნის გავრცელებული მეთოდისა, რომელიც ცნობილია მიმდევრობით მიახლოებათა მეთოდის სახელწოდებით /1/. გამოკვლეულია აგებული იტერაციული პროცესის კრებადობა ოსტროვსკის უძრავი წერტილის შესახებ ცნობილი თეორემის /2/ საფუძველზე. მიღებულია უტოლობა იტერაციულ პროცესში შემავალი ძირითადი პარამეტრის შესაფასებლად.

1. იტერაციული პროცესის აგება

ვთქვათ, მოცემულია არაწრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} G_1(x_1,\dots,x_p)=0, \\ G_2(x_1,\dots,x_p)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ G_p(x_1,\dots,x_p)=0. \end{cases} \tag{1.1}$$

დავუშვათ ცნობილია, რომ რაიმე p-განზომილებიან D არეში იძებნება (1.1) სისტემის ერთი ამონახსნი. განვიხილოთ გამოსახულებები:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1,\dots,x_p;\,u_1,\dots,u_p)=u_1-G_1(x_1,\dots,x_p)=0,\\
&\text{-------------------------------}\\
&\varphi_p(x_1,\dots,x_p;\,u_1,\dots,u_p)=u_p-G_p(x_1,\dots,x_p)=0.
\end{aligned}
\qquad (1.2)
$$

დავუშვათ, რომ რაიმე $2p$-განზომილებიან პარალელეპიპედში ცენტრით

$$(x_1^{\circ},\dots,x_p^{\circ};\,u_1^{\circ},\dots,u_p^{\circ})$$

შესრულებულია არაცხადი ფუნქციის არსებობის პირობები /3/. მაშინ (1.2) განტოლებები განსაზღვრავენ $x_1,\dots,x_p$ -ს როგორც $u_1,\dots,u_p$ ცვლადების ცალსახა ფუნქციებს:

$$x_1=\varphi_1(u_1,\dots,u_p),\dots,x_p=\varphi_p(u_1,\dots,u_p). \qquad (1.3)$$

(1.1) სისტემის ზუსტი ამონახსნის ($x_1^*,\dots,x_p^*$)-ის მიახლოებად შეიძლება მივიღოთ ($\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_p$), რომლებიც გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$
\begin{aligned}
&\bar{x}_1=S_{\varphi_1}(0,\dots,0)\\
&\text{---------------}\\
&\bar{x}_p=S_{\varphi_p}(0,\dots,0)
\end{aligned}
\quad , \qquad (1.4)
$$

სადაც $S_{\varphi_1},\dots,S_{\varphi_p}$ – p-წრფივი სპლაინებია, რომლებიც ახდენენ შესაბამისად $\varphi_1,\dots,\varphi_p$ ფუნქციათა მნიშვნელობების ინტერპოლირებას Δ_u ბადის კვანძებში.

p-წრფივი სპლაინის გამოსახულებას აქვს სახე /4/:

$$
\begin{aligned}
S_\varphi(u_1,\dots,u_p)&\frac{1}{h_1,\dots,h_p}[\varphi(u_{1i_1},\dots,u_{pi_p})(u_1-u_{1i_1-1})\cdots(u_p-u_{pi_p-1})+\\
&+\dots+\varphi(u_{1i_1},\dots,u_{ki_k-1},\dots,u_{pi_p})(u_1-u_{1i_1-1})\cdots(u_{ki_k}-u_k)\cdots(u_p-u_{pi_p-1})+\\
&+\dots+\varphi(u_{1i_1-1},\dots,u_{pi_p-1})(u_{1i_1}-u_1)\cdots(u_{pi_p}-u_p)],
\end{aligned}
\qquad (1.5)
$$

$$(u_1,\dots,u_p)\in\{u_{1i_1-1}\leqslant u_1\leqslant u_{1i_1},\dots,u_{pi_p-1}\leqslant u_p\leqslant u_{pi_p}\}$$

როგორც (1.5)-დან ჩანს, (1.1) სისტემის მიახლოებითი ამონახსნის ($\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_p$)-ს გამოთვლისათვის (1.4) ფორმულების საშუალე-

მე საჭიროა ვიცოდეთ არაცხადი $\varphi_1,\dots,\varphi_p$ ფუნქციების მნიშვნელო-ბები ბადის ფიქსირებულ კვანძებში. ეს მნიშვნელობები გამო-ითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$x_1=\varphi_1(u_1,\dots,u_p)=\varphi_1(u_1^0,\dots,u_p^0)-(u_K-u_K^0)J^{-1}(x_1^0,\dots,x_p^0)\times$$
$$\times\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(u_K^0,x_2^0,\dots,x_p^0)},$$

- -

$$x_j=\varphi_j(u_1,\dots,u_p)=\varphi_j(u_1^0,\dots,u_p^0)-(u_K-u_K^0)J^{-1}(x_1^0,\dots,x_p^0)\times$$
$$\times\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(x_1^0,\dots,x_{j-1}^0,u_K^0,x_{j+1}^0,\dots,x_p^0)},$$

- -

$$x_p=\varphi_p(u_1,\dots,u_p)=\varphi_j(u_1^0,\dots,u_p^0)-(u_K-u_K^0)J^{-1}(x_1^0,\dots,x_p^0)\times$$
$$\times\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(x_1^0,\dots,x_{p-1}^0,u_K^0)}. \qquad (1.6)$$

სადაც $(x_1^0,\dots,x_p^0)$ მოცემული წერტილია, რომელსაც შეესაბამება

$$u_1^0=G_1(x_1^0,\dots,x_p^0),\dots,u_p^0=G_p(x_1^0,\dots,x_p^0),$$

$$J(x_1,\dots,x_p)=\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(x_1,\dots,x_p)}\neq 0. \qquad (1.7)$$

(1.0) ფორმულების გამოყვანა მოცემულია პუნქტ 2-ში.

შებრუნებული სპლაინ-ინტერპოლების იდეის საფუძველზე ავაგოთ (1.1) სისტემის ამოხსნის იტერაციული პროცესი შემდეგნაირად:

ავიღოთ რაიმე წერტილი $(x_1^0,\dots,x_p^0)\in D$; მას შეესაბამება $u_1^0=G_1(x_1^0,\dots,x_p^0),\dots u_p^0=G_p(x_1^0,\dots,x_p^0)$. დავუშვათ, რომ კუბი $\{-u_1^0\leq u_1\leq u_1^0,\dots,-u_p^0\leq u_p\leq u_p^0\}$ ცენტრით კოორდინატთა სა-თავეში შედის არაცხადი ფუნქციების განსაზღვრის არეში. ასეთ კუბ-ზე ავაგოთ სპლაინები $S_{\varphi_1}^0,\dots,S_{\varphi_p}^0$. დავუშვათ $x_1^1=S_{\varphi_1}^0(0,\dots,0),\dots$

$\dots, \bar{x}_p^1 = S_{\varphi_p}^0(0,\dots,0)$. მათ შესაბამისად $u_1^1 = G_1(\bar{x}_1^1,\dots,\bar{x}_p^1),\dots$
$\dots, u_p^1 = G_p(\bar{x}_1^1,\dots,\bar{x}_p^1)$.

კუბზე $\{-u_1^1 \le u_1 \le u_1^1,\dots,-u_p^1 \le u_p \le u_p^1\}$ კვლავ ვაგებთ სპლაინებს $S_{\varphi_1}^1,\dots,S_{\varphi_p}^1$ და ა.შ. n-ურ ნაბიჯზე გვექნება:

$$\bar{x}_1^{n+1} = S_{\varphi_1}^n(0,\dots,0),\dots,\bar{x}_p^{n+1} = S_{\varphi_p}^n(0,\dots,0), \quad n = 0,1,\dots \tag{1.8}$$

(1.5), (1.6) ფორმულების გამოყენებით ეს პროცესი ცხადი სახით ჩაიწერება ასე:

$$\bar{x}_j^{n+1} = \bar{x}_j^n + \sum_{k=1}^{p} u_k^n J^{-1}(\bar{x}_1^n,\dots,\bar{x}_p^n)\frac{D(\Phi_1,\dots,\Phi_p)}{D(\bar{x}_1^n,\dots,\bar{x}_{j-1}^n,u_k^n,\bar{x}_{j+1}^n,\dots,\bar{x}_p^n)},$$

$$j = 1,\dots,p. \tag{1.9}$$

ამ თანაფარდობების საფუძველზე ავაგოთ (1.1) სისტემის ამონახსნის მოძებნის იტერაციული პროცესი.

განვიხილოთ ფუნქციები:

$$f_1(x_1,\dots,x_p) = x_1 - \lambda_1 \sum_{\beta=1}^{p} \Gamma_{1\beta}(x_1,\dots,x_p) G_\beta(x_1,\dots,x_p) \tag{1.10}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_p(x_1,\dots,x_p) = x_p - \lambda_p \sum_{\beta=1}^{p} \Gamma_{p\beta}(x_1,\dots,x_p) G_\beta(x_1,\dots,x_p),$$

სადაც $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო $\Gamma_{\alpha\beta}$ სიდიდეები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$\det\|\Gamma_{\alpha\beta}\| \ne 0, \quad \alpha,\beta = 1,\dots,p, \tag{1.11}$$

მაშინ სისტემის

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_1,\dots,x_p) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_p = f_p(x_1,\dots,x_p) \end{cases} \tag{1.12}$$

ამოხსნა ტოლფასი იქნება (1.1) სისტემის ამოხსნის.

პუნქტ 3-ში იქნება ნაჩვენები, რომ $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ მუდმივების სათანადო შერჩევისას იტერაციული პროცესი

$$
\begin{array}{l}
x_1^{n+1}=f_1(x_1^n,\dots,x_p^n) \\
-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\
x_p^{n+1}=f_p(x_1^n,\dots,x_p^n)
\end{array}
\qquad (1.13)
$$

იქნება კრებადი. თუ მივმართავთ (1.9) ფორმულებს, $\Gamma_{\alpha\beta}$-თვის ავიღებთ გამოსახულებას:

$$
\Gamma_{\alpha\beta}=\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial u_\beta}=-J^{-1}(x_1,\dots,x_p)\,\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(x_1,\dots,x_{\alpha-1},u_\beta,x_{\alpha+1},\dots,x_p)}. \qquad (1.14)
$$

მაშინ (1.11) პირობა იქნება შესრულებული, ვინაიდან იგი წარმოადგენს არაცხადი ფუნქციების არსებობის პირობების შედეგს. ამრიგად, (1.1) სისტემის ამოხსნის იტერაციული პროცესი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$
x_1^{n+1}=x_1^n+\lambda_1\sum_{k=1}^{p}u_k^n\,J^{-1}(x_1^n,\dots,x_p^n)\,\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(u_k^n,x_2^n,\dots,x_p^n)},
$$

$$
-\,-
$$

$$
x_j^{n+1}=x_j^n+\lambda_j\sum_{k=1}^{p}u_k^n\,J^{-1}(x_1^n,\dots,x_p^n)\,\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(x_1^n,\dots,x_{j-1}^n,u_k,x_{j+1}^n,\dots,x_p^n)},
$$

$$
-\,-
$$

$$
x_p^{n+1}=x_p^n+\lambda_p\sum_{k=1}^{p}u_k^n\,J^{-1}(x_1^n,\dots,x_p^n)\,\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(x_1^n,\dots,x_{p-1}^n,u_k)}.
$$

(1.15)

2. არაცხადი ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლა

ვთქვათ მოცემულია $x_1^0,\dots,x_p^0$, რომელთაც შეესაბამება, (1.1) სისტემის თანახმად, მნიშვნელობები:

$$u_1^0=G_1(x_1^0,\dots,x_p^0),\dots,u_p^0=G_p(x_1^0,\dots,x_p^0).$$

დავუშვათ წერტილი $(u_1^0,\dots,u_p^0)$ ეკუთვნის არაცხადი ფუნქციების განსაზღვრის არეს. ამ შემთხვევაში

$$x_1^0=\varphi_1(u_1^0,\dots,u_p^0),\dots,x_p^0=\varphi_p^0(u_1^0,\dots,u_p^0).$$

გამოვთვალოთ $\varphi_1,\dots,\varphi_p$ ფუნქციების მნიშვნელობები $(u_1^0,u_2^0,\dots,u_{k-1}^0,u_k,u_{k+1}^0,\dots,u_p^0)$ წერტილში, რომელიც აგრეთვე ეკუთვნის არაცხადი ფუნქციების განსაზღვრის არეს. გვაქვს:

$$x_1=\varphi_1(u_1^0,\dots,u_{k-1}^0,u_k,u_{k+1}^0,\dots,u_p^0),\dots,x_p=\varphi_p(u_1^0,\dots,u_{k-1}^0,u_k,u_{k+1}^0,\dots,u_p^0).$$

თუ განვიხილავთ $x_1,\dots,x_p$ როგორც ერთი ცვლადის u_k-ს ფუნქციებს და გამოვიყენებთ სასრულ ნაზრდთა ფორმულას, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$x_1=\varphi_1(u_1^0,\dots,u_p^0)+(u_k-u_k^0)\varphi'_{1u_k}(u_1^0,\dots,u_{k-1}^0,\overset{1}{\tilde{u}}_{k_0},u_{k+1}^0,\dots,u_p^0),$$

- (2.1)

$$x_p=\varphi_p(u_1^0,\dots,u_p^0)+(u_k-u_k^0)\varphi'_{pu_k}(u_1^0,\dots,u_{k-1}^0,\overset{p}{\tilde{u}}_{k_0},u_{k+1}^0,\dots,u_p^0),$$

სადაც

$$\overset{i}{\tilde{u}}_k^0=u_k^0+\theta_i(u_k-u_k^0),\ |\theta_i|<1,\ i=1,\dots,p.$$

φ'_{ju_k}-თვის ($j=1,\dots,p$) გამოვიყენოთ ცნობილი ფორმულები:

$$\varphi'_{ju_k}(u_1,\dots,u_p)=-J^{-1}\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(x_1,\dots,x_{j-1},u_k,x_{j+1},\dots,x_p)},\qquad J=\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(x_1,\dots,x_p)}. \tag{2.2}$$

და ამ გამოსახულებებს შევიტანთ (2.1)-ში, მივიღებთ

$$x_j = \varphi_j(u_1^0, \ldots, u_p^0) - \qquad (2.3)$$

$$- (u_k - u_k^0)\, \overset{j}{\check{J}}{}^{-1} \frac{\mathcal{D}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)}{\mathcal{D}\left(\overset{j}{\check{x}}_1, \ldots, \overset{j}{\check{x}}_{j-1}, \overset{j}{\check{u}}{}_k^0, \overset{j}{\check{x}}_{j+1}, \ldots, \overset{j}{\check{x}}_p\right)} .$$

$$j = 1, \ldots, p .$$

აქ ფორმულაში წერტილები ($\overset{j}{\check{x}}, \ldots, \overset{j}{\check{x}}_p$) შეესაბამება წერტილებს:

$$(u_1^0, \ldots, u_{k-1}^0, \overset{j}{\check{u}}{}_k^0, u_{k+1}^0, \ldots, u_p^0), \quad j = 1, \ldots, p.$$

ცხადია, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$G_k(x_1^0, \ldots, x_p^0) = u_k^0 ,$$

$$G_k(x_1, \ldots, x_p) = u_k , \qquad (2.4)$$

$$k = 1, \ldots, p ,$$

ანუ

$$\Delta G_k = G_k(x_1, \ldots, x_p) - G_k(x_1^0, \ldots, x_p^0) =$$

$$= \frac{\partial G_k}{\partial x_1}(x_1^0, \ldots, x_p^0)\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial G_k}{\partial x_p}(x_1^0, \ldots, x_p^0)\Delta x_p + O(\|\Delta x\|) =$$

$$= u_k - u_k^0 , \quad k = 1, \ldots, p , \qquad (2.5)$$

$$\Delta G_1 = \cdots = \Delta G_{k-1} = \Delta G_{k+1} = \cdots = \Delta G_p = 0 ,$$

სადაც $x_1,\dots,x_p$ განისაზღვრებიან (2.3) ფორმულებიდან. თუ შევიტანთ მათ გამოსახულებებს (2.5)-ში, მივიღებთ:

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_1}(x_1^0,\dots,x_p^0)(u_k-u_k^0)\overset{1}{J}{}^{-1}\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(\overset{1}{u}{}_k^0,\overset{1}{x}_2,\dots,\overset{1}{x}_p)}+\dots+$$

$$+\frac{\partial G_i}{\partial x_p}(x_1^0,\dots,x_p^0)(u_k-u_k^0)\overset{p}{J}{}^{-1}\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(\overset{p}{x}_1,\dots,\overset{p}{x}_{p-1},u_k^0)}= \tag{2.6}$$

$$=\begin{cases}0, & i\neq k\\ -(u_k-u_k^0), & i=k,\quad i=1,\dots,p.\end{cases}$$

განვიხილოთ სიდიდეები

$$\overset{j}{J}=\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(\overset{j}{x}_1,\dots,\overset{j}{x}_{j-1},\overset{j}{u}{}_k^0,\overset{j}{x}_{j+1},\dots,\overset{j}{x}_p)},\quad j=1,\dots,p.$$

აღნიშვნების მიღებით და გამოყენებით ისინი (2.6) სისტემიდან, რომლის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან არაცხადი ფუნქციების არსებობის თეორემის თანახმად. თუ გავითვალისწინებთ, აგრეთვე, რომ

$$\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_{k-1},\varphi_{k+1},\dots,\varphi_n)}{D(x_1^0,\dots,x_{j-1}^0,x_{j+1}^0,\dots,x_p^0)}=(-1)^{k+j}\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(x_1^0,\dots,x_{j-1}^0,u_k^0,x_{j+1}^0,\dots,x_p^0)},$$

სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned}&\frac{\overset{1}{J}{}^{-1}D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(\overset{1}{u}{}_k^0,\overset{1}{x}_2,\dots,\overset{1}{x}_p)}=J^{-1}(x_1^0,\dots,x_p^0)\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(u_k^0,x_2^0,\dots,x_p^0)}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{\overset{p}{J}{}^{-1}D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(\overset{p}{x}_1,\dots,\overset{p}{x}_{p-1},\overset{p}{u}_k)}=J^{-1}(x_1^0,\dots,x_p^0)\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(x_1^0,\dots,x_{p-1}^0,u_k^0)}\end{aligned} \tag{2.7}$$

თუ ამ გამოსახულებებს შევიტანთ (2.3)-ში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}&x_1=\varphi_1(u_1^0,\dots,u_p^0)-(u_k-u_k^0)J^{-1}(x_1^0,\dots,x_p^0)\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(u_k^0,x_2^0,\dots,x_p^0)},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &x_j=\varphi_j(u_1^0,\dots,u_p^0)-(u_k-u_k^0)J^{-1}(x_1^0,\dots,x_p^0)\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(x_1^0,\dots,x_{j-1}^0,u_k^0,x_{j+1}^0,\dots,x_p^0)},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &x_p=\varphi_p(u_1^0,\dots,u_p^0)-(u_k-u_k^0)J^{-1}(x_1^0,\dots,x_p^0)\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(x_1^0,\dots,x_{p-1}^0,u_k^0)},\\ &k=1,\dots,p\end{aligned} \tag{2.8}$$

3. იტერაციული პროცესის კრებადობის გამოკვლევა

(1.1) სისტემის ამოხსნა ჩვენ დავიყვანეთ ეკვივალენტური (1.12) სისტემის ამოხსნაზე, რომელიც ოპერატორულ ფორმაში შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$x = Tx, \qquad (3.1)$$

ხოლო შესაბამისი (1.13) იტერაციული პროცესი კი ასე:

$$x^{n+1} = Tx^{n}, \quad n = 0, 1, \ldots \qquad (3.2)$$

ამიტომ ამ პროცესის კრებადობის გამოკვლევისათვის ვისარგებლოთ თეორემით /2/ ოპერატორის უძრავი წერტილის შესახებ.

თ ე ო რ ე მ ა : განვიხილოთ (3.1) განტოლება [illegible] მეტრიკულ R სივრცეში ρ მანძილით.

ა) დავუშვათ T ოპერატორის განსაზღვრის D არიდან შეიძლება გამოვყოთ სრული ქვესიმრავლე $\mathcal{F}$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $v, w \in \mathcal{F}$ ელემენტებისათვის და რაიმე P, $0 \le P < 1$, რიცხვისათვის სრულდება პირობა:

$$\rho(T_v, T_w) \le P_\rho(v, w) \qquad (3.3)$$

(ოპერატორი T შემოსაზღვრულია და კუმშვითი).

ბ) ავიღოთ ელემენტი $x^0 \in \mathcal{F}$ და დავუშვათ, რომ $x' = Tx^0$. დავუშვათ ბირთვი K, შედგენილი ისეთი v ელემენტებისაგან, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას:

$$\rho(v, x') \le \frac{P}{1-P}\,\rho(x^0, x'), \qquad (3.4)$$

მთლიანად ძევს $\mathcal{F}$-ში, ან, ყოველ შემთხვევაში, ცნობილია, რომ (3.2) პროცესი შეიძლება გაგრძელდეს უსასრულოდ. ასეთ პირობებში (3.1) განტოლებას $\mathcal{F}$ ქვესიმრავლეში აქვს ზუსტად ერთი ამონახსნი x.

მიმდევრობა x^n $(n=0,1,\dots)$ ვექტორის $\mathcal{F}$-ის და იკრიბება x-კენ. ადგილი აქვს შეფასებას:

$$\rho(x,x^n)=\frac{P^n}{1-P}\rho(x^0,x^1),\quad n=0,1,\dots \tag{3.5}$$

კერძოდ, ელემენტი $x\in K$.

შევამოწმოთ ამ თეორემის პირობების შესრულება ჩვენს შემთხვევაში. ρ სივრცეში შემოვიღოთ ევკლიდეს მეტრიკა:

$$\rho(x,x')=\left\{\sum_{i=1}^{p}(x_i-x_i')^2\right\}^{1/2}. \tag{3.6}$$

შევაფასოთ T ოპერატორის შესაბამისი ლიფშიცის მუდმივა P, რომელიც განისაზღვრება უტოლობიდან:

$$\rho(Tx,Tx')\leq P\rho(x,x'). \tag{3.7}$$

ტეილორის განზოგადებული ფორმულის /2/ საფუძველზე გვაქვს:

$$\rho(T(x'+t(x-x')),Tx')\leq \sup_t \|T'_{x'+t(x-x')}\|\,\rho(x-x',\theta_R), \tag{3.8}$$

$t\in[0,1]$,

სადაც T' არის T ოპერატორის ფრეშეს წარმოებული, ხოლო მონაკვეთი $x'+t(x-x')$ ეკუთვნის T ოპერატორის განსაზღვრის არეს. ამრიგად

$$P=\sup_t \|T'_{x'+t(x-x')}\|. \tag{3.9}$$

ცნობილია, რომ R^p სივრცეში ჩვენ მიერ შემოღებული ევკლიდეს ნორმა, ამიტომ T' ოპერატორის ნორმად უნდა ავიღოთ მასთან შეთანხმებული სპექტრალური ნორმა: $\|T'_{x'+t(x-x')}\|=$

$=\{\max(T'^{T}_{x'+t(x-x')}T'_{x'+t(x-x')}$ ოპერატორის საკუთრივი

რიცხვების$)\}^{1/2}$. $\quad$ (3.10)

სადაც T'^{*} არის T' ოპერატორის ერმიტულად შეუღლებული. ოპერატორი T' შეიძლება წარმოვადგინოთ მატრიცის სახით:

$$T'_{x'+t(x-x')}=\left\|\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k}\right\|_{x'+t(x-x')}=\left\|\delta_{\alpha k}-\lambda_\alpha\sum_{\beta=1}^{p}\Gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial G_\beta}{\partial x_k}\right\|_{x'+t(x-x')}=$$

$$=\left\|\delta_{\alpha k}-\lambda_\alpha\sum_{\beta=1}^{p}\frac{\partial x_\alpha}{\partial G_\beta}\frac{\partial G_\beta}{\partial x_k}\right\|_{x'+t(x-x')}=$$

$$=\|(1-\lambda_\alpha p)\delta_{\alpha k}\|,\quad \alpha,k=1,\dots,p. \tag{3.11}$$

ახლა განვიხილოთ მატრიცი:

$$A=T'^{*}T'=\left\|\sum_{m=1}^{p}\delta_{\alpha m}(1-p\lambda_\alpha)\delta_{\beta m}(1-p\lambda_\beta)\right\|=$$

$$=\|(1-p\lambda_\alpha)(1-p\lambda_\beta)\delta_{\alpha\beta}\|,\qquad \alpha,\beta=1,\dots,p. \tag{3.12}$$

მიღებული მატრიცი დიაგონალურია, ამიტომ მისი საკუთრივი რიცხვებია $(1-p\lambda_\alpha)^2$. ამრიგად

$$\|T'_{x'+t(x-x')}\|=|1-p\lambda|,\quad \lambda=\min_{1\le\alpha\le p}\lambda_\alpha. \tag{3.13}$$

ანუ

$$\rho=\sup_t\|T'_{x'+t(x-x')}\|=|1-p\lambda|. \tag{3.14}$$

კუმშვადობის პირობიდან $0\le\rho<1$ გამომდინარეობს:

$$0<\lambda<\frac{2}{p}. \tag{3.15}$$

ახლა შევაფასოთ სიდიდე $\rho(x^0,x^1)$ პირობაში (3,4).

გვაქვს:

$$\rho(x^0,x^1)=\left[(x_1^0-x_1^1)^2+\dots+(x_p^0-x_p^1)^2\right]^{1/2}\le$$

$$\le\sqrt{p}\max_{1\le k\le p}|x_k^0-x_k^1|=\sqrt{p}\max_{1\le k\le p}|\varphi_k(u_1^0,\dots,u_p^0)-S_{\varphi_k}(0,\dots,0)|.$$

სასრული ნაზრდის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\rho(x^0;x^1)\leq\sqrt{p}\max_{1\leq k\leq p}\Big|\varphi_k(0,\dots,0)-S_{\varphi_k}(0,\dots,0)+\sum_{j=1}^{p}u_j^0\frac{\partial\varphi_k}{\partial u^j}(\nu u^0)\Big|. \tag{3.16}$$

გამოვიყენოთ შეფასება /4/:

$$|\varphi_k(0,\dots,0)-S_{\varphi_k}(0,\dots,0)|\leq 2^p\omega(\|\Delta_u\|^p;\varphi_k), \tag{3.17}$$

სადაც ω — φ_k-ფუნქციის უწყვეტობის მოდულია, ხოლო $\|\Delta_u\|=\max\limits_{1\leq j\leq p}\|\Delta_j\|$, $\|\Delta_j\|$ — ბადის ნაწილია j-ურ ღერძზე $(u_1,\dots,u_p)$ ფუნქციათა სივრცეში, თუ გავითვალისწინებთ, რომ φ_k ფუნქციებს გააჩნიათ პირველი რიგის კერძო წარმოებულები. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\omega(\|\Delta_u\|^p;\varphi_k)=\sup_{\substack{\rho(u',u'')\leq\rho(u^0;0)\\ u',u''\in D^0}}|\varphi_k(u')-\varphi_k(u'')|=$$

$$=\sup\Big|\sum_{j=1}^{p}(u_j'-u_j'')\frac{\partial\varphi_k}{\partial u_j}(u''+\vartheta(u'-u''))\Big|\leq$$

$$\leq p\|\Delta_u\|\sup\max_{1\leq j\leq p}\Big|\frac{\partial\varphi_k}{\partial u_j}(u''+\nu(u'-u''))\Big|\leq$$

$$\leq p\|\Delta_u\|\sup_{u\in D^0}\max_{1\leq j\leq p}\Big|\frac{\partial\varphi_k(u)}{\partial u_j}\Big|,$$

$$D^0=[-u_1^0,u_1^0]\times\dots\times[-u_p^0,u_p^0]. \tag{3.18}$$

მიღებული შეფასებიდან ცხადია, რომ

$$p\|\Delta_u\|\sup_{u\in D^0}\max_{1\leq j\leq p}\Big|\frac{\partial\varphi_k(u)}{\partial u_j}\Big|\geq p\|\Delta_u\|\max_{1\leq j\leq p}\sup_{\vartheta}\Big|\frac{\partial\varphi_k}{\partial u_j}(\vartheta u^0)\Big|\geq$$

$$\geq\sqrt{p}\max_{1\leq k\leq p}\Big|\sum_{j=1}^{p}u_j^0\frac{\partial\varphi_k}{\partial u_j}(\vartheta u^0)\Big|.$$

ამიტომ გვექნება:

$$\rho(x^0;x^1)\leq 2^{p+1}p^{3/2}\|\Delta_u\|\max_{\substack{1\leq k\\ j\leq p}}\sup_{u\in D^0}\Big|\frac{\partial\varphi_k(u)}{\partial u_j}\Big|. \tag{3.19}$$

თუ ამ უტოლობაში შევიტანთ არაცხადი ფუნქციების წარმოებულების გამოსახულებას, ხოლო შემდეგ $\rho(x^0,x')$-ის მიღებულ შეფასებას შევიტანთ (3.4)-ში, K ბირთვისთვის მივიღებთ:

$$\rho(v,x') \leq 2^{p+1} p^{3/2} \frac{|1-p\lambda|}{1-|1-p\lambda|} \|\Delta u\| \max_{\substack{1\leq j \\ k\leq p}} \sup_{x\in D} \Bigg| J^{-1}(x_1,\dots,x_p) \times \tag{3.20}$$

$$\times \frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(x_1,\dots,x_{k-1},u_j,x_{k+1},\dots,x_p)} \Bigg| .$$

თეორემაში მოყვანილი ბ) პირობა ნიშნავს შემდეგს: თუ საწყისი მიახლოება x^0 ავირჩიეთ ისე, რომ სრულდება ℓ (3.4), ეს გვაძლევს იმის გარანტიას, რომ ყველა მიახლოება, მიღებული ℓ (3.2)-დან აუცილებლად მოხვდება K ბირთვში.

ჩვენს მიერ განხილული იტერაციული პროცესისთვის (3.4) პირობას აქვს (3.20) სახე. (3.20)-დან ჩანს, რომ λ-ს ცვლილებისას 0-დან $\frac{2}{p}$-მდე $\frac{|1-p\lambda|}{1-|1-p\lambda|}$-ს შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობები 0-დან $+\infty$-მდე, ამიტომ $\forall x^0\in \mathcal{F}$-თვის ყოველთვის შეიძლება შევარჩიოთ ისეთი λ, რომ $K\subset \mathcal{F}$.

ამრიგად, ყველა განხილული პირობის შესრულებისას ჩვენი იტერაციული პროცესი იქნება კრებადი T ოპერატორის ერთადერთი უძრავი წერტილისაკენ $\mathcal{F}$-ში.

შევნიშნოთ, რომ იტერაციული პროცესის კრებადობის რიგის შესახებ თეორემის /2/ საფუძველზე თუ (1.15) იტერაციული პროცესისათვის λ-ს შევარჩევთ ისე, რომ T' ოპერატორი იყოს ნულოვანი და ამავე λ-თვის T'' იყოს შემოსაზღვრული, მაშინ ამ იტერაციული პროცესის კრებადობის რიგი იქნება 2-ის ტოლი.

მიღებულია 5.1.1993

საქართველოს მეცნიერებათა
აკადემიის გეოფიზიკის
ინსტიტუტი

ლიტერატურა

I. А.Н.Колмогоров. С.В.Фомин. Элементы теории функции и функционального анализа. М.,"Наука",I98I.

2. Л.Коллатц. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.,"Мир", I969.

3. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.I, ОГИЗ, М. I947.

4. Ю.С.Завьялов, Б.И.Квасов, В.Л.Мирошниченко, Методы сплайн-функций, М.,"Наука", I980.

Дж.Гачечиладзе

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Резюме

Описан итерационный процесс решения системы нелинейных алгебраических уравнений с помощью обратной сплайн-интерполяции. Доказана сходимость этого процесса.

J.Gachechiladze

SOLUTION OF A SYSTEM OF NONLINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS BY INVERSE SPLINE-INTERPOLATION

Summary

The iteration process of solving a system of nonlinear algebraic equations by means of inverse spline-interpolation is described. The convergence of the process is proved.

СОДЕРЖАНИЕ

შ ი ნ ა ა რ ს ი

Contents

გამომცემლობის რედაქტორი ე.აბუაშვილი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 11/XI-93 წ. საბეჭდი ქაღალდი 60X84
პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 10,75. სააღრ.-საგამომც.თაბახი 5.84
ტირაჟი 200 შეკვეთის № 306

ფასი სახელშეკრულებო

- -

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი,380028,
ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი,14.
თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა, თბილისი,380028,
ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი,1.