საქართველოს სსრ განათლების სამინისტროს პედაგოგიკურ
მეცნიერებათა სამეცნიერო-საკვლევი ინსტიტუტი

ელ. იმერლიშვილი

მოსწავლეთა
ტიპიური შეცდომები ალგებრაში და მათი
გამოსწორების გზები

ინსტიტუტის გამომცემლობა
თბილისი
1955

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

საბჭოთა სკოლა ზრდის მეცნიერებათა საფუძვლებითა და კომუნისტური მსოფლმხედველობით მტკიცედ შეიარაღებულ ახალგაზრდებს, რომლებმაც აქტიური მონაწილეობა უნდა მიიღონ კომუნიზმის მშენებლობის საქმეში. ბოლშევიკური პარტიისა და საბჭოთა ხელისუფლების სისტემატური ზრუნვის შედეგად საშუალო სკოლაში დღითიდღე უმჯობესდება სასწავლო-აღმზრდელობითი მუშაობა. საბჭოთა საშუალო სკოლის წარმატებულობაზე თვალსაჩინოდ მიგვითითებს გადასაყვანი და გამოსაშვები გამოცდების შედეგები, რომლებიც ყოველწლიურად აღმავალია.

სკოლის ეს საერთო წარმატების სფერო მოიცავს მათემატიკურ დისციპლინებსაც. განსაკუთრებით უკანასკნელ წლებში საგრძნობლად ამაღლდა მოსწავლეთა მათემატიკური მომზადების დონე. მეთერთმეტეკლასელთა გამოცდების შედეგების ანალიზი მათემატიკაში ნათლად ადასტურებს იმას, რომ მოსწავლეთა დიდი ნაწილი მტკიცედაა დაუფლებული საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსს. მიუხედავად გაზრდილი მომთხოვნელობისა, რასაც სკოლა უყენებს დამამთავრებელ კლასს, მოსწავლეები, როგორც ზეპირ, ისე წერით გამოცდებზე სამართლიანად იმსახურებენ მაღალ შეფასებას. ყოველწლიურად უმჯობესდება წერითი ნამუშევრების შესრულების ხარისხი. თავიანთ წერით ნამუშევრებში მოსწავლეები ავლენენ პროგრამული საკითხების საფუძვლიან ცოდნას, მათს წიგნიერად გადმოცემის, მათემატიკური მსჯელობის კარგ უნარს.

მათემატიკის სწავლებას საშუალო სკოლაში დიდი აღმზრდელობითი საგანმანათლებლო და პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. ამ საგნის ცოდნა ხელს უწყობს მოსწავლეში განზოგადების უნარის გამომუშავებას, სწორი აზროვნებისა და მეტყველების განვითარე-

ბას. მათემატიკის საფუძვლების შესწავლის პროცესში ყალიბდება მოსწავლის ნებისყოფა, ყურადღება, მეხსიერება... საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსის საფუძვლიანი ცოდნა აიარაღებს მოსწავლეს სასარგებლო პრაქტიკული ჩვევებით. მათემატიკის სწავლების ხარისხის ამაღლებაზე დიდადაა დამოკიდებული ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის წინაშე დასახული სასწავლო-აღმზრდელობითი ამოცანების წარმატებით გადაჭრა.

მათემატიკაში მოსწავლეთა წარმატება მიგვითითებს იმაზე, რომ მასწავლებელთა ძირითადი ნაწილი მაღალკვალიფიციურია, კარგად არის დაუფლებული თავის საქმეს და ენერგიულად იბრძვის სწავლა-აღზრდის მაღალხარისხოვნად დაყენებისათვის.

უდავო ფაქტია, რომ უკანასკნელ წლებში საგრძნობლად გაიზარდა კურსდამთავრებულთა რაოდენობა, შემცირდა მეორეწლიანობა. მოსწავლეთა ცოდნა უფრო მტკიცე და შეგნებული გახდა.

ამ მიღწევებთან ერთად ჩვენს სკოლას აქვს ზოგიერთი ნაკლიც. მიმდინარე ეტაპზე კატეგორიულად დგება მათემატიკის სწავლებაში არსებული ხარვეზების გამოსწორების ამოცანა.

დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ მათემატიკის სწავლებაში შენიშნული ზოგიერთი ნაკლი და მოსწავლეთა პასუხებში შენიშნული ზოგიერთი შეცდომა ერთგვარად მყარი, დამკვიდრებული ხასიათისაა. ასეთი ნაკლი და შეცდომა პრაქტიკაში ფესვგადგმულია და მეტ-ნაკლები რაოდენობით ყოველწლიურად მეორდება. ასეთი შეცდომების გავრცელებულობის მასშტაბი საგრძნობია. იგი გვხვდება არა თუ ერთი სკოლის, არამედ სხვადასხვა რაიონისა თუ რესპუბლიკის სკოლების პრაქტიკაშიც. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ ასეთ შეცდომებს უშვებს ერთსა და იმავე კლასში მოსწავლეთა საგრძნობი ნაწილი. ასეთი შეცდომები ტიპიურ შეცდომებადაა მიჩნეული. ამგვარად, ტიპიურ შეცდომებად მივიჩნევთ ისეთ შეცდომებს, რომლებიც ხშირად გვხვდება ერთი და იმავე კლასის მოსწავლეთა შორის, არა მარტო ერთ რომელიმე, ასე ვთქვათ, შემთხვევით აღებულ მომენტში (ამა თუ იმ წერითი საკონტროლო სამუშაოს შესრულების დროს), არამედ მეორდება წლების მანძილზე, დაკვირვებისათვის შერჩეულ ერთსა და იმავე მასალის შესწავლასთან დაკავშირებით. თავისი ხასიათის მიხედვით ტიპიური

შეცდომები არ შეიძლება ავხსნათ ერთი მოსწავლის რაიმე ინდივიდუალური თავისებურებით, ათვისების უნარიანობით. მათი წარმოშობა უნდა მიეწეროს საერთო მიზეზს, რომელიც მათემატიკის სწავლების პროცესში, სწავლების ორგანიზაციასა და მეთოდებში უნდა ვეძიოთ. ამ შეცდომების დაძლევა მოითხოვს მათემატიკის სწავლების ორგანიზაციისა და მეთოდების გადასინჯვას. ამდენად ტიპიური შეცდომების წინააღმდეგ ბრძოლა წარმოადგენს სკოლის ერთ-ერთ აქტუალურ ამოცანას, რომლის გადაჭრაზე დიდადაა დამოკიდებული მათემატიკის სწავლების უფრო მეტად გაუმჯობესება.

* * *

წინამდებარე შრომის მიზანს შეადგენს ალგებრის სასკოლო კურსის სწავლებაში დასახელებული ნაკლოვანების შესწავლა. სახელდობრ, მოსწავლეთა მიერ ალგებრაში დაშვებული ტიპიური შეცდომების კლასიფიკაცია, მათი წარმოშობის მიზეზების დადგენისა და აღმოფხვრის გზების დასახვის ცდა. ტიპიური შეცდომების შესწავლას საფუძვლად დაედო დაკვირვება ალგებრის სწავლებაზე საშუალო სკოლაში. დაკვირვების ძირითად ობიექტებად შერჩეული იყო ქ. თბილისის 6 საშუალო სკოლა: 1-ლი ვაჟთა, მე-2 ვაჟთა, მე-7 ვაჟთა, მე-8 ქალთა, 23-ე ქალთა, 35-ე ქალთა. ამ სკოლებში სწარმოებდა დაკვირვება სამი სასწავლო .წლის (1948—1951) განმავლობაში. დასახელებულ სკოლებში მოსმენილ იქნა 419 გაკვეთილი და შესწავლილი 4162 საკონტროლო და საკლასო-საშინაო რვეული. ფართოდ იქნა გამოყენებული საკუთარი გამოცდილება—მიღებული ქ. თბილისის მე-2 ვაჟთა საშუალო სკოლაში მათემატიკის სწავლებისას. შრომის დაწერის პროცესში ხშირად იყო ჩატარებული საუბრები სხვადასხვა სკოლების მათემატიკის მასწავლებლებთან აზრთა გაცვლა-გამოცვლის მიზნით.

ამ გზით მოხდა ალგებრაში ტიპიურ შეცდომათა ამოკრეფა და დადგენა. ჩატარებულია მათი კლასიფიკაცია. შეცდომათა ყოველ ჯგუფთან მოცემულია მისი აღწერა და ამ შეცდომების გამოვლი-

ნების ზოგიერთი მაგალითი. ეს მაგალითები აღებულია მასალიდან, რომელიც ზემოთ დასახელებულ სკოლებში ჩატარებული დაკვირვების შედეგად დაგროვდა.

შრომის პირვანდელ ვარიანტში ტიპიური შეცდომები დალაგებული იყო ცალკე I თავში, რომელშიც მხოლოდ შეცდომათა კლასიფიკაცია იყო მოცემული, მათი ტიპიურობის დადგენითა და იმ მეთოდის ჩვენებით, რომლის საშუალებითაც ამა თუ იმ სახის შეცდომების ტიპიურობა იქნა დასაბუთებული. II თავი განკუთვნილი ჰქონდა ამ შეცდომის ანალიზს. მასალის ასეთი განლაგება გამართლებული იყო იმ უდავო ფაქტით, რომ ყველა შეცდომის ანალიზისა და გამოსწორების გზებისა და ხერხების ერთად მოცემა ბევრად უფრო მიზანშეწონილია მათი მთლიანობისა და სრულყოფის თვალსაზრისით. მაგრამ მეორეს მხრივ, არ შეიძლებოდა შრომის გამოცემის დროს მხედველობაში არ მიგვეღო ის სიძნელე, რომლის წინაშეც უნდა დამდგარიყო მკითხველი, რომელიც II თავის კითხვის დროს იძულებული იქნებოდა ყოველი ცალკეული შეცდომის ანალიზისას დაბრუნებოდა პირველ თავს (სადაც ეს შეცდომა იყო აღწერილი), რაც შეუძლებელს გახდიდა ყურადღების კონცენტრირებას. მივიღეთ რა მხედველობაში ეს გარემოება ვირჩიეთ შეგვეერთებინა I და II თავები და მოგვეცა თითოეული შეცდომის ანალიზი გზადაგზა. წაკითხვის გასაადვილებლადვე (აგრეთვე შრომის შემოკლების მიზნით) ზედმეტად მივიჩნიეთ შეცდომის გავრცელების სტატისტიკური ცნობები, რომლებიც დართული ჰქონდა შეცდომათა თითოეულ ჯგუფს ასეთი სახით: რომელ სკოლაში, რამდენ მოსწავლეზე აღებულ შეცდომის რამდენი გამოვლენა იქნა აღნუსხული ხსენებული სამი სასწავლო წლის მანძილზე. გარდა ამისა მოხდა შეცდომათა კლასიფიკაციის შეცვლა. შეცდომები დალაგდა ჯგუფებად არსებითად პროგრამული საკითხების მიხედვით. ამის შედეგად მივიღეთ: შეცდომები მსგავს წევრთა გაერთებაში, ფრჩხილების ხმარებაში, მრავალწევრთა გამოკლებაში, მრავალწევრთა მარტივ მამრავლებად დაშლაში, შემოკლებული ფორმულების გაგებასა და გამოყენებაში, წილად ალგებრულ გამოსახულებებზე წარმოებულ ზოგიერთ გარდაქმნაში, რადიკალებზე მოქმედებათა წარმოებასა და განტოლებათა შედგენით ამოცანების ამოხსნაში. შეცდომათა

თითოეულ ჯგუფს დართული აქვს ანალიზი, რის შედეგად ჩამოყალიბებულია გარკვეული დასკვნები შეცდომათა წარმოშობის შესახებ. შეცდომების ანალიზი ისეა წარმოებული, რომ ყოველი ცალკეული შეცდომის წარმოშობის კონკრეტული მიზეზები ყოფილიყო მიგნებული, რადგან მხოლოდ კონკრეტული მიზეზების დადგენა იძლევა შეცდომის გამოსწორების გზების დასახვის საშუალებას.

III თავში დასახულია განხილული ტიპიური შეცდომების გამოსწორების მეთოდები და ხერხები.

თ ა ვ ი I

მოსწავლეთა მიერ დაშვებული შეცდომების შესახებ მეთოდურ ლიტერატურაში

მიუხედავად დიდი პედაგოგიკური მნიშვნელობისა, როგორც არსებული მეთოდური ლიტერატურის წყაროები გვიჩვენებს, მოსწავლეთა მიერ დაშვებული შეცდომების შესწავლა ნაკლებად მდგარა ყურადღების ცენტრში. იგი თითქმის არც გამხდარა სპეციალური შესწავლის საგნად.

ცნობები მათემატიკაში მოსწავლეთა შეცდომების შესახებ მომეტებულად გვხვდება საჟურნალო სტატიებსა და ოფიციალურ დოკუმენტებში (სტატიები წერითი გამოცდების შედეგების შესახებ მათემატიკაში, მათემატიკის სწავლების შესახებ, ღონისძიებები მათემატიკის სწავლების გაუმჯობესებისათვის). მაგალითად, კავკასიის სასწავლო ოლქის სამმართველოს 1882 წლის ცირკულარებში მოთავსებულია კავკასიის სასწავლო ოლქის მზრუნველის წინადადებები სხვადასხვა საგნის სწავლების შესახებ, სადაც გაკვრით მათემატიკაში დაშვებული შეცდომების შესახებაცაა საუბარი. მაგრამ აქ მხოლოდ ამ შეცდომების რაოდენობრივი მონაცემებია.[1]

1888 წლის სახალხო განათლების სამინისტროს ჟურნალში გვხვდება შენიშვნები 1879—1883 წლების მანძილზე ჩატარებული სიმწიფის ატესტატის მისაღები გამოცდების შესახებ. აქ აღწერილია წერითი გამოცდების შედეგები. აღრიცხულია შეცდომათა რაოდენობა. აღსანიშნავია ერთი საინტერესო ფაქტიც. სუსტ ადგილად მოსწავლეთა ცოდნაში აღიარებულია ამოცანების ამოხსნა. ამასთან ნათქვამია, რომ ამოცანების ამოხსნა ბევრჯერ ახსნა-განმარტების გარეშეა წარმოებული, რომ მოსწავლეებმა არ იციან

[1] Предложения попечителя Кавказского учебного округа от 30 ноября 1882 г., № 6858.

ალგებრული გარდაქმნები, ხოლო გამოთვლები წარმოებულია უმეტესად შემოკლებისა და მნიშვნელში ირაციონალობის განთავისუფლების გარეშე[1].

საინტერესოა აგრეთვე ნ. ნეჩაევისა და პროფ. ვ. ერმაკოვის სტატიები. ამ სტატიებში აღწერილია მათემატიკის სწავლების მაშინდელი მდგომარეობა და დასახულია ზოგიერთი ღონისძიება არსებული ნაკლის გამოსასწორებლად. ნ. ნეჩაევი მათემატიკის შესწავლას თვლის ყველასათვის ხელმისაწვდომ საქმედ და, თუ ჩამორჩენას აქვს ადგილი, ამას სწავლების მეთოდების უვარგისობას მიაწერს: „მართალია, ყველას გონება თანაბარი სისწრაფითა და სიყვარულით არ ითვისებს მათემატიკურ ჭეშმარიტებებს, მაგრამ მე მაინც დარწმუნებული ვარ, რომ ელემენტარული (низшая) მათემატიკა მისაწვდომია და ცხადი ყველასათვის უკლებლივ და, თუ ეს ასე არ არის—ამაში დამნაშავეა სწავლების მეთოდი[2].

პროფ. ვ. ერმაკოვი ილაშქრებს იმ აზრის წინააღმდეგ, ვითომც ბავშვი იბადებოდეს მათემატიკის შეთვისების განსაკუთრებული უნარით, ან არ ჰქონდეს მათემატიკის შესწავლის ნიჭი: „მე ვამტკიცებ, რომ ყველა მოსწავლე, რომელიც იჩენს ნიჭს ამა თუ იმ მეცნიერებისადმი, უპირველეს ყოვლისა, უნდა იყოს აღჭურვილი მათემატიკის შეთვისების უნარით, მათემატიკის სწავლების არსებული პრაქტიკა სკოლაში არის ერთადერთი მიზეზი იმისა, რომ მხოლოდ ზოგიერთი მოსწავლე იჩენს მიდრეკილებას მათემატიკისადმი[3].

„სწავლების საქმის კარგად დაყენების შემთხვევაში არ უნდა იყვნენ ჩამორჩენილი მოსწავლეები“[4].

უფრო გვიან, 1915 წელს, ბ. კრამარენკო გამოთქვამს აზრს კავკასიის რეალურ სასწავლებლებში 1914 წელს მათემატიკაში საბოლოო წერითი გამოცდების შესახებ. მოყვანილია შეცდომათა რიცხობრივი მონაცემები. აღნიშნულია, რომ წერით ნამუშევრებში ნაკ-

[1] О письменных работах на испытаниях зрелости в 1879—1885 г. г. журн. Министерства народного просвещения за 1888 г. июнь, июль.

[2] Н. Нечаев, О начальном преподавании алгебры. Педагогический сборник, издаваемый при Главном управлений военно—учебных заведений, 1892, № 2, стр. 63.

[3] Проф. В. Ермаков, О преподавании алгебры, Педагогический сборник издаваемый при Главном Управлении военно—учебных заведений, 1892, № 2, стр. 443.

[4] იქვე, გვ. 445.

ლებადაა ახსნა-განმარტებანი. ხშირად, საჭირო მსჯელობის მაგიერ, დაწვრილებითაა აღწერილი ამოხსნის მსვლელობა. არც ერთი სახე შეცდომისა მოყვანილი არაა[1].

საზოგადოდ რევოლუციამდელ მეთოდიკურ ლიტერატურაში შეცდომები განხილულია მხოლოდ სტატისტიკური თვალსაზრისით. თვით შეცდომის ხასიათი სრულიად უყურადღებოდაა დატოვებული. არსად არ გვხვდება შეცდომების კონკრეტული მაგალითები, მათი დახასიათება, ანალიზი.

საბჭოთა მეთოდიკურ ლიტერატურაში შეცდომების გაცნობა, აღრიცხვა იწყება სწორედ მათი კონკრეტული სახეების ჩვენებით. მაგალითად, პროფ. ს. ვორონინი მოსწავლეთა შეცდომების შესწავლას თვლის სწავლების გაუმჯობესების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან საშუალებად. „განსაკუთრებით აღსანიშნავია ის,—ამბობს პროფ. ს. ვორონინი,—რომ ერთისა და იმავე სახის შეცდომები მუდამ მეორდება. მათში გარკვეული კანონზომიერება ჩანს, რომელიც ერთი და იმავე მიზეზებით უნდა იყოს გამოწვეული. ეს გარემოება იმაზე მიგვითითებს, რომ მეთოდიკის წინ წაწევისა და მისი გაუმჯობესების საქმეში განსაკუთრებით დიდი სარგებლობისა და დახმარების გაწევა შეუძლია მოსწავლეთა შეცდომების შესწავლას".[2] იმავე სტატიაში პროფ. ს. ვორონინი აღნიშნავს, რომ „ეს თვალსაზრისი ყოველ მეთოდისტს უნდა უღვიძებდეს მოსწავლეთა შეცდომების შესწავლის ინტერესს, რათა თანდათანობით დაგროვდეს ეს დიდი მეთოდიკური მნიშვნელობის მქონე მასალა"[3].

პროფ. ს. ვორონინის სტატიაში თავმოყრილი ტიპიური შეცდომები შეკრებილია ქ. სმოლენსკის სკოლებში ჩატარებული დაკვირვებების შედეგად. ავტორს განხილული აქვს ტიპიური შეცდომები ალგებრაში. შეცდომები დალაგებულია ჯგუფებად და გაანალიზებულია თითოეული მათგანი. თვით შეცდომები და მათი ანალიზი გზადაგზა იქნება ქვევით მოყვანილი ჩვენ მიერ აღრიცხულ

[1] Б. Крамаренко, Отзыв о письменных работах по математике, исполненных на окончательных испытаниях в реальных училищах в 1914 году, Кавказский учебный округ, Тифлис, 1935.

[2] Проф. С. В. Воронин, Алгебраические ошибки учащихся в семилетней трудовой школе· Научные известия Смоленского государств. педагогического института, вып. 1,1932, стр. 29.

[3] იქვე, გვ. 29.

შეცდომებთან დაკავშირებით. აქ მხოლოდ იმას აღვნიშნავთ, რომ სტატია მეტად სასარგებლოა. იგი დაწერილია შეცდომების სალი ანალიზით. ავტორს შეცდომები მოსწავლის „დაბალი გონების“ მიზეზით კი არა აქვს ახსნილი, არამედ მიჩნეული აქვს როგორც არასწორი სწავლების შედეგი. სამწუხაროდ, ავტორს შეცდომები მათემატიკის სწავლების მხოლოდ პატარა უბანზე აქვს განხილული, ამიტომაც საკითხი ვიწრო ჩარჩოშია მოთავსებული.

ა. კისელევს განხილული აქვს მოსწავლეთა შეცდომები ალგებრაში. შეცდომები შეკრებილია ქ. ვორონეჟის სკოლებში ჩატარებული დაკვირვების შედეგად. სტატიაში მიცემულია შეცდომათა წარმოშობის მხოლოდ ზოგადი მიზეზები, ამასთანავე არ არის დასახული მათთან ბრძოლის გზები და ხერხები. ტიპიური შეცდომების წარმოშობის მიზეზებად ავტორს მიჩნეული აქვს: „1. მასწავლებლის მიერ საგნის არასაკმარისი ცოდნა, 2. მასწავლებლის მიერ საგნის მეთოდიკის არასაკმარისი ცოდნა, 3. გაუსწორებლად დარჩენილი ან დაუდევრად გასწორებული რვეულები, 4. მოსწავლეთა სუსტი ცოდნა არითმეტიკაში, განსაკუთრებით იმ საკითხებისა, რომლებიც მჭიდროდ არის დაკავშირებული ალგებრაში წესების გამოყვანასთან: არითმეტიკის ძირითადი კანონები, ძირითადი მოქმედებანი და სხვ[1]. ტიპიური შეცდომების წარმოშობას ვერ დავუკავშირებთ მხოლოდ იმ ზოგად მიზეზებს, რომლებზედაც ა. კისელევს აქვს მითითებული. ყოველ ცალკეულ შეცდომას აქვს თავისი საკუთარი კონკრეტული მიზეზი. ტიპიურ შეცდომათა აღმოსაფხვრელად სწორედ ასეთი მიზეზების გამორკვევა და დადგენაა საჭირო.

ნ. ნიკიტინი და ლ. ვოლოდინა წერენ თავიანთი დაკვირვებების შესახებ მაშინდელ სანიმუშო სკოლებში. ავტორებს ჩაუტარებიათ საცდელი საკონტროლო სამუშაო, რომლის შედეგებმა მათ უჩვენა ზოგიერთი შეცდომის საგრძნობი გავრცელებულობა[2].

ვ. პეტროვას მოყვანილი აქვს მე-7 კლასში ალგებრაში ჩატარებული საკონტროლო სამუშაოს შესრულების დროს მოსწავლეთა მიერ დაშვებული შეცდომები და მათი ანალიზი. შეცდომები უმთავ-

---

[1] А. Е. Киселев, Ученические ошибки по алгебре, происхождение их и меры борьбы с ними, журн. „Культфронт“, 1934, № 16—17.

[2] Н. И. Никитин и Л. П. Володина, Успеваемость по математике в образцовых школах. Журн. „Культфронт“, 1934, № 17—18.

რესად მრავალწევრთა დაშლასთანაა დაკავშირებული; რაც შეეხება მათ ანალიზს, იგი საკმაოდ მკრთალია. მაგალითად, მოჰყავს რა შეცდომები

$$x^3+3x^2+x=x(x^2+3x) \text{ და } x^2y^2+3xy^2-y^2=y^2(x^2+3x)$$

ამბობს: ეს შეცდომა მომდინარეობს იქიდან, რომ მოსწავლეები ვერ ერკვევიან იმ მოქმედებებში (გამრავლება, გაყოფა), რომელთა შედეგადაც მიიღება ფრჩხილებში მოთავსებული მრავალწევრი. მათ არ იციან, რომ x-ის x-ზე გაყოფით და y^2-სა y-ზე, მიიღება 1[1]. შეცდომები მრავალწევრის დაშლის დროს განხილული აქვს აგრეთვე გ. ლუტცაუს. მას აღებული აქვს მაგალითი:

$$3p(p-q)-5(q-p)^2$$

და გარჩეული ერთი ტიპიური შეცდომის სხვადასხვა გამოვლინება. უნდა აღინიშნოს, რომ ავტორი ხმარობს არაზუსტ გამოთქმებს („მინუს ნიშნის გატანა ფრჩხილებს გარეთ", „თუ ფრჩხილი ლუწ ხარისხშია", „თუ ფრჩხილი კენტ ხარისხშია"), რის შესახებაც დაწვრილებით შრომის III თავში გვექნება ლაპარაკი[2].

ა. გრაცინსკაია-დოროშკევიჩი, ეხება რა 1940 წელს უმაღლეს სასწავლებლებში მისაღები გამოცდების შედეგებს მათემატიკაში, მიღწევებთან ერთად აღნიშნავს ნაკლოვანებებსაც: „იციან რა ფორმულები, თეორემები, არ შეუძლიათ მათი გამოყვანა, დამტკიცება; ხოლო ზოგიერთს დამტკიცებად მიაჩნია ფორმულის შემოწმება რაიმე კონკრეტულ მაგალითზე".

მოყვანილი შეცდომებიდან აღსანიშნავია წილადის არასწორად შეკვეცა, რომლის წარმომშობ მიზეზად ა. გრაციანსკაია-დოროშკევიჩი მოსწავლეთა უცოდინარობას მიიჩნევს[3]. მოსწავლის უცოდინრობა ფაქტია და არა პირვანდელი მიზეზი. მაშასადამე, საკითხი ისმება თვით ამ უცოდინრობის მიზეზის მოძებნის შესახებ. საქმი-

[1] В. Петрова, Типичные недочёты в знаниях учащихся по математике за I четверть 1934/35 уч. года, журн. „Культфронт" 1934, № 21—22.

[2] Г. Лютцау, Методическая заметка о вынесении за скобки знака минус и о заключении группы членов в скобки, перед которыми ставят знак минус, журн. „Математика в школе" 1937, № 3.

[3] А. Н. Грацианская-Дорошкевич, Недоработки средней школы по математике, журн. „Математика в школе", 1941, № 3.

სათვის სწორედ მოსწავლის ამა თუ იმ საკითხის უცოდინრობის მიზეზის დადგენაა საჭირო. რაში მდგომარეობს უცოდინრობა? საიდან გამომდინარეობს იგი? ამ კითხვებზე კი ხსენებულ სტატიაში პასუხი არაა.

ა. ბერეზანსკაია ალგებრულ წილადებზე მოქმედების წარმოების დროს დაშვებული შეცდომების წარმოშობას იმ გარემოებას მიაწერს, რომ ხშირად მოსწავლეებს არ ესმით საკმარისი სიცხადით წილად გამოსახულებათა გარდაქმნა და თვით გამოსახულების აზრი. ამისათვის საჭიროდ მიაჩნია, აჩვენოს მოსწავლეებს, რომ ყველა ის გარდაქმნები და მოქმედებანი, რომლებსაც ისინი ასრულებდნენ რიცხვით წილადებზე, შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ასოით წილადებზეც. იქვე ავტორი აღნიშნავს, რომ ამ ფაქტის უცოდინრობა იწვევს შემდეგ შეცდომას:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b} \tag{1}$$

მაშინ, როცა ავტორის აზრით, არასოდეს არ გვხვდება შეცდომა:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{1}{5+2}=\frac{1}{7} \qquad (2)^{1}$$

საჭიროა აღინიშნოს, რომ დაკვირვებებმა საწინააღმდეგო მოვლენა გვიჩვენა. პირიქით, ხშირად აქვს ადგილი მეორე სახის შეცდომას ჩვეულებრივ წილადებზე შეკრება-გამოკლების მოქმედების შესწავლის დასაწყისში, ხოლო პირველი—უმნიშვნელო რაოდენობითაა. (2) სახის შეცდომის მიზეზი იმაშია, რომ მოსწავლეები ვერ გარკვეულან წილადის ცნებაში, იმაში თუ რას აღნიშნავს მნიშვნელი ან მრიცხველი. მოქმედებებს მექანიკურად ასრულებენ, არ ესმით რეალური შინაარსი. წილადები შეუსწავლიათ თვალსაჩინოების გარეშე. რაც შეეხება ალგებრულ წილადებზე მოქმედებებს, მათ მოსწავლეები მომზადებული ხვდებიან, ისინი დაუფლებული არიან ჩვეულებრივ წილადებზე მოქმედებების წარმოებას და ამიტომაც, ბუნებრივია, რომ ასეთი შეცდომის გავრცელებას არა აქვს ადგილი. მაგრამ თუ კი (1) სახის შეცდომა სადმე ყოფილა გავრცელებული (რაზეც ე. ბერეზანსკაია მიგვითითებს), ამის მიზეზი უნდა იყოს მხოლოდ ის, რომ მოსწავლეები ასოებში ვერ ხედავენ რიცხვებს. ეს კი

[1] Е. Березанская, Алгебраические дроби с одночленными знаменателями, журн. „Математика в школе", 1934, № 2.

ალგებრის პირველი გაკვეთილების მეთოდურად არასწორად ჩატარების შედეგია.

რამდენიმე სიტყვა ზოგიერთ სტატიაზე განტოლებათა შედგენით ამოცანების ამოხსნის შესახებ.

ყველა მეთოდისტი ერთხმად აცხადებს, რომ საკითხი განტოლებათა შედგენით ამოცანების ამოხსნისა არის უძნელესი ალგებრის მთელ კურსში. ნ. ოსტროვსკი ამ სიძნელეს ხედავს იმაში, რომ მოსწავლემ არ იცის არითმეტიკული ამოცანების ამოხსნა ასოითი ფორმულების შედგენაზე[1]. მ. ზმიევა, ვფიქრობთ, უფრო ახლოა სინამდვილესთან როცა ძირითად სიძნელეს ხედავს ამოცანის პირობების ალგებრულ ენაზე გადატანის პროცესში. გამომდინარე აქედან იგი თხოულობს ალგებრის სწავლების დასაწყისში სიტყვიერი გამოთქმების მიხედვით ფორმულების შედგენაზე ვარჯიშს[2].

მართლაც, ასეთი ვარჯიში უნდა იყოს კარგი საშუალება ხსენებული სიძნელის დასაძლევად.

ე. ი. იგნატიევი შეცდომებისა და სიძნელეთა მიზეზად ასახელებს მოსწავლის უცოდინრობას. მოსწავლეს ვერ გადაუწყვეტია ამოცანა. ამას იგნატიევი მოსწავლის ჩამორჩენით, მისი ინდივიდუალური თვისებებით (მეხსიერების, ყურადღების დეფექტით) ხსნის[3]. ასეთი მიდგომა მოსწავლის შეცდომებისადმი, მისი ჩამორჩენისადმი არავითარ შემთხვევაში არაა მართებული. მოსწავლის ჩამორჩენის მთავარი მიზეზი სწავლების სუსტი ორგანიზაცია და ცუდად შერჩეული მეთოდებია.

მოსწავლეთა შეცდომები მათემატიკაში სპეციალურად აქვს შესწავლილი ვ. პროჩუხაევს წერით ნამუშევრებზე დაკვირვების საფუძველზე. შრომაში[4] ვრცლადაა წარმოდგენილი ტიპიური შეცდომები ალგებრაში, მათი კლასიფიკაცია და წარმოშობის მიზეზები, რომლებიც უმრავლეს შემთხვევაში დამაჯერებლადაა მიგნებული. მაგრამ, შიგადაშიგ გვხვდება კონკრეტულობას მოკლებული ბუნდოვანი განმარტებანი. მაგალითად, შეცდომის $\sqrt[\text{მ}]{\sqrt[\text{ნ}]{a}} = \sqrt[\text{ნ}]{a}$

[1] Н. Островский, Метод составления уравнений первой степени с одним неизвестным журн. „Математика в школе", 1934, № 3.

[2] М. Змиева, Опыт подготовки учащихся к составлению уравнений первой степени. Журн. „Математика в школе" 1935, № 5.

[3] Игнатьев, Анализ причин неуспеваемости по математике в средней школе. журн. „Математика в школе", 1936, № 3.

[4] В. Прочухаев, Анализ ошибок учащихся средней школы по математике, Учёные записки Московского Госуд. педагогич. института им. Ленина, т. XVII, вып. I, 1948 г.

შესახებ ნათქვამია, რომ იგი „დაკავშირებულია გაურკვევლობასთან მოქმედების წარმოებაში" (გვ. 60).

შეცდომების გამოსწორების ხერხები, ვფიქრობთ, ზოგადია, რის გამოც მათი გამოყენება სიძნელეა. მაგალითად, ირაციონალურ გამოსახულებათა იგივური გარდაქმნების დროს დაშვებული ტიპიური შეცდომების აღმოსაფხვრელად, ავტორი ასეთ რჩევას იძლევა: საჭიროა ყოველი გარდაქმნა დაყვანილ იქნას მოსწავლის შეგნებამდე, დიდი სიფრთხილით შეირჩეს სავარჯიშო მაგალითები, რადგან სწორად შერჩეული ვარჯიშის დროს ისპობა მიზეზი არასწორი წარმოდგენების განვითარებისათვის.

მასწავლებლისათვის ადვილად გამოსაყენებელი, კონკრეტული ხერხები ამა თუ იმ სიძნელის თავიდან ასაცილებლად მათემატიკის სწავლებაში წარმოდგენილი აქვს მიხ. კონიაშვილს. შრომაში[1] განხილულია მთელი რიგი უხეში შეცდომებისა, რომლებსაც უშვებენ საშუალო სკოლის მოსწავლეები მათემატიკაში. დადგენილია მიზეზები, რომლებიც ხელს უშლიან მოსწავლეთა ცოდნის განმტკიცებას და დასახულია ღონისძიებანი მოსწავლეთა ცოდნის ხარისხის ამაღლებისათვის. ავტორი დიდ მნიშვნელობას ანიჭებს მოსწავლეთა შეცდომების შესწავლას მასწავლებლის მიერ: „მოწაფეთა მიერ დაშვებული შეცდომების ანალიზი მასწავლებლის ყველაზე უფრო საპასუხისმგებლო მოვალეობას წარმოადგენს. ასეთი ანალიზის შესრულების შედეგად ის შესძლებს შეცდომების მიზეზების გამორკვევას და შეამჩნევს, რომ ამის მიზეზს ხშირად თვითონ წარმოადგენს[2].

არსებული პედაგოგიკურ-მეთოდიკური ლიტერატურის შესწავლას ერთ ფრიად მნიშვნელოვან დასკვნამდე მივყავართ. ერთი და იგივე ტიპიური შეცდომები ალგებრაში გვხვდება სხვადასხვა ადგილას. ერთისა და იმავე სახის შეცდომა გავრცელებულია მოსკოვის, ლენინგრადის, ვორონეჟის, სმოლენსკის, ოდესის, სვერდლოვსკის, თბილისისა და სხვა საშუალო სკოლებში. ეს ფაქტი ამტკიცებს ამ შეცდომათა შესწავლის საჭიროებას, მისი გამომწვევი მიზეზების დადგენის აუცილებლობას და გამოსწორების ღონისძიების დასახვას.

---

[1] მიხ. კონიაშვილი, მოსწავლეთა ცოდნის ხარისხის ამაღლებისათვის მათემატიკაში, 1951, გვ. 72.

[2] იქვე გვ. 72.

თავი II

ტიპიური შეცდომები ალგებრაში და მათი ანალიზი

1. შეცდომები მთელ ერთწევრებსა და მრავალწევრებზე მოქმედებათა წარმოებასა და გარდაქმნაში

საშუალო სკოლის სტაბილური პროგრამის მიხედვით თემა „მთელი ერთწევრები და მრავალწევრები“ VI—VII კლასებში ისწავლება. ამიტომაც ამ თავში მოთავსებული ტიპიური შეცდომები შეკრებილია უმთავრესად VI—VII კლასების მოსწავლეთა ზეპირი პასუხებიდან და მათი წერითი ნამუშევრებიდან ალგებრაში. აღრიცხული შეცდომები დალაგებულია ალგებრული მოქმედებებისა და გარდაქმნების მიხედვით: შეცდომები მსგავს ალგებრულ გამოსახულებათა გაერთებაში, ფრჩხილების არასწორად ხმარებაში, მრავალწევრების გამოკლებასა და მრავალწევრთა მარტივ თანამამრავლებად დაშლაში.

ამ შეცდომათა შესწავლას ერთ ფრიად მნიშვნელოვან დასკვნამდე მივყავართ: მთელ ერთწევრებსა და მრავალწევრებზე მოქმედებათა წარმოებისა და გარდაქმნის სწავლებაში მტკივნეულ ადგილს წარმოადგენს ალგებრული ჯამის ფრჩხილებში მოთავსება და მისი ფრჩხილებიდან განთავისუფლება. ამასთან დაკავშირებული სიძნელე თავს იჩენს ალგებრის სწავლების მთელ მანძილზე. სადაც არ უნდა შეგვხვდეს ეს პროცესი (გამოკლების დროს მაკლების ნიშნის შეცვლა, მრავალწევრთა თანამამრავლებად დაშლა, წილადების შეკრება-გამოკლება, განტოლებათა ამოხსნა თუ სხვა), უსათუოდ წარმოიშვება სიძნელე და შეცდომათა უმრავლესობაც სწორედ აქ იყრის თავს.

მოსწავლეთა მიერ დაშვებული ტიპიური შეცდომების მხოლოდ და მხოლოდ აღრიცხვა და მათი კლასიფიკაცია საკმარისი არაა.

ამა თუ იმ საკითხის სწავლების აქტიური მეთოდებისა და ხერხების შემუშავება-გამოყენებისათვის საჭიროა საფუძვლიანად იქნეს გაანალიზებული ის ტიპიური ხასიათის შეცდომები, რომლებიც სათანადო საკითხის სწავლებასთან დაკავშირებით გვხვდება.

შეცდომის თავიდან ასაცილებლად საჭიროა შეცდომის წარმომშობი მიზეზის გამორკვევა. შეცდომის წარმომშობი მიზეზის მიგნებით ადვილდება ამ შეცდომის გამოსწორებისათვის საჭირო მარჯვე ხერხების ძიებნა. ამიტომაც შეცდომის წარმომშობი მიზეზის დადგენას უაღრესად დიდი მნიშვნელობა აქვს. თუმცა უნდა აღინიშნოს, რომ ძნელია ყველა მიზეზის მიგნება. ეს გარემოება მით უფრო გვავალებს გულდასმით შევისწავლოთ თითოეული შეცდომა.

§ 1. იმ მრავალფეროვან შეცდომათა შორის, რომელიც მსგავსი ალგებრული გამოსახულებების გაერთების დროს გვხვდება, საგულისხმოა შეცდომა $a^n+a^n=a^{2n}$ ტიპისა.

როგორც დაკვირვება გვიჩვენებს, მსგავს ალგებრულ გამოსახულებათა გაერთების შესწავლის შემდეგ, ეს შეცდომა თავს იჩენს ყოველ ხელსაყრელ მომენტში. თავისი შედეგით იგი ძალიან დამაფიქრებელია. თუ კლასში 30 მოსწავლეა, ეს შეცდომა საშუალოდ 5—6 მოსწავლის ნამუშევარში გვხვდება. იგი მყარია, შინაარსით ერთგვაროვანი—ყოველ ცალკეულ შემთხვევაში მსგავსი წევრების გაერთების მაგიერ ხდება ხარისხების გადამრავლება. თუ იგი თავის დროზე არ იქნა აღმოფხვრილი, მოსწავლეს, შესაძლოა, დაეკარგოს უნარი გაარჩიოს მსგავს წევრთა გაერთება გამრავლების მოქმედებისაგან.

VI კლასის მოსწავლეთა წერითი ნამუშევრების შესწავლისას ალგებრაში აღმოჩნდა რომ, ხსენებული შეცდომა მსგავს ალგებრულ გამოსახულებათა გაერთებაზე ორი სახისაა: 1. შეცდომა, რომელიც დაშვებულია გამრავლების მოქმედების შესწავლამდე, 2. შეცდომა, რომელიც დაშვებულია გამრავლების მოქმედების შესწავლის შემდეგ.

მოგვყავს ჯერ პირველი სახის შეცდომის მაგალითები, რომლებიც შეცდომათა I ჯგუფში მოვათავსეთ:

1. $9x^4y^2-8x^4y^2=17x^8y^4$

2. $3x^2yz+x^2yz-8x^2yz=12x^6y^3z^3$

$$3.\ (14ab^2-5a^2b+2a^3-4)+(7a^2b-12ab^2-6a^3+17)=14ab^2+$$
$$-5a^2b+2a^3-4+7a^2b-12ab^2-6a^3+17=38a^6b^6-8a^6+13$$
$$4.\ (3a^4-5a^3b+7a^2b^2)+(2a^3b-15a^4+12)+(8a^3b-13a^2b^2-19)=$$
$$=3a^4-5a^3b+7a^2b^2+2a^3b-15a^4+12+8a^3b-13a^2b^2-19=$$
$$=18a^8+15a^9b^3-20a^4b^4-7.$$

როგორც ვხედავთ, შეცდომა მდგომარეობს მსგავსი წევრების კოეფიციენტთა ალგებრული ჯამის აღების მაგიერ არითმეტიკული ჯამის აღებაში და აგრეთვე ხარისხის მაჩვენებელთა შეკრებაში, რასაც ერთწევრების გამრავლების წესი მოითხოვს. ბუნებრივია ვიფიქროთ, რომ აქ ხდება მსგავსი წევრების გაერთების წესის არევა ერთწევრების გამრავლების წესში. ამგვარად, ეს შეცდომა უნდა გვხვდებოდეს მხოლოდ და მხოლოდ იმის შემდეგ, როცა უკვე მოსწავლეებს შესწავლილი ექნებათ ერთწევრთა გამრავლება. მაგრამ დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ ამ შეცდომას ადგილი აქვს მანამდეც. მაშ, რაშია საქმე? თუ ამ ტიპის ყველა შეცდომას გულდასმით შევისწავლით, დავასკვნით, რომ საქმე აქ ორ სხვადასხვა მიზეზთან გვაქვს. შეცდომა, რომელიც ერთწევრების გამრავლების შესწავლამდეა დაშვებული, თუმცა ხსენებული ტიპისაა, მაგრამ ოდნავ განსხვავდება მისგან; ამ შეცდომებში გარდა ხარისხის მაჩვენებლების შეკრებისა, მსგავსი წევრების კოეფიციენტთა არითმეტიკული ჯამია აღებული.

ავიღოთ მაგალითები: № 1 და № 2. როგორაა მიღებული შედეგი $17x^8y^4$? იმის მაგიერ, რომ მოსწავლეს გამოეთვალა 9-ისა და—8-ის ალგებრული ჯამი, რომელიც 1-ის ტოლია, მან შეკრიბა ისინი არითმეტიკულად და მიიღო 17; ასოები გადმოწერა და შეკრიბა აგრეთვე მათი ხარისხის მაჩვენებლები. ასევეა მიღებული მეორე მაგალითის შედეგი $12x^6y^3z^3$.

შეიძლება ვიფიქროთ, რომ მოსწავლეებმა არ იციან ალგებრული ჯამის გამოთვლა. მაგრამ გადავხედოთ მაგალითებს № 3-სა და № 4-ს: იმავე შეცდომასთან ერთად, სწორად არის გამოანგარიშებული—4 და 17-ის ალგებრული ჯამი 13-მაგალითში № 3; 12-სა და—19-ს ალგებრული ჯამი—7-მაგალითში № 4. ამას გარდა, ზოგ სკოლებში იმავე საკონტროლო სამუშაოს შესრულების დროს, სადაც

ხსენებულ შეცდომებს ჰქონდა ადგილი, მოსწავლეებისათვის იყო მოცემული მაგალითები:

$$(-1)+(+4)-(+3)+(-8)-(+6);$$
$$(-4)-(-7)+(+5)-(-1);$$
$$(-2)+(-5)-(-7)-(+8)+(-15);$$

მოსწავლეთა უმრავლესობას ეს მაგალითები სწორად ამოეხსნათ. ეს ფაქტები ადასტურებენ, რომ მოსწავლემ იცის რიცხვთა ალგებრული ჯამის გამოანგარიშება. მისთვის გაუგებარი მხოლოდ ისაა, რომ მსგავსი წევრების გაერთების დროს საჭიროა მან კოეფიციენტთა ალგებრული ჯამი აიღოს და არა არითმეტიკულად შეკრიბოს ისინი.

სახელმძღვანელოში (ა. კისელევი, „ალგებრა", ნაწ. 1) § 38 ასეა დასათაურებული: „მსგავს წევრთა შეერთება". შემდეგ განმარტებაა: „მრავალწევრების იმ წევრებს, რომელნიც ერთი მეორისაგან მხოლოდ კოეფიციენტებით ან მხოლოდ ნიშნებით, ანდა სრულიად არაფრით განსხვავდებიან, მსგავსი წევრები ეწოდება". მრავალწევრების ყველა მსგავსი წევრის ერთ წევრად გაერთებას, მრავალწევრის მსგავსი წევრების შეერთება ეწოდება".

სახელმძღვანელოში მეტი განმარტება არაა ამ საკითხის შესახებ. ამის გამო მასწავლებელს უნებურად ეძლევა მეტად ფართო გასაქანი გამოიყენოს თავისი ინდივიდუალური შესაძლებლობანი, დამოუკიდებლად შეარჩიოს სათანადო მეთოდები და ხერხები. ყველაზე უფრო გავრცელებულია მსგავს წევრთა გაერთების ასეთი წესი: 1. თუ მსგავს წევრებს ერთნაირი ნიშნები აქვთ, საჭიროა შევკრიბოთ მათი კოეფიციენტების აბსოლუტური სიდიდეები და მიღებული ჯამის წინ დავწეროთ ორივე შესაკრების საერთო ნიშანი; ასოითი გამოსახულებანი უცვლელად გადმოვწეროთ. 2. თუ მსგავს წევრებს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ, საჭიროა კოეფიციენტები შევადაროთ აბსოლუტური სიდიდის მიხედვით, უდიდეს აბსოლუტურ სიდიდეს გამოვაკლოთ უმცირესი აბსოლუტური სიდიდე და მიღებული სხვაობის წინ დავწეროთ იმ წევრის ნიშანი, რომლის კოეფიციენტიც აბსოლუტურად უდიდესია; ასოითი გამოსახულებანი უცვლელად გადმოვწეროთ.

როცა მოსწავლე ამ წესით სწავლობს მსგავს გამოსახულებათა გაერთებას, მას ეს წესი მხოლოდ მსგავს წევრთა გაერთების დამა-

ხასიათებელი ჰგონია, მიაჩნია ახალ წესად. ნამდვილად კი აქ განმეორებულია რიცხვთა ალგებრული ჯამის გამოთვლის წესი.

რაც შეეხება ტერმინს „მსგავსი წევრების შეერთება“—იგი, უდავოდ, უვარგისია. მოსწავლეს „შეერთება“ შეკრების სინონიმად ეჩვენება. შეერთების ქვეშ ის სიდიდეთა არითმეტიკულ ჯამს გულისხმობს: „თუ შეერთებაა,—ფიქრობს იგი, მაშ, უნდა მივუმატოთ“ და სრული სიმშვიდით უმატებს ერთმანეთს როგორც კოეფიციენტებს, ისე მაჩვენებლებსაც. ამიტომაც ტერმინი „მსგავს წევრთა შეერთება“ დიდ როლს თამაშობს ამგვარი შეცდომების წარმოშობაში. უკეთესია ვიხმაროთ „მსგავს წევრთა გაერთება“, მით უმეტეს, რომ „მათემატიკურ ტერმინოლოგიაში“(საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის გამომცემლობა, 1944) ორივე ეს ტერმინია მოცემული.

რა თქმა უნდა, ამ ტიპის შეცდომის მიზეზი მხოლოდ ეს არაა. ამას მოწმობს ის გარემოება, რომ შეცდომათა რიცხვი მატულობს და უფრო ხშირი ხდება ერთწევრთა და მრავალწევრთა გამრავლების შესწავლის შემდეგ ეს კი იმის დამადასტურებელია, რომ გამრავლების წესის არევა ხდება მსგავს წევრთა გაერთების წესში.

მართლაც, გავეცნოთ ამ შეცდომებს. ალგებრის სწავლების ამ ეტაპზე შეცდომები მსგავს ალგებრულ გამოსახულებათა გაერთებაზე სახეს იცვლის. ამიტომ ისინი მოთავსებულ იქნა შეცდომათა II ჯგუფში.

5. $-16x^2y^4+3x^2y^4=-13x^4y^8$

6. $(3x^2-2y^2)(2x^2-3y^2)=6x^4-4x^2y^2-9x^2y^2+6y^4=6x^4-13x^4y^4+$
$+6y^4$

7. $(8a^3-3a^2x+ax^2)(4a^2-2ax+3x^2)=32a^5-16a^4x+24a^3x^2-$
$-12a^4x+6a^3x^2-9a^2x^3+4a^3x^2-2a^2x^3+3ax^4=32a^5-28a^8x^2+$
$+34a^9x^6-11a^4x^6+3ax^4$

8. $(a^4+a^3b-a^2b^2-ab^2):(a^2-b^2)=a^2+2a^3b^3$

$\underline{\mp a^4 \pm a^2b^2}$

$2a^5b^3-a^2b^2$

$\underline{\mp 2a^5b^3 \pm 2a^3b^5}$

(ab^3-ab^2) ნაშთი

$$
\begin{array}{l}
9.\ (6a^3+7a^2-23a+4):(3a-4)=2a^2+5a^3-a-\dfrac{4}{3} \\
\underline{\mp 6a^3 \pm 8a^2} \\
\qquad\qquad 15a^4-23a+4 \\
\qquad\qquad \underline{\mp 15a^4 \pm 20a^3} \\
\qquad\qquad\qquad -3a^2+4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\pm 3a^2 \mp 4a} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -4a+4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\pm 4a \mp \dfrac{16}{3}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -1\dfrac{1}{3}\ (\text{ნაშთი})
\end{array}
$$

ამ შეცდომებში მსგავსი წევრების კოეფიციენტთა ალგებრული ჯამი მეტწილად სწორად არის გამოთვლილი. შეცდომა მდგომარეობს მხოლოდ ხარისხის მაჩვენებელთა შეკრებაში. ასე, მაგალითად: მაგალითში № 5—კოეფიციენტთა ალგებრული ჯამი სწორადაა გამოთვლილი—16 და 3 გვაძლევს—13-ს; შეცდომა მხოლოდ მსგავს წევრებში შემავალი ასოების ხარისხის მაჩვენებლების შეკრებაშია: x^2y^4 და x^2y^4-ის გაერთებით მიღებულია x^4y^8. ასეთივე ხასიათისაა შეცდომები მაგალითებში: №№ 6, 7. ამასთან, მაგალითებში №№ 6, 7 შეცდომა მრავალწევრთა გამრავლების უშუალო შედეგია. ამ შეცდომების განსხვავება I ჯგუფის შეცდომებისაგან მხოლოდ მსგავსი წევრების გაერთების პროცესში კოეფიციენტის გამოანგარიშებაშია. I ჯგუფის შეცდომებისათვის დამახასიათებელია მსგავს წევრთა კოეფიციენტების არითმეტიკული ჯამის გამოთვლა; II ჯგუფის შეცდომებში კოეფიციენტი სწორადაა აღებული.

საყურადღებოა ის ფაქტი, რომ შეცდომა VII კლასში იჩენს თავს. ამას მოწმობს მაგალითები: №№ 8, 9. მაგრამ აქ შეცდომას ახალი გამოვლინება აქვს. მოსწავლე ალგებრულ გამოსახულებებში წევრების გაერთიანების დროს ერთსა და იმავე ასოს ხარისხის მაჩვენებლებს აკლებს ერთმანეთს. მოყვანილ № 9 მაგალითში $-23a$ და $20a^3$ გაუერთებია და მიუღია—$3a^3$. ანალოგიური მაგალითების შესწავლით ირკვევა შემდეგი: გაყოფის მოქმედების შესწავლის შემდეგ ადგილი აქვს ამ შეცდომას, თუმცა მცირე რაოდენობით; აშკარაა გაყოფის გავლენა; ერთსა და იმავე მაგალითში ასეთ შეცდომასთან გვერდით

გაერთებულია მსგავსი წევრები ხარისხის მაჩვენებლების შეკრებით (ab^3 და a^2b^2-ის გაერთებით მიუღია $2a^5b^3$, მაგალითი 8; $7a^2$ და $8a^2$-ის გაერთებით მიუღია $15a^4$. მაგალითი № 9). რით აიხსნება უკანასკნელი ფაქტი? ვფიქრობთ, აქ მოსწავლე აკავშირებს ერთმანეთთან ხარისხის მაჩვენებლებსა და კოეფიციენტებზე მოქმედებებს. თუ კოეფიციენტების აბსოლუტურ სიდიდეებს კრებს ($7a^2$ და $8a^2$), მაშინ ამ წევრებში შემავალი ასოების ხარისხის მაჩვენებლებსაც უმატებს ერთმანეთს ($15a^4$), თუ უხდება კოეფიციენტების აბსოლუტურ სიდიდეთა გამოკლება ($-23a$ და $20a^3$, $-a^2b^2$ და $2a^3b^6$), მაშინ აკლებს ამ წევრებში შემავალ ასოების ხარისხის მაჩვენებლებსაც (ab^3, $-3a^2$). აქვე უნდა აღვნიშნოთ, რომ ეს დასკვნა მიღებულია მხოლოდ 37 მაგალითის (№ 8 და № 9-ის ანალოგიურის) შესწავლის საფუძველზე, ამიტომ იგი ჯერჯერობით მხოლოდ მოსაზრებაა, რომელიც შემდგომ კვლევას საჭიროებს.

რა არის მაინც ხსენებული შეცდომების წარმოშობის მიზეზი? საკმარისი არ იქნება, რომ მიზეზად დავასახელოთ გამრავლების (და ხან გაყოფის) მოქმედების არევა მსგავს წევრთა გაერთებასთან, როგორც ეს ხშირად ისმის, როცა კი ხსენებულ შეცდომას ახსენებენ. ორი მოქმედების ერთმანეთში არევა შეცდომის ასახსნელად ვერ გამოგვადგება. მართალია, მოსწავლეს ერთმანეთში ერევა მოქმედებები, ისინი ვერ გაუმიჯნავს ერთიმეორისაგან, მაგრამ ესაა სწორედ შეცდომა და არა მისი ახსნა. მიზეზები ალგებრის პირველ გაკვეთილშია, სადაც ალგებრული სიმბოლიკა მუშავდება. მოსწავლე, შეჩვეული რიცხვებს, ძნელად ეგუება მათი ასოებით „შეცვლას." ცნობილია, რომ ასოების შემოღებას და ხმარებას მოსწავლეები დიდი გაკვირვებით, უგულოდ და უხალისოდ ხვდებიან, ამ „ახალს" ისინი არ თანაუგრძნობენ.

„რა საჭიროა ასოები? რიცხვები ხომ უკეთესი არის". აი კითხვა, რომელიც თავიდან ვერ მოუშორებია მოსწავლეს"[1].

მასწავლებლის მიერ ალგებრული სიმბოლიკის შემოღება ვერაა ისეთი, რომ მოსწავლეებმა ასოებში რიცხვები დაინახონ. ეს გადასვლა არითმეტიკიდან ალგებრის, შედარებით უფრო „მდიდარ" ენაზე, უმეტესად, ისეთი აჩქარებით ხდება, რომ ვერ ასწრებს და-

[1] მ ი ხ. კ ო ნ ი ა შ ვ ი ლ ი, ელემენტარული ალგებრის პირველი გაკვეთილები, 1939, გვ. 4.

ვიდეს მოსწავლის შეგნებამდე. არითმეტიკასა და ალგებრას შორის არაა დამყარებული კავშირი. უფრო მეტიც, „ყველა ამ სიძნელეთა მიზეზი, პირველ ყოვლისა, არითმეტიკიდან მოწყვეტაში იმალება, იმაში, რომ არითმეტიკასა და ალგებრას შორის ხიდი არაა გადებული; მოსწავლის არითმეტიკის ცოდნა მასწავლებლის მიერ არაა გამოყენებული ასოით გამოსახულებებზე თანდათანობით გადასასვლელად და,—რაც მთავარია, ასოებზე წარმოებულ მოქმედებათა სწორად გასაგებად“[1].

§ 2. გადავიდეთ შეცდომაზე ფრჩხილების ხმარებაში. მიუხედავად სიმრავლისა, შეცდომები ფრჩხილების ხმარებაში შინაარსით ორ ჯგუფად იყოფა: ზედმეტად ფრჩხილების ხმარება და ფრჩხილების გამოუყენებლობა, სადაც მათი ხმარება აუცილებელია. პირველი სახის შეცდომა უფრო მრავლად გვხვდება; ეს შეცდომა განსაკუთრებით ალგებრული წილადების შესწავლის დროს იჩენს თავს, რადგან წილადებზე მოქმედების შესრულების პროცესში ფორმალურად იქმნება ხელისშემწყობი პირობები ასეთი შეცდომების დასაშვებად.

მოგვყავს ფრჩხილების ზედმეტად ხმარების მაგალითები.

$$10.\ \frac{2a^3+4ab+3ax+6bx}{a^2+4ab+4b^2}=\frac{2a(a+2b)+3x(a+2b)}{(a+2b)^2}=$$

$$=\frac{(a+2b)(2a+3x)}{(a+2b)^2}=\frac{(2a+3x)}{(a+2b)}$$

11. ნაპოვნია სწორად ორი ალგებრული გამოსახულების უდიდესი საერთო გამყოფი, რომელიც ფრჩხილებშია ჩასმული:

$$\left(\frac{4}{25}a+\frac{1}{16}b^4\right)$$

$$12.\ \frac{a^2+6a+9}{a^2-9}=\frac{(a+3)^2}{(a+3)(a-3)}=\frac{(a+3)}{(a-3)}$$

$$13\ \frac{bm-an}{ab}:\frac{bm+an}{ab}=\frac{(bm-an)\,ab}{ab(bm+an)}=\frac{(bm-an)}{(bm+an)}.$$

[1] А. Н. Барсуков, Уравнения первой степени в средней школе, 1948, стр. 22.

შედარებით უფრო უხეშია ისეთი შეცდომა, რომელიც გამოწვეულია ფრჩხილების გამოუყენებლობით. ფრჩხილების უხმარებლობა იწვევს მოქმედებათა მსვლელობის ცვლილებას. იცვლება, რა თქმა უნდა, პასუხიც.

მოგვყავს შეცდომები გამოწვეული ფრჩხილების გამოუყენებლობით:

$$14: \frac{x-y}{xy} \cdot \frac{xy}{x-y} = \frac{x-y \cdot xy}{xy \cdot x-y} = \frac{x-xy^2}{x^2y-y}.$$

$$15. \frac{a^2+ab}{2b} \quad (a^2-b^2) = \frac{a^2+ab\,(a^2-b^2)}{2b}.$$

$$16. \frac{2bc}{c+b} : \frac{c^2-b^2}{3} = \frac{2bc \cdot 3}{c+b \cdot c^2-b^2} = \frac{6bc}{c+c^2b-b^2}.$$

17. მონაცემი: დავწეროთ ალგებრული გამოსახულების სახით, x და y-ის სხვაობის განაყოფი ამავე რიცხვების ჯამზე.
პასუხი: $x-y : x+y$.

$$18. 9-(m^2+6m)^2 = 3+(m^2+6m) \cdot 3-(m^2+6m) = 3+3m^2+$$
$$+18m-m^2-6m = 3+2m^2+12m.$$

$$19. \left(\frac{1}{x} - 1\right) \quad \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) = \left(\frac{1-x}{x}\right) : \left(\frac{1-x^2}{x^2}\right) =$$
$$= \frac{1-x \cdot x^2}{x \cdot 1-x^2} = 0.$$

ამგვარად, როგორც მაგალითებიდანაც ჩანს შეცდომები ფრჩხილების ხმარებაში ძირითადად მოყვანილი ორი სახითა გვხვდება.

ერთი შეხედვით, შეიძლება ვიფიქროთ, რომ ფრჩხილების ზედმეტად ხმარება შეცდომას არც კი წარმოადგენს. იგი თითქოს უვნებელი ფაქტია: შედეგი არ იცვლება დავწერთ $\frac{(a+3)}{(a-3)}$-ს, თუ $\frac{a+3}{a-3}$-ს. სულ სხვაა მეორე სახის შეცდომა გამოწვეული ფრჩხილების დაუწერლობით, რომელიც სრულიად ცვლის შედეგს. მაგრამ, მიუხედავად გარეგნული განსხვავებისა, ორივე ამ შეცდომას ერთი მიზეზი აკავშირებს, მათ ერთი საფუძველი აქვთ. ესაა სრული უცოდინრობა მოქმედებათა თანრიგისა, ფრჩხილების მნიშვნელო-

ბისა ამაში და, მაშასადამე, მათი დაწერის აუცილებლობისა. მართალია, ეს უცოდინრობა თავს იჩენს უფრო მეტად ალგებრაში როცა კი მისთვის ხელისშემწყობი პირობები გაჩნდება, მაგრამ მისი საფუძველი, ფესვები უდავოდ, არითმეტიკის სწავლებაში იმალება. ყველა ის შეცდომა, რომელიც აქაა მოყვანილი, ამ სიძნელის მხოლოდ გარეგნული გამოვლენაა. ავიღოთ შეცდომა № 10 მაგალითში. იგი დაშვებულია წილადის $\frac{(a+2b)(2a+3b)}{(a+2b)^2}$ შეკვეცის დროს. $(a+2b)$-ზე. როცა ამ წილადის შეკვეცა მოხდება, ისმება კითხვა: დაიწეროს თუ არა ფრჩხილები? საინტერესოა, სვამს თუ არა ამ კითხვას თავის წინაშე მოსწავლე? ერთხელ, დაფასთან გამოძახებულმა მოსწავლემ მაგალითში $\frac{(x-y)(x+y)}{z(x-y)}$ მოახდინა წილადის შეკვეცა $(x-y)$-ზე და სანამ შედეგს დაწერდა, მკითხა:

— ისევ უნდა დავწეროთ $x+y$ ფრჩხილებში? ამ მოსწავლის წინაშე დაისვა ეს კითხვა. მაგრამ ყველას წინაშე ეს კითხვა არ ისმება.

მოსწავლე გამოვიძახე დაფასთან და მაგალითი

$$\frac{bm-an}{ab} : \frac{bm+an}{ab}$$

(მაგალითი № 13) გადავაწყვეტინე. საკონტროლო ნამუშევარში მას შეცდომა ჰქონდა ამ მაგალითში. სრულიად უყოყმანოდ დაწერა მან შედეგი იმავე შეცდომით: $\frac{(bm-an)}{(bm+an)}$. შეკითხვაზე—რატომ შერჩა ფრჩხილები ამ წილადს? მან მიპასუხა: $bm+an$ და $bm-an$ რა შუაშია, შეკვეცა მოხდა ab ზე, სხვა სიდიდეები უცვლელად გადმოვწერეო. როგორც ვხედავთ, მოსწავლეს ეგონა, რომ ფრჩხილები $bm+an$ და $bm-an$ გამოსახულების ატრიბუტი იყო. ამავე მიზეზს მიეწერება შეცდომა მაგალითებში: №№ 10, 11, 12,13.

პირიქით, ზოგი მოსწავლე არ ხედავს რა ფრჩხილებს წილადებში $\frac{x-y}{xy}$ და $\frac{xy}{x-y}$ (მაგალითი № 14) არც მოქმედებათა შესრულების დროს უწერს მათ: „თუ $x-y$ ფრჩხილების გარეშე იყო, რად უნდა დაუწეროს ფრჩხილები ახლა?“ აქაც მოსწავლეს ფრჩხი-

ლები გამოსახულების საკუთარი დანართი ჰგონია, რასაც ადასტურებს მაგალითები №№ 14, 15, 16, 17, 18, 19.

ამგვარად, მოსწავლეს თავისი გარკვეული აზრი აქვს გამომუშავებული. ის ამ აზრისდაკვალად მოქმედებს და დარწმუნებულიცაა თავის სისწორეში. რა თქმა უნდა, ამის გამოსწორება უფრო ძნელია; აქ საჭიროა ჯერ ამ მცდარი აზრის აღმოფხვრა და შემდეგ ახალი სწორი აზრის დანერგვა.

ფრჩხილების გამოუყენებლობა იწვევს მოქმედებათა რიგის შეცვლას მაგალითში, რაც თავის მხრივ სცვლის შედეგს; ასე, მაგალითი № 14 გვაძლევს $\frac{x-xy^2}{x^2y-y}$ იმ დროს, როცა მისი ფრჩხილების დახმარებით გადაწყვეტის შემთხვევაში მიიღებოდა სწორი პასუხი: 1. უცნაურია პასუხი მაგალითისა № 19, ფრჩხილების გარეშე დაწერილი წილადი $\frac{1-x\cdot x^2}{x\cdot 1-x^2}$, როგორც ჩანს, „შეკვეცილია“ x-ზე, x^2-ზე და „მიუღია“ მოსწავლეს 0. მიზეზის გამორკვევისას მოსწავლეები ჩვეულებრივ ასე პასუხობენ: „x, x-თან შეიკვეცა, x^2-x^2-თან, 1—1-თან, რაღა დარჩა?—არაფერი!“ აი, ეს „არაფერია“ ნულად რომ იქცევა.

ფრჩხილების ზედმეტად დაწერისა და მათი დაუწერლობის მიზეზები არითმეტიკის ცუდი ცოდნიდან ან ცუდად სწავლებიდან მომდინარეობს. მაგალითებში მთელ რიცხვებზე ყველა მოქმედების შესრულებით მრავლად გვხვდება ფრჩხილები. აი, სწორედ აქ უნდა გავარკვიოთ მოსწავლე ფრჩხილების ხმარების არსში. განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს აქ სწორ კარნახს მაგალითების ჩაწერის დროს. ამ დროს ადვილიცაა იმის გაგება, ერკვევა თუ არა მოსწავლე ფრჩხილების საჭიროებაში.

ძალიან ხშირად მასწავლებელი მაგალითს 11—(5—0,45) ასე უკარნახებს:

„—11 გამოვაკლოთ, გახსენით ფრჩხილი, 5-ს გამოვაკლოთ 0,45, დახურეთ ფრჩხილი“ (გაკვეთილზე ჩანაწერიდან), ნაცვლად იმისა, რომ ეთქვა:

11-ს გამოვაკლოთ 5-ისა და 0,45-ის სხვაობა. ან კიდევ, მასწავლებელი უკარნახებს მაგალითს: „—გახსენით ფრჩხილი, $\frac{1}{2}$-ს

მიუმატეთ 0,8, დახურეთ ფრჩხილი, გავამრავლოთ 3+0,12, ეს ფრჩხილებში, ბავშვებო“ (გაკვეთილზე ჩანაწერიდან). ნაცვლად ამისა: $\frac{1}{2}$-სა და 0,8-ის ჯამი გავამრავლოთ 3-სა და 0,12-ს ჯამზე.

უშინაარსო კარნახის შემთხვევები მხოლოდ არითმეტიკის გაკვეთილზე როდია. უამრავი მაგალითის მოყვანა შეიძლება ალგებრის გაკვეთილებიდანაც.

სანიმუშოდ მოგვყავს ერთი: მეექვსე კლასში, გამოსახულებას $(0{,}1x^2+0{,}02y^2)-(0{,}17x^2-0{,}08y^2)$, მასწავლებელი ასე უკარნახებს: „—გახსენით ფრჩხილი, $0{,}1x^2$ პლუს $0{,}02y^2$ დახურეთ ფრჩხილი, მინუს, გახსენით ფრჩხილი $0{,}17x^2$ მინუს $0{,}08y^2$, დახურეთ ფრჩხილი“.

ცხადია, ასეთი კარნახით მოსწავლე მაგალითს სწორად წერს, მაგრამ არ აზროვნებს, რის გამოც, როცა დამოუკიდებლად უხდება მუშაობა, ზემოხსენებულ შეცდომას უშვებს.

§ 3. ყველაზე მეტი შეცდომები გამოკლების მოქმედებაზე მოდის. მრავალწევრთა გამოკლება ის „ჯირკია“, რომელზედაც მოსწავლეთა დიდი უმრავლესობა იტეხს ფეხს. დაკვირვების საფუძველზე მიღებული შედეგები ადასტურებს, რომ სადაც არ უნდა შევხვდეს მრავალწევრთა გამოკლება, ალგებრის შესწავლის პირველ თუ შემდგომ ეტაპებზე, შეცდომა უსათუოდ იჩენს თავს და თანაც ჭარბი რაოდენობით. განსაკუთრებით გავრცელებულია შეცდომა.

$$(a+b)-(c+d+e)=a+b-c+d+e.$$

იგი იმდენად ფესვგადგმულია, რომ არ შეიძლება დამკვირვებელს თვალში არ მოხვდეს.

მოგვყავს აღრიცხული შეცდომის საილუსტრაციოდ რამდენიმე მაგალითი.

20. $(6a^3-7a^2b+4ab^2-3b^3)-(5a^3-2a^2b+4ab^2)=6a^3-7a^2b+$ $+4ab^2-3b^3-5a^3-2a^2b+4ab^2=a^3-9a^2b+8ab^2-3b^3.$

21. $(8y^2-cx+45c^2-12)-(-3y^2+24cy+45c^2+11)+$ $+(20y^2-2cy+14)=8y^2-cx+45c^2-12-3y^2+24cy+45c^2+$ $+11+20y^2-2cy+14=25y^2-cx+90c^2+22cy+13.$

22. $(4a-3x)(5c+2d)-(6a-4x)(5c+2d)=(5c+2d)(4a-3x-$ $-6a-4x)=(5c+2d)(-2a-7x).$

გამოკლების შესწავლას მოსდევს მრავალწევრის ფრჩხილებში ჩასმისა და ფრჩხილების გახსნის შესწავლა.

მოგვყავს ამ დროს დაშვებული შეცდომების მაგალითები:

$$23.\quad a+\{4x-[a-(3c-3x)+2c+(a-2x-c)]\}=a+\{4x+$$
$$-[a-3c-3x+2c+a-2x-c]\}=a+\{4x-a-3c-3x+2c+$$
$$+a-2x-c\}=a+4x-a-3c-3x+2c+a-2x-c=a-x-2c$$

24. მონაცემი $m^2-3n^2+4p^2-5q^2-r^2$ მრავალწევრში მისი სიდიდის შეუცვლელად დასვით ფრჩხილები:

1) $3n^2$-ის წინ და $4p^2$-ის შემდეგ, 2) $5q^2$-ის წინ და r^2-ის შემდეგ, 3) ჩასვით მთელი მრავალწევრი ფრჩხილებში და ფრჩხილების წინ დაწერეთ მინუს ნიშანი.

პასუხი: $m^2-3n^2+4p^2-5q^2-r^2=m^2-(3n^2+4p^2)-5q^2-r^2=$
$=m^2-3n^2+4p^2-(5q^2-r^2)=-(-m^2-3n^2+4p^2-5q^2-r^2)$.

როგორც ვხედავთ, გამოკლების შესრულების დროს დაშვებული შეცდომები აქაც იმავე სახით მეორდება. დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ ყველაზე მტკივნეული ადგილი სასკოლო ალგებრის კურსში არის ალგებრული ჯამის ფრჩხილებში მოთავსება და მისი ფრჩხილებიდან განთავისუფლება.

VI—VII კლასების ალგებრის კურსში ეს პროცესი მრავლად გვხვდება: მრავალწევრთა გამოკლება, მრავალწევრთა თანამამრავლებად დაშლა წილადების შეკრება-გამოკლება, განტოლებათა ამოხსნა და სხვა. დავიწყოთ გამოკლებიდან. გამოკლების შესწავლა დაკავშირებულია მთელ რიგ სიძნელეებთან. არითმეტიკის შესწავლის დროს გამომუშავებული ჩვევები მოსწავლეებს მხოლოდ შემდეგ წარმოდგენებს უქმნის: გამოკლება არის შეკრების შებრუნებული მოქმედება; რაიმე რიცხვს გამოვაკლოთ მეორე რიცხვი, ნიშნავს ვიპოვოთ ისეთი რიცხვი, რომელიც მეორესთან ჯამში მოგვცემს პირველ რიცხვს; გამოკლების შესრულება ყოველთვის არაა შესაძლებელი.

ალგებრა იძლევა უფრო ფართო შესაძლებლობას გამოკლების მოქმედების შესასრულებლად. გამოკლების მოქმედება რაციონალურ რიცხვთა არეში (მოსწავლეებს ალგებრის შესწავლის ამ ეტაპზე

საქმე აქვთ მხოლოდ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლესთან) ყოველთვისაა შესაძლებელი. პირველი სიძნელე ამ სიახლესთანაა დაკავშირებული. უნდა ითქვას, რომ მოსწავლე ამას მალე ეჩვევა.

გამოკლების განმარტებაც მოსწავლისათვის ადვილი გასაგებია: a რიცხვს გამოვაკლოთ b რიცხვი, ნიშნავს ვიპოვოთ ისეთი რიცხვი, რომლის ჯამი b რიცხვთან იძლეოდეს a რიცხვს. შედარებით ადვილად ეგუება მოსწავლე აგრეთვე იმას, რომ რაიმე რიცხვის გამოკლების მაგიერ შესაძლებელია მივუმატოთ საკლებს მისი მოპირდაპირე რიცხვი. მაგრამ, ალგებრული ჯამის გამოკლების შეცვლა შებრუნებული ნიშნებით აღებული მისი წევრების სათითაო მიმატებით ძალიან უძნელდებათ მოსწავლეებს. ყველაზე მეტი შეცდომებიც სწორედ ამ საკითხის შესწავლის დროს გვხვდება. თვით ტერმინი „ალგებრული ჯამი“ მათ ცნობიერებაში უთუოდ მძიმედ იჭრება. ჯამი წარმოდგენილი აქვთ ერთი გარკვეული რიცხვით; მაგალითად: $5+7=12$, აქ 12 ჯამია 5-სა და 7-ის. მაგრამ თუ $a+b$, a-სა და b რიცხვების შეკრების საბოლოო შედეგია, რომ ის ჯამია, ეს უკვე მათთვის გაუგებარია, მით უმეტეს $a+b-2c$ და სხვა ასეთი გამოსახულებანი. ძალიან ხშირად მოსწავლეებს არ ესმით, რომ გამოკლების მოქმედების წარმოება მრავალწევრებზე მთავრდება მაშინ, როდესაც საკლებ მრავალწევრს მიუწერენ მაკლებს შებრუნებული ნიშნით; პირიქით, გამოკლების წარმოება მათ სწორედ მსგავს წევრთა გაერთებაში წარმოუდგენიათ.

კითხვაზე, როდის მოახდინეთ გამოკლება?, არამც თუ VI კლასის, არამედ მაღალი კლასის მოსწავლეებიც ძალიან ხშირად ვერ იძლევიან დამაკმაყოფილებელ პასუხს. VI კლასის მოსწავლემ სწორად ამოხსნა მაგალითი:

$$(5a-3b+6c-7d)-(3a-8b+3c-2d)=5a-3b+6c-7d-$$
$$-3a+8b-3c+2d=2a+5b+3c-5d.$$

მაგრამ ზემომოყვანილ კითხვაზე საპასუხოდ მან მიჩვენა საბოლოო პასუხი და მითხრა: $5a$-ს გამოვაკელი $3a$, $8b$-ს გამოვაკელი $3b$ და ა. შ. იგი სრულიად დარწმუნებული იყო თავისი პასუხის სისწორეში.

VIII კლასის მოსწავლემ, რომელიც ორუცნობიან განტოლებათა სისტემას ხსნიდა ალგებრული შეკრების ხერხით, ვერ მიპასუხა

კითხვაზე, როდის მოახდინა გამოკლება, რად შეუცვალა მეორე განტოლების ყველა წევრს ნიშნები? შეკითხვა გამოწვეული იყო უადგილოდ დაწერილი მინუს ნიშნით.

$$\begin{array}{r|c|l} x+y=15 & 2 & \\ 3x+2y=28 & 1 & \end{array} - \begin{array}{r} 2x+2y=30 \\ \underline{\mp 3x \mp 2y = \mp 28} \\ -x=2 \\ x=-2 \end{array}$$

მოსწავლემ ამიხსნა, რომ გამოკლება მოახდინა $2x$ და $3x$-ს შორის, აგრეთვე 30-ს გამოაკლო 28.

ზოგიერთი სიძნელის მიზეზი შეიძლება არითმეტიკის სწავლებაშიც ვეძიოთ. არითმეტიკის სწავლება უმრავლეს შემთხვევაში არაპერსპექტიულია, ე. ი. არითმეტიკის სისტემატური კურსის შესწავლის დროს არაა გათვალისწინებული ის მოთხოვნილებანი, რომლებსაც ალგებრის სწავლება აყენებს. ეს გარემოება მეტისმეტად უწყობს ხელს მთელი რიგი სიძნელეების წარმოშობას.

IV—V კლასებში მაგალითების ამოხსნა ყოველთვის ერთიდაიმავე წესით ხდება; მაგალითად, 12—(7—3), როგორც წესი, გამოიანგარიშება ასე: 1) 7—3=4-ს; 2) 12—4=8. არ ხსნიან ასეთ მაგალითს შემდეგი გზით: 12—7+3.

ყველა ზემოთ ჩამოთვლილი მიზეზი ჰქმნის შეცდომის $(a+b)-(c-d+e)=a+b-c-d+e$ დაშვების საფუძველს. რა ხდება აქ? გამოკლების წესის თანახმად საჭიროა საკლებ მრავალწევრს მივუწეროთ მაკლები მრავალწევრი შებრუნებული ნიშნით. ხდება ამ წესის დარღვევა—ორივე მრავალწევრი ფაქტიურად თავისივე ნიშნებით არის ერთმანეთისათვის მიწერილი. გამონაკლისს შეადგენს თითქოს მაკლების პირველი წევრი c. იქნება აქ წესის მიხედვით იმოქმედა მოსწავლემ და c-ს ნიშანი შეუცვალა? მაგრამ დაკვირვება მრავალ მაგალითსა და მოსწავლეზე შემდეგს ადასტურებს: გამოკლების მოქმედების ნიშანი მოსწავლეს c თვის მიუწერია, ისე, თითქმის იგი c-ს საკუთარი ნიშანი ყოფილიყო. მაგალითის ასე გადაწყვეტაში გამოკლების მოქმედება სრულიად არაა შესრულებული. ისმის კითხვა: თვით c-ს ხომ ჰქონდა თავისი ნიშანი? (ამ შემთხვევაში + ნიშანი). გარკვეულ როლს თამაშობს აქ შეთანხმება, რის მიხედვითაც პირველ წევრს, თუ ის დადებითია, ნიშანი

არ ეწერება. მოსწავლე, რომელიც ივიწყებს ამ შეთანხმებას, ისე იქცევა, თითქოს ეს ნიშანი არც არსებობდეს და, ბუნებრივია, „ცდილობს შეუქმნას“ ნიშანი c-ს. აქვეა გამოკლების მოქმედების ნიშანი. მასაც არა აქვს ადგილი, მოსწავლემ არ იცის სად წაიღოს ის ამ ორი მოსაზრების გაერთება გვაძლევს „$-c$“-ს. (მაგალითები №№ 20, 22).

საინტერესოა შემთხვევა, როდესაც მაკლები მრავალწევრის პირველი წევრი უარყოფითია. ასეთ შემთხვევაში ნიშანი „მინუს“ უცვლელადაა დარჩენილი, ხოლო გამოკლების ნიშანი უკუგდებულია, (მაგალითი № 21).

შეცდომები, დაკავშირებული მრავალწევრთა გამოკლებასთან, იმავე სახითაა განმეორებული მრავალწევრთა ფრჩხილებში ჩასმისა და მისი ფრჩხილებიდან განთავისუფლების შესწავლის დროს. ამას მოწმობს მაგალითები: №№ 23, 24.

§ 4. ცნობილია, რომ ზოგიერთი მრავალწევრის მამრავლებად დაშლისათვის საჭირო ხდება მისი წევრების დაჯგუფება. დაჯგუფების დროს ხშირად ნიშნის შეცვლაა აუცილებელი. შეცდომათა უმეტესობა სწორედ ასეთი მრავალწევრების დაშლაში გვხვდება. თუმცა, უნდა აღინიშნოს, რომ აქ შეცდომა მრავალწევრის თანამამრავლებად დაშლას კი არ ეკუთვნის, არამედ იგი მრავალწევრის ფრჩხილებში მოთავსებასთანაა დაკავშირებული. გავეცნოთ ამ შეცდომებს.

25. $4y(a^n-y^n)-a^n+y^n=4y(a^n-y^n)-(a^n+y^n)$.

26. $4y(a^n-y^n)-a^n+y^n=4y(a^n-y^n)-(a^n+y^n)=(a^n-y^n)(4y-1)$.

27. $$k(b-1)+m(1-b)-b+1=k(b-1)+m(b-1)-(b+1)=$$
$$=(b-1)(b+1)(k+m-1).$$

28. $$a(m-n)-b(n-m)-m+n=a(m-n)+b(m-n)-(m+n)=$$
$$=(m-n)(a+b-1).$$

ავიღოთ მაგალითი № 25. მოსწავლე ველარ აგრძელებს მაგალითის ამოხსნას, რადგან შეცდომის გამო ერთნაირი გამოსახულებანი ვერ მიიღო. იგივე მაგალითი მეორე მოსწავლის ნამუშევარში სხვა ვარიანტითაა ამოხსნილი (მაგალითი № 26); როგორც ჩანს, მდგომარეობიდან გამოსვლა ამან არჩია a^n-y^n და a^n+y^n გამო-

სახულების საერთო მამრავლად ჩათვლით. ეს გამოსახულებანი არაა ერთნაირი. ეჭვი არაა, მას არც მოსწავლე ჩათვლის იგივურად, მაგრამ გამოსავალი უნდა იპოვოს და ამ გზით პოულობს.

ყველა ამ შეცდომიდან აშკარაა, რომ სიძნელე ალგებრულ ჯამის ნიშნის შეცვლასთანაა დაკავშირებული, კერძოდ, ალგებრული გამოსახულების ფრჩხილებში მოთავსებასთან, როდესაც ფრჩხილების წინ მინუსია. ერთი შეცდომა იწვევს მეორეს: რადგან მოსწავლე სწორად ვერ ათავსებს ფრჩხილებში $-b+1$-ს (მაგალითი № 27). ის მრავალწევრის სხვადასხვა წევრებში სხვადასხვა გამოსახულებას იღებს $(b-1)$-სა და $(b+1)$-ს, რაც ახალ შეცდომას წარმოშობს: შედეგში თავს იჩენს ზედმეტი თანამამრავლი $(b+1)$.

ყველა მიზეზი, რომელიც მრავალწევრთა გამოკლების დროს დაშვებული შეცდომების ანალიზში მოვიყვანეთ, ძალაშია ამ შეცდომებისათვისაც. დამატებით უნდა აღინიშნოს მხოლოდ შემდეგი: 1. მოსწავლეს შესაძლოა დაავიწყდა მრავალწევრთა ფრჩხილებში მოთავსებისა და ფრჩხილებიდან განთავისუფლების წესები, რომელნიც მან ერთი წლის წინ, VI კლასში ისწავლა. და თუ განვლილი მასალის განმეორება სათანადო სიმაღლეზე არ იქნა დაყენებული, ცხადია, ის გახდება შეცდომათა წარმოშობის ხელისშემწყობ ფაქტორად. 2. მოსწავლეები მაგალითების №№ 25—28-ის ამოხსნის დროს დგებიან ორი სიძნელის წინაშე: გამოსახულებათა ფრჩხილებში მოთავსება და ერთნაირი გამოსახულებების შედგენა. № 28 მაგალითში $a(m-n)-b(n-m)-m+n$, ერთი მხრივ, საჭიროა საერთო მამრავლების შედგენა, რისთვისაც $-m+n$ უნდა სათანადოდ შეიცვალოს, $b(n-m)$ ნამრავლში $(n-m)$-ს ნიშანი უნდა შეეცვალოს და მხოლოდ ამის შემდეგ მოხდეს მრავალწევრის მამრავლებად დაშლა. ცხადია, თუ ამ მაგალითებს არ უსწრებს მოსამზადებელი მუშაობა უფრო მარტივ მაგალითებზე, მიზანი მიღწეული ვერ იქნება. ყოველი სიძნელე ხდება შეცდომის კერად. რამდენიმე სიძნელის ერთად თავმოყრა გაუმართლებელი ფაქტია და მისი მიზეზი სავარჯიშო მაგალითების მეთოდური თანამიმდევრობით დაულაგებლობაშია.

მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის დროს აქვს ადგილი აგრეთვე შეცდომას:

$$ab+ac+a=a(b+c)$$

მოგვყავს ორი მაგალითი:

29. $2b(x-1)+x-1=2b(x-1)+(x-1)=(x-1)\,2b=2b(x-1)$.

30. $a^3(a^2-1)+a^2-1=a^3(a^2-1)+(a^2-1)=(a^2-1)(a^3)=$
$=a^3(a^2-1)$.

ამ შეცდომის შესახებ პროფ. ს. ვორონინი ამბობს: „დავიწყოთ იქიდან, რომ მოსწავლეები ვერ ხედავენ განსხვავებას მოქმედების წარმოებასა და გარდაქმნას შორის. გინდ მოსწავლემ სწორად გვიჩვენოს ეს განსხვავება, მაინც შეიძლება არ იცოდეს, რომ ფრჩხილებს გარედ გამოტანის დროს ჩვენ ვსარგებლობთ ორი მოქმედებით—გაყოფითა და გამრავლებით. არსებობს ისეთი გაგება, რომლის მიხედვითაც საერთო თანამამრავლი „მიგვაქვს" ფრჩხილებს გარეთ ისე, როგორც მაგიდა შეიძლება მიგვქონდეს ოთახიდან დერეფანში. ამის შესამოწმებლად, შესაძლებელია, მივცეთ მოსწავლეებს თუნდაც ასეთი მაგალითი: $ab+ac-ad-a$

თუ პასუხს დაწერს: $a(b+c-d)$ მაშინ საუბრის საშუალებით შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ მოსწავლე თავისი გაგებით მსჯელობდა სწორად. მართლაც, ჩვენ „გაგვაქვს" a ფრჩხილებს გარეთ. ეს უნდა მოხდეს ფრჩხილებში მოთავსებული მრავალწევრის ყოველი წევრის მიმართ. პირველი სამი წევრიდან დარჩა თითო ასო, მეორე წევრი გატანილია ფრჩხილებს გარეთ მთლიანად"[1].

ვფიქრობთ, რომ მართლაც ასე ხდება. სწავლების პრაქტიკაში ასეთი შეცდომების შემთხვევაში აღმოჩნდა შემდეგი: მოსწავლეები, რომელთაც ეს შეცდომა ჰქონდათ დაშვებული წერით ნამუშევრებში, საუბრის დროს იძლეოდნენ ერთიმეორის მსგავს ახსნა—განმარტებებს. მათი მსჯელობა ემყარებოდა ერთ ფაქტს: ფრჩხილებს გარეთ გატანა პირდაპირი მნიშვნელობით ჰქონდათ გაგებული.

ასე, მაგალითად, მრავალწევრის $3abx+3aby-3ab$ დაშლის დროს მოსწავლემ მიიღო $3ab(x+y)$.

განმარტება ასეთი მოგვცა: $3ab$ გავიტანეთ ფრჩხილებს გარეთ, პირველი წევრიდან დარჩა x, მეორიდან—y; „შეკითხვამ—მესამი-

[1] Проф. С. В. Воронин, Алгебраические ошибки учащихся в семилетней трудовой школе. Научные известия Смоленского Государственного педаг. института, вып. I, 1932 г.

დან? დიდი გაკვირვება გამოიწვია: „მესამე წევრი ხომ $3ab$ იყო; ის გავიტანეთ ფრჩხილებს გარეთ“.

ასეთ შემთხვევათა რაოდენობა დაახლოვებით 12—მდე გვქონდა. სხვა მოსწავლეთა განმარტებანი აღარ მოგვყავს, რადგან ანალოგიურია უკვე მოცემულის.

მრავალწევრის მარტივ მამრავლებად დაშლის პროცესში იჩენს თავს კიდევ ასეთი შეცდომა:

$$a^2(b+c)+ab(b+c)=(b+c)(a^2+ab).$$

იგი საგრძნობლადაა გავრცელებული. საკმარისია მოვიყვანოთ ფაქტი საკუთარი გამოცდილებიდან. მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის შეთვისების შესამოწმებლად ჩატარებული იყო საკონტროლო სამუშაო. სამუშაოს ასრულებდა 37 მოსწავლე. ასეთი შეცდომა 9 მოსწავლის ნამუშევარში აღმოჩნდა.

31. $2abx(3a-3b)+2aby(3a-3b)=(3a-3b)(2abx+2aby).$

32. $6m^4np(1-3mn^2)-15m^2n^2(1-3mn^2)=(1-3mn^2)(6m^4np-$
$-15m^2n^2).$

სხვები ანალოგიურია და მათი მოყვანა ინტერესს მოკლებული იქნება. ფაქტიურად აქ დაშლა დამთავრებული არაა. მიღებული ნამრავლის მამრავლები მარტივი (დაუყვანადი) უნდა იყოს. პასუხში კი მეორე მამრავლი კიდევ დაიშლება $2abx+2aby=2ab(x+y)$; როგორც ცნობილია, მრავალწევრის მამრავლებად დაშლას საერთო მამრავლის ფრჩხილების გარეთ გატანის ხერხით იწყებენ ისეთი მრავალწევრების დაშლით, რომლის წევრებსაც, შედარებით მარტივი (ერთწევრა) საერთო მამრავლი აქვს. მოსწავლეები უმრავლეს შემთხვევაში, შეუცდომლად ასრულებენ ამ სავარჯიშოებს. საკუთარი გამოცდილებიდან მოგვყავს ფაქტი ასეთ მრავალწევრთა დაშლაზე. საკონტროლო სამუშაო 38 მოსწავლიდან სწორად შეასრულა 36-მა. როდესაც გადავედით ისეთი მრავალწევრების დაშლაზე, რომელთაც საერთო მამრავლი მრავალწევრის სახით აქვთ, ზემოთ მოყვანილმა შეცდომამ საგრძნობი რაოდენობით იჩინა თავი. საკონტროლო სამუშაო 9 მოსწავლემ შეასრულა შეცდომით. ამ 9 მოსწავლიდან წინა საკონტროლო სამუშაო 8 მოსწავლეს სწორად ჰქონდა შეს-

რულებული. 8 მოსწავლიდან 7-მა სწორად შეასრულა მეორე დღეს (დაფაზე) ასეთი დაშლა: $2abx + 2aby = 2ab(x+y)$ და $6m^4np - 15m^2n^3 = 3m^3n(2m^2p - 3n)$, რომლებიც განგებ № 31 და № 32 მაგალითების მიხედვით იქნა შედგენილი.

რატომ დატოვეს უყურადღებოდ მათ ეს გამოსახულებები წინა დღეს? რატომ არ დაშალეს ისინი?

მოსწავლეებს აქვთ ერთი ჩვეულება (თუ შეიძლება ასე ეწოდოს ამ მოვლენას), როდესაც სწავლობენ რაიმე ახალს, ისინი ცდილობენ ეს ახალი ჩქარა შენიშნონ; ყველაფერში ხედავენ ამ ახალს და ასეთ მომენტში ხშირად სხვას არაფერს უწევენ ანგარიშს, ავიწყდებათ და უყურადღებოდ ტოვებენ საკმაოდ ცნობილ ფაქტებსაც. ასევე მოხდა ამ შეცდომის დაშვების დროსაც. როდესაც მათ შეისწავლეს რთული მამრავლიანი მრავალწევრების დაშლა, ამ სიახლემ ზოგი მათგანი ისე გაიტაცა, რომ დაავიწყდათ ყურადღება მიექციათ სხვა ერთწევრა, საერთო მამრავლებისათვის.

მეორე მხრივ, უნდა შევნიშნოთ, რომ ალგებრის სტაბილურ სახელმძღვანელოში არაფერია ნათქვამი მრავალწევრთა მამრავლებად დაშლის ბოლომდე მიყვანის შესახებ. როგორი უნდა იყოს ის მამრავლები, რომლებიც მრავალწევრის დაშლის შედეგად მიიღება?[1] არც ნ. შაპოშნიკოვისა და ნ. ვალცევის და არც პ. ლარიჩევის ალგებრულ ამოცანათა კრებულშია რაიმე განმარტება ამ საკითხზე[2]. მასწავლებელსა და მოსწავლეს კი უმეტესად მხოლოდ ეს წიგნები აქვთ ხელთ.

ავიღოთ მეთოდური სახელმძღვანელოები.

პროფ. ი. ჩისტიაკოვი მრავალწევრთა მამრავლებად დაშლას ასე განმარტავს: „ალგებრული გამოსახულების დაშლა მამრავლებად არის მისი წარმოდგენა ორი ან რამდენიმე, რაც შეიძლება, მარტივ მამრავლთა ნამრავლად“[3] დაახლოებით ასეთივე განმარტებით კმაყოფილდება ს. ბრონშტეინიც[4].

პ. კოლმოგოროვსა და ა. ალექსანდროვს მამრავლებად დაშლა ასე აქვთ მოცემული: „საერთო წესები, რომლებიც იძლეოდნენ იმის

[1] ა. პ. კისელევი, ალგებრა, ნაწ. 1, თავი V, 1951 წ.

[2] ნ. ა. შაპოშნიკოვი და ნ. ვ. ვალცოვი, ალგებრულ ამოცანათა კრებული, ნაწ. 1, 1951. პ. ა. ლარიჩევი, ალგებრის ამოცანათა კრებული ნაწ. I, 1954.

[3] Проф. И. И. Чистяков. Методика алгебры, 1934, стр. 77.

[4] С. С. Бронштейн, Методика алгебры, 1935. стр. 70.

გაგების საშუალებას, იშლება თუ არა მოცემული მრავალწევრი მამრავლებად, ისევე, როგორც წესები, რომლებიც გვაძლევდნენ საშუალებას დავიყვანოთ დაშლა მარტივ მამრავლებამდე (ე. ი. ისეთ მამრავლებამდე, რომელთა დაშლა მეტად აღარ შეიძლება), ვერ მოთავსდება ელემენტარული ალგებრის კურსში". შემდეგ მოყვანილია მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის სხვადასხვა ხერხი[1]. მამრავლებად დაშლა განმარტებულია წინასწარ (გვ. 114), როგორც მრავალწევრთა წარმოდგენა ნამრავლის სახით. როგორც ვხედავთ, ამ სახელმძღვანელოში გაკვრით მაინც არის ნათქვამი იმ მამრავლების ხასიათის შესახებ, რომლებზედაც იშლება მოცემული მრავალწევრი. უფრო ვრცლად ამ საკითხის შესახებ ნათქვამი აქვთ დ. ფადეევსა და ი. სომინსკის[2]. აქ განხილულია მრავალწევრები, რომელთა დაშლა შეუძლებელია (დაუყვანადი მრავალწევრები). გავლებულია პარალელი მთელ რიცხვთა დაშლასთან მარტივ მამრავლებად. დაუყვანადი მრავალწევრები შედარებულია მარტივ რიცხვებთან. პრაქტიკულად გარკვეულია საკითხი მრავალწევრთა დაშლის დასრულების შესახებ.

2. შეცდომები შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გაგებასა და გამოყენებაში

ყველაზე გავრცელებულსა და მყარ შეცდომას შემოკლებული გამრავლების დროს წარმოადგენს $(a\pm b)^m = a^m \pm b^m$ ტიპის შეცდომა. იგი იმდენად გავრცელებულია, რომ თითქმის ყველგან იხსენიება, სადაც კი მოსწავლეთა მიერ ალგებრაში დაშვებულ შეცდომებზეა ლაპარაკი.

მიხ. კონიაშვილი წერს:

„VII კლასის მოსწავლეს უძნელდება პასუხის გაცემა კითხვაზე, ტოლია თუ არა 27^2 და 20^2+7^2; და თუ ისინი არაა ტოლი, მაშინ რამდენით განსხვავდებიან ერთიმეორისაგან?[3]

ა. ჰიბში ასახელებს შეცდომას: $(a+b)^5 = a^5+b^5$ და ამბობს: ეს „არ იქნებოდა დაშვებული, რომ მოსწავლეებს ერთხელ ან ორჯერ გადამრავლებით მოენახათ ხარისხი $(a+b)^5$"[4].

[1] П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Алгебра, ч. I, 1940. стр. 120.

[2] Д. К. Фаддеев и И. С. Соминский, Алгебра, ч. I, 1951, стр. 91.

[3] მიხ. კონიაშვილი, მოსწავლეთა ცოდნის ხარისხის ამაღლებისათვის მათემატიკაში, 1951, გვ. 3.

[4] О преподавании математики в V—X классах, методическое письмо Управления школ Министерства просвещения РСФСР, 1950, стр. 56.

„ახარისხებას არ ახასიათებს განრიგადობის თვისება შეკრების მიმართ $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$; $(a+b)^k \neq a^k+b^k$. ხშირად მოსწავლეები ტოვებენ უყურადღებოდ ამ გარემოებას; ურევათ ერთმანეთში ჯამის კვადრატი და კვადრატების ჯამი, ჯამის კუბი და კუბების ჯამი. ეს უხეში შეცდომა მასიურთა რიცხვს ეკუთვნის“[1].

პროფ. ს. ვორონინი ასახელებს ამ შეცდომის მაგალითებს:[2]

$$„(a+b)(a+b)=a^2+b^2$$
$$(a-b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+b^3“.$$

ი. ალტშულერი ამბობს:[3] „აუცილებელია აღმოვფხვრათ მოსწავლეთა შორის ასეთი ტიპის შეცდომები:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2=a+x$$
$$(2-\sqrt{x^2-9})^2=4+x^2-9“.$$

ვ. სუხორუკოვს მოჰყავს შეცდომა $(2m+n)^2=4m^2+n^2$[4].

ვ. სნიგირევი ასახელებს შეცდომას:

$$(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2})^2=(\sqrt{x+5})^2-(\sqrt{x-2})^2$$ [5]

მაერგოიზს მოჰყავს შეცდომა:

$$(x+y)(x-y)+\sqrt{(x+y)(x-y)}=20$$
$$(x^2+y^2)(x^2-y^2)+(x^2-y^2)=400$$ [6]

---

[1] С. С. Бронштейн, Методика алгебры, 1935, стр. 133.

[2] Проф. С. В. Воронин, Алгебраические ошибки учащихся в семилетней трудовой школе. Научные известия Смоленского госуд. института, вып. 1932.

[3] Доц. И. Альтшулер, Методика иррациональных уравнений, журн. Математика в школе, 1935, № 2.

[4] В. Сухоруков, Учесть уроки проверочных испытаний, журн. Математика в школе, 1938, № 3.

[5] В. Снигирев, Основные недостатки в подготовке по математике, окончивших курс педтехникумов, журн. „Педагогическое образование“, 1934, № 1.

[6] Д. Маергойз, Аналогия в педагогическом процессе, журн. Математика в школе, 1947, № 1.

პროფ. შევარევი ლაპარაკობს შეცდომებზე:

$$\frac{a^4(x-y)^5}{a(x-y)^{15}}=\frac{a^4x^5-a^4y^5}{ax^{15}-ay^{15}},$$

$$(x-y^2)^5(x-y^2)(x-y^2)^4=(x^5-y^{10})(x-y^2)(x^4-y^8)$$ [1]

ასეთი შეცდომა აღმოჩნდა აგრეთვე იმ სკოლების მოსწავლეთა ნამუშევრებშიაც, სადაც დაკვირვებას ვაწარმოებდით.

მოვიყვანთ მხოლოდ რამდენიმე მაგალითს:

1. $(5x^7+1,2)^2=25x^{14}+1,44.$
2. $[(a^4+b^4)+a^2b^2][(a^4+b^4)+a^2b^2]=(a^4+b^4)^2+a^4b^4.$
3. $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1$

   $(x+1)+(2x+3)=1$

ეს შეცდომა გაორკეცებული ნამრავლის გამოტოვებაშია. მაგრამ ცოდნა იმისა, რომ ასეთი წევრი არსებობს ორწევრის კვადრატის ფორმულაში, არ გვაზღვევს შეცდომებისაგან—უფრო მეტია შეცდომები თვით ამ წევრის გამოთვლაში. მოგვყავს მხოლოდ ისეთი, რომლის დაშვებაც „რაღაც თავისებურ წესს“ ემორჩილება.

1) ორივე რიცხვის გადამრავლება მოხდენილია, გაორკეცება კი აკლია.

4. $(5b^2-4,4c)^2=25b^4-22b^2c+19,36c^2.$
5. $(5a^2b+2b^2c)^2=25a^4b^2+10a^2b^3c+4b^4c^2.$

2) ორივე რიცხვის ნამრავლი გაორკეცების მაგიერ კვადრატადაა ახარისხებული.

6. $(2a^2+15b)^2=4a^4+900a^4b^2+225b^2$
7. $\left(\frac{1}{2}mx-\frac{2}{3}nx^2\right)^2=\frac{1}{4}m^2x^2-\frac{1}{9}mnx^3+\frac{4}{9}n^2x^4$

3) რიცხვები ცალ-ცალკე ახარისხებულია კვადრატად და შემდეგ მათი ნამრავლია აღებული.

8. $(5p-4q^2)^2=25p^2-400p^2q^4+16q^4.$
9. $(2x+7y^2)^2=4x^2+196x^2y^4+49y^4.$

კიდევ უფრო მეტია შეცდომები ორი რიცხვის ჯამისა და სხვაობის კუბის ფორმულების გამოყენებისას. განსაკუთრებულ სიძნელეს

[1] Проф. Шеварев, П. Я. Опыт психологического анализа алгебраических ошибок, изв. Ак. Пед. Наук, № 3, стр. 165.

აქ იწვევს $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ფორმულის „$3a^2b$“ და „$3ab^2$“ წევრების გამოთვლა. შეცდომები სხვადასხვა ელფერისაა. ავიღოთ ძირითადი მაგალითები: 1) ნამრავლებს გასამკეცება აკლია:

10. $(a+3b^2)^3=a^3+3a^2b^2+9ab^4+27b^6$.
11. $(4a^2+3ab)^3=64a^6+48a^5b+36a^4b^2+27a^3b^3$.

2) ფორმულას იყენებენ, მაგრამ გასამკეცებული ნამრავლის გამოთვლის დროს სათანადო წევრს არ ახარისხებენ კვადრატად. ამის შედეგად პასუხში სამი წევრია ოთხის მაგიერ.

12. $(2y+7xy)^3=8y^3+42xy^2+343x^3y^3$.
13. $(a^2+2b)^3=a^6-6a^2b+8b^3$.

3) ნამრავლებს გასამკეცების მაგიერ ახარისხებენ კუბად.

14. $$\left(\frac{3}{2}x+\frac{5}{6}y^2\right)^3=3\,\frac{3}{8}x^3+\frac{91125}{13824}x^2y^2+\frac{15625}{13824}xy^4+\frac{125}{216}y^6.$$

ეს მაგალითი საინტერესოა იმით, რომ მოსწავლეს იქვე აქვს მოყვანილი ყველა გამოთვლები ამ სახით:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}=3\,\frac{3}{8};$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4};$$

$$\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{45}{24}$$

შეკვეცას არ აწარმოებს!

$$\left(\frac{45}{24}\right)^3=\frac{91125}{13824};\qquad\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36};$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{25}{26}=\frac{25}{24};\qquad\left(\frac{25}{24}\right)^3=\frac{15625}{13824};$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}.$$

$$15.\ (0{,}2a^3b^4+5a^4b^6)^3=0{,}8a^9b^{12}+8a^{30}b^{39}+125000a^{33}b^{42}+ +125a^{12}b^{18}.$$

გამოთვლები აქეეა:

$$(0{,}2a^3b^4)^3=0{,}8a^9b^{12};\ (0{,}2a^3b^4)^2=0{,}4a^6b^8;$$
$$0{,}4a^6b^8\cdot 5a^4b^6=2a^{10}b^{13};\ (2a^{10}b^{13})^3=8a^{30}b^{39};$$
$$(5a^4b^5)^2=25a^8b^{10};\ 0{,}2a^3b^4\cdot 25a^8b^{10}=50a^{11}b^{14};$$
$$(50a^{11}b^{14})^3=125000a^{33}b^{42}.$$

შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გამოყენების დროს დაშვებული შეცდომების განხილვისას არ შეიძლება გვერდი ავუაროთ იმ შეცდომებს, რომლებსაც ციფრებით გამოსახული რიცხვების კვადრატად და კუბად ახარისხებაში ვხვდებით: 1) კვადრატად ახარისხების მაგიერ რიცხვის გაორკეცება და 2) კუბად ახარისხების მაგიერ—გასამკეცება.

$$16.\ (8xy^3)^2=16x^2y^6.$$

$$17.\ (3c^4)^2=6c^8.$$

$$18.\ 1^2=2.$$

$$19.\ \left(\frac{1}{2}x^4\right)^3=\frac{1}{6}x^{12}$$

$$20.\ \left(\frac{1}{3}y^2z^3\right)^3=y^6z^9.$$

$$21.\ (3{,}2)^2=6{,}4.$$

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ ალგებრის გაკვეთილებზე ზოგიერთი მასწავლებელი არ აქცევს ყურადღებას არითმეტიკაში მიღებული ცოდნა-ჩვევების განმტკიცებას. ამითაც აიხსნება მოსწავლეთა სუსტი ცოდნა მოქმედებისა ჩვეულებრივ წილადებსა და ათწილადებზე.

საინტერესოა კიდევ ერთი გარემოება, მოსწავლემ იცის ორწევრის კვადრატად ახარისხების ფორმულა. მაგრამ, როგორც კი მაგალითი გადასცდება ერთგვარ ტრაფარეტს, როგორც კი მოსწავლეს მოუხდება თვითონ მიაგნოს ამ ფორმულის გამოყენების

საჭიროებას, ის გაურკვეველ სიძნელეში ვარდება და გვერდს უვლის ამ ფორმულას.

მიხ. კონიაშვილს მოჰყავს ამის დამახასიათებელი მაგალითი: „$4a^2+12ab+9b^2$ გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობის პოვნისას, როცა $a=8$ $b=3$ ავიწყდებათ ორი რიცხვის ჯამის კვადრატის ფორმულის გამოყენება და უშუალოდ მოცემულ გამოსახულებაში სვამენ a-სა და b-ს მნიშვნელობებს"[1].

ასეთივეა სურათი $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ფორმულის გამოყენების დროს. ზოგ მოსწავლეს არ ესმის ამ ფორმულის შინაარსი. ამიტომაც მისი გამოყენება ატარებს ფორმალურ ხასიათს: საკმარისია მაგალითი ზუსტად არ ეთანხმებოდეს ფორმულას, რომ მოსწავლემ შემოკლებული გამრავლების წარმოებაში შეცდომა დაუშვას. ასე, მაგალითად:

$$22.\quad \left(1\frac{3}{5}x^4-0,7x^2y^5\right)\left(0,7x^2y^5+1\frac{3}{5}x^4\right)=$$

$$=\left(0,7x^2y^5+1\frac{3}{5}x^4\right)\left(0,7x^2y^5-1\frac{3}{5}x^4\right)=0,14x^4y^{10}-2\frac{14}{25}x^8.$$

$$23.\quad \left(2\frac{1}{2}-5ab^3\right)\left(5ab^3+2\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(-5ab^3+2\frac{1}{2}\right)\left(5ab^3+2\frac{1}{2}\right)=25a^2b^6-6\frac{1}{4}.$$

უნდა აღინიშნოს, რომ შემოკლებულ გამრავლებას მოსწავლეთა უმრავლესობა კარგად აწარმოებს, შეგნებულად იყენებს შესაფერ ფორმულებს. მაგრამ, მიუხედავად წარმატებისა, როგორც ზემოთქმულიდან ჩანს, შეცდომები მაინც ბევრია. ჩვენ მოვიყვანეთ ამ შეცდომებიდან მხოლოდ ისეთები, რომლებიც მკვეთრად ირჩეოდა სხვებისაგან თავისი გავრცელებითა და კანონზომიერი განმეორებით.

შეცდომა $(a+b)^2=a^2+b^2$, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, მეტად გავრცელებულია (მაგალითები №№ 1—3). იგი გვხვდება ალგებრის სწავლების მთელ მანძილზე სხვადასხვა სახით. დამაფიქრებელია ის, რომ მაღალი კლასის მოსწავლეებიც უშვებენ ამ შეცდომას (მა-

---

[1]. მ ი ხ. კ ო ნ ი ა შ ვ ი ლ ი, მოსწავლეთა ცოდნის ხარისხის ამაღლებისათვის მათემატიკაში, 1951, გვ. 4.

გალითი № 3). ამ შეცდომის სახესხვაობას უნდა მიეწეროს შეცდომაც $\sqrt[n]{a^n \pm b^n} = a \pm b$ (ქვეთავი 4, მაგალითები: №№ 1, 2, გვ. 55). ორივე ეს შეცდომა განაპირობებს ერთიმეორეს. შეცდომა თვით ფორმულის გაგებაშია, იგი მდგომარეობს პირველი რიცხვის მეორეზე გაორკეცებული ნამრავლის გამომსახველი წევრის გამოტოვებაში. ეს წევრი სრულიად არაა მიღებული მხედველობაში: ორი რიცხვის ჯამის კვადრატი—ესაა თითქოს პირველი რიცხვის კვადრატი პლუს მეორე რიცხვის კვადრატი. მართლაც, ბავშვს ლოგიკურად ეჩვენება ორი რიცხვის ჯამის კვადრატი უდრიდეს პირველისა და მეორე რიცხვების კვადრატების ჯამს (ანალოგიურად, კვადრატული ფესვი ორი რიცხვის კვადრატების ჯამიდან უდრის კვადრატულ ფესვთა ჯამს თითოეულ კვადრატიდან) „ორი რიცხვის ჯამია აყვანილი კვადრატში,—ფიქრობს იგი,—რა უნდა იყოს? ერთის კვადრატი და მეორის კვადრატი. მეტი არაფერი“. საკითხის ასე გადაწყვეტა მას მიაჩნია ბუნებივად და თუ კი ამასთან დამატებით მასწავლებელი არ უკეთებს ანალიზს ფორმულას $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ და ყურადღებას არ ამახვილებს $2ab$ წევრზე, მაშინ იქმნება შესაფერი ნიადაგი ამ შეცდომის აღმოსაცენებლად. ასევე $(a+b)^4 = a^4 + b^4$ და ა. შ.

არ შემიძლია დავეთანხმო დ. მაერგოიზს, რომელიც თვლის რომ ასეთი შეცდომა დაშვებულია ნამრავლის კვადრატის ანალოგიით. მაერგოიზი ამბობს, რომ ნამრავლის კვადრატი თანამამრავლთა კვადრატების ნამრავლს უდრის. აგრეთვე წილადის კვადრატი მრიცხველისა და მნიშვნელის კვადრატს წარმოადგენს. ამის ანალოგიით მოსწავლე ჯამის კვადრატსაც შესაკრებთა კვადრატების ჯამად თვლისო[1]. რამდენად სწორი უნდა იყოს ასეთი მსჯელობა? ჯერ ერთი, ანალოგია თვით შეცდომაა და, მაშ, შეცდომის მიზეზად არ გამოგვადგება. მეორე და მთავარი ისაა, რომ, მართალია, VI კლასში, სანამ შემოკლებულ გამრავლებას გაივლიდნენ, სწავლობენ ერთწევრის მთელ დადებით ხარისხში აყვანას, მაგრამ აქ პროგრამით განსაზღვრული ვარჯიში (ნ. ა. შაპოვნიკოვისა და ნ. კ. ვალცოვის ალგებრულ ამოცანათა კრებული, ნაწ. I, თავი II, § 4)[2] არ გულისხმობს ისეთი ძლიერი ჩვევის გამომუშავებას, რომელსაც შეეძლოს ამ მხრივ შეუშალოს ხელი შემდეგი მასალის შესწავლას; ნამრავლის

[1] Д. Маергойз, Аналогия в педагогическом процессе, журн. Математика в школе“, 1947, № 1.

[2] არც პ. ლარიჩევის ალგებრულ ამოცანათა კრებულშია ეს სავარჯიშო გაძლიერებული.

ხარისხში აყვანა სრული განზოგადებით, დაწვრილებითა და ჩვევის გაღრმავებით IX კლასში ისწავლება (იმავე კრებულის V თავი)[1] მით უმეტეს VI კლასში არ ისწავლება წილადის ხარისხში აყვანა; ამ მასალას (საერთოდ, წილადებზე მოქმედებას) VII კლასში სწავლობენ. ცხადია, რომ VI კლასის მოსწავლეთა აზროვნებაზე იმ ცოდნას, რომელსაც ისინი მომავალში მიიღებენ, არა აქვს გავლენა. ამგვარად, თუ კი ანალოგიაა მოსალოდნელი, იგი სწორედ საწინააღმდეგო მიმართულებით იქნება, ე. ი მოსწავლეებს უნდა დაებადოთ აზრი ნამრავლის ხარისხში აყვანისას „ზედმეტი“ წევრის არსებობაში.

ან იქნებ სადმე IX და X კლასებში იჩინა თავი ამ სახის შეცდომამ და მაერგოიზს სწორედ ეს აქვს მხედველობაში? მაშინ კი უსათუოდ ადგილი აქვს უყურადღებობას მასწავლებლის მხრივ იქ VI—VII კლასებში, სადაც თავიდანვე არ იქნა შეცდომა აღმოფხვრილი და არა ანალოგიას IX და X კლასებში. აქვე უნდა აღვნიშნოთ, რომ შეცდომაში $\sqrt[n]{a^n \pm b^n} = a \pm b$ დამატებით ზემოთ თქმულისა შესაძლოა თავს იჩენდეს გავლენაც იმისა, რომ $\sqrt[n]{a^n b^n} = ab$

VI კლასშია გათვალისწინებული შემოკლებულ გამრავლების შესწავლა ძირითადად $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ და $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ფორმულების საშუალებით. უნდა ითქვას, რომ ხშირ შემთხვევაში სწავლება ატარებს ფორმალურ ხასიათს, რის შედეგად მოსწავლეებმა იციან წესები და ფორმულები, მაგრამ მათ გამოყენებას ვერ ახერხებენ; ვერ იყვანენ მაგალითებს, რომლებიც ოდნავ მაინც განსხვავდებიან ტრაფარეტული მაგალითებისაგან. ეს იმის ნიშანია, რომ წესები არ ესმით, ვერ ჩაწვდენიან ფორმულის დედააზრს, ვერ ერკვევიან ფორმულაში შემავალი სიდიდეების ურთიერთ დამოკიდებულებაში და, რა თქმა უნდა, ასეთ „ცოდნას“ ვერ გამოიყენებენ პრაქტიკაში. „პრაქტიკა ადამიანისაგან უფრო მეტს მოითხოვს, ვიდრე მათემატიკურ ამოცანათა კრებული. უკანასკნელი გაფორმებულ ამოცანებს იძლევა, პრაქტიკა კი ხშირად წამოაყენებს ამოცანას, რომლის ამოსახსნელად მონაცემები თვითონ უნდა ეძიოს. იმ ელემენტების ძებნაში, რომლებიც საჭიროა ასეთი გაუფორმებელი ამოცანის ამოსახსნელად, უნდა გამომჟღავნდეს ერთგვარი მიხვედრილობა, საქმისადმი რაციონალიზატორული უნარისა და ცოდნათა ჯამის გამოყენების შემოქმე-

[1] პ. ლარიჩევი, ალგებრულ ამოცანათა კრებული II ნაწ. II თავი.

დებითი ინიციატივა და საკითხის სპეციფიკის დანახვა; ასეთი საქმიანობისათვის უნდა ამზადებდეს მოწაფეობას საშუალო სკოლაში მათემატიკის სწავლება“[1].

ამით აიხსნება შეცდომები, რომლებიც გვხვდება გაორკეცებული და გასამკეცებული ნამრავლების გამოთვლაში ორწევრის კვადრატისა და კუბის ფორმულებში, აგრეთვე შეცდომა $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ფორმულის გაგებაში და ერთწევრების კვადრატად და კუბად ახარისხებაში, რომელიც ხსენებული ფორმულების გამოყენების პროცესში გვხვდება.

ავიღოთ მაგალითები, რომელთა ამოხსნა მოითხოვს ორწევრის კვადრატის ფორმულის გამოყენებას (მაგალითები №№ 4—9) და განვიხილოთ შეცდომები გაორკეცებული ნამრავლის გამოთვლაში. ზემოთ განვიხილეთ შეცდომა გამოხატული ამ წევრის გამოტოვებაში. მაგრამ იმ მოსწავლეთაგანაც, ვინც „სცნო“ ამ წევრის არსებობა ფორმულაში, ყველას როდი აქვს იგი სწორად გამოთვლილი. ძალიან ბევრია შეცდომები. ამასთან საგულისხმოა ის შეცდომები, სადაც გარკვეულ კანონზომიერებას აქვს ადგილი: 1) ჯგუფის მაგალითებში №№ 4, 5—ნამრავლს აკლია გაორკეცება, 2) სახის მაგალითებში—№№ 6, 7 პირველ და მეორე რიცხვს ამრავლებენ ერთმანეთზე, შემდეგ გაორკეცების მაგიერ ნამრავლს კვადრატად ახარისხებენ, 3) ჯგუფი იძლევა თითოეული რიცხვის ცალკეულ ახარისხებას კვადრატად და შემდეგ ამ კვადრატების ნამრავლს (მაგალითები №№ 8, 9).

რას უნდა მიეწეროს ეს შეცდომები? განა გაცილებით უფრო რთული კონსტრუქციის არ არის მეორე და მესამე სახის ნამრავლები, ვიდრე „$2ab$“? ამის მიზეზი მხოლოდ და მხოლოდ იმაშია, რომ მოსწავლე გარკვევით ვერ ხედავს $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ფორმულაში „$2ab$“ წევრის მისაღებად საჭირო ყველა მოქმედებას. ვერ ხედავს იმიტომ, რომ მას ეს არ აჩვენეს, თვალსაჩინოდ არ დაანახვეს და თავიდანვე არ შეასწავლეს მისი მიღებისათვის საჭირო პროცესი. მან არ იცის კონკრეტულად რა უნდა გააკეთოს, რომ მიიღოს „$2ab$“. თავისთავს მინებებული მოსწავლე მოქმედებს საკუთარი თვალსაზრისით. ზოგი მათგანი „ზედმეტად“ თვლის გაორკეცებას, რაც უფ-

[1] მ ი ხ. კ ო ნ ი ა შ ვ ი ლ ი, მოსწავლეთა ცოდნის ხარისხის ამაღლებისათვის მათემატიკაში, 1951, გვ. 20.

რო დაიწყებას უნდა მივაწეროთ,—მან გადაამრავლა რიცხვებ ერთიმეორეზე, გადამრავლების პროცესში დაავიწყდა გაორკეცება. მით უფრო, თუ მაგალითში რთული სახის ერთწევრებია, წილადი კოეფიციენტებით (მაგალითები №№ 4, 5). ზოგი მოსწავლე გაორკეცებას და კვადრატად ახარისხებას ერთმანეთისაგან ვერ ანსხვავებს. მეორე და მესამე სახის შეცდომები ამ მიზეზითაა გამოწვეული. მათ შესახებ ქვევით გვექნება საუბარი, როდესაც ორწევრის კუბის ფორმულას შევეხებით.

მოსწავლე ვერ გაერკვა ორწევრის კვადრატის ფორმულაში და მას უკვე აცნობენ ორი რიცხვის ჯამისა და სხვაობის კუბს. ცხადია, მისთვის ეს ფორმულები უფრო ბუნდოვანი და გაურკვეველი იქნება, მით უმეტეს, რომ არც ამ ფორმულებში შემავალი წევრების მიღებისათვის საჭირო მოქმედებებს უშლიან თვალწინ. ასეთ ფონზე არ შეიძლება არ იჩინოს თავი შეცდომებმა, რომელთაც ექნებათ სხვადასხვა ნიუანსი, იმისდა მიხედვით, თუ რომელ მოსწავლის გონებაში როგორ გადაიჭრა წევრების მიღების საკითხი—იღებენ ნამრავლს პირველი რიცხვის კვადრატისა მეორეზე (გასამკეცება კი აქაც ავიწყდებათ როგორც ორწევრის კვადრატის ფორმულაში ნამრავლის გაორკეცება) და პირველი რიცხვის ნამრავლს მეორის კვადრატზე — გასამკეცების გარეშე (მაგალითები №№ 10, 11). ზოგნი იღებენ პირველი რიცხვის ნამრავლს მეორეზე, არ იყვანენ სათანადო წევრს კვადრატში (მაგალითები №№ 12, 13) ანდა გასამკეცების მაგიერ ახარისხებენ კუბში (მაგალითები №№ 14, 15).

ამ შეცდომების მიზეზი ანალოგიურია ზემოთ განხილულისა.

განვიხილოთ შეცდომები აგრეთვე დაკავშირებულნი ამ ფორმულებთან ესაა: 1. რიცხვის კვადრატად ახარისხების მაგიერ, მისი გაორკეცება-დაკავშირებული ორწევრის კვადრატის ფორმულის გამოყენების დროს პირველი და მესამე წევრის გამოთვლასთან (მაგალითები №№ 16, 17, 18) და 2. რიცხვის კუბად ახარისხების მაგიერ, მისი გასამკეცება, დაკავშირებული ორწევრის კუბის ფორმულის გამოყენების დროს პირველი და მეოთხე წევრების გამოთვლასთან (მაგალითები №№ 19, 20, 21).

ეს შეცდომები აშკარად დამახასიათებელია VI კლასის მოსწავლეებისათვის (ხანდახან იგი VII კლასშიც ჩნდება). მოსწავლე ვერ ასხვავებს ერთმანეთისაგან ციფრებით გამოსახული რიცხ-

ვების კვადრატად, კუბად ახარისხებას, მათ გაორკეცებისაგან და გასამკეცებისაგან. დამახასიათებელია, რომ ეს მოვლენა მხოლოდ კვადრატად და კუბად ახარისხებაში ხდება—სხვა ხარისხების შემთხვევაში კი ამას ადგილი არა აქვს. როგორც ზევითაც იყო ნათქვამი, ახარისხების შესწავლა IX კლასში ხდება. იქამდე ახარისხება, თუ შეიძლება ითქვას, „შეპარვით“ მიმდინარეობს. მისი გამოყენება ხდება უმთავრესად შემოკლებული გამრავლების დროს, რის გამოც უმეტესად სწორედ კვადრატად და კუბად ახარისხებასთან აქვს საქმე. აღწერილი შეცდომა თავისი ხასიათის გამო ახარისხების სწავლების მხოლოდ პირველ ეტაპს შეიძლება ეკუთვნოდეს. ამიტომაც მისი გამოვლენა მხოლოდ კვადრატად და კუბად ახარისხების დროსაა მოსალოდნელი. მოსწავლე გაეცნო წესს: „ხარისხი რომ კვადრატად ან კუბად ავახარისხოთ, ხარისხის მაჩვენებელი უნდა გავამრავლოთ შესაბამად ორზე ან სამზე“[1]. იქცევა რა ამის მიხედვით, ამრავლებს ასოების ხარისხის მაჩვენებლებს. ასე, მაგალითად $(5a^2b^3)^2$ იღებს $10a^4b^6$. ს. რა უყოს მან კოეფიციენტს? კოეფიციენტი ციფრით გამოსახული რიცხვია. მას ხარისხის მაჩვენებელი არ უწერია (ამ ეტაპზე მოსწავლე ჯერ არაა კარგად შეჩვეული ამ შეთანხმებას); უფრო ხშირად მოსწავლე გულისხმობს, რომ „არა აქვს“ 5-ს ხარისხის მაჩვენებელი. რომ გამოვიდეს მდგომარეობიდან ამრავლებს მას ორზე. საბოლოოდ მიიღებს $10a^4b^6$. მაგრამ ეს ხდება ახარისხების სწავლების მხოლოდ დასაწყისში. შემდეგ მოსწავლე ეჩვევა ახარისხებას, თუნდაც დასაწყისში მას არ ჰქონდეს სწორი წარმოდგენები.

ბოლოს განვიხილოთ შეცდომა $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ფორმულის გამოყენებაში, რომლის მიზეზიც სწავლების ფორმალიზმში იმალება. მოსწავლეს არ ესმის ფორმულის აზრი, ის მექანიკურად ასრულებს მოქმედებას: ამიტომაც, თუ მაგალითი ტრაფარეტს გადასცდება, თუნდაც ოდნავ, ის მაშინვე იბნევა და არ იცის როგორ მოიქცეს. მაგალითში № 22 მოსწავლე ატყობს, რომ სიდიდეები სათანადოდ არაა დალაგებული ფორმულის გამოსაყენებლად; ის ცდილობს შეუცვალოს ადგილები სიდიდეებს, მაგრამ რომლებს და როგორ? ამაში კი ვერ ერკვევა და უშვებს შეცდომას. საინტერესოა, რომ

---

[1] ა. პ. კ ი ს ე ლ ე ვ ი, ალგებრა, ნაწ. 1, § 46, 1949, გვ. 67.

მაგალითში № 23 მოსწავლე ადგილს უცვლის სიდიდეებს $2\frac{1}{2}$ — $-5ab^3$ სხვაობაში და წერს: $-5ab^3+2\frac{1}{2}$; ამით ფიქრობს, რომ გამოასწორა საქმე, რაც ერთხელ კიდევ ამოწმებს ზემოთქმულს.

3. შეცდომები წილად ალგებრულ გამოსახულებებზე მოქმედებათა წარმოებასა და გარდაქმნაში

ალგებრულ წილადებს მოსწავლეები ძირითადად ადვილად ეგუებიან და ეუფლებიან მათ გარდაქმნასა და მათზე მოქმედებებს, რაც განპირობებულია არითმეტიკაში მიღებული საფუძვლიანი ცოდნით და ჩვეულებრივ წილადებზე მოქმედებების წარმოების დროს გამომუშავებული ჩვევებით.

მიუხედავად ამისა, სრული წარმატება ჯერჯერობით არც აქა გვაქვს, ბევრია ნაკლოვანებანი. ჯერ კიდევ ბევრია ისეთი მოსწავლე, რომელსაც ვერ დაუძლევია ეს მასალა. ამას ადასტურებს შეცდომები, რომლებიც მრავლად ჩნდება ალგებრული წილადების შესწავლის დროს. ჩვენ შევეხებით მხოლოდ ისეთ შეცდომებს, რომლებიც თავს იჩენს წილადების შეკვეცის, შეკრება-გამოკლებისა და გამრავლების დროს.

დავიწყოთ შეცდომიდან წილადების შეკვეცის დროს

$$\frac{ab+c}{ad}=\frac{b+c}{d} \quad \text{(შეკვეცილია } a\text{-ზე)}$$

ეს შეცდომა მეტად გავრცელებულია; მითითება მასზე მეთოდურ ლიტერატურაში თითქმის ყველგან გვხვდება.

ეს შეცდომა მდგომარეობს შემდეგში: წილადი „შეკვეცილია" არასწორად, სახელდობრ, მრიცხველი და მნიშვნელი გაყოფილია არა საერთო მამრავლზე, არამედ შესაკრებზე.

ამ შეცდომის მაგალითებს ადგილი ჰქონდა აგრეთვე იმ სკოლებში, რომლებიც დაკვირვებისათვის გვქონდა შერჩეული.

მოგვყავს ზოგიერთი მაგალითი.

$$1.\ \frac{(x+1)^3}{x^3-x}=\frac{(x+1)^3}{x(x^2-1)}=\frac{1}{x^2-1}.$$

$$2. \ \frac{a^3-2ab-2ax+4bx}{7a^2-28b^2}=\frac{a(a-2b)-2x(a+2b)}{7(a-2b)(a+2b)}=\frac{a-2x}{7}.$$

$$3. \ \frac{n-c+2m}{(m-c)(n-c)(m-n)}=\frac{2m}{(m-c)(m-n)}$$

(შეკვეცილია $n-c$-ზე.)

მოსწავლე ფიქრობს: „მრიცხველში არის a, მნიშვნელშიც არის a; მაშ, შეიძლება წავშალოთ იგი". ამგვარად ახდენს ის წილადის შეკვეცას. შლის საერთო შესაკრებს იმის მაგიერ, რომ მრიცხველი და მნიშვნელი დაყოს საერთო თანამამრავლზე. აქ აშკარად ჩანს სწავლების ფორმალიზმი. მოსწავლეს არ ესმის, რომ შეკვეცის დროს გაყოფა უნდა აწარმოოს. ის გრძნობს შეკვეცით წილადის გამარტივებას, მის მეხსიერებაში ბუნდოვანი ცნობებია: „ერთნაირ სიდიდეებს მრიცხველსა და მნიშვნელში შლიან", „ახლად გადაწერილ წილადს წაშლილ სიდიდეებს აღარ უწერენ". ასეთი „ღარიბი" ცნობებით მოქმედებს მოსწავლე, როცა შეკვეცას ახდენს. მის ცნობიერებაში მოქმედება, რომლითაც უნდა მოახდინოს შეკვეცა, მკაფიოდ არაა წარმოსახული.

გარდა ამისა, მიზეზი არითმეტიკის სწავლების არაპერსპექტიულობაშიაცაა. არითმეტიკის სისტემატური კურსის შესწავლის დროს არაა მეტ წილად გათვალისწინებული ის მოთხოვნილებანი, რომელთაც უყენებს მას ალგებრის სწავლება.

განა მოუვა ზემოთ აღწერილი შეცდომა მოსწავლეს, თუ მან კარგად იცის: 1. რა მოუვა ჯამს, თუ მის ერთ-ერთ შესაკრებს შევცვლით; ან 2. როგორ შეიცვლება წილადი მისი მრიცხველისა და მნიშვნელის შეცვლით? შეიცვლება თუ არა მისი სიდიდე, თუ მის მრიცხველსა და მნიშვნელს მივუმატებთ ან გამოვაკლებთ ერთსა და იმავე რიცხვს? შეიცვლება თუ არა მისი სიდიდე, თუ მის მრიცხველსა და მნიშვნელს გავამრავლებთ ერთსა და იმავე რიცხვზე?

მასწავლებელი VII კლასში ეყრდნობა ცოდნას, რომელიც არითმეტიკის სწავლებიდან უნდა მიეღო მოსწავლეს, არ არკვევს ამ საკითხებს ალგებრული წილადების შესწავლის დასაწყისში; ასწავლის წილადის ძირითად თვისებას და არ აჩვენებს მას რიცხვით მაგალითებზე ეს კი ფორმალიზმის საფუძველს ქმნის.

სწორია და საინტერესო ვ. პ. პროჩუხაევის აზრი ამ შეცდომის შესახებ. იგი აღნიშნავს, რომ ეს შეცდომა არითმეტიკაში არა გვხვდება, ხოლო ალგებრაში ხშირია და „აიხსნება ეს, ერთი მხრივ, იმით, რომ არითმეტიკაში მაგალითებს არა აქვთ ისეთი აბსტრაქტული ხასიათი, როგორიც მათ აქვთ ალგებრაში; მეორე მხრივ, არითმეტიკაში მოსწავლეები ჩვეულებრივ ჯერ ასრულებენ ყველა აღნიშნულ მოქმედებებს და მხოლოდ ამის შემდეგ გადადიან მიღებული შედეგის გამარტივებაზე. ეს ხდება იმ დროს, როცა ალგებრაში მოსწავლეები უმრავლეს შემთხვევაში იძულებული არიან მხოლოდ აღნიშნონ მოქმედებები და მოქმედებების შეუსრულებლად გადავიდნენ შედეგების გამარტივებაზე“[1].

ავტორს შეცდომები წილადის შეკვეცაზე რამდენიმე ჯგუფად აქვს გაყოფილი. ავიღოთ პირველი და მეორე ჯგუფი. პირველში მოთავსებულია შეცდომები:

$$1.\ \frac{a+b}{a}=b \text{ ან } \frac{a+b}{a}=1+b$$

$$2.\ \frac{2(7a+3b)-(7a-3b)}{7a-3b}=2(7a+3b)$$

ეს ჯგუფი „ხასიათდება მხოლოდ ერთი შესაკრების შეკვეცით“. მეორე ჯგუფშია მოთავსებული:

$$1.\ \frac{a^2-b^2}{a-b}=a-b;$$

$$2.\ \frac{a^2+1}{a+1}=a$$

და სხვა ისეთი შეცდომა, რომელიც დაშვებულია არა ერთი შესაკრების გაყოფით, არამედ ორის ან რამოდენიმესი ერთდროულად. გვგონია ამ შეცდომებს ერთი და იგივე სახე აქვთ. მართალია, მეორე ჯგუფის შეცდომებში გაყოფილია ორი შესაკრები, მაგრამ მხოლოდ იმ უბრალო მიზეზით, რომ მრიცხველსა და მნიშვნელში

[1] В. Г. Прочухаев, Анализ ошибок учащихся средней школы по математике, Ученые записки Москов. Госуд. Педагогического института им. Ленина, т. VII, вып. 1, 1948, стр. 33.

საერთო ორი შესაკრები აღმოჩნდა და არა ნაკლები, როგორც ეს პირველ ჯგუფშია. ამგვარად, სხვადასხვაობა აქ მაგალითშია და არა შეცდომაში. შეცდომა ერთი და იმავე ხასიათისაა. ამიტომაც მათი განცალკევება ზედმეტად მიგვაჩნია.

ყველა ეს მაგალითი კი ერთხელ კიდევ ადასტურებს, რომ მოსწავლე ახდენს მრიცხველსა და მნიშვნელში ერთნაირი გამოსახულებების წაშლას.

პ. ს. ალექსანდროვისა და ა. ნ. კოლმოგოროვის „ალგებრაში" (ნაწ. I გვ. 111) ვკითხულობთ: „წილადის სახით ჩაწერილ ორი ერთწევრის განაყოფის შეკვეცის დროს:

1. თუ რომელიმე ასო მრიცხველშიცა და მნიშვნელშიც შედის ერთსა და იმავე ხარისხის მაჩვენებლებით, მაშინ მრიცხველშიცა და მნიშვნელშიც ის უნდა პირდაპირ წავშალოთ.

2. თუ რომელიმე ასო მრიცხველშიცა და მნიშვნელშიც შედის სხვადასხვა ხარისხის მაჩვენებლით, მაშინ უდიდესი მაჩვენებლიდან აკლებენ უმცირეს მაჩვენებელს, ამ სხვაობას უწერენ ასოს ხარისხის მაჩვენებლად და ტოვებენ იქ, სადაც მას უდიდესი ხარისხის მაჩვენეპელი ჰქონდა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: თუ მრიცხველში ან მნიშვნელში შეკვეცის შედეგად გაქრება (исчезнет) ყველა მამრავლი, მაშინ მათ ადგილზე უნდა დაიწეროს 1 (ერთიანი) იმ ნიშნით, რომელიც ეწერა წინა ნამრავლს შეკვეცამდე.

უაზრო იქნებოდა გვეთქვა, რომ $\frac{b^2}{b^7}$ წილადის შეკვეცის შემდეგ მრიცხველში „არაფერი არ დარჩა" ან $\frac{3a^2b^3}{-ab}$ წილადის შეკვეცის შემდეგ მნიშვნელში „დარჩა მხოლოდ მინუსი".

ზემოთ მოხსენებული ფაქტები იმის საბუთია, რომ შეკვეცის ასე განმარტება სახიფათო უნდა იყოს: გამოთქმა „პირდაპირ წავშალოთ" მოსწავლეს მით უფრო აფიქრებინებს, რომ აქ რაიმე მისთვის ცნობილ მოქმედებებზე არაა ლაპარაკი, აქ წაშლაა რაღაცა ზედმეტის და მეტი არაფერი. მით უფრო გამოთქმა „შეკვეცის შედეგად გაქრება" მამრავლებიო. რატომ უნდა გაქრეს? კი არ გაქრება, არამედ გაყოფით მივიღებთ 1-ს, რომელიც მამრავლად არ იწერება. „არაფერი არ დარჩა" და 1 დავწეროთ! მოსწავლე

იფიქრებს, რომ სადაც კი არაფერი არა გვაქვს, 1-ის დაწერაა ყოველთვის საჭირო.

უმჯობესია ვერიდოთ მოსწავლეებთან ამგვარ გამოთქმებს.

§ 2. განვიხილოთ შეცდომები წილადების შეკრება-გამოკლებაში. პირველ ყოვლისა განვიხილოთ ის შეცდომა, რომელიც ყველაზე მეტადაა გავრცელებული;—იგი დაკავშირებულია მრავალწევრის ფრჩხილებში მოთავსებასთან და მის ფრჩხილებიდან განთავისუფლებასთან. ეს შეცდომა ენათესავება შეცდომას, რომელიც აღწერილია პირველი ქვეთავის § 3-ში. იმავე სახის შეცდომა აქ წილადებზეა გავრცელებული.

$$4.\ \frac{2a-5b}{4}-\frac{3a-4b}{6}+\frac{a-b}{8}=$$
$$=\frac{12a-30b-12a-16b+3a-3b}{24}=\frac{3a-49b}{24}.$$

$$5.\ \frac{4a^2-9b^2}{9}-2a-\frac{a^2-6b^2}{6}=\frac{8a^2-18b^2-36a-3a^2-18b^2}{18}=$$
$$=\frac{5a^2-36b^2-36a}{18}.$$

ეს შეცდომა თავისი წარმოშობის მიზეზებით დაკავშირებულია შეცდომებთან მრავალწევრთა ფრჩხილებში მოთავსებასა და მისი ფრჩხილებიდან განთავისუფლებაში. თავისი ძირებით ამათვე ენათესავება შეცდომა წილად-წევრიანი განტოლებების ამოხსნაში. ამიტომაც წილადების შეკრება-გამოკლებაში აქ მოტანილი შეცდომის (მაგალითები №№ 4, 5) ანალიზი მოხდენილი იქნება განტოლებათა ამოხსნაში ხსენებულ შეცდომის განხილვასთან ერთად.

აქვე უნდა აღვნიშნოთ შეცდომა, რომელიც აგრეთვე წილადების შეკრება-გამოკლების დროს გვხვდება.

წილადების გაერთმნიშვნელიანების დროს ზოგ შემთხვევაში საჭირო ხდება ნიშნის შეცვლა წილადის მნიშვნელში. წილადის სიდიდე რომ არ შეიცვალოს, საჭიროა სათანადო ცვლილებების მოხდენა—ნიშნის შეცვლა წილადის წინ ან მისი მრიცხველისათვის. ამ პროცესის დარღვევა იწვევს შეცდომას, რომელიც ორი სახით მოგვყავს:

1) წილადის მნიშვნელს უცვლიან ნიშანს, არ ახდენენ სხვა საჭირო ცვლილებებს.

$$6.\ \frac{2}{2a+3}+\frac{3}{3-2a}+\frac{2a+15}{4a^2-9}=\frac{2}{2a+3}+\frac{3}{2a-3}+\frac{2a+15}{4a^2-9}=$$

$$=\frac{2(2a-3)+3(2a+3)+2a+15}{(2a+3)(2a-3)}=\frac{4a-6+6a+9+2a+15}{4a^2-9}=$$

$$=\frac{12a+18}{4a^2-9}.$$

$$7.\ \frac{3}{4a+3}-\frac{2}{3-4a}-\frac{16a-6}{16a^2-9}=\frac{3}{4a+3}-\frac{2}{4a-3}-\frac{16a-6}{16a^2-9}=$$

$$=\frac{12a-9-8a-6-16a+6}{16a^2-9}=\frac{-12a-9}{16a^2-9}.$$

$$8.\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y-2x}-\frac{2x-3y}{4x^2-y^2}=\frac{2}{x}+\frac{3}{2x-y}-\frac{2x-3y}{4x^2-y^2}=$$

$$=\frac{8x^2-2y^2+3x(2x+y)-2x^2-3xy}{x(4x^2-y^2)}=$$

$$=\frac{8x^2-2y^2+6x^2+3xy-2x^2-3xy}{x(4x^2-y^2)}=\frac{12x^2-2y^2}{x(4x^2-y^2)}.$$

2) უცვლიან წილადის მნიშვნელს ნიშანს. მრიცხველში არის ორწევრი,—ნიშანს უცვლიან მხოლოდ მეორე წევრს:

$$9.\ \frac{2p-7q}{6p-5q}-\frac{p-4q}{5q-6p}=\frac{2p-7q}{6p-5q}-\frac{p+4q}{6p-5q}=$$

$$=\frac{2p-7q-p+4q}{6p-5q}=\frac{p-3q}{6p-5q}$$

$$10.\ \frac{2b+3c}{2b-3c}-\frac{2b-3c}{3c-2b}=\frac{2b+3c}{2b-3c}-\frac{2b+3c}{2b-3c}=$$

$$=\frac{2b+3c-2b+3c}{2b-3c}=\frac{6c}{2b-3c}$$

11. $$\frac{4x+y}{4x-y}+\frac{4x-y}{y-4x}=\frac{4x+y}{4x-y}+\frac{4x+y}{4x-y}=\frac{4x+y+4x+y}{4x-y}=$$
$$=\frac{8x+2y}{4x-y}.$$

1951 წელს VII კლასის 32 მოსწავლეს მივეცით გამოსაყვანად ზემომოყვანილი 6 მაგალითი №№ 6—11. 5-მა მოსწავლემ დაუშვა ისეთი შეცდომა, როგორიც ზევით იყო მოყვანილი. პირველი სამი მაგალითი სწორად ამოხსნა 23 მოსწავლემ. აღსანიშნავია, რომ 4-მა მოსწავლემ ამოხსნა მაგალითები იმ სახით, რომ არ მოგვეცა საშუალება შეგვემოწმებინა მათი უნარი წილადის გარდაქმნასთან დაკავშირებით .სახელდობრ:

12. $$\frac{3}{4a+3}-\frac{2}{3-4a}-\frac{16a-b}{16a-9}=\frac{3}{3+4a}-\frac{2}{3-4a}-$$
$$-\frac{16a-6}{16a^2-9}=\frac{3(3-4a)-2(3+4a)-16a-6}{16a^2-9}=$$
$$=\frac{9-12a-6-8a-16a-6}{16a^2-9}=\frac{-3-36a}{16a^2-9}.$$

აქ გამოირკვა, რომ მათ არ ესმით $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ფორმულის აზრი.

მეორე სამი მაგალითი სწორად ამოხსნა 25 მოსწავლემ. 7 მოსწავლემ ზემოხსენებული შეცდომა დაუშვა.

ამგვარად, ამ ფორმულაში გაურკვევლობითაა გამოწვეული შეცდომები მაგალითებში: №№ 6, 7, 8.

ავიღოთ მაგალითი № 6.

მოსწავლე მიმხვდარია, რომ საერთო მნიშვნელად $4a^2-9$ გამოდგება, იცის აგრეთვე, რომ ის $2a+3$ და $3-2a$ თანამამრავლებად არ იშლება. ატყობს, რომ უნდა შეცვალოს პირველი ორი წილადის ერთ-ერთი მნიშვნელი, მაგრამ რომელი? ვერ ამჩნევს, რადგან არ იცის როგორ უნდა გაარკვიოს ეს. ამიტომაც ეს მაგალითი ორნაირი შეცდომით გვხვდება № 6 და № 12.

მაგრამ, გარდა ამისა არის კიდევ სხვა მომენტიც—ცვლილება წილადში, მისი წევრების ნიშნის შეცვლის გამო. $\frac{3}{3-2a}$ წილადის

მნიშვნელს ნიშანი შევუცვალეთ, რა უნდა მოსვლოდა წილადს? რაკი მრიცხველი უცვლელად დავტოვეთ, წილადს ნიშანი უნდა შეეცვალა. შეცდომა სწორედ აქ აღმოჩნდა, მოსწავლემ შეუცვალა ნიშანი წილადის ერთ წევრს—მნიშვნელს, წილადი კი იმავე ნიშნით გადმოწერა.

ამის ერთ-ერთი მიზეზი ისაა, რომ მოსწავლეებს აკლიათ ვარჯიში წილადის წევრთა ნიშნების შეცვლაზე. სახელმძღვანელოში (ა. პ. კისელევი „ალგებრა", ნაწ. 1, § 7). ეს მასალა მოცემულია საკმარისი განმარტებებითა და მაგალითებით. ნ. ა. შაპოშნიკოვისა და ნ. კ. ვალცევის „ალგებრულ ამოცანათა კრებულში" ამ საკითხზე არაა სავარჯიშო. ეს მდგომარეობა ერთგვარად გამოსწორებულია პ. ლარიჩევის ალგებრის ამოცანათა კრებულში, ნაწ. I, სავარჯიშოები №№ 824, 834, 835, 836. ამის გამო უმრავლეს შემთხვევებში მასწავლებლები არ ავარჯიშებენ მოსწავლეებს ამ მასალაზე.

ამ მიზეზით ხდება აგრეთვე შეცდომები მაგალითებში: №№ 9, 10, 11. მოსწავლეს ესმის, რომ თუ მნიშვნელს ნიშანი შეუცვალა, საჭიროა მრიცხველსაც ნიშანი შეუცვალოს — წინააღმდეგ შემთხვევაში წილადის სიდიდე იცვლება. მას ჰგონია, რომ თუ $p-4q$ გამოსახულების მაგიერ დაწერა $p+4q$, ამით მან მრიცხველს ნიშანი შეუცვალა. აი აქაა სწორედ შეცდომა.

4. შეცდომები რადიკალებზე მოქმედებათა წარმოებაში

ყველა მასწავლებლისთვისაა ცნობილი, რომ მოსწავლეები მოქმედებებს რადიკალებზე უხალისოდ ეკიდებიან. ისინი თვლიან მას „მშრალ მასალად". „უინტერესო" და „უხალისო" მასალას კი სიძნელეები თან სდევს. ამიტომაც რადიკალებზე მოქმედების შესრულების პროცესში ბევრი სიძნელე წარმოიშვება, რომელთა შედეგებიც შეცდომების სახით გვევლინება. „ცნობილია, რომ ალგებრაში თემა „მოქმედებანი რადიკალებზე" წარმოადგენს სწავლებისათვის მეტად ძნელ მასალას, ხოლო მოსწავლეთათვის მძიმედ ასათვისებელს. მგონი, ყველაზე მეტ შეცდომებს რადიკალების გარდაქმნაში ვხვდებით და არა მარტო, სუსტ მოსწავლეთა ნამუშევრებში. არამედ ხანდახან ძლიერ მოსწავლეებთანაც"[1].

მოსწავლეთა წერით ნამუშევრებში ამ შეცდომების საგრძნობი რაოდენობაა. ეს „მრავალფეროვანი" შეცდომები იმის თვალსაჩინო

[1] И. С. Плужников, о некоторых недоразумениях, связанных с употреблением радикала, журн. „Математика в школе," 1941, № 4.

გამოხატულებაა, რომ საკონტროლოდ მიცემული მაგალითების ამოხსნის დროს მოსწავლეებს არ ჰქონიათ ის კონკრეტული წარმოდგენები, რომლებიც ნათლად დაანახვებდა მათ მოქმედებებს.

მოსწავლეთა რვეულების შესწავლის შედეგად ჩამოყალიბდა ტიპიურ შეცდომათა შემდეგი ჯგუფები:

1. შეცდომები ფესვის ამოღებაზე ორწევრიდან.

2. შეცდომები თანამამრავლის რადიკალის ნიშნის ქვეშ შეტანის დროს.

3. შეცდომები რადიკალქვეშა გამოსახულების მნიშვნელისაგან განთავისუფლებაში.

4. შეცდომები ფესვიდან ფესვის ამოღებაში.

5. შეცდომები წილადის მნიშვნელის ირაციონალობიდან განთავისუფლების დროს.

6. შეცდომები ფესვთა ალგებრული ჯამის „გარდაქმნაში“.

7. შეცდომები ფესვის ამოღებაში და ფესვების საერთო მაჩვენებლებზე დაყვანის დროს.

§ 1. განვიხილოთ შეცდომა: $\sqrt[n]{a^n \pm b^n} = a \pm b$

როგორც ვხედავთ, ამოფესვის მოქმედება აქ მოხდენილია თითოეულ შესაკრებზე ცალკ-ცალკე, ეს ნიშნავს განრიგადობის თვისების გავრცელებას ამოფესვის მოქმედებაზე, რაც ცხადია შეცდომაა.

1. $\sqrt[3]{8a^9 - 8a^6b^3} = \sqrt[3]{8a^6(a^3 - b^3)} = 2a^2(a-b)$

2. $\sqrt{n^3 - m^2n} - \sqrt{(m+n)(m^2-n^2)} - \sqrt{n(m^3-n^2)} =$

$= \sqrt{n\,(n^2-m^2)} - \sqrt{(m+n)(m^2-n^2)} - \sqrt{n\,(m^2-n^2)} =$

$= (n-m)\sqrt{n} - (m-n)\sqrt{m+n} - (m-n)\sqrt{n}\,.$

ამ შეცდომის წარმოშობის მიზეზების შესახებ ჩვენ უკვე გვქონდა საუბარი (გვ. 42, 43) აქ კვლავ განმეორება ზედმეტად მიგვაჩნია.

§ 2. ახლა განვიხილოთ შეცდომა თანამამრავლის რადიკალის ნიშნის ქვეშ შეტანის დროს: $a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$

თანამამრავლის შეტანის წესი რადიკალის ნიშნის ქვეშ დარღვეულია — a არაა წინასწარ ახარისხებული ფესვის მაჩვენებლის ხარისხად.

მოგვყავს ამ შეცდომის რამდენიმე მაგალითი:

1. $\frac{1}{a-b}\sqrt{\frac{a^2-2ab+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{2(a-b)}} = \sqrt{\frac{a-b}{2}}$

$$2.\ \sqrt[3]{a\sqrt{a^5}}\ \ \sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[6]{a^6}\ \ \sqrt[15]{a^4} = a\sqrt[15]{a^4}$$

$$3.\ \sqrt[5]{x^3\sqrt[3]{3a^2\sqrt[8]{2x}}} = \sqrt[5]{x^3\sqrt[3]{\sqrt[6]{3a^2\cdot 2x}}} =$$

$$= \sqrt[5]{x^3\sqrt[9]{6a^2x}} = \sqrt[45]{6a^2x^4}$$

ეს მაგალითები იმაზე მიგვითითებს, რომ მოსწავლეებს არა აქვთ პასუხის შემოწმების ჩვევა. ეს კი მეტად სასარგებლო ჩვევაა. ძალიან ხშირ შემთხვევაში იგი იხსნის მოსწავლეს აუცილებელი შეცდომისაგან.

მართლაც, აქ არამც თუ შემოწმება, აზრიც კი შემოწმების შესახებ, უბრალო საკითხის დასმაც საკმარისია შეცდომის დასანახად. ცხადია, ამ შეცდომის მიზეზი მხოლოდ ამაში არაა. მაგალითები № 2 და № 3 ადასტურებენ იმას, რომ შეცდომის ერთ-ერთი მიზეზი უდავოდ სიჩქარეშია: სწრაფად შეიყვანონ რაციონალური მამრავლი რადიკალს შიგნით. ამ მაგალითების ამოხსნის დროს გამოტოვებულია საშუალედო გამოთვლები და „ნახტომია“ გაკეთებული პირდაპირ შედეგისაკენ. უთუოდ სწორია ვ. გ. პროჩუხაევი, როცა ამ შეცდომის მიზეზის შესახებ წერს: „შეცდომა აიხსნება ზედმეტი აჩქარებულობით შემოკლებული ჩანაწერების შემოტანაში. საერთოდ უნდა აღინიშნოს ზიანი ამ აჩქარებულობისა ჩანაწერების გაფორმებაში იგივურ გარდაქმნათა ყოველი საფეხურისათვის“[1].

გარდა ამ მიზეზებისა, შეცდომას იწვევს ის, რომ რადიკალებზე მოქმედებანი საკმაოდ აბსტრაქციულია. აი რას წერს პროფ. ი. ვ. არნოლდი: „გადასვლა მარტივ, რიცხვით ფორმულებიდან საკმაოდ გადატვირთულ ალგებრულ გარდაქმნებზე აშორებს ფორმალურ წესებს ჩვეულებრივი კონკრეტული შინაარსისაგან და მოსწავლეს უსპობს წარმოებულ გარდაქმნათა სისწორის იმ ინტუიციურ რწმენას, რომელიც არითმეტიკაში დაფუძნებულია აბსტრაქციის უფრო დაბალ საფეხურზე მქონე მდიდარ გამოცდილებასა და საშუალებაზე დაუბრუნდეს ამ გამოცდილებას ყოველ საეჭვო შემთხვევაში“[2].

---

[1] Б. Г. Прочухаев, Анализ ошибок учащихся средней школы по математике 1946, стр. 60.

[2] Проф. И. В. Арнольд, Показатели степени и логарифмы в курсе элементарной алгебры, 1949, стр. 33.

რადიკალებზე მოქმედებების წარმოების დროს ძალიან ძნელია მოსწავლემ შეინარჩუნოს კონკრეტული წარმოდგენები; ამას ემატება მასწავლებლის მიერ მასალის ზერელედ, ფორმალურად ახსნა (რაც ხშირი მოვლენაა), მოსწავლეთა გადატვირთვა ვარჯიშობით ისეთი წესების გამოყენებაზე, რომელთა გაგებაც საკმაოდ არ იყო დაფუძნებული საწყის კონკრეტულ ბაზაზე და, მაშ, შექმნილი არ იყო პირობა შეგნებული ათვისებისათვის.

ზემოთქმული ეხება არა მხოლოდ მოყვანილ შეცდომას, არამედ ყველა შეცდომას რადიკალებზე მოქმედებათა წარმოებაში.

§ 3. შევეხოთ ახლა შეცდომას: $a\sqrt{\frac{1}{b}} = ab\sqrt{b}$

მოსწავლე ანთავისუფლებს რადიკალქვეშა გამოსახულებას მნიშვნელისაგან. რადიკალქვეშა წილადის გარდაქმნის შემდეგ მნიშვნელიდან ამოაქვს ფესვი, რომელიც რადიკალის წინ იწერება. როგორ უნდა დაიწეროს ამოღებული ფესვი რადიკალის ნიშნის წინ? ამ კითხვის გადაჭრის დროს ხშირად თავს იჩენს შეცდომა.

პროფ. პ. შევარევს აღწერილი აქვს ასეთი მაგალითის ამოხსნა:[1]

$$3a\sqrt{\frac{b}{a}} - 2b\sqrt{\frac{a}{9b}} + \frac{1}{3b}\sqrt{ab^3} + \frac{5}{a}\sqrt{\frac{a^5b}{16}}$$

რომლის ამოხსნისას 9 მოსწავლემ დაუშვა ერთი და იმავე სახის შეცდომა — მეორე და მეოთხე რადიკალის გამარტივებაში:

$$2b\sqrt{\frac{a}{9b}} = 2b\cdot 3b\sqrt{ab}$$

$$\frac{5}{a}\sqrt{\frac{a^5b}{16}} = \frac{5}{4a\cdot a^2}\sqrt{ab}$$

ასეთი შეცდომის მაგალითები მოსწავლეთა წერითი ნამუშევრებში შემდეგი სახით აღმოჩნდა:

$$4.\ 4y^3\sqrt{\frac{xz^3}{64y^{10}}} = 4y^3\cdot 8y^5z\sqrt{xz} = 32y^8z\sqrt{xz}$$

---

[1] Проф. П. Я. Шеварев, Опыт психологического анализа алгебраических ошибок. Извест. Акад. Педагогич. наук РСФСР, вып. 3, 1946, стр. 162.

$$5.\ \left(2a^2\sqrt{\frac{a}{b}}+c\sqrt[3]{\frac{b}{a}}-x\sqrt{\frac{2}{a}}\right)\sqrt[3]{\frac{a}{x}}=$$

$$=2a^2\sqrt[6]{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{x}}+c\sqrt[3]{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{x}}-x\sqrt[6]{\frac{2}{a}\cdot\frac{a}{x}}=$$

$$=2a^2\sqrt[6]{\frac{a^2}{bx}}+c\sqrt[3]{\frac{b}{x}}-x\sqrt[6]{\frac{2}{x}}=2a^2\sqrt[6]{\frac{a^2b^5x^5}{b^6x^6}}+$$

$$+c\sqrt[3]{\frac{bx^2}{x^3}}-x\sqrt[6]{\frac{2x^5}{x^6}}=2a^2\cdot bx\sqrt[6]{a^2b^5x^5}+cx\sqrt[3]{bx^2}-$$

$$-x^2\sqrt[6]{2x^5}$$

გარდა საერთო მიზეზებისა, რომლებიც ზემოთ დავასახელეთ, შეცდომას $a\sqrt{\frac{1}{b}}=ab\sqrt{b}$ იწვევს უთუოდ ისიც, რომ გარდაქმნა არაა მოცემული გაშლილად $\sqrt{\frac{1}{b}}=\sqrt{\frac{b}{b^2}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}}=$

$$=\frac{\sqrt{b}}{b}=\frac{1}{b}\sqrt{b}$$

ამგვარად, გარდაქმნაში გამოტოვებულია რამდენიმე საფეხური. მოქმედებათა ზეპირად შესრულების დროს კი შესაძლოა რომელიმე საფეხური მთლიანად გამორჩეს მხედველობიდან, როგორც აქაა გამორჩენილი წილადიდან ფესვის ამოღების წესის გამოყენება.

§ 4. ავიღოთ აგრეთვე მეტად გავრცელებული შეცდომა ფესვიდან ფესვის ამოღებაში: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n+m]{a}$

ფესვთა მაჩვენებლების გადამრავლების მაგიერ ხდება მათი შეკრება.

ამ შეცდომას ასახელებს პროფ. ი. არნოლდი: „$\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}$ ამის პასუხად ხშირად ვხვდებით $\sqrt[8]{a}$-ს"[1].

ეს შეცდომა მეტად დამახასიათებელია სწავლების ამ ეტაპზე (ფესვიდან ფესვის ამოღების მოქმედების შესწავლის დროს). მოვიყვანოთ მაგალითები:

[1] Проф И. Арнольд, Показатели степени и логарифмы в курсе элементарной алгебры, 1949, стр. 41.

6. $m\sqrt[7]{m^6\sqrt[3]{m^2}} = m\sqrt[7]{\sqrt[3]{m^{24}\cdot m^2}} = m\sqrt[10]{m^{26}} =$
$= m^3\sqrt[10]{m^6}.$

7. $\sqrt[3]{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y^3}{x}}}} = \sqrt[3]{\frac{x}{y}\sqrt[4]{\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{y^3}{x}}} =$

$$= \sqrt[3]{\frac{x}{y}\sqrt[4]{xy}} = \sqrt[7]{\frac{x^5 y}{y^4}} = \sqrt[7]{\frac{x^5}{y^3}}.$$

8. $\sqrt{x^2\sqrt[3]{x\sqrt{x}}} = \sqrt{\sqrt[3]{x^7\sqrt{x}}} = \sqrt[5]{\sqrt{x^3}} =$

$$= \sqrt[7]{x^8} = x\sqrt[7]{x}$$

საინტერესოა პროფ. ი. არნოლდის აზრი ამ შეცდომასთან დაკავშირებით[1]. ის თვლის, რომ განსაზღვრები და წესები რადიკალებზე მოქმედებისათვის, რომლებიც მთელი თავისი ლოგიკური სიმკაცრით არის ჩამოყალიბებული IX კლასში, „ჰაერში რჩება ჩამოკიდებული“. მოსწავლეები ცდილობენ მხოლოდ და მხოლოდ დაიხსომონ ისინი, ხოლო რადიკალებზე მოქმედებათა წარმოების დროს მათ არა აქვთ კონკრეტული და მიმართულების მიმცემი მკაფიო წარმოდგენები. მოსწავლისათვის, მისი წარმოდგენებისა და ემოციის მიხედვით, სულერთია დაწეროს

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[8]{a} \quad \text{თუ} \quad \sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[15]{a}$$

მართლაც, თუ კი თვალსაჩინოდ არ აჩვენეს მოსწავლეს რა მოქმედებას აღნიშნავს $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}$, ცხადია, არ ვიქნებით გარანტირებული შეცდომისაგან.

§ 5. წილადის მნიშვნელის ირაციონალობისაგან განთავისუფლების დროს, მოსწავლეები ხშირად ირჩევენ არაწესიერ გზას, რომელსაც შეცდომამდე მივყევართ. ასე, მაგალითად:

---

[1] Проф. И. В. Арнольд, Операторное истолкование числа, Известия Академии педаг. наук, 1946 г., №4.

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a\sqrt[n]{b^m}}{\sqrt[n]{b^m}\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a\sqrt[n]{b^m}}{b^m}.$$

წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს ამრავლებენ რადიკალზე, რომელიც მნიშვნელშია მოცემული ($\sqrt[n]{b^m}$), ნაცვლად იმისა, რომ გაამრავლონ $\sqrt[n]{b^{n-m}}$-ზე.

გავეცნოთ ამ შეცდომის ზოგიერთ მაგალითს, ამოღებულს მოსწავლეთა რვეულებიდან.

9. $\frac{b}{c\sqrt[4]{bc}}=\frac{b\sqrt[4]{bc}}{c\sqrt[4]{bc}\sqrt[4]{bc}}=\frac{b\sqrt[4]{bc}}{cbc}=\frac{\sqrt[4]{bc}}{c^2}$

10. $\frac{a^3b^3}{\sqrt[5]{81a^4b^8}}=\frac{a^3b^2\sqrt[5]{81a^4b^8}}{\sqrt[5]{81a^4b^8}\sqrt[5]{81a^4b^8}}=\frac{a^3b^2\sqrt[5]{81a^4b^8}}{81a^4b^8}$

მოსწავლე ანგარიშმიუცემლად იქცევა, რადგანაც მას მექანიკურად აქვს შეთვისებული ეს პროცესი. მოსწავლეთა დიდ უმრავლესობას არ წარმოუდგენია, თუ რატომ ვანთავისუფლებთ ჩვენ მაინც და მაინც წილადის მნიშვნელს ირაციონალობისაგან, და არა მის მრიცხველს და საზოგადოდ, რა მიზანი აქვს ამ ოპერაციას. გარდა ამისა აქ თავს იჩენს ერთი ჩვევა, რომელიც მოსწავლეთა ნაწილს ახასიათებს: მოსწავლე ერთი მაგალითის ამოხსნის მიხედვით აკეთებს სხვებსაც, არ აქცევს ყურადღებას მაგალითების სპეციფიკას. წილადის მნიშვნელის ირაციონალობისაგან განთავისუფლების შესწავლას, როგორც წესი, იწყებენ პირველად კვადრატული ფესვის შემთხვევით (როგორც ყველაზე მარტივი ფესვის), ამასთან ფესვი ისეთია, რომ საჭიროა წილადის კომპონენტების გამრავლება მნიშვნელზე. მაგალითად:

$$\frac{a}{\sqrt{a}}=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}}=\frac{a\sqrt{a}}{a}=\sqrt{a}$$ [1]

მოსწავლე პირველი მაგალითების მიხედვით მოქმედობს და ყოველი მაგალითის ამოხსნის არსებითი დამახასიათებელი ნიშანი მნიშვნელზე გამრავლება ჰგონია.

---

[1] ნ. შაპოშნიკოვი და ნ. ვალცოვი, ალგებრულ ამოცანათა კრებული, ნაწ. II, № 255.

მოსწავლეს ეს ჩვევა, შესაძლოა, გამომუშავებულიცა აქვს მაგალითებზე ვარჯიშის პრაქტიკიდან. მართლაც, არის მიღებული აზრი, რომლის მიხედვითაც ითვლება მიზანშეწონილად მიეცეს მოსწავლეს ერთი და იმავე სახის მაგალითები თანმიყოლებით—რაც უფრო მეტ მაგალითს ამოხსნის ერთბაშად, მით უფრო კარგად იქნება შეთვისებული ესა თუ ის მოქმედებაო. ნამდვილად კი ხდება ასე: მოსწავლე იყვანს რამდენიმე მაგალითს, ერთს ან ორს, ხოლო შემდეგ მოქმედობს მექანიკურად.

§ 6. მოვიყვანოთ ორი შეცდომა, რომლებიც აგრეთვე გავრცელებულია რადიკალებზე მოქმედებების შესწავლის პირველ ხანებში.

1. ფესვის ამოღებისათვის—ფესქვეშა გამოსახულების კოეფიციენტს ფესვის მაჩვენებელზე ყოფენ.

11. $\sqrt{8x^2}=4x$

12. $\sqrt[3]{9a^3b^6}=3ab^2$

13. $\sqrt[4]{16a^4b^{12}}=4ab^3$

2. ფესვების საერთო მაჩვენებელზე დაყვანის დროს ფესქვეშა გამოსახულების კოეფიციენტს ამრავლებენ იმ რიცხვზე, რაზეც ამრავლებენ ფესვის მაჩვენებელს:

14. დაიყვანეთ საერთო მაჩვენებელზე: $\sqrt[3]{2a^2b}$ და $\sqrt[4]{3a^3b}$

პასუხი: $\sqrt[12]{8a^8b^4}$ და $\sqrt[12]{9a^9b^3}$

15. იგივე დაყვანა ფესვებისათვის: $\sqrt[5]{3a^3b^2}$ და $\sqrt[3]{2ab}$

პასუხი: $\sqrt[15]{9a^9b^6}$ და $\sqrt[15]{10a^5b^5}$

16. მონაცემი: $\sqrt{3a}$ და $\sqrt[4]{2b^3}$

პასუხი: $\sqrt[4]{6a^3}$ და $\sqrt[4]{2b^3}$

ფესვის ამოღების წესის გავლენით გაუყვიათ ფესქვეშა გამოსახულების კოეფიციენტი ფესვის მაჩვენებელზე, რითაც ეს წესი კოეფიციენტზე გავრცელდა. მეორე შეცდომაში კოეფიციენტი გამრავლებულია იმავე რიცხვზე, რაზეც ფესვის მაჩვენებელი. ეს შეცდომები გვაგონებს შეცდომებს ახარისხებაზე (ქვეთავი 2, მაგალითები №№ 16—21). შეიძლება ვიფიქროთ, რომ მათ აქვთ შინაგანი კავშირი:—მოსწავლეებმა ვერ შეითვისეს ციფრით გამოსახული

რიცხვის ახარისხება. ამ უცოდინრობამ რადიკალებზე მოქმედების წარმოების დროს იჩინა თავი. თავდაპირველად ამ შეცდომის მიზეზად ვთვლიდით სწორედ ამ გარემოებას. მაგრამ დაკვირვება გვარწმუნებს, რომ ეს შეცდომები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად წარმოიშვება. მართლაც, ზემომოყვანილი შეცდომები ფესვის ამოღებასა და გარდაქმნაში იმ მოსწავლეებს აღმოაჩნდათ, რომლებიც კარგად ერკვეოდნენ ახარისხებაში (ყოველ შემთხვევაში მათ არ ჰქონიათ შეცდომები ახარისხების წარმოებაში).

ფესვებზე მოქმედებათა წარმოების აბსტრაქტული ხასიათი არის იმის მიზეზი, რომ მოსწავლეები, განსაკუთრებით პირველ ხანებში, კარგავენ საკითხის მთლიანობაში წარმოდგენის საშუალებას. ითვისებენ რა საკითხის პატარ-პატარა ცალკეულ ნაწილებს, ისინი იძენენ ბუნდოვან წარმოდგენებს.

§ 7. ამავე მიზეზებს უკავშირდება აგრეთვე შეცდომები რომლებიც ლოგიკური ხასიათისაა: $\sqrt{a^2} = a$.

ამ შეცდომის შესახებ მიხ. კონიაშვილი წერს: „მოსწავლეები ხშირად წერენ $\sqrt{a^2} = a$, მაგრამ ვერ ამჩნევენ, რომ ეს ტოლობა არ არის სწორი, რომ $\sqrt{a^2} = a$ თუ $a \geqslant 0$.

ამ შეცდომის გამო ისინი მთელ რიგ სხვა შეცდომებს უშვებენ. მაგალითად: $\sqrt{(x-1)^2} = x-1$; მაგრამ $\sqrt{(x-1)^2} = x-1$, თუ $x \geqslant 1$ და $\sqrt{(x-1)^2} = 1-x$, თუ $x \leqslant 1$.

ზოგადად თუ ვიტყვით, ყოველნაირი x-სათვის

$$\sqrt{(x-1)^2} = (x-1).$$

მოსწავლეთა ამგვარი შეცდომების მიზეზად უნდა ჩაითვალოს მასწავლებლის მიერ საკითხის ზერელე, წმინდა მექანიკური, შაბლონური დამუშავება.

იმავე მიზეზით უნდა აიხსნას აგრეთვე მოსწავლეთა მიერ ხშირად დაშვებული ისეთი შეცდომა, როგორიცაა:

$$\sqrt{4}.\ \sqrt[3]{-8} = \sqrt[6]{4^3.64} = \sqrt[6]{4^6} = 4$$

ნაცვლად —4-სა“[1].

პროფ. პ. მოდენოვი აღნიშნავს: „არაა საკმარისი განსაზღვრების „დასწავლა“, საჭიროა შეეძლოთ მათი გამოყენება სხვადასხვა

---

[1] მიხ. კონიაშვილი, მოსწავლეთა ცოდნის ხარისხის ამაღლებისათვის მათემატიკაში, 1951, გვ. 11.

კონკრეტულ ამოცანებში. ზოგიერთი შემომსვლელი (იგულისხმება უმაღლეს სასწავლებელში შემსვლელი. ე. იმ.) ამბობდა, რომ ფესვის $\sqrt{(m^2-n^2)^2}$ არითმეტიკული მნიშვნელობა უდრის m^2-n^2 (იმ დროს, როცა $n>m>0$?! ეს კიდევ ცოტაა. ისინი ცდილობდნენ ამის „დამტკიცებას". ასეთი მტკიცების უაზრობა ცხადია: $m^2-n^2<0$ (რადგან $n>m>0$). და საზოგადოდ, ძირითადი განსაზღვრებანი უნდა იქნას შესწავლილი, გაგებული, მაგრამ ესეც ცოტაა: საჭიროა იცოდნენ მათი სწორად გამოყენება, იცოდნენ როგორ ჰოიხმარონ ისინი"[1].

ამ შეცდომის მაგალითები აღრიცხული იყო ჩვენს სკოლებშიც. მოგვყავს ზოგიერთი:

17. $\sqrt{(a-x)^2}=a-x$

არა აქვს ჩატარებული გამოკვლევა იმისა, თუ როგორია სხვაობა $a-x$.

18. $\sqrt{(a^2-b^2)^2}=a^2-b^2;\ a<b$

19. $\sqrt{(-4)^2}=-4$

20. $\sqrt[4]{(-2)^4}=-2$.

საინტერესოა შემდეგი ისტორიული ცნობა.

რადიკალებზე მოქმედებათა წარმოების ამჟამად არსებული წესები, რასაკვირველია, ერთბაშად არ იქნა შემოღებული. წესების დადგენამ გაიარა განვითარების სხვადასხვა ეტაპი. მათ შემუშავების პროცესში ხანდახან ადგილი ჰქონდა კურიოზულ შემთხვევებსაც.

XVIII საუკუნის მეორე ნახევრისათვის მათემატიკოსების მიერ აღიარებული იყო მხოლოდ დადებითი და, უკიდურეს შემთხვევაში, უარყოფითი ნამდვილი რიცხვები, როგორც არსებული და რეალური. წარმოსახვით რიცხვებს მეტად ფრთხილად ეკიდებოდნენ. მათ რეალურ რიცხვებად არ თვლიდნენ. ამის უმთავრესი მიზეზი, ცხადია, გახლდათ ის, რომ მათემატიკაში იმ დროისათვის არ იყო დადგენილი წარმოსახვით რიცხვთა არითმეტიკა.

ცნობილი მათემატიკოსი ლ. ეილერი ცდილობდა წარმოსახვით რიცხვებზე გაევრცელებინა დადებითი რიცხვების ყველა თვისება. ამ ცდამ ეილერი შეცდომამდე მიიყვანა. მან დაუშვა, რომ ტო-

---

[1] П.С. Моденов, Сборник задач по математике, 1951, стр. 146.

ლობა: $\sqrt{a}\ \sqrt{b}=\sqrt{ab}$ სამართლიანია a-ს და b-ს ყოველგვარი მნიშვნელობისათვის (როგორც დადებითი მნიშვნელობისათვის, ისე უარყოფითისა). ამ დაშვებით ეილერმა მიიღო:

$$\sqrt{-a}\quad\sqrt{-b}=\sqrt{(-a)(-b)}=\sqrt{ab}$$

რითაც მათემატიკოსებს შორის დიდი კამათი გამოიწვია.

ბეზუმ და რიკარტიმ არ გაიზიარეს ეილერის ეს აზრი; მათ პირიქით მიიღეს:

$$\sqrt{-a}\quad\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}$$

ბეზუ ასე მსჯელობდა: როცა არ ვიცით როგორაა მიღებული a^2, მაშინ $\sqrt{a^2}$ უნდა ორივე ნიშნით ავიღოთ, ხოლო, თუ ვიცით, რომ a^2 მიღებულია—a-ს გამრავლებით თავის თავზე, მაშინ

$$\sqrt{a^2}=-a$$

$$\text{მაშასადამე,}\ \sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a}=-a$$

საიდანაც: $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=\sqrt{a}\quad\sqrt{b}\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-\sqrt{ab}.$

როგორც ეილერი, ისე ბეზუ ცდებოდა, იყენებდა რა ტოლობას $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ უარყოფით რიცხვებისათვის. ხსენებული ტოლობა გამოიყენება მხოლოდ დადებითი რიცხვების შემთხვევაში. რადიკალებზე მოქმედების შესრულების დროს მხედველობაში გვაქვს ფესვის არითმეტიკული მნიშვნელობა. ამას უთუოდ უნდა გაეწიოს ანგარიში. ნიშნით $\sqrt{a}$ აღინიშნება სწორედ არითმეტიკული მნიშვნელობა კვადრატული ფესვისა, ე. ი. დადებითი რიცხვიდან კვადრატული ფესვის დადებითი მნიშვნელობა; ამ განსაზღვრის დარღვევის, მისი მივიწყების შედეგია ის „დაბნეულობა", რომელსაც ხშირად აქვს ადგილი დადებითი რიცხვიდან ლუწი ხარისხის ფესვის ამოღების დროს. აქ თავს იჩენს თეორიის სწავლების მეთოდის სისუსტე, რისი შედეგიცაა $\sqrt[n]{a^n}=a$ ტოლობის არაკანონიერად გამოყენება. ეს ტოლობასამართლიანია ყოველი $a\geqslant0$-თვის, რადგან ამ პირობის დაცვით არითმეტიკულ ფესვს აქვს ერთად-ერთი, გარკვეული დადებითი მნიშვნელობა. ეს ტოლობა არაა იგივური ნამდვილ რიცხვთა მთელი არისათვის.

საზოგადოდ, $\sqrt{a^2}=\sqrt{(a)^2}=|a|$. ამ გარემოებას ზოგჯერ არ იღებენ მხედველობაში, რაც შეკდომის საფუძველი ხდება (მაგალითები: №№ 17, 18, 19, 20).

უნდა აღინიშნოს, რომ ამ მხრივ ერთგვარი დაბნეულობა არსებობს. ხსენებული შეცდომა ხშირად მასწავლებლებსაც კი შეუმჩნეველი რჩებათ. ხდება ისე, თითქოს საკითხი გარკვეულად არ იყოს გადაწყვეტილი. აქ „პედაგოგიკური სიძნელენი დამოკიდებულია არა მარტო მისი შინაარსისაგან და, ასე ვთქვათ, იდეური არსისაგან, არამედ იმ დაბნეულობისა და აუცილებელი სიზუსტის არარსებობისაგანაც, რომელსაც განიცდის მეთოდური ლიტერატურა. ბუნებრივია, რომ ასეთი მდგომარეობა წარმოადგენს ბევრი გაუგებრობისა და უნებლიე შეცდომების წყაროს"[1]. მართლაც, ამ გაურკვევლობის არარსებობას მიეწერება შეცდომები ალგებრის ზოგიერთ სახელმძღვანელოებში, რომელიც აღნიშნული აქვს ბ. ლურიეს. ავტორი ასახელებს ბიჩკოვის, შაპოშნიკოვისა და ვალცოვის, ბერგმანის ალგებრულ ამოცანათა კრებულიდან მაგალითებს, რომელთა პასუხები კრებულში სწორად არაა მოცემული[2].

5. შეცდომები განტოლებათა ამოხსნასა და ამოცანების გადაწყვეტაში განტოლებათა შედგენით

ალგებრის ერთ-ერთ ძირითად საკითხს განტოლებათა ამოხსნა წარმოადგენს. ამიტომაც მის შესწავლას ჯეროვანი ყურადღება ექცევა. საშუალო სკოლების პროგრამის განმარტებით ბარათში ვკითხულობთ, რომ საჭიროა მოსწავლეებს „გამოუმუშავდეთ განტოლებათა შედგენისა და მათი ამოხსნის მტკიცე ჩვევები". ამავე პროგრამით მე-8 კლასში პირველი ხარისხის ერთუცნობიან განტოლებათა შესწავლისათვის განკუთვნილია 30 საათი; პირველი ხარისხის განტოლებათა სისტემის შესასწავლად 26 საათი, IX კლასში კვადრატული განტოლებისა და უმაღლესი ხარისხის განტოლებებზე, რომლებიც კვადრატულზე დაიყვანება—42 საათი, მეორე ხარისხის ორუცნობიან განტოლებათა სისტემას დათმობილი აქვს 18 საათი. მართალია, სისტემატური სახით პირველი ხარისხის

[1] И. С. Плужников, О некоторых недоразумениях, связанных с употреблением радикала. Журн. „Математика в школе", 1941, № 4.

[2] В. Лурье, Тождественные преобразования иррациональных выражений в курсе средней школы. журн. „Математика в школе", 1939, № 3.

განტოლებათა შესწავლა VIII კლასში იწყება, მაგრამ განმარტებით ბარათში ნათქვამია, რომ VI კლასშივე იყოს დაწყებული პირველი ხარისხის ერთუცნობიანი განტოლებების ამოხსნა არითმეტიკულ მოქმედებათა თვისებების გამოყენებით.

ამგვარად, განტოლებების შესწავლას საშუალო სკოლაში საკმაო დრო ეთმობა. მიუხედავად ასეთი ყურადღებისა მისი სწავლება ჯერ კიდევ ვერ დგას სათანადო სიმაღლეზე. დავიწყოთ იქიდან, რომ განტოლების განსაზღვრა, გავრცელებული და დამკვიდრებული, არ ეთანადება მეცნიერულ მათემატიკურ ლიტერატურაში დღეს მიღებულ განსაზღვრას, რომლის მიხედვითაც განტოლება წარმოადგენს ორ ფუნქციის ტოლობას. სტაბილურ სახელმძღვანელოებში (ა. კისელევი, ალგებრა ნაწ. 1) გვეძლევა ტოლობის განსაზღვრა: „ორი რიცხვი ან ორი ალგებრული გამოსახულება, შეერთებული „=" ნიშნით შეადგენს ტოლობას" (გვ. 104). შემდეგ გამიჯნულია ერთმანეთისაგან ტოლობანი, რომლებიც მართებულია მასში შემავალი ასოების ყოველგვარი მნიშვნელობებისათვის (იგივეობა), ისეთი ტოლობებისაგან, რომლებიც მართებულია მასში შემავალი ასოების მხოლოდ ზოგიერთი მნიშვნელობებისათვის (განტოლება). საბოლოოდ, განტოლება ასეა განსაზღვრული: „ისეთ ტოლობას, რომელშიაც ერთი ან რამდენიმე ასო შედის და ორივე ნაწილის რიცხვითი სიდიდე ერთი და იგივეა ტოლობაში შემავალი ასოების არა ყოველი მნიშვნელობებისათვის, განტოლება ეწოდება" (გვ. 106). ამ გრძელი განსაზღვრის დაცვა მხოლოდ იმ მოტივით თუ შეიძლება, რომ იგი ძალიან გავრცელებულია საშუალო სკოლაში. მაგრამ, ასეთი არგუმენტი თავისთავად სუსტია. განტოლების ეს განსაზღვრა ავიწროებს განტოლების ცნებას, გამოჰყოფს რა მისგან განტოლებებს, რომელთაც არა აქვთ ამოხსნა და აგრეთვე განტოლებებს, რომლებიც კმაყოფილდებიან უცნობთა ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის (იგივეობა). ეს გამოყოფა საკმაოდ ხელოვნურია. თუ განტოლებას ფესვი არა აქვს, ეს ხშირად მხოლოდ მის ამოხსნის პროცესში ირკვევა. მეტიც, ძალიან ხშირად ისეთ განტოლებებთან გვაქვს საქმე, რომელთაც არა აქვთ ამოხსნა რიცხვთა ერთი სიმრავლისათვის ხოლო ამოხსნადი არიან რიცხვთა სხვა არეში. ასევე უსაფუძვლოა განტოლებებიდან იგივეობათა გათიშვა — არც ამ შემთხვევაშია ყოველთვის შესაძლებელი

ერთი შეხედვით დავადგინოთ იგივეობასთან გვაქვს საქმე თუ არა. მაგრამ, თუ იგივეობას განტოლებათა კლასში შევიყვანთ ეს არ ნიშნავს იმას, რომ საჭირო შემთხვევაში არ გამოვყოთ ის ცალკე (როგორც განტოლებანი, რომელთაც უამრავი ამოხსნა აქვთ) და განსაკუთრებით არ შევისწავლოთ მისი თვისებები.

ამგვარად, განტოლების ძველი განსაზღვრა უნდა შეიცვალოს. როგორც თანამედროვე მეთოდური ლიტერატურა მიგვითითებს, მიზანშეწონილი იქნება ასეთი განმარტება: განტოლება არის ისეთი ორი ალგებრული გამოსახულების ტოლობა, რომელიც შეიცავს ერთ უცნობს მაინც; რაც შემდეგ წლებში, IX კლასში ღრმავდება ფუნქციონალური განსაზღვრით. მოსწავლეები საშუალო სკოლიდან უმაღლეს სკოლაში განტოლების ისეთი გაგებით უნდა მიდიოდნენ, რომელიც არ ეწინააღმდეგება უმაღლესი სასწავლებლების სასწავლო ლიტერატურაში მიღებულ განსაზღვრებებს.

გავეცნოთ შეცდომებს განტოლების ამოხსნის დროს.

I. შეცდომა განტოლების ამა თუ იმ წევრის ერთი ნაწილიდან მეორეში გადატანის დროს;

მაგალითად:

1. $n^2x^2+mx=m^2x^2+nx$

$$n^2x^2+mx+m^2x^2+nx=0$$

$$(n^2+m^2)x^2+(m+n)x=0$$

$$[(n^2+m^2)x+m+n]x=0$$

$$\text{ან } x_1=0$$

ან

$$(n^2+m^2)x+m+n=0$$

$$(n^2+m^2)x=m+n$$

$$x_2=\frac{m+n}{n^2+m^2}$$

II. შეცდომები წილადწევრიანი განტოლების გარდაქმნაში.

ადგილი აქვს ორ შემთხვევას:

1. წილადწევრიანი განტოლების გარდაქმნის დროს არ უცვლიან ნიშნებს მრიცხველში შემავალ ყველა წევრს, როდესაც განტოლებას ანთავისუფლებენ მნიშვნელისაგან.

ასე, მაგალითად:

$$\frac{a}{b}-\frac{c-x}{d}=e$$

$$ad-bc-bx=bde$$

სხვა შეცდომებთან შედარებით ესაა ყველაზე ხშირი.

მოგვყავს მაგალითები აღნიშნული შეცდომებიდან.

2. $$\frac{3x-2}{3}-\frac{9-2x}{3}=\frac{x+2}{2}$$

$$6x-4-18-4x=3x-6$$

3. $$\frac{8-x}{6}-\frac{5-4x}{3}=\frac{x+6}{2}$$

$$8-x-10-8x=3x+18$$

2) წილადწევრიანი განტოლების გარდაქმნის დროს განტოლების წევრების გამრავლებისას საერთო მნიშვნელზე ივიწყებენ გაამრავლონ ის წევრებიც, რომლებსაც მთელის სახე აქვს.

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$$

$$bx+ax=c$$

4. $$x-\frac{1}{x}=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$$

$$x-ab-ax-b^2x$$

$$x-ax+b^2x=ab$$

$$x(1-a+b^2)=ab$$

$$x=\frac{ab}{1-a+b^2}$$

შეცდომის შედეგად კვადრატული განტოლების მაგიერ მიღებული იქნა პირველი ხარისხის განტოლება,

III. კვადრატული განტოლების ამოხსნის დროს აღარ ანგარიშობენ x_2-ს, თუ კი გამოთვლილი აქვთ x_1. მეორე ფესვად იღებენ x_1-ის მოპირდაპირე სიდიდეს. ამ შეცდომის შესახებ პ. ლარიჩევი ამბობს:

„სკოლის პრაქტიკიდანაა ცნობილი, რომ მოსწავლეებს აქვთ მიდრეკილება იპოვონ მხოლოდ ერთი ფესვი განტოლებისა (დადებითი რიცხვი)“[1].

ამ შეცდომას ასახელებს ს. ბრონშტეინიც:

„ხანდახან $x_1=a$ მონახვის შემდეგ პირდაპირ წერენ: $x_2=-a$“[2].

5. $2x^2-7x+3=0$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}$$

$$x=\frac{7\pm5}{4}$$

$$x_1=\frac{12}{4}=3$$

$$x_2=-3$$

IV. განტოლებათა მეორე თვისების თანახმად „თუ განტოლების ორივე ნაწილს ერთსა და იმავე რიცხვზე გავამრავლებთ ან გავყოფთ (მხოლოდ არა ნულზე) მივიღებთ ახალ განტოლებას, რომელიც მოცემული განტოლების ტოლძალოვანი იქნება“[3]. იყენებენ რა ამ თვისებებს არამართებულად, წინასწარი შეთანხმების მიუღებლად ამრავლებენ ან ყოფენ განტოლების ორივე მხარეს ასოით გამოსახულებაზე.

ასე, მაგალითად:

6. $ax+b=cx+d$

$$ax-cx=d-b$$

$$(a-c)x=d-b$$

$$x=\frac{d-b}{a-c} \qquad (1)$$

ყოფენ განტოლების ორივე მხარეს $(a-c)$-ზე და საბოლოო პასუხად მიღებულია (1) იმ დროს, როცა შეთანხმებით $a-c\neq0$ უნდა ეწარმოებინათ შემდგომი კვლევა. თუ $a-c=0$, მაშინ $a=c$, რაც მოგვცემდა $0\cdot x=d-b$. ამ განტოლებას არა აქვს ამონახსენი $d\neq b$

[1] П. Ларичов, квадратные уравнения, жур. „Математика и физика в школе“ 1934, № 1.

[2] С. Бронштейн, Методика алгебры, 1935, ст. 179.

[3] ა. პ. კისელევი, თარგმ. მ. ფარცხალაძისა. ალგებრა, ნაწილი I. გვ. 112.

შემთხვევაში. წინააღმდეგ შემთხვევაში განტოლება არის იგივეობა $0 \cdot x=0$, რომელსაც აკმაყოფილებს x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობა. ამგვარად $x=\dfrac{d-b}{a-c}$ მხოლოდ მაშინ, თუ $a \neq c$

7. $$\frac{c-x}{d-c}-\frac{x+c}{c+d}=\frac{2cx}{c^2-d^2}$$

$$\frac{x-c}{c-d}-\frac{x+c}{c+d}=\frac{2cx}{c^2-d^2}$$

$$cx+dx-c^2-cd-cx+dx-c^2+cd=2cx$$

განტოლების ორივე მხარე გაამრავლეს (c^2-d^2)-ზე და არავითარი ახსნა-განმარტება ამის შესახებ არაა მოცემული. მაგალითის ამოხსნა გრძელდება და მიღებულია პასუხად $x=\dfrac{c^2}{d-c}$; არც აქაა ნათქვამი რომ $d \neq c$.

ზოგიერთი განტოლების ამოხსნის დროს საჭირო ხდება მისი მხარეების გამრავლება ან გაყოფა გამოსახულებაზე, რომელიც უცნობს შეიცავს. იყენებენ ამ საშუალებას და არ იკვლევენ მიღებულ ფესვებს შორის ხომ არ შეიპარა გარეშე ფესვი ან (გაყოფის შემთხვევაში) ხომ არ დაიკარგა მოცემული განტოლების რომელიმე ფესვი.

8. $$\frac{1}{3}-\frac{9}{y+3}=3+\frac{3y}{y+3}$$

$$y+3-27=9y+27+9y$$

$$-17y=51$$

$$y=-3$$

ხშირად მოსწავლეები არ ამოწმებენ ასე მიღებულ შედეგს. აქ თავიდანვე უნდა სცოდნოდათ მოსწავლეებს, რომ $y=-3$ მნიშვნელობისათვის განტოლება კარგავს აზრს; მაშ, $y=-3$ ამ განტოლების გარეშე ფესვია. ამასთან იგი y-ის ის მნიშვნელობაა, რომლისთვი-

საც მრავალწევრი $y+3$, რომელზედაც განტოლების ორივე მხარე მრავლდება, უტოლდება ნულს.

9. $x^2-5x=3x-15$

$x(x-5)=3(x-5)$

$x=3$

ასეთი წესით მოსწავლემ მიიღო მხოლოდ ერთი ფესვი. კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი ფესვი. გაყოფით $(x-5)$-ზე მან დაკარგა $x=5$ ფესვი, x-ის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მრავალწევრი $x-5$ გაუტოლდება 0-ს.

განვიხილოთ შეცდომათა თითოეული ჯგუფი. როგორც დაკვირვება გვარწმუნებს, განტოლებათა თეორიის შესწავლა გათიშულია განტოლებათა ამოხსნაზე ვარჯიშიდან. განტოლებათა თეორია ისწავლება, მოსწავლეები იხსომებენ თეორემებს, შედეგებს, მაგრამ თეორია ისწავლება განტოლებების შესწავლის დასაწყისში, ცალკე, ხოლო მისი მთლიანად ამოწურვის შემდეგ გადადიან განტოლებათა ამოხსნაზე, სადაც იყენებენ მზა შედეგებს. ამიტომ მათი გამოყენება განტოლებების ამოხსნაში ხდება მექანიკურად, შეუგნებლად.

ამის შედეგია შეცდომა განტოლების წევრების გადატანაში ერთი ნაწილიდან მეორეში. მოსწავლეს ვერ გაუგია, თუ რატომ ეცვლება ნიშანი წევრს, რომელიც განტოლების ერთი ნაწილიდან მეორეში გადაგვაქვს. შესაძლოა, რომ მოსწავლემ შესაფერისი წესი, ისწავლა ზეპირად ხოლო, როცა მოუხდა მისი „გამოყენება“, შეცდომა დაუშვა. ზოგჯერ ერთ მაგალითში რამდენიმეჯერ არის დარღვეული ნიშნის შეცვლის წესი (მაგალითი № 1), რასაც, რასაკვირველია, უყურადღებობას ვერ მივაწერთ. ესაა შეცდომა, რომელიც ორგანულად დაკავშირებულია თეორემების გამოყენებასთან განტოლებათა ტოლძალოვანების შესახებ, კერძოდ, ეს შეცდომა თავს იჩენს მაშინ, როცა მოსწავლეები იწყებენ თეორემის შედეგის გამოყენებას, ე. ი. როცა ისინი სარგებლობენ წესით: „გადავიტანოთ მოცემულ განტოლებაში წევრი მარცხენა ნაწილიდან მარჯვენაში“, წესის ბოლო სიტყვები—„მოპირდაპირე ნიშნით“ უყურადღებოდ რჩება—აქედან შეცდომა. მაგრამ მხოლოდ ამ მიზეზს არ შეიძლება მივაწეროთ შეცდომა—მისი წარმოშობა. მარტოოდენ წესის ბოლო სიტყვების მივიწყებაში როდია. ერთმა მოსწავლემ დაფაზე ერთუც-

ნობიანი პირველი ხარისხის განტოლების ამოხსნისათვის, მისი წევრები დაალაგა. დალაგების დროს წევრები ისე გადაჰქონდა ერთი ნაწილიდან მეორეში, რომ არც ერთისათვის ნიშანი არ შეუცვლია. შეკითხვაზე—რატომ არ უცვლი ნიშნებს წევრებს, მან ძალიან გაკვირვებით მიპასუხა: „მე მხოლოდ დავალაგე წევრები, ისე ხომ ვერ შევკრებდი უცნობიან წევრებსა და ცნობილ წევრებს". როგორც აღმოჩნდა, მას „დალაგება" ესმოდა თავისი პირდაპირი აზრით,—უკვირდა, რად უნდა შეეცვალა განტოლების წევრისათვის ნიშანი მისი მხოლოდ ადგილის შეცვლის გამო. ამგვარად, აქ გარკვეულ როლს თამაშობს თვით ტერმინი „გადატანა" (განტოლების წევრებისა ერთი მხრიდან მეორეში). ამ აზრს იცავს აგრეთვე პროფ. ს. ვორონინი[1].

ტოლძალოვნების თეორემების დარღვევასთან გვაქვს აგრეთვე საქმე წილადწევრიანი განტოლებების გარდაქმნის დროს დაშვებულ შეცდომებში (მაგალითი № 4). რაც შეეხება შეცდომებს მაგალითებში № 6, 7, 8, აქაც განტოლებათა მეორე თვისების გამოყენება ხდება მექანიკურად. მოსწავლე ანგარიშს არ უწევს წესს; მას არაერთხელ გაუმრავლებია განტოლების ორივე მხარე ერთსა და იმავე რიცხვზე. ამასვე აკეთებს ის ასოითი განტოლების შემთხვევაში. იგი არ იყენებს აქ განტოლების იმ თვისებას, რომლის საფუძველზეც ხდება ეს მოქმედება, მას ეს თვისება „არ ჭირდება"; ის „ჩვეულებრივ საქმეს აკეთებს". მოსწავლე რომ ხვდებოდეს აქ თვისების გამოყენებას, ის თვისებაში მონახავდა განტოლების ნულზე გამრავლებისა და გაყოფის შეუძლებლობას, რაც დააყენებდა საკითხს გამოსახულების გამოკვლევის შესახებ. მაგრამ მოსწავლე იმდენად შეჩვეულია ამ თვისების შეუგნებლად, მექანიკურად გამოყენებას, რომ მას სულ არ ებადება აზრი თვით ამ თვისების შესახებ. უფრო მეტიც. მან არ იცის, რომ შეცდომა დაუშვა. ის არ იკვლევს მიღებულ ფესვებს, ამიტომ არ იცის, რომ გარეშე ფესვი შემოიჭრა ან დაიკარგა განტოლების რომელიმე ფესვი და რომ განტოლება სრულად ამოხსნილი არ არის.

შეცდომები წილადწევრიანი განტოლების გარდაქმნაში მჭიდროდაა დაკავშირებული შეცდომებთან წილადების შეკრება—გამოკლე-

[1] Проф. С. В. Воронин, Алгебраические ошибки учащихся в семилетней трудовой школе. Научные известия Смоленского Государственного педагогического Института, вып. I, 1932 г.

ბის დროს (ქვეთავი 3, მაგალითები № 4, 5). ამიტომაც ორივეს ახლა განვიხილავთ.

ერთი შეხედვით, შესაძლოა ეჭვიც შეგვეპაროს იმაში, რომ აქ მოყვანილ მაგალითსა და 3 ქვეთავის მაგალით № 4 რაიმე საერთო ჰქონდეს მრავალწევრის ფრჩხილებში მოთავსებასა და მისი ფრჩხილებიდან განთავისუფლებასთან, მაგრამ გაეეცნოთ საქმეს უფრო ახლოს.

რა არის ამ შეცდომის მიზეზი?

პირველ ყოვლისა, მოსწავლემ კარგად არ იცის, რომ $\frac{a}{b}$ და $a:b$ სხვადასხვა სახით დაწერილი ერთი მოქმედებაა, ე. ი. $\frac{3a-4b}{6}=(3a-4b):6$ შემდეგი საფეხური კი იქნება:

$$-\frac{3a-4b}{6}=[-(3a-4b)]:6$$

(მართკუთხა ფრჩხილები მეტი თვალსაჩინოებისათვისაა საჭირო). ამას თუ წარმოიდგენდა მოსწავლე, მაშინ მისთვის ადვილი იქნებოდა იმის გაგებაც, რომ

$$[-(3a-4b)]:6=(-3a+4b):6$$

ზუსტად ასევეა შემთხვევაშიც:

$$-\frac{9-2x}{3}=[-(9-2x)]:3=(-9+2x):3$$

მეორე მიზეზი შემდეგშია: მოსწავლე ცდილობს, მაგალითების ამოხსნის პროცესი შეძლებისამებრ შეამოკლოს ზოგი მოქმედების ზეპირად შესრულებით. მოყვანილ მაგალითებში გამოტოვებულია საშუალედო გამოთვლები, როგორც ეტყობა, მათი ზეპირად შესრულების დროსაა სწორედ შეცდომა დაშვებული. მართლაც, აქ მოყვანილ № 2 და 3 ქვეთავის № 4 მაგალითების ამოხსნის დროს გამოტოვებულია შემდეგი საფეხურები:

$$1\cdot\quad \frac{2a-5b}{4}-\frac{3a-4b}{6}+\frac{a-b}{8}=$$

$$=\frac{6(2a-5b)-4(3a-4b)+3(a-b)}{24}$$

2. $$\frac{3x-2}{3}-\frac{9-2x}{3}=\frac{x+3}{2}$$

$$\frac{2(3x-2)-2(9-2x)}{6}=\frac{3(x+2)}{6}$$

ამგვარად, ეს გარემოებაც, შესაძლოა ამ შეცდომის წარმოშობის მიზეზი გახდეს.

ამ შეცდომის მიზეზი იმაშიც უნდა ვეძიოთ, რომ სავარჯიშო მაგალითები წილადების შეკრება-გამოკლებაზე მეთოდურად არასწორი თანამიმდევრობით დალაგებული ეძლევათ მოსწავლეებს. საუბრები ან განმარტებანი, რომლებიც ხელს უნდა უწყობდეს წილადებზე მოქმედებათა შესრულების შეგნებულად ათვისებას, ხშირად ზერელე ხასიათს ატარებს, არ ეხება საკითხის არსებით მხარეს, რის გამოც წილადებზე ესა თუ ის მოქმედება მოსწავლის მიერ სრულყოფილი მათემატიკური გააზრების შედეგად არაა შესრულებული.

როგორც ვხედავთ, ზოგიერთი შეცდომა მრავალწევრთა გამოკლების, წილადების შეკრება-გამოკლების, მრავალწევრთა მამრავლებად დაშლისა და განტოლებათა ამოხსნის დროს დაკავშირებულია ხარვეზებთან მრავალწევრის ფრჩხილებში მოთავსებასა და მისი ფრჩხილებიდან განთავისუფლების სწავლებისას.

რამდენიმე სიტყვა $x_1=a$ და ამიტომ $x_2=-a$ შეცდომის შესახებ.

ეს შეცდომა საკმაოდ გავრცელებულია. მის წარმოშობაში დაუკვირვებლობის ელემენტიც ურევია, თუმცა აქ მთავარი მიზეზი რადიკალების წინ არსებული $\pm$ ნიშნების გავლენაა. ამ გარემოებას მოსწავლე ერთი შეხედვით მოპირდაპირე რიცხვების ცნებაზე გადაჰყავს. შესაძლოა ამას უკავშირდება ჩვევაც არასრული კვადრატული განტოლების $ax^2+c=0$ ამოხსნისა, რომლის ფესვები მოპირდაპირე რიცხვებით გამოისახება. ყველა ეს მიზეზი, ერთად აღებული, ედება საფუძვლად ზემოთ აღნიშნული შეცდომის წარმოშობას.

ახლა განვიხილოთ შეცდომები ამოცანების გადაწყვეტაში განტოლებათა მეთოდით. ეს საგრძნობლად მტკივნეული ადგილია ელემენტარული ალგებრის მთელ კურსში.

„ყველაზე უფრო სუსტ ადგილად მოსწავლეთა ცოდნაში, საერთო შეხედულების მიხედვით, ითვლება ამოცანების ამოხსნა განტოლებათა მეთოდით“.[1]

ცხადია, აქ შეცდომაც ბევრია უმრავლესობა მსჯელობის დროსაა დაშვებული. მოსწავლეთა ნაწილი სუსტ მათემატიკურ განვითარებას ავლენს, ძნელად პოულობს დამოკიდებულებას მოცემულ სიდიდეთა შორის და უძნელდება ალგებრულ ენაზე ამოცანის პირობების „გადათარგმა“. უძნელდება აგრეთვე ამოცანის ამონახსნის შემოწმება; კმაყოფილდება შედგენილი განტოლების ამონახსნის შემოწმებით.

I. უპირველეს ყოვლისა, უნდა აღინიშნოს ლოგიკური თანამიმდევრობას მოკლებული, ამოცანის პირობების შეუსაბამო, უშინაარსო მსჯელობა განტოლების ან განტოლებათა სისტემის შედგენის დროს.

მოგვყავს მაგალითები მოსწავლეთა ნამუშევრებიდან:

1). ა მ ო ც ა ნ ა. „თბილისიდან ქუთაისისაკენ გავიდა საბარგო მატარებელი, რომლის სიჩქარე 25 კმ-ია საათში. ერთი საათის შემდეგ ქუთაისიდან თბილისისაკენ გამოდის სახალხო მატარებელი, რომლის სიჩქარე 40 კმ-ია საათში. იპოვეთ თბილისიდან რა მანძილზე შეხვდებიან მატარებლები ერთმანეთს, თუ თბილისიდან ქუთაისამდე 220 კმ-ია.

ა მ ო ხ ს ნ ა

ვთქვათ, თბილისიდან მატარებლები შეხვდებიან x კმ, მაშინ საბარგო მატარებელი, რომელიც თბილისიდან გამოვიდა და რომლის სიჩქარე 25 კმ საათში, გაივლის 25 x კმ. ხოლო სახალხო მატარებელი, რომელიც ერთი საათის შემდევ გამოვიდა ქუთაისიდან, გაივლის 40 x კმ. რადგან თბილისიდან ქუთაისამდე 220 კმ-ია. ამიტომ ვწერთ განტოლებას:

$$25x+40x=220“.$$

2) იგივე ამოცანა:

ა მ ო ხ ს ნ ა

„ვთქვათ, თბილისიდან მატარებლები შეხვდნენ x მანძილზე. თბილისიდან ქუთაისისაკენ გავიდა საბარგო მატარებელი, რომლის

[1] А. Н. Барсуков, Уравнения первой степени в средней школе, 1948, стр. II.

სიჩქარეა 25 კმ. საათში. x მანძილს იგი გაივლის $25x$ საათში. ქუთაისიდან თბილისისაკენ გამოდის სახალხო მატარებელი, რომლის სიჩქარეა 40 კმ. საათში. x მანძილს იგი გაივლის $40x$ საათში. მაგრამ ერთი საათით გვიან, ე. ი. $x(1+40)$ და თუ თბილისიდან ქუთაისამდე 220 კმ ია, ამიტომ ვწერთ განტოლებას:

$$25x+x(1+40)=220".$$

II. ზოგიერთი მოსწავლე ატოლებს ერთმანეთთან არატოლ სიდიდეებს, არასწორად ამყარებს მათ შორის ჯერად ან სხვაობით შეფარდებას; მაგალითად:

3) ა მ ო ც ა ნ ა. „ორ ქალაქს შორის მანძილი 150 კმ. ამ ქალაქებიდან ერთდროულად გამოვიდნენ მატარებლები. 3 საათის შემდეგ შეხვდნენ ერთმანეთს თითოეული მათგანი მიდის იმ ქალაქში, საიდანაც გამოვიდა მეორე მატარებელი. ერთმა მატარებელმა მთელი მანძილის გავლას 2,5 საათით მეტი მოანდომა, ვიდრე მეორემ. გამოიანგარიშეთ თითოეული მატარებლის სიჩქარე საათში.

ა მ ო ხ ს ნ ა

განტოლებათა სისტემის შედგენა. დავუშვათ, რომ ერთი მატარებლის სიჩქარე საათში არის x კმ. ხოლო მეორე მატარებლის სიჩქარე კი y კმ. საათში. მაშინ პირველი მატარებელი 3 საათის განმავლობაში გაივლიდა $3y$ კმ. ამოცანის პირველი პირობის თანახმად მატარებლები სამი საათის შემდეგ შეხვდნენ ერთმანეთს, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$3x+3y=3"$$

ე. ი. მოსწავლე ატოლებს მანძილის გამომსახველ რიცხვს დროის გამომსახველ რიცხვთან.

4) ა მ ო ც ა ნ ა. „156 მანეთად რამდენიმე კილოგრამი ხილი იყიდეს. თითო კგ ერთი მანეთით იაფად რომ ეყიდათ, იმავე თანხით შეიძლებოდა ერთი კილოგრამით მეტის ყიდვა. რა ღირს 1 კგ ხილი?

განტოლების შედგენა:

ვთქვათ, 1 კგ ხილი ღირს x მანეთი. მაშინ 156 მანეთად იყიდიან $\frac{156}{x}$ კგ. ხილს. თუ 1 კგ ერთი მანეთით იაფად, ე. ი. $(x-1)$ მანე-

თად გაიყიდება, მაშინ იმავე ფასით შეიძლება $\frac{156}{x-1}$ კგ ხილის ყიდვა. შეგვიძლია შევადგინოთ განტოლება:

$$\frac{156}{x}=\frac{156}{x-1}+1.$$

III. არის ისეთი შემთხვევებიც, როცა მსჯელობა განტოლების შესადგენად ჩატარებულია სწორად, მიღებული განტოლება ან განტოლებათა სისტემა ამოხსნილია, მაგრამ საკითხი განტოლების ფესვების შერჩევის შესახებ ვერაა მართებულად გადაჭრილი. მიღებულია ყალბი აზრი უარყოფითი ფესვის უვარგისობის შესახებ. მაგალითად,

5) ამოცანა. ორი თვითმფრინავი ერთდროულად გაფრინდა ერთი და იმავე აეროდრომიდან ერთისა და იმავე დანიშნულების ადგილზე, რომელიც აეროდრომიდან 1600 კმ არის დაშორებული. პირველი თვითმფრინავი, რომლის სიჩქარე 40 კმ-ით მეტია მეორეზე, 2 საათით ადრე მიფრინდა დანიშნულ ადგილს. იპოვეთ თითოეული მათგანის სიჩქარე.

განტოლება შედგენილია სწორი მსჯელობით. მიღებულია განტოლების ფესვები $x_1=200$, $x_2=-160$. შემდეგ მოხდენილია ფესვების შერჩევა „მივიღეთ, რომ პირველი თვითმფრინავის სიჩქარე უდრის 200 კმ ან -160 კმ-ს მაგრამ 160 კმ-ს ვერ მივიღებთ თვითმფრინავის სიჩქარედ, რადგან კილომეტრების რაოდენობა არ შეიძლება გამოისახოს უარყოფითი რიცხვით, თუ ის აღნიშნავს სიჩქარეს?". ასე სწერს მოსწავლე.

6) ამოცანა. „A და B ქალაქებიდან, რომელთა შორის მანძილი არის 360 კმ, ერთმანეთის შესახვედრად ორი მატარებელი გამოვიდა. I მატარებელი საათში 10 კმ-ით მეტს გადის, ვიდრე მეორე, რის გამოც B – ქალაქში ის 3 საათით ადრე ჩავიდა, ვიდრე მეორე A-ში.

რამდენ საათში გაუვლია თითოეულ მატარებელს მთელი მანძილი?"

შედგენილი განტოლების ამოხსნით მიუღია $x_1=9$, $x_2=-12$, „$x_2=-12$ ar გამოგვადგება, რადგან უარყოფითია. ამოცანას ვერ დააკმაყოფილებს, რადგან მანძილი არ შეიძლება უარყოფითი იყოს".

მეორე მოსწავლეს იმავე ამოცანის ამოხსნაში უწერია: „მივიღეთ მატარებლის გავლილი გზები, რადგან 12 უარყოფითია, ამიტომ არ შეიძლება მისი შემოწმება, შევამოწმოთ +9".

7) ამოცანა. „ორი ქალაქიდან, რომელთა შორის მანძილი 180 კმ-ია, ერთმანეთის შესახვედრად 2 მგზავრი გამოვიდა. I მგზავრი საათში 15 კმ-ით მეტს გადის, ვიდრე II, და დანიშნულ ადგილზე 2 საათით ადრე მივიდა. რამდენ კილომეტრს გადის თითო მათგანი საათში?".

სწორი მსჯელობით და მიღებული განტოლების სწორად გადაწყვეტით მიღებულია ფესვები: $x_1=35$, $x_2=-30$. შემდეგ ნათქვამია:

„I ფესვი დადებითია და შეიძლება უპასუხებდეს ამოცანის კითხვას. II უარყოფითია და ვერ გვიპასუხებს კითხვაზე, შევამოწმოთ I ფესვი".

ზემოთ მოყვანილი შეცდომები გვიჩვენებენ, რომ განტოლებათა შედგენა ამოცანის პირობების მიხედვით მეტისმეტად უძნელდებათ მოსწავლეებს. შეცდომათა გავრცელების რაოდენობრივი მონაცემები ამას აშკარად ადასტურებენ. აღსანიშნავია ისიც, რომ VIII კლასებში შეცდომების რაოდენობა გაცილებით მეტია, ვიდრე IX კლასში. VIII კლასის მოსწავლეთა რვეულებში განსაკუთრებით ხშირად გვხვდება ამოცანები, რომელთა ამოხსნა მიტოვებულია დასაწყისშივე.

აღსანიშნავია, რომ ამოცანის პირობების მიხედვით განტოლების შედგენის მეთოდის ძიებას ძველი ისტორია აქვს. ჯერ კიდევ ნიუტონმა თავის წიგნში „Arithmetica Universalis" მოგვცა ახსნა-განმარტება ამ საკითხზე: „განტოლების შედგენა—ეს ნიშნავს, გამოისახოს ალგებრულ ენაზე ამოცანაში მოცემული დამოკიდებულებანი ცნობილ და უცნობ სიდიდეთა შორის". აქვე ნიუტონს ამოხსნილი აქვს ამოცანა, რომელიც, მართლაც, წარმოადგენს მისი განმარტების მშვენიერ ილუსტრაციას: ამოცანის ყოველი სიტყვიერი მონაცემის გვერდით მოცემულია მისი შესაბამისი ალგებრული გამოსახულება. ნიუტონი ამბობს: „თქვენ აქედან ხედავთ, რომ იმ საკითხების გადასაწყვეტად, რომლებიც რიცხვებსა და სიდიდეთა განყენებულ თანაფარდობებს ეხება, საჭიროა მხოლოდ ამოცანა მშობლიური ენიდან გადაყვანილ იქნეს ალგებრულ ენაზე". მაგრამ საკიხი სწორედ ისაა, როგორ „გადაითარგმნოს" ამოცანის პირობები ალგებრულ ენაზე, დამყარდეს თანაფარდობა სიდიდეთა შორის,

შედგენილ იქნეს განტოლება. საშუალო სიძნელის ამოცანის ამოხსნის დროს საჭირო ხდება: „შეადგინონ მოსწავლეებმა ალგებრული გამოსახულება ლოგიკური მსჯელობის გზით; შეწყვიტონ მსჯელობა, მიღებული გამოსახულება დროებით დატოვონ და ახალი მსჯელობის საფუძველზე შეადგინონ მეორე გამოსახულება. ბოლოს, მიღებული 2 გამოსახულებიდან საჭიროა შეადგინონ განტოლება, რაც აგრეთვე, შეადგენს გარკვეულ სიძნელეს, განსაკუთრებით იმ შემთხვევაში, როცა მიღებული გამოსახულებანი იმყოფება ჯერად ან სხვაობით შეფარდებაში ერთმანეთთან“[1].

ამოცანების ამოხსნის ერთიანი მეთოდებისა და ხერხების შემუშავებისათვის დიდი შრომაა გაწეული. ამ საკითხზე ბევრია დაწერილი, ბევრი პრაქტიკული ნაბიჯია გადადგმული ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდის დასადგენად, მაგრამ მიუხედავად ამისა, როგორც გამოცდილება გვიჩვენებს, განტოლებათა მეთოდით ამოცანების ამოხსნა ძალიან უჭირთ მოსწავლეებს. ამას აღნიშნავს ს. ბრონშტეინიც:

„პედაგოგიური პრაქტიკით დადგენილია, რომ კვადრატულ განტოლებათა შედგენა, ისე როგორც საზოგადოდ ნებისმიერი ხარისხის განტოლებათა შედგენა ამოცანის პირობების მიხედვით, მოსწავლისათვის არც თუ ისე ადვილი საქმეა და მძიმედ აითვისება. ჩვევა, გადაითარგმნოს სიტყვიერად გამოთქმული აზრი მათემატიკური სიმბოლოების ენაზე, ადვილად არ მუშავდება, იგი მოითხოვს ჩაფიქრებას, ამოცანის პირობების ანალიზის უნარს და საჭირო საწყისი მომენტების შერჩევას“[2].

ამოცანების ამოხსნა ალგებრაში პროგრამის მიხედვით VIII კლასში იწყება ერთუცნობიანი პირველი ხარისხის განტოლებების შესწავლასთან დაკავშირებით. იქამდე, რადგან პროგრამაში სპეციალურად არაა ამაზე ნათქვამი, მასწავლებლები, უმეტეს შემთხვევაში, არ აძლევენ მოსწავლეებს ამოსახსნელად უმარტივეს ალგებრულ ამოცანებს, ასეთი ამოცანების ამოხსნა გამოუმუშავებდათ მათ, თუნდაც მხოლოდ სიდიდეთა დამოკიდებულების ალგებრულ ენაზე ჩაწერის ჩვევას. მოსწავლეებს თავიდანვე ეძლევათ ამოცანები გან-

---

[1] А. Н. Барсуков, Уравнения первой степени в средней школе, 1948, стр. 133.

[2] С. С. Бронштейн, Методика алгебры, 1935, стр. 197.

ტოლების შედგენაზე. ამიტომაც ამოცანის ამოხსნის დასაწყისშივე მოსწავლე დგება სიძნელის წინაშე. პირველ რიგში ესაა ამოცანის პირობის ალგებრული გამოსახვა. მოსწავლეთა ნაწილი ტოვებს ამოცანის ამოხსნას დასაწყისიდანვე. არ შეუძლია ამოცანის პირობები გაარკვიოს, იქ მოცემული სიდიდეები გარკვეული მოქმედებებით დააკავშიროს ერთმანეთთან. ზოგი მათგანი აწარმოებს ამოხსნას ამოცანის პირობების შეუსაბამო, უშინაარსო მსჯელობით, რითაც ვერ აღწევს შედეგს. პრაქტიკა გვიჩვენებს, რომ სიძნელეს წარმოშობს აგრეთვე ამოცანის პირობების მიხედვით შედგენილ სიდიდეთა შორის დამოკიდებულების დამყარება, მათი გატოლება. ძალიან ხშირად მეტს კიდევ უმატებენ, იმის მაგიერ, რომ გაადიდონ ნაკლები სიდიდე. ერთმანეთში ურევენ ჯერად და სხვაობით შეფარდებებს, არ აქვთ ცხადად წარმოდგენილი განსხვავება 5-ჯერ მეტსა და 5-ით მეტს (ნაკლებს) შორის. ამ თემის შესწავლის პროპედევტიკა არაა სწორად დაყენებული. ამოცანები ამოსახსნელად მოსწავლეებს ეძლევათ მხოლოდ განტოლებათა შესწავლის დროს. სხვა თემების შესწავლა არაა დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნასთან (მოქმედებები ერთწევრებსა და მრავალწევრებზე, მსგავს წევრთა გაერთება, მრავალწევრის მამრავლებად დაშლა და სხვა). ამგვარად, ამოცანების ამოხსნა იწყება შესაფერისი მომზადების გარეშე. მოსწავლეთა ნაწილს არა აქვს შეთვისებული ფუნქციონალური დამოკიდებულების ცნება. იმათ ჯერ კიდევ არ ესმით, რომ ამოცანაში საძიებელ და მოცემულ სიდიდეთა შორის არსებობს გარკვეული დამოკიდებულება, რომელიც შედგენილი განტოლებით გამოისახება. მათ არა აქვთ განვითარებული ლოგიკური მსჯელობის უნარი, რაც მხოლოდ მარტივიდან რთულზე თანდათანობითი გადასვლის გზით შეიძლება გამომუშავდეს. სირთულის ერთბაშად დაძლევის პრაქტიკა აბნევს ბავშვს, უკარგავს რწმენას თავისი ძალისადმი, უხშობს გზას მომავალში თანდათანობით გაერკვეს საკითხის შინაარსში, მის მთლიანობაში, რადგან წინასწარ ნაკლებად მზადდება ნიადაგი საჭირო ჩვევის გამომუშავებისათვის. ნიადაგის მომზადებისათვის კი აუცილებელია წინასწარ მეთოდურად გეგმაშეწონილი მუშაობის ჩატარება.

თ ა ვ ი III

შეცდომათა გამოსწორების მეთოდიკისათვის

პარტიის XIX ყრილობის გადაწყვეტილებათა საფუძველზე საბჭოთა სკოლის განვითარებაში ახალი ეტაპი დაიწყო. ყრილობის გადაწყვეტილებანი მოითხოვენ ღონისძიებათა გატარებას საშუალო სკოლაში პოლიტექნიკური სწავლების განხორციელებისათვის. პოლიტექნიკური განათლება უმნიშვნელოვანესი საშუალებაა სოციალისტურ საზოგადოებაში ადამიანის უნარის გამომჟღავნებისა და განვითარებისათვის. როგორც ვ. ი. ლენინი ამბობს, პოლიტექნიკური პრინციპი მოითხოვს თანამედროვე ინდუსტრიის საფუძვლების შესწავლას. ამის განხორციელება კი მხოლოდ მაშინ იქნება შესაძლებელი, თუ ახალგაზრდობა დაეუფლება მეცნიერებათა საფუძვლებს, ურომლისოდაც არ შეიძლება ათვისებული იქნეს ტექნიკის საფუძვლები. ამიტომაც, პოლიტექნიკური სწავლების განხორციელების ღონისძიებათა შორის პირველ რიგში დგება მოსწავლეთათვის ფართო ზოგადი განათლების მიცემის ამოცანა. პოლიტექნიკური სწავლება ნაყოფიერი იქნება მაშინ, როცა უფრო კარგად დავაყენებთ მეცნიერებათა საფუძვლების შეთვისებას.

ამგვარად, სხვა დისციპლინათა შორის, მათემატიკის მტკიცე ცოდნა თავისთავად წარმოადგენს პოლიტექნიკური სწავლების განხორციელების ერთერთ ღონისძიებათაგანს. აქედან გამომდინარეობს, რომ სკოლის პოლიტექნიზაცია მოითხოვს დაუყოვნებლივ გაუდგეთ ფორმალიზმს მათემატიკის სწავლებისას სკოლაში. მოსწავლეთა ცოდნაში ფორმალიზმი იჩენს თავს სწორედ იმით, რომ მიუხედავად ამა თუ იმ მათემატიკური დებულების ცოდნისა, მოსწავლე ვერ ერკვევა მის რაობაში, იმაში, რაც არსებითია ამ დებულებაში, და, ცხადია, თავისი ცოდნის პრაქტიკაში გამოყენება არ შეუძლია. პოლიტექნიკურ სწავლებაზე გადასვლა ერთერთ არსებით ღონისძიე-

ბათა შორის უნდა ისახავდეს მათემატიკის სწავლებაში, და მაშასადამე მოსწავლეთა ცოდნაშიც, არსებულ ფორმალიზმის ნაშთების სრულ ლიკვიდაციას.

ფორმალიზმის წინააღმდეგ ბრძოლის ერთ-ერთი ძირითადი საშუალებაა ყოველგვარი ტიპიური შეცდომის გამოსწორების ხერხების გამონახვა მათ სამუდამოდ აღმოსაფხვრელად.

შეცდომების გამოსწორებისათვის ბრძოლის ღონისძიებათა შორის პირველ რიგში დასაყენებელია თვალსაჩინოების გამოყენება. ის, რასაც ვასწავლით, მოსწავლეთათვის ხელმისაწვდომი უნდა იყოს, ე. ი. დაფუძნებული კონკრეტულ წარმოდგენებზე, „ცოცხალ ჭვრეტაზე".

„საბჭოთა სკოლაში სწავლების მეთოდიკურ ამოსავალს „ცოცხალი განჭვრეტა" წარმოადგენს და მთელი სასწავლო პროცესი მას ემყარება, რასაც პედაგოგიკურ ენაზე თვალსაჩინოებას ვუწოდებთ. თვალსაჩინოების განხორციელება სწავლებაში პედაგოგიური პროცესის მაღალხარისხოვნად წარმართვის ერთი უაღრესად მნიშვნელოვანი პირობათაგანია"[1].

თვალსაჩინოების გამოყენებას სწავლებაში დიდ მნიშვნელობას ანიჭებდნენ: იან ამოს კომენსკი, კ. უშინსკი, ი. გოგებაშვილი და სხვ.

თვალსაჩინოებაზე, პირად დაკვირვებაზე დაყრდნობის გარეშე, შეუძლებელია აბსტრაქციის ყველა იმ საფეხურის დაუფლება, რომლებსაც მათემატიკა შეიცავს.

განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს მასალის მეთოდურად სწორი თანამიმდევრობით გადაცემას. მასალა ისეთი თანამიმდევრობით უნდა იყოს დალაგებული, რომ ხდებოდეს სიძნელეთა თანდათანობითი დაძლევა, მარტივიდან რთულზე გადასვლის გზით. ყოვლად დაუშვებელია რამდენიმე სიძნელის ერთბაშად გადაცემა მოსწავლისათვის.

„ყოველი შემდგომი განზოგადების ზედმიწევნით კარგად მომზადება აბსტრაქციის უფრო დაბალ საფეხურზე და ამ საფეხურისაკენ დაბრუნება ახალი დებულების დადგენის ან სიძნელეთა წარმოშობის დროს, წარმოადგენს ერთ-ერთ არსებით მომენტს ფორ-

[1] პროფ. დ. ლ ო რ თ ქ ი ფ ა ნ ი ძ ე, სწავლების პრინციპები, ორგანიზაცია და მეთოდები, 1951 წ., გვ. 81.

მალური წესების შეგნებულად შეთვისებაში, რასაც აბსტრაქციის მაღალ საფეხურზე აქვს ადგილი“[1].

ავტორს (პროფ. ი. არნოლდს) აქ მხედველობაში აქვს შემდეგი: მათემატიკური მეცნიერების სტრუქტურისათვის მეტისმეტად დამახასიათებელია აბსტრაქციის, განსაზღვრებებისა და თვისებების შესაბამისი ფორმალიზაციის ერთი საფეხურიდან მეორეზე თანდათანობითი გადასვლა; შემდეგ ამ საფეხურიდან კვლავ ახალ, უფრო მაღალ საფეხურზე ასვლა აბსტრაქციისა და ფორმალიზაციის ახალი პროცესის საშუალებით და ა. შ. ეს გადასვლები დამახასიათებელია აგრეთვე ელემენტარული არითმეტიკისა და ალგებრისათვის. პროფ. ი. არნოლდს თავისი აზრის საილუსტრაციოდ მოჰყავს შეკრების მოქმედების შესწავლის საფეხურები: ჩვენ ვაწარმოებთ ჯერ ფაქტიურად შეერთებას ახალ ერთობლიობაში. ამასთან თვლის გასაადვილებლად პირველად საგნებზე ვუთითებთ:

3 ვაშლი + 2 ვაშლი = 5 ვაშლს; 2 მან. + 3 მან. = 5 მან.

აბსტრაქციის შემდეგ საფეხურზე ვაყენებთ ზოგად დებულებას $2+3=5$, საიდანაც წინასწარი გამოცდილების (პირველი საფეხურია გავლილი) საფუძველზე ყოველთვის შეგვიძლია საჭიროების შემთხვევაში დავუბრუნდეთ წინა, პირველ საფეხურს და მოვახდინოთ შესაბამისი შეერთება რაიმე ორი სიმრავლის ელემენტებისა. ამ ორი საფეხურის შემდეგ ვქმნით ზოგად ცნებას ორი ნებისმიერი რიცხვის შეკრების შესახებ (აბსტრაქციის მესამე საფეხური) და ამ ზოგად ცნებას ჩავწერთ უკვე ასოით აღნიშვნებში, გამოვიკვლევთ ამ მოქმედების ზოგად თვისებებს, მაგალითად გადანაცვლების კანონს ჩაწერილს $a+b=b+a$ სახით და სხვა.

ავტორი ამბობს აგრეთვე, რომ ყოველთვის ასეთ დაბრუნებას აბსტრაქციის პირველი საფეხურებისაკენ არ უნდა ვახდენდეთ, მაგრამ პოტენციალურ საშუალებას ასეთი დაბრუნებისათვის ყოველთვის უნდა ჰქონდეს ადგილიო.

უნდა მიექცეს ყურადღება მოსწავლის ასაკობრივ თავისებურებასაც. მასალა ისე უნდა იყოს დალაგებული, რომ მოსწავლეს თანდათანობით მოუხდეს გადასვლა კონკრეტულ-ლოგიკურიდან აბსტრაქტულ-ლოგიკურ აზროვნებაზე.

---

[1] Проф. И. В. Арнольд, Показатели степени и логарифмы в курсе элементарной алгебры, 1949, стр. 31.

მათემატიკის სწავლება უნდა იყოს პერსპექტიული, ე. ი. ამა თუ იმ თემის, საკითხის სწავლების მეთოდების შერჩევის დროს მხედველობაში უნდა გვქონდეს არა მარტო ეს თემა, ეს საკითხი, არამედ მომავალში შესასწავლი მასალაც, მთელი კურსი, რომელიც, როგორც მეცნიერება, ერთი გარკვეული კანონზომიერებით ხასიათდება.

სავარჯიშო მასალა ისე უნდა იყოს შერჩეული, რომ მოსწავლეებს ყოველთვის ერთდროულად არ უხდებოდეს ვარჯიში ერთსა და იმავე მოქმედებაზე. უნდა ვეცადოთ, ხშირად მივცეთ სავარჯიშოდ სხვადასხვა გვარი ამოცანა და მაგალითი, ერთმანეთის მიყოლებით შესასრულებელი, მოქმედებაზე მიუთითებლად. ამით ისინი შეეჩვევიან დაიწყონ მაგალითის ან ამოცანის ამოხსნა მხოლოდ მას შემდეგ, როცა გაარკვევენ მიცემული მაგალითისა თუ ამოცანის თავისებურებას.

ყურადღება უნდა მიექცეს აგრეთვე ზეპირი აზროვნების ჩვევის გამომუშავებას. არსებობს დამკვიდრებული ჩვეულება ზეპირი ვარჯიშისა მხოლოდ არითმეტიკის გაკვეთილებზე. სასარგებლო იქნება ზეპირი ვარჯიში ვაწარმოოთ ალგებრის გაკვეთილებზედაც. ძნელი არაა ისეთი მაგალითების მოყვანა, რომლებიც თავისუფლად შეიძლება მივცეთ მოსწავლეებს ზეპირი პასუხისათვის:

$$(a-1)^2;\ 8a^2-27;\quad (a-2)(a+2);$$
$$x^2-7x+12=0$$

პ. ა. ლარიჩევის „ალგებრის ამოცანათა კრებულში“ საკმარისადაა მაგალითები და ამოცანები განსაზღვრული ზეპირად გადასაწყვეტად.

შეცდომები ამა თუ იმ საკითხთან დაკავშირებით შეიძლება წარმოიშვას იმის შედეგად, რომ საკითხი წინასწარ თეორიულად არ იყო საფუძვლიანად გაშუქებული. მაგალითად, მოსწავლეები სწორად ხსნიან პირველი ხარისხის ორუცნობიან განტოლებათა სისტემას, მაგრამ ეძნელებათ იპოვონ წრფივი განტოლებით მოცემული 2 სწორი ხაზის გადაკვეთის წერტილი. ან კიდევ არ ესმით ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის რომელიმე ერთი განტოლებიდან ერთ-ერთი უცნობის (ვთქვათ x-ის) ნაპოვნი მნიშვნელობა რატომ უნდა აკმაყოფილებდეს მეორე განტოლებასაც.

შეცდომებთან ბრძოლის ერთ-ერთ საშუალებათ უნდა მივიჩნიოთ აგრეთვე მოსწავლეებში ფუნქციონალური აზროვნების განვითარება. მართალია დაბალ კლასებში ვერ მივცემთ მოსწავლეებს ელემენტარულ ფუნქციათა თეორიას, მაგრამ აუცილებელია მოსამზადებელი მუშაობის ე. წ. ფუნქციონალური პროპედევტიკის ჩატარება. უნდა შევადგინოთ ისეთი ამოცანები და სავარჯიშოები, რომლებიც მოსწავლეებში ფუნქციონალური აზროვნების განვითარებას უწყობს ხელს.

ვთქვათ, გვაქვს $8+3=11$, გავადიდეთ ერთ-ერთი შესაკრები 2-ით, რის ტოლი იქნება ჯამი? მოსწავლე უნდა ხვდებოდეს, რომ საჭიროა მხოლოდ 11-ს მიემატოს 2 და არა, ჯერ ერთ-ერთ შესაკრებს დაუმატოს 2, შემდეგ შეიკრიბოს მიღებული შედეგი მეორე შესაკრებთან და ისე მიიღოს 13. ან კიდევ, ვთქვათ, წრეხაზის სიგრძე უდრის 16π-სმ-ს. რამდენით გადიდდება იგი, თუ წრის რადიუსს 4 სმ-ით გავადიდებთ? ძალიან ხშირად პოულობენ მოცემული წრეხაზის რადიუსს, შემდეგ უმატებენ მას 4 სმ-ს და ამრავლებენ 2π-ზე, მიღებულ შედეგს აკლებენ 16π სმ-ს, იმის მაგიერ, რომ 4 სმ გაამრავლონ 2π-ზე. ასეთი მაგალითები ცოტა არაა.

საუკეთესო მასალას ფუნქციონალური პროპედევტიკისათვის ალგებრის პირველი გაკვეთილები, ალგებრული სიმბოლიკის შემოღების პირველი საფეხურები იძლევა. ალგებრის პირველ გაკვეთილებზე, ჩვეულებრივ, მოსწავლეებს ეძლევათ ერთიდაიგივე ამოცანა ჯერ სხვადასხვა რიცხვით მონაცემებში, ხოლო შემდეგ ასოით მონაცემებში, რათა დაინახონ ასოითი მონაცემებისა და მათი საშუალებებით შედგენილი ალგებრული გამოსახულების ზოგადობა. აქ საჭიროა გავამახვილოთ ყურადღება იმაზე, რომ ყოველი ასოითი მონაცემებით მოცემული ამოცანის ამოხსნა მის კითხვაზე აძლევს ერთ ზოგად პასუხს, რომელიც გამოსადეგია მასში შემავალი ასოების ცალკეული მნიშვნელობებისათვის. აქედან სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობებს შეესაბამება საზოგადოთ სხვადასხვა რიცხვითი პასუხები. აქ არის უკვე სიდიდეთა შესაბამისობა. შემდგომი საფეხური უკვე ალგებრულ გამოსახულებათა რიცხვითი მნიშვნელობების გამოთვლაა. იგი იძლევა სიდიდეთა შესაბამისობაზე ვარჯიშის მდიდარ მასალას. აქ მიზნად უნდა დავისახოთ, ჯერ ერთი, პირდაპირი ამოცანა – რა რიცხვითი პასუხი უნდა მივიღოთ მოცემული ასოების ამა თუ იმ მნიშვნელობისათვის? შემდეგ, როგორ შეიცვლება ეს პასუხი ასო-

ების რიცხვითი მნიშვნელობების გარკვეული ცვლილებისაგან? ამ ასოების რა მნიშვნელობებისათვის არ ექნება აზრი გამოსახულებას? ანდა ასოების რა მნიშვნელობებისათვის ექნება გამოსახულებას წინასწარ ფიქსირებული პასუხი? უკანასკნელი ვარჯიში კარგი წინასწარი მომზადებაა განტოლების ამოხსნის შესწავლაზე გადასასვლელად VI კლასში; რისთვისაც ასეთ ვარჯიშს უნდა მოჰყვეს შემდეგი: მივცეთ ორი ალგებრული გამოსახულება და მოვითხოვოთ ასოების რიცხვითი მნიშვნელობების ისეთი შერჩევა, როცა ეს ორი გამოსახულება ღებულობდენ ერთნაირ რიცხვით მნიშვნელობას. ვ. ი. სევბოს მოჰყავს კარგი მაგალითები ასეთი ვარჯიშისათვის.

1) მოვნახოთ b-სათვის ისეთი მთელი, დადებითი მნიშვნელობა, რომ გამოსახულება $\frac{3b(b-1)}{b+2}$ გახდეს 6-ის ტოლი.

2) მოინახოს x-ს ისეთი მთელი დადებითი მნიშვნელობა, რომ გამოსახულება $\frac{x^3+8}{2x+1}$ გახდეს ტოლი 5-ს.

3) მოვნახოთ x-ის ისეთი მთელი დადებითი მნიშვნელობა, როცა $3x+1$ გამოსახულებას ჰქონდეს იგივე რიცხობრივი მნიშვნელობა, რაც გამოსახულებას $17-x$.

4) მოვნახოთ ისეთი 2 მთელი, დადებითი მნიშვნელობა a-თვის, რომ ორი ალგებრული გამოსახულება $a(5-a)$ და $8-a$ ერთმანეთს გაუტოლდეს.[1]

ასეთი სავარჯიშოების ამოსახსნელად მოსწავლეებმა ამ გამოსახულებებში უნდა ჩასვან 1, 2, 3, 4... რიგრიგობით, სანამ არ მიიღებენ პასუხს.

ეს სავარჯიშოები მეტად სასარგებლოა როგორც ფუნქციონალური აზროვნების ჩვევის გამომუშავების თვალსაზრისით, ისე განტოლებათა პროპედევტიკის მხრივაც. მართლაც, როცა ეძებენ a-ს მნიშვნელობას, რომლებისთვისაც გატოლდება გამოსახულებები: $a(5-a)$ და $8-a$, განა აქ $a(5-a)=8-a$ განტოლების ამოხსნასთან არა გვაქვს საქმე? მართალია, ამ დროს მოსწავლეები არ ხედავენ განტოლებას, მაგრამ ისინი ეჩვევიან იმ აზრს, რომ გამოსახულებანი, რომლებიც საზოგადოთ ერთნაირი არ არის, რომ-

[1] В. И. Севбо, функциональная пропедевтика в семилетней школе, журн. „Математика в школе", 1950, № 3

ლებიც მასში შემავალი ასოების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის სხვადასხვა რიცხვის მნიშვნელობებს ღებულობენ, ასოების ზოგიერთი მნიშვნელობებისათვის შეიძლება „გაუტოლდნენ“ ერთმანეთს.

ყურადღების ღირსია ჩანაწერების წარმოებაც. არაწესიერ ჩანაწერებმა[1] შესაძლოა წარმოშვან შეცდომები. „განტოლებათა ამოხსნის დროს ხშირად გვხვდება თავისებური „განუწყვეტელი ჩანაწერები“ განტოლების წილად წევრებიდან განთავისუფლებისას და, აგრეთვე, განტოლების ერთი მხრიდან მეორეში წევრების გადატანისას. მაგალითად, განტოლების

$$\frac{x+1}{x-2}=\frac{3x-7}{x-1}$$

ამოხსნის ჩანაწერი ხანდახან ასეთ ფორმას იღებს:

$$\frac{x+1}{x-2}=\frac{3x-7}{x-1}=x^2-1=3x^2-6x-7x+14=x^2-3x^2+6x+7x=$$

$$=14+1=-2x^2+13x-15=0=2x^2-13x+15=0$$

და ა. შ.

აქ ყველაფერი არეულია.

განტოლება—ესაა ფრაზა, წინადადება გამოთქმული მათემატიკურ ენაზე; ორი განტოლება — 2 განსხვავებული წინადადებაა, ხოლი გრამატიკა მოითხოვს წინადადების გამოყოფას სასვენი ნიშნებით“[1].

იმისათვის, რომ ზემოთქმულს მივცეთ კონკრეტული შინაარსი, მოგვყავს ცალკეული შეცდომების გამოსწორების ხერხები.

§1. დავიწყოთ მსგავსი ალგებრული გამოსახულებების გაერთიანებიდან. როგორ ვებრძოლოდ შეცდომას

$$a^n+a^n=a^{2n}$$ თავი I, § 1.

დავიწყოთ იქიდან, რომ საჭიროა შემოვიღოთ ხმარებაში ტერმინი „მსგავს წევრთა გაერთება“, „მსგავს წევრთა შეერთების“ მაგიერ. მსგავს წევრთა გაერთების წესად მივიღოთ: მსგავსი წევრების გასაერთებლად საჭიროა ავიღოთ მათი კოეფიციენტების ალგებრული ჯამი და მას უცვლელად მიუწეროთ ასოითი გამოსახულება; ასეა ეს პ. ალექსანდროვისა და ა. კოლმოგოროვის „ალგებრაში“ (ნაწ. I § 37). ამ წესის უპირატესობა ცხადია. ახალი მასალა უკვე ცნო-

[1] В. Ермольев, Коммунистическое воспитание на уроках математики в средней школе, журн. „Математика в школе“, 1929, № 4.

ბილზეა დაყვანილი. მსგავსი წევრების გაერთება ალგებრული ჯამის გამოთვლაზე. ამით ახალი მასალის ათვისება გაადვილდება, ხოლო ძველი დავიწყებას არ მიეცემა. მით უფრო, რომ ალგებრული ჯამის ცნება მეტად საჭიროა შემდეგისათვის და, როგორც II-ე თავშიც აღვნიშნეთ, მეტად ძნელი ასათვისებელიც. მაგრამ, მთავარი მაინც ეს არაა. შეცდომის ძირითადი საფუძვლები ალგებრის პირველი გაკვეთილებია, რომლებიც განსაკუთრებული სიფხიზლით უნდა ჩატარდეს. მოსწავლემ ასოებში რიცხვები უნდა დაინახოს და დარწმუნდეს ალგებრული სიმბოლიკის სიმდიდრეში, მის ძლიერ საშუალებებში მათემატიკური ოპერაციების საწარმოებლად ციფრებით გამოსახულ რიცხვებთან შედარებით. სასარგებლო იქნება აგრეთვე მსგავსი წევრების გაერთებისათვის მოსამზადებლად ასეთი სავარჯიშოს ჩატარება: ავიღოთ გამოსახულებანი $ab+ab$ და $2ab$. ვიპოვოთ ამ ალგებრული გამოსახულებების რიცხვითი სიდიდე a და b ასოების ერთი და იმავე რიცხვითი მნიშვნელობებისათვის. იმავე ვარჯიშის შესრულებით a^2+a^2 და $2a^2$-თვის a^2b+2a^2b და $3a^2b$-თვის და სხვ. ასეთი სავარჯიშოების შედგენა ადვილია. მოსწავლეები დაინახავენ, რომ ეს გამოსახულებანი მასში შემავალი ასოების ყოველი მნიშვნელობებისათვის ერთი და იმავე რიცხვით სიდიდეს ღებულობენ, რომ ეს გამოსახულებანი იგივურია.

§ 2. როგორც უკვე იყო აღნიშნული, ფრჩხილების ზედმეტად დაწერისა და მათი გამოუყენებლობის მიზეზები არითმეტიკიდან მომდინარეობს. მოქმედებათა თანრიგის უცოდინრობა, არასწორი კარნახი, როდესაც მასწავლებელი თვითონ უთითებს მოსწავლეს— სად და როდის დაწეროს ფრჩხილები—განაპირობებს ამ შეცდომებს. მოსწავლემ თვითონ უნდა იცოდეს—სად დაწეროს ფრჩხილები; მან თვითონ უნდა იაზროვნოს, იფიქროს ამაზე და არა მზამზარეულად მიიღოს მითითება „გახსენით ფრჩხილები“, „დახურეთ ფრჩხილები“; მან თვითონ უნდა გამოარკვიოს, თუ როგორ ჩაწეროს ესა თუ ის (სწორად ნაკარნახევი) გამოთქმა. ეს ამახვილებს მის გონებას.

თუ მოსწავლე შეცდომას უშვებს (თუ გინდ სწორი კარნახის შემთხვევაში), ან ყოყმანობს, არ იცის—როგორ დაწეროს, საჭიროა მივცეთ საშუალება დაწეროს დაფაზე შეცდომით. შემდეგ იგი-

ვე გამოსახულება დავწეროთ სწორად და დავანახოთ, რომ მისი ჩანაწერი სულ სხვა შედეგს იძლევა.

თუ გამოსახულება რთულია, მაშინ იგი დროებით უნდა დავტოვოთ და ძალიან უბრალო, იმავე სახის მაგალითი მოვუყვანოთ; ასე მაგალითად:

„დაწერეთ 5-სა და 4-ის ჯამის ნამრავლი 8-ზე, ჩვენი დაშვების თანახმად, ბავშვი დაწერს

5+4.8

— აბა წამიკითხეთ, ბავშვებო!

ერთ-ერთი მოსწავლე წაიკითხავს: — 5-ს მივუმატოთ 4-ჯერ 8

— მე ასე გიკარნახეთ? — ეკითხება მასწავლებელი. ერთ-ერთი მოსწავლე უთუოდ შესძლებს გაიმეოროს მასწავლებლის ნაკარნახევი (თუ არ აღმოჩნდა, მასწავლებელმა კვლავ უნდა გაუმეოროს).

— აბა, ვინ დაწერს?

თუ ასეთიც არ აღმოჩნდა, მაშინ ეუბნება:

— მე ვამბობ: 5-სა და 4-ის ჯამი გავამრავლოთ 8-ზე; მაშ რას გავამრავლებთ 8-ზე?

— 5-სა და 4-ის ჯამს.

ამიტომაც, პირველად რა უნდა აღვნიშნოთ?

— 5-სა და 4-ის ჯამი.

— პირველი მოქმედება რა იქნება?

— შეკრება.

— დაფაზე დაწერილ მაგალითში როგორაა?

— აქ პირველი მოქმედება გამრავლებაა.

— როგორ ჩავწეროთ, რომ პირველი მოქმედება გამრავლება არ იყოს?

აქ უკვე მიხვდებიან, რომ საჭიროა ფრჩხილები.

გვერდით დაწერენ: (5+4).8

— აბა, გამოვთვალოთ ორივე!

პირველი მაგალითის პასუხათ მიიღებენ 37; მეორისა — 72. განსხვავება მიუთითებს შეცდომაზე. ამის შემდეგ ორივე გამოსახულებას სიტყვიერად წავაკითხებთ.

იმისათვის, რომ ფრჩხილების ხმარების არსი ნამდვილად გაიგოს მოსწავლემ, მივმართოთ შემდეგ ხერხს: ავიღოთ რაიმე რიცხვითი მაგალითი ფრჩხილებით, გავარკვიოთ მოსწავლე იმაში, თუ როგორი

თანრიგით უნდა მოახდინოს მან მოქმედებანი ამ მაგალითის ამოსახსნელად, შემდეგ იმავე მაგალითში ფრჩხილები გადავსვათ და ამის შემდეგ მოვახდინოთ მოქმედება. მოსწავლე თვალსაჩინოდ დაინახავს, თუ როგორ შეიცვლება ამით მოქმედებათა თანრიგი.

შეცდომის შემთხვევაში ალგებრის გაკვეთილზე შეგვიძლია ასეთი მარტივი მაგალითი მოვიყვანოთ. a და b რიცხვების ჯამი გავამრავლოთ მათ სხვაობაზე. მოსწავლეები უთუოდ ჩაწერენ $a+b$ $(a-b)$, რის შემდეგ არითმეტიკული მაგალითის ანალოგიურად მივიყვანთ $(a+b)$ $(a-b)$-ს ჩაწერამდე. შემდეგ ორივე ეს გამოსახულება გამოვითვალოდ a-სა და b-ს ერთისა და იმავე რიცხვითი სიდიდეებისათვის. შეცდომას თვითონვე მიხვდებიან.

აქვე უნდა აღინიშნოს ერთი გარემოება: შემჩნეულია, რომ მოსწავლეებს უძნელდებათ სწორად ჩაწერონ ასეთი გამოთქმები: $2ab^4$ პლიუს მინუს $3ab^4$; $5ab$ მინუს $7b$, პლიუს მინუს $2ab$, მინუს პლუს $3b$; ჩაწერის გასაადვილებლად მიზანშეწონილი იქნებოდა, პირველ ხანებში მაინც, ასე გვეკარნახა: „$2ab$-ს მივუმატოთ მინუს $3ab^4$; მოსწავლე ჩაწერდა:

$$2ab^4+(-3ab^4);$$

$5ab$-ს გამოვაკლოთ მინუს $7b$, მივუმატოთ მინუს $2ab$, გამოვაკლოთ პლიუს $3b$;—ჩაწერდნენ:

$$5ab-(-7b)+(-2ab)-(+3b);$$

ჩაწერა და ნიშნებში გარკვევა აღარ გაძნელდებოდა და, რაც მთავარია, ასეთი კარნახი უფრო ახლოა საქმის შინაარსთან. იგი თავიდან აგვაცილებს მოქმედებათა ნიშნებისა და ცალკეული წევრების ნიშნების ერთმანეთში არევასა და გაურკვევლობას.

§ 3. განვიხილოთ შეცდომები ალგებრული ჯამის ფრჩხილებში მოთავსებასა და მის ფრჩხილებიდან განთავისუფლებაში. მოვითხოვოთ, რომ IV—V კლასებში მაგალითების ამოხსნა ყოველთვის ერთი და იმავე გზით არ ხდებოდეს; სახელდობრ, ავიღოთ მაგალითი: 12—(7—3); 12-ს ვაკლებთ სხვაობას (7—3)-ს. თუ გამოვაკლებთ 7-ს, მაშინ 12-ს 3-ით მეტს გამოვაკლებთ, ვიდრე უნდა გამოგვეკლო. ამიტომ, საბოლოო შედეგის მისაღებად საჭიროა 3-ის დამატება. ამგვარად—$12-(7-3)=12-7+3$.

ზოგიერთი მაგალითი თვითონვე მიგვითითებს ამ ხერხის უპირატესობაზე ჩვეულებრივთან შედარებით·

47—(27—12); აქ უმჯობესია ჯერ 47—27=20 ავიღოთ და შემდეგ 20+12=32 ანუ 47—27+12 გამოვიანგარიშოთ, ვიდრე ჯერ გამოვთვალოთ სხვაობა 27—12=15-ს და შემდეგ 47—15=32.

პ. ლარიჩევს მოყვანილი აქვს სავარჯიშო ასეთი სახის: „შეასრულეთ გამოკლება უმარტივესი გზით: 374—179=374—(174+5)= =374—174—5=195“[1].

ასეთი მაგალითები (არითმეტიკული, მარტივი) საჭიროა მივსცეთ მოსწავლეებს ალგებრულ ჯამზე მოქმედებათა დაწყების წინაც. ეს უსათუოდ მისცემს გარკვეულ ჩვევას მოსწავლეებს და მოამზადებს ნიადაგს კარგად შეისწავლოს ალგებრული ჯამის ფრჩხილებიდან განთავისუფლება. ასეთი სამზადისი ხელს შეგვიწყობს თავიდან ავიცილოთ შეცდომა:

$$(a+b)-(c-d+e)=a+b-c-d+e.$$

ამ შეცდომაში გარკვეულ როლს თამაშობს აგრეთვე მოქმედების ნიშნებისა და წევრების ნიშნების ერთი მეორეში არევაც. ფრჩხილებს შორის მოთავსებულ მინუს ნიშანზე სჯობია ვიხმაროთ „გამოკლებულია“ და არა „მინუს“—მოქმედების ნიშნისაგან გასანსხვავებლად. ეს შეუწყობს ხელს მრავალწევრთა გამოკლების წესის გამოყენებას; უკეთ გაარჩევენ ერთმანეთისაგან საკლებ და მაკლებ მრავალწევრებს და ზედმეტი დაკვირვების გარეშე დაინახავენ მოქმედებას. რაც შეეხება შეცდომებს შეკრება-გამოკლებაში, აქ, გარდა ალგებრული ჯამის ფრჩხილებში მოთავსებასა და მისი ფრჩხილებიდან განთავისუფლების სწორი მეთოდით სწავლებისა, საჭიროა სავარჯიშო მაგალითები დალაგებული იქნეს სწორი მეთოდური თანამიმდევრობით. მაგალითს № 7-ს 3 ქვეთავიდან წინ უნდა უსწრებდეს მაგალითი სახისა:

$$a-\frac{b-c}{2}.$$

ვთქვათ, მოსწავლემ აქაც იმავე ხასიათის შეცდომა დაუშვა, ე. ი. დაწერა ასე:

$$a-\frac{b-c}{2}=\frac{2a-b-c}{2}$$

[1] П. А. Ларичев, Сборник алгебраических задач, часть I, 1951, № 391.

მაშინ მასწავლებელი ეკითხება:

— რა მოქმედება გვაქვს?

— გამოკლება·

— დამისახელეთ საკლები!

— a

— დამისახელეთ მაკლები!

$$\frac{b-c}{2}$$

— როგორ გამოვაკლოთ?

— ჯერ გავაერთმნიშვნელიანოთ, შემდეგ მრიცხველები ერთმანეთს გამოვაკლოთ; მნიშვნელი უცვლელად გადმოვწეროთ.

— გაერთმნიშვნელიანების შემდეგ საკლები რა იქნება?

— $2a$

— მაკლები?

— $b-c$

— ახლა მაგალითი ისე დავწეროთ, რომ მაკლები $b-c$ ცალკე იყოს გამოყოფილი!

წერენ: $a-\frac{b-c}{2}=\frac{2a-(b-c)}{2}$;

— ახლა როგორ მოვიქცეთ?

— მოვახდინოთ გამოკლება; გავხსნათ ფრჩხილები.

აქ გავამეორებინებთ ფრჩხილების გახსნის წესს და მაგალითის ამოხსნა უკვე დაზღვეული იქნება შეცდომებისაგან. საბოლოოდ, დაფაზე გვექნება ამ მაგალითის ორივე ამოხსნა:

$$a-\frac{b-c}{2}=\frac{2a-b-c}{2}$$

$$a-\frac{b-c}{2}=\frac{2a-(b-c)}{2}=\frac{2a-b+c}{2}$$

ამით საქმე არ მთავრდება, მოსწავლეებმა თვალსაჩინოდ უნდა დაინახონ მეორე ამოხსნის სისწორე. ამისათვის მივსცეთ a, b და c-ს რაიმე კონკრეტული მნიშვნელობა. ვთქვათ $a=5$, $b=6$, $c=2$ და გამოვითვალოთ გამოსახულება

$$a-\frac{b-c}{2}=5-\frac{6-2}{2}=3$$

შევამოწმოთ პირველი პასუხი:

$$\frac{2a-b-c}{2}=\frac{2\cdot5-6-2}{2}=\frac{10-6-2}{2}=1$$

პასუხი უკვე ამჟღავნებს შეცდომას, 3-ს მაგიერ მიიღეს 1.

სამაგიეროდ, მეორე პასუხი

$$\frac{2a-b+c}{2}=\frac{2\cdot5-6+2}{2}=\frac{10-6+2}{2}=3$$

იმავე რიცხვით სიდიდეს იძლევა, რასაც თვითონ მოცემული გამოსახულება.

გარდა მეთოდური თანამიმდევრობის დაცვისა, ვარჯიშის დროს მაგალითების ამოხსნა პირველ ხანებში აუცილებლად უნდა ჩატარდეს მთელი სისრულით, „ნახტომის“ გარეშე. ასე მაგალითად:

$$\frac{2a-5b}{4}-\frac{3a-4b}{6}+\frac{a-b}{8}=\frac{6(2a-5b)-4(3a-4b)+3(a-b)}{24}=$$

$$=\frac{12a-30b-12a+16b+3a-3b}{24}=\frac{3a-17b}{24}$$

მოსწავლეს მეტად მკაფიოდ უნდა დავანახოთ, რომ წილადის ხაზი გაყოფის აღმნიშვნელია, რომ $\frac{a}{b}$ და $a:b$ ჩანაწერებია ერთი და იმავე მოქმედებისა სხვადასხვა სახით.

რაც შეეხება მაგალითებს მრავალწევრთა მამრავლებად დაშლაზე, სადაც იმავე სახის შეცდომას აქვს ადგილი, მის აღმოსაფხვრელად, უპირველეს ყოვლისა, საჭიროა მოვაგონოთ მოსწავლეებს ერთი წლის წინ, IV კლასში, გავლილი წესები—მრავალწევრის ფრჩხილებში ჩასმისა და მისი ფრჩხილებიდან განთავისუფლების შესახებ. ამოვხსნათ ამ წესებზე რამდენიმე მარტივი მაგალითი. ეს არ კმარა. მაგალითებს იმ ტიპისას, როგორიც I თავშია განხილული (გვ. 31 №№ 25, 26, 27, 28), წინ უნდა უსწრებდეს მაგალითები შემდეგი ტიპისა.

$$2a(y+1)-(y+1);\quad b(x-y)-(x-y)$$

და სხვ. მოსწავლეები ერთბაშად აღარ დადგებიან ორი სიძნელის წინაშე; ამ მაგალითებში ერთნაირ გამოსახულებათა შედგენა არაა საჭირო—ეს უკვე მოცემულია. აუცილებელია სიძნელეთა დიფერენციაცია. სიძნელე შეცდომის წარმოშობის ერთ-ერთი მიზეზია.

აქვე აღვნიშნავთ გ. ლუტცაუს მიერ მოყვანილი მაგალითის

$$3p(p-q)-5(q-p)^2.$$ [1]

რომლის გარდაქმნას იგი ასე აწარმოებს:

$$3p(p-q)-5(q-p)^2=3p(p-q)-5(-p+q)^2=3p(p-q)-$$
$$-5(-1)^2(p-q)^2=(p-q)[3p-5(p-q)]=(p-q)(3p-5p+5q)=$$
$$=(p-q)(5q-2p)$$

ან ასე:

$$3p(p-q)-5(-p+q)^2=3p(p-q)-5(-p+q)(-p+q)=$$
$$=3p(p-q)+5(p-q)(-p+q)=(p-q)[3p+5(-p+q)]=$$
$$=(p-q)(5q-2p).$$

ან კიდევ:

$$3p(p-q)-5(q-p)^2=3p(-q+p)-5(q-p)^2=-3p(q-p)-$$
$$-5(q-p)^2=(q-p)[-3p-5(q-p)]=(q-p)(-3p-5q+5p)=$$
$$=(q-p)(2p-5q)=-(q-p)(5q-2p)=(p-q)(5q-2p).$$

ვფიქრობთ, რომ გარდაქმნას გაამარტივებს და მოსწავლისათვის მეტად გასაგებიც იქნება წინასწარ აღნიშვნა იმისა, რომ

$$(q-p)^2=(p-q)^2.$$

მაშინ გარდაქმნა ასე ჩატარდება:

$$3p(p-q)-5(q-p)^2=3p(p-q)-5(p-q)^2=(p-q)[3p-5(p-q)]=$$
$$=(p-q)(3p-5p+5q)=(p-q)(5q-2p).$$

უნდა ვეცადოთ ყოველი იგივური გარდაქმნა რაც შეიძლება მარტივი იყოს, უმოკლესი გზით მიმდინარეობდეს. ამ მოსაზრებით გ. ლუტცაუს მიერ მოყვანილი გარდაქმნები სანიმუშოდ ვერ ჩაითვლება.

---

[1] Г. Лютцау, Математические заметки о вынесении за скобки знака минус и о заключении группы членов в скобки, перед которыми ставят знак минус, журн. „Математика в школе", 1937, № 3.

ახსნა-განმარტების დროს ავტორი ხმარობს გამოთქმებს: „მინუს ნიშანი გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ", „თუ ფრჩხილი ლუწ ხარისხშია", „თუ ფრჩხილი კენტ ხარისხშია", რაც ყოვლად დაუშვებლად მიგვაჩნია.

რამდენიმე სიტყვა მრავალწევრის მარტივ მამრავლებად დაშლის დროს დაშვებული შეცდომის

$$a^2(b+c)+ab(b+c)=(b+c)(ab+a^2)$$

წინააღმდეგ ბრძოლისათვის.

პროგრამაში ვკითხულობთ; „მრავალწევრის დაშლა მარტივ თანამამრავლებად". ალგებრის სახელმძღვანელოში[1] დასათაურებულია ასე: მამრავლებად დაშლა. § 65. მთელი ერთწევრების დაშლა, § 66, მრავალწევრთა დაშლა. როგორია ეს დაშლა? რას ეწოდება მრავალწევრთა მარტივ თანამამრავლებად დაშლა? ამის შესახებ აქ არაფერია ნათქვამი.

ალგებრის სახელმძღვანელო უნდა ეთანხმებოდეს პროგრამას. სახელმძღვანელოში საჭიროა იყოს განმარტება—რას ეწოდება მრავალწევრის მამრავლებად დაშლა? როგორ თანამამრავლებს ეწოდება მარტივი თანამამრავლები? როდის ჩაითვლება მრავალწევრის დაშლა მარტივ მამრავლებად დასრულებულად?

მოსწავლემ აუცილებლად უნდა იცოდეს, რომ მარტივ თანამამრავლებად დაშლა მრავალწევრისა არის მისი წარმოდგენა ნამრავლის სახით, რომელიც მაშინ ჩაითვლება დასრულებულად, როცა მიღებული მამრავლები იქნებიან მარტივი, დაუყვანადი (**Неприводимые**), ე. ი. ისეთები, რომელთა შემდგომი დაშლა აღარ შეიძლება.

არც ს. ბრონშტეინი იძლევა ამ საკითხის გაშუქებას საკმარისი სისრულით: „ხშირად სასარგებლოა მთელი მრავალწევრი, ე. ი. ერთწევრთა ალგებრული ჯამი წარმოვადგინოთ უფრო მარტივ თანამამრავლთა ნამრავლის სახით"[2]. რას ნიშნავს გამოთქმა „უფრო მარტივ თანამამრავლთა ნამრავლი"? როგორ გავიგოთ „უფრო მარტივი"? ასეთი ახსნა-განმარტებით ვერ გავიგებთ სად ან როდის დასრულდება მრავალწევრის მარტივ მამრავლებად დაშლა.

---

[1] ა. კ ი ს ე ლ ე ვ ი, ალგებრა, ნაწ. I, თავი, V.

[2] С. С. Б р о н ш т е й н, Методика алгебры, 1937, стр. 69.

მართალია, ზოგადი წესები, რომელთა მეოხებითაც შესაძლოა ვაწარმოოთ ნებისმიერი მრავალწევრის დაშლა მარტივ მამრავლებად, ელემენტარული ალგებრის კურსში არ შეიძლება იყოს მოცემული, მაგრამ ამის გამო ცნებების არამართებული ახსნა-განმარტება მიუღებელია. მით უმეტეს, რომ ის კერძო შემთხვევები და ხერხები, რომლებიც აქ განიხილება, უმრავლეს შემთხვევებში გვაძლევენ მრავალწევრის მარტივ თანამამრავლებად დაშლის საშუალებას (თუ კი საზოგადოდ მოცემული მრავალწევრის დაშლა შესაძლებელია).

მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის ამოცანა ჩაითვლება გადაწყვეტილად, თუ მოცემული მრავალწევრი წარმოდგენილია დაუყვანად მრავალწევრთა ნამრავლის სახით[1].

როგორც იყო უკვე აღნიშნული (II თავი) ეს საკითხი კარგად არის განხილული დ. ფადეევისა და ი. სომინსკის ალგებრის I ნაწილის IV თავის § 1-ში, სათაურით: „ცნება მამრავლებად დაშლის შესახებ“, სადაც მოცემულია ამომწურავი განმარტებანი და დაკავშირებულია მთელ რიცხვთა დაშლასთან მარტივ თანამამრავლებად. კარგი იქნება, თუ ამ წიგნით იხელმძღვანელებს მასწავლებელი ამ მასალის სწავლების დროს.

§ 4. გავეცნოთ $(a\pm b)^m = a^m \pm b^m$ შეცდომის გამოსწორების ხერხებს.

ამ შეცდომის პროტოტიპს წარმოადგენს შეცდომა

$(a+b)^2 = a^2+b^2$, ამიტომ დავიწყოთ აქედან. შეცდომის ხასიათი გვიჩვენებს, რომ შემოკლებული გამრავლების სწავლების დროს საჭიროა, რაც შეიძლება, მკვეთრად გამოჩნდეს $2ab$ წევრის არსებობა.

როგორ შევასწავლოთ ფორმულა $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$? სანიმუშოდ მოგვყავს ამ ფორმულის შესწავლის პირველი გაკვეთილი.

როგორც გაკვეთილის მსვლელობიდანაც ჩანს, მასწავლებელი წინასწარ ატარებს მოსამზადებელ მუშაობას—აცნობს მოსწავლეებს ყველა იმ გამოსახულებას, რომელიც ფორმულაში გვხვდება; არკვევს მათ ხასიათს, სტრუქტურას, მათ მიღებას და განსაკუთრებულ ყურადღებას ამახვილებს $2ab$ გამოსახულებაზე.

---

[1] С. И. Новоселов, Алгебра, 1947, стр. 59.

მოსამზადებელი მუშაობა.

გაკვეთილი იწყება მასწავლებელის მიმართვით: —დღეს უნდა შევისწავლოთ ორი რიცხვის ჯამის კვადრატის ფორმულა. ჩაწერეთ სათაური!

მასწავლებელი დაფაზე წერს $a+b$ და შემდეგ ისევ მიმართავს მოსწავლეებს:

— რა არის ეს?

— მრავალწევრი.

— რამდენი წევრია აქ?

— ორი.

— რა შეიძლება ვუწოდოთ?

— ორწევრა გამოსახულება.

— რა ნიშნით არის შეერთებული?

— პლიუსით.

— როგორ გამოვთქვათ?

— ორი რიცხვის ჯამი.

— დავასახელოთ პირველი რიცხვი!

— a

მეორე რიცხვი

— b.

ამის შემდეგ მასწავლებელი წერს დაფაზე შემდეგ გამოსახულებებს, a^2, b^2, ab, $ab+ab$, $2ab$, $(a+b)^2$ და ავარჯიშებს მოსწავლეებს მათ სიტყვიერად წაკითხვაში, რაც ასე ტარდება:

— წავიკითხოთ პირველი გამოსახულება!

მოსწავლე კითხულობს—a^2

— ორწევრის რომელი წევრია a?

— პირველი წევრი.

— მაშ, a^2 კიდევ როგორ შეიძლება გამოვთქვათ?

— პირველი წევრის კვადრატი.

ასევე, წაიკითხავენ b^2-ს და გამოთქვამენ მას, როგორც მეორე წევრის კვადრატს.

მასწავლებელი გადადის ab-ზე.

— წაიკითხეთ!

— ab

— რას წარმოადგენს მოქმედების მიხედვით?

— ნამრავლს.

-- დავაზუსტოთ—რისი ნამრავლია?
— a-სი და b-სი.
—კიდევ როგორ ვთქვათ?
— პირველი და მეორე წევრების ნამრავლი.
- უკეთ!
— პირველი წევრის ნამრავლი მეორეზე.
— წავიკითხოთ შემდეგი გამოსახულება!
— $ab+ab$.
— როგორ ჩავწეროთ უფრო მოკლედ ეს გამოსახულება?
—$2ab$ (გვერდზე უწერენ $ab+ab=2ab$).
— როგორ მივიღეთ $2ab$?
— ab-ს მივუმატეთ ab.
— როგორია შესაკრებები?
— ტოლი.
— როდესაც რომელიმე რიცხვს, მაგალითად, 5-ს ვუმატებთ იმავე რიცხვს, ე. ი. 5-ს, ამბობენ, რომ 5 გავაორკეცეთო. რატომ?
— 5+5 გვაძლევს 10-ს, 10-ში კი 5 ორჯერ თავსდება (ხანდახან მოსწავლეები ამაზე ასე ვერ პასუხობენ. ასეთ შემთხვევაში მასწავლებლის დახმარებაა საჭირო. აუცილებელია საბოლოოდ მაინც გავარკვიოთ და მივიღოთ პასუხი).
— აქაც რა მოხდა? მიუთითებს $ab+ab=2ab$-ზე.
— ab-ს მივუმატეთ ab, ე. ი. გავაორკეცეთ.
— ab თვითონ რას წარმოადგენს მოქმედების მიხედვით?
— ნამრავლს, პირველი რიცხვისა მეორეზე.
— მაშ, $2ab$ როგორ ნამრავლს წარმოადგენს?
— გაორკეცებულ ნამრავლს პირველი რიცხვისა მეორეზე.
მასწავლებელი გადადის $(a+b)^2$-ზე.
აკითხებს მოსწავლეს, შემდეგ 2-ს ხელით ფარავს და ეკითხება:
— ეს რას წარმოადგენს?
— ორი რიცხვის ჯამს.
მასწავლებელი იღებს ხელს.
— ახლა?
— ორი რიცხვის ჯამის კვადრატს.
შემდეგ ყველა ჩანაწერებს კვლავ იმეორებენ სიტყვიერად.
— დღეს რა გვაქვს შესასწავლი?

— ორი რიცხვის ჯამის კვადრატის ფორმულა.
— როგორ უნდა იყოს იგი დაწერილი?
— ასოების საშუალებით.
— რატომ?
იმიტომ, რომ ფორმულა უნდა შევისწავლოთ ზოგადად.
— სად გვიწერია ეს?
— $(a+b)^2$. უჩვენებს მოსწავლე.
— რა მოქმედება უნდა შევასრულოთ?
— ახარისხება.
— რისი ახარისხება ხდება?
— ორწევრის.
— ვიცით ჩვენ ორწევრის, ან საზოგადოდ მრავალწევრის ახარისხება?
— არა.
— როგორ მოვიქცეთ, რომ პასუხი მაინც ვიპოვოთ? როგორ ვიქცევით ხოლმე ყოველთვის, როცა ჩვენთვის უცნობია მოქმედება?
— ცნობილი მოქმედებით ვცვლით.
— რა მოქმედებით შეიძლება შევცვალოდ ახარისხება?
— გამრავლებით.
— აბა, ვინ დაწერს ამას (უჩვენებს $(a+b)^2$-ზე) შეცვლილი სახით?
მოსწავლე წერს: $(a+b)(a+b)$.
ამით მთავრდება მოსამზადებელი მუშაობა.
გადადიან ფორმულის გამოყვანაზე:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$

შემდეგ ტარდება მიღებული ფორმულის ანალიზი. მასწავლებელი ეკითხება — რა ფორმულა გამოვიყვანეთ?
— ორი რიცხვის ჯამის კვადრატისა.
— რამდენი წევრი მივიღეთ პასუხში?
— სამი წევრი.
— დაასახელეთ ეს წევრები!
— პირველი რიცხვის კვადრატი, გაორკეცებული ნამრავლი პირველი რიცხვისა მეორეზე, მეორე რიცხვის კვადრატი.
— როგორ უნდა მივიღოთ პირველი წევრი?

— ავიყვანოთ პირველი რიცხვი კვადრატში?
— როგორ უნდა მივიღოთ მესამე წევრი?
— ავიყვანოთ მეორე რიცხვი კვადრატში.
— წაიკითხეთ მეორე წევრი!
— გაორკეცებული ნამრავლი პირველი რიცხვისა მეორეზე.
— როგორ მივიღოთ ეს წევრი?
— პირველი რიცხვი გავამრავლოთ მეორეზე, ამით მივიღებთ ორივე რიცხვის ნამრავლს, შემდეგ მიღებული ნამრავლი გავამრავლოთ 2-ზე, ე. ი. გავაორკეცოთ.
— არ შეიძლება სხვაგვარად მიღება?
— შეიძლება. გამოანგარიშების დროს შეიძლება ჯერ a-ს გამრავლება 2-ზე და შემდეგ b-ზე.
— კიდევ?
— ჯერ b-ს გამრავლება 2-ზე და შემდეგ a-ზე.
— რა უფლებით ვახდენთ ამ გადანაცვლებას?
— ნამრავლი არ შეიცვლება თანამამრავლთა რიგის შეცვლით.

ბოლოს მთლიანად გამოსთქვამენ ფორმულას და სიტყვიერად წაიკითხავენ მის ასოით გამოსახულებას.

სანიმუშოთ მოყვანილი გაკვეთილი ჩატარებული იყო საქართველოს სსრ დამსახ. მასწავლებლის განსვენებული თამარ ალექსანდრეს ასულ ყაზახაშვილის მიერ მე-7 ვაჟთა საშ. სკოლის მე-6 კლასში 1950 წელს აპრილში. ჩავწერეთ გაკვეთილის მსვლელობის დროს. ანალოგიურად უნდა ჩატარდეს ფორმულის $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ გამოყვანა და მიწოდება კლასისათვის.

საინტერესოა, რომ მასწ. თ. ყაზახაშვილის მოსწავლეების რვეულებში შეცდომა $(a\pm b)^n=a^n\pm b^n$ არ აღმოჩნდა. არ აღმოჩნდა აგრეთვე შეცდომები გაორკეცებული და გასამკეცებული ნამრავლების გამოთვლაში ორწევრის კვადრატისა და კუბის ფორმულების გამოყენების დროს. ეს ღირსშესანიშნავი ფაქტი მოულოდნელი როდია. იგი შედეგია სწორი მეთოდური ხერხების გამოყენებისა, რომლებსაც მასწავლებელი მიმართავდა ამ საკითხების სწავლების დროს.

დავსახოთ ხერხები უკვე დაშვებული შეცდომის გამოსასწორებლად.

მოსწავლეებს მოვუყვანოთ მაგალითი $(5+2)^2$. ისინი ასე გამოიყვანენ: $(5+2)^2=25+4=29$. მეორე მხრივ, $(5+2)^2=7^2=49$ განსხვავება ნათლად მიგვითითებს შეცდომაზე.

ვთქვათ, შეცდომა დაუშვეს მაგალითის $(5x^7+1,2)^2$ ამოხსნის დროს. აუცილებლად მიგვაჩნია ეს მაგალითი ამოვხსნათ გამრავლებით:

$$(5x^7+1,2)^2=(5x^7+1,2)(5x^7+1,2)=25x^{14}+6x^7+6x^7+$$
$$+1,44=25x^{14}+2\times 6x^7+1,44$$

ცალკე დავწეროდ მიღებული შედეგი:

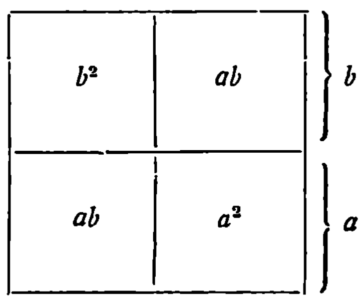
$$(5x^7+1,2)^2=25x^{11}+12x^4+1,44.$$

დაფაზე დავწეროთ ფორმულა $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
შევეკითხოთ მოსწავლეებს:

— შეადარეთ ფორმულას? როგორაა გამოთვლილი $12x^7$ წევრი?

— გაორკეცებულია ნამრავლი პირველი რიცხვისა მეორეზე. ამგვარად, თვითონვე დაინახავენ მოსწავლეები თავის შეცდომას.

ამ შეცდომის აღმოფხვრაში დაგვეხმარება აგრეთვე ორი რიცხვის ჯამის კვადრატის ფორმულის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.



ავიღოთ კვადრატი, დავყოთ იგი ნაწილებად, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები. გამოვიანგარიშოთ თითოეული ნაწილის ფართობი და შემდეგ მთელი კვადრატის ფართობი. ეს ამოცანა მოყვანილია ნ. შაპოშნიკოვისა და ნ. ვალცოვის ალგებრულ ამოცანათა კრებულის I ნაწილის II თავის, 1 §-ში. უნდა ითქვას, რომ ამოცანა თავის ადგილზე არაა მოთავსებული. რა საჭიროა, ან რაში დაგვეხმარება მისი ამოხსნა ამ პარაგრაფში მოყვანილ მაგალითებთან მრავალწევრის მსგავსი წევრების გაერთებაზე? მოსწავლემ ჯერ არ იცის შემოკლებული გამრავლების არც ერთი ფორმულა. ეს სავარჯიშო, ასეთი მოთავსების გამო, სრულიად უყურადღებოდ რჩება.

უფრო ხშირად არ ხსნიან მას და, თუ ამოხსნიან კიდეც, იგი იქ დიდ სარგებლობას არ მოიტანს. ხოლო შემოკლებული გამრავლების შესწავლის დროს ავიწყდებათ ეს მეტად სასარგებლო ამოცანა, რაც დიდ დანაკლისს წარმოადგენს.

ამოცანა ორი რიცხვის ჯამის კვადრატის ფორმულის სრულ ინტერპრეტაციას იძლევა. ამ კვადრატის ფართობი $(a+b)^2$-ია და მისი ნაწილები კი ორი კვადრატია ფართობებით a^2 და b^2 და ორი მართკუთხედი თითოეული ab ფართობით. მათი ჯამი მეტად თვალსაჩინოდ იძლევა

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

ამ ფორმულასთან დაკავშირებით სასარგებლო იქნება ამოიხსნას მარტივი ამოცანები დაახლოვებით ასეთი სახისა:

1. ერთი კვადრატის გვერდი x მ-ია, მეორესი 3 მ-ით მეტი. რამდენითაა მეტი მეორე კვადრატის ფართობი პირველი კვადრატის ფართობზე?

2. ნაკვეთს კვადრატის ფორმა აქვს. მისი სიგრძე x მ უდრის. ნაკვეთს ჩამონაჭრები დაუმატეს ისე, რომ მისი სიგრძე ყოველი მხრით ხუთ-ხუთი მეტრით გაიზარდა. რას უდრის ახალი კვადრატის ფართობი?

3. ბოსტნის კვადრატული ნაკვეთი ისე გაზარდეს, რომ ყოველი გვერდი 8 მეტრით გაიზარდა, რის შედეგად ბოსტნის ფართობი 176 მ²-ით გაიზარდა. რას უდრიდა ბოსტნის სიგრძე გადიდებამდე?

ამოცანები აღებულია ა. ბარსუკოვის წიგნიდან „**Уравнения первой степени в средней школе**". ავტორს ამ ამოცანების მიცემა მოსწავლეებისათვის მიაჩნია მიზანშეწონილად შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გაცნობამდე, როგორც მასალა ამ ფორმულების გამოყვანის გასაადვილებლად. ჩვენ ამ აზრს არ ვიზიარებთ. ეს ამოცანები უკეთესია ფორმულების შესწავლის შემდეგ მიეცეს მოსწავლეებს იმ ტრაფარეტის ასაცდენად, რომელშიც ჩვეულებრივ მოთავსებულია მათი გამოყენება. ასეთი ამოცანების ამოხსნის შემდეგ მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ გასცენ პასუხი ისეთ კითხვებზე, როგორიცაა:

„ტოლია თუ არა 27^2 და 20^2+7^2, და თუ ისინი არაა ტოლი, მაშინ რამდენით განსხვავდება ერთი მეორისაგან?" შემოკლებული

გამრავლების ფორმულების გაცნობამდე კი ასეთი ვარჯიში (ზემოდ მოყვანილი ამოცანების გამოყვანა) ზედმეტი იქნება. აქვე უნდა აღვნიშნოთ, რომ საზოგადოდ ასეთი მარტივი ამოცანების ამოხსნა (როგორც შემდეგაც გვექნება საუბარი) აუცილებელია ყოველი საკითხის გავლასთან დაკავშირებით VI—VII კლასებში. ამით მომზადდება ნიადაგი VIII—IX კლასებში ამოცანების სისტემატური ამოხსნისათვის განტოლებების შედგენის მეთოდით.

შემოკლებული ფორმულების გამოყენების მაგალითებს წილადების შეკრება-გამოკლებაშიაც ვხვდებით. მოვიტანოთ მაგალითი № 6, ქვეთავი 3 გვ. 52.

$$\frac{2}{2a+3}+\frac{3}{3-2a}+\frac{2a+15}{4a^2-9}$$

ამ მაგალითის ამოხსნაში შეცდომა შემოკლებული ფორმულის $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ გამოყენების უცოდინრობითაა დაშვებული. მოსწავლემ ფორმულა იცის, მაგრამ ვერ გამოუყენებია ის. ასეთი ცოდნა ფორმალიზმის ელემენტს შეიცავს.

ამ მაგალითის ამოხსნას წინ უნდა უსწრებდეს მაგალითი:

$$\frac{3}{2a+3}+\frac{2}{2a-3}.$$

მასწავლებელი ეკითხება მოსწავლეებს,—როგორ შევკრიბოთ ეს წილადები?

— ჯერ გავაერთმნიშვნელიანოთ,

— რა იქნება საერთო მნიშვნელი?

— $(2a+3)(2a-3)$.

და ა. შ. მეორე საფეხური იქნება მაგალითი:

$$\frac{m}{2a+3}-\frac{n}{2a-3}$$

ამის ამოხსნის შემდეგ ვეკითხებით:

— როგორ მოვიქცეოდით, რომ გვქონოდა

$$\frac{m}{2a+3}-\frac{n}{3-2a}?$$

ასეთი თანდათანობით გადასვლა უზრუნველყოფს პასუხს:

— ისეთი გარდაქმნა მოვახდინოთ, რომ მეორე წილადის მნიშვნელში მივიღოთ $2a-3$.

— ხომ არ შეიძლება სხვანაირად?

— შეიძლება, პირველი წილადის მნიშვნელი დავწეროთ $3+2a$ სახით.

ცალ-ცალკე უნდა იქნეს განხილული ორივე ეს შემთხვევა.

ავიღოთ ჯერ მეორე:

$$\frac{m}{2a+3}-\frac{n}{3-2a}=\frac{m}{3+2a}-\frac{n}{3-2a},$$

შემდეგ ამოხსნა მიმდინარეობს ჩვეულებრივ. მასწავლებელი ეკითხება:

— რა უყავით პირველი წილადის მნიშვნელს?

— გადავაადგილეთ მისი წევრები.

შეიცვალა თუ არა სიდიდით?

— არა. შესაკრებთა ადგილის შეცვლით ჯამი არ იცვლება.

მაგალითის შემდეგი მსვლელობა არ წარმოშობს გაუგებრობას.

ახლა, იგივე მაგალითი ამოვხსნათ მეორე ხერხით: გადავწერთ მაგალითს, გავამეორებინებთ, თუ როგორ უნდა მოვიქცეთ:

— მეორე წილადის მნიშვნელში რომ მივიღოთ $2a-3$, როგორ მივაღწევთ ამას?

— შევუცვალოთ ნიშნები ორივე წევრს.

— რა მოუვა $3-2a$ გამოსახულებას?

— მთელ გამოსახულებას შეეცვლება ნიშანი?

— რა მოუვა წილადს?

— წილადს ნიშანი შეეცვლება. მიიღებენ:

$$\frac{m}{2a+3}-\frac{n}{3-2n}=\frac{m}{2a+3}+\frac{n}{2a-3}.$$

მაგალითის შემდეგ მსვლელობა გარკვეულია. ასეთი სამზადისის შემდეგ არ გაძნელდება $\frac{2}{2a+3}+\frac{3}{3-2a}+\frac{2a+15}{4a^2-9}$ მაგალითის ამოხსნა.

§ 5. რა პროფილაქტიკური საშუალებანი გამოვნახოთ შეცდომის $\frac{ab+c}{ad}=\frac{b+c}{d}$ თავიდან ასაცილებლად?

უპირველეს ყოვლისა, საჭიროა არითმეტიკის სწავლება გავხადოთ პერსპექტიული.

მოსწავლეს, რომელმაც იცის წილადის ცვლილება მისი მრიცხველისა და მნიშვნელის ცვლილების გამო, ეს შეცდომა არ მოუვა. თუ მან იცის შეგნებულად და არა წესის მხოლოდ ზეპირად ცოდნით, რომ წილადი არ იცვლება მრიცხველისა და მნიშვნელის ერთსა და იმავე ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე გამრავლებით ან გაყოფით, მაშინ შესაძლოა, თვითონვე დასვას კითხვა—რა მოუვა წილადს, თუ მის მრიცხველსა და მნიშვნელს მივუმატებთ ან გამოვაკლებთ ერთსა და იმავე რიცხვს? ამ საკითხებში მოსწავლე ალგებრულ წილადების შესწავლამდე ზედმიწევნით კარგად უნდა იყოს გარკვეული.

ავიღოთ წილადი, ვთქვათ $\frac{3}{4}$; დავუმატოთ მის მრიცხველსა და მნიშვნელს ერთი და იგივე რიცხვი, ვთქვათ, 2; მივიღებთ

$$\frac{3+2}{4+2}=\frac{5}{6}$$

დავსვათ კითხვა: რა მოუვიდა წილადს? შეიცვალა თუ არა იგი? შევადაროთ $\frac{5}{6}$ და $\frac{3}{4}$ ერთმანეთს. ტოლია თუ არა? რომელი მეტია?

ახლა დავუმატოთ იმავე წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს სხვა რიცხვი. მოვახდინოთ იგივე შედარება.

ახლა $\frac{3}{4}$-ის მნიშვნელსა და მრიცხველს გამოვაკლოთ ერთი და იგივე რიცხვი, ვთქვათ, 1.

$$\frac{3-1}{4-1}=\frac{2}{3}$$

შედეგი კვლავ შევადაროთ $\frac{3}{4}$-ს. ბოლოს, $\frac{3}{4}$-ის მნიშვნელი და

მრიცხველი გავამრავლოთ ერთსა და იმავე რიცხვზე, ვთქვათ, 2-ზე. $\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2}=\frac{6}{8}$ შევადაროთ $\frac{6}{8}$ და $\frac{3}{4}$ ერთმანეთს. ასეთი მსჯელობა ჩავატაროთ კიდევ სხვა წილადებზე.

ეს ხერხი მეტად სასარგებლოა ამ შეცდომების აღმოსაფხვრელად. ორი VII კლასიდან, რომლებსაც 1949/50 სასწ. წელს ვასწავლიდი, ერთში ალგებრული წილადების სწავლება დავიწყე წილადების ზემომოყვანილი ხერხით. ამ კლასში შეცდომებს „შეკვეცაზე" ადგილი არ ჰქონია. მართალია, ერთი კლასის მაგალითით არ შეიძლება სწავლების ხერხის განზოგადება, მაგრამ მის ვარგისობაში ჩვენ ეჭვი არ შეგვდის.

წინ მოვიყვანეთ (გვ. 52) მინკოვსკის მიერ დასახელებული შეცდომა:

$$\frac{a+b}{ac}=\frac{1+b}{c}$$

გამოსწორების ხერხად ის თვლის ასეთ ვარჯიშს: მოსწავლეებმა უნდა მოიფიქრონ პასუხი კითხვაზე: „არსებობს თუ არა პირობები და, თუ არსებობს, როგორია, რომლის დროსაც ეს ტოლობა აღმოჩნდება, მართებული"[1].

ამისათვის ასეთი პირობა იქნება: $b=0$ მაშინ $\frac{a}{ac}=\frac{1}{c}$ ან თუ $a=1$, მაშინ $\frac{1+b}{c}=\frac{1+b}{c}$—ვღებულობთ იგივურ გამოსახულებებს და, მაშ, სამართლიანია ტოლობაც,—შეცდომა აღარაა.

ვფიქრობთ, ასეთი წესი მხოლოდ ზიანის მომტანია. მოსალოდნელია მოსწავლემ კერძო შემთხვევისათვის მართებული ტოლობა მიიღოს, დარჩეს მას მეხსიერებაში ზოგადად. გარდა ამისა, შეცდომა და კერძო შემთხვევისათვის მართებული მდგომარეობა ფორმით ერთნაირად გამოისახება $\frac{1+b}{c}$. მათი ერთად დაყენება სახიფათოა.—მოსწავლეს ადვილად აერევა ერთმანეთში, თუ მაშინვე არა, ცოტა ხნის შემდეგ მაინც. გარდა ამისა, VII კლასის მოსწავ-

[1] Минковский, Об одном примере с ошибками, журн. „Математика в школе", 1948, № 1.

ლისათვის ასეთი ანალიზი არც თუ ისე ადვილი საქმეა. შეცდომის გამოსასწორებლად ფართოდ უნდა გამოვიყენოთ თვალსაჩინოება „ცოცხალი ჭვრეტა", რის საშუალებასაც არითმეტიკა იძლევა.

§ 6. ვიწყებთ რა რადიკალებზე მოქმედებების დროს დაშვებული შეცდომების გამოსწორების ხერხთა ძიებას, პირველ რიგში ფორმალიზმთან ბრძოლა უნდა დავიწყოთ. ეს იქნება ყველაზე კარგი, ყველაზე სწრაფი საშუალება ამ შეცდომის აღმოსაფხვრელად.

რაც უფრო აბსტრაქტულია საკითხი, მით უფრო მეტი პასუხისმგებლობით უნდა ვეკიდებოდეთ მის სწავლებას, ფრთხილად ვარჩევდეთ მისი სწავლების გზებს, მეტი კონკრეტული შინაარსი შევქონდეს სწავლებაში.

განსაკუთრებით სასარგებლოა თვალსაჩინოება ასოების მაგიერ ციფრებით გამოსახული რიცხვების შეტანის საშუალებით. მაშინ ალგებრული გამოსახულებები და მათზე მოქმედებანი მეტად ნათელი და ცხადი ხდება.

მაგალითად, თუ მოსწავლემ დაუშვა

$$a\sqrt{\frac{1}{b}}=ab\sqrt{b}$$

შეცდომა, ადვილია მას თვალსაჩინოდ დავანახოთ იგი რიცხვების შემოტანით. b-თვის ისეთი რიცხვი ავიღოთ, რომ ფესვი ამოვიდეს, ვთქვათ, $b=4$, $a=5$. მარცხენა მხარეში ჩასმით მივიღებთ:

$$a\sqrt{\frac{1}{b}}=5\sqrt{\frac{1}{4}}=5\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}.$$

მარჯვენა მხარე მოგვცემს:

$$ab\sqrt{b}=5\cdot4\sqrt{4}=20\cdot2=40$$

შეცდომა ნათელია. ხსენებული შეცდომისაგან წინასწარი გაფრთხილების მიზნით პირველ ხანებში სავარჯიშო მაგალითები მთელი სისრულით უნდა ამოვხსნათ; არ ვარგა აჩქარება, მოქმედებათა გამოტოვება და მათი ზეპირად შესრულება, რაც ხშირად იწვევს შეცდომებს.

დიდი მნიშვნელობა ენიჭება შედეგის შემოწმების ჩვევის გამომუშავებას. იგი იხსნის მოსწავლეს შეცდომისაგან. ავიღოთ შეცდომა

$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. შევამოწმოთ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ შევადაროთ მოცემულს. გამოსახულება $\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$ რომ $a\sqrt[n]{b}$-ს ტოლი იყოს, მაშინ $a = \sqrt[n]{a}$, რაც მხოლოდ მაშინ შესრულდება თუ $a=1$, მაგრამ a-ს გატოლებას ერთთან ჩვენი მაგალითის შინაარსი არ ითვალისწინებს, რადგან ასეთ შემთხვევაში მაგალითი დაიყვანება იგივეობაზე $\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$. მოსწავლემ თვითონ შესაძლოა არც ჩაატაროს ეს მსჯელობა, მაგრამ თუ დაებადა შემოწმების სურვილი, ადვილად მიხვდება თავის შეცდომას.

აქ ასეთ ხერხსაც შეიძლება მივმართოთ:

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n}\ \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

ტოლობას $\sqrt[n]{a^n} = a$ მოსწავლეები თავიდანვე იცნობენ. მათთვის ეს ცნობილია, ამიტომაც ასეთი ახსნა-განმარტება ამ მოქმედებისა სრულიად გამართლებულია. იგი უკეთესია, ვიდრე, მაგალითად, ასეთი:

$$a^2\sqrt{a} = \sqrt{(a^2)^2 a} = \sqrt{a^4 a} = \sqrt{a^5}$$

თუმცა, ეს უკანასკნელი პედაგოგიურ პრაქტიკაში უფრო მიღებულია, მაგრამ იგი დასაწუნია შემდეგი მოტივირებით—ამ ხერხს თვითონ შეიძლება მოჰყვეს ტიპიური შეცდომა a^2-ის რადიკალის ნიშნის ქვეშ შეტანის დროს.

$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (თავი II, ქვეთავი 4, § 2).

შეცდომა რომ დავანახოთ მოსწავლეებს, აქაც შეიძლება მივმართოთ ასოების ციფრებით გამოსახული რიცხვებით შეცვლას.

ვთქვათ:

$$a=2;\ b=27;\ n=3.$$
$$a\sqrt[n]{b} = 2\cdot\sqrt[3]{27} = 2\cdot 3 = 6$$
$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{2\cdot 27} = \sqrt[3]{54}$$

შესაძლოა ასეც გამოვიანგარიშოთ

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{2\cdot 27} = 3\sqrt[3]{3}$$

მარჯვენა მხარე რომ არაა ტოლი მარცხენა მხარისა, ნათლად ჩანს. შეცდომა ცხადია.

იგივე ხერხი გამოგვადგება შეცდომის

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m+n]{a}$ გამოსწორებისათვის.

ფესვიდან ფესვის ამოღების პროცესში მოსწავლემ მკაფიოდ უნდა დაინახოს, რომ აქ ერთი და იმავე გამოსახულებიდან რიგრიგობით ამოიღება ფესვები: მაგალითად, a-დან ამოიღება ჯერ n-ური ხარისხის ფესვი, ხოლო შემდეგ m-ური ხარისხისა. ფესვიდან ფესვის ამოღების შინაარსი მდგომარეობს ორი ცალკეული მოქმედების ერთში გაერთიანების საშუალებაში. ავიღოთ კონკრეტული მაგალითი:

$$\sqrt[4]{\sqrt[8]{a^{36}}}$$

ამოვიღოთ ჯერ კუბური ფესვი a^{36}-დან,

$$\sqrt[0]{a^{36}}=a^{12}$$

გვექნება:

$$\sqrt[4]{a^{12}}=a^{3}$$

პასუხის მისაღებად ჩვენ ფაქტიურად ვაწარმოეთ 36-ის გაყოფა ჯერ 3-ზე, ხოლო შემდეგ 4-ზე, რაც გაყოფის მოქმედების თვისებით იმავე 36-ის 12-ზე გაყოფას წარმოადგენს.

$$\sqrt[4]{\sqrt[8]{a^{36}}}=\sqrt[12]{a^{36}}$$

რიცხვითი მაგალითის გარდა, შესაძლოა ახსნა განმარტება მივსცეთ შემდეგი თვალსაზრისით:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{p}}}=\sqrt[m]{a^{\frac{P}{n}}}=a^{\frac{P}{mn}}=\sqrt[mn]{a^{p}}; \qquad ე. ი.$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{10}}}=\sqrt[mn]{a^{p}};$$

ავიღოთ შეცდომა $\sqrt{8x^{2}}=4x$ (ქვეთავი 4 გვ. 61, მაგალითი № 11) აქ ხარისხიდან ფესვის ამოღების წესი მექანიკურადაა გადატანილი კოეფიციენტზეც. ამიტომ შეცდომის თავიდან აცილების მიზნით სასურველია ასეთი მაგალითის ამოხსნამდე მივცეთ მაგალითები:

$$\sqrt{8} \quad და \quad \sqrt{x^{2}}$$

$$\sqrt{16} \quad და \quad \sqrt{a^{2}b^{4}}$$

$$\sqrt[8]{81} \quad და \quad \sqrt[8]{c^{3}}$$

ასეთი ვარჯიშის დროს შეცდომა არ მოხდება, რადგან $\sqrt{8}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt[3]{81}$ და სხვაში არ მონაწილეობს ასოები ხარისხის მაჩვენებლად, რომელთა გაყოფაც მოუხდებათ ფესვის მაჩვენებელზე. მაშ, ამ მაგალითებში ფესვის ამოღების წესის ასეთი გავლენაც აღარაა მოსალოდნელი.

ამ მაგალითებზე ვარჯიშის შემდეგ მივცემთ:

$$\sqrt{8x^2},\ \sqrt{16a^2b^4}\ \sqrt[3]{81c^3}$$

და სხვა მაგალითებს, რომელთა სწორად ამოხსნა უკვე გარანტირებული იქნება.

ახლა მოვიყვანოთ რადიკალების შესწავლის მეთოდი დაკავშირებული რიცხვის ოპერატიულ განმარტებასთან, რომელიც დამუშავებულია პროფ. ი. ვ. არნოლდის მიერ[1]. ვფიქრობთ მისი შემოღება სასკოლო პრაქტიკაში დიდად სასარგებლო უნდა იყოს. მართალია, მისი გამოყენების საშუალება ჩვენ არა გვქონია, მაგრამ მოსკოვის 425-ე ვაჟთა საშ. სკოლის მათემატიკის მასწავლებელ ს. შვარცბურდს, თვითონ პროფ. არნოლდის უშუალო ხელმძღვანელობით გამოუყენებია ეს მეთოდი და მეტად კარგი შედეგიც მიუღია[2].

ძალიან ხშირად, ამბობს პროფ. არნოლდი, საჭიროა აბსტრაქციის დაბალ საფეხურზე, შებრუნებულ მოქმედებათა განმარტება პირდაპირი მოქმედებით. ამით ხდება აბსტრაქციათა საფეხურის შემოკლება.

შებრუნებული მოქმედება—ფესვის ამოღება, განმარტებულია „პირდაპირი"-თ, ასე: ავამაღლოთ რიცხვი a, წილად $\frac{m}{n}$ ხარისხად, ნიშნავს: დავყოთ ეს რიცხვი n თანატოლ მამრავლად და გადავამრავლოთ m ასეთი მამრავლი ერთმანეთზე.

ან $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ აღნიშნავს რიცხვის მამრავლად დაყოფის შედეგს, ე.ი. $a^{\frac{1}{n}} = b$ თუ $a = bb...b$ (n მამრავლი);

[1] Проф. И. В. Арнольд, Операторное истолкование числа, 1946 и Показатели степени и логарифмы в курсе елементарной алгебры, 1949.

[2] С. И. Шварцбурд, Опыт операторного истолкования числа. Сборник „Из опыта работы передовых учителей математики," 1950.

$a^{\frac{m}{n}}$ ნიშნავს m მამრავლის ნამრავლს, რომელთაგან თითოეული არის $b=a^{\frac{1}{n}}$

აქვეა სქემატური სურათიც:

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}=b$$

$b \quad b..b$ (n მამრავლი)

$$a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m=b^m$$

$\underbrace{b..b}_{b^m}..b$ (n მამრავლი)

b^m (m მამრავლი)

საინტერესო აქ ისაა, რომ სიმბოლოების $a^{\frac{1}{n}}$ და $a^{\frac{m}{n}}$ განმარტება ემყარება ტოლთანამამრავლთა გადამრავლების პრიმიტიულ, კონკრეტულ წარმოდგენებს. ეს კი ანალოგიურია $\frac{1}{n}a$ და $\frac{m}{n}a$ განსაზღვრისა, როგორც a-ს ტოლ შესაკრებებად დაყოფის შედეგი. აქ კოეფიციენტიდან ხარისხის მაჩვენებელზე გადასვლის ყველა ოპერაციის საფეხური მაღლდება: n ტოლ შესაკრებად დაყოფის მაგიერ, საქმე გვაქვს n ტოლ თანამამრავლად დაყოფასთან. ტოლ შესაკრებთა ერთ ჯამში შეერთების მაგიერ $\frac{m}{n}a$ ტოლ თანამამრავლთა ერთ ნამრავლად გადამრავლებასთან. სწორედ საერთო აზრით არის გამართლებული წილად მაჩვენებლიანი ხარისხების შემოტანა ფესვის ამოღების მოქმედების აღსანიშნავად.

ავიღოთ კონკრეტული მაგალითები:

$$\sqrt{16}=16^{\frac{1}{2}}=4$$

$$\overline{4\quad 4} \qquad 44$$

$$(27\cdot 8)^{\frac{1}{3}} = 6 \qquad \sqrt[3]{x^9\cdot y^6} = x^3\, y^2$$

$$3\;\;3\;\;3\;\;2\;\;2\;\;2 = 6\cdot 6\cdot 6 \qquad x^3x^3x^3y^2y^2y^2 = x^3y^2\cdot x^3y^2\cdot x^3y^2$$

$$(\sqrt[5]{32})^2 = 32^{\frac{2}{5}} = 2\cdot 2 = 4$$

$$2\;\;2\;\;2\;\;2\;\;2$$

$$(\sqrt[4]{16})^5 = 16^{\frac{5}{4}} = \cdot 2\cdot 2\cdot 2\;.\;2\cdot 2 = 32$$

$$2\;\;2\;\;2\;\;2$$

ვთქვათ გვაქვს $64^{1\frac{2}{3}}$ —ეს ნიშნავს 64 გავიმეოროთ მამრავლად ერთხელ და კიდევ „$\frac{2}{3}$-ჯერ“ იმისთვის, რომ 64 მამრავლად გავიმეოროდ „$\frac{2}{3}$ -ჯერ“ საჭიროა იგი დავყოთ 3 ტოლ თანამამრავლად და ავიღოთ ეს თანამამრავლი 2-ჯერ. იქნება:

$$4\cdot 4 = 16$$

$$64^{1\frac{2}{3}} = 64\cdot 4\cdot 4 = 1024$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a}$$

$$b \qquad b$$

$$c\;\;c\;\;c\;\;c\;\;c\;\;c$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^{12}b^6}} = \left[(a^{12}b^6)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} = (a^{12}b^6)^{\frac{1}{6}} = a^2b$$

წესი ასეთია:

$$\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt{1024}}=\sqrt[10]{1024}=2$$

$$32 \qquad 32 \quad \underbrace{2\ 2\ \ldots\ 2}_{10\text{-ჯერ}}$$

$$2\ 2\,2\,2\ 2$$

რადიკალის ძირითადი თვისება (ანალოგი—წილადის ძირითადი თვისება) ასე გამოისახება:

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^{m}};\qquad a^{\frac{mp}{np}}=a^{\frac{m}{n}}$$

შეიძლებოდა რადიკალებზე ყველა მოქმედების მოყვანა ამ მეთოდის საფუძველზე, მაგრამ ჩვენ მხედველობაში გვქონდა მხოლოდ მეთოდის არსის გაცნობა, რისთვისაც ზემოთქმულიც იკმარებს. ამ მეთოდის ნაკლად უნდა ჩაითვალოს მეტად ხელოვნური გამოთქმები, რომლებიც საჭირო ხდება ვიხმაროთ: „64 ავიღოთ მამრავლად ერთხელ და კიდევ „$\frac{2}{3}$-ჯერ“ „გავიმეოროთ a მამრავლად $\log_a b$-ჯერ“ და სხვა.

§ 7. განტოლებათა შესწავლა ძირითად სამი ეტაპისაგან შედგება: პირველი — განტოლებათა თეორია — ზოგადი თვისებები, ტოლძალოვანება; მეორე—განტოლებათა ამოხსნა. მესამე—ამოცანების ამოხსნა განტოლებათა შედგენით, სასკოლო პრაქტიკაში სამივე ეს ეტაპი უმეტესად ერთმანეთისაგან გამიჯნულად მიმდინარეობს. განტოლებათა თეორია სრულიად მოწყვეტილია განტოლებათა ამოხსნისაგან. სასკოლო პრაქტიკას ახასიათებს ეს არასასურველი დეფექტი. აუცილებელია ამ დეფექტის მოსპობა. თეორია და განტოლებათა ამოხსნა უნდა ისწავლებოდეს ერთმანეთთან დაკავშირებით. მოსწავლეს არ უნდა ეჩვენებოდეს ისინი გათიშულად, ერთმანეთისაგან მოწყვეტილად. თეორიას მოსწავლე თვლის წესებად, რომლებიც ა. კისელევის სახელმძღვანელოში უნდა ისწავლოს, ხოლო განტოლებათა და ამოცანათა ამოხსნა მაშინ დაიწყება, როცა ამ სახელმძღვანელოს გვერდზე გადადებენ (შიგ აღარ ჩაიხედავენ) და მხოლოდ ალგებრულ ამოცანათა კრებული დაჭირდე-

ბათ. ამ დროს მოსწავლეს აღარც ახსოვს განტოლებათა თვისებები და მხოლოდ მექანიკურად ხსნის მათ.

თემა „განტოლებები“ უნდა დავიწყოთ უმარტივესი განტოლებების ამოხსნით. ამოხსნაში გამოყენებული უნდა იქნეს განტოლებების თვისებები, რაც მარტივი სახის განტოლებებისათვის არ წარმოადგენს სიძნელეს. პირველ ხანებში ეს აუცილებელია. შემდეგში უკვე ძნელი არ იქნება თვისებათა ზოგადად ჩამოყალიბება: მოსწავლეები უკვე შეჩვეული იქნებიან მათ გამოყენებას

განტოლების განსაზღვრა უმჯობესია ასე მივცეთ: განტოლება არის ისეთი ორი ალგებრული გამოსახულების ტოლობა, რომელიც შეიცავს ერთ უცნობს მაინც. სახელმძღვანელოში მოცემული განსაზღვრის („ისეთ ტოლობას, რომელშიაც ერთი ან რამდენიმე ასო შედის და ორივე ნაწილის რიცხვითი სიდიდე ერთი და იგივეა ტოლობაში შემავალი ასოების არა ყოველი მნიშვნელობისათვის, განტოლება ეწოდება“[1]) გაგება უჭირთ მოსწავლეებს. არის მექანიკურად დაზეპირების შემთხვევებიც. ზემოჩმოყვანილი განსაზღვრა შეიცავს ამოხსნის ელემენტსაც. თავისთავად დგება საკითხი განტოლების ამოხსნის შესახებ—განტოლება შეიცავს უცნობს, უცნობი სიდიდე კი უნდა გავიგოთ.

რადგან განტოლებათა ამოხსნა მოსწავლეებმა უკვე VI კლასიდან იციან, აქ აღარ გვიხდება მათი ახლად გაცნობა. ვაგონებთ განტოლების განსაზღვრას და გადავდივართ ტოლობის თვისებების შესწავლაზე.

უმარტივეს მაგალითებზე უნდა ვუჩვენოთ მათ განტოლებათა თვისებებიც.

ავიღოთ განტოლება

$$2x+3=x+7$$

მოსწავლეებმა იციან, რომ ტოლობის ორივე ნაწილს შეიძლება მივუმატოთ ან გამოვაკლოთ ტოლი რიცხვები, ამით ტოლობა არ დაირღვევა. ვსარგებლობთ ამით.

გამოვაკლოთ ტოლობის ორივე ნაწილს 3. მოსწავლე წერს:

$$2x+3-3=x+7-3$$

$$2x=x+4 \qquad (1)$$

გამოვაკლოთ ტოლობის ორივე ნაწილს x.

$$2x-x=x+4-x \qquad x=4$$

[1] ა. კისელევი, ალგებრა, ნაწ., I, 1951, გვ. 106.

ვნახოთ ახლა, მივიღებთ თუ არა მოცემულ განტოლებიდან მართებულ ტოლობას მასში x ის 4-ით შეცვლით.

$$2 \cdot 4 + 3 = 4 + 7$$
$$8 + 3 = 11$$

მივიღეთ მართებული ტოლობა.

ჩავსვათ ახლა (1) განტოლებაში x-ის მაგიერ 4. მოსწავლეები დაინახავენ, რომ x-ის ამ მნიშვნელობისათვის (1) განტოლებაც მართებულ ტოლობას იძლევა.

რამდენიმე ასეთი მაგალითი მოსწავლეებს დამოუკიდებლად მიიყვანს იმის დადგენამდე, რომ განტოლების ორივე ნაწილისათვის ერთსა და იმავე რიცხვის მიმატებით ან გამოკლებით ვიღებთ ახალ განტოლებას, რომელიც მოცემულის ტოლძალოვანი იქნება.

მიღებული დასკვნა კვლავ უნდა შემოწმდეს რამდენიმე მაგალითზე. სავარჯიშოდ პირველად ისეთი მაგალითები უნდა შეირჩეს, რომლებშიც გაყოფის წარმოების გარეშე ვპოულობთ x-ს, მაგალითად,

$$7x - 4 = 6x + 10.$$

დავუმატოთ ორივე ნაწილს 4.

$$7x - 4 + 4 = 6x + 10 - 4$$
$$7x = 6x + 14$$

გამოვაკლოთ ორივე მხარეს 6.

$$7x - 6x = 6x + 14 - 6x$$
$$x = 14.$$

როგორც საკუთარმა პრაქტიკამ გვიჩვენა, მოსწავლეებს არ უჭირთ გარკვევა იმაში, თუ რომელი სიდიდე უნდა აირჩიონ განტოლების ორივე ნაწილის მისამატებლად ან გამოსაკლებად.

ასეთი გზით განტოლების I თვისება მოსწავლეებმა ადვილად ჩამოაყალიბეს. აქვე ირკვევა, თუ რა როლს ასრულებს განტოლების ამოხსნაში მისი ფესვის შემოწმება (მოსწავლეები ამოწმებენ არა მარტო მოცემულ განტოლებას, არამედ ამოხსნის პროცესში მიღებულ განტოლებასაც). არის ერთი დადებითი მხარეც: I თვისების შედეგები მიიღება უშუალოდ, რის გამოც არ წარმოადგენს სიძნელეს მათი ფორმულირება.

ასეთივე გზით უნდა ვაჩვენოთ განტოლებათა მეორე თვისებაც.

ასეთი დაკავშირება თეორიისა განტოლებათა ამოხსნის პრაქტიკასთან თავიდან აგვაცილებს შეცდომებს: განტოლების ერთი მხრიდან მეორეში წევრების გადატანაში (თავი I, ქვეთავი V, მაგალითები: №№ 1, 2, 3) და წილადწევრიანი განტოლებების გარდაქმნაში (თავი 1, მაგალითები №№ 7, 8, 9).

განტოლების სწორად ამოხსნაში დიდ როლს თამაშობს გამოსახულებათა გამოკვლევის ჩვევა. გადადიან რა ერთი მოქმედებიდან მეორეზე სწორად, ხანდახან იღებენ პასუხს, რომელსაც აზრი არა აქვს (თავი I, ქვეთავი V, მაგალითი № 14) და მოსწავლე ამ მდგომარეობას ვერ ხედავს. მას რომ გამომუშავებული ჰქონდეს კვლევის უნარი. შემოწმების ჩვევა ასეთ შეცდომებს არ ექნებოდა ადგილი. შემოწმებით ის მიხვდებოდა გარეშე ფესვის წარმოშობას, რის შემდეგ თვითონვე დაებადებოდა სურვილი გაეგო—რამ წარმოშვა ეს ფესვი. კარგი იქნებოდა, მოსწავლეებს წინასწარ მოეძებნათ უცნობის ის მნიშვნელობები, რომლებიც განტოლებას უაზრობად აქცევს. მაგალითად:

$$\frac{x}{x-5}-\frac{7}{x+3}=\frac{41}{(x-5)(x+3)}$$

განტოლების ფესვი უნდა აქცევდეს მას მართებულ ტოლობად, ხოლო x-ის მნიშვნელობანი, რომლებისთვისაც განტოლება ვერ გადაიქცევა მართებულ ტოლობად, არ გამოგვადგება. მართლაც: თუ $x=5$ ან $x=-3$ განტოლება კარგავს აზრს.

ამიტომაც, ჩვენი განტოლებისათვის

$$x\neq 5 \text{ და } x\neq -3$$

„მაგალითად, გამოსახულებაში $\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-y}$ x-მა არ შეიძლება მიიღოს მნიშვნელობა -1 და y-მა 1 ზე მეტი“[1].

ფადეევისა და ს. სომინსკის ალგებრაში (ნაწ. I) მოცემულია მეტად კარგი სავარჯიშო ამ საკითხებთან დაკავშირებით:

„1. განტოლების ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $(x-3)$-ზე. შეიძლება თუ არა განტოლებამ ამით მიიღოს ამოხსნა: $x=5$?

[1] В. Ф. Китаенко, Устный опрос, журн. „Математика в школе", 1951, № 6.

2. რა ამოხსნები შეიძლება მიიღოს განტოლებამ, როცა მის ორივე ნაწილს $(x-2)(x-7)$ გავამრავლებთ?"[1] (გვ. 144, 1951 წ.).

ასეთი სავარჯიშოების შედგენა არაა ძნელი. მასწავლებელმა უნდა შეადგინოს და ავარჯიშოს მოსწავლეები მასზე.

ამ შეცდომების თავიდან ასაცილებლად და კვლევის უნარის გამოსამუშავებლად კარგია ტარდებოდეს ვარჯიში განტოლებათა ამოხსნასა და შედგენაში პარალელურად რიცხვითი და ასოითი კოეფიციენტებიანი მონაცემებისათვის, რასაც სამართლიანად მოითხოვს ა. ბარსუკოვი[2].

ყველაზე მეტად მოსწავლეებს უჭირთ ამოცანათა ამოხსნა განტოლებათა მეთოდით.

რით გავაუმჯობესოდ ეს მდგომარეობა?

ამოცანების ამოხსნა უნდა იწყებოდეს არა VIII კლასიდან-პირდაპირ ერთუცნობიანი I ხარისხის განტოლების შედგენით, არამედ ალგებრის პირველი გაკვეთილებიდანვე. უნდა დავიწყოთ უმარტივესი სახის ალგებრული ამოცანებით. VII კლასის მოსწავლემ არ იცის, რა არის ამოცანის პირობის გადაყვანა ალგებრულ ენაზე; უკეთ, არ იცის ამოცანის ალგებრული გზით ამოხსნა. ამოცანა მას მხოლოდ არითმეტიკის გაკვეთილებიდან ახსოვს.

ამოცანები უნდა ამოიხსნას ყოველ თემასთან, ყოველ საკითხთან დაკავშირებით. ალგებრულ ამოცანათა კრებულში საჭიროა ამ ამოცანებმა დაიკავონ სრულუფლებიანი ადგილი.

ამის საუკეთესო ნიმუშს იძლევა პ. ლარიჩევის სახელმძღვანელო[3], სადაც ყოველ ცალკეულ საკითხზე მოყვანილ სავარჯიშოებთან ერთად მოცემულია შესაფერი ამოცანებიც. ამოცანათა პროპედევტიკული ციკლი მოყვანილი აქვს აგრეთვე. ა. ბარსუკოვს ზემოხსენებულ წიგნში (გვ. 244). ასეთი ამოცანების ამოხსნის გარეშე მოსწავლეებს ძალიან უჭირთ ამოცანის პირობების ალგებრულ ენაზე გადატანა, რაც ამოცანების ამოხსნის ძირითად პირობას შეადგენს. ასეთი მომზადების გარეშე მოსწავლეები ვერ ერკვევიან ამოცანის

---

[1] Д. К. Фаддеев и И. С. Соминский, Алгебра, часть I, 1951, стр. 144.

[2] А. Н. Барсуков, Уравнение первой степени в средней школе. 194[?], стр. 33.

[3] П. А. Ларичев, Сборник алгебраических задач, I и II части, 1951.

პირობებში, მათ არა აქვთ სათანადოდ განვითარებული სწორი მსჯელობის უნარი და ვერ ახერხებენ ტოლ სიდიდეთა მონახვას, მათ შორის ტოლობის დამყარებით განტოლებათა შედგენას. აქ გარკვეულ როლს თამაშობს ისიც, რომ მოსწავლეები არ არიან მიჩვეული ამოხსნან ერთი და იგივე ამოცანა რამდენიმე ხერხით. ამას იშვიათად ექცევა ყურადღება. ხშირად, რომელიმე მოსწავლეს ამოცანა ამოხსნილი აქვს განსხვავებული გზით, ვიდრე უმრავლესობას (მაგალითად, საშინაო დავალების შემოწმების დროს), მაგრამ მასწავლებელი უყურადღებოდ ტოვებს ამას. საჭიროა, სწორი მსჯელობის უნარის გამომუშავებისა და ფუნქციონალური დამოკიდებულების ცნების დანერგვისათვის, მივაჩვიოთ მოსწავლე ერთისა და იმავე პირობების მიხედვით სხვადასხვა სახის განტოლების შედგენას. მოვიყვანოთ ერთი ამოცანა: „ორ საფულეში 81 მანეთია. პირველში ორჯერ ნაკლებია, ვიდრე მეორეში. რამდენი მანეთია თითოში?“[1] მასწავლებელი ეკითხება.—რამდენი პირობა გვაქვს?

— ორი

— დავასახელოთ პირველი!

— ორ საფულეში 81 მანეთია.

— მეორე!

— პირველში ორჯერ ნაკლები, ვიდრე მეორეში.

— რას გვეკითხება ამოცანა?

— რამდენი მანეთია თითოეულ საფულეში?

—პირველი პირობა გამოვიყენოთ მოსაძებნ სიდიდეთა აღნიშვნისათვის, ხოლო მეორე —განტოლების შესადგენად.

ამის შემდეგ შემოაქვთ აღნიშვნები.

ვთქვათ, I საფულეში x მანეთია, მაშინ მეორეში იქნება $(81-x)$ მანეთი.

— როგორ დამოკიდებულებაშია ეს ორი სიდიდე ერთმანეთთან?

— $81-x$ 2-ჯერ მეტია x-ზე.

— როგორ გავატოლოთ?

— ნაკლები გავადიდოთ 2-ჯერ, ე. ი. x—გავამრავლოთ 2-ზე; რითაც მიიღებენ:

$$2x=81-x$$

---

[1] ნ. შაპოშნიკოვი და ნ. ვალცოვი, ალგებრულ ამოცანათა კრებული ნაწ. I, 1951 გვ. 111.

ამოხსნის დამთავრების შემდეგ მასწავლებელი კვლავ მიმართავს მოსწავლეებს:

— ამ ამოხსნაში უცნობ სიდიდეთა აღსანიშნავად ამოცანის რა პირობა გამოვიყენეთ?

— პირველი. ორივე საფულეში 81 მანეთია.

— მეორე პირობა გავიმეოროთ!

იმეორებენ.

— რაში გამოიყენეთ ეს პირობა?

— განტოლების შესადგენად.

იგივე ამოცანა ამოვხსნათ სხვა გზით.

მეორე პირობა გამოვიყენოთ უცნობ სიდიდეების აღსანიშნად, პირველი —განტოლების შესადგენად.

შემოაქვთ აღნიშვნები და ანალოგიური კითხვა-პასუხის ჩატარების შემდეგ ადგენენ განტოლებას $x+2x=81$.

ამის შემდეგ საშინაო დავალებადაც უნდა მიეცეს ამოცანა, რომელიც უნდა ამოხსნან მისი პირობების ასეთი შენაცვლებით. ასეთი ხერხი სასურველია და აუცილებლად უნდა იყოს გამოყენებული რამდენიმე ამოცანის ამოხსნის დროს. უკეთესია პირველად ამისათვის შეირჩეს არართული ამოცანები, შემდეგ კი, როგორც პრაქტიკა გვიჩვენებს, თვითონ მოსწავლეები შეეცდებიან გადაიტანონ ეს ხერხი სხვა ამოცანების ამოხსნაზეც.

მოკლე ხანში მოსწავლეებს ემჩნევათ ყურადღების განსაკუთრებული გამახვილება ამოცანის პირობების მიმართ და ინტერესი ამოცანების ამოხსნისადმი.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

რედაქტორი მ. კონიაშვილი
ტექრედაქტორი ს. ლორთქიფანიძე

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 7/I-55 წ., ანაწყობის ზომა 6×9, ქაღალდის ზომა 60×84. სასტამბო ფორმათა რაოდენობა 7,5, სააღრიცხვო—6,4 საავტორო—6,2

უე 00720 შეკვ. № 1780 ტირაჟი 2.000

საქართველოს სსრ კულტურის სამინისტროს პოლიგრაფიული მრეწველობის, გამომცემლობებისა და წიგნით ვაჭრობის საქმეთა მთავარ სამმართველოს სტამბა № 2, თბილისი, ფურცელაძის ქ. № 5

Типография № 2 Главного управления по делам полиграфической промышленности, издательств и книжной торговли Министерства культуры Грузинской ССР. Тбилиси, ул. Пурцеладзе № 5.

ფასი 8 მან.

Е. ИМЕРЛИШВИЛИ

Типичные ошибки учащихся по алгебре
и пути их искоренения

(на грузинском языке)

Издательство научно-исследовательского
института педагогических наук Министерства
просвещения Грузинской ССР

Тбилиси · 1955