ე. ვენტცელი

ალბათობათა თეორია

სსრ კავშირის უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ დაშვებულია სახელმძღვანელოდ უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლებისათვის

გამომცემლობა „განათლება"
თბილისი — 1980

წიგნი განკუთვნილია სახელმძღვანელოდ იმ პირთათვის, რომლებიც იცნობენ მათემატიკას ჩვეულებრივი უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლის კურსის მოცულობით და დაინტერესებულნი არიან ალბათობათა თეორიის, კერძოდ სროლის თეორიის ტექნიკური გამოყენებით.

ამავე კატეგორიის მკითხველთათვის განკუთვნილი სხვა სახელმძღვანელოებისაგან განსხვავებით წიგნი გამოირჩევა დიდი ყურადღებით ალბათობათა თეორიის გამოყენების მნიშვნელოვანი ახალი დარგების (ალბათობითი პროცესების, ინფორმაციის, მასიური მომსახურებისა და სხვა თეორიის) მიმართ.

$\text{В}\ \dfrac{20203-055}{\text{М}-602(08)-80}\ 170-80$

მეორე გამოცემის წინასიტყვაობა

წინამდებარე გამოცემაში შედარებით პირველთან შეტანილია შემდეგი ცვლილებანი და დამატებანი: მასალა, რომელიც შეეხება ლიაპუნოვის თეორემას და მასთან დაკავშირებულ მახასიათებელ ფუნქციონალურ მეთოდს (ადრეული 13.7—13.9 პარაგრაფებს) შემოკლებულია და უფრო მარტივადაა გადმოცემული 13.7—13.9 პარაგრაფებში. შეცვლილია ცდების დამუშავებასთან (მე-14 თავი) დაკავშირებული საკითხები, რის გამოც ნაცვლად ადრინდელი 14.1 და 14.2 პარაგრაფებისა ჩამატებულია ახალი — 14.1—14.5, ხოლო ადრინდელი 14.3—14.5 პარაგრაფები შენარჩუნებულია შესაბამისად 14.5—14.8 ნომრებით. რამდენადმე შეცვლილია 5.9 პარაგრაფი, რომელიც პუასონის კანონისადმია მიძღვნილი. დამატებულია ორი ახალი თავი: მე-18 თავი „ინფორმაციის თეორიის ძირითადი ცნებები" და მე-9 თავი „მასიური მომსახურების თეორიის ელემენტები", რომლებიც ალბათობათა თეორიის ორ მნიშვნელოვან დარგს ეხება. ეს დარგები სასწავლო ლიტერატურაში თითქმის დღემდე არ ყოფილა გაშუქებული. შეცვლილია ცხრილთა შემადგენლობა დანართში. შეცვლილია ზოგიერთი მაგალითი.

ავტორი გულითად მადლობას მოახსენებს უ ს ს რ მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსს ბ. ვ. გნედენკოს მთელი რიგი მნიშვნელოვანი მითითებებისათვის.

ე. ვენტცელი

წინამდებარე მესამე გამოცემაში არ არის შეტანილი არსებითი ცვლილებები. შეტანილია უმნიშვნელო შესწორებანი და შეცვლილია ზოგიერთი მაგალითები და ამოცანები; ზოგიერთი ცხრილი შეცვლილია ახლით.

მეთოდური თვალსაზრისით წიგნის ცალკეული 5.9, 6.3, 9.4, 9.5 და 9.6 პარაგრაფები ოდნავ შეცვლილია. არსებითად განახლებულია 10.3 პარაგრაფის შინაარსი.

პირველი გამოცემის წინასიტყვაობა

წინამდებარე წიგნი დაწერილია ალბათობათა თეორიის ლექციების ბაზაზე, რომლებიც წაკითხულია ავტორის მიერ მთელი რიგი წლების განმავლობაში ნ. ე. ჟუკოვსკის სახელობის სამხედრო-საჰაერო საინჟინრო აკადემიაში და ასევე, ავტორის ამავე საგნის სახელმძღვანელოს მიხედვით.

რომელიც აკადემიის მიერ შეზღუდული ტირაჟით გამოვიდა 1952 წელს.

წინამდებარე გამოცემაში სახელმძღვანელოს თავდაპირველი ტექსტი საფუძვლიანად გადამუშავდა.

წიგნი გათვალისწინებულია ძირითადად ინჟინრისათვის, რომელსაც უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლის ჩვეულებრივი კურსის მოცულობით მათემატიკური მომზადება გააჩნია.

წიგნის შედგენის დროს ავტორი ამოცანად ისახავდა საგანი თვალსაჩინოდ და მარტივად გადმოეცა სრული მათემატიკური სიმკაცრის გარეშე. ამასთან დაკავშირებით ცალკეული დებულებები მოყვანილია დამტკიცების გარეშე (განყოფილება სანდოობის საზღვრებზე და სანდოობის ალბათობებზე; ა. ნ. კოლმოგოროვის თეორემა, რომელიც შეეხება თანხმობის კრიტერიუმს და სხვა); ზოგიერთი დებულება დამტკიცებულია არა სავსებით მკაცრად (განაწილების კანონების გამრავლების თეორემა; მათემატიკური ლოდინის და კორელაციური ფუნქციის გარდაქმნის წესები შემთხვევითი ფუნქციის ინტეგრირებისა და დიფერენცირებისას და სხვა).

გამოყენებული მათემატიკური აპარატი ძირითადად არ სცილდება უმაღლესი მათემატიკის ნორმალური კურსის ჩარჩოს, რომელიც გადმოიცემა უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში; იქ სადაც ავტორს საერთოდ ნაკლები ცნებებით მოუხდება სარგებლობა (მაგალითად წრფივი ოპერატორის ცნება, მატრიცა, კვადრატული ფორმა და ა. შ.) ისინი ახსნილი იქნება.

წიგნში მოყვანილია მაგალითების დიდი რაოდენობა, მთელ რიგ შემთხვევებში—გამოთვლითი ხასიათის მაგალითები, რომლებშიც ხდება გადმოცემული მეთოდების ილუსტრირება კონკრეტულ პრაქტიკულ მასალაზე და დაიყვანება რიცხვით შედეგამდე. საჭიროებისამებრ მაგალითების უმრავლესობა აღებულია საავიაციო ტექნიკიდან, საჰაერო სროლიდან, ყუმბარების ტყორცნისა და საბრძოლო მასალების თეორიიდან. მთელი რიგი მაგალითებისა მიეკუთვნება სროლის ზოგად თეორიას. ამ თვალსაზრისით წიგნი განსაკუთრებით სასარგებლო იქნება სახმელეთო, საზენიტო და საზღვაო არტილერიის დარგის სპეციალისტებისათვის. თუმცა მაგალითების რამდენადმე სპეციფიკური შერჩევისა და განლაგების მიუხედავად წიგნში მოყვანილი საილუსტრაციო მასალა სრულიად გასაგებია ტექნიკის სხვა დარგში მომუშავე ინჟინრებისთვისაც.

ავტორი დიდ მადლობას მოახსენებს პროფესორ ე. ბ. დინკინს და პროფესორ ვ. ს. პუგაჩოვს მთელი რიგი მნიშვნელოვანი მითითებებისათვის.

ე. ვენტცელი

I თავი

შესავალი

1.1. ალბათობათა თეორიის საგანი

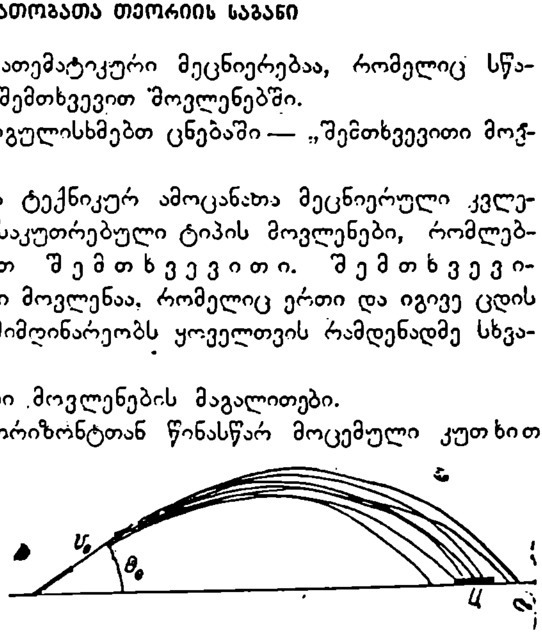
ალბათობათა თეორია მათემატიკური მეცნიერებაა, რომელიც სწავლობს კანონზომიერებებს შემთხვევით მოვლენებში.

შევთანხმდეთ თუ რას ვიგულისხმებთ ცნებაში — „შემთხვევითი მოვლენა".

სხვადასხვა ფიზიკურ და ტექნიკურ ამოცანათა მეცნიერული კვლევისას ხშირად გვხვდება განსაკუთრებული ტიპის მოვლენები, რომლებსაც მიღებულია დავარქვათ **შემთხვევითი**. **შემთხვევითი მოვლენა** ეს ისეთი მოვლენაა, რომელიც ერთი და იგივე ცდის რამდენჯერმე ჩატარებისას მიმდინარეობს ყოველთვის რამდენადმე სხვანაირად.

მოვიყვანოთ შემთხვევითი მოვლენების მაგალითები.

1. წარმოებს სროლა ჰორიზონტთან წინასწარ მოცემული კუთხით დადგმული ქვემეხიდან (ნახ. 1.1.1).



ნახ. 1.1.1

ვსარგებლობთ რა გარეგანი ბალისტიკის (მეცნიერება ჰაერში ჭურვის მოძრაობის შესახებ) მეთოდებით შესაძლოა მოინახოს ჭურვის თეორიული ტრაექტორია (მრუდი ნახ. 1.1.1). ეს ტრაექტორია სავსებით განისაზღვრება სროლის პირობებით: ჭურვის საწყისი v_0 სიჩქარით, გატყორცნის Θ_0 კუთხით და ჭურვის ბალისტიკური c კოეფიციენტით. ცალკეული ჭურვის ფაქტიური ტრაექტორია აუცილებლად რამდენადმე გადაიხრება თეორიულიდან მრავალი ფაქტორის ერთობლივი გავლენის გამო. ამ ფაქტორებს შორის შეიძლება დავასახელოთ მაგალითად: შეცდომები ჭურვის დამზადებისას, ჭურვის წონის ნომინალიდან გადახრა, ჭურვის სტრუქტურის არაერთგვაროვნება, შეცდომები ლულის მოცემულ მდებარეობაში დაყენებისას, მეტეოროლოგიური პირობები

და სხვა. თუ (v_0, Θ_0, c) უცვლელ პირობებში რამდენიმე გასროლას მოვახდენთ, მივიღებთ არა ერთ თეორიულ ტრაექტორიას, არამედ ტრაექტორიათა მთელ კონას ანუ „ძნას“, რომლებიც ქმნიან ე. წ. „ჭურვთა გაფანტვას“.

2. ერთი და იგივე სხეული რამდენიმეჯერ იწონება ანალიზურ სასწორზე; განმეორებითი აწონის შედეგები რამდენადმე განსხვავდებიან ერთიმეორისაგან. ეს განსხვავებანი განპირობებულია მეორე ხარისხოვანი ფაქტორების გავლენით, რომლებიც თან ახლავს აწონის ოპერაციას, როგორიცაა: სხეულის მდებარეობა სასწორის თეფშზე, აპარატურის შემთხვევითი ვიბრაციები, ხელსაწყოს ჩვენების ანათვლის შეცდომები და ა. შ.

3. თვითმფრინავი მიფრინავს მოცემულ სიმაღლეზე: თეორიულად იგი მიფრინავს ჰორიზონტალურად, თანაბრად და წრფივად. ფაქტიურად ფრენას თან ახლავს თეორიული ტრაექტორიიდან თვითმფრინავის მასის ცენტრის გადახრა და თვითმფრინავის რხევა მასის ცენტრის ახლოს. ეს გადახრები და რხევები შემთხვევითია და დაკავშირებულია ატმოსფეროს ტურბულენტობასთან: ჯერიდან-ჯერზე ისინი არ მეორდებიან.

4. წარმოებს მთელი რიგი აფეთქებები მსხვრევადი ჭურვით სამიზნის მიმართ განსაზღვრულ მდგომარეობაშია. ცალკეულ აფეთქებათა შედეგები რამდენადმე განსხვავდება ერთიმეორისაგან, იცვლება ნამსხვრევთა საერთო რიცხვი, მათი ტრაექტორიების ურთიერთგანლაგება, თვითეული ნამსხვრევის წონა, ფორმა და სიჩქარე. ეს ცვლილებანი შემთხვევითია და დაკავშირებულია ისეთი ფაქტორების გავლენასთან, როგორიცაა: ჭურვის კორპუსის ლითონისა და ფეთქებადი ნივთიერების არაერთგვარობა, დეტონაციის სიჩქარის არამუდმივობა და ა. შ. ამის გამო თითქოს ერთნაირ პირობებში განხორციელებულმა სხვადასხვა აფეთქებებმა შეიძლება მიგვიყვანოს სხვადასხვა შედეგამდე: ერთ შემთხვევაში სამიზნე იქნება დაზიანებული, მეორეში—არა.

ყველა ზემოთ მოყვანილი მაგალითები აქ განხილულია ერთი და იმავე თვალთახედვით; ხაზგასმულია შემთხვევითი ვარიაციები, იმ ცდების არაერთნაირი შედეგები, რომელთა ძირითადი პირობები უცვლელი რჩება. ეს ვარიაციები ყოველთვის დაკავშირებულია რომელიღაც მეორე ხარისხოვანი ფაქტორების არსებობასთან, რომლებიც გავლენას ახდენენ ცდის შედეგზე, მაგრამ არა იმათზე, რომლებიც მოცემულ ძირითად პირობებშია ჩამოთვლილი. ცდის ძირითადი პირობები რომლებიც საერთოდ უხეშად განსაზღვრავენ მის მიმდინარეობას, უცვლელი რჩება; მეორე ხარისხოვანნი ცდიდან ცდამდე იცვლებიან და მათ შედეგებში შეაქვთ შემთხვევითი განსხვავებანი.

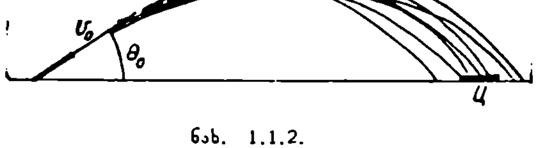
სავსებით ნათელია, რომ ბუნებაში არ არის არცერთი ფიზიკური მოვლენა, რომელსაც არ ახლდეს თან ამა თუ იმ ზომით შემთხვევითობის ელემენტები. როგორი სიზუსტითა და დაწვრილებითაც არ უნდა იყოს

ფიქსირებული ცდის პირობები, არ შეიძლება მიღწეული იქნას ცდის განმეორებისას შედეგების სრული და ზუსტი დამთხვევა.

შემთხვევითი გადახრანი თან ახლავს ნებისმიერ კანონზომიერ მოვლენას. მით უმეტეს, რომ მთელ რიგ პრაქტიკულ ამოცანებში შესაძლებელია თვით რეალური მოვლენის ნაცვლად განხილული იქნას მისი გამარტივებული სქემა — „მოდელი“ და მიჩნეულ იქნას, რომ ცდის მოცემულ პირობებში მოვლენა მიმდინარეობს სავსებით განსაზღვრული სახით. ამ დროს ფაქტორთა იმ უსასრულო სიმრავლიდან, რომლებიც გავლენას ახდენენ მოცემულ მოვლენაზე გამოიყოფა ყველაზე მთავარი, ძირითადი, გადამწყვეტი; სხვა მეორე ხარისხოვანი ფაქტორების გავლენას უგულებელყოფენ. მოვლენათა შესწავლის ასეთი სქემა სისტემატიურად გამოიყენება ფიზიკაში, მექანიკაში, ტექნიკაში. ამ სქემით სარგებლობისას ნებისმიერი ამოცანის გადაწყვეტის დროს უწინარეს ყოვლისა გამოიყოფა გასათვალისწინებელ პირობათა ძირითადი წრე და ირკვევა ამოცანის თუ რომელ პარამეტრზე ახდენენ ისინი გავლენას; შემდეგ გამოიყენება ესა თუ ის მათემატიკური აპარატი (ხდება შედგენა და ინტეგრირება იმ დიფერენციალურ განტოლებებისა, რომლებიც აღწერენ მოვლენას); ამდაგვარად ხდება გამოვლინება მოცემული მოვლენის დამახასიათებელ ძირითადი კანონზომიერებისა, რომელიც იძლევა საშუალებას ვიწინასწარმეტყველოთ ცდის შედეგი წინასწარ მოცემული პირობების გათვალისწინებით. მეცნიერების განვითარებასთან ერთად გათვალისწინებული ფაქტორების რიცხვი გაიზრდება; მოვლენა გამოკვლეული იქნება უფრო დაწვრილებით, მეცნიერული პროგნოზი გახდება უფრო ზუსტი.

მაგრამ მთელი რიგი საკითხების გადასაწყვეტად აღწერილი სქემა „ზუსტ მეცნიერებათა“ ე. წ. კლასიკური სქემა — როგორც ჩანს ცუდადაა მომარჯვებული. არსებობს ისეთი ამოცანები, სადაც ჩვენთვის საინტერესო ცდის შედეგი დამოკიდებულია ფაქტორთა ისეთ დიდ რიცხვზე, რომ პრაქტიკულად შეუძლებელია რეგისტრაცია მოვახდინოთ და გავითვალისწინოთ ყველა ეს ფაქტორები. ეს ის ამოცანებია, რომლებშიც მრავალრიცხოვანი მეორე ხარისხოვანი ერთი მეორეში მჭიდროდ გადახლართული შემთხვევითი ფაქტორები შესამჩნევია და ამასთან ერთად მათი რიცხვი ისე დიდია და გავლენა ისეთი რთულია, რომ კვლევის კლასიკური მეთოდების გამოყენება თავის თავს ვერ ამართლებს.

განვიხილოთ მაგალითი: ჰორიზონტთან θ_0 კუთხით დადგმულ ქვემეხიდან წარმოებს სროლა რომელიმე Ц სამიზნისაკენ (ნახ. 1.1.2).



ნახ. 1.1.2.

ჭურვების ტრაექტორიები, როგორც ზემოთ იყო მითითებული, არ ემთხვევიან ერთიმეორეს, შედეგად კი ჭურვების მიწაზე დაცემის წერტილები იფანტებიან. თუ კი სამიზნეს ზომები დიდია გაბნევის არესთან შედარებით, მაშინ ეს გაბნევა შესაძლებელია უგულებელვყოთ: ქვემეხის სწორად დაყენებისას ნებისმიერად გაშვებული ჭურვი ხვდება მიზანს. თუ კი ჭურვების გაფანტვის არე აღემატება სამიზნეს ზომებს (როგორც ეს ხდება ჩვეულებრივ პრაქტიკაში), მაშინ ზოგიერთი ჭურვი შემთხვევითი ფაქტორების გავლენით მიზანს არ მოხვდება. წამოიჭრება მთელი რიგი საკითხები, მაგალითად გასროლილი ჭურვების რა პროცენტი ხვდება საშუალოდ მიზანს, რამდენი ჭურვი უნდა დაიხარჯოს იმისათვის, რომ საკმაოდ დავაზიანოთ სამიზნე? რა ზომები უნდა იქნას მიღებული იმისათვის, რომ შემცირდეს ჭურვების ხარჯი?

რომ ვუპასუხოთ მსგავს კითხვებს, ზუსტ მეცნიერებათა ჩვეულებრივი სქემა არ არის საკმარისი. ეს საკითხები ორგანულადაა დაკავშირებული მოვლენის შემთხვევით ბუნებასთან. იმისათვის, რომ მათ ვუპასუხოთ ცხადია არ შეიძლება, რომ უბრალოდ უგულებელვყოთ შემთხვევითობა, შესწავლილი უნდა იქნას ჭურვის გაბნევის შემთხვევითი მოვლენა, რომელიც ახასიათებს მას, როგორც შემთხვევით მოვლენას. უნდა გამოვიკვლიოთ კანონი, რომლის მიხედვითაც ნაწილდებიან ჭურვთა დაცემის წერტილები, გამოკვლეულ უნდა იქნას ის შემთხვევითი სიდიდეები, რომელნიც იწვევენ გაბნევას, შედარებული იქნას ისინი ერთიმეორესთან მნიშვნელობის მიხედვით და ა. შ.

განვიხილოთ მეორე მაგალითი. რომელიმე ტექნიკური მოწყობილობა, მაგალითად ავტომატური მართვის სისტემა წყვეტს გარკვეულ ამოცანას ისეთ პირობებში, როცა სისტემაზე უწყვეტად მოქმედებს შემთხვევითი დაბრკოლებები. დაბრკოლებათა არსებობა იწვევს სისტემის მიერ ამოცანის რამდენადმე შეცდომით გადაწყვეტას, რომელიც მთელ რიგ შემთხვევებში დასაშვები საზღვრებიდან გამოდის.

ისმის კითხვები: რამდენად ხშირად გამოჩნდება ასეთი დაბრკოლებები? რა ზომები უნდა იქნას მიღებული იმისათვის, რომ პრაქტიკულად გამორიცხული იქნას მათი შესაძლებლობანი?

რომ ვუპასუხოთ ამ კითხვებზე, აუცილებელია გამოვიკვლიოთ სისტემაზე გავლენის მომხდენ შემთხვევით შეშფოთებათა ბუნება და სტრუქტურა, შესწავლილი იქნას სისტემის რეაქცია ასეთ შეშფოთებებზე, გაირკვეს სისტემის კონსტრუქციული პარამეტრების გავლენა რეაქციის ამ სახეობაზე.

ყველა მსგავსი ამოცანა, რომელთა რიცხვი ფიზიკაში და ტექნიკაში მეტისმეტად დიდია, საჭიროებს შესწავლას არამარტო ძირითადი, მთავარი კანონზომიერებებისას, რომლებიც განსაზღვრავს მოვლენის ზოგად ნიშნებს; არამედ ანალიზს შემთხვევით შეშფოთებებისა და

დამახინჯებებისას, რომლებიც დაკავშირებული არიან მეორე ხარისხოვან ფაქტორების არსებობასთან და ცდის შედეგს მოცემულ პირობებში განუზღვრელობის ელემენტს აძლევენ.

როგორი გზები და მეთოდები არსებობს შემთხვევით სიდიდეთა გამოსაკვლევად? წმინდა თეორიული თვალსაზრისით ის ფაქტები, რომლებსაც პირობითად „შემთხვევითი“ ვუწოდეთ, არაფრით არ განსხვავდება სხვებისაგან, რომლებიც გამოვყავით როგორც „ძირითადი“.

თეორიულად შესაძლოა თითოეული ამოცანის გადაწყვეტის სიზუსტე სულ ახალი და ახალი ჯგუფის ფაქტორების გათვალისწინებით ყველაზე არსებითიდან ყველაზე უმნიშვნელომდე. მაგრამ პრაქტიკულად ისეთი ცდა, რომ ერთნაირად, დაწვრილებით, გულმოდგინებით გავაანალიზოთ ყველა ფაქტორის გავლენა, რომლებზედაც დამოკიდებულია მოვლენა, მიგვიყვანდა იქამდე, რომ ამოცანის ამოხსნა მოცულობისა და სირთულის გამო, გახდებოდა პრაქტიკულად განუხორციელებელი და ამავე დროს არ ექნებოდა არავითარი შემეცნებითი ღირებულება.

მაგალითად, თეორიულად შესაძლო იქნებოდა დაგვესვა და ამოგვეხსნა ამოცანა მოცემული ჭურვის ტრაექტორიის განსაზღვრის შესახებ, მისი დამზადების ყველა კონკრეტული ცდომილების გათვალისწინებით, ზუსტი წონის და მოცემული, სრულიად განსაზღვრული დენთის მუხტის სავსებით კონკრეტული სტრუქტურის, ტრაექტორიის ყოველ წერტილში მეტეოროლოგიური პირობების (ტემპერატურა, წნევა, ტენიანობა, ქარი) ზუსტი მონაცემებისას. ასეთი ამოცანა არა მარტო წარმოუდგენლად რთული იქნებოდა, არამედ არ ექნებოდა არავითარი პრაქტიკული ღირებულება რადგან ის მოცემულ კონკრეტულ პირობებში, მოცემული კონკრეტული ჭურვის და მუხტის კუთვნილებაა, რომელიც პრაქტიკულად მეტჯერ არ განმეორდება.

ცხადია უნდა არსებობდეს პრინციპული განსხვავება მთავარ გადამწყვეტ ფაქტორთა გათვალისწინების მეთოდებში, რომლებიც მთავარ შტრიხებში ძირითადად განსაზღვრავს მოვლენის მიმდინარეობას და მეორად, მეორეხარისხოვან ფაქტორებში გათვალისწინების მეთოდებს შორის, რომლებიც გავლენას ახდენენ მოვლენათა მიმდინარეობაზე, როგორც „ცდომილებანი“ ანდა „შეშფოთებანი“. განუზღვრელობის სირთულის, მრავალმიზეზიანობის ელემენტი, რომელიც თან ახლავს შემთხვევით მოვლენებს, მოითხოვს სპეციალური მეთოდების შექმნას ამ მოვლენების შესასწავლად. სწორედ ასეთი მეთოდები მუშავდება ალბათობათა თეორიაში. მის საგანს წარმოადგენს სპეციფიკური კანონზომიერებანი, შენიშნულნი შემთხვევით მოვლენებში მათზე დაკვირვებების დროს.

პრაქტიკა გვიჩვენებს, რომ ვაკვირდებით რა ერთობლივად შემთხ-

ვევით მოვლენათა მასებს, ჩვეულებრივ მათში გამოავლენთ გარკვეულ კანონზომიერებებს, თავისებურ მდგრადობებს, დამახასიათებელს სწორედ მასიურ შემთხვევითი მოვლენებისათვის. მაგალითად, თუ კი მრავალჯერ ავისვრით მონეტას, ღერბის გამოჩენის სიხშირე (ღერბის გამოჩენის რიცხვის ფარდობა ასროლათა საერთო რიცხვთან) თანდათან სტაბილური გახდება, მიუახლოვდება სრულიად გარკვეულ რიცხვს — $\frac{1}{2}$-ს. „სიხშირის სიმყარის" ასეთივე თვისება მჟღავნდება ნებისმიერი სხვა ცდის მრავალგზისი განმეორებისას, რომლის შედეგი წარმოგვიდგება წინასწარ განუსაზღვრელად, შემთხვევითად. ასე, გასროლათა რიცხვის გადიდებისას მოხვედრათა სიხშირე, რომელიღაც სამიზნეზე სტაბილირდება, უახლოვდება, რომელიღაც მუდმივ რიცხვს. განვიხილოთ მეორე მაგალითი. ჭურჭელში მოთავსებულია გაზის რომელიღაც მოცულობა, რომელიც შედგება მოლეკულათა მეტად დიდი რიცხვისაგან. თითოეული მოლეკულა წამში განიცდის სხვა მოლეკულებთან მრავალ შეჯახებას, იცვლის სიჩქარეს და მოძრაობის მიმართულებას. თითოეული ცალკეული მოლეკულის ტრაექტორია შემთხვევითია. ცნობილია, რომ გაზის წნევა ჭურჭლის კედელზე განპირობებულია კედლებზე მოლეკულათა დარტყმების ერთობლიობით, თითქოს და თითოეული ცალკეული მოლეკულის ტრაექტორია შემთხვევითია, მაშინ წნევა ჭურჭლის კედელზე უნდა იცვლებოდეს შემთხვევითი და გაუკონტროლებელი სახით; მაგრამ ეს ასე არ არის. თუ კი მოლეკულათა რიცხვი საკმარისად დიდია მაშინ გაზის წნევა პრაქტიკულად არ არის დამოკიდებული ცალკეულ მოლეკულათა ტრაექტორიაზე. და ემორჩილება სრულიად განსაზღვრულ და მეტად მარტივ კანონზომიერებას. შემთხვევითი განსაკუთრებულობანი დამახასიათებელნი ცალკეული მოლეკულის მოძრაობისათვის მასაში ურთიერთ კომპენსაციას ახდენენ; მიუხედავად ცალკეული შემთხვევითი მოვლენის სირთულისა და დახლართულობისა, შედეგში ვღებულობთ მარტივ კანონზომიერებას, რომელიც სამართლიანია შემთხვევით მოვლენათა მასისათვის. აღვნიშნავთ, რომ შემთხვევით მოვლენათა სახელდობრ მასიურობა უზრუნველყოფს ამ კანონზომიერებათა შესრულებას; მოლეკულათა შეზღუდული რიცხვისას თავს იჩენს კანონზომიერებიდან შემთხვევითი გადახრები, ე. წ. ფლუქტუაციები.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი: რომელიღაც სამიზნეზე ერთიმეორის მიყოლებით წარმოებს სროლათა რიგი; წარმოებს სამიზნეზე მოხვედრის წერტილების განაწილებაზე დაკვირვებაც. გასროლათა შეზღუდული რიცხვისას მოხვედრა სამიზნეზე ნაწილდება სრულიად უწესრიგოდ, რომელიმე ხილული კანონზომიერების გარეშე. გასროლათა რიცხვის გადიდებასთან ერთად მოხვედრის წერტილებს შორის იქმნება რომელიღაც

კანონზომიერება; ეს კანონზომიერება მით უფრო მკაფიოდ გამომჟღავნდება, რაც მეტი გასროლათა რიცხვი იქნება წარმოებული. მოხვედრის წერტილების განლაგება აღმოჩნდება მიახლოებით სიმეტრიული რომელიღაც ცენტრალური წერტილის მიმართ: ნახვრეტთა ჯგუფის ცენტრალურ ნაწილში განლაგებულნი არიან მჭიდროდ, ვიდრე კიდურებზეა; ამ დროს ნახვრეტთა სიხშირე იკლებს სრულიად განსაზღვრული კანონით (ე. წ. „ნორმალური კანონი" ანდა „გაუსის კანონი", რომელსაც მოცემულ კურსში დიდი ყურადღება მიექცევა).

მსგავსი სპეციფიკური ე. წ. „სტატისტიკური" კანონზომიერებანი შეინიშნება ყოველთვის, როცა საქმე გვაქვს ერთგვაროვან შემთხვევით მოვლენათა სიმრავლესთან. კანონზომიერებანი, რომლებიც გამოვლინდებიან ამ მასაში აღმოჩნდებიან პრაქტიკულად დამოუკიდებელნი მასაში შემავალი ცალკეული შემთხვევითი მოვლენების ინდივიდუალური თავისებურებებისაგან. ეს ცალკეული თავისებურებანი მასაში თითქოს და ურთიერთქრებიან, ნიველირდებიან და შემთხვევით მოვლენათა მასის საშუალო შედეგი აღმოჩნდება პრაქტიკულად უკვე არა შემთხვევითი. სახელდობრ მასიურ შემთხვევით მოვლენათა ეს ცდით მრავალგზის დამოწმებული მდგრადობა გამოიყენება ალბათობრივ (სტატისტიკურ) მეთოდებით კვლევების ბაზად. ალბათობათა თეორიის მეთოდები თავისი ბუნებით მიმარჯვებულია მხოლოდ მასიურ შემთხვევით მოვლენათა კვლევისათვის: ისინი არ იძლევიან შესაძლებლობას ვიწინასწარმეტყველოთ ცალკეულ შემთხვევით მოვლენათა შედეგი, მაგრამ შესაძლებლობას იძლევიან ვიწინასწარმეტყველოთ საშუალო ჯამური შედეგი ერთგვაროვან შემთხვევით მოვლენათა მასისა, ვიწინასწარმეტყველოთ საშუალო შედეგი ანალოგიურ ცდათა მასისა, რომელთა ყოველი მათგანის კონკრეტული შედეგი რჩება განუსაზღვრელი, შემთხვევითი.

რამდენადაც ერთგვაროვანი შემთხვევითი მოვლენების მეტი რაოდენობა მონაწილეობს ამოცანაში, მით უფრო განსაზღვრულად და მკაფიოდ ვლინდება მათთვის დამახასიათებელი სპეციფიკური კანონები, მით უფრო დიდი დამაჯერებლობით და სიზუსტით შესაძლოა განვახორციელოთ მეცნიერული პროგნოზი.

ყველა შემთხვევაში, როცა გამოიყენება კვლევის ალბათობითი მეთოდები, მათი მიზანი არის ის, რომ გვერდი ავუაროთ ძლიერ რთულ (და ხშირად პრაქტიკულად შეუძლებელ) ცალკეულ მოვლენათა შესწავლას, რომლებიც განპირობებულია ფაქტორთა მეტად დიდი რიცხვით, მივმართოთ უშუალოდ კანონებს, რომლებიც მართავენ შემთხვევით მოვლენათა მასებს. ამ კანონების შესწავლა საშუალებას იძლევა განხორციელდეს არამარტო მეცნიერული პროგნოზი შემთხვევით მოვლენათა თავისებურ დარგში, არამედ გავაკონტროლოთ ისინი, შევზღუდოთ შემთხვევითობის მოქმედების სფერო, მათი გავლენა პრაქტიკაზე.

ალბათობითი ანდა სტატისტიკური მეთოდი მეცნიერებაში არ უპირისპირდება კლასიკურ, ჩვეულებრივ ზუსტ მეცნიერებათა მეთოდს, არამედ მისი დამატებაა, რომელიც საშუალებას იძლევა ღრმად გაანალიზებულ იქნას მოვლენა, მისთვის დამახასიათებელი შემთხვევითობის ელემენტების გათვალისწინებით.

საბუნებისმეტყველო და ტექნიკურ მეცნიერებათა განვითარების თანამედროვე ეტაპისათვის დამახასიათებელია მეტად ფართო და ნაყოფიერი გამოყენება სტატისტიკური მეთოდებისა ცოდნის ყველა დარგში. ეს სრულიად ბუნებრივია, ვინაიდან მოვლენათა ნებისმიერი წრის ღრმად შესწავლისას გარდუვალად დგება ეტაპი, როცა საჭირო ხდება არამარტო ძირითად კანონზომიერებათა გამოვლენა, არამედ მათგან შესაძლო გადახრათა ანალიზიც. ზოგიერთ მეცნიერებაში საგნის სპეციფიკისა და ისტორიულ პირობათა მიხედვით სტატისტიკურ მეთოდთა დანერგვა შეინიშნება ადრე, სხვებში — მოგვიანებით. ამჟამად არ არის თითქმის არცერთი საბუნებისმეტყველო მეცნიერება, რომელშიდაც ასე თუ ისე არ გამოიყენებოდეს ალბათობითი მეთოდები. თანამედროვე ფიზიკის მთელი განყოფილებები (კერძოდ ბირთვული ფიზიკა) ემყარება ალბათობათა თეორიის მეთოდებს, სულ უფრო ფართოდ და ფართოდ გამოიყენება ალბათობითი მეთოდები თანამედროვე ელექტროტექნიკაში და რადიოტექნიკაში, მეტეოროლოგიაში და ასტრონომიაში, ავტომატური რეგულირების თეორიაში და მანქანურ მათემატიკაში.

ფართოდ გამოიყენება ალბათობათა თეორია სამხედრო ტექნიკის სხვადასხვა დარგში: სროლისა და ყუმბარების ტყორცნის თეორიასა, საბრძოლო მასალების მარაგის თეორიასა, დამიზნებისა და ცეცხლის სამართავ ხელსაწყოთა თეორიასა, აერონავიგაციასა, ტაქტიკასა და სამხედრო მეცნიერების მრავალ დარგში, რომლებიც ფართოდ სარგებლობენ ალბათობათა თეორიის მეთოდებით და მისი მათემატიკური აპარატით.

ალბათობათა თეორიის მათემატიკური კანონები რეალური სტატისტიკური კანონების ანარეკლია, რომლებიც ობიექტურად არსებობენ ბუნების მასიურ შემთხვევით მოვლენებში. ამ მოვლენათა შესასწავლად ალბათობათა თეორია იყენებს მათემატიკურ მეთოდს და თავისი მეთოდით წარმოადგენს მათემატიკის ერთ-ერთ დარგს, ლოგიკურად ისევე ზუსტი და მკაცრია, როგორც სხვა მათემატიკური მეცნიერებანი.

1.2. მოკლე ისტორიული ცნობები

ალბათობათა თეორია სხვა მათემატიკურ მეცნიერებათა მსგავსად პრაქტიკის მოთხოვნილებებით წარმოიშვა.

ამოცანათა სისტემატური კვლევის დასაწყისი, რომლებიც მიეკუთვნება მასიურ შემთხვევით მოვლენებს, და წარმოშობა შესაბამისი მათე-

მატიკური აპარატისა მიეკუთვნება მე-17 საუკუნეს. მე-17 საუკუნის დასაწყისში სახელგანთქმული ფიზიკოსი გალილეი უკვე შეეცადა მეცნიერული კვლევებისათვის დაექვემდებარებინა. ფიზიკურ გაზომვათა შეცდომები; განიხილავდა რა მათ, როგორც შემთხვევითს და აფასებდა რა მათ ალბათობებს. ამავე დროს მიეკუთვნება დაზღვევის ზოგადი თეორიის შექმნის პირველი ცდა, რომელიც დაფუძნებული იყო ისეთ მასიურ შემთხვევით კანონზომიერებაზე, როგორიცაა დაავადებულობა, სიკვდილიანობა, უბედურ შემთხვევათა სტატისტიკა და ა. შ. შემთხვევით მოვლენათა ანალიზისათვის სპეციალურად მომარჯვებული მათემატიკური აპარატის შექმნის აუცილებლობა გამომდინარეობდა აგრეთვე მეცნიერებათა ყველა დარგში მასალათა გადამუშავების აუცილებლობიდან, მაგრამ ალბათობათა თეორია, როგორც მათემატიკური მეცნიერება ჩამოყალიბდა ძირითადად არა ზემოთ აღნიშნულ პრაქტიკული ამოცანების მასალებზე: ეს ამოცანები მეტად რთულია; მათში კანონები, რომლებიც მართავენ შემთხვევით მოვლენებს, არა საკმაოდ ნათელია და დაჩრდილულია მრავალი გამართულებელი ფაქტორებით. აუცილებელი იყო თავიდან შემთხვევით მოვლენათა კანონზომიერებათა შესწავლა უფრო მარტივი მასალის საშუალებით. ასეთ მასალად ისტორიულად აღმოჩნდა ე. წ. „აზარტული თამაშები". ეს თამაშები უხსოვარ დროიდან იქმნებოდა თაობათა მთელ რიგში, სახელდობრ ისე, რომ მათში ცდის შედეგი დამოუკიდებელი იყო ცდის პირობებისაგან და წინდად შემთხვევითი იყო. თვით სიტყვა „აზარტ" (ფრანგული „Le hasard") აღნიშნავს „შემთხვევას". აზარტულ თამაშთა სქემები შემთხვევით მოვლენათა განსაკუთრებული სიმარტივისა და სიცხადის მოდელებია, რომლებიც საშუალებას იძლევა ყველაზე მკაფიო ფორმით დავაკვირდეთ ამ მოვლენებს და შევისწავლოთ მათი მმართველი სპეციფიკური კანონები, ხოლო შესაძლებლობა იმისა, რომ ერთი და იგივე ცდა განმეორებული იქნას რაგინდ მრავალჯერ — უზრუნველყოფს ამ კანონების ექსპერიმენტულ შემოწმებას, ნამდვილ მასიურობის პირობებში. დღემდე მაგალითები აზარტული თამაშებიდან და მათი ანალოგიური ამოცანები „ურნების სქემით" ფართოდ გამოიყენება ალბათობათა თეორიის შესასწავლად, როგორც შემთხვევით მოვლენათა გამარტივებული მოდელები, რომლებიც ყველაზე მარტივი და თვალსაჩინო სახით იძლევიან ალბათობათა თეორიის კანონებისა და წესების ილუსტრაციას.

თანამედროვე აზრით ალბათობათა თეორიის წარმოშობა მე-17 საუკუნის მეორე ნახევარს მიეკუთვნება და დაკავშირებულია პასკალის (1623 — 1662) და ჰიუგენსის (1629 — 1695) გამოკვლევებთან აზარტულ თამაშთა თეორიაში. ამ ნამუშევრებში თანდათან ყალიბდებოდა ისეთი მნიშვნელოვანი ცნებები, როგორიცაა ალბათობა და მა-

თემატიკური ლოდინი; დადგენილი იქნა მათი ძირითადი თვისებები და გამოთვლის ხერხები. ალბათობრივმა მეთოდებმა უშუალო პრაქტიკული გამოყენება ჰპოვეს უწინარეს ყოვლისა დაზღვევის ამოცანებში. უკვე მე-17 საუკუნის ბოლოდან დაზღვევათა წარმოება დაიწყო მეცნიერულ მათემატიკურ საფუძვლებზე. ამის შემდეგ ალბათობათა თეორია სულ უფრო და უფრო მეტად გამოიყენება სხვადასხვა დარგში.

დიდი ნაბიჯი ალბათობათა თეორიის განვითარებში დაკავშირებულია იაკობ ბერნულის (1654—1705) შრომებთან. მას ეკუთვნის პირველი დამტკიცება ალბათობათა თეორიის ერთ-ერთი ისეთი უმნიშვნელოვანესი დებულებისა, როგორიცაა დიდ რიცხვთა კანონი.

ჯერ კიდევ იაკობ ბერნულიმდე ბევრნი აღნიშნავდნენ, როგორც ემპირიულ ფაქტს, რომელსაც შეიძლება „ცდათა დიდი რიცხვისას სიხშირეთა მდგრადობის თვისება“ ვუწოდოთ. არაერთხელ იყო აღნიშნული რომ ცდათა დიდი რიცხვისას, რომელთაგან თითოეულის შედეგი წარმოადგენს შემთხვევითს, თითოეული მოცემული შედეგის გამოჩენის ფარდობით სიხშირეს აქვს ტენდენცია სტაბილობისაკენ, უახლოვდება რა რომელიღაც განსაზღვრულ რიცხვს — ამ შედეგის ალბათობას. მაგალითად თუ მრავალჯერ ავისვრით მონეტას, ღერბების გამოჩენის ფარდობითი სიხშირე მიუახლოვდება $\frac{1}{2}$-ს, კამათლის მრავალჯერ გაგორებისას ხუთ ქულიანი წახნაგის გამოჩენის სიხშირე უახლოვდება $\frac{1}{6}$-ს და ა. შ. იაკობ ბერნულის თეორემა—დიდ რიცხვთა კანონის უმარტივესი ფორმა — ამყარებს კავშირს ხდომილობის ალბათობასა და მისი გამოჩენის სიხშირეს შორის. ცდათა საკმაოდ დიდი რიცხვისას შესაძლებელია პრაქტიკული უტყუარობით მოველოდოთ ალბათობასთან სიხშირის ახლო დამთხვევას.

მეორე მნიშვნელოვანი ეტაპი ალბათობათა თეორიის განვითარებისა დაკავშირებულია მოავრის (1667—1754) სახელთან. ამ მეცნიერმა განსახილველად პირველად შემოიტანა და უმარტივეს შემთხვევისათვის დაასაბუთა თავისებური კანონი. ე. წ. ნორმალური კანონი (სხვაგვარად გაუსის კანონი). ნორმალური კანონი, როგორც ამას ქვემოთ დავინახავთ, მნიშვნელოვანია შემთხვევით მოვლენებში. თეორემები, რომლებიც ამ კანონს დააფუძნებენ ამა თუ იმ პირობებისათვის, ალბათობათა თეორიაში ატარებენ საერთო სახელწოდებას — „ცენტრალური ზღვრული თეორემა“.

ალბათობათა თეორიის განვითარებაში თვალსაჩინო როლი მიეკუთვნება ცნობილ მათემატიკოსს ლაპლასს (1749—1827), მან პირველმა ჩამოაყალიბა მწყობრად და სისტემატიკურად ალბათობათა თეორიის

საფუძვლები. დაამტკიცა ცენტრალური ზღვრული თეორემის (მოავრ-ლაპლასის თეორემა) ერთ-ერთი ფორმა და განავითარა ალბათობათა თეორიის გამოყენება პრაქტიკის საკითხებში, როგორიცაა დაკვირვებათა და განაზომთა შეცდომების ანალიზი. მნიშვნელოვანი ნაბიჯი ალბათობათა თეორიის განვითარებაში დაკავშირებულია გაუსის (1777—1855) სახელთან, რომელმაც კიდევ უფრო ზოგადად დაასაბუთა ნორმალური კანონი და დაამუშავა ექსპერიმენტულ მონაცემთა დამუშავების მეთოდი, რომელიც ცნობილია „უმცირეს კვადრატთა მეთოდი"-ს სახელით.

ასევე უნდა აღინიშნოს პუასონის (1781—1840) ნაშრომები, რომელმაც დაამტკიცა დიდ რიცხვთა კანონის უფრო ზოგადი ფორმა ვიდრე იაკობ ბერნულიმ და პირველმა გამოიყენა ალბათობათა თეორია სროლის ამოცანებში.

პუასონის სახელთან დაკავშირებულია განაწილების ერთ-ერთი კანონთაგანი, რომელიც მნიშვნელოვანია ალბათობათა თეორიის გამოყენებისას.

მე-18 და მე-19 საუკუნის დასაწყისისათვის დამახასიათებელია ალბათობათა თეორიის მძაფრი განვითარება და საყოველთაო გატაცება. ალბათობათა თეორია „მოდური" მეცნიერება გახდა, მის გამოყენებას იწყებენ არა მარტო იქ სადაც ეს კანონზომიერია, არამედ იქ, სადაც იგი არაფრით არ არის გამართლებული. ამ პერიოდისათვის დამახასიათებელია მრავალრიცხოვანი ცდები ალბათობათა თეორიის გამოყენებისა საზოგადოებრივი მოვლენების შესასწავლად ე. წ. „მორალურ" ანდა „ზნეობით" მეცნიერებებში. მრავალი შრომა შეიქმნა რომლებიც მიძღვნილი იყო სასამართლო წარმოების, ისტორიის, პოლიტიკის, ღვთის მეტყველებისადმისაც კი, რომლებშიც ალბათობათა თეორიის აპარატი იყო გამოყენებული. ყველა ამ ფსევდომეცნიერულ გამოკვლევებისათვის მათში განსახილავ საზოგადოებრივი მოვლენებისადმი მეტად გამარტივებული მექანიკური მიდგომაა დამახასიათებელი; მსჯელობის საფუძვლად დაიშვება რომელიმე ნებისმიერი მოცემული ალბათობებიდან (მაგალითად სასამართლო წარმოების საკითხების განხილვის დროს მიდრეკილება ყველა ადამიანისა სიმართლისაკენ ან სიცრუისაკენ ფასდება, რომელიმე მუდმივი, ყველა ადამიანისათვის ერთგვარი ალბათობით) და შემდეგ საზოგადოებრივი პრობლემა წყდება როგორც მარტივი არითმეტიკული ამოცანა. ბუნებრივია, რომ ყველა მსგავსი ცდა განწირული იყო წარუმატებლობისათვის და არ შეეძლოთ ეთამაშნათ დადებითი როლი მეცნიერების განვითარებაში. პირიქით, მის არაპირდაპირ შედეგად აღმოჩნდა, ის რომ მაგალითად მე-19 საუკუნის 20-ან—30-ან წლებში დასავლეთ ევროპაში ალბათობათა თეორიით საყოველთაო გატაცება შეიცვალა იმედგაცრუებით და სკეპტიციზმით. ალბათობათა

თეორიას უყურებდნენ, როგორც მეორე ხარისხოვან საეჭვო მეცნიერებას, თავისებურ მათემატიკურ გატაცებას, რომელიც ღირსი არ არის სერიოზული შესწავლისა. აღსანიშნავია, რომ სწორედ ამ დროს რუსეთში იქმნება პეტერბურგის ის ცნობილი მათემატიკური სკოლა, რომლის შრომების მეშვეობით ალბათობათა თეორია დაყენებული იქნა მტკიცე ლოგიკურ და მათემატიკურ საფუძველზე და იგი შემეცნების საიმედო, ზუსტ და ეფექტურ მეთოდად იქნა გადაქცეული. ამ სკოლის წარმოშობის დროიდან ალბათობათა თეორიის განვითარება უკვე რუს და შემდგომ საბჭოთა მეცნიერების შრომებთან მჭიდროდაა დაკავშირებული.

პეტერბურგის მათემატიკური სკოლის მეცნიერებს შორის დასახელებული უნდა იქნას ვ. ი. ბუნიაკოვსკი (1804—1889), — რუსულ ენაზე ალბათობათა თეორიის პირველი სახელმძღვანელოს ავტორი, ალბათობათა თეორიაში თანამედროვე რუსული ტერმინოლოგიის შემქმნელი, სტატისტიკისა და დემოგრაფიის დარგში ორიგინალური კვლევების ავტორი.

ვ. ი. ბუნიაკოვსკის მოწაფე იყო დიდი რუსი მათემატიკოსი პ. ლ. ჩებიშევი (1821 — 1894). პ. ლ. ჩებიშევის ვრცელ და მრავალნაირ მათემატიკურ შრომებს შორის თვალსაჩინო ადგილი უჭირავს მის ნაშრომებს ალბათობათა თეორიაში. პ. ლ. ჩებიშევს მიეკუთვნება დიდ რიცხვთა კანონის შემდგომი გაფართოება და განზოგადოება. გარდა ამისა პ. ლ. ჩებიშევმა ალბათობათა თეორიაში ფრიად მძლავრი და ნაყოფიერი მომენტთა მეთოდი შემოიტანა.

პ. ლ. ჩებიშევის მოწაფე იყო ა. ა. მარკოვი (1856—1922), რომელმაც დიდი აღმოჩენებით და თეორემებით გაამდიდრა ალბათობათა თეორია. ა. ა. მარკოვმა არსებითად გააფართოვა დიდ რიცხვთა კანონის და ცენტრალური ზღვრული თეორემების გამოყენების არე, გაავრცელა ისინი არა მარტო დამოუკიდებელ, არამედ დამოკიდებულ ცდებზე. ა. ა. მარკოვის უმნიშვნელოვანესი დამსახურებაა, ის რომ მან საფუძველი ჩაუყარა ალბათობათა თეორიის სრულიად ახალ მიმართულებას — შემთხვევითი ანუ „სტოქასტიკურ" პროცესების თეორიას. ამ თეორიის განვითარება უახლესი თანამედროვე ალბათობათა თეორიის ძირითად შინაარსს შეადგენს.

პ. ლ. ჩებიშევის მოწაფე იყო აგრეთვე ა. მ. ლიაპუნოვი (1857—1918), რომლის სახელთან დაკავშირებულია ცენტრალური ზღვრული თეორემის პირველი დამტკიცება ზოგად პირობებში. თავისი თეორემის დასამტკიცებლად ა. მ. ლიაპუნოვმა დაამუშავა მახასიათებელ ფუნქციათა სპეციალური მეთოდი, რომელიც ფართოდ გამოიყენება თანამედროვე ალბათობათა თეორიაში.

პეტერბურგის მათემატიკური სკოლის შრომებით ალბათობათა თეორია წამოწეულ იქნა წინა პლანზე და დაყენებულ იქნა ზუსტ მათემატიკურ მეცნიერებათა რიგებში. მისი გამოყენების პირობები მკაცრად იყო განსაზღვრული, ხოლო თვით მეთოდები სრულყოფის მაღალ საფეხურზე იქნა აყვანილი. პეტერბურგის მათემატიკური სკოლის დამახასიათებელი თვისება იყო ამოცანათა მკაფიოდ დაყენება, გამოყენებული მეთოდების სრული მათემატიკური სიმკაცრე და მასთან ერთად თეორიის მჭიდრო კავშირი პრაქტიკის უშუალო მოთხოვნებთან.

ალბათობათა თეორიის თანამედროვე განვითარება ხასიათდება მისი საყოველთაო ინტერესის აღმავლობით და პრაქტიკული გამოყენების არის მკვეთრად გაფართოებით. უკანასკნელ ათწლეულში ალბათობათა თეორია გადაიქცა ერთ-ერთ ძალზე სწრაფად განვითარებად მეცნიერებად, რომელიც მჭიდროდაა დაკავშირებული პრაქტიკისა და ტექნიკის მოთხოვნილებებთან. ალბათობათა თეორიის საბჭოთა სკოლას, მიიღო რა მემკვიდრეობად პეტერბურგის მათემატიკური სკოლის ტრადიციები, მსოფლიო მეცნიერებაში წამყვანი ადგილი უკავია. აქ დავასახელებთ მხოლოდ ზოგიერთ უდიდეს საბჭოთა მეცნიერს, რომელთა შრომები თანამედროვე ალბათობათა თეორიის პრაქტიკულ გამოყენებათა განვითარებაში მნიშვნელოვანია.

ს. ნ. ბერნშტეინმა დაამუშავა ალბათობათა თეორიის პირველი დასრულებული აქსიომატიკა და აგრეთვე არსებითად გააფართოვა ზღვრული თეორემათა გამოყენების არე.

ა. ი. ხინჩინი (1894—1959) ცნობილია თავისი გამოკვლევებით დიდ რიცხვთა კანონის შემდგომი განზოგადებისა და გაძლიერების სფეროში, მაგრამ უმთავრესად კი თავისი გამოკვლევებით ე. წ. სტაციონარულ შემთხვევითი პროცესების დარგში.

ალბათობათა თეორიის და მათემატიკური სტატისტიკის სხვადასხვა დარგში მთელი რიგი უმნიშვნელოვანესი ფუძემდებლური შრომები ეკუთვნის ა. ნ. კოლმოგოროვს. მან მოგვცა ალბათობათა თეორიის ყველაზე სრულყოფილი აქსიომატიკური აგება, დაუკავშირა რა იგი თანამედროვე მათემატიკის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს განყოფილებას — ფუნქციათა მეტრიკულ თეორიას. განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვთ ა. ნ. კოლმოგოროვის შრომებს შემთხვევით ფუნქციათა თეორიის (სტოქასტიკური პროცესები) დარგში, რომლებიც ამჟამად მოცემულ დარგში ყველა გამოკვლევების საფუძველია. ა. ნ. კოლმოგოროვის შრომები, ეფექტურობის შეფასების შესახებ, საფუძვლად დაედო მთელ ახალ მეცნიერულ მიმართულებას სროლის თეორიაში, რომელიც შემდგომ გადაიზარდა უფრო ფართო მეცნიერებაში საბრძოლო მოქმედებათა ეფექტურობის შესახებ.

ვ. ი. რომანოვსკი (1879—1954) და ნ. ვ. სმირნოვი ცნობილნი არიან თავიანთი შრომებით მათემატიკური სტატისტიკის დარგში, ე. ე. სლუც-

კი (1880—1948) შემთხვევით პროცესების თეორიაში, ბ. ვ. გნედენკო-მასიური მომსახურეობის თეორიის დარგში, ე. ბ. დინკინი-მარკოვის შემთხვევით პროცესების დარგში, ვ. ს. პუგაჩოვი-შემთხვევითი პროცესების ავტომატური მართვის ამოცანების გამოყენების დარგში.

საზღვარგარეთ ალბათობათა თეორიის განვითარება ამჟამად აგრეთვე გაძლიერებული ტემპებით არის პრაქტიკასთან დაკავშირებული. მეტად საყურადღებოა საკითხები, რომლებიც მიეკუთვნება შემთხვევით პროცესებს. მნიშვნელოვანი შრომები ამ სფეროში მიეკუთვნებიან ნ. ვინერს, ვ. ფელერს, დ. დუბს, ხოლო ალბათობათა თეორიაში და მათემატიკურ სტატისტიკაში მიეკუთვნება რ. ფიშერს, დ. ნეიმანს და გ. კრამერს.

უკანასკნელი წლების განმავლობაში ჩვენ მოწმენი ვართ გამოყენებითი ალბათობათა თეორიის ახალი და თავისებური მეთოდების ჩასახვისა, რომელთა წარმოქმნა საკვლევი ტექნიკური პრობლემების სპეციფიკასთანაა დაკავშირებული.

კერძოდ, საუბარია ისეთ ახალ დისციპლინებზე, როგორიცაა „ინფორმაციის თეორია" და „მასიურ მომსახურების თეორია". უშუალო პრაქტიკული მოთხოვნილებების საფუძველზე წარმოშობილი ალბათობათა თეორიის ეს განყოფილებები ზოგადი თეორიული მნიშვნელობისაა, ხოლო მათი გამოყენების არე სწრაფად იზრდება.

II თავი

ალბათობათა თეორიის ძირითადი ცნებები

2.1. ხდომილობა. ხდომილობათა ალბათობა

ყოველი მეცნიერება, რომელიც ავითარებს მოვლენათა რომელიმე წრის ზოგად თეორიას, შეიცავს მთელ რიგ ძირითად ცნებებს, რომელსაც იგი ემყარება. ასეთებია მაგალითად, გეომეტრიაში წერტილის, წრფის წრის ცნებები; მექანიკაში—ძალის, სიჩქარის, აჩქარების და სხვა ცნებები. ბუნებრივია, რომ ყველა ცნების განსაზღვრა არ შეიძლება ზუსტად, რადგან განვსაზღვროთ ცნება — ეს ნიშნავს შევცვალოთ იგი მეორით, უფრო ცნობილით. ცხადია, ცნებათა სხვა ცნებით განსაზღვრის პროცესი სადღაც უნდა დამთავრდეს პირველად ცნებამდე დასვლით, რომელზედაც დაიყვანება დანარჩენები და რომლებიც მკაცრად არ განისაზღვრებიან, არამედ განიმარტებიან. ასეთი ძირითადი ცნებები ალბა-

თობათა თეორიაშიც არსებობენ. შემოვიტანოთ ერთ-ერთი პირველთაგანი ხდომილობის ცნება.

„ხდომილობის“ ქვეშ ალბათობათა თეორიაში იგულისხმება ყოველი ფაქტი, რომელიც ცდის შედეგად შეიძლება მოხდეს ან არ მოხდეს.

მოვიყვანოთ ხდომილობათა რამდენიმე მაგალითი:

A — მონეტის ასროლისას ღერბის გამოჩენა;

B — მონეტის სამჯერ ასროლისას სამჯერ ღერბის გამოჩენა; *C* — გასროლისას მიზანში მოხვედრება;

D — ტუზის გამოჩენა დასტიდან ქაღალდის ამოღებისას;

E — ობიექტის გამოვლინება რადიოლოკაციური სადგურით მიმოხილვის ერთ-ერთი ციკლისას;

F — საქსოვი დაზგის მუშაობისას ძაფის გაწყვეტათა რიცხვი ერთ საათში.

განვიხილავთ რა ზემოთ ჩამოთვლილ ხდომილობებს, ჩვენ ვხედავთ, რომ თითოეულ მათგანს გააჩნია შესაძლებლობის რაღაც ხარისხი: ერთს — მეტი სხვებს — ნაკლები, თანაც ზოგიერთი ამ ხდომილობათაგან მაშინვე შეგვიძლია გადავწყვიტოთ, რომელი მეტად, ხოლო რომელი ნაკლებადაა შესაძლებელი. მაგალითად, მაშინვე ჩანს, რომ *A* ხდომილობა უფრო შესაძლებელია ვიდრე *B* და *D*. *C*, *E* და *F* ხდომილობის მიმართ ანალოგიური დასკვნები არ შეიძლება სწრაფად გავაკეთოთ. ამისათვის საჭირო იქნებოდა ცდის პირობების რამდენადმე დაზუსტება. ასე თუ ისე ცხადია, რომ თითოეულ ასეთ ხდომილობათაგანს გააჩნია ამა თუ იმ ხარისხის შესაძლებლობანი. რაოდენობრივად რომ შევადაროთ ისინი ერთიმეორეს მათი შესაძლებლობის ხარისხის მიხედვით, ცხადია საჭიროა თითოეულ ხდომილობას დავუკავშიროთ გარკვეული **რიცხვი**, რომელიც მით მეტია, რაც მეტია ხდომილობის შესაძლებლობა. ასეთ რიცხვს დავარქმევთ **ხდომილობის ალბათობას**.

ამგვარად, განსახილველად შემოვიტანეთ ალბათობათა თეორიის მეორე ძირითადი ცნება — ხდომილობის ალბათობის ცნება. ხდომილობის ალბათობა არის რიცხვითი ზომა ამ ხდომილობის ობიექტური შესაძლებლობის ხარისხისა.

შევნიშნოთ, რომ უკვე თვით ხდომილობის ალბათობის ცნება შემოგვაქვს გარკვეული პრაქტიკული თვალსაზრისით.

ცდის საფუძველზე უფრო მეტი ალბათობის მქონედ ჩავთვლით სახელდობრ, იმ ხდომილობებს, რომლებიც ხდება უფრო ხშირად; ნაკლები ალბათობის მქონედ — იმ ხდომილობებს, რომლებიც ხდება უფრო იშვიათად: ამდაგვარად ხდომილობის ალბათობის ცნება თავის საფუძველშივე დაკავშირებულია ცდისეულ ხდომილობის სიხშირის პრაქტიკულ ცნებასთან. ვადარებთ რა ერთიმეორეს, სხვადასხვა ხდომილობებს, მათი შესაძლებლობის ხარისხის მიხედვით, უნდა დავადგინოთ გაზომვის

რომელიღაც ერთეული. ასეთ ერთეულად ბუნებრივია მიღებული უნდა იქნას აუცილებელი ხდომილობის ალბათობა, ე. ი. ისეთი ხდომილობისა, რომელიც ცდის შედეგად უთუოდ უნდა მოხდეს. აუცილებელი ხდომილობის მაგალითი — გამოჩენა არა უმეტეს 6 ქულისა ერთი კამათლის გაგორებისას.

თუკი მივაწერთ აუცილებელ ხდომილობას ალბათობას, რომელიც ტოლია ერთის, მაშინ ყველა ხდომილობანი—შესაძლებელნი, მაგრამ არა აუცილებელნი—დახასიათებული იქნება ალბათობებით, რომლებიც ერთზე ნაკლებია და შეადგენენ ერთის რაღაც ნაწილს.

აუცილებელი ხდომილობის საპირისპიროა შეუძლებელი ხდომილობა ე. ი. ისეთი ხდომილობა, რომელიც მოცემული ცდისას არ შეიძლება მოხდეს. შეუძლებელი ხდომილობის მაგალითია ერთი კამათლის გაგორებისას 12 ქულის გამოჩენა. ბუნებრივია შეუძლებელი ხდომილობის ალბათობა ნულის ტოლი იქნება.

ამგვარად, დადგენილია ალბათობათა საზომი ერთეული—აუცილებელი ხდომილობის ალბათობა და ნებისმიერი ხდომილობების ალბათობათა ცვალებადობის დიაპაზონი 0-დან 1-დე რიცხვები.

2.2. ალბათობათა უშუალო გამოთვლა

არსებობს ცდების მთელი კლასი, რომელთა შესაძლო შედეგების ალბათობა ადვილად შეფასდება თვით ცდების პირობებიდან. ამისათვის ცდის სხვადასხვა შედეგს უნდა გააჩნდეს სიმეტრია და ამიტომ ისინი ობიექტურად ერთნაირად შესაძლებელი უნდა იყოს.

განვიხილოთ მაგალითად, კამათლის გაგორების ცდა ე. ი. სიმეტრიული კუბისა, რომლის წახნაგებზე აღნიშნულია ქულათა სხვადასხვა რაოდენობა: 1-დან 6-დე.

კუბის სიმეტრიის გამო გვაქვს საფუძველი ჩავთვალოთ, რომ ცდის ყველა ექვსივე შესაძლო შედეგი ერთნაირადაა მოსალოდნელი. სწორედ ეს გვაძლევს უფლებას ვივარაუდოთ რომ კამათლის მრავალჯერ გაგორებისას ყველა ექვსივე წახნაგით დავარდნა ერთნაირი სიხშირით მოხდება. ეს დაშვება სწორად დამზადებული კამათლისათვის მართლაც მართლდება ცდის დროს; კამათლის მრავალჯერ გაგორებისას მისი ყოველი წახნაგი გამოჩნდება (დავარდება) ყველა გაგორებათა რიცხვის დაახლოებით ერთ მეექვსედჯერ, თანაც ერთი მეექვსედიდან გადახრა მით ნაკლები იქნება, რამდენადაც მეტი ცდა იქნება ჩატარებული. მხედველობაში გვაქვს რა, რომ აუცილებელი ხდომილობის ალბათობა მიღებულია ერთის ტოლად, ბუნებრივია თითოეული ცალკე წახნაგის გამოჩენის ალბათობა $\frac{1}{6}$-ის ტოლი იქნება. ეს რიცხვი ახასიათებს მოცე-

მული შემთხვევითი მოვლენის ობიექტურ თვისებებს — სახელდობრ ცდის ექვსი შესაძლო შედეგის სიმეტრიის თვისებას.

ყოველგვარი ცდისათვის, რომელშიც შესაძლო შედეგები სიმეტრიულია და თანაბრად შესაძლებელი, შეიძლება გამოვიყენოთ ანალოგიური ხერხი, რომელსაც *ალბათობათა უშუალო გამოთვლა* ეწოდება.

ცდის შესაძლო შედეგთა სიმეტრიულობა ჩვეულებრივ შეინიშნება აზარტული თამაშების ტიპის ხელოვნურად ორგანიზებული ცდებისას. ვინაიდან ალბათობათა თეორიამ თავდაპირველი განვითარება მიიღო, სახელდობრ, აზარტულ თამაშთა სქემებზე, ამიტომ ალბათობათა უშუალოდ გამოთვლის ხერხი, რომელიც ისტორიულად წარმოიშვა შემთხვევით მოვლენათა მათემატიკურ თეორიასთან ერთად, დიდხანს ითვლებოდა ძირითადად და საფუძვლად დაედო ალბათობათა ე. წ. „კლასიკურ“ თეორიას. ამ შემთხვევაში ცდები, რომლებსაც არ გააჩნდათ შესაძლო შედეგთა სიმეტრია, ხელოვნურად დაიყვანებოდა „კლასიკურ“ სქემამდე.

მიუხედავად ამ სქემის პრაქტიკული გამოყენების სფეროს შეზღუდულობისა, იგი მაინც საინტერესოა, რადგან ცდებზე, რომელთაც გააჩნიათ შესაძლო შედეგების სიმეტრია და ასეთ ცდებთან დაკავშირებულ ხდომილობებზე, ადვილია გავეცნოთ ალბათობათა ძირითად თვისებებს.

პირველ რიგში განვიხილავთ ისეთი სახის ხდომილობებს, რომლებიც ალბათობათა უშუალოდ გამოთვლის საშუალებას იძლევა. შემოვიტანოთ წინასწარ ზოგიერთი დამხმარე ცნება.

1) ხდომილობათა სრული ჯგუფი.

ამბობენ, რომ მოცემულ ცდაში რამდენიმე ხდომილობა ქმნის *ხდომილობათა სრულ ჯგუფს*, თუკი ცდის შედეგად აუცილებლად ერთი მათგანი მაინც მოხდება.

ხდომილობათა მაგალითები, რომლებიც ქმნიან სრულ ჯგუფს:

1) მონეტის ასროლისას გერბის ან ციფრის მოსვლა;
2) გასროლისას მოხვედრა ან აცდენა;
3) კამათლის გაგორებისას 1, 2, 3, 4, 5, 6 ქულის მოსვლა;
4) თეთრი ბურთულის და შავი ბურთულის გამოჩენა ერთი ბურთულის ამოღებისას ურნიდან, რომელშიდაც 2 თეთრი და 3 შავი ბურთულაა;
5) არცერთი მცდარბეჭდილი, ერთი, ორი, სამი, და სამზე მეტი მცდარბეჭდილი გადაბეჭდილი ტექსტის გვერდების გადასინჯვისას;
6) ორი გასროლისას თუნდაც ერთი მოხვედრა, თუნდაც ერთი აცდენა.

2. შ ე უ თ ა ვ ს ე ბ ი   ხ დ ო მ ი ლ ო ბ ა ნ ი.

მოცემული ცდისას რამდენიმე ხდომილობას ეწოდება შ ე უ თ ა ვ ს ე ბ ი თუკი არცერთი ორი ამ ხდომილობიდან არ შეიძლება ერთად მოხდეს. შეუთავსები ხდომილობათა მაგალითები:

1) მონეტის ასროლისას ღერბისა და ციფრის მოსვლა;

2) ერთი გასროლისას მიზანში მოხვედრა ან აცდენა;

3) კამათლის ერთი გაგორებისას 1, 2, 3, 4, 5 ქულის მოსვლა;

4) ტექნიკური მოწყობილობის 10 საათიანი მუშაობისას ზუსტად ერთი შეჩერება, ზუსტად ორი შეჩერება, ზუსტად სამი შეჩერება.

3. ტ ო ლ შ ე ს ა ძ ლ ო   ხ დ ო მ ი ლ ო ბ ა ნ ი.

მოცემულ ცდაში რამდენიმე ხდომილობას ეწოდება ტ ო ლ შ ე ს ა ძ ლ ო, თუ სიმეტრიის პირობებით არსებობს საფუძველი ჩავთვალოთ, რომ არცერთი მათგანი ამ ხდომილობიდან ობიექტურად არ წარმოადგენს უფრო შესაძლებელს, ვიდრე მეორე.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი:

1. მონეტის ასროლისას ღერბისა და ციფრის მოსვლა;
2. კამათლის გაგორებისას 1, 3, 4, 5 ქულის მოსვლა;
3. დასტიდან კარტის ამოღებისას აგურის გულის, ჯვრის მოსვლა.
4. ურნიდან, რომელშიც ათი ცალი დანომრილი ბურთულაა, ერთი ბურთულის ამოღებისას 1, 2, 3 ბურთულების გამოჩენა.

არსებობენ ხდომილობათა ჯგუფები, რომლებიც ხასიათდებიან ყველა სამივე თვისებით: ისინი ქმნიან სრულ ჯგუფს, არათავსებადი და ტოლშესაძლონი არიან. მ ა გ ა ლ ი თ ა დ: მონეტის ასროლისას ღერბისა და ციფრის გამოჩენა.

კამათლის გაგორებისას 2, 3, 4, 5, ქულის მოსვლა. ხდომილობებს, რომლებიც ასეთ ჯგუფს ქმნიან, შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი (სხვანაირად „შანსები") ეწოდებათ.

თუ რომელიმე ცდას თავისი სტრუქტურით გააჩნია შესაძლო შედეგების სიმეტრია, მაშინ შემთხვევები წარმოადგენენ ერთნაირად შესაძლებელ და ერთიმეორის გამომრიცხავ ცდისეულ შედეგების ამომწურავ სისტემას. ასეთ ცდაზე იტყვიან, რომ იგი „დაიყვანება შემთხვევათა სქემაზე" (სხვაგვარად „ურნების სქემაზე").

შემთხვევათა სქემას უმთავრესად ადგილი აქვს ხელოვნურად ორგანიზებულ ცდებისას, სადაც წინასწარ და შეგნებულად უზრუნველყოფილია ცდის შედეგების ერთი და იგივე შესაძლებლობა (როგორც, მაგალითად, აზარტულ თამაშებში). ასეთი ცდებისათვის შესაძლებელია ალბათობათა უშუალოდ გამოთვლა, რომელიც ემყარება ე. წ. ხელსაყრელ შემთხვევათა წილის შეფასებას შემთხვევათა საერთო რიცხვიდან.

შემთხვევას ეწოდება ხელსაყრელი რომელიმე ხდომილობისათვის თუ კი ამ შემთხვევისას მოცემული ხდომილობა მოხდება.

მაგალითად, კამათლის გაგორებისას შესაძლოა 6 შემთხვევა, მოსვლა 1, 2, 3, 4, 5, 6 ქულებისა. მათ შორის A ხდომილობას— ქულათა ლუწი რიცხვის მოხდენას ხელს უწყობს 2, 4 და 6 სამი შემთხვევა და დანარჩენი სამი ხელს არ უწყობს.

თუკი ცდა დაიყვანება შემთხვევათა სქემაზე, მაშინ ხდომილობის ალბათობა მოცემულ ცდაში შესაძლოა შეფასებული იქნას ხელსაყრელ შემთხვევათა ფარდობითი წილით. ალბათობა A ხდომილობისა გამოითვლება ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვის შემთხვევათა საერთო რიცხვთან ფარდობით:

$$P(A)=\frac{m}{n} \qquad (2.2.1)$$

სადაც $P(A)$ — A ხდომილობის ალბათობა;
n — შემთხვევათა საერთო რიცხვი;
m—A ხდომილობისათვის ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვი.

ვინაიდან ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვი მოთავსებულია 0 და n შორის (0-შეუძლებელი და n-აუცილებელი ხდომილობისათვის) 2.2.1 ფორმულით გამოთვლილი ალბათობა ყოველთვის რაციონალური წესიერი წილადია:

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1. \qquad (2.2.2)$$

ეს ალბათობათა გამოსათვლელი „კლასიკური ფორმულა“. იგი დიდხანს იყო ლიტერატურაში, როგორც ალბათობის განმარტება.

ამჟამად ალბათობის განმარტებისას (ახსნისას), უკავშირებენ რა უშუალოდ ალბათობის ცნებას სიხშირის ემპირიულ ცნებას, სხვა პრინციპებიდან გამოდიან. ხოლო (2.2.1) ფორმულა შეინარჩუნება მხოლოდ, როგორც ფორმულა ალბათობის უშუალოდ გამოსათვლელად, რომელიც გამოსადეგია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ცდა დაიყვანება შემთხვევათა სქემამდე, ე. ი. ხასიათდება შესაძლო შედეგების სიმეტრიით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი: 1. ურნაში 2 თეთრი და 3 შავი ბურთულაა. ურნიდან ალალბედზე იღებენ ერთ ბურთულას. საჭიროა მოიძებნოს ალბათობა იმისა, რომ ეს ბურთულა იქნება თეთრი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აღვნიშნოთ თეთრი ბურთულას გამოჩენის ხდომილობა A-თი, შემთხვევათა საერთო რიცხვი $n=5$-ით, შემთხვევათა რიცხვი, რომელიც A ხდომილობის მოხდენისათვის ხელსაყრელია, $m=2$-ით

მაშასადამე

$$P(A)=\frac{2}{5}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ურნაში a თეთრი და b შავი ბურთულაა.
ურნიდან იღებენ ორ ბურთულას, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბურთულა თეთრი იქნება.

ა მო ხ ს ნ ა. ორი თეთრი ბურთულას გამოჩენის ხდომილობა აღვნიშნოთ B. თი. გამოვთვალოთ შესაძლო შემთხვევათა საერთო n რიცხვი და შემთხვევათა m რიცხვი, რომელიც ხელსაყრელია B ხდომილობის მოხდენისათვის:

$$n = C^2_{a+b};$$
$$m = C^2_a{}^{1)};$$

მაშასადამე

$$P(B) = \frac{C^2_a}{C^2_{a+b}}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. N ნაკეთობისაგან შემდგარ პარტიაში M წუნდებულია. პარტიიდან ალალბედზე ამოარჩევენ n ნაკეთობას. განვსაზღვროთ ალბათობა იმისა, რომ ამ n ნაკეთობათა შორის იქნება ზუსტად m წუნდებული.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შემთხვევათა საერთო რიცხვი, ცხადია, ტოლია C_N^n; ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვია $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$, სადაც ალბათობა ჩვენთვის საინტერესო ხდომილობისა

$$F(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

2.3. სიხშირე, ანუ ხდომილობის სტატისტიკური ალბათობა

(2.2.1) ფორმულა ალბათობათა უშუალო გამოთვლისათვის მისაღებია მხოლოდ მაშინ, როცა ცდას, რომლის შედეგადაც შეიძლება მოხდეს ჩვენთვის საინტერესო ხდომილობა, გააჩნია შესაძლო შედეგთა სიმეტრია (დაიყვანება შემთხვევათა სქემაზე).

ცხადია, რომ არა ყოველი ცდა შეიძლება დაყვანილი იქნას შემთხვევათა სქემაზე და არსებობს ხდომილობათა ფართო კლასი, რომელთა ალბათობა არ შეიძლება გამოთვლილ იქნას (2.2.1) ფორმულით. განვიხილოთ, მაგალითად, წარასწორად დამზადებული, არასიმეტრიული კამათელი. ამ შემთხვევაში გარკვეული წახნაგის გამოჩენა უკვე აღარ ხასიათდება $\frac{1}{6}$ ალბათობით: ამასთან ერთად ცხადია, რომ მოცემული არასიმეტრიული კამათლისათვის ამ წახნაგის გამოჩენას გააჩნია რომელიღაც ალბათობა, რომელიც გვიჩვენებს საშუალოდ რამდენად ხშირად უნდა გამოჩნდეს მოცემული წახნაგი მრავალჯერ გაგორებისას. აგრეთვე ცხადია, რომ ალბათობა ისეთი ხდომილობებისა, როგორიცაა „მოხვედრა მიზანში სროლისას", „რადიონათურის მწყობრიდან გამოსვლა მუშაობის ერთი საათის განმავლობაში" ანდა „ჯავშნის გახვრეტა ჭურვის ნამსხვრევებით", აგრეთვე არ შეიძლება გამოთვლილი იქნას (2.2.1) ფორმულით, რადგან სათანადო ცდები შემთხვევათა სქე-

---

¹) C^l_k ნიშნით აღნიშნულია k ელემენტიდან l ელემენტიან ჯუფთებათა რიცხვი

მებზე არ დაიყვანება. ამასთან ერთად ცხადია, რომ თითოეულს ჩამოთვლილი ხდომილობებიდან გააჩნია ობიექტური შესაძლებლობის გარკვეული ხარისხი, რომელიც პრინციპში შეიძლება გაიზომოს რიცხობრივად და მსგავსი ცდების განმეორებისას შესაბამის ხდომილობათა ფარდობით სიხშირეში აისახება. ამის გამო ჩავთვლით, რომ თითოეულ ხდომილობას, დაკავშირებულს ერთგვაროვან ცდების მასასთან, — რომლებიც დაიყვანებიან თუ არ დაიყვანებიან შემთხვევათა სქემაზე, — აქვს გარკვეული ალბათობა მოთავსებული ნულსა და ერთს შორის. იმ ხდომილობათათვის, რომლებიც შემთხვევათა სქემაზე დაიყვანებიან, ეს ალბათობა შეიძლება გამოითვალოს უშუალოდ (2.2.1) ფორმულით. იმ ხდომილობათა ალბათობის გამოსათვლელად, რომლებიც შემთხვევათა სქემაზე არ დაიყვანებიან, სხვა ხერხები გამოიყენება. ყველა ამ ხერხს საფუძველი აქვს ცდებში, ექსპერიმენტებში და იმისათვის რომ ვიქონიოთ წარმოდგენა მათზე, აუცილებელია გავარკვიოთ ხდომილობის სიხშირის ცნება და იმ ორგანული კავშირის სპეციფიკა, რომელიც არსებობს ალბათობასა და სიხშირეს შორის.

ვთქვათ ჩატარებულია n ცდის სერია, თითოეულ მათგანში შეიძლება მომხდარიყო ან არ მომხდარიყო რომელიღაც A ხდომილობა. მაშინ ცდების მოცემული სერიის A *ხდომილობის სიხშირე* ეწოდება ჩატარებულ ცდათა საერთო რიცხვთან იმ ცდების რიცხვის ფარდობას, რომელშიც A ხდომილობა მოხდა. ხდომილობის სიხშირეს ხშირად უწოდებენ *სტატისტიკურ ალბათობას* (განსხვავებით ადრე შემოტანილი „მათემატიკური" ალბათობისაგან).

შევთანხმდეთ A ხდომილობის სიხშირე (სტატისტიკური ალბათობა) აღვნიშნოთ $P^*(A)$-თი, ხდომილობათა სიხშირე ცდების შედეგების საფუძველზე გამოითვლება ფორმულით:

$$P^*(A) = \frac{m}{n}, \tag{2.3.1}$$

სადაც

m—A ხდომილობის მოხდენათა რიცხვია;

n — ჩატარებული ცდების საერთო რიცხვი;

ცდების მცირე რიცხვისას ხდომილობის ალბათობა შემთხვევითი ხასიათისაა და ცდების ერთი ჯგუფიდან მეორეზე გადასვლისას შეიძლება შესამჩნევად შეიცვალოს. მაგალითად, მონეტის რომელიღაც ათი ასროლისას სრულიად შესაძლებელია, რომ ღერბი გამოჩნდეს მხოლოდ ორჯერ (ღერბის გამოჩენის სიხშირე იქნება 0.2); სხვა ათი ასროლისას ჩვენ სავსებით შეგვიძლია მივიღოთ 8 ღერბი (სიხშირე 0.8). მხოლოდ ცდების რაოდენობის გადიდებისას ხდომილობის სიხშირე სულ უფრო და უფრო დაჰკარგავს თავის შემთხვევით ხასიათს; შემთხვევითი

გარემოება, რომელიც დამახასიათებელია ყოველი ცალკეული ცდისათვის. მასაში ურთიერთბათილდებიან და სიხშირე სტაბილიზაციისაკენაა მიდრეკილი უახლოვდება რა უმნიშვნელო რხევებით რომელიღაც საშუალო მუდმივ სიდიდეს. მაგალითად მონეტის მრავალჯერ ასროლისას ღერბის გამოჩენის სიხშირე მხოლოდ მცირედ გადაიხრება $\frac{1}{2}$-საგან.

სიხშირის მდგრადობა ექსპერიმენტულად ეს მრავალჯერ შემოწმებული და კაცობრიობის პრაქტიკული მოღვაწეობის გამოცდილებით დადასტურებული ერთ-ერთ კანონზომიერებათაგანია, რომელიც შემთხვევით მოვლენებში შეიმჩნევა. ამ კანონზომიერების მათემატიკური ფორმულირება პირველად მოგვცა იაკობ ბერნულიმ თავის თეორემაში, რომელიც დიდ რიცხვთა კანონის უმარტივესი ფორმაა. იაკობ ბერნულიმ დაამტკიცა, რომ ერთგვაროვანი დამოუკიდებელი ცდების რიცხვის უსაზღვროდ გადიდებისას პრაქტიკული უტყუარობით შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ხდომილობის სიხშირე ცალკეული ცდის ხდომილობის ალბათობისაგან მცირედით იქნება განსხვავებული.

კავშირი ხდომილობის სიხშირესა და მის ალბათობას შორის ღრმა, ორგანულია. ეს ორი ცნება არსებითად განუყოფელია. მართლაც როცა ვაფასებთ რომელიღაც ხდომილობის შესაძლებლობის ხარისხს, აუცილებლად ვაკავშირებთ ამ შეფასებას პრაქტიკაში ანალოგიური ხდომილობათა მოხდენის მეტ-ნაკლებ სიხშირესთან.

ვახასიათებთ რა ხდომილობის ალბათობას რომელიღაც რიცხვით იგი წარმოადგენს ცდების დიდი რიცხვის შემთხვევაში მოცემული ხდომილობის მოხდენის ფარდობით სიხშირეს. ხდომილობის შესაძლებლობის ხარისხის ალბათობის მეშვეობით რიცხობრივ შეფასებას აქვს პრაქტიკული აზრი, სახელდობრ, იმიტომ, რომ უფრო მეტალბათობიანი ხდომილობანი წარმოიშობიან საშუალოდ უფრო ხშირად ვიდრე ნაკლებალბათობიანი და თუ პრაქტიკულად მივუთითებთ იმაზე, რომ ცდათა რიცხვის გადიდებისას ხდომილობათა სიხშირეს აქვს გათანაბრების ტენდენცია, ბუნებრივია ვიგულისხმოთ, რომ ეს რიცხვი არის ხდომილობის ალბათობა.

ასეთი დაშვების შემოწმება ბუნებრივია, შეგვიძლია მხოლოდ ისეთი ხდომილობებისათვის, რომელთა ალბათობა შეიძლება გამოთვლილი იქნას უშუალოდ, ე. ი. ისეთი ხდომილობებისათვის, რომელთა დაყვანა შეიძლება შემთხვევათა სქემაზე, ვინაიდან მხოლოდ ასეთი ხდომილობებისათვის არსებობს მათემატიკური ალბათობის გამოთვლის ზუსტი მეთოდი. სრულიად ბუნებრივია დავუშვათ, რომ ისეთი ხდომილობებისათვის, რომელნიც არ დაიყვანებიან შემთხვევათა სქემაზე, იგივე კანონი დარჩება ძალაში და მუდმივი მნიშვნელობა, რომელსაც უახლოვდება

ხდომილობათა სიხშირე ცდების რიცხვის გადიდებისას, წარმოადგენს თვით ხდომილობათა ალბათობას. მაშინ ხდომილობათა სიხშირე ცდების საკმაოდ დიდი რიცხვისას შეიძლება მივიღოთ რომელიღაც ალბათობის მიახლოებით მნიშვნელობად. პრაქტიკულადაც ასე ხდება: განსაზღვრავენ ცდებიდან იმ ხდომილობათა ალბათობას, რომლებიც შემთხვევათა სქემაზე არ დაიყვანებიან.

საჭიროა აღვნიშნოთ, რომ სიხშირის ალბათობასთან მიახლოების ხასიათი ცდების რიცხვის გადიდებისას რამდენამდე განსხვავდება „ზღვრისაკენ მისწრაფებისაგან“ სიტყვის მათემატიკური მნიშვნელობით.

როდესაც მათემატიკაში ვამბობთ, რომ x_n ცვლადი n-ის გაზრდისას მიისწრაფის მუდმივ a ზღვრისაკენ, ეს ნიშნავს, რომ სხვაობა $|x_n - a|$ ხდება ნაკლები ნებისმიერ დადებით ε რიცხვზე n-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, დაწყებული რომელიღაც დიდი რიცხვიდან.

ხდომილობათა სიხშირისა და მისი ალბათობის მიმართ ასეთი კატეგორიული მტკიცება არ შეიძლება. სინამდვილეში არ არის რაიმე ფიზიკურად შეუძლებელი იმაში, რომ ცდათა დიდი რიცხვისას ხდომილობის სიხშირე მნიშვნელოვნად გადაიხრება მისი ალბათობისაგან; მაგრამ ასეთი მნიშვნელოვანი გადახრა იმდენად ნაკლებმოსალოდნელია, რამდენადაც ცდების დიდი რიცხვია ჩატარებული. მაგალითად მონეტის 10-ჯერ ასროლისას ფიზიკურად შესაძლოა (თუმცა ნაკლებმოსალოდნელი), რომ 10-ჯერვე დავარდება ღერბი და სიხშირე ღერბის გამოჩენისა იქნება 1-ის ტოლი; 1000-ჯერ ასროლისას ასეთი ხდომილობა ჯერ კიდევ რჩება ფიზიკურად შესაძლებლად, მაგრამ იმდენად ნაკლებმოსალოდნელია, რომ გაბედულად შეიძლება ჩავთვალოთ განუხორციელებლად. ამგვარად, ცდათა რიცხვის გადიდებისას სიხშირე უახლოვდება ალბათობას, მაგრამ არასრული უტყუარობით, არამედ დიდი ალბათობით, რომელიც ცდათა საკმარისად დიდი რიცხვისას შეიძლება განვიხილოთ როგორც პრაქტიკული უტყუარობა.

ალბათობათა თეორიაში ხშირად გვხვდება ასეთი ხასიათის ერთი სიდიდის მეორესთან მიახლოება და მათ ასაღწერად შემოტანილია სპეციალური ტერმინი: „ალბათობით კრებადობა“.

ამბობენ, რომ X_n სიდიდე **ალბათობით კრებადია** a **სიდიდისაკენ**, თუ რაგინდ მცირე ε-სათვის $|X_n - a| < \varepsilon$ უტოლობის ალბათობა n-ის უსასრულოდ გადიდებისას უახლოვდება ერთს. ამ ტერმინის გამოყენებით, შეიძლება ვთქვათ, რომ ცდების რიცხვის გადიდებისას ხდომილობათა სიხშირე კი არ „მიისწრაფვის“ ხდომილობის ალბათობისაკენ, არამედ ალბათობით იკრიბება მისკენ.

სიხშირისა და ალბათობის ეს თვისება, აქ გადმოცემული ჯერჯერობით მათემატიკური საფუძვლის გარეშე, უბრალოდ პრაქტიკისა და საღი აზრის საფუძველზე, წარმოადგენს ი. ბერნულის თეორემის შინაარსს.

რომელიც ჩვენს მიერ შემდეგში იქნება დამტკიცებული (იხ. მე-13 თავი). ამგვარად, შემოვიტანეთ რა ხდომილობის სიხშირის ცნება და ვისარგებლეთ სიხშირესა და ალბათობას შორის კავშირით, შესაძლებელია ნულსა და ერთს შორის მოთავსებული გარკვეული ალბათობანი მივაწეროთ არა მარტო იმ ხდომილობებს რომლებიც შემთხვევათა სქემებზე დაიყვანება, არამედ იმ ხდომილობებს, რომლებიც შემთხვევათა სქემაზე არ დაიყვანებიან; უკანასკნელ შემთხვევაში ხდომილობის ალბათობა ცდების დიდი რიცხვისას შესაძლოა მიახლოებით განვსაზღვროთ. შემდეგ დავინახავთ, რომ იმ ალბათობათა ხდომილობის განსაზღვრისათვის, რომლებიც შემთხვევათა სქემაზე არ დაიყვანება ყოველთვის არ არის აუცილებელი ცდებიდან მისი სიხშირე უშუალოდ განვსაზღვროთ.

ალბათობათა თეორიას გააჩნია მრავალი ხერხი, რომელიც საშუალებას იძლევა განისაზღვროს ხდომილობის ალბათობა არა პირდაპირი— მასთან დაკავშირებულ სხვა ხდომილობათა ალბათობის საშუალებით. არსებითად ასეთი არაპირდაპირი ხერხები ალბათობის თეორიის ძირითად შინაარსს შეადგენენ. ასეთი არაპირდაპირი გამოკვლევისას შეიძლება მივმართოთ ექსპერიმენტულ მონაცემებს. საიმედობა და ობიექტური ღირებულება ყველა პრაქტიკული გამოთვლებისა, რომელიც შესრულებულია ალბათობის თეორიის აპარატით, განისაზღვრება იმ ექსპერიმენტული მონაცემების რაოდენობითა და ხარისხით, რომლის ბაზაზეც ეს გაანგარიშება სრულდება.

გარდა ამისა, გამოკვლევის ალბათობრივი მეთოდების პრაქტიკულად გამოყენებისას ყოველთვის უნდა მივაქციოთ ყურადღება იმას, გამოსაკვლევი მოვლენა მიეკუთვნება თუ არა სინამდვილეში მასიური მოვლენების კატეგორიას, რომელთათვისაც, დროის რაღაც მონაკვეთისათვის მაინც სრულდება სიხშირეთა მდგრადობის თვისება, მხოლოდ ამ შემთხვევაში აქვს აზრი ხდომილობათა ალბათობაზე ლაპარაკს. მხედველობაში გვაქვს არა მათემატიკური ფუნქციები, არამედ შემთხვევითი მოვლენების რეალური მახასიათებლები.

მაგალითად გამოთქმას „საჰაერო ბრძოლაში მოცემულ პირობებში თვითმფრინავის დაზიანების ალბათობა ტოლია 0,7-ის“ აქვს კონკრეტული აზრი, იმიტომ რომ საჰაერო ბრძოლები იგულისხმება როგორც მასიური ოპერაციები, რომელნიც ანალოგიურ პირობებში დაახლოებით რამდენჯერმე იქნება განმეორებული.

პირიქით, გამოთქმა „ალბათობა იმისა, რომ მოცემული მეცნიერული პრობლემა გადაწყვეტილია სწორად, ტოლია 0,7“ — მოკლებულია კონკრეტულ აზრს, და იქნებოდა მეთოდოლოგიურად არა სწორი შეკვეთასებინა მეცნიერულ დებულებათა მართებულობა ალბათობის თეორიის მეთოდებით.

2.4. შემთხვევითი სიდიდე

ალბათობათა თეორიის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ძირითადი ცნება-შემთხვევითი სიდიდის ცნებაა. შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება სიდიდეს, რომელმაც შეიძლება ცდის შედეგად მიიღოს ესა თუ ის მნიშვნელობა, ამასთან წინასწარ ცნობილი არ არის სახელდობრ რომელი.

შემთხვევით სიდიდეთა მაგალითები;

1) მიზანში მოხვედრათა რიცხვი სამი გასროლისას;

2) დღე-ღამეში სატელეფონო სადგურში გამოძახებათა რიცხვი;

3) მიზანში მოხვედრის სიხშირე 10 გასროლისას.

მაგალითში შემთხვევით სიდიდეებს შეუძლია მიიღოს ცალკეული იზოლირებული მნიშვნელობანი, რომლებიც შესაძლებელია წინასწარ იქნეს ჩამოთვლილი.

1-ელ მაგალითში ეს მნიშვნელობებია 0,1,2,3;
მე-2 მაგალითში 1,2,3,4,...;
მე-3 მაგალითში 0,0,1,1,0,2;...;1,0

ისეთ შემთხვევით სიდიდეებს, რომლებიც ღებულობენ ერთმანეთისაგან განცალკავებულ მნიშვნელობებს, რომლებიც წინასწარ შეიძლება ჩამოვთვალოთ, ეწოდებათ წყვეტილი ან დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეები.

არსებობენ სხვა ტიპის შემთხვევითი სიდიდეები, მაგ:

1) გასროლისას მოხვედრის წერტილის აბსცისა;

2) ანალიტიკურ სასწორზე სხეულების აწონვის შეცდომა;

3) მოცემულ სიმაღლეზე გასვლის მომენტში საფრენი აპარატის სიჩქარე;

4) ალალბედზე აღებული პურის მარცვლის წონა;

ასეთი შემთხვევითი სიდიდეების შესაძლო მნიშვნელობანი ერთიმეორისაგან არ არის განცალკევებული. ისინი უწყვეტად ავსებენ რომელიღაც შუალედს, რომელსაც ზოგჯერ აქვს მკვეთრად გამოსახული საზღვრები, უფრო ხშირად კი საზღვრები გაურკვეველია, ბუნდოვანია.

ისეთ შემთხვევით სიდიდეებს, რომელთა შესაძლო მნიშვნელობანი უწყვეტად ავსებენ რომელიღაც შუალედს, ეწოდებათ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეები.

შემთხვევითი სიდიდის ცნება ალბათობის თეორიაში მეტად მნიშვნელოვანია. თუ ალბათობის „კლასიკური“ თეორია უპირატესად ოპერაციებს ახდენდა ხდომილობებზე, თანამედროვე ალბათობათა თეორია, სადაც ეს შესაძლებელია, ამჯობინებს ოპერაციები შემთხვევით სიდიდეებზე აწარმოოს.

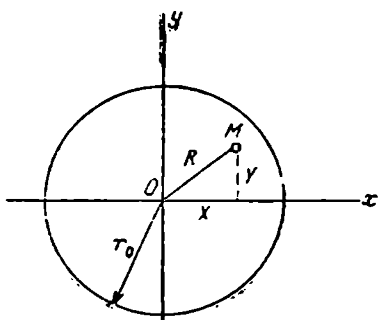
მოვიყვანოთ ალბათობათა თეორიისათვის ტიპური ხდომილობიდან შემთხვევით სიდიდეებზე გადასვლის ხერხების მაგალითები.

წარმოებს ცდა, რომლის შედეგად მოხდება ანდა არ მოხდება რომელიღაც A ხდომილობა. A ხდომილობის მაგიერ შესაძლოა განვიხილოთ შემთხვევითი X სიდიდე, რომელიც ერთის ტოლია, თუ ხდომილობა მოხდება, და ტოლია 0-ის, თუკი ხდომილობა არ მოხდება. შემთხვევითი X სიდიდე ცხადია წყვეტილია. მას აქვს ორი შესაძლო მნიშვნელობა: 0 და 1. ამ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება A ხდომილობის მ ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ ე ლ ი შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი ს ი დ ი დ ე. პრაქტიკაში ხშირად ხდომილობის მაგიერ უფრო მოხერხებულია ოპერაციები ვაწარმოოთ მახასიათებელ შემთხვევით სიდიდეებზე, მაგალითად, თუ წარმოებს ცდები, რომელთაგან თითოეულში შესაძლოა A ხდომილობის მოხდენა, მაშინ ხდომილობათა მოხდენის საერთო რიცხვი ტოლია ყველა ცდაში A ხდომილობის მახასიათებელ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამისა. მრავალი პრაქტიკული ამოცანის გადაწყვეტისას ასეთი ხერხით სარგებლობა მოხერხებულია.

მეორეს მხრივ, ძალიან ხშირად ალბათობათა გამოთვლისათვის მოხერხებულია ეს ხდომილობა დავუკავშიროთ რომელიღაც უწყვეტ სიდიდეს (ან უწყვეტ სიდიდეთა სისტემას).

დავუშვათ ხდება რომელიღაც O ობიექტის კოორდინატთა გაზომვა იმისათვის, რომ ავაგოთ M წერტილი, რომელიც ამ ობიექტს ადგილზე გამოსახავს შლილში.

გვაინტერესებს A ხდომილობა, რომლის დროსაც M წერტილის მდებარეობისას R შეცდომა მოცემულ r_0 მნიშვნელობას არ აღემატება (ნახ. 2.4.1).



ნახ. 2.4.1

აღვნიშნოთ ობიექტის კოორდინატების გაზომვის შემთხვევითი შეცდომები X და Y-ით. ცხადია A ხდომილობა ტოლძალოვანია შემთხვევითი X და Y კოორდინატებიანი წერტილის იმ წრისშიგნით მოხვედრისა, რომლის რადიუსია r_0, ხოლო ცენტრია O. სხვა სიტყვებით, A ხდომილობის შესასრულებლად შემთხვევითი X და Y სიდიდეები უნდა აკმაყოფილებდნენ უტოლობას

$$X^2+Y^2<r_0^2. \qquad (2.4.1.)$$

ხდომილობის ალბათობა სხვა არა არის რა, თუ არა ალბათობა (2.4.1) უტოლობის შესრულებისა. ეს ალბათობა შესაძლოა განსაზღვ-

რული იქნეს, თუ ცნობილი იქნება X, Y შემთხვევითი სიდიდეების თვისებები.

ასეთი ორგანიული კავშირი ხდომილობებსა და შემთხვევით სიდიდეებს შორის ფრიად დამახასიათებელია თანამედროვე ალბათობათა თეორიისათვის, რომელიც, სადაც შეიძლება, გადადის „ხდომილობათა სქემიდან“ „შემთხვევით სიდიდეთა სქემაზე“. უკანასკნელი სქემა პირველთან შედარებით გაცილებით უფრო მოქნილი და უნივერსალური აპარატია, შემთხვევით მოვლენებთან დაკავშირებული ამოცანების გადასაწყვეტად. /

2.5. პრაქტიკულად შეუძლებელი და პრაქტიკულად აუცილებელი ხდომილობანი

პრაქტიკული დარწმუნებულობის პრინციპი

2.2 პარაგრაფში გავეცანით შეუძლებელ და უტყუარ ხდომილობების ცნებებს. ალბათობა შეუძლებელი ხდომილობისა, რომელიც 0-ის ტოლია, და აუცილებელი ხდომილობისა, რომელიც 1-ის ტოლია, იკავებენ უკიდურეს მდებარეობას ალბათობათა სკალაზე.

პრაქტიკაში ხშირად საქმე გვაქვს არა შეუძლებელ და აუცილებელ ხდომილობებთან, არამედ ე. წ. „პრაქტიკულად შეუძლებელ“ და „პრაქტიკულად აუცილებელ“ ხდომილობებთან.

პ რ ა ქ ტ ი კ უ ლ ა დ შ ე უ ძ ლ ე ბ ე ლ ი ხდომილობა ეწოდება იმ ხდომილობას, რომლის ალბათობა ახლოსაა ნულთან.

განვიხილოთ შემდეგი ცდა; რუსული დასაჭრელი ანბანის 32 ასო შერეულია ერთიმეორეში: აიღება ერთი ბლანკი, მასზე გამოსახული ასო ჩაიწერება, რომლის შემდეგ ამოღებული ბლანკი ბრუნდება უკან, და ბლანკები შეირევა. ასეთი ცდა წარმოებს 25-ჯერ. განვიხილოთ A ხდომილობა, როცა 25 ამოღების შემდეგ ჩვენ დავიწერთ „ევგენი ონეგინის“ პირველ სტრიქონს:

„Мой дядя самых честных правил“

ასეთი ხდომილობა პრაქტიკულად შეუძლებელს არ წარმოადგენს. შეიძლება გამოვთვალოთ მისი ალბათობა, რომელიც ტოლია $\left(\frac{1}{32}\right)^{25}$-ში.

მაგრამ იმის გამო, რომ A ხდომილობის ალბათობა ძალზე მცირეა, იგი პრაქტიკულად შეუძლებლად შეიძლება ჩავთვალოთ.

პ რ ა ქ ტ ი კ უ ლ ა დ უ ტ ყ უ ა რ ი ხ დ ო მ ი ლ ო ბ ა შეიძლება ვუწოდოთ ხდომილობას, რომლის ალბათობა ზუსტად ერთი არაა, მაგრამ ძლიერ ახლოსაა ერთთან.

თუკი რომელიმე A ხდომილობა მოცემულ ცდაში შეუძლებელია, მაშინ მისი საწინააღმდეგო $\overline{A}$ ხდომილობა, რომელიც A ხდომილობის არ შესრულებაა, პრაქტიკულად აუცილებელი იქნება. ამრიგად ალბათობათა თეორიის თვალსაზრისით სულერთია რომელ ხდომილობებზეა ლაპარაკი: პრაქტიკულად შეუძლებელზე თუ აუცილებელზე, რადგან ისინი ყოველთვის ერთი-მეორეს თან ახლავს.

პრაქტიკულად შეუძლებელი და უტყუარი ხდომილობანი ალბათობათა თეორიაში მნიშვნელოვანია. მათზეა დაფუძნებული ამ მეცნიერების პრაქტიკული გამოყენება.

მართლაც, თუ ვიცით, რომ მოცემულ ცდაში ხდომილობის ალბათობაა 0.3, ეს ჯერ კიდევ არ გვაძლევს საშუალებას ვიწინასწარმეტყველოთ ცდის შედეგი, მაგრამ თუ ხდომილობის ალბათობა მოცემულ ცდაში უმნიშვნელოდ მცირეა, ანდა პირიქით, ფრიად ახლოსაა 1-თან, ეს გვაძლევს შესაძლებლობას ვიწინასწარმეტყველოთ ცდის შედეგი; პირველ შემთხვევაში არ დაველოდებით A ხდომილობის მოხდენას; მეორე შემთხვევაში საკმაო საფუძველი იქნება ხდომილობის მოხდენისა. ასეთი წინასწარმეტყველებისას ვხელმძღვანელობთ ე. წ. პრაქტიკული დარწმუნებულობის პრინციპით, რომლის ფორმულირება შეიძლება შემდეგნაირად გამოვთქვათ:

თუკი რომელიღაც A ხდომილობის ალბათობა მოცემულ E ცდაში ძალიან მცირეა, მაშინ შეიძლება პრაქტიკულად დარწმუნებული ვიყოთ იმაში, რომ E ცდის ერთჯერადი შესრულებისას A ხდომილობა არ მოხდება.

სხვა სიტყვებით, თუკი ხდომილობის ალბათობა მოცემულ ცდაში ძალზე მცირეა, მაშინ, შევუდგებით თუ არა ცდის ჩატარებას, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ თითქოს და ეს ხდომილობა საერთოდ შეუძლებელია, ე. ი. სრულიად არ ვივარაუდოთ მისი მოხდენა.

ყოველდღიურ ცხოვრებაში ჩვენ განუწყვეტლივ შეუგნებლად ვსარგებლობთ პრაქტიკული დარწმუნებულობის პრინციპით. მაგალითად, გავდივართ, რა სამგზავროდ რკინიგზით, არ ვითვალისწინებთ სარკინიგზო კატასტროფას, თუმცა რომელიღაც ძალიან მცირე ალბათობა ასეთი ხდომილობისა მაინც არსებობს.

პრაქტიკული დარწმუნებულობის პრინციპი არ შეიძლება დამტკიცებული იქნას მათემატიკური საშუალებებით, იგი დასტურდება კაცობრიობის მთელი პრაქტიკული გამოცდილებით.

საკითხი, თუ რამდენად მცირე უნდა იყოს ხდომილობის ალბათობა, რომ იგი ჩაითვალოს პრაქტიკულად შეუძლებლად, მათემატიკურ თეორიაში არ განიხილება და ყოველ კერძო შემთხვევაში გადაწყდება პრაქტიკული მოსაზრებით. ჩვენთვის სასურველი ცდის შედეგის მიხედვით.

მაგალითად, თუ ამფეთქის მტყუნების ალბათობა გასროლისას 0,01-ის ტოლია ჯერ კიდევ შეგვიძლია, რომ ამფეთქის მტყუნება შეუძლებელ ხდომილობად ჩავთვალოთ. პირიქით, თუ პარაშუტის მტყუნების ალბათობა გადმოხტომისას ასევე 0,01-ის ტოლია, ჩვენ არ შეგვიძლია ეს მტყუნება ჩავთვალოთ პრაქტიკულად შეუძლებელ ხდომილობად და უნდა მივაღწიოთ პარაშუტის დიდ საიმედობას.

ალბათობათა თეორიის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა გამოვლინება იმ პრაქტიკულად შეუძლებელი (ანდა პრაქტიკულად აუცილებელი) ხდომილობებისა, რომლებიც შესაძლებლობას იძლევიან ვიწინასწარმეტყველოთ ცდის შედეგი და იმ პირობების გამოვლენა, რომლის დროსაც ეს თუ ის ხდომილობანი გახდებიან პრაქტიკულად შეუძლებელი (უტყუარი). არსებობენ ალბათობათა თეორიის მთელი რიგი თეორემები ე. წ. ზღვრული თეორემები, რომლებითაც დადგენილი ხდომილობათა არსებობა პრაქტიკულად შეუძლებელია (უტყუარია), როდესაც ცდათა რიცხვი ანდა ამოცანაში მონაწილე შემთხვევით სიდიდეთა რიცხვი იზრდება. ასეთი ზღვრული თეორემის მაგალითია უკვე ზემოთ ფორმულირებული ი. ბერნულის თეორემა (დიდ რიცხვთა კანონის უმარტივესი ფორმა). ბერნულის თეორემის თანახმად ცდათა დიდი რიცხვისას ხდომილობა — სხვაობა ხდომილობის სიხშირესა და მის ალბათობას შორის რაგინდ მცირეა—პრაქტიკულად აუცილებელია.

პრაქტიკულად შეუძლებელ ხდომილობებთან ერთად, რომლებიც საშუალებას იძლევიან დამაჯერებლობით ვიწინასწარმეტყველოთ ცდის შედეგი, მიუხედავად შემთხვევითობის არსებობისა ალბათობის თეორიაში დიდი მნიშვნელობისაა განსაკუთრებული ტიპის შემთხვევითი სიდიდეები, რომლებიც თუმცა შემთხვევითია, მაგრამ აქვთ ისეთი უმნიშვნელო ცვლილება რომ პრაქტიკულად შეიძლება განხილული იქნას როგორც არა შემთხვევითი.

ასეთი „თითქმის არა შემთხვევითი" სიდიდის მაგალითია ცდათა დიდი რიცხვისას ხდომილობათა სიხშირე. ეს სიდიდე, თუმცა შემთხვევითია, მაგრამ ცდათა დიდი რაოდენობისას შეუძლია მერყეობდეს ხდომილობათა ალბათობის მახლობლად ძლიერ ვიწრო საზღვრებში.

ასეთი „თითქმის არა შემთხვევითი" სიდიდეები საშუალებას გვაძლევენ ვიწინასწარმეტყველოთ ცდის რიცხობრივი შედეგი, მიუხედავად იმისა, მასში არსებობს თუ არა შემთხვევითობის ელემენტები და ოპერაციები ვაწარმოოთ ამ შედეგით ისეთივე დამაჯერებლობით, როგორც ვატარებთ ოპერაციებს იმ მონაცემებით, რომლებსაც გვაძლევს ზუსტ მეცნიერებათა ჩვეულებრივი მეთოდები.

III თავი

ალბათობათა თეორიის ძირითადი თეორემები

3.1. ძირითადი თეორემების დანიშნულება. ხდომილობათა ჯამი და ნამრავლი

წინა თავში გავეცანით ალბათობათა უშუალოდ გამოთვლის ხერხებს, სახელდობრ: იმ ხდომილობათა ალბათობის კლასიკურ ფორმულას, რომელიც შემთხვევათა სქემაზე დადის და ალბათობის მიახლოებით გამოთვლას ამ ხდომილობათა სიხშირის მიხედვით, რომლებიც შემთხვევათა სქემაზე არ დაიყვანება, მაგრამ ეს არა უშუალო ხერხები ძირითადი არაა ალბათობათა თეორიაში. მათი გამოყენება ყოველთვის არ არის მოხერხებული და შესაძლებელი მაშინაც კი, როცა ხდომილობა დაიყვანება შემთხვევათა სქემაზე. ხშირად ეს სქემა ძლიერ რთულია და (2.2.1) ფორმულით უშუალოდ გამოთვლა ალბათობისა მეტისმეტად ძნელია. რაც შეეხება ხდომილობებს, რომლებიც შემთხვევათა სქემებზე არ დაიყვანებიან, მათი ალბათობები მხოლოდ იშვიათად განისაზღვრება უშუალოდ სიხშირის მიხედვით. პრაქტიკაში ჩვეულებრივ საჭიროა ისეთ ხდომილობათა ალბათობის გამოთვლა, რომელთა უშუალოდ ექსპერიმენტული ჩატარება გაძნელებულია. თუ მაგალითად საჭიროა განვსაზღვროთ თვითმფრინავის დაზიანების ალბათობა საჰაერო ბრძოლაში, ცხადია, რომ ამ ალბათობის გამოთვლა სიხშირის მიხედვით შეუძლებელია და არა მხოლოდ იმიტომ, რომ ასეთი ცდები გახდებოდა განუზომლად რთული და ძვირად ღირებული, არამედ იმიტომ, რომ ხშირად გვჭირდება ბრძოლის ამა თუიმ შედეგის ალბათობის შეფასება არა მარტო ტექნიკის არსებული ნიმუშებისათვის, არამედ დაპროექტების პროცესში მყოფ პერსპექტიულისათვისაც. ჩვეულებრივ ასეთი შეფასება წარმოებს იმისათვის, რომ გამოვავლინოთ პერსპექტიული ტექნიკის ელემენტების ყველაზე უფრო რაციონალური კონსტრუქციული პარამეტრები.

ამიტომ, როგორც წესი ხდომილობათა ალბათობების გამოთვლისათვის გამოიყენება არა უშუალოდ პირდაპირი არამედ არაპირდაპირი მეთოდები, რომლებიც საშუალებას იძლევიან გარკვეული ხდომილობის ცნობილ ალბათობათა მიხედვით განვსაზღვროთ მათთან დაკავშირებული სხვა ხდომილობათა ალბათობანი. თვით ალბათობათა თეორია ძირითადად ისეთი არაპირდაპირი მეთოდების სისტემაა, რომლითაც სარგებლობა საშუალებას იძლევა აუცილებელი ექსპერიმენტი დაყვანილი იქნას მინიმუმამდე. ვიყენებთ რა ასეთ არაპირდაპირ მეთოდებს, ამა თუ იმ ფორმით ვსარგებლობთ ალბათობათა თეორიის ძირითადი თეორემე-

ბით, ასეთია ორი თეორემა: ალბათობათა შეკრებისა და ალბათობათა გადამრავლების თეორემა. ვთქვათ ორივე დებულება თეორემაა და შეიძლება დამტკიცებული იქნას მხოლოდ ხდომილობებისათვის, რომლებიც დაიყვანებიან შემთხვევათა სქემებზე. იმ ხდომილებებისათვის, რომლებიც შემთხვევათა სქემაზე არ დაიყვანება, მიიღებიან აქსიომატურად როგორც პრინციპები ანდა პოსტულატები.

წინასწარ სანამ მოვახდენთ ძირითადი თეორემების ფორმულირებას და მათ დავამტკიცებთ, შემოვიტანოთ რამდენიმე დამხმარე ცნება, სახელდობრ *ხდომილობათა ჯამის* და *ხდომილობათა ნამრავლის ცნება*.

ზუსტ მეცნიერებათა მრავალ დარგში გამოიყენება სხვადასხვა ობიექტებზე სიმბოლური ოპერაციები, რომლებიც თავიანთ სახელწოდებებს ღებულობენ არითმეტიკულ მოქმედებათა ანალოგიურად, რომელთა ზოგიერთი თვისებებისა მათ გააჩნიათ. ასეთია მაგალითად მექანიკაში ვექტორთა შეკრებისა და გადამრავლების ოპერაციები, ალგებრაში მატრიცათა შეკრება-გამრავლების ოპერაციები და ა. შ. ეს ოპერაციები ექვემდებარება რა ცნობილ წესებს, საშუალებას იძლევა არა მარტო გავამარტივოთ ჩანაწერების ფორმა, არამედ ზოგ შემთხვევაში მეცნიერული დასკვნების ლოგიკური აგება არსებითად გავაიოლოთ. ხდომილობებზე ასეთი სიმბოლური ოპერაციების შემოტანა ალბათობათა თეორიაში ნაყოფიერი აღმოჩნდა.

A და B *ორი ხდომილობის ჯამი* ეწოდება ისეთ C ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ, თუ მოხდა A ან B ან ორივე ერთად.

მაგალითად, თუ A ხდომილობა მიზანში მოხვედრაა პირველი გასროლისას, B ხდომილობა — მეორე გასროლისას, მაშინ $C=A+B$ არის ხდომილობა მიზანში მოხვედრისა საერთოდ, სულერთია პირველი, მეორე თუ ორივე გასროლისას.

თუ A და B ხდომილობანი შეუთავსებია, მაშინ ცხადია, რომ ორივე ხდომილობის მოხდენა გამორიცხულია და A და B ხდომილობათა ჯამი დაიყვანება A ხდომილობის ან B ხდომილობის მოხდენამდე.

A და B *ხდომილობის ჯამი* ეწოდება ისეთ C ხდომილობას, რომელიც არის A და B ხდომილობათაგან ერთ-ერთის მოხდენა.

რამდენიმე ხდომილობის ჯამი ეწოდება ხდომილობას, რომელიც არის ამ ხდომილობათაგან თუნდაც ერთის მაინც შესრულება.

მაგალითად, თუკი ცდა შედგება სანიშნეზე 5 სროლისაგან და მოცემული ხდომილობანი:

A_0 — არც ერთი მოხვედრა,

A_1 — ზუსტად ერთი მოხვედრა,

A_3 — ზუსტად სამი მოხვედრა,

A_4 — ზუსტად ოთხი მოხვედრა,

A_5 — ზუსტად ხუთი მოხვედრა, მაშინ

$A=A_0+A_1+A_2$

არის ხდომილობა „არა უმეტეს ორი მოხვედრა“ ხოლო

$$B=A_3+A_4+A_5$$

არის ხდომილობა „არა ნაკლებ სამი მოხვედრა“.

A და B ხდომილობის ნამრავლი ეწოდება C ხდომილობას, რომელიც არის A და B ხდომილობის ერთდროულად მოხდენა. მაგალითად, თუ A ხდომილობა არის ტუზის გამოჩენა დასტიდან კარტის ამოღებისას, B ხდომილობა—აგურის გამოჩენა, მაშინ $C=AB$ ხდომილობა არის აგურის ტუზის გამოჩენა. თუ ხდება ორი გასროლა სანიშნოზე და A ხდომილობა—მოხვედრა პირველ გასროლისას, B ხდომილობა — მოხვედრა მეორე გასროლისას, მაშინ $C=AB$ არის მოხვედრა ორივე გასროლისას.

რამდენიმე ხდომილობის ნამრავლი ეწოდება ხდომილობას, რომელიც ყველა ამ ხდომილობათა ერთდროული მოხდენაა. მაგალითად თუკი სამიზნეზე წარმოებს სამი გასროლა და განიხილება ხდომილობანი

B_1 — აცდენა პირველ გასროლისას,

B_2 — აცდენა მეორე გასროლისას,

B_3 — აცდენა მესამე გასროლისას, მაშინ ხდომილობა

$B=B_1B_2B_3$.

მდგომარეობს იმაში, რომ მიზანს არ მოხვდება არც ერთი გასროლისას.

ალბათობათა მოსაძებნად ხშირად მოგვიხდება წარმოვადგინოთ რთული ხდომილობანი უფრო მარტივ ხდომილობათა კომბინაციის სახით, რომლის დროსაც გამოიყენება როგორც შეკრების, ისე გამრავლების ოპერაციები.

მაგალითად, სამიზნეზე წარმოებს სამი გასროლა და განიხილება შემდეგი ელემენტარული ხდომილობანი:

A_1 — მოხვედრა პირველი გასროლისას,

$\overline{A}_1$ — აცდენა პირველი გასროლისას,

A_2 — მოხვედრა მეორე გასროლისას,

$\overline{A}_2$ — აცდენა მეორე გასროლისას,

A_3 — მოხვედრა მესამე გასროლისას,

$\overline{A}_3$ — აცდენა მესამე გასროლისას.

განვიხილოთ უფრო რთული B ხდომილობა, რომელიც არის მოცემული სამი გასროლის შედეგად მიზანში ზუსტად ერთი მოხვედრა. B ხდომილობა არის ელემენტარულ ხდომილობათა შემდეგი კომბინაცია:

$$B = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3.$$

C ხდომილობა არის სამიზნეზე არანაკლებ ორი მოხვედრა და შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$C = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3.$$

რთულ ხდომილობათა წარმოდგენის ასეთი ხერხები ალბათობათა თეორიაში ხშირად იხმარება. ხდომილობათა ჯამისა და ნამრავლის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ

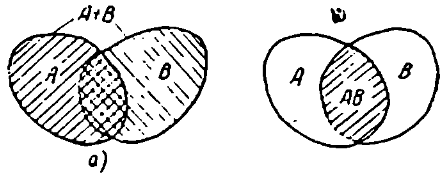
$$A + A = A$$

$$AA = A$$

თუ B ხდომილება A ხდომილობის კერძო შემთხვევაა, მაშინ

$$A + B = A.$$

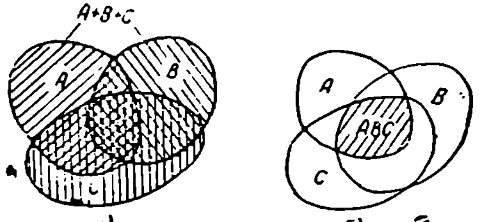
$$AB = B.$$



ნახ. 3.1.1

ხდომილობათა ჯამისა და ნამრავლის ცნებების გამოყენებისას ხშირად სასარგებლოა მათი თვალსაჩინო გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.

3.1.1. ნახაზზე თვალსაჩინოდაა ილუსტრირებული ორი ხდომილობის ჯამისა და ნამრავლის ცნებები.



ნახ. 3.1.2

თუ A ხდომილობაა წერტილის მოხვედრა A არეში, ხოლო B ხდომილობა—შესაბამისად მოხვედრა B არეში, მაშინ $A + B$ ხდომილობა არის მოხვედრა ნახ. 3.1.1 ა) დაშტრიხულ ზონაში, ხოლო AB ხდომილობა ნახ. 3.1.1 ბ) დაშტრიხულ ზონაში.

3.1.2 ნახ-ზე ანალოგიურად ნაჩვენებია სამი ხდომილობის ჯამი და ნამრავლი.

ალბათობათა შეკრების თეორემა ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: *ორი შეუთავსები ხდომილობის ჯამის ალბათობა ტოლია ამ ხდომილობათა ალბათობათა ჯამისა:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{3.2.1.}$$

დავამტკიცოთ ალბათობათა შეკრების თეორემა შემთხვევათა სქემისათვის.

დავუშვათ ცდის შესაძლო შედეგები დაიყვანება შემთხვევათა ერთობლიობამდე, რომელთაც თვალსაჩინოებისათვის გამოვსახავთ n წერტილების სახით:

$$\underbrace{\underbrace{m\sim A}\qquad\qquad\underbrace{k\sim B}}_{n}$$

დავუშვათ რომ ამ შემთხვევებისაგან m ხელსაყრელია A ხდომილობისათვის. ხოლო k—B ხდომილობისთვის. მაშინ

$$P(A)=\frac{m}{n}; \qquad P(B)=\frac{k}{n}.$$

ვინაიდან A და B ხდომილობანი შეუთავსებია, ამიტომ არ არსებობს ისეთი შემთხვევები, რომლებიც ხელსაყრელია ერთად A და B ხდომილობებისათვის. მაშასადამე $A+B$ ხდომილობისათვის ხელსაყრელია $m+k$ შემთხვევა და

$$P(A+B)=\frac{m+k}{n}.$$

მიღებულ გამოსახულებებს ჩავსვამთ რა (3.2.1)ფორმულაში, მივიღებთ იგივეობას. თეორემა დამტკიცებულია.

განვაზოგადოთ შეკრების თეორემა სამი ხდომილობის შემთხვევისათვის. აღვნიშნავთ რა $A+B$ ხდომილობას D ასოთი და შევუერთებთ რა კიდევ ერთ C ხდომილობას, ადვილად დავამტკიცებთ რომ

$$P(A+B+C)=P(D+C)=P(D)+P(C)=$$
$$=P(A+B)+P(C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

ცხადია, რომ სრული ინდუქციის მეთოდით შესაძლოა განვაზოგადოთ შეკრების თეორემა უთავსებადი ხდომილობათა ნებისმიერი რიცხვი-

სათვის. მართლაც, დავუშვათ, რომ იგი მართებულია n ხდომილობისათვის.

$$A_1, \ A_2, \ldots A_n$$

და დავამტკიცოთ, რომ იგი მართებული იქნება $n+1$ ხდომილობისათვის:

$$A_1, \ A_2, \ldots A_n, \ A_{n+1}.$$

აღვნიშნოთ:

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=C.$$

გვაქვს:

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n+A_{n+1})=P(C+A_{n+1})=P(C)+P(A_{n+1})$$

მაგრამ ვინაიდან n ხდომილობისათვის თეორემას უკვე დამტკიცებულად ვთვლით

$$P(C)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

საიდანაც:

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n+A_{n+1})=$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+P(A_{n+1}),$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამგვარად, ალბათობათა შეკრების თეორემა გამოიყენება შეუთავსებადი ხდომილობათა ნებისმიერ რიცხვისათვის. იგი მოხერხებულია ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{3.2.2}$$

აღვნიშნოთ შედეგები, რომლებიც გამომდინარეობენ ალბათობათა შეკრების თეორემიდან.

შედეგი 1. **თუ $A_1, A_2 \ldots, A_n$ ხდომილობანი ქმნიან შეუთავსებ ხდომილობათა სრულ ჯგუფს, მაშინ მათი ალბათობათა ჯამი ერთის ტოლია:**

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვინაიდან ხდომილობანი $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ჰქმნიან სრულ ჯგუფს, ამიტომ ერთი რომელიმე მათგანის მოხდენა აუცილებელი ხდომილობაა.

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1.$$

ვინაიდან $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — შეუთავსები ხდომილობებია, ამიტომ მათ მიმართ მართებულია ალბათობათა შეკრების თეორემა

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

საიდანაც

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1. \quad \text{რ. დ. გ.}$$

მანამდე სანამ გამოვიყვანდეთ შეკრების თეორემის მეორე შედეგს, განვსაზღვროთ ცნება „მოპირდაპირე ხდომილობათა“ შესახებ.

მ ო პ ი რ დ ა პ ი რ ე   ხ დ ო მ ი ლ ო ბ ა ნ ი ეწოდება ორ შეუთავსებ ხდომილობას, რომლებიც ქმნიან სრულ ჯგუფს.

ხდომილობა, რომელიც საპირისპიროა A ხდომილობისა, მიღებულია აღვნიშნოთ $\bar{A}$-ით. მოპირდაპირე ხდომილობათა მაგალითები.

1) A — მოხვედრება გასროლისას,
   $\bar{A}$ — აცდენა გასროლისას,
2) B — მონეტის ასროლისას ღერბის დავარდნა,
   $\bar{B}$ — მონეტის ასროლისას ციფრის დავარდნა;
3) C — ტექნიკური სისტემის ყველა ელემენტის უმტყუნებელი მუშაობა;
   $\bar{C}$ — მტყუნება ერთ-ერთი ელემენტის მაინც;
4) D — ნაკეთობათა საკონტროლო პარტიაში აღმოჩენა არანაკლებ ორი წუნდებული პროდუქციისა;
   $\bar{D}$ — აღმოჩენა არაუმეტეს ერთი წუნდებული ნაკეთობის.

შ ე დ ე გ ი 2. **მოპირდაპირე ხდომილობების ალბათობათა ჯამი ერთის ტოლია:**

$$P(A)+P(\bar{A})=1.$$

ეს შედეგი პირველი შედეგის კერძო შემთხვევაა. იგი გამოყოფილია, რადგან ალბათობათა თეორიის პრაქტიკული გამოყენებისას განსაკუთრებით დიდი მნიშვნელობა აქვს. პრაქტიკაში ხშირად უფრო ადვილია მოპირდაპირე $\bar{A}$ ხდომილობის ალბათობის გამოთვლა, ვიდრე პირდაპირი A ხდომილობისა. ამ შემთხვევებში გამოთვლიან $P(\bar{A})$ და პოულობენ

$$P(A)=1-P(\bar{A}).$$

განვიხილოთ შეკრების თეორემის და მისი შედეგების გამოყენების რამდენიმე მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ლატარიაში 1000 ბილეთია, მათ შორის ერთ ბილეთს ხვდება მოგება 500 მან. 10 ბილეთს—თითოეულს 100 მანეთი, 50 ბილეთს მოგება ოც-ოცი მან. 100 ბილეთს — ხუთ-ხუთი მანეთი. დანარჩენ ბილეთებს მოგება არა აქვს. ვილაც ყიდულობს ერთ ბილეთს. მოინახოს ალბათობა არა ნაკლებ 20 მან. მოგებისა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ხდომილობანი:

A — მოგება არა ნაკლებ 20 მანეთისა,
A_1 — მოგება 20 მანეთისა,
A_2 — მოგება 100 მანეთისა,
A_3 — მოგება 500 მანეთისა,

ცხადია,

$$A=A_1+A_2+A_3.$$

ალბათობათა შეკრების თეორემის მიხედვით

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0{,}050+0{,}010+0{,}001=0{,}061.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.

წარმოებს ყუმბარების დაშენა საომარი მასალების 3 საწყობზე, რისთვისაც ვარდება ერთი ყუმბარა. პირველ საწყობზე მოხვედრების ალბათობა შეადგენს 0,01; მეორეზე 0,008; მესამეზე 0,025. ერთ რომელიმე საწყობზე მოხვედრისას სამივე ფეთქდება. გამოთვლილი იქნას ალბათობა იმისა, რომ საწყობები აფეთქებული იქნება.

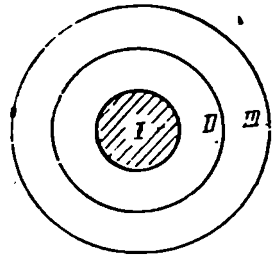
ა მ ო ხ ს ნ ა.

განვიხილოთ ხდომილობანი:

A — საწყობების აფეთქება,
A_1 — მოხვედრება I საწყობზე,
A_2 — მოხვედრება II საწყობზე,
A_3 — მოხვედრება III საწყობზე,

ცხადია,

$$A=A_1+A_2+A_3.$$



ნახ. 3.2.1

ვინაიდან ერთი ყუმბარის ჩამოგდებისას A_1, A_2, A_3 ალბათობანი შეუთავსებია, ამიტომ

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=$$
$$=0{,}01+0{,}008+0{,}025=0{,}043.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. წრიული სამიზნე (ნახ. 3.2.1) შესდგება სამი ზონისაგან: I, II, III. ერთი გასროლისას პირველ ზონაში მოხვედრების ალბათობაა 0,15, მეორეში — 0,23 მესამეში 0,17. გამოვთვალოთ აცდენის ალბათობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

აღვნიშნოთ: A არის აცდენა,

$\overline{A}$ — მოხვედრება.

მაშინ

$$\overline{A}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3},$$

სადაც $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ — მოხვედრებაა შესაბამისად I,II და III ზონაში

$$P(\overline{A})=P(\overline{A_1})+P(\overline{A_2})+P(\overline{A_3})=0{,}15+0{,}23+0{,}17=0{,}55,$$

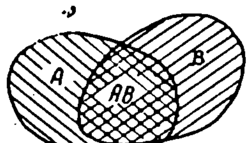
საიდანაც

$$P(A)=1-P(\overline{A})=0{,}45.$$

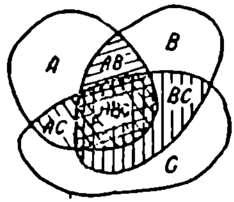
როგორც უკვე მითითებული იყო, ალბათობათა შეკრების (3.2.1) თეორემა სამართლიანი იყო მხოლოდ შეუთავსები ხდომილობებისათვის. იმ შემთხვევაში, როცა A და B ხდომილობანი შეთავსებადია, ამ ხდომილობათა ჯამის ალბათობა გამოისახება ფორმულით:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{3.2.3}$$

3.2.2. ნახაზის განხილვით შესაძლებელია თვალსაჩინოდ დავრწმუნდეთ, რომ 3.2.3 ფორმულა სამართლიანია.



ნახ. 3.2.2



ნახ. 3.2.3

ანალოგიურად სამი შეთავსებადი ხდომილობის ჯამის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-$$
$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

ამ ფორმულის სამართლიანობა ნათლად ჩანს გეომეტრიული ინტერპრეტაციიდან (ნახ. 3.2.3).

სრული ინდუქციის მეთოდით შეიძლება დავამტკიცოთ შეთავსებადი ხდომილობათა ნებისმიერი რიცხვის ჯამის ალბათობის საერთო ფორმულა:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i} P(A_i)-\sum_{i,\,j} P(A_i\,A_j)+\sum_{i,\,j,\,k} P(A_i\quad A_j\quad A_k)\ldots-$$
$$+(-1)^{(n-1)}P(A_1\quad A_2\ldots\quad A_n) \tag{3.2.4}$$

სადაც ჯამები ვრცელდებიან ინდექსთა სხვადასხვა მნიშვნელობებზე i, i, j, i, j, k: და ა. შ.

(3.2.4) ფორმულა გამოსახავს ხდომილობათა ნებისმიერი რიცხვის ჯამის ალბათობას თითო-თითოდ, ორ-ორად, სამ-სამად და ა. შ.

ალბათობების საშუალებით ანალოგიური ფორმულა შეიძლება

ხდომილობათა ნამრავლისათვის დაიწეროს. მართლაც, 3.2.2 ნახ-დან უშუალოდ ცხადია, რომ

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B). \qquad (3.2.5)$$

3.2.3 ნახ-დან ჩანს, რომ

$$P(ABC)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A+B)-P(A+C)-P\ (B+C)+ +P\ (A+B+C). \qquad (3.2.6)$$

საერთო ფორმულას, რომელიც გამოსახავს ხდომილობათა ნებისმიერი რიცხვის ნამრავლის ალბათობას ამ ხდომილობათა ჯამის ალბათობით აღებულია თითო-თითოდ, ორ-ორად, სამ-სამად და ა. შ. შემდეგი სახე აქვს:

$$P(A_1A_2\dots A_n)=\sum_i P(A_i)-\sum_{i\,j} P(A_i+A_j)+ +\sum_{i,\,j,k} P(A_i+A_j+A_k)+\dots+(-1)^{n-1}\ P(A_1+\dots+A_n) \qquad (3.2.7)$$

(3.2.4) და (3.2.7) ტიპის ფორმულები პრაქტიკულად გამოიყენება სხვადასხვა გამოსახულებათა გარდაქმნისას, რომლებიც ხდომილობათა ჯამისა და ნამრავლის ალბათობებს შეიცავს.

ამოცანის სპეციფიკისაგან დამოკიდებულებით ზოგ შემთხვევაში უფრო მოხერხებულია ხდომილობათა მხოლოდ ჯამებით სარგებლობა, ხოლო სხვა შემთხვევებში მხოლოდ ხდომილობათა ნამრავლით. სწორედ ერთის მეორედ გარდასაქმნელად არსებობს ამდაგვარი ფორმულები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი

ტექნიკური მოწყობილობა შედგება სამი აგრეგატისაგან. ორი I-ტიპის A_1 და A_2 აგრეგატისაგან და ერთი მეორე ტიპის B აგრეგატისაგან. A_1 და A_2 აგრეგატები ერთი მეორეს ცვლიან: ერთ-ერთი მათგანის მტყუნებისას მეორეზე ავტომატური გადართვა ხდება. B ავტომატი არ არის დუბლირებული. იმისათვის, რომ მოწყობილობამ შეწყვიტოს მუშაობა (გვიმტყუნოს), საჭიროა, ერთდროულად გვიმტყუნოს ორივე A_1 და A_2 აგრეგატმა ანდა B აგრეგატმა. ამდაგვარად, მოწყობილობის მტყუნება — C ხდომილობა წარმოგვიდგება შემდეგი სახით:

$C=A_1A_2+B$, სადაც A_1 აგრეგატი A_1-ის მტყუნებაა, A_2 — აგრეგატი — A_2-ის, B აგრეგატი — B-სი.

საჭიროა C ხდომილობის ალბათობის გამოსახვა მხოლოდ ჯამის შემცველ ხდომილობათა ალბათობით და არა ელემენტარულ A_1A_2 და B ხდომილობათა ნამრავლით:

ა მ ო ხ ს ნ ა.

(3.2.3.) ფორმულიდან

$$P(C)=P(A_1A_2)+P(B)-P(A_1A_2B); \qquad (3.2.3)$$

(3.2.5) ფორმულიდან

$$P(A_1A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1+A_2)$$

(3.2.6) ფორმულით

$$P(A_1A_2B)=P(A_1)+P(A_2)+P(B)-P(A_1+A_2)-$$
$$-P(A_1+B)-P(A_2+B)+P(A_1+A_2+B).$$

ამ გამოსახულებების (3.2.8)-ში ჩასმით და შეკვეცით მივიღებთ:

$$P(C)=P(A_1+B)+P(A_2+B)-P(A_1+A_2+B).$$

3.3. ალბათობათა გამრავლების თეორემა

წინასწარ სანამ გადმოვცემდეთ ალბათობათა გამრავლების თეორემას, შემოვიტანოთ კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი ცნება: **ცნება დამოუკიდებელ და დამოკიდებულ ხდომილობათა შესახებ.** A ხდომილობას უწოდებენ *დამოუკიდებელს* B *ხდომილობისაგან*, თუკი A ხდომილობის ალბათობა არ არის დამოკიდებული იმაზე, B ხდომილობა მოხდა თუ არა.

A ხდომილობას ეწოდება *დამოკიდებული* B *ხდომილობისაგან*, თუკი A ხდომილობის ალბათობა იცვლება იმის და მიხედვით B ხდომილობა მოხდა თუ არა.

განვიხილოთ მაგალითები.

1) ორი მონეტის ასროლის ცდა; განიხილება ხდომილობანი;

A — ღერბის გამოჩენა I მონეტაზე,
B — ღერბის გამოჩენა II მონეტაზე.

მოცემულ შემთხვევაში A ხდომილობის ალბათობა არ არის დამოკიდებული იმაზე. მოხდა B ხდომილობა თუ არა;

A ხდომილობა *დამოუკიდებელია* B ხდომილობისაგან.

2) ურნაში ორი თეთრი და ერთი შავი ბურთულაა; ორი პიროვნება ურნიდან იღებს თითო ბურთულას: განვიხილოთ ხდომილობანი:

A — I პირთან თეთრი ბურთულის გამოჩენა,
B — II პირთან თეთრი ბურთულის გამოჩენა.

A ხდომილობის ალბათობა მანამდე, სანამ რაიმე ცნობილი იქნება B ხდომილობაზე $\frac{2}{3}$-ის ტოლია. თუ გახდა ცნობილი, რომ B ხდომილობა მოხდა, A ხდომილობის ალბათობა გახდება $\frac{1}{2}$, საიდანაც დავასკვნით რომ A ხდომილობა *დამოკიდებულია* B ხდომილობაზე.

A ხდომილობის ალბათობას, გამოთვლილს იმ პირობით, რომ B ხდომილობა მოხდა, ეწოდება A *ხდომილობის პირობითი ალბათობა* და აღინიშნება

$$P\ (A/B)\text{-თი.}$$

უკანასკნელი მაგალითის პირობებისათვის

$$P(A)=\frac{2}{3};\qquad P(A/B)=\frac{1}{2}.$$

A ხდომილობის B ხდომილობისაგან დამოუკიდებლობის პირობა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$P(A/B)=P(A)$$

ხოლო დამოკიდებულობის პირობა —

$$P(A/B)\neq P(A)$$

სახით ჩამოვაყალიბოთ.

გადავიდეთ ალბათობათა გამრავლების თეორემის ფორმულირებაზე და დამტკიცებაზე.

ალბათობათა გამრავლების თეორემის ფორმულირება ხდება შემდეგნაირად. ორი ხდომილობის ნამრავლის ალბათობა ტოლია ერთ-ერთი მათგანის ალბათობის ნამრავლისა მეორე ხდომილობის პირობით ალბათობაზე, რომელიც გამოთვლილია პირველის მოხდენის დროს:

$$P(AB)=P(A)P(B/A) \tag{3.3.1}$$

დავამტკიცოთ გამრავლების თეორემა შემთხვევათა სქემისათვის.

დავუშვათ ცდის შესაძლო შედეგები დაიყვანება შემთხვევებამდე, რომელსაც თვალსაჩინოებისათვის ხელახლა გამოვსახავთ n წერტილის სახით:

$$\overbrace{\qquad\qquad}^{k\sim B}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{m\sim A}$$

$$\overbrace{\qquad\qquad}^{l\sim AB}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n}$$

დავუშვათ რომ A ხდომილობის ხელისშემწყობია m შემთხვევა, ხოლო B ხდომილობისა k შემთხვევა. ვინაიდან A და B ხდომილობებს არ ვთვლიდით როგორც შეუთავსებს, ამიტომ საერთოდ არსებობენ შემთხვევები, რომლებიც ერთდროულად ხელსაყრელია როგორც A, ისე B ხდომილობისათვის. დავუშვათ, რომ ასეთი შემთხვევების რიცხვია l, მაშინ

$$P(AB)=\frac{l}{n};\qquad P(A)=\frac{m}{n}.$$

გამოვთვალოთ $P\ (B/A)$ ე. ი. B ხდომილობის პირობითი ალბათობა იმ პირობით რომ A ხდომილობა უკვე მოხდა.

თუ ცნობილია რომ A ხდომილობა უკვე მოხდა მაშინ, ადრე შესაძლო n შემთხვევიდან შესაძლო რჩება მხოლოდ ის m-ები, რომლებიც ხელს უწყობენ A ხდომილობას. მათ შორის l შემთხვევა ხელს უწყობს B ხდომილობას. მაშასადამე,

$$P(B/A)=\frac{l}{m}$$

ჩავსვამთ რა $P(AB)$, $P(A)$ და $P(B/A)$ გამოსახულებას (3. 3.1) ფორმულაში, მივიღებთ იგივეობას. თეორემა დამტკიცებულია.

ცხადია, გამრავლების თეორემის გამოყენებისას სრულებით არ აქვს მნიშვნელობა, თუ რომელ ხდომილობას ჩავთვლით პირველად A-ს თუ B-ს, ამიტომ გამრავლების თეორემა შეიძლება დავწეროთ შემდეგნაირად:

$$P(AB)=P(B)P(A/B)$$

აღვნიშნოთ გამრავლების თეორემიდან გამომდინარე შედეგები,.

I შედეგი. თუ A ხდომილობა არ არის დამოკიდებული B ხდომილობაზე, მაშინ აგრეთვე B ხდომილობა არ არის დამოკიდებული A ხდომილობაზე.

დამტკიცება. მოცემულია, რომ A ხდომილობა არ არის დამოკიდებული B-ზე, ე. ი.

$$P(A)=P(A/B) \tag{3.3.2}$$

უნდა დავამტკიცოთ, რომ B ხდომილობა არ არის დამოკიდებული A-ზე ე. ი.

$$P(B)=P(B/A).$$

დამტკიცებისას ვგულისხმობთ, რომ $P(A)\neq 0$.
ალბათობათა გამრავლების თეორემას დავწერთ ორი ფორმით:

$$P(AB)=P(A)P(B/A),$$
$$P(AB)=P(B)P(A/B),$$

საიდანაც

$$P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)$$

ანდა (3.3.2) პირობის თანახმად

$$P(A)P(B/A)=P(B)P(A) \tag{3.3.3}$$

გავყოთ (3.3 3) ტოლობის ორივე ნაწილი $P(A)$-ზე მივიღებთ:

$$P(B/A)=P(B)$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

I — შედეგიდან გამოდის, რომ ხდომილობათა დამოკიდებულება ანდა დამოუკიდებლობა *საურთიერთოა*. ამასთან დაკავშირებით შეიძლება მოვიყვანოთ დამოუკიდებელი ხდომილობების ახალი განმარტება.

ორ ხდომილობას ეწოდება დამოუკიდებელი, თუკი ერთ-ერთი მათგანის მოხდენა მეორის მოხდენის ალბათობას არ ცვლის.

ხდომილობათა დამოუკიდებლობის ცნება შეიძლება შემოვიტანოთ ხდომილობათა ნებისმიერი რიცხვის შემთხვევაში. რამდენიმე ხდომილობას ეწოდება დამოკიდებული, თუკი ნებისმიერი მათგანი დანარჩენთა ნებისმიერ ერთობლიობაზე არ არის დამოკიდებული.

II — *შედეგი. ორი დამოუკიდებელი ხდომილობის ნამრავლის ალბათობა ტოლია ამ ხდომილობათა ალბათობების ნამრავლისა.*

შედეგი უშუალოდ გამომდინარეობს დამოუკიდებელ ხდომილობათა განმარტებიდან.

ალბათობათა გამრავლების თეორემა შეიძლება განვაზოგადოთ ხდომილობათა ნებისმიერი რიცხვის შემთხვევისათვის; საერთო სახით თეორემა ფორმულირდება შემდეგნაირად:

რამდენიმე ხდომილობის ნამრავლის ალბათობა ტოლია ამ ხდომილობათა ალბათობების ნამრავლისა, თანაც ყოველი რიგით მომდევნო ხდომილობების ალბათობა გამოითვლება იმ პირობით, რომ ყველა წინა ხდომილობას ჰქონდა ადგილი

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3/A_1A_2)\ldots$$
$$\ldots P\ (A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}). \tag{3.3.4}$$

შეიძლება დამტკიცდეს იმავე სრული ინდუქციის მეთოდით.

დამოუკიდებელ ხდომილობათა შემთხვევისას თეორემა მარტივდება და ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\ P(A_2)\ldots P(A_n), \tag{3.3.5}$$

ე. ი. *დამოუკიდებელ ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა ტოლია ამ ხდომილობათა ალბათობების ნამრავლისა.*

გამრავლების ნიშნის გამოყენებით თეორემა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\ P(A_i). \tag{3.3.6}$$

განვიხილოთ ალბათობათა გამრავლების თეორემის გამოყენების მაგალითები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ურნაში 2 თეთრი და 3 შავი ბურთულაა. ურნიდან იღებენ ზედიზედ ორ ბურთულას.

მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბურთულა თეთრია.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

აღვნიშნოთ:

A — ორი თეთრი ბურთულის გამოჩენა.

თვით A ხდომილობა წარმოადგენს ორი ხდომილობის ნამრავლს:

$$A = A_1 A_2,$$

სადაც A_1 — თეთრი ბურთულის გამოჩენა I ამოღებისას,

A_2 — თეთრი ბურთულის გამოჩენა II ამოღებისას.

გამრავლების თეორემის მიხედვით ალბათობა

$$P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{2}{5} \quad \frac{1}{4} = 0,1.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. იგივე პირობებია, მაგრამ პირველი ამოღების შემდეგ ბურთულა უბრუნდება ურნას და ბურთულები ურნაში შეირევა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემულ შემთხვევაში ხდომილობანი A_1 და A_2 დამოუკიდებელნი არიან და

$$P(A) = P(A_1)P(A_2) = \frac{2}{5} \quad \frac{2}{5} = 0,16.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ხელსაწყო, რომელიც t დროის განმავლობაში მუშაობს, შედგება 3 კვანძისაგან, რომელთაგან თითოეულმა, ერთიმეორისაგან დამოუკიდებლად t დროში შეიძლება გვიმტყუნოს (გამოვიდნენ წყობიდან). მტყუნება თუნდაც ერთი კვანძისა იწვევს მთელი ხელსაწყოს მტყუნებას (წყობიდან გამოსვლას). t დროის განმავლობაში საიმედოობა (უმტყუნებლად მუშაობის ალბათობა) 1 კვანძისა $p_1 = 0,8$-ის ტოლია, მეორე კვანძისა $p_2 = 0,9$, მესამე კვანძისა $p_3 = 0,7$.

მოვნახოთ მთლიანად ხელსაწყოს საიმედოობა.

მ ო ხ ს ნ ა. აღვნიშნავთ რა:

A — ხელსაწყოს უმტყუნებელი მუშაობა,

A_1—I კვანძის უმტყუნებელი მუშაობა,

A_2—II კვანძის "

A_4—III კვანძის "

გვაქვს:

$$A = A_1 \; A_2 \; A_3,$$

საიდანაც დამოუკიდებელ ხდომილობათათვის გამრავლების თეორემის მიხედვით

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = p_1 p_2 p_3 = 0,504.$$

პრაქტიკაში იშვიათად გვხვდება ამოცანები, რომლებშიაც ალბათობათა მხოლოდ შეკრების ან მხოლოდ გამრავლების თეორემები უნდა გამოვიყენოთ. ჩვეულებრივ მოგვიხდება ორივე თეორემის ერთდროული გამოყენება. ამ დროს, როგორც წესი, ხდომილობა, რომლის ალბათობის განსაზღვრაც გვჭირდება, წარმოდგენილი უნდა იქნას როგორც ჯამი რამდენიმე შეუთავსები ხდომილობისა (მოცემული ხდომილობის ვარიანტებისა), რომელთაგან თითოეული თავის მხრივ ხდომილობათა ნამრავლია.

მ ა კ ა ლ ი თ ი 4. ერთი და იგივე სამიზნეზე წარმოებს სამი გასროლა. I, II და III გასროლისას მოხვედრის ალბათობა შესაბამისად ტოლია $p_1=0{,}4$; $p_2=0{,}5$; $p_3=0{,}7$. მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ ამ სამი გასროლის შედეგად მიზანში ზუსტად ერთი ნახვრეტი იქნება.

ა მ ო ხ ს ნ ა

განვიხილოთ A ხდომილობა — ზუსტად ერთი მოხვედრა მიზანში. ეს ხდომილობა შეიძლება განხორციელდეს რამდენიმე ხერხით, ე. ი. იშლება რამდენიმე შეუთავსებ ვარიანტად: შეიძლება იყოს მოხვედრა I-ლი გასროლისას, აცდენა—II და III-ისას; ანდა მოხვედრა II გასროლისას, აცდენა I და III გასროლისას; ანდა ბოლოს აცდენა I და II გასროლისას და მოხვედრა III გასროლისას. მაშასადამე,

$$A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3,$$

სადაც A_1, A_2, A_3 — მოხვედრაა I, II და III გასროლისას, $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ — აცდენა I, II და III გასროლისას.

ალბათობათა შეკრებისა და გამრავლების თეორემების, და აგრეთვე ურთიერთსაპირისპირო ხდომილობათა თვისებების გამოყენებით მოვნახავთ:

$$P(A)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=$$
$$=0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}36.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5.

წინა მაგალითის პირობებში მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ მიზანში იქნება ერთი ნახვრეტი მაინც.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

განვიხილოთ B ხდომილობა—მიზანში, თუნდაც ერთი მოხვედრა. წინა მაგალითში გამოყენებული ხერხებით და იგივე აღნიშვნებით. შეიძლება B ხდომილობა წარმოვიდგინოთ უმთავრესად ვარიანტთა ჯამის სახით:

$$B=A_1A_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3,$$

მოვნახოთ თითოეული ვარიანტის ალბათობა გამრავლების თეორემის საშუალებით და ყველა ეს ალბათობანი შევკრიბოთ. ოღონდ ამოცანის ამოხსნის ასეთი გზა ძლიერ რთულია; აქ მიზანშეწონილია პირდაპირი B ხდომილობიდან გადავიდეთ საპირისპიროზე:

$\overline{B}$ — არც ერთი მოხვედრება მიზანში,
ცხადია,

$$\overline{B}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$$

გამრავლების თეორემის მიხედვით

$$P(\overline{B})=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3=0{,}09$$

საიდანაც

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0{,}09=0{,}91.$$

უკანასკნელ მაგალითში ილუსტრირებულია ალბათობათა თეორიაში მოპირისპირე ხდომილობებზე გადასვლის მიზანშეწონილობის პრინციპი. იგი შეიძლება ფორმულირებული იქნას შემდეგნაირად:

თ უ მ ო პ ი რ დ ა პ ი რ ე ხ დ ო მ ი ლ ო ბ ა ი შ ლ ე ბ ა ვ ა რ ი ა ნ ტ ე ბ ი ს ნ ა კ ლ ე ბ რ ა ო დ ე ნ ო ბ ა დ, ვ ი ნ ე მ პ ი რ დ ა პ ი რ ი ხ დ ო მ ი ლ ო ბ ა, მ ა შ ი ნ ა ლ ბ ა თ ო ბ ა თ ა გ ა მ ო თ ვ ლ ი ს ა ს ა ზ რ ი ა ქ ვ ს მ ო პ ი რ დ ა პ ი რ ე ხ დ ო მ ი ლ ო ბ ა ზ ე გ ა დ ა ს ვ ლ ა ს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. წარმოებს ბრძოლა („დუელი") ორ A და B მონაწილეს (საფრენ აპარატებს, ტანკებს, ხომალდებს,) შორის. A-ს მხარეზე მარაგშია ორი გასროლა, ხოლო B-ს მხარეზე—ერთი. სროლას იწყებს A: ის ახდენს B-ს დაზიანებას 0,2 ალბათობით. თუ B არ არის დაზიანებული, იგი მოწინააღმდეგეს პასუხობს გასროლით და მას 0,3 ალბათობით აზიანებს. თუ A ამ გასროლით არ არის დაზიანებული, მაშინ იგი B-კენ ახდენს თავის უკანასკნელ გასროლას და აზიანებს 0,4 ალბათობით. მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ ბრძოლაში დაზიანებული იქნება:

ა) A მონაწილე, ბ) B მონაწილე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილავთ ხდომილობას:

A—A მონაწილის დაზიანება,
B—B მონაწილის დაზიანება.

A ხდომილობის შესრულებისათვის (მოხდენისათვის) ორი ხდომილობის შეთავსებადობაა (გამრავლებაა) საჭირო: 1) A-მ ვერ დააზიანოსB პირველი გასროლით, და 2) B დააზიანოს A თავისი საპასუხო გასროლისას.

ალბათობათა გამრავლების თეორემის მიხედვით მივიღებთ:

$$P(A)=0,8\cdot 0,3=0,24.$$

გადავდივართ B ხდომილობაზე. ცხადია, იგი შედგება ორი შეუთავსები ვარიანტებისაგან:

$$B=B_1+B_2$$

სადაც B_1—B მონაწილის დამარცხებაა პირველი გასროლით A-ს მიერ.

B_2—B მონაწილის დამარცხებაა მეორე გასროლით A-ს მიერ. ალბათობათა შეკრების თეორემის მიხედვით

$$P(B)=P(B_1)+P(B_2)$$

პირობის მიხედვით $P(B_1)=0,2$. რაც შეეხება B_2 ხდომილობას, იგი წარმოადგენს სამი ხდომილობის შეთავსებას (ნამრავლს), სახელდობრ:

1) A მხრიდან პირველი გასროლით არ უნდა დამარცხდეს B;
2) B მხრიდან საპასუხო გასროლით არ უნდა დამარცხდეს A;
3) უკანასკნელმა (მეორე) გასროლამ A-ს მხრიდან უნდა დაამარცხოს B. ალბათობათა გამრავლების თეორემის მიხედვით

$$P(B_2)=0,8\cdot 0,7\cdot 0,4=0,224,$$

საიდანაც $P(B)=0,2+0,224=0,424$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. სამიზნე, რომელზედაც ხდება სროლა, შედგება სამი სხვადასხვა ნაწილისაგან. სამიზნის დასაზიანებლად საკმარისია ერთი მოხვედრა I ნაწილში, ან ორი მოხვედრა II-ში, ანდა სამი მოხვედრა III-ში. თუ ჭურვი მოხვდა მიზანს, მაშინ ალბათობა ამა თუ იმ ნაწილში მოხვედრისა პროპორციულია ამ ნაწილის ფართისა. სროლის მიმართულების მართობულ სიბრტყეზე, სამიზნის გეგმილზე, I, II და III ნაწილები იკავებენ შეფარდებით ფართობებს 0,1., 0,2 და 0,7. ცნობილია, რომ მიზანს მოხვდა ზუსტად ორი ჭურვი. მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე დაზიანებული იქნება.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

აღვნიშნოთ A-თი სამიზნის დაზიანება; $P(A/2)$—პირობითი ალბათობაა სამიზნის დაზიანებისა იმ პირობით, რომ მას მოხვდა ზუსტად ორი ჭურვი. ორმა მოხვედრილმა ჭურვმა მიზანი შეიძლება დააზიანოს ორი ვარიანტით: თუნდაც ერთი მათგანი მოხვდება პირველ ნაწილს, ანდა ორივე ჭურვი მოხვდება II-ს. ვარიანტები შეუთავსებია, რად-

გან მიზანს მოხვდა მხოლოდ ორი ჭურვი; ამიტომ შეიძლება შეკრების თეორემის გამოყენება. ალბათობა იმისა, რომ თუნდაც ერთი ჭურვი ხვდება I ნაწილს, შეიძლება გამოთვლილი იქნას საპირისპირო ხდომილობის საშუალებით (არც ერთი ორი ჭურვიდან არ ხვდება I ნაწილს) და ტოლია $1-0,9^2$. ალბათობა იმისა რომ ორივე ჭურვი მოხვდება II ნაწილში ტოლია $0,2^2$. მაშასადამე,

$$P(A|2)=1-0,9^2+0,2^2=0,23.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 8. წინა მაგალითის პირობებისათვის მოინახოს სამიზნის დაზიანების ალბათობა, თუკი ცნობილია, რომ ამას მოხვდა სამი ჭურვი.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

ამოვხსნათ ამოცანა ორი ხერხით; პირდაპირი და საპირისპირო ხდომილობათა საშუალებით.

პირდაპირი ხდომილობა — სამიზნის დაზიანება სამი მოხვედრისას იშლება ოთხ შეუთავსებ ვარიანტად.

A_1—I ნაწილში თუნდაც ერთი მოხვედრა,
A_2 — ორი მოხვედრა II ნაწილში და ერთი III-ში,
A_3 — სამი მოხვედრა II ნაწილში,
A_4 — სამი მოხვედრა III ნაწილში.

1 ვარიანტის ალბათობა წინა მაგალითის ანალოგიურად მოინახება:

$$P(A)=1-0,9^3=0,271.$$

მოვნახოთ II ვარიანტის ალბათობა. სამი მოხვედრილი ჭურვი შეიძლება განაწილდეს II—III ნაწილებში საჭიროების მიხედვით (ორი მეორეში და ერთი მესამეში) სამი ხერხით ($C_3^2=3$). მაშასადამე,

$$P(A_2)=3\cdot 0,2^2\cdot 0,7=0,084.$$

შემდეგ ვიპოვით:

$$P(A_3)=0,2^3=0,008,$$
$$P(A_4)=0,7^3=0,343.$$

აქედან

$$P(A/3)=0,271+0,084+0,008+0,343=0,706.$$

ამოცანა უფრო მარტივად წყდება საპირისპირო ხდომილობაზე გადასვლით — სამი მოხვედრისას მიზნის დაუზიანებლობა. ეს ხდომილობა შეიძლება განხორციელდეს მხოლოდ ერთი ხერხით: თუ ორი ჭურვი სამიდან მოხვდება მესამე ნაწილში, ხოლო ერთი — II-ში. ასეთი კომბინაცია შეიძლება იყოს სამი ($C_3^2=3$), მაშასადამე,

$$P(\overline{A}|3)=3\cdot 0,7^2\cdot 0,2=0,294,$$

საიდანაც

$$P(A|3)=1-0,294=0,706.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 9. მონეტის ასროლა ხდება 6-ჯერ. მოვნახოთ ალბათობა იმისა. რომ დავარდება უფრო მეტი ღერბი, ვინემ ციფრი.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

ჩვენთვის საინტერესო A ხდომილობის მოსანახავად (რომ დავარდება უფრო მეტი ღერბი, ვინემ ციფრი) ,შეიძლება ჩამოვთვალოთ მისი ყველა შესაძლო ვარიანტი, მაგალითად:

A_1 — დავარდება 6 ღერბი და არც ერთი ციფრი,
A_2 — დავარდება 5 ღერბი და ერთი ციფრი და ა. შ.

მაგრამ უფრო მარტივი იქნება მეორე ხერხის გამოყენება. ჩამოვთვალოთ ცდის ყველა შესაძლო შედეგი:

A_1 — დავარდება მეტი ლერბი, ვინემ ციფრი,

B — დავარდება მეტი ციფრი, ვინემ ლერბი,

C — დავარდება ციფრებისა და ლერბების ერთნაირი რაოდენობა.

A, B, C ხდომილობანი შეუთავსებია და ქმნიან სრულ ჯგუფს. მაშასადამე,

$$P(A)+P(B)+P(C)=1.$$

ასე რომ ამოცანა სიმეტრიულია „ლერბისა" და „ციფრის" მიმართ,

$$P(A)=P(B),$$

საიდანაც

$$2P(A)+P(C)=1$$

და

$$P(A)=\frac{1-P(C)}{2}.$$

მოვნახოთ C ხდომილობის ალბათობა, რომელიც არის მონეტის 6 ასროლისას ზუსტად 3 ლერბის დავარდნა (რაც ნიშნავს, ზუსტად 3 ციფრი). ხდომილობის ნებისმიერი ვარიანტის ალბათობა (მაგ. მიმდევრობა ლ, ც,ლ,ლ,ც,ც 6 ასროლისას) ერთი და იგივეა და ტოლია $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ ასეთი კომბინაციათა რიცხვი ტოლია $C_6^3=20$ (იმ ხერხთა რიცხვი, რომლებითაც შეიძლება 6 ასროლიდან ამოვარჩიოთ 3, რომლებშიდაც გამოჩნდა ლერბი). მაშასადამე,

$$P(C)=\frac{20}{64}=\frac{5}{16};$$

აქედან

$$P(A)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{16}\right)=\frac{11}{32}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 10.

ხელსაწყო შედგება 4 კვანძისაგან: A_1, A_2, A_3, და A_4, ამავე დროს A_2 ახდენს A_1-ის დუბლირებას, ხოლო A_4 კვანძი ახდენს A_3 კვანძის დუბლირებას. ნებისმიერი ძირითადი კვანძის (A_1 ან A_3) მტყუნებისას ავტომატური გადართვა ხდება მადუბლირებელ კვანძზე. საიმედოობა (უმტყუნებლად მუშაობის ალბათობა) მოცემული დროის განმავლობაში თითეული კვანძისა შესაბამისად p_1, p_2, p_3, p_4 ტოლია. თითეული გადამრთველი მოწყობილობის საიმედოობა p-ს ტოლია. ყველა ელემენტი გამოდის წყობიდან ერთიმეორისაგან დამოუკიდებლად. განვსაზღვროთ ხელსაწყოს საიმედოობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

განვიხილოთ A_1 და A_2 კვანძების ერთობლიობა შესაბამისი გადამრთველი მოწყობილობით, როგორც ერთი „გამაერთიანებელი B კვანძი", ხოლო A_3-ისა A_4 კვანძების ერთობლიობა და შესაბამისი გადამრთველი მოწყობილობით როგორც გამაერთიანებელი C კვანძი. განვიხილოთ ხდომილობანი:

A — ხელსაწყოს უმტყუნებელი მუშაობა,

B — გამაერთიანებელი B კვანძის უმტყუნებელი მუშაობა,

C — გამაერთიანებელი C კვანძის უმტყუნებელი მუშაობა.

ცხადია,

$$A=BC$$

საიდანაც

$$P(A)=P(B)\ \ P(C).$$

მოენახოთ B ხდომილობის ალბათობა. იგი იმლება ორ ვარიანტად:
A_1 — წესიერად მუშაობდა A_1 კვანძი და A'_2—A_1 კვანძი მტყუნებას ახდენდა, მაგრამ გადამრთველი მოწყობილობა და A_2 კვანძი წესიერ მდგომარეობაში აღმოჩნდნენ.
გვაქვს:

$$P(B)=P(A_1)+P(A'_2)=p_1+(1-p_1)pp_2,$$

ანალოგიურად

$$P(C)=p_3+(1-p_3)pp_4,$$

საიდანაც

$$P(A)=[p_1+(1+p_1)pp_2]\ [p_3+(1-p_3)pp_4].$$

3.4. სრული ალბათობის ფორმულა

ალბათობათა შეკრების და ალბათობათა გამრავლების ძირითადი ორი თეორემის შედეგს წარმოადგენს ე. წ. სრული ალბათობის ფორმულა. დავუშვათ საჭიროა ალბათობის განსაზღვრა რომელიღაც A ხდომილობისა, რომელიც H_1, H_2,... H_n ხდომილობებიდან შესაძლოა მოხდეს ერთ-ერთთან, რომლებიც ქმნიან შეუთავსებ ხდომილობათა სრულ ჯგუფს. ამ ხდომილობებს ჰიპოთეზები დავარქვათ.
დავამტკიცოთ რომ ამ შემთხვევაში

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i), \qquad (3.4.1)$$

ე. ი. A ხდომილობის ალბათობა გამოითვლება როგორც ჯამი თითოეული ჰიპოთეზის ალბათობის ნამრავლისა, ამ ჰიპოთეზისას ხდომილობის ალბათობაზე.

(3.4.1) ფორმულა ატარებს სრული ალბათობის ფორმულის სახელწოდებას.

დამტკიცება.

ვინაიდან H_1, H_2,..., H_n ჰიპოთეზები ქმნიან სრულ ჯგუფს, ამიტომ A ხდომილობა შეიძლება მოხდეს ამ ჰიპოთეზებიდან რომელიღაც ერთთან კომბინაციაში:

$$A=H_1A+H_2A+\dots+H_nA.$$

ვინაიდან H_1, H_2,..., H_n ჰიპოთეზები შეუთავსებია, ამიტომ H_1A, H_2A,..., H_nA კომბინაციები აგრეთვე შეუთავსებია; მათ მიმართ შეკრების თეორემის გამოყენებით მივიღებთ:

$$P(A)=P(H_1A)+P(H_2A)+\dots+P(H_nA)=\sum_{i=1}^{n} P(H_iA).$$

H_iA ხდომილობის მიმართ გამრავლების თეორემის გამოყენებით მივიღებთ:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)$$

რ. დ. გ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გვაქვს გარეგნულად ერთნაირი სამი ურნა; I ურნაში 2 თეთრი და ერთი შავი ბურთულაა; II-ში—3 თეთრი და ერთი შავი ბურთულა; III-ში—2 თეთრი და ორი შავი ბურთულა. ვილაც ალალბედზე ერთი ურნიდან იღებს ბურთულას. მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ ეს ბურთულა თეთრი იქნება.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

განვიხილოთ სამი ჰიპოთეზა:
H_1—I ურნის არჩევა,
H_2—II ურნის არჩევა,
H_3—III ურნის არჩევა

და ხდომილობა A იყოს თეთრი ბურთულის გამოჩენა, ვინაიდან ჰიპოთეზები, ამოცანის პირობის მიხედვით, ერთნაირად შესაძლოა.

$$p(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}.$$

A ხდომილობის პირობითი ალბათობები ამ ჰიპოთეზებში ტოლია:

$$P(A|H_1)=\frac{2}{3};\qquad P(A|H_2)=\frac{3}{4};\qquad P(A|H_3)=\frac{1}{2}.$$

სრული ალბათობის ფორმულის მიხედვით:

$$P(A)=\frac{1}{3}\quad\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\quad\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\quad\frac{1}{2}=\frac{23}{36}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. წარმოებს თვითმფრინავზე სამი ერთჯერადი გასროლა. პირველ გასროლაზე მოხვედრის ალაბათობა 0,4-ის ტოლია,. მეორე გასროლაზე 0,5, მესამე გასროლაზე — 0,7.

თვითმფრინავის მწყობრიდან გამოსვლა შესაძლოა სამი მოხვედრით; პირველი მოხვედრისას თვითმფრინავის მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობა 0,2-ია, მეორე მოხვედრისას — 0,6. მოვძებნოთ ალბათობა იმისა, რომ მესამედ გასროლის შედეგად თვითმფრინავი გამოყვანილი იქნება მწყობრიდან,

ა მ ო ხ ს ნ ა.

განვიხილოთ ოთხი ჰიპოთეზა:
H_0 — თვითმფრინავს არ მოხვდა არც ერთი ჭურვი,
H_1 — თვითმფრინავს მოხვდა ერთი ჭურვი,
H_2 — თვითმფრინავს მოხვდა ორი ჭურვი,
H_3 — თვითმფრინავს მოხვდა სამი ჭურვი.

ვისარგებლოთ შეკრებისა და გამრავლების თეორემებით, მოვნახოთ ამ ჰიპოთეზათა ალბათობები:

$$P(H_0)=0,6\cdot0,5\cdot0,3=0,09;$$
$$P(H_1)=0,4\cdot0,5\cdot0,3+0,6\cdot0,5\cdot0,3+0,6\cdot0,5\cdot0,7=0,36;$$
$$P(H_2)=0,6\cdot0,5\cdot0,7+0,4\cdot0,5\cdot0,7+0,4\cdot0,5\cdot0,3=0,41;$$
$$P(H_3)=0,4\cdot0,5\cdot0,7=0,14.$$

A ხდომილობის (თვითმფრინავის მწყობრიდან გამოსვლა) პირობითი ალბათობანი ამ ჰიპოთეზებისას ტოლია:

$$P(A|H_0)=0;\quad P(A|H_1)=0,2;\quad P(A|H_2)=0,6;\quad P(A|H_3)=1,0.$$

სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ:

$$P(A)=P(H_0)P(A|H_0)+P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)=$$
$$=0,36\cdot0,2+0,41\cdot0,6+0,14\cdot1,0=0,458.$$

აღვნიშნოთ რომ პირველი H_0 ჰიპოთეზა შეიძლება არ განვიხილოთ, რადგან სრული ალბათობის ფორმულაში შესაბამისი წევრი ნულად იქცევა. ჩვეულებრივ ასეც იქცევიან სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენებისას, როცა განიხილავენ შეუთავსებ ჰიპოთეზათა არა სრულ ჯგუფს, არამედ მათ შორის მხოლოდ იმათ, რომლის დროსაც მოცემული ხდომილობა შესაძლებელია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ძრავის მუშაობის კონტროლი 2 რეგულიატორით ხდება. განიხილება დროის გარკვეული t პერიოდი. რომლის განმავლობაში სასურველია ძრავის უმტყუნებელი მუშაობა. ორივე რეგულატორის შემთხვევაში ძრავის მტყუნების ალბათობა $q_{1,2}$-ის ტოლია, მათ შორის მხოლოდ ერთის მუშაობისას — q_1 ალბათობის, მხოლოდ მეორის მუშაობისას — q_2 ალბათობის. ორივე რეგულატორის მტყუნებისას — q_0 ალბათობისა. რეგულატორებიდან პირველს აქვს საიმედოობა P_1, მეორეს — P_2. ელემენტები გამოდიან წყობიდან ერთი მეორისაგან დამოუკიდებლად. მოვნახოთ ძრავის სრული საიმედოობის (უმტყუნებული მუშაობის) ალბათობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

განვიხილოთ ჰიპოთეზები:

$H_{1,2}$ — მუშაობს ორივე რეგულიატორი;
H_1 — მუშაობს მხოლოდ პირველი რეგულიატორი (II-რე წყობიდან გამოვიდა)
H_2 — მუშაობს მხოლოდ მეორე რეგულიატორი (I-ლი წყობიდან გამოვიდა);
H_0 — ორივე რეგულიატორი წყობიდან გამოვიდა
და A ხდომილობა — ძრავის უმტყუნებელი მუშაობა.
ჰიპოთეზათა ალბათობანი ტოლია:

$$P(H_{1,2})=P_1P_2;\quad P(H_1)=P_1(1-P_2);$$
$$P(H_2)=P_2(1-P_1);\quad P(H_0)=(1-P_1)\ (1-P_2).$$

A ხდომილობის პირობითი ალბათობანი ამ ჰიპოტეზებისას მოცემულია:

$$P(A|H_{1,2})=1-q_{1,2};\quad P(A|H_1)=1-q_1;\quad P(A|H_2)=1-q_2;$$
$$P(A|H_0)=1-q_0.$$

სრული ალბათობის ფორმულით მივიღებთ:

$$P(A)=P_1P_2(1-q_{1,2})+P_1(1-P_2)\ (1-q_1)+$$
$$+P_2(1-P_1)\ (1-q_2)+(1-P_1)\ (1-P_2)\ (1-q_0).$$

გამრავლების თეორემის და სრული ალბათობის ფორმულის შედეგს წარმოადგენს ე. წ. ჰიპოთეზების თეორემა, ანუ ბაიესის ფორმულა. დავსვათ შემდეგი ამოცანა.

გვაქვს $H_1, H_2, \dots, H_n$ შეუთავსები ჰიპოთეზების სრული ჯგუფი. ცდამდე ცნობილია ამ ჰიპოთეზების შესაბამისი $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ ალბათობანი. ჩატარებულია ცდა, რომლის შედეგად შემჩნეულია რომელიღაც A ხდომილობა. ისმის კითხვა, როგორ შეიცვლება ჰიპოთეზების ალბათობანი ამ ხდომილობის გამოჩენასთან დაკავშირებით?

აქ არსებითად ლაპარაკია იმაზე, რომ პირობით $P(H_i/A)$ ალბათობა თითოეული ჰიპოთეზისათვის მონახული იქნას.

გამრავლების თეორემიდან გვაქვს:

$$P(AH_i)=P(A)P(H_i/A)=P(H_i)P(A/H_i) \quad (i=1,2,\dots,n),$$

ანდა მარცხენა ნაწილს თუ უგულვებელვყოფთ

$$P(A)P(H_i/A)=P(H_i)P(A/H_i) \qquad (i=1,2,\dots,n).$$

საიდანაც

$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)(PA|H_i)}{P(A)} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

თუ $P(A)$ ალბათობას სრული ალბათობის ფორმულით (3.4.1) გამოვსახავთ მივიღებთ:

$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)} \quad (i=1,2,\cdots,n). \tag{3.5.1}$$

ამ ფორმულას **ბაიესის ფორმულა** ანდა **ჰიპოთეზების თეორემა** ეწოდება.

მაგალითი 1. ხელსაწყო შეიძლება აიკრიბოს მაღალხარისხოვანი და ჩვეულებრივი ხარისხის დეტალებისაგან; საერთოდ ხელსაწყოთა 40% იკრიბება მაღალხარისხოვანი დეტალებისაგან, თუ ხელსაწყო აკრებილია მაღალხარისხოვანი დეტალებისაგან, მისი საიმედოობა (უმტყუნარი მუშაობის ალბათობა) t დროის განმავლობაში 0,95-ის ტოლია; თუ ჩვეულებრივი ხარისხის დეტალებისაგან არის აკრებილი მაშინ მისი საიმედოობა 0,7-ის ტოლია. ხელსაწყო იცდებოდა t დროის განმავლობაში და მუშაობდა უმტყუნებლად. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ იგი აწყობილია მაღალხარისხოვანი დეტალებისაგან.

ამოხსნა. შესაძლოა ორი ჰიპოთეზა:

H_1 — ხელსაწყო აწყობილია მაღალხარისხოვანი დეტალებისაგან,

H_2 — ხელსაწყო აწყობილია ჩვეულებრივი ხარისხის დეტალებისაგან. ცდამდე მათი ალბათობანი ტოლია:

$$P(H_1)=0,4; \quad P(H_2)=0,6.$$

ცდის შედეგად შემჩნეულია, რომ მოხდა A ხდომილობა — ხელსაწყო უმტყუნებლად მუშაობდა t დროის განმავლობაში.

ამ ხდომილობის პირობითი ალბათობანი H_1 და H_2 ჰიპოთეზებისას ტოლია:

$$P(A|H_1)=0,95; \quad P(A|H_2)=0,7.$$

(3.5.1) ფორმულის მიხედვით ვიპოვით H_1 ჰიპოთეზის ალბათობას. ცდის შემდეგ:

$$P(H_1A)=\frac{0,4\cdot 0,95}{0,4\cdot 0,95+0,6\cdot 0,6}=0,475.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ორი მსროლელი ერთი მეორისაგან დამოუკიდებლად ერთი მეორის მიყოლებით ერთი სამიზნისაკენ აწარმოებს სროლას. სამიზნეში მოხვედრის ალბათობა პირველი მსროლელისათვის არის 0,8 და მეორისათვის 0,4. სროლების შემდეგ სამიზნეში აღმოჩენილი იქნა ერთი მონახვედრი. მოიძებნოს ალბათობა იმისა, რომ ეს მონახვედრი ეკუთვნის პირველ მსროლელს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცდამდე შესაძლოა შემდეგი ჰიპოთეზები:

H_1 — ვერც პირველი და ვერც მეორე მსროლელი ვერ ახვედრებს;
H_2 — ორივე მსროლელი ახვედრებს;
H_3—I მსროლელი ახვედრებს, მეორე ვერ ახვედრებს;
H_4—I ვერ ახვედრებს, II ახვედრებს.

ამ ჰიპოთეზათა ალბათობანია:

$$P(H_1)=0,2\cdot 0,6=0,12;$$
$$P(H_2)=0,8\cdot 0,4=0,32;$$
$$P(H_3)=0,8\cdot 0,6=0,48;$$
$$P(H_4)=0,2\cdot 0,4=0,08.$$

დაკვირვებული A ხდომილობის პირობითი ალბათობანი ამ ჰიპოთეზებისა ტოლია:

$$P(A|H_1)=0; \quad P(A|H_2)=0; \quad P(A|H_3)=1; \quad P(A|H_4)=1.$$

ცდის შემდეგ პირველი და მეორე ჰიპოთეზები შეუძლებელია, ხოლო ჰიპოთეზების ალბათობანი იქნება:

$$P(H_3|A)=\frac{0,48\cdot 1}{0,48\cdot 1+0,08\cdot 1}=\frac{6}{7};$$

$$P(H_4|A)=\frac{0,08\cdot 1}{0,48\cdot 1+0,08\cdot 1}=\frac{1}{7}.$$

მაშასადამე, ალბათობა იმისა, რომ მონახვედრი ეკუთვნის პირველ მსროლელს, $\frac{6}{7}$-ის ტოლია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.

რომელიღაც ობიექტზე წარმოებს დაკვირვება ორი სათვალთვალო სადგურის დახმარებით. ობიექტი ერთიდან მეორეში გადასვლით შეიძლება იმყოფებოდეს ორ სხვადასხვა S_1 და S_2 მდებარეობაში. ხანგრძლივი პრაქტიკით დადგენილია, რომ დაახლოებით დროის 30% ობიექტი S_1 მდებარეობაშია, ხოლო 70%—S_2. მდებარეობაში სათვალთვალო N_1 სადგური გადასცემს მცდარ ცნობებს ყველა შემთხვევის დაახლოებით 2%-ში, ხოლო N_2 სადგური 8%-ში. დროის რომელიღაც მომენტში სათვალთვალო N_1 სად-

გურმა აცნობა ობიექტი S_1 მდებარეობაშია, ხოლო დაკავშირების N_2 სადგურმა: ობიექტი S_2 მდებარეობაშია. ისმის კითხვა: რომელ ცნობას უფრო დავუჯერებთ?

ამოხსნა.

ბუნებრივია უნდა დავუჯეროთ იმ ცნობას, რომლისათვისაც მეტია ალბათობა იმისა, რომ იგი ჭეშმარიტებას შეესაბამება. გამოვიყენოთ ბაიესის ფორმულა, ამისათვის ობიექტების მდებარეობაზე გავაკეთებთ ჰიპოთეზებს:

H_1 — ობიექტი S_1 მდებარეობაში იმყოფება,

H_2 — ობიექტი S_2 მდებარეობაში იმყოფება.

დაკვირვებული A ხდომილობა შემდეგია: N_1-მა სადგურმა გვაცნობა რომ ობიექტი იმყოფება S_1 მდებარეობაში. N_2-მა სადგურმა—რომ ობიექტი S_2 მდებარეობაშია. ცდამდე ჰიპოთეზათა ალბათობანია

$$P(H_1)=0,3; \qquad P(H_2)=0,7.$$

ამ ჰიპოთეზებისას მოვნახოთ დაკვირვებული A ხდომილობის პირობითი ალბათობანი. H_1 ჰიპოთეზისას, რომ მოხდეს A ხდომილობა საჭიროა, რომ I სადგურმა გადასცეს სწორი ცნობა ხოლო II მცდარი:

$$P(A|H_1)=0,98\cdot0,08=0,0784$$

ანალოგიურად $P(A|H_2)=0,92\cdot0,02=0,0184$.

ვიყენებთ რა ბაიესის ფორმულას, ვპოულობთ ალბათობას იმისას, რომ ობიექტის ჭეშმარიტი S_1 მდგომარეობა:

$$P(H_1|A)=\frac{0,3\cdot0,0784}{0,3\cdot0,0784+0,7\cdot0,0184}\approx0,645 \text{ ე. ი. ორი}$$

გადაცემულ ცნობიდან სიმართლესთან უფრო ახლოსაა პირველი სადგურის ცნობა.

IV თავი

ცდების განმეორება

4.1. კერძო თეორემა ცდების განმეორებაზე

ალბათობათა თეორიის პრაქტიკული გამოყენებისას ხშირად გვხვდება ამოცანები, რომლებშიაც ერთი და იგივე ცდა ანდა ანალოგიური ცდები მრავალჯერ მეორდება. თითოეული ცდის შედეგად შეიძლება მოხდეს ან არ მოხდეს რომელიღაც A ხდომილობა. ჩვენ გვაინტერესებს არა შედეგი ყოველი ცალკეული ცდისა, არამედ A ხდომილობის მოხდენათა საერთო რიცხვი ცდათა სერიის შედეგად. მაგალითად, თუ წარმოებს გასროლათა ჯგუფი ერთი და იგივე სამიზნეზე, როგორც წესი გვაინტერესებს არა თითეული გასროლის შედეგი, არამედ მოხვედრათა საერთო რიცხვი. მსგავს ამოცანებში საჭიროა ცდების სერიების შედე-

გად ხდომილობის გამოჩენის ნებისმიერი რიცხვის ალბათობის განსაზღვრა. ამ თავში ასეთი ამოცანები განხილულია მარტივად, იმ შემთხვევაში, როცა ცდები დამოუკიდებელია.

ცდას ეწოდება დამოუკიდებელი, თუკი თითოეული ცდის ამა თუ იმ შესაძლო შედეგის ალბათობა არ არის დამოკიდებული იმაზე თუ როგორია სხვა ცდების შედეგი. მაგალითად, მონეტის მიმდევრობით რამდენიმე ასროლა თავისთავად დამოუკიდებელი ცდაა. დასტიდან მიმდევრობით კარტის რამდენჯერმე ამოღება დამოუკიდებელი ცდაა, მაშინ, როცა ამოღებული კარტი ყოველთვის უბრუნდება დასტას და კარტი შეირევა. წინააღმდეგ შემთხვევაში — ცდებია დამოკიდებული. რამდენიმე გასროლა წარმოადგენს დამოუკიდებელს, მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა დამიზნება ყოველი გასროლისას ხელახლა წარმოებს; იმ შემთხვევაში, როცა დამიზნება ხდება ერთხელ მთელი სროლის დაწყებისას ანდა უწყვეტად ხორციელდება სროლის პროცესში (ჯერებით სროლა, სერიებად ყუმბარების დაშენა) ყოველი გასროლა დამოკიდებული ცდაა.

დამოუკიდებელი ცდები შეიძლება წარმოებდეს ერთნაირ ანდა სხვადასხვა პირობებში. პირველ შემთხვევაში A ხდომილობის ალბათობა ყველა ცდისას ერთი და იგივეა. მეორე შემთხვევაში A ხდომილობის ალბათობა ცდიდან ცდამდე იცვლება. პირველ შემთხვევას მიეკუთვნება კ ე რ ძ ო თ ე ო რ ე მ ა, ხოლო მეორეს — ც დ ე ბ ი ს გ ა ნ მ ე ო რ ე ბ ა ზ ე მ ე ო რ ე თ ე ო რ ე მ ა.

როგორც უფრო ელემენტარული ვიწყებთ კერძო თეორემიდან. უპირველ ყოვლისა განვიხილავთ კონკრეტულ მაგალითს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. სამიზნეზე სწარმოებს სამი დამოუკიდებელი გასროლა, რომელთაგან მოხვედრის ალბათობა ყოველი გასროლისას P-ს ტოლია. მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ ამ სამი გასროლისას მივიღებთ ზუსტად ორ მოხვედრას.

ა მ ო ხ ს ნ ა: აღვნიშნოთ B_2-ით ხდომილობა, რომელიც არის ორი ჰურვის მიზანში მოხვედრება. ეს ხდომილობა შეიძლება მოხდეს სამი ხერხით:

1. მოხვედრა პირველი გასროლისას, მოხვედრა მეორე გასროლისას, აცდენა მესამისას;
2. მოხვედრა პირველი გასროლისას, აცდენა მეორისას, მოხვედრა მესამისას;
3. აცდენა პირველი გასროლისას; მოხვედრა მეორისას, მოხვედრა მესამისას.

მაშასადამე B_2 ხდომილობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ჯამი ხდომილობათა ნამრავლებისა:

$$B_2 = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3,$$

სადაც A_1, A_2, A_3 — მოხვედრებაა პირველ, მეორე, მესამე გასროლისას, ხოლო $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ — აცდენა პირველი, მეორე, მესამე გასროლისას.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ სამი ჩამოთვლილი ვარიანტი B_2 ხდომილობის მოხდენისა შეუთავსებია, ხოლო ნამრავლში შემავალი ხდომილობანი—დამოუკიდებელი,

შეკრებისა და გამრავლების თეორემების საშუალებით მივიღებთ:

$$P(B_2)=pp(1-p)+p(1-p)p+(1-p)pp,$$

ანდა თუ აღვნიშნავთ

$$1-p=q,$$

$$P(B_2)=3p^2q.$$

ანალოგიურად, ჩამოვთვლით რა ყველა ვარიანტს, რომლებშიც ჩვენთვის საინტერესო ხდომილობა მოხდება მოცემულ რიცხვჯერ, შეიძლება ამოვხსნათ შემდეგი საერთო ამოცანა.

წარმოებს n დამოუკიდებელი ცდა, რომელთაგან თითოეულში შეიძლება მოხდეს ან არ მოხდეს რომელიღაც A ხდომილობა: A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა თითოეულ ცდაში p-ს ტოლია, ხოლო არ მოხდენის ალბათობა $q=1-p$-ი. საჭიროა მოვნახოთ $P_{m,n}$ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობა n ცდისას მოხდება ზუსტად m-ჯერ. ეს ხდომილობა შეიძლება განხორციელდეს სხვადასხვა ხერხით. განვიხილოთ B_m ხდომილობა, რომელიც არის A ხდომილობის n ცდისას ზუსტად m-ჯერ მოხდენა.

დავშალოთ B_m ხდომილობა ხდომილობათა ჯამად; აღვნიშნოთ A_i-თ A ხდომილობის მოხდენა, ხოლო $\bar{A}_i$—A ხდომილობის არ მოხდენა i-იურ ცდაში.

ცხადია, ყოველი ვარიანტი (ჯამის თოთოეული წევრი) B_m ხდომილობის მოხდენისა უნდა შედგებოდეს A ხდომილობის m-ჯერ მოხდენისაგან და $n-m$-ჯერ არ მოხდენისაგან. ე. ი. A ხდომილობის m და $\bar{A}$ ხდომილობის $n-m$ სხვადასხვა ინდექსებით. ამგვარად.

$$B_m=A_1A_2\ldots A_m\bar{A}_{m+1}\ldots\bar{A}_n+\ldots$$
$$\ldots+A_1\bar{A}_2A_3\ldots\bar{A}_{n-1}A_n+\ldots$$
$$\ldots+\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_{n-m}A_{n-m+1}\ldots A_n,$$

რომლის ყოველ ნამრავლში A ხდომილობა უნდა შედიოდეს m-ჯერ, ხოლო $\bar{A}$ უნდა შედიოდეს $(n-m)$-ჯერ.

ამგვარი ყველა კომბინაციის რიცხვი C_n^m-ის ტოლია, ე. ი. იმ ხერხების რიცხვი, რომლებითაც შესაძლებელია n ცდიდან შევარჩიოთ m, რომლებშიაც მოხდა A ხდომილობა. თითოეული ასეთი კომბინაციის ალბათობა გ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ი ს თეორემის მიხედვით დამოუკიდებელ ხდომილობათათვის, p^mq^{n-m}-ის ტოლია.

ვინაიდან კომბინაციები ურთიერთ შორის შეუთავსებია. შეკრების თეორემის მიხედვით B_m ხდომილობის ალბათობა ტოლია:

$$P_{m,n}=\underbrace{p^m q^{n-m}+\cdots+p^m q^{n-m}}_{C_n^m\text{-ჯერ}}=C_n^m p^m q^{n-m}.$$

ამგვარად, ცდების განმეორებაზე შეგვიძლია კერძო თეორემის შემდეგი ფორმულირება:

თუ წარმოებს დამოუკიდებელი n ცდა, რომელთაგან თითოეულში ხდომილობის ალბათობა p-ს ტოლია, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ ხდომილობა მოხდება ზუსტად m-ჯერ გამოისახება ფორმულით

$$P_{m,n}=C_n^m p^m q^{n-m} \tag{4.1.1}$$

სადაც $q=1-p$.

(4.1.1) ფორმულა აღწერს იმას, თუ როგორ ნაწილდებიან რომელიღაც შემთხვევითი სიდიდის მოხდენის რიცხვის ალბათობანი მის შესაძლო მნიშვნელობებს შორის — A ხდომილობის მოხდენის რიცხვი.

იმასთან დაკავშირებით, რომ $P_{m,n}$ ალბათობანი თავისი ფორმით $(q+p)^n$ ბინომის დაშლის შედეგად მიღებული წევრებია, (4.1.1) სახის ალბათობათა განაწილებას ეწოდება ბინომალური განაწილება.

4.2. ზოგადი თეორემა ცდების განმეორებაზე

ცდების განმეორებაზე ზოგადი თეორემა ეხება იმ შემთხვევას, როცა ხდომილობის ალბათობა ყველა ცდაში ერთი და იგივეა.

პრაქტიკაში გხვდება უფრო რთული შემთხვევები, როცა ცდები წარმოებს არა ერთნაირ პირობებში და ხდომილობათა ალბათობანი ცდიდან ცდამდე იცვლებიან. მაგალითად, თუ წარმოებს მთელი რიგი გასროლები ცვალებად პირობებში (ვთქვათ, ცვალებადი სიხშირისას) მაშინ გასროლიდან გასროლამდე მოხვედრების ალბათობა მნიშვნელოვნად შეიცვლება. ასეთ პირობებში ხდომილობათა მოცემული რიცხვის მოხდენის ალბათობის გამოთვლის ხერხს ცდების განმეორების ზოგადი თეორემა იძლევა.

დავუშვათ ტარდება n დამოუკიდებელი ცდა, რომელთაგან თითოეულში შეიძლება მოხდეს ან არ მოხდეს A ხდომილობა და ამავე დროს A ხდომილობის i-ურ ცდაში მოხდენის ალბათობა p_i-ის ტოლია, ხოლო არ მოხდენის ალბათობა $q_i=1-P,i_i=n\ldots 1)$. საჭიროა მოვნახოთ $P_{m,n}$ ალბათობა იმისა, რომ n ცდის შედეგად A ხდომილობა მოხდება ზუსტად m-ჯერ. წინანდებურადვე აღვნიშნოთ B_m ხდომილობა, რომელიც A ხდომილობის n —ცდაში m-ჯერ მოხდენაა. ასევე წინანდე-

ბურადვე წარმოვიდგინოთ B_m, როგორც ელემენტარულ ხდომილობათა ჯამი:

$$B_m=A_1A_2\cdots A_m\overline{A}_{m+1}\cdots\overline{A}_n+\cdots$$
$$\cdots+A_1\overline{A}_2A_3\cdots\overline{A}_{n-1}A_n+\cdots$$
$$\cdots+\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-m}A_{n-m+1}\cdots A_n,$$

რომლის დროსაც ყოველ ნამრავლში A ხდომილობა შედის m -ჯერ, $\overline{A}$ ხდომილობა კი $n-m$-ჯერ. წინანდებურად ასეთი კომბინაციათა რიცხვი იქნება $C^m{}_n$. მაგრამ თვით კომბინაციები ურთიერთშორის არათანაბარალბათურია.

დამოუკიდებელი ხდომილობისათვის შეკრებისა და გამრავლების თეორემების გამოყენებით მივიღებთ:

$$P_{m,n}=p_1p_2\cdots p_mq_{m+1}\cdots q_n+\cdots$$
$$\cdots+p_1q_2p_3\cdots q_{n-1}p_n+\cdots$$
$$\cdots+q_1q_2\cdots q_{n-m}p_{n-m+1}\cdots p_n,$$

ე. ი. საძებნი ალბათობა ტოლია ყველა შესაძლო ნამრავლთა ჯამისა, რომლებშიც სხვადასხვა ინდექსიანი p ასო შედის m-ჯერ, ხოლო სხვადასხვა ინდექსიანი q ასო $n-m$-ჯერ.

იმისათვის, რომ სრულიად მექანიკურად შევადგინოთ ყველა შესაძლო ნამრავლი m ასოებიდან p და $(n-m)$ ასოდან q სხვადასხვა ინდექსებით, მიღებულია შემდეგი ფორმალური ხერხი. შევადგენთ n ბინომთა ნამრავლებს:

$$\varphi_n(z)=(q_1+p_1z)\quad(q_2+p_2z)\ldots\quad(q_n+p_nz)$$

ან მოკლედ

$$\varphi_n(z)=\prod_{i=1}^{n}(q_1+p_iz),$$

სადაც z —ნებისმიერი პარამეტრია.

დავისახოთ მიზნად მოვნახოთ ბინომთა ამ ნამრავლში z_m-ის კოეფიციენტი. ამისათვის გადავამრავლოთ ბინომები და მსგავსი წევრები შევაერთოთ. ცხადია ყოველი წევრს, რომელიც z_m-ს შეიცავს, კოეფიციენტებად ექნება რაღაც ინდექსებიანი p ასოს m ნამრავლი და q ასოს $n-m$ ნამრავლი. მსგავსი წევრების შეერთების შემდეგ z_m კოეფიციენტი იქნება ასეთივე ტიპის ყველა შესაძლო ნამრავლთა ჯამი.

მაშასადამე ამ კოეფიციენტის შედგენის ხერხი მთლიანად ემთხვევა $P_{m,n}$ ალბათობის გამოთვლის ხერხს ცდების განმეორების ამოცანაში.

$\varphi_n(z)$ ფუნქციას, რომლის z პარამეტრის ხარისხების მიხედვით დაშლა კოეფიციენტებად იძლევა $P_{m,n}$ ალბათობას, ეწოდება $P_{m,n}$ ალბათობათა მწარმოებელი (წარმომშობი) ფუნქციათა ანდა მარტივად მაწარმოებელი ფუნქცია. ვისარგებლებთ რა მწარმოებელი ფუნქციის ცნებით, ცდების განმეორების შესახებ თეორემის ფორმულირება შეიძლება შემდეგი სახით.

ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობა n დამოუკიდებელ ცდებში მოხდება m-ჯერ, ტოლია z_m-ის კოეფიციენტისა მწარმოებელი ფუნქციის გამოსახულებაში:

$$\varphi_n(z)=\prod_{i=1}^{n}(q_1+p_i z),$$

სადაც p_i A ხდომილობის მოხდენის ალბათობაა i-ურ ცდაში $q_i=1-p_i$.

ცდების განმეორებაზე ზემოთ მოყვანილი ზოგადი თეორემის ფორმულირება განსხვავებით კერძო თეორემისაგან, არ იძლევა ცხად გამოსახულებას $P_{m,n}$ ალბათობისათვის. ასეთი გამოსახულების დაწერა პრინციპში შეიძლება, მაგრამ იგი მეტად რთულია და მას არ მოვიყვანთ.

მაგრამ ასეთი ცხადი გამოსახულების გარეშე, ყოველ შემთხვევაში შეიძლება დაიწეროს ზოგადი თეორემა ცდების განმეორების შესახებ ერთი ფორმულის სახით:

$$\prod_{i=1}^{n}(q_1+p_i z)=\sum_{m=0}^{n}F_{m,n}z^m.$$

(4.2.1) ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარე წარმოადგენენ ერთსა და იგივე მწარმოებელ φ (z) ფუნქციას, მხოლოდ მარცხნიდან იგი დაწერილია ერთწევრის სახით, ხოლო მარჯვნიდან—მრავალწევრის სახით. მარცხნივ ფრჩხილების გახსნით მსგავსი წევრების შეკრებით მივიღებთ ყველა ალბათობას.

$$P_{0,n},\ P_{1,n}\dots\ P_{n,n}$$

როგორც კოეფიციენტები შესაბამისად z-ის ნულოვან, პირველ და ა.შ. ხარისხებში.

ცხადია ცდების განმეორებაზე კერძო თეორემა გამოდის ზოგადიდან, როცა

$$p_1=p_2=\dots=p_n=p,$$
$$q_1=q_2=\dots q_n=q.$$

ამ შემთხვევაში მწარმოებელი ფუნქცია იქცევა $(q+pz)$ ბინომის n-ურ ხარისხად:

$$\varphi_n(z)=(q+pz)^n.$$

თუ ამ გამოსახულებას ბინომის ფორმულის მიხედვით გავხსნით, მივიღებთ

$$(q+pz)^n=\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} z^m,$$

საიდანაც გამოდის (4.1.1) ფორმულა.

აღვნიშნოთ, რომ როგორც ზოგადად, ისე კერძო შემთხვევაში ყველა $P_{m,n}$ ალბათობათა ჯამი ერთის ტოლია:

$$\sum_{m=0}^{n} P_{m,n}=1. \qquad (4.2.2)$$

ეს უპირველეს ყოვლისა გამოდის იქედან, რომ $B_0, B_1, \ldots B_n$ ხდომილობანი ქმნიან შეუთავსებ ხდომილობათა სრულ ჯგუფს. ფორმალურად (4.2.2) ტოლობა შეიძლება მივიღოთ ზოგად (4.2.1) ფორმულაში $z=1$ დაშვებით.

მრავალ პრაქტიკულ შემთხვევაში, გარდა $P_{m,n}$ ალბათობისა (A ხდომილობის ზუსტად m მოხდენა), გვიხდება განვიხილოთ A ხდომილობის არა ნაკლებ m მოხდენის ალბათობა.

აღვნიშნოთ C_m ხდომილობა, რომელიც არის A ხდომილობის მოხდენა არა ნაკლებ m-ჯერ, ხოლო C_m ხდომილობის ალბათობა აღვნიშნოთ $R_{m,n}$-ით, ცხადია,

$$C_m=B_m+B_{m+1}+\dots+B_n,$$

საიდანაც შეკრების თეორემის მიხედვით

$$R_{m,n}=P_{m,n}+P_{n+1n}+\dots+P_{n,n}$$

ანდა მოკლედ

$$R_{m,n}=\sum_{i=m}^{n} P_{i,n}. \qquad (4.2.3)$$

$R_{m,n}$-ის გამოთვლისას ხშირად უფრო მოხერხებულია ვისარგებლოთ არა (4.2.3) ფორმულით, არამედ მოპირდაპირე ხდომილობით და $R_{m,n}$ ალბათობა გამოვთვალოთ შემდეგი ფორმულით:

$$R_{m,n}=1-\sum_{i=0}^{m-1} P_{i,n} \qquad (4.2.4)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.

წარმოებს 4 დამოუკიდებელი გასროლა ერთი და იმავე სამიზნეზე სხვადასხვა მანძილიდან; ამ გასროლებისას მოხვედრის ალბათობანი შესაბამისად ტოლია

$$p_1=0,1; \quad p_2=0,2; \quad p_3=0,3; \quad p_4=0,4.$$

ვიპოვოთ არცერთი, ერთი, ორი, სამი და ოთხი მოხვედრების ალბათობანი

ამოხსნა.

შევადგინოთ მწარმოებელი ფუნქცია:

$$\varphi_1(z)=\prod_{i=1}^{4}(q_i+p_iz)=$$
$$=(0{,}9+0{,}1z)\ (0{,}8+0{,}2\ z)\ (0{,}7+0{,}3z)\ (0{,}6+0{,}4z)=$$
$$=0{,}302+0{,}440z+0{,}215z^2+0{,}040z^3+0{,}002z^4,$$

საიდანაც

$$P_{0,4}=0{,}302;\quad P_{1,4}=0{,}440;\quad P_{2,4}=0{,}215;\ P_{4,3}=0{,}040;\ P_{4,4}=0{,}002.$$

მაგალითი 2.

წარმოებს ერთნაირ პირობებში 4 დამოუკიდებელი გასროლა, რომლის დროსაც მოხვედრების p ალბათობა წინა მაგალითის p_1, p_2, p_3, p_4 ალბათობათა საშუალოს ტოლია

$$p=\frac{1}{4}(p_1+p_2+p_3+p_4)=0{,}25.$$

მოვნახოთ

$$P_{0,4};\ P_{1,4};\ P_{2,4};\ P_{3,4};\ P_{4,4}\ \text{ალბათობანი.}$$

ამოხსნა.

(4.1.1) ფორმულის მიხედვით გვაქვს:

$$P_{0,4}=q^4=0{.}316;$$
$$P_{1,4}=C_4^1pq^3=0{,}421;$$
$$P_{2,4}=C_4^2p^2q^2=0{.}211;$$
$$P_{3,4}=C_4^3p^3q=0{.}047;$$
$$P_{4,4}=p^4=0{,}004.$$

მაგალითი 3. გვაქვს 5 სადგური, რომლებთანაც დამყარებულია კავშირი. ატმოსფერული დაბრკოლებათა გამო დრო და დრო კავშირი წყდება. სადგურების დაშორების გამო კავშირის შეწყვეტა ყოველ მათგანთან წარმოებს სხვებისაგან დამოკიდებელი ერთი და იგივე 0,2 ალბათობით. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ დროის მოცემულ მომენტში კავშირი ექნებათ არა უმეტეს ორ სადგურთან.

ამოხსნა. ხდომილობა, რომლის შესახებაც წარმოებს საუბარი, დაიყვანება იმაზე, რომ შეიძლება კავშირის დარღვევა არა ნაკლებ სამ სადგურს შორის. (4.2.3) ფორმულის მიხედვით მივიღებთ:

$$R_{3,5}=P_{3,5}+P_{4,5}+P_{5,5}=C_5^3\cdot0{.}2^3\cdot0{,}8^2+C_5^4\cdot0{.}2^4\cdot0{,}8+0{.}2^5=$$
$$=0{,}0512+0{,}0064+0{,}0003=0{,}0579.$$

მაგალითი 4.

რადიოსალოკაციო სადგურთა სისტემა დაკვირვებას აწარმოებს ობიექტების ჯგუფზე, რომელიც შედგება 10-ობიექტისაგან. ყოველი ობიექტი შეიძლება იყოს ერთი მეორისაგან დამოუკიდებლად დაკარგული 0,1 ალბათობით. მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ თუნდაც ერთი ობიექტთაგანი იქნება დაკარგული.

ამოხსნა.

თუნდაც ერთი ობიექტის დაკარგვის ალბათობა $R_{1,10}$ შეიძლება მოინახოს ფორმულით

$$R_{1,10}=P_{1,10}+P_{2,10}+\ldots+P_{10,10},$$

მაგრამ უფრო მარტივია საწინააღმდეგოს მიღების ალბათობით სარგებლობა, რომ არცერთი ობიექტი არაა დაკავებული და გამოვაკლოთ იგი ერთს

$$R_{1,10}=1-P_{0,10}=1-0{,}9^{10}\approx 0.65.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ხელსაწყო შედგება 8 ერთგვაროვანი ელემენტისაგან, მაგრამ შეუძლება იმუშაოს გამართულად, როცა მათგან არა ნაკლებ 6 ელემენტისა იქნება გამართული. მათგან თითოეული ხელსაწყო მუშაობის t დროში, მწყობრიდან სხვებისაგან დამოუკიდებლად გამოდის 0.2 ალბათობით. მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ ხელსაწყო გვიმტყუნებს t დროში.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

ხელსაწყოს მტყუნებისათვის საჭიროა 8 ელემენტისაგან მწყობრიდან არა ნაკლებ ორის გამოსვლა. (4.2.4) ფორმულით გვაქვს:

$$R_{2,8}=1-(P_{0,8}+P_{1,8})=1-(0{,}8^{8}+C^{1}_{8}\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^{7})\approx 0{,}497.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. თვითმფრინავიდან თვითმფრინავზე სწარმოებს 4 დამოუკიდებელი გასროლა. ყოველი გასროლისას მოხვედრის ალბათობა 0,3-ის ტოლია. თვითმფრინავის მწყობრიდან გამოსაყვანად (დასაზიანებლად) ყოველთვის საკმარისია 2 მოხვედრა; ერთი მოხვედრისას თვითმფრინავი ზიანდება 0,6-ის ტოლი ალბათობით. მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ თვითმფრინავი მწყობრიდან გამოყვანილი იქნება.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

ამოცანა ამოიხსნება სრული ალბათობის ფორმულით.

შესაძლოა განხილული იქნას შემდეგი ჰიპოთეზები:

H_1 — თვითმფრინავს მოხვდა 1 ჭურვი,
H_2 — თვითმფრინავს მოხვდა 2 ჭურვი,
H_3 — თვითმფრინავს მოხვდა 3 ჭურვი,
H_4 — თვითმფრინავს მოხვდა 4 ჭურვი და მოვნახოთ A ხდომილობის თვითმფრინავის დაზიანების-ალბათობა ამ ოთხი ჰიპოთეზების საშუალებით. გაცილებით მარტივია 2 ჰიპოთეზის განხილვა:

H_0 — თვითმფრინავს არ მოხვდა არცერთი ჭურვი,
H_1 — თვითმფრინავს მოხვდა 1 ჭურვი და გამოვთვალოთ $\overline{A}$ ხდომილობის თვითმფრინავის მწყობრიდან გამოუყვანლობის ალბათობა:

$$P(\overline{A})=P(H_0)P(\overline{A}|H_0)+P(H_1)P(\overline{A}|H_1).$$

გვაქვს:

$$P(H_0)=P_{0,4}=0{,}7^{4}=0{,}240;$$
$$P(H_1)=P_{1,4}=C^{1}_{4}\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^{3}=0{,}412;$$
$$P(\overline{A}|H_0)=1;$$
$$P(\overline{A}|H_1)=1-0{,}6=0{,}4.$$

მაშასადამე:

$$P(\overline{A})=0{,}240+0{,}412\cdot 0{,}4\approx 0{,}405,$$

საიდანაც:

$$P(A)=1-0{,}405=0{,}595.$$

V თავი

შემთხვევითი სიდიდეები და მათი განაწილების კანონები

5.1. განაწილების მწკრივი. განაწილების მრავალკუთხედი

განყოფილებაში, რომელშიც განხილულია ალბათობათა თეორიის ძირითადი ცნებები, უკვე შევიტანეთ განსახილველად **შემთხვევითი სიდიდის** მეტად მნიშვნელოვანი ცნება. აქ მოვახდენთ ამ ცნების შემდგომ განვითარებას და მივუთითებთ იმ ხერხებზე, რომელთა საშუალებით შეიძლება აღწერილი და დახასიათებულ იქნას შემთხვევითი სიდიდეები.

როგორც უკვე ზემოთ იყო ნათქვამი, შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება სიდიდეს, რომელსაც ცდის შედეგად შეუძლია მიიღოს ესა თუ ის მნიშვნელობა და სახელდობრ, თუ რომელი, წინასწარ არ არის ცნობილი.

შევთანხმდით, აგრეთვე გავარჩიოთ წყვეტილი (დისკრეტული) და უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეები. შესაძლო წყვეტილი სიდიდეების მნიშვნელობანი წინასწარ უნდა იქნას ჩამოთვლილი. უწყვეტ სიდიდეთა შესაძლო მნიშვნელობანი შეუძლებელია ჩამოთვლილ იქნას წინასწარ. ისინი უწყვეტად ავსებენ რომელიღაც შუალედს.

წყვეტილ შემთხვევით სიდიდეთა მაგალითები:

1) მონეტის სამჯერ ასროლისას ღერბის გამოჩენათა რიცხვი (შესაძლო მნიშვნელობანი . 0,1,2,3);

2) იმავე ცდაში ღერბის გამოჩენის სიხშირე (შესაძლო მნიშვნელობანი $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$);

3) ხუთი ელემენტისაგან შემდგარ ხელსაწყოში ნამტყუნებ ელემენტთა რიცხვი (შესაძლო მნიშვნელობანი 0,1,2,3,4,5);

4) თვითმფრინავის მწყობრიდან გამოსაყვანად საჭირო მოხვედრებათა რიცხვი (შესაძლო მნიშვნელობანი $1,2,3,\ldots,n$);

5) საჰაერო ბრძოლაში ჩამოგდებულ თვითმფრინავთა რიცხვი (შესაძლო მნიშვნელობანი $0,1,2,\ldots,N$, სადაც N — ბრძოლაში მონაწილე თვითმფრინავთა საერთო რიცხვია).

უწყვეტ შემთხვევით სიდიდეთა მაგალითები:

1) გასროლისას მოხვედრის წერტილის აბსცისა (ორდინატა.);

2) მოხვედრის წერტილიდან სამიზნის ცენტრამდე მანძილი;

3) სიმაღლის მზომის შეცდომა;

4) რადიონათურის უმტყუნებლად მუშაობის დრო.

შევთანხმდეთ, რომ შემდგომში შემთხვევითი სიდიდეები აღვნიშნოთ დიდი ასოებით, ხოლო მათი შესაძლო—მნიშვნელობანი—შესაბამისი პატარა ასოებით. მაგალითად, X—მოხვედრებათა რიცხვია 3 გასროლისას; შესაძლო მნიშვნელობანი $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$; $x_4=3$. განვი-

ხილოთ წყვეტილი შემთხვევითი X სიდიდე შესაძლო $x_1, x_2, \dots, x_n$ მნიშვნელობებით. თითოეული ამ მნიშვნელობათაგანი შესაძლოა, მაგრამ არ არის უტყუარი და X სიდიდეს შეუძლია მიიღოს თითოეული მათგანი რომელიღაც ალბათობით. ცდის შედეგად X მიიღებს ერთ-ერთს ამ მნიშვნელობათაგან, ე. ი. მოხდება ერთ-ერთი შეუთავსები ხდომილობათა მთელი ჯგუფიდან:

$$\left.\begin{array}{l} X=x_1, \\ X=x_2, \\ \cdot \\ X=x_n \end{array}\right\} \tag{5.1.1}$$

ამ ხდომილობათა ალბათობებს აღვნიშნავთ P ასოთი შესაბამისი ინდექსებით:

$$P(X=x_1)=p_1; \quad P(X=x_2)=p_2; \dots; \quad P(X=x_n)=p_n.$$

რადგან შეუთავსები ხდომილობანი (5.1.1) ქმნიან სრულ ჯგუფს, ამიტომ

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

ე. ი. შემთხვევით სიდიდეთა ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა ალბათობების ჯამი ერთის ტოლია. მაშასადამე, ჯამური ალბათობა *განაწილებულია* ცალკეულ მნიშვნელობებს შორის. შემთხვევითი სიდიდე ალბათობის თვალსაზრისით სრულად იქნება აღწერილი, თუკი მოცემულია ეს განაწილება, ე. ი. თუ ზუსტად მივუთითებთ, როგორი ალბათობა გააჩნია თითოეულს (5.1.1) ხდომილობათაგანს. ამით დავადგენთ შემთხვევით სიდიდეთა ე. წ. *განაწილების კანონს.*

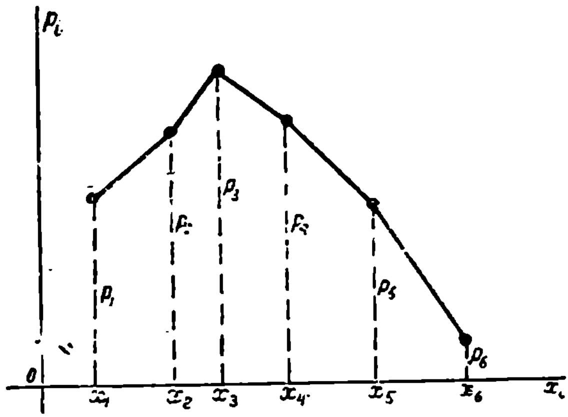
შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი ეწოდება ყოველგვარ დამოკიდებულებას, რომელიც ამყარებს კავშირს შემთხვევით სიდიდეთა შესაძლო მნიშვნელობებსა და შესაბამის ალბათობათა შორის. შემთხვევით სიდიდეზე ვიტყვით, რომ იგი ემორჩილება განაწილების მოცემულ კანონს.

დავადგინოთ ფორმა, რომლითაც შეიძლება მოცემული იყოს წყვეტილი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი. ამ კანონის მოცემის უმარტივეს ფორმას წარმოადგენს ცხრილი, რომელშიაც ჩამოთვლილია შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობანი და მათი შესაბამისი ალბათობანი:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

ასეთ ცხრილს ჩვენ დავარქმევთ შემთხვევითი X სიდიდის **განაწილების მწკრივს**.

განაწილების მწკრივს უფრო თვალსაჩინო სახე რომ მისცენ ხშირად მიმართავენ მის გრაფიკულ გამოსახვას: აბსცისთა ღერძზე გადაზომავენ შემთხვევით სიდიდეთა შესაძლო მნიშვნელობებს, ხოლო ორდინატთა ღერძზე ამ მნიშვნელობათა ალბათობებს. თვალსაჩინოებისათვის მიღებულ წერტილებს აერთებენ წრფის მონაკვეთებით. ასეთ ნაკვთს ეწოდება **განაწილების მრავალკუთხედი** (ნახ. 5.1.1).



ნახ. 5.1.1.

განაწილების მრავალკუთხედი, ისე როგორც განაწილების მწკრივი სავსებით ახასიათებს შემთხვევით სიდიდეს; იგი განაწილების კანონის ერთ-ერთი ფორმათაგანია.

ზოგჯერ უფრო მოხერხებულია განაწილების მწკრივის ე. წ. „მექანიკური“ ინტერპრეტაცია. წარმოვიდგინოთ რომელიღაც ერთის ტოლი მასა განაწილებულია აბცისთა ღერძზე ისე, რომ ცალკეულ n წერტილებში x_1, $x_2, \ldots, x_n$ თავმოყრილია შესაბამისად p_1, $p_2, \ldots, p_n$ მასები. მაშინ განაწილების მწკრივი ინტერპრეტირებული იქნება როგორც სისტემა მატერიალური წერტილებისა, რომელთა მასები განლაგებულია აბსცისთა ღერძზე.

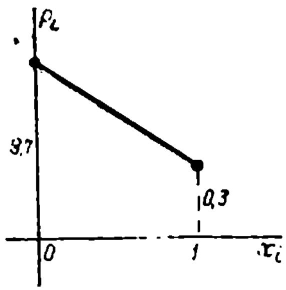
განაწილების კანონების მიხედვით განვიხილოთ წყვეტილი შემთხვევითი სიდიდეების რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. წარმოებს ცდა, რომელშიაც A ხდომილობა შეიძლება მოხდეს ან არ მოხდეს. A ხდომილობის ალბათობა 0.3-ის ტოლია. განიხილება შემთხვევითი X სიდიდე — A ხდომილობის მოხდენის რიცხვი მოცემულ ცდაში. ე. ი. A ხდომი-

ლობის დამახასიათებელი შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც ღებულობს 1-ის ტოლ მნიშვნელობას, თუ იგი მოხდება, და — 0 (ნულს) თუ იგი არ მოხდება. ავაგოთ სიდიდის განაწილების მწკრივი და განაწილების მრავალკუთხედი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. X სიდიდეს აქვს მხოლოდ ორი მნიშვნელობა: 0 და 1. X სიდიდის განაწილების მწკრივს აქვს სახე.

x_i	0	1
p_i	0,7	0,3



ნახ. 5.1.2.

განაწილების მრავალკუთხედი გამოსახულია 5.1.2. ნახაზზე.

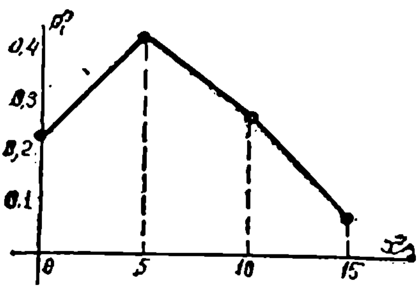
მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. მსროლელი ახდენს სამიზნეზე სამ გასროლას. მოხვედრის ალბათობა 0,4-ის ტოლია. ყოველი მოხვედრისას მსროლელს ეთვლება 5 ქულა. ავაგოთ მოსული ქულების განაწილების მწკრივი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოსული ქულების რიცხვი აღვნიშნოთ X-ით. X სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობანია: $x_1=0$; $x_2=5$; $x_3=10$; $x_4=15$. ამ მნიშვნელობათა ალბათობებს ვპოულობთ ცდების განმეორების თეორემის გამოყენებით

$$p_1=0{,}6^3=0{,}216; \quad p_2=C^1_3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^2=0{,}432;$$
$$p_3=C^2_3\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6=0{,}288; \quad p_4=0{,}4^3=0{,}064.$$

სიდიდის განაწილების კანონს აქვს სახე:

x_i	0	5	10	15
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064



ნახ. 5.1.3.

განაწილების მრავალკუთხედი გამოსახულია 5.1.3 ნახ-ზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. A ხდომილობის გამოჩენა ერთ ცდაში p-ს ტოლია. წარმოებს მთელი რიგი დამოუკიდებელი ცდებისა, რომლებიც მიმდინარეობს A ხდომილობის პირველ მოხდენამდე, რომლის შემდეგ წყდებიან. ჩატარებელი ცდების რიცხვი — ეს შემთხვევითი X სიდიდეა. ავაგოთ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების მწკრივი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. X სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობანია: 1,2,3,... (თეორიულად ისინი არაფრით არ არიან შეზღუდულნი). იმისათვის, რომ X-მა მიიღოს 1-ის მნიშვნელობა, აუცილებელია, რომ A ხდომილობა მოხდეს პირველივე ცდაში; ამ უკანასკნელის ალბათობა p-ს ტოლია.

იმისათვის, რომ სიდიდემ მიიღოს 2-ის მნიშვნელობა, საჭიროა პირველ ცდაში A ხდომილობა არ მოხდეს, ხოლო მეორეში—მოხდეს. ამისი ალბათობა qp-ს ტოლია, სადაც $q=1-p$ და ა. შ.

X სიდიდის განაწილების მწკრივს შემდეგი სახე აქვს:

x_i	1	2	3	.	i	.
p_i	p	pq	pq^2	.	pq^{i-1}	.

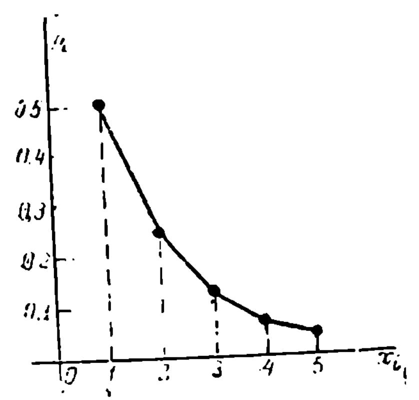
განაწილების მრავალკუთხედის პირველი ხუთი ორდინატა $p=q=0,5$ შემთხვევისათვის ნაჩვენებია 5.1.4 ნახ-ზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. მსროლელი აწარმოებს სამიზნეზე სროლას პირველ მოხვედრამდე ისე, რომ მარაგში აქვს 4 ვაზნა. თითოეულ გასროლაზე მოხვედრის ალბათობა 0,6-ის ტოლია. ავაგოთ დაუხარჯავი საბრძოლო მარაგის განაწილების მწკრივი.

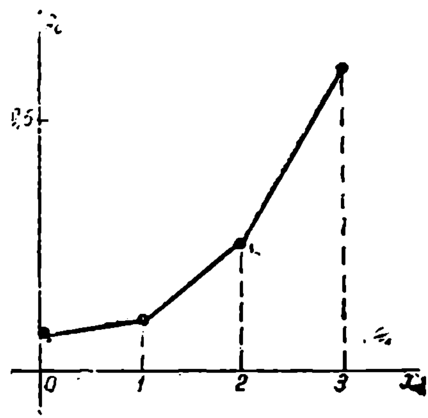
ა მ ო ხ ს ნ ა.

შემთხვევითი X-სიდიდეს — გაუხარჯავი ვაზნების რიცხვს — აქვს ოთხი შესაძლო მნიშვნელობა: 0,1,2 და 3. ამ მნიშვნელობათა ალბათობანი შესაბამისად ტოლია:

$$p_0=0,4^3=0,064;$$
$$p_1=0,4^2\cdot 0,6=0,096;$$
$$p_2=0,4\cdot 0,6=0,240;$$
$$p_3=0,600.$$



ნახ. 5.1.4.



ნახ. 5.1.5.

X-სიდიდის განაწილების მწკრივს შემდეგი სახე აქვს:

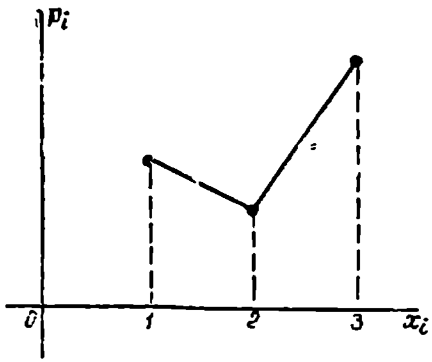
x_i	0	1	2	3
p_i	0,064	0,096	0,240	0,600

განაწილების მრავალკუთხედი მოცემულია 5.1.5 ნახ-ზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ტექნიკური მოწყობილობა შეიძლება გამოყენებული იქნას სხვადასხვა პირობებში და ამასთან დამოკიდებულებით დრო და დრო საჭიროებს რეგულაციას. მოწყობილობის ერთხელ გამოყენებისას იგი შეიძლება შემთხვევით მოხვდეს

ხელსაყრელ ან არახელსაყრელ რეჟიმში. ხელსაყრელი რეჟიმისას ხელსაწყო ინარჩუნებს რეგულაციის გარეშე 3-ჯერ გამოყენების უნარს. მეოთხე გამოყენების წინ მას რეგულაცია სჭირდება. არახელსაყრელი რეჟიმისას მოწყობილობას პირველივე გამოყენების შემდეგ სჭირდება რეგულაცია. ალბათობა იმისა, რომ ხელსაწყო ხვდება ხელსაყრელ რეჟიმში, 0.7-ის ტოლია და რომ არახელსაყრელში — 0.3. განიხილება შემთხვევით X სიდიდე — რეგულირებამდე ხელსაწყოს გამოყენების რიცხვი. ავაგოთ მისი განაწილების მწკრივი.

ამოხსნა. შემთხვევითი X სიდიდეს აქვს სამი შესაძლო მნიშვნელობა 1.2 და 3. ალბათობა იმისა, რომ $X=1$ ტოლია იმ ალბათობისა, რომ მოწყობილობა პირველივე გამოყენებისას ვარდება არახელსაყრელ რეჟიმში, ე. ი. $p_i=0.3$. იმისათვის, რომ X სიდიდე გახდეს ორის ტოლი, საჭიროა მოწყობილობის პირველივე გამოყენებისას იგი ჩავარდეს ხელსაყრელ პირობებში (რეჟიმში), ხოლო მეორეჯერ არახელსაყრელში; ალბათობა ამისა $p_2=0{,}7\cdot 0{,}3=$ $=0{,}21$-ის ტოლია. X სიდიდემ რომ მიიღოს მნიშვნელობა 3, საჭიროა მოწყობილობა ორჯერ პირველად მოხვდეს ხელსაყრელ რეჟიმში (ყოველ მესამეჯერ მას მოუწევს რეგულირება). ამისი ალბათობა ტოლია: $p_3=$ $=0{,}7^2=0{,}49$.



ნახ. 5.1.6.

X სიდიდის განაწილების მწკრივს აქვს შემდეგი სახე:

x_i	1	2	3
p_i	0,30	0,21	0,49

განაწილების მრავალკუთხედი ნაჩვენებია 5.1.6 ნახაზზე.

5.2. განაწილების ფუნქცია

წინა პუნქტში შემოვიტანეთ განსახილველად განაწილების მწკრივი როგორც ამომწურავი მახასიათებელი (განაწილების კანონი) წყვეტილი შემთხვევითი სიდიდისა. ეს მახასიათებელი უნივერსალური არ არის, იგი არსებობს მხოლოდ წყვეტილ შემთხვევითი სიდიდისათვის. ძნელი არ არის დავრწმუნდეთ იმაში, რომ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდისათვის ასეთი მახასიათებლის აგება შეუძლებელია. მართლაც, უწყვეტ შემთხვევით სიდიდეს აქვს შესაძლო მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლე, რომელიც ავსებს რომელიღაც შუალედს (ე. წ. „არათვლადი სიმრავლე"). შედგენა ცხრილისა, სადაც ჩამოთვლილი იქნებოდა ასეთი შემთხვევითი სიდიდის ყველა შესაძლო მნიშვნელობანი, შეუძ-

ლებელია. გარდა ამისა, როგორც შემდგომში დავინახავთ, ყოველი უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის ცალკე მნიშვნელობას ჩვეულებრივ არ გააჩნია არავითარი ნულისაგან განსხვავებული ალბათობა. მაშასადამე, უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდისათვის არ არსებობს ისეთი განაწილებათა მწკრივი როგორიც წყვეტილი სიდიდისათვის არსებობს. მაგრამ შემთხვევით სიდიდეთა შესაძლო მნიშვნელობათა სხვადასხვა შუალედი არ წარმოადგენს ერთნაირად ალბათურს და უწყვეტი სიდიდისათვის არსებობს „ალბათობათა განაწილება" თუმცა არა იმ აზრით, როგორც წყვეტილისათვის.

ალბათობათა ამ განაწილების რაოდენობრივი დახასიათებისათვის მოხერხებული არაა $X=x$ ხდომილობის ალბათობა, არამედ $X<x$ ხდომილობის ალბათობა, სადაც x—რომელიღაც მიმდინარე ცვლადია. ამ ხდომილობის ალბათობა, ცხადია დამოკიდებულია x-ზე, არის x-ის რაღაც *ფუნქცია*. ამ ფუნქციას ეწოდება შემთხვევითი X სიდიდის *განაწილების ფუნქცია* და აღინიშნება $F(x)$:

$$F(x)=P(X<x). \tag{5.2.1}$$

განაწილების $F(x)$ ფუნქციას ზოგჯერ უწოდებენ აგრეთვე *განაწილების ინტეგრალურ ფუნქციას* ანდა *განაწილების ინტეგრალურ* კანონს. განაწილების ფუნქცია ყველაზე უნივერსალური დამახასიათებელია შემთხვევითი სიდიდისა. იგი არსებობს ყველა შემთხვევითი სიდიდისათვის; როგორც უწყვეტი, ისე წყვეტილისათვის. განაწილების ფუნქცია ალბათობის თვალსაზრისით შემთხვევით სიდიდეს სავსებით ახასიათებს, ე. ი. *წარმოადგენს განაწილების კანონის* ერთ-ერთ ფორმას. ჩამოვაყალიბოთ განაწილების ფუნქციის ზოგიერთი ზოგადი თვისება.

1) განაწილების ფუნქცია $F(x)$ თავისი არგუმენტის არაკლებადი ფუნქციაა, ე. ი. როცა $x_2>x_1$ $F(x_2)\geqslant F(x_1)$.

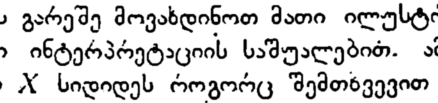
2) მინუს უსასრულობაზე განაწილების ფუნქცია ნულის ტოლია:

$$F(-\infty)=0.$$

3) პლუს უსასრულობაზე განაწილების ფუნქცია ერთის ტოლია:

$$F(+\infty)=1.$$

ამ თვისებათა ზუსტი დამტკიცების გარეშე მოვახდინოთ მათი ილუსტრაცია თვალსაჩინო გეომეტრიული ინტერპრეტაციის საშუალებით. ამისათვის განვიხილავთ შემთხვევით X სიდიდეს როგორც შემთხვევით X წერტილს Ox ღერძზე (ნახ. 5.2.1), რომელსაც ცდის შედეგად შეუძლია დაიკავოს ესა თუ ის მდებარეობა. მა-



ნახ. 5.2.1.

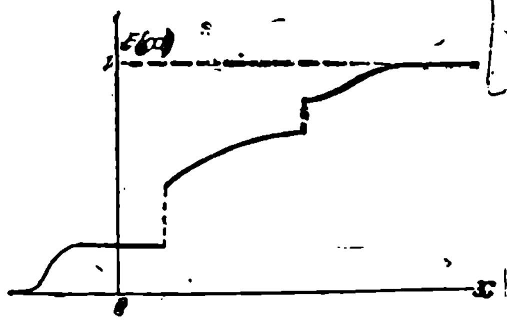
შინ განაწილების ფუნქცია $F(x)$ არის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი წერტილი X ცდის შედეგად ხვდება x წერტილის მარცხნივ.

გავზარდოთ x, ე. ი. აბსცისთა ღერძზე წერტილი გადავწიოთ მარჯვნივ. ცხადია, ამ დროს ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი X წერტილი მოხვდება X-ის მარცხნივ არ შეიძლება შემცირდეს; მაშასადამე განაწილების $F(x)$ ფუნქციას x-ის გაზრდით შემცირება არ შეუძლია.

რომ დავრწმუნდეთ იმაში, რომ $F(-\infty)=0$, x წერტილი აბსცისის ღერძზე მარცხნივ უსასრულოდ გადავაადგილოთ. ამდროს შემთხვევითი წერტილის მოხვედრა x-ის მარცხნივ ზღვარში გახდება შეუძლებელი ხდომილობა: ბუნებრივია დავუშვათ, რომ ამ ხდომილობის ალბათობა მიისწრაფვის ნულისაკენ, ე. ი. $F(-\infty)=0$.

ანალოგიურად, წერტილის მარჯვნივ უსასრულოდ გადაადგილებით დავრწმუნდებით, რომ $F(+\infty)=1$, რადგან ხდომილობა $X<x$ ზღვარში უტყუარია.

$F(x)$ ფუნქციის განაწილების გრაფიკი ზოგად შემთხვევაში არაკლებადი ფუნქციის გრაფიკია (ნახ. 5.2.2), რომლის მნიშვნელობანი იწყება 0-დან და აღწევს 1-მდე, თანაც ფუნქციას ცალკეულ წერტილებში შეიძლება ნახტომები (წყვეტები) ექნეს.



ნახ. 5.2.2.

ვიცით რა წყვეტილი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების მწკრივი, შეიძლება ადვილად ავაგოთ ამ სიდიდის განაწილების ფუნქცია. მართლაც,

$$F(x)=P(X<x)=\sum_{x_i<x} P(X=x_i),$$

სადაც $x_i<x$ უტოლობა ჯამის ნიშნის ქვეშ აჩვენებს, რომ აჯამვა ვრცელდება x-ის ყველა მნიშვნელობებზე, რომლებიც ნაკლებია x-ზე. როცა მიმდინარე x_i ცვლადი გადის წყვეტილი X სიდიდის რომელიღაც შესაძლო მნიშვნელობაზე, განაწილების ფუნქცია იცვლება ნახტომისებურად, რომლის დროსაც ნახტომის სიდიდე ტოლია ამ მნიშვნელობის ალბათობისა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. მიმდინარეობს ცდა, რომელშიდაც A ხდომილობა შეიძლება მოხდეს ან არ მოხდეს. A ხდომილობის ალბათობა 0,3-ის ტოლია. შემთხვევითი X სიდიდე—ცდაში A ხდომილობის გამოჩენის რიცხვია (A ხდომილობის მახასიათებელი შემთხვევითი სიდიდე).

ავაგოთ მისი განაწილების ფუნქცია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. X სიდიდის განაწილების მწკრივს აქვს სახე:

x_i	0	1
p_i	0,7	0,3

ავაგებთ X სიდიდის განაწილების ფუნქციას:

1) როცა $x \leqslant 0$ $F(x)=P(X<x)=0$;

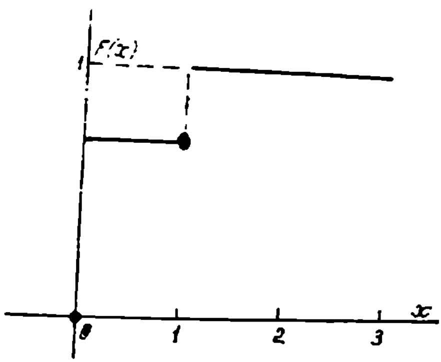
2) როცა $0<x\leqslant 1$

$$F(x)=P(X<x)=P(X=0)=0,7;$$

3) როცა $x>1$

$$F(x)=P(X<x)=P(X=0)+P(X=1)=1.$$

ფუნქციის განაწილების გრაფიკი წარმოდგენილია 5.2.3 ნახაზზე. წყვეტის წერტილებში $F(x)$ ფუნქცია ღებულობს მნიშვნელობებს, რომლებიც ნახაზზე აღნიშნულია წერტილებით (ფუნქცია უწყვეტია მარცხნიდან).



ნახ. 5.2.3.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. წინა მაგალითის პირობებში წარმოებს ოთხი დამოუკიდებელი ცდა. აგებული იქნას განაწილების ფუნქცია A ხდომილობის მოხდენის რიცხვისა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აღვნიშნოთ X-ით ოთხივე ცდაში A ხდომილობის მოხდენის რიცხვი. ამ სიდიდეს აქვს განაწილების მწკრივი

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2401	0,4116	0,2646	0,0756	0,0081

ავაგოთ შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

1) როცა $x\leqslant 0$ $F(x)=0$;

2) როცა $0<x\leqslant 1$. $F(x)=0,2401$;

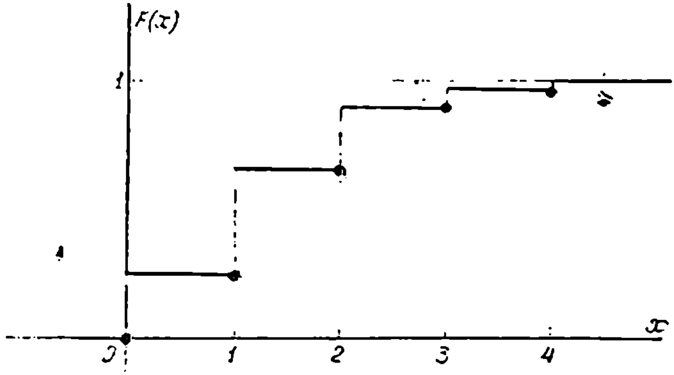
3) როცა $1<x\leqslant 2$ $F(x)=0,6517$;

4) როცა $2<x\leqslant 3$ $F(x)=0,9163$;

5) როცა $3<x\leqslant 4$ $F(x)=0,9919$;

6) როცა $x>4$ $F(x)=1$.

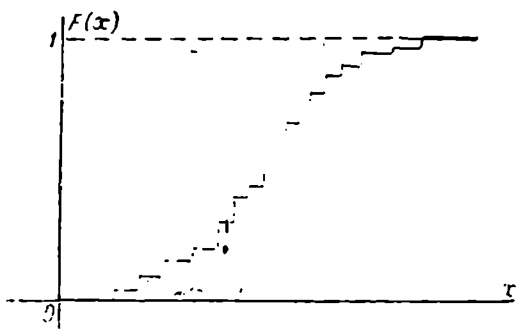
განაწილების ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 5.2.4 ნახაზზე.



ნახ. 5.2.4.

ნებისმიერი წყვეტილი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია ყოველთვის არის წყვეტილი საფეხურისებრი ფუნქცია, რომლის ნახტომები წარმოიშობიან შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობების შესაბამის წერტილებში და ტოლია ამ მნიშვნელობათა ალბათობებისა. ფუნქციის ყველა ნახტომთა ჯამი 1-ის ტოლია.

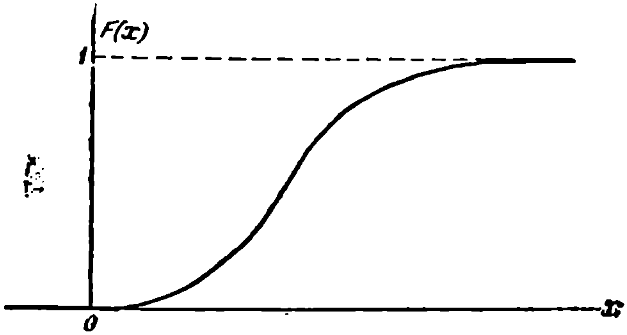
შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობათა რიცხვის გადიდებასა და მათ შორის ინტერვალთა შემცირებასთან ერთად ნახტომთა რიცხვი ხდება მეტი, ხოლო თვით ნახტომები—ნაკლები; საფეხურისებრი მრუდი ხდება მდოვრე სადა (ნახ. 5.2.5);



ნახ. 5.2.5.

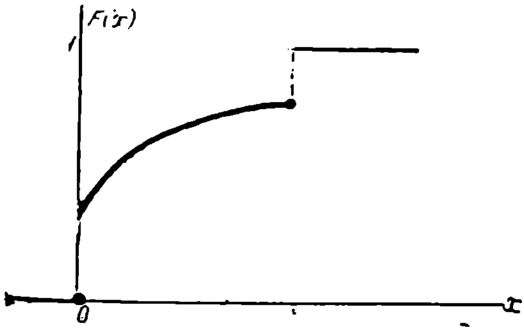
შემთხვევითი სიდიდე თანდათან უახლოვდება უწყვეტ სიდიდეს, ხოლო მისი განაწილების ფუნქცია—უწყვეტ ფუნქციას (5.2.6)

პრაქტიკაში უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია ყველა წერტილში უწყვეტია, როგორც ეს 5.2.6. ნახ-ზეა ნაჩვენები,

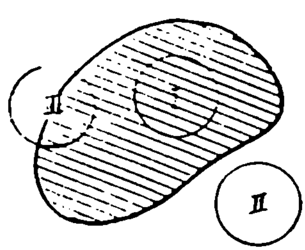


ნახ. 5.2.6.

თუმცა შეიძლება აიგოს შემთხვევით სიდიდეთა მაგალითები, რომელთა შესაძლო მნიშვნელობანი უწყვეტად ავსებენ რომელიღაც შუალედს, მაგრამ მათთვის განაწილების ფუნქცია ყველგან არ წარმოადგენს უწყვეტს, არამედ ცალკეულ წერტილებში განიცდის წყვეტას.



ნახ. 5.2.7.



ნახ. 5.2.8.

ასეთ შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდება შერეული. შერეული სიდიდის მაგალითად შეიძლება მოვიყვანოთ სამიზნეზე ყუმბარებით მიყენებული ნგრევის ფართობი, რომლის დამანგრეველი მოქმედების რადიუსია R (ნახ. 5.2.8).

ამ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობანი უწყვეტად ავსებენ 0-დან πR^2 შუა ლედს, მაგრამ ამ დროს 0 და πR^2 კიდურა მნიშვნელობებს, რომელთაც ადგილი აქვს ყუმბარების I და II ტიპის განლაგებისას, გააჩნიათ გარკვეული სასრული ალბათობანი და ამ მნიშვნელობებს შეესაბამებიან განაწილების ფუნქციის ნახტომები, მაშინ როცა საშუალედო მნიშვნელობებისათვის (III ტიპის მდებარეობა) განაწილების ფუნქცია უწყვეტია. მეორე მაგალითი შერეული შემთხვევითი სიდიდისა—ეს არის T დროში გამოსაცდელი ხელსაწყოს უმტყუნარი მუშაობის t დრო. ამ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია ყველგან უწყვეტია, გარდა t წერტილისა.

5.3. მოცემულ უბანზე შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა

შემთხვევით სიდიდესთან დაკავშირებული პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას, ხშირად ხდება აუცილებელი გამოთვლა ალბათობისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია რაღაც საზღვრებში, მაგალითად α-დან β-მდე. ამ ხდომილობას ჩვენ დავარქმევთ „შემთხვევითი X სიდიდის α და β უბანს შორის მოხვედრას“.

ვთქვათ მარცხენა ბოლო α (α, β) მონაკვეთს მიეკუთვნება, ხოლო მარჯვენა — არ მიეკუთვნება. მაშინ შემთხვევითი X სიდიდის მონაკვეთში მოხვედრა ტოლძალოვანია

$$\alpha \leqslant X < \beta$$

უტოლობის შესრულებისა.

ამ ხდომილობის ალბათობა გამოვსახოთ X სიდიდის განაწილების ფუნქციით. ამისთვის განვიხილოთ სამი ხდომილობა:

A ხდომილობა, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ $X<\beta$;

B ხდომილობა, რომელიც მდგომარეობს იმაში რომ $X<\alpha$;

C ხდომილობა, რომელიც მდგომარეობს იმაში რომ $\alpha \leqslant X < \beta$.

გავითვალისწინებთ რა $A=B+C$, ალბათობათა შეკრების თეორემის მიხედვით გვექნება.

$$P(X<\beta)=P(X<\alpha)+P\ \ (\alpha \leqslant X < \beta),$$

ანდა

$$F(\beta)=F(\alpha)+P(\alpha \leqslant X < \beta).$$

საიდანაც

$$P(\alpha \leqslant X < \beta)=F(\beta)-F(\alpha), \tag{5.3.1}$$

ე. ი. *მოცემულ უბანში შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა ამ უბანზე განაწილების ფუნქციის ნაზრდის ტოლია.* უსასრულოდ შევამციროთ (α, β) მონაკვეთი, იმ დაშვებით, რომ ზღვარში $\beta \to \alpha$, მოხვედრის ალბათობის ნაცვლად, მივიღებთ იმის ალბათობას, რომ სიდიდე მიიღებს ცალკე აღებულ მნიშვნელობას:

$$P(X=\alpha)=\lim_{\beta\to\alpha}\ P(\alpha \leqslant X < \beta)=\lim_{\beta\to\alpha}[F(\beta)-F(\alpha)]. \tag{5.3.2}$$

ამ ზღვრის მნიშვნელობა დამოკიდებულია იმაზე $x=\alpha$ წერტილში $F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, თუ განიცდის წყვეტას. თუ $F(x)$ ფუნქციას α წერტილში წყვეტა აქვს, მაშინ (5.3.2) ფორმულის ზღვარი ტოლია იმ ნახტომის მნიშვნელობისა, რომელიც $HF(x)$ ფუნქციას აქვს α წერტილში. თუკი $F(x)$ ფუნქცია α წერტილში უწყვეტია, მაშინ ეს ზღვარი *ნულის*

ტოლია. შემდგომ გადმოცემაში „უწყვეტს" ვუწოდებთ მხოლოდ იმ შემთხვევით სიდიდეებს, რომელთა განაწილების ფუნქცია ყველგან, უწყვეტია. გვაქვს რა ეს მხედველობაში შეიძლება შემდეგი დებულების ფორმულირება:

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის ნებისმიერი ცალკეული მნიშვნელობის ალბათობა ნულის ტოლია.

ეს უფრო დაწვრილებით განვიხილოთ. მოცემულ კურსში უკვე შევხვდით (იხ. ზემოთ) ხდომილობებს, რომელთა ალბათობა ნულის ტოლი იყო. (სახელდობრ შეუძლებელი ხდომილობანი). ეხლა კი ვხედავთ რომ ნულოვანი ალბათობანი შეიძლება ჰქონდეთ არამარტო შეუძლებელ, არამედ შესაძლო ხდომილობებს. სინამდვილეში $X=\alpha$ ხდომილობა, რომლის დროსაც უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს α მნიშვნელობას, შესაძლებელია, ოღონდ მისი ალბათობა ნულის ტოლია. ასეთი ხდომილობანი — შესაძლოა, რომელთა ალბათობანი ნულია და მოხდებიან მხოლოდ იმ ცდების განხილვისას, რომელნიც არ დაიყვანებიან შემთხვევათა სქემაზე.

ცნება ხდომილობაზე, რომელიც „შესაძლოა, მაგრამ გააჩნია ნულოვანი ალბათობა", ერთი შეხედვით პარადოქსულად მოჩანს. სინამდვილეში იგი იმაზე მეტი პარადოქსული არაა, ვიდრე წარმოდგენა სხეულზე, რომელსაც განსაზღვრული მასა აქვს, მაშინ როცა სხეულის შიგნით არც ერთ წერტილს გარკვეული სასრულო მასა არ გააჩნია; სხეულიდან გამოყოფილ რაგინდ მცირე მოცულობას გარკვეული სასრულო მასა გააჩნია; ეს მასა ნულს უახლოვდება მოცულობის შემცირებასთან ერთად და ზღვარში წერტილისათვის უდრის ნულს. ანალოგიურად ალბათობათა უწყვეტი განაწილებისას მცირე უბანზე მოხვედრის ალბათობა შესაძლოა განსხვავებული იქნეს ნულისაგან, მაშინ როდესაც მკაცრად განსაზღვრულ წერტილში მოხვედრის ალბათობა ზუსტად ნულის ტოლია.

თუ წარმოებს ცდა, რომელშიც უწყვეტმა შემთხვევითმა X სიდიდემ უნდა მიიღოს თავისი ერთ-ერთი შესაძლო მნიშვნელობათაგანი, მაშინ ცდამდე ალბათობა თითოეული ასეთი მნიშვნელობებისა ნულის ტოლია; თუმცა ცდის შემდეგ შემთხვევითი X სიდიდე აუცილებლად მიიღებს ერთ-ერთ თავის შესაძლო მნიშვნელობას, ე. ი უეჭველად მოხდება ერთ-ერთი ხდომილობათაგანი, რომელთა ალბათობანი ნულის ტოლია. იქიდან, რომ ხდომილობას $X=\alpha$ აქვს ნულის ტოლი ალბათობა, არ ნიშნავს თითქოს ხდომილობა არ მოხდება, ე. ი. სიხშირე ამ ხდომილობისა ნულის ტოლია. ჩვენ ვიცით, რომ ცდათა დიდი რიცხვისას სიხშირე არ უდრის არამედ მხოლოდ უახლოვდება ალბათობას. რადგან $X=\alpha$

ხდომილობის ალბათობა ნულის ტოლია, ამიტომ ცდის უსასრულო განმეორებისას ეს ხდომილობა მოხდება იშვიათად.

თუ A ხდომილობა მოცემულ ცდაში შესაძლოა, ხოლო ნულის ტოლი ალბათობა აქვს, მაშინ მის საპირისპირო $\overline{A}$ ხდომილობას აქვს ერთის ტოლი ალბათობა, მაგრამ არა უტყუარი. უწყვეტი შემთხვევითი X სიდიდისათვის, ნებისმიერი α-სას $X \neq \alpha$ ხდომილობას აქვს 1-ის ტოლი ალბათობა, ოღონდ ეს ხდომილობა არა უტყუარია. ასეთი ხდომილობა ცდათა უსასრულო განმეორებისას მოხდება თითქმის ყოველთვის, მაგრამ არა ყოველთვის. 5.1.-ში ჩვენ გავეცანით წყვეტილ (შემთხვევით) სიდიდეს როგორც აბსცისის ღერძზე რამდენიმე იზოლირებულ წერტილში თავმოყრილი ცალკეული მასის განაწილების „მექანიკურ" ინტერპრეტაციას.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის დროს მექანიკური ინტერპრეტაცია დაიყვანება ერთეული მასის არა ცალკეულ წერტილებზე, არამედ აბსცისის ღერძზე უწყვეტად განაწილებაზე, თანაც, ისე, რომ არც ერთ წერტილს არ გააჩნდეს სასრული მასა.

5.4. განაწილების სიმკვრივე

დავუშვათ გვაქვს უწყვეტი შემთხვევითი X სიდიდე, რომლის განაწილების ფუნქციაა ($F(x)$, რომელიც უწყვეტია და დიფერენცირებადი. გამოვთვალოთ ამ შემთხვევითი სიდიდის x-დან $x+\Delta x$ მონაკვეთზე მოხვედრის ალბათობა:

$$P(x<X<x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x),$$

ე. ი. ამ უბანზე განაწილების ფუნქციის ნაზრდი. განვიხილოთ ამ ალბათობის ფარდობა ერთეულზე მოსული (უბნის) სიგრძესთან. ე. ი. ამ უბანზე სიგრძის ერთეულზე მოსული საშუალო ალბათობა. და Δx მივუახლოვოთ ნულს. ზღვარში მივიღებთ განაწილების ფუნქციის წარმოებულს:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x). \tag{5.4.1}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

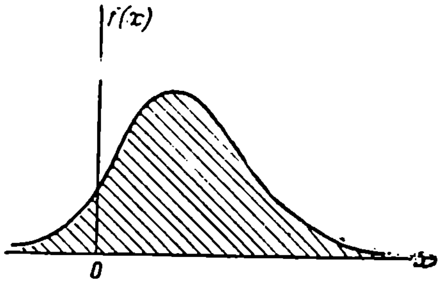
$$f(x)=F'(x). \tag{5.4.2}$$

$f(x)$ ფუნქცია განაწილების ფუნქციის წარმოებულია. იგი თითქოს ახასიათებს სიმკვრივეს, რომლითაც შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობანი ნაწილდებიან მოცემულ წერტილებზე. ამ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების სიმკვრივე (სხვანაირად — „ალბათობის სიმკვრივე"). ზოგჯერ $f(x)$ ფუნქციას უწოდებენ აგრეთვე „გა-

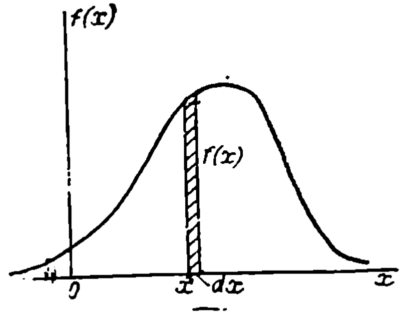
ნაწილების დიფერენციალურ ფუნქციას“ ანდა კიდევ X სიდიდის „განაწილების დიფერენციალურ კანონს“.

ტერმინები „განაწილების სიმკვრივე“ „ალბათობის სიმკვრივე“ გახდება განსაკუთრებით თვალსაჩინო განაწილების მექანიკური ინტერპრეტაციის გამოყენებისას. ამ ინტერპრეტაციისას $f(x)$ ფუნქცია ზუსტად ახასიათებს აბსცისათა ღერძზე მასების განაწილების სიმკვრივეს (ე. წ. „წრფივ სიმკვრივეს“).

მრუდს, რომელიც გამოსახავს შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს ეწოდება „განაწილების მრუდი“ (ნახ. 5.4.1).



ნახ. 5.4.1.



ნახ. 5.4.2.

განაწილების სიმკვრივე, ისევე როგორც განაწილების ფუნქცია — არის განაწილების კანონის ერთ-ერთი ფორმა. განაწილების ფუნქციის საწინააღმდეგოდ ეს ფორმა უნივერსალური არაა. იგი არსებობს მხოლოდ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის.

განვიხილოთ უწყვეტი შემთხვევითი X სიდიდე, რომლის განაწილების სიმკვრივეა $f(x)$ და ელემენტარული მონაკვეთი dx, რომელიც x წერტილს ემიჯნება (ნახ. 5. 4. 2).

შემთხვევითი X სიდიდის მოხვედრის ალბათობა ამ ელემენტარულ უბანზე (უმაღლესი რიგის უსასრულო მცირეთა სიზუსტემდე) $f(x)\,dx$-ის ტოლია. $f(x)\,dx$ სიდიდეს ეწოდება ალბათობის ელემენტი. გეომეტრიულად იგი ელემენტარულ მართკუთხედის ფართია, რომელიც dx მონაკვეთს ეყრდნობა (ნახ. 5.4.2).

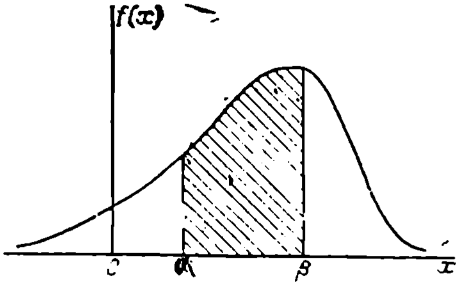
გამოვსახოთ X სიდიდის α-დან β-მდე მონაკვეთში მოხვედრის ალბათობა (ნახ. 5.4.2) განაწილების სიმკვრივის საშუალებით. ცხადია, იგი ტოლია ალბათობათა ელემენტების ჯამის, ე. ი. ინტეგრალის:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \text{ [1]}. \qquad (5.4.3)$$

---

[1] რადგან უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის ალბათობის ნებისმიერი ცალკეული მნიშვნელობა ნულის ტოლია. აქ მონაკვეთი (α, β) შეიძლება განხილულ იქნეს მასში მარცხენა ბოლოს ჩაუთვლელად ე. ი. ტოლობის ნიშანი უტოლობაში $\alpha\leqslant X<\beta$ გამოვტოვოთ.

გეომეტრიულად X სიდიდის (α, β) მონაკვეთში მოხვედრის ალბათობა ტოლია ამ უბანზე დაყრდნობილი განაწილების მრუდით შემოსაზღვრული ფართისა (ნახ. 5.4.3).



ნახ. 5.4.3.

(5.4.2) ფორმულა განაწილების ფუნქციის საშუალებით განაწილების სიმკვრივეა.

გადავწყვიტოთ შებრუნებული ამოცანა: განაწილების ფუნქცია გამოვსახოთ სიმკვრივით. განსაზღვრის მიხედვით

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x),$$

საიდანაც (5.4.3) ფორმულის მიხედვით გვაქვს:

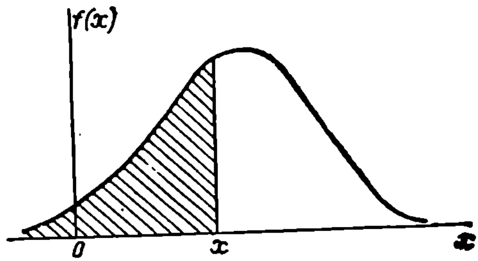
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx. \tag{5.4.4}$$

გეომეტრიულად $F(x)$ სხვა არაფერია თუ არა x წერტილის მარცხნივ (ნახ. 5.4.4) მდებარე განაწილების მრუდის ქვემოთ მდებარე ფართი.

ვაჩვენოთ განაწილების სიმკვრივის ძირითადი თვისებები.

1. განაწილების სიმკვრივე წარმოადგენს არა უარყოფით ფუნქციას $f(x) \geqslant 0$

ეს თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს განაწილების ფუნქციის არაკლებადობიდან.



ნახ. 5.4.4.

2. განაწილების სიმკვრივის ინტეგრალი უსასრულო ზღვრებში ერთის ტოლია:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

ეს გამომდინარეობს (5.4.4) ფორმულიდან და იქედან. რომ განაწილების სიმკვრივის ძირითადი გეომეტრიული თვისებებიდან:

1) განაწილების ყველა მრუდი არ მდებარეობს აბსცისის ღერძის ქვემოთ.

2) განაწილების მრუდით და აბსცისთა ღერძით შემოსაზღვრული მთელი ფართობი ერთის ტოლია.

გამოვარკვიოთ განზომილებანი შემთხვევითი სიდიდის ძირითადი მახასიათებლების — განაწილების ფუნქციისა და განაწილების სიმკვრივისა. განაწილების $F(x)$ ფუნქცია, როგორც ყოველგვარი ალბათობა, არის უგანზომილებო სიდიდე, ხოლო განაწილების $f(x)$ სიმკვრივის განზომილება, როგორც (5.4.1) ფორმულიდან ჩანს, შებრუნებულია შემთხვევითი სიდიდის განზომილებისა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. უწყვეტი შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების ფუნქცია მოცემულია გამოსახულებით

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{როცა } x<0, \\ ax^2, & \text{როცა } 0<x<1, \\ 1, & \text{როცა } x>1. \end{cases}$$

ა) მოვნახოთ კოეფიციენტი a.

ბ) მოვნახოთ $f(x)$-ის განაწილების სიმკვრივე.

გ) მოვნახოთ X სიდიდის 0,25-დან 0.5-მდე მონაკვეთში მოხვედრის ალბათობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ა) ვინაიდან X სიდიდის განაწილების ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ როცა $x=1$, $ax^2=1$, საიდანაც $a=1$.

ბ) X სიდიდის განაწილების სიმკვრივე გამოისახება ფორმულით:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{როცა } x<0, \\ 2x, & \text{როცა } 0<x<1, \\ 0, & \text{როცა } x>1 \end{cases}$$

(5.3.1.) ფორმულით გვაქვს:

$$P(0,25<X<0,5)=F(0,5)-F(0,25)=0,5^2-0,25^2=0,1875.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. შემთხვევითი X სიდიდე ემორჩილება განაწილების კანონს შემდეგი სიმკვრივით:

$$f(x)=a\cos x \text{ როცა } -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};$$

$$f(x)=0, \text{ როცა } x<-\frac{\pi}{2} \text{ ან } x>\frac{\pi}{2}.$$

ა) მოვნახოთ a კოეფიციენტი

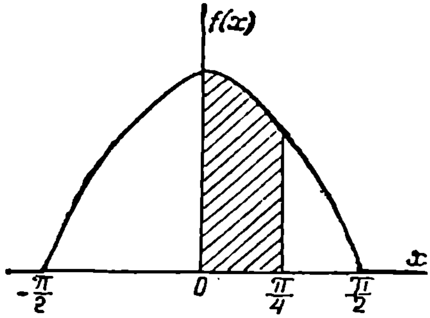
ბ) ავაგოთ განაწილების $f(x)$ სიმკვრივის გრაფიკი.

გ) მოვნახოთ განაწილების $F(x)$ ფუნქცია და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

დ) მოვნახოთ X სიდიდის 0-დან $\frac{\pi}{4}$-მდე მონაკვეთში მოხვედრის ალბათობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ა) კოეფიციენტის განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ განაწილების სიმკვრივის თვისებით:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\, dx=2a=1,$$



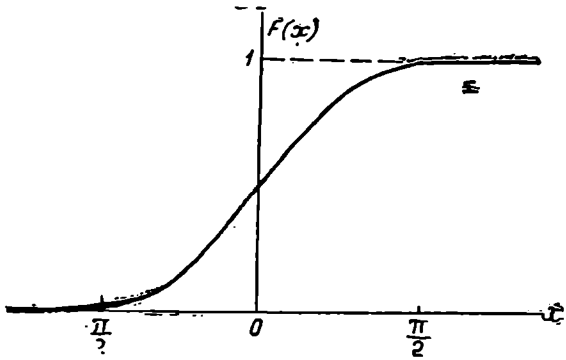
ნახ. 5.4.5.

საიდანაც $\alpha = \frac{1}{2}$.

ბ) სიმკვრივის გრაფიკი წარმოდგენილია 5.4.5. ნახ-ზე. გ) (5.4.4.) ფორმულით მივიღებთ განაწილების ფუნქციის გამოსახულებას:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ როცა } x < -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1), \text{ როცა } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}; \\ 1, \text{ როცა } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

ფუნქციის გრაფიკი გამოსახულია 5.4.6. ნახ-ზე



ნახ. 5.4.6.

დ) (5.3.1). ფორმულის მიხედვით გვაქვს:

$$P\left(0 < X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + 1\right) - \frac{1}{2}(\sin 0 + 1) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

იგივე შედეგი (მაგრამ რამდენადმე უფრო რთული გზით) შეიძლება მივიღოთ ფორმულით (5.4.3)

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე მოცემულია ფორმულით:

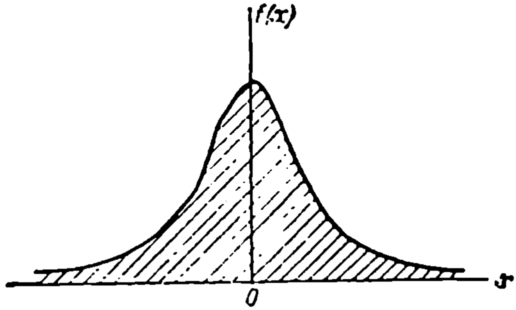
$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\ ^{1)}$$

[1] ე. წ. კოშის კანონი.

ა) ავაგოთ $f(x)$ სიმკვრივის გრაფიკი.

ბ) მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ X სიდიდე მოხვდება $(-1,+1)$ მონაკვეთში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ა) სიმკვრივის გრაფიკი მოცემულია 5.4.7-ნახ-ზე.



ნახ. 5.4.7.

ბ) (5.4.3) ფორმულით გვაქვს:

$$P(-1<X<1) = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}.$$

5.5 შემთხვევით სიდიდეთა რიცხვითი მახასიათებლები, მათი როლი და დანიშნულება

მოცემულ თავში ჩვენ გავეცანით შემთხვევით სიდიდეთა მთელ რიგ სრულ ამომწურავ მახასიათებლებს — ე. წ. განაწილების კანონებს. ასეთი მახასიათებლებია:

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეებისათვის.

ა) განაწილების ფუნქცია;

ბ) განაწილების მწკრივი (გრაფიკულად—განაწილების მრავალკუთხედი)

უწყვეტ სიდიდეთათვის

ა) განაწილების ფუნქცია;

ბ) განაწილების სიმკვრივე (გრაფიკულად-განაწილების მრუდი).

განაწილების ყოველი კანონი თვით წარმოადგენს რომელიღაც ფუნქციას და ეს ფუნქცია სრულიად აღწერს შემთხვევით სიდიდეს ალბათობის თვალსაზრისით.

მრავალი პრაქტიკული საკითხის განხილვისას არ არის აუცილებელი შემთხვევითი სიდიდე ამომწურავად იქნეს დახასიათებული. ხშირად საკმარისია ვუჩვენოთ ცალკეული რიცხვითი პარამეტრები, რომლებიც შემთხვევითი სიდიდის განაწილების არსებით ნიშნებს ახასიათებენ: მაგალითად, რომელიღაც საშუალო მნიშვნელობა, რომლის ახლოს ჯგუ-

ფდებიან შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობანი; რომელიღაც რიცხვი, რომელიც ახასიათებს, ამ მნიშვნელობათა გაფანტულობას, საშუალო მნიშვნელობასთან შედარებით და ა. შ. ვსარგებლობთ რა ასეთი მახასიათებლებით, გვინდა, შემთხვევით სიდიდეთა შესახებ ყველა არსებითი ცნობები, რომელიც გვაქვს, უფრო კომპაქტურად რიცხვითი პარამეტრების მინიმალური ოდენობით გამოვსახოთ. ისეთ მახასიათებლებს, რომელთა დანიშნულებაა გამოსახვის შეკუმშულ ფორმაში განაწილების ყველაზე არსებითი თავისებურებანი, ეწოდებათ შემთხვევითი სიდიდის რ ი ც ხ ვ ი თ ი მ ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ ლ ე ბ ი.

ალბათობის თეორიაში რიცხვითი მახასიათებლები და მათზე ოპერაციები უდიდეს როლს თამაშობენ. რიცხვითი მახასიათებლების დახმარებით არსებითად ადვილდება ბევრი ალბათობითი ამოცანების ამოხსნა. ძლიერ ხშირად შესაძლებელი ხდება ამოცანა ბოლომდე იქნას მიყვანილი განაწილების კანონების გვერდის ავლით და მხოლოდ რიცხობრივ მახასიათებლებზე ოპერაციებით. ამ დროს ფრიად მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ის გარემოება, რომ როდესაც ამოცანაში მონაწილეობს შემთხვევით სიდიდეთა დიდი რაოდენობა, რომელთაგან თითოეული ახდენს გარკვეულ გავლენას ცდის რიცხვით შედეგზე, მაშინ ამ შედეგის განაწილების კანონი მნიშვნელოვან წილად დამოუკიდებლად შეიძლება ჩაითვალოს ცალკეული შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების კანონებისაგან, (წარმოიშობა ე. წ. განაწილების ნორმალური კანონი). ამ შემთხვევაში განაწილების მაშედეგებელი კანონის თვალსაზრისით ამოცანის ამომწურავი შეფასებისათვის აუცილებელი არ არის მასში შემავალი ცალკეული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონთა ცოდნა. საკმარისია მხოლოდ ვიცოდეთ ამ სიდიდეთა ზოგიერთი რიცხვითი მახასიათებლები.

ალბათობათა თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში სხვადასხვა რიცხვითი მახასიათებლების დიდი რაოდენობა გამოიყენება რომელთაც აქვთ სხვადასხვა დანიშნულება და გამოყენების სხვადასხვა არე. მათ შორის წინამდებარე კურსში ყველაზე ხშირად გამოსაყენებლად მხოლოდ რამდენიმეს შემოვიტანთ.

5.6. მდებარეობის მახასიათებლები (მათემატიკური ლოდინი, მოდა, მედიანა)

შემთხვევით სიდიდეთა რიცხვით მახასიათებლებს შორის უწინარეს ყოვლისა უნდა აღვნიშნოთ ისინი, რომლებიც ახასიათებენ შემთხვევითი სიდიდის მ დ ე ბ ა რ ე ო ბ ა ს რიცხვით ღერძებზე, ე. ი. უჩვენებენ რომელიღაც საშუალო, საორიენტაციო მნიშვნელობას, რომელთა

ახლოს ჯგუფდება შემთხვევით სიდიდეთა ყველა შესაძლო მნიშვნელობანი.

შემთხვევითი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა არის რომელიღაც რიცხვი, რომელიც თითქოს და მისი „წარმომადგენელია“ და ცვლის მას უხეშ საორიენტაციო გამოთვლისას. როცა ვლაპარაკობთ; „ლამპის მუშაობის საშუალო დრო 100 საათია“ ანდა „მოხვედრის საშუალო წერტილი გადაადგილებულია მიზნიდან 2 მეტრზე მარჯვნივ“, ამით ვუჩვენებთ შემთხვევითი სიდიდის განსაზღვრულ რიცხვით მახასიათებელს, რომელიც აღწერს მის ადგილმდებარეობას რიცხვით ღერძზე, ე. ი. „მდებარეობის მახასიათებელს“.

მდებარეობის მახასიათებლებიდან ალბათობათა თეორიაში უმნიშვნელოვანეს როლს ასრულებს შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, რომელსაც ზოგჯერ უბრალოდ შემთხვევითი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობას უწოდებენ.

განვიხილოთ დისკრეტული შემთხვევითი X სიდიდე რომელსაც აქვს შესაძლო x_1, $x_2, \ldots$, x_n მნიშვნელობანი, რომელთა ალბათობებია p_1, $p_2, \ldots$, p_n. გვჭირდება დავახასიათოთ რომელიღაც რიცხვით აბსცისათა ღერძზე შემთხვევითი სიდიდის მდებარეობათა მნიშვნელობები, იმის გათვალისწინებით, რომ ამ მნიშვნელობებს სხვადასხვა ალბათობანი, აქვთ. ამ მიზნისათვის ბუნებრივია გამოვიყენოთ ე. წ. x_i მნიშვნელობათა „საშუალო შეწონილი“, ამასთან x_i-ის ყოველი მნიშვნელობის გასაშუალებისას გათვალისწინებული უნდა იყოს „მასით“, რომელიც პროპორციული იქნება ამ მნიშვნელობის ალბათობისა. ამგვარად, გამოვითვლით შემთხვევითი X სიდიდის საშუალო მნიშვნელობას, რომელიც აღინიშნება $M[X]$-ით

$$M[X]=\frac{x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_ip_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i},$$

ანდა თუ გავითვალისწინებთ

$$\sum_{i=1}^{n}p_i=1,$$

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i. \qquad (5.6.1)$$

ამ საშუალო შეწონილ მნიშვნელობას ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი.

ამგვარად, ჩვენ შემოვიტანეთ განსახილველად ალბათობის თეორიის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნება-მათემატიკური ლოდინის ცნება.

შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის ყველა შესაძლო მნიშვნელობის შესაბამის ალბათობებზე ნამრავლების ჯამს.

შევნიშნავთ, რომ ზემოთ მოყვანილ ფორმულირებაში მათემატიკური ლოდინის განმარტება სამართლიანია მხოლოდ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეებისათვის; ქვემოთ ეს ცნება განზოგადებული იქნება უწყვეტ სიდიდეთა შემთხვევისათვის.

იმისათვის, რომ მათემატიკური ლოდინის ცნება უფრო თვალსაჩინო გავხადოთ საჭიროა მივმართოთ დისკრეტულ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების მექანიკურ ინტერპრეტაციას. დავუშვათ აბსცისათა ღერძზე განლაგებულია წერტილები, რომელთა აბსცისებია x_1, $x_2, \dots, x_n$. ამ წერტილებში შესაბამისად თავმოყრილია p_1, $p_2, \dots p_n$ მასები, თანაც $\sum_{i=1}^{n} d=1$. მაშინ ცხადია (5.6.1) ფორმულით განსაზღვრული მათემატიკური ლოდინი $M(X)$ არის მატერიალურ წერტილთა მოცემული სისტემის სიმძიმის ცენტრის აბსცისა.

X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი თავისებური დამოკიდებულებით დაკავშირებულია ცდების დიდი რიცხვისას დანაკვირ[1] მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკულთან. ეს დამოკიდებულება ისეთივე ტიპისაა, როგორც დამოკიდებულება სიხშირესა და ალბათობას შორის, სახელდობრ: ცდათა დიდი რიცხვისას დაკვირვების შედეგად მიღებული შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკული უახლოვდება (ალბათობით) მის მათემატიკურ ლოდინს. სიხშირესა და ალბათობას შორის კავშირისაგან შეიძლება დავადგინოთ მსგავსი კავშირის არსებობა საშუალო არითმეტიკულსა და მათემატიკურ ლოდინს შორის.

მართლაც განვიხილოთ დისკრეტული შემთხვევითი X სიდიდე, რომელიც ხასიათდება განაწილების შემდეგი რიგით:

x_i	x_1	x_2		x_n
p_i	p_1	p_2		p_n

სადაც $p_i = P(X=x_i)$.

1 დაკვირვების შედეგად მიღებული

დავუშვათ წარმოებს N დამოუკიდებელი ცდა. თითოეულში X სიდიდე ღებულობს განსაზღვრულ მნიშვნელობას. დავუშვათ, რომ მან x_1 მნიშვნელობა m_1-ჯერ მიიღო, x_2 მნიშვნელობა m_2-ჯერ, და საერთოდ x_i მნიშვნელობა მიიღო m_i-ჯერ. ცხადია.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = N.$$

გამოვთვალოთ X სიდიდის დაკვირვების შედეგად მიღებულ მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკული, რომელიც $M[X]$ მათემატიკური ლოდინისაგან განსხვავებით აღვნიშნოთ $M^*[X]$:

$$M^*[X] = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n}{N} =$$

$$= x_1 \frac{m_1}{N} + x_2 \frac{m_2}{N} + \cdots + x_n \frac{m_n}{N} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{m_i}{N}.$$

მაგრამ $\frac{m_i}{N}$ არის $X = x_i$ ხდომილობის სიხშირე (ანუ სტატისტიკური ალბათობა). ეს სიხშირე შეიძლება აღვნიშნოთ p_i^*-ით. მაშინ

$$M^*[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i^*,$$

ე. ი. დანაკვირ შემთხვევით სიდიდეთა საშუალო არითმეტიკული ტოლია შემთხვევით სიდიდეთა ყველა შესაძლო მნიშვნელობების მათ სიხშირეზე ნამრავლების ჯამისა.

ცდათა N რიცხვის გადიდებისას p_i^* სიხშირეები მიუახლოვდებიან (ალბათობით) შესაბამის ალბათობებს. ამგვარად, დაკვირვების შედეგად მიღებულ შემთხვევით სიდიდეთა მნიშვნელობების საშუალო არითმეტიკული ცდათა რიცხვის გადიდებისას მიუახლოვდება (ალბათობით) მის მათემატიკურ ლოდინს.

საშუალო არითმეტიკულსა და მათემატიკურ ლოდინს შორის ზემოთ ფორმულირებული კავშირი შეადგენს დიდ რიცხვთა კანონის ერთ-ერთი ფორმის შინაარსს. ამ კანონის ზუსტი (მკაცრი) დამტკიცება მოცემული იქნება მე-13 თავში.

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ დიდ რიცხვთა კანონის ყოველი ფორმა ცდათა დიდი რიცხვისას ზოგიერთ საშუალოთა სიმდგრადის ფაქტს აღნიშნავს. აქ საუბარია მთელი რიგი დაკვირვებებიდან ერთი და იგივე სიდიდის საშუალო არითმეტიკულის სიმდგრადეზე. ცდათა მცირე რიცხვისას

მათი შედეგების საშუალო არითმეტიკული შემთხვევითია; ცდათა რიცხვის საკმაოდ გადიდებისას იგი გახდება „თითქმის არაშემთხვევითი“ და მოხდება რა სტაბილიზაცია, მიუახლოვდება მუდმივ სიდიდეს—მათემატიკურ ლოდინს.

ცდათა დიდი რიცხვისას საშუალოთა მდგრადობის თვისება ექსპერიმენტულად ადვილი შესამოწმებელია. მაგალითად: როცა ვწონით რომელიღაც სხეულს ლაბორატორიაში ზუსტ სასწორზე, აწონვის შედეგად ჩვენ ყოველ ჯერზე ვღებულობთ ახალ მნიშვნელობებს; რომ შევამციროთ შეცდომა დაკვირვებისას, სხეულს ვწონით რამდენჯერმე და ვსარგებლობთ მიღებულ მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკულით. ადვილია დავრწმუნდეთ იმაში, რომ ცდათა (აწონვათა) რიცხვის შემდგომ გადიდებისას საშუალო არითმეტიკულის რეაგირება ამ გადიდებაზე უფრო ნაკლები და ნაკლები იქნება და ცდათა საკმაო დიდი რიცხვისას ცვლილებას თანდათან შეწყვეტს.

მათემატიკური ლოდინისათვის (5.6.1) ფორმულა შეესაბამება დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეს. უწყვეტი X სიდიდისათვის მათემატიკური ლოდინი ბუნებრივია გამოისახება არა ჯამით, არამედ ინტეგრალით:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \tag{5.6.2}$$

სადაც $f(x)$ X სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა. (5.6.2) ფორმულა მიიღება (5.6.1) ფორმულიდან თუკი მასში x_i-ის ცალკეულ მნიშვნელობებს შევცვლით უწყვეტად ცვლადი x პარამეტრით, შესაბამისი p_i ალბათობებს— ალბათობის $f(x)dx$ ელემენტით, სასრულო ჯამს—ინტეგრალით. უწყვეტ სიდიდეთა შემთხვევებისათვის. შემდგომში ხშირად ვისარგებლებთ წყვეტილი სიდიდეებისათვის გამოყვანილი ფორმულებით. უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის მექანიკური ინტერპრეტაცია ინარჩუნებს იგივე აზრს—სიმძიმის ცენტრის აბსცისისა იმ შემთხვევისათვის, როცა მასა განაწილებულია აბსცისთა ღერძზე უწყვეტად, რომლის სიმკვრივეა $f(x)$. ეს ინტერპრეტაცია ხშირად საშუალებას იძლევა მონახულ იქნას მათემატიკური ლოდინი (5.6.2) ინტეგრალის გამოუთვლელად, მარტივი მექანიკური მოსაზრებებიდან.

ზემოთ შემოვიტანეთ X სიდიდის მათემატიკური ლოდინისათვის $M[X]$ აღნიშვნა. მთელ რიგ შემთხვევებში, როდესაც $M[x]$ შედის ფორმულებში, როგორც განსაზღვრული რიცხვი, უფრო მოხერხებულია ავღნიშნოთ ერთი ასოთი. ამ შემთხვევებში X სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს ავღნიშნავთ — m_x-ით.

$$m_x=M[X].$$

m_x და $M[X]$ აღნიშვნები მათემატიკური ლოდინისათვის შემდგომში გამოყენებული იქნება პარალელურად იმის და მიხედვით, თუ როგორ უფრო მოხერხებული იქნება ფორმულის ჩაწერა. და ვთქვათ აგრეთვე, რომ საჭირო შემთხვევაში შევკვეცოთ სიტყვები „მათემატიკური ლოდინი" — ასოებით მ. ლ.

უნდა აღინიშნოს, რომ მდებარეობის მნიშვნელოვანი დამახასიათებელი—მათემატიკური ლოდინი—არსებობს არა ყველა შემთხვევითი სიდიდეებისათვის. შესაძლოა შევადგინოთ მაგალითები ისეთი შემთხვევითი სიდიდეებისა, რომელთათვისაც მათემატიკური ლოდინი არ არსებობს, რადგან შესაბამისი ჯამი ან ინტეგრალი განშლადია.

მაგალითად განვიხილოთ, წყვეტილი შემთხვევითი X სიდიდე, რომლის განაწილების მწკრივია:

x_i	2	2^2	...	2^i
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$		$\frac{1}{2^i}$

ადვილია დარწმუნება იმაში, რომ $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ ე. ი განაწილების მწკრივს აქვს აზრი, მაგრამ ჯამი $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ მოცემულ შემთხვევაში განშლადია და, ამის გამო X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი არ არსებობს, მაგრამ პრაქტიკულად ასეთი შემთხვევები არსებითად საინტერესო არ არის. ჩვეულებრივ შემთხვევით სიდიდეებს, რომლებსაც ვიხილავთ, აქვთ შესაძლო მნიშვნელობათა შეზღუდული არე და უთუოდ გააჩნიათ მათემატიკური ლოდინი.

ზემოთ მოვიყვანეთ (5.6.1) და (5.6.2) ფორმულები, რომელნიც გამოხატავენ შესაბამისად მათემატიკურ ლოდინს წყვეტილი და უწყვეტი შემთხვევითი X სიდიდისათვის.

თუკი X სიდიდე მიეკუთვნება შერეულ ტიპს, მაშინ მისი მათემატიკური ლოდინი გამოისახება ფორმულით:

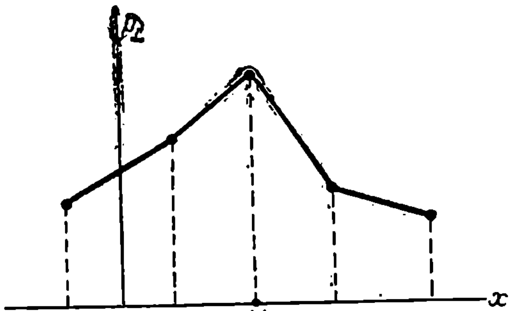
$$M[X] = \sum_i x_i p_i + \int xF'(x)dx, \qquad (5.6.3)$$

სადაც ჯამი ვრცელდება ყველა x_i წერტილზე, რომლებშიც განაწილების ფუნქცია განიცდის წყვეტას, ხოლო ინტეგრალი — ყველა უბანზე, რომლებზედაც განაწილების ფუნქცია უწყვეტია.

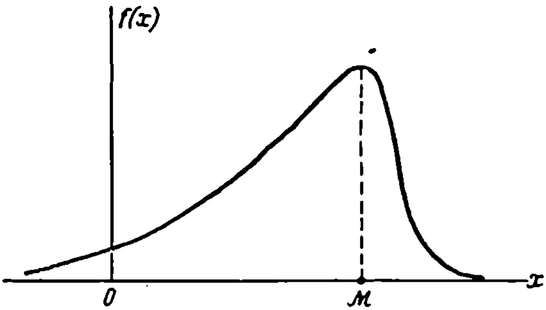
მდებარეობის უმნიშვნელოვანესი მახასიათებლის — მათემატიკური ლოდინის გარდა პრაქტიკაში ზოგჯერ გამოიყენება მდებარეობის სხვა

მახასიათებლებიც, კერძოდ შემთხვევითი სიდიდის *მოდა* და *მედიანა*.

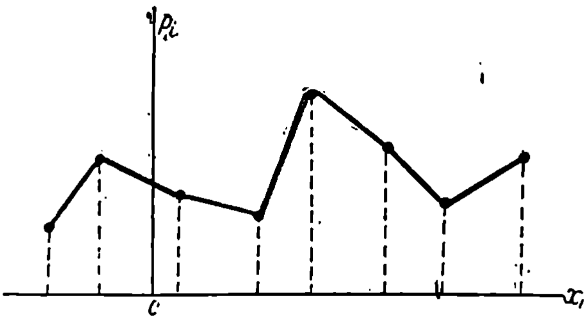
შემთხვევითი სიდიდის *მოდა* ეწოდება მის ყველაზე უფრო საალბათო მნიშვნელობას. ტერმინი „ყველაზე უფრო საალბათო მნიშვნელობა“, ზუსტად რომ ვთქვათ, გამოსადეგია მხოლოდ წყვეტილი სიდიდეებისათვის; უწყვეტი სიდიდისათვის მოდაა ის მნიშვნელობა, რომელშიაც ალბათობის სიმკვრივე მაქსიმალურია; შევთანხმდეთ მოდა აღვნიშნოთ $\mathcal{M}$ ასოთი. 5.6.1. და 5.6.2. ნახ.-ზე ნაჩვენებია მოდა შესაბამისად წყვეტილი და უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის.



ნახ. 5.6.1.

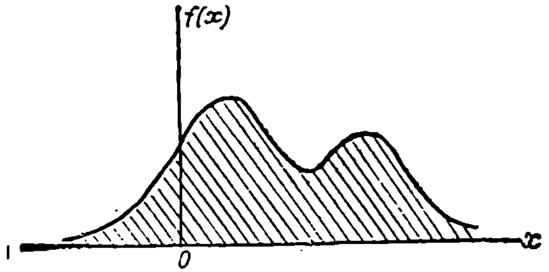


ნახ. 5.6.2.

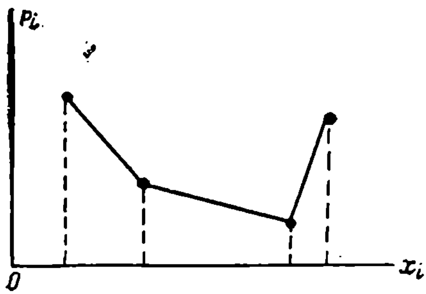


ნახ. 5.6.3.

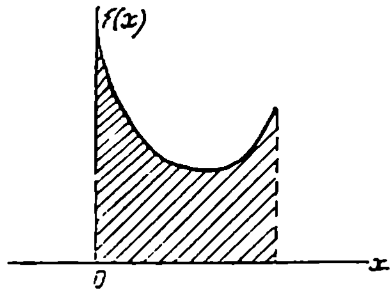
თუ განაწილების მრავალკუთხედს (განაწილების მრუდს) აქვს ერთზე მეტი მაქსიმუმი, მაშინ განაწილებას ნახევრად მოდალური ეწოდება. (ნახ. ნახ. 5.6.3 და 5.6.4).



ნახ. 5.6.4.



ნახ. 5.6.5.



ნახ. 5.6.6.

ზოგჯერ გვხვდება განაწილებანი, რომელთაც ახასიათებთ არა მაქსიმუმი, არამედ მინიმუმი (ნახ. 5.6.5. და 5.6.6). ასეთ განაწილებებს ეწოდებათ „ანტიმოდალური". ანტიმოდალური განაწილების მაგალითია განაწილება, რომელიც 5.1 პუნქტის მაგალითშია მიღებული.

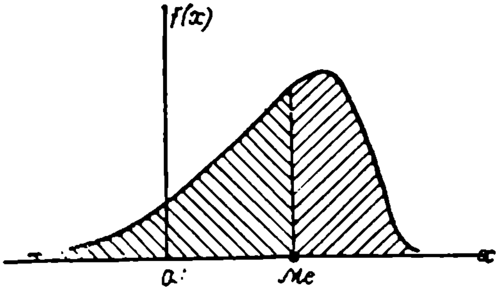
ზოგადად მოდა და მათემატიკური ლოდინი არ არიან თანხვდენილნი. კერძო შემთხვევაში, როცა განაწილება სიმეტრიულია და მოდალური (ე. ი. აქვს მოდა) და არსებობს მათემატიკური ლოდინი, მაშინ იგი მოდას და განაწილების სიმეტრიის ცენტრს ემთხვევა.

ხშირად გამოიყენება მდებარეობის კიდევ ერთი მახასიათებელი— შემთხვევითი სიდიდის **მედიანა**. ეს მახასიათებელი გამოიყენება მხოლოდ და მხოლოდ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის, თუმცა ფორმალურად შეიძლება იგი განვსაზღვროთ წყვეტილი სიდიდეებისათვისაც.

შემთხვევითი X სიდიდის **მედიანა** ეწოდება მის ისეთ Me მნიშვნელობას, რომლისთვისაც

$$P(X)<Me)=P(X>Me),$$

ე. ი. ერთნაირად საალბათოა შემთხვევითი X სიდიდე ნაკლები თუ მეტი აღმოჩნდება Me-ზე.



ნახ. 5.6.7.

გეომეტრიული მედიანა — ეს აბსცისაა იმ წერტილისა, რომელშიაც განაწილების მრუდით შემოსაზღვრული ფართობი იყოფა შუაზე (ნახ. 5.6.7).

სიმეტრიული მოდალური განაწილებისას მედიანა თან ემთხვევა მათემატიკურ ლოდინს და მოდას.

მომენტები. დისპერსია. საშუალო კვადრატული გადახრა

შემთხვევითი სიდიდის მდებარეობის მახასიათებლების—საშუალო ტიპიური მნიშვნელობათა გარდა, — გამოიყენება აგრეთვე კიდევ სხვა მახასიათებლები, რომელთაგან ყოველი მათგანი აღწერს განაწილების ამა თუ იმ თვისებას. ასეთ მახასიათებლად ყველაზე ხშირად გამოიყენებიან ე. წ. მ ო მ ე ნ ტ ე ბ ი.

მომენტის ცნება ფართოდ გამოიყენება მექანიკაში მასების განაწილების აღსაწერად (სტატიკური მომენტები) ინერციის მომენტები და ა. შ.). სრულიად ასეთივე ხერხებით სარგებლობენ ალბათობათა თეორიაში შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ძირითადი თვისებების აღწერისას. ყველაზე ხშირად პრაქტიკაში გამოიყენება ორი სახის მომენტი: საწყისი და ცენტრალური.

წ ყ ვ ე ტ ი ლ ი შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი X ს ი დ ი დ ი ს s-რ ი გ ი ს ს ა წ ყ ი ს ი მ ო მ ე ნ ტ ი ე წ ო დ ე ბ ა შ ე მ დ ე გ ი ს ა ხ ი ს ჯ ა მ ს:

$$\alpha_s[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i{}^s p_i. \tag{5.7.1}$$

ცხადია, ეს განსაზღვრა ემთხვევა მექანიკაში s რიგის საწყისი მომენტის განსაზღვრას, როცა აბსცისთა ღერძზე x_1, x_2,.., x_n წერტილებში თავმოყრილია p_1, p_2,...,p_n მასები.

უწყვეტი შემთხვევითი X სიდიდისათვის s-რიგის საწყისი მომენტია ინტეგრალი

$$\alpha_s[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)dx. \qquad (5.7.2)$$

არ არის ძნელი დავრწმუნდეთ რომ წინა პარაგრაფში შემოტანილი მდებარეობის მახასიათებელი—მათემატიკური ლოდინი—შემთხვევითი X სიდიდის პ ი რ ვ ე ლ ი ს ა წ ყ ი ს ი მ ო მ ე ნ ტ ი ა.

ვისარგებლოთ მათემატიკური ლოდინის ნიშნით, და გავაერთიანოთ (5.7.1) და (5.7.2) ორი ფორმულა. სინამდვილეში (5.7.1) და (5.7.2) ფორმულები სტრუქტურული თვალსაზრისით ანალოგიურია (5.6.1) და (5.6.2) ფორმულებისა იმ განსხვავებით, რომ მათში x_i და x-ის ნაცვლად ჩასმულია შესაბამისად x_i^s და x^s. ამიტომ შეიძლება დაიწეროს s-რი რიგის საწყისი მომენტის ზოგადი განსაზღვრა, რომელიც სამართლიანი იქნება როგორც წყვეტილი ასევე უწყვეტი სიდიდეებისათვის:

$$\alpha_s[X]=M[X^s], \qquad (5.7.3)$$

ე. ი. შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი ს ი დ ი დ ი ს s-რ ი რ ი გ ი ს ს ა წ ყ ი ს ი მ ო მ ე ნ ტ ი ე წ ო დ ე ბ ა ა მ შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი ს ი დ ი დ ი ს s-რ ი ხ ა რ ი ს ხ ი ს მ ა თ ე მ ა ტ ი კ უ რ ლ ო დ ი ნ ს[1]).

მანამ სანამ განვსაზღვრავდეთ ცენტრალურ მომენტს, შემოვიტანოთ „დაცენტრებული შემთხვევითი სიდიდის" ცნება.

დავუშვათ გვაქვს X შემთხვევითი სიდიდე, რომლის მათემატიკური ლოდინია m_x. დ ა ც ე ნ ტ რ ე ბ უ ლ ი შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი ს ი დ ი დ ე, რომელიც შეესაბამება X სიდიდეს, ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის გადახრას მისი მათემატიკური ლოდინიდან:

$$\overset{\circ}{X}=X-m_x, \qquad (5.7.4)$$

შევთანხმდეთ და შემდგომში ყველგან დაცენტრებული შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც შეესაბამება მოცემულ შემთხვევით სიდიდეს აღვნიშნოთ იგივე ასოთი, რომელსაც ზემოთ დასმული აქვს ∘ ნიშანი.

არ არის ძნელი დავრწმუნდეთ, რომ დაცენტრებული შემთხვევითი

---

[1] ცნება მათემატიკური ლოდინისა, როგორც ფუნქცია შემთხვევითი სიდიდისა, დაზუსტებული იქნება ქვემოთ (იხ. თავი 10).

სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლია. მართლაც, წყვეტილი შემთხვევითი სიდიდისათვის

$$M[\overset{\circ}{X}]=M[X-m_x]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)\quad p_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i-m_x\sum_{i=1}^{n}p_i=m_x-m_x=0; \qquad (5.7.5)$$

ანალოგიურად უწყვეტი სიდიდისთვისაც.

შემთხვევითი სიდიდის დაცენტრება, ცხადია, ტოლძალოვანია კოორდინატების საწყისის, საშუალო „ცენტრალურ" წერტილში გადატანისა, რომლის აბსცისა მათემატიკურ ლოდინს უდრის.

დაცენტრებული შემთხვევითი სიდიდის მომენტები ატარებენ ცენტრალური მომენტების სახელს. ისინი მექანიკაში სიმძიმის ცენტრის მიმართ მომენტების ანალოგიურია.

ამგვარად, შემთხვევითი X სიდიდის s-რი რიგის ცენტრალური მომენტი ეწოდება შესაბამის დაცენტრებული შემთხვევითი სიდიდის s-რი რიგის მათემატიკურ ლოდინს:

$$\mu_s[X]=M[\overset{\circ}{X}{}^s]=M[(X-m_x)^s]. \qquad (5.7.6)$$

წყვეტილი შემთხვევითი სიდიდისათვის s-რი ცენტრალური მომენტი გამოისახება ჯამით

$$\mu_s=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^s p_i, \qquad (5.7.7)$$

ხოლო უწყვეტისათვის ინტეგრალით

$$\mu_s=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^s\quad f(x)dx. \qquad (5.7.8)$$

შემდგომში იმ შემთხვევაში, როდესაც არ აღიძვრის ეჭვი, თუ რომელ შემთხვევით სიდიდეს ეკუთვნის მოცემული მომენტი, ჩვენ სიმოკლისათვის $\alpha_s[X]$ და $\mu_s[X]$ მაგიერ უბრალოდ დავწერთ α_s და μ_s. ცხადია, ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდისათვის პირველი რიგის ცენტრალური მომენტი ნულის ტოლია:

$$\mu_1=M[\overset{\circ}{X}]=M[X-m_x]=0, \qquad (5.7.9)$$

ვინაიდან ღაცენტრებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ყოველთვის ნულის ტოლია.

გამოვიყვანოთ თანაფარდობანი, რომლებიც დააკავშირებენ სხვადასხვა რიგის ცენტრალურ და საწყის მომენტებს. გამოვიყვანოთ მხოლოდ წყვეტილი სიდიდეებისათვის; ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ზუსტად იგივე თანაფარდობანია უწყვეტი სიდიდეებისათვისაც, თუ კი შევცვლით სასრულო ჯამებს ინტეგრალებით, ხოლო ალბათობებს—ალბათობის ელემენტებით.

განვიხილოთ მეორე ცენტრალური მომენტი:

$$\mu_2 = M[\overset{\circ}{X}{}^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 P_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x^2{}_i p_i - 2m_x \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + m^2{}_x \sum_{i=1}^{n} p_i = \alpha_2 - 2m^2{}_x + m^2{}_x = \alpha_2 - m^2{}_x.$$

ანალოგიურად მესამე ცენტრალური მომენტისათვის მივიღებთ:

$$\mu_3 = M[\overset{\circ}{X}{}^3] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^3 p_i = \sum_{i=1}^{n} x^3{}_i p_i - 3m_x \sum_{i=1}^{n} x^2{}_i p_i +$$

$$+ 3m^2{}_x \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - m^3{}_x \sum_{i=1}^{n} p_i = \alpha_3 - 3\alpha_2 m_x + 2m^3$$

μ_4, μ_5 და ა. შ. გამოსახულებანი შეიძლება მიღებულ იქნას ანალოგიური გზით.

ამგვარად, ნებისმიერი შემთხვევითი X სიდიდის ცენტრალური მომენტებისათვის მართებულია ფორმულები:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1 = 0; \\ &\mu_2 = \alpha_2 - m^2 \\ &\mu_3 = \alpha_3 - 3m_x\alpha_2 + 2m^3{}_x, \end{aligned}\right\} \qquad (5.7.10)$$

ზოგადად რომ ვთქვათ, მომენტები შეიძლება განხილული იქნას არა მარტო კოორდინატთა სათავის (საწყისი მომენტები) ანდა მათემატიკური ლოდინის (ცენტრალური მომენტები) მიმართ, არამედ ნებისმიერი a წერტილის მიმართ:

$$\gamma_s = M[(X-a)^s] \qquad (5.7.11)$$

მაგრამ ცენტრალურ მომენტებს სხვებთან შედარებით აქვთ უპირატესობა: პირველი ცენტრალური მომენტი, როგორც დავინახეთ, ყოველთვის ნულის ტოლია, ხოლო მის მომდევნო მეორე ცენტრალურ მომენტს ათვლის ამ სისტემისას აქვს მინიმალური მნიშვნელობა. დავამტკიცოთ ეს. შემთხვევით წყვეტილი X სიდიდისათვის, როცა $s=2$ (5.7.11) ფორმულას აქვს სახე:

$$\gamma_2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2p_i \tag{5.7.12}$$

გარდავქმნათ ეს გამოსახულება;

$$\gamma_2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x+m_x-a)^2p_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2p_i-2(m_x-a)\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)p_i+(m_x-a)^2=\mu_2+(m_x-a)^2$$

ცხადია, რომ ეს სიდიდე თავის მინიმუმს აღწევს, როცა $m_x=a$ ე. ი. როცა მომენტი m_x წერტილის მიმართ იღება.

ყველა მომენტებს შორის შემთხვევითი სიდიდის მახასიათებლად ხშირად გამოიყენება პირველი საწყისი მომენტი (მათემატიკური ლოდინი) $m_x=\alpha_1$ და მეორე ცენტრალური μ_2 მომენტი.

მეორე ცენტრალურ მომენტს შემთხვევითი სიდიდის **დისპერსია** ეწოდება. ამ მახასიათებლის მეტად დიდი მნიშვნელობის გამო, სხვა მომენტებს შორის, მისთვის შემოგვაქვს სპეციალური აღნიშვნა $D[X]$:

$$\mu_2=D[X]$$

ცენტრალური მომენტის განსაზღვრის თანახმად

$$D[X]=M[\overset{\circ}{X}{}^2] \tag{5.7.13}$$

ე. ი. **შემთხვევითი X სიდიდის დისპერსია ეწოდება შესაბამისი დაცენტრებული სიდიდის კვადრატის მათემატიკურ ლოდინს.**

ვცვლით რა (5.7.13) გამოსახულებაში $\overset{\circ}{X}$-ს მისი გამოსახულებით, აგრეთვე გვაქვს:

$$D[X]=M[(X-m_x)^2]. \tag{5.7.14}$$

დისპერსიის უშუალოდ გამოსათვლელად გვაქვს ფორმულები:

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2p_i, \qquad (5.7.15)$$

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2f(x)dx \qquad (5.7.16.)$$

— შესაბამისად წყვეტილი და უწყვეტი სიდიდეებისათვის.

შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია ეს არის შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის ახლო გ ა ბ ნ ე ვ ი ს (გაფანტვის) მახასიათებელი. თვით სიტყვა „დისპერსია" აღნიშნავს „გაბნევა"-ს.

თუკი განაწილების მექანიკურ ინტერპრეტაციას მივმართავთ, მაშინ დისპერსია მასების სიმძიმის ცენტრის (მათემატიკური ლოდინის) მიმართ მოცემული განაწილების ინერციის მომენტია.

შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიას შემთხვევითი სიდიდის კვადრატის განზომილება აქვს; გაბნევის თვალსაჩინო დახასიათებისათვის უფრო მოხერხებულია ვისარგებლოთ სიდიდით, რომლის განზომილება ემთხვევა შემთხვევითი სიდიდის განზომილებას. ამისათვის დისპერსიიდან იღებენ კვადრატულ ფესვს. მიღებულ სიდიდეს უწოდებენ შემთხვევითი X სიდიდის ს ა შ უ ა ლ ო კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ გ ა დ ა ხ რ ა ს (სხვაგვარად — „სტანდარტს"). საშუალო კვადრატულ გადახრას აღვნიშნავთ $\sigma(X)$-ით.

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}. \qquad (5.7.17)$$

ჩაწერის გასამარტივებლად ჩვენ ხშირად ვისარგებლებთ საშუალო კვადრატული გადახრის და დისპერსიის შემოკლებული აღნიშვნებით: იმ შემთხვევაში, როცა არ არის საეჭვო, თუ რომელ შემთხვევით სიდიდეს მიეკუთვნება ეს მახასიათებელი, ზოგჯერ გამოვტოვებთ x, y, σ_x და D_x ნიშანს და დავწერთ უბრალოდ σ და D. სიტყვას „საშუალო კვადრატული გადახრა" ზოგჯერ შევცვლით ს. კ. გ. ასოებით. პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება ფორმულა, რომელიც გამოსახავს შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიას მისი მეორე საწყისი მომენტით (მეორე (5.7.10) ფორმულებიდან). ახალ აღნიშვნებში მას ექნება შემდეგი სახე:

$$D_x=\alpha_2-m_x^2. \qquad (5.7.18)$$

მათემატიკური m_x ლოდინი და D_x დისპერსია (ანდა საშუალო კვადრატული გადახრა σ_x) — შემთხვევითი სიდიდის ყველაზე ხშირად გამოსაყენებელი მახასიათებლებია. ისინი ახასიათებენ განაწილების ყველაზე მნიშვნელოვან თვისებას: მისი მდებარეობას და განფანტვის ხარისხს. განაწილების უფრო დაწვრილებით აღწერისათვის უმაღლესი რიგის მომენტები გამოიყენება.

მესამე ცენტრალური მომენტი გამოიყენება განაწილების ა ს ი მ ე ტ-რ ი ი ს (ანდა „დაცერებულობის“) დასახასიათებლად, თუკი განაწილ ე-ბა სიმეტრიულია მათემატიკური ლოდინის მიმართ (ანდა მექანიკური ინტერპრეტაციით, მასა განაწილებულია სიმეტრიულად სიმძიმის ცენ-ტრის მიმართ), მაშინ კენტი რიგის ყველა მომენტები (თუკი ისინი არ-სებობენ) ნულის ტოლია. მართლაც ჯამში

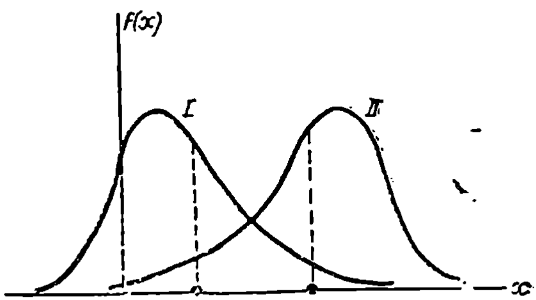
$$\mu_s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^s p_i$$

m_x-ის მიმართ განაწილების სიმეტრიული კანონისას, როდესაც s კენ-ტია, ყოველ დადებით შესაკრებს შეესაბამება აბსოლუტური სიდიდით მისი ტოლი უარყოფითი შესაკრები, ასე, რომ მთელი ჯამი ნულის ტო-ლია. იგივე, ცხადია, სამართლიანია

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s f(x) dx,$$

ინტეგრალისათვის, რომელიც ნულის ტოლია, როგორც კენტი ფუნქციის ინტეგრალი სიმეტრიულ საზღვრებში.

ამიტომ განაწილების ასიმეტრიის მახასიათებლად ბუნებრივია ავირჩიოთ რომელიღაც კენტი მომენტი. მათ შორის უმარტივესი არის მესამე ცენტრალური მო-მენტი. მას შემთხვევითი სიდიდის კუბის განზომი-ლება აქვს; რომ მივიღოთ უგანზომილებო მახასიათე-ბელი, მესამე μ_3 მომენტს ყოფენ საშუალო კვადრა-ტული გადახრის კუბზე. მიღებული სიდიდე ატა-რებს „ასიმეტრიის კო-ეფიციენტი“-ს სახელს, ჩვენ მას აღვნიშნავთ S_k-თი



ნახ. 5.7.1.

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \tag{5.7.19}$$

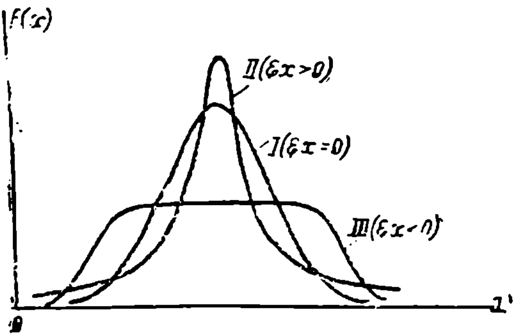
5.7.1 ნახაზზე ნაჩვენებია ორი ასიმეტრიული განაწილება; ერთ მათ-განს (მრუდი I) დადებითი ასიმეტრია აქვს ($S_k > 0$); მეორეს (მრუდი II) — უარყოფითი ($S_k < 0$). მეოთხე ცენტრალური მომენტი ემსახურება

ე. წ. „ციცაბოობის" დახასიათებას, ე. ი. განაწილების მახვილ მწვერვალიანობას ანდა ბრტყელ მწვერვალიანობას. განაწილების ეს თვისებები აღიწერება ე. წ. ექსცესის დახმარებით. შემთხვევითი X სიდიდის ე ქ ს ც ე ს ი ეწოდება სიდიდეს.

$$Ex=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3, \qquad (5.7.20).$$

$\frac{\mu_4}{\sigma_4}$ — შეფარდებიდან რიცხვი სამი გამოაკლდება იმიტომ, რომ მეტად მნიშვნელოვან და ბუნებაში ფართოდ გავრცელებული განაწილების ნორმალური კანონისათვის (რომელსაც უფრო დაწვრილებით ქვემოთ გავეცნობით) $\frac{\mu_4}{\sigma_4}=3$. ამგვარად, ნორმალური განაწილებისათვის ექსცესი ნულის ტოლია; ნორმალურთან შედარებით უფრო მახვილწვეროიან მრუდეებს დადებითი ექსცესი გააჩნიათ; უფრო ბრტყელ წვეროიანებს კი უარყოფითი ექსცესი.

5.7.2. ნახაზზე წარმოდგენილია: ნორმალური განაწილება (მრუდი 1). განაწილება, რომელსაც დადებითი ექსცესი აქვს (მრუდი II) და განაწილება, რომელსაც უარყოფითი ექსცესი აქვს (მრუდი III).



ნახ. 5.7.2.

ზემოთ განხილულ საწყის და ცენტრალურ მომენტებს გარდა, პრაქტიკაში ზოგჯერ გამოიყენება ე. წ. აბსოლუტური მომენტები (საწყისი და ცენტრალური), რომელიც განისაზღვრება ფორმულებით:

$$\beta_s=M[|X|^s]; \quad \nu_s=M[|\mathring{X}|^s],$$

ცხადია, ლუწი რიგის აბსოლუტური მომენტები თან ემთხვევა ჩვეულებრივ მომენტებს.

აბსოლუტური მომენტებიდან ყველაზე ხშირად გამოიყენება პირველი აბსოლუტური ცენტრალური მომენტი

$$\nu_1=M[|\mathring{X}|]=M[|X-m_x|], \qquad (5.7.21)$$

რომელსაც ეწოდება ს ა შ უ ა ლ ო ა რ ი თ მ ე ტ ი კ უ ლ ი გ ა დ ა ხ რ ა.

მათემატიკური ლოდინი, მოდა, მედიანა, საწყისი და ცენტრალური მომენტები და კერძოდ დისპერსია, საშუალო კვადრატული გადახრა, ასიმეტრია და ექსცესი შემთხვევითი სიდიდის ყველაზე მოსახმარი მახასიათებლებია. პრაქტიკულად მრავალ ამოცანაში შემთხვევითი სიდიდის სრული დახასიათება — განაწილების კანონი — ან არ არის საჭირო, ანდა შეუძლებელია მისი მიღება. ამ შემთხვევაში შემთხვევითი სიდიდეს რიცხვითი მახასიათებლების მეშვეობით მიახლოებით აღწერენ, რომელთაგან თითეული მათგანი განაწილების დამახასიათებელი თვისებაა.

ხშირად რიცხვითი მახასიათებლებით სარგებლობენ ერთი განაწილების მეორეთი მიახლოებით შეცვლისას, რომლის დროსაც შეცვლას აწარმოებენ ისე, რომ რამდენიმე უმნიშვნელოვანესი მომენტი უცვლელად იქნას შენარჩუნებული.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. წარმოებს ცდა, რომლის შედეგად შეიძლება მოხდეს ან არ მოხდეს A ხდომილობა, რომლის ალბათობა p-ს ტოლია. განიხილება შემთხვევითი X სიდიდე, A ხდომილობის მოხდენის რიცხვი (A ხდომილობის დამახასიათებელი შემთხვევითი სიდიდე). განვსაზღვროთ მისი დამახასიათებელი: მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და ს. კ. გ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. სიდიდის განაწილების მწკრივს შემდეგი სახე აქვს:

x_i	0	1
p_i	q	p

სადაც $q=1-p$ A ხდომილობის არ მოხდენის ალბათობაა. (ნახ. 5.6.1) ფორმულით ვპოულობთ X სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს:

$$m_x=M[X]=0\cdot q+1\cdot p=p$$

(5.7.15) ფორმულით ვპოულობთ X სიდიდის დისპერსიას:

$$D_x=D[X]=(0-p)^2\cdot q+(1-p)^2 p=pq,$$

საიდანაც

$$\sigma_x=\sqrt{pq}.$$

(ვთავაზობთ მკითხველს იგივე შედეგი მიიღოს დისპერსიის მეორე საწყისი მომენტის გამოსახვით).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. წარმოებს სამი დამოუკიდებელი გასროლა სამიზნეზე, ხოლო მოხვედრის ალბათობა ყოველ გასროლისას 0,4-ია. შემთხვევითი X სიდიდე მოხვედრებათა რიცხვია. განვსაზღვროთ X სიდიდის მახასიათებლები — მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, ს. კ. გ. და ასიმეტრია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. X სიდიდის განაწილების მწკრივს აქვს სახე:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,268	0,064

გამოვთვალოთ X სიდიდის რიცხობრივი მახასიათებლები:

$$m_x = 0 \cdot 0{,}216 + 1 \cdot 0{,}432 + 2 \cdot 0{,}288 + 3 \cdot 0{,}0064 = 1{,}2;$$

$$D_x = (0-1{,}2)^2 \cdot 0{,}216 + (1-1{,}2)^2 \cdot 0{,}432 + (2-1{,}2)^2 \cdot 0{,}288 + \\ + (3-1{,}2)^2 \cdot 0{,}064 = 0{,}72;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0{,}72} = 0{,}848;$$

$$\mu_3 = (0-1{,}2)^3 \cdot 0{,}216 + (1-1{,}2)^3 \cdot 0{,}432 + (2-1{,}2)^3 \cdot 0{,}288 + \\ + (3-1{,}2)^3 \cdot 0{,}064 = 0{,}144;$$

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3_x} = \frac{0{,}144}{0{,}72 \cdot 0{,}848} \approx 0{,}236.$$

შევნიშნავთ, რომ იგივე მახასიათებლების გაცილებით მარტივად შეიძლება გამოთვლა ფუნქციის რიცხობრივი მახასიათებლების შესახებ თეორემის საშუალებით (იხ. მე 10 თავი).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. წარმოებს დამოუკიდებელი ცდების რიგი A ხდომილობის პირველ მოხდენამდე (იხ. მაგალითი 2 5.1 პარაგრაფი). A ხდომილობის ალბათობა ყოველ ცდაში p-ს ტოლია. მოვნახოთ მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და ს. კ. გ. ჩატარებული ცდებისა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. X სიდიდის განაწილების მწკრივი შემდეგი სახისაა:

x_i	1	2	3			i	
p_i	p	pp	q^2p			$q^{i-1}p$	

X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი გამოისახება მწკრივის ჯამით

$$m_x = 1 \cdot p + 2 \cdot qp + 3 \cdot q^2p + \ldots + i \cdot q^{i-1}p + \ldots = \\ = p(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + iq^{i-1} + \ldots).$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ფრჩხილებში ჩასმული მწკრივი გეომეტრიული პროგრესიის გაწარმოებით მიღებული შედეგია.

$$q + q^2 + q^3 + \ldots + q^i + \cdots = \frac{q}{1-q}.$$

მაშასადამე

$$1 + 2q + 3q^2 + \ldots + iq^{i-1} + \ldots = \frac{d}{dq} \frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}$$

საიდანაც

$$m_x = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

X სიდიდის დისპერსიის გამოსათვლელად განვსაზღვროთ ჯერ მისი მეორე საწყისი მომენტი:

$$a_2 = \sum_{i=1}^{\infty} x^2_i p_i = 1^2 \cdot p + 2^2 \cdot qp + 3^2 \cdot q^2p + \ldots + i^2 \cdot q^{i-1}p + \ldots = \\ = p(1^2 + 2^2q + 3^2q^2 + \ldots + i^2q^{i-1} + \ldots).$$

ფრჩხილებში ჩასმული მწკრივის გამოსათვლელად $1+2q+3q^2+\ldots+iq^{i-1}+\ldots=$ $=\frac{1}{(1-q)^2}$ მწკრივს q-ზე გავამრავლებთ მივიღებთ:

$$q+2q^2+3q^3+\ldots+iq^i+\ldots=\frac{q}{(1-q)^2}$$

თუ მწკრივს q-თი გავაწარმოებთ მივიღებთ:

$$1^2+2^2q+3^2q^2+\ldots+i^2q^{i-1}\ \ldots=\frac{d}{dq}\frac{q}{(1-q)^2}=\frac{1+q}{(1-q)^3}.$$

$p=1-q$-ზე გადამრავლებით მივიღებთ

$$\alpha_2=\frac{1+q}{(1-q)^2}.$$

(5.7.18) ფორმულით გამოვსახოთ დისპერსია:

$$D_x=\alpha_2-m^2{}_x=\frac{1+q}{(1-q)^6}-\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{q}{(1-q)^2}=\frac{q}{p^3},$$

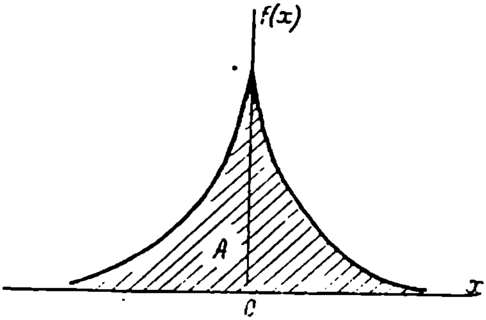
საიდანაც

$$\sigma_x=\sqrt{D_x}=\frac{\sqrt{q}}{p}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. უწყვეტი შემთხვევითი X სიდიდე ემორჩილება განაწილების კანონს, რომლის სიმკვრივეა:

$$f(x)=Ae^{-|x|}$$

მოვნახოთ A კოეფიციენტი. X სიდიდისათვის. განვსაზღვროთ მ. ლ. დისპერსია, ს. კ. გ, ასიმეტრია და ექსცესი.



ნახ. 5.7.3.

ა მ ო ხ ს ნ ა. A-ს განსასაზღვრელად ვისარგებლოთ განაწილების სიმკვრივით:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=2A\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx=2A=1;$$

აქედან

$$A=\frac{1}{2}.$$

ვინაიდან ფუნქცია $xe^{-|x|}$ კენტია, X სიდიდის მ. ლ. ნულის ტოლია:

$$m_x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\,xe^{-|x|}dx=0.$$

დისპერსია და ს. კ. გ. შესაბამისად ტოლია:

$$D_x=2\int_0^{\infty}\frac{1}{2}x^2e^{-x}dx=2;$$

$$\sigma_x=\sqrt{D_x}=\sqrt{2}$$

ვინაიდან განაწილება სიმეტრიულია. ამიტომ $Sk=0$ ექსცესის გამოსათვლელად ვპოულობთ μ_4-ს.

$$\mu_4=2\int_0^{\infty}\frac{1}{2}x^4e^{-x}dx=24,$$

საიდანაც

$$E_x=\frac{\mu_4}{\sigma_x^4}-3=3.$$

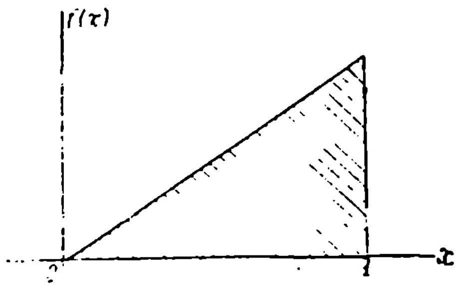
მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. შემთხვევითი X სიდიდე ემორჩილება განაწილების კანონს; რომლის სიმკვრივე გრაფიკულად მოცემულია 5.7,4. ნახ-ზე.

დაიწეროს განაწილების სიმკვრივის გამოსახულება. მოვნახოთ მ. ლ. დისპერსია, ს. კ. გ. და ასიმეტრიაგანაწილებისა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განაწილების სიმკვრივის გამოსახულებას აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x)=\begin{cases} ax, & \text{როცა } 0<x<1. \\ 0, & \text{როცა } x<0 \text{ ანდა } x>1. \end{cases}$$

ვსარგებლობთ განაწილების სიმკვრივის თვისებით, ვპოულობთ $a=2$. X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი:



ნახ. 5.7.4.

$$m_x=\int_0^1 2x^2\,dx=\frac{2}{3}.$$

დისპერსიას მეორე საწყისი მომენტით ვპოულობთ

$$\alpha_2=2\int_0^1 x^3\,dx=\frac{1}{2};\quad D_x=\alpha_2-m_x^2=\frac{1}{18}.$$

აქედან

$$\sigma_x=\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

მესამე საწყისი მომენტი ტოლია

$$\alpha_3 = 2\int_0^1 x^4 dx = \frac{2}{5}.$$

ვისარგებლოთ (5.7.10) ფორმულით რომელიც გამოსახავს μ_3 საწყისი მომენტების საშუალებით:

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3m_x\alpha_2 + 2m^3_x = -\frac{1}{135}.$$

საიდანაც

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3_x} = -\frac{2}{5}\sqrt{2}.$$

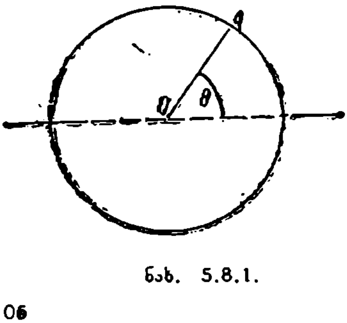
5.8. თანაბარი სიმკვრივის კანონი

პრაქტიკის ზოგიერთ ამოცანაში გვხვდება უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეები, რომლებზედაც ცნობილია, რომ მათი შესაძლო მნიშვნელობანი მდებარეობენ რომელიღაც განსაზღვრული ინტერვალის ფარგლებში; გარდა ამისა, ცნობილია, რომ ამავე ინტერვალის ფარგლებში შემთხვევითი სიდიდის ყველა მნიშვნელობანი ერთნაირად სავალბათოა. (უფრო ზუსტად, გააჩნია ალბათობის ერთი და იგივე სიმკვრივე). ასეთ შემთხვევით სიდიდეებზე იტყვიან, რომ ისინი განაწილებულია თ ა ნ ა ბ ა რ ი ს ი მ კ ვ რ ი ვ ი ს კ ა ნ ო ნ ი თ.

მოვიყვანოთ მსგავსი შემთხვევით სიდიდეთა რამდენიმე მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. სხეულს წონიან ზუსტ სასწორზე, მაგრამ მწონავის განკარგულებაშია სხვადასხვა საწონები მხოლოდ წონით არა ნაკლებ 1 გრამისა; აწონვის შედეგი გვიჩვენებს, რომ სხეულის წონა მოქცეულია k და $(k+1)$ გრამებს შორის.

სხეულის წონა მივიღოთ $\left(k+\frac{1}{2}\right)$ გრამის ტოლად. ამ დროს დაშვებული X შეცდომა, ცხადია, არის შემთხვევითი სიდიდე, განაწილებული თანაბარი სიმკვრივით $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ მონაკვეთზე.

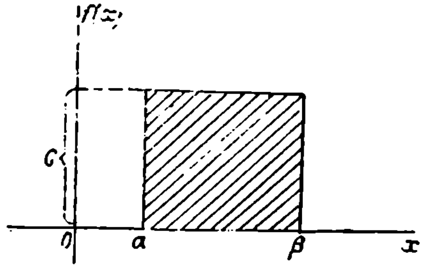


ნახ. 5.8.1.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. შეეულად დაყენებული სიმეტრიული ბორბალი (ნახ. 5.8.1) მოდის ბრუნვაში და შემდეგ ხახუნის შედეგად ჩერდება. განიხილება შემთხვევითი θ სიდიდე — კუთხე, რომელსაც გაჩერების შემდეგ OA რადიუსი ადგენს ჰორიზონტთან. ცხადია, θ სიდიდე განაწილებულია თანაბარი სიმკვრივით $(0,2\pi)$ უბანზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. მეტროპოლიტენის მატარებლები დადიან 2 წუთიანი ინტერვალით. მგზავრი გამოდის ბაქანზე დროის რომელიღაც მომენტში. T დრო, რომლის განმავლობაში მგზავრი მატარებელს უცდის შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც განაწილებულია უბანზე თანაბარი სიმკვრივით (0,2) წუთი.

განვიხილოთ შემთხვევითი X სიდიდე, რომელიც ექვემდებარება თანაბარი სიმკვრივის კანონს α-დან β-მდე უბანზე (ნახ. 5.8.2) და დავწეროთ მისთვის განაწილების $f(x)$ სიმკვრივის გამოსახულება. სიმკვრივე მუდმივია და (α, β) მონაკვეთზე c-ს ტოლია. ამ მონაკვეთის გარეთ იგი ნულის ტოლია:



ნახ. 5.8.2.

$f(x)=c$, როცა $\alpha<x<\beta$,
$f(x)=0$, როცა $x<\alpha$ როცა $x>\beta$.

რადგან ფართობი, შემოსაზღვრული განაწილების მრუდით ერთის ტოლია:

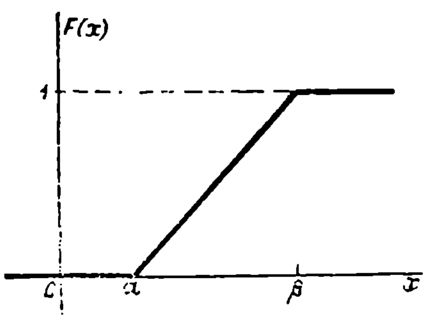
$$c(\beta-\alpha)=1, \qquad k=\frac{1}{\beta-\alpha}.$$

და $f(x)$-ის განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{\beta-\alpha}, \text{ როცა } \alpha<x<\beta, \\ f(x)&=0. \text{ როცა } x<\alpha \text{ ან } x>\beta. \end{aligned}\right\} \tag{5.8.1}$$

(5.8.1) ფორმულაც (α, β) უბანზე თანაბარი სიმკვრივის კანონს გამოსახავს.

დავწეროთ გამოსახულება განაწილების $F(x)$ ფუნქციისათვის. განაწილების ფუნქცია გამოისახება x წერტილის მარცხნივ მდებარე განაწილების მრუდის ფართით. მაშასადამე,



ნახ. 5..8.3

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{როცა } x<\alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \text{როცა } \alpha<x<\beta, \\ 1, & \text{როცა } x>\beta \end{cases}$$

$F(x)$ ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია (5.8.3) ნახ-ზე.

განვსაზღვროთ შემთხვევით X სიდიდის რიცხვითი მახასიათებ-

ლები, რომლებიც α და β მონაკვეთზე ემორჩილებიან თანაბარი განაწილების კანონს.

X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ტოლია:

$$m_x = \int_\alpha^\beta \frac{x}{\beta - \alpha} dx = \frac{\alpha + \beta}{2}. \qquad (5.8,2)$$

თანაბარი განაწილების სიმეტრიულობის ძალით X სიდიდის მედიანა აგრეთვე ტოლია $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

თანაბარი სიმკვრივის კანონს მოდა არა აქვს.

(5.7.16) ფორმულის მიხედვით ვპოულობთ X სიდიდის დისპერსიას:

$$D_x = \mu_2 = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 dx = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}. \qquad (5.8.3)$$

საიდანაც ს. კ. გ.

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}}, \qquad (5.8.4)$$

განაწილების სიმეტრიულობის ძალით მისი ასიმეტრია ნულის ტოლია:

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3_x} = 0. \qquad (5.8.5)$$

ექსცესის განსაზღვრისათვის ვპოულობთ მეოთხე ცენტრალურ მომენტს:

$$\mu_4 = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^4 dx = \frac{(\beta-\alpha)^4}{80},$$

საიდანაც

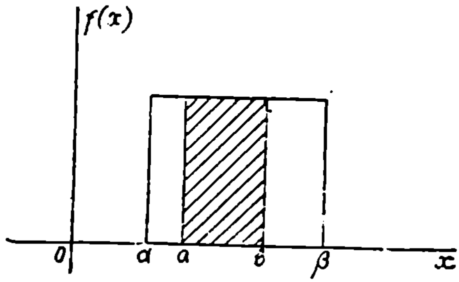
$$Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4_x} - 3 = -1,2. \qquad (5.8.6)$$

განვსაზღვროთ საშუალო არითმეტიკული გადახრა:

$$\nu_1 = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \left| x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right| dx = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{4}. \qquad (5.8.7)$$

დაბოლოს, მოვნახოთ (a, b) უბანზე თანაბარი სიმკვრივით განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდის მოხვედრის ალბათობა, სადაც (a, b) (α, β) უბნის ნაწილია (ნახ. 5.8.4).



ნახ. 5.8.4.

გეომეტრიულად ეს ალბათობა ფართობია, რომელიც (5.8.4) ნახ-ზე დაშტრიხულია. ცხადია, იგი ტოლია

$$P(a<X<b)=\frac{b-a}{\beta-\alpha}, \qquad (5.8.8)$$

ე. ი. ფარდობა (a, b) მონაკვეთის სიგრძისა (α, β) უბნის მთელ სიგრძესთან, რომელზედაც მოცემულია თანაბარი განაწილება.

5.9. პუასონის კანონი

მრავალ პრაქტიკულ ამოცანაში საქმე გვაქვს თავისებური კანონით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდესთან, რომელსაც პუასონის კანონი ეწოდება.

განვიხილოთ წყვეტილი შემთხვევითი X სიდიდე, რომელსაც შეუძლია მიიღოს მხოლოდ მთელი, არა უარყოფითი მნიშვნელობანი:

$$0,1,2,\ldots m,$$

თანაც ამ მნიშვნელობათა მიმდევრობა თეორიულად შეუზღუდველია. ამბობენ, რომ შემთხვევითი X სიდიდე განაწილებულია პუასონის კანონის მიხედვით, თუ ალბათობა იმისა, რომ იგი მიიღებს განსაზღვრულ m მნიშვნელობას, გამოისახება ფორმულით.

$$P_m=\frac{a^m}{m!}e^{-a} \ (m=0,1\cdots), \qquad (5.9.1)$$

სადაც a — რომელიღაც დადებითი სიდიდეა და ეწოდება პუასონის კანონის პარამეტრი.

პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების მწკრივს აქვს შემდეგი სახე:

x_m	0	1	2		m
P_m	e^{-a}	$\frac{a}{1!}e^{-a}$	$\frac{a^2}{2!}e^{-a}$		$\frac{a^m}{m!}e^{-a}$

უპირველეს ყოვლისა დავრწმუნდეთ ჯერ იმაში, რომ ალბათობათა მიმდევრობა რომელიც მოცემული (5.9.1) ფორმულით წარმოადგენს განაწილების მწკრივს, ე. ი. რომ ყველა P_m ალბათობათა ჯამი ერთის ტოლია. გვაქვს:

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!}.$$

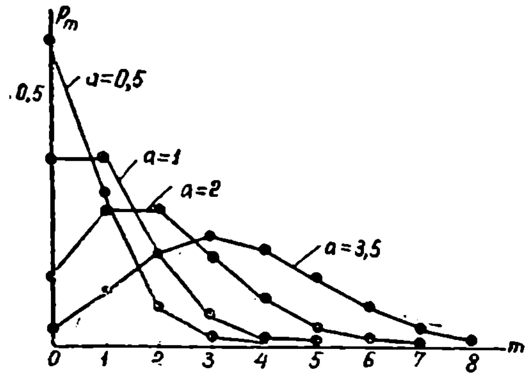
მაგრამ

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} = e^a,$$

საიდანაც

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m = e^{-a} e^a = 1.$$

5.9.1 ნახ-ზე ნაჩვენებია პუასონის კანონით განაწილებული X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების მრავალკუთხედები, რომლებიც შეესაბამებიან პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობას. დანართის 8 ცხრილში მოყვანილია P_m მნიშვნელობანი სხვადასხვა a-სათვის. განვსაზღვროთ პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდის ძირითადი მახასიათებლები—მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.



ნახ. 5.9.1.

მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრის თანახმად

$$m_x = M[X] = \sum_{m=0}^{\infty} mP_m = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

ჯამის პირველი წევრი (რომელიც შეესაბამება $m=0$) ნულის ტოლია, მაშასადამე შეჯამება შესაძლოა დავიწყოთ $m=1$-დან:

$$m_x = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{a^m}{m!} e^{-a} = ae^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ma^{m-1}}{m!} = ae^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!}.$$

აღვნიშნოთ $m-1=k$, მაშინ

$$m_x = ae^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!} = ae^{-a}e^a = a. \tag{5.9.2}$$

ამგვარად, a პარამეტრი შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინია.

დისპერსიის განსაზღვრისათვის მოვნახოთ ჯერ X სიდიდის მეორე საწყისი მომენტი:

$$\alpha_2 = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \frac{a^m}{m!} e^{-a} = a\sum_{m=1}^{\infty} m \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} e^{-a} =$$

$$= a\sum_{m=1}^{\infty} [(m-1)+1]\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}e^{-a} = a\left[\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}e^{-a} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}e^{-a}\right]$$

ადრე დამტკიცებულის მიხედვით

$$\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)\frac{a^{m-1}}{(m-1)}e^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{a^k}{k!}e^{-a} = a:$$

გარდა ამისა,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}e^{-a} = e^{-a}e^{a} = 1,$$

მაშასადამე,

$$\alpha_2 = a(a+1)$$

შემდეგ ვპოულობთ X სიდიდის დისპერსიას:

$$D_x = \alpha_2 - m^2{}_x = a^2 + a - a^2 = a. \tag{5.9.3}$$

ამგვარად, **პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია მისი მათემატიკური a ლოდინის ტოლია.**

პუასონის განაწილების ეს თვისება პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება საკითხის გადასაწყვეტად, სარწმუნოა თუ არა ჰიპოთეზა, რომ შემთხვე-

ვითი X სიდიდე განაწილებულია პუასონის კანონის მიხედვით. ამისათვის ცდიდან განსაზღვრავენ შემთხვევითი სიდიდის სტატისტიკურ მახასიათებლებს — მათემატიკურ ლოდინს და დისპერსიას[1]. თუ მათი მნიშვნელობანი ახლოსაა, მაშინ ეს საბუთია პუასონურ განაწილებაზე ჰიპოთეზის სასარგებლოდ; მათ შორის მკვეთრი განსხვავება, პირიქით მოწმობს — ჰიპოთეზის საწინააღმდეგოდ.

განვსაზღვროთ პუასონის კანონით განაწილებულ შემთხვევითი X სიდიდისათვის ალბათობა იმისა, რომ იგი k-ზე მცირე მნიშვნელობას არ მიიღებს. აღვნიშნოთ ეს ალბათობა R_k.

$$R_k = P(X \geqslant k).$$

ცხადია, R_k ალბათობა შეიძლება გამოთვლილ იქნას, როგორც ალბათობათა ჯამი

$$R_k = P_k + P_{k+1} + \dots = \sum_{m=k}^{\infty} P_m.$$

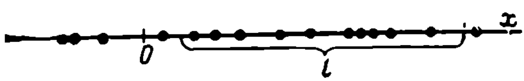
მაგრამ გაცილებით ადვილია იგი განვსაზღვროთ მოპირდაპირე ხდომილობის ალბათობით:

$$P_k = 1 - (P_0 + P_1 + \dots + P_{k-1}) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} P_m. \qquad (5.9.4)$$

კერძოდ, ალბათობა იმისა, რომ X სიდიდე მიიღებს დადებით მნიშვნელობას გამოისახება ფორმულით

$$R_1 = 1 - P_0 = 1 - e^{a}. \qquad (5.9.5)$$

უკვე მივუთითებდით, რომ პრაქტიკის ბევრ ამოცანას მივყავართ პუასონის განაწილებამდე. განვიხილოთ ასეთი სახის ტიპიური ამოცანა. დავუშვათ აბსცისათა Ox ღერძზე შემთხვევითი წესით ნაწილდებიან წერტილები (ნახ. 5.9.2). დავუშვათ, რომ წერტილების შემთხვევითი განაწილება აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:



ნახ. 5.9.2.

1. l მონაკვეთზე წერტილთა ამა თუ იმ რიცხვის მოხვედრის ალბათობა დამოკიდებულია მხოლოდ ამ მონაკვეთის სიგრძეზე, მაგრამ არ არის დამოკიდებული აბსცისის ღერძზე მის მდებარეობაზე. სხვა სიტყვებით,

[1] ამ მახასიათებლის ექსპერიმენტულად განსაზღვრის მეთოდებზე, იხ., ქვემოთ, მე-7 და მე-14 თავი.

აბსცისების ღერძზე წერტილები განაწილებულია ერთი და იგივე საშუალო სიმკვრივით. აღვნიშნოთ ეს სიმკვრივე (ე. ი. სიგრძის ერთეულზე მოსული წერტილების რიცხვის მათემატიკური ლოდინი) λ-თი;

2. აბსცისთა ღერძზე წერტილები ნაწილდებიან ერთიმეორისაგან დამოუკიდებლად, ე. ი. წერტილების ამ თუ იმ რიცხვის მოცემულ მონაკვეთზე მოხვედრის ალბათობა არ არის დამოკიდებული იმისაგან, თუ რამდენი წერტილი მოხვდა მისგან გადაუფარავ ნებისმიერ სხვა მონაკვეთზე.

3. მცირე Δx უბანზე ორი ან მეტი წერტილის მოხვედრის ალბათობა უგულვებელსაყოფად მცირეა შედარებით ერთი წერტილის მოხვედრის ალბათობასთან (ე. ი. პირობა ნიშნავს ორი ან მეტი წერტილის დამთხვევის პრაქტიკულ შეუძლებლობას).

გამოვყოთ აბსცისათა ღერძზე სიგრძის განსაზღვრული l მონაკვეთი და განვიხილოთ დისკრეტული შემთხვევითი X სიდიდე — ამ მონაკვეთზე მოხვედრილი წერტილების რიცხვი. სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობანი იქნება

$$0, \ 1, \ 2, \ldots, m, \ldots \tag{5.9.6}$$

ვინაიდან წერტილები ხვდებიან მონაკვეთზე ერთი მეორისაგან დამოუკიდებლად, თეორიულად არ არის გამორიცხული, რომ იქ აღმოჩნდება რაგინდ ბევრი, ე. ი. მწკრივი (5.9.6) გრძელდება განუსაზღვრელად. დავამტკიცოთ, რომ შემთხვევით X სიდიდეს აქვს პუასონის განაწილების კანონი. ამისათვის გამოვთვალოთ P_m ალბათობა იმისა, რომ l მონაკვეთზე ხვდება ზუსტად m წერტილი.

თავდაპირველად ამოვხსნით უფრო მარტივ ამოცანას. განვიხილოთ O_x ღერძზე მცირე Δ_x უბანი და გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ ამ უბანზე მოხვდება ერთი წერტილი მაინც: ვიმსჯელოთ შემდეგნაირად: ამ უბანზე მოხვედრილი წერტილების მათემატიკური ლოდინი, ცხადია, ტოლი იქნება $\lambda\Delta x$ (ვინაიდან ერთეულ სიგრძეზე ხვდება საშუალოდ λ წერტილი). მესამე პირობის თანახმად მცირე მონაკვეთისათვის შეიძლება უგულებელვყოთ მასზე ორი ან მეტი წერტილის მოხვედრის შესაძლებლობა, ამიტომ მათემატიკური ლოდინი წერტილთა $\lambda\Delta x$ რაოდენობისა, რომელიც ხვდება Δx უბანზე, მიახლოებით ტოლი იქნება მასზე ერთი წერტილის მოხვედრის ალბათობისა (ანდა, რაც ჩვენს პირობებში თანაბარმნიშვნელოვანია, ერთის მაინც).

ამგვარად, უმაღლესი რიგის უსასრულო მცირემდე სიზუსტით, როცა შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ალბათობა იმისა, Δx მონაკვეთზე ხვდება ერთი (თუნდაც ერთი) წერტილი $\lambda\Delta x$-ის ტოლია, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ არ მოხვდება არც ერთი წერტილი $1 - \lambda\Delta x$-ის ტოლია.

ამით ვისარგებლოთ მონაკვეთზე ზუსტად m წერტილის მოხვედრის P_m ალბათობის გამოსათვლელად. დავყოთ l მონაკვეთი $\Delta x = \dfrac{l}{n}$ სიგრ-

ძის ტოლ ნაწილად. შევთანხმდეთ, რომ ელემენტარულ მონაკვეთს დავარქვათ „ცარიელი", თუ მასში არ მოხვდა არც ერთი წერტილი, და „დაკავებული", თუკი მასზე მოხვდა ერთი მაინც. თანახმად ზემოთ დამტკიცებულისა ალბათობა იმისა, რომ Δx მონაკვეთი აღმოჩნდება „დაკავებული" მიახლოებით $\lambda\Delta x=\frac{\lambda l}{n}$-ის ტოლია. ალბათობა იმისა, რომ იგი აღმოჩნდება „ცარიელი", $1-\frac{\lambda l}{n}$-ის ტოლია.

ვინაიდან, მეორე პირობის თანახმად, წერტილების მოხვედრა გადაუფარავ მონაკვეთებზე დამოუკიდებელია, ჩვენი n მონაკვეთები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც n დამოუკიდებელი „ცდა", რომელთაგან ყოველი მონაკვეთთაგანი შეიძლება „დაკავებული" იყოს, რომელთა ალბათობა $p=\frac{\lambda l}{n}$-ის ტოლი იქნება. მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ n მონაკვეთებს შორის ზუსტად m იქნება „დაკავებული". ცდების განმეორების თეორემის მიხედვით ეს ალბათობა ტოლია

$$C_n^m\left(\frac{\lambda l}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda l}{n}\right)^{n-m}.$$

ანდა, თუ აღვნიშნავთ $\lambda l=a$

$$C_n^m\left(\frac{a}{n}\right)^m\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m} \tag{5.9.7}$$

საკმაოდ დიდი n-სთვის ეს ალბათობა მიახლოებით ტოლია l მონაკვეთზე ზუსტად m წერტილის მოხვედრის ალბათობისა, რადგან Δx მონაკვეთზე ორი ან მეტი წერტილის მოხვედრის ალბათობა მცირეა. იმისათვის, რომ მონახულ იქნას P_m-ის ზუსტი მნიშვნელობა, საჭიროა (5.9.7) გამოსახულებაში გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $n\to\infty$:

$$P_m=\lim_{n\to\infty}C_n^m\left(\frac{a}{n}\right)^m\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m} \tag{5.9.8}$$

გარდავქმნათ ზღვრის ნიშნის ქვეშ მდგომი გამოსახულება:

$$C_n^m\left(\frac{a}{n}\right)^m\left(1-\frac{a}{n}\right)^{m-n}=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\,\frac{a^m}{n^m}\,\frac{\left(1-\frac{a}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{a}{n}\right)^m}=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n^m}\,\frac{a^m}{m!}\,\frac{\left(1-\frac{a}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{a}{n}\right)^m}. \tag{5.9.9}$$

პირველი და უკანასკნელი წილადის მნიშვნელი (5.9.9) გამოსახულებაში, როცა $n \to \infty$, ცხადია, მიისწრაფვის ერთისაკენ, გამოსახულება $\frac{a^m}{m!}$ დამოკიდებული არ არის n-ზე. უკანასკნელი წილადის მრიცხველი შეიძლება გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

$$\left(1-\frac{a}{n}\right)^n = \left[\left(1-\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a \tag{5.9.10}$$

როცა $\frac{n}{a} \to \infty$, და გამოსახულება (5.9.10) მიისწრაფვის e^{-a}-საკენ. ამგვარად, დამტკიცებულია, რომ l მონაკვეთზე ზუსტად m წერტილის მოხვედრის ალბათობა გამოისახება ფორმულით

$$P_m = \frac{a_m}{m!} e^{-a},$$

სადაც $a = \lambda l$, ე. ი. X სიდიდე განაწილებულია პუასონის კანონის მიხედვით, რომლის პარამეტრია $a = \lambda l$.

აღვნიშნავთ, რომ შინაარსით a სიდიდე წარმოადგენს l მონაკვეთზე მოსულ წერტილთა საშუალო რიცხვს.

R_1 სიდიდე (ალბათობა იმისა, რომ X სიდიდე მიიღებს დადებით მნიშვნელობას) მოცემულ შემთხვევაში გამოსახავს ა ლ ბ ა თ ო ბ ა ს ი მ ი ს ა ს, რ ო მ l მ ო ნ ა კ ვ ე თ ზ ე მ ო ხ ვ დ ე ბ ა თ უ ნ დ ა ც ე რ თ ი წ ე რ ტ ი ლ ი:

$$R_1 = 1 - e^{-a}. \tag{5.9.11}$$

ამგვარად, დავრწმუნდით, რომ პუასონის განაწილება წარმოიშობა იქ, სადაც რომელიღაც წერტილები (ანდა სხვა ელემენტები) ღებულობენ შემთხვევით მდებარეობას ერთი მეორისაგან დამოუკიდებლად და გამოითვლება რომელიმე უბანზე ამ წერტილების რაოდენობა. ჩვენ შემთხვევაში ასეთი „უბანი“ იყო l მონაკვეთი აბსცისების ღერძზე. ოღონდ ადვილია დასკვნა გავავრცელოთ წერტილების სიბრტყეზე განაწილების შემთხვევაშიც (წერტილთა შემთხვევითი ბრტყელი ველი) და სივრცეში (წერტილთა შემთხვევითი სივრცითი ველი). არ არის ძნელი დავამტკიცოთ, რომ თუ დაცულია პირობები:

1) წერტილები განაწილებულია სტატისტიკურად თანაბრად, რომელთა საშუალო სიმკვრივეა λ;

2) წერტილები ხვდებიან გადაუფარავ არეში დამოუკიდებლად;

3) წერტილები გამოჩნდებიან თითო-თითოდ და არა წყვილად, სამ-

სამად და ა. შ., მაშინ წერტილების X რიცხვი, რომელიც ხვდება ნებისმიერ არეზე (ბრტყელი ან სივრცით) ნაწილდება პუასონის კანონით:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \; (m=0,1,2\cdots),$$

სადაც a-წერტილების საშუალო რიცხვია, რომელიც ხვდება D არეში. სიბრტყის შემთხვევისათვის

$$a = S_D \lambda,$$

სადაც S_D—D არის ფართია;
სივრცისათვის

$$a = V_D \cdot \lambda,$$

სადაც V_D-არის მოცულობა.

შევნიშნავთ, რომ მონაკვეთზე ან არეზე მოხვედრილი წერტილთა რიცხვის პუასონის კანონით განაწილებისათვის მუდმივი სიმკვრივის პირობა ($\lambda=\text{const}$) არაა არსებითი. თუ შესრულებულია ორი პირობა, მაშინ სულ ერთია პუასონის კანონს მაინც აქვს ადგილი, მხოლოდ a პარამეტრი მასში სხვაგვარად გამოისახება. იგი მიიღება λ სიმკვრივის სიგრძეზე, არის ფართზე ან მოცულობაზე არა უბრალო გადამრავლებით, არამედ მონაკვეთით, ფართით, ან მოცულობით ცვლადი სიმკვრივის ინტეგრირებით (დაწვრილებით იხ. პარაგრაფი 19.4). წირზე, სიბრტყეზე, და მოცულობაზე, გაფანტული შემთხვევითი წერტილების არსებობა—არ არის ერთადერთი პირობა, რომლის დროსაც წარმოიშობა პუასონის განაწილება. მაგალითად, შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ პუასონის კანონი წარმოადგენს ზღვრულს მინიმალური განაწილებისათვის:

$$P_{m,\,n} = C^m{}_n p^m \;(1-p)^{n-m}, \tag{5.9.12}$$

თუ ერთდროულად მივასწრაფებთ ცდათა n რიცხვს უსასრულობისაკენ, ხოლო p ალბათობას ნულისაკენ, ამასთან np ნამრავლი ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას:

$$np = a \tag{5.9.13}$$

მართლაც, ბინომალური განაწილების ეს ზღვრული თვისება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\lim_{n\to\infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{a^m}{m!} e^{-a}. \tag{5.9.14}$$

მაგრამ (5.9.13) პირობიდან გამოდის, რომ

$$p = \frac{a}{n} \tag{5.9.16}$$

(5.9.15)-ის (5.9.14)-ში ჩასმით მივიღებთ ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty} C_n^m \left(\frac{a}{n}\right)^m \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m} = \frac{a^m}{m!} e^{-a}. \qquad (5.9.16)$$

რომელიც დამტკიცდა სხვა საბაბით.

ბინომალური კანონის ეს ზღვრული თვისება ხშირად გამოიყენება პრაქტიკაში. დავუშვათ, რომ წარმოებს დიდი რაოდენობა დამოუკიდებელი n ცდებისა, რომელთაგან თითოეულში A ხდომილობას აქვს ძლიერ მცირე p ალბათობა. მაშინ $P_{m,n}$ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობა მოხდება m-ჯერ, შეიძლება გამოითვალოს მიახლოებითი ფორმულით

$$P_{m,n} \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}, \qquad (5.9.17)$$

სადაც $np=a$—პარამეტრია პუასონის იმ კანონისა, რომლითაც მიახლოებით შეიცვლება ბინომალური განაწილება.

პუასონის კანონის ამ თვისებიდან—ცდების დიდი რიცხვის შემთხვევაში და ხდომილობათა მცირე ალბათობისას ბინომალური განაწილება გამოისახოს პუასონის განაწილებით—წარმოიშვა იშვიათ შემთხვევათა კანონი, რომელიც ხშირად გამოიყენება სტატისტიკის სახელმძღვანელოებში. განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი პრაქტიკის სხვადასხვა დარგიდან, რომლებიც დაკავშირებული იქნება პუასონურ განაწილებასთან.

მაგალითი 1. ავტომატურ სატელეფონო სადგურში შემოდის გამოძახება, რომლის საშუალო სიმკვრივეა K გამოძახება საათში იმ დაშვებით, რომ გამოძახებათა რიცხვი დროის ნებისმიერ მონაკვეთში განაწილებულია პუასონის კანონის მიხედვით. მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ ორ წუთში სადგურში შემოვა ზუსტად სამი გამოძახება.

ამოხსნა. ორ წუთში გამოძახებათა საშუალო რიცხვი ტოლია:

$$a=\frac{2K}{60}=\frac{K}{30}.$$

(5.9.1.) ფორმულით ალბათობა ზუსტად სამი გამოძახების შემოსვლისა ტოლია:

$$P_3=\frac{\left(\frac{K}{30}\right)^3}{1\cdot 2\cdot 3} e^{-\frac{K}{30}}$$

მაგალითი 2. წინა მაგალითის პირობებში მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ ორ წუთში მოვა ერთი გამოძახება მაინც.

ამოხსნა. (5.9.4) ფორმულით მივიღებთ:

$$R_1=1-e^{-a}=1-e^{-\frac{K}{30}}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. იმავე პირობებში მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ ორ წუთში მოვა არანაკლებ სამი გამოძახებისა.

ა მ ო ხ ს ნ ა (5.9.4) ფორმულის მიხედვით გვაქვს:

$$P_3=1-(P_0+P_1+P_2)=1-e^{-\frac{K}{30}}\left[1+\frac{K}{30}+\frac{1}{2}\left(\frac{K}{30}\right)^2\right].$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. საფეიქრო (საქსოვი) დაზგის მუშაობის 1 საათში ძაფი საშუალოდ წყდება 0,375-ჯერ. მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ ცვლაში (8 საათის განმავლობაში) ძაფის გაწყვეტათა რიცხვი იქნება მოთავსებული საზღვრებში 2 და 4 (არანაკლებ ორისა და არა უმეტეს ოთხი გაწყვეტისა).

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია,

$$a=0{,}375\cdot 8=3;$$

გვაქვს:

$$P(2\leqslant X\leqslant 4)=P_2+P_3+P_4.$$

მიახლოებით, დანართის მე-8 ცხრილით, როცა $a=3$

$$P_2=0{,}224;\quad p_3=0{,}224;\quad P_4=0{,}168,$$

$$P(2\leqslant X\leqslant 4)=0{,}616.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გავარვარებული კათოდიდან დროის ერთეულში გამოიყოფა საშუალოდ ელექტრონთა $q(t)$ რაოდენობა, სადაც t — ცდის დაწყებიდან განვლილი დრო. მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ τ დროის შუალედში, რომელიც t_0 მომენტში იწყება, კათოდიდან გამოიყოფა ზუსტად m ელექტრონი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვპოულობთ ელექტრონთა საშუალო a რაოდენობას, რომელიც გამოიყოფა კათოდიდან დროის მოცემულ მონაკვეთში. გვაქვს:

$$a=\int_{t_0}^{t_0+\tau} q(t)\,dt.$$

გამოთვლილი a-ს მიხედვით განვსაზღვრავთ საძიებელ ალბათობას:

$$P_m=\frac{a^m}{m!}e^{-a}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ნამსხვრევების რაოდენობა, რომელიც ხვდება მცირე ზომების მქონე მიზანს გასკდომის წერტილის წინასწარ მოცემული მდებარეობისას, ნაწილდება პუასონის კანონის მიხედვით. ნამსხვრევთა ველის საშუალო სიმკვრივე, რომელშიდაც აღმოჩნდება სამიზნე გასკდომის წერტილის მოცემულ მდებარეობისას, ტოლია $3\ \frac{\text{ნამსხვრევი}}{\text{მ}^2}$. სამიზნის ფართი ტოლია $s=0{,}5$ მ^2. სამიზნის დასაზიანებლად საკმარისია მასზე ერთის მაინც ნამსხვრევის მოხვედრება. მონახულ იქნას სამიზნის დაზიანების ალბათობა სკდომის წერტილის მოცემული მდებარეობისას.

ა მ ო ხ ს ნ ა. $a=\lambda s=1{,}5$. (5.9.4) ფორმულით ვპოულობთ ერთი მაინც ნამსხვრევის მოხვედრების ალბათობას:

$$R_1=1-e^{-1{,}5}=1-0{,}223=0{,}777$$

(მაჩვენებლიანი e^{-a} ფუნქციის გამოსათვლელად სარგებლობენ დანართის მე-2 ცხრილით).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. ავადმყოფობის წარმომქმნელ მიკრობთა საშუალო სიმკვრივე 1 მ³ ჰაერში ტოლია 100-ის. აიღება ჰაერის 2 დმ³ სინჯი. მონახული იქნას ალბათობა იმისა, რომ მასში აღმოჩენილი იქნება ერთი მიკრობი მაინც.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვღებულობთ რა მოცულობაში მიკრობთა რიცხვის პუასონისებურ განაწილების ჰიპოთეზას, ვპოულობთ:

$$a=0,1; \quad R_1=1-e^{-0,2}\approx 1-0,819\approx 0,18$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 8. რომელიღაც მიზანზე წარმოებს 50 დამოუკიდებელი გასროლა. ერთი გასროლისას მიზანში მოხვედრების ალბათობა 0,4-ის ტოლია. ვისარგებლებთ რა ბინომიალური განაწილების ზღვრული თვისებით (ფორმულა 5.9.17), მოვნახოთ მიახლოებით ალბათობა იმისა, რომ მიზანს მოხვდება: არც ერთი ჭურვი, ერთი ჭურვი, ორი ჭურვი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს $a=np=50\cdot 0,04=2$. დანართის მე-8 ცხრილით. მოვნახავთ ალბათობებს:

$$p_0=0,135; \qquad p_1=0,271; \qquad p_2=0,271.$$

VI თავი

განაწილების ნორმალური კანონი

6.1. ნორმალური კანონი და მისი პარამეტრები

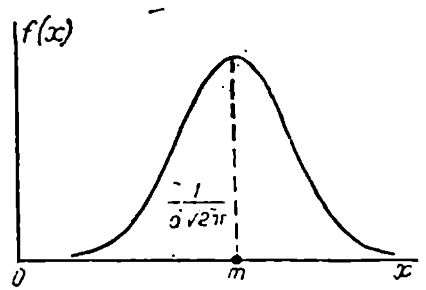
განაწილების ნორმალური კანონი (ხშირად გაუსის კანონად წოდებული) მნიშვნელოვანია ალბათობათა თეორიაში და განაწილების სხვა კანონებს შორის უჭირავს განსაკუთრებული ადგილი. განაწილების ეს კანონი პრაქტიკაში ყველაზე გავრცელებული კანონია. მთავარი თავისებურება, რომელიც ნორმალურ კანონს გამოჰყოფს სხვა კანონებიდან, არის ის, რომ იგი ზღვრული კანონია, რომელსაც ხშირად ტიპიურ პირობებში განაწილების სხვა კანონები უახლოვდებიან. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ დამოუკიდებელ (ან სუსტად დამოკიდებულ) შემთხვევით სიდიდეთა საკმაოდ დიდ რიცხვთა ჯამი, რომლებიც ემორჩილებიან განაწილების ნებისმიერ კანონს (არა მკაცრ შეზღუდვათა დაცვისას), მიახლოებით მით უფრო ზუსტად ემორჩილება ნორმალურ კანონს, რამდენადაც შემთხვევითი სიდიდეების მეტი რიცხვი იკრიბება. პრაქტიკაში შესაძლო ყველა შემთხვევით სიდიდეთა უმრავლესობა, როგორიცაა, შეცდომები გაზომვებისას, სროლისას და ა. შ. შეიძლება წარმოდგენილი იქნას როგორც ჯამი მცირე შესაკრებთა (ელემენტარულ შეცდომათა) დიდი რიცხვისას, რომელთაგან თითოეული გამოწვეულია ცალკეული მიზეზებით, რომლებიც სხვა დანარჩენებზე არაა დამოკიდებული. განაწილების რომელ კანონსაც არ უნდა ემორჩილებოდნენ ცალკეული ელემენტარული შეც-

დომები, ამ განაწილებათა თავისებურებანი შესაკრებთა დიდი რიცხვისას ნიველირდებიან და ჯამი ნორმალურ კანონთან მიახლოებული აღმოჩნდება. დასაჯამებელ შეცდომებზე ძირითადი შეზღუდვა არის ის რომ ყველა შეცდომები საერთო ჯამში უმნიშვნელო უნდა იყოს. თუკი ეს პირობა არ სრულდება და ერთი რომელიმე შეცდომათაგანი აღმოჩნდება ჯამზე მკვეთრად გადაჭარბებული სხვა დანარჩენებთან შედარებით, მაშინ ამ გადაჭარბებული შეცდომების განაწილების კანონი მოახდენს გავლენას ჯამზე და ძირითად შტრიხებში განსაზღვრავს მის განაწილების კანონს. თეორემები, რომლებიც ამყარებენ ნორმალურ კანონს შესაკრებთა ჯამისათვის, დაწვრილებით იქნება განხილული მე-13 თავში.

განაწილების ნორმალური კანონი ხასიათდება შემდეგი სახის ალბათობის სიმკვრივით:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \tag{6.1.1}$$

ნორმალური კანონის მიხედვით განაწილების მრუდს აქვს სიმეტრიული ბორცვის სახე (ნახ. 6.1.1).



ნახ. 6.1.1.

მრუდის მაქსიმალური ორდინატა, რომელიც $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$-ის ტოლია შეესაბამება $x=m$ წერტილს; m წერტილიდან დაშორების მიხედვით განაწილების სიმკვრივე ეცემა და როცა $x\to\pm\infty$, მრუდი ასიმპტომურად უახლოვდება აბსცისათა ღერძს.

ნორმალური კანონის (6.1.1.) გამოსახულებაში გავარკვიოთ აზრი m და σ პარამეტრებისა; დავამტკიცოთ, რომ m სიდიდე არის მ ა თ ე მ ა ტ ი კ უ რ ი ლოდინი, ხოლო σ სიდიდე ს ა შ უ ა ლ ო კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ი გ ა დ ა ხ რ ა X სიდიდისა. ამისათვის გამოვთვალოთ X სიდიდის ძირითადი რიცხვითი მახასიათებლები — მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

თუ შევცვლით ცვლადს

$$\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}=t,$$

გვექნება:

$$M[X]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma\sqrt{2}t+m)e^{-t^2}dt=$$

$$=\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-t^2}dt+\frac{m}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\,dt. \tag{6.1.2}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ (6.1.2) ფორმულაში ორი ინტეგრალიდან პირველი ნულის ტოლია; მეორე ეილერ-პუასონის ცნობილი ინტეგრალია:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=2\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}. \tag{6.1.3}$$

მაშასადამე

$$M[X]=m,$$

ე. ი. m პარამეტრი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინია. ეს პარამეტრი, განსაკუთრებით სროლის ამოცანებში, ხშირად მიღებულია როგორც გ ა ფ ა ნ ტ ვ ი ს ც ე ნ ტ რ ი გ. ც.[1]

გამოვთვალოთ X სიდიდის დისპერსია:

$$D[X]=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

კვლავ ცვლადის შეცვლით $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}=t$, მივიღებთ:

$$D[X]=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2}\,dt.$$

წევრწევრთა ინტეგრირებით მივიღებთ:

$$D[X]=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t\cdot 2te^{-t^2}dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left\{-te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt\right\}.$$

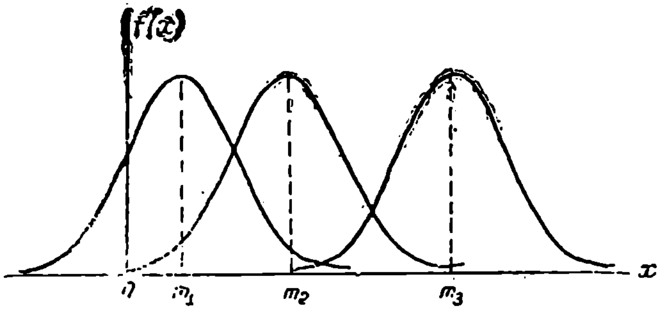
პირველი შესაკრები ფიგურულ ფრჩხილებში ნულის ტოლია (რადგან e^{-t^2} როცა $t\to\infty$ კლებულობს უფრო სწრაფად ვიდრე იზრდება t-ს ნებისმიერი ხარისხი). მეორე შესაკრები (6.1.3) ფორმულით $\sqrt{\pi}$-ის ტოლია, საიდანაც

$$D[X]=\sigma^2.$$

მაშასადამე (6.1.1) ფორმულაში σ პარამეტრი არის X სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა. გამოვარკვიოთ ნორმალური განაწილების

[1] აქ და ქვემოთ გ. ც. — გაფანტვის ცენტრი.

m და σ პარამეტრის აზრი. უშუალოდ (6.1.1) ფორმულიდან ჩანს, რომ განაწილების ცენტრს წარმოადგენს m გაფანტვის ცენტრი. ეს ცხადია იქედან, რომ $(x-m)$ სხვაობის ნიშნის შეცვლისას (6.1.1) გამოსახულება არ იცვლება. თუკი შევცვლით გაფანტვის ცენტრს, განაწილების მრუდი გადაადგილდება აბსცისის ღერძის გასწვრივ ისე, რომ ფორმას არ შეიცვლის (ნახ. 6.1.2).

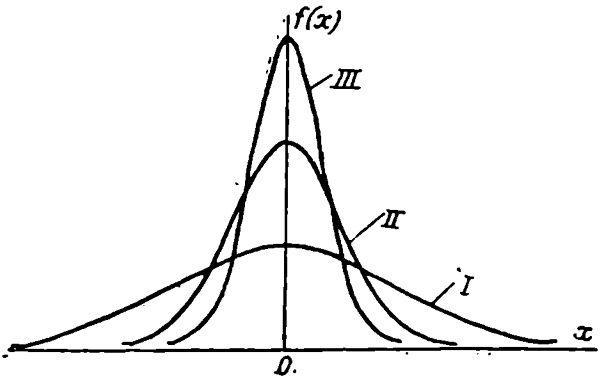


ნახ. 6.1.2.

გაფანტვის ცენტრის განზომილება იგივეა, რაც შემთხვევითი X სიდიდის განზომილება.

σ პარამეტრი ახასიათებს არა მდებარეობას, არამედ თვით განაწილების მრუდის ფორმას. ეს არის „გაფანტვის" მახასიათებელი. განაწილების მრუდის უდიდესი ორდინატი σ-ს უკუპროპორციულია.

σ-ს გადიდებისას მაქსიმალური ორდინატა მცირდება. ვინაიდან განაწილების მრუდის ფართი ყოველთვის ერთის ტოლი უნდა დარჩეს. σ-ას გადიდებისას განაწილების მრუდი გახდება უფრო ბრტყელი, გაიწევა რა აბსცისის ღერძის გასწვრივ; პირიქით, σ-ს შემცირებისას განაწილების მრუდი აიწევა (აიზიდება), ერთდროულად შეიკუმშება გვერდებიდან და გახდება უფრო ნემსისებური. 6.1.3 ნახ-ზე ნაჩვენებია



ნახ. 6.1.3.

სამი ნორმალური მრუდი (I. II, III) როცა $m=0$; მათგან I მრუდი შეესაბამება σ-ს ყველაზე დიდ, ხოლო III მრუდი ყველაზე მცირე მნიშვნელობას. პარამეტრის შეცვლა განაწილების მრუდის მასშტაბის შეცვლის ტოლძალოვანია—მასშტაბის ერთ ღერძზე გადიდებისა და ასეთივეშემცირებისა მეორეზე.

განზომილება σ პარამეტრისა, ბუნებრივია, ემთხვევა შემთხვევით X სიდიდის განზომილებას.

ალბათობა თეორიის ზოგიერთ კურსში ნორმალური კანონისათვის გაფანტვის მახასიათებლად საშუალო კვადრატული გადახრის ნაცვლად გამოიყენება ე. წ. **სიზუსტის ზომა**. სიზუსტის ზომა ეწოდება საშუალო კვადრატულ გადახრის (σ) შებრუნებულ სიდიდეს:

$$h=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}.$$

სიზუსტის ზომის განზომილება შემთხვევითი სიდიდის განზომილების შებრუნებულია.

ტერმინი „სიზუსტის ზომა“ ნასესხებია შეცდომათა გაზომვების თეორიიდან: რამდენადაც ზუსტია გაზომვა, იმდენად მეტია სიზუსტის ზომა. თუ ვისარგებლებთ სიზუსტის h ზომით შეიძლება ნორმალური კანონი შემდეგი სახით დავწეროთ:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2(x-m)^2}.$$

6.2. ნორმალური განაწილების მომენტები

ზემოთ დავამტკიცეთ, რომ (6.1.1) ნორმალურ კანონს დაქვემდებარებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი m-ის ტოლია, საშუალო კვადრატული გადახრა σ-ის ტოლია.

გამოვიყვანოთ საერთო ფორმულები ნებისმიერი რიგის ცენტრალური მომენტებისათვის.

განსაზღვრის მიხედვით:

$$\mu_s=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^s f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^s e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

მოვახდინოთ ცვლადის შეცვლა $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}=t$, მივიღებთ:

$$\mu_s=\frac{(\sigma\sqrt{2})^s}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^s e^{-t^2}dt. \qquad (6.2.1)$$

(6.2.1) გამოსახულებისათვის გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა:

$$\mu_s=\frac{(\sigma\sqrt{2})^s}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{-1}\cdot te^{-t^2}dt=$$

$$=\frac{(\pi\sqrt{2})^s}{\sqrt{\pi}}\left\{-\frac{1}{2}\,e^{-t^2}\,t^{s-1}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{s-1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{s-2}e^{-t^2}dt\right\}$$

გავითვალისწინებთ რა, რომ პირველი წევრი ფრჩხილებს შიგნით ნულის ტოლია, მივიღებთ:

$$\mu_s=\frac{(s-1)\sqrt{(\sigma\sqrt{2})^s}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{s-2}e^{-t^2}\,dt. \qquad (6.2.2)$$

(6.2.1) ფორმულიდან μ-სათვის გვაქვს შემდეგი გამოსახულება:

$$\mu_{s-2}=\frac{(\sigma\sqrt{2})^{s-2}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{s-2}e^{-t^2}\,dt. \qquad (6.2.3)$$

(6.2.2) და (6.2.3) ფორმულების მარჯვენა მხარეების შედარებიდან ვხედავთ, რომ ისინი ერთიმეორისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ $(s-1)\sigma^2$ თანამამრავლით;
მაშასადამე,

$$\mu_s=(s-1)\sigma^2\mu_{s-2}. \qquad (6.2.4)$$

(6.2.4) ფორმულა მარტივი რეკურენტული დამოკიდებულებაა, რომელიც საშუალებას იძლევა უმაღლესი რიგის მომენტები გამოსახული იქნას დაბალი რიგის მომენტებით. თუ ვისარგებლებთ ამ ფორმულით და მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\mu_0=1$[1] და $\mu_1=0$, შეიძლება გამოვთვალოთ ყველა რიგის ცენტრალური მომენტები, რადგან $\mu_1=0$, მაშინ (6.2.4) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ნორმალური განაწილების ყველა კენტი მომენტი ნულის ტოლია. ეს გამომდინარეობს, აგრეთვე უშუალოდ ნორმალური კანონის სიმეტრიულობიდან.

ლუწი s-ებისათვის (6.2.4) ფორმულიდან გამომდინარეობს თანმიმდევრული მომენტებისათვის შემდეგი გამოსახულებანი:

$$\mu_2=\sigma^2;$$
$$\mu_4=3\sigma^4;$$
$$\mu_6=15\sigma^6 \qquad \text{და ა. შ.}$$

[1] ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდის ნულოვანი მომენტი ერთის ტოლია, როგორც ამ სიდიდის ნულოვანი ხარისხის მათემატიკური ლოდინი.

ზოგად ფორმულას s რიგის მომენტისათვის ნებისმიერი ლუწი s-სათვის აქვს სახე:

$$\mu_s=(s-1)!!\sigma^s,$$

სადაც $(s-1)!!$ სიმბოლოს ქვეშ იგულისხმება ნამრავლი ყველა კენტი რიცხვისა 1-დან $(s-1)$-მდე.

ვინაიდან ნორმალური კანონისათვის $\mu_3=0$, მისი ასიმეტრიულობაც ნულის ტოლია:

$$Sk=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=0.$$

მეოთხე მომენტის გამოსახულებიდან

$$\mu_4=3\sigma^4$$

გვაქვს

$$Ex=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=0,$$

ე. ი. ნორმალური განაწილების ექსცესი ნულის ტოლია. ეს ბუნებრივიცაა, რადგან ექსცესის დანიშნულებაა დაახასიათოს ამ კანონის სიმკვეთრე—შედარებით ნორმალურთან.

6.3. ნორმალურ კანონს დაქვემდებარებული შემთხვევითი სიდიდის მოცემულ უბანზე მოხვედრის ალბათობა. განაწილების ნორმალური ფუნქცია

ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეებთან დაკავშირებულ ბევრ ამოცანაში გვხვდება განვსაზღვროთ $(\alpha-\beta)$ უბანში ნორმალურ კანონს დაქვემდებარებულ m და σ პარამეტრებიანი შემთხვევითი X სიდიდის მოხვედრის ალბათობა. ამ ალბათობის გამოსათვლელად ვსარგებლობთ ფორმულით

$$P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha) \tag{6.3.1}$$

სადაც $F(x)$—X სიდიდის განაწილების ფუნქციაა.
მოვნახოთ m, σ პარამეტრებიანი, ნორმალური კანონით განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდის $F(x)$ განაწილების ფუნქცია.
X სიდიდის განაწილების სიმკვრივე ტოლია:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{6.3.2}$$

აქედან მოვნახავთ განაწილების ფუნქციას

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx. \qquad (6.3.3)$$

მოვახდინოთ 6.3.3 ინტეგრალში ცვლადის შეცვლა $\frac{x-m}{\sigma}=t$ და დავიყვანოთ იგი შემდეგ სახემდე:

$$F((x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (6.3.4)$$

(6.3.4) ინტეგრალი არ გამოისახება ელემენტარული ფუნქციებით, მაგრამ იგი შეიძლება გამოვთვალოთ სპეციალური ფუნქციით, რომელიც გამოსახავს განსაზღვრულ ინტეგრალებს e^{-t^2} ან $e^{-\frac{t^2}{2}}$ გამოსახულებებიდან (ე. წ. ა ლ ბ ა თ ო ბ ა თ ა ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი), რომლისთვისაც შედგენილია ცხრილები. არსებობს ასეთი ფუნქციების ბევრი ნაირსახეობა.

მაგალითად:

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-t^2}dt; \quad \Phi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

და ა. შ. თუ რომელი მათგანით ვისარგებლებთ მნიშვნელობა არ აქვს. ვირჩევთ შემდეგ ფუნქციას

$$\Phi^*(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (6.3.5)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ეს ფუნქცია $m=0$, $\sigma=1$ პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა. შევთანხმდეთ $\Phi^*(x)$ ფუნქციას გ ა ნ ა წ ი ლ ე ბ ი ს ნ ო რ მ ა ლ უ რ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა ვუწოდოთ. დანართში (ცხრილი 1) მოცემულია $\Phi^1(x)$ ფუნქციის ცხრილები. m და σ პარამეტრებიანი X სი-

[1] ინტერპოლაციის გასაადვილებლად ცხრილებში ფუნქციის მნიშვნელობათა გვერდით მოცემულია მათი Δx ნაზრდები ერთ ბიჯზე.

დიდის განაწილების (6.3.3.) ფუნქცია გამოვსახოთ განაწილების ნორმალური $\Phi^*(x)$ ფუნქციით. ცხადია:

$$F(x)=\Phi^*\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \tag{6.3.6}$$

ახლა მოვნახოთ შემთხვევითი X სიდიდის α-დან β-მდე უბნებში მოხვედრის ალბათობა, (6.3.1) ფორმულის თანახმად

$$P(\alpha<x<\beta)=\Phi^*\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi^*\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right). \tag{6.3.7}$$

ამგვარად, ჩვენ გამოვსახეთ ნებისმიერ პარამეტრებიანი ნორმალურ კანონით განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდის უბანზე მოხვედრის ალბათობა, განაწილების $\Phi^*(x)$ სტანდარტული ფუნქციით, რომელიც შეესაბამება უმარტივეს] ნორმალურ 0,1 პარამეტრებიან კანონს. შევნიშნავთ, რომ Φ^* ფუნქციის არგუმენტებს (6,3.7) ფორმულაში ძალზე მარტივი აზრი აქვთ: $\frac{\beta-m}{\sigma}$ არის მანძილი უბნის მარჯვენა β ბოლოდან გაფანტვის ცენტრამდე, რომელიც გამოსახულია საშუალო კვადრატულ გადახრებში; $\frac{\alpha-m}{\sigma}$ ასეთივე მანძილია უბნის მარცხენა ბოლოსათვის, თანაც ეს მანძილი ჩაითვლება დადებითად, თუ ბოლო მდებარეობს გაფანტვის ცენტრიდან მარჯვნივ, ხოლო უარყოფითად, თუ იგი მდებარეობს მარცხნივ.

როგორც განაწილების ყოველგვარ ფუნქციას $\Phi^*(x)$ ფუნქციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

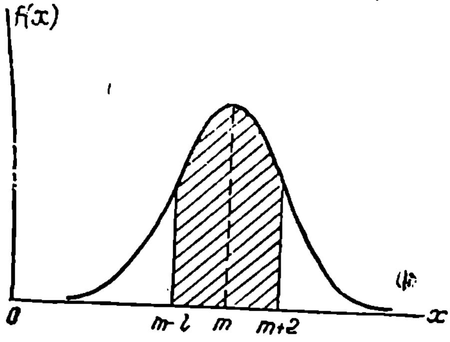
1. $\Phi^*(-\infty)=0$, 2. $\Phi^*(+\infty)=1$, 3. Φ^*_x—არაკლებადი ფუნქციაა. გარდა ამისა $m=0$, $\sigma=1$ პარამეტრებიანი ნორმალური განაწილების, კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\Phi^*(-x)=1-\Phi^*(x) \tag{6.3.8}$$

ვისარგებლებთ რა ამ თვისებით, შეიძლება $\Phi^*(x)$ ფუნქციის ცხრილებში დავკმაყოფილებულიყავით არგუმენტის მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობებით, მაგრამ თავიდან რომ ავიცილოთ ზედმეტი ოპერაციები (ერთიდან გამოკლება), დანართის I ცხრილში მოგვყავს $\Phi^*(x)$-ის მნიშვნელობანი, როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი არგუმენტებისათვის.

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობის გამოთვლის ამოცანა, გაფანტვის m ცენტრის სიმეტრიულ უბანზე.

განვიხილოთ უბანი 2 l სიგრძის (ნახ. 6.3.1). ფორმულით გამოვთვალოთ ამ უბანზე მოხვედრის ალბათობა:



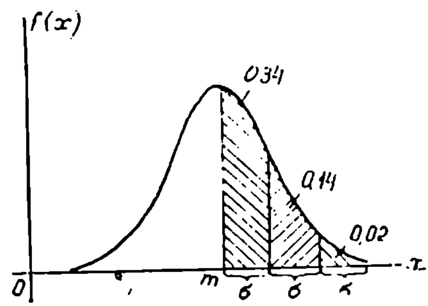
ნახ. 6.3.1.

$$P(m-l<X<m+l)= =\Phi^*\left(\frac{l}{\sigma}\right)-\Phi^*\left(-\frac{l}{\sigma}\right) \quad (6.3.9)$$

თუ $\Phi^*(x)$ ფუნქციის (6.3.8) თვისებას გავითვალისწინებთ და მარცხენა ნაწილს უფრო კომპაქტურ სახეს მივცემთ, მივიღებთ ნორმალური კანონის მიხედვით განაწილებულ შემთხვევითი სიდიდის გაბნევის ცენტრის მიმართ სიმეტრიულ უბანზე მოხვედრის ალბათობის გამოსათვლელ ფორმულას:

$$P(|X-m|<l)=2\Phi^*\left(\frac{l}{\sigma}\right)-1 \quad (6.3.10)$$

ამოვხსნათ შემდეგი ამოცანა. გაფანტვის m ცენტრიდან გადავზომოთ σ-ს ტოლი სიგრძის მონაკვეთები მიმდევრობით (ნახ. 6.3.2), გამოვთვალოთ თითოეულ მათგანში შემთხვევითი X სიდიდის მოხვედრის ალბათობა. ვინაიდან ნორმალური კანონის მრუდი სიმეტრიულია, საკმარისია გადავზომოთ ასეთი მონაკვეთები მხოლოდ ერთ მხარეზე.



ნახ. 6.3.2.

(6.3.7) ფორმულით ვპოულობთ:

$$\left.\begin{aligned}
&P(m<X<m+\sigma)=\Phi^*(1)-\Phi^*(0)= \\
&\qquad\qquad =0{,}8413-0{,}5000\approx 0{,}341; \\
&P(m+\sigma<X<m+2\sigma)=\Phi^*(2)+\Phi^*(1)\approx 0{,}136; \\
&P(m+2\sigma<X<m+3\sigma)=\Phi^*(3)-\Phi^*(2)\approx 0{,}012; \\
&P(m+3\sigma<X<m+4\sigma)=\Phi^*(4)-\Phi^*(3)\approx 0{,}001.
\end{aligned}\right\} \quad (6.3.11)$$

მომდევნო მონაკვეთზე (მეხუთე, მეექვსე და ა. შ.) მოხვედრის ალბათობა 0,001-მდე სიზუსტით ნულის ტოლია.

თუ მონაკვეთებში მოხვედრის ალბათობას 0,01-მდე (1%-მდე) დავამრგვალებთ მივიღებთ სამ ადვილად დასამახსოვრებელ რიცხვს: 0,34; 0,14; 0,02.

ჯამი ამ სამი მნიშვნელობისა უდრის 0,5. ეს ნიშნავს იმას, რომ ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევითი სიდიდისათვის მთელი გაფანტვა (პროცენტის ნაწილამდე) სრულად მოთავსდება $m \pm 3\sigma$ უბანში.

ვიცით რა, შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა და მათემატიკური ლოდინი, შესაძლებელია საორიენტაციოდ ვუჩვენოთ მისი პრაქტიკულად შესაძლო მნიშვნელობათა ინტერვალი. შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობათა დიაპაზონის შეფასების ასეთი ხერხი მათემატიკურ სტატისტიკაში ცნობილია „ს ა მ ი ს ი გ მ ა ს წ ე ს ი“-ს სახელწოდებით. „სამი სიგმას“ წესიდან გამომდინარეობს აგრეთვე შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრის განსაზღვრის საორიენტაციო ხერხი: საშუალოდან პრაქტიკულად მაქსიმალურად შესაძლო გადახრას იღებენ და ყოფენ მას სამზე. იგულისხმება, რომ ასეთი უხეში ხერხი შეიძლება რეკომენდებული იქნას მხოლოდ მაშინ, თუკი არა გვაქვს σ-ს უფრო ზუსტად განსაზღვრის სხვა ხერხები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. შემთხვევითი X სიდიდე, განაწილებული ნორმალური კანონით, რომელიღაც მანძილის გაზომვისას შეცდომას წარმოადგენს. გაზომვისას მომატების მხრივ დაიშვება სისტემატური შეცდომა 1, 2 (მ); გაზომვის შეცდომის საშუალო კვადრატული გადახრა ტოლია 0,8 (მ)-ის. მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ განაზომის მნიშვნელობის გადახრა ჭეშმარიტიდან აბსოლუტური სიდიდით 1,6 (მ)-ს არ აღემატება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გაზომვის შეცდომა არის $m=1,2$ და $\sigma=0,8$ პარამეტრებიანი შემთხვევითი X სიდიდე, დაქვემდებარებული ნორმალურ კანონს. უნდა ვიპოვოთ ამ სიდიდის $\alpha=-1,6$-დან $\beta=+1,6$-დე უბანზე მოხვედრის ალბათობა.

(6. 3.7) ფორმულის მიხედვით გვაქვს:

$$P(-1,6<X<1,6)=\Phi^*\left(\frac{1,6-1,2}{0,8}\right)-\Phi^*\left(\frac{-1,6-1,2}{0,8}\right)=$$

$$=\Phi^*(0,5)-\Phi^*(-3,5).$$

ვსარგებლობთ დანართში მოცემული $\Phi^*(x)$ ფუნქციით (ცხრილი 1) და ვპოულობთ:

$$\Phi^*(0,5)=0,6915; \quad \Phi^*(-3,5)=0,0002$$

საიდანაც:

$$P(-1,6<X<1,6)=0.6915-0,0002=0,6913\approx0,691.$$

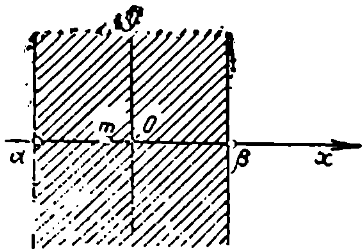
მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. მოვნახოთ იგივე ალბათობა, რაც წინა მაგალითშია, მაგრამ იმ პირობით, რომ შეცდომა არ არის სისტემატიური.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (6.3.10) ფორმულის მიხედვით $l=1,6$ დაშვებით, მივიღებთ:

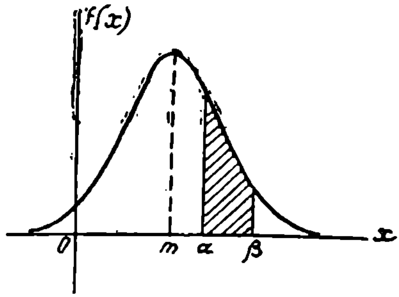
$$P(|X|<1,6)=2\Phi^*\left(\frac{1,6}{0,8}\right)-1\approx0,955.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. სამიზნე, რომელსაც აქვს ზოლის სახე (ავტოსტრადა), სიგანე 20 მეტრია და წარმოებს სროლა ავტოსტრადის მართობულად. დამიზნება წარმოებს ავტოსტრადის შუა ხაზზე. სროლის σ საშუალო კვადრატული გადახრა 8 მ-ის ტოლია. გვაქვს სისტემატური შეცდომა სროლის მიმართულებით: მოუწვდომლობა — 3 მ. მოვნახოთ ავტოსტრადაზე მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლისას.

ა მ ო ხ ს ნ ა. კოორდინატთა სათავეს ვირჩევთ ავტოსტრადის შუა ხაზის ნებისმიერ წერტილში (ნახ. 6.3.3) და აბსცისთა ღერძს მივმართავთ ავტოსტრადის მართობულად. ავტოსტრადაზე ჭურვის მოხვედრა ან არ მოხვედრა განისაზღვრება ვარდნის წერტილის



ნახ. 6.3.3



ნახ. 6.3.4.

მხოლოდ ერთი X კოორდინატით (მეორე Y კოორდინატის მნიშვნელობა ჩვენთვის არსებითი არ არის). შემთხვევითი X სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონით,, რომელთა პარამეტრებია $m=-3$, $\sigma=8$. ავტოსტრადაზე ჭურვის მოხვედრა შეესაბამება X სიდიდის $\alpha=-10$-დან $\beta=+10$-მდე უბანში მოხვედრას. (6.3.7) ფორმულის გამოყენებით, გვაქვს:

$$P(-10<X<10)=\Phi^*\left(\frac{13}{8}\right)-\Phi^*\left(-\frac{7}{8}\right)=\Phi^*(1,625)-\Phi^*(-0,875)\approx 0,757.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გვაქვს ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდე, რომლის გაფანტვის ცენტრია m (ნახ. 6.3.4.) და აბსცისათა ღერძზე რომელიღაც (α, β) უბანი. როგორი უნდა იყოს შემთხვევითი X სიდიდის σ საშუალო კვადრატული გადახრა იმისათვის, რომ (α, β) უბანზე მოხვედრების p ალბათობა აღწევდეს მაქსიმუმს?

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს:

$$p=P(\alpha<X<\beta)=\Phi^*\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi^*\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)=\varphi(\sigma).$$

გავაწარმოოთ ეს ფუნქცია σ სიდიდით:

$$\varphi'(\sigma)=\left[\Phi^*\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)\right]'_\sigma-\left[\Phi^*\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)\right]'_\sigma,$$

მაგრამ

$$\Phi^*(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

ინტეგრალის ზღვარში შემავალი ცვლადის მიხედვით გადიფერენციალების წესის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\left[\Phi^*\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)\right]'_\sigma=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\beta-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right\}'_\sigma=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(\beta-m)^2}{2\sigma^2}}\left(-\frac{\beta-m}{\sigma^2}\right)=-\frac{\beta-m}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(\beta-m)^2}{2\sigma^2}}$$

ანალოგიურად

$$\left[\Phi^*\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)\right]'_\sigma=-\frac{a-m}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\alpha-m)^2}{2\sigma^2}}$$

ექსტრემუმის მოსანახად დავუშვათ:

$$\varphi'(\sigma)=\frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}\left\{(\alpha-m)e^{-\frac{(\alpha-m)^2}{2\sigma^2}}-(\beta-m)e^{-\frac{(\beta-m)^2}{2\sigma^2}}\right. \qquad (6.3.12)$$

როცა $\sigma=\infty$ ეს გამოსახულება გადაიქცევა ნულად და p ალბათობა მიაღწევს მინიმუმს. მაქსიმალურ p-ს მივიღებთ პირობიდან:

$$(a-m)e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}}-(\beta-m)e^{-\frac{(\beta-m)^2}{2\sigma^2}}=0. \qquad (6.3.13)$$

(6.3.13.) განტოლება შეიძლება რიცხობრივად ან გრაფიკულად გადავწყვიტოთ.

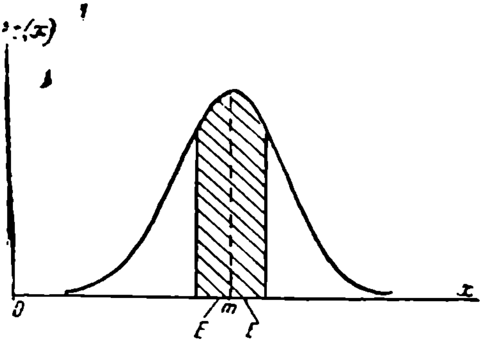
6.4. საალბათო (შუა) გადახრა

ალბათობათა თეორიის პრაქტიკულად გამოყენებისას მთელ რიგ დარგებში (კერძოდ სროლის თეორიაში) ხშირად, საშუალო კვადრატულ გადახრასთან ერთად, სარგებლობენ აგრეთვე გაფანტვის კიდევ ერთი მახასიათებელით ე. წ. საალბათო ანუ შუა გადახრით. საალბათო გადახრა აღინიშნება E ასოთი (ზოგჯერ B).

ნორმალური კანონით განაწილებულ შემთხვევითი X სიდიდის საალბათო (შუა) გადახრა ეწოდება გაბნევის ცენტრის მიმართ სიმეტრიულ უბნის სიგრძის ნახევარს, რომელზედაც მოხვედრის ალბათობა ნახევრის ტოლია.

საალბათო გადახრის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ნაჩვენებია 6.4.1. ნახ-ზე. E საალბათო გადახრა აბსცისის ღერძზე m წერტილის მიმართ სიმეტრიული უბნის სიგრძის ნახევარია, რომელზედაც განაწილების მრუდის ნახევარი ფართობი ეყრდნობა.

ავხსნათ აზრი ტერმინისა „შუა გადახრა“, ანდა „შუა შეცდომა“, რომლითაც ხშირად სარგებლობენ საარტილერიო პრაქტიკაში ნაცვლად „საალბათო გადახრისა“.



ნახ. 6.4.1.

განვიხილოთ ნორმალური კანონით განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდე. ალბათობა იმისა, რომ იგი გაფანტვის m ცენტრიდან გადაიხრება E-ზე ნაკლებ, საალბათო გადახრის განმარტების თანახმად E $\frac{1}{2}$-ის ტოლია:

$$P(|X-m|<E)=\frac{1}{2} \qquad (6.4.1)$$

ალბათობა იმისა, რომ იგი გადაიხრება m-დან E-ზე მეტად აგრეთვე $\frac{1}{2}$-ის ტოლია:

$$P(|X-m|>E)=\frac{1}{2}.$$

ამგვარად, მრავალრიცხოვანი ცდისას საშუალოდ შემთხვევითი X სიდიდის ნახევარი m-დან გადაიხრება E-ზე მეტად, ხოლო ნახევარი ნაკლებად. აქედანაა ტერმინი „შუა შეცდომა“, „შუა გადახრა“.

ცხადია, საალბათო გადახრა როგორც გაფანტვის მახასიათებელი, პირდაპირ დამოკიდებულებაშია σ საშუალო კვადრატულ გადახრასთან. დავადგინოთ ეს დამოკიდებულება. გამოვთვალოთ 6.4.1. განტოლებაში $(X-m)<E$ ხდომილობის ალბათობა (6.3.10) ფორმულით. გვაქვს:

$$P(|X-m|<E)=2\Phi^*\left(\frac{E}{\sigma}\right)-1=\frac{1}{2}.$$

აქედან

$$\Phi^*\left(\frac{E}{\sigma}\right)=\frac{3}{4}=0,75. \qquad (6.4.2)$$

ცხრილით $\Phi^*(x)$ ფუნქციისათვის შეიძლება მოვნახოთ x არგუმენტის ისეთი მნიშვნელობა რომლის დროსაც იგი 0,75-ის ტოლია. არგუმენტის ეს მნიშვნელობა მიახლოებით 0,674-ის ტოლია; აქედან

$$\frac{E}{\sigma}=0,674; \quad E=0,674\sigma. \qquad (6.4.3)$$

ამგვარად, ვიცით რა σ-ს მნიშვნელობა, შესაძლოა ვიპოვოთ მისი პროპორციული E მნიშვნელობა, ხშირად სარგებლობენ აგრეთვე ამ დამოკიდებულების ასეთი სახით:

$$E = \rho\sqrt{2}\,\sigma, \qquad (6.4.4)$$

სადაც ρ არგუმენტის ისეთი მნიშვნელობაა, რომლის დროსაც ალბათობათა ინტეგრალის ერთ-ერთი ფორმა ე. წ. ლაპლასის ფუნქციაა.

$$\Phi^*(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

ნახევრის ტოლია; ρ სიდიდის რიცხვითი მნიშვნელობა მიახლოებით 0,477-ის ტოლია.

ამჟამად საალბათო გადახრა, როგორც გაფანტვის მახასიათებელი, თანდათან იცვლება უფრო უნივერსალური σ მახასიათებლით. ალბათობათა მთელ რიგ დარგებში იგი მხოლოდ ტრადიციით შემოინახება.

თუკი გაფანტვის მახასიათებლად მიღებულია საალბათო E გადახრა, მაშინ ნორმალური განაწილების სიმკვრივე ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$f(x) = \frac{\rho}{E\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{\rho^2}{E^2}(x-m)^2} \qquad (6.4.5)$$

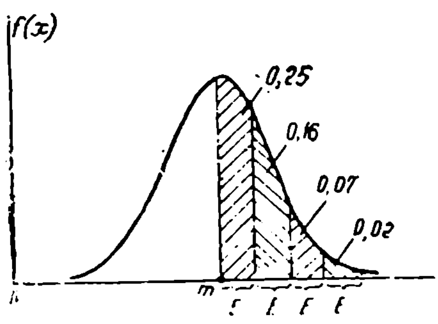
ხოლო მოხვედრის ალბათობა α-დან β-მდე უბანში ხშირად ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{2}\left[\widehat{\Phi}\left(\frac{\beta - m}{E}\right) - \widehat{\Phi}\left(\frac{\sigma - m}{E}\right)\right]. \qquad (6.4.6)$$

სადაც

$$\widehat{\Phi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\rho x} e^{-t^2}dt \qquad (6.4.7)$$

ე. წ. ლაპლასის დაყვანილი ფუნქციაა.



ნახ. 6.4.2.

გავაკეთოთ წინა პარაგრაფში საშუალო კვადრატული გადახრა σ-სათვის შესრულებული გამოთვლის ანალოგიური: გადავზომოთ გაფანტვის m ცენტრიდან მიმდევრობით E საალბათო გადახრის ტოლი მონაკვეთები (ნახ. 6.4.2) და გამოვითვალოთ მოხვედრის ალბათობანი ამ მონაკვეთებზე 0,01-მდე სიზუსტით.

მივიღებთ:

$$P(m<X<m+E)\approx 0{,}25;$$
$$P(m+E<X<m+2E)\approx 0{,}16;$$
$$P(m+2E<X<m+3E)\approx 0{,}07;$$
$$P(m+3E<X<m+4E)\approx 0{,}02.$$

აქედან ჩანს, რომ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის ყველა მნიშვნელობანი 0,01-მდე სიზუსტით მთავრდებიან $m\pm 4E$ უბანზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოიერიშე თვითმფრინავი აწარმოებს სროლას მოწინააღმდეგის ჯარების კოლონაზე, რომლის სიგანე უდრის 8 მეტრს. ფრენა — კოლონიის გასწვრივაა; დამიზნება — კოლონიის შუა ხაზზე; სრიალის გამო ადგილი აქვს სისტემატიურ შეცდომას: 2 მ მარჯვნივ ფრენის მიმართულებით. მთავარი საალბათო გადახრები: ფრენის მიმართულებით $B_0=15$ მ, გვერდითი მიმართულებით $B\sigma=5$მ. ალბათობის ინტეგრალის არავითარი ცხრილი არა გვაქვს, მხოლოდ ვიცით რიცხვები:

25%, 16%, 7%, 2%

შევაფასოთ უხეშ მიახლოებით კოლონაზე მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლისას და ერთი მაინც მოხვედრის ალბათობა სამი დამოუკიდებელი გასროლისას.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისია განვიხილოთ მოხვედრების წერტილის ერთი კოორდინატი — X აბსცისი კოლონის მართობული მიმართულებით. ეს აბსცისა განაწილებულია ნორმალური კანონის მიხედვით, რომლის გაფანტვის ცენტრი $m=2$-ს, ხოლო საალბათო გადახრა $B=E=5$ მ-ს. ჩვენს წარმოდგენაში გადავზომოთ გაფანტვის ცენტრიდან, როგორც ერთი ისე მეორე მიმართულებით 5 მ სიგრძის მონაკვეთები. გაფანტვის ცენტრის მარჯვნივ სამიზნეს უკავია 2 მ-ის ტოლი უბანი, რომელიც საალბათო გადახრის 0,4 ნაწილს შეადგენს. ამ უბანზე მოხვედრის ალბათობა დაახლოებით უდრის:

$$0{,}4\cdot 25\%=0{,}1.$$

გაფანტვის ცენტრის მარცხნივ სამიზნეს უკავია 6 მეტრიანი უბანი. ეს მთელი საალბათო გადაახრაა (5მ), რომელზედაც მოხვედრის ალბათობა 25%-ია, პლუს 1 მ სიგრძის მქონე ნაწილი მომდევნო (ცენტრიდან მეორე) საალბათო გადახრისა, რომელზედაც მოხვედრის ალბათობა 16%-ია. 1 მ სიგრძის მქონე ნაწილზე მოხვედრის ალბათობა მიახლოებით ტოლია:

$$\frac{1}{5}\cdot 16\%=0{,}03.$$

ამგვარად, კოლონაზე მოხვედრების ალბათობა მიახლოებით ტოლია:

$$0{,}1+0{,}25+0{,}03=0{,}38$$

სამი გასროლისას თუნდაც ერთი მოხვედრების ალბათობა ტოლია:

$$R_1=1-(1-0{,}38)^3\approx 0{,}76.$$

VII თავი

შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების კანონების განსაზღვრა ცდისეულ მონაცემების საფუძველზე

7.1. მათემატიკური სტატისტიკის ძირითადი ამოცანები

ალბათობათა თეორიის მათემატიკური კანონები არ წარმოადგენს ფიზიკურ შინაარსს მოკლებულ უსაგნო აბსტრაქციებს; ისინი ბუნებაში ფაქტიურად არსებულ მასიურ შემთხვევით მოვლენათა, რეალურ კანონზომიერებათა მათემატიკური გამოსახვაა.

აქამდე ვსაუბრობდით რა შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების კანონებზე არ შევეხებივართ საკითხს იმაზე, თუ საიდან აიღება, რა საფუძველზე ხდება განაწილების ამ კანონების დადგენა.

კითხვაზე პასუხი სავსებით განსაზღვრულია—ყველა ამ მახასიათებლებს საფუძვლად უდევს ცდა. შემთხვევით მოვლენათა ყოველი გამოკვლევა; შესრულებული ალბათობათა თეორიის მეთოდებით, პირდაპირ ანდა არაპირდაპირ ეყრდნობა ექსპერიმენტულ მონაცემებს. ვმოქმედებთ რა ისეთი ცნებებით, როგორიცაა ხდომილობანი და მათი ალბათობანი, შემთხვევითი სიდიდეები, მათი განაწილების კანონები და რიცხვითი მახასიათებლები, ალბათობათა თეორია იძლევა საშუალებას ხდომილობათა ცნობილი ალბათობებით თეორიულად განვსაზღვროთ სხვა ხდომილობათა ალბათობები, განაწილების კანონები და რიცხვითი მახასიათებლები, ცნობილი განაწილების კანონებით და რიცხვითი მახასიათებლებით. ასეთი არაპირდაპირი მეთოდები საშუალებას იძლევა ექსპერიმენტზე დახარჯული დრო და საშუალებები დავზოგოთ, მაგრამ სრულიადაც არ გამორიცხავს თვით ექსპერიმენტს. შემთხვევით მოვლენათა დარგში ყოველი კვლევა, როგორი განყენებულიც არ უნდა იყოს, ყოველთვის ეყრდნობა დაკვირვებათა სისტემას ექსპერიმენტსა და ცდისეულ მონაცემებს.

მასიურ შემთხვევით მოვლენებზე დაკვირვებათა შედეგად მიღებული სტატისტიკური ექსპერიმენტული მონაცემების რეგისტრაციის, აღწერის და ანალიზის მეთოდების დამუშავება შეადგენს სპეციალური მეცნიერების მ ა თ ე მ ა ტ ი კ უ რ ი   ს ტ ა ტ ი ს ტ ი კ ი ს საგანს.

მათემატიკური სტატისტიკის ყველა ამოცანები ეხება მასიურ შემთხვევით მოვლენებზე დაკვირვებათა დამუშავების საკითხებს, მაგრამ პრაქტიკულად გადასაწყვეტი საკითხის და ჩვენს ხელთ არსებული ექსპერიმენტული მასალის მოცულობისაგან დამოკიდებით ამ ამოცანებმა შეიძლება მიიღონ ესა თუ ის ფორმა.

მოკლედ დავახასიათოთ მათემატიკური სტატისტიკის ზოგიერთი ტიპური ამოცანები, რომლებიც პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება.

1. შემთხვევითი სიდიდის (ან შემთხვევით სიდიდეთა სისტემის) განაწილების კანონის სტატისტიკური მონაცემების საფუძველზე განსაზღვრის ამოცანა.

უკვე მივუთითებდით, რომ მასიურ შემთხვევით მოვლენებში კანონზომიერებანი მით უფრო ზუსტად და მკაფიოდ ვლინდება, რაც უფრო მეტია სტატისტიკური მასალის მოცულობა. თავისი მოცულობითი ვრცელი სტატისტიკური მონაცემების დამუშავებისას ხშირად წამოიჭრება ამა თუ იმ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონების განსაზღვრის საკითხი.

თეორიულად ცდათა საკმაო რაოდენობისას ამ შემთხვევით სიდიდეებისათვის დამახასიათებელი კანონზომიერებანი ზუსტად განხორციელდება. პრაქტიკაში ჩვენ ყოველთვის გვაქვს საქმე ექსპერიმენტული მონაცემების შეზღუდულ რაოდენობასთან, ამასთან დაკავშირებით დაკვირვებანი და მათი დამუშავების შედეგები ყოველთვის შეიცავს შემთხვევითობის მეტ ან ნაკლებ ელემენტს. იბადება კითხვა, თუ დაკვირვებაში მყოფი ელემენტის რომელი დამახასიათებელი, ნიშანია მუდმივი, მდგრადი, ნამდვილად მისთვის დამახასიათებელი, ხოლო რომელი წარმოადგენს შემთხვევითს და დაკვირვებათა მოცემულ სერიაში გამომჟღავნდება ექსპერიმენტულ მონაცემთა შეზღუდულ მოცულობაში. ბუნებრივია, ექსპერიმენტულ მოცულობათა დამუშავების მეთოდიკას უნდა წავუყენოთ ისეთი მოთხოვნები, რომ იგი შეძლებისდაგვარად ინარჩუნებდეს დაკვირვებაში მყოფი მოვლენის ტიპიურ, დამახასიათებელ ნიშნებს და უკუაგდებდეს ყველა არაარსებითს და მეორე ხარისხოვანს დაკავშირებულს ცდისეული მასალათა არა საკმაო მოცულობასთან. ამასთან დაკავშირებით წამოიჭრება მათემატიკური სტატისტიკისათვის დამახასიათებელი, სტატისტიკური მონაცემთა გაგლუვების ან გასწორების მარტივ ანალიზურ დამოკიდებულებათა მეშვეობით მათი კომპლექტური სახით წარმოდგენის ამოცანა.

2. ჰიპოთეზის დამაჯერებლობის შემოწმების ამოცანა

ეს ამოცანა მჭიდროდაა დაკავშირებული წინასთან; ასეთი გვარის ამოცანის გადაწყვეტისას ჩვენს განკარგულებაში არ არის იმდენად ვრცელი სტატისტიკური მასალა, რომ მასში გამოვლენილი სტატისტიკური კანონზომიერებანი საკმარისი ზომით თავისუფალი იყოს შემთხვევითობის ელემენტებისაგან. სტატისტიკური მასალის მიხედვით შეიძლება მეტ-ნაკლები დამაჯერებლობით დავამოწმოთ ან არ დავამოწმოთ ამათუ

იმ ჰიპოთეზის საშართლიანობა. მაგალითად, შეიძლება წარმოიშვას ასეთი საკითხი, ეთანხმებიან თუ არა ექსპერიმენტის შედეგები ჰიპოთეზას იმაზე, რომ მოცემული შემთხვევითი სიდიდე დაქვემდებარებულია განაწილების $F(x)$ კანონს? მეორე მსგავსი კითხვა: მიუთითებს თუ არა ცდაში შემჩნეული ტენდენცია ორი შემთხვევითი სიდიდის შორის ნამდვილ ობიექტურ დამოკიდებულების არსებობაზე, თუ იგი აიხსნება დაკვირვებათა არა საკმარის მოცულობასთან დაკავშირებულ შემთხვევითი მიზეზებით. მსგავსი საკითხების გადასაწყვეტად მათემატიკურ სტატისტიკაში შემუშავებულია მთელი რიგი სპეციალური ხერხებისა.

3. განაწილების უცნობი პარამეტრების მონახვის ამოცანა.

ხშირად სტატისტიკური მასალების დამუშავების დროს, გამოსაკვლევ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონის განსაზღვრის საკითხი სრულებით არ წამოიჭრება. ჩვეულებრივ ეს დაკავშირებულია ექსპერიმენტული მასალის არა საკმარის მოცულობასთან.

ზოგჯერ განაწილების კანონის ხასიათი თვისობრივად ცნობილია ცდამდე თეორიული მოსაზრებით; მაგალითად, ხშირად შესაძლებელი ხდება წინასწარ ვამტკიცოთ, რომ შემთხვევითი სიდიდე დაქვემდებარებულია ნორმალურ კანონს. მაშინ წამოიჭრება დაკვირვებათა დამუშავების უფრო ვიწრო ამოცანა — განსაზღვრულ იქნას შემთხვევითი სიდიდის ან შემთხვევით სიდიდეთა სისტემის მხოლოდ ზოგიერთი პარამეტრი (რიცხვითი მახასიათებლები). ცდათა მცირე რაოდენობისას ამ პარამეტრების მეტ-ნაკლებად ზუსტი განსაზღვრის ამოცანა ვერ ამოიხსნება: ამ შემთხვევებში ექსპერიმენტული მასალა გარდუვლად შეიცავს შემთხვევითობის მნიშვნელოვან ელემენტს, ამიტომ ამ საფუძველზე გამოთვლილი ყველა პარამეტრები შემთხვევითი აღმოჩნდებიან. ასეთ პირობებში შეიძლება დაისვას ამოცანა საძიებელი პარამეტრების მხოლოდ ე. წ. „შეფასებებზე“ ანდა „შესაფერის მნიშვნელობებზე“, ე. ი. ისეთ მიახლოებით მნიშვნელობებზე, რომლებიც მასიური გამოყენებისას მიგვიყვანდა საშუალოდ უფრო მცირე შეცდომამდე, ვიდრე სხვა მნიშვნელობები. ყოველი მნიშვნელოვანი რიცხობრივი მახასიათებლების, „შესაფერის მნიშვნელობათა“ მოძებნის ამოცანასთან მჭიდროდაა დაკავშირებული მათი სიზუსტის და საიმედოობის შეფასების ამოცანა. მსგავს ამოცანებს მე-14 თავში შევხვდებით.

ასეთია არა სრული ნუსხა მათემატიკური სტატისტიკის ძირითადი ამოცანებისა. მათ შორის ჩამოვთვალეთ მხოლოდ ისინი, რომლებსაც ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანი პრაქტიკული გამოყენება აქვთ. ამ თავში მოკლედ გავეცნობით მათემატიკური სტატისტიკის ზოგიერთ ყველაზე ელემენტარულ ამოცანას და მათი ამოხსნის მეთოდებს.

7.2. მარტივი სტატისტიკური ერთობლიობა. განაწილების სტატისტიკური ფუნქცია

დავუშვათ რომ შეისწავლება რომელიღაც შემთხვევითი X სიდიდე, რომლის განაწილების კანონი ზუსტად არ არის ცნობილი და საჭიროა ეს კანონი განსაზღვრული იქნას ცდის საშუალებით, უნდა შემოწმდეს ექსპერიმენტულად ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ X დაქვემდებარებულია ამა თუ იმ კანონს. ამ მიზნით შემთხვევით X სიდიდეზე წარმოებს დამოუკიდებელი ცდების (დაკვირვებების) რიგი. ამ ცდებიდან თითოეულ მათგანში შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს გარკვეულ მნიშვნელობას. დაკვირვებისას მიღებული სიდიდეების მნიშვნელობათა ერთობლიობა წარმოადგენს სწორედ პირველად სტატისტიკურ მასალას, რომელნიც მოითხოვენ დამუშავებას, გააზრებას და მეცნიერულ ანალიზს. ასეთ ერთობლიობას ეწოდება „მარტივი სტატისტიკური ერთობლიობა“ ანუ „მარტივი სტატისტიკური მწკრივი“. ჩვეულებრივ მარტივი სტატისტიკური მწკრივი ფორმდება ცხრილების სახით, რომლის პირველ სვეტზე ცდის i ნომერია დასმული, ხოლო მეორეზე — შემთხვევითი სიდიდის დანაკვირი მნიშვნელობა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. შემთხვევითი სიდიდე β—თვითმფრინავის სრიალის კუთხე ყუმბარის ჩამოგდების მომენტში. ნაწარმოებია ყუმბარების ტყორცნა 20-ჯერ, რომელთაგან თითოეულში რეგისტრირებულია სრიალის β კუთხე[1] რადიანის მეათასედ ნაწილებში დაკვირვების შედეგები მოცემულია მარტივი სტატისტიკური ცხრილის სახით:

i	β_i	i	β_i	i	β_i
1	—20	8	—30	15	—10
2	—60	9	120	16	20
3	—10	10	—100	17	30
4	30	11	— 80	18	—80
5	60	12	20	19	60
6	70	13	40	20	70
7	—10	14	—60		

მარტივი სტატისტიკური მწკრივი სტატისტიკური მასალის ჩაწერის პირველადი ფორმაა და შეიძლება დამუშავებულ იქნას სხვადასხვა ხერხებით. ასეთი დამუშავების ხერხებიდან ერთ-ერთ მეთოდს წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სტატისტიკური ფუნქციის აგება. *შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების სტატისტიკური ფუნქცია ეწოდება $X<x$ ხდომი-*

[1] სრიალის კუთხის ქვეშ იგულისხმება სიჩქარის ვექტორის მიერ შედგენილი კუთხე თვითმფრინავის სიმეტრიის სიბრტყესთან.

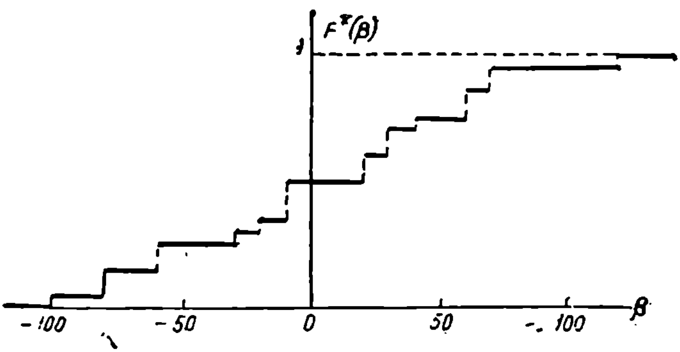
ლ ო ბ ი ს ს ი ხ შ ი რ ე ს მ ო ც ე მ უ ლ ს ტ ა ტ ი ს ტ ი კ უ რ მ ა-ს ა ლ ა შ ი:

$$F^*(x) = P^*(X < x). \tag{7.2.1}$$

იმისათვის, რომ მოცემული x-სათვის მოვნახოთ განაწილების სტატისტიკური ფუნქცია, საკმარისია დავთვალოთ იმ ცდათა რიცხვი რომელშიც X სიდიდემ მნიშვნელობა x-ზე ნაკლები მიიღო, და გავყოთ ჩატარებული ცდების საერთო რიცხვზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. წინა მაგალითში განხილულ შემთხვევით β სიდიდისათვის ავაგოთ განაწილების სტატისტიკური ფუნქცია[1]

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვინაიდან ყველაზე მცირე მნიშვნელობა, რომელიც დაკვირვებების შედეგადაა მიღებული —100-ის ტოლია, ამიტომ $F(-100)=0$. მნიშვნელობა —100 ერთხელაა შემჩნეული მისი სიხშირეა $\frac{1}{20}$; მაშასადამე, წერტილში —200 $F^*(\beta)$-აქვს ნახტომი, რომელიც $\frac{1}{20}$-ის ტოლია; —100-დან —80-მდე შუალედში $F^*(\beta)$ ფუნქციას აქვს მნიშვნელობა $\frac{1}{20}$-ის ტოლი. წერტილში —80 $F(x)$ ფუნქციას აქვს ნახტომი, რომელიც $\frac{2}{20}$-ის ტოლია, ვინაიდან მნიშვნელობა —80 შემჩნეულია (დაკვირვებითაა მიღებული) ორჯერ და ა. შ. სიდიდის სტატისტიკური ფუნქციის განაწილების გრაფიკი წარმოდგენილია 7.2.1 ნახ.-ზე.



ნახ. 7.2.1.

[1] აქ და ქვემოთ, მრავალ შემთხვევებში, კონკრეტული პრაქტიკული მაგალითების განხილვისას, არ გავყვებით მკაცრად წესს—აღვნიშნოთ შემთხვევითი სიდიდეები დიდი ასოებით, ხოლო მათი შესაძლო მნიშვნელობანი შესაბამისი პატარა ასოებით. თუ ეს გაუგებრობას არ გამოიწვევს, მთელ რიგ შემთხვევებში შემთხვევით სიდიდეებს და მათ შესაძლო მნიშვნელობებს აღვნიშნავთ ერთი და იგივე ასოთი.

ნებისმიერი წყვეტილი ან უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სტატისტიკური ფუნქცია წყვეტილ საფეხურებიანი ფუნქციაა, რომლის ნახტომები შეესაბამება დაკვირვების შედეგად მიღებულ მნიშვნელობებს და სიდიდით ამ მნიშვნელობათა სიხშირის ტოლია.

თუ შემთხვევითი X სიდიდის ყოველი ცალკე მნიშვნელობა შემჩნეულია მხოლოდ ერთხელ, განაწილების სტატისტიკური ფუნქციის ნახტომი დაკვირვების შედეგად მიღებულ ყოველ მნიშვნელობის $\frac{1}{n}$-ის ტოლია, სადაც n დაკვირვებათა რიცხვია.

ცდათა n რიცხვის გაზრდისას, ბერნულის თეორემის თანახმად ნებისმიერი x-სათვის $X<x$ ხდომილობის სიხშირე უახლოვდება (ალბათობით) ამ ხდომილობის ალბათობას. მაშასადამე n-ის გადიდებისას განაწილების სტატისტიკური $F^*(x)$ ფუნქცია უახლოვდება (იკრიბება ალბათობის მიხედვით) შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების $F(x)$ ფუნქციას.

თუკი X უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ დაკვირვებათა n რიცხვის გადიდებისას $F^*(x)$ ფუნქციის ნახტომთა რიცხვი გაიზრდება, თვით ნახტომები შემცირდება და $F^*(x)$ ფუნქციის გრაფიკი მიუახლოვდება X სიდიდის განაწილების გლუვ $F(x)$ მრუდს.

განაწილების სტატისტიკური ფუნქციის აგება პრინციპში სწყვეტს ექსპერიმენტული მასალის აღწერის ამოცანას. მაგრამ ცდათა n დიდი რიცხვისას $F^*(x)$ -ის აგება ზემოთ აღწერილი ხერხით ფრიად შრომატევადია. გარდა ამისა, თვალსაჩინოების თვალსაზრისით ხშირად მოხერხებული ხდება ვისარგებლოთ სტატისტიკური განაწილების სხვა მახასიათებლებით — არა განაწილების $F(x)$ ფუნქციის ანალოგიურით, არამედ $f(x)$ სიმკვრივის ანალოგიურით. სტატისტიკური მონაცემების აღწერის ასეთ ხერხებს მომდევნო პარაგრაფში გავეცნობით.

7.3. სტატისტიკური მწკრივი. ჰისტოგრამა

დაკვირვებათა დიდი რიცხვისას (ასეულობით) მარტივი სტატისტიკური ერთობლიობა არაა მოხერხებული სტატისტიკური მასალის ჩასაწერად, იგი ვეება და ნაკლებ თვალსაჩინო ხდება. მისთვის დიდი კომპაქტურობის და თვალსაჩინოების მისაცემად სტატისტიკური მასალა დამატებით უნდა გადამუშავდეს — იგება ეგრეთ წოდებული „სტატისტიკური მწკრივი."

დავუშვათ, რომ ჩვენს განკარგულებაშია შემთხვევით X სიდიდეზე დაკვირვების შედეგი, გაფორმებული მარტივი სტატისტიკური ერთობლიობის სახით. გავყოთ სიდიდის დაკვირვების შედეგად მიღებული X მნიშ-

ვნელობათა მთელი დიაპაზონი ინტერვალებად ანდა „თანრიგებად“ და დავთვალოთ თითოეულ i-ურ თანრიგზე მოსულ მნიშვნელობათა m_i რაოდენობა. ეს რიცხვი გავყოთ დაკვირვებათა საერთო n რიცხვზე და ამით მოვნახოთ მოცემული თანრიგის შესაფერისი სიხშირე:

$$p_i^* = \frac{m_i}{n} \tag{7.3.1.}$$

ყველა თანრიგის სიხშირეთა ჯამი, ცხადია, რომ ერთს უნდა უდრიდეს. ავაგოთ ცხრილი, რომელშიც მოცემული იქნება თანრიგები მათი აბსცისების ღერძზე განლაგების თანმიმდევრობით და შესაბამისი სიხშირეები. ამ ცხრილს ეწოდება „სტატისტიკური მწკრივი“;

I_i	$x_1;\ x_2$	$x_2;\ x_3$		$x_i;\ x_{i+1}$		$x_k;\ x_{k+1}$
p_i^*	p_i^*	p^*_2		p_i^*		p_k^*

აქ I_i-აღნიშვნაა i-რი თანრიგისა; x_1, x_{i+1} — მისი საზღვრებია; p_i^*— შესაბამისი სიხშირე, k— თანრიგთა რიცხვია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. თვითმფრინავიდან მიწიერ (მიწისზედა) სამიზნეზე სროლისას დამიზნების გვერდითი შეცდომის 500 გაზომვა ხდება. გაზომვის შედეგები (რადიანის მეათასედ ნაწილებში) თავმოყრილია სტატისტიკურ მწკრივში:

I_i	—4; —3	—3; —2	—2; —1	—1; 0	0; 1	1; 2	2; 3	3; 4
m_i	6	25	72	133	120	88	46	10
p_i^*	0,012	0,050	0,144	0,266	0,240	0,176	0,092	0,020

აქ I_i-ით აღნიშნულია დამიზნების ხდომილობის ინტერვალები; m_i — დაკვირვებათა რიცხვი მოცემულ ინტერვალში; $p_i^* = \frac{m_i}{n}$ — შესაბამისი სიხშირეები.

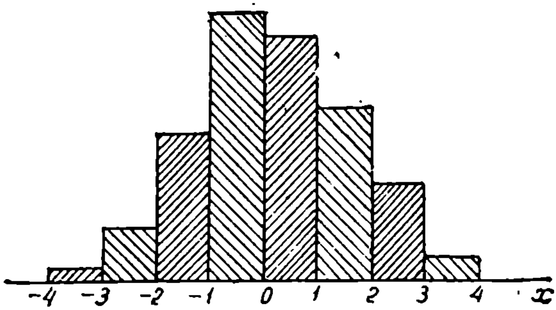
შემთხვევითი სიდიდის დაკვირვების შედეგად მიღებულ მნიშვნელობათა თანრიგებად დაჯგუფებისას წამოიჭრება კითხვა, თუ რომელ თანრიგს მიეკუთვნოს ის მნიშვნელობა, რომელიც იმყოფება ზუსტად ორ თანრიგთა საზღვარზე. ასეთ შემთხვევებში შესაძლოა რეკომენდებულ იქნას (წმინდად პირობითად) შემდეგი: მოცემული მნიშვნელობა მიეკუთვნოს თანაბრად ორივე თანრიგს და ორივე თანრიგის m_i რიცხვებს დაემატოს თითოეულს $\frac{1}{2}$.

თანრიგთა რიცხვი, რომელზედაც უნდა მოხდეს სტატისტიკური მასალის დაჯგუფება, არ უნდა იყოს მეტისმეტად დიდი (მაშინ განაწილების მწკრივი გამომსახველი არ იქნება და მათში სიხშირეები ავლენენ არაკანონზომიერ ცვლილებას); მეორეს მხრივ იგი არ უნდა იყოს მეტისმეტად მცირე (თანრიგთა მცირე რიცხვისას სტატისტიკური მწკრივის მიერ განაწილების თვისება აღიწერება მეტად უხეშად).

პრაქტიკა გვიჩვენებს, რომ მეტ წილ შემთხვევებში რაციონალურია თანრიგთა რიცხვი მივიღოთ 10—20-ის ტოლი. რაც უფრო მდიდარია და ერთგვაროვანი სტატისტიკური მასალა, თანრიგების მით მეტი რიცხვი შეიძლება ავირჩიოთ სტატისტიკური მწკრივის შედგენისას. თანრიგთა სიგრძეები შესაძლებელია იყოს როგორც ერთნაირი, ისე სხვადასხვა. უკეთესია ერთგვარი ავიღოთ. არათანაბრად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეებზე მონაცემთა გაფორმებისას, ზოგჯერ უფრო მოხერხებულია განაწილების ყველაზე დიდი სიმკვრივის უბნებში ავირჩიოთ უფრო მოკლე თანრიგები, ვინემ მცირე სიმკვრივის უბნებში.

სტატისტიკურ მწკრივს ხშირად აფორმებენ გრაფიკულად ე. წ. ჰისტოგრამის სახით. ჰისტოგრამა აიგება შემდეგნაირად. აბსცისების ღერძზე გადაიზომება თანრიგები, და ყოველ თანრიგზე როგორც მათ ფუძეზე აიგება სწორკუთხედი, რომლის ფართი ტოლია მოცემული თანრიგის სიხშირისა. ჰისტოგრამის ასაგებად თითოეული თანრიგის სიხშირე უნდა გაიყოს მის სიგრძეზე და მიღებული რიცხვი ავიღოთ სწორკუთხედის სიმაღლედ. ტოლი სიგრძის თანრიგების შემთხვევაში სწორკუთხედთა სიმაღლეები სათანადო სიხშირეთა პროპორციულია. ჰისტოგრამის აგების ხერხიდან გამოდის, რომ მისი მთლიანი ფართი ერთის ტოლია.

მაგალითისათვის შესაძლოა მოვიტანრთ I-ელ [მაგალითში განხილული მოცემული სტატისტიკური მწკრივის მიხედვით აგებული დამიზნების ხდომილების ჰისპოგრამა (ნახ. 7.3.1).



ნახ. 7.3.1.

ცხადია, ცდათა რიცხვის გადიდებისას შესაძლოა სულ უფრო და უფრო მცირე თანრიგები ავირჩიოთ: ამ დროს ჰისტოგრამა სულ უფრო უახლოვდება რომელიღაც მრუდს, რომელიც შემოფარგლავს ერთის ტოლ სიდიდის ფართობს. არ არის ძნელი დავრწმუნდეთ, რომ ეს მრუდი X სიდიდის განაწილების სიმკვრივის გრაფიკია. ვისარგებლებთ რა სტატისტიკური მწკრივის მონაცემებით, შესაძლებელია მიახლოებით ავაგოთ X სიდიდის განაწილების სტატისტიკური ფუნქცია. ზუსტი სტატისტიკური განაწილების ფუნქციის აგება X სიდიდის ყველა დანაკვირ მნიშვნელობის მიხედვით, რომლებსაც ასეულობით ნახტომები აქვთ, მეტად შრომატევადია და გაუმართლებელია. პრაქტიკულად ჩვეულებრივ საკმარისია განაწილების სტატისტიკური ფუნქცია რამდენიმე წერტილის მიხედვით ავაგოთ. ამ წერტილებად მოხერხებულია ავიღოთ თანრიგების X_1, X_2,... საზღვრები, რომლებიც სტატისტიკურ მწკრივშია. მაშინ, ცხადია,

$$\left.\begin{aligned}
&F^*(x_1)=0;\\
&F^*(x_2)=p_1^*;\\
&F^*(x_3)=p_1^*+p_2^*;\\
&\\
&F^*(x_k)=\sum_{i=1}^{k-1} p_i^*;\\
&F^*(x_{k+1})=\sum_{i=1}^{k} p_i=1.
\end{aligned}\right\} \tag{7.3.2}$$

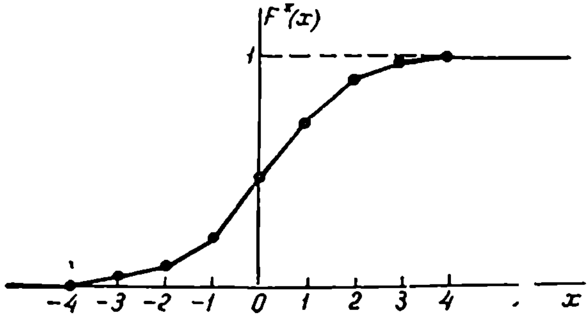
თუ მიღებულ წერტილებს ტეხილით ან გლუვი წირით შევაერთებთ განაწილების სტატისტიკური ფუნქციის მიახლოებით გრაფიკს მივიღებთ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ავაგოთ დამიზნების ხდომილობის განაწილების სტატისტიკური ფუნქცია მიახლოებით პირველი მაგალითის სტატისტიკური მწკრივის მონაცემების მიხედვით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 7.3.2. ფორმულის გამოყენებით გვაქვს:

$$F^*(-4)=0;\ F^*(-3)=0{,}012;\ F^*(-2)=0{,}012+0{,}050=0{,}062;$$
$$F^*(-1)=0{,}206;\quad F^*(0)=0{,}472;\quad F^*(1)=0{,}712;\quad F^*(2)=0{,}888;$$
$$F^*(3)=0{,}980;\quad F^*(4)=1000$$

განაწილების სტატისტიკური ფუნქციის მიახლოებითი გრაფიკი მოცემულია (7.3.2) ნახ.-ზე.



ნახ. 7.3.2.

7.4. სტატისტიკური განაწილების რიცხვითი მახასიათებლები

მეხუთე თავში შემოვიტანეთ შემთხვევით სიდიდეთა სხვადასხვა რიცხვითი მახასიათებლები: მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, სხვადასხვა რიგის საწყისი და ცენტრალური მომენტები, რომელთა გამოყენება ალბათობათა თეორიაში მნიშვნელოვანია. ანალოგიური რიცხვითი მახასიათებლები სტატისტიკური განაწილებისათვისაც არსებობენ. შემთხვევითი X სიდიდის ყოველ რიცხვით მახასიათებელს შეესაბამება მისი სტატისტიკური ანალოგია. შემთხვევითი სიდიდის მდებარეობის ძირითადი მახასიათებლისათვის, როგორიცაა მათემატიკური ლოდინი, ასეთ ანალოგიას წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგად მიღებულ მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკული:

$$M^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \tag{7.4.1}$$

სადაც x_i შემთხვევითი სიდიდის i-ურ ცდისას დაკვირვების შედეგად მიღებული მნიშვნელობაა, ხოლო n-ცდათა რიცხვია. ამ მახასიათებელს შემდგომში ვუწოდებთ შემთხვევითი სიდიდის სტატისტიკურ საშუალოს.

დიდ რიცხვთა კანონის თანახმად ცდათა რიცხვის უსასრულოდ გაზრდისას სტატისტიკური საშუალო მათემატიკურ ლოდინს უახლოვდება. საკმაოდ დიდი n-სთვის სტატისტიკური საშუალო შესაძლოა მივიღოთ მიახლოებით მათემატიკური ლოდინის ტოლად. ცდათა შეზღუდული რიცხვისას სტატისტიკური საშუალო შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც დაკავშირებულია მათემატიკურ ლოდინთან და შეუძლია მოგვცეს მასზე გარკვეული წარმოდგენა.

ყველა რიცხვითი მახასიათებლებისათვის არსებობს მსგავსი სტატისტიკური ანალოგიები. შევთანხმდეთ, რომ შემდეგში ეს სტატისტიკური ანალოგიები აღვნიშნოთ იგივე ასოებით, როგორითაც შესაბამისი რიცხვითი მახასიათებლები, მაგრამ მათ დავუსვათ * ნიშანი.

განვიხილოთ, მაგალითად, შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია. იგი წარმოადგენს $\overset{\circ}{X}{}^2=(X-m_x)^2$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს:

$$D[X]=M[\overset{\circ}{X}{}^2]=M[(X-m_x)^2]. \qquad (7.4.2)$$

თუ ამ გამოსახულებაში მათემატიკურ ლოდინს მისი სტატისტიკური ანალოგიით—საშუალო არითმეტიკულით შევცვლით, მივიღებთ შემთხვევითი X სიდიდის სტატისტიკურ დისპერსიას:

$$D^*[X]=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x^*)^2}{n}, \qquad (7.4.3)$$

სადაც $m_x^*=M^*[X]$ სტატისტიკური საშუალოა. ანალოგიურად განისაზღვრება ნებისმიერი რიგის საწყისი და ცენტრალური მომენტები:

$$\alpha_s^*[X]=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^s}{n}, \qquad (7.4.4)$$

$$\mu_s^*[X]=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x^*)^s}{n} \qquad (7.4.5)$$

ყველა ეს განსაზღვრებანი მე-5 თავში მოცემული შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლების ანალოგიურია, იმ განსხვავებით, რომ მათში ნაცვლად მათემატიკური ლოდინისა საშუალო არითმეტიკულია. დაკვირვებათა რიცხვის გადიდებისას, ცხადია, ყველა სტატისტიკური მახასიათებელი იკრიბება ალბათობის მიხედვით სათანადო მათემატიკურ მახასიათებლებისაკენ და საკმაო დიდი n-სათვის შეიძლება მიახლოებით მათ ტოლად ჩავთვალოთ.

არ არის ძნელი დავამტკიცოთ, რომ საწყისი და ცენტრალური სტატისტიკური მომენტებისათვის სამართლიანია იგივე თვისებები, რომლებიც იყო მე-5 თავში მათემატიკური მომენტებისათვის გამოყვანილი.

კერძოდ, პირველი სტატისტიკური ცენტრალური მომენტი ყოველთვის ნულის ტოლია:

$$\mu_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x^*)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - m_x^* = m_x^* - m_x^* = 0.$$

თანაფარდობა ცენტრალურ და საწყის მომენტებს შორის აგრეთვე შენარჩუნებულია:

$$\mu_2^* = D_x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x^*)^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2m_x^* \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n} + (m_x^*)^2 = \alpha_x^* - (m_x^*)^2 \qquad (7.4.6)$$

და ა. შ.

ცდათა ძალიან დიდი რიცხვისას მახასიათებლების გამოთვლა (7.4.1) (7.4.5) ფორმულებით მეტისმეტად დიდ შრომას მოითხოვს და შეიძლება მივიღოთ შემდეგი ხერხი: ვისარგებლოთ იგივე თანრიგებით, რომლებითაც კლასიფიცირებული იყო სტატისტიკური მასალა სტატისტიკური მწკრივის ან ჰისტოგრამის ასაგებად და შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობა ყოველ თანრიგში ჩავთვალოთ მიახლოებით მუდმივად და საშუალო მნიშვნელობის ტოლად, რომელიც გამოდის თანრიგის „წარმომადგენლის“ როლში. მაშინ სტატისტიკური რიცხვითი მახასიათებლები გამოისახება მიახლოებითი ფორმულებით:

$$m_x^* = M^*[X] = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i p_i^*, \qquad (7.4.7.)$$

$$D_x^* = D^*[X] = \sum_{i=1}^{k} (\tilde{x}_i - m_x^*)^2 p_i^*, \qquad (7.4.8)$$

$$\alpha_s^*[X] = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^s p_i^*, \qquad (7.4.9)$$

$$\mu_s^*[X] = \sum_{i=1}^{k} (\widetilde{x}_i - m_x^*)^s p_i^*, \qquad (7.4.10)$$

სადაც $\widetilde{x}_i$ — „წარმომადგენელია“ i-ური თანრიგის,

p_i^* — i-ური რიგის სიხშირე, k — თანრიგთა რიცხვი.

როგორც ვხედავთ (7.4.7) —(7.4.10) ფორმულები სრულიად ანალოგიურია 5.6 და 5.7 პარაგრაფების ფორმულების, რომლებიც განსაზღვრავენ წყვეტილი შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს, დისპერსიას, საწყის და ცენტრალურ მომენტებს, მხოლოდ იმ განსხვავებით რომ ნაცვლად P_i ალბათობისა მათში არის p_i^*, ნაცვლად m_x მათემატიკური ლოდინისა — m_x^* სტატისტიკური საშუალო, ნაცვლად შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობათა რიცხვისა — თანრიგთა რიცხვი.

ალბათობათა თეორიის და მათემატიკური სტატისტიკის სახელმძღვანელოთა უმრავლესობაში, შემთხვევით სიდიდეთა დასახასიათებლად სტატისტიკური ანალოგიების საკითხის განხილვისას გამოიყენება ტერმინოლოგია, რომელიც რამდენადმე განსხვავებულია მოცემულ წიგნში მიღებული ტერმინოლოგიისაგან, სახელდობრ, სტატისტიკური საშუალო იწოდება როგორც „არჩევითი საშუალო“, სტატისტიკური დისპერსია“ — არჩევით დისპერსიად და ა. შ. წარმოშობა ამ ტერმინებისა შემდეგნაირია. სტატისტიკაში, განსაკუთრებით კი სასოფლო სამეურნეო და ბიოლოგიურში, ხშირად გვიხდება გამოვიკვლიოთ ამა თუ იმ ნიშნის განაწილება სტატისტიკურ კოლექტივის შემქმნელ ინდუვიდუმთა ფრიად დიდი ერთობლიობისათვის, (ასეთი ნიშანი შესაძლოა იყოს, მაგალითად, პურის მარცვალში ცილის შემცველობა, იმავე მარცვლის წონა, ცხოველთა ამა თუ იმ ჯგუფის სხეულის სიგრძე ან წონა და ა. შ.). მოცემული ნიშანი წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, რომლის მნიშვნელობა ინდუივიდუმიდან ინდუივიდუმამდე იცვლება, მაგრამ იმისათვის, რომ შევქმნათ წარმოდგენა ამ შემთხვევითი სიდიდის განაწილებაზე ანდა მის უმნიშვნელოვანეს მახასიათებლებზე, არ არის საჭირო გამოვიკვლიოთ ამ ფართო ერთობლიობის ყოველი ინდივიდუმი; შეიძლება გამოვიკვლიოთ საკმაო დიდი მოცულობის, რომელიღაც ამონარჩევი იმისათვის, რომ მათში გამოვლენილი იქნეს შესასწავლი განაწილების არსებითი ნიშნები. ის ფართო ერთობლიობა, რომლიდანაც წარმოებს ამორჩევა სტატისტიკაში, ატარებს გენერალური ერთობლიობის სახელწოდებას. ამასთან იგულისხმება, რომ წევრთა (ინდივიდუმთა) რიცხვი N გენერალურ ერთობლიობაში ფრიად დიდია, ხოლო წევრთა რიცხვი ამონარჩევში შეზღუდულია.

საკმაოდ დიდი N-სთვის აღმოჩნდება, რომ ამორჩევითი (სტატისტიკური) განაწილების და მახასიათებლის თვისებები პრაქტიკულად არ არიან

დამოკიდებული N-ზე: აქედან ბუნებრივად გამომდინარეობს მათემატიკური იდეალიზაცია, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ გენერალურ ერთობლიობას, რომლიდანაც ხორციელდება შერჩევა, აქვს უსასრულო მოცულობა. ამასთან ანსხვავებენ სუსტ მახასიათებლებს (განაწილების კანონი, მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და ა. შ.), რომლებიც მიეკუთვნებიან გენერალურ ერთობლიობას, მათ ანალოგიურ „შერჩევით" მახასიათებლებისაგან. შერჩევითი მახასიათებლები განსხვავდებიან გენერალური ერთობლიობის შესაბამისი მახასიათებლებისაგან n ამონარჩევის მოცულობის შეზღუდულობის გამო; n-ის უსასრულოდ გადიდებისას, ბუნებრივია, ყველა შერჩევითი მახასიათებელი უახლოვდება (იკრიბება ალბათობის მიხედვით), გენერალური ერთობლიობის შესაბამის მახასიათებლებს. ხშირად წამოიჭრება საკითხი როგორი უნდა იყოს n ამონარჩევის მოცულობა, იმისათვის, რომ შერჩევითი მახასიათებლების მიხედვით შესაძლო გახდეს საკმარისი სიზუსტით ვიმსჯელოთ გენერალური ერთობლიობის უცნობ მახასიათებლებზე, ანადა იმაზე, შერჩევის მოცემული მოცულობის შემთხვევაში როგორი სიზუსტით შეიძლება ვიმსჯელოთ გენერალური ერთობლიობის მახასიათებლებზე. ისეთი მეთოდი, როგორიცაა უსასრულო გენერალური ერთობლიობათა პარალელური განხილვა, რომლიდანაც ხორციელდება არჩევა და შეზღუდულია ამონარჩევის მოცულობით, წარმოადგენს სრულიად ბუნებრივს სტატისტიკის იმ დარგებში, სადაც ფაქტიურად გვიხდება შერჩევის განხორციელება ინდივიდუმთა ფრიად მრავალრიცხოვან ერთობლიობიდან. სროლასა და შეიარაღებასთან დაკავშირებულ პრაქტიკული ამოცანებისათვის, გაცილებით უფრო დამახასიათებელია სხვა ვითარება, როცა კვლევაში მყოფ შემთხვევით სიდიდეზე (ანდა შემთხვევით სიდიდეთა სისტემაზე) ცდა წარმოებს ამა თუ იმ სიდიდის მახასიათებლების განსაზღვრის მიზნით.

მაგალითად, სროლისას გაფანტვის კანონის გამოკვლევის მიზნით წარმოებს გასროლათა; რაღაც რაოდენობა ანდა დამიზნების შეცდომის გამოკვლევის მიზნით წარმოებს ცდათა სერია, რომელთაგან თითოეულ მათგანში დამიზნების შეცდომის რეგისტრაცია ხდება ფოტოტყვიამფრქვევის საშუალებით, და ა. შ. ამასთან ცდათა შეზღუდული რაოდენობა დაკავშირებულია არა რეგისტრაციის და დამუშავების სიძნელესთან, არამედ თითოეულ ცდის სირთულეზე და სიძვირეზე. ასეთ შემთხვევაში გარკვეული უზუსტობით შეიძლება აგრეთვე წარმოებული ცდა აზრობრივად განვიხილოთ როგორც „ამონარჩევი" რომელიმე წმინდა პირობით „გენერალური ერთობლიობიდან", რომელიც შედგება შესაძლო ცდების უსასრულო რიცხვისაგან, რომელთა ჩატარება შესაძლებელი იყო მოცემულ პირობებში. ოღონდ ასეთი ჰიპოთეზური „გენერალური ერთობლიობის" ხელოვნური შემოტანა არ არის აუცილებელი და

საკითხის განხილვისას შეაქვს იდეალიზაციის ზედმეტი ელემენტი, რომელიც ამოცანის უშუალო რეალობიდან არ გამომდინარეობს.

ამიტომ ჩვენ მოცემულ კურსში არ ვსარგებლობთ ტერმინებით „შერჩევითი საშუალო", „შერჩევითი დისპერსია", „შერჩევითი მახასიათებლები", და ა.შ., ვცვლით რა მათ ტერმინებით „სტატისტიკური საშუალო", „სტატისტიკური დისპერსია", „სტატისტიკური მახასიათებლები".

7.5. სტატისტიკური მწკრივის გათანაბრება

ყოველგვარ სტატისტიკურ განაწილებას გარდაუვალად თან ახლავს შემთხვევითობის ელემენტები, რომლებიც დაკავშირებულია დაკვირვებათა რიცხვის შეზღუდულობასთან, რომ ჩატარებულია სახელდობრ ეს და არა სხვა ცდები, რომლებმაც მოგვცეს სწორედ ეს და არა სხვა შედეგები. მხოლოდ დაკვირვებათა დიდი რიცხვისას სწორდება შემთხვევითობის ეს ელემენტები და შემთხვევითი მოვლენა მთელი სისრულით გამოამჟღავნებს მისთვის დამახასიათებელ კანონზომიერებას. პრაქტიკაში ჩვენ თითქმის არასოდეს არ გვაქვს საქმე დაკვირვებათა ასეთ დიდ რაოდენობასთან და იძულებული ვართ ანგარიში გავუწიოთ, რომ ნებისმიერ სტატისტიკურ განაწილებას მეტნაკლებად ახასიათებს შემთხვევითობის ნიშნები, ამიტომ სტატისტიკური მასალის დამუშავებისას ხშირად გვიხდება გადავწყვიტოთ საკითხი იმის შესახებ თუ როგორ შევარჩიოთ მოცემულ სტატისტიკურ მწკრივისათვის განაწილების თეორიული მრუდი, რომელიც გამოსახავს სტატისტიკური მასალის არსებით თვისებებს და არა შემთხვევითობებს დაკავშირებულს ექსპერიმენტული მასალის მოცულობით უკმარისობასთან. ასეთ ამოცანას ეწოდება **ს ტ ა ტ ი ს ტ ი კ უ რ ი მ წ კ რ ი ვ ი ს გ ა თ ა ნ ა ბ რ ე ბ ი ს** ამოცანა. გასწორების ამოცანაა შევარჩიოთ განაწილების სადა მრუდი, რომელიც ამა თუ იმ თვალსაზრისით ყველაზე საუკეთესოდ აღწერს მოცემულ სტატისტიკურ განაწილებას (ნახ. 7.5.1).

სტატისტიკური მწკრივების საუკეთესოდ გათანაბრების ამოცანა, როგორც საერთოდ ემპირიული ფუნქციის ანალიტიკურად საუკეთესოდ წარმოდგენის ამოცანა—ეს მეტნაკლებად განუსაზღვრელია და მისი გადაწყვეტა მნიშვნელოვანწილად დამოკიდებულია იმაზე, თუ რას ვუწოდოთ „საუკეთესო". მაგ. ემპირიულ დამოკიდებულებათა გასადავებისას ძლიერ ხშირად გამოდიან ე. წ. უმცირეს კვადრატთა პრინციპიდან ანდა მეთოდიდან (იხ. 14. 5 პარაგრაფი), იმის გათვალისწინებით, რომ ფუნქციათა მოცემულ კლასში ემპირიულ დამოკიდებულებასთან საუკეთესო მიახლოებად ითვლება ისეთი ფუნქცია, რომლისთვისაც გადახრათა კვადრატების ჯამი იქცევა მინიმუმად. ამასთან საკითხი იმაზე, რომ ფუნქციათა სახელდობრ რომელ კლასში უნდა მოიძებნოს საუკეთესო მიახლოება, წყდება უკვე არა მათემატიკური მოსაზრებიდან, არამედ გა-

დასაწყვეტი ამოცანის ფიზიკასთან დაკავშირებული მოსაზრებებიდან, მიღებული ემპირიული მრუდის ხასიათის და წარმოებულ დაკვირვებათა სიზუსტის გათვალისწინებით.

ხშირად ფუნქციის პრინციპული ხასიათი, რომელიც გამოსახავს საკვლევ დამოკიდებულებას, ცნობილია წინასწარი თეორიული მოსაზრებებიდან, ხოლო ცდისაგან კი საჭიროა მივიღოთ ფუნქციის გამოსახულებაში შემავალი ზოგიერთი რიცხვითი პარამეტრები, სახელდობრ, ეს პარამეტრები შეირჩევა უმცირეს კვადრატთა მეთოდის შემწეობით.

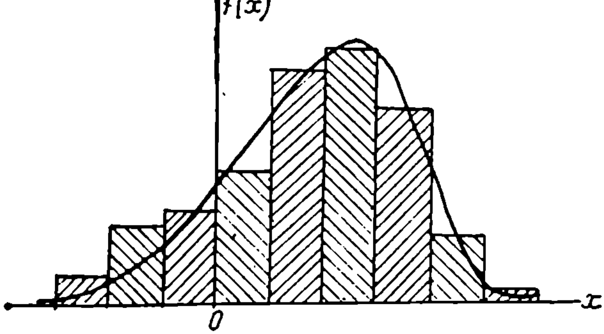
ანალოგიურად დგას საკითხი სტატისტიკური მწკრივების გათანაბრების ამოცანის შესახებაც, როგორც წესი თეორიული მრუდის პრინციპული სახე აირჩევა წინდაწინ ამოცანის არსთან დაკავშირებული მოსაზრებებით, ხოლო ზოგიერთ შემთხვევაში კი უბრალოდ სტატისტიკურ განაწილების გარეგანი სახით.

განაწილების არჩეული მრუდის ანალიზური გამოსახულება დამოკიდებულია ზოგიერთი პარამეტრისაგან. სტატისტიკური მრუდის გასწორების ამოცანა გადადის ამ პარამეტრების მნიშვნელობათა რაციონალურად შერჩევის ამოცანაში, რომელთათვისაც თეორიულ და სტატისტიკურ განაწილებათა შორის შესაბამისობა საუკეთესო აღმოჩნდება.

დავუშვათ, მაგალითად, რომ გამოსაკვლევი X სიდიდე არის გაზომვის შეცდომა წარმოშობილი მრავალ დამოუკიდებელ ელემენტარულ შეცდომათა ერთობლივი გავლენის შედეგად; მაშინ თეორიული თვალსაზრისით შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ X სიდიდე დაქვემდებარებულია ნორმალურ კანონს:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{7.5.1}$$

და გასწორება გადადის (ნახ. 7.5.1) გამოსახულების m და σ პარამეტრების რაციონალურად შერჩევის ამოცანაში.



ნახ. 7.5.1.

არის შემთხვევები, როცა წინასწარ ცნობილია, რომ X სიდიდე სტატისტიკურად მიახლოებით თანაბრად ნაწილდება. რომელიღაც ინტერვალზე. მაშინ შეიძლება დავსვათ თანაბარი სიმკვრივის ამოცანა ამ კანონის პარამეტრების რაციონალურად შერჩევის შესახებ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha}, & \text{როცა } \alpha<x<\beta,\\ 0, & \text{როცა } x<\alpha \text{ ანდა } x>\beta,\end{cases}$$

რომლითაც მოცემული სტატისტიკური განაწილება შესაძლოა საუკეთესოდ შევცვალოთ (გავათანაბროთ). ამასთან მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ ნებისმიერ ანალიზურ $f(x)$ ფუნქციას, რომლის დახმარებითაც სწორდება სტატისტიკური განაწილება, უნდა გააჩნდეს განაწილების სიმკვრივის ძირითადი თვისებები:

$$\left.\begin{aligned} f(x)&\geqslant 0;\\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx&=1.\end{aligned}\right\} \tag{7.5.2}$$

დავუშვათ, რომ ამა თუ იმ მოსაზრებებიდან გამომდინარე, ჩვენს მიერ შერჩეული $f(x)$ ფუნქცია, რომლის დახმარებით გვინდა გავათანაბროთ მოცემული სტატისტიკური განაწილება, აკმაყოფილებს (7.5.2) პირობებს; ამ ფუნქციის გამოსახვაში შედის რამდენიმე პარამეტრი a, b,...; საჭიროა შევარჩიოთ ეს პარამეტრები ისე, რომ $f(x)$ ფუნქცია საუკეთესოდ აღწერდეს მოცემულ სტატისტიკურ მასალას. ერთ-ერთი მეთოდთაგანი, რომელიც გამოიყენება ამ ამოცანის გადასაწყვეტად, არის ე. წ. მ ო მ ე ნ ტ თ ა მ ე თ ო დ ი.

მომენტთა მეთოდის თანახმად a, b,... პარამეტრები შეირჩევა იმის გათვალისწინებით, რომ განაწილების რამდენიმე უმნიშვნელოვანესი რიცხობრივი მახასიათებლები (მომენტები), შესაბამისი სტატისტიკური მახასიათებლების ტოლი იყოს. მაგალითად, თუკი თეორიული $f(x)$ მრუდი დამოკიდებულია მხოლოდ ორი a და b პარამეტრისაგან, ეს პარამეტრები შეირჩევა ისე, რომ თეორიული განაწილების მათემატიკური m_x ლოდინი და D_x დისპერსია დაემთხვენენ შესაბამის m_x^* და D_x^* სტატისტიკურ მახასიათებლებს. თუ $f(x)$ მრუდი დამოკიდებულია სამი პარამეტრისაგან, ისინი შეიძლება შევარჩიოთ ისე, რომ დაემთხვეს პირველი სამი მომენტი და ა. შ. სტატისტიკური მწკრივების გასწორებისას შესაძლოა სასარგებლო აღმოჩნდეს სპეციალურად დამუშავებული სისტემა პირსონის მრუდეებისა. გასწორებისას ეს პარამეტრები შეირჩევა იმ ვარაუდით, რომ შევინარჩუნოთ სტატისტიკური განაწილების პირველი ოთხი მო-

მენტი (მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, მესამე და მეოთხე მომენტები[1]). განაწილების მრუდეების ორიგინალური ნაკრები, რომელიც აგებულია სულ სხვა პრინციპით, მოცემულია ნ. ა. ბოროდაჩევის[2] მიერ. პრინციპი, რომელზედაც იგება, ნ. ა. ბოროდაჩევის მრუდთა სისტემა, მდგომარეობს იმაში, რომ თეორიული მრუდის შერჩევა ეყრდნობა არა გარეგან ფორმალურ ნიშნებს, არამედ მოვლენის ან პროცესის ფიზიკურ არსს, რომელსაც განაწილების ამა თუ იმ კანონამდე მივყავართ.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ სტატისტიკურ მწკრივთა გასწორებისას არ არის რაციონალური მეოთხეზე მეტი რიგის მომენტებით ვისარგებლოთ, რადგან რიგის გაზრდით მომენტთა გამოთვლის სიზუსტე მკვეთრად ეცემა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. 7.3. პარაგრაფში მოყვანილია თვითმფრინავიდან მიწისზედა სამიზნეზე სროლისას დამიზნების გვერდითი X შეცდომის სტატისტიკური განაწილება. საჭიროა ეს განაწილება გამოისახოს ნორმალური კანონის მეშვეობით:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნორმალური კანონი დამოკიდებულია ორი პარამეტრისაგან: m და σ. ეს პარამეტრები შევარჩიოთ ისე, რომ შევინარჩუნოთ სტატისტიკური განაწილების პირველი ორი მომენტი — მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

გამოვთვალოთ მიახლოებით დამიზნების სტატისტიკური საშუალო შეცდომა (7,4.7) ფორმულით, ამასთან თითოეული თანრიგის წარმომადგენლად მივიღოთ მისი საშუალო:

$$m_x^*=-3,5\cdot0,012-2,5\cdot0,050-1,5\cdot0,144-0,5\cdot0,266+0,5\cdot0,240+$$
$$+1,5\cdot0,176+2,5\cdot0,092+3,5\cdot0,020=0,168.$$

დისპერსიის განსაზღვრისათვის გამოვთვალოთ პირველად მეორე საწყისი მომენტი (7.4.9) ფორმულით, როცა $s=2$, $k=8$.

$$\alpha_2^*=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{x}_i^2p_i^*=2,126.$$

ვსარგებლობთ რა მეორე საწყისი მომენტით გამოსახულ დისპერსიის (7.4.6) ფორმულით მივიღებთ:

$$D_x^*=\alpha_2^*-(m_x^*)^2=2,126-0,028=2,098.$$

ავირჩიოთ ნორმალური კანონის m და σ პარამეტრები იმდაგვარად, რომ სრულდებოდეს პირობები:

$$m=m_x^*,\qquad \sigma^2=D_x^*.$$

---

[1] იხ. მაგალითი. В. И. Романовский, Математическая статистика, ОНТИ, 1939.

[2] См., например, В. И. Романовский, Математическая статистика, ОНТИ, 1939.

ე. მივიღებთ:

$$m = 0,168; \quad \sigma = 1,448.$$

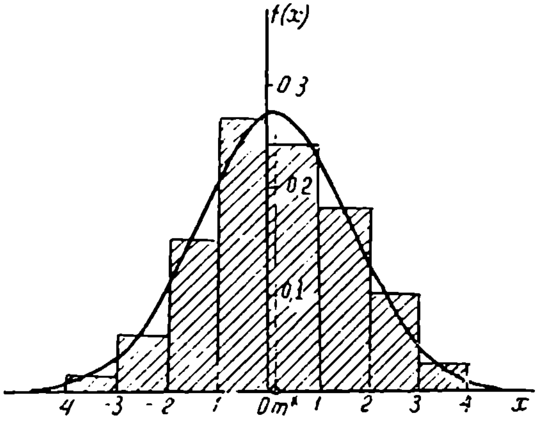
დავწეროთ ნორმალური კანონის გამოსახულება

$$f(x) = \frac{1}{1,448\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-0,168)^2}{2\cdot 1,448^2}}$$

ვისარგებლებთ რა დანართის 3-მე ცხრილით გამოვთვლით $f(x)$-ის მნიშვნელობას თანრიგის საზღვრებზე

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,004	0,025	0,090	0,199	0,274	0,234	0,124	0,041	0,008

ავაგოთ ერთ გრაფიკზე (ნახ. 7.5.2.) ჰისტოგრამა და მისი ვამასწორებელი განაწილების მრუდი.



ნახ. 7·5.2.

გრაფიკიდან ჩანს, რომ განაწილების თეორიული $f(x)$ მრუდი ინარჩუნებს რა ძირითადში სტატისტიკური განაწილების თავისებურებებს, თავისუფალია ჰისტოგრამის სვლის შემთხვევითი უსწორებებისაგან, რომლებიც როგორც ჩანს შესაძლოა მივაწეროთ შემთხვევით მიზეზებს. უკანასკნელის სერიოზული დასაბუთება მოცემული იქნება მომდევნო პარაგრაფში.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. მოცემულ მაგალითში D_x-ის განსაზღვრისას ვისარგებლებთ სტატისტიკური დისპერსიის (7.4.6) გამოსახულებით საწყისი მომენტის საშუალებით. ეს ხერხი მხოლოდ იმ შემთხვევაშია რეკომენდებული, როცა გამოსაკვლევი შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკური m^*_x ლოდინი შედარებით დიდი არ არის, წინააღმდეგ შემთხვე-

ვაში (7.6.4) ფორმულა დისპერსიას გამოსახავს, როგორც ახლობელ რიცხვთა სხვაობას, რომლის სიზუსტე ძალიან მცირეა. იმ შემთხვევაში როცა ამას აქვს ადგილი, რეკომენდებულია ან გამოვთვალოთ D_x^* უშუალოდ (7.4.3) ფორმულით, ანდა კოორდინატთა სათავე m^*_x-თან ახლო მდებარე რომელიღაც წერტილში გადავიტანოთ და შემდეგ გამოვიყენოთ (7.4.6) ფორმულა. (7.4.3) ფორმულით სარგებლობა ტოლძალოვანია კოორდინატთა სათავის m^*_x წერტილში გადატანისა, ეს შესაძლოა აღმოჩნდეს მოუხერხებელი, რადგან m_x გამოსახულება შეიძლება იყოს წილადიანი და m_x-ის გამოკლება ყოველი x_i-დან ზედმეტად ართულებს გამოთვლას. ამიტომ რეკომენდებულია კოორდინატთა სათავე გადმოვიტანოთ x-ის რომელიღაც დამრგვალებულ m_x^*-ის ახლო მდებარე x წერტილში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. რადიომანძილმზომით სიშორის გაზომვის ხდომილობის განაწილების კანონის გამოსაკვლევად ნაწარმოებია სიშორის 400-ჯერ გაზომვა. გაზომვის შედეგები წარმოდგენილია სტატისტიკური მწკრივის სახით:

$I_i(m)$	20; 30	30; 40	40; 50	50; 60	60; 70	70; 80	80; 90	90; 100
m_i	21	72	66	38	51	56	64	32
p_i^*	0,052	0,180	0,165	0,095	0,128	0,140	0;160	0,080

გავასწოროთ სტატისტიკური მრუდი თანაბარი სიმკვრივის კანონის მეშვეობით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თანაბარი სიმკვრივის კანონი გამოისახება ფორმულით:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha}, & \text{როცა} \quad \alpha<x<\beta \\ 0, & \text{როცა } x<\alpha \text{ ანდა } x>\beta;\end{cases}$$

და დამოკიდებულია ორი α და β პარამეტრებისაგან. ეს პარამეტრები უნდა შევარჩიოთ ისე რომ შევინარჩუნოთ სტატისტიკური განაწილების პირველი ორი მომენტი —მათემატიკური m^*_x ლოდინი და D_x^* დისპერსია. 5.8 პარაგრაფის მაგალითიდან გვაქვს მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის გამოსახულებები თანაბარი სიმკვრივის კანონისათვის:

$$m(x)=\frac{\alpha+\beta}{2}; \qquad D_x=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

იმისათვის, რომ გავამარტივოთ სტატისტიკური მომენტების განსაზღვრასთან დაკავშირებული გამოთვლები. ანათვლის დასაწყისი გადავიტანოთ $x_0=60$ წერტილში და თითოეული თანრიგის წარმომადგენლად მივიღოთ მისი საშუალო. განაწილების მწკრივი მიიღებს სახეს:

$\tilde{x}'_i$	−35	−25	−15	−5		15	25	35
p^*_i	0,052	0,180	0,165	0,095	0,128	0,140	0,160	0,080

სადაც $\tilde{x}'_i$ — რადიომანძილმზომის X' ხდომილობის თანრიგის საშუალო ათვლის ახალი საწყისისას. X' ხდომილობის მიახლოებითი საშუალო სტატისტიკური მნიშვნელობა ტოლია:

$$m^*_{x'}=\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}'_i\, p^*_i=0,26.$$

X' სიდიდის მეორე სტატისტიკური მომენტი ტოლია:

$$\alpha^*_2=\sum_{i=1}^{k}(\tilde{x}'_i)^2\, p^*_i=447,8,$$

საიდანაც სტატისტიკური დისპერსია

$$D^*_{x'}=\alpha^*_2-\left(m^*_{x'}\right)^2=447,7.$$

გადავდივართ რა ათვლის წინა საწყისებზე, ვღებულობთ ახალ სტატისტიკურ საშუალოს

$$m^*_x=m^*_{x'}+60=60,26$$

და იგივე სტატისტიკურ დისპერსიას

$$D^*_x=D^*_{x'}=447,7.$$

თანაბარი სიმკვრივის კანონის პარამეტრები განისაზღვრება განტოლებებით:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=60,26; \qquad \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}=447,7.$$

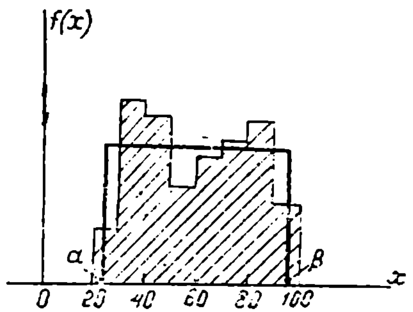
ამ განტოლებათა α და β მიმართ ამოხსნით მივიღებთ

$$\alpha\approx 23,6; \quad \beta\approx 96,9,$$

საიდანაც

$$f(x)=\frac{1}{\beta-\alpha}=\frac{1}{73,3}\approx 0,0136.$$

7.5.3. ნახ.-ზე ნაჩვენებია ჰისტოგრამა და მისი თანაბარი $f(x)$ სიმკვრივის გამასწორებელი კანონი.

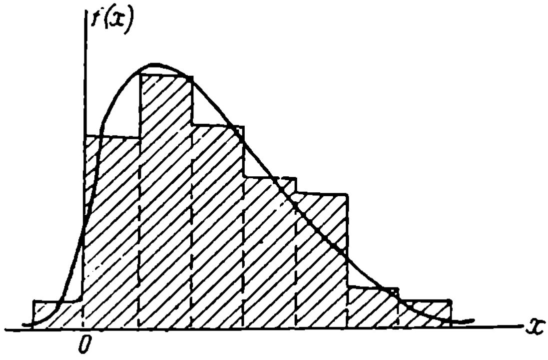


ნახ. 7.5.3.

7.6. თანხმობის კრიტერიუმი

მოცემულ პარაგრაფში განვიხილოთ ერთ-ერთი საკითხთაგანი, რომელიც ჰიპოთეზათა დამაჯერებლობის შემოწმებასთან, სახელდობრ — თეორიული და სტატისტიკური განაწილების შეთანხმებულობის საკითხთანაა დაკავშირებული.

დავუშვათ, რომ მოცემული სტატისტიკური განაწილება გათანაბრებულია რომელიღაც თეორიული $f(x)$ მრუდით (ნახ. 7.6.1). როგორადაც



ნახ. 7.6.1.

არ უნდა იყოს შერჩეული თეორიული მრუდი, მას და სტატისტიკურ განაწილებას შორის გარდაუვალია რაღაც განსხვავება. ბუნებრივად ისმის კითხვა: აიხსნებიან თუ არა ეს განსხვავებანი მხოლოდ დაკვირვებათა შეზღუდულ რიცხვთან დაკავშირებული შემთხვევითი გარემოებებით, თუ ისინი წარმოადგენენ არსებითს და დაკავშირებული არიან იმასთან, რომ ჩვენს მიერ შერჩეული მრუდი ცუდად ასწორებს მოცემულ სტატისტიკურ განაწილებას. ასეთ საკითხზე პასუხის გასაცემად იყენებენ ე. წ. „თანხმობის კრიტერიუმებს“.

თანხმობის კრიტერიუმების გამოყენების იდეა მდგომარეობს შემდეგში.

მოცემული სტატისტიკური მასალის საფუძველზე გვიწევს შევამოწმოთ H ჰიპოთეზა, რაც არის ის, რომ შემთხვევითი X სიდიდე ექვემდებარება განაწილების, რომელიღაც განსაზღვრულ კანონს. ეს კანონი შეიძლება მოცემული იყოს ამა თუ იმ ფორმით: მაგალითად, განაწილების $F(x)$ ფუნქციის სახით ან განაწილების სიმკვრივის სახით, ანდა კიდევ ალბათობათა p_i ერთობლიობათა სახით, სადაც p_i ალბათობაა იმისა, რომ X სიდიდე მოხვდება i-ური თანრიგის საზღვრებში.

ვინაიდან განაწილების $F(x)$ ფუნქცია ამ ფორმებიდან ყველაზე ზოგადია და განსაზღვრავს ნებისმიერ სხვას, H ჰიპოთეზის ფორმუ-

ლირებას მოვახდენთ, ისე რომ თითქოს X სიდიდეს ჰქონდეს განაწილების $F(x)$ ფუნქცია.

იმისათვის, რომ მივიღოთ ან უკუვაგდოთ ჰიპოთეზა, განვიხილოთ ისეთი U სიდიდე, რომელიც დაახასიათებს თეორიულ და სტატისტიკურ განაწილებათა განსხვავების ხარისხს. U სიდიდე შესაძლოა შერჩეული იყოს სხვადასხვა ხერხით, მაგალითად, შეიძლება მივიღოთ როგორც თეორიულ p_i ალბათობათა შემაბამისი p_i^* სიხშირეებისაგან გადახრების კვადრატების ჯამი, ანდა ჯამი იმავე კვადრატებისა რომელიღაც კოეფიციენტებით („მასებით"), ანდა განაწილების სტატისტიკური $F^*(x)$ ფუნქციის მაქსიმალური გადახრა თეორიულ $F(x)$ -დან და ა. შ. დავუშვათ, რომ U სიდიდე შერჩეულია ამა თუ იმ ხერხით. ცხადია, ეს არის რომელიღაც შემთხვევითი სიდიდე. ამ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი დამოკიდებულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების კანონზე, რომელზედაც წარმოებდა ცდები, და ცდათა n რიცხვზე. თუ H ჰიპოთეზა მართალია, მაშინ U სიდიდის განაწილების კანონი განისაზღვრება X სიდიდის განაწილების კანონით ($F(x)$ ფუნქციით) და n რიცხვით.

დავუშვათ, რომ განაწილების ეს კანონი ჩვენთვის ცნობილია. ცდათა მოცემულ სერიების შედეგში აღმოჩნდა, რომ ჩვენს მიერ შერჩეულმა განსხვავებულობის U ზომამ მიიღო რომელიღაც მნიშვნელობა. ისმის კითხვა, შეიძლება თუ არა ეს ახსნილი იქნას შემთხვევითი მიზეზებით ანდა ეს განსხვავებულობა მეტად დიდია და აჩვენებს არსებითი სხვაობის არსებობას თეორიულ და სტატისტიკურ განაწილებებს შორის და, ამრიგად, ჰიპოთეზის უვარგისობას? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად დავუშვათ, რომ H ჰიპოთეზა სწორია, და ამ დაშვებით გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ ცდისეული მასალის არასაკმაო მოცულობასთან დაკავშირებული მიზეზების გამო განსხვავებულობის U ზომა არ აღმოჩნდება ნაკლები, ჩვენს მიერ ცდებზე დაკვირვების შედეგად მიღებულ u მნიშვნელობაზე, ე. ი. გამოვთვალოთ ალბათობა ხდომილობისა:

$$U \geqslant u.$$

თუ ეს ალბათობა ფრიად მცირეა, მაშინ H ჰიპოთეზა შეიძლება უკუვაგდოთ როგორც ნაკლებად დასაჯერებელი. თუკი ეს ალბათობა მნიშვნელოვანია, მაშინ შესაძლოა მივიჩნიოთ, რომ ექსპერიმენტული მონაცემები არ ეწინააღმდეგება H ჰიპოთეზას.

ისმის საკითხი იმაზე, თუ რა ხერხით უნდა შევარჩიოთ U-ს განსხვავებულობის ზომა? თურმე მისი ზოგიერთი ხერხის შერჩევისას U სიდიდის განაწილების კანონს გააჩნია ფრიად მარტივი თვისებები და საკმაოდ დიდი n-ისას პრაქტიკულად არ არის დამოკიდებული $F(x)$ ფუნქციისაგან. მათემატიკურ სტატისტიკაში თანხმობის კრიტერიუმად სწორედ ასეთი განსხვავებულობის ზომით სარგებლობენ.

განვიხილოთ თანხმობის კრიტერიუმებიდან ერთ-ერთი ყველაზე ხშირად ხმარებული პირსონის ე. წ. „χ^2 კრიტერიუმი“[1]. დავუშვათ, რომ ნაწარმოებია დამოუკიდებელი n ცდა, რომელთაგან თითეულ მათგანში შემთხვევითმა X სიდიდემ გარკვეული მნიშვნელობა მიიღო. ცდათა შედეგები თავმოყრილია k თანრიგებში და გაფორმებულია სტატისტიკური მწკრივის სახით:

I_i	$x_1;\ x_2$	$x_2;\ x_3$		$x_k;\ x_{k+1}$
p_i^*	p_1^*	p_2^*		p_k^*

საჭიროა შევამოწმოთ, ეთანხმებიან თუ არა ექსპერიმენტული მონაცემები ჰიპოთეზას, იმაზე რომ შემთხვევით X სიდიდეს აქვს განაწილების მოცემული კანონი (განაწილების $F(x)$ ფუნქციით ანდა $f(x)$ სიმკვრივით მოცემული). განაწილების ამ კანონს „თეორიული“ ვუწოდოთ.

ვიცით რა განაწილების თეორიული კანონი, შესაძლოა მოვნახოთ შემთხვევით სიდიდეთა ყოველ თანრიგში მოხვედრის თეორიული ალბათობანი:

$$p_1,\ \ p_2,\dots,p_k.$$

თეორიული და სტატისტიკური განაწილების შეთანხმებულობის შესამოწმებლად, განვიხილოთ თეორიული p_i ალბათობათა და დანაკვირ p^* სიხშირეთა შორის სხვაობა. ბუნებრივია თეორიულ და სტატისტიკურ განაწილებათა შორის განსხვავებულობის ზომად ავირჩიოთ, რომელიღაც „მასებით აღებული ($p_i^* - p_i$) გადახრათა კვადრატების ჯამი:

$$U=\sum_{i=1}^{k} c_i(p_i^* - p_i)^2. \qquad (7.6.1)$$

კოეფიციენტები (თანრიგთა „მასები“) შემოიყვანება იმიტომ, რომ სხვადასხვა თანრიგის გადახრების მნიშვნელობანი საერთოდ არ შეიძლება ჩაითვალოს ტოლძალოვნად. მართლაც, აბსოლუტური სიდიდით ერთი და იგივე გადახრა $p_i^* - p_i$ შეიძლება იყოს ნაკლებად მნიშვნელოვანი, თუ თვით p_i ალბათობა დიდია, და ძლიერ შესამჩნევი — თუ იგი მცირეა. ამიტომ ბუნებრივია c_i „მასები“ თანრიგთა p_i ალბათობების უკუპროპორციული ავიღოთ. შემდეგ ისმის კითხვა, თუ როგორ შევარჩიოთ პროპორციულობის კოეფიციენტი.

[1] წაიკითხეთ ასე: პირსონის კაპპა კვადრატ კრიტერიუმი.

კ. პირსონმა გვიჩვენა რომ თუ დავუშვებთ

$$c_i = \frac{n}{p_i}, \tag{7.6.2}$$

მაშინ დიდი n-სას U სიდიდის განაწილების კანონს გააჩნია მეტად მარტივი თვისებები: იგი პრაქტიკულად არ არის დამოკიდებული განაწილების $F(x)$ ფუნქციისა და ცდათა n რიცხვისაგან, არამედ დამოკიდებულია მხოლოდ თანრიგთა k რიცხვისაგან, და სახელდობრ, ეს კანონი n-ის გადიდებისას უახლოვდება ე. წ. „χ^2 განაწილებას"[1].

c_i კოეფიციენტების ასეთი შერჩევისას განსხვავებულობის ზომა ჩვეულებრივ აღინიშნება χ^2-ით:

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{k} \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i}. \tag{7.6.3}$$

გამოთვლის მოხერხებულობისათვის (რომ არ გვქონდეს საქმე ისეთ წილადურ სიდიდეებთან რომელთაც ნულების დიდი რიცხვი აქვთ) შეიძლება n შევიყვანოთ ჯამის ნიშნის ქვეშ და გავითვალისწინოთ რომ $p_i^* = \frac{m_i}{n}$, სადაც m_i i-ურ თანრიგში მნიშვნელობათა რიცხვია და მივიყვანოთ (7.6.3) ფორმულა შემდეგ სახემდე:

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)}{np_i}. \tag{7.6.4}$$

---

[1] თავისუფლების r ხარისხით χ^2 განაწილება, ეწოდება r დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა კვადრატების ჯამის განაწილებას, რომელთაგან თითოეული მათგანი დაქვემდებარებულია ნორმალურ კანონს, ნულის ტოლი მათემატიკური ლოდინით და ერთის ტოლი დისპერსიით. ეს განაწილება ხასიათდება სიმკვრივით

$$k_r(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{r}{2}}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} u^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}, & \text{როცა } u > 0, \\ 0, & \text{როცა } u < 0, \end{cases}$$

სადაც

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt \text{ — ცნობილი გამა ფუნქციაა.}$$

χ^2 განაწილება დამოკიდებულია r პარამეტრისაგან, რომელსაც განაწილების „თავისუფლების ხარისხის“ რიცხვი ეწოდება. „თავისუფლების ხარისხთა“ r რიცხვი ტოლია თანრიგთა k რიცხვს გამოკლებული p_i^* სიხშირეზე დადებულ დამოუკიდებელ პირობათა („კავშირების“) რიცხვი. ასეთ პირობათა მაგალითებია

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1,$$

თუ ვთხოულობთ მხოლოდ იმას, რომ სიხშირეთა ჯამი იყოს ერთის ტოლი (ეს მოთხოვნა დაედება ყველა შემთხვევაში):

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i p_i^* = m_x,$$

თუ თეორიულ განაწილებას ვარჩევთ იმ პირობით, რომ თეორიული და სტატისტიკური განაწილების საშუალო მნიშვნელობანი უნდა ემთხვეოდეს;

$$\sum_{i=1}^{k} (\tilde{x}_i - m_x^*)^2 p_i^* = D_x,$$

გარდა ამისა თუ ვთხოულობთ, თეორიულ და სტატისტიკური დისპერსიების დამთხვევას და ა. შ.

χ^2 განაწილებისათვის შედგენილია სპეციალური ცხრილი (იხ. დანართში ცხრილი 4). თუ ვისარგებლებთ ამ ცხრილებით შესაძლებელია χ^2-ის და r თავისუფლების ხარისხის ყოველი მნიშვნელობისათვის, მოვნახოთ p ალბათობა იმისა, რომ χ^2 კანონით განაწილებული სიდიდე აღემატება ამ მნიშვნელობას. მე-4 ცხრილში შეტანილია: ალბათობის p მნიშვნელობა და r თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი. ცხრილში მდგომი რიცხვები თვითონ χ^2 -ის შესაბამისი მნიშვნელობებია. χ^2 განაწილება საშუალებას იძლევა შევაფასოთ თეორიული და სტატისტიკურ განაწილებათა შეთანხმებულობის ხარისხი. თუ X სიდიდე ნამდვილადაა განაწილებული $F(x)$ კანონით, მაშინ ცხრილის მიხედვით განსაზღვრული ალბათობა არის ალბათობა იმისა, რომ წმინდა შემთხვევითი მიზეზების გამო თეორიული და სტატისტიკური განაწილების განსხვავებულობის ზომა (7.6.4) იქნება არა ნაკლები, ცდათა მოცემულ სერიაში ფაქტიურ დაკვირვებათა შედეგად მიღებულ χ^2-ის მნიშვნელობაზე. თუ p ალბათობა ფრიად მცირეა (იმდენად მცირე, რომ ხდომილობა ასეთი ალბათობით შეიძლება პრაქტიკულად შეუძლებლად ჩაით-

ვალის), მაშინ ცდის შედეგი უნდა უარვყოთ, როგორც არადამაჯერებელი. პირქით თუ p ალბათობა შედარებით დიდია, შესაძლოა მივიჩნიოთ, რომ განსხვავებულობა თეორიულ და სტატისტიკურ განაწილებებს შორის არ არის არსებითი და მივაკუთვნოთ იგი შემთხვევით მიზეზებს. H ჰიპოტეზა, რომ X სიდიდე განაწილებულია $F(x)$ კანონით შესაძლოა ჩავთვალოთ დამაჯერებლად ანდა, უკიდურეს შემთხვევაში, ისეთად, რომელიც არ ეწინააღმდეგება ცდისეულ მონაცემებს.

ამგვარად, თეორიული და სტატისტიკური განაწილების შეფასებისათვის χ^2 კრიტერიუმის გამოყენების სქემა დაიყვანება შემდეგზე:
1) χ^2 განსხვავებულობის ზომა განისაზღვრება (7.6.4) ფორმულით.
2) r — თავისუფლების ხარისხები განისაზღვრება როგორც რიცხვი k თანრიგს გამოკლებული დადებულ პირობათა („კავშირების") s რიცხვი: $r=k-s$
3) r-ისა და χ^2-ის მიხედვით მე-4 ცხრილის დახმარებით, განისაზღვრება ალბათობა იმისა, რომ სიდიდე, რომელსაც აქვს χ^2 განაწილება რომლის r თავისუფლების ხარისხი აღემატება χ^2-ის მოცემულ მნიშვნელობას. თუკი ეს ალბათობა ფრიად მცირეა, H ჰიპოთეზა უკუიგდება, როგორც არადამაჯერებელი, თუ ეს ალბათობა შედარებით დიდია, მაშინ ჰიპოთეზა შესაძლებელია მივიჩნიოთ ცდისეულ მონაცემების დამადასტურებლად.

რამდენად მცირე უნდა იყოს p ალბათობა იმისათვის, რომ უარვყოთ ანდა გადავხედოთ ჰიპოთეზას—გაურკვეველია; იგი არ შეიძლება გადაწყვეტილი იქნას მათემატიკური მოსაზრებებით, ისე როგორც საკითხი იმაზე, რომ რამდენად მცირე უნდა იყოს ხდომილობის ალბათობა იმისათვის, რომ იგი პრაქტიკულად შეუძლებლად ჩავთვალოთ. პრაქტიკაში, თუ p აღმოჩნდება 0,1-ზე ნაკლები, რეკომენდებულია ექსპერიმენტის შემოწმება — თუ შესაძლოა გავიმეოროთ იგი იმ შემთხვევაშიც, როცა შესამჩნევი განსხვავებანი კვლავ აღმოჩნდება. შევეცადოთ მოვძებნოთ სტატისტიკურ მონაცემთა ასაღწერად უფრო შესაფერისი განაწილების კანონი. საჭიროა განსაკუთრებით აღნიშვნა იმისა, რომ χ^2 კრიტერიუმის (ანდა თანხმობის სხვა რომელი კრიტერიუმის) დახმარებით შესაძლოა მხოლოდ ზოგიერთ შემთხვევაში უარვყოთ შერჩეული H ჰიპოთეზა და უკუვაგდოთ, როგორც ცხადად შეუთანხმებელი ცდისეულ მონაცემებთან; თუკი p ალბათობა დიდია, მაშინ თვით ეს ფაქტი არავითარ შემთხვევაში არ შეიძლება ჩაითვალოს H ჰიპოთეზის სამართლიანობის საბუთად, არამედ აჩვენებს მხოლოდ იმას, რომ ჰიპოთეზა არ ეწინააღმდეგება ცდისეულ მონაცემებს.

ერთი შეხედვით შესაძლოა გვეჩვენოს, რომ რამდენადაც მეტია ალბათობა, იმდენად უკეთესია თეორიულ და სტატისტიკურ განაწილებათა შორის შეთანხმებულობა და მით უფრო დასაბუთებულად უნდა ჩავთვალოთ $F(x)$ ფუნქციის არჩევა შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონად. სინამდვილეში ეს ასე არ არის. დავუშვათ, მაგალითად, რომ შევაფასეთ რა თეორიული და სტატისტიკური განაწილების შეთანხმებულობა χ^2 კრიტერიუმის მიხედვით, მივიღეთ $p=0{,}99$. ეს ნიშნავს იმას, რომ 0,99 ალბათობით წმინდა შემთხვევით მიზეზთა ხარჯზე ცდათა მოცემულ რიცხვისას, უნდა მიგვეღო მეტი განსხვავებულობანი, ვიდრე დაკვირვების შედეგად მიღებული. ჩვენ კი მივიღეთ შედარებით ფრიად მცირე განსხვავებულობანი, რომლებიც მეტად მცირეა იმისათვის, რომ მივიჩნიოთ ისინი დამაჯერებლად. უფრო გონივრულია მივიჩნიოთ რომ თეორიულ და სტატისტიკურ განაწილებათა ამდენად ახლო დამთხვევა არ წარმოადგენს შემთხვევითს და შეიძლება ახსნილი იქნას გარკვეული მიზეზებით, რომლებიც დაკავშირებულია ცდისეულ მონაცემთა რეგისტრაციასა და დამუშავებასთან (კერძოდ, ცდისეულ მონაცემთა პრაქტიკაში ფრიად გავრცელებულ „გაწმენდასთან", როცა ზოგიერთი შედეგები ნებისმიერად უკუიგდება ანდა რამდენადმე შეიცვლება).

იგულისხმება, რომ ყველა ეს მოსაზრებანი მისაღებია მხოლოდ იმ შემთხვევებში, როცა ცდათა რიცხვი საკმაოდ დიდია (რამდენიმე ასეული რიგისა) და მაშინ, როცა აზრი აქვს გამოვიყენოთ თვით კრიტერიუმი, რომელიც ემყარება განსხვავებულობის ზომის ზღვრულ განაწილებას, როცა $n \to \infty$.

შევნიშნოთ რომ χ^2 კრიტერიუმით სარგებლობისას ცალკეულ თანრიგებში არა მარტო ცდათა n რიცხვი, არამედ დაკვირვებათა რიცხვი საკმაოდ დიდი უნდა იყოს. პრაქტიკაში რეკომენდებულია თითოეულ თანრიგში არანაკლებ 5—10 დაკვირვება. თუ დაკვირვებათა რიცხვი ცალკეულ თანრიგებში ძალიან მცირეა (1—2-მდე) აზრი აქვს რამდენიმე თანრიგის გაერთიანებას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. შევამოწმოთ თეორიული და სტატისტიკურ განაწილებათა შეთანხმებულობა 7.5. პარაგრაფის მაგალითისათვის.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ $m=0{,}168$, $\sigma=1{,}448$ პარამეტრებიანი განაწილების თეორიული ნორმალური კანონით. თანრიგებში მოხვედრის ალბათობებს ვიპოვით ფორმულით:

$$p_i=\Phi^*\left(\frac{x_{i+1}-m}{\sigma}\right)-\Phi^*\left(\frac{x_i-m}{\sigma}\right),$$

სადაც x_i, x_{i+1} i-ური თანრიგის საზღვრებია.

ამის შემდეგ ვადგენთ m_i თანრიგებში მოხვედრის რიცხვების და შესაბამის np_i მნიშვნელობათა შედარებით ცხრილს ($n=500$).

I_i	−4; −3	−3; −2	−2; −1	−1; 0	0; 1	1; 2	2; 3	3; 4
m_i	6	25	72	133	120		46	10
np_i	6,2	26,2	71,2	122,2	131,8	90,5	38,2	10,5

ფორმულით (7.6.4) განვსაზღვრავთ განსხვავებულობის ზომას

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{8} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = 3.94.$$

განვსაზღვრავთ თავისუფლების ხარისხს, როგორც სხვაობას თანრიგთა რიცხვისა და დადებულ s კავშირთა რიცხვებს შორის. (მოც. შემთხვევაში $s=3$):

$$r = 8 - 3 = 5.$$

დანართის მე-4 ცხრილის მიხედვით ვპოულობთ $r = 5$;

როცა $\chi^2 = 3.00$ $p = 0.70$;
როცა $\chi^2 = 4.35$ $p = 0,50$.

მაშასადამე საძიებო p ალბათობა, როცა $\chi^2 = 3.94$, მიახლოებით ტოლია 0.56. ეს ალბათობა მცირე არ არის; ამიტომ ჰიპოთეზა იმისა, რომ X სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონით, შეიძლება ჩავთვალოთ დამაჯერებლად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. შევამოწმოთ თეორიული და სტატისტიკური განაწილებათა შეთანხმებულობა 7.5. პარაგრაფის მე-2 მაგალითისთვის (გვ. 149).

ა მ ო ხ ს ნ ა. P_i ალბათობებს გამოვთვლით როგორც (20; 30), (30; 40) და ა. შ. უბნებზე მოხვედრის ალბათობებს (23.6; 96.9) მონაკვეთზე თანაბარი სიმკვრივის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისათვის. ვადგენთ ცხრილს m_i და np_i ($n = 400$) მნიშვნელობებისათვის:

I_i	20; 30	30; 40	40; 50	60	60; 70	70; 80	80; 90	90; 100
m_i	21	72	66		51	56	64	32
np_i	34,9	54,6	54,6	54,6	54,6	54,6	54,6	38,0

(7.6.4) ფორმულით ვპოულობთ χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{8} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \approx 20,9.$$

თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი:

$$r = 8 - 3 = 5.$$

დანართის მე-4 ცხრილის მიხედვით გვაქვს:

$$\text{როცა } \chi^2=20{,}5 \text{ და } r=5 \quad p=0{,}001$$

მაშასადამე ჩვენს. მიერ დაკვირვების შედეგად მიღებული განსხვავება თეორიულ და სტატისტიკურ განაწილებებს შორის შესაძლოა სუფთა შემთხვევით მიზეზთა ხარჯზე მომხდარიყო მხოლოდ $p=0.001$ ალბათობით. ვინაიდან ეს ალბათობა ძლიერ მცირეა, შესაძლოა ექსპერიმენტული მონაცემები მივიჩნიოთ საწინააღმდეგოდ ჰიპოთეზისა იმის შესახებ, რომ X სიდიდე განაწილებულია თანაბარი სიმკვრივის კანონით.

გარდა χ^2 კრიტერიუმისა თეორიულ და სტატისტიკურ განაწილებათა შეთანხმებულობის ხარისხის შესაფასებლად პრაქტიკაში გამოიყენება აგრეთვე კიდევ სხვა კრიტერიუმები. მათ შორის ჩვენ მოკლედ შევჩერდებით ა. ნ. კოლმოგოროვის კრიტერიუმზე. თეორიულ და სტატისტიკურ განაწილებათა შორის განსხვავებულობის ზომად ა. ნ. კოლმოგოროვი განიხილავს განაწილების სტატისტიკურ $F^*(x)$ ფუნქციასა და განაწილების შესაბამის თეორიულ ფუნქციას შორის სხვაობის მოდულის მაქსიმალურ მნიშვნელობას:

$$D=max|F^*(x)-F(x)|.$$

სიდიდის განსხვავებულობის ზომის არჩევის საფუძველია მისი გამოთვლის სიმარტივე. ამასთან ერთად მას აქვს განაწილების საკმაოდ მარტივი კანონი. ა. ნ. კოლმოგოროვმა დაამტკიცა, რომ როგორიც არ უნდა უყოს უწყვეტი შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების $F(x)$ ფუნქცია დამოუკიდებელ დაკვირვებათა რიცხვის უსასრულოდ ზრდისას ალბათობა უტოლობისა $D\sqrt{n}\geqslant\lambda$ მიისწრაფვის ზღვრისაკენ:

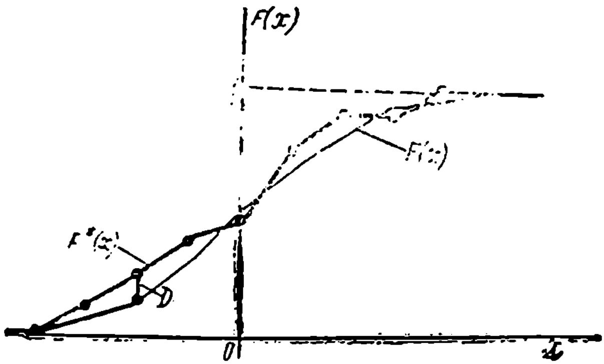
$$P(\lambda)=1-\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}. \tag{7.6.5}$$

(7.6.5) ფორმულით გამოთვლილი $P(\lambda)$ ალბათობათა მნიშვნელობანი მოყვანილია 7.6.1 ცხრილში.

ცხრილი 7.6.1

λ	$p(\lambda)$	λ	$p(\lambda)$	λ	$p(\lambda)$
0,0	1,000	0,7	0,711	1,4	0,040
0,1	1,000	0,8	0,544	1,5	0,022
0,2	1,000	0,9	0,393	1,6	0,012
0,3	1,000	1,0	0,270	1,7	0,006
0,4	0,997	1,1	0,178	1,8	0,003
0,5	0,964	1,2	0,112	1,9	0,002
0,6	0,864	1,3	0,068	2,0	0,001

ა. ნ. კოლმოგოროვის კრიტერიუმის გამოყენების სქემა შემდეგია: იგება განაწილების სტატისტიკური $F^*(x)$ ფუნქცია და განაწილების სავარაუდო თეორიული $F(x)$ ფუნქცია და განისაზღვრება მათ შორის სხვაობის D მოდულის მაქსიმუმი ნახ. (7.6.2).



ნახ. 7.6.2.

შემდეგ. განისაზღვრება სიდიდე $\lambda=D\sqrt{n}$ და 7.6.1 ცხრილით მოიძებნება $P(\lambda)$ ალბათობა. ეს არის ალბათობა იმისა, რომ (თუ X სიდიდე ნამდვილად განაწილებულია $F(x)$ კანონით) შემთხვევით მიზეზთა ხარჯზე მაქსიმალური განსხვავება $F^*(x)$ და $F(x)$ შორის იქნება არა ნაკლები, ვინემ დაკვირვების შედეგად ფაქტიურად მიღებული. თუ ალბათობა $P(\lambda)$ ძალიან მცირეა, ჰიპოთეზა შეიძლება უარვყოთ როგორც არა დამაჯერებელი; როცა $P(\lambda)$ საკმაოდ დიდია, იგი შეიძლება ცდისეულ მონაცემებთან შეთავსებულად ჩაითვალოს. ა. ნ. კოლმოგოროვის კრიტერიუმი თავისი სიმარტივით აშკარად განსხვავდება ადრე აღწერილი χ^2 კრიტერიუმიდან, ამიტომ მას დიდი ინტერესით იყენებენ პრაქტიკაში. ოღონდ, უნდა აღინიშნოს, რომ ეს კრიტერიუმი შეიძლება გამოვიყენოთ მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ჰიპოთეზური $F(x)$ განაწილება წინასწარ ცნობილია მთლიანად, ე. ი. როდესაც ცნობილია განაწილების $F(x)$ ფუნქციის არამარტო სახე, არამედ ყველა მასში შემავალი პარამეტრები. ასეთი შემთხვევა შედარებით იშვიათად გვხდება პრაქტიკაში. ჩვეულებრივ თეორიულ მოსაზრებიდან ცნობილია მხოლოდ ფუნქციის საერთო $F(x)$ სახე, ხოლო მასში შემავალი რიცხვითი პარამეტრები განისაზღვრებიან მოცემული სტატისტიკური მასალებით. χ^2 კრიტერიუმის გამოყენებისას ეს გარემოება გაითვალისწინება χ^2 განაწილების თავისუფლების ხარისხის შესაბამისი შემცირებით.

ა. ნ. კოლმოგოროვის კრიტერიუმი ასეთ შეთანხმებულობას არ ითვალისწინებს. თუ მაინც გამოვიყენებთ ამ კრიტერიუმს, იმ შემთხვევებ-

ში, როცა თეორიული განაწილების პარამეტრები შეირჩევა სტატისტიკური მონაცემების მიხედვით, კრიტერიუმი იძლევა $P(\lambda)$ ალბათობის უცილობლად გადიდებულ მნიშვნელობებს; ამიტომ უმრავლეს შემთხვევებში ვცდილობთ მივიღოთ, როგორც დამაჯერებელი ჰიპოთეზა რომელიც ცდისეულ მონაცემებთან სინამდვილეში ცუდად არის შეთანხმებული.

VIII თავი

შემთხვევით სიდიდეთა სისტემები

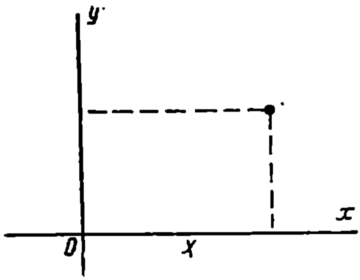
8.1. შემთხვევით სიდიდეთა სისტემის ცნება

ალბათობათა თეორიის პრაქტიკული გამოყენებისას ძალიან ხშირად ვხვდება ისეთი ამოცანები, რომლებშიც ცდისეული შედეგები აღიწერება არა ერთი, არამედ ორი და მეტი შემთხვევითი სიდიდით, რომლებიც ქმნიან კ ო მ პ ლ ე ქ ს ს ა ნ დ ა ს ი ს ტ ე მ ა ს. მაგალითად, ჭურვის მოხვედრის წერტილი განისაზღვრება არა ერთი, არამედ ორი შემთხვევითი სიდიდით, აბსცისითა და ორდინატით—და შეიძლება განხილული იქნეს, როგორც ორი შემთხვევითი სიდიდის კომპლექსი. ანალოგიურად დისტანციური ჭურვის გასკდომის წერტილი განისაზღვრება სამი შემთხვევითი სიდიდის კომპლექსით. n გასროლათა ჯგუფური სროლიდან სიბრტყეზე მოხვედრის წერტილთა ერთობლიობა შეიძლება განხილული იქნეს როგორც კომპლექსი ანდა $2n$ შემთხვევითი სიდიდეთა სისტემა: მოხვედრის წერტილების n აბსცისა და n ორდინატისა. ჭურვის აფეთქებისას წარმოქმნილი ნამსხვრევები ხასიათდება შემთხვევით სიდიდეთა მთელი რიგით: წონით, ზომებით, საწყისი სიჩქარით, ფრენის მიმართულებით და ა. შ. შევთანხმდეთ და რამდენიმე შემთხვევით სიდიდეთა $X, Y, \ldots, W$ სისტემა აღვნიშნოთ $(X, Y, \ldots, W)$.

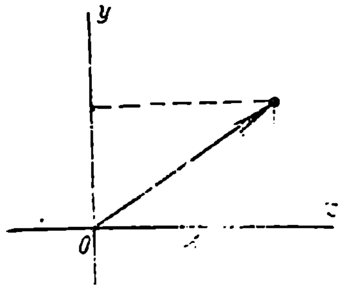
რამდენიმე შემთხვევითი სიდიდეთა სისტემა არ ამოიწურება მის შემადგენელ ცალკეულ სიდიდეთა თვისებებით. გარდა ამისა ისინი შემთხვევით სიდიდეთა შორის ურთიერთკავშირებს (დამოკიდებულებებს) შეიცავენ.

შემთხვევით სიდიდეთა სისტემების საკითხების განხილვისას მოხერხებულია ვისარგებლოთ სისტემათა გეომეტრიული ინტერპრეტაციით. მაგალითად, ორი შემთხვევითი სიდიდის (XY), სისტემა შესაძლებელია გამოისახოს სიბრტყეზე შემთხვევითი წერტილით, რომელსაც აქვს X და

Y კოორდინატები (ნახ. 3.1.1). ანალოგიურად სამი შემთხვევითი სიდიდის სისტემა შესაძლებელია გამოისახოს შემთხვევითი წერტილით სამ განზომილებიან სივრცეში. ხშირად უფრო მოხერხებულია ვილაპარაკოთ n შემთხვევით სიდიდეთა სისტემაზე, როგორც n განზომილებიან სივრცეში შემთხვევით წერტილზე“. მიუხედავად იმისა, რომ უკანასკნელ ინტერპრეტაციას არ გააჩნია უშუალო თვალსაჩინოება, მისი გამოყენება ტერმინოლოგიის ერთიანობისა და ჩანაწერის სიმარტივის თვალსაზრისით რამდენამდე ხელსაყრელია.



ნახ. 3.1.1.



ნახ. 3.1.2.

ხშირად ნაცვლად შემთხვევითი წერტილის სახით გამოსახვისა შემთხვევით სიდიდეთა სისტემის გეომეტრიული ინტერპრეტაციისათვის სარგებლობენ შემთხვევითი ვექტორის გამოსახულებით. ორი შემთხვევითი სიდიდის სისტემა ამ დროს განიხილება როგორც შემთხვევითი ვექტორი xOy სიბრტყეზე, რომელთა X, Y მდგენელები ღერძებზე წარმოადგენენ შემთხვევით სიდიდეებს (ნახ. 3.1.2). სამი შემთხვევითი სიდიდის სისტემა გამოისახება შემთხვევითი ვექტორით სამ განზომილებიან სივრცეში, სისტემა n შემთხვევითი სიდიდეებისა — შემთხვევითი ვექტორით n განზომილებიან სივრცეში.

ამ შემთხვევაში შემთხვევით სიდიდეთა სისტემების თეორია განიხილება, როგორც შემთხვევითი ვექტორთა თეორია.

წინამდებარე კურსში ვისარგებლებთ, როგორც ერთი ისე მეორე ინტერპრეტაციით.

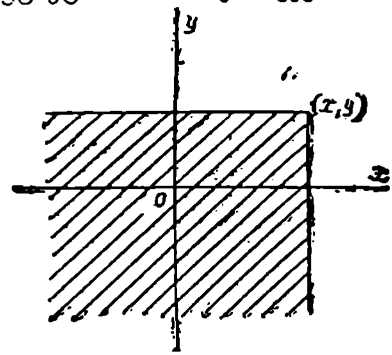
გვაქვს, რა საქმე შემთხვევით სიდიდეთა სისტემებთან განვიხილავთ, როგორც სრულ ამომწურავ მახასიათებლებს — განაწილების კანონებს, ასევე არასრულ — რიცხვით მახასიათებლებს. განხილვას დავიწყებთ ორი შემთხვევითი სიდიდეთა სისტემის ყველაზე მარტივი შემთხვევიდან.

8. ორი შემთხვევითი სიდიდის სისტემის განაწილების ფუნქცია

ორი შემთხვევითი (X, Y) სიდიდის სისტემის განაწილების ფუნქცია ეწოდება ორ ერთდროულად შესრულებულ $X<x$ და $Y<y$ უტოლობათა ალბათობას:

$$F(x,\ y)=P\ (X<x)\ (Y<y). \tag{8.2.1}$$

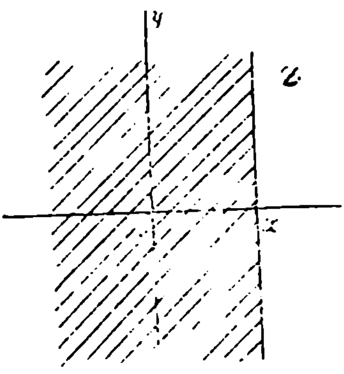
სისტემის გეომეტრიული ინტერპრეტაციისათვის თუ ვისარგებლებთ შემთხვევითი წერტილის გამოსახულებით, მაშინ განაწილების $F(x,y)$ ფუნქცია არის შემთხვევითი (X, Y) წერტილების მოხვედრის ალბათობა $(x,\ y)$ წვეროვან უსასრულო კვადრანტში, რომელიც მის მარცხნივ და ქვემოთ მდებარეობს (ნახ. 8.2.1).



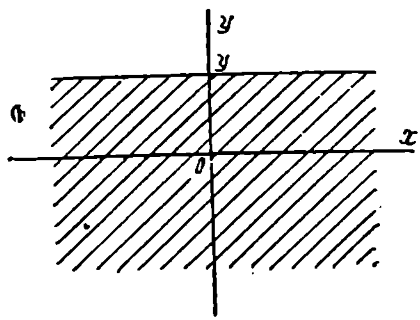
ნახ. 8.2.1.

ანალოგიური ინტერპრეტაციით მოცემული შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების ფუნქცია—აღვნიშნოთ იგი $F_1(x)$-ით — წარმოადგენს შემთხვევითი წერტილის, მარჯვნიდან x აბსცისით შემოსაზღვრულ (ნახ. 8.2.2) ნახევარ სიბრტყეში მოხვედრის ალბათობას. ერთი Y სიდიდის განაწილების ფუნქცია — $F_2(y)$ — ზემოდან y ორდინატით შემოსაზღვრულ ნახევარ სიბრტყეში მოხვედრის ალბათობაა (ნახ. 8.2.3).

5.2. პარაგრაფში მოვიტანეთ განაწილების $F(x)$ ფუნქციის ძირითადი თვისებები ერთი შემთხვევითი სიდიდისათვის.



ნახ. 8.2.2.



ნახ. 8.2.3.

მოვიტანოთ ანალოგიური თვისებების ფორმულირება შემთხვევით სიდიდეთა სისტემის განაწილების ფუნქციისათვის და ამ თვისებათა თვალსაჩინო ილუსტრაციისათვის ისევ ვისარგებლოთ გეომეტრიული ინტერპრეტაციით.

1) განაწილების $F(x, y)$ ფუნქცია თავის ორივე არგუმენტის არაკლებადი ფუნქციაა, ე. ი.

$$\text{როცა } x_2>x_1 \quad F(x_2, y)\geqslant F(x_1, y);$$
$$\text{როცა } y_2>y_1 \quad F(x,y_2)\geqslant F(x, y_1).$$

$F(x)$ ფუნქციის ამ თვისებაში შეიძლება თვალსაჩინოდ დავრწმუნდეთ, თუ ვისარგებლებთ განაწილების ფუნქციის, როგორც (x, y) წვეროიან კვადრანტში მოხვედრის ალბათობის გეომეტრიული ინტერპრეტაციით (ნახ. 8.2.1). მართლაც x-ის გადიდებით კვადრანტის მარჯვენა საზღვრის მარჯვნივ გადაადგილებით ანდა y-ის გადიდებით (ზედა საზღვრის ზემოთ გადაადგილებით) ცხადია არ შეგვიძლია ამ კვადრანტში მოხვედრის ალბათობა შევამციროთ:

2. ყველგან $-\infty$-ზე განაწილების ფუნქცია ნულის ტოლია.

$$F(x,-\infty)=F(-\infty, y)=F(-\infty,-\infty)=0.$$

ამ თვისებაში თვალსაჩინოდ ვრწმუნდებით კვადრანტის მარჯვენა საზღვრის უსასრულოდ მარცხნივ გადაწევით ($x\to\infty$) ან მისი ზედა საზღვრის ქვემოთ ჩამოწევით ($y\to-\infty$) ანდა ორივე ოპერაციის ერთდროულად შესრულებით. ამ შემთხვევაში ალბათობა კვადრანტში მოხვედრისას მიისწრაფვის ნულისაკენ.

3) არგუმენტებიდან, როდესაც ერთ-ერთი $+\infty$-ის ტოლია, სისტემის განაწილების ფუნქცია გადაიქცევა შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციად, რომელიც მეორე არგუმენტს შეესაბამება:

$$F(x,+\infty)=(F_1(x), \quad F(+\infty,y)=F_2(y),$$

სადაც $F_1(x)$, $F_2(y)$ — შესაბამისად შემთხვევითი X და Y სიდიდეების განაწილების ფუნქციებია. განაწილების ფუნქციის ამ თვისებაში შეიძლება თვალსაჩინოდ დავრწმუნდეთ, თუ კვადრანტის საზღვრებიდან ერთს ან მეორეს $+\infty$-სკენ გადავაადგილებთ. ამ დროს ზღვარში კვადრანტი იქცევა ნახევარ-სიბრტყედ, რომელზედაც მოხვედრის ალბათობა არის სისტემაში შემავალი ერთ-ერთი სიდიდის განაწილების ფუნქცია.

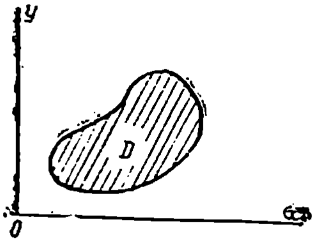
4. თუ ორივე არგუმეიტი ტოლია $+\infty$, სისტემის განაწილების ფუნქცია ერთის ტოლია:

$$F(+\infty, +\infty)=1.$$

მართლაც, როცა $x\to+\infty$, $y\to+\infty$ კვადრანტი, რომლის წვეროა (x, y) ზღვარში იქცევა მთელ xOy სიბრტყედ, რომელზეც მოხვედრა არის უტყუარი ხდომილობა. ცალკეული შემთხვევითი სიდიდეთა განაწილების კანონების განხილვისას (თავი 5) გამოვიყვანეთ შემთხვევითი სიდიდის

მოცემული უბნის ფარგლებში მოხვედრის ალბათობის გამოსახულება. ეს ალბათობა ჩვენ გამოვსახეთ როგორც განაწილების ფუნქციის, ისე განაწილების სიმკვრივის საშუალებით.

ორი შემთხვევითი სიდიდის სისტემისათვის ანალოგიური საკითხია შემთხვევითი წერტილის (X, Y) xOy სიბრტყეზე მოცემული D არის ფარგლებში მოხვედრის ალბათობა (ნახ. 8.2.4).

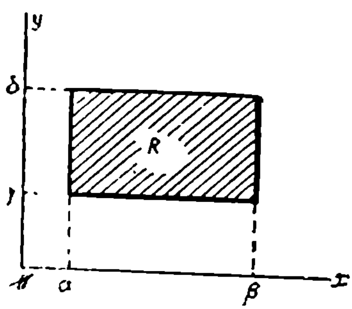


ნახ. 8.2.4.

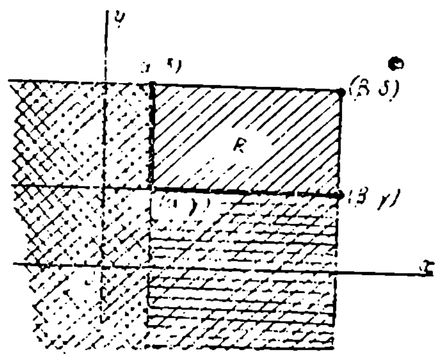
შევთანხმდეთ შემთხვევითი (X,Y) წერტილის D არეში მოხვედრის ხდომილობა, აღვნიშნოთ $(X,Y)\subset D$ სიმბოლოთი. შემთხვევითი წერტილის მოცემულ არეში მოხვედრის ალბათობა გამოისახება ყველაზე მარტივად იმ შემთხვევაში, როცა ეს არე წარმოადგენს მართკუთხედს, რომლის გვერდები კოორდინატთა ღერძების პარალელურია. გამოვსახოთ სისტემის განაწილების ფუნქციის საშუალებით შემთხვევითი (წერტილის X,Y) წერტილის R მართკუთხედში (რომელიც შემოსაზღვრულია α და β აბსცისებით და γ და δ ორდინატებით) მოხვედრის ალბათობა (ნახ. 8.2.5).

ამ დროს უნდა შევთანხმდეთ თუ საით უნდა მივაკუთვნოთ მართკუთხედის საზღვრები. ანალოგიურად იმისა, როგორც ამას ვაკეთებდით ერთი შემთხვევითი სიდიდისათვის შევთანხმდეთ R მართკუთხედში ჩავრთოთ მისი ქვედა და მარცხენა საზღვრები და არ ჩავრთოთ ზედა და მარჯვენა[1]. მაშინ ხდომილობა $(X, Y)\subset R$ იქნება ტოლძალოვანი ნამრავლი ორი ხდომილობისა: $\alpha\leqslant X<\beta$ და $\gamma\leqslant Y<\delta$. გამოვსახოთ ამ ხდომილობის ალბათობა განაწილების ფუნქციის საშუალებით.

ამისათვის xOy სიბრტყეზე განვიხილოთ ოთხი უსასრულო კვადრანტი, რომელთა წვეროები მოთავსებულია წერტილებში (β, δ), (α, δ), (β, γ) და (α, γ) (ნახ. 8.2.6).



8.2.5.



ნახ. 8.2.6.

[1] ნახ. 8.2.5. სწორკუთხედში ჩართული საზღვრები მოცემულია მსხვილი ხაზებით

ცხადია, R მართკუთხედში მოხვედრის ალბათობა ტოლია (β, δ) კვადრანტში მოხვედრის ალბათობას მინუს (α, δ) კვადრანტში მოხვედრის ალბათობა, მინუს (β, γ) კვადრანტში მოხვედრის ალბათობა, პლუს (α, γ) კვადრანტში მოხვედრის ალბათობა (რადგან ორჯერ გამოვაკელით ამ კვადრანტში მოხვედრის ალბათობა). აქედან მივიღებთ ფორმულას, რომელიც გამოსახავს მართკუთხედში მოხვედრის ალბათობას სისტემის განაწილების ფუნქციის საშუალებით:

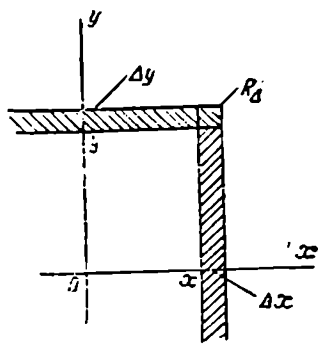
$$P((X, Y)\subset R)=F(\beta,\delta)-F(\alpha, \delta)-F(\beta, \gamma)+F(\alpha,\gamma). \tag{8.2.2}$$

შემდგომში, როდესაც შემოტანილი იქნება სისტემის განაწილების სიმკვრივის ცნება, გამოვიყვანთ ფორმულას შემთხვევითი წერტილის ნებისმიერი ფორმის არეში მოხვედრის ალბათობისათვის.

8.3. ორი შემთხვევითი სიდიდის სისტემის განაწილების სიმკვრივე

წინა პარაგრაფში შემოტანილი სისტემის მახასიათებელი ე. წ. განაწილების ფუნქცია — არსებობს როგორც წყვეტილი, ისე უწყვეტი ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის. ძირითადი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვთ უწყვეტ შემთხვევით სიდიდეთა სისტემებს. უწყვეტ შემთხვევით სიდიდეთა სისტემის განაწილებას ჩვეულებრივ ახასიათებენ არა განაწილების ფუნქციით, არამედ განაწილების სიმკვრივით.

ერთი შემთხვევითი სიდიდისათვის განაწილების სიმკვრივის შემოტანისას განვსაზღვრავდით მას როგორც ზღვარს მცირე უბანზე მოხვედრების ალბათობის შეფარდებისა ამ უბნის სიგრძესთან, მისი უსასრულოდ შემცირებისას. ანალოგიურად განვსაზღვრავთ ორი სიდიდის სისტემის განაწილების სიმკვრივეს.



ნახ. 8.3.1.

დავუშვათ გვაქვს ორი უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის სისტემა, რომლის ინტერპრეტაციაც ხდება xOy სიბრტყეზე შემთხვევითი წერტილით. განვიხილოთ ამ სიბრტყეზე მცირე მართკუთხედი R_Δ, რომლის გვერდებია, Δx და Δy, რომელიც ემიჯნება წერტილს (x, y) კოორდინატებით (ნახ. 8.3.1). ამ მართკუთხედში მოხვედრის ალბათობა (8.2.2) ტოლია

$$P(X, Y)\subset R_\Delta)=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-$$
$$-F(x+\Delta x, y)-F(x, y+\Delta y)+F(x, y).$$

R_Δ მართკუთხედში მოხვედრის ალბათობას გავყოფთ ამ მართკუთხედის ფართზე და გადავალთ ზღვარზე როცა $\Delta x \to 0$ და $\Delta y \to 0$:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P((X, Y) \subset R_\Delta)}{\Delta x \Delta y} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x+\Delta x, y)-F(x, y+\Delta y)+F(x, y)}{\Delta x \Delta y} \tag{8.3.1}$$

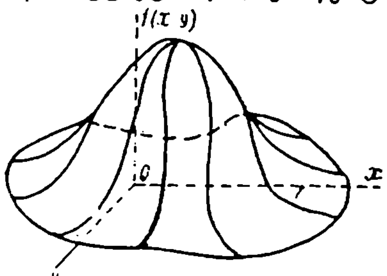
დავუშვათ, რომ ფუნქცია $F(x, y)$ არა მარტო უწყვეტია, არამედ დიფერენცირებადიცაა, მაშინ (8.3.1) ფორმულის მარჯვენა ნაწილი $F(x, y)$ *ფუნქციის მეორე შერეული კერძო წარმოებულია* x-ით და y-ით. აღვნიშნოთ ეს წარმოებული $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y). \tag{8.3.2}$$

$f(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება სისტემის *განაწილების სიმკვრივე*.

ამგვარად, სისტემის განაწილების სიმკვრივე წარმოადგენს მცირე მართკუთხედში მოხვედრების ალბათობის, ამ მართკუთხედის ფართობთან შეფარდების ზღვარს, როცა მისი ორივე ზომა ნულისაკენ მიისწრაფვის; იგი შეიძლება გამოსახული იქნას სისტემის განაწილების ფუნქციის როგორც შერეული მეორე კერძო წარმოებული, ორივე არგუმენტით.

თუ ვისარგებლებთ განაწილების სისტემის „მექანიკური" ინტერპრეტაციით, როგორც ერთეული მასის xOy სიბრტყეზე განაწილება, მაშინ ფუნქცია $f(x, y)$ წერტილში მასის განაწილების სიმკვრივეა.



ნახ. 8.3.2.

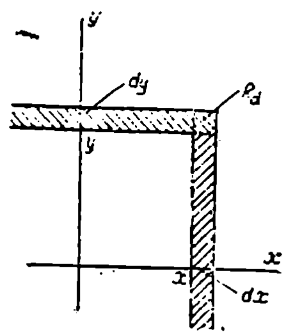
გეომეტრიულად $f(x, y)$ ფუნქცია შეიძლება გამოისახოს რომელიღაც ზედაპირით (ნახ. 8.3.2). ეს ზედაპირი ერთი შემთხვევითი სიდიდისათვის განაწილების მრუდის ანალოგიურია და *განაწილების ზედაპირი* ეწოდება. თუ განაწილების ზედაპირს xOy სიბრტყის პარალელურად გადავკვეთავთ და მიღებულ კვეთს დავაგეგმილებთ xOy სიბრტყეზე, მივიღებთ მრუდს რომლის ყოველ წერტილზე განაწილების სიმკვრივე მუდმივია. ასეთ მრუდეებს ეწოდება *თანაბა-*

რ ი ს ი მ კ ვ რ ი ს მ რ უ დ ე ე ბ ი. თანაბარი სიმკვრივის მრუდეები, ცხადია განაწილების ზედაპირის ჰორიზონტალებია. ხშირად მოხერხებულია განაწილება მოცემული იყოს თანაბარი სიმკვრივის მრუდთა ოჯახით.

განვიხილეთ რა განაწილების $f(x)$ სიმკვრივე ერთი შემთხვევითი სიდიდისათვის, შემოვიტანეთ „ალბათობის $f(x)\,dx$ ელემენტის" ცნება. ეს არის x წერტილთან მიმდებარე ელემენტარულ dx უბანზე შემთხვევითი X სიდიდის მოხვედრის ალბათობა. „ალბათობის ელემენტის" ანალოგიური ცნება ორი შემთხვევითი სიდიდის სისტემისათვისაც შემოიტანება. ალბათობის ელემენტი მოცემულ შემთხვევაში ეწოდება გამოსახულებას

$$f(x, \ y) \ dx \ dy.$$

ცხადია, ალბათობის ელემენტი არის $(x, \ y)$ წერტილის მომიჯნავე $dx. \ dy$ გვერდებიან მართკუთხედში მოხვედრის ალბათობა (ნახ. 8.3.3). ეს ალბათობა ტოლია პარალელეპიპედის მოცულობისა, რომელსაც ზემოდან საზღვრავს $f(x, \ y)$ ზედაპირი და ელემენტარულ მართკუთხედს (ნახ. 8.3.4) ეყრდნობა.



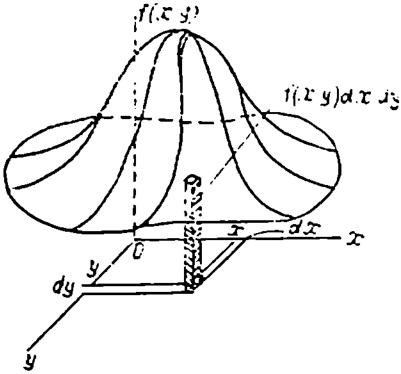
ნახ. 8.3.3.

ვსარგებლობთ რა ალბათობის ელემენტის ცნებით, გამოგვყავს გამოსახულება შემთხვევითი წერტილის ნებისმიერ D არეში მოხვედრის ალბათობისა. ეს ალბათობა ცხადია, შეიძლება მიღებული იქნეს მთელ D არეში ალბათობათა ელემენტების შეჯამებით (ინტეგრირებით):

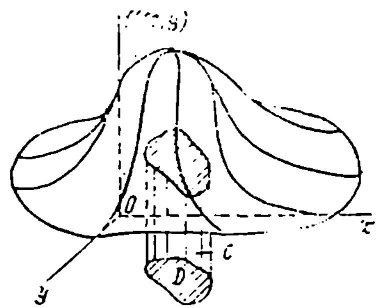
$$P((X, \ Y) \subset D) = \iint\limits_{(D)} f(x, y) dx, \ dy. \tag{8.3.3}$$

D არეში მოხვედრის ალბათობა გეომეტრიულად გამოისახება ცილინდრული C სხეულის მოცულობით, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია განაწილების ზედაპირით და ეყრდნობა D არეს (ნახ. 8.3.5). საერთო (8.3.3) ფორმულიდან გამომდინარეობს R მართკუთხედში, რომელიც შემოფარგლულია α და β აბსცისებით და γ და δ ორდინატებით (ნახ. 8.3.5)., მოხვედრების ალბათობისათვის ფორმულა:

$$P((X, \ Y) \subset R) = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{\gamma}^{\delta} f(x, \ y) \ dx \ dy \tag{8.3.4}$$



ნახ. 8.3.4.



ნახ. 8.3.5.

იმისათვის, რომ $f(x, y)$ სისტემის განაწილების ფუნქცია გამოვსახოთ განაწილების $f(x, y)$ სიმკვრივით, ვისარგებლოთ (8.3.4) ფორმულით. განაწილების $F(x\ y)$ ფუნქცია ეს არის უსასრულო კვადრანტში მოხვედრის ალბათობა; ეს უკანასკნელი შეიძლება განვიხილოთ როგორც მართკუთხედი, რომელიც შემოფარგლულია $-\infty$ და x აბსცისებით $-\infty$ და y ორდინატებით. (8.3.4) ფორმულით გვაქვს:

$$F(x, y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x, y)dx\, dy \tag{8.3.5}$$

ადვილია დავრწმუნდეთ სისტემის განაწილების სიმკვრივის შემდეგ თვისებებში.

1) სისტემის განაწილების სიმკვრივე დადებითი ფუნქციაა:

$$f(x, y)\geqslant 0.$$

ეს ცხადია იქიდან, რომ განაწილების სიმკვრივე არის ორი არაუარყოფითი სიდიდის შეფარდების ზღვარი: მართკუთხედში მოხვედრების ალბათობისა და მართკუთხედის ფართისა. ამიტომ არ შეიძლება უარყოფითი იყოს.

2) სისტემის განაწილების სიმკვრივიდან ორჯერადი ინტეგრალი, რომლის საზღვრები უსასრულოა, ერთის ტოლია

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int f(x, y)dx\, dy=1. \tag{8.3.6}$$

ეს ჩანს იქედან, რომ (8. 3.6) ინტეგრალი არის მთელ xOy სიბრტყეში მოხვედრების ალბათობა, ე. ი. უტყუარი ხდომილობის ალბათობა.

გეომეტრიულად ეს თვისება ნიშნავს, რომ განაწილების ზედაპირით და xOy სიბრტყით შემოფარგლული სხეულის სრული მოცულობა ერთის ტოლია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ორი შემთხვევით (xy) სიდიდეთა სისტემა დაქვემდებარებულია განაწილების კანონს, რომლის სიმკვრივეა

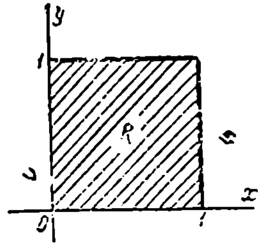
$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

მოვნახოთ განაწილების $F(x, y)$ ფუნქცია.
განვსაზღვროთ შემთხვევითი (X, Y) წერტილის R კვადრატში (ნახ. 8.3.6) მოხვედრის ალბათობა

ა მ ო ხ ს ნ ა. $f(x, y)$ განაწილების ფუნქციას ვპოულობთ (8.3.5) ფორმულით.

$$F(x, y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)} =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\right)$$

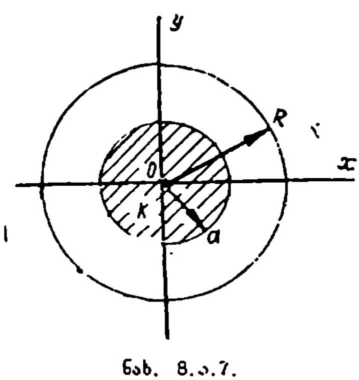


ნახ. 8.3.6.

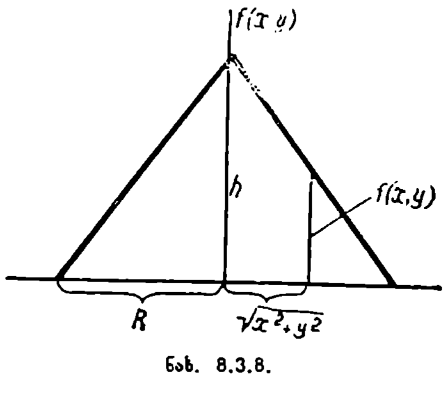
R მართკუთხედში მოხვედრის ალბათობას ვპოულობთ (8.3.4) ფორმულით.

$$P((X, Y)\subset R) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1\frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\int_0^1\frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{16}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. (XY) სისტემის განაწილების ზედაპირი წესიერი კონუსია, რომლის ფუძეა კოორდინატთა სათავეცენტრიან R რადიუსიანი წრე. დავწეროთ განაწილების სიმკვრივის გამოსახულება.



ნახ. 8.3.7.



ნახ. 8.3.8.

განვსაზღვროთ ალბათობა, იმისა, რომ შემთხვევითი წერტილი (x, y) მოხვდება a რადიუსიან k წრეში (ნახ. 8.3.7), თანაც $a<R$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განაწილების სიმკვრივის გამოსახულება k წრის შიგნით მოიპოვება 8.3.8 ნახ-დან.

$$f(x, y)=\frac{h}{R}\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

სადაც h — კონუსის სიმაღლეა. h სიდიდეს განვსაზღვრავთ, ისე, რომ კონუსის მოცულობა იყოს ერთის ტოლი $\frac{1}{3}\pi R^2 h=1$, საიდანაც

$$h=\frac{3}{\pi R^2}.$$

$$f(x, y)=\frac{3}{\pi R^3}\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

წრეში მოხვედრის ალბათობას განვსაზღვრავთ (8. 3.4) ფორმულით:

$$P(X,Y)\subset K)=\iint\limits_{(K)} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{8.3.7}$$

(8.3.7) ინტეგრალის გამოსათვლელად მოხერხებულია გადავიდეთ r, φ პოლარულ კოორდინატთა r სისტემაზე:

$$P((X, Y)\subset K)=\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{3}{\pi R^3}(R-r)r\, dr\, d\varphi =$$

$$=\frac{6}{R^3}\int_0^a (R-r)r\, dr=3\left(\frac{a}{R}\right)^2-2\left(\frac{a}{R}\right)^3$$

8.4. სისტემაში შემავალ ცალკეულ სიდიდეთა განაწილების კანონები. განაწილების პირობითი კანონები

ვიცით რა ორი შემთხვევითი სიდიდის სისტემის განაწილების კანონი, ყოველთვის შეიძლება განვსაზღვროთ სისტემაში შემავალ ცალკეულ სიდიდეთა განაწილების კანონი. 8.2. — პარაგრაფში უკვე გამოვიყვანეთ სისტემაში შემავალ ცალკეულ სისდიდეთა განაწილების ფუნქციის გამოსახულება სისტემის განაწილების ფუნქციის საშუალებით, სახელდობრ, ვაჩვენეთ, რომ

$$F_1(x)=F(x, \infty);\quad F_2(y)=F(\infty, y). \tag{8.4.1}$$

გამოვსახოთ ახლა სისტემაში შემავალი თითოეული სიდიდის განაწილების სიმკვრივე სისტემის განაწილების სიმკვრივის საშუალებით. ვსარგებ-

ლობთ რა (8.3.5) ფორმულის, რომელიც გამოსახავს განაწილების ფუნქციას სიმკვრივის მეშვეობით, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$F_1 (x)=F(x, \infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy,$$

თუ გავაწარმოებთ x-ით მივიღებთ, X სიდიდის განაწილების სიმკვრივის გამოსახულებას:

$$f_1 (x)=F'_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy. \tag{8.4.2}$$

ანალოგიურად

$$f_2 (y)=F'_2 (y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx. \tag{8.4.3}$$

ამგვარად, იმისათვის, რომ მივიღოთ სისტემაში შემავალი ერთი რომელიმე სიდიდის სიმკვრივე, საჭიროა სისტემის განაწილების სიმკვრივე მეორე შემთხვევითი სიდიდის შესაბამისი არგუმენტით გავაინტეგროთ უსასრულო ზღვრებში.

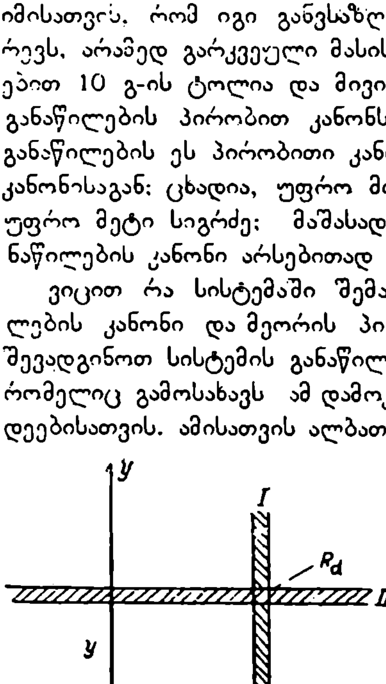
(8.4.1); (8.4.2); (8.4.3) ფორმულები შესაძლებლობას იძლევა ვიცით რა სისტემის განაწილების კანონი (მოცემული ფუნქციის განაწილების ან მისი სიმკვრივის სახით), მოვნახოთ სისტემაში შემავალი ცალკეულ სიდიდეთა განაწილების კანონები. ბუნებრივია წარმოიშობა საკითხი შებრუნებული ამოცანის შესახებ: ხომ არ შეიძლება სისტემაში შემავალ ცალკეულ სიდიდეთა განაწილების კანონის მიხედვით აღვადგინოთ სისტემის განაწილების კანონი. თურმე ზოგად შემთხვევაში ეს არ შეიძლება გაკეთდეს: ვიცით რა მხოლოდ სისტემაში შემავალი ცალკეულ სიდიდეთა განაწილების კანონები, ყოველთვის როდი შეიძლება სისტემის განაწილების კანონის მონახვა. იმისათვის, რომ ამომწურავად დახასიათდეს სისტემა, არ არის საკმარისი სისტემაში შემავალი თითოეული სიდიდის განაწილების ცოდნა; საჭიროა ვიცოდეთ სისტემაში შემავალ სიდიდეთა შორის დამოკიდებულება. ეს დამოკიდებულება შეიძლება დახასიათდეს ე. წ. განაწილების პირობითი კანონებით. (X, Y) სისტემაში შემავალი X სიდიდის განაწილების პირობითი კანონი ეწოდება მისი განაწილების კანონს, რომელიც გამოთვლილია იმ პირობებით, რომ სხვა შემთხვევითმა Y სიდიდემ მიიღო გარკვეული მნიშვნელობა y.

განაწილების პირობითი კანონი შეიძლება მოცემული იქნას, როგორც განაწილების ფუნქციით, ასევე სიმკვრივით. პირობითი განაწილების ფუნქცია აღინიშნება $F(x/y)$-ით, ხოლო პირობითი განაწილების სიმკვრი-

ვე $f(x\ y)$-ით. ვინაიდან უწყვეტ სიდიდეთა სისტემებს აქვთ ძირითადი პრაქტიკული მნიშვნელობა. მოცემულ კურსში შემოვიფარგლებით განაწილების სიმკვრივის სახით მოცემულ პირობითი კანონების განხილვით.

რომ უფრო თვალსაჩინოთ ავხსნათ განაწილების პირობითი კანონის ცნება, განვიხილოთ მაგალითი. შემთხვევითი სიდიდეთა L და Q სისტემა ჭურის ნამსხვრევის სიგრძე და წონაა. დავუშვათ, რომ გვაინტერესებს ნამსხვრევის L სიგრძე მისი მასისაგან დამოუკიდებლად; ეს არის $f_1\ (l)$ სიმკვრივიანი განაწილების კანონს დაქვემდებარებული შემთხვევითი სიდიდე. განაწილების ეს კანონი ჩვენ შეგვიძლია გამოვიკვლიოთ უკლებლივ ყველა ნამსხვრევის განხილვით და შევაფასოთ ისინი მხოლოდ სიგრძის მიხედვით. $f_1(l)$ არის ნამსხვრევების სიგრძის განაწილების უპირობო კანონი. მაგრამ შეიძლება გვაინტერესებდეს გარკვეული, მაგალითად 10 გ-ნი მასის ნამსხვრევის სიგრძის განაწილების კანონიც. იმისათვის, რომ იგი განვსაზღვროთ გამოვიკვლევთ არა ყველა ნამსხვრევს, არამედ გარკვეული მასის მქონე ჯგუფს, რომელშიც მასა დაახლოებით 10 გ-ის ტოლია და მივიღებთ 10 გ მასის ნამსხვრევების სიგრძის განაწილების პირობით კანონს $f\ (l/q)$ სიმკვრივით, როცა $q=10$ გ. განაწილების ეს პირობითი კანონი საერთოდ განირჩევა $f_1\ (l)$ უპირობო კანონისაგან; ცხადია, უფრო მძიმე ნამსხვრევს უნდა გააჩნდეს აგრეთვე უფრო მეტი სიგრძე; მაშასადამე, ნამსხვრევის სიგრძის პირობითი განაწილების კანონი არსებითად დამოკიდებულია მისი q მასისაგან.

ვიცით რა სისტემაში შემავალ ერთ-ერთი სიდიდეთაგანის განაწილების კანონი და მეორის პირობითი განაწილების კანონი, შეიძლება შევადგინოთ სისტემის განაწილების კანონი. გამოვიყვანოთ ფორმულა, რომელიც გამოსახავს ამ დამოკიდებულებას უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის. ამისათვის ალბათობის ელემენტის ცნებით ვისარგებლოთ.



ნახ. 8.4.1.

განვიხილოთ $(x,\ y)$ წერტილზე მიმდებარე ელემენტარული R_d მართკუთხედი, რომლის გვერდებია dx, dy (ნახ. 8.4.1). ამ მართკუთხედში მოხვედრის ალბათობა—ალბათობის $f(x,\ y)\ dx\ dy$ ელემენტი—ტოლია შემთხვევითი $(X,\ Y)$ წერტილის dx, dy მონაკვეთებზე დაყრდნობილი 1 და მე-2 ელემენტალურ ზოლში ერთდროული მოხვედრების ალბათობისა:

$$f(x,\ y)dx\ \ dy=P((X,\ Y)\subset R_d)=$$
$$=P((x<X<x+dx)\ \ (y<Y<y+dy)).$$

ამ ორი ხდომილობის ნამრავლი, ალბათობათა გამრავლების თეორემის მიხედვით I და II ელემენტარულ ზოლში მოხვედრების ალბათობის ნამრავლის ტოლია, რომელიც გამოთვლილია ხდომილობის დროს. ეს პირობა ტოლძალოვანია X x პირობისა: მაშასადამე,

$$f(x,\ y)\ dx\ dy\quad f_1\ (x)\ dx\ f(y|x)\ dy.$$

საიდანაც

$$f(x,\ y)=f_1(x)\ f(y|x), \tag{8.4.4.}$$

ე. ი. ორი სიდიდის სისტემის განაწილების სიმკვრივე ტოლია სისტემაში შემავალ ერთ-ერთი სიდიდეთაგანის განაწილების სიმკვრივის ნამრავლისა მეორე სიდიდის პირობით სიმკვრივეზე, რომელიც გამოთვლილია იმ პირობით, რომ პირველმა სიდიდემ მიიღო მოცემული მნიშვნელობა. 8.4.4 ფორმულას ხშირად **განაწილების კანონების გამრავლების თეორემას** უწოდებენ. შემთხვევით სიდიდეთა სქემის ეს თეორემა ანალოგიურია ალბათობათა გამრავლების თეორემისა ხდომილობათა სქემიდან. ცხადია, (8.4.4) ფორმულას შეიძლება მიეცეს სხვა სახე, თუ მოცემულია არა X სიდიდე არამედ Y სიდიდის მნიშვნელობა:

$$f(x,\ y)=f_2(y)f(x|y). \tag{8.4.5}$$

თუ ამოვხსნით (8.4.4) და (8.4.5) ფორმულებს $f(y\ x)$ და $f(x\ y)$-ის მიმართ, მივიღებთ განაწილების პირობითი კანონების გამოსახულებას უპირობო კანონების საშუალებით:

$$\left.\begin{aligned} f(y|x) &\quad \frac{f(x,y)}{f_1\ (x)},\\ f(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_2\ (y)}, \end{aligned}\right| \tag{8.4.6}$$

ანდა (8.4.2) და (8.4.3) ფორმულების გამოყენებით

$$\left.\begin{aligned} f(y|x) &= \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy};\\ f(x|y) &= \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}. \end{aligned}\right\} \tag{8.4.7}$$

შემთხვევით სიდიდეთა შესწავლისას ყურადღება უნდა მივაქციოთ მათი დამოკიდებულობის ხარისხს და ხასიათს. ეს დამოკიდებულება შეიძლება მეტ-ნაკლებად მჭიდროდ ან მკაფიოდ იყოს გამოსახული. ზოგ შემთხვევაში შემთხვევით სიდიდეთა შორის დამოკიდებულება შეიძლება იყოს იმდენად მჭიდროდ რომ თუ ვიცით მნიშვნელობა ერთი შემთხვევითი სიდიდისა, შეიძლება ზუსტად მივუთითოთ მეორის მნიშვნელობა. მეორე უკიდურეს შემთხვევაში დამოკიდებულება შემთხვევით სიდიდეებს შორის ისე სუსტი და დაშორებულია, რომ ისინი პრაქტიკულად დამოუკიდებლად შეიძლება ჩაითვალოს.

დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების ცნება—ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ცნებაა ალბათობათა თეორიისა.

შემთხვევით Y სიდიდეს ეწოდება დამოუკიდებელი შემთხვევითი X სიდიდისაგან, თუ Y სიდიდის განაწილების კანონი X სიდიდის მიღებული მნიშვნელობისაგან არაა დამოკიდებული.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის პირობა Y-ის დამოუკიდებლობისა X-საგან შეიძლება დაიწეროს შემდეგი სახით:

$$f(y|x)=f_2(y)$$

ნებისმიერი Y-სთვის. პირიქით, იმ შემთხვევაში, როცა Y დამოკიდებულია X-საგან, მაშინ

$$f(y|x)\neq f_2(y).$$

დავამტკიცოთ, რომ შემთხვევით სიდიდეთა დამოკიდებულება ან დამოუკიდებლობა ყოველთვის საურთიერთოა: თუკი Y სიდიდე არ არის დამოკიდებული X-ზე, მაშინ X სიდიდე არ არის დამოკიდებული Y-საგან. მართლაც, დავუშვათ Y არ არის დამოკიდებული X-საგან:

$$f(y|x)=f_2(y). \qquad (8.5.1)$$

(8.4.4) და (8.4.5) ფორმულებიდან გვაქვს

$$f_1(x)f(y|x)=f_2(y)f(x|y),$$

საიდანაც (8.5.1), მხედველობაში მიღებით შეიძლება დავწეროთ

$$f(x|y)=f_1(x), \quad \text{რ. დ. გ}$$

ვინაიდან შემთხვევით სიდიდეთა დამოკიდებულება და დამოუკიდებლობა საურთიერთოა (შექცევადია), შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ახალი განსაზღვრება.

X და Y შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდებათ დამოუკიდებელი, როცა თითოეული მათგა-

ნის განაწილების კანონი არ არის დამოკიდებული იმისაგან, თუ რა მნიშვნელობა მიიღო მეორემ. წინააღმდეგ შემთხვევაში X და Y სიდიდეებს დამოკიდებული ეწოდებათ.

დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის განაწილების კანონების გამრავლების თეორემა ღებულობს სახეს:

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y), \tag{8.5.2}$$

ე. ი. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა სისტემის განაწილების სიმკვრივე ტოლია სისტემაში შემავალ ცალკეულ სიდიდეთა განაწილების სიმკვრივეთა ნამრავლისა.

(8.5.2) პირობა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც აუცილებელი და საკმარისი პირობა შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობისა.

ხშირად თვით $f(x, y)$ ფუნქციის სახითაც შესაძლოა დავასკვნათ, რომ X, Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია. სახელდობრ, თუ განაწილების $f(x, y)$ სიმკვრივე იშლება ორი ფუნქციის ნამრავლად, რომლიდანაც ერთი დამოკიდებულია მხოლოდ x-ზე, მეორე მხოლოდ y-ზე, მაშინ შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებლებია.

მაგალითი. (X, Y) სისტემის განაწილების სიმკვრივეს აქვს სახე:

$$f(x, y)=\frac{1}{\pi^2(x^2+y^2+x^2y^2+1)}.$$

განვსაზღვროთ დამოუკიდებელია თუ დამოკიდებული შემთხვევითი X და Y სიდიდეები.

ამოხსნა. მნიშვნელის თანამამრავლებად დაშლით, მივიღებთ:

$$f(x, y)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\,\frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

იქიდან, რომ ფუნქცია $f(x, y)$ დაიშალა ორი ფუნქციის ნამრავლად, რომელთაგან ერთი დამოკიდებულია x-საგან, ხოლო მეორე y—საგან, ვასკვნით, რომ X და Y სიდიდეები დამოუკიდებელია. მართლაც, (8.4.2) და (8.4.3) ფორმულების გამოყენებით, გვაქს:

$$f_1(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{\pi(1+y^2)}=\frac{1}{\pi(1+x^2)};$$

ანალოგიურად

$$f_2(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)},$$

საიდანაც ვრწმუნდებით, რომ

$$f(x, y)=f_1(x)\,f_2(y)$$

და, მაშასადამე X და Y სიდიდეები დამოუკიდებელია.

შემთხვევით სიდიდეთა დამოკიდებულებაზე ან დამოუკიდებლობაზე მსჯელობის ზემოთ აღნიშნული კრიტერიუმი გამოდის იმ დაშვებიდან, რომ სისტემის განაწილების კანონი ჩვენთვის ცნობილია. პრაქტიკაში ხშირად პირიქით გვხვდება: (X, Y) სისტემის განაწილების კანონი არ არის ცნობილი: ცნობილია მხოლოდ სისტემაში შემავალ ცალკეულ სიდიდეთა განაწილების კანონი და გვაქვს საფუძველი ჩავთვალოთ, რომ X და Y სიდიდეები დამოუკიდებელი არიან. მაშინ შეიძლება დავწეროთ სისტემის განაწილების სიმკვრივე, როგორც ნამრავლი სისტემაში შემავალ ცალკეულ სიდიდეთა სიმკვრივეებისა.

შევჩერდეთ რამდენადმე დაწვრილებით შემთხვევით სიდიდეთა „დამოკიდებულობის" და „დამოუკიდებლობის" მნიშვნელოვან ცნებებზე.

შემთხვევით სიდიდეთა „დამოკიდებულების", ცნება რომლითაც ვსარგებლობთ ალბათობათა თეორიაში, რამდენადმე განსხვავდება „დამოკიდებულების" ჩვეულებრივი ცნებისაგან, რომელსაც მათემატიკაში ვიყენებთ. მართლაც, ჩვეულებრივ სიდიდეთა „დამოკიდებულების" ქვეშ გულისხმობენ დამოკიდებულების მხოლოდ ერთ ტიპს—სრულს, მკაცრს (ზუსტს), ე. წ. ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას. ორ X და Y სიდიდეს ეწოდება ფუნქციონალურად დამოკიდებული, თუ ვიცით, ერთ-ერთი მათგანის მნიშვნელობა, შესაძლებელია ზუსტად მივუთითოთ მეორის მნიშვნელობა.

ალბათობათა თეორიაში ვხვდებით დამოკიდებულების უფრო ზოგად ტიპს, ალბათობითს ანდა „სტოქასტიკურ" დამოკიდებულებას. თუ Y და X სიდიდეს შორის ალბათობრივი დამოკიდებულებაა, მაშინ ვიცით რა X მნიშვნელობა, არ შეიძლება ზუსტად მივუთითოთ Y-ის მნიშვნელობა, არამედ X სიდიდის მიღებული მნიშვნელობისაგან, შეგვიძლია მივუთითოთ მხოლოდ მისი განაწილების კანონი.

ალბათობითი დამოკიდებულება შეიძლება იყოს მეტ-ნაკლებად მჭიდრო: ალბათობითი დამოკიდებულების სიმჭიდროვის გაზრდის მიხედვით, იგი უფრო და უფრო უახლოვდება ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას. ამგვარად ფუნქციონალური დამოკიდებულება შეიძლება განვიხილოთ, როგორც უკიდურესი, ზღვრული შემთხვევა ყველაზე მჭიდრო ალბათობითი დამოკიდებულებისა.

მეორე უკიდურესი შემთხვევაა—შემთხვევით სიდიდეთა სრული დამოუკიდებლობა. ამ ორ კიდურ შემთხვევათა შორის მდებარეობს ალბათობითი დამოკიდებულების ყველა გრადაცია—ყველაზე ძლიერიდან ყველაზე სუსტამდე. ის ფიზიკური სიდიდეები, რომლებსაც პრაქტიკაში ვთვლით, როგორც ფუნქციონალურად დამოკიდებულად, სინამდვილეში დაკავშირებულია ფრიად მჭიდრო ალბათობითი დამოკიდებულებით: ერთ ერთი ამ სიდიდეთაგანის მოცემული მნიშვნელობისას მეორე შეიძლება იმდენად ვიწრო საზღვრებში იცვლებოდეს, რომ იგი პრაქტიკულად გან-

საზღვრულად შეიძლება ჩავთვალოთ. მეორეს მხრივ ეს სიდიდეები, რომლებსაც პრაქტიკაში დამოუკიდებლად ვთვლით, სინამდვილეში რამდენადმე ურთიერთ დამოკიდებულებაშია, მაგრამ ეს დამოკიდებულება იმდენად სუსტია, რომ პრაქტიკული მიზნებისათვის იგი შეიძლება უგულვებელვყოთ.

შემთხვევით სიდიდეთა შორის ალბათობითი დამოკიდებულება პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება. თუ შემთხვევითი X და Y სიდიდეები ალბათობით დამოკიდებულობაშია, ეს არ ნიშნავს, რომ X სიდიდის შეცვლით Y სიდიდე შეიცვლება სრულიად განსაზღვრული სახით: ეს მხოლოდ აღნიშნავს, რომ X სიდიდის შეცვლით Y სიდიდეს აგრეთვე შეცვლის ტენდენცია აქვს (მაგალითად, X-ის გადიდებისას მოიმატოს ან დაიკლოს). ამ ტენდენციის დაცვა ხდება მხოლოდ „საშუალოდ", ზოგად შტრიხებში და ყოველ ცალკეულ შემთხვევებში შესაძლოა მისგან გადახვევები.

განვიხილოთ, მაგალითად ორი შემთხვევითი სიდიდე: X — სიმაღლე ალალბედზე არჩეული კაცისა, Y — მისი მასა. ცხადია X და Y სიდიდეები განსაზღვრულ ალბათობით დამოკიდებულებაშია. ეს ნიშნავს, რომ საერთოდ ადამიანებს, რომლებსაც აქვთ დიდი სიმაღლე, აგრეთვე მასაც დიდი აქვთ. შესაძლოა შევადგინოთ კიდეც ემპირიული ფორმულა, რომელიც მიახლოებით ამ ალბათობით დამოკიდებულობას ფუნქციონალურით შეცვლის. ასეთია, მაგალითად, საყოველთაოდ ცნობილი ფორმულა, რომელიც მიახლოებით გამოსახავს სიმაღლესა და მასას შორის დამოკიდებულებას:

$$Y(\text{კგ}) = X(\text{სმ}) - 100.$$

მსგავსი ტიპის ფორმულები, ცხადია, არაზუსტია და გამოსახავენ მხოლოდ რომელიღაც საშუალო მასიურ კანონზომიერებას, ტენდენციას, რომლისაგანაც ყოველ ცალკეულ შემთხვევაში შესაძლოა გადახვევები.

ზემოთ მოტანილ მაგალითში საქმე გვქონდა ცხადად გამოსახულ დამოკიდებულების შემთხვევასთან. განვიხილოთ ახლა ორი ასეთი შემთხვევითი სიდიდე: X — მასა ალალბედზე არჩეული კაცისა; Z-მისი წლოვანება. ცხადია, მოზრდილი კაცისათვის X და Z სიდიდეები პრაქტიკულად შეიძლება ჩაითვალოს დამოუკიდებლად; პირიქით, ბავშვისათვის X და Z სიდიდეები წარმოადგენენ დამოკიდებულს.

მოვიყვანოთ კიდევ რამდენიმე მაგალითი ისეთი შემთხვევითი სიდიდეებისა, რომლებსაც დამოკიდებულების სხვადასხვა ხარისხი აქვთ:

1. ქვებიდან, რომლებიც შეადგენენ ღორღის გროვას, ალალბედზე შეირჩევა ერთი ქვა. შემთხვევითი სიდიდე Q — ქვის მასა: შემთხვევითი სიდიდე L — ქვის უდიდესი სიგრძე. Q და L სიდიდეები აშკარად გამოსახულ ალბათობით დამოკიდებულებაშია.

2. ოკეანის მოცემულ რაიონში წარმოებს რაკეტით სროლა. ΔX სიდიდე მოხვედრის წერტილის გრძივი შეცდომაა (მიუწვდენლობა, გადაცილება): ΔV—შემთხვევითი სიდიდე — რაკეტის მოძრაობის აქტიური უბნის ბოლოს სიჩქარეში შეცდომა.

ΔX და ΔV სიდიდეები ცხადად დამოკიდებულია, რადგან ΔV შეცდომა, გრძივი ΔX შეცდომის გამომწვევი ერთ-ერთი მთავარი მიზეზია.

3. საფრენი აპარატი, ახდენს დედამიწის ზედაპირიდან სიმაღლის გაზომვას ბარომეტრული ხელსაწყოს მეშვეობით. განიხილება ორი შემთხვევითი სიდიდე: ΔH—სიმაღლის გაზომვისას შეცდომა და G—საწვავის მასა, რომელიც შემოინახა საწვავის ავზებში გაზომვის მომენტისათვის. ΔH და G სიდიდეები პრაქტიკულად შეიძლება ჩაითვალოს დამოუკიდებლად.

მომდევნო პუნქტში გავეცნობით შემთხვევით სიდიდეთა ზოგიერთ რიცხვით მახასიათებლებს, რომლის მიხედვითაც გვექნება შესაძლებლობა შევაფასოთ ამ სიდიდეთა დამოკიდებულობის ხარისხი.

8. 6. ორი შემთხვევითი სიდიდის სისტემის რიცხვითი მახასიათებლები კორელაციური მომენტი. კორელაციის კოეფიციენტი

მე-5 თავში განსახილველად შემოვიტანეთ ერთი შემთხვევითი X სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები — სხვადასხვა რიგის საწყისი და ცენტრალური მომენტები. ამ მახასიათებლებიდან ყველაზე მნიშვნელოვანია ორი: მათემატიკური m_x ლოდინი და D_x დისპერსია. ანალოგიური რიცხვითი მახასიათებლები — სხვადასხვა რიგის საწყისი და ცენტრალური მომენტები — შეიძლება აგრეთვე ორი შემთხვევითი სიდიდის სისტემისთვისაც შემოვიტანოთ.

(X, Y) სისტემის k, s რიგის **საწყისი მომენტი** ეწოდება X^k-ის Y^s-ზე ნამრავლის მათემატიკურ ლოდინს:

$$a_{k,s} = M[X^k Y^s], \tag{8.6.1}$$

(X, Y) სისტემის k, s- რი რიგის ცენტრალური მომენტი ეწოდება შესაბამისი დაცენტრებულ სიდიდეთა k-ური და s-ური ხარისხის ნამრავლის მათემატიკურ ლოდინს:

$$\mu_{k,s} = M[\overset{\circ}{X}{}^k \overset{\circ}{Y}{}^s], \tag{8.6.2}$$

სადაც

$$\overset{\circ}{X} = X - m_x; \quad \overset{\circ}{Y} = Y - m_y.$$

ამოვიწეროთ ფორმულები, რომლებსაც ვიყენებთ მომენტთა უშუალოდ გამოთვლისათვის. წყვეტილი შემთხვევითი სიდიდეთათვის

$$\alpha_{k,s}=\sum_i\sum_j x_i^k y_j^s \; p_{ij}, \tag{8.6.3}$$

$$\mu_{k,s}=\sum_i\sum_j (x_i-m_x)^k(y_j-m_y)^s p_{ij}, \tag{8.6.4}$$

სადაც

$$p_{i,j}=P((X=x_i)(Y=y_j))$$

ალბათობაა იმისა, რომ (X, Y) სისტემა მიიღებს (x_i, y_j) მნიშვნელობებს ხოლო აჯამვა შემთხვევით X, Y სიდიდეთა ყველა შესაძლო მნიშვნელობებზე ვრცელდება.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის:

$$\alpha_{k,s}=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x, y)\, dx\, dy. \tag{8.6.5}$$

$$\mu_{k,s}=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^k(y-m_y)^s f(x,y)dxdy, \tag{8.6.6}$$

სადაც $f(x,y)$—სისტემის განაწილების სიმკვრივეა. გარდა k და s რიცხვებისა, რომლებიც ახასიათებენ მომენტთა რიგს, ცალკეულ სიდიდეთა მიმართ განიხილება კიდევ $k+s$ მომენტის ჯამური რიგი, რომელიც X და Y-ის ხარისხის მაჩვენებლების ჯამის ტოლია. ჯამური რიგის შესაბამისად მომენტთა კლასიფიკაცია ხდება პირველი, მეორე და ა. შ. პრაქტიკაში ჩვეულებრივ მხოლოდ პირველი და მეორე მომენტი გამოიყენება.

პირველი საწყისი მომენტები წარმოადგენენ ჩვენთვის უკვე ცნობილ მათემატიკურ ლოდინს სისტემაში შემავალ X და Y სიდიდეებისათვის:

$$m_x=\alpha_{1,0}=M[X^1Y^0]=M[X],$$
$$m_y=\alpha_{0,1}=M[X^0Y^1]=M[Y].$$

თვით მათემატიკური m_x, m_y ლოდინთა ერთობლიობა წარმოადგენს სისტემის მ დ ე ბ ა რ ე ო ბ ი ს მ ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ ე ლ ს. გეომეტრიულად ეს შუაწერტილის კოორდინატებია სიბრტყეზე, რომლის ირგვლივაც წარმოებს (X, Y) წერტილის გაფანტვა.

გარდა პირველი საწყისი მომენტებისა, პრაქტიკაში ფართოდ გამოიყენება კიდევ სისტემის მეორე ცენტრალური მომენტები. ორი მათგანი X და Y სიდიდეების ჩვენთვის უკვე ცნობილი დისპერსიაა:

$$D_x=\mu_{2,0}=M[\mathring{X}^2\mathring{Y}^0]=M[\mathring{X}^2]=D[X],$$

$$D_y=\mu_{0,2}=M[\mathring{X}^0\mathring{Y}^2]=M[\mathring{Y}^2]=D[Y],$$

რომლებიც ახასიათებენ შემთხვევითი წერტილის გაფანტვას Ox და Oy ღერძების მიმართულებით.

როგორც სისტემის მახასიათებელი მ ე ო რ ე შ ე რ ე უ ლ ი ც ე ნ ტ რ ა ლ უ რ ი მ ო მ ე ნ ტ ი განსაკუთრებული მნიშვნელობისაა:

$$\mu_{1,1} = M[\mathring{X}\mathring{Y}],$$

ე. ი. დაცენტრებულ სიდიდეთა ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი. იმის გამო რომ ეს მომენტი მნიშვნელოვანია შემთხვევით სიდიდეთა სისტემების თეორიაში შემოგვაქვს მისთვის განსაკუთრებული აღნიშვნა:

$$K_{xy} = M[\mathring{X}\mathring{Y}] = M[(X-m_x)(Y-m_y)]. \qquad (8.6.7)$$

K_{xy} მახასიათებელს ეწოდება შემთხვევითი X, Y სიდიდეების კ ო რ ე ლ ა ც ი უ რ ი მ ო მ ე ნ ტ ი (სხვაგვარად „კავშირის მომენტი").

წყვეტილი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის კორელაციური მომენტი გამოისახება ფორმულით:

$$K_{xy}=\sum_i \sum_j (x_i-m_x)(y_j-m_y)\, p_{ij}, \qquad (8.6.8)$$

ხოლო უწყვეტობისათვის ფორმულით:

$$K_{xy}=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)\,(y-m_y)\, f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (8.6.9)$$

გამოვარკვიოთ ამ მახასიათებლის აზრი და დანიშნულება. კორელაციური მომენტი ეს არის შემთხვევითი სიდიდეთა სისტემის მახასიათებელი, რომელიც X და Y სიდიდეთა გაბნევის გარდა კიდევ მათ შორის კავშირს აღწერს. ამის დასარწმუნებლად დავამტკიცოთ, რომ დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ს ი დ ი დ ე თ ა კ ო რ ე ლ ა ც ი უ რ ი მ ო მ ე ნ ტ ი ნ უ ლ ი ს ტ ო ლ ი ა.

დამტკიცებას მოვახდენთ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის[1].

დავუშვათ X, Y—დამოკიდებული უწყვეტი სიდიდეებია, განაწილების სიმკვრივეა $f(x, y)$. 8.5 პარაგრაფში დავამტკიცეთ, რომ დამოუკიდებელი სიდიდეებისათვის

$$f(x,y)=f_1(x)\,f_2(y), \qquad (8.6.10)$$

სადაც $f_1(x)$, $f_2(y)$ — X და Y სიდიდეთა შესაბამისი განაწილების სიმკვრივეებია.

[1] წყვეტილებისათვის იგი შეიძლება შესრულდეს ანალოგიური სახით

(8.6.10) გამოსახულების (8.6.9) ფორმულაში ჩასმით დავინახავთ, რომ (8.6.9) ინტეგრალი ორი ინტეგრალის ნამრავლად იქცევა:

$$K_{xy}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)f_1(x)\,dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}(y-m_y)f_2(y)dy.$$

ინტეგრალი

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)f_1(x)dx$$

X სიდიდის პირველი ცენტრალური მომენტია და მაშასადამე, ნულის ტოლია: ამავე მიზეზის გამო ნულის ტოლია მეორე თანამამრავლიც: მაშასადამე, დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის $K_{xy}=0$.

ამგვარად, თუ ორი შემთხვევითი სიდიდის კორელაციური მომენტი განსხვავდება ნულისაგან, ეს არის ნიშანი მათ შორის დამოკიდებულების არსებობისა. (8.6.7) ფორმულიდან ჩანს, რომ კორელაციური მომენტი ახასიათებს სიდიდეთა არა მარტო დამოკიდებულებას, არამედ მათ გაფანტვას. მართლაც, თუ მაგალითად, ერთი რომელიმე სიდიდეთაგანი (X, Y)-დან მცირედ განსხვავდება თავისი მათემატიკური ლოდინისაგან (თითქმის არა შემთხვევითია), მაშინ კორელაციური მომენტი იქნება მცირე, როგორი მჭიდრო დამოკიდებულებითაც არ უნდა იყოს დაკავშირებული (X, Y). ამიტომ (X, Y) სიდიდეებს შორის კავშირის სუფთა სახით დახასიათებისათვის გადადიან K_{xy} მომენტიდან უგანზომილებო მახასიათებლებზე

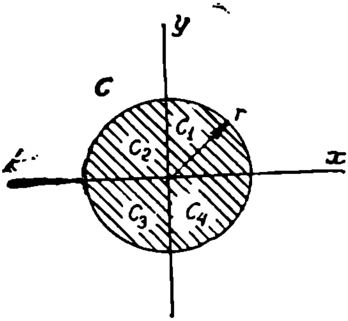
$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}\qquad(8.6.11)$$

სადაც σ_x, σ_y—საშუალო კვადრატული გადახრაა X, Y სიდიდეებისა. ამ მახასიათებელს ეწოდება X და Y *სიდიდეთა კორელაციის კოეფიციენტი*. ცხადია, კორელაციის კოეფიციენტი კორელაციურ მომენტთან ერთად ნულად იქცევა. მაშასადამე, **დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის კორელაციის კოეფიციენტი ნულის ტოლია:**

შემთხვევით სიდიდეებს, რომლებისთვისაც კორელაციური მომენტი (მაშასადამე, კორელაციის კოეფიციენტიც) ნულის *ტოლია*, *არაკორელირებული* (ზოგჯერ „არადაკავშირებული") ეწოდებათ.

გამოვარკვიოთ შემთხვევით სიდიდეთა *არაკორელირებულობის* ცნება არის თუ არა ეკვივალენტური *დამოუკიდებლობის* ცნებისა. ზემოთ დავამტკიცეთ, რომ ორი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდე ყოველთვის არაკორელირებულია. რჩება გავარკვიოთ: მართებულია თუ არა შებრუნებული დებულება: გამომდინარეობს კი სი-

დიდეთა არაკორელირებულობიდან მათი დამოუკიდებლობა? თურმე—არა. შეიძლება ავაგოთ ისეთი შემთხვევითი სიდიდეების მაგალითები, რომლებიც არაკორელირებულია, მაგრამ დამოკიდებული არიან. კორელაციის კოეფიციენტის ნულთან ტოლობა აუცილებელია, მაგრამ არასაკმარისი პირობაა, შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობისა. შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობიდან გამომდინარეობს მათი არაკორელირებულობა; პირიქით, არაკორელირებულობიდან ჯერ კიდევ არ გამომდინარეობს მათი დამოუკიდებლობა. შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობის პირობა უფრო მკაცრია, ვიდრე არაკორელირებულობის პირობა.



ნახ.8.6.1.

ამაში დასარწმუნებლად განვიხილოთ მაგალითი. განვიხილოთ (X, Y) შემთხვევით სიდიდეთა სისტემა, რომელიც თანაბარი სიმკვრივით განაწილებულია c წრის შიგნით, რომელთა რადიუსია r და ცენტრი კორდინატთა სათავეშია. (ნახ. 8.6.1). (X, Y) სიდიდეთა განაწილების სიმკვრივე გამოისახება ფორმულით:

$$f(x,y)=\begin{cases} c & \text{როცა } x^2+y^2<r^2, \\ 0 & \text{როცა } x^2+y^2>r^2 \end{cases}$$

პირობიდან $\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dx\,dy=\int\int_{(C)} c\,dx\,dy=1$ ვპოულობთ: $c=\frac{1}{\pi r^2}$.

არ არის ძნელი დავრწმუნდეთ იმაში, რომ მოცემულ მაგალითში სიდიდეები დამოკიდებულია. მართლაც, ნათლად ჩანს, რომ თუკი X სიდიდემ მიიღო, მაგალითად, ნულის მნიშვნელობა, მაშინ Y სიდიდემ შეიძლება მიიღოს თანაბარი ალბათობით ყველა მნიშვნელობანი — r-დან $+r$-მდე; თუკი Y სიდიდემ მიიღო r მნიშვნელობა, მაშინ Y სიდიდეს შეუძლია მიიღოს მხოლოდ ერთადერთი, მხოლოდ ზუსტად ნულის ტოლი მნიშვნელობა. საერთოდ, Y-ის შესაძლო მნიშვნელობის დიაპაზონი დამოკიდებულია იმისაგან, თუ რა მნიშვნელობა მიიღო X სიდიდემ.

ვნახოთ ეს სიდიდეები კორელირებულია თუ არა. გამოვთვალოთ კორელაციური მომენტი. გვაქვს, რა მხედველობაში, რომ სიმეტრიულობის გამო $m_x=m_y=0$, მივიღებთ:

$$K_{xy}=\int\int_{(C)} xy\,f(x,\ y)\,dxdy=\frac{1}{\pi r^2}\int\int_{(C)} xy\ dx\ dy. \qquad (8.6.12)$$

ინტეგრალის გამოსათვლელად ინტეგრირების არე (c წრე) დავყოთ ოთხი საკოორდინატო კუთხის შესაბამისად ოთხ C_1, C_2, C_3, C_4 სექტორად. C_1

და C_3 სექტორებში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია დადებითია, ხოლო C_2 და C_4 სექტორებში უარყოფითი. ინტეგრალები კი ამ სექტორებში აბსოლუტური სიდიდით ტოლია, მაშასადამე, (8.6.12) ინტეგრალი ნულის ტოლია და (X, Y) სიდიდეები არაკორელირებულია.

ამგვარად, ვხედავთ, რომ შემთხვევით სიდიდეთა არაკორელირებულობიდან ყოველთვის არ გამომდინარეობს მათი დამოუკიდებლობა. კორელაციის კოეფიციენტი ახასიათებს არა ყოველგვარ დამოკიდებულებას, არამედ მხოლოდ ე. წ. წ რ ფ ი ვ დამოკიდებულებას. შემთხვევით სიდიდეთა წრფივი ალბათობრივი დამოკიდებულება ის არის, რომ ერთი შემთხვევითი სიდიდის ზრდისას მეორესაც წრფივი კანონით იზრდის (კლების) ტენდენცია აქვს. წრფივი დამოკიდებულობის ეს ტენდენცია შესაძლოა მეტ-ნაკლებად ფუნქციონალურს მიუახლოვდეს, ე. ი. ყველაზე მჭიდრო წრფივ დამოკიდებულებას.

კორელაციის კოეფიციენტი შემთხვევით სიდიდეებს შორის წრფივი დამოკიდებულების სიმჭიდროვის ხარისხს ახასიათებს. თუკი შემთხვევითი X და Y სიდიდეები დაკავშირებულია ზუსტად წრფივი ფუნქციონალური დამოკიდებულებით:

$$Y = aX + b,$$

მაშინ $r_{xy} = \pm 1$, ამასთან ნიშანი „პლუს“ ან „მინუს“ აიღება იმისგან დამოკიდებულებით, დადებითია თუ უარყოფითი a კოეფიციენტი.

ზოგად შემთხვევაში, როცა სიდიდეები X და Y დაკავშირებულია ნებისმიერი საალბათო დამოკიდებულებით, კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა შეიძლება იყოს საზღვრებში:

$$-1 < r_{xy} < 1$$ [1].

ამ შემთხვევაში, როცა $r_{x,y} > 0$, ამბობენ X და Y სიდიდეთა დ ა დ ე ბ ი თ კ ო რ ე ლ ა ც ი ა ზ ე, ხოლო როცა $r_{xy} < 0$, უ ა რ ყ ო ფ ი თ კ ო რ ე ლ ა ც ი ა ზ ე — შემთხვევით სიდიდეთა შორის დადებითი კორელაცია აღნიშნავს, რომ ერთ-ერთი მათგანის ზრდისას, მეორესაც აქვს ტენდენცია საშუალოდ მოიმატოს. უარყოფითი კორელაცია ნიშნავს, რომ ერთ-ერთი შემთხვევითი სიდიდის ზრდისას მეორე საშუალოდ ტენდენციურად მოიკლებს.

წრის შიგნით თანაბარი სიმკვრივით განაწილებულ ორ შემთხვევით X, Y სიდიდეთა განხილულ მაგალითში, მიუხედავად X და Y შორის დამოკიდებულების არსებობისა, წ რ ფ ი ვ ი დამოკიდებულება არ არსებობს; X-ის გაზრდისას იცვლება მხოლოდ Y-ის ცვლილების დიაპაზონი, ხოლო მისი ს ა შ უ ა ლ ო მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა არ იცვლე-

---

[1] ამ დებულებათა დამტკიცება მოცემულ იქნება 10.3. პარაგრაფში იმის შემდეგ, როცა გავეცნობით ალბათობათა თეორიის ზოგიერთ თეორემებს, რომლებიც საშუალებას მოგვცემენ იგი მარტივად ჩავატაროთ.

ბა: ბუნებრივია, (X, Y) სიდიდეები აღმოჩნდება არაკორელირებული. მოვიტანოთ შემთხვევით სიდიდეთა რამდენიმე მაგალითი დადებითი და უარყოფითი კორელაციით.

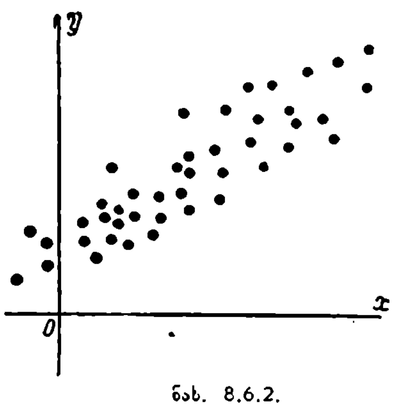
1. ადამიანის მასა და სიმაღლე დაკავშირებულია დადებით კორელაციასთან.

2. ხელსაწყოს რეგულირებისათვის, სამუშაოდ მოსამზადებლად და მისი უმტყუნებლად მუშაობისათვის დახარჯული დრო დაკავშირებულია დადებითი კორელაციით (იგულისხმება, რომ დრო დახარჯულია გონივრულად). პირიქით, დრო, დახარჯული მომზადებაზე, და ასევე ხელსაწყოს მუშაობისას გამოვლინებულ უწესივრობათა რაოდენობა, დაკავშირებულია უარყოფითი კორელაციით.

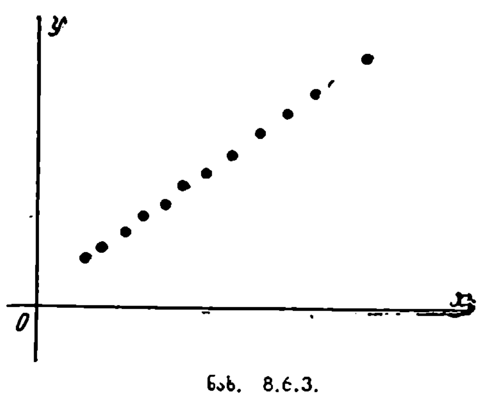
3. ერთბაშად სროლისას ცალკეული ჭურვების მოხვედრების წერტილთა კოორდინატები დაკავშირებულია დადებით კორელაციასთან (რადგან ყველა გასროლისათვის გვაქვს დამიზნების საერთო შეცდომა, რომელიც თითოეულ სროლას ერთნაირად გადახრის).

4. წარმოებს მიზანში ორი გასროლა; ხდება პირველი გასროლის მოხვედრების წერტილის რეგისტრაცია და სამიზნეში შეიტანება პირველი გასროლის შეცდომის პროპორციული შესწორება შებრუნებული ნიშნით. პირველი და მეორე გასროლათა მოხვედრების წერტილთა კოორდინატები დაკავშირებული იქნება უარყოფითი კორელაციით.

თუ განკარგულებაში გვაქვს მთელ რიგ ცდათა შედეგები ორი შემთხვევითი (X, Y) სიდიდეთა სისტემაზე, მაშინ მათ შორის არსებით კორელაციის არსებობაზე ან არ არსებობაზე ადვილია ვიმსჯელოთ გრაფიკის მიხედვით, რომელზედაც წერტილების სახით ცდისას მიღებული შემთხვევითი სიდიდეთა წყვილების მნიშვნელობანია გამოსახული. მაგალითად, თუ დაკვირვების შედეგად მიღებულ სიდიდეთა წყვილები განლაგდნენ, როგორც ნაჩვენებია 8.6.2 ნახ-ზე, მაშინ ეს მიუთითებს სიდიდეთა შორის ცხადად გამოსახულ დადებით კორელაციაზე.



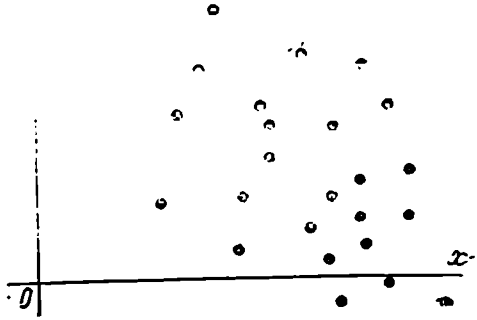
ნახ. 8.6.2.



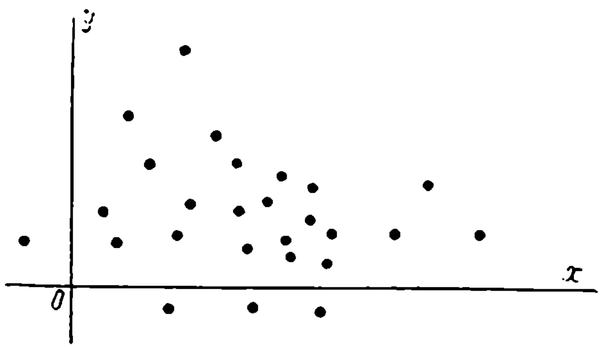
ნახ. 8.6.3.

კიდევ უფრო მკაფიოდ გამოსახულ წრფივ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებასთან ახლო დადებით კორელაციას ვხედავთ 8.6.3 ნახ-ზე. 8.6.4 ნახ-ზე ნაჩვენებია შედარებით სუსტი უარყოფითი კორელაციის შემთხვევა.

ბოლოს 8.6.5 ნახ-ზე ილუსტრირებულია შემთხვევა პრაქტიკულად არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეებისა. პრაქტიკაში მანამ სანამ გამოვიკვლევთ შემთხვევით სიდიდეთა კორელაციას წინასწარ ავაგოთ გრაფიკზე დანაკვერ წყვილთა მნიშვნელობანი, კორელაციის ტიპზე პირველი საფუძვლიანი მსჯელობისათვის. ცდებიდან სისტემის მახასიათებელთა განსაზღვრის ხერხები გაშუქებული იქნება მე-14 თავში.



ნ.



ნახ. 8.6.5.

8.7. შემთხვევითი სიდიდეთა ნებისმიერი რიცხვის სისტემა

პრაქტიკაში ხშირად გვიხდება განხილვა ორზე მეტ შემთხვევით სიდიდეთა სისტემებისა. ამ სისტემების ინტერპრეტაცია ხდება ამა თუ იმ განზომილებიან სივრცეში, როგორც შემთხვევითი წერტილების ანდა შემთხვევითი ვექტორებისა.

მოვიტანოთ მაგალითები.

1. დისტანციური ჭურვის გასკდომის წერტილი სივრცეში დეკარტის სამი $(X,\ Y,\ Z)$ კოორდინატით ხასიათდება, ანდა სამი სფერული $(R,\ \Phi,\ \theta)$ კოორდინატით.

2. ცვალებადი X სიდიდის მიმდევრობით n განზომთა ერთობლიობა შემთხვევით. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ სიდიდეთა n სისტემაა.

3. წარმოებს n ჭურვების სროლა ჯერებით. მოხვედრის n წერტილთა კოორდინატების ერთობლიობა სიბრტყეზე—შემთხვევით $2n$ სიდიდეთა (მოხვედრის წერტილთა აბსცისები და ორდინატები) სისტემაა

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n).$$

4. ნამსხვრევის საწყისი სიჩქარე შემთხვევითი ვექტორია, რომელიც ხასიათდება სამი შემთხვევითი სიდიდით: სიჩქარის V_0 სიდიდით და ორი Φ და θ კუთხით, რომლებიც განსაზღვრავენ ნამსხვრევის ფრენის მიმართულებას კოორდინატთა სფერულ სისტემაში.

ნებისმიერ რიცხვის შემთხვევით სიდიდეთა სისტემის სრულ მახასიათებლად გამოიყენება სისტემის განაწილების კანონი, რომელიც შეიძლება მოცემულ იქნეს განაწილების ფუნქციით ანდა განაწილების სიმკვრივით. შემთხვევით $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ სიდიდეთა სისტემის განაწილების ფუნქცია ეწოდება ერთდროულად შესრულებულ $X_i < x_i$ სახის n უტოლობათა ალბათობას:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P((X_1 < x_1)\ (X_2 < x_2) \ldots (X_n < x_n)). \tag{8.7.1}$$

n უწყვეტ შემთხვევით სიდიდეთა სისტემის განაწილების სიმკვრივე ეწოდება $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ფუნქციის n-ური რიგის შერეულ კერძო წარმოებულს, რომელიც ყოველი არგუმენტით ერთხელ არის აღებული:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_1\, \partial x_2 \cdots \partial x_n)} \tag{8.7.2}$$

ვიცით რა სისტემის განაწილების კანონი, შესაძლოა განვსაზღვროთ სისტემაში შემავალ ცალკეულ სიდიდეთა განაწილების კანონები. სისტემაში შემავალ თითოეული სიდიდის განაწილების ფუნქცია მიიღება, თუკი სისტემის განაწილების ფუნქციაში დავუშვებთ, რომ ყველა დანარჩენი არგუმენტები ტოლია ∞:

$$F_1\ (x_1) = F(x_1, \infty, \ldots, \infty). \tag{8.7.3}$$

თუკი $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ სიდიდეთა სისტემიდან გამოვყოფთ კერძო სისტემას, მაშინ ამ სისტემის განაწილების ფუნქცია განისაზღვრება ფორმულით:

$$F_{1,2,\ldots,h}\,(x_1, x_2, \ldots, x_h) = F\,(x_1, x_2, \ldots, x_h, \infty, \ldots, \infty). \tag{8.7.4}$$

სისტემაში შემავალი თითოეული სიდიდის განაწილების სიმკვრივე მი-

ილება, თუ სისტემის განაწილების სიმკვრივეს გავაინტეგრირებთ ყველა სხვა დანარჩენი არგუმენტით უსასრულო საზღვრებში:

$$f_1(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots x_n) dx_2, \cdots dx_n. \tag{8.7.5}$$

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ სისტემიდან გამოყოფილ $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ კერძო სისტემის განაწილების სმკივრივე ტოლია:

$$f_{1,2, \cdots k}\ (x_1,\ x_2, \dots,\ x_k) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots,\ x_n)\ dx_{k+1} \cdots dx_n). \tag{8.7.6}$$

კერძო $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ სისტემის განაწილების პირობითი კანონი ეწოდება მის განაწილების კანონს, რომელიც გამოთვლილია იმ პირობებში, როცა დანარჩენმა $X_{k+1} \dots X_n$ სიდიდეებმა მიიღეს მნიშვნელობანი $x_{k+1} \dots x_n$. განაწილების პირობითი სიმკვრივე შეიძლება გამოთვლილი იქნას ფორმულით:

$$f(x_1, \quad , x_k | x_{k+1}, \cdots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{f_{k+1}, \cdots, n\ (x_{k+1}, \cdots, x_m)}. \tag{8.7.7}$$

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ შემთხვევითი სიდიდეები იწოდებიან დამოუკიდებლად, თუკი თითოეული $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ სისტემიდან გამოყოფილი კერძო სისტემის განაწილების კანონი არ არის დამოკიდებული იმისაგან თუ რა მნიშვნელობანი მიიღეს დანარჩენმა შემთხვევითმა სიდიდეებმა.

დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა სისტემის განაწილების სიმკვრივე ტოლია სისტემაში შემავალ ცალკეულ სიდიდეთა სიმკვრივეების ნამრავლისა:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)\ f_2(x_2) \dots f_n(x_n). \tag{8.7.8}$$

შემთხვევითი $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ წერტილის n განზომილებიან D არის ფარგლებში მოხვედრის ალბათობა n-ჯერადი ინტეგრალით გამოისახება:

$$P((X_1,\ X_2, \dots,\ X_n) \subset D) =$$

$$= \int \cdots \int_{(D)} f(x_1,\ x_2, \dots, x_n)\ dx_1\ dx_2, \dots dx_n. \tag{8.7.9}$$

(8.7.9) ფორმულა ძირითადია იმ ხდომილობათა ალბათობების გამოსათვლელად, რომლებიც შემთხვევათა სქემაზე არ დაიყვანებიან. მართლაც თუ ჩვენთვის საინტერესო A ხდომილობა არ დაიყვანება შემთხვევათა სქემაზე, მაშინ მისი ალბათობა არ შეიძლება უშუალოდ გამოთვლილ

იქნას. თუ ამ დროს არ არის შესაძლებლობა დავაყენოთ საკმაო რაოდენობის ერთგვაროვანი ცდები და მიახლოებით განვსაზღვროთ A ხდომილობის ალბათობა მისი სიხშირის მიხედვით, მაშინ ხდომილობის ალბათობის გამოთვლის ტიპური სქემა დაიყვანება შემდეგზე: გადადიან ხდომილობათა სქემიდან შემთხვევით სიდიდეთა (უფრო ხშირად უწყვეტ) სქემაზე და A ხდომილობა დაჰყავთ ხდომილობებზე, რომლის დროსაც შემთხვევით სიდიდეთა $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ სისტემა აღმოჩნდება რომელიღაც D არეში. მაშინ A ხდომილობის ალბათობა შეიძლება გამოთვლილ იქნას (8.7.9) ფორმულით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. თვითმფრინავი ზიანდება დისტანციური ჭურვით იმ პირობით თუ ჭურვის გასკდომა მოხდა, თვითმფრინავიდან არა უშორეს R მანძილისა (უფრო ზუსტად თვითმფრინავის ღერძზე მდებარე პირობით ცენტრად მიღებული წერტილიდან). დისტანციური ჭურვის გასკდომის წერტილების განაწილების კანონს კოორდინატთა სისტემაში, რომელიც დაკავშირებულია მიზანთან, აქვს $f(x, y, z)$ სიმკვრივე. განვსაზღვროთ თვითმფრინავის დაზიანების ალბათობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აღვნიშნავთ რა თვითმფრინავის დაზიანებას A ასოთი, გვაქვს:

$$P(A) = \iiint\limits_{(C)} f(x, y, z).\, dx\, dy\, dz$$

სადაც ინტეგრირება ვრცელდება C სფეროზე, რომლის რადიუსია R და ცენტრი მდებარეობს კოორდინატთა სათავეში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. მეტეორიტი, რომელიც ხვდება გზაზე დედამიწის ხელოვნურ თანამგზავრს, ხვრეტს მის გარსს თუკი:
1) კუთხე რომლითაც მეტეორიტი ხვდება თანამგზავრის ზედაპირს, მოთავსებულია (θ_1, θ_2) საზღვრებში, 2) მეტეორიტს აქვს მასა არანაკლებ q_0(გ)-ისა და 3) მეტეორიტის თანამგზავრთან შეხვედრის ფარდობითი სიჩქარეა V_0 მ/წმ. შეხვედრის v სიჩქარე, მეტეორიტის q მასა და შეხვედრის θ კუთხე წარმოადგენენ შემთხვევით სიდიდეთა სისტემას, რომელთა განაწილების სიმკრივეა $f(V, q, \theta)$. მოვნახოთ p ალბათობა იმისა, რომ თანამგზავრს მოხვედრილი ცალკეული მეტეორიტი გახვრეტს მის გარსს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განაწილების $f(v, q, \theta)$ სიმკვრივის ინტეგრირებით სამგანზომილებიან სივრცეში, რომელიც შეესაბამება გარსის გახვრეტას, მივიღებთ:

$$p = \int\limits_{v_0}^{v_{max}} \int\limits_{q_0}^{q_{max}} \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} f(v, q, \theta)\, dv\, dq\, d\theta,$$

სადაც q_{max} — მეტეორიტის მაქსიმალური მასაა, V_{max} — შეხვედრის მაქსიმალური სიჩქარე.

8.8 რამდენიმე შემთხვევითი სიდიდის სისტემის რიცხვითი მახასიათებლები

სისტემის განაწილების კანონი (მოცემული განაწილების ფუნქციით ან განაწილების სიმკვრივით) წარმოადგენს, რამდენიმე შემთხვევითი სიდიდის სისტემის სრულ ამომწურავ მახასიათებელს. მაგრამ ხშირად

ასეთი ამომწურავი მახასიათებელი შეუძლებელია გამოყენებულ იქნას. ზოგჯერ ექსპერიმენტული მასალის შეზღუდულობა არ იძლევა საშუალებას სისტემის განაწილების კანონი ავაგოთ. სხვა შემთხვევებში განაწილების კანონების საკითხის გამოკვლევა შედარებით დიდი აპარატის დახმარებით, არ ამართლებს თავისთავს, შედეგის სიზუსტეზე მცირე მოთხოვნასთან დაკავშირებით. ბოლოს, მთელ რიგ ამოცანებში განაწილების კანონის სანიმუშო ტიპი (ნორმალური კანონი) ცნობილია წინასწარ და საჭიროა მხოლოდ მისი მახასიათებლები მოვნახოთ.

ყველა ასეთ შემთხვევაში განაწილების კანონების ნაცვლად იყენებენ შემთხვევით სიდიდეთა სისტემის მიახლოებით აღწერას რიცხვით მახასიათებელთა მინიმალური რიცხვის საშუალებით, მახასიათებელთა მინიმალური რიცხვი, რომელთა დახმარებით შეიძლება დახასიათებული იქნას n შემთხვევითი სიდიდის სისტემა $(X_1, X_2,\dots X_n)$ დაიყვანება შემდეგზე:

1. n მათემატიკურ ლოდინზე

$$m_1, \quad m_2,\dots, \quad m_n$$

რომლებიც ახასიათებენ სიდიდეთა საშუალო მნიშვნელობას;

2. n დისპერსიაზე

$$D_1, \quad D_2,\dots,D_n,$$

რომლებიც ახასიათებენ მათ გაფანტვას;

3. $n(n-1)$ კორელაციურ მომენტზე

$$K_{ij}=M\ [\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{X}_j]\ (i\neq j),$$

სადაც

$$\overset{\circ}{X}_i=X_i-m_i, \quad \overset{\circ}{X}_j=X_j-m_j,$$

რომლებიც ახასიათებენ სისტემაში შემავალ ყველა სიდიდეთა წყვილწყვილა კორელაციას. შევნიშნავთ რომ თითოეული შემთხვევითი X სიდიდის დისპერსია არსებითად არის, კ ე რ ძ ო შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა კ ო რ ე ლ ა ც ი უ რ ი მ ო მ ე ნ ტ ი ს ა, სახელდობრ, X_i სიდიდისა და იმავე X_i სიდიდის კორელაციური მომენტი:

$$D_i=K_{ii}=M[\overset{\circ}{X}_i{}^2]=M[\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{X}_i],$$

ყველა კორელაციური მომენტები და დისპერსია მოხერხებულია განვალაგოთ მართკუთხოვანი ცხრილის (ე. წ. მატრიცის) სახით:

$$\begin{Vmatrix} K_{11} & K_{12}\cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22}\cdots & K_{2n} \\ & & \\ K_{n1} & K_{n2}\cdots & K_{nn} \end{Vmatrix}$$

ამ ცხრილს ეწოდება შემთხვევით $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ სიდიდეთა კ ო რ ე ლ ა ც ი უ რ ი მ ა ტ რ ი ც ა.

ცხადია, რომ კორელაციური მატრიცის ყველა წევრი არ არის განსხვავებული. კორელაციური მომენტის განმარტებიდან, ცხადია, რომ $K_{ij}=K_{ji}$, ე. ი. **კორელაციური მატრიცის ელემენტები, რომლებიც მთავარი დიაგონალის მიმართ სიმეტრიულადაა განლაგებული, ტოლია.** ამასთან დაკავშირებით ხშირად ივსება არა მთელი კორელაციური მატრიცა, არამედ მხოლოდ მისი ნახევარი მთავარი დიაგონალიდან.

$$\begin{Vmatrix} K_{11} & K_{12} \cdots & K_{1n} \\ & K_{22} \cdots & K_{2n} \\ & & \\ & & K_{nn} \end{Vmatrix}$$

კორელაციურ მატრიცას, K_{ij} ელემენტებიდან შედგენილს ხშირად შემოკლებით აღნიშნავენ $||K_{ij}||$.

კორელაციური მატრიცის მთავარ დიაგონალზე მდებარეობენ შემთხვევით $X_1, X_2, \ldots, X_n$ სიდიდეთა დისპერსიები.

იმ შემთხვევაში, როცა $X_1, X_2, \cdots X_n$ შემთხვევითი სიდიდეები არაკორელირებულია, კორელაციური მატრიცის ყველა ელემენტი, გარდა დიაგონალურებისა, ნულის ტოლია:

$$||K_{ij}|| = \begin{Vmatrix} D_1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ & D_2 & 0 \ldots 0 \\ & & D_3 \ldots 0 \\ & & \\ & & D_n \end{Vmatrix}.$$

ასეთ მატრიცას დ ი ა გ ო ნ ა ლ უ რ ი ეწოდება.

სახელდობრ შემთხვევით სიდიდეთა კორელირებულობაზე მსჯელობის თვალსაჩინოების მიზნით მათი გაფანტვისაგან დამოუკიდებლად ხშირად კ ო რ ე ლ ა ც ი უ რ ი $||K_{ij}||$ მატრიცის ნაცვლად სარგებლობენ ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი კ ო რ ე ლ ა ც ი უ რ ი $||r_{ij}||$ მატრიცით, რომელიც შედგენილია არა კორელაციური მომენტებისაგან, არამედ კორელაციის კოეფიციენტებისაგან:

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \text{ სადაც } \quad \sigma_i = \sqrt{D_i} \quad \sigma_j = \sqrt{D_j}.$$

მატრიცის ყველა დიაგონალური ელემენტი, ბუნებრივია, ერთის ტოლია. ნორმირებულ კორელაციურ მატრიცას აქვს სახე:

$$\|r_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} 1 & r_{12} & r_{13} \cdots r_{1n} \\ & 1 & r_{23} \cdots r_{2n} \\ & & 1 \ldots r_{3n} \\ & & \\ & & \quad 1 \end{matrix} \right\|.$$

შემოვიტანოთ შემთხვევით სიდიდეთა არაკორელირებული სისტემების (სხვანაირად—ა რ ა კ ო რ ე ლ ი რ ე ბ უ ლ შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი ვ ე ქ-ტ ო რ ე ბ ი ს) ცნება.

განვიხილოთ შემთხვევით სიდიდეთა ორი სისტემა:

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n); \ (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n),$$

ან ორი შემთხვევითი ვექტორი n განზომილებიან სივრცეში: $\vec{X}$ მდგენელებით $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ და $\vec{Y}$ მდგენელებით $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$. შემთხვევითი $\vec{X}$ და $\vec{Y}$ ვექტორებს ეწოდება ა რ ა კ ო რ ე ლ ი რ ე ბ უ ლ ი, თუ $\vec{X}$ ვექტორის თითოეული მდგენელი არ არის კორელირებული $\vec{Y}$ ვექტორის ყოველ მდგენელთან:

$$K x_i y_j = M[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{Y}_i] = 0, \text{ როცა } i = 1, \ldots, n; \ J = 1, \ldots, n.$$

IX თ ა ვ ი

განაწილების ნორმალური კანონი შემთხვევით სიდიდეთა სისტემებისათვის

9.1. ნორმალური კანონი სიბრტყეზე

ორი შემთხვევითი სიდიდის სისტემის განაწილების კანონებიდან მიზანშეწონილია განვიხილოთ ნორმალური კანონი, როგორც პრაქტიკაში ყველაზე გავრცელებული. ვინაიდან ორი შემთხვევითი სიდიდის სისტემა გამოისახება შემთხვევითი წერტილით სიბრტყეზე, ამიტომ ხშირად ორი შემთხვევითი სიდიდის ნორმალურ კანონს უწოდებენ „ნორმალურ კანონს სიბრტყეზე“.

ზოგად შემთხვევაში ორი შემთხვევითი სიდიდის ნორმალური განაწილების სიმკვრივე გამოისახება ფორმულით:

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_2}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x^2)}{\sigma^2_x}-\frac{2r(x-m_x)(y-m_y}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma^2_y}\right]}. \tag{9.1.1}$$

ეს კანონი დამოკიდებულია ხუთი პარამეტრისაგან: m_x, m_y, σ_x, σ_y და r. ამ პარამეტრების არსის დადგენა არ არის ძნელი. დავამტკიცოთ, რომ m_x და m_y პარამეტრები მათემატიკური ლოდინია (გაფანტვის ცენტრებია) X და Y სიდიდეებისათვის; σ_x, σ_y—მათი საშუალო კვადრატული გადახრა; r — X და Y სიდიდეების კორელაციის კოეფიციენტია. ამაში დასარწმუნებლად უპირველეს ყოვლისა სისტემაში შემავალი თითოეული სიდიდისათვის მოვნახოთ განაწილების სიმკვრივე. თანახმად (8.4.2) ფორმულისა:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma^2_x}-\frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma^2_y}\right]}dy.$$

გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma^2_x}-\frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma^2_y}\right]}dy.$$

დავუშვათ

$$\frac{x-m_x}{\sigma_x\sqrt{2}}=u, \qquad \frac{y-m_y}{\sigma_y\sqrt{2}}=v: \tag{9.1.2}$$

მაშინ

$$I=\sigma_y\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{1-r^2}[u^2-2ruv+v^2]}dv.$$

ინტეგრალური აღრიცხვიდან ცნობილია, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2\pm 2Bx+C}dx=\sqrt{\frac{\pi}{A}}e^{-\frac{AC-B^2}{A}} \text{ [1]} \tag{9.1.3}$$

---

[1] (9.1.3) ინტეგრალის გამოსათვლელად საკმარისია ხარისხის მაჩვენებელი შევავსოთ სრულ კვადრატამდე და ცვლადის შეცვლის შემდეგ ვისარგებლოთ ეილერ—პუასონის (6.1.3) ინტეგრალით.

ჩვენს შემთხვევაში

$$A=\frac{1}{1-r^2};\qquad B=\frac{ru}{1-r^2}C=\frac{u^2}{C=1-r^2}.$$

(9.1.3) ფორმულაში ამ მნიშვნელობათა ჩასმით მივიღებთ:

$$I=\sigma_y\sqrt{2}\;\sqrt{\pi(1-r^2)}e^{-u^2},$$

საიდანაც

$$f_1(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-u^2},$$

ანდა (9.1.2) გათვალისწინებით

$$f_1(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2_x}}, \tag{9.1.4}$$

ამგვარად, X სიდიდე დაქვემდებარებულია ნორმალურ კანონს, რომლის გაფანტვის ცენტრია m_x და საშუალო კვადრატული გადახრა σ_x. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$f_2(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma^2_y}} \tag{9.1.5}$$

ე. ი. სიდიდე დაქვემდებარებულია ნორმალურ კანონს, რომლის გაფანტვის ცენტრია m_y და საშუალო კვადრატული გადახრა σ_y. იმის დასამტკიცებლად, რომ r პარამეტრი (9. 1. 1) ფორმულაში X და Y სიდიდეთა კორელაციის კოეფიციენტია. გამოვთვალოთ კორელაციური მომენტი:

$$K_{xy}=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy,$$

სადაც m_x და m_y — X და Y სიდიდეთა მათემატიკური ლოდინებია. ამ ფორმულაში $f(x,y)$ გამოსახულების ჩასმით მივიღებთ:

$$K_{xy}=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)e^{-A(x,y)}dx\,dy, \tag{9.1.6}$$

სადაც

$$A(x,y)=-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma^2_x}-\frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma^2_y}\right].$$

(9.1.6) ორჯერად ინტეგრალში მოვახდინოთ ცვლადთა შეცვლა და დავუშვათ

$$\frac{x-m_x}{\sigma_x \sqrt{2}}=u; \quad \frac{1}{\sqrt{2(1-r^2)}}\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}-r\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)=w. \qquad (9.1.7)$$

გარდაქმნის იაკობიანი ტოლია:

$$2\sigma_x\sigma_y \sqrt{1-r^2},$$

მაშასადამე

$$K_{xy}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int(u\sigma_x\sqrt{2})\sigma_y\sqrt{2(1-r^2)}\left(w+\frac{ru}{\sqrt{1-r^2}}\right)e^{-u^2-w^2}du\,dw=$$

$$=\frac{2\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-u^2}du\int_{-\infty}^{\infty}we^{-w^2}dw+$$

$$+\frac{2\sigma_x\sigma_y r}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u^2e^{-u^2}du\int_{-\infty}^{\infty}e^{-w^2}dw.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-u^2}du=\int_{-\infty}^{\infty}we^{-w^2}dw=0; \quad \int_{-\infty}^{\infty}u^2e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-w^2}dw=\sqrt{\pi}.$$

გვაქვს:

$$K_{xy}=r\sigma_x\sigma_y; \quad r=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \qquad (9.1.8)$$

ამგვარად, დამტკიცებულია, რომ r პარამეტრი (9.1.1) ფორმულაში X და Y სიდიდეების კორელაციის კოეფიციენტია.

დავუშვათ, რომ შემთხვევითი X და Y სიდიდეები, რომლებიც ექვემდებარებიან ნორმალურ კანონს სიბრტყეზე, არაკორელირებულია; (9.1.1) ფორმულაში დავუშვათ $r=0$, მივიღებთ:

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} \qquad (9.1.9)$$

ადვილია დავრწმუნდეთ, რომ შემთხვევითი X და Y სიდიდეები, რომ-

ლებიც ექვემდებარება განაწილების კანონს, რომლის სიმკვრივეა (9.1.9) არა მარტო არაკორელირებული, არამედ დამოუკიდებელნიც არიან. მართლაც,

$$f(x, y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2_x}} \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma^2_y}} = f_1(x) f_2(y),$$

ე. ი. სისტემის განაწილების სიმკვრივე ტოლია სისტემაში შემავალი ცალკეული სიდიდეების სიმკვრივეთა ნამრავლის; ხოლო ეს ნიშნავს, რომ შემთხვევითი (X, Y) სიდიდეები დამოუკიდებელნიც არიან.

ამგვარად, ნორმალურ კანონს დაქვემდებარებულ შემთხვევით სიდიდეთა სისტემის არაკორელირებულობიდან გამომდინარეობს, აგრეთვე მათი დამოუკიდებლობა. ტერმინები „არაკორელირებული" და „დამოუკიდებელი" სიდიდეები ნორმალური განაწილების შემთხვევისათვის ეკვივალენტურია.

როცა $r \neq 0$, შემთხვევითი (X, Y) სიდიდეები დამოკიდებულია. ადვილია დარწმუნება, რომ (8.4.6) ფორმულებით განაწილების პირობითი კანონების გამოთვლის შემდეგ:

$$f(y|x) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{1-r^2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y} - r\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2}$$

$$f(x|y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{1-r^2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} - r\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2}$$

გავანალიზოთ განაწილების ერთ-ერთი პირობითი კანონთაგანი, მაგალითად $f(y/x)$. ამისათვის სიმკვრივის $f(y/x)$ გამოსახულებას გარდავქმნით შემდეგნაირად:

$$f(y|x) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{1-r^2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma^2_y}\left[y - m_y - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x)\right]^2}.$$

ცხადია, ეს არის ნორმალური კანონის სიმკვრივე, რომლის გაფანტვის ცენტრია

$$m_{y|x} = m_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x) \qquad (9.1.10.)$$

და საშუალო კვადრატული გადახრა

$$\sigma_y|_x = \sigma_y\sqrt{1-r^2}. \qquad (9.1.11)$$

(9.1.10) და (9.1.11) ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ Y სიდიდის განაწილების პირობით კანონში ფიქსირებულ $X=x$ მნიშვნელობაზე დამოკიდებულია მხოლოდ მათემატიკური ლოდინი, და არა დისპერსია.

$m_{y/x}$ სიდიდეს ეწოდება Y სიდიდის პირობითი მათემატიკური ლოდინი მოცემული x-სათვის. დამოკიდებულება (9.1.10) შეიძლება გამოისახოს xOy სიბრტყეზე ორდინატთა ღერძზე $m_{y/x}$ მათემატიკური ლოდინის გადაზომვით. მივიღებთ წრფეს, რომელსაც ეწოდება რეგრესიის ხაზი Y-სა X-ზე. ანალოგიურად წრფე

$$x=m_x+r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y) \tag{9.1.12}$$

არის რეგრესიის ხაზი X-სა Y-ზე.

რეგრესიის ხაზები ემთხვევა მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს წრფივი ფუნქციონალური დამოკიდებულება X-სა და Y-ს შორის. როცა X და Y დამოუკიდებელია, მაშინ რეგრესიის ხაზები კოორდინატთა ღერძების პარალელურია.

სიბრტყეზე ნორმალური განაწილების სიმკვრივისათვის (9.1.1) გამოსახულების განხილვიდან ვხედავთ, რომ ნორმალური კანონი სიბრტყეზე სრულიად განისაზღვრება ხუთი პარამეტრით: გაფანტვის ცენტრის ორი m_x და m_y კოორდინატით, ორი საშუალო კვადრატული გადახრით σ_x, σ_y და ერთი კორელაციის r კოეფიციენტით. თავის მხრივ სამი უკანასკნელი σ_x, σ_y და r პარამეტრი განისაზღვრება კორელაციური მატრიცის ელემენტებით: D_x, D_y დისპერსიებით და K_{xy} კორელაციური მომენტით. ამგვარად, სისტემის რიცხვით მახასიათებელთა მინიმალური რაოდენობა—მათემატიკური ლოდინი, დისპერსიები და კორელაციური მომენტი—იმ შემთხვევაში, როცა სისტემა ემორჩილება ნორმალურ კანონს, სრულიად განსაზღვრავს განაწილების კანონს, ე. ი. ქმნის მახასიათებელთა ამომწურავ სისტემას.

ვინაიდან პრაქტიკაში ნორმალური კანონი მეტად გავრცელებულია, ამიტომ ხშირად სისტემის განაწილების კანონის სრულიად დასახასიათებლად საკმარისია მოცემულ იქნას მინიმალური რიცხვი—სულ ხუთი რიცხობრივი მახასიათებლისა.

9.2. გაფანტვის ელიფსები. ნორმალური კანონის დაყვანა კანონიკურ სახეზე

განვიხილოთ განაწილების ზედაპირი, რომელიც გამოსახავს (9.1.1) ფუნქციას. მას აქვს ბორცვის სახე, რომლის წვერო (m_x, m_y) წერტილის ზემოთ იმყოფება (ნახ. 9.2.1).

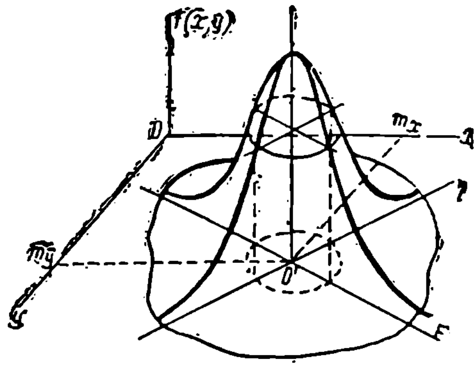
განაწილების ზედაპირის $f(x, y)$ ღერძის სწვრივი (პარალელური)

სიბრტყეებით კვეთისას მიიღებიან განაწილების ნორმალური მრუდეების მსგავსი მრუდეები. განაწილების ზედაპირის xOy სიბრტყის მიმართ სწვრივი სიბრტყეებით კვეთისას მიიღებიან ელიფსები. დავწეროთ ასეთი ელიფსის xOy სიბრტყეზე პროექციის განტოლება:

$$\frac{(x-m_x)^2}{\sigma^2_x}-\frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma^2_y}=\text{const},$$

ანდა თუ კონსტანტს აღვნიშნავთ λ^2-ით

$$\frac{(x-m_x)^2}{\sigma^2_x}-\frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma^2_y}=\lambda^2. \qquad (9.2.1)$$



ნახ. 9.2.1

ელიფსის (9.2.1) განტოლება შესაძლოა გავაანალიზოთ ანალიზური გეომეტრიის ჩვეულებრივი მეთოდებით. ვიყენებთ რა მათ, ვრწმუნდებით, რომ (9.2.1) ელიფსის ცენტრი იმყოფება წერტილში, რომლის კოორდინატებია (m_x, m_y); რაც შეეხება ელიფსის სიმეტრიის ღერძების მიმართულებას, ისინი Ox ღერძთან ადგენენ კუთხეებს, რომლებიც განისაზღვრებიან განტოლებით

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2r\sigma_x\sigma_y}{\sigma^2_x-\sigma^2_y}.\ [1] \qquad (9.2.2)$$

ეს განტოლება იძლევა კუთხეთა ორ მნიშვნელობას: α და α_1, რომლებიც განსხვავდებიან $\frac{\pi}{2}$-ით.

ამგვარად, ორიენტაცია (9.2.1) ელიფსისა კოორდინატთა ღერძების მიმართ იმყოფება პირდაპირ დამოკიდებულებაში (X, Y) სისტემის კორელაციის r კოეფიციენტთან; თუკი სიდიდეები არაკორილირებულია (ე. ი. მოცემულ შემთხვევაში, აგრეთვე დამოუკიდებლებია), მაშინ ელიფსის სიმეტრიის ღერძები კოორდინატთა ღერძების პარალელურია; წინააღმდეგ შემთხვევაში ისინი კოორდინატთა ღერძებთან რომელიღაც კუთხეს შეადგენენ.

---

[1] (9.2.2) ფორმულის დასაბუთება სხვა ხერხით იხ. 14.7 პარაგრაფში.

განაწილების ზედაპირის xOy სიბრტყის პარალელური სიბრტყეებით გადაკვეთით და xOy სიბრტყეზე კვეთების გეგმილების მიღებით ჩვენ გვექნება მსგავსი და ერთნაირად განლაგებული ელიფსების მთელი ოჯახი, რომელთა საერთო ცენტრია (m_x, m_y). ყოველი ელიფსის ყველა წერტილზე განაწილების სიმკვრივე $f(x, y)$ მუდმივია, ამიტომ ასეთ ელიფსებს ეწოდებათ **თანაბარი სიმკვრივის ელიფსები** ანდა მოკლედ, **გაფანტვის ელიფსები**. გაფანტვის ყველა ელიფსის საერთო ღერძებს ეწოდებათ **გაფანტვის მთავარი ღერძები**.

ცნობილია, რომ ელიფსის განტოლებას აქვს მეტად მარტივი ე. წ. „კანონიკური" სახე, თუკი საკოორდინატო ღერძები დაემთხვევიან ელიფსის სიმეტრიის ღერძებს. იმისათვის, რომ გაფანტვის ელიფსის განტოლება დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე, საკმარისია კოორდინატთა სათავე გადავიტანოთ (m_x, m_y) წერტილზე და კოორდინატთა ღერძები მოვაბრუნოთ კუთხით, რომელიც განისაზღვრება (9.2.2) განტოლებით. ამ შემთხვევაში კი კოორდინატთა ღერძები დაემთხვევიან გაფანტვის მთავარ ღერძებს და ნორმალური კანონი სიბრტყეზე ე. წ. „კანონიკურ" სახედ გარდაიქმნება.

ნორმალური კანონის კანონიკურ ფორმას სიბრტყეზე აქვს სახე:

$$f(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta}e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2_\xi}-\frac{\eta}{2\sigma^2_\eta}}. \tag{9.2.3}$$

სადაც σ_ξ, σ_η — ე. წ. **მთავარი საშუალო კვადრატული გადახრებია** ე. ი. (Ξ, H) შემთხვევითი სიდიდეების საშუალო კვადრატული გადახრები, რომლებიც შემთხვევითი წერტილის კოორდინატებია განსაზღვრული გაფანტვის O_ξ, O_η მთავარი ღერძების სისტემაში. მთავარი საშუალო კვადრატული გადახრები σ_ξ, σ_η, გამოისახებიან საშუალო კვადრატული გადახრებით წინანდელ კოორდინატთა სისტემაში შემდეგი ფორმულებით:

$$\left.\begin{aligned}\sigma^2_x &= \sigma^2_x\cos^2\alpha+r\sigma_x\sigma_y\sin 2\alpha+\sigma^2_y\sin^2\alpha,\\ \sigma^2\eta &= \sigma^2_x\sin^2\alpha-r\sigma_x\sigma_y\sin 2\alpha+\sigma^2_y\cos^2\alpha.\end{aligned}\right\}^{1)} \tag{9.2.4}$$

ჩვეულებრივ, განიხილავენ, რა ნორმალურ კანონს სიბრტყეზე, ცდილობენ წინასწარ შეარჩიონ კოორდინატთა O_x, O_y ღერძები ისე, რომ დაემთხვნენ გაფანტვის მთავარ ღერძებს. ამ დროს საშუალო კვადრატუ-

---

[1] ამ ფორმულების გამოყვანა იხ. მე-14 თავი, 14.7 პარაგრაფში.

ლი გადახრები σ_x, σ_y ღერძებზე იქნება მთავარი საშუალო კვადრატული გადახრები და ნორმალური კანონს ექნება სახე:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2_x} - \frac{y^2}{2\sigma^2_y}}, \tag{9.2.5}$$

ზოგ შემთხვევაში კოორდინატთა ღერძებს ირჩევენ გაფანტვის მთავარ ღერძთა პარალელურად, მაგრამ კოორდინატთა სათავე არ არის შეთავსებული გაფანტვის ცენტრთან. ამ დროს შემთხვევითი (X, Y) სიდიდეები ასევე აღმოჩნდებიან დამოუკიდებელნი, მაგრამ ნორმალური კანონის გამოსახულებას აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2_x} - \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma^2_y}} \tag{9.2.6}$$

სადაც m_x, m_y — გაფანტვის ცენტრის კოორდინატებია.

გადავიდეთ (9.2.5) ნორმალური კანონის კანონიკურ ფორმაში საშუალო კვადრატული გადახრებიდან საალბათო გადახრებზე:

$$E_x = \rho\sqrt{2}\sigma_x; \quad E_y = \rho\sqrt{2}\sigma_y.$$

E_x, E_y სიდიდეებს ეწოდებათ მთავარი საალბათო გადახრები. გამოვსახოთ σ_x, σ_y გამოსახულებანი E_x, E_y-ით და ჩავსვათ (9. 2. 5) განტოლებაში. მივიღებთ ნორმალური კანონის მეორე კანონიკურ ფორმას:

$$f(x, y) = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E^2_x} + \frac{y^2}{E^2_y}\right)}, \tag{9.2.7}$$

ასეთ ფორმაში ნორმალური კანონი ხშირად გამოიყენება სროლის თეორიაში.

დავწეროთ გაფანტვის ელიფსის განტოლება კანონიკური სახით:

$$\frac{x^2}{\sigma^2_x} + \frac{y^2}{\sigma^2_y} = k^2 \quad \text{ანდა} \quad \frac{x^2}{(k\sigma_x)^2} + \frac{y^2}{(k\sigma_y)^2} = 1. \tag{9.2.8}$$

სადაც k-მუდმივი რიცხვია.

(9.2.8) განტოლებიდან ჩანს, რომ გაფანტვის ელიფსის ნახევარღერძები პროპორციულია მთავარი საშუალო კვადრატული გადახრებისა (მაშასადამე, მთავარი საალბათო გადახრებისა.

დავარქვათ გაფანტვის „ერთეულოვანი“ ელიფსი ალბათობის თანაბარი სიმკვრივის იმ ელიფსთაგანს, რომლის ნახევარღერძები ტოლია

σ_x, σ_y, მთავარი საშუალო კვადრატული გადახრებისა (თუკი გაფანტვის მახასიათებლად გამოვიყენებთ არა მთავარ საშუალო კვადრატულს, არამედ მთავარ საალბათო გადახრებს, მაშინ ბუნებრივია „ერთეულოვანი" ვუწოდოთ იმ ელიფსს, რომლის ნახევარღერძები E_x, E_y-ის ტოლია).

გარდა (გაფანტვის) ერთეულოვანი ელიფსისა ზოგჯერ განიხილავენ კიდევ გაფანტვის „სრულ" ელიფსს, რომელშიდაც გულისხმობენ ალბათობის თანაბარი სიმკვრივის ელიფსებიდან იმას, რომელშიდაც პრაქტიკული უტყუარობით თავსდება მთელი გაფანტვა. ამ ელიფსის ზომები რა თქმა უნდა დამოკიდებულია იმისაგან, თუ რა უნდა გავიგოთ „პრაქტიკული უტყუარობის" ქვეშ. კერძოდ, თუ მივიღებთ „პრაქტიკულ უტყუარობად" 0,99 რიგის ალბათობას, გაფანტვის სრულ ელიფსად შეიძლება ჩავთვალოთ ელიფსი, რომლის ნახევარღერძებია $3\sigma_x$, $3\sigma_y$.

სპეციალურად განვიხილოთ ერთი კერძო შემთხვევა, როცა მთავარი საშუალო კვადრატული გადახრები ერთი მეორის ტოლია:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma.$$

მაშინ გაფანტვის ყველა ელიფსები გადაიქცევიან წრეებად, და გაფანტვას ეწოდება წრიული. წრიული გაფანტვის თითოეული ღერძთაგანი, რომლებიც გადიან გაფანტვის ცენტრში, შეიძლება მიღებულ იქნას როგორც გაბნევის მთავარი ღერძი, ანდა, სხვა სიტყვებით, მთავარი ღერძების მიმართულება განუსაზღვრელია. არაწრიული გაბნევისას შემთხვევითი (X, Y) სიდიდეები, რომლებიც დამორჩილებული არიან ნორმალურ კანონს სიბრტყეზე, დამოუკიდებელნი არიან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა კოორდინატთა ღერძები გაფანტვის მთავარი ღერძების პარალელურია. წრიული გაბნევისას შემთხვევითი სიდიდეები (X, Y) დამოუკიდებელნი არიან მართკუთხოვანი კოორდინატთა სისტემის ნებისმიერი შერჩევისას. წრიული გაფანტვის იმ თავისებურების გამო, რომ მოქმედებანი წრიულ გაფანტვისას გაცილებით უფრო მოხერხებულია, ვიდრე ელიფსურის, ამიტომ პრაქტიკაში სადაც კი შესაძლებელია, ცდილობენ გაფანტვისას არაწრიული გაფანტვა მიახლოებით წრიულით შეცვალონ.

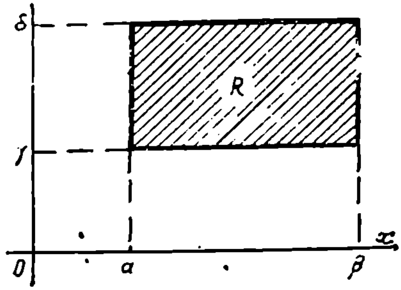
9. 3. გაფანტვის მთავარი ღერძის პარალელურ გვერდებიან მართკუთხედში მოხვედრის ალბათობა

ვთქვათ შემთხვევითი (X, Y) წერტილი სიბრტყეზე ემორჩილება ნორმალურ კანონს

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} \qquad (9.3.1)$$

და ამასთან გაფანტვის მთავარი ღერძები კოორდინატთა ღერძების პარალელურია და X, Y სიდიდეები არიან ერთი მეორისაგან დამოუკიდებელი.

საჭიროა გამოვთვალოთ შემთხვევითი (X, Y) წერტილის R მართკუთხედში მოხვედრის ალბათობა, რომლის გვერდები კოორდინატთა xOy ღერძების და მაშასადამე, გაფანტვის მთავარი ღერძების (ნახ. 9.3.1) პარალელურია. თანახმად ზოგადი (8.3.4) ფორმულისა გვაქვს:



ნახ. 9.3.1.

$$P(X, Y)\subset R)=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\delta} f(x, y)\,dx\,dy=$$

$$=\int_{a}^{B}\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2_x}}dx\int_{\gamma}^{\delta}\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma^2_y}}dy.$$

საიდანაც, (6.3.3) ფორმულის გამოყენებით, უბანზე მოხვედრის ალბათობისათვის ვპოულობთ:

$$P((X, Y)\subset R)=$$
$$=\left[\Phi^*\left(\frac{\beta-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi^*\left(\frac{\alpha-m_x}{\sigma_x}\right)\right]\left[\Phi^*\left(\frac{\delta-m_y}{\sigma_y}\right)-\Phi^*\left(\frac{\gamma-m_y}{\sigma_y}\right)\right]. \quad (9.3.2)$$

სადაც $\Phi^*(x)$ — განაწილების ნორმალური ფუნქციაა.

თუკი ნორმალური კანონი სიბრტყეზე მოცემულია კანონიკური ფორმით, მაშინ $m_x=m_y=0$ და (9.3.2) ფორმულა მიიღებს სახეს

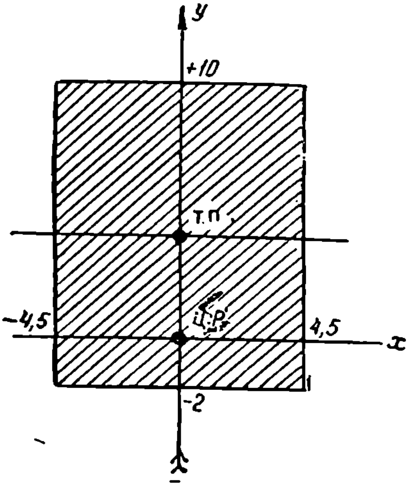
$$P((X, Y(\subset R)=\left[\Phi^*\left(\frac{\beta}{\sigma_x}\right)-\Phi^*\left(\frac{\alpha}{\sigma_x}\right)\right]\left[\Phi^*\left(\frac{\delta}{\sigma_y}\right)-\Phi^*\left(\frac{\gamma}{\sigma_y}\right)\right). \quad (9.3.3)$$

თუ მართკუთხედის გვერდები არაპარალელურია კოორდინატთა ღერძებისა, მაშინ (9.3.2) და (9.3.3) ფორმულები უკვე არ არის მისაღები. (9.3.2) და (9.3.3) ფორმულებით მხოლოდ წრიულ გაფანტვისას გამოითვლება ალბათობა ნებისმიერი ორიენტაციის მართკუთხელდში მოხვედრისა.

(9.3.2) და (9.3.3) ფორმულები ფართოდ გამოიყენებიან: მართკუთხედისებრი, მართკუთხედთან ახლო, მართკუთხედებისაგან შემ-

დგარ და მიახლოებით მათი მსგავსით შეცვლილ სამიზნეში მოხვედრების ალბათობათა გამოსათვლელად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი . წარმოებს თვითმფრინავიდან სროლა მართკუთხოვან ფარზე, რომლის ზომებია 9 მ × 12 მ და ჰორიზონტალურად მიწაზე ძევს. მთავარი საალბათო გადახრები: გრძივი მიმართულებით $B_{გძ}=10$ მ, გვერდითი მიმართულებით $B_{გვ}=5$ მ. დამიზნება — სამიზნის ცენტრზე, შესვლა — სამიზნის გასწვრივ. დამიზნების სიშორის და ფაქტიური სროლის სიშორეთა დაუმთხვევლობის გამო მოხვედრის საშუალო წერტილი გადაიწევს მიუწვდომლობის მხარეს 4 მ-ზე. მოვნახოთ სამიზნეზე მოხვედრის ალბათობა ერთი სროლისას.



ნახ. 9.3.2

ა მ ო ხ ს ნ ა. (9.3.2) ნახაზზე დავიტანთ მიზანს, დამიზნების წერტილს (დ. წ.) და გაფანტვის ცენტრს (გ.ც.). გაფანტვის ცენტრიდან გაგვყავს გაფანტვის მთავარი ღერძები: ფრენის მიმართულებით და მის მართობულად. გადავიდეთ მთავარი საალბათო $B_{გძ}$ და $B_{გვ}$ გადახრებიდან მთავარ საშუალო კვადრატულზე:

$$\sigma_x=\frac{B_{გვ}}{0,674}\approx 7,4 \text{ მ}. \qquad \sigma_y=\frac{B_{გძ}}{0,674}=14,8 \text{ მ}.$$

(9.3.3) ფორმულის მიხედვით გვაქვს:

$$P((X,Y)\subset R=\left[\Phi^*\left(-\frac{4,5}{7,4}\right)-\Phi\left(-\frac{4,5}{7,4}\right)\right]\left[\Phi^*\left(\frac{10}{14,8}\right)-\Phi^*\left(\frac{-2}{14,8}\right)\right]\approx$$
$$=\frac{1}{2}:0,4562\cdot 0,6073\approx 0,138.$$

9.4. გაფანტვის ელიფსზე მოხვედრების ალბათობა

ბრტყელი ნაკვთების მცირე რიცხვს, რომელზედაც მოხვედრების ალბათობა შეიძლება გამოთვლილი იქნას საბოლოო სახით, მიეკუთვნება გაფანტვის ელიფსი (თანაბარი სიმკვრივის ელიფსი). დავუშვათ სიმკვრივის ნორმალური კანონი მოცემულია კანონიკური ფორმით:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)} \qquad (9.4.1)$$

განვიხილოთ გაფანტვის B_k ელიფსი, რომლის განტოლება

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}=k^2,$$

სადაც k პარამეტრი გაფანტვის ელიფსის ნახევარღერძების მთავარ საშუალო კვადრატულ გადახრებთან ფარდობაა.

საერთო (8.3.3) ფორმულიდან გვაქვს:

$$P(X,\ Y)\subset B_k = \iint\limits_{(B_k)} f(x,\ y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{(B_k)} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma^2_x} + \frac{y^2}{\sigma^2_y}\right)} dx\,dy. \qquad (9.4.2)$$

(9.4.2) ინტეგრალში მოვახდინოთ ცვლადთა შეცვლა

$$\frac{x}{\sigma_x} = u; \qquad \frac{y}{\sigma_y} = v.$$

ამ ჩასმებით ელიფსი B_k გარდაიქმნება k რადიუსიან C_k წრედ. მაშასადამე,

$$P((X,\ Y)\subset B_k) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(C_k)} e^{-\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2}} du\,dv. \qquad (9.4.3)$$

(9.4.3) ინტეგრალში დეკარტის კოორდინატთა სისტემიდან პოლარულზე გადავიდეთ

$$u = r\cos\theta;\ v = r\sin\theta. \qquad (9.4.4)$$

გარდაქმნის იაკობიანი ტოლია r-ის. ცვლადთა შეცვლით ვღებულობთ:

$$p\left((X, Y)\subset B_k\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{k} re^{-\frac{r^2}{2}}\,dr\,d\theta = \int\limits_{0}^{k} re^{-\frac{r^2}{2}} = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}}$$

ამგვარად, გაფანტვის ელიფსში, რომლის ნახევარი ღერძები ტოლი საშუალო კვადრატული გადახრისა, მოხვედრის ალბათობა ტოლია

$$P((X,\ Y)\subset B_l) = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}} \qquad (9.4.5)$$

მაგალითად, მოვძებნოთ xOy სიბრტყეზე ნორმალური კანონით განაწილებული შემთხვევითი წერტილის მოხვედრის ალბათობა გაფანტვის ერთეულოვან ელიფსზე, რომლის ნახევარღერძები ტოლია საშუალო კვადრატული გადახრებისა:

$$a = \sigma_x;\quad b = \sigma_y.$$

ასეთი ელიფსისათვის $k=1$. გვაქვს:

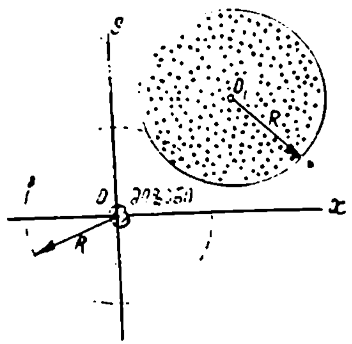
$$P(X,\ Y)\subset B_1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

დანართის ცხრილით ვპოულობთ:

$$P((X,\ \ Y)\subset B_1)\approx 0{,}393.$$

ფორმულა (9.4.5) ყველაზე ხშირად გამოიყენება წრეში მოხვედრის ალბათობის გამოსათვლელად წრიული გაფანტვის შემთხვევაში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. სწრაფად მოძრავ მცირე ზომის სამიზნეზე, რომლის ფართობი 1, 2 მ-ია, იქმნება ბრტყელი დისკოს ფორმის ნამსხვრევების ველი, რომლის რადიუსია $R=30$ მ. დისკოს შიგნით ნამსხვრევების სიმკვრივე მუდმივია და ტოლია 2 ნამსხ/მ²-ის. თუ სამიზნე დაფარულია დისკოთი, მაშინ ნამსხვრევთა რიცხვი, რომელიც მასში ხვდება, შეიძლება ჩაითვალოს განაწილებულად პუასონის კანონის მიხედვით. მიზნის სიმცირის გამო შეიძლება იგი განვიხილოთ, როგორც წერტილოვანი და ჩავთვალოთ, რომ იგი მთლიანად დაიფარება ნამსხვრევთა ველით (თუ მისი ცენტრი ხვდება წრეში). ანდა სავსებით არ იფარება (თუ მისი ცენტრი არ ხვდება წრეში). ნამსხვრევის მოხვედრა გარანტიას იძლევა მიზნის დაზიანებისას. დამიზნებისას ცდილობენ წრის O_1 ცენტრი შეუთავსონ xOy სიბრტყეზე კოორდინატთა O სათავეს (სამიზნის ცენტრს), მაგრამ შეცდომის შედეგად O_1 წერტილი იფანტება O-ს ახლოს (ნახ. 9.4.1): გაფანტვის კანონი ნორმალურია, გაფანტვა წრიული, $\sigma=20$ მ-ს. განვსაზღვროთ სამიზნის დაზიანების ალბათობა.



ნახ. 9.4.1.

ა მ ო ხ ს ნ ა. იმისათვის, რომ სამიზნე დაზიანდეს ნამსხვრევებით, აუცილებელია ორი ხდომილობის შეთავსება: 1). მოხვედრა (O_1 წერტილისა) ნამსხვრევთა ველში (R რადიუსიანი წრე) და 2). სამიზნის დაზიანება ველში მოხვედრის პირობით (ე. ი. იმ პირობით, რომ მოხვედრება ველში უკვე მოხდა). მიზნის წრეში მოხვედრის ალბათობა, ცხადია, ტოლია იმის ალბათობისა, რომ წრის ცენტრი (შემთხვევითი წერტილი O_1) მოხვდება R რადიუსიან წრეში, რომელიც შემოწერილია კოორდინატთა საწყისის ირგვლივ. (9.4.5) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$k=\frac{30}{20}=1{,}5.$$

ნამსხვრევთა ველში მიზნის მოხვედრის ალბათობა ტოლია:

$$p=1-e^{-\frac{1{,}5^2}{2}}\approx 0{,}675.$$

შემდეგ მიზნის დაზიანების P^* ალბათობა, იმ პირობებში, როცა იგი გადაფარულია ნამსხვრევების დისკოთი; ნამსხვრევთა საშუალო a რიცხვი, რომელიც ხდება ველით გადაფარულ სამიზნეს, სამიზნეს ფართობის და ნამსხვრევთა ველის სიმკვრივის ნამრავლის ტოლია:

$$1{,}2\cdot 2=2{,}4$$

პირობითი სამიზნის დაზიანების P^* ალბათობა, ეს არის მასზე თუნდაც ერთი მოხვედრების ალბათობა. ვსარგებლობთ რა მე-5 თავის (5.9.5) ფორმულით გვაქვს:

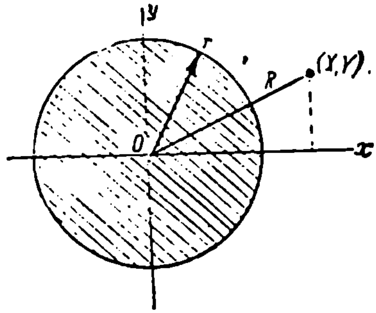
$$P^*=R_1=1-e^{-a}\approx 0{,}909.$$

სამიზნის დაზიანების ალბათობა ტოლია:

$$P(A)=0{,}675\cdot 0{,}909\approx 0{,}613.$$

ვისარგებლოთ წრეში მოხვედრის ალბათობის გამოსათვლელად (9.4.5) ფორმულით, რათა გამოვიყვანოთ პრაქტიკისათვის ერთი მნიშვნელოვანი განაწილება: ე. წ. რ ე ლ ე ი ს გ ა ნ ა წ ი ლ ე ბ ა.

განვიხილოთ xOy სიბრტყეზე (ნახ. 9.4.2) შემთხვევითი (X, Y) წერტილი, რომელიც წრიული ნორმალური კანონით გაფანტულია კოორდინატთა O საწყისის ირგვლივ. რომლის საშუალო კვადრატული გადახრაა σ. მოვნახოთ განაწილების კანონი შემთხვევითი R სიდიდის—მანძილისა (X, Y) წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე, ე. ი. შემთხვევითი ვექტორის სიგრძისა, რომლის მდგენელებია X, Y. პირველად მოვნახოთ R სიდიდის განაწილების $F(r)$ ფუნქცია. განსაზღვრის თანახმად



ნახ. 9.4.2

$$F(r)=P(R<r).$$

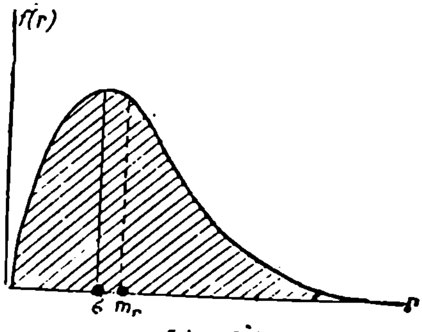
ეს არის ალბათობა შემთხვევითი (X, Y) წერტილის r რადიუსიანი წრის შიგნით მოხვედრისა (ნახ. 9.4.2). (9.4.5) ფორმულით ეს ალბათობა ტოლია

$$F(r)=1-e^{-\frac{k^2}{2}}$$

სადაც $k=\frac{r}{\sigma}$, ე. ი.

$$F(r)=1-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \qquad (9.4.6)$$

განაწილების ფუნქციის მოცემულ გამოსახულებას აქვს აზრი r-ის მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობისას; უარყოფითი r-ისას უნდა დავუშვათ $F(r)=0$. განაწილების $F(r)$ ფუნქციის r-ით გაწარმოებით, ვპოულობთ განაწილების სიმკვრივეს.



ნახ. 9.4.3.

$$f(r)=\begin{cases} \frac{r^2}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & \text{როცა } r>0, \\ 0. & \text{როცა } r<0. \end{cases} \qquad (9.4.7)$$

(9.4.7) რელეის კანონი გვხვდება პრაქტიკის სხვადასხვა დარგში: სროლაში, რადიოტექნიკაში, ელექტროტექნიკაში და ა. შ. გრაფიკი (რელეის კანონის სიმკვრივისა) ფუნქციისა მოტანილია 9.4.3 ნახ.-ზე. მოვ-

ნახოთ რელეის კანონით განაწილებული R სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები, სახელდობრ: მისი M მოდა და m_r მათემატიკური ლოდინი. იმისათვის, რომ მოვნახოთ მოდა —წერტილის აბსცისი, რომელშიდაც ალბათობის სიმკვრივე მაქსიმალურია, — გავაწარმოოთ $f(r)$-ით და წარმოებული ნულს გავუტოლოთ.

$$1-\frac{r^2}{\sigma^2}=0; \qquad \sigma^2=r^2.$$

ფესვი ამ განტოლებისა სწორედ არის საძიებელი მოდა

$$M=\sigma \tag{9.4.8}$$

ამგვარად. ყველაზე საალბათო მნიშვნელობა შემთხვევითი (X, Y) წერტილისა და კოორდინატთა საწყის შორის R მანძილისა გაფანტვის საშუალო კვადრატული გადახრის ტოლია.

მათემატიკური ლოდინი m_r მოინახება ფორმულით:

$$m_r=\int_0^\infty rf(r)\,dr=\int_0^\infty \frac{r^2}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr.$$

$\frac{r}{\sigma\sqrt{2}}=t$, ცვლადის შეცვლით მივიღებთ

$$m_r=\sigma\sqrt{2}\int_0^\infty 2t^2e^{-t^2}dt=\sigma\sqrt{2}\int_0^\infty t\cdot 2te^{-t^2}dt.$$

ნაწილობითი ინტეგრირებით მივიღებთ R მანძილის მათემატიკურ ლოდინს:

$$m_r=\sigma\sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\approx 1{,}25\sigma. \tag{9.4.9}$$

9.5. ნებისმიერ ფორმის არეში მოხვედრის ალბათობა

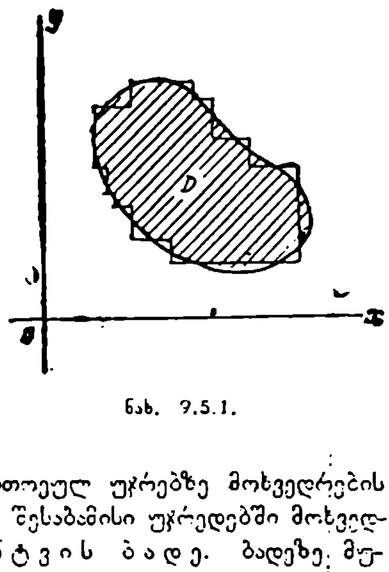
დარტყმითი ჭურვების სროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა დაიყვანება შემთხვევითი (X, Y) წერტილის, რომელიღაც D არეში მოხვედრების ალბათობის გამოთვლამდე. დავუშვათ შემთხვევითი (X, Y) წერტილი ემორჩილება კანონიკური სახის ნორმალურ კანონს. (X, Y) წერტილის D არეში მოხვედრის ალბათობა გამოისახება ინტეგრალით

$$P((X, Y)\subset D)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\iint_{(D)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}dx\,dy \tag{9.5.1}$$

ცალკეულ კერძო შემთხვევებში (მაგალითად, როცა D არე არის მართკუთხედი, რომლის გვერდები გაფანტვის მთავარი ღერძების პარალელურია ანდა გაფანტვის ელიფსი და აგრეთვე ზოგიერთი სხვა, რომელთაც აქვთ ნაკლები პრაქტიკული მნიშვნელობა). (9.5.1) ინტეგრალი შესაძლოა გამოსახული იქნას ცნობილი ფუნქციების საშუალებით;

ზოგად შემთხვევაში ეს ინტეგრალი ცნობილი ფუნქციების საშუალებით არ გამოისახება. პრაქტიკაში ნებისმიერი ფორმის არეში მოხვედრების ალბათობის გამოსათვლელად გამოიყენება შემდეგი მიახლოებითი ხერხები.

1. D არე მიახლოებით შეიცვლება ისეთი მართკუთხედებისაგან შემდგარი არით, რომელთა გვერდები გაფანტვის მთავარი ღერძების პარალელურია (ნახ. 9.5.1). თითოეულ ამ მართკუთხედში მოხვედრის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით (9.3.3). ეს ხერხი შესაძლოა რეკომენდებულ იქნას მაშინ, როცა მართკუთხედთა რიცხვი, რომლებადაც მიახლოებით დაიყოფა D სამიზნი, არ არის ძლიერ დიდი.



ნახ. 9.5.1.

2. მთელი xOy სიბრტყე რომელიმე წირთა სისტემით (სწორი ანდა მრუდი) წინასწარ დაიყოფა უჯრედებად, რომლებზედაც მოხვედრების ალბათობა შესაძლოა გამოსახულ იქნან ზუსტად ცნობილი ფუნქციების საშუალებით და გამოითვლება თითოეულ უჯრებზე მოხვედრების ალბათობა. წირთა ასეთ სისტემას, მათი შესაბამისი უჯრედებში მოხვედრის ალბათობებით ეწოდება *გაფანტვის ბადე*. ბადეზე მუშაობა არის ის რომ ბადის გამოსახულება იდება მიზნის გამოსახულებაზე. რის შემდეგადაც ჯამდება მიზნის დაფარულ უჯრედებში მოხვედრის ალბათობანი: თუ მიზანი ფარავს უჯრედის ნაწილს, მაშინ აიღება უჯრედში მოხვედრის ალბათობის გადაფარული ფართის პროპორციული ნაწილი.

გაფანტვის ბადე შესაძლოა გამოყენებული იქნას ორნაირად: ა) ავაგოთ სამიზნე ქსელის მაშტაბით; ბ) ავაგოთ ქსელი სამიზნის მაშტაბით; თუკი სამიზნეს აქვს რთული მოხაზულობა და, განსაკუთრებით, შედარებით დიდი არ არის, ჩვეულებრივ უფრო მოხერხებულია სამიზნის გამოსახულებაზე იმავე მასშტაბით ავაგოთ ბადის ის ნაწილი, რომელიც დაკავებულია სამიზნით. თუკი სამიზნეს აქვს შედარებით მარტივი მოხაზულობა და საკმაოდ დიდია (დაკავებული აქვს გაფანტვის სრული

ელიფსის მნიშვნელოვანი ნაწილი), ჩვეულებრივ, უფრო მოხერხებულია სამიზნე ავაგოთ ბადის მასშტაბებით. ვინაიდან სტანდარტული ბადე იგება წრიული გაფანტვისათვის, ხოლო პრაქტიკაში საერთოდ გაფანტვა არ არის წრიული, სამიზნის ქსელის მასშტაბებით აგებისას მოგვიხდება საერთოდ ვისარგებლოთ ორი სხვადასხვა მასშტაბით Ox და Oy ღერძებზე.

ამ ხერხის გამოყენებისას მოხერხებულია გვქონდეს გაფანტვის ბადე, რომელიც შესრულებული იქნება გამჭვირვალე ქაღალდზე და დავაფაროთ იგი სამიზნის გადაკეთებულ გამოსახულებას. გაფანტვის წრფივი ქსელი ერთი საკოორდინატო კუთხისათვის მოცემულია 9.5.2 ნახ-ზე. უჯრედის გვერდი ტოლია $0{,}2E \approx 0{,}133\ \sigma$.

უჯრედებში ჩასმულია მათში მოხვედრების ალბათობანი პროცენტის მეორმოცედ ნაწილებში.

y

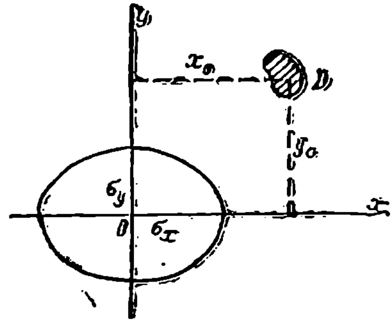
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0					
1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1					
1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0					
2	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0					
2	2	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0					
2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0
2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
3	3	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1		1	0	0	1	0	0	0
4	3	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
5	4	4	4	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	0	1	0	0
5	5	5	5	4	4	4	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0
6	6	6	5	5	5	4	4	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	1
7	7	6	6	6	5	5	4	4	3	2	2	2	1	1	1	1		1	0
8	8	7	7	6	6	6	5	4	4	3	2	2	1	1	1	0	0	0	
9	9	8	8	7	7	6	5	5	4	3	3	2	2	1	1	1	1	1	0
10	9	9	8	8	7	6	5	5	4	3	3		2	1	1	1	0	1	0
11	10	10	10	9	8	7	5	5	5	4	3	2	2	1	2	1	1	0	1
11	11	10	10	9	8	7	6	6	5	4	3	2	2	2	1	1	0	1	0
11	11	11	10	9	9	8	7	6	5	4	3	3	2	2	2	1	1	0	0
12	11	11	10	10	9	8	7	6	5	5	4	3	2	2	2	2	1	1	1

ნახ. 9.5.2.

3. იმ შემთხვევაში, როცა D არეს ზომები შედარებით საშუალო კვადრატულ გადახრებთან არ არის დიდი (არ აღემატებიან 0,5—1 ს. კ. გ.[1] შესაბამისი ღერძების მიმართულებით), ამ არეში მოხვედრების ალბათობა შესაძლოა მიახლოებით გამოთვლილი იქნას ფორმულით, რომელიც არ შეიცავს ინტეგრირების ოპერაციას.

განვიხილოთ xOy სიბრტყეზე ნებისმიერი ფორმის მცირე D სამიზნე (ნახ. 9.5.3). დავუშვათ, რომ ამ სამიზნის ზომები არ არის დიდი შედარებით E_x და E_y საალბათო გადახრებთან. 8.3.3 ზოგადი ფორმულის მიხედვით გვაქვს:

$$P((X, Y)\subset D)=\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{9.5.2}$$



ნახ. 9.5.3.

სადაც $f(x, y)$ —(X, Y) სისტემის განაწილების სიმკვრივეა. გამოვიყენოთ (9.5.2) ინტეგრალისათვის თეორემა საშუალო მნიშვნელობის შესახებ:

$$P((X, Y)\subset D)=f(x_0, y_0)=\iint\limits_{(D)} dx\,dy=f(x_0, y_0)\,S_D,$$

სადაც (x_0, y_0) — D არეს შიგნით რომელიღაც წერტილია; S_D — D არეს ფართობი.

იმ შემთხვევაში, როცა (X, Y) სისტემა დაქვემდებარებულია ნორმალურ კანონს კანონიკური სახით, გვაქვს:

$$P((X, Y)\subset D))=\frac{S_D}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma_x^2}-\frac{y_0^2}{2\sigma_y^2}} \tag{9.5.3}$$

D არეს შედარებით მცირე ზომებისას, განაწილების სიმკვრივე $f(x, y)$, ამ არეს ფარგლებში მცირედ იცვლება და პრაქტიკულად შეიძლება მიღებული იქნას მუდმივად. მაშინ (x_0, y_0) წერტილად შეიძლება ავირჩიოთ ნებისმიერი D წერტილი არის ფარგლებში (მაგალითად, სამიზნის მიახლოებითი ცენტრი).

(9.5.3) ტიპის ფორმულა პრაქტიკაში ფართოდ გამოიყენება, იმ არეებისათვის, რომელთა უდიდესი ზომები არ აღემატებიან საშუალო კვადრატულ გადახრის ნახევარს შესაბამისი მიმართულებით. ისინი იძლევიან სიზუსტის მხრივ სავსებით მისაღებ შედეგებს. ცალკეულ შემ-

[1] აქ და ქვემოთ ს. კ. გ. — საშუალო კვადრატული გადახრა

თხვევებში მათ იყენებენ უფრო დიდი არეებისათვისაც კი (ერთი ს. კ. გ. რიგისა). ზოგიერთ შესწორებათა შეტანის პირობებში (სახელდობრ σ_x, σ_y სიდიდეთა რამდენიმე გადიდებულ მნიშვნელობებით შეცვლით) ამ ფორმულის გამოყენების არე შესაძლოა გაფართოებულ იქნას ზომით ორი ს. კ. გ. არემდე.

9.6. ნორმალური კანონი სამგანზომილებიან სივრცეში. ნორმალური კანონის ზოგადი ჩაწერა შემთხვევით სიდიდეთა ნებისმიერი რიცხვის სისტემისათვის

დისტანციური ჭურვებით სროლასთან დაკავშირებული საკითხების კვლევისას საქმე გვაქვს დისტანციური ჭურვის სივრცეში სკდომის წერტილების განაწილების კანონთან. ჩვეულებრივი დისტანციური ამფეთქებლების გამოყენების პირობებში განაწილების ეს კანონი შეიძლება ჩაითვალოს ნორმალურად.

მოცემულ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ სივრცეში ნორმალური კანონის მხოლოდ კანონიკურ ფორმას:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x \sigma_y \sigma_z} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2}\right)} \qquad (9.6.1)$$

სადაც σ_x, σ_y, σ_z — მთავარი საშუალო კვადრატული გადახრებია. საშუალო კვადრატული გადახრებიდან საალბათოზე გადასვლით გვაქვს:

$$f(x, y, z) = \frac{\rho^3}{\pi^{3/2} E_x E_y E_z} e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} + \frac{z^2}{E_z^2}\right)} \qquad (9.6.2)$$

დისტანციური ჭურვებით სროლასთან დაკავშირებულ ამოცანათა ამოხსნისას, ზოგჯერ გვიხდება გამოვთვალოთ დისტანციური ჭურვის მოცემულ არეს ფარგლებში სკდომის ალბათობა:

ზოგად შემთხვევაში ეს ალბათობა გამოისახება სამჯერადი ინტეგრალით:

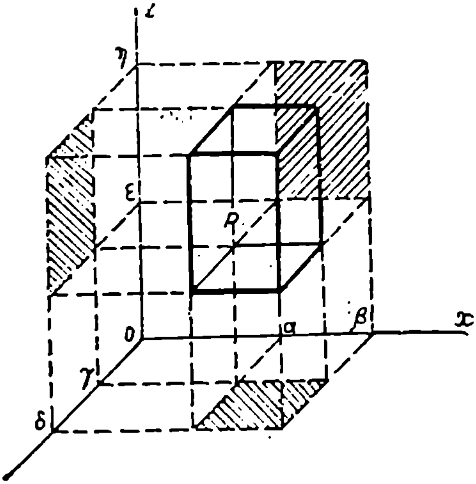
$$(P((X, Y, Z) \subset D)) = \iiint\limits_{(D)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \qquad (9.6.3)$$

(9.6.3) ინტეგრალი ჩვეულებრივ არ გამოისახება ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით. ოღონდ არსებობს მთელი რიგი არეებისა, რომლებშიც მოხვედრის ალბათობა შედარებით მარტივად გამოითვლება.

1. გაფანტვის მთავარი ღერძების პარალელური გვერდებიან მართკუთხა პარალელეპიპედში მოხვედრის ალბათობა.

დავუშვათ R არე მართკუთხა პარალელეპიპედია, რომელიც შემოფარგლულია აბსცისებით α, β, ორდინატებით γ, δ და აპლიკატებით ξ, η (ნახ. 9.6.1) ალბათობა R არეში მოხვედრისა, ცხადია, ტოლია:

$$P((X, Y, Z)\subset R) =$$
$$= \left[\Phi^*\left(\frac{\beta}{\sigma_x}\right)-\Phi^*\left(\frac{\alpha}{\sigma_x}\right)\right]\left[\Phi^*\left(\frac{\delta}{\sigma_y}\right)-\Phi^*\left(\frac{\gamma}{\sigma_y}\right)\right]\left[\Phi^*\left(\frac{\eta}{\sigma_z}\right)-\Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_z}\right)\right]. \tag{9.6.4}$$



ნახ. 9.6.1.

2. თანაბარი სიმკვრივის ელიფსოიდში მოხვედრის ალბათობა.

განვიხილოთ თანაბარი სიმკვრივის R ელიფსოიდი, რომლის განტოლებაა

$$\frac{x^2}{\sigma^2_x}+\frac{y^2}{\sigma^2_y}+\frac{z^2}{\sigma^2_z}=k^2.$$

ამ ელიფსოიდის ნახევარღერძები პროპორციულია მთავარ საშუალო კვადრატული გადახრებისა:

$$a=k\sigma_x;\quad b=k\sigma_y;\quad c=k\sigma_z.$$

ვსარგებლობთ, რა (9.6.1) ფორმულით $f(x, y, z)$-სათვის, გამოვსახოთ B_k ელიფსოიდში მოხვედრის ალბათობა:

$$P((X, Y, Z)\subset B_k)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z}\iiint\limits_{(B_k)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma^2_x}+\frac{y^2}{\sigma^2_y}+\frac{z^2}{\sigma^2_z}\right)}dx\,dy\,dz.$$

გადავდივართ დეკარტის კოორდინატებიდან პოლარულზე (სფერულზე) ცვლადების შეცვლით

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\sigma_x} &= r\cos\theta\cos\varphi, \\ \frac{y}{\sigma_y} &= r\cos\theta\sin\varphi, \\ \frac{z}{\sigma_z} &= r\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (9.6.5)$$

გარდაქმნის იაკობიანი (9.6.5) ტოლია:

$$I = r^2\cos\theta\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z.$$

ახალ ცვლადებზე გადასვლით, მივიღებთ:

$$P((X, Y, Z)\subset B_k) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_0^k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} r^2\cos\theta e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr\,d\theta\,d\varphi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^k r^2 e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr.$$

ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ:

$$P((X, Y, Z)\subset B_k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{-ke^{-\frac{k^2}{2}} + \int_0^k e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr\right\} =$$

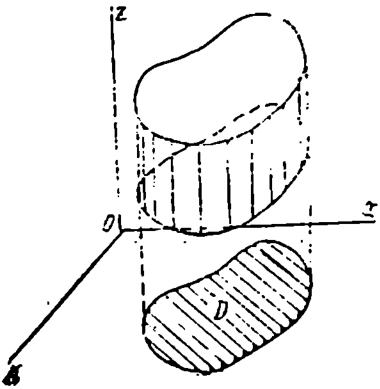
$$= 2\Phi^*(k) - 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}ke^{-\frac{k^2}{2}} \qquad (9.6.6)$$

3. გაფანტვის ერთ-ერთი მთავარი ღერძის პარალელური მსახველიან ცილინდრულ არეში მოხვედრის ალბათობა

განვიხილოთ ცილინდრული C არე, რომლის მსახველი გაფანტვის ერთ-ერთი მთავარი ღერძის პარალელურია (მაგალითად, Oz ღერძის), ხოლო მიმმართველი არის ნებისმიერი D არის კონტური xOy სიბრტყეზე (ნახ. 9.6.2.)

ვთქვათ C არე შემოსაზღვრულია $z=\varepsilon$ და $z=\eta$ ორი სიბრტყით. გამოვთვალოთ C არეში მოხვედრის ალბათობა; ეს არის ორი ხდომილობის ნამრავლის ალბათობა, რომელთაგან პირველი მათგანი არის (X, Y)

წერტილის D არეში მოხვედრა, ხოლო მეორე — Z სიდიდის (ε, η) უბანზე მოხვედრა. რადგან $(X\ Y,\ Z)$ სიდიდეები, რომლებიც დაქვემდებარებული არიან კანონიკური ფორმის ნორმალურ კანონს, დამოუკიდებლებია. ამიტომ დამოუკიდებლებია აგრეთვე ეს ორი ხდომილობაც. ამიტომ

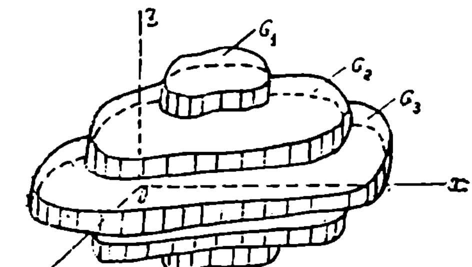


ნახ. 9.6.2.

$$P((X,\ Y,\ Z)\subset C)= P((X,\ Y)\subset D)\, P(\varepsilon<Z<\eta) = P\big((X,Y)\subset D\big)\left[\Phi^*\left(\frac{\eta}{\sigma_z}\right) - \Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_z}\right)\right]. \qquad (9.6.7)$$

$P(X,\ Y)\subset D$ ალბათობა (9.6.7) ფორმულაში შესაძლებელია გამოთვლილ იქნას ბრტყელ არეში მოხვედრების ალბათობის გამოთვლის ნებისმიერი ხერხით.

(9.6.7) ფორმულას ემყარება ნებისმიერი ფორმის G სივრცით არეში მოხვედრის ალბათობის გამოთვლის ხერხი: G არე მიახლოებით დაიყოფა მთელ რიგ ცილინდრულ G_1, G_2,... არეებად (ნახ. 9.6.3) და თითოეულ მათგანში მოხვედრის ალბათობა გამოითვლება (9.6.7) ფორმულით. ამ ხერხის გამოსაყენებლად საკმარისია დაიხაზოს მთელი რიგი ფიგურებისა, რომლებიც G არეს ერთ-ერთი საკოორდინატო სიბრტყის პარალელური სიბრტყეებით კვეთენ. თითოეულ მათგანში მოხვედრის ალბათობა გამოითვლება გაფანტვის ბადით. მოცემული



ნახ. 9.6.3

თავის დასასრულს დავწერთ ზოგად გამოსახულებას ნორმალური კანონისათვის n განზომილების ნებისმიერი რიცხვისათვის.

ასეთი კანონის განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{\sqrt{|C|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}(x_i-m_{x_i})(x_j-m_{x_j})} \qquad (9.6.8)$$

სადაც $|C|$ არის C მატრიცის დეტერმინანტი, $C=\|C_{ij}\|$ არის k კორელაციური მატრიცის შებრუნებული მატრიცა, ე. ი. თუ კორელაციური მატრიცა

$$K=\|K_{ij}\|,$$

მაშინ

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}\frac{M_{ij}}{|K|},$$

სადაც $|K|$ კორელაციური მატრიცის დეტერმინანტია, ხოლო M_{ij} — ამ დეტერმინანტის მინორი, რომელიც მიიღება მისგან i-რი სტრიქონის და j-რი სვეტის ამოშლით. შევნიშნავთ, რომ

$$|C|=\frac{1}{|K|}.$$

ზოგადი (9.6.8) გამოსახულებიდან გამომდინარეობს ნორმალური კანონის ყველა ფორმები განზომილების ნებისმიერი რიცხვისა და შემთხვევით სიდიდეთა შორის ნებისმიერი სახის დამოუკიდებლობისათვის. კერძოდ, როცა $n=2$ (გაფანტვა სიბრტყეზე) კორელაციური მატრიცა არის

$$K=\begin{Vmatrix}\sigma^2_x & \sigma_x\sigma_y r\\ \sigma_x\sigma_y r & \sigma^2_y\end{Vmatrix},$$

სადაც r კორელაციის კოეფიციენტია. აქედან

$$K=\sigma^2_x\sigma^2_y(1-r)^2;\qquad (C)=\frac{1}{\sigma^2_x\sigma^2_y(1-r^2)};$$

$$C=\begin{Vmatrix}\dfrac{1}{\sigma^2_x(1-r^2)} & \dfrac{-r}{\sigma_x\sigma_y(1-r^2)}\\[2ex] \dfrac{-r}{\sigma_x\sigma_y(1-r^2)} & \dfrac{1}{\sigma^2_y(1-r^2)}\end{Vmatrix},$$

მატრიცის დეტერმინანტის და მისი წევრების (9.6.8) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ (9.1.1) ფორმულას სიბრტყეზე ნორმალური კანონისათვის, რომლიდანაც ჩვენ დავიწყეთ პარაგრაფი 9. 1.

X თავი

შემთხვევით სიდიდეთა ფუნქციების რიცხვითი მახასიათებლები

10.1. ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი. ფუნქციის დისპერსია

შემთხვევით მოვლენებთან დაკავშირებულ სხვადასხვა ამოცანების ამოხსნისას თანამედროვე ალბათობათა თეორიაში ფართოდ გამოიყენება შემთხვევით სიდიდეთა აპარატი. იმისათვის, რომ ვისარგებლოთ ამ აპარატით, აუცილებელია ამოცანაში მოცემულ შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების კანონების ცოდნა. საერთოდ, რომ ვთქვათ ეს კანონები შესაძლებელია განსაზღვრული იქნას ცდებიდან, მაგრამ ჩვეულებრივ ცდა, რომლის მიზანია შემთხვევითი სიდიდის, ანდა შემთხვევით სიდიდეთა სისტემის (განსაკუთრებით სამხედრო ტექნიკის დარგში) განაწილების კანონის განსაზღვრა, რთული და ძვირად ღირებულია. ბუნებრივად წამოიჭრება ამოცანა ექსპერიმენტის მოცულობა დაყვანილი იქნას მინიმუმამდე და შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების კანონებზე იმსჯელონ არაპირდაპირი სახით სხვა შემთხვევით სიდიდეთა უკვე ცნობილი განაწილების კანონების საფუძველზე. შემთხვევით სიდიდეთა გამოკვლევის ასეთი არაპირდაპირი მეთოდები ალბათობათა თეორიაში მნიშვნელოვანია. ამ დროს ჩვეულებრივ ჩვენთვის საინტერესო შემთხვევითი სიდიდე წარმოიდგინება სხვა შემთხვევით სიდიდეთა ფუნქციით. ვიცით, რა არგუმენტების განაწილების კანონი ხშირად ვაღწევთ ფუნქციის განაწილების კანონის დადგენას. ასეთი ტიპის მთელ რიგ ამოცანებს შემდეგშიც შევხვდებით (იხ. თავი — 12).

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება შემთხვევები, როცა არ არის განსაკუთრებული საჭიროება განსაზღვრული იქნას მთლიანად შემთხვევით სიდიდეთა ფუნქციის განაწილების კანონი, არამედ საკმარისია მხოლოდ ვუჩვენოთ მათი რიცხვითი მახასიათებლები: მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, ზოგჯერ — ზოგიერთი უმაღლესი მომენტებიდან. ასევე ძლიერ ხშირად თვით არგუმენტების განაწილების კანონები არ არის ცნობილი საკმაოდ კარგად. ამასთან დაკავშირებით ხშირად წამოიჭრება ამოცანა შემთხვევით სიდიდეთა ფუნქციის მხოლოდ რიცხვითი მახასიათებლების განსაზღვრაზე.

განვიხილოთ ასეთი ამოცანა: შემთხვევითი სიდიდე Y არის რამდენიმე შემთხვევით $X_1, X_2, \dots, X_n$ სიდიდეთა ფუნქცია:

$$Y=\varphi\,(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

დავუშვათ ჩვენთვის ცნობილია არგუმენტთა $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ სისტემის განაწილების კანონი; საჭიროა მოინახოს Y სიდიდის რიცხვითი

მახასიათებლები, პირველ რიგში — მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

წარმოვიდგინოთ, რომ ამა თუ იმ ხერხით მოვნახეთ Y სიდიდის განაწილების $g(y)$ კანონი, მაშინ რიცხვითი მახასიათებლების განსაზღვრის ამოცანა გახდება ტრივიალური, რომლებიც განისაზღვრებიან ფორმულებით:

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y g(y)\, dy;$$

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 g(y)\, dy \text{ და ა. შ.}$$

მაგრამ თვით Y სიდიდის განაწილების $g(y)$ კანონის მონახვა ხშირად აღმოჩნდება საკმაოდ რთული. ამავე დროს დასმული ამოცანის ამოსახსნელად Y სიდიდის განაწილების კანონის მონახვა, სრულებითაც არ არის საჭირო: რომ მოინახოს Y სიდიდის მხოლოდ რიცხვითი მახასიათებლები, არ არის საკმარისი მისი განაწილების კანონის ცოდნა; საკმარისია $(X_1 X_2 \ldots, X_n)$ არგუმენტების განაწილების კანონის ცოდნა. უფრო მეტიც, ზოგიერთ შემთხვევებში იმისათვის, რომ მოინახოს ფუნქციის რიცხვითი მახასიათებლები არ არის საჭირო მისი არგუმენტების განაწილების კანონის ცოდნაც კი, საკმარისია არგუმენტთა მხოლოდ ზოგიერთი რიცხვითი მახასიათებლები ვიცოდეთ. ამდაგვარად, შემთხვევით სიდიდეთა ფუნქციების რიცხვითი მახასიათებლების მონახვის ამოცანა ამ ფუნქციების განაწილების კანონების გარეშეც წარმოიშობა.

განვიხილოთ ფუნქციის რიცხვითი მახასიათებლების განსაზღვრის ამოცანა არგუმენტების მოცემულ განაწილების კანონის შემთხვევაში. დავიწყოთ ყველაზე მარტივი შემთხვევიდან ერთი არგუმენტის ფუნქციიდან და დავსვათ შემდეგი ამოცანა.

გვაქვს შემთხვევითი X სიდიდე განაწილების მოცემული კანონით, მეორე შემთხვევითი სიდიდე Y დაკავშირებულია X-თან ფუნქციონალური დამოკიდებულებით:

$$Y = \varphi(X).$$

საჭიროა, Y-ის განაწილების კანონის მოუნახავად, განვსაზღვროთ მისი მათემატიკური ლოდინი:

$$m_y = M[\varphi(X)]. \tag{10.1.1}$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა X არის წყვეტილი შემთხვევითი სიდიდე განაწილების მწკრივით:

x_i	x_1	x_2		x_n
p_i	p_1	p_2		p_n

ამოვწეროთ Y სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობანი და ამ მნიშვნელობათა ალბათობანი:

$\varphi(x_i)$	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$		$\varphi(x_n)$
p_i	p_1	p_2		p_n

(10.1.2)

(10.1.2) ცხრილი არ არის სიტყვის მკაცრი მნიშვნელობით Y სიდიდის განაწილების მწკრივი. რადგანაც საერთოდ, მნიშვნელობებიდან

$$\varphi(x_1),\ \varphi(x_2),\dots,\ \varphi(x_n) \qquad (10.1.3)$$

ზოგიერთი შეიძლება ერთიმეორეს დაემთხვეს; ამასთან ეს მნიშვნელობანი (10.1.2) ცხრილის ზემო სვეტში არ მიდიან აუცილებლად მზარდი რიგით, იმისათვის, რომ (10.1.2) ცხრილიდან გადავიდეთ Y სიდიდის განაწილების ნამდვილ მწკრივზე, საჭირო იქნება (10.1.3) მნიშვნელობანი განვალაგოთ ზრდადი რიგით, Y-ის ურთიერთ ტოლმნიშვნელობათა შესაბამისად გავაერთიანოთ სვეტები და შევკრიბოთ შესაბამისი ალბათობანი; მაგრამ მოცემულ შემთხვევაში ჩვენ არ გვაინტერესებს Y სიდიდის განაწილების კანონი, როგორც ასეთი; ჩვენი მიზნისათვის მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრისათვის — საკმარისია განაწილების „მოუწესრიგებელი“ ფორმის (10.1.2) მწკრივი. Y სიდიდის მათემატიკური ლოდინი შეიძლება განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$M[\varphi(X)]=\sum_i \varphi(x_i)\ p_i. \qquad (10.1.4)$$

ცხადია, სიდიდე $m_y=M[\varphi(x)]$, რომელიც განისაზღვრება (10.1.4) ფორმულით, არ შეიძლება შეიცვალოს იმის გამო, რომ ჯამის ნიშნის ქვეშ ზოგიერთი წევრი წინასწარ გაერთიანებული იქნება, ხოლო წევრთა მიმდევრობა (რიგი) — შეცვლილი.

ფორმულაში (10.1.4) ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი არ შეიცავს ცხადი სახით თვით ფუნქციის განაწილების კანონს, არამედ შეიცავს მხოლოდ არგუმენტის განაწილების კანონს. ამგვარად, ფუნქციის მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრისათვის სრულებითაც არ არის საჭირო ამ ფუნქციის განაწილების კანონის ცოდნა, არამედ სავსებით საკმარისია ვიცოდეთ მხოლოდ არგუმენტის განაწილების კანონი.

თუ (10.1.1) ფორმულაში ჯამს ინტეგრალით შევცვლით, ხოლო P_i ალბათობას — ალბათობის ელემენტით, უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდისათვის მივიღებთ ანალოგიურ ფორმულას:

$$M[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\ f(x)dx, \qquad (10.1.5)$$

სადაც $f(x)$ — X სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა.

ანალოგიურად შეიძლება განსაზღვრულ იქნას ორი შემთხვევითი X, Y არგუმენტის $\varphi\ (X,\ Y)$ ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი. წყვეტილი სიდიდეებისათვის

$$M[\varphi\ (X,\ Y)]=\sum_i\sum_j\varphi\ (x_i,\ y_j)\ p_{ij}, \qquad (10.1.6)$$

სადაც $p_{ij}=P((X=x_i)\ \ (Y=y_j))$ —ალბათობაა იმისა, რომ $(X,\ Y)$ სისტემა მიიღებს $(x_i,\ y_j)$ მნიშვნელობებს.

უწყვეტი სიდიდეებისათვის

$$M[\varphi\ (X,\ Y)]=\int\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\ (x,\ y)f(x,y)dx\ dy, \qquad (10.1.7)$$

სადაც $f(x,\ y)$ — $(X,\ Y)$ სისტემის განაწილების სიმკვრივეა.

სრულიად ანალოგიურად განისაზღვრება ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი შემთხვევითი არგუმენტების ნებისმიერი რიცხვისათვის. მოვიყვანთ შესაბამის ფორმულას მხოლოდ უწყვეტი სიდიდეებისათვის:

$$M[\varphi\ (X_1,X_2,\dots,X_n)]=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1,\ x_2,\dots,x_n)f(x_1,\ x_2,\dots,x_n)\ dx_1dx_2\dots dx_n, \qquad (10.1.8)$$

სადაც $f\ (x_1,\ x_2,\dots,\ x_n)$—$(X_1,\ X_2,\dots,X_n)$ სისტემის განაწილების სიმკვრივეა. (10.1.8) ტიპის ფორმულები ხშირად გვხვდება ალბათობათა თეორიის პრაქტიკული გამოყენებისას, როცა საუბარია მთელ რიგ შემთხვევით არგუმენტებზე დამოკიდებულ რომელიმე სიდიდეთა გასაშუალოებაზე.

ამგვარად, შემთხვევითი არგუმენტთა ნებისმიერი რიცხვის ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი შეიძლება მოვნახოთ ფუნქციის განაწილების კანონისაგან დამოუკიდებლად (მის გარეშე). ანალოგიურად შეიძლება მონახულ იქნას ფუნქციის სხვა რიცხვითი მახასიათებლები — სხვადასხვა რიგის მომენტები. ვინაიდან ყოველი მომენტი წარმოადგენს გა-

მოსაკვლევი. შემთხვევითი სიდიდის რომელიღაც ფუნქციის მათემატიკურ ლოდინს, ამიტომ ნებისმიერი მომენტის გამოთვლა შესაძლებელია ზემოთ აღნიშნულის სრულიად ანალოგიური ხერხებით. ჩვენ აქ მოვიყვანთ საანგარიშო ფორმულებს მხოლოდ დისპერსიისათვის და ამასთანავე უწყვეტი შემთხვევითი არგუმენტებისათვის.

ერთი შემთხვევითი არგუმენტის ფუნქციის დისპერსია გამოისახება ფორმულით:

$$D[\varphi(X)]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)-m_{\varphi}]^2 f(x)\,dx \tag{10.1.9}$$

სადაც $m_{\varphi}=M[\varphi(x)]$ მათემატიკური ლოდინია $\varphi(X)$ ფუნქციისა, $f(x)$—X სიდიდის განაწილების სიმკვრივე.

ანალოგიურად გამოისახება ორი არგუმენტის ფუნქციის დისპერსია:

$$D[\varphi(X,\ Y)]=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x,\ y)-m_{\varphi}]^2 f(x,y)\,dx\,dy, \tag{10.1.10}$$

სადაც m_{φ}—$\varphi(X,\ Y)$ ფუნქციის მათემატიკური ლოდინია; $f(x,\ y)$ არის $(X,\ Y)$ სისტემის განაწილების სიმკვრივე. დაბოლოს, არგუმენტთა ნებისმიერი რიცხვისას, ანალოგიური აღნიშვნებით:

$$D[\varphi(X_1,\ X_2,\dots,X_n)]=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)-m_{\varphi}]^2 f(x_1,\ x_2,\dots,x_n)\,dx_1dx_2\dots dx_n. \tag{10.1.11}$$

შევნიშნავთ, რომ ხშირად დისპერსიის გამოთვლისას მოხერხებულია ვისარგებლოთ მეორე რიგის საწყის და ცენტრალურ მომენტებს შორის დამოკიდებულებით (იხ. 5 თავი) და დავწეროთ:

$$D[\varphi(X)]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)]^2 f(x)\,dx-m^2_{\varphi}; \tag{10.1.12}$$

$$D[\varphi(X,\ Y)]=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}[\varphi\ (x,\ y)]^2 f\ (x,\ y)\ dx\ dy-m^2_{\varphi}; \tag{10.1.13}$$

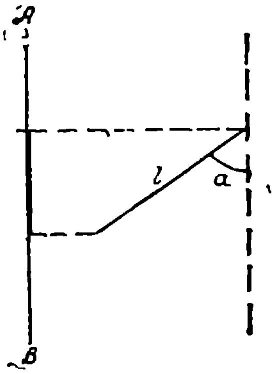
$$D[\varphi\ (X_1,\ X_2,\dots,X_n)]=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x_1,\ x_2,\dots,x_n)^2]f(x_1,\ x_2,\dots,x_n)\,dx_1dx_2\dots dx_n-m^2_{\varphi}. \tag{10.1.14}$$

(10.1.12)—(10.1.14) ფორმულები შეიძლება რეკომენდებულ იქნას, მაშინ როცა მათ არ მივყავართ ახლობელ რიცხვთა შორის სხვაობამდე, ე. ი. როცა m_φ შედარებით მცირეა.

ზემოთ მოყვანილი მეთოდების პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. სიბრტყეზე მოცემულია l სიგრძის მონაკვეთი (ნახ. 10.1.1), რომელიც ბრუნავს ისე, რომ მისი ყველა მიმართულება ერთნაირად ალბათობრივია, მონაკვეთი გეგმილდება უძრავ AB ღერძზე, განვსაზღვროთ მონაკვეთის გეგმილის სიგრძის საშუალო მნიშვნელობა.



ნახ. 10.1.1.

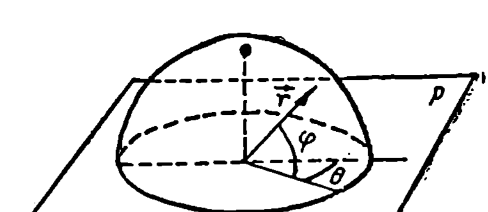
ა მ ო ხ ს ნ ა. პროექციის სიგრძე ტოლია: $y=l|\cos\alpha|$, სადაც კუთხე α შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც განაწილებულია თანაბარი სიმკვრივით $0, 2\pi$ უბანზე. (10.1.5) ფორმულით გვაქვს:

$$m=M[l\,|\cos\alpha|]=\int_0^{2\pi} l|\cos\alpha|\frac{d\alpha}{2\pi}=$$

$$=\frac{2l}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\,d\alpha=\frac{2l}{\pi}\approx0,637l.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ჭურვის წაგრძელებული ნამსხვრევი, რომელიც სქემატურად შეიძლება გამოვსახოთ l სიგრძის მონაკვეთით, ფრენს და ბრუნავს მასის ცენტრის ირგვლივ ისე, რომ ყველა მისი ორიენტაცია სივრცეში ერთნაირად საალბათოა. ნამსხვრევები თავის გზაზე ხვდება ბრტყელ ეკრანს მისი მოძრაობის მართობული მიმართულებით. და ტოვებს მასზე ნახვრეტს, მოვნახოთ ამ ნახვრეტის სიგრძის მათემატიკური ლოდინი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. უწინარეს ყოვლისა მივცეთ მათემატიკური ფორმულირება მტკიცებას, რომ „ნამსხვრევის ყველა ორიენტაცია სივრცეში ერთნაირად საალბათოა". l მონაკვეთის მიმართულება დავახასიათოთ ერთეულოვანი $\vec{r}$ ვექტორით (ნახ. 10.1.2). $\vec{r}$ ვექტორის მიმართულება კოორდინატთა სფერულ სისტემაში, რომელიც P სიბრტყესთანაა დაკავშირებული და რომელზედაც წარმოებს დაგეგმილება, განისაზღვრება ორი კუთხით: θ კუთხით, რომელიც მდებარეობს P სიბრტყეზე და φ კუთხით, რომელიც მდებარეობს P სიბრტყის მართობულ სიბრტყეში.



ნახ. 10.1.2.

$\vec{r}$ ვექტორის ყველა მიმართულების თანაბარი ალბათობისას, მისი ბოლოს ყველა მდებარეობას ერთეულ რადიუსიან C სფეროს ზედაპირზე უნდა ჰქონდეს ალბათობის ერთნაირი სიმკვრივე; მაშასადამე, ალბათობის ელემენტი

$$f(\theta,\ \varphi)\ d\theta\ d\varphi,$$

სადაც $f(\theta, \varphi)$ არის θ, φ კუთხეების განაწილების სიმკვრივე, პროპორციული უნდა იყოს ds ელემენტარული ფართობისა C სფეროზე; ეს ელემენტარული ფართი ტოლია

$$ds = d\theta \; d\varphi \; \cos\varphi,$$

საიდანაც

$$f(\theta, \varphi)\, d\theta d\varphi = A\cos\varphi \; d\theta \; d\varphi; \; f(\theta, \varphi) = A \cos\varphi,$$

სადაც A — პროპორციულობის კოეფიციენტია.

A კოეფიციენტის მნიშვნელობას მოვნახავთ დამოკიდებულებიდან

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta, \varphi) \; d\theta \; d\varphi = 1,$$

საიდანაც

$$A = \frac{1}{4\pi}.$$

ამგვარად, θ და φ კუთხეების განაწილების სიმკვრივე გამოისახება ფორმულით:

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \cos\varphi \quad \text{ან} \begin{cases} 0 < \theta < 2\pi, \\ -\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{10.1.15}$$

მონაკვეთის პროექცია P სიბრტყეზე იქნება:

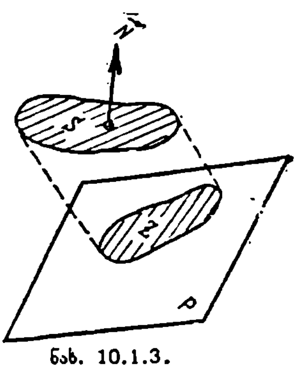
$$Y = l \cos\varphi.$$

Y-ის როგორც ორი θ და φ არგუმენტის ფუნქციის განხილვით და (10.1.7) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$m_y = M[l \cos\varphi] = \frac{l}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{l}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{l\pi}{4} \approx 0{,}785 \; l.$$

ამგვარად, ეკრანზე ნამსხვრევით დატოვებული ნახვრეტის საშუალო სიგრძე ნამსხვრევის სიგრძის 0,785 ნაწილის ტოლია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ბრტყელი ნაკვეთი, რომლის ფართობია S, სივრცეში ბრუნავს უწესრიგოდ, ისე, რომ ყველა ორიენტაცია ამ ნაკვეთისა ერთნაირად საალბათოა. მოვნახოთ S ნაკვეთის, უძრავ P სიბრტყეზე, გეგმილის საშუალო ფართობი (ნახ. 10.1.3).



ნახ. 10.1.3.

ა მ ო ხ ს ნ ა. S ნაკვეთის სიბრტყის მიმართულება სივრცეში დავახასიათოთ ამ სიბრტყის N ნორმალის მიმართულებით. როგორც წინა მაგალითში, P სიბრტყესთან დავაკავშიროთ იგივე სფერული კოორდინატთა სისტემა. S ფართის N ნორმა-

ლის მიმართულება ხასიათდება შემთხვევითი θ და φ კუთხეებით, რომლებიც განაწილებულია (10.1.5) სიმკვრივით. S ნაკვთის P სიბრტყეზე პროექციის Z ფართი ტოლია.

$$Z=S\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right|=S|\sin\varphi|,$$

ხოლო პროექციის საშუალო ფართობი

$$m_z=M]S|\sin\varphi|]=\frac{S}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi|\sin\varphi|d\varphi=\frac{S}{2}.$$

ამგვარად, ნებისმიერად ორიენტირებული ბრტყელი ნაკვთის უძრავ სიბრტყეზე გეგმილის საშუალო ფართობი ამ ნაკვთის ფართობის ნახევრის ტოლია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გარკვეულ ობიექტზე რადიოლოკატორით თვალთვალისას ლაქა, რომელიც გამოსახავს ობიექტს, მუდმივად კაედება ეკრანის ფარგლებში. ეკრანი R რადიუსიანი K წრეა. ლაქა იკავებს ეკრანზე შემთხვევით მდებარეობას ალბათობის მუდმივი სიმკვრივით. მოვნახოთ საშუალო მანძილი ლაქიდან ეკრანის ცენტრამდე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აღვნიშნავთ რა მანძილს D-თი, გვაქვს $D=\sqrt{X^2+Y^2}$, სადაც X, Y — ლაქის კოორდინატებია; $f(x, y)=\frac{1}{\pi R^2}$ K წრის ფარგლებში და ნულის ტოლია მისი ფარგლების გარეთ. (10.1.7) ფორმულის გამოყენებითა და ინტეგრალში პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით გვაქვს:

$$m_D=\frac{1}{\pi R^2}\iint_{(K)}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R r^2dr=\frac{2}{3}R.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. საიმედოობა (უმტყუნებლად მუშაობის ალბათობა) ტექნიკური მოწყობილობისა არის $P(X, Y, Z)$ სამი პარამეტრის გარკვეული ფუნქცია, რომლებიც ახასიათებენ რეგულატორის მუშაობას. პარამეტრები X, Y, Z შემთხვევითი სიდიდეებია ცნობილი განაწილების $f(x, y\ z)$ სიმკვრივით. მოვნახოთ მოწყობილობის საიმედოობის საშუალო მნიშვნელობა (მათემატიკური ლოდინი) და საშუალო კვადრატული გადახრა, რომელიც ახასიათებს ამ მოწყობილობის მდგრადობას.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოწყობილობის საიმედოობა $p(X, Y, Z)$ არის სამი შემთხვევითი X, Y, Z (პარამეტრების) სიდიდის ფუნქცია. მისი საშუალო მნიშვნელობა (მათემატიკური ლოდინი) მოიძებნება (10. 1.8) ფორმულით:

$$m_p=M[p(X, Y, Z)]=\iiint_{-\infty}^{\infty}p(x, y, z)\,f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \tag{10.1.16}$$

(10.1. 14) ფორმულის მიხედვით გვაქვს:

$$D_p=D[p(X, Y, Z)]=\iiint_{-\infty}^{\infty}[p(x, y, z)]^2 f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz-m_p^2, \qquad \sigma=\sqrt{D_p}.$$

(10.1.16) ფორმულა, გამოსახავს მოწყობილობის უმტყუნებლად მუშაობის საშუალო (სრულ) ალბათობას, შემთხვევით სიდიდეთა გათვალისწინებით, რომელზედაც დამოკიდებულია ეს ალბათობა კონკრეტულ შემთხვევაში. ეს კერძო შემთხვევაა ე. წ. ს რ უ ლ ი ა ლ ბ ა თ ო ბ ი ს ი ნ ტ ე გ რ ა ლ უ რ ი ფ ო რ მ უ ლ ი ს ა, რომელიც განაზოგადებს ალბათობის ჩვეულებრივ ფორმულას ჰიპოთეზათა არათვლადი რიცხვის შემთხვევისათვის.

გამოვიყვანოთ ეს ფორმულა ზოგადი სახით. დავუშვათ, რომ ცდა, რომლის დროსაც შეიძლება მოხდეს ან არ მოხდეს ჩვენთვის საინტერესო A ხდომილობა, მიმდინარეობს შემთხვევით წინასწარ უცნობ პირობებში. ვთქვათ ეს პირობები ხასიათდება უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებით

$$X_1,\ X_2,\dots,X_n, \tag{10.1.17}$$

რომელთა განაწილების სიმკვრივეა

$$f(x_1,\ x_2,\dots,x_n).$$

ალბათობა P_A—A ხდომილობის მოხდენის — არის (10.1.17) შემთხვევით სიდიდეთა რომელიღაც ფუნქცია:

$$P_A(X_1,\ X_2,\dots,X_n). \tag{10.1.18}$$

ჩვენთვის საჭიროა მოვნახოთ ამ ალბათობის საშუალო მნიშვნელობა, სხვა სიტყვებით, A ხდომილობის სრული ალბათობა:

$$P_A = M[P_A(X_1,\ X_2,\dots X_n)].$$

(10.1.8) ფორმულის გამოყენებით ფუნქციის მათემატიკური ლოდინისათვის მოვნახავთ:

$$P_A=\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int P_A(x_1,\ x_2,\dots,x_n)f(x_1,\ x_2,\dots,x_n)dx_1dx_2\dots dx_n \tag{10.1.19}$$

(10.1.19) ფორმულას ეწოდება ს რ უ ლ ი ა ლ ბ ა თ ო ბ ი ს ი ნ ტ ე გ რ ა ლ უ რ ი ფ ო რ მ უ ლ ა. არ არის ძნელი შევამჩნიოთ, რომ თავისი სტრუქტურით იგი სრული ალბათობის ფორმულას ჰგავს. თუკი ჰიპოთეზათა დისკრეტულ მწკრივს შევცვლით უწყვეტი ჯამით, ჯამს — ინტეგრალით, ჰიპოთეზის ალბათობას—ალბათობის ელემენტით:

$$f(x_1,\ x_2,\dots,x_n)\ dx_1\ dx_2\dots dx_n,$$

ხოლო მოცემული ჰიპოთეზის ხდომილობის პირობით ალბათობას — ხდომილობის პირობითი ალბათობით შემთხვევით სიდიდეთა ფიქსირებულ მნიშვნელობისას:

$$P_A(x_1,\ x_2,\dots,x_n).$$

სრული ალბათობის ინტეგრალური ფორმულაზე არა ნაკლებ ხშირად სარგებლობენ **სრული მათემატიკური ლოდინის ინტეგრალური ფორმულით.** ეს ფორმულა გამოსახავს შემთხვევითი სიდიდის საშუალო (სრულ) მათემატიკურ ლოდინს, რომლის მნიშვნელობა მიიღება ცდისას, რომლის პირობები წინასწარ არ არის ცნობილი (შემთხვევითია).

თუ ეს პირობები ხასიათდება უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებით

$$X_1, \ X_2, \ldots, X_n$$

რომელთა განაწილების სიმკვრივეა

$$f(x_1, \ x_2, \ldots, x_n),$$

ხოლო Z სიდიდის მათემატიკური ლოდინი არის $X_1, \ X_2, \ldots, X_n$ სიდიდეების ფუნქცია

$$m_z(X_1, \ X_2, \ldots, X_n),$$

მაშინ Z სიდიდის სრული მათემატიკური ლოდინი გამოითვლება ფორმულით:

$$m_z = \int \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int m_z(x_1, \ x_2, \ldots, x_n) f(x_1, \ x_2, \ldots, x_n) \ dx_1 \ dx_2 \ldots dx_n, \tag{10.1.20}$$

რომელსაც ეწოდება **სრული მათემატიკური ლოდინის ინტეგრალური ფორმულა.**

მაგალითი 6. მათემატიკური ლოდინი D მანძილისა, რომელზედაც აღმოჩენილი იქნება ობიექტი ოთხი რადიოლოკაციური სადგურის მეშვეობით, დამოკიდებულია ამ სადგურთა ზოგიერთი ტექნიკური პარამეტრებისაგან:

$$X_1, \ X_2, \ X_3, \ X_4,$$

რომლებიც დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომელთა განაწილების სიმკვრივე

$$f(x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4) = f_1(x_1) \ f_2(x_2) f_3(x_3) f_4(x_4).$$

პარამეტრთა ფიქსირებული მნიშვნელობებისას $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2$, $X_3 = x_3$, $X_4 = x_4$ აღმოჩენის სიშორის მათემატიკური ლოდინი ტოლია

$$m_D \ (x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4).$$

მოვძებნოთ აღმოჩენის სიშორის საშუალო (სრული) მათემატიკური ლოდინი.

ამოხსნა. (10.1.20) ფორმულით, გვაქვს:

$$m_D = \int \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int \int m_D(x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4) \ f_1(x_1) f_2(x_2) f_3(x_3) f_4(x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

წინა პარაგრაფში მოვიყვანეთ მთელი რიგი ფორმულებისა, რომლებიც საშუალებას იძლევიან მოვნახოთ ფუნქციის რიცხვითი მახასიათებლები, როცა ცნობილია არგუმენტთა განაწილების კანონები, მაგრამ ბევრ შემთხვევაში რიცხვითი მახასიათებლების მოსანახავად არ არის საჭირო არგუმენტთა განაწილების კანონების ცოდნაც კი, არამედ საკმარისია ვიცოდეთ მხოლოდ მათი ზოგიერთი რიცხვითი მახასიათებელი; ფუნქციის რიცხვითი მახასიათებლების განსაზღვრა, არგუმენტის მოცემული რიცხვითი მახასიათებლების მიხედვით, ალბათობათა თეორიაში ფართოდ გამოიყენება და საშუალებას იძლევა გამარტივებულ იქნას მთელი რიგი ამოცანათა ამოხსნა. უპირატესად ასეთი გამარტივებული მეთოდები ეხება წრფივ ფუნქციებს; შეიძლება ზოგიერთი არაწრფივი ელემენტარული ფუნქციისთვისაც აგრეთვე დავუშვათ მსგავი მიდგომა.

ამ პარაგრაფში ჩამოვაყალიბებთ ფუნქციის რიცხვით მახასიათებლებზე მთელ რიგ თეორემებს, რომლებიც ერთობლივად წარმოადგენენ ფართო პირობებში გამოსაყენებელ, ამ მახასიათებლების გამოსათვლელ. ფრიად მარტივ აპარატს.

1. *არა შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი*

თუ C არა შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ

$$M[c]=c.$$

ფორმულირებული თვისება საკმაოდ ცხადია. მისი დამტკიცება შეიძლება, არაშემთხვევითი სიდიდის განხილვით, როგორც შემთხვევითის კერძო შემთხვევა, როცა მისი ერთი შესაძლო მნიშვნელობის ალბათობა ერთი იქნება; მაშინ ზოგადი ფორმულით მათემატიკური ლოდინისათვის

$$M[c]=c\cdot 1=c.$$

2. *არაშემთხვევითი სიდიდის დისპერსია*

თუ C არა შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ

$$D[c]=0.$$

დამტკიცება. დისპერსიის განსაზღვრის მიხედვით

$$D[c]=M[\mathring{c}^2]=M[(c-m_c)^2]=M[(c-c)^2]=M[0]=0.$$

3. *არა შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის ნიშნის გარეთ გატანა*

თუ c — არაშემთხვევითი სიდიდეა, ხოლო X — შემთხვევითი, მაშინ

$$M[cX]=cM[X],$$

ე. ი. შესაძლებელია არა შემთხვევითი სიდიდე გამოვიტანოთ მათემატიკური ლოდინის ნიშნის გარეთ

დამტკიცება.

ა) წყვეტილი სიდიდეებისათვის

$$M[cX]=\sum_i cx_i p_i = c\sum_i x_i p_i = cM[X].$$

ბ) უწყვეტი სიდიდეებისათვის

$$M[cX]=\int_{-\infty}^{\infty} cx\, f(x)\, dx = c\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx = cM[X].$$

4. არაშემთხვევითი სიდიდის დისპერსიისა და საშუალო კვადრატულ გადახრათა ნიშნის გარეთ გამოტანა.

თუკი c — არაშემთხვევითი სიდიდეა, ხოლო X — შემთხვევითი, მაშინ

$$D[c\ X]=c^2D[X], \qquad (10.2.2)$$

ე. ი. არაშემთხვევითი სიდიდე შესაძლებელია გამოვიტანოთ დისპერსიის ნიშნის გარეთ მისი კვადრატში აყვანით. დამტკიცება. დისპერსიის განსაზღვრის თანახმად

$$D[cX]=M[(cX-M[cX])^2]= \\ =M[(cX-cm_x)^2]=c^2M[(X-m_x)^2]=c^2D[X].$$

შედეგი

$$\sigma[cX]=|c|\sigma[X],$$

ე. ი. არა შემთხვევითი სიდიდე შესაძლებელია გატანილ იქნას საშუალო კვადრატული გადახრის ნიშნის გარეთ მისი აბსოლიტური მნიშვნელობით. დამტკიცებას მივიღებთ ფორმულით (10.2.2)-დან კვადრატული ფესვის ამოღებით და იმის გათვალისწინებით, რომ ს. კ. გ. არსებითად დადებითი სიდიდეა.

5. შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის მათემატიკური ლოდინი

დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი ორი შემთხვევითი X და Y სიდიდისათვის

$$M[X+Y]=M[X]+M[Y], \qquad (10.2.3)$$

ე. ი. ორი შემთხვევითი სიდიდის ჯამის მათემატიკური ლოდინი მათი მათემატიკურ ლოდინთა ჯამის ტოლია.

ეს თვისება ცნობილია მათემატიკურ ლოდინთა შეკრების თეორემის სახელწოდებით. დამტკიცება.

ა) დავუშვათ (X, Y) წყვეტილ შემთხვევით სიდიდეთა სისტემაა. გამოვიყენოთ ორი არგუმენტის ფუნქციის მათემატიკური ლოდინის გამოსათვლელი ზოგადი ფორმულა (10.1.6) შემთხვევით სიდიდეთა ჯამისათვის:

$$M[X+Y]=\sum_i\sum_j(x_i+y_j)p_{ij}=\sum_i\sum_j x_ip_{ij}+\sum_i\sum_j y_jp_{ij}=$$

$$=\sum_i x_i\sum_j p_{ij}+\sum_j y_j\sum_j p_{ij}.$$

მაგრამ $\sum_j p_{ij}$ სრული ალბათობაა იმისა, რომ X სიდიდე მიიღებს x_i მნიშვნელობას

$$\sum_i p_{ij}=P(X=x_i)=p_i:$$

მაშასადამე

$$\sum_i x_i\sum_j p_{ij}=\sum_i x_ip_i=M[X].$$

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ

$$\sum_j y_j\sum_i p_{ij}=M[Y],$$

და თეორემა დამტკიცებულია.

ბ) ვთქვათ (X, Y)— უწყვეტ შემთხვევით სიდიდეთა სისტემაა. (10.1.7) ფორმულის მიხედვით

$$M[X+Y]=\int\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)dx\,dy=$$

$$=\int\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y,)dx\ dy+\int\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dx\ dy. \qquad (10.2.4)$$

გარდავქმნათ პირველი 10.2.4 ინტეგრალიდან:

$$\int\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dx\ dy=\int_{-\infty}^{\infty}x\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy\right\}dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x)dx=M[X];$$

ანალოგიურად

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int yf(x, y)\,dx\;dy = M[Y],$$

და თეორემა დამტკიცებულია.

სპეციალურად უნდა აღინიშნოს, რომ მათემატიკური ლოდინის შეკრების თეორემა სამართლიანია როგორც დამოკიდებული, ისე დამოუკიდებელი ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის.

მათემატიკურ ლოდინთა შეკრების თეორემა შეიძლება განვაზოგადოთ შესაკრებთა ნებისმიერი რიცხვისას:

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i], \qquad (10.2.5).$$

ე. ი. რამდენიმე შემთხვევითი სიდიდის ჯამის მათემატიკური ლოდინი მათი მათემატიკური ლოდინთა ჯამის ტოლია. დასამტკიცებლად საკმარისია გამოვიყენოთ სრული ინდუქციის მეთოდი.

6. წრფივი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი

განვიხილოთ რამდენიმე შემთხვევით არგუმენტთა წრფივი ფუნქცია $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b,$$

სადაც a, b—არაშემთხვევითი კოეფიციენტებია.

დავამტკიცოთ, რომ

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i M[X_i] + b, \qquad (10.2.6)$$

ე. ი. წრფივი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი ტოლია არგუმენტთა მათემატიკურ ლოდინთა იმავე წრფივი ფუნქციისა:

დამტკიცება, მ. ლ. შეკრებათა თეორემით და ახალ შემთხვევითი სიდიდის მ. ლ. ნიშნის გარეთ გამოტანის წესით თუ ვისარგებლებთ, მივიღებთ:

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = M\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] + M[b] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M[a_i X_i] + b = \sum_{i=1}^{n} a_i M[X_i] + b.$$

7. შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის დისპერსია

ორი შემთხვევითი სიდიდის ჯამის დისპერსია ტოლია მათი დისპერსიების ჯამს პლუს გაორკეცებული კორელაციური მომენტი:

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y]+2K_{xy}. \qquad (10.2.7)$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ

$$Z=X+Y. \qquad 10.2.8)$$

მათემატიკურ ლოდინთა შეკრების თეორემის მიხედვით

$$m_z=m_x+m_y. \qquad (10.2.9)$$

შემთხვევით X, Y, Z სიდიდეებიდან გადავიდეთ შესაბამის დაცენტრებულ $\mathring{X}$, $\mathring{Y}$, $\mathring{Z}$ სიდიდეებზე.

თუ (10.2.8) ტოლობას წევრ-წევრა გამოვაკლებთ (10.2.9) ტოლობას, გვექნება:

$$\mathring{Z}=\mathring{X}+\mathring{Y}$$

დისპერსიის განსაზღვრის მიხედვით

$$D[X+Y]=D[Z]=M[\mathring{Z}^2]=$$
$$=M[\mathring{X}^2]+2M[\mathring{X}\mathring{Y}]+M[\mathring{Y}^2]=D[X]+2K_{xy}+D[Y].,$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ფორმულა (10.2.7) ჯამის დისპერსიისათვის შეიძლება განზოგადოებულ იქნას შესაკრებთა ნებისმიერ რიცხვზე:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} D\,[X_i]+2\sum_{i<j} K_{ij}, \qquad (10.2.10)$$

სადაც K_{ij} X_i და X_j სიდიდეთა კორელაციური მომენტია;

ნიშანი $i<j$ ჯამქვეშ აღნიშნავს, რომ აჯამვა ვრცელდება შემთხვევით (X_1, $X_2, \ldots, X_n$) სიდიდეთა წყვილ-წყვილად ყველა შესაძლო დაჯგუფებებზე. მტკიცება წინა მტკიცების ანალოგიურია და გამომდინარეობს მრავალწევრის კვადრატის ფორმულიდან.

10.2. 10 ფორმულა შესაძლოა ჩაიწეროს კიდევ შემდეგი სახით:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}, \qquad (10.2.11)$$

სადაც ორმაგი ჯამი ვრცელდება (X_1, X_2, …, X_n) სიდიდეთა სისტემის კორელაციური მატრიცის ყველა ელემენტზე, რომელიც შეიცავს, როგორც კორელაციურ მომენტებს, ისე დისპერსიებს.

- თუკი სისტემაში შემავალი ყველა შემთხვევითი $X_1, X_2, \ldots, X_n$ სიდიდეები არა კორელირებულია (ე. ი. $K_{ij}=0$, როცა $i \neq j$), 10.2.10 ფორმულა ღებულობს სახეს;

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} D[X_i], \tag{10.2.12}$$

ე. ი. არაკორელირებულ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის დისპერსია შესაკრებთა დისპერსიების ჯამის ტოლია. ეს დებულება ცნობილია დისპერსიათა შეკრების თეორემის სახელწოდებით.

• 8. წრფივი ფუნქციის დისპერსია

განვიხილოთ რამდენიმე შემთხვევითი სიდიდეთა წრფივი ფუნქცია

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b,$$

სადაც a_i, b არა შემთხვევით სიდიდეებია.

დავამტკიცოთ, რომ ამ წრფივი ფუნქციის დისპერსია გამოისახება ფორმულით:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right]=\sum_{i=1}^{n} a^2{}_i D[X_i]+2\sum_{i<j} a_i a_j K_{ij}, \tag{10.2.13}$$

სადაც K_{ij} —X_i X_i, სიდიდეთა კორელაციური მომენტია:
დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$Y_i = a_i X_i.$$

მაშინ

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b = \sum_{i=1}^{n} Y_i + b. \tag{10.2.14}$$

(10.2.14) გამოსახულების მარჯვენა ნაწილში (10. 2. 10) ფორმულის გამოყენებით და იმის გათვალისწინებით, რომ $D\ [b]=0$, ჯამის დისპერსიისათვის მივიღებთ:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right]=\sum_{i=1}^{n} D[Y_i] + 2\sum_{i<j} K_{ij}^{(y)} = \sum_{i=1}^{n} a^2{}_i D[X_i] + 2\sum_{i<j} K_{ij}^{(y)}, \tag{10.2.15}$$

სადაც $K^{(y)}_{ij}$ — Y_i, Y_j სიდიდეების კორელაციური მომენტია.

$$K^{(y)}_{ij}=M[\mathring{Y}_i\,\mathring{Y}_j].$$

გამოვითვალოთ ეს მომენტი. გვექნება:

$$\mathring{Y}_i=Y_i-m_{yi}=a_iX_i-a_im_{xi}=a_i\mathring{X}_i;$$

ანალოგიურად

$$\mathring{Y}_j=a_j\mathring{X}_j.$$

აქედან

$$K^{(y)}_{ij}=M[a_ia_j\mathring{X}_i\mathring{X}_j]=a_ia_jM[\mathring{X}_i\mathring{X}_j]=a_ia_jK_{ij}.$$

ამ გამოსახულების (10.2.15)-ში ჩასმით (10.2.13) ფორმულას მივიღებთ. კერძო შემთხვევაში, როცა ყველა სიდიდეები ($X_1, X_2, \dots, X_n$) არაკორელირებულია, (10.2.13) ფორმულა ღებულობს სახეს:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+b\right]=\sum_{i=1}^{n}a_i^2D[X_i], \tag{10.2.16}$$

ე. ი. არაკორელირებულ შემთხვევით სიდიდეთა წრფივი ფუნქციის დისპერსია კოეფიციენტთა კვადრატების შესაბამის არგუმენტების დისპერსიაზე ნამრავლის ჯამის ტოლია.[1]

• 9. შემთხვევით სიდიდეთა ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი

ორი შემთხვევითი სიდიდეთა ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი ტოლია მის მათემატიკურ ლოდინთა ნამრავლს პლუს კორელაციური მომენტი:

$$M[XY]=M[X]M[Y]+K_{xy}. \tag{10.2.17}$$

დამტკიცება. გამოვიდეთ კორელაციური მომენტის განსაზღვრიდან:

$$K_{xy}=M[\mathring{X}\mathring{Y}]=M[(X-m_x)\ (Y-m_y)],$$

სადაც

$$m_x=M[X];\quad m_y=M[Y].$$

---

[1] ვინაიდან დამოუკიდებელი სიდიდეები ყოველთვის არაკორელირებულია, ამ პარაგრაფში არაკორელირებულ სიდიდეებზე დამტკიცებული ყველა თვისება სამართლიანია დამოუკიდებელი სიდიდეებისათვის.

ვისარგებლოთ მათემატიკური ლოდინის თვისებით, და გარდავქმნათ ეს გამოსახულება:

$$K_{xy}=M[(X-m_x)(Y-m_y)]=$$
$$=M[XY]-m_xM[Y]-m_yM[X]+m_xm_y=M[XY]-M[X]\ M[Y],$$

რაც, ცხადია (10.2.17) ფორმულის ტოლძალოვანია.

თუკი შემთხვევითი $(X,\ Y)$ სიდიდები არაკორელირებულია $(K_{xy}=0)$, მაშინ (10.2.17) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$M[XY]=M[X]M[Y], \tag{10.2.18}$$

ე. ი. ორი არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდის ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი ტოლია მათ მათემატიკურ ლოდინთა ნამრავლისა.

ეს დებულება ცნობილია მათემატიკურ ლოდინთა ნამრავლის თეორემის სახელწოდებით.

(10. 2. 17) ფორმულა სისტემის მეორე შერეული ცენტრალური მომენტის გამოსახულებაა. მეორე შერეული საწყისი მომენტით და მათემატიკური ლოდინის საშუალებით.

$$K_{xy}=\mu_{11}=\alpha_{11}-m_xm_y \tag{10.2.19}$$

ეს გამოსახულება ხშირად გამოიყენება პრაქტიკაში კორელაციური მომენტის გამოთვლისას, ანალოგიურად იმისა, როგორც ერთი შემთხვევითი სიდიდისათვის დისპერსია ხშირად გამოითვლება მეორე საწყისი მომენტისა და მათემატიკური ლოდინის საშუალებით.

მათემატიკურ ლოდინთა გამრავლების თეორემის განზოგადოება ხდება თანამამრავლთა ნებისმიერ რიცხვზეც, მხოლოდ ამ შემთხვევაში მისი გამოყენებისათვის არ არის საკმარისი ის, რომ სიდიდეები არაკორელირებულია, არამედ საჭიროა, ზოგიერთი უმაღლესი შერეული მომენტი ნული გახდეს, რომელთა რიცხვი დამოკიდებულია ნამრავლში წევრთა რიცხვისაგან. ეს პირობები უთუოდ შესრულებულია ნამრავლში შემავალ შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობის დროს. ამ შემთხვევაში

$$M\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right]=\prod_{i=1}^{n} M[X_i], \tag{10.2.20}$$

ე. ი. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი ტოლია მათი მათემატიკურ ლოდინთა ნამრავლისა. ეს დებულება იოლად მტკიცდება სრული ინდუქციის მეთოდით.

10. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ნამრავლის დისპერსია

დავამტკიცოთ, რომ დამოუკიდებელ XY სიდიდეებისათვის

$$D[XY]=D[X]D[Y]+m^2_xD[Y]+m^2_yD[X]. \quad (10.2.21)$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $XY=Z$. დისპერსიის განსაზღვრიდან

$$D[XY]=D[Z]=M[\overset{\circ}{Z}{}^2]=M[(Z-m_z)^2].$$

რადგან X, Y სიდიდეები დამოუკიდებლებია, $m_z=m_x m_y$ და

$$D[XY]=M[(XY-m_xm_y)^2]=$$
$$=M[X^2Y^2]-2m_xm_yM[XY]+m^2_xm^2_y.$$

დამოუკიდებელ X, Y-ის შემთხვევაში X^2, Y^2 სიდიდეები აგრეთვე დამოუკიდებელია[1]; მაშასადამე,

$$M[X^2Y^2]=M[X^2]M[Y^2],\quad M[XY]=m_xm_y$$

და

$$D[XY]=M[X^2]M[Y^2]-m^2_xm^2_y. \quad (10.2.22)$$

მაგრამ $M[X^2]$ არის X სიდიდის მეორე საწყისი მომენტი, და, მაშასადამე, გამოისახება დისპერსიის საშუალებით:

$$M[X^2]=D[X]+m^2_x;$$

ანალოგიურად

$$M[Y^2]=D[Y]+m^2_y.$$

ამ გამოსახულებათა (10.2.22) ფორმულაში ჩასმით და მსგავსი წევრების შეკრებით მივალთ (10.2.21) ფორმულამდე.

იმ შემთხვევაში, როცა ხდება ცენტრირებულ შემთხვევით სიდიდეთა (სიდიდეები, რომელთა მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლია) გადამრავლება, (10.2.21) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$D[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}]=D[\overset{\circ}{X}]D[\overset{\circ}{Y}], \quad (10.2.23)$$

ე. ი. დამოუკიდებელ ცენტრირებულ სიდიდეთა ნამრავლის დისპერსია მათი დისპერსიების ნამრავლის ტოლია.

11. შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის უმაღლესი მომენტები

ზოგიერთ შემთხვევაში გვიხდება დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდი-

---

[1] შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი ფუნქციები დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებიდან, აგრეთვე დამოუკიდებელია.

დეთა ჯამის უმაღლესი მომენტების გამოთვლა. დავამტკიცოთ მასთან დაკავშირებული ზოგიერთი თანაფარდობა:

1) თუ X, Y სიდიდეები დამოუკიდებელია, მაშინ

$$\mu_3[X+Y]=\mu_3[X]+\mu_3[Y]. \tag{10.2.24}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა.

$$\begin{aligned}\mu_3[X+Y]&=M[(X+Y-m_x-m_y)^3]=\\ &M[\{(X-m_x)+(Y-m_y)\}^3]=\\ &=M[(X-m_x)^3]+3M\ [(X-m_x)^2\ (Y-m_y)]+\\ &\qquad+3M[(X-m_x)\ (Y-m_y)^2]+M[(Y-m_y)^3],\end{aligned}$$

საიდანაც მათემატიკურ ლოდინთა გამრავლების თეორემის მიხედვით

$$\mu_3[X+Y]=\mu_3[X]+3\mu_2[X]\mu_1[Y]+3\mu_1[Y]\mu_2[X]+\mu_3[Y].$$

მაგრამ პირველი ცენტრალური მომენტი μ_1 ნებისმიერი სიდიდისათვის ნულის ტოლია; ორი შუა წევრი იქცევა ნულად და ფორმულა (10.2.24) დამტკიცებულია. თანაფარდობა (10.2.24) ინდუქციის მეთოდით შესაძლებელია ადვილად იქნას განზოგადოებული დამოუკიდებელ შესაკრებთა ნებისმიერ რიცხვზე:

$$\mu_3\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\mu_3[X_i]. \tag{10.2.25}$$

2) ორი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდის ჯამის მეოთხე ცენტრალური მომენტი გამოისახება ფორმულით

$$\mu_4[X+Y]=\mu_4[X]+\mu_4[Y]+6D_xD_y, \tag{10.2.26}$$

სადაც D_x, D_y — X და Y სიდიდეთა დისპერსიებია. დამტკიცება სავსებით წინას ანალოგიურია.

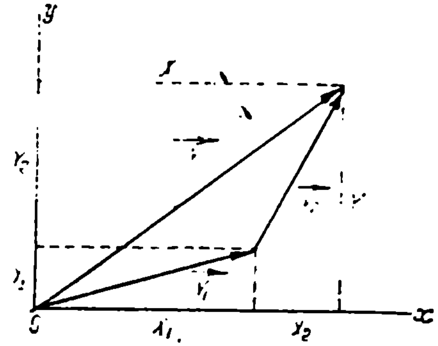
სრული ინდუქციის მეთოდით იოლია დავამტკიცოთ (10.2.26) ფორმულის განზოგადოება დამოუკიდებელ შესაკრებთა ნებისმიერ რიცხვზე.

$$\mu_4\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\mu_4[X_i]+6\sum_{i<j}D_{x_i}D_{y_j}. \tag{10.2.27}$$

ანალოგიური თანაფარდობანი საჭიროების შემთხვევაში ადვილია გამოვიყვანოთ უფრო მაღალი რიგის მომენტებისათვის.

12. არაკორელირებული შემთხვევითი ვექტორების შეკრება.

განვიხილოთ xOy სიბრტყეზე არაკორელირებული შემთხვევითი ვექტორები: (ნახ. 10.2.1). $\vec{V_1}$ ვექტორი, რომლის მდგენელებია (X_1 Y_1) და $\vec{V_2}$ ვექტორი, რომლის მდგენელებია (X_2, Y_2). განვიხილოთ მათი ვექტორული ჯამი:



ნახ. 10.2.1.

$$\vec{V}=\vec{V}_1+\vec{V}_2,$$

ე. ი. ვექტორი მდგენელებით

$$X=X_1+X_2,$$
$$Y=Y_1+Y_2.$$

საჭიროა განვსაზღვროთ შემთხვევითი $\vec{V}$ ვექტორის რიცხვითი მახასიათებლები — მათემატიკური m_x, m_y ლოდინები, მდგენელთა დისპერსიები და კორელაციური მომენტი: D_x, D_y, K_{xy}. მათემატიკური ლოდინის შეკრების თეორემის მიხედვით:

$$m_x=m_{x_1}+m_{x_2};$$
$$m_y=m_{y_1}+m_{y_2}.$$

დისპერსიათა შეკრების თეორემის მიხედვით

$$D_x=D_{x_1}+D_{x_2};$$
$$D_y=D_{y_1}+D_{y_2}.$$

დავამტკიცოთ, რომ კორელაციური მომენტები, აგრეთვე იკრიბება:

$$K_{xy}=K_{x_1y_1}+K_{x_2y_2}, \qquad (10.2.8)$$

სადაც $K_{x_1y_1}$, K_{x_2,y_2} — შესაბამისად $\vec{V}_1$ და $\vec{V}_2$ ვექტორების მდგენელების კორელაციური მომენტებია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. კორელაციური მომენტის განსაზღვრის თანახმად:

$$K_{xy}=M[\mathring{X}\mathring{Y}]=M[(\mathring{X}_1+\mathring{X}_2)\ (\mathring{Y}_1+\mathring{Y}_2)]=$$
$$=M[\mathring{X}_1\mathring{Y}_1]+M[\mathring{X}_2\mathring{Y}_1]+M[\mathring{X}_1\mathring{Y}_2]+M[\mathring{X}_2\mathring{Y}_2]. \qquad (10.2.29)$$

ვინაიდან $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ ვექტორები არაკორელირებული არიან, ამიტომ (10. 2. 29) ფორმულაში ორი შუა წევრი ნულის ტოლია; ორი დარჩენილი წევრი წარმოადგენს $K_{x_1y_1}$ და $K_{x_2y_2}$-ს; 10.2.28 ფორმულა დამტკიცე-

ბულია. 10.2.28 ფორმულას ზოგჯერ უწოდებენ „კორელაციურ მომენტების შეკრების თეორემას."

თეორემის განზოგადოება შესაკრებთა ნებისმიერ რიცხვზე იოლად ხდება, თუკი გვაქვს შემთხვევით სიდიდეთა ორი არაკორელირებული სისტემა, ე. ი. ორი n განზომილებიანი შემთხვევითი ვექტორი:

$$\vec{X}-X_1,\quad X_2,\dots,X_n \quad \text{მდგენელებით.}$$

$$\vec{Y}-Y_1,\quad Y_2,\dots,Y_n \quad \text{მდგენელებით,}$$

მაშინ მათ ვექტორულ ჯამს

$$\vec{Z}=\vec{X}+\vec{Y}$$

აქვს კორელაციური მატრიცა, რომლის ელემენტები მიიღებიან შესაკრებთა კორელაციური მატრიცის შეჯამებით

$$K_{ij}^{(z)}=K_{ij}^{(x)}+K_{ij}^{(y)}, \tag{10.2.30}$$

სადაც $K_{ij}^{(z)}$, $K_{ij}^{(x)}$, $K_{ij}^{(y)}$ — აღნიშნავენ შესაბამისად (Z_i, Z_j); (X_i, X_j), (Y_i, Y_j) სიდიდეთა კორელაციურ მომენტებს.

(10.2.30) ფორმულა სამართლიანია, როგორც, როცა $i=j$, ისე, როცა $i\neq j$.

მართლაც, $\vec{Z}$ ვექტორის მდგენელები ტოლია:

$$\begin{aligned} Z_1&=X_1+Y_1;\\ Z_2&=X_2+Y_2;\\ &\cdot\\ Z_n&=X_n+Y_n. \end{aligned}$$

დისპერსიათა შეკრების თეორემის მიხედვით

$$D_{zi}=D_{xi}+D_{yi},$$

ანდა სხვა აღნიშვნებში

$$K_{ii}^{(z)}=K_{ii}^{(x)}+K_{ii}^{(y)}.$$

კორელაციური მომენტების შეკრების თეორემის მიხედვით როცა $(i\neq j)$

$$K_{ij}^{(z)}=K_{ij}^{(x)}+K_{ij}^{(y)}.$$

მათემატიკაში ორი მატრიცის ჯამი ეწოდება მატრიცას, რომლის ელემენტები მიიღება ამ მატრიცათა შესაბამისი ელემენტების შეკრებით. ვსარგებლობთ რა ამ ტერმინოლოგიით, შეიძლება ვთქვათ, რომ ო რ ი ა რ ა კ ო რ ე ლ ი რ ე ბ უ ლ ი შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი ვ ე ქ ტ ო რ ი ს

ჯ ა მ ი ს კ ო რ ე ლ ა ც ი უ რ ი მ ა ტ რ ი ც ა შ ე ს ა კ რ ე ბ თ ა კ ო-რ ე ლ ა ც ი უ რ ი მ ა ტ რ ი ც ე ბ ი ს ჯ ა მ ი ს ტ ო ლ ი ა:

$$\| K_{ij}^{(z)} \| = \| K_{ij}^{(x)} \| + \| K_{ij}^{(y)} \|. \tag{10.2.31}$$

ეს წესი წინას ანალოგიით შეიძლება წოდებულ იქნას „კორელაციურ მატრიცათა შეკრების თეორემად,"

10.3. რიცხვითი მახასიათებლების შესახებ თეორემების გამოყენება

მოცემულ პარაგრაფში მოვახდენთ დემონსტრაციას რიცხვითი მახასიათებლის აპარატის გამოყენებისა მთელი რიგი ამოცანების ამოსახსნელად. ზოგიერთს ამ ამოცანებიდან აქვს დამოუკიდებელი თეორიული მნიშვნელობა და შემდგომში გამოიყენებიან. სხვა ამოცანები მაგალითების ხასიათისაა და კონკრეტულ ციფრულ მასალაზე გამოყვანილი ზოგადი ფორმულების საილუსტრაციოდ მოიყვანებიან.

ა მ ო ც ა ნ ა 1. წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი ს ი დ ი დ ე თ ა კ ო რ ე ლ ა ც ი ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ი.

დავამტკიცოთ, რომ თუკი შემთხვევითი X და Y სიდიდეები დაკავშირებულია წრფივი ფუნქციონალური დამოკიდებულებით

$$Y = aX + b,$$

მაშინ მათი კორელაციის კოეფიციენტი a კოეფიციენტის ნიშნის მიხედვით $+1$ ან და -1-ის, ტოლია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს:

$$\begin{aligned} K_{xy} &= M[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}] = M[X - m_x) \quad (Y - m_y)] = \\ &= M[(X - m_x) \quad (aX + b - am_x - b)] = aM[(X - m_x)^2] = aD_x, \end{aligned}$$

სადაც D_x—X სიდიდის დისპერსია.

კორელაციის კოეფიციენტისათვის გვაქვს გამოსახულება:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \tag{10.3·1}$$

σ_y-ის განსაზღვრისათვის მოვნახოთ Y სიდიდის დისპერსია.

$$D_y = D[aX + b] = a^2 D_x,$$
$$\sigma_y = |a| \sigma_x$$

(10.3.1.) ფორმულაში ჩასმით, მივიღებთ

$$r_{xy} = \frac{aD_x}{|a| \sigma^2_x} = \frac{a}{|a|}.$$

$\frac{a}{|a|}$ სიდიდე 1-ის ტოლია, როცა a დადებითია, და -1, როცა a უარყოფითია. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ა მ ო ც ა ნ ა 2. კ ო რ ე ლ ა ც ი ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ი ს ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ი

დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდისათვის $|r_{xy}| \leqslant 1$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე:

$$Z = \sigma_y X \pm \sigma_x Y,$$

სადაც σ_x, σ_y—XY სიდიდეთა საშუალო კვადრატული გადახრებია. განვსაზღვროთ Z სიდიდის დისპერსია. 10.2.13 ფორმულით. გვაქვს:

$$D_z = \sigma^2{}_y D_x + \sigma^2{}_x D_y \pm 2\sigma_x \sigma_y K_{xy},$$

ანდა

$$D_z = 2\sigma^2{}_x \sigma^2{}_y \pm 2\sigma_x \sigma_y K_{xy}.$$

ვინაიდან ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია არ შეიძლება უარყოფითი იყოს.

$$2\sigma^2{}_x \sigma^2{}_y \pm 2\sigma_x \sigma_y K_{xy} \geqslant 0,$$

ანდა

$$\sigma_x \sigma_y + K_{xy} \geqslant 0.$$

საიდანაც

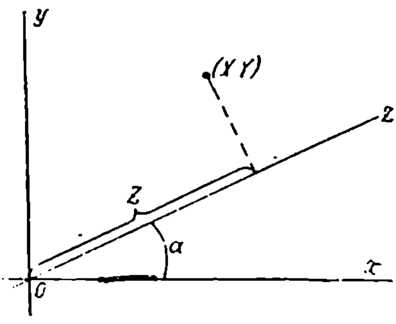
$$|K_{xy}| \leqslant \sigma_x \sigma_y,$$

მაშასადამე

$$|r_{xy}| \leqslant 1.$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ა მ ო ც ა ნ ა 3. ს ი ბ რ ტ ყ ი ს შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი წ ე რ ტ ი ლ ი ს დ ა გ ე გ მ ი ლ ე ბ ა ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ წ რ ფ ე ზ ე.



ნახ. 10.3.1

მოცემულია შემთხვევითი წერტილი სიბრტყეზე, რომლის კოორდინატებია X, Y (ნახ. 10.3.1). დავაგეგმილოთ ეს წერტილი OZ ღერძზე, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე α კუთხით OX ღერძის მიმართ.

(XY) წერტილის გეგმილი ღერძზე აგრეთვე შემთხვევითი წერტილია; მისი დაშორება Z კოორდინატის საწყისიდან არის შემთხვევითი სიდიდე. საჭიროა მოვნახოთ Z სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

ამოხსნა. გვაქვს:

$$Z = X \cos \alpha + Y \sin \alpha.$$

რამდენადაც Z არის X და Y არგუმენტების წრფივი ფუნქცია ამიტომ

$$m_z = m_x \cos\alpha + m_y \sin\alpha;$$

$$D_z = D_x \cos^2\alpha + D_y \sin^2\alpha + 2K_{xy} \sin\alpha \cos\alpha =$$
$$= D_x \cos^2\alpha + D_y \sin^2\alpha + K_{xy} \sin 2\alpha,$$

სადაც D_x, D_y, K_{xy} — (X, Y) სიდიდის დისპერსიები და კორელაციური მომენტია. საშუალო კვადრატულ გადახრაზე გადასვლით მივიღებთ

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 \cos^2\alpha + \sigma_y^2 \sin^2\alpha + r_{xy}\sigma_x\sigma_y \sin 2\alpha. \qquad (10.3.2)$$

არაკორელირებულ შემთხვევით სიდიდეებისას (როცა $r_{xy} = 0$)

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 \cos^2\alpha + \sigma_y^2 \sin^2\alpha. \qquad (10.3.3.)$$

ამოცანა 4. რამდენიმე ცდისას ხდომილობის მოხდენის რიცხვის მათემატიკური ლოდინი. წარმოებს n ცდა, რომელთაგან თითოეულში შეიძლება მოხდეს ან არ მოხდეს A ხდომილობა. A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა i-ურ ცდაში ტოლია P_i-სი. მოვნახოთ ხდომილობის მოხდენის რიცხვის ალბათობა.

ამოხსნა. განვიხილოთ წყვეტილი შემთხვევითი X სიდიდე — ცდათა მთელ სერიაში ხდომილობის მოხდენის რიცხვი. ცხადია,

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

სადაც X_1 — პირველ ცდაში ხდომილობის მოხდენის რიცხვია,
X_2 — მეორე ცდაში ხდომილობის მოხდენის რიცხვი,
X_n — n-ურ ცდაში ხდომილობის მოხდენის რიცხვი, ანდა, მოკლედ,

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

სადაც X_i — i-ურ ცდაში ხდომილობის მოხდენის რიცხვია[1]. თითოეული X_i სიდიდეთაგანი არის წყვეტილი შემთხვევითი სიდიდე, რომელსაც ორი შესაძლო, 0 და 1 მნიშვნელობა აქვს. X_i — სიდიდის განაწილების მწკრივს აქვს სახე:

0	1
q_i	p_i

(10.3.4)

[1] სხვაგვარად — A ხდომილობის მახასიათებელი შემთხვევითი სიდიდე i-ურ ცდაში

სადაც $q_i=1-p_i$ — ალბათობაა i-ურ ცდაში A ხდომილობის არ მოხდენისა. მათემატიკურ ლოდინთა შეკრების თეორემის მიხედვით

$$m_x=M[X]=\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}, \tag{10.3.5}$$

სადაც m_{x_i}—X_i სიდიდის მათემატიკური ლოდინია.
გამოვთვალოთ X_i სიდიდის მათემატიკური ლოდინი. მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრების მიხედვით.

$$m_{x_i}=0\cdot q_i+1\cdot p_i=p_i,$$

ამ გამოსახულების (10.3.5) ფორმულაში ჩასმით, მივიღებთ

$$m_x=\sum_{i=1}^{n} p_i, \tag{10.3.6}$$

ე. ი. რამდენიმე ცდისას ხდომილობის მოხდენის რიცხვის მათემატიკური ლოდინი ცალკეულ ცდებში ხდომილობათა ალბათობების ჯამის ტოლია.

კერძოდ, როცა ცდის პირობები ერთნაირია და

$$p_1=p_2=\ldots=p_n=p$$

(10. 3.5) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$m_x=np. \tag{10.3.7}$$

რადგან მათემატიკურ ლოდინთა შეკრების თეორემა სამართლიანია ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდისათვის, როგორც დამოკიდებულის, ისე დამოუკიდებლებისათვის, (10.3.6) და (10.3.7) ფორმულები სამართლიანია ნებისმიერი ცდებისათვის—დამოკიდებულის და დამოუკიდებელისათვის.

გამოყვანილი თეორემა ხშირად გამოიყენება სროლის თეორიაში, როცა საჭიროა მოვნახოთ მოხვედრათა საშუალო რიცხვი რამდენიმე გასროლისას—დამოკიდებულის ან დამოუკიდებელის.

რამდენიმე გასროლისას მოხვედრათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი ცალკეულ გასროლების მოხვედრათა ალბათობათა ჯამის ტოლია.

ამოცანა. 5. ხდომილობის მოხდენის რიცხვის დისპერსია რამდენიმე დამოუკიდებელი ცდისას.

წარმოებს n დამოუკიდებელი ცდა, რომელთაგან თითოეულში შეიძლება მოხდეს A ხდომილობა, ამასთან i-ურ ცდაში A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა P_i-ის ტოლია. მოვნახოთ დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა A ხდომილობის მოხდენისა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ შემთხვევითი X სიდიდე — A ხდომილობის მოხდენის რიცხვი. ისევე როგორც წინა ამოცანაში, X სიდიდე წარმოვადგინოთ ჯამის სახით:

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

სადაც X_i — i-ურ ცდაში ხდომილობის მოხდენის რიცხვია.
ცდათა დამოუკიდებლობის ძალით X_1 $X_2,\ldots X_n$ სიდიდეები დამოუკიდებელია და მათთვის გამოიყენება დისპერსიათა შეკრების თეორემა:

$$D_x=\sum_{i=1}^{n} D_{x_i}.$$

ვიპოვოთ შემთხვევითი X_i სიდიდის დისპერსია.
განაწილების (10.3.4) მწკრივიდან გვაქვს:

$$D_{x_i}=(0-p_i)^2 q_i+(1-p_i)^2 p_i=p_i q_i,$$

საიდანაც

$$D_x=\sum_{i=1}^{n} p_i q_i, \tag{10.3.8}$$

ე. ი. რამდენიმე დამოუკიდებელი ცდისას ხდომილობათა მოხდენის რიცხვის დისპერსია ხდომილობათა მოხდენის და არ მოხდენის ალბათობათა ჯამის ტოლია თითოეულ ცდაში. (10.3.8) ფორმულიდან ვპოულობთ A ხდომილობის მოხდენათა რიცხვის საშუალო კვადრატულ გადახრას:

$$\sigma_x=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i q_i}. \tag{10.3.9}$$

ცდების უცვლელ პირობებში, როცა $p_1=p_2=\ldots=p_n=p$.
(10.3.8) და (10.3.9) ფორმულები მარტივდება და ღებულობს სახეს:

$$\left.\begin{aligned} D_x&=npq, \\ \sigma_x&=\sqrt{npq}. \end{aligned}\right\} \tag{10.3.10}$$

ა მ ო ც ა ნ ა 6. დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ც დ ე ბ შ ი ხ დ ო მ ი ლ ო ბ ა თ ა მ ო ხ დ ე ნ ი ს რ ი ც ხ ვ ი ს დ ი ს პ ე რ ს ი ა.

წარმოებს n დამოკიდებული ცდა, რომელთაგან თითოეულში შეიძლება მოხდეს A ხდომილობა, თანაც i-ურ ცდისას A ხდომილობის ალბათობა $p_i(i=1, 2...n)$-ის ტოლია. განვსაზღვროთ ხდომილობათა მოხდენის რიცხვის დისპერსია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. იმისათვის, რომ ამოვხსნათ ამოცანა, ხდომილობათა მოხდენის X რიცხვი ხელახლა წარმოვადგინოთ ჯამის სახით:

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{10.3.11}$$

სადაც

$$X_i=\begin{cases} 1, \text{თუ } i\text{-ურ ცდაში ხდომილობა } A \text{ მოხდა,} \\ 0, \text{ თუ } i\text{-ურ ცდაში ხდომილობა } A \text{ არ მოხდა.}\end{cases}$$

რადგან ცდები დამოკიდებულია, ჩვენთვის არ არის საკმარისი ცოდნა $p_1, p_2...p_n$ ალბათობებისა, იმისა, რომ ხდომილობა A მოხდება პირველ, მეორე, მესამე და ა.შ. ცდებისას. საჭიროა კიდევ ცდათა დამოკიდებულების მახასიათებლების მოცემა. თურმე ჩვენი ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისია A ხდომილობის, როგორც i-ურ, ისე j-ურ ცდაში ერთდროულად მოხდენის ალბათობის მოცემა:

$$P((X_i=1)(Xj=1)=P_{ij}.$$

დავუშვათ, რომ ეს ალბათობები მოცემულია. გამოვიყენებთ (10.3.11) გამოსახულებაში ჯამის დისპერსიის თეორემას (10.2.10) ფორმულას:

$$D_x=\sum_{i=1}^{n} D_{x_i}+2\sum_{i<j} K_{ij}, \tag{10.3.12}$$

სადაც K_{ij} — X_i X_j სიდიდეების კორელაციური მომენტია:

$$K_{ij}=M[\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{X}_j/].$$

(10.2.19) ფორმულით

$$K_{ij}=M[X_iX_j]-m_{x_i}m_{x_j}=M[X_iX_j]-p_ip_j. \tag{10.3.13}$$

განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე X_i X_j. ცხადია იგი ნულის ტოლია, თუ თუნდაც ერთი X_i, X_j სიდიდეებიდან ნულის ტოლია, ე. ი. თუნდაც ცდებიდან (i-ურ ანდა j-ურ) ერთ-ერთში ხდომილობა A არ მოხდა. იმისათვის, რომ სიდიდე X_i X_j ერთის ტოლი იყოს, საჭიროა, რომ ორივე

(i-ურ და j-ურ) ცდაში A ხდომილება მოხდეს. მისი ალბათობა P_{ij}-ის ტოლია. მაშასადამე,

$$M[X_i X_j]=P_{ij},$$
$$K_{ij}=P_{ij}-p_i p_j.$$

ამ გამოსახულებაში (10.3.12) ფორმულის ჩასმით მივიღებთ:

$$D_x=\sum_{i=1}^{n} p_i q_i+2\sum_{i<j}(P_{ij}-p_i p_j). \tag{10.3.14}$$

(10.3.14) ფორმულა კი გამოხატავს დამოკიდებული ცდებისას ხდომილობათა მოხდენის რიცხვის დისპერსიას. გავაანალიზოთ ამ ფორმულის სტრუქტურა. ფორმულის მარჯვენა ნაწილის პირველი წევრი დამოუკიდებელი ცდებისას ხდომილობათა მოხდენის რიცხვის დისპერსიაა, ხოლო მეორე „დამოკიდებულობაზე შესწორებას" იძლევა. თუკი ალბათობა P_{ij} ტოლია $p_i\ p_j$, ეს შესწორება ნულის ტოლია. თუკი ალბათობა P_{ij} მეტია, ვიდრე $p_i\ p_j$, ეს ნიშნავს იმას, რომ A ხდომილობის i-ურ ცდაში მოხდენის პირობითი ალბათობა მეტია, ვიდრე უბრალო (უპირობო) ალბათობა, ხდომილობის j-ურ ცდაში მოხდენისა (i-ურ და j-ურ ცდებში ხდომილობათა მოხდენებს შორის გვაქვს დადებითი კორელაცია). თუკი ეს ასეა ცდათა ნებისმიერი წყვილისათვის, მაშინ შემასწორებელი წევრი (10.3.14) ფორმულაში დადებითია და ხდომილობათა მოხდენის რიცხვის დისპერსია დამოკიდებულ ცდებში მეტია, ვიდრე დამოუკიდებელში. თუ P_{ij} ალბათობა ნაკლებია, ვიდრე $p_i p_j$ (i-ურ და j-ურ ცდებში ხდომილობათა მოხდენებს შორის არსებობს უარყოფითი კორელაცია), მაშინ შესაბამისი შესაკრები უარყოფითია. თუ ცდათა ნებისმიერი წყვილისათვის ეს ასეა, მაშინ ხდომილობათა მოხდენის რიცხვის დისპერსია დამოკიდებულ ცდებში ნაკლებია, ვიდრე დამოუკიდებელში. განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $p_1=p_2=\dots=p_n=p$, $p_{11}=p_{12}=\dots=p$. ე. ი. პირობები ყველა ცდებისათვის ერთგვარია. ფორმულა (10.3.14) მიიღებს სახეს:

$$D_x=npq+2\sum_{i<j}(P-p^2)=npq+n(n-1)(P-p^2), \tag{10.3.15}$$

სადაც $P-A$ ხდომილობის ერთდროულად ცდათა წყვილებში(სულერთია რომელში) მოხდენის ალბათობაა. ხდომილობათა ამ კერძო შემთხვევაში განსაკუთრებით საინტერესოა ორი ქვეშემთხვევა:

1. A ხდომილობის მოხდენა რომელიმე ნებისმიერ ცდაში იწვევს დანარჩენებში მის უტყუარ მოხდენას; მაშინ $P=p$ და (10.3.15) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$D_x=npq+n(n-1)(p-p^2)=npq+n(n-1)pq=n^2pq.$$

2. A ხდომილობის მოხდენა ნებისმიერ ცდაში, თითოეულ დანარჩენში მის მოხდენას გამორიცხავს. მაშინ $p=0$ და (10.3.15) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$D_x=npq-n(n-1)p^2=np[q-(n-1)p]=np(1-np).$$

ა მ ო ც ა ნ ა 7. მ ო ც ე მ უ ლ მ დ გ ო მ ა რ ე ო ბ ა შ ი მ ო ყ ვ ა ნ ი ლ ო ბ ი ე ქ ტ თ ა რ ი ც ხ ვ ი ს მ ა თ ე მ ა ტ ი კ უ რ ი ლ ო დ ი ნ ი.

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება შემდეგი ამოცანა, გვაქვს n ობიექტისაგან შემდგარი რომელიმე ჯგუფი, რომელზედაც ხორციელდება რომელიღაც ზემოქმედება. თითოეული ობიექტთაგანი ზემოქმედების შედეგად შეიძლება მიყვანილ იქნას გარკვეულ S მდგომარეობაში. (მაგალითად, დაზიანებულია, გასწორებულია, აღმოჩენილია, უვნებელია და ა. შ.). ალბათობა იმისა, რომ i-რი ობიექტი მოყვანილ იქნება S მდგომარეობაში, ტოლია p_i. მოვძებნოთ იმ ობიექტთა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი, რომლებიც ჯგუფზე ზემოქმედების შედეგად S მდგომარეობაში იქნება მოყვანილი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. დავუკავშიროთ თითოეულ ობიექტთაგანს შემთხვევითი X_i სიდიდე, რომელიც ღებულობს მნიშვნელობებს 0 ანდა 1-ს:

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{თუკი } i\text{-ური ობიექტი მიყვანილია } S \text{ მდგომარეობაში},\\ 0, & \text{თუკი } i\text{-ური ობიექტი არ არის მიყვანილი } S \text{ მდგომარეობაში}.\end{cases}$$

შემთხვევითი X სიდიდე — ობიექტთა რიცხვი, რომელიც მიყვანილია S მდგომარეობაში — შესაძლებელია წარმოვიდგინოთ ჯამის სახით:

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

აქედან, ვსარგებლობთ რა მათემატიკურ ლოდინთა შეკრების თეორემით, მივიღებთ:

$$m_x=\sum_{i=1}^{n}m_{x_i}.$$

თითოეული შემთხვევითი X_i სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ცნობილია:

$$m_{x_i}=p_i.$$

მაშასადამე,

$$m_x=\sum_{i=1}^{n}p_i, \qquad (10.3.16)$$

ე. ი. ობიექტთა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი, რომელიც მიყვანილია S მდგომარეობაში, თითოეული ობიექტის ამ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობათა ჯამის ტოლია.

განსაკუთრებით აღვნიშნავთ, რომ დამტკიცებული ფორმულის სამართლიანობისათვის სრულებითაც არ არის საჭირო, რომ ობიექტები S მდგომარეობაში გადადიოდნენ ერთი მეორისაგან დამოუკიდებლად. ფორმულა სამართლიანია ნებისმიერი სახის ზემოქმედებისათვის.

ამოცანა 8. მოცემულ მდგომარეობაში მოყვანილ ობიექტთა რიცხვის დისპერსია.

თუ წინა ამოცანის პირობებში თითოეული ობიექტთაგანის გადასვლა S მდგომარეობაში ყველა სხვა დანარჩენისაგან დამოუკიდებლად წარმოებს, მაშინ დისპერსიათა შეკრების თეორემას

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i$$

სიდიდისათვის გამოვიყენებთ, მივიღებთ S მდგომარეობაში მოყვანილ ობიექტთა რიცხვის დისპერსიას:

$$D_x=\sum_{i=1}^{n} D_{x_i}=\sum_{i=1}^{n} p_i q_i, \quad q_i=1-p_i \tag{10.3.18}$$

სადაც P_{ij} — ალბათობაა იმისა, რომ i-ური და j-ური ობიექტები ზემოქმედების შადეგად ერთად გადავლენ S მდგომარეობაში.

ამოცანა 9. ცდათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი ხდომილობის k-ურ მოხდენამდე.

წარმოებს რიგი დამოუკიდებელი ცდებისა, რომელთაგან თითოეულში შესაძლოა p ალბათობით მოხდეს A ხდომილობა. ცდები წარმოებს მანამდე, სანამ A ხდომილობა არ მოხდება k-ჯერ, ამის შემდეგ იგი წყდება. განვსაზღვროთ მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, ს. კ. გ. ცდათა X რიცხვისა, რომელიც წარმოებული იქნება.

ამოხსნა. 5.7. პარაგრაფის მე-3 მაგალითში განსაზღვრული იყო A ხდომილობის პირველ მოხდენამდე მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია:

$$m=\frac{1}{p}, \quad D=\frac{q}{p^2},$$

სადაც p — ხდომილობის მოხდენის ალბათობაა ერთ ცდაში, ხოლო $q=1-p$ არ მოხდენის (ალბათობა).

განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე X—ცდათა რიცხვი A ხდომილობის k-ურ მოხდენამდე. იგი ჯამის სახით შეიძლება წარმოვიდგინოთ:

$$X=X_1+X_2+\dots+X_k,$$

სადაც X_1—ცდათა რიცხვი A ხდომილების პირველ მოხდენამდე, X_2—ცდათა რიცხვი A ხდომილობის პირველიდან მეორე მოხდენამდე (მეორის ჩათვლით) X_k—ცდათა რიცხვი A ხდომილობის (k—1)-დან k—ურ მოხდენამდე (k-ს ჩათვლით).

ცხადია, სიდიდეები X_1, $X_2,\dots,X_k$ დამოუკიდებლებია; თითოეული მათგანი განაწილებულია იმავე კანონით, როგორითაც პირველი მათგანი (ცდათა რიცხვი ხდომილობის პირველ მოხდენამდე) და აქვთ რიცხვითი მახასიათებლები

$$m_{xi}=\frac{1}{p},\quad D_{xi}=\frac{q}{p^2}.$$

მათემატიკურ ლოდინთა და დისპერსიების შეკრების თეორემების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} m_x&=\sum_{i=1}^{k} m_{xi}=\frac{k}{p};\\ D_x&=\sum_{i=1}^{k} D_{xi}=\frac{kq}{p^2};\\ \sigma_x&=\frac{\sqrt{kq}}{p}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.3.19)$$

ა მ ო ც ა ნ ა 10. მ ო ც ე მ უ ლ ი შ ე დ ე გ ი ს მ ი ღ წ ე ვ ა მ დ ე ს ა ხ ს რ ე ბ ი ს ს ა შ უ ა ლ ო ხ ა რ ჯ ი.

წინა ამოცანაში განხილული იყო შემთხვევა, როცა ცდათა რიგი სრულიად განსაზღვრული შედეგის მისაღებად ტარდება—A ხდომილობის k მოხდენამდე, რომელსაც თითოეულ ცდაში ერთი და იგივე ალბათობა აქვს. ეს ამოცანა მეორის კერძო შემთხვევაა, როცა წარმოებს რიგი ცდებისა ნებისმიერი B შედეგის მისაღწევად, რომლის ალბათობა ცდათა n რიცხვისას იზრდება ნებისმიერი კანონით $P(n)$. დავუშვათ, რომ თითოეულ ცდაზე იხარჯება სახსრების a რაოდენობა. საჭიროა მოვნახოთ მათემატიკური ლოდინი სახსრების იმ რაოდენობისა, რომელიც დახარჯული იქნება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. იმისათვის, რომ ამოცანა ამოხსნილ იქნას, დავუშვათ, რომ წარმოებული ცდების რაოდენობა არაფრით არაა შე-

ზღუდული და მათი გაგრძელება B შედეგის მიღწევის შემდეგაც შეიძლება. მაშინ ზოგიერთი ამ ცდიდან იქნება ზედმეტი. შევთანხმდეთ, დავარქვათ ცდას „აუცილებელი", რომელიც წარმოებს ჯერ კიდევ B შედეგის მიღწევამდე და „ზედმეტი", თუკი იგი წარმოებს უკვე B შედეგის მიღწევის შემდეგ.

ყოველ (i-ურ) ცდას დავუკავშიროთ შემთხვევითი X_i სიდიდე, რომელიც ტოლია ნულის ან ერთის, იმისდა მიხედვით ეს ცდა აღმოჩნდება „აუცილებელი" თუ „ზედმეტი". დავუშვათ

$$X_i=\begin{cases} 1, & \text{თუ ცდა აღმოჩნდა „აუცილებელი"}, \\ 0, & \text{თუ ცდა აღმოჩნდა „ზედმეტი"}. \end{cases}$$

განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე X—ცდათა რიცხვი, რომლის ჩატარებაც მოგვიწევს B შედეგის მისაღწევად. ცხადია, იგი შეიძლება წარმოვიდგინოთ ჯამის სახით:

$$X=X_1+X_2+\dots+X_i+\dots \qquad (10.3.20)$$

(10.3.20)-ის მარჯვენა ნაწილის სიდიდეებიდან პირველი (X_1) წარმოადგენს არა შემთხვევითს და ყოველთვის ერთის ტოლია (პირველი ცდა ყოველთვის „აუცილებელია"), თითოეული დანარჩენებიდან შემთხვევითი სიდიდეა შესაძლო მნიშვნელობებით 0 და 1. ავაგოთ X_i სიდიდის განაწილების მწკრივი X_i ($i>1$). მას აქვს სახე:

0	1
$P(i-1)$	$1-P(i-1)$

(10.3.21)

სადაც $P(i-1)$—B შედეგის მიღწევის ალბათობაა $i-1$ ცდის შემდეგ.

მართლაც, თუ შედეგი B უკვე იყო მიღწეული წინა $i-1$ ცდებში, მაშინ $X_i=0$ (ცდა ზედმეტია), თუკი არ იყო მიღწეული, მაშინ $X_i=1$ (ცდა აუცილებელია).

ვიპოვოთ X_i სიდიდის მათემატიკური ლოდინი. განაწილების (10.3.21) მწკრივიდან გვაქვს:

$$m_{x_i}=0\cdot P(i-1)+1\cdot[1-P(i-1)]=1-P(i-1).$$

არ არის ძნელი დავრწმუნდეთ, რომ იგივე ფორმულა სამართლიანი იქნება, როცა $i=1$, რადგან $P(0)=0$. გამოვიყენებთ (10.3.20) გამოსახულებისათვის მათემატიკურ ლოდინთა შეკრების თეორემას, მივიღებთ:

$$m_x=\sum_{i=1}^{\infty} m_{x_i}=\sum_{i=1}^{\infty}[1-P(i-1)]$$

ანდა თუ აღვნიშნავთ $i-1=k$, მაშინ

$$m_x=\sum_{k=0}^{\infty}[1-P(k)]. \tag{10.3.22}$$

ყოველი ცდა საჭიროებს a სახსრების დახარჯვას. მიღებული m_x სიდიდის გამრავლებით a-ზე, განვსაზღვრავთ სახსრების საშუალო დანახარჯს საჭირო B შედეგის მისაღწევად:

$$S_B=a\sum_{k=0}^{\infty}[1-P(k)]. \tag{10.3.23}$$

მოცემული ფორმულის გამოყვანის დროს დაშვებულია, რომ ყოველი ცდის ღირებულება ერთი და იგივეა. თუ ეს ასე არ არის, მაშინ შეიძლება გამოვიყენოთ მეორე ხერხი — წარმოვიდგინოთ ჯამური დანახარჯი S_B, როგორც ჯამი ცალკეული დანახარჯებისა, რომელიც ღებულობს, ორ მნიშვნელობას: a_i, თუ i-ური ცდა „აუცილებელია“ და ნულს, თუკი ის „ზედმეტია“. სახსრების საშუალო S_B ხარჯი წარმოგვიდგება შემდეგი სახით:

$$S_B=\sum_{k=0}^{\infty}a_k[1-P(k)]. \tag{10.3.24}$$

ამოცანა 11 შემთხვევით შესაკრებთა შემთხვევითი რიცხვის ჯამის მათემატიკური ლოდინი.

ალბათობათა თეორიის პრაქტიკული გამოყენების რიგ შემთხვევებში ვხვდებით შემთხვევით სიდიდეთა ჯამებს, რომლებშიც შესაკრებთა რიცხვი წინასწარ უცნობია, შემთხვევითია. დავსვათ შემდეგი ამოცანა. შემთხვევითი Z სიდიდე Y შემთხვევით სიდიდეთა ჯამია:

$$Z=\sum_{i=1}^{Y}X_i \tag{10.3.25}$$

სადაც Y-აგრეთვე შემთხვევითი სიდიდეა. დავუშვათ, რომ ჩვენთვის ცნობილია ყველა შესაკრებთა მათემატიკური ლოდინი — m_{x_i}:

$$m_{x_i}=M[X_i],$$

და რომ სიდიდე Y არ არის დამოკიდებული არცერთი X_i სიდიდისაგან. საჭიროა მოვძებნოთ Z სიდიდის მათემატიკური ლოდინი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჯამში შესაკრებთა რიცხვი არის დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე. დავუშვათ, რომ ჩვენთვის ცნობილია მისი განაწილების მწკრივი:

y_k	1	2	...	k	...
p_k	p_1	p_2		p_k	...

სადაც P_k — ალბათობაა იმისა, რომ Y სიდიდემ მიიღოს k მნიშვნელობა. ჩავინიშნოთ $Y=k$ მნიშვნელობა და მოვნახოთ ამ პირობებში Z სიდიდის მათემატიკური ლოდინი (პირობითი მათემატიკური ლოდინი):

$$M[Z|k]=\sum_{i=1}^{k} m_{x_i} \qquad (10.3.26)$$

ახლა გამოვიყენოთ მათემატიკური ლოდინის ფორმულა, რისთვისაც ყოველი პირობითი მათემატიკური ლოდინი გადავამრავლოთ p_k ჰიპოთეზის შესაბამის ალბათობაზე და შევკრიბოთ:

$$M[Z]=\sum_{k} p_k \sum_{i=1}^{k} m_{x_i}. \qquad (10.3.27)$$

განსაკუთრებით საინტერესოა შემთხვევა, როცა ყველა შემთხვევით X_1, $X_2,\ldots$, სიდიდეს აქვს ერთი და იგივე მათემატიკური ლოდინი:

$$m_{x_1}=m_{x_2}=\ldots=m_x.$$

მაშინ ფორმულა (10.3.26) მიიღებს სახეს:

$$M[Z|k]=\sum_{i=1}^{k} m_x=km_x$$

და

$$M[Z]=m_x \sum kp_k. \qquad (10.3.28)$$

(10.3.28) გამოსახულებაში ჯამი Y სიდიდის მათემატიკური ლოდინია:

$$m_y=\sum_{k} kp_k,$$

აქედან

$$m_z=M[Z]=m_x\cdot m_y, \qquad (10.3.29)$$

ე. ი. ერთნაირი საშუალო მნიშვნელობის მქონე (თუკი შესაკრებთა რიცხვი არ არის დამოკიდებული მათი მნიშვნელობისაგან) შემთხვევით

შესაკრებთა რიცხვთა ჯამის მათემატიკური ლოდინი უდრის თითოეულ შესაკრებთა საშუალო მნიშვნელობის ნამრავლს შესაკრებთა საშუალო რიცხვზე.

კვლავ აღვნიშნავთ, რომ მიღებული შედეგი სამართლიანია როგორც დამოუკიდებელი, ისე დამოკიდებული X_1, X_2,..., შესაკრებებისათვის, ოღონდ შესაკრებთა რიცხვი Y არ უნდა იყოს დამოკიდებული თვით შესაკრებისაგან.

ქვემოთ ამოვხსნით ზოგიერთ კონკრეტულ მაგალითს პრაქტიკის სხვადასხვა დარგიდან, რომლებზედაც მოვახდენთ რიცხვით მახასიათებლებზე ოპერირების საერთო მეთოდების კონკრეტული გამოყენების დემონსტრირებას, რომლებიც გამომდინარეობენ დამტკიცებული თეორემებიდან, და სპეციფიკურ ხერხებს, რომლებიც დაკავშირებულია ზემოთ ამოხსნილ საერთო ამოცანებთან.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. მონეტის ასროლა ხდება 10-ჯერ. განვსაზღვროთ მათემატიკური ლოდინი და საშუალო კვადრატული გადახრა მოსულ გერბთა X რიცხვისა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (10.3.7) და (10.3.10) ფორმულებით ვპოულობთ:

$$m_x = 10\cdot 0.5 = 5;\quad D_x = 10\cdot 0,5\cdot 0.5 = 2.5;\quad \sigma_x = 1,58.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. წარმოებს 5 დამოუკიდებელი გასროლა მრგვალ 20 სმ დიამეტრის მქონე სამიზნეზე. დამიზნება—სამიზნის ცენტრზეა, სისტემატური ცდომილება არ არსებობს, გაფანტვა—წრიული. საშუალო კვადრატული გადახრა $\sigma = 16$ სმ. მოვნახოთ მოხვედრებათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი და ს. კ. გ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. სამიზნეზე მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლისას გამოვთვალოთ (9.4.5) ფორმულით:

$$p = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}} = 1 - e^{-0.625} \approx 0,465.$$

ვსარგებლობთ რა 10. 3. 7 და 10.3. 10 ფორმულებით, მივიღებთ:

$$m_x = 5p \approx 2,32;\quad D_x = 5p(1-p) \approx 1,25;\quad \sigma_x \approx 1,12.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. წარმოებს საჰაერო თავდასხმის მოგერიება, რომელშიც მონაწილეობს 1 ტიპის 20 საფრენი აპარატი და 2 ტიპის 30 საფრენი აპარატი. 1 ტიპის საფრენ აპარატებზე იერიში მიაქვს გამანადგურებელ ავიაციას. თითოეულ აპარატზე იერიშთა რიცხვი, დაქვემდებარებულია პუასონის კანონს პარამეტრით $a_1 = 2,5$. გამანადგურებლის ყოველი იერიშისას საფრენი აპარატის დაზიანების ალბათობაა $p_1 = 0,6$. 2-ტიპის საფრენ აპარატებზე იერიში მიაქვს მართულ საზენიტო რაკეტებს. ყოველი აპარატისაკენ მიმართული რაკეტების რიცხვი ექვემდებარება პუასონის კანონს $a = 1,8$ პარამეტრით და ყოველი რაკეტა აზიანებს მე-2 ტიპის საფრენ აპარატს, დაზიანების ალბათობა 0,8-ის ტოლია. თავდამსხმელთა შემადგენლობაში შემავალი ყველა აპარატი იერიშზე მიდის და ერთიმეორისაგან დამოუკიდებლად მარცხდება. მოვნახოთ:

1. მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, ს. კ. გ. 1 ტიპის საფრენი აპარატების დაზიანებისა;

2. მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და ს. კ. გ. მე-2 ტიპის საფრენი აპარატების დაზიანებისა;

3. მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და ს. კ. გ. ორივე ტიპის საფრენი აპარატების დაზიანების რიცხვისა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1-ტიპის ყოველ აპარატზე „იერიშთა რიცხვის“ ნაცვლად განვიხილოთ „დამაზიანებელ იერიშთა რიცხვი“, რომელიც განაწილებულია პუასონის კანონის მიხედვით, მაგრამ სხვა პარამეტრით:

$$a^*_1=p_1, \quad a_1=0{,}6\cdot 2{,}5=1{,}5$$

ალბათობა 1-ტიპის ყოველი საფრენი აპარატის დაზიანებისა იქნება:

$$R_1(^1)=1-e^{-1{,}5}\approx 0{,}777.$$

ალბათობა მე-2 ტიპის ყოველი საფრენი აპარატის დაზიანებისა მოინახება ანალოგიურად

$$R_1(^2)=1-e^{-0.8\cdot 1.8}=1-e^{-1.44}\approx 0{,}763.$$

მათემატიკური ლოდინი 1-ლი ტიპის დაზიანებულ საფრენი აპარატების რიცხვისა იქნება

$$m_1=20\cdot 0{,}777=15{,}5.$$

ამ რიცხვის დისპერსია და ს. კ. გ.

$$D_1=20\cdot 0{,}777\cdot 0{,}223=3{,}46, \quad \sigma_1\approx 1{,}86,$$

მე-2 ტიპის დაზიანებული აპარატების რიცხვის მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და ს. კ. გ. იქნება:

$$m_2=30\cdot 0{,}763=22{,}8, \quad D_2=5{,}41, \quad \sigma_2\approx 2{,}33.$$

მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და ს. კ. გ. ორივე ტიპის დაზიანებული საფრენი აპარატის საერთო რიცხვისა:

$$m=m_1+m_2=38.3, \quad D=D_1+D_2=8{,}87, \quad \sigma_2\approx 2{,}97.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. შემთხვევითი X და Y სიდიდეები თვით ელემენტარული ცდომილობებია, რომლებიც წარმოიშობიან ხელსაწყოს შესასვლელში. მათი მათემატიკური ლოდინებია: $m_x=-2$ და $m_y=4$, დისპერსიები: $D_x=4$ და $D_y=9$; ამ შეცდომების კორელაციის კოეფიციენტი ტოლია $Z_{xy}=-0{,}5$. ხელსაწყოს გამოსასვლელში შეცდომა დაკავშირებულია შეცდომებთან შესასვლელში შემდეგი ფუნქციონალური დამოკიდებულებით:

$$Z=3X^2-2XY+Y^2-3.$$

მოვნახოთ ხელსაწყოს გამოსასვლელში შეცდომის მათემატიკური ლოდინი,

ა მ ო ხ ს ნ ა.

$$m_z=M[Z]=3M[X^2]-2M[XY]+M[Y^2]-3.$$

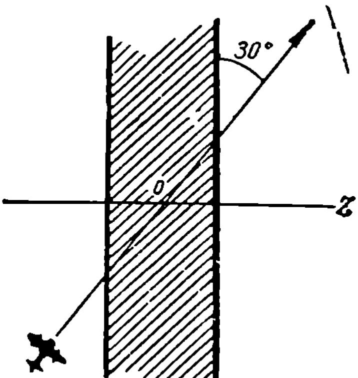
ვსარგებლობთ რა საწყის და ცენტრალურ მომენტებს შორის კავშირით და (10.2.17) ფორმულით, გვაქვს:

$$M[X^2]=\alpha_2[X]=D_x+m_x^2=8;$$
$$M[Y^2]=\alpha_2[Y]=D_y+m^2_y=25;$$
$$M[XY]=m_xm_y+K_{xy}=$$
$$=m_xm_y+r_{xy}\sigma_x\sigma_y=-11,$$

საიდანაც

$$m_z=3\cdot 8-2\cdot(-11)+25-3=68.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. თვითმფრინავი უშენს ყუმბარებს ავტოსტრადას, რომლის სიგანე 30 მეტრია. (ნახ. 10.3.2). ფრენის მიმართულება ავტოსტრადის მიმართულების მიმართ შეადგენს 30°-იან კუთხეს. უმიზნებენ ავტოსტრადის შუა ხაზს, სისტემატიური შეცდომები გამორიცხულია, გაფანტვა მოცემულია ძირითადი საალბათო გადახრებით: ფრენის მიმართულებით $B_ფ=50$ მ და გვერდითი მიმართულებით $B_{გვ}=25$ მ, მოვნახოთ ავტოსტრადაზე მოხვედრების ალბათობა ერთი ყუმბარის ჩამოგდებისას.



ნახ. 10.3.2.

ა მ ო ხ ს ნ ა. დავაგეგმილოთ მოხვედრის შემთხვევითი წერტილი OZ ღერძზე, რომელიც ავტოსტრადის მართობულია და გამოვიყენოთ ფორმულა (10.3.3). იგი, ცხადია, რჩება მართობული, თუ მასში საშუალო კვადრატულის ნაცვლად საალბათო გადახრებს ჩავსვამთ.

$$E_z^2=E_x^2\cos 60^\circ+F_y^2\sin 60^\circ=$$
$$=50^2\cdot 0,25+25^2\cdot 0,75\approx 1093.$$

აქედან

$$E_z\approx 33,\quad \sigma_z=\frac{E_z}{0,674}\approx 48,9.$$

ავტოსტრადაზე მოხვედრების ალბათობას მოვნახავთ ფორმულით (6.3.10):

$$p=2\Phi^*\left(\frac{15}{48,9}\right)-1\approx 0,238.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. აქ გამოყენებული ხერხი გაფანტვის გადაანგარიშებისა სხვა ღერძებზე, გამოსადეგია მხოლოდ ზოლის სახის მქონე არეში მოხვედრების ალბათობის გამოსათვლელად; სწორკუთხედისათვის, რომლის გვერდები მობრუნებულია გაფანტვის ღერძებიდან რაღაც კუთხით, იგი უკვე არ გამოდგება. ალბათობა ყოველ ზოლზე მოხვედრისა, რომელთა გადაკვეთით შექმნილია სწორკუთხედი, შესაძლოა გამოთვლილ იქნას ამ ხერხის დახმარებით, ოღონდ ალბათობა სწორკუთხედზე მოხვედრებისა უკვე არ არის ტოლი ზოლზე მოხვედრის ალბათობათა ნამრავლისა, რადგან ეს ხდომილობანი დამოკიდებულნი არიან.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. წარმოებს დაკვირვება რადიოლოკაციური სადგურების დახმარებით ობიექტთა ჯგუფზე, რომელიღაც დროის განმავლობაში. ჯგუფი შედგება ოთხი ობიექტისაგან; თითოეული მათგანის t დროის განმავლობაში, აღმოჩენის ალბათობა შესაბამისად ტოლია:

$$p_1=0,2,\ p_2=0,25,\ p_3=0,35,\ p_4=0,42.$$

მოვნახოთ მათემატიკური ლოდინი ობიექტთა რიცხვისა, რომლებიც გამომჟღავნდებიან t დროის შემდეგ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (10.8.16) ფორმულით გვაქვს:

$$m_x=\sum_{i=1}^{4}p_i=0,2+0,25+0,35+0,42=1,22.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. მიიღება მთელი რიგი ღონისძიებები, რომელთაგან თითოეულის X განხორციელება შემთხვევით სუფთა შემოსავალს იძლევა. ეს უკანასკნელი განაწილებულია ნორმალური კანონით, რომლის საშუალო მნიშვნელობაა $m=2$ (პირობით

ერთეული). ღონისძიებათა რიცხვი დროის მოცემულ პერიოდში შემთხვევითია განაწილებული კანონით:

y_i	1	2	3	4
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

თანაც არ არის ღონისძიებებისაგან მიღებული შემოსავლისაგან დამოკიდებული. ვსაზღვროთ მოსალოდნელი საშუალო შემოსავალი მთელ პერიოდში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული პარაგრაფის მე-11 ამოცანის საფუძველზე ვპოულობთ Z სხეულის სრული შემოსავლის მათემატიკურ ლოდინს:

$$m_z = m_x \cdot m_y,$$

სადაც m_x — საშუალო შემოსავალია ერთი ღონისძიებიდან,
m_y — ღონისძიებათა საშუალო მოსალოდნელი რიცხვი.
გვაქვს:

$$m_y = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,1 = 2.4,$$
$$m_x = 2,$$
$$m_z = 2 \cdot 2,4 = 4,8.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 8. ხელსაწყოს შეცდომა გამოისახება ფუნქციით

$$U = 3Z + 2X - Y - 4, \tag{10.3.30}$$

სადაც X, Y, Z — ე. წ. „პირველადი შეცდომებია", რომლებიც შემთხვევითი სიდიდეების სისტემაა (შემთხვევითი ვექტორია).

(X, Y, Z) შემთხვევითი ვექტორი ხასიათდება შემდეგი მათემატიკური ლოდინით

$$m_x = -4; \qquad m_y = 1; \qquad m_z = 1$$

და კორელაციური მატრიცით

$$\begin{Vmatrix} D_x & K_{xy} & K_{xz} \\ & D_y & K_{yz} \\ & & D_z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ & 3 & 1 \\ & & 4 \end{Vmatrix}$$

განვსაზღვროთ ხელსაწყოს შეცდომის მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და ს. კ. გ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგანაც ფუნქცია (10.3.30) წრფივია, გამოვიყენებთ რა (10.2.6) და (10.2.13) ფორმულებს, ვპოულობთ:

$$m_u = 3m_z + 2m_x - m_y - 4 = -10,$$
$$D_u = 3^2 \cdot D_z + 2^2 \cdot D_x + 1^2 \cdot D_y + 2[3 \cdot 2 \cdot K_{xz} + 3(-1)(K_{yz} + 2(-1)K_{xy}] = 25,$$
$$\sigma_u = 5.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 9. გამომთვლელ მანქანაში უწესივრობათა წყაროს გამოსამჟღავნებლად ტარდება სინჯები (ტესტები). ყოველ სინჯში უწესივრობა სხვა სინჯებისაგან დამოუკიდებლად ლოკალიზდება, ალბათობით $p = 0.2$. ყოველ სინჯზე საშუალოდ გადის 3 წუთი. მოვნახოთ დროის მათემატიკური ლოდინი, რომელიც დასჭირდება უწესივრობათა ლოკალიზაციას.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ მოცემული პარაგრაფის მე-9 ამოცანის შედეგებით (ხდომილობის k-ჯერ მოხდენამდე ცდათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი), თუ დავუშვებთ $k=1$, ვიპოვით სინჯთა საშუალო რიცხვს $m_x=\frac{1}{p}=\frac{1}{0,2}=5$.

ამ ხუთ სინჯზე საშუალოდ საჭირო იქნება

$$5\cdot 3=15 \quad \text{(წუთი)}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 10. წარმოებს სროლა საწვავიან რეზერვუარზე. ყოველი გასროლისას მოხვედრების ალბათობა 0,3-ის ტოლია. გასროლები დამოუკიდებელია. სათბობის რეზერვუარზე პირველი მოხვედრებისას მოხდება სათბობის მხოლოდ დენა, მეორე მოხვედრებისას სათბობი დაიწყებს აალებას, საწვავის აალების შემდეგ სროლა წყდება. მოვნახოთ წარმოებული სროლების რიცხვის მათემატიკური ლოდინი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ წინა მაგალითში გამოყენებული ფორმულით, მოვნახოთ მეორე მოხვედრამდე გასროლათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი:

$$m_x=\frac{2}{0,3}=6,67.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 11. რადიოლოკატორით ობიექტის გამომჟღავნების ალბათობა იზრდება მიმოხილვათა ციკლების რიცხვის ზრდისას კანონით:

$$P(n)=1-0,8^n,$$

სადაც n — ციკლთა რიცხვია, რომლის შემდეგ ობიექტი გამოვლინებული იქნება,

ა მ ო ხ ს ნ ა: ვსარგებლობთ რა მოცემული პარაგრაფის 10 ამოცანის შედეგებით, მივიღებთ:

$$m_x=\sum_{k=0}^{\infty}[1-p(k)]=\sum_{k=0}^{\infty}0,8^n=\frac{1}{1-0,8}=5.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 12. იმისათვის, რომ შევასრულოთ ინფორმაციის შეკრების გარკვეული ამოცანა, მოცემულ რაიონში იგზავნება რამდენიმე მზვერავი. ყოველი გაგზავნილი მზვერავის დანიშნულების ადგილამდე მიღწევის ალბათობა 0,7-ის ტოლია. ამოცანის შესასრულებლად საკმარისია რაიონში სამი მზვერავის ყოფნა. ერთი მზვერავი ამოცანას ვერ შეასრულებს, ხოლო ორი მზვერავის ამოცანის შესრულების ალბათობა 0,4-ია. უზრუნველყოფილია რაიონთან უწყვეტი კავშირი და დამატებითი მზვერავები იგზავნება მხოლოდ მაშინ, თუკი ამოცანა ჯერ კიდევ არ არის შესრულებული. საჭიროა მოვნახოთ გაგზავნილ მზვერავთა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აღვნიშნოთ X-ით რაიონში მოსული მ ზ ვ ე რ ა ვ თ ა რიცხვი, რომელიც აღმოჩნდა საკმარისი ამოცანის შესასრულებლად. მოცემული პარაგრაფის მე-10 ამოცანაში მონახული იყო იმ ცდათა რაოდენობა, რომელიც საჭიროა იმისათვის, რომ მიღწეულ იქნას გარკვეული შედეგი, რომლის ალბათობა ცდათა რიცხვის გადიდებით გაიზრდება $P(n)$ კანონით. ეს მათემატიკური ლოდინი ტოლია:

$$m_x=\sum_{k=0}^{\infty}[1-P(k)].$$

ჩვენს შემთხვევაში:

$$P(0)=0;\ P(1)=0;\ P(2)=0,4;\ P(3)=1;$$
$$P(4)=P(5)=\ldots=1.$$

სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ტოლია:

$$m_x=M[X]=\sum_{k=0}^{\infty}[1-P(k)]=1+1+0,6=2,6.$$

ამგვარად, იმისათვის, რომ ამოცანა შესრულებული იქნას, აუცილებელია რაიონში მოვიდეს საშუალოდ 2,6 მზვერავი.

ახლა ამოვხსნათ შემდეგი ამოცანა, საშუალოდ რამდენი მზვერავი უნდა გავგზავნოთ რაიონში, რომ იქ საშუალოდ m_x მოვიდნენ?

ვთქვათ გაგზავნილია Y მზვერავი. მისულ მზვერავთა რიცხვი შესაძლებელია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$X=Z_1+Z_2+\ldots+Z_Y,$$

სადაც შემთხვევითი სიდიდე Z_i ღებულობს 1 მნიშვნელობას თუ i-ური მზვერავი მოვიდა, და 0-ს თუ არ მოვიდა. სიდიდე X არის ჯამი შემთხვევით შესაკრებთა შემთხვევითი რიცხვისა. (იხ. მოცემული პარაგრაფის მე-11 ამოცანა). ამის გათვალისწინებით გვექნება:

$$M[X]=M[Z_i]M[Y],$$

საიდანაც,

$$M[Y]=\frac{M[X]}{M[Z_i]}=\frac{2,6}{M[Z_i]},$$

მაგრამ $M[Z_i]=p$, სადაც p — ეს არის გაგზავნილი მზვერავის მისვლის ალბათობა (ჩვენს შემთხვევაში $p=0,7$). სიდიდე m_x ჩვენს მიერ მონახულია და 2,6-ის ტოლია

გვაქვს:

$$m_y=M[Y]=\frac{2,6}{0,7}\approx 3,71.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 13. რადიოლოკაციური სადგური ათვალიერებს სივრცის იმ უბანს, რომელშიდაც იმყოფება N ობიექტი, დათვალიერებების ერთ ციკლში იგი გამოავლენს ყოველ ობიექტს (სხვა ციკლებისაგან დამოუკიდებლად), რომელთა ალბათობა p-ს ტოლია. ერთ ციკლზე ჭირდება τ დრო. რამდენი დრო დასჭირდება იმისათვის, რომ N ობიექტიდან საშუალოდ k გამოავლინოს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. უპირველეს ყოვლისა მოვნახოთ დათვალიერების n ციკლის შემდეგ გამოვლინებული ობიექტების რიცხვის მათემატიკური ლოდინი. n ციკლის ობიექტიდან ერთ-ერთის (ნებისმიერი) გამოვლინების ალბათობაა

$$P_n=1-(1-p)^n,$$

ხოლო n ციკლისას გამოვლინებულ ობიექტთა საშუალო რიცხვი მათემატიკურ ლოდინთა შეკრების თეორემის მიხედვით (იხ. მოც პარაგრაფის მე-5 ამოცანა). ტოლია

$$M[X]=N[1-(1-p)^n].$$

დავუშვათ

$$N[1-(1-p)^n]=k.$$

მივიღებთ აუცილებელ ციკლთა რაოდენობას განტოლებიდან

$$1-(1-p)^n=\frac{k}{N},$$

რომლის ამოხსნით მოვნახავთ

$$n=\frac{\lg\left(1-\frac{k}{N}\right)}{\lg(1-p)},$$

აქედან დრო, რომელიც საჭიროა საშუალოდ k ობიექტის გამოსავლინებლად, ტოლი იქნება

$$t_k=\tau_n=\tau\frac{\lg\left(1-\frac{k}{N}\right)}{\lg(1-p)}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 14. შევცვალოთ მე-13 ამოცანის პირობები. ვთქვათ რადიოლოკაციური სადგური აწარმოებს დაკვირვებას სივრცის უბანზე მანამ, სანამ არ იქნება გამოვლინებული k ობიექტი, რომლის შემდეგ დაკვირვება წყდება ანდა ახალი რეჟიმით გრძელდება, მოვნახოთ დაკვირვებისათვის საჭირო დროის მათემატიკური ლოდინი.

იმისათვის, რომ ამოვხსნათ ეს ამოცანა, არ არის საკმარისი ერთი ობიექტის ერთ ციკლში გამომჟღავნების ალბათობის მოცემა, არამედ ნაჩვენები უნდა იქნას კიდევ, როგორ იზრდება ციკლთა რიცხვის ზრდით ალბათობა იმისა, რომ N ობიექტებიდან გამომჟღავნებული იქნება არა ნაკლებ k ობიექტისა, ყველაზე მარტივია გამოვთვალოთ ეს ალბათობა, თუ დავუშვებთ, რომ ობიექტები გამომჟღავნდებიან ერთი მეორისაგან დამოუკიდებლად. გავაკეთოთ ასეთი დაშვება და ამოვხსნათ ამოცანა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. დამოუკიდებელ გამოვლინებებისას შესაძლოა N ობიექტებზე დაკვირვება წარმოვიდგინოთ, როგორც N დამოუკიდებელი ცდა. n ციკლის შემდეგ თითოეული ობიექტთაგანის გამოვლინების ალაბათობაა:

$$P_n=1-(1-p)^n.$$

ალბათობა იმისა, რომ n ციკლის შემდეგ N ობიექტიდან გამოვლინებულ იქნება არ ნაკლებ k ობიექტისა, მოინახება ცდათა განმეორების თეორემის საშუალებით:

$$R^{(n)}_{k,N}=\sum_{m=k}^{N} C_N^m P_N^m (1-P_n)^{N-m},$$

ციკლთა საშუალო რიცხვი, რომლის შემდეგაც მონახულ იქნება არანაკლები k ობიექტისა, განისაზღვრება (10.3.22) ფორმულით

$$n_{cp}^{(k)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1-R^{(n)}_{k,N}\right]=\sum_{n=0}^{N}\left[1-\sum_{m=k}^{N} C_N^m P_n^m (1-P_n)^{N-m}\right].$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 15. სიბრტყეზე შემთხვევითი M წერტილი, რომლის კოორდინატებია (X, Y) გადაიხრება საჭირო მდებარეობიდან (კოორდინატთა სათავე) სამი დამოუკიდებელი ვექტორული $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ და $\vec{V}_3$ შეცდომის გავლენით. თითოეული ვექტორთაგანი ხასიათდება ორი მდგენელით:

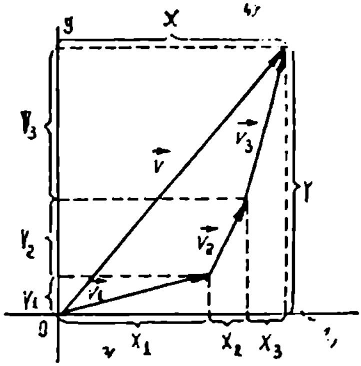
$$\vec{V}_1(X_1, Y_1),\ \vec{V}_2(X_2, Y_2),\ \vec{V}_3(X_3, Y_3)$$

(ნახ. 10.3.3) ამ სამი ვექტორის რიცხვითი მახასიათებლები ტოლია:

$$m_{x_1}=2,\ m_{y_1}=-3,\ \sigma_{x_1}=2,\ \sigma_{y_1}=3,\ r_{x_1y_1}=-0.3,$$
$$m_{x_2}=-1,\ m_{y_2}=-2,\ \sigma_{x_2}=4,\ \sigma_{y_2}=1,\ r_{x_2y_2}=0.5.$$
$$m_{x_3}=3,\ m_{y_3}=1,\ \sigma_{x_3}=2,\ \sigma_{y_3}=2,\ r_{x_3y_3}=0,2.$$

მოვნახოთ ჯამური შეცდომის მახასიათებლები (ვექტორისა, რომელიც M წერტილს გადახრის კოორდინატთა საწყისიდან).

ა მ ო ხ ს ნ ა. მათემატიკურ ლოდინთა დისპერსიების და კორელაციურ მომენტთა შეკრების თეორემების გამოყენებით, მივიღებთ:



ნახ. 10.3.3.

$$m_x=m_{x_1}+m_{x_2}+m_{x_3}=4,$$
$$m_y=m_{y_1}+m_{y_2}+m_{y_3}=-4,$$
$$\sigma^2{}_x=\sigma^2{}_{x_1}+\sigma^2{}_{x_2}+\sigma^2{}_{x_3}=24,\quad \sigma_x=\sqrt{24}\approx4,90,$$
$$\sigma^2{}_y=\sigma^2{}_{y_1}+\sigma^2{}_{y_2}+\sigma^2{}_{y_3}=14,\quad \sigma_y=\sqrt{14}\approx3,75,$$
$$K_{xy}=K_{x_1y_1}+K_{x_2y_2}+K_{x_3y_3},$$

სადაც

$$K_{x_1y_1}=r_{x_1y_1}\sigma_{x_1y_1}=-0,3\cdot2\cdot3=-1,8,$$
$$K_{x_2y_2}=r_{x_2y_2}\sigma_{x_2}\sigma_{y_2}=0,5\cdot4\cdot1=2,0,$$
$$K_{x_3y_3}=r_{x_3y_3}\sigma_{x_3}\sigma_{y_3}=0,2\cdot2\cdot2=0,8,$$

საიდანაც

$$K_{xy}=-1,8+2,0+0,8=1,0$$

და

$$r_{xy}=\frac{1,0}{4,90\cdot3,75}\approx0,054.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 16. სხეული, რომელსაც აქვს მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმა და რომლის ზომებია a, b, c, მოძრაობს სივრცეში უწესრიგოდ და მასთან ცენტრის გარშემო ისე ბრუნავს, რომ ყველა მისი ორიენტაცია ერთნაირად საალბათოა, სხეული იმყოფება ნაწილაკთა ნაკადში და სხეულთან შემხვედრ ნაწილაკთა საშუალო რიცხვი პროპორციულია იმ საშუალო ფართისა, რომელსაც სხეული ნაკადს შეახვედრებს. მოვნახოთ სხეულის მოძრაობის მიმართულების მართობ სიბრტყეზე გეგმილის ფართის მათემატიკური ლოდინი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვინაიდან სხეულის ყველა ორიენტაცია სივრცეში ერთნაირად საალბათოა, ამიტომ გეგმილის ფართის მიმართულებას მნიშვნელობა არა აქვს. ცხადია, სხეულის გეგმილების ფართობი ტოლია პარალელეპიპედის ყველა წახნაგის გეგმილების ნახევარჯამისა (რადგან გეგმილის ყოველი წერტილი თვით სხეულის ზედაპირზე ორი წერტილის გეგმილია. მათემატიკური ლოდინთა შეკრების თეორემისა და ბრტყელი ნაკვეთის გეგმილის საშუალო ფართის ფორმულის (10.1 პარაგრაფის მე-3 მაგალითი) გამოყენებით მივიღებთ:

$$m_S=\frac{ab}{2}+\frac{ac}{2}+\frac{bc}{2}=\frac{Sn}{4},$$

სადაც $S_{სრ}$ — პარალელეპიპედის ზედაპირის სრული ფართია.

შევნიშნავთ, რომ გამოყვანილი ფორმულა სამართლიანია არა მარტო პარალელეპიპედისათვის, არამედ ყველა ამოზნექილი სხეულისათვის: ასეთი სხეულის გეგმილის საშუალო ფართი უწესრიგოდ ბრუნვისას მისი სრული ზედაპირის ერთი მეოთხედის ტოლია. მკითხველს ვურჩევთ, როგორც სავარჯიშო, დაამტკიცოს ეს დებულება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 17. აბსცისთა Ox ღერძზე შემთხვევითი სახით მოძრაობს x წერტილი შემდეგი კანონით. საწყის მომენტში იგი იმყოფება კოორდინატთა სათავეში და იწყებს მოძრაობას $\frac{1}{2}$ ალბათობით მარჯვნივ და $\frac{1}{2}$ ალბათობით მარცხნივ. გაივლის რა ერთეულ მანძილს, წერტილი P ალბათობით აგრძელებს მოძრაობას იმავე მიმართულებით, ხოლო $q=1-p$ ალბათობით იცვლის მას საწინააღმდეგოთი. გაივლის რა ერთეულ მანძილს, წერტილი ხელახლა p ალბათობით აგრძელებს მოძრაობას იმავე მიმართულებით, რომლითაც მოძრაობდა, ხოლო $1-p$ ალბათობით იცვლის მას საწინააღმდეგოთი და ა. შ. აბსცისის ღერძზე ასეთი შემთხვევითი ხეტიალის შედეგად x წერტილი n ნაბიჯის შემდეგ მიიღებს მდებარეობას, რომელსაც X_n აღვნიშნავთ. საჭიროა მოვნახოთ შემთხვევითი X_n სიდიდის მახასიათებლები: მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. უწინარეს ყოვლისა ამოცანის სიმეტრიულობის მოსაზრებიდან ცხადია, $M[X_n]=0$. რომ მოვნახოთ $D[X_n]$, X_n წარმოვადგინოთ n შესაკრებთა ჯამის სახით:

$$X_n=U_1+U_2+\cdots+U_n=\sum_{i=1}^{n}U_i, \qquad (10.3,31)$$

სადაც U_i—მანძილია გავლილი წერტილის მიერ მე i-ურ ნაბიჯზე, ე. ი. $+1$, თუ წერტილი მოძრაობდა ამ ბიჯზე მარჯვნივ და, -1, — თუ იგი მოძრაობდა მარცხნივ.

ჯამის დისპერსიის თეორემის მიხედვით (იხ. ფორმულა (10.2.10) გვაქვს:

$$D[X_n]=\sum_{i=1}^{n}D[U_i]+2\sum_{i<j}K_{u_iu_j}.$$

ცხადია, რომ $D[U_i]=1$, რადგან Ui სიდიდე ღებულობს მნიშვნელობას $+1$ და -1 ერთნაირი (ალბათობით იმავე სიმეტრიულობის მოსაზრებით). მოვნახოთ კორელაციური მომენტები:

$$K_{u_iu_j}=M[\mathring{U}_i\mathring{U}_j]=M[U_iU_j]$$

დავიწყოთ შემთხვევიდან $j=i+1$, როცა სიდიდეები U_i და U_j (10,3.31) ჯამში გვერდით დგანან. ცხადია, რომ U_iU_{i+1} ღებულობს $+1$ მნიშვნელობას p ალბათობით და -1 მნიშვნელობას q ალბათობით. გვაქვს:

$$K_{u_iu_{i+1}}=M[U_iU_{i+1}]=1\cdot p+(-1)\cdot q=p-q.$$

ამის შემდეგ განვიხილოთ $j=i+2$ შემთხვევა. ამ შემთხვევაში U_iU_j ნამრავლი $+1$-ის ტოლია, თუკი ორივე გადაადგილებანი— i-ურ და $i+2$ ბიჯზე—წარმოებს ერთი და იმავე მიმართულებით. ეს შესაძლოა მოხდეს ორი ხერხით. ან x წერტილი ყველა სამ ნაბიჯზე i-ურ, $(i+1)$. $(i+2)$—მოძრაობდა ერთი და იმავე მიმართულე-

ბით, ანდა კიდევ მან ორჯერ შეიცვალა ამ სამ ბიჯზე თავისი მიმართულება. მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ $U_iU_{i+2}=1$:

$$P(U_iU_{i+2}=1)=P((U_iU_{i+1}=1)(U_{i+1}U_{i+2}=1))+$$
$$+P((U_iU_{i+1}=-1)(U_{i+1}U_{i+2}=-1))=p^2+q^2.$$

ახლა მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ $U_iU_{i+2}=-1$. ეს კი შეიძლება გაკეთდეს ორი ხერხით: ან წერტილმა შეცვალა თავისი მიმართულება i-ური ბიჯიდან $(i+1)$-ზე გადასვლისას, ხოლო $(i+1)$-დან $(i+2)$-მდე ბიჯზე გადასვლისას შეინარჩუნა იგი, ანდა პირიქით. გვაქვს:

$$P(U_iU_{i+2}=1)=P((U_iU_{i+1}=-1)(U_{i+1}U_{i+2}=1))+$$
$$+P((U_iU_{i+1}=1)(U_{i+1}U_{i+2}=-1))=2pq.$$

ამგვარად, $U_i U_{i+2}$ სიდიდეს აქვს ორი შესაძლო $+1$ და -1 მნიშვნელობა, რომელთა ალბათობები შესაბამისად p^2+q^2 და $2pq$-ს ტოლია. მისი მათემატიკური ლოდინი ტოლია:

$$K_{u_iu_{i+2}} = M[U_iU_{i+2}]=p^2+q^2-2pq=(p-q)^2.$$

ინდუქციით ადვილია დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი k მანძილისათვის $U_1, U_2 \dots U_n$ მწკრივში ბიჯებს შორის სამართლიანია ფორმულები:

$$P(U_iU_{i+k}=1)=p^k+C^2_kp^{k-2}q^2+C^4_kp^{k-4}q^4+\dots$$
$$P(U_iU_{i+k}=-1)=C^1_kp^{k-1}q+C^3_kp^{k-3}q^3+\dots$$

მაშასადამე,

$$K_{u_iu_{i+k}}=(p-q)^k.$$

ამგვარად, შემთხვევით $U_1, U_2, \dots, U_n$ სიდიდეთა სისტემის კორელაციურ მატრიცას ექნება სახე:

$$\left\| K_{u_iu_j} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & p-q & (p-q)^2 & \cdots & (p-q)^{n-1} \\ & 1 & p-q & \cdots & (p-q)^{n-2} \\ & & 1 & \cdots & (p-q)^{n-3} \\ & & & & \\ & & & & 1 \end{matrix} \right\|$$

შემთხვევითი X_n სიდიდის დისპერსია ტოლი იქნება:

$$D[X_n]=\sum_{i=1}^{n} D[U_i]+2\sum_{i<j}K_{u_iu_j}=n+2\sum_{i<j}(p-q)^{j-i},$$

ანდა კიდევ ვაწარმოებთ რა მთავარი დიაგონალიდან ერთნაირ მანძილზე მდგარ ელემენტთა შეჯამებას.

$$D[X_n]=n+2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(p-q)^k.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 18. მოვნახოთ ბინომიალური განაწილების ასიმეტრია.

$$p(X=m)=C_n^m\, p^m q^{n-m} \quad (q=1-p) \tag{10.3.32}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცნობილია, რომ ბინომიალური განაწილება (10.3.32) წარმოადგენს თვით n დამოუკიდებელ ცდებში რომელიღაც ხდომილობის მოხდენათა რიცხვის განაწილებას, რომელსაც ერთ ცდაში აქვს p ალბათობა. წარმოვიდგინოთ შემთხვევითი X სიდიდე — n ცდაში ხდომილობათა მოხდენის რიცხვი — როგორც ჯამი n შემთხვევითი სიდიდეებისა:

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

სადაც

$$X_i=\begin{cases} 1, & \text{თუკი } i\text{-ურ ცდაში ხდომილობა მოხდა,} \\ 0, & \text{თუკი } i\text{-ურ ცდაში ხდომილობა არ მოხდა.} \end{cases}$$

მესამე ცენტრალურ მომენტთა შეკრების თეორემის მიხედვით

$$\mu_3[X]=\sum_{i=1}^{n}\mu_3[X_i]. \tag{10.3.33}$$

მოვნახოთ შემთხვევითი X_i სიდიდის მესამე ცენტრალური მომენტი. მას აქვს განაწილების მწკრივი

0	1
q	p

X_i სიდიდის მესამე ცენტრალური მომენტი ტოლია:

$$(0-p)^3q+(1-p)^3p=-p^3q+q^3p=pq(q-p).$$

ჩავსვამთ რა (10.3.33)-ში მივიღებთ:

$$\mu_3[X]=\sum_{i=1}^{n}pq(q-p)=npq(q-p).$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ ასიმეტრია საჭიროა, X სიდიდის მესამე ცენტრალური მომენტი გავყოთ საშუალო კვადრატული გადახრის კუბზე:

$$Sk=\frac{npq(q-p)}{(npq)^{\frac{3}{2}}}=\frac{q-p}{\sqrt{npq}}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 19. გვაქვს n დადებითი, ერთნაირად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდე:

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n.$$

შევნიშნოთ

$$Z_1=\frac{X_1}{X_1+X_2+\cdots+X_n}.$$

შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი. ცხადია, რომ Z_1 სიდიდის მათემატიკური ლოდინი არსებობს, ვინაიდან იგი მოთავსებულია ნულსა და ერთს შორის, გარდა ამისა, ადვილია დავინახოთ, რომ (X_1, X_2, ..., X_n) სიდიდეთა სისტემის განაწილების კანონი, როგორიც არ უნდა იყოს იგი, სიმეტრიულია მისი ცვლადების მიმართ, ე. ი. არ იცვლება მისი ნებისმიერი გადაადგილებისას. განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდეები:

$$Z_1=\frac{X_1}{X_1+X_2+\cdots+X_n},\quad Z_2=\frac{X_2}{X_1+X_2+\cdots+X_n},\ldots$$
$$\ldots,\ Z_n=\frac{X_n}{X_1+X_2+\cdots+X_n}.$$

ცხადია, მათ განაწილების კანონს აგრეთვე უნდა ჰქონდეს სიმეტრიულობის თვისება, ე. ი. ერთი არგუმენტის შეცვლისას ნებისმიერი სხვა არგუმენტით არ იცვლებოდეს. აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ

$$M[Z_1]=M[Z_2]=\cdots=M[Z_n].$$

ამასთან ერთად ჩვენთვის ცნობილია, რომ შემთხვევითი Z_1, Z_2, ..., Z_n სიდიდეები ჯამში შეადგენენ ერთს, მაშასადამე, მათემატიკურ ლოდინთა შეკრების თეორემის მიხედვით,

$$M[Z_1]+M[Z_2]+\cdots+M[Z_n]=M[1]=1,$$

აქედან

$$M[Z_1]=M[Z_2]=\ldots=M[Z_n]=\frac{1}{n}.$$

XI თავი

ფუნქციის გაწრფევება (ლინეარიზაცია)

11.1. შემთხვევითი არგუმენტთა ფუნქციის გაწრფევების მეთოდი

წინა თავში გავეცანით ალბათობათა თეორიის მეტად მოხერხებულ მათემატიკურ აპარატს—რიცხვითი მახასიათებლების აპარატს. ეს აპარატი ბევრ შემთხვევაში საშუალებას იძლევა მოიძებნოს შემთხვევით სიდიდეთა ფუნქციის რიცხვითი მახასიათებლები (პირველ რიგში მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია) არგუმენტთა რიცხვითი მახასიათებლების მიხედვით განაწილების კანონების გარეშე. რიცხვითი მახასიათებლების უშუალოდ განსაზღვრის ასეთი მეთოდი მისაღებია ძირითადად წრფივი ფუნქციებისათვის.

პრაქტიკაში ძალიან ხშირად გვხვდება შემთხვევები, როდესაც შემთხვევით სიდიდეთა გამოსაკვლევი ფუნქცია, თუმცა კი არ არის მკაცრად წრფივი,

მაგრამ პრაქტიკულად მცირედ განსხვავდება წრფივისაგან და ამოცანათა ამოხსნისას შეიძლება მიახლოებით შეიცვალოს წრფივით. ეს დაკავშირებულია იმასთან, რომ ბევრ პრაქტიკულ ამოცანაში მათში მონაწილე სიდიდეთა შემთხვევითი ცვლილებანი გამოდიან როგორც უმნიშვნელო „ცდომილებანი", რომლებიც ზედ ერთვიან ძირითად კანონზომიერებას.

ამ ცდომილებათა შედარებითი სიმცირის შედეგად ჩვეულებრივად ამოცანაში მონაწილე ფუნქციები—არაწრფივი თავის არგუმენტთა ცვლილების მთელ დიაპაზონში, შემთხვევითი ცვლილების ვიწრო დიაპაზონში თითქმის წრფივია. მართლაც, მათემატიკიდან ცნობილია, რომ ნებისმიერი უწყვეტი დიფერენცირებადი ფუნქცია არგუმენტთა ცვლილების საკმაოდ ვიწრო ფარგლებში შეიძლება მიახლოებით შეცვლილი იქნას წრფივით (განწრფივებულ იქნას). შეცდომაც, რომელიც ამ დროს წარმოიშობა, იმდენად ნაკლებია, რამდენადაც ვიწროა არგუმენტთა ცვლილების საზღვრები, რამდენადაც ახლოა ფუნქცია წრფივთან. თუკი პრაქტიკულად შესაძლო მნიშვნელობათა არე შემთხვევითი არგუმენტებისა იმდენად მცირეა, რომ ამ ფარგლებში ფუნქცია შეიძლება პრაქტიკისათვის საკმაო სიზუსტით გაწრფივებულ იქნას, მაშინ შევცვლით რა არაწრფივ ფუნქციას წრფივით, შეიძლება გამოვიყენოთ ამ უკანასკნელისათვის რიცხვითი მახასიათებლების ის აპარატი, რომელიც დამუშავებულია წრფივი ფუნქციებისათვის. ვიცით რა არგუმენტთა რიცხვითი მახასიათებლები, შესაძლებელი იქნება მოვნახოთ ფუნქციის რიცხვითი მახასიათებლები. ცხადია, ამ დროს ჩვენ მივიღებთ ამოცანის მხოლოდ მიახლოებით ამოხსნას, მაგრამ უმეტეს შემთხვევაში ზუსტი ამოხსნა არც არის საჭირო.

პრაქტიკულ ამოცანათა ამოხსნისას, რომლებშიც შემთხვევითი ფაქტორები აღმოჩნდებიან უმნიშვნელო შეშფოთებათა სახით, რომლებიც თან ერთვიან ძირითად კანონზომიერებებს, გაწრფივება თითქმის ყოველთვის აღმოჩნდება შესაძლებელი, სწორედ შემთხვევით შეშფოთებათა სიმცირის გამო.

განვიხილოთ, მაგალითად, გარეგანი ბალისტიკის ამოცანა ჭურვის მასის ცენტრის მოძრაობის შესახებ. ჭურვის ფრენის X სიშორე განისაზღვრება, როგორც სროლის პირობების, რომელიღაც ფუნქცია—ტყორცნის θ_0 კუთხისა, საწყისი V_0 სიჩქარის და ბალისტიკური c კოეფიციენტისა.

$$X=\varphi(\theta_0, \quad v_0, \quad c). \tag{11.1.1}$$

ფუნქცია (11.1.1). არაწრფივია, თუ მას განვიხილავთ არგუმენტთა ცვლილების მთელ დიაპაზონში. ამიტომ, როცა საუბარია გარე ბალისტიკის ძირითადი ამოცანის ამოხსნაზე ფუნქცია (11.1.1) გამოდის როგორც

არაწრფივი და არავითარ გაწრფივებას არ ექვემდებარება. ოღონდ არის ამოცანები, რომელშიაც ასეთი ფუნქციები წრფივდებიან. ეს ისეთი ამოცანებია, რომლებიც დაკავშირებულია შ ე ც დ ო მ ა თ ა ანდა ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა თ ა გამოკვლევებთან. ვთქვათ ჩვენ გვაინტერესებს ჭურვის ფრენის X მანძილის შემთხვევითი შეცდომა რომელიც, დაკავშირებულია მთელ რიგ შემთხვევით ფაქტორთა არსებობასთან: კუთხე θ_0-ის დაყენების უზუსტობა, ლულის რყევა გასროლისას, ჭურვთა ბალისტიკური არაერთგვაროვნება, ჭურვთა წონის სხვაობა და ა. შ. მაშინ ჩვენ აღვნიშნავთ სროლის ნომინალურად განსაზღვრულ პირობებს და განვიხილავთ ამ პირობებიდან შემთხვევით გადახვევებს. ასეთ შემთხვევით ცვლილებათა დიაპაზონი როგორც წესი, არ არის დიდი და φ ფუნქცია არ იყო რა წრფივი თავისი არგუმენტის ცვლილების უბანზე, შეიძლება გაწრფივებულ იქნას მათი შემთხვევითი ცვლილების მცირე უბანზე.

გაწრფივების მეთოდი ფუნქციებისა, რომლებიც დამოკიდებულია შემთხვევითი არგუმენტებისაგან, პოულობს ძალზე ფართო გამოყენებას ტექნიკის სხვადასხვა დარგში. ძალიან ხშირად, ვღებულობთ რა ამოხსნას „ზუსტ მეცნიერებათა" ჩვეულებრივი მეთოდებით. სასურველია ამ ამოხსნებში შესაძლო ცდომილებანი, რომლებიც დაკავშირებულია ამოცანის ამოხსნისას გაუთვალისწინებელ შემთხვევით ფაქტორებთან, შევაფასოთ. ამ შემთხვევაში, როგორც წესი, ცდომილების შეფასების ამოცანა წარმატებით ამოიხსნება გაწრფივების მეთოდებით, რადგან შემთხვევითი ცვლილებანი, რომლებიც მონაწილეობენ ამოცანაში, მცირე სიდიდეებია. თუკი ეს არ იქნებოდა ასე და არგუმენტთა შემთხვევითი ცვლილებანი გამოვიდოდნენ ფუნქციის სავარაუდო წრფივობის ფარგლებს გარეთ, მაშინ ტექნიკური ამოხსნა უნდა ჩაგვეთვალა არადამაკმაყოფილებლად, რადგან იგი მეტად ბევრი განუზღვრელობის ელემენტის შემცველი იქნებოდა.

11.2. ერთი შემთხვევითი არგუმენტის ფუნქციის გაწრფივება

პრაქტიკაში შემთხვევითი არგუმენტის ფუნქციის გაწრფივების აუცილებლობა შედარებით იშვიათად გვხვდება: ჩვეულებრივ გვიხდება გავითვალისწინოთ რამდენიმე შემთხვევითი ფაქტორის ერთობლივი გავლენა. თუმცა მეთოდური მოსაზრებით მოხერხებულია ეს დავიწყოთ ყველაზე მარტივი შემთხვევიდან. ვთქვათ გვაქვს შემთხვევითი X სიდიდე და ცნობილია მისი რიცხვითი მახასიათებლები: მათემატიკური m_x ლოდინი და D_x დისპერსია.

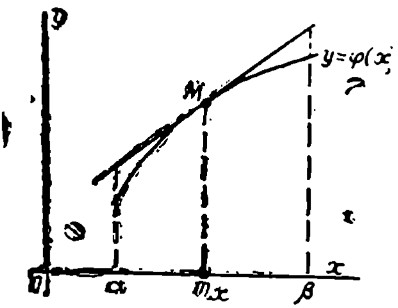
დავუშვათ, რომ შემთხვევითი X სიდიდის პრაქტიკულად შესაძლო მნიშვნელობათა საზღვრებია α, β ე. ი.

$$P(\alpha<X<\beta)\approx 1.$$

გვაქვს მეორე შემთხვევითი Y სიდიდე, რომელიც დაკავშირებულია X-თან ფუნქციონალური დამოკიდებულობით:

$$Y=\varphi(X)^{1)} \tag{11.2.1}$$

თანაც φ ფუნქცია თუმცა არა წრფივია, მაგრამ მცირედ განსხვავდება წრფივისაგან (α, β) უბანზე. საჭიროა მოვნახოთ Y სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები — m_y მათემატიკური ლოდინი და D_y დისპერსია. განვიხილოთ $y=\varphi(x)$ მრუდი (α, β) უბანზე (ნახ. 11.2.1) და შევცვალოთ იგი მიახლოებით m_x აბსცისის მქონე M წერტილზე გაყვანილი მხებით. განტოლებას ექნება სახე:



ნახ. 11.2.1.

$$y=\varphi(m_x)+\varphi'(m_x)(x-m_x). \tag{11.2.2}$$

დავუშვათ, რომ (α, β)—არგუმენტის პრაქტიკულად შესაძლო მნიშვნელობათა ინტერვალი იმდენად ვიწროა, რომ ამ ინტერვალის ფარგლებში მრუდი და მხები განსხვავდებიან მცირედ, ისე, რომ მრუდის უბანი პრაქტიკულად შეიძლება შეიცვალოს მხების უბნით: მოკლედ (α, β) უბანზე ფუნქცია $y=\varphi(x)$ თითქმის წრფივია. მაშინ შემთხვევითი X და Y სიდიდეები მიახლოებით დაკავშირებულია წრფივი დამოკიდებულებით:

$$Y=\varphi(m_x)+\varphi'(m_x)(X-m_x),$$

ანდა, აღვნიშნავთ რა $X-m_x=\overset{\circ}{X}$,

$$Y=\varphi(m_x)+\varphi'(m_x)\overset{\circ}{X}. \tag{11.2.3}$$

წრფივი (11.2.3) ფუნქციისათვის შესაძლებელია გამოვიყენოთ წრფივი ფუნქციის რიცხვითი მახასიათებლების განსაზღვრის ცნობილი ხერხები (იხ. პ. 10.2). ამ წრფივი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი მოინახება (11.2,3) გამოსახულებაში $\overset{\circ}{X}$ არგუმენტის მათემატიკური ლოდინის ჩასმით, რომელიც ნულის ტოლია. მივიღებთ:

$$m_y=\varphi(m_x). \tag{11.2.4}$$

[1] ვგულისხმობთ, რომ φ ფუნქცია უბანზე (α, β) უწყვეტი და დიფერენცირებადია.

Y სიდიდის დისპერსია განისაზღვრება ფორმულით

$$D_y=[\varphi'(m_x)]^2 D_x. \tag{11.2.5}$$

საშუალო კვადრატულ გადახრაზე გადასვლით გვაქვს:

$$\sigma_y=|\varphi'(m_x)|\sigma_x. \tag{11.2.6}$$

(11.2.4), (11.2.5), (11.2.6) ფორმულები მიახლოებითია, რამდენადაც მიახლოებითია თვით არაწრფივი ფუნქციის შეცვლა წრფივით. ამგვარად ჩვენ ამოვხსენით დასმული ამოცანა და მივედით შემდეგ დასკვნამდე.

თითქმის წრფივი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი რომ მოვნახოთ, საჭიროა ფუნქციის გამოსახულებაში არგუმენტის ნაცვლად ჩავსვათ მისი მათემატიკური ლოდინი; რომ მოვნახოთ თითქმის წრფივი ფუნქციის დისპერსია, საჭიროა არგუმენტის დისპერსია გავამრავლოთ არგუმენტის მათემატიკური ლოდინის შესაბამის წერტილში ფუნქციის წარმოებულის კვადრატზე.

11.3. რამდენიმე შემთხვევითი არგუმენტის ფუნქციის გაწრფევება (ლინეარიზაცია)

გვაქვს შემთხვევით სიდიდეთა სისტემა:

$$(X_1,\ X_2,\dots,\ X_n)$$

და მოცემულია სისტემის რიცხვითი მახასიათებლები: მათემატიკური ლოდინები

$$m_{x_1},\ m_{x_2},\dots\ m_{x_n}$$

და კორელაციური მატრიცა

$$\|K_{ij}\|=\left\|\begin{matrix} K_{11} & K_{12}\cdots & K_{1n} \\ & K_{22}\cdots & K_{2n} \\ & & \\ & & K_{nn} \end{matrix}\right\|.$$

შემთხვევითი Y სიდიდე არის $X_1,\ X_2,\dots,\ X_n$ არგუმენტების ფუნქცია:

$$Y=\varphi(X_1,\ X_2,\dots\ X_n), \tag{11.3.1}$$

თანაც ფუნქცია φ არა წრფივია, მაგრამ მცირედ განსხვავდება წრფივისაგან არგუმენტთა ყველა პრაქტიკულად შესაძლო მნიშვნელობათა უბანში („თითქმის წრფივი“ ფუნქციაა).

საჭიროა მოვნახოთ მიახლოებით Y სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები—მათემატიკური m_y ლოდინი და D_y დისპერსია.

ამოცანის ამოსახსნელად გავაწრფივოთ ფუნქცია

$$y=\varphi(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n). \qquad (11.3.2)$$

მოცემულ შემთხვევაში არა აქვს აზრი გეომეტრიული ინტერპრეტაციით სარგებლობას, რადგან სამგანზომილებიანი სივრცის გარეთ მას უკვე არ გააჩნია თვალსაჩინოების უპირატესობა. ოღონდ ხარისხობრივი მხარე საკითხისა რჩება სრულიად იგივე, რაც წინა პარაგრაფში.

განვიხილოთ $y=\varphi(x_1,\ x_2,\dots,x_n)$ ფუნქცია $m_{x_1},\ m_{x_2},\dots,m_{x_n}$ წერტილის საკმაოდ მცირე მიდამოში, რადგან ამ მიდამოში ფუნქცია თითქმის წრფივია, იგი შესაძლებელია მიახლოებით შევცვალოთ წრფივით. ეს ტოლძალოვანია იმისა, რომ $m_{x_1},\ m_{x_2},\dots,m_{x_n}$ წერტილის მახლობლად ტეილორის მწკრივად ფუნქციის დაშლაში შენარჩუნებულ იქნას მხოლოდ პირველი რიგის წევრები, ხოლო ყველა მაღალი უგულებელვყოთ:

$$y=\varphi\ (x_1,\ x_2,\dots,x_x)\approx$$

$$\approx\varphi(m_{x_1}, m_{x_2},\ \dots,\ m_{x_n})+\sum_{i=1}^{n}\varphi'_{x_i}\ (m_{x_1},\ m_{x_2},\dots,\ m_{x_n})\ (x_i-m_{x_i}).$$

მაშასადამე, შემთხვევით სიდიდეთა შორის დამოკიდებულებაც (11.3.1) შეიძლება შეიცვალოს მიახლოებით წრფივი დამოკიდებულებით:

$$Y=\varphi(m_{x_1},\ m_{x_2},\dots m_{x_n})+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\varphi'_{x_i}\ (m_{x_1},\ m_{x_2},\dots,\ m_{x_n})\ (X_i-m_{x_i}). \qquad (11.3.3)$$

სიმოკლისათვის შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$\varphi'_{x_i}(m_{x_1}, m_{x_2},\dots,m_{x_n})=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m.$$

გავითვალისწინოთ რომ $X_i-m_{x_i}=\overset{\circ}{X}_i$, გადავწეროთ ფორმულა (11.3.3) შემდეგი სახით:

$$Y=\varphi(mx_1,\ m_{x_2},\ \dots,\ m_{x_n})+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m\overset{\circ}{X}_i. \qquad (11.3.4)$$

წრფივი (11.3.4) ფუნქციისათვის გამოვიყენებთ წრფივი ფუნქციის რიცხვითი მახასიათებლების განსაზღვრის ხერხებს, რომლებიც გამოყვანილია 10.2 პარაგრაფში. გვაქვს რა მხედველობაში, რომ დაცენ-

ტრებულ ($\overset{\circ}{X}_1$, $\overset{\circ}{X}_2$, ..., X_n) არგუმენტებს აქვთ ნულის ტოლი მათემატიკური ლოდინი და იგივე კორელაციური მატრიცა $||K_{ij}||$, მივიღებთ:

$$m_y=\varphi\ (m_{x_1},\ m_{x_2},\dots,m_{x_n}), \tag{11.3.5}$$

$$D_y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m^2 D_{x_i}+2\sum_{i<j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)_m K_{ij}. \tag{11.3.6}$$

უკანასკნელ ფორმულაში დისპერსიიდან თუ გადავალთ საშუალო კვადრატულ გადახრაზე, მივიღებთ:

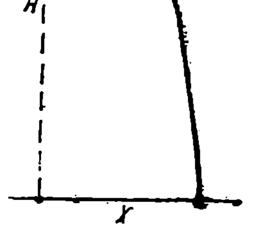
$$\sigma^2_y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m^2 \sigma^2_{x_i}+2\sum_{i<j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m r_{ij}\sigma_{x_i}\sigma_{x_j} \tag{11.3.7}$$

სადაც r_{ij} — X_i Y_i სიდიდეების კორელაციის კოეფიციენტია.

განსაკუთრებით მარტივ სახეს ღებულობს (11.3.7) ფორმულა, როცა $X_1, X_2,\dots,X_n$ სიდიდეები არაკორელირებულია, ე. ი. $r_{ij}=0$ როცა $i\neq j$. ამ შემთხვევაში

$$\sigma^2_y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m^2 \sigma^2_{x_i} \tag{11.3.8}$$

(11.3.7) და (11.3.8) ტიპის ფორმულებით ფართოდ სარგებლობენ სხვადასხვაგვარ გამოყენებით საკითხებში: სხვადასხვა სახის მექანიზმებისა და ხელსაწყოთა შეცდომათა კვლევისას და აგრეთვე სროლისა და ყუმბარის დაშენის სიზუსტის ანალიზისას.



ნახ. 11.3.1

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. X ყუმბარის ვარდნა (ნახ. 11.3.1) გამოისახება მიახლოებითი ანალიზური ფორმულით:

$$X=v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}(1-1,3\cdot10^{-5}cH), \tag{11.3.9}$$

სადაც v_0 — თვითმფრინავის სიჩქარეა, c — ბალისტიკური კოეფიციენტი, H ჩამოგდების სიმაღლე (მ). H იზომება სიმაღლის ზომით, თვითმფრინავის სიჩქარე v_0 — სიჩქარის მაჩვენებლით, c ბალისტიკური კოეფიციენტი მიიღება მისი ნომინალური მნიშვნელობით $c=1,00$, სიმაღლის ზომი უჩვენებს 4000 მ, სიჩქარის მაჩვენებელი 150 მ/წმ. სიმაღლის ზომის ჩვენება ხასიათდება სისტემატური შეცდომით +50 მ და საშუალო კვადრატული გადახრით $\sigma_H=10$ მ; სიჩქარის მაჩვენებლის ჩვენებანი — სისტემატური შეცდომით —2 მ/წმ და საშუალო კვადრატული გადახრით 1 მ/წმ; ბალისტიკური c კოეფიციენტის შესაძლო მნიშვნელობათა გაფანტვა (разброс), რომელიც განპირობებულია ყუმბარის დამზადების უზუსტობით, ხასიათდება $\sigma_c=0,05$ ს.კ.გ.-ით. ხელსაწყოთა შეცდომა ურთიერთდამოუკიდებელია.

მოვნახოთ H, v_0 და c პარამეტრების არაზუსტი განსაზღვრის შედეგად წარმოშობილი ყუმბარის დაცემის წერტილის სისტემატური შეცდომა და საშუალო კვადრატული გადახრა. განისაზღვროს ამ ფაქტებიდან, თუ რომელი ახდენს ყველაზე მეტ გავლენას ყუმბარის დაცემის წერტილის გაფანტვაზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. სიდიდეები H, v_0 და c თვით არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეებია შემდეგი რიცხვითი მახასიათებლებით:

$$m_H=3950\text{მ};\quad \sigma_H=40\text{მ};$$
$$m_{v_0}=152\text{მ/წმ};\quad \sigma_{v_0}=1\text{მ/წმ};$$
$$m_c=1,00;\quad \sigma_c=0,05.$$

ვინაიდან შემთხვევით არგუმენტთა შესაძლო ცვლილებათა დიაპაზონი შედარებით მცირეა, ამოცანის ამოსახსნელად შესაძლოა გამოყენებულ იქნას გაწრფივების მეთოდი.

ჩავსვათ (11.3.9) ფორმულაში H, v_0 და c სიდიდეების ნაცვლად მათი მათემატიკური ლოდინები, ვიპოვოთ X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი:

$$m_x=4007\ (\text{მ}).$$

შედარებისათვის გამოვითვალოთ ნომინალური მნიშვნელობა:

$$X_{\text{ნომ}}=150\sqrt{\frac{8000}{9,81}}(1-1,8\cdot10^{-5}\cdot1\cdot4000)=3975\ (\text{მ})$$

მათემატიკურ ლოდინსა და ნომინალურ მნიშვნელობას შორის სხვაობა სწორედვარდნის წერტილის სისტემატური ცდომილებაა

$$\Delta_x=m_x-X_{\text{ნომ}}=4007-3975=32\quad(\text{მ}).$$

X სიდიდის დისპერსიის განსაზღვრისათვის გამოვთვალოთ კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial X}{\partial H}=\frac{v_0}{\sqrt{2Hg}}(1-1,8\cdot10^{-5}cH)-v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}\cdot1,8\cdot10^{-5}c,$$

$$\frac{\partial X}{\partial v_0}=\sqrt{\frac{2H}{g}}(1-1,8\cdot10^{-5}cH),$$

$$\frac{\partial x}{\partial c}=-v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

ამ გამოსახულებებში ყოველი არგუმენტის ნაცვლად მათი მათემატიკური ლოდინი ჩავსვათ:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial H}\right)_m=0,429;\qquad \left(\frac{\partial X}{\partial v_0}\right)_m=26,4;\qquad \left(\frac{\partial X}{\partial c}\right)_m=-307.$$

ფორმულით (11,3.8) გამოვთვალოთ X სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა;

$$\sigma^2_x=0,429^2\cdot40^2+26,4^2\cdot1^2+307^2\cdot0,05^2=294,4+697,0+235,5=1126,9$$

საიდანაც $\sigma_x\approx33,6$(მ).

σ_x^2-ის შემადგენელ შესაკრებთა შედარებით მივდივართ იმ დასკვნამდე, რომ მათ შორის უდიდესი (637,0) განპირობებულია v_0 სიჩქარის შეცდომებით; მაშასადამე, მოცემულ პირობებში განხილული შემთხვევითი ფაქტორებიდან, რომლებიც განაპირობებენ ყუმბარის ვარდნის წერტილის გაფანტვას, ყველაზე არსებითია სიჩქარის მაჩვენებლის შეცდომა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. თვითმფრინავზე სროლისას მოხვედრის წერტილის აბსცისა მეტრებში) გამოისახება ფორმულით:

$$X=X_{\text{დ}}+1,8\omega D+X\sigma, \tag{11.3.10}$$

სადაც X_{H}— დამიზნების შეცდომაა (მ), ω— სამიზნის კუთხური სიჩქარე (რად./წმ), D — სროლის სიშორე (მ), $X_{\text{ბ}}$ — ჭურვის ბალისტიკასთან დაკავშირებელი ხდომილობა (მ).

$X_{\text{დ}}$, ω, D, $X_{\text{ბ}}$ სიდიდეები შემთხვევითი სიდიდეებია, რომელთა მათემატიკური ლოდინებია:

$$m_{x_{\text{დ}}}=0;\ m_{\omega}=0,1;\ m_{\text{მანძ}}=1000;\ m_{x_{\text{ბ}}}=0$$ და საშუალო

კვადრატული გადახრებია:

$$\sigma_{x_{\text{დ}}}=4;\ \sigma_{\omega}=0,005;\ \sigma_{\text{მანძ}}=50;\ \sigma_{x_{\text{ბ}}}=3$$

($X_{\text{დ}}$, ω, D, $X_{\text{ბ}}$) სისტემის ნორმირებულ კორელაციურ მატრიცას (ე. ი. კორელაციის კოეფიციენტებიდან შემდგარ მატრიცას) აქვს შემდეგი სახე:

$$\|v_{ij}\|=\left\|\begin{matrix}1 & 0,5 & 0,3 & 0\\ & 1 & 0,4 & 0\\ & & 1 & 0\\ & & & 1\end{matrix}\right\|.$$

საჭიროა მოვნახოთ X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და საშუალო კვადრატული გადახრა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (11. 3.10) ფორმულაში არგუმენტთა მათემატიკურ ლოდინთა ჩასმით მივიღებთ:

$$m_x=1,8\cdot 0,1\cdot 1000=180\ (\text{მ}).$$

X სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრის განსაზღვრისათვის მოვნახოთ კერძო წარმოებულები:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial X_{\mathrm{H}}}\right)_m=1;\qquad \left(\frac{\partial X}{\partial\omega}\right)_m=1,8m_{\text{მანძ}}=1800;$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial D}\right)_m=1,8m_{\omega}=0,18;\qquad \left(\frac{\partial X}{\partial X_b}\right)_m=1.$$

(11.3.7) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\sigma_x^2=(1\cdot 4)^2+(1800\cdot 0,005)^2+(0,18\cdot 50)^2+(1\cdot 3)^2+2\cdot 1\cdot 1800\cdot 0,5\cdot 4\cdot 0,005+$$
$$+2\cdot 1\cdot 0,18\cdot 0,3\cdot 4\cdot 50+2\cdot 1800\cdot 0,18\cdot 0,4\cdot 0,005\cdot 50=$$
$$=16+81+81+9+36+21,6+64,8=309,4,$$

საიდანაც

$$\sigma_x\approx 17,6\ (\text{მ}).$$

11.4. განრჩევების მეთოდით მიღებულ შედეგთა დაზუსტება

ზოგიერთი პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნისას იბადება ეჭვი ლინეარიზაციის მეთოდის გამოყენებაზე, იმასთან დაკავშირებით, რომ შემთხვევითი არგუმენტების ცვალებადობის დიაპაზონი არა იმდენად მცირეა. მის ფარგლებში ფუნქციას შეეძლო საკმაო სიზუსტით გაწრფივება-

ამ შემთხვევაში გაწრფივების მეთოდის გამოყენებადობის შესამოწმებლად და მიღებულ შედეგთა დასაზუსტებლად შესაძლებელია გამოყენებულ იქნას მეთოდი, რომელიც ემყარება ფუნქციის დაშლაში არა მარტო წრფივი, არამედ ზოგიერთ მომდევნო უფრო მაღალი რიგის წევრების შენარჩუნებას და ამ წევრებთან დაკავშირებულ ცდომილებათა შეფასებას.

იმისათვის, რომ ნათელვყოთ ეს მეთოდი, ჯერ განვიხილოთ ერთი შემთხვევითი არგუმენტის ფუნქციის ყველაზე მარტივი შემთხვევა. შემთხვევითი Y სიდიდე ეს არის შემთხვევითი X არგუმენტის ფუნქცია.

$$Y=\varphi(X), \tag{11.4.1}$$

თანაც φ ფუნქცია შედარებით მცირედ განსხვავდება წრფივისაგან X არგუმენტის პრაქტიკულად შესაძლო მნიშვნელობის უბანზე, მაგრამ იმდენად განსხვავდება, რომ საეჭვო ხდება გაწრფივების მეთოდის გამოყენებადობა. ამ მდგომარეობის შესამოწმებლად გამოვიყენებთ უფრო ზუსტ მეთოდს, სახელდობრ: დავშლით φ-ფუნქციას ტეილორის მწკრივად m_x წერტილის მიდამოში და დაშლაში პირველ სამ წევრს შევინარჩუნებთ:

$$y=\varphi(x)\approx\varphi(m_x)+\varphi'(m_x)(x-m_x)+\frac{1}{2}\varphi''(m_x)(x-m_x)^2 \tag{11.4.2}$$

ცხადია იგივე ფორმულა მიახლოებით დააკავშირებს შემთხვევით სიდიდეებს:

$$\begin{aligned} Y&=\varphi(m_x)+\varphi'(m_x)(X-m_x)+\frac{1}{2}\varphi''(m_x)(X-m_x)^2=\\ &=\varphi(m_x)+\varphi'(m_x)\overset{\circ}{X}+\frac{1}{2}\varphi''(m_x)\overset{\circ}{X}{}^2. \end{aligned} \tag{11.4.3}$$

ვსარგებლობთ რა (11.4.3) ფორმულით, ვიპოვით Y სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს და დისპერსიას. ვიყენებთ რა თეორემებს რიცხვითი მახასიათებლების შესახებ, მივიღებთ:

$$m_y=\varphi(m_x)+\frac{1}{2}\varphi''(m_x)M[\overset{\circ}{X}{}^2]=\varphi(m_x)+\frac{1}{2}\varphi''(m_x)D_x. \tag{11.4.4}$$

(11.4.4) ფორმულით შესაძლებელია მონახულ იქნას მათემატიკური ლოდინის ზუსტი მნიშვნელობა და შევადაროთ იგი $\varphi(m_x)$-ის იმ მნიშვნელობას, რომელიც მიიღება გაწრფივების მეთოდით; შესწორებას, რომელიც ითვალისწინებს ფუნქციის არაწრფივობას, წარმოადგენს (11.4.4) ფორმულის მეორე წევრი.

განვსაზღვრავთ რა (11.4.3) ფორმულის მარჯვენა და მარცხენა მხარის დისპერსიას, მივიღებთ:

$$D_y=[\varphi'(m_x)]^2D_x+\frac{1}{4}[\varphi''(m_x)]^2D[\mathring{X}^2]+$$

$$+\varphi'(m_x)\varphi''(m_x)\,K[\mathring{X},\ \mathring{X}^2], \tag{11.4.5}$$

სადაც $K[\mathring{X},\ \mathring{X}^2]$ $\mathring{X}$, $\mathring{X}^2$ სიდიდეთა კორელაციური მომენტია. გამოვსახოთ (11.4.5) ფორმულაში შემავალი სიდიდეები X სიდიდის ცენტრალური მომენტებით:

$$D[\mathring{X}^2]=M[\mathring{X}^4]-\{M[\mathring{X}^2]\}^2=\mu_4[X]-D_x^2,$$

$$K[\mathring{X},\ \mathring{X}^2]=M[\mathring{X}\{\mathring{X}^2-M[\mathring{X}^2]\}]=\mu_3[X].$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$D_y=[\varphi'(m_x)]^2D_x+\frac{1}{4}[\varphi''(m_x)]^2(\mu_4[X]-D^2_x)+$$

$$+\varphi'(m_x)\varphi''(m_x)\mu_3[X]. \tag{11.4.6}$$

(11.4.6) ფორმულა იძლევა დისპერსიის დაზუსტებულ მნიშვნელობას შედარებით გაწრფივების მეთოდთან; მისი მეორე და მესამე წევრი შესწორებაა ფუნქციის არაწრფივობისა. ფორმულაში გარდა არგუმენტის D_x დისპერსიისა, შედის კიდევ მესამე და მეოთხე ცენტრალური მომენტები $\mu_3[X]$, $\mu_4[X]$. თუკი ეს მომენტები ცნობილია, მაშინ შესწორება დისპერსიისა შეიძლება მონახულ იქნას უშუალოდ (11.4.6) ფორმულით. თუმცა ხშირად მისი ზუსტად განსაზღვრა აუცილებელი არაა, საკმარისია მისი რიგის ცოდნა. პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება მიახლოებით ნორმალური კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეები. შემთხვევითი სიდიდისათვის, რომელიც ემორჩილება (დაქვემდებარებულია) ნორმალურ კანონს.

$$\mu_3[X]=0; \qquad \mu_4[X]=3\sigma^4_x=3D^2_x, \tag{11.4.7}$$

(11.4.6) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$D_y=[\varphi'(m_x)]^2D_x+\frac{1}{2}[\varphi''(m_x)]^2D^2_x, \tag{11.4.8}$$

(11.4.8) ფორმულით შესაძლოა ვისარგებლოთ გაწრფივების მეთოდის ცდომილების მიახლოებითი შეფასებისათვის, იმ შემთხვევაში, როცა არგუმენტი განაწილებულია ნორმალურთან მიახლოებული კანონით.

სრულიად ანალოგიური მეთოდი შეიძლება გამოყენებული იქნას რამდენიმე შემთხვევითი არგუმენტის ფუნქციის მიმართაც.

$$Y=\varphi(X_1,\ X_2,\dots,X_n). \tag{11.4.9}$$

ფუნქციის

$$y=\varphi(x_1,\ x_2,\dots,x_n)$$

დაშლით ტეილორის მწკრივად $m_{x_1}, m_{x_2},\dots,m_{x_n}$ წერტილის მიდამოში და დაშლაში არა უმაღლეს მეორე რიგის წევრთა შენარჩუნებით, მიახლოებით გვაქვს:

$$Y=\varphi(mx_1,\ mx_2,\dots,\ mx_n)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m(X_i-mx_i)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2_i}\right)_m(X_i-mx_i)^2+\sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\right)_m(X_i-mx_i)(X_j-mx_j),$$

ანდა დაცენტრებულ სიდიდეთა შეყვანით,

$$Y=\varphi(mx_1,\ mx_2,\dots,mx_n)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m\mathring{X}_i+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2_i}\right)_m\mathring{X}^2_i+\sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\right)_m\mathring{X}_i\mathring{X}_j \tag{11.4.10}$$

სადაც ინდექსი m წინანდებურად აღნიშნავს, რომ კერძო წარმოებულის გამოსახულებაში X_i არგუმენტთა ნაცვლად ჩასმულია მათი მათემატიკური ლოდინები m_{x_i}.

ვიყენებთ რა (11.4.10) ფორმულისათვის მათემატიკური ლოდინის ოპერაციას, გვაქვს:

$$m_y=\varphi(mx_1,\ mx_2,\dots,\ mx_n)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2_i}\right)_m Dx_i+\sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)_m K_{ij}, \tag{11.4.11}$$

სადაც $K_{ij}-X_i$, X_j სიდიდეთა კორელაციური მომენტია,

პრაქტიკისათვის ყველაზე მნიშვნელოვან შემთხვევაში, როდესაც არგუმენტები X_1, $X_2,\dots,X_n$, არაკორელირებულია (11.4.11), ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$m_y=\varphi(mx_1,\ mx_2,\dots,\ mx_n)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2_i}\right)_m Dx_i, \tag{11.4.12}$$

(11.4.12) ფორმულის მეორე წევრი ფუნქციის არაწრფივობაზე შესწორებაა. განვსაზღვროთ Y სიდიდის დისპერსია. დისპერსიის გამოსახულება ყველაზე მარტივი სახით რომ მივიღოთ დავუშვათ, რომ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ სიდიდეები არა მარტო არაკორელირებულია, არამედ დამოუკიდებელიცაა. ვსაზღვრავთ რა (11.4.10) მარჯვენა და მარცხენა ნაწილების დისპერსიას და ვსარგებლობთ რა ნამრავლის დისპერსიის თეორემით (იხ. პარაგ. 10.2), მივიღებთ:

$$D_y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m^2 Dx_i + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2_i} \right)_m^2 (\mu_4[X_i] - D^2 x_i) +$$

$$+ \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial x_j} \right)_m^2 Dx_i \, Dx_j + \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2_i} \right)_m \mu_3[X_i]. \quad (11.4.13)$$

სიდიდეებისათვის, რომლებიც განაწილებულია მიახლოებით ნორმალური კანონით, შესაძლოა ვისარგებლოთ (11.4.7) ფორმულით და გარდავქმნათ (11.4.13) გამოსახულება შემდეგი სახით:

$$D_y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m^2 Dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2_i} \right)_m^2 D^2 x_i +$$

$$+ \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial x_j} \right) Dx_i Dx_j. \quad (11.4.14)$$

უკანასკნელი ორი წევრი (11.4.14) გამოსახულებაში წარმოადგენს „შესწორებას ფუნქციის არაწრფივობაზე" და შეუძლიათ გვემსახურონ დისპერსიის გამოთვლისას გაწრფივების მეთოდის სიზუსტის შესაფასებლად.

XII თავი

შემთხვევით არგუმენტთა ფუნქციების განაწილების კანონები

12.1. ერთი შემთხვევითი არგუმენტის მონოტონური ფუნქციის განაწილების კანონი

წინა თავებში გავეცანით შემთხვევით სიდიდეთა ფუნქციების რიცხვითი მახასიათებლების განსაზღვრის მეთოდებს; მეთოდების მთავარი მოხერხებულობაა, რომ არ საჭიროებენ ფუნქციის განაწილების კანონის მონახვას. ოღონდ ზოგჯერ საჭირო ხდება არა მარტო რიცხვი-

თი მახასიათებლებისა, არამედ ფუნქციის განაწილების კანონის განსაზღვრაც.

დავიწყოთ ამ კლასის ყველაზე მარტივი ამოცანის განხილვით: ერთი შემთხვევითი არგუმენტის ფუნქციის განაწილების კანონის ამოცანა. ვინაიდან პრაქტიკისათვის ყველაზე დიდი მნიშვნელობა აქვთ უწყვეტ შემთხვევით სიდიდეებს, ამოცანის ამოხსნა დავიწყოთ სახელდობრ მათთვის.

გვაქვს უწყვეტი შემთხვევითი X სიდიდე განაწილების $f(x)$ სიმკვრივით. მეორე შემთხვევითი Y სიდიდე დაკავშირებულია მასთან შემდეგი ფუნქციონალური დამოკიდებულებით:

$$Y=\varphi(X)$$[1].

საჭიროა მოვნახოთ Y სიდიდის განაწილების სიმკვრივე.

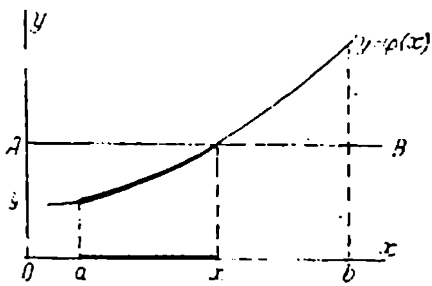
განვიხილოთ აბსცისთა ღერძზე უბანი (a,b), რომელზედაც მდებარეობს X სიდიდის ყველა შესაძლო მნიშვნელობანი, ე. ი.

$$P(a<X<b)=1.$$

კერძო შემთხვევაში, როცა X-ის შესაძლო მნიშვნელობათა არე არაფრით არ არის შეზღუდული, $a=-\infty$; $b=+\infty$.

დასმული ამოცანის ამოხსნის ხერხი დამოკიდებულია (a, b) უბანზე φ ფუნქციის ქცევაზე: იზრდება იგი ამ უბანზე, მცირდება, თუ მერყეობს.

მოცემულ პარაგრაფში განვიხილავთ შემთხვევას, როცა $Y=\varphi(x)$ ფუნქცია (a, b) უბანზე მონოტონურია[2]. ამავე დროს ცალკე გავაანალიზოთ ორი შემთხვევა: ფუნქციის მონოტონური ზრდისა და მონოტონური კლებისა.



ნახ. 12.1.1.

1. ფუნქცია $y=\varphi(x)$ (a, b) უბანზე მონოტონურად იზრდება (ნახ. 12.1.1). როცა სიდიდე X ღებულობს სხვადასხვა მნიშვნელობას (a, b) უბანზე, შემთხვევითი (X, Y) წერტილი გადაადგილდება მხოლოდ $y=\varphi(x)$ მრუდზე; ამ შემთხვევითი წერტილის ორდინატი მთლიანად განისაზღვრება მისი აბსცისით.

აღვნიშნოთ Y სიდიდის განაწილების სიმკვრივე $g(y)$-ით. იმისათ-

---

[1] ვგულისხმობთ, φ ფუნქცია უწყვეტი და დიფერენცირებადია.

[2] არა მონოტონური ფუნქციის შემთხვევა განხილული იქნება 12.3. პარაგრაფში.

ვის, რომ განვსაზღვროთ $g(y)$ ჯერ უნდა მოვნახოთ y სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$G(y) = P(Y<y).$$

გავავლოთ აბსცისთა ღერძის პარალელური AB წრფე მისგან y მანძილზე (ნახ. 12.1.1), რომ შესრულდეს პირობა $Y<y$. შემთხვევითი (Y) წერტილი უნდა მოხვდეს მრუდის იმ უბანზე, რომელიც AB წრფის ქვემოთ მდებარეობს. ამისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ შემთხვევითი სიდიდე X მოხვდეს აბსცისთა ღერძის a-დან x-მდე მონაკვეთზე, სადაც x—აბსცისაა $\varphi(x)$ მრუდის და AB წრფის გადაკვეთის წერტილისა.

მ ა შ ა ს ა დ ა მ ე,

$$G(y)=P(Y<y)=P(a<X<x)=\int_a^x f(x)\,dx.$$

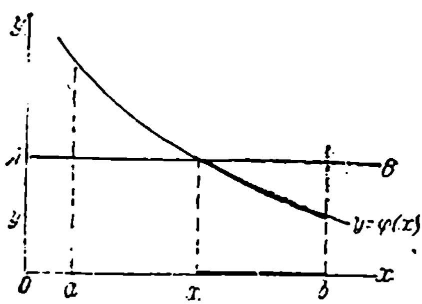
ინტეგრალის ზედა საზღვარი x შესაძლებელია გამოვსახოთ y-ით: $x=\psi(y)$, სადაც ψ ფუნქცია φ ფუნქციის შებრუნებულია. მაშინ

$$G(y)=\int_a^{\psi(y)} f(x)\,dx. \qquad (12.1.1)$$

(12.1.1)-ის ინტეგრალის ზედა საზღვარში შემავალი y ცვლადით გაწარმოებით მივიღებთ:

$$g(y)=G'(y)=f(\psi(y))\psi'(y). \qquad (12.1.2)$$

2. ფუნქცია $y=\varphi(x)$ (a, b) მონაკვეთზე მონოტონურად კლებულობს (ნახ. 12.1.2). ამ შემთხვევაში



ნახ. 12.1.2.

$$G(y)=P(Y<y)=P(x<X<b)=\int_x^b f(x)\,dx=\int_{\psi(y)}^b f(x)dx,$$

საიდანაც

$$g(y)=G'(y)=-f(\psi(y))\psi'(y). \qquad (12.1.3)$$

(12.1.2) და (12.1.3) ფორმულათა შედარებისას შევნიშნავთ, რომ ისინი შესაძლოა გაერთიანდნენ:

$$g(y)=f(\psi(y))|\psi'(y)|. \qquad (12.1.4)$$

მართლაც, როცა φ იზრდება, მისი წარმოებული (ე. ი. ψ'-იც) დადებითია. კლებადი φ ფუნქციისას ψ' წარმოებული უარყოფითია, მაგრამ სამაგიეროდ მის წინ (12.1.3) ფორმულაში მინუსია. მაშასადამე (12.1.4) ფორმულა, რომელშიაც წარმოებული აიღება მოდულის მიხედვით, ჭეშმარიტია ორივე შემთხვევაში. ამგვარად, მონოტონური ფუნქციის განაწილების კანონის შესახებ ამოცანა ამოხსნილია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი: შემთხვევითი X სიდიდე ექვემდებარება კოშის კანონს, რომლის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Y სიდიდე X-თან დაკავშირებულია შემდეგი დამოკიდებულებით:

$$Y=1-X^3$$

მოვნახოთ Y სიდიდის განაწილების სიმკვრივე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგანაც $y=1-x^3$ ფუნქცია მონოტონურია $(-\infty, +\infty)$ უბანზე, შესაძლებელია გამოვიყენოთ (12.1.4) ფორმულა. ამოცანის ამოხსნას გავაფორმებთ ორი სვეტის სახით: მარცხენაში მოთავსებული იქნება ზოგადი ამოცანის ამოხსნისას მიღებული ფუნქციათა აღნიშვნები, მარჯვენაში კონკრეტული, მოცემული მაგალითის შესაბამისი ფუნქციები:

$f(x)$	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}$
$y=\varphi(x)$	$y=1-x^3$
$x=\psi(y)$	$x=\sqrt[3]{1-y}$
$\psi'(y)$	$\frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-y)^2}}$
$\lvert\psi'(y)\rvert$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-y)^2}}$
$g(y)=f(\psi(y))\lvert\psi'(y)\rvert$	$g(y)=\frac{1}{3\pi\left(1+\sqrt[3]{(1-y)^2}\right)\sqrt[3]{(1-y)^2}}$

12.2. ნორმალურ კანონს დაქვემდებარებული არგუმენტის წრფივი ფუნქციის განაწილების კანონი

დავუშვათ შემთხვევითი X სიდიდე დაქვემდებარებული ნორმალურ კანონს, რომლის სიმკვრივეა:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \qquad (12.2.1)$$

ხოლო შემთხვევითი სიდიდე Y დაკავშირებულია მასთან შემდეგი ფუნქციონალური დამოკიდებულებით:

$$Y=aX+b, \qquad (12.2.2)$$

სადაც a და b — არა შემთხვევითი კოეფიციენტებია.

საჭიროა მოვნახოთ Y სიდიდის განაწილების კანონი.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

გავაფორმოთ ორი სვეტის სახით წინა პარაგრაფის მაგალითის მიხედვით:

$f(x)$	$\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$
$y=\varphi(x)$	$y=ax+b$
$x=\psi(y)$	$x=\frac{y-b}{a}$
$\psi'(y)$	$\frac{1}{a}$
$\lvert\psi'(y)\rvert$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}$
$g(y)=f(\psi(y))\lvert\psi'(y)\rvert$	$g(y)=\frac{1}{\lvert a\rvert\sigma_x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-m_x\right)^2}{2\sigma_x^2}}$

გარდავქმნით რა $g(y)$ გამოსახულებას, მივიღებთ:

$$g(y)=\frac{1}{|a|\sigma_y\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{[y-(am_x+b)]^2}{2|a|^2\sigma_x^2}}$$

ეს კი არის ნორმალური კანონი პარამეტრებით:

$$\left.\begin{aligned} a_y &= am_x+b, \\ \sigma_y &= |a|\sigma_x. \end{aligned}\right\} \qquad (12.2.3)$$

თუ გადავალთ საშუალო კვადრატული გადახრებიდან მათ პროპორციულ საალბათო გადახრებზე, მივიღებთ:

$$E_y=|a|E_x. \qquad (12.2.4)$$

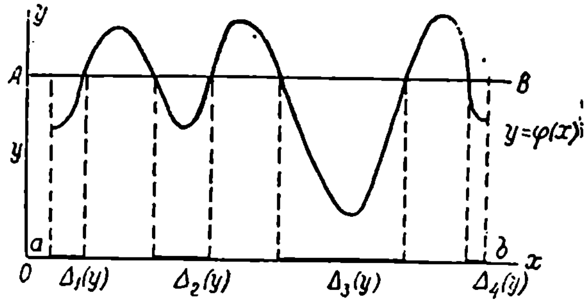
ამგვარად, ჩვენ დავრწმუნდით, რომ ნორმალურ კანონს დაქვემდებარებული არგუმენტის წრფივი ფუნქცია აგრეთვე დაქვემდებარებულია ნორმალურ კანონს. რომ მოვნახოთ ამ კანონის გაფანტვის ცენტრი, საჭიროა წრფივი ფუნქციის გამოსახულებაში არგუმენტის ნაცვლად ჩავსვათ მისი გაფანტვის ცენტრი, რომ მოვნახოთ ამ კანონის საშუალო კვადრატული გადახრა, საჭიროა არგუმენტის საშუალო კვადრატული გადახრა გადავამრავლოთ წრფივი ფუნქციის გამოსახულებაში არგუმენტის კოეფიციენტის მოდულზე. იგივე წესი სამართლიანია საალბათო გადახრებისათვის.

12.3. ერთი შემთხვევითი არგუმენტის არამონოტონური ფუნქციის განაწილების კანონი

გვაქვს უწყვეტი შემთხვევითი X სიდიდე განაწილების $f(x)$ სიმკვრივით; Y სიდიდე დაკავშირებულია X-თან ფუნქციონალური დამოკიდებულებით:

$$Y=\varphi(X),$$

თანაც $y=\varphi(x)$ ფუნქცია არგუმენტის შესაძლო მნიშვნელობათა (a, b) უბანზე არამონოტონურია (ნახ. 12.3.1).



ნახ. 12.3.1.

მოვნახოთ Y სიდიდის განაწილების ფუნქცია $G(y)$. ამისათვის ისევ გავატაროთ AB წრფე აბსცისთა ღერძის პარალელურად y მანძილზე მისგან და გამოვყოთ $y=\varphi(x)$ მრუდის ის ნაწილები, რომლებზედაც სრულდება პირობა $Y<y$.

დავუშვათ ამ უბნებს შეესაბამება აბსცისთა ღერძის $\Delta_1(y)$, $\Delta_2(y)$, უბნები. ხდომილობა $Y<y$ ტოლძალოვანია შემთხვევითი X სიდიდის ჩამოთვლილი უბნებიდან ერთ-ერთზე, სულ ერთია რომელზე მოხვედრისა, ამიტომ

$$G(y)=P(Y<y)=P((X\subset\Delta_1(y))+(X\subset\Delta_2(y))+\ldots)=$$
$$=\sum_i P(X\subset\Delta_i(y))=\sum_i\int_{\Delta_i(y)} f(x)dx.$$

ამგვარად, $Y=\varphi(X)$ სიდიდის განაწილების ფუნქციისათვის გვაქვს ფორმულა:

$$G(y)=\sum_i\int_{\Delta_i(y)} f(x)dx. \qquad (12.3.1)$$

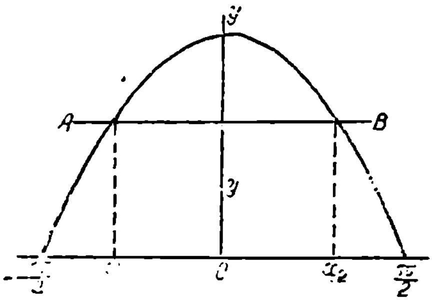
ინტერვალთა საზღვრები $\Delta_i(y)$ დამოკიდებულია y-ზე და კონკრეტულად $y=\varphi(x)$ სახით მოცემულ ფუნქციისათვის შეიძლება გამოსახულ იქნას როგორც y-ის ცხადი ფუნქციები. $G(y)$-ის y-ით გაწარმოებით,

რომელიც ინტეგრალის ზღვრებში შედის, მივიღებთ Y სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს:

$$g(y)=G'(y). \tag{12.3.2}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. X სიდიდე დაქვემდებარებულია $-\frac{\pi}{2}$-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე ცანზე თანაბარი სიმკვრივის კანონს:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} \text{ როცა } |x|<\frac{\pi}{2};\\ 0 \text{ როცა } |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$



ნახ. 12.3.2.

მოვნახოთ განაწილების კანონი სიდიდის

$$Y=\cos x.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაგებთ $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკს (ნახ.. 12.3.2). ცხადია, $a=-\frac{\pi}{2}$, $b=\frac{\pi}{2}$ და (a, b) ინტერვალში ფუნქცია $y=\cos x$ არამონოტონურია.

12.3.1. ფორმულის გამოყენებით გვაქვს:

$$G(y)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_2}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx,$$

გამოვსახოთ x_1 და x_2 საზღვრები y-ით:

$$x_1=-\arccos y;\quad x_2=\arccos y.$$

აქედან

$$G(y)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arccos y} f(x)dx+\int_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}} f(x).dx. \tag{12.3.3}$$

რომ მოვნახოთ $g(y)$ სიმკვრივე $y(y)$ არ გამოვითვლით ინტეგრალებს 12.3.3 ფორმულაში, არამედ უშუალოდ გავადიფერენციალებთ ამ გამოსახულებას y ცვლადით, რომელიც შედის ინტეგრალთა საზღვრებში:

$$g(y)=G'(y)=f(-\arccos y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}+f(\arccos y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

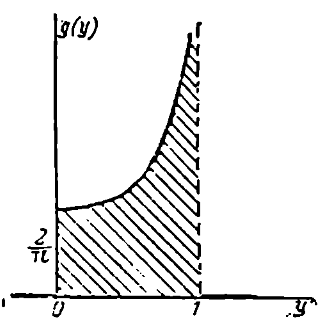
გვაქვს რა მხედველობაში რომ $f(x) = \frac{1}{\pi}$, მივიღებთ:

$$g(y)=\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \qquad (12.3.4)$$

მივუთითებთ რა y-ისათვის განაწილების (12.3.4) კანონს უნდა შევნიშნოთ, რომ იგი სამართლიანია 0-დან 1-მდე საზღვრებში, ე. ი. იმ საზღვრებში, რომელშიც იცვლება $Y=\cos X$, $-\frac{\pi}{2}$ და $\frac{\pi}{2}$ შორის მოთავსებულ X არგუმენტისას. ამ საზღვრების გარეთ $g(y)$ სიმკვრივე ნულის ტოლია. $g(y)$ ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია (12.3.3) ნახ.-ზე. როცა $y=1$, $g(y)$ მრუდს აქვს შტო, რომელიც მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ.

12.4. ორი შემთხვევითი სიდიდის ფუნქციის განაწილების კანონი

რამდენიმე შემთხვევითი არგუმენტის ფუნქციის განაწილების ამოცანა გაცილებით რთულია ერთი არგუმენტის ანალოგიურ ამოცანასთან შედარებით. აქ ჩვენ გადმოვცემთ ამ ამოცანის ამოხსნის ზოგად ხერხს ორი არგუმენტის ფუნქციის ყველაზე მარტივი შემთხვევისათვის.



ნახ. 12.3.3.

გვაქვს ორი უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის (X, Y) სისტემა განაწილების $f(x, y)$ სიმკვრივით, შემთხვევითი სიდიდე Z დაკავშირებულია X და Y-თან შემდეგი ფუნქციონალური დამოკიდებულებით:

$$Z=\varphi(X, Y).$$

საჭიროა მოვნახოთ Z სიდიდის განაწილების კანონი. ამოცანის ამოსახსნელად ვისარგებლოთ გეომეტრიული ინტერპრეტაციით, რომელიც ანალოგიური იქნება იმისა, რომელიც ჩვენ გამოვიყენეთ ერთი არგუმენტის შემთხვევისას. $z=\varphi(x,y)$ ფუნქცია გამოისახება უკვე არა მრუდით, არამედ ზედაპირით (ნახ. 12.4.1)

მოვნახოთ Z სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$G(z)=P(Z<z)=P(\varphi(X, Y)<z). \qquad (12.4.1)$$

გავავლოთ xOy სიბრტყის პარალელური Q სიბრტყე მისგან z მანძილზე. ეს სიბრტყე გადაჰკვეთს $z=\varphi(x, y)$ ზედაპირს რომელიღაც K[1] მრუდზე.

[1] ჩვენს ნახაზზე k მრუდი შეკრულია, საერთოდ იგი შეიძლება იყოს შეუკვრელი და რამდენიმე შტოსაგან შედგენილი.

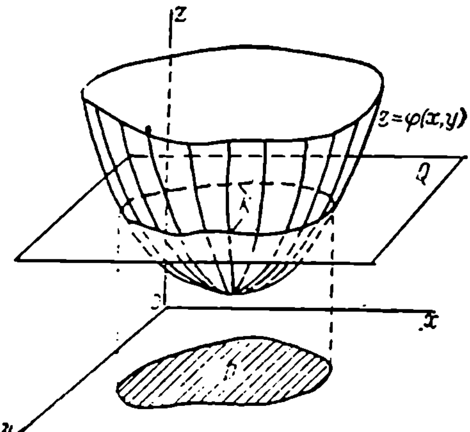
დავაგეგმილოთ K მრუდი xOy სიბრტყეზე. ეს გეგმილი, რომლის განტოლებაა $\varphi(x, y)=z$, სიბრტყეს ჰყოფს ორ არედ; ერთ-ერთი მათგანისათვის ზედაპირის სიმაღლე xOy სიბრტყის ზემოთ იქნება z-ზე ნაკლები, ხოლო მეორისათვის — z-ზე მეტი. აღვნიშნოთ D-თი უბანი, რომლისათვის ეს სიმაღლე ნაკლებია z-ზე. რომ შესრულდეს (12.4.1) უტოლობა, შემთხვევითი (X, Y) წერტილი, ცხადია, უნდა მოხვდეს D არეში. მაშასადამე,

$$G(z)=P((X,Y)\subset D)=\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (12.4.2)$$

(12.4.2) გამოსახულებაში z სიდიდე შედის არა ცხადად, ინტეგრირების საზღვრების საშუალებით. $G(z)$-ის z-ით გაწარმოებით მივიღებთ Z სიდიდის სიმკვრივეს:

$$g(z)=G'(z).$$

თუ გვეცოდინება $z=\varphi(x,y)$ ფუნქციის კონკრეტული სახე, შესაძლებელია ინტეგრების საზღვრები გამოვსახოთ z-ით და დავწეროთ გამოსახულება $g(z)$ ცხადი სახით.



ნახ. 12.4.1.

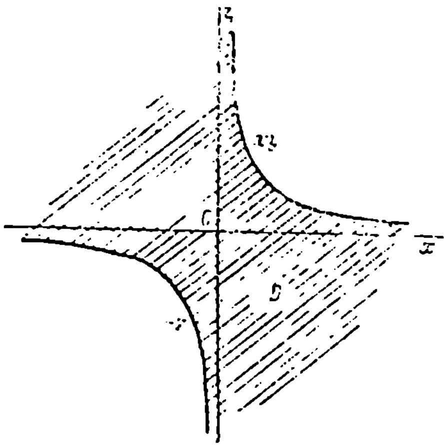
იმისათვის, რომ მოვნახოთ ორი არგუმენტის ფუნქციის განაწილების კანონი, არ არის აუცილებელი ყოველთვის ავაგოთ ზედაპირი $z=\varphi(x, y)$, მსგავსად იმისა, როგორც ეს 12.4.1 ნახ.-ზეა გაკეთებული და იგი xOy სიბრტყის პარალელური სიბრტყით გადაიკვეთოს. პრაქტიკულად საკმარისია ავაგოთ xOy სიბრტყეზე მრუდი, რომლის განტოლებაა $z = \varphi(x, y)$. ვიპოვოთ ამ მრუდის რომელ მხარეზეა $Z<z$ და რომელზე $Z>z$ და ვაინტეგროთ იმ D არეზე, რომლისთვისაც $Z<z$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. (X, Y) სიდიდეთა სისტემა დაქვემდებარებულია განაწილების კანონს $f(x, y)$ სიმკვრივით. Z სიდიდე არის X, Y სიდიდეთა ნამრავლი:

$$Z=XY.$$

მოვნახოთ Z სიდიდის განაწილების სიმკვრივე.

მივცეთ Z-ს რომელიმე მნიშვნელობა და ავაგოთ xOy სიბრტყეზე განტოლებაა $xy=z$ (ნახ. 12.4.2). ეს — ჰიპერბოლაა, რომლის ასიმპტოტები ემთხვევა კოორდინატთა ღერძებს. D არე (ნახ. 12.2.4) დაშტრიხულია.



ნახ. 12.4.2.

Z სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს სახე:

$$G(z)=\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{\frac{z}{x}}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy + \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f(x, y)\, dx\, dy.$$

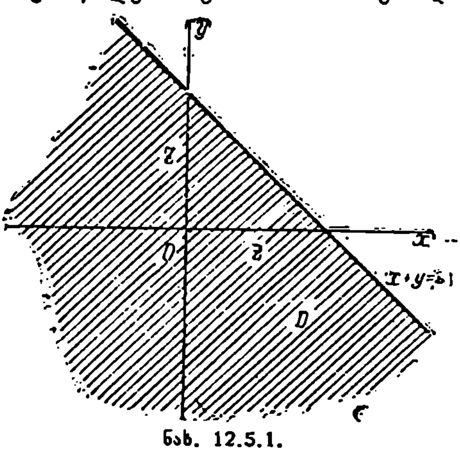
ამ გამოსახულების z-ით გაწარმოებით მივიღებთ:

$$g(z)=-\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx+\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right)dx. \qquad (12.4.3)$$

12.5. ორი შემთხვევითი სიდიდეთა ჯამის განაწილების კანონი. განაწილების კანონთა კომპოზიცია

ვისარგებლოთ ზემოთ გადმოცემული ზოგადი მეთოდით პრაქტიკის ერთი მნიშვნელოვანი კერძო ამოცანის ამოსახსნელად, სახელდობრ, ორი შემთხვევითი სიდიდის ჯამის განაწილების კანონის მოსაძებნად.

გვაქვს სისტემა ორი შემთხვევითი (X, Y) სიდიდეებისა განაწილების სიმკვრივით $f(x, y)$. განვიხილოთ X და Y შემთხვევით სიდიდეთა ჯამი და მოვნახოთ z სიდიდის განაწილების კანონი. ამისათვის xOy სიბრტყეზე ავაგოთ ხაზი, რომლის განტოლებაა $x+y=z$ (ნახ. 12.5.1). ეს წრფეა, რომელიც მოკვეთს ღერძებზე z-ის ტოლ მონაკვეთებს $x+y=z$ წრფე xOy სიბრტყეს ჰყოფს ორ ნაწილად;



ნახ. 12.5.1.

მარჯვნივ და მის ზემოთ $X+Y>z$; მარცხნივ და ქვემოთ $X+Y<z$. მოცემულ შემთხვევაში xOy სიბრტყის მარცხენა ქვედა ნაწილი არე დაშტრიხულია 12.5.1 ნახ.-ზე. (12.4.2) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$G(z)=\iint_{(L)} f(x, y)\, dx\, dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dx\, dy=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)dy\right\} dx.$$

თუ ამ გამოსახულებას შიგა ინტეგრალის ზედა საზღვრებში შემავალი ცვლადით გავაწარმოებთ, მივიღებთ:

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\, dx. \tag{12.5.1}$$

ეს — ორი შემთხვევითი სიდიდის ჯამის განაწილების სიმკვრივის გამოსათვლელი ზოგადი ფორმულაა.

X და Y-ის მიმართ ამოცანის სიმეტრიულობის მოსაზრებით შესაძლებელია დავწეროთ იმავე ფორმულის მეორე ვარიანტი:

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)dy, \tag{12.5.2}$$

რომელიც პირველის ტოლძალოვანია და შესაძლოა გამოყენებულ იქნას მის მაგივრად.

განსაკუთრებული პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს შემთხვევას, როცა შესაკრები X და Y სიდიდეები დამოუკიდებლები არიან, მაშინ ლაპარაკობენ **განაწილების კანონების კომპოზიციაზე**.

მოვახდინოთ განაწილების ორი კანონის კომპოზიცია. ეს ნიშნავს მოვნახოთ განაწილების კანონი ორი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდის. ჯამისა, რომლებიც განაწილების ამ კანონებს ექვემდებარება.

გამოვიყვანოთ განაწილების ორი კანონის კომპოზიციისათვის ფორმულა. გვაქვს ორი დამოუკიდებელი შემთხვევითი X და Y სიდიდეები, რომლებიც ექვემდებარებიან შესაბამისად $f_1(x)$ და $f_2(x)$ განაწილების კანონებს.

საჭიროა მოვახდინოთ ამ კანონების კომპოზიცია, ე. ი. მოვნახოთ განაწილების სიმკვრივე შემდეგი სიდიდისა

$$Z=X+Y,$$

ვინაიდან X და Y სიდიდეები დამოუკიდებლებია, ამიტომ

$$f(x, y)=f_1(x)f_2(y),$$

და (12.5.1) და (12.5.2) ფორმულები მიიღებენ სახეს:

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(z-x)\,dx, \tag{12.5.3}$$

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)f_2(y)dy. \tag{12.5.4}$$

განაწილების კანონების კომპოზიციის აღსანიშნავად ხშირად იყენებენ სიმბოლურ ჩანაწერს:

$$g=f_1 * f_2,$$

სადაც $*$ კომპოზიციის სიმბოლოა.

(12.5.3) და (12.5.4) ფორმულები განაწილების კანონთა კომპოზიციისათვის მოხერხებულია მხოლოდ მაშინ, როცა განაწილების $f_1(x)$ და $f_2(y)$ კანონები (ანდა უკიდურეს შემთხვევაში ერთ-ერთი მათგანი) მოცემულია არგუმენტის მნიშვნელობათა მთელ დიაპაზონში (—∞, $+\infty$-მდე) ერთი ფორმულით. თუ კი ორივე კანონი მოცემულია სხვადასხვა უბნებში სხვადასხვა განტოლებებით (მაგ. თანაბარი სიმკვრივის ორი განტოლება), მაშინ უფრო მოხერხებულია ვისარგებლოთ უშუალოდ ზოგადი მეთოდით, რომელიც გადმოცემულია 12.4 პარაგრაფში, ე. ი. გამოვთვალოთ $Z=X+Y$ სიდიდის განაწილების $G(z)$ ფუნქცია და გავაწარმოოთ ეს ფუნქცია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. შევადგინოთ ნორმალური კანონის

$$f_1(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

და თანაბარი სიმკვრივის კანონის

$$f_2(y)=\frac{1}{\beta-\alpha}, \quad \text{როცა} \quad \alpha<y<\beta.$$

კომპოზიცია.

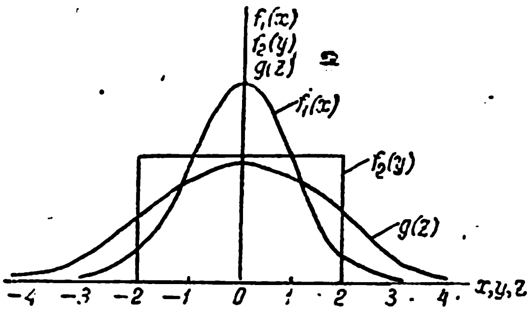
ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყენოთ განაწილების კანონების კომპოზიციის ფორმულა (12.5.4) სახით:

$$g(z)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-y-m)^2}{2\sigma^2}}dy=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[y-(z-m)]^2}{2\sigma^2}}dy \tag{12.5.5}$$

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია (12.5.5) გამოსახულებაში არის ნორმალური კანონი, რომლის გაფანტვის ცენტრია $z-m$ და საშუალო კვადრატული გადახრა σ, ხოლო (12.5.5) გამოსახულებაში ინტეგრალი არის ამ კანონს დაქვემდებარებული შემთხვევითი სიდიდის α-დან β-მდე უბანზე მოხვედრის ალბათობა. მაშასადამე,

$$g(z)=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\Phi^{*}\left(\frac{\beta-(z-m)}{\sigma}\right)-\Phi^{*}\left(\frac{\alpha-(z-m)}{\sigma}\right)\right].$$

$f_1(x)$, $f_2(y)$ და $g(z)$ კანონების გრაფიკები, როცა $\alpha=-2$, $\beta=2$, $m=0$, $\sigma=1$ მოყვანილია 12.5.2. ნახ.-ზე.



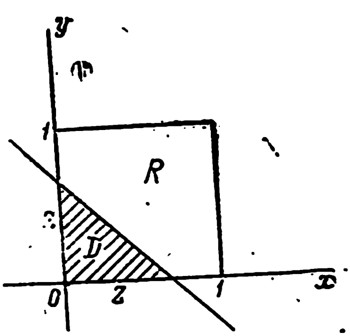
ნახ. 12.5.2.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. შევადგინოთ თანაბარი სიმკვრივის ორი კანონის კომპოზიცია რომლებიც მოცემულია ერთი და იგივე (0,1) უბანზე:

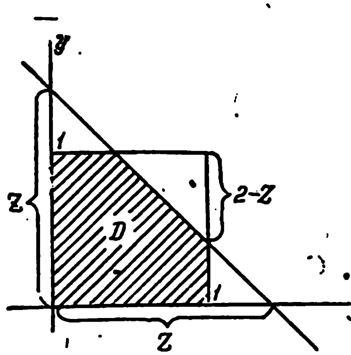
$$f_1(x)=1,\ \text{როცა}\ 0<x<1.$$

$$f_2(y)=1,\ \text{როცა}\ 0<y<1.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვინაიდან $f_1(x)$ და $f_2(y)$ კანონები მოცემულია მხოლოდ Ox და Oy ღერძების გარკვეულ უბნებში, ამ ამოცანის ამოსახსნელად მოხერხებულია ვისარგებლოთ არა (12.5.3) და (12.5.4) ფორმულებით, არამედ ზოგადი მეთოდით, რომელიც გაშუქებულია 12.4. პარაგრაფში და მოვნახოთ $Z=X+Y$ სიდიდის განაწილების $G(z)$ ფუნქცია.



ნახ. 12.5.3.



ნახ. 12.5.4.

განვიხილოთ xOy სიბრტყეზე შემთხვევითი X, Y წერტილი. მისი შესაძლო მდგომარეობათა არეა-R კვადრატი, რომლის გვერდი ერთის ტოლია.
(ნახ. 12.5.3). გვაქვს:

$$G(z)=\iint\limits_{(D)} f(x,\ y)\ dx\ dy=\iint\limits_{(D)} dx\ dy,$$

სადაც D არის R კვადრატის ნაწილია, რომელიც მდებარეობს $x+y=z$ წრფის მარცხნივ და ქვემოთ. ცხადია,

$$G(z)=S_D,$$

სადაც S_D D არეს ფართია.

შევადგინოთ გამოსახულება D არის ფართობისათვის სხვადასხვა მნიშვნელობისას, რისთვისაც ვისარგებლოთ 12.5.3 და 12. 5.4 ნახ-ებით.

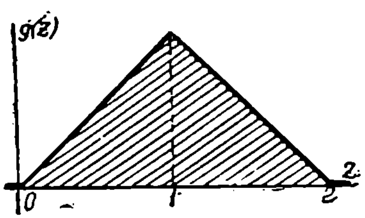
1) როცა $z<0$ $\quad G(z)=0;$

2) როცა $0<z<1$ $\quad G(z)=\dfrac{z^2}{2};$

3) როცა $1<z<2$ $\quad G(z)=1-\dfrac{(2-z)^2}{2};$

4) როცა $z>2$ $\quad G(z)=1.$

ამ გამოსახულებათა გაწარმოებით მივიღებთ:



ნახ. 12.5.5.

1) როცა $z<0$ $\quad g(z)=0;$

2) როცა $0<z<1$ $\quad g(z)=z;$

3) როცა $1<z<2$ $\quad g(z)=2-z;$

4) როცა $z>2$ $\quad g(z)=0.$

$g(z)$-ის განაწილების კანონის გრაფიკი მოცემულია 12.5.5. ნახ-ზე. ასეთი კანონი ატარებს „სიმპსონის კანონის" ანუ „სამკუთხედის კანონის" სახელს.

12.6. ნორმალური კანონების კომპოზიცია

განვიხილოთ ორი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდე X და Y, რომლებიც დაქვემდებარებულია ნორმალურ კანონებს:

$$f_1(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \qquad (12.6.1)$$

$$f_2(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} \qquad (12.6.2)$$

საჭიროა მოვახდინოთ ამ კანონების კომპოზიცია, ე. ი. მოვნახოთ

$$Z=X+Y$$

სიდიდის განაწილების კანონი.

გამოვიყენოთ ზოგადი ფორმულა (12.5.3) განაწილების კანონის კომპოზიციისათვის

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, f_2(z-x)\, dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2_x}-\frac{(z-x-m_y)^2}{2\sigma^2_y}}\, dx. \qquad (12.6.3)$$

თუ გავხსნით ფრჩხილებს ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ხარისხის მაჩვენებელში და მსგავს წევრებს შევკრებთ, მივიღებთ:

$$g(z)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2+2Bx-C}\, dx.$$

სადაც

$$A=\frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2_x+\sigma^2_y}{\sigma^2_x\sigma^2_y};$$

$$B=\frac{m_x}{2\sigma^2_x}+\frac{z-m_y}{2\sigma^2_y};$$

$$C=\frac{m^2_x}{2\sigma^2_x}+\frac{(z-m)_y{}^2}{2\sigma^2_y}.$$

ამ გამოსახულებათა ჩვენთვის ცნობილ (9. 1.3) ფორმულაში ჩასმით:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2\pm 2Bx-C}\, dx=\sqrt{\frac{\pi}{A}}\, e^{-\frac{AC-B^2}{A}} \qquad (12.6.4)$$

გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$g(z)=\frac{1}{\sqrt{\sigma^2_x+\sigma^2_y}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{[z-(m_x+m_y)]^2}{2(\sigma^2_x+\sigma^2_y)}} \qquad (12.6.5)$$

ხოლო ეს არის ნორმალური კანონი გაფანტვის ცენტრით

$$m_z=m_x+m_y \qquad (12.6.6)$$

და საშუალო კვადრატული გადახრით

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}. \tag{12.6.7}$$

ამავე შედეგამდე შეიძლება მივიდეთ მარტივად შემდეგი თვისობრივი მსჯელობის შედეგად.

ინტეგრალქვეშა (2.6.3) ფუნქციის გარდაქმნის და ფრჩხილების გახსნის გარეშე, მაშინვე მივდივართ დასკვნამდე, რომ ხარისხის მაჩვენებელი არის x-ის მიმართ შემდეგი სახის კვადრატული სამწევრი

$$\varphi(x) = -Ax^2 + 2Bx - C.$$

სადაც A კოეფიციენტში z სიდიდე სრულიადაც არ შედის, B კოეფიციენტში შედის პირველ ხარისხში, ხოლო C კოეფიციენტში — კვადრატში. გვაქვს რა ეს მხედველობაში და ვიყენებთ რა (12.6.4) ფორმულას, მივდივართ დასკვნამდე, რომ $g(z)$ არის მაჩვენებლიანი ფუნქცია, რომლის ხარისხის მაჩვენებელი — კვადრატული სამწევრია z-ის მიმართ, ხოლო განაწილების სიმკვრივე ასეთი სახით შეესაბამება ნორმალურ კანონს. ამგვარად, ჩვენ მივდივართ წმინდა თვისობრივ დასკვნამდე: z სიდიდის განაწილების კანონი ნორმალური უნდა იყოს.

რომ მოვნახოთ ამ კანონის m_z და σ_z პარამეტრები, ვისარგებლოთ მათემატიკური ლოდინის და დისპერსიის შეკრების თეორემებით, მათემატიკური ლოდინის შეკრების თეორემის მიხედვით

$$m_z = m_x + m_y. \tag{12.6.8}$$

დისპერსიათა შეკრების მიხედვით

$$D_z = D_x + D_y,$$

ანდა

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2, \tag{12.6.9}$$

საიდანაც გამოდის ფორმულა (12.6.7)

საშუალო კვადრატული გადახრიდან მისი პროპორციულ საალბათო გადახრებზე გადასვლით მივიღებთ:

$$E_z^2 = E_x^2 + E_y^2. \tag{12.6.10}$$

ამგვარად, მივედით შემდეგ წესამდე:
ნორმალური კანონების კომპოზიციისას მიიღება ხელახლა ნორმალური კანონი, თანაც მათემატიკური ლოდინები და დისპერსიები (ანდა საალბათო გადახრათა კვადრატები) ჯამდება.

ნორმალური კანონების კომპოზიციის წესი შეიძლება განზოგადოე-

ძალ იქნეს დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ნებისმიერი რიცხვის შემთხვევაში, თუკი გვაქვს n დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდე:

$$X_1, X_2, \dots, X_n,$$

რომლებიც ემორჩილებიან ნორმალურ კანონებს და აქვთ გაფანტვის ცენტრები

$$m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}$$

და საშუალო კვადრატული გადახრები

$$\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \dots, \sigma_{x_n},$$

მაშინ სიდიდე

$$Z=\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ასევე დაქვემდებარებულია ნორმალურ კანონს, რომლის პარამეტრებია

$$m_z=\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}, \tag{12.6.11}$$

$$\sigma^2_z=\sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{x_i}. \tag{12.6.12}$$

(12.6.12) ფორმულის ნაცვლად შეიძლება გამოვიყენოთ მისი ტოლძალოვანი ფორმულა

$$E^2_z=\sum_{i=1}^{n} E^2_{x_i}. \tag{12.6.13}$$

თუ შემთხვევითი სიდიდეების (X, Y) სისტემა განაწილებულია ნორმალური კანონით, მაგრამ X, Y სიდიდეები დამოკიდებულია, მაშინ ძნელი არ არის დავამტკიცოთ, ისე როგორც ადრე, გამოვალთ რა ზოგადი (12.5.1) ფორმულიდან, რომ განაწილების კანონი

$$Z=X+Y$$

სიდიდისა აგრეთვე არის ნორმალური კანონი. გაფანტვის ცენტრები როგორც წინათ, ალგებრულად იკრიბება, მაგრამ საშუალო კვადრატული გადახრისათვის წესი უფრო რთული ხდება:

$$\sigma^2_z=\sigma^2_x+\sigma^2_y+2r\sigma_x\sigma_y, \tag{12.6.14}$$

სადაც r X და Y სიდიდეთა კორელაციის კოეფიციენტია.

რამდენიმე დამოკიდებული შემთხვევითი სიდიდის შეკრებისას, რომელნიც თავიანთ ერთობლიობაში ნორმალურ კანონს ემორჩილება,

ჯამის განაწილების კანონი, აგრეთვე აღმოჩნდება ნორმალური. რომლის პარამეტრებია:

$$m_z = \sum_{i=1}^{n} m_{x_i}, \tag{12.6.15}$$

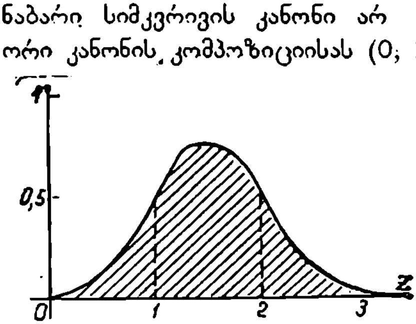
$$\sigma^2_z = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{x_i} + 2\sum_{i<j} r_{ij}\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}, \tag{12.6.16}$$

ანდა საალბათო გადახრებია

$$E^2_z = \sum_{i=1}^{n} E^2 x_i + 2\sum_{i<j} r_{ij}E_{x_i}E_{x_j}, \tag{12.6.17}$$

სადაც r_{ij} X_i, X_j სიდიდეთა კორელაციის კოეფიციენტია, ხოლო აჯამვა ვრცელდება $X_1, X_2, \dots, X_n$ სიდიდეებისა ყველა სხვადასხვა წყვილ-წყვილ კომბინაციებზე.

დავრწმუნდით, რომ ნორმალურ კანონს მნიშვნელოვანი თვისება აქვს: ნორმალური კანონების კომპოზიციისას მიიღება ხელახლა ნორმალური კანონი. ეს არის ეგრეთწოდებული „მდგრადობის თვისება“. განაწილების კანონს ეწოდება მდგრადი, თუკი ამ ტიპის ორი კანონის კომპოზიციისას ხელახლა მიიღება ასეთივე ტიპის კანონი[1]. ზემოთ ვაჩვენეთ რომ ნორმალური კანონი მდგრადია. მდგრადობის თვისება გააჩნიათ განაწილების კანონების ფრიად მცირე რიცხვს. წინა პარაგრაფის განხილვისას (მაგ. 2) ჩვენ დავრწმუნდით, რომ, მაგალითად, თანაბარი სიმკვრივის კანონი არ არის მდგრადი: თანაბარი სიმკვრივის ორი კანონის კომპოზიციისას (0; 1) უბანზე მივიღეთ სიმპსონის კანონი.



ნახ. 12.6.1.

ნორმალური კანონის მდგრადობა ერთ-ერთი არსებითი პირობათაგანია პრაქტიკაში. მისი თვისება, გარდა ნორმალურისა, გააჩნიათ განაწილების ზოგიერთ სხვა კანონებსაც. ნორმალური კანონის თავისებურებაა, რომ პრაქტიკულად ნებისმიერი განაწილების კანონების საკმაოდ დიდი რიცხვისას ჯამური კანონი ნორმალურთან რაგინდ ახლოს აღმოჩნდება დამოუკიდებლად იმისა, თუ როგორი იყო შესაკრებთა განაწილების კანონები. ამის ილუსტრაცია. შესაძლებელია, მა-

[1] ერთი და იგივე ტიპის კანონების ქვეშ ვგულისხმობთ კანონებს, რომლებიც სხვაობებიან ღერძებზე და ანათვლის საწყისის მხოლოდ მასშტაბით აბსცისთა ღერძზე.

ვალითად, თანაბარი სიმკვრივის სამი კანონის კომპოზიციის შედეგრით (0, 1) უბანზე. ამ დროს მიღებული $g(z)$ განაწილების კანონი გამოსახულია (12.6.1) ნახაზზე. როგორც ნახაზიდან ჩანს $g(z)$ ფუნქციის გრაფიკი გვაგონებს ნორმალური კანონის გრაფიკს.

12.7. ნორმალურად განაწილებულ არგუმენტთა წრფივი ფუნქციები

მოცემულია ნორმალურ კანონს დაქვემდებარებული შემთხვევით სიდიდეთა სისტემა $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.. (ანდა მოკლედ, „ნორმალურად განაწილებული") შემთხვევითი სიდიდე წარმოადგენს თვითონ ამ სიდიდეთა წრფივ ფუნქციას:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b. \tag{12.7.1}$$

საჭიროა მოვნახოთ Y სიდიდის განაწილების კანონი.

არ არის ძნელი დავრწმუნდეთ იმაში, რომ ეს არის ნორმალური კანონი, მართლაც, Y სიდიდე წრფივ ფუნქციათა ჯამია, რომელთაგან თითოეული მათგანი დამოკიდებულია ნორმალურად განაწილებული ერთი X არგუმენტისაგან, ხოლო ზემოთ დამტკიცებული იყო, რომ ასეთი წრფივი ფუნქცია აგრეთვე ნორმალურად განაწილებულია. რამდენიმე ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა შეკრებით, ხელახლა მივიღებთ ნორმალურად განაწილებულ სიდიდეს.

დაგვრჩენია მოვნახოთ Y სიდიდის პარამეტრები — m_y გაფანტვის ცენტრი და σ_y საშუალო კვადრატული გადახრა. წრფივი ფუნქციის მათემატიკურ ლოდინთა და დისპერსიათა თეორემების გამოყენებით მივიღებთ:

$$m_y = \sum_{i=1}^{n} a_i m_{x_i} + b, \tag{12.7.2}$$

$$\sigma^2_y = \sum_{i=1}^{n} a^2_i \sigma^2_{x_i} + 2 \sum_{i<j} a_i a_j r_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}, \tag{12.7.3}$$

სადაც r_{ij} X_i, X_j სიდიდეთა კორელაციის კოეფიციენტებია. იმ შემთხვევაში, როცა $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ სიდიდეები არაკორელირებულია (და, მაშასადამე, ნორმალური კანონისას დამოუკიდებელიცაა), 12.7.3 ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$\sigma^2_y = \sum_{i=1}^{n} a^2_i \sigma^2_{x_i}. \tag{12.7.4}$$

საშუალო კვადრატული გადახრები (12.7.3) და (12.7.4) ფორმულებში შესაძლებელია შეიცვალოს მათი პროპორციული საალბათო გადახრებით.

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება შემთხვევა, როცა (12.7.1) ფორმულაში შემავალი X_1, $X_2, \ldots, X_n$ შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები ზუსტად არაა ცნობილი, არამედ ცნობილია მათი მხოლოდ რიცხვითი მახასიათებლები: მათემატიკური ლოდინები და დისპერსიები. თუ ამ დროს X_1, $X_2, \ldots, X_n$ სიდიდეები დამოუკიდებელია, ხოლო მათი n რიცხვი საკმაოდ დიდია, მაშინ როგორც წესი, შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ X_i სიდიდეთა განაწილების კანონების მიუხედავად Y სიდიდის განაწილების კანონი ახლოა ნორმალურთან. პრაქტიკაში ისეთი კანონის მისაღებად, რომელიც მიახლოებით შეიძლება ნორმალურად ჩავთვალოთ, ჩვეულებრივ საკმარისია $5 \div 10$ შესაკრების არსებობა (12.7.1) გამოსახულებაში. საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ეს არ ეხება შემთხვევას, როცა დისპერსია ერთ-ერთი შესაკრებისა (12.7.1) ფორმულაში სხვა დანარჩენებთან უპირატესად შედარებით დიდია; დაიშვება, რომ შემთხვევით შესაკრებებს (12.7.1) ჯამში თავისი გაფანტვით აქვთ ერთი და იგივე რიგი. თუ ეს პირობები დაცულია, მაშინ Y სიდიდისათვის შესაძლებელია მიახლოებით მივიღოთ ნორმალური კანონი (12.7.2) და (12.7.4) ფორმულებით გამოთვლილი პარამეტრებით.

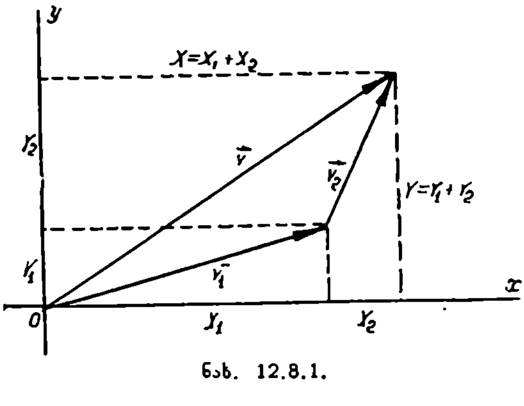
ცხადია, ყველა ზემოთ მოყვანილი მოსაზრებანი წრფივი ფუნქციის განაწილების კანონზე სამართლიანია (იგულისხმება მიახლოებით) იმ შემთხვევისთვისაც, როცა ფუნქცია არ წარმოადგენს ზუსტად წრფივს, მაგრამ შეიძლება მისი გაწრფივება.

12.8. ნორმალური კანონების კომპოზიცია სიბრტყეზე

დავუშვათ, xOy კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია ორი დამოუკიდებელი შემთხვევითი $\vec{V}_1$ ვექტორი — (X_1, Y_1) მდგენელებით და $\vec{V}_2$ — (X_2, Y_2) მდგენელებით. დავუშვათ, რომ თითოეული მათგანი განაწილებულია ნორმალურად, თანაც პირველი ვექტორის პარამეტრები ტოლია

m_{x1}, m_{y1}, σ_{x1}, σ_{y2}, r_{x1y1}, მეორის პარამეტრები

m_{x2}, m_{y2}, σ_{x2}, σ_{y2}, r_{x2y2}.



ნახ. 12.8.1.

საჭიროა განვსაზღვროთ (იხ. 12.8.1) შემთხვევითი ვექტორის განაწილების კანონი $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$, რომლის მდგენელები ტოლია:

$$X = X_1 + X_2;$$
$$Y = Y_1 + Y_2.$$

ძნელი არ არის თვისობრივად დავამტკიცოთ (ანალოგიურად იმისა, როგორც ეს გავაკეთეთ ორი ნორმალური კანონის კომპოზიციისათვის 12.6 პარაგრაფში), რომ $\vec{V}$ ვექტორი ასევე ნორმალურად განაწილებულია. ამ დებულებას სპეციალური მტკიცების გარეშე მივიღებთ.

განვსაზღვროთ $\vec{V}$ ვექტორის განაწილების კანონის პარამეტრები. მათემატიკურ ლოდინთა შეკრების თეორემის მიხედვით

$$\left.\begin{aligned} m_x &= m_{x_1} + m_{x_2}, \\ m_y &= m_{y_1} + m_{y_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.8.1)$$

დისპერსიათა შეკრების თეორემის მიხედვით

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2_x &= \sigma^2_{x_1} + \sigma^2_{x_2}, \\ \sigma^2_y &= \sigma^2_{y_1} + \sigma^2_{y_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.8.2)$$

კორელაციური მომენტის შეკრების თეორემის მიხედვით

$$K_{xy} = K_{x_1 y_1} + K_{x_2 y_2},$$

ანდა, კორელაციის კოეფიციენტებზე გადასვლით

$$r_{xy}\sigma_x\sigma_y = r_{x_1 y_1}\sigma_{x_1}\sigma_{y_1} + r_{x_2 y_2}\sigma_{x_2}\sigma_{y_2},$$

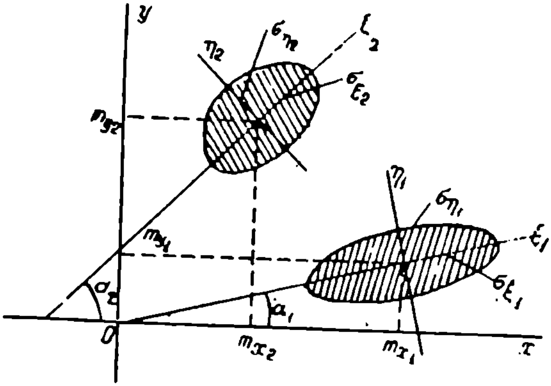
საიდანაც

$$r_{xy} = \frac{r_{x_1 y_1}\sigma_{x_1}\sigma_{y_1} + r_{x_2 y_2}\sigma_{x_2}\sigma_{y_2}}{\sqrt{(\sigma^2_{x_1} + \sigma^2_{x_2})(\sigma^2_{y_1} + \sigma^2_{y_2})}}. \qquad (12.8.3)$$

ამგვარად, ნორმალური კანონების კომპოზიციის ამოცანა სიბრტყეზე წყდება (12.8.1), (12.8.2) და (12.8.3) ფორმულებით.

ეს ფორმულები გამოყვანილია იმ შემთხვევისათვის, როცა ორივე გამოსავალი ნორმალური კანონი ($\vec{V}_1$ და $\vec{V}_2$ ვექტორებისათვის) მოცემულია ერთი და იგივე კოორდინატთა xOy სისტემაში. პრაქტიკაში ზოგჯერ გვხვდება შემთხვევა, როცა საჭიროა ვაწარმოოთ ორი ნორმალური კანონის კომპოზიცია სიბრტყეზე, რომელთაგან თითოეული მოცემულია კოორდინატთა საკუთარ სისტემაში, სახელდობრ, თავისი გაფანტვის მთავარ ღერძებში. მოვიყვანოთ ნორმალური კანონების კომპოზიციის ხერხი ამ შემთხვევისათვის.

დავუშვათ xOy სიბრტყეზე (ნახ. 12.8.2) მოცემულია ორი ნორმალურად განაწილებული არაკორელირებული შემთხვევითი $\vec{V}_1$ და $\vec{V}_2$ ვექტორი. თითოეული ვექტორთაგანი ხასიათდება თავისი ცალკეული ელიფსით: ვექტორი $\vec{V}_1$ — ელიფსით, რომლის ცენტრია m_{x_1}, m_{y_1}, ნა-



ნახ. 12.2.8.

ხევარღერძებია σ_{ξ_1}, σ_{η_1}, რომელთაგან პირველი Ox ღერძთან ჰქმნის α_1 კუთხეს. ანალოგიური მახასიათებლები $\vec{V}_2$ ვექტორისათვის იქნება m_{x_2}, m_{y_2}, σ_{ξ_2} α_{η_2}, საჭიროა მოვნახოთ გაფანტვის ერთეულოვანი ელიფსის პარამეტრები, რომლებიც ახასიათებენ $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ ვექტორს. აღვნიშნოთ ისინი

$$m_x,\ m_y,\ \sigma_x,\ \sigma_y,\ \alpha.$$

ვინაიდან გაფანტვის ცენტრის მდებარეობა არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევისაგან, ცხადია, წინანდებურად სამართლიანი იქნება შემდეგი თანაფარდობანი:

$$m_x = m_{x_1} + m_{x_2},$$
$$m_y = m_{y_1} + m_{y_2}.$$

იმისათვის, რომ მოვნახოთ $\vec{V}$ ვექტორის კორელაციური მატრიცის ელემენტები, $\vec{V}_1$ და $\vec{V}_2$ ვექტორების შესაბამისი შემთხვევითი წერტილები დავაგეგმილოთ Ox და Oy ღერძებზე. ვსარგებლობთ რა (10.3.3) ფორმულით, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma^2_{x_1} &= \sigma^2_{\xi_1}\cos^2\alpha_1 + \sigma^2_{\eta_1}\sin^2\alpha_1,\\
\sigma^2_{y_1} &= \sigma^2_{\xi_1}\sin^2\alpha_1 + \sigma^2_{\eta_1}\cos^2\alpha_1,\\
\sigma^2_{x_2} &= \sigma^2_{\xi_2}\cos^2\alpha_2 + \sigma^2_{\eta_2}\sin^2\alpha_2,\\
\sigma^2_{y_2} &= \sigma^2_{\xi_2}\sin^2\alpha_2 + \sigma^2_{\eta_2}\cos^2\alpha_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.8.4)$$

$\vec{V}_1$ და $\vec{V}_2$ ვექტორების მდგენელთა კორელაციური კოეფიციენტები კოორდინატთა xOy სისტემაში მოვნახოთ (9.2.2) ფარდობიდან

$$\left.\begin{aligned} r_{x_1y_1} &= \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_1(\sigma^2_{x_1}-\sigma^2_{y_1})}{2\sigma_{x_1}\sigma_{y_1}}, \\ r_{x_2y_2} &= \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_2(\sigma^2_{x_2}-\sigma^2_{y_2})}{2\sigma_{x_2}\sigma_{y_2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.8.5)$$

შემდგომ ნორმალური კანონების კომპოზიციის ამოცანა სიბრტყეზე ზემოთქმულზე დაიყვანება: ვიცით რა σ_x, σ_y, r_{xy}, შესაძლებელია მოვნახოთ ჯამური ელიფსის ღერძების მიერ შექნილი კუთხე აბსცისათა ღერძთან (9.2.2) ფორმულით

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma^2_x-\sigma^2_y}\,[1], \qquad (12.8.6)$$

და მთავარი საშუალო კვადრატული გადახრები—ფორმულებით (9.2.4)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\xi &= \sqrt{\sigma^2_x\cos^2\alpha + r_{xy}\sigma_x\sigma_y\sin 2\alpha + \sigma^2_y\sin^2\alpha}, \\ \sigma_\eta &= \sqrt{\sigma^2_x\sin^2\alpha - r_{xy}\sigma_x\sigma_y\sin 2\alpha + \sigma^2_y\cos^2\alpha}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.8.7)$$

უკანასკნელი ფარდობანი სამართლიანია არა მარტო საშუალო კვადრატული გადახრებისათვის, არამედ მათი პროპორციული საალბათო გადახრებისათვისაც:

$$\left.\begin{aligned} E_\xi &= \sqrt{E^2_x\cos^2\alpha + r_{xy}E_xE_y\sin 2\alpha + E^2_y\sin^2\alpha}, \\ E_\eta &= \sqrt{E^2_x\sin^2\alpha - r_{xy}E_xE_y\sin 2\alpha + E^2_y\cos^2\alpha} \end{aligned}\right\} \qquad (12.8.8)$$

გადავიდეთ სიბრტყეზე ნორმალური კანონების კომპოზიციაზე. როცა მათი რიცხვი ნებისმიერია, ნორმალური კანონების ნებისმიერი რიცხვის კომპოზიციის ყველაზე მარტივი შემთხვევა გვხვდება მაშინ, როცა გაფანტვის მთავარი ღერძები ყველა კანონებისათვის, რომლებიც კომპოზიციას ექვემდებარებიან, ერთი მეორის პარალელურია. მაშინ ვირჩევთ რა კოორდინატთა ღერძებს გაფანტვის ამ მთავარი ღერძების პარალელურად, საქმე გვექნება დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა

---

[1] ვინაიდან ტანგესს აქვს π პერიოდი, ამიტომ α მნიშვნელობანი, რომლებიც განისაზღვრებიან (12.8.6). ფორმულით, შეიძლება განსხვავდებოდნენ $\frac{\pi}{2}$-ით. რაც ელიფსის ორ მთავარ ღერძს შეესაბამება.

სისტემებთან და ნორმალური კანონების კომპოზიცია მარტივი ფორმულებით სრულდება.

$$
\left.
\begin{aligned}
m_x &= \sum_{i=1}^{n} m_{x_i}; \qquad \sigma^2_x = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{x_i};\\
m_y &= \sum_{i=1}^{n} m_{y_i}; \qquad \sigma^2_y = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{y_i},
\end{aligned}
\right\} \tag{12.8.9}
$$

სადაც σ_x, σ_{x_i}, σ_y, σ_{y_i} — შესაბამისი კანონების საშუალო კვადრატული გადახრებია.

იმ შემთხვევაში, როცა მთავარი ღერძების მიმართულებანი არ ემთხვევა ერთიმეორეს, რამდენიმე ნორმალური კანონის კომპოზიცია შეიძლება შევადგინოთ იმავე მეთოდით, რომლითაც ვსარგებლობდით ზემოთ ორი კანონისათვის, დავაგეგმილოთ შესაკრები შემთხვევითი ვექტორები კოორდინატთა ერთი და იგივე სისტემის ღერძებზე.

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება შემთხვევები, როცა კომპოზიციას დაქვემდებარებულ კანონთა შორის გვხვდებიან ე. წ. „გადაგვარებული“ კანონები, ე. ი. რომლებიც ხასიათდებიან გაფანტვის ელიფსით, რომელსაც აქვს მხოლოდ ერთი ნახევარღერძი (მეორე ნულის ტოლია). ასეთი „გადაგვარებული“ კანონები გაფანტვას მხოლოდ ერთი მიმართულებით იძლევა. ასეთი კანონების კომპოზიციისას, საჭიროა მოვიქცეთ, ისე, როგორც ჩვეულებრივი კანონების კომპოზიციისას. ზოგიერთი პარამეტრები (მაგალითად, საშუალო კვადრატული ანდა საალბათო გადახრები) ნულის ტოლად ვიგულისხმოთ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ყუმბარის ტყორცნის შეცდომა გამოწვეულია შემდეგი ფაქტორების ერთდროული მოქმედებით:

1) ყუმბარის ტექნიკური გაფანტვა;
2) სიშორეზე დამიზნების უზუსტობა;
3) უზუსტო დამიზნება გვერდითი მიმართულებით.

ყველა ეს ფაქტორი დამოუკიდებელია ერთმანეთთან. ყუმბარის ტექნიკური გაფანტვა იძლევა გაფანტვის ცალკეულ ელიფსს წრის სახით, რომლის დიამეტრი 20 მეტრია. დამიზნების შეცდომა სიშორეზე მოქმედებს მხოლოდ ფრენის მიმართულებით და საშუალო კვადრატული გადახრა 40 მ-ის ტოლია. გაფანტვის ცენტრი გადაადგილებულია წინ ფრენის მიმართულებით 5 მეტრზე. გვერდითი დამიზნების შეცდომა მოქმედებს მხოლოდ ფრენის მიმართულების მართობულად და აქვს საშუალო კვადრატული გადახრა 30 მ; გაფანტვის ცენტრი გადაადგილებულია მარჯვნივ 10 მეტრზე. მოვნახოთ ნორმალური კანონის პარამეტრები, რომელსაც დაქვემდებარებულია ყუმბარის ტყორცნის ჯამური შეცდომა გამოწვეული ყველა ჩამოთვლილი ფაქტორის გავლენით.

ამოხსნა. ზინაიდან ამოცანაში ჩამოთვლილი ყველა ელიფსის მთავარი ღერძები (რომელთაგან მესამე და მეოთხე გადაგვარებულია) პარალელურია, ამიტომ შეიძლება გამოვიყენოთ დამოუკიდებელ მდგენელებიანი (12.8.9) — ფორმულები) ნორმალური კა-

ნიშნების კომპონენტები [illegible] ღერძით და Oy [illegible] და Ox ღერძს მის მართობულად. გვაქვს:

$$m_x = m_y,$$
$$\sigma^2_x = 20^2 + 30^2 = 1300, \qquad \sigma_x = 36.1 \text{ (მ)}.$$
$$\sigma^2_y = 20^2 + 40^2 = 2000, \qquad \sigma_y = 44.7 \text{ (მ)}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი [illegible] თვითმფრინავიდან თვითმფრინავზე [illegible] წრიული [illegible] სამიზნეზე სროლის [illegible] შემთხვევით შეცდომები, შედგება:

1. შეცდომები, რომლებიც [illegible] ბალისტიკური [illegible] და დანადგარის რყევით;

2. დამიზნების შეცდომები;

3. შეცდომები, რომლებიც გამოწვეულია მანძილის განსაზღვრის უზუსტობით;

4. სამიზნის [illegible] შეცდომები, [illegible] ღერძები, რომლებიც პირველი მიზეზით გამოწვეული [illegible] და [illegible] განლაგებული, [illegible] საშუალო კვადრატული [illegible] და 2-ის ტოლ დამიზნების შეცდომა [illegible] წრიულ [illegible] საშუალო კვადრატული გადახრა 3მ-ის; მანძილის [illegible] გამოწვეული შეცდომა [illegible] გაფანტეს მხოლოდ ღერძის გასწვრივ, რომელიც [illegible] 30° [illegible] დახრილი, რომლის საშუალო კვადრატული გადახრა 4 მ-ის ტოლია. [illegible] შეცდომა [illegible] წრიულ გაფანტვას, რომლის ... კ. გ. 2 მ-ია. [illegible] შეცდომა [illegible] ტოლია. საჭიროა მოვნახოთ ყველა ჩამოთვლილი ფაქტორით გამოწვეული [illegible] შეცდომის განაწილების კანონის პარამეტრები.

ა მ ო ხ ს ნ ა: [illegible] Ox ჰორიზონტალურ და Oy ვერტიკალურ ღერძიან კოორდინატთა სისტემას. ეს ღერძები გაფანტვის მთავარი ღერძებია ყველა კანონისათვის, გარდა მესამისა (მანძილის უზუსტობით გამოწვეული შეცდომები). აღვნიშნოთ თითოეული შეცდომის მდგენელები კოორდინატთა xOy სისტემაში შესაბამისად).

$$X_1, Y_1; X_2, Y_2; X_3, Y_3; X_4, Y_4.$$

ამ მდგენელთა პარამეტრები შესაბამისად ტოლია:

$$m_{x_1} = m_{x_2} = m_{x_3} = m_{x_4} = m_{y_1} = m_{y_2} = m_{y_3} = m_{y_4} = 0;$$
$$\sigma_{x_1} = 1; \;\; \sigma_{y_1} = 2; \;\; \sigma_{x_2} = \sigma_{y_2} = 3; \;\; \sigma_{x_4} = \sigma_{y_4} = 2.$$

რაც შეეხება σ_{x_3} და σy_3 სიდიდეებს, ვსაზღვრავთ შემთხვევითი $(X_3 Y_3)$ წერტილის Ox და Oy ღერძებზე დაგეგმილებით (12.8.4) ფორმულების საშუალებით:

$$\sigma^2_{x_3} = 4^2 \cos^2 30^\circ = 12;$$
$$\sigma^2_{y_3} = 4^2 \sin^2 30^\circ = 4.$$

$(X_3 Y_3)$ სიდიდეთა კორელაციის კოეფიციენტი მოვნახოთ (12.8.5) ფორმულით:

$$r_{xy_3} = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ (12 - 4)}{2\sqrt{48}} = 1.$$

რაც ბუნებრივიცაა, რადგან გაფანტვა თავმოყრილია ერთ წრფეზე

და მაშასადამე, X_3 და Y_3 სიდიდეები ფუნქციონალურად დამოკიდებულია

დისპერსიის შეკრების თეორემის გამოყენებით გვაქვს:

$$\sigma^2{}_x=\sigma^2{}_{x1}+\sigma^2{}_{x2}+\sigma^2{}_{x3}+\sigma^2{}_{x4}=26; \quad \sigma_x=5,09 \ (მ);$$
$$\sigma^2{}_y=\sigma^2{}_{y1}+\sigma^2{}_{y2}+\sigma^2{}_{y3}+\sigma^2{}_{y4}=21; \quad \sigma_y=4,58 \ (მ)$$

კორელაციის r_{xy} კოეფიციენტს მოვნახავთ, კორელაციური მომენტების შეკრების თეორემის გამოყენებით:

$$K_{xy}=K_{x_1y_1}+K_{x_2y_2}+K_{x_3y_3}+K_{x_4y_4}=0+0+\frac{4\sqrt{3}\cdot 1}{2\rho^2}+0;$$

საიდანაც

$$r_{xy}=\frac{4\sqrt{3}\cdot 2\rho_2}{2\rho^2\cdot 5,09\cdot 4,58}=0,297.$$

განვსაზღვროთ α კუთხე, რომელსაც ღერძთან შეადგენს გაფანტვის პირველი მთავარი ღერძი:

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\cdot 0,297\cdot 5,09\cdot 4,58}{5,09^2-4,58^2}=1,340.$$

$$2\alpha\approx 69^\circ 30'; \qquad \alpha\approx 34^\circ 45'.$$

(12.8.8) ფორმულით გვაქვს:

$$\sigma_\xi=\sqrt{\sigma^2{}_x\cos^2\alpha+r_{xy}\sigma_x\sigma_y\sin 2\alpha+\sigma^2{}_y\sin^2\alpha}=5,55 \ (მ);$$
$$\sigma_\eta=\sqrt{\sigma^2{}_x\sin^2\alpha-r_{xy}\sigma_x\sigma_y\sin 2\alpha+\sigma^2{}_y\cos^2\alpha}=4,22 \ (მ);$$

XIII თავი

ალბათობათა თეორიის ზღვრული[1] თეორემები

13.1. დიდ რიცხვთა კანონი და ცენტრალური ზღვრული თეორემა

კურსის დასაწყისში უკვე ვთქვით, რომ ალბათობათა თეორიის მათემატიკური კანონები მიღებულია მასიურ შემთხვევით მოვლენებისათვის დამახასიათებელ რეალურ სტატისტიკურ კანონზომიერებათა აბსტრაჰირებით. ამ კანონზომიერებათა არსებობა დაკავშირებულია

[1] იხ. ტექნიკური ტერმინოლოგია (რუსულ-ქართული ნაწილი) გვ. 315, გამომცემლობა „მეცნიერება“ 1977 წ.

პროფ. გ. მანიას ცნობილ სახელმძღვანელოებში გამოყენებულია ტერმინი „ზღვარული“, რაც უფრო მოხერხებული ჩანს

მთარგმნელი

სწორედ მოვლენათა მასიურობასთან, ე. ი. შესრულებულ ერთგვაროვან ცდათა დიდ რიცხვთან ანდა შეკრებ შემთხვევით ზემოქმედებათა დიდ რიცხვთან, რომლებიც თავიანთ ერთობლიობაში წარმოშობენ სრულიად გარკვეულ კანონს დამორჩილებულ შემთხვევით სიდიდეს. მასიურ შემთხვევით მოვლენათა მდგრადობის თვისება კაცობრიობისათვის ცნობილია ჯერ კიდევ შორეულ წარსულში, რომელ დარგშიდაც არ უნდა გამომჟღავნდეს იგი, მისი აზრია: ყოველი ცალკეული შემთხვევითი მოვლენის კონკრეტული თავისებურებანი თითქმის არ ახდენს გავლენას ასეთ მოვლენათა მასის საშუალო შედეგზე. საშუალოდან შემთხვევითი გადახრები, რომელიც გარდაუვალია ყოველ ცალკეული მოვლენისას, მასაში ურთიერთ ჩაქრებიან, ნიველირდებიან, სწორდებიან, სწორედ საშუალოთა ეს მდგრადობა წარმოადგენს „დიდ რიცხვთა კანონის" ფიზიკურ არსს, კანონისა გაგებულს სიტყვის ფართო მნიშვნელობით: შემთხვევით სიდიდეთა ძალიან დიდი რიცხვისას მათი საშუალო შედეგი პრაქტიკულად წყვეტს შემთხვევითობას და შესაძლებელია დიდი სიზუსტით ვიწინასწარმეტყველოთ.

სიტყვის ვიწრო გაგებით „დიდ რიცხვთა კანონის" ქვეშ ალბათობათა თეორიაში იგულისხმება მათემატიკურ თეორემათა რიგი, რომელთაგან თითოეულ მათგანში ამა თუ იმ პირობებისათვის დადგინდება ცდათა დიდი რიცხვის საშუალო მახასიათებლების რომელიღაც განსაზღვრულ მუდმივთან მიახლოების ფაქტი.

2.3. პარაგრაფში უკვე ჩამოვაყალიბეთ ამ თეორემებიდან უმარტივესი — ი. ბერნულის თეორემა. იგი ამტკიცებს, რომ ცდათა დიდი რიცხვისას სიხშირე ამ ხდომილობის ალბათობას უახლოვდება (უფრო ზუსტად— უახლოვდება ალბათობის მიხედვით). დიდ რიცხვთა კანონის სხვა უფრო ზოგად ფორმებს გავეცნობით მოცემულ თავში. ყველა ისინი ადგენენ ამა თუ იმ შემთხვევითი სიდიდეების მუდმივ არა შემთხვევით სიდიდეებთან ალბათობის მიხედვით მიახლოების ფაქტსა და პირობებს. დიდ რიცხვთა კანონი მნიშვნელოვანია ალბათობათა თეორიის პრაქტიკული გამოყენებისას. შემთხვევით სიდიდეთა თვისება განსაზღვრულ პირობებში იქცნენ პრაქტიკულად, როგორც არა შემთხვევითნი საშუალებას იძლევა დარწმუნებულად ვაწარმოოთ ოპერაციები ამ სიდიდეებზე, ვიწინასწარმეტყველოთ მასიური შემთხვევითი მოვლენების შედეგები თითქმის ზუსტი განსაზღვრულობით.

ასეთი წინასწარმეტყველებათა შესაძლებლობა მასიურ შემთხვევით სიდიდეთა დარგში კიდევ უფრო ფართოვდება. ზღვრულ თეორემათა ჯგუფის პირობებში, რომლებიც ეხებიან უკვე შემთხვევით სიდიდეთა არა ზღვრულ მნიშვნელობებს, არამედ განაწილების ზღვრულ კანონებს, საუბარია იმ თეორემათა ჯგუფზე, რომელიც ცნობილია „ცენტრალური ზღვრულ თეორემის" სახელწოდებით. უკვე

ვილაპარაკეთ იმაზე, რომ შემთხვევით სიდიდეთა საკმაოდ დიდი რიცხვის შეჯამებისას ჯამის განაწილების კანონი ნორმალურს გარკვეული პირობების დაცვისას უახლოვდება უსასრულოდ. ეს პირობები მათემატიკურად შესაძლებელია ჩამოყალიბებულ იქნას სხვადასხვანაირად— მეტნაკლებად ზოგადი სახით, — არსებითად დაიყვანება იმის მოთხოვნამდე, რომ ცალკეულ შესაკრებთა გავლენა ჯამზე თ ა ნ ა ბ რ ა დ მ ც ი რ ე იყოს, ე. ი. რომ ჯამის შემადგენლობაში არ უნდა შედიოდნენ წევრები, რომლებიც დანარჩენების ერთობლიობას ჯამის გაფანტვაზე თავისი გავლენით ცხადად ჭარბობენ. ცენტრალური ზღვრული თეორემის სხვადასხვა ფორმები ერთიმეორისაგან განსხვავდებიან იმ პირობებით, რომელთათვისაც შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის ეს ზღვრული თვისება მყარდება.

დიდ რიცხვთა კანონის სხვადასხვა ფორმები, ცენტრალურ ზღვრულ თეორემათა სხვადასხვა ფორმებთან ერთად ე. წ. ალბათობათა თეორიის ზღვრულ თეორემათა ერთობლიობას ქმნიან. ზღვრული თეორემები შემთხვევით მოვლენათა სფეროში არა მარტო მეცნიერულ პროგნოზთა განხორციელების, არამედ ამ პროგნოზთა სიზუსტის შეფასების საშუალებასაც იძლევა.

მოცემულ თავში განვიხილავთ ზღვრულ თეორემათა მხოლოდ ზოგიერთ ყველაზე მარტივ ფორმებს. დასაწყისში განხილულ იქნება თეორემები, რომლებიც მიეკუთვნებიან „დიდ რიცხვთა კანონთა" ჯგუფს, შემდეგ — თეორემები, რომლებიც მიეკუთვნებიან „ცენტრალურ ზღვრული თეორემების" ჯგუფს.

13.2. ჩებიშევის უტოლობა

„დიდ რიცხვთა კანონის" ჯგუფს მიკუთვნებულ თეორემათა დასამტკიცებლად აუცილებელ ლემად დავამტკიცებთ ერთ ფრიად ზოგად უტოლობას, რომელიც ცნობილია ჩებიშევის უტოლობის სახელწოდებით.

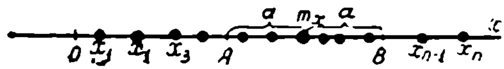
ვთქვათ, გვაქვს შემთხვევითი X სიდიდე, რომლის მათემატიკური ლოდინია m_x და დისპერსია —D_x. ჩებიშევის უტოლობა ამტკიცებს, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს დადებითი α რიცხვი, ალბათობა იმისა რომ X სიდიდე გადაიხრება თავისი მათემატიკური ლოდინიდან არა ნაკლებ α სიდიდისა, ზემოდან შემოსაზღვრულია $\frac{D_x}{\alpha^2}$ სიდიდით.

$$P(|X-m_x|\geqslant\alpha)\leqslant\frac{D_x}{\alpha^2}, \qquad (13.2.1)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. 1. ვთქვათ X სიდიდე წყვეტილია და აქვს განაწილების შემდეგი მწკრივი

x_i	x_1	x_2		x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

გამოვსახოთ X სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობანი და მისი მათემატიკური m_x ლოდინი, Ox რიცხვით ღერძზე წერტილების სახით (ნახ. 13.2.1). ავიღოთ რომელიმე მნიშვნელობა $\alpha>0$ და გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ X სიდიდე გადაიხრება თავის მათემატიკური ლოდინიდან არა ნაკლებ α სიდიდისა



ნახ. 13.2.1.

$$P(|X-m_x|\geqslant\alpha). \tag{13.2.2}$$

ამისათვის m_x წერტილიდან მარჯვნივ და მარცხნივ გადავზომოთ მონაკვეთი, რომლის სიგრძეა α; მივიღებთ AB მონაკვეთს. ალბათობა (13.2.2) არის ის, რომ შემთხვევითი X წერტილი ხვდება არა AB მონაკვეთის შიგ, არამედ მის გარეთ:

$$P(|X-m_x|\geqslant\alpha)=P(X\notin AB)\text{[1]}.$$

იმისათვის, რომ მოვნახოთ ეს ალბათობა, უნდა შევაჯამოთ ყველა იმ x_i მნიშვნელობათა ალბათობანი, რომლებიც განლაგებული არიან AB მონაკვეთს გარეთ, რომელსაც ჩავწერთ შემდეგნაირად:

$$P(|X-m_x|\geqslant\alpha)=\sum_{|x_i-m_x|\geqslant\alpha} p_i, \qquad (13.2.3.)$$

სადაც ჩანაწერი $|x_i-m_x|\geqslant\alpha$ ჯამის ნიშნით ქვეშ ნიშნავს, რომ აჯამვა ვრცელდება i—ს ყველა იმ მნიშვნელობაზე, რომელთათვისაც წერტილი x_i AB მონაკვეთის გარეთ ძევს.

მეორეს მხრივ დავწეროთ X სიდიდის დისპერსიის გამოსახულება თანახმად განსაზღვრისა:

$$D_x=M[(X-m_x)^2]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2p_i=\sum_{i=1}^{n}|x_i-m_x|^2p_i. \qquad (13.2.4).$$

---

[1] AB მონაკვეთის ბოლოებს ჩვენ მასში არ ჩავრთავთ.

ვინაიდან (13.2.4) ჯამის ყველა წევრი არაუარყოფითია. მას შეუძლია მხოლოდ შემცირდეს, თუკი გავავრცელებთ მას x_i-ს არა ყველა მნიშვნელობაზე, არამედ მხოლოდ ზოგიერთზე, კერძოდ იმათზე, რომელნიც AB მონაკვეთის გარეთ მდებარეობენ.

$$D_x \geqslant \sum_{|x_i - m_x| \geqslant \alpha} |x_i - m_x|^2 p_i. \tag{13.2.5}$$

შევცვალოთ ჯამის ნიშნის ქვეშ $(x_i - m_x)$ გამოსახულება α-თი, ვინაიდან ყველა წევრისათვის $(x_i - m_x) \geqslant \alpha$, ამიტომ ასეთი შეცვლით ჯამი მხოლოდ შემცირდება; მაშასადამე,

$$D_x \geqslant \sum_{|x_i - m_x| \geqslant \alpha} \alpha^2 p_i = \alpha^2 \sum_{|x_i - m_x| \geqslant \alpha} p_i. \tag{13.2.6}$$

მაგრამ (13. 2.3) ფორმულის თანახმად ჯამი, რომელიც დგას (13.2.6) მარჯვნივ არის შემთხვევითი წერტილის AB მონაკვეთს გარეთ მოხვედრის ალბათობა; მაშასადამე,

$$D_x \geqslant \alpha^2 P(|X - m_x| \geqslant \alpha),$$

საიდანაც უშუალოდ გამოდის დასამტკიცებელი უტოლობა.

2. იმ შემთხვევაში, როცა X სიდიდე უწყვეტია, მტკიცება ანალოგიურად წარმოებს თუ P_i ალბათობას, ალბათობის ელემენტით შეცვლით, ხოლო სასრულო ჯამებს — ინტეგრალებით, მართლაც

$$P(|X - m_x| > \alpha) = \int\limits_{|x - m_x| > \alpha} f(x)\, dx^{1)}, \tag{13.2.7}$$

სადაც $f(x)$ X სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა. შემდეგ გვაქვს:

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x - m_x|^2 f(x) dx \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{|x - m_x| > \alpha} |x - m_x|^2 f(x) dx.$$

ადაც ნიშანი $|x - m_x| > \alpha$ ინტეგრალქვეშ აღნიშნავს, რომ ინტეგრება

[1] ნიშანი შეცვლილია $\geqslant$ ნიშნით ვინაიდან, როგორც უწყვეტი სიდიდისათვის ზუსტი ტოლობის ალბათობა უდრის ნულს.

ვრცელდება AB მონაკვეთის გარე ნაწილზე. ინტეგრალქვეშ $|x-m_x|$-ის α-თი შეცვლით, მივიღებთ:

$$D_x \geqslant \alpha^2 \int\limits_{|x-m_x|>\alpha} f(x)dx = \alpha^2 P(|X-m_x|>\alpha),$$

საიდანაც უწყვეტი სიდიდეებისათვის გამომდინარეობს ჩებიშევის უტოლობა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდე, რომლის მათემატიკური ლოდინია m_x და დისპერსია σ^2_x. შეფასდეს ზემოდან ალბათობა იმისა, რომ X სიდიდე გადაიხრება თავისი მათემატიკური ლოდინიდან არანაკლებ $3\sigma_x$-ისა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩებიშევის უტოლობაში $\alpha=3\sigma_x$-ის დაშვებით მივიღებთ:

$$P(|X-m_x| \geqslant 3\sigma_x) \leqslant \frac{D_x}{9\sigma^2_x} = \frac{1}{9},$$

ე. ი. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინიდან გადახრა გამოვა სამი საშუალო კვადრატული გადახრის საზღვრებიდან, არ შეიძლება იყოს $\frac{1}{9}$-ზე მეტი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ჩებიშევის უტოლობა იძლევა მოცემული გადახრის ალბათობის მხოლოდ ზედა საზღვარს. ამ საზღვარზე ზემოთ ალბათობას არ შეუძლია იყოს განაწილების არცერთი კანონის შემთხვევაში. პრაქტიკაში მეტწილად ალბათობა იმისა რომ X სიდიდე გამოვა $m_x=3\sigma_x$ უბნის გარედ, გაცილებით ნაკლებია $\frac{1}{9}$-ზე. მაგალითად, ნორმალური კანონისათვის ეს ალბათობა მიახლოებით ტოლია 0,003. პრაქტიკაში ყველაზე ხშირად საქმე გვაქვს ისეთ შემთხვევით სიდიდეებთან, რომელთა მნიშვნელობანი იშვიათად გამოდიან $m_x \pm 3\sigma_x$ საზღვრებიდან. თუკი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი არ არის ცნობილი, არამედ ცნობილია მხოლოდ m_x და σ_x, პრაქტიკაში ჩვეულებრივ თვლიან, რომ მონაკვეთი $m_x \pm 3\sigma_x$ შემთხვევით სიდიდის პრაქტიკულად შესაძლო მნიშვნელობათა უბანია (ე. წ. „სამი სიგმას წესი").

18.8 დიდ რიცხვთა კანონი (ჩებიშევის თეორემა)

მოცემულ პარაგრაფში დავამტკიცებთ დიდ რიცხვთა კანონის ერთ-ერთ უმარტივეს, მაგრამ მეტად მნიშვნელოვან ფორმას — ჩებიშევის თეორემას. ეს თეორემა ამყარებს კავშირს შემთხვევითი სიდიდის დაკვირვების შედეგად მიღებულ მნიშვნელობების საშუალო არით-

მეტიკულისა და მის მათემატიკურ ლოდინს შორის. წინასწარ ამოვხსნათ შემდეგი დამხმარე ამოცანა. გვაქვს შემთხვევითი X სიდიდე, რომლის მათემატიკური ლოდინია m_x და დისპერსია D_x ამ სიდიდეზე წარმოებს დამოუკიდებელი n ცდა. გამოითვლება X სიდიდეზე დაკვირვების შედეგად მიღებული ყველა მნიშვნელობის საშუალო არითმეტიკული. საჭიროა მოვნახოთ ამ საშუალო არითმეტიკულის რიცხვითი მახასიათებლები — მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია — და გამოვირკვიოთ როგორ იცვლებიან ისინი n-ის გადიდებით. აღვნიშნოთ:

X_1—X სიდიდის მნიშვნელობა პირველი ცდისას, X_2—X სიდიდის მნიშვნელობა მეორე ცდისას, და ა. შ. ცხადია, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ სიდიდეთა ერთობლიობა თვით წარმოადგენს n შემთხვევით სიდიდეს, რომელთაგან, თითოეული განაწილებულია იმავე კანონით როგორც თვით X სიდიდე. განვიხილოთ ამ სიდიდეთა საშუალო არითმეტიკული:

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n}.$$

შემთხვევით Y სიდიდე არის წრფივი ფუნქცია $X_1, X_2, \ldots, X_n$ დამოუკიდებელი სიდიდეებისა. მოვნახოთ ამ სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია. მე-10 პარაგრაფის წესების თანახმად წრფივი ფუნქციების რიცხვითი მახასიათებლების განსაზღვრისათვის მივიღებთ:

$$m_y = M[Y] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{1}{n} n m_x = m_x;$$

$$D_y = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{D_x}{n}$$

ამრიგად, Y სიდიდის მათემატიკური ლოდინი არ არის დამოკიდებული ცდათა n რიცხვისაგან და ტოლია დაკვირვებაში მყოფ X სიდიდის მათემატიკური ლოდინისა; რაც შეეხება Y სიდიდის დისპერსიას, იგი უსასრულოდ მცირდება ცდათა რიცხვის გადიდებით და საკმაოდ დიდი n-ის შემთხვევაში რაგინდ მცირე შეიძლება გახდეს. ვრწმუნდებით, რომ საშუალო არითმეტიკული არის შემთხვევითი სიდიდე, რომლის დისპერსია რაგინდ მცირეა და ცდათა დიდი რიცხვისას თითქმის არა შემთხვევითად იქცევა.

ჩებიშევის თეორემა ზუსტი რაოდენობრივი ფორმით დაადგენს საშუალო არითმეტიკულის მდგრადობის ამ თვისებას. მისი ფორმულირება შემდეგნაირად ხდება: დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ც დ ა თ ა დი-

დი რიცხვისას შემთხვევითი სიდიდის დანაკვირი მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკული იკრიბება ალბათობის მიხედვით მისი მათემატიკური ლოდინისაკენ.

ჩავწეროთ ჩებიშევის თეორემა ფორმულის სახით; ამისათვის გავიხსენოთ ტერმინის „იკრიბება ალბათობის მიხედვით" აზრი. ამბობენ, რომ შემთხვევითი X_n სიდიდე იკრიბება ალბათობის მიხედვით a სიდიდისაკენ თუკი n-ის გადიდებისას ალბათობა იმისა, რომ X_n და a იქნება რაგინდ ახლოს, უსასრულოდ უახლოვდება ერთს, ხოლო ეს კი ნიშნავს, რომ საკმაოდ დიდი n-სას

$$P(|X_n - a| < \varepsilon) > 1 - \delta,$$

სადაც ε, δ — ნებისმიერი მცირე დადებითი რიცხვებია.

ჩავწეროთ ანალოგიური ფორმით ჩებიშევის თეორემა. იგი ამტკიცებს, რომ n-ის გადიდებისას საშუალო არითმეტიკული $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}$ მიისწრაფვის m_x-სკენ. ე. ი.

$$P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - m_x\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta. \qquad (13.3.1)$$

დავამტკიცოთ ეს უტოლობა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ზემოთ ნაჩვენები იყო, რომ $Y = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}$ სიდიდეს აქვს რიცხვითი მახასიათებლები

$$m_y = m_x; \qquad D_y = \frac{D_x}{n}.$$

შემთხვევითი Y სიდიდისათვის გამოვიყენოთ ჩებიშევის უტოლობა დაშვებით $\alpha = \varepsilon$:

$$P(|Y - m_y| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D_y}{\varepsilon^2} = \frac{D_x}{n\varepsilon^2}.$$

როგორი მცირეც არ უნდა იყოს ε, n ისეთი დიდი შეიძლება ავიღოთ, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\frac{D_x}{n\varepsilon^2} < \delta,$$

სადაც δ — რაგინდ მცირე რიცხვია.

მაშინ

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X i}{n} - m_x\right| \geqslant \varepsilon\right) < \delta$$

საიდანაც, თუ საპირისპირო ხდომილობაზე გადავალთ გვექნება:

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X i}{n} - m_x\right| < \varepsilon\right) > 1-\delta,$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

13.4. ჩებიშევის განზოგადოებული თეორემა. მარკოვის თეორემა

ჩებიშევის თეორემა იოლად შეიძლება განზოგადოებულ იქნას, უფრო რთულ შემთხვევაზე, სახელდობრ მაშინ, როცა შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების კანონი ცდიდან ცდამდე არ რჩება ერთი და იგივე, არამედ იცვლება, მაშინ ნაცვლად დაკვირვების შედეგად მიღებულ მნიშვნელობათა ერთი და იგივე X სიდიდის საშუალო არითმეტიკულისა, რომელთაც აქვთ მუდმივი მათემატიკური ლოდინები და დისპერსიები საქმე გვაქვს n სხვადასხვა შემთხვევითი სიდიდის საშუალო არითმეტიკულთან, რომელთა სხვადასხვა მათემატიკურ ლოდინები და დისპერსიები ექნებათ. აღმოჩნდება, რომ ამ შემთხვევაშიდაც ზოგიერთი პირობების დაცვით საშუალო არითმეტიკული მდგრადია და უახლოვდება ალბათობის მიხედვით განსაზღვრულ არა შემთხვევით სიდიდეს. ჩებიშევის განზოგადოებული თეორემა ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად. თუკი

$$X_1,\ X_2,\dots,X_n$$

დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდებია, რომელთა მათემატიკური ლოდინებია: m_{x_1}, $m_{x_2},\dots$, m_{x_n}, დისპერსიებია

$$D_{x_1},\ D_{x_2},\dots,\ D_{x_n}$$

და თუ ყველა დისპერსიები ზემოდან შემოსაზღვრულია ერთი და იგივე L-რიცხვით $D_{x_i}<L$

$$(i=1,\ 2.,\dots n),$$

მაშინ n-ის ზრდისას X_1, $X_2,\dots,X_n$ სიდიდეების და-

ნ ა კ ვ ი რ ი მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა თ ა ს ა შ უ ა ლ ო ა რ ი თ მ ე- ტ ი კ უ ლ ი მ ი ი ს წ რ ა ფ ვ ი ს მ ა თ ე მ ა ტ ი კ უ რ ლ ო დ ი ნ- თ ა ს ა შ უ ა ლ ო ა რ ი თ მ ე ტ ი კ უ ლ ი ს ა კ ე ნ.[1] ჩავწეროთ ეს თეორემა ფორმულის სახით. დავუშვათ ε, δ — რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვებია; მაშინ საკმაოდ დიდი n რიცხვისათვის

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}}{n}\right|<\varepsilon\right)>1-\delta \qquad (13.4.1).$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ სიდიდე

$$Y=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

მისი მათემატიკური ლოდინი ტოლია:

$$m_y=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}}{n},$$

ხოლო დისპერსია

$$D_y=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D_{x_i}.$$

გამოვიყენოთ Y სიდიდისათვის ჩებიშევის უტოლობა;

$$P(|Y-m_y|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{D_y}{\varepsilon_2},$$

ანდა

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}}{n}\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n} D_{x_i}}{n^2\varepsilon^2}. \qquad (13.4.2)$$

[1] ამ და სხვა საშუალო არითმეტიკულებს შორის სხვაობა მიისწრაფვის ნულისაკენ ალბათობის მიხედვით.

შევცვალოთ უტოლობის (13.4.2) მარჯვენა ნაწილში ყოველი D_{x_i} სიდიდე უფრო მეტი L სიდიდით. მაშინ უტოლობა მხოლოდ გაძლიერდება.

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}}{n}\right|\geqslant\varepsilon\right)<\frac{L}{n\varepsilon^2}.$$

რაგინდ მცირე არ უნდა იყოს ε, შესაძლოა n ავირჩიოთ იმდენად

დიდი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას $\frac{L}{n\varepsilon^2}<\delta$,

მაშინ

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n} m_{xi}}{n}\right|\geqslant\varepsilon\right)<\delta,$$

თუ საპირისპირო ხდომილობაზე გადავალთ მივიღებთ დასამტკიცებელ (13.4.1) უტოლობას.

დიდ რიცხვთა კანონი შეიძლება გავრცელებულ იქნას დამოკიდებულ შემთხვევით სიდიდეებზეც. დიდ რიცხვთა კანონის განზოგადოება დამოკიდებულ სიდიდეთა შემთხვევაზე ეკუთვნის ა. ა. მარკოვს.

მარკოვის თეორემა. თუკი გვაქვს დამოკიდებული შემთხვევითი სიდიდეები X_1, X_2,...X_n და როცა $n\to\infty$

$$\frac{D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]}{2}\to 0.$$

მაშინ X_1, X_2,...,X_n შემთხვევითი სიდიდეების დანაკვირ მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკული მიისწრაფვის მათემატიკურ ლოდინთა საშუალო არითმეტიკულისაკენ.

დამტკიცება. განვიხილოთ სიდიდე

$$Y=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

ცხადია,

$$D_y = \frac{D\left[\sum_{i=1}^{n} Xi\right]}{n^2}.$$

გამოვიყენოთ ჩებიშევის უტოლობა Y სიდიდისათვის

$$P(|Y - m_y| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D_y}{\varepsilon^2}.$$

ვინაიდან თეორემის პირობის მიხედვით როცა $n \to \infty$ $D_y \to 0$, მაშინ საკმაოდ დიდი n რიცხვისათვის

$$P(|Y - m_y| \geqslant \varepsilon) < \delta,$$

ანდა საპირისპირო ხდომილობაზე გადასვლით

$$P(|Y - m_y| < \varepsilon) = P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} m x_i}{n}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta,$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

13.6. დიდ რიცხვთა კანონის შედეგები: ბერნულის და პუასონის თეორემები

ი. ბერნულის ცნობილი თეორემა, რომელიც ამყარებს კავშირს ხდომილობის სიხშირესა და მის ალბათობას შორის, შეიძლება დამტკიცებულ იქნას, როგორც დიდ რიცხვთა კანონის პირდაპირი შედეგი.

ვთქვათ წარმოებს n დამოუკიდებელი ცდა, რომელთაგან თითოეულში მოხდება ან არ მოხდება A ხდომილობა, რომლის ალბათობა ყოველ ცდაში p-ს ტოლია. ბერნულის თეორემა ამტკიცებს, რომ ცდათა n რიცხვის უსასრულოდ ზრდისას A ხდომილობის სიხშირე ალბათობის მიხედვით უახლოვდება p ალბათობას.

აღვნიშნოთ A ხდომილობის სიხშირე n ცდებში P^*-ით და ი. ბერნულის თეორემა ჩავწეროთ ფორმულის სახით:

$$P(|P^* - p| < \varepsilon) > 1 - \delta, \qquad (13.5.1)$$

სადაც ε, δ — რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვებია.

საჭიროა დამტკიცდეს ამ ფორმულის სამართლიანობა ცდათა საკმაო დიდი n რიცხვის შემთხვევაში.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები:

X_1 — პირველ ცდაში A ხდომილობის მოხდენათა რიცხვი,

X_2 — მეორე ცდაში A ხდომილობის მოხდენათა რიცხვი, და ა. შ.

ყველა ამ სიდიდეებს აქვს განაწილების ერთი და იგივე კანონი გამოსახული შემდეგი სახის მწკრივით:

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline q & p \end{array},$$

სადაც $q=1-p$. ყოველი X_i სიდიდის მათემატიკური ლოდინი არის p, ხოლო მისი დისპერსია კი pq (იხ. პარაგრაფი 10.3).

P^* სიხშირე თვით წარმოადგენს $X_1, X_2, \ldots, X_n$ სიდიდეთა საშუალო არითმეტიკულს:

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

და დიდ რიცხვთა კანონის თანახმად ალბათობის მიხედვით უახლოვდება შემთხვევით სიდიდეთა საერთო მათემატიკურ ლოდინს. სწორედ აქედან გამოდის (13.5.1) უტოლობის სამართლიანობა.

ი. ბერნულის თეორემა ამტკიცებს სიხშირის სიმდგრადეს ცდათა უცვლელ პირობებში, მაგრამ ცდის პირობების ცვალებადობისას ანალოგიური მდგრადობა აგრეთვე არსებობს. თეორემას, რომელიც ცდის ცვლადი პირობებისას ადგენს სიხშირეთა მდგრადობის თვისებას, ეწოდება პ უ ა ს ო ნ ი ს თ ე ო რ ე მ ა და გამოითქმის შემდეგნაირად:

თ უ კ ი წ ა რ მ ო ე ბ ს n დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი ც დ ა დ ა A ხ დ ო მ ი ლ ო ბ ი ს გ ა მ ო ჩ ე ნ ი ს ა ლ ბ ა თ ო ბ ა i-ურ ც დ ა- შ ი p_i რ ი ც ხ ვ ი ს ტ ო ლ ი ა, მ ა შ ი ნ ც დ ა თ ა n რ ი ც ხ- ვ ი ს გ ა ზ რ დ ი ს ა ს A ხ დ ო მ ი ლ ო ბ ი ს ს ი ხ შ ი რ ე მ ი- ი ს წ რ ა ფ ვ ი ს p_i ა ლ ბ ა თ ო ბ ა თ ა ს ა შ უ ა ლ ო ა რ ი თ მ ე- ტ ი კ უ ლ ი ს ა კ ე ნ.

პუასონის თეორემა გამოიყვანება ჩებიშევის განზოგადოებული თეორემიდან ზუსტად ისე, როგორც ბერნულის თეორემა იყო გამოყვანილი დიდ რიცხვთა კანონიდან.

პუასონის თეორემას აქვს დიდი პრინციპული მნიშვნელობა ალბათობათა თეორიის პრაქტიკულად გამოყენებისათვის. საქმე იმაშია, რომ ხშირად ალბათობითი მეთოდები გამოიყენებიან იმ მოვლენათა გამოსაკვლევად, რომლებსაც ერთსა და იმავე პირობებში არა აქვთ საკმარისად მრავალჯერ განმეორების შესაძლებლობა მაგრამ სხვადასხვა პირობებში

მრავალჯერ მეორდებიან, თანაც ჩვენთვის საინტერესო ხდომილობათა ალბათობანი დამოკიდებულია ამ პირობებისაგან.

მაგალითად, საჰაერო ბრძოლაში სამიზნის დაზიანების ალბათობა არსებითად დამოკიდებულია სროლის სიშორეზე, მიზნის რაკურსზე, ფრენის სიმაღლეზე, მსროლელი თვითმფრინავისა და მიზნის სიჩქარეზე და ა. შ. ამ პირობათა კომპლექსი მეტად მრავალრიცხოვანია იმისათვის, რომ შეიძლებოდეს გათვალისწინება საჰაერო ბრძოლის მრავალჯერ განხორციელებისა, სახელდობრ, მოცემულ ფიქსირებულ პირობებში და მაინც, მიუხედავად ამისა, მოცემულ მოვლენაში სახეზეა სიხშირეთა განსაზღვრული სიმდგრადე, სახელდობრ რეალურ საჰაერო ბრძოლებში სამიზნის დაზიანების სიხშირე, რომელიც ხორციელდება სრულიად სხვადასხვა პირობებში, მიუახლოვდება პირობათა ამ ჯგუფისათვის დამახასიათებელ მიზნის დაზიანების საშუალო ალბათობას. ამიტომ სროლის ორგანიზაციის ის მეთოდები, რომლებიც დაფუძნებულია მიზნის დაზიანების მაქსიმალურ ალბათობაზე, გამართლებულ იქნებიან მოცემულ შემთხვევაშიც მიუხედავად იმისა, რომ არ შეიძლება მოველოდეთ ცდათა ნამდვილ მასიურობას პირობათა ყოველ გარკვეულ კომპლექსში.

ანალოგიურ მდგომარეობას აქვს ადგილი ალბათობით გაანგარიშებათა ცდით შემოწმების დროსაც, პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება შემთხვევები, როცა საჭიროა—ცდით შევამოწმოთ შესაბამისობა რომელიღაც A ხდომილობის გამოთვლილი ალბათობისა მის ფაქტიურ სიხშირესთან. ძალიან ხშირად ეს კეთდება იმისათვის, რომ შევამოწმოთ ამა თუ იმ თეორიული სქემის სისწორე, რომელიც საფუძვლად აქვს დადებული ხდომილობის ალბათობის გამოთვლას. ხშირად ასეთი ექსპერიმენტული შემოწმებისას ვერ ვაღწევთ ვაწარმოოთ საკმაოდ ბევრჯერ ცდათა ერთი და იგივე პირობები და მაინც ეს შემოწმება შეიძლება განხორციელდეს თუ შევადარებთ ცდისას დანაკვირ ხდომილობის სიხშირეს არა მის ალბათობას ფიქსირებულ პირობებში, არამედ სხვადასხვა პირობებისათვის გამოთვლილ ალბათობათა საშუალო არითმეტიკულთან.

13.6. მასიური შემთხვევითი მოვლენები და ცენტრალური ზღვრული თეორემა

წინა პარაგრაფებში განვიხილეთ დიდ რიცხვთა კანონის სხვადასხვა ფორმები. ყველა ეს ფორმა, როგორი განსხვავებულიც არ უნდა იყოს ისინი, ამტკიცებენ ერთს: ამა თუ იმ შემთხვევითი სიდიდის გარკვეულ მუდმივისკენ ალბათობის მიხედვით მისწრაფების ფაქტს. დიდ რიცხვთა კანონის არც ერთ ფორმაში არა გვაქვს საქმე შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების კანონებთან. განაწილების ზღვრული კანონები წარმოადგენენ სხვა ჯგუფის თეორემების საგანს—ცენტრალური ზღვრული

თეორემისას, რომელსაც ზოგჯერ უწოდებენ „დიდ რიცხვთა კანონის რაოდენობით ფორმას.“ ცენტრალური ზღვრული თეორემის ყველა ფორმები მიძღვნილია იმ პირობების დადგენისათვის, რომლის დროსაც წარმოიშობა განაწილების ნორმალური კანონი, რადგან ეს პირობები პრაქტიკაში ძალზე ხშირად სრულდება. ნორმალური კანონი განაწილების კანონთა შორის ყველაზე გავრცელებული კანონია, რომელიც უფრო ხშირად გვხვდება ბუნების შემთხვევით მოვლენებს შორის. იგი წარმოიშობა ყველა შემთხვევაში, როცა გამოსაკვლევი შემთხვევითი სიდიდე წარმოდგენილია დამოუკიდებელ (ან სუსტად დამოკიდებულ) ელემენტარულ შესაკრებთა საკმაოდ დიდი რიცხვის სახით, რომელთაგან თითოეული ცალ-ცალკე ჯამზე შედარებით მცირე გავლენას ახდენს.

სროლის თეორიაში განაწილების ნორმალური კანონი მნიშვნელოვანია, რადგან პრაქტიკის უმრავლეს შემთხვევაში მოხვედრის წერტილთა და ჭურვთა სკდომის წერტილთა კოორდინატები ნაწილდება ნორმალური კანონით. ეს შეიძლება ახსნილი იქნას შემდეგ მაგალითზე.

დავუშვათ წარმოებს სროლა რომელიღაც ბრტყელ სამიზნეზე, რომლის ცენტრთან (დამიზნების წერტილთან) დაკავშირებულია კოორდინატთა სათავე. მოხვედრის წერტილი ხასიათდება ორი X და Y შემთხვევითი სიდიდით. განვიხილოთ ერთ-ერთი მათგანი, მაგალითად Ox ღერძის მიმართულებით მოხვედრის წერტილის მიზნიდან X გადახრა. ეს გადახრა გამოწვეულია შედარებით მცირე ფაქტორების ძლიერ დიდი რიცხვის ერთობლივი გავლენით, როგორიცაა: შეცდომა დამიზნებისას, შეცდომა მიზნამდე მანძილის განსაზღვრისას, სროლისას, იარაღის და დანადგარის ვიბრაცია, შეცდომა ჭურვის დამზადებისას, ატმოსფერული პირობები და ა. შ. ამ მიზეზებიდან თითოეული ქმნის ელემენტარულ შეცდომას—ჭურვის გადახრას მიზნიდან და ჭურვის X კოორდინატი შესაძლებელია წარმოდგენილი იქნას როგორც ჯამი ასეთი ელემენტარული გადახრებისა:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n + \dots, \tag{13.6.1}$$

სადაც X_1, $X_2, \dots$ — გადახრებია, რომლებიც გამოწვეულია ცალკეული ფაქტორებით. ვინაიდან ეს ფაქტორები ძალიან ბევრია, ურთიერთ შორის ისინი ძირითადად დამოუკიდებლებია და ცალკეული შესაკრებების ჯამზე მიახლოებით თანაბრად მცირედ გავლენას ახდენენ, ამიტომ ცენტრალური ზღვრული თეორემის მიღება და (13.6.1) სიდიდე უნდა ემორჩილებოდეს ნორმალურთან მიახლოებულ განაწილების კანონს.

შევჩერდეთ რამდენადმე დაწვრილებით მტკიცებაზე, რომელიც შეეხება თითოეული შესაკრების ჯამზე დაახლოებით თანაბრად მცირე გავლენას. აზრი მისი იმაშია, რომ სროლის ელემენტარულ შეცდომათა შორის

არ არის არცერთი ისეთი, რომელიც მკვეთრად ჭარბობდეს ყველა დანარჩენის ჯამს. მართლაც, ასეთი შეცდომა რომ ყოფილიყო სროლის წესის შედგენისას ანდა დასამიზნებელი ხელსაწყოს კონსტრუქციის შექმნისას, ამ შეცდომის ლიკვიდაცია უნდა მოგვეხდინა და გაგვეთვალისწინებინა ყველაზე მნიშვნელოვანი მიზეზი, რომელიც იწვევს ჭურვის მიზნიდან გადახრას. გაუთვალისწინებელი შემთხვევითი ფაქტორები, რომლებიც ქმნიან გაფანტვას, ჩვეულებრივ დამახასიათებელია თავისი თანაბარი სიმცირით და მათ შორის მკვეთრი გადაუმეტებლობით. სახელდობრ, ამიტომ ჭურვის მოხვედრის წერტილების განაწილების კანონი (ანდა დისტანციური სროლისას ჭურვების სკდომის წერტილების განაწილების კანონი) ჩვეულებრივ ნორმალური მიიღება[1].

განაწილების ნორმალური კანონი წარმოადგენს ძირითადს არა მარტო სროლის თეორიაში, არამედ სხვა დარგებშიც, მაგალითად, გაზომვების შეცდომათა თეორიაში, სახელდობრ, გამოვიდნენ რა გაზომვების შეცდომათა თეორიიდან განაწილების ნორმალური კანონი პირველად დააფუძნეს ლაპლასმა და გაუსმა. მართლაც მეტწილ შემთხვევებში შეცდომები, რომლებიც ამა თუ იმ ფიზიკურ სიდიდეთა გაზომვებისას წარმოიშობიან განაწილდებიან, სახელდობრ, ნორმალური კანონით; მიზეზი ამისა იმაშია, რომ ასეთი შეცდომები, როგორც წესი, შედგებიან მრავალრიცხოვან დამოუკიდებელ ელემენტარულ შეცდომებიდან, რომლებიც სხვადასხვა მიზეზებითაა წარმოშობილი.

13.7. მახასიათებელი ფუნქციები

ცენტრალური ზღვრული თეორემის ერთ-ერთი ყველაზე ზოგადი ფორმა დამტკიცებული იყო ა. მ. ლიაპუნოვის მიერ 1900 წ. ამ თეორემის დასამტკიცებლად ლიაპუნოვმა შექმნა მახასიათებელი ფუნქციების სპეციალური მეთოდი. შემდგომში ამ მეთოდმა მიიღო დამოუკიდებელი მნიშვნელობა და მოქნილი და ძლიერი მეთოდი აღმოჩნდა, რომელიც გამოსადეგია სხვადასხვა საალბათო ამოცანების ამოსახსნელად.

---

[1] სროლისას ზოგ შემთხვევაში სიბრტყეზე მოხვედრის წერტილების ფაქტიური განაწილება შესაძლებელია ნორმალურიდან ძალიან განსხვავდებოდეს, მაგალითად, მკვეთრად ცვალებად პირობებში, როცა გაფანტვის ცენტრი და ალბათობრივი გადახრა სროლის პროცესში შესამჩნევად იცვლებიან, ოღონდ ასეთ შემთხვევებში ფაქტიურად საქმე გვაქვს არა ერთი გასროლისას მოხვედრის წერტილების კოორდინატების განაწილების კანონთან, არამედ სხვადასხვა გასროლისათვის ასეთი კანონების საშუალოსთან,

შემთხვევითი X სიდიდის მახასიათებლური ფუნქცია ეწოდება ფუნქციას

$$g(t)=M[e^{itx}], \tag{13.7.1}$$

სადაც i — წარმოსახვითი ერთეულია, $g(x)$ ფუნქცია მათემატიკური ლოდინია კომპლექსური შემთხვევითი

$$U=e^{itx},$$

სიდიდისა, რომელიც X სიდიდესთან ფუნქციონალურადაა დაკავშირებული. ალბათობათა თეორიის მრავალი ამოცანის ამოხსნისას მახასიათებელი ფუნქციებით სარგებლობა უფრო მოხერხებულია, ვიდრე განაწილების კანონებით.

ვიცით, რა შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების კანონი, ადვილია მოვნახოთ მისი მახასიათებელი ფუნქცია.

თუ X წყვეტილი შემთხვევითი სიდიდეა და აქვს განაწილების შემდეგი მწკრივი.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2		p_n

მაშინ მისი მახასიათებელი ფუნქციაა

$$g(t)=\sum_{i=1}^{n} e^{itx_k}p_k. \tag{13.7.2}$$

თუ X უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეა, რომლის განაწილების სიმკვრივეა $f(x)$, მაშინ მისი მახასიათებლური ფუნქციაა

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}f(x)\,dx. \tag{13.7.3}$$

მაგალითი 1. შემთხვევითი X სიდიდე — ერთი გასროლისას მოხვედრებათა რიცხვია. მოხვედრის ალბათობა ტოლია p-სი.
მოვნახოთ შემთხვევითი X სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია.

ამოხსნა. 13.7.2 ფორმულით მივიღებთ:

$$g(t)=e^{it\cdot 0}(1-p)+e^{it\cdot 1}p=q+e^{it}p.$$

სადაც $q=1-p$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. შემთხვევით X სიდიდეს აქვს ნორმალური განაწილება:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (13.7.4)$$

განვსაზღვროთ მისი მახასიათებელი ფუნქცია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 13.7.3 ფორმულით გვაქვს.

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-\frac{x^2}{2}}dx. \qquad (13.7.5)$$

ესარგებლობთ რა ცნობილი ფორმულით:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2\pm 2Bx-C}dx=\sqrt{\frac{\pi}{A}}\,e^{-\frac{AC-B^2}{A}}.$$

მიეიღებთ მხედველობაში $i^2=-1$ გვექნება:

$$g(t)=e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (13.7.6)$$

(13.7.3) ფორმულა გამოსახავს შემთხვევითი X სიდიდის მახასიათებელ $g(t)$ ფუნქციას, რომლის განაწილების სიმკვრივეა $f(x)$. გარდაქმნას (13.7.3), რომელსაც უნდა დავუქვემდებაროთ $f(x)$, რომ მივიღოთ $q(t)$ ეწოდება ფ უ რ ი ე ს გ ა რ დ ა ქ მ ნ ა. მათემატიკური ანალიზის კურსში მტკიცდება, რომ თუ $g(t)$ ფუნქცია გამოისახება $f(x)$-ით ფურიეს გარდაქმნის საშუალებით, მაშინ თავის მხრივ ფუნქცია $f(x)$ გამოისახება $g(t)$-თი ე. წ. ფ უ რ ი ე ს შ ე ბ რ უ ნ ე ბ უ ლ ი გ ა რ დ ა ქ მ ნ ი ს საშუალებით:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}g(t)\,dt\,^{1)}. \qquad (13.7.7)$$

ჩამოვაყალიბოთ და დავამტკიცოთ მახასიათებელი ფუნქციის ძირითადი თვისებები.

1. თ უ შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი X დ ა Y ს ი დ ი დ ე ე ბ ი დ ა კ ა ვ შ ი რ ე ბ უ ლ ი ა

$$Y=aX$$

თ ა ნ ა ფ ა რ დ ო ბ ი თ, ს ა დ ა ც a — ა რ ა შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი

---

[1] 17.3, 17.4 პარაგრაფებში გამოყვანილი იქნება ფურიეს იგივე გარდაქმნები, რომელიც აკავშირებს კორელაციურ ფუნქციას და სპექტრალურ სიმკვრივეს.

თანამამრავლია, მაშინ მახასიათებელი ფუნქციები დაკავშირებულია თანაფარდობით:

$$g_y(t)=g_x(at) \tag{13.7.8}$$

დამტკიცება:

$$g_y(t)=M[e^{itY}]=M[e^{itaX}]=M]e^{i(at)X}]=g_x(at).$$

2. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის მახასიათებელი ფუნქცია, შესაკრებთა მახასიათებელ ფუნქციათა ნამრავლისტოლია.

დამტკიცება. მოცემულია $X_1, X_2,\ldots,X_n$ — დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების მახასიათებლი ფუნქციებით:

$$g_{x_1}(t),\ g_{x_2}(t), \quad ,g_{x_n}(t)$$

და მათი ჯამი

$$Y=\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ

$$g_y(t)=\prod_{k=1}^{n} g_{x_k}(t). \tag{13·7.9}$$

გვაქვს:

$$g_y(t)=M[e^{itY}]=M\left[e^{it\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}\right]=M\left[\prod_{k=1}^{n}e^{itX_k}\right]$$

ვინაიდან X_k სიდიდეები დამოუკიდებლებია, ამიტომ მათი e^{itx_k} ფუნქციებიც დამოუკიდებლებია.

მათემატიკურ ლოდინთა გამრავლების თეორემის მიხედვით მივიღეთ:

$$g_y(t)=\prod_{k=1}^{n}M[e^{itX_k}]=\prod_{k=1}^{n}g_{x_k}(t).$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

მახასიათებელ ფუნქციათა აპარატი ხშირად გამოიყენება განაწილების კანონთა კომპოზიციისათვის. ვთქვათ მაგალითად გვაქვს ორი დამოუკიდებელი შემთხვევითი X და Y სიდიდე, რომელთა განაწილების სიმკვრივეებია $f_1(x)$ და $f_2(y)$. საჭიროა მოვნახოთ:

$$Z=X+Y$$

სიდიდის განაწილების სიმკვრივე. ეს შეიძლება შესრულდეს შემდეგნაირად: მოვნახოთ X და Y შემთხვევით სიდიდეთა $g_x(t)$ და $g_y(t)$ მახასიათებელი ფუნქციები, გადავამრავლოთ ისინი და მივიღებთ Z სიდიდის მახასიათებელ ფუნქციას:

$$g_z(t)=g_x(t)g_y(t).$$

რის შემდეგ მოვახდენთ რა $g_z(t)$-ზე ფურიეს შებრუნებულ გარდაქმნას, მოვძებნით Z სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს

$$f_3(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz}g_z(t)\,dt.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. მოვნახოთ მახასიათებელი ფუნქციის დახმარებით ორი ნორმალური კანონის კომპოზიცია:

$f_1(x)$, რომლის მახასიათებლებია $m_x=0$; σ_x;
$f_2(y)$, რომლის მახასიათებლებია $m_y=0$; σ_y.

ა მ ო ხ ს ნ ა.
ვიპოვოთ X სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია.
ამისათვის, იგი წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$X=\sigma_x U,$$

სადაც $m_u=0$; $\sigma_u=1$.
ვსარგებლობთ რა მე-2 მაგალითის შედეგებით, ვპოულობთ:

$$g_u(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

მახასიათებელი ფუნქციის 1 თვისების თანახმად

$$g_x(t)=g_u(\sigma_x t)=e^{-\frac{(\sigma_x t)^2}{2}}$$

ანალოგიურად

$$g_y(t)=e^{-\frac{(\sigma_y t)^2}{2}}$$

$g_x(t)$ და $g_y(t)$ გადამრავლებით მივიღებთ:

$$g_z(t)=e^{-\frac{(\sigma^2 x+\sigma^2 y)}{2}t^2}$$

ეს კი არის ნორმალური კანონის მახასიათებელი ფუნქცია, რომლის პარამეტრებია $m_z=0$; $\sigma_z=\sqrt{\sigma^2_x+\sigma^2_y}$. ამგვარად, ნორმალური კანონების კომპოზიცია 12.6 პარაგრაფთან შედარებით გაცილებით მარტივი საშუალებებითაა მიღებული.

13.8. ცენტრალური ზღვრული თეორემა ერთნაირად განაწილებულ შესაკრებთათვის

ცენტრალური ზღვრული თეორემის სხვადასხვა ფორმები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან იმ პირობებით, რომელიც ედებათ ჯამის შემადგენელ შემთხვევით შესაკრებთა განაწილებებს. აქ ჩამოვაყალიბებთ და დავამტკიცებთ ცენტრალური ზღვრული თეორემის ერთ-ერთ ყველაზე მარტივ ფორმას, რომლიც ეხება ერთნაირად განაწილებულ შესაკრებთა შემთხვევას.

თეორემა. თუ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომელთაც აქვს განაწილების ერთი და იგივე კანონი m მათემატიკური ლოდინი და σ^2 დისპერსია, მაშინ n-ის უსასრულოდ გაზრდისას ჯამის განაწილების კანონი

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \tag{13.8.1}$$

უსასრულოდ უახლოვდება ნორმალურს.

დამტკიცება.

დავამტკიცოთ $X_1, \ldots, X_n$ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის (წყვეტილთათვის იგი ანალოგიური იქნება).

მახასიათებელი ფუნქციის მეორე თვისების თანახმად, რომელიც დამტკიცებულია წინა პარაგრაფში, Y_n სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია შესაკრებთა მახასიათებელი ფუნქციების ნამრავლია. შემთხვევითი $X_1, \ldots, X_n$ სიდიდეებს აქვთ განაწილების ერთი და იგივე კანონი, რომლის სიმკვრივეა $f(x)$ და, მაშასადამე, ერთი და იგივე მახასიათებელი ფუნქცია

$$g_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx. \tag{13.8.2}$$

მაშასადამე, შემთხვევითი Y_n სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია იქნება

$$g_{y_n}(t) = [g_x(t)]^n. \tag{13.8.3}$$

გამოვიკვლიოთ უფრო დაწვრილებით $g_x(t)$ ფუნქცია.
წარმოვიდგინოთ იგი $t=0$ წერტილის მიდამოში მაკლერონის ფორმულის მიხედვით სამი წევრით:

$$g_x(t) = g_x(0) + g'_x(0)\,t + \left[\frac{g_x''(0)}{2} + \alpha(t)\right] t^2, \tag{13.8.4}$$

სადაც $\alpha(t) \to 0$ როცა $t \to 0$.

მოვნახოთ სიდიდეები: $g_x(o)$, $g_x'(o)$, $g_x''(o)$. (18.8.2)
ფორმულაში $t=0$ დაშვებით მივიღებთ

$$g_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \qquad (13.8.5)$$

(13.8.2) გავაწარმოვოთ t-თი:

$$g'_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ixe^{itx} f(x)\, dx = i \int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx} f(x)\, dx. \qquad (13.8.6)$$

(13.8.6)-ში $t=0$ დაშვებით მივიღებთ:

$$g'_x(0) = i \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = iM[X] = im. \qquad (13.8.7)$$

ცხადია ზოგადობის შეუზღუდავად შესაძლებელია დავუშვათ $m=0$ (ამისათვის საკმარისია ათვლის საწყისი გადავიტანოთ m წერტილში). მაშინ

$$g'_x(0) = 0.$$

(13.8.6) კიდევ გავაწარმოვოთ:

$$g_x''(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{itx} f(x)\, dx,$$

საიდანაც

$$g''_x(0) = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx. \qquad (13.8.8)$$

როცა $m=0$ (13.8.8) გამოსახულებაში ინტეგრალი არის $f(x)$ სიმკვრივის მქონე X სიდიდის დისპერსია, მაშასადამე

$$g''_x(0) = -\sigma^2 \qquad (13.8.9)$$

(13.8.4) ფორმულაში $g_x(0)=1$ $g_x'(0)=0$ და $g_2''(0)=-\sigma^2$ ჩასმით მივიღებთ:

$$g_x(t) = 1 - \left[\frac{\sigma^2}{2} - \alpha(t)\right] t^2. \qquad (13.8.10)$$

განვიხილოთ შემთხვევითი Y_n სიდიდე. ჩვენ გვინდა დავამტკიცოთ, რომ მისი განაწილების კანონი n-ის გადიდებისას უახლოვდება ნორმალურს, ამისათვის Y_n სიდიდიდან გადავიდეთ მეორე („ნორმირებულ“) შემთხვევით სიდიდეზე:

$$Z_n = \frac{Y_n}{\sigma\sqrt{n}} \tag{13.8.11}$$

ეს სიდიდე მოხერხებულია იმით, რომ მისი დისპერსია არ არის დამოკიდებული n-საგან და ნებისმიერი n-სათვის ერთის ტოლია. ამაში არ არის ძნელი დავრწმუნდეთ თუ Z_n-ს განვიხილავთ როგორც დამოუკიდებელ შემთხვევით X_1, X_2,...,X_n სიდიდეების წრფივ ფუნქციას, რომელთაგან თითოეულს აქვს σ^2 დისპერსია. თუ ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ Z_n სიდიდის განაწილების კანონი ნორმალურს უახლოვდება, ცხადია ეს სამართლიანი იქნება Y_n სიდიდისათვისაც, რომელიც Z-თან (13.8.11) წრფივ დამოკიდებულებაშია.

ნაცვლად იმისა, რომ დავამტკიცოთ—Z_n სიდიდის განაწილების კანონი n-ის გადიდებისას უახლოვდება ნორმალურს, ვაჩვენებთ რომ მისი მახასიათებელი ფუნქცია უახლოვდება ნორმალური კანონის მახასიათებელ ფუნქციას[1].

მოვნახოთ Z_n სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია. (13.8.11) თანაფარდობიდან მახასიათებელი ფუნქციების პირველი (13.7.8) თვისების თანახმად მივიღებთ:

$$g_{zn}(t) = g_{yn}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\right), \tag{13.8.12}$$

სადაც $g_{yn}(t)$ — შემთხვევითი Y სიდიდის მახასიათებელი ფუნქციაა. (13.8.12) და (13.8.3) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$g_{zn}(t) = \left[g_x\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n \tag{13.8.13}$$

ანდა (13.8.10) ფორმულის გამოყენებით

$$g_{zn}(t) = \left\{1 - \left[\frac{\sigma^2}{2} - a\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\frac{t^2}{n\sigma^2}\right\}^n \tag{13.8.14}$$

გავალოგარითმოთ (13.8.14) გამოსახულება:

$$\ln g_{zn}(t) = n\ln\left\{1 - \left[\frac{\sigma^2}{2} - a\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right\}.\right.$$

---

[1] აქ დაუმტკიცებლად ვღებულობთ, რომ მახასიათებელი ფუნქციების კრებადობისაგან გამომდინარეობს განაწილების კანონთა კრებადობა. დამტკიცება იხილეთ ბ. ვ. გნედენკო, ალბათობათა თეორიის კურსი (რუსულ ენაზე) 1961.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\left[\frac{\sigma^2}{2}-a\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\frac{t^2}{n\sigma^2}=x. \tag{13.8.15}$$

მაშინ

$$\ln g_{zn}(t)=n\ln(1-x) \tag{13.8.16}$$

გავზარდოთ n უსასრულოდ, მაშინ x სიდიდე, თანახმად (13.8.15) ფორმულისა მიისწრაფის ნულისაკენ. დიდი n-ისას იგი შეიძლება ჩაითვალოს ძალიან მცირედ. დავშალოთ $ln[1-x]$ მწკრივად და დავკმაყოფილდეთ დაშლის ერთი წევრით (დანარჩენი წევრები, როცა $n\to\infty$ როგორც მცირე, უგულებელვყოთ);

$$ln\{1-x\}\approx -x.$$

მაშინ მივიღებთ:

$$\lim_{n\to\infty}\ln g_{zn}(t)=\lim_{n\to\infty} n\cdot(-x)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{t^2}{2}+\alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\frac{t^2}{\sigma^2}\right\}=-\frac{t^2}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{t^2}{\sigma^2}\alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

განსაზღვრის თანახმად ფუნქცია $\alpha(t)$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $t\to 0$; მაშასადამე

$$\lim_{n\to\infty} a\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln g_{zn}(t)=-\frac{t^2}{2},$$

საიდანაც

$$\lim_{n\to\infty} g_{z_n}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{13.8.17}$$

ეს არის $m=0$, $\sigma=1$ პარამეტრებიანი ნორმალური კანონის მახასიათებელი ფუნქცია; აქედან დავასკვნით, რომ Z_n სიდიდის განაწილების კანონიც (და მაშასადამე Y_n სიდიდისაც) ნორმალურ კანონს უსასრულოდ უახლოვდება. თეორემა დამტკიცებულია.

ჩვენ ცენტრალური ზღვრული თეორემა დავამტკიცეთ ერთნაირად განაწილებულ კერძო, მაგრამ მნიშვნელოვანი შემთხვევისათვის. ოღონდ პირობათა საკმაოდ ფართო კლასში იგი სამართლიანია არაერთნაირად განაწილებულ შესაკრებთათვისაც.

მ ა გ ა ლ ი თ ა დ ა. მ. ლიაპუნოვმა ცენტრალური ზღვრული თეორემა დაამტკიცა შემდეგი პირობებისათვის:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k}{\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} D_k\right\}^{3/2}}=0, \qquad (13.8.18)$$

სადაც b_k—X_k სიდიდის მესამე აბსოლუტური ცენტრალური მომენტია:

$$b_k=\nu_3[X_k]=M[|\overset{\circ}{X}_k|^3] \qquad (k=1,\dots,\ n),$$

D_k—X_k სიდიდის დისპერსიაა.

ცენტრალური ზღვრული თეორემის სამართლიანობის ყველაზე ზოგად (აუცილებელ და საკმარის) პირობას წარმოადგენს ლინდებერგის პირობა:

ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი $\tau>0$-სათვის

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B^2_n}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x-m_k|>\tau B_n}(x-m_k)^2 f_k(x)dx=0,$$

ს ა დ ა ც m_k მ ა თ ე მ ა ტ ი კ უ რ ი ლ ო დ ი ნ ი ა, $f_k(x)$ — x_k შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი ს ი დ ი დ ი ს გ ა ნ ა წ ი ლ ე ბ ი ს ს ი მ კ ვ რ ი ვ ე,

$$B_n=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}D_k}.$$

13.9. ფორმულები, რომლებიც გამოსახავენ ცენტრალურ ზღვრულ თეორემას და გვხვდებიან მისი პრაქტიკულად გამოყენებისას

ცენტრალური ზღვრული თეორემის თანახმად დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა საკმაოდ დიდი რიცხვის ჯამის განაწილების კანონი (ზოგიერთ არამკაცრ შეზღუდვათა დაცვით) რაგინდ ახლოსაა ნორმალურთან. პრაქტიკულად ცენტრალური ზღვრული თეორემით შეიძლება ვისარგებლოთ მაშინაც, როცა საუბარია შემთხვევით სიდიდეთა შედარებით მცირე რიცხვზე. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა შეჯამებისას, რომლებიც შესადარნი არიან თავიანთი გაფანტვით, შესაკრებთა რიცხვის გადიდებისას ჯამის განაწილების კანონი ძლიერ ჩქარა ხდება დაახ-

ლოებით ნორმალური. პრაქტიკაში საერთოდ ფართოდ გამოიყენება განაწილების ერთი კანონის მიახლოებითი შეცვლა მეორეთი იმ შედარებით მცირე სიზუსტით, რომელიც მოითხოვება ალბათობითი გამოთვლებისაგან, ასეთი შეცვლაც შეიძლება მეტად მიახლოებით. ცდა გვიჩვენებს, რომ როცა შესაკრებთა რიცხვი ათის რიგისაა (ხშირად ნაკლები), ჯამის განაწილების კანონი ჩვეულებრივ შეიძლება შეცვლილ იქნას ნორმალურით.

პრაქტიკულ ამოცანებში ხშირად იყენებენ ცენტრალურ ზღვრულ თეორემას იმის ალბათობის გამოსათვლელად, რომ რამდენიმე შემთხვევით სიდიდეთა ჯამი აღმოჩნდება მოცემულ საზღვრებში. ვთქვათ X_1, $X_2, \dots,$ X_n — დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომელთა მათემატიკური ლოდინებია

$$m_1, \; m_2 \dots, \; m_n$$

და დისპერსიებია $D_1, D_2, \dots, D_n$.

დავუშვათ, რომ ცენტრალური ზღვრული თეორემის პირობები შესრულებულია (X_1, $X_2, \dots, X_n$ სიდიდეები შესადარია თავისი გავლენის რიგით ჯამის გაფანტვაზე) და შესაკრებთა რიცხვი n საკმარისია იმისათვის, რომ განაწილების კანონი სიდიდისა

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{13.9.1}$$

შეიძლება ჩაითვალოს მიახლოებით ნორმალურად. მაშინ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი Y სიდიდე მოხვდება (α, β) უბნის საზღვრებში გამოისახება ფორმულით:

$$P(\alpha < Y < \beta) = \Phi^*\left(\frac{\beta - m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi^*\left(\frac{a - m_y}{\sigma_y}\right), \tag{13.9.2}$$

სადაც m_y, σ_y — Y სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და საშუალო კვადრატული გადახრაა, Φ^* — განაწილების ნორმალური ფუნქცია.

მათემატიკურ ლოდინთა და დისპერსიების შეკრების თეორემების თანახმად

$$\left.\begin{aligned} m_y &= \sum_{i=1}^{n} m_i \\ \sigma_y &= \sqrt{D_y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_i} \end{aligned}\right\} \tag{13.9.3}$$

ამგვარად, იმისათვის, რომ მიახლოებით მოვნახოთ შემთხვევით სიდიდეთა დიდი რიცხვის ჯამის მოცემულ უბანზე მოხვედრის ალბათობა, არ არის საჭირო ვიცოდეთ ამ სიდიდეთა განაწილების კანონები: საკმარისია ვიცოდეთ მხოლოდ მათი მახასიათებლები. იგულისხმება, რომ ეს შეეხება მხოლოდ იმ შემთხვევას, როცა დაცულია ცენტრალური ზღვრული თეორემის ძირითადი პირობა — შესაკრებთა თანაბრად მცირე გავლენა ჯამის გაფანტვაზე.

გარდა (13.9.2) ტიპის ფორმულებისა, პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება ფორმულები, რომლებშიაც შემთხვევით X_i სიდიდეთა ჯამის ნაცვლად მონაწილეობს მათი ნორმირებული ჯამი

$$Z=\frac{\overset{\circ}{Y}}{\sigma_y}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\sum\limits_{i=1}^{n}mi}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}D_i}}. \tag{13.9.4}$$

ცხადია

$$M[Z]=0; \qquad D[Z]=\sigma_z=1.$$

თუ Y სიდიდის განაწილების კანონი ახლოსაა ნორმალურთან (13.9.3) პარამეტრებით, მაშინ Z სიდიდის განაწილების კანონი ახლოსაა ნორმალურთან $m_z=0$, $\sigma_z=1$ პარამეტრებით. აქედან

$$P(\alpha<Z<\beta)=\Phi^*(\beta)-\Phi^*(\alpha). \tag{13.9.5}$$

აღვნიშნავთ, რომ ცენტრალური ზღვრული თეორემა შესაძლებელია გამოყენებულ იქნას არა მარტო უწყვეტ, არამედ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეებისათვის იმ პირობით, რომ ოპერაციებს ვაწარმოებთ არა სიმკვრივეებზე, არამედ განაწილების ფუნქციებზე. მართლაც თუ კი X_1, $X_2,\ldots,X_n$ სიდიდეები დისკრეტულია, მაშინ მათი ჯამი — აგრეთვე დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეა და ამიტომ ზუსტად, რომ ვთქვათ არ შეიძლება ემორჩილებოდეს ნორმალურ კანონს. ოღონდ (13.9.2) და (19.9.5) ტიპის ყველა ფორმულა რჩება ძალაში, რადგან მათში მონაწილეობენ არა სიმკვრივეები, არამედ განაწილების ფუნქციები. შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ თუ კი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეები აკმაყოფილებენ ცენტრალური ზღვრული თეორემის პირობებს, მაშინ მათი ნორმირებული ჯამის განაწილების ფუნქციები (იხ. ფორმულა (13.9.4) n რიცხვის უსასრულოდ გაზრდისას უსასრულოდ უახლოვდება განაწილების ნორმალურ ფუნქციას, რომლის პარამეტრებია $m_z=0$, $\sigma_z=1$.

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეებისათვის ცენტრალური ზღვრული თეორემის კერძო შემთხვევაა ლაპლასის თეორემა.

თუ წარმოებს დამოუკიდებელი n ცდა, რომელთაგან თითოეულ ში A ხდომილობა მოხდება p ალბათობით, მაშინ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$$P\left(\alpha<\frac{Y-np}{\sqrt{npq}}<\beta\right)=\Phi^*(\beta)-\Phi^*(\alpha), \qquad (13.9.6)$$

სადაც Y—n ცდებში A ხდომილობის მოხდენის რიცხვია,

$$q=1-p$$

დამტკიცება. დავუშვათ წარმოებს n დამოუკიდებელი ცდა, რომელთაგან თითოეულში, რომელთა ალბათობა p-ს ტოლია, შეიძლება მოხდეს A ხდომილობა. წარმოვიდგინოთ შემთხვევითი Y სიდიდე—n ცდაში ხდომილობის მოხდენის რიცხვი — შემდეგი სახის ჯამით.

$$Y=\sum_{i=1}^{n}X_i, \qquad (13.9.7)$$

სადაც X_i i-ურ ცდებში A ხდომილობის მოხდენის რიცხვია. თანახმად 13.8 პარაგრაფში დამტკიცებული თეორემისა, ერთნაირად განაწილებულ შესაკრებთა განაწილების კანონი მათი რიცხვის გადიდებისას უახლოვდება ნორმალურ კანონს. მაშასადამე საკმაოდ დიდი n-თვის სამართლიანია (13.9.5) ფორმულა. სადაც

$$Z=\frac{Y-m_y}{\sigma_y}. \qquad (13.9.8)$$

10.3 პ-ში დავამტკიცეთ, რომ მათემატიკური ლოდინი და n დამოუკიდებელ ცდაში, ხდომილობათა მოხდენის რიცხვის დისპერსია შესაბამისად ტოლია:

$$m_y=np; \qquad D_y=npq \quad (q=1-p).$$

ამ გამოსახულებათა (13.9.8)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$Z=\frac{Y-np}{\sqrt{npq}},$$

და ფორმულა (13.9.5) მიიღებს სახეს:

$$P\left(\alpha<\frac{Y-np}{\sqrt{npq}}<\beta\right)=\Phi^*(\beta)-\Phi^*(\alpha).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. მოწინააღმდეგის გამაგრების ზოლზე იყრება ყუმბარების 100 სერია. ერთი ასეთი სერიის ჩამოყრისას მოხვედრების მათემატიკური ლოდინი 2-ის ტოლია, ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრა 1,5-ია. მოვნახოთ მიახლოებით ალბათობა იმისა, რომ 100 სერიის ჩამოყრისას ზოლზე მოხვდება 180—220 ყუმბარა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. წარმოვიდგინოთ მოხვედრებათა საერთო რიცხვი, როგორც ჯამი ცალკეულ სერიებში ყუმბარების მოხვედრების რიცხვებისა:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i,$$

სადაც X_i i-ურ სერიაში მოხვედრებათა რიცხვია.

ცენტრალური ზღვრული თეორემის პირობები დაცულია, ვინაიდან $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ სიდიდეები ერთნაირადაა განაწილებული. ჩავთვალოთ, რომ 100 საკმარისია იმისათვის, რომ ზღვრული თეორემა გამოვიყენოთ (პრაქტიკაში იგი მისაღებია გაცილებით ნაკლებ n-სათვისაც). გვაქვს

$$m_x = \sum_{i=1}^{100} m_i = 200, \qquad \sum_{i=1}^{n} D_i = \sum_{i=1}^{100} 1,5^2 = 225.$$

(13.9.6) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$P(180 < X < 220) = \Phi^*\left(\frac{220-200}{\sqrt{225}}\right) - \Phi^*\left(\frac{180-200}{\sqrt{225}}\right) \approx 0,82.$$

ე. ი. 0,82 ალბათობით შესაძლებელია ვამტკიცოთ, რომ მოხვედრებათა საერთო რიცხვი ზოლზე არ გამოვა $180 \div 220$ საზღვრებიდან.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ხდება ჯგუფური საჰაერო ბრძოლა, რომელშიდაც მონაწილეობენ 50 ბომბდამშენი და 100 გამანადგურებელი. ყოველ ბომბდამშენზე იერიში მიაქვს ორ გამანადგურებელს. ამგვარად, საჰაერო ბრძოლა იშლება 50 ელემენტარულ საჰაერო ბრძოლებად, რომელთაგან თითოეულში მონაწილეობს ერთი ბომბდამშენი და ორი გამანადგურებელი. თითოეულ ელემენტარულ ბრძოლაში ბომბდამშენის ჩამოგდების ალბათობა 0,4-ის ტოლია; ალბათობა იმისა, რომ ელემენტარულ ბრძოლაში ჩამოგდებულ იქნება ორივე გამანადგურებელი 0,2-ის ტოლია; ალბათობა იმისა, რომ ჩამოგდებულ იქნება ზუსტად ერთი გამანადგურებელი 0,5-ის ტოლია. საჭიროა: 1) მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ საჰაერო ბრძოლაში ჩამოგდებულ იქნება ბომბდამშენების არანაკლებ 35%, 2) შეფასებულ იქნას საზღვრები, რომლებშიდაც 0,9 ალბათობით მოთავსებული იქნება ჩამოგდებულ გამანადგურებელთა რაოდენობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) აღვნიშნოთ X-ით ჩამოგდებულ ბომბდამშენთა რიცხვი:

$$X = \sum_{i=1}^{50} X_i,$$

სადაც X_i i-ურ ბრძოლაში ჩამოგდებულ ბომბდამშენთა რიცხვია.

X_i-ის განაწილების მწკრივს აქვს სახე;

0	1
0,6	0,4

აქედან

$$m_{x_i}=0,4;\ D_{x_i}=0,4\cdot0,6=0,24;\ m_x=50\cdot0,4=20;$$

$$\sigma_x=\sqrt{50\cdot0,24}\approx3,464.$$

(13.9.6) ფორმულის გამოყენებით და დაშვებით რომ $\beta=50$ (ანდა რაც მოცემულ შემთხვევაში ტოლძალოვანია $\beta=\infty$), $\alpha=17$, ვპოულობთ:

$$P(17<X)=\frac{1}{2}-\Phi^*\left(\frac{17-20}{3,464}\right)\approx0,807.$$

2) ჩამოგდებულ გამანადგურებელთა რიცხვი აღვნიშნოთ Y—ით:

$$Y=\sum_{i=1}^{50}Y_i,$$

სადაც Y_i i=ურ ელემენტალურ ბრძოლაში ჩამოგდებული გამანადგურებლების რიცხვია. Y_i სიდიდის განაწილების მწკრივს აქვს სახე:

1	1	2
0,3	0,5	0,2

აქედან ვპოულობთ Y_i სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს და დისპერსიას:

$$m_{y_i}=0,9;\ D_{y_i}=0,49.$$

Y სიდიდისათვის:

$$m_y=50\cdot0.9=45;\ D_y=24,5;\ \sigma_y=4,96.$$

განვსაზღვროთ $m_y=45$-ის სიმეტრიული უბნის საზღვრები, თუ მასში ხვდება Y სიდიდე, რომლის ალბათობა 0,9-ის ტოლია. ამ უბნის ნახევრის სიგრძე ავღნიშნოთ l-ით, მაშინ

$$P(|Y-m_y|<l)=2\Phi^*\left(\frac{l}{\sigma_y}\right)-1=0,9$$

$$\Phi^*\left(\frac{l}{\sigma_y}\right)=0,95.$$

$\Phi^*\left(\frac{l}{\sigma_y}\right)'$ ფუნქციის ცხრილებით ვპოულობთ არგუმენტის იმ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც $\Phi^*(x)=0,95$; ეს მნიშვნელობა მიახლოებით ტოლია

$$x=1,645,$$

ე.

$$\frac{l}{\sigma_y}=1,645,$$

საიდანაც

$$l=8,14\approx8.$$

მაშასადამე, დაახლოებით ალბათობა 0,9-ის ტოლად შეიძლება მივიღოთ, დავამტკიცოთ, რომ ჩამოგდებულ გამანადგურებელთა რიცხვი მოთავსებულ იქნება $m_y\pm l$ საზღვრებში, ე. ი. 37-დან 53-მდე.

XIV თავი

ცდების დამუშავება

14.1. ცდათა შეზღუდული რიცხვის დამუშავების თავისებურებანი. განაწილების კანონის უცნობი პარამეტრების შეფასებანი

მეშვიდე თავში უკვე განვიხილეთ მათემატიკური სტატისტიკის ზოგიერთი ამოცანა, რომელიც შეეხებოდა ცდისეულ მონაცემთა დამუშავებას. ესენია ძირითადად ამოცანები ცდისეულ შედეგთა მიხედვით შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების კანონების მოძებნაზე. რომ მოვნახოთ განაწილების კანონი, უნდა გაგვაჩნდეს საკმაოდ ვრცელი სტატისტიკური მასალა, მაგალითად რამდენიმე ასეული ცდის (დაკვირვების) სახით. მაგრამ პრაქტიკაში ხშირად საქმე გვაქვს ფრიად შეზღუდული მოცულობის სტატისტიკურ მასალასთან—ორ სამ ათეულ ან ხშირად ნაკლებ დაკვირვებასთან. ეს ჩვეულებრივ დაკავშირებულია თითოეული ცდის დაყენების სიძნელესა და სიძვირესთან. ასეთი შეზღუდული მასალა ნამდვილად არ არის საკმარისი იმისათვის, რომ მოინახოს შემთხვევითი სიდიდის განაწილების წინასწარ უცნობი კანონი. მაგრამ მაინც ეს მასალა შეიძლება დამუშავებული და გამოყენებული იქნას შემთხვევით სიდიდეზე ზოგიერთი ცნობების მისაღებად. მაგალითად: შეზღუდული სტატისტიკური მასალის საფუძველზე შეიძლება განისაზღვროს — თუმცა საორიენტაციოდ —შემთხვევითი სიდიდის უმნიშვნელოვანესი რიცხვითი მახასიათებლები: მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, ზოგჯერ კი — უმაღლესი მომენტები. პრაქტიკაში ხშირად ხდება, რომ განაწილების კანონის სახე ცნობილია წინასწარ, ხოლო საჭიროა მოინახოს მხოლოდ ის პარამეტრები, რომლებზედაც ის არის დამოკიდებული. მაგალითად თუ კი წინასწარ ცნობილია, რომ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი ნორმალურია, მაშინ ამოცანა დამუშავებისას მისი ორი m და σ პარამეტრის განსაზღვრაზე დაიყვანება. თუ წინასწარ ცნობილია, რომ სიდიდე განაწილებულია პუასონის კანონით, მაშინ უნდა განისაზღვროს მისი მხოლოდ ერთი პარამეტრი: მათემატიკური ლოდინი a. დაბოლოს ზოგიერთ ამოცანაში განაწილების კანონის სახე საერთოდ არ არის არსებითი, არამედ საჭიროა ვიცოდეთ მისი რიცხვითი მახასიათებლები.

მოცემულ თავში ჩვენ განვიხილავთ რიგ ამოცანებს ცდათა შეზღუდული რიცხვით უცნობი პარამეტრების განსაზღვრაზე, რომლებზედაც დამოკიდებულია შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

უწინარეს ყოვლისა უნდა აღვნიშნოთ, რომ საძიებელი პარამეტრის ნებისმიერი მნიშვნელობა, რომელიც გამოთვლილია ცდათა შეზღუდული რიცხვის საფუძველზე, ყოველთვის შეიძლება შეიცავდეს შემთხვევით ელემენტს, ასეთ მიახლოებით, შემთხვევით მნიშვნელობას ვუწოდებთ პარამეტრის შეფასებას, მაგალითად, მათემატიკური ლო-

დინის შეფასება შეიძლება იყოს დამოუკიდებელ ცდებში შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგად მიღებულ მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკული. ცდათა ძლიერ დიდი რიცხვისას საშუალო არითმეტიკული ფრიად ახლოს იქნება მათემატიკურ ლოდინთან, რომლის ალბათობა დიდი იქნება თუ ცდათა რიცხვი n არ არის დიდი, მაშინ მათემატიკური ლოდინის შეცვლა საშუალო არითმეტიკულით მიგვიყვანს, რომელიღაც შეცდომამდე. ეს შეცდომა საშუალოდ მით მეტია, რაც ნაკლებია ცდათა რიცხვი. ასევე იქნება სხვა უცნობი პარამეტრების შეფასებებშიც. ამ შეფასებათაგან ნებისმიერი შემთხვევითია; მათი სარგებლობისას გარდუვალია შეცდომები. სასურველია ავირჩიოთ ისეთი შეფასება, რომ ეს შეცდომები შეძლებისდაგვარად მინიმალური იყოს.

განვიხილოთ შემდეგი ზოგადი ამოცანა. გვაქვს შემთხვევითი X სიდიდე, რომლის განაწილების კანონი შეიცავს უცნობ a პარამეტრს. საჭიროა a პარამეტრისათვის მოვნახოთ ისეთი შესაფერისი შეფასება n ცდათა შედეგების მიხედვით, რომელთაგან თითოეულში X სიდიდე ღებულობდეს გარკვეულ მნიშვნელობას.

აღვნიშნოთ შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგად მიღებულ მნიშვნელობანი

$$X_1,\ X_2,\dots,Xn. \tag{14.1.1}$$

ისინი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც შემთხვევითი X სიდიდის n „ეგზემპლარი", ე. ი. დამოუკიდებელი n შემთხვევითი სიდიდე, რომელთაგან თითოეული განაწილებულია იმავე კანონით როგორც შემთხვევითი X სიდიდე. a პარამეტრის შეფასება აღვნიშნოთ $\widetilde{a}$-ით. ნებისმიერი შეფასება, რომელიც გამოთვლილია (14.1.1) მასალის საფუძველზე უნდა წარმოადგენდეს $X_1,\ X_2,\dots,X_n$ სიდიდეთა ფუნქციას:

$$\widetilde{a}=\widetilde{a}(X_1,\ X_2\dots,\quad X_n) \tag{14.1.2}$$

და, მაშასადამე, თვითონვე შემთხვევითი სიდიდეა. $\widetilde{a}$-ის განაწილების კანონი უპირველეს ყოვლისა დამოკიდებულია X სიდიდის განაწილების კანონისაგან. (და კერძოდ თვით უცნობი a პარამეტრისაგან), მეორე—ცხადია, n რიცხვისაგან. პრინციპში განაწილების ეს კანონი შეიძლება მოვნახოთ ალბათობათა თეორიის ცნობილი მეთოდებით.

წავუყენოთ $\widetilde{a}$ შეფასებას ისეთი მოთხოვნები, რომ იგი იყოს რომელიღაც აზრით „კარგი ხარისხის" შეფასება.

ბუნებრივია, $\widetilde{a}$ შეფასებიდან მოვითხოვოთ, რომ ცდათა n რიცხვის გადიდებისას იგი უახლოვდებოდეს (უახლოვდებოდეს ალბათობის მიხედვით) a პარამეტრს. შეფასებას, რომელსაც გააჩნია ასეთი ფვისება, ეწოდება ს ა ფ უ ძ ვ ლ ი ა ნ ი.

გარდა ამისა სასურველია, რომ ნაცვლად a სიდიდისა ვისარგებლოთ $\tilde{a}$-ით, არ დავუშვათ შეცდომის სისტემატური გაზრდა ან შემცირება, ე. ი. ადგილი ჰქონდეს პირობას

$$M[\tilde{a}]=a. \tag{14.1.3}$$

შეფასებას, რომელიც აკმაყოფილებს ასეთ პირობას ეწოდება გადაუადგილებელი. დაბოლოს სასურველია, რომ არჩეულ გადაუადგილებელ შეფასებას გააჩნდეს სხვებთან შედარებით უმცირესი დისპერსია, ე. ი.

$$D[\tilde{a}]=\min. \tag{14.1.4}$$

შეფასებას, რომელსაც გააჩნია ასეთი თვისება, ეწოდება ე ფ ე ქ ტ უ რ ი.

პრაქტიკაში ყოველთვის ვერ ვაღწევთ ყველა ამ მოთხოვნათა დაკმაყოფილებას, მაგალითად, შესაძლებელია აღმოჩნდეს, რომ ეფექტური შეფასება თუმცა არსებობს, ფორმულები მის გამოსათვლელად, მეტად რთულია და იძულებული ვართ დავკმაყოფილდეთ სხვა შეფასებით, რომლის დისპერსია რამდენადმე მეტია. ზოგჯერ გამოიყენება მარტივი გამოანგარიშებისათვის—უმნიშვნელოდ გადაადგილებული შეფასებები. ოღონდ შეფასების შერჩევას ყოველთვის წინ უნდა უსწრებდეს მისი კრიტიკული განხილვა — ყველა ზემოთ ჩამოთვლილი მოსაზრებებით.

14.2. შეფასებები მათემატიკური ლოდინებისა და დისპერსიებისათვის

ვთქვათ გვაქვს შემთხვევითი X სიდიდე, რომლის მათემატიკური ლოდინია m და D დისპერსია; ორივე პარამეტრი უცნობია. X სიდიდეზე წარმოებულია n დამოუკიდებელი ცდა, რომელთაც მოცემული აქვთ $X_1, X_2, \dots, X_n$ შედეგები. საჭიროა მოვნახოთ საფუძვლიანი და გადაუადგილებელი შეფასებები m და D პარამეტრებისათვის.

მათემატიკური ლოდინის შესაფასებლად ბუნებრივია ვივარაუდოთ დანაკვირ მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკულით (ადრე ჩვენ მას აღვნიშნავდით m^*)

$$\tilde{m}=m^*=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \tag{14.2.1}$$

არ არის ძნელი დავრწმუნდეთ, რომ ეს შეფასება საფუძვლიანია: თანახმად დიდ რიცხვთა კანონისა n-ის გაზრდისას $\tilde{m}$ სიდიდე გარკვეული ალბა-

თობით მიისწრაფვის m-ისაკენ. $\tilde{m}$ შეფასება აგრეთვე გადაუადგილებელია რადგანაც

$$M[\tilde{m}]=\frac{\sum_{i=1}^{n} m}{n}=m. \qquad (14.2.2)$$

ამ შეფასების დისპერსია ტოლია:

$$D[\tilde{m}]=\frac{1}{n}D. \qquad (14.2.3)$$

შეფასების ეფექტურობა ანდა არაეფექტურობა დამოკიდებულია X სიდიდის განაწილების კანონის სახისაგან. შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ თუ X სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონით, დისპერსია (14.2.3) მინიმალურად შესაძლო იქნება, ე. ი. შეფასება $\tilde{m}$ ეფექტურია. განაწილების სხვა კანონებისათვის ეს შეიძლება ასე არც იყოს.

გადავიდეთ D დისპერსიის შეფასებაზე. ერთი შეხედვით ყველაზე ბუნებრივ შეფასებად წარმოგვიდგება სტატისტიკური დისპერსია:

$$D^*=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\tilde{m})^2}{n}, \qquad (14.2.4)$$

სადაც

$$\tilde{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n} \qquad (14.2.5)$$

შევამოწმოთ შეფასება საფუძვლიანია თუ არა. გამოვსახოთ იგი მეორე საწყისი მომენტით (7.4.6) ფორმულით:

$$D^*=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}-\tilde{m}^2. \qquad (14.2.6)$$

მარჯვენა ნაწილის პირველი წევრი არის შემთხვევითი X^2 სიდიდის n დანაკვირ მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკული; იგი მიისწრაფის $M[X^2]=\alpha_2[X]$ სიდიდისაკენ. მეორე წევრი მიისწრაფის ალბათობის მიხედვით m^2-კენ. მთელი (14.2.6) სიდიდე მიისწრაფის ალბათობის მიხედვით სიდიდისაკენ

$$\alpha_2[X]-m^2=D.$$

ეს ნიშნავს იმას, რომ შეფასება საფუძვლიანია. შევამოწმოთ წარმოადგენს თუ არა D^* შეფასება, აგრეთვე გადაუადგილებელს. (14.2.6) ფორმულაში ჩავსვათ $\tilde{m}$ ნაცვლად მისი (14.2.5) გამოსახულება და ვაწარმოოთ ნაჩვენები მოქმედებანი:

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n^2} -$$

$$-2 \frac{\sum_{i<j} X_i X_j}{n^2} = \frac{n-1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2 \frac{\sum_{i<j} X_i X_j}{n^2}. \qquad (14.2.7)$$

მოვნახოთ მათემატიკური ლოდინი (14.2.7) სიდიდისა:

$$M[D^*] = \frac{n-1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} M[X_i^2] - \frac{2}{n^2} \sum_{i<j} M[X_i X_j]. \qquad (14.2.8)$$

ვინაიდან D^* დისპერსია არ არის დამოკიდებული იმისაგან, თუ რომელ წერტილში ავირჩევთ კოორდინატთა სათავეს, ავირჩიოთ იგი m წერტილში. მაშინ

$$M[X_i^2] = M[\mathring{X}_i^2] = D; \quad \sum_{i=1}^{n} M[X_i^2] = nD, \qquad (14.2.9)$$

$$M[X_i X_j] = M[\mathring{X}_i \mathring{X}_j] = K_{ij} = 0. \qquad (14.2.10)$$

უკანასკნელი ტოლობა გამოდის ცდების დამოუკიდებლობიდან. ჩავსვათ (14.2.9) და (14.2.10) ფორმულაში (14.2.8) მივიღებთ

$$M[D^*] = \frac{n-1}{n} D. \qquad (14.21.1)$$

აქედან ჩანს, რომ D^* სიდიდე არარის გადაუადგილებელი შეფასებისათვის: მისი მათემატიკური ლოდინი არ უდრის D-ს, არამედ რამდენადმე მცირეა. ვსარგებლობთ რა D^* შეფასებით დისპერსიის ნაცვლად, დავუშვებთ რომელიღაც სისტემატურ შეცდომას ნაკლებობით. ამ გადა-

ადგილებას ლიკვიდაცია რომ ვუყოთ, საკმარისია შევიტანოთ შესწორება. D^*-ი გადავამრავლოთ $\frac{n}{n-1}$-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{n}{n-1}D^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widetilde{m})^2}{n}\frac{n}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widetilde{m})^2}{n-1}.$$

ასეთი „შესწორებულ" სტატისტიკურ დისპერსიას კი ავირჩევთ D-ს შეფასებად

$$\widetilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widetilde{m})^2}{n-1} \qquad (14.2.12)$$

რადგან თანამამრავლი $\frac{n}{n-1}$ მიისწრაფის ერთისაკენ, როცა $n \to \infty$ ხოლო შეფასება D^* საფუძვლიანია, ამიტომ $\widetilde{D}$ აგრეთვე იქნება საფუძვლიანი[1]. პრაქტიკაში ხშირად, ნაცვლად (14.2.12) ფორმულისა, მოხერხებულია გამოყენებულ იქნას სხვა მისი ტოლძალოვანი, რომელშიც სტატისტიკური დისპერსია გამოსახულია მეორე საწყისი მომენტით:

$$\widetilde{D} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n} - \widetilde{m}^2\right]\frac{n}{n-1}. \qquad (14.2.13)$$

n-ის დიდი მნიშვნელობისას, ბუნებრივია ორივე შეფასებანი გადაადგილებული D^* და გადაუადგილებელი $\widetilde{D}$ ძლიერ მცირეთი იქნებიან განსხვავებული და შემასწორებელი თანამამრავლის შემოტანა აზრს ჰკარგავს.

ამდაგვარად, ჩვენ მივედით მოცულობრივად შეზღუდული სტატისტიკური მასალის დამუშავების შემდეგ წესებზე.

თუ მოცემულია $x_1, x_2 \ldots, x_n$, მნიშვნელობები, რომლებიც მიღებულია n დამოუკიდებელი ცდებისას X სიდიდის მიერ, რომლის მათემატიკური m

---

[1] შეფასება D დისპერსიისათვის არაა ეფექტური. ოღონდ ნორმალური განაწილების შემთხვევაში იგი ასიმპტოტურად ეფექტურია, ე. ი. n-ის გადიდებისას მისი დისპერსიის ფარდობა მინიმალურ შესაძლოსთან უსასრულოდ უახლოვდება ერთს.

ლოდინი და D დისპერსია უცნობია, მაშინ ამ პარამეტრების განსაზღვრისათვის საჭიროა ვისარგებლოთ მიახლოებითი მნიშვნელობებით (შეფასებით):

$$\left.\begin{aligned}
\widetilde{m} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\,. \\
\widetilde{D} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \widetilde{m})^2}{n-1}\,; \\
\widetilde{D} &= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \widetilde{m}^2\right)\frac{n}{n-1}.
\end{aligned}\right\} \tag{14.2.14}$$

14.3. სანდო ინტერვალი. სანდო ალბათობა

წინა პარაგრაფში განვიხილეთ უცნობი a პარამეტრის ერთი რიცხვით შეფასების საკითხი. ასეთ შეფასებას ეწოდება „წერტილოვანი“. მთელ რიგ ამოცანებში მოითხოვება არა მარტო მოძებნა პარამეტრის შესაფერისი რიცხვითი მნიშვნელობისა, არამედ მისი სიზუსტის და საიმედოობის შეფასებაც. მოითხოვება ვიცოდეთ—რა შეცდომებამდე მიგვიყვანს a პარამეტრის შეცვლა მისი წერტილოვანი $\widetilde{a}$ შეფასებით და დარწმუნებულობის რა ხარისხით შეიძლება მოველოდეთ რომ ეს შეცდომები არ გამოვლენ ცნობილ საზღვრებს გარეთ?

ამგვარი ამოცანები განსაკუთრებით აქტუალურია დაკვირვებათა მცირე რიცხვისას, როცა წერტილოვანი $\widetilde{a}$ შეფასება შემთხვევითია და a-სი $\widetilde{a}$-ით მიახლოებით შეცვლამ შეიძლება მიგვიყვანოს სერიოზულ შეცდომამდე.

რომ გვქონდეს წარმოდგენა შეფასების სიზუსტეზე და საიმედოობაზე, მათემატიკურ სტატისტიკაში სარგებლობენ ეგრეთწოდებული სანდო ინტერვალებით და სანდო ალბათობებით.

ვთქვათ a პარამეტრისათვის ცდით მიღებულია გადაუადგილებელი $\widetilde{a}$ შეფასება. გვინდა შევაფასოთ ამ შემთხვევაში შესაძლო ცდომილება. დავნიშნოთ რომელიღაც დიდი ალბათობა (მაგალითად, $\beta=0{,}9$, $0{,}95$ ანდა $0{,}99$), ისეთი, რომ ამ ალბათობების დროს ხდომილობა შეიძლება ჩაითვალოს პრაქტიკულად უტყუარიდ, და მოვნახოთ ε-ის ისეთი მნიშვნელობა, რომლისათვისაც

$$P(|\widetilde{a}-a|<\varepsilon)=\beta \tag{14.3.1}$$

მაშინ ცდომილების პრაქტიკულად შესაძლო მნიშვნელობათა დიაპაზონი, რომელიც წარმოიშობა a-ს შეცვლით $\tilde{a}$-ით იქნება, $\pm\varepsilon$; აბსოლუტური მნიშვნელობით უფრო დიდი შეცდომები მოხდება, მხოლოდ მცირე $\alpha=1-\beta$ ალბათობით.

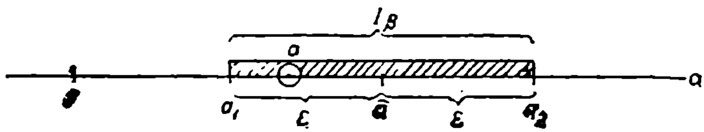
გადავწეროთ (14.3.1) შემდეგი სახით:

$$P(\tilde{a}-\varepsilon<a<\tilde{a}+\varepsilon)=\beta. \qquad (14.3.2)$$

(14.3.2) ტოლობა ნიშნავს, რომ a პარამეტრის უცნობი მნიშვნელობა, რომელთა ალბათობაა β, ხვდება ინტერვალში

$$I_\beta=(\tilde{a}-\varepsilon;\ \ \tilde{a}+\varepsilon). \qquad (14.3.3)$$

ამ შემთხვევაში აუცილებელია აღვნიშნოთ ერთი გარემოება. ადრე არაერთხელ ვიხილავდით შემთხვევითი სიდიდის მოცემულ არა შემთხვევით ინტერვალში მოხვედრის ალბათობას. აქ a არა შემთხვევითია, სამაგიეროდ შემთხვევითია I_β ინტერვალი. შემთხვევითია მისი მდებარეობა აბსცისის ღერძზე, რომელიც განისაზღვრება მისი $\tilde{a}$ ცენტრით; შემთხვევითია საერთოდ ინტერვალის სიგრძეც 2ε, რადგან ε სიდიდე, როგორც წესი გამოითვლება ცდისეული მონაცემების მიხედვით. ამიტომ მოცემულ შემთხვევაში უკეთესი იქნება β სიდიდე გავიგოთ არა როგორც a წერტილის I_β ინტერვალში „მოხვედრის" ალბათობა, არამედ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი I_β ინტერვალი გადაფარავს a წერტილს (ნახ. 14.3.1)



ნახ. 14.3.1.

β ალბათობას მიღებულია ვუწოდოთ *სანდო ალბათობა*, ხოლო I_β ინტერვალს — *სანდო ინტერვალი*.[1]

მოვიყვანოთ სანდო ინტერვალის ცნების კიდევ ერთი განმარტება: იგი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც a პარამეტრის მნიშვნელობათა ინტერვალი, რომლებიც თავსებადია ცდისეულ მონაცემებთან და არ ეწინააღმდეგებიან მათ. მართლაც, თუ ჩავთვლით, რომ ხდომილობა რომლის ალბათობაა $\alpha=1-\beta$ პრაქტიკულად შეუძლებელია, მაშინ a პარამეტრის ის მნიშვნელობანი, რომელთათვისაც $(\tilde{a}-a)>\varepsilon$, უნდა მივიჩნიოთ ცდი-

[1] ნახ. 14.3.1 განიხილება სანდო ინტერვალი, რომელიც სიმეტრიულია $\tilde{a}$-ის მიმართ. საერთოდ, კი როგორც ამას დავინახავთ, შემდგომ ეს არ არის აუცილებელი.

სეული მონაცემების საწინააღმდეგოდ, ხოლო ისინი, რომელთათვისაც $(\tilde{a}-a)<\varepsilon$ — როგორც მათი თავსებადები.

გადავიდეთ a_1 და a_2 სანდო საზღვრების მოძებნის საკითხზე. ვთქვათ a პარამეტრისათვის გვაქვს გადაუადგილებელი შეფასება $\tilde{a}$. თუ კი ჩვენთვის ცნობილი იქნებოდა $\tilde{a}$ სიდიდის განაწილების კანონი, სანდო ინტერვალის მონახვის ამოცანა იქნებოდა ფრიად მარტივი: საკმარისი იქნებოდა მოგვენახა ε-ის ისეთი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$$P(|\tilde{a}-a|<\varepsilon)=\beta.$$

სიძნელე ისაა, რომ $\tilde{a}$-ის შეფასების განაწილების კანონი დამოკიდებულია X სიდიდის განაწილების კანონზე და მაშასადამე მის უცნობ პარამეტრებზე (კერძოდ თვით a პარამეტრზე).

რომ გვერდი ავუაროთ ამ სიძნელეს, შესაძლებელია გამოვიყენოთ შემდეგი უხეში მიახლოებული ხერხი: შევცვალოთ ε-ის გამოსახულებაში უცნობი პარამეტრები მათი წერტილოვანი შეფასებებით. n ცდათა შედარებით დიდი რიცხვისას (20—30 რიგის) ეს ხერხი ჩვეულებრივ იძლევა სიზუსტის მხრივ დამაკმაყოფილებელ შედეგებს.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ამოცანა მათემატიკური ლოდინისათვის სანდო ინტერვალზე.

ვთქვათ ნაწარმოებია n დამოუკიდებელი ცდა შემთხვევით X სიდიდეზე, რომლის მახასიათებლები — m მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია D — უცნობია. ამ პარამეტრებისათვის მიღებულია შეფასებები:

$$\tilde{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}; \qquad \tilde{D}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\tilde{m})_2}{n-1}. \tag{14.3.4}$$

საჭიროა აიგოს X სიდიდის m მათემატიკური ლოდინისათვის სანდო I_β ინტერვალი, რომელიც შეესაბამება სანდო β ალბათობას.

ამოცანის ამოხსნისას ვისარგებლოთ იმით რომ, $\tilde{m}$ სიდიდე n დამოუკიდებელ, ერთგვარად განაწილებულ X_i სიდიდეთა ჯამია და თანახმად ცენტრალური ზღვრული თეორემისა საკმაოდ დიდი n-სას განაწილების კანონი ნორმალურთან ახლოსაა. პრაქტიკაში შედარებით შესაკრებთა მცირე რიცხვისათვისაც კი (10—20 რიგის) ჯამის განაწილების კანონი შესაძლებელია მიახლოებით ნორმალურად ჩავთვალოთ. გამოვალთ იქედან, რომ სიდიდე $\tilde{m}$ განაწილებულია ნორმალური კანონის მიხედვით. ამ კანონის მახასიათებლები—მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია— შესაბამისად ტოლია m და $\frac{D}{n}$ (იხ. თავი 13. პ-ფი 13.3). დავუშვათ,

რომ D სიდიდე ჩვენთვის ცნობილია, და მოვნახავთ ε_β ისეთ მნიშვნელობას, რომლისათვისაც

$$P(|\tilde{m}-m|<\varepsilon_\beta)=\beta. \qquad (14.3.5)$$

მე-6 თავის (6.3.5) ფორმულის გამოყენებით გამოვსახოთ (14.3.5)-ის მარცხენა ნაწილის ალბათობა განაწილების ნორმალური ფუნქციის საშუალებით

$$P(|\tilde{m}-m|<\varepsilon_\beta)=2\Phi^*\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_{\tilde{m}}}\right)-1. \qquad (14.3.7)$$

სადაც $\sigma_{\tilde{m}}=\sqrt{\frac{D}{n}}m$ შეფასების საშუალო კვადრატული გადახრაა.

განტოლებიდან

$$2\Phi^*\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_{\tilde{m}}}\right)-1=\beta$$

ვპოულობთ ε_β-ს მნიშვნელობას

$$\varepsilon_\beta\approx\sigma_{\tilde{m}}\arg\Phi^*\left(\frac{1+\beta}{2}\right), \qquad (14.3.7)$$

სადაც $\arg\Phi^*(x)$ ფუნქცია — $\Phi^*(x)$-ის შებრუნებული ფუნქციაა. ე. ი. ისეთი მნიშვნელობა არგუმენტისა, რომლის დროსაც განაწილების ნორმალური ფუნქცია x-ის ტოლია.

D დისპერსია, რომლითაც გამოსახულია $\sigma_{\tilde{m}}$ სიდიდე ზუსტად არ არის ცნობილი; მისი საორიენტაციო მნიშვნელობისათვის შესაძლებელია ვისარგებლოთ (14.3.4) შეფასებით და მიახლოებით დავუშვათ:

$$\sigma_{\tilde{m}}=\sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}. \qquad (14.3.8)$$

ამგვარად, მიახლოებით გადაწყვეტილია სანდო ინტერვალის აგების ამოცანა, რომელიც ტოლია

$$I_\beta=(\tilde{m}-\varepsilon_\beta;\quad \tilde{m}+\varepsilon_\beta) \qquad (14.3.9)$$

სადაც ε_β განისაზღვრება (14.3.7) ფორმულით.

თავიდან რომ ავიცილოთ ε_β გამოთვლისას $\Phi^*(x)$ ცხრილებში შებრუნებული ინტერპოლაცია, მოხერხებულია შევადგინოთ სპეციალური ცხრილი (იხ. ცხ. 14.3.1), სადაც მოყვანილია β-საგან დამოკიდებული.

$$t_\beta=\arg\Phi^*\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$$

სიდიდის მნიშვნელობანი. ნორმალური კანონისათვის t_β სიდიდე განსაზღვრავს საშუალო კვადრატულ გადახრების რიცხვს, რომელიც უნდა გადავზომოთ მარჯვნივ და მარცხნივ გაფანტვის ცენტრიდან, იმისათვის, რომ მიღებულ უბანში მოხვედრის ალბათობა β-ას ტოლი იყოს. სანდო ინტერვალი I_β სიდიდით შემდეგნაირად გამოისახება:

$$I_\beta = (\tilde{m} - t_\beta \sigma_{\tilde{m}}; \quad \tilde{m} + t\, \sigma_{\tilde{m}}).$$

ცხრილი 14.3.1

β	t_β	β	t_β	β	t_β	β	t_β
0,80	1,282	0,86	1,475	0,91	1,694	0,97	2,169
0,81	1,310	0,87	1,513	0,92	1,750	0,98	2,325
0,82	1,340	0,88	1,554	0,93	1,810	0,99	2,576
0,83	1,371	0,89	1,597	0,94	1,880	0,9973	3,000
0,84	1,404	0,90	1,643	0,95	1,960	0,999	3,290
0,85	1,439			0,96	2,053		

მაგალითი 1. X სიდიდეზე ნაწარმოებია 20 ცდა; შედეგები მოყვანილია ცხრილში (14.3.2)

ცხრილი 14.3.2.

i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i
1	10,5	6	10,6	11	10,6	16	10,9
2	10,8	7	10,9	12	11,3	17	10,8
3	11,2	8	11,0	13	10,5	18	10,7
4	10,9	9	10,3	14	10,7	19	10,9
5	10,4	10	10,8	15	10,8	20	11,0

საჭიროა მოვნახოთ $\tilde{m}$ შეფასება X სიდიდის მათემატიკური m ლოდინისათვის და ავაგოთ სანდო ინტერვალი, რომელიც შეესაბამება სანდო $\beta = 0{,}8$ ალბათობას.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\tilde{m} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = 10{,}78.$$

ვიღებთ რა ათვლის საწყისად $x = 10$, (14.2.14) მესამე ფორმულით ვპოულობთ გადაუადგილებელ შეფასებას $\tilde{D}$

$$\tilde{D} = \left(\frac{13{,}38}{20} - 0{,}78^2\right)\frac{20}{19} = 0{,}064;$$

$$\sigma_{\tilde{m}} = \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}} = 0{,}0564.$$

14.3.1 ცხრილით ვპოულობთ

$$\varepsilon_\beta = \beta\sigma_{\tilde{m}} = 0{,}072.$$

სანდო საზღვრები

$$m_1 = \tilde{m} - 0{,}072 = 10{,}71;$$

$$m_2 = \tilde{m} + 0{,}072 = 10{,}85.$$

სანდო ინტერვალი

$$I_\beta = (10.71;\ 10{,}85).$$

m პარამეტრის მნიშვნელობანი, რომლებიც მდებარეობენ ამ ინტერვალში თავსებადია ცდისეულ მონაცემებთან, რომლებიც მოყვანილია (14.3.2) ცხრილში.

ანალოგიური ხერხით სანდო ინტერვალი დისპერსიისათვისაც შეიძლება აგებულ იქნას.

ვთქვათ ნაწარმოებია n დამოუკიდებელი ცდა. უცნობი m და D პარამეტრებიან X შემთხვევით სიდიდეზე და D დისპერსიისათვის მიღებულია გადაუადგილებელი შეფასება:

$$\tilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \tilde{m})^2}{n-1}, \tag{14.3.11}$$

სადაც

$$\tilde{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

საჭიროა მიახლოებით ავაგოთ სანდო ინტერვალი დისპერსიისათვის.

(14.3.11) ფორმულიდან ჩანს, რომ $\tilde{D}$ სიდიდე $\frac{(X_i - \tilde{m})^2}{n-1}$ სახის n შემთხვევით სიდიდეთა ჯამია. ეს სიდიდეები დამოკიდებულია, რადგან ნებისმიერ მათგანში შედის $\tilde{m}$ სიდიდე, რომელიც დამოკიდებულია ყველა დანარჩენისაგან. ოღონდ შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ n-ის გადიდებით მათი ჯამის განაწილების კანონი აგრეთვე ნორმალურს უახლოვდება. პრაქტიკულად, როცა $n = 20 \div 30$ იგი უკვე შეიძლება ჩაითვალოს ნორმალურად.

დავუშვათ, რომ ეს ასეა და მოვნახოთ ამ კანონის მახასიათებლები: მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია, ვინაიდან $\tilde{D}$ შეფასება გადაუადგილებელია, ამიტომ

$$M[\tilde{D}] = D.$$

$D[\tilde{D}]$ დისპერსიის გამოთვლა დაკავშირებულია შედარებით რთულ

გამომრთველებთან, ამიტომ მოვიყვანთ მის გამოსახულებას. გამოყვანის გარეშე:

$$D[\widetilde{D}] = \frac{1}{n}\mu_4 - \frac{n-3}{n(n-1)}D^2 \tag{14.3.12}$$

სადაც μ_4 X სიდიდის მეოთხე ცენტრალური მომენტია.

იმისათვის, რომ ვისარგებლოთ ამ გამოსახულებით უნდა ჩავსვათ მასში D და μ_4 მნიშვნელობანი (თუნდაც მიახლოებითი). ნაცვლად D სიდიდისა შეიძლება ვისარგებლოთ მისი $\widetilde{D}$ შეფასებით. პრინციპში, მეოთხე ცენტრალური μ_4 მომენტი აგრეთვე შეიძლება შევცვალოთ მისი შეფასებით, მაგალითად, შემდეგი სახის სიდიდით:

$$\mu_4^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widetilde{m})^4}{n}, \tag{14.3.13}$$

მაგრამ ასეთი შეცვლა მოგვცემს ფრიად მცირე სიზუსტეს, რადგან ცდათა შეზღუდული რიცხვისას მაღალი რიგის მომენტები განისაზღვრება დიდი შეცდომებით. ოღონდ პრაქტიკაში ხშირად ხდება, რომ X სიდიდის განაწილების სახე წინასწარაა ცნობილი. უცნობია მხოლოდ მისი პარამეტრები. მაშინ შეიძლება შევეცადოთ μ_4 გამოვსახოთ D სიდიდის მეშვეობით.

განვიხილოთ შემთხვევა, რომელიც გვხვდება ყველაზე ხშირად, როცა სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონის მიხედვით. მაშინ მისი მეოთხე ცენტრალური მომენტი გამოისახება დისპერსიით (იხ. თავი 6. პ. 6.2):

$$\mu_4 = 3D^2,$$

და (14.3.12) ფორმულა მოგვცემს

$$D[\widetilde{D}] = \frac{3}{n}D^2 - \frac{n-3}{n(n-1)}D^2$$

ანდა

$$D[\widetilde{D}] = \frac{2}{n-1}\widetilde{D}^2. \tag{14.3.14}$$

(14.3.14) ფორმულაში უცნობი D შევცვალოთ მისი $\widetilde{D}$ შეფასებით. მივიღებთ

$$D[\widetilde{D}] = \frac{2}{n-1}\widetilde{D}^2, \tag{14.3.15}$$

საიდანაც

$$\sigma_{\widetilde{D}} = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\widetilde{D}. \tag{14.3.16}$$

მომენტი μ_4 შეიძლება გამოვსახოთ D-თი აგრეთვე ზოგი ერთ სხვა შემთხვევებში, როცა X სიდიდის განაწილება არანორმალურია, მაგრამ მისი სახე ცნობილია. მაგალითად თანაბარი სიმკვრივის კანონისათვის (იხ. თავი 5) გვაქვს:

$$\mu_4 = \frac{(\beta-\alpha)^4}{80}; \qquad D = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12},$$

სადაც (α, β) — ინტერვალია, რომელზედაც მოცემულია კანონი. მაშასადამე,

$$\mu_4 = 1{,}8D^2.$$

(14.3.12) ფორმულით მივიღებთ

$$D[\tilde{D}] = \frac{0{,}8n+1{,}2}{n(n-1)}D^2.$$

საიდანაც მიახლოებით ვპოულობთ

$$\sigma_{\tilde{D}} \approx \sqrt{\frac{0{,}8n+1{,}2}{n(n-1)}}\tilde{D}. \qquad (14.3.17)$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც X სიდიდის განაწილების კანონი უცნობია $\sigma_{\tilde{D}}$ სიდიდის საორიენტაციო შეფასებისას რეკომენდებულია ვისარგებლოთ (14.3.16) ფორმულით, თუკი არ არის სპეციალური საფუძველი ჩავთვალოთ, რომ ეს კანონი ნორმალურისაგან ძლიერ განსხვავდება (გააჩნია შესამჩნევი დადებითი ან უარყოფითი ექსცესი).

თუ σ_D-ს საორიენტაციო მნიშვნელობა ამა თუ იმ ხერხით მიღებულია, მაშინ შეიძლება დისპერსიისათვის ავაგოთ სანდო ინტერვალი მათემატიკური ლოდინის აგების ანალოგიურად.

$$I_\beta = (\tilde{D} - t_\beta\sigma_{\tilde{D}};\quad \tilde{D} + t_\beta\sigma_{\tilde{D}}), \qquad (14.3.18)$$

სადაც t_β სიდიდე მოცემული β ალბათობისაგან დამოკიდებულებით მოინახება 14.3.1 ცხრილით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. მოვძებნოთ მიახლოებით 80%-ანი სანდო ინტერვალი შემთხვევითი X სიდიდის დისპერსიისათვის 1 მაგალითის პირობებში, თუ ცნობილია, რომ X სიდიდე განაწილებულია კანონით, რომელიც ნორმალურთან ახლოსაა.

ამოხსნა. t_β სიდიდე რჩება იგივე, რაც 1 მაგალითში

$$t_\beta = 1{,}282.$$

(14.3.16) ფორმულით

$$\sigma_{\tilde{D}} = \sqrt{\frac{2}{19}}\cdot 0{,}064 = 0{,}0207.$$

(14.3.18) ფორმულით ვპოულობთ სანდო ინტერვალს

$$I_\beta = (0{,}043;\ 0{,}085)$$

საშუალო კვადრატული გადახრის მნიშვნელობათა შესაბამისი ინტერვალი: (0·21; 0·29).

14.4. ნორმალური კანონით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა სანდო ინტერვალების აგების ზუსტი მეთოდები

წინა §-ში განვიხილეთ მათემატიკური ლოდინისათვის და დისპერსიისათვის სანდო ინტერვალთა აგების უხეშად მიახლოებული მეთოდები. მოცემულ პარაგრაფში შევეხებით იმავე ამოცანის გადაწყვეტის ზუსტ მეთოდებს. ხაზგასმით აღვნიშნოთ ის, რომ სანდო ინტერვალების ზუსტად მოსანახავად აუცილებელია წინასწარი ცოდნა X სიდიდის განაწილების კანონისა, მაშინ როცა მიახლოებითი მეთოდების გამოყენებისას ეს არ არის აუცილებელი.

სანდო ინტერვალების აგების ზუსტი მეთოდების იდეა დაიყვანება შემდეგზე. ნებისმიერი სანდო ინტერვალი მოინახება პირობით, რომელიც გამოსახავს რომელიღაც უტოლობათა შესრულების ალბათობას, რომლებშიც შედის ჩვენთვის საინტერესო შეფასება. $\tilde{a}$ შეფასების განაწილების კანონი ზოგ შემთხვევაში დამოკიდებულია თვით X სიდიდის უცნობ პარამეტრზე. ოღონდ ზოგჯერ ხერხდება უტოლობებში $\tilde{a}$ შემთხვევით სიდიდიდან გადავიდეთ დაკვირვების შედეგად მიღებულ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ მნიშვნელობათა რომელიღაც სხვა ფუნქციაზე, რომლის განაწილების კანონი არ არის დამოკიდებული უცნობი პარამეტრებისაგან, არამედ დამოკიდებულია მხოლოდ ცდათა n რიცხვისაგან და X სიდიდის განაწილების კანონის სახისაგან. ასეთი გვარის შემთხვევითი სიდიდეები მათემატიკურ სტატისტიკაში მნიშვნელოვანია, რომლებიც ძალიან დაწვრილებითაა შესწავლილი X სიდიდის ნორმალური განაწილების შემთხვევისათვის.

მაგალითად, დამტკიცებულია, რომ X სიდიდის ნორმალური განაწილებისას შემთხვევითი სიდიდე

$$T=\sqrt{n}\,\frac{\tilde{m}-m}{\sqrt{\tilde{D}}}, \tag{14.4.1}$$

სადაც

$$\tilde{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \qquad \tilde{D}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\tilde{m})^2}{n-1},$$

ემორჩილება ეგრეთწოდებულ ს ტ ი უ დ ე ნ ტ ი ს განაწილების კანონს $n-1$ თავისუფლების ხარისხით; ამ კანონის სიმკვრივეს აქვს სახე:

$$S_{n-1}(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} \tag{14.4.2}$$

სადაც $\Gamma(x)$ ცნობილი გამა-ფუნქციაა:

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du.$$

დამტკიცებულია აგრეთვე, რომ შემთხვევით

$$V=\frac{(n-1)\tilde{D}}{D} \tag{14.4.3}$$

სიდიდეს აქვს „$\varkappa^2$ განაწილება", რომლის თავისუფლების ხარისხია $n—1$ (იხ. თავი 7, გვ. 145) და სიმკვრივე გამოისახება ფორმულით:

$$k_{n-1}(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n-1}{1}\right)}v^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-\frac{v}{2}} & \text{თუ } v>0,\\ 0 & \text{თუ } v>0.\end{cases} \tag{14.4.4}$$

(14.4.2) და (14.4.4) განაწილებათა გამოყვანის გარეშე შეიძლება ვაჩვენოთ, თუ როგორ გამოიყენება ისინი m და D პარამეტრებისათვის სანდო ინტერვალების აგებისას.

დავუშვათ ნაწარმოებია n დამოუკიდებელი ცდა, ნორმალური კანონით განაწილებულ X შემთხვევით სიდიდეზე რომლის m და D პარამეტრები უცნობია. ამ პარამეტრებისათვის მიღებულია შეფასებები:

$$\tilde{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n},\qquad \tilde{D}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\tilde{m})^2}{n-1}.$$

საჭიროა აიგოს სანდო ინტერვალები ორივე პარამეტრისათვის β სანდო ალბათობის შესაბამისად.

პირველად ავაგოთ სანდო ინტერვალი მათემატიკური ლოდინისათვის. ბუნებრივია, რომ ეს ინტერვალი ავიღოთ $\tilde{m}$-ის სიმეტრიული; აღვნიშნოთ ε_β-თი ინტერვალის სიგრძის ნახევარი. ε_β სიდიდე უნდა შევარჩიოთ ისე, რომ შესრულდეს პირობა:

$$P(|\tilde{m}—m|>\varepsilon_\beta)=\beta \tag{14.4.5}$$

შევეცადოთ (14.4.5) ტოლობის მარცხენა ნაწილში შემთხვევითი $\tilde{m}$ სიდიდიდან გადავიდეთ შემთხვევით T სიდიდეზე, რომელიც განაწილებუ-

ლოს სტიუდენტის კანონის მიხედვით. ამისათვის $|\tilde{m}-m|<\varepsilon$ უტოლობის ორივე ნაწილი დადებით $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\tilde{D}}}$ სიდიდეზე გავამრავლოთ:

$$P\left(\frac{\sqrt{n}\,|\tilde{m}-m|}{\sqrt{\tilde{D}}}<\frac{\varepsilon_\beta}{\sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}}\right)=\beta$$

ანდა თუ ვისარგებლებთ (14.4.1) აღნიშვნით

$$P\left(|T|<\frac{\varepsilon_\beta}{\sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}}\right)=\beta. \tag{14.4.6}$$

მოვძებნოთ ისეთი t_β რიცხვი რომ

$$P(|T|<t_\beta)=\beta. \tag{14.4.7}$$

t_β სიდიდე მოინახება პირობიდან

$$P(|T|>t_\beta)=\int_{-t_\beta}^{t_\beta} S_{n-1}(t)dt=\beta \tag{14.4.8}$$

(14.2.4) ფორმულიდან ჩანს, რომ $S_{n-1}(t)$ — ლუწი ფუნქციაა, ამიტომ (14.4.8) მოგვცემს

$$2\int_0^{t_\beta} S_{n-1}(t)dt=\beta. \tag{14.4.9}$$

(14.4.9) ტოლობა განსაზღვრავს t_β სიდიდეს β-საგან დამოკიდებით, თუ გვაქვს ინტეგრალის მნიშვნელობათა ცხრილი

$$\psi(x)=2\int_0^{x} S_{n-1}(t)dt,$$

მაშინ t_β სიდიდე შეიძლება მოვნახოთ ამ ცხრილში შებრუნებული ინტერპოლაციით. მაგრამ უფრო მოხერხებულია წინასწარ შევადგინოთ t_β მნიშვნელობათა ცხრილი. ასეთი ცხრილი მოცემულია (იხ. ცხ. 5) დანართში. ამ ცხრილში მოყვანილია სანდო β ალბათობასა და $n-1$ თავი-

სუფლების ხარისხზე დამოკიდებული t_β მნიშვნელობანი. ვსაზღვრავთ რა t_β-ს მე-5 ცხრილით და დავუშვებთ რა

$$\varepsilon_\beta = t_\beta \sqrt{\frac{\tilde{\bar{D}}}{n}}. \tag{14.4.10}$$

ჩვენ ვპოულობთ I_β სანდო ინტერვალის ნახევარ სიგანეს და თვით ინტერვალსაც

$$I_\beta = \left(\tilde{m} - t_\beta \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}; \qquad \tilde{m} + t_\beta \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}} \right). \tag{14.4.11}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ნაწარმოებია 5 დამოუკიდებელი ცდა შემთხვევით X სიდიდეზე, რომელიც განაწილებულია ნორმალურად უცნობი m და σ პარამეტრებით. ცდების შედეგები მოყვანილია 14.4. 1 ცხრილში

ცხრილი 14.4.1

1	1	2	3	4	5
x_i	—2,5	3,4	—2,0	1,0	2,1

მოვნახოთ შეფასება $\tilde{m}$ მათემატიკური ლოდინისათვის და ავაგოთ მისთვის 90%-იანი სანდო I_β ინტერვალი (ე. ი. ინტერვალი, რომელიც შეესაბამება $\beta=0,9$ სანდო ალბათობას).

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$\tilde{m}=0,4; \qquad \tilde{D}=6.6.$$

დანართის მე-5 ცხრილის მიხედვით $n-1=4$ და $\beta=0,9$-სათვის ვპოულობთ

$$t_\beta=2,13,$$

საიდანაც

$$\varepsilon_\beta=t_\beta\sqrt{\frac{\tilde{\bar{E}}}{n}} \approx 2,45.$$

სანდო ინტერვალი იქნება

$$I_\beta=(\tilde{m}-\varepsilon_\beta;\ \tilde{m}+\varepsilon_\beta)=(-2,05;\ 2,85).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. 14.3. პარაგრაფის 1-ლი მაგალითის პირობებისათვის დაუშვით, რომ X განაწილებულია ნორმალურად იპოვეთ ზუსტი სანდო ინტერვალი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მე-5 ცხრილის მიხედვით ვპოულობთ როცა $n-1=19$ და $\beta=0,8$

$t_\beta=1,328$; აქედან $\varepsilon_\beta=t_\beta\sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}} \approx 0.0704.$

14.3 პარაგრაფის ($\varepsilon_\beta=0.072$) 1 მაგალითის ამონახსნთან შედარებით ვრწმუნდებით, რომ განსხვავება ფრიად უმნიშვნელოა, თუ კი შევინარჩუნებთ სიზუსტეს მძიმიდან მეორე ნიშნამდე, მაშინ სანდო ინტერვალები, რომლებსაც მოვძებნით ზუსტი მიახლოებითი მეთოდებით, დაემთხვევიან.

$$I_\beta=(10,71;\ 10,85)$$

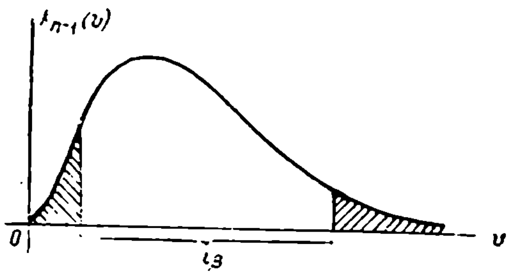
გადავდივართ დისპერსიისათვის სანდო ინტერვალის აგებაზე, განვიხილოთ დისპერსიის გადაუადგილებელი შეფასება

$$\tilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \tilde{m})^2}{n-1}$$

და გამოვსახოთ შემთხვევითი $\tilde{D}$ სიდიდე, V სიდიდით (14.4.3) რომელსაც აქვს X^2 განაწილება (14.4.4)

$$\tilde{D} = V \frac{D}{n-1}. \qquad (14.4.12)$$

ვიცით რა V სიდიდის განაწილების კანონი, შეიძლება მოვნახოთ i_β ინტერვალი, რომელშიც იგი მოხვდება, რომლის β ალბათობა მოცემული იქნება. V სიდიდის $k_{n-1}(v)$ განაწილების კანონს აქვს 14.4.1 ნახაზზე გამოსახული სახე.



ნახ. 14.4.1.

იბადება კითხვა: როგორ ავირჩიოთ i_β ინტერვალი? თუ V სიდიდის განაწილების კანონი სიმეტრიული იქნება (როგორც ნორმალური კანონი ანდა სტიუდენტის განაწილება) ბუნებრივია ინტერვალი ავიღოთ მათემატიკური ლოდინის სიმეტრიული. მოცემულ შემთხვევაში $k_{n-1}(v)$ კანონი არა სიმეტრიულია. შევთანხმდეთ i_β ინტერვალი შევარჩიოთ ისე, რომ V სიდიდის ინტერვალის გარეთ მარჯვნივ და მარცხნივ გამოსავლის ალბათობანი (ნახ. 14.4.1-ზე დაშტრიხული ფართობები) ერთნაირი და ტოლი იყოს

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\beta}{2}$$

იმისათვის, რომ I_β ინტერვალი ავაგოთ ასეთი თვისებით: ვისარგებლოთ დანართის მე-4 ცხრილით: მასში მოყვანილია ისეთი χ^2 რიცხვები, რომ

$$P(V > \chi^2) = p$$

V სიდიდისათვის, რომელთაც აქვთ χ^2 განაწილება, რომელთა თავისუფლების ხარისხია r_0. ჩვენს შემთხვევაში $r = n-1$. დავაფიქსიროთ $r = n-1$ და მოვნახოთ მე-4 ცხრილის შესაბამის სტრიქონებში χ^2-ის

ორი მნიშვნელობა: ერთი, რომელიც შეესაბამება $p_1=\dfrac{\alpha}{2}$ ალბათობას;

მეორე $p_2=1-\dfrac{\alpha}{2}$ ალბათობას. აღვნიშნოთ ეს მნიშვნელობანი χ^2_1 და χ^2_2-ით. i_β ინტერვალს აქვს χ^2_2 თავისი მარცხენა, ხოლო χ^2_1 — მარჯვენა ბოლო.

ახლა i_β ინტერვალის მიხედვით მოვნახოთ საძიებელი სანდო I_β ინტერვალი D დისპერსიისათვის, რომლის საზღვრებია D_1 და D_2 რომელიც D წერტილს გადაფარავს, რომლის ალბათობაა β:

$$P(D_1<D<D_2)=\beta.$$

ავაგოთ ისეთი $I_\beta=(D_1, D_2)$ ინტერვალი, რომელიც გადაფარავს D წერტილს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა V სიდიდე ხვდება i_β ინტერვალში.

ვაჩვენოთ, რომ ინტერვალი

$$I_\beta=\left(\frac{\tilde{D}(n-1)}{\chi^2_1};\quad \frac{\tilde{D}(n-1)}{\chi_2^2}\right) \tag{14.4.13}$$

აკმაყოფილებს ამ პირობას. მართლაც,

$$\frac{\tilde{D}(n-1)}{\chi_1^2}<D;\qquad \frac{\tilde{D}(n-1)}{\chi^2_2}>D$$

$$V<\chi^2_1;\quad V>\chi^2_2,$$

უტოლობანი ტოლძალოვანია, ხოლო ამ უტოლობათა შესრულების ალბათობაა β. ამრიგად, სანდო ინტერვალი დისპერსიისათვის მონახულია და გამოისახება (14.4.13) ფორმულით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. მოვნახოთ 14.3 პარაგრაფის მე-2 მაგალითის პირობებში სანდო ინტერვალი დისპერსიისათვის, თუ ცნობილია, რომ X სიდიდე ნორმალურადაა განაწილებული.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

გვაქვს $\beta=0{,}8$; $\alpha=0{,}2$; $\dfrac{\alpha}{2}=0{,}1$. დანართის მე-4 ცხრილით, როცა $r=n-1=19$ ვპოულობთ

$$p_1=\frac{\alpha}{2}=0{,}1\text{-სათვის}\quad \chi^2_1=27{,}2;$$

$$p_2=1-\frac{\alpha}{2}=0{,}9\text{-სათვის}\quad \chi^2_2=11{,}65.$$

(14.4.13) ფორმულით ვპოულობთ სანდო ინტერვალს დისპერსიისათვის

$$I_\beta=(0{,}045;\ 0{,}104);$$

საშუალო კვადრატული გადახრისათვის შესაბამისი ინტერვალი: (0,21; 0,32). ეს ინტერვალი მხოლოდ უმნიშვნელოდ აღემატება 14.3 პარაგრაფის მე-2 მაგალითში მიახლოებითი მეთოდით მიღებულ (0,21; 0,29) ინტერვალს.

პრაქტიკაში ხშირად გვიხდება შევაფასოთ A ხდომილობის უცნობი p ალბათობა დამოუკიდებელ n ცდაში მისი p^* სიხშირის მიხედვით. ეს ამოცანა ახლოსაა წინა პარაგრაფში განხილულ ამოცანებთან. მართლაც, A ხდომილობის სიხშირე n დამოუკიდებელ ცდაში არის X სიდიდეზე დაკვირვების შედეგად მიღებულ მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკული. რომლის X სიდიდე ყოველ ცალკეულ ცდაში თუ A ხდომილობა მოხდება, ღებულობს მნიშვნელობას 1 და ღებულობს 0, თუ ხდომილება არ მოხდება;

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad (14.5.1)$$

გავიხსენოთ, რომ X სიდიდის მათემატიკური ლოდინია p; მისი დისპერსია pq, სადაც $q=1-p$. საშუალო არითმეტიკულის მათემატიკური ლოდინი აგრეთვე p-ს ტოლია

$$M[p^*]=p \qquad (14.5.2)$$

ე. ი. p^* შეფასება p-სათვის გადაუადგილებელს წარმოადგენს. p^* სიდიდის დისპერსია ტოლია

$$D[p^*] = \frac{pq}{n} \qquad (14.5.3)$$

შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ეს დისპერსია მინიმალურად შესაძლებელია, ე. ი. p^* შეფასება p-სათვის ეფექტურია.

ამგვარად, წერტილოვანი შეფასებისათვის უცნობი p ალბათობისათვის გონივრულია ყველა შემთხვევაში მივიღოთ p^* სიხშირე. ისმება ასეთი შეფასების სიზუსტისა და საიმედოობის ანუ p ალბათობისათვის სანდო ინტერვალის აგების საკითხი.

თუმცა ეს ამოცანაც მათემატიკური ლოდინისათვის სანდო ინტერვალის ადრე განხილული ამოცანის კერძო შემთხვევაა, მაინც მიზანშეწონილია გადავწყვიტოთ იგი ცალკე, რომლის სპეციფიკა ისაა, რომ X სიდიდე წყვეტილი შემთხვევითი სიდიდეა, რომელსაც მხოლოდ ორი შესაძლო მნიშვნელობა აქვს: 0 და 1. გარდა ამისა მისი მათემატიკური p ლოდინი და $pq=(p-1)$ დისპერსია ფუნქციონალურადაა დაკავშირებული. ეს სანდო ინტერვალის აგების ამოცანას ამარტივებს.

განვიხილოთ თავიდან რამდენადმე მარტივი შემთხვევა, როცა n ცდათა რიცხვი შედარებით დიდია, ხოლო p ალბათობა არც ძალზე დიდი და არც ძალზე პატარაა. მაშინ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ხდომილობის სიხ-

შირე არის შემთხვევითი სიხშირე, რომლის განაწილება ახლოა ნორმალურთან[1]. გაანგარიშებანი გვიჩვენებენ, რომ ამ დაშვებით შეიძლება ვისარგებლოთ იმ დროსაც როცა n-ს დიდი მნიშვნელობა არა აქვს: საკმარისია, რომ np და nq ორივე სიდიდე ოთხზე მეტი იყოს; გამოვალთ იქედან, რომ ეს პირობები შესრულებულია და p^* სიხშირე შეიძლება ჩავთვალოთ როგორც ნორმალური კანონის მიხედვით განაწილებული. ამ კანონის პარამეტრები იქნება

$$m_{p^*} = p; \quad \sigma_{p^*} = \sqrt{\frac{pq}{n}} \tag{14.5.4}$$

თავდაპირველად დავუშვათ, რომ p სიდიდე ჩვენთვის ცნობილია. დავნიშნოთ სანდო β ალბათობა და მოვნახოთ ისეთი $(p-\varepsilon_\beta, p+\varepsilon_\beta)$, ინტერვალი, რომ p^* სიდიდე ხვდებოდეს ამ ინტერვალში რომლის ალბათობაა

$$P(|p^*-p|<\varepsilon_\beta)=\beta \tag{14.5.5}$$

ვინაიდან p^* სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად, ამიტომ

$$P(|p^*-p|<\varepsilon_\beta)=2\Phi^*\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_{p^*}}\right)-1=\beta$$

საიდანაც ისე როგორც 14.3. პარაგრაფშია

$$\varepsilon_\beta=\sigma_{p^*}\arg\Phi^*\left(\frac{1+\beta}{2}\right),$$

სადაც $\arg\Phi^*$ — განაწილების ნორმალური Φ^* ფუნქციის შებრუნებული ფუნქციაა. β-ს განსაზღვრისათვის, როგორც 14.3 პარაგრაფში, შეიძლება აღვნიშნოთ

$$t_\beta=\arg\Phi^*\left(\frac{1+\beta}{2}\right).$$

მაშინ

$$\varepsilon_\beta=t_\beta\sigma_{p^*}. \tag{14.5.6}$$

სადაც t_β განისაზღვრება 14.3.1 ცხრილიდან.

ამგვარად, β ალბათობით შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ

$$|p^*-p|<t_\beta\sqrt{\frac{pq}{n}}. \tag{14.5.7}$$

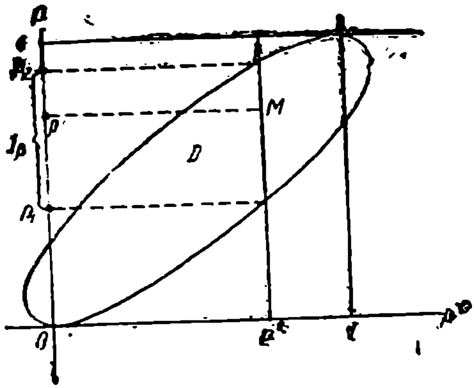
---

[1] ხდომილობის სიხშირე ცდებისას წარმოადგენს წყვეტილ შემთხვევით სიდიდეს. ვლაპარაკობთ რა მისი განაწილების კანონის ნორმალურთან სიახლოვეზე, ჩვენ მხედველობაში გვაქვს განაწილების ფუნქცია და არა სიმკვრივე.

ფაქტიურად p სიდიდე ჩვენთვის უცნობია; ოღონდ (14.5.7) უტოლობას ექნება β ალბათობა დამოუკიდებლად იმისა, ჩვენთვის ცნობილია თუ არა p ალბათობა. მივიღებთ რა ცდიდან კონკრეტულ p^* სიხშირეს, შეიძლება ვისარგებლოთ (14.5.7) უტოლობით, მოვნახოთ I_β ინტერვალი, რომლის ალბათობა β-ს ტოლია და გადაფარავს p წერტილს. მართლაც, გარდავქმნათ ეს უტოლობა შემდეგი სახით:

$$(p^*-p)^2<\frac{t^2_\beta}{n}p(1-p) \qquad (14.5.8)$$

და მივცეთ მას გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. გადავზომოთ აბსცისათა ღერძზე p^* სიხშირე, ხოლო ორდინატთა ღერძზე p ალბათობა (ნახ. 14.5.1) გეომეტრიული ადგილი წერტილებისა, რომელთა p^* და p კოორდინატები აკმაყოფილებენ (14.5.8) უტოლობას, იქნებიან (0,0) და (1,1) წერტილებზე გამავალი ელიფსის შიგა ნაწილი ელიფსისა და რომელსაც ამ წერტილებზე აქვთ op^* ღერძის პარალელური მხებები. ვინაიდან p^* სიდიდე არ შეიძლება უარყოფითი ან ერთზე მეტი იყოს, ამიტომ D არე, რომელიც შეესაბამება უტოლობას (14.8.5) კიდევ უნდა შევზღუდოთ მარცხნიდან და მარჯვნიდან $p^*=0$ და $p^*=1$ წრფეებით. ეხლა შეიძლება ცდიდან მიღებული p^* ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ავაგოთ სანდო I_β ინტერვალი, რომელიც β ალბათობით გადაფარავს p უცნობ მნიშვნელობას. ამისათვის p^* წერტილზე გავატაროთ ორდინატთა ღერძის პარალელური წრფე. ამ წრფეზე D არის საზღვრები მოსჭრის სანდო $I_\beta=(p_1,\ p_2)$ ინტერვალს. მართლაც, M წერტილი, რომლის შემთხვევითი აბსცისაა p^* არაშემთხვევითი (მაგრამ უცნობი) ორდინატი p, β ალბათობით ხვდება ელიფსის შიგნით, ე. ი. I_β ინტერვალი, რომლის ალბათობა β-ს ტოლია გადაფარავს p წერტილს.



ნახ. 14.5.1

ზომები და კონფიგურაცია „სანდო ელიფსისა“ დამოკიდებულია ცდათა n რიცხვისაგან. რაც მეტია n, მით მეტადაა გაწეული ელიფსი და მით უფრო ვიწროა სანდო ინტერვალი. სანდო p_1 და p_2 საზღვრები შეიძლება მოვნახოთ (14.5.8) ფარდობიდან, მასში უტოლობის ნიშანს ტო-

ლობის ნიშნით თუ შევცვლით. მიღებული კვადრატული განტოლების p-ს მიმართ ამოხსნით მივიღებთ ორ ფესვს:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{p^* + \frac{1}{2}\frac{t^2_\beta}{n} - t_\beta\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n} + \frac{1}{4}\frac{t^2_\beta}{n^2}}}{1+\frac{t^2_\beta}{n}} \\ p_2 &= \frac{p^* + \frac{1}{2}\frac{t^2_\beta}{n} + t_\beta\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n} + \frac{1}{4}\frac{t^2_\beta}{n^2}}}{1+\frac{t^2_\beta}{n}} \end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}5.9)$$

სანდო ინტერვალი p ალბათობისათვის იქნება

$$I_\beta = (p_1, \ p_2).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. A ხდომილობის სიხშირე სერიაში 100 ცდიდან აღმოჩნდა $p^* = 0,78$. განვსაზღვროთ 90%-ანი სანდო ინტერვალი A ხდომილობის p ალბათობისათვის.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

უწინარეს ყოვლისა შევამოწმოთ მისაღებია თუ არა ნორმალური კანონი. ამისათვის შევაფასოთ np და nq სიდიდეები. საორიენტაციოდ დავუშვათ, რომ $p=p^*$ მივიღებთ

$$np \approx np^* = 78; \ nq \approx n\ (1-p^*) = 22.$$

ორივე სიდიდე მნიშვნელოვნად მეტია ოთხზე, ნორმალური კანონი მისაღებია 14.3.1 ცხრილიდან $\beta=0,9$-სათვის ვპოულობთ $t_\beta=1,643$ (4.5.9) ფორმულით

$$p_1 = 0,705; \qquad p_2 = 0,840; \qquad I_\beta = (0,705; \ 0,840)$$

შევნიშნავთ რომ n-ის გადიდებისას $\frac{t^2_\beta}{n}$ და $\frac{1}{4}\frac{t_\beta^2}{n}$ სიდიდეები (14.5.9) ფორმულებში ნულისაკენ მიისწრაფიან; ზღვარში ფორმულები ღებულობს სახეს

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p^* - t_\beta\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}. \\ p_2 &= p^* + t_\beta\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}. \end{aligned}\right\} \qquad (14.5.10)$$

ეს ფორმულები შეიძლება მიღებული იქნან უშუალოდაც თუკი ვისარგებლებთ 14.3 პარაგრაფში მოცემული მათემატიკური ლოდინისათვის სანდო ინტერვალის აგების მიახლოებითი მეთოდით. (14.5.10) ფორმულებით შეიძლება ვისარგებლოთ, როცა n დიდია (ასის რიგის), მხოლოდ p ალბათობა ძალიან დიდი ან ძალიან მცირე არ უნდა იყოს (მაგალითად, როცა ორივე სიდიდე np და nq 10 და მეტი რიგისაა).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ჩატარებულია 200 ცდა; A ხდომილობის სიხშირე აღმოჩნდა $p^*=0{,}34$. ავაგოთ 85%-ნი სანდო ინტერვალი ხდომილობის ალბათობისათვის მიახლოებით (14.5.10) ფორმულებით. შედეგები შევადაროთ სათანადო ზუსტ (14.5.9) ფორმულების გამოყენებით მიღებულ შედეგებს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. $\beta = 0{,}85$; 14.3.1 ცხრილით ვპოულობთ $t_\beta = 1{,}439$. მისი

$\sqrt{\dfrac{p^*(1-p^*)}{n}} \approx 0{,}0335$-ზე გადამრავლებით მივიღებთ

$$t_\beta \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \approx 0{,}048.$$

საიდანაც მიახლოებით ვპოულობთ სანდო ინტერვალს

$$I_\beta \approx (0{,}292;\ \ 0{,}388).$$

(14.5.9) ფორმულებით ვპოულობთ უფრო ზუსტ მნიშვნელობებს $p_1=0{,}294$; $p_2=0{,}389$, რომლებიც თითქმის არ განსხვავდებიან მიახლოებითისაგან.

ზემოთ განვიხილეთ სანდო ინტერვალის აგების საკითხი ცდათა საკმაოდ დიდი რიცხვის შემთხვევისათვის, როცა სიხშირე განაწილებულად შეიძლება ჩაითვალოს. ნორმალური კანონის მიხედვით ცდათა მცირე რიცხვისას (და აგრეთვე თუ p ალბათობა ძლიერ დიდია ანდა ძლიერ მცირეა) ასეთი დაშვება არ შეიძლება. ამ შემთხვევაში სანდო ინტერვალს არა მიახლოებითიდან გამომდინარე, არამედ სიხშირის განაწილების ზუსტი კანონის მიხედვით აგებენ. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ეს არის ბინომური განაწილება, რომელიც განხილულია 3 და 4 თავებში. მართლაც, ხდომილობის მოხდენის რიცხვი n ცდებში განაწილებულია ბინომური კანონით: ალბათობა იმისა, რომ ხდომილობა მოხდება ზუსტად m-ჯერ ტოლია:

$$P_{m,n}=C^m_n p^m q^{n-m}, \tag{14.5.11}$$

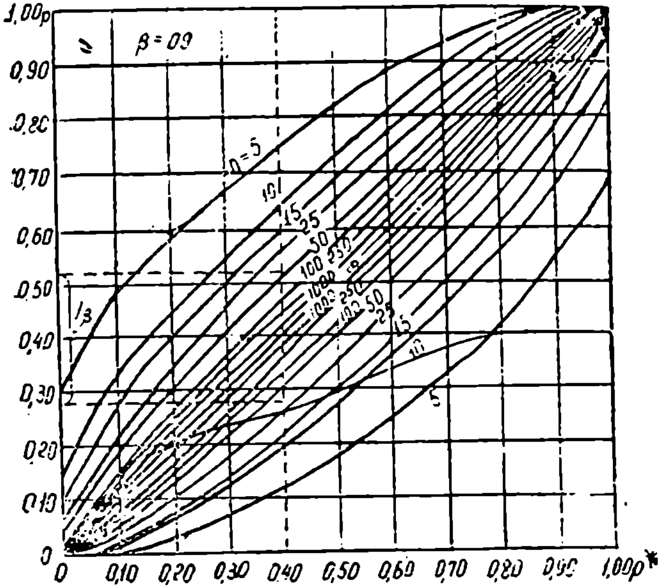
ხოლო p^* სიხშირე არის ხდომილობის მოხდენის რიცხვი გაყოფილი ცდათა რიცხვზე.

ამ განაწილებიდან გამომდინარე, შეიძლება ავაგოთ სანდო i_β ინტერვალი ანალოგიურად იმისა, როგორც მას დიდი n რიცხვებისათვის ნორმალური კანონიდან გამომდინარე ვაგებდით (იხ. გვ. 331).

თავიდან დავუშვათ, რომ p ალბათობა ცნობილია და მოვძებნოთ სიხშირეთა p^*_1, p_2^* ინტერვალი, რომელშიდაც p^* სიხშირის მოხვედრის β ალბათობა $1-\alpha$-ს ტოლია. დიდი n-ის შემთხვევისათვის ვსარგებლობდით განაწილების ნორმალური კანონით და ვიღებდით მათემატიკური ლოდინის მიმართ სიმეტრიულ ინტერვალს. (14.5.11) ბინომურ განაწილებას არ გააჩნია სიმეტრია. ამასთანავე (იმასთან დაკავშირებით, რომ სიხშირე — წყვეტილი შემთხვევითი სიდიდეა) ინტერვალი, რომელშიდაც მოხვედრის ალბათობა ზუსტად β-ს ტოლია, შეიძლება არც არსებობდეს, ამიტომ p_1^* და p_2^* ინტერვალად ავირჩევთ

ყველაზე მცირე ინტერვალს, რომლის მარცხნივ და მარჯვნივ მოხვედრების ალბათობა $\frac{\alpha}{2}$-ზე მეტი იქნება.

ანალოგიურად იმისა, როგორც ნორმალური კანონისათვის (ნახ. 14.5.1) D არეს ვაგებდით. შესაძლებელი იქნება ყოველი n-სათვის მოცემული β-სათვის ავაგოთ არე, რომლის შიგნით p ალბათობის მნიშვნელობა ცდისას დანაკვირ p^* მნიშვნელობასთან შეთავსებადია.



ნახ. 14.5.2.

14.5.2 ნახაზზე გამოსახულია მრუდეები, რომლებიც შემოსაზღვრავენ ასეთ არეს სხვადასხვა n-სათვის, რომელთა სანდო ალბათობა $\beta=0,9$. აბსცისთა ღერძზე გადაიზომება p^* სიხშირე, ორდინატთა ღერძზე — p ალბათობა. მრუდთა ყოველი წყვილი, რომლებიც შეესაბამება მოცემულ n-ს განსაზღვრავს ალბათობის სანდო ინტერვალს, რომელიც შეესაბამება სიხშირის მოცემულ მნიშვნელობას. ზუსტად, რომ ვთქვათ არეების საზღვრები უნდა იყოს საფეხურებრივი (სიხშირის წყვეტილობის გამო), მაგრამ მოხერხებულობის მიზნით ისინი გამოსახულია სადა მრუდთა სახით.

იმისათვის, რომ ასეთი მრუდეებით სარგებლობისას, მოვძებნოთ სანდო ინტერვალი, უნდა ვაწარმოოთ შემდეგი აგება (იხ. ნახ. 14.5.2): აბსცისის ღერძზე გადავზომოთ ცდისას დაკვირვების შედეგად მიღებული p^* სიხშირის მნიშვნელობა, გავავლოთ ამ წერტილზე ორდინატთა ღერძის პარალელური წრფე და აღვნიშნოთ მრუდთა წრფესთან გადაკვეთის

წერტილი. რომელიც შეესაბამება ცდათა მოცემულ n რიცხვს; ამ წერტილთა გეგმილები ორდინატთა ღერძზე გვაძლევენ სწორედ სანდო I_β ინტერვალის p_1, p_2 საზღვრებს.

მოცემული n-ისას მრუდები, რომლებიც შემოფარგლავენ „სანდო უბანს", განისაზღვრება განტოლებებით:

$$\sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{\alpha}{2}; \qquad (14.5.12)$$

$$\sum_{m=0}^{k} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{\alpha}{2}; \qquad (14.5.13)$$

სადაც k — ხდომილობის მოხდენის რიცხვია:

$$k = np^*.$$

თუ (14.5.12) განტოლებას p-ს მიმართ ამოვხსნით, შეიძლება მოვნახოთ „სანდო უბნის" ქვედა p_1 საზღვარი; ანალოგიურად (14.5.13)-დან შეიძლება მოვნახოთ p_2.

იმისათვის, რომ ეს განტოლება ყოველთვის ხელახლა არ ამოვხსნათ, უფრო მოხერხებულია სანდო β ალბათობის რამდენიმე ტიპური მნიშვნელობისათვის ცხრილის (ან გრაფიკის) სახით წარმოვადგინოთ. მაგალითად ი. ვ. დუნინ-ბარკოვსკის და ნ. ვ. სმირნოვის წიგნში „ალბათობათა თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა ტექნიკაში" არის p_1 და p_2 ცხრილები $\beta=0{,}95$ და $\beta=0{,}99$-სათვის. იმავე წიგნიდანაა ნასესხები ნახ. 14.5.2 გრაფიკი.

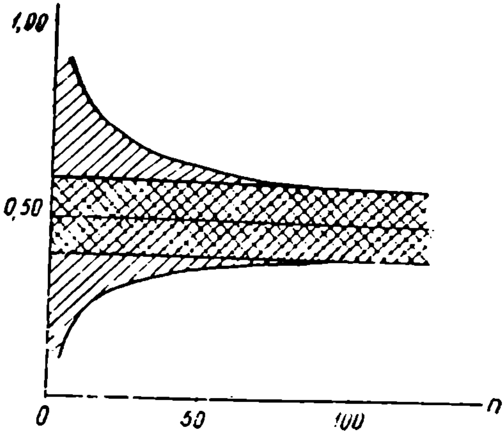
მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. მოვნახოთ ხდომილობათა ალბათობის სანდო p_1 და p_2 საზღვრები, თუკი 50 ცდაში მისი სიხშირე აღმოჩნდა $p^*=0{,}4$. სანდო ალბათობა $\beta=0{,}9$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. $p^*=0{\cdot}4$ და $n=50$-თვის ავებით (იხ. ნახ. 14.5.2) ვპოულობთ; $p_1 \approx 0{,}28$; $p_2 \approx 0{,}52$.

ვსარგებლობთ რა სანდო ინტერვალების მეთოდით, შეიძლება მიახლოებით გადავწყვიტოთ სხვა, პრაქტიკისათვის მნიშვნელოვანი საკითხიც: როგორი უნდა იყოს ცდათა რიცხვი n, იმისათვის, რომ ალბათობით β მოველოდეთ, რომ ალბათობის სიხშირით შეცვლისას შეცდომა არ გადააჭარბებს მოცემულ მნიშვნელობას?

მსგავსი ამოცანების გადაწყვეტისას უფრო მოხერხებულია უშუალოდ 14.5.2. ტიპის გრაფიკებით კი არ ვისარგებლოთ, არამედ გადავაკეთოთ ისინი, ისე რომ სანდო საზღვრები წარმოვიდგინოთ, როგორც ცდათა n რიცხვის ფუნქცია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ჩატარებულია 25 ცდა, რომლებშიც A ხდომილობა მოხდა 12-ჯერ. მოვძებნოთ საორიენტაციო ცდათა n რიცხვი, რომელიც დაგვჭირდება იმისათვის, რომ $\beta=0{,}9$ ალბათობით ხდომილობა, რომელიც გამოწვეული იქნება ალბათობის სიხშირის შეცვლით 20%-ს არ გადააჭარბებს



ნახ. 14.5.3

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვსაზღვრავთ ზღვრულად დასაშვებ ხდომილობას:

$$\Delta=0{,}2\cdot0{,}48=0{,}096\approx0{,}1.$$

ვსარგებლობთ რა ნახ-ის 14.5.2 მრუდეებით, ვაგებთ ახალ გრაფიკს: აბსცისების ღერძზე გადავზომოთ ცდათა n რიცხვი, ორდინატთა ღერძზე ალბათობათა სანდო საზღვრები (ნახ. 14.5.3). შუა წრფე, რომელიც აბსცისთა ღერძის პარალელურია, შეესაბამება დანაკვირ ხდომილობის $p^*=$ $=\dfrac{12}{25}=0{,}48$. სიხშირეს $p=p^*=0{,}48$ წრფის ზემოთ და ქვემოთ გავლებულია მრუდეები: $p_1(n)$ და $p_2(n)$, რომლებიც გამოსახავენ ზემო და ქვემო სანდო საზღვრებს n-საგან დამოკიდებით. მრუდეების შორის არე, რომელიც გამოხატავს სანდო ინტერვალს—დაშტრიხულია. $p=0{,}48$ წრფიდან უშუალო მახლობლობაში ორმაგი დაშტრიხვით ნაჩვენებია 20% დასაშვები შეცდომის შესაბამისი უფრო ვიწრო შრე. 14.5.3 ნახაზიდან ჩანს, რომ შეცდომა ეცემა დასაშვებ სიდიდემდე, როცა ცდათა n რიცხვი 100-დე რიგისაა.

შევნიშნავთ, რომ საჭირო რაოდენობით ცდათა ჩატარების შემდეგ შეიძლება დაგვჭირდეს სიხშირის მიხედვით ალბათობის სიზუსტის ხელახლა შემოწმება, რადგან ზოგად შემთხვევაში მიღებული იქნება სიხშირის უკვე მეორე p^* მნიშვნელობა, რომელიც განსხვავებული იქნება ადრე ჩატარებულ ცდებზე დაკვირვების შედეგად მიღებულიდან. ამ დროს შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ ცდათა რიცხვი მაინც კიდევ არასაკმარისია

საჭირო სიზუსტის უზრუნველსაყოფად და მოგვიხდება მისი რამდენიმე გადიდება. ოღონდ პირველი მიახლოება, რომელიც მიღებული იქნება ზემოთ აღწერილი მეთოდით, შეიძლება გამოგვადგეს ცდათა სერიების დაგეგმვისათვის მათზე საჭირო დროისა და ფულადი სახსრების თვალსაზრისით და ა. შ.

პრაქტიკაში ზოგჯერ შეიძლება შევხვდეთ ხდომილობათა ალბათობისათვის სანდო ინტერვალის განსაზღვრის თავისებურ ამოცანას, როცა ცდიდან მიღებული სიხშირე ნულის ტოლია. ასეთი ამოცანა ჩვეულებრივ დაკავშირებულია ცდებთან, რომლებშიდაც ჩვენთვის საინტერესო ხდომილობისათვის ალბათობა ძლიერ მცირეა (ანდა პირიქით, ძლიერ დიდია — მაშინ საპირისპირო ხდომილობის ალბათობა ძლიერ მცირეა).

დავუშვათ მაგალითად ტარდება რომელიღაც ნაკეთობის უმტყუნებელ მუშაობაზე გამოცდა. ნაკეთობას გამოცდის დროს ერთხელ არ უმტყუნია. საჭიროა მოვნახოთ მტყუნების პრაქტიკულად მაქსიმალურად შესაძლო ალბათობა.

დავაყენოთ ეს ამოცანა ზოგადი სახით. ჩატარებულია n დამოუკიდებელი ცდა, რომლებიდანაც არც ერთში A ხდომილობას არ ჰქონია ადგილი. მოცემულია სანდო β ალბათობა; საჭიროა ავაგოთ სანდო ინტერვალი ხდომილობის p ალბათობისათვის, უფრო ზუსტად-მოვნახოთ მისი ზედა p_2 საზღვარი, რადგან ქვედა p_1 საზღვარი ბუნებრივია ნულის ტოლია.

დაყენებული ამოცანა ალბათობის სანდო ინტერვალის ზოგადი ამოცანის კერძო შემთხვევაა, მაგრამ მისი თავისებურების გამო საჭიროა ცალკე განვიხილოთ. უწინარეს ყოვლისა სანდო ინტერვალის აგების მიახლოებითი მეთოდი (განაწილების სიხშირის ნორმალურით შეცვლის საფუძველზე), რომელზედაც ლაპარაკი იყო მოცემული პუნქტის დასაწყისში, აქ მიუღებელია, რადგან p ალბათობა ძლიერ მცირეა. სანდო ინტერვალის აგების ზუსტი მეთოდით ბინომური განაწილების საფუძველზე მოცემულ შემთხვევაში მისაღებია, მაგრამ შეიძლება არსებითად იქნეს გამარტივებული.

ვიმსჯელოთ შემდეგნაირად. n ცდების შედეგად დაკვირვებულია B ხდომილობა, ეს ნიშნავს, რომ A არც ერთხელ არ მომხდარა. საჭიროა მოვნახოთ $p=p_2$ მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომელიც „შეთავსებადია" ცდისას დანაკვირ B ხდომილობასთან, თუკი ჩავთვლით B-სთან „შეუთავსებადია" p-ს ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც B ხდომილობის ალბათობა ნაკლებია ვიდრე $\alpha=1-\beta$.

ცხადია A ხდომილობის ნებისმიერი p ალბათობისათვის დანაკვირ ხდომილობის ალბათობა ტოლია

$$P(B)=(1-p)^{n}.$$

დაუშვათ, რომ $P(B)=\alpha$ და p-თვის მივიღებთ განტოლებას:

$$(1-p_2)^n=1-\beta, \tag{14.5.14}$$

საიდანაც

$$p_2=1-\sqrt[n]{1-\beta}. \tag{14.5.15}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ჭურვის h სიმაღლიდან ვარდნისას ამფეთქის თვითნებური მოქმედების p ალბათობა უცნობია, მაგრამ სავარაუდოდ ფრიად მცირეა. ჩატარებულია 100 ცდა, რომელთაგან თითოეულში ჭურვს აგდებდნენ h სიმაღლიდან, მაგრამ არც ერთი ცდისას ამფეთქს არ უმოქმედია. განვსაზღვროთ p ალბათობისათვის 90%-იანი სანდო ინტერვალის ზედა p_2 საზღვარი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (14.5.15) ფორმულით

$$p_2=1-\sqrt[100]{1-0{,}9}=1-\sqrt[100]{0{,}1},$$

$$\lg\sqrt[100]{0{,}1}=0{,}01\ \lg 0.1=\bar{1}{,}9900;$$

$$\sqrt[100]{0{,}1}\approx 0{,}977;\quad p_2=1-0{,}977=0{,}023.$$

განვიხილოთ წინასთან დაკავშირებული კიდევ ერთი ამოცანა. A ხდომილობა, რომლის p ალბათობა მცირეა, n ცდიან სერიაში არც ერთხელ არ ყოფილა შემჩნეული. მოცემულია სანდო β ალბათობა, როგორი უნდა იყოს ცდათა n რიცხვი, იმისათვის, რომ ხდომილობის ზედა სანდო საზღვარი ალბათობისათვის მიცემული p_2 მნიშვნელობის ტოლი იყოს? ამოხსნა (14.5.14) ფორმულით მიიღება:

$$n=\frac{\lg(1-\beta)}{\lg(1-p_2)}. \tag{14.5.16}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. რამდენჯერ უნდა დავრწმუნდეთ ნაკეთობის უმტყუნებელ მუშაობაში იმისათვის, რომ 95%-ნი გარანტიით ვამტკიცოთ, რომ პრაქტიკული გამოყენებისას იგი გვიმტყუნებს ყველა შემთხვევის არა უმეტეს 5%-სა?.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ფორმულით (14.5.16) როცა $\beta=0{,}95$, $p_2=0{,}05$ გვაქვს:

$$n=\frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}95}\approx 58{,}4.$$

თუ მეტობით დავამრგვალებთ, მივიღებთ

$$n=59.$$

მხედველობაში გვაქვს რა ანგარიშების ასეთი საორიენტაციო ხასიათი, შეიძლება (14.5.15) და (14.5.16) ფორმულების ნაცვლად მივიღოთ უფრო მარტივი მიახლოებითი ფორმულები. ისინი შეიძლება მივიღოთ თუკი ვივარაუდებთ, რომ n ცდებისას A ხდომილობათა გამოჩენის რიცხვი განაწილებულია პუასონის კანონის მიხედვით, რომლის მათემატიკური ლოდინი $a=nq$. ეს ვარაუდი მიახლოებით სამართლია-

ნია. იმ შემთხვევაში, როცა p ალბათობა ძლიერ მცირეა (იხ. თავ. 5 პარ. 5.9), მაშინ

$$P(B)\approx e^{-np}$$

და ნაცვლად (14.5.15) ფორმულისა მივიღებთ:

$$p_2\approx\frac{-\ln(1-\beta)}{n}, \qquad (14.5.17)$$

ხოლო ნაცვლად (14. 5.16)-სა

$$n\approx-\frac{\ln(1-\beta)}{p_2} \qquad (14.5.18)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. მოვნახოთ მიახლოებით p_2-ის მნიშვნელობა მე-5 მაგალითი პირობებისათვის.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ფორმულით (14.5.14) გვაქვს

$$p_2\approx\frac{-\ln 0,1}{100}=\frac{2,303}{100}=0,023$$

ე. ი. იგივე შედეგი, რომელიც მიღებულია ზუსტი ფორმულით მე-5 მაგალითში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 8. მოვნახოთ n-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა მე-6 მაგალითის პირობებისათვის.

ა მ ო ხ ს ნ ა: (14.5.18) ფორმულით გვაქვს,

$$n\approx\frac{-\ln 0,05}{0,05}=\frac{2,996}{0,05}=59,9.$$

თუ დავამრგვალებთ მეტობით ვპოულობთ $n=60$, რაც მცირედ განსხვავდება მე-6 მაგალითში მიღებულ $n=59$ შედეგიდან.

14.6. შემთხვევით სიდიდეთა სისტემების შეფასებები რიცხვითი მახასიათებლებისათვის

14.1—14.4 პუნქტებში განვიხილეთ ამოცანები, რომლებიც დაკავშირებული იყო ერთი შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლების შეფასებებთან ცდათა შეზღუდული რიცხვისას და ამ მახასიათებლებისათვის სანდო ინტერვალების აგებასთან. ანალოგიური კითხვები წამოიჭრება ორ და მეტ შემთხვევით სიდიდეებზე დაკვირვებათა შეზღუდული რაოდენობის დამუშავების დროსაც. აქ დავკმაყოფილდებით სისტემათა მახასიათებლების მხოლოდ წერტილოვანი შეფასებების განხილვით.

განვიხილოთ ჯერ ორი შემთხვევითი სიდიდის სისტემა. გვაქვს (X, Y) შემთხვევით სისტემაზე n დამოუკიდებელ ცდათა შედეგები; რომლებიც თავის მხრივ იძლევიან შედეგებს:

$$(x_1,y_1);\quad (x_2,\ y_2);\ldots,\ (x_n,\ y_n).$$

საჭიროა მოიძებნოს შეფასება სისტემის რიცხვითი მახასიათებლებისათვის: m_x, m_y მათემატიკური ლოდინისათვის D_x, D_y დისპერსიისათვის და $K_{x,y}$ კორელაციური მომენტისათვის.

ეს საკითხი წყდება ერთი შემთხვევითი სიდიდის ანალოგიურად. მათემატიკურ ლოდინისათვის გადაუადგილებელი შეფასებები იქნება საშუალო არითმეტიკულები:

$$\tilde{m}_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \qquad \tilde{m}_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}. \tag{14.6.1}$$

ხოლო კორელაციური მატრიცის ელემენტებისათვის

$$\left.\begin{aligned} \tilde{D}_x &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{m}_x)^2}{n-1}; \\ \tilde{D}_y &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{m}_y)^2}{n-1}; \\ \tilde{K}_{xy} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{m}_x)(y_i - \tilde{m}_y)}{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{14.6.2}$$

დამტკიცება შეიძლება ჩატარდეს 14.2-ის ანალოგიურად. დისპერსიისა და კორელაციური მომენტისათვის შეფასებათა უშუალოდ გამოთვლისას ხშირად მოხერხებულია ცენტრალური და საწყისი სტატისტიკური მომენტებს შორის კავშირით სარგებლობა:

$$\left.\begin{aligned} D^*_x &= \alpha^*_2[X] - (m_x^*)^2; \\ D^*_y &= \alpha^*_2[Y] - (m^*_y)^2; \\ K^*_{xy} &= \alpha^*_{1,1}[X,Y] - m_x^* m_y^*, \end{aligned}\right\}. \tag{14.6.3}$$

სადაც

$$\left.\begin{aligned}
m^*_x &= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}; & \alpha^*_2[X] &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x^2_i}{n};\\
m^*_y &= \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}; & \alpha^*_2[Y] &= \frac{\sum_{i=1}^{n} y^2_i}{n};\\
& & \alpha^*_{1,1}[X,Y] &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n}.
\end{aligned}\right\} \qquad (14.6.4)$$

გამოვთვლით რა სტატისტიკურ მომენტებს (14.6.3) ფორმულებით, შემდეგ შეიძლება მოვნახოთ გადაუადგილებელი შეფასებები კორელაციური მატრიცის ელემენტებისათვის ფორმულებით:

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{D}_x &= D^*_x \frac{n}{n-1};\\
\tilde{D}_y &= D^*_y \frac{n}{n-1};\\
\tilde{K}_{xy} &= K^*_{xy} \frac{n}{n-1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (14.6.5)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი . თვითმფრინავიდან წარმოებულია მიწაზე ცალკეული გასროლები. რეგისტრირებულია მოხვედრის წერტილთა კოორდინატები და ერთდროულად ჩაწერილია თვითმფრინავის სრიალის კუთხის შესაბამისი მნიშვნელობანი. სრიალის β კუთხის დანაკვირი მნიშვნელობანი (რადიანთა მეათასედებში) და მოხვედრის წერტილთა X აბსცისების (მეტრებში) მოყვანილია 14.6.1. ცხრილში.

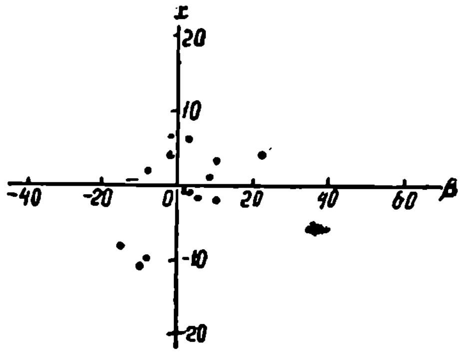
ც ხ რ ი ლ ი 14.6.1

i	β_i	x_i	i	β_i	x_i
1	−8	−10	11	+3	−1
2	+10	−2	12	−2	+4
3	+22	+4	13	+28	+12
4	+55	+10	14	+62	+20
5	+2	−1	15	−10	−11
6	−30	−16	16	−8	+2
7	−15	−8	17	+22	+14
8	+5	−2	18	+3	+6
9	+10	+6	19	−32	−12
10	+18	+8	20	+8	+1

მოვნახოთ შეფასებები (β, X) სისტემის რიცხვითი მახასიათებლებისათვის.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თვალსაჩინოებისათვის დავიტანთ (β, X) მნიშვნელობათა ყველა წყვილს გრაფიკზე (ნახ. 14.6.1). წერტილების განლაგება გრაფიკზე მოწმობს β და X შორის გარკვეულ დამოკიდებულების (დადებითი კორელაციის) არსებობას. (14.6.1) ფორმულებით გამოვითვლით β და X-ის საშუალო მნიშვნელობებს, — შეფასებებს მათემატიკური ლოდინებისათვის:

$$m_\beta = 7,15; \qquad m_x = 0,5.$$



ნახ. 14.6.1.

შემდეგ ვპოულობთ სტატისტიკურ მეორე საწყის მომენტებს:

$$\alpha^*_2[\beta] = \frac{\sum_{i=1}^{20} \beta_i^2}{20} = 581,8;$$

$$\alpha^*_2[X] = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i^2}{20} = 85,4,$$

(14.6.3) ფორმულით ვპოულობთ სტატისტიკურ დისპერსიებს:

$$D^*_\beta = 581,8 - 51,0 = 530,8;$$
$$D^*_x = 85,4 - 0,2 = 85,2.$$

გადაუადგილებელი შეფასებებისათვის ვამრავლებთ სტატისტიკურ დისპერსიებს $\frac{n}{n-1} = \frac{20}{19}$-ზე. მივიღებთ:

$$\tilde{D}_\beta = 559,$$
$$\tilde{D}_x = 89,7.$$

შესაბამისად საშუალო კვადრატული გადახრები ტოლია:

$$\tilde{\sigma}_\beta = \sqrt{\tilde{D}_\beta} = 23,6; \qquad \tilde{\sigma}_x = 9,46.$$

უკანასკნელი ფორმულით ვპოულობთ სტატისტიკურ საწყის მომენტს:

$$\alpha^*_{1,1}[\beta, X] = \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i}{20} = 190,8.$$

და სტატისტიკურად კორელაციურ მომენტს:

$$K^*_{\beta x} = \alpha^*_{1,1}[\beta, X] - \tilde{m}_\beta \tilde{m}_x = 190,8 - 3,6 = 187,2;$$

გადაუადგილებელი შეფასების განსაზღვრისათვის ვამრავლებთ მას $\frac{n}{n-1}=\frac{20}{19}$-ზე ვღებულობთ

$$\widetilde{K}_{\beta x}=197,0$$

საიდანაც კორელაციის კოეფიციენტისათვის შეფასება ტოლია:

$$\widetilde{r}_{\beta x}=\frac{197,0}{23,6\cdot 9,46}\approx 0,88$$

r-ის მიღებული შედარებით დიდი მნიშვნელობა მიგვითითებს β და X შორის არსებითი კავშირის არსებობაზე; ამის საფუძველზე შესაძლებელია დავუშვათ, რომ სრიალი ძირითადი მიზეზია ჭურვების გვერდითი გადახრისა.

გადავიდეთ ნებისმიერი რიცხვის შემთხვევით სიდიდეთა სისტემების დაკვირვებათა დამუშავების შემთხვევაზე.

გვაქვს m შემთხვევით სიდიდეთა სისტემა

$$(X_1,\ X_2,\ldots,X_m)$$

სისტემაზე ნაწარმოებია n დამოუკიდებელი დაკვირვება; ამ დაკვირვებათა შედეგები გაფორმებულია ცხრილის სახით, რომლის თითოეული სტრიქონი შეიცავს m მნიშვნელობას, მიღებულს შემთხვევითი X_1, X_2 $\ldots$, X_m სიდიდეების მიერ ერთი დაკვირვებისას (ცხრილი 14.6.2)

ცხრილი 14.6.2

i	X_1	X_2		X_k		X_m
1	x_{11}	x_{21}		x_{k_1}		x_{m_1}
2	x_{12}	x_{22}		x_{k_2}		x_{m_2}
.	.	.		.		.
i	x_{1i}	x_{2i}		x_{ki}		x_{mi}
.	.	.		.		.
n	x_{1n}	x_{2n}		x_{kn}		x_{mn}

რიცხვები, რომლებიც ცხრილშია და დანომრილია ორი ინდექსით დაკვირვებათა რეგისტრირებული შედეგებია, პირველი ინდექსი აღნიშნავს შემთხვევითი სიდიდის ნომერს, მეორე—დაკვირვების ნომერს, ასე რომ x_{ki} — არის X_k სიდიდის მიერ i-ურ დაკვირვებისას მიღებული მნიშვნელობა.

საჭიროა მოვნახოთ შეფასებები სისტემის რიცხვითი მახასიათებლებისათვის: მათემატიკურ ლოდინთათვის: m_{x_1} $m_{x_2},\dots,m_{x_m}$ და კორელაციური მატრიცის ელემენტებისათვის:

$$||K_{ij}||=\begin{Vmatrix} K_{11}K_{12}\cdots K_{1m} \\ K_{22}\cdots K_{2m} \\ \cdot \\ K_{mm}\end{Vmatrix}.$$

ცხადია კორელაციური მატრიცის მთავარ დიაგონალზე მდებარეობენ შემთხვევით X_1, $X_2,\dots,X_m$ სიდიდეთა დისპერსიები:

$$K_{11}=D_1; \qquad K_{22}=D_2,\dots K_{mm}=D_m.$$

მათემატიკური ლოდინთათვის შეფასებები მოიძებნება, როგორც საშუალო არითმეტიკულები:

$$\tilde{m}_{x_k}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_{k_i}}{n} \qquad (k=1,\,2,\dots,\,m). \tag{14.6.6}$$

დისპერსიებისათვის გადაუადგილებელი შეფასებები განისაზღვრებიან ფორმულებით

$$\tilde{D}_k=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{ki}-\tilde{m}_{x_k})^2}{n-1}, \tag{14.6.7}$$

ხოლო კორელაციური მომენტებისათვის ფორმულებით

$$\tilde{K}_{kl}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{ki}-\tilde{m}_{x_k})(x_{li}-\tilde{m}_{x_l})}{n-1}. \tag{14.6.8}$$

ამ მონაცემებით განისაზღვრება შეფასებები ნორმირებული კორელაციური მატრიცის ელემენტებისათვის:

$$\tilde{r}_{kl}=\frac{\tilde{K}_{kl}}{\tilde{\sigma}_k\,\tilde{\sigma}_i}, \qquad (14.6.9)$$

სადაც

$$\tilde{\sigma}_k=\sqrt{\tilde{D}_k}; \qquad \tilde{\sigma}_i=\sqrt{\tilde{D}_i}. \qquad (14.6.10)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ჩამოგდებულია ბომბების 10 სერია, თითოეულში 5 ბომბი და რეგისტრირებულია მოხვედრის წერტილები. ცდათა შედეგები მოყვანილია 14.6.3. ცხრილში. i ასოთი აღნიშნულია სერიის ნომერი; k — სერიაში ბომბის ნომერი. საჭიროა განისაზღვროს ხუთი შემთხვევითი სიდიდის სისტემისათვის (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) მისაღები რიცხვითი მახასიათებლები — მათემატიკური ლოდინთა და კორელაციური მატრიცის ელემენტებისათვის — რიცხვითი მახასიათებლების მნიშვნელობანი — ხუთი შემთხვევითი სიდიდის სისტემისათვის

(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5).

ა მ ო ხ ს ნ ა. მათემატიკური ლოდინისათვის შეფასებები მოიძებნება სვეტების მიხედვით, როგორც საშუალო არითმეტიკულები:

$$\tilde{m}_{x_1}=-74{,}3;\quad \tilde{m}_{x_2}=-19{,}9;\quad \tilde{m}_{x_3}=27{,}7;\quad \tilde{m}_{x_4}=85{,}8;\quad \tilde{m}_{x_5}=147{,}0;$$

$$\tilde{m}_{y_1}=-3{,}9;\quad \tilde{m}_{y_2}=-1{,}6;\quad \tilde{m}_{y_3}=12{,}2;\quad \tilde{m}_{y_4}=13{,}3;\quad \tilde{m}_{y_5}=9{,}9.$$

კორელაციური მატრიცის ელემენტების გამოთვლისას არ ვისარგებლებთ საწყის და ცენტრალურ მომენტებს შორის ფარდობით, როგორც წინა მაგალითებში; მოცემულ შემთხვევაში ძლიერ ცვალებადი მათემატიკური ლოდინის გამო ამ ხერხით სარგებლობა უპირატესობას არ მოგვცემს. შეფასებებს მომენტებისათვის გამოვთვლით უშუალოდ (14.6.2) ფორმულით. ამისათვის 14.6.3 — ცხრილის ყველა ელემენტიდან გამოვაკლებთ შესაბამისი სვეტის საშუალო მნიშვნელობას. შედეგებს მოვიყვანთ 14.6.4 ცხრილში.

ც ხ რ ი ლ ი 14.6.3

	აბსცისა X					ორდინატა Y				
i \ k	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	—120	— 20	2	60	180	— 20	—15	— 8	— 6	— 2
2	—108	— 75	— 20	20	80	40	60	120	125	130
3	—200	—120	— 80	— 20	10	— 25	—30	—20	—10	2
4	— 55	— 2	40	120	200	—100	—75	—35	2	2
5	5	60	100	165	220	— 40	—30	—25	—30	—45
6	—240	—202	—140	— 88	— 30	80	30	25	10	2
7	10	65	120	160	205	14	25	25	30	10
8	— 40	0	65	103	170	80	75	60	10	— 4
9	—100	— 40	—10	55	105	— 70	—60	—30	—10	0
10	105	135	190	280	330	2	4	10	12	4

ცხრილი 14.6.4.

i \ k	$x_{k_i}-\tilde m_{x_k}$ 1	2	3	4	5	$y_{k_i}-\tilde m_{y_k}$ 1	2	3	4	5
1	−45,7	−0,1	−25,7	−25,8	33,0	−16,1	−13,4	−20,2	−19,3	−11,9
2	−33,7	−55,1	−37,7	−65,8	−67,0	43,9	61,6	107,8	111,7	120,1
3	−125,7	−100,1	−107,7	−105,8	−137,0	−21,1	−28,4	−32,2	−23,3	−7,9
4	19,3	17,9	12,3	34,2	53,0	−96,1	−73,4	−47,2	−11,3	−7,9
5	79,3	79,9	72,3	79,2	73,0	−36,1	−28,4	−37,2	−43,3	−54,9
6	−165,7	−182,1	−167,7	−173,8	−177,0	83,9	31,6	12,8	−3,3	−7,9
7	84,3	84,9	92,3	74,2	58,0	17,9	26,6	12,8	16,7	0,1
8	34,3	19,9	37,3	17,2	23,0	83,9	76,6	47,8	−3,3	−13,9
9	25,7	−20,1	−37,7	−30,8	−42,0	−66,1	−58,4	−42,2	−23,3	−9,9
10	179,3	154,9	162,3	174,2	183,0	5,9	5,6	−2,2	−1,3	−5,9

ამ რიცხვთა კვადრატში აყვანით, სვეტების მიხედვით აჯამვით და $n-1=9$-ზე გაყოფით: მივიღებთ დისპერსიებისა და საშუალო კვადრატული გადახრებისათვის შეფასებებს

$$\tilde D_{x_1}=104{,}2\cdot10^2;\quad \tilde D_{x_2}=94{,}4\cdot10^2;\quad \tilde D_{x_3}=94.3\cdot10^2;$$

$$\tilde D_{x_4}=110{,}2\cdot10^2;\quad \tilde D_{x_5}=114{,}4\cdot10^2;$$

$$\tilde\sigma_{x_1}=102;\quad \tilde\sigma_{x_2}=97;\quad \tilde\sigma_{x_3}=97:\quad \tilde\sigma_{x_4}=105;\quad \tilde\sigma_{x_5}=107.$$

$$\tilde D_{y_1}=35{,}5\cdot10^2;\quad \tilde D_{y_2}=24{,}4\cdot10^2;\quad \tilde D_{y_3}=23{,}4\cdot10^2;$$

$$\tilde D_{y_4}=19{,}6\cdot10^2;\quad \tilde D_{y_5}=20{,}1\cdot10^2;$$

$$\tilde\sigma_{y_1}=60;\quad \tilde\sigma_{y_2}=49;\quad \tilde\sigma_{y_3}=48;\quad \tilde\sigma_{y_4}=44:\quad \tilde\sigma_{y_5}=45.$$

რომ მოვნახოთ შეფასება კორელაციური მომენტისათვის, მაგალითად X_1 და X_2 სიდიდეებს შორის შევადგენთ სვეტს იმ რიცხვთა წყვილ-წყვილად ნამრავლებისას, რომლებიც დგანან 14.6.4 [1] ცხრილის პირველ და მეორე სვეტში. ყველა ამ ნამრავლთა შეკრებით და ჯამის $n-1$-ზე გაყოფით მივიღებთ: $K_{x_1x_2}=0.959\cdot10^4$.
$\tilde K_{x_1x_2}$-ის გაყოფით $\tilde\sigma_{x_1}\cdot\tilde\sigma_{x_2}$-ზე მივიღებთ:

$$r_{x_1x_2}\approx0{,}97$$

ანალოგიურად ვპოულობთ კორელაციური მატრიცის ყველა ელემენტს. მოხერ-

[1] თუ გამოთვლა წარმოებს არითმომეტრზე ან კლავიშებიან გამომთვლელ (საანგარიშო) მანქანაზე, მაშინ არა აქვს აზრი ამოვწეროთ ცალკეული ნამრავლები, არამედ უშუალოდ უნდა გამოითვალოს ნამრავლთა ჯამები, ისე რომ არ მოხდეს შეჩერება შუალედ შედეგებზე.

ხებულობისათვის მომენტთა ორივე მატრიცის ყველა ელემენტს ვამრავლებთ 10^{-2}-ზე, მივიღებთ:

$$\|K_{x_ix_j}\| = \begin{Vmatrix} 104,2 & 96,0 & 98,4 & 105,1 & 106,9 \\ & 94,4 & 93,2 & 107,0 & 101,1 \\ & & 94,3 & 102,0 & 99,2 \\ & & & 110,2 & 108,2 \\ & & & & 111,4 \end{Vmatrix}$$

$$\|K_{y_iy_j}\| = \begin{Vmatrix} 35,5 & 27,8 & 22,9 & 11,0 & 8,3 \\ & 24,4 & 21,4 & 13,0 & 10,2 \\ & & 23,4 & 17,4 & 17,2 \\ & & & 19,6 & 19,3 \\ & & & & 20,1 \end{Vmatrix}.$$

მატრიცთა სიმეტრიულობის გამო ისინი შევსებულია მხოლოდ ნახევრად. ნორმირებულ კორელაციურ მატრიცებს აქვს შემდეგი სახე:

$$\|\tilde{r}_{x_ix_j}\| = \begin{Vmatrix} 1,00 & 0,97 & 0,99 & 0,98 & 0,98 \\ & 1,00 & 0,99 & 0,99 & 0,97 \\ & & 1,00 & 0,98 & 0,96 \\ & & & 1,00 & 0,97 \\ & & & & 1,00 \end{Vmatrix},$$

$$\|\tilde{r}_{y_iy_i}\| = \begin{Vmatrix} 1,00 & 0,94 & 0,67 & 0,42 & 0,31 \\ & 1,00 & 0,89 & 0,59 & 0,46 \\ & & 1,00 & 0,81 & 0,80 \\ & & & 1,00 & 0,97 \\ & & & & 1,00 \end{Vmatrix}.$$

ამ მატრიცების განხილვით ვრწმუნდებით, რომ (X_1, X_2, X_3), სიდიდეები მჭიდრო კავშირშია, რომელიც უახლოვდება ფუნქციონალურს; Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 სიდიდეები ნაკლებ მჭიდროდაა დაკავშირებული და კორელაციის კოეფიციენტი მათ შორის კლებულობს კორელაციური მატრიცის მთავარი დიაგონალიდან დაშორების მიხედვით.

14.7. სროლათა დამუშავება

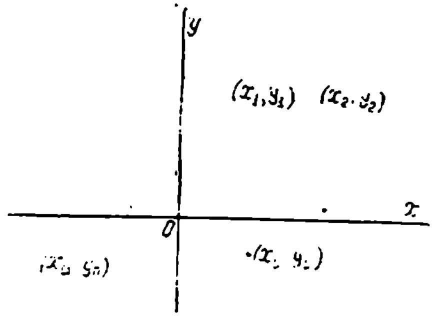
ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი პრაქტიკული ამოცანაა, რომელიც წამოიჭრება სროლისა და ბომბების დაშენის საკითხების შესწავლისას, ექსპერიმენტული სროლების (ბომბების დაშენის) შედეგების დამუშავების ამოცანა.

აქ განვასხვავებთ ორ შემთხვევას: სროლას დარტყმითი ჭურვებით და სროლას დისტანციური ჭურვებით. დარტყმითი ჭურვებით სროლისას გაბნევა ორი შემთხვევითი სიდიდის სისტემის განაწილების კანონით ხასიათდება; რომელიღაც სიბრტყეზე (რეალურ ან წარმოსახვით) მოხვედ-

რების წერტილების აბსცისების და ორდინატების განაწილების კანონით. დისტანციური ჭურვებით სროლისას გაბნევა სივრცითი ხასიათისაა და აღიწერება ჭურვის გასკდომის წერტილის სამი კოორდინატის სისტემის განაწილების კანონით.

ჯერ განვიხილოთ დარტყმითი ჭურვებით სროლების დამუშავების ამოცანა. დავუშვათ ნაწარმოებია n დამოუკიდებელი გასროლა, რომელიღაც ბრტყელ სამიზნეზე და რეგისტრირებულია მოხვედრის n წერტილთა კოორდინატები (ნახ. 14.7.1):

$$(x_1, y_1); (x_2, y_2); \ldots; (x_n, y_n).$$



ნახ. 14. 7.1.

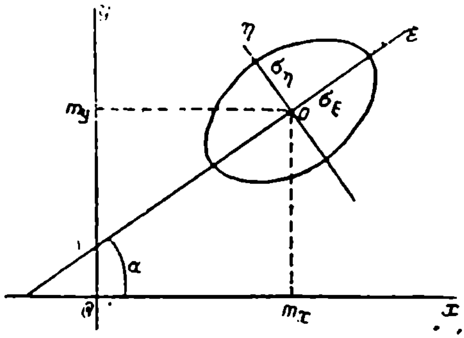
დავუშვებთ რა რომ (X, Y) სისტემის განაწილების კანონი ნორმალურია, საჭიროა მოვნახოთ შეფასება მისი პარამეტრების: m_x, m_y გაბნევის ცენტრის კოორდინატებისა, გაბნევის მთავარი ξ, η ღერძების მიმართულების განმსაზღვრელი α კუთხისა და σ_ξ, σ_η ს. კ. გ-ბის.

განხილვა დავიწყოთ ყველაზე მარტივი შემთხვევიდან, როცა გაბნევის მთავარ ღერძთა მიმართულება წინასწარ ცნობილია. ეს შემთხვევა ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში, რადგანაც ჩვეულებრივ გაბნევის მთავარი ღერძების მიმართულება განისაზღვრება თვით სროლის პირობებით (მაგალითად, ბომბების დაშენისას — ფრენის მიმართულება და მისი მართობი; საჰაერო სროლისას—სამიზნის განივი სიჩქარის მიმართულება და მისი მართობი და ა. შ.). ამ შემთხვევაში სროლების დამუშავების ამოცანა ძლიერ მარტივდება წინასწარ ვიცით, რა თუნდაც საორიენტაციოდ მთავარ ღერძთა მიმართულებანი, შესაძლებელია შევარჩიოთ მათი პარალელური საკოორდინატო ღერძები: კოორდინატთა ასეთი სისტემებისას მოხვედრის წერტილის აბსცისა და ორდინატა დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია და მათი განაწილების კანონი განისაზღვრება სულ ოთხი პარამეტრით: გაბნევის ცენტრის კოორდინატებით და მთავარი σ_x, σ_y საშუალო კვადრატული გადახ-

რებით. ამ პარამეტრებისათვის შეფასებები განისაზღვრებიან ფორმულებით:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\tilde{m}_x=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_1}{n}; \quad \tilde{m}_y=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n};\\
&\tilde{\sigma}_x=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2}{n=1}};\\
&\tilde{\sigma}_y=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_y-m_y)^2}{n-1}}.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (14.7.1)
$$

განვიხილოთ უფრო რთული შემთხვევა, როცა გაბნევის მთავარ ღერძთა მიმართულება არ არის წინასწარ ცნობილი და უნდა განსაზღვრულ იქნას ცდის საშუალებით. ამ შემთხვევაში უნდა განისაზღვროს ყველა ხუთი პარამეტრი: გაბნევის ცენტრის კოორდინატები m_x, m_y, კუთხე α და მთავარი σ_ξ, σ_η საშუალო კვადრატული გადახრები (ნახ. 14. 7.2) გაბნევის ცენტრის კოორდინატთა შეფასებები ამ შემთხვევაში ისევე, როგორც წინა შემთხვევებში, განისაზღვრება ფორმულებით:



ნახ. 14.7.2.

$$
\tilde{m}_x=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \qquad \tilde{m}_y=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}. \qquad (14.7.2)
$$

გადავიდეთ α კუთხის შეფასებაზე. ვივარაუდოთ, რომ გაბნევის მთავარი ღერძთა მიმართულებანი ცნობილია და გავავლოთ (m_x, m_y)

წერტილზე მთავარი O_ξ O_η ღერძები (ნახ. 14.7.2) $\xi O\eta$ სისტემაში შემთხვევით (X, Y) წერტილის კოორდინატები იქნება:

$$\left.\begin{aligned}\Xi &= (X-m_x)\cos\alpha+(Y-m_y)\sin\alpha,\\ H &= -(X-m_x)\sin\alpha+(Y-m_y)\cos\alpha.\end{aligned}\right\}$$

ანდა

$$\left.\begin{aligned}\Xi &= \mathring{X}\cos\alpha+\mathring{Y}\sin\alpha,\\ H &= -\mathring{X}\sin\alpha+\mathring{Y}\cos\alpha.\end{aligned}\right\} \qquad (14.7.3)$$

ცხადია სიდიდეებს Ξ H ექნებათ მათემატიკური ლოდინი, რომელიც ნულის ტოლი იქნება:

$$M[\Xi]=M[H]=0.$$

რადგან $O\xi$, $O\eta$ გაბნევის მთავარი ღერძებია. Ξ, H სიდიდეები დამოუკიდებლებია. მაგრამ ნორმალურ კანონს დაქვემდებარებულ სიდიდეებისათვის დამოუკიდებლობა არა კორელირებულობის ექვივალენტურია.

მაშასადამე ჩვენთვის საკმარისია მოვნახოთ α კუთხის ისეთი მნიშვნელობა, რომლის დროსაც (Ξ, H) სიდიდეები არაკორელირებულია; სწორედ ეს მნიშვნელობა საზღვრავს გაბნევის მთავარ ღერძთა მიმართულებას.

გამოვთვალოთ (Ξ, H) სიდიდეთა კორელაციური მომენტი. (14.7.3) ტოლობათა გადამრავლებით და მათი ნამრავლზე მათემატიკური ლოდინის ოპერაციების გამოყენებით მივიღებთ:

$$K_{\xi\eta}=M[\Xi H]=-M[\mathring{X}^2]\sin\alpha\cos\alpha+M[\mathring{X}\mathring{Y}](\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+$$
$$+M[\mathring{Y}^2]\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\,(D_x-D_y)+K_{xy}\cos 2\alpha.$$

ამ გამოსახულების ნულთან გატოლებით და ორივე ნაწილის $\cos 2\alpha$-ზე გაყოფით მივიღებთ:

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2K_{xy}}{D_x-D_y}. \qquad (14.7.4)$$

(14.7.4) განტოლება მოგვცემს α კუთხის ორ მნიშვნელობას: α_1 და α_2, რომლებიც განსხვავდებიან $\frac{\pi}{2}$-ით. სწორედ ეს ორი კუთხე განსაზღვრავს გაბნევის მთავარი ღერძების მიმართულებას[1].

[1] შევნიშნავთ, რომ (14.7.4) გამოსახულება ემთხვევა მე-9 თავში მოყვანილ (9.2.2) გამოსახულებას α კუთხისათვის, რომელიც განსაზღვრავს გაბნევის ელიფსის სიმეტრიის ღერძების მიმართულებას.

(14.7.4) ტოლობა-ში K_{xy}, D_x, D_y-ს თუ მათი შეფასებებით შევცვლით მივიღებთ შეფასებას α კუთხისათვის:

$$\alpha=\frac{1}{2}\ \mathrm{arc\,tg}\,\frac{2\,K_{xy}}{\widetilde{D}_x-\widetilde{D}_y}$$

მოვნახოთ შეფასებები მთავარი σ_ξ, σ_η საშუალო კვადრატული გადახრებისათვის. ამისათვის მოვნახოთ H, Ξ სიდიდეთა დისპერსიები, რომლებიც მოცემულია (14.7.3) ფორმულებით წრფივი ფუნქციის დისპერსიის შესახებ თეორემებით:

$$D_\xi=D_x\cos^2\alpha+D_y\sin^2\alpha+2K_{xy}\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$D_\eta=D_x\sin^2\alpha+D_y\cos^2\alpha-2K_{xy}\sin\alpha\cos\alpha.$$

საიდანაც ვპოულობთ მთავარ დისპერსიათა შეფასებებს:

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{D}_\xi&=\widetilde{D}_x\cos^2\widetilde{\alpha}+\widetilde{K}_{xy}\sin 2\widetilde{\alpha}+\widetilde{D}_y\sin^2\widetilde{\alpha};\\ \widetilde{D}_\eta&=\widetilde{D}_x\sin^2\widetilde{\alpha}-\widetilde{K}_{xy}\sin 2\widetilde{\alpha}+\widetilde{D}_y\cos^2\widetilde{\alpha}.\end{aligned}\right\}\qquad(14.7.5)$$

მთავარ საშუალო კვადრატულ გადახრათა შეფასებები გამოისახებიან ფორმულებით

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{\sigma}_\xi&=\sqrt{\widetilde{D}_\xi};\\ \widetilde{\sigma}_\eta&=\sqrt{\widetilde{D}_\eta};\end{aligned}\right\}\qquad(14.7.6)$$

ბრტყელ სამიზნეზე სროლათა დასამუშავებლად ამოვწეროთ ცალკე სრულად ყველა ფორმულები. იმ შემთხვევისათვის როცა გაფანტვის მთავარ ღერძთა მიმართულება წინასწარ არ არის ცნობილი. შეფასებები საძიებელი პარამეტრებისა განისაზღვრებიან ფორმულებით:

$$\left.\begin{aligned}&\widetilde{m}_x=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n};\qquad \widetilde{m}_y=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n};\\ &\widetilde{\alpha}=\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\widetilde{K}_{xy}}{\widetilde{D}_x-\widetilde{D}_y};\\ &\widetilde{\sigma}_\xi=\sqrt{\widetilde{D}_x\cos^2\widetilde{\alpha}+\widetilde{K}_{xy}\sin 2\widetilde{\alpha}+\widetilde{D}_y\sin^2\widetilde{\alpha}};\\ &\widetilde{\sigma}_\eta=\sqrt{\widetilde{D}_x\sin^2\widetilde{\alpha}-\widetilde{K}_{xy}\sin 2\widetilde{\alpha}+\widetilde{D}_y\cos^2\widetilde{\alpha}}.\end{aligned}\right\}\qquad(14.7.7)$$

სადაც

$$
\left.\begin{aligned}
&\tilde{D}_x=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\tilde{m}_x)^2}{n-1}; \qquad \tilde{D}_y=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\tilde{m}_y)^2}{n-1};\\
&\tilde{K}_{xy}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\tilde{m}_x)(y_i-\tilde{m}_y)}{n-1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (14.7.8)
$$

დასკვნაში უნდა შევნიშნოთ, რომ სროლათა დამუშავებას სრული (14.7.7) ფორმულებით აქვს აზრი მხოლოდ მაშინ, როცა ცდათა რიცხვი საკმაოდ დიდია (მრავალი ათეული რიგისა) მხოლოდ ამ შემთხვევაში α შეიძლება საკმაოდ ზუსტად იქნას შეფასებული. დაკვირვებათა მცირე რიცხვისას α, რომელიც მიიღება დამუშავებით, მნიშვნელოვნად შემთხვევითია.

დისტანციური ჭურვებით სროლათა დამუშავების ამოცანას აქ განვიხილავთ, მხოლოდ უმარტივეს შემთხვევაში, როცა გაბნევის მთავარ ღერძთა მიმართულებანი ცნობილია (თუნდაც საორიენტაციოდ) წინასწარ. როგორც წესი ამოცანები, რომლებიც დისტანციური ჭურვებით სროლის პრაქტიკაში გვხვდება მიეკუთვნება ამ ტიპს. ამ შემთხვევაში შეიძლება კოორდინატთა ღერძები ავირჩიოთ გაბნევის მთავარი ღერძთა პარალელურად და ჭურვის გასკდომის წერტილის სამი კოორდინატი განვიხილოთ, როგორც დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები.

დავუშვათ n დამოუკიდებელ გასროლათა შედეგად რეგისტრირებულია დისტანციურ ჭურვთა გასკდომის n წერტილის კოორდინატები

$$(x_1,\ y_1,\ z_1);\ (x_2,\ y_2,\ z_2);\ldots,(x_n,\ y_n,\ z_n)$$

გაბნევის მთავარი ღერძების პარალელურღერძებიან კოორდინატთა სისტემაში ნორმალური კანონის პარამეტრებისათვის. შეფასებები განისაზღვრება ფორმულებით:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\widetilde{m}_x=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n};\quad \widetilde{m}_y=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n};\quad \widetilde{m}_z=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i}{n};\\
&\widetilde{\sigma}_x=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\widetilde{m}_x)^2}{n-1}};\\
&\widetilde{\sigma}_y=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\widetilde{m}_y)^2}{n-1}};\\
&\widetilde{\sigma}_z=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(z_i-\widetilde{m}_z)^2}{n-1}}.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (14.7.9.)
$$

დისტანციური ჭურვებით სროლათა დამუშავების ამოცანის გადაწყვეტაზე, როცა გაბნევის მთავარი ღერძების მიმართულებანი წინასწარ უცნობია, ჩვენ არ შევჩერდებით, რადგან ეს ამოცანა პრაქტიკაში შედარებით იშვიათად გვხვდება.

14.8. ექსპერიმენტულ დამოკიდებულებათა გაგლუვება უმცირეს კვადრატთა მეთოდით

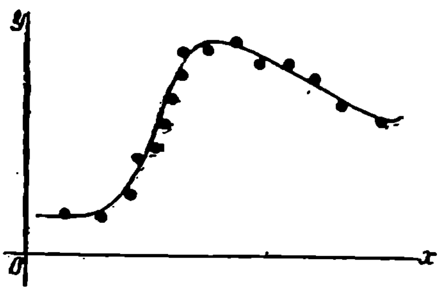
მოცემულ თავში განხილულ ცდათა დამუშავებასთან დაკავშირებულ საკითხებს ემიჯნება ექსპერიმენტულ დამოუკიდებლობათა გაგლუვების საკითხი.

დავუშვათ წარმოებს ცდა, რომლის მიზანია რომელიმე ფიზიკური y სიდიდის x ფიზიკური სიდიდისაგან (მაგ. სხეულის მიერ განვლილი გზის დროისაგან; სიჩქარისა მუხტის ტემპერატურისაგან; ამწევი ძალისა შეტევის კუთხისაგან) დამოკიდებულების გამოკვლევა. ივარაუდება; რომ x და y სიდიდეები დაკავშირებულია ფუნქციონალური დამოკიდებულებით:

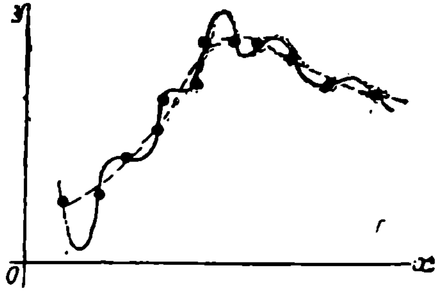
$$y=\varphi(x). \qquad (14.8.1)$$

სწორედ ამ დამოკიდებულების განსაზღვრაა საჭირო ცდიდან. დავუშვათ რომ ცდის შედეგად მივიღეთ ექსპერიმენტულ წერტილთა რიგი და ავაგეთ y-ის x-საგან დამოკიდებულების გრაფიკი (ნახ. 14.8.1).

ასეთ გრაფიკზე ჩვეულებრივ ექსპერიმენტული წერტილები განლაგდება „გაბნეულად“ ე. ი. ხილული საერთო კანონზომიერებიდან შემთხვევით გადაიხრებიან. ეს გადახრები ყოველი ცდისას განზომთა გარდაუვალ შეცდომებთანაა დაკავშირებული.



ნახ. 14.8.1.



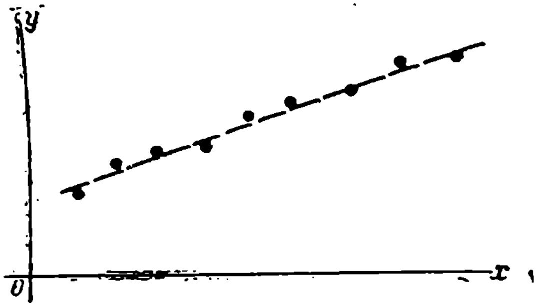
ნახ. 14.8.2.

წამოიჭრება საკითხი ამ ექსპერიმენტულ მოცემულობათა მიხედვით თუ როგორ დავამყაროთ დამოკიდებულება y-ისა x-საგან.

ცნობილია, რომ ნებისმიერ (x_i, y_i) კოორდინატებიან n წერტილზე შესაძლებელია გავავლოთ მრუდი, რომელიც ანალიზურად გამოისახება (n—1) ხარისხიანი პოლინომით, ისე რომ ზუსტად გაიაროს თითოეულ წერტილზე (14.8.2). ოღონდ საკითხის ასეთი გადაწყვეტა ჩვეულებრივ არ ითვლება დამაკმაყოფილებლად: როგორც წესი ექსპერიმენტულ წერტილთა არარეგულარული ქცევა, 14.8.1 და 14.8.2 ნახ-ზე გამოსახულების მსგავსად, დაკავშირებულია x-სა და y-ს შორის დამოკიდებულების არა ობიექტურ ხასიათზე, არამედ განსაკუთრებით განზომთა შეცდომებზე. ამის გამოვლინება ადვილია დანაკვირ გადახრათა (წერტილთა გაბნევა) საზომი აპარატურისათვის დამახასიათებელი ცნობილ ცდომილებებთან შედარებით. მაშინ წამოიჭრება პრაქტიკისათვის ფრიად ტიპიური ე. წ. ექსპერიმენტულ დამოკიდებულების გაგლუვების ამოცანა. სასურველია ექსპერიმენტული მონაცემები დავამუშაოთ, ისე, რომ შესაძლებლობის მიხედვით ზუსტად ავსახოთ x-საგან y-ის დამოკიდებულების ზოგადი ტენდენცია, მაგრამ ამასთან ერთად გავასწოროთ არა კანონზომიერი, შემთხვევითი გადახრები, რომლებიც დაკავშირებულია თვით დაკვირვებების გარდუვალ ცდომილებებთან.

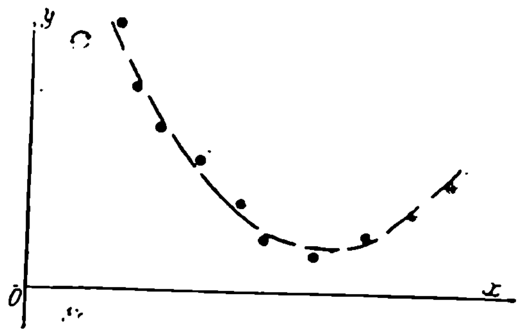
მსგავსი ამოცანების გადასაწყვეტად ჩვეულებრივ გამოიყენება გაანგარიშების მეთოდი, რომელიც ცნობილია „უმცირეს კვადრატთა მეთოდის“ სახელწოდებით. ეს მეთოდი საშუალებას გვაძლევს მოცემული $y=\varphi(x)$ ტიპის დამოკიდებულების შემთხვევაში, ავირჩიოთ მისი რიცხვითი პარამეტრები, ისე რომ $y=\varphi(x)$ მრუდი საუკეთესოდ ასახავდეს ექსპერიმენტულ მონაცემებს.

რამდენიმე სიტყვით ავხსნათ, თუ რა შემთხვევაში შეიძლება იყოს არჩეული $y=\varphi(x)$ ტიპის მრუდი. ხშირად ეს საკითხი წყდება უშუალოდ ექსპერიმენტული დამოკიდებულების გარეგანი სახის მიხედვით. მაგალითად: 14.8.3. ნახ-დან, რომელზედაც ექსპერიმენტული წერტილებია გამოსახული, ცხადად ჩანს რომ $y=ax+b$ სახის დამოკიდებულება წრფივია.



ნახ. 14. 8.3

დამოკიდებულება, რომელიც 14.8.4 ნახ-ზეა გამოსახული კარგად შეიძლება წარმოდგენილ იქნას მეორე ხარისხის პოლონომის სახით $y=ax^2+bx+c$. თუკი ლაპარაკია პერიოდულ ფუნქციაზე ხშირად მის გამოსასახავად შეიძლება ავირჩიოთ ტრიგონომეტრიული მწკრივის რამდენიმე ჰარმონიკი და ა. შ.



ნახ. 14. 8.4.

ძალიან ხშირად ხდება ისე, რომ დამოკიდებულების სახე (წრფივი, კვადრატული, მაჩვენებლიანი და ა. შ.) ცნობილია ფიზიკური მოსაზრებიდან, რომელიც გადასაწყვეტი ამოცანის არსთან არის დაკავშირებული, ხოლო ცდიდან საჭირო ხდება დადგინდეს ამ დამოკიდებულების მხოლოდ ზოგიერთი პარამეტრები.

ცხრილი 14.8.1

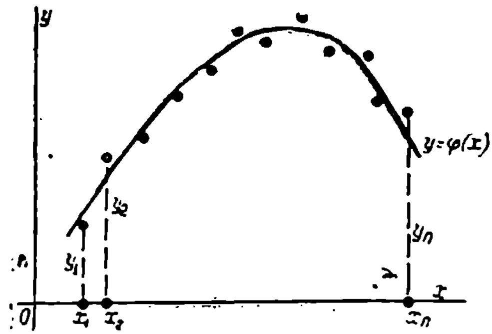
i	x_i	y_i
1	x_i	y_1
2	x_2	y_2
i	x_i	y_i
n	x_n	y_n

სწორედ ასეთი რიცხობრივი პარამეტრების რაციონალური შერჩევის ამოცანას დამოკიდებულებათა მოცემული სახის შემთხვევაში გადავწყვეტთ მოცემულ პარ-ში. ვთქვათ გვაქვს დამოუკიდებელ n ცდათა შედეგები, რომლებიც გაფორმებულია მარტივი სტატისტიკური ცხრილის სახით (ცხრილი 14.8.1), სადაც i-ცდის ნომერია, x_i—არგუმენტის მნიშვნელობა, y_i—ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა.

(x_i y_i) წერტილები დატანილია (ნახ. 14.8.5) გრაფიკზე.

თეორიულ ანდა სხვა რომელიმე მოსაზრებებიდან არჩეულია დამოკიდებულების პრინციპული სახე $y=\varphi(x)$. $y=\varphi(x)$ ფუნქცია შეიცავს რიგ a, b, c რიცხვით პარამეტრებს. ეს პარამეტრები საჭიროა ისე შევარჩიოთ, რომ $y=\varphi(x)$ მრუდი რომელიღაც აზრით საუკეთესოდ ასახავდეს ცდისას მიღებულ დამოკიდებულებას.

ამ ამოცანის გადაწყვეტა ისე, როგორც გასწორების ან გაგლუვების სხვა ნებისმიერ ამოცანისა დამოკიდებულია იმისაგან, თუ სახელდობრ რომელს ჩავთვლით „საუკეთესოდ“. მაგალითად შეიძლება „საუკეთესოდ“ ჩავთვალოთ მრუდთა და ექსპერიმენტულ წერტილთა ისეთი ურთიერთგანლაგება, რომლის დროსაც მათ შორის მაქსიმალური მანძილი იქცევა მინიმალურად; შეიძლება მოვითხოვოთ, რომ მინიმალურად იქცეს მრუდიდან წერტილების გადახრათა აბსოლუტურ სიდიდეთა ჯამი და ა. შ. ყველა ამ მოთხოვნისას მივიღებთ ამოცანის შესატყვის გადაწყვეტას, a, b, c... პარამეტრების შესაბამის მნიშვნელობებს. ოღონდ მსგავსი ამოცანების გადაწყვეტისას საზოგადოდ მიღებულია ე. წ. *უმცირეს კვადრატთა მეთოდი*, რომლის დროსაც მოთხოვნა $y=\varphi(x)$ მრუდთა და ექსპერიმენტულ წერტილთა საუკეთესო შეთანხმება დაიყვანება იმაზე, რომ *ექსპერიმენტულ წერტილთა გამაგლუვებელი მრუდიდან გადახრების კვადრატების ჯამი იქცეოდეს მინიმალურად*. უმცირეს კვადრატთა მეთოდს გაგლუვების სხვა მეთოდებთან შედარებით არსებითი უპირატესობანი აქვს: ჯერ ერთი მას მივყავართ a, b, c... პარამეტრების განსაზღვრის შედარებით მარტივ მათემატიკურ ხერხამდე; მეორე ის, რომ ის ალბათობითი თვალსაზრისით საკმაოდ საფუძვლიან თეორიულ დასაბუთებას იძლევა. მოვიყვანოთ ეს დასაბუთება.



ნახ. 14.8.5.

ვივარაუდოთ, რომ ჭეშმარიტი დამოკიდებულება y-ისა და x-გან ზუსტად გამოისახება $y=\varphi(x)$ ფორმულით; ექსპერიმენტული წერტილები გადაიხრებიან ამ დამოკიდებულებიდან გაზომვათა გარდუვალ შეცდომათა მიზეზით. ჩვენ უკვე ვახსენეთ, რომ განაზომთა შეცდომები, როგორც წესი ექვემდებარებიან ნორმალურ კანონს. დავუშვათ, რომ ეს ასეა, განვიხილოთ არგუმენტის, რომელიღაც x_i მნიშვნელობა. ცდის

[illegible] შემთხვევითი სიდიდე Y_i, რომელიც განაწილებულია ნორმალური კანონით, $\varphi(x_i)$ მათემატიკური ლოდინით და σ_i საშუალო კვადრატული გადახრით, რომელიც ახასიათებს გაზომვის შეცდომას. ვივარაუდოთ, რომ განაზომთა საზუსტე ყველა წერტილზე ერთნაირია:

$$\sigma_1=\sigma_2=\ldots=\sigma_n=\sigma.$$

მაშინ ნორმალური კანონი, რომლითაც განაწილებულია Y_i შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$f_i(y_i)=\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\frac{|y_i-\varphi(x_i)|^2}{2\sigma^2}}, \tag{14.8.2}$$

ჩვენს მიერ ჩატარებული ცდის — მთელ რიგი გაზომვისას — ადგილი, ჰქონდა შემდეგ ხდომილებას: შემთხვევით $(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n)$ სიდიდეებმა მიიღო) $y_1, y_2, \cdots, y_n$) მნიშვნელობათა ერთობლიობა. დავსვათ ამოცანა: ისე შევარჩიოთ $\varphi(x_1,)\ \varphi(x_2)\ldots\ \varphi(x_n)$ მათემატიკური ლოდინები, რომ ალბათობა ამ ხდომილობისა იყოს მაქსიმალური[1].

ზუსტად, რომ ვთქვათ, ნებისმიერი $Y_i=y_i$ ხდომილობის ალბათობა ისევე, როგორც მათი თავსებადობა ნულის ტოლია, რადგან y_i სიდიდეები უწყვეტია, ამიტომ ვისარგებლებთ $Y_i=y_i$ ხდომილობათა არა ალბათობებით, არამედ ალბათობათა შესაბამისი ელემენტებით:

$$f_i(y_i)dy_i=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[y_i-\varphi(x_i)]^2}{2\sigma^2}}dy_i. \tag{14.8.3.}$$

მოვნახოთ ალბათობა იმისა, რომ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ შემთხვევით სიდიდეთა სისტემა მიიღებს ერთობლიობას მნიშვნელობებისა, რომლებიც ძევს (y_i, y_i+dy_i) $(i=1, 2, \ldots, n)$. ფარგლებში.

ვინაიდან ცდები დამოუკიდებლებია, ეს ალბათობა ტოლია (14.8.3) ალბათობათა ნამრავლისა i-ს ყველა მნიშვნელობისათვის:

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[y_i-\varphi(x_i)]^2}{2\sigma^2}}dy_i=Ke^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i)]^2} \tag{14.8.4}$$

სადაც $K-\varphi(x)$-საგან დამოუკიდებელი კოეფიციენტია. საჭიროა ისე

---

[1] ეგრეთ წოდებული „მაქსიმალური დამაჯერებლობის პრინციპი".

შევარჩიოთ $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2),\ldots,$ $\varphi(x_n)$ მათემატიკური ლოდინები, რომ 14.8.4 გამოსახულება გადაიქცეს მაქსიმუმად. სიდიდე

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i)]^2}$$

ყოველთვის ნაკლებია ერთზე; ცხადია, რომ მას აქვს უდიდესი მნიშვნელობა, როცა ხარისხის მაჩვენებელი აბსოლუტური მნიშვნელობით მინიმალურია:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i)]^2=\min.$$

აქედან მუდმივი $\frac{1}{2\sigma^2}$ თანამამრავლის უგულებელყოფით ვღებულობთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდის მოთხოვნას: იმისათვის, რომ $y_1, y_2,\ldots,y_n$ დანაკვირ მნიშვნელობათა ერთობლიობა იყოს უალბათესი, $\varphi(x)$ ფუნქცია ისე, უნდა ავირჩიოთ რომ დანაკვირ მნიშვნელობათა გადახრების კვადრატების ჯამი მინიმალური იყოს:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i)]^2=\min.$$

ამგვარად განაზომთა ცდომილების ნორმალური კანონის და მოცემულ შეცდომათა ერთობლიობის მაქსიმალური ალბათობის მოთხოვნიდან გამომდინარე საბუთდება უმცირეს კვადრატთა მეთოდი.

უმცირეს კვადრატთა მეთოდის პრინციპიდან გამომდინარე გადავიდეთ a, b, c. პარამეტრების განსაზღვრის ამოცანაზე, დავუშვათ გვაქვს ექსპერიმენტულ მონაცემთა ცხრილი (ცხ. 14. 8. 1) და დავუშვათ, რაიმე მოსაზრებით (მოვლენის არსთან დამოკიდებით ან უბრალოდ დაკვირვებებით მიღებული დამოკიდებულების გარეგან სახესთან დაკავშირებით) შერჩეულია ფუნქციის ზოგადი სახე $y=\varphi(x)$, რომელიც დამოკიდებულია რამდენიმე რიცხვით a, b, $c\ldots$ პარამეტრისაგან; ხწორედ ამ პარამეტრების შერჩევაა საჭირო თანახმად უმცირეს კვადრატთა მეთოდისა, ისე რომ გადახრათა კვადრატების ჯამი y_i-სა $\varphi(x)$-დან იყოს მინიმალური. ჩავწეროთ y როგორც ფუნქცია არა მარტო x არგუმენტისა, არამედ a, b, $c\ldots$ პარამეტრებისაც:

$$y=\varphi(x;\ a,\ b,\ c\ldots). \tag{14.8.5}$$

საჭიროა ავირჩიოთ a, b, c ისე, რომ სრულდებოდეს პირობა

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i;\ a, b, c\ldots)]^2=\min. \qquad (14.5.6)$$

მოვნახოთ a, b, c,... — მნიშვნელობა, რომელიც (14.8.6) გამოსახულების მარცხენა მხარეს გადააქცევს მინიმუმად. ამისათვის გავაწარმოოთ იგი a, b, c,...-თი და გავუტოლოთ ნულს:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i;\ a, b, c, \ldots)]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right)_i=0,\\
&\sum_{i=1}^{n}[(y_i-\varphi(x_i;\ a, b, c, \ldots)]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial b}\right)_i=0,\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i;\ a, b, c, \quad)]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right)_i=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (14.8.7)$$

სადაც $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right)_i=\varphi'_a(x_i;\ a,b,c\ldots)$—$\varphi$ ფუნქციის კერძო წარმოებულია a პარამეტრით x_i წერტილში; $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial b}\right)_i$, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right)$ . . . ანალოგიურია.

(4.8.7) განტოლებათა სისტემა შეიცავს იმდენივე განტოლებას რამდენი უცნობიცაა:

(14.8.7) სისტემის გადაწყვეტა ზოგადი სახით არ შეიძლება; ამისათვის აუცილებელია φ ფუნქციას კონკრეტული სახე მივცეთ.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა, რომელიც პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება: როცა φ ფუნქცია წრფივია და როცა იგი გამოისახება მეორე ხარისხის პოლინომით (პარაბოლით).

1. წრფივი ფუნქციის პარამეტრების შერჩევა. უმცირეს კვადრატთა მეთოდით

ცდაში რეგისტრირებულია (x_i, y_i) მნიშვნელობათა ($i=1, 2,\ldots,n$ ნახ. 14.8.6) ერთობლიობა. საჭიროა უმცირეს კვადრატთა მეთოდით შევარჩიოთ a, b პარამეტრები $y=ax+b$ წრფივი ფუნქციისა, რომელიც გამოსახავს მოცემულ ექსპერიმენტულ დამოკიდებულებას.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს $y=\varphi(x;\ a,\ b) = ax+b$ (14.8.8). თუ (14.8.8) გამოსახულებას a და b-თი გავაწარმოებთ მივიღებთ:

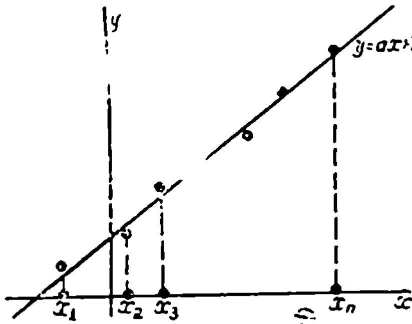
$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}=x; \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right)_i = x;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial b}=1; \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial b}\right)_i = 1.$$

(14.8.7) ფორმულებში ჩასმით მივიღებთ ორ განტოლებას a და b-ს განსაზღვრისათვის:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]x_i=0;$$

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]=0,$$



ნახ. 14.8.6.

ანდა ფრჩხილების გახსნისა და შეჯამებით

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14.8.9)$$

გავყოთ ორივე (14.8.9) განტოლება n-ზე:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - a\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - b\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = 0, \\ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n} - a\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n} - b = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14.8.9)$$

ჯამები, რომლებიც შედიან (14.8.10) განტოლებებში უკვე ჩვენთვის ცნობილი სტატისტიკური მომენტებია

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = m^*_x; \qquad \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = \alpha^*_2[X];$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n} = m^*_y; \qquad \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i}{n} = \alpha^*_{1,1}[D, Y].$$

ამ გამოსახულებათა (14.8.10) სისტემაში ჩასმით მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^*_{1,1}[X, Y] - a\alpha_2^*[X] - bm^*_x = 0. \\ m^*_y - am^*_x - b = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14.8.11)$$

(14.8.11) მეორე განტოლებიდან განვსაზღვროთ b და ჩავსვათ პირველში:

$$b = m^*_y - am^*_x;$$

$$\alpha^*_{1,1}[X, Y] - a\alpha^*_2[X] - (m^*_y - am^*_x)m^*_x = 0.$$

უკანასკნელი განტოლების a-ს მიმართ ამოხსნით მივიღებთ:

$$a = \frac{a^*_{1,1}[X, Y] - m^*_x m^*_y}{a^*_2[X] - (m^*_x)^2}. \qquad (14.8.12)$$

14.8.12 გამოსახულება შეიძლება გავამარტივოთ თუ კი მასში შევიტანთ არა საწყის, არამედ ცენტრალურ მომენტებს. მართლაც,

$$\alpha^*_{1,1}[X, Y] - m^*_x m^*_y = K^*_{xy}, \qquad \alpha_2^*[X] - (m^*_x)^2 = D^*_x,$$

საიდანაც

$$a = \frac{K^*_{xy}}{D^*_x}; \; b = m^*_y - am^*_x, \qquad (14.8.13)$$

სადაც

$$
\left.
\begin{aligned}
&m^*_x=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}; \quad m^*_y=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n};\\
&K^*_{xy}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m^*_x)(y_i-m^*_y)}{n};\\
&D^*_x=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m^*_x)^2}{n}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (14.8.14)
$$

ამგვარად დასმული ამოცანა ამოხსნილია და x და y შორის დამოკიდებულებას აქვს შემდეგი სახე:

$$
y=\frac{K^*_{xy}}{D^*_x}\,x+m^*_y-\frac{K^*_{xy}}{D^*_x}m^*_x,
$$

ანდა m_y^*-ის მარცხენა ნაწილში გადატანით

$$
y=m^*_y=\frac{K^*_{xy}}{D^*_x}(x-m^*_x). \qquad (14.8.15)
$$

წრფივი დამოკიდებულების კოეფიციენტები გამოვსახეთ ცენტრალურით და არა საწყისი მეორე მომენტებით, მხოლოდ იმიტომ, რომ ასეთი სახით ფორმულებს აქვს უფრო კომპაქტური სახე. გამოყვანილი ფორმულების პრაქტიკული გამოყენებისას შეიძლება უფრო მოხერხებული აღმოჩნდეს K^*_{xy} და D^*_x მომენტები გამოვთვალოთ არა (14.8.14) ფორმულებით, არამედ მეორე საწყისი მომენტებით

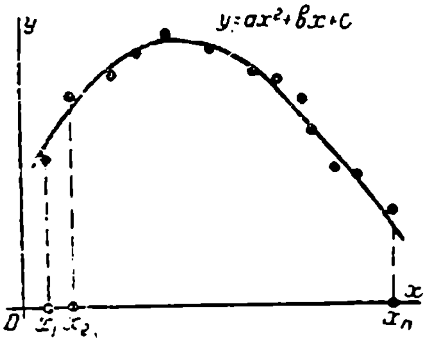
$$
\left.
\begin{aligned}
&K^*_{xy}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n}-m^*_x m^*_y,\\
&D^*_x=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x^2_i}{n}-(m^*_x)^2.
\end{aligned}
\right\} \qquad (14.8.16)
$$

იმისათვის, რომ (14.8.16) ფორმულებმა არ მიგვიყვანოს მახლობელ რიცხვთა სხვაობებამდე, რეკომენდებულია ანათვლის საწყისი გადავიტანოთ წერტილზე, რომელიც ძლიერ შორს არ იქნება m^*_x, m^*_y მათემატიკურ ლოდინებიდან.

2. მეორე რიგის პარაბოლის პარამეტრების განსაზღვრა უმცირეს კვადრატთა მეთოდით

ცდისას რეგისტრირებულია (x_i, y_i) მნიშვნელობანი ($i=1, 2,\ldots,n$ იხ. ნახ. 14.8.7). საჭიროა უმცირეს კვადრატთა მეთოდით შევარჩიოთ პარამეტრები კვადრატთა ფუნქციის — მეორე რიგის პარაბოლისა:

$$y=ax^2+bx+c,$$



ნახ. 14.8.7

რომელიც შეესაბამება ცდისას დაკვირვებულ ექსპერიმენტულ დამოკიდებულებას. გვაქვს

$$y=\varphi(x;\ a,\ b,\ c,\ldots)=ax^2+bx+c.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}=x^2; \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right)_i=x^2_i;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial b}=x; \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial b}\right)_i=x_i;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial c}=1; \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right)_i=1.$$

ჩავსვამთ რა განტოლებებში (14.8.7) მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax^2_i+bx_i+c)]x^2_i=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}[y_1-(ax^2_i+bx_i+c)]\,x_i=0.$$

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax^2_i+bx_i+c)]=0.$$

ანდა ფრჩხილების გახსნით, აჯამვით და n-ზე გაყოფით

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x^2_i y_i}{n} - a\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x^4_i}{n} = b\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x^3_i}{n} - c\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x^2_i}{n} = 0,\\
&\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - a\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x^3_i}{n} - b\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - c\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = 0,\\
&\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n} - a\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - b\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} - c = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (14.8.17)$$

ამ სისტემის კოეფიციენტებია აგრეთვე ორი X, Y სიდიდეთა სისტემის სტატისტიკური მომენტები, სახელდობრ:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = m^*_x = \alpha^*_1[X]; \qquad \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n} = m^*_y = \alpha^*_1[Y];$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x^2_i}{n} = \alpha^*_2[X]; \qquad \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x^3_i}{n} = \alpha^*_3[X]; \qquad \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4}{n} = \alpha^*_4[X];$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} = \alpha^*_{1,1}[X,Y]; \qquad \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x^2_i y_i}{n} = \alpha^*_{2,1}[X, Y].$$

ვსარგებლობთ რა ამ გამოსახულებებით კოეფიციენტებისათვის ერთი შემთხვევითი სიდიდის საწყისი მომენტით და ორი სიდიდის სისტემებით, შესაძლებელია (14.8.7) განტოლებათა სისტემას მივცეთ საკმაოდ კომპაქტური სახე. მართლაც, ვითვალისწინებთ, რა

$$\alpha^*_0[X]=1; \; \alpha^*_{0,1}[X, Y]=\alpha^*_1[Y]$$

და გადავიტანთ რა უცნობთა არაშემცველ წევრებს მარჯვენა ნაწილებში (14.8.17) სისტემას მივიყვანთ სახეზე:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^*_4[X]a+\alpha^*_3[X]b+\alpha^*_2[X]c&=\alpha^*_{2,1}[X,\ Y],\\ \alpha^*_3[X]a+\alpha^*_2[X]b+\alpha^*_1[X]c&=\alpha^*_{1,1}[X,\ Y],\\ \alpha^*_2[X]a+\alpha_1^*[X]b+\alpha^*_0[X]c&=\alpha^*_{0,1}[X,\ Y] \end{aligned}\right\} \tag{14.8.18}$$

განტოლებებში (14.8.13) კოეფიციენტთა შედგენის კანონის შემჩნევა არ არის ძნელი: მარცხენა ნაწილში მონაწილეობენ X სიდიდის მხოლოდ მომენტები კლებადი რიგით; მარჯვენა ნაწილში დგანან $(X,\ Y)$ სისტემის მომენტები, თანაც მომენტთა რიგი განტოლებიდან განტოლებამდე X-ით კლებულობს, ხოლო რიგი Y—ით ყოველთვის პირველი რჩება[1].

სტრუქტურის' მხრივ ანალოგიური განტოლებებით განისაზღვრებიან ნებისმიერი რიგის პარაბოლის კოეფიციენტები.

ჩვენ ვხედავთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა ექსპერიმენტული დამოკიდებულება სწორდება უმცირეს კვადრატთა მეთოდით, რომელიღაც ხარისხის პოლინომით, მაშინ ამ პოლინომის კოეფიციენტები მოინახება წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით. წრფივ განტოლებათა ამ სისტემის კოეფიციენტები წარმოადგენენ სხვა და სხვა რიგის სტატისტიკურ მომენტებს, რომლებიც ახასიათებენ $(X,\ Y)$ სიდიდეთა სისტემას, თუ მას განვიხილავთ, როგორც შემთხვევით სიდიდეების სისტემას.

თითქმის ასე მარტივად წყდება ექსპერიმენტულ დამოკიდებულებათა გაგლუვების ამოცანა უმცირეს კვადრატთა მეთოდით, იმ შემთხვევაში როცა გამასწორებელი ფუნქცია არა პოლინომია, არამედ ნებისმიერ $a_1,\ a_2,\dots,a_k$ კოეფიციენტებიან მოცემული $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\dots\varphi_k(x)$ ფუნქციათა ჯამი:

$$y=\varphi(x;\ a_1,\ a_2\dots,\ a_k)=$$
$$=a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\dots+a_k\varphi_k(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i\varphi_i(x), \tag{14.8.19}$$

და მაშინ, საჭიროა განისაზღვროს a_i კოეფიციენტები. მაგალითად; ექსპერიმენტული დამოკიდებულება შეიძლება გასწორებულ იქნას ტრიგონომეტრიული პოლინომით:

$$\varphi(x;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=a_1\cos\omega x+a_2\sin\omega x+a_3\cos 2\omega x+a_4\sin 2\omega x$$

---

[1] (14.8.18) სისტემის ამოხსნა $a,\ b,\ c$ უცნობთა მიმართ ზოგადად არ მოგვყავს, რადგან ეს ამოხსნა ძლიერ ვრცელია, ხოლო პრაქტიკაში უფრო მოხერხებულია გადაწყდეს სისტემა (14.8.15) არა დეტერმინანტთა დახმარებით, არამედ უცნობთა მიმდევრობით გამორიცხვით.

ანდა მაჩვენებლიანი ფუნქციების წრფივი კომბინაციით

$$\varphi(x;\ a_1,\ a_2,\ a_3)=a_1e^{\alpha t}+a_2e^{\beta t}+a_3e^{\gamma t} \text{ და ა. შ.}$$

იმ შემთხვევაში თუ ფუნქციას იძლევიან (14.8.19) ტიპის გამოსახულებით, a_1, $a_2, \ldots$ a_k კოეფიციენტები მოინახება შემდეგი სახის k წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით:

$$\sum_{i=1}^{n}\{y_i-[a_1\varphi_1(x_i)+a_2\varphi_2(x_i)+\ldots+a_k\varphi_k(x_i)]\}\varphi_1(x_i)=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\{y_i-[a_1\varphi_1(x_i)+a_2\varphi_2(x_i)+\ldots+a_k\varphi_k(x_i)]\}\varphi_2(x_i)=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\{y_i-[a_1\varphi_1(x_i)+a_2\varphi_2(x_i)+\ldots+a_k\varphi_k(x_i)]\}\varphi_k(x_i)=0.$$

ცალ-ცალკე წევრობრივი შეკრებით მივიღებთ:

$$a_1\sum_{i=1}^{n}[\varphi_1(x_i)]^2+a_2\sum_{i=1}^{n}\varphi_2(x_i)\varphi_1(x_i)+\ldots+a_k\sum_{i=1}^{n}\varphi_k(x_i)\,\varphi_1(x_i)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}y_i\varphi_1(x_i),$$

$$a_1\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i)+a_2\sum_{i=1}^{n}[\varphi_2(x_i)]^2+\ldots+a_k\sum_{i=1}^{n}\varphi_k(x_i)\varphi_2(x_i)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}y_i\varphi_2(x_i),$$

$$a_1\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)\varphi_k(x_i)+a_2\sum_{i=1}^{n}\varphi_2(x_i)\varphi_k(x_i)+\ldots+a_k\sum_{i=1}^{n}[\varphi_k(x_i)]^2=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}y_i\varphi_k(x_i),$$

ანდა მოკლედ

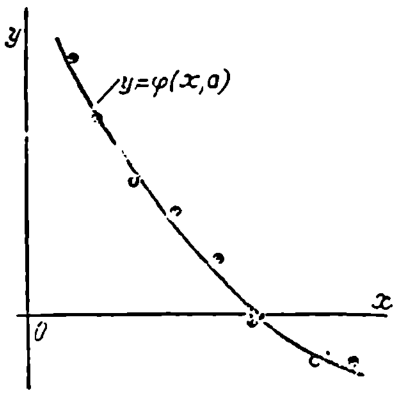
$$\left.\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} a_j \sum_{i=1}^{n} \varphi_1(x_i)\varphi_j(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_1(x_i),\\
\sum_{j=1}^{k} a_j \sum_{i=1}^{n} \varphi_2(x_i)\varphi_j(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_2(x_i),\\
&\;\;\vdots\\
\sum_{j=1}^{k} a_j \sum_{i=1}^{n} \varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_k(x_i).
\end{aligned}\right\} \tag{14.8.20}$$

წრფივი განტოლებათა (14.8.20) სისტემა ყოველთვის შეიძლება ამოვხსნათ და ამდაგვარად განვსაზღვროთ $a_1, a_2, \ldots, a_k$ კოეფიციენტები. გაგლუვების ამოცანა უმცირეს კვადრატთა მეთოდით უფრო რთულად ხშირად წყდება. თუ $y=\varphi(x; a, b, c)$ ფუნქციის გამოსახულებაში შემავალი რიცხვითი a, b, c პარამეტრები არაწრფივია, მაშინ (14.8.7) სისტემის გადაწყვეტა შეიძლება აღმოჩნდეს რთული და შრომატევადი. თუმცა ამ შემთხვევაშიც ხშირად ამოცანის გადაწყვეტას შედარებით მარტივი ხერხებით ვაღწევთ.

ამ იდეის ილუსტრაცია მოვახდინოთ მხოლოდ ერთ a პარამეტრზე (მაგალითად $y=e^{-ax^2}$ ანდა $y=\sin ax$ ანდა $y=\frac{1}{ax}$) არა წრფივად დამოკიდებულ ფუნქციის მაგალითზე. გვაქვს

$$y=\varphi(x, a), \tag{14.8.21}$$

სადაც a — პარამეტრია, რომელიც უნდა შეირჩეს უმცირეს კვადრატთა მეთოდებით მოცემული ექსპერიმენტალური დამოკიდებულების (14.8.21) საუკეთესო გაგლუვებისათვის (ნახ. 14.8.8).



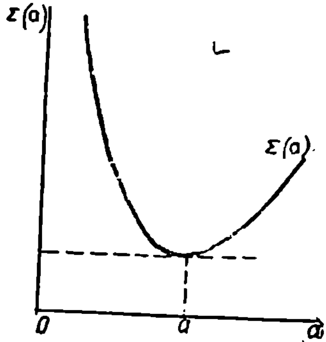
ნახ. 14.8.8.

ამოცანა გადავწყვიტოთ შემდეგნაირად. მივცეთ სხვა და სხვა მნიშვნელობები a პარამეტრს და თითოეული მათგანისათვის ვიპოვოთ y_i

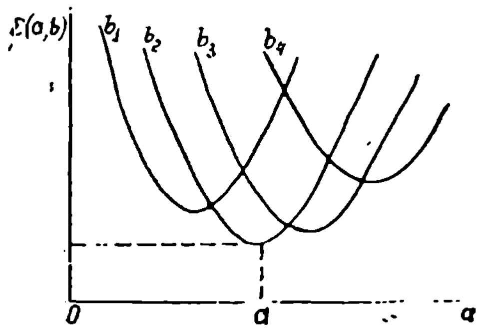
გადახრათა კვადრატების ჯამი $\varphi(x_i, a)$-დან. კვადრატების ეს ჯამი არის a-ს რომელიღაც ფუნქცია; აღვნიშნავთ მას $\Sigma\ (a)$-თი:

$$\Sigma(a) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi\ (x_i, a)]^2.$$

დავიტანოთ $\Sigma(a)$ მნიშვნელობა გრაფიკზე (ნახ. 14.8.9). a-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მრუდს $\Sigma\ (a)$ აქვს მინიმუმი ავირჩევთ როგორც a-ს შესაბამისი მნიშვნელობა (14.8.21) გამოსახულებაში.



ნახ. 14.8.9.

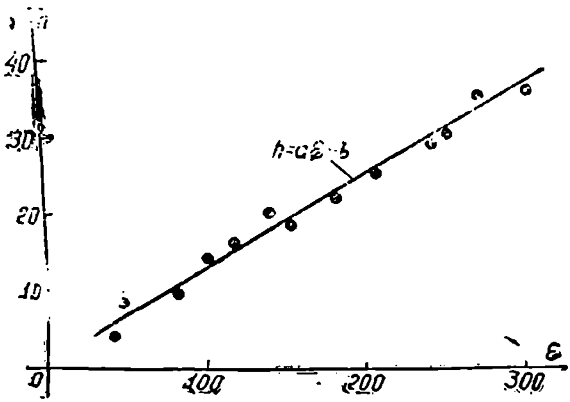


ნახ. 14.8.10

სავსებით ანალოგიურად (14.8.7) განტოლების ამოუხსნელად შეიძლება შევარჩიოთ ორი (a, b) პარამეტრთა ერთობლიობა. რომელიც დააკმაყოფილებს უმცირეს კვადრატთა მეთოდის პრინციპს; სამუშაო ამ შემთხვევაში მხოლოდ უმნიშვნელოდ გართულდება და დაიყვანება არა ერთ, არამედ რამდენიმე გრაფიკის (ნახ. 18.8.10) აგებამდე; ამ დროს მოგვიხდება ab მნიშვნელობათა ერთობლიობის მოძებნა, რომელიც უზრუნველჰყოფს გადახრათა კვადრატების $\Sigma(a.b)$ მინიმუმის მინიმალურ მნიშვნელობას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ცდაში გამოკვლეულია სხეულის შეჭრის h სიღრმე დაბრკოლებაში ხვედრითი ε ენერგიისაგან (ენერგია, რომელიც მოდის დარტყმის ფართის კვადრატულ სანტიმეტრზე დამოკიდებულებით). ექსპერიმენტული მონაცემები მოყვანილია 14.8.2 ცხრილში და (ნახ. 14.8.11) გრაფიკზე. საჭიროა უმცირეს კვადრატთა მეთოდით შევარჩიოთ და ავაგოთ წრფე, რომელიც გამოსახავს h-ის დამოკიდებულებას ε-საგან.

$$m_{\mathscr{E}}^{*} = \frac{\sum_i \mathscr{E}_i}{13} = \frac{2137}{13} \approx 164,4, \quad m_h^{*} = \frac{\sum_i h_i}{13} = \frac{274}{13} \approx 21,1.$$



ნახ. 14.8.11.

საწყისი მონაცემების მიხედვით დამუშავებისათვის კოორდინატთა სათავე შუა წერტილის ახლოს გადაგვაქვს:

$$\mathscr{E}_0 = 150; \qquad h_0 = 20.$$

ვღებულობთ შემდეგ მნიშვნელობათა ახალ ცხრილს

$$\mathscr{E}' = \mathscr{E} - \mathscr{E}_0; \qquad h' = h - h_0.$$

ცხრილი 14.8.2.

1	41	4
2	50	8
3	81	10
4	104	14
5	120	16
6	139	20
7	154	19
8	180	23
9	208	26
10	241	30
11	250	31
12	269	36
13	301	37

ცხრილი 14.8.3

1	—109	—16
2	—100	—12
3	— 69	—10
4	— 46	— 6
5	— 30	— 4
6	— 11	0
7	— 4	— 1
8	30	3
9	58	6
10	91	10
11	100	11
12	119	16
13	151	17

ვსანიშნავთ მომენტებს:

$$\alpha_2[\mathscr{E}'] = \frac{\sum_i \mathscr{E}_i'^2}{13} \approx 6869;$$

$$D_{\mathscr{E}}^* = 6869-(m_{\mathscr{E}}^*)^2 = 6869-(164{,}4-150)^2 = 6662;$$

$$\alpha_{1,1}^*[\mathscr{E}',h'] = \frac{\sum_i \mathscr{E}'_i h'_i}{13} \approx 842;$$

$$K_{\mathscr{E}}^* = \alpha_{1,1}^*[\mathscr{E}', h'] - m_{\mathscr{E}'}^* m^*_{h'} = 842-(164{,}4-150)\ (21{,}1-20) \approx$$
$$\approx 842-16 = 826.$$

წრფის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე;

$$h = m^*_h = \frac{K^*_{\mathscr{E}h}}{D_{\mathscr{E}}^*}(\mathscr{E}-m^*_s).$$

ანდა

$$h-21{,}1 = 0{,}124\ (\mathscr{E}-164{,}4). \qquad (14.8.22)$$

(14.8.22) წრფე ნაჩვენებია 14.8.11 ნახაზზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ნაწარმოებია ცდები აეროკემბარის გადატვირთვის გასაზომად, რომელიც იჭრება გრუნტში შეხვედრის სხვადასხვა სიჩქარით. N გადატვირთვის მიღებული სხვადასხვა მნიშვნელობანი v სიჩქარისაგან დამოკიდებით მოყვანილია 14.8.4 ცხრილში.

ც ხ რ ი ლ ი 14.8.4

i	მ/წმ	N
1	120	540
2	131	590
3	140	670
4	161	760
5	174	850
6	180	970
7	200	1070
8	214	1180
9	219	1270
10	241	1390
11	250	1530
12	268	1600
13	281	1730
14	300	2030

ავაგოთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდით შემდეგი სახის კვადრატული დამოკიდებულება:

$$N = av^2+bv+c,$$

რომელიც კარგად ეთანხმება ექსპერიმენტულ მონაცემებს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. —დამუშავების მოხერხებულობის მიზნით, უკეთესია განზომილების ერთეულები შევცვალოთ ისე, არ გვქონდეს საქმე მრავალნიშნა რიცხვებთან; ამისათვის V მნიშვნელობა შეიძლება გამოვსახოთ მ/წმ-ის მეასედებში (გადავამრავლოთ 10^{-2}-ზე, ხოლო N — ერთეულთა მეათასედებში (გავამრავლოთ 10^{-3}-ზე), და მთელი სამუშაო ჩავატაროთ ამ პირობითი ერთეულებით.

ვიპოვოთ (14.8.19) განტოლებათა კოეფიციენტები. მიღებულ პირობით ერთეულებში:

$$\alpha^*_4[v]=\frac{\sum_i v_i^4}{n}=\frac{362,95}{14}=25,92;$$

$$\alpha^*_3[v]=\frac{\sum_i v^3_i}{n}=\frac{148,36}{14}=10,60;$$

$$\alpha^*_2[v]=\frac{\sum_i v^2_i}{n}=\frac{63,49}{14}=4,535;$$

$$\alpha^*_1[v]=m^*_v=\frac{\sum_i v_i}{n}=\frac{28,79}{14}=2,056;$$

$$\alpha^*_{0,1}[v.\ N]=\alpha^*_1]N]=m^*_N=\frac{\sum_i Ni}{14}=\frac{16,23}{14}=1,159;$$

$$\alpha^*_{1,1}[v,\ N]=\frac{\sum_i v_i Ni}{n}=\frac{36,81}{14}=2,629;$$

$$\alpha^*_{2,1}[n,\ N[=\frac{\sum_i v^2_i N_i}{n}=\frac{88,02}{14}=6,287.$$

14.8.18 განტოლებათა სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}
&25,92a+10,60b+4,535c=6,287\\
&10,60a+4,535b+2,056c=2,629,\\
&4,535a+2,056b+c=1,159
\end{aligned}$$

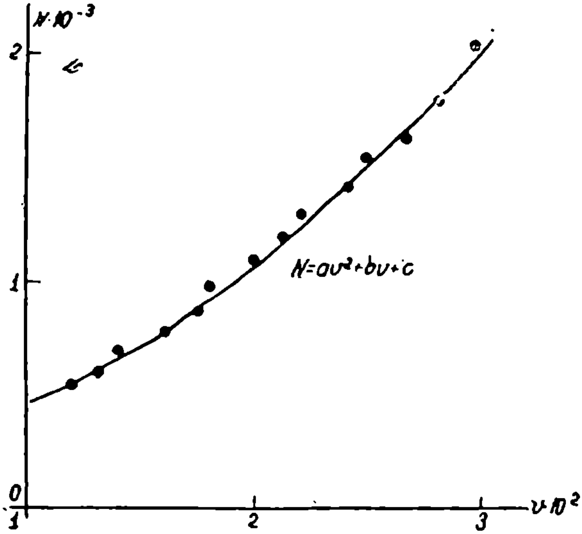
ამ სისტემის ამოხსნით ვპოულობთ:

$$a\approx 0,168 \quad b\approx 0,102 \quad c\approx 0,187$$

ნახ. 14.8.12-ზე დატანილია ექსპერიმენტული წერტილები და $N=av^2+bv+c$, დამოკიდებულება აგებული უმცირეს კვადრატთა მეთოდით.

შენიშვნა: ზოგიერთ შემთხვევაში შეიძლება საჭირო იყოს $y=\varphi(x)$ მრუდის გავლება ისე, რომ იგი ზუსტად გადიოდეს რომელიღაც წინასწარ მოცემულ წერტილებზე, მაშინ რიცხვითი a, b, c პარამეტრებიდან ზოგიერთები, რომლებიც შედიან $y=\varphi(x)$ ფუნქციებში, შეიძლება განსაზღვრულ იქნენ ამ პირობებიდან.

მაგალითად, მაგალითი 2-ის პირობებში დაგვჭირდება N (v) დამოკიდებულებათა ექსტრაპოლაცია v მცირე მნიშვნელობებზე. ამ შემთხვევაში ბუნებრივია გავიყვანოთ



ნახ. 14. 8.12.

მეორე რიგის პარაბოლა ისე, რომ იგი გადიოდეს კოორდინატთა სათავეზე (ე. ი. შეხვედრის ნულოვან სიჩქარეს შეესაბამებოდა ნაკლოვანი გადატვირთვა). მაშინ ბუნებრივია $c=0$ და $N(v)$ დამოკიდებულება ღებულობს შემდეგ სახეს.

$$N=av^2+bv,$$

ხოლო განტოლებათა სისტემას a და b-ს განსაზღვრისათვის ექნება სახე:

$$25,92a+10.60b=6.287;$$

$$10.60a+4,535b=2.629.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. კონდენსატორი, რომელიც დამუხტულია $U_0=100$ ვოლტ ძაბვამდე, რომელიღაც წინაღობით განიმუხტება. კონდენსატორის შემონაფენებს შორის U ძაბვის დამოკიდებულება t დროისაგან რეგისტრირებულია 10 წამიან უბანზე 1 წამის ინტერვალით. ძაბვა იზომება 5 ვოლტის სიზუსტით. გაზომვის შედეგები მოყვანილია 14.8.5 ცხრილში.

თეორიულ მონაცემთა თანახმად, ძაბვის დამოკიდებულებას დროსთან უნდა ჰქონდეს სახე:

$$U=U_0e^{-\alpha t}$$

ცდისეულ მონაცემებზე დაყრდნობით, უმცირეს კვადრატთა მეთოდით შევარჩიოთ α პარამეტრის მნიშვნელობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა e^{-x} ფუნქციის ცხრილიდან ვრწმუნდებით, რომ e^{-x}

ც ხ რ ი ლ ი 14.8.5

i	t_i(წმ)	U_i(ვ)	i	t_i(წმ)	U_i(ვ)
1	0	100	7	6	15
2	1	75	8	7	10
3	2	55	9	8	10
4	3	40	10	9	5
5	4	30	11	10	5
6	5	20			

უდრის დახლოებით 0,05-ს, როცა $x\approx3$: მაშასადამე კოეფიციენტი α-ას უნდა ჰქონდეს 0,3 რიგი. $\alpha=0,3$-ის რაიონში α-ს ვაძლევთ რამოდენიმე მნიშვნელობას:

$$\alpha=0,28;\quad 0,29;\quad 0,30;\quad 0,31;\quad 0,32;\quad 0,33$$

გამოვითვლით მათთვის ფუნქციათა მნიშვნელობებს

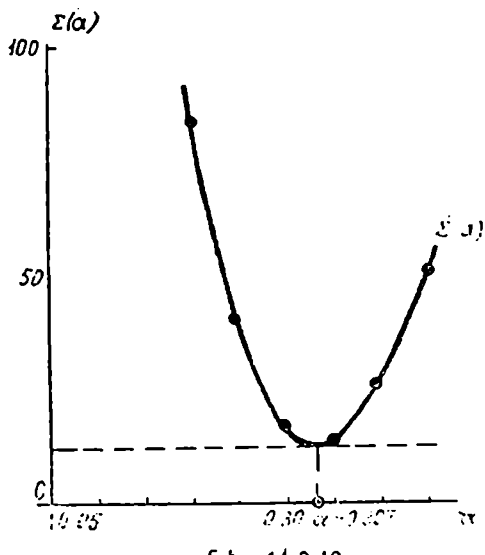
$$U=U_0e^{-\alpha t}$$

t_i წერტილებში (ცხრილი 14.8.6)

ცხრილი 14.8.6.

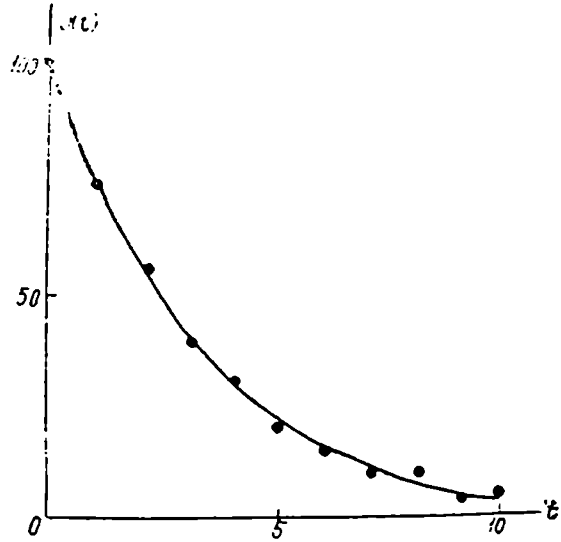
i	t_i	$\alpha=0,28$	$\alpha=0,29$	$\alpha=0,30$	$\alpha=0,31$	$\alpha=0,32$	$\alpha=0,33$
1	0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
2	1	75,5	74,8	74,1	73,3	72,6	71,0
3	2	57,1	56,0	54,9	53,8	52,7	51,7
4	3	43,2	41,9	40,7	39,5	38,3	37,2
5	4	32,6	31,3	30,1	28,9	27,8	26,7
6	5	24,6	23,5	22,3	21,2	20,2	19,2
7	6	18,6	17,6	16,5	15,6	14,7	13,8
8	7	14,1	13,1	12,2	11,4	10,6	9,9
9	8	10,7	9,8	9,1	8,4	7,7	7,1
10	9	8,0	7,4	6,7	6,1	5,6	5,1
11	10	6,1	5,5	5,0	4,5	4,1	3,7
	$\Sigma(\alpha)$	83,3	40,3	17,4	13,6	25,7	51,4

14.8.6 ცხრილის ქვედა სტრიქონში მოთავსებულია გადახრათა კვადრატების $\Sigma(\alpha)$-ს მნიშვნელობანი α-საგან დამოკიდებულებით. ფუნქციის გრაფიკი $\Sigma(a)$ მოცემულია 14.8.12 ნახ-ზე.



ნახ. 14.8.13.

გრაფიკიდან ჩანს, რომ მნიშვნელობა, რომელიც უპასუხებს მინიმუმს, მიახლოებით 0, 37-ის ტოლია ამდაგვარად უმცირეს კვადრატთა მეთოდით საუკეთესო მიახლოებად ცდისეულ მონაცემებთან იქნება ფუნქციის $U=U_0e^{-0.307t}$ ამ ფუნქციის გრაფიკი ექსპერიმენტულ წერტილებთან ერთად მოცემულია 14.8.14 ნახ.-ზე.



ნახ. 14.8.14.

XV თავი

შემთხვევით ფუნქციათა თეორიის ძირითადი ცნებები

15.1. ცნება შემთხვევით ფუნქციაზე

ალბათობათა თეორიის ჩვენს კურსში აქამდე გამოკვლევის ძირითადი საგანი იყო შემთხვევითი სიდიდეები. შემთხვევით სიდიდეს ახასიათებს ის, რომ იგი ცდის შედეგად ღებულობს, რომელიღაც ერთ წინასწარ უცნობ, მაგრამ ერთადერთ მნიშვნელობას. ასეთი შემთხვევით სიდიდეების მაგალითებია: მოხვედრის წერტილის აბსცისა გასროლისას; რადიო მანძილმზომის შეცდომა ერთხელ გასროლისას და ა. შ.

ვიხილუდებოდით რა მსგავს ცალკეულ შემთხვევით სიდიდეთა განხილვით; ჩვენ შემთხვევით სიდიდეებს ვსწავლობდით ცალკეულ ცდის რომელიღაც ფიქსირებულ პირობებში თითქოს და „სტატიკაში", ოღონდ

ასეთი ელემენტარული მიდგომა შემთხვევით სიდიდეთა შესწავლისადმი მთელი რიგი პრაქტიკული ამოცანებისათვის არასაკმარისია. პრაქტიკაში ხშირად საქმე გვაქვს შემთხვევით სიდიდეებთან, რომლებიც ცდის პროცესში უწყვეტად იცვლებიან. ასეთი შემთხვევითი სიდიდეების მაგალითებად შეიძლება ჩავთვალოთ: რადიომანძილმზომის შეცდომა ცვალებადი მანძილის უწყვეტი გაზომვებისას: მოძრავ სამიზნეზე უწყვეტი დამიზნებისას წინსწრების კუთხე; მართული ჭურვის ტრაექტორიის გადახრა თეორიულიდან მართვის ან თვითდამიზნების პროცესში.

ისეთ შემთხვევით სიდიდეებს, რომლებიც იცვლებიან ცდის პროცესში, განსხვავებით ჩვეულებრივი შემთხვევითი სიდიდეებისაგან, დავარქმევთ შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ს.

მსგავს შემთხვევით მოვლენებს რომლებშიაც შემთხვევითობა ვლინდება პროცესის ფორმით სწავლობს ალბათობათა თეორიის სპეციალური დარგი — შემთხვევით ფუნქციათა (სხვაგვარად შემთხვევით ანუ სტოქასტიკურ პროცესთა) თეორია. ამ მეცნიერებას შეიძლება ხატოვნად ვუწოდოთ „შემთხვევით მოვლენათა დინამიკა".

შემთხვევით ფუნქციათა თეორია-უახლესი დარგია ალბათობათა თეორიისა, რომელიც ძირითადად განვითარდა ორი სამი უკანასკნელი ათწლეულის განმავლობაში. ამჟამად ეს თეორია ვითარდება და სრულყოფილი ხდება ფრიად სწრაფი ტემპით. ეს დაკავშირებულია უშუალოდ პრაქტიკის მოთხოვნილებებთან, კერძოდ მთელი რიგ ტექნიკურ ამოცანათა გადაწყვეტის აუცილებლობით. ცნობილია, რომ ბოლო ხანებში ტექნიკაში დიდ გავრცელებას პოულობს სისტემები ავტომატიზებული მართვით. შესაბამისად სულ მეტი მოთხოვნები წაეყენება ტექნიკის ამ სახის თეორიულ ბაზას — ავტომატური მართვის თეორიას. ამ თეორიის განვითარება შეუძლებელია იმ შეცდომათა ანალიზის გარეშე, რომლებიც გარდუვალად თან ახლავს მართვის პროცესებს, რომლებიც ყოველთვის მიმდინარეობენ უწყვეტად ზემოქმედ შემთხვევით შეშფოთებათა (ე. წ. „დაბრკოლებათა") პირობებში. ეს შეშფოთებები თავისი ბუნებით შემთხვევითი ფუნქციებია. იმისათვის, რომ რაციონალურად შევარჩიოთ მართვის სისტემის კონსტრუქციული პარამეტრები, აუცილებელია შევისწავლოთ მისი რეაქცია. უწყვეტად ზემოქმედ შემთხვევით შეშფოთებებზე, ხოლო ერთად ერთ აპარატს, რომელიც ვარგისია ასეთი გამოკვლევებისათვის შემთხვევით ფუნქციათა თეორიის აპარატია.

მოცემულ თავში გავეცნობით ამ თეორიის ძირითად ცნებებს და მთელ რიგ ზოგად ამოცანების დაყენებას, რომლებიც მოითხოვენ შემთხვევით ფუნქციათა თეორიის გამოყენებას. გარდა ამისა აქ გადმოცემული იქნება შემთხვევით ფუნქციათა მახასიათებლებზე ოპერირების საერთო წესები, რომლებიც ანალოგიურია ჩვეულებრივი შემთხვევითი სიდიდეების რიცხვით მახასიათებლებზე ოპერირების წესებისა.

ძირითად ცნებებიდან, პირველი რომელსაც განვიხილავთ თვით შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ცნებაა. ეს ცნება იმდენად ფართო და მდიდარია შემთხვევითი სიდიდის ცნებაზე, რამდენადაც მათემატიკური ცვლადი სიდიდისა და ფუნქციის ცნება ფართოა და მდიდარია მუდმივი სიდიდის ცნებაზე.

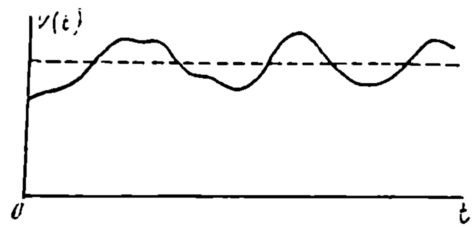
გავიხსენოთ შემთხვევითი სიდიდის განსაზღვრება. შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება სიდიდეს, რომელმაც ცდის შედეგად შეიძლება მიიღოს ესა თუ ის მნიშვნელობა, თუ რომელია იგი სახელდობრ წინასწარ არ არის ცნობილი. მოვიყვანოთ შემთხვევით ფუნქციის ანალოგიური განსაზღვრა.

შემთხვევითი ფუნქცია ეწოდება ფუნქციას, რომელსაც ცდის შედეგად შეუძლია მიიღოს ეს თუ ის კონკრეტული სახე, მაგრამ წინასწარ არ არის ცნობილი — სახელდობრ რომელი.

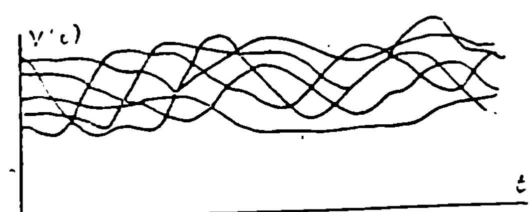
შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი ფ უ ნ ქ ც ი ი ს მიერ ცდის შედეგად მიღებულ კონკრეტულ სახეს ეწოდება შემთხვევითი ფუნქციის რეალიზაცია. თუკი შემთხვევით ფუნქციაზე ვაწარმოებთ ცდათა ჯგუფს, მაშინ ამ ფუნქციის რეალიზაციის ჯგუფს ანუ „ოჯახს“ მივიღებთ.

მოვიყვანოთ შემთხვევითი ფუნქციის რამდენიმე მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ყუმბარმშენთვითმფრინავს ბრძოლის კურსზე აქვს თეორიულად მუდმივი საჰაერო V სიჩქარე. ფაქტიურად მისი სიჩქარე მერყეობს ამ ნომინალური საშუალო მნიშვნელობის ახლოს და დროის შემთხვევითი ფუნქციაა. გაფრენა საბრძოლო კურსზე შესაძლებელია განვიხილოთ, როგორც ცდა, რომელშიც შემთხვევით $V(t)$ ფუნქცია ღებულობს გარკვეულ რეალიზაციას. (ნახ. 15.1.1) ცდიდან ცდამდე რეალიზაციის სახე იცვლება. თუკი თვითმფრინავში დადგმულია თვითმწერი ხელსაწყო, მაშინ იგი ყოველ გაფრენაზე ჩასწერს ახალს, სხვებისგან განსხვავებულს შემთხვევითი ფუნქციის რეალიზაციას. რამდენიმე გაფრენის შედეგად შეიძლება მივიღოთ შემთხვევით $V(t)$ ფუნქციის რეალიზაციათა ოჯახი (ნახ. 15.2.1.)



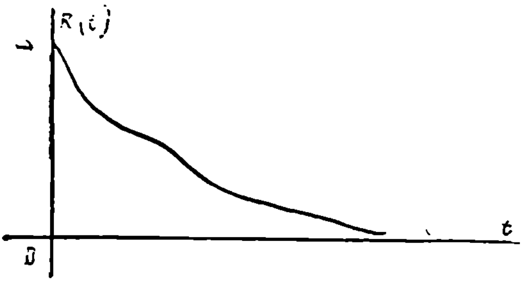
ნახ. 15.1.1.



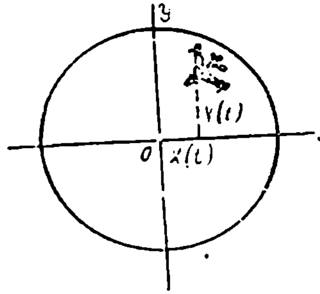
ნახ. 15.2.1.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. მართული ჭურვის სამიზნეზე დამიზნებისას, დამიზნების $R(t)$ ცდომილება ჭურვის მასის გადახრაა თეორიულ ტრაექტორიიდან, ე. ი. დროის შემთხვევითი ფუნქციაა (ნახ. 15.1.3).

იმავე ცდაში დროის შემთხვევით ფუნქციაა, მაგალითად ჭურვის გადატვირთვა $N(t)$, შეტევის $\alpha(t)$ კუთხე და ა. შ.,



ნახ. 15.1.3.



ნახ. 15.1.4.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. თვითმფრინავიდან თვითმფრინავზე სროლისას სამიზნის ჯვარედინი, რომელიღაც დროის განმავლობაში უწყვეტად უნდა უთავსდებოდეს მიზანს, უნდა მიჰყვებოდეს მას. მიზანზე მიყოლის ოპერაციას თან ახლავს შეცდომები—ე. წ. დამიზნების შეცდომები (ნახ. 15.1.4). დამიზნების ჰორიზონტალური და ვერტიკალური შეცდომები დამიზნების პროცესში უწყვეტად იცვლებიან და წარმოადგენენ ორ შემთხვევით $X(t)$ და $Y(t)$ ფუნქციას. ამ შემთხვევით ფუნქციათა რეალიზაცია შეიძლება მივიღოთ ფოტოტყვიამფრქვევის სურათების გაშიფვრის შედეგად თვალთვალი (მიყოლის) მთელი პროცესის განმავლობაში.

შემთხვევით ფუნქციათა მაგალითების რიცხვი, რომლებიც ტექნიკაში გვხვდება შეიძლებოდა გაგვედიდებინა უსასრულოდ. მართლაც და ნებისმიერ შემთხვევაში, როდესაც განვიხილავთ უწყვეტად მომუშავე სისტემებს (გაზომვის, მართვის, დამიზნების, რეგულირების სისტემებთან) ამ სისტემის მუშაობის სიზუსტის ანალიზისას ჩვენ გვიხდება გავითვალისწინოთ შემთხვევითი ზემოქმედებანი (დაბრკოლებები). როგორც თვით დაბრკოლებანი, ისე მათ მიერ გამოწვეული სისტემის რეაქციები დროის შემთხვევით ფუნქციებია.

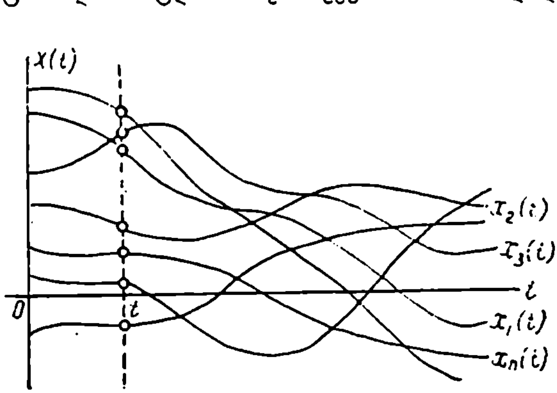
აქამდე ჩვენ ვლაპარაკობდით მხოლოდ შემთხვევით ფუნქციებზე, რომლის არგუმენტს წარმოადგენს (t) დრო. პრაქტიკის მთელ რიგ ამოცანებში გვხვდება შემთხვევითი ფუნქციები, რომლებიც დამოკიდებული არიან არა მარტო დროზე, არამედ სხვა არგუმენტებზე, მაგალითად არაერთგვაროვანი ღეროს სიმტკიცის მახასიათებლები შეიძლება განხილულ იქნას როგორც კვეთის x აბსცისის შემთხვევითი ფუნქციები. ჰაერის ტემპერატურა ატმოსფეროს სხვადასხვა შრეებში შეიძლება განხილული იქნას, როგორც H სიმაღლის შემთხვევითი ფუნქცია.

პრაქტიკაში გვხვდება აგრეთვე შემთხვევითი ფუნქციები, რომლებიც დამოკიდებულნი არიან არა მხოლოდ ერთი არგუმენტისაგან არამედ რამდენიმეზე. მაგალითად აეროლოგიური მონაცემები, რომლებიც ახასიათებენ ატმოსფეროს მდგომარეობას (ტემპერატურა, წნევა, ქარი), ზოგად შემთხვევაში ოთხი არგუმენტის შემთხვევითი ფუნქციებია: სამი, x, y, z კოორდინატისა და t დროისა. მოცემულ კურსში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ერთი არგუმენტის შემთხვევით ფუნქციებს, ყველაზე ხშირად ეს არგუმენტია დრო, აღვნიშნოთ იგი t-თი. გარდა ამისა, როგორც წესი შევთანხმდეთ და შემთხვევითი ფუნქციები აღვნიშნოთ დიდი $X(t)$, $Y(t)$ ასოებით. არაშემთხვევითი $x(t)$, $y(t)$ ფუნქციებისაგან განსხვავებით.

განვიხილოთ, რომელიღაც შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია. დავუშვათ, რომ მასზე წარმოებულია n დამოუკიდებელი ცდა, რომელთა შედეგად მიღებულია n რეალიზაცია (ნახ. 15.1.5). აღვნიშნოთ ისინი ცდის ნომრების შესაბამისად $x_1(t)$ $x_2(t) \dots x_n(t)$.

ყოველი რეალიზაცია, ცხადია არის ჩვეულებრივი (არა შემთხვევითი) ფუნქცია. ამგვარად, ყოველი ცდის შედეგად შემთხვევითი ფუნქცია $X(t)$ გადაიქცევა ჩვეულებრივ არა შემთხვევით ფუნქციად.

აღვნიშნოთ ეხლა t არგუმენტის, რომელიღაც მნიშვნელობა და დავაკვირდეთ, რად გადაიქცევა ამ დროს შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია. ცხადია იგი გადაიქცევა სიტყვის ჩვეულებრივი მნიშვნელობით შემთხვევით სიდიდედ. შევთანხმდეთ, რომ ამ შემთხვევით სიდიდეს ვუწოდოთ შემთხვევითი ფუნქციის კვეთი, რომელიც მოცემულ t-ს შეესაბამება: თუ გავატარებთ რეალიზაციათა ოჯახის „კვეთს" რომელიც მოცემულ t-ს მნიშვნელობას შეესაბამება (ნახ. 15.1.5), ჩვენ მივიღებთ n მნიშვნელობას, რომელიც მიიღო n ცდისას შემთხვევითმა $x(t)$ სიდიდემ.



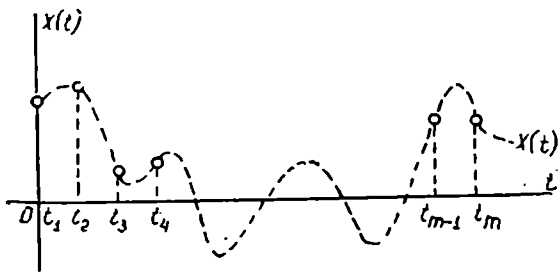
ნახ. 15.1.5.

ჩვენ ვხედავთ, რომ შემთხვევითი ფუნქცია შეიცავს შემთხვევითი სიდიდისა და ფუნქციის ნიშნებს. თუ დავაფიქსირებთ არგუმენტის მნიშვნელობას, იგი გადაიქცევა ჩვეულებრივ შემთხვევით სიდიდედ; ყოველი ცდის შედეგად იგი გადაიქცევა ჩვეულებრივ (არა შემთხვევით) ფუნქციად.

შემდგომ გადმოცემის მსვლელობაში ხშირად სხვადასხვანაირად განვიხილავთ ერთსა და იმავე $X(t)$ ფუნქციას, როგორც შემთხვევითს, ხან კი როგორც შემთხვევით სიდიდეს, იმისაგან დამოკიდებით ვიხილავთ მას t-ეს ცვლილების მთელ დიაპაზონში, თუ მხოლოდ მისი ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის.

15.2. ცნება შემთხვევით ფუნქციისა, როგორც გაფართოება შემთხვევით სიდიდეთა სისტემის ცნებისა. შემთხვევითი ფუნქციის განაწილების კანონი

განვიხილოთ, რომელიღაც შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია დროის გარკვეულ მონაკვეთში (ნახ. 2. 1). მკაცრად, რომ ვთქვათ, შემთხვევითი ფუნქცია არ შეგვიძლია გამოვსახოთ გრაფიკზე მრუდის დახმარებით: შეიძლება გამოვხაზოთ მისი კონკრეტული რეალიზაციები. ოღონდ თვალსაჩინოებისათვის შეიძლება თავს ნება მივცეთ პირობით გამოვსახოთ ნახაზზე შემთხვეევითი $X(t)$ ფუნქცია მრუდის სახით, ისე რომ ამ მრუდის ქვეშ ვგულისხმობდეთ არა კონკრეტულ რეალიზაციას, არამედ $X(t)$-ს შესაძლო რეალიზაციათა მთელ ერთობლიობას. ამ პირობითობას აღვნიშნავთ იმით, რომ მრუდს, რომელიც სიმბოლურად გამოსახავს შემთხვევით ფუნქციას, გავავლებთ პუნქტირით.



ნახ. 15.2.1.

ვივარაუდოთ, რომ შემთხვევითი ფუნქციის ცვალებადობის მსვლელობის რეგისტრაცია ხდება, რომელიღაც ხელსაწყოს დახმარებით, რომელიც შემთხვევითი ფუნქციის ჩაწერას უწყვეტად კი არ ახდენს, არამედ აღნიშნავს მის მნიშვნელობებს გარკვეულ ინტერვალებით დროის $t_1, t_2, \ldots, t_n$ მომენტებში.

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, t-ეს ფიქსირებულ მნიშვნელობისას შემთხვევითი ფუნქცია გადაიქცევა ჩვეულებრივ შემთხვევით სიდიდედ. მაშასადამე, ჩანაწერთა შედეგები მოცემულ შემთხვევაში თვით m შემთხვევით სიდიდეთა სისტემაა:

$$X(t_1),\ X(t_2),\dots,X(t_m), \qquad (15.2.1)$$

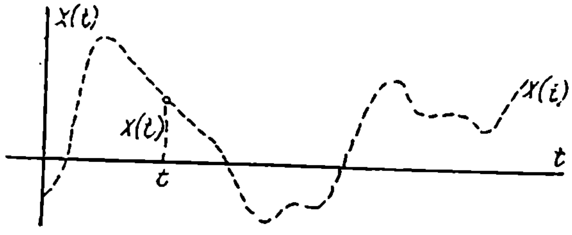
ცხადია, სარეგისტრაციო აპარატურის მუშაობის საკმაოდ მაღალი ტემპისას შემთხვევითი ფუნქციის ჩანაწერი ასეთი ინტერვალებით მოგვცემს საკმაოდ ზუსტ წარმოდგენას მისი ცვლილებათა მსვლელობის შესახებ. ამგვარად, შემთხვევითი სიდიდის განხილვა შეიძლება შევცვალოთ რომელიღაც მიახლოებით შემთხვევით სიდიდეთა (15.2.1) სისტემის განხილვით. m-ის გადიდებით ასეთი შეცვლა გახდება უფრო და უფრო ზუსტი. ზღვარში არგუმენტის მნიშვნელობათა რიცხვი-და შესაბამისად შემთხვევით სიდიდეთა რიცხვი (15.2.1) — გახდება უსასრულო. ამგვარად, შემთხვევითი ფუნქციის ცნება შეიძლება განხილულ იქნას როგორც შემთხვევით სიდიდეთა სისტემის ცნების ბუნებრივი განზოგადოება სისტემაში შემავალ სიდიდეთა უსასრულო სიმრავლის შემთხვევისათვის.

შემთხვევითი ფუნქციის ასეთი განმარტებიდან გამომდინარე შევეცდებით პასუხი გავცეთ კითხვაზე: რას უნდა წარმოადგენდეს შემთხვევითი ფუნქციის განაწილების კანონი? ვიცით ერთი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი, არის ფუნქცია ერთი არგუმენტისა, ორი სიდიდის სისტემის განაწილების კანონი — ორი არგუმეტის ფუნქცია და ა. შ. ოღონდ პრაქტიკული გამოყენება, როგორც ალბათობრივი მახასიათებლებისა მრავალი არგუმენტიანი ფუნქციებისა იმდენად მოუხერხებელია, რომ სამი-ოთხი სიდიდეთა სისტემისათვისაც კი უარს ვამბობთ განაწილების კანონებით სარგებლობაზე და განვიხილავთ მხოლოდ რიცხვით მახასიათებლებს, რაც შეეხება შემთხვევითი ფუნქციის განაწილების კანონს, რომელიც არგუმენტთა აურაცხელი სიმრავლის ფუნქციაა, მაშინ ასეთი კანონი უკეთეს შემთხვევაში სუფთად ფორმალურად უნდა ჩავწეროთ, რომელიღაც სიმბოლური ფორმით, მსგავსი მახასიათებლის პრაქტიკული გამოყენება, ცხადია, სავსებით გამორიცხულია. ოღონდ, შეიძლება შემთხვევითი ფუნქციისათვის ავაგოთ რომელიღაც განაწილების კანონის ანალოგიური ალბათობითი მახასიათებლები. ამ მახასიათებელთა აგების იდეა ასეთია.

განვიხილოთ შემთხვევითი $X(t)$ სიდიდე — შემთხვევითი ფუნქციის კვეთი დროის t მომენტში (ნახ. 15.2.2). ამ შემთხვევით სიდიდეს, ცხადია, გააჩნია განაწილების კანონი, რომელიც ზოგად შემთხვევაში დამოკიდებულია t-საგან. აღვნიშნოთ იგი $f(x,t)$-თი. $f(x, t)$ ფუნქციას

ეწოდება შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის ე რ თ გ ა ნ ზ ო მ ი ლ ე ბ ი ა ნ ი განაწილების კანონი.

ცხადია, ფუნქცია $f(x, t)$ არ წარმოადგენს შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის სრულ ამომწურავ მახასიათებელს. მართლაც ეს ფუნქცია ახასი-



ნახ. 15.2.2.

ათებს მხოლოდ $X(t)=t$ განაწილების კანონს. მოცემულ ნებისმიერ t შემთხვევაში. იგი არ პასუხობს კითხვას შემთხვევითი $X(t)$ სიდიდეთა დამოკიდებულებაზე სხვადასხვა t-სათვის. ამ თვალსაზრისით შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის უფრო სრული მახასიათებელი ე. წ. განაწილების ო რ გ ა ნ ზ ო მ ი ლ ე ბ ი ა ნ ი კანონია:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2). \tag{15.2.2}$$

ეს — ორი შემთხვევითი $X(t_1)$, $X(t_2)$ სიდიდეთა სისტემის განაწილების კანონი, ე. ი. შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის ორი ნებისმიერი კვეთია. ოღონდ ეს მახასიათებელიც ზოგად შემთხვევაში არ არის მთლიანად ამომწურავი. კიდევ უფრო სრულმახასიათებელი იქნებოდა სამგანზომილებიანი კანონი:

$$f(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3). \tag{15.2.3}$$

ცხადია, თეორიულად შეიძლება უსასრულოდ გაგვედიდებინა არგუმენტთა რიცხვი და მიგვეღო შემთხვევითი ფუნქციის უფრო დაწვრილებით, უფრო ამომწურავი მახასიათებელი. მაგრამ ასე დიდი მახასიათებლებით ოპერაციების წარმოება, რომელიც დამოკიდებულია მრავალ არგუმენტზე უკიდურესად მოუხერხებელია, ამიტომ შემთხვევითი ფუნქციის განაწილების კანონების გამოკვლევისას, ჩვეულებრივ, კმაყოფილდებიან ზოგადი შემთხვევების განხილვით, სადაც შემთხვევითი ფუნქციის ზოგადი დახასიათებისათვის საკმარისია, მაგალითად, (15.2.2) ფუნქციათა ცოდნა (ე. წ. „პროცესები მერმექმედების გარეშე") შემთხვევითი ფუნქციათა თეორიის ამ ელემენტარულ გადმოცემის ფარგლებში ჩვენ სრულიადაც არ გამოვიყენებთ განაწილების კანონებს, არამედ დავკმაყოფილდებით შემთხვევით ფუნქციათა უმარტივესი მახასიათებლებით, რომლებიც შემთხვევით სიდიდეთა რიცხვითი მახასიათებლების ანალოგიურია.

ჩვენ მრავალი შემთხვევა გვქონდა დავრწმუნებულიყავით თუ როგორი დიდი მნიშვნელობა აქვთ ალბათობათა თეორიაში შემთხვევით სიდიდეთა ძირითად რიცხვით მახასიათებლებს: მათემატიკურ ლოდინს და დისპერსიას — ერთი შემთხვევითი სიდიდისათვის, მათემატიკურ ლოდინებს და კორელაციურ მატრიცას — შემთხვევით სიდიდეთა სისტემისათვის. ხელოვნება რიცხვითი მახასიათებლებით სარგებლობისა ისე, რომ შესაძლებლობისდა მიხედვით განზე დავტოვოთ განაწილების კანონები — საფუძველია გამოყენებით ალბათობის თეორიისა, თვით რიცხვითი მახასიათებლების აპარატი ფრიად მოქნილი და მძლავრია, რომელიც საშუალებას იძლევა შედარებით მარტივად ამოვხსნათ მრავალი პრაქტიკული ამოცანა.

სრულიად ანალოგიური აპარატით სარგებლობენ შემთხვევით ფუნქციათა თეორიაშიც. შემთხვევითი ფუნქციებისათვის ასევე შემოიტანება უმარტივესი ძირითადი მახასიათებლები, ანალოგიური შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლების და დადგინდება ამ მახასიათებლებზე მოქმედების წესები. ასეთი აპარატი აღმოჩნდება საკმარისი მრავალი პრაქტიკული ამოცანის ამოსახსნელად.

შემთხვევით სიდიდეთა რიცხვითი მახასიათებლებისაგან განსხვავებით, რომლებიც განსაზღვრული რიცხვებია, შემთხვევითი ფუნქციის მახასიათებლები ზოგად შემთხვევაში არა რიცხვები არამედ ფუნქციებია.

შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი განისაზღვრება შემდეგნაირად: განვიხილოთ შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის კვეთი ფიქსირებული t-სათვის. ამ კვეთში ჩვენ გვაქვს ჩვეულებრივი შემთხვევითი სიდიდე; განვსაზღვროთ მისი მათემატიკური ლოდინი ცხადია ზოგად შემთხვევაში იგი დამოკიდებულია t-საგან ე. ი. თვით t ცვლადის, რომელიღაც ფუნქციაა:

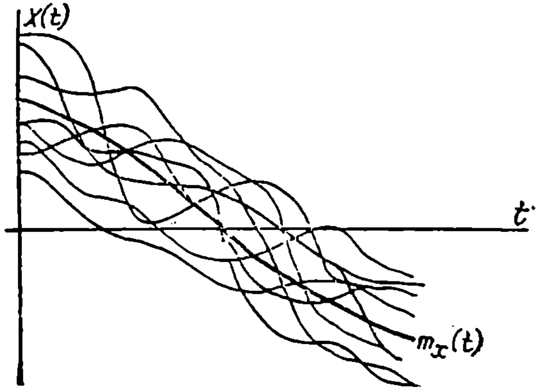
$$m_x(t) = M[X(t)]. \tag{15.3.1}$$

ამგვარად. *შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება არა შემთხვევით $m_x(t)$ ფუნქციას, რომელიც t არგუმენტის ყოველი მნიშვნელობისას შემთხვევითი ფუნქციის შესაბამისი კვეთის მათემატიკური ლოდინის ტოლია.*

თვით შემთხვევითი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი არის რომელიღაც *საშუალო ფუნქცია*, რომლის ირგვლივაც ხდება შემთხვევითი ფუნქციის კონკრეტული რეალიზაციების ვარირება.

15.3.1 ნახ-ზე წვრილი ხაზებით ნაჩვენებია შემთხვევითი ფუნქციის რეალიზაციები, მსხვილი ხაზით—მისი მათემატიკური ლოდინი. ანალოგიურად განისაზღვრება შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსია.

შემთხვევით $X(t)$ ფუნქციის დისპერსია ეწოდება არა შემთხვევით $D_x(t)$ ფუნქციას, რომლის მნიშვნელობა ყოველი t-სათვის შემთხვევითი ფუნქციის შესაბამისი კვეთის დისპერსიის ტოლია.



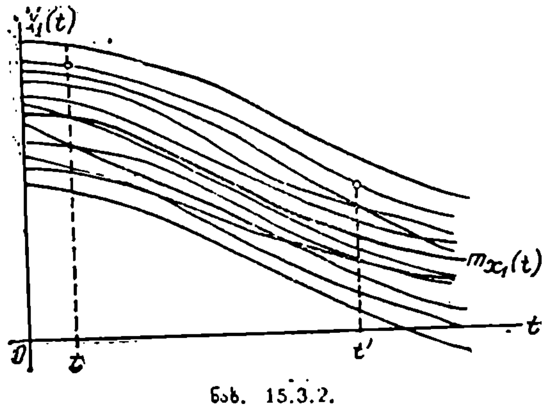
ნახ. 15.3.1.

$$D_x(t)=D[X(t)]. \qquad (15.3.2)$$

ყოველ t-სათვის შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსია ახასიათებს შემთხვევითი ფუნქციის შესაძლო რეალიზაციათა გაფანტვას, საშუალოს მიმართ, სხვა სიტყვებით, შემთხვევითი ფუნქციის „შემთხვევითობის ხარისხს", ცხადია, $D_x(t)$ არის არაუარყოფითი ფუნქცია, მისგან კვადრატული ფესვის ამოღებით მივიღებთ $\sigma_x(t)$ ფუნქციას — შემთხვევითი ფუნქციის საშუალო კვადრატულ გადახრას.

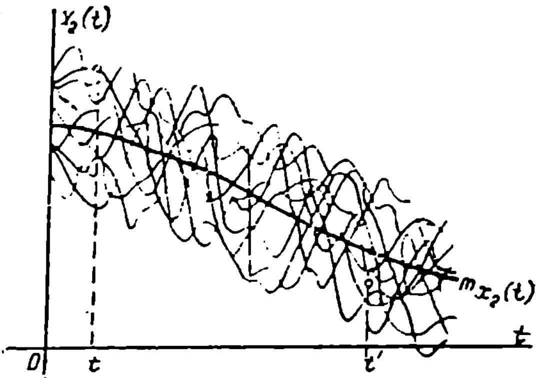
$$\sigma_x(t)=\sqrt{D_x(t)}. \qquad (15.3.3)$$

მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია შემთხვევითი ფუნქციის მნიშვნელოვანი მახასიათებლებია: ოღონდ შემთხვევითი ფუნქციის ძირითად თავისებურებათა აღსაწერად ეს მახასიათებლები არ არის საკმარისი. ამაში დასარწმუნებლად, განვიხილოთ ორი შემთხვევითი $X_1(t)$ და $X_2(t)$ ფუნქცია, რომლებიც თვალსაჩინოდაა გამოსახული რეალიზაციათა ოჯახებით (15.3.2 და 15.3.3 ნახაზზე).



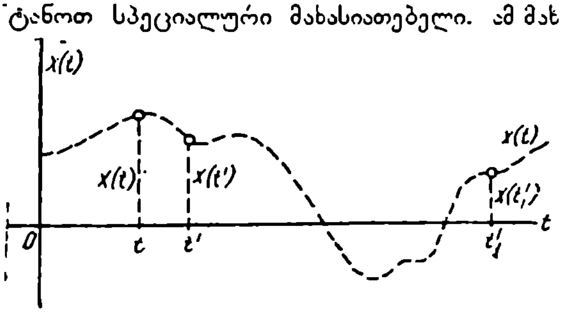
ნახ. 15.3.2.

შემთხვევით $X_1(t)$ და $X_2(t)$ ფუნქციებს თითქმის ერთნაირი მათემატიკური ლოდინი და დისპერსიები აქვთ, ოღონდ, ამ შემთხვევით ფუნქციათა ხასიათი მკვეთრად განსხვავდება. შემთხვევით $X_1(t)$ ფუნქციის (ნახ. 15.3.2) დამახასიათებელია მდოვრედ, თანდათანობითი, ცვალებადობა. თუ კი, მაგალითად, t წერტილში შემთხვევით $X_1(t)$ ფუნქციამ მიიღო მნიშვნელობა, რომელიც შესამჩნევად აღემატება საშუალოს, მაშინ დიდია ალბათობა იმისა, რომ იგი t' წერტილშიც აგრეთვე მიიღებს საშუალოზე მეტ მნიშვნელობას. შემთხვევითი $X_1(t)$ ფუნქციისათვის დამახასიათებელია მკაფიოდ გამოსახული დამოკიდებულება მათ მნიშვნელობებს შორის t-ს სხვადასხვა მნიშვნელობის შემთხვევაში. პირიქით, შემთხვევით $X_2(t)$ ფუნქციას (ნახ. 15.3.3) აქვს მკვეთრად მერყევი ხასიათი, უწესრიგო რყევებით. ასეთი შემთხვევითი ფუნქციისათვის დამახასიათებელია მის მნიშვნელობებს შორის დამოკიდებულების სწრაფი მილევა მათ შორის t მანძილის გადიდების მიხედვით.



ნახ. 15.3.3.

ცხადია, ორივე შემთხვევითი პროცესის შინაგანი სტრუქტურა სრულიად სხვადასხვაა, მაგრამ ეს განსხვავება ვერ აისახება ვერც მათემატიკური ლოდინით, ვერც დისპერსიით: მის აღსაწერად აუცილებელია შევიტანოთ სპეციალური მახასიათებელი. ამ მახასიათებელს ეწოდება კორელაციური ფუნქცია (სხვანაირად— ავტოკორელაციური ფუნქცია). კორელაციური ფუნქცია ახასიათებს დამოკიდებულებას შემთხვევითი ფუნქციის კვეთებს შორის, რომელიც მიეკუთვნება სხვადასხვა t-ს, დავუშვათ გვაქვს შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია (ნახ. 15.3.4); განვიხილოთ



ნახ. 15.3.4.

მისი ორი კვეთი, რომელიც მიეკუთვნება სხვადასხვა t და t' მომენტებს, ე. ი. ორი შემთხვევითი სიდიდე $X(t)$ და $X(t')$. ცხადია, რომ

t და t' ახლო მნიშვნელობებისას $X(t)$ და $X(t')$ დაკავშირებული არიან მჭიდრო დამოკიდებულებით: თუ $X(t)$ სიდიდემ მიიღო რომელიღაც მნიშვნელობა, მაშინ $X(t')$ სიდიდე დიდი ალბათობით მიიღებს მნიშვნელობას, რომელიც ახლოს არის მასთან. ცხადია აგრეთვე, რომ t და t' კვეთებს შორის ინტერვალის გადიდებით $X(t)$ და $X('t)$ სიდიდეთა დამოკიდებულება საერთოდ უნდა შემცირდეს. $X(t)$ და $X('t)$ სიდიდეთა დამოკიდებულების ხარისხი შეიძლება მნიშვნელოვან წილად დახასიათებულ იქნას მათი კორელაციური მომენტით: ცხადია, იგი ორი t და t' არგუმენტთა ფუნქციაა.

ამგვარად, შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია ეწოდება ორი არგუმენტის არაშემთხვევით $K_x(t, t')$ ფუნქციას, რომელიც t და t' მნიშვნელობათა წყვილისას ტოლია შემთხვევითი ფუნქციის შესაბამისი ყოველი კვეთების კორელაციური მომენტისა:

$$K_x(t,t') = M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')]. \tag{15.3.4}$$

დავუბრუნდეთ შემთხვევითი $X_1(t)$ და $X_2(t)$ ფუნქციათა მაგალითებს, (ნახ. 15.3. 2 და 15.3.3). ეხლა ვხედავთ, რომ შემთხვევით $X_1(t)$ და $X_2(t)$ სიდიდეებს ერთნაირი მათემატიკური ლოდინისას და დისპერსიისას აქვთ სავსებით სხვადასხვა კორელაციური ფუნქციები. შემთხვევითი $X_1(t)$ სიდიდის კორელაციური ფუნქცია ნელა მცირდება (t, t') შორის შუალედის გადიდების მიხედვით: პირიქით, შემთხვევითი $X_2(t)$ ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია სწრაფად მცირდება ამ შუალედის გადიდების მიხედვით.

გამოვარკვიოთ რად გადაიქცევა კორელაციური ფუნქცია $K_x(t, t')$ როცა მისი არგუმენტები თანაემთხვევიან. თუ დავუშვებთ $t=t'$, მივიღებთ:

$$K_x(t,t) = M[(\overset{\circ}{X}(t))^2] = D_x(t), \tag{15.3.5}$$

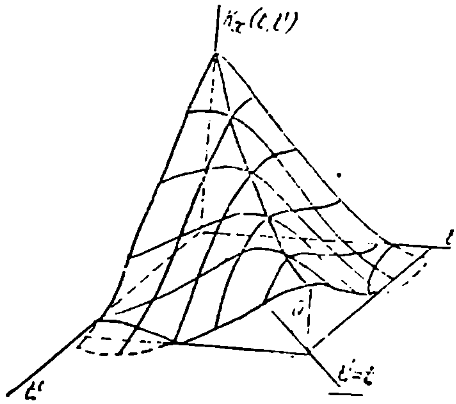
როცა $t'=t$ კორელაციური ფუნქცია გადაიქცევა შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსიად.

ამგვარად, დისპერსიის აუცილებლობა, როგორც შემთხვევითი ფუნქციის ცალკეული მახასიათებლისა გამოირიცხება: შემთხვევითი ფუნქციის ძირითად მახასიათებლად საკმარისია განვიხილოთ მისი მათემატიკური ლოდინი და კორელაციური ფუნქცია ვინაიდან ორი შემთხვევითი სიდიდის კორელაციური მომენტი არ არის დამოკიდებული მიმდევრობისაგან, რომლითაც ეს სიდიდეები განახლდებიან, ამიტომ კორელაციური ფუნქცია სიმეტრიულია თავისი არგუმენტების მიმართ, ე. ი. არგუმენტთა ადგილის შეცვლით არ იცვლება:

$$K_x(t, t') = K_x(t', t). \tag{15.3.6}$$

თუ კი კორელაციური $K_x(t, t')$ ფუნქციას გამოვსახავთ ზედაპირის სახით, მაშინ ეს ზედაპირი სიმეტრიული იქნება ვერტიკალური Q სიბრტყის მიმართ, რომელიც tOt' კუთხის ბისექტრისაზე გადის (ნახ. 15.3.5).

შევნიშნავთ, რომ კორელაციური ფუნქციის თვისებები ბუნებრივად გამომდინარეობენ შემთხვევით ფუნქციათა სისტემის კორელაციური მატრიცის თვისებებიდან, მართლაც, მიახლოებით შევცვლით $X(t)$ შემთხვევით ფუნქციას m შემთხვევით სიდიდეთა $X(t_1)$, $X(t_2), \ldots, X(t_m)$ სისტემით. m-ის გადიდებით და არგუმენტებს შორის შუალედების შესაბამისი შემცირებით სისტემის კორელაციური მატრიცა, რომელიც წარმოადგენს ცხრილს, ორ შესავალ ზღვარში გადადის ორ უწყვეტად ცვალებად არგუმენტის ფუნქციაში, რომელთაც გააჩნიათ ანალოგიური თვისებები.



ნახ. 15.3.5.

კორელაციური მატრიცის სიმეტრიულობის თვისება მთავარი დიაგონალის მიმართ გადადის კორელაციური ფუნქციის სიმეტრიულობაში (15.3.6). კორელაციური მატრიცის მთავარ დიაგონალზე დგანან შემთხვევით სიდიდეთა დისპერსიები; ანალოგიურად როცა $t'=t$ კორელაციური ფუნქცია $D_x(t)$ დისპერსიად გადაიქცევა.

პრაქტიკულად, თუ საჭიროა $X(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქციის აგება, შეიძლება მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

იღებენ არგუმენტთა თანაბრად დაცილებულ მწკრივს და აგებენ შემთხვევით სიდიდეთა მიღებული სისტემის კორელაციურ მატრიცას. ეს მატრიცა არის არა სხვა რამე თუ არა ცხრილი კორელაციური ფუნქციის მნიშვნელობებისა არგუმენტთა სწორკუთხიანი ბადისათვის (t, t') სიბრტყეზე. შემდეგ, ინტერპოლაციის ანდა აპროქსიმაციის გზით შეიძლება ავაგოთ ორი არგუმენტის ფუნქცია $K_x(t, t')$.

ნაცვლად კორელაციური $K_x(t, t')$ ფუნქციისა შეიძლება ვისარგებლოთ **ნორმირებული კორელაციური ფუნქციით**:

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t', t)}{\sigma_x(t)\sigma_x(t')}, \qquad (15.3.7)$$

რომელიც $X(t)$ და $X(t')$ სიდიდეთა კორელაციის კოეფიციენტია. ნორმირებული კორელაციური ფუნქცია ანალოგიურია შემთხვევით სიდი-

დეთა სისტემის ნორმირებული კორელაციური მატრიცისა, როცა $t'=t$ ნორმირებული კორელაციური ფუნქცია ერთის ტოლია:

$$r_x(t, t)=\frac{K_x(t, t)}{[\sigma_x(t)]^2}=\frac{D_x(t)}{[\sigma_x(t)]^2}=1. \tag{15.3.8}$$

გავარკვიოთ როგორ იცვლებიან შემთხვევითი ფუნქციის ძირითადი მახასიათებლები მათზე ელემენტარული ოპერაციების წარმოებისას: არა შემთხვევით შესაკრების მიმატებისას და არა შემთხვევით თანამამრავლზე გადამრავლებისას. ეს არა შემთხვევითი შესაკრებები და თანამამრავლები შეიძლება იყოს მუდმივი სიდიდეები, აგრეთვე ზოგად შემთხვევაში t-ს ფუნქციებიც.

დავუმატოთ შემთხვევით $X(t)$ ფუნქციას არა შემთხვევითი $\varphi(t)$ შესაკრები. მივიღებთ ახალ შემთხვევით ფუნქციას:

$$Y(t)=X(t)+\varphi(t). \tag{15.3.9}$$

მათემატიკურ ლოდინთა შეკრების თეორემის მიხედვით:

$$m_y(t)=m_x(t)+\varphi(t). \tag{15.3.10}$$

ე. ი. შემთხვევითი ფუნქციისათვის არაშემთხვევით შესაკრების მიმატებისას მის მათემატიკურ ლოდინს ემატება იგივე არა შემთხვევითი შესაკრები.

განვსაზღვროთ შემთხვევითი $Y(t)$ ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია:

$$\begin{aligned}
K_y(t, t')&=M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')]=\\
&=M[(Y(t)-m_y(t))(Y(t')-m_y(t'))]=\\
&=M[(X(t)+\varphi(t)-m_x(t)-\varphi(t))(X(t')+\varphi(t')-m_x(t')-\varphi(t'))]=\\
&=M[(X(t)-m_x(t))(X(t')-m_x(t'))]=K_x(t, t'),
\end{aligned} \tag{15.3.11}$$

ე. ი. შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია არაშემთხვევითი შესაკრების მიმატებით არ იცვლება.

შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია გადავამრავლოთ არაშემთხვევით თანამამრავლზე:

$$Y(t)=\varphi(t)\,X(t). \tag{15.3.12}$$

არაშემთხვევით $\varphi(t)$ სიდიდის მათემატიკური ლოდინის ნიშნის გარეთ გატანით მივიღებთ:

$$m_y(t)=M[\varphi(t)X(t)]=\varphi(t)m_x(t), \tag{15.3.13}$$

ე. ი. შემთხვევითი ფუნქციის არაშემთხვევით თანამამრავლზე გადამრავლებით მისი მათე-

მატიკური ლოდინი მრავლდება იმავე თანამამრავლზე.

განვსაზღვროთ კორელაციური ფუნქცია:

$$K_y(t,\ t')=M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')]=M[(Y(t)-m_y(t)\ \ (Y(t')-m_y(t'))]=$$
$$=M[\varphi(t)\ \varphi(t')\ (X(t)-m_x(t)\ (X\ (t')-m_x(t'))]=$$
$$=\varphi(t)\varphi(t')K_x(t,\ t'), \qquad (15.3.14)$$

ე. ი. შემთხვევითი ფუნქციის $\varphi(t)$ არა შემთხვევით ფუნქციაზე გადამრავლებით, მისი კორელაციური ფუნქცია მრავლდება $\varphi(t)\ \varphi(t')$-ზე.

კერძოდ, როცა $\varphi(t)=c$ (არ არის დამოკიდებული t-საგან) კორელაციური ფუნქცია მრავლდება c^2-ზე. ვსარგებლობთ რა შემთხვევით ფუნქციათა გამოყვანილი თვისებებით, შეიძლება მთელ რიგ შემთხვევაში მნიშვნელოვნად გავამარტივოთ ოპერაციები მათზე. კერძოდ, როცა საჭიროა გამოვიკვლიოთ შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია ანდა დისპერსია, შეიძლება წინასწარ გადავიდეთ მისგან ე. წ. ცენტრირებულ ფუნქციაზე:

$$\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_x(t). \qquad (15.3.15)$$

ცენტრირებული ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი იგივურად ნულის ტოლია, ხოლო მისი კორელაციური ფუნქცია ემთხვევა შემთხვევით $X(t)$ ფუნქციის კორელაციურ ფუნქციას

$$K_{\overset{\circ}{x}}(t,\ t')=M]\overset{\circ}{X}(t)\,\overset{\circ}{X}(t')]=K_x(,\ (t,\ t'). \qquad (15.3\text{-}16)$$

შემთხვევით სიდიდეთა კორელაციურ თვისებებთან დაკავშირებული საკითხების კვლევისას, შემდგომში ყოველთვის გადავალთ შემთხვევითი ფუნქციიდან შესაბამის ცენტრირებულ ფუნქციებზე, აღვნიშნავთ რა მას ° ნიშნით ფუნქციის ნიშნის ზემოთ.

ზოგჯერ, გარდა დაცენტრებისა, გამოიყენება კიდევ შემთხვევითი ფუნქციის ნორმირება. ნორმირებული ეწოდება შემდეგი სახის შემთხვევით ფუნქციას:

$$X_N(t)=\frac{\overset{\circ}{X}(t)}{\sigma_x(t)}. \qquad (13.5.17)$$

ნორმირებული შემთხვევითი $X_N(t)$ ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია ტოლია

$$K_{xN}(t,\ t')=\frac{K_x(t,\ t')}{\sigma_x(t)\sigma_x(t')}=r_x(t,\ t'), \qquad (15.3.18)$$

ხოლო მისი დისპერსია ერთის ტოლია.

15.4. შემთხვევითი ფუნქციის მახასიათებლების ცდით განსაზღვრა

დავუშვათ შემთხვევით $X(t)$ ფუნქციაზე ნაწარმოებია n დამოუკიდებელი ცდა (დაკვირვებანი) და შედეგად მიღებულია შემთხვევითი ფუნქციის n რეალიზაციები (ნახ. 15.4.1)

საჭიროა მოვნახოთ შეფასებები შემთხვევითი ფუნქციის მახასიათებლებისათვის: მისი $m_x(t)$ მათემატიკური ლოდინის $D_x(t)$ დისპერსიისა და $K_x(t,t')$ კორელაციური ფუნქციისათვის.

ამისათვის განვიხილოთ შემთხვევით ფუნქციის მთელი რიგი კვეთები $t_1, t_2, \ldots, t_m$. დროის მომენტებისათვის და ჩავინიშნოთ დროის ამ მომენტებში ფუნქციის მიერ მიღებული მნიშვნელობანი.

თითოეულ $t_1, t_2, \ldots, t_m$ მომენტთაგანს შეესაბამება შემთხვევით ფუნქციის n მნიშვნელობანი, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ მნიშვნელობანი ჩვეულებრივ მოცემულ იქნება თანაბრად დაშორებული; ინტერვალის სიდიდე მომიჯნავე მნიშვნელობათა შორის შეირჩევა საექსპერიმენტო მრუდეების სახისაგან დამოკიდებით, ისე რომ შერჩეული წერტილების მიხედვით შესაძლებელი გახდეს მრუდთა ძირითადი სვლის აღდგენა. ხშირად ხდება, რომ t-ს მომიჯნავე მნიშვნელობებს შორის ინტერვალი მოიცემა მარეგისტრირებელი ხელსაწყოს მუშაობის სიხშირით დამუშავების ამოცანისაგან დამოუკიდებლად (მაგალითად, კინოაპარატის ტემპით).

$X(t)$ რეგისტრირებული მნიშვნელობანი შეიტანება ცხრილში, რომლის სტრიქონი შეესაბამება გარკვეულ რეალიზაციას, ხოლო სვეტების რიცხვი არგუმენტის საყრდენ მნიშვნელობათა რიცხვის ტოლია (ცხრ. 15.4.1)

ცხრილი 15.4.1.

$X(t)$ \ t	t_1	t_2	.	t_k	.	t_l	.	t_m
$x_1(t)$	$x_1(t_1)$	$x_1(t_2)$	.	$x_1(t_k)$	.	$x_1(t_l)$	.	$x_1(t_m)$
$x_2(t)$	$x_2(t_1)$	$x_2(t_2)$		$x_2(t_k)$	.	$x_2(t_l)$	.	$x_2(t_m)$
			.		.	.	.	
$x_i(t)$	$x_i(t_1)$	$x_i(t_2)$	.	$x_i(t_k)$	.	$x_i(t_l)$	.	$x_i(t_m)$
.			.		.	.	.	
$x_n(t)$	$x_n(t_1)$	$x_n(t_2)$	.	$x_n(t_k)$	.	$x_n(t_l)$	.	$x_n(t_m)$

15.4.1 ცხრილში i-ურ სტრიქონში მოთავსებულია i-ურ რეალიზაციისას (i-ურ ცდისას) არგუმენტის $t_1, t_2, \ldots, t_m$ მნიშვნელობებისათვის შემთხვე-

ვით ფუნქციათა მნიშვნელობანი. სიმბოლოთი $x_i(t_k)$ აღნიშნულია t_k მომენტში i-ური რეალიზაციის შესაბამისი მნიშვნელობა.

მიღებული მასალა m შემთხვევით სიდიდეთა

$$X(t_1),\ X(t_2),\dots,\ X(t_m),$$

სისტემაზე n ცდის შედეგებია და დამუშავდება სავსებით (იხ. პარაგრაფი 14.3.) ანალოგიურად. უწინარეს ყოვლისა მოვნახოთ მათემატიკური ლოდინთათვის შეფასებები ფორმულით

$$\tilde{m}_x(t_k)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i(t_k)}{n}, \tag{15.4.1}$$

შემდეგ—დისპერსიისათვის

$$\tilde{D}_x(t_k)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}[x_i(t_k)-\tilde{m}_x(t_k)]^2}{n-1}. \tag{15.4.2}$$

და, ბოლოს, კორელაციური მომენტებისათვის

$$\tilde{K}_x(t_k, t_l)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}[x_i(t_k)-\tilde{m}_x(t_k)][x_i(t_l)-\tilde{m}_x(t_l)]}{n-1}, \tag{15.4.3}$$

მთელ რიგ შემთხვევებში მოხერხებული ხდება დისპერსიების და კორელაციური მომენტების შეფასებათა გამოთვლისათვის ვისარგებლოთ საწყისი და ცენტრალური მომენტებს შორის კავშირით და გამოვთვალოთ ისინი ფორმულებით.

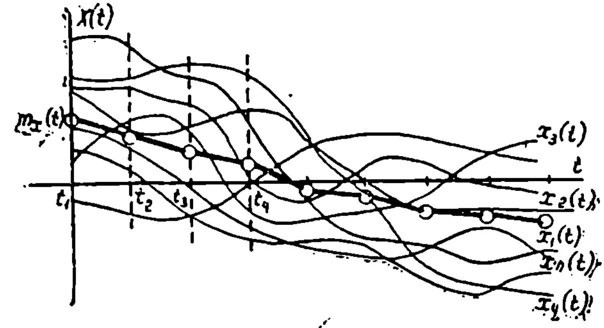
$$\tilde{D}_x(t_k)=\left[\frac{\sum\limits_{i=2}^{n}[x_i(t_k)]^2}{n}-\tilde{m}_x(t_k)]^2\right]\frac{n}{n-1}; \tag{15.4.4}$$

$$\tilde{K}_x(t_k, t_l)=\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i(t_k)x_i(t_l)}{n}-\tilde{m}_x(t_k)\tilde{m}_x(t_l)\right]\frac{n}{n-1}. \tag{15.4.5}$$

ფორმულათა უკანასკნელი ვარიანტებით სარგებლობისას, თავიდან რომ ავიცილოთ მახლობელ რიცხვთა სხვაობა, რეკომენდებულია წინას-

წარ გადავიტანოთ ათვლის საწყისი ორდინატთა ღერძზე მათემატიკურ ლოდინთან რაც შეიძლება ახლოს.

ამ მახასიათებლების გამოთვლის შემდეგ, შეიძლება $m_x(t_1)$, $m_x(t_2)$, $\ldots, m_x(t_m)$ მნიშვნელობათა რიგით სარგებლობა და $m_x(t)$ დამოკიდებულების აგება.



ნახ. 15.4.1.

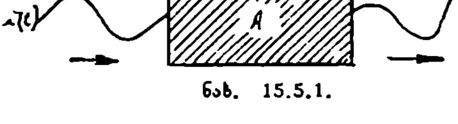
ანალოგიურად აიგება $D_x(t)$ დამოკიდებულებაც. ორი არგუმენტის $\tilde{K}_x(t, t')$ ფუნქცია აიგება მისი მნიშვნელობათა მიხედვით. წერტილთა სწორკუთხოვან ბადეში. საჭიროების შემთხვევაში ყველა ამ ფუნქციის აპროქსიმაცია ხდება, რომელიღაც ანალიზური გამოსახულებებით.

15.5. გარდაქმნილ შემთხვევით ფუნქციათა მახასიათებლების განსაზღვრის მეთოდები ამოსავალ (საწყის) შემთხვევით ფუნქციათა მახასიათებლების მიხედვით

წინა პარაგრაფში ცდების საშუალებით გავეცანით მახასიათებლების უშუალოდ განსაზღვრის მეთოდს. ასეთი მეთოდი ყოველთვის არ გამოიყენება. ჯერ ერთი-სპეციალურ ცდათა დაყენება, რომლებიც განკუთვნილია ჩვენთვის საინტერესო შემთხვევით ფუნქციათა გამოსაკვლევად, შეიძლება აღმოჩნდეს რთული და ძვირად ღირებული, მეორეხშირად გვჭირდება გამოვიკვლიოთ შემთხვევითი ფუნქციები, რომლებიც ახასიათებენ ხელსაწყოთა შეცდომებს, სამიზნე სამარჯვებს, მართვის სისტემებს და ა. შ., რომლებიც ჯერ კიდევ არ არსებობს და მხოლოდ დაპროექტების ან დამუშავების პროცესშია. ამ დროს ჩვეულებრივ ასეთი შეცდომების გამოკვლევა ხდება სახელდობრ იმისათვის, რომ რაციონალურად შევარჩიოთ სისტემათა კონსტრუქციული პარამეტრები, იმდაგვარად, რომ მათ გამოიწვიონ მინიმალური შეცდომა. ცხადია, რომ ამ დროს შემთხვევითი ფუნქციის უშუალო გამოკვლევა, რომელიც სისტემის მუშაობას ახასიათებს, მიზანშეწონილი არ არის, ხოლო მთელ რიგ შემთხვევებში შეუძლებელია. ასეთ შემთხვევებში ძირითად სამუშაო მეთოდებად გამოიყენება არა პირდაპირი, არამედ

შემთხვევითი ფუნქციის კვლევის არაპირდაპირი მეთოდები: მსგავსი არაპირდაპირი მეთოდებით უკვე ვსარგებლობდით შემთხვევით სიდიდეთა კვლევისას. ჩვენი კურსის 10.11.12 — თავები მიეძღვნა შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების კანონების და რიცხვითი მახასიათებლების განსაზღვრას არაპირდაპირი, სხვა მასთან დაკავშირებულ შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების კანონებისა და რიცხვითი მახასიათებლების მიხედვით. ვსარგებლობთ, რა სავსებით ანალოგიური მეთოდებით, შეიძლება განვსაზღვროთ არაპირდაპირ შემთხვევით ფუნქციათა მახასიათებლები სხვა მასთან დაკავშირებულ შემთხვევით ფუნქციათა მახასიათებლების მიხედვით. სწორედ ასეთი არაპირდაპირი მეთოდების განვითარება წარმოადგენს შემთხვევით ფუნქციათა გამოყენებითი თეორიის შინაარსს,

შემთხვევით ფუნქციათა არაპირდაპირი გამოკვლევა პრაქტიკაში ჩვეულებრივ წამოიჭრება შემდეგი ფორმით. გვაქვს რომელიღაც დინამიკური A სისტემა; „დინამიკურ სისტემის" ქვეშ გვესმის ნებისმიერი ხელსაწყო, სამიზნე, საანგარიშო გადამწყვეტი მექანიზმი, ავტომატური მართვის სისტემა და ა. შ. ეს სისტემა შეიძლება იყოს მექანიკური, ელექტრული ანდა შეიცავდეს სხვა რომელიმე ელემენტებს. სისტემის მუშაობას წარმოვიდგენთ შემდეგნაირად: სისტემის შესავალში შედიან განუწყვეტლივ რომელიღაც შემავალი მონაცემები: სისტემა გადაამუშავებს მას და განუწყვეტლივ გამოსცემს რომელიღაც შედეგს. შევთანხმდეთ სისტემის შესასვლელში შემავალ მონაცემებს დავარქვათ ზემოქმედება, ხოლო გამომავალ შედეგს ამ ზემოქმედებაზე სისტემის „რეაქცია". ზემოქმედება შეიძლება იყოს მართვის სისტემებზე ცვლადი ძაბვები; რომელიღაც ობიექტების კუთხური წრფივი კოორდინატები, სიგნალები ან კომანდები, და ა. შ. ასევე სისტემის რეაქციაც, შეიძლება გამომუშავდეს ამა თუ იმ ფორმით: ძაბვების, კუთხურ გადაადგილებათ და ა. შ., სახით. მაგალითად, საჰაერო სროლისას ზემოქმედებაა მოძრავი მიზნის კუთხური კოორდინატია, რომელიც უწყვეტად იზომება თვალთვალის პროცესში, ხოლო რეაქციად — წინსწრების კუთხე. განვიხილოთ ყველაზე მარტივი შემთხვევა: როცა A სისტემის შესავალში მიეწოდება მხოლოდ ერთი ზემოქმედება, რომელიც დროის $x(t)$ ფუნქციაა; ამ ზემოქმედებაზე სისტემის რეაქცია არის დროის მეორე $y(t)$ ფუნქცია. A სისტემის მუშაობის სქემა პირობით



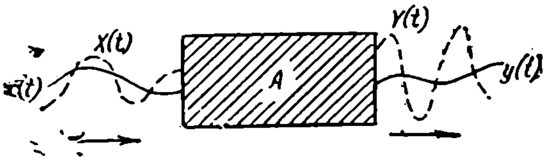
ნახ. 15.5.1.

გამოსახულია 15.5.1 ნახაზზე. ვიტყვით, რომ A სისტემა შემავალ ზემოქმედებაზე ანხორციელებს რომელიღაც გარდაქმნას, რომლის შედეგა-

და ფუნქცია $x(t)$ გარდაიქმნება სხვა $y(t)$ ფუნქციად. ამ გარდაქმნას სიმბოლურად ჩავწერთ:

$$y(t)=A\{x(t)\}. \tag{15.5.1}$$

გარდაქმნა შეიძლება იყოს ნებისმიერი სახისა და ნებისმიერი სირთულის. მაგალითად, ყველაზე მარტივ შემთხვევებში, არის გადამრავლება მოცემულ მამრავლზე (გამაძლიერებლები, გამამრავლებელი მანქანები), გაწარმოება ანდა ინტეგრირება (მადიფერენციალებელი და მაინტეგრირებელი მოწყობილობანი). ოღონდ პრაქტიკაში სისტემები, რომლებიც სუფთა სახის ასეთ უმარტივეს გარდაქმნებს ანხორციელებენ, თითქმის არ გვხვდება; როგორც წესი, სისტემის მუშაობა აღიწერება დიფერენციალური განტოლებებით და გარდაქმნა დაიყვანება დიფერენციალური განტოლების ამოხსნაზე, რომელიც აკავშირებს $x(t)$ ზემოქმედებას $y(t)$ რეაქციასთან.



ნახ. 15.5.2.

დინამიკური სისტემის გამოკვლევისას პირველ რიგში წყდება ძირითადი ამოცანა: მოცემული $x(t)$ ზემოქმედებით განვსაზღვროთ სისტემის $y(t)$ რეაქცია. ოღონდ სისტემის სრული გამოკვლევისა და მისი ტექნიკურ თვისებათა შეფასებისას ასეთი ელემენტარული მიდგომა საკმარისი არ არის. მართლაც $x(t)$ ზემოქმედება არასდროს არ შედის სისტემის შესასვლელში წმინდა სახით: იგი ყოველთვის დამახინჯებულია რომელიღაც შემთხვევითი შეცდომებით (შეშფოთებებით), რომლის შედეგადაც სისტემაზე ფაქტიურად ზემოქმედებას ახდენს არა მოცემული $x(t)$ ფუნქცია, არამედ შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია; ამის შესაბამისად სისტემა რეაქციის სახით გამოიმუშავებს შემთხვევით $Y(t)$ ფუნქციას, რომელიც აგრეთვე განსხვავებულია თეორიული $y(t)$ რეაქციისაგან (15.5.2). ბუნებრივად იბადება კითხვა: როგორ უნდა შეირჩეს პარამეტრები სისტემისა იმისათვის რომ ეს დამახინჯებანი გახდეს მინიმალური?

მსგავსი ამოცანების ამოხსნა არ შეიძლება მიღებულ იქნას ალბათობათა კლასიკური თეორიის მეთოდებით; ერთადერთ შესაფერის მათემატიკურ აპარატს ამ მიზნისათვის წარმოადგენს შემთხვევით ფუნქციათა თეორიის აპარატი.

ზემოთ დასმული ორი ამოცანიდან, ბუნებრივია, უფრო მარტივია პირველი პირდაპირი ამოცანა. ჩამოვაყალიბოთ იგი შემდეგნაირად: დინამიკური A სისტემის შესავალში შემოდის შემთხვევითი $X(t)$

ფუნქცია; სისტემა ახდენს მის ცნობილ გარდაქმნას, რის შედეგადაც სისტემის გამოსასვლელში მიიღება შემთხვევითი ფუნქცია:

$$Y(t)=A[X(t)]. \tag{15.5.2}$$

ცნობილია შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის მახასიათებლები: მათემატიკური ლოდინი და კორელაციური ფუნქცია. საჭიროა მოვნახოთ შემთხვევითი $Y(t)$ ფუნქციის ანალოგიური მახასიათებლები, მოკლედ დინამიკური სისტემის შესავალში შემთხვევითი ფუნქციის მოცემული მახასიათებლების მიხედვით მოვნახოთ შემთხვევითი ფუნქციის მახასიათებლები გამოსასვლელში. დასმული ამოცანა შეიძლება ამოხსნილი იქნას სავსებით ზუსტად ერთი კერძო, მაგრამ პრაქტიკისათვის მეტად მნიშვნელოვან შემთხვევაში: როდესაც A გარდაქმნა ეკუთვნის ე. წ. *წრფივ გარდაქმნათა* კლასს და შესაბამისად A სისტემა მიეკუთვნება *წრფივ სისტემათა* კლასს.

ამ ცნებების შინაარსი განმარტებულ იქნება მომდევნო პარაგრაფში.

15.6. წრფივი და არაწრფივი ოპერატორები. დინამიკური სისტემის ოპერატორი

შემთხვევით ფუნქციათა გარდაქმნების თეორიის გადმოცემისას ვისარგებლებთ მათემატიკასა და ტექნიკაში ფართოდ გამოყენებულ *ოპერატორის* ცნებით.

ოპერატორის ცნება წარმოადგენს ფუნქციის ცნების განზოგადოებას, როცა ვამყარებთ ორ y და x ცვლადებს შორის ფუნქციონალურ კავშირს, ვწერთ:

$$y=f(x), \tag{15.6.1}$$

მაშინ f სიმბოლოს ქვეშ გვესმის წესი, რომლის მიხედვით x-ის მოცემულ მნიშვნელობას შეუსაბამებს y-ის სრულიად განსაზღვრულ მნიშვნელობას. ნიშანი f არის სიმბოლო რომელიღაც *გარდაქმნისა*, რომელსაც უნდა დავუქვემდებაროთ x სიდიდე, რომ მივიღოთ y. ამ გარდაქმნის შესაბამისი სახის ფუნქციები შეიძლება წრფივი ან არა წრფივი იყოს, ალგებრული, ტრანსცენდენტული და ა. შ.

მათემატიკაში ანალოგიური ცნებები და შესაბამისი სიმბოლოები გამოიყენება იმ შემთხვევებშიც, როდესაც გარდაქმნას ექვემდებარება არა სიდიდეები, არამედ ფუნქციები.

განვიხილოთ, რომელიღაც ფუნქცია $x(t)$ და დავადგინოთ გარკვეული A წესი, რომლის თანახმადაც $x(t)$ ფუნქცია გარდაიქმნება მეორე $y(t)$ ფუნქციად. ჩავწეროთ ეს გარდაქმნა შემდეგი სახით:

$$y(t)=A\{x(t)\}. \tag{15.6.2}$$

ასეთ გარდაქმნათა მაგალითად შეიძლება ჩავთვალოთ, გაწარმოება

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}, \tag{15.6.3}$$

ინტეგრირება

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau, \tag{15.6.4}$$

A წესს, რომლის თანახმადაც ფუნქცია $x(t)$ გარდაიქმნება $y(t)$ ფუნქციად, ჩვენ დავარქმევთ ოპერატორს; მაგალითად, ჩვენ ვიტყვით: გაწარმოების ოპერატორი, ინტეგრირების ოპერატორი, დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნის ოპერატორი და ა.შ.

განვსაზღვრეთ რა ოპერატორი, განვიხილეთ მხოლოდ $x(t)$ ფუნქციის გარდაქმნა იმავე t არგუმენტის სხვა y ფუნქციაში. უნდა შევნიშნოთ, რომ არგუმენტის ასეთი შენარჩუნება ოპერატორის განსაზღვრისას სრულიადაც არ წარმოადგენს აუცილებელს: ოპერატორს შეუძლია გარდაქმნას $x(t)$ ფუნქცია მეორე არგუმენტის y (s) ფუნქციად, მაგალითად:

$$y(s)=\int_a^b \varphi(t,s)\ \ x(t)dt, \tag{15.6.5}$$

სადაც $\varphi(t,\ s)$— რომელიღაც ფუნქცია, რომელიც გარდა t არგუმენტისა, კიდევ s პარამეტრზეა დამოკიდებული.

მაგრამ რადგან დინამიკურ სისტემათა შეცდომათა ანალიზისას ყველაზე ბუნებრივი არგუმენტია t დრო, ჩვენ დავკმაყოფილდებით ოპერატორით, რომელიც გარდაქმნის t არგუმენტის ერთ ფუნქციას, იმავე არგუმენტის სხვა ფუნქციად.

თუკი დინამიკური სისტემა გარდაქმნის მის შესასვლელში შემომავალ $x(t)$ ფუნქციას $y(t)$ ფუნქციად:

$$y(t)=A\,\{x(t)\}.$$

მაშინ A ოპერატორს ეწოდება **დ ი ნ ა მ ი კ უ რ ი ს ი ს ტ ე მ ი ს ო პ ე რ ა ტ ო რ ი**,

უფრო ზოგად შემთხვევაში სისტემის შემოსასვლელში შემოდის არა ერთი, არამედ რამდენიმე ფუნქცია, ამნაირადვე სისტემის გამოსასვლელში შეიძლება მივიღოთ რამდენიმე ფუნქცია, ამ შემთხვევაში სისტემის ოპერატორი ფუნქციათა ერთ ერთობლიობას მეორედ გარდაქმნის. ოღონდ გადმოცემის სიმარტივისათვის აქ განვიხილავთ ერთი ფუნქციის მეორედ გარდაქმნის ყველაზე ელემენტარულ შემთხვევას.

გარდაქმნები ან ოპერატორები გამოყენებული ფუნქციებზე შეიძლება სხვადასხვა ტიპის იყოს. პრაქტიკისათვის ყველაზე მნიშვნელოვანია ე. წ. წ რ ფ ი ვ ო პ ე რ ა ტ ო რ თ ა კლასი. ოპერატორს ეწოდება წრფივი ერთგვაროვანი, თუ მას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. ფუნქციის ჯამზე ოპერატორი შეიძლება გამოყენებული იქნას წევრ-წევრად.

$$L\{x_1(t)+x_2(t)\}=L\{x_1(t)\}+L\{x_2(t)\}; \qquad (15.6.6)$$

2) მუდმივი სიდიდე შეიძლება გამოვიტანოთ ოპერატორის ნიშნის გარეთ

$$L\{cx(t)\}=cL\{x(t)\}. \qquad (15.6.7)$$

მეორე თვისებიდან, სხვათაშორის, გამოდის, რომ წრფივი ერთგვაროვანი ოპერატორისათვის მართებულია თვისება

$$L\{0\}=0, \qquad (15.6.8)$$

ე. ი. ნულოვან შემსვლელ ზემოქმედებაზე სისტემის რეაქცია ნულის ტოლია.

წრფივი ერთგვაროვანი ოპერატორების მაგალითები:

1) გაწარმოების ოპერატორი:

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt};$$

2) იპტეგრირების ოპერატორი:

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)\,\varphi(\tau)d\tau$$

3) გამრავლების ოპერატორი გარკვეულ $\varphi(t)$ ფუნქციაზე:

$$y(t)=A\{x(t)\}.$$

4) მოცემული $\varphi(t)$ „წონით“ ინტეგრირების ოპერატორი

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

და ა. შ.

გარდა წრფივი ერთგვაროვანი ოპერატორებისა არსებობენ აგრეთვე წრფივი არაერთგვაროვანი ოპერატორები.

ოპერატორს ეწოდება წრფივი არაერთგვაროვანი, თუ იგი არის წრფივი ერთგვაროვანი ოპერატორისა და რომელიღაც სავსებით განსაზღვრული $\varphi(t)$ ფუნქციის ჯამი:

$$L\{x(t)\}=L_0\{x(t)\}+\varphi(t), \qquad (15.6.9)$$

სადაც L_0 — წრფივი ერთგვაროვანი ოპერატორია.

მაგალითები წრფივი არაერთგვაროვანი ოპერატორებისა:

1) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + \varphi(t)$,

2) $y(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\varphi(\tau)d\tau + \varphi_1(t)$,

3) $y(t) = \varphi_1(t)x(t) + \varphi_2(t)$.

სადაც $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — სავსებით განსაზღვრული ფუნქციებია, ხოლო $x(t)$ ოპერატორის მიერ გარდასაქმნელი ფუნქციაა.

მათემატიკაში და ტექნიკაში ფართოდ გამოიყენება ოპერატორების ჩაწერის პირობითი ფორმა ალგებრულ სიმბოლოების ანალოგიური. ასეთი სიმბოლიკა ხშირ შემთხვევებში საშუალებას იძლევა გვერდი ავუაროთ რთულ გარდაქმნებს და ჩავწეროთ ფორმულები მარტივი და მოხერხებული ფორმით.

მაგალითად, გაწარმოების ოპერატორი ხშირად აღინიშნება p ასოთი:

$$p = \frac{d}{dt},$$

რომელიც თავსდება გასაწარმოებელ გამოსახულებაში წინ მამრავლის სახით. ამ შემთხვევაში ჩანაწერი

$$y(t) = px(t)$$

ტოლძალოვანია ჩანაწერის

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

ორმაგი გაწარმოება აღინიშნება p^2 თანამამრავლით

$$p^2x(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}.$$

და ა. შ.

ვსარგებლობთ რა მსგავსი სიმბოლოებით, კერძოდ ძლიერ მოხერხებულია დიფერენციალურ განტოლებათა ჩაწერა.

დავუშვათ, მაგალითად, დინამიკური A სისტემის მუშაობა აღიწერება მუდმივი კოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებით. რომლებიც სისტემის $y(t)$ რეაქციას აკავშირებენ $x(t)$ ზემოქმე-

დებასთან. ჩაწერის ჩვეულებრივი ფორმით დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t). \qquad (15.6.10)$$

სიმბოლური ფორმით ეს განტოლება შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) y(t) =$$
$$= (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0) x(t),$$

სადაც $p = \dfrac{d}{dt}$ — გაწარმოების ოპერატორია. სიმოკლისათვის თუ მარჯვენა და მარცხენა ნაწილებში შემავალ პოლინომებს p-ს მიმართ აღვნიშნავთ

$$A_n(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0,$$
$$B_m(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0,$$

განტოლებას ჩავწერთ კიდევ უფრო კომპაქტური ფორმით:

$$A_n(p) y(t) = B_m(p) x(t). \qquad (15.6.11)$$

დაბოლოს, ფორმალურად ამოვხსნით რა (15.5.11) განტოლებას $y(t)$-ს მიმართ, შესაძლებელია სიმბოლურად ჩავწეროთ წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის ოპერატორი „ცხადი“ სახით

$$y(t) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} x(t). \qquad (15.6.12)$$

ვსარგებლობთ, რა ანალოგიური სიმბოლიკით, ცვლადი კოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება შეიძლება ოპერატორული ფორმით ჩაიწეროს. ჩვეულებრივ ფორმაში ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$a_n(t) \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t) \frac{dy(t)}{dt} + a_0(t) y(t) =$$
$$= b_m(t) \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1}(t) \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1(t) \frac{dx(t)}{dt} + b_0(t) x(t).$$
$$(15.6.13)$$

p-ს მიმართ მრავალწევრებს, რომელთა კოეფიციენტები დამოკიდებულია t-საგან თუ აღვნიშნავთ

$$A_n(p,\ t)=a_n(t)p^n+a_{n-1}(t)p^{n-1}+\ldots+a_1(t)p+a_0(t),$$
$$B_m(p,\ t)=b_m(t)p^m+b_{m-1}(t)p^{m-1}+\ldots+b_1(t)p+b_0(t),$$

დიფერენციალური განტოლების ოპერატორი შესაძლებელია ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$y(t)=\frac{B_m(p,\ t)}{A_n(p,\ t)}x\ (t) \tag{15.6.14.}$$

შემდეგში საჭიროებისამებრ ვისარგებლებთ ოპერატორების ჩაწერის ასეთი სიმბოლური ფორმებით: დინამიკური სისტემები, რომლებიც ტექნიკაში გვხვდებიან ხშირად აღიწერებიან წრფივი დიფერენციალური განტოლებებით. ამ შემთხვევაში არ არის ძნელი დავრწმუნდეთ, რომ სისტემის ოპერატორი წრფივია.

დინამიკური სისტემა, რომლის ოპერატორი წარმოადგენს წრფივს ეწოდება, **წ რ ფ ი ვ ი დ ი ნ ა მ ი უ რ ი ს ი ს ტ ე მ ა.** წრფივ ოპერატორთა და სისტემათა საპირისპიროდ განიხილება **ა რ ა წ რ ფ ი ვ ი** სისტემები და ოპერატორები. **ა რ ა წ რ ფ ი ვ** ოპერატორთა მაგალითებია:

$$y(t)=x^2(t),\ y(t)=\int_0^t x^3(\tau)d\tau,\ y(t)=\sin\ x(t).$$

და აგრეთვე არაწრფივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა, თუგინდ

$$y'(t)+\alpha\cos y\ (t)=x(t).$$

დინამიკური სისტემა, რომლის ოპერატორი არაწრფივია იწოდება არაწრფივ სისტემად.

პრაქტიკაში წრფივი სისტემები ძლიერ ხშირად გვხვდება. ამ სისტემათა წრფივობასთან დაკავშირებით ხდომილობათა ანალიზისათვის შეიძლება დიდი ეფექტით გამოყენებულ იქნას შემთხვევით ფუნქციათა თეორიის აპარატი. იმისდა მსგავსად, როგორც ჩვეულებრივი შემთხვევით სიდიდეთა წრფივ ფუნქციათა რიცხვითი მახასიათებლები შეიძლება მიღებულ იქნან არგუმენტთა რიცხვითი მახასიათებლების მიხედვით, წრფივი დინამიკური სისტემის გამოსასვლელში შეიძლება განსაზღვრულ იქნან შემთხვევითი ფუნქციის მახასიათებლები, თუ კი ცნობილია სისტემის ოპერატორი და მის შესასვლელში შემთხვევითი ფუნქციის მახასიათებლები.

პრაქტიკაში წრფივი სისტემების გარდა უფრო ხშირად გვხვდება არა მკაცრად წრფივი სისტემებიც, რომლებიც გარკვეულ საზღვრებში გაწ-

რფივების (ლინეარიზაციის) საშუალებას იძლევიან. თუკი შემთხვევითი შეშფოთებები სისტემის შესასვლელში საკმაოდ მცირეა, მაშინ პრაქტიკულად ნებისმიერი სისტემა შეიძლება განხილულ იქნას — ამ მცირე შეშფოთებათა ფარგლებში—როგორც მიახლოებით წრფივი, იმის და მსგავსად, როგორც არგუმენტთა საკმაოდ მცირე შემთხვევით ცვლილებებისას პრაქტიკულად ნებისმიერი ფუნქცია შეიძლება გაწრფივებულ იქნას.

დიფერენციალურ განტოლებათა მიახლოებითი ლინეარიზაციის ხერხი ფართოდ გამოიყენება დინამიკურ სისტემების ხდომილობათა თეორიაში.

შემდგომში განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ დინამიკურ სისტემებს, რომლებიც წრფივია ანდა შესაძლებელია მათი გაწრფივება და მათ შესაბამის წრფივ ოპერატორებს.

15.7. შემთხვევითი ფუნქციების წრფივი გარდაქმნა

დავუშვათ L ოპერატორიან წრფივი სისტემის შესასვლელში ზემოქმედებს შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია, თანაც ცნობილია მისი მახასიათებლები: მათემატიკური, ლოდინი და კორელაციური $K_x(t, t')$ ფუნქცია. რეაქცია სისტემისა წარმოადგენს შემთხვევით ფუნქციას

$$Y(t)=L\{X(t)\}. \tag{15.7.1}$$

საჭიროა მოვნახოთ შემთხვევითი $Y(t)$ ფუნქციის $m_y(t)$ და $K_y(t,t')$ მახასიათებლები. მოკლედ წრფივი სისტემის შესასვლელში შემთხვევითი ფუნქციის მახასიათებლების მიხედვით მოვნახოთ გამოსასვლელში შემთხვევითი ფუნქციის მახასიათებლები.

თავდაპირველად ვაჩვენოთ, რომ შეიძლება შემოვისაზღვროთ ამოცანის ამოხსნით მხოლოდ ერთგვაროვანი L ოპერატორისათვის. მართლაც დავუშვათ, რომ L ოპერატორი არაერთგვაროვანია და გამოისახება ფორმულით

$$L\{X(t)\}=L_0\{X(t)\}+\varphi(t), \tag{15.7.2}$$

სადაც L_0—წრფივი ერთგვაროვანი ოპერატორი, $\varphi(t)$—განსაზღვრული არა შემთხვევითი ფუნქცია, მაშინ

$$m_y(t)=M[L_0\{X(t)\}]+\varphi(t). \tag{15.7.3}$$

ე. ი. $\varphi(t)$ ფუნქცია უბრალოდ ემატება შემთხვევითი ფუნქციის მათემატიკურ ლოდინს წრფივი სისტემის გამოსასვლელში. რაც შეეხება კორელაციურ ფუნქციას, იგი როგორც ცნობილია არ იცვლება შემთხვევით ფუნქციისათვის არა შემთხვევითი შესაკრების მიმატებით. ამი-

ტომ ქვემოთ „წრფივი ოპერატორების“ ქვეშ ვიგულისხმებთ მხოლოდ წრფივ ერთგვაროვან ოპერატორებს.

ჯერ ამოვხსნათ წრფივი სისტემის გამოსასვლელში წრფივი ოპერატორების ზოგიერთ კერძო სახეებისათვის ამოცანა მახასიათებელთა განსაზღვრისა.

1. ინტეგრალი შემთხვევითი ფუნქციიდან

მოცემულია შემთხვევითი ფუნქცია $X(t)$, რომლის მათემატიკური ლოდინია $m_x(t)$ და კორელაციური ფუნქცია $K_x(t, t')$. შემთხვევითი $Y(t)$ ფუნქცია დაკავშირებულია $X(t)$-თან ინტეგრირების ერთგვაროვანი ოპერატორით:

$$Y(t)=\int_0^t (X\tau)d\tau. \tag{15.7.4}$$

საჭიროა მოვნახოთ შემთხვევითი $Y(t)$ ფუნქციის მახასიათებლები: $m_y(t)$ და $K_y(t, t')$.

წარმოვიდგინოთ (15.7.4) ინტეგრალი როგორც ჯამის ზღვარი:

$$Y(t)=\int_0^t X(\tau)d\tau=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_i (X\tau_i)\Delta\tau \tag{15.7.5}$$

გამოვიყენოთ (15.7.5) ტოლობაში მათემატიკური ლოდინის ოპერაცია. მათემატიკური ლოდინთა შეკრების თეორემის მიხედვით გვაქვს:

$$m_y(t)=M[Y(t)]=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_i M[X(\tau_i)]\Delta\tau=$$

$$=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_i m_x(\tau_i)\Delta\tau=\int_0^t m_x(\tau)d\tau^{1)}. \tag{15.7.6}$$

ამგვარად

$$m_y((t)=\int_0^t m_x(\tau)d\tau. \tag{15.7.7}$$

---

[1] ამ დროს ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ზღვრის მათემატიკური ლოდინი ტოლია ზღვრისა მათემატიკური ლოდინიდან. პრაქტიკაში როგორც წესი საქმე გვაქვს ფუნქციებთან, რომელთათვისაც ასეთი გადაადგილება შესაძლებელია.

ე. ი. **შემთხვევითი ფუნქციიდან ინტეგრალის მათემატიკური ლოდინი ტოლია მათემატიკური ლოდინის ინტეგრალისა.** სხვა სიტყვებით: ინტეგრირების ოპერაცია და მათემატიკური ლოდინის ოპერაცია შეიძლება ურთიერთგადავანაცვლოთ. ეს ბუნებრივია, რადგან ინტეგრების ოპერაცია თავისი ბუნებით არ განსხვავდება აჯამვის ოპერაციისაგან, რომელიც შეიძლება გადანაცვლებული იქნას მათემატიკური ლოდინის ოპერაციასთან.

მოვძებნოთ კორელაციური $K_y(t,t')$ ფუნქცია. ამისათვის გადავიდეთ დაცენტრებულ შემთხვევით ფუნქციებზე:

$$\mathring{X}(t)=X(t)-m_x(t); \quad \mathring{Y}(t)=Y(t)-m_y(t).$$

ადვილია დარწმუნება იმაში, რომ

$$\mathring{Y}(t)=\int_0^t \mathring{X}(\tau)d\tau. \tag{15.7.8}$$

კორელაციური ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად

$$K_y(t,\ t')=M[\mathring{Y}(t)\mathring{Y}(t')].$$

სადაც

$$\mathring{Y}(t)=\int_0^t \mathring{X}(\tau)d\tau; \quad \mathring{Y}(t')=\int_0^{t'} \mathring{X}(\tau')d\tau' \text{ [1].)} \tag{15.7.9}$$

გადავამრავლოთ (15.7.9) გამოსახულებანი:

$$\mathring{Y}(t)\mathring{Y}(t')=\int_0^t \mathring{X}(\tau)d\tau \int_0^{t'} \mathring{X}(\tau')d\tau'. \tag{15.7.10}$$

ადვილია დავრწმუნდეთ, რომ ორი ინტეგრალის ნამრავლი (15.7.10) ფორმულის მარჯვენა ნაწილში ტოლია ორმაგი ინტეგრალისა

$$\int_0^t \int_0^{t'} \mathring{X}(\tau)\mathring{X}(\tau')d\tau\ d\tau' \tag{15.7.11}$$

---

[1] როგორც ცნობილია განსაზღვრულ ინტეგრალში საინტერესო ცვლადი შეიძლება აღნიშნულ იქნას ნებისმიერი ასოთი, მოცემულ შემთხვევაში მოხერხებულია იგი აღვნიშნოთ შესაბამისად τ და τ'-ით.

მართლაც იმასთან დაკავშირებით, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია (15.7.11) ინტეგრალში იშლება ორ თანამამრავლად, რომელთაგან პირველი დამოკიდებულია τ-საგან, მეორე მხოლოდ τ'-საგან, ორჯერადი (ორმაგი) ინტეგრალი (15.7.11) იშლება ორი ერთმაგი (15.7.10) ინტეგრალის ნამრავლად. მაშასადამე,

$$\mathring{Y}(t)\mathring{Y}(t')=\int_0^t\int_0^{t'}\mathring{X}(\tau)\mathring{X}(\tau')d\tau\, d\tau'. \tag{15.7.12}$$

(15.7.12) ტოლობისათვის მათემატიკური ლოდინის ოპერაციის გამოყენებით და მისი მარჯვენა ნაწილში ინტეგრირების ოპერაციის ადგილების შეცვლით, მივიღებთ:

$$K_y(t,t')=M[\mathring{Y}(t)\mathring{Y}(t')]=\int_0^t\int_0^{t'}M\,[\mathring{X}(\tau)\ \mathring{X}(\tau')]\ d\tau\ d\tau',$$

ანდა საბოლოოდ:

$$K_y'(t,\ t')=\int_0^t\int_0^{t'}K_x(\tau,\ \tau')d\tau\ d\tau'. \tag{15.7.13}$$

ამგვარად, იმისათვის რომ მოვძებნოთ შემთხვევითი ფუნქციიდან ინტეგრალის კორელაციური ფუნქცია, საჭიროა საწყისი (ამოსავალი) შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია ორჯერ ვაინტეგროთ ჯერ ერთი არგუმენტით, შემდეგ მეორეთი.

2. შემთხვევითი ფუნქციის წარმოებული

მოცემულია შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია $m_x(t)$ მათემატიკური ლოდინით და $K_x(t,\ t')$ კორელაციური ფუნქციით. შემთხვევითი $Y(t)$ ფუნქცია დაკავშირებულია შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციასთან გაწარმოების წრფივი ერთგვაროვანი ოპერატორით:

$$Y(t)=\frac{dX(t)}{d(t)}. \tag{15.7.14}$$

საჭიროა მოიძებნოს

$$m_y(t)\ \text{და}\ K_y(t,\ t').$$

წარმოვიდგინოთ წარმოებული ზღვრის სახით:

$$Y\,(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\ \frac{Y(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}. \tag{15.7.15}$$

(15.7.15) ტოლობაზე მათემატიკური ლოდინის ოპერაციის გამოყენებით მივიღებთ:

$$m_y(t)=M[Y(t)]=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{m_x(t+\Delta t)-m_x(t)}{\Delta t}=\frac{dm_x(t)}{dt}\ ^{1)}$$

ამგვარად,

$$m_y(t)=\frac{dm_x(t)}{dt}, \tag{15.7.16}$$

ე. ი. შემთხვევითი ფუნქციიდან წარმოებულის მათემატიკური ლოდინი ტოლია მისი მათემატიკური ლოდინის წარმოებულისა.

მაშასადამე, გაწარმოების ოპერაციას, ისე როგორც ინტეგრირების ოპერაციას, შეიძლება შეუნაცვლოთ ადგილი მათემატიკური ლოდინის ოპერაციასთან.

$K_y(t, t')$ განსაზღვრისათვის გადავიდეთ ცენტრირებული შემთხვევით $\overset{\circ}{Y}(t)$ და $\overset{\circ}{X}(t)$ შემთხვევით ფუნქციებზე, ცხადია,

$$\overset{\circ}{Y}(t)=\frac{d\overset{\circ}{X}(t)}{dt} \tag{15.7.17}$$

განსაზღვრის მიხედვით

$$K_y(t,t')=M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')].$$

ჩავსვათ $\overset{\circ}{Y}(t)$ და $\overset{\circ}{Y}(t')$ ნაცვლად მათი გამოსახულებანი:

$$K_y(t, t')=M\left[\frac{d\overset{\circ}{X}(t)}{dt}\,\frac{d\overset{\circ}{X}(t')}{dt'}\right].$$

წარმოვიდგინოთ გამოსახულება მათემატიკური ლოდინის ნიშნის ქვეშ შერეული მეორე კერძო წარმოებულის სახით:

$$\frac{d\overset{\circ}{X}(t)}{dt}\,\frac{d\overset{\circ}{X}(t')}{dt'}=\frac{\partial^2\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')}{\partial t\,\partial t'}. \tag{15.7.18}$$

დავამტკიცეთ, რომ შემთხვევითი ფუნქციის წარმოებულის მათემატიკური ლოდინი ტოლია მათემატიკური ლოდინიდან წარმოებულისა,

---

[1] იხ. ფორმულა (15.7.6)-ის ჩამოტანილი შენიშვნა.

ე. ი. გაწარმოების და მათემატიკური ლოდინის ოპერაციების ნიშნების ადგილები შეიძლება შეცვლილ იქნას. მაშასადამე,

$$K_y(t,\ t')= M\left[\frac{\partial^2\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')}{\partial t\ \partial t'}\right]=\frac{\partial^2}{\partial t\ \partial t'}M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')] =$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial t\ \partial t'}K_x(t,\ t'). \qquad (15.7.19)$$

ამგვარად,

$$K_y(t,\ t')= \frac{\partial^2 K_x(t,\ t')}{\partial t\ \partial t'}. \qquad (15.7.20)$$

მაშასადამე, წარმოებულის კორელაციური ფუნქცია, რომ მოვნახოთ საჭიროა საწყისი (ამოსავალი) შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია გავაწარმოოთ ორჯერ: ჯერ ერთი არგუმენტით, შემდეგ—მეორეთი.

ჩვენს მიერ განხილულ წრფივი ერთგვაროვანი ოპერატორებისათვის მათემატიკური ლოდინისა და კორელაციური ფუნქციის მონახვის წესების შედარებით ვხედავთ, რომ ისინი სავსებით ანალოგიურია, სახელდობრ: გარდაქმნილი შემთხვევითი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინისა და საწყისი (ამოსავალი) ფუნქციის მათემატიკური ლოდინის მოსაძებნად ერთი და იგივე წრფივი ოპერატორი გამოიყენება, კორელაციური ფუნქციის მოსაძებნად იგივე წრფივი ოპერატორი საწყისი შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქციისათვის გამოიყენება (ოღონდ გარე შემთხვევაში) ორჯერ. პირველ შემთხვევაში ეს იყო ორმაგი „ინტეგრირება", მეორეში—ორმაგი გაწარმოება.

შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ასეთი წესი საერთოა ყველა ერთგვაროვანი წრფივი ოპერატორებისათვის. [1]) აქ ამ საერთო წესს ჩამოვაყალიბებთ დამტკიცების გარეშე.

თუკი შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია, რომლის მათემატიკური ლოდინია $m_x(t)$ და კორელაციური ფუნქცია $K_x(t,\ t')$ გარდაიქმნება წრფივ ერთგვაროვან L_t ოპერატორით შემთხვევით ფუნქციად

$$Y(t)=L\{X(t)\},$$

მაშინ შემთხვევითი $Y(t)$ ფუნქციის მათემატიკური ლოდინის მოსანახად გამოყენებულ უნდა იქნას იგივე ოპერატორი, $X(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინისათვის:

იგივე ოპერატორი

$$m_y(t)=L\{m_x(t)\}, \qquad (15.7.21)$$

---

[1] იხ. მაგალითად, ვ. ს. პუგაჩოვი, შემთხვევით ფუნქციათა თეორია და მისი გამოყენება ავტომატური მართვის ამოცანებისათვის, ფიზიკურ-მათემატიკური გამომცემლობა 1960 (რუსულ ენაზე).

ხოლო კორელაციური ფუნქციის მოსაძებნად იგივე ოპერატორი უნდა გამოვიყენოთ ორჯერ შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის კორელაციური ფუნქციისათვის, ჯერ ერთი არგუმენტით, შემდეგ—მეორით:

$$K_y(t, t')=L^{(t)}L^{(t')}\{K_x(t, t')\}. \tag{15.7.22}$$

(15.7.22) ფორმულაში L ოპერატორთან ნიშნები (t), (t') უჩვენებენ თუ რომელი არგუმენტით გამოიყენება იგი.

მრავალი პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნისას გვაინტერესებს არა $K_y(t,t')$ კორელაციური ფუნქცია წრფივი სისტემის გამოსასვლელში, არამედ $D_y(t)$ დისპერსია, რომელიც ახასიათებს სისტემის მუშაობის სიზუსტეს შემთხვევით შეშფოთებათა არსებობის პირობებში. ვიცით რა კორელაციური ფუნქცია:

$$D_y(t)=K_y(t, t). \tag{15.7.23}$$

დისპერსია შეიძლება მოვნახოთ. ამ დროს ხაზი უნდა გაესვას იმას, რომ როგორც წესი წრფივი სისტემის გამოსასვლელში არ არის საკმარისი ვიცოდეთ დისპერსია მის შესასვლელში, არამედ არსებითად მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ კორელაციური ფუნქცია. მართლაც წრფივ სისტემას ფრიად სხვადასხვანაირად შეუძლია რეაგირება მის შესასვლელში შემომავალ შემთხვევით შეშფოთებებზე, იმისაგან დამოკიდებით, თუ როგორია შინაგანი სტრუქტურა ამ შემთხვევითი შეშფოთებისა; მაგალითად, შედგებიან ისინი, უპირატესად მაღალი თუ დაბალი სიხშირის რხევებისაგან. შემთხვევით პროცესის შინაგანი სტრუქტურა აღიწერება არა მისი დისპერსიით, არამედ კორელაციური ფუნქციით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი: გამწარმოებელი მექანიზმის შესასვლელში შემოდის შემთხვევითი $x(t)$ ფუნქცია, რომლის მათემატიკური ლოდინია $m_x(t)=\sin t$ და კორელაციური ფუნქცია

$$K_x(t, t')=D_x e^{-\alpha(t'-t)^2},$$

სადაც D_x — შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის მუდმივი დისპერსიაა. განვსაზღვროთ სისტემის გამოსასვლელში მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. — $Y(t)$ შემთხვევითი ფუნქცია სისტემის გამოსასვლელში (რეაქცია) დაკავშირებულია $X(t)$ ზემოქმედებასთან (გაწარმოების) ოპერატორით

$$X(t)=\frac{d}{dt}X(t).$$

ზოგადი წესების გამოყენებით გვაქვს:

$$m_y(t)=\frac{d}{dt}m_y(t)=\cos t;$$

$$K_y[t, t')=\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial t'}K_x(t, t')=2D_x\alpha e^{-\alpha(t'-t)^2}[1-2\alpha(t'-t)^2].$$

$t'=t$ დაშვებით მივიღებთ:

$$D_y(t)=2D_x\alpha,$$

ანდა, იმის აღნიშვნით, რომ $D_y(t)$ არ არის დამოკიდებული t-საგან

$$D_y=2D_x\alpha.$$

ამრიგად, გამწარმოებელი მექანიზმის გამოსასვლელში დისპერსია დამოკიდებულია არამარტო შესასვლელში D_x — დისპერსიაზე, არამედ აგრეთვე α კოეფიციენტზე, რომელიც ახასიათებს $X(t)$ ფუნქციის კვეთებს შორის კორელაციური კავშირის მილევას. მათ შორის შუალედის გაზრდის შემთხვევაში თუკი α კოეფიციენტი მცირეა, კორელაციური კავშირი მიილევა ნელა, შემთხვევითი ფუნქცია იცვლება დროდადრო შედარებით მდოვრედ და ბუნებრივია გაწარმოება ასეთი ფუნქციისა შედარებით მცირე შეცდომებს იწვევს. პირიქით თუკი α კოეფიციენტი დიდია, კორელაციური ფუნქცია მცირდება სწრაფად; შემთხვევითი ფუნქციის შემადგენლობაში ჭარბობენ მკვეთრი, უწესრიგო, მაღალი სიხშირის რხევები, ბუნებრივია ასეთი ფუნქციის გაწარმოება იწვევს დიდ შემთხვევით ხდომილობებს. ასეთ შემთხვევებში ჩვეულებრივ მიმართავენ გასაწარმოებელი ფუნქციის ე. წ. გასწორებას, ე. ი. ისე ცვლიან სისტემის ოპერატორს, რომ მან გამოსასვლელში ნაკლები შემთხვევითი ხდომილობები მოგვცეს.

15.8. შემთხვევით ფუნქციათა შეკრება

პრაქტიკის ბევრ ამოცანაში ჩვენ ვხვდებით იმას, რომ დინამიკური სისტემის შესასვლელში შედის არა ერთი შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია, არამედ ორი და მეტი შემთხვევითი ფუნქცია, რომელთაგან თითოეული დაკავშირებულია ცალკეულ შემაშფოთებელ ფაქტორზე. წამოიჭრება შემთხვევით ფუნქციათა შეკრების ამოცანა, უფრო ზუსტად ჯამის მახასიათებელთა განსაზღვრის ამოცანა შესაკრებთა მახასიათებლების მიხედვით.

ეს ამოცანა ამოიხსნება ძალიან მარტივად, თუკი ორი შესაკრები შემთხვევითი ფუნქცია დამოუკიდებლებია (უფრო ზუსტად, არაკორელირებულია) ერთი მეორისაგან. ზოგად შემთხვევაში მისი ამოხსნისათვის აუცილებელია კიდევ ერთი მახასიათებლის — ე. წ. **ურთიერთკორელაციური ფუნქციის** (სხვანაირად—**კავშირის კორელაციური ფუნქციის**) ცოდნა.

ორი შემთხვევით $X(t)$ და $Y(t)$ ფუნქციათა ურთიერთ კორელაციური ფუნქცია ეწოდება ორ t და t' არგუმენტთა არა შემთხვევით ფუნქციას, რომელიც t და t' მნიშვნელობათა თითოეულ წყვილისას ტოლია $X(t)$ და $Y(t)$ შემთხვევით ფუნქციათა შესაბამისი კვეთების კორელაციური მომენტისა

$$R_{xy}(t, t')=M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{Y}(t')]. \tag{15.8.1}$$

ურთიერთ კორელაციური ფუნქცია ისევე როგორც ჩვეულებრივი კორელირებული ფუნქციები არ იცვლება შემთხვევით ფუნქციებზე ნების-

მიერი არა შემთხვევითი შესაკრებთა მიმატებით, და, მაშასადამე, შემთხვევით ფუნქციათა დაცენტრებისასაც.

ურთიერთკორელაციური ფუნქციის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს მისი შემდეგი თვისება:

$$R_{xy}(t, t')=R_{yx}(t', t). \tag{15.8.2}$$

$R_{xy}(t,t')$ ფუნქციის ნაცვლად ხშირად იხმარება ნორმირებული ურთიერთკორელირებული ფუნქცია:

$$r_{xy}(t, t')=\frac{R_{xy}(t, t')}{\sigma_x(t)\sigma_y(t')}. \tag{15.8.3}$$

თუკი ურთიერთკორელაციური ფუნქცია ნულის ტოლია t, t' ყველა მნიშვნელობებისას, მაშინ $X(t)$ და $y(t)$ შემთხვევით ფუნქციებს უწოდებენ არაკორელირებულს (შეუკავშირებელს).

პრაქტიკაში ჩვეულებრივ შემთხვევით ფუნქციათა არაკორელირებულობაზე მსჯელობა წარმოებს ურთიერთკორელაციური ფუნქციის არა ნულთან ტოლობის საფუძველზე, არამედ პირიქით, ურთიერთკორელაციურ ფუნქციას ვარაუდობენ ნულის ტოლად ფიზიკურ მოსაზრებათა საფუძვლებზე, რომლებიც მოწმობენ შემთხვევით ფუნქციათა დამოუკიდებლობას.

დავუშვათ, მაგალითად, ორი თვითმფრინავი სროლას აწარმოებს მიწისზედა სამიზნეზე: პირველი და მეორე თვითმფრინავის პიკირების კუთხე საბრძოლო ოპერაციის შესრულების პროცესში აღვნიშნოთ $X(t)$ და $У(t)$-თი. თუკი თვითმფრინავები სამიზნეზე მიდიან თითოთითოდ. ბუნებრივია $X(t)$ და $У(t)$ შემთხვევითი ფუნქციები არაკორელირებულად ჩავთვალოთ, თუკი მანევრი სრულდება თვითმფრინავების მიერ ერთობლივად თანაც ერთ-ერთი მათგანი წარმოადგენს წამყვანს, მეორე კი—მიმყოლს,ცხადია $X(t)$ და $У(t)$ ფუნქციებს შორის კორელაციური კავშირის არსებობა.

საერთოდ თუკი ფიზიკური მოსაზრებებიდან, რომელიც დაკავშირებულია ამოსახსნელი ამოცანის არსთან, გამომდინარეობს ამოცანაში მონაწილე შემთხვევით სიდიდეთა შორის დამოკიდებულების არსებობა, მაშინ მათი ურთიერთკორელაციური ფუნქციები გამოკვლეული უნდა იქნან.

ვიცით, რა ორი შემთხვევითი $X(t)$ და $У(t)$ ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი და კორელაციური ფუნქციები და აგრეთვე მათი ურთიერთკორელაციური ფუნქცია, შეიძლება მოვძებნოთ ამ ორი შემთხვევითი ფუნქციათა ჯამის მახასიათებლები

$$Z(t)=X(t)+Y(t). \tag{15.8.4}$$

მათემატიკურ ლოდინთა შეკრების თეორემის მიხედვით:

$$m_z(t)=m_x(t)+m_y(t), \tag{15.8.5}$$

ე. ი. ორი შემთხვევითი ფუნქციის შეკრებისას მათი მათემატიკური ლოდინები იკრიბება.

კორელაციურ $K_z(t, t')$ ფუნქციის განსაზღვრისათვის გადავდივართ დაცენტრებულ შემთხვევით ფუნქციებზე $\overset{\circ}{Z}(t)$, $\overset{\circ}{Y}(t)$, $\overset{\circ}{X}(t)$. ცხადია,

$$\overset{\circ}{Z}(t)=\overset{\circ}{X}(t)+\overset{\circ}{Y}(t). \tag{15.8.6}$$

კორელაციური ფუნქციის განმარტების თანახმად

$$\begin{aligned}K_z(t, t')&=M[\overset{\circ}{Z}(t)\overset{\circ}{Z}(t')]=\\&=M[(\overset{\circ}{X}(t)+\overset{\circ}{Y}(t))\,(\overset{\circ}{X}(t')+\overset{\circ}{Y}(t'))]=\\&=M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')]+M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')]+M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{Y}(t')]+M(\overset{\circ}{X}(t')\overset{\circ}{Y}(t)].\end{aligned}$$

ანდა

$$K_z(t, t')=K_x(t, t')+K_y(t, t')+R_{xy}(t, t')+R_{xy}(t', t). \tag{15.8.7}$$

შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის დისპერსიისათვის (15.8.7) ფორმულა (10.2.7) ფორმულის ანალოგიურია.

იმ შემთხვევაში, როცა შემთხვევითი $X(t)$ და $Y(t)$ ფუნქციები არა კორელირებულია, $R_{xy}(t, t')\equiv 0$ და (15.8.7) ფორმულა ღებულობს სახეს:

$$K_z(t, t')=K_x(t, t')+K_y(t, t'). \tag{15.8.8}$$

ე. ი. არაკორელირებული შემთხვევითი ფუნქციათა შეკრებისას მათი კორელაციური ფუნქციები იკრიბებიან.

გამოყვანილი ფორმულები შეიძლება განზოგადოებულ იქნენ შესაკრებთა ნებისმიერ რიცხვისათვის. თუკი შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია არის ჯამი n შემთხვევითი ფუნქციებისა:

$$X(t)=\sum_{i=1}^{n} X_i(t). \tag{15.8.9}$$

მაშინ მისი მათემატიკური ლოდინი გამოისახება ფორმულით

$$m_x(t)=\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}(t), \tag{15.8.10}$$

ხოლო მისი კორელაციური ფუნქცია ფორმულით

$$K_x(t, t')=\sum_{i=1}^{n} K_{x_i}(t, t')+\sum_{i\neq j} R_{x_i x_j}(t, t'), \qquad (15.8.11)$$

სადაც აჯამვა ვრცელდება i და j ინდექსების წყვილ-წყვილად ყველა შესაძლო განლაგებაზე.

იმ შემთხვევაში, როცა ყველა შემთხვევით $X_i(t)$ ფუნქციები არაკორელირებულია, (15.8.11) ფორმულა გადაიქცევა კორელაციურ ფუნქციათა შეკრების თეორემად:

$$K_x(t, t') = \sum_{i=1}^{n} K_{x_i}(t, t'), \qquad (15.8.12)$$

ე. ი. ურთიერთ არაკორელირებულ შემთხვევით ფუნქციათა ჯამის კორელაციური ფუნქცია შესაკრებთა კორელაციურ ფუნქციათა ჯამის ტოლია.

(15.8.12) ფორმულა ანალოგიურია ჩვეულებრივ შემთხვევით სიდიდეებისათვის დისპერსიათა შეკრების თეორემისა.

შემთხვევით ფუნქციათა შეკრების კერძო შემთხვევაა შემთხვევითი ფუნქციისა და შემთხვევითი სიდიდის შეკრება.

განვიხილოთ შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია, რომლის მახასიათებლებია $m_x(t)$ და $K_x(t, t')$ და შემთხვევითი Y სიდიდე, რომლის მათემატიკური ლოდინია m_y და დისპერსია D_y. დავუშვათ, რომ $X(t)$ შემთხვევითი ფუნქცია და Y შემთხვევითი სიდიდე არაკორელირებულია, ე. ი. ნებისმიერ t-სათვის.

$$M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{Y}]=0.$$

მივუმატოთ შემთხვევით $X(t)$ ფუნქციას შემთხვევითი სიდიდე Y; მივიღებთ შემთხვევით ფუნქციას

$$Z(t)=X(t)+Y. \qquad (15.8.13)$$

განვსაზღვროთ მისი მახასიათებლები. ცხადია,

$$m_z(t)=m_x(t)+m_y. \qquad (15.8.14)$$

რომ მოიძებნოს $K_z(t, t')$ ვისარგებლოთ კორელაციური ფუნქციის შეკრების თეორემით (15.8.8). განვიხილოთ შემთხვევით Y სიდიდე, როგორც კერძო შემთხვევა ფუნქციისა, რომელიც არ იცვლება დროში, და მოვნახოთ მისი კორელაციური ფუნქცია:

$$K_y(t, t')=M[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')]=M[\overset{\circ}{Y}{}^2]=D_y. \qquad (15.8.15)$$

ვიყენებთ რა (15.8.8) ფორმულას მივიღებთ:

$$K_z(t,\ t')=K_x(t,\ t')+D_y,$$

ე. ი. შემთხვევით ფუნქციაზე მასთან არაკორელირებულ შემთხვევითი სიდიდის მიმატებით კორელაციურ ფუნქციას ემატება მუდმივი შესაკრები, რომელიც ამ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიის ტოლია.

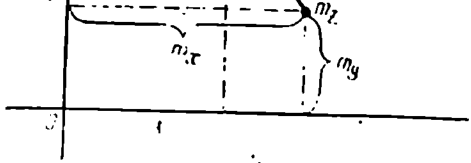
15.9. კომპლექსური შემთხვევითი ფუნქციები

შემთხვევით ფუნქციათა თეორიის მათემატიკური აპარატის პრაქტიკული გამოყენებისას ხშირად მოხერხებული აღმოჩნდება ჩავწეროთ როგორც თვით შემთხვევითი ფუნქციები ისე მისი მახასიათებლებიც, არა ნამდვილი, არამედ კომპლექსური ფორმით. ამასთან დაკავშირებით აუცილებელია კომპლექსურ შემთხვევით სიდიდესა და კომპლექსურ შემთხვევით ფუნქციას მივცეთ განსაზღვრა.

კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება შემდეგი სახის შემთხვევით სიდიდეს:

$$Z=X+iY, \tag{15.9.1}$$

სადაც X, Y — ნამდვილი შემთხვევითი სიდიდეებია, $i=\sqrt{-1}$ — წარმოსახვითი ერთეული. შესაძლებელია კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდე გეომეტრიულად წარმოვიდგინოთ, როგორც შემთხვევითი Z წერტილი xOy სიბრტყეზე (ნახ. 15.9.1).



ნახ. 15.9.1.

იმისათვის, რომ რიცხობრივ მახასიათებელთა აპარატი გამოყენებულ იქნას კომპლექსურ შემთხვევით სიდიდეებისათვისაც აუცილებელია განვაზოგადოთ მათემატიკური ლოდინის დისპერსიის კორელაციური მომენტის ძირითადი ცნებები კომპლექსურ შემთხვევით სიდიდეთა შემთხვევისათვის. ცხადია, ეს განზოგადებანი ისე უნდა იყოს გაკეთებული, რომ კერძო შემთხვევაში, როცა $Y=0$ და სიდიდე Z ნამდვილია, ისინი დაიყვანებოდეს ნამდვილ შემთხვევით სიდიდეთა მახასიათებელთა ჩვეულებრივ განსაზღვრაზე.

კომპლექსური შემთხვევითი $Z=X+iY$ სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება კომპლექსურ რიცხვს.

$$m_z=m_x+im_y. \tag{15.9.2}$$

ეს არის რომელიღაც საშუალო მნიშვნელობა Z სიდიდისა, ანდა გეომეტრიულად საშუალო m_z წერტილი, რომლის ირგვლივაც ხდება შემთხვევითი Z წერტილის გაფანტვა (ნახ. 15.9.1)

კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია ეწოდება შესაბამისი დაცენტრებული სიდიდის მოდულის კვადრატის მათემატიკურ ლოდინს:

$$D_z=M[|\mathring{Z}|^2], \tag{15.9.3}$$

სადაც

$$\mathring{Z}=Z-m_z.$$

გეომეტრიულად კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია არის შემთხვევით Z წერტილიდან მის მათემატიკურ ლოდინამდე m_z (ნახ. 15.9.1) მანძილის კვადრატის საშუალო მნიშვნელობა. ეს სიდიდე ახასიათებს შემთხვევითი Z წერტილის გაფანტვას მისი საშუალო მდებარეობიდან.

კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია გამოვსახოთ მისი წარმოსახვითი ნაწილის და ნამდვილი ნაწილის დისპერსიებით. ცხადია,

$$\mathring{Z}=Z-m_z=X+iY-m_x-im_y=\mathring{X}+i\mathring{Y};$$

აქედან

$$D_z=M[|\mathring{Z}|^2]=M[\mathring{X}^2+\mathring{Y}^2]=M[\mathring{X}^2]+M[\mathring{Y}^2]$$

ანდა

$$D_z=D_x+D_y, \tag{15.9.4}$$

ე. ი. კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია მისი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილთა დისპერსიების ჯამის ტოლია.

თვით დისპერსიის განსაზღვრებიდან გამოდის, რომ კომპლექსურ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია ყოველთვის ნამდვილია და არსებითად დადებითია, ნულად ქცევა მას შეუძლია მხოლოდ იმ შემთხვევაში თუ კი Z სიდიდე არ არის შემთხვევითი.

ზემოთ მოცემული მათემატიკური ლოდინის და დისპერსიების განსაზღვრა ცხადია, აკმაყოფილებს წაყენებულ მოთხოვნას, როცა $Y=0$ და

$Z=X$—ისინი გადაიქცევიან ნამდვილი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინისა და დისპერსიის ჩვეულებრივ განსაზღვრებად.

შევეცადოთ ჩამოვაყალიბოთ ორი შემთხვევით Z_1 და Z_2 სიდიდეთა კორელაციური მომენტის ანალოგიური განსაზღვრა:

$$Z_1=X_1+iY_1; \quad Z_2=X_2+iY_2. \tag{15.9.5}$$

ეს განსაზღვრება, ცხადია, უნდა იყოს აგებული, ისე რომ როცა $Z_1=Z_2=Z$ კორელაციური მომენტი გადაიქცეს Z სიდიდის დისპერსიად.

აღმოჩნდა, რომ ამ მოთხოვნის დაკმაყოფილება არ იქნებოდა შესაძლებელი, თუკი ჩვენ ისე როგორც ნამდვილ სიდიდეთა შემთხვევაში $\overset{\circ}{Z}_1\overset{\circ}{Z}_2$ ნამრავლის მათემატიკურ ლოდინს დავარქმევდით კორელაციურ მომენტს. ადვილია დავრწმუნდეთ, რომ როცა $Z_1=Z_2=Z$ მათემატიკური ლოდინი ასეთი ნამრავლისა იქნება არა ნამდვილი, არამედ კომპლექსური, ე. ი. უკვე არ იძლევა დისპერსიას, რომელიც განსაზღვრების თანახმად, ნამდვილია და არსებითად დადებითია, ეს არ მოხდება თუკი კორელაციურ მომენტს დავარქმევთ $\overset{\circ}{Z}_1$-ის არა თვით $\overset{\circ}{Z}_2$-ზე ნამრავლის მათემატიკურ ლოდინს, არამედ შესაბამის კომპლექსურად შეუღლებულ სიდიდეთა ნამრავლს

$$\overset{\circ}{\overline{Z}}_2=\overset{\circ}{X}_2-i\overset{\circ}{Y}_2. \tag{15.9.6}$$

მაშინ, როცა $Z_1=Z_2=Z$, ცხადია, კორელაციური მომენტი გადაიქცევა Z სიდიდის დისპერსიად:

$$K_{zz}=M[(\overset{\circ}{X}+i\overset{\circ}{Y})(\overset{\circ}{X}-i\overset{\circ}{Y})] = M[\overset{\circ}{X}{}^2]+M[\overset{\circ}{Y}{}^2]=D_z. \tag{15.9.7}$$

ამგვარად, მიზანშეწონილია ორი კომპლექსური შემთხვევითი Z_1 და Z_2 სიდიდეთა კორელაციურ მომენტებს მივცეთ შემდეგი განსაზღვრება

$$K_{z_1z_2}=M[\overset{\circ}{Z}_1\,\overline{\overset{\circ}{Z}_2}], \tag{15.9.8}$$

სადაც ზემოდან ხაზით აღნიშნულია კომპლექსური შეუღლებული სიდიდე.

ორი შემთხვევითი კომპლექსური სიდიდის კორელაციური მომენტი გამოვსახოთ მისი ნამდვილი და წარმოსახვით ნაწილთა კორელაციური მომენტებით. გვაქვს:

$$\begin{aligned} K_{z_1z_2}&=M[\overset{\circ}{Z}_1\overline{\overset{\circ}{Z}_2}]=M[(\overset{\circ}{X}_1+i\overset{\circ}{Y}_1)(\overset{\circ}{X}_2-i\overset{\circ}{Y}_2)]=\\ &=K_{x_1x_2}+K_{y_1y_2}+i(K_{y_1x_2}-K_{x_1y_2}), \end{aligned} \tag{15.9.9}$$

სადაც

$K_{x_1x_2}$, $K_{y_1y_2}$, $K_{y_1x_2}$, $K_{x_1y_2}$ — შესაბამისად (X_1, X_2), (Y_1, Y_2);

(Y_1, X_2), (X_1, Y_2) სიდიდეთა კორელაციური მომენტებია, ცხადია, იმ შემთხვევაში როცა ყველა ეს სიდიდეები ურთიერთშორის არაკორელირებულია Z_1, Z_2 სიდიდეთა კორელაციური მომენტები აგრეთვე ნულის ტოლია.

ამგვარად, კომპლექსურ შემთხვევით სიდიდეთა ძირითად მახასიათებელთა განსაზღვრანი განსხვავდებიან ნამდვილ სიდიდეების ანალოგიური მახასიათებლების ჩვეულებრივი განსაზღვრისაგან, მხოლოდ იმით, რომ:

1. დისპერსიად განიხილება დაცენტრებული შემთხვევითი სიდიდის კვადრატის არა მათემატიკური ლოდინი, არამედ მისი მოდულის კვადრატის მათემატიკური ლოდინი.

2. კორელაციურ მომენტად განიხილება არა დაცენტრებული სიდიდეთა ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი, არამედ ერთი დაცენტრებული სიდიდის მეორის კომპლექსურად შეუღლებულზე ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი.

გადავიდეთ კომპლექსური შემთხვევითი ფუნქციის და მის მახასიათებელთა განსაზღვრაზე.

კომპლექსური შემთხვევითი ფუნქცია ეწოდება შემდეგი სახის ფუნქციას

$$Z(t)=X(t)+iY(t), \tag{15.9.10}$$

სადაც $X(t)$, $Y(t)$ — ნამდვილი შემთხვევითი ფუნქციებია. კომპლექსური შემთხვევითი (15.9.10) ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი ტოლია

$$m_z(t)=m_x(t)+im_y(t). \tag{15.9.11}$$

კომპლექსური შემთხვევითი $Z(t)$ ფუნქციის დისპერსია განისაზღვრება, როგორც შესაბამისი დაცენტრებული ფუნქციის მოდულის კვადრატის მათემატიკური ლოდინი:

$$D_z(t)=M[|\overset{\circ}{Z}(t)|^2], \tag{15.9.12}$$

სადაც

$$\overset{\circ}{Z}(t)=Z(t)-m_z(t)=\overset{\circ}{X}(t)+i\overset{\circ}{Y}(t). \tag{15.9.13}$$

(15.9.12) განსაზღვრიდან ჩანს რომ კომპლექსური შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსია ნამდვილია და არა უარყოფითი.

(15.9.4) ფორმულიდან გამოდის, რომ კომპლექსური შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსია მისი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების დისპერსიათა ჯამის ტოლია:

$$D_z(t)=D_x(t)+D_y(t). \tag{15.9.14}$$

კომპლექსური შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია განისაზღვრება, როგორც მისი t და t' კვეთების კორელაციური მომენტი:

$$K_z(t, t')=M[\overset{\circ}{Z}(t)\,\overline{\overset{\circ}{Z}(t')}], \tag{15.9.15}$$

სადაც

$$\overline{\overset{\circ}{Z}}(t')=\overset{\circ}{X}(t')-i\overset{\circ}{Y}(t')$$

$\overset{\circ}{Z}(t)$ სიდიდესთან შეუღლებული კომპლექსური სიდიდეა, როცა $t'=t$ კორელაციური ფუნქცია, ცხადია, გადაიქცევა დისპერსიად.

$$K_z(t,\ t)=D_z(t). \tag{15.9.16}$$

ვსარგებლობთ, რა (15.9.9) ფორმულით შეიძლება გამოვსახოთ კომპლექსური შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია მისი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების მახასიათებლებით. შემთხვევით სიდიდეებად Z_1 და Z_2 ამ ფორმულაში მონაწილე შემთხვევითი ფუნქციის $Z(t)$ და $Z(t')$ კვეთების განხილვით მივიღებთ:

$$K_z(t,t')=K_x(t,t')+K_y(t,t')+i\{R_{xy}(t',t)-R_{xy}(t,t')\}, \tag{15.9.17}$$

სადაც $R_{xy}(t,t')$ — შემთხვევითი $X(t)$ და $Y(t)$ ფუნქციების ურთიერთ კორელაციური ფუნქციაა (შემთხვევითი $Z(t)$ ფუნქციის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილის).

იმ შემთხვევაში, როცა ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები არა კორელირებულია $(R_{xy}(t,\ t')\equiv 0)$,
(15.7.9) ფორმულას აქვს სახე:

$$K_z(t,\ t')=K_x(t,\ t')+K_y(t,\ t'). \tag{15.9.18}$$

შემდგომში ვისარგებლებთ შემთხვევითი ფუნქციის ჩაწერის როგორც ნამდვილი, ისე კომპლექსური ფორმით. უკანასკნელ შემთხვევაში მას ყოველთვის აღვნიშნავთ.

XVI თავი

შემთხვევით ფუნქციათა კანონიკური დაშლები

16.1. კანონიკურ დაშლათა იდეა. შემთხვევითი ფუნქციის წარმოდგენა ელემენტარულ შემთხვევით ფუნქციათა ჯამის სახით

15.7 პუნქტში გავეცანით შემთხვევით ფუნქციათა წრფივ გარდაქმნათა ზოგად წესებს. ეს წესები დაიყვანება იმაზე, რომ შემთხვევით ფუნქციათა წრფივი გარდაქმნებისას მისი მათემატიკური ლოდინი განიცდის იგივე წრფივ გარდაქმნას, ხოლო კორელაციური ფუნქცია ამ გარდაქმნას ორჯერ განიცდის: როგორც ერთი, ისე მეორე არგუმენტით.

მათემატიკური ლოდინის გარდაქმნის წესი პრაქტიკულად გამოყენების მხრივ ძლიერ მარტივია და სიძნელეს არ იწვევს, რაც შეეხება კორელაციური ფუნქციის ორმაგ გარდაქმნას იგი მთელ რიგ შემთხვევებში მოითხოვს რთულ და დიდ ოპერაციებს, რაც აძნელებს ზემოთ აღნიშნული ზოგადი მეთოდების პრაქტიკულ გამოყენებას.

მართლაც, განვიხილოთ, მაგალითად, უმარტივესი ინტეგრალური ოპერატორი.

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau. \tag{16.1.1}$$

საერთო კანონის თანახმად კორელაციური ფუნქცია იმავე ოპერატორით გარდაიქმნება ორჯერ,

$$K_y(t, t') = \int_0^t \int_0^{t'} K_x(\tau, \tau')\, d\tau\, d\tau'. \tag{16.1.2}$$

ძლიერ ხშირად ხდება, რომ ცდიდან მიღებულ კორელაციურ ფუნქციას $K_x(t, t')$ არა აქვს ანალიტიკური გამოსახვა და მოცემულია ცხრილის სახით, მაშინ (16.1.2) ინტეგრალი მოგვიხდება გამოვთვალოთ, რიცხობრივად, როგორც ორივე საზღვარის ფუნქცია. ეს ძლიერ დიდი და შრომატევადი ამოცანაა. თუკი ინტეგრალქვეშა ფუნქციის აპროქსიმაციას მოვახდენთ, მაშინ ამ შემთხვევაშიც ძლიერ ხშირად (16.1.2) ინტეგრალი ცნობილი ფუნქციებით არ გამოისახება. ასე დგას საკითხი გარდაქმნის ოპერატორის უმარტივესი ფორმის დროსაც კი. თუკი, როგორც ეს ხშირად ხდება, დინამიკური სისტემის მუშაობა აღიწერება დიფერენციალური განტოლებებით, რომელთა ამონახსნი არ გამოისახება ცხადი ფორმით, კორელაციური ფუნქციის განსაზღვრის ამოცანა გამოსასვლელში კიდევ უფრო რთულდება: იგი მოითხოვს კერძო წარმოებულებთან დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრირებას, ამასთან დაკავშირებით გამოყენება შემთხვევითი ფუნქციის წრფივი გარდაქმნების ზემოთხსენებული ზოგადი მეთოდების, როგორც წესი, აღმოჩნდება ძლიერ რთული და თავის თავს ვერ ამართლებს. პრაქტიკულ ამოცანათა ამოხსნისას უფრო ხშირად გამოიყენება სხვა მეთოდები, რომლებსაც მივყევართ უფრო მარტივ გარდაქმნებამდე. ერთ-ერთი მათგანია — ე. წ. კ ა ნ ო ნ ი კ უ რ დ ა შ ლ ა თ ა მ ე თ ო დ ი, რომელიც დამუშავებულია ვ. ს. პუგაჩოვის მიერ და შეადგენს მოცემული თავის შინაარსს.

კანონიკურ დაშლათა მეთოდის იდეაა შემთხვევითი ფუნქცია, რომელზედაც საჭიროა ესა თუ ის გარდაქმნები, წინასწარ წარმოიდგინება ეგრეთწოდებულ ე ლ ე მ ე ნ ტ ა რ უ ლ შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ფ უ ნ ქ ც ი ა თ ა ჯამის სახით.

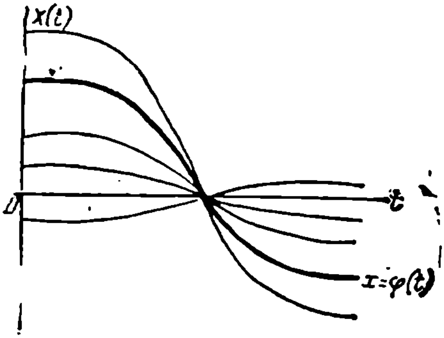
ელემენტარული შემთხვევითი ფუნქცია ეწოდება შემდეგი სახის ფუნქციას:

$$X(t)=V\varphi(t), \qquad (16.1.3)$$

სადაც V ჩვეულებრივი შემთხვევითი სიდიდეა, $\varphi(t)$ ჩვეულებრივი (არა შემთხვევითი) ფუნქციაა.

ელემენტარული შემთხვევითი ფუნქცია ყველაზე მარტივი ტიპია შემთხვევითი ფუნქციისა. მართლაც (16.1.3) გამოსახულებაში შემთხვევითს წარმოადგენს მხოლოდ V მამრავლი, რომელიც დგას $\varphi(t)$ ფუნქციის წინ; თვით დროზე დამოკიდებულება კი არაშემთხვევითია.

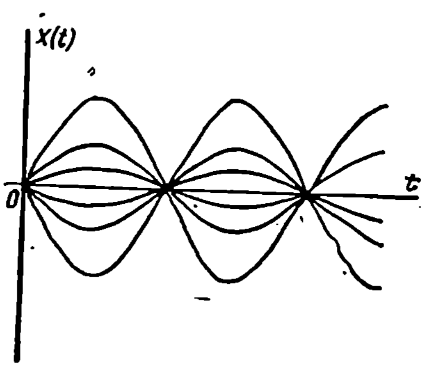
ელემენტარული $X(t)$ ფუნქციის ყველა შესაძლო რეალიზაცია შეიძლება მიღებულ იქნას $x=\varphi(t)$ ფუნქციის გრაფიკიდან ორდინატთა ღერძზე მასშტაბის უბრალოდ შეცვლით (ნახ. 16.1.3) ამ შემთხვევაში აბსცისების ღერძი ($x=0$) აგრეთვე ერთ-ერთი რეალიზაციათაგანია შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციისა, რომელიც ხორციელდება, როცა შემთხვევითი V სიდიდე ღებულობს 0 მნიშვნელობას (თუ ეს მნიშვნელობა მიეკუთვნება V სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობას).



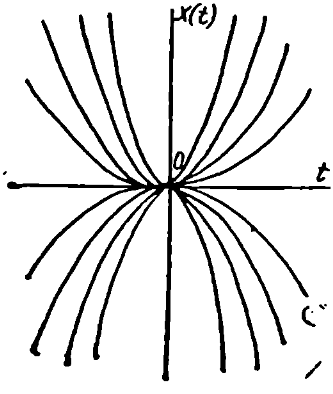
ნახ. 16.1.1.

ელემენტარულ შემთხვევითი ფუნქციათა მაგალითად მოვიყვანთ $X(t)=V\sin t$ (ნახ. 16.1.2) და $X(t)=Vt^2$ (ნახ. 16.1.3) ფუნქციებს.

ელემენტარული შემთხვევითი ფუნქცია ხასიათდება იმით რომ მასში გაყოფილია შემთხვევითი ფუნქციის ორი თავისებურება. შემთხვევი-



ნახ. 16.1.2.



ნახ. 16.1.3.

თობა მთლიანად თავმოყრილია V კოეფიციენტში, ხოლო დროისაგან დამოკიდებულება ჩვეულებრივ $\varphi(t)$ ფუნქციაში.

განვსაზღვროთ ელემენტარული შემთხვევითი ფუნქციის მახასიათებლები (16.1.3). გვაქვს:

$$m_x(t)=M[V_\varphi(t)]=m_v\varphi(t),$$

სადაც m_v — შემთხვევითი V სიდიდის მათემატიკური ლოდინია თუკი $m_v=0$ შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი ასევე. იგივურად ნულის ტოლია.

$$m_x(t)\equiv 0.$$

ჩვენ ვიცით, რომ ნებისმიერი შემთხვევითი ფუნქცია შეიძლება დაცენტრებული იყოს, ე. ი. მიყვანილ იქნას ისეთ სახემდე, როცა მისი მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლი იქნება, ამიტომ შემდგომში განვიხილავთ მხოლოდ დაცენტრებულ ელემენტარულ შემთხვევით ფუნქციებს, რომელთათვისაც

$$m_v=0;\quad V=\overset{\circ}{V};\quad m_x(t)=0.$$

განვსაზღვროთ ელემენტარული შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია, გვაქვს:

$$K_x(t,\ t')=M[X(t)\ X(t')]=\varphi(t)\varphi(t')\ M[V^2]=\varphi(t)\varphi(t')D,$$

სადაც D—V სიდიდის დისპერსიაა.

ელემენტარულ შემთხვევით ფუნქციებზე ფრიად მარტივად სრულდება ყველა შესაძლო წრფივი გარდაქმნები.

მაგალითად, გავაწარმოვოთ (16.1.3) შემთხვევითი ფუნქცია. შემთხვევითი სიდიდე V, რომელიც არ არის დამოკიდებული t-ზე, გამოდის წარმოებულის ნიშნის გარეთ და მივიღებთ

$$X'(t)=V\varphi'(t).$$

ანალოგიურად

$$\int_0^t X(\tau)d\tau=V\int_0^t\varphi(\tau)d\tau.$$

საერთოდ, თუ ელემენტარული (16.1.3) შემთხვევითი ფუნქცია გარდაიქმნება წრფივი L ოპერატორით, მაშინ ამ დროს შემთხვევითი V თანამამრავლი, როგორც t-საგან დამოუკიდებელი, გამოდის ოპერატორის ნიშნის გარეთ, ხოლო არა შემთხვევითი ფუნქცია $\varphi(t)$ გარდაიქმნება იგივე L ოპერატორით:

$$L\{X(t)\}=VL\{\varphi(t)\}.\tag{16.1.4}$$

მაშასადამე, თუ კი ელემენტარული შემთხვევითი ფუნქცია შემოდის წრფივი სისტემის შესასვლელში, მაშინ მისი გარდაქმნის ამოცანა დაიყვანება ერთ არა შემთხვევით! $\varphi(t)$ ფუნქციის გარდაქმნის მარტივ ამოცანამდე. აქედან წარმოიშობა იდეა: თუკი დინამიკური სისტემის შესასვლელში შედის რომელიღაც შემთხვევითი ზოგადი სახის ფუნქცია, მაშინ იგი შეიძლება წარმოვიდგინოთ—ზუსტად ანდა მიახლოებით ელემენტარულ შემთხვევით ფუნქციათა ჯამის სახით და მხოლოდ ამის შემდეგ დავუქვემდებაროთ გარდაქმნას. შემთხვევითი ფუნქციის დაშლის ასეთი იდეა უდევს საფუძვლად კანონიკური დაშლის მეთოდს. დავუშვათ გვაქვს შემთხვევითი ფუნქცია:

$$X(t)=m_x(t)+\overset{\circ}{X}(t). \tag{16.1.5}$$

დავუშვათ, რომ შევძელით ზუსტად ან მიახლოებით წარმოვადგინოთ იგი ჯამის სახით:

$$X(t)=m_x(t)+\sum_{i=1}^{m} V_i\varphi_i(t). \tag{16.1.6}$$

სადაც V_i — ნული სიდიდის მათემატიკური ლოდინის მქონე შემთხვევითი სიდიდეებია, φ_i ((t) — არაშემთხვევითი ფუნქციებია, $m_x(t)$ — მათემატიკური ლოდინია $X(t)$ ფუნქციისა. შევთანხმდეთ და შემთხვევითი ფუნქციის (16.1.6) ფორმით წარმოდგენას დავარქვათ შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ ი ფ უ ნ ქ ც ი ი ს დ ა შ ლ ა. შემთხვევით $V_1, V_2, \ldots, V_m$ სიდიდეებს დავარქვათ დაშლის კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი, ხოლო არა შემთხვევით $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t) \ldots$, $\varphi_m(t)$ ფუნქციებს — ს ა კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ო ფუნქციები.

განვსაზღვროთ L ოპერატორიანი წრფივი სისტემის რეაქცია შემთხვევით X (t) ფუნქციაზე, რომელიც მოცემულია (16.1.6) დაშლილი სახით. ცნობილია, რომ წრფივ სისტემას გააჩნია ე. წ. ს უ პ ე რ პ ო ზ ი ც ი ი ს თ ვ ი ს ე ბ ა, რომელიც არის ის, რომ სისტემის რეაქცია რამდენიმე ზემოქმედების ჯამზე ტოლია ცალკეულ ზემოქმედებებზე რეაქციების ჯამის. მართლაც, სისტემის L ოპერატორი, რომელიც წრფივია, შეიძლება განსაზღვრის თანახმად გამოყენებულ იქნას ჯამზე წევრწევრად.

აღვნიშნავთ, რა სისტემის რეაქციას $X(t)$ შემთხვევით ზემოქმედებაზე $Y(t)$-თი, მივიღებთ:

$$Y(t)=L\{X(t)\}=L\{m_x(t)\}+\sum_{i=1}^{m}V_i L\{\varphi_i(t)\}. \tag{16.1.7}$$

მივიღეთ (16.1.7.) გამოსახულებას რამდენადმე სხვა ფორმა. მათემატიკური ლოდინის წრფივი გარდაქმნის ზოგადი წესის გათვალისწინებით ვრწმუნდებით, რომ

$$L\{m_x(t)\}=m_y(t).$$

აღვნიშნავთ რა

$$L\{\varphi_i(t)\}=\psi_i(t),$$

გვაქვს

$$Y(t)=m_y(t)+\sum_{i=1}^{m}V_i\psi_i(t). \qquad (16.1.8)$$

(16.1.8) გამოსახულება არის $Y(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის დაშლა ელემენტარულ ფუნქციებად. ამ დაშლის კოეფიციენტებს წარმოადგენენ იგივე შემთხვევითი V_1, $V_2,\dots,V_m$ სიდიდეები, ხოლო მათემატიკური ლოდინი და კორდინატული ფუნქციები მიღებულია ამოსავალი შემთხვევითი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინიდან და კოორდინატული ფუნქციიდან იგივე წრფივი გარდაქმნით. რომელსაც ექვემდებარება შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია. ამრიგად, ვღებულობთ დაშლილად მოცემული შემთხვევითი ფუნქციის გარდაქმნის შემდეგ წესს.

თუკი შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციას რომელიც მოცემულია ელემენტარულ ფუნქციების მიხედვით დაშლილი სახით ექვემდებარება წრფივ L გარდაქმნას, მაშინ დაშლის კოეფიციენტები რჩებიან უცვლელნი, ხოლო მათემატიკური ლოდინი და საკოორდინატო ფუნქციები ექვემდებარებიან იგივე L წრფივ გარდაქმნას.

ამდაგვარად შემთხვევითი ფუნქციის დაშლილი სახით წარმოდგენა დაიყვანება იმაზე, რომ შემთხვევითი ფუნქციის წრფივი გარდაქმნა რამდენიმე არაშემთხვევითი-მათემატიკური ლოდინისა და საკოორდინატო ფუნქციის ისეთივე წრფივ გარდაქმნებზე დაიყვანება.

ეს საშუალებას იძლევა მნიშვნელოვნად გამარტივებულ იქნას შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის მახასიათებლების მონახვის ამოცანა 15.7 პუნქტში მოცემულ ზოგად ამოხსნასთან შედარებით. მართლაც და ყოველი არა შემთხვევითი $m_x(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\dots$, $\varphi_m(t)$ ფუნქციებიდან მოცემულ შემთხვევაში გარდაიქმნება მხოლოდ ერთხელ $K_x(t, t')$ კორელაციურ ფუნქციისაგან განსხვავებით, რომელიც თანახმად საერთო წესებისა გარდაიქმნება ორჯერ.

განვიხილოთ შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია, რომლის დაშლა შემდეგი სახითაა მოცემული:

$$X(t)=m_x(t)+\sum_{i=1}^{m} V_i\varphi_i(t). \qquad (16.2.1)$$

სადაც $V_1, V_2,\ldots,V_n$ კოეფიციენტები შემთხვევით სიდიდეთა სისტემაა, რომელთა მათემატიკური ლოდინები ნულის ტოლია და კორელაციური მატრიცაა $V\|K_{ij}\|$.

მოვნახოთ შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია და დისპერსია.
განსაზღვრის მიხედვით

$$K_x(t, \quad t')=M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')], \qquad (16.2.2)$$

სადაც

$$\overset{\circ}{X}(t)=\sum_{i=1}^{m} Y_i\varphi_i(t); \qquad (16.2.3)$$

$$\overset{\circ}{X}(t')=\sum_{j=1}^{m} V_j\varphi_j(t'). \qquad (16.2.4)$$

(16.2.4) ფორმულაში აჯამვის ინდექსი აღნიშნულია j ასოთი. რათა გაესვას ხაზი (16.2.3) ფორმულებში აჯამვის i ინდექსისაგან მის დამოუკიდებლობას.

(16.2.3) და (16.2.4) გამოსახულებათა გადამრავლებით და მასზე მათემატიკური ლოდინის ოპერაციის გამოყენებით მივიღებთ:

$$K_x(t,t')=M\left[\sum_{i,\,j}V_iV_j\varphi_i(t)\varphi j(t')\right]=\sum_{i,\,j}M[V_iV_j]\varphi_i(t)\varphi_j(t'). \qquad (16.2.5)$$

სადაც აჯამვა ვრცელდება მნიშვნელობათა ყველა წყვილზე, როგორც ტოლების, ისე არა ტოლების იმ შემთხვევაში, როცა $i=j$

$$M[V_iV_j]=M[V^2{}_i]=K_i=D_i,$$

სადაც D_i არის დისპერსია შემთხვევითი V_i სიდიდის. იმ შემთხვევაში, როცა $i\neq j$

$$M[V_iV_j]=K_{ij},$$

სადაც K_{ij} არის შემთხვევითი V_i, V_j სიდიდეთა კორელაციური მომენტი.

ამ მნიშვნელობათა (16.2.5) ფორმულაში ჩასმით, მივიღებთ (16.2.1) დაშლით მოცემული შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის კორელაციური ფუნქციის გამოსახულებას

$$K_x(t, t') = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t)\varphi_i(t')\, D_i + \sum_{i\neq j}\varphi_i(t)\varphi_j(t')K_{ij}. \qquad (16.2.6)$$

(16.2.6) გამოსახულებაში $t'=t$ დაშვებით, მივიღებთ შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის დისპერსიას:

$$D_x(t)= \sum_{i=1}^{m}[\varphi_i(t)]^2D_i+\sum_{i\neq j}\varphi_i(t)\varphi_j(t)K_{ij}. \qquad (16.2.7)$$

ცხადია, (16.2.6) და (16.2.7) გამოსახულებანი მიიღებენ განსაკუთრებულად მარტივ სახეს, როცა ყველა კოეფიციენტები V_i (16.2.1) დაშლისა არა კორელირებულია, ე. ი. $K_{ij}=0$ როცა $i\neq j$ ამ შემთხვევაში შემთხვევითი ფუნქციის დაშლას ეწოდება „კანონიკური".

ამგვარად, შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის კანონიკური დაშლა ეწოდება, მისი შემდეგი სახით წარმოდგენას:

$$X(t)=m_x(t)+\sum_{i=1}^{m} V_i\varphi_i(t), \qquad (16.2.8)$$

სადაც $m_x(t)$ — შემთხვევითი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინია; $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)$ — საკოორდინატო ფუნქციებია, ხოლო V_1, $V_2,\ldots$, V_m — ნულის ტოლი მათემატიკური ლოდინის მქონე არა კორელირებული შემთხვევითი სიდიდეებია.

თუ მოცემულია შემთხვევითი ფუნქციის კანონიკური დაშლა, მაშინ მისი კორელაციური ფუნქცია გამოისახება მარტივად. (16.2.6) ფორმულაში $K_{ij}=0$ დაშვებით როცა $i\neq j$, მივიღებთ

$$K_x(t,t')= \sum_{i=1}^{m}\varphi_i(t)\varphi_i(t')D_i. \qquad (16.2.9)$$

(16.2.9) გამოსახულებას ეწოდება კორელაციური ფუნქციის კანონიკური დაშლა.

დავუშვათ ფორმულაში (16.2.9) $t'=t$, მივიღებთ შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსიას

$$D_x(t)=\sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(t)]^2D_i. \qquad (16.2.10)$$

ამგვარად, ვიცით რა შემთხვევით $X(t)$ ფუნქციის კანონიკური დაშლა, შეიძლება უცბად მოვნახოთ მისი კორელაციური ფუნქციის კანონიკური დაშლა. შეიძლება დავამტკიცოთ აგრეთვე ის, რომ შებრუნებული დებულებაც ასევე სამართლიანია. თუკი მოცემულია (16.2.9) კორელაციური ფუნქციის კანონიკური დაშლა, მაშინ შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია (16.2.8) სახის კანონიკური დაშლა, რომელთა საკოორდინატო $\varphi_i(t)$ ფუნქციები V_i კოეფიციენტები და D_i დისპერსიები. ამ დებულებას მოვიყვანთ სპეციალური დამტკიცების გარეშე[1].

შემთხვევითი ფუნქციის კანონიკურ დაშლაში წევრების რიცხვი შეიძლება იყოს არამარტო სასრული, არამედ უსასრულოც. კანონიკურ დაშლათა მაგალითები, რომელთა წევრების რაოდენობა უსასრულოა შეგვხვდება მე-17 თავში. გარდა ამისა ზოგჯერ გამოიყენება შემთხვევით ფუნქციათა ე. წ. *ინტეგრალური კანონიკური წარმოდგენები*, რომლებშიც ჯამი იცვლება ინტეგრალით. კანონიკური დაშლები გამოიყენება არა მარტო ნამდვილ, არამედ კომპლექსურ შემთხვევით ფუნქციებისათვისაც. განვიხილოთ კომპლექსური შემთხვევითი ფუნქციისათვის კანონიკური დაშლის ცნების განზოგადოება.

ელემენტარული კომპლექსური შემთხვევითი ფუნქცია ეწოდება შემდეგი სახის ფუნქციას

$$X(t)=V\varphi(t) \qquad (16.2.11)$$

სადაც როგორც შემთხვევითი V სიდიდე, ისე ფუნქცია კომპლექსურია.

განვსაზღვროთ ელემენტარული შემთხვევითი (16.2.11) ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია. ვსარგებლობთ, რა კომპლექსური შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქციის ზოგადი განმარტებით მივიღებთ

$$K_x(t,\ t')=M[V\varphi(t)\overline{V\varphi(t')}], \qquad (16.2.12)$$

სადაც ხაზით ზემოთ, როგორც ადრე, აღინიშნება კომპლექსური შეუღლებული სიდიდე იმის მხედველობაში მიღებით, რომ

$$\overline{V\varphi(t)}=\overline{V}\,\overline{\varphi(t)}$$

და არა შემთხვევითი $\varphi(t)$ და $\varphi(t')$ სიდიდეების მათემატიკური ლოდინის ნიშნის გარეთ გამოტანით მივიღებთ:

$$K_x(t,\quad t')=\varphi(t)\overline{\varphi(t')}M[|V|^2].$$

---

[1] დამტკიცება იხ. ვ. ს. პუგაჩოვი, შემთხვევით ფუნქციათა თეორია და მისი გამოყენება ავტომატური მართვის ამოცანებში, ფიზმატგიზ 1962 წ. (რუსულ ენაზე).

მაგრამ 15.9 პუნქტის თანახმად $M[|V|^2]$ არის შემთხვევითი კომპლექსური V სიდიდის დისპერსია:

$$M[|V|^2]=D,$$

მაშასადამე

$$K_x(t,\ t')=\varphi(t)\overline{\varphi(t')}D \qquad (16.2.13)$$

კომპლექსური შემთხვევითი ფუნქციის კანონიკური დაშლა ეწოდება მისი შემდეგი სახით წარმოდგენას:

$$X(t)=m_x(t)+\sum_{i=1}^{m} V_i\varphi_i(t), \qquad (16.2.14)$$

სადაც $V_1, V_2, \ldots, V_m$ — არა კორელირებული კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდეებია, რომელთა მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლია, ხოლო $m_x(t)$, $\varphi_1(t)$ $\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)$ — კომპლექსური არა შემთხვევითი ფუნქციებია.

თუ კომპლექსური შემთხვევითი ფუნქცია წარმოდგენილია კანონიკური დაშლის სახით (16.2.14), მაშინ მისი კორელაციური ფუნქცია გამოისახება ფორმულით:

$$K_x(t,\ t')=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(t)\overline{\varphi_i(t')}D_i, \qquad (16.2.15)$$

სადაც D_i, V სიდიდის დისპერსია.

$$D_i=M[|V_i|^2]. \qquad (16.2.16)$$

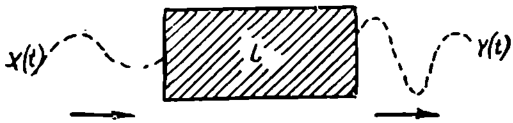
ფორმულა (16.2.15) უშუალოდ გამოდის შემთხვევითი ელემენტარული კომპლექსური ფუნქციის კორელაციური ფუნქციის (16.2.13) გამოსახულებიდან. (16.2.15) გამოსახულებას ეწოდება კომპლექსური შემთხვევითი ფუნქციის კანონიკური დაშლა. (12.2.15) ფორმულაში $t=t'$ დაშვებით მივიღებთ (16.2.14) დაშლით მოცემული კომპლექსური შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსიის გამოსახულებას:

$$D_x(t)=\sum_{i=1}^{m}|\varphi_i(t)|^2D_i. \qquad (16.2.17)$$

16.3. კანონიკური დაშლებით მოცემული შემთხვევითი ფუნქციების წრფივი გარდაქმნები

ვთქვათ, რომელიღაც წრფივი L სისტემის შესასვლელში შედის შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია (ნახ. 16.3.1).

სისტემა $X(t)$ ფუნქციას გარდაქმნის წრფივი L ოპერატორის მეშვეობით და გამოსასვლელში ვღებულობთ შემთხვევით ფუნქციას.



ნახ. 16.3.1.

$$Y(t)=L\{X(t)\}. \tag{16.3.1}$$

დავუშვათ, რომ შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია მოცემულია მისი კანონიკური დაშლით:

$$X(t)=m_x(t)+\sum_{i=1}^{k} V_i\varphi_i(t), \tag{16.3.2}$$

განვსაზღვროთ სისტემის რეაქცია ამ ზემოქმედებაზე, რადგანაც სისტემის ოპერატორი წრფივია, ამიტომ

$$Y(t)=L\{X(t)=L\{m_x(t)+\sum_{i=1}^{k} V_i L\{\varphi_i(t)\}. \tag{16.3.3}$$

16.3.3 გამოსახულების განხილვით ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ იმაში, რომ იგი $Y(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის კანონიკური დაშლაა, რომლის მათემატიკური ლოდინია

$$m_y(t)=L\{m_x(t)\} \tag{16.3.4}$$

და საკოორდინატო ფუნქციებით

$$\psi_i(t)=L\{\varphi_i(t)\}. \tag{16.3.5}$$

ამგვარად, შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის კანონიკური დაშლის წრფივი გარდაქმნისას მიიღება შემთხვევითი $Y(t)$ ფუნქციის კანონიკური დაშლა, თანაც მათემატიკური ლოდინი და საკოორდინატო ფუნქციები იგივე წრფივ გარდაქმნას განიცდიან.

თუ შემთხვევითი $Y(t)$ ფუნქცია წრფივი სისტემის გამოსასვლელში მიღებულია კანონიკური დაშლის სახით

$$Y(t)=m_y(t)+\sum_{i=1}^{k} V_i\psi_i(t) \qquad (16.3.6)$$

მაშინ მისი კორელაციური ფუნქცია და დისპერსია მოინახება მარტივად

$$K_y(t,\ t')=\sum_{i=1}^{k}\psi_i(t)\psi_i(t')D_i, \qquad (16.3.7)$$

$$D_y(t)=\sum_{i=1}^{k}[\psi_i(t)]^2D_i. \qquad (16.3.8)$$

ეს განსაკუთრებით მოხერხებულს ხდის სახელდობრ კანონიკურ დაშლებს, ელემენტარული ფუნქციებით სხვა ნებისმიერ დაშლებთან შედარებით.

განვიხილოთ დაწვრილებით კანონიკური დაშლის გამოყენება შემთხვევითი შემავალ ზემოქმედებაზე დინამიკური სისტემის რეაქციის განსაზღვრისათვის, როცა სისტემის მუშაობა აღიწერება წრფივი დიფერენციალური განტოლებით, ზოგად შემთხვევაში — ცვლადი კოეფიციენტებით. ჩავწეროთ ეს განტოლება ოპერატორული ფორმით:

$$A_n(p,\ t)\ Y(t)=B_m(p,\ t)X(t). \qquad (16.3.9)$$

თანახმად შემთხვევითი ფუნქციების წრფივი გარდაქმნების ზემოთ აღნიშნული წესებისა ზემოქმედების მათემატიკური ლოდინები და რეაქციები უნდა აკმაყოფილებდნენ იმავე განტოლებას:

$$A_n(p,\ t)m_y(t)=B_m(p,\ t)\ m_x(t). \qquad (16.3.10)$$

ანალოგიურად თითოეული საკოორდინატო ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს იმავე დიფერენციალურ განტოლებას:

$$A_n(p,\ t)\psi_i(t)=B_m(p,\ t)\varphi_i(t), \qquad (16.3.11)$$

$$(i=1,2,\ldots,k).$$

ამგვარად, შემთხვევით ზემოქმედებაზე წრფივი დინამიკური სისტემის რეაქციის განსაზღვრის ამოცანა დავიდა ჩვეულებრივ $k+1$ დიფერენციალური განტოლებათა ინტეგრირების ჩვეულებრივ მათემატიკურ ამოცანამდე, რომლებიც შეიცავენ ჩვეულებრივ არა შემთხვევით ფუნქციებს. რადგანაც დინამიკური სისტემის ანალიზის ძირითადი ამოცანის ამოხსნისას—მოცემულ ზემოქმედებაზე მისი რეაქციის განსაზღვრისას — სისტემის აღმწერი დიფერენციალურ განტოლების ინ-

ტეგრების ამოცანა ამა თუ იმ ხერხით წყდება, ამიტომ (16.3.10) და (16.3.11) განტოლებათა ამოხსნისას ახალი მათემატიკური სიძნელეები არ წარმოიშვება. კერძოდ ამ განტოლებათა ამოხსნისას, შეიძლება წარმატებით გამოყენებულ იქნას იგივე მაინტეგრირებელი სისტემები ანდა მამოდულირებელი მოწყობილობანი, რომლებიც გამოიყენებიან შემთხვევით შეშფოთებათა გარეშე მომუშავე სისტემების ანალიზისათვის. დაგვრჩა გავაშუქოთ საკითხი საწყისი პირობების შესახებ, რომელთა გათვალისწინებით საჭიროა ვაინტეგროთ (16.3.10) და (16.3.11) განტოლებანი.

ჯერ განვიხილოთ რამდენიმე მარტივი შემთხვევა, როცა მოცემული დინამიკური სისტემისათვის საწყისი პირობები არა შემთხვევითია. ამ შემთხვევაში როცა $t=0$ უნდა შესრულდეს პირობები:

$$\left.\begin{aligned} &Y(0)=y_0, \\ &Y'(0)=y_1, \\ &\\ &Y^{(r)}(0)=y_r, \\ &\quad , \\ &Y^{(n-1)}(0)=y_{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{16.3.12}$$

სადაც $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ — არა შემთხვევითი რიცხვებია. პირობები (16.3.12) შეიძლება ჩაიწეროს უფრო კომპაქტურად:

$$Y^r(0)=y_r \quad (r=0,1,\ldots,\ n-1), \tag{16.3.13}$$

ამ დროს ნულოვანი რიგის წარმოებულის $Y^0(t)$ ქვეშ ვიგულისხმოთ თვით $Y(t)$ ფუნქცია.

გამოვარკვიოთ თუ რომელ საწყის პირობებში უნდა ვაინტეგროთ (16.3.10) და (16.3.11) განტოლებანი. ამისათვის მოვნახოთ $Y(t)$ ფუნქციის r-რიგის წარმოებული და დავუშვათ მასში $t=0$. (16.3.12) გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$m_y^{(r)}(0)+\sum_{i=1}^{k} V_i \psi_i^{(r)}(0)=y_r. \tag{16.3.14}$$

რადგან სიდიდე y_r არა შემთხვევითია, ამიტომ (16.3.14) ტოლობის მარცხენა ნაწილის, დისპერსია ნულის ტოლი უნდა იყოს.

$$\sum_{i=1}^{k} D_i[\psi_i^{(r)}(0)]^2=0. \tag{16.3.15}$$

რადგან V_i სიდიდეთა ყველა D_i დისპერსიები დადებითია, ამიტომ (16.3.15) ტოლობა შეიძლება განხორციელდეს მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\psi_i^{(r)}(0)=0 \tag{16.3.16}$$

ყველა i-სათვის.

(16.3.14) ფორმულაში $\psi_i^{(r)}(0)=0$ ჩასმით მივიღებთ:

$$m_y^{(r)}(0)=y_r. \tag{16.3.17}$$

(16.3.17) ტოლობიდან გამოდის, რომ მათემატიკური ლოდინისათვის (16.3.10) განტოლება უნდა ვაინტეგრიროთ მოცემულ საწყის (16.3.12) პირობებში:

$$\left.\begin{aligned} &m_y(0)=y_0,\\ &m'_y(0)=y_1,\\ &\quad\vdots\\ &m_y^{(r)}(0)=y_r,\\ &\quad\vdots\\ &m_y^{(n)}(0)=y_n. \end{aligned}\right\} \tag{16.3.18}$$

რაც შეეხება (16.3.11) განტოლებებს მათი ინტეგრირება უნდა მოხდეს ნულოვან საწყის პირობებისას:

$$\psi_i(0)=\psi'_i(0)=\ldots=\psi_i^{(r)}(0)=\ldots=\psi_i^{(n)}(0)=0 \tag{16.3.19}$$

განვიხილოთ უფრო რთული შემთხვევა, როცა საწყისი პირობები შემთხვევითია.

$$\left.\begin{aligned} &Y(0)=Y_0,\\ &Y'(0)=Y_1,\\ &\quad\vdots\\ &Y^{(r)}(0)=Y_r,\\ &\quad\vdots\\ &Y^{(n-1)}(0)=Y_{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{16.3.20}$$

სადაც $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ — შემთხვევითი სიდიდეებია.

ამ შემთხვევაში რეაქცია სისტემის გამოსასვლელში შესაძლოა მონახულ იქნას ჯამის სახით:

$$Y(t)=Y_{\text{I}}(t)+Y_{\text{II}}(t), \tag{16.3.21}$$

სადაც $Y_{\text{I}}(t)$ — ამონახსნია (16.3.9) დიფერენციალური განტოლებისა ნულოვან საწყის პირობებში: $Y_{\text{II}}(t)$ — იგივე დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია მაგრამ ნულოვანი მარჯვენა ნაწილით (16.3.20) მოცემულ საწყის პირობებში, როგორც დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია ეს ამონახსნი წარმოადგენს საწყის პირობათა წრფივ კომბინაციას:

$$Y_{\text{II}}(t)=\sum_{j=0}^{n-1} Y_j f_j(t), \tag{16.3.22}$$

სადაც $f_j(t)$ — არა შემთხვევითი ფუნქციებია.

$Y_1(t)$ ამონახსნი შეიძლება მიღებულ იქნას ზემოთ აღნიშნული მეთოდით კანონიკური დაშლის ფორმით. შემთხვევითი $Y(t)=Y_1(t)+Y_{11}(t)$ ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია შეიძლება ვიპოვოთ შემთხვევით ფუნქციათა შეკრების ჩვეულებრივი ხერხებით (იხ. პარაგრაფი 15,8).

უნდა აღინიშნოს, რომ პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება შემთხვევები, როცა შემთხვევითი პროცესის საწყისიდან საკმაოდ დაშორებული დროის მომენტებისათვის, საწყისი პირობები უკვე არ ახდენენ გავლენას მათ მიმდინარეობაზე. რადგან გამოწვეული გარდამავალი პროცესები ასწრებენ ჩაქრობას. სისტემებს, რომლებსაც გააჩნიათ ასეთი თვისება, ეწოდებათ ასიმპტოტურად მდგრადი. თუ კი ჩვენ გვაინტერესებს ასიმპტოტურად მდგრადი დინამიკური სისტემის რეაქცია დროის სხვადასხვა უბანზე, რომლებიც საწყისიდან საკმარისადაა დაშორებული, მაშინ შესაძლოა დავკმაყოფილდეთ $Y_1(t)$ ამონახსნის გამოკვლევით, რომელიც მიღებულია ნულოვან საწყის პირობისას. საწყისი მომენტიდან საკმარისად დაშორებული დროის მომენტებისათვის ეს ამონახსნი მართებულია ნებისმიერი საწყისი პირობებისათვის.

XVII თავი

სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციები

17.1. ცნება სტაციონარულ შემთხვევით პროცესზე

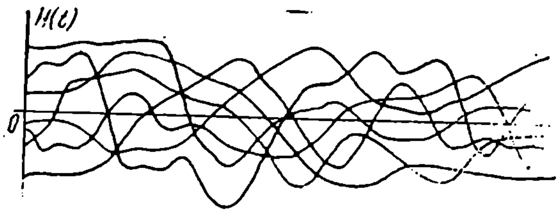
პრაქტიკაში ძალიან ხშირად გვხვდება ისეთი შემთხვევითი პროცესები, რომლებიც დროში მიახლოებით ერთგვაროვნად მიმდინარეობენ და რომელთაც აქვთ რომელიღაც საშუალო მნიშვნელობის ირგვლივ უწყვეტი შემთხვევით რხევათა სახე, თანაც არც საშუალო ამპლიტუდა, არც ამ რყევათა ხასიათი არ ამჟღავნებენ დროში არსებით ცვლილებებს. ასეთ შემთხვევით პროცესებს ეწოდებათ **ს ტ ა ც ი ო ნ ა რ უ ლ ი**.

სტაციონარული შემთხვევითი პროცესების მაგალითად შეიძლება მოვიყვანოთ: 1) თვითმფრინავის რხევა ჩამდგარ რეჟიმში ჰორიზონტალური ფრენისას 2) ელექტრო განათების ქსელში ძაბვის ცვლილება 3) რადიომიმღებში შემთხვევითი ხმაური; 4) გემის რწევის პროცესი და ა. შ.

ყოველი სტაციონარული პროცესი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც დროში განუსაზღვრელად დიდხანს მიმდინარე. სტაციონარული პროცესის გამოკვლევისას ათვლის სათავედ შეიძლება შევარჩიოთ დროის ნებისმიერი მომენტი. სტაციონარული პროცესის კვლევისას დროის ნებისმიერ მონაკვეთში უნდა მივიღოთ ერთი და იგივე მახასიათებლები. ხა-

ტოვნად რომ ვთქვათ, სტაციონარულ პროცესს „არა აქვს არც საწყისი, არც ბოლო“.

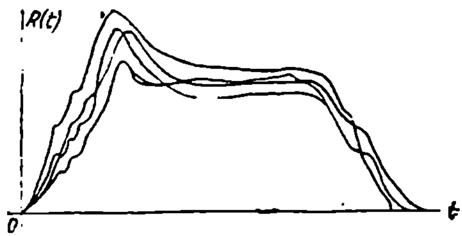
შემთხვევითი სტაციონარული პროცესის მაგალითს წარმოადგენს თვითმფრინავის სიმძიმის ცენტრის სიმაღლის ცვალებადობა ჩამდგარ რეჟიმში ჰორიზონტალური ფრენისას (ნახ. 17.1.1).



ნახ. 17.1.1.

სტაციონარულ შემთხვევით პროცესების საწინააღმდეგოდ შეიძლება მივუთითოთ, სხვა ცხადად არასტაციონარულ პროცესებზე, მაგალითად: თვითმფრინავის რხევები პიკირების რეჟიმის დროს; ელექტრულ წრედში მილევადი რხევების პროცესი; დენთის მუხტის წვის პროცესი, რეაქტიულ კამერაში და ა. შ. არასტაციონარული პროცესისათვის დამახასიათებელია ის, რომ მას აქვს დროში განვითარების განსაზღვრული ტენდენცია; ასეთი პროცესის მახასიათებლები დამოკიდებულია ათვლის სათავეზე და დროზე.

17.1.2 ნახაზზე გამოსახულია ცხადად არასტაციონარული შემთხვევითი პროცესის რეალიზაციათა ოჯახი—რეაქტიული ჰურვის ძრავის წევის ცვალებადობის პროცესი დროში.



ნახ. 17.1.2.

შევნიშნავთ, რომ თავისი განვითარების განმავლობაში არა ყველა არასტაციონარული შემთხვევითი პროცესები წარმოადგენენ არსებითად არა სტაციონარულს. არსებობენ არასტაციონარული პროცესები, რომლებიც (დროის ცნობილ მონაკვეთებში და ცნობილი მიახლოებით) შეიძლება მიღებულ იქნან, როგორც სტაციონარული.

მაგალითად საავიაციო სამიზნის ჯვარედინ სამიზნეზე დამიზნების პროცესი არის ცხადად არასტაციონარული პროცესი. თუ კი მიზანი მცირე დროის განმავლობაში დიდი და მკვეთრად ცვალებადი კუთხური სიჩქარით გადის სამიზნის ხედვის არედან. ამ შემთხვევაში სამიზნის ღერძის რხევები მიზნის მიმართ ვერ ასწრებენ ჩადგნენ, რომელი-

ლაც სტაბილურ რეჟიმში; პროცესი იწყება და მთავრდება ისე, რომ ვერ ასწრებს მიიღოს სტაციონარული ხასიათი. პირიქით, ჯვარედინი სამიზნის უძრავ ან მუდმივი კუთხური სიჩქარით მოძრავ მიზანზე დაყენების პროცესი თვალთვალის დაწყებიდან რამდენიმე წნის შემდეგ ღებულობს სტაციონარულ ხასიათს.

საერთოდ, როგორც წესი, შემთხვევითი პროცესი ნებისმიერ დინამიკურ სისტემაში იწყება არასტაციონარული სტადიიდან — ე. წ. „გარდამავალი პროცესიდან". გარდამავალი პერიოდის მილევის შემდეგ სისტემა ჩვეულებრივ გადადის დადგენილ რეჟიმზე და მაშინ შემთხვევითი პროცესები, რომლებიც მასში მიმდინარეობენ, შეიძლება ჩაითვალოს სტაციონარულად.

სტაციონარული შემთხვევითი პროცესები ძლიერ ხშირად გვხვდებიან ფიზიკურ და ტექნიკურ ამოცანებში. თავისი ბუნებით ეს პროცესები უფრო მარტივია, ვიდრე არასტაციონარული და აღიწერებიან უფრო მარტივი მახასიათებლებით. შემთხვევითი სტაციონარული პროცესების წრფივი გარდაქმნები, აგრეთვე ჩვეულებრივ ხორციელდებიან უფრო მარტივად, ვიდრე არასტაციონარული, ამასთან დაკავშირებით პრაქტიკაში მიიღო ფართო გავრცელება სპეციალურმა **შემთხვევითი სტაციონარული პროცესების თეორიამ**, ან უფრო ზუსტად **შემთხვევით სტაციონარულ ფუნქციათა თეორიამ** (რადგანაც შემთხვევით სტაციონარული ფუნქციის არგუმენტად ზოგად შემთხვევაში შეიძლება არ იყოს დრო.) სწორედ ამ თეორიის ელემენტები იქნება გადმოცემული მოცემულ თავში.

შემთხვევით $X(t)$ ფუნქციას ეწოდება სტაციონარული, თუ მისი ყველა ალბათობითი მახასიათებლები არ არიან დამოკიდებული t-საგან (უფრო ზუსტად, არ იცვლებიან t ღერძის გასწვრივ იმ არგუმენტთა ნებისმიერი ძვრისას, რომლებზედაც ისინი არიან დამოკიდებული).

შემთხვევით ფუნქციათა თეორიის მოცემულ ელემენტარულ გადმოცემაში ჩვენ სრულებითაც არ ვსარგებლობთ ისეთი ალბათობითი მახასიათებლებით, როგორიცაა განაწილების კანონები: ერთ-ერთი მახასიათებლები, რომლებითაც ვსარგებლობთ ეს არის მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და კორელაციური ფუნქცია. ჩამოვაყალიბოთ სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის განსაზღვრება ამ მახასიათებელთა ტერმინებში.

რადგანაც სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის ცვალებადობა უნდა მიმდინარეობდეს დროის მიხედვით ერთგვაროვანად, ამიტომ ბუნებრივია მოვითხოვოთ, რომ სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციისათვის მათემატიკური ლოდინი იყოს მუდმივი:

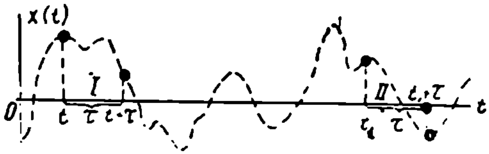
$$m_x(t) = m_x = \text{const}. \tag{17.1.1}$$

ამასთან შევნიშნავთ, რომ ეს მოთხოვნა არ წარმოადგენს არსებითს: ჩვენ ვიცით, რომ შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციიდან ყოველთვის შეიძლება გადავიდეთ დაცენტრებულ შემთხვევით $\mathring{X}(t)$ ფუნქციაზე, რომლისთვისაც მათემატიკური ლოდინი იგივურად ნულის ტოლია და, მაშასადამე, აკმაყოფილებს (17.1.1) პირობას. ამგვარად, თუ შემთხვევითი პროცესი არასტაციონარულია, მხოლოდ ცვლადი მათემატიკური ლოდინის ხარჯზე ეს არ გვიშლის ჩვენ შევისწავლოთ იგი, როგორც სტაციონარული პროცესი.

მეორე პირობა, რომელსაც ცხადია უნდა აკმაყოფილებდეს სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქცია — ეს არის დისპერსიის მუდმივობის პირობა:

$$D_x(t) = D_x = \text{const}. \qquad (17.1.2)$$

დავადგინოთ რომელ პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია. განვიხილოთ შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია (ნახ. 17.1.3) დაუშვათ $K_x(t, t')$ გამოსახულებაში $t' = t+\tau$ და განვიხილოთ. შემთხვევითი ფუნქციის τ დროის მონაკვეთით დაცილებული ორი კვეთის კორელაციური მომენტი $K_x(t, t+\tau)$. ცხადია, თუკი შემთხვევითი $X(t)$ პროცესი ნამდვილად სტაციონარულია. მაშინ ეს კორელაციური მომენტი არ უნდა იყოს დამოკიდებული იმისაგან, თუ სახელდობრ Ot ღერძზე სად ავიღეთ ჩვენ τ მონაკვეთი, არამედ უნდა იყოს დამოკიდებული მხოლოდ ამ უბნის სიგრძისაგან. მაგალითად, ნახ. 17.1.3. I და II უბნებისათვის, რომლებსაც აქვთ ერთი და იგივე სიგრძე τ. კორელაციური ფუნქციის მნიშვნელობანი $K_x(t, t+\tau)$ და $K_x(t_1, t_1+\tau)$ უნდა იყოს ერთი და იგივე. საერთოდ სტაციონარული შემთხვევითი პროცესის კორელაციური ფუნქცია არ უნდა იყოს დამოკიდებული აბსცისთა ღერძზე პირველ t არგუმენტის მ დ ე ბ ა რ ე ო ბ ა ზ ე, არამედ მხოლოდ პირველ და მეორე არგუმენტებს შორის τ შ უ ა ლ ე დ ზ ე:



ნახ. 17.1.3.

$$K_x(t, t+\tau) = k_x(\tau). \qquad (17.1.3)$$

მაშასადამე, სტაციონარული შემთხვევითი პროცესის კორელაციური ფუნქცია არის არა ორი, არამედ მხოლოდ ერთი არგუმენტის ფუნქცია. ეს გარემოება მთელ რიგ შემთხვევებში ძლიერ ამარტივებს სტაციონარულ შემთხვევით ფუნქციებზე ოპერაციებს.

შევნიშნავთ, რომ (17.1.2) პირობა, რომელიც მოითხოვს სტაციონარულ შემთხვევითი ფუნქციისაგან დისპერსიის მუდმივობას, წარ-

მოიდგენს (17.1.3) პირობის კერძო შემთხვევას. მართლაც, (17.1.3) $t+\tau=t$ ($\tau=0$) დაშვებით მივიღებთ.

$$D_x(t)=K_x(t,\ t)=k_x(0)=\text{const}. \tag{17.1.4}$$

ამგვარად: (17.1.3) პირობა არის ერთადერთი არსებითი პირობა, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქცია.

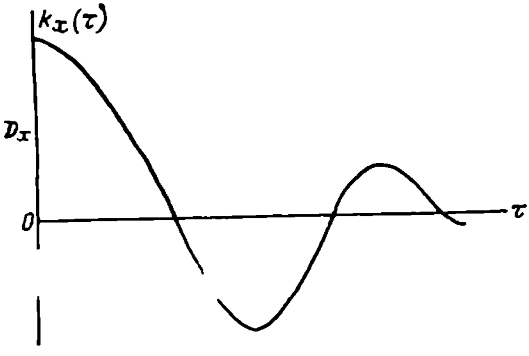
ამიტომ შემდგომში ჩვენ სტაციონარულ შემთხვევითი ფუნქციის ქვეშ ვიგულისხმებთ ისეთ შემთხვევით ფუნქციას, რომლის კორელაციური ფუნქცია დამოკიდებულია არა ორი თავისი t და t' არგუმენტებისაგან, არამედ მათ შორის τ სხვაობაზე. რომ არ დავადოთ მათემატიკურ ლოდინს სპეციალური პირობები, ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ დაცენტრებულ შემთხვევით ფუნქციებს.

ჩვენ ვიცით, რომ ნებისმიერი შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციურ ფუნქციას გააჩნია სიმეტრიის თვისება

$$K_x(t,\ t')=K_x(t',\ t).$$

აქედან სტაციონარული პროცესისათვის $t'-t=\tau$ დაშვებით მივიღებთ

$$k_x(\tau)=k_x(-\tau), \tag{17.1.5}$$



ნახ. 17. 1.4.

ე. ი. კორელაციური ფუნქცია — $K_x(\tau)$ არის თავისი არგუმენტის ლუწი ფუნქცია. ამიტომ ჩვეულებრივ კორელაციურ ფუნქციას განსაზღვრავენ არგუმენტის მხოლოდ დადებით მნიშვნელობისათვის (ნახ. 17.1.4).

პრაქტიკაში კორელაციური $K_x(\tau)$ ფუნქციის ნაცვლად, ხშირად სარგებლობენ *ნორმირებული კორელაციური ფუნქციით*

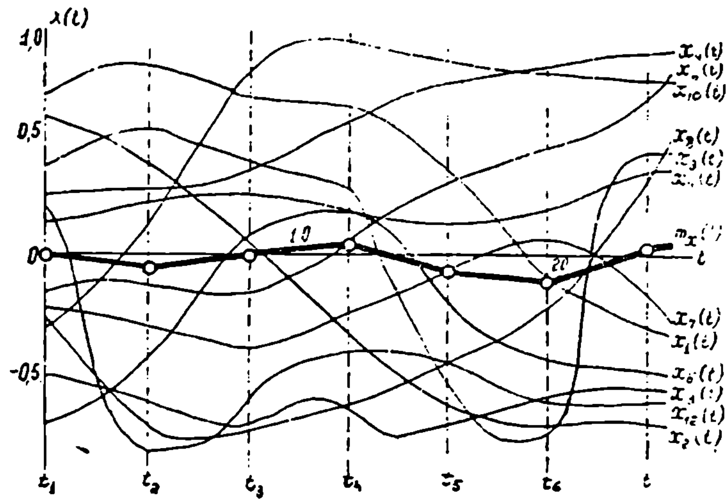
$$\rho_x(\tau)=\frac{k_x(\tau)}{D_x}, \tag{17.1.6}$$

სადაც $D_x=K_x(0)$ — ეს არის სტაციონარული პროცესის მუდმივი დისპერსია. ფუნქცია $\rho(\tau)$ არის შემთხვევითი ფუნქციის τ' დროის ინტერვალით დაშორებულ კვეთებს შორის კორელაციის კოეფიციენტი. ცხადია, რომ

$$\rho_x(0)=1.$$

მაგალითისათვის განვიხილოთ მიახლოებით სტაციონარული შემთხვევითი პროცესის ორი ნიმუში და ავაგოთ მათი მახასიათებლები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია მოცემულია 12 რეალიზაციის ერთობლიობით (ნახ. 17.1.5) ა) ვიპოვოთ მისი მახასიათებლები $m_x(t)$, $K_x(t, t')$ $D_x(t)$ და ნორმირებული კორელაციური ფუნქცია $r_x(t, t')$ ბ) განიხილეთ მიახლოებით



ნახ. 17.1.5.

შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია, როგორც სტაციონარული და ვიპოვოთ მისი მახასიათებლები.

ამოხსნა. რადგანაც შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია იცვლება შედარებით მდოვრედ შეიძლება ავიღოთ კვეთები არა ძალიან ხშირად, მაგალითად ყოველ 0.4 წმ-ში. მაშინ შემთხვევითი ფუნქცია დაყვანილი იქნება შვიდ შემთხვევით სიდიდის სისტემაზე, რომლებიც შეესაბამებიან $t=0.0$, $t=0.4$, 0.8; 1.2; 1.6; 2.0; 2.4 კვეთებს რეალიზაციების გრაფიკზე ამ კვეთების აღნიშვნით და გრაფიკიდან კვეთებში შემთხვევითი ფუნქციის მნიშვნელობათა აღებით მივიღებთ ცხრილს. (ცხრილი 17.1.1).

ც ხ რ ი ლ ი 17.1.1

N \ t	0	0,4	0,8	1.2	1.6	2.0	2,4
1	0,64	0,74	0,62	0,59	0,35	—0,07	—0,39
2	0,54	0,37	0,06	—0,32	—0,60	—0,69	—0,67
3	0,34	0,50	0,37	0,26	—0.52	—0,72	0,42
4	0,23	0.26	0,35	0.55	0,64	0,75	0,80
5	0,12	0.20	0,24	0,15	—0.20	—0,12	—0,46
6	—0,16	—0,12	—0.15	0.05	0,27	0.43	0,63
7	—0,22	—0,29	—0,38	—0,21	—0,06	0,07	—0,16
8	—0,26	—0,69	—0,70	—0,61	—0.43	—0.22	0,29
9	—0,50	—0.60	—0.68	—0,62	—0.63	—0,56	—0,54
10	—0,30	0,13	0,75	0,84	0.78	0.73	0,71
11	—0,69	—0,40	0,08	0,15	0,12	0.18	0,33
12	—0,18	—0,79	—0,56	—0,39	—0,42	—0,58	—0,53

ცხრილის შევსება რეკომენდებულია სტრიქონის მიხედვით ყოველთვის ერთი რეალიზაციის გასწვრივ გადაადგილებით.

შემდეგ ვპოულობთ შეფასებას შემთხვევით $X(0)$, $X(0.4),\ldots,$ $X(2,4)$ სიდიდეთა მახასიათებლებისათვის. სვეტების მიხედვით მნიშვნელობათა შეკრებით და ჯამის რეალიზაციათა $n = 12$ რიცხვზე გაყოფით, ვპოულობთ მიახლოებით მათემატიკური ლოდინის დროისაგან დამოკიდებულებას;

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
$\widetilde{m}_x(t)$	—0,007	—0,057	0,000	0,037	—0,057	—0,093	0,036

17.1.5-ე გრაფიკზე მათემატიკური ლოდინი ნაჩვენებია სქელი ხაზით. შემდეგ ვპოულობთ კორელაციური მატრიცების ელემენტების შეფასებებს: დისპერსიებსა და კორელაციის მომენტებს. გამოთვლები ხელსაყრელია შემდეგი სქემით ჩავატაროთ. სტატისტიკური დისპერსიის გამოსათვლელად უნდა შევკრიბოთ იმ რიცხვების კვადრატები, რომლებიც შესაბამის სვეტშია. მიღებული ჯამი იყოფა $n = 12$-ზე; შედეგს უნდა გამოვაკლოთ შესაბამის მათემატიკურ ლოდინთა ნამრავლები; კორელაციური მომენტის გადაუნაცვლებელი შეფასების მისაღებად შედეგი მრავლდება $\frac{n}{n-1} = \frac{12}{11}$-ზე. ანალოგიურად შეფასდება კორელაციური მომენტები. საანგარიშო მანქანაზე ან არითმომეტრზე გაანგარიშების შესრულებისას გადამრავლებათა საშუალედო შედეგები არ ჩაიწერებიან, არამედ უშუალოდ ჯამდებიან[1]. ასეთი ხერხით მიღებული შემთხვევით სიდიდეთა $X(0)$, $X(0.4)\ldots,X(2,4)$ სისტემების კორელაციური $K_x(t,\ t')$ ფუნქციათა მნიშვნელობები ცხრილია მოყვანილი ცხრილში 17.1.2

ცხრილი 17.1.2

$t' \backslash t$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
0	0,1632	0,1379	0,0795	0,0457	—0,0106	—0,0642	—0,0648
0,4		0,2385	0,2029	0,1621	0,0827	0,0229	0,0251
0,8			0,2356	0,2152	0,1527	0,0982	0,0896
1,2				0,2207	0,1910	0,1491	0,1322
1,6					0,2407	0,2348	0,1711
2,0						0,2691	0,2114
2,4							0,2878

[1] მოცემულ შემთხვევაში შესაძლებელი აღმოჩნდა უშუალოდ შევასრულოთ დამუშავება საწყისი მომენტებით, რადგან $X(t)$ ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლია. თუ კი ეს ასე არ არის მაშინ დამუშავების წინ აუცილებელია ათვლის სათავე გადავიტანოთ მათემატიკურ ლოდინთან ახლოს.

ცხრილის მთავარ დიაგონალზე დგანან დისპერსიათა შეფასებები:

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
$\widetilde{D}_x(t)$	0,1632	0,2385	0,2356	0,2207	0,2407	0,2691	0,2878

ამ სიდიდეებიდან კვადრატული ფესვების ამოღებით ვიპოვით $\sigma_x(t)$ საშუალო კვადრატულ გადახრის დროზე დამოკიდებულებას

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
$\widetilde{\sigma}_x(t)$	0,404	0,488	0,485	0,470	0,491	0,519	0,536

ცხრილში 17.1.2 მოცემული სიდიდეების გაყოფით შესაბამის საშუალო კვადრატულ გადახრებზე მივიღებთ ნორმირებულ კორელაციურ $r_x(t', t)$ ფუნქციის ცხრილს (ცხრ. 17.1.3).

ცხრილი 17.1.3

t' \ t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
0	1	0,700	0,405	0,241	—0,053	—0,306	—0,299
0,4		1	0,856	0,707	0,345	0,090	0,095
0,8			1	0,943	0,643	0,390	0,344
1,2				1	0,829	0,612	0,524
1,6					1	0,923	0,650
2,0						1,	0,760
2,4							1

მიღებული მონაცემები გავაანალიზოთ შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის სავარაუდო სტაციონარობის თვალთახედვის კუთხით. თუკი ვიმსჯელებთ უშუალოდ დამუშავების შედეგად მიღებული მონაცემების მიხედვით. მაშინ შესაძლებელია მივიდეთ დასკვნამდე. რომ შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია არაა სტაციონარული: მისი მათემატიკური ლოდინი სავსებით მუდმივი არ არის; დისპერსიაც აგრეთვე რამდენადმე იცვლება დროის მიხედვით. ნორმირებული კორელაციური ფუნქციის მნიშვნელობანი მთავარი დიაგონალის პარალელების გასწვრივ აგრეთვე სავსებით მუდმივი არ არის. ოღონდ, ვღებულობთ, რა მხედველობაში დამუშავებულ რეალიზაციათა ფრიად შეზღუდულ რიცხვს ($n=12$) და ამასთან დაკავშირებით მიღებულ შეფასებებში შემთხვევითობის დიდი ელემენტის არსებობა, ეს ხილული გადახრები სტაციონარობიდან ძნელად თუ შეიძლება მივიჩნიოთ მნიშვნელოვნად, მით უმეტეს რომ ისინი არ ატარებენ რამდენადმე კანონზომიერ ხასიათს. ამიტომ სავსებით მიზანშეწონილი იქნება მიახლოებითი შეცვლა $X(t)$ ფუნქციისა სტაციონარულით. ფუნქციის სტაციონარულამდე მიყვანისათვის უპირველეს ყოვ-

ლისა საშუალოთ შეფასებები დროის მიხედვით მათემატიკური ლოდინისათვის:

$$\tilde{m}_x = \frac{\tilde{m}_x(0)+\tilde{m}_x(0,4)+\dots+\tilde{m}_x(2,4)}{7} \approx -0,02.$$

ანალოგიურად გავასაშუალოთ შეფასებები დისპერსიისათვის:

$$\tilde{D}_x = \frac{\tilde{D}_x(0)+\tilde{D}_x(0,4)+\dots+\tilde{D}_x(2,4)}{7} \approx 0,236.$$

ფესვის ამოღებით მივიღებთ კ. გ.[1] გასაშუალებელ შეფასებას:

$$\tilde{\sigma}_x = 0,486.$$

გადავიდეთ ამ სტაციონარული პროცესის ნორმირებული კორელაციური ფუნქციის აგებაზე, რომლითაც შეიძლება შევცვალოთ შემთხვევითი ფუნქცია $X(t)$. სტაციონარული პროცესისათვის კორელაციური ფუნქცია (და მაშასადამე ნორმირებული კორელაციური ფუნქციაც) დამოკიდებულია მხოლოდ $\tau = t' - t$-საგან; მაშასადამე მუდმივი τ-სათვის კორელაციური ფუნქცია უნდა იყოს მუდმივი. ცხრილში 17.1.3 მუდმივ τ-ს შეესაბამება: მთავარი დიაგონალი ($\tau=0$) და ამ დიაგონალის პარალელები ($\tau=0,4$; $\tau=0,8$; $\tau=1,2$ და ა. შ.): მთავარი დიაგონალის ამ პარალელების გასწვრივ ნორმირებული კორელაციური ფუნქციის შეფასებების გასაშუალებით მივიღებთ $\rho_x(\tau)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს:

τ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
$\rho_x(\tau)$	1,00	0,73	0,41	0,22	—0,01	—0,20	—0,19	—0,10	—0,06	—0,15	0,08	0,17	0,05

$\tilde{\rho}_x(\tau)$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოდგენილია 17.1.6-ე ნახაზზე. ნახ. 17.1.6-ის განხილვისას ყურადღებას იქცევს ზოგიერთი τ-სათვის კორელაციური ფუნქციის მნიშვნელობების უარყოფითი ნიშნის არსებობა. ეს მიუთითებს იმაზე, რომ შემთხვევითი ფუნქციის სტრუქტურაში გვაქვს პერიოდულობის ზოგიერთი ელემენტი, რომელთაგან დაკავშირებით ძირითადი რხევის დაახლოებით დროის მიხედვით, ნახევარი პერიოდის ტოლ მანძილზე შეინიშნება შემთხვევითი ფუნქციის მნიშვნელობებს შორის უარყოფითი კორელაცია: ერთ კვეთში საშუალოდან დადებით გადახრებს დროის გარკვეულ მონაკვეთში შეესაბამება უარყოფითი გადახრები და პირიქით.

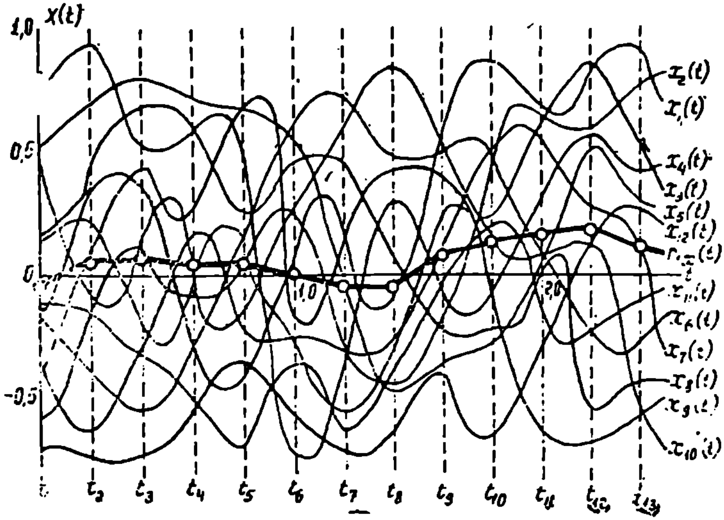
ნახ. 17.1.6.

კორელაციური ფუნქციის ასეთი ხასიათი უარყოფით მნიშვნელობებზე გადასვლით, ძალიან ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში. ჩვეულებრივ ასეთ შემთხვევებში, τ-ს გადიდებას-

[1] ს. კ. გ. — აქ და შემდეგ: „საშუალო კვადრატული გადახრა".

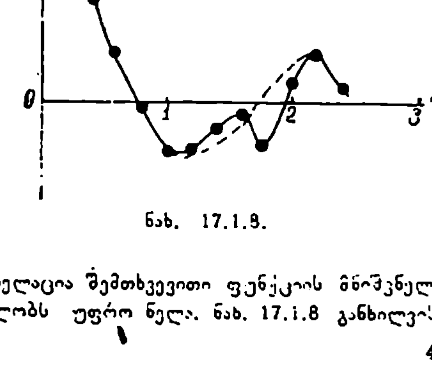
თან ერთად კორელაციური ფუნქციის რხევის ამპლიტუდა მცირდება და τ-ს შემდგომი გადიდებისას კორელაციური ფუნქცია მიისწრაფვის ნულისაკენ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. შემთხვევითი ფუნქცია $X(t)$ მოცემულია თავისი 12 რეალიზაციის კრებულობით (ნახ. 17.1.7). ფუნქციის მიახლოებით სტაციონარულით შეცვლისას, შევადაროთ მისი ნორმირებული კორელაციური ფუნქცია წინა მაგალითის ფუნქციას.



ნახ. 17.1.7.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან შემთხვევითი ფუნქცია გამოირჩევა მნიშვნელოვნად ნაკლები მდორე სვლით შედარებით წინა მაგალითის $X(t)$ ფუნქციასთან, კვეთებს შორის ინტერვალი უკვე არ შეიძლება ავიღოთ 0.4 წმ-ის ტოლი, როგორც ეს წინა მაგალითში იყო, არამედ უნდა ავიღოთ ორჯერ ნაკლები მაინც (მაგალითად 0.2 წმ, როგორც ნახ. 17. 1.7-ზე). დამუშავების შედეგად მივიღებთ შეფასებას ნორმირებულ კორელაციურ $\rho_x(\tau)$ ფუნქციისათვის.



ნახ. 17.1.8.

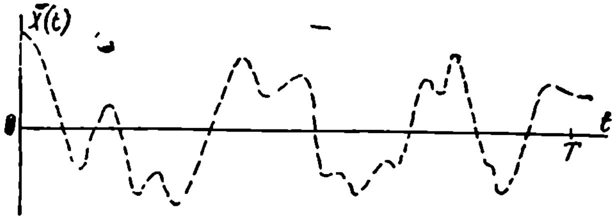
$\tilde{\rho}_x(\tau)$ ფუნქციის გრაფიკი გამოსახულია 17.1.8 ნახაზზე. ნახ. 17.1.8 და 17.1.6 გრაფიკების შედარებიდან ჩანს, რომ კორელაციური ფუნქცია გამოსახული ნახ. 17.1.8-ზე მცირდება (კლებულობს) მნიშვნელოვნად სწრაფად. ეს კი ბუნებრივია, რადგან $X(t)$ ფუნქციის ცვალებადობის ხასიათი 1-ელ მაგალითში გაცილებით უფრო მდორეა და თანდათანობითი, ვიდრე მე-2 მაგალითში; ამასთან დაკავშირებით კორელაცია შემთხვევითი ფუნქციის მნიშვნელობებს შორის 1-ელ მაგალითში კლებულობს უფრო ნელა. ნახ. 17.1.8 განხილვისას

თვალში გვეცემა τ დიდი მნიშვნელობებისათვის $\rho_x(\tau)$ ფუნქციის არაკანონზომიერი რხევები. ვინაიდან τ დიდი მნიშვნელობებისას გრაფიკის წერტილები მიღებულია მოცემულობათა შედარებით მცირე რიცხვის გასაშუალოებით. ისინი არ შეიძლება ჩავთვალოთ საიმედოდ. მსგავს შემთხვევებში აზრი აქვს კორელაციური ფუნქციის გაგლუვებას. ისე როგორც მაგალითად ნაჩვენებია 17.1.8-ე ნახაზზე პუნქტირით.

17.2. სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრალური დაშლა დროის სასრულო უბანზე. დისპერსიის სპექტრი

წინა პუნქტში მოყვანილ ორ მაგალითზე ჩვენ თვალსაჩინოდ დავრწმუნდით იმაში, რომ არსებობს კავშირი კორელაციურ ფუნქციის ხასიათსა და მის შესაბამის შემთხვევით პროცესის შინაგან სტრუქტურას შორის. იმისაგან დამოკიდებულებით, თუ როგორი სიხშირეები და როგორი თანაფარდობით ჭარბობენ შემთხვევით ფუნქციის შემადგენლობაში, მის კორელაციურ ფუნქციას აქვს ესა თუ ის სახე. ასეთი მოსაზრებებიდან ჩვენ უშუალოდ მივდივართ შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრალური შედგენილობის ცნებამდე.

„სპექტრის“ ცნება გვხვდება არა მარტო შემთხვევით ფუნქციათა თეორიაში, იგი ფართოდ გამოიყენება მათემატიკაში, ფიზიკაში და ტექნიკაში.



ნახ. 17.2.1.

თუ რომელიმე რხევითი პროცესი წარმოიდგინება სხვადასხვა სიხშირის ჰარმონიულ რხევათა ჯამის სახით (ე. წ. „ჰარმონიკებისა“) მაშინ რხევითი პროცესის სპექტრი ეწოდება ფუნქციას, რომელიც აღწერს სხვადასხვა სიხშირეების მიხედვით ამპლიტუდათა განაწილებას. სპექტრი გვიჩვენებს, თუ როგორი სახის რხევები სჭარბობენ მოცემულ პროცესში, როგორია მისი შინაგანი სტრუქტურა.

სავსებით ანალოგიური სპექტრალური აღწერა შეიძლება მივცეთ სტაციონარულ შემთხვევით პროცესსაც; მთელი განსხვავება იმაშია, რომ შემთხვევითი პროცესისათვის რხევათა ამპლიტუდები იქნებიან შემთხვევითი სიდიდეები. შემთხვევითი სტაციონარული ფუნქციის სპექ-

ტრი აღწერს სხვადასხვა სიხშირის მიხედვით დ ი ს პ ე რ ს ი ი ს გ ა-ნ ა წ ი ლ ე ბ ა ს.

მივუდგეთ შემთხვევითი სტაციონარული ფუნქციის სპექტრის ცნებას შემდეგი მოსაზრებებიდან.

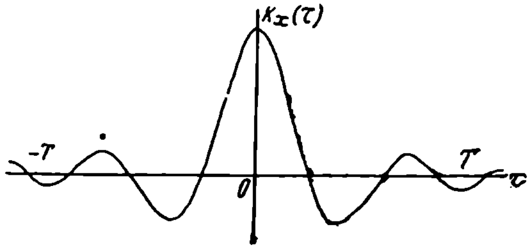
განვიხილოთ სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქცია $\overset{\circ}{X}(t)$, რომელსაც ჩვენ ვაკვირდებით $(0,\ T)$ ინტერვალში (ნახ. 17.2.1.) მოცემულია შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია

$$K_x(t,\ t+\tau)=k_x(\tau).$$

ფუნქცია $k_x(\tau)$ არის ლუწი ფუნქცია:

$$k_x(\tau)=k_x(-\tau)$$

და მაშასადამე იგი გრაფიკზე გამოისახება სიმეტრიული მრუდით (ნახ. 17.2.2).



ნახ. 17.2.2.

t და t'-ის ცვლილებისას 0-დან T-მდე არგუმენტი $\tau=t'-t$ შეიცვლება $-T$-დან $+T$-მდე.

ჩვენ ვიცით, რომ ლუწი ფუნქცია $(-T.\ T)$ ინტერვალში შეიძლება დაიშალოს ფურიეს მწკრივად, ვისარგებლებთ, რა მხოლოდ ლუწი (კოსინუსურ) ჰარმონიკებით:

$$k_x(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau, \tag{17.2.1}$$

სადაც

$$\omega_k=k\omega_1, \quad \omega_1=\frac{2\pi}{2T}=\frac{\pi}{T}, \tag{17.2.2}$$

ხოლო D_k კოეფიციენტები განისაზღვრებიან ფორმულებით:

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} k_x(\tau)d\tau, \\ D_k &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} k_x(\tau)\cos\omega_k\tau d\tau \quad \text{როცა } k\neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{17.2.3}$$

გვაქვს რა მხედველობაში, რომ $k_x(\tau)$ და $\cos\omega_k\tau$ ფუნქციები ლუწია, შეიძლება (17.2.3) ფორმულები გარდავქმნათ შემდეგი სახით:

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} k_x(\tau)d\tau, \\ D_k &= \frac{2}{T}\int_{0}^{T} k_x(\tau)\cos\omega_k\tau d\tau \quad \text{როცა } k\neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{17.2.4}$$

კორელაციური $k_x(\tau)$ ფუნქციის (17.2.1) გამოსახულებაში τ არგუმენტიდან ხელახლა გადავიდეთ ორ t და t' არგუმენტზე. ამისათვის დავუშვათ

$$\cos\omega_k\tau=\cos\omega_k(t'-t)=\cos\omega_k t'\cos\omega_k t+\sin\omega_k t'\sin\omega_k t \tag{17.2.5}$$

და ჩავსვათ (17.2.5) გამოსახულება (17.2.1) ფორმულაში:

$$K_x(t, t')=\sum_{k=0}^{\infty}(D_k\cos\omega_k t'\cos\omega_k t+D_k\sin\omega_k t'\sin\omega_k t). \tag{17.2.6}$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ გამოსახულება (17.2.6) არის კორელაციური $K_x(t, t')$ ფუნქციის კანონიკური დაშლა. ამ დაშლის კოორდინატულ ფუნქციებს წარმოადგენენ რიგრიგობით ω_1-ის ჯერადი სიხშირეების კოსინუსები და სინუსები

$$\cos\omega_k t, \ \sin\omega_k t \ (k=0,1,\ldots).$$

ჩვენ ვიცით, რომ კორელაციური ფუნქციის კანონიკური დაშლის მიხედვით შეიძლება აგებულ იქნას თვით შემთხვევითი ფუნქციის კანონიკური დაშლა, იმავე კოორდინატული ფუნქციებით და დისპერსიებით, რომლებიც ტოლი არიან კორელაციური ფუნქციის კანონიკური დაშლის D_k კოეფიციენტებისა[1].

---

[1] შესაძლებელია დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი კორელაციური ფუნქციისათვის (17.2.4) ფორმულებით გამოსახული D_k კოეფიციენტები არ არის უარყოფითი.

მაშასადამე, შემთხვევითი $\overset{\circ}{X}(t)$ ფუნქცია შესაძლებელია წარმოვადგინოთ კანონიკური დაშლის სახით:

$$\overset{\circ}{X}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(U_k\cos\omega_k t+V_k\sin\omega_k t),\qquad(17.2.7)$$

სადაც V_k, U_k ნულის ტოლი მათემატიკური ლოდინის მქონე არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეებია, რომელთა დისპერსიები ერთიდაიგივე k ინდექსის მქონე შემთხვევით სიდიდეთა ყოველი წყვილისათვის ტოლია

$$D[U_k]=D[V_k]=D_k.\qquad(17.2.8)$$

D_k დისპერსიები სხვადასხვა k-სათვის განისაზღვრება (17.2.4) ფორმულებით.

ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ შემთხვევითი $\overset{\circ}{X}(t)$ ფუნქციის კანონიკური დაშლა $(0,\ T)$ ინტერვალზე, რომლის კოორდინატულ ფუნქციებს წარმოადგენს $\cos\omega_k t$, $\sin\omega_k t$ სხვადასხვა ω_k შემთხვევაში. ასეთი გვარის დაშლას ეწოდება სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრალური დაშლა. შემთხვევითი ფუნქციათა სპექტრალური დაშლის სახით წარმოდგენაზე დაფუძნებულია ე. წ. სტაციონარული შემთხვევითი პროცესების სპექტრალური თეორია. სპექტრალური დაშლა გამოსახავს სტაციონარულ შემთხვევით ფუნქციას სხვადასხვა $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ სიხშირის ჰარმონიულ რხევებად დაშლილად; თანაც ამ რხევათა ამპლიტუდები წარმოადგენენ შემთხვევით სიდიდეებს. განვსაზღვროთ სპექტრალური (17.2.7) დაშლით მოცემული შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსია. არაკორელირებულ შემთხვევით სიდიდეთა წრფივი ფუნქციის დისპერსიაზე თეორემის მიხედვით

$$D_x=D[\overset{\circ}{X}(t)]=\sum_{k=0}^{\infty}(\cos^2\omega_k t+\sin^2\omega_k t)D_k=\sum_{k=0}^{\infty}D_k.\qquad(17.2.9)$$

ამრიგად, შემთხვევითი სტაციონარული ფუნქციის დისპერსია ტოლია მისი სპექტრალური დაშლის ყველა ჰარმონიკის დისპერსიათა ჯამის.

ფორმულა (17.2.9) გვიჩვენებს, რომ $\overset{\circ}{X}(t)$ ფუნქციის დისპერსია გარკვეული წესით განაწილებულია სხვადასხვა სიხშირეებზე. ერთ სიხშირეებს შეესაბამებიან დიდი დისპერსიები, მეორეს — ნაკლები. დისპერსიის განაწილება სიხშირის მიხედვით შესაძლებელია ილუსტრირებული იქნეს გრაფიკულად სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის ე. წ. სპექ-

ტრის (უფრო ზუსტად-დისპერსიის სპექტრის) სახით. ამისათვის აბსცისათა ღერძზე გადაიზომება სიხშირეები $\omega_0=0$, ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_k, ხოლო ორდინატთა ღერძზე — შესაბამისი დისპერსიები (17.2.3).

ნახ. 17.2.2.

ცხადია სპექტრის ყველა ორდინატების ჯამი, რომლებიც აგებულია ასეთნაირად, ტოლია შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსიის.

17.3. სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრული დაშლა დროის უსასრულო უბანზე. სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრული სიმკვრივე

ვაგებდით რა სტაციონარული შემთხვევითი $\overset{\circ}{X}(t)$ ფუნქციის სპექტრულ დაშლას დროის სასრულ $(0, T)$ მონაკვეთზე, მივიღეთ შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსიის სპექტრი ცალკეული დისკრეტული ხაზების სახით, რომლებიც დაყოფილნი არიან თანაბარი შუალედებით (ე. წ. „წყვეტილი“ ან „წრფოვანი“ სპექტრი).

ცხადია, დროის რაც უფრო მეტ მონაკვეთსაც განვიხილავთ, მით უფრო სრული იქნება ჩვენი ცნობები შემთხვევით ფუნქციაზე. ბუნებრივია ამიტომ სპექტრულ დაშლაში შევეცადოთ გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $T\to\infty$ და ვნახოთ, როგორი იქნება შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრი. როცა $T\to\infty$ $\omega_1=\frac{2\pi}{T}\to 0$; ამიტომ ω_k სიხშირეებს შორის მანძილები, რომლებზედაც იგება სპექტრი, უსასრულოდ მცირდება, ამასთან დისკრეტული სპექტრი მიუახლოვდება უწყვეტს, რომელშიც სიხშირეთა ყოველ რაგინდ მცირე $\Delta\omega$ ინტერვალს ეთანადება ელემენტარული დისპერსია $\Delta D(\omega)$.

ვცადოთ უწყვეტი სპექტრი გამოვსახოთ გრაფიკულად. ამისათვის სასრულო T-სათვის ჩვენ დისკრეტული სპექტრის გრაფიკი რამდენადმე უნდა გადავაკეთოთ. სახელდობრ, ჩვენ ორდინატთა ღერძზე გადავზომოთ არა თვით დისპერსია D_k (რომელიც უსასრულოდ მცირდება როცა $T\to\infty$), არამედ დისპერსიის საშუალო სიმკვრივე, ე. ი. დისპერსია, რომელიც მოდის სიხშირის მოცემული ინტერვალის სიგრძის ერთეულზე. აღვნიშნოთ მანძილი მეზობელ სიხშირეებს შორის $\Delta\omega$:

$$\omega_1=\frac{2\pi}{2T}=\Delta\omega,$$

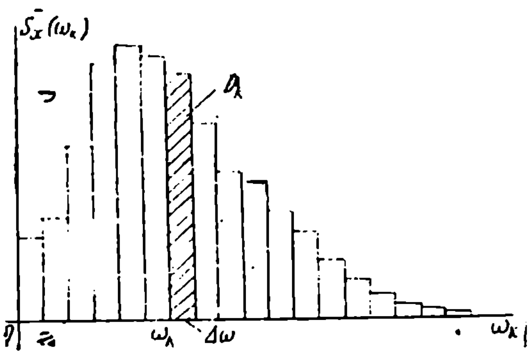
და თუ ყოველ $\Delta\omega$ მონაკვეთზე, როგორც ფუძეზე ავაგებთ მართკუთხედს D_k ფართობით (ნახ. 17.3.1) მივიღებთ საფეხურებიან დიაგრამას, რომელიც მოგვაგონებს აგების პრინციპის მიხედვით სტატისტიკური განაწილების ჰისტოგრამას.

დიაგრამის სიმაღლე ω_k წერტილის მიმდებარე $\Delta\omega$ უბანზე ტოლია

$$S_x(\omega_k)=\frac{D_k}{\Delta\omega} \qquad (17.3.1.)$$

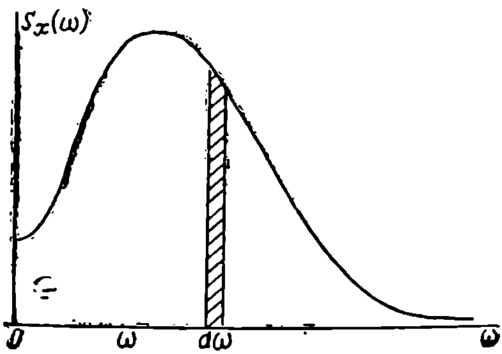
და წარმოადგენს ამ უბანზე დისპერსიის საშუალო სიმკვრივეს.

მთელი დიაგრამის ფართობთა ჯამი, ცხადია შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსიის ტოლია.



ნახ. 17.3.1.

უსასრულოთ გავზარდოთ T ინტერვალი. ამ დროს $\Delta\omega\to 0$ და კიბისებური წირი უსასრულოდ მიუახლოვდება გლუვ $S_x(\omega)$ მრუდს (ნახ. 17.3.2) ეს მრუდი გამოსახავს დისპერსიის განაწილების სიმკვრივეს. უწყვეტი სპექტრის სიხშირეთა მიხედვით, ხოლო თვით ფუნქციას $S_x(\omega)$ ეწოდება **დისპერსიის სპექტრული სიმკვრივე**, ანუ მოკლედ სტაციონარული შემთხვევითი $\overset{\circ}{X}(t)$ ფუნქციის **სპექტრული სიმკვრივე**.



ნახ. 17.3.2.

ცხადია, ფართობი შემოსაზღვრული $S_x(\omega)$ მრუდით წინანდებურად ტოლი უნდა იყოს შემთხვევითი $\overset{\circ}{X}(t)$ ფუნქციის D დისპერსიისა:

$$D_x=\int_0^\infty S_x(\omega)d\omega. \qquad (17.3.2)$$

ფორმულა (17.3.2) არის D_x დისპერსიის დაშლა ელემენტარულ $S_x(\omega)d\omega$ შესაკრებთა ჯამად, რომელთაგან თითოეული წარმოადგენს თვით დისპერსიას, რომელიც მოდის ω სიხშირის წერტილის მიმდებარე ელემენტარულ $d\omega$ უბანზე (ნახ. 17.3.2).

ამრიგად, ჩვენ განსახილველად შემოვიტანეთ სტაციონარული შემთხვევითი პროცესის ახალი დამატებითი მახასიათებელი — სპექტრული სიმკვრივე, რომელიც აღწერს სტაციონარული პროცესის სიხშირულ შედგენილობას. ოღონდ ეს მახასიათებელი არ წარმოადგენს დამოუკიდებელს; იგი მთლიანად განისაზღვრება მოცემული პროცესის კორელაციური ფუნქციით. ჩმის მსგავსად, როგორც დისკრეტული სპექტრის D_x ორდინატები გამოისახებიან $k_x(\tau)$ კორელაციური ფუნქციით, (17.2.4) ფორმულებით სპექტრული სიმკვრივე $S_x(\omega)$ აგრეთვე შეიძლება გამოსახულ იქნეს კორელაციური ფუნქციით.

გამოვიყვანოთ ეს გამოსახულება. ამისათვის გადავიდეთ კორელაციური ფუნქციის კანონიკურ დაშლაში ზღვარზე, როცა $T\to\infty$ და ვნახოთ თუ რად გადაიქცევა იგი. უნდა გამოვიყენოთ კორელაციური ფუნქციის (17.2.1) დაშლა ფურიეს მწკრივად სასრულ $(-T, T)$ ინტერვალში:

$$k_x(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos\omega_k\tau, \tag{17.3.3}$$

სადაც დისპერსია, რომელიც შეესაბამება ω_k სიხშირეს, გამოისახება ფორმულით

$$D_k=\frac{2}{T}\int_0^T k_x(\tau)\cos\omega_k\tau\, d\tau. \tag{17.3.4}$$

$T\to\infty$ ზღვარზე, გადასვლამდე გადავდივართ (17.3.3) ფორმულაში D_k დისპერსიიდან დისპერსიის საშუალო სიმკვრივეზე $\dfrac{D_k}{\Delta\omega}$. რადგანაც ეს სიმკვრივე გამოითვლება ჯერ კიდევ სასრული მნიშვნელობისას და დამოკიდებულია T-საგან, აღვნიშნავთ მას:

$$S_x^{(T)}(\omega_k)=\frac{D_k}{\Delta\omega}. \tag{17.3.5}$$

გამოსახულება (17.3.4) გავყოთ $\Delta\omega=\dfrac{\pi}{T}$-ზე; მივიღებთ

$$S_x^{(T)}(\omega_k)=\frac{2}{\pi}\int_0^T k_x(\tau)\cos\omega_k\tau\, d\tau. \tag{17.3.6}$$

(17.3.5)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$D_k=S_x^{(T)}(\omega_k)\Delta\omega. \tag{17.3.7}$$

გამოსახულება (17.3.7) ჩავსვათ ფორმულაში (17.3.3), მივიღებთ:

$$k_x(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty} S_x^{(T)}(\omega_k)\cos\omega_k\tau\Delta\omega. \qquad (17.3.8)$$

ვნახოთ როგორ შეიცვლება (17.3.8) გამოსახულება, როცა $T\to\infty$. ცხადია, ამ დროს $\Delta\omega\to 0$: დისკრეტული არგუმენტი ω_k გადადის უწყვეტად ცვლად ω არგუმენტში; ჯამი გადადის ω ცვლადით ინტეგრალში, დისპერსიის საშუალო სიმკვრივე $S_x^{(T)}(\omega_k)$ მიისწრაფვის დისპერსიის $S_x(\omega)$ სიმკვრივისაკენ და გამოსახულება (17.3.8) ზღვარში ღებულობს სახეს:

$$k_x(\tau)=\int_0^{\infty} S_x(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega, \qquad (17.3.9)$$

სადაც $S_x(\omega)$ — სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრული სიმკვრივეა.

ზღვარზე გადასვლით, როცა $T\to\infty$ ფორმულაში (17.3.6) მივიღებთ სპექტრული სიმკვრივის გამოსახულებას კორელაციური ფუნქციით:

$$S_x(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} k_x(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau. \qquad (17.3.10)$$

(17.3.9.) ტიპის გამოსახულება მათემატიკაში ცნობილია ფურიეს ინტეგრალის სახელწოდებით. ფურიეს ინტეგრალი არის ფურიეს მწკრივად დაშლის განზოგადოება არაპერიოდული ფუნქციის შემთხვევისათვის, რომელიც განიხილება უსასრულო ინტერვალში და წარმოადგენს ფუნქციის დაშლას უწყვეტი სპექტრის მქონე[1] ელემენტარული ჰარმონიული რხევების ჯამად.

იმის მსგავსად, როგორც ფურიეს მწკრივი გამოსახავს დასაშლელ ფუნქციას მწკრივის კოეფიციენტებით, რომლებიც თავის მხრივ გამოისახებიან დასაშლელი ფუნქციით, ფორმულები (17.3.9) და (17.3.10) გამოსახავენ ფუნქციებს $k_x(\tau)$ და $S_x(\omega)$ ერთის-მეორის მეშვეობით. ფორმულა (17.3.9) გამოსახავს კორელაციურ ფუნქციას სპექტრული სიმკვრივის მეშვეობით; ფორმულა (17.3.10) პირიქით, გამოსახავს სპექტრულ სიმკვრივეს კორელაციური ფუნქციით. (17.3.9)

[1] ფორმულა (17.3.9) წარმოადგენს ფურიეს ინტეგრალის კერძო სახეს, რომელიც განაზოგადებს ლუწი ფუნქციის კოსინუსური ჰარმონიკის ფურიეს მწკრივად დაშლას. ანალოგიური გამოსახულება შესაძლებელია დაიწეროს უფრო ზოგადი შემთხვევისათვის.

და (17.3.10) ტიპის ფორმულებს, რომლებიც ურთიერთ აკავშირებენ ორ ფუნქციას, ეწოდებათ ფურიეს გ ა რ დ ა ქ მ ნ ე ბ ი[1].

ამგვარად, კორელაციური ფუნქცია და სპექტრული სიმკვრივე გამოისახებიან ერთიმეორის მეშვეობით ფურიეს გარდაქმნათა დახმარებით.

შევნიშნავთ, რომ ზოგადი (17.3.9) ფორმულიდან, როცა $\tau=0$ მიიღება დისპერსიის ადრე მიღებული დაშლა სიხშირეთა მიხედვით (17.3.2).

პრაქტიკაში ნაცვლად სპექტრული $S_x(\omega)$ სიმკვრივისა, ხშირად სარგებლობენ ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი სპექტრული სიმკვრივით:

$$s_x(\omega)=\frac{S_x(\omega)}{D_x} \tag{17.3.11}$$

სადაც D_x — შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსიაა.

ძნელი არ არის დავრწმუნდეთ, რომ ნორმირებული კორელაციური ფუნქცია $\rho_x(\tau)$ და ნორმირებული სპექტრული სიმკვრივე $S'_x(\omega)$ და კავშირებული არიან ფურიეს იგივე გარდაქმნებით:

$$\left.\begin{aligned} \rho_x(\tau) &= \int_0^\infty s_x(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega, \\ s_x(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \rho_x(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{17.3.12}$$

დავუშვათ (17.3.17) ტოლობებიდან პირველში $\tau=0$. იმის გათვალისწინებით, რომ $\rho_x(0)=1$, გვაქვს

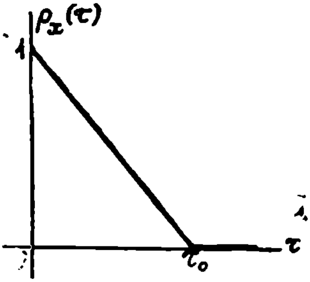
$$\int_0^\infty s_x(\omega)d\omega=1, \tag{17.3.13}$$

ე. ი. სრული ფართობი, რომელიც შემოფარგლულია ნორმირებული სპექტრული სიმკვრივის გრაფიკით ტოლია ერთის.

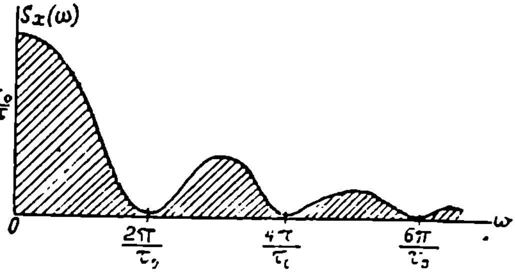
მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის ნორმირებული კორელირებული $\rho_x(\tau)$ ფუნქცია კლებულობს წრფივი კანონით ერთიდან ნულამდე, როცა $0<\tau<\tau_0$; როცა $\tau>\tau_0$ $\rho_x(\tau)=0$ (ნახ. 17.3.3). განვსაზღვროთ შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის ნორმირებული სპექტრული სიმკვრივე.

---

[1] მოცემულ შემთხვევაში ჩვენ საქმე გვაქვს ფურიეს გარდაქმნათა კერძო შემთხვევასთან — ე. წ. „ფურიეს კოსინუს-გარდაქმნებთან“.



ნახ. 17.3.3.



ნახ. 17.3.4.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნორმირებული კორელაციური ფუნქცია გამოისახება ფორმულით

$$\rho_x(\tau)=\begin{cases}1-\dfrac{\tau}{\tau_0} & \text{როცა } 0<\tau<\tau_0,\\ 0 & \text{როცა } \tau>\tau_0.\end{cases}$$

(17.3.12)-დან მივიღებთ:

$$S_x(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\rho_x(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau=$$

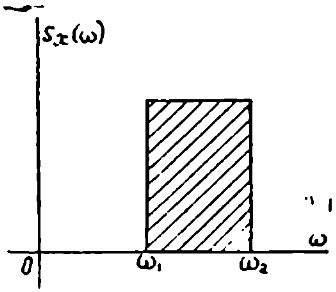
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\tau_0}\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\cos\omega\tau\, d\tau=\frac{2}{\pi\tau_0\omega^2}(1-\cos\omega\tau_0).$$

ნორმირებული სპექტრული სიმკვრივის გრაფიკი წარმოდგენილია ნახ. 17.3.4-ზე პირველი—აბსოლუტური—მაქსიმუმი სპექტრული სიმკვრივისა მიიღწევა, როცა $\omega=0$. ამ წერტილში განუზღვრელობის გახსნით ვრწმუნდებით, რომ იგი ტოლია $\frac{\tau_0}{\pi}$. შემდგომ. ω სიდიდის გაზრდით სპექტრული სიმკვრივე აღწევს მთელ რიგ ფარდობით მაქსიმუმებს, რომელთა სიმაღლე კლებულობს ω სიდიდის ზრდით. როცა $\omega\to\infty$ $S_x(\omega)\to 0$. $S_x(\omega)$ სპექტრული სიმკვრივის ცვლილების ხასიათი (სწრაფი ან ნელი კლება) დამოკიდებულია τ_0 პარამეტრზე. $S_x(\omega)$ წირით შემოფარგლული სრული ფართი მუდმივია და ერთის ტოლია. τ_0-ის შეცვლა ტოლფასია $S_x(\omega)$ მრუდის მასშტაბის შეცვლისა ორივე ღერძზე მისი ფართობის შენარჩუნებით. τ_0-ის გაზრდით მასშტაბი ორდინატთა ღერძზე იზრდება, აბსცისების ღერძზე—მცირდება; შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრში ნულოვანი სიხშირის უპირატესობა უფრო მკაფიოდ გამოსახული ხდება. ზღვარში, როცა $\tau\to\infty$ შემთხვევითი ფუნქცია გადაგვარდება ჩვეულებრივ შემთხვევით სიდიდედ: ამ დროს $\rho_x(\tau)\equiv 1$. ხოლო სპექტრი ხდება დისკრეტული ერთადერთი $\omega_0=0$ სიხშირით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. შემთხვევითი ფუნქციის $X(t)$ ნორმირებული სპექტრული სიმკვრივე $S_x(\omega)$ მუდმივია. სიხშირის რომელიღაც ω_1, ω_2 ინტერვალში და ტოლია ნულის

ამ ინტერვალის გარეთ (ნახ. 17.3.5) იპოვეთ შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის ნორმირებული კორელაციური ფუნქცია.

ამოხსნა. $S_x(\omega)$ მნიშვნელობას როცა $\omega_1<\omega<\omega_2$, ვპოულობთ იმ პირობიდან, რომ $S_x(\omega)$ მრუდით შემოსაზღვრული ფართი ტოლია ერთისა:



ნახ. 17.3.5.

$$s_x(\omega)(\omega_2-\omega_1)=1,\quad s_x(\omega)=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}.$$

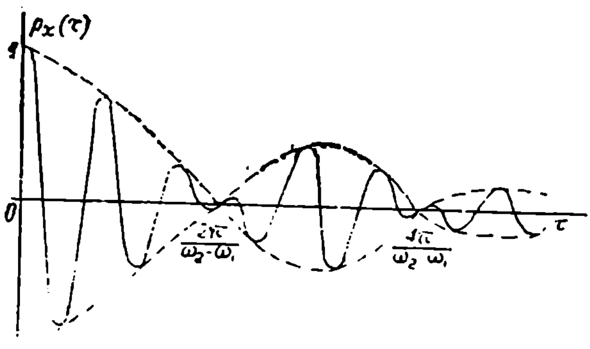
(17.3.12)-დან მივიღებთ:

$$\rho_x(\tau)=\int_{\omega_1}^{\omega_2} s_x(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega=$$

$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\cos\omega\tau\, d\omega=\frac{1}{\tau(\omega_2-\omega_1)}(\sin\omega_2\tau-\sin\omega_1\tau)=$$

$$=\frac{2}{\tau(\omega_2-\omega_1)}\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\tau\right)\sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\tau\right).$$

ფუნქცია $\rho_x(\tau)$ გამოსახულია ნახ. 17.3.6-ზე. იგი ატარებს რხევის ამპლიტუდით კლებად ხასიათს კვანძთა რიგით, რომლებშიც ფუნქცია იქცევა (ხდება) ნულად. გრაფიკის კონკრეტული სახე, ცხადია დამოკიდებულია ω_1 და ω_2 მნიშვნელობებისაგან.



ნახ. 17.3.6.

საინტერესოა $\rho_x(\tau)$ ფუნქციის ზღვრული სახე, როცა $\omega_1\to\omega_2$. ცხადია, როცა $\omega_2=\omega_1=\omega$ შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრი გადაიქცევა დისკრეტულად ერთადერთი წირით, რომელიც შეესაბამება ω სიხშირეს; ამ დროს კორელაციური ფუნქცია გადაიქცევა მარტივ კოსინუსოიდად:

$$\rho_x(\tau)=\cos\omega\tau.$$

ვნახოთ როგორი სახე აქვს ამ შემთხვევაში თვით შემთხვევით ფუნქციას. ერთადერთ წირიანი დისკრეტული სპექტრისას სტაციონარულ შემთხვევითი $\overset{\circ}{X}(t)$ ფუნქციის სპექტრულ დაშლას აქვს სახე:

$$\overset{\circ}{X}(t)=U\cos\omega t+V\sin\omega t, \tag{17.3.14}$$

სადაც U და V — არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეებია, რომელთა მათემატიკური ლოდინი ნულის, ხოლო დისპერსიები ერთმანეთის ტოლნი არიან:

$$D[U]=D[V]=D.$$

ვაჩვენოთ, რომ (17.3.14) ტიპის შემთხვევითი ფუნქცია შეიძლება წარმოდგენილ იქნას როგორც ω სიხშირის, შემთხვევითი ამპლიტუდისა და შემთხვევითი ფაზიანი ერთი ჰარმონიული რხევა. აღვნიშნოთ რა

$$\cos\Phi=\frac{U}{\sqrt{U^2+V^2}}, \qquad \sin\Phi=\frac{V}{\sqrt{U^2+V^2}},$$

(17.3.14) გამოსახულება დაგვყავს შემდეგ სახეზე:

$$\overset{\circ}{X}(t)=\sqrt{U^2+V^2}\,(\cos\Phi\cos\omega t+\sin\Phi\sin\omega t)=\sqrt{U^2+V^2}\cos(\omega t-\Phi).$$

ამ გამოსახულებაში $\sqrt{U^2+V^2}$ — შემთხვევითი ამპლიტუდაა; Φ — ჰარმონიული რხევის შემთხვევითი ფაზა.

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით მხოლოდ იმ შემთხვევას, როცა სიხშირეთა მიხედვით დისპერსიის განაწილება წარმოადგენს უწყვეტს, ე.ი. როცა უსასრულო მცირე უბანზე მოდის უსასრულოდ მცირე დისპერსია. პრაქტიკაში ზოგჯერ გვხვდება შემთხვევები, როცა შემთხვევით ფუნქციას თავის შემადგენლობაში გააჩნია ω_k სიხშირის სუფთად პერიოდული მდგენელი შემთხვევითი ამპლიტუდით. მაშინ შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრულ დაშლაში სიხშირეთა უწყვეტი სპექტრის გარდა მონაწილეობას მიიღებს კიდევ ცალკე ω_k სიხშირე D_k დისპერსიით. ზოგად შემთხვევაში ასეთი პერიოდული მდგენელი შეიძლება იყოს რამდენიმე. მაშინ კორელაციური ფუნქციის სპექტრული დაშლა შედგენილი იქნება ორი ნაწილისაგან: დისკრეტული და უწყვეტი სპექტრისაგან:

$$k_x(\tau)=\sum_k D_k\cos\omega_k\tau+\int_0^\infty S_x(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega. \qquad (17.3.15)$$

შემთხვევითი სტაციონარული ფუნქციის შემთხვევა ასეთი „შერეული" სპექტრით პრაქტიკაში საკმაოდ იშვიათად გვხვდება. ასეთ შემთხვევაში ყოველთვის აქვს აზრი შემთხვევითი ფუნქცია დაიყოს ორ შესაკრებად — უწყვეტი და დისკრეტული სპექტრით — და გამოვიკვლიოთ ეს შესაკრებები ცალ-ცალკე.

შედარებით ხშირად გვაქვს საქმე კერძო შემთხვევასთან, როცა სასრულო დისპერსია შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრულ დაშლა-

ში მოდის ნულოვან სიხშირეზე ($\omega=0$). ეს იმას ნიშნავს, რომ შემთხვევითი ფუნქციის შემადგენლობაში შესაკრებად შედის ჩვეულებრივი შემთხვევითი სიდიდე D_0 დისპერსიით. მსგავს შემთხვევაში აგრეთვე აქვს აზრი გამოვყოთ ეს შემთხვევითი შესაკრები და ოპერაციები ვაწარმოოთ მასზე ცალკე.

17. 4. შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრული დაშლა კომპლექსური ფორმით

მათემატიკური გარდაქმნების სიმარტივის თვალსაზრისით ზოგჯერ მოხერხებულია ვისარგებლოთ, როგორც შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრული დაშლის, ისე მახასიათებლების, სპექტრული სიმკვრივის და კორელაციური ფუნქციის ჩაწერის არა ნამდვილი, არამედ კომპლექსური ფორმით. ჩაწერის კომპლექსური ფორმა მოხერხებულია, კერძოდ იმიტომ, რომ ყველა შესაძლო წრფივი ოპერაციები ფუნქციებზე, რომელთაც აქვთ ჰარმონიული რხევების სახე (დიფერენცირება, ინტეგრება, წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნა) ხორციელდება გაცილებით მარტივად, როცა ეს ჰარმონიული რხევები ჩაწერილია არა სინუსებისა და კოსინუსების სახით, არამედ კომპლექსური ფორმით, მაჩვენებლიანი ფუნქციის სახით. კორელაციური ფუნქციის და სპექტრული სიმკვრივის ჩაწერის კომპლექსური ფორმა გამოიყენება იმ შემთხვევებშიც, როცა თვით შემთხვევითი ფუნქცია (და მაშასადამე მისი კორელაციური და სპექტრული სიმკვრივე) ნამდვილია.

ვაჩვენოთ, თუ როგორ შეიძლება შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრულ დაშლაში ფორმალურად გადავიდეთ ნამდვილი ფორმიდან კომპლექსურზე.

განვიხილოთ შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრული დაშლა (17.2.8) $\overset{\circ}{X}(t)$ (0, T) უბანზე:

$$\overset{\circ}{X}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(U_k\cos\omega_k t+V_k\sin\omega_k t), \tag{17.4.1}$$

სადაც U_k, V_k — არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეებია, ამასთან ერთნაირი ინდექსიანი U_k, V_k ყოველი წყვილის დისპერსიები ტოლია:

$$D[U_k]=D[V_k]=D_k.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $\omega_k = k\omega_1$; $\omega_0 = 0$, გადავწერთ (17.4.1) გამოსახულებას შემდეგი სახით:

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t), \qquad (17.4.2)$$

სპექტრულ (17.4.2) დაშლას მივცეთ კომპლექსური ფორმა. ამისათვის ვისარგებლებთ ეილერის ცნობილი ფორმულებით:

$$\cos \omega_k t = \frac{e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}}{2};$$

$$\sin \omega_k t = \frac{e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}}{2i} = -i\,\frac{e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}}{2}.$$

ამ გამოსახულებათა (17.4.2) ფორმულაში ჩასმა გვაძლევს

$$\overset{\circ}{X}(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(U_k \frac{e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}}{2} - iV_k \frac{e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}}{2} \right), \qquad (17.4.3)$$

ე. ი. დაშლას კოორდინატული ფუნქციებით $e^{i\omega_k t}$, $e^{-i\omega_k t}$. გარდავქმნათ (17.4.3) დაშლა ისე, რომ მასში კოორდინატულ ფუნქციებად მონაწილეობდნენ მხოლოდ $e^{i\omega_k t}$ ფუნქციები; ამისათვის პირობით ω_k სიხშირეთა არე გავავრცელოთ ω-ს უარყოფით მნიშვნელობებზე და სპექტრული დაშლის სიხშირედ განვიხილოთ მნიშვნელობანი

$$\omega_k = k\omega_1 \quad (k = \pm 1, \ \pm 2, \ldots),$$

ე. ი. ჩავთვალოთ, რომ k ღებულობს არამარტო დადებით, არამედ უარყოფით მნიშვნელობებსაც. მაშინ (17.4.3) ფორმულა შესაძლებელია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\overset{\circ}{X}(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k - iV_k}{2} e^{i\omega_k t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{U_k + iV_k}{2} e^{i\omega_k t}, \qquad (17.4.4)$$

თუ დავუშვებთ, რომ

$$U_{-k} = U_k; \quad V_{-k} = V_k.$$

ფორმულა (17.4.4) წარმოადგენს შემთხვევითი $\overset{\circ}{X}(t)$ ფუნქციის დაშლას, რომელშიც კოორდინატულ ფუნქციებად მონაწილეობენ კომპლექსური $e^{i\omega_k t}$ ფუნქციები, ხოლო კოეფიციენტები წარმოადგენენ კომპლექსურ შემთხვევით სიდიდეებს. აღვნიშნავთ, რა ამ. კომპლექსურ შემთხვე-

ვით სიდიდეებს $W_k(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ დაშლა (17.4.4) მიიღებს შემდეგ ფორმას:

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k e^{i\omega_k t}, \tag{17.4.5}$$

სადაც

$$\left.\begin{aligned} W_k &= U_0 && \text{როცა } k=0, \\ W_k &= \frac{U_k - iV_k}{2} && \text{როცა } k>0, \\ W_k &= \frac{U_k + iV_k}{2} && \text{როცა } k<0. \end{aligned}\right\} \tag{17.4.6}$$

დავამტკიცოთ, რომ (17.4.5) დაშლა წარმოადგენს შემთხვევით $\overset{\circ}{X}(t)$ ფუნქციის კანონიკურ დაშლას. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ამ დაშლის შემთხვევითი კოეფიციენტები ურთიერთ არაკორელირებულია.

ჯერ განვიხილოთ დაშლის ორი სხვადასხვა წევრის კოეფიციენტები W_k და W_l სპექტრის დადებით ნაწილში, როცა $k \neq l$, $k>0$, $l>0$, და განვსაზღვროთ ამ სიდიდეთა კორელაციური მომენტი. კორელაციური მომენტის განსაზღვრის თანახმად კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდეებისათვის (იხ. პ. 15.9) მივიღებთ:

$$K_{kl} = M[W_k \bar{W}_l]$$

სადაც $\bar{W}_l$ — კომპლექსურად შეუღლებული სიდიდეა W_l-სათვის. როცა $k>0$, $l>0$.

$$K_{kl} = M\left[\frac{U_k - iV_k}{2} \, \overline{\frac{U_l - iV_l}{2}}\right] = M\left[\frac{U_k - iV_k}{2} \, \frac{U_l + iV_l}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\{M[U_k U_l] + iM[U_k V_l] - iM[U_l V_k] + M[V_k V_l]\} = 0.$$

რადგანაც შემთხვევითი სიდიდეები U_k, V_k რომლებიც მონაწილეობენ (17.4.1) დაშლაში, ყველანი ურთიერთ შორის არ არიან კორელირებული.

სრულიად ასევე დავამტკიცებთ W_k W_l სიდიდეთა არაკორელირებულობას k და l ინდექსთა ყველა ნიშნისას, თუ კი $k \neq \pm l$. რჩება დასამტკიცებელი, მხოლოდ კოეფიციენტთა არაკორელირებულობა დაშლის

სიმეტრიულ წევრთა შემთხვევაში ე. ი. სიდიდეებისთვის W_k და W_{-k}. ნებისმიერი k-ს შემთხვევაში მივიღებთ:

$$K_{k,-k}=M[W_kW_{-k}]=M\left[\frac{U_k-iV_k}{2}\,\overline{\frac{U_k-iV_k}{2}}\right]=\frac{1}{4}M[(U_k-iV_k)^2]=$$

$$=\frac{1}{4}\{M[U_k^2]-M[V_k^2]-2iM[U_kV_k]\}.$$

ვითვალისწინებთ, რა (17.4.1) დაშლის ერთს და იგივე წევრში შემავალ U_k, V_k სიდიდეების არაკორელირებულობას და რომ აქვთ ერთნაირი D_k დისპერსიები, მივიღებთ:

$$K_{k,-k}=\frac{1}{4}\{D_k-D_k-2i\cdot 0\}=0.$$

ამგვარად დამტკიცებულია, რომ (17.4.5) დაშლა წარმოადგენს შემთხვევითი $\overset{\circ}{X}(t)$ ფუნქციის კანონიკურ დაშლას კომპლექსური კოორდინატული $e^{i\omega_k t}$ ფუნქციებით და კომპლექსური W_k კოეფიციენტებით.

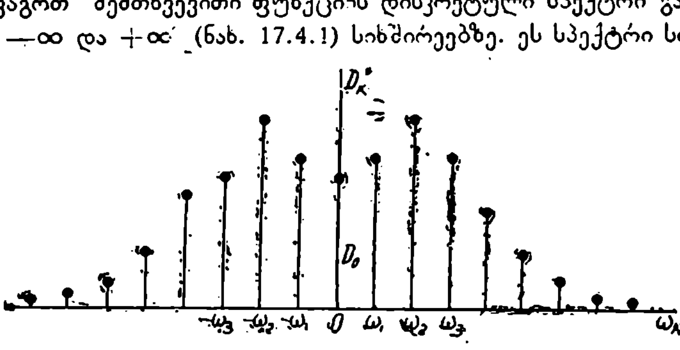
ვიპოვოთ ამ კოეფიციენტთა დისპერსიები. როცა $k=0$ დისპერსია D_0 დარჩა, ცხადია ისეთივე, როგორც იყო სპექტრული დაშლის ნამდვილი ფორმისას. ყოველი კომპლექსური W_k (როცა $k\neq0$) სიდიდის დისპერსია ტოლია დისპერსიებისა და მისი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების ჯამის:

$$D[W_k]=\frac{D[U_k]}{4}+\frac{D[V_k]}{4}=\frac{2D[U_k]}{4}=\frac{D_k}{2}.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$D_k^*=\frac{D_k}{2}\quad \text{როცა}\quad k\neq0,\quad D_k^*=D_0,\ \text{როცა}\quad k=0.$$

და ავაგოთ შემთხვევითი ფუნქციის დისკრეტული სპექტრი გავრცელებული $-\infty$ და $+\infty$ (ნახ. 17.4.1) სიხშირეებზე. ეს სპექტრი სიმეტრიუ-



ნახ. 17.4.1.

ლია ორდინატთა ღერძის მიმართ. ადრე აგებული სპექტრისაგან (ნახ. 17.2.3) იგი განსხვავდება იმით, რომ განსაზღვრულია არა მარტო დადებითი, არამედ უარყოფითი სიხშირეებისათვისაც, მაგრამ სამაგიეროდ მათი ორდინატები როცა $k \neq 0$ ორჯერ ნაკლებია წინა სპექტრის შესაბამის ორდინატებზე, ჯამი ყველა ორდინატებისა წინანდებურად ტოლია შემთხვევითი $\mathring{X}(t)$ ფუნქციის დისპერსიისა:

$$D_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \tag{17.4.7}$$

განვსაზღვროთ $\mathring{X}(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია, რომელიც წარმოდგენილია კომპლექსური სპექტრული (17.4.5.) დაშლის სახით. მოცემული კანონიკური დაშლის სახის კომპლექსურ შემთხვევითი ფუნქციის კორელაციური ფუნქციისათვის (17.2.15) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$k_x(t, t') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D^*_k e^{i\omega_k t'} e^{\overline{i\omega_k t}} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} D^*_k e^{i\omega_k t'} e^{-i\omega_k t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D^*_k e^{i\omega_k (t'-t)},$$

ან $\tau = t' - t$ არგუმენტზე გადასვლით

$$k_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D^*_k e^{i\omega_k t} \tag{17.4.8}$$

სადაც

$$D^*_k = \frac{1}{2} D_k = \frac{1}{T} \int_0^T k_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau \text{ როცა } k \neq 0 \tag{17.4.9}$$

მივცეთ (17.4.9) გამოსახულებას კომპლექსური ფორმა გავითვალისწინოთ, რომ

$$\cos \omega_k \tau = \frac{e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}}{2},$$

მივიღებთ:

$$D^*_k=\frac{1}{2T}\int_0^T k_x(\tau)(e^{i\omega_k\tau}+e^{-i\omega_k\tau})d\tau=$$

$$=\frac{1}{2T}\left\{\int_0^T k_x(\tau)e^{-i\omega_k\tau}d\tau+\int_0^T k_x(\tau)e^{i\omega_k\tau}\,d\tau\right\}.$$

მეორე ინტეგრალში $\tau=-u$ დაშვებით მივიღებთ:

$$\int_0^T k_x(\tau)e^{i\omega_k\tau}d\tau=-\int_0^T k_x(u)e^{-i\omega_k u}\,du=\int_{-T}^0 k_x(\tau)\,e^{-i\omega_k\tau}\,d\tau$$

საიდანაც

$$D^*_k=\frac{1}{2T}\int_{-T}^T k_x(\tau)\,e^{-i\omega_k\tau}\,d\tau, \tag{17.4.10}$$

ამრიგად ჩვენ ავაგეთ შემთხვევითი ფუნქციის სასრული (0; T) ინტერვალზე სპექტრული დაშლის კომპლექსური ფორმა. შემდეგ ბუნებრივია გადაეიდეთ ზღვარზე, როცა $T\to\infty$, როგორც ეს გავაკეთეთ ნამდვილი ფორმისათვის, ე. ი. შემოვიტანოთ განსახილველად სპექტრული სიმკვრივე:

$$S_x^*(\omega)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{D_k^*}{\Delta\omega}$$

და მივიღოთ (17.4.8) და (17.4.10) ფორმულებიდან ზღვარზე გადასვლით ინტეგრალური თანაფარდობანი, რომლებიც აკავშირებენ კორელაციურ ფუნქციას და სპექტრულ სიმკვრივეს კომპლექსურ ფორმაში. ზღვარში, როცა $T\to\infty$ (17.4.8) და (17.4.10) ფორმულები ღებულობენ სახეს:

$$k_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S^*_x(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega, \tag{17.4.11}$$

$$S^*_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau. \tag{17.4.12}$$

(17.4.11) და (17.4.12) ფორმულები წარმოადგენენ ფურიეს გარდაქ-

მნათა კომპლექსურ ფორმას, რომლებიც კორელაციურ ფუნქციას უკავშირებენ სპექტრულ სიმკვრივეს[1].

ფორმულები (17.4.11) და (17.4.12) შეიძლება უშუალოდ მიღებულ იქნან (17.3.9) და (17.3.10) ფორმულებიდანაც, თუ მოვახდენთ მათში შეცვლას

$$\cos \omega\tau=\frac{e^{i\omega\tau}+e^{-i\omega\tau}}{2},$$

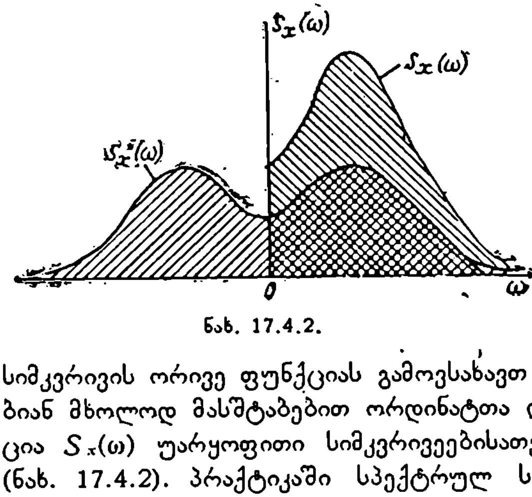
დავუშვებთ $S_x(\omega)=2S_x^*(\omega)$ და გავაფართოებთ ინტეგრების არეს $-\infty$-დან $+\infty$ ინტერვალამდე.

ფორმულაში (17.4.11) იმის დაშვებით, რომ $\tau=0$, მივიღებთ შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსიას.

$$D_x=\int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega)d\omega. \tag{17.4.13}$$

ფორმულა (17.4.13) გამოსახავს შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსიას ელემენტარულ დისპერსიათა ჯამის სახით, რომლებიც განაწილებულნი არიან რომელიღაც სიმკვრივით $-\infty$; $+\infty$ სიხშირის მთელ დიაპაზონში.

(17.4.13) ფორმულის შედარებით ადრე გამოყვანილი (სპექტრული დაშლის ნამდვილი ფორმისათვის) (17.3.2) ფორმულასთან, ჩვენ დავინახავთ, რომ ისინი განსხვავდებიან მხოლოდ იმით, რომ (17.4.13) ფორმულაში დგას სპექტრული სიმკვრივის რამდენადმე სხვანაირი ფუნქცია, განსაზღვრული არა 0-დან ∞-მდე, არამედ $-\infty$-დან $+\infty$-მდე, მაგრამ სამაგიეროდ ორჯერ ნაკლები ორდინატებით. თუ სპექტრული სიმკვრივის ორივე ფუნქციას გამოვსახავთ გრაფიკზე, ისინი განსხვავდებიან მხოლოდ მასშტაბებით ორდინატთა ღერძზე და იმით, რომ ფუნქცია $S_x(\omega)$ უარყოფითი სიმკვრივეებისათვის არ არის განსაზღვრული (ნახ. 17.4.2). პრაქტიკაში სპექტრულ სიმკვრივედ გამოიყენება, როგორც ერთი, ისე მეორე ფუნქცია.



ნახ. 17.4.2.

[1] შევნიშნავთ, რომ 13-ე თავში, როცა ვიხილავდით მახასიათებლურ ფუნქციებს უკვე შევხვდით ასეთი ტიპის გარდაქმნებს, სახელდობრ მახასიათებელი ფუნქცია და ალბათობის სიმკვრივე გამოისახებიან ერთიმეორის მეშვეობით ფურიეს გარდაქმნათა გამოყენებით.

ზოგჯერ სპექტრული სიმკვრივის არგუმენტად განიხილავენ არა წრიულ (ω) სიხშირეს, არამედ რხევის f სიხშირეს გამოსახულს ჰერცებში:

$$f=\frac{\omega}{2\pi}$$

ამ შემთხვევაში ჩასმით $\omega=2\pi f$ ფორმულა (17.4.11) მიიყვანება შემდეგ სახემდე:

$$k_x(\tau)=2\pi\int_{-\infty}^{\infty} S^*_x(2\pi f)e^{2\pi i f\tau}df,$$

ან თუ აღვნიშნავთ

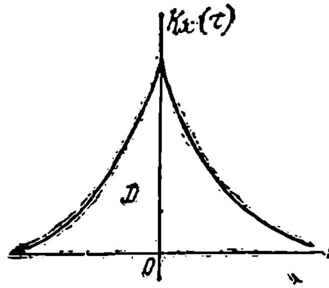
$$G_x(f)=2\pi S^*_x(2\pi f),$$

$$k_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)e^{2\pi i f\tau}df. \qquad (17.4.14)$$

ფუნქცია $G_x(f)$ აგრეთვე შეიძლება გამოყენებულ იქნას, როგორც დისპერსიის სპექტრული სიმკვრივე. მის გამოსახულებას კორელაციური ფუნქციის საშუალებით აქვს სახე:

$$G_x(f)=\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)e^{-2\pi i f\tau}\,dt \qquad (17.4.15)$$

სპექტრული სიმკვრივის ყველა ჩვენს მიერ მოყვანილი და ზოგიერთი სხვა პრაქტიკაში გამოყენებული გამოსახულებანი ცხადია განსხვავდებიან ერთიმეორისაგან მხოლოდ მასშტაბით. თითოეული მათგანი შეიძლება ნორმირებული იქნას სპექტრული სიმკვრივის შესაბამისი ფუნქციის გაყოფით შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსიაზე.



ნახ. 17.4.3.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია მოცემულია ფორმულით:

$$k_x(\tau)=De^{-\alpha|\tau|} \qquad (17.4.16)$$

სადაც $\alpha>0$ (ნახ. 17.4.3.). ვისარგებლოთ ფურიეს გარდაქმნის კომპლექსური ფორმით, განვსაზღვროთ სპექტრული სიმკვრივე $S^*_x(\omega)$.

ა მ ო ხ ს ნ ა: ფორმულით (17.4.12) ვპოულობთ:

$$S_x^*(\omega)=\frac{D}{2\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|}\, e^{-i\omega\tau}d\tau=$$

$$=\frac{D}{2\pi}\left\{\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\alpha\tau}e^{-i\omega\tau}d\tau+\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau}e^{-i\tau}d\tau\right\}=$$

$$=\frac{D}{2\pi}\left\{\int\limits_{0}^{\infty} e^{-(\alpha-i\omega)\tau}d\tau+\int\limits_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau}d\tau\right\}=$$

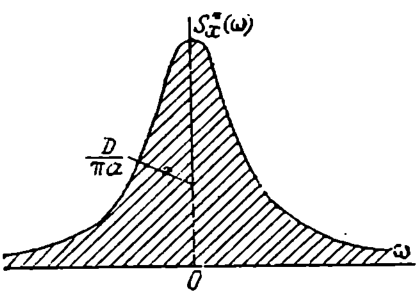
$$=\frac{D}{2\pi}\left[\frac{-1}{\alpha-i\omega}e^{-(\alpha-i\omega)\tau}+\frac{-1}{\alpha+i\omega}e^{-(\alpha+i\omega)\tau}\right]_0^{\infty}=$$

$$=\frac{D}{2\pi}\left[\frac{1}{\alpha-i\omega}+\frac{1}{\alpha+i\omega}\right]=\frac{D\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}.$$

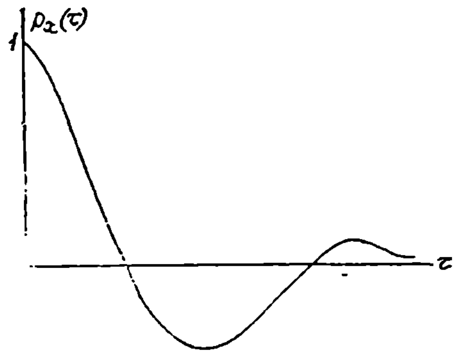
სპექტრული სიმკვრივის გრაფიკი

$$S^*_x(\omega)=\frac{D\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$$

წარმოდგენილია ნახ. 17.4.4.-ზე. ვნახოთ როგორ მოიქცევიან α-ს შეცვლისას კორელაციური ფუნქცია და სპექტრული სიმკვრივე.



ნახ. 17.4.4.



ნახ. 17.4.5.

α-ს შემცირებისას კორელაციური ფუნქცია კლებას დაიწყებს უფრო ნელა; შემთხვევითი ფუნქციის ცვალებადობის ხასიათი გახდება უფრო მდორე, შესაბამისად შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრში დიდ ხვედრით წონას ღებულობენ მცირე სიხშირეები: სპექტრული სიმკვრივის მრუდი გაიწელება ზემოთ, ერთდროულად იკუმშება რა გვერდებიდან; ზღვარში როცა $\alpha\to 0$, შემთხვევითი ფუნქცია გადაგვარდება დისკრეტულ სპექტრიან ჩვეულებრივ შემთხვევით სიდიდედ, რომელიც შესდგება $\omega_0=0$ სიხშირიან ერთადერთი წირისაგან.

α-ს გადიდებისას კორელაციური ფუნქცია კლებულობს სწრაფად, შემთხვევითი ფუნქციის რხევის ხასიათი ხდება უფრო მკვეთრი და უწესრიგო. ამის შესაბამისად შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრში მცირე სიხშირეთა სიჭარბე გაქრება სულ უფრო და უფრო ნაკლებად შესამჩნევი; როცა $\alpha \to \infty$ შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრი უახლოვდება თანაბარ სპექტრს (ე. წ. „თეთრს"), რომელშიც არ არის სიჭარბე რომელიმე სიხშირის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. შემთხვევითი $\overset{\circ}{X}(t)$ ფუნქციის ნორმირებულ კორელაციურ ფუნქციას აქვს სახე:

$$\rho_x(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau$$

(ნახ. 17.4.5.) განვსაზღვროთ ნორმირებული სპექტრული სიმკვრივე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. წარმოვიდგინოთ $\rho_x(\tau)$ კომპლექსურ ფორმაში:

$$\rho_x(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\frac{e^{i\beta\tau}+e^{-i\beta\tau}}{2}.$$

ნორმირებულ სპექტრულ სიმკვრივეს $S_x^*(\omega)$ ვპოულობთ ფორმულით (17.4.12), მასში $k_x(\tau)$ ნაცვლად $\rho_x(\tau)$ ჩასმით:

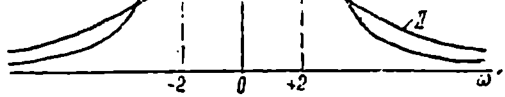
$$S_x^*(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|}\frac{e^{i\beta\tau}+e^{-i\beta\tau}}{2}e^{-i\omega\tau}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha\tau}(e^{i\beta\tau}+e^{-i\beta\tau})e^{-i\omega\tau}\,d\tau+\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha\tau}(e^{i\beta\tau}+e^{-i\beta\tau})e^{-i\omega\tau}\,d\tau\right\},$$

საიდანაც ელემენტარულ გარდაქმნათა შემდეგ მივიღებთ:

$$s_x^*(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega+\beta)^2}+\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega-\beta)^2}\right\}.$$

სპექტრული სიმკვრივის გრაფიკის სახე დამოკიდებულია α და β პარამეტრების ფარდობისაგან, ე. ი. იმისაგან, თუ რომელი სჭარბობს კორელაციურ ფუნქციაში: კლება $e^{-\alpha|\tau|}$ კანონის მიხედვით თუ რხევა $\cos\beta\tau$ კანონის მიხედვით. ცხადია შედარებით მცირე α-სას სჭარბობს რხევა, შედარებით მეტი α-სათვის—კლება. პირველ შემთხვევაში შემთხვევითი ფუნქცია ახლოსაა β სიხშირის პერიოდულ რხევებთან შემთხვევითი ამპლიტუდითა და ფაზით. შესაბამისად შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრში სჭარბობენ სიხშირეები, რომლებიც ახლოს არიან β სიხშირესთან. მეორე შემთხვევაში შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრული შემადგენლობა უფრო თანაბარია, სიჭარბე ამა თუ იმ სიხშირეებისა არ შეიმჩნევა. ზღვარში, როცა $\alpha \to \infty$ შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრი უახლოვდება „თეთრ" სპექტრს. საილუსტრაციოდ ნახ. 17.4.6 გამოსახულია ნორმირებული სპექტრული სიმკვრივეები შემთხვევებისათვის:



ნახ. 17.4.6.

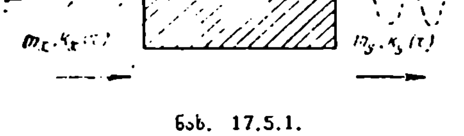
1) $\beta=2$, $\alpha=1$ (მრუდი I); 2) $\beta=2$, $\alpha=3$ (მრუდი II). როგორც ნახაზიდან სჩანს, როცა $\alpha=1$ შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრი ავლენს $\omega=\mp\beta$ სიხშირეთა არეში მკაფიოდ გამოსახულ მაქსიმუმს. როცა $\alpha=3$ (მრუდი II), სპექტრული სიმკვრივე სიხშირეთა მნიშვნელოვან დიაპაზონში რჩება თითქმის მუდმივი.

17.5. სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის გარდაქმნა სტაციონარულ წრფივ სისტემად

მე-16 თავში ჩვენ გავეცანით წრფივ გარდაქმნათა ზოგად წესებს შემთხვევითი ფუნქციებისა, რომლებიც წარმოდგენილნი იყვნენ კანონიკურ დაშლათა სახით. ეს წესები დაიყვანებიან იმაზე, რომ შემთხვევით ფუნქციათა წრფივ გარდაქმნებისას მათი მათემატიკური ლოდინები და კოორდინატული ფუნქციები განიცდიან იგივე წრფივ გარდაქმნებს. ამგვარად, შემთხვევითი ფუნქციის წრფივი გარდაქმნის ამოცანა დაიყვანება რამდენიმე არაშემთხვევითი ფუნქციის ასეთივე წრფივ გარდაქმნაზე.

იმ შემთხვევაში, როდესაც საუბარია სტაციონარულ შემთხვევით ფუნქციათა წრფივ გარდაქმნებზე, შესაძლოა ამოცანა კიდევ უფრო გავამარტივოთ. თუ საწყისი $\mathring{X}(t)$ ზემოქმედებაც და $\mathring{Y}(t)$ სისტემის რეაქციაც სტაციონარულები არიან, შემთხვევითი ფუნქციის გარდაქმნის ამოცანა შეიძლება დავიყვანოთ ერთადერთი არაშემთხვევითი ფუნქციის—სპექტრული $S_x(\omega)$ სიმკვრივის გარდაქმნამდე.

იმისათვის, რომ სისტემის რეაქცია სტაციონარული ზექმედებისას იყოს აგრეთვე სტაციონარული, ცხადია აუცილებელია, რომ სისტემის პარამეტრები (მაგალითად მათში შემავალი წინაღობანი, ტევადობანი, ინდუქციურობანი და ა. შ.) იყვნენ მუდმივი და არა ცვლადნი. შევთანხმდეთ — დავარქვათ მუდმივპარამეტრებიან სისტემას **ს ტ ა ც ი ო ნ ა რ უ ლ ი წ რ ფ ი ვ ი ს ი ს ტ ე მ ა**. ჩვეულებრივ სტაციონარული წრფივი სისტემის მუშაობა აღიწერება წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლებებით.



ნახ. 17.5.1.

განვიხილოთ სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის სტაციონარულ წრფივ სისტემით გარდაქმნის ამოცანა, ვთქვათ წრფივ L სისტემის შესასვლელში შედის სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქცია $X(t)$; სისტემის რეაქცია არის შემთხვევითი $Y(t)$ ფუნქცია (ნახ. 17.5.1). ცნობილია შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის მახასიათებლები: მათემატიკური ლოდინი m_x და კორელაციური ფუნქცია $k_x(\tau)$. საჭიროა განისაზღვროს შემთხვევითი $Y(t)$ ფუნქციის მახასიათებლები წრფივი სისტემის გამოსასვლელში.

რადგანაც ამოცანის ამოსახსნელად მოგვიწევს არაშემთხვევით ფუნქციათა გარდაქმნა—მათემატიკური ლოდინის და კოორდინატული ფუნქციებისა, უწინარეს ყოვლისა განვიხილოთ L სისტემის არაშემთხვევით $x(t)$ ზექმედებაზე რეაქციის განსაზღვრის ამოცანა.

დავწეროთ ოპერატორული ფორმით წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება, რომლებიც აკავშირებს სისტემის $y(t)$ რეაქციას $x(t)$ ზემოქმედებასთან

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) y(t) = \\ = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0)\, x(t), \qquad (17.5.1)$$

სადაც $p = \dfrac{d}{dt}$ — გაწარმოების ოპერატორია.

განტოლება (17.5.1) მოკლედ შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$A_n(p) y(t) = B_m(p) x(t), \qquad (17.5.2)$$

და ბოლოს, პირობითად ამოვხსნათ (17.5.2) განტოლება y-ის მიმართ და სისტემის ოპერატორი დავწეროთ „ცხადი“ სახით:

$$y(t) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} x(t). \qquad (17.5.3)$$

L სისტემის რეაქცია $x(t)$ ზემოქმედებაზე შეიძლება მოვნახოთ (17.5.1) წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნით. როგორც დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდანაა ცნობილი, ეს ამონახსნი შედგება ორი შესაკრებისაგან: $y_{\rm I}(t)$ და $y_{\rm II}(t)$. შესაკრები $y_{\rm II}(t)$ წარმოადგენს შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნს, განსაზღვრავს სისტემის ე. წ. თავისუფალ ანუ საკუთარ რხევებს. ესენია რხევები გამოწვეული სისტემის მიერ შესასვლელი ზემოქმედების არსებობისას, თუკი სისტემა საწყის მომენტში, როგორღაც გამოყვანილი იქნებოდა წონასწორობის მდგომარეობიდან. პრაქტიკაში ყველაზე ხშირად გვხვდებიან ე. წ. მ დ გ რ ა დ ი ს ი ს ტ ე მ ე ბ ი. ამ სისტემებში თავისუფალი რხევები დროის განმავლობაში მიილევიან.

თუ შემოვისაზღვრებით პროცესის საწყისიდან საკმაოდ დაშორებული დროის მონაკვეთების განხილვით, როცა ყველა გარდამავალი პროცესები სისტემაში შეიძლება ჩაითვალოს დამთავრებულად და სისტემა მუშაობს დამყარებულ რეჟიმში, შეიძლება უგულებელვყოთ მეორე შესაკრები $y_{\rm II}(t)$ და შემოვისაზღვროთ მხოლოდ პირველი $y_{\rm I}(t)$ შესაკრების განხილვით. პირველი შესაკრები განსაზღვრავს სისტემის ე. წ. იძულებით რხევებს, მასზე მოცემული $x(t)$ ფუნქციის გავლენით.

იმ შემთხვევაში, როცა $x(t)$ ზემოქმედება წარმოადგენს საკმაოდ მარტივ ანალიზურ ფუნქციას, ხშირად ხერხდება მოინახოს სისტემის

რეაქცია, აგრეთვე მარტივი ანალიზური ფუნქციის სახით. კერძოდ, როცა ზემოქმედება წარმოადგენს გარკვეული სიხშირის ჰარმონიულ რხევას, სისტემა პასუხობს მასზე აგრეთვე იმავე სიხშირის ჰარმონიული რხევით, მაგრამ შეცვლილი ამპლიტუდით და ფაზით.

რადგანაც სტაციონარული შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის სპექტრალური დაშლის კოორდინატული ფუნქციები წარმოადგენენ ჰარმონიულ რხევებს, ამიტომ ჩვენ უპირველეს ყოვლისა უნდა ვისწავლოთ სისტემის რეაქციის განსაზღვრა მოცემული ω სიხშირის ჰარმონიულ რხევაზე. ეს ამოცანა ამოიხსნება ძალიან მარტივად, განსაკუთრებით მაშინ, თუ ჰარმონიული რხევა წარმოდგენილია კომპლექსურ ფორმაში. დავუშვათ სისტემის შესასვლელში შედის შემდეგი სახის ჰარმონიული რხევა:

$$x(t)=e^{i\omega t}. \tag{17.5.4}$$

სისტემის $y(t)$ რეაქცია აგრეთვე ვეძებოთ ω სიხშირის მქონე ჰარმონიული რხევის სახით, მაგრამ გამრავლებული რომელიღაც კომპლექსურ $\Phi(i\omega)$ მამრავლზე:

$$y(t)=\Phi(i\omega)e^{i\omega t} \tag{17.5.5}$$

$\Phi(i\omega)$ მამრავლს მოვძებნით შემდეგნაირად: ჩავსვამთ (17.5.4) ფუნქციას (17.5.1) განტოლების მარჯვენა, ხოლო (17.5.5) ფუნქციას მარცხენა ნაწილში. მივიღებთ:

$$a_n\frac{d^n}{dt^n}[\Phi(i\omega)e^{i\omega t}]+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[\Phi(i\omega)e^{i\omega t}[+$$

$$+a_1\frac{d}{dt}[\Phi(i\omega)e^{i\omega t}]+a_0[\Phi(i\omega)e^{i\omega t}]=$$

$$=b_m\frac{d^m}{dt^m}e^{i\omega t}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}e^{i\omega t}+\cdots+b_1\frac{d}{dt}e^{i\omega t}+b_0e^{i\omega t}. \tag{17.5.6}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ ნებისმიერი k-სათვის

$$\frac{d^k}{dt^k}e^{i\omega\tau}=(i\omega)^k e^{i\omega t},\quad \frac{d^k}{dt^k}[\Phi(i\omega)e^{i\omega t}]=(i\omega)^k e^{i\omega t}\Phi(i\omega).$$

(17.5.6) განტოლების $e^{i\omega t}$-ზე გაყოფით მივიღებთ:

$$\Phi(i\omega)\,[a_n(i\omega)^n+a_{n-1}(i\omega)^{n-1}+\ldots+a_1(i\omega)+a_0]=$$
$$=b_m(i\omega)^m+b_{m-1}(i\omega)^{m-1}+\ldots+b_1(i\omega)+b_0. \tag{17.5.7}$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ თანამამრავლი $\Phi(i\omega)$-სთან წარმოადგენს მრავალწევრს $A(p)=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0$, რომელშიდაც ნაცვლად გაწარმოების p ოპერატორისა ჩასმულია $(i\omega)$; ანალოგიურად (17.5.7)

ტოლობის მარჯვენა ნაწილი არის $B_m(i\omega)$. განტოლება (17.5.7) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\Phi(i\omega)A_n(i\omega)=B_m(i\omega),$$

საიდანაც

$$\Phi(i\omega)=\frac{B_m(i\omega)}{A_n(i\omega)}. \tag{17.5.8}$$

ფუნქცია $\Phi(i\omega)$ ატარებს სპეციალურ სახელწოდებას — წრფივი სისტემის სიხშირული მახასიათებელი. სიხშირული მახასიათებლის განსაზღვრისათვის საკმარისია ცხადი სახით ჩაწერილი სისტემის ოპერატორში (17.5.3) გაწარმოების p ოპერატორის ნაცვლად ჩავსვათ $i\omega$.

ამგვარად, თუ მუდმივ პარამეტრებიან წრფივი სისტემის შესასვლელში შედის $e^{i\omega t}$ ტიპის ჰარმონიული რხევა, მაშინ სისტემის რეაქცია წარმოიდგინება იგივე ჰარმონიული რხევის სახით, რომელიც გამრავლებულია სისტემის სიხშირულ მახასიათებელზე $\Phi(i\omega)$. დავუშვათ სისტემის შესასვლელში შემოდის შემდეგი სახის ზემოქმედება:

$$x(t)=Ue^{i\omega t} \tag{17.5.9}$$

სადაც U — რომელიღაც სიდიდეა, რომელიც არ არის დამოკიდებული t-საგან. სისტემის წრფივობის ძალით U სიდიდე გამოდის ოპერატორის ნიშნის გარეთ და სისტემის რეაქცია (17.5.9) ზემოქმედებაზე ტოლი იქნება:

$$y(t)=U\Phi(i\omega)e^{i\omega t} \tag{17.5.10}$$

ცხადია ეს თვისება შენარჩუნებული იქნება იმ შემთხვევაშიც, როცა U სიდიდე იქნება შემთხვევითი (ოღონდ ის არ იყოს დამოკიდებული t-საგან).

წრფივი სისტემით ჰარმონიულ რხევათა გარდაქმნის ზემოთმოყვანილი ხერხები გამოვიყენოთ $X(t)$ ფუნქციის მათემატიკური ლოდინისათვის და მისი სპექტრული დაშლის კოორდინატულ ფუნქციებისათვის.

წარმოვიდგინოთ სტაციონარული შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის მათემატიკური m_x ლოდინი, როგორც ნულოვანი ($\omega=0$) სიხშირის ჰარმონიული რხევა და დავუშვათ (17.5.8) ფორმულაში $\omega=0$;

$$\Phi(0)=\frac{B_m(0)}{A_n(0)}=\frac{b_0}{a_0} \tag{17.5.11}$$

საიდანაც მივიღებთ სისტემის გამოსასვლელში მათემატიკურ ლოდინს:

$$m_y=\frac{b_0}{a_0}m_x. \tag{17.5.12}$$

გადავიდეთ $X(t)$ ფუნქციის არსებითად შემთხვევითი ნაწილის წრფივი სისტემით გარდაქმნაზე, სახელდობრ ფუნქციისა

$$\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_x \tag{17.5.13}$$

ამისათვის $\overset{\circ}{X}(t)$ ფუნქცია წარმოვიდგინოთ (0, T) უბანზე სპექტრული დაშლის სახით:

$$\overset{\circ}{X}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{i\omega_k t}, \tag{17.5.14}$$

სადაც U_k არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეებია, რომელთა დისპერსიები ქმნიან შემთხვევით $X(t)$ ფუნქციის სპექტრს. განვიხილოთ ამ ჯამის ცალკე შესაკრები:

$$X_k(t)=U_k e^{i\omega_k t} \tag{17.5.15}$$

ამ ზემოქმედებაზე სისტემის რეაქციას ექნება სახე:

$$Y_k(t)=U_k\Phi(i\omega_k)e^{i\omega_k t}. \tag{17.5.16}$$

სუპერპოზიციის პრინციპის თანახმად სისტემის რეაქცია ზემოქმედებათა ჯამზე ტოლია ცალკე ზემოქმედებათა რეაქციების ჯამის. მაშასადამე სისტემის რეაქცია ამ ზემოქმედებაზე (17.5.14) შეიძლება წარმოვიდგინოთ სპექტრული დაშლის სახით:

$$\overset{\circ}{Y}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k\Phi(i\omega_k)e^{i\omega_k t},$$

ან თუ აღვნიშნავთ $U_k\Phi(i\omega_k)=W_k$,

$$\overset{\circ}{Y}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k e^{i\omega_k t}, \tag{17.5.17}$$

სადაც W_k — ნულის ტოლი მათემატიკური ლოდინის მქონე არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეებია.

განვსაზღვროთ ამ დაშლის სპექტრი. ამისათვის ვიპოვოთ (17.5.17) დაშლაში კომპლექსური შემთხვევითი W_k სიდიდის დისპერსია.

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ კომპლექსური შემთხვევითი

სიდიდის დისპერსია ტოლია მისი მოდულის კვადრატის მათემატიკური ლოდინისა, გვაქვს:

$$D[W_k]=M[|U_k\Phi(i\omega)_k|^2]=M[|U_k|^2|\Phi(i\omega_k)|^2]=$$
$$=|\Phi(i\omega_k)|^2M[|U_k|^2]=|\Phi(i\omega_k)|^2D_k. \qquad (17.5.18)$$

ჩვენ მივდივართ შემდეგ დასკვნამდე: **სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის სტაციონარულ წრფივ სისტემით გარდაქმნისას მისი სპექტრის თითოეული ორდინატთაგანი მრავლდება შესაბამისი სიხშირისათვის სისტემის სიხშირული მახასიათებლის მოდულის კვადრატზე.**

ამგვარად, სტაციონარულ შემთხვევითი სიდიდის სტაციონარულ სისტემაში გავლისას, მისი სპექტრი გარკვეული წესით ახლებურად განრიგდება: ზოგიერთი სიხშირეები ძლიერდება, ზოგიერთები პირიქით, სუსტდებიან (იფილტრებიან). სიხშირული მახასიათებლის მოდულის კვადრატი (ω_k-საგან დამოკიდებული) უჩვენებს, თუ როგორ რეაგირებს სისტემა ამა თუ იმ სიხშირის რხევებზე.

ანალოგიურად იმისა, როგორც ეს კეთდებოდა ადრე, გადავალთ შემთხვევითი ფუნქციის სპექტრული წარმოდგენიდან ზღვარზე, როცა $T\to\infty$ და დისკრეტული სპექტრიდან — სპექტრულ სიმკვრივეზე. ცხადია, წრფივი სისტემის გამოსასვლელში სპექტრული სიმკვრივე მიიღება შესასვლელის სპექტრულ სიმკვრივიდან იმავე $|\Phi(i\omega)|^2$-ზე გადამრავლებით, როგორც დისკრეტული სპექტრის ორდინატები:

$$S_y(\omega)=|\Phi(i\omega)^2|S_x(\omega) \qquad (17.5.19)$$

ამგვარად, მიღებულია საკმაოდ მარტივი წესი:

სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის სტაციონარულ წრფივ სისტემით გარდაქმნისას, მისი სპექტრული სიმკვრივე მრავლდება სისტემის სიხშირული მახასიათებლის მოდულის კვადრატზე.

ვსარგებლობთ რა ამ წესით, ჩვენ ადვილად შევძლებთ გადავწყვიტოთ ზემოთ დასმული ამოცანა: წრფივი სისტემის შესასვლელში შემთხვევითი ფუნქციის მახასიათებლების მიხედვით მოვნახოთ შემთხვევითი ფუნქციის მახასიათებლები მის გამოსასვლელში.

დავუშვათ სტაციონარულ წრფივი ფუნქციის შესასვლელში (17.5.3) ოპერატორით შედის სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქცია $X(t)$ მათემატიკური m_x ლოდინით და კორელაციური $k_x(\tau)$ ფუნქციით. საჭიროა მოინახოს შემთხვევითი $Y(t)$ ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი m_y კორელაციური $k_x(\tau)$ ფუნქცია სისტემის გამოსასვლელში. ამოცანას გადავწყვეტთ შემდეგნაირად:

1. ვპოულობთ მათემატიკურ ლოდინს გამოსასვლელში:

$$M_y=\frac{b_0}{a_0}\,m_x \qquad (17.5.20)$$

2. კორელაციური $k_x(\tau)$ ფუნქციით ვპოულობთ სპექტრულ სიმკვრივეს შესასვლელში (იხ. ფორმ. 17.4.12):

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\text{[1]}. \qquad (17.5.21)$$

3. ფორმულით (17.5.8) ვპოულობთ სისტემის სიხშირული მახასიათებლის და მისი მოდულის კვადრატს:

$$|\Phi(i\omega)|^2=\frac{|B_m(i\omega)|^2}{|A_n(i\omega)|^2}. \qquad (17.5.22)$$

4. შესასვლელში სპექტრული სიმკვრივის, სიხშირული მახასიათებლის მოდულის კვადრატზე გადამრავლებით ვპოულობთ სპექტრულ სიმკვრივეს გამოსასვლელში:

$$S_y(\omega)=|\Phi(i\omega)|^2S_x(\omega). \qquad (17.5.23)$$

5. სპექტრული სიმკვრივით ვპოულობთ სისტემის გამოსასვლელში კორელაციურ ფუნქციას;

$$k_y(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega. \qquad (17.5.24)$$

ამგვარად, ამოცანა გადაწყვეტილია.

პრაქტიკის ბევრ ამოცანაში ჩვენ გვაინტერესებს არა მთლიანი კორელაციური $k_y(\tau)$ ფუნქცია სისტემის გამოსასვლელში, არამედ მხოლოდ დისპერსია D_y, რომელიც ტოლია

$$D_y=k_y(0).$$

მაშინ (17.5.24) ფორმულიდან ვღებულობთ, როცა $\tau=0$ გაცილებით უფრო მარტივ ფორმულას:

$$D_y=\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)d\omega,$$

ანდა $S_y(\omega)$ ფუნქციის ლუწობის გათვალისწინებით

$$D_y=2\int_0^{\infty} S_y(\omega)d\omega. \qquad (17.5.25)$$

[1] ჩანაწერის სიმარტივისათვის ჩვენ აქ გამოვტოვეთ * ნიშანი სპექტრული სიმკვრივის აღნიშვნაში.

მაგალითი: წრფივი დინამიკური სისტემის მუშაობა აღიწერება პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებით:

$$(a_1 p + a_0)\, y(t) = (b_1 p + b_0)\, x(t), \qquad (17.5.26)$$

ან

$$y(t) = \frac{b_1 p + b_0}{a_1 p + a_0}\, x(t).$$

სისტემის შემოსასვლელში შემოდის სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქცია $X(t)$, რომლის მათემატიკური ლოდინია m_x და კორელაციური ფუნქცია

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}, \qquad (17.5.27)$$

სადაც α დადებითი კოეფიციენტია (იხ. მაგალითი 1. პუნქტი 17.4). ვიპოვოთ მათემატიკური ლოდინი m_y და დისპერსია D_y სისტემის გამოსასვლელში[1].

ამოხსნა. ფორმულით (17.5.20) გვაქვს:

$$m_y = \frac{b_0}{a_0}\, m_x.$$

ცხადია სიდიდე m_y არ არის დამოკიდებული α პარამეტრისაგან, იზრდება b_0-ის ზრდით და კლებულობს a_0-ის ზრდისას. შესასვლელში სპექტრულ სიმკვრივეს ვსაზღვრავთ ისე, როგორც მაგ. 1 პ. 17.4-ში.

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{D_x \alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$$

(იხ. ნახ. 17.4.4).

ფორმულით (17.5.8) ვპოულობთ სისტემის სიხშირულ მახასიათებელს:

$$\Phi(i\omega) = \frac{b_1 i\omega + b_0}{a_1 i\omega + a_0}$$

---

[1] ვირჩევთ, რა შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის კორელაციური ფუნქციისათვის (17.5.27) ტიპის გამოსახულებას, რომელიც ხშირად გამოიყენება მისი სიმარტივის გამო პრაქტიკაში, აუცილებელია გვქონდეს მხედველობაში შემდეგი: ზუსტად რომ ვთქვათ, შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს ასეთი სახის კორელაციური ფუნქცია, არადიფერენცირებადია და მაშასადამე მისთვის არ შეიძლება დაიწეროს დიფერენციალური განტოლებანი ჩვეულებრივი გაგებით. ამ სიძნელეს შეიძლება გვერდი ავუაროთ, თუ განვიხილავთ (17.5.27) გამოსახულებას კორელაციური ფუნქციისათვის, როგორც მიახლოებულს.

და მისი მოდულის კვადრატს

$$|\Phi(i\omega)|^2=\frac{|b_1 i\omega+b_0|^2}{|a_1 i\omega+a_0|^2}=\frac{b_1^2\omega^2+b_0^2}{a_1^2\omega^2+a_0^2}.$$

შემდეგ ვპოულობთ სისტემის გამოსასვლელში სპექტრულ სიმკვრივეს:

$$S_y(\omega)=|\Phi(i\omega)|^2 S_x(\omega)=\frac{D_x}{\pi}\,\frac{b_1^2\omega^2+b_0^2}{a_1^2\omega^2+a_0^2}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}.$$

შემდგომ (17.5.25) ფორმულით ვიპოვით გამოსასვლელში დისპერსიას

$$D_y=\frac{2D_x}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{b_1^2\omega^2+b_0^2}{a_1^2\omega^2+a_0^2}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}d\omega.$$

ინტეგრალის გამოსათვლელად დავშალოთ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება მარტივ წილადებად:

$$\frac{b_1^2\omega^2+b_0^2}{a_1^2\omega^2+a_0^2}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}=\frac{A}{a_0^2+a_1^2\omega^2}+\frac{B}{\alpha^2+\omega^2}$$

და გამოვითვლით კოეფიციენტებს:

$$A=\alpha\,\frac{a_1^2b_0^2-a_0^2b_1^2}{a_1^2\alpha^2-a_0^2};$$

$$B=\alpha\,\frac{b_1^2\alpha^2-b_0^2}{a_1^2\alpha^2-a_0^2}.$$

ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ:

$$D_y=D_x\,\frac{a_1b_0^2+a_0b_1^2\alpha}{a_0a_1(a_1\alpha+a_0)}.$$

მოცემული პუნქტის დასასრულს გავიხსენოთ, თუ როგორ გარდაიქმნება წრფივი სისტემით სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქცია, რომელიც შეიცავს შესაკრებად ჩვეულებრივ შემთხვევით სიდიდეს:

$$X_1(t)=U_0+X(t) \tag{17.5.28}$$

სადაც U_0—შემთხვევითი სიდიდეა D_0 დისპერსიით;
$X(t)$ — სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქცია.
სისტემის რეაქცია $X(t)$ ზემოქმედებაზე მოიძებნება, როგორც ჯამი რეაქციებისა ცალკეულ ზემოქმედებათა (17.5.28) მარჯვენა ნაწილში $X(t)$ ზემოქმედებაზე რეაქციის მოძებნა ჩვენ უკვე ვიცით. ზემოქმედებას U_0 ჩვენ განვიხილავთ, როგორც ნულოვანი $\omega=0$ სიხშირის ჰარმონიულ

რხევას; თანახმად (17.5.11) ფორმულისა, რეაქცია მასზე ტოლი იქნება

$$V_0 = \frac{b_0}{a_0} U_0 \tag{17.5.29}$$

შესაკრები V_0 უბრალოდ მიემატება $X(t)$ ზემოქმედებაზე სისტემის რეაქციას.

17.6. სტაციონარულ შემთხვევითი პროცესების თეორიის გამოყენება იმ ამოცანების გადასაწყვეტად, რომლებიც დაკავშირებულნი არიან დინამიკური სისტემების ანალიზთან და სინთეზთან

წინა პუნქტში განხილული იყო სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის, სტაციონარულ წრფივ სისტემით გარდაქმნის საკითხი და მიღებულია ამ ამოცანის გადაწყვეტის მარტივი მათემატიკური ხერხები. შემთხვევითი ფუნქციის გარდაქმნა დაყვანილი იქნა ერთადერთი ფუნქციის — სპექტრული სიმკვრივის მარტივ გარდაქმნამდე (სიხშირული მახასიათებლის მოდულის კვადრატზე გადამრავლება). სტაციონარულ შემთხვევითი პროცესების სპექტრული თეორიის ასეთი სიმარტივე ხდის მას წრფივ დინამიკური სისტემების კვლევის შეუცვლელ აპარატად, სისტემებისა, რომლებიც მუშაობენ შემთხვევით შეშფოთებათა (შეფერხებათა) პირობებში.

ჩვეულებრივ პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას ჩვენ გვაინტერესებს არა თავისთავად თვით კორელაციური $k_y(\tau)$ ფუნქცია სისტემის გამოსასვლელში, არამედ მასთან დაკავშირებული დისპერსია

$$D_y = k_y(0),$$

რომელიც მასში შემავალი შემთხვევითი შეშფოთებით გამოწვეულ სისტემის ცდომილებებს ახასიათებს და ბევრ შემთხვევაში შეუძლია იყოს სისტემის მუშაობის სიზუსტის კრიტერიუმი.

დინამიკური სისტემების შემთხვევით ფუნქციათა თეორიის მეთოდებით კვლევისას წყდება ორი სახის ამოცანა, რომლებსაც შეიძლება დავარქვათ „პირდაპირი" და „შებრუნებული".

პირდაპირი ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: ანალიზი უკეთდება მოცემულ წრფივ დინამიკურ სისტემას, რომელსაც აქვს სავსებით განსაზღვრული პარამეტრები და რომლის მუშაობა აღიწერება წრფივი დიფერენციალურ განტოლებით:

$$\begin{aligned}(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) y(t) &= \\ = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0) x(t). \end{aligned} \tag{17.6.1}$$

საჭიროა გამოკვლეულ იქნას სისტემის მუშაობის სიზუსტე, როცა მის შესასვლელში არსებობს სტაციონარული შემთხვევითი ზემოქმედება ე. წ. „სტაციონარული დაბრკოლებანი". ამისათვის უწინარეს ყოვლისა გამოიკვლევა შემთხვევითი დაბრკოლება, განისაზღვრება მისი კორელაციური ფუნქცია და სპექტრული შემადგენლობა. შემდეგ ზემოაღწერილი მეთოდებით პოულობენ სპექტრს და შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსიას სისტემის გამოსასვლელში. გამოსასვლელში დისპერსია ცხადია დამოკიდებულია, როგორც შემთხვევითი ზემოქმედების მახასიათებლებისაგან შესასვლელში, ისე განტოლებათა კოეფიციენტებისაგან. ვწყვეტთ რა ასეთ ამოცანას, შეიძლება შევაფასოთ მოცემული სისტემის სიზუსტე დაბრკოლებათა სხვადასხვა პირობებში.

შებრუნებული ამოცანა მდგომარეობს იმაში, თუ როგორ შევარჩიოთ (17.6.1) განტოლებათა კოეფიციენტები, რომ დაბრკოლებათა მოცემულ სპექტრულ შემადგენლობისას ცდომილებები სისტემის გამოსასვლელში იყოს მინიმალური. სისტემის შესასვლელში შემთხვევითი ფუნქციის (დაბრკოლებების) მოცემულ მახასიათებლებისას დისპერსია გამოსასვლელში დამოკიდებულია განტოლების კოეფიციენტების მთელ ერთობლიობისაგან:

$$D_y = D_y(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0, b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0).$$

განტოლების კოეფიციენტები დამოკიდებულია სისტემის კონსტრუქციული პარამეტრებისაგან და მათგან ზოგიერთი სისტემის დაპროექტებისას შეიძლება ვცვალოთ ფართო საზღვრებში.

ამ პარამეტრების რაციონალურ მნიშვნელობათა შერჩევის ამოცანა შესაძლებელია ამოხსნილ იქნას იმ მოთხოვნიდან, რომ დისპერსია იყოს მინიმალური.

უნდა დამატებით შევნიშნოთ ის, რომ პრაქტიკაში ხშირად ვერ ხერხდება ამ მოთხოვნის დაკმაყოფილება. მართლაც ჩვენს მიერ გამოყვანილი გამოსახულებანი კორელაციური ფუნქციისა და დისპერსიისათვის სისტემის გამოსასვლელში მართებულია მხოლოდ t დროის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც შემთხვევითი პროცესის საწყისიდან საკმაოდ არიან დაშორებული, როცა სისტემაში მის თავისუფალ რხევასთან დაკავშირებული ყველა გარდამავალმა პროცესებმა მოასწრეს უკვე მილევა. მართლაც ხშირად გვხვდება დროის გარკვეულ უბანზე წრფივი დინამიკური სისტემების (სამიზნეები, გამომთვლელ-გადამწყვეტი მექანიზმები) გამოყენება დროის შემოსაზღვრულ უბანზე, ამ დროს გარდამავალი პროცესების მილევის სისწრაფე სისტემაში არსებითად დამოკიდებულია მისი კონსტრუქციული პარამეტრებისაგან, ე. ი. (17.6.1) განტოლებათა კოეფიციენტებისაგან. თუ შევარჩევთ ამ კოეფიციენტებს ისე, რომ მათ მოგვცენ სისტემის გამოსახულებაში დისპერსიის

მინიმუმი (დროის საკმარისად დაშორებულ მონაკვეთისათვის), ეს როგორც წესი, მიგვიყვანს იქამდე, რომ სისტემის გამოსასვლელში გამოჩნდებიან სხვა. შეცდომები, რომლებიც დაკავშირებულნი არიან იმასთან, რომ სისტემაში გარდამავალმა პროცესებმა ჯერ კიდევ ვერ მოასწრეს მილევა. ამ შეცდომებს ჩვეულებრივ უწოდებენ დინამიკურ ცდომილებებს.

წრფივ სისტემათა გამოყენებისას დროის შეზღუდულობასთან დაკავშირებით და პრაქტიკაში დინამიკურ შეცდომათა არსებობის გამო ჩვენ გვიხდება ამოვხსნათ ამოცანა სისტემის პარამეტრების რაციონალურ შერჩევაზე დისპერსიის მინიმუმის არა სუფთა პრინციპით, არამედ დინამიკურ შეცდომათა გათვალისწინებით. ამოცანის რაციონალური ამოხსნა მოიძებნება როგორც კომპრომისული, რომლის დროსაც ერთის მხრივ სისტემის გამოსასვლელში დისპერსია საკმაოდ მცირეა, ხოლო მეორეს მხრივ — დინამიკური შეცდომები არც მეტისმეტად დიდია.

იმ შემთხვევაში, როცა ეძებენ სისტემის ოპტიმალურ პარამეტრებს, როგორც დისპერსიის, ისე სისტემატიკური დინამიკურ შეცდომათა გათვალისწინებით, ხშირად სისტემის მუშაობის სიზუსტის კრიტერიუმად ირჩევენ მეორე საწყის მომენტს α_2 სისტემის გამოსასვლელში:

$$\alpha_2 = D_y + m_y^2. \tag{17.6.2}$$

სადაც D_y — დისპერსიაა, m_y — სისტემატიური შეცდომა სისტემის გამოსასვლელში. ამ დროს სისტემის პარამეტრები შეირჩევიან ისე, რომ მათ გახადონ α_2 სიდიდე მინიმუმი.

ზოგჯერ სისტემის შეფასების კრიტერიუმად ირჩევენ არა დისპერსიას და არა მეორე საწყის მომენტს, არამედ სხვა რომელიმე სიდიდეს რომელიც დაკავშირებულია სისტემის მიზნობრივ დანიშნულებასთან. მაგალითად, სამიზნე მოწყობილობათა და მართვის სისტემის გამოცდისას, რომლებიც განკუთვნილი არიან სროლისათვის, მათი პარამეტრების შერჩევას უდგებიან, მიზნის დაზიანების ალბათობის მაქსიმუმიდან გამომდინარე.

განვიხილოთ კიდევ ერთი ტიპური ამოცანა, რომელიც დაკავშირებულია დინამიკური სისტემის რაციონალურ კონსტრუირებასთან. აქამდე ჩვენ განვიხილავდით (17.6.1) განტოლების მხოლოდ კოეფიციენტების რაციონალურად შერჩევის ამოცანას, ხოლო განტოლების სახე კი ითვლებოდა მოცემულად. ე. წ. დინამიკურ სისტემათა სინთეზთან დაკავშირებულ ამოცანათა ამოხსნის ამოცანა ისმება უფრო ფართოდ. კერძოდ დგება საკითხი თვით განტოლების სახის რაციონალურ შერჩევაზე, ან უფრო ფართოდ, დინამიკური სისტემის ოპტიმალური ოპერატორის განსაზღვრის ამოცანა. ამგვარი ამოცანები ამჟამად წარმატებით ამოიხსნებიან შემთხვევით ფუნქციათა თეორიის მეთოდებით.

დინამიკური სისტემების ანალიზთან და სინთეზთან დაკავშირებულ პრაქტიკულ ამოცანათა ამოხსნისას, ხშირად არ ხერხდება შემოვიფარგლოთ სტაციონარული შემთხვევითი პროცესებით და მისი კუთვნილი სპექტრული თეორიის აპარატით, ოღონდ მთელ რიგ შემთხვევებში რამდენადმე სახეშეცვლილი ეს აპარატი შეიძლება გამოყენებულ იქნას არა სტაციონარულ პროცესებისათვის. პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ე. წ. „კვაზისტაციონარული" შემთხვევითი ფუნქციები და „კვაზისტაციონარული" დინამიკური სისტემები; ისინი ხასიათდებიან იმით, რომ შემთხვევით ფუნქციათა მახასიათებლების და სისტემის პარამეტრების ცვალებადობა დროში მიმდინარეობს შედარებით ნელა. ასეთი შემთხვევითი პროცესებისათვის ვ. ს. პუგაჩოვის მიერ დამუშავებულია მეთოდი, რომელიც თავისი სტრუქტურით მცირედაა განსხვავებული სპექტრულისაგან, მაგრამ გამოიყენება პირობათა უფრო ფართო დიაპაზონში[1].

17.7. სტაციონარულ შემთხვევით ფუნქციათა ერგოდიკული თვისება

განვიხილოთ რომელიღაც სტაციონარული $X(t)$ ფუნქცია და ვთქვათ, რომ საჭიროა შევაფასოთ მისი მახასიათებლები: მათემატიკური ლოდინი m_x და კორელაციური $k_x(\tau)$ ფუნქცია. ზემოთ (იხ. პ. 15.4) გადმოცემული იყო ცდებიდან ამ მახასიათებელთა მიღების ხერხები. ამისათვის უნდა გვქონდეს შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის რეალიზაციათა გარკვეული რიცხვი. დავამუშავებთ, რა ამ რეალიზაციებს, შეიძლება მოიძებნოს შეფასებები მათემატიკური $\tilde{m}_x(t)$ ლოდინისა და კორელაციური $\tilde{K}_x(t, t')$ ფუნქციისათვის. დაკვირვებათა რიცხვის შეზღუდულობასთან დაკავშირებით ფუნქცია $\tilde{m}_x(t)$ არ იქნება ზუსტად მუდმივი; იგი უნდა გავასაშუალოთ და შევცვალოთ რომელიღაც მუდმივით m_x-ით, ანალოგიურად $\tilde{K}_x(t, t')$ მნიშვნელობათა გასაშუალებით სხვადასხვა $\tau=t'-t$-სათვის მივიღებთ $\tilde{K}_x(\tau)$ კორელაციურ ფუნქციას.

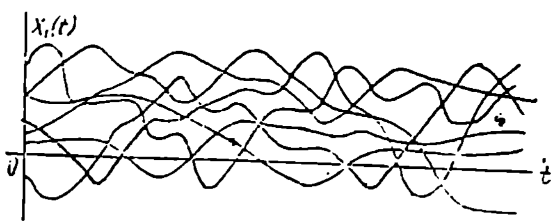
დამუშავების ეს მეთოდი ცხადია წარმოადგენს საკმაოდ რთულსა და შრომატევადს და მასთან ერთად შედგება ორი ეტაპისაგან: შემთხვევით ფუნქციათა მახასიათებლების მიახლოებითი განსაზღვრისაგან და აგრეთვე ამ მახასიათებლების მიახლოებითი გასაშუალებისაგან. ბუნებრივად ისმის კითხვა: ხომ არ არის შესაძლებელი სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციისათვის დამუშავების ეს რთული, ორსაფეხურიანი პროცესი შევცვალოთ უფრო მარტივით, რომელიც წინასწარ ემყარება დაშვებას, რომ მათემატიკური ლოდინი არ არის დროისაგან დამოკიდებული, ხოლო კორელაციური ფუნქცია — ათვლის საწყისისაგან?

[1] იხ. ვ. ს. პუგაჩოვი. შემთხვეეით ფუნქციათა თეორია და მისი გამოყენება ავტომატური მართვის ამოცანებისათვის Физматгиз, 1962 (რუსულ ენაზე).

გარდა ამისა, წამოიჭრება საკითხი: დაკვირვებათა დამუშავებისას, სტაციონარულ შემთხვევით ფუნქციისათვის წარმოადგენს კი არსებითად აუცილებელს რამდენიმე რეალიზაციათა ცოდნა? რამდენადაც შემთხვევითი პროცესი წარმოადგენს სტაციონარულს და მიმდინარეობს დროის მიხედვით ერთგვაროვნად, ბუნებრივია ვივარაუდოთ, რომ ერთადერთი რეალიზაცია საკმარისი ხანგრძლივობისა გამოდგება ცდისეულ მასალად შემთხვევითი ფუნქციის მახასიათებლების მისაღებად.

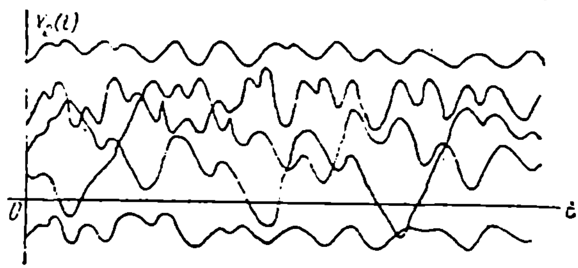
ამ საკითხის უფრო დეტალურად განხილვისას, აღმოჩნდება, რომ ასეთი შესაძლებლობა არსებობს არა ყველა შემთხვევითი პროცესისათვის: არა ყოველთვის აღმოჩნდება ერთი რეალიზაცია საკმაო ხანგრძლივობისა ეკვივალენტური ცალკეულ რეალიზაციათა სიმრავლისა.

მაგალითისათვის განვიხილავთ ორ სტაციონარულ შემთხვევით ფუნქციას $X_1(t)$ და $X_2(t)$, რომლებიც წარმოდგენილი არიან თავიანთი რაციონალიზაციათა ერთობლიობით ნახ. 17.7.1 და 17.7.2-ზე. $X_1(t)$



ნახ. 17.7.1.

შემთხვევითი ფუნქციისათვის დამახასიათებელია შემდეგი თავისებურება: მის ყოველ რეალიზაციას გააჩნია ერთი და იგივე დამახასიათებელი ნიშანი: საშუალო მნიშვნელობა, რომლის ირგვლივ ხდება რხევები და ამ რხევათა საშუალო ამპლიტუდა. ავირჩიოთ ნებისმიერი ერთი ასეთი



ნახ. 17.7.2.

რეალიზაცია და გავაგრძელოთ აზრობრივ ცდა, რომლის შედეგადაც იგი არის მიღებული დროის რომელიღაც T უბანზე. ცხადია საკმაოდ დიდი T-სათვის ამ ერთ რეალიზაციას შეუძლია მოგვცეს ჩვენ საკმაოდ კარგი წარმოდგენა შემთხვევითი ფუნქციის თვისებებზე მთლიანად. კერძოდ ამ

რეალიზაციის გასაშუალებით აბსცისთა ღერძის გასწვრივ — დროის მიხედვით, ჩვენ უნდა მივიღოთ შემთხვევითი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინის მიახლოებითი მნიშვნელობა; ამ საშუალოდან გადახრათა კვადრატების გასაშუალებით ჩვენ უნდა მივიღოთ დისპერსიის მიახლოებითი მნიშვნელობა და ა. შ. ასეთ შემთხვევით ფუნქციაზე ამბობენ: მას ახასიათებს ერგოდიკული თვისება. ერგოდიკული თვისება მდგომარეობს იმაში, რომ შემთხვევითი ფუნქციის ყოველი ცალკეული რეალიზაცია წარმოადგენს თითქოს და „სრულუფლებიან წარმომადგენელს“ შესაძლო რეალიზაციათა მთელი ერთობლიობისა; ერთ რეალიზაციას საკმაო ხანგრძლივობისას შეუძლია შეცვალოს დამუშავებისას იმავე საერთო ხანგრძლივობის რეალიზაციათა სიმრავლე[1]

ახლა განვიხილოთ შემთხვევითი $X_2(t)$ ფუნქცია. შევარჩიოთ ნებისმიერად ერთ-ერთი რეალიზაციათაგანი, გავაგრძელოთ იგი აზრობრივ დროის საკმაოდ დიდ უბანზე და გამოვთვალოთ მისი საშუალო მნიშვნელობა დროის მიხედვით დაკვირვების მთელ მანძილზე. ცხადია ეს საშუალო მნიშვნელობა ყოველი რეალიზაციისათვის იქნება საკუთარი და შეიძლება არსებითად განსხვავებული იყოს შემთხვევითი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინისაგან, რომელიც აგებულია, როგორც საშუალო რეალიზაციათა სიმრავლეებისა. ასეთ შემთხვევით ფუნქციაზე ლაპარაკობენ, რომ მას არ გააჩნია ერგოდიკული თვისება.

თუ შემთხვევით ფუნქციას $X(t)$ გააჩნია ერგოდიკული თვისება, მაშინ მისთვის დროის მიხედვით საშუალო (დაკვირვების საკმაოდ დიდ უბანზე) მიახლოებით ტოლია, დაკვირვების სიმრავლის საშუალოსი. იგივე მართებულია ფუნქციებისათვის $X^2(t)$, $X(t)\cdot X(t+\tau)$ და ა. შ. მაშასადამე შემთხვევითი ფუნქციის ყველა მახასიათებლები (მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, კორელაციური ფუნქცია), შესაძლებელი იქნება მიახლოებით განვსაზღვროთ ერთი საკმაოდ გრძელი რეალიზაციით.

რომელ სტაციონარულ შემთხვევით ფუნქციებს გააჩნია, ხოლო რომლებს არ გააჩნიათ ერგოდიკული თვისება?

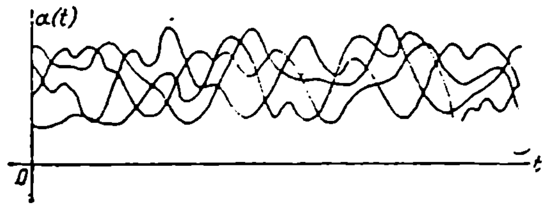
განვმარტავთ ამ საკითხს თვალსაჩინოდ, მაგალითიდან გამომდინარე. განვიხილოთ შემთხვევითი $\alpha(t)$ ფუნქცია — ჰორიზონტალურად ფრენის დადგენილი რეჟიმისას თვითმფრინავის შეტევის კუთხის რხევები. ვვარაუდობთ, რომ ფრენა მიმდინარეობს რომელიღაც ტიპურ მეტეოროლოგიურ პირობებში. კუთხის ცვლილებები გამოწვეულია შემ-

---

[1] უფრო ზუსტად უნდა გვეთქვა არა „ყოველი რეალიზაცია“, არამედ „თითქმის ყოველი“. საქმე იმაშია, რომ ცალკეულ შემთხვევაში შეიძლება გამოჩნდნენ ისეთი რეალიზაციები, რომელთაც არ გააჩნიათ ასეთი თვისება, მაგრამ ასეთი რეალიზაციათა გამოჩენის ალბათობა ნულის ტოლია.

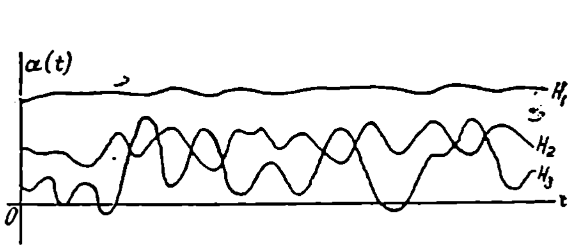
თხვევითი შეშფოთებებით ატმოსფეროს ტურბულენტურობასთან დაკავშირებით. შეტევის კუთხის საშუალო მნიშვნელობა, რომლის ახლოსაც ხდება ცვლილებები, დამოკიდებულია ფრენის H სიმაღლეზე. ფრენის ამ სიმაღლეზეა დამოკიდებული რხევის ამპლიტუდაც. ცნობილია, რომ ატმოსფეროს ქვედა ფენებში ტურბულენტურობა უფრო ძლიერია, ვიდრე ზედაში.

განვიხილოთ შემთხვევითი ფუნქცია $\alpha(t)$ — მოცემულ H სიმაღლეზე შეტევის კუთხის ცვლილება. ყოველი რეალიზაციათაგანი ამ შემთხვევითი ფუნქციისა ხორციელდება შემთხვევით ფაქტორთა ერთი და იგივე ჯგუფის ზემოქმედების შედეგად და გააჩნია ერთი და იგივე ალბათობითი მახასიათებლები; შემთხვევითი $\alpha(t)$ ფუნქციას გააჩნია ერგოდიკული თვისება (ნახ. 17.7.3).



ნახ. 17.7.3.

წარმოვიდგინოთ ახლა, რომ განიხილება შემთხვევითი ფუნქცია $\alpha(t)$ არა ერთი H სიმაღლისათვის, არამედ მთელი დიაპაზონისათვის, რომლის შიგნითაც მოცემულია სიმაღლეთა რომელიღაც განაწილება (მაგალითად თანაბარი სიმკვრივის კანონი). ასეთი შემთხვევითი ფუნქცია რჩება, რა სტაციონარული, ცხადია, უკვე არ გააჩნდეს იქნება ერგოდიკული თვისება; მისი შესაძლო რეალიზაციები, რომლებიც ხორციელდებიან რომელიღაც ალბათობებით, სხვადასხვა ხასიათისაა (ნახ. 17.7.4).



ნახ. 17.7.4.

ამ შემთხვევითი პროცესისათვის დამახასიათებელია ის, რომ იგი თითქოსდა „დაშლადია“ უფრო ელემენტარულ შემთხვევით პროცესებად. თითოეული მათგანი ხორციელდება რომელიღაც ალბათობით და აქვს თავისი ინდივიდუალური მახასიათებლები. ამგვარად დ ა შ ლ ა დ ო ბ ა შინაგანი არაერთგვაროვნებაა შემთხვევითი პროცესისა, რომელიც მიმდინარეობს რომელიღაც ალბათობით, ამა თუ იმ ტიპის მიხედვით და არის ფიზიკური მიზეზი არაერგოდიკულობისა.

კერძოდ, შემთხვევითი პროცესის არაერგოდიკულობა შეიძლება იყოს დაკავშირებული მის შესაკრებთა შემადგენლობაში ჩვეულებრივი შემთხვევითი სიდიდის არსებობაზე (ე. ი. შემთხვევითი პროცესის სპექტრში გარდა უწყვეტი ნაწილისა სასრული დისპერსიის არსებობაზე, ნული სიხშირისას).

მართლაც, განვიხილოთ შემთხვევითი ფუნქცია

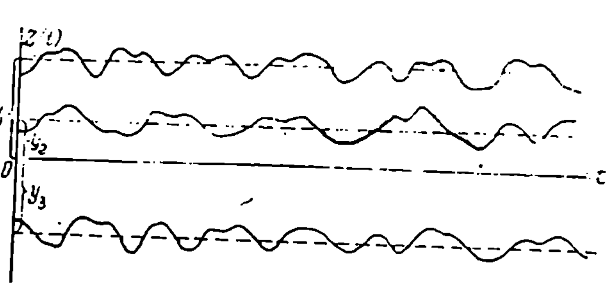
$$Z(t)=X(t)+Y, \tag{17.7.1}$$

სადაც $X(t)$ — ერგოდიკული სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციაა m_x, $k_x(\tau)$ მახასიათებლებით; Y — შემთხვევითი სიდიდე m_y და D_y მახასიათებლებით; ვივარაუდოთ, რომ $X(t)$ და Y არაკორელირებულია. განვსაზღვროთ შემთხვევითი $Z(t)$ ფუნქციის მახასიათებლები. თანახმად შემთხვევით ფუნქციათა შეკრების ზოგადი წესებისა (იხ. პ. 15.8) გვაქვს:

$$m_z=m_x+m_y, \tag{17.7.2}$$

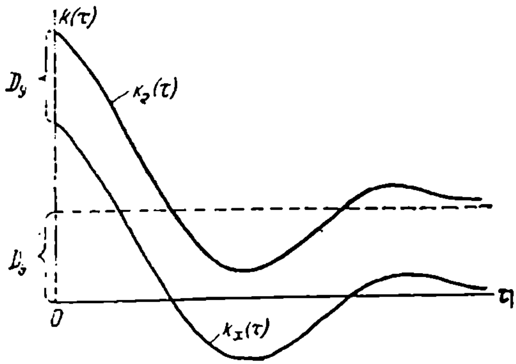
$$k_z(\tau)=k_x(\tau)+D_y. \tag{17.7.3}$$

ფორმულებიდან (17.7.2) და (17.7.3) ჩანს, რომ შემთხვევითი ფუნქცია წარმოადგენს სტაციონარულს, მაგრამ გააჩნია კი მას ერგოდიკული თვისება? ცხადია არა. ყოველი მისი რეალიზაცია განსხვავებული იქნება სხვებისაგან, ექნება დროის მიხედვით ესა თუ ის საშუალო მნიშვნელობა დამოკიდებით იმისაგან, თუ როგორი მნიშვნელობა მიიღო შემთხვევითმა Y სიდიდემ (ნახ. 17.7.5). შემთხვევითი პროცესის ერგოდიკულობა-



ნახ. 17.7.5.

ზე ან არაერგოდიკულობაზე შეუძლია მოწმობდეს მისი კორელაციური ფუნქციის სახე. მართლაც განვიხილოთ არაერგოდიკული შემთხვევითი (17.7.1) ფუნქციის კორელაციური ფუნქცია. იგი განსხვავდება შემთხვევითი $X(t)$ ფუნქციის კორელაციური ფუნქციისაგან მუდმივი D_y შესაკრების არსებობით (ნახ. 17.7.6). ამავე დროს როგორც კორელაციური ფუნქცია $k_x(\tau)$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $\tau \to \infty$ (შემთხვევითი ფუნქციის მნიშვნელობებს შორის კორელაციური კავშირი მცირდება მათ შორის მანძილის გაზრდის მიხედვით). ფუნქცია $k_z(\tau)$ უკვე არ მიისწრაფვის ნულისაკენ როცა $t \to \infty$, არამედ უახლოვდება D_y-ის მუდმივ მნიშვნელობას. პრაქტიკაში ჩვენ არ გვაქვს საშუალება გამოვიკვლიოთ მისი კორელაციური ფუნქცია დროის უსასრულო მონაკვეთზე; τ მნიშვნელობათა



ნახ. 17.7.6.

უბანი, რომელთანაც ჩვენ გვაქვს საქმე, ყოველთვის შემოსაზღვრულია, თუ ამ დროს სტაციონარული შემთხვევითი პროცესის კორელაციური ფუნქცია τ გაზრდით არ კლებულობს, არამედ რომელიღაც τ-დან დაწყებული რჩება მიახლოებით მუდმივი, ეს ჩვეულებრივ არის ნიშანი იმისა, რომ შემთხვევითი ფუნქციის შემადგენლობაში არსებობს შესაკრები ჩვეულებრივი შემთხვევითი სიდიდის სახით და რომ პროცესი არ წარმოადგენს ერგოდიკულს, ხოლო კორელაციური ფუნქციის მისწრაფება ნულისაკენ, როცა $t \to \infty$ ლაპარაკობს პროცესის ერგოდიკულობის სასარგებლოდ. ყოველ შემთხვევაში იგი საკმარისია იმისათვის, რომ ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი განსაზღვრული იქნეს როგორც საშუალო, დროის მიხედვით.

პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას შემთხვევითი პროცესის ერგოდიკულობაზე დასკვნის გამოტანა ხდება არა კორელაციური ფუნქციის ქცევის კვლევის საფუძველზე, როცა $\tau \to \infty$, არამედ ფიზიკური მოსაზრებების საფუძველზე, რომლებიც დაკავშირებულია პროცესის არსთან (მისი სავარაუდო „დაშლადობაზე“, ან „არადაშლადობაზე“ სხვადასხვა ტიპის ელემენტარულ პროცესებად, რომლებიც მჟღავნდებიან რომელიღაც ალბათობით).

17.8. ერგოდიკული სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის მახასიათებელთა განსაზღვრა ერთი რეალიზაციის მიხედვით

განვიხილოთ სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქცია $X(t)$, რომელსაც გააჩნია ერგოდიკული თვისება და დავუშვათ, რომ ჩვენს განკარგულებაშია ამ შემთხვევითი ფუნქციის სულ ერთი რეალიზაცია, მაგრამ დროის საკმაოდ დიდ T უბანზე. ერგოდიკულ სტაციონარულ შემთხვევითი ფუნქციისათვის ერთი რეალიზაცია საკმაოდ დიდი ხანგრძლივობისა პრაქტიკულად ეკვივალენტურია (შემთხვევითი ფუნქციის შესახებ ცნობათა მოცულობის აზრით) იმავე საერთო ხანგრძლივობის რეალიზაციათა სიმრავლისა; შემთხვევითი ფუნქციის მახასიათებლები შესაძლოა მიახლოებით განისაზღვრონ არა როგორც საშუალო დაკვირვებათა სიმრავლიდან, არამედ საშუალო t დროის მიხედვით. კერძოდ, საკმაოდ დიდი T-ს შემთხვევაში მათემატიკური ლოდინი m_x შეიძლება მიახლოებით გამოთვლილ იქნას ფორმულით

$$m_x \approx \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt^{1} \tag{17.8.1}$$

ანალოგიურად შეიძლება მიახლოებით მოინახოს კორელაციური ფუნქცია $k_x(\tau)$ ნებისმიერი τ -სათვის. მართლაც კორელაციური ფუნქცია განსაზღვრის მიხედვით წარმოადგენს შემთხვევითი $\overset{\circ}{X}(t)\ \overset{\circ}{X}(t+\tau)$ ფუნქციის მათემატიკურ ლოდინს

$$k_x(\tau)=M[\overset{\circ}{X}(t)\ \overset{\circ}{X}(t+\tau)]. \tag{17.8.2}$$

ეს მათემატიკური ლოდინი აგრეთვე ცხადია შეიძლება მიახლოებით გამოთვლილ იქნას, როგორც დროის მიხედვით საშუალო.

ჩავინიშნოთ τ რომელიღაც მნიშვნელობა და ნაჩვენები ხერხით გამოვთვალოთ კორელაციური ფუნქცია $k_x(\tau)$. ამისათვის მოხერხებულია წინასწარ „ცენტრირებული“ იყოს მოცემული $x(t)$ რეალიზაცია, ე. ი. გამოვაკლოთ მას მათემატიკური ლოდინი (17.8.1):

$$\overset{\circ}{x}(t)=x(t)-m_x. \tag{17.8.3}$$

გამოვთვალოთ მოცემულ (t)-სათვის შემთხვევით $\overset{\circ}{X}(t)\ \overset{\circ}{X}(t+\tau)$ ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი დროის მიხედვით. ამ დროს ცხადია ჩვენ მოგ-

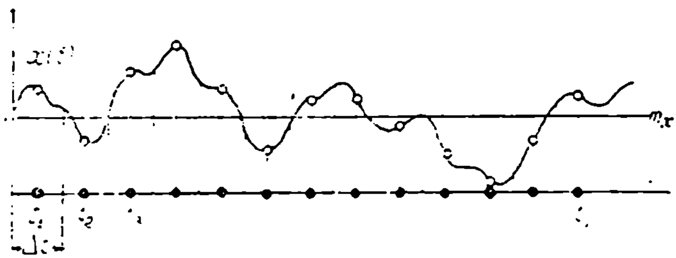
[1] ჩანაწერის სიმარტივისათვის ჩვენ აქ გამოვტოვებთ ნიშანს ~ შემთხვევით ფუნქციათა მახასიათებლებისას, რომელიც აღნიშნავს, რომ ჩვენ საქმე გვაქვს არა თვით მახასიათებლებთან, არამედ მათ შეფასებებთან.

ვიწევს გავითვალისწინოთ დროის არა მთლიანი უბანი 0-დან T-მდე, არამედ რამდენადმე ნაკლები, რადგან მეორე თანამამრავლი $\overset{\circ}{X}(t+\tau)$ ჩვენთვის ცნობილია არა ყველა t-სათვის, არამედ მხოლოდ იმათთვის, რომლებისთვისაც $t+\tau\leqslant T$. გამოვთვლით რა დროის მიხედვით საშუალოს, ზემოთ ნაჩვენები ხერხით მივიღებთ:

$$k_x(\tau)\approx\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}\overset{\circ}{x}(t)\,\overset{\circ}{x}(t+\tau)\,d\tau. \qquad (17.8.4)$$

(17.8.4) ინტეგრალის τ-ს მთელ რიგ მნიშვნელობებისათვის გამოთვლით შეიძლება მიახლოებით გამოვსახოთ წერტილების მიხედვით კორელაციური ფუნქციის მთელი სვლა.

პრაქტიკაში ჩვეულებრივ (17.8.1) და (17.8.4) ინტეგრალებს ცვლიან სასრული ჯამებით. ვაჩვენოთ თუ როგორ კეთდება ეს. დავყოთ შემთხვევითი ფუნქციის ჩაწერის ინტერვალი Δt სიგრძის n ტოლ ნაწილებად და მიღებული უბნების შუაწერტილები აღვნიშნოთ $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (ნახ. 17.8.1). წარმოვიდგინოთ (17.8.1) ინტეგრალი როგორც ჯამი



ნახ. 17.8.1.

ინტეგრალებისა ელემენტარულ Δt უბნების მიხედვით და თითოეული მათგანიდან გამოვიტანოთ $x(t)$ ფუნქცია ინტეგრალის ნიშნის გარეთ საშუალო მნიშვნელობით, რომელიც შეესაბამება $x(t_i)$ ინტერვალის ცენტრს. მიახლოებით მივიღებთ:

$$m_x=\frac{1}{T}\,\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}x(t_i),$$

ან

$$m_x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x(t_i). \qquad (17.8.5)$$

ანალოგიურად შეიძლება გამოვთვალოთ კორელაციური ფუნქცია τ-ს შემდეგი მნიშვნელობებისათვის, 0, Δt, $2\Delta t$,... მივცეთ მაგალითად τ სიდიდეს მნიშვნელობა

$$\tau = m\,\Delta t = \frac{mT}{n}$$

და გამოვთვალოთ ინტეგრალი (17.8.4) ინტეგრების ინტერვალის

$$T-\tau = T - \frac{mT}{n} = \frac{n-m}{n}\,T,$$

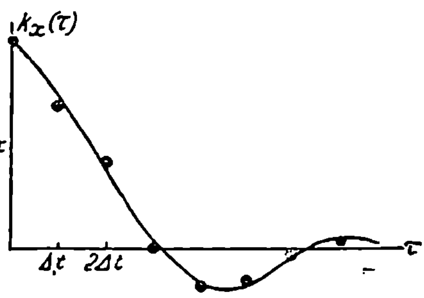
გაყოფით $n-m$ რაოდენობის Δt სიგრძის ტოლ უბნებად და თითოეული მათგანიდან $\overset{\circ}{x}(t)\,\overset{\circ}{x}(t+\tau)$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობით ინტეგრალის ნიშნის გარეთ გამოტანით მივიღებთ:

$$k_x\left(\frac{mT}{n}\right) = \frac{n}{(n-m)T}\,\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n-m}\overset{\circ}{x}(t_i)\,\overset{\circ}{x}(t_{i+m}).$$

ან საბოლოოდ

$$k_x\left(\frac{mT}{n}\right) = \frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{n-m}\overset{\circ}{x}(t_i)\,\overset{\circ}{x}(t_{i+m}), \qquad (17.8.6)$$

კორელაციური ფუნქციის გამოთვლას (17.8.6) ფორმულით აწარმოებენ $m=0, 1, 2\ldots$ მიმდევრობით m-ის ისეთ მნიშვნელობამდე, რომლის დროსაც კორელაციური ფუნქცია გახდება პრაქტიკულად ნულის ტოლი. $k_x(\tau)$ ფუნქციის საერთო სვლა შესაძლებელია გამოვსახოთ ცალკეულ წერტილების მიხედვით (ნახ. 17.8.2).



ნახ. 17.8.2.

იმისათვის, რომ მათემატიკური ლოდინი m_x და კორელაციური ფუნქცია $k_x(\tau)$ განსაზღვრულ იქნან დამაკმაყოფილებელი სიზუსტით, საჭიროა, რომ წერტილთა n რიცხვი იყოს საკმაოდ დიდი (მაგალითად ასი და ზოგჯერ რამდენიმე ასეულიც კი). ელემენტარული Δt უბნის სიგრძის შერჩევა განისაზღვრება შემთხვევითი ფუნქციის ცვალებადობის ხასიათით. თუკი შემთხვევითი ფუნქცია იცვლება შედარებით მდოვრედ, უბანი Δt შეიძლება ავირჩიოთ დიდი, ვიდრე მაშინ, როცა იგი ახდენს

მკვეთრ და ხშირ რხევებს. რამდენად მეტი მაღალი სიხშირიანი შემადგენლობა აქვს რხევებს, რომლებიც ქმნიან შემთხვევით ფუნქციას, იმდენად ხშირად უნდა გვქონდეს საყრდენი წერტილები დამუშავებისას. საორიენტაციოდ შეიძლება რეკომენდებულ იქნას შევარჩიოთ ელემენტარული Δt უბანი ისე, რომ შემთხვევითი ფუნქციის შემადგენლობაში ყველაზე მაღალი სიხშირიანი ჰარმონიკის სრულ პერიოდზე მოდიოდეს 5—10 საყრდენი წერტილი.

ხშირად საყრდენი წერტილების შერჩევა საერთოდ დამოკიდებული არ არის დამმუშავებლისაგან, არამედ იკარნახება ჩამწერი აპარატურის მუშაობის ტემპით. ამ შემთხვევაში საჭიროა ვაწარმოოთ დამუშავება უშუალოდ ცდიდან მიღებული მასალებისა ისე, რომ არ შევეცადოთ ჩავსვათ დაკვირვების შედეგად მიღებულ მნიშვნელობებს შორის საშუალედო, იმდენად, რამდენადაც მას არ შეუძლია აამაღლოს შედეგის სიზუსტე, არამედ ზედმეტად გაართულებს დამუშავებას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. თვითმფრინავის ჰორიზონტალური ფრენის პირობებში ხდება თვითმფრინავზე მოქმედი გადატვირთვის ჩაწერა. გადატვირთვის რეგისტრაცია ხდებოდა დროის 200 წამიან უბანზე 2 წმ ინტერვალით. შედეგი მოყვანილია ცხრილში 17.8.1

ც ხ რ ი ლ ი 17.8.1.

t (წმ)	გადატვირთვა $N(t)$	t (წმ)	გადატვირთვა $N(t)$	t (წმ)	გადატვირთვა $N(t)$	t (წმ)	გადატვირთვა $N(t)$
0	1,0	50	1.0	100	1,2	150	0,8
2	1,3	52	1,1	102	1,4	152	0,6
4	1,1	54	1,5	104	0,8	154	0,9
6	0,7	56	1,0	106	0,9	156	1,2
8	0,7	58	0,8	108	0.1	158	1,3
10	1,1	60	1,1	110	0,8	160	0,9
12	1.3	62	1.1	112	0,8	162	1,3
14	0,8	64	1,2	114	1,4	164	1,5
16	0,8	66	1,0	116	1,6	166	1,2
18	0,4	68	0.8	118	1,7	168	1,4
20	0,3	70	0,8	120	1,3	170	1,4
22	0,3	72	1,2	122	1,6	172	0,8
24	0,6	74	0,7	124	0,8	174	0,8
26	0,3	76	0,7	126	1,2	176	1,3
28	0,5	78	1.1	128	0,6	178	1,0
30	0,5	80	1,5	130	1,0	180	0,7
32	0,7	82	1,0	132	0,6	182	1,1
34	0,8	84	0,6	134	0,8	184	0,9
36	0,6	86	0,9	136	0,7	186	0,9
38	1,0	88	0.8	138	0,9	188	1,1
40	0,5	90	0,8	140	1,3	190	1,2
42	1,0	92	0,9	142	1,5	192	1,3
44	0,9	94	0,9	144	1,1	194	1,3
46	1,4	96	0,6	146	0,7	196	1,6
48	1,4	98	0,4	148	1,0	198	1,5

გადატვირთვის ცვალებადობის პროცესის სტაციონარულად ჩათვლით, მიახლოებით განვსაზღვროთ გადატვირთვის მათემატიკური ლოდინი m_N ან დისპერსია D_N და ნორმირებული კორელაციური ფუნქცია $\rho_N(\tau)$. მოვახდინოთ $\rho_N(\tau)$-ს აპროქსიმაცია რომელიმე ანალიზური ფუნქციით, მოვძებნოთ და ავაგოთ შემთხვევითი პროცესის სპექტრული სიმკვრივე. ა მ ო ხ ს ნ ა. ფორმულით (17.8.5) გვაქვს

$$m_N = \frac{\sum_{i=1}^{100} N(t_i)}{100} \approx 0{,}98.$$

ვახდენთ ცენტრირებას შემთხვევითი ფუნქციისა (ცხრ. 17.8.2)

ც ხ რ ი ლ ი 17.8.2.

t (წმ)	$\mathring{N}(t)$	t (წმ)	$\mathring{N}(t)$	t (წმ)	$\mathring{N}(t)$	t (წმ)	$\mathring{N}(t)$
0	0,02	50	0,02	100	0,22	150	—0,18
2	0,32	52	0,12	102	0,42	152	—0,38
4	0,12	54	0,52	104	—0,18	154	—0,08
6	—0,28	56	0,02	106	—0,08	156	0,22
8	—0,28	58	—0,18	108	0,02	158	0,32
10	0,12	60	0,12	110	—0,18	160	—0,08
12	0,32	62	0,12	112	—0,18	162	0,32
14	—0,18	64	0,22	114	0,42	164	0,52
16	—0,18	66	0,02	116	0,62	166	0,22
18	—0,58	68	—0,18	118	0,72	168	0,42
20	—0,68	70	—0,18	120	0,32	170	0,42
22	—0,68	72	0,22	122	0,62	172	—0,18
24	—0,38	74	—0,28	124	—0,18	174	—0,18
26	—0,68	76	—0,28	126	0,22	176	0,32
28	—0,48	78	0,12	128	—0,38	178	0,02
30	—0,48	80	0,52	130	+0,02	180	—0,28
32	—0,28	82	0,02	132	—0,38	182	0,12
34	—0,18	84	—0,38	134	—0,18	184	—0,08
36	—0,38	86	—0,08	136	—0,28	186	—0,08
38	+0,02	88	—0,18	138	—0,08	188	0,12
40	—0,48	90	—0,18	140	0,32	190	0,22
42	0,02	92	—0,08	142	0,52	192	0,32
44	—0,08	94	—0,08	144	0,12	194	0,32
46	0,42	96	—0,38	146	—0,28	196	0,62
48	0,42	98	—0,58	148	+0,02	198	0,52

ყველა მნიშვნელობათა კვადრატში აყვანით და ჯამის $n=100$-ზე გაყოფით მიახლოებით მივიღებთ შემთხვევითი $N(t)$ ფუნქციის დისპერსიას:

$$D_N = \frac{\sum_{i=1}^{100} [\mathring{N}(t_i)]^2}{100} \approx 0{,}1045$$

და საშუალო კვადრატულ გადახრას:

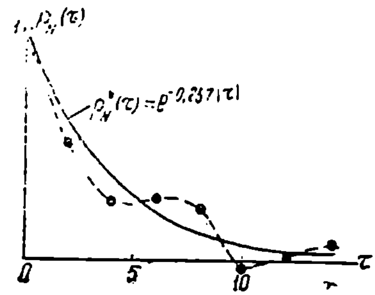
$$\sigma_N \approx 0,323.$$

$\overset{\circ}{N}(t)$ მნიშვნელობათა გადამრავლებით, რომლებიც დაყოფილნი არიან $\tau=2,4,6...$ ინტერვალებით და ნამრავლთა ჯამის გაყოფით შესაბამისად $n-1=99$; $n-2=98$, $n-3=97$,... მივიღებთ კორელაციური $k_N(\tau)$ ფუნქციის მნიშვნელობას.

კორელაციური ფუნქციის ნორმირებით $D_N=0,1045$-ზე გაყოფით, მივიღებთ $\rho_N(\tau)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილს (ცხრ. 17.8.3).

τ	$\rho_N(\tau)$	$\rho_N^*(\tau)=e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}$
0	1,000	1,000
2	0,505	0,598
4	0,276	0,358
6	0,277	0,214
8	0,231	0,128
10	−0,015	0,077
12	0,014	0,046
14	0,071	0,027

$\rho_N(\tau)$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოდგენილია 17.8.3 ნახაზზე პუნქტირით შეერთებული წერტილების სახით. კორელაციური ფუნქციის არა სრულად გლუვი სვლა შეიძლება ახსნილ იქნას ექსპერიმენტულ მონაცემთა მოცულობის არასაკმარისობით (ცდის არასაკმაო ხანგრძლივობით), რასთან დაკავშირებითაც შემთხვევითი უსწორობანი ფუნქციის სვლაში ვერ ასწორებენ გაგლუვებას. გამოთვლა გაგრძელებულია ისეთ მნიშვნელობებამდე, რომელთა დროსაც ფაქტიურად კორელაციური კავშირი იკარგება.



ნახ. 17.8.3.

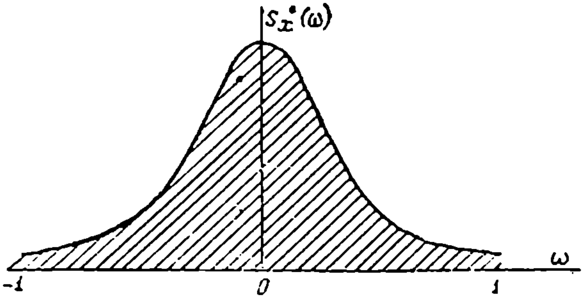
იმისათვის, რომ გავაგლუვოთ ექსპერიმენტულად ნაპოვნი $\rho_N(\tau)$ ფუნქციის ცხადად არაკანონზომიერი რხევები, შევცვალოთ იგი მიახლოებით შემდეგი სახის ფუნქციით:

$$\rho_N^*(\tau)=e^{-\alpha|\tau|},$$

სადაც α პარამეტრს მოვნახავთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდით (იხ. პ. 14.5.).

ამ მეთოდის გამოყენებით ვპოულობთ $\alpha=0,257$. $\rho_N^*(\tau)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოთვლით, როცა $\tau=0,2,4$, ავაგებთ გრაფიკს გა-

მაგლუვებელი მრუდისას. 17.8.3 ნახაზზე იგი გავლებულია მთლიანი ხაზით. ცხრილში 17.8.3 უკანასკნელ სვეტში მოყვანილია $\rho_x^*(\tau)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი.



ნახ. 17.8.4.

ვსარგებლობთ რა კორელაციური (17.8.6) ფუნქციის მიახლოებითი გამოსახულებით, მივიღებთ (იხ. პ. 17.4. მაგალითი 1) შემთხვევითი პროცესის ნორმირებულ სპექტრულ სიმკვრივეს შემდეგი სახით:

$$S_x^*(\omega)=\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}=\frac{0{,}257}{\pi(0{,}257^2+\omega^2)}.$$

ნორმირებული სპექტრული სიმკვრივის გრაფიკი წარმოდგენილია 17.8.4 ნახაზზე.

XVIII თავი

ინფორმაციის თეორიის ძირითადი ცნებები

18.1. ინფორმაციის თეორიის საგანი და ამოცანები

ინფორმაციის თეორია ეწოდება მეცნიერებას, რომელიც სწავლობს ინფორმაციის გადაცემასთან, დამუშავებასა და შენახვასთან დაკავშირებულ რაოდენობრივ კანონზომიერებებს. წარმოიშვა რა ჩვენი საუკუნის 40-იან წლებში, ინფორმაციის თეორია ამჟამად იქცა მართვის ყველანაირ შესაძლო პროცესების შესწავლის აუცილებელ მათემატიკურ აპარატად.

შემთხვევითობის ნიშნები, რომელიც თან ახლავს ინფორმაციათა გადაცემის პროცესებს, გვაიძულებენ მივმართოთ ამ პროცესების შესწავლისას ალბათობით მეთოდებს. ამასთან ვერ ხერხდება შემოვიფარგლოთ ალბათობათა თეორიის კლასიკური მეთოდებით და წარმოიშობა ახალი ალბათობითი კატეგორიების შექმნის აუცილებლობა. ამის გამო, ინფორმაციის თეორია წარმოადგენს არა უბრალოდ გამოყენებით მეცნიერებას, რომელშიც გამოიყენება კვლევის ალბათობითი მეთოდები, არამედ უნდა განხილულ იქნას, როგორც ალბათობათა თეორიის განყოფილება.

სხვადასხვა სახის ინფორმაციის მიღება, დამუშავება, გადაცემა და შენახვა — აუცილებელი პირობაა ნებისმიერი მმართველი სისტემის მუშაობისა. ამ პროცესში ყოველთვის ხდება ინფორმაციათა გაცვლა სისტემის სხვადასხვა რგოლებს შორის. უმარტივესი შემთხვევა — ინფორმაციის გადაცემა მმართველი მოწყობილობიდან შემსრულებელ ორგანოზე (ბრძანების გადაცემა). უფრო რთული შემთხვევა — მართვის შეკრული კონტური, რომელშიც ინფორმაცია ბრძანების შესრულების შესახებ გადაეცემა მმართველ მოწყობილობას ე. წ. „უკუკავშირის" მეშვეობით. ნებისმიერი ინფორმაცია, რომ გადაცემულ იქნას აუცილებელია ჯერ მათი „კოდირება" ე. ი. მისი გადატანა სპეციალურ სიმბოლოებისა და სიგნალების ენაზე.

ინფორმაციის გადამცემ სიგნალებად შესაძლებელია იყვნენ ელექტრული იმპულსები, სინათლის ან ბგერითი რხევები, მექანიკური გადაადგილებანი და ა. შ.

ინფორმაციის თეორიის ერთ-ერთ ამოცანას წარმოადგენს გამონახვა კოდირების ეკონომიური მეთოდებისა, რომლებიც საშუალებას იძლევიან გადაცემულ იქნას მოცემული ინფორმაცია სიმბოლოთა მინიმალური რაოდენობის საშუალებით. ეს ამოცანა წყდება როგორც კავშირის არხში დამახინჯებათა არ არსებობის შემთხვევაში, ისე მათი არსებობის პირობებში.

ინფორმაციის თეორიის მეორე ტიპური ამოცანა ისმება შემდეგნაირად: გვაქვს ინფორმაციის წყარო (გადამცემი), რომელიც უწყვეტად გამოიმუშავებს ინფორმაციას და კავშირის არხი, რომლითაც ეს ინფორმაცია გადაეცემა მეორე ინსტანციას (მიმღებს). როგორი უნდა იყოს კავშირის არხის გამტარუნარიანობა იმისათვის, რომ არხი „სძლევდეს“ თავის ამოცანას, ე. ი. გადასცემდეს ყველა შემოსულ ინფორმაციას შეუფერხებლად და დაუმახინჯებლად.

ინფორმაციის თეორიის მთელი რიგი ამოცანებისა მიეკუთვნება დამმახსოვრებელი მოწყობილობათა მოცულობის განსაზღვრას, რომლებიც განკუთვნილია ინფორმაციათა შენახვისათვის, ამ დამმახსოვრებელ მოწყობილობებში ინფორმაციის შეყვანის და მისი უშუალო გამოყენების მიზნით მისი გამოყვანის ხერხებს.

რომ გადავწყვიტოთ ასეთი ამოცანები, უწინარეს ყოვლისა უნდა ვისწავლოთ რაოდენობრივად გავზომოთ გადასაცემი ანდა შესანახი ინფორმაციის მოცულობა, კავშირის არხის გამტარუნარიანობა და მათი მგრძნობელობა დაბრკოლებათა მიმართ. ძირითადი ცნებები ინფორმაციის თეორიისა, რომელიც გადმოიცემა მოცემულ თავში, საშუალებას იძლევა ინფორმაციის გადაცემის პროცესების რაოდენობრივი აღწერისა და ზოგიერთი მათემატიკური კანონზომიერებათა მონიშვნისა, რომლებიც მიეკუთვნებიან ამ პროცესებს.

18.2. ენტროპია როგორც ფიზიკური სისტემის მდგომარეობის განუსაზღვრელობის ხარისხის ზომა

ყოველი შეტყობინება, რომელთანაც ჩვენ გვაქვს საქმე ინფორმაციის თეორიაში, წარმოადგენს რომელიღაც ფიზიკურ სისტემაზე ცნობათა ერთობლიობას. მაგალითად, მწარმოებელი საამქროს მართვის ავტომატიზებული სისტემის შესასვლელში შეიძლება გადაცემულ იქნას შეტყობინება წუნის ნორმალურ ან გადიდებულ პროცენტზე, ღუმელში ნედლეულის ქიმიურ შემადგენლობაზე ან ტემპერატურაზე. მართვის სისტემის შესასვლელში საჰაერო თავდაცვის საშუალებებით შეიძლება გადაცემულ იქნას შეტყობინება იმაზე, რომ ჰაერში არის ორი მიზანი, რომლებიც მიფრინავენ გარკვეულ სიმაღლეზე გარკვეული სიჩქარით, მაგრამ იმავე შესასვლელით შეიძლება გადაცემულ იქნას შეტყობინება

იმის შესახებ, რომ გარკვეულ აეროდრომზე მოცემულ მომენტში იმყოფება გამანადგურებელთა რაღაც რაოდენობა საბრძოლო მდგომარეობაში, ან აეროდრომი გამოყვანილია წყობიდან მოწინააღმდეგის საცეცხლე მოქმედებით, ან პირველი მიზანი ჩამოგდებულია, ხოლო მეორე განაგრძობს ფრენას შეცვლილი კურსით. ამ ცნობებიდან ნებისმიერი — აღწერს რომელიღაც ფიზიკური სისტემის მდგომარეობას.

ცხადია, თუ ფიზიკური სისტემის მდგომარეობა ცნობილი იქნებოდა წინასწარ, არ ექნებოდა აზრი ცნობის გადაცემას. ცნობა ღებულობს აზრს მხოლოდ მაშინ, როდესაც სისტემის მდგომარეობა წინასწარ უცნობია, შემთხვევითია.

ამიტომ ობიექტად, რომელზედაც გადაიცემა ინფორმაცია, ჩვენ განვიხილავთ რომელიღაც ფიზიკურ X სისტემას, რომელიც შემთხვევით შეიძლება აღმოჩნდეს ამა თუ იმ მდგომარეობაში, ე. ი. სისტემას, რომელსაც აუცილებლად ახასიათებს განუსაზღვრელობის რომელიღაც ხარისხი. ცხადია ცნობები სისტემაზე იქნება ზოგადად რომ ვთქვათ უფრო მეტი ფასის და შინაარსიანი, რაც მეტი იქნება სისტემის განუსაზღვრელობა ამ ცნობათა მიღებამდე („აპრიორი“). ისმის ბუნებრივი კითხვა: რას ნიშნავს განუზღვრელობის „მეტი“ ან „ნაკლები“ ხარისხი და რით შეიძლება იგი გაიზომოს?

რომ ვუპასუხოთ ამ კითხვაზე, შევადაროთ ერთმანეთს ორი სისტემა, რომელთაგან თითოეულ მათგანს აქვს რომელიღაც განუსაზღვრელობა.

პირველ სისტემად ავიღოთ მონეტა, რომელიც ასროლის შედეგად შეიძლება აღმოჩნდეს ორიდან ერთ-ერთ მდგომარეობაში: 1) მოვიდა ღერბი და 2). მოვიდა ციფრი. მეორედ — კამათელი, რომელსაც ექვსი შესაძლო მდგომარეობა აქვს: 1,2,3,4,5 და 6. ისმის კითხვა განუსაზღვრელობა რომელი სისტემისაა უფრო მეტი? ცხადია მეორის, რადგან მასში მეტია შესაძლო მდგომარეობანი, რომელთაგან თითოეულში ის შეიძლება აღმოჩნდეს ერთნაირი ალბათობით.

შეიძლება გვეჩვენოს, რომ განუსაზღვრებლობის ხასიათი განისაზღვრება სისტემის შესაძლო მდგომარეობათა რიცხვით, მაგრამ საერთოდ ეს ასე არ არის. განვიხილოთ მაგალითად ტექნიკური მოწყობილობა, რომელიც შეიძლება იყოს ორ მდგომარეობაში: 1) გამართული და 2). დაზიანებული. ვივარაუდოთ, რომ ცნობების მიღებამდე (აპრიორი) მოწყობილობის გამართული (დაზიანებული) მუშაობის ალბათობა 0,99-ია, ხოლო დაზიანების ალბათობაა 0,01. ასეთ სისტემას გააჩნია განუსაზღვრელობის მხოლოდ მცირე ხარისხი: თითქმის შეუცდომლად შეიძლება ვიწინასწარმეტყველოთ, რომ მოწყობილობა წესიერად იმუშავებს. მონეტის ასროლის დროსაც აგრეთვე გვაქვს ორი შესაძლო მდგომარეობა, მაგრამ განუსაზღვრელობის ხარისხი გაცილებით მეტია. ჩვენ ვხედავთ, რომ ფიზიკურის სისტემის განუსაზღვრელობის ხარისხი განისაზღვრება,

არა მარტო მისი *შესაძლო მდგომარეობათა რიცხვით*, *არამედ მდგომარეობის ალბათობითაც*.

გადავიდეთ ზოგად შემთხვევაზე. განვიხილოთ რომელიღაც სისტემა X, რომელსაც შეუძლია მიიღოს მდგომარეობათა სიმრავლე: x_1, $x_2, \ldots$, x_n, ალბათობებით: p_1, $p_2, \ldots, p_n$ სადაც

$$p_i = P(X \sim x_i) \qquad (18.2.1)$$

არის ალბათობა იმისა, რომ X სისტემა მიიღებს x_i მდგომარეობას (სიმბოლოთი $X \sim x_i$ აღინიშნება ხდომილობა: სისტემა იმყოფება x_i მდგომარეობაში).

ცხადია $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

ჩავწეროთ ეს მონაცემები ცხრილის სახით, სადაც ზემო სტრიქონში ჩამოთვლილია სისტემის შესაძლო მდგომარეობანი, ხოლო ქვედაში — შესაბამისი ალბათობანი:

x_i	x_1	x_2		x_n
p_i	p_1	p_2		p_n

ეს ცხრილი ჩაწერის მიხედვით მსგავსია წყვეტილი შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების მწკრივისა შესაძლო x_1, $x_2, \ldots, x_n$ მნიშვნელობებით, რომელთაც აქვთ p_1, $p_2, \ldots, p_n$ ალბათობები. და მართლაც, მდგომარეობათა სასრულო სიმრავლის მქონე ფიზიკურ X სისტემას და წყვეტილ შემთხვევით სიდიდეს შორის მრავალია საერთო; იმისათვის, რომ დავიყვანოთ პირველი მეორეზე, საკმარისია მივაწეროთ თითოეულ მდგომარეობას რომელიღაც რიცხვითი მნიშვნელობა (ვთქვათ მდგომარეობის ნომერი). ავღნიშნავთ, რომ სისტემის განუზღვრელობის ხარისხის აღსაწერად სრულებითაც არ არის მნიშვნელოვანი, სახელდობრ, თუ *რომელი მნიშვნელობანი* x_1, $x_2, \ldots$, x_n — არის ჩაწერილი ცხრილის ზედა სტრიქონში: მნიშვნელოვანია მხოლოდ რაოდენობა ამ მნიშვნელობებისა და მათი ალბათობები.

სისტემის (ან წყვეტილი შემთხვევითი X სიდიდის) აპრიორული განუზღვრელობის ზომად ინფორმაციის თეორიაში გამოიყენება სპეციალური მახასიათებელი, რომელსაც ეწოდება *ენტროპია*. ინფორმაციის თეორიაში ენტროპიის ცნება ძირითადია.

სისტემის ენტროპია ეწოდება სისტემის სხვადასხვა მდგომარეობათა

ალბათობების მათ ლოგარითმზე ნამრავლების ჯამს შებრუნებული ნიშნით.

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i\,[1]. \qquad (18.2.2)$$

ენტროპიას $H(X)$, როგორც ჩვენ შემდგომში დავინახავთ, გააჩნია მთელი რიგი თვისებებისა, რომლებიც ამართლებენ მის არჩევას განუზღვრელობის ხარისხის მახასიათებლად. ჯერ ერთი, ის იქცევა ნულად, როცა სისტემის ერთ-ერთი მდგომარეობათაგანი უტყუარია (უეჭველია) ხოლო სხვა — შეუძლებელი, მეორე — მდგომარეობათა მოცემული რიცხვისას იგი იქცევა მაქსიმუმად, როცა ეს მდგომარეობანი თანაბრად საალბათოა, ხოლო მდგომარეობათა რიცხვის გაზრდისას — იზრდება და ბოლოს, რაც ყველაზე მთავარია — მას გააჩნია *ადიტიურობის* თვისება, ე. ი. როცა რამდენიმე დამოუკიდებელი სისტემა გაერთიანდება ერთში, მათი ენტროპიები იკრიბებიან.

ლოგარითმი (18.2.2) ფორმულაში შეიძლება აღებული იყოს ნებისმიერ $a>1$ ფუძით. ფუძის შეცვლა ტოლფასია ენტროპიის უბრალოდ მუდმივ რიცხვზე გადამრავლებისა, ხოლო ფუძის შერჩევა ტოლფასია ენტროპიის გარკვეული *საზომი ერთეულის* არჩევის. თუ ფუძედ მიღებულია 10, მაშინ ამბობენ ენტროპია „ათობით ერთეულებზე“, თუკი 2 — „ორობით ერთეულებზე“. პრაქტიკაში მოხერხებულია ლოგარითმებით სარგებლობა 2-ის ფუძით და ენტროპიის გაზომვა ორობით ერთეულებში, ეს კარგად უთანხმდება ელექტრონულ-ციფრულ გამომთვლელ მანქანებში გამოყენებულ თვლის ორობით სისტემას.

შემდგომში ყველგან, თუ არ იქნება შენიშნული საწინააღმდეგო, სიმბოლო log ქვეშ ვიგულისხმებთ ორობით ლოგარითმს.

დანართში (ცხრ. 6) მოცემულია მთელი რიცხვების ორობითი ლოგარითმები 1-დან 10-მდე[2].

ადვილია დავრწმუნდეთ, რომ ლოგარითმების ფუძედ 2-ის არჩევისას, ენტროპიის საზომ ერთეულად მიიღება მარტივი X სისტემის ენტროპია რომელსაც აქვს ორი თანაბრად შესაძლო მდგომარეობა:

x_i	x_1	x_2
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

[1] ნიშანი მინუსი ჯამის წინ დასმულია იმისათვის, რომ ენტროპია იყოს დადებითი (p_i რიცხვები ნაკლებია ერთზე და მისი ლოგარითმები უარყოფითია).

[2] წილადების ლოგარითმი მოიძებნება გამოკლებით, მაგალითად:

$$\log\ 0{,}13 = \log\ 13 - \log\ 100.$$

რიცხვთა ლოგარითმების სამი ნიშნადი ციფრით საპოვნელად შეიძლება ვისარგებლოთ წრფივი ინტერპოლაციით.

მართლაც (18.2.2) ფორმულით გვაქვს

$$H(X)=-\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right)=1.$$

ენტროპიის ასეთნაირად განსაზღვრულ ერთეულს ეწოდება „ორობითი ერთეული“ და ზოგჯერ აღინიშნება *bit* (ინგლისურიდან —„binary digit“ — ორობითი ნიშანი). ეს ენტროპია ერთი თანრიგისაა ორობითი რიცხვისა, თუკი მას ერთნაირი ალბათობით შეუძლია იყოს ნული ან ერთი.

გავზომოთ X სისტემის ენტროპია ორობითი ერთეულით, რომელსაც აქვს n თანაბრად ალბათური მდგომარეობანი:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$

$$H(X)=-n\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}=-\log 1+\log n$$

გვაქვს

$$H(X)=\log n, \qquad (18.2.3)$$

ე. ი. თანაბრად შესაძლო მდგომარეობებიან სისტემის ენტროპია ტოლია მდგომარეობათა რიცხვის ლოგარითმისა.

მაგალითად, რვამდგომარეობიანი სისტემისათვის $H(X)=\log 8=3$.

დავამტკიცოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა სისტემის მდგომარეობა წინასწარ ზუსტად ცნობილია, მისი ენტროპია ნულის ტოლია. მართლაც ამ შემთხვევაში ყველა ალბათობანი $p_1, p_2, \dots, p_n$ ფორმულაში (18.2.2) გადაიქცევა ნულად, გარდა ერთისა მაგალითად p_k, რომელიც ტოლია ერთისა. წევრი $p_k \log p_k$ იქცევა ნულად, რადგანაც $\log 1=0$. დანარჩენი წევრებიც ხდებიან ნული, რადგან

$$\lim_{p\to 0} p\log p=0.$$

დავამტკიცოთ, რომ მდგომარეობათა სასრული სიმრავლის მქონე სისტემის ენტროპია აღწევს მაქსიმუმს, როცა ყველა მდგომარეობანი თანაბრად ალბათურია. ამისათვის განვიხილავთ (18.2.2) სისტემის ენტროპიას, როგორც $p_1, p_2, \dots p_n$ ალბათობათა ფუნქციას და მოვნახავთ ამ ფუნქციის პირობით ექსტრემუმს შემდეგი პირობით:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i=1 \qquad (18.2.4)$$

ლაგრანჟის განუზღვრელ თანამამრავლთა მეთოდის გამოყენებით ვეძებოთ ფუნქციის ექსტრემუმი:

$$F=-\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i+\lambda\sum_{i=1}^{n} p_i. \qquad (18.2.5)$$

(18.2.5)-ის $p_1,\ldots, p_n$-ით გაწარმოებით და წარმოებულის ნულთან გატოლებით მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\log p_i+\log e+\lambda=0 \qquad (i=1,\ldots, n)$$

ან

$$\log p_i=-\lambda-\log e \quad (i=1,\ldots,n), \qquad (18.2.6)$$

საიდანაც სჩანს, რომ ექსტრემუმი (მოცემულ შემთხვევაში მაქსიმუმი) მიიღწევა, როცა ურთიერთშორის ტოლია p_i მნიშვნელობები. (18.2.4) პირობიდან ჩანს, რომ ამ დროს

$$p_1=p_2=\cdots=p_n=\frac{1}{n}, \qquad (18.2.7)$$

ხოლო სისტემის მაქსიმალური ენტროპია ტოლია

$$H_{max}(X)=\log n, \qquad (18.2.8)$$

ე. ი. მდგომარეობათა სასრულო რიცხვიანი სისტემის ენტროპია ტოლია მდგომარეობათა რიცხვის ლოგარითმისა და მიიღწევა მაშინ, როცა ყველა მდგომარეობანი თანაბრად საალბათოა.

ენტროპიის გამოთვლა (18.2.2) ფორმულით შეიძლება რამდენადმე გავამარტივოთ, თუ განვიხილავთ სპეციალურ ფუნქციას

$$\eta(p)=-p \log p, \qquad (18.2.9)$$

სადაც ლოგარითმი აიღება 2-ის ფუძით.
ფორმულა (18.2.2) ღებულობს სახეს:

$$H(X)=\sum_{i=1}^{n}\eta(p_i) \qquad (18.2.10)$$

ფუნქცია $\eta(p)$ ცხრილშია მოცემული; დანართში (ცხრ. 7) მოყვანილია მისი მნიშვნელობანი p-სათვის 0-დან 1-მდე ყოველ 0,01-ს შემდეგ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. განვსაზღვროთ საჰაერო ბრძოლაში მონაწილე ორი თვითმფრინავისაგან (გამანადგურებელისაგან და ბომბდამშენისაგან) შემდგარი სისტემის ენტროპია. ბრძოლის შედეგად სისტემა შეიძლება აღმოჩნდეს ოთხი შესაძლო მდგომარეობიდან ერთ-ერთში:

1). არც ერთი თვითმფრინავი არ არის ჩამოგდებული.

2). გამანადგურებელი ჩამოგდებულია, ბომბდამშენი არ არის ჩამოგდებული;

3). გამანადგურებელი არ არის ჩამოგდებული, ბომბდამშენი ჩამოგდებულია;
4). ორივე თვითმფრინავი ჩამოგდებულია.
ამ მდგომარეობათა ალბათობა შესაბამისად ტოლია 0,2,0,3; 0,4 და 0,1.

ა მ ო ხ ს ნ ა. პირობები ჩავწეროთ ცხრილის სახით:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

ფორმულით (18.2.10) გვაქვს

$$H(X)=\eta(0,2)+\eta(0,3)+\eta(0,4)+\eta(0,1).$$

ვსარგებლობთ რა დანართის მე-7 ცხრილით, ვპოულობთ:

$$H(X)=0,4644+0,5211+0,5288+0,3322\approx 1,85$$ (ორობითი ერთეული)

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. განვსაზღვროთ ენტროპია სისტემისა, რომლის მდგომარეობა აღიწერება წყვეტილი შემთხვევითი X სიდიდით და განაწილების მწკრივით:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
p_i	0,01	0,01	0,01	0,01	0,96

ა მ ო ხ ს ნ ა.

$$H(X)=4\eta(0,01)+\eta(0,96)\approx 0,322$$ (ორობითი ერთ.)

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. განვსაზღვროთ სამი ელემენტისაგან შემდგარი სისტემის მაქსიმალურად შესაძლო ენტროპია, რომელთაგან თითოეულ მათგანს შეიძლება ჰქონდეს ოთხი შესაძლო მდგომარეობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შესაძლო მდგომარეობათა საერთო რიცხვი სისტემისა ტოლია

$$n=4\cdot 4\cdot 4=64.$$

სისტემის მაქსიმალურად შესაძლო ენტროპია ტოლია $\log 64=6$ (ორობითი ერთეული).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. განვსაზღვროთ ხუთი ასოსაგან შემდგარი შეტყობინების მაქსიმალურად შესაძლო ენტროპია, თანაც ასოთა რიცხვი რუსულ ალფავიტში შეადგენს 32-ს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. სისტემის შესაძლო მდგომარეობათა რიცხვი $n=32^5$.

მაქსიმალურად შესაძლო ენტროპია ტოლია $5\log 32=25$ (ორ. ერთ.)

ფორმულა (18.2.2) ან მისი ტოლფასი (18.2.10) იხმარება ენტროპიის უშუალო გამოსათვლელად. ოღონდ გარდაქმნათა შესრულებისას ხშირად უფრო მოხერხებული აღმოჩნდება ენტროპიის ჩაწერის სხვა ფორმა, სახელდობრ კი მისი წარმოდგენა მათემატიკური ლოდინის სახით

$$H(X)=M[-\log P(X)], \qquad (18.2.11)$$

სადაც $\log P(X)$ — სისტემის ნებისმიერი (შემთხვევითი) მდგომარეობის ლოგარითმია, რომელიც განიხილება, როგორც შემთხვევითი სიდიდე.

როდესაც X სისტემა მიიღებს $x_1,\dots x_n$ მდგომარეობებს, შემთხვევითი სიდიდე $\log P(X)$ მიიღებს მნიშვნელობებს:

$$\log p_1, \quad \log p_2 \dots \log p_n \qquad (18.2.12)$$

შემთხვევითი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა (მათემატიკური ლოდინი) — $\log P(X)$ სწორედ ეს არის, — რაშიც არ არის ძნელი დავრწმუნდეთ — სისტემის ენტროპია. მის მისაღებად (18.2.12) მნიშვნელობანი საშუალდებიან „წონებით", რომლებიც შესაბამის $p_1, p_2,\dots,p_n$ ალბათობათა ტოლნი არიან.

(18.2.11)-ის მსგავსი ფორმულები, სადაც ენტროპია წარმოიდგინება მათემატიკური ლოდინის სახით, საშუალებას იძლევიან, ენტროპიასთან დაკავშირებული გარდაქმნები გამარტივებულ იქნან, მათ მათემატიკურ ლოდინზე ცნობილი თეორემების გამოყენებაზე მიყვანით.

18.3. რთული სისტემის ენტროპია. ენტროპიათა შეკრების თეორემა

პრაქტიკაში ხშირად გვიხდება განვსაზღვროთ ენტროპია რთული სისტემისათვის, რომელიც მიღებულია ორი ან უფრო მეტი მარტივ სისტემათა გაერთიანებით.

ორი X და Y სისტემის $x_1, x_2,\dots,x_n$, $y_1\dots y_m$ შესაძლო მდგომარეობებით, გაერთიანების ქვეშ ვგულისხმობთ რთულ (X, Y) სისტემას, რომელთა (x_i, y_j) მდგომარეობანი წარმოადგენენ X და Y სისტემების x_i, y_j მდგომარეობათა ყველა შესაძლო კომბინაციას.

ცხადია (X, Y) სისტემის შესაძლო მდგომარეობათა რიცხვი ტოლია $n\times m$. აღვნიშნოთ P_{ij} ალბათობა იმისა, რომ სისტემა (X, Y) იქნება (x_i, y_j) მდგომარეობაში:

$$P_{ij}=P[(X\sim x_i)\ (Y\sim y_j)] \qquad (18.3.1)$$

ალბათობანი P_{ij} მოხერხებულია განვალაგოთ ცხრილის (მატრიცის) სახით:

$y_j \backslash x_i$	x_1	x_2		x_n
y_1	P_{11}	P_{21}		P_{n1}
y_2	P_{12}	P_{22}		P_{n2}
$\vdots$	.	.		.
y_m	P_{1m}	P_{2m}		P_{nm}

მოვნახოთ რთული სისტემის ენტროპია. განსაზღვრის მიხედვით იგი ტოლია ყველა შესაძლო მდგომარეობათა ალბათობების მათ ლოგარითმებზე ნამრავლების ჯამისა შებრუნებული ნიშნით:

$$H(X, Y)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P_{ij}\log P_{ij} \qquad (18.3.2)$$

ან სხვა აღნიშვნებით:

$$H(X, Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\eta(P_{ij}). \qquad (18.3.2')$$

რთული სისტემის ენტროპია; ისე როგორც მარტივის ენტროპია, აგრეთვე შეიძლება ჩაიწეროს მათემატიკური ლოდინის ფორმით:

$$H(X, Y)=M[-\log P(X, Y)], \qquad (18.3.3)$$

სადაც $\log P(X, Y)$ — სისტემის მდგომარეობის ლოგარითმია, რომელიც განიხილება როგორც შემთხვევითი სიდიდე (მდგომარეობის ფუნქცია).

ვივარაუდოთ, რომ X და Y სისტემები დამოუკიდებელია, ე. ი. ღებულობენ თავიანთ მდგომარეობებს ერთიმეორისაგან დამოუკიდებლად და გამოვთვლით ამ და[illegible]ებით რთული სისტემის ენტროპიას დამოუკიდებელ ხდომილობებ[illegible]კის ალბათობათა გამრავლების თეორემის მიხედვით:

$$P(X, Y)=P(X)\ P(Y),$$

საიდანაც

$$\log P(X, Y)=\log P(X)+\log P(Y).$$

(18.3.3)-ში ჩასმით მივიღებთ:

$$H(X, Y)=M[-\log P(X)-\log P(Y)],$$

$$H(X, Y)=H(X)+H(Y), \qquad (18.3.4)$$

ე. ი. დამოუკიდებელ სისტემათა შეერთებისას მათი ენტროპიები იკრიბება.

დამტკიცებულ დებულებას ეწოდება ენტროპიათა შეკრების თეორემა.

ენტროპიათა შეკრების თეორემა შეიძლება ადვილად განზოგადოებულ იქნას დამოუკიდებელ სისტემათა ნებისმიერ რიცხვზე.

$$H(X_1, X_2,\ldots,X_s)=\sum_{k=1}^{s}H(X_k) \qquad (18.3.5)$$

თუ გასაერთიანებელი სისტემები დამოკიდებულია, ენტროპიათა მარტივი შეკრება უკვე არ არის მისაღები. ამ შემთხვევაში რთული სისტემის ენტროპია ნაკლებია, ვიდრე მათი შემადგენელი ნაწილების ენტროპიათა ჯამი. რომ მოვნახოთ დამოკიდებული ელემენტებისაგან შემდგარი სისტემის ენტროპია, უნდა შემოვიტანოთ ახალი ცნება პირობითი ენტროპიისა.

18.4. პირობითი ენტროპია. დამოკიდებულ სისტემათა გაერთიანება

დავუშვათ გვაქვს ორი სისტემა X და Y, რომლებიც ზოგად შემთხვევაში დამოკიდებულნი არიან. ვიგულისხმოთ, რომ X სისტემამ მიიღო x_i მდგომარეობა. აღვნიშნოთ $P(y_j|x_i)$-ით პირობითი ალბათობა, რომ სისტემა Y მიიღებს y_j მდგომარეობას იმ პირობებში, რომ სისტემა X იმყოფება x_i მდგომარეობაში:

$$P(y_j/x_i)=P(Y\sim y_j|X\sim x_i) \qquad (18.4.1).$$

ახლა განვსაზღვროთ Y სისტემის პირობითი ენტროპია იმ პირობებში რომ სისტემა X იმყოფება x_i მდგომარეობაში. აღვნიშნოთ იგი $H(Y/x_i)$. ზოგადი განსაზღვრის მიხედვით გვაქვს:

$$H(Y|x_i)=-\sum_{j=1}^{m} P(y_j|x_i)\log P(y_j|x_i) \qquad (18.4.2)$$

ან

$$H(Y|x_i)=\sum_{j=1}^{m}\eta(P(y_j|x_i)) \qquad (18.4.2')$$

ფორმულა (18.4.2) შეიძლება აგრეთვე დაიწეროს მათემატიკური ლოდინის ფორმით:

$$H(Y|x_i)=Mx_i[-\log P(Y|x_i)] \qquad (18.4.3)$$

სადაც Mx_i ნიშნით აღნიშნულია პირობითი მათემატიკური ლოდინი სიდიდისა, რომელიც ფრჩხილებშია ჩასმული, როცა $X\sim x_i$.

პირობითი ენტროპია დამოკიდებულია იმისაგან, თუ როგორი მდგომარეობა მიიღო X სისტემამ; ერთი მდგომარეობისათვის იგი იქნება მეტი, სხვებისათვის — ნაკლები. განვსაზღვროთ საშუალო ანუ სრული ენტროპია Y სისტემისა იმის გათვალისწინებით, რომ სისტემას შეუძლია მიიღოს სხვადასხვა მდგომარეობანი. ამისათვის საჭიროა ყოველი პირობითი ენტროპია (18. 4..2) გადავამრავლოთ სათანადო მდგომარეო-

ბის p_i ალბათობაზე და ყველა ეს ნამრავლები შევკრიბოთ. აღვნიშნოთ სრული პირობითი ენტროპია $H(Y|X)$-ით:

$$H(Y|X)=\sum_{i=1}^{n} p_i H(Y|x_i) \tag{18.4.4}$$

ან თუ ვისარგებლებთ (18.4.2) ფორმულით

$$H(Y|X)=-\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{m} P(y_j|x_i) \log P(y_j|x_i).$$

P_i-ის მეორე ჯამის ნიშნის ქვეშ შეტანით მივიღებთ:

$$H(Y|X)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i\ P(y_j|x_i) \log P(y_j|x_i) \tag{18.4.5}$$

ან

$$H(Y|X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i \eta\ (P(y_j|x_i)). \tag{18.4.5'}$$

მაგრამ ალბათობათა გამრავლების თეორემით $p_i\ P(y_j|x_i)=P_{ij}$, მაშასადამე

$$H(Y|X)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_{ij} \log P(y_j|x_i). \tag{18.4.6}$$

გამოსახულებას (18.4.6) აგრეთვე შეიძლება მივცეთ მათემატიკური ლოდინის ფორმა:

$$H(Y|X)=M[-\log\ P(Y|X)]. \tag{18.4.7}$$

სიდიდე $H(Y/X)$ ახასიათებს სისტემის განუზღვრელობის ხარისხს რომელიც რჩება მის შემდეგ, რაც X სიმტემის მდგომარეობა მთლიანად იქნა განსაზღვრული. ვუწოდოთ მას Y სისტემის X-ის მიმართ სრული პირობითი ენტროპია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1: გვაქვს ორი სისტემა X და Y, რომლებიც ერთიანდებიან ერთში (X, Y); მდგომარეობათა ალბათობები მოცემულია ცხრილით:

y_j \ x_i	x_1	x_2	x_3	r_j
y_1	0,1	0,2	0	0,3
y_2	0	0,3	0	0,3
y_3	0	0,2	0,2	0,4
p_i	0,1	0,7	0,2	

განვსაზღვროთ სრული პირობითი ენტროპიები $H(Y/X)$ და $H(X/Y)$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. P_{ij} ალბათობათა სვეტების მიხედვით შეკრებით მივიღებთ ალბათობებს $p_i=P(X\sim x_i)$: $p_1=0{,}1$; $p_2=0{,}7$; $p_3=0{,}2$.

ჩავწერთ მას ცხრილის ქვედა დამატებით სვეტში. ანალოგიურად სვეტების მიხედვით შეკრებით ვპოულობთ:

$$r_1=0{,}3; \quad r_2=0{,}3; \; r_3=0{,}4; \; (r_j=P(Y\sim y_i)$$

და დავწერთ მარჯვნივ დამატებით სვეტად. P_{ij}-ს გაყოფით p_i-ზე მივიღებთ ცხრილს პირობითი ალბათობებისათვის $P(y_i/x_i)$:

y_j \ x_i	x_1	x_2	x_3
y_1	1	$\frac{0{,}2}{0{,}7}$	0
y_2	0	$\frac{0{,}3}{0{,}7}$	0
y_3	0	$\frac{0{,}2}{0{,}7}$	1

ფორმულით (18.4.5′) ვპოულობთ $H(Y/X)$. ვინაიდან პირობითი ენტროპიები, როცა $X\sim x_1$ და $X\sim x_3$ ნულის ტოლია, ამიტომ

$$H(Y|X)=0{,}7\left[\eta\left(\frac{0{,}2}{0{,}7}\right)+\eta\left(\frac{0{,}3}{0{,}7}\right)+\eta\left(\frac{0{,}2}{0{,}7}\right)\right].$$

ვსარგებლობთ რა დანართის ცხრილით 7 — ვპოულობთ

$$H(Y/X)\approx 1{,}09 \quad (\text{ორ. ერთ})$$

ანალოგიურად განვსაზღვრავთ $H(X/Y)$. ფორმულიდან (18.4.5′) X და Y-ის ადგილების შეცვლით მივიღებთ:

$$h(X/Y)=\sum_{j=1}^{m} r_j \;\; \eta(P(x_i|y_j)).$$

შევადგინოთ პირობით $P(x_i|y_j)$ ალბათობათა ცხრილი. P_{ij}-ის r_j-ზე გაყოფით მივიღებთ:

$y_j \backslash x_i$	x_1	x_2	x_3
y_1	$\frac{0,1}{0,3}$	$\frac{0,2}{0,3}$	0
y_2	0	1	0
y_3	0	$\frac{0,2}{0,4}$	$\frac{0,2}{0,4}$

საიდანაც

$$H(X|Y)=0,3\left[\eta\left(\frac{0,1}{0,3}\right)+\eta\left(\frac{0,2}{0,3}\right)\right]+0,4\left[\eta\left(\frac{0,2}{0,4}\right)+\eta\left(\frac{0,2}{0,4}\right)\right]\approx 0,68 \quad \text{(ორ. ერთ.)}$$

ვსარგებლობთ რა პირობითი ენტროპიის ცნებით, შეიძლება განვსაზღვროთ გაერთიანებული სისტემის ენტროპია მისი შემადგენელი ნაწილების ენტროპიათა საშუალებით.

დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

თუ ორი სისტემა X და Y ერთიანდებიან ერთში, მაშინ გაერთიანებული სისტემის ენტროპია ტოლია მისი ერთ-ერთი შემადგენელი ნაწილის ენტროპიას მიმატებული მეორე ნაწილის პირობითი ენტროპია პირველის მიმართ:

$$H(X, Y)=H(X)+H(Y|X) \tag{18.4.8}$$

დასამტკიცებლად $H(X, Y)$ ჩავწეროთ მათემატიკური (18.3.3) ლოდინის ფორმით:

$$H(X, Y)=M[-\log P(X, Y)].$$

ალბათობათა გამრავლების თეორემის მიხედვით

$$P(X, Y)=P(X)P(Y|X),$$

$$\log P(X, Y)=\log P(X)+\log P(Y|X),$$

საიდანაც

$$H(X, Y)=M[-\log P(X)]+M[-\log P(Y|X)]$$

ან (18. 2.11), (18.3.3) ფორმულებით:

$$H(X, Y)=H(X)+H(Y|X),$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

კერძო შემთხვევაში, როცა X და Y სისტემები დამოუკიდებლებია, $H(Y|X)=H(Y)$ და ვღებულობთ წინა პუნქტში დამტკიცებულ თეორემას ენტროპიათა შეკრების შესახებ.

$$H(X, Y)=H(X)+H(Y).$$

ზოგად შემთხვევაში

$$H(X, Y)\leqslant H(X)+H(Y). \tag{18.4.9}$$

თანაფარდობა (18.4.9) გამოდის იქიდან, რომ სრული პირობითი ენტროპია არ შეიძლება სჭარბობდეს უპირობოს

$$H(Y|X)\leqslant H(Y). \tag{18.4.10}$$

უტოლობა (18.4.10) დამტკიცებულ იქნება 18.6 პუნქტში. ინტუიციით იგი წარმოგვიდგება საკმაოდ ცხადად: ნათელია, რომ სისტემის განუზღვრელობის ხარისხი არ შეიძლება გადიდდეს იმის გამო, რომ რომელიღაც სხვა სისტემის მდგომარეობა გახდა ცნობილი.

თანაფარდობიდან (18.4.9) გამომდინარეობს, რომ რთული სისტემის ენტროპია აღწევს მაქსიმუმს უკიდურეს შემთხვევაში, როცა მისი შემადგენელი ნაწილები დამოუკიდებლებია.

განვიხილოთ მეორე უკიდურესი შემთხვევა, როცა ერთ-ერთი სისტემათაგანის (მაგალითად X) მდგომარეობა მთლიანად განსაზღვრავს მეორის $У$ მდგომარეობას. ამ შემთხვევაში $H(X|У)=0$ და (18.4.7) ფორმულა გვაძლევს

$$H(X, Y)=H(X).$$

თუკი თითოეული X, $У$ სისტემათაგანის მდგომარეობა ცალსახად განსაზღვრავს მეორის მდგომარეობას (ან, როგორც ამბობენ სისტემები X და $У$ ეკვივალენტურია) მაშინ

$$H(X, Y)=H(X)=H(Y).$$

რთული სისტემის ენტროპიის შესახებ თეორემა ადვილად შეიძლება გავავრცელოთ გასაერთიანებელი სისტემების ნებისმიერ რიცხვზე:

$$H(X_1, X_2,\ldots,X_s)=H(X_1)+H(X_2|X_1)+H(X_3|X_1, X_2)+\ldots$$
$$\ldots+H(X_s|X_1, X_2,\ldots,X_{s-1}), \tag{18.4.11}$$

სადაც ყოველი მომდევნო სისტემის ენტროპია გამოითვლება ისეთი პირობით, რომ მდგომარეობანი ყველა წინა სისტემებისა ცნობილია.

18.5. ენტროპია და ინფორმაცია

წინა პუნქტებში განსაზღვრული იყო ენტროპია, როგორც რაღაც ფიზიკური სისტემის მდგომარეობის განუზღვრელობის ზომა. ცხადია, რომ ცნობათა მიღების საფუძველზე სისტემის განუზღვრელობა შესაძლებელია შემცირებულ იქნას. რაც მეტია მიღებულ ცნობათა მოცუ-

ლობა, რამდენადაც უფრო შინაარსიანია ისინი, მით მეტი იქნება ინფორმაცია სისტემის შესახებ, მით უფრო ნაკლებად იქნება განუსაზღვრელი მისი მდგომარეობა. ბუნებრივია ამიტომ ინფორმაციის რაოდენობა გაიზომოს იმ სისტემის ე ნ ტ რ ო პ ი ი ს შ ე მ ც ი რ ე ბ ი თ, რომლის მდგომარეობის დასაზუსტებლადაც განკუთვნილია ცნობები.

განვიხილოთ რომელიღაც X სისტემა, რომელზედაც სწარმოებს დაკვირვება და შევაფასოთ ინფორმაცია, მიღებული იმის შედეგად, რომ X სისტემის მდგომარეობა გახდება მთლიანად ცნობილი. შეტყობინების მიღებამდე (აპრიორი) სისტემის ენტროპია იყო $H(X)$; შეტყობინებათა მიღების შემდეგ სისტემის მდგომარეობა მთლიანად განისაზღვრა, ე. ი. ენტროპია ნულის ტოლი გახდა. I_x-ით აღვნიშნოთ ინფორმაცია, რომელიც მიღებულია X სისტემის მდგომარეობის გარკვევის შემდეგ. იგი ტოლია ენტროპიის შემცირების:

$$I_X = H(X) - 0$$

ან

$$I_X = H(X), \tag{18.5.1}$$

ე. ი. ინფორმაციის რაოდენობა, მოპოვებული რომელიღაც ფიზიკური სისტემის მდგომარეობის სრულად გარკვევისას, ტოლია ამ სისტემის ენტროპიისა.

წარმოვიდგინოთ (18.5.1) ფორმულა შემდეგი სახით:

$$I_x = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i, \tag{18.5.2}$$

სადაც

$$p_i = P(X \sim x_i).$$

ფორმულა (18.5.2) აღნიშნავს, რომ ინფორმაცია I_x არის სისტემის ყველა მდგომარეობის მიხედვით გასაშუალებული მდგომარეობის ალბათობის ლოგარითმის მნიშვნელობა შებრუნებული ნიშნით.

მართლაც, I_x-ის მისაღებად $\log p_i$-ის ყოველი მნიშვნელობა (i-ური მდგომარეობის ალბათობის ლოგარითმი) უარყოფითი ნიშნით მრავლდება. იმ მდგომარეობის ალბათობაზე და ყველა ასეთი ნამრავლები ჯამდება. ბუნებრივია ყოველი ცალკე შესაკრები — $\log p_i$ განვიხილოთ, როგორც ცალკეულ შეტყობინებათა შედეგად მიღებული კერძო ინფორმაცია, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ სისტემა X იმყოფება x_i მდგომარეობაში. აღვნიშნოთ ეს ინფორმაცია I_{x_i}:

$$I_{x_i} = -\log p_1 \tag{18.5.3}$$

მაშინ I_x ინფორმაცია წარმოგვიდგება, როგორც საშუალო (ანდა სრული) ინფორმაცია, რომელიც მიღებულია ყველა შესაძლო ცალკეული

შეტყობინებათაგან მათი ალბათობათა გათვალისწინებით. ფორმულა (18.5.2) შეიძლება გადაიწეროს მათემატიკური ლოდინის ფორმით:

$$I_x = M[-\log P(X)], \tag{18.5.4}$$

სადაც X ასოთი აღნიშნულია X სისტემის ნებისმიერი (შემთხვევითი) მდგომარეობა.

რადგანაც ყველა P_i რიცხვები არ შეიძლება ერთზე მეტი იყოს, ამიტომ როგორც კერძო ინფორმაცია I_{x_i}, ისე სრული I_x არ შეიძლება იყოს უარყოფითი.

თუ სისტემის ყველა შესაძლო მდგომარეობანი აპრიორი ერთნაირად ალბათურია $\left(p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \dfrac{1}{n}\right)$, მაშინ ბუნებრივია კერძო ინფორმაცია I_x ყოველი კერძო შეტყობინება

$$I_{x_i} = -\log p = \log n$$

ტოლია საშუალო ინფორმაციისა

$$I_X = -n\frac{1}{n}\log\frac{1}{n} = \log n.$$

იმ შემთხვევაში, როცა სისტემის მდგომარეობებს გააჩნიათ სხვადასხვა ალბათობანი, ინფორმაციები სხვადასხვა შეტყობინებებიდან ერთნაირი არ არის: უდიდეს ინფორმაციას მოაქვს შეტყობინება, იმ ხდომილობებზე, რომლებიც აპრიორი იყვნენ ყველაზე ნაკლებად ალბათობრივი. მაგალითად, შეტყობინება იმაზე, რომ 31 დეკემბერს ქ. მოსკოვში მოვიდა თოვლი — ატარებს გაცილებით ნაკლებ ინფორმაციას, ვიდრე თავის შინაარსით ანალოგიური ცნობა, რომ 31 ივლისს ქ. მოსკოვში მოვიდა თოვლი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ჭადრაკის დაფ-ს ერთ-ერთ უჯრაზე ნებისმიერად დასმულია ფიგურა. აპრიორი ფიგურის ყველა მდებარეობანი დაფაზე ერთნაირად ალბათურია. განვსაზღვროთ მიღებული ინფორმაცია შეტყობინებისაგან — სახელდობრ, თუ რომელ უჯრედზე იმყოფება ფიგურა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. სისტემის ენტროპია ტოლალბათობრივი მდგომარეობით არის $\log n$; მოცემულ შემთხვევაში

$$I_X = H(X) = \log 64 = 6 \text{ (ორ. ერთ.)}.$$

ე. ი. შეტყობინება შეიცავს ინფორმაციის 6 ორობით ერთეულს, რადგანაც სისტემის ყველა მდგომარეობანი ტოლალბათობრივია, ამიტომ იგივე ინფორმაცია ატარებს ნებისმიერ კონკრეტული შეტყობინებას: ფიგურა იმყოფება e_3 კვადრატზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. მაგალითი 1-ის პირობებში განვსაზღვროთ კერძო ინფორმაცია შეტყობინებიდან, რომ ფიგურა იმყოფება დაფის ერთ-ერთ კუთხის უჯრედში.

ა მ ო ხ ს ნ ა: მდგომარეობის აპრიორული ალბათობა, რომელშიაც ხდება შეტყობინება ტოლია

$$p=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$$

კერძო ინფორმაცია ტოლია

$$I=-\log\frac{1}{16}=-4 \text{ (ორ. ერთ.)}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. განვსაზღვროთ კერძო ინფორმაცია, რომელსაც შეიცავს შეტყობინება პირველ შემხვედრ A პირისაგან: „დღეს ჩემი დაბადების დღეა".

ა მ ო ხ ს ნ ა. აპრიორი ყველა დღე წელიწადში ერთნაირი ალბათობით შეიძლება იყოს A პიროვნების დაბადების დღე. მიღებული შეტყობინების ალბათობა $p=\frac{1}{365}$, მოცემული შეტყობინებიდან კერძო ინფორმაცია

$$I=-\log\frac{1}{365}\approx 8,51 \text{ (ორ. ერთ.)}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. მე-3 მაგალითის პირობებში განვსაზღვროთ სრული ინფორმაცია შეტყობინებიდან, რომელიც არკვევს წარმოადგენს თუ არა დღევანდელი დღე პირველი შემხვედრი A პირის დაბადების დღეს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. სისტემას, რომლის მდგომარეობაც ირკვევა, აქვს ორი შესაძლო მდგომარეობა: x_1 — დაბადების დღე და x_2 — არა დაბადების დღე ამ მდგომარეობათა ალბათობანი

$$p_1=\frac{1}{365}; \qquad p_2=\frac{364}{365}$$

სრული ინფორმაცია ტოლია:

$$I_X=H(X)=\eta\left(\frac{1}{365}\right)+\eta\left(\frac{364}{365}\right)\approx 0,063 \text{ (ორ. ერთ.)}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. მიზანზე შესაძლებელია წარმოებულ იქნას n დამოუკიდებელი გასროლა; მიზნის დაზიანების ალბათობა ყოველ გასროლისას p-ს ტოლია. k გასროლის შემდეგ $(1\leqslant k<n)$ ხდება დაკვირვება, რომელიც იტყობინება დაზიანებულია თუ არა მიზანი. თუ დაზიანებულია, სროლა წყდება. განვსაზღვროთ k იმ პირობიდან, რომ ინფორმაცია მოწოდებული დაზვერვის მიერ იყოს მაქსიმალური[1].

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ფიზიკური სისტემა X_k — მიზანი ყოველი k-ური გასროლის შემდეგ. შესაძლო მდგომარეობანი X_k სისტემისა იქნება:

x_1 — მიზანი დაზიანებულია

x_2 — მიზანი არ არის დაზიანებული

---

[1] მაგალითი ნასესხებია ი. დინერისაგან.

მდგომარეობათა ალბათობანი მოცემულია ცხრილში:

x_i	x_1	x_2
p_i	$1-(1-p)^k$	$(1-p)^k$

ცხადია ინფორმაცია, მოწოდებული X_k სისტემის მდგომარეობის გარკვევით, მაქსიმალური იქნება, როცა ორივე მდგომარეობანი x_1 და x_2 ტოლალბათია:

$$1-(1-p)^k=(1-p)^k.$$

საიდანაც

$$k=\frac{-1}{\log(1-p)}\,,$$

სადაც log — ორობითი ლოგარითმის ნიშანია.
მაგალითად, როცა $p=0,2$ მივიღებთ (უახლოეს მთელ რიცხვამდე დამრგვალებით)

$$k=\frac{1}{0,3219}\approx 3.$$

თუ ინფორმაცია გამოსახულია ორობით ერთეულებში, მაშინ მას შეიძლება მივცეთ უფრო თვალსაჩინო გაგება, სახელდობრ: ინფორმაციის ორობით ერთეულებში გაზომვისას ჩვენ პირობით ვახასიათებთ მას პასუხთა რიცხვით „კი“ ან „არა“, რომელთა დახმარებით შეიძლება მოვიპოვოთ იგივე ინფორმაცია. მართლაც, განვიხილოთ სისტემა ორი მდგომარეობით:

x_i	x_1	x_2
p_i	p_1	p_2

რომ გამოვარკვიოთ ამ სისტემის მდგომარეობა, საკმარისია დავსვათ ერთი კითხვა. მაგალითად: იმყოფება სისტემა x_1 მდგომარეობაში? პასუხს „კი“ ანდა „არა“ ამ კითხვაზე მოაქვს რომელიღაც ინფორმაცია, რომელიც აღწევს თავის მაქსიმალურ მდგომარეობას 1-ს, როცა ორივე მდგომარეობანი აპრიორი ტოლალბათია: $p_1=p_2=\frac{1}{2}$. ამგვარად, მაქსიმალური ინფორმაცია, მიცემული პასუხით „კი“ ან „არა“ ტოლია ერთი ორობითი ერთეულის.

თუ ინფორმაცია რომელიღაც შეტყობინებიდან ტოლია n ორობითი ერთეულისა, მაშინ იგი ტოლფასია ინფორმაციისა, რომელიც მიცემულია n პასუხით „კი“ ან „არა“ კითხვებზე, რომლებიც დასმული არიან ისე, რომ „კი“ და „არა“ ერთნაირად ალბათობრივია.

ზოგიერთ მარტივ შემთხვევაში შეტყობინების შინაარსის გამოსარკვევად მართლაც ხერხდება რამდენიმე კითხვა დაისვას ისე, რომ პასუ-

ხები „კი " და „არა" ამ კითხვებზე იყვნენ ტოლალბათნი. ასეთ შემთხვევაში მიღებული ინფორმაცია ფაქტიურად გაიზომება ასეთ კითხვათა რიცხვით.

თუ კითხვების დასმა ზუსტად ამგვარად არ მოხერხდება, შეიძლება მტკიცება მარტო იმისა, რომ კითხვათა მინიმალური რიცხვი, რომელიც საჭიროა მოცემული შეტყობინების შინაარსის გამოსარკვევად, არანაკლებია, ვიდრე შეტყობინებაში მოთავსებული ინფორმაცია. რომ კითხვათა რიცხვი იყოს მინიმალური, ისინი უნდა ჩამოვაყალიბოთ ისე, რომ პასუხების „კი" და „არა"-ს ალბათობანი იყვნენ რაც შეიძლება $\frac{1}{2}$-თან ახლოს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ვიღაცამ ჩაიფიქრა ნებისმიერი მთელი X რიცხვი ერთიდან რვამდე·

$$1 \leqslant X \leqslant 8$$

ჩვენ კი უნდა გამოვიცნოთ იგი კითხვათა მინიმალური რიცხვის დასმით, რომელთაგან თითოეულზე იძლევა პასუხი „კი" და „არა".

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვსაზღვრავთ ინფორმაციას მოთავსებულ შეტყობინებაში, თუ რომელი რიცხვია ჩაფიქრებული. აპრიორი ყველა მნიშვნელობანი X-ისა 1-დან 8-მდე ერთნაირად ალბათია: $p_1=p_2=\ldots=p_8=\frac{1}{8}$ და ფორმულა (18.5.2) გვაძლევს

$$I_x=\log 8=3$$

კითხვათა მინიმალური რიცხვი, რომელიც უნდა დავსვათ ჩაფიქრებული რიცხვის გამოსარკვევად, არ არის ნაკლები სამზე.

მოცემულ შემთხვევაში, შეიძლება მართლაც გამოვიცნოთ X სამი კითხვით, თუ მათ ჩამოვაყალიბებთ ისე, რომ პასუხთა ალბათობანი „კი" და „არა" იყვნენ ტოლი. დავუშვათ მაგალითად, ჩაფიქრებულია რიცხვი „ხუთი", ჩვენ ეს არ ვიცით და ვაძლევთ კითხვებს:

კ ი თ ხ ვ ა 1. X რიცხვი ნაკლებია ხუთზე?

პ ა ს უ ხ ი: არა.

(დასკვნა: X—5,6,7,8 რიცხვებიდან ერთ-ერთია).

კ ი თ ხ ვ ა 2. რიცხვი X შვიდზე ნაკლებია?

პ ა ს უ ხ ი: კი.

(დასკვნა: X—5,6 რიცხვებიდან ერთერთია).

კ ი თ ხ ვ ა 3. რიცხვი ექვსზე ნაკლებია?

პ ა ს უ ხ ი: კი.

(დასკვნა: X რიცხვი ხუთის ტოლია).

ადვილია დავრწმუნდეთ, რომ სამი ასეთი (ანდა ანალოგიური) კითხვებით შეიძლება დავადგინოთ ნებისმიერი ჩაფიქრებული რიცხვი 1—8[1].

---

[1] მკითხველს ვურჩევთ დამოუკიდებლად დასვას 6 კითხვა, რომელიც აუცილებელია ჭადრაკის დაფაზე ფიგურის მდგომარეობის გამოსარკვევად (იხ. მაგალითი 1) და განსაზღვროს კითხვათა რიცხვი, რომელიც საკმარისია 36 სათამაშო ქაღალდისაგან ჩაფიქრებულის გამოსარკვევად.

ამრიგად, ჩვენ შევისწავლეთ გავზომოთ ინფორმაცია X სისტემაზე, რასაც შეიცავს მის მდგომარეობაზე, როგორც ცალკეული შეტყობინება, ასევე მდგომარეობის გარკვევის თვით ფაქტი. ამ დროს ვგულისხმობთ, რომ დაკვირვება ხდება უშუალოდ თვით X სისტემაზე. პრაქტიკაში ეს ხშირად ასე ხდება: შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ სისტემა X უშუალოდ დაკვირვებისათვის მიუდგომელია და ირკვევა მდგომარეობა არა თვით X სისტემისა, არამედ რომელიღაც მასთან დაკავშირებულ მეორე Y სისტემისა. მაგალითად საჰაერო მიზნებზე უშუალოდ დაკვირვების ნაცვლად მართვის პოსტზე საჰაერო დაცვის საშუალებებით ხდება დაკვირვება საჰაერო ვითარებაზე, პლანშეტზე ანდა ეკრანზე, რომლებზედაც მიზნები გამოსახულია პირობითი ნიშნებით. კოსმოსურ ხომალდზე უშუალო დაკვირვების ნაცვლად დაკვირვება ხდება სიგნალთა სისტემაზე, რომელიც გადაიცემა მისი აპარატურით. ნაცვლად გაგზავნილი X დეპეშისა, მიმღები აკვირდება მიღებულ Y ტექსტს, რომელიც ყოველთვის არ ემთხვევა X-ს. განსხვავებანი ჩვენთვის უშუალოდ საინტერესო X და უშუალოდ დაკვირვებას დაქვემდებარებულ Y შორის საერთოდ შეიძლება იყოს ორი ტიპის:

1). განსხვავება იმის გამო, რომ X სისტემის ზოგიერთი მდგომარეობანი ვერ პოულობენ ასახვას Y სისტემაში, რომელიც უფრო „ღარიბია დაწვრილებითი ცნობებით", ვიდრე X სისტემა.

2). განსხვავებულობანი ცდომილებათა გამო: X სისტემის პარამეტრების გაზომვის უზუსტობათა და შეტყობინებათა გადაცემისას დაშვებული ცდომილებებით.

პირველი ტიპის ცდომილების მაგალითს წარმოადგენენ განსხვავებანი, რომლებიც წარმოიშობიან ციფრობრივ მონაცემთა დამრგვალებისას და საერთოდ X სისტემის თვისებათა უხეში აღწერით, რომლებიც აისახებიან Y სისტემით. მეორე ტიპის განსხვავებულობის მაგალითები შეიძლება იყვნენ სიგნალთა დამახინჯებანი, რომლებიც წარმოიშობიან კავშირის არხში დაბრკოლებათა (ხმაურით) გამო, გადამცემი აპარატურის უწესივრობათა გამო, რომლებიც მონაწილეობენ ინფორმაციათა გადაცემისას და ა. შ.

იმ შემთხვევაში, როცა ჩვენთვის საინტერესო სისტემა X და დაკვირვებაში მყოფი Y სხვადასხვაა, წამოიჭრება კითხვა:

X სისტემაზე ინფორმაციის რა რაოდენობას გვაძლევს Y სისტემაზე დაკვირვება?

ბუნებრივია ეს ინფორმაცია განვსაზღვროთ, როგორც სისტემის ენტროპიის შემცირება Y სისტემის მდგომარეობაზე ცნობების მიღების შედეგად:

$$I_{Y\to X}=H(X)-H(X|Y). \qquad (18.5.5)$$

მართლაც, Y სისტემაზე ცნობათა მიღებამდე X სისტემის ენტროპია იყო $H(X)$; ცნობების მიღების შემდეგ „ნარჩენი“ ენტროპია გახდა $H(X/Y)$; სწორედ ცნობებით მოსპობილი ენტროპია არის ინფორმაცია $I_{Y\to X}$.

სიდიდეს (18.5.5) ჩვენ დავარქმევთ სრულს (ანდა საშუალოს) ინფორმაციას X სისტემაზე, რომელსაც შეიცავს Y სისტემა. დავამტკიცოთ, რომ

$$I_{Y\to X}=I_{X\to Y}.$$

ე. ი. ორი სისტემიდან თითოეული შეიცავს მეორის მიმართ ერთი და იგივე სრულ ინფორმაციას. დასამტკიცებლად (X, Y) სისტემის ენტროპია თანახმად 8.4. პუნქტში მოყვანილი თეორემისა დავწეროთ ორი ტოლფასი ფორმულით:

$$H(X,\ Y)=H(X)+H(Y|X),$$
$$H(X,\ Y)=H(Y)+H(X|Y),$$

საიდანაც

$$H(X)+H(Y|X)=H(Y)+H(X|Y),$$
$$H(X)-H(X|Y)=H(Y)-H(Y|X),$$

ან

$$I_{Y\to X}=I_{X\to Y},\qquad(18.5.6)$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$I_{Y\leftrightarrow X}=I_{Y\to X}=I_{X\to Y}\qquad(18.5.7)$$

და $I_{Y\leftrightarrow X}$ ინფორმაციას დავარქვათ სრული ურთიერთინფორმაცია, რომელსაც შეიცავს X და Y სისტემები.

ვნახოთ რად გადაიქცევა სრული ურთიერთინფორმაცია სისტემათა სრული დამოუკიდებლობის და სისტემათა სრული დამოკიდებულების უკიდურეს შემთხვევაში. თუ X და Y დამოუკიდებლებია, მაშინ

$$H(Y|X)=H(Y),\ \text{და}$$
$$I_{Y\leftrightarrow X}=0.\qquad(18.5.8)$$

ე. ი. სრული ურთიერთინფორმაცია, რომელსაც შეიცავს დამოუკიდებელი სისტემები, ნულის ტოლია. ეს სავსებით ბუნებრივია, რადგან არ შეიძლება მიღებული იქნას ცნობები სისტემაზე, როცა დაკვირვება ხდება მის ნაცვლად მეორეზე, რომელიც არაფრით არ არის მასზე დაკავშირებული.

განვიხილოთ მეორე უკიდურესი შემთხვევა, როცა X სისტემის მდგო-

მარეობა მთლიანად განსაზღვრავს Y სისტემის მდგომარეობას და პირიქით (სისტემები ეკვივალენტურია), მაშინ

$$H(X)=H(Y);$$
$$H(X/Y)=H(Y/X)=0$$

და

$$I_{Y\leftrightarrow X}=I_x=I_y=H(X)=H(Y) \qquad (18.5.9)$$

ე. ი. მიიღება შემთხვევა, რომელიც უკვე ზემოთ განვიხილეთ (18.5.2) როცა დაკვირვება ხდება ჩვენთვის საინტერესო X სისტემაზე (ან რაღაც მის Y ეკვივალენტზე).

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა X და Y სისტემებს შორის გვაქვს მკაცრი მაგრამ ერთმხრივი დამოკიდებულება: მდგომარეობა ერთი რომელიმე სისტემისა სრულიად განსაზღვრავს მეორის მდგომარეობას, მაგრამ არა პირიქით. შევთანხმდეთ, რომ იმ სისტემას, რომლის მდგომარეობა მთლიანად განისაზღვრება მეორის მდგომარეობით დავარქვათ „დაქვემდებარებული სისტემა". დაქვემდებარებული სისტემის მდგომარეობით საერთოდ შეუძლებელია ცალსახად განვსაზღვროთ მეორის მდგომარეობა. მაგალითად, თუკი X სისტემა წარმოადგენს თვით შეტყობინების სრულ ტექსტს, რომელიც შედგენილია მთელი რიგი ასოებისაგან, ხოლო Y — მის შეკვეცილ ტექსტს, რომელშიც შეკვეცის მიზნით გამოტოვებულია ყველა ხმოვანი ასო, მაშინ ვკითხულობთ რა Y შეტყობინებაში სიტყვა „მთრ" არ შეიძლება ზუსტად ვიყოთ დარწმუნებული, იგი აღნიშნავს — „მეთაური" „მეთერე", „მათარა" და სხვ.

ცხადია დაქვემდებარებული სისტემის ენტროპია ნაკლებია, ვიდრე ენტროპია იმ სისტემისა, რომელზედაც იგი დაქვემდებარებულია.

განვსაზღვროთ სრული ურთიერთინფორმაცია, რომლებსაც შეიცავენ სისტემები, რომელთაგან ერთი წარმოადგენს დაქვემდებარებულს.

დავუშვათ ორი სისტემიდან X და Y დაქვემდებარებულს წარმოადგენს X. მაშინ $H(X/Y)=0$ და

$$I_{Y\leftrightarrow X}=H(X) \qquad (18.5.10)$$

ე. ი. სრული ურთიერთინფორმაცია, რომლებსაც შეიცავენ სისტემები, რომელთაგან ერთი წარმოადგენს დაქვემდებარებულს, ტოლია დაქვემდებარებული სისტემის ენტროპიისა.

გამოვიყვანოთ $I_{Y\leftrightarrow X}$ ინფორმაციისათვის გამოსახულება არა პირობითი ენტროპიის საშუალებით, არამედ უშუალოდ გაერთიანებული სისტემის ენტროპიისა და მისი შემადგენელი $H(X)$ და $H(Y)$ ნაწილების მეშვეობით.

ვსარგებლობთ რა გაერთიანებული სისტემის ენტროპიის შესახებ თეორემით (იხ. პ. 18.4) ვღებულობთ:

$$H(X|Y)=H(X, \ Y)-H(Y). \qquad (18.5.11)$$

ამ გამოსახულების (18.5.5) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ:

$$I_{Y\leftrightarrow X}=H(X)+H(Y)-H(X, \ Y), \qquad (18.5.12)$$

ე. ი. სრული ურთიერთინფორმაცია, რომელსაც მოიცავს ორი სისტემა, ტოლია სისტემის შემადგენელი ენტროპიათა ჯამს, მინუს გაერთიანებული სისტემის ენტროპია.

მიღებულ დამოკიდებულებათა საფუძველზე ადვილია გამოვიყვანოთ საერთო გამოსახულება სრული ურთიერთინფორმაციისათვის მათემატიკური ლოდინის სახით. (18.5.12)-ში ენტროპიის გამოსახულებათა ჩასმით

$$H(X)=M[-\log P(X)], \quad H(Y)=M[-\log P(Y)]$$

$$H(X, \ Y)=M[-\log P(X, \ Y)],$$

მივიღებთ:

$$I_{Y\leftrightarrow X}=M[-\log P(X)-\log P(Y)+\log \ P(X, \ Y)],$$

ან

$$I_{Y\leftrightarrow X}=M\left[\log \ \frac{P(X, \ Y)}{P(X). \ P(Y)}\right]. \qquad (18.5.13)$$

სრული ურთიერთინფორმაციის უშუალოდ გამოთვლისათვის ფორმულა (18.5.13) მოხერხებულია დავწეროთ შემდეგი სახით:

$$I_{Y\leftrightarrow X}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_{ij}\log\frac{P_{ij}}{p_i r_j}, \qquad (18.5.14.)$$

სადაც

$$P_{ij}=P((X\sim x_i) \ \ (Y\sim y_j)).$$

$$p_i=P \ \ (X\sim x_i); \ \ r_j=P(Y\sim y_j).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. მოვძებნოთ სრული ურთიერთინფორმაცია, რომელსაც შეიცავს X და Y სისტემები 1-ლი მაგალითის პირობებში (პ. 18.4).

ა მ ო ხ ს ნ ა. მაგალითი 1. პ. 18.4 დანართის 7-ე ცხრილის დახმარებით მივიღებთ:

$$H(X, \ Y)=2{,}25; \ \ H(X)=1{,}16; \ \ H(Y)=1{,}57;$$

$$I_{Y\leftrightarrow X}=H(X)+H(Y)-H(X, \ Y)=0{,}48 \text{ (ორ. ერთ).}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ფიზიკური X სისტემა შეიძლება იმყოფებოდეს ოთხიდან რო-

მელიმე ერთ-ერთ მდგომარეობაში x_1, x_2, x_3, x_4; შესაბამისი ალბათობები მოცემულია ცხრილში

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
p_i	0,1	0,2	0,4	0,3

X სისტემაზე დაკვირვებისას x_1 და x_2 მდგომარეობანი ძნელად გასარჩევია; მდგომარეობანი x_3 და x_4 აგრეთვე გაურჩეველნი არიან. X სისტემაზე შეტყობინება აჩვენებს იმყოფება თუ არა იგი x_1, x_2 მდგომარეობებიდან ერთ-ერთში ან კიდევ x_3, x_4 მდგომარეობებიდან ერთ-ერთში. მიღებულია შეტყობინება, რომელიც აჩვენებს თუ x_1, x_2, x_3, x_4 მდგომარეობებიდან რომელში იმყოფება X სისტემა.

ამოხსნა. მოცემულ მაგალითში ჩვენ ვაკვირდებით არა თვით X სისტემას, არამედ მის დაქვემდებარებულ სისტემას, რომელიც ღებულობს Y_1 მდგომარეობას, როცა სისტემა X აღმოჩნდება x_1, x_2 მდგომარეობიდან ერთ-ერთში და მდგომარეობას Y_2 როცა აღმოჩნდება x_3, x_4 მდგომარეობებიდან ერთ-ერთში. გვაქვს:

$$r_1 = P(Y \sim y_1) = 0,1+0,2 = 0,3;$$
$$r_2 = P(Y \sim y_2) = 0,3+0,4 = 0.7.$$

ვპოულობთ ურთიერთ ინფორმაციას ე. ი. დაქვემდებარებული სისტემის ენტროპიას:

$$I_{Y \leftrightarrow X} = -r_1 \log r_1 - r_2 \log r_2 = \eta(0,3) + \eta(0,7) \approx 0,88 \text{ (ორ. ერთ.)}$$

18.6. კერძო ინფორმაცია სისტემაზე რომელსაც შეიცავს შეტყობინება ხდომილობაზე. კერძო ინფორმაცია ხდომილობაზე, რომელსაც შეიცავს შეტყობინება სხვა ხდომილობაზე

წინა პუნქტში განვიხილეთ სრული (ანუ საშუალო) ინფორმაცია X სისტემაზე, რომელსაც შეიცავს შეტყობინება იმის შესახებ, თუ რომელ მდგომარეობაში იმყოფება Y სისტემა. მთელ რიგ შემთხვევებში საინტერესოა შევაფასოთ კ ე რ ძ ო ი ნ ფ ო რ მ ა ც ი ა X სისტემაზე, რომელსაც შეიცავს ცალკე შეტყობინება, რომელიც აჩვენებს, რომ სისტემა Y იმყოფება კონკრეტულ y_j მდგომარეობაში. აღვნიშნოთ ეს კერძო ინფორმაცია $I_{y_j \rightarrow X}$. შევნიშნავთ, რომ სრული (ანუ სხვაგვარად საშუალო) $I_{Y \rightarrow X}$ ინფორმაცია უნდა წარმოადგენდეს ნაწილობრივი ინფორმაციის მათემატიკურ ლოდინს ყველა შესაძლო მდგომარეობისათვის, რომლებისათვის შესაძლოა გადაცემულ იქნას შეტყობინება:

$$I_{Y \leftrightarrow X} = \sum_{j=1}^{m} r_j I_{y_j \rightarrow X}. \tag{18.6.1}$$

მივცეთ ფორმულას (18.5.14) რომლითაც გამოითვლება $I_{Y\to X}$ (იგივე $I_{Y\leftrightarrow X}$) ისეთი სახე, როგორიც აქვს (18.6.1) ფორმულას:

$$I_{Y\to X}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P_{ij}\log\frac{P_{ij}}{p_i r_j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}r_j P(x_i|y_j)\log\frac{r_j P(x_i|y_j)}{p_i r_j}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}r_j\sum_{i=1}^{n}P(x_i|y_j)\log\frac{P(x_i|y_j)}{p_i}. \qquad (18.6.2)$$

საიდანაც (18.6.1) ფორმულასთან შედარებით მივიღებთ კერძო ინფორმაციის გამოსახულებას:

$$I y_{j\to X}=\sum_{i=1}^{n}P(x_i|y_j)\log\frac{P(x_i|y_j)}{p_i}. \qquad (18.6.3)$$

გამოსახულებას (18.6.3) კი მივიღებთ ნაწილობრივი ინფორმაციის განსაზღვრად. გავაანალიზოთ ამ გამოსახულების სტრუქტურა. იგი წარმოადგენს გასაშუალებულს

$$\log\frac{P(x_i|y_j)}{p_i}. \qquad (18.6.4)$$

სიდიდისას. ყველა x_i მდგომარეობათა მიხედვით გასაშუალება ხდება x_1, x_2, ... x_n მნიშვნელობათა სხვადასხვა ალბათობათა გათვალისწინებით. ვინაიდან Y სისტემამ უკვე მიიღო y_j მდგომარეობა, ამიტომ გასაშუალებისას (18.6.4) მნიშვნელობანი მრავლდებიან არა x_i მდგომარეობათა p_i ალბათობებზე, არამედ პირობით ალბათობებზე $P(x_i/y_j)$.

ამდაგვარად, გამოსახულებათა ნაწილობრივი ინფორმაციისათვის შეიძლება ჩაიწეროს პირობითი მათემატიკური ლოდინის სახით:

$$I y_{j\to X}=M y_j\left[\log\frac{P(X|y_j)}{P(X)}\right]. \qquad (18.6.5)$$

დავამტკიცოთ, რომ კერძო ინფორმაცია $I y_{j\to X}$ ისე, როგორც სრული არ შეიძლება იყოს უარყოფითი. მართლაც აღვნიშნოთ:

$$\frac{P(x_i|y_j)}{p_i}=q_{ij} \qquad (18.6.6)$$

და განვიხილოთ გამოსახულება

$$\log\frac{P(x_i|y_j)}{p_i}=\log q_{ij}$$

ადვილად დავრწმუნდებით (იხ. ნახ. 18.6.1), რომ ნებისმიერ $x>0$-ისათვის

$$\ln x \leqslant x-1. \qquad (18.6.7)$$

(18.6.7)-ში დაშვებით $x=\frac{1}{q_{ij}}$ მივიღებთ:

$$-\ln q_{ij} \leqslant \frac{1}{q_{ij}}-1, \quad \ln q_{ij} \geqslant 1-\frac{1}{q_{ij}},$$

საიდანაც

$$\log q_{ij} = \frac{\ln q_{ij}}{\ln 2} \geqslant \frac{1}{\ln 2}\left(1-\frac{1}{q_{ij}}\right). \qquad (18.6.8)$$

(18.6.3) და (18.6.6) საფუძველზე გვაქვს

$$I_{y_j\to X} = \sum_{i=1}^{n} P(x_i|y_j)\log q_{ij} \geqslant$$

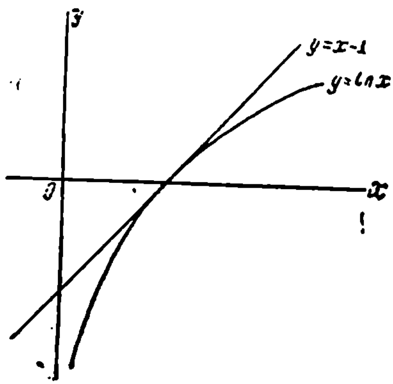
$$\geqslant \frac{1}{\ln 2}\sum_{i=1}^{n} P(x_i|y_j)\left(1-\frac{1}{q_{ij}}\right) = \frac{1}{\ln 2}\sum_{i=1}^{n} P(x_i|y_j)\left[1-\frac{p_i}{p(x_i|y_j)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left\{\sum_{i=1}^{n} P(x_i|y_j) - \sum_{i=1}^{n} p_i\right\}.$$

მაგრამ

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i|y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

და ფიგურულ ფრჩხილებში გამოსახულება ნულის ტოლია; მაშასადამე $I_{y_j\to X}\geqslant 0$.



ნახ. 18.6.1.

ამგვარად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ კერძო ინფორმაცია X სისტემაზე, რომელიც მოცემულია შეტყობინებაში Y სისტემის y_j ნებისმიერ მდგომარეობაზე, არ შეიძლება იყოს უარყოფითი. აქედან გამომდინარეობს, რომ სრული ურთიერთინფორმაციაც $I_{Y\leftrightarrow X}$ არ არის უარყოფითი, როგორც არაუარყოფითი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი:

$$I_{Y\leftrightarrow X}\geqslant 0. \qquad (18.6.9)$$

ფორმულიდან (18.5.5) ინფორმაციისათვის $I_{Y\leftrightarrow X}=H(X)-H(X|Y)$ გამომდინარეობს, რომ

$$H(X)-H(X|Y)\geqslant 0 \qquad (18.6.10)$$

ან

$$H(X|Y)\leqslant H(X),$$

ე. ი. სისტემის სრული პირობითი ენტროპია არ აღემატება მის უპირობო ენტროპიას[1].

ამგვარად, დამტკიცებულია დებულება, რომელიც მიღებულია ჩვენს მიერ 18.3.-ე პუნქტში (დაუმტკიცებლად).

ნაწილობრივი ინფორმაციის უშუალოდ გამოსათვლელად მოხერხებული იქნება (18.6.3) ფორმულა რამდენადმე გარდავქმნათ მასში პირობითი $P\,(x_i|y_j)$ ალბათობათა ნაცვლად უპირობო ალბათობათა შეყვანით. მართლაც,

$$P(x_i|y_j)=\frac{P_{ij}}{r_j},$$

და ფორმულა (18.6.3) მიიღებს სახეს

$$I_{y_j\to x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_{ij}}{r_j}\log\frac{P_{ij}}{p_i r_j}. \qquad (18.6.11)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. სისტემა (X, Y) ხასიათდება P_{ij} ალბათობათა ცხრილით:

$y_j \backslash x_i$	x_1	x_2	r_j
y_1	0,1	0,2	0,3
y_2	0,3	0,4	0,7
p_i	0,4	0,6	

ვიპოვოთ კერძო ინფორმაცია X სისტემაზე, რომელსაც შეიცავს $Y\sim y_1$ შეტყობინება.

ა მ ო ხ ს ნ ა: ფორმულით (18.6.11) გვაქვს:

$$I_{y_1\to x}=\frac{0{,}1}{0{,}3}\log\frac{0{,}1}{0{,}4\cdot 0{,}3}+\frac{0{,}2}{0{,}3}\log\frac{0{,}2}{0{,}6\cdot 0{,}3}.$$

[1] შევნიშნავთ, რომ ეს მართებულია მხოლოდ სრული პირობითი ენტროპიის მიმართ; რაც შეეხება კერძო პირობით ენტროპიას $H(X/y_j)$ იგი ცალკეულ y_j-სათვის შეიძლება იყოს როგორც მეტი, ისე ნაკლებიც $H(X)$-ზე.

დანართის მე-6 ცხრილით ვპოულობთ

$$\log\frac{0,1}{0,4\cdot 0,3}=\log 10-\log 12\approx -0,263,$$

$$\log\frac{0,2}{0,6\cdot 0,3}=\log 20-\log 18\approx 0,152,$$

$$I_{y_1\to X}\approx -0,333\cdot 0,263+0,667\cdot 0,152\approx 0,013 \text{ (ორობ.ერთ).}$$

ჩვენ განვსაზღვრეთ კერძო ინფორმაცია X სისტემაზე, რომელსაც შეიცავს კონკრეტული ხდომილობა $Y\sim y_j$, ე. ი. შეტყობინება „Y სისტემა იმყოფება y_i მდგომარეობაში". ისმება ბუნებრივი კითხვა, ხომ არ შეიძლება წავიდეთ უფრო შორს და განვსაზღვროთ $X\sim x_i$ ხდომილობაზე კერძო ინფორმაცია, რომელსაც შეიცავს ხდომილობა $Y\sim y_i$? ოღონდ ასე მიღებულ ინფორმაციას „ხდომილობიდან ხდომილობამდე" ექნება რამდენადმე მოულოდნელი თვისებები. იგი შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი.

ფორმულის (18.6.3) სტრუქტურიდან გამომდინარე ბუნებრივია განვსაზღვროთ ინფორმაცია „ხდომილობიდან ხდომილობამდე" შემდეგნაირად:

$$I_{y_j\to x_i}=\log\frac{P(x_i|y_j)}{p_i}, \tag{18.6.12}$$

ე. ი. კერძო ინფორმაცია ხდომილობაზე, მიღებული სხვა ხდომილობაზე შეტყობინების შედეგად, ტოლია ლოგარითმის პირველი ხდომილობის შეტყობინების შემდეგ ალბათობის ფარდობისა მისივე ალბათობასთან შეტყობინებამდე (აპრიორი).

ფორმულიდან (18.6.12) ჩანს, რომ თუ $X\sim x_i$ ხდომილობის ალბათობა $Y\sim y_j$ შეტყობინების შედეგად იზრდება ე. ი.

$$P(x_i|y_j)>p_i.$$

მაშინ ინფორმაცია $I_{y_j\to x_i}$ დადებითია, წინააღმდეგ შემთხვევაში იგი უარყოფითია. კერძოდ, როცა $Y\sim y_i$ სრულიად გამორიცხავს ხდომილების გამოჩენის შესაძლებლობას, (ე. ი. როცა ეს ხდომილობანი შეუთავსებადია) მაშინ

$$I_{y_j\to x_i}=-\infty.$$

ინფორმაცია $I_{y_j\to x_i}$ შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$I_{y_j\to x_i}=\log\frac{P(x_i|y_j)}{p_i}=\log\frac{P_{ij}}{P_i r_j}, \tag{18.6.1 .}$$

საიდანაც გამოდის, რომ იგი x_i და y_j-ის მიმართ სიმეტრიულია და

$$I_{y_j\to x_i}=I_{x_i\to y_j}=I_{y_j\leftrightarrow x_i}. \tag{18.6.14}$$

ამგვარად, ჩვენს მიერ შემოყვანილია ინფორმაციის სამი სახე:

1). სრული ინფორმაცია X სისტემაზე, რომელსაც შეიცავს Y სისტემა:

$$I_{Y\to X}=I_{Y\leftrightarrow X};$$

2). კერძო ინფორმაცია X სისტემაზე, რომელსაც შეიცავს ხდომილობა $Y\sim y_i$ (შეტყობინება):

$$I_{y_j\to X};$$

3). კერძო ინფორმაცია $X\sim x_i$ ხდომილობაზე, რომელსაც შეიცავს $Y\sim y_j$ ხდომილობა (შეტყობინება):

$$I_{y_j\to x_i}=I_{y_j\leftrightarrow x_i}.$$

ინფორმაციათა პირველი ორი ტიპი არაუარყოფითია; უკანასკნელი შეიძლება იყოს როგორც უარყოფითი, ისე დადებითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ყუთში 3 თეთრი და 4 შავი ბურთულაა. ყუთიდან ამოიღეს 4 ბურთულა. სამი მათგანი აღმოჩნდა შავი, ხოლო ერთი—თეთრი. განვსაზღვროთ ინფორმაცია, რომელსაც შეიცავს (მომხდარი) დანაკვირი B ხდომილება A ხდომილების მიმართ — მომდევნო ამოღებული ბურთულა იქნება შავი.

ა მ ო ხ ს ნ ა:

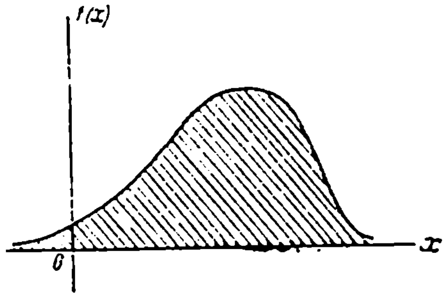
$$I_{B\to A}=\log\frac{P(A|B)}{P(A)}=\log\frac{1/3}{4/7}\approx-0{,}779 \quad (\text{ორობ. ერთ.})$$

18.7. მდგომარეობათა უწყვეტი სიმრავლის მქონე სისტემების ენტროპია და ინფორმაცია

აქამდე ჩვენ განვიხილავდით ფიზიკურ სისტემებს, რომელთა სხვადასხვა მდგომარეობანი x_1, $x_2 \dots x_n$ შესაძლებელი იყო ყველა ჩამოგვეთვალა, ამ მდგომარეობათა ალბათობანი იყვნენ ნულისაგან განსხვავებული რომელიღაც სიდიდეები p_1, $p_2, \dots p_n$. ასეთი სისტემები ანალოგიურია წყვეტილი (დისკრეტული) შემთხვევითი სიდიდეებისა, რომლებიც ღებულობენ x_1, $x_2, \dots, x_n$ მნიშვნელობებს p_1, $p_2, \dots, p_n$ ალბათობებით. პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება სხვა ტიპის ფიზიკური სისტემებიც, რომლებიც უწყვეტ შემთხვევით სიდიდეთა ანალოგიური არიან. ასეთი სისტემების მდგომარეობანი შეუძლებელია გადავნომროთ: ისინი უწყვეტად გადადიან ერთიმეორეში, თანაც თითოეულ ცალკე მდგომარეობას აქვს ალბათობა, რომელიც ნულის ტოლია, ხოლო ალბათობათა განაწილება ხასიათდება რომელიღაც სიმკვრივით. ასეთ სისტემებს უწყვეტ შემთხვევით სიდიდეებთან ანალოგიის მიხედვით ჩვენ დავარქმევთ „უწყვეტებს“, ადრე განხილულისაგან განსხვავებით, რომლებსაც ჩვენ დავარქმევთ „დისკრეტულს“. უწყვეტი სისტემის ყველაზე მარტივი მაგალითია ისეთი სისტემა, რომლის მდგომარეობა აღიწერება ერთი

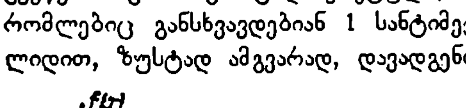
უწყვეტი შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების $f(x)$ სიმკვრივით. უფრო რთულ შემთხვევაში სისტემა აღიწერება რამდენიმე შემთხვევითი X_1, $X_2, \ldots X_s$ სიდიდით, განაწილების $f(x_1, x_2 \ldots, x_s)$ სიმკვრივით. მაშინ იგი შეიძლება განხილულ იქნას, როგორც გაერთიანება $(X_1, X_2 \ldots X_s)$ მარტივ $X_1, X_2, \ldots, X_s$ სისტემებისა.

განვიხილოთ მარტივი X სისტემა, რომელიც განსაზღვრულია ერთი უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდით X, რომლის სიმკვრივეა $f(x)$ (ნახ. 18.7.1). ვცადოთ გავავრცელოთ ამ სისტემაზე ენტროპიის 18.1-ელ პუნქტში შემოტანილი ცნება.



ნახ. 18.7.1.

თავდაპირველად აღვნიშნოთ, რომ „უწყვეტი სისტემის“ ცნება, როგორც „უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის“ ცნება, წარმოადგენს რამდენადმე იდეალიზაციას. მაგალითად, მაშინ, როცა ჩვენ ვიღებთ შემთხვევით აღებულ ადამიანის სიმაღლეს — უწყვეტ შემთხვევით სიდიდედ, ჩვენ ყურადღებას არ ვაქცევთ იმას, რომ ფაქტიურად სიმაღლეს 1 სანტიმეტრზე უფრო ზუსტად არავინ ზომავს და რომ 1 მილიმეტრით განსხვავება ერთიმეორისაგან სიმაღლის ორი მნიშვნელობისა, პრაქტიკულად შეუძლებელია. მიუხედავად ამისა, მოცემული შემთხვევითი სიდიდე ბუნებრივია აღვწეროთ, როგორც უწყვეტი, თუმცა შესაძლებელია აღგვეწერა იგი როგორც დისკრეტული, თუ სიმაღლის იმ მნიშვნელობებს რომლებიც განსხვავდებიან 1 სანტიმეტრზე ნაკლებით, ტოლად ჩავთვლიდით, ზუსტად ამგვარად, დავადგენთ რა გაზომვის სიზუსტის საზღვარს, ე. ი. რომელიღაც Δx მონაკვეთს, რომლის საზღვრებში X სისტემის მდგომარეობანი პრაქტიკულად განურჩეველია, შესაძლებელია მიახლოებით უწყვეტი X სისტემა დავიყვანოთ დისკრეტულზე. ეს ტოლფასია გლუვი $f(x)$ მრუდის, ჰისტოგრამის ტიპის საფეხუროვანი მრუდით შეცვლისა (ნახ. 18.7.2). ამასთან ყოველი უბანი (თანრიგი), რომლის სიგრძეა Δx იცვლება ერთი წერტილი — წარმომადგენლით. მართკუთხედთა ფართობები გამოსახავენ სათანადო თანრიგში



ნახ. 18.7.2.

მოხვედრის ალბათობებს: $f(x_i)\Delta x$. თუ შევთანხმდებით, ჩავთვალოთ სისტემათა მდგომარეობანი, რომლებიც ეთანადებიან ერთ თანრიგს განუსხვავებლად და გავაერთიანებთ მათ ყველას ერთ მდგომარეობაში, მაშინ შეიძლება მიახლოებით განვსაზღვროთ ენტროპია სისტემისა, რომელიც განიხილება Δx-მდე სიზუსტით:

$$
\begin{aligned}
H_{\Delta x}(X) &= -\sum_i f(x_i)\Delta x \log \{f(x_i)\Delta x\} = \\
&= -\sum_i f(x_i)\Delta x \{\log f(x_i) + \log \Delta x\} = \\
&= -\sum_i \{f(x_i) \log f(x_i)\}\Delta x - \log \Delta x \sum_i f(x_i)\, \Delta x. \qquad (18.7.1)
\end{aligned}
$$

საკმაოდ მცირე Δx-სათვის

$$\sum_i \{f(x_i)\log f(x_i)\}\Delta x \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log f(x)dx,$$

$$\sum_i f(x_i)\Delta x \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

და ფორმულა (18.7.1) მიიღებს სახეს:

$$H_{\Delta x}(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log f(x)dx - \log \Delta x. \qquad (18.7.2)$$

შევნიშნავთ, რომ (18.7.2) გამოსახულებაში პირველი წევრი მიღებული იქნა Δx-საგან სრულიად დამოუკიდებელი სისტემის მდგომარეობის განსაზღვრის სიზუსტის ხარისხისაგან. დამოკიდებულია Δx-საგან მხოლოდ მეორე წევრი ($-\log \Delta x$), რომელიც მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, როცა $\Delta x \to 0$. ეს კი ბუნებრივია, რადგან რამდენად ზუსტად გვინდა ჩვენ მოცემული იქნას X სისტემის მდგომარეობა, იმდენად დიდი ხარისხი განუზღვრელობისა უნდა მოვსპოთ და Δx-ის შემოუსაზღვრელი შემცირებით ეს განუზღვრელობა იზრდება აგრეთვე შემოუსაზღვრელად.

ამგვარად, ვირჩევთ რა ჩვენი საზომი ხელსაწყოების ნებისმიერ მცირე Δx მგრძნობელობის უბანს, რომელთა დახმარებით განისაზღვრება ფიზიკური X სისტემის მდგომარეობა, შეიძლება მოინახოს ენტროპია $H_{\Delta x}(X)$, ფორმულით (18.7.2), რომელშიც მეორე წევრი უსასრულოდ იზრდება Δx-ის შემცირებით. თვით ენტროპია $H_{\Delta x}(X)$ გა-

ნსხვავდება ამ უსაზღვროდ ზრდადი წევრისაგან Δx-საგან დამოუკიდებელი სიდიდით

$$H^*(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} (x) \log f(x) dx. \tag{18.7.3}$$

ამ სიდიდეს შეიძლება დავარქვათ უწყვეტი X სისტემის „დაყვანილი ენტროპია“. ენტროპია $H_{\Delta x}(X)$ გამოისახება დაყვანილი ენტროპიით $H^*_{\Delta x}(X)$ ფორმულით

$$H_{\Delta x}(X) = H^*(X) - \log \Delta x \tag{18.7.4}$$

ფარდობა (18.7.4) შეიძლება განვმარტოთ შემდეგნაირად: გაზომვის სიზუსტისაგან დამოკიდებულია ათვლის მხოლოდ დასაწყისი, რომლის დროსაც ხდება ენტროპიის გამოთვლა.

შემდგომში ჩანაწერის გასამარტივებლად ჩვენ გამოვტოვებთ ინდექსს Δx ენტროპიის აღნიშვნისას და დავწერთ უბრალოდ $H(x)$; მარჯვენა ნაწილში Δx -ის არსებობა ყოველთვის აჩვენებს თუ რა სიზუსტეზეა ლაპარაკი.

ფორმულას (18.7.2) ენტროპიისათვის შეიძლება მივცეთ უფრო კომპაქტური სახე, თუ როგორც ჩვენ ვაკეთებდით წყვეტილი სიდიდეებისათვის, ჩავწერთ მას ფუნქციის მათემატიკური ლოდინის სახით, უწინარეს ყოვლისა გადავწერთ (18.7.2) შემდეგი სახით:

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \{ f(x) \Delta x \} dx \tag{18.7.5}$$

ეს არის $-\log \{f(x)\Delta x\}$ ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი შემთხვევით X სიდიდისა, რომლის სიმკვრივეა $f(x)$:

$$H(X) = M[-\log \{f(x) X \Delta\}] \tag{18.7.6}$$

ანალოგიური ფორმა შესაძლებელია მივცეთ $H^*(X)$ სიდიდეს:

$$H^*(X) = M[-\log f(X)] \tag{18.7.7}$$

გადავიდეთ პირობითი ენტროპიის განსაზღვრაზე. დავუშვათ გვაქვს ორი უწყვეტი სისტემა: X და Y ზოგად შემთხვევაში ეს სისტემები დამოუკიდებელია. აღვნიშნოთ $f(x,y)$-ით განაწილების სიმკვრივე გაერთიანებული (X,Y) სისტემის მდგომარეობისათვის: $f(x)$ არის X სისტემის განაწილების სიმკვრივე: $f_2(y)$ არის Y სისტემის განაწილების სიმკვრივე; $f(y|x)$, $f(x|y)$ — პირობითი განაწილების სიმკვრივეები.

თავდაპირველად განვსაზღვროთ კ ე რ ძ ო პ ი რ ო ბ ი თ ი ე ნ ტ რ ო პ ი ა $H(Y|x)$ ე. ი. Y სისტემის ენტროპია იმ პირობით, რომ X

სისტემამ მიიღო გარკვეული x მდგომარეობა. მისთვის ფორმულა იქნება (18.4.2)-ის ანალოგიური, მხოლოდ ნაცვლად პირობითი ალბათობებისა $P(y_j|x_i)$ ჩასმული იქნებიან განაწილების $f(y|x)$ პირობითი კანონები და გაჩნდება შესაკრები $\log \Delta y$:

$$H(Y|x) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(y|x) \log f(y|x) dy - \log \Delta y. \qquad (18.7.8)$$

გადავიდეთ ახლა სრული (საშუალო) პირობით $H(Y|X)$ ენტროპიაზე: ამისათვის უნდა გავასაშუალოთ კერძო პირობითი ენტროპია $H(Y|x)$-ის ყველა მდგომარეობათა მიხედვით მათი ალბათობათა გათვალისწინებით, რომლებიც ხასიათდებიან სიმკვრივით $f_1(x)$:

$$H(Y|X) = -\int\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f(y|x) \log f(y|x) dx dy - \log \Delta y \qquad (18.7.9)$$

ან იმის გათვალისწინებით, რომ

$$f(x, y) = f_1(x) f(y|x),$$

მივიღებთ

$$H(Y|X) = -\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \log f(y|x) \, dx \, dy - \log \Delta y. \qquad (18.7.10)$$

სხვაგვარად ეს ფორმულა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$H(Y|X) = M[-\log f(Y|X)] - \log \Delta y \qquad (18.7.11)$$

ან

$$H(Y|X) = M[-\log \{f(Y|X) \Delta y\}]. \qquad (18.7.12)$$

ამგვარად, განვსაზღვრეთ რა პირობითი ენტროპია, ვაჩვენოთ თუ როგორ გამოიყენება იგი გაერთიანებული სისტემის ენტროპიის განსაზღვრისას. მოვნახოთ ჯერ უშუალოდ გაერთიანებული სისტემის ენტროპია. თუ „მგრძნობელობის უბნებად" X და Y სისტემებისათვის იქნებიან Δx და Δy, მაშინ გაერთიანებული (X და Y) სისტემისათვის მათ როლს ითამაშებს ელემენტარული მართკუთხედი $\Delta x \, \Delta y$; (X, Y) სისტემის ენტროპია იქნება

$$H(X, Y) = M[-\log \{f(X,Y) \, \Delta x \, \Delta y\}] \qquad (18.7.13)$$

ვინაიდან

$$f(x, y) = f_1(x) f(y|x)$$

ამიტომ

$$f(X, Y) = f_1(X) \, f(Y|X) \qquad (18.7.14)$$

ჩავსვათ (18.7.14) გამოსახულებაში (18.7.13):

$$H(X,\ Y)=M[-\log\ f_1(X)-\log\ f(Y|X)-\log\ \Delta x-\log\ \Delta y]=$$
$$=M[-\log\ (f_1(X)\Delta x)]+M[-\log\ \ (f(Y|X)\Delta y)]$$

ან (18.7.6) და (18.7.12) ფორმულებით

$$H(X,\ Y)=H(X)+H(Y|X), \tag{18.7.15}$$

ე. ი. თეორემა რთული სისტემის ენტროპიის შესახებ დარჩება ძალაში უწყვეტი სისტემებისათვისაც, თუ X და Y დამოუკიდებლებია, მაშინ გაერთიანებული სისტემის ენტროპია ტოლია შემადგენელი ნაწილების ენტროპიათა ჯამის:

$$H(X,\ Y)=H(X)+H(Y). \tag{18.7.16}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. უნდა მოვნახოთ უწყვეტი X სისტემის ენტროპია, რომლის ყველა მდგომარეობა რომელიღაც (α. β) უბანზე ერთნაირად ალბათია:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha} & \text{როცა } \alpha<x<\beta,\\ 0 & \text{როცა } x<\alpha \text{ ან } x>\beta.\end{cases}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა:

$$H^*(X)=-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\beta-\alpha}\log\frac{1}{\beta-\alpha}dx=\log(\beta-\alpha);$$

$$H(X)=\log\ \ (\beta-\alpha)-\log\ \ \Delta x$$

$$H(X)=\log\frac{\beta-\alpha}{\Delta x}. \tag{18.7.17}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. მოვნახოთ X სისტემის ენტროპია, რომლის მდგომარეობანი განაწილებულია ნორმალური კანონით:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა:

$$H^*(X)=M[-\log f(X)]=M\left[-\log\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{X^2}{2\sigma^2}}\right\}\right]=$$

$$=M\left[\log(\sqrt{2\pi}\,\sigma)+\frac{X^2}{2\sigma^2}\log e\right]=\log(\sqrt{2\pi}\,\sigma)+\frac{M[X^2]}{2\sigma^2}\log e.$$

მაგრამ

$$M[X^2]=D[X]=\sigma^2,$$

$$H^*(X)=\log(\sqrt{2\pi}\,\sigma)+\frac{1}{2}\log e=\log(\sqrt{2\pi}\,e\sigma)$$

და

$$H(X)=\log(\sqrt{2\pi e}\,\sigma)-\log\Delta x=\log\left[\frac{\sqrt{2\pi e}\,\sigma}{\Delta x}\right]. \qquad (18.7.18)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. თვითმფრინავის მდგომარეობა ხასიათდება სამი შემთხვევითი სიდიდით: სიმაღლით H, სიჩქარის მოდულით V და კუთხით θ, რომელიც ფრენის მიმართულებას განსაზღვრავს. თვითმფრინავის სიმაღლე განაწილებულია თანაბარი სიმკვრივით (h_1, h_2) უბანზე; სიჩქარე V — ნორმალური კანონით მათემატიკური ლოდინით v_0 და საშუალო კვადრატული გადახრით σ_v; კუთხე θ — თანაბარი სიმკვრივით $(0, \pi)$ უბანზე; სიდიდეები H, V θ — დამოუკიდებლებია. მოვნახოთ გაერთიანებული სისტემის ენტროპია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1-ლი მაგალითიდან (ფორმულა (18.7.17)) გვაქვს

$$H(H)=\log\frac{h_2-h_1}{\Delta h}$$

სადაც Δh — „უგრძნობადობის უბანია“ სიმაღლის განსაზღვრისას. რადგანაც შემთხვევითი სიდიდის ენტროპია არ არის დამოკიდებული მისი მათემატიკური ლოდინისაგან, ამიტომ V სიდიდის ენტროპიის განსაზღვრისათვის ვისარგებლებთ ფორმულით (18.7.18)

$$H(V)=\log\left[\frac{\sqrt{2\pi}\,e\sigma_v}{\Delta v}\right].$$

θ სიდიდის ენტროპია

$$H(\theta)=\log(\pi-0)-\log\Delta\theta=\log\frac{\pi}{\Delta\theta}$$

საბოლოოდ გვაქვს

$$H(H, V,\theta)=\log\frac{h_2-h_1}{\Delta h}+\log\frac{\sqrt{2\pi e}\,\sigma_v}{\Delta v}+\log\frac{\pi}{\Delta\theta}$$

ან

$$H(H, V, \theta)=\log\left\{\frac{h_2-h_1}{\Delta h}\cdot\frac{\sqrt{2\pi e}\,\sigma_v}{\Delta v}\quad\frac{\pi}{\Delta\theta}\right\}. \qquad (18.7.19)$$

შევნიშნავთ, რომ ფიგურულ ფრჩხილებში მოთავსებულ თითოეულ თანამამრავლს აქვს ერთიდაიგივე აზრი: იგი უჩვენებს თუ რამდენი „უგრძნობადობის უბანი“ თავსდება მოცემული შემთხვევითი სიდიდისათვის დამახასიათებელ მონაკვეთში. თანაბარი სიმკვრივით განაწილების შემთხვევაში ეს უბანი წარმოადგენს უბრალოდ უბანს შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებისას; ნორმალური განაწილების შემთხვევაში ეს უბანი ტოლია $\sqrt{2\pi e}\,\sigma$, სადაც σ — საშუალო კვადრატული გადახრაა.

ამგვარად, ჩვენ ენტროპიის ცნება გავავრცელეთ უწყვეტ სისტემათა შემთხვევაზე. ანალოგიურად შეგვიძლია გავავრცელოთ ინფორმაციის ცნებაც. ამ დროს განუზღვრელობა, რომელიც დაკავშირებულია ენტროპიის გამოსახულებაში უსასრულოდ ზრდადი შესაკრების არსებობასთან, გვცილდება: ინფორმაციის გამოთვლისას, როგორც ორი ენტროპიის სხვაობისა, ეს წევრები ისპობიან, ამიტომ ინფორმაციის ყველა სახეობები, რომლებიც დაკავშირებული არიან უწყვეტ სიდიდეებთან, აღმოჩნდებიან დამოუკიდებელნი „უგრძნობადობის Δx უბნისაგან“.

გამოსახულება სრული ურთიერთინფორმაციისა, რომელიც მოთავსებულია ორ უწყვეტ სისტემაში X და Y, ანალოგიური იქნება (18.5.4) გამოსახულებისა, მაგრამ თუ შევცვლით ალბათობას განაწილების კანონებით, ხოლო ჯამებს — ინტეგრალებით:

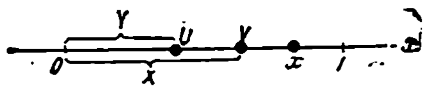
$$I_{Y \leftrightarrow X} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int f(x, y) \log \frac{f(x, y)}{f_1(x, f_2(y)} \, dx \, dy \tag{18.7.20}$$

ან მათემატიკური ლოდინის ნიშნის გამოყენებით

$$I_{Y \leftrightarrow X} = M\left[\log \frac{f(x, y)}{f_1(X) f_2(Y)}\right] \tag{18.7.21}$$

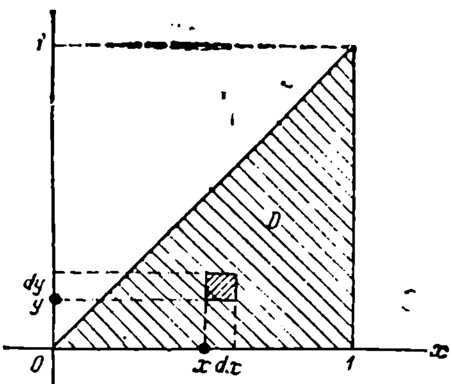
სრული ურთიერთინფორმაცია $I_{Y \leftrightarrow X}$, როგორც ეს დისკრეტულ სისტემათა შემთხვევაში იყო, არის არაუარყოფითი სიდიდე, რომელიც იქცევა ნულად მხოლოდ მაშინ, როცა X და Y სისტემები დამოუკიდებლებია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. მონაკვეთზე (0,1) ამოირჩევა შემთხვევით ერთიმეორისაგან დამოუკიდებლად ორი U და V წერტილი; თითოეული მათგანი განაწილებულია ამ მონაკვეთზე თანაბარი სიმკვრივით. ცდის შედეგად ერთ წერტილთაგანი აღმოჩნდა მარჯვნივ, მეორე მარცხნივ. მარჯვენა წერტილის მდებარეობაზე რამდენ ინფორმაციას იძლევა მარცხენას მდებარეობის ცოდნა?



ნახ. 18.7.3.

ამ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ორი შემთხვევითი U და V წერტილები აბსცისების Ox ღერძზე (ნახ. 18.7.3) აღვნიშნოთ Y-ით აბსცისა იმ წერტილისა, რომელიც აღმოჩნდა მარცხნივ, ხოლო X-ით — აბსცისა იმ წერტილისა, რომელიც აღმოჩნდა მარჯვნივ (ნახ. 17.7.3-ზე მარცხნივ დარჩა U წერტილი, მაგრამ შეიძლებოდა პირიქით). სიდიდეები X და Y განისაზღვრებიან U და V-ს საშუალებით შემდეგნაირად:



ნახ. 18.7.4.

$$Y = \min\{U, V\}; \quad X = \max\{U, V\}.$$

მოვნახავთ სისტემის (X, Y) განაწილების კანონს, რადგანაც $Y < X$ ამიტომ იგი იარსებებს მხოლოდ D არეში, რომელიც დაშტრიხულია (ნახ. 18.7.4.) აღვნიშნოთ $f(x, y)$-ით X, Y სისტემის განაწილების სიმკვრივე და მოვძებნოთ ალბათობის ელემენტი $f(x, y)\,dx\,dy$, ე. ი. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი წერტილი (X, Y) ხვდება ელემენტარულ მართკუთხედში $(x, x+dx; y, y+dy)$. ეს ხდომილობა შეიძლება მოხდეს ორი

ხერხით: ან მარცხნივ აღმოჩნდება წერტილი U, ხოლო მარჯვნივ V, ან პირიქით, მაშასადამე

$$f(x, y)dx\,dy=\varphi(x, y)\,dx\,dy+\varphi(y, x)\,dx\,dy,$$

სადაც $\varphi(u, v)$-თი აღნიშნულია (U, V) სიდიდეთა სისტემის განაწილების სიმკვრივე. მოცემულ შემთხვევაში:

$$\varphi(u, v)=1\left(\begin{matrix}0<u<1\\0<v<1\end{matrix}\right),$$

მაშასადამე,

$$\varphi(x, y)=\varphi(y, x)=1;$$
$$f(x, y)dx\,dy=2dx\,dy$$

$$f(x, y)=\begin{cases}2, & \text{როცა } (x, y)\subset D\\0, & \text{როცა } (x, y)\not\subset D\end{cases}$$

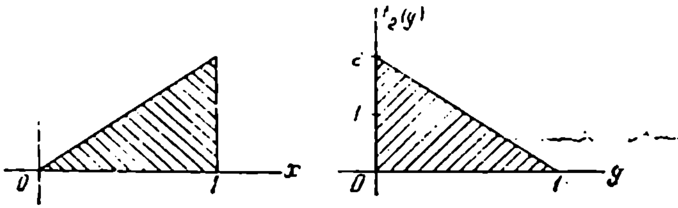
ახლა მოვნახოთ ცალკეულ სიდიდეთა განაწილების კანონები, რომლებიც შედიან სისტემაში:

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy=\int\limits_{0}^{x}2dy=2x, \text{ როცა } 0<x<1;$$

ანალოგიურად

$$f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx=\int\limits_{y}^{1}2dx=2\,(1-y), \text{ როცა } 0<y<1.$$

სიმკვრივეების $f_1(x)$ და $f_2(y)$ გრაფიკი გამოსახულია 18.7.5 ნახაზზე.



ნახ. 18.7.5.

თუ (18.7.20) ფორმულაში ჩავსვამთ $f(x, y)$, $f_1(x)$ და $f_2(x)$-ს: მივიღებთ:

$$I_{Y\leftrightarrow X}=\frac{1}{\ln 2}\iint\limits_{(D)}\ln\frac{1}{2x\,(1-y)}\cdot 2dxdy=$$

$$=\frac{1}{\ln 2}-\left\{\ln 2+\iint\limits_{(D)}2(-\ln x)dx\,dy+\iint\limits_{(D)}2[-\ln(1-y)]dx\,dy\right\}.$$

სიმეტრიის ძალით უკანასკნელი ორი ინტეგრალი ტოლია და

$$I_{Y \leftrightarrow X} = -1 - \frac{4}{\ln 2} \iint\limits_{(D)} \ln x \, dx \, dy =$$

$$= -1 - \frac{4}{\ln 2} \int_0^1 \ln x dx \int_0^x dy = -1 - \frac{2}{\ln 2} \int_0^1 2x \ln x \, dx = \frac{1}{\ln 2} - 1 \approx 0{,}44 \quad \text{(ორ. ერთ.)}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გვაქვს შემთხვევითი X სიდიდე, რომელიც განაწილებულია ნორმალური კანონით და აქვს პარამეტრები $m_x = 0$, σ_x: X სიდიდე იზომება z ცდომილებით, რომელიც აგრეთვე განაწილებულია ნორმალური კანონით, რომლის პარამეტრებია $m_z = 0$, σ_z. ცდომილება Z არ არის დამოკიდებული X-ზე. ჩვენს განკარგულებაშია — გაზომვის შედეგი, ე. ი. შემთხვევითი სიდიდე

$$Y = X + Z.$$

განვსაზღვროთ რამდენ ინფორმაციას შეიცავს X სიდიდეზე Y სიდიდე.

ა მ ო ხ ს ნ ა: ვისარგებლებთ ინფორმაციის გამოსათვლელად (18.7.21) ფორმულით, ე. ი. ვიპოვით მას როგორც მათემატიკურ ლოდინს შემთხვევითი სიდიდისა.

$$U = \log \frac{f(x, y)}{f_1(x) f_2(y)}. \tag{18.7.22}$$

ამისათვის ჯერ გარდავქმნით გამოსახულებას

$$\log \frac{f(x, y)}{f_1(x) f_2(y)} = \log \frac{f_1(x) f(y|x)}{f_1(X) f_2(Y)} = \log \frac{f(y|x)}{f_2(y)}$$

ჩვენს შემთხვევაში

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma^2_x + \sigma^2_z}} e^{-\frac{y^2}{2(\sigma^2_x + \sigma^2 z)}}$$

$$f(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_z} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2_z}} \qquad \text{(იხ. თავი 9.)}$$

გამოსახულება (18.7.22) ტოლია

$$U = \log \frac{\sqrt{\sigma^2_x + \sigma^2_z}}{\sigma_z} + \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{(Y-X)^2}{2\sigma^2_z} - \frac{Y^2}{2(\sigma^2_x + \sigma^2_z} \right] =$$

$$= \log \frac{\sqrt{\sigma^2_x + \sigma^2_z}}{\sigma_z} + \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{Z^2}{2\sigma^2_z} - \frac{Y}{2(\sigma^2_x + \sigma^2_z)} \right]$$

აქედან

$$I_{Y \leftrightarrow X} = M[U] = \log \frac{\sqrt{\sigma^2_x + \sigma^2_z}}{\sigma_z} + \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{M[Z^2]}{2\sigma^2_z} - \frac{M[Y^2]}{2(\sigma^2_x + \sigma^2_z)} \right] \tag{18.7.23}$$

მაგრამ $m_z = m_y = 0$, მაშასადამე

$$\left. \begin{aligned} M[Z^2] &= D[Z] = \sigma^2_z \\ M[Y^2] &= D[Y] = \sigma^2_x \sigma^2_z \end{aligned} \right\} \tag{18.7.24}$$

(18.7.24)-ის ჩასმით (18.7.23)-ში მივიღებთ

$$I_{Y\leftrightarrow X}=\log\frac{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_z^2}}{\sigma_z} \qquad \text{(ორ. ერთ.)}$$[1]

მაგალითად, როცა $\sigma_x=\sigma_z$

$$I_{Y\leftrightarrow X}=\log\sqrt{2}=\frac{1}{2} \qquad \text{(ორ. ერთ)}$$

$$\text{თუკი } \sigma_x=4;\quad \sigma_z=3 \text{ მაშინ } I_{Y\leftrightarrow X}=\log\frac{5}{3}\approx 0{,}74 \quad \text{(ორ. ერთ.)}$$

18.8. შეტყობინებათა კოდირების ამოცანები შენონ-ფენოს კოდი

კავშირის ხაზებით შეტყობინებათა გადაცემისას ყოველთვის გვიხდება ვისარგებლოთ ამა თუ იმ *კოდით* ე. ი. შეტყობინებათა წარმოდგენით ამა თუ იმ სიგნალების სახით. კოდის ყველასათვის ცნობილ მაგალითს წარმოადგენს ტელეგრაფში მიღებული სიტყვიერ შეტყობინებათა გადაცემები მორზეს ანბანით. ამ ანბანის დახმარებით ნებისმიერი ინფორმაცია წარმოგვიდგება ელემენტარული სიგნალის სახით: წერტილი ტირე, პაუზა, გრძელი პაუზა (სიტყვებს შორის).

საერთოდ *კოდირება* ეწოდება ერთი ფიზიკური სისტემის მდგომარეობის ასახვას, რომელიღაც მეორის მდგომარეობით. მაგალითად ტელეფონით ლაპარაკისას ბგერითი სიგნალების კოდირება ხდება ელექტრომაგნიტურ რხევათა სახით, ამის შემდეგ ხელახალი დეკოდირება ხდება, გადაიქცევა, რა ხაზის მეორე ბოლოში ბგერით სიგნალებად. კოდირების ყველაზე მარტივ შემთხვევას წარმოადგენს შემთხვევა, როცა ორივე X და Y სისტემას (გამოსასახი და გამომსახველი) აქვთ შესაძლო მდგომარეობათა სასრული რიცხვი; ასეა საქმე ასოებით ჩაწერილ შეტყობინებათა გადაცემისას, მაგალითად ტელეგრაფირებისას. ჩვენ ვკმაყოფილდებით კოდირების ამ უმარტივესი შემთხვევის განხილვით.

დავუშვათ გვაქვს რომელიღაც x სისტემა (მაგალითად რუსული ალფავიტის ასო), რომელმაც შეიძლება შემთხვევით მიიღოს ერთ-ერთი მდგომარეობათაგანი $x_1, x_2, \ldots, x_n$. ჩვენ გვინდა გამოვსახოთ (კოდირება მოვახდინოთ) მეორე Y სისტემის დახმარებით, რომლის შესაძლო მდგომარეობათაგანია $y_1, y_2, \ldots, y_m$. თუკი $m<n$ (Y სისტემის მდგომარეობათა რიცხვი ნაკლებია x სისტემის მდგომარეობათა რიცხვზე), მაშინ არ შეიძლება X სისტემის ყოველი მდგომარეობის კოდირება Y სისტემის

---

[1] ფორმულა (18.7.20)-ის გამოყენებით შეიძლება მივეღო იგივე შედეგი, მაგრამ უფრო რთული გზით.

ერთადერთი მდგომარეობით. ასეთ შემთხვევაში გვიხდება X სისტემის მდგომარეობა ავსახოთ Y სისტემის მდგომარეობათა კომბინაციით (მიმდევრობით). ასე მაგალითად: მორზეს ანბანში ასოები აისახებიან ელემენტარულ სიმბოლოთა სხვადასხვა კომბინაციებით (წერტილი, ტირე). სწორედ ასეთი კომბინაციების შერჩევას და შესაბამისობის დადგენას გადასაცემ შეტყობინებებსა და ამ კომბინაციებს შორის ეწოდება „კოდირება“ — სიტყვის ვიწრო გაგებით.

კოდები განირჩევიან ელემენტარულ სიმბოლოთა (სიგნალების) რიცხვით, რომლებისგანაც ხდება კომბინაციათა ფორმირება, სხვა სიტყვებით — Y სისტემის შესაძლო მდგომარეობათა რიცხვით. მორზეს ანბანში ასეთი ელემენტარული სიმბოლო ოთხია (წერტილი, ტირე, მოკლე პაუზა, გრძელი პაუზა). სიგნალების გადაცემა შეიძლება განხორციელდეს სხვადასხვა ფორმით: (სინათლის ფეთქვა) სხვადასხვა ხანგრძლივობის ელექტროდენის გაშვებით, ბგერითი სიგნალები და ა. შ. კოდი ორი ელემენტარული სიმბოლოთი (0, 1) იწოდება, როგორც ო რ ო ბ ი თ ი. ორობითი კოდები ფართოდ გამოიყენება პრაქტიკაში, განსაკუთრებით ელექტრონულ-ციფრულ გამომთვლელ მანქანებში ინფორმაციის შესაყვანად, რომლებიც მუშაობენ გამოთვლის ორობითი სისტემით.

ერთი და იგივე შეტყობინება შესაძლებელია კოდირებულ იქნას სხვადასხვა ხერხით. ისმის საკითხი: კოდირების ოპტიმალურ (ყველაზე ხელსაყრელ) ხერხებზე. ბუნებრივია ყველაზე ხელსაყრელად ჩაითვალოს ისეთი კოდი, რომლის დროსაც შეტყობინებათა გადაცემისას იხარჯება მინიმალური დრო. თუ ყოველი ელემენტარული სიმბოლოს (მაგალითად, 0 ანდა 1) გადაცემაზე იხარჯება ერთი და იგივე დრო, მაშინ ოპტიმალური იქნება ისეთი კოდი, რომლის დროსაც მოცემული სიგრძის შეტყობინების გადაცემაზე დახარჯული იქნება ელემენტარულ სიმბოლოთა მინიმალური რაოდენობა.

დავუშვათ, რომ ჩვენს წინაშე დასმულია ამოცანა:
კოდირებულ იქნას, ორობითი კოდით რუსული ანბანის ასოები ისე, რომ თითოეულ ასოს შეესაბამებოდეს ელემენტარული 0 და 1 სიმბოლოების განსაზღვრული კომბინაცია და რომ საშუალო რიცხვი ამ სიმბოლოებისა ტექსტის ასოზე იყოს მინიმალური.

განვიხილოთ რუსული ანბანის 32 ასო: **а, б, в, г, д, е, ж, з, и, й, к, л, м, н, о, п, р, с, т, у, ф, х, ц, ч, ш, щ, ъ, ь, ы, э, ю, я** და სიტყვებს შორის შუალედი, რომელსაც ჩვენ აღვნიშნავთ **«—»** თუკი, როგორც ეს მიღებულია ტელეგრაფში, არ გავარჩევთ ასოებს **ь,ъ** (ეს არ გამოიწვევს სხვადასხვაგვარ წაკითხვას), მაშინ მიიღება 32 ასო: **а, б, в, г, д, е, ж, з, и, й, к, л, м, н, о, п, р, с, т, у, ф, х, ц, ч, ш, щ, (ъ, ь) ы, э, ю, я «—»**

პირველი, რასაც ვიფიქრებთ ეს არის ასოთა რიგის შეუცვლელად გადანომრვა, როცა მივაწერთ მათ ნომრებს 0-დან 31-მდე. შემდეგომ გადაყვანით ნუმერაციისა თვლის ორობით სისტემაზე. ორობითი სისტემა ეს ისეთია, რომელშიაც სხვადასხვა თანრიგის ერთეულები წარმოადგენენ ორის სხვადასხვა ხარისხებს. მაგალითად: ათობითი რიცხვი 12 გამოისახება შემდეგი სახით:

$$12=1\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0.$$

და ორობით სისტემაში ჩაიწერება, როგორც 1100. ათობითი რიცხვი

$$25=1\cdot2^4+1\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0$$

და ორობით სისტემაში ჩაიწერება 11001. თითოეული 0, 1, 2, 31 რიცხვებიდან შეიძლება გამოსახული იქნას ხუთნიშნა ორობითი რიცხვით, მაშინ მივიღებთ შემდეგ კოდს:

а ~00000
б ~00001
в ~00010
г ~00011

я ~11110
«—» 11111

ამ კოდში თითოეული ასოს გამოსახვაზე იხარჯება ზუსტად 5 ელემენტარული სიმბოლო. ისმება კითხვა, არის თუ არა ეს უმარტივესი კოდი ოპტიმალური და ხომ არ შეიძლება შევადგინოთ სხვა კოდი, რომელშიც ერთ ასოზე საშუალოდ მოდიოდეს ნაკლები ელემენტარული სიმბოლოები?

მართლაც, ჩვენს კოდში ყოველი ასოს გამოსახვაზე — ხშირად შემხვედრ «а», «е», «о» და იშვიათად შემხვედრ «щ», «э», «ф» ასოებზე იხარჯება ერთი და იგივე რაოდენობა ელემენტარული სიმბოლოებისა. ცხადია, გონივრული იქნებოდა, რომ ხშირად შემხვედრი ასოები კოდირებული ყოფილიყო სიმბოლოთა ნაკლები რიცხვით, ხოლო იშვიათად შემხვედრი — მეტით.

იმისათვის, რომ შევადგინოთ ასეთი კოდი, ცხადია უნდა ვიცოდეთ რუსულ ტექსტში ასოთა სიხშირე. ეს სიხშირეები მოყვანილია ცხრილში 18.8.1. ასოები ცხრილში განლაგებულია სიხშირეთა კლებადი რიგით.

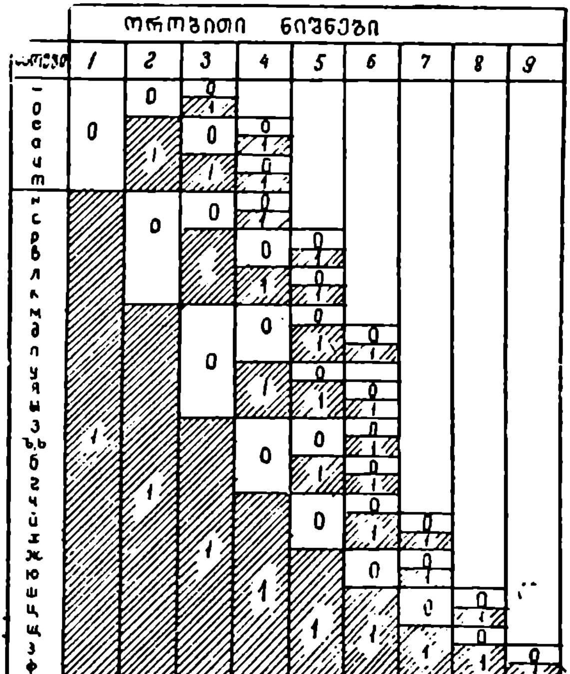
ცხრილი 18.4.1

ასო	სიხშირე	ასო	სიხშირე	ასო	სიხშირე	ასო	სიხშირე
»—»	0,145	р	0,041	я	0,019	х	0,009
о	0,095	в	0,039	ы	0,016	ж	0,008
е	0,074	л	0,036	з	0,015	ю	0,007
а	0,064	к	0,029	ъ,ь	0,015	ш	0,006
и	0,064	м	0,026	б	0,015	ц	0,004
т	0,056	д	0,026	г	0,014	щ	0,003
н	0,056	п	0,024	ч	0,013	э	0,003
с	0,047	у	0,021	й	0,010	ф	0,002

ვსარგებლობთ რა ასეთი ცხრილით, ინფორმაციის რაოდენობასთან დაკავშირებულ მოსაზრებათა საფუძველზე შესაძლებელია შევადგინოთ ყველაზე ეკონომიური კოდი. ცხადია კოდი იქნება ყველაზე ეკონომიური, როცა თითოეული ელემენტარული სიმბოლო გადასცემს მაქსიმალურ ინფორმაციას.

განვიხილოთ ელემენტარული სიმბოლო (ე. ი. მისი გამომსახველი სიგნალი), როგორც ფიზიკური სისტემა ორი შესაძლო მდგომარეობით: 0 და 1. ინფორმაცია, რომელსაც იძლევა ეს სიმბოლო ტოლია სისტემის ენტროპიისა და მაქსიმალურია იმ შემთხვაში, როცა ორივე მდგომარეობანი ტოლალბათია; ამ შემთხვევაში ელემენტარული სიმბოლო გადასცემს ინფორმაციას 1 (ორ. ერთ). ამიტომ ოპტიმალური კოდირების საფუძვლად იქნება მოთხოვნა, რომ ელემენტარული სიმბოლოები კოდირებულ ტექსტში გვხვდებოდეს საშუალოდ ერთნაირი სიხშირით.

ცხრილი 18.8.2



აქ ვადმოვცემთ კოდის აგების ხერხს, რომელიც აკმაყოფილებს წაყენებულ პირობას. ეს ხერხი ცნობილია „შენონ-ფენოს კოდის" სახელწოდებით. მისი იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ საკოდირებელი სიმბოლოები (ასოები ან ასოთა კომბინაციები) გაიყოფიან ორ -დაახლოებით თანაბრად საალბათო ჯგუფებად: სიმბოლოთა პირველი ჯგუფისათვის კომბინაციის პირველ ადგილას დაისმის 0 (ორობითი რიცხვის პირველი ნიშანი, რომელიც გამოსახავს სიმბოლოს); მეორე ჯგუფისათვის — 1. შემდეგ თითოეული ჯგუფი ხელახლა იყოფა ორ დაახლოებით თანაბრად საალბათო ქვეჯგუფებად; პირველი ქვეჯგუფის სიმბოლოებისათვის მეორე ადგილზე დაისმის ნული, მეორე ქვეჯგუფისათვის — ერთიანი და ა. შ.

მოვახდინოთ დემონსტრაცია შენონ-ფენოს კოდის აგების პრინციპისა, რუსული ალფავიტის მასალაზე (18.8.1) ავთვალოთ პირველი ექვსი ასო («—»-დან T-მდე).

შევკრიბოთ მათი ალბათობები (სიხშირეები), მივიღებთ 0,498. ყველა დანარჩენ ასოებზე H-დან Ф-მდე მოვა დაახლოებით ისეთივე ალბათობა 0,502. პირველ ექვს ასოს («—»-დან «T»-მდე) პირველ ადგილზე ექნებათ ორობითი ნიშანი 0. დანარჩენ ასოებს («H»-დან «Ф»-მდე) პირველ ადგილზე ექნებათ ერთიანი. შემდეგ კვლავ დავყოთ პირველი ჯგუფი ორ დაახლოებით თანაბრად საალბათო ქვეჯგუფად: «—»-დან «O»-მდე და «e»-დან «T»-მდე. პირველი ქვეჯგუფის ყოველი ასოსათვის მეორე ადგილზე დავსვათ ნული, ხოლო მეორე ქვეჯგუფისა — ერთიანი. პროცესს გავაგრძელებთ იქამდე, სანამ ყოველ ქვეგანაყოფში არ აღმოჩნდება მხოლოდ ერთი ასო, რომელიც იქნება კოდირებული გარკვეული ორობითი რიცხვით. კოდის აგების მექანიზმი ნაჩვენებია 18.2.8-ე ცხრილში, ხოლო თვით კოდი მოყვანილია 18.8.3-ე ცხრილში.

ცხრილი 18.8.3

ასო	ორობითი რიცხვი	ასო	ორობითი რიცხვი	ასო	ორობითი რიცხვი
«—»	000	к	10111	ч	111100
о	001	м	11000	й	1111010
е	0100	д	110010	х	1111011
а	0101	п	110011	ж	1111100
и	0110	у	110100	ю	1111101
т	0111	я	110110	ш	11111100
н	1000	ы	110111	ц	11111101
с	1001	з	111000	щ	11111110
р	10100	ъ. ь	111001	э	111111110
в	10101	б	111010	ф	111111111
л	10110	г	111011		

18.8.3-ე ცხრილის მეშვეობით შეიძლება მოვახდინოთ კოდირება და დეკოდირება ყოველგვარი შეტყობინების.

მაგალითის სახით ჩავწეროთ ორობითი კოდით შემდეგი ფრაზა: „Теория информации".

0111010000110100011011011000001101000111111111001101001100001011111110101100110

შევნიშნავთ, რომ არ არის აუცილებელი განვაცალკევოთ ასოები ერთიმეორისაგან სპეციალური ნიშნებით, რადგანაც უამისოდაც დეკოდირება სწარმოებს ცალსახად. ამაში შეიძლება დავრწმუნდეთ, თუ 18.8.2. ცხრილის დახმარებით მოვახდენთ შემდეგი ფრაზის დეკოდირებას:

1001110011001100100111101000010111001110010011010100001101010101100001101101

(„способ кодирования").

ოღონდ აუცილებელია აღვნიშნოთ, რომ ნებისმიერი შეცდომა კოდირებისას (ნიშნების 0 და 1 შემთხვევითი არევა) ასეთი კოდის შემთხვევაში დამღუპველია, რადგანაც შეცდომის შემდეგ ტექსტის დეკოდირება ხდება შეუძლებელი. ამიტომ კოდირების მოცემული პრინციპი შესაძლებელია რეკომენდებულ იქნას მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა შეცდომები კოდირებისას და შეტყობინებათა გადაცემისას პრაქტიკულად გამორიცხულია. იბადება ბუნებრივი კითხვა: წარმოადგენს კი ჩვენს მიერ შედგენილი კოდი შეცდომათა არ არსებობისას ნამდვილად ოპტიმალურს? იმისათვის, რომ ვუპასუხოთ ამ კითხვაზე, მოვნახოთ საშუალო ინფორმაცია, რომელიც მოდის ერთ ელემენტარულ სიმბოლოზე (0 და 1) და შევადაროთ იგი მაქსიმალურად შესაძლო ინფორმაციას, რომელიც ტოლია ერთი ორობითი ერთეულის. ამისათვის ჯერ მოვნახოთ საშუალო ინფორმაცია, რომელსაც შეიცავს გადასაცემი ტექსტის ერთი ასო, ე. ი. ერთ ასოზე ენტროპია:

$$H(\sigma) = -\sum_{i=1}^{32} p_i \log p_i = \sum_{i=1}^{32} \eta(p_i),$$

სადაც p_i — ალბათობაა იმისა, რომ ასო მიიღებს განსაზღვრულ მდგომარეობას («—», о, е, а, ... ф).

ცხრილიდან 18.8.1, გვაქვს:

$$H(\sigma) = \eta(0,145) + \eta(0,095) + \ldots + \eta(0,003) + \eta(0,002) \approx 4,42$$

(ორობითი ერთეული ტექსტის ერთ ასოზე).

18.8.2 ცხრილით განვსაზღვრავთ ელემენტარულ სიმბოლოთა საშუალო რიცხვს ერთ ასოზე:

$$n_{\text{საშ}}=3\cdot 0,145+3\cdot 0,095+4\cdot 0,074+\ldots+9\cdot 0,003+ +9\cdot 0,002=4,45.$$

$H(\sigma)$ ენტროპიის $n_{\text{საშ}}$-ზე გაყოფით ვღებულობთ ინფორმაციას ერთ ელემენტარულ სიმბოლოზე

$$I_1=\frac{4,42}{4,45}\approx 0,994 \quad (\text{ორ. ერთ.})$$

ამგვარად, ინფორმაცია ერთ სიმბოლოზე ფრიად ახლოსაა თავის ზედა ზღვართან 1, ხოლო ჩვენს მიერ შერჩეული კოდი ფრიად ახლოსაა ოპტიმალურთან. ვრჩებით რა ასოებით კოდირების ამოცანის ფარგლებში, ჩვენ არაფერი უკეთესის მიღება არ შეგვიძლია.

შევნიშნავთ, რომ უბრალოდ ასოთა ორობითი ნომრებით კოდირებისას ჩვენ გვექნებოდა ყოველი ასოს გამოსახვა ხუთი ორობითი ნიშნით და ინფორმაცია ერთ სიმბოლოზე იქნებოდა

$$I_1=\frac{4,42}{5,00}=0,884 \quad (\text{ორ. ერთ.})$$

ე. ი. შესამჩნევად ნაკლები, ვიდრე ოპტიმალურ ასოით კოდირებისას. ამასთან უნდა შევნიშნოთ, რომ კოდირება „ასოების მიხედვით“ საერთოდ არ წარმოადგენს ეკონომიურს. საქმე იმაშია, რომ ნებისმიერი გააზრებული ტექსტის მეზობელ ასოებს შორის ყოველთვის გვაქვს დამოკიდებულება. მაგალითად, რუსულ ენაში ხმოვანი ასოს შემდეგ არ შეიძლება იდგეს «ъ» ან «ь»; შიშინა ასოებს შორის არ შეიძლება იდგეს «я» ან «ю»; ერთიმეორის მიყოლებით რამდენიმე თანხმოვნის შემდეგ იზრდება ხმოვნების ალბათობა და ა. შ.

ჩვენ ვიცით, რომ დამოკიდებულ სისტემათა გაერთიანებისას ჯამური ენტროპია ნაკლებია ცალკეულ სისტემათა ენტროპიათა ჯამზე. მაშასადამე ინფორმაცია გადაცემული დაკავშირებული ტექსტის მონაკვეთით ყოველთვის ნაკლებია, ვიდრე ინფორმაცია ერთ სიმბოლოზე, გამრავლებული სიმბოლოთა რიცხვზე. ამ გარემოების გათვალისწინებით უფრო ეკონომიური კოდი შეიძლება ავაგოთ თუ არ მოვახდენთ კოდირებას ყოველ ასოზე ცალ-ცალკე, არამედ ასოთა მთელ „ბლოკებზე“. მაგალითად რუსულ ტექსტში აზრი აქვს მთლიანად კოდირებას ზოგიერთ ხშირად შემხვედრ ასოთა კომბინაციისა, როგორიცაა «тся», «ает», «ние» და ა. შ. საკოდირებელი ბლოკები განლაგდება კლებად სიხშირეთა მიხედვით, როგორც ასოები ცხრილში 18.8.1, ხოლო ორობითი კოდირება ხორციელდება იმავე პრინციპითვე.

მთელ რიგ შემთხვევებში გონივრული აღმოჩნდება კოდირება მოვახდინოთ არა ასოთაგან შემდგარი ბლოკებისა, არამედ მთელი გააზრებული ტექსტის ნაწილებისა, მაგალითად, ტელეგრაფის განსატვირთავად წინასადღესასწაულო დღეებში მიზანშეწონილია კოდირება პირობითი ნომრებით მთელი სტანდარტული ტექსტებისა, როგორიცაა: «გილოცავთ ახალ წელს, გისურვებთ ჯანმრთელობას, წარმატებებს მუშაობაში».

ჩვენ არ შევჩერდებით სპეციალურად ბლოკების კოდირების მეთოდებზე, ვკმაყოფილდებით იმით, რომ ჩამოვაყალიბებთ მასთან დაკავშირებულ შენონის თეორემას.

ნახ. 18.8.1.

დავუშვათ გვაქვს ინფორმაციის X წყარო და მიმღები Y, რომლებიც დაკავშირებულია დამაკავშირებელი K არხით (ნახ. 18.8.1).

ცნობილია ინფორმაციის $H_1(X)$ წყაროს მწარმოებლურობა ე. ი. ინფორმაციის ორობითი ერთეულის საშუალო რაოდენობა, რომელიც შემოდის წყაროდან დროის ერთეულში (რიცხობრივად იგი ტოლია შეტყობინების საშუალო ენტროპიისა, რომელიც გადაიცემა წყაროს მიერ დროის ერთეულში).

დავუშვათ გარდა ამისა, რომ ცნობილია არხის გ ა მ ტ ა რ უ ნ ა რ ი ა ნ ო ბ ა C_1 ე. ი. ინფორმაციის მაქსიმალური რაოდენობა (მაგალითად ორობითი ნიშნებისა 0, ან 1), რომელიც შეუძლია გადასცეს არხს დროის იმავე ერთეულში. იბადება კითხვა: როგორი უნდა იყოს არხის გამტარუნარიანობა, რომ მან „თავი გაართვას" თავის ამოცანას, ე. ი. რომ ინფორმაცია წყაროდან მიმღებამდე შემოდიოდეს შეუფერხებლად? პასუხს ამ კითხვაზე იძლევა შენონის 1 თეორემა. ჩამოვაყალიბებთ მას დაუმტკიცებლად.

შენონის 1 თეორემა

თუ კავშირის არხის გამტარუნარიანობა C_1 მეტია ინფორმაციის წყაროს ენტროპიაზე დროის ერთეულში

$$C_1>H_1(X),$$

მაშინ ყოველთვის შეიძლება კოდირება საკმაოდ დიდი შეტყობინებისა, ისე, რომ იგი კავშირის არხის საშუალებით გადაიცემოდეს შეფერხების გარეშე.

თუკი პირიქით

$$C_1<H_1(X).$$

მაშინ ინფორმაციის გადაცემა შეფერხების გარეშე შეუძლებელია.

18.9. ინფორმაციათა გადაცემა დამახინჯებებით. დაბრკოლებებიანი არხის გამტარუნარიანობა

წინა პუნქტში ჩვენ განვიხილეთ ინფორმაციათა კოდირებასთან და კავშირის არხით გადაცემასთან დაკავშირებული საკითხები იდეალურ შემთხვევაში, როცა ინფორმაციის გადაცემის პროცესი ხორციელდება შეცდომათა გარეშე. სინამდვილეში ამ პროცესს თან ახლავს შეცდომები (დამახინჯებები). გადაცემის არხს, რომელშიც შესაძლოა დამახინჯებანი, ეწოდება *დაბრკოლებებიანი არხი* (ან ხმაურიანი არხი). კერძო შემთხვევაში შეცდომები წარმოიშობა თვით კოდირების პროცესში და მაშინ მაკოდირებელი მოწყობილობა შეიძლება განხილულ იქნას, როგორც დაბრკოლებებიანი არხი.

სავსებით ცხადია, რომ დაბრკოლებათა არსებობა იწვევს ინფორმაციის კარგვას. დაბრკოლებათა არსებობის პირობებში, რომ მიმღებში მივიღოთ ინფორმაციის მოთხოვნილი მოცულობა, აუცილებელია მივიღოთ სპეციალური ზომები. ერთერთ ასეთ ზომათაგანს წარმოადგენს გადასაცემ შეტყობინებებში ე. წ. „მოჭარბებულობის“ შეყვანა; ამ დროს ინფორმაციის წყარო გამოსცემს აშკარად მეტ სიმბოლოებს, ვიდრე ეს იქნებოდა საჭირო დაბრკოლებათა არ არსებობის შემთხვევაში. ერთ-ერთი ფორმათაგანი მოჭარბებულობის შეყვანისა — შეტყობინების განმეორებაა უბრალოდ. ასეთი ხერხით სარგებლობენ მაგალითად ტელეფონით ცუდი სმენადობისას, იმეორებენ რა ყოველ შეტყობინებას ორჯერ. მეორე საერთოდ ცნობილი ხერხი გადაცემის საიმედოობისა მდგომარეობს სიტყვის გადაცემაში „ასოებით“ — როცა ყოველი ასოს ნაცვლად გადაიცემა კარგად ცნობილი სიტყვა (სახელი), რომელიც იწყება ამ ასოთი.

შევნიშნავთ, რომ ყველა ცოცხალ ენას ბუნებრივად გააჩნია, რამდენადმე მოჭარბებულობა. ეს მოჭარბებულობა ხშირად გვეხმარება აღვადგინოთ „შეტყობინების აზრით“ სწორი ტექსტი. აი რატომაა, რომ დამახინჯებები ტელეგრამის ასოებისა, რომელსაც არაიშვიათად ვხვდებით, საკმაოდ იშვიათად იწვევენ ინფორმაციის ნამდვილ კარგვებს. ჩვეულებრივ ხერხდება გასწორდეს დამახინჯებული სიტყვა, ვსარგებლობთ რა მხოლოდ ერთით—ენის თვისებებით. ეს არ მოხდებოდა მოჭარბებულობის არ არსებობის შემთხვევაში. ენის მოჭარბებულობის ზომად გამოიყენება სიდიდე

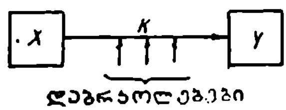
$$U = 1 - \frac{H_1}{\log n}, \qquad (18.9.1)$$

სადაც H_i — საშუალო ფაქტიური ენტროპიაა, მოსული ერთ გადასაცემ სიმბოლოზე (ასოზე), რომელიც გამოთვლილია ტექსტის საკმაოდ

დიდი ნაწყვეტებისათვის, სიმბოლოთა შორის დამოკიდებულების გათვალისწინებით. n — რიცხვი გამოყენებული სიმბოლოებისა (ასოებისა), $\log n$ მოცემულ პირობებში მაქსიმალურად შესაძლო ენტროპიაა ერთ გადაცემულ სიმბოლოზე, რომელიც იქნებოდა, რომ ყველა სიმბოლოები ყოფილიყვნენ ტოლალბათნი და დამოუკიდებელნი.

გაანგარიშებანი, რომელიც ჩატარებულია ყველაზე გავრცელებულ ევროპული ენების მასალაზე, გვიჩვენებენ, რომ მათი მოჭარბებულობა აღწევს 50%-ს და მეტს (ე. ი. უხეშად რომ ვთქვათ გადაცემული სიმბოლოების 50% წარმოადგენენ ზედმეტს და შეიძლებოდა არ გადაცემულიყო, თუკი არ იარსებებდა დამახინჯების საფრთხე). თუმცა ცნობათა უშეცდომო გადაცემისათვის ენის ბუნებრივი მოჭარბებულობა შეიძლება აღმოჩნდეს, როგორც ზომაზე მეტი, ისე არასაკმარისი. ყველაფერი ეს დამოკიდებულია იმისაგან. თუ რა სიდიდისაა დამახინჯების საფრთხე („დაბრკოლებათა დონე") კავშირის არხში.

ინფორმაციის თეორიის მეთოდების დახმარებით შეიძლება დაბრკოლებათა თითოეული დონისათვის მოიძებნოს ინფორმაციის წყაროს მოჭარბებულობის საჭირო ხარისხი. იგივე მეთოდები გვეხმარებიან შევიმუშაოთ სპეციალური დაბრკოლებამდგრადი კოდი (კერძოდ ე. წ. თვით მაკორექტირებელი კოდი) ამ ამოცანების გადასაწყვეტად უნდა შევეძლოს გავითვალისწინოთ დანაკარგები არხში, რომელიც დაკავშირებულია დაბრკოლებათა არსებობაზე. განვიხილოთ რთული სისტემა, რომელიც შედგება ინფორმაციის X წყაროსაგან, კავშირის K-არხისაგან და Y მიმღებისაგან (ნახ. 18.9.1). ინფორმაციის წყარო წარმოადგენს ფიზიკურ X სისტემას, რომელსაც აქვს n შესაძლო მდგომარეობანი:



ნახ. 18.9.1.

$$x_1,\ x_2, \dots, x_n$$

ალბათობებით

$$p_1,\ p_2, \dots, p_n$$

განვიხილოთ ეს მდგომარეობანი, როგორც ელემენტარული სიმბოლოები, რომლებიც შეიძლება X წყარომ K არხით გადასცეს Y მიმღებს. ინფორმაციის რაოდენობა ერთ სიმბოლოზე, რომელსაც იძლევა წყარო, ტოლი იქნება ენტროპიისა ერთ სიმბოლოზე.

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log\ p_i.$$

თუ შეტყობინებათა გადაცემისას არ იქნებოდა შეცდომები, მაშინ ინფორმაციის რაოდენობა, რომელსაც შეიცავს Y სისტემა X-ის მიმართ,

ტოლი იქნებოდა X სისტემის ენტროპიისა. შეცდომათა არსებობისას იგი იქნებოდა ნაკლები:

$$I_{Y\leftrightarrow X}=H(X)-H(X|Y).$$

ბუნებრივია განვიხილოთ პირობითი ენტროპია $H(X|У)$, როგორც ინფორმაციის დანაკარგი ერთ ელემენტარულ სიმბოლოზე. რომელიც დაკავშირებულია დაბრკოლებათა არსებობასთან.

შეგვეძლება რა განსაზღვრა ინფორმაციის დანაკარგებისა არხში, რომელიც მოდის ერთ ელემენტარულ სიმბოლოზე, რომელიც გადაცემულია ინფორმაციის წყაროს მიერ, შეიძლება განვსაზღვროთ დაბრკოლებებიანი არხის გამტარუნარიანობა, ე. ი. მაქსიმალური რაოდენობა ინფორმაციისა, რომელიც შეუძლია გადასცეს არხმა დროის ერთეულში.

ვიგულისხმოთ, რომ არხს შეუძლია გადასცეს დროის ერთეულში k ელემენტარული სიმბოლო. დაბრკოლებათა არ არსებობისას არხის გამტარუნარიანობა იქნებოდა ტოლი

$$C=k\log n. \tag{18.9.2}$$

ვინაიდან ინფორმაციის მაქსიმალური რაოდენობა, რომელსაც შეიძლება შეიცავდეს ერთი სიმბოლო, ტოლია $\log n$, ხოლო ინფორმაციის მაქსიმალური რაოდენობა, რომელსაც შეიძლება შეიცავდეს k სიმბოლო ტოლია $k\log n$ და იგი მას აღწევს, როცა სიმბოლოები გამოჩნდებიან ერთიმეორისაგან დამოუკიდებლად.

ახლა განვიხილოთ დაბრკოლებებიანი არხი. მისი გამტარუნარიანობა განისაზღვრება, როგორც

$$C=k\max I^{(1)}_{Y\to X} \tag{18.9.3}$$

სადაც $\max I^{(1)}_{Y\to X}$ არის მაქსიმალური ინფორმაცია ერთ სიმბოლოზე, რომელიც შეუძლია არხს გადასცეს დაბრკოლებათა არსებობის შემთხვევაში.

განსაზღვრა ამ მაქსიმალური ინფორმაციისა ზოგად შემთხვევაში საკმაოდ რთული საქმეა, რადგან იგი დამოკიდებულია, თუ როგორ და როგორი ალბათობებით მახინჯდებიან სიმბოლოები, ხომ არ ხდება მათი არევა ან უბრალოდ რომელიმე სიმბოლოს გამოვარდნა, ხომ არ ხდება სიმბოლოების დამახინჯება ერთიმეორისაგან დამოუკიდებლად და ა. შ.

თუმცა უმარტივეს შემთხვევებისათვის არხის გამტარუნარიანობის გამოთვლა შედარებით იოლად ხერხდება.

განვიხილოთ მაგალითად ასეთი ამოცანა. კავშირის K არხი გადასცემს ინფორმაციის X წყაროდან $У$ მიმღებს ელემენტარულ სიმბოლოებს 0 და 1, რომელთა რაოდენობაა k დროის ერთეულში. გადაცემის პრო-

ცესში ყოველი სიმბოლო, სხვებისაგან დამოუკიდებლად μ ალბათობით შეიძლება დამახინჯებულ იქნას (ე. ი. შეცვლილ იქნას საწინააღმდეგოთი). საჭიროა მოინახოს არხის გამტარუნარიანობა.

განვსაზღვროთ ჯერ მაქსიმალური ინფორმაცია ერთ სიმბოლოზე, რომელიც შეიძლება გადასცეს არხმა. დაუშვათ წყარო გადასცემს სიმბოლოებს 0 და 1, p და $1-p$ ალბათობებით, მაშინ წყაროს ენტროპია იქნება

$$H(X)=-p\ \log p-(1-p)\ \log\ (1-p).$$

განვსაზღვროთ ინფორმაცია $I^{(1)}_{Y\to X}$, ერთ ელემენტარულ სიმბოლოზე:

$$I^{(1)}_{Y\to X}=H(Y)-H(Y|X)$$

იმისათვის, რომ მოვძებნოთ სრული პირობითი ენტროპია $H(Y|X)$, ჯერ ვიპოვოთ კერძო პირობითი ენტროპიები: $H(Y|x_1)$ (Y სისტემის ენტროპია, როცა X სისტემამ მიიღო x_1 მდგომარეობა) და $H(Y|x)$ (ენტროპია Y სისტემისა იმ პირობით, როცა X სისტემამ მიიღო მდგომარეობა x_2). გამოვთვალოთ $H(Y|x_1)$; ამისათვის დავუშვათ, რომ გადაცემულია ელემენტარული სიმბოლო 0. ვიპოვოთ პირობითი ალბათობანი იმისა, რომ ამ დროს Y სისტემა იმყოფება $y_1=0$ და $y_2=1$ მდგომარეობაში პირველი მათგანი ტოლია იმის ალბათობისა, რომ სიგნალი არ არის არეული:

$$P(y_1|x_1)=1-\mu;$$

მეორე—იმის ალბათობისა, რომ სიგნალი არეულია:

$$P(y_2|x_1)=\mu.$$

პირობითი ენტროპია $H\ (Y|x_1)$ იქნება

$$H(Y|x_1)=-\sum_{i=1}^{2}P(y_i|x_1)\log P(y_i|x_1)=$$

$$=-(1-\mu)\ \log\ (1-\mu)-\mu\ \log\ \mu.$$

ვიპოვოთ ახლა Y სისტემის პირობითი ენტროპია იმ პირობით, რომ $X\sim$ $\sim x_2$ (გადაცემულია სიგნალი ერთიანი):

$$P(y_1|x_2)=\mu;\quad P(y_2|x_2)=1-\mu,$$

საიდანაც

$$H(Y|x_2)=-\mu\log\ \mu-(1-\mu)\log\ (1-\mu).$$

ამგვარად,

$$H(Y|x_1)=H(Y|x_2)=-\mu\log\mu-(1-\mu)\ \log\,(1-\mu).\qquad(18.9.4)$$

სრული პირობითი ენტროპია $H(Y|X)$ მიიღება, თუკი გავასაშუალებთ პირობით ენტროპიებს $H(Y|x_1)$ და $H(Y|x_2)$ x_1, x_2 მნიშვნელობათა p და

$1-p$ ალბათობების გათვალისწინებით. ვინაიდან კერძო პირობითი ენტროპიები ტოლია, ამიტომ

$$H(Y|X)=-\mu\log\ \mu-(1-\mu)\log(1-\mu).$$

ჩვენ მივიღეთ შემდეგი დასკვნა: **პირობითი ენტროპია $H(Y|X)$ სრულებით არ არის დამოკიდებული, თუ როგორი ალბათობებით p, $1-p$ გვხვდებიან 0; 1 სიმბოლოები გადასაცემ შეტყობინებაში, ხოლო დამოკიდებულია შეცდომის μ ალბათობისაგან.**

გამოვთვალოთ ერთი სიმბოლოთი გადაცემული სრული ინფორმაცია:

$$\begin{aligned} I^{(1)}_{Y\to X} &= H(Y)-H(Y|X)= \\ &= \{-r\ \log\ r-(1-r)\ \log\ (1-r)\}- \\ &- \{-\mu\ \log\ \mu-(1-\mu)\ \log\ (1-\mu)\}= \\ &= [\eta(r)+\eta(1-r)]-[\eta(\mu)+\eta(1-\mu)], \end{aligned}$$

სადაც r—ალბათობაა იმისა, რომ გამოსასვლელში გამოჩნდება სიმბოლო 0. ცხადია, ინფორმაციის არხის მოცემულ თვისებებისას ინფორმაცია ერთ სიმბოლოზე $I'^{(1)}_{Y\to X}$ აღწევს მაქსიმუმს, როცა $\eta(r)+\eta(1-r)$ მაქსიმალურია. ჩვენ ვიცით, რომ ასეთი ფუნქცია აღწევს მაქსიმუმს, როცა $r=1/2$, ე. ი. როცა მიმღებზე ორივე სიგნალი ტოლალბათია. ადვილია დავრწმუნდეთ, რომ ეს მიიღწევა მაშინ, როცა წყარო ორივე სიმბოლოს გადასცემს ერთნაირი ალბათობით $p=1/2$. ამავე $p=1/2$ მნიშვნელობისას აღწევს მაქსიმუმს, ინფორმაცია ერთი სიმბოლოთი. მაქსიმალური მნიშვნელობა ტოლია

$$I^{(1)}_{Y\to X}=H(Y)-[\eta(\mu)+\eta(1-\mu)]=1-[\eta(\mu)+\eta(1-\mu)].$$

მაშასადამე, ჩვენს შემთხვევაში

$$\max I^{(1)}_{Y\to X}=1-[\eta(\mu)+\eta(1-\mu)],$$

და კავშირის არხის გამტარუნარიანობა ტოლი იქნება

$$C=k\{1-[\eta(\mu)+\eta(1-\mu)]\}. \qquad (18.9.5)$$

შევნიშნავთ, რომ $\eta(\mu)+\eta(1-\mu)$ არის სისტემის ენტროპია, რომელსაც აქვს ორი შესაძლო მდგომარეობანი μ და $1-\mu$ ალბათობებით. იგი ახასიათებს ინფორმაციის კარგვას ერთ სიმბოლოზე, რომელიც დაკავშირებულია არხში დაბრკოლებათა არსებობასთან.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. განვსაზღვროთ კავშირის არხის გამტარუნარიანობა, რომელსაც შეუძლია დროის ერთეულში გადასცეს 100 სიმბოლო 0 და 1, ამასთან თითოეული სიმბოლო მახინჯდება (იცვლება საწინააღმდეგოთი) $\mu=0{,}01$ ალბათობით.

ა მ ო ხ ს ნ ა: დანართის მე-7 ცხრილით ვპოულობთ:

$$\eta(\mu)=0{,}0664,$$
$$\eta(1-\mu)=0{,}0144,$$
$$\eta(\mu)+\eta(1-\mu)=0{,}0808.$$

ერთ სიმბოლოზე იკარგება ინფორმაციის 0,0808 (ორ. ერთ). არხის გამტარუნარიანობა ტოლია

$$C=100(1-0{,}0808)=91{,}92\approx 92$$

ორობითი ერთეული დროის ერთეულში.

ანალოგიურ გაანგარიშებათა დახმარებით შეიძლება განსაზღვრულ იქნას არხის გამტარუნარიანობა უფრო რთულ შემთხვევებში, როცა ელემენტარულ სიმბოლოთა რიცხვი ორზე მეტია და როცა დამახინჯებანი ცალკეული სიმბოლოებისა დამოკიდებულნი არიან. ვიცით რა არხის გამტარუნარიანობა, შეიძლება განვსაზღვროთ დაბრკოლებებიანი არხით ინფორმაციის გადაცემის სიჩქარის ზედა საზღვარი. ჩამოვაყალიბოთ (დამტკიცების გარეშე) ამ შემთხვევის შესახებ შენონის მეორე თეორემა. შენონის მე-2 თეორემა: **დავუშვათ გვაქვს ინფორმაციის X წყარო, რომლის ენტროპია დროის ერთეულში ტოლია $\widetilde{H}(X)$, და არხი C გამტარუნარიანობით, მაშინ, თუ**

$$\widetilde{H}(X)>C,$$

მაშინ ნებისმიერი კოდირებისას შეტყობინებათა გადაცემა შეფერხებათა და დამახინჯებათა გარეშე შეუძლებელია, თუ

$$\widetilde{H}(X)<C$$

მაშინ ყოველთვის შეიძლება საკმაოდ გრძელი შეტყობინება კოდირებული იქნას ისე, რომ იგი გადაცემულ იქნას შეუფერხებლად (დაუყოვნებლად) და დაუმახინჯებლად ერთთან რაგინდ ახლო ალბათობით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გვაქვს ინფორმაციის წყარო ენტროპიით დროის ერთეულში $\widetilde{H}(X)=100$ (ორობ. ერთ.) და კავშირის ორი არხი. ყოველ მათგანს შეუძლია დროის ერთეულში გადასცეს 70 ორობითი ნიშანი (0 ან 1); ყოველი ორობითი ნიშანი იცვლება საპირისპიროთი ალბათობით $\mu=0{,}1$, საჭიროა გაირკვეს: საკმარისია თუ არა ამ არხების გამტარუნარიანობა ინფორმაციის გადასაცემად, რომელსაც აწოდებს წყარო?

ა მ ო ხ ს ნ ა: ვპოულობთ ინფორმაციის კარგვას ერთ სიმბოლოზე:

$$\eta(\mu)+\eta(1-\mu)=0{,}332+0{,}137=0{,}469 \quad \text{(ორობ. ერთ).}$$

ინფორმაციის მაქსიმალური რაოდენობა გადაცემული ერთი არხით დროის ერთეულში:

$$C=70\ (1-0{,}469)=37{,}2.$$

ინფორმაციის მაქსიმალურ რაოდენობას, რომელიც შეიძლება გადაცემულ იქნას ორი არხით დროის ერთეულში:

$$37{,}2\cdot 2=74{,}4 \quad \text{(ორობ. ერთ.)}$$

რაც არ არის საკმარისი წყაროდან ინფორმაციის გადაცემის უზრუნველსაყოფად.

XIX თავი

მასიური მომსახურების თეორიის ელემენტები

19.1. მასიური მომსახურების თეორიის საგანი

უკანასკნელ ათეულ წლებში პრაქტიკის სხვადასხვა სფეროში წარმოიშვა აუცილებლობა თავისებური ალბათობრივი ამოცანების ამოხსნისა, რომელიც დაკავშირებულია ე. წ. *მასიურ მომსახურებათა სისტემების* მუშაობასთან. ასეთი სისტემების მაგალითებად შეიძლება დავასახელოთ: სატელეფონო სადგურები, სარემონტო სახელოსნოები, საბილეთო სალაროები, ცნობათა ბიუროები, საპარიკმახეროები და სხვა. ყოველი ასეთი სისტემა შედგება მომსახურე ერთეულთა რომელიღაც რიცხვისაგან, რომელთაც ჩვენ დავარქმევთ მომსახურების „არხებს". არხებად შეიძლება ფიგურირებდნენ კავშირის ხაზები, პირები, რომლებიც ასრულებენ ამა თუ იმ ოპერაციებს, სხვადასხვა ხელსაწყოები და ა. შ. მასიური მომსახურებათა სისტემები შეიძლება იყვნენ როგორც ერთი, ისე მრავალარხიანი.

მასიური მომსახურების ნებისმიერი სისტემის მუშაობა მდგომარეობს მასში შემომავალ მოთხოვნილებათა ნაკადის ან განაცხადთა შესრულებაში. განაცხადები შემოდიან ერთიმეორის მიყოლებით დროის რომელიღაც შემთხვევით მომენტში. შემოსული განაცხადის მომსახურება გრძელდება რაღაც დროის განმავლობაში, რის შემდეგ არხი თავისუფლდება და ისევ მზადაა შემდგომი განაცხადის მისაღებად. მასიური მომსახურების ყოველ სისტემას, არხების რიცხვისა და მათი მწარმოებლურობის მიხედვით გააჩნია რომელიღაც გამტარუნარიანობა, რომელიც საშუალებას აძლევს მეტ-ნაკლებად გაართვას თავი განაცხადების ნაკადს. საგანი მასიური მომსახურების თეორიისა — განაცხადების ნაკადის ხასიათის, ცალკეული არხის მწარმოებლობას, არხების რიცხვის და მომსახურების მწარმოებლობას (ეფექტურობას) შორის დამოკიდებულების დადგენაა. მომსახურების ეფექტურობის მახასიათებლებად — ამოცანათა პირობების და გამოკვლევათა მიზნებისაგან დამოკიდებით — შეიძლება გამოყენებულ იქნან სხვადასხვა სიდიდეები და ფუნქციები. მაგალითად: განაცხადების საშუალო პროცენტი, რომლებიც ღებულობენ უარს და ტოვებენ სისტემას მოუმსახურებლად,

ცალკეულ არხთა და მთლიანად სისტემის „მოცდენათა“ საშუალო დრო, რიგში ლოდინის საშუალო დრო, ალბათობა იმისა, რომ შემოსული განაცხადი დაუყოვნებლივ იქნება მიღებული შესასრულებლად; რიგის სიგრძის განაწილების კანონი და ა. შ. ყოველი ამ მახასიათებელთაგანი აღწერს ამა თუ იმ მხრივ სისტემის მომარჯვებულობის ხარისხს განაცხადთა ნაკადის შესასრულებლად, სხვა სიტყვებით — მის გამტარუნარიანობას.

ვიწრო აზრით „გამტარუნარიანობის“ ქვეშ ჩვეულებრივ ესმით განაცხადთა საშუალო რიცხვი, რომელთა მომსახურებაც სისტემას შეუძლია დროის ერთეულში. მასთან ერთად ხშირად განიხილავენ ფარდობით გამტარუნარიანობას—მომსახურებული განაცხადების რიცხვის შემოსულთან ფარდობის საშუალო რიცხვს. გამტარუნარიანობა (როგორც აბსოლუტური, ისე ფარდობითი) ზოგად შემთხვევაში დამოკიდებულია არა მარტო სისტემის პარამეტრებისაგან, არამედ განაცხადთა ნაკადის ხასიათისაგანაც. თუ განაცხადები შემოტანილი იქნებოდნენ რეგულარულად, დროის ზუსტად გარკვეულ მონაკვეთებში და ყოველი განაცხადის მომსახურებას ექნებოდა აგრეთვე განსაზღვრული ხანგრძლივობა, სისტემის გამტარუნარიანობის ანგარიშში არ იქნებოდა არავითარი სიძნელე. პრაქტიკაში ჩვეულებრივ განაცხადთა შემოსვლის მომენტები შემთხვევითია, მეტწილად შემთხვევითია განაცხადთა მომსახურების ხანგრძლივობაც. ამასთან დაკავშირებით სისტემის მუშაობის პროცესი მიმდინარეობს არარეგულარულად: განაცხადთა ნაკადში იქმნება ადგილობრივი დაგროვებანი და გაიშვიათებანი. დაგროვებებს შეუძლიათ გამოიწვიონ მომსახურებაში ან უარი, ან რიგის წარმოქმნა. გაიშვიათებამ შეიძლება გამოიწვიოს ცალკეული არხების და მთლიანად სისტემის მოცდენები. ამ შემთხვევითობებს, რომლებიც დაკავშირებულნი არიან განაცხადთა ნაკადის არაერთგვაროვნებასთან, ემატებიან კიდევ შემთხვევითობანი, რომლებიც დაკავშირებული არიან ცალკეულ განაცხადთა შეფერხებებთან. ამგვარად, მასიური მომსახურების სისტემის მოქმედების პროცესი წარმოადგენს შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ი თ პ რ ო ც ე ს ს. რომ მივცეთ რეკომენდაცია სისტემის რაციონალურ ორგანიზაციაზე, გამოვარკვიოთ მისი გამტარუნარიანობა და წავუყენოთ მას მოთხოვნები, აუცილებელია შევისწავლოთ სისტემაში მიმდინარე შემთხვევითი პროცესი და აღვწეროთ იგი მათემატიკურად. სწორედ ამას სწავლობს მასიური მომსახურების თეორია.

შევნიშნავთ, რომ უკანასკნელ წლებში მასიურ მომსახურების თეორიის მათემატიკური მეთოდების გამოყენების ფარგლები თანდათან ფართოვდება და სულ უფრო მეტად გამოდის სიტყვის პირდაპირი მნიშვნელობით „მომსახურების ორგანიზაციებთან“ დაკავშირებულ ამოცანათა საზღვრებიდან. წარმოების ავტომატიზაციის ბევრი ამოცანა

ახლოშელი აღმოჩნდა მასიური მომსახურების თეორიისა: დეტალების ნაკადი, რომელიც შემოდის მათზე სხვადასხვა ოპერაციების ჩასატარებლად, შეიძლება განხილულ იქნან როგორც განაცხადთა ნაკადები, რომელთა შემოსვლის რიტმულობა ირღვევა შემთხვევით მიზეზთა გამო. მასიური მომსახურების თეორიის თავისებური ამოცანები წამოიჭრებიან ტრანსპორტის და შეტყობინებათა სისტემის ორგანიზაციის პრობლემებთან დაკავშირებით. მასიურ მომსახურებათა თეორიასთან ახლოს აღმოჩნდებიან ის ამოცანებიც, რომლებიც ეხებიან ტექნიკურ მოწყობილობათა საიმედოობას: ისეთი მათი მახასიათებლები, როგორიცაა უმტყუნებელი მუშაობის საშუალო დრო, სამარაგო ნაწილების საჭირო რაოდენობა, რემონტთან დაკავშირებული მოცდენის საშუალო დრო და ა. შ. განისაზღვრებიან მეთოდებით, რომლებიც უშუალოდ ნასესხებნი არიან მასიურ მომსახურებათა თეორიისაგან.

მასიურ მომსახურების ამოცანებთან მონათესავე პრობლემები სისტემატიურად წარმოიშობიან სამხედრო საქმეში. დამიზნების არხები, კავშირის ხაზები, აეროდრომები, მოწყობილობანი ინფორმაციის შესაკრებად და დასამუშავებლად წარმოადგენენ მასიური მომსახურების თავისებურ სისტემებს მუშაობის თავისი რეჟიმით და გამტარუნარიანობით.

ძნელია ჩამოთვლაც კი პრაქტიკის ყველა დარგისა, რომელშიაც გამოყენებას პოულობენ მასიური მომსახურების თეორიის მეთოდები. უკანასკნელ წლებში იგი გახდა ალბათობათა თეორიის ერთ-ერთი ყველაზე სწრაფად განვითარებადი შტო.

მოცემულ თავში გადმოცემულ იქნება ზოგიერთი ელემენტარული ცნობები მასიური მომსახურების თეორიიდან, რომელთა ცოდნა აუცილებელია ყოველი ინჟინრისათვის, რომლებიც მუშაობენ მრეწველობაში, სახალხო მეურნეობაში, კავშირგაბმულობაში ორგანიზაციის საკითხებზე და აგრეთვე სამხედრო საქმეში.

19.2. შემთხვევითი პროცესი მდგომარეობათა თვლადი სიმრავლით

შემთხვევითი პროცესი, რომელიც მიმდინარეობს მასიურ მომსახურებათა სისტემაში, მდგომარეობს იმაში, რომ დროის შემთხვევით მომენტებში სისტემა გადადის ერთი მდგომარეობიდან მეორეზე: იცვლება დაკავებულ არხთა რიცხვი, განაცხადთა რიცხვი, რომლებიც დგანან რიგში და ა. შ. ასეთი პროცესი არსებითად განსხვავდება იმ შემთხვევითი პროცესებისაგან, რომლებიც ჩვენ განვიხილეთ 15—17 თავებში. საქმე იმაშია, რომ მასიური მომსახურების სისტემა წარმოადგენს დისკრეტული ტიპის ფიზიკურ სისტემას, მდგომარეობათა სას-

რული (ან თვლადი) სიმრავლით[1], ხოლო სისტემის გადასვლა ერთი მდგომარეობიდან მეორეში ხდება ნახტომისებურად, იმ მომენტში, როცა ხორციელდება რომელიღაც ხდომილება (ახალი განაცხადის შემოსვლა, არხის განთავისუფლება, განაცხადის რიგიდან წასვლა და ა. შ.).

განვიხილოთ ფიზიკური სისტემა X მდგომარეობათა თვლადი სიმრავლით

$$x_1, \quad x_2, \ldots, x_n \ldots$$

დროის ნებისმიერ t მომენტში X სისტემას შეუძლია იყოს ამ მდგომარეობიდან ერთ-ერთში. აღვნიშნოთ $p_k\ (t)$ $(k=1,\ 2, \ldots, n, \ldots)$ ალბათობა იმისა, რომ t მომენტში სისტემა იმყოფება x_k მდგომარეობაში. ცხადია, ნებისმიერი t-სათვის

$$\sum_k p_k(t) = 1. \tag{19.2.1}$$

$p_k(t)$ ალბათობათა ერთობლიობა t დროის ყოველი მომენტისათვის ახასიათებს შემთხვევითი პროცესის მოცემულ კვეთს, რომელიც მიმდინარეობს სისტემაში. შემთხვევითი პროცესები მდგომარეობათა სასრული სიმრავლით არიან ორი ტიპის: დისკრეტული ან უწყვეტი დროით. პირველნი განსხვავდებიან იმით, რომ გადასვლები მდგომარეობიდან მდგომარეობაში შეიძლება ხდებოდეს მხოლოდ ზუსტად განსაზღვრულ სასრულო ინტერვალებით განცალკევებულ t_1, $t_2, \ldots$ მომენტებში. შემთხვევითი პროცესები უწყვეტი დროით განსხვავდებიან იმით, რომ სისტემის გადასვლა მდგომარეობიდან მდგომარეობაში შესაძლოა დროის ნებისმიერ t მომენტში.

დისკრეტული X სისტემის მაგალითად, რომელშიც შემთხვევითი პროცესი მიმდინარეობს უწყვეტი დროით, განვიხილავთ n თვითმფრინავისაგან შემდგარ ჯგუფს, რომელიც თავს ესხმის მოწინააღმდეგის ტერიტორიას, რომელსაც იცავს ავიაცია. არც ჯგუფის აღმოჩენის მომენტი, არც გამანადგურებელთა აფრენის მომენტი წინასწარ ცნობილი არ არის. სისტემის სხვადასხვა მდგომარეობანი შეესაბამებიან დაზიანებულ თვითმფრინავთა სხვადასხვა რიცხვს — ჯგუფის შემადგენლობაში:

x_0 — არც ერთი თვითმფრინავი არ არის დაზიანებული

x_1 — ზუსტად ერთი თვითმფრინავია დაზიანებული

x_k — ზუსტად k თვითმფრინავია დაზიანებული

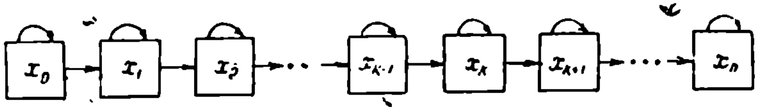
x_n — ყველა n თვითმფრინავია დაზიანებული

---

[1] მათემატიკაში „თვლადი“ ეწოდება სასრულო ან უსასრულო სიმრავლეს, რომელთა წევრები შეიძლება გადაინომროს ე. ი. ჩაიწეროს $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ მიმდევრობის სახით.

სისტემის შესაძლო მდგომარეობათა და მდგომარეობიდან მდგომარეობაზე შესაძლო გადასვლათა სქემა ნაჩვენებია ნახ. 19.2.1-ზე.

ისრებით ნაჩვენებია მდგომარეობიდან მდგომარეობაში შესაძლო გადასვლები. მომრგვალებული ისარი მიმართული x_k მდგომარეობიდან მისკენვე აღნიშნავს, რომ სისტემას შეუძლია არა მარტო გადასვლა მეზობელ x_{k+1} მდგომარეობაში, არამედ დარჩენა წინანდელში. მოცემული სისტემისათვის დამახასიათებელია *შეუქცევადი გადასვლები* (დაზიანებული თვითმფრინავები არ აღდგებიან); ამასთან დაკავშირებით x_n მდგომარეობიდან გადასვლები სხვა მდგომარეობაში უკვე არ არის შესაძლებელი.



ნახ. 19.2.1.

აღვნიშნავთ, რომ შესაძლო გადასვლათა სქემაზე (ნახ. 19.2.1) ნაჩვენებია მდგომარეობიდან მდგომარეობაზე გადასვლები და არ არის ნაჩვენები „გადახტომები" მდგომარეობაზე: ეს გადახტომები უგულვებელყოფილია, როგორც პრაქტიკულად შეუძლებელი. მართლაც იმისათვის რომ სისტემა „გადაახტეს" მდგომარეობას, საჭიროა ზუსტად ერთდროულად დაზიანებულ იქნას ორი ან მეტი თვითმფრინავი, ხოლო ასეთი ხდომილობის ალბათობა ნულის ტოლია.

შემთხვევითი პროცესები, რომლებიც მიმდინარეობენ მასიურ მომსახურებათა სისტემებში, როგორც წესი წარმოადგენენ პროცესებს უწყვეტი დროით. ეს დაკავშირებულია განაცხადთა ნაკადის შემთხვევითობასთან. შეუქცევადი სისტემების საპირისპიროდ, რომელიც განხილული იყო წინა მაგალითში, მასიურ მომსახურებათა სისტემისათვის დამახასიათებელია *შექცევადი გადასვლები*: დაკავებული არხი შეიძლება განთავისუფლდეს, რიგი შეიძლება „გაიწოვოს".

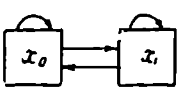
მაგალითისათვის განვიხილოთ მასიურ მომსახურების ერთარხიანი სისტემა (მაგალითად ერთი სატელეფონო ხაზი), რომელშიაც განაცხადს არხი დაკავებული დახვდა, არ დგება რიგში და ტოვებს სისტემას (ღებულობს „უარს"). ეს — დისკრეტული სისტემაა უწყვეტი დროით და ორი შესაძლო მდგომარეობით:

x_0 — არხი თავისუფალია,

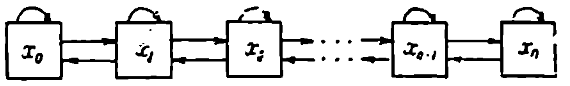
x_1 — არხი დაკავებულია

გადასასვლელები მდგომარეობიდან მდგომარეობაში შექცევადია. არხის შესაძლო გადასვლების სქემა ნაჩვენებია ნახ. 19.2.2-ზე.

ასეთივე ტიპის n არხიანი სისტემისათვის შესაძლო გადასასვლელების სქემა ნაჩვენებია ნახ. 19.2.3-ზე. მდგომარეობა x_0 — ყველა არხი თავისუფალია; x_1 — დაკავებულია მხოლოდ ერთი არხი, x_2 — დაკავებულია ზუსტად ორი არხი და ა. შ.



ნახ. 19.2.2.



ნახ. 19.2.3.

განვიხილოთ უწყვეტი დროით დისკრეტული სისტემის კიდევ ერთი მაგალითი: მასიური მომსახურების ერთარხიანი სისტემა, რომელსაც შეუძლია იმყოფებოდეს ოთხ მდგომარეობაში:

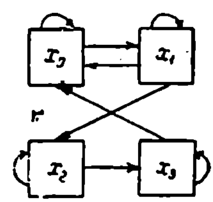
x_0 — არხი წესრიგშია და თავისუფალია,

x_1 — არხი წესრიგშია და დაკავებულია,

x_2 — არხი უწესრიგოდაა და უცდის შეკეთებას,

x_3 — არხი უწესრიგოდაა და შეკეთებაშია.

შესაძლო გადასვლების სქემა ნაჩვენებია ნახ. 19.2.4[1]-ზე. სისტემის გადასვლა უშუალოდ x_3 მდგომარეობიდან x_1-ში x_0 გამოტოვებით შეიძლება ჩაითვალოს პრაქტიკულად შეუძლებლად, რადგანაც ამისათვის საჭიროა, რომ რემონტის დამთავრება და მომდევნო განაცხადის მოსვლა მოხდეს დროის ზუსტად ერთსა და იმავე მომენტში.



ნახ. 19.2.4.

იმისათვის, რომ აღვწეროთ შემთხვევითი პროცესი, რომელიც მიმდინარეობს უწყვეტი დროით დისკრეტულ სისტემაში, უწინარეს ყოვლისა უნდა გავაანალიზოთ მიზეზები, რომლებმაც გამოიწვიეს სისტემის გადასვლა მდგომარეობიდან მდგომარეობაში. მასიური მომსახურების სისტემისათვის, ძირითად ფაქტორად, რომელიც განაპირობებს მასში მიმდინარე პროცესებს, წარმოადგენს განაცხადთა ნაკადი. ამიტომ მათემატიკური აღწერა მასიური მომსახურების ნებისმიერი სისტემისა იწყება განაცხადთა ნაკადის აღწერიდან.

---

[1] სქემა შედგენილია იმ დაშვებით, რომ არამომუშავე არხს წყობიდან გამოსვლა არ შეუძლია.

19.3. ხდომილობათა ნაკადი. უმარტივესი ნაკადი და მისი თვისებები

ხდომილობათა ნაკადის ქვეშ ალბათობათა თეორიაში იგულისხმება მიმდევრობა ხდომილობებისა, რომლებიც ხდება ერთიმეორის მიყოლებით დროის რომელიღაც მომენტებში. მაგალითებად შეიძლება იყოს: გამოძახებათა ნაკადი — სატელეფონო სადგურში, საყოფაცხოვრებო ელექტროქსელში ხელსაწყოთა ჩართვის ნაკადი, დაზღვეული წერილების ნაკადი შემოსული საფოსტო განყოფილებაში, უწესივრობათა ნაკადი ელექტრონულ-გამომთვლელ მანქანაში. გასროლათა ნაკადი მიმართული სამიზნისაკენ დაშენის დროს და ა. შ. ხდომილობანი, რომლებიც ქმნიან ნაკადს ზოგად შემთხვევაში შეიძლება იყვნენ სხვადასხვა, მაგრამ ჩვენ აქ განვიხილავთ მხოლოდ ნაკადს ერთგვაროვან ხდომილობებისას, რომლებიც განსხვავდებიან მხოლოდ გამოჩენის მომენტებით. ასეთი ნაკადი შეიძლება გამოისახოს, როგორც მიმდევრობა $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ წერტილებისა რიცხვით ღერძზე, (ნახ. 19.3.1), რომლებიც შეესაბამებიან ხდომილობათა გამოჩენის მომენტებს.

ნახ. 19.3.1.

ხდომილობათა ნაკადს ეწოდება რ ე გ უ ლ ა რ უ ლ ი, თუ ხდომილობანი მისდევენ ერთი მეორეს დროის ზუსტად განსაზღვრულ შუალედებით. ასეთი ნაკადი შედარებით იშვიათად გვხვდება რეალურ სისტემებში, მაგრამ როგორც ზღვრული შემთხვევა, წარმოადგენს საინტერესო შემთხვევას. მასიური მომსახურების სისტემისათვის ტიპიურს წარმოადგენს განაცხადთა შემთხვევითი ნაკადი.

ამ პუნქტში ჩვენ განვიხილავთ იმ ხდომილობათა ნაკადებს, რომლებსაც გააჩნიათ განსაკუთრებით მარტივი თვისებები. ამისათვის შემოგვაქვს რიგი განსაზღვრებებისა.

1. ხდომილობათა ნაკადს ეწოდება სტაციონარული, თუ ხდომილობათა ამა თუ იმ რიცხვის მოხვედრის ალბათობა დროის τ ხანგრძლივობის უბანზე (ნახ. 19.3.1) დამოკიდებულია მხოლოდ მონაკვეთის სიგრძეზე და არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ სახელდობრ Ot ღერძზე სად არის მოთავსებული ეს მონაკვეთი.

2. ხდომილობათა ნაკადს ეწოდება უშემდეგმოქმედებო ნაკადი, თუ დროის ნებისმიერი გადაუფარავი უბნებისათვის ხდომილობათა რიცხვი რომელიც ხდება ერთ-ერთ მათგანზე არ არის დამოკიდებული ხდომილობათა რიცხვისაგან, რომელიც ხვდება სხვებზე.

3. ხდომილობათა ნაკადს ეწოდება ორდინარული, თუკი ელემენტარულ Δt უბანზე ორი და მეტი ხდომილობის მოხვედრის ალბათობა საკმაოდ მცირეა შედარებით ერთი ხდომილობის მოხვედრის ალბათობასთან.

თუ ხდომილობათა ნაკადს გააჩნია ყველა სამი თვისება (ე. ი. სტაციონარულია, ორდინარულია და უშემდეგმოქმედებოა), მაშინ მას ეწოდება უ მ ა რ ტ ი ვ ე ს ი (ანუ პუასონისებური სტაციონარული) ნაკადი. სახელწოდება „პუასონისებური" დაკავშირებულია იმასთან, რომ 1—3 პირობათა დაცვისას ხდომილობათა რიცხვი, რომელიც ხვდება დროის ნებისმიერ ფიქსირებულ ინტერვალს, განაწილებული იქნება პუასონის კანონის მიხედვით (იხ. პუნქტი 5. 9.).

განვიხილოთ უფრო დაწვრილებით 1—3 პირობა, ვნახოთ რას შეესაბამებიან ისინი განაცხადთა ნაკადისათვის და რის გამო შეიძლება იგი დაირღვეს.

1. სტაციონარობის პირობას აკმაყოფილებს განაცხადთა ნაკადი, რომელთა ალბათობითი მახასიათებლები არ არის დროისაგან დამოკიდებული. კერძოდ, სტაციონარული ნაკადისათვის დამახასიათებელია მუდ მ ი ვ ი ს ი მ კ ვ რ ი ვ ე (განაცხადთა საშუალო რიცხვი დროის ერთეულში). პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება განაცხადთა ნაკადი, რომელიც (დროის შეზღუდულ მონაკვეთში მაინც) შეიძლება განხილულ იქნას, როგორც სტაციონარული. მაგალითად: გამოძახებათა ნაკადი ქალაქის სატელეფონო სადგურში დროის მონაკვეთში 12 და 13 საათამდე შეიძლება ჩაითვალოს სტაციონარულად. იგივე ნაკადი მთელი დღე-ღამის განმავლობაში უკვე აღარ შეიძლება ჩაითვალოს სტაციონარულად (ღამით გამოძახებათა სიმკვრივე მნიშვნელოვნად ნაკლებია ვიდრე დღისით). შევნიშნავთ, რომ ასევეა საქმე ფიზიკურ პროცესებთანაც, რომელთაც ჩვენ ვუწოდებთ „სტაციონარულს". სინამდვილეში ყველა ისინი სტაციონარულია დროის მხოლოდ შეზღუდულ მონაკვეთზე, ხოლო გავრცელება ამ უბნისა უსასრულობამდე — მხოლოდ მოხერხებული საშუალება ანალიზის გამარტივებისათვის. მასიურ მომსახურებათა თეორიის ბევრ ამოცანაში საინტერესოა გავაანალიზოთ სისტემის მუშაობა მუდმივ პირობებში. მაშინ ამოცანა ამოიხსნება განაცხადთა სტაციონარული ნაკადისათვის.

2. შემდეგქმედების არ არსებობის პირობა — ყველაზე არსებითია უმარტივესი ნაკადისათვის — (იგი ნიშნავს, რომ განაცხადები სისტემაში შემოდიან ერთი მეორისაგან დამოუკიდებლად) მაგალითად: მგზავრთა ნაკადი შემავალი მეტროს სადგურში, შეიძლება ჩაითვალოს უშემდეგქმედებო ნაკადად. იმიტომ, რომ მიზეზები, რომლებიც განაპირობებენ ცალკეული მგზავრის მოსვლას, სახელდობრ ამ და არა სხვა მომენტში, როგორც წესი არ არის დაკავშირებული სხვა მგზავრთა ანალოგიურ მიზეზებთან. ოღონდ

სხვა უმერმექმედებო შეიძლება იოლად იქნას დარღვეული ასეთი დამოკიდებულების გამოჩენის გამო. მაგალითად, მგზავრების ნაკადი, რომელიც სტოვებს მეტროს სადგურს, უკვე არ შეიძლება ჩაითვალოს უმერმექმედებო ნაკადად, რადგანაც ერთი და იმავე მატარებლით მოსული მგზავრთა გამოსვლის მომენტები, ერთიმეორეზე დამოკიდებულია.

საერთოდ უნდა შევნიშნოთ, რომ გამომავალ ნაკადს (ან მომსახურებულ განაცხადთა ნაკადს) რომელიც სტოვებს მასიურ მომსახურების სისტემას, ჩვეულებრივ აქვს მერმექმედება, თუნდაც მის შესასვლელ ნაკადს არ ჰქონდეს ეს. რომ დავრწმუნდეთ ამაში, განვიხილოთ მასიური მომსახურების ერთარხიანი სისტემა, რომლისთვისაც, ერთი განაცხადის მომსახურების დრო სავსებით განსაზღვრულია და ტოლია $t_{\text{მომს}}$. მაშინ სისტემის დამტოვებელ მომსახურებულ განაცხადთა ნაკადში განაცხადებს შორის დროის მინიმალური ინტერვალი ტოლი იქნება $t_{\text{მომს}}$; არ არის ძნელი დავრწმუნდეთ, რომ ასეთი მინიმალური ინტერვალის არსებობა გარდაუვლად მიგვიყვანს მერმექმედებამდე. მართლაც, დავუშვათ გახდა ცნობილი, რომ რომელიღაც მომენტში სისტემა დატოვა მომსახურებულმა განაცხადმა (დაკვეთამ), მაშინ შეიძლება უტყუარად ვამტკიცოთ, რომ დროის ნებისმიერ მონაკვეთში, რომელიც ძევს $(t_1, t_1+t_{\text{მომს}})$. საზღვრებში, მომსახურებული განაცხადები არ გამოჩნდებიან. მაშასადამე, ადგილი ექნება გადაფარულ უბნებში ხდომილობათა რიცხვებს შორის დამოკიდებულებას. შემდეგმოქმედება, რომელიც თან ახლავს გამომსვლელ ნაკადს, აუცილებელია გავითვალისწინოთ, თუ ეს ნაკადი წარმოადგენს შესასვლელს მასიური მომსახურების სხვა რომელიმე სისტემისათვის (ე. წ. „მრავალფაზიანი მომსახურება“), როცა ერთი და იგივე განაცხადი მიმდევრობით გადადის სისტემიდან სისტემაში.

სხვათაშორის აღვნიშნავთ, რომ პირველი შეხედვით ყველაზე მარტივი რეგულარული ნაკადი, რომელშიც ხდომილობანი განცალკევებულია ერთიმეორისაგან ტოლი ინტერვალებით, სრულებითაც არ წარმოადგენს „უმარტივესს“ სიტყვის ჩვენი აზრით, რადგანაც მასში არსებობს მკაფიოდ გამოსახული მერმექმედება, ერთი მეორის მომდევნო ხდომილობათა გამოჩენის მომენტები, დაკავშირებულია მკაცრი ფუნქციონალური დამოკიდებულებით. სახელდობრ მერმექმედების არსებობის გამო მასიურ მომსახურების სისტემაში მიმდინარე პროცესები, ანალიზი განაცხადთა რეგულარულ ნაკადის შემთხვევაში გაცილებით რთულია, ვიდრე მარტივში.

3. ორდინარობის პირობა აღნიშნავს, რომ განაცხადები მოდიან თითო-თითოდ და არა წყვილად, სამეულებად და ა. შ.; მაგალითად, იერიშთა ნაკადი, რომელსაც განიცდის საჰაერო მიზანი ავიაგამანადგურებლების მოქმედების ზონაში, იქნება ორდინარული, თუ გამანადგუ-

რებლებს იერიში მიაქვთ მიზანზე თითო-თითოდ და არ იქნება ორდინარული, თუ გამანადგურებლები იერიშზე მიდიან წყვილ-წყვილად. საპარიკმახეროში შემავალი კლიენტების ნაკადი, პრაქტიკულად შეიძლება ჩაითვალოს ორდინარულად, რაც არ შეიძლება ითქვას კლიენტების ნაკადზე, რომლებიც მიემართებიან მმაჩის ბიუროში ქორწინების რეგისტრაციისათვის.[1] თუ არაორდინარულ ნაკადში შედიან მხოლოდ წყვილ-წყვილად, მხოლოდ სამეულებად და ა. შ., მაშინ არაორდინარული ნაკადი ადვილია დავიყვანოთ ორდინარულზე. ამისათვის საკმარისია ცალკეულ განაცხადთა ნაკადის ნაცვლად განვიხილოთ წყვილების, სამეულების ნაკადი და ა. შ. უფრო რთული იქნება, თუ ყოველი განაცხადი შემთხვევით შეიძლება აღმოჩნდეს ორმაგი, სამმაგი და ა. შ. მაშინ მოგვიწევს საქმე გვქონდეს არა ერთგვაროვან, არამედ არაერთგვაროვან ხდომილობათა ნაკადთან.

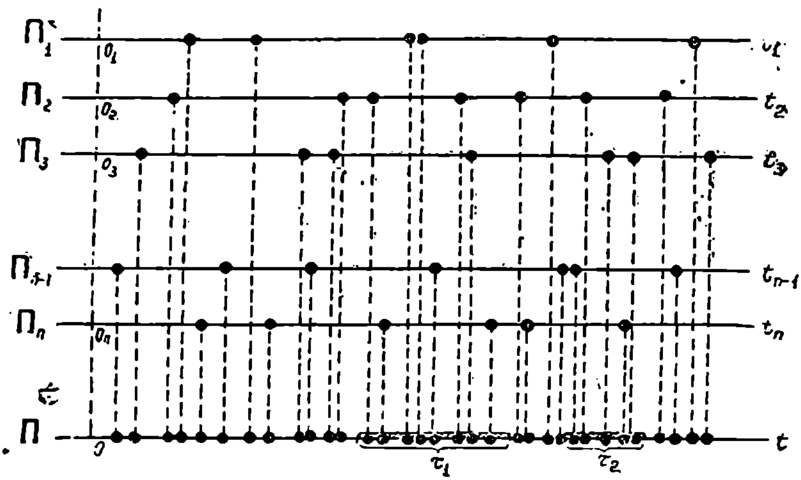
შემდგომში ჩვენ სიმარტივისათვის დავკმაყოფილდებით ორდინარულ ნაკადთა განხილვით.

უმარტივესი ნაკადი ხდომილობათა ნაკადთა შორის თამაშობს საერთოდ განსაკუთრებულ გარკვეულ როლს, ანალოგიურს, ნორმალური კანონის როლისა, განაწილების სხვა კანონებს შორის. ჩვენ ვიცით, რომ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა დიდი რიცხვის შეკრებისას რომლებიც დაქვემდებარებულნი არიან პრაქტიკულად განაწილების ნებისმიერ კანონებს, მიიღება სიდიდე, რომელიც მიახლოებით განაწილებულია ნორმალური კანონით. ანალოგიურად შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ ორდინარულ სტაციონარულ ნაკადთა დიდი რიცხვის შეკრებისას პრაქტიკულად ნებისმიერი მერმექმედებით მიიღება ნაკადი, რაგინდ მიახლოებული უმარტივესთან. პირობები, რომელიც უნდა შესრულდეს, ანალოგიურია ცენტრალური ზღვრული თეორემის პირობებისა; სახელდობრ კი შესაკრები ნაკადები უნდა ახდენდნენ ჯამზე დაახლოებით თანაბრად მცირე გავლენას.

ჩვენ არ ვამტკიცებთ ამ დებულებას და არ მოგვყავს მათემატიკური პირობების ფორმულირება, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდნენ ნაკადები[2]. მის ილუსტრაციას მოვახდენთ ელემენტარული მსჯელობით. დავუშვათ გვაქვს დამოუკიდებელი ნაკადები $\Pi_1, \Pi_2 \ldots \Pi_n$ (ნახ. 19.3.2) აჯამვა ნაკადებისა მდგომარეობს იმაში, რომ ხდომილობათა გამოჩენის ყველა მომენტები გადაგვაქვს ერთსა და იმავე Ot ღერძზე, როგორც ეს ნაჩვენებია 19.3.2-ე ნახაზზე. დავუშვათ, რომ ნაკადები $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ შესადარია თავისი გავლენით ჯამურ ნაკადზე, (ე. ი. აქვთ ერთნაირი რი-

[1] იხ. ა. ი. ხინჩინი „მასიური მომსახურების თეორიის მათემატიკური მეთოდები" 1955 (რუსულ ენაზე).

[2] თუ ჩავთვლით, რომ საქორწილო წყვილის მოსვლა ერთი ხდომილობაა, მაშინ ნაკადი ორდინარული იქნება (რედ).



ნახ. 19.3.2.

გის სიმკვრივე), ხოლო მათი რიცხვი საკმაოდ დიდია, დავუშვათ გარდა ამისა, რომ ეს ნაკადები სტაციონარული და ორდინარულია, მაგრამ ყოველ მათგანს შეუძლია ჰქონდეს შემდეგმოქმედება და განვიხილოთ ჯამური ნაკადი

$$\Pi = \sum_{k=1}^{n} \Pi_k \tag{19.3.1}$$

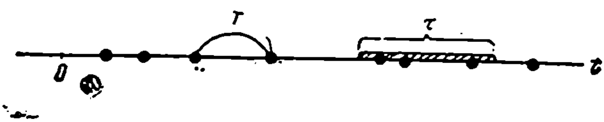
Ot ღერძზე (ნახ. 19.3.2) ცხადია რომ ნაკადი Π უნდა იყოს სტაციონარული და ორდინარული, რადგანაც თითოეულ შესაკრებს გააჩნია ეს თვისება და ისინი დამოუკიდებელია. გარდა ამისა საკმარისად ცხადია, რომ შესაკრებთა რიცხვის გადიდებისას ჯამური ნაკადის მერმექმედება, მაშინაც კი, როცა იგი მნიშვნელოვანია ცალკეულ ნაკადში, უნდა თანდათან შესუსტდეს. მართლაც განვიხილოთ ღერძზე ორი გადაუფარავი მონაკვეთი τ_1 და τ_2 (ნახ. 19.3.2). თითოეულ წერტილთაგანი, რომლებიც ხვდებიან ამ მონაკვეთებში, შემთხვევითად შეიძლება აღმოჩნდეს მიკუთვნებული ამა თუ იმ ნაკადს და h-ის გადიდებასთან ერთად წერტილთა კუთრი წონა, რომელიც მიეკუთვნება ერთსა და იმავე ნაკადს (და, მაშასადამე, დამოკიდებულია) უნდა შემცირდეს, ხოლო დანარჩენი წერტილები მიეკუთვნებიან სხვადასხვა ნაკადებს და გამოჩნდებიან τ_1, τ_2 მონაკვეთებზე ერთი მეორისაგან დამოუკიდებლად. საკმაოდ ბუნებრივია მოველოდეთ, რომ n-ის გადიდებისას ჯამური ნაკადი დაკარგავს მერმექმედებას და მიუახლოვდება უმარტივეს ნაკადს.

პრაქტიკაში ჩვეულებრივ საკმარისია შევკრიბოთ 4—5 ნაკადი, რომ

მივიღოთ ნაკადი, რომელზედაც შეიძლება ოპერაციები ვაწარმოოთ როგორც უმარტივესზე.

უმარტივესი ნაკადი თამაშობს მასიურ მომსახურების თეორიაში განსაკუთრებით მნიშვნელოვან როლს. ჯერ ერთი უმარტივესი და მასთან ახლოს განაცხადების ნაკადები ხშირად გვხვდებიან პრაქტიკაში (ამის მიზეზებზე მოთხრობილია ზემოთ), მეორე—განაცხადთა უმარტივესი ნაკადებისაგან განსხვავებულ ნაკადების შემთხვევაში კი ხშირად შეიძლება მივიღოთ სიზუსტის მხრივ დამაკმაყოფილებელი შედეგები, ნებისმიერი სტრუქტურის ნაკადის იმავე სიმკვრივის უმარტივესი ნაკადით შეცვლით, ამიტომ გავეცნოთ უფრო დაწვრილებით უმარტივეს ნაკადს და მის თვისებებს.

განვიხილოთ Ot ღერძზე П ხდომილობათა უმარტივესი ნაკადი (ნახ. 19.3.3), როგორც შემთხვევით წერტილთა შემოუსაზღვრელი მიმდევრობა.



ნახ. 19.3.3.

გამოვყოთ დროის ნებისმიერი τ სიგრძის მონაკვეთი. მე-5 თავში (პ. 5.9) ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ 1, 2, 3 პირობებში (სტაციონარობა. უმერმექმედებო და ორდინარობა) წერტილთა რიცხვი რომლებიც ხვდებიან τ უბანზე, განაწილებულია პუასონის კანონის მიხედვით მათემატიკური ლოდინით

$$a=\lambda\tau, \qquad (19.3.2)$$

სადაც λ — ნაკადის სიმკვრივეა (ხდომილობათა საშუალო რიცხვი, რომელიც მოდის დროის ერთეულზე).

ალბათობა იმისა, რომ τ დროში ადგილი ექნება ზუსტად m ხდომილობას, ტოლია

$$P_m(\tau)=\frac{(\lambda\tau)^m}{m!}e^{-\lambda\tau}. \qquad ((19.3.3)$$

კერძოდ ალბათობა იმისა, რომ უბანი აღმოჩნდება ცარიელი (არ ექნება ადგილი არც ერთ ხდომილობას), იქნება

$$P_0(\tau)=e^{-\lambda\tau}. \qquad (19.3.4)$$

მნიშვნელოვან მახასიათებელს წარმოადგენს მეზობელ ხდომილობათა შორის შუალედის სიგრძის განაწილების კანონი, განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე T — დროის მონაკვეთი ნებისმიერ ორ მეზობელ ხდო-

მილობათა შორის უმარტივეს ნაკადში (ნახ. 19.3.3) და მოვნახოთ განაწილების ფუნქცია

$$F(t)=P(T<t).$$

გადავიდეთ საპირისპირო ხდომილობის ალბათობაზე

$$1-F(t)=P(T\geqslant t).$$

ეს არის ალბათობა იმისა, რომ დროის t სიგრძის უბანზე, რომელიც იწყება ნაკადის ერთი ხდომილობის გამოჩენის t_k მომენტში, არ გამოჩნდებიან მომდევნო ხდომილობებიდან არც ერთი, ვინაიდან უმარტივეს ნაკადს არ გააჩნია მერმექმედება, ამიტომ უბნის დასაწყისში (t_k წერტილში) რომელიღაც ხდომილობის არსებობა არაფრით არ ახდენს გავლენას ამა თუ იმ სხვა ხდომილობის გამოჩენის ალბათობაზე შემდგომში. ამიტომ ალბათობა $P(T\geqslant t)$ შეიძლება გამოვთვალოთ (19.3.4) ფორმულით.

$$P_0(t)=e^{-\lambda t},$$

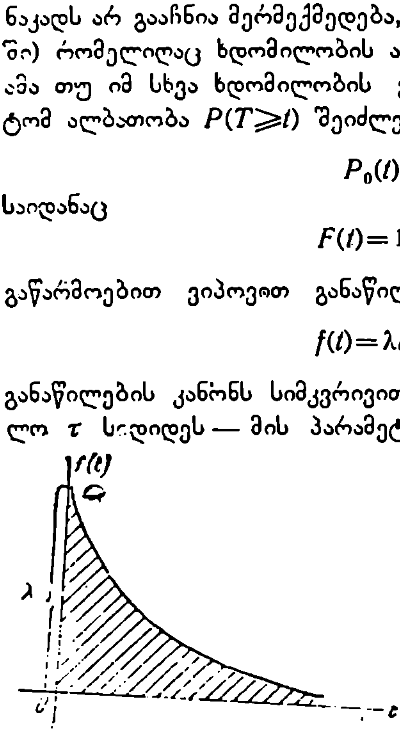
საიდანაც

$$F(t)=1-e^{-\lambda t},\quad (t>0). \tag{19.3.5}$$

გაწარმოებით ვიპოვით განაწილების სიმკვრივეს

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t},\qquad (t>0). \tag{19.3.6}$$

განაწილების კანონს სიმკვრივით უწოდებენ მაჩვენებლიან კანონს, ხოლო τ სიდიდეს — მის პარამეტრს. სიმკვრივის გრაფიკი წარმოდგენილია 19.3.4-ე ნახაზზე. მაჩვენებლიანი კანონი, როგორც ჩვენ შემდგომ დავინახავთ, თამაშობს დიდ როლს დისკრეტულ შემთხვევით პროცესების თეორიაში უწყვეტი დროით. ამიტომ განვიხილოთ იგი დაწვრილებით ვიპოვოთ T სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, რომელიც განაწილებულია მაჩვენებლიანი კანონის მიხედვით:



ნახ. 19.3.4.

$$m_t=M[T]=\int_0^\infty t\, f(t)dt=\lambda\int_0^\infty te^{-\lambda\tau}dt$$

ან ნაწილობრივი ინტეგრირებით

$$m_t=\frac{1}{\lambda}, \tag{19.3.7}$$

T სიდიდის დისპერსია ტოლია:

$$D_t = D(T) = \int_0^\infty t^2 f(t)\,dt - \frac{1}{\lambda^2} + \int_0^\infty \lambda t^2 e^{-\lambda t}\,dt - \frac{1}{\lambda^2},$$

საიდანაც

$$D_t = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad (19.3.8)$$

$$\sigma_t = \frac{1}{\lambda}, \qquad (19.3.9)$$

დავამტკიცოთ მაჩვენებლიანი კანონის ერთი შესანიშნავი თვისება· იგი მდგომარეობს შემდეგში: **თუ დროის მონაკვეთი, რომელიც განაწილებულია მაჩვენებლიანი კანონის მიხედვით უკვე გრძელდებოდა რომელიღაც τ დროის განმავლობაში, მაშინ ეს არაფრით არ ახდენს გავლენას შუალედის დარჩენილი ნაწილის განაწილების კანონზე.** იგი იქნება ისეთივე, როგორც დროის მთელი T შუალედის განაწილების კანონი.

დამტკიცებისათვის განვიხილოთ T_1 დროის შემთხვევითი შუალედი განაწილების ფუნქციით

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad (19.3.10)$$

და დავუშვათ, რომ ეს შუალედი უკვე გრძელდება რომელიღაც τ დროში, ე. ი. ადგილი ჰქონდა ხდომილობას $T>\tau$. ვიპოვოთ ამ დაშვებით $T_1 = T-\tau$ შუალედის დარჩენილი ნაწილის განაწილების კანონი, აღვნიშნოთ იგი $F^{(\tau)}(t)$-თი:

$$F^{(\tau)}(t) = P(T-\tau<t \mid T>\tau). \qquad (19.3.11)$$

დავამტკიცოთ, რომ განაწილების პირობითი $F^{(\tau)}(t)$ კანონი არ არის დამოკიდებული τ-საგან და $F(t)$-ის ტოლია. იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ $F^{(\tau)}(t)$, ვიპოვოთ ჯერ ორი ხდომილობის ნამრავლის ალბათობა

$$T>\tau \quad \text{და} \quad T-\tau<t.$$

ალბათობათა გამრავლების თეორემის მიხედვით

$$P((T>\tau)\;(T-\tau<t)) = P\;(T>\tau)\;P(T-\tau<t \mid T>\tau) = P(T>\tau)\;F^{(\tau)}(t),$$

საიდანაც

$$F^{(\tau)}(t) = \frac{P((T>\tau)\;(T-\tau<t))}{P(T>\tau)}.$$

მაგრამ ხდომილობა $(T>\tau)$ $(T-\tau<l)$ ტოლფასია ხდომილობისა $\tau<T<l+\tau$ რომლის ალბათობა ტოლია

$$P(\tau<T<l+\tau)=F(l+\tau)-F(\tau)$$

მეორე მხრივ

$$P(T>\tau)=1-F(\tau),$$

მაშასადამე

$$F^{(\tau)}(l)=\frac{F(l+\tau)-F(\tau)}{1-F(\tau)},$$

საიდანაც თანახმად (19.3.10) ფორმულისა, მივიღებთ

$$F^{(\tau)}(l)=\frac{e^{-\lambda\tau}-e^{-\lambda(l+\tau)}}{e^{-\lambda\tau}}=1-e^{-\lambda\tau}=F(l),$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამგვარად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ თუ დროის T შუალედი განაწილებულია მაჩვენებლიანი კანონის მიხედვით, მაშინ ნებისმიერი შეტყობინება იმაზე, თუ რა დროში მიმდინარეობდა უკვე ეს შუალედი, არ ახდენს დარჩენილი დროის განაწილების კანონზე გავლენას. შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ მაჩვენებლიანი კანონი-ერთადერთია, რომელსაც გააჩნია ეს თვისება. მაჩვენებლიანი კანონის ეს თვისება წარმოადგენს არსებითად „შერმექმედების უქონლობის" სხვა ფორმულირებას, რომელიც წარმოადგენს უმარტივესი ნაკადის ძირითად თვისებას.

19.4. არასტაციონარული პუასონური ნაკადი

თუ ხდომილობათა ნაკადი არასტაციონარულია, მაშინ მის ძირითად მახასიათებელს წარმოადგენს მყისი სიმკვრივე $\lambda(l)$. ნაკადის მყისი სიმკვრივე ეწოდება ხდომილობათა საშუალო რიცხვს რომელიც მოდის დროის ელემენტარულ $(l,\ l+\Delta l)$ მონაკვეთზე, ამ მონაკვეთის სიგრძესთან ფარდობის ზღვარს, როცა მონაკვეთის სიგრძე მიისწრაფვის ნულისაკენ.

$$\lambda(l)=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{m(l+\Delta l)-m(l)}{\Delta l}=m'(l), \qquad (19,4.1)$$

სადაც $m(l)$ არის $(0,l)$ უბანზე ხდომილობათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი.

განვიხილოთ ერთგვაროვან ხდომილობათა ნაკადი ორდინარული და უშერმექმედებო, მაგრამ არასტაციონარული ცვლადი $\lambda(l)$ სიმკვრივით. ასეთ ნაკადს ეწოდება არასტაციონარული პუასონური ნაკადი.

ეს — განზოგადოების პირველი საფეხურია, შედარებით უმარტივეს ნაკადთან. ადვილია ვუჩვენოთ პ. 5.9-ში გამოყენებული ანალოგიური მეთოდით, რომ ასეთი ნაკადისათვის ხდომილობათა რიცხვი, რომელიც

ხვდება t_0 წერტილში დაწყებულ τ სიგრძის მონაკვეთზე, ემორჩილება პუასონის კანონს

$$P_m(\tau, t_0)=\frac{a^m}{m!}e^{-a} \qquad (m=0,1,2,\ldots) \tag{19.4.2}$$

სადაც a არის t_0-დან $(t_0+\tau)$-მდე უბანზე ხდომილობათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი, რომელიც ტოლია

$$a=\int_{t_0}^{t_0+\tau}\lambda(t)\,dt. \tag{19.4.3}$$

აქ a სიდიდე დამოკიდებულია არა მარტო τ უბნის სიგრძეზე, არამედ Ot ღერძზე' მისი მდებარეობაზე.

მოვნახოთ მეზობელ ხდომილობათა შორის დროის შუალედის განაწილების კანონი არასტაციონარული ნაკადისათვის. ნაკადის არასტაციონარულობის გამო ეს კანონი დამოკიდებული იქნება იმისაგან, თუ Ot ღერძზე სად იქნება მოთავსებული ხდომილობათაგან პირველი. გარდა ამისა ის დამოკიდებული იქნება $\lambda(t)$ ფუნქციის სახისაგან. დავუშვათ, რომ პირველი ორ მეზობელ ხდომილობიდან გამოჩნდა t_0 მომენტში და მოვნახოთ ამ პირობით ამ და მომდევნო ხდომილობას შორის T დროის განაწილების კანონი:

$$F_{t_0}(t)=P(T<t)=1-P(T\geqslant t).$$

ვიპოვნოთ $P(T\geqslant t)$ ალბათობა იმისა, რომ t_0-დან (t_0+t) უბანზე არ გამოჩნდება არც ერთი ხდომილობა:

$$P(T\geqslant t)=e^{-a}=e^{-\int_{t_0}^{t_0+t}\lambda(t)dt}$$

საიდანაც

$$F_{t_0}(t)=1-e^{-\int_{t_0}^{t_0+t}\lambda(t)dt} \tag{19.4.4}$$

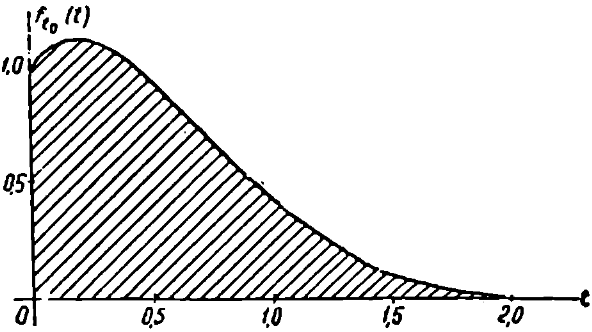
განაწილების მიღებული სიმკვრივის გაწარმოებით მივიღებთ:

$$f_{t_0}(t)=\lambda(t_0+t)e^{-\int_{t_0}^{t_0+t}\lambda(t)\,dt} \qquad (t>0). \tag{19.4.5}$$

განაწილების ეს კანონი უკვე არ იქნება მაჩვენებლიანი. მისი სახე დამოკიდებულია t_0 პარამეტრზე და $\lambda(t)$ ფუნქციის სახეზე. მაგალითად, $\lambda(t)$-ეს წრფივი ცვალებადობისას $\lambda(t)=a+bt$ სიმკვრივეს (19.4.5.) აქვს სახე:

$$f_{t_0}(t)=[a+b(t_0+t)]e^{-at-bt_0t-\frac{bt^2}{2}} \qquad (19.4.6)$$

ამ კანონის გრაფიკი, როცა $a=0,4$, $b=2$ და $t_0=0,3$ წარმოდგენილია 19.4.1-ელ ნახაზზე.



ნახ. 19.4.1.

მიუხედავად იმისა, რომ არასტაციონარული პუასონური ნაკადის სტრუქტურა რამდენადმე უფრო რთულია, ვიდრე უმარტივესისა, იგი ძლიერ მოხერხებულია პრაქტიკული გამოყენებისას: უმარტივესი ნაკადის მთავარი თვისება — მერმექმედების უქონლობა მასში შენახულია. სახელდობრ, თუ ჩავინიშნავთ Ot ღერძზე ნებისმიერ წერტილს t_0, მაშინ T დროის განაწილების კანონი $f_{t_0}(t)$ დროისა, რომელიც დააცილებს ამ წერტილს დროის მიხედვით მომავალი უახლოესი ხდომილობისაგან, არ არის დამოკიდებული თუ რა მოხდა t_0 დროის წინა მონაკვეთში და თვით t_0 წერტილში (ე. ი. გამოჩნდნენ თუ არა ადრე სხვა ხდომილობანი და სახელდობრ როდის).

19.5. ნაკადი შეზღუდული მერმექმედებით (პალმის ნაკადი)

წინა პუნქტში ჩვენ გავეცანით, უმარტივესი ნაკადის ბუნებრივ განზოგადებას — არასტაციონარულ პუასონურ ნაკადს. უმარტივესი ნაკადის განზოგადებას სხვა მიმართულებით წარმოადგენს ნაკადი შეზღუდული მერმექმედებით.

განვიხილოთ ერთგვაროვან ხდომილობათა ორდინარული ნაკადი (ნახ. 19.5.1). ამ ნაკადს ეწოდება ნაკადი შეზღუდული მერმექმედებით (ან პალმის ნაკადი), თუ მიმდევრობით ხდომილობათა შორის დროის შუალედები T_1, T_2,... წარმოადგენენ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეებს.

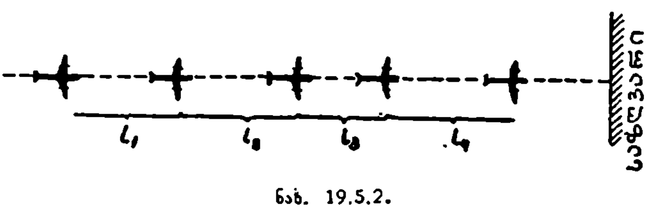
ნახ. 19.5.1.

ცხადია, უმარტივესი ნაკადი წარმოადგენს კერძო შემთხვევას პალმის ნაკადისა: მასში T_1, T_2,..., მანძილები წარმოადგენენ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეებს, განაწილებულს მაჩვენებლიანი კანონის მიხედვით. რაც შეეხება არასტაციონარულ პუასონურ ნაკადს, იგი არ წარმოადგენს პალმას ნაკადს. მართლაც, განვიხილოთ ორი მეზობელი შუალედი T_k და T_{k+1} არასტაციონარულ პუასონურ ნაკადში. როგორც ეს ჩვენ დავინახეთ წინა პუნქტში არასტაციონარულ ნაკადში ხდომილობათა შორის შუალედის განაწილების კანონი დამოკიდებულია იმისაგან, თუ ეს შუალედი სად იწყება, ხოლო საწყისი T_{k+1} შუალედისა ემთხვევა T_k შუალედის ბოლოს; მაშასადამე ამ შუალედთა სიგრძეები დამოკიდებულნი არიან.

განვიხილოთ პალმის ნაკადთა მაგალითები.

1. ტექნიკური მოწყობილობის რომელიღაც დეტალი (მაგალითად ელექტრონული მილაკი) მუშაობს უწყვეტად, თავის მტყუნებამდე (წყობიდან გამოსვლამდე), რომლის შემდეგაც იგი მყისვე იცვლება ახლით. დეტალის უმტყუვნებლად მუშაობის ვადა შემთხვევითია. ცალკეული ეგზემპლიარები წყობიდან გამოდიან ერთი მეორისაგან დამოუკიდებლად. ამ პირობებში მტყუნებათა ნაკადი (ან „აღდგენათა“ ნაკადი) წარმოადგენენ სწორედ პალმის ნაკადს. თუ ამასთან დეტალის სამუშაო დრო განაწილებულია მაჩვენებლიანი კანონის მიხედვით, მაშინ პალმის ნაკადი იქცევა უმარტივესად.

2. თვითმფრინავთა ჯგუფი მიდის საბრძოლო რიგით „კოლონა“ (ნახ. 19.5.2), ყველა ერთნაირი v სიჩქარით. ყოველი თვითმფრინავი



ნახ. 19.5.2.

გარდა წამყვანისა, ვალდებულია დაიცვას წყობილება, ე. ი. წინმიმავლის მიმართ დაიკავოს მოცემული L მანძილი. რადიომანძილმზომის ცდომილების შედეგად ამ მანძილის დაცვა ხდება შეცდომებით. თვითმფრინავების მიერ მოცემული მიჯნის გადაკვეთის მომენტები ქმნიან პალმას ნაკადს, რამდენადაც შემთხვევითი სიდიდეები $T_1=\frac{L_1}{V}$; $T_2=\frac{L_2}{V}$; დამოუკიდებლებია. შევნიშნავთ, რომ იგივე ნაკადი არ იქნება პალმისა, თუ ყოველი თვითმფრინავი ცდილობს დაიცვას მოცემული მანძილი არა მეზობლიდან, არამედ წამყვანიდან.

პალმის ნაკადები ხშირად მიიღებიან მასიურ მომსახურების სისტემების გამოსასვლელ ნაკადთა სახით. თუ რომელიმე სისტემაზე მოდის რომელიღაც განაცხადთა ნაკადი, მაშინ იგი ამ სისტემით გაიყოფა ორად: მომსახურებულ და მოუმსახურებელ განაცხადთა ნაკადებად.

მოუმსახურებელ განაცხადთა ნაკადი ხშირად შემოდის მასიური მომსახურების სხვა რომელიღაც სისტემაში, ამიტომაა საინტერესო მის თვისებათა შესწავლა.

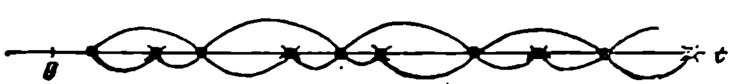
გამოსასვლელ ნაკადების თეორიაში მთავარს წარმოადგენს პალმას თეორემა, რომლის ფორმულირებას ჩვენ მოვიყვანთ დამტკიცების გარეშე.

დაუშვათ მასიურ მომსახურების სისტემაში შემოდის პალმის ტიპის განაცხადის ნაკადი, ამასთან განაცხადი, რომელსაც ყველა არხი დახვდა დაკავებული, ღებულობს უარს (არ ემსახურებიან). თუ ამასთან მომსახურების დროს აქვს განაწილების მაჩვენებლიანი კანონი, მაშინ მოუმსახურებელ განაცხადთა ნაკადი წარმოადგენს აგრეთვე პალმის ტიპისას.

კერძოდ, თუ განაცხადთა შემსვლელი ნაკადი არ არის უმარტივესი, მაინც იქნება შეზღუდული მერმექმედებით.

შეზღუდული მერმექმედებიან ნაკადების საინტერესო მაგალითს წარმოადგენს ე. წ. ე რ ლ ა ნ გ ი ს ნაკადები. ისინი იქმნებიან უმარტივესი ნაკადის „გაცრით".

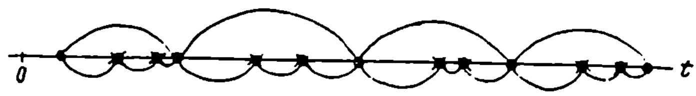
განვიხილოთ უმარტივესი ნაკადი (ნახ. 19.5.3) და ამოვაგდოთ მისგან ყოველი მეორე წერტილი (ნახაზზე ამოგდებული წერტილები აღნიშნულია ჯვრებით). დარჩენილი წერტილები ქმნიან ნაკადს; ამ ნაკადს ეწოდება ე რ ლ ა ნ გ ი ს პ ი რ ვ ე ლ ი რ ი გ ი ს ნ ა კ ა დ ი $Э_1$. ცხადია ეს ნაკადი არის პალმის ნაკადი.



ნახ. 19.5.3.

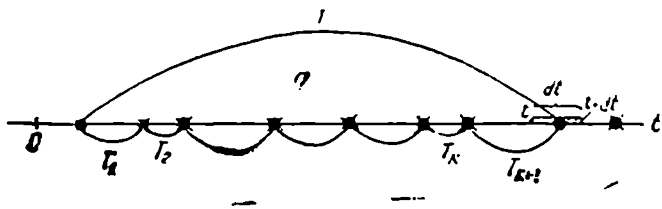
რამდენადაც დამოუკიდებელია ერთი მეორესაგან უმარტივეს ნაკადში ხდომილობათა შორის შუალედები, აგრეთვე დამოუკიდებლებია T_1, $T_2, \ldots$, სიდიდეებიც, რომლებიც მიღებულნი არიან ასეთი შუალედების ორ-ორად დაჯამებით.

ე რ ლ ა ნ გ ი ს მ ე ო რ ე რ ი გ ი ს ნ ა კ ა დ ი მიიღება, თუ შემოინახება უმარტივეს ნაკადში ყოველი მესამე წერტილი, ხოლო ორი შუალედური ამოგდებულ იქნება (ნახ. 19.5.4).



ნახ. 19.5.4.

საერთოდ ე რ ლ ა ნ გ ი ს k-უ რ ი რ ი გ ი ს ნ ა კ ა დ ი ($э_k$) ეწოდება ნაკადს, რომელიც მიიღება უმარტივესისაგან, თუ ყოველი $(k+1)$-ე წერტილი შენარჩუნებული იქნება, ხოლო დანარჩენი კი უგულვებელყოფილი, ცხადია უმარტივესი ნაკადი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ნულოვანი რიგის ($э_0$) ერლანგის ნაკადი.



ნახ. 19.5.5.

მოვძებნოთ მეზობელ ხდომილობათა შორის დროის შუალედის განაწილების კანონი ერლანგის k ური რიგის ნაკადში ($э_k$). განვიხილოთ Ot ღერძზე (ნახ. 19.5.5) უმარტივესი ნაკადი T_1, $T_2, \ldots$ ინტერვალებით. T სიდიდე წარმოადგენს $k+1$ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამს

$$T = \sum_{i=1}^{k+1} T_i \qquad (19.5.1)$$

სადაც T_1, $T_2, \ldots$, T_{k+1} არის დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები დაქვემდებარებული ერთსა და იმავე მაჩვენებლიან კანონსa

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (t > 0). \qquad (19.5.2)$$

შესაძლებელია T სიდიდის განაწილების კანონი მოგვენახა, როგორც $(k+1)$ კანონის (19.5.2) კომპოზიციით, ოღონდ უფრო მარტივია გამოვიყვანოთ იგი ელემენტარული მსჯელობებით.

აღვნიშნოთ T სიდიდის განაწილების სიმკვრივე $f_k(t)$-თი, (ე$_k$) -სათვის; $f_k(t)dt$ არის ალბათობა იმისა, რომ T სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას t და $t+dt$ შორის (ნახ. 19.5.5). ეს იმას ნიშნავს, რომ უკანასკნელი წერტილი T შუალედისა უნდა მოხვდეს ელემენტარულ $(t, t+dt)$ უბანზე, ხოლო უმარტივესი ნაკადის წინა k წერტილები—$(0, t)$ უბანზე. პირველი ხდომილობის ალბათობა ტოლია λdt; მეორე ხდომილობის ალბათობა (19.3.2) ფორმულის საფუძველზე იქნება

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}.$$

ამ ალბათობათა გადამრავლებით მივიღებთ:

$$f_k(t)\,dt=\frac{\lambda(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\,dt$$

საიდანაც

$$f_k(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \qquad (t>0). \tag{19.5.3}$$

განაწილების კანონს (19.5.3) სიმკვრივით ეწოდება ე რ ლ ა ნ გ ი ს k-ური რ ი გ ი ს კ ა ნ ო ნ ი. ცხადია, როცა $k=0$, იგი იქცევა მაჩვენებლიანად

$$f_0(t)=\lambda e^{-\lambda t} \qquad (t>0). \tag{19.5.4}$$

ვიპოვნოთ ერლანგის $f_k(t)$ კანონის მახასიათებლები: მათემატიკური ლოდინი m_k და დისპერსია D_k. მათემატიკურ ლოდინთა შეკრების თეორემის მიხედვით

$$m_k=\sum_{i=1}^{k+1}m_0=(k+1)\,m_0,$$

სადაც $m_0=\dfrac{1}{\lambda}$ არის უმარტივეს ნაკადში ხდომილობათა შორის შუალედის მათემატიკური ლოდინი.

აქედან

$$m_k=\frac{k+1}{\lambda}, \tag{19.5.5}$$

ანალოგიურად დისპერსიათა შეკრების თეორემის მიხედვით

$$D_k = \frac{k+1}{\lambda^2}, \quad \sigma_k = \frac{\sqrt{k+1}}{\lambda}. \tag{19.5.6}$$

$\mathfrak{I}_k$ ნაკადის $\wedge_k$ სიმკვრივე იქნება m_k სიდიდის შებრუნებული

$$\wedge_k = \frac{\lambda}{k+1}. \tag{19.5.7}$$

ამდაგვარად ერლანგის ნაკადის რიგის გადიდებით დიდდება ხდომილობათა შორის დროის მონაკვეთის, როგორც მათემატიკური ლოდინი, ისე დისპერსიაც, ხოლო ნაკადის სიმკვრივე ეცემა.

გამოვარკვიოთ, თუ როგორ შეიცვლება ერლანგის ნაკადი, როცა $k \to \infty$, თუკი მისი სიმკვრივე შენარჩუნებული იქნება მუდმივად? მოვახდინოთ ნორმირება T სიდიდისა ისე, რომ მისი მათემატიკური ლოდინი (და მაშასადამე ნაკადის სიმკვრივეც) დარჩეს უცვლელი. ამისათვის შევცვალოთ დროის ღერძზე მასშტაბი და T დროის ნაცვლად განვიხილოთ სიდიდე

$$\widetilde{T} = \frac{T}{k+1}. \tag{19.5.8}$$

ასეთ ნაკადს დავარქმევთ ე რ ლ ა ნ გ ი ს k-ური რ ი გ ი ს ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ნ ა კ ა დ ს. ამ ნაკადის ხდომილობათა შორის $\widetilde{T}$ შუალედის განაწილების კანონი იქნება

$$\widetilde{f}_k(t) = \frac{\wedge_k(\wedge_k t)^k}{k!} e^{-\wedge_k t} \quad (t>0), \tag{19.5.9}$$

სადაც $\wedge_k = \lambda(k+1)$ ან

$$\widetilde{f}_k(t) = \frac{\lambda(k+1)}{k!}(\lambda(k+1)t)^k e^{-\lambda(k+1)t} \quad (t>0) \tag{19.5.10}$$

19.5.10 კანონის მიხედვით განაწილებული $\widetilde{T}$ სიდიდის მათემატიკური ლოდინი არ არის დამოკიდებული k-ზე და ტოლია

$$\widetilde{m}_k = m_0 = \frac{1}{\lambda},$$

სადაც λ — იმ ნაკადის სიმკვრივეა, რომელიც ემთხვევა ნებისმიერი k-ს შემთხვევაში გამოსავალი უმარტივესი ნაკადის სიმკვრივეს. $\widetilde{T}$ სიდიდის დისპერსია ტოლია

$$\widetilde{D}_k = \frac{D_k}{(k+1)^2} = \frac{1}{\lambda^2(k+1)} \tag{19.5.11}$$

და უსასრულოდ კლებულობს k-ს ზრდისას. ამგვარად, ჩვენ მივდივართ დასკვნამდე: როდესაც k უსასრულოდ იზრდება, ერლანგის ნორმირებული ნაკადი უახლოვდება მუდმივ $\frac{1}{\lambda}$ სიდიდეს, ინტერვალებიან რეგულარულ ნაკადს.

ერლანგის ნაკადის ეს თვისება მოხერხებულია პრაქტიკული გამოყენებისას: იგი იძლევა საშუალებას, ავიღებთ რა, სხვადასხვა k-ს, მიღებულ იქნას შემდეგმოქმედების ნებისმიერი ხარისხი: სრულიად არ არსებობიდან ($k=0$) ხდომილობათა გამოჩენის მომენტებს შორის მტკიცე ფუნქციონალურ კავშირამდე ($k=\infty$). ამგვარად ერლანგის ნაკადის რიგი შეიძლება გამოგვადგეს როგორც ნაკადში არსებული მერმექმედების ზომა. გამარტივების მიზნით ხშირად მოხერხებული ხდება განაცხადთა რეალური ნაკადის (რომელსაც აქვთ მერმექმედება) შეცვლა ერლანგის ნორმირებული ნაკადით, რომელსაც აქვს განაცხადთა შორის შუალედის თითქმის იგივე მახასიათებლები: მათემატიკური ლოდინით და დისპერსიით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ნაკადში განაცხადთა შორის შუალედის სტატისტიკური დამუშავების შედეგად მიღებულია შეფასებები T სიდიდის მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიისა:

$$m_t=2(\text{წთ}), \quad D_t=0{,}8 \quad (\text{წთ}^2).$$

(შევცვალოთ ეს ნაკადი ერლანგის იგივე მახასიათებლიანი ნორმირებული ნაკადით.
ამოხსნა. გვაქვს

$$\lambda=\frac{1}{m_t}=0{,}5.$$

(19.5.11) ფორმულიდან მივიღებთ

$$k+1\approx\frac{1}{D_t\lambda^2}=\frac{1}{0{,}2}=5, \quad k=4.$$

ნაკადი შეიძლება მიახლოებით შეიცვალოს ერლანგის მეოთხე რიგის ნორმირებული ნაკადით.

19.6. მომსახურების დრო

განაცხადთა შემავალი ნაკადის მახასიათებლებს გარდა, სისტემის მუშაობის რეჟიმი დამოკიდებულია კიდევ თვით სისტემის მწარმოებლობის მახასიათებლებზე; არხების n რიცხვზე და ყოველი არხის სწრაფ მოქმედებაზე. სისტემასთან დაკავშირებულ ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს სიდიდეს წარმოადგენს ერთი განაცხადის მომსახურების დრო $T_{\text{მომს}}$. ეს სიდიდე შეიძლება იყოს როგორც არა შემთხვევითი, ისე შემთხვევითიც. ცხადია უფრო ზოგადს წარმოადგენს მომსახურების შემთხვევითი დრო.

განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე $T_{\text{მომს}}$. და აღვნიშნოთ $G(l)$-თი მისი განაწილების ფუნქცია.

$$G(l)=P(T_{\text{მომს}}<l) \qquad (19.6.1)$$

ხოლო $g(l)$ განაწილების სიმკვრივე:

$$g(l)=G'(l). \qquad (19.6.2)$$

პრაქტიკისათვის განსაკუთრებით საინტერესოა შემთხვევა, როცა სიდიდეს $T_{\text{მომს}}$. აქვს მაჩვენებლიანი განაწილება.

$$g(l)=\mu e^{-\mu l} \qquad (l>0). \qquad (19.6.3)$$

სადაც μ პარამეტრი — სიდიდეა, რომელიც შებრუნებულია ერთი განაცხადის მომსახურების საშუალო დროისა:

$$\mu=\frac{1}{m_{t\ \text{მომს}}}, \quad m_{t\ \text{მომს}}=M[T_{\text{მომს}}]. \qquad (19.6,4)$$

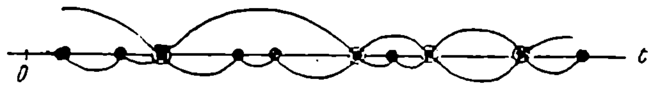
განსაკუთრებული როლი, რომელსაც თამაშობს $T_{\text{მომს}}$. სიდიდის განაწილების მაჩვენებლიანი კანონი, მასიურ მომსახურების თეორიაში, დაკავშირებულია ამ კანონის იმ თვისებასთან, რომელიც დამტკიცებული იყო 19.4-ე პუნქტში. მოცემულ შემთხვევაში გამოყენებისას მისი ფორმულირება ხდება ასე: თუ რომელიღაც t_0 მომენტში ხდება განაცხადის მომსახურება, მაშინ მომსახურების დარჩენილი დროის განაწილების კანონი არ არის დამოკიდებული იმისაგან, თუ მომსახურება რა დროის განმავლობაში გრძელდებოდა.

პირველი შეხედვით დაშვება იმისა, რომ მომსახურების დრო განაწილებულია მაჩვენებლიანი კანონის მიხედვით, წარმოადგენს საკმაოდ ხელოვნურს. მთელ რიგ პრაქტიკულ ამოცანებში ბუნებრივია მივიჩნიოთ იგი ან სავსებით არა შემთხვევითად, ან ნორმალური კანონით განაწილებულად, თუმცა არსებობენ პირობები, რომლებშიც მომსახურების დრო ნამდვილად ნაწილდება კანონით, რომელიც ახლოსაა მაჩვენებლიანთან.

ეს უწინარეს ყოვლისა ის ამოცანებია, რომლებშიც მომსახურება დაიყვანება „მცდელობათა" რიგზე, რომელთაგან თითოეულს მივყავართ აუცილებელ შედეგთან რომელიღაც p ალბათობით.

ვთქვათ, „მომსახურება" მდგომარეობს რომელიღაც მიზანზე სროლაში და მთავრდება სამიზნის დაზიანების მომენტში. სროლა ხდება დამოუკიდებელი გასროლებით, რომელიღაც საშუალო გასროლის სიჩქარით, დროის ერთეულში λ გასროლით. ყოველი გასროლა აზიანებს მიზანს p ალბათობით. რომ არ ვიყოთ შეზღუდული ყოველი

გასროლის მომენტის ზუსტი აღრიცხვით, ვივარაუდოთ, რომ ისინი ხდებიან დროის შემთხვევით მომენტში და ქმნიან უმარტივეს ნაკადს Π, რომლის სიმკვრივეა λ (ნახ. 19.6.1).



ნახ. 19.6.1.

აზრობრივ ამ ნაკადიდან გამოვყოფთ მეორე —„წარმატებულ" ანდა „დამზიანებელ» გასროლათა ნაკადს (ისინი ნახ. 19.6.1 აღნიშნული არიან წრეებით). გასროლას ვუწოდებთ «წარმატებულს», თუ იგი იწვევს მიზნის დაზიანებას (თუ მხოლოდ მიზანი არ იყო დაზიანებელი ადრე). არ არის ძნელი დავრწმუნდეთ, რომ დამზიანებული გასროლები აგრეთვე ქმნიან უმარტივეს ნაკადს Π^* სიმკვრივით $\Lambda=\lambda p$ (ამოსავალი ნაკადი Π—უმარტივესია, ხოლო ყოველ გასროლას შეუძლია გახდეს დამზიანებელი, სხვებისაგან დამოუკიდებლად, p ალბათობით). ალბათობა იმისა, რომ მიზანი დაზიანებული იქნება t მომენტამდე, ტოლი იქნება

$$G(t)=P(T_{მომ}<t)=1-e^{-\Lambda t},$$

საიდანაც «მომსახურების» დროის განაწილების სიმკვრივე

$$g(t)=\Lambda e^{-\Lambda t},$$

ხოლო ეს კი არის $\mu=\Lambda$ პარამეტრიანი მაჩვენებლიანი კანონი.

მიზნის დაზიანებამდე სროლების დროის მაჩვენებლიანი კანონით შეიძლება მიახლოებით ვისარგებლოთ იმ შემთხვევაშიც, როცა გასროლები არ ქმნიან უმარტივეს ნაკადს, არამედ განცალკევებული არიან დროის ზუსტად განსაზღვრული t_1 შუალედებით, თუ მხოლოდ დაზიანების ალბათობა p ძლიერ დიდი არ არის. ილუსტრაციისათვის მოვიყვანთ ერთსა და იმავე გრაფიკზე (ნახ. 19.6.2). დამაზიანებელი გასროლის მომენტის განაწილების ფუნქცია (საფეხუროვანი წირი) $p=0{,}4$, $t_1=1$ შემთხვევისათვის და მაჩვენებლიანი განაწილების ფუნქციას $\mu=p=0{,}4$ (გლუვი წირი). როგორც 19.6.2-ე ნახაზზე ჩანს, უწყვეტი მაჩვენებლიანი გა-

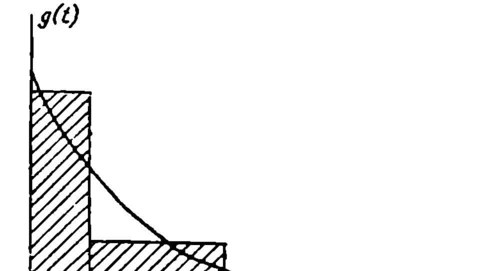
ნახ. 19.6.2.

ნაწილება კარგად შეესაბამება განაწილების ფუნქციის ზრდის ხასიათს დისკრეტული შემთხვევისათვის.

ბუნებრივია, თუ გასროლათა მომენტები არ იქნებიან ზუსტად განსაზღვრული, მაჩვენებლიან კანონთან შესაბამისობა იქნება კიდევ უკეთესი.

სროლის შემთხვევა არ არის ერთადერთი, როცა მომსახურება ხორციელდება «ცდათა» რიგით. ასეთ ტიპს ხშირად შეიძლება მივაკუთვნოთ მომსახურება ტექნიკურ მოწყობილობათა უწესივრობის მოსასპობად, როცა უწესივრო დეტალის ან კვანძის ძებნა ხორციელდება მთელი რიგი ტესტებითა და შემოწმებებით. ასეთ ტიპს შეიძლება მივაკუთვნოთ ამოცანები, სადაც მომსახურება მდგომარეობს რომელიღაც ობიექტის რადიოლოკატორით გამომჟღავნებაში, თუ ობიექტი რომელიღაც ალბათობით შეიძლება გამომჟღავნებული იქნას მიმოხილვის ყოველ ციკლში.

მაჩვენებლიანი კანონით კარგად აღიწერება ის შემთხვევაც, როცა მომსახურების დროის განაწილების სიმკვრივე ამა თუ იმ მიზეზებით მცირდება t არგუმენტის ზრდისას. ეს ხდება მაშინ, როცა განაცხადთა ძირითადი მასის მომსახურება ხდება ძლიერ სწრაფად. ხოლო მნიშვნელოვანი შეფერხებები მომსახურებაში შეიმჩნევა იშვიათად. განვიხილოთ მაგალითად საფოსტო განყოფილების ფანჯარა, სადაც იყიდება მარკები და კონვერტები და აგრეთვე მიიღება საფოსტო გზავნილებანი და სხვა. ძირითადი მასა მომსვლელებისა ყიდულობს მარკებს ან კონვერტებს და მომსახურება ძლიერ სწრაფად, უფრო იშვიათად ხდება განაცხადის მიცემა დაზღვეული წერილების გაგზავნაზე. ისინი მოიმსახურებიან უფრო მეტი დროით. მომსახურების დროის განაწილების ჰისტოგრამას აქვს 19.6.3-ე ნახაზზე წარმოდგენილი სახე. ვინაიდან განაწილების სიმკვრივე კლებულობს t-ს ზრდით, შეიძლება დიდი ცდომილების გარეშე შესწორებულ იქნას განაწილება მაჩვენებლიანი კანონის დახმარებით, მისი μ პარამეტრის შესაფერისად შერჩევით.



ნახ. 19.6.3.

რა თქმა უნდა, მაჩვენებლიანი კანონი არ წარმოადგენს მომსახურების დროის განაწილების უნივერსალურ კანონს. ხშირად მომსახურების დრო უკეთესად აღიწერება. მაგალითად ერლანგის კანონით. ოღონდ საბედნიეროდ მასიური მომსახურების სისტემის გამტარუნარიანობა და სხვა მახასიათებლები შედარებით ნაკლებადაა დამოკიდებული მომ-

სახურების დროის განაწილების კანონის სახისაგან, არამედ დამოკიდებულნი არიან ძირითადად მისი საშუალო მნიშვნელობისაგან. ამიტომ, მასიური მომსახურების თეორიაში ყველაზე ხშირად სარგებლობენ დაშვებით, რომ მომსახურების დრო განაწილებულია მაჩვენებლიანი კანონის მიხედვით. ეს ჰიპოთეზა საშუალებას იძლევა ძლიერ გამარტივებულ იქნას აპარატი, რომელიც გამოიყენება მასიური მომსახურების თეორიის ამოცანათა გადასაწყვეტად და მთელ რიგ შემთხვევებში მიღებული იქნას მარტივი ანალიზური ფორმულები სისტემის გამტარუნარიანობის მახასიათებლებისათვის.

19.7. მარკოვის შემთხვევითი პროცესი

დაშვებას, განაცხადთა ნაკადის პუასონური ხასიათისა და მომსახურების დროის მაჩვენებლიანი განაწილებისა, ფასი აქვს იმით, რომ საშუალებას იძლევიან მასიურ მომსახურების თეორიაში გამოყენებულ იქნას ე. წ. მარკოვის შემთხვევითი პროცესების აპარატი.

ფიზიკურ სისტემაში მიმდინარე პროცესს ეწოდება მარკოვის (ან უმერმექმედებო პროცესი), თუ დროის ყველა მომენტისათვის სისტემის შემდეგი ნებისმიერი მდგომარეობის ალბათობა დამოკიდებულია სისტემის მდებარეობაზე ახლანდელ მომენტში (t_0) და არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორ მოვიდა სისტემა ამ მდგომარეობაში.

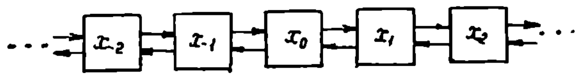
განვიხილოთ მარკოვის შემთხვევითი პროცესის ელემენტარული მაგალითი. აბსცისთა Ox ღერძზე შემთხვევით ხდება X წერტილის გადაადგილება. დროის $t=0$ მომენტში X წერტილი იმყოფება კოორდინატთა სათავეში ($x=0$) და რჩება იქ ერთი წამის განმავლობაში. ერთი წამის შემდეგ ავაგდებთ მონეტას, თუ დავარდა ღერბი — X წერტილი გადაადგილდება მარჯვნივ სიგრძის ერთი ერთეულით, თუ ციფრი — მარცხნივ. ერთი წამის შემდეგ ხელახლა ავისვრით მონეტას და ხდება ისეთივე შემთხვევითი გადაადგილება და ა. შ. წერტილის მდგომარეობის შეცვლის პროცესი (ან როგორც ამბობენ „ხეტიალი") წარმოადგენს შემთხვევით პროცესს დისკრეტული დროით ($t=0, 1, 2...$) და მდგომარეობათა თვლადი სიმრავლით.

$$x_0=0;\ x_1=1;\ x_{-1}=-1;\ x_2=2;\ x_{-2}=-2;\dots$$

შესაძლო გადასვლათა სქემა ამ პროცესისათვის ნაჩვენებია 19.7.1-ელ ნახაზზე.

ვაჩვენოთ, რომ ეს პროცესი — მარკოვისაა. მართლაც წარმოვიდგინოთ, რომ დროის რომელიღაც მომენტში სისტემა იმყოფება მაგალითად

მდგომარეობაში x_1 — ერთი ერთეულით კოორდინატთა სათავის მარჯვნივ. დროის ერთეულის შემდეგ წერტილის შესაძლო მდებარეობანი იქნებიან x_0 და x_2 ალბათობებით $\frac{1}{2}$ და $\frac{1}{2}$; ორი ერთეულის შემდეგ—x_{-1}, x_1, x_3, ალბათობებით $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ და ა. შ. ცხადია ყველა ეს ალბათობანი დამოკიდებული არიან მხოლოდ იმისაგან, სად იმყოფება წერტილი დროის მოცემულ მომენტში და სრულებითაც არ არიან დამოკიდებული იმისაგან, თუ როგორ მივიდა იგი იქ.



ნახ. 19.7.1.

განვიხილოთ მეორე მაგალითი. გვაქვს ტექნიკური მოწყობილობა X, რომელიც შედგება a და b ტიპის ელემენტებისაგან (დეტალებისაგან), რომლებსაც გააჩნიათ მუშაობის სხვადასხვა ხანგრძლიობა. ამ ელემენტებს დროის შემთხვევით მომენტებში ერთიმეორისაგან დამოუკიდებლად შეუძლიათ გამოვიდნენ წყობიდან. ყოველი ელემენტის გამართული მუშაობა აუცილებელია მოწყობილობის მუშაობისათვის. დრო ელემენტის უტყუარი მუშაობისა — შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც განაწილებულია მაჩვენებლიანი კანონით. a და b ტიპის ელემენტებისათვის ამ კანონის პარამეტრები სხვადასხვაა და შესაბამისად ტოლია λ_a და λ_b-სი. მოწყობილობის მტყუვნების შემთხვევაში სასწრაფოდ მიიღება ზომები მიზეზის გამოვლინებისათვის და გამომჟღავნებული უწესივრო ელემენტი სასწრაფოდ შეიცვლება ახლით. დრო რომელიც საჭიროა მოწყობილობის აღსადგენად (რემონტისათვის განაწილებულია მაჩვენებლიანი კანონის მიხედვით პარამეტრით μ_a (თუკი წყობიდან გამოვიდა a ტიპის ელემენტი) და μ_b (თუ წყობიდან გამოვიდა b ტიპის ელემენტი).

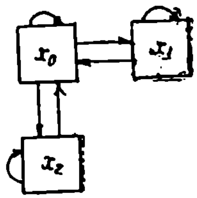
მოცემულ მაგალითში შემთხვევითი პროცესი, რომელიც მიმდინარეობს სისტემაში, არის მარკოვის პროცესი უწყვეტი დროით და მდგომარეობათა სასრული სიმრავლით:

x_0 — ყველა ელემენტი გამართულია, სისტემა მუშაობს,
x_1 — გაუმართავია a ტიპის ელემენტი, სისტემა შეკეთებაშია[1],
x_2 — გაუმართავია b ტიპის ელემენტი, სისტემა შეკეთებაშია.

---

[1] ივარაუდება, რომ დეტალებს შეუძლიათ გამოვიდნენ წყობიდან მხოლოდ სისტემის მუშაობის დროს. წყობილებიდან გამოსვლა ერთდროულად ორი და მეტი დეტალისა, პრაქტიკულად შეუძლებელია.

შესაძლო გადასვლათა სქემა მოცემულია 19.7.2-ე ნახაზზე. მართლაც პროცესს გააჩნია მარკოვისებური თვისება. დავუშვათ მაგალითად t_0 მომენტში სისტემა იმყოფება x_0 მდგომარეობაში (გამართულად მუშაობს). ვინაიდან თითოეული ელემენტის უმტყუნებლად მუშაობის დრომაჩვენებლიანია,[1] ამიტომ ყოველი ელემენტის მტყუნების მომენტი მომავალში არ არის დამოკიდებული იმისაგან, თუ რამდენ ხანს მუშაობდა იგი (როდისაა დადგმული). ამიტომ ალბათობა იმისა, რომ მომავალში სისტემა დარჩება x_0 მდგომარეობაში ან წავა მისგან, არ არის დამოკიდებული პროცესის «წინა ისტორიაზე». დავუშვათ ახლა, რომ t_0 მომენტში სისტემა იმყოფება x_1 მდგომარეობაში (უწესივროდაა a ტიპის ელემენტი). ვინაიდან შეკეთების დრო აგრეთვე მაჩვენებლიანია, შეკეთების ნებისმიერ დროში დამთავრების ალბათობა t_0-ის შემდეგ არ არის დამოკიდებული იმისაგან, თუ როდის დაიწყო შეკეთება და როდის იქნენ დაყენებული დანარჩენი (გამართული) ელემენტები. ამგვარად პროცესი მარკოვისაა.



ნახ. 19.7.2.

შევნიშნავთ, რომ ელემენტის მუშაობის დროის მაჩვენებლიანი განაწილება და ელემენტის შეკეთების დროის მაჩვენებლიანი განაწილება—არსებითი პირობებია, ურომლისოდ პროცესი არ იქნებოდა მარკოვის. მართლაც დავუშვათ, რომ ელემენტის გამართული მუშაობის დრო განაწილებულია არა მაჩვენებლიანი კანონით, არამედ სხვა რომელიმეთი—მაგალითად (t_1, t_2) უბანზე თანაბარი სიმკვრივის კანონით. ეს ნიშნავს, რომ ყოველი ელემენტი მუშაობს გარანტიით t_1. ხოლო t_1-დან t_2-მდე დროში შეიძლება გამოვიდეს წყობილებიდან ნებისმიერ მომენტში ალბათობის ერთნაირი სიმკვრივით. დავუშვათ, რომ დროის რომელიღაც t_0 მომენტში ელემენტი მუშაობს გამართულად. ცხადია ალბათობა იმისა, რომ ელემენტი გამოვა წყობიდან მომავალში დროის რომელიმე მონაკვეთში დამოკიდებულია იმისაგან თუ რამდენად ადრეა იგი დადგმული, ე. ი. დამოკიდებულია წინაისტორიაზე და ამიტომ პროცესი არ იქნება მარკოვის.

ანალოგიურია საკითხი შეკეთების T_y დროზე. თუ იგი არ არის მაჩვენებლიანი და ელემენტი t_0 მომენტში შეკეთებაშია, მაშინ შეკეთების დარჩენილი დრო დამოკიდებულია იმისაგან, თუ როდის დაიწყო იგი; პროცესი ისევ არა მარკოვისებურია.

საერთოდ მაჩვენებლიანი განაწილება თამაშობს განსაკუთრებულ როლს მარკოვის უწყვეტი დროით ან შემთხვევით პროცესების თე-

[1] ასე იტყვიან მოკლედ, ნაცვლად «აქვს განაწილების მაჩვენებლიანი კანონი».

ორიაში. ადვილია დავრწმუნდეთ, რომ სტაციონარულ მარკოვის პრო-ცესში დრო, რომლის განმავლობაშიც სისტემა დარჩება რომელიღაც მდგომარეობაში, განაწილებულია ყოველთვის მაჩვენებლიანი კანონით (ამ მდგომარეობისაგან დამოკიდებული პარამეტრით). მართლაც და-ვუშვათ, რომ t_0 მომენტში სისტემა იმყოფება x_k მდგომარეობაში და აქამდე უკვე იმყოფებოდა მასში რომელიღაც დროს. მარკოვის პროცე-სის განმარტების თანახმად, ნებისმიერი ხდომილობის ალბათობა მომა-ვალში არ არის დამოკიდებული წინაისტორიისაგან. კერძოდ ალბა-თობა იმისა, რომ სისტემა წავა x_k მდგომარეობიდან t დროის გან-მავლობაში, არ უნდა იყოს დამოკიდებული იმისაგან, თუ რამდენი დრო უკვე დაჰყო სისტემამ ამ მდგომარეობაში. მაშასადამე სისტემის ყოფნის დრო x_k მდგომარეობაში უნდა იქნას განაწილებული მაჩვენებლიანი კანონის მიხედვით.

იმ შემთხვევაში, როცა ფიზიკურ სისტემაში მიმდინარე პროცესი მდგომარეობათა სასრული სიმრავლით და უწყვეტი დროით, წარმოად-გენს მარკოვისას, შეიძლება ეს პროცესი აღიწეროს ჩვეულებრივი დი-ფერენციალურ განტოლებათა დახმარებით, რომლებშიც უცნობ ფუნ-ქციებს წარმოადგენენ მდგომარეობათა $p_1(t)$ $p_2(t)$ ალბათობანი. შედგე-ნას და გადაწყვეტას ასეთი განტოლებისას ჩვენ დემონსტრირებას გა-ვუკეთებთ მომდევნო პუნქტში მასიურ მომსახურების უმარტივესი სის-ტემის მაგალითზე.

19.ჰ. მასიური მომსახურების სისტემა მტყუნებებით. ერლანგის განტოლებანი

მასიურ მომსახურების სისტემები იყოფიან ორ ტიპად:

ა) სისტემები — მტყუნებებით, ბ) სისტემები — ლოდინით.

სისტემებში მტყუნებებით განაცხადი შემოსული იმ მომენტში, როცა მომსახურების ყველა არხები დაკავებულია, მყისვე ღებულობს უარს, ტოვებს სისტემას და მომსახურების შემდეგ პროცეს-ში არ მონაწილეობს.

სისტემაში ლოდინით განაცხადი, რომელსაც დახვდა ყველა არხი დაკავებული, არ ტოვებს სისტემას, არამედ დგება რიგში და ელოდის მანამ, სანამ არ განთავისუფლდება რომელიმე არხი. მოცემულ პუნქტში ჩვენ განვიხილავთ სისტემას მტყუნებებით, როგორც ყველაზე უფრო მარტივს.

დავუშვათ გვაქვს მასიურ მომსახურების n-არხიანი სისტემა (მტყუ-ნებებით). განვიხილოთ იგი, როგორც მდგომარეობათა სასრული სიმ-რავლის მქონე ფიზიკური X სისტემა:

x_0 — ყველა არხი თავისუფალია

x_1 — დაკავებულია ზუსტად ერთი არხი

. . . .

x_k — დაკავებულია ზუსტად k არხი

. . . .

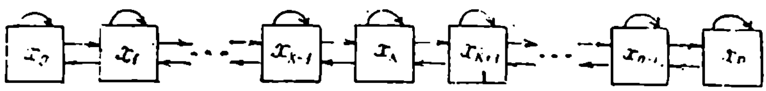
x_n — დაკავებულია ყველა n არხი.

შესაძლო გადასვლათა სქემა მოცემულია 19.8.1-ე ნახაზზე. განვიხილოთ ამოცანა: განვსაზღვროთ ($k=0,1\ldots n$) სისტემის მდგომარეობათა $p_k(t)$, ($k=0,1\ldots n$) ალბათობანი t დროის ნებისმიერი მომენტისათვის. ამოცანას ამოვხსნით შემდეგი დაშვებებით:

1) განაცხადთა ნაკადი — უმარტივესია, λ სიმკვრივით;

2) მომსახურების დრო $t_{\text{მომს.}}$ — მაჩვენებლიანია პარამეტრით $\mu=\dfrac{1}{m_{t\,\text{მომს}}}$

$$g(t)=\mu e^{-\mu t} \qquad (t>0). \qquad (19.8.1)$$



ნახ. 19.8.1.

შევნიშნოთ, რომ პარამეტრი μ (19.8.1) ფორმულაში მთლიანად ანალოგიურია უმარტივესი ნაკადის მეზობელ ხდომილობათა შორის დროის T შუალედის განაწილების მაჩვენებლიანი კანონის λ პარამეტრისა:

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t} \qquad (t>0) \qquad (19.8.2)$$

პარამეტრ λ-ს აქვს აზრი «განაცხადთა ნაკადის სიმკვრივისა». ანალოგიურად შეიძლება განვმარტოთ სიდიდე μ, როგორც დაკავებული არხის «განთავისუფლებათა ნაკადის სიმკვრივე». მართლაც წარმოვიდგინოთ განუწყვეტლივ დაკავებული არხი (რომელიც შეუფერხებლად მარაგდება განაცხადებით); მაშინ ცხადია, ამ არხში გვექნება განთავისუფლებათა უმარტივესი ნაკადი μ სიმკვრივით.

ვინაიდან ორივე ნაკადი — განაცხადებისა და განთავისუფლებებისა — უმარტივესნი არიან, სისტემაში მიმდინარე პროცესი იქნება მარკოვისა.

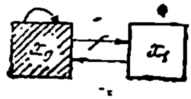
განვიხილოთ სისტემის შესაძლო მდგომარეობანი და მათი ალბათობანი

$$p_0(t), \quad p_1(t), \ldots \; p_n(t) \qquad (19.8.3)$$

ცხადია, დროის ნებისმიერი მომენტისათვის

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(t)=1, \qquad (19.8.4)$$

შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლებანი (19.8.3) ყველა ალბათობისათვის დაწყებული $p_0(t)$-დან. დავაფიქსიროთ დროის t მომენტი და მოვნახოთ ალბათობა $p_0(t+\Delta t)$ იმისა, რომ $t+\Delta t$ მომენტში სისტემა იმყოფება x_0 მდგომარეობაში (ყველა არხი თავისუფალია). ეს შეიძლება მოხდეს ორი ხერხით (ნახ. 19.8.2) A) — t მომენტში სისტემა იმყოფებოდა x_0 მდგომარეობაში, ხოლო Δt დროის განმავლობაში არ გადავიდა იქიდან (არ მოვიდა არც-ერთი განაცხადი).



ნახ. 19.8.2.

B) — t მომენტში სისტემა იმყოფებოდა x_1 მდგომარეობაში, ხოლო Δt დროის განმავლობაში არხი განთავისუფლდა და სისტემა გადავიდა x_0 [1] მდგომარეობაში. სისტემის «გადახტომის» შესაძლებლობა მდგომარეობაზე, (მაგალითად x_2-დან x_0-ში x_1-ზე გადახტომით) დროის მცირე შუალედში შეიძლება უგულებელვყოთ როგორც უმაღლესი რიგის მცირე სიდიდე შედარებით $P(A)$ და $P(B)$ [2]-თან. ალბათობათა შეკრების თეორემის მიხედვით გვაქვს

$$p_0(t+\Delta t)\approx P(A)+P(B). \qquad (19.8.5)$$

ვიპოვოთ A ხდომილობის ალბათობა გამრავლების თეორემის მიხედვით. ალბათობა იმისა, რომ t მომენტში სისტემა იყოს x_0 მდგომარეობაში ტოლია $p_0(t)$. ალბათობა იმისა, რომ Δt დროის განმავლობაში არ მოვა არც ერთი განაცხადი, ტოლია $e^{-\lambda\Delta t}$. უმაღლესი რიგის მცირე სიდიდებამდე სიზუსტით

$$e^{-\lambda\Delta t}\approx 1-\lambda\Delta t. \qquad (19.8.6)$$

მაშასადამე

$$P(A)\approx p_0(t)\ (1-\lambda\Delta t).$$

მოვნახოთ $P(B)$. ალბათობა იმისა, რომ t მომენტში სისტემა იყოს x_1 მდგომარეობაში, ტოლია $p_1(t)$. ალბათობა იმისა, რომ Δt დროის განმავლობაში არხი განთავისუფლდება, ტოლია $1-e^{-\mu\Delta t}$; უმაღლესი რიგის მცირე სიდიდემდე სიზუსტით.

$$1-e^{-\mu\Delta t}\approx\mu\Delta t.$$

მაშასადამე

$$P(B)\approx p_1(t)\mu\Delta t.$$

---

[1] 19.8.2-ე ნახაზზე x_0 მდგომარეობათა გამოჩენის შესაძლო ხერხები $t+\Delta t$ მომენტში ნაჩვენებია ისრებით, რომლებიც მიმართულია x_0-საკენ; ისარი მიმართული x_0-დან x_1-საკენ გადახაზულია იმის ნიშნად, რომ სისტემა არ უნდა გამოვიდეს x_0 მდგომარეობიდან.

[2] შემდგომში ჩვენ ყოველთვის უგულვებელვყოფთ Δt-სთან შედარებით უმაღლესი რიგის მცირე შესაკრებებს. ზღვარში, როცა $\Delta t\to 0$ მიახლოებითი ტოლობები გადავლენ ზუსტ ტოლობაში.

აქედან

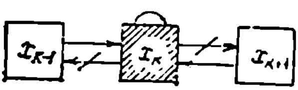
$$p_0(t+\Delta t)\approx p_0(t)(1-\lambda\Delta t)+\mu p_1(t)\Delta t.$$

$p_0(t)$-ს გადატანით მარცხენა ნაწილში, Δt-ზე გაყოფით და ზღვარზე გადასვლით როცა $\Delta t\to 0$, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას $p_0(t)$-სათვის:

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t) \qquad (19.8.7)$$

ანალოგიური დიფერენციალური განტოლებები შეიძლება შევადგინოთ სხვა მდგომარეობათა ალბათობებისათვისაც. ავიღოთ ნებისმიერი $k(0<k<n)$ და ვიპოვოთ ალბათობა $p_k(t+\Delta t)$ იმისა, რომ $t+\Delta t$ მომენტში სისტემა იქნება x_k მდგომარეობაში (ნახ. 19.8.3).

ეს ალბათობა გამოითვლება, როგორც უკვე არა ორის, არამედ სამი ხდომილობის ჯამის (x_k მდგომარეობისაკენ მიმართული ისრების რიცხვის მიხედვით) ალბათობა. A)—t მომენტში სისტემა იყო x_k მდგომარეობაში (დაკავებულია k არხი), ხოლო Δt დროში არ გადავიდა მისგან არც x_{k+1}-ში და არც x_{k-1}-ში (არც ერთი განაცხადი არ შემოსულა, არც ერთი არხი არ განთავისუფლებულა); B)—t მომენტში სისტემა იყო x_{k-1} მდგომარეობაში. (დაკავებულია $k-1$ არხი), ხოლო Δt დროში გადავიდა x_k-ში (მოვიდა ერთი განაცხადი). C)—t მომენტში სისტემა იყო x_{k+1} მდგომარეობაში (დაკავებულია $k+1$ არხი), ხოლო Δt დროში ერთ-ერთი არხი გათავისუფლდა. მოვნახოთ $P(A)$. გამოვთვალოთ ჯერ ალბათობა იმისა, რომ Δt დროში არ მოვა არც-ერთი განაცხადი და არ განთავისუფლდება არც ერთი არხი:



ნახ. 19.8.3.

$$e^{-\lambda\Delta t}(e^{-\mu\Delta t})^k=e^{-(\lambda+k\mu)\Delta t}.$$

უმაღლესი რიგის მცირე სიდიდეთა უგულვებელყოფით გვაქვს

$$e^{-(\lambda+k\mu)\Delta t}\approx 1-(\lambda+k\mu)\Delta t,$$

საიდანაც

$$P(A)\approx p_k(t)[1-(\lambda+k\mu)\Delta t].$$

ანალოგიურად

$$P(B)\approx p_{k-1}(t)\lambda\Delta t,$$
$$P(C)\approx p_{k+1}(t)(k+1)\mu\Delta t$$

და

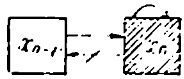
$$P_k(t+\Delta t)\approx p_k(t)[1-(\lambda+k\mu)\Delta t]+p_{k-1}(t)\lambda\Delta t+$$
$$+p_{k+1}(t)(k+1)\mu\Delta t.$$

აქედან ვღებულობთ $p_k(t)$ $(0<k<n)$-სათვის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{dp_k(t)}{dt}=\lambda p_{k-1}(t)-(\lambda+k\mu)p_k(t)+(k+1)\mu p_{k+1}(t).$$

შევადგინოთ განტოლება უკანასკნელი $p_n(t)$ ალბათობისათვის (ნახ. 19.8. 4) გვაქვს

$$p_n(t+\Delta t)\approx p_n(t)(1-n\mu\Delta t)+p_{n-1}(t)\lambda\Delta t.$$



ნახ. 19.8.4.

სადაც $1-n\,\mu\Delta t$ ალბათობაა იმისა, რომ Δt დროში არ განთავისუფლდება არც ერთი არხი; $\lambda\Delta t$-ალბათობა იმისა, რომ Δt დროში მოვა ერთი განაცხადი. ვღებულობთ $p_n(t)$-სათვის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{dp_n(t)}{dt}=\lambda p_{n-1}(t)-n\mu p_n(t).$$

ამგვარად მიღებულია დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა $p_1(t)$, $p_2(t)\dots$ $p_n(t)$ ალბათობებისათვის:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t),\\
&\frac{dp_k(t)}{dt}=\lambda p_{k-1}(t)-(\lambda+k\mu)p_k(t)+(k+1)\,\mu p_{k+1}(t)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(0<k<n),\\
&\frac{dp_n(t)}{dt}=\lambda p_{n-1}(t)-n\mu p_n(t)
\end{aligned}\right\}\qquad(19.8.8)$$

(19.8.8) განტოლებებს ეწოდებათ **ე რ ლ ა ნ გ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ნ ი.** (19.8.8) განტოლებათა სისტემის ინტეგრება საწყისი პირობებით

$$p_0(0)=1;\quad p_1(0)=\dots=p_n(0)=0$$

(საწყის მომენტში ყველა არხი თავისუფალია) იძლევა $p_k(t)$-ს დამოკიდებულებას ნებისმიერი k-სათვის. ალბათობა $p_k(t)$ ახასიათებს სისტემის საშუალო დატვირთვას და მის ცვალებადობას დროის განმავლობაში. კერძოდ $p_n(t)$ არის ალბათობა იმისა, რომ განაცხადს, მოსულს t მომენტში ყველა არხი დახვდება დაკავებული (მიიღებს უარს):

$$P_{\text{უარ}}=p_n(t).$$

სიდიდეს $q(t)=1-p_n(t)$-ს ეწოდება სისტემის ფარდობითი გამტარუნარიანობა. მოცემული t მომენტისათვის ეს არის ფარდობა დროის ერთეულში

მომსახურებულ განაცხადთა საშუალო რიცხვისა მოცემულ განაცხადთა საშუალო რიცხვთან.

წრფივ დიფერენციალურ (19.8.8) განტოლებათა სისტემა შედარებით იოლად შეიძლება ინტეგრებულ იქნას არხთა ნებისმიერი n კონკრეტული რიცხვისას.

შევნიშნავთ, რომ (19.8.8) განტოლებათა გამოყვანისას ჩვენ არსად არ ვსარგებლობდით იმის დაშვებით, რომ λ და μ სიდიდეები (განაცხადთა ნაკადის და განთავისუფლებათა ნაკადის სიმკვრივეები) მუდმივია. ამიტომ (19.8.8) განტოლებები დარჩებიან მართებული დროისაგან დამოკიდებულ $\lambda(t)$ და $\mu(t)$ შემთხვევაშიც კი, მხოლოდ ხდომილობათა ნაკადი, რომელსაც გადაჰყავს სისტემა მდგომარეობიდან მდგომარეობაში, უნდა რჩებოდეს პუასონური (უამისოდ პროცესი არ იქნება მარკოვის).

19.9. მომსახურების დამყარებული რეჟიმი. ერლანგის ფორმულები

განვიხილოთ n არხიანი მასიური მომსახურების სისტემა უარებით, რომლის შესასვლელში შედის განაცხადთა უმარტივესი ნაკადი λ სიმკვრივით. მომსახურების დრო—მაჩვენებლიანია μ პარამეტრით. ისმის საკითხი: ხომ არ იქნება სისტემაში მიმდინარე პროცესი სტაციონარული? ცხადია დასაწყისში სისტემის ჩართვის შემდეგ მასში მიმდინარე პროცესი კიდევ არ იქნება სტაციონარული, მასიურ მომსახურების სისტემაში (ისე, როგორც ნებისმიერ დინამიკურ სისტემაში) წარმოიშობა ე. წ. გარდამავალი არასტაციონარული პროცესი. ოღონდ რომელიღაც დროის შემდეგ ეს გარდამავალი პროცესი ჩაქრება და სისტემა გადავა სტაციონარულზე ე. წ. დამყარებულ რეჟიმზე, რომელთა ალბათობრივი მახასიათებლები უკვე არ იქნება დამოკიდებული დროისაგან.

პრაქტიკის მრავალ ამოცანაში ჩვენ გვაინტერესებს მომსახურების ზღვრული დამყარებული რეჟიმი.

შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი უარებიანი სისტემისათვის ასეთი ზღვრული რეჟიმი არსებობს ე. ი. როცა $t \to \infty$ ყველა ალბათობანი $p_0(t)$, $p_1(t) \dots p_n(t)$ მიისწრაფვიან მუდმივ ზღვარებისაკენ p_0, $p_1 \dots p_n$. ხოლო ყველა მათი წარმოებულები — ნულისაკენ.

რომ მოინახოს ზღვრული ალბათობები p_0, $p_1 \dots p_n$ (სისტემის მდგომარეობათა ალბათობები დამყარებულ რეჟიმისას) შევცვალოთ 19.8.8. განტოლებებში ყველა ალბათობები $p_k(t)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ მათი p_k, ზღვრებით

ხოლო ყველა წარმოებულები ავიღოთ ნულის ტოლი. მივიღებთ სისტემას უკვე არა დიფერენციალურ, არამედ ალგებრული განტოლებებით:

$$\left.\begin{aligned}
&-\lambda p_0+\mu p_1=0,\\
&\lambda p_0-(\lambda+\mu)p_1+2\mu p_2=0,\\
&\dots\\
&\lambda p_{k-1}-(\lambda+k\mu)p_k+(k+1)\mu p_{k+1}=0\\
&\qquad\qquad\qquad (0<k<n),\\
&\dots\\
&\lambda p_{n-2}-[\lambda+(n-1)\mu]\;p_{n-1}+n\mu p_n=0,\\
&\lambda p_{n-1}-n\mu p_n=0.
\end{aligned}\right\} \tag{19.9.1}$$

ამ განტოლებებს აუცილებელია დაემატოს პირობა

$$\sum_{k=0}^{n} p_k=1. \tag{19.9.2}$$

ამოვხსნათ (19.9.1) სისტემა $p_0, p_1,\dots,p_n$ უცნობების მიმართ. პირველი განტოლებიდან გვაქვს

$$p_1=\frac{\lambda}{\mu}p_0 \tag{19.9.3}$$

მეორიდან (19.9.3)-ის გათვალისწინებით

$$\begin{aligned}
p_2&=\frac{1}{2\mu}[-\lambda p_0+(\lambda+\mu)p_1]=\\
&=\frac{1}{2\mu}\left[-\lambda p_0+\frac{\lambda^2}{\mu}p_0+\lambda p_0\right]=\frac{\lambda^2}{2\mu^2}p_0,
\end{aligned} \tag{19.9,4}$$

ანალოგიურად მესამიდან (19.9.3) და (19.9.4) გათვალისწინებით:

$$p_3=\frac{1}{3\mu}\left(-\frac{\lambda^2}{\mu}p_0+\frac{\lambda^3}{2\mu^2}p_0+\frac{\lambda^2}{2\mu^2}\cdot 2\,\mu p_0\right)=\frac{\lambda^3}{3!\mu^3}p_0,$$

და საერთოდ ნებისმიერი $k\leqslant n$-სათვის

$$p_k=\frac{\lambda^k}{k!\mu^k}p_0. \tag{19.9.5}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\frac{\lambda}{\mu}=\alpha \tag{19.9.6}$$

და α სიდიდეს დავარქვათ *განაცხადთა ნაკადის დაყვანილი სიმკვრივე*. ეს არის განაცხადთა *საშუალო რიც-*

ხვი, რომელიც მოდის ერთი განაცხადის მომსახურების საშუალო დროზე, მართლაც

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda m_{t\,\text{მომს}},$$

სადაც $m_{t\,\text{მომს}} = M[T_{\text{მომს}}]$—ერთი განაცხადის მომსახურების საშუალო დროა. ახალი აღნიშვნებით (19.9.5) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!}\, p_0. \tag{19.9.7}$$

ფორმულა (19.9.7) გამოსახავს ყველა p_k ალბათობას p_0-ის საშუალებით. რომ იგი უშუალოდ გამოვსახოთ α-სა და n-ის საშუალებით, ვისარგებლოთ (19.9.2) პირობით. ჩავსვათ მასში (19.9.7), მივიღებთ

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha k}{k!} = 1,$$

საიდანაც

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k!}}. \tag{19.9.8}$$

(19.9.8)-ის ჩასმით (19.9.7)-ში საბოლოოდ მივიღებთ

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}} \quad (0 \leqslant k \leqslant n) \tag{19.9.9}$$

(19.9.9) ფორმულებს **ერლანგის ფორმულებს** უწოდებენ. ისინი იძლევიან დაკავებული არხების რიცხვის განაწილების ზღვრულ კანონს განაცხადთა ნაკადის მახასიათებლებისაგან და მომსახურების სისტემის მწარმოებლობისაგან დამოკიდებულებით. ფორმულაში (19.9.9) დაშვებით $k=n$ მივიღებთ **მტყუნების ალბათობას**, (ალბათობას იმისას, რომ შემოსულ განაცხადს ყველა არხი დაკავებული შეხვდება):

$$P_{\text{უარ}} = p_n = \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}} \tag{19.9.10}$$

კერძოდ ერთარხიანი სისტემისათვის ($n=1$)

$$P_{\text{უარ}}=p_1=\frac{\alpha}{1+\alpha} \tag{19.9.11}$$

ხოლო ფარდობითი გამტარუნარიანობა

$$q=1-P_{\text{უარ}}=\frac{1}{1+\alpha}. \tag{19.9.12}$$

ერლანგის (19.9.9) ფორმულები და მათი შედეგები (19.9.10) —(19.9.12) ჩვენს მიერ გამოყვანილია მომსახურების დროის მაჩვენებლიანი განაწილების შემთხვევისათვის, მაგრამ უკანასკნელი წლების გამოკვლევებმა[1] გვიჩვენა, რომ ეს ფორმულები რჩებიან მართებული მომსახურების დროის ნებისმიერი კანონით განაწილებისას, ოღონდ შემსვლელი ნაკადი იყოს უმარტივესი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ავტომატურ სატელეფონო სადგურს აქვს კავშირის 4 ხაზი. სადგურში შემოდის განაცხადთა უმარტივესი ნაკადი $\lambda=3$ სიმკვრივით (წუთში გამოძახება). გამოძახება შემოსული იმ მომენტში, როცა ყველა ხაზი დაკავებულია, ღებულობს უარს[2]). ლაპარაკის საშუალო დროა 2 წთ. ვიპოვოთ: ა) უარის ალბათობა, ბ) დროის საშუალო წილი, რომლის განმავლობაშიც სატელეფონო სადგური საერთოდ არაა დატვირთული.

ა მ ო ხ ს ნ ა: გვაქვს $m_{t_{\text{მომ}}}=2$ (წთ);

$$\mu=0,5 \ (\text{ლაპ/წთ}), \ \alpha=\frac{\lambda}{\mu}=6.$$

ა) ფორმულით (19.9.10) მივიღებთ

$$P_{\text{უარ}}=p_4=\frac{\dfrac{\alpha^4}{4!}}{1+\dfrac{\alpha^1}{1!}+\dfrac{\alpha^2}{2!}+\dfrac{\alpha^3}{3!}+\dfrac{\alpha^4}{4!}}\approx 0,47.$$

ბ) ფორმულით (19.9.8)

$$p_0=\frac{1}{1+\dfrac{\alpha^1}{1!}+\dfrac{\alpha^2}{2!}+\dfrac{\alpha^3}{3!}+\dfrac{\alpha^4}{4!}}\approx 0,0087.$$

---

[1] იხ. ბ. ა. სევასტიანოვი, ერგოდიკული თეორემა მარკოვის პროცესებისათვის და მისი გამოყენება უარებიან სატელეფონო სისტემებისათვის. ალბათობათა თეორია და მისი გამოყენებანი ტ. 2. I გამოცემა. 1957 (რუსულ ენაზე).

[2] იგულისხმება, რომ მეორადი გამოძახებანი აბონენტებისა, რომლებმაც უარი მიიღეს, არ არღვევენ გამოძახებათა ნაკადის პუასონურ ხასიათს.

მიუხედავად იმისა, რომ ერლანგის ფორმულები სიზუსტის მხრივ მართებულია განაცხადთა უმარტივესი ნაკადის შემთხვევაში, ამ ფორმულებით შეიძლება გარკვეული მიახლოებით ვისარგებლოთ იმ შემთხვევაშიც, როცა განაცხადთა ნაკადი განირჩევა უმარტივესისაგან (მაგალითად, წარმოადგენს სტაციონარულ ნაკადს შემოსაზღვრულ მერმექმედებით. გაანგარიშებანი გვიჩვენებენ, რომ ნებისმიერი სტაციონარული ნაკადის შეცვლა იგივე, სიმკვრივის არა ძალიან დიდ მერმექმედებიანი უმარტივესი ნაკადით, როგორც წესი მცირე გავლენას ახდენს სისტემის გამტარუნარიანობის მახასიათებლებზე.

ბოლოს შეიძლება შევნიშნოთ, რომ ერლანგის ფორმულებით შეიძლება მიახლოებით ვისარგებლოთ იმ შემთხვევაშიც, როცა მასიური მომსახურების სისტემა დაუშვებს განაცხადის ლოდინს რიგში, მაგრამ როცა ლოდინის დრო მცირეა ერთი განაცხადის მომსახურების საშუალო დროსთან შედარებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამანადგურებელთა დამიზნების სადგურს აქვს 3 არხი. ყოველ არხს შეუძლია ერთდროულად დაუმიზნოს ერთი გამანადგურებელი ერთ მიზანს. გამანადგურებლის დამიზნების საშუალო დრო მიზანზე არის $m_{t\,\text{მომს}}=2$ წთ. მიზნის ნაკადი—უმარტივესია, სიმკვრივით $\lambda=1,5$ (თვითმფრინავი წუთში). სადგური შეიძლება ჩაითვალოს «უარებიან სისტემად», რადგანაც მიზანი, რომელზეც დამიზნება არ დაწყებულა იმ მომენტში, როცა იგი შემოვიდა გამანადგურებლების მოქმედების ზონაში, საერთოდ დარჩება იერიშმიუტანელი. მოინახოს მიზანთა საშუალო წილი, რომლებიც გაივლიან მოქმედების ზონას დაუშენლად.

ა მ ო ხ ს ნ ა: გვაქვს

$$\mu=\frac{1}{2}=0,5; \qquad \lambda=1,5;$$

$$\alpha=\frac{\lambda}{\mu}=3.$$

ფორმულით (19.9.10)

$$P_{\text{უარი}}=p_3=\frac{\frac{3^3}{3!}}{1+\frac{3}{1!}+\frac{3^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}}\approx 0,346.$$

უარის ალბათობა$\approx 0,346$; იგივე გამოსახავს დაუშენელი მიზნების საშუალო წილს. შევნიშნავთ, რომ მოცემულ მაგალითში მიზანთა ნაკადის სიმკვრივე შერჩეულია ისეთი, რომ მათი ერთიმეორეზე მიყოლებით რეგულარული ფრენისას გარკვეული ინტერვალით ფიქსირებული დამიზნების $T_{\text{მომს}}=2$ წთ დროით, სისტემის ნომინალური გამტარუნარიანობა, საკმარისია იმისათვის, რომ დაშენილ იქნას ყველა მიზანი გამოუკლებლივ. გამტარუნარიანობის შემცირება ხდება მიზანთა ნაკადის შემთხვევით შესქელებისა და გაიშვიათების გამო, რომლებიც არ შეიძლება გავითვალისწინოთ წინასწარ.

მასიურ მომსახურების სისტემას ეწოდება სისტემა ლოდინით თუ განაცხადი, რომელსაც ყველა არხი დაკავებული დახვდა, დგება რიგში და უცდის სანამ არ განთავისუფლდება რომელიმე არხი.

თუკი განაცხადის რიგში ლოდინის დრო არაფრით არის შეზღუდული მაშინ სისტემას ეწოდება „სისტემა სუფთა ლოდინით" თუ იგი შეზღუდულია რომელიღაც პირობებით, მაშინ სისტემას ეწოდება „შერეული ტიპის სისტემა". ეს საშუალედო შემთხვევაა უარებიან სუფთა სისტემასა და ლოდინიან სუფთა სისტემას შორის. პრაქტიკისათვის ყველაზე საინტერესოა სწორედ შერეული ტიპის სისტემები.

შეზღუდვები, რომელიც დადებული აქვს ლოდინს, შეიძლება იყოს სხვადასხვა ტიპის. ხშირად ხდება, რომ შეზღუდვა ეძლევა განაცხადს რიგში ლოდინის დროს. ითვლება, რომ იგი შეზღუდულია ზემოდან, რომელიღაც ვადით $T_{\text{ლოდ}}$, რომელიც შეიძლება იყოს, როგორც ზუსტად განსაზღვრული, ისე შემთხვევითიც. ამ დროს იზღუდება მხოლოდ რიგში ლოდინის დრო, ხოლო დაწყებული მომსახურება მიიყვანება ბოლომდე იმისაგან დამოუკიდებლად, თუ რა დროს გრძელდებოდა ლოდინი (მაგალითად კლიენტი საპარიკმახეროში ჩაჯდა რა სავარძელში, ჩვეულებრივ არ მიდის მომსახურების ბოლომდე) სხვა ამოცანებში უფრო ბუნებრივია დავაწესოთ შეზღუდვა არა რიგში დგომის დროისა, არამედ სისტემაში განაცხადის ყოფნის საერთო დროისა (მაგალითად საჰაერო მიზანმა სროლის ზონაში შეიძლება დაჰყოს მხოლოდ შეზღუდული დრო და ტოვებს მას დამოუკიდებლად იმისაგან, დამთავრდა დაშენა თუ არა). ბოლოს შეიძლება განვიხილოთ აგრეთვე ისეთი შერეული სისტემაც (იგი ახლოსაა ისეთი მოვაჭრე ორგანიზაციათა ტიპთან, რომლებიც ვაჭრობენ არა პირველი მოთხოვნილების საგნებით), როცა განაცხადი დგება რიგში მხოლოდ იმ შემთხვევაში თუ რიგის სიგრძე არც ისე დიდია. აქ შეზღუდვა დაედება რიგში განაცხადთა რიცხვს.

ლოდინიან სისტემებში არსებით როლს თამაშობს ე. წ. „რიგის დისციპლინა". ცდაში მყოფი განაცხადები შეიძლება გამოიძახონ მომსახურებაზე, როგორც რიგის წესით (ადრე მოსულს ადრე მოემსახურებიან), ასევე შემთხვევითი, არაორგანიზებული წესით. არსებობენ მასიური მომსახურების სისტემები «უპირატესობებით», სადაც ზოგიერთი განაცხადები მოიმსახურებიან უპირატესად სხვებთან შედარებით („გენერლები და პოლკოვნიკები რიგგარეშე").

ლოდინიანი სისტემის ყოველ ტიპს აქვს თავისი თავისებურებანი და თავისი მათემატიკური თეორია. ბევრი მათგანი აღწერილია, მაგალითად

წიგნში — ბ. ვ. გნედენკო „ლექციები მასიურ მომსახურების თეორია-ში". (რუსულ ენაზე).

ჩვენ აქ შევჩერდებით შერეული სისტემის უმარტივეს შემთხვევაზე, რომელიც წარმოადგენს უარებიანი სისტემებისათვის ერლანგის ამოცანის ბუნებრივ განზოგადებას. ამ შემთხვევისათვის ჩვენ გამოვიყვანთ დიფერენციალურ განტოლებებს, რომლებიც ერლანგის განტოლებათა ანალოგიურია და ფორმულებს დამყარებულ რეჟიმისას მდგომარეობათა ალბათობებისათვის, რომლებიც ანალოგიურია აგრეთვე ერლანგის ფორმულებისა. განვიხილოთ მასიური მომსახურების შერეული X სისტემა n არხით შემდეგ პირობებში. სისტემის შემოსასვლელში შედის განაცხადთა უმარტივესი ნაკადი λ სიმკვრივით. ერთი განაცხადის მომსახურების დრო $T_{მომს.}$ მაჩვენებლიანია, რომლის პარამეტრია $\mu = \dfrac{1}{m_{t\,მომს.}}$, განაცხადი, რომელსაც ყველა არხი დაკავებული დახვდა, დგება რიგში და უცდის მომსახურებას: ლოდინის დრო შეზღუდულია რომელიღაც ვადით $T_{ლოდ.}$ თუ ამ ვადის გასვლამდე განაცხადი არ იქნება მიღებული მომსახურებისათვის, მაშინ იგი სტოვებს რიგს და რჩება მოუმსახურებელი. ლოდინის ვადა $T_{ლოდ}$ ჩავთვალოთ შემთხვევითად და განაწილებულად მაჩვენებლიანი კანონის მიხედვით

$$h(t) = \nu e^{-\nu t} \qquad (t > 0)$$

სადაც პარამეტრი ν ლოდინის საშუალო დროის შებრუნებული სიდიდეა:

$$\nu = \frac{1}{m_{t\,ლოდ.}}; \quad m_{t\,ლოდ} = [M_{ლოდ.}].$$

ν პარამეტრი სრულიად ანალოგიურია განაცხადთა ნაკადის და «განთავისუფლებათა ნაკადის» λ და μ პარამეტრებისა. მისი ინტერპრეტაცია შეიძლება, როგორც რიგში მდგომ განაცხადთა «გასვლათა ნაკადის» სიმკვრივე. მართლაც წარმოვიდგინოთ, განაცხადი რომელიც მხოლოდ იმას აკეთებს, რომ დგება რიგში და უცდის მას, სანამ არ დამთავრდება ლოდინის ვადა $T_{ლოდ}$, რომლის შემდეგ მიდის და ისევ დგება რიგში. მაშინ ასეთი განაცხადის რიგიდან «გასვლათა ნაკადს» ექნება ν სიმკვრივე.

ცხადია, როცა $\nu \to \infty$ შერეული ტიპის სისტემა იქცევა უარებიან სუფთა სისტემად, როცა $\nu \to 0$ იგი იქცევა სუფთა ლოდინიან სისტემად.

შევნიშნავთ, რომ ლოდინის ვადის განაწილების მაჩვენებლიანი კანონისას სისტემის გამტარუნარიანობა არ არის დამოკიდებული იმისაგან, განაცხადთა მომსახურება ხდება რიგის მიხედვით თუ შემთხვევითი სახით: ყოველი განაცხადისათვის ლოდინის დარჩენილი დროის განაწილების კანონი არ არის დამოკიდებული იმისაგან, თუ რამდენ

ხანს იდგა განაცხადი რიგში. ხდომილობათა ყველა ნაკადის პუასონური ხასიათის დაშვების მეოხებით, რომლებიც იწვევენ სისტემის მდგომარეობათა ცვლილებებს. მათში მიმდინარე პროცესები იქნება მარკოვის. დავწეროთ განტოლებანი სისტემების მდგომარეობათა ალბათობებისათვის. ამისათვის თავდაპირველად ჩამოვთვალოთ ეს მდგომარეობანი, დავნომროთ ისინი არა დაკავებული არხების რიცხვის მიხედვით, არამედ სისტემასთან დაკავშირებულ განაცხადთა რიცხვის მიხედვით. განაცხადს დავარქმევთ სისტემასთან დაკავშირებულს, თუკი იგი იმყოფება მომსახურების მდგომარეობაში, ანდა იდის რიგში. სისტემის შესაძლო მდგომარეობანი იქნებიან:

x_0 — არც ერთი არხი არ არის დაკავებული (რიგი არ არის),

x_1 — დაკავებულია ზუსტად ერთი არხი (რიგი არ არის),

. . . .

x_k — დაკავებულია ზუსტად k არხი (რიგი არ არის),

. . . .

x_n — დაკავებულია ყველა n არხი (რიგი არ არის),

x_{n+1} — დაკავებულია ყველა n არხი (ერთი განაცხადი დგას რიგში.

. . . .

x_{n+s} — დაკავებულია ყველა n არხი, s განაცხადი დგას რიგში,

რიგში ჩამდგარ განაცხადთა s რიცხვი ჩვენს პირობებში შეიძლება იყოს რაგინდ დიდი. ამგვარად X სისტემას აქვს მდგომარეობათა უსასრულო (თუმცა კი თვლადი) სიმრავლე. შესაბამისად მისი აღმწერი დიფერენციალურ განტოლებათა რიცხვი, აგრეთვე იქნება უსასრულო.

ცხადია პირველი n დიფერენციალური განტოლებანი არაფრით არ იქნებიან განსხვავებულნი! ერლანგის შესაბამისი განტოლებებიდან:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),$$

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu) p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t).$$

$$\frac{dp_{n-1}}{dt} = \lambda p_{n-2}(t) - [\lambda + (n-1)\mu] p_{n-1}(t) + n\mu p_n(t).$$

განსხვავება ახალი განტოლებებისა ერლანგის განტოლებებიდან იწყება, როცა $k=n$. მართლაც უარებიანი სისტემა x_n მდგომარეობაში შეიძლება გადავიდეს x_{n-1} მდგომარეობიდან. რაც შეეხება ლოდინიან სისტემას, მას შეუძლია გადავიდეს x_n მდგომარეობაში არა მარტო x_{n-1}-დან, არამედ x_{n+1}-დან (ყველა არხი დაკავებულია, ერთი განაცხადი რიგშია).

შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლება $p_n(t)$-სათვის. დავაფიქსიროთ t მომენტი და მოვნახოთ $p_n(t+\Delta t)$ — ალბათობა იმისა, რომ

სისტემა $t+\Delta t$ მომენტში იქნება x_n მდგომარეობაში. ეს შეიძლება განხორციელდეს სამი ხერხით:

1) t მომენტში სისტემა იყო x_n მდგომარეობაში, ხოლო Δt დროის განმავლობაში არ გამოსულა მისგან (არ მოსულა არც ერთი განაცხადი და არც ერთი არხი არ განთავისუფლებულა);

2) t მომენტში სისტემა იყო x_{n-1} მდგომარეობაში, ხოლო Δt დროის განმავლობაში გადავიდა x_n მდგომარეობაში (მოვიდა ერთი განაცხადი);

3) t მომენტში სისტემა იყო x_{n+1} მდგომარეობაში (ყველა არხი დაკავებულია, ერთი განაცხადი რიგშია), ხოლო Δt დროის განმავლობაში გადავიდა x_n-ში (ან განთავისუფლდა ერთი არხი და რიგში მდგარმა განაცხადმა დაიკავა იგი, ანდა რიგში მდგარი განაცხადი წავიდა ვადის გასვლასთან დაკავშირებით).
გვაქვს:

$$p_n(t+\Delta t)\approx p_n(t)(1-\lambda\Delta t-n\mu\Delta t)+$$
$$+p_{n-1}(t)\lambda\Delta t+p_{n+1}(t)\quad(n\mu+\nu)\Delta t,$$

საიდანაც

$$\frac{dp_n(t)}{dt}=-(\lambda+n\mu)p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)+(n\mu+\nu)p_{n+1}(t).$$

გამოვთვალოთ ახლა $p_{n+s}(t+\Delta t)$ ნებისმიერი $s>0$-სათვის, ალბათობა იმისა, რომ $t+\Delta t$ მომენტში ყველა n არხი იქნება დაკავებული და ზუსტად s განაცხადი იდგება რიგში. ეს ხდომილობა ხელახლა შეიძლება განხორციელდეს სამი ხერხით:

1) t მომენტში სისტემა უკვე იყო x_{n+s} მდგომარეობაში, ხოლო Δt დროის განმავლობაში ეს მდგომარეობა არ შეცვლილა (ე. ი. არც ერთი განაცხადი არ მოსულა, არც ერთი არხი არ განთავისუფლებულა და რიგში მდგარ s განაცხადთაგან არც ერთი არ წასულა);

2) t მომენტში სისტემა იყო x_{n+s-1} მდგომარეობაში, ხოლო Δt დროის განმავლობაში გადავიდა x_{n+s} მდგომარეობაში (ე. ი. მოვიდა ერთი განაცხადი);

3) t მომენტში სისტემა იყო x_{n+s+1} მდგომარეობაში, ხოლო Δt დროში გადავიდა x_{n+s} მდგომარეობაში (ამისათვის ან ერთი არხი უნდა განთავისუფლდეს და მაშინ რიგში მდგარი $s+1$ განაცხადიდან ერთი დაიკავებს მას, ანდა რიგში მდგარი განაცხადებიდან უნდა წავიდეს ერთი, ვადის დამთავრებასთან დაკავშირებით).
მაშასადამე

$$p_{n+s}(t+\Delta t)\approx p_{n+s}(t)(1-\lambda\Delta t-n\mu\Delta t-s\nu\Delta t)+$$
$$+p_{n+s-1}(t)\lambda\Delta t+p_{n+s+1}(t)\quad[n\mu+(s+1)\nu]\Delta t.$$

საიდანაც

$$\frac{dp_{n+s}(t)}{dt}=-(\lambda+n\mu+s\nu)p_{n+s}(t)+$$
$$+\lambda p_{n+s-1}(t)+[n\mu+(s+1)\nu]p_{n+s+1}(t).$$

ამგვარად ჩვენ მივიღეთ მდგომარეობათა ალბათობებისათვის დიფერენციალურ განტოლებათა უსასრულო რაოდენობის სისტემა:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t),\\
&\frac{dp_1(t)}{dt}=\lambda p_0(t)-(\lambda+\mu)p_1(t)+2\mu p_2(t),\\
&\cdots\\
&\frac{dp_k(t)}{dt}=\lambda p_{k-1}(t)-(\lambda+k\mu)p_k(t)+(k+1)\mu p_{k+1}(t)\\
&\qquad\qquad (1\leqslant k\leqslant n-1),\\
&\cdots\\
&\frac{dp_n(t)}{dt}=\lambda p_{n-1}(t)-(\lambda+n\mu)p_n(t)+(n\mu+\nu)p_{n+1}(t),\\
&\cdots\cdots\\
&\frac{dp_{n+s}(t)}{dt}=\lambda p_{n+s-1}(t)-(\lambda+n\mu+s\nu)p_{n+s}(t)+\\
&\qquad\qquad +[n\mu+(s+1)\nu]p_{n+s+1}(t),
\end{aligned}\right\}\qquad (19.10.1)$$

განტოლებანი (19.10.1) წარმოადგენენ ერლანგის განტოლებათა ბუნებრივ განზოგადებას შერეული ტიპის შემოსაზღვრულ ლოდინის დრო ან სისტემის შემთხვევისათვის. პარამეტრები λ, μ, ν ამ განტოლებებში შეიძლება იყვნენ როგორც მუდმივი, ისე ცვალებადი. (19.10.1) სისტემის ინტეგრებისას უნდა გავითვალისწინოთ, რომ თუმცა შესაძლო მდგომარეობათა რიცხვი სისტემისა თეორიულად უსასრულოა, მაგრამ პრაქტიკაში ალბათობანი $p_{n+s}(t)$ როცა s იზრდება გახდება უგულებელსაყოფად მცირე და შესაბამისი განტოლებები შეიძლება უგულვებელყოფილ იქნან.

გამოვიყვანოთ ერლანგის ფორმულების ანალოგიური ფორმულები სისტემათა მდგომარეობების ალბათობებისათვის მომსახურების დამყარებული რეჟიმის შემთხვევაში (როცა $t\to\infty$). განტოლებებში (19.10.1)

დავუშვათ, რომ $p_k (k=0, \dots, n)$ მუდმივია, ხოლო ყველა წარმოებული ნულის ტოლია. მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას

$$\left.\begin{array}{r} -\lambda p_0+\mu p_1=0, \\ \lambda p_0-(\lambda+\mu)p_1+2\mu p_2=0, \\ \\ \lambda p_{k-1}-(\lambda+k\mu)p_k+(k+1)\mu p_{k+1}=0 \\ (1\leqslant k\leqslant n-1), \\ \\ \lambda p_{n-1}-(\lambda+n\mu)p_n+(n\mu+\nu)\ p_{n+1}=0, \\ \\ \lambda p_{n+s-1}-(\lambda+n\mu+s\nu)p_{n+s}+ \\ +[n\mu+(s+1)\nu]p_{n+s+1}=0, \end{array}\right\} \tag{19.10.2}$$

მათ უნდა დავუმატოთ პირობა

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k=1 \tag{19.10.3}$$

ვიპოვოთ (19.10.2) სისტემის ამოხსნა.

ამისათვის გამოვიყენებთ იგივე ხერხს, რომლითაც ჩვენ ვსარგებლობდით უარებიანი სისტემის შემთხვევაში: ამოვხსნათ პირველი განტოლება p_1-ის მიმართ, ჩავსვათ მეორეში და ა. შ. ნებისმიერი $k\leqslant n$-სათვის; როგორც უარებიანი სისტემის შემთხვევაში მივიღებთ:

$$p_k=\frac{\lambda^k}{k!\mu^k}p_0. \tag{19.10.4}$$

გადავიდეთ განტოლებებზე $k>n$ $(k=n+s,\ s\geqslant 1)$-სათვის. იმავე ხერხით მივიღებთ:

$$p_{n+1}=\frac{\lambda^{n+1}p_0}{n!\mu^n(n\mu+\nu)},$$

$$p_{n+2}=\frac{\lambda^{n+2}p_0}{n!\mu^n(n\mu+\nu)(n\mu+2\nu)},$$

და საერთოდ ნებისმიერ $s\geqslant 1$-სათვის

$$p_{n+s}=\frac{\lambda^{n+s}p_0}{n!\mu^n\prod\limits_{m=1}^{s}(n\mu+m\nu)}. \tag{19.10.5}$$

ორივე (19.10.4) და (19.10.5) ფორმულაში თანამამრავლად შედის ალბათობა p_0. განვსაზღვროთ იგი (19.10.3) პირობიდან. მასში (19.10.4) და (19.10.5) გამოსახულებათა ჩასმით $k \leqslant n$ და $s \geqslant 1$-სათვის მივიღებთ:

$$p_0 \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n+s}}{n!\mu^n \prod\limits_{m=1}^{s} (n\mu + m\nu)} \right\} = 1,$$

საიდანაც

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \sum\limits_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n+s}}{n!\mu^n \prod\limits_{m=1}^{s} (n\mu + m\nu)}}. \qquad (19.10.6)$$

გარდავქმნათ (19.10.4), (19.10.5) და (19.10.6) გამოსახულებანი, მათში λ და ν სიმკვრივეების ნაცვლად «დაყვანილი სიმკვრივეების» შემოყვანით

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda}{\mu} &= \lambda m_{t\ \text{მომს}} = \alpha, \\ \frac{\nu}{\mu} &= \nu m_{t\ \text{მომს}} = \beta \end{aligned}\right\} \qquad (19.10.7)$$

პარამეტრები α და β გამოსახავენ შესაბამისად განაცხადთა საშუალო რიცხვს და რიგში მდგარ განაცხადთა წასვლის საშუალო რიცხვს, რომელიც მოდის ერთი განაცხადის მომსახურების საშუალო დროზე.

ახალ აღნიშვნებში ფორმულები (19.10.4), (19.10.5) და (19.10.6) მიიღებენ სახეს:

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0 \qquad (0 < k \leqslant n); \qquad (19.10.8)$$

$$p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^{n+s}}{n!} p_0}{\prod\limits_{m=1}^{s} (n + m\beta)} \qquad (s \geqslant 1); \qquad (19.10.9)$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s} (n + m\beta)}}. \qquad (19.10.10)$$

(19.10.10)-ის (19.10.8) და (19.10.9)-ში ჩასმით მივიღებთ სისტემის მდგომარეობისათვის ალბათობათა საბოლოო გამოსახულებებს:

$$p_k=\frac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}+\dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}\quad(0\leqslant k\leqslant n);\qquad(19.10.11)$$

$$p_{n+s}=\frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}\,\dfrac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}+\dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}\quad(s\geqslant 1).\qquad(19.10.12)$$

ვიცით რა სისტემის ყველა მდგომარეობათა ალბათობები, ადვილად შეიძლება განვსაზღვროთ სხვა ჩვენთვის საინტერესო მახასიათებლები, კერძოდ $P_{\text{მოუმ}}$ ალბათობა იმისა, რომ განაცხადი დატოვებს სისტემას მოუმსახურებლად. განვსაზღვროთ იგი შემდეგი მოსაზრებებიდან: დამყარებულ რეჟიმისას $P_{\text{მოუმ}}$ — ალბათობა იმისა, რომ განაცხადი დასტოვებს სისტემას მომსახურებლად, არის განაცხადთა საშუალო რიცხვის შეფარდება დროის ერთეულში რიგიდან წამსვლელ განაცხადთა საშუალო რიცხვთან. მოვნახოთ რიგიდან წამსვლელ განაცხადთა საშუალო რიცხვი დროის ერთეულში. ამისათვის ჯერ გამოვთვალოთ რიგში მყოფ განაცხადთა მათემატიკური ლოდინი

$$m_s=M[s]=\sum_{s=1}^{\infty}sp_{n+s}=\frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{s\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}+\dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}.\qquad(19.10.13)$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ $P_{\text{მოუმს}}$ საჭიროა m_s გავამრავლოთ ერთი განა-

ცხადის საშუალო, «წასვლათა სიმკვრივეზე» და გავყოთ განაცხადთა საშუალედო λ სიმკვრივეზე. ე. ი. გავამრავლოთ კოეფიციენტზე

$$\frac{\nu}{\lambda}=\frac{\frac{\nu}{\mu}}{\frac{\lambda}{\mu}}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

მივიღებთ

$$p_{\text{მოუმ}}=\frac{\beta}{\alpha}\frac{\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{s\alpha^s}{\prod_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}. \qquad (19.10.14)$$

სისტემის ფარდობითი გამტარუნარიანობა ხასიათდება იმის ალბათობით, რომ განაცხადი, რომელიც მოხვდა სისტემაში მომსახურებულ იქნება

$$q=1-P_{\text{მოუმს}}$$

ცხადია, რომ ლოდინიანი სისტემის გამტარუნარიანობა იმავე λ და μ შემთხვევაში ყოველთვის იქნება უფრო მაღალი, ვიდრე უარებიანი სისტემების გამტარუნარიანობა: რიგის არსებობისას მოუმსახურებელი გადიან არა ყველა განაცხადები, რომლებმაც n არხს დაკავებულს მიუსწრეს, არამედ მხოლოდ ზოგიერთები. გამტარუნარიანობა იზრდება ლოდინის საერთო დროის გაზრდისას $m_{t\,\text{ლოდ}}=\frac{1}{\nu}$.

უშუალოდ სარგებლობა (19.10.11) ,(19.10.12) და (19.10.14) ფორმულებით რამდენადმე გაძნელებულია იმით, რომ მათში შედიან უსასრულო ჯამები, მაგრამ ამ ჯამის წევრები სწრაფად კლებულობენ[1].

---

[1] იმ შეცდომის უხეშად შესაფასებლად, რომელიც ხდება ჯამის ყველა წევრის r-დან დაწყებული, გადაგდებით შეიძლება ვისარგებლოდ ფორმულებით:

$$\sum_{s=r}^{\infty}\frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^{s}(n+m\beta)}<\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r}{r!}e^{\frac{\alpha}{\beta}} \qquad \sum_{s=r}^{\infty}\frac{s\alpha^s}{\prod_{m=1}^{s}(n+m\beta)}<\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r}{(r-1)!}e^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

ვნახოთ რად გადაიქცევა (19.10.11) და (19.10.12) ფორმულები, როცა $\beta\to\infty$ და $\beta\to 0$. ცხადია, რომ როცა $\beta\to\infty$ ლოდინიანი სისტემა უნდა გადაიქცეს უარებიან სისტემად (განაცხადი მყისვე გადის რიგიდან). მართლაც, როცა $\beta\to\infty$ (19.10.12) ფორმულები მოგვცემენ ნულს, ხოლო (19.10.11) ფორმულები გადაიქცევიან უარებიანი სისტემებისათვის ერლანგის ფორმულებად.

განვიხილოთ მეორე უკიდურესი შემთხვევა: სუფთა ლოდინიანი სისტემა ($\beta\to 0$). ასეთ სისტემებში განაცხადები საერთოდ არ მიდიან რიგიდან და ამიტომ $P_{\text{მოუმს}}=0$: ყოველ განაცხადს ადრე თუ გვიან მოუწევს მომსახურება. სამაგიეროდ სუფთა ლოდინიან სისტემაში ყოველთვის არის ზღვრული სტაციონარული რეჟიმი, როცა $t\to\infty$. შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ასეთი რეჟიმი არსებობს მხოლოდ $\alpha<n$ შემთხვევაში, ე. ი. როცა განაცხადთა საშუალო რიცხვი რომელიც მოდის ერთი განაცხადის მომსახურების დროზე, არ გამოდის n არხიანი სისტემის შესაძლებლობის გარეთ. თუ $\alpha\geqslant n$ რიგში მდგომ განაცხადთა რიცხვი დროთა განმავლობაში გაიზრდება უსასრულოდ.

დავუშვათ, $\alpha<n$ და მოვნახოთ ზღვრული ალბათობანი $p_k(0\leqslant k\leqslant n)$ სუფთა ლოდინიანი სისტემისათვის. ამისათვის (19.9.10), (19.9.11) და (19.9.12) ფორმულებში დავუშვათ $\beta\to 0$. მივიღებთ:

$$p_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{n^s}},$$

ან თუ შევკრებთ პროგრესიას (რაც შეიძლება როცა $\alpha<n$)

$$p_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}, \qquad (19.10.15)$$

აქედან ვსარგებლობთ რა (19.10.8) და (19.10.9) ფორმულებით, ვპოულობთ

$$p_k=\frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}\,(0\leqslant k\leqslant n), \qquad (19.10.16)$$

და ანალოგიურად $k=n+s$ $(s\geqslant 0)$-თვის

$$p_{n+s}=\frac{\dfrac{\alpha^{n+s}}{n!n^s}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}+\dfrac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}} \tag{19.10.17}$$

რიგში მყოფ განაცხადთა საშუალო რიცხვი განისაზღვრება ფორმულით (19.10.13), როცა $\beta\to 0$:

$$m_s=\frac{\dfrac{\alpha^{n+1}}{n\cdot n!\left(1-\dfrac{\alpha}{n}\right)^2}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}+\dfrac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}. \tag{19.10.18}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ლოდინის შეუზღუდველი დროით სამარხიანი სისტემის შესასვლელში შედის განაცხადთა უმარტივესი ნაკადი სიმკვრივით $\lambda=4$ (განაცხადი საათში). ერთი განაცხადის მომსახურების დრო $m_{t\,მომ.}=30$ წთ. განვსაზღვროთ არსებობს თუ არა მომსახურების დამყარებული რეჟიმი. თუ არსებობს მაშინ ვიპოვოთ ალბათობანი p_0, p_1, p_2, p_3, რიგის არსებობის ალბათობა და რიგის საშუალო სიგრძე m_s.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს $\mu=\frac{1}{m_{t\,მომ}}=2$; $\alpha=\frac{\lambda}{\mu}=2$. ვინაიდან $\alpha<n$ დამყარებული რეჟიმი არსებობს. ფორმულით (19.10.16) ვპოულობთ:

$$p_0=\frac{1}{9}\approx 0,111;\quad p_1=\frac{2}{9}\approx 0,222;\quad p_2=\frac{2}{9}\approx 0,222;\quad p_3=\frac{8}{54}\approx 0,148.$$

რიგის არსებობის ალბათობა:

$$P_{რიგ}=1-(p_0+p_1+p_2+p_3)=0,297.$$

რიგის საშუალო სიგრძე (19.10.18) ფორმულით იქნება

$$m_s\approx 0.89 \text{ (განაცხადი)}.$$

19.11. შერეული ტიპის სისტემა, რიგის სიგრძეზე შეზღუდვით

წინა პუნქტში ჩვენ განვიხილეთ მასიური მომსახურების სისტემა, რიგში ყოფნის შეზღუდული დროით. აქ ჩვენ განვიხილავთ შერეული ტიპის სისტემას შეზღუდვის სხვა სახით — რიგში მდგომ განაცხადთა რიცხვით. დავუშვათ, რომ განაცხადი, რომელმაც ყველა არხს დაკავებულს მიუსწრო, დგება რიგში, თუ მასში იმყოფება m განაცხადზე ნაკლები. თუ განაცხადთა რიცხვი რიგში ტოლია m-ის (m-ზე მეტი იგი არ შეიძლება იყოს), მაშინ უკანასკნელად მოსული განაცხადი რიგში არ

დგება და მოუმსახურებელი ტოვებს სისტემას. დანარჩენი დაშვებები — განაცხადთა უმარტივეს ნაკადზე და მომსახურების დროის მაჩვენებლიან განაწილებაზე დავტოვოთ წინანდებურად.

ამგვარად გვაქვს n არხიანი სისტემა ლოდინით, რომელშიც რიგში მდგარ განაცხადთა რიცხვი შემოსაზღვრულია m რიცხვით. შევადგინოთ სისტემის მდგომარეობათა ალბათობებისათვის დიფერენციალური განტოლებანი. შევნიშნავთ, რომ მოცემულ შემთხვევაში სისტემის მდგომარეობათა რიცხვი იქნება სასრული, რადგან სისტემასთან დაკავშირებულ განაცხადთა საერთო რიცხვი, არ შეიძლება აღემატებოდეს $n+m$-ს (n მომსახურებაში და m რიგში მყოფი).

ჩამოვთვალოთ სისტემის მდგომარეობანი:

x_0 — ყველა არხი თავისუფალია, რიგი არ არის,

x_1 — დაკავებულია ერთი არხი „—"

. . . .

x_k — დაკავებულია k არხი „—"

. . . .

x_{n-1} — დაკავებულია $n-1$ არხი „—",

x_n — დაკავებულია ყველა n არხი „—",

x_{n+1} — დაკავებულია ყველა n არხი, ერთი განაცხადი დგას რიგში,

. . . .

x_{n+m} — დაკავებულია ყველა n არხი, m განაცხადი დგას რიგში.

ცხადია პირველი n განტოლება $p_0(t), \ldots p_{n-1}(t)$ ალბათობებისათვის დაემთხვევა ერლანგის (19.8.8) განტოლებებს. გამოვიყვანოთ დანარჩენი განტოლებანი. გვაქვს:

$$p_n(t+\Delta t)=p_{n-1}(t)\lambda\Delta t+p_n(t)\ (1-\lambda\Delta t-n\mu\ \Delta t)+p_{n+1}(t)n\mu\Delta t.$$

საიდანაც

$$\frac{dp_n(t)}{dt}=\lambda p_{n-1}(t)-(\lambda+n\mu)\ \ p_n(t)+n\mu p_{n+1}(t).$$

შემდეგ გამოვიყვანოთ განტოლება $p_{n+s}(t)$ $(1\leqslant s<m)$-სათვის

$$p_{n+s}(t+\Delta t)=$$
$$=p_{n+s-1}(t)\lambda\Delta t+p_{n+s}(t)(1-\lambda\Delta t-n\mu\Delta t)+p_{n+s+1}(t)n\mu\Delta t,$$

საიდანაც

$$\frac{dp_{n+s}(t)}{dt}=\lambda p_{n+s-1}(t)-(\lambda+n\mu)p_{n+s}(t)+n\mu p_{n+s+1}(t).$$

უკანასკნელი განტოლება იქნება:

$$\frac{dp_{n+m}(t)}{dt}=\lambda p_{n+m-1}(t)-n\mu p_{n+m}(t).$$

ამგვარად მიღებულია $n+m$ სისტემა $(m+n+1)$ დიფერენციალური განტოლებისა:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t),\\
&\frac{dp_k(t)}{dt}=\lambda p_{k-1}(t)-(\lambda+k\mu)p_k(t)+\\
&\qquad\qquad+(k+1)\mu p_{k+1}(t)\qquad (0<k\leqslant n-1),\\
&\frac{dp_n(t)}{dt}=\lambda p_{n-1}(t)-(\lambda+n\mu)p_n(t)+n\mu p_{n+1}(t),\\
&\frac{dp_{n+s}(t)}{dt}=\lambda p_{n+s-1}(t)-(\lambda+n\mu)p_{n+s}(t)+\\
&\qquad\qquad+n\mu p_{n+s+1}(t)\quad (1\leqslant s<m),\\
&\frac{dp_{n+m}(t)}{dt}=\lambda p_{n+m-1}-n\mu p_{n+m}(t).
\end{aligned}\right\}\qquad (19.11.1)$$

განვიხილოთ ზღვრული შემთხვევა, როცა $t\to\infty$. ყველა წარმოებულის ნულთან გატოლებით, ხოლო ყველა ალბათობის მუდმივად ჩათვლით, მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$\left.\begin{aligned}
&-\lambda p_0+\mu p_1=0,\\
&\lambda p_{k-1}-(\lambda+k\mu)p_k+(k+1)\mu p_{k+1}=0\\
&\qquad\qquad (0<k\leqslant n-1),\\
&\lambda p_{n-1}-(\lambda+n\mu)p_n+n\mu p_{n+1}=0,\\
&\lambda p_{n+s-1}-(\lambda+n\mu)p_{n+s}+n\mu p_{n+s+1}=0\\
&\qquad\qquad (1\leqslant s<m),\\
&\lambda p_{n+m-1}-n\mu p_{n+m}=0
\end{aligned}\right\}\qquad (19.11.2)$$

დამატებითი პირობა

$$\sum_{k=0}^{n+m}p_k=1,\qquad (19.11.3)$$

განტოლებანი (19.11.2) შეიძლება ამოიხსნას ისე, როგორც ჩვენ ამოვხსენით წინა პუნქტებში ანალოგიური ალგებრული განტოლებანი.

არ შევჩერდებით ამ ამოხსნაზე და მოვიყვანთ მხოლოდ საბოლოო ფორმულებს:

$$p_k = \frac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{m} \left(\dfrac{\alpha}{n} \right)^s} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n) \qquad (19.11.4)$$

$$p_{n+s} = \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!} \left(\dfrac{\alpha}{n} \right)^s}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{m} \left(\dfrac{\alpha}{n} \right)^s} \qquad (1 \leqslant s \leqslant m) \qquad (19.11.5)$$

ალბათობა იმისა, რომ განაცხადი დატოვებს მოუმსახურებლად სისტემას, ტოლია p_{n+m} ალბათობისა, რომ რიგში უკვე დგას m განაცხადი. არ არის ძნელი შევნიშნოთ, რომ ფორმულები (19.11.4) და (19.11.5) მიიღება ფორმულებიდან (19.10.11), (19.10.12), თუ მათში დავუშვებთ $\beta = 0$ და s-ის აჯამვას შევზღუდავთ ზედა m საზღვრით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ავტომანქანების მიმდინარე რემონტის სადგურში შემოდის განაცხადთა უმარტივესი ნაკადი სიმკვრივით $\lambda = 0,5$ (მანქ. საათში). გვაქვს შეკეთებისათვის ერთი შენობა. სადგურის ეზოში ერთდროულად შეიძლება იყოს რიგის მოლოდინში არაუმეტეს 3 მანქანისა. ერთი მანქანის რემონტის საშუალო დრო $m_{t_{\text{მომს}}} = \dfrac{1}{\mu} = 2$ (საათი). განვსაზღვროთ: ა) სისტემის გამტარუნარიანობა; ბ) სადგურის მოცდენის საშუალო დრო; გ) განვსაზღვროთ რამდენად შეიცვლება ეს მახასიათებლები, თუ აღვჭურვავთ მეორე შენობას სარემონტოდ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს: $\lambda = 0,5$; $\mu = 0,5$; $\alpha = 1$; $m = 3$.

ა) ფორმულიდან (19.11.5), $n = 1$ დაშვებით ვპოულობთ ალბათობას იმისას, რომ მოსული განაცხადი დატოვებს სისტემას მოუმსახურებლად:

$$P_{\text{მოუმს.}} = p_{1+3} = \frac{1}{1 + 1 + 3} = 0,20.$$

სისტემის ფარდობითი გამტარუნარიანობა $q = 1 - P_{\text{მოუმ}} = 0,80$

აბსოლუტური გამტარუნარიანობა: $Q = \lambda q = 0,4$ (მანქანა საათში).

ბ) დროის საშუალო წილი, რომლის განმავლობაში სისტემა მოცდება, მოვნახოთ ფორმულით (19.11.4): $p_0 = \dfrac{1}{5} = 0,20$.

გ) $n=2$ დაშვებით, ვპოულობთ:

$$P_{\text{მოუმ}}=p_{2+3}=\frac{\frac{1}{16}}{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}=\frac{1}{47}\approx 0{,}021,$$

$q=1-P_{\text{მოუმ}}\approx 0.979$ (ე. დაკმაყოფილებული იქნება ყველა განაცხადის დაახლოებით 98%).

$$Q=\lambda q\approx 0{,}49 \text{ (მანქანა საათში)}$$

მოცდენის ფარდობითი დრო: $p_0=\frac{16}{47}\approx 0.34$

ე. ი. მოწყობილობა მომცდარი იქნება მთელი დროის დაახლოებით 34%.

დანართი

განაწილების ნორმალური ფუნქციის მნიშვნელობანი

ცხრილი № 1

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ
—0,00	0,5000	40	—0,30	0,3821	38	—0,60	0,2743	34
—0,01	4960	40	—0,31	3783	38	—0,61	2709	33
—0,02	4920	40	—0,32	3745	38	—0,62	2676	33
—0,03	4880	40	—0,33	3707	38	—0,63	2643	32
—0,04	4840	39	—0,34	3669	37	—0,64	2611	33
—0,05	4801	40	—0,35	3632	38	—0,65	2578	32
—0,06	4761	40	—0,36	3594	37	—0,66	2546	32
—0,07	4721	40	—0,37	3557	37	—0,67	2514	31
—0,08	4681	40	—0,38	3520	37	—0,68	2483	32
—0,09	4641	39	—0,39	3483	37	—0,69	2451	31
—0,10	0,4602	40	—0,40	0,3446	37	—0,70	0,2420	31
—0,11	4562	40	—0,41	3409	37	—0,71	2389	31
—0,12	4522	39	—0,42	3372	36	—0,72	2358	31
—0,13	4483	40	—0,43	3336	36	—0,73	2327	30
—0,14	4443	39	—0,44	3300	36	—0,74	2297	31
—0,15	4404	40	—0,45	3264	36	—0,75	2266	30
—0,16	4364	39	—0,46	3228	36	—0,76	2236	30
—0,17	4325	39	—0,47	3192	36	—0,77	2206	29
—0,18	4286	39	—0,48	3156	35	—0,78	2177	29
—0,19	4247	40	—0,49	3121	36	—0,79	2148	29
—0,20	0,4207	39	—0,50	0,3085	35	—0,80	0,2119	29
—0,21	4168	39	—0,51	3050	35	—0,81	2090	29
—0,22	4129	39	—0,52	3015	34	—0,82	2061	28
—0,23	4090	38	—0,53	2981	35	—0,83	2033	28
—0,24	4052	39	—0,54	2946	34	—0,84	2005	28
—0,25	4013	39	—0,55	2912	35	—0,85	1977	28
—0,26	3974	38	—0,56	2877	34	—0,86	1949	27
—0,27	3936	39	—0,57	2843	33	—0,87	1922	28
—0,28	3897	38	—0,58	2810	34	—0,88	1894	27
—0,29	3859	38	—0,59	2776	33	—0,89	1867	26

x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ
—0,90	0,1841	27	—1,30	0,0968	17	—1,70	0,0446	10
—0,91	1814	26	—1,31	0951	17	—1,71	0436	9
—0,92	1788	26	—1,32	0934	16	—1,72	0427	9
—0,93	1762	26	—1,33	0918	17	—1,73	0418	9
—0,94	1736	25	—1,34	0901	16	—1,74	0409	8
—0,95	1711	26	—1,35	0885	16	—1,75	0401	9
—0,96	1685	25	—1,36	0869	16	—1,76	0392	8
—0,97	1660	25	—1,37	0853	15	—1,77	0384	9
—0,98	1635	24	—1,38	0838	15	—1,78	0375	8
—0,99	1611	24	—1,39	0823	15	—1,79	0367	8
—1,00	0,1587	24	—1,40	0,0808	15	—1,80	0,0359	8
—1,01	1563	24	—1,41	0793	15	—1,81	0351	7
—1,02	1539	24	—1,42	0778	14	—1,82	0344	8
—1,03	1515	23	—1,43	0764	15	—1,83	0336	7
—1,04	1492	23	—1,44	0749	14	—1,84	0329	7
—1,05	1469	23	—1,45	0735	14	—1,85	0322	8
—1,06	1446	23	—1,46	0721	13	—1,86	0314	7
—1,07	1423	22	—1,47	0708	14	—1,87	0307	6
—1,08	1401	22	—1,48	0694	13	—1,88	0301	7
—1,09	1379	22	—1,49	0681	13	—1,89	0294	6
—1,10	0,1357	22	—1,50	0,0668	13	—1,90	0,0288	7
—1,11	1335	21	—1,51	0655	12	—1,91	0281	7
—1,12	1314	22	—1,52	0643	13	—1,92	0274	6
—1,13	1292	21	—1,53	0630	12	—1,93	0268	6
—1,14	1271	20	—1,54	0618	12	—1,94	0262	6
—1,15	1251	21	—1,55	0606	12	—1,95	0256	6
—1,16	1230	20	—1,56	0594	12	—1,96	0250	6
—1,17	1210	20	—1,57	0582	11	—1,97	0244	5
—1,18	1190	20	—1,58	0571	12	—1,98	0239	6
—1,19	1170	19	—1,59	0559	11	—1,99	0233	5
—1,20	0,1151	20	—1,60	0,0548	11	—2,00	0,0228	49
—1,21	1131	19	—1,61	0537	11	—2,10	0179	40
—1,22	1112	19	—1,62	0526	10	—2,20	0139	32
—1,23	1093	18	—1,63	0516	11	—2,30	0107	25
—1,24	1075	19	—1,64	0505	10	—2,40	0082	20
—1,25	1056	18	—1,65	0495	10	—2,50	0062	15
—1,26	1038	18	—1,66	0485	10	—2,60	0047	12
—1,27	1020	17	—1,67	0475	10	—2,70	0035	9
—1,28	1003	18	—1,68	0465	10	—2,80	0026	7
—1,29	0985	17	—1,69	0455	9	—2,90	0019	5

x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ
—3,00	0,0014	4	0,30	0,6179	38	0,70	0,7580	31
—3,10	0010	3	0,31	6217	38	0,71	7611	31
—3,20	0007	2	0,32	6255	38	0,72	7642	31
—3,30	0005	2	0,33	6293	38	0,73	7673	30
—3,40	0003	1	0,34	6331	37	0,74	7703	31
—3,50	0002	0	0,35	6368	38	0,75	7734	30
—3,60	0002	1	0,36	6406	37	0,76	7764	30
—3,70	0001	0	0,37	6443	37	0,77	7794	29
—3,80	0001	1	0,38	6480	37	0,78	7823	29
—3,90	0000		0,39	6517	37	0,79	7852	29
0,00	0,5000	40	0,40	0,6554	37	0,80	0,7881	29
0,01	5040	40	0,41	6591	37	0,81	7910	29
0,02	5080	40	0,42	6628	36	0,82	7939	28
0,03	5120	40	0,43	6664	36	0,83	7967	28
0,04	5160	39	0,44	6700	36	0,84	7995	28
0,05	5199	40	0,45	6736	36	0,85	8023	28
0,06	5239	40	0,46	6772	36	0,86	8051	27
0,07	5279	40	0,47	6808	36	0,87	8078	28
0,08	5319	40	0,48	6844	35	0,88	8106	27
0,09	5359	39	0,49	6879	36	0,89	8133	26
0,10	0,5398	40	0,50	0,6915	35	0,90	0,8159	27
0,11	5438	40	0,51	6950	35	0,91	8186	26
0,12	5478	39	0,52	6985	34	0,92	8212	26
0,13	5517	40	0,53	7019	35	0,93	8238	26
0,14	5557	39	0,54	7054	34	0,94	8264	25
0,15	5596	40	0,55	7088	35	0,95	8289	26
0,16	5636	39	0,56	7123	34	0,96	8315	25
0,17	5675	39	0,57	7157	33	0,97	8340	25
0,18	5714	39	0,58	7190	34	0,98	8365	24
0,19	5753	40	0,59	7224	33	0,99	8389	24
0,20	0,5793	39	0,60	0,7257	34	1,00	0,8413	24
0,21	5832	39	0,61	7291	33	1,01	8437	24
0,22	5871	39	0,62	7324	33	1,02	8461	24
0,23	5910	38	0,63	7357	32	1,03	8485	23
0,24	5948	39	0,64	7389	33	1,04	8508	23
0,25	5987	39	0,65	7428	32	1,05	8531	23
0,26	6026	38	0,66	7454	32	1,06	8554	23
0,27	6064	39	0,67	7486	31	1,07	8577	22
0,28	6103	38	0,68	7517	32	1,08	8599	22
0,29	6141	33	0,69	7549	31	1,09	8621	22

x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ
1,10	0,8643	22	1,50	0,9332	13	1,90	0,9713	6
1,11	8665	21	1,51	9345	12	1,91	9719	7
1,12	8686	22	1,52	9357	13	1,92	9726	6
1,13	8708	21	1,53	9370	12	1,93	9732	6
1,14	8729	20	1,54	9382	12	1,94	9738	6
1,15	8749	21	1,55	9394	12	1,95	9744	6
1,16	8770	20	1,56	9406	12	1,96	9750	6
1,17	8790	20	1,57	9418	11	1,97	9756	5
1,18	8810	20	1,58	9429	12	1,98	9761	6
1,19	8830	19	1,59	9441	12	1,99	9767	5
1,20	0,8849	20	1,60	0,9452	11	2,00	0,9772	49
1,21	8869	19	1,61	9463	11	2,10	9821	40
1,22	8888	19	1,62	9474	10	2,20	9861	32
1,23	8907	18	1,63	9484	11	2,30	9893	25
1,24	8925	19	1,64	9495	10	2,40	9918	20
1,25	8944	18	1,65	9505	10	2,50	9938	15
1,26	8962	18	1,66	9515	10	2,60	9953	12
1,27	8980	17	1,67	9525	10	2,70	9965	9
1,28	8997	18	1,68	9535	10	2,80	9974	7
1,29	9015	17	1,69	9545	9	2,90	9981	5
1,30	0,9032	17	1,70	0,9554	10	3,00	0,9986	4
1,31	9049	17	1,71	9564	9	3,10	9990	3
1,32	9066	16	1,72	9573	9	3,20	9993	2
1,33	9082	17	1,73	9582	9	3,30	9995	2
1,34	9099	16	1,74	9591	8	3,40	9997	1
1,35	9115	16	1,75	9599	9	3,50	9998	0
1,36	9131	16	1,76	9608	8	3,60	9998	1
1,37	9147	15	1,77	9616	9	3,70	9999	0
1,38	9162	15	1,78	9625	8	3,80	9999	1
1,39	9177	15	1,79	9633	8	3,90	1,0000	
1,40	0,9192	15	1,80	0,9641	8			
1,41	9207	15	1,81	9649	7			
1,42	9222	14	1,82	9656	8			
1,43	9236	15	1,83	9664	7			
1,44	9251	14	1,84	9671	7			
1,45	9265	14	1,85	9678	8			
1,46	9279	13	1,86	9686	7			
1,47	9292	14	1,87	9693	6			
1,48	9306	13	1,88	9699	7			
1,49	9319	13	1,89	9706	7			

ცხრილი № 2

e^{-x} ფუნქციის მნიშვნელობები

	e^{-x}	Δ	x	e^{-x}	Δ	x	e^{-x}	Δ	x	e^{-x}	Δ
0,00	1,000	10	0,40	0,670	7	0,80	0,449	4	3,00	0,050	5
0,01	0,990	10	0,41	0,664	7	0,81	0,445	5	3,10	0,045	4
02	980	10	42	657	7	82	440	4	3,20	41	4
03	970	9	43	650	6	83	436	4	3,30	37	4
04	961	10	44	644	6	84	432	5	3,40	33	3
05	951	9	45	638	7	85	427	4	3,50	30	3
06	942	10	46	631	6	86	423	4	3,60	27	2
07	932	9	47	625	6	87	419	4	3,70	25	3
08	923	9	48	619	6	88	415	4	3,80	22	2
09	914	9	49	613	7	89	411	4	3,90	20	2
0,10	0,905	9	0,50	0,606	6	0,90	0,407	4	4,00	0,0183	17
11	896	9	51	600	5	91	403	4	4,10	166	16
12	887	9	52	595	6	92	399	4	4,20	150	14
13	878	9	53	589	6	93	395	4	4,30	136	13
14	869	8	54	583	6	94	391	4	4,40	123	12
15	861	9	55	577	6	95	387	4	4,50	111	10
16	852	8	56	571	6	96	383	4	4,60	101	10
17	844	9	57	565	5	97	379	4	4,70	0,0091	9
18	835	8	58	560	6	98	375	3	4,80	82	8
19	827	8	59	554	5	99	372	4	4,90	74	7
0,20	0,819	8	0,60	0,549	6	1,00	0,368	35	5,00	0,0067	6
21	811	8	61	543	5	1,10	333	31	5,10	61	6
22	803	8	62	538	5	1,20	302	29	5,20	55	5
23	795	8	63	533	6	1,30	273	26	5,30	50	5
24	787	8	64	527	5	1,40	247	24	5,40	45	4
25	779	8	65	522	5	1,50	223	21	5,50	41	4
26	771	8	66	517	5	1,60	202	19	5,60	37	4
27	763	7	67	512	5	1,70	183	18	5,70	33	3
28	756	8	68	507	5	1,80	165	15	5,80	30	3
29	748	7	69	502	5	1,90	150	15	5,90	27	2
0,30	0,741	8	0,70	0,497	5	2,00	0,135	13	6,00	0,0025	3
31	733	7	71	492	5	2,10	122	11	6,10	22	2
32	726	7	72	487	5	2,20	111	11	6,20	20	2
33	719	7	73	482	5	2,30	100	9	6,30	18	1
34	712	7	74	477	5	2,40	0,091	9	6,40	17	2
35	705	7	75	472	4	2,50	82	8	6,50	15	1
36	698	7	76	468	5	2,60	74	7	6,60	14	2
37	691	7	77	463	5	2,70	67	6	6,70	12	1
38	684	7	78	458	4	2,80	61	6	6,80	11	1
39	677	7	79	454	5	2,90	55	5	6,90	10	1
0,40	0,670		0,80	0,449		3,00	0,050		7,00	0,0009	

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$ ფუნქციის მნიშვნელობები

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973	0,0
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	8918	0,1
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825	0,2
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3696	0,3
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538	0,4
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3310	3391	3372	3352	0,5
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144	0,6
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920	0,6
0,8	2997	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685	0,8
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444	0,9
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203	1,0
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965	1.1
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736	1,2
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518	1,3
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315	1,4
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127	1,5
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957	1,6
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804	1,7
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	1721	0707	0694	0681	0669	1,8
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551	1,9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449	2,0
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0388	0379	0371	0363	2,1
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290	2,2
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229	2.3
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180	2,4
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139	2,5
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107	2,6
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081	2,7
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061	2,8
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046	2,9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034	3,0
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025	3,1
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018	3.2
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0013	0013	0013	3,3
3,4	012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009	3.4
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006	3,5
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004	3,6
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	3,7
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002	3,8
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001	3,9
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x

ცხრილი № 4

r-ზე და p-ზე დამოკიდებული χ^2-ის მნიშვნელობანი

r \ p	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,84	22,5
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3
21	8,90	9,92	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	9,54	10,60	12,34	14,04	16,31	18,10	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	51,2
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	12,20	13,41	15,38	17,29	19,82	21,8	25,3	29,2	31,8	55,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,5
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,3
30	14,95	16,31	18,49	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9	59,7

1-დან 100-მდე მთელი რიცხვების 2-ის ფუძით ლოგარითმების

x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$
1	0,00000	36	5,16993	71	6,14975
2	1,00000	37	5,20945	72	6,16992
3	1,58496	38	5,24793	73	6,18982
4	2,00000	39	5,28540	74	6,20945
5	2,32193	40	5,32193	75	6,22882
6	2,58496	41	5,35755	76	6,24793
7	2,80735	42	5,39232	77	6,26679
8	3,00000	43	5,42626	78	6,28540
9	3,16993	44	5,45943	79	6,30378
10	3,32193	45	5,49185	80	6,32193
11	3,45943	46	5,52356	81	6,33985
12	3,58496	47	5,55459	82	6,35755
13	3,70044	48	5,58496	83	6,37504
14	3,80735	49	5,61471	84	6,39232
15	3,90689	50	5,64386	85	6,40939
16	4,00000	51	5,67242	86	6,42626
17	4,08746	52	5,70044	87	6,44294
18	4,16993	53	5,72792	88	6,45943
19	4,24793	54	5,75489	89	6,47573
20	4,32193	55	5,78136	90	6,49185
21	4,39232	56	5,80735	91	6,50779
22	4,45943	57	5,83289	92	6,52356
23	4,52356	58	5,85798	93	6,53916
24	4,58496	59	5,88264	94	6,55459
25	4,64386	60	5,90689		6,56986
26	4,70044	61	5,93074	96	6,58496
27	4,75489	62	5,95420	97	6,59991
28	4,80735	63	5,97728	98	6,61471
29	4,85798	64	6,00000	99	6,62936
30	4,90689	65	6,02237	100	6,64386
31	4,95420	66	6,04439		
32	5,00000	67	6,06609		
33	5,04439	68	6,08746		
34	5,08746	69	6,10852		
35	5,12928	70	6,12928		

t_β-ს მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ $2\int_0^{t_\beta} S_{n-1}(t)dt=\beta$

$n-1$ \ β	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963
2	142	289	445	617	0,816	1,061	1,336
3	137	277	424	584	765	0,978	1,250
4	134	271	414	569	741	941	1,190
5	132	267	408	559	727	920	1,156
6	131	265	404	553	718	906	1,134
7	130	263	402	549	711	896	1,119
8	130	262	399	546	706	889	1,108
9	129	261	398	543	703	883	1,100
10	129	260	397	542	700	879	1,093
11	129	260	396	540	697	876	1,088
12	128	259	395	539	695	873	1,083
13	128	259	394	538	694	870	1,079
14	128	258	393	537	692	868	1,076
15	128	258	393	536	691	866	1,074
16	128	258	392	535	690	865	1,071
17	128	257	392	534	689	863	1,069
18	127	257	392	534	688	862	1,067
19	127	257	391	533	688	861	1,066
20	127	257	391	533	687	860	1,064
21	127	257	391	532	686	859	1,063
22	127	256	390	532	686	858	1,061
23	127	256	390	532	685	858	1,058
24	127	256	390	531	685	857	1,059
25	127	256	390	531	684	856	1,058
26	127	256	390	531	684	856	1,058
27	127	256	389	531	684	855	1,057
28	127	256	389	530	683	854	1,055
29	127	256	389	530	683	854	1,055
30	127	256	389	530	683	854	1,055
40	126	255	388	529	681	851	1,050
60	126	254	387	527	679	848	1,046
120	126	254	386	526	677	845	1,041
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036
$n-1$ / β	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7

ცხრილი № 6

განტოლებას, დამოკიდებულს $n-1$-სა და β-ზე

0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999	β / $n-1$
3,08	6,31	12,71	31,8	63,7	636,6	1
1,886	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6	2
1,638	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94	3
1,533	2,13	2,77	3,75	4,60	8,61	4
1,476	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86	5
1,440	1,943	2,45	3,14	3,71	5,96	6
1,415	1,895	2,36	3,00	3,50	5,40	7
1,397	1,860	2,31	2,90	3,36	5,04	8
1,383	1,833	2,26	2,82	3,25	4,78	9
1,372	1,812	2,23	2,76	3,17	4,59	10
1,363	1,796	2,20	2,72	3,11	4,49	11
1,356	1,782	2,18	2,68	3,06	4,32	12
1,350	1,771	2,16	2,65	3,01	4,22	13
1,345	1,761	2,14	2,62	2,98	4,14	14
1,341	1,753	2,13	2,60	2,95	4,07	15
1,337	1,746	2,12	2,58	2,92	4,02	16
1,333	1,740	2,11	2,57	2,90	3,96	17
1,330	1,734	2,10	2,55	2,88	3,92	18
1,328	1,729	2,09	2,54	2,86	3,88	19
1,325	1,725	2,09	2,53	2,84	3,85	20
1,323	1,721	2,08	2,52	2,83	3,82	21
1,321	1,717	2,07	2,51	2,82	3,79	22
1,319	1,714	2,07	2,50	2,81	3,77	23
1,318	1,711	2,06	2,49	2,80	3,74	24
1,316	1,708	2,06	2,48	2,79	3,72	25
1,315	1,706	2,06	2,48	2,78	3,71	26
1,314	1,703	2,05	2,47	2,77	3,69	27
1,313	1,701	2,05	2,47	2,76	3,67	28
1,311	1,699	2,04	2,46	2,76	3,66	29
1,310	1,697	2,04	2,46	2,75	3,65	30
1,303	1,684	2,02	2,42	2,70	3,55	40
1,296	1,671	2,00	2,39	2,66	3,46	60
1,289	1,658	1,980	2,36	2,62	3,37	120
1,282	1,645	1,960	2,33	2,58	3,29	∞
0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999	$n-1$ / β

$\eta(p) = -p \log_2 p$ ფუნქციის მნიშვნელობების ცხრილი

p	$\eta(p)$	Δ	p	$\eta(p)$	Δ
0	0	664	0,50	0,5000	— 46
0,01	0,0664	464	0,51	4954	— 48
0,02	1128	390	0,52	4906	— 52
0,03	1518	340	0,53	4854	— 54
0,04	1858	303	0,54	4800	— 56
0,05	2161	274	0,55	4744	— 59
0,06	2435	251	0,56	4685	— 62
0,07	2686	229	0,57	4623	— 65
0,08	2915	211	0,58	4558	— 67
0,09	3126	196	0,59	4491	— 69
0,10	3322	181	0,60	4422	— 72
0,11	3503	168	0,61	4350	— 74
0,12	3671	155	0,62	4276	— 77
0,13	3826	145	0,63	4199	— 78
0,14	3971	134	0,64	4121	— 81
0,15	4105	125	0,65	4040	— 83
0,16	4230	116	0,66	3957	— 86
0,17	4346	107	0,67	3871	— 87
0,18	4453	99	0,68	3784	— 90
0,19	4552	92	0,69	3694	— 92
0,20	4644	84	0,70	3602	— 94
0,21	4728	78	0,71	3508	— 96
0,22	4806	71	0,72	3412	— 98
0,23	4877	67	0,73	3314	— 99
0,24	4941	59	0,74	3215	—102
0,25	5000	53	0,75	3113	—104
0,26	5053	47	0,76	3009	—106
0,27	5100	42	0,77	2903	—107
0,28	5142	37	0,78	2796	—109
0,29	5179	32	0,79	2687	—112
0,30	5211	27	0,80	2575	—113
0,31	5238	22	0,81	2462	—114
0,32	5260	18	0,82	2348	—117
0,33	5278	14	0,83	2231	—119
0,34	5292	9	0,84	2112	—120
0,35	5301	5	0,85	1992	—121
0,36	5306	1	0,86	1871	—123
0,37	5307	— 2	0,87	1748	—125
0,38	5305	— 7	0,88	1623	—127
0,39	5298	—10	0,89	1496	—128
0,40	5288	—14	0,90	1368	—130
0,41	5274	—18	0,91	1238	—131
0,42	5256	—20	0,92	0,1107	—133
0,43	5236	—24	0,93	0,0974	—135
0,44	5210	—26	0,94	839	—136
0,45	5184	—29	0,95	703	—138
0,46	5153	—33	0,96	565	—139
0,47	5120	—37	0,97	426	—140
0,48	5083	—40	0,98	286	—142
0,49	5043	43	0,99	144	—144
0,50	0,5000		1,00	0	—

$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ მნიშვნელობები (პუასონის განაწილება)

m	$a=0,1$	$a=0,2$	$a=0,3$	$a=0,4$	$a=0,5$	$a=0,6$	$a=0,7$	$a=0,8$	$a=0,9$	
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	
3	0,0002	0,0019	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	
6							0,0001	0,0002	0,0003	
m	$a=1$	$a=2$	$a=3$	$a=4$	$a=5$	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$	$a=10$
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0037	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,0396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

ლიტერატურა

1. Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, Физматгиз, 1961.
2. В. С. Пугачев, Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, физматгиз, 1962.
3. В. С. Пугачев, Статистическая теория систем автоматического управления (лекции), вып. 1 и 2, изд. ВВИА, 1961.
4. Г. Крамер, Математические методы статистики, ИЛ, 1948.
5. И. В. Дунин-Барковский и Н. В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике, Гостехиздат, 1955.
6. А. М. Яглом и И. М. Яглом, Вероятность и информация, Гостехиздат, 1960.
7. С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, Гостехиздат, 1946.
8. А. А. Свешников, Прикладные методы теории случайных функций, Судпромиздат, 1961.
9. А. М. Яглом, Введение в теорию стационарных случайных функций, Успехи матем. наук, т. VII, вып. 5, 1952.
10. Б. В. Гнеденко, Лекции по теории массового обслуживания, изд. КВИРТУ, 1960.

საგანთა საძიებელი

ს ა რ ჩ ე ვ ი

ИБ № 548.

მთარგმნელი ფ. ქორიავა
სპეცრედაქტორი თ. ლაზრიშვილი
რედაქტორები ნ. გვანცელაძე, რ. დანელია

მხატვრული რედაქტორი ე. ქიშმარაია
ტექრედაქტორი მ. ოსიტაშვილი
უფროსი კორექტორი ლ. გაგნიძე
კორექტორი ნ. ჩხიკვიშვილი
გამომშვები ო. მაჭავარიანი

გადაეცა წარმოებას 10-XI-78 წ. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 20-XI-80 წ.
ქაღალდის ზომა $60\times90^1/_{16}$ საბეჭდი ქაღალდი № 2
ნაბეჭდი თაბახი 40. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 35,14.
ტირაჟი 2000 შეკვ. 1235

ფასი 1 მან. 30 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი, მარჯანიშვილის ქ. № 5.
Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Марджанишвили № 5.

1980

საქართველოს სსრ გამომცემლობათა, პოლიგრაფიისა და წიგნის ვაჭრობის საქმეთა სახელმწიფო კომიტეტის ბეჭდვითი სიტყვის კომბინატი, თბილისი, მარჯანიშვილის ქ. № 5.
Комбинат печати Государственного комитета Грузинской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Тбилиси, ул. Марджанишвили, 5.