საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური
განათლების სამინისტროს საშუალო სპეციალური
განათლების რესპუბლიკური სასწავლო-მეთოდური
კაბინეტი

დ. კურტანიძე

ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდები დაგეგმვაში

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი 1988

.32 + 338(e1/01):330.115

1) წრფივი პროგრამირება

65.9(2)23

ჯ 934

2) ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდები სახალ. მეურნეობ.

წიგნში განხილულია წრფივი ალგებრის, წრფივი და დინამიკური პროგრამირების, ქსელური დაგეგმვისა და მარაგის მეთოდები, მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდები, მოცემულია ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელები და მეთოდები, რომლებიც შეიძლება გამოყენებულ იქნეს დაგეგმვაში.

ნაშრომი წარმოადგენს ლექციების კურსს და განკუთვნილია საშუალო სპეციალური სასწავლებლების "ეკონომიკა და დაგეგმვა სახალხო მეურნეობის დარგებში" სპეციალობის მოსწავლეებისათვის. იგი გარკვეულ დახმარებას გაუწევს ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდების შემსწავლელ დაინტერესებულ სტუდენტებსაც.

რედაქტორი ეკ.მეცნ.დოქტორი ი.მესხია

რეცენზენტები: დოც. მათ. მეცნ.კანდიდატი რ.სარჩიმელია
ეკ.მეცნ.კანდიდატი ჯ.არაბიძე

К 0605010201 / М 608(06)-88

შესავალი

საბჭოთა ეკონომიკურმა მეცნიერებამ, რომლის საფუძველია მარქსისტულ-ლენინური პოლიტიკური ეკონომია და სსრ კავშირში სოციალიზმის მშენებლობის მდიდარი გამოცდილება, მაღალ თეორიულ დონეს მიაღწია და დიდ დახმარებას უწევს პრაქტიკულ საქმიანობას. მიუხედავად ამისა, რიგი მნიშვნელოვანი პრობლემების გადაჭრისას ეკონომიკური მეცნიერება ჯერ კიდევ ჩამორჩება ცხოვრების მიერ დაყენებულ მოთხოვნებს. ასეთ პრობლემებს მიეკუთვნება მაგალითად, კვლავწარმოების ოპტიმალური ტემპებისა და პროპორციების დადგენა, კაპიტალური დაბანდების ეკონომიკური ეფექტიანობის განსაზღვრა, ფასწარმოქმნა და სხვ. ამ და რიგ პრობლემათა კვლევა არ სცდება თვისებრივი ანალიზის ფარგლებს, რის შედეგადაც პრაქტიკა ვერ იღებს კონკრეტიზებულ რაოდენობრივ ფორმაში კონკრეტულ რეკომენდაციებს, თეორიასა და პრაქტიკას შორის წარმოიშობა გარკვეული გარღვევა. ეკონომიკური მეცნიერების შემდგომი განვითარების [redacted] აუცილებელი პირობაა რაოდენობრივი ანალიზის ზუსტი მეთოდების, მათემატიკის როგორც კვლევის მძლავრი ინსტრუმენტის გამოყენება. კ.მარქსის ცნობილი გამოთქმა იმის შესახებ, რომ მეცნიერება მხოლოდ მაშინ მიაღწევს სრულყოფას, როცა იგი შეძლებს მათემატიკის გამოყენებას, მთლიანად ეხება ეკონომიკურ მეცნიერებასაც.

ამჟამინდელ პერიოდში განსაკუთრებულ მნიშვნელობას იძენს ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდების გამოყენება სახალხო მეურნეობის დაგეგმვასა და მართვაში. მეურნეობრიობის მართვის სისტემისა და მეთოდების გარდაქმნისა და გაუმჯობესებისათვის, რაც სკკპ XXVII ყრილობის გადაწყვეტილებებიდან გამომდინარეობს,

აუცილებელია სახალხო მეურნეობის მართვის არსებული ფორმები გადასვლა თვისებრივად ახალ ფორმებზე, ეს კი უნდა განხორციელდეს ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდებისა და ელექტრონულ-გამომთვლელი მანქანების გამოყენებით. ყოველივე ამას შედეგად მოჰყვება წარმოების მოცულობის სწრაფი ზრდა, მისი ეფექტიანობის გადიდება.

წინამდებარე ნაშრომი წარმოადგენს ლექციების კურსს საგანში "ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდები დაგეგმვაში".

ლექციების კურსი ორი განყოფილების სახითაა წარმოდგენილი. I განყოფილებაში განხილულია წრფივი ალგებრის საფუძვლები და II განყოფილებაში - ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდები დაგეგმვაში.

სამწუხაროდ სპეციალური სასწავლებლებისათვის ამ საგანში ქართულ ენაზე სახელმძღვანელო ან ლექციების კურსი არ არსებობს. წინამდებარე ნაშრომი ამ ნაკლოვანების აღმოფხვრის მიზნით არის დაწერილი და ვფიქრობთ გარკვეულ დახმარებას გაუწევს მოსწავლე-ახალგაზრდობას.

ყველა ჭეშმარიტად ობიექტურ შენიშვნას ავტორი გულისხმიერად მოეკიდება.

განყოფილება I

წრფივი ალგებრის საფუძვლები

თავი I. მატრიცები და დეტერმინანტები

§ 1. მატრიცებისა და დეტერმინანტის ცნება

მ ა ტ რ ი ც ა ეწოდება ფრჩხილებში ჩასმულ mn რიცხვებისაგან შედგენილ მართკუთხოვან ცხრილს, რომელიც შეიცავს m სტრიქონსა და n სვეტს.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

ან მოკლედ

$$A = (a_{ij}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m).$$

მატრიცის ცალკეულ რიცხვებს მისი ელემენტები ეწოდება. მაგ. $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{ij}, \cdots, a_{mn}$ /იკითხება a ერთი ერთი, a ერთი ორი და ა.შ. a "ი-ჯი" და ა.შ. a "ემ-ენ"/. პირველი ინდექსი აღნიშნავს სტრიქონის ნომერს, მეორე - სვეტის ნომერს.

თუ სტრიქონების რიცხვი სვეტების რიცხვის ტოლია ე.ი. $m = n$, მაშინ მატრიცას ეწოდება კვადრატული, ხოლო n რიცხვს- მისი რიგი.

თუ მატრიცას აქვს ერთი სტრიქონი $(m = 1)$, ან ერთი სვეტი $(n = 1)$, მაშინ იგი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ვექტორი. პირველ შემთხვევაში მას ეწოდება ვექტორ-სტრიქონი $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$, $(i = 1, 2, \cdots m)$, მეორე შემთხვევაში- ვექტორ-სვეტი

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad (j=1,2,\cdots,n).$$

თუ A მატრიცაში სტრიქონები შეცვლილია სვეტებით, მაშინ მიღებულ მატრიცას ეწოდება A მატრიცის *ტრანსპონირებული* მატრიცა.

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

მატრიცას, რომლის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია ეწოდება *ნულოვანი* მატრიცა და აღინიშნება 0 სიმბოლოთ.

კვადრატულ მატრიცას, რომლის მთავარ დიაგონალზე მოთავსებული რიცხვები ერთის, ხოლო ყველა სხვა ელემენტები ნულის ტოლია ეწოდება *ერთეულოვანი მატრიცა*. ერთეულოვანი მატრიცა ასე ჩაიწერება:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

ორ მატრიცას $A=(a_{ij})_{mn}$ და $B=(b_{ij})_{mn}$ ეწოდებათ *ტოლი*, თუ მათი შესაბამისი ელემენტები ერთმანეთის ტოლია, ე.ი. $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots n)$.

ყოველ კვადრატულ მატრიცას შეესაბამება გარკვეული რიცხვი, რომელსაც ამ მატრიცის *დეტერმინანტი* ეწოდება.

A მატრიცის დეტერმინანტი აღინიშნება ისეთვე კვად-

რაგული ცხრილი, რომელიც იგივე ელემენტებისაგან შედგება და შემოფარგლულია ორი ვერტიკალური ხაზით, იგი აღინიშნება Δ /დელტა/ ასოთი, ან $|A|$ სიმბოლოთი.

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

სტრიქონების, ან სვეტების რიცხვს დეტერმინანტის რ ი გ ი ეწოდება, პირველი რიგის დეტერმინანტის მნიშვნელობა არის რიცხვი, რომელიც მისი ელემენტის ტოლია, ე.ი. თუ

$$A=(a),$$

მაშინ

$$A=|A|=a.$$

§ 2. მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტები

მეორე რიგის დეტერმინანტი

სიდიდეს, $\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, რომელიც მიიღება ორი წყვილი რიცხვების ნამრავლთა სხვაობით აღნიშნავენ

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

და უწოდებენ მ ე ო რ ე რ ი გ ი ს დ ე ტ ე რ მ ი ნ ა ნ ტ ს რიცხვები a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} იწოდებიან დეტერმინანტის ელემენტებად.

მეორე რიგის დეტერმინანტის გამოსათვლელად საჭიროა მთავარ დიაგონალზე მოთავსებული ელემენტების ნამრავლი /მარცხენა ზედა კუთხიდან მარჯვენა ქვედა კუთხემდე/ აიღებული იქნეს პლუსი /+/ ნიშნით, ხოლო მეორე დიაგონალის გასწვრივ მოთავსებული

ელემენტების ნამრავლი - მინუს / - / ნიშნით.

მაგალითი. გამოთვალეთ დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}$$

ამოხსნა. $\Delta = 5\cdot(-8) - 2\cdot 4 = -48.$

მეორე რიგის დეტერმინანტს აქვს ორი სტრიქონი და ორი სვეტი. იგი წარმოადგენს 2! 2 შესაკრების ალგებრულ ჯამს.

მესამე რიგის დეტერმინანტი

განვიხილოთ სიდიდე $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$

ამ სიდიდეს წარმოდგენილს 3! = 6 შესაკრების ალგებრული ჯამით, რომელთაგან თითეული წარმოადგენს სამი თანამამრავლის ნამრავლს, ეწოდება მესამე რიგის დეტერმინანტი. მესამე რიგის დეტერმინანტი გაშლილი სახით ასე ჩაიწერება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

მესამე რიგის დეტერმინანტი შედგება 3! = 6 რიცხვისაგან, რომელსაც ეწოდება მისი ელემენტები. იგი შეიცავს სამ სტრიქონსა და სამ სვეტს.

მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოსათვლელად გამოიყენება მეზრეკი წესი / სარუსის წესი/: მთავარ დიაგონალზე მოთავსებული ელემენტების ნამრავლი აიღება პლუს /+/ ნიშნით. პლუს ნიშნით აიღება აგრეთვე მის პარალელზე განლაგებული ელემენტებისა და ცხრილის მოპირდაპირე კუთხეში მოთავსებული ელემენტის ნამრავლი მინუსი /-/ ნიშნით აიღება ელემენტების ნამრავლი მეორე დიაგონალის მიხედვით.

<u>მაგალითი.</u> გამოთვალეთ დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & -8 \end{vmatrix}$$

<u>ამოხსნა.</u> ზემოთ მოყვანილი წესის მიხედვით გვექნება

$$\Delta = 3\cdot 2\cdot(-8)+2\cdot 2\cdot(-5)+1\cdot(-3)\cdot 1-1\cdot 2\cdot 2-$$
$$-3\cdot(-5)\cdot(-3)-1\cdot 2\cdot(-8)=-104.$$

მესამე რიგის დეტერმინანტი მარტივად გამოითვლება, თუ დეტერმინანტს მარჯვნივ მიეწერება პირველი და მეორე სვეტის ელემენტები. შემდეგ შეადგენენ სამი ელემენტის ნამრავლს; მარცხნიდან მარჯვნივ ელემენტთა ნამრავლი აიღება პლუს /+/ ნიშნით, ხოლო მარჯვნიდან მარცხნივ -მინუს / − / ნიშნით.

<u>მაგალითი.</u> გამოთვალეთ დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -5 \\ 9 & 4 & -7 \\ 14 & 6 & -11 \end{vmatrix}$$

<u>ამოხსნა.</u> შევადგინოთ ცხრილი

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 6 & 3 & -5 & 6 & 3 \\ 9 & 4 & -7 & 9 & 4 \\ 14 & 6 & -11 & 14 & 6 \end{vmatrix} \\ - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \end{array}$$

$$\Delta = 6\cdot 4\cdot(-11)+3\cdot(-7)\cdot 14+(-5)\cdot 9\cdot 6-14\cdot 4\cdot(-5)-6\cdot(-7)\cdot 6-(-11)\cdot 9\cdot 3=1.$$

§ 3. n-ური რიგის დეტერმინანტები

შემოვიტანოთ n-ური რიგის დეტერმინანტის ცნება, სადაც n ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვია.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა:

1, 2, 3, ..., n

რიცხვთა ყოველ შესაძლო დალაგებას განმეორების გარეშე გადანაცვლება ეწოდება. ასე მაგალითად, რიცხვები 1,2,3,4 დალაგებული ზრდის მიხედვით ქმნიან /1 2 3 4 / გადანაცვლებას. თუ შევცვლით ციფრების რიგს მივიღებთ სხვა გადანაცვლებას: /1 3 2 4/, /2 4 3 1 / და ა.შ. ოთხი ელემენტისაგან შეიძლება წარმოიქმნას $4! = 24$ სხვადასხვა გადანაცვლება. სხვადასხვა ელემენტებისაგან მიიღება $n! = 1\cdot 2\cdot \dots \cdot (n-1)n$ სხვადასხვა გადანაცვლება.

რიცხვთა ისეთ მიმდევრობას, სადაც პატარა რიცხვი წინ უსწრებს დიდს ვუწოდოთ ნორმალური, თუ გადანაცვლებაში პატარა რიცხვი დიდი რიცხვის შემდეგაა ვიტყვით, რომ ისინი ქმნიან ი ნ ვ ე რ ს ი ა ს .

მაგალითად /1 2 4 3 / გადანაცვლებაში არის ერთი ინვერსია ციფრი 3 არის 4-ის შემდეგ. /2 4 3 1/ გადანაცვლებაში არის ოთხი ინვერსია: 1 არის 2,3 და 4-ის შემდეგ და ქმნის სამ ინვერსიას და 3 არის 4-ის შემდეგ და ქმნის მეოთხე ინვერსიას.

n ელემენტებისაგან შედგენილ გადანაცვლებას ეწოდება ლუწი, თუ მასში ინვერსიათა რიცხვი ლუწია და კენტი თუ ინვერსიათა რიცხვი კენტია. მაგალითად, /2 4 3 1/ გადანაცვლება ლუწია, ხოლო გადანაცვლება /3 2 1 4 / - კენტი, რადგან ინვერსიათა რიცხვი უდრის 3-ს.

დავუშვათ მოცემულია n^2 რიცხვები a_{ij} $(i=1,2,\dots,n;$ $j=1,2,\dots n)$. ამ რიცხვებისაგან შევადგინოთ კვადრატული მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

რომელსაც აქვს n სტრიქონი და n სვეტი.

ამ კვადრატული მატრიცის n -ური რიგის დეტერმინანტი ეწოდება ალგებრულ ჯამს $\sum(-1)^t a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}$, სადაც t არის $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ გადანაცვლებაში ინვერსიათა რიცხვი. თითოეული შესაკრების ნიშანს განსაზღვრავს მასში ინვერსიათა რაოდენობა. თუ ინვერსიათა რიცხვი ლუწია, პლუსი /+/ ნიშანი ექნება, ხოლო თუ ინვერსიათა რიცხვი კენტია, მაშინ ექნება მინუსი / - / ნიშანი.

როგორც ცნობილია, დეტერმინანტის ელემენტებს ორმაგი ინდექსი აქვთ. ინვერსიათა რიცხვის დასადგენად ნამრავლი უნდა დავალაგოთ პირველი ინდექსის ზრდადობით და ინვერსიები ვიანგარიშოთ მეორე ინდექსის მიხედვით.

მაგალითად, ვთქვათ მესამე რიგის დეტერმინანტის ერთ-ერთი შესაკრებია $a_{22}a_{13}a_{31}$. ინვერსიათა რიცხვის დასადგენად დავალაგოთ პირველი ინდექსი ზრდადობის მიხედვით

$$a_{13}a_{22}a_{31}.$$

ინვერსიათა რიცხვი მეორე ინდექსის მიხედვით კენტია /3 2 1/ ე.ი. აღებულ შესაკრებს დაეწერება მინუსი / - / ნიშანი.

n - ური რიგის დეტერმინანტის თვისებები

1. ტრანსპონირების შედეგად დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ იცვლება.* მაგალითად

* აქ მოტანილი მასალები უმაღლესი მათემატიკის მოკლე კურსის შემადგენელი ნაწილია, სადაც ვრცლად არის მოცემული ეს საკითხები. ჩვენ საჭირო თეორემები მოგვყავს დამტკიცების გარეშე.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 8 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს ის, რომ მტკიცებები, რომლებიც სამართლიანია დეტერმინანტის სტრიქონებისათვის, სამართლიანია სვეტებისათვის და, პირიქით.

2. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონი ნულებისაგან შედგება, მაშინ დეტერმინანტის მნიშვნელობა ნულის ტოლია;

3. ორი სტრიქონის ურთიერთგადანაცვლებით დეტერმინანტი იცვლის ნიშანს;

4. თუ დეტერმინანტის ორი სტრიქონი ერთმანეთის ტოლია ასეთი დეტერმინანტი უდრის ნულს;

5. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ყველა ელემენტს გავამრავლებთ K რიცხვზე, მაშინ მთელი დეტერმინანტი გამრავლდება K-ზე;

6. თუ დეტერმინანტის ორი სტრიქონი პროპორციულია, მაშინ ასეთი დეტერმინანტი უდრის ნულს;

7. თუ დეტერმინანტის მთავარი დიაგონალის წევრები ნულისაგან განსხვავებულია, ხოლო მის ზემოთ ან ქვემოთ მდებარე ყველა ელემენტი ნულია, მაშინ დეტერმინანტის მნიშვნელობა მთავარ დიაგონალზე მდგომ ელემენტთა ნამრავლის ტოლია;

8. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ყველა ელემენტი ორი სიდიდის ჯამს წარმოადგენს, მაშინ ასეთი დეტერმინანტის წარმოდგენა შეიძლება ორი ისეთი დეტერმინანტის ჯამის სახით, რომლებიც აღებული დეტერმინანტისაგან მიიღება, თუ პირველში იმ სტრიქონის მაგივრად, რომელშიაც ორ-ორი შესაკრებია, პირველ შესაკრებს დავწერთ, ხოლო მეორეში - მეორე შესაკრებს. ეს თვისება ასე ჩაიწერება:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

9. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ელემენტებს დავუმატებთ მეორე რომელიმე სტრიქონის შესაბამის ელემენტებს გამრავლებულს ერთსა და იმავე მუდმივ რიცხვზე ამით დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება. ე.ი.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+Ka_{21} & a_{12}+Ka_{22} & \cdots & a_{1n}+Ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

10. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონი წარმოადგენს სხვა სტრიქონების წრფივ კომბინაციას*, მაშინ ასეთი დეტერმინანტი უდრის ნულს;

11. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ელემენტებს დავუმატებთ სხვა სტრიქონის ელემენტების წრფივ კომბინაციას ამით დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება.

მინორები და ალგებრული დამატებანი

განვიხილოთ n-ური რიგის დეტერმინანტი

---

* y სიდიდეს ეწოდება $x_1, x_2, \cdots x_n$ სიდიდეების წრფივი კომბინაცია, თუ y შეიძლება წარმოვადგინოთ $y = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n$ ტოლობის სახით, სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_n$ მუდმივი სიდიდეებია.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} \cdots a_{ij} \cdots a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nj} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ამოვშალოთ ამ დეტერმინანტიდან i-ური სტრიქონი და j-ური სვეტი, რომელთა გადაკვეთაზე მოთავსებულია a_{ij} ელემენტი. ჩვენ მივიღებთ $(n-1)$ რიგის დეტერმინანტს რომელსაც

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,j-1} & a_{1,j+1} \cdots a_{1n} \\ a_{i-1,1} \cdots a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} \cdots a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} \cdots a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} \cdots a_{i+1,n} \\ a_{n1} \cdots a_{n,j-1} & a_{n,j+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

ეწოდება a_{ij} ელემენტის მ ი ნ ო რ ი .

a_{ij} ელემენტის ა ლ გ ე ბ რ უ ლ ი დ ა მ ა ტ ე - ბ ა A_{ij} ეწოდება ამ ელემენტის მინორს აღებულს /+/ ნიშნით, თუ $i+j$ ინდექსთა ჯამი ლუწი რიცხვია, და /-/ ნიშნით თუ ამ ჯამის რიცხვი კენტია.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

<u>მაგალითი</u> . მოცემულია მეოთხე რიგის დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ -4 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

დავწეროთ a_{22} ელემენტის მინორი და a_{34} ელემენ-ტის ალგებრული დამატება.

ამოხსნა.

$$M_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \qquad A_{34}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტის გამოთვლის მარტივ ხერხს წარმოადგენს მისი დაშლა მინორებად. n-ური რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა დაიყვანება $(n-1)$ რიგის დეტერმინანტის გამოთვლაზე, $(n-1)$ რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა — $(n-2)$ რიგის დეტერმინანტის გამოთვლაზე და ა.შ. ამ მეთოდის თანმიმდევრობით გამოყენებით n-ური რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა დაიყვანება მეორე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლაზე.

მაგალითი. გამოთვალეთ დეტერმინანტი

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 6 \\ 3 & -1 & 9 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 5 & 5 & 3 & 18 \end{vmatrix}$$

ამოხსნა. მეორე სვეტის ელემენტები გავამრავლოთ 3-ზე და გამოვაკლოთ მეოთხე სვეტის ელემენტებს და დავწეროთ მეოთხე სვეტის ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 9 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

ახლა პირველი სტრიქონის ელემენტები გავამრავლოთ 3-ზე და გამოვაკლოთ მეორე სტრიქონის ელემენტებს, გვექნება

$$\Delta = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -7 & -12 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 24.$$

<u>მაგალითი</u>. გამოთვალეთ დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

<u>ამოხსნა</u>. ადვილად შევამჩნევთ, რომ ეს დეტერმინანტი ადვილად გამოითვლება, თუ მას დავშლით მესამე სვეტის ელემენტების მიხედვით. ამ შემთხვევაში გამოსათვლელი იქნება მესამე რიგის დეტერმინანტი იგი გამრავლდება მხოლოდ ელემენტ 2-ის ალგებრულ დამატებაზე. მაშასადამე,

$$\Delta = 2\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 220.$$

<u>მაგალითი</u>. გამოთვალეთ დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -5 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

<u>ამოხსნა</u>. წინა მაგალითიდან ჩანს, რომ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონსა ან სვეტში ნულის არსებობა აადვილებს დეტერმინანტის ამოხსნას. დეტერმინანტის მე-9 თვისების გამოყენებით შეიძლება რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ყველა ელემენტი ერთის გამოკლებით გახდეს ნულის. მართლაც მეორე სტრიქონი გავამრავლოთ /-2/-ზე და მივუმატოთ პი-

რველ სტრიქონს, შემდეგ გავამრავლოთ /-3/-ზე და მივუმატოთ მესამე სტრიქონს, შემდეგ გავამრავლოთ /-5/-ზე და მივუმატოთ მეოთხე სტრიქონს, მივიღებთ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -5 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 14 & -13 & 0 \\ 3 & -4 & 4 & 1 \\ -7 & 9 & -7 & 0 \\ -11 & 18 & -19 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 14 & -13 \\ -7 & 9 & -7 \\ -11 & 18 & -19 \end{vmatrix} = 343$$

§ 4. მოქმედებანი მატრიცებზე

1. მატრიცათა შეკრება

განვიხილოთ მოქმედებანი მატრიცებზე.

ორი ან რამდენიმე მატრიცას შეკრება მხოლოდ მაშინ შეიძლება, თუ მათ აქვთ ერთი და იგივე რაოდენობის სტრიქონები და სვეტები. $A=(a_{ij})_{mn}$ და $B=(b_{ij})_{mn}$ მატრიცების ჯამი ეწოდება ისეთ $C=(c_{ij})_{mn}$ მატრიცას, რომლის თითოეული ელემენტი მიიღება A და B მატრიცების შესაბამისი ელემენტების შეკრებით:

ე.ი. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

მაგალითად, დავუშვათ გვაქვს ორი მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

მაშინ

$$A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 4 & -1 & 4 & 4 \\ 5 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

A მატრიცა შეიძლება გავამრავლოთ რომელიმე λ რიცხვზე /სკალარზე/. ამისათვის მატრიცის ყველა ელემენტი უნდა გავამრავლოთ λ რიცხვზე.

მაგალითად, დავუშვათ $\lambda = 4$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

მაშინ,
$$\lambda \cdot A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 20 & 16 \\ 0 & 24 & -12 \end{pmatrix}.$$

2. მატრიცათა გამრავლება

A მატრიცა მხოლოდ მაშინ შეიძლება გავამრავლოთ B მატრიცაზე, როცა A მატრიცის სვეტების რაოდენობა ემთხვევა B მატრიცის სტრიქონების რაოდენობას.

დავუშვათ მიცემულია ორი მატრიცა:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

A და B მატრიცათა ნამრავლი ეწოდება მესამე C მატრიცას

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix},$$

რომლის ელემენტები გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2}$$

ანუ $$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \,,$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \,.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ A და B მატრიცის ნამრავლი C, სადაც

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ამოხსნა. C მატრიცა უნდა შეიცავდეს ორ სტრიქონს და ორ სვეტს.

მაშასადამე,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

გამოვთვალოთ მისი ელემენტები:

$$c_{11} = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 3\cdot 2 = 7;$$

$$c_{12} = 1\cdot(-1) + 0\cdot 5 + 3\cdot 3 = 8;$$

$$c_{21} = 2\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 2 = 0;$$

$$c_{22} = 2\cdot(-1) + 1\cdot 5 + (-1)\cdot 3 = 0.$$

ამრიგად,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ცხადია, რომ მატრიცათა ნამრავლი არაკომუტატიურია

ე.ი. $$A\cdot B \neq B\cdot A \,.$$

შევნიშნოთ, რომ E ერთეულოვან მატრიცასთან ნე-

ნიმსიერ A მატრიცასთან კომუტატიურია და მასთან ნამრავლში ერთეულის როლს ასრულებს ე.ი. $A\cdot E = E\cdot A = A$.

მატრიცათა შეკრებასა და გამრავლებისათვის ადგილი აქვს არითმეტიკის შემდეგ კანონებს:

1. ასოციატიურობის კანონი:

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$
$$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$$

2. შეკრების კომუტატიურობის კანონი:

$$A+B=B+A$$

3. დისტრიბუტიულობის კანონი:

$$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C\,,$$
$$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C\,,$$
$$\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B\,,$$
$$(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A\,.$$

3. მატრიცის რანგი

განვიხილოთ მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

განსაზღვრულობის მიზნით დავუშვათ, რომ $m \le n$. მოცემული მატრიცის ელემენტებისაგან /მათი გადაადგილების გარეშე/ შეიძლება მივიღოთ მეორე, მესამე, ..., რიგის დეტერმინანტი. დავუშვათ, რომ ყველა დეტერმინანტი m, $(m-1)$ და ა.შ. რომელიმე $(r+1)$ რიგამდე და მისი ჩათვლით ნულის ტოლია, მაგრამ არსებობს ერთი r რიგის დეტერმინანტი, რომელიც განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ r რიცხვს ეწოდება A მატრიცის რანგი.

აშკარად, A მატრიცის რ ა ნ გ ი ეწოდება მოცემული მატრიცის ელემენტებისაგან შედგენილ ნულისაგან განსხვავებულ დეტერმინანტის უმაღლეს რიგს.

მაგალითი. გამოვთვალოთ მატრიცის რანგი:

$$A_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ 7 & 6 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

ამოხსნა. მოცემული მატრიცის ელემენტებისაგან შეიძლება წარმოიქმნას მეორე და მესამე რიგის სხვადასხვა დეტერმინანტები. მაგალითად,

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix};\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix};\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & -3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 7 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

და ა.შ.

მოცემულ შემთხვევაში მესამე რიგის ყველა დეტერმინანტი /სულ არის 6/ ნულის ტოლია, მაგრამ არის თუნდაც ერთი მეორე რიგის დეტერმინანტი, მაგალითად, Δ_1 რომელიც განსხვავებულია ნულისაგან. მაშასადამე, მოცემული მატრიცის რანგი $r=2$

თუ დავაკვირდებით A_1 მატრიცის მესამე სტრიქონს იგი გაორკეცებული პირველი სტრიქონის ელემენტებისა და მეორე სტრიქონის ელემენტების ჯამის ტოლია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, მესამე სტრიქონი წარმოადგენს პირველი ორი სტრიქონების წრფივ კომბინაციას. ამის გამო ყველა მესამე რიგის დეტერმინანტი ნულის ტოლია. იმისათვის, რომ მატრიცის რანგი გამოვთვალოთ,

არ არის საჭირო ყველა $m, (m-1)$ რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა.

დავუშვათ r რიგის დეტერმინანტი, რომელიც მდებარეობს მატრიცის მარცხენა მაღალ კუთხეში განსხვავდება ნულისაგან, გამოვთვალოთ მხოლოდ მისი გარშემომვლები $(r+1)$, $(r+2)\cdots m$ რიგის დეტერმინანტი, თუ ისინი ყველა ნულის ტოლია, მაშინ მატრიცის რანგი r-ის ტოლი იქნება.

მოყვანილ მაგალითში

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

Δ_1 -ის გარშემომვლები დეტერმინანტები იქნებიან:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & -3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}; \quad \Delta_6 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

სხვა მესამე რიგის დეტერმინანტები შეიძლება არ გამოვთვალოთ. რადგანაც $\Delta_3 = \Delta_5 = \Delta_6 = 0$, მატრიცის რანგი 2-ის ტოლია.

<u>განსაზღვრა.</u> მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნა ეწოდება შემდეგ გარდაქმნებს:

1. მატრიციდან ერთი ნულისაგან შედგენილი სტრიქონის /ან სვეტის/ ამოშლა;

2. მატრიცის სტრიქონის /ან სვეტის/ ელემენტების რაიმე რიცხვზე გამრავლება;

3. მატრიცაში ორი სტრიქონის /სვეტის/ გადაადგილება;

4. მატრიცის ერთი სტრიქონის /ერთი სვეტის/ ელემენტების ერთი და იმავე რიცხვზე გამრავლებული სხვა სტრიქონის

/სხვა სვეტის/ ელემენტების მიმატება ;

შეიძლება შემდეგი თეორემების დამტკიცება.

<u>თეორემა</u>. მატრიცების ელემენტარული გარდაქმნები მის რანგს არ ცვლიან.

ამ თეორემის დამტკიცება გამომდინარეობს n-ური რიგის დეტერმინანტის 1,3,5 და 9 თვისებებიდან. ამ თვისებებიდან გამომდინარეობს, აგრეთვე ის, რომ მატრიცას და მის ტრანსპონირებული A^T მატრიცას ერთი და იგივე რანგი აქვთ.

მატრიცის რანგის ცნება გვხვდება წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისას.

§ 5. შებრუნებული მატრიცა

კვადრატული მატრიცის დეტერმინანტი თუ განსხვავდება ნულისაგან მაშინ მას გ ა დ ა უ გ ვ ა რ ე ბ ე ლ ი მატრიცა ეწოდება.

განვიხილოთ გადაუგვარებელი A მატრიცა:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \Delta=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0.$$

<u>განსაზღვრა</u>. A მატრიცის შ ე ბ რ უ ნ ე ბ უ ლ ი მ ა ტ რ ი ც ა ეწოდება ისეთ მატრიცას, რომლის ნამრავლი მარცხნიდან ან მარჯვნიდან მიცემულ მატრიცასთან იძლევა ერთეულოვან მატრიცას.

A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა აღინიშნება A^{-1} სიმბოლოთი. განსაზღვრის ძალით

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E.$$

A მატრიცის შებრუნებულ A^{-1} მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix},$$

სადაც A_{ij} წარმოადგენს A მატრიცის a_{ij} ელემენტის ალგებრულ დამატებას.

მაგალითი. მოცემულია მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

ვიპოვოთ მისი შებრუნებული მატრიცა A^{-1}.

ამოხსნა. შებრუნებული მატრიცის მოსაძებნად საჭიროა გამოვთვალოთ მოცემული მატრიცის დეტერმინანტი და ვიპოვოთ ყველა ელემენტის ალგებრული დამატება.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}=10;$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-5; \quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=8; \quad A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=9;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=10; \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-10; \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-10;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=5; \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-4; \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-7.$$

მაშასადამე,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{5}{10} & \frac{10}{10} & \frac{5}{10} \\ \frac{8}{10} & -\frac{10}{10} & -\frac{4}{10} \\ \frac{9}{10} & -\frac{10}{10} & -\frac{7}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0,8 & -1 & -0,4 \\ 0,9 & -1 & -0,7 \end{pmatrix}.$$

ადვილად შემოწმდება, რომ $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$

სავარჯიშო

1. გამოთვალეთ დეტერმინანტები:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -4 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 0 & -8 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 9 \\ 4 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$

2. შეკრიბეთ მატრიცები:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. იპოვეთ

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 7 & 9 & 0 \end{pmatrix} \text{ და } \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

მატრიცების ნამრავლი.

4. გამოთვალეთ შემდეგ მატრიცების შებრუნებული მატრიცები:

$$1)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 18 & 4 \end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};\quad 3)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. გამოთვალეთ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 & 3 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & -2 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 7 & 14 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & 0 & 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

მატრიცის რანგი.

თავი II. n უცნობიანი m წრფივ განტოლებათა და წრფივ უტოლობათა სისტემები

§ 1. წრფივ განტოლებათა სისტემები

განვიხილოთ n უცნობიან m წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

თუ /1/ განტოლებათა სისტემის მარჯვენა მხარეში მდგომი $b_1, b_2, \dots, b_m$ რიცხვებიდან ყველა ნულის ტოლია, მაშინ სისტემას ალგებრულ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემა ეწოდება. წინააღმდეგ შემთხვევაში- არაერთგვაროვანი სისტემა.

მაშასადამე, ერთგვაროვან სისტემას შემდეგი სახე ექნება:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

/1/ და /2/ განტოლებათა სისტემები მატრიცული სახით ასე ჩაიწერება

$$AX = B \qquad (1)$$

$$AX = O \qquad (2)$$

სადაც A არის /1/ და /2/ განტოლებათა სისტემის უცნობების კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცა.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

ხოლო X და B არის ვექტორსვეტები

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)',$$
$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)'.$$

ზოგჯერ ხელსაყრელია /1/ და /2/ განტოლებათა სისტემის ვექტორული ჩაწერა. ასე, მაგალითად:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n = B,$$
$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n = 0,$$

სადაც $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})'$, $j = 1, 2, \ldots, n$ აღნიშნავს /3/ მატრიცის ვექტორსვეტებს.

<u>განსაზღვრა</u>. განტოლებათა სისტემას ეწოდება თ ა ვ ს ე ბ ა დ ი თუ მას აქვს ერთი ამონახსნი მაინც. წინააღმდეგ შემთხვევაში განტოლებათა სისტემა ა რ ა თ ა ვ ს ე ბ ა დ ი ა

B მატრიცას

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} & b_2 \\ & & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

რომელიც მიიღება A მატრიცასთან თავისუფალი წევრების მიერთებით გ ა ფ ა რ თ ო ე ბ უ ლ ი მატრიცა ეწოდება.

/1/ განტოლებათა სისტემის თავსებადობის საკითხის გასარკვევად გამოიყენება კრონეკერ-კაპელის თეორემა:

n უცნობიან m განტოლებათა სისტემა თავსებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც A მატრიცის რანგი და B

მატრიცის რანგი ერთმანეთის ტოლია*. ამასთან თუ ორივე მატრიცის რანგი r უცნობთა რიცხვის ტოლია ე.ი. $r = n$, მაშინ განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, თუ $r < n$, მაშინ სისტემას აქვს ამოხსნათა უსასრულო სიმრავლე.

მაგალითად, სისტემას

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

აქვს ერთადერთი ამოხსნა, ვინაიდან A და B მატრიცების რანგი ერთმანეთის ტოლია და უდრის 2-ს, ე.ი. უცნობთა რაოდენობას.

ამ სისტემის ამოხსნით მიიღება $x_1 = -1$ და $x_2 = 5$.

განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 7 \\ 2{,}25x_1 + 3x_2 = 5{,}25 \end{cases}$$

აქვს ამოხსნათა უსასრულო სიმრავლე. ვინაიდან $r(A) = r(B) = 1$,

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2{,}25 & 3 \end{vmatrix}, \quad r(A) = 1, \quad A_b = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2{,}25 & 3 & 5{,}25 \end{vmatrix} \quad r(A_b) = 1.$$

ხოლო უცნობთა რიცხვი $n = 2$. ამოხსნა x_2-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის გამოითვლება ფორმულით:

$$x_1 = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}x_2,$$

რადგანაც მეორე განტოლება მიიღება პირველი განტოლების 3/4-ზე გამრავლების შედეგად, შევნიშნავთ, რომ გეომეტრიულად ორივე განტოლება ერთი წრფე წირით გამოიხატება.

---

* აქ და შემდეგში თეორემები დამტკიცების გარეშე მოგვაქვს მიცემული. დაინტერესებულ პირებს თეორემების დამტკიცება შეუძლიათ იხილონ უმაღლესი ან წრფივი ალგებრის სახელმძღვანელოებში.

განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2=7 \\ 2,25x_1+3x_2=1 \end{cases}$$

არათავსებადია, ე.ი. არ აქვს არც ერთი ამონახსნი. ამ სისტემისათვის $r(A)=1$, $r(A_b)=2$. თუ პირველ განტოლებას გავამრავლებთ 3/4-ზე, მაშინ განტოლებათა მარცხენა ნაწილები ერთმანეთის ტოლი გახდება, მარჯვენა ნაწილები კი არა. თავის-თავად ცხადია, რომ განტოლებები არათავსებადია. გეომეტრიულად ისინი წარმოადგენენ ორ პარალელურ წრფეს რომლებიც არ გადაიკვეთებიან.

§ 2. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა დეტერმინანტების გამოყენებით

განვიხილოთ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n; \end{cases} \qquad (1)$$

სადაც განტოლებათა რიცხვი უცნობთა რიცხვის ტოლია $m=n$ დავუშვათ, რომ ამ სისტემის მატრიცის რანგი $r(A)=n$. ეს იმას ნიშნავს რომ ამ მატრიცისაგან შედგენილი დეტერმინანტი $|A|\neq 0$. (1) სისტემა ჩავწეროთ მატრიცული სახით

$$AX=B \qquad (2)$$

და ვიპოვოთ მისი ამონახსნი.

ვინაიდან $|A|\neq 0$, ამიტომ არსებობს A მატრიცის შებრუნებული A^{-1} მატრიცა.

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ /2/ განტოლებათა სისტემას

აქვს ერთადერთი X ამონახსნი, ეს განტოლება გავამრავლოთ მარცხნიდან A^{-1}-ზე მივიღებთ

$$\begin{aligned} A^{-1}\cdot AX &= A^{-1}\cdot B \\ E\cdot X &= A^{-1}\cdot B \\ X &= A^{-1}\cdot B \end{aligned} \qquad (3)$$

ვინაიდან გადაუგვარებელ მატრიცას მხოლოდ ერთადერთი შებრუნებული მატრიცა აქვს, ეს იმას ნიშნავს, რომ A^{-1} ცალსახადაა განსაზღვრული. ამიტომ /1/ განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი რომელიც მოცემულია /3/ ტოლობით.

ვაჩვენოთ, რომ /1/ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი მოცემულია /3/ ტოლობით.

მართლაც,

$$A\cdot X = A\cdot(A^{-1}\cdot B) = (A\cdot A^{-1})\cdot B = E\cdot B = B$$

გადაუგვარებელი მატრიცის შებრუნებული მატრიცისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$A^{-1} = (\overline{a_{ij}}),$$

სადაც

$$\overline{a_{ij}} = \frac{A_{ji}}{|A|}$$

მატრიცთა გამრავლების წესის საფუძველზე $A^{-1}\cdot B$ იქნება ვექტორი, რომლის j-ური კოორდინატა

$$C_j = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{jk}}\, b_k = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} A_{kj} b_k, \quad j=1,2,\dots,n \qquad (4)$$

თუ გამოვიყენებთ დეტერმინანტის გაშლას სვეტის ელემენტების მიხედვით, მაშინ /4/ ტოლობის მარჯვენა მხარეში შემავალი ჯამი

$$\sum_{k=1}^{n} A_{kj} b_k$$

ისეთი დეტერმინანტი იქნება, რომელიც მიიღება A მატრიცისაგან, თუ j-ურ სვეტს შევცვლით თავისუფალი წევრებით, ე.ი.

$$\sum_{k=1}^{n} A_{kj} b_k = |(A_1, \dots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \dots, A_n)|,$$

საიდანაც /4/ ტოლობა შემდეგნაირად ჩაიწერება.

$$C_j = \frac{|(A_1, \dots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \dots, A_n)|}{|A|} = \frac{|(A_1, \dots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \dots, A_n)|}{|(A_1, A_2, \dots, A_n)|}$$

ამრიგად, მოიძებნა $A^{-1}B$ ვექტორსვეტის C_{ij} კოორდინატები. თუ საძიებელი X ვექტორის შესაბამის კოორდინატებს აღვნიშნავთ x_j-ით, მაშინ /3/ ტოლობა ასე ჩაიწერება

$$x_j = \frac{|(A_1, \dots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \dots, A_n)|}{|(A_1, A_2, \dots, A_n)|} \qquad (5)$$

/5/ ფორმულები გაშლილი სახით ასე ჩაიწერება

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

ამ ფორმულებს *კ რ ა მ ე რ ი ს   ფ ო რ მ უ ლ ე ბ ი* ეწოდება.

წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის წესი, რომელიც მიღებულია კრამერის /5/ ფორმულებით ასე გამოითქმის.

თუ არაერთგვაროვანი წრფივ განტოლებათა სისტემის კვადრატული მატრიცა გადაუგვარებელია, მაშინ სისტემას აქვს ერთად-

ერთი ამონახსნი - ამონახსნთა ვექტორი, მისი j-ური კო-ორდინატა არის წილადი, რომლის მნიშვნელია კვადრატული მატრიცის დეტერმინანტი, ხოლო მრიცხველი მიიღება მნიშვნელისაგან, თუ j-ურ სვეტს შევცვლით თავისუფალი წევრებით.

მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2=7 \\ 4x_1+x_2=1 \end{cases}$$

ამოხსნა. გამოვთვალოთ სისტემის დეტერმინანტი $|A|$

$$|A|=|(A_1,A_2)|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-5\neq 0$$

/5/ ფორმულის მრიცხველებისათვის მივიღებთ:

$$|(B,A_2)|=\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=5$$

$$|(A_1,B)|=\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-25$$

მაშასადამე, კრამერის /5/ ფორმულების გამოყენებით გვექნება

$$x_1=\frac{5}{-5}=-1\,, \quad x_2=\frac{-25}{-5}=5$$

1. წრფივ განტოლებათა სისტემის მატრიცული ამოხსნა

შებრუნებული მატრიცის გამოყენებით შეიძლება n უცნობიანი n წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა მატრიცული სახით.

როგორც ვიცით /1/ განტოლებათა სისტემა მატრიცული სახით ასე ჩაიწერება:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (6)$$

ანუ

$$AX = B \qquad (7)$$

ამ განტოლების ამოხსნა ჩაიწერება /3/ ფორმულით ე.ი.

$$X = A^{-1} \cdot B, \qquad \text{როდესაც} \quad |A| \neq 0 .$$

ე.ი. უნდა მოიძებნოს A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა და გამრავლდეს B ვექტორ-სვეტზე.

<u>მაგალითი:</u> ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

<u>ამოხსნა.</u> შევადგინოთ უცნობის კოეფიციენტებისაგან მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ამ მატრიცის შებრუნებული მატრიცა იქნება

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{26} & \frac{9}{26} & -\frac{7}{26} \\ -\frac{4}{13} & \frac{1}{3} & \frac{5}{13} \\ \frac{7}{26} & -\frac{5}{26} & \frac{1}{26} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{26} & \frac{9}{26} & -\frac{7}{26} \\ -\frac{4}{13} & \frac{1}{3} & \frac{5}{13} \\ \frac{7}{26} & -\frac{5}{26} & \frac{1}{26} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}$$

აქედან:

$$x_1 = \frac{3}{26}\cdot 16 + \frac{9}{26}\cdot 10 - \frac{7}{26}\cdot 16 = 1;$$

$$x_2 = -\frac{4}{3}\cdot 16 + \frac{1}{3}\cdot 10 + \frac{5}{13}\cdot 16 = 2;$$

$$x_3 = \frac{7}{26}\cdot 16 - \frac{5}{26}\cdot 10 + \frac{1}{26}\cdot 16 = 3.$$

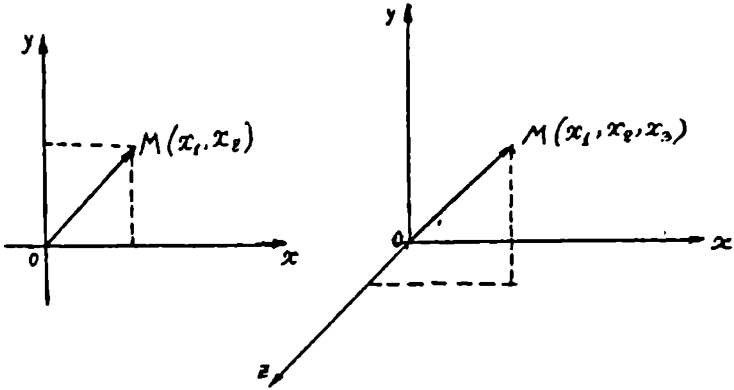
§ 3. n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცე

ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ სიბრტყეზე წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული წყვილით (x, y), რომელთაც ამ წერტილის კოორდინატები ეწოდებათ. სიბრტყეზე ყოველ წერტილს შეესაბამება განსაზღვრული რიცხვთა წყვილი და პირიქით, ყოველ რიცხვთა წყვილს შეესაბამება სიბრტყეზე ერთადერთი წერტილი. ასევეა სამგანზომილებიან სივრცეში, რომელშიაც წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება სამი რიცხვით (x, y, z) /აბსცისა, ორდინატა, აპლიკატა/.

ორ და სამგანზომილებიანი სივრცეების ანალოგიურად განიხილება ე.წ. n-განზომილებიანი სივრცე, სადაც n-ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვია.

n-განზომილებიან სივრცეში წერტილი განისაზღვრება n რიცხვთა $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ საშუალებით, რომელთაც მათი კოორდინატები ეწოდებათ.

განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. ყოველი M წერტილი სიბრტყეზე განისაზღვრება x_1 და x_2 კოორდინატებით, რომლებიც გვიჩვენებენ წერტილის დაშორებას კოორდინატთა ღერძებიდან. x_1 და x_2 რიცხვებით გარდა წერტილისა ვექტორის მოცემაც შეიძლება. შევაერთოთ M წერტილი კოორდინატთა სათავესთან წრფით. M წერტილის კოორდინატები იქნებიან $\overrightarrow{OM}$ ვექტორის მდგენელები.



ა/ ბ/

ნახ. 1.

ანალიტიკურად შეიძლება წარმოვიდგინოთ სამგანზომილებიანი სივრცის ყოველი წერტილი $\vec{OM}$ ვექტორის სახით /ნახ.1,ბ/.

ძირითადი განსაზღვრებანი. n-განზომილებიანი ვექტორი ეწოდება n ნამდვილ რიცხვთა $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ დალაგებულ სიმრავლეს, $x_1, x_2, \dots, x_n$ რიცხვებს ეწოდება ვექტორის კოორდინატები.

ყველა n-განზომილებიან ვექტორების სიმრავლეს ეწოდება n განზომილებიან ვექტორთა სივრცე.

ორ n განზომილებიან ვექტორს $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $B(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ეწოდება ტოლი $A=B$ თუ მათი შესაბამისი კოორდინატები ტოლია ე.ი. $x_i = y_i$ $(i=1,2,\dots,n)$.

n-განზომილებიანი ვექტორი შეიძლება გავამრავლოთ რომელიმე რიცხვზე /სკალარი/, ამისათვის საჭიროა ვექ-

ტორის თითოეული კოორდინატი გავამრავლოთ ამ რიცხვზე. თუ $A=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ და λ რომელიმე რიცხვია, მაშინ

$$\lambda A = (\lambda x_1 + \lambda x_2 + \dots + \lambda x_n)$$

n - განზომილებიან ვექტორს ეწოდება ნ უ ლ ო ვ ა ნ ი თუ მისი ყველა კოორდინატი ნულის ტოლია და აღინიშნება ასე 0 / 0, 0, ..., 0/.

n - განზომილებიანი ორი ვექტორის ჯ ა მ ი ეწოდება მესამე ვექტორს, რომლის კოორდინატები მიიღება მოცემული ვექტორების შესაბამისი კოორდინატების შეკრებით.

ვექტორთა შეკრებისა და ვექტორების რიცხვზე გამრავლებისათვის ადგილი აქვს არითმეტიკულ კანონებს - ასოციატივობის, კომუტატიურობის და დისტრიბუტიულობის კანონებს.

1. ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულება

A ვექტორს ეწოდება B ვექტორის პ რ ო პ ო რ ც ი - უ ლ ი თუ არსებობს ისეთი K რიცხვი, რომლისთვისაც $A=KB$. თუ გავითვალისწინებთ ორი ვექტორის ტოლობის განსაზღვრას, მაშინ A და B ვექტორების პროპორციულობა ნიშნავს ისეთი K რიცხვის არსებობას, რომლისთვისაც $x_1=Ky_1$, $x_2=Ky_2$, ..., ..., $x_n=Ky_n$. მაგალითად, $A=(1,-1,2,3)$; $B=(2,-2,4,6)$ პროპორციული ვექტორებია, რადგან $A=2B$.

ორი ვექტორის პროპორციულობის განზოგადებას წარმოადგენს ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულება.

დავუშვათ მოცემულია K n-განზომილებიანი ვექტორები: $A_1, A_2, \dots, A_s$ და K ნებისმიერი რიცხვები $C_1, C_2, \dots, C_s$. $A_1, A_2, \dots, A_s$ ვექტორებს ეწოდებათ წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ი თუ $C_1, C_2, \dots, C_s$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და ადგილი აქვს ტოლობას

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \dots + c_sA_s = 0 \qquad (1)$$

ვექტორთა $A_1, A_2, \dots, A_s$ სისტემას ეწოდება, /1/ წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ი თუ არ არსებობს $c_1, c_2, \dots, c_s$ რიცხვები რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან ისეთი, რომ

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \dots + c_sA_s = 0.$$

$A_1, A_2, \dots, A_s$ ვექტორების წ რ ფ ი ვ ი კ ო მ ბ ი ნ ა ც ი ა ეწოდება ჯამს

$$A = c_1A_1 + c_2A_2 + \dots + c_sA_s,$$

სადაც $c_1, c_2, \dots, c_s$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.

მაგალითად, ვთქვათ მოცემულია სამი ოთხგანზომილებიანი ვექტორი $A_1 = (2, 1, 0, 3)$, $A_2 = (3, -2, 1, 4)$, $A_3 = (0, 1, 3, 2)$.
ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ვექტორი $A = (-5, 13, 12, 4)$ არის A_1, A_2 და A_3 ვექტორთა წრფივი კომბინაცია.

სინამდვილეში, მართლაც არის სამი რიცხვი $c_1 = 2$; $c_2 = -3$; $c_3 = 5$, ისეთები, რომ

$$A = c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3$$ ანუ

$$(-5, 13, 12, 4) = 2\cdot(2, 1, 0, 3) + (-3)\cdot(3, -2, 1 - 4) + 5\cdot(0, 1, 3, 2).$$

ვექტორთა წრფივი დამოკიდებულების განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ ამ ვექტორებიდან ერთი მაინც წარმოადგენს დანარჩენების წრფივ კომბინაციას.

მართლაც, ვთქვათ, /1/ ტოლობაში $c_1 \neq 0$, მაშინ მივიღებთ

$$A_1 = -\frac{c_2}{c_1}A_2 - \frac{c_3}{c_1}A_3 - \dots - \frac{c_s}{c_1}A_s,$$

ე.ი. $\mathcal{X}_1 = b_2A_2+b_3A_3+\cdots+b_sA_s$ (2)

მაშასადამე, A_1 ვექტორი წარმოადგენს დანარჩენი ვექტორების წრფივ კომბინაციას. პირიქით, თუ /2/ ტოლობას აქვს ადგილი, მაშინ $A_1, A_2, \dots, A_s$ ვექტორთა სისტემა იქნება წრფივად დამოკიდებული. მართლაც, თუ /2/ ტოლობას გადავწერთ /1/ ტოლობის სახით, მაშინ $C_1, C_2, \dots, C_s$ რიცხვებისათვის მივიღებთ მნიშვნელობებს:

$C_1=-1,\ C_2=b_2, \dots, C_s=b_s$, რომელთაგან $C_1\neq 0$, მაგალითად, $A_1=(5,2,1)$, $A_2=(-1,3,3)$ $A_3=(9,7,5)$ და $A_4=(3,8,7)$ წრფივად დამოკიდებული ვექტორებია, რადგანაც $4A_1-A_2-3A_3+2A_4=0$.

2. წრფივად დამოკიდებულების დადგენა

განვიხილოთ n-განზომილებიანი m ვექტორი $A_1=(a_{11},a_{12},\dots,a_{1n})$; $A_2=(a_{21},a_{22},\dots,a_{2n})$; ...; $A_m=(a_{m1},a_{m2},\dots,a_{mn})$, აქედან შევადგინოთ ისეთი მატრიცა, რომლის ელემენტებია ვექტორის კოორდინატები

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

მიცემულ ვექტორთა ერთობლიობის წრფივად დამოკიდებულების საკითხის გადასაწყვეტად გამოიყენება თეორემა:

თ ე ო რ ე მ ა , $A_1, A_2, \dots, A_n$ ვექტორთა სისტემის წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი ამ ვექტორთა კოორდინატებისაგან შედგენილი მატრიცის რანგის ტოლია.

მაგალითად, მოცემულია სამი ვექტორი

$$A_1=(1,3,0,-2,4);\ A_2=(0,2,1,3,5);\ A_3=(5,11,-2,-16,10)$$

და საჭიროა გაირკვეს მათ წრფივად დამოკიდებულების საკითხი. ამისათვის უნდა შევადგინოთ მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 11 & -2 & -16 & 10 \end{pmatrix}$$

და გამოვთვალოთ მისი რანგი. გამოთვლით აღმოჩნდება, რომ რანგი $r=2$. მაშასადამე, მოცემული სამი ვექტორიდან ორი წრფივად დამოუკიდებელია, მესამე კი წარმოადგენს დანარჩენი ორის წრფივ კომბინაციას, მართლაც,

$$A_3=5A_1-2A_2, \quad \text{ანუ} \quad 5A_1-2A_2-A_3=0.$$

ზოგად შემთხვევაში $A_1, A_2, \dots, A_m$ ვექტორებს შორის წრფივი დამოუკიდებლობის დადგენისათვის /თუ იგი არსებობს/ საკმარისია ვექტორული ტოლობისაგან $c_1A_1+c_2A_2+\dots+c_mA_m=0$ მიღებული წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა. ვაჩვენოთ ეს კონკრეტულ მაგალითზე.

<u>მაგალითი</u>. დავადგინოთ $A_1=(1,0,2,3)$, $A_2=(-4,9,4,9)$, $A_3=(-2,3,0,1)$ ვექტორებს შორის წრფივი დამოკიდებულება.

<u>ამოხსნა</u>. გამოვთვალოთ A მატრიცის რანგი

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & 9 & 4 & 9 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

დავრწმუნდებით, რომ $r=2$, მაშასადამე, A_1, A_2, A_3 ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია. ეს იმას ნიშნავს, რომ არ-

სებობს ისეთი c_1, c_2, c_3 რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, ისე რომ

$$c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3=0$$

ჩვენ მივიღეთ ორი ვექტორის ტოლობა /მარჯვნივ არის ნულოვანი ვექტორი/, რომლისგანაც გამომდინარეობს შესაბამისი კოორდინატების ტოლობა. მაშინ მიიღება ოთხი განტოლება სამი უცნობით (c_1, c_2, c_3).

$$c_1(1,0,2,3)+c_2(-4,9,4,9)+c_3(-2,3,0,1)=(0,0,0,0).$$

აქედან

$$\begin{aligned} 1\cdot c_1-4\cdot c_2-2\cdot c_3&=0\\ 0\cdot c_1+9\cdot c_2+3\cdot c_3&=0\\ 2\cdot c_1+4\cdot c_2+0\cdot c_3&=0\\ 3\cdot c_1+9\cdot c_2+1\cdot c_3&=0 \end{aligned}$$

A მატრიცის რანგი $r=2$. c_1, c_2, c_3 უცნობების კოეფიციენტები წარმოქმნიან A მატრიცის ტრანსპონირებულ მატრიცას და, მაშასადამე, მისი რანგიც 2-ის ტოლია. ამის გამო შეიძლება ამოვხსნათ ნებისმიერი ორი წრფივი დამოკიდებული განტოლება, მაგალითად პირველი და მეორე

$$\begin{aligned} c_1-4c_2-2c_3&=0\\ 9c_2+3c_3&=0, \end{aligned}$$

ანუ

$$\begin{aligned} c_1-4c_2&=2c_3,\\ 9c_2&=-3c_3 \end{aligned}$$

მივიღოთ $c_3=1$, მაშინ $c_1=\frac{2}{3}$; $c_2=-\frac{1}{3}$, მაშასადამე, წრფივი დამოკიდებულება ჩაიწერება ასე:

$$\frac{2}{3}A_1-\frac{1}{3}A_2+A_3=0,\quad 2A_1-A_2+3A_3=0.$$

3. ბაზისის ცნება

n-განზომილებიანი სივრცის ბ ა ზ ი ს ი ეწოდება n წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებისაგან შედგენილ ყოველგვარ სისტემას, რომლითაც წრფივად გამოისახება ამ სივრცის ნებისმიერი ვექტორი.

ვექტორთა რაოდენობას მაქსიმალურ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაში ეწოდება ვექტორული სივრცის რ ა ნ გ ი

დავუშვათ $A_1, A_2, \dots, A_n$ არიან n-განზომილებიანი სივრცის n წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორები. მაშინ ამ სივრცის ყველა სხვა B ვექტორი წარმოადგენს $A_1, A_2, \dots, A_n$ ვექტორების წრფივ კომბინაციას ე.ი.

$$B = c_1A_1 + c_2A_2 + \dots + c_nA_n.$$

ჩვენ ვამბობთ, რომ B ვექტორი გაშლილია $A_1, A_2, \dots, A_m$ ვექტორების მიხედვით, ან B ვექტორი წარმოდგენილია $A_1, A_2, \dots, A_n$ ბაზისში.

n -განზომილებიან სივრცეში არსებობს სხვადასხვა ბაზისების უსასრულო სიმრავლე. დავუშვათ, მაგალითად, $A_1, A_2, \dots, A_n$ ვექტორები ქმნიან ბაზისს. დავუშვათ, შემდეგ, რომ B_1 არის სივრცის ნებისმიერი ვექტორი, რომელიც არ ემთხვევა $A_1, A_2, \dots, A_n$ ვექტორებიდან არც ერთს და არ ეტოლება ამ ვექტორების r წრფივ კომბინაციას, თუ $r<n$, B_1 ვექტორი შეიძლება გაიშალოს ბაზისის $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ვექტორების მიხედვით.

$$B_1 = c_{11}A_1 + c_{12}A_2 + \dots + c_{1n}A_n.$$

მიღებული ვექტორული განტოლება შეიძლება ამოიხსნას რომელიმე ბაზისური ვექტორის მიმართ, დავუშვათ ეს არის A_k ვექტორი:

$$A_k = -\frac{c_{11}}{c_{1k}} \cdot A_1 - \frac{c_{12}}{c_{1k}} A_2 - \cdots - \frac{c_{1,k-1}}{c_{1k}} A_{k-1} +$$

$$+ \frac{1}{c_{1k}} B_1 - \frac{c_{1,k+1}}{c_{1k}} A_{k+1} - \cdots - \frac{c_{1n}}{c_{1k}} A_n$$

$$A_1, \quad A_2, \ldots, A_{k-1}, B_1, A_{k+1}, \ldots, A_n$$

წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია, წინააღმდეგ შემთხვევაში B_1 ვექტორი წარმოადგენდა $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_n$ ვექტორთა $(n-1)$ წრფივ კომბინაციას.

ამრიგად, $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, B_1, A_{k+1}, \ldots, A_n$ ქმნიან სივრცის ახალ ბაზისს.

A_k ბაზისური ვექტორის B_1 ვექტორით შეცვლას ეწოდება შ ე ნ ა ც ვ ლ ე ბ ი ს ო პ ე რ ა ც ი ა

ვექტორთა შენაცვლების ოპერაციის ანალოგიური გარდაქმნებით შეიძლება $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ბაზისიდან $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ბაზისზე გადასვლა. ბაზისში ვექტორთა შენაცვლება გამოიყენება წრფივი პროგრამირების ამოცანების ამოხსნისას.

4. ერთეულოვანი ბაზისი

n-განზომილებიანი სივრცის სხვადასხვა შესაძლო ბაზისებიდან შეიძლება გამოვყოთ ე.წ. ე რ თ ე უ ლ ო ვ ა ნ ი ბ ა ზ ი ს ი , რომელიც შედგება ერთეულოვანი ვექტორებისაგან:

$$E_1 = (1, 0, \cdots, 0), \; E_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \; E_n = (0, 0, \cdots 0, 1)$$

ნებისმიერი ვექტორი ერთეულოვან ბაზისში წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)=x_1E_1+x_2E_2+\cdots x_nE_n.$$

მაგალითად, სამგანზომილებიან სივრცეში ვექტორები: $E_1=(1,0,0)$, $E_2=(0,1,0)$, $E_3=(0,0,1)$ წარმოქმნიან ერთეულოვან ბაზისს. დავუშვათ $x_1=(3, 5, 8)$ არის ამ სივრცის ვექტორი, მაშინ გვაქვს,

$$x_1=(3,5,8)=3\cdot(1,0,0)+5(0,1,0)+$$
$$+8\cdot(0,0,1)=3E_1+5E_2+8E_3.$$

მარცხენა და მარჯვენა ნაწილების შესაბამისი კოორდინატების ტოლობა ნათელია:

$$3=3\cdot1+5\cdot0+8\cdot0,$$
$$5=3\cdot0+5\cdot1+8\cdot0,$$
$$8=3\cdot0+5\cdot0+8\cdot1.$$

§ 4. წერტილთა ამოზნექილი სიმრავლე და ამოზნექილი მრავალკუთხედები

განსაზღვრა. $M_1, M_2, \ldots, M_n$ წერტილთა ამოზნექილი წრფივი კომბინაცია ეწოდება ნებისმიერ M წერტილს ისეთს, რომ

$$M=\alpha_1M_1+\alpha_2M_2+\cdots+\alpha_nM_n,$$

სადაც $\alpha_i \geqslant 0 \quad i=1,2,\ldots,n$ და

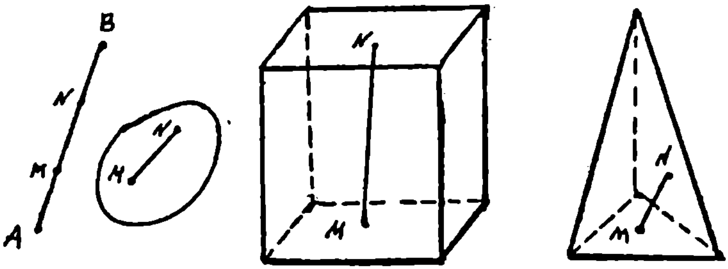
$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1.$$

განსაზღვრა. წერტილთა სიმრავლეს ეწოდება ამოზნექილი, თუ ამ სიმრავლის წერტილთა ნებისმიერი ამოზნექილი წრფივი კომბინაცია ამავე სიმრავლეს ეკუთვნის.

ამოზნექილი სიმრავლის ნებისმიერი ორი წერტილის შე-

მაერთებელი მონაკვეთის ყოველი წერტილი ამავე სიმრავლეს ეკუთვნის.

ამოზნექილი სიმრავლის უმარტივესი მაგალითია მონაკვეთი, უსასრულო წრფე, სიბრტყე, სფერო, პარალელეპიპედი, პირამიდა და სხვ. /ნახ.2/



ნახ. 2.

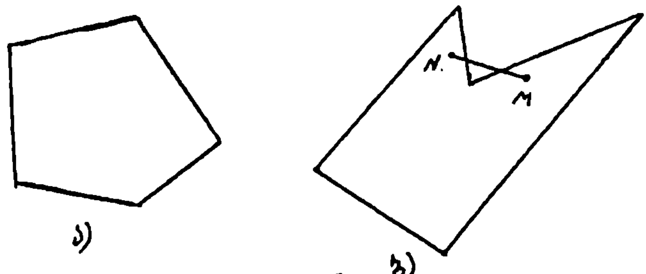
მართლაც თუ ავიღებთ M და N წერტილებს ამ გეომეტრიულ გამოსახულებებზე და შევაერთებთ მათ მონაკვეთით, ამ მონაკვეთის ყოველი წერტილი ეკუთვნის მოცემულ გეომეტრიულ გამოსახულებას.

ამოზნექილი სიმრავლის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ამოზნექილი მრავალკუთხედი /ნახ.3 ა/.

მრავალკუთხედი /ნახ.3 ბ/. არ არის ამოზნექილი, ვინაიდან M და N წერტილები მასზე მდებარეობენ, მაგრამ მასზე არ მდებარეობენ M და N წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის ყველა წერტილი.

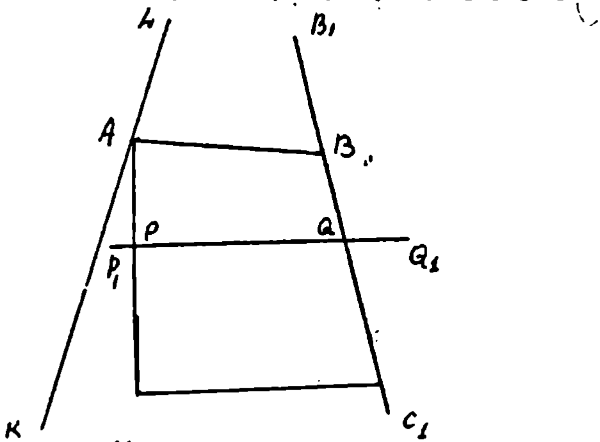
ამოზნექილი მრავალკუთხედისათვის დამახასიათებელი თვი-

სებაა ის რომ იგი მოთავსებულია მისი შემადგენელი წრფე-



ნახ. 3.

ების ცალ მხარეზე /ნახ. 3 ა/ პირიქით, მრავალკუთხედი ბ /ნახ.3 /ამ თვისებით არ ხასიათდება. ნებისმიერი ამოზნექილი მრავალკუთხედი სიბრტყეს ყოფს ორ ნაწილად /ნახ. 4/ ერთ-ერთ მათგანზე მდებარეობს შიგა წერტილები, ხოლო მეორეზე გარე



ნახ. 4.

წერტილები. ცხადია, რომ მრავალკუთხედის შიგნით, ან მის გვერ-

დზე მდებარე ყოველი წერტილი, წვეროს გარდა, შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს როგორც ამ მრავალკუთხედის სხვა წერტილების ამოზნექილი წრფივი კომბინაცია. მრავალკუთხედის წვეროები კი არ წარმოიდგინებიან ორი რომელიმე სხვა წერტილების ამოზნექილი კომბინაციით. სხვანაირად, რომ ვთქვათ მრავალკუთხედის წვერო არ აღმოჩნდება ამოზნექილ მრავალკუთხედზე მთლიანად მდებარე რომელიმე მონაკვეთის შიგნით. ამ აზრით მრავალკუთხედის წვეროები წარმოადგენენ საზღვრით წერტილებს. ზოგჯერ მათ ექსტრემალურ წერტილებსაც უწოდებენ.

წრფეწირი სიბრტყეზე შეიძლება არ გადაიკვეთოს მრავალკუთხედით, შეიძლება გადაიკვეთოს და ჰქონდეს საერთო ერთი წერტილი, ან წერტილთა უსასრულო სიმრავლე.

KL წრფეს აქვს მრავალკუთხედთან ერთი საერთო წერტილი– A წვერო. ამასთან მთელი მრავალკუთხედი მდებარეობს ამ წრფის ერთ მხარეზე /ნახ.4/, B_1C_1 წრფეს ამოზნექილ მრავალკუთხედთან აქვს საერთო წერტილთა უსასრულო სიმრავლე,

გვერდის ყველა წერტილები. მრავალკუთხედი აქაც მდებარეობს ამ წრფის ერთ მხარეზე.

განსაზღვრა. წრფეწირს ეწოდება ს ა ყ რ დ ე ნ ი, თუ მას ამოზნექილ მრავალკუთხედთან აქვს ერთი მაინც საერთო წერტილი და მრავალკუთხედი მთლიანად მდებარეობს ამ წრფის ერთ მხარეზე.

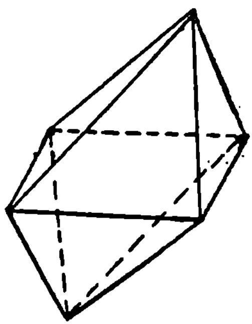
KL და B_1L_1 წრფეები საყრდენი წრფეებია, ხოლო P_1Q_1 წრფე, თუმცა მას აქვს მრავალკუთხედთან საერთო წერტილები PQ მონაკვეთზე, არ წარმოადგენს საყრდენს.

მრავალკუთხედის ყოველ წვეროზე შეიძლება გავატაროთ საყრდენი წრფეების უსასრულო სიმრავლე.

სამგანზომილებიან სივრცეში სიბრტყეზე ამოზნექილი

მრავალკუთხედის ანალოგია ამოზნექილი მრავალწახნაგა. ამოზნექილი მრავალწახნაგა მიიღება სიბრტყეთა გადაკვეთით. მისი წახნაგებია ამოზნექილი მრავალკუთხედები.

ამოზნექილი მრავალწახნაგები ნებისმიერ ორ წერტილთან ერთად შეიცავენ მთელ მათ შემაერთებელ მონაკვეთს. მრავალწახნაგას წვეროები წარმოადგენენ მის სასაზღვრო, ანუ ექსტრემალურ წერტილებს იმ აზრით, რომ არც ერთი მათგანი არ არიან ამოზნექილ მრავალწახნაგზე მდებარე მონაკვეთის შიდა წერტილები. ამოზნექილი მრავალწახნაგის მაგალითია პარალელეპიპედი, პირამიდა, კრისტალი და ა.შ.



ნახ. 5.

საყრდენი წრფის ანალოგიურად შეიძლება განვმარტოთ საყრდენი სიბრტყე.

ყოველგვარ სიბრტყეს, რომელსაც ამოზნექილ მრავალწახნაგასთან აქვს ერთი მაინც ისეთი საერთო წერტილი, რომ მრავალწახნაგა მდებარეობს მისგან ერთ მხარეზე ეწოდება ს ა ყ რ დ ე ნ ი სიბრტყე.

საყრდენ სიბრტყეს შეიძლება ჰქონდეს ამოზნექილი მრავალ-

წახნაგსაში საერთო წერტილი /მრავალწახნაგის წვეროები/, წრფე/წიბო/, და ბოლოს -საერთო წახნაგი.

§ 5. წრფივ უტოლობათა სისტემები

წრფივი პროგრამირების ამოცანების ამოხსნის დროს საჭიროა ამოიხსნას არა მარტო წრფივ განტოლებათა, არამედ წრფივ უტოლობათა სისტემებიც, რომელთა ამოხსნაც მჭიდროდ უკავშირდება ამოზნექილი მრავალკუთხედებისა და ამოზნექილი მრავალწახნაგების ცნებას.

განვიხილოთ წრფივ უტოლობათა სისტემის ამოხსნის ცნება და ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერ წრფივ უტოლობათა სისტემა შეიძლება შეიცვალოს მისი ეკვივალენტური განტოლებათა სისტემით. სწორედ ამის გამო ის, რომ წრფივი პროგრამირების ზოგადი ამოცანის ჩამოყალიბებისას შეიძლება შემოვისაზღვროთ განტოლებათა / და არა უტოლობათა/ სისტემის განხილვით.

ვთქვათ მოცემულია n უცნობიანი m უტოლობათა სისტემა:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\le b_2 \qquad (1) \\
\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad &\cdot \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\le b_m
\end{aligned}
$$

განსაზღვრა. /1/ უტოლობათა სისტემის ამოხსნა, ეწოდება უცნობთა $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, $\dots$, $x_n=\alpha_n$ ისეთ ერთობლიობას, რომლებიც იგივურად აკმაყოფილებს უტოლობათა ყველა სისტემას.

/1/ სისტემა თ ა ვ ს ე ბ ა დ ი ა თუ მას აქვს ერთი მაინც ამონახსნი.

/1/ უტოლობათა სისტემა შეიძლება შეიცვალოს $n+m$

უცნობიანი m განტოლებათა სისტემით. თუ /1/ უტოლობების მარცხენა ნაწილს დავუმატებთ არაუარყოფით $y_1, y_2, \dots, y_m$ სიდიდეებს მივიღებთ /1/ უტოლობათა სისტემის შემცველ /2/ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2 &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + y_m &= b_m \end{aligned} \qquad (2)$$

ცხადია, რომ /1/ სისტემის ყოველგვარი ამონახსნი არის იმავე დროს /2/ სისტემის ამონახსნიც. მართლაც, დავუშვათ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ არის /1/ უტოლობათა სისტემის ამონახსნი. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n &\le b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n &\le b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n &\le b_m \end{aligned}$$

თუ უტოლობათა მარცხენა ნაწილებს დავუმატებთ ისეთ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ რიცხვებს, რომ ისინი გადაიქცნენ ტოლობებად, მაშინ ცხადია, რომ უცნობთა მნიშვნელობანი $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$, $y_1 = \beta_1, y_2 = \beta_2, \dots, y_m = \beta_m$ იქნებიან /2/ სისტემის ამონახსნიც. ამგვარად, /1/ სისტემის ამონახსნი ე.ი. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ აკმაყოფილებენ აგრეთვე /2/ განტოლებათა სისტემასაც და პირიქით: თუ $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n, y_1 = \beta_1, y_2 = \beta_2, \dots, y_m = \beta_m$ არის /2/ სისტემის რომელიმე ამონახსნი, მაშინ $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ დააკმაყოფილებენ /1/ უტოლობათა სისტემას.

/2/ განტოლებათა სისტემას ეწოდება /1/ განტოლებათა სისტემის ეკვივალენტური სისტემა.

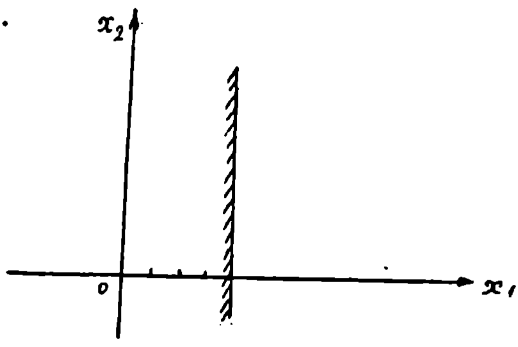
§ 6. ორუცნობიან წრფივ უტოლობათა სისტემის ამონახსნის გრაფიკული მეთოდი

განვიხილოთ უტოლობათა უმარტივესი სისტემა და ვაჩვენოთ მათ ამონახსნსა და ამოზნექილ სიმრავლეთა შორის ურთიერთკავშირი.

ჯერ განვიხილოთ ერთუცნობიანი უტოლობა

$$x_1 < 4.$$

თუ $x_1 0 x_2$ სიბრტყეზე გავავლებთ წრფეს $x_1 = 4$, იგი სიბრტყეს გაჰყოფს ორ ნახევარსიბრტყედ. წრფის მარცხნივ იქნება ის წერტილები, რომელთა აბსცისა ნაკლებია 4-ზე, ხოლო წრფის მარჯვნივ - წერტილები, რომელთა აბსცისა მეტია 4-ზე. /ნახ.6/.



ნახ.6.

ამგვარად, $x_1 < 4$ უტოლობა გეომეტრიულად განსაზღვრავს ნახევარსიბრტყეს, ე.ი. ყველა წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა აბსცისა ნაკლებია 4-ზე. $x_1 > 4$ უტოლობა განსაზღვრავს მარჯვენა ნახევარსიბრტყეს.

ამ სახის უტოლობაზე დაიყვანება ზოგადი უტოლობაც

$$ax_1 < b,$$

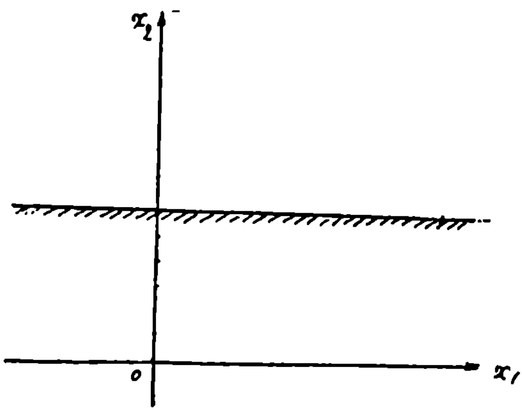
თუ ორივე ნაწილს გავყოფთ a-ზე /თუ $a > 0$/ მაშინ მოცემული უტოლობაა, თუ $a < 0$ მიიღება საწინააღმდეგო უტოლობა/ მივიღებთ

$$x_1 < \frac{b}{a}, \quad \text{ან} \quad x_1 > \frac{b}{a}$$

ასევე განისაზღვრება გრაფიკულად უტოლობა

$$x_2 < 6 .$$

ეს უტოლობა განსაზღვრავს სიბრტყეზე იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც $x_2 = 6$ წრფის დაბლა მდებარეობენ /ნახ.7/.



ნახ.7.

ორუცნობიან უტოლობას აქვს შემდეგი სახე:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$$

ეს უტოლობა წარმოადგენს ნახევარსიბრტყეს. მისი არაუარყოფითი ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს სამი ნახევარსიბრტყის: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ საერთო ნაწილს.

ამ სამი ნახევარსიბრტყის თანაკვეთა შეიძლება იყოს: ან ცარიელი სიმრავლე, ან მრავალკუთხედი, და ან კიდევ, სიბრტყის უსასრულო შემოუსაზღვრელი ნაწილი.

ანალოგიურია ორუცნობიან უტოლობათა სისტემების განხილვის პროცესიც. იგი დაიყვანება ორუცნობიან ერთი უტოლობის ამოხსნაზე. განვიხილოთ ორუცნობიანი უტოლობა

$$2x_1+3x_2+6\le 0$$

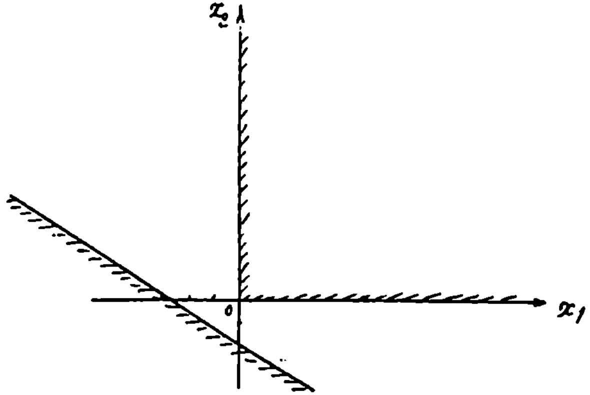
და ვიპოვოთ არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლე.

ავაგოთ $2x_1+3x_2+6=0$ წრფე. მოცემული უტოლობა დაკმაყოფილდება წრფის ცალ მხარეზე მოთავსებული ნახევარსიბრტყის კოორდინატებით. იმის გამოსარკვევად თუ რომელი ნახევარსიბრტყის კოორდინატები აკმაყოფილებენ უტოლობას, ერთ-ერთ ნახევარსიბრტყეში ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი და ამ წერტილის კოორდინატები ჩავსვათ მოცემულ უტოლობაში, თუ უტოლობა დაკმაყოფილდა, მაშინ იგი წარმოადგენს იმ ნახევარსიბრტყეს, რომლიდანაც ავიღეთ ეს წერტილი, წინააღმდეგ შემთხვევაში - უტოლობა წარმოადგენს წრფის მეორე მხარეზე მოცემულ ნახევარსიბრტყეს.

შესამოწმებელ წერტილად ავიღოთ კოორდინატთა სათავე. თუ მოცემული წრფე არ გადის კოორდინატთა სათავეზე, მაშინ უტოლობას არ აკმაყოფილებს კოორდინატთა სათავის კოორდინატები. მაშასადამე, მოცემული უტოლობა წარმოადგენს იმ ნახევარსიბრტყეს, რომელშიც კოორდინატთა სათავე არ შედის. ეს ნახევარსიბრტყე ნახაზზე დაშტრიხულია /ნახ.8/.

როგორც ნახაზიდან ჩანს, მოცემულ სამ ნახევარსიბრტყეს საერთო წერტილი არ აქვს, ე.ი. მოცემული უტოლობის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლე არის ცარიელი სიმრავლე.

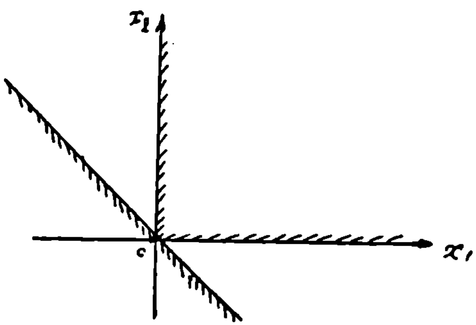
<u>მაგალითი</u>. ვიპოვოთ $x_1-3x_2\le 0$.



ნახ.8.

უტოლობის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლე.

ამოხსნა. ისევე როგორც წინა მაგალითში ავაგოთ $x_1-3x_2=0$ წრფე. მოცემულ უტოლობას აკმაყოფილებს იმ ნახევარსიბრტყის წერტილები, რომლებიც მოცემულია ნახაზზე /ნახ.9/.



ნახ.9.

$x_1-3x_2=0$ ნახევარსიბრტყის $x_1 \geq 0$ და $x_2 \geq 0$

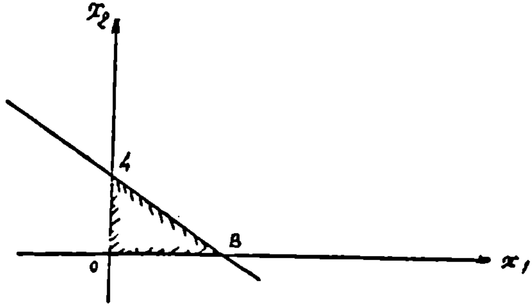
ნახევარსიბრტყეების თანაკვეთაში მიიღება ერთადერთი წერტი-ლი- კოორდინატთა სათავე. ე.ი. მოცემული უტოლობის არაუარყო-ფით ამონახსნთა სიმრავლეა ერთადერთი წერტილი.

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$3x_1+4x_2-12\le 0$$

უტოლობის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლე.

ამოხსნა. ამ უტოლობით გამოსახული ნახევარსიბრტყე არის A და B წერტილებზე გამავალი წრფის ის მხარე, სადაც კოორდინატთა სათავე შედის /ნახ.10/. ამოხსნათა მრავალ-კუთხედი იქნება ნახაზზე დაშტრიხული OAB სამკუთხედი.



ნახ.10.

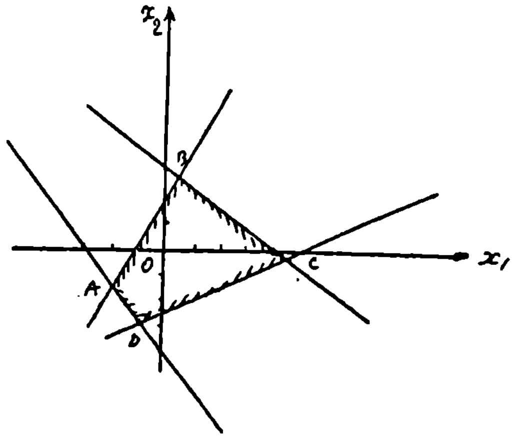
მაგალითი. ვიპოვოთ უტოლობათა სისტემის

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2-12\le 0 \\ -2x_1+x_2-2\le 0 \\ x_1-2x_2-5\le 0 \\ -x_1-x_2-3\le 0 \end{cases}$$

არაუარყოფით ამოხსნათა სიმრავლე.

ამოხსნა. სისტემა თავსებადი იქნება თუ არსებობს ერთი მაინც x_1 და x_2 ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს ყველა უტოლობას. ადვილად დავრწმუნდებით რომ ასეთი ამონახსნი არის

თუნდაც $x_1 = 0$ და $x_2 = 0$, ავაგოთ სიბრტყეზე მოცემული უტოლობების შესაბამისი წრფეების განტოლებანი, თითოეული მათგანი განსაზღვრავს ნახევარსიბრტყეს, რომელიც ნახაზზე დაშტრიხულია /ნახ.11/.



ნახ. 11.

მაშასადამე, ამოხსნათა მრავალკუთხედია $ABCD$. მრავალკუთხედის ნებისმიერი შიგა წერტილები აკმაყოფილებენ უტოლობათა სისტემას და მაშასადამე, წარმოადგენს ამონახსნებს. მიღებული მრავალკუთხედი ამოზნექილია, ვინაიდან ნებისმიერ ორ წერტილთან ერთად იგი მათ შემაერთებელ მონაკვეთსაც შეიცავს.

ამრიგად, ამოზნექილი მრავალკუთხედი შეიძლება იყოს მოცემული ანალიზური სახით, წრფივ უტოლობათა სისტემის საშუალებით, თუმცა აქედან არ უნდა გავაკეთოთ ისეთი დასკვნა, რომ წრფივ უტოლობათა ყველა სისტემა განსაზღვრავს რომელიმე ამოზნექილ მრავალკუთხედს. თუ სისტემა არათავსებადია, ე.ი. თუ ა

აქვს არც ერთი ამონახსნი, მაშინ იგი სიბრტყეზე არც ერთ წერტილს არ განსაზღვრავს. მაგალითად მიღებულ უტოლობათა სისტემას თუ დავუმატებთ კიდევ უტოლობას

$$x_2 - 6 > 0,$$

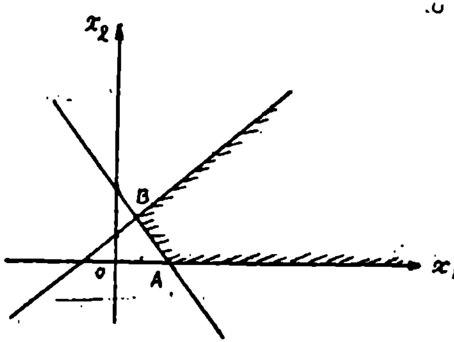
მაშინ სისტემა არათავსებადი აღმოჩნდება. გეომეტრიულად რომ წარმოვიდგინოთ არ მოიძებნება არც ერთი წერტილი, რომელიც ერთდროულად ეკუთვნის $ABCD$ მრავალკუთხედს და მოთავსებული იყოს $x_2 - 6 = 0$ წრფის ზევით.

<u>მაგალითი.</u> ვიპოვოთ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 1 \geq 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6 \geq 0 \end{cases}$$

უტოლობათა სისტემის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლე.

<u>ამოხსნა.</u> მოცემული უტოლობის არაუარყოფით ამოხსნათა სიმრავლე იქნება შემოუსაზღვრელი მრავალკუთხედი /ნახ. 12/, რომელსაც აქვს ორი A და B წერტილი.



ნახ. 12.

§ 7. წრფივი ფორმის მნიშვნელობა ამოზნექილ სიმრავლეში

მოცემულია n უცნობიანი $x_1, x_2, \dots x_n$ წრფივ უტოლობათა /ან განტოლებათა/ სისტემა. წინა მასალიდან ვიცით, რომ ამ სისტემის ამოხსნათა ერთობლიობა, როცა იგი თავსებადია, ქმნის შემოსაზღვრულ ან უსასრულო ამოზნექილ სიმრავლეს.

დავუშვათ, რომ მოცემულია ამ უცნობებისაგან შედგენილი რომელიღაც წრფივი ფორმა / წრფივ პროგრამირებაში მას მიზნის ფუნქცია ეწოდება/:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n .$$

ამოზნექილი სიმრავლის ყოველ წერტილზე, ე.ი. სისტემის ყოველი ამოხსნისათვის f წრფივი ფორმა იღებს განსაზღვრულ მნიშვნელობას. ამ შემთხვევაში ლაპარაკია ამოზნექილ სიმრავლეში წრფივი ფორმის მნიშვნელობის შესახებ.

საინტერესოა f წრფივი ფორმა ამოზნექილი სიმრავლის რომელ წერტილში იღებს უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობას. წრფივი პროგრამირების ძირითადი ამოცანაც დაიყვანება ამოზნექილ სიმრავლეში ისეთი წერტილების მოძებნაზე, რომელზედაც წრფივი ფორმა იღებს ოპტიმალურ მნიშვნელობას, აქ მხოლოდ ის განსხვავებაა, რომ ვეძებთ მხოლოდ არაუარყოფით მნიშვნელობებს.

მაშასადამე, ამოზნექილ სიმრავლესა და წრფივი პროგრამირების ამოცანებს შორის არსებობს პირდაპირი კავშირი, რომელიც შემდეგნაირად გამოიხატება.

იმ შემთხვევაში, როცა წრფივი პროგრამირების ამოცანის ამონახსნის სიმრავლე ქმნის ამოზნექილ მრავალწახნაგას, წრფივი ფორმა

ოპტიმალურ მნიშვნელობას აღწევს მის ერთ-ერთ წვეროზე

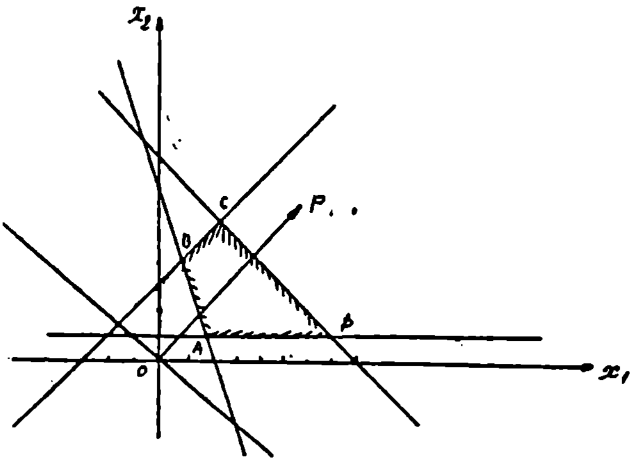
ვაჩვენოთ ეს პრაქტიკულ მაგალითზე.

მაგალითი. ვთქვათ მოცემულია ამოზნექილი მრავალკუთხედი, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი უტოლობათა სისტემით:-

$$7x_1+2x_2 \geq 14$$
$$-x_1+x_2 \leq 3$$
$$x_2 \geq 1$$
$$x_1+x_2 \leq 8$$

ვიპოვოთ ამ უტოლობათა სისტემის ისეთი არაუარყოფითი ამონახსნი, რომლებზეც წრფივი ფორმა $f=x_1+2x_2$ იღებს ექსტრემალურ /მინიმალურ ან მაქსიმალურ/ მნიშვნელობას.

ამოხსნა. მოვძებნოთ უტოლობათა სისტემის არაუარყოფით ამოხსნათა მრავალკუთხედი. მივიღებთ $ABCD$ მრავალკუთხედს /ნახ.13/. ავაგოთ წრფივი ფორმის შესაბამისი წრფე, იგი გაივლის კოორდინატთა სათავეზე და მისი მიმმართველი ვექტორი იქნება P /1,2/. თუ წრფივი ფორმის მარჯვენა მხარეში ნულს შევცვლით დადებითი რიცხვით მივიღებთ მოცემული წრფივი ფორმის გამომსახველი წრფის პარალელურ წრფეს. წრფივი ფორმა კი შეინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას. მაგალითად x_1+2x_2-2 ან $x_1+2x_2=2$ წრფის ნებისმიერ წერტილში, წრფივი ფორმა $f=x_1+2x_2$ ინარჩუნებს 2-ის ტოლ მნიშვნელობას. ეს წრფე შეიძლება მიღებულ იქნეს $x_1+2x_2=0$ წრფის მიმმართველი ვექტორის პარალელურად გადაადგილების გზით. ასეთი გადაადგილებით წრფივი ფორმის გამომსახველი წრფე $ABCD$ მრავალკუთხედს შეეხება A წერტილში, რაც იქნება მინიმუმის წერტილი, ხოლო თუ კიდევ გადავაადგილებთ $\overrightarrow{OP}$ ვექტორის გასწვრივ,



ნახ. 13.

ბოლო წერტილი იქნება მრავალკუთხედის C წერტილი, ეს კი იქნება მაქსიმუმის წერტილი. ე.ი. f წრფივი ფორმა მინიმალურ მნიშვნელობას იღებს A წერტილში და მაქსიმალურს – C წერტილში. შესაძლებელია წრფივი ფორმა $f = ax_1 + bx_2 = 0$ პარალელური აღმოჩნდეს ამოზნექილი მრავალკუთხედის რომელიმე გვერდის. ამ შემთხვევაში წრფივი ფორმა მინიმალურ და მაქსიმალურ მნიშვნელობას იღებს ამ გვერდის წვეროებზე.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. ამოხსენით წრფივ განტოლებათა სისტემები:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

გ/
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 2 \\ 3x_2 + 5x_3 - 10x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + \frac{1}{8}x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

დ/
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

ე/
$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 23 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 14 \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 34 \end{cases}$$

ვ/
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_3 = -5 \end{cases}$$

2. ამოხსენით წრფივ უტოლობათა სისტემები:

ა/ მოძებნეთ

$$3x_1 - 3x_2 + 1 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 - 8 \leq 0$$
$$x_1 - 4 \leq 0$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 0$$
$$x_1 + x_2 - 3 \geq 0$$

უტოლობათა სისტემის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლე.

ბ/ იპოვე

$$x_1 + x_2 + 2 \geq 0$$
$$x_1 - x_2 - 4 \leq 0$$
$$x_1 - 3 > 0$$

უტოლობათა სისტემის არაუარყოფით ამონახსნთა სიმრავლე.

II განყოფილება

თავი III. მარტივი ეკონომიკური მოდელები

§ 1. ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელის ცნება

მ ო დ ე ლ ი ს ცნება – ერთ-ერთი პოპულარული ცნებაა ეკონომიკურ-მათემატიკურ ლიტერატურაში. ფიზიკური მოდელები დიდი ხანია გამოიყენება ექსპერიმენტისათვის, სხვადასხვაგვარი იდეების შესამოწმებლად. ეკონომიკური მოვლენები და პროცესები იმდენად მრავალფაქტორული და იმდენად რთულია, რომ, როგორც წესი, მათთვის შეიძლება გამოყენებულ იქნეს და გამოიყენება მხოლოდ თეორიული, ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელები.

ეკონომიკურ მეცნიერებაში თეორიული მსჯელობით უკეთეს შემთხვევაში შეიძლება გამოვლინდეს /დადგინდეს/ საერთო ტენდენცია, მაგრამ არ მიიღება რიცხვითი შედეგები. ეკონომიკური მოვლენებისა და პროცესებისათვის დამახასიათებელი რაოდენობრივი დამოკიდებულებების გასარკვევად და რეალური ეფექტის მისაღებად აუცილებელია ჩატარდეს ყოველმხრივი კვლევა, ისეთი, რომლის დროსაც ეკონომიკურ მოვლენებსა და პროცესებს შორის დამოკიდებულება შემოწმდეს ძირითადი პარამეტრების ცვლილების პირობებში. მაგრამ ამ პარამეტრების სხვადასხვა ცვლილებების

გაელენს სამოდელო სამეურნეო შედეგებზე ძნელი განსახორციელებელია, ხოლო თუ განხორციელდა იგი რეალურ ეკონომიკურ პირობებში, ძალზე დიდი შრომით, მატერიალურ და ფულად დანახარჯებთან იქნება დაკავშირებული. ამის გამო საჭიროა ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელების გამოყენება.

მ ა თ ე მ ა ტ ი კ უ რ ი მოდელი არის რომელიმე მოვლენის ან პროცესის მათემატიკური გამოსახვა.

ე კ ო ნ ო მ ი კ უ რ - მ ა თ ე მ ა ტ ი კ უ რ ი მოდელი არის ეკონომიკური მოვლენის ან პროცესის მათემატიკური გამოსახვა. სხვადასხვა ტიპის ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელების წარმოშობისა და განვითარების ისტორია მჭიდროდაა დაკავშირებული ეკონომიკური იდეების და წარმოდგენების განვითარებასთან.

ფ.კენეს მიერ 1758 წელს ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელის შექმნა მარტივი კაპიტალისტური კვლავწარმოების კანონების კვლევის აუცილებლობით იყო განპირობებული. კ.მარქსმა მაღალი შეფასება მისცა ამ მოდელს და შემოგვთავაზა გაფართოებული კვლავწარმოების რიცხვითი მოდელი, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელი გახდა მის მიერ აღმოჩენილი კაპიტალის მოძრაობის კანონის ილუსტრაცია და მარტივი და გაფართოებული კვლავწარმოების ზუსტი ფორმულირება. ვ.ი.ლენინმა მარქსის სქემებში კაპიტალის ტექნიკური შედგენილობის ზრდის პირობის შეტანით დინამიზმი შემატა მარქსის სქემებს.

კ.მარქსისა და ვ.ი.ლენინის გაფართოებული კვლავწარმოების სქემების სრულყოფა საბჭოთა ეკონომიკურ მეცნიერებაში წარმართა მათი შემდეგში დეტალიზაციისა და კონკრეტიზაციის გზით.

სახალხო მეურნეობის, როგორც დარგებისა და ქვედანაყოფილებების ურთიერთდაკავშირებული და ურთიერთმზემოქმედებითი სისტემის შესახებ წარმოდგენის განვითარებამ მიგვიყვანა 20-იან წლებში მსოფლიოში პირველი სახალხო მეურნეობის ბალანსის შედგენამდე, რომელიც შემდეგში დარგთაშორისი ბალანსის შედგენის საფუძველი გახდა.

ეკონომიკურ-მათემატიკურ მოდელებში განტოლებებისა და უტოლობების საშუალებით აღწერენ საკვლევ პროცესს, ხოლო შემდეგ მოდელში კონკრეტული ციფრობრივი მონაცემების ჩასმით აწარმოებენ საჭირო გამოთვლებს და არკვევენ საჭირო დამოკიდებულებებს. ამრიგად, ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელების საშუალებით ჩატარებული გაანგარიშებები შეუძლიათ შეცვალონ /და ცვლიან კიდეც/ ძვირადღირებული ექსპერიმენტები,

ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელების შედგენისას შეირჩევა ყველაზე არსებითი ყველაზე მთავარი ფაქტორები და გარემოებანი. ამის გამო ისინი არ წარმოადგენენ მეურნეობრივი სინამდვილის ზუსტად ამსახველ მოდელებს.

ის მოდელები იქნება პრაქტიკულად გამოსაყენებლად ვარგისი, რომლებშიც სწორად იქნება შერჩეული და გათვალისწინებული არსებითი ფაქტორები და უგულვებელყოფილი – არაარსებითი, ამასთან მნიშვნელობა აქვს იმასაც, თუ რამდენად ზუსტად ასახავს ეკონომიკურ პროცესს განტოლებანი და უტოლობანი და რამდენად ზუსტია მიცემული მოდელით შედგენილი ამოცანის ამოხსნის მეთოდი.

აღსანიშნავია ის, რომ ყველა ეკონომიკურ ამოცანას არ სჭირდება საკუთარი მოდელი. მათემატიკური თვალსაზრისით

მრავალი პროცესები ერთტიპურია და შეიძლება გამოისახოს ერთნაირი მოდელებით. წრფივ პროგრამირებაში არის რამოდენიმე ტიპური მოდელები, რომელთა საშუალებით შეიძლება აღიწეროს მრავალი კონკრეტული ეკონომიკური შინაარსის ამოცანები.

ეკონომიკურ კვლევებში არსებობს მათემატიკური ამოცანის ორი კლასი და შესაბამისად, მათემატიკური მეთოდების ორი კლასი ეკონომიკური ანალიზისათვის.

პირველი კლასის მათემატიკური მეთოდები გამოიყენებიან სახალხო მეურნეობისა და დარგების განვითარების რთული მაკრომოდელების აგებისა და რაოდენობრივი ანალიზისათვის; ძირითადი ეკონომიკური პარამეტრების პროგნოზის სქემის აგებისათვის, ესენია: წარმოების, მოხმარების, გაცვლის, ფასწარმოქმნის, ტექნიკური პროგრესის და ა.შ. მოდელები.

პირველი კლასის მეთოდები და მოდელები განისაზღვრებიან პოლიტიკური ეკონომიის ძირითადი დებულებებით, მხედველობის გარეშე რჩება წარმოების კონკრეტული ტექნოლოგიური თავისებურებანი და ყურადღება მახვილდება იმ საერთო კანონებზე, რომლებიც იწვევენ საწარმოო ძალებისა და წარმოების ურთიერთობათა შემდგომ განვითარებას.

მეორე კლასის მათემატიკური მეთოდები გამოიყენებიან ისეთ შიგასაქარხნო დარგობრივი და სახალხომეურნეობრივი ამოცანების გადასაწყვეტად, რომლებიც საჭიროებენ კონკრეტულ საწარმოო გეგმის შედგენას, რესურსების გამოყენების გრაფიკის აგებას, გადაზიდვის სქემის შემუშავებას, მოხმარების საგნების მოთხოვნის შესწავლას, ეკონომიკური ინფორმაციის შეკრებას, დამუშავებას და ა.შ.

ასეთი ამოცანების ამოხსნის მეთოდები ჩვეულებრივია და ცნობილია ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდების საშუალებით.

§2. მატრიცული მოდელები. მათი სახეები.

დარგთაშორისი ბალანსის ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელი

ეკონომიკურ-მათემატიკურ მოდელებს შორის ერთ-ერთი საკმარისად გავრცელებული ტიპის მოდელებს მიეკუთვნება მატრიცული მოდელები. იგი წარმოადგენს სწორკუთხა ცხრილს(მატრიცას), რომლის ელემენტებს აქვთ გარკვეული ეკონომიური შინაარსი. მატრიცულ მოდელებში აისახება პროდუქციის წარმოების, განაწილების დანახარჯთა სტრუქტურა და ახლად შექმნილი ღირებულება. მატრიცული მოდელები გამოიყენება პროდუქციის წარმოებისა და განაწილების დაგეგმვისა და ანალიზისათვის როგორც ცალკეული საწარმოების, ისე დარგებისა და მთელი სახალხო მეურნეობის მასშტაბით. მატრიცულ მოდელებს მიეკუთვნება: სახალხო მეურნეობის პროდუქციის წარმოებისა და განაწილების დარგთაშორისი ბალანსი; მოკავშირე რესპუბლიკებისა და ეკონომიკური რაიონების პროდუქციის წარმოებისა და განაწილების დარგთაშორისი ბალანსი; საწარმოთა, გაერთიანებათა ეკონომიკური და სოციალური განვითარების გეგმის მატრიცული მოდელი და სხვ. მოდელთა სპეციფიკის მიუხედავად, მათ აერთიანებთ არა მხოლოდ აგების საერთო ფორმალური პრინციპი და გაანგარიშებათა სისტემის მსგავსება, არამედ მსგავსი აქვთ რიგი ეკონომიკური მახასიათებლები. აქედან გამომდინარე, მატრიცული მოდელების ძირითადი დამოკიდებულებანი შეიძლება გავარკვიოთ ერთ-ერთ მათგანზე - პროდუქციის წარმოებისა და განაწილების დარგთაშორისი ბალანსის მაგალითზე.

სახალხო მეურნეობის მასშტაბით დარგთაშორისი ბალანსი გვიჩვენებს: ერთობლივი საზოგადოებრივი პროდუქტის წარმოებასა და განაწილებას დარგობრივ ჭრილში; დარგთაშორის წარმოებრივ კავშირებს; მატერიალური და შრომითი რესურსების გამოყენებას; ეროვნული შემოსავლის წარმოებასა და განაწილებას.

დარგთაშორისი ბალანსის პრინციპიალური სქემა მოცემულია ცხრილში /ცხრილი 1/, რომელშიც განიხილება საანგარიშო ბალანსი ერთი წლისათვის ღირებულებით მაჩვენებლებში.

ც ხ რ ი ლ ი 1

დარგთაშორისი ბალანსის პრინციპიალური სქემა

მომხმარებელი დარგები / მწარმოებელი დარგები	1	2	3	...	n	საბოლოო პროდუქცია	მთლიანი პროდუქცია
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1n}	y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2n}	y_2	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	...	x_{3n}	y_3	X_3
.	.	.	I კვადრანტი	...	.	II კვადრანტი	.
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	...	x_{nn}	y_n	X_n
ხელფასი	V_1	V_2	V_3	...	V_n	$V_{საბ.}$	
			III კვადრანტი			IV კვადრანტი	
წმინდა შემოსავალი	m_1	m_2	m_3	...	m_n	$M_{საბ.}$	—
მთლიანი პროდუქცია	X_1	X_2	X_3	...	X_n	—	X

ბალანსის საფუძველს შეადგენს მატერიალური წარმოების დარგთა ერთობლიობა. მათი რიცხვი ჩვენს სქემაში n -ის ტოლია. თითეული დარგი ორჯერ ფიგურირებს ბალანსში: როგორც მწარმოებელი და როგორც მომხმარებელი. მწარმოებელ დარგს შეესაბამება განსაზღვრული სტრიქონი, ხოლო მომხმარებელ დარგს- განსაზღვრული სვეტი. თუ მწარმოებელ დარგს აღვნიშნავთ i -სიმბოლოთი, ხოლო მომხმარებელ დარგს - j სიმბოლოთი, მაშინ დარგების გადაკვეთაზე მდებარე სიდიდე x_{ij} გვიჩვენებს წარმოების საშუალებების ღირებულებას, რომელიც წარმოებულია i -ურ დარგში და მოიხმარება მატერიალური დანახარჯების სახით j -ურ დარგში.

დარგთაშორისი ბალანსის სვეტებში აისახება თითეული დარგის მატერიალური დანახარჯების სტრუქტურა და წმინდა პროდუქცია.

მატერიალური დანახარჯებისა და წმინდა პროდუქციის ჯამი დარგის მთლიანი პროდუქციის ტოლია. მათემატიკურად ასე ჩაიწერება.

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + V_j + m_j \quad (j=1,2,\dots,n) \qquad (1)$$

/1/ ფორმულაში გვაქვს განტოლებათა სისტემა რომლებიც ასახავენ მატერიალური წარმოების დარგთა პროდუქციის ღირებულებით შედგენილობას. იგი შეესაბამება პოლიტიკური ეკონომიიდან ცნობილ ფორმულას

$$P = C + V + m,$$

თუ C სიმბოლოში ვიგულისხმებთ პროდუქტზე გადატანილ ღირებულებას, ხოლო $(V+m)$ -ში ახლად შექმნილ ღირებულებას, აუცილებელი და ზედმეტი პროდუქციის ჯამს.

დარგთაშორისი ბალანსის სტრიქონებში მოცემულია მატერიალური წარმოების დარგების პროდუქციის განაწილება მატერიალური წარმოების დარგებში (x_{ij}) და არამატერიალური წარმოების დარგში (y_i) საბოლოო მოხმარებისათვის.

ნებისმიერი მწარმოებელი დარგისათვის გვექნება

$$X_i=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}+y_i \quad (i=1,2,\dots,n) \qquad (2)$$

/2/ განტოლებათა სისტემას ეწოდება მატერიალური წარმოების დარგთა პროდუქციის განაწილების განტოლებანი.

ამგვარად, ცალკეული დარგების მიხედვით მოცემული ბალანსი გვიჩვენებს წლიური პროდუქციის ღირებულებით სტრუქტურას და მის განაწილებას გამოყენების მიზნით.

განვიხილოთ ბალანსის სქემა სხვა თვალსაზრისით. მასში გამოიყოფა ოთხი ძირითადი ნაწილი, რომელთაც აქვთ სხვადასხვა ეკონომიკური შინაარსი. მათ ეწოდებათ ბალანსის კვადრანტები.

I კ ვ ა დ რ ა ნ ტ ი შეიცავს წარმოების საშუალებების დარგთაშორის მიმოცვლას, იგი წარმოადგენს კვადრატულ მატრიცას, რომლის ელემენტების ჯამი სტრიქონების ან სვეტების მიხედვით წარმოადგენს მატერიალური წარმოების სფეროში წარმოების საშუალებების დანახარჯების აღდგენის წლიურ ფონდს. იგულისხმება, რომ I კვადრანტში შედის როგორც შრომის საგნების დანახარჯები, ისე შრომის საშუალებების ცვეთის ღირებულება, რომელიც ამორტიზაციის ანარიცხებში აისახება. I კვადრანტის მონაცემები დარგთა მატერიალური დანახარჯების სტრუქტურის ანალიზის საშუალებას იძლევა, რაც მეტად მნიშვნელოვანია ეკონომიკური პრობლემების გადასაწყვეტად.

II კ ვ ა დ რ ა ნ ტ შ ი წარმოდგენილია მატერიალური

წარმოების ყველა დარგის საბოლოო პროდუქცია. საბოლოო პროდუქციის ცნებაში იგულისხმება პროდუქცია, რომელიც გამოდის წარმოების სფეროდან და გამიზნულია საბოლოო გამოყენებისათვის– მოხმარებისა და დაგროვებისათვის.

იმ შემთხვევაში, თუ ზუსტად აისახება I კვადრანტში შრომის საშუალებების ცვეთის ღირებულება, საბოლოო პროდუქცია არ იქნება განსხვავებული ეროვნული შემოსავლისაგან. ამრიგად, II კვადრანტის მონაცემები ახასიათებენ ეროვნულ შემოსავლის დარგობრივ სტრუქტურას, მის განაწილებას დაგროვების და მოხმარების ფონდად.

III კვადრანტის მაჩვენებლები ახასიათებენ აგრეთვე ეროვნულ შემოსავალს, მაგრამ მისი ღირებულებითი შედგენილობის კუთხით - როგორც მატერიალური წარმოების ყველა დარგში ხელფასისა და წმინდა შემოსავლის ჯამი. III კვადრანტის მონაცემები აუცილებელია ახლად შექმნილ და გადატანილ ღირებულებას, აუცილებელი და ზედმეტ პროდუქტის სიდიდეებს შორის თანაფარდობების ანალიზისათვის.

II და III კვადრანტების საერთო ჯამი ერთმანეთის ტოლია, მართლაც თუ /1/ განტოლებათა სისტემას ავჯამავთ ყველა დარგების მიხედვით გვექნება

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} V_j + \sum_{j=1}^{n} m_j$$

/2/ განტოლებათა სისტემის ყველა დარგების მიხედვით აჯამვისას მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

ორივე გამოსახულების მარცხენა ნაწილი გამოხატავს ერთ და იგივე სიდიდეს – მთელ ერთობლივ საზოგადოებრივ პროდუქტს (X), მარჯვენა ნაწილის პირველი შესაკრებებიც ერთნაირია, მაშასადამე, დაცული უნდა იყოს ტოლობა

$$\sum_{j=1}^{n} V_j + \sum_{j=1}^{n} m_j = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (3)$$

/3/ განტოლების მარცხენა ნაწილია III კვადრანტის ჯამი, ხოლო მარჯვენა ნაწილი – II კვადრანტის ჯამი. მთლიანად ეს განტოლება გვიჩვენებს, რომ დარგთაშორის ბალანსში დაცულია ეროვნული შემოსავლის ნატურალურ-ნივთობრივი და ღირებულებითი შემადგენლობის ერთიანობა.*

IV კვადრანტი არის შემოსავლების სტრიქონებისა და საბოლოო პროდუქციის სვეტების გადაკვეთაზე, რაც განსაზღვრავს მის შინაარსს. იგი გამოხატავს ეროვნული შემოსავლის საბოლოო განაწილებასა და მოხმარებას. შექმნილი ეროვნული შემოსავლის გადანაწილების შედეგად წარმოიქმნება მოსახლეობის, საწარმოების, სახელმწიფოს საბოლოო შემოსავლები. ცხადია, რომ IV კვადრანტი, ისე როგორც II და III კვადრანტის საერთო ჯამი შექმნილი ეროვნული შემოსავლის ტოლი უნდა იყოს. IV კვადრანტის მონაცემები მნიშვნელოვანია დარგთაშორის ბალანსში მოსახლეობის შემოსავლებისა და ხარჯების, კაპიტალური დაბანდებების დაფინანსების წყაროების, არასაწარმოო სფეროს მიმდინარე დანახარჯების ასახვისათვის, მომხმარებელთა ჯგუფების მიხედვით სა-

---

* საბოლოო პროდუქციისა და ეროვნული შემოსავლის ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მთელი მატერიალური წარმოების დარგებისათვის. ცალკეული დარგებისათვის ეს მაჩვენებლები განსხვავებულია, ვინაიდან ისინი სხვადასხვა ფაქტორებით განისაზღვრებიან.

ნილი შემოსავლების საერთო სტრუქტურის ანალიზისათვის.

ამგვარად, დარგთაშორისი ბალანსის ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელი აერთიანებს მატერიალური წარმოების დარგების ბალანსებს /მატერიალური ბალანსები/, ერთობლივი საზოგადოებრივი პროდუქტის ბალანსს, ეროვნული შემოსავლის ბალანსს, ფინანსურ ბალანსს და მოსახლეობის შემოსავლებისა და ხარჯების ბალანსს.

§ 3. მათემატიკური დამოკიდებულებანი მატრიცულ მოდელებში

მატრიცულ ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელების ერთ-ერთი უპირატესობა პროდუქციის წარმოებისა და განაწილების ჩვეულებრივ ბალანსებთან შედარებით ის არის, რომ იგი იძლევა მათემატიკისა და თანამედროვე გამოთვლითი ტექნიკის ფართო გამოყენების შესაძლებლობას.

დარგებს შორის ტექნოლოგიური კავშირები იზომება პ ი რ დ ა პ ი რ მ ა ტ ე რ ი ა ლ უ რ დ ა ნ ა ხ ა რ ჯ თ ა კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი ს საშუალებით. დარგთაშორისი ბალანსის მონაცემებით / ცხრილი 1/ პირდაპირ დანახარჯთა კოეფიციენტები შეიძლება გამოითვალოს დარგთაშორისი მიწოდების მოცულობის გაყოფით – მომხმარებელი დარგების მთლიანი პროდუქციის მოცულობაზე

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \qquad (4)$$

ამრიგად, პირდაპირ დანახარჯთა კოეფიციენტი გვიჩვენებს i-ური დარგის პროდუქციის ერთეულის დანახარჯს წარმოების საშუალებების სახით j-ური დარგის პროდუქციის ერთეულის გამოშვებაზე.

როცა $i=j$, მაშინ გვექნება დარგის საკუთარი პროდუქციის დანახარჯი მისივე პროდუქციის ერთეულის გამოშვებისათვის.

პირდაპირ დანახარჯთა კოეფიციენტები ქმნიან n სტრიქონისა და n სვეტისაგან შედგენილ მატრიცას

$$\{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

/4/ ფორმულიდან $x_{ij} = a_{ij}X_j$, და ამ გამოსახულების გათვალისწინებით /2/ განტოლება შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით.

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j + y_i \quad (i=1,2,\ldots,n) \qquad (5)$$

/5/ ფორმულა მოიცავს n განტოლებათა სისტემას და მისი საშუალებით გამოიანგარიშება ბალანსის მაჩვენებლები საგეგმო პერიოდისათვის.

საგეგმო პერიოდში თუ ცნობილია a_{ij} ტექნოლოგიური კოეფიციენტები, მაშინ /5/ იქნება $2n$ უცნობიანი n განტოლებათა სისტემა. /უცნობებია ყველა დარგის მთლიანი პროდუქციის გამოშვება და მათი საბოლოო პროდუქცია/. ასეთი სისტემა განუსაზღვრელია და აქვს ამოხსნათა უსასრულო სიმრავლე. სისტემის ამონახსნის მისაღებად საჭიროა გვქონდეს n უცნობი სიდიდეების წინასწარი მნიშვნელობა. დანარჩენი n უცნობები განისაზღვრება /5/ სისტემის ამოხსნით. თუ /5/ სისტემაში მოცემულად ჩავთვლით მთლიანი პროდუქციის მოცულობას $(X_i; X_j)$ საბოლოო პროდუქცია (y_i) განისაზღვრება მათემატიკური გა-

.მოანგარიშების შედეგად. შეიძლება მოცემულად ჩავთვალოთ საბოლოო პროდუქციის (y_i) მოცულობა და /5/ ფორმულით გამოვიანგარიშოთ მთლიანი პროდუქცია, ან კიდევ ზოგიერთი დარგების მიხედვით შეიძლება მოცემული იყოს მთლიანი პროდუქციის მოცულობა, ზოგიერთი დარგებისათვის - საბოლოო პროდუქცია, მოცემულ სიდიდეთა ჯამი უნდა იყოს n -ის ტოლი და /5/ სისტემის ამოხსნით გაირკვევა დანარჩენი n ცვლადების მნიშვნელობანი.

პრაქტიკული გაანგარიშების დროს ყოველთვის არ არის მოსახერხებელი /5/ განტოლებათა სისტემის გამოყენება. ამიტომ იგი წარმოვადგინოთ სხვა ფორმით:

$$X = aX + Y$$

სადაც X -არის მთლიანი პროდუქციის ვექტორი;

Y - საბოლოო პროდუქციის ვექტორი;

a - პირდაპირ დანახარჯთა კოეფიციენტების მატრიცა.

შეიძლება დავწეროთ

$$X - aX = Y$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $X = EX$, სადაც E არის ერთეულოვანი მატრიცა, შეიძლება დავწეროთ

$$EX - aX = (E-a)X + Y$$

საიდანაც

$$X = (E-a)^{-1} \cdot Y \qquad (6)$$

$$E - a = \begin{pmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) \cdots & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} \cdots & -(1-a_{nn}) \end{pmatrix}.$$

შებრუნებული მატრიცა აღვნიშნოთ A ასოთი, მისი ელემენტე-ბი - A_{ij} -თი, მაშინ გვექნება

$$A = (E-a)^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \cdots A_{2n} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} \cdots A_{nn} \end{pmatrix} = \{A_{ij}\},$$

მაშასადამე /6/ განტოლება შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$X = AY, \qquad (7)$$

ანუ გაშლილი ფორმით

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \cdots A_{2n} \\ & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} \cdots A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

მივიღეთ: n განტოლებათა სისტემაში თითეული დარგის მთლიანი პროდუქცია გამოხატულია, როგორც ყველა დარგის საბოლოო პროდუქციის ფუნქცია. ე.ი.

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j \qquad (8)$$

/8/ ფორმულით მთლიანი პროდუქცია წარმოადგენს საბო-ლოო პროდუქციის რაოდენობათა შეწონილ ჯამს, წონებს წარმოად-გენს A_{ij} კოეფიციენტები, რომლებიც გვიჩვენებენ i -ური დარგის რამდენი პროდუქციის წარმოებაა საჭირო მთლიანად j -ური დარგის ერთეული პროდუქციის გამოსაშვებად.

პირდაპირი დანახარჯთა კოეფიციენტებისაგან (a_{ij}) განსხვავებით A_{ij} კოეფიციენტებს ე წ ო დ ე ბ ა თ

ს რ უ ლ დ ა ნ ა ხ ა რ ჯ თ ა კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ი

მათში შედის i -ური დარგის პროდუქციის როგორც პირდაპირი ისე არაპირდაპირი დანახარჯები j-ური დარგის პროდუქციის ერთეულის დამზადებისათვის. თუ პირდაპირი დანახარჯები ასახავენ იმ წარმოების საშუალებების რაოდენობას, რომლებიც უშუალოდ გამოიყენება მოცემული პროდუქციის დამზადებისათვის, არაპირდაპირ დანახარჯებს მიეკუთვნება დანახარჯები წარმოების წინა სტადიებზე და პროდუქტის ღირებულებაში შედიან არა პირდაპირ არამედ სხვა წარმოების საშუალებების მეშვეობით.

§ 4. მატრიცულ მოდელში განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

მთლიანი პროდუქციის მოცულობის განსაზღვრისათვის საბოლოო პროდუქციის სიდიდის მოცემულობის პირობებში, გამოთვლები შეიძლება ჩატარდეს /5/ ან /8/ ფორმულებით.

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + y_i \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

პირველ შემთხვევაში გაანგარიშებები ემყარება პირდაპირ დანახარჯთა კოეფიციენტებზე, მეორე შემთხვევაში- სრულ დანახარჯთა კოეფიციენტზე გაანგარიშებების თვალსაზრისით განტოლებათა ორივე სისტემას აქვს დამოუკიდებელი მნიშვნელობა.

განვიხილოთ დარგთაშორისი ბალანსის ძირითადი მაჩვენებელთა გაანგარიშების მაგალითი. სახალხო მეურნეობა პირობითად სამი დარგისაგან წარმოვადგინოთ: მანქანათმშენებლობა, მშენებლობა და მატერიალური წარმოების სხვა დარგები. დავუშვათ რომ საკვლევი პერიოდისათვის მოცემულია პირდაპირ დანახარჯთა კოეფიციენტები და საბოლოო პროდუქტის ვექტორი /ციფრები პირობითია/

$$a=\begin{pmatrix}0,3 & 0,25 & 0,2\\ 0,15 & 0,13 & 0,03\\ 0,1 & 0,05 & 0,08\end{pmatrix}; \qquad y=\begin{pmatrix}56\\ 20\\ 12\end{pmatrix}$$

საჭიროა გამოვიანგარიშოთ მთლიანი პროდუქციის მოცულობა, დარგთაშორისი მიწოდების სიდიდე და დარგის წმინდა პროდუქცია. და შედეგები წარმოვადგინოთ დარგთაშორისი ბალანსის ფორმით.

მთლიანი პროდუქციის გაანგარიშებისათვის გამოვიყენოთ /5/ განტოლებათა სისტემები

$$X_1 = 0,3X_1 + 0,25X_2 + 0,2X_3 + 56;$$
$$X_2 = 0,15X_1 + 0,13X_2 + 0,03X_3 + 20$$
$$X_3 = 0,1X_1 + 0,05X_2 + 0,08X_3 + 12$$

ანუ

$$0,7X_1 - 0,25X_2 - 0,2X_3 = 56;$$
$$-0,15X_1 + 0,88X_2 - 0,03X_3 = 20;$$
$$-0,1X_1 - 0,05X_2 + 0,92X_3 = 12.$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით გვექნება

$$X_1 = 102,22;$$
$$X_2 = 41,02;$$
$$X_3 = 26,38$$

მაშასადამე, ჩვენ მივიღეთ სამი დარგისათვის მთლიანი პროდუქციის გამოშვების გეგმური მოცულობა, რომელიც უზრუნველყოფს მოცემულ საბოლოო პროდუქციის დონეს.

ბალანსის შესადგენად უნდა გამოვთვალოთ დარგთაშორისი მიწოდების მოცულობა ფორმულით

$$x_{ij} = a_{ij} X_j .$$

გვექნება

$$x_{11} = 0,3 \cdot 102,28 \approx 30,6$$

$$x_{12} = 0,25 \cdot 41,02 \approx 10,3$$

$$x_{13} = 0,2 \cdot 26,38 = 5,3$$

და ა.შ.

გამოთვლის შედეგები /0,1 სიზუსტით/ წარმოვადგინოთ დარგთაშორისი ბალანსის სახით./ცხრილი 2/.

ც ხ რ ი ლ ი 2

პროდუქციის წარმოებისა და განაწილების დარგთაშორისი ბალანსი /სამი დარგისათვის/

მომხმარებელი დარგები / მწარმოებელი დარგები	მატერიალური წარმოების დარგები			საბოლოო პროდუქცია	მთლიანი პროდუქცია
	მანქანათმშენებლობა	2.მშენებლობა	3.მატერიალური წარმოების სხვა დარგები		
მატერიალური წარმოების დარგები					
1.მანქანათმშენებლობა	30,6	10,3	5,3	56	102,2
2. მშენებლობა	15,3	4,9	0,8	20	41,0
3. მატერიალური წარმოების სხვა დარგები	10,2	2,1	2,1	12	26,4
წმინდა პროდუქცია	46,1	23,7	18,2	-	-
მთლიანი პროდუქცია	102,2	41,0	25,4	-	169,6

წმინდა პროდუქციის სიდიდე აქ განსაზღვრულია როგორც დარგის მთლიან პროდუქციასა და დარგთაშორისი მიწოდების ჯამის სხვაობა. ასე მაგალითად მანქანათმშენებლობის წმინდა პროდუქცია ტოლია 102,2-/30,6+15,3+10,2/= 46,1 და ა.შ.

ამგვარად, თუ მოცემული გვაქვს საბოლოო პროდუქციის მოცულობა დარგების მიხედვით და პირდაპირ დანახარჯთა კოეფიციენტები შეგვიძლია გამოვიანგარიშოთ პროდუქციის გამოშვებისა და მისი განაწილების მოცულობა როგორც დარგებს შორის, ისე საბოლოო მოხმარებისათვის.

იგივე ამოცანა ამოიხსნება სხვა გზით, სახელდობრ, სრულ დანახარჯთა კოეფიციენტების საშუალებით. სრულ დანახარჯთა კოეფიციენტების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ /5/ თანაფარდობანი, თუ საბოლოო პროდუქციის ვექტორად მივიღებთ ერთეულოვან ვექტორს, რომელიც აღნიშნავს საბოლოო პროდუქციის ერთეულის გამოშვებას მხოლოდ ერთ-ერთ რომელიმე დარგში. ასეთ შემთხვევაში /5/ სისტემით განისაზღვრება ყველა დარგის რამდენი პროდუქციის წარმოებაა /ან დანახარჯია/ საჭირო მოცემული დარგის პროდუქციის ერთეულის გამოსაშვებად. ე.ი. საჭიროა მოიძებნოს სრულ დანახარჯთა კოეფიციენტების მატრიცა სამი დარგისათვის

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

ამისათვის საჭიროა სამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა, რომელშიც არის სამი განტოლება სამი უცნობით.

მანქანათმშენებელი მრეწველობის საბოლოო პროდუქციის ერთეულზე სრული დანახარჯების გამოსაანგარიშებლად საჭიროა ამოიხსნას შემდეგი განტოლებათა სისტემა

$$X_1 = 0,3X_1 + 0,25X_2 + 0,2X_3 + 1$$
$$X_2 = 0,15X_1 + 0,12X_2 + 0,03X_3;$$
$$X_3 = 0,1X_1 + 0,05X_2 + 0,08X_3.$$

ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ:

$$X_1 = A_{11} = 1,580;$$
$$X_2 = A_{21} = 0,276;$$
$$X_3 = A_{31} = 0,187.$$

მშენებლობის საბოლოო პროდუქციის ერთეულზე სრული დანახარჯების გამოსაანგარიშებლად შევადგინოთ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$X_1 = 0,3X_1 + 0,25X_2 + 0,2X_3;$$
$$X_2 = 0,15X_1 + 0,12X_2 + 0,03X_3 + 1;$$
$$X_3 = 0,1X_1 + 0,05X_2 + 0,08X_3.$$

ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ:

$$X_1 = A_{12} = 0,469;$$
$$X_2 = A_{22} = 1,220;$$
$$X_3 = A_{32} = 0,117.$$

სხვა დარგების საბოლოო პროდუქციის ერთეულზე სრული დანახარჯების გასაანგარიშებლად შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა:

$$X_1 = 0,3X_1 + 0,25X_2 + 0,2X_3;$$
$$X_2 = 0,15X_1 + 0,12X_2 + 0,03X_3;$$
$$X_3 = 0,1X_1 + 0,05X_2 + 0,08X_3 + 1.$$

სისტემის ამოხსნით გვექნება:

$$X_1 = A_{13} = 0,363;$$
$$X_2 = A_{23} = 0,103;$$

$$X_3 = A_{33} = 1,132$$

სრულ დანახარჯთა კოეფიციენტების მატრიცას შემდეგი სახე აქვს:

$$A = \begin{pmatrix} 1,580 & 0,469 & 0,363 \\ 0,276 & 1,120 & 0,103 \\ 0,187 & 0,117 & 1,132 \end{pmatrix}$$

ამგვარად, სრულ დანახარჯთა კოეფიციენტები სიდიდით მეტია პირდაპირ დანახარჯთა კოეფიციენტებზე. სრულ დანახარჯთა კოეფიციენტებისა და საბოლოო პროდუქციის მოცემული დონის პირობებში /8/ ფორმულით შეიძლება გამოვიანგარიშოთ დარგების მიხედვით პროდუქციის გამოშვების მოცულობა.

მანქანათმშენებელი მრეწველობის პროდუქციის საჭირო მოცულობა იქნება

$$X_1 = A_{11}Y_1 + A_{12}Y_2 + A_{13}Y_3 = 1,58 \cdot 56 + 0,469 \cdot 20 + 0,363 \cdot 12 = 102,2$$

მშენებლობის მთლიანი პროდუქცია იქნება

$$X_2 = A_{21}Y_1 + A_{22}Y_2 + A_{23}Y_3 = 0,276 \cdot 56 + 1,12 \cdot 20 + 0,103 \cdot 12 = 41,0;$$

მატერიალური წარმოების სხვა დარგების პროდუქცია იქნება

$$X_3 = A_{31}Y_1 + A_{32}Y_2 + A_{33}Y_3 = 0,187 \cdot 56 + 0,117 \cdot 20 + 1,132 \cdot 12 = 26,4.$$

როგორც ჩანს, /5/ და /8/ ფორმულებით გამოანგარიშებული დარგების მიერ გამოშვებული მთლიანი პროდუქციის მოცულობა ერთმანეთს ემთხვევა. ეს საშუალებას გვაძლევს შემოწმდეს გამოთვლის სისწორე.

განტოლებათა სისტემის ამოხსნის სხვადასხვა მეთოდი

არსებობს /გაუსის, ჟორდან-გაუსის, ზეიდელის და სხვა/ ისინი გამოიყენებიან ელექტრონულ-გამომთვლელი მანქანების საშუალებით გამოთვლების ჩატარების დროს.

§ 5. სამრეწველო საწარმოს ტექნიკური სამრეწველო-საფინანსო გეგმის მატრიცული მოდელი

საწარმოს მეურნეობრივ-ფინანსური საქმიანობის დაგეგმვა საჭიროებს დიდი მოცულობის ინფორმაციის დამუშავებას, შრომატევად გაანგარიშებებს, ასევე ათასობით საანგარიშო მაჩვენებლებისა და საგეგმო დავალებების შეთანხმებას.

ტექნიკური სამრეწველო-საფინანსო გეგმის შედგენის არსებული მეთოდები არ იძლევა სასურველ შედეგს, ვინაიდან ძნელია არსებული ინფორმაციის სრული გამოყენება და საგეგმო მაჩვენებლების ურთიერთდამოკიდებულების გათვალისწინება. ამ ნაკლოვანებათა აღმოსაფხვრელად საჭიროა დაინერგოს საგეგმო დოკუმენტების ერთიანი ფორმა, რაც მათემატიკისა და გამოთვლითი ტექნიკის გამოყენების საშუალებას იძლევა. შიდასაწარმოო დაგეგმვაში მათემატიკური მეთოდებისა და გამოთვლითი ტექნიკის გამოყენება არა მარტო აჩქარებს ეკონომიკური გაანგარიშებების პროცესს, უზრუნველყოფს მაჩვენებლების გაანგარიშების სიზუსტეს, არამედ დიდძალი ინფორმაციის დამუშავებისა და გეგმის სხვადასხვა ვარიანტების გაანგარიშების საფუძველზე საშუალებას იძლევა მივიღოთ მეცნიერულად დასაბუთებული ოპტიმალური საგეგმო დავალებანი.

ტექნიკური სამრეწველო-საფინანსო გეგმის მატრიცულ მოდელს საფუძვლად უდევს დარგთაშორისი ბალანსის მოდელის აგების პრინციპი. სახელდობრ, მოდელში დაცული უნდა იყოს პროდუქციის წარმოებისა და განაწილების, დანახარჯებისა და გამოშვების შორის

მჭიდრო ურთიერთკავშირი. აქვს თავისებურება, ასე მაგალითად, ტექნიკურ სამრეწველო-საფინანსო გეგმის მატრიცულ მოდელში არ არის წარმოების დარგები, მისთვის დამახასიათებელია მოცემული წარმოების საწარმოო სტრუქტურა: ძირითადი და დამხმარე საამქროები და მათ მიერ წარმოებული შუალედური და საბოლოო პროდუქცია. მანქანათმშენებელ საწარმოებში ეს პროდუქცია გვევლინება კვანძების, ცალკეული დეტალების, მზა ნაწარმის სახით.

ტექნიკურ სამრეწველო-საფინანსო გეგმის მატრიცულ მოდელებში განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს III კვადრანტს, სადაც აისახება შრომითი რესურსებისა და საწარმოს ძირითადი ფონდების გამოყენება, აგრეთვე ნედლეულის მასალების, სათბობის, ენერგიის, ნახევარფაბრიკატების გეგმური მოთხოვნა.

მანქანათმშენებელი საწარმოს ტექნიკური სამრეწველო-საფინანსო გეგმის მატრიცული სქემა მოცემულია ცხრილში /ცხრილი 3/.

ტექნიკური სამრეწველო-საფინანსო გეგმის მატრიცული მოდელი შეიცავს ოთხ კვადრანტს.

პირველ კვადრანტში აისახება საწარმოს საამქროებს შორის წარმოებრივი კავშირები.

II კვადრანტში ასახულია საწარმოს საქმიანობის საშედეგო მაჩვენებლები, სასაქონლო /საბოლოო/ პროდუქცია და მთლიანი ბრუნვა, რომელშიც შედის სასაქონლო პროდუქცია და შიგასაქარხნო ბრუნვა /საამქროს შუალედური პროდუქცია/.

III კვადრანტის მონაცემები ასახავენ საწარმოს რესურსებს. აქ ნათლად არის გამოყოფილი სამი ჯგუფის რესურსები: შრომის საგნების რესურსები; შრომითი რესურსები; შრომის საშუალებების რესურსები.

ცხრილი 3

მანქანათმშენებელი საწარმოს ტექნიკური სამრეწველო-საფინანსო გეგმის მატრიცული მოდელის სქემა

დანახარჯები / გამოშვება	ძირითადი საამქროები და მათ მიერ წარმოებული პროდუქცია: ა.საამქრო 1 უბანი	ა.საამქრო 2 უბანი	. . .	ა.საამქრო უბანი	ბ.საამქრო 1 უბანი	ბ.საამქრო 2 უბანი	. . .	ბ.საამქრო უბანი	დამხმარე საამქროების მომსახურება	არაპირდაპირი ხარჯები	შიგასაქარხნო ბრუნვა	სასაქონლო პროდუქცია	მთლიანი ბრუნვა
ძირითადი საამქროები და მათ მიერ წარმოებული პროდუქცია													
ა.საამქრო 1 უბანი													
ა.საამქრო 2 უბანი													
ა.საამქრო უბანი			I კვადრანტი									II კვადრანტი	
ბ.საამქრო 1 უბანი													
ბ.საამქრო 2 უბანი													
. . . ბ.საამქრო უბანი													
. . . .													
დამხმარე საამქროების მომსახურება													
არაპირდაპირი ხარჯები													
ნედლეული, მასალები სათბობი, ენერგია [illegible]													
ხელფასი მუშათა პროფესიული ჯგუფების მიხედვით			III კვადრანტი									IV კვადრანტი	
ძირითადი ფონდები და საწარმოო სიმძლავრეები													

IV კვადრანტში ასახულია ძირითადი საწარმოს გარეთ რეალიზაციის ოპერაციები ან შესყიდული მასალების, ნაწარმის ნახევარფაბრიკატების გადაცემა თავისივე არასაწარმოო სამსახურზე.

საგეგმო გაანგარიშებებს საფუძვლად უდევს ნორმატიული მოდელი, ე.ი. პროდუქციის ერთეულზე დანახარჯების საგეგმო ნორმატივების /კოეფიციენტების/ სისტემა, ნორმატიული მოდელი ისეთივე სქემით დგება როგორც საწარმოს ტექნიკური სამრეწველო საფინანსო გეგმის მატრიცული მოდელი.

ნორმატიული მოდელისა და სასაქონლო პროდუქციის გამოშვების საგეგმო დავალების მიცემით შეიძლება გამოითვალოს საწარმოს ტექნიკურ სამრეწველო-საფინანსო გეგმის ყველა მაჩვენებელი, რის შედეგადაც მიიღება პროდუქციის წარმოებისა და განაწილების შეწონასწორებული გეგმა.

გაანგარიშებანი წარმოებს შემდეგ განტოლებათა სისტემის საშუალებით

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + y_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

სადაც X – არის ნომენკლატურული მოდელის შესაბამისი ცალკეული დეტალის, კვანძისა და ნაწარმის გამოშვება;

a_{ij} – შუალედური პროდუქციის ნორმატიული დანახარჯები;

y_i – ცალკეული სახის სასაქონლო პროდუქციის გამოშვების გეგმური დავალება.

სამრეწველო საწარმოს მატრიცული ტექნიკურ სამრეწველო-საფინანსო გეგმა დგება ორი ფორმით, ნატურალურ ერთეულებში და ღირებულებით მაჩვენებლებში. ნატურალურ და ღირებულებითი მოდელის I და II კვადრანტი განსხვავდებიან მხოლოდ ზომის ერთეულებით, ხოლო ღირებულებითი მოდელის III კვადრანტში შრომითი დანა-

ხარჯებისა და მოწყობილობის დატვირთვის მაჩვენებლების ნაცვლად არის ხელფასი და ამორტიზაციისა და მოგების /ან ზარალის/ მაჩვენებლები. ღირებულებით მოდელის სიდიდეთა უმრავლესობა მიიღება ნატურალური მოდელის მონაცემთა შესაბამის ფასზე გამრავლებით.

სამრეწველო საწარმოს ტექნიკურ, სამრეწველო-საფინანსო გეგმის მოდელი ნატურალურ მაჩვენებლებში განსაზღვრავს:

დეტალების, კვანძების, ნაწარმის წარმოების გეგმას;

საამქროთაშორის მიწოდების გეგმას;

საწარმოების და ცალკეული საამქროების მატერიალურ-ტექნიკური უზრუნველყოფის გეგმას;

პროდუქციის გეგმურ შრომატევადობას;

სამრეწველო მოწყობილობის გეგმურ დატვირთვას.

სამრეწველო საწარმოს ტექნიკურ სამრეწველო საფინანსო გეგმის ღირებულებითი მოდელის მაჩვენებლები ახასიათებენ:
საამქროს და საწარმოს პროდუქციის მოცულობას;

თითოეული სახის საბოლოო და შუალედურ პროდუქციაზე დანახარჯთა სიდიდეს და სტრუქტურას;

მატერიალურ-ტექნიკურ უზრუნველყოფაზე გაწეულ წარმოების დანახარჯებს;

ხელფასის გეგმურ ფონდს საამქროს ჭრილში;

ძირითადი საშუალებების ამორტიზაციის თანხას;

წარმოების მასშტაბით ცალკეული სახის პროდუქციის მომგებიანობას ან ზარალს.

განხილული მატრიცული მოდელი საფუძვლად უდევს საწარმოს ტექნიკურ საწარმოო-საფინანსო გეგმის სხვა განყოფილებების დამუშავებას, როგორც თვითღირებულების გეგმა, ფინანსუ-

რი გეგმა და ა.შ. როგორც განხილული მოდელის განვითარება შეიძლება დამუშავდეს აგრეთვე საამქროს დაგეგმვის მატრიცული მოდელი.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

შეადგინეთ მანქანათმშენებელი საწარმოს /გაერთიანების/ წლიური გეგმის მატრიცული მოდელი.

თ ა ვ ი IV. წრფივი პროგრამირება

§ 1. წრფივი პროგრამირების არსი

ეკონომიკური პრობლემების გადაჭრაში მათემატიკური მეთოდების გამოყენების აუცილებლობამ გამოიწვია გამოყენებითი მათემატიკის დარგის – მათემატიკური პროგრამირების განვითარება, რომლის ძირითადი ნაწილია წრფივი პროგრამირება.

წ რ ფ ი ვ ი პ რ ო გ რ ა მ ი რ ე ბ ი ს ს ა გ ა ნ ს წარმოადგენს წრფივი ფუნქციის ექსტრემუმის /მაქსიმუმის ან მინიმუმის/ გამოთვლა იმ პირობებში, როცა საძიებელი ცვლადი სიდიდეები აკმაყოფილებენ წრფივ ტოლობებს ან უტოლობებს.

მრავალი ეკონომიკური და ტექნიკურ-ეკონომიკური პროცესების დაგეგმვის საკითხები ოპტიმალური ამოხსნის მიზნით დაიყვანება წრფივი პროგრამირების ამოცანებამდე. ამით წრფივი პროგრამირების წარმოშობა და განვითარება უშუალოდაა დაკავშირებული ეკონომიკურ პრობლემატიკასთან.

ტერმინი "წრფივი პროგრამირება" წარმოიშვა 1951 წელს ამერიკელი მათემატიკოსების /ჯ.დანციგი, ტ.კუპმანსი/ შრომებში.

წრფივი პროგრამირების პირველი გამოკვლევები განხილულია 30-იან წლებში. ლენინგრადის უნივერსიტეტში /ლ.კანტოროვიჩი/ სსრ კავშირსა და აშშ-ში წრფივი პროგრამირების ინტენსიური განვითარება მოხდა 1955-1964 წლებში. თანამედროვე პერიოდში მრავალი დიდი სახალხომეურნეობრივი მნიშვნელობის ამოცანები იხსნება წრფივი პროგრამირების მეთოდებით. წრფივი პროგრამირება წარმოადგენს იმ მეთოდთა ერთობლიობას, რომელთა საშუალებით ოპტიმალურად უნდა განაწილდეს ხელთ არსებული რესურსები სხვადასხვა სახალხომეურნეობრივი ამოცანის გადაწყვეტის დროს.

ნებისმიერი ტექნიკურ- ეკონომიკური ამოცანის გადაწყვეტის დროს ჩვენ ვისახავთ გარკვეულ მიზანს, რომელიც სასურველია მივაღწიოთ, ამასთან ჩვენ გვაქვს საშუალებებისა და რესურსების შეზღუდული რაოდენობა. თუ არსებული რესურსების განაწილება ერთადერთია, მაშინ არავითარი პრობლემა არ იქნება, მაგრამ პრაქტიკაში გვაქვს ისეთი შემთხვევები, როცა რესურსები შეიძლება განაწილდეს სხვადასხვაგვარად, განაწილების ერთი ვარიანტი თავისი ეფექტიანობით განსხვავებულია სხვა ვარიანტისაგან. დასმის პრობლემა: ამოცანის ამოხსნის მრავალ შესაძლო ვარიანტებიდან საჭიროა მოიძებნოს ისეთი, რომელიც უზრუნველყოფს არსებული რესურსების უფრო ეფექტიან განაწილებას. ყოველი კონკრეტული ამოცანის ამოხსნა მოითხოვს მოქმედების კონკრეტული პროგრამის არჩევას. აქედან წარმოიშვა ტერმინი "პროგრამირება". სახელწოდება წ რ ფ ი ვ ი   პ რ ო გ რ ა მ ი რ ე ბ ა დაკავშირებულია იმასთან, რომ განსახილველი ამოცანები, როგორც წესი დაიყვანება წრფივ განტოლებათა ან უტოლობათა სისტემის ამოხსნამდე.

§ 2. წრფივი პროგრამირების ძირითადი ამოცანა

წრფივი პროგრამირების ძირითადი ამოცანა ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად:

ვიპოვოთ წრფივი ფუნქციის მაქსიმუმი

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

რომელსაც მ ი ზ ნ ი ს ფ უ ნ ქ ც ი ა ს უწოდებენ. შემდეგ პირობებში

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &= b_1 ; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &= b_2 ; \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n &= b_m , \end{aligned} \qquad (1)$$

$$x_j \geqslant 0 , \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

წრფივი პროგრამირების ამოცანის შემოკლებული ჩაწერა ასეთნაირად შეიძლება

ვიპოვოთ მაქსიმუმი $\quad f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

შემდეგ პირობებში:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j \qquad i = 1, 2, \ldots, m ;$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n .$$

სადაც x_j უცნობია; a_{ij}, b_j, c_j კი – მოცემული სიდიდეებია.

წრფივი პროგრამირების ამოცანების მათემატიკურ მოდელებში გამოიყოფა სამი შემადგენელი ნაწილი: მიზნის ფუნქცია, შეზღუდვათა სისტემა და ცვლადების არაუარყოფითობის პირობა.

ამოცანის ყოველგვარი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს შეზღუდვათა სისტემას და არაუარყოფითობის პირობას იწოდებიან დ ა ს ა შ ვ ე ბ ა მ ო ნ ა ხ ს ნ ა დ, ხოლო თუ აკმაყოფილებს აგრეთვე მიზნის ფუნქციასაც იწოდება ო პ ტ ი მ ა ლ უ რ ა მ ო ნ ა ხ ს ნ ა დ .

წრფივი პროგრამირების ეკონომიკურ ამოცანებში მიზნის ფუნქციის C_j კოეფიციენტები შეიძლება ასახავდნენ მოგებას პროდუქციის ერთეულზე, ფასებს, დანახარჯების დონეს და ა.შ. ამოცანის შინაარსისათვის ძალზე მნიშვნელოვანია იხსნება იგი მაქსიმუმის /მოგება, პროდუქციის მოცულობა, შრომის ნაყოფიერება/, თუ მინიმუმის /მიმდინარე დანახარჯები, კაპიტალდაბანდება, სამუშაოს შესრულების დრო/ მიხედვით. მიზნის ფუნქციის მინიმუმის მოძებნა ადვილად დაიყვანება მაქსიმუმის მოძებნაზე თუ მას გავამრავლებთ "-1"-ზე. ამიტომ ჩვენს მიერ ჩამოყალიბებული ამოცანა მოიცავს არა მარტო მაქსიმუმის, არამედ მინიმუმის მოძებნის ამოცანასაც. წრფივი პროგრამირების ძირითადი ამოცანის შეზღუდვათა სისტემა მოიცავს m წრფივად დამოუკიდებელ განტოლებას, როცა $m=n$ შეზღუდვათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც შეიძლება ჩაითვალოს ოპტიმალურ ამოხსნად. პრაქტიკული ინტერესი აქვს იმ შემთხვევას, როცა $m < n$, ე.ი. უცნობების რიცხვი მეტია განტოლებათა რიცხვზე. ამ შემთხვევაში გვაქვს ამოხსნათა უსასრულო სიმრავლე. სწორედ ამ დროს დაისმის საკითხი სპეციალური მეთოდებით მოიძებნოს ამონახსნთა შორის საუკეთესო, ოპტიმალური, ცხადია /1/ სისტემა შეიძლება იყოს არათავსებადი, არ ჰქონდეს არც ერთი ამოხსნა.

წრფივი პროგრამირების ეკონომიკურ ამოცანებში შე-

ზღუდვათა სისტემას თავდაპირველად აქვთ უტოლობათა ფორმა, მაგალითად, a_{ij} კოეფიციენტები აღნიშნავენ რესურსების დანახარჯის ნორმას, პროდუქციის ერთეულზე. b_i სიდიდეები - არსებული რესურსების მოცულობას, შეზღუდვათა უტოლობათა სისტემა საჭიროებს, რომ დანახარჯებმა არ გადააჭარბოს რესურსების მოცულობას. ეს შეზღუდვა ასე ჩაიწერება:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k &\le b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k &\le b_2 ; \\
&\;\,\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k &\le b_m .
\end{aligned}
$$

წრფივი პროგრამირების ამოცანის დასმისა და ამოხსნისათვის შეზღუდვა-უტოლობანი უნდა გარდაიქმნას განტოლებებად, ეს კი მიიღწევა თუ შეზღუდვათა მარცხენა მხარეს დავუმატებთ არაუარყოფით ცვლად სიდიდეებს ე.ი.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + x_{k+1} &= b_1 ; \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + x_{k+2} &= b_2 ; \\
&\;\,\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k + x_{k+m} &= b_m
\end{aligned}
$$

წრფივი პროგრამირების ამოცანებში დამატებით ცვლადებს აქვს განსაზღვრული ეკონომიკური შინაარსი. მაგალითად, თუ ამოცანის შეზღუდვებში აისახება საწარმოო რესურსების არსებობა და დანახარჯები, მაშინ ოპტიმალურ გეგმაში დამატებითი ცვლადები გვიჩვენებენ გამოუყენებელი რესურსების მოცულობას.

რიგ ამოცანებში საწყისი შეზღუდვები მოცემულია "მეტი ან ტოლი" უტოლობის სახით:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k \geqslant b_1;$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k \geqslant b_2;$$
$$\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k \geqslant b_m.$$

ასეთი სისტემა დაიყვანება განტოლებათა სისტემაზე თუ უტოლობა-თა მარცხენა ნაწილს გამოვაკლებთ არაუარყოფით ცვლადებს

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k - x_{k-1} = b_1;$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k - x_{k-2} = b_2;$$
$$\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k - x_{k-m} = b_m.$$

მატრიცული მოდელები. მათი სახეები

დარგთაშორისი ბალანსის ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელი

ეკონომიკურ-მათემატიკურ მოდელებს შორის ერთ-ერთი საკმარისად გავრცელებული ტიპის მოდელებს მიეკუთვნება მატრიცული მოდელები. იგი წარმოადგენს სწორკუთხა ცხრილს /მატრიცას/, რომლის ელემენტები ასახავენ ეკონომიკური ობიექტების კავშირებს და ატარებენ გარკვეულ ეკონომიკურ შინაარსს. მათი გამოანგარიშება ხდება მატრიცათა თეორიაში დადგენილი წესის მიხედვით. მატრიცულ მოდელებში აისახება პროდუქციის წარმოების განაწილების დანახარჯთა სტრუქტურა და ახლად შექმნილი ღირებულება.

მატრიცული ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელები პროდუქციის წარმოებისა და განაწილების დაგეგმვისა და ანალიზის სა-

შეფასებას იძლევა, როგორც ცალკეული საწარმოების, ისე დარგე-
ბისა და მთელი სახალხო მეურნეობის მასშტაბით.

მატრიცულ მოდელებს მიეკუთვნება: სახალხო მეურნეობა-
ში პროდუქციის წარმოებისა და განაწილების დარგთაშორისი ბა-
ლანსი; სახალხო მეურნეობის დარგთა განვითარების ტემპების
მატრიცული მოდელები; მოკავშირე რესპუბლიკებისა და ეკონომი-
კური რაიონების პროდუქციის წარმოებისა და განაწილების დარგ-
თაშორისი ბალანსი; საწარმოთა, გაერთიანებათა ეკონომიკური
და სოციალური განვითარების გეგმის მატრიცული მოდელი. მიუხე-
დავად ამ მოდელთა სპეციფიკისა მათ აერთიანებს არა მხოლოდ
აგების საერთო ფორმალური პრინციპი და გაანგარიშებათა სის-
ტემის მსგავსება, არამედ მსგავსი აქვთ რიგი ეკონომიკური მა-
ხასიათებლები. აქედან გამომდინარე, მატრიცული მოდელების ძი-
რითადი დამოკიდებულებანი შეიძლება გავარკვიოთ ერთ-ერთ მათ-
განზე - პროდუქციის წარმოებისა და განაწილების დარგთაშორისი
ბალანსის მაგალითზე.

სახალხო მეურნეობის მასშტაბით დარგთაშორისი ბალანსი
გვიჩვენებს: ერთობლივი საზოგადოებრივი პროდუქტის წარმოებასა
და განაწილებას დარგობრივ ჭრილში; დარგთაშორის წარმოებრივ
კავშირებს; მატერიალური და შრომითი რესურსების გამოყენებას;
ეროვნული შემოსავლის წარმოებასა და განაწილებას.

როგორც ჩანს, წრფივი პროგრამირების ამოცანების ნე-
ბისმიერ შეზღუდვათა სისტემა დაიყვანება საერთო ფორმამდე
/1/.

§ 3. წრფივი პროგრამირების ამოცანის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

წრფივი პროგრამირების ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნის ერთ-ერთ მარტივ მეთოდს წარმოადგენს გ რ ა ფ ი კ უ ლ ი მ ე თ ო დ ი

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა.

საყოფაცხოვრებო მომსახურების ქიმიური წმენდის პუნქტებისათვის ორი ხარისხის ბენზინისაგან ამზადებენ A და B ნარევს. A ნარევი შეიცავს 60% I ხარისხის და 40% II ხარისხის ბენზინს; B ნარევი შეიცავს 80% I ხარისხის და 20% II ხარისხის ბენზინს. I კგ. A ნარევის ფასია 10 კაპ. და I კგ. B ნარევის ფასია 12 კაპ.

შევადგინოთ ნარევის ისეთი გეგმა, რომლის დროსაც მიღებული იქნება მაქსიმალური შემოსავალი, იმ პირობებში, როცა გვაქვს 50 ტ. I ხარისხის და 30 ტ. II ხარისხის ბენზინი.

ამოცანის პირობა წარმოვადგინოთ ცხრილის სახით

ც ხ რ ი ლ ი 4

ბენზინის რაოდენობა		ნარევის სახე	პროცენტული შემადგენლობა		I კგ-ის ფასი
I ხარისხის	II ხარისხის		I ხარისხის	II ხარისხის	
50 ტ.	30 ტ.	A	60%	40%	10 კაპ.
		B	80%	20%	12 კაპ.

x_1 სიმბოლოთი აღვნიშნოთ A ნარევში ტონების რაოდენობა და x_2-ით B ნარევში ტონების რაოდენობა, რომლითაც მიიღება მაქსიმალური შემოსავალი. თუ ტონა A ნარევის რეალიზაციის ფასია 100 მანეთი, მაშინ x_1 ტონაზე მიიღება $100x_1$ მანეთი

ამონაგები. თუ ტონა B ნარევის რეალიზაციის ფასია 120 მანეთი, მაშინ X ტონისაგან მიიღება $120x_2$ მანეთი ამონაგები.

ამრიგად, საჭიროა საერთო ამონაგების მაქსიმუმის მოძებნა, რომლის წრფივი ფორმა ასეთია:

$$f = 100x_1 + 120x_2$$

x_1 და x_2 ცვლადთა რაოდენობა არ შეიძლება იყოს ნებისმიერი, ისინი ექვემდებარებიან გარკვეულ შეზღუდვებს. ჯერ-ერთი, x_1 და x_2 არ შეიძლება იყონ უარყოფითი, მეორე, I ხარისხის ბენზინის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა A და B ნარევის წარმოსაქმნელად არ შეიძლება აღემატებოდეს არსებულ ბენზინის რაოდენობას ე.ი. 50 ტონას, ანალოგიურად II ხარისხის ბენზინი რომელიც წარმოქმნის იმავე ნარევებს არ შეიძლება აღემატებოდეს 30 ტონას. A ნარევის ყოველი ტონისათვის საჭიროა 0,6 ტ./60%/ I ხარისხის ბენზინი; x_1 ტონისათვის კი- $0,6x_1$ ტონა I ხარისხის ბენზინი. ანალოგიურად x_2 ტონა B ნარევზე საჭიროა $0,8x_2$ ტონა I ხარისხის ბენზინი. მაშასადამე,

$$0,6x_1 + 0,8x_2 \le 50.$$

ზუსტად ასევე II ხარისხის ბენზინის ხარჯვა უნდა აკმაყოფილებდეს ტოლობას

$$0,4x_1 + 0,2x_2 \le 30.$$

მაშასადამე, გვაქვს შემდეგი ამოცანა:

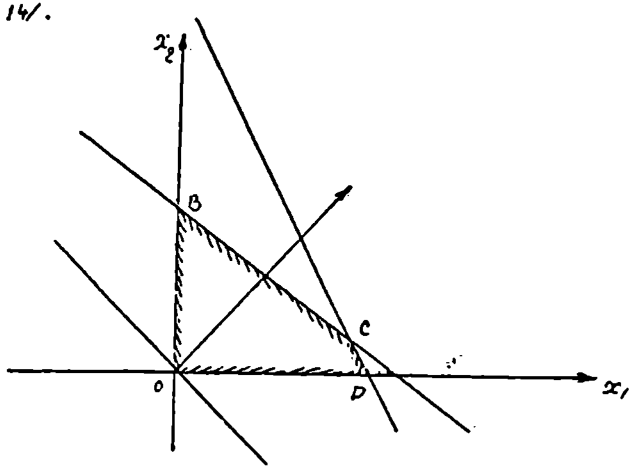
ვიპოვოთ წრფივი ფორმის მაქსიმალური მნიშვნელობა

$$f = 100x_1 + 120x_2.$$

შემდეგ პირობებში:

$$0,6x_1+0,8x_2\le 50$$
$$0,4x_1+0,2x_2\le 30 \qquad (1)$$
$$x_1\geq 0$$
$$x_2\geq 0$$

დასმული ამოცანის ამოხსნისათვის ავაგოთ /1/ უტოლობათა სისტემის შესაბამისი ამოზნექილი მრავალკუთხედი. ამ მიზნით სიბრტყეზე ავაგოთ წრფეები $0,6x_1+0,8x_2=50$ და $0,4x_1+0,2x_2=30$. კოორდინატთა ღერძებთან ერთად $x_1=0$ და $x_2=0$ ისინი ქმნიან ამოზნექილ ოთხკუთხედს $OBCD$ /ნახ.14/.



ნახ.14.

დაშტრიხული მრავალკუთხედი არის /1/ სისტემის ამონახსნი. მრავალკუთხედში ან მის წვეროებზე მდებარე ყველა წერტილი (x_1, x_2) წარმოადგენს /1/ სისტემის ამონახსნს.

მაგალითად, წერტილი, რომლის კოორდინატებია $x_1=60$ და $x_2=15$ აკმაყოფილებს /1/ უტოლობათა სი-

სტემას და გვიჩვენებს, რომ დახარჯულია 60 ტ. A ნარევი და 15 ტ. B ნარევი. ამის შედეგად ამონაგები შეადგენს

$$f=100\cdot 60+120\cdot 15=7800$$

ასეთი გეგმის შემთხვევაში მთელი ბენზინი არ დაიხარჯება ნარევის წარმოსაქმნელად, თუ x_1 და x_2-ის მნიშვნელობებს ჩავსვამთ /1/ სისტემაში აღმოჩნდება, რომ I ხარისხის 2 ტ და II ხარისხის 3 ტ ბენზინი არაა გამოყენებული ნარევის დასამზადებლად. ე.ი. ეს გეგმა არ არის საუკეთესო. ოპტიმალური გეგმის მოსაძებნად გავავლოთ წრფე

$$100x_1+120x_2=0$$

ამ განტოლების მარცხენა ნაწილი გამოხატავს საერთო ამონაგებს, ეს წრფე აღნიშნავს უმოქმედობას, მართლაც წერტილი $x_1=0$ და $x_2=0$ აკმაყოფილებს წრფის განტოლებას, ეს კი ნიშნავს იმას, რომ არ ვაწარმოებთ ნარევს, ე.ი. არაფრის რეალიზაცია არ ხდება. გადავაადგილოთ ეს წრფე წრფის პერპენდიკულარული მიმმართველი ვექტორის პარალელურად. წრფივი ფორმა

$$f=100x_1+120x_2$$

მიიღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას ამოზნექილი მრავალკუთხედის C წვეროზე.

ამრიგად, C არის ის წერტილი, რომლის კოორდინატები მისცემს წრფივ ფორმას მაქსიმალურ მნიშვნელობას. C წერტილის კოორდინატების მოსაძებნად საკმარისია ამოვხსნათ იმ წრფეთა განტოლებათა სისტემა, რომლის გადაკვეთაზეც იგი ძევს.

ე.ი. $\begin{cases} 0{,}6x_1+0{,}8x_2=50 \\ 0{,}4x_1+0{,}2x_2=30 \end{cases}$

ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ

$$x_1 = 70;$$

$$x_2 = 10;$$

მაშასადამე, მაქსიმალური შემოსავალი მიიღება იმ შემთხვევაში, თუ დამზადდება 70 ტ. A ნარევი და 10 ტ. B ნარევი ამ შემთხვევაში რეალიზაციის საერთო თანხა შეადგენს 8200 მანეთს.

$$f = 100x_1 + 120x_2 = 100\cdot 70 + 120\cdot 10 = 8200.$$

ამრიგად, x_1 და x_2-ის მნიშვნელობანი აკმაყოფილებს /1/ შეზღუდვათა სისტემას და მიზნის ფუნქციას ანიჭებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

§ 4. სიმპლექსური მეთოდი

სიმპლექსური მეთოდი წრფივი პროგრამირების ამოცანების ამოხსნის ყველაზე უფრო ზოგადი მეთოდია. მისი, არსი შემდეგია: პრაქტიკაში გვხვდება ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნასაც საჭიროებენ რომელიმე წრფივი ფორმის ოპტიმალური მნიშვნელობის მიძებნას. ამისათვის ვირჩევთ ხაზული ამოცანის საწყის, დასაშვებ ამონახსნს, რომელსაც ს ა ყ რ დ ე ნ ი გეგმა ეწოდება. შემდეგ ვახორციელებთ თანმიმდევრულ ბიჯებს, ელემენტარული ალგებრული გარდაქმნების გზით და ყოველ ბიჯზე ვიღებთ ამოცანის ახალ ამონახსნს, რომელიც უკეთესია /უკიდურეს შემთხვევაში უარესი არაა/ მის წინა ამონახსნზე. ასეთი გარდაქმნების გზით ან მივიღებთ ოპტიმალურ ამონახსნს, ან დავადგენთ, რომ აღებულ ამოცანას ამონახსნი არ აქვს.

მიუხედავად იმისა, რომ სიმპლექსურ მეთოდში ალგებრული გარდაქმნები მარტივია, ზოგჯერ ძნელდება მისი გაგება,

ამიტომ სიმპლექსური მეთოდის არსს ჯერ განვიხილავთ კონკრეტულ მაგალითზე და, შემდეგ ზოგადი სახით ჩამოვაყალიბებთ.

დავუშვათ მანქანათმშენებელ საწარმოს აქვს სამი ჯგუფის მოწყობილობანი და შეუძლია გამოუშვას ოთხი სახის A, B, C, D ნაწარმი. ყველა სახის ნაწარმის გასაღება გარანტირებულია და საწარმოს შეუძლია დამოუკიდებლად დაგეგმოს მისი გამოშვების მოცულობა და ასორტიმენტი, არ არის მასალების /ნედლეულის/ შეზღუდვა, ლიმიტირებულია მხოლოდ ძირითადი მოწყობილობა, რომელთა მუშაობის დროის ეფექტური ფონდი მოცემულია და არ შეიძლება მასზე გადაჭარბება. ცნობილია აგრეთვე თითოეული სახის ნაწარმის თითოეული ჯგუფის მოწყობილობებზე დამუშავების დროის ნორმა, ცნობილია ცალკეული ნაწარმის ერთეულზე საწარმოს მიერ მიღებული მოგება. საჭიროა ნაწარმების გეგმამ უზრუნველყოს რაც შეიძლება მაღალი მოგება.

რიცხვითი მონაცემები მოცემულია ცხრილში /ცხრილი 5/.

ც ხ რ ი ლ ი 5

მოწყობილობის ჯგუფები	ერთეულ ნაწარმის დამზადების დრო /წუთებში/				დროის ეფექ-ტური ფონდი /წუთებში/
	ნაწარ-მი	ნაწარ-მი	ნაწარ-მი	ნაწარმი	
I ჯგუფი	1	2	4	8	24000
II ჯგუფი	3	5	1	0	12000
III ჯგუფი	6	0	3	1	30000
მოგება ერთე-ულ ნაწარმზე /მან./	0,4	0,2	0,5	0,8	-

დროის თვიურ ფონდებს შორის განსხვავება გამოწვეულია ჯგუფების მიხედვით მოწყობილობათა რაოდენობის გამო /საერთო ფონდი განისაზღვრება ერთეული მოწყობების დროის ფონდის გამრავლებით ჯგუფში ერთეულთა რაოდენობაზე/.

A, B, C, D ნაწარმის გამოშვების საძიებელი მოცულობა აღვნიშნოთ x_1, x_2, x_3 და x_4, მაშინ ამოცანა მათემატიკურად ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:*

ვიპოვოთ შემდეგი სიდიდის მაქსიმუმი

$$0,4x_1+0,2x_2+0,5x_3+0,8x_4$$

შემდეგ პირობებში:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3+8x_4 &\le 24000 \\ 3x_1+5x_2+x_3 &\le 12000 \; ; \\ 6x_1+3x_2+x_4 &\le 30000 \end{aligned}$$

სანამ დავიწყებდეთ ამოცანის ამოხსნას სიმპლექსური მეთოდით, აუცილებელია საწყისი უტოლობები გარდავქმნათ ტოლობებად. ამისათვის საჭიროა შევიტანოთ სამი დამატებითი არაუარყოფითი ცვლადი სიდიდეები- x_5, x_6 და x_7 მივუმატოთ შეზღუდვის სისტემის მარცხენა მხარეებს.

მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3+8x_4+x_5 &= 24000 \; ; \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_6 &= 12000 \\ 6x_1+3x_2+x_4+x_7 &= 30000. \end{aligned}$$

ამოცანის სიმპლექსური მეთოდით ამოხსნისათვის საჭიროა გვქონდეს სპეციალური სიმპლექსური ცხრილი /ცხრილი 6/.

- - - - - - - - - - - - - - -

* აქ და სხვა შემთხვევებშიც ცვლადთა არაუარყოფითობის პირობა ჩანაწერის შემოკლების მიზნით არ მოგვყავს, მაგრამ იგი იგულისხმება.

ცხრილი 6

ამოცანის ამოხსნა სიმპლექსური მეთოდით

რესურსები და პროდუქცია	ბაზისი	წრფივი ფორმის კოეფიციენტები C	ძალა	0,4	0,2	0,5	0,8	0	0	0	
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
I ჯგუფის მოწყობილობა	x_5	0	24000	1	2	4	$\boxed{8}$	1	0	0	(1)
II ჯგუფის მოწყობილობა	x_6	0	12000	3	5	1	0	0	1	0	
III ჯგუფის მოწყობილობა	x_7	0	30000	6	0	3	1	0	0	1	
	$z_j - c_j$		0	-0,4	-0,2	-0,5	-0,8	0	0	0	
P პროდუქცია	$\rightarrow x_4$	0,8	3000	1/8	1/4	1/2	1	1/8	0	0	(2)
II ჯგუფის მოწყობილობა	x_6	0	12000	$\boxed{3}$	5	1	0	0	1	0	
III ჯგუფის მოწყობილობა	x_7	0	27000	47/8	-1/4	5/2	0	-1/8	0	1	
	$z'_j - c_j$		2400	-0,3	0	-0,1	0	0,1	0	0	
P პროდუქცია	x_4	0,8	2500	0	1/24	11/24	1	1/8	-1/24	0	(3)
A პროდუქცია	$\rightarrow x_1$	0,4	4000	1	5/3	1/3	0	0	1/3	0	
III ჯგუფის მოწყობილობა	x_7	0	3500	0	-241/24	13/24	0	-1/8	-47/24	-1	
	$z''_j - c_j$		3600	0	0,5	0	0	0,1	0,1	0	

№ 6 ცხრილი სამი ნაწილისაგან შედგება, რომელიც შეესაბამება ამოცანის სამ ეტაპს. ამოცანის პირველი ეტაპი მიღებულია საწყისი მონაცემების საფუძველზე. №6 ცხრილის მეორე ნაწილის №5 ცხრილთან შედარებით და მასში მოყვანილი განტოლებებით შესაძლებელი ხდება სიმპლექსური ცხრილის საწყისი ეტაპის შედგენა.

ასე მაგალითად, სტრიქონში "I ჯგუფის მოწყობილობა" ჩაწერილია შემდეგი განტოლება

$$24000 = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_5$$

შემდეგ სტრიქონში კი -

$$12000 = 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_6$$

შემდეგ კი მესამე განტოლება.

ცხრილის ყველაზე მაღლა სტრიქონში ჩაწერილია მიზნის ფუნქციის /მოგება თითოეული პროდუქციის ერთეულზე/ კოეფიციენტები. დამატებით ცვლადებს შეესაბამებათ ნულოვანი კოეფიციენტი /მოწყობილობის მუშაობის გამოუყენებელი დრო არ მოაქვს მოგება/. იგივე ნულოვანი კოეფიციენტებია ჩაწერილი C სვეტში ყველა დამატებითი ცვლადებისათვის.

$Z_j - C_j$ სტრიქონის შევსებას აქვს გარკვეული თავისებურება. ყოველი j-ური სვეტისათვის Z სიდიდე მიიღება როგორც C სვეტის j-ური სვეტის შესაბამის კოეფიციენტებზე ნამრავლის ჯამი. ჩვენი საწყისი ეტაპის C სვეტში არის მხოლოდ ნულები და Z_j სიდიდე "ეტაპის" სვეტისა და ყველა ცვლადის სვეტებში ნულის ტოლი იქნება და $Z_j - C_j = -C_j$. ამიტომ $Z_j - C_j$ სტრიქონში მიიღება მიზნის ფუნქციის კოეფიციენტები შებრუნებული ნიშნებით.

ცხრილის პირველ ნაწილში ცვლად სიდიდეებს აქვს გარკვეული რიცხვითი მნიშვნელობანი. სახელდობრ:

$$x_1 = 0;\quad x_2 = 0;\quad x_3 = 0;\quad x_4 = 0;$$

$$x_5 = 24000;\quad x_6 = 12000;\quad x_7 = 30000.$$

როგორც ჩანს, ყველა ძირითადი ცვლადები ნულის ტოლია და არ შედიან ამოცანის ბაზისში, ხოლო დამატებითი ცვლადები იღებენ საწყისი განტოლებების შესაბამის ზღვრულ მნიშვნელობებს. ეს მიუთითებს ისეთ "გეგმაზე", რომლის დროსაც არაფერი არ იწარმოება, რესურსები არ გამოიყენება და მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა ნულის ტოლია /ე.ი. მოგება არ არის/. ცხადია ასეთი გეგმა არ არის ოპტიმალური. იმისათვის, რომ მიღებულ იქნეს მოგება, საჭიროა გეგმაში შევიდეს ის ძირითადი ცვლადები, რომლებიც აღნიშნავენ პროდუქციის გამოშვებას.

ამოცანის ამოხსნის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ გეგმაში თანდათანობით უნდა შევიდეს ძირითადი ცვლადები მანამ, სანამ არ იქნება მიღებული ოპტიმალური ამონახსნი. ამასთან გარდაქმნების თითოეულ ეტაპზე შეიძლება გეგმაში მხოლოდ ერთი ცვლადის შეყვანა და სხვა ცვლადის გამოყვანა ბაზისიდან. ასე, რომ ამოცანის სამი შეზღუდვის პირობებში არ შეიძლება სამ ცვლადზე მეტს შეიცავდეს ბაზისი.

საჭიროა გაირკვეს რომელი ძირითადი ცვლადი შეიყვანება ბაზისში, ე.ი. რომელი ნაწარმის გამოშვება უნდა დაიგეგმოს პირველ რიგში. რამდენადაც ამოცანა იხსნება მაქსიმალური მოგების მიღების მიზნით, მიზანშეწონილია უფრო მომგებიანი ნაწარმით დაწყება. ჩვენს მაგალითში ყველაზე მომგებიანია Þ ნაწარმის გამოშვება. სხვანაირად რომ ვთქვათ $Z_j - C_j$ სტრიქონში x_4 ცვლადს შეესაბამება უდიდესი რიცხვი აბსოლუტური მნიშვნელობით. ამგვარად, ბაზისში პირველ ეტაპზე შედის x_4 ცვლადი /Þ ნაწარმი/.

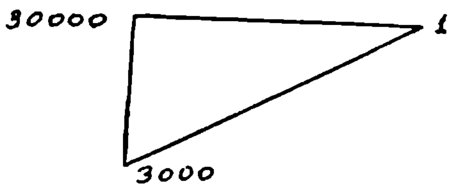
უნდა განისაზღვროს D ნაწარმის გამოშვების რაოდენობა. იგი დამოკიდებულია რესურსების მოცულობისა და დანახარჯთა ნორმატივებზე. I ჯგუფის მოწყობილობაზე შეიძლება დამუშავებული იქნეს 3000 D ნაწარმი $\left(\frac{24\,000 \text{ წთ.}}{8 \text{ წთ.}} = 3000\right)$. II ჯგუფის მოწყობილობა ამ ნაწარმის გამოშვებაზე არ გამოიყენება. III ჯგუფის მოწყობილობის დროითი ფონდი საკმარისია 30 000 D ნაწარმის დასამუშავებლად. ცხადია, რომ D ნაწარმის 3000-ზე მეტის გამზადება არ მიიღწევა, ვინაიდან ამის საშუალებას არ იძლევა I ჯგუფის მოწყობილობა. ამიტომ გეგმაში x_4 ცვლადი გაუტოლდება 3000-ს და x_5 ცვლადის ნაცვლად შევა ბაზისში, რომელიც მიიღებს ნულოვან მნიშვნელობას / I ჯგუფის მოწყობილობა გამოიყენება მთლიანად/. შემოვხაზოთ ცხრილში რიცხვი 8, რომელიც იმყოფება x_4 სვეტისა /შემავალი ცვლადი/ და x_5- სტრიქონის /გამომავალი ცვლადი/ გადაკვეთაზე. ამ რიცხვს ეწოდება მ ი მ მ ა რ თ ვ ე ლ ი /გენერალური, ამომხსნელი/ ელემენტი.

გადავიდეთ №6 ცხრილის მეორე ნაწილის შევსებაზე. რამდენადაც x_5 ცვლადის ნაცვლად გეგმაში შედის x_4 ცვლადი საჭიროა საწყისი ვარიანტის მთლიანი გადაანგარიშება. პირველად გადაიანგარიშება შემავალი ცვლადის სტრიქონი /ცხრილში აღნიშნულია ისრით/. ეს სტრიქონი მიიღება საწყისი ვარიანტის x_5- სტრიქონისაგან ყველა ელემენტების მიმმართველ ელემენტზე /8/ გაყოფით. სწორედ ამ თანაფარდობით /1:8/ x_4 ცვლადი შეცვლის x_5 ცვლადს. x_4-ის სტრიქონის "გეგმის" სვეტში მოთავსდება რიცხვი 3000 $\left(\frac{24\,000 \text{ წთ.}}{8 \text{ წთ.}}\right)$, ე.ი. D ნაწარმის გამოშვება, რომელიც ზემოთაც გამოვთვალეთ შემავალი ცვლადის განსაზღვრასთან დაკავშირებით. 8-ჯერ შემცირდება პირველი სტრიქონის ყველა კოეფიციენტები. C სვეტში იქნება ციფრი 0,8- ; ნაწარმზე მოგება.

x_4 სტრიქონის გაანგარიშების შემდეგ გაიანგარიშება სვეტი "გეგმა". D ნაწარმის გამოშვებისათვის გამოიყენება არა მხოლოდ I ჯგუფის მოწყობილობა. ამიტომ დროითი ფონდი უნდა გამოითვალოს. II ჯგუფის მოწყობილობაზე D ნაწარმი არ მუშავდება, ამიტომ ახალ გეგმაში მისი დროითი ფონდი უცვლელად /12000 წთ./ დარჩება. III ჯგუფის მოწყობილობის დროითი ფონდი შემცირდება. თავდაპირველად იგი შეადგენდა 30 000 წუთს. თითოეულ D ნაწარმზე იხარჯება 1 წუთი. სულ იწარმოება 3000 D ნაწარმი, მაშასადამე, III ჯგუფის მოწყობილობის დარჩენილი გამოუყენებელი დროითი ფონდი შეადგენს

$$30000 \text{ წთ} - 3000 \text{ ცალი} \cdot 1 \text{ წთ} = 27000 \text{ წთ}.$$

ახლა გაანგარიშებისათვის ყველა მონაცემებია ჩვენს №6 ცხრილში. ეს სამი ციფრი შეადგენს სამკუთხედს, რომლის ორი წვერო ძევს "ძველ" გეგმაში, ხოლო მესამე - "ახალ" გეგმაში.



შევნიშნავთ, რომ გაანგარიშებისას მართი კუთხის წვეროში მდებარე რიცხვს ჩვენ გამოვაკლებთ ორი სხვა რიცხვების ნამრავლს. დარჩენილი დროითი ფონდი ($x_7 = 27000$) ჩაიწერება ახალი გეგმის შესაბამის სტრიქონში. გრაფაში "გეგმა" შემდეგი რიცხვი /2400/ - მოგება მიღებული ვარიანტის დროს D ნაწარმის გამოშვების ერთეულ ნაწარმზე მოგების ნამრავლის ტოლია. /3000 ცალ. · 0,8 მან = 2400 მან./.

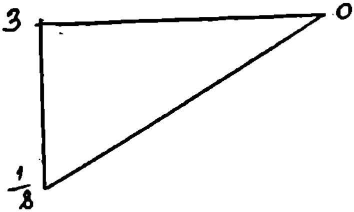
სვეტის "გეგმა" შევსების შემდეგ იანგარიშება სიმპ-

ლექსური ცხრილის დანარჩენი სვეტები. ამასთან მხედველობაშია მისაღები, რომ ყველა იმ ცვლადების სვეტებში, რომლებიც შედიან ბაზისში ერთსახელწოდებიანი სტრიქონებისა და სვეტების გადაკვეთაზე ყოველთვის მოიძებნება ერთიანი, ხოლო სვეტის დანარჩენი ელემენტები ნულის ტოლია. ამიტომ პირდაპირ შეიძლება შეივსოს x_4, x_6 და x_2 სვეტები /2/ ვარიანტი, დანარჩენი სვეტები კი უნდა გამოითვალოს. გაანგარიშება მიზანშეწონილია ჩატარდეს ზემოთ განხილული "სამკუთხედის წესის" მიხედვით. იმისათვის, რომ ახალ ვარიანტში გამოითვალოს რომელიმე კოეფიციენტი, საჭიროა სიმპლექსურ ცხრილში მოიძებნოს სამი რიცხვი:

1. რიცხვი, რომელიც დგას ამ კოეფიციენტის ადგილზე წინა ვარიანტში;
2. რიცხვი, რომელიც დგას წინა ვარიანტის იმავე სტრიქონში, მაგრამ შემავალი ცვლადის სვეტში;
3. რიცხვი, რომელიც მდებარეობს ახალ ვარიანტში საძიებო კოეფიციენტის სვეტში და ახლად შესაყვანი ცვლადის სტრიქონის გადაკვეთაში /ამ სტრიქონის ელემენტები როგორც უკვე აღინიშნა იანგარიშება პირველ რიგში/ ცხრილში აღნიშნული სამი რიცხვი ქმნის მართკუთხა სამკუთხედს. საძიებო კოეფიციენტის განსაზღვრისათვის საჭიროა პირველ რიცხვს, /იგი მდებარეობს მართი კუთხის წვეროში/ გამოაკლდეს ორი სხვა რიცხვის ნამრავლი.

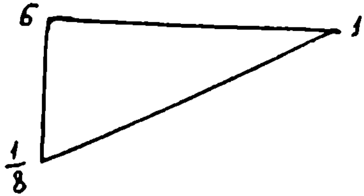
/2/ ვარიანტისათვის გამოვთვალოთ x_1 სვეტის კოეფიციენტები. პირველი მათგანი (1/8) მიღებულია უკვე. შემდეგი იმყოფება x_6 სტრიქონში. წინა ვარიანტში მის ადგილზე იდგა რიცხვი 3 /პირველი სამი რიცხვიდან/. მეორე რიცხვი მდებარეობდა ისევ ძველ ვარიანტში იმავე x_6 სტრი-

ქონში, მაგრამ შემავალი x_4 ცვლადის სვეტში და ტოლია 0-ნულის. დაბოლის მესამე რიცხვი იმყოფება უკვე ახალი ვარიანტის x_1 სვეტში შემოსაყვანი x_4 ცვლადის სტრიქონთან გადაკვეთაზე – რიცხვი 1/8, შედეგად მიიღება შემდეგი სამკუთხედი:



ჩავატარებთ გამოთვლას $3 - 0 \cdot 1/8 = 3$.

რიცხვი 3 ჩაიწერება /2/ ვარიანტის x_6 სტრიქონში. იმავე სვეტის შემდეგი კოეფიციენტის გამოსათვლელად მივიღებთ სამკუთხედს

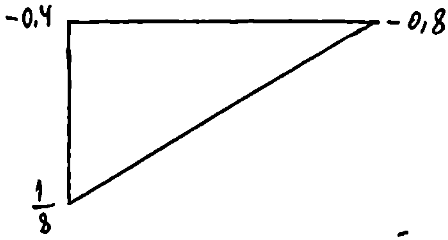


კოეფიციენტი ტოლია

$$6 - 1 \cdot 1/8 = 47/8$$

$z_j - c_j$ სტრიქონის მაჩვენებელი იმავე x_1 სვეტში შეიძლება ორი ხერხით გამოითვალოს:

1. ან ფორმულით $z_j - c_j = 0,8 \cdot \frac{1}{8} - 0,4 = -0,3$;
2. ან სამკუთხედის წესით:



გაანგარიშებით მივიღებთ იგივე შედეგს

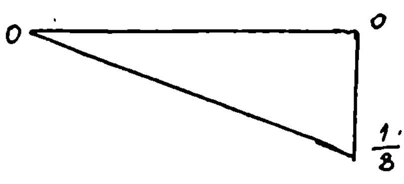
$$-0{,}4-(-0{,}8)\cdot\frac{1}{8}=-0{,}3.$$

შევნიშნოთ, რომ x_1 სვეტის გამოთვლისას მესამე რიცხვი /დაბალ კუთხეში/ უცვლელია და იცვლება ორი სხვა რიცხვი. შემდეგ გამოითვლება x_2 სვეტი. მისი ელემენტების გამოსათვლელად პირველი ორი რიცხვი აიღება წინა ვარიანტის x_2 და x_4 სვეტებიდან, ხოლო მესამეს წარმოადგენს 1/4. გამოთვლის შედეგად მივიღებთ კოეფიციენტთა თანმიმდევრულ მნიშვნელობებს:

$$5-0\cdot\frac{1}{4}=5;$$
$$0-1\ \frac{1}{4}=-\frac{1}{4};$$
$$-0{,}2-(-0{,}8)\cdot\frac{1}{4}=0.$$

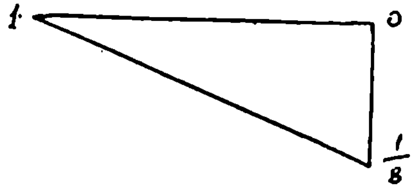
ანალოგიურად წარმოებს x_3 სვეტის კოეფიციენტების გამოთვლა. x_5 სვეტისათვის გამოთვლის პრინციპი იგივეა, მხოლოდ სამკუთხედის მდებარეობაშია განსხვავება.

სტრიქონის გამოსათვლელად აიგება შემდეგი სამკუთხედი:



კოეფიციენტი ნულის ტოლია

x_7 სტრიქონისათვის გვექნება:



კოეფიციენტი ტოლია $0 - 1 \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$.

გამოთვლის დამთავრების შემდეგ მივიღებთ /2/ ვარიანტს, რომლის დროსაც იწარმოება 3000 ტ ნაწარმი და რჩება II და III ჯგუფის მოწყობილობების დროის რეზერვი. ახლა საჭიროა გაირკვეს წარმოადგენს თუ არა ოპტიმალურს გეგმის მიღებული ვარიანტი, თუ საჭიროებს გაუმჯობესებას ამისათვის უნდა და-ვაკვირდეთ /2/ ვარიანტის $Z_j' - C_j'$ სტრიქონს, თუ იგი შე-იცავს უარყოფით რიცხვს, მაშინ გეგმის გაუმჯობესება შეიძლება. როგორც ჩანს ამ სტრიქონში არის ორი უარყოფითი რიცხვი. ეს იმას ნიშნავს, რომ გეგმის გაუმჯობესება შეიძლება ბაზისში x_1 ან x_3 ცვლადების /მათ სვეტებში მდებარეობს უარყოფითი რიცხვები/ შეყვანით.

$Z_j - C_j$ სტრიქონში უარყოფითი რიცხვის არსებობა არა მხოლოდ მოგების გადიდების შესაძლებლობას მოწმობს, არამედ გვიჩვენებს რამდენად გაიზრდება საერთო თანხა გეგმაში ამა თუ იმ ნაწარმის ერთეულის შეყვანით. ჩვენს შემთხვევაში ბაზისში შედის x_1 ცვლადი / A ნაწარმი/, რომელიც შესაყვან ნაწარმის ყოველი ერთეული გაზრდის საერთო მოგებას 0,3 მანეთით, ხოლო გეგმაში C ნაწარმის / x_5 ცვლადი/ შეყვანით ყოველ შესაყვან ნაწარმის ერთეულზე მოგება გაიზრდება მხოლოდ 0,1 მანეთით:

ამ ციფრებს შეუძლიათ გვიჩვენონ ამოცანის საწყისი პირობის წინააღმდეგობა, რომლის მიხედვით, A ნაწარმს მოაქვს 0,4 მან. მოგება, ხოლო C ნაწარმს - 0,5 მან., მაგრამ საქმე იმაშია, რომ გაანგარიშების მოცემულ ეტაპზე გეგმაში A ან C ნაწარმის შეყვანა გამოდევნის წინათ შეყვანილ D ნაწარმის გარკვეულ რაოდენობას, რათა გამონთავისუფლდეს ახლად შეყვანილი I ჯგუფის მოწყობილობის დროითი ნაწილი. ციფრები "-0,3" და "-0,1" გვიჩვენებენ მოგების გაზრდის იმ შესაძლებლობას, რომელიც დარჩა D ნაწარმის გეგმიდან ნაწილობრივ გამოდევნის შემდეგ.

$Z_j' - C_j$ სტრიქონის მონაცემების ანალიზი გვიჩვენებს, რომ შემდეგ ეტაპზე მიზანშეწონილია გეგმაში შევიდეს x_1 ცვლადი / A ნაწარმი/, ვინაიდან მას შეესაბამება აბსოლუტური მნიშვნელობით უდიდესი რიცხვი.

ახლა დავადგინოთ რამდენი ერთეული A პროდუქცია შეიძლება ჩაირთოს გეგმაში, იმის გათვალისწინებით, რომ იგი უკვე შეიცავს D ნაწარმის გამოშვებას. ამისათვის /პირველ ეტაპზე ჩატარებული გაანგარიშების ანალოგიურად/ "გეგმის" სვეტის რიცხვებს ვყოფთ შემავალი ცვლადის (x_1) სვეტის შესაბამის კოეფიციენტებზე /მხოლოდ დადებითებზე/ და მიღებული წილადებიდან ვირჩევთ უმცირესს. გაანგარიშების შედეგებია:

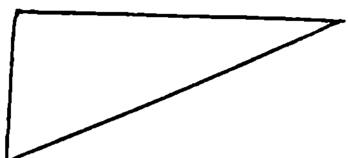
$$\frac{3\,000}{\frac{1}{8}} = 24000;$$

$$\frac{12\,000}{3} = 4\,000;$$

$$\frac{27000}{\frac{47}{8}} = 4600$$

უმცირესი წილადია მეორე, იგი გვიჩვენებს, რომ ახალ გეგმაში შეიძლება შეყვანილ იქნეს 4000 ან მასზე ნაკლები A ნაწარმი, ასე რომ ლიმიტირებული ფაქტორია II ჯგუფის მოწყობილობის არსებობა. აქედან გამომდინარეობს ის, რომ x_1 ცვლადმა უნდა შეცვალოს ბაზისში x_6 ცვლადი. /2/ ვარიანტში x_1 სვეტისა და x_6 სტრიქონის გადაკვეთაზე მოიძებნება და შემოიხაზება ახალი მიმმართველი ელემენტი – რიცხვი ე.

გადავიდეთ /3/ ვარიანტზე და უწინარეს ყოვლისა გამოვთვალოთ შემავალი x_1 ცვლადის სტრიქონი. წინა ვარიანტის x_6 ცვლადის სტრიქონის ელემენტების მიმმართველ ელემენტზე /ე.ი. ე-ზე/ გავყოფით. შემდეგ გამოითვლება სვეტის "გეგმა" ელემენტები. /3/ ვარიანტის x_4 სტრიქონისათვის შევადგენთ შემდეგ სამკუთხედს.



გამოვთვალოთ x_4 ცვლადის მნიშვნელობები ახალ გეგმაში:

$$3000-\frac{1}{8}\cdot 4000=2500.$$

x_7 ცვლადის მნიშვნელობებს მივიღებთ შემდეგი გაანგარიშებით:

$$2700-\frac{47}{8}\cdot 4000=5300.$$

გეგმის ახალი ვარიანტის დროს მოგება შეადგენს 2500 ერთეული D ნაწარმი · 0,8 მან. + 4000 ერთეული A ნაწარმი . 0,4 მან. = 3600 მან.

უკვე აღწერილი სამკუთხედის წესით წარმოებს დანარჩენ

სვეტების გამოთვლა და შედეგად მიიღება /3/ ვარიანტი, რომელიც მოცემულია №6 ცხრილის ბოლო ნაწილში. ამასთან ამ გეგმის ვარიანტით თვეში იწარმოება 4000 A ნაწარმი და 2500 B ნაწარმი, მთლიანად გამოიყენება I და II ჯგუფის მოწყობილობის დროითი ფონდი, ხოლო III ჯგუფის მოწყობილობაში გამოუყენებელი რჩება 3500 წთ.

მიცემული ვარიანტის დროს მოგება შეადგენს 36000 მანეთს.

ვაკვირდებით ახალ ვარიანტში $z_j'' - c_j$ სტრიქონს, იგი შეიცავს მხოლოდ ნულებს და დადებით ელემენტებს. უარყოფითი რიცხვების არ არსებობა მიუთითებს იმაზე, რომ /3/ ვარიანტი არის ოპტიმალური გეგმა და მისი გაუმჯობესება აღარ შეიძლება, ე.ი: პროდუქციის გამოშვების არავითარი სხვა გეგმა არ არსებობს, ისეთი რომელმაც შეიძლება მოგვცეს 3600 მანეთზე მეტი მოგება.

ოპტიმალურ გეგმაში შედიან მხოლოდ ორი სახის ნაწარმი ნაცვლად ოთხისა. ე.ი. გეგმაში ახალი ნაწარმის შემდგომი შეყვანა არ გაზრდის მოგებას. № 6 ცხრილის უკანასკნელ სტრიქონში x_2 ცვლადს შეესაბამება 0,5 რიცხვი, რომელიც გვიჩვენებს, რომ მიცემულ გეგმაში x_2 ცვლადის /ე.ი. B ნაწარმის გამოშვება/შეყვანა გამოიწვევს მოგების საერთო თანხის 0,5 მანეთის შემცირებას ყოველ ერთეულ B ნაწარმზე გაანგარიშებით. ეს გამოწვეულია პროგრამიდან ისეთი ნაწარმის მთლიანი ან ნაწილობრივი გამოდევნით, რომელსაც იგი უკვე შეიცავდა. x_3 ცვლადს სიმპლექსური ცხრილის უკანასკნელ სტრიქონში შეესაბამება 0. ეს იმას ნიშნავს, რომ შემდეგ ბიჯზე გეგმაში x_3 ცვლადის / C ნაწარმის/ შეყვანა არ გაზრდის საერთო მოგებას, მაგრამ არც შეამცირებს მას და მიღებული ახალი გეგმაც იქნება ოპტიმალური.

§ 5. სიმპლექსური მეთოდის ალგორითმი

წინა პარაგრაფში წარმოების კონკრეტულ მაგალითზე განვიხილეთ სიმპლექსური მეთოდის იდეა და ვაჩვენეთ თუ როგორ მიიღება სიმპლექსური ცხრილების მეშვეობის ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი.

ახლა გადავიდეთ სიმპლექსური მეთოდით ოპტიმალური გეგმის გაანგარიშების პროცესის ზოგად დახასიათებაზე.

დავუშვათ გვაქვს შემდეგი სახის ამოცანა:

ვიპოვოთ მაქსიმუმი:

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_k x_k + C_{k+1} x_{k+1} + C_{k+2} x_{k+2} + \cdots + C_{k+m} x_{k+m}$$

შემდეგ პირობებში:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1k} x_k + x_{k+1} = b_1;$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2k} x_k + x_{k+2} = b_2;$$

$$\cdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mk} x_k + x_{k+m} = b_m$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \ldots, k, k+1, \ldots, k+m,$$

$$b_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

ამოცანის ასეთი დასმის თავისებურებაა ის, რომ საწყისი განტოლებანი უცნობის სახით შეიცავენ m რაოდენობის ცვლადებს $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+m})$ რომელთა კოეფიციენტები მოცემულ განტოლებათა სისტემაში ქმნიან m რიგის ერთეულოვან მატრიცას.

ამოცანის საწყის საყრდენ გეგმად მიიღება შემდეგი გეგმა:

$x_1=0;\ x_2=0;\ \dots x_k=0;\ x_{k+1}=b_1;\ x_{k+2}=b_2;\ \dots;\ x_{k+m}=b_m$

ასეთი საწყისი გეგმის დროს ზემოთ ჩამოყალიბებული ამოცანის მატრიცა ნაჩვენებია ცხრილში/ცხრილი 7/.

პირველი m სტრიქონის მაჩვენებლები ცხრილში გადმოიტანება საწყისი მონაცემებიდან $m+1$ სტრიქონის მაჩვენებლები კი გამოითვლება. Z_0 სიდიდე, რომელიც გვიჩვენებს მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობას პროგრამის საწყისი ვარიანტის დროს გამოითვლება ფორმულით:

$$Z_0 = C_{k+1}b_1 + C_{k+2}b_2 + \dots + C_{k+i}b_i + \dots + C_{k+m}b_m$$

$(m+1)$ სტრიქონის დანარჩენი ელემენტები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$Z_j - C_j = \left(C_{k+1}a_{1j} + C_{k+2}a_{2j} + \dots + C_{k+i}a_{ij} + \dots + C_{k+m}a_{mj}\right) - C_j$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+m}$ ცვლადები შედიან მიზნის ფუნქციაში ნულოვანი კოეფიციენტებით /როგორც ეს იყო წინა პარაგრაფში მოყვანილ მაგალითში/ გვექნება:

$$Z_j = 0 \quad \text{და} \quad Z_j - C_j = -C_j \quad \text{ყველა} \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

საწყისი საყრდენი გეგმის ანალიზი პირველი ნაბიჯია შემოწმდეს არის თუ არა იგი ოპტიმალური.

გ ე გ მ ა ა რ ი ს ო პ ტ ი მ ა ლ უ რ ი , თ უ ს ტ რ ი ქ ო ნ შ ი ა რ ა რ ი ს უ ა რ ყ ო - ფ ი თ ი რ ი ც ხ ვ ე ბ ი ე.ი. თ უ დ ა ც უ ლ ი ა პ ი რ ო ბ ა $Z_j - C_j \geq 0$ $j = 1, 2, \dots, k$.

თუ $m+1$ სტრიქონის ელემენტებს შორის არის

ცხრილი 7

საწყისი საყრდენი გეგმის მატრიცა

სტრიქონი	ბაზისი	წრფივი ფორმის კოეფიციენტები C	გეგმა	c_1	c_2	...	c_j	...	c_k	c_{k+1}	c_{k+2}	...	c_{k+i}	...	c_{k+m}
				x_1	x_2	...	x_j	...	x_k	x_{k+1}	x_{k+2}	...	x_{k+i}	...	x_{k+m}
1	x_{k+1}	c_{k+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1k}	1	0	...	0	...	0
2	x_{k+2}	c_{k+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2k}	0	1	...	0	...	0
.	..		.	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
i	x_{k+i}	c_{k+i}	b_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{ik}	0	0	...	1	...	0
..			.	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	x_{k+m}	c_{k+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mk}	0	0	...	0	...	1
$m+1$			Z_0	Z_1-c_1	Z_2-c_2	...	Z_j-c_j	...	Z_k-c_k	0	0	...	0	...	0

ერთი მაინც უარყოფითი რიცხვი და მის შესაბამის სვეტში არის ერთი მაინც დადებითი კოეფიციენტი, ეს იმას ნიშნავს, რომ შესაძლებელია მოიძებნოს სხვა საყრდენი გეგმა, რომლის დროსაც მიზნის ფუნქციას ექნება მეტი მნიშვნელობა Z_0 საწყის გეგმასთან შედარებით.

ერთი საყრდენი გეგმიდან მეორეზე გადასვლის გამოთვლის პროცესი მდგომარეობს შემდეგში

1. თუ $(m+1)$ სტრიქონში არის რამდენიმე უარყოფითი რიცხვი, მაშინ აუცილებელია ამოირჩეს ცვლადი, რომელიც შეყვანილი იქნება ბაზისში.

ცვლადის არჩევის საკმარისად მარტივი და მიღებული წესია აირჩეს აბსოლუტური სიდიდით ყველაზე მეტი უარყოფითი რიცხვების შორის. თუ ასეთი უდიდესი რიცხვი რამდენიმეა, მაშინ აირჩევა ის, რომლის შეყვანაც მიზნის ფუნქციას უფრო მეტად გაადიდებს. მაგალითად, თუ ორი ნაწარმი უზრუნველყოფს ერთნაირ მოგებას, მაშინ საჭიროა წინასწარ გაუთანგარიშოთ როგორი რაოდენობით უნდა იქნას შეყვანილი გეგმაში ესა თუ ის ნაწარმი და აირჩიოთ ის, რომელიც შედის დიდი რაოდენობით.

დავუშვათ, რომ ბაზისში შედის x_j ცვლადი /იხ. ცხრილი 7/.

2. აუცილებელია დადგინდეს რომელი ცვლადი იქნება გამოყვანილი ბაზისიდან. j-ური სვეტის ყველა დადებითი კოეფიციენტებისათვის განისაზღვრება ფარდობები

$$\frac{b_1}{a_{1j}},\ \frac{b_2}{a_{2j}},\ \ldots,\ \frac{b_i}{a_{ij}},\ \ldots,\ \frac{b_m}{a_{mj}}$$

ამ ფარდობებს შორის მინიმალური გვიჩვენებს ბაზისიდან

გამომავალ სტრიქონს. დავუშვათ, რომ ეს არის i -ური სტრიქონი.

მაშასადამე, x_j ცვლადი ბაზისში შეცვლის x_{k+i} ცვლადს. მიმმართველ ელემენტს წარმოადგენს a_{ij}

3. ხორციელდება ახალ სიმპლექსურ ცხრილზე გადასვლა, რომელშიც დაუყოვნებლივ შეივსება შემავალი x_j ცვლადის სტრიქონი.

ამ სტრიქონის ახალი ელემენტები გამოისახება საწყისი ვარიანტის i – ური სტრიქონის ელემენტების მიმმართველ ელემენტზე გაყოფის გზით:

$$\frac{b_i}{a_{ij}}, \frac{a_{i1}}{a_{ij}}, \frac{a_{i2}}{a_{ij}}, \ldots, 1, \ldots, \frac{a_{ik}}{a_{ij}}, 0, 0, \ldots, \frac{1}{a_{ij}}, \ldots, 0.$$

ახალი ვარიანტის i -ური სტრიქონის C სვეტში ჩაიწერება C_j სიდიდე.

4. გამოიანგარიშება სვეტი "ბეტა".

ამ სვეტის i -ურ სტრიქონში უკვე არის სიდიდე $\frac{b_j}{a_{ij}}$.

დანარჩენი ელემენტების გაანგარიშება ხორციელდება სამი რიცხვის წესით, რომელიც ნაც პირველი და მეორე მდებარეობს საწყისი ვარიანტის სვეტებში "ბეტა" და x_j ხოლო მესამეს წარმოადგენს წილადი $\frac{b_i}{a_{ij}}$.

გაანგარიშებისას პირველ რიცხვს უნდა გამოვაკლოთ ორი სხვა რიცხვის ნამრავლი.

ამრიგად, სვეტის "ბეტა" ელემენტები ახალი ვარიანტისათვის ტოლია:

$$b_1 - a_{1j}\cdot\frac{b_i}{a_{ij}};\ b_2 - a_{2j}\frac{b_i}{a_{ij}};\ \ldots;\ \frac{b_i}{a_{ij}};\ \ldots;\ b_m - a_{mj}\cdot\frac{b_i}{a_{ij}}.$$

5. მიმდინარეობს კოეფიციენტთა მატრიცის გაანგარიშება. გაანგარიშების ფორმულა 4-ე პუნქტში აღწერილის ანალოგიურია. ასე მაგალითად, x_1 სვეტის ელემენტები ახალ გეგმაში საწყისი მატრიცის კოეფიციენტთა საშუალებით შემდეგნაირად გამოითვლება:

$$a_{11}-a_{1j}\cdot\frac{a_{i1}}{a_{ij}};\ a_{21}-a_{2j}\cdot\frac{a_{i1}}{a_{ij}};\dots;\ \frac{a_{i1}}{a_{ij}};\dots;\ a_{m1}-a_{mj}\cdot\frac{a_{i1}}{a_{ij}}.$$

ანალოგიური ფორმულებით გაიანგარიშება დანარჩენი ცვლადების სვეტები. თუ რომელიმე ცვლადის სვეტში i-ური სტრიქონის კოეფიციენტი ნულის ტოლია, მაშინ ეს სვეტი გადმოიწერება ახალ გეგმაში ცვლილების გარეშე. ბაზისში შემავალ ცვლადებს ყოველთვის შეესაბამებიან კოეფიციენტთა მატრიცაში ერთეულოვანი ვექტორ-სვეტები

6. გამოისახება ახალი გეგმის $(m+1)$ სტრიქონის ელემენტები. ახალ გეგმაში $(m+1)$ სტრიქონის ელემენტები შეიძლება ორი გზით გამოითვალოს: 1/ ან უშუალოდ გამოითვლება სხვაობები: Z_1-C_1, $Z_2'-C_2$ და ა.შ. სადაც Z' წარმოადგენს შესაბამის სვეტის /1,2 და ა.შ./ და C სვეტის კოეფიციენტთა ჯამს. გეგმის ახალ ვარიანტში.

2/ ან გაანგარიშება წარმოებს სამი რიცხვის მიგარი წესით.

მაგალითად, $(m+1)$ სტრიქონის ელემენტი ახალი გეგმის x_1 სვეტში ტოლია

$$(Z_1-C_1)-(Z_j-C_j)\cdot\frac{a_{i1}}{a_{ij}},$$

x_2 სვეტში $(Z_2-C_2)-(Z_j-C_j)\cdot\frac{a_{i1}}{a_{ij}}$ და ა.შ.

7. გეგმის ახალი ვარიანტის დამუშავებისას ყურადღება ექცევა $(m+1)$ სტრიქონს.

თუ ამ სტრიქონში არის უარყოფითი რიცხვები, მაშინ იმ სვეტში, რომელსაც ისინი მიეკუთვნებიან ვაკვირდებით კოეფიციენტებს 1-დან m - სტრიქონამდე.

თუ ამ კოეფიციენტში არ არის დადებითი რიცხვი, მაშინ მოცემულ ამოცანაში წრფივი ფორმის მაქსიმუმის მიღწევა შემოუსაზღვრელია და შეიძლება აიგოს უამრავი გეგმა. თუ სტრიქონის რომელიმე სვეტში არის უარყოფითი რიცხვი, ხოლო სტრიქონის კოეფიციენტებს შორის ერთი მაინც დადებითია, მაშინ შეიძლება გადავიდეთ სხვა საყრდენ გეგმაზე, რომელიც გაზრდის მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობას.

თუ გაანგარიშების შემდეგ $(m+1)$ სტრიქონში ყველა დადებითი აღმოჩნდა, მაშინ მიღებულია ოპტიმალური გეგმა.

§ 6. ტრანსპორტის ამოცანა

წრფივი პროგრამირების ამოცანების ამოხსნის უნივერსალური მეთოდია სიმპლექსური მეთოდი, რომლის არსიც წინა პარაგრაფებში განვიხილეთ. პრაქტიკაში არის ისეთი ამოცანებიც, რომლებიც შეიძლება ამოიხსნან სიმპლექსური მეთოდთან შედარებით უფრო მარტივი ალგორითმით. ასეთი ამოცანების რიცხვს მიეკუთვნება ტრანსპორტის ამოცანა, რისი არსი შემდეგში მდგომარეობს: დავუშვათ გვაქვს m რაოდენობის მომარაგების ბაზები $A_1, A_2, \dots, A_m$, რომლებშიაც თავმოყრილია შესაბამისად $a_1, a_2, \dots, a_m$ ტონა ერთგვაროვანი პროდუქცია /ქვანახშირი, შაქარი, მარილი და ა.შ./, შემდეგ ვთქვათ არსებობს n რაოდე-

წონის მომხმარებელი პუნქტები $B_1, B_2, \ldots, B_n$, რომლებშიაც არის ამ პროდუქციაზე მოთხოვნები: $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ტონა. ცნობილია აგრეთვე გადაზიდვის ტარიფები C_{ij} ე.ი. 1 ტ. ტვირთის i-ური ბაზიდან j-ურ მომხმარებლამდე გადაზიდვის ღირებულება.

საჭიროა შედგეს ტვირთის გადაზიდვის ისეთი გეგმა, რომლის დროსაც ტრანსპორტის დანახარჯები იქნება მინიმალური.

განვიხილოთ თავდაპირველად მარტივი შემთხვევა ე.წ. დახურული მოდელი, როცა ბაზებში არსებული მთელი პროდუქცია ნაწილდება და თითოეული მომხმარებლის მოთხოვნა მთლიანად კმაყოფილდება. ამ შემთხვევაში

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \qquad (1)$$

ამოცანის პირობის უკეთ წარმოდგენის მიზნით ყველა მონაცემები დავწეროთ ცხრილში /ცხრილი 8/.

ც ხ რ ი ლ ი 8

მომხმარებელი პუნქტი / მომარაგების ბაზები	B_1	B_2	B_3	$\ldots$	B_n	პროდუქციის მოცულობა
A_1	x_{11} $\boxed{c_{11}}$	x_{12} $\boxed{c_{12}}$	x_{13} $\boxed{c_{13}}$	$\ldots$	x_{1n} $\boxed{c_{1n}}$	a_1
A_2	x_{21} $\boxed{c_{21}}$	x_{22} $\boxed{c_{22}}$	x_{23} $\boxed{c_{23}}$	$\ldots$	x_{2n} $\boxed{c_{2n}}$	a_2
			$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$
A_m	x_{m1} $\boxed{c_{m1}}$	x_{m2} $\boxed{c_{m2}}$	x_{m3} $\boxed{c_{m3}}$	$\ldots$	x_{mn} $\boxed{c_{mn}}$	a_m
მოთხოვნა პროდუქციაზე	b_1	b_2	b_3		b_n	$\Sigma a_i = \Sigma b_j$

x_{ij} აღნიშნავს i-ური ბაზიდან j-ურ მომხმარებლამდე გადასაზიდი პროდუქციის რაოდენობას /ტონებში/. მაგალითად, x_{23} აღნიშნავს მეორე ბაზიდან მესამე მომხმარებლამდე გადასაზიდი პროდუქციის რაოდენობას.

ამოცანა ის არის, რომ შევადგინოთ გადაზიდვის ისეთი გეგმა, რომლის დროსაც ტრანსპორტის დანახარჯები იქნება მინიმალური. ეს დანახარჯებია:

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \cdots + c_{2n}x_{2n} + \cdots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \cdots + c_{mn}x_{mn}.$$

ამოცანა მათემატიკურად ასე ჩამოყალიბდება:

ვიპოვოთ $m+n$ წრფივ განტოლებათა სისტემის არაუარყოფითი ამონახსნი

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + x_{13} + \cdots + x_{1n} = a_1\\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} + \cdots + x_{2n} = a_2\\
&\cdot\\
&x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + \cdots + x_{mn} = a_m,\\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} + \cdots + x_{m1} = b_1,\\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} + \cdots + x_{m2} = b_2,\\
&\cdot\\
&x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + \cdots + x_{mn} = b_n.
\end{aligned} \qquad (2)$$

რომლის დროსაც წრფივი ფორმა

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \cdots + c_{2n}x_{2n} + \cdots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \cdots + c_{mn}x_{mn} = \min \qquad (3)$$

მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

/2/ და /3/ პირობები კომპაქტურად ასე ჩაიწერება:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i=1,2,\ldots,m) \qquad (2')$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j=1,2,\dots,n) \qquad (2')$$

და

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = min \qquad (3')$$

შევნიშნავთ, რომ /2/ განტოლებათა სისტემის ყველა განტოლება არ არის წრფივად დამოუკიდებელი. სინამდვილეში $a_1, a_2, \dots, a_m$ და $b_1, b_2, \dots, b_n$ სიდიდეებს შორის არის დამოკიდებულება, რომელიც მოცემულია /1/ ტოლობით. ამის გამო /2/ სისტემაში წრფივად დამოუკიდებელ განტოლებათა რაოდენობა იქნება არა უმეტეს $m+n-1$ -ისა.

§ 7. ტრანსპორტის ამოცანის ამოხსნის მეთოდი

განვიხილოთ პრაქტიკულ მაგალითზე ტრანსპორტის ამოცანის ამოხსნის ე.წ. გ ა მ ა ნ ა წ ი ლ ე ბ ე ლ ი მეთოდის ალგორითმი. დავუშვათ A_1 და A_2 ბაზაში არის ერთგვაროვანი საქონელი შესაბამისად 200 ტ და 160 ტ. ეს საქონელი უნდა გადაიზიდოს სამ B_1, B_2, B_3 მომხმარებელთან, რომლებშიაც ცნობილია მოხმარების მოცულობა და შეადგენს შესაბამისად 140,90 და 130 ტონას. მანძილები ბაზებიდან მომხმარებლებამდე შეადგენენ: A_1 ბაზიდან – 6,4 და 2 კმ-ს, A_2 ბაზიდან – 5,3 და 2 კმ-ს. საჭიროა საქონლის გადაზიდვის ისეთი გეგმის შედგენა, რომლის დროსაც ტრანსპორტის დანახარჯები იქნება მინიმალური. ჩვენს ამოცანაში საქონლის გამგზავნი ანუ მიმწოდებელი პუნქტები 2-ის ტოლია, $(m=2)$ და მომხმარებელი პუნქტები ტოლია 3-ის, $(n=3)$, ცხადია, რომ ტრანსპორტის დანახარჯები იქნება მინიმალური იმ შემთხვევაში, როცა ტონაკილომეტრების საერთო რაოდენობა იქნება უმცირესი. საწყისი მონაცემები განვალაგოთ 19 ცხრილში.

ც ხ რ ი ლ ი 9

მომხმარებლები / ბაზები	B_1	B_2	B_3	საქონლის რაოდენობა /ტ./
A_1	140 $\boxed{6}$	60 $\boxed{4}$	$\boxed{2}$	200
A_2	$\boxed{5}$	30 $\boxed{3}$	130 $\boxed{2}$	160
მოთხოვნა საქონელზე/ტ./	140	90	130	360

№ 9 ცხრილი საშუალებას გვაძლევს შევადგინოთ გადაზიდვის პირველი პროგრამა ე.წ. "ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის" წესის გამოყენებით; ამ მეთოდის არსი შემდეგშია. ვიწყებთ A_1 ბაზიდან B_1 მომხმარებლამდე ტვირთის გადატანით, ე.ი. ვიწყებთ A_1B_1 უჯრის შევსებით, რომელიც მდებარეობს ცხრილის ჩრდილო-დასავლეთ კუთხეში /აქედან წარმოსდგა სახელწოდება "ჩრდილო-დასავლეთ კუთხის მეთოდი"/. A_1 ბაზაში საქონლის მოცულობა მეტია B_1 მომხმარებელ პუნქტში მოთხოვნის მოცულობაზე $(a_1 > b_1)$, B_1 მომხმარებელს ვაწვდით მისთვის საჭირო საქონლის რაოდენობას ე.ი. 140 ტონას, ე.ი. B_1 სვეტი აღარ მიიღება მხედველობაში და ვავსებთ ისევ ჩრდილო-დასავლეთ უჯრას, ამ შემთხვევაში A_1B_2 -ს. A_1 ბაზაში დარჩა 60 ტ საქონელი, ე.ი. 60 ტ ჩაიწერება A_1B_2 უჯრაში. A_1 ბაზიდან მთელი საქონელი განაწილდა და A_1 სტრიქონი მხედველობაში აღარ მიიღება. ვიმოქმედოთ, განხილულის ანალოგიურად და გავანაწილოთ A_2 ბაზაში არსებული საქონელი. შევავსოთ A_2B_2 უჯრა. B_2 მომხმარებელ პუნქტში საჭიროა კიდევ 30 ტ საქონელი, რაც A_2 ბაზიდან მიეწოდება. დარჩენილი 130 ტ კი მიეწოდება B_3 მომხმარებელს. ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ პირველი პროგრამა ანუ პირველი საყრდენი გეგმა.

I პროგრამა

მომხმარებლები / ბაზები	B_1	B_2	B_3	საქონლის რაოდენობა /ტ/
A_1	$\boxed{6}$ 140	$\boxed{4}$ 60	$\boxed{2}$	200
A_2	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$ 30	$\boxed{2}$ 130	160
მოთხოვნა საქონელზე /ტ/	140	90	130	360

პირველი პროგრამის მიხედვით ტრანსპორტის დანახარჯები, რომელიც გამოსახულია ტ.კმ შეადგენს:

$$f_1 = 140\cdot 6 + 60\cdot 4 + 30\cdot 3 + 130\cdot 2 = 1430 \text{ ტ.კმ.}$$

შევნიშნოთ, რომ ცხრილში ოთხი უჯრა არის შევსებული. ჩვენს ამოცანაში ბაზათა რაოდენობა $m = 2$, ხოლო მომხმარებლების რაოდენობა - $n = 3$-ს. შევსებულ უჯრათა რაოდენობა 4-ის ტოლია ე.ი.

$$m + n - 1 = 2 + 3 - 1 = 4.$$

ნებისმიერი პროგრამის შედგენისას შევსებულ /დატვირთულ/ უჯრათა რაოდენობა ტოლი უნდა იყოს სიდიდის $m + n - 1$, ამასთან შევსებულმა უჯრებმა არ უნდა წარმოქმნას ციკლი. სხვა სიტყვებით, არ უნდა იყოს ისეთი მართკუთხედი, რომლის ყველა წვერო მოთავსებული იქნება შევსებულ უჯრაში.

წამოიჭრება კითხვა: შეიძლება თუ არა გადანაწილდეს საქონელი ისე, რომ შემცირდეს ტრანსპორტის დანახარჯები? ამ კითხვაზე პასუხისათვის საჭიროა განვიხილოთ რომელიმე ჩაკეტილი კონტური, რომელიც წარმოადგენს მართკუთხედს ან მრავალკუთხედს.

ამ კონტურის წვეროები იქნება შევსებულ უჯრებში, ერთი კი თავისუფალ უჯრაში. ასე მაგალითად №10 ცხრილში განვიხილოთ

ცხრილი 10

მომხმარებლები / ბაზები	B_1	B_2	B_3	საქონლის რაოდენობა /ტ./
A_1	6 140	4 − 60	2 +	200
A_2	5	3 30	3 130 −	160
მოთხოვნა საქონელზე /ტ./	140	90	130	360

მართკუთხედი, რომლის წვეროები მოთავსებულია A_1B_2, A_1B_3, A_2B_2, A_2B_3 უჯრებში. ამ კონტურის მიხედვით ტრანსპორტის ხარჯები შეადგენს – $60\cdot 4+0\cdot 2+130\cdot 2+30\cdot 3=490$ ტ.კმ. ამ კონტურში A_1B_3 უჯრა არ არის შევსებული. ვნახოთ რა მოხდება, თუ ამ უჯრას მივუმატებთ 1 ტ საქონელს A_1B_2 უჯრიდან. A_1B_3 თავისუფალი უჯრის დატვირთვა გამოიწვევს ტრანსპორტის ახალ დანახარჯებს, რომელიც ტოლია 1.2 = 2 ტ.კმ.

კონტურზე განსაზღვრული მიმართულებით მოძრაობისას, /მაგალითად საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით/ მივალთ A_2B_3 უჯრაში /იხ. ცხრილი №10/. ამ უჯრაში 1 ტ-ით უნდა შემცირდეს მიწოდება, რადგან ამ ორ უჯრაში მიწოდება ტოლი გახდეს 130 ტონის. მიწოდების შემცირება შეამცირებს ტრანსპორტის ხარჯებს 1.2 ტ.კმ-ით, შემდეგ სვლით მივალთ A_2B_2 უჯრაში. აქ უნდა დაემატოს 1 ტ. საქონელი, რადგან მიწოდების მოცულობა ჰორიზონტალურად იყოს A_2 ბაზაში არსებული არო-

რუქციის მოცულობის ტოლ /ე.ი. 160 ტ./, ეს უკანასკნელი გამოიწვევს ტრანსპორტის ხარჯების გაზრდას 1.3 ტ.კმ-ით და ბოლოს, მეორე გადაადგილებით მივალთ A_1B_2 უჯრაში, რომელშიც ჩაწერება შემცირდა 1 ტონით, რამაც შეამცირა ტრანსპორტის ხარჯები 1.4 ტკმ-ით.

ამრიგად, ჩაკეტილ კონტურზე მოძრაობით მივიღეთ ტრანსპორტის ხარჯებში შემდეგი ცვლილება:

$$1\cdot2 - 1\cdot2 + 1\cdot3 - 1\cdot4 = (2+3)-(2+4) = -1 \text{ ტ.კმ.}$$

ასე რომ, დადებითი შესაკრებები აღნიშნავენ ტრანსპორტის ხარჯების გადიდებას, ხოლო უარყოფითი – შემცირებას. აქედან გამომდინარე დავასკვნით, რომ A_1B_3 თავისუფალ უჯრაში 1 ტ ტვირთის გადაადგილებით შემცირდება ტრანსპორტის ხარჯები 1 ტ კმ-ით, ამრიგად, ხელსაყრელია A_1B_3 უჯრის დატვირთვა. /1/ ტოლობიდან ჩანს, იმისათვის რომ მივიღოთ ტრანსპორტის ხარჯებში ცვლილება, რომელსაც გამოიწვევს A_1B_3 თავისუფალ უჯრაში 1 ტ. ტვირთის გადაადგილება, საჭიროა ამ უჯრის და მის დიაგონალზე მდგომი უჯრის ტარიფების ჯამს გამოაკლდეს მართკუთხედის მეორე დიაგონალის გასწვრივ მდგომი უჯრების ტარიფების ჯამი, ე.ი. უნდა მოიძებნოს სხვაობა / 2+3/ – /2+4/= –1. თუ ეს სხვაობა აღმოჩნდება უარყოფითი, მაშინ თავისუფალი უჯრა უნდა დატვირთოს. ამრიგად, მივედით შემდეგ დასკვნამდე.

იმისათვის, რომ დავადგინოთ დავტვირთოთ თუ არა თავისუფალი უჯრა, საჭიროა მისი ტარიფი შევკრიბოთ იმ უჯრის ტარიფთან, რომელიც დგას მართკუთხედის დიაგონალის სხვა ბოლოში. თუ ეს ჯამი აღმოჩნდება სხვა დიაგონალის გასწვრივ მდგომი უჯრების ტარიფების ჯამზე მცირე, მაშინ უჯრა უნდა დატვირთოს, წინააღმდეგ შემთხვევაში – არ უნდა დატვირთოს.

ზემოთ ნაჩვენები 1 ტ. საქონლის გადაადგილებამ გამოიწვია ტრანსპორტის ხარჯების 1 ტ.კმ-ით შემცირება, მაგრამ ჩვენ შეგვიძლია ამ კონტურით გადავაადგილოთ მთელი 60 ტ. საქონელი. ასეთი გადაადგილებით მივიღებთ მეორე პროგრამას.

-2 პ რ ო გ რ ა მ ა

მომხმარებლები / ბაზები	B_1	B_2	B_3	საქონლის რაოდენობა/ტ/
A_1	6 − 140	4	2 + 60	200
A_2	5 +	3 90	8 70 −	160
მოთხოვნა საქონელზე /ტ/	140	90	130	360

ამ პროგრამის მიხედვით ტრანსპორტის დანახარჯები შეადგენს:

$$f_2 = 140\cdot 6 + 60\cdot 2 + 90\cdot 3 + 70\cdot 2 = 1370 \text{ ტ.კმ.}$$

წინა პროგრამასთან შედარებით ტრანსპორტის დანახარჯები შემცირდა 60 ტ.კმ-ით.

განვიხილოთ ახლა $A_2B_1, A_1B_1, A_1B_3, A_2B_3$ მართკუთხედი: დაუკავებელია A_2B_1 უჯრა. ვინაიდან $5+2<6+2$, ეს უჯრა უნდა დაიკავოს. ამ უჯრაში გადმოვაადგილებთ 70 ტონას, რომელიც იმყოფება A_2B_3 უჯრაში. შევცვალოთ შესაბამისად სხვა უჯრებშიც მიწოდების მოცულობა, რათა არ დაირღვეს ბალანსი, ბაზებში არსებულ საქონლის მოცულობასა და მომხმარებელ პუნქტებში მოთხოვნის მოცულობას შორის.

ამრიგად, ჩვენ მივიღებთ მესამე პროგრამას, ცხადია, რომ ტრანსპორტის დანახარჯები შეიცვლება

3 პ რ ო გ რ ა მ ა

მომხმარებლები / ბაზები	B_1	B_2	B_3	საქონლის რაოდენობა /ტ./
A_1	6 70	4	2 130	200
A_2	5 70	3 90	2	160
მოთხოვნა საქონელზე /ტ./	140	90	130	360

$$70\cdot[(5+2)-(6+2)] = -70 \text{ ტ.კმ.}$$

ე.ი. დანახარჯები შემცირდება 70 ტ კმ-ით, მაგრამ ამ პროგრამით ტრანსპორტის დანახარჯები შეადგენს:

$$f_3 = 70\cdot6+130\cdot2+70\cdot5+90\cdot3 = 1300 \text{ ტ.კმ.}$$

ეს პროგრამა იქნება ოპტიმალური, რაშიაც ადვილად დავრწმუნდებით, თუ შევამოწმებთ თავისუფალი უჯრების დანერგვის მიზანშეწონილობას და შევადარებთ შესაბამისი ტარიფების ჯამს.

ოპტიმალური პროგრამა შეიძლება უფრო სწრაფად მივიღოთ, თუ პირველ რიგში დავაკმაყოფილებთ იმ მომხმარებელთა მოთხოვნებს, რომლებისთვისაც საქონლის გადაზიდვა უფრო ხელსაყრელია, სხვა სიტყვებით: თუ პირველ რიგში შევავსებთ იმ უჯრებს სადაც მცირე ტარიფებია.

განვიხილოთ ისევ № 10 ცხრილი. შევნიშნავთ, რომ უმცირესი ტარიფი არის A_1B_3 და A_2B_3 უჯრებში. ამიტომ საჭიროა A_1 ბაზიდან B_3 მომხმარებლამდე გავგზავნოთ მთლი

130 ტ. საქონელი. დარჩენილი 70 ტ. მივაწეროთ A_1B_2 უჯრაში, ვინაიდან მისი ტარიფი ნაკლებია A_1B_1 უჯრის ტარიფზე. შემდეგ გადავინაცვლოთ A_2 ბაზიდან საქონელი. ცხადია კარგი იქნებოდა A_2 ბაზიდან B_3 მომხმარებლამდე საქონლის გადაზიდვა პირველ რიგში, მაგრამ B_3 მომხმარებელმა უკვე მიიღო საჭირო საქონელი. ამის გამო A_2 სტრიქონში ვეძებთ უმცირეს ტარიფიან უჯრას. ეს არის A_2B_2 მას მიეწოდა A_1 ბაზიდან 70 ტ. საქონელი, ესაჭიროება კიდევ 20 ტ. და ჩავწეროთ მას A_1B_2 უჯრაში. A_2 ბაზაში დარჩენილ 140 ტ, საქონელს მივცემთ A_2B_1 უჯრაში, რითაც დაკმაყოფილდება B_1 მომხმარებლის მოთხოვნა. ჩვენ მივიღეთ მეოთხე პროგრამა

მე-4 პ რ ო გ რ ა მ ა

მომხმარებლები / ბაზები	B_1	B_2	B_3	საქონლის რაოდენობა /ტ./
A_1	6	4 70	2 130	200
A_2	5 140	3 20	2	160
მოთხოვნა საქონელზე /ტ./	140	90	130	360

ამ პროგრამის მიხედვით ტრანსპორტის დანახარჯები ტოლია: $f_4=70\cdot4+130\cdot2+140\cdot5+20\cdot3=1300$ ტ.კმ.

როგორც ჩანს, ასეთი განაწილებით სწრაფად მივიღებთ ოპტიმალურ პროგრამას. მეოთხე პროგრამის მესამე პროგრამასთან შე-

დარებით დავრწმუნდებით, რომ ოპტიმალური პროგრამა ერთადერთი არ არის. თუ გავიხსენებთ გრაფიკულ მეთოდს იქ აღნიშნული იყო, რომ წრფივ ფორმას შეუძლია მიაღწიოს ოპტიმალურ მნიშვნელობას ერთ წერტილზე /ამოზნექილი მრავალკუთხედის წვეროზე/ და წერტილთა უსასრულო სიმრავლეზე /მაგალითად, ამოზნექილი მრავალკუთხედის ნებისმიერ ერთ გვერდზე/.

§ 8. ტრანსპორტის ამოცანის ღია მოდელი

წინა პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ ტრანსპორტის ამოცანის დახურული მოდელი. ახლა განვიხილოთ მოკლედ ტრანსპორტის ამოცანის ღია მოდელი. დავუშვათ, რომ მიმწოდებლების საქონლის ან მასალების რაოდენობა მეტია მათ საერთო მოთხოვნაზე.

ამ შემთხვევაში შეიძლება ამოცანაში შემოვიტანოთ ფიქტიური მომხმარებლები იმ ანგარიშით, რომ საერთო მოთხოვნა გაუტოლდეს არსებული საქონლის რაოდენობას.

დავუშვათ, მაგალითად საჭიროა ამოიხსნას ამოცანა, რომლის პირობა მოცემულია N 11 ცხრილში

ც ხ რ ი ლ ი 11

მომხმარებლები / მიმწოდებლები	B_1	B_2	B_3	B_4	არსებული მასალები /ტ./
A_1	4	5	3	2	400
A_2	2	4	5	1	180
A_3	3	2	4	3	250
მასალებზე მოთხოვნა /ტ./	100	140	200	90	830 > 530

ამოცანაში არსებული მასალების მოცულობა შეადგენს 830 ტონას, ხოლო მასზე მოთხოვნა - 530 ტონას.

ჩვენ შეგვყავს დამატებით მეხუთე ფიქტიური მომხმარებელი, რომელსაც უნდა მივაწოდოთ 300 ტ. მასალები. იმისათვის, რათა წრფივი ფორმა, რომელიც გამოხატავს ტრანსპორტის დანახარჯების საერთო მოცულობას, არ შეიცვალოს თითოეული მომწოდებლიდან ფიქტიურ მომხმარებლამდე გადაზიდვის ღირებულების ტარიფები უნდა ავიღოთ ნულის ტოლი. მივიღებთ ახალ ამოცანას, იგი წარმოდგენილია №12 ცხრილში.

ც ხ რ ი ლ ი 12

მომწოდებლები / მომხმარებლები	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	არსებული მასალები /ტ./
A_1	4	5	3	2	0	400
A_2	2	4	5	1	0	180
A_3	3	2	4	3	0	250
მასალაზე მოთხოვნა /ტ/	100	140	200	90	300	830 = 830

ცხადია, რომ ამ ახალ ამოცანაში ტრანსპორტის დანახარჯების მინიმუმი დაემთხვევა საწყისი ამოცანის დანახარჯების მინიმუმს, ე.ი. მიცემული ამოცანის ამოხსნით მიიღება საწყისი ამოცანის ამოხსნა. ანალოგიურად მოვიქცევით იმ შემთხვევაში, როცა საქონელზე მოთხოვნა მეტია, ვიდრე მისი მარაგი. ამ შემთხვევაში ამოცანაში შემოგვყავს ფიქტიური მიმწოდებელი, სადაც იქნება მოთავსებული არასაკმარისი საქონლის მოცულობა. ფიქ-

ტური მიმწოდებლიდან მომხმარებლამდე გადაზიდვის ტარიფები უნდა ავიღოთ ერთნაირი ან ნულის ტოლი. ამრიგად, ჩვენ მივიღებთ დახურულ მოდელს, რომელშიაც არსებული საქონლის მარაგი და მოთხოვნა მასზე ერთმანეთს ემთხვევა.

§ 9. ტრანსპორტის ამოცანის ამოხსნის პოტენციალთა მეთოდი

ტრანსპორტის ამოცანის ფორმულირება ასეთია: საჭიროა მოიძებნოს $m+n$ განტოლებათა სისტემის არაუარყოფითი ამონახსნები:

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n) \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i \quad (i=1,2,\dots,m), \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j \quad (j=1,2,\dots,n), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ისეთები, რომლებიც წრფივ ფორმას

$$f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (3)$$

მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

ტრანსპორტის ამოცანა წარმოადგენს წრფივი პროგრამირების ტიპიურ ამოცანას და ბუნებრივია იგი შეიძლება ამოიხსნას სიმპლექსური მეთოდით. სიმპლექსური მეთოდის ერთ-ერთი თავისებურება ის არის, რომ მისი ალგორითმის განხორციელებისათვის უნდა გვქონდეს საყრდენი გეგმა ანუ პირველი ბაზისური ამოხსნა. ტრანსპორტის ამოცანის ამოხსნისას საყრდენ გეგმას ვადგენთ ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის წესით, შემდეგ თანდათანობით გადავამუშავებთ გეგმას, თავისუფალ ცვლადები შეგვყავს ბაზისში და გამოგვყავს ბაზისური ცვლადები და ვღებულობთ ოპტიმალურ გეგმას ე.ი. ვიყენებთ სიმპლექსური მეთოდის მსგავს ალგორითმს. მაგრამ არის ბიტურთ საკითხები, რომლებსაც აქვთ

პრინციპული მნიშვნელობა ტრანსპორტის ამოცანის ამოხსნის დროს. მაგალითად, ყოველთვის შეიძლება თუ არა მივიღოთ ბაზისური ამოხსნა? არსებობს თუ არა ნებისმიერი ტრანსპორტის ამოცანისათვის ოპტიმალური გეგმა? და ა.შ. სანამ განვიხილავდეთ პოტენციალთა მეთოდის არსს ჩამოვაყალიბოთ ორი თეორემა დამტკიცების გარეშე.

თეორემა 1. ნებისმიერ ტრანსპორტის ამოცანას აქვს ოპტიმალური ამოხსნა.

თეორემა 2. ნებისმიერ ტრანსპორტის ამოცანისათვის შეიძლება შედგეს საწყისი ბაზისური ამოხსნა.

პ ო ტ ე ნ ც ი ა ლ თ ა   მ ე თ ო დ ი პირველად ჩამოაყალიბა საბჭოთა მეცნიერმა ლ.ვ.კანტოროვიჩმა, შემდეგ მისგან დამოუკიდებლად - ამერიკელმა მეცნიერმა ჯ.დანციგმა მეთოდის არსს განვიხილავთ კონკრეტულ მაგალითზე.

დავუშვათ, რომ საჭიროა (1) - (3) ტრანსპორტის ამოცანის ამოხსნა. ვგულისხმობთ, რომ ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის მეთოდით შედგენილია პირველი ბაზისური ამოხსნა.

ყოველ A_i მიმწოდებელს /ყოველ სტრიქონს/ მივაკუთვნოთ რომელიღაც რიცხვი U_i $(i=1,2,\ldots,m)$, რომელსაც ვუწოდებთ A_i-ს პ ო ტ ე ნ ც ი ა ლ ი, ხოლო ყოველ B_j მომხმარებელს /ყოველ სვეტს/ მივაკუთვნოთ რომელიღაც V_j $(j=1,2,\ldots,n)$ რიცხვი, რომელსაც ვუწოდებთ B_j-ს პ ო ტ ე ნ ც ი ა ლ ი. U_i და V_j რიცხვები შევარჩიოთ ისე, რომ მათი ჯამი შესაბამისი დატვირთული უჯრის ტარიფის ტოლი იყოს, ე.ი. დაცული იქნეს ტოლობა $U_i+V_j=C_{ij}$ სადაც (ij) ინდექსებით აღნიშნულია დატვირთული უჯრა. U_i და V_j რიცხვები /ჯერჯერობით უცნობები/ ტოლია $m+n$ -ის, ხოლო შესაბამე-

ლი /ბაზისური/ უჯრები $(m+n-1)$ -ის ტოლია. U_i და V_j რიცხვების განსაზღვრისათვის საჭიროა ამოიხსნას $(m+n)$ უცნობიანი $(m+n-1)$ განტოლებათა სისტემა. $U_i+V_j=C_{ij}$. ერთ-ერთ უცნობს შეიძლება მიეცეს ნებისმიერი მნიშვნელობა და მაშინ დანარჩენი $m+n-1$ უცნობები განისაზღვრებიან ცალსახად*.

როცა (ij) წყვილი განსაზღვრავს ცარიელ უჯრას ჯამი U_i+V_j აღვნიშნოთ C'_{ij} -ით, რომელსაც უწოდებენ ა რ ა პ ი რ დ ა პ ი რ ტ ა რ ი ფ ე ბ ს

თუ მიღებული გეგმისათვის /ამოხსნა, პროგრამა/ ყველა სხვაობა $C'_{ij}-C_{ij}<0$** მაშინ იგი წარმოადგენს ოპტიმალურს. თუ ერთი მაინც სხვაობა $C'_{ij}-C_{ij}>0$, მაშინ გადავდივართ ახალ გეგმაზე. x_{ij} ბაზისურ ცვლადებში შეგვყავს რიცხვი, რომელიც მაქსიმალური მნიშვნელობისაა $C'_{ij}-C_{ij}$ დადებით სხვაობებს შორის.

ამოვხსნათ ტრანსპორტის ამოცანა პოტენციალთა მეთოდით, რომლის საწყისი პირობები მოცემულია №13 ცხრილში.

ამოცანის ამოხსნისათვის აუცილებელია შემდეგი მოქმედებანი:

1. მიღებული იქნეს პირველი საყრდენი გეგმა ანუ პირველი ბაზისური ამოხსნა "ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის" წესით;
2. გამოითვალოს მიმწოდებლებისა და მომხმარებლების პოტენციალები;
3. გამოითვალოს C'_{ij} არაპირდაპირი ტარიფები;

- - - - - - - - - - - - - - -

* შეიძლება დამტკიცდეს, რომ დარჩენილი U_i და V_j უცნობების კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის რანგი ტოლია $m+n-1$ და მაშასადამე, სისტემას აქვს ერთადერთი ამო[illegible]

** ე.ი. ყოველი ცარიელი უჯრისათვის პოტენციალთა ჯამი /ამ [illegible]ქონისა და სვეტების ინდექსებით/ ნაკლებია მის ტარიფზე.

4. შემოწმდეს ყველა $C'_{ij} - C_{ij}$ სხვაობები. თუ ისინი ყველა ნულზე ნაკლებია, მაშინ მიღებული გეგმა ოპტიმალურია, თუ ერთი მაინც სხვაობა $C'_{kl} - C_{kl} > 0$, მაშინ ბაზისში შეგვყავს ის x_{kl} ცვლადი, რომლისთვისაც ეს სხვაობა მაქსიმალურია და მივიღებთ ახალ გეგმას.

ცხრილი 13

მომხმარებლები / მიმწოდებლები	B_1	B_2	B_3	B_4	არსებული მასალები /ტ/
A_1	2	3	5	4	10
A_2	4	1	3	2	8
A_3	6	3	2	5	12
მასალებზე მოთხოვნა /ტ/	8	5	7	10	30=30

ეს პროცესი გაგრძელდება მანამ, სანამ არ იქნება ისეთი გეგმა მიღებული, რომლის დროსაც ყველა $C'_{ij} - C_{ij}$ სხვაობა ნაკლები აღმოჩნდება ნულზე.

მაშასადამე, „ჩრდილო-დასავლეთ კუთხის" მეთოდით მოვძებნოთ პირველი ბაზისური ამოხსნა. /I პროგრამა/

I პროგრამა

	2	3	5	8	
0	2 / 8	3 / 2	5 / 5	4 / 8	10
-2	4 / 0	1 / 3	3 / − 5	2 / + $\boxed{}$ 6	8
-3	6 / -1	3 / 0	2 / 2 +	5 / 10 −	12
	8	5	7	10	

$$f_1 = 8\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 1+5\cdot 3+2\cdot 2+10\cdot 5=94.$$

გამოვთვალოთ u_i და v_j პოტენციალები:

$$u_1+v_1=2; \qquad u_2+v_3=3;$$
$$u_1+v_2=3; \qquad u_3+v_3=2;$$
$$u_2+v_2=1; \qquad u_3+v_4=5$$

მივიღეთ 7 უცნობიანი 6 განტოლებათა სისტემა, ერთ-ერთს მივცეთ ნებისმიერი მნიშვნელობა. დავუშვათ $u_1=0$, მაშინ $v_1=2$; $v_2=3$; $u_2=-2$; $v_3=5$; $u_3=-3$; $v_4=8$.

ახლა გამოვთვალოთ არაპირდაპირი ტარიფები.

$$C'_{13}=u_1+v_3=0+5=5; \qquad C'_{24}=u_2+v_4=-2+8=6;$$
$$C'_{14}=u_1+v_4=0+8=8; \qquad C'_{31}=u_3+v_1=-3+2=-1;$$
$$C'_{21}=u_2+v_1=-2+2=0; \qquad C'_{32}=u_3+v_2=-3+3=0.$$

ყველა ეს გამოთვლები მნიშვნელოვნად მარტივად შესრულდება "I პროგრამის" ცხრილის გამოყენებით. ცხრილის მარცხნივ მიწერილია მიმწოდებლების პოტენციალები /სტრიქონის ინდექსები/ u_1, u_2, u_3. ცხრილის ზევით – მომხმარებლის /სვეტების ინდექსები/ პოტენციალები v_1, v_2, v_3, v_4. ცარიელ უჯრებში ძირითადი ტარიფების პირისპირ /დიაგონალურად/ მიცემულია არაპირდაპირი ტარიფები. ცხრილიდან ჩანს, რომ

$$\max\left[(C'_{ij}-C_{ij})>0\right]=C'_{14}-C_{14}=8-4=C'_{24}-C_{24}=6-2=4.$$

(A_2B_4) უჯრის ძირითადი ტარიფი მცირეა. ამის გამო დავტვირთავთ ამ უჯრას. ცხადია, რომ მაქსიმალური მიცემა, რომელიც შეიძლება განხორციელდეს (A_2B_4) უჯრაში ტოლია 5-ის.

ჩავატაროთ გაანგარიშება. გადავიდეთ მე-2 პროგრამაზე.

მე-2 პროგრამა

	2	3	1	4	
0	$\boxed{2}$ 8	$\boxed{3}$ 2	$\boxed{5}$ 1	$\boxed{4}$ 4	10
-2	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$ − 3	$\boxed{3}$ -1	$\boxed{2}$ + 5	8
1	$\boxed{6}$ 3	$\boxed{3}$ $\square$ + 4	$\boxed{2}$ 7	$\boxed{5}$ 5 −	12
	8	5	7	10	

მივიღეთ ისევ ბაზისური ამოხსნა, ხელახლა მივიღოთ $u_1=0$, მოვძებნოთ დანარჩენი პოტენციალები, შემდეგ არაპირდაპირი ტარიფები. ცხრილიდან ჩანს, რომ ერთადერთი დადებითი სხვაობა $C'_{ij}-C_{ij}$ არის $C'_{32}-C_{32}=4-3=1$. დავტვირთოთ $(A_3 B_2)$ უჯრა და მივიღებთ 3 პროგრამას.

მე-3 პროგრამა

	2	3	2	5	
0	$\boxed{2}$ 8	$\boxed{3}$ 2	$\boxed{5}$ 2	$\boxed{4}$ 5	10
-3	$\boxed{4}$ -1	$\boxed{1}$ 0	$\boxed{3}$ -1	$\boxed{2}$ 8	8
0	$\boxed{6}$ 2	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{2}$ 7	$\boxed{5}$ 2	12
	8	5	7	10	

$$f_3 = 74 - 3\cdot[(5+1)-(2+3)] = 71,$$

$$\max\left[(c'_{ij} - c_{ij}) > 0\right] = c'_{14} - c_{14} = 5-4=1.$$

დავტვირთოთ (A_1, B_4) უჯრა და მივიღებთ მე-4 პროგრამას.

მე-4 პროგრამა

	2	3	2	4	1
0	$\boxed{2}$ 8	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{5}$ 2	$\boxed{4}$ 2	10
-2	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{2}$ 8	8
0	$\boxed{6}$ 2	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{2}$ 7	$\boxed{5}$ 4	12
	8	5	7	10	

მიღებული გეგმა ოპტიმალურია, ვინაიდან არცერთი სხვაობა $c'_{ij} - c_{ij}$ არ არის დადებითი. ეს გეგმა აღმოჩნდა გადაგვარებული /დატვირთული უჯრების რიცხვი 5-ის ტოლია, მაშინ როცა $m+n-1=6$ იმისათვის, რომ მივიღოთ გადაგვარებული გეგმა, რომელიც მოგვცემს საშუალებას შევიმოწმოთ მისი ოპტიმალურობის საკითხი საჭიროა (A_1, B_2) უჯრაში განვახორციელოთ ნულოვანი მიწოდება ე.ი. ამ პროგრამის მიხედვით ტრანსპორტის დანახარჯები ტოლია

$$f_4 = 71 - 2\cdot\left[(5+3)-(3+4)\right] = 69.$$

ე.ი. პოტენციალთა მეთოდით ამოცანის ამოხსნა საჭიროებს შემთხვევაში ოთხი იტერაციის განხორციელებას. ბუნებრივია, საწყისი ბაზისური ამოხსნის მიღებისათვის მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ ისეთი წესი, რომელიც შეამცირებს გამოთვლებს ოპტიმალური გეგმის მიღებისათვის.

საგარჯიშო

მანქანათმშენებელ ქარხანაში არის სამი სახის ჩარხები: A_1, A_2, A_3 ამ ჩარხებზე თანმიმდევრობით უნდა დამუშავდეს ოთხი სახის დეტალები B_1, B_2, B_3, B_4 ცნობილია თითოეული დეტალის დამზადებას თითოეულ ჩარხზე რა დრო სჭირდება, ცნობილია აგრეთვე რამდენი დრო უნდა იმუშაოს თითოეულმა ჩარხმა და რეალიზაციის რამდენი მოგება შეიძლება იქნეს მიღებული ყოველი სახის დეტალის რეალიზაციის შედეგად. ყველა ეს მონაცემები წარმოვადგინოთ № 14 ცხრილის სახით.

ც ხ რ ი ლ ი №14

ჩარხები	I დეტალის გამოშვებისათვის ჩარხის მუშაობის დრო საათი				ჩარხის მუშაობის დროის ფონდი
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	4	0	8	12
A_2	7	2	2	6	8
A_3	5	8	4	3	48
მოგება I ცალზე	3	4	3	1	

საჭიროა ვიპოვოთ ჩარხების მუშაობის ოპტიმალური გეგმა ე.ი. უნდა დადგინდეს რამდენი და რა სახის დეტალი გამოვუშვათ, რომ მიღებულ იქნეს მაქსიმალური მოგება.

ჩავწეროთ მათემატიკურად: B_1 დეტალის გამოშვების საძიებელი რაოდენობა აღვნიშნოთ x_1-ით, $B_2 — x_2$, $B_3 — x_3$, $B_4 — x_4$, მაშინ ამოცანის პირობა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგ უტოლობების სახით.

$$2x_1+4x_2+8x_4 \le 12;$$
$$7x_1+2x_2+2x_3+6x_4 \le 8;$$
$$5x_1+8x_2+4x_3+3x_4 \le 48$$

ამოხსნის მიზანია მაქსიმალური მოგების მიღება ე.ი.

$$F=3x_1+4x_2+3x_3+1x_4=max.$$

ამოხსენით მოცემული ამოცანა გრაფიკულ-ანალიზური და სიმპლექსური მეთოდებით, შეადარეთ ამოხსნის შედეგები ერთმანეთს.

თავი V. დინამიკური პროგრამირება

§ 1. დინამიკური პროგრამირების საგანი

პრაქტიკაში გვხვდება ისეთი ამოცანები, რომლებიც საჭიროებენ მოქმედების ოპტიმალური პროგრამის შერჩევას, მაგრამ არ შეიძლება ამოხსნას წრფივი პროგრამირების მეთოდებით. ეს ისეთი ამოცანებია, რომელთა ოპტიმალური მნიშვნელობის მოსაძებნი მიზნის ფუნქცია არაწრფივია. ასე მაგალითად, არსებობენ ისეთი ამოცანები, რომელთა მიზნის ფუნქციას წარმოადგენს კვადრატული ან უფრო მაღალი რიგის მრავალწევრი. ასეთი სახის ამოცანების ამოხსნა არაწრფივი პროგრამირების და, კერძოდ, ამოზნექილი პროგრამირების საგანია.

ამ თავში განვიხილავთ მოკლედ დინამიკური პროგრამირების უმარტივეს ამოცანებს.

დინამიკური პროგრამირება მათემატიკური პროგრამირების ძალზე მნიშვნელოვანი ნაწილია. ამ მათემატიკური დისციპ-

ლინის საგანს ბუნებრივია ოპტიმალური დაგეგმვის ამოცანები წარმოადგენს მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ მათ უმრავლესობას აქვთ არა სტატიკური, არამედ დინამიკური ხასიათი, იმ გაგებით რომ მათ ამოხსნაში გათვალისწინებული უნდა იყოს დროის ფაქტორი ან ოპერაციათა თანმიმდევრობა.

დინამიკური პროგრამირების ერთ-ერთი არსებითი თავისებურებაა ის, რომ რესურსების ოპტიმალური განაწილების ნებისმიერი ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება მიღებული გადაწყვეტილებების მრავალეტაპიან ანუ მრავალბიჯიან პროცესამდე. ეს იმას ნიშნავს, რომ ოპტიმალური პროგრამის მოძებნა დანაწევრდება რესურსების ან ცალკეულ ეტაპებზე ძალების ოპტიმალური განაწილების თანმიმდევრობამდე. ამოცანებს, რომლებიც ამოიხსნებიან დინამიკური პროგრამირების მეთოდებით მიეკუთვნებიან, მაგალითად, კაპიტალურ დაბანდებათა ოპტიმალური განაწილების ამოცანა, პროდუქციის გასაღებისათვის ძალთა განაწილება სხვადასხვა რაიონებს შორის. მოხმარების საგნების გადაზიდვის უმოკლესი გზის განსაზღვრა, მარაგების ოპტიმალური მართვის ამოცანა და სხვ.

§ 2. ამოხსნის მრავალბიჯიანი პროცესის ცნება. ოპტიმალობის პრინციპი

განვიხილოთ შემდეგი კონკრეტული ამოცანა.

რომელიმე მექანიკურ ქარხანაში არის C ჩარხი, რომლებზედაც უნდა დამზადდეს ორი სახის ნაწარმი. ცნობილია, რომ პირველი სახის ნაწარმი წარმოებისათვის მეტ მოგებას იძლევა მეორე სახის ნაწარმთან შედარებით. დავუშვათ, რომ x ჩარხებზე მზადდება პირველი სახის ნაწარმი და წარმოების წლიური მოგება შეადგენს $f(x)$ ხოლო $c-x$ ჩარხებზე

მზადდება მეორე სახის ნაწარმი და მისგან წლიური მოგება შეადგენს $g(c-x)$*. ცნობილია აგრეთვე, რომ წლის ბოლოს მთლიანად ხდება I ნაწარმის დამმუშავებელი ჩარხების 30%-ის ამორტიზაცია, და II ნაწარმის დამმუშავებელი ჩარხების 20%-ის ამორტიზაცია. საჭიროა უახლოესი სამი წლისათვის შედგეს პროდუქციის გამოშვების ისეთი გეგმა, რომელიც უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას.

ამოცანის ამოხსნისათვის აღვნიშნოთ $F_1(c)$ სიდიდით მაქსიმალური მოგება, რომელიც წარმოებამ შეიძლება მიიღოს პირველ წელს, მაშინ

$$F_1(c)=\max_{0\le x\le c}\left[f(x)-g(c-x)\right]. \qquad (1)$$

/1/ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ეკონომიკური შინაარსი შემდეგია: I ნაწარმის დამმუშავებელ x ჩარხებს შეუძლიათ მიიღონ მნიშვნელობანი 0-დან C-მდე. x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის გამოითვლება ჯამი $f(x+g(c-x)$ და ყველა $f(0)+g(c), f(1)+g(c-1), f(2)+g(c-2)$... ჯამიდან ამოირჩევა ის, რომელსაც უდიდესი მნიშვნელობა აქვს. მეორე წლის დასაწყისისათვის x ჩარხებიდან, რომლებიც მუშაობენ I ნაწარმში დარჩება 0,7, ხოლო $C-x$ ჩარხებიდან, რომლებიც მუშაობს II ნაწარმში – $0,8(c-x)=0,8c-0,1x$. ცხადია, რომ როგორაც არ გავანაწილებთ ჩარხებს პირველ წელს, მეორე წლისათვის ახლად უნდა განაწილდეს ისე, რომ მიღებულ იქნეს მაქსიმალური მოგება. ასე მაგალითად მეორე წლის დასაწყისისათვის ჩარხების რაოდენობა იქნება $0,8c-0,1x$, ამ შემთხვევაში მაქსიმალური მოგება შეადგენს $F_1(0,8c-0,1x)$.

---

* f და g რომელიღაც უწყვეტი ფუნქციებია.

$F_2(c)$- თი აღვნიშნოთ ის უდიდესი მოგება, რომელიც შეიძლება იქნეს მიღებული პირველი ორი წლის განმავლობაში. მაშინ

$$F_2(c)=\max_{0\le x\le c}\left[f(x)+g(c-x)+F_1(0{,}8c-0{,}1x)\right] \quad (2)$$

/2/ განტოლება ამყარებს კავშირს F_1 ფუნქციასა /ერთ წელში მიღებული უდიდესი მოგება/ და F_2 ფუნქციას /ორი წლის განმავლობაში უდიდესი მოგება/ შორის. ასე, რომ მთელი პერიოდის განმავლობაში მოგების მაქსიმუმი დაკავშირებულია თითოეულ ეტაპზე მოგების მაქსიმიზაციასთან, თუ ეს მიღწეულია, მაშინ პროცესის დასაწყისში x სიდიდე /ე.ი. ჩარხების განაწილება/ შერჩეულია საუკეთესოდ. თუ $F_3(c)$-თი აღვნიშნავთ მთელი სამი წლის განმავლობაში მაქსიმალურად შესაძლო მოგებას, მაშინ $F_3(c)$ -ს $F_2(c)$-თან კავშირი ისეთივე იქნება, როგორიც $F_2(c)$ და $F_1(c)$ -ს შორის. ჩვენ მივიღებთ ტოლობას:

$$F_3(c)=\max_{0\le x\le c}\left[f(x)+g(c-x)+F_2(0{,}8c-0{,}1x)\right] \quad (3)$$

/1/, /2/ და /3/ განტოლებებს ფ უ ნ ქ ც ი ო ნ ა ლ უ რ ი განტოლებები ეწოდება. თუ f და g ფუნქციები მოცემულია, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია სასრულო ჯამში გამოვთვალოთ $F_3(c)$, რითაც ამოიხსნება დასმული ამოცანა. თუ სამი წლის ნაცვლად განვიხილავთ n წლიან პერიოდს, მაშინ მაქსიმალური მოგება რომელიც შეიძლება იქნეს მიღებული n წლის განმავლობაში, განისაზღვრება განტოლებით:

$$F_n(c)=\max_{0\le x\le c}\left[f(x)+g(c-x)+F_{n-1}(0{,}8c-0{,}1x)\right].$$

გავაკეთოთ რამდენიმე შენიშვნა, რომელიც შემდეგშიც გამოგვადგება.

1. ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება F_1, F_2 და F_3 ფუნქციის გამოთვლამდე. სხვა სიტყვებით, სამი წლის განმავლობაში წარმოების მაქსიმალური მოგების მოძებნასთან დაკავშირებული სამგანზომილებიანი ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება სამი ერთგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნამდე. ოპტიმალური ამოხსნის მოძებნის მთელი პროცესი შედგება სამი ეტაპისაგან, ანუ სამი ბიჯისაგან, ე.ი. მიღებული გადაწყვეტების სამბიჯიანი პროცესისაგან.

2. /3/ ტოლობა გამოხატავს იმ ფაქტს, რომ წარმოება სამი წლის მუშაობის პერიოდში აღწევს მაქსიმალურ მოგებას იმ შემთხვევაში, როცა წარმოება აღწევს მაქსიმალურ მოგებას მესამე წელს, იმ პირობით, რომ წინა ორი წლის განმავლობაში აგრეთვე იყენებდა ოპტიმალურ სტრატეგიას, სხვა სიტყვებით, ოპტიმალურად ანაწილებდა არსებულ რესურსებს.

3. რესურსების განაწილებაში ყოველ ეტაპზე ოპტიმალური სტრატეგიის გამოყენების შედეგად, მაქსიმალური მოგება, რომელიც მიიღება მთელ პერიოდში /სამი წელი/, დამოკიდებულია საწყის არსებულ რესურსებზე ე.ი. C სიდიდეზე და ეტაპების /ბიჯების/ რაოდენობაზე ანუ წლების რიცხვზე.

4. ეს ჩარხების რაოდენობა და მათი განაწილება რომელიმე ეტაპის /წლის/ ბოლოსათვის განიხილება როგორც რომელიღაც სისტემის მდგომარეობა, ხოლო მისი მდგომარეობა შემდგომ ეტაპზე /ბიჯზე/ დამოკიდებულია მოცემულ /წინა/ მდგომარეობაზე და ჩვენს მიერ მიღებულ გადაწყვეტილებაზე.

კაპიტალური დაბანდების განაწილების ამოცანა

განვიხილოთ უფრო ზოგადი ამოცანა.

დავუშვათ, რომ ჩვენს განკარგულებაშია რომელიღაც რესურსები /ფულადი სახსრები კაპდაბანდება და ა.შ./ რომელიც აღვნიშნოთ x-ით ამ რესურსებს ვაბანდებთ ორ რომელიმე საწარმოში, პირველში y, მეორეში $x-y$ დავუშვათ გარკვეული პერიოდის განმავლობაში /მაგალითად წელი/ y რაოდენობას მოაქვს $g(y)$ შემოსავალი, ხოლო $(x-y)$-ს – $h(x-y)$ შემოსავალი. მთელი დაბანდებული რესურსებისაგან საერთო შემოსავალი შეადგენს:

$$R_1(x,y)=g(y)-h(x-y),$$

$F_1(x)$-ით აღვნიშნოთ ის უდიდესი შემოსავალი, რომელიც შეიძლება იქნეს მიღებული x რესურსების საწარმოთა შორის ოპტიმალური განაწილებით. მაშინ

$$F_1(x)=\max_{0\le y\le x}\left[g(y)+h(x-y)\right]. \qquad (4)$$

ახლა განვიხილოთ ორი პერიოდისაგან /ეტაპისაგან/ შედგენილი ორბიჯიანი პროცესი. რადგანაც შემოსავლის მიღება საჭიროებს პროდუქციის გამოშვებას ან რეალიზაციასთან დაკავშირებულ გარკვეულ დანახარჯებს, ამიტომ მეორე პერიოდის დასაწყისისათვის საწყისი თანხა y შემცირდება ay სიდიდემდე, სადაც $0\le a\le 1$, ხოლო $x-y$ თანხა შემცირდება $b(x-y)$ სიდიდემდე, სადაც $0\le b\le 1$ უდიდესი მოგება, რომელიც შეიძლება მიღებულ იქნეს $ay+b(x-y)$ დარჩენილი თანხისაგან მეორე ეტაპის განმავლობაში ტოლია $F_1[ay+b(x-y)]$.

აღვნიშნოთ $F_2(x)$-ით შემოსავლის ის უდიდესი მნიშვნელობა, რომელიც შეიძლება მიღებულ იქნეს თანხისაგან ორივე პერიოდის განმავლობაში.

ეს შემოსავალი ტოლი იქნება პირველი და მეორე პერიოდების შემოსავლის ჯამის მაქსიმალური მნიშვნელობის, იმ შემთხვევაში თუ საწყისი რესურსები თითოეული პერიოდისათვის განაწილებულია ოპტიმალურად ე.ი.

$$F_2(x)=\max_{0\le y\le x}\left\{g(y)+h(x-y)+F_1[ay+b(x-y)]\right\}. \quad (5)$$

/5/ ტოლობა ამყარებს $F_1(x)$ და $F_2(x)$ ფუნქციებს შორის კავშირს. n ბიჯიანი პროცესის განხილვისას მივალთ ბელმანის ძირითად ფუნქციონალურ განტოლებამდე

$$F_n(x)=\max_{0\le y\le x}\left\{g(y)+h(x-y)+F_{n-1}[ay+b(x-y)]\right\}, \quad (6)$$

რომელიც ამყარებს $F_n(x)$ და $F_{n-1}(x)$ ფუნქციებს შორის კავშირს. /4/ ტოლობის დახმარებით განვსაზღვრავთ $F_1(x)$, /5/ ტოლობით გამოვთვალოთ $F_2(x)$, შემდეგ $F_3(x)$ და ა.შ. $F_n(x)$ მნიშვნელობა კი იქნება n-ბიჯიანი პროცესის შედეგად მიღებული შემოსავალი.

შევნიშნავთ, რომ ყოველ ეტაპზე /ბიჯზე/ მიღებული შემოსავალი ძირითადად განისაზღვრება ორი ფაქტორით, საწყისი ეტაპისათვის რესურსების არსებობით, რომლებიც ახასიათებენ რომელღაც სისტემის პარამეტრების მ დ გ ო მ ა რ ე ო ბ ა ს., და მათი განაწილებით, რომელიც განსაზღვრავს ჩვენ ქ ც ე ვ ა ს

ბელმანის ძირითადი ფუნქციონალური განტოლება წარმოადგენს დინამიკური პროგრამირების ერთ-ერთ მნიშვნელოვანი პრინციპის ეგრეთწოდებული ოპტიმალობის პრინციპის მათემატიკურ ფორმულირებას.

ო პ ტ ი მ ა ლ უ რ ი ქ ც ე ვ ა ხ ა ს ი ა თ დ ე - ბ ა ი მ თ ვ ი ს ე ბ ი თ, რ ო მ რ ო გ ო რ ი ც ა რ

უნდა იყოს პირველი, საწყისი მდგომარეობა და გარდაწყვეტილება საწყის მომენტში, შემდგომი გარდაწყვეტილება უნდა წარმოადგენდეს ოპტიმალურ ქცევას იმ მდგომარეობასთან შედარებით, რომელიც მიღებული იყო პირველი გარდაწყვეტილების შედეგად /ბელმანი/.

დავუბრუნდეთ /6/ ძირითად ფუნქციონალურ განტოლებას და ერთხელ კიდევ ხაზი გავუსვათ იმ აზრს, რომ h-ბიჯიანი პროცესისაგან მაქსიმალური შემოსავალი მიიღება როგორც პირველი ბიჯიდან $(n-1)$ ბიჯამდე შემოსავალთა ჯამის მაქსიმუმი, იმ პირობით, რომ პირველი ბიჯის შემდეგ დარჩენილი რესურსები ოპტიმალურად იქნეს განაწილებული $(n-1)$ ბიჯების განმავლობაში.

§ 3. დინამიკური პროგრამირების ამოცანის ამოხსნა

დინამიკური პროგრამირების მეთოდების ღირსება ის არის, რომ მისი საშუალებით შეიძლება ამოიხსნას რიგი ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნაც შეუძლებელია კლასიკური ანალიზის დახმარებით.

განვიხილოთ ამოცანა. ქვემოთმოყვანილ ცხრილში /ცხრილი 15/ ნაჩვენებია ოთხი ქარხნის პროდუქციის გამოშვების შესაძლო ზრდა მის რეკონსტრუქციასა და მოდერნიზაციაზე დამატებითი კაპიტალდაბანდების განხორციელებისას. შევადგინოთ

კაპიტალდაბანდების განაწილების ისეთი გეგმა, რომლითაც მიიღწევა გამოშვებული პროდუქციის საერთო ზრდა.

ც ხ რ ი ლ ი 15

კაპიტალდაბანდება /ათას მან./ x	პროდუქციის გამოშვების ზრდა /ათას მან./ $g_i(x)$			
	ქარხნები			
	1	2	3	4
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

$g_i(x)$ - ით აღვნიშნოთ პროდუქციის ზრდა i -ურ საწარმოში x მან. კაპიტალდაბანდების დროს /სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ x იღებს 50 ათასი მანეთის ჯერად მნიშვნელობებს/. როგორც წინა ამოცანებში, ჩვენ შეგვიძლია დავიწყოთ ორ საწარმოს შორის C = 200 ათასი მანეთის თანხის ოპტიმალური განაწილების ძიებით. შემდეგ გადავიდეთ სამ და ბოლოს ოთხ საწარმოზე. დავუშვათ, რომ მეოთხე საწარმოს გამოეყო x მანეთი. $F_4(C)$ -თი აღვნიშნოთ პროდუქციის გამოშვების მაქსიმალურად შესაძლო ნაზარდი C თანხის ოთხ საწარმოთა შორის განაწილების დროს. მაშინ ბელმანის ძირითადი ფუნქციონალური განტოლების შესაბამისად გვექნება:

$$F_4(c)=\max_{0\le x\le c}\left[g_4(x)+F_3(c-x)\right];\quad F_1(x)=\max_{0\le x\le c}\left[g_1(x)\right]=g_1(x).$$

ვაჩვენოთ ახლა როგორ მიიღებს რიცხვით ამონახსნს ჩვენი ამოცანა. ავაგოთ ოთხსვეტიანი ცხრილი № 16, რომელშიაც

შევიტანოთ $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ და $F_4(x)$ ის მნიშვნელობანი. რამდენადაც $F_1(x) = g_1(x)$, მაშინ ცხრილის პირველ სვეტში შევიტანთ რიცხვებს №15 ცხრილიდან.

ც ხ რ ი ლ ი 16

x \ F	F_1	F_2	F_3	F_4
50	25	30	36	36
100	60	70	70	70
150	100	100	106	110
200	140	140	134	146

ახლა ვისარგებლოთ შესაბამისი ფუნქციონალური განტოლებებით და გამოვთვალოთ დანარჩენი სვეტის ელემენტები:

$$F_2(50) = \max_{0 \le x \le 50}\left[g(x) + F_1(50-x)\right] = \max\left[g_2(0) + g_1(50);\ g_2(50) + g_1(0)\right] = \max\left[0+25;\ 30+0\right] = 30;$$

$$F_2(100) = \max_{0 \le x \le 100}\left[g_2(x) + F_1(100-x)\right] = \max\left[g_2(0) + g_1(100);\ g_2(50) + g_1(50);\ g_2(100) + g_1(0)\right] = \max\left[0+60; 30+25; 70+0\right] = 70$$

და ა.შ. დავუშვათ მეორე სვეტის ელემენტები მოძებნილია. გამოვთვალოთ $F_3(150)$:

$$F_3(150) = \max\left[g_3(x) + F_2(150-x)\right] = \max\left[g_3(0) + F_2(150);\ g_3(50) + F_2(100);\ g_3(100) + F_2(50);\ g_3(150) + F_2(0)\right] =$$

$$= \max\left[0+100;\ 36+70;\ 64+30;\ 95+0\right] = 106.$$

ანალოგიურად გამოითვლება ცხრილი № 16-ის ყველა დანარჩენი ელემენტები.

ყველა გამოთვლები შეიძლება მნიშვნელოვნად გამარტივდეს და გამოვიყენებთ შემდეგ ცხრილს /ცხრილი №17/.

ც ხ რ ი ლ ი 17

x_1	F_1	g_2	F_2	g_3	F_3	g_1	F_4
	0	0	0	0	0	0	0
50	25	30	30	36	36	28	36
100	60	70	70	64	70	56	70
150	100	90	100	95	106	110	110
200	140	122	140	130	140	140	146

დავუშვათ, რომ საჭიროა $F_2(150)$ გამოთვლა. $F_2(150)$ არის $(F_1 + g_2)$ -ის მაქსიმალური მნიშვნელობა, F_1 სვეტში ვიწყებთ რიცხვი 100-დან ზევით, ხოლო g_2 სვეტში -0-დან ქვევით. ამის შედეგად წარმოიქმნება ჯამები 100 + 0; 60 + 30; 25 + 70; 0 + 90. ამ ჯამებიდან უდიდესია 100. მაშასადამე, $F_2(150) = 100$. № 17ცხრილიდან ჩანს, რომ პროდუქციის უდიდესი ნაზარდი, რომელიც შეიძლება მიიღოს წარმოებამ შეადგენს 146 ათას მანეთს.

$$F_4(200)=F_3(50)+g_4(150)=36+110=146.$$

აქედან ჩანს, რომ მეოთხე საწარმოში უნდა გამოიყოს 150 ათასი მანეთი, ხოლო პირველ სამზე - 50 ათასი მანეთი, შემდეგ

$$F_3(50)=F_2(0)+g_3(50)=36$$

აქედან ჩანს, რომ მესამე საწარმოში უნდა გამოიყოს

50 ათასი მანეთი, ხოლო პირველმა ორმა - 0 მანეთი.

ამრიგად, ჩვენი ამოცანის ამონახსნებია $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=50$ ათას მანეთს; $x_4=150$ ათას მანეთს. 200 ათასი მანეთის ოთხ საწარმოს შორის ასეთი განაწილებით პროდუქციის ნაზარდი იქნება მაქსიმალური /146 ათას მანეთი/ და არის ოპტიმალური.

ჩვენს მიერ განხილულ ამოცანას აქვს ილუსტრაციის ხასიათი. დინამიკური პროგრამირების მეთოდების გამოყენების სფერო დიდია. ეს მეთოდები ეფექტურად გამოიყენება ისეთი უმნიშვნელოვანესი ეკონომიკური ამოცანის ამოხსნის დროს, რომელიც დაკავშირებულია დარგთაშორისი ბალანსის ანალიზიდან, როცა პროდუქციის დარგებს შორის მიწოდება იცვლება დროში.

აღსანიშნავია, რომ განაწილების პროცესს, რომელშიც სისტემის საბოლოო მდგომარეობა განისაზღვრება ამოსავალი მოცემული პარამეტრებით უწოდებენ დ ე ტ ე რ მ ი ნ ი რ ე ბ უ ლ პ რ ო ც ე ს ს. ამასთან უმრავლეს პრაქტიკულ ამოცანებში არის ალბათური ელემენტები, იმ აზრით, რომ საბოლოო გადაწყვეტილება არ შეიძლება ცალსახად განისაზღვროს. ასე მაგალითად, საწარმოებისათვის კაპიტალური დაბანდების გამოყოფა არ ნიშნავს, რომ მივიღებთ შესაბამის მოგებას, ან პროდუქციის ნამეტს, ვინაიდან წარმოების პროცესი ურთიერთდაკავშირებულ ფაქტორთა რთულ კომპლექსს წარმოადგენს. ამასთან დაკავშირებით უმრავლესი ეკონომიკური ამოცანებისათვის ლოგიკურია ასეთი დასმა: სისტემის მოცემული საწყისი მდგომარეობით მის საბოლოო მდგომარეობას უნდა ველოდოთ გარკვეული ალბათობით. მოტანილ მაგალითში ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემულ კაპიტალურ დაბანდების პირობებში n-ბიჯიანი პროცესის შედეგად

პროდუქციის ნაზრდს უნდა ველოდოთ რაღაც ალბათობით.

პროცესებს, რომლებშიაც ამოცანის ამოხსნის შედეგად მიიღება ჩვენთვის საინტერესო სიდიდეების არასრულად განსაზღვრული მნიშვნელობანი იწოდებიან ს ტ ო ქ ა ს ტ ი კ უ რ პ რ ო ც ე ს ე ბ ა დ . ის ფაქტი, რომ საოპტიმიზაციო სიდიდეები წარმოადგენენ ალბათურს ამოცანის ამოხსნის პროცესში არავითარ სიძნელეებს არ წარმოქმნიან, შეიძლება ყოველთვის დაისვას მისი საშუალო მნიშვნელობის ოპტიმუმის მოძებნის საკითხი. ასეთი ტიპის ამოცანები ამოიხსნება ფუნქციონალურ განტოლებათა მეთოდის გამოყენებით.

თავი VI. ქსელური დაგეგმვა და მართვა

სახალხო მეურნეობის დარგთა დაგეგმვასა და მართვაში ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღება ძალზე ძნელია, უფრო სწორად შეუძლებელიცაა გამოყენებითი მათემატიკის უახლესი მიღწევების გამოყენების გარეშე.

ამ თავში მოკლედ განვიხილავთ ქსელური დაგეგმვის არსს და მნიშვნელობას. ქსელური დაგეგმვა და მართვა /ქდმ/ წარმოიშვა PERT*-ის ბაზაზე, რომლის გამოყენებასაც ჩვენს ქვეყანაში საფუძველი ჩაეყარა 1960-1961 წლებში და დღეისათვის წარმატებით გამოიყენება პრაქტიკაში. ისევე როგორც ოპტიმალური დაგეგმვის მეთოდები /ქდმ/ გამოიყენება რესურსების შეზღუდვის პირობებში მათი უკეთ გამოყენებით დასახული მიზნის მიღწევისათვის.

---

* Program Evaluation and Review Techique — საპროგრამო პროექტის შეფასებისა და კონტროლის ტექნიკა- ეს მეთოდი განვითარდა 50-იანი წლების ბოლოს აშშ-ში..

დავუშვათ საჭიროა მანქანათმშენებელი ქარხნის აგება პროექტის შედგენიდან და მთელ სამუშაოს შესრულებამდე და ქარხნის ექსპლოატაციაში გაშვებამდე აუცილებელია ჩატარდეს უამრავი რაოდენობის ოპერაციები. დაგეგმვის პროცესსა და ცალკეული ოპერაციების ან მათი კომპლექსის განხორციელები-სას საჭიროა გათვალისწინებულ იქნეს მომავალი ურთიერთკავ-შირი როგორც სისტემის /ქარხნის მშენებლობა/ შიგნით, ისე მის გარეთ. ქგმ მეთოდი მოწოდებულია დაეხმაროს ხელმძღვანელს ყველა ოპერაციების დროში სწორად დაგეგმვაში და მათი გან-ხორციელების დინამიკის სწორ მართვაში. მისი საშუალებით ვლინდება დროისა და საშუალებების რეზერვი მუშაობის ერთ უბანზე და გამოიყენება იქ უფრო დაძაბულ უბანზე. დასაგეგმი ოპერაციების თანმიმდევრობაში გარკვეული რიგის დადგენით იქ საშუალებას იძლევა წინასწარ იქნეს შეცნობილი მუშაობაში დარ-ღვევები და სათანადო ზომების მიღებით ხდება მისი ლიკვიდაცია.

§ 1. ქსელური გრაფიკი
ძირითადი განსაზღვრებანი

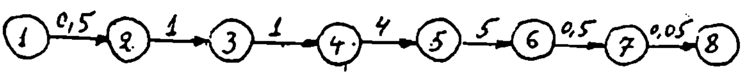
ქსელურ დაგეგმვაში განიხილება ორი სახის ობიექტები. ერთ-ერთ მათგანს ეწოდება ხ დ ო მ ი ლ ო ბ ა /მოვლენა/, მეორეს - ო პ ე რ ა ც ი ა /სამუშაო/, უმრავლეს შემთხვევაში ხდომილობის ცნებაში გულისხმობენ რომელიმე სამუშაოს ან მოქ-მედების დაწყებას ან დამთავრებას. ოპერაციის ცნებაში იგუ-ლისხმება თვით სამუშაო, ან თვით მოქმედება. ხდომილობის მა-გალითებია: "პროექტი დამტკიცებულია", "საქონელი გაყიდულია", "ამწე კრანი დაყენებულია". ოპერაციის მაგალითებია: "საქონ-ლის გაყიდვა", "ამწე კრანის დაყენება" და ა.შ. ხდომილობა

შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც რომელიმე ოპერაციის ან მიღებულ გადაწყვეტილებათა შედეგი. ხდომილობას უფრო ხშირად აღნიშნავენ წრეებით, ხოლო ოპერაციებს, რომლებიც გამოხატავ-ვენ მათ შორის კავშირებს და აჩვენებენ ხდომილობების დად-გომასა და თანმიმდევრობას - ისრებით. ამასთან ყოველ ხდო-მილობას მიეწერება განსაზღვრული ნომერი /ზოგჯერ ხდომილო-ბებს აღნიშნავენ $A_1, A_2, \dots, A_n$ ასოებით/, ხოლო ისარზე, რომელიც აკავშირებს ორ ხდომილობას დაიწერება რიცხვი, რო-მელიც გამოხატავს შესაბამისი ოპერაციის ხანგრძლივობას.

ნახ.15.

ნახ.15 აღნიშნავს იმ ფაქტს, რომ i ხდომილობა წინ უსწრებს j ხდომილობას ან /j/ უნდა შესრულდეს უშუალოდ i-ს შემდეგ, ხოლო $(i-j)$ ოპერაციის ხანგრძლივობა t_{ij} -სიდიდის ტოლია.

განვიხილოთ მაგალითი პროდუქციის გამოშვებიდან მყიდ-ველების ოპერაციათა თანმიმდევრობის და მათი ხანგრძლივობის შესახებ. ეს გზა მოიცავს რიგ ოპერაციებს: პროდუქციის გამოშ-ვება, მიღება, მანქანაზე დატვირთვა, მაღაზიაში მიტანა, ჩა-მოტვირთვა გამყიდველის მიერ მიღება და გაყიდვა
ეს თანმიმდევრობა შეიძლება განვიხილოთ გრაფიკულად /ნახ.16/.



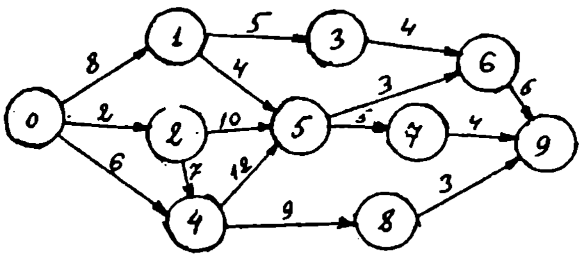
ნახ.16.

ყოველი ხდომილობა აღნიშნავს ერთი ოპერაციის დამთავრებას

და მეორის დაწყებას, მაგალითად 2 ხდომილობა აღნიშნავს „პროდუქცია მიღებულია დაწყებულია დაფერვა". ცხადია, რომ ხდომილობებს შორის არის ლოგიკური კავშირი. მოცემული ხდომილობა არ შეიძლება დადგეს თუ არ იყო მისი წინა ხდომილობა. ოპერაციათა ხანგრძლივობა აქ მოცემულია საათებში. დროთა ჯამი $(t_{01}+t_{12}+\cdots+t_{67}=8,55)$ შეადგენს იმ დროს, რომელიც აუცილებელია საქონლის რეალიზაციისათვის.

ჩვენს მიერ მოყვანილი იყო ელემენტარული მაგალითი. რთული კომპლექსის განხორციელება საჭიროებს ზოგიერთ სამუშაოების ერთდროულად ჩატარებას. სამუშაოთა მთელი კომპლექსის დაწყებასა და დამთავრებას შორის არის მრავალი ოპერაციები, რომლებიც გარკვეულ დროში უნდა შესრულდეს. ამ შემთხვევაში სამუშაოს დაწყებიდან დამთავრებამდე მიმდინარეობს არა ერთი, არამედ მრავალი თანმიმდევრული სამუშაო. ასეთი სამუშაო კომპლექსის გრაფიკული გამოსახვა საჭიროებს რთულ ქსელურ სქემას ანუ ქსელურ გრაფიკს.

განვიხილოთ რომელიღაც სამუშაო კომპლექსის გრაფიკი /ნახ. 17/



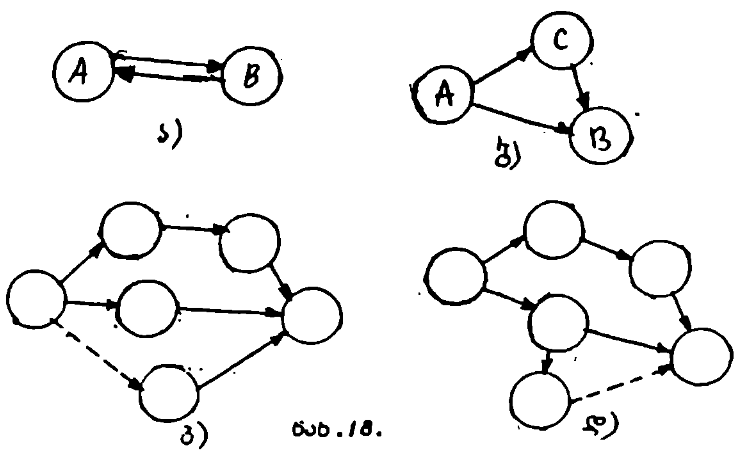
ნახ. 17.

ამ გრაფიკის კონკრეტული მნიშვნელობა არ მოგვაქვს. იგი

შეიძლება განვიხილოთ როგორც საორიენტაციო წრეების /წვეროების/ და მათი შემაერთებელი რკალების /ისრების/ სიმრავლე. ამგვარ სიმრავლეს უწოდება გ რ ა ფ ე ბ ი . ქსელური დაგეგმვის საფუძველია გრაფების მათემატიკური თეორია, რომელსაც აქ არ განვიხილავთ. აღვწერთ მხოლოდ ძირითად ცნებებს.

შევნიშნავთ, რომ 6 ხდომილობა არ უსწრებს არც ერთ ხდომილობას. (0-1) , (0 - 2) და (0 - 4) ოპერაციები თავის საწყისს იღებენ (0) ხდომილობისგან, შესაბამისი რკალები იწყებიან (0) - დან გამომდინარე, და პირიქით (9) წვერო დამახასიათებელია ის, რომ მისკენ მიმავალი ყველა რკალი წარმოადგენენ შემავალს. ყველა დანარჩენ წვეროებს /ხდომილობებს/ აქვთ შემავალი და მისგან გამომავალი რკალები. ქსელური გრაფიკის აგებისას საჭიროა შემდეგის ცოდნა:

1. ორი თანმიმდევრობითი ხდომილობა A და B ერთიანდებიან ერთადერთი რკალით /ისრით/, ე.ი. გრაფიკზე არ შეიძლება ნახ.18 ა გამოსახულება..

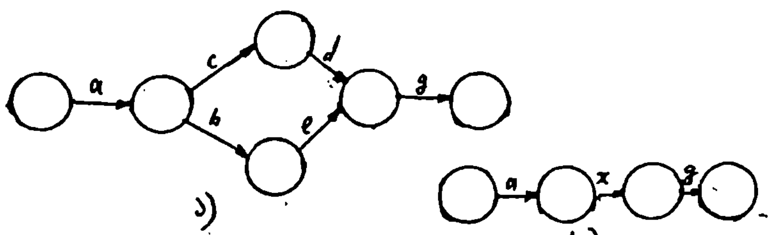


ნახ.18.

თუ ორი სხვადასხვა სამუშაო დაიწყო A -ში და დამთავრდა B -ში მაშინ შემოდის ფიქტიური სამუშაო რომელსაც მიუწერენ 0-იან ხანგრძლივობას / ნახ. 18 ბ./.

2. ქსელურ გრაფიკში არ შეიძლება იყოს ჩამოკიდებული ისარი ე.ი. ისეთი, რომელიც არსაიდან არ გამოდის ან არსად არ შედის. თუ მაინც არის ისეთი ხდომილება, რომელსაც არცერთი არ უსწრებს წინ გარდა საწყისისა, ან რომლის შემდეგ არ ხორციელდება არც ერთი ხდომილება ბოლოს გარდა, მაშინ იგი უერთდება საწყის /ბოლოს/ ხდომილებას ფიქტიური სამუშაოთი /ნახ.18 გ. და დ./.

3. სამუშაოთა ჯგუფი, რომელიც წარმოქმნის ქსელურ გრაფიკზე გამოსახულ მთელ სამუშაოს ქვესისტემას, შეიძლება შეიცვალოს ერთი სამუშაოთი, როგორც ნაჩვენებია ნახ. 19-ზე.



ნახ.19.

ქსელური გრაფიკის აგებისას არსებითი მნიშვნელობა აქვს ხდომილებათა დანომრვას. თუ (i) ხდომილება წინ უსწრებს (j) ხდომილებას, მაშინ სასურველია რომ $i < j$, სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ ხდომილებათა ნუმერაცია მონოტონური უნდა იყოს, არსებობს ალგორითმი, რომელიც ნუმერაციის მონოტონურობის საშუალებას იძლევა.

§ 2. კრიტიკული გზის ცნება

1. ხდომილობის დადგენის საკმარისი ადრე-ული ვადა

განვიხილოთ ნახ.17-ზე მოცემული ქსელური გრაფიკი. ჩვენს რომ (3) ხდომილობას წინ უსწრებს ერთადერთი (1) ხდომილობა და (3-6) სამუშაო შეიძლება დაიწყოს, როგორც კი დამთავრდება (1-3) სამუშაო. პირიქით (5) ხდომილობას წინ უსწრებს რამდენიმე ხდომილობა (1), (2) და (4) და, მაშასადამე, (5) ხდომილობა არ იქნება მანამ, სანამ (1-5), (2-5) და (4-5) სამუშაოები არ დამთავრდება. განვიხილოთ მინიმალური დრო, რომელიც საჭიროა ამა თუ იმ ხდომილობის დადგომისათვის. (3) ხდომილობა შეიძლება დადგეს თუ უკვე იყო (1) ხდომილობა და განხორციელდა (1-3) სამუშაო. ამისათვის საჭიროა 8+5=13 კვირა. ეს კი არის (3) ხდომილობის დადგომის საკმარისი ადრეული ვადა. (4) ხდომილობა ორი გზით შეიძლება განხორციელდეს (0-4) და (0-2-4) მათი ხანგრძლივობა ტოლია შესაბამისად 6 და 2+7=9 კვირის, მაგრამ (4) ხდომილობა რომ დაიწყოს უნდა განხორციელდეს მისი წინა ხდომილობები ე.ი. (4) ხდომილობა 9 კვირამდე ადრე ვერ დაიწყება. ცხადია რომ (4) ხდომილობის დაწყების საკმარისი ადრეული ვადა ტოლია (2) ხდომილობის დაწყების საკმარისი ადრეულ ვადას დამატებს (2-4) ოპერაციის დრო. ანალოგიურად შევნიშნავთ, რომ (5) ხდომილობა ხორციელდება ოთხი გზით: (0-1-5), (0-2,5), (0,2-4-5) და (0-4-5). მათი ხანგრძლივობა შეადგენს 8+4; 2+10; 2+7+12 და 6+12 ყველაზე დიდი მათ შორის არის 2+7+12=21 კვირა. ამაზე ადრე (5) ხდომილობა ვერ დაიწყება. ადვილად შევნიშნავთ, რომ (5) ხდომილობის საკმარი-

სად ადრეული ვადა ტოლია (4) ხდომილობის დაწყების საკმარისად ადრეულ ვადას დამატებული (4-5) სამუშაოს დრო.

მოვახდინოთ განხილულის განზოგადება. აღვნიშნოთ t_{ij}-ის დრო, რომელიც საჭიროა $(i-j)$ სამუშაოსათვის. $T_i^{(0)}$-ით აღვნიშნოთ i ხდომილობის დაწყების საკმარისად ადრეული დრო /იგულისხმება სამუშაოს დაწყებიდან/ თუ (i) ხდომილობა უშუალოდ (j) ხდომილობას უსწრებს, მაშინ ზემოთ მოყვანილი მსჯელობით შეიძლება ჩავწეროთ:

$$T_j^{(0)} = \max_i \left[T_i^{(0)} + t_{ij}\right] \qquad (1)$$

განხილული მაგალითისათვის გვექნება:

$$T_5^{(0)} = \max_i \left[T_i^{(0)} + t_{ij}\right] = \max_i \left[T_1^{(0)} + t_{15}, T_2^{(0)} + t_{25}, T_4^{(0)} + t_{45}\right] = \max_{i=1,2,4} \left[8+4; 2+10; 9+12\right] = 21.$$

განმარტება. ხდომილობის შესაძლო დადგომისათვის აუცილებელ მინიმალურ დროს /იგულისხმება სამუშაოს დაწყებიდან/ ეწოდება ამ ხდომილობის კრიტიკული დრო და აღინიშნება $T_{კრ.}(i)$. ხდომილობის კრიტიკული დრო არის მისი შესაძლო დადგომის საკმარისად ადრეული ვადა. დამამთავრებელი ხდომილობის კრიტიკულ დროს ეწოდება აგრეთვე მთელი პროექტის კრიტიკული დრო და შესაბამის გზას - კრიტიკული

ოპერაციათა სხვადასხვა თანმიმდევრობას სხვადასხვა დრო ესაჭიროება. მათ შორის არის ისეთი, რომელიც საჭიროებს მაქსიმალურ დროს. ეს არის კრიტიკული გზა.

ამგვარად, პროექტის კრიტიკული

გ ზ ა   ოპერაციათა ის თანმიმდევრობა, რომლის განხორციელებისთვისაც საჭიროა მაქსიმალური დრო.

კრიტიკული გზა შეიძლება იყოს რამდენიმე ჩვენს განხილულ მაგალითში არის ორი გზა: (0-2-4-5-7-9) და (0-2-4-5-6-9).

მათი ხანგრძლივობა 30 კვირის ტოლია. რამდენადაც პროექტის განხორციელება საჭიროებს ყველა შუალედური ოპერაციების შესრულებას, მათ შორის ისეთებს, რომელიც კრიტიკულ გზაზე ძევს, აუცილებელია ყურადღება გამახვილდეს კრიტიკულ გზაზე მდებარე სამუშაოებზე, ვინაიდან პროექტის განხორციელების დროის შემცირება მხოლოდ ამ გზით არის შესაძლებელი.

კრიტიკული გზის მოძებნა ხდება იმ ყველა გზების შედარების გზით, რომლებიც გამოდიან საწყისი ოპერაციიდან და შედიან დამამთავრებელ ოპერაციამდე, ვირჩევთ ყველაზე უფრო ხანგრძლივს. მოტანილ მაგალითში (0) ხდომილობიდან (9) ხდომილობამდე მიდის შემდეგი გზები: (0-1-3-6-9), (0-1-5-6-9), (0-2-5-6-9), (0-2-5-7-9), (0-2-4-5-6-9), (0-2-4-5-7-9), (0-2-4-8-9) და (0-4-8-9).

მათი ხანგრძლივობა შესაბამისად შეადგენს 23,21, 21,21,30, 30,21,18 კვირას. მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს ორი კრიტიკული გზა (0-2-4-5-6-9) და (0-2-4-5-7-9) მათი ხანგრძლივობა 30 კვირის ტოლია.

რთულ სამუშაოთა კომპლექსის ქსელური გრაფიკი შეიძლება შეიცავდეს ასეულ ზოგჯერ ათასზე მეტ ცალკეულ ოპერაციებს და ხდომილობებს. ამ შემთხვევაში კრიტიკული გზა მოიძებნება ალგორითმის დახმარებით, რომელსაც საფუძვლად უდევს (1) ტოლობა. წინასწარ ხდება ხდომილობების მინესრიგება -

ისინი განიხილება საწყისი (0) ხდომილობიდან დამამთავრებელ n ხდომილობამდე.

შემდეგ ვსარგებლობთ ფორმულით

$$T_j^{(0)} = \max_i \left[T_i^{(0)} + t_{ij}\right]; \quad T_0^{(0)} = 0, \quad T_1^{(0)} = t_{01}, \quad (1)$$

და გამოითვლება (1), (2), ..., (n) ხდომილობის დადგომის საკმარისად ადრეული ვადა. სიდიდე $T_n^{(0)} = \max_i \left[T_i^{(0)} + t_{in}\right]$ სადაც i გაირბენს გრაფიკის ყველა შემომავალ (n) წვეროებს და იძლევა (n) ხდომილობის დაწყების საკმარისად ადრეულ ვადას ე.ი. პროექტის კრიტიკულ დროს.

2. ხდომილობის დადგომის საკმარისად გვიანი დასაშვები ვადა. დროითი რეზერვის ცნება

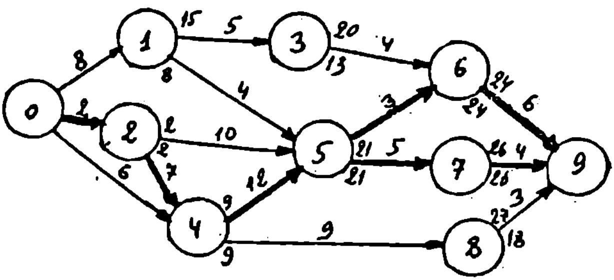
ქსელური დაგეგმვის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანაა ამა თუ იმ ოპერაციის შესრულებისათვის დროითი რეზერვების გამოვლინება. ასეთი რეზერვების გამოყენებით შესაძლებელი ხდება გადანაწილდეს რესურსები და ძალები დაძაბულ უბნებზე. დროითი რეზერვები შეიძლება მოიძებნოს ხდომილობის დაწყების საკმარისად გვიანი დროის მოძებნით.

დავუშვათ, რომ რომელიმე სამუშაოთა კომპლექსის განსახორციელებლად საჭიროა 90 კვირა. რომელიღაც A_K სამუშაოს დამთავრებას სჭირდება 15 კვირა. ამასთან შეიძლება გადავწიოთ ამ სამუშაოთა შესრულების ვადა 10 კვირით ისე, რომ არ გადიდდეს მთელი სამუშაოთა კომპლექსის შესრულების ვადა. სიდიდეს 15 + 10 = 25 კვირას ეწოდება A_K სამუშაოს დაწყების საკმარისად გვიანი დასაშვები ვადა.

ხ დ ო მ ი ლ ო ბ ი ს დ ა დ გ ო მ ი ს ს ა კ

მარისად გვიანი დასაშვები ვა-და ენიჭება ამ ხდომილობის ისეთ მაქსიმალურ დასაშვებ ვადას, რომელიც არ საჭიროებს მთელი პროექტის განხორციელე-ბისათვის საჭირო დროის გადიდებას.

ხდომილობის დადგომის საკმარისად გვიანი ვადის მოძებნა იგივე მეთოდიკით ხორციელდება როგორც, საკმარისად ადრეული ვადის მოძებნა, გაანგარიშება წარმოებს მხოლოდ ბო-ლოდან დასაწყისისაკენ ე.ი. A_n ან (n) დამამთავრე-ბელი ხდომილობიდან A_0 ან (o) ხდომილობამდე. ვაჩვენოთ თუ როგორ ხდება ეს მოყვანილ მაგალითზე განხილული ზემოთ მოყვანილი მაგალითი /ნახ. 20/.



ნახ. 20.

ხდომილობების ქვევით აწერია საკმარისად ადრეული, ხოლო ზევით გამოთვლილია მათი დადგომის საკმარისად გვიანი ვადა.

აღვნიშნოთ $T_E(K)$ K ხდომილობის დადგომის საკმარისად ადრეული და $T_L(K)$ საკმარისად გვიანი ვადა /ადრეულ და გვიან ვადებს აღნიშნავენ აგრეთვე $T_K^{(o)}$ და $T_L(k)$ სიმბოლოებით/.

T_S -ით აღვნიშნოთ მთელი პროექტის განხორციელების ვადა. ცხადია რომ $T_S = T_E$ $n = T_L(n)$, ასე, რომ დამამ-

დაწყებული ხდომილობის საკმარისად ადრეული და საკმარისად გვიანი ვადები ერთმანეთს ემთხვევა. ჩვენს მაგალითში

$$T_S(9) = T_E(9) = T_L(9) = 30 \text{ კვირას}$$

ახლა ვეძებთ თითოეული ხდომილობის დადგომის საკმარისად გვიან დასაშვებ ვადას. დაწყებული (9) ხდომილობიდან (0) ხდომილობამდე. (8) ხდომილობა უშუალოდ წინ უსწრებს (9)-ს, მაშინ

$$T_L(8) = T_L(9) - t_{89} = 30 - 3 = 27.$$

სინამდვილეში (8) ხდომილობა შეიძლება დაიწყოს სამუშაოს დაწყებიდან 27 კვირის შემდეგ და ეს არ აისახება მთელი სამუშაოს დამთავრების ვადაში, ვინაიდან (8-9) ოპერაცია საჭიროებს სულ 3 კვირას. ზუსტად ასევე მივიღებთ:

$$T_L(7) = T_L(9) - t_{79} = 30 - 4 = 26.$$

$$T_L(6) = T_L(9) - t_{69} = 30 - 6 = 24.$$

$T_L(5)$ მისაღებად ჩვენ უნდა გავითვალისწინოთ ის ფაქტი, რომ (5) ხდომილობას წინ უსწრებს ორი (6) და (7) ხდომილობა. ერთის მხრივ, $T_L(5)$ არ შეიძლება იყოს $T_L(7) - t_{57}$ სიდიდეზე მეტი და მეორე მხრივ $T_L(5)$ არ შეიძლება იყოს $T_L(6) - t_{56}$ სიდიდეზე მეტი. აქედან ჩანს, რომ $T_L(5)$ უნდა იყოს ამ ორ სიდიდიდან უმცირესის ტოლი ე.ი.

$$T_L(5) = \min\{T_L(7) - t_{57}; T_L(6) - t_{56}\} =$$

$$= \min\{26 - 5; 26 - 3\} = 21.$$

ანალოგიურად მივიღებთ $T_L(4) = 9$; $T_L(3) = 20$; $T_L(2) = 2$; $T_L(1) = 15$; $T_L(0) = 0$.

მაგალითად,

$$T_L(0) = \min\{T_L(1)-t_{01};\ T_L(2)-t_{02};\ T_L(4)-t_{04}\} = \min\{15-8;\ 2-2;\ 6-6\} = 0.$$

განსაზღვრება. ხდომილობის დროის სრული რეზერვი ეწოდება ამ ხდომილობის საკმარისად გვიანი დასაშვებ დროსა და საკმარისად ადრეულ შესაძლო დროის შორის სხვაობას.

განვიხილოთ მაგალითად (3) ხდომილობა. განმარტების საფუძველზე მისი სრული რეზერვია 20-13=7 კვირა. ეს ის დროა, რომლის განმავლობაშიც შეიძლება გადაიწიოს (3-6) სამუშაო. იმ პირობით, რომ (3) ხდომილობა დაიწყება საკმარისად ადრეულ შესაძლო ვადაში /ე.ი. $T_E(3) = 13$ კვირას სამუშაოს დაწყებიდან/. აღვნიშნოთ ეს რეზერვი R_{36}, მაშინ R_{36} = = 20-13= 24-4-13= 24-13-4= $T_L(6)-T_E(3)-t_{36}$. ამასთან დაკავშირებით R_{36} სიდიდეს ლოგიკურია ეწოდოს (3-6) სამუშაოს სრული რეზერვი. ზოგად შემთხვევაში თუ (i) და (j) ორი მომიჯნავე ხდომილობაა, მაშინ (i-j) სამუშაოს სრული რეზერვი განისაზღვრება ფორმულით

$$R_{ij} = T_L(j) - T_E(i) - t_{ij} \qquad (2)$$

თუ $(i-j)$ სამუშაო ძევს კრიტიკულ გზაზე /ჩვენს მაგალითში ეს სამუშაოებია, (0-2), (2-4), (4-5) და ა.შ./. მაშინ (i) ხდომილობის დადგომის საკმარისად ადრეული ვადა ემთხვევა საკმარისად გვიანს ე.ი. $T_E(i) = T_L(i)$ და, დამასადამე, ამ სამუშაოს დროის სრული რეზერვი ნულის ტოლია, მაშასადამე, კრიტიკულ გზაზე არ არის დროითი რეზერვები. პირიქით, არაკრიტიკულ სამუშაოებს აქვს დროითი რეზერვი, მაგალითად $R_{13}=7$, $R_{35}=9$.

$(i-j)$ სამუშაოს დროის სრული რეზერვის გარდა განიხილა-ვენ აგრეთვე $R_{ij}^{თავ.}$ და $R_{ij}^{დამ.}$ სიდიდეებს, რომელსაც ეწოდება $(i-j)$ სამუშაოს თავისუფალი და დამოუკიდებელი რე-ზერვები. ისინი განისაზღვრება შემდეგნაირად.

$$R_{ij}^{თავ.} = T_E(j) - T_E(i) - t_{ij} \qquad (3)$$

$$R_{ij}^{დამ.} = \max\{0, T_E(j) - T_L(i) - t_{ij}\} \qquad (4)$$

თუ $(i-j)$ სამუშაო ძევს კრიტიკულ გზაზე, მაშინ $R_{ij}^{თავ.} = 0$ და $R_{ij}^{დამ.} = 0$. დამოუკიდებელი რეზერვი რომ იყოს დადებითი, საჭიროა $T_E(j)$ იყოს $T_L(i) - t_{ij}$ სი-დიდეზე მეტი ე.ი. შემდეგი ხდომილობის დადგომის ადრეული ვადა მეტი უნდა იყოს მის წინა ხდომილობის დადგომის გვიანი ვადისა და შესაბამისი სამუშაოს დროის ჯამზე. ეს ყოველთვის არ არის შესაძლებელი.

ცალკეული სამუშაოს დროითი რეზერვების ცოდნა საშუა-ლებას იძლევა გამოვლინდეს ქვეკრიტიკული სამუშაოები /ისე-თები, რომელსაც დროითი რეზერვები აქვთ/, გამოვლინდეს ძალების გადაჯგუფების აუცილებლობა და შესაძლებლობის ფარგლე-ბში შემცირდეს მთელი პროექტის შესრულების ხანგრძლივობა.

§ 3. სტოქასტური ქსელური სისტემების არსი

აქამდე ჩვენ განვიხილეთ ისეთი სისტემები, რომლებ-შიც ამა თუ იმ ხდომილობის დადგომის დრო ან ამა თუ იმ სამუ-შაოს შესრულების დრო მკაცრად განსაზღვრული იყო. ასეთი სა-ხის სისტემებს დ ე ტ ე რ მ ი ნ ი რ ე ბ უ ლ ი სისტემები ეწოდებათ.

პრაქტიკულ საქმიანობაში ხშირად ვხვდებით ე.წ.

ს ტ ო ქ ა ს ტ უ რ ს ი ს ტ ე მ ე ბ ს , რომლებსაც ახასიათებს ის, რომ ცალკეული ოპერაციების შესრულების დრო წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეებს.

ქსელურ დაგეგმვაში განიხილავენ სამუშაოს ხანგრძლივობის სამ დროით შეფასებას: ოპტიმისტურ, პესიმისტურ და საკმარისად ალბათურს.

ო პ ტ ი მ ი ს ტ უ რ ი (a) – ეს არის ის მინიმალური დრო, რომლის განმავლობაში სრულდება მოცემული სამუშაო. იგი ყველაზე კარგი შემთხვევაა.

პ ე ს ი მ ი ს ტ უ რ ი (b) – ეს არის მაქსიმალურად შესაძლო დრო, რომელიც ესაჭიროება მოცემული სამუშაოს შესრულებას. იგი გულისხმობს არახელსაყრელი პირობების არსებობას.

ს ა კ მ ა რ ი ს ა დ ა ლ ბ ა თ უ რ ი (m) – ეს არის სამუშაოს შესრულებისათვის ყველა შესაძლო დროიდან საუკეთესო.

მოცემული სამუშაოს ხანგრძლივობის ჭეშმარიტი შეფასებისათვის გამოიყენება საშუალო შეფასება, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$M(t)=\bar{t}=\frac{a+4m+b}{6}$$

a, b და m პარამეტრების მნიშვნელობანი განისაზღვრებიან სამუშაოს შემსრულებლების მიერ. მათი შერჩევა დამოკიდებულია ხელმძღვანელის გამოცდილებაზე, იმ ინფორმაციის ხარისხზე, რომელიც მას გააჩნია და მრავალ სხვა გარემოებებზე, რომლებიც პირდაპირ არ ექვემდებარებიან ანალიზს. a b და m სიდიდეები გამოდიან როგორც შემთხვევითი სი-

დიდეები. შემთხვევითი სიდიდეა ადრევე საშუალო ხანგრძ-
ლივობა $\bar{t} = \frac{a+4m+b}{6}$. ლიტერატურაში არის მითითებული, რომ ეს სიდიდე ექვემდებარება ბეტა - განაწილებას, რომელიც მიიღება შემდეგი კანონით

$$f(x) = A(x-a)(b-x)^2 \quad \text{ყველა} \quad a \le x \le b, \; f(x)=0,$$

როცა $x < a$ და $x > b$.

A კონსტანტა განისაზღვრება შემდეგი პირობით

$$\int_a^b f(x)dx = A\int_a^b (x-a)(b-x)dx = 1.$$

აქედან

$$A = \frac{12}{(b-a)^4}, \quad f(x) = \frac{12}{(b-a)^4}(x-a)(b-x)^2.$$

ეს კანონი არის ბეტა-განაწილების ზოგადი კანონის

$$f(x) = A(x-a)^p(b-x)^q \quad a \le x \le b$$

$$f(x) = 0, \text{ როცა } x < a \quad x > b$$

კერძო შემთხვევა.

კერძოდ, როცა $p = q = 3$ გვექნება:

$$f(x) = A(x-a)^3(b-x)^3 \quad a \le x \le b$$

$$f(x) = 0 \quad x < a, \; x > b.$$

$$A\int_a^b (x-a)^3(b-x)^3 dx = A\frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}(b-a)^7,$$

საიდანაც $A = \frac{140}{(b-a)^7}$

ავიღოთ $f(x)$ განაწილების ფუნქციიდან წარმოებული და გავუტოლოთ იგი ნულს, ჩვენ მივიღებთ, რომ $f(x)$ მიაღწევს მაქსიმუმს, როცა $x = \frac{a+b}{2}$. ეს მნიშვნელობა კი წარმოადგენს X შემთხვევითი სიდიდის საკმარისად ალბათურ მნიშვნელობას;

აღვნიშნოთ იგი m -ით, მაშინ $m=\frac{a+b}{2}$,

ახლა მოვძებნოთ x შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია:

$$M(x)=\bar{x}=\int_a^b xf(x)dx=\frac{140}{(b-a)^7}\int_a^b x(x-a)^3(b-x)^3dx=\frac{a+b}{2}.$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$\bar{x}=\frac{a+b}{2}=\frac{3a+3b}{6}=\frac{a+4\cdot\frac{a+b}{2}+b}{6}=\frac{a+4m+b}{6}.$$

ამით კი აიხსნება $\bar{t}=\frac{a+4m+b}{6}$ სიდიდის არჩევა.

შემდეგ

$$\sigma_x^2=M(x^2)=[M(x)]^2=\frac{140}{(b-a)^7}\int_a^b x^2(x-a)^3(b-x)^3dx=$$
$$=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{36}.$$

რიგი ავტორები თვლიან, რომ ოპერაციათა ხანგრძლივობა უნდა განისაზღვროს სწორედ ამ კერძო სახის ბეტა-განაწილებით.

ხელმძღვანელთათვის ძალზე მნიშვნელოვანია სამუშაოთა დირექტიულ ვადებში დასაგეგმი ოპერაციათა შესრულების ალბათობის შეფასება. ვთვლით, რომ სიდიდე

$$Z=\frac{T_s-T_E}{\sqrt{\sum\sigma_{T_E}^2}}\ *$$

განაწილებულია ნორმალური განაწილების კანონით $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$

ალბათობის სიმკვრივით. ალბათობა იმისა, რომ მოცემული სამუშაო შესრულდება დირექტიულ ვადებში, მოიცემა ინტეგრალური ფუნქციით

---

* T_s -არის ხდომილობის დადგომის დირექტიული ვადა, T_E - კი მისი დადგომის სავარაუდო არჩეული ვადა.

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(z).$$

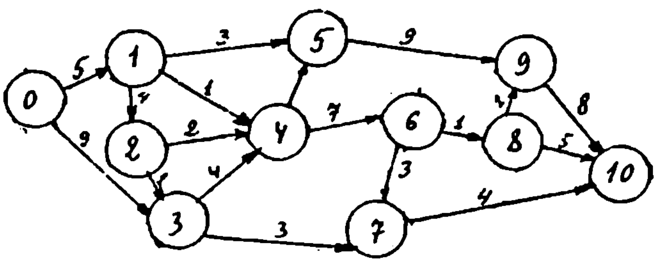
$\Phi(z)$ ალბათობის ინტეგრალის მნიშვნელობაა.

და ბოლოს აღვნიშნავთ, რომ ქსელური დაგეგმვისა და მართვის ოპტიმალური ამოცანები იყოფა ორ ჯგუფად. ერთი მათგანი დაკავშირებულია სამუშაოთა კომპლექსის განხორციელების დროის მინიმიზაციასთან რესურსების შეზღუდვის ან შეზღუდულობის პირობებში. სხვა ამოცანები დაკავშირებულია რესურსების ან განსახორციელებელი პროექტის ღირებულების მინიმიზაციასთან.

ქსელური დაგეგმვის და მართვის ოპტიმალურ ამოცანებს დიდი გამოყენება აქვს სახალხო მეურნეობის სხვადასხვა დარგში.

სავარჯიშო

მოცემულია მშენებლობის ობიექტის ქსელური გრაფიკი



იპოვეთ კრიტიკული გზა.

თავი VII. მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდები

§ 1. მათემატიკური სტატისტიკის ძირითადი ამოცანები

მათემატიკური სტატისტიკა გამოყენებითი მათემატიკის ნაწილია. მათემატიკური სტატისტიკის საგანს შეადგენს მასობრივი სტატისტიკური მონაცემების რეგისტრაციის, აღწერის და ანალიზის მეთოდების დამუშავება.

მოკლედ დავახასიათოთ მათემატიკური სტატისტიკის ტიპიური ამოცანები, რომლებიც პრაქტიკაში გვხვდება:

1. შემთხვევითი სიდიდის /ან შემთხვევით სიდიდეთა სისტემის/ განაწილების კანონის სტატისტიკური მონაცემების საფუძველზე განსაზღვრის ამოცანა.

მასობრივ შემთხვევით მოვლენებში კანონზომიერებანი მით უფრო ზუსტად და მკაფიოდ ვლინდება, რაც უფრო მეტი მოცულობის სტატისტიკური მასალაა. თავისი მოცულობით ვრცელი სტატისტიკური მონაცემების დამუშავებისას წამოიჭრება ამა თუ იმ სიდიდის განაწილების კანონების განსაზღვრის საკითხი.

თეორიულად ცდათა საკმარისი რაოდენობის შემთხვევაში შემთხვევითი სიდიდეებისათვის დამახასიათებელი კანონზომიერებანი ზუსტად განხორციელდება. პრაქტიკაში ადგილი აქვს ექსპერიმენტების შეზღუდულ რაოდენობას, რის შედეგადაც დაკვირვებათა დამუშავების შედეგები ყოველთვის შეიცავს შემთხვევითობის ელემენტებს. ამ შემთხვევაში ბუნებრივია ექსპერიმენტული დამუშავების მეთოდიკას წაეყენება ისეთი მოთხოვნები, რომ იგი შეძლებისდაგვარად უნდა ინარჩუნებდეს დაკვირვებაში მყოფი მოვლენის ტიპურ, დამახასიათებელ ნიშნებს და უკუაგდებდეს ყველა არარსე-

ბით. ამასთან დაკავშირებით წამოიჭრება მათემატიკური სტატისტიკისათვის დამახასიათებელი, სტატისტიკური მონაცემების გასწორების /გაგლუვების/ გზით, მარტივ ანალიზურ დამოკიდებულებათა მეშვეობით მათი კომპაქტური სახით წარმოდგენის ამოცანა.

2. ჰიპოთეზის დამაჯერებლობის შემოწმების ამოცანა.

ასეთი ამოცანის გადაწყვეტისას დამკვირვებლებს არ გააჩნია ვრცელი სტატისტიკური მასალა, რომ გამოვლენილი სტატისტიკური კანონზომიერებანი თავისუფალი იყოს შემთხვევითი ელემენტებისაგან. სტატისტიკური მასალის მიხედვით შეიძლება მეტნაკლები დამაჯერებლობით დავამტკიცოთ ან არ დავამტკიცოთ ამა თუ იმ ჰიპოთეზის სამართლიანობა. მაგალითად შეიძლება წარმოიშვას ასეთი საკითხი, ეთანხმებიან თუ არა ექსპერიმენტის შედეგები ჰიპოთეზას იმაზე, რომ მოცემული შემთხვევითი სიდიდე დაქვემდებარებულია განაწილების $F(x)$ კანონს*, ან მიუთითებს თუ არა ცდაში შემჩნეული ტენდენცია ორ შემთხვევით სიდიდეს შორის ობიექტური დამოკიდებულების არსებობაზე, თუ იგი აიხსნება დაკვირვებათა არასაკმარისობის გამო შემთხვევითი მიზეზებით. მსგავსი საკითხების გადასაწყვეტად მათემატიკურ სტატისტიკაში შემუშავებულია მთელი რიგი სპეციალური ხერხები.

3. განაწილების უცნობი პარამეტრების მოძებნის ამოცანა.

ხშირად სტატისტიკური მასალების დამუშავების დროს არ წამოიჭრება შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონის განსაზღვრის საკითხი. ჩვეულებრივ ეს დაკავშირებულია ექსპერიმენტული მასალის არა საკმარის მოცულობასთან. ზოგჯერ განაწილების კანონის ხასიათი თვისებრივად ცნობილია ცდამდე თეორიული მოსა-

---

* X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია $F(x)=P(X<x)$.

ზრებით, მაშინ წამოიჭრება დაკვირვებათა დამუშავების ვიწრო ამოცანა – განისაზღვროს შემთხვევითი სიდიდის ზოგიერთი პარამეტრები /რიცხვითი მახასიათებლები/. ცდათა მცირე რაოდენობისას ამ პარამეტრების ზუსტი განსაზღვრის ამოცანა ვერ გადაწყდება. ამ შემთხვევაში ექსპერიმენტული მასალა შეიცავს შემთხვევითობის მნიშვნელოვან ელემენტს, რის შედეგადაც გამოთვლილი პარამეტრები შემთხვევითი აღმოჩნდებიან. ასეთ პირობებში შეიძლება დაისვას საძიებელი პარამეტრების მხოლოდ ე.წ. "შეფასებების" ანდა "შესაფერის მნიშვნელობის" პოვნის ამოცანა, ე.ი. ისმება ისეთი მიახლოებითი მნიშვნელობების მოძებნის ამოცანა, რომლებიც მასობრივი გამოყენებისას მიგვიყვანდა საშუალოდ უფრო მცირე შეცდომამდე, ვიდრე სხვა მნიშვნელობანი.

ასეთია მათემატიკური სტატისტიკის ძირითადი ამოცანების ნუსხა. ჩამოვთვალოთ მხოლოდ ისინი, რომლებსაც ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანი პრაქტიკული გამოყენება აქვთ.*

§ 2. კორელაციის თეორიის ელემენტები

1. კორელაციური და ფუნქციონალური დამოკიდებულება. შემთხვევით სიდიდეზე მრავალი ფაქტორი შეიძლება მოქმედებდეს. ამასთან სხვადასხვა ფაქტორი სხვადასხვანაირად მოქმედებს და შედეგიც სხვადასხვაა. საკმარისი არაა მოქმედ ფაქტორთა დადგენა, საჭიროა მისი სიდიდის და ფორმის განსაზღვრა.

შემთხვევით სიდიდეთა შორის ურთიერთდამოკიდებულების

---

* აქ ჩვენ შემოვიფარგლეთ მათემატიკური სტატისტიკის ძირითადი ამოცანების მოკლე განხილვით. უფრო დაწვრილებით ისინი გაშუქებულია ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის სახელმძღვანელოებში.

ცნება განსხვავდება მათემატიკაში ცნობილ სიდიდეთა შორის ურთიერთდამოკიდებულების ცნებისაგან. მათემატიკაში "დამოკიდებულება" გულისხმობს მკაცრ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას. ერთ X სიდიდის მნიშვნელობის ცოდნით შეიძლება ზუსტად ვაჩვენოთ მეორე Y სიდიდის მნიშვნელობა.

ალბათობის თეორიაში განიხილება დამოკიდებულების უფრო ზოგადი ცნება, რომელსაც ა ლ ბ ა თ უ რ ი ანუ ს ტ ო ქ ა ს ტ უ რ ი დამოკიდებულება ეწოდება. თუ X სიდიდე Y-თან ალბათური დამოკიდებულებითაა დაკავშირებული, მაშინ X-ის ცოდნით Y-ის ზუსტი მნიშვნელობის ჩვენება არ შეიძლება. ამ შემთხვევაში მხოლოდ მისი განაწილების კანონის ჩვენებაა შესაძლებელი, რომელიც დამოკიდებული იქნება იმაზე თუ რა მნიშვნელობა მიიღო სიდიდემ. რამდენადაც უფრო მჭიდროა ალბათური დამოკიდებულება შემთხვევით სიდიდეებს შორის, იმდენად უფრო უახლოვდება იგი ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას. შემთხვევით სიდიდეთა შორის ალბათური დამოკიდებულების ან რაც იგივეა, კორელაციური დამოკიდებულების სიდიდის საზომად კორელაციის კოეფიციენტი გამოიყენება.

2. წრფივი კორელაციური კავშირი

ვთქვათ მოცემული გვაქვს X და Y შემთხვევითი სიდიდეები, რომლებიც სხვადასხვა ობიექტს ეკუთვნიან. მაშინ X-ის ყოველ მნიშვნელობას Y-ის მნიშვნელობები შეესაბამება. სიდიდეთა შორის ასეთ დამოკიდებულებას ს ტ ა ტ ი ს ტ ი კ უ რ ი კ ა ვ შ ი რ ი ს ეწოდებენ. სიდიდეებს შორის სტატისტიკური კავშირის მთლიანი შესწავლა გულისხმობს X-ის თითოეული მნიშვნელობისათვის Y-ის მნიშვნელობათა განაწილებას და X-ის ცვლილებასთან ერთად ამ განაწილების ცვლილების განხილვას.

კორელაციური კავშირი შესაძლებელია იყოს როგორც წრფივი, ისე არაწრფივიც. წრფივი კორელაციური კავშირის განხილვისას საჭიროა კორელაციის კოეფიციენტის გამოთვლა

აღვნიშნოთ n_{xy} -ით X და Y რიცხვითი ერთ წყვილი მნიშვნელობის სიხშირე და შევადგინოთ ჯამი

$$C_{xy}=\frac{\sum n_{xy}(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}$$

C_{xy} -ს ეწოდება X და Y -ის კოვარიაცია, თუ X და Y შემთხვევით სიდიდეთა საშუალო კვადრატულ გადახრებს სათანადოდ σ_x და σ_y -ით აღვნიშნავთ, მაშინ კოვარიაცია საშუალო კვადრატულ გადახრათა ნამრავლზე გაყოფილი გვაძლევს კორელაციის კოეფიციენტს ე.ი. $R=\frac{C_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$.

3. წრფივი კორელაციური კავშირის და რეგრესიის წირის განტოლება

ვთქვათ, X და Y შემთხვევით სიდიდეებს შორის არსებობს წრფივი კორელაციური კავშირი. მათი საშუალო კვადრატული გადახრებია* შესაბამისად σ_x და σ_y, კორელაციის კოეფიციენტის

---

* შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ან რაც იგივეა საშუალო მნიშვნელობა ეწოდება ამ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო რიცხვით მნიშვნელობათა შესაბამის ალბათობებზე ნამრავლთა ჯამს. ე.ი. $E(x)=\sum x_i p_i$. საშუალო კვადრატული გადახრა არის შემთხვევითი სიდიდის გაფანტულობის ერთ-ერთი საზომი. გადახრის აბსოლუტური მნიშვნელობის მათემატიკურ ლოდინს საშუალო გადახრა ეწოდება. იგი უდრის: $M_x=E|x-E(x)|$. გადახრის კვადრატის საშუალო მნიშვნელობიდან კვადრატულ ფესვს საშუალო კვადრატული გადახრა ეწოდება და აღინიშნება σ ასოთი, $\sigma=\sqrt{E[x-E(x)]^2}$ ხოლო ფესვქვეშა გამოსახულებას ანუ გადახრის კვადრატის საშუალო მნიშვნელობას დისპერსია ეწოდება $D(x)=E[x-E(x)]^2$, საშუალო კვადრატული გადახრის საშუალო მნიშვნელობასთან შეფარდებას ვარიაციის კოეფიციენტი ეწოდება (v) $V=\frac{\sigma}{\bar{x}}$. ეს სიდიდე გვიჩვენებს შემთხვევით სიდიდეთა გაფანტულობას ერთნაირი საშუალო კვადრატული გადახრის პირობებში.

და საშუალო კვადრატული გადახრათა დახმარებით შესაძლებელია X და Y შორის წრფივი კორელაციური კავშირის გამომხატველი განტოლების შედგენა.

X და Y სიდიდეების საშუალოები აღვნიშნოთ $\bar{x}$ და $\bar{y}$-ით, ხოლო მათი კორელაციის კოეფიციენტი r-ით. $\bar{y}_x$-ით აღვნიშნოთ X-ის რომელიმე მიცემული მნიშვნელობისათვის Y-ის კერძო საშუალო, მაშინ Y და X-თან წრფივი კორელაციური კავშირის განტოლება ასე დაიწერება

$$\bar{y}_x \bar{y} = R\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot(x-\bar{x}):$$

ეს განტოლება გვიჩვენებს, რომ Y-ის კერძო საშუალოს საერთო საშუალო სიდიდიდან გადახრა X-ის საშუალოდან გადახრის პროპორციულია. პროპორციულობის კოეფიციენტია:

$$\rho_y = R\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

სიდიდე, რომელსაც X-ის მიმართ Y-ის რეგრესიის კოეფიციენტი ეწოდება.

4. კორელაციის კოეფიციენტის თვისებები

კორელაციის კოეფიციენტს შემდეგი თვისებები აქვს:

1. კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა ყოველთვის -1 და +1 შორისაა მოთავსებული

$$-1 \le R \le 1$$

2. როდესაც R კორელაციის კოეფიციენტი უდრის -1 ან +1-ს, მაშინ X და Y დაკავშირებულნი არიან წრფივი კავშირით, რომელსაც შემდეგი სახე ექნება:

$$Y = aX + b, \qquad ან \quad X = cY + d.$$

3. როდესაც კორელაციის კოეფიციენტი $R = 0$-ს, მაშინ X და Y სიდიდეთა შორის წრფივი კორელაციური კავშირი არ არსებობს, მაგრამ შესაძლებელია მრუდწირული კორელაციური კავშირის არსებობა.

4. რაც უფრო ახლოსაა R -ის მნიშვნელობა $+1$ ან -1-თან მით უფრო მჭიდრო წრფივი კორელაციური კავშირი იქნება X და Y სიდიდეებს შორის და, პირიქით, ეს კავშირი სუსტი იქნება, რაც კორელაციის კოეფიციენტი უახლოვდება 0-ს.

5. Y-ის, X-ის მიმართ რეგრესიის განტოლებით გამოთვლილ $\bar{y}_x$ კერძო საშუალოების მახლობლობაში დაკვირვების წერტილებში მიღებულ Y მნიშვნელობათა დისპერსია /იგი Σ_y^2-ით აღინიშნება/ გამოიხატება შემდეგნაირად:

$$\Sigma_y^2=\sigma_y^2(1-R^2).$$

ეს გამოსახულება მით უფრო მცირე იქნება, რაც უფრო ახლოს იქნება სიდიდე $+1$-თან ან -1-თან ე.ი. უფრო ახლოს იქნება $\bar{y}_x$ კერძო საშუალოების მნიშვნელობანი დაკვირვების წერტილებში მიღებულ Y-ის მნიშვნელობებთან. როდესაც R უახლოვდება 0-ს, მაშინ Σ_y^2 უახლოვდება Y-ის მნიშვნელობის σ_y^2 სრულ დისპერსიას.

5. არაწრფივი კორელაციური კავშირი და კორელაციური ფარდობა

შემთხვევით სიდიდეთა შორის, გარდა წრფივი კორელაციური კავშირისა, არსებობს აგრეთვე არაწრფივი კორელაციური კავშირი. შემთხვევით სიდიდეთა შორის არაწრფივი კორელაციური კავშირის ძალის საზომად იღებენ კორელაციურ შეფარდებას. თუ განვიხილავთ Y-ის კორელაციურ კავშირს X-თან და X-ის კორელაციურ კავშირს Y-თან და მათთვის ავიღებთ კორელაციურ შეფარდებებს აღმოჩნდება რომ ისინი განსხვავებულნი არიან.

განვიხილოთ $\bar{y}_x$ კერძო საშუალოს X-ის შესაბამის მნიშვნელობებთან დამოკიდებულება, მაშინ Y-ის კორელაციური კავშირი X-თან განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\eta_y = \frac{\sigma(\bar{y}_x)}{\sigma_y},$$

სადაც σ_y არის Y შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა, ხოლო $\sigma(\bar{y}_x)$ არის Y-ის მნიშვნელობათა საერთო $\bar{y}$ საშუალოს მახლობლად $\bar{y}_x$ კერძო საშუალოთა დისპერსიიდან კვადრატული ფესვი. რომელიც გამოისახება შემდეგნაირად:

$$\bar{\sigma}^2_{(yx)} = \frac{1}{n}\sum n_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2,$$

საიდანაც
$$\bar{\sigma}(yx) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum n_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2}$$

ამრიგად, განვსაზღვრეთ Y-ის X-თან კავშირისათვის კორელაციური ფარდობა. ანალოგიურად დაიწერება X-ის Y-თან კავშირისათვის η_x ფარდობა.

6. მრავლობითი კორელაცია

შესაძლოა ორზე მეტ შემთხვევით სიდიდეთა შორის კავშირი. საინტერესოა ამ კავშირის მათემატიკური გამოსახვა. სიმარტივისათვის განვიხილოთ სამი შემთხვევითი სიდიდე X, Y, Z და დავუშვათ მათ შორის წრფივი სტატისტიკური კავშირი. თუ ვიგულისხმებთ, რომ Z დამოკიდებულია X და Y-ზე, მაშინ წრფივი სტატისტიკური კავშირი ჩაიწერება:

$$Z = aX + bY + c,$$

სადაც a, b, c მუდმივი კოეფიციენტებია. X, Y და Z სიდიდეთა ნაცვლად უფრო მოხერხებულია მათი საშუალოსთან გადახ-

რადა განხილვა, მაშინ მათ შორის წრფივი კორელაციური კავშირი გამოისახება შემდეგნაირად:

$$Z-\bar{z}=A(X-\bar{x})+B(Y-\bar{y}).$$

ამ განტოლებაში A და B არის რეგრესიის კოეფიციენტები *, რომლებიც კორელაციის კოეფიციენტების და საშუალო კვადრატულ გადახრათა საშუალებით გამოისახება შემდეგნაირად

$$A=\frac{R_{xz}-R_{yz}\cdot R_{xy}}{1-R^2}\cdot\frac{\sigma_z}{\sigma_x},$$

$$B=\frac{R_{yz}-R_{xz}\cdot R_{xy}}{1-R^2}\cdot\frac{\sigma_z}{\sigma_y}$$

აქ R_{xy}, R_{xz} და R_{yz} გამოხატავს X და Y, X და Z, Y და Z სიდიდეთა შორის კორელაციურ კავშირს.

§ 3. კორელაციური მოდელების გამოყენება ეკონომიკაში

1. საწარმოო ფუნქცია

კორელაციური ანალიზის საშუალებით ხდება წარმოების სფეროში ეკონომიკურ მაჩვენებელთა დამოკიდებულების გამოკვლევა.

---

* რეგრესიის და კორელაციის კოეფიციენტები შემთხვევით სიდიდეთა შორის დამოკიდებულების რიცხობრივად გამოსახვის საშუალებას იძლევიან. ვთქვათ მოცემულია ორი შემთხვევითი სიდიდე X და Y მივიღოთ, რომ X-ის რ ე გ რ ე ს ი ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ი Y-ის მიმართ იქნება:

$$\rho(x,y)=\frac{E(xy)-E(x)E(y)}{D(y)}.$$

ანალოგიურად Y-ის X-ის მიმართ რეგრესიის კოეფიციენტი იქნება: $\rho(YX)=\frac{E(xy)-E(x)E(y)}{D(x)}$ რეგრესიის კოეფიციენტთა საშუალო გეომეტრიულს ეწოდება კ ო რ ე ლ ა ც ი ი ს კოეფიციენტი: $R(X,Y)=\sqrt{\rho(x,y)\rho(y,x)}=\frac{E(xy)-E(x)E(y)}{\sqrt{D(x)\cdot D(y)}}$.

საწარმოო ფუნქცია ფართო გაგებით მოიცავს საწარმოო საქმიანობის ისეთ მაჩვენებლებს შორის არსებული დამოკიდებულებების მოდელირებას, როგორიცაა გამოსაშვები პროდუქციის მოცულობა, ერთეული პროდუქციის თვითღირებულება, კაპიტალური დაბანდებანი, ფონდუკუგება, შრომის მწარმოებლურობა და სხვ.

საწარმოო ფუნქცია უფრო ვიწრო აზრით არის პროდუქციის გამოშვების დამოკიდებულება სხვადასხვა საწარმოო რესურსების დანახარჯებთან. ზოგადად პროდუქციის გამოშვების ფუნქცია ასე ჩაიწერება: $P = f(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n)$, სადაც P აღნიშნავს გამოსაშვები პროდუქციის მოცულობას, ხოლო მისი სიდიდის განმსაზღვრელ ფაქტორებს წარმოადგენენ $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ რესურსები / შრომითი, მატერიალური და ფინანსური რესურსები/. ამგვარად, მოცემულ შემთხვევაში სხვადასხვა სახის რესურსებსა /დამოუკიდებელი ცვლადები/ და პროდუქციის გამოშვების მოცულობას / დამოკიდებული ცვლადი/ შორის დამოკიდებულება გამოისახება მრავლობითი კორელაციის განტოლებით.

ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელების შემუშავებისას ხშირად დანახარჯებსა და პროდუქციის გამოშვებას შორის წრფივი დამოკიდებულების არსებობას უშვებენ. ამის გამო მიიღება საკმარისად მარტივი მოდელი, რომელიც ადვილად გამოიყენება პრაქტიკაში, თუმცა ნაკლები სიზუსტით ხასიათდება. უფრო ზუსტად რომ აისახოს პროდუქციის გამოშვებისა და დანახარჯებს შორის დამოკიდებულება საჭიროა არაწრფივი პროგრამირების მეთოდების გამოყენება.

საწარმოო ფუნქციის მნიშვნელოვან სახეს წარმოადგენს დ ა ნ ა ხ ა რ ჯ თ ა /თ ვ ი თ ღ ი რ ე ბ უ ლ ე ბ ი ს/ ფ უ ნ ქ ც ი ა

მოცემულ შემთხვევაში უნდა გაირკვეს რომელიმე პროდუქციის წარმოების დანახარჯებსა (C) და ამ პროდუქციის გამოშვების მოცულობას (P) შორის კავშირი.

ე.ი. ავაგოთ ფუნქცია $C = f(P)$

ამ ფუნქციიდან ადვილად მივიღებთ პროდუქციის ერთეულის თვითღირებულებისა და პროდუქციის გამოშვების დამოკიდებულების გამომხატველ სხვა ფუნქციას $\frac{C}{P} = \frac{f(P)}{P} = \varphi(P)$.

არგუმენტად ხშირად გამოიყენება არა ფაქტიური გამოშვება, რომელიც შეიძლება იცვლებოდეს სხვადასხვა მიზეზების ზეგავლენით, არამედ - საწარმოო სიმძლავრე. რაც შეეხება თვითღირებულებისა და პროდუქციის მოცულობას შორის დამოკიდებულების ფორმას, იგი სხვადასხვაა და დამოკიდებულია კონკრეტულ საწყის მონაცემებზე. შეიძლება დავუშვათ, რომ წარმოების მოცულობის ზრდით თვითღირებულება ჯერ მცირდება, მიაღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას რომელიღაც წერტილში, შემდეგ იწყებს ზრდას სხვადასხვა ფაქტორების ზეგავლენით, რომლებიც მსხვილ წარმოებას ახასიათებს. ასეთი დამოკიდებულება შეიძლება გამოისახოს პარაბოლით.

თვითღირებულების კორელაციური მოდელების ანალოგიურია **კაპიტალური დანახარჯების. ფუნქცია**

ინტერესმოკლებული არ არის კაპიტალურ დაბანდებასა (K) და საწარმოო სიმძლავრეს (M) შორის დამოკიდებულება. იგი გამოისახება ფუნქციით $K = f(M)$

ხვედრითი კაპიტალური დანახარჯები საწარმოო სიმძლავრის ერთეულზე $\left(\frac{K}{M}\right)$ განიხილება აგრეთვე როგორც საწარმოო სიმძლავრის (M) ფუნქცია $\frac{K}{M} = \frac{f(M)}{M} = \varphi(M)$.

ჩამდენადაც საწარმოო სიმძლავრის სიდიდე და ცვლილება აისახება როგორც მიმდინარე ისე კაპიტალურ დანახარჯებში, მნიშვნელოვან ინტერესს წარმოადგენს ისეთი მოდელის აგება, სადაც დამოკიდებულ ცვლადებად გამოდიან დაყვანილი დანახარჯები $(C + EK)$, რომელსაც შეიძლება დავუმატოთ ტრანსპორტის დანახარჯები (T), რომელიც საწარმოო სიმძლავრეს უკავშირდება. ამ შემთხვევაში გვექნება შემდეგი კორელაციური დამოკიდებულება:

$$C + EK + T = f(M).$$

ასეთი და მსგავსი დამოკიდებულების კვლევა საშუალებას იძლევა პრაქტიკულად განისაზღვროს საწარმოთა ოპტიმალური ზომა, ამასთან იგი საფუძველია ოპტიმალური დიაპაზონის უფრო რთული მოდელების აგებისათვის.

საწარმოო ფუნქციას /უფრო ფართო გაგებით/ მიეკუთვნება აგრეთვე შ რ ო მ ი ს მ წ ა რ მ ო ე ბ ლ უ რ ო ბ ი ს დ ო ნ ი ს მოდელი.

შრომის მწარმოებლურობის მოდელებში ერთტიპიური პროდუქციის გამომშვებ საწარმოთა შორის შრომის მწარმოებლურობის დონეები განსხვავებულია. ამის გამო არსებობს შრომის მწარმოებლურობის დონესა და ისეთ ფაქტორებს შორის კორელაციური კავშირი როგორიცაა: წარმოების მოცულობა, საწარმოო ფონდების სიდიდე და სტრუქტურა, სპეციალიზაციის დონე, შრომის ენერგოშეიარაღება, საწარმოო ციკლის ხანგრძლივობა და სხვ. საწარმოო ფუნქციების დახმარებით შეიძლება განისაზღვროს ისეთი მნიშვნელოვანი ეკონომიკური მაჩვენებლები, როგორიცაა ფონდუკუგება, წარმოების რენტაბელობა და სხვ.

§ 4. მოსახლეობის მოთხოვნისა და მოხმარების კორელაციური ანალიზი

მოსახლეობის მოთხოვნა და მოხმარება ისეთ ეკონომიკურ ფაქტორს მიეკუთვნება, რომლითაც საბოლოო ანგარიშში განისაზღვრება მთელი ერთობლივი საზოგადოებრივი პროდუქტის წარმოება და განაწილება.

მოსახლეობის მოთხოვნისა და მოხმარების სტრუქტურასა და მოცულობაზე გავლენას ახდენს ისეთი ფაქტორები როგორიცაა: მი. ჯამრებული შემოსავლები, სამომხმარებლო საქონელზე ფასების თანაფარდობა და დონე, ოჯახის ზომა და შემადგენლობა და სხვ. საინტერესოა მოსახლეობის მ ო თ ხ ო ვ ნ ი ს მ ო ხ მ ა რ ე ბ ი ს შ ე მ ო ს ა ვ ლ ე ბ თ ა ნ დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ე ბ ი ს შესწავლა.

შემოსავლებისაგან მოთხოვნისა და მოხმარების დამოკიდებულების კვლევის დროს საწყისი მონაცემები იქნება ბიუჯეტური სტატისტიკის და სპეციალურად გამოკვლეული ოჯახთა ბიუჯეტების მასალები.

აღნიშნულ ფაქტორებს შორის კორელაციური დამოკიდებულების მოდელის შემუშავებისას აუცილებელია ცალკე გადაიჭრას ყველა სამომხმარებლო პროდუქტის ან თვისებრივად ერთნაირი ჯგუფის პროდუქტების კორელაციური კავშირების შესაბამისი ფორმის საკითხი. ამასთან მისი შესაბამისი მრუდი სხვადასხვა პროდუქციისათვის შეიძლება მნიშვნელოვნად განსხვავდებოდეს ერთმანეთისაგან. ასე მაგალითად, პირველადი მოთხოვნილების საგნების მოხმარება შემოსავლების ზრდასთან მიმართებაში ასეთია: შემოსავლის ზრდით იგი ჯერ სწრაფად იზრდება, მაგრამ მოხმარე ს გაჯერების შემთხვევაში ზრდის ტემპი [illegible] მრუდი მცირდება.

ფუფუნების საგნების მოხმარების ზრდა კი პირიქით, შემოსავლის გადიდებით დასაწყისში იზრდება საკმარისად ნელა, მაგრამ მაღალი შემოსავლის დროს მაღლდება უფრო სწრაფი ტემპებით.

შემოსავლების მცირე ინტერვალებში მოხმარების ფუნქცია შეიძლება გამოისახოს წრფივი განტოლებით.

მოხმარების მოდელებში არაწრფივი /მრუდწირული/ ფუნქციებიდან უფრო ხშირად გამოიყენებიან შემდეგი:

$$y = a_0 + a_1 \log x;$$
$$\log y = a_0 + a_1 \log x;$$
$$\log y = a_0 + a_1^{\frac{1}{x}}$$
$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2;$$
$$y = a_0 + \frac{a_1}{x + a_2}$$

ამ განტოლებებში x და y აღნიშნავენ შესაბამისად შემოსავლის /დამოუკიდებელი ცვლადი, ანუ მაჩვენებელი-ფაქტორი/ საშუალო შეწონილ სიდიდეს და მოხმარების /დამოკიდებულიცვლადი/ საშუალო შეწონების სიდიდეს.

შემოსავლებსა და მოხმარებას შორის კავშირის უმნიშვნელოვანესი მახასიათებელია ელასტიკურობის კოეფიციენტი, რომელიც გვიჩვენებს თუ რამდენი პროცენტით გაიზარდა მოხმარება შემოსავლების 1%-ით ზრდის შემთხვევაში.

ნებისმიერი ფუნქციისათვის მათ შორის ზემოთმოყვანილი ფუნქციებისათვის ელასტიკურობის კოეფიციენტი იანგარიშება ფორმულით

$$E = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{d \log y}{d \log x}$$

ეკონომიკურ-მათემატიკურ მოდელთა სისტემა მოსახლეობის მოთხოვნისა და მიხმარების პროგნოზირების საშუალებას იძლევა. მოსახლეობის მოთხოვნისა და მიხმარების კორელაციური მოდელები არა მარტო დაგეგმვის სრულყოფის საშუალებას იძლევა, არამედ იგი სახალხო მეურნეობის ოპტიმალური დაგეგმვის ეკონომიკურ-მათემატიკურ მოდელთა სისტემის მნიშვნელოვანი შემადგენელი ნაწილია.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

ააგეთ საყოფაცხოვრებო მომსახურებაზე მოთხოვნის ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელი.

თ ა ვ ი VIII. დაგეგმვაში გამოყენებული სხვა ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდები და მოდელები

§ 1. ექსპერტული შეფასების მეთოდი. მისი თეორიული საფუძვლები და გამოყენების სფერო

ექსპერტული შეფასების მეთოდით ეკონომიკურ ამოცანათა ამოხსნა ემყარება სპეციალისტთა /ექსპერტთა/ მსჯელობებსა და დასკვნებს.

ექსპერტული შეფასების მეთოდი გამოიყენებოდა და გამოიყენება სხვადასხვაგვარი პრობლემების გადაწყვეტისას საბჭოებზე, თათბირებზე, კომისიებში და ა.შ. ყველგან სადაც გადაწყვეტილებებს კოლექტიური აზრი, კომპეტენტური პირების თვალსაზრისი უნდა დაედოს საფუძვლად.

ექსპერტული მეთოდის გამოყენება მიზანშეწონილია

მხოლოდ იმ ამოცანებში, რომლებიც არ შეიძლება ამოიხსნას სხვა ხერხებით, მაგალითად რომელიმე არქიტექტურული ქმნილების ესთეტიკური მიმზიდველობის განსაზღვრის არავითარი მეთოდი არ არსებობს გარდა ექსპერტული მეთოდისა. ექსპერტულ მეთოდს იყენებენ იმ შემთხვევაშიც, როცა სხვა მეთოდები ან არაზუსტია ან შრომატევადია მათი გამოყენება. ასე მაგალითად, საკვები პროდუქტების გამოყენებითი თვისებების განსაზღვრისათვის საკმარისად ეფექტურია ექსპერტული მეთოდი.

ერთი კონკრეტული ექსპერტიზა სხვებისაგან განსხვავდება იმ ნიშან-თვისებათა ერთობლიობით, რომლებიც ახასიათებენ საკვლევ პროცედურას. ამ ნიშან-თვისებების გამოყენებით შეიძლება ექსპერტის შემდეგი კლასიფიკაცია:

ე ქ ს პ ე რ ტ უ ლ ი დ ა ს კ ვ ნ ე ბ ი ს გ ა მ ო ს ა ხ ვ ი ს ხ ე რ ხ ი ს მიხედვით, ექსპერტული კომისიების მუშაობის პრაქტიკაში ექსპერტული დასკვნების გამოტანის ორი ხერხი არსებობს. პირველი /ძირითადი/, როცა დასკვნების ფორმულირება ხდება თვით ჯგუფით /ინდივიდუალური ექსპერტული დასკვნების ნაკრების სახით/ და მეორე, როცა ექსპერტული დასკვნები ჯგუფის სახელით გამოაქვს ჯგუფის ერთ ან ორ წევრს.

ე ქ ს პ ე რ ტ ე ბ ს შ ო რ ი ს კ ო ნ ტ ა ქ ტ ი ს ხ ა ს ი ა თ ი ს მიხედვით. ექსპერტებს გამოაქვთ თავიანთი მოსაზრებანი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. ე.ი. კოლექტიური განხილვის გარეშე. ან ასეთი კონტაქტების დროს. ამ დროს დისკუსიის გარეშე ან დისკუსიით ჩატარებული განხილვა მთავრდება ღია ან დახურული ექსპერტული მსჯელობით.

გ ა მ ო კ ი თ ხ ვ ი ს   ტ ე ქ ნ ი კ ი ს მიხედვით. მთელი ექსპერტული მეთოდი ორი ხერხისაგან შედგება: როცა გამოკითხვისას ტექნიკურ მუშაკს საქმე აქვს ექსპერტთა ჯგუფთან და როცა ის კონტაქტში შედის უშუალოდ ყოველ ექსპერტთან ცალ-ცალკე.

განვიხილოთ ექსპერტული ინფორმაციის საკმარისად მარტივი მეთოდი. თუ ალტერნატივებს a_i , $i=1,2,\dots,n$ თითოეული m ექსპერტისაგან, რომელიც შედის კომისიის შემადგენლობაში მიიღო რიცხობრივი შეფასება W_{ij} , $j=1,2,\dots,m$, მაშინ საბოლოო მაჩვენებლად შეიძლება აღებულ იქნეს მთელი ექსპერტების საშუალო არითმეტიკული სიდიდე

$$\frac{\sum_{j=1} W_{ij}}{n}$$

საბოლოო სიდიდის მისაღებად სარგებლობენ შემდეგი პროცედურით. დავუშვათ, r_{ij} არის ადგილი /რანგი/ რომელიც j-ურმა ექსპერტმა დაუსვა i-ურ ალტერნატივს, მაშინ თითოეული ალტერნატივისათვის შეიძლება გამოითვალოს მისი საშუალო რანგი, რომელიც ტოლია $\frac{\sum_i r_{ij}}{m}$, შემდეგ ალტერნატივები განვალაგოთ მათი საშუალო რანგის ზრდის მიხედვით. ზოგიერთი ბუნებრივი ვარაუდით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თუ ექსპერტები საკმარისად ბევრია, ალტერნატივათა ასეთი განლაგება ალბათობით ახლოა 1-თან, ე. ი. ემთხვევა ჭეშმარიტებას.

ექსპერტული მეთოდების მათემატიკურ მეთოდებთან შერწყმა ძირითადი საშუალებაა პრაქტიკული და სამეცნიერო-კვლევითი მუშაობისათვის იმ შემთხვევაში, როცა ალტერნატივების შეფასება შეიძლება იყოს მიღებული კვალიფიციური ექსპერტების დახმარებით

§ 2. ევრისტიკული მეთოდების არსი

ევრისტიკული პროგრამირება კიბერნეტიკის ერთ-ერთი მიმართულებაა, იგი ითვალისწინებს ადამიანის მიერ სხვადასხვა ამოცანების გადაწყვეტის დროს მისი აზროვნების შესწავლასა და ფორმალიზაციას, აგრეთვე ე.წ. ხელოვნური ინტელექტის შექმნისათვის ინფორმაციის გადამუშავების თეორიის შექმნას.

ევრისტიკა-ბერძნული /ვპოულობ/, დამყარებულია მსგავსი ამოცანების ამოხსნის გამოცდილებაზე. ამოცანის ამოხსნის ევრისტიკული მეთოდები ეს არის წესების, ხერხების, გამარტივებების, წარსული ცდების განზოგადებების ერთობლიობა. ევრისტიკული პროგრამები აგებულია ევრისტიკული მეთოდების საფუძველზე. ეს მეთოდები მუშავდება იმ დაკვირვებათა საფუძველზე, თუ როგორ.მსჯელობს ადამიანი რთული ამოცანის ამოხსნას. ამა თუ იმ ამოცანის ევრისტიკული მეთოდების გამოყენებით ამოხსნა არ იძლევა ზუსტი პასუხის მიღების გარანტიას, რამდენადაც ეს მეთოდები ემყარებიან ე.წ. დამაჯერებელ მსჯელობას, რომელიც ცხადია განსხვავდება დამამტკიცებელი მსჯელობისაგან. დამაჯერებელი მსჯელობა მნიშვნელოვანწილად შემოქმედებით პროცესს წარმოადგენს.

ევრისტიკული მეთოდები გამოიყენებიან სხვადასხვა კომბინატორული ამოცანების ამოხსნის დროს. მაგალითად, მრავალ შესაძლო რაოდენობისაგან იმ საშუალებათა კომპლექსის შერჩევა, რომელიც უზრუნველყოფს ერთი ან რამდენიმე მიზნის მიღწევას, მოქმედების საუკეთესო ვარიანტის ძიება, ობიექტის შეცნობა და სხვა.

ევრისტიკული მეთოდები შეიძლება გამოყენებულ იქნეს კონკრეტული ამოცანების შესრულებასთან დაკავშირებული სამეურნეო გადაწყვეტილებების ვარიანტების შედარებისას. ნებისმიერი სამეურნეო გადაწყვეტილება ხასიათდება სამი ჯგუფის მაჩვენებლებით,

რომლებიც ასახავენ მოსალოდნელ შედეგს ესენია: ეფექტიანობა, დანახარჯები და შედეგების მიღების გათვალისწინებული დრო. ეფექტიანობასა და დანახარჯებს აქვს რამდენიმე მაჩვენებელი, რომელთაგან მრავალი არათანაზომადია. თუ მოქმედების ვარიანტები განსხვავდებიან ორი ან მეტი არათანაზომადი მაჩვენებლებით, მაშინ მათი შედარებისათვის შეიძლება მხოლოდ რიგობრივი /თვისებრივი/ საზომი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს განისაზღვროს რომელი ვარიანტია უკეთესი, მაგრამ ვერ მოგვცემს პასუხს თუ რამდენად უკეთესია. ამასთან რიგობრივი საზომის წინასწარი ფორმირება მნიშვნელოვან სიძნელეებთანაა დაკავშირებული. ევრისტიკული მეთოდები ეფექტურია უფრო უპირატესი ვარიანტების ჯგუფების შერჩევის დროს, ამასთან ელექტრონულ-გამომთვლელი მანქანების საშუალებით ვარიანტთა შედარების ალგორითმის, ანუ წესების დამუშავებისათვის საფუძვლად შეიძლება გამოვიყენოთ იმ ხელმძღვანელის თვალსაზრისი და ხედხედი, რომელიც პასუხისმგებელია მიღებული გადაწყვეტილებების მიმართ.

ევრისტიკულმა მეთოდებმა შეიძლება გამოყენება ჰპოვოს ალტერნატივათა შედარებითი შეფასებისას შედეგებზე მოქმედი სხვადასხვა ფაქტორების მნიშვნელობების განუსაზღვრელობის გათვალისწინებით. განსაზღვრულ ფაქტორთა მნიშვნელობების სხვადასხვა კომბინაცია განიხილება როგორც სიტუაციის /გარემოს, მდგომარეობის/ ვარიანტები.

განუსაზღვრელი მდგომარეობის გათვალისწინებით გადაწყვეტილების დასაბუთების ამოცანა შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოვაყალიბოთ. დავუშვათ გვაქვს ალტერნატივათა სიმრავლე:

$A=\{A_i\}$, $i=1,2,\dots,m$, რომელთაგანაც უნდა აირჩეს

საუკეთესო. ვთქვით, რომ წესისამებრ ალტერნატივებთან რეალი-ზაციის დანახარჯები და შედეგების მიღების დრო ერთნაირია. ყოველ ალტერნატივას შეესაბამება შესაძლო შედეგთა /რეზულ-ტატთა/ სიმრავლე, რომელზედაც გავლენას ახდენს სიტუაცია, მდგომარეობა. ნამდვილი შედეგი /რეზულტატი/ დამოკიდებულია გადაწყვეტილების რეალიზაციის დროს შესაძლო ვარიანტთა სიმრავ-ლიდან $O=\{O_j\}, j=1,2,\cdots,n$, ჩამოყალიბებულ სიტუაციაზე. /მდგომარეობა, გარემოება/.

თუ განსაზღვრულ O_j სიტუაციაში A_i ალტერნა-ტივის შერჩევის შედეგად მიღებულია R_{ij} მოსალოდნელი შედეგი /რეზულტატი/, მაშინ სიტუაციის /მდგომარეობის/ განუსაზღვრელო-ბის დროს ეს ალტერნატივა შეესაბამება მოსალოდნელ შედეგთა $R_{i_1},R_{i_2},\cdots,R_{i_n}$ ნაკრებს. ამასთან ყოველი შედეგი, ხა-სიათდება რამდენიმე მაჩვენებლის მნიშვნელობების ერთობლიო-ბით. შედეგთა მთელი ერთობლიობა, რომელიც შეესაბამება განსა-ხილველ ალტერნატივათა სიმრავლეს, შეიძლება წარმოიდგინოს $m\times n$ მატრიცის სახით. ალტერნატივათა გათანაბრება მაჩვენებელთა მნიშვნელობების თანმიმდევრობით შედარების გზით ძალზე რთუ-ლია. ასეთი ტიპის ამოცანების ამოხსნისათვის მიზანშეწონილია შესწავლილ იქნეს მიღებულ გადაწყვეტილებებზე პასუხისმგებელი ხელმძღვანელის თავისებურება და გამოავლინოს მისი უპირატესო-ბა. უნდა დადგინდეს ხელმძღვანელის მიდრეკილება რისკისადმი, გამოირკვეს ცდილობს თუ არა იგი მაქსიმალური შედეგის მიღებას, დაბალი შედეგების მიღების საშიშროების პირობებში, თუ მისი ცდა მაქსიმუმისაკენ შეზღუდულია აუცილებელი პირობით — არ გარისკოს თუ შედეგი შეიძლება დასაშვებ მინიმალურ დონეზე ნაკლები გახდეს და ა.შ. ასეთ საფუძველზე შეიძლება შეიმუ-

შაონ ევრისტიკული პროგრამები, რომლებითაც შეირჩევა უფრო ოპტიმალური ვარიანტები.

იმასთან დაკავშირებით, რომ არ არსებობს შესაძლო და საუკეთესო გადაწყვეტილებების შედარებით შეფასებების მკაცრი ფორმალიზებული წესები მიღებულ გადაწყვეტილებების დროს ემყარებიან საკუთრივ ხელმძღვანელთა გამოცდილებას. ეს გამოცდილება გროვდება სხვადასხვა ევრისტიკულ პროგრამებში. არსებობენ მათი გამოყენების ხელსაყრელი შესაძლებლობანი სამეცნიერო კვლევების რაციონალური ორგანიზაციისათვის: ჰიპოთეზების წამოყრის დროს, ექსპერიმენტების დაგეგმვისას და ა.შ.

ამა თუ იმ ამოცანის ევრისტიკული მეთოდებით გადაჭრა შესაძლებელია თუ ეს ამოცანა გარკვეულწილად ემსგავსება ისეთებს, რომელთა ამოხსნის მეთოდები უკვე შემუშავებულია და გამოიყენება.

ლიტერატურა

1. სკკპ XXVII ყრილობის მასალები, თბ., 1986.
2. С.Гасс. Линейное програмирование, М., 1961.
3. А.С.Гаршгорн, математическое програмирование и его применение в экономических расчетах, М., 1968.
4. ე.ვენცელი, ალბათობის თეორია, თბ., 1980.
5. А.И.Ларионов, Т.И.Юрченко, экономико-математические методы в планировании, М., 1984.
6. ბ.ქიანია, წრფივი პროგრამირება, თბ., 1967.
7. ბ.მანია, ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა, თბ., 1976.
8. В.В.Мякиньков. Экономико-математические методы в планировании. М., 1982.
9. ა.ლურსმანიშვილი, წრფივი ალგებრა და წრფივი დაპროგრამება, თბ., 1967.
10. Л.Л.Тарехов, экономико-математические методы, М., 1968.

შინაარსი

გამომცემლობის რედაქტორი ნ.საგარეიშვილი
კორექტორი ნ.ჩახაია

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 1.02.86. უე 00559.
საბეჭდი ქაღალდი 60X84. პირობითი ნაბეჭდი
თაბახი 12,25. სააღრ.-საგამომც.თაბახი 7,45.
ტირაჟი 1000. ფასი 30 კაპ. შეკ. N 393

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი,
380028, ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14.

Издательство Тбилисского университета,
380028, Тбилиси, пр.И.Чавчавадзе, 14.

საქართველოს სსრ გამომცემლობათა, პოლიგრაფიისა და
წიგნის ვაჭრობის საქმეთა სახელმწიფო კომიტეტის
თბილისის ი.ჭავჭავაძის სახ.წიგნის ფაბრიკა, მეგობ-
რობის გამზ. N7.

Тбилисская книжная фабрика им.И.Чавчавадзе
Государственного комитета Грузинской ССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли,
пр. Дружбы, № 7.

Куртанидзе Давид Александрович

Экономико-математические методы в планировании

(на грузинском языке)

Издательство Тбилисского университета

Тбилиси 1988