

ნოდარ ვალიშვილი, დევეურ ბიორხელიძე

მასალების და
კონსტრუქციების
გამკლეობა

თბილისი 2008

30.121
620.162.4 /
ვ 168

სახელმძღვანელო შედგენილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის. მასში განხილულია ამ დისციპლინის ძირითადი საკითხები. ყურადღება ეთმობა იმ სიახლეებს, რომლებიც ითვალისწინებს თანამედროვე მეცნიერების მიღწევების დანერგვას. სახელმძღვანელო საინტერესო იქნება, აგრეთვე, სპეციალისტთა ფართო წრეებისათვის, რომელთა საქმიანობა დაკავშირებულია საინჟინრო კონსტრუქციების გაანგარიშებასთან.

რ ე ც ე ნ გ ე ნ ტ ე ბ ი:

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის
საინჟინრო მექანიკის დეპარტამენტის სრული პროფესორი,
სინეინრო და ეროვნული აკადემიების აკადემიკოსი,
ტექნიკურ მეცნიერებათა დოქტორი

დემურ დანელია

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის
საინჟინრო მექანიკის დეპარტამენტის სრული პროფესორი,
ტექნიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, მეცნიერებისა
და ტექნიკის დარგის საქართველოს სახელმწიფო
პრემიის ლაურეატი

გელა ყიფიანი

© ნ.ვალიშვილი, დ.გიორხელიძე

© გამომცემლობა „ჯისიაი“

ISBN 99940-17-21-7

სარჩევი

წინასიტყვაობა	10
I თავი. ზოგადი ცნებები	11
§1. მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობის საგანი	11
§2. რეალური ობიექტი და მისი საანგარიშო მოდელი	13
§3. გარე და შიგა ძალები. ძაბვები	16
§4. გადაადგილებები და დეფორმაციები	20
§5. მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობის ძირითადი პრინციპები. ჰუკის კანონი	21
II თავი. სწორი ძელის ცენტრალური ბაჭინვა-კუმშვა	25
§6. სწორი ძელის გადაადგილებები და ძაბვები გაჭიმვა-კუმშვისას	25
§7. გარე ძალების მუშაობა. დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია	31
§8. დაძაბული მდგომარეობა წერტილში გაჭიმვა-კუმშვის შემთხვევაში	34
§9. კავშირი დრეკადობის მუდმივებს შორის	35
§10. მასალების გამოცდა გაჭიმვა-კუმშვაზე	37
§11. მასალის ძირითადი მექანიკური მახასიათებლები	42
§12. სხვადასხვა ფაქტორების გავლენა მასალის მექანიკურ მახასიათებელზე	45
§13. გაჭიმვა-კუმშვის დიაგრამის სქემატიზაცია	49
§14. კონსტრუქციის გაანგარიშების ზოგადი პრინციპები	50
§15. სტატიკურად ურკვევი სისტემები მეორე თავის მაგალითები	53
III თავი. ძელის ბანკი კვთის ბომბატრიული მახასიათებლები	75
§16. ძირითადი ცნებები. სტატიკური მომენტები	75
§17. კვთის ღერძული და პოლარული ინერციის მომენტები. ცენტრიდანული ინერციის მომენტი	77
§18. კვთის გეომეტრიული მახასიათებლების გარდაქმნა ღერძების მობრუნებისას. მთავარი ღერძები და ინერციის მთავარი ღერძული მომენტები. მესამე თავის მაგალითები	80
თავი IV. ბრუნვა	91
§19. სუფთა ძვრა. დეფორმაციის ხვედრითი პოტენციალური ენერგია	91
§20. წრიული განივკვეთიანი სწორი ძელის გრესა	93
§21. წრიული განივკვეთიანი ძელის გაანგარიშება სიმტკიცესა და სიხისტეზე	99
§22. წრიული განივკვეთიანი ძელის გაანგარიშება სიმტკიცესა და სიხისტეზე გრესისა და ძაბვების და დეფორმაციების ნებისმიერი დიაგრამის შემთხვევაში	101
§23. არაწრიული განივი კვთის მქონე ძელის გრესა	105
§24. თხელკედლიანი ძელების გრესა მეოთხე თავის მაგალითები	109

V თავი. სწორი ძელების ღუნვა 129

§25. შიგა ძალოვანი ფაქტორები ძელის ღუნვისას 129

§26. ძაბვები სწორი ძელის სუფთა ღუნვისას 131

§27. გარე და შიგა ძალების მუშაობა სუფთა ღუნვისას 135

§28. ძაბვები განივი ღუნვისას 136

§29. ძელის გაანგარიშება ღუნვაზე მასალის პლასტიკური თვისებების გათვალისწინებით 140

§30. ძელის ღუნვის ზღვრული მომენტი 145

§.31 ძელის ირიბი ღუნვა 148

§32. ძელის არაცენტრალური გაჭიმვა-კუმშვა 154

§33. დიდი სიმრუდის ძელის ღუნვა 156

§34. ძელის გაანგარიშება სიმტკიცესა და სიხისტეზე ღუნვისას 161

მეხუთე თავის მაგალითები 168

VI თავი. ძელებისა და ჩარჩოების გადაადგილებების

განსაზღვრა ღუნვისას 185

§35. სწორი ძელის ღუნვით გამოწვეული გადაადგილებების დიფერენციალური განტოლებები. საწყისი პარამეტრების მეთოდი 185

§36. სწორი ძელის გადაადგილებების განსაზღვრის რიცხვითი მეთოდი 190

§37. მცირე სიმრუდის ბრტყელი ძელის დიდი გადაადგილებების განსაზღვრა 192

§38. მცირე სიმრუდის ბრტყელი ძელის მცირე გადაადგილებების განსაზღვრა 198

§39. მუშაობის და გადაადგილებების ურთიერთობის პრინციპები 202

§40. ძელის დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია ზოგადი ხასიათის დატვირთვისას 204

§41. კასტილიანოს თეორემა 208

§42. მორის ინტეგრალი 209

§43. ვერეშაგინის ხერხი 211

§44. ცილინდრული ხრახნული ზამბარის გაანგარიშება 213

§45. ძელი დრეკად ფუძეზე 217

მეექვსე თავის მაგალითები 220

თავი VII. სტატიკურად ურკვევი სისტემები 231

§46. ძალთა მეთოდი. კანონიკურ განტოლებათა სისტემა 231

§47. ძირითადი სისტემის რაციონალური არჩევა. გადაადგილებების განსაზღვრა სტატიკურად ურკვევ სისტემებში 234

§48. სტასტიკურად ურკვევი სისტემების რიცხვითი მეთოდით გაანგარიშების შესახებ 235

მეშვიდე თავის მაგალითები 237

VIII თავი. დამაბული და დეფორმირებადი მდგომარეობის თეორიები 259

§49. დამაბული მდგომარეობა წერტილში. მხები ძაბვების წყვილადობის კანონი 259

§50. ძაბვების განსაზღვრა დახრილ კვეთში 260

§51. მთავარი კვებები და მთავარი ძაბვები	263
§52. დაძაბული მდგომარეობის სასყები	267
§53. დაძაბული მდგომარეობის წრიული დიაგრამები	268
§54. დეფორმირებული მდგომარეობა წერტილში	272
§55. ჰუკის განზოგადებული კანონი	275
§56. დეფორმირებული სხეულის მოცულობის ცვლილება. დეფორმაციის ენერჯია	279

IX თავი. ზღვრული დაძაბული მდგომარეობის თეორიები 283

§57. ზღვრული დაძაბული მდგომარეობა	283
§58. ზღვრული მდგომარეობის ძირითადი პიპოთეზები	286
§59. ზღვრული დაძაბული მდგომარეობის ემპირიული კრიტერიუმები	289
§60. დამსხვრევის პროცესი. ინტენსიურობის კოეფიციენტი	292
მეცხრე თავის მაგალითები	297

X თავი. დისკომპენსა და სქელკედლიანი ცილინდრების გაანგარიშება _ 304

§61. დისკოს გაანგარიშების ძირითადი დებულებები და განტოლებები	304
§62. სწრაფად მბრუნავი მუდმივი სისქის მქონე დისკოს ძაბვებისა და გადაადგილებების გაანგარიშება	310
§63. ტემპერატურული ძაბვები დისკოში	315
§64. სწრაფად მბრუნავი დისკოს ოპტიმალური პროფილის დადგენა	316
§65. სწრაფად მბრუნავი დისკოს ზღვრული წონასწორობა	318
§66. დისკოს გაანგარიშების რიცხვითი მეთოდი	320
§67. სქელკედლიანი ცილინდრის ძირითადი განტოლებები	326
§68. სქელკედლიანი ცილინდრი შიგა წნევის მოქმედებისას	330
§69. სქელკედლიანი ცილინდრი ზღვრული შიგა წნევა	333
§70. სქელკედლიანი ცილინდრი გარე წნევის მოქმედებისას	334
§71. შედგენილი სქელკედლიანი ცილინდრები	336
მეთუ თავის მაგალითები	341

XI თავი. ფირფიტების და გარსების გაანგარიშება 343

§72. მრგვალი სიმეტრიულად დატვირთული ფირფიტების ღუნვა	343
§73. გარსების გაანგარიშების ძირითადი თავისებურებები	349
§74. ძაბვების განსაზღვრა სიმეტრიულ უმომენტო გარსებში	350
§75. წრიული ცილინდრული გარსის ღუნვა სიმეტრიული დატვირთვისას	353
§76. წრიული ცილინდრული გარსის გაანგარიშების რიცხვითი მეთოდი	358

XII თავი. თხელკედლიანი ძილვების ღუნვა და გრძნა 363

§77. საერთო დებულებები. ღუნვის ცენტრი	363
§78. თხელკედლიანი კვების სექტორული მახასიათებლები	368

§79. ნორმალური და მორეული მსები ძაბვები ღია პროფილის თხელკედლიანი ძელის გრებისას	374
§80. თხელკედლიანი ძელის შეზღუდული გრება	377
§81. თხელკედლიანი ძელის დატვირთვის ზოგადი შემთხვევა	379
მეთორმეტე თავის მაგალითები	382
XIII თავი. დრეკადი სისტემების რსმები. დინამიკური დატვირთვები	390
§82. რსმების თეორიის ძირითადი ცნებები	390
§83. ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის საკუთარი რსვა	392
§84. ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის მრევალი საკუთარი რსვა	394
§85. ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის იძულებითი რსვა	399
§86. მრავალი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის რსვა	403
§87. განაწილებული მასის მქონე სისტემის თავისუფალი რსვა	406
§88. სისტემის საკუთარი სიხშირის განსაზღვრის რელის მიახლოებითი სერხი	411
§89. ძელის საკუთარი სიხშირების დადგენის რიცხვითი მეთოდი	412
§90. სისტემის იძულებითი რსმების შესწავლის რიცხვითი მეთოდი	417
§91. ლილვის ბრუნთა კრიტიკული რიცხვი	420
§92. დინამიკური დატვირთვის ცნება	422
§93. დრეკადი სისტემის გადაადგილებების და ძაბვების გაანგარიშება დინამიკური დატვირთვისას	423
§94. დარტყმის გადაცემა დრეკად სისტემაზე მასიური შუალედური სხეულის საშუალებით	427
§95. დრეკადი სისტემის დაყვანილი მასის კოეფიციენტი	429
§96. გრძივი დარტყმა	430
§97. მგრძივი დარტყმა	431
მეცამეტე თავის მაგალითები	433
XIV თავი. დფორმირებადი სისტემების წონასწორების მდგრადობა	438
§98. მდგრადობის ცნების შესახებ. მდგრადობის კრიტერიუმები	438
§99. მდგრადობის შესწავლის შესაძლებლობა წრფივი განტოლების გამოყენებით. ელერის ამოცანა	441
§100. ელერის ფორმულის განზოგადება	445
§101. კრიტიკული ძალის დადგენის ენერგეტიკული მეთოდი	451
§102. კრიტიკული ძალის დადგენა ელექტრონულ-ციფრული მანქანების გამოყენებით	454
§103. ელერის ფორმულის გამოყენების სასლერები. მდგრადობის გაანგარიშების პრაქტიკული სერხი	461
§104. ძელის გვერდითი ამობურცვა	468
§105. შეკუმშული ძელის გადაადგილებების განსაზღვრა მდგრადობის დაკარგვის შემდეგ	475
§106. ძელის მდგრადობის თეორიის შექმნის ისტორიიდან	480

§107. ძელის არაცენტრალური შეკუმშვა. გრძივ-განივი ღუნვა	498
მეთოთხმეტე თავის მაგალითები	501
XV თავი. დეტალუბის გაანგარიშება სიმტკიცეში დროში კაპაზის ცვალებადობის გათვალისწინებით	506
§108. წარმოდგენა დაღლილობით სიმტკიცეზე	506
§109. დაღლილობის მასსიათებლები სიმეტრიული და ასიმეტრიული ციკლებისთვის	509
§110. დაღლილობის ბზარების განვითარების კანონზომიერებანი	510
§111. დაღლილობითი სიმტკიცის დიაგრამა. დაღლილობის ზღვარი	513
§112. ნიშუშის ძაბვების ზღვრული ამპლიტუდების დიაგრამა	515
§113. დაღლილობის ზღვარზე ძაბვების კონცენტრაციის გავლენა	520
§114. მასშტაბური ეფექტი	525
§115. დეტალის ზედაპირის დამუშავების ხარისხის გავლენა დაღლილობის ზღვარზე	527
§116. დეტალის ძაბვების ზღვრული ამპლიტუდების დიაგრამა. დაღლილობითი სიმტკიცის მარაგის კოეფიციენტი	530
§117. დეტალის სიმტკიცის შეფასება მუშაობის არასტაციონარული რეჟიმებისათვის	533
დანართი	538

წინასიტყვაობა

წინამდებარე სახელმძღვანელო შედგენილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სპეციალობების მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობის სრული კურსის პროგრამის შესაბამისად. იგი მეთოდოლოგიურად და სტრუქტურულად ისეა აგებული, რომ დახმარებას გაუწევს სხვადასხვა სპეციალობის სტუდენტებს.

წიგნში გათვალისწინებულია მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობის სახელმძღვანელოებისა და სასწავლო პროცესში გამოყენებული მდიდარი გამოცდილება. გარკვეული ყურადღება აქვს დათმობილი კონსტრუქციის ელემენტების რიცხვითი გაანგარიშების ხერხებსა და მეთოდებს. სახელმძღვანელო დაეხმარება მომავალ ინჟინერს, უფრო სრულყოფილად გაითვალისწინოს მასალისა და კონსტრუქციის შესაძლებლობები, შექმნას ესთეტიკური და სამსახურებრივი დანიშნულების თვალსაზრისით საუკეთესო მანქანები და ნაგებობები.

სახელმძღვანელოს სრულყოფას მნიშვნელოვნად შეუწყო ხელი პროფესორების დ. დანელიას და გ. ყიფიანის რეცენზიებმა. სახელმძღვანელოში, ძირითადად, გათვალისწინებულია გამოთქმული შენიშვნები და სურვილები. ავტორები გულითად მადლობას უხდიან რეცენზენტებს იმ შრომისათვის, რომელიც მათ გასწიეს წიგნის კრიტიკული, მაგრამ კეთილმოსურნეობის პოზიციებიდან განხილვისათვის.

§1. მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობის საგანი

ყოველი მყარი სხეული სიმტკიცის თვისებით ხასიათდება. ეს იმას ნიშნავს, რომ გარე ძალების მოქმედებისას მას გარკვეულ ზღვრამდე აქვს რღვევის გარეშე ძალების მოქმედებისადმი წინააღმდეგობის გაწევის უნარი. ითვალისწინებს რა მყარი სხეულის ამ თვისებას, ინჟინერ-კონსტრუქტორი ყოველთვის ცდილობს ახალი მანქანა ან ნაგებობა შექმნას უმცირესი დანახარჯებითა და სასურველი საიმედოობით. ამ ამოცანის გადაწყვეტისას ინჟინერს უხდება მყარი სხეულის წონასწორობისა და მოძრაობის პირობების შესწავლა თეორიული მექანიკის კანონზომიერებებზე დაყრდნობით. როგორც ცნობილია, თეორიულ მექანიკაში ერთ-ერთი ძირითადია დაშვება იმის შესახებ, რომ სხეული აბსოლუტურად მყარია, ე. ი. უგულვებელყოფილია მისი ფიზიკურ-მექანიკური თვისებები. ამის გათვალისწინებით შეისწავლება სხეულის მოძრაობის სიჩქარე, აჩქარება, ტრაექტორია და ა. შ.

მოდებული ძალების მოქმედებით სხეულის ცალკეული ნაწილები იცვლიან ურთიერთგანლაგებას, რის შედეგადაც ხდება სხეულის ფორმისა და ზომების ცვლილება, ანუ სხეული განიცდის დეფორმაციას. თეორიული მექანიკისაგან განსხვავებით, მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობა სწორედ ამ დეფორმაციას ითვალისწინებს. ტერმინი „დეფორმაცია“ შეიძლება სხვა მნიშვნელობითაც იყოს გამოყენებული, კერძოდ, როგორც უსასრულოდ მცირე ნაწილაკების ხაზოვანი ან კუთხური ზომის ცვლილების სიდიდის მახასიათებელი. საერთოდ, მყარი სხეულის დეფორმაციას შეისწავლის მყარი დეფორმირებადი სხეულის მექანიკა, რომელსაც მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობის გარდა მიეკუთვნება დრეკადობის მათემატიკური თეორია, პლასტიკურობის თეორია და სხვ. ამ დისციპლინებს ერთმანეთისაგან განსხვავებული მიდგომა ახასიათებს.

დრეკადობის მათემატიკური თეორია ამოცანის ამოხსნისას იყენებს მკაცრ მათემატიკურ მიდგომას, არ ეყრდნობა რაიმე წინასწარ დაშვებას სხეულის დეფორმაციის ხასიათის შესახებ. უფრო მეტიც, დეფორმაციის ხასიათი ცნობილი ხდება ამოცანის ამოხსნის შემდეგ. ამის გამო დრეკადობის მათემატიკური თეორიის აპარატი საკმაოდ რთულია და ფართო საინჟინრო პრაქტიკაში ყოველთვის ხელმისაწვდომი როდია.

მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობა მიზნად არ ისახავს აბსოლუტურად ზუსტი შედეგების მიღებას, ამიტომ, როგორც წესი, ითვალისწინებს გარკვეულ წინასწარ დაშვებას დეფორმაციის ხასიათის შესახებ. ამ დაშვების დასაბუთება ხდება ექსპერიმენტული კვლევით, დრეკადობის მათემატიკურ თეორიაში მიღებული შედეგების ან სხვა ცნობილი გამოკვლევების საფუძველზე. ასეთი დაშვება, მართალია, არ იძლევა აბსოლუტურად ზუსტ შედეგს, მაგრამ, სამაგიეროდ, მნიშვნელოვნად აადვილებს და ხელმისაწვდომს ხდის კვლევას საინჟინრო პრაქტიკაში გამოსაყენებლად.

ცხადია, მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობის მეთოდებით მიღებული შედეგების სიზუსტე დამოკიდებული იქნება იმაზე, თუ რამდენად შეესაბამება წინასწარი დაშვება სხეულის დეფორმაციის რეალურ სურათს. მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობის მეთოდებით ზუსტი შედეგების მიღება შესაძლებელია მაშინ, როდესაც ყველა წინასწარი დაშვება რეალურ პირობებს ზუსტად შეესაბამება, რაც იშვიათად ხდება.

ამრიგად, *მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობა არის გამოყენებითი ხასიათის მეცნიერება და მყარი დეფორმირებადი სხეულის მექანიკის შემადგენელი ნაწილი.*

მყარი სხეულის დეფორმაციის შესწავლისას უნდა ვიცოდეთ მისი ფიზიკურ-მექანიკური თვისებები. ამ თვისებებს, უპირველეს ყოვლისა, განპირობებს სხეულის მასალა. ამიტომ სხვადასხვა მასალის ფიზიკურ-მექანიკური თვისებების შესწავლა მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობის ერთ-ერთი ამოცანაა.

დეტალის, კონსტრუქციის ან ნაგებობის დეფორმაციის სურათი და სიმტკიცის მახასიათებელი შეიძლება არ შეესაბამებოდეს დაპროექტებისას მიღებულ სიდიდეებს, რაც გამოწვეულია მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობის მეთოდების მიახლოებითი ხასიათით, მასალების გაანგარიშებისას ფიზიკურ-მექანიკურ მახასიათებლებსა და რეალურ მახასიათებლებს შორის სხვაობით, აგრეთვე, ტექნოლოგიური უზუსტობით, რაც გამოწვეულია საპროექტო ზომებისა და ფორმებისაგან გადახრით და სხვ. ამიტომ განსაკუთრებით საპასუხისმგებლო შემთხვევაში, უკვე შექმნილი კონსტრუქცია საგანგებო გამოცდას გადის საექსპლუატაციო პირობებთან მიახლოებულ პირობებში, რაც საშუალებას იძლევა დაეადგინოთ მისი რეალური საიმედოობა. ასეთი გამოცდის მეთოდების დამუშავება და საგამოცდო ხელსაწყო-მანქანების შექმნა, აგრეთვე, წარმოადგენს მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობის კვლევა-ძიების საგანს.

კონსტრუქციული მასალების სიმტკიცის თვისებები საშუალებას იძლევა ისე შეირჩეს მანქანისა და მისი ელემენტების გეომეტრიული ზომები, რომ გარე ძალების მოქმედებისას რღვევა გამორიცხული იყოს. მაგრამ მხოლოდ სიმტკიცის პირობების შესრულება არ იძლევა გარანტიას, რომ მანქანა სრულყოფილი იქნება და ექნება მუშაობის უნარი. როგორც წესი, აუცილებელია დამატებით სხვა პირობების გათვალისწინებაც, კერძოდ, თუ დეფორმირებული და საწყისი მდგომარეობები მნიშვნელოვნად განსხვავდება ერთმანეთისაგან, ე. ი. ცალკეული ელემენტების გადაადგილებები აღემატება გარკვეულ ზღვრებს, მანქანამ შეიძლება ვერ შეასრულოს თავისი დანიშნულება. გასათვალისწინებელია, აგრეთვე, რხევის ინტენსიურობა, მდგრადობა, ცოცვადობა და სხვ. ასეთი ხასის ყველა გაანგარიშება, რომელიც ტარდება კონსტრუქციის უნარიანი მუშაობის უზრუნველსაყოფად, შეიძლება გაერთიანდეს სიმტკიცეზე გაანგარიშების ცნებებით, თუ ეს უკანასკნელი განზოგადებული თვალსაზრისით იგულისხმება.

ამრიგად, *მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობა შეისწავლის მანქანების, კონსტრუქციებისა და მათი ელემენტების სიმტკიცეს.*

როგორც აღვნიშნეთ, მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობის მეთოდ-

ბის ძირითადი მოთხოვნებია სიმარტივე და საინჟინრო პრაქტიკაში ფართოდ გამოყენების შესაძლებლობა. საერთოდ, როცა ვლაპარაკობთ სიმარტივესა და სირთულეზე, არ უნდა დავივიწყოთ, რომ ეს ცნებები შედარებითია. ის, რაც რამდენიმე წლის წინ რთული და თითქმის შეუძლებელი გვეჩვენებოდა, დღეს მარტივი და ადვილად მისაღწევი გახდა. ამ მხრივ მასალებისა და კონსტრუქციების გაძღვობაში, ისევე როგორც სხვა გამოყენებით მეცნიერებაში, უდიდესი როლი შეასრულა გამოთვლითი ტექნიკის მეთოდებისა და საშუალებების განვითარებამ. თანამედროვე ელექტრონული გამოთვლელი მანქანების საშუალებით შესაძლებელია ამოიხსნას კერძოწარმოებულებიანი რთულ განტოლებათა სისტემა, ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, ათასობით უცნობის შემცველი წრფივი ალგებრულ განტოლებათა სისტემა და სხვ. ყოველივე ამან განაპირობა ბოლო ხანებში მასალებისა და კონსტრუქციების გაძღვობის მეთოდების მნიშვნელოვანი ცვლილებები. აქვე უნდა აღვნიშნოთ, რომ კონკრეტული ამოცანების ამოხსნისას მათემატიკური აპარატის ან ფიზიკური მოდელის გართულება არ შეიძლება თვითმიზანი იყოს და აუცილებლად არ ნიშნავს, მაგალითად, მყარი სხეულის დეფორმაციის უფრო ზუსტ შესწავლას. აქ ზომიერების დაცვა და შემოქმედებითი მიდგომაა საჭირო, რაც გარკვეული პრაქტიკული ჩვევების გამომჟღავნებს მოითხოვს. ამ ჩვევების შექმნა კი მხოლოდ გულმოდგინე შრომით შეიძლება.

§2. რეალური ობიექტი და მისი საანგარიშო მოდელი

კონსტრუქციის ელემენტი – რეალური ობიექტი, როგორც წესი, იმდენად რთულია, რომ გამარტივების გარეშე მისი გაანგარიშება პრაქტიკულად შეუძლებელია. ამიტომ გაანგარიშების პირველი ეტაპი ითვალისწინებს რეალური ობიექტის საანგარიშო მოდელის შექმნას. საანგარიშო მოდელი ინარჩუნებს ორიგინალის ძირითად დამახასიათებელ თვისებებს. ცხადია, მოდელი ორიგინალზე ღარიბი და აბსტრაქტულია. სწორედ ამიტომ მას შეუძლია შეასრულოს შემეცნებითი როლი.

საანგარიშო მოდელის შექმნა კონსტრუქციის ელემენტების გაანგარიშების ურთულესი ეტაპია. ძნელია და, ზოგ შემთხვევაში, შეუძლებელია ორიგინალის ძირითადი და მეორეხარისხოვანი თვისებების განცალკევება. ამას სათანადო გამოცდილება სჭირდება.

ერთი და იმავე ორიგინალისათვის შეიძლება შეირჩეს რამდენიმე საანგარიშო მოდელი. მაგრამ მოდელი ოპტიმალური უნდა იყოს როგორც ორიგინალის ძირითადი თვისებების წარმოდგენის, ისე პრაქტიკული გაანგარიშების სიმარტივის თვალსაზრისითაც. აღსანიშნავია ისიც, რომ ერთსა და იმავე მოდელს შეიძლება რამდენიმე ორიგინალი შეესაბამებოდეს.

საანგარიშო მოდელის შექმნა ითვალისწინებს მასალის თვისებების, კონსტრუქციის ელემენტების გეომეტრიული ზომების, ფორმისა და სისტემაზე მოქმედი ძალების სქემატიზაციას.

მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობაში ყველა მასალა განიხილება, როგორც ერთგვაროვანი და მთლიანად უწყვეტი. ეს ნიშნავს, რომ მასალის ნებისმიერი წერტილის გარშემო აღებულ უსასრულოდ მცირე მოცულობის ყველა ნაწილს აქვს ერთი და იგივე თვისება. რა თქმა უნდა, სხვადასხვა მასალისათვის აღნიშნული გამარტივება მეტნაკლებად ზუსტად გამოხატავს სტრუქტურის რეალურ და სრულ სურათს. მაგალითად, ლითონები, რომელთა სტრუქტურა პოლიკრისტალურია, შედგება ქაოსურად განლაგებული ცალკეული კრისტალებისაგან, მაგრამ ამას გაანგარიშებისათვის არსებითი მნიშვნელობა არა აქვს, ვინაიდან საკითხი ეხება კონსტრუქციის სიმტკიცესა და სიხისტეს; კონსტრუქციის გეომეტრიული ზომები კი ბევრად აღემატება ცალკეული კრისტალების ზომებს. არის საკითხები, რომელთა განხილვისას კონსტრუქციის თვისებების დასადგენად კრისტალების ზომებს და ფორმას აქვს მნიშვნელობა, მაგრამ ასეთი ამოცანები, როგორც წესი, არ არის მასალათა გამძლეობის შესწავლის საგანი. ამ თვალსაზრისით გარკვეულ გამონაკლის წარმოადგენს მასალებში ბზარის წარმოშობისა და გავრცელების საინტერესო და პრაქტიკისათვის მეტად საჭირო საკითხი, რომელსაც შემდგომში შევისწავლით.

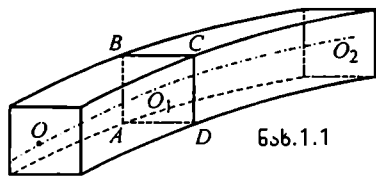
ერთგვაროვან და მთლიანად უწყვეტ სხეულად მასალის წარმოდგენა საშუალებას იძლევა გაანგარიშების მეთოდებში გამოვიყენოთ მათემატიკური ანალიზის აპარატი, კერძოდ. წარმოდგენა უსასრულოდ მცირე სიდიდეთა შესახებ, ინტეგრება და დიფერენცირება.

მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობაში განიხილება იზოტროპული და ანიზოტროპული მასალები. მასალას, რომლის თვისებები ყველა მიმართულებით ერთნაირია, იზოტროპული ეწოდება. ანიზოტროპულ მასალას, იზოტროპული-საგან განსხვავებით, სხვადასხვა მიმართულებით განსხვავებული თვისებები აქვს. ასეთია: მერქანი, ქაღალდი, მინაპლასტიკი და სხვ.

როგორც აღვნიშნეთ, მოდებული ძალების მოქმედების შედეგად მყარი სხეული განიცდის დეფორმაციას. ძალების მოხსნის შემდეგ ის ნაწილობრივ ან მთლიანად აღიდგენს საწყის გეომეტრიულ ზომებს და ფორმას.

დეფორმაციის აღდგენილ ნაწილს დრეკადი დეფორმაცია ეწოდება, ხოლო დარჩენილ ნაწილს – ნარჩენი დეფორმაცია. მყარი სხეულის თვისებას, აღიდგინოს საწყისი ზომები და ფორმა ძალების მოხსნის შემდეგ, დრეკადობა ეწოდება. ეს თვისება, როგორც წესი, მნიშვნელოვანია და მასალის მოდელში გასათვალისწინებელი.

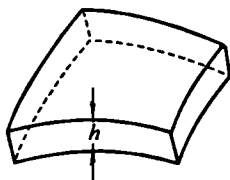
რეალური ობიექტის სქემატიზაცია ითვალისწინებს, რომ გეომეტრიული ზომების შეცვლითა და ფორმის გამარტივებით ორიგინალს შევუსაბამოთ ერთ-ერთი ტიპური მოდელი, რომლის გაანგარიშების მეთოდოლოგია უკვე დამუშავებულია ან არ წარმოდგენს პრინციპულ სირთულეს. ასეთი ტიპური მოდელია მაგალითია ძელი (ნახ. 1.1).



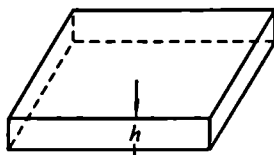
ნახ. 1.1

ძელი ეწოდება ისეთ სხეულს, რომლის ერთი ზომა (სიგრძე) ბევრად დიდია ორ დანარჩენზე და რომელიც მიღებულია ბრტყელი ფიგურის მრუდე წირის გასწვრივ ისე მოძრაობით, რომ ამ მოძრაობისას ფიგურის სიმძიმის ცენტრი რჩებოდეს წირზე და თვით ფიგურის სიბრტყე წირის მართობი იყოს მის ნებისმიერ წერტილში (ნახ.1.1). O_2 მრუდს ძელის ღერძი ეწოდება. თუ ღერძი წრფეა, ძელი სწორია. ფიგურას, რომელიც მიიღება ღერძის მართობი სიბრტყით ძელის გაკვეთისას, განივი კვეთი ეწოდება, მაგალითად, ABCD ფიგურა (ნახ.1.1).

საანგარიშო მოდელის მეორე მაგალითია გარსი. გარსი არის ისეთი სხეული, რომლის ორი ზომა ბევრად დიდია მესამე ზომაზე, კერძოდ, სისქეზე (ნახ.1.2). გარსის კერძო შემთხვევაა ფირფიტა (ნახ.1.3).

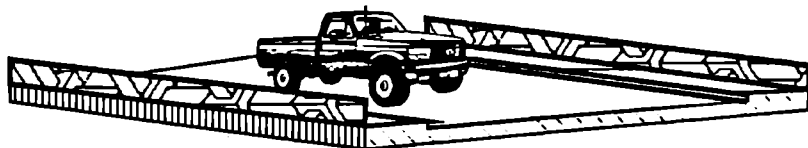


ნახ.1.2



ნახ.1.3

ძნელია, ხშირად კი შეუძლებელიც, ზუსტად განვსაზღვროთ სისტემაზე მოქმედი ძალები. ამიტომ საანგარიშო მოდელის შექმნა, როგორც წესი, ითვალისწინებს ძალების სქემატიზაციას. კერძოდ, თუ ფართობის ზომები, რომელთა მეშვეობითაც კონსტრუქციაზე გადაიცემა ძალები, ბევრად მცირეა კონსტრუქციის საერთო ზომებთან შედარებით, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ძალა წერტილშია

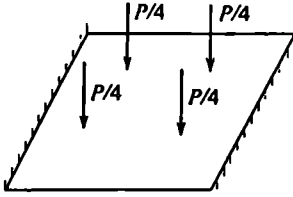


ნახ. 1.4

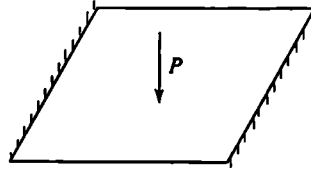
მოდებული. ასეთ ძალას შეყურსული ძალა ეწოდება. ავტომობილის წონის მოქმედება ხიდზე (ნახ.1.4) შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც ხიდის მოდელზე მოქმედი ოთხი შეყურსული ძალა (ნახ.1.5), თუ ხიდთან ბორბლების კონტაქტის ფართობის ზომები ხიდის საერთო ზომებზე ბევრად მცირეა. მაგრამ, თუ ავტომანქანის საერთო ზომები ბევრად მცირეა ხიდის სიგრძეზე და სიგანეზე, შეიძლება ძალთა სისტემის შემდგომი გამარტივება: მოდებული ძალები წარმოვიდგინოთ, როგორც ერთი შეყურსული ძალა, რომლის სიდიდე უდრის ავტომობილის წონას (ნახ.1.6).

მოქმედების ხასიათის მიხედვით სისტემაზე მოდებული ძალები შეიძლება იყოს სტატიკური და დინამიკური. სტატიკური ძალა დროის მიხედვით უცვლელია

ან იცვლება იმდენად ნელა, რომ მისი მოქმედებით გამოწვეული სისტემის ინერციის ძალები უმნიშვნელოა. დინამიკური ძალების მოქმედება, პირიქით, ხასიათდება მნიშვნელოვანი ინერციის ძალებით. ამიტომ მოდებული ძალების სქემატიზაციისათვის ვათვალისწინებული უნდა იყოს დროის მონაკვეთი.



ნახ.1.5



ნახ.1.6

რომლის განმავლობაშიც ძალა იცვლება ნულიდან მაქსიმალურ მნიშვნელობამდე. უნდა აღინიშნოს, რომ მართო დროის ფაქტორი არ განსაზღვრავს მოქმედი ძალის ხასიათს. საჭიროა მხედველობაში მივიღოთ სისტემის სიხისტეც, ვინაიდან ერთი და იმავე ხასიათის ძალა ერთი სისტემისათვის შეიძლება ჩაითვალოს სტატიკურ და მეორისათვის დინამიკურ ძალად. ეს საკითხი შემდგომში იქნება განხილული.

§3. გარე და შიგა ძალები. ძაბვები

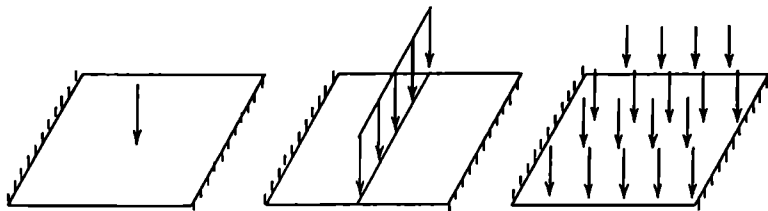
კონსტრუქცია განიცდის მის ირგვლივ არსებული გარემოს (მაგალითად: ქარის, ტვირთის, მაგნიტური ველისა და სხვა ფაქტორების) მოქმედებას. თუ კონსტრუქციას განვიხილავთ იზოლირებულ სისტემად, მაშინ აღნიშნული ზემოქმედება შეიძლება წარმოვიდგინოთ კონსტრუქციაზე მოქმედ ძალებად. ამ ძალებს გარე ძალები ეწოდება.

კონსტრუქციაზე მოქმედი გარე ძალები შეიძლება დაგვით ორ ჯგუფად: აქტიურ და პასიურ ძალებად. ძალებს, რომლებიც კონსტრუქციაზე მოდებულ ბმებზე არ არიან დამოკიდებული, აქტიური ძალები ეწოდება. ზოგჯერ ამ ძალებს მოცემულ ძალებსაც უწოდებენ; რეაქციის ძალები კი პასიური ძალებია. წინა პარაგრაფში განხილულ მაგალითში, თუ ხიდი განსახილველი კონსტრუქციაა, მაშინ ავტომანქანის წონა ამ კონსტრუქციაზე მოქმედი აქტიური ძალაა, ხოლო ხიდზე მოქმედი საყრდენთა რეაქციის ძალები პასიურია. პასიური (რეაქციის) ძალები აქტიური ძალებით არის განპირობებული.

ზოგ შემთხვევაში, ბმების რაოდენობა დიდია და უცნობ რეაქციათა რიცხვი აღემატება წონასწორობის განტოლებათა რიცხვს. ასეთ ამოცანებს სტატიკურად ურკვევი ამოცანები ეწოდება. მათი ამოხსნისას რეაქციის ძალების დასადგენად წონასწორობის განტოლებებთან ერთად შესადგენია დამატებითი განტოლებები, რომლებიც ითვალისწინებენ სისტემის დეფორმაციის პირობებს.

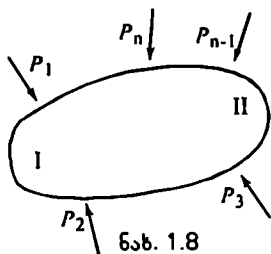
გარე ძალები, თავის მხრივ, შეიძლება იყოს შეყურსული, ხაზობრივად განაწილებული, ზედაპირული და მოცულობითი. პირველი სამი სახის გარე ძალების მაგალითი გამოსახულია 1.7. ნახაზზე. მოცულობითი ძალის მაგალითია ძელზე ან გარსზე მოქმედი სიმძიმის ძალა.

შიგა ძალები კონსტრუქციის ელემენტების და ელემენტების ცალკეული ნაწილების მექანიკური ურთიერთქმედების შედეგია. როგორც წესი, ისინი წარმოიქმნებიან გარე ძალების მოქმედების შედეგად.

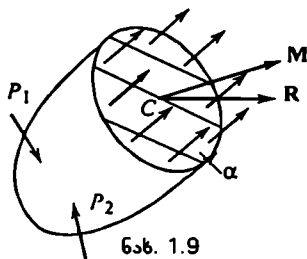


ნახ. 1.7

განვიხილოთ სხეული, რომელზედაც მოქმედებს გარე ძალები (ნახ. 1.8) და განვსაზღვროთ შიგა ძალები სხეულის ნებისმიერ კვეთში. ამისათვის ვიყენებთ ე. წ. კვეთების მეთოდს: წარმოადგენით, პირობითად ვკვეთთ მოცემულ სხეულს



ნახ. 1.8



ნახ. 1.9

სიბრტყით, ერთ-ერთ ნაწილს მოვაცილებთ და მოცილებული ნაწილის მოქმედებას დარჩენილ ნაწილზე წარმოვადგენთ, როგორც კვეთზე განაწილებულ ძალებს (ნახ. 1.9). შიგა ძალები დავიყვანოთ კვეთის სიმძიმის ცენტრში - C წერტილში. ასეთი დავყვანა მოგვცემს ძალთა მთავარ ვექტორს R -ს და მთავარ მომენტს M -ს. კვეთში ძალთა განაწილების კანონზომიერების დადგენა მასალათა გამძლეობის ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანაა და იგი, როგორც წესი, რთულია, რაც შეეხება მთავარ ვექტორს და მთავარ მომენტს, ისინი განისაზღვრება სხეულის გაცვეთის შემდეგ დატოვებული ნაწილის წონასწორობის პირობებიდან.

დავუკავშიროთ კვეთს კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 1.10). Ox, Oy ღერძები ერთმანეთის მართობია და მოთავსებულია კვეთში. Oz ღერძი კვეთის მართობია.

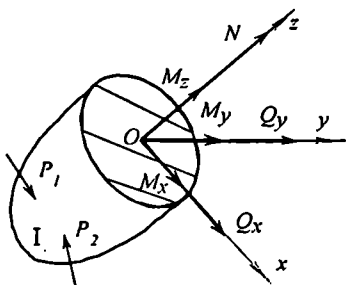
მთავარი R ვექტორის გეგმილების $\{ Q_x, Q_y, N \}$ მნიშვნელობები განისაზღვრება

სტატიკის სამი განტოლების გამოყენებით. ელემენტის დარჩენილ ნაწილზე მოდებული ძალების გეგმილების ჯამი კოორდინატთა სისტემის ყოველი ღერძისათვის ნულის ტოლია

$$\sum_{i=1}^k P_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^k P_{iy} = 0, \quad N + \sum_{i=1}^k P_{iz} = 0. \quad (1.1)$$

აქ k არის ნახ. 1.10-ზე წარმოდგენილი სხეულის ნაწილზე მოდებული გარე ძალების რიცხვი.

ფორმულებში P_{ix} , P_{iy} , P_{iz} ელემენტზე მოდებული P_i ძალების გეგმილებია შესაბამის კოორდინატთა ღერძებზე. Q_x და Q_y - შიგა ძალებია, რომლებიც ეწინააღმდეგებიან დარჩენილი და მოცილებული ნაწილის ცოცვას (ჭრას), შესაბამისად Ox და Oy ღერძების მიმართულებით. მათ განივი ძალები ეწოდება. განივი ძალები დადებითია, თუ მათი მიმართულება ემთხვევა შესაბამისი ღერძების დადებით მიმართულებას. კვეთის მართობ შიგა N ძალას ნორმალური ძალა ეწოდება. იგი დადებითია, თუ მისი მიმართულება ემთხვევა კვეთის გარე ნორმალის მიმართულებას (ე.ი. სხეული გაჭიმვას განიცდის), ხოლო უარყოფითია, თუ სხეული განიცდის შეკუმშვას.



ნახ. 1.10

წონასწორობის დანარჩენი სამი განტოლების გამოყენება მთავარი მომენტის გეგმილების დადგენის საშუალებას იძლევა

$$\sum_{i=1}^k M_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^k M_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^k M_{iz} = 0, \quad (1.2)$$

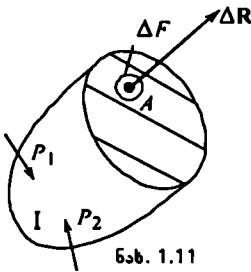
სადაც M_{ix} , M_{iy} , M_{iz} სხეულის დარჩენილ ნაწილზე მოდებული ძალების მომენტებია შესაბამისი ღერძების მიმართ.

შიგა ძალების M_x მომენტს მღუნავი მომენტი ეწოდება. ეს მომენტი yOz სიბრტყეში სხეულის ღუნვისადმი წინააღმდეგობის შედეგია. მომენტი დადებითია, თუ ის ეწინააღმდეგება კვეთის მობრუნებას Ox ღერძის ირგვლივ საათის ისრის მიმართულებით (დაკვირვება ხდება Ox ღერძის დადებითი მიმართულებიდან). ანალოგიურად განისაზღვრება მღუნავი M_y მომენტი xOz სიბრტყეში.

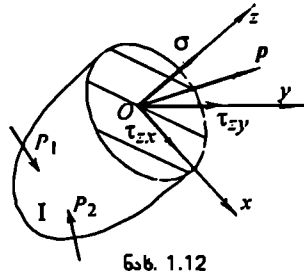
შიგა ძალების M_z მომენტს მგრები მომენტი ეწოდება. ის წარმოადგენს სხეულის დატოვებული ნაწილის მიმართ, Oz ღერძის გარშემო მეორე მოცილებული ნაწილის მობრუნებისადმი შიგა ძალების წინააღმდეგობას. ეს მომენტი დადებითია, თუ ეწინააღმდეგება კვეთის მობრუნებას საათის ისრის მიმართულებით. დაკვირვება ხდება Oz ღერძის დადებითი მიმართულებიდან.

მთავარი ვექტორის და მთავარი მომენტის გეგმილებს შიგა ძალოვანი ფაქტორები ეწოდება.

ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ სხეულის მოცილებული ნაწილი (ნახ. 1.8), ვინაიდან შიგა ძალები კვეთზე სხეულის ნაწილების ურთიერთმოქმედებას ასახავს. მთავარი ვექტორი და მთავარი მომენტი ისეთივე სიდიდის იქნება,



ნახ. 1.11



ნახ. 1.12

როგორც ნაჩვენებია სხეულის ნაწილის კვეთზე (ნახ. 1.10), მაგრამ მათ ექნებათ საწინააღმდეგო მიმართულება. ამიტომ კვეთში შიგა ძალოვანი ფაქტორები შეიძლება ვიპოვოთ სხეულის ნებისმიერი ნაწილის განხილვით. - შედეგი ერთი და იგივე იქნება.

კვეთში ძალების განაწილების შესასწავლად საჭიროა წერტილში ძალების ინტენსივობის დამახასიათებელი სიდიდის შემოღება. ასეთი სიდიდეა ძაბვა. განვიხილოთ სხეულის კვეთის A წერტილის მიდამო ΔF ფართობის მქონე მცირე ელემენტი (ნახ. 1.11). ამ ელემენტზე მოდებული ძალაა ΔR ფართობის ერთეულზე საშუალოდ მოსული ძალა $p_{საშ} = (\Delta R / \Delta F)$. ეს საშუალო ძაბვაა. თუ ელემენტს თანდათან შევამცირებთ და მის სასაზღვრო ხაზს მივუახლოვებთ A წერტილს, მივიღებთ

$$p = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta F} \quad (1.3)$$

მიღებული p ვექტორი ახასიათებს ძალების ინტენსივობას A წერტილში და მას სრული ძაბვა ეწოდება. მისი განზომილება SI სისტემაში არის ნიუტონი შეფარდებული კვადრატულ მეტრთან (ნ/მ²), ანუ პასკალი (პა). ხშირად ძაბვას გამოსახავენ ჯერად სიდიდეებში, კერძოდ, მეგაპასკალებში: 1 მგპა = 10⁶ პა. სრული ძაბვა A წერტილში შეიძლება დავაგეგმილოთ კვეთის მართობი Ox ღერძზე და კვეთში მდებარე Oy ღერძებზე (ნახ. 1.12).

სრული ძაბვის გეგმილი კვეთის მართობზე აღინიშნება ბერძნული ასოთი σ და მას ნორმალური ძაბვა ეწოდება. ნორმალური ძაბვა დადებითია, თუ ის გაჰქიშავია, და უარყოფითია, თუ შემკუმშავია.

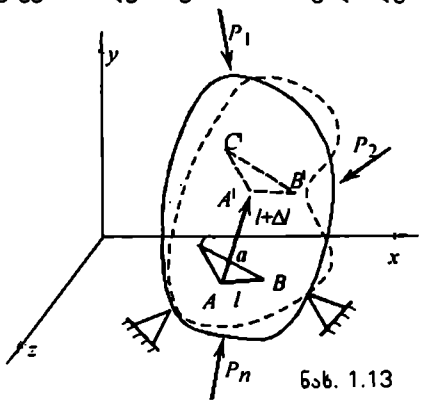
სრული ძაბვის გეგმილები Ox და Oy ღერძებზე აღინიშნება ბერძნული τzx, τzy ასოებით. ამ გეგმილებს მხები ძაბვები ეწოდება. მხები ძაბვების პირველი

ინდექსი (=) მიუთითებს, თუ რომელი ღერძის მართობ კვეთში მოქმედებს ძაბვა, მეორე ინდექსი (x ან y) კი - თუ რომელი ღერძის პარალელურია იგი.

განხილული კვეთის გარდა, A წერტილში შეიძლება გავატაროთ და შევისწავლოთ სხვა მიმართულების კვეთებიც. გავლებულ კვეთში ძაბვების ერთობლიობა ახასიათებს დაძაბულობის მდგომარეობას ამ წერტილში. შემდგომში ნაჩვენები იქნება, რომ დაძაბულობა წერტილში ხასიათდება ექვსი სიდიდით.

§4. გადაადგილებები და დეფორმაციები

განვიხილოთ მოდებული ძალების მოქმედებით გამოწვეული მყარი სხეულის დეფორმაცია (ნახ. 1.13). ამ სხეულის საწყისი მდგომარეობა აღნიშნულია უწყვეტი ხაზით, დეფორმირებული მდგომარეობა კი - წყვეტილით. დეფორმაციის შედეგად A წერტილი გადაადგილდება და დაიკავებს A' მდებარეობას. მისი გადაადგილება განისაზღვრება სრული გადაადგილების a ვექტორით. აღვნიშნოთ ამ ვექტორის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე $\{u, v, w\}$ -ით. ეს გეგმილები წარმოადგენს წერტილის გადაადგილებებს შესაბამისი ღერძების მიმართულებით და, როგორც წესი, მცირეა კონსტრუქციის საერთო ზომებთან შედარებით. აღსანიშნავია, რომ გადაადგილებები ყოველთვის არ ახასიათებს სხეულის ზომების და ფორმის ცვლილებებს. მაგალითად, სხეული შეგვიძლია გადავიტანოთ ერთი ადგილიდან მეორეზე დეფორმირების გარეშე. ცხადია, ამ შემთხვევაში გადაადგილებას ექნება ადგილი, მაგრამ სხეული არც ფორმას შეიცვლის და არც ზომებს.



ნახ. 1.13

ფორმისა და ზომების ცვლილებების რაოდენობრივი შეფასებისათვის განვიხილოთ ბოკოვანი AB ელემენტი (ნახ. 1.13), რომლის საწყისი სიგრძეა l . სხეულის დეფორმაციის შემდეგ A წერტილი გადავა A' წერტილში, ხოლო B წერტილი - B' - წერტილში, ელემენტის სიგრძე დეფორმირებულ მდგომარეობაში იქნება $(l + \Delta l)$.

საშუალო ხაზოვანი დეფორმაცია განისაზღვრება, როგორც ელემენტის წაგრძელების შეფარდება საწყის სიგრძესთან

$$\epsilon_{AB_{საშ}} = \frac{(l + \Delta l) - l}{l} = \frac{\Delta l}{l} \quad (1.4)$$

მივუახლოოთ B წერტილი A წერტილს ისე, რომ შევინარჩუნოთ ამ წერტილებზე საწყისი მდგომარეობაში გამავალი წრფის მიმართულება. მივიღებთ

$$\varepsilon_{AB} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{l}. \quad (1.5)$$

ასე განისაზღვრება ხაზოვანი დეფორმაცია A წერტილში AB მიმართულებით. ანალოგიურად განისაზღვრება ხაზოვანი დეფორმაციები A წერტილში ნებისმიერი მიმართულებით, კერძოდ, კოორდინატთა ღერძების მიმართულებით (ε_x , ε_y , ε_z).

სხეულის ფორმისა და ზომების ცვლილებების ინტენსიურობის განსაზღვრისათვის საჭიროა, აგრეთვე, შევაფასოთ, როგორ იცვლება სხეულში არსებული მართი კუთხე სხეულის დატვირთვისას. ამისათვის განვიხილოთ მართკუთხა CAB სამკუთხედი (ნახ.1.13), რომელიც სხეულის დეფორმაციის შედეგად გადავა $C'A'B'$ მდებარეობაში. კუთხის ცვლილება

$$\gamma = \angle C'A'B' - \angle CAB. \quad (1.6)$$

ეს ცვლილება დაკავშირებულია AB და AC სიდიდეებთან. ამიტომ კუთხური დეფორმაცია A წერტილში BAC სიბრტყეში შემდეგნაირად განისაზღვრება

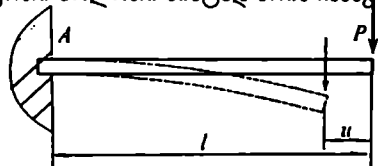
$$\gamma_{BAC} = \lim_{CA \rightarrow 0, BA \rightarrow 0} \dots \quad (1.7)$$

ანალოგიურად განისაზღვრება კუთხური დეფორმაციები სიბრტყეში, რომლებსაც შეადგენს საკოორდინატო ღერძები: (γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx}). *საბოლოოდ, დეფორმირებულ მდგომარეობას წერტილში განსაზღვრავს ექვსი სიდიდე: სამი ხაზოვანი (ε_x , ε_y , ε_z), და სამი კუთხური (γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx}) დეფორმაცია.*

§5. მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობის ძირითადი პრინციპები. შუკის კანონი

მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობაში განსახილველი სისტემის წერტილების ურთიერთგადაადგილებები, როგორც წესი, კონსტრუქციის საერთო ზომებზე ბევრად მცირეა. ეს საშუალებას გვაძლევს, გამოვიყენოთ საწყისი ზომების შენარჩუნების პრინციპი. ამ პრინციპიდან გამომდინარე, წონასწორობის განტოლებების შედგენისას შეიძლება მხედველობაში არ მივიღოთ კონსტრუქციის დეფორმაცია და გამოვიყენოთ კონსტრუქციის საწყისი ფორმა და ზომები. მაგალითად, განვიხილოთ ძელი, რომელიც ერთი ბოლოთი ხისტად არის ჩამაგრებული, მეორე ბოლოზე კი ძალის მოქმედებას განიცდის (ნახ.1.14).

მლუნავი მომენტი საყრდენ კვეთში $M_A = P(l-u)$, მაგრამ ვინაიდან გადაადგილებები მცირეა ძელის საერთო ზომებთან შედარებით,

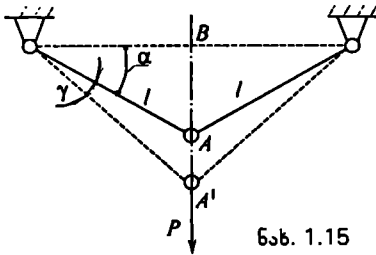


ნახ. 1.14

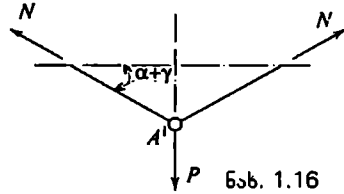
ვიყენებთ საწყისი ზომების შენარჩუნების პრინციპს და განვსაზღვრავთ მღუნავ მომენტს კონსტრუქციის საწყისი მდგომარეობისათვის: $M_A = Pl$.

განვიხილოთ მეორე მაგალითი. სისტემაზე, რომელიც ორი ძელისაგან შედგება, მოქმედებს P ძალა (ნახ. 1.15). განვსაზღვროთ ძელებში მოქმედი ნორმალური ძალები. ამისათვის ამოვკვეთოთ A' კვანძი (ნახ. 1.16), დავაგეგმილოთ ძალები AB ღერძზე:

$$2N \sin(\alpha + \gamma) - P = 0,$$



ნახ. 1.15

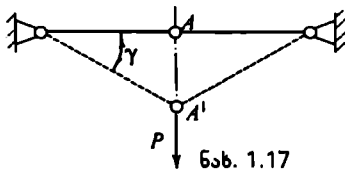


ნახ. 1.16

საიდანაც მივიღებთ ნორმალური ძალის მნიშვნელობას

$$N = \frac{P}{2\sin(\alpha + \gamma)}. \quad (1.8)$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ სისტემა AB ღერძისადმი სიმეტრიულია და ამიტომ ძელებში აღძრული ნორმალური ძალები ტოლია. მაგრამ საწყისი ზომების შენარჩუნების პრინციპი საშუალებას გვაძლევს მხედველობაში არ მივიღოთ სისტემის დეფორმაცია და განვსაზღვროთ ნორმალური ძალა შემდეგნაირად $N = P/2\sin\alpha$. ამ ფორმულით შეიძლება დავადგინოთ ნორმალური ძალის მნიშვნელობა, თუ $\alpha \neq 0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ვღებულობთ სისტემას, რომლის ფორმა უმნიშვნელო დატვირთვისას მნიშვნელოვნად იცვლება (ნახ. 1.17) და ამიტომ მისთვის



ნახ. 1.17

ის აღნიშნული პრინციპი არ გამოდგება. ასეთ სისტემას კინემატიკურად ცვლადი ეწოდება.

ამრიგად, საწყისი ზომების შენარჩუნების პრინციპი არ გამოიყენება, თუ გადაადგილებები მნიშვნელოვანია კონსტრუქციის საერთო ზომებთან შედარებით. ამ პრინციპის გამოყენება არ შეიძლება კინემატიკურად ცვლადი

სისტემისათვის მკირე გადაადგილების შემთხვევაშიც კი.

ხშირ შემთხვევაში, თუ სხეულზე მოდებული ძალის მნიშვნელობა არ აღემატება გარკვეულ ზღვარს, P ძალასა და მისგან გამოწვეულ n გადაადგილებებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება

$$u = kP,$$

(1.9)

სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტი.

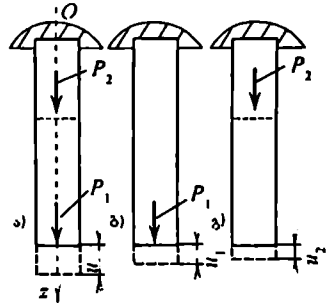
ამ დებულებაზე დაყრდნობით კონსტრუქციის ელემენტების გაანგარიშებაში ვიყენებთ ძალთა მოქმედების დამოუკიდებლობის პრინციპს, რაც საშუალებას გვაძლევს გავამარტივოთ სისტემაზე მოქმედი რთული დატვირთვა. ამისათვის ჯერ განვიხილავთ ამოცანას ცალკეული ძალებისათვის ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. შემდგომში სისტემის საერთო გადაადგილება, ძაბვა და შიგა ძალოვანი ფაქტორები უნდა გამოვიანგარიშოთ შედეგების შეჯამებით. მაგალითად, თუ გვინტერესებს ძელის წაგრძელება (ნახ. 1.18ა), შეგვიძლია განვიხილოთ დამხმარე ამოცანები (ნახ. 1.18ბ და ნახ. 1.18გ, განვსაზღვროთ u_1 და u_2 , ძელის საერთო წაგრძელებას გავიანგარიშებთ ამ გადაადგილების შეჯამებით

$$u = u_1 + u_2$$

არის ისეთი სისტემებიც, რომლებისთვისაც ეს პრინციპი არ მოქმედებს.

ჰუკის კანონი თავის დროზე ჩამოყალიბებული იყო (1.9) გამოსახულების სახით. ამ კანონის თანამედროვე შინაარსი უფრო ზოგადია. შესაბამისი ფორმულა ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\epsilon = \frac{1}{E} \sigma, \quad (1.10)$$



ნახ. 1.18

სადაც σ და ϵ , შესაბამისად, ნორმალური ძაბვა და

მისივე მიმართულების ხაზოვანი დეფორმაციაა. E – მასალის მუდმივია, რომელსაც პირველი რიგის დრეკადობის მოდული ეწოდება. თუ კონსტრუქციისათვის სრულდება (1.9) პირობა, მაშინ შესრულდება (1.10)-ც. მაგრამ (1.10) პირობის შესრულება არ იძლევა (1.9)-ის შესრულების გარანტიას.

ჰუკის კანონი მართებულია მხოლოდ გარკვეულ საზღვრებში.

ხაზოვანი დეფორმაცია ϵ არის OZ ღერძის მიმართულებით სხეულის სიგრძის ერთეულის წაგრძელება. ცხადია, თუ OZ მიმართულებით სხეულის ზომები იზრდება (ნახ. 1.18), მისი მართობული მიმართულებებით ისინი, პირიქით, მცირდება. შესაბამისი მიმართულების ხაზოვანი დეფორმაცია განისაზღვრება ფორმულით

$$\epsilon' = -\mu \epsilon, \quad (1.11)$$

სადაც μ კონკრეტული მასალებისათვის დადებითი მუდმივია და მას პუასონის კოეფიციენტი ეწოდება. ეს სიდიდე იცვლება ზღვრებში $0 \leq \mu \leq 0.5$.

ზოგიერთი მასალის დრეკადობის მახასიათებელი კოეფიციენტები მოცემულია 1.1 ცხრილში.

დატვირთვისთან ერთად სხეულმა შეიძლება განიცადოს ტემპერატურის ცვლილება / გრადუსით. ამ შემთხვევაში მისი სიგრძის ყოველი ერთეული დამატებით წაგრძელებდა αl სიდიდით და (1.10)-ის ნაცვლად მივიღებთ ახალ ფორმულას

$$\epsilon = \frac{1}{E} \sigma + \alpha l, \quad (1.12)$$

სადაც α ბაზოვანი ტემპერატურული გაფართოების კოეფიციენტი.

ჰუკის კანონი (1.10) სახით ძალაშია, როდესაც ისე, როგორც 1.18 ნახაზზე გამოსახულ მაგალითში, ადგილი აქვს ე.წ. ერთღერძა დაძაბულ მდგომარეობას. წინააღმდეგ შემთხვევაში, გამოიყენება ჰუკის განზოგადოებული კანონი, რომელსაც შემდგომში განვიხილავთ.

ცხრილი 1.1

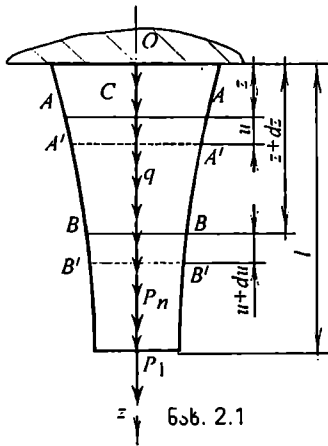
მასალა	E [მგპა]	μ
ფოლადი	$(1,9 \pm 2,2)10^5$	0,24 \pm 0,33
ალუმინი	$(0,7 \pm 0,8)10^5$	0,26 \pm 0,36
სპილენძი	$(1,0 \pm 1,3)10^5$	0,31 \pm 0,34
თუჩი	$(1,15 \pm 1,60)10^5$	0,23 \pm 0,27
ხე (ბოკოების გასწვრივ)	$(0,08 \pm 0,12)10^5$	

მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობაში, აგრეთვე, ფართოდ ვიყენებთ სენ-ვენანის პრინციპს, რომლის არსი მდგომარეობს შემდეგში: მყარი სხეულის წერტილზე ან კვეთში, რომელიც საკმაოდ დაშორებულია დატვირთვის ადგილიდან, ძაბვები, დეფორმაციები და შიგა ძალოვანი ფაქტორები უმნიშვნელოა და მოკიდებული იმაზე, თუ როგორ არის დატვირთვა განაწილებული კონსტრუქციის ზედაპირზე. ამ შემთხვევაში მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ ძალების ჯამურ სიდიდეს.

ეს პრინციპი უკვე გამოვიყენეთ შეყურსული ძალის განხილვისას. კერძოდ, ავტომობილის წონის ხიდზე მოქმედებისას. არის შემთხვევებიც, როდესაც ეს პრინციპი არ სრულდება.

§6. სწორი ძელის გადაადგილებები და ძაბვები გაჭიმვა-კუმშვისას

განვიხილოთ ძელი, რომლის ნებისმიერი განივი კვეთის სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს Oz წრფეზე (ნახ. 2.1). ამ წრფეს ვუწოდოთ ძელის ღერძი, ხოლო თვით ძელს – სწორი ძელი. შევისწავლოთ ასეთი ძელის განივი კვეთში აღძრული ძაბვები და გადაადგილებები, რომლებიც გამოწვეულია ძელის ღერძის წერტილებში მოდებული შეყურსული და Oz მიმართულებით განაწილებული ძალებით.



ნახ. 2.1

(1.1) და (1.2) პირობების შესაბამისად, ძელის ღერძის მართობ კვეთში (განივი კვეთში) წარმოიქმნება მხოლოდ ნორმალური ძალა N , რომელიც, ზემოთ დადგენილი წესის თანახმად დადებითია, თუ იგი იწვევს ძელის გაჭიმვას და უარყოფითია, თუ მისი მოქმედების შედეგად ძელი იკუმშება. იმავე წესით განისაზღვრება ნორმალური ძაბვების ნიშანიც.

დაძაბულ მდგომარეობას, რომელიც ხასიათდება ძელის განივი კვეთში მხოლოდ ნორმალური ძალის მოქმედებით, გაჭიმვა-კუმშვა ეწოდება.

დავუშვათ, ძელის ნებისმიერი განივი კვეთი ძელის დეფორმაციისას გადაადგილდება, მაგრამ რჩება ბრტყელი და ძელის ღერძის მართობული. ეს ნიშნავს, რომ კოორდინატა-სისტემის საწყისი O წერტილიდან z მანძილით დაცილებული AA განივი კვეთი ძელის დეფორმაციის შედეგად გადაადგილდება Oz მიმართულებით თავისი თავის პარალელურად u სიდიდით და დაიკავებს ახალ $A'A'$ მდებარეობას (ნახ.2.1). განვიხილოთ AA კვეთის მეზობელი BB განივი კვეთი, რომელიც საწყისი O წერტილიდან დაცილებულია $(z+dz)$ მანძილით. BB კვეთი გადაადგილდება ისევე, როგორც AA კვეთი და მისი გადაადგილება განისაზღვრება $(u+du)$ სიდიდით.

ახლა დავადგინოთ AB ელემენტის ხაზოვანი დეფორმაცია, როგორც ამ ელემენტის du წაგრძელების შეფარდება მის საწყის სიგრძესთან

$$\epsilon = \frac{du}{dz} \tag{2.1}$$

მიღებული ყარმულის საშუალებით ვადგენთ ძელის ნებისმიერი კვეთის გადაადგილებას

$$u = u_0 + \int_0^z \epsilon dz, \quad (2.2)$$

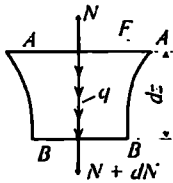
სადაც u_0 ასრულებს ინტეგრების მუდმივის როლს, რომლის ფიზიკური არსი მარტივი დასადგენია. დავუშვათ, რომ $z=0$. მაშინ (2.2)-ის შესაბამისად, მივიღებთ: $u(0) = u_0$ ამრიგად, u_0 არის საწყისი წერტილის შესაბამისი განივი კვეთის გადაადგილება. კერძო შემთხვევაში, როდესაც საწყისი კვეთი ჩამაგრებულია (ნახ.2.1), გადაადგილება ნულის ტოლია, $u_0=0$.

(2.1) ფორმულიდან ჩანს, რომ განივი კვეთის ნებისმიერი წერტილისათვის ხაზოვანი დეფორმაცია ერთი და იმავე სიდიდისაა. აქედან გამომდინარე, ვასკვნით, რომ კვეთში ნორმალური ძაბვები მუდმივია. ამდენად, თუ კვეთში მოქმედებს ნორმალური ძალა N , მაშინ ნორმალური ძაბვები განისაზღვრება ფორმულით

$$\sigma = \frac{N}{F} \quad (2.3)$$

სადაც F განივი კვეთის ფართობია.

ნორმალური ძალის მნიშვნელობის დასადგენად განვიხილოთ 2.1 ნახაზზე ნაჩვენები ძელის dz სიგრძის ელემენტის წონასწორობის პირობა (ნახ.2.2). ძელის AA კვეთი საწყისი წერტილიდან დაცილებულია z მანძილით და მასში ნორმალური ძალა უდრის N -ს. AA კვეთის მეზობელი BB კვეთი იმავე წერტილიდან დაცილებულია $(z+dz)$ მანძილით და მასში ნორმალური ძალა უდრის $(N+dN)$ -ს. ამ ძალების გარდა ელემენტზე მოქმედებს q ინტენსიურობის განაწილებული ძალები, რომლებიც შეიძლება წარმოვიდგინოთ qdz ტოლქმედის საშუალებით. აღნიშნულის



ნახ. 2.2

გათვალისწინებით, ელემენტის წონასწორობის პირობა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$(N + dN) - N + qdz = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ დიფერენციალურ დამოკიდებულებას განაწილებული ძალების ინტენსიურობასა და ნორმალურ ძალას შორის

$$\frac{dN}{dz} = -q \quad (2.4)$$

ამრიგად, ნორმალური ძალის წარმოებული უდრის განაწილებული ძალების ინტენსიურობას, ანუ ძელის ღერძის ერთეულოვან სიგრძეზე მოდებული განაწილებული ძალების ტოლქმედს საწინააღმდეგო ნიშნით.

კვეთში ნორმალური ძალის მნიშვნელობას დავადგენთ (2.4)-ის ინტეგრებით

$$N = N_0 - \int_0^z q dz, \quad (2.5)$$

სადაც N_0 ინტეგრების მუდმივია. მისი ფიზიკური არსის დასადგენად დავუშვათ, რომ $z=0$, მაშინ (2.5)-დან მივიღებთ: $N(0) = N_0$.

ამრიგად, (2.5) ფორმულაში ინტეგრების მუდმივი N_0 არის საწყის კვეთში ნორმალური ძალის მნიშვნელობა.

(2.5) ფორმულის სტრუქტურა გამორიცხავს შეყურსული ძალის მოქმედებას ძელის იმ ნაწილზე, რომელიც მოთავსებულია საწყის წერტილსა და მისგან z მანძილით დაცილებულ კვეთს შორის. თუ ეს პირობა არ სრულდება, შეყურსული ძალების მოდების წერტილებით ძელი იყოფა ცალკეულ უბნებად; ყოველი უბნისათვის ვიღებთ თავის კოორდინატთა სისტემას და განვიხილავთ მათ თანმიმდევრობით.

(2.5) ფორმულა ფაქტიურად იმეორებს (1.1)-ის მესამე ფორმულას, ოღონდ სხეულზე მოდებული განაწილებული ძალების გეგმილი წარმოდგენილია ინტეგრალური სახით.

ამრიგად, ცენტრალური გაჭიმვა-კუმშვის პირობებში არსებული ძელისათვის ჭერ მივიღეთ ხაზოვანი დეფორმაციებისა და გადაადგილებების, ხოლო შემდეგ – ნორმალური ძაბვებისა და ნორმალური ძალის ფორმულები. ამ ფორმულების მიღებისას არ გაკეთებულა რაიმე დაშვება ძელის მასალის თვისებების შესახებ. ამდენად, მიღებული ფორმულების გამოყენება შეიძლება ყველა მასალისათვის, მიუხედავად იმისა, თუ როგორია დამოკიდებულება ნორმალურ ძაბვასა და ხაზოვან დეფორმაციას შორის, $\epsilon = f(\sigma)$.

დავაკონკრეტოთ ამოცანა და განვიხილოთ ძელი, რომლის მასალა ემორჩილება ჰუკის კანონს. თუ (1.10)-ში გავითვალისწინებთ ნორმალური ძაბვის მნიშვნელობას (2.3) ფორმულის მიხედვით, მივიღებთ

$$\epsilon = \frac{N}{EF}. \quad (2.6)$$

ამასთან, თუ ძელის ტემპერატურა იცვლება t გრადუსით, მაშინ (1.12) გამოსახულების თანახმად, ხაზოვანი დეფორმაციის ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\epsilon = \frac{N}{EF} + \alpha t. \quad (2.7)$$

მიღებული ფორმულების საშუალებით ვასკვნით, რომ ძელის განივი კვეთის ფართობის ზრდის შედეგად ხაზოვანი დეფორმაცია მცირდება. ანალოგიური დამოკიდებულებაა ხაზოვან დეფორმაციასა და დრეკადობის პირველი რიგის მოდულს შორის. ამდენად, EF მახასიათებელი განსაზღვრავს ძელის წინა-

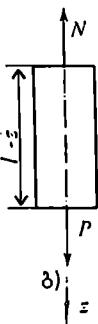
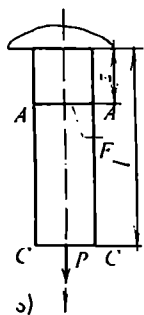
აღმდევობის უნარს დეფორმირებისადმი და მას ეწოდება ძელის სიხისტე გაჭიმვა-კუმშვის შემთხვევისათვის.

ძელის კვეთის გადაადგილების ფორმულა, გამოხატული ძელის სიხისტისა და ნორმალური ძალის საშუალებით, მიიღება (2.2) ფორმულაში (2.6)-ის გათვალისწინებით

$$u = u_0 + \int_0^z \frac{N dz}{EF} \quad (2.8)$$

ანალოგიურად, თუ (2.2) ფორმულაში ჩავსვამთ ϵ -ის გამოსახულებას (2.7)-ის მიხედვით, მივიღებთ გადაადგილების ფორმულას ძელისათვის ტემპერატურის ცვლილების გათვალისწინებით.

ზოგ შემთხვევაში, საწყისი კვეთის u_0 გადაადგილება წინასწარ არ არის ცნობილი, რაც ართულებს (2.8)-ის გამოყენებას. ამ შემთხვევაში, მიზანშეწონილია ძელის წაგრძელების გაანგარიშება საწყის და z კოორდინატით განსაზღვრულ კვეთებს შორის



$$\Delta l(z) = u - u_0 = \int_0^z \frac{N dz}{EF}. \quad (2.9)$$

ამოცანის ამოხსნის შემდეგ საწყისი კვეთის გადაადგილება იოლად განისაზღვრება, რადგან იგი უდრის ჩამაგრებულ და საწყის კვეთებს შორის ძელის ნაწილის წაგრძელებას საწინააღმდეგო ნიშნით. საწყისი კვეთის ჩამაგრების შემთხვევაში $u_0 = 0$ და გადაადგილებები და წაგრძელებები ერთმანეთის ტოლია.

თუ გვაქვს l სიგრძის მუდმივი განივი კვეთის მქონე სწორი ძელი ($F = const$), რომლის ნებისმიერ კვეთში

ნორმალური ძალა ერთი და იმავე მნიშვნელობისაა ($N = const$), მაშინ (2.9) ფორმულა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\Delta l(z) = \frac{Nz}{EF}, \quad \Delta l(l) = \frac{Nl}{EF}. \quad (2.10)$$

განვიხილოთ მუდმივი განივი კვეთის მქონე სწორი ძელი, რომლის CC კვეთის სიმძიმის ცენტრში მოდებულია P ძალა (ნახ.2.3). შევადგინოთ ძელის ნაწილის (ნახ.2.3ბ) წონასწორობის პირობა $P - N = 0$, საიდანაც დავადგენთ ნორმალური ძალის მნიშვნელობას $N = P = const$. ე. ი. ნორმალური ძალა ნებისმიერ კვეთში გამჭიმავია ანუ დადებითია. მაშინ (2.3) და (2.10) ფორმულების თანახმად, ნორმალური ძაბვები და ნებისმიერი კვეთის გადაადგილება გამოითვლება შემდეგნაირად

$$\sigma = \frac{P}{F}, \quad u = \frac{Pz}{EF}.$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $z=l$, მივიღებთ CC კვეთის გადაადგილებას (ნახ.2.3ა), ე.ი. მთელი ძელის წაგრძელებას $u(l) = \Delta l$

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}. \quad (2.11)$$

ამ ამოცანის განხილვისას ძელის წონა არ იქნა მხედველობაში მიღებული (იგი P ძალასთან შედარებით უმნიშვნელოდ ჩავთვალეთ), თუმცა ძელის წონის გათვალისწინება რაიმე სირთულესთან არ არის დაკავშირებული. ამისათვის AA კვეთში განვსაზღვროთ დაზუსტებული ნორმალური ძალა (ნახ.2.3ბ)

$$N = P + F\gamma(l - z),$$

სადაც γ ძელის მასალის კუთრი წონაა.

ნორმალური ძაბვა ძელის ნებისმიერ კვეთში უდრის

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F} + \gamma(l - z),$$

$$z = 0: \sigma = \frac{P + F\gamma l}{F}; \quad z = l: \sigma = \frac{P}{F}.$$

ამრიგად, ამ შემთხვევაში, ნორმალური ძაბვა დამოკიდებულია z -ზე და მისი მნიშვნელობა უდიდესია ჩამაგრების კვეთში. ამ კვეთში ნორმალური ძალა მოღებული P ძალისა და ძელის წონის $F\gamma l$ -ის ჯამის ტოლია.

გადაადგილებების დასადგენად გამოვიყენოთ (2.8) ფორმულა

$$u = \int_0^z \frac{P + F\gamma(l - z)}{EF} dz = \frac{Pz}{EF} + \frac{F\gamma lz}{EF} - \frac{F\gamma z^2}{2EF};$$

მაქსიმალური გადაადგილება შეესაბამება CC კვეთს

$$z = l: \quad u = \frac{Pl}{EF} + \frac{F\gamma l^2}{2EF}. \quad (2.12)$$

(2.12) ფორმულაში მეორე წევრი განსაზღვრავს ძელის საკუთარი წონით გამოწვეულ გადაადგილებას.

მივიღეთ, რომ ნორმალური ძაბვები მუდმივი განივი კვეთის მქონე ძელისათვის

ცვალებადია. ისმის კითხვა: შეიძლება თუ არა დავამზადოთ ცვალებადი განივკვეთიანი ძელი, რომლის ნებისმიერ განივკვეთში ნორმალური ძაბვები ერთი და იმავე σ_0 სიდიდის იქნება?

მოცემული პირობის შესაბამისად, (2.3)-ის საშუალებით ვადგენთ ნებისმიერი კვეთისათვის ნორმალური ძალის მნიშვნელობას $N = \sigma_0 F(z)$ იმ შემთხვევაში, როდესაც განაწილებული ძალები ძელის საკუთარი წონის მოქმედების შედეგია, მივიღებთ $qdz = F(z)\gamma dz$, საიდან ძელის საკუთარი წონით განპირობებული განაწილებული ძალების ინტენსიურობა გამოიხატება შემდეგი სახით

$$q = F(z)\gamma \quad (2.13)$$

მიღებული შედეგები გავითვალისწინოთ (2.4) ფორმულაში

$$\frac{dF(z)}{dz} = -\frac{\gamma}{\sigma_0} F(z),$$

რომლის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\ln F(z) - \ln C = -\frac{\gamma}{\sigma_0} z,$$

სადაც C ინტეგრების მუდმივია. მიღებული შედეგი გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$F(z) = C e^{-\frac{\gamma}{\sigma_0} z} \quad (2.14)$$

ინტეგრების მუდმივის მნიშვნელობის დასადგენად გამოვიყენოთ პირობა, რომლის თანახმად ძელის ბოლო CC კვეთშიც ($z = l$) ნორმალური ძაბვა σ_0 -ის ტოლია

$$\sigma_0 = \frac{P}{F_0}, \quad F(l) = F_0 = \frac{P}{\sigma_0}.$$

გავითვალისწინოთ ეს პირობა (2.14)-ში

$$F(l) = \frac{P}{\sigma_0} = C e^{-\frac{\gamma}{\sigma_0} l} \quad C = \frac{P}{\sigma_0} e^{\frac{\gamma}{\sigma_0} l}$$

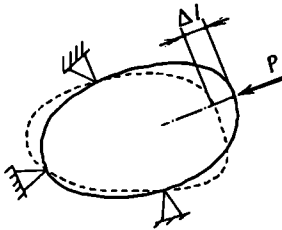
და (2.14)-ის ნაცვლად მივიღებთ ძელის განივი კვეთის ფართობის ცვლილების განმსაზღვრელ ფორმულას, როცა ნორმალური ძაბვები ძელის ნებისმიერ კვეთში მუდმივია და სიდიდით σ_0 -ის ტოლია

$$F(z) = \frac{P}{\sigma_0} e^{\frac{\gamma}{\sigma_0}(1-z)} \quad (2.15)$$

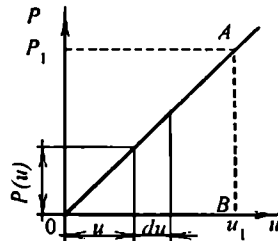
ასეთი ძელი უზრუნველყოფს მასალის მინიმალურ ხარჯს. ამასთან ერთად, იგი ოპტიმალურია სიმტკიცის პირობების შესრულების თვალსაზრისითაც.

§7. გარე ძალების მუშაობა. დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია

მყარი დრეკადი სხეულის დატვირთვის პროცესში მასზე მოდებული ძალები გარკვეულ მუშაობას ასრულებენ. ამ მუშაობის მნიშვნელოვანი ნაწილი, როგორც წესი, გადადის სხეულის შიგა ძალების მუშაობაში, დეფორმაციის პოტენციალურ ენერგიაში, ნაწილი კი სხეულის კინეტიკურ ენერგიაში. თუ მოქმედი ძალების ზრდის სიჩქარე მცირეა, მაშინ ინერციის ძალები უმნიშვნელოა და შეიძლება კინეტიკური ენერგია არ მივიღოთ მხედველობაში. ამ შემთხვევაში, გარე ძალების მუშაობა A უტოლდება დეფორმაციის U პოტენციალურ ენერგიას.



ნახ. 2.4



ნახ. 2.5

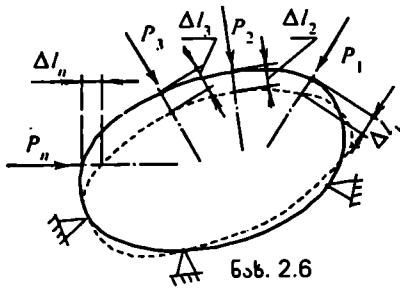
განვიხილოთ მყარი სხეული, რომელზედაც მოდებულია გარე P ძალა (ნახ. 2.4). სხეულის საწყისი და დეფორმირებული მდგომარეობები წარმოდგენილია უწყვეტი და წვეტილი ხაზებით. სხეულზე მოდებული ძალა ასრულებს მუშაობას Δl გადაადგილებაზე. მაგრამ დატვირთვის პროცესში ძალა მუდმივი არ არის, რის გამოც მის მიერ შესრულებული მუშაობა არ უდრის ძალისა და გადაადგილების ნამრავლს.

დრეკადი სხეულისათვის, რომელიც ემორჩილება ჰუკის კანონს, დატვირთვისას ძალასა და გადაადგილებას შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება (1.9) (ნახ. 2.5). მიუხედავად იმისა, რომ დატვირთვის პროცესში ძალა ცვალებადია, du გადაადგილებისათვის იგი შეიძლება ჩავთვალოთ უცვლელად და ამავე გადაადგილებაზე მის მიერ შესრულებული მუშაობა გავიანგარიშოთ, როგორც ძალისა და გადაადგილების ნამრავლი

$$dA = P(u)du.$$

გარე ძალის საერთო მუშაობა გაიანგარიშება ცალკეული მონაკვეთების ფარგ-

ლებში შესრულებული მუშაობების შეკრებით, ანუ განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით 0-დან u_1 -მდე



ნახ. 2.6

$$A = \int_0^{u_1} P(u) du.$$

ეს ინტეგრალი უდრის OAB სამკუთხედის ფართობს

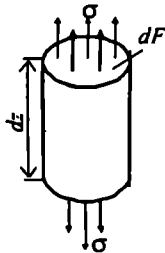
$$A = \frac{R u_1}{2}. \quad (2.16)$$

განვიხილოთ სხეულზე ერთდროულად P_1, P_2, \dots, P_n ძალების მოქმედების შემთხვევა (ნახ.2.6). ყოველი ძალისათვის დამოკიდებულება ძალასა და გადაადგილებას შორის ანალოგიურია 2.5 ნახაზზე წარმოდგენილი დამოკიდებულებისა. თითოეული ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა გამოითვლება (2.16) ფორმულით, ხოლო ყველა ძალის საერთო მუშაობა გაიანგარიშება

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{P_i u_i}{2}. \quad (2.17)$$

ამ ფორმულაში u_i არის P_i ძალის მიმართულებით ყველა ძალის ერთდროული მოქმედებით გამოწვეული გადაადგილება.

სისტემაზე მოდებული ძალების მიერ შესრულებული საერთო მუშაობა არ არის დამოკიდებული სხეულის დატვირთვის პროცესში ძალების მოდების თანმიმდევრობაზე. მაგრამ მუშაობის გაანგარიშებისას ძალთა მოქმედების დამოუკიდებლობის პრინციპის გამოყენება არ შეიძლება - გარე ძალების მიერ შესრულებული საერთო მუშაობა არ არის სხეულზე მოდებული ცალკეული ძალების მიერ დამოუკიდებლად შესრულებული მუშაობების ჯამის ტოლი.



ნახ. 2.7

მიღებული შედეგები ზოგადი ხასიათისაა, რომელთა გამოყენება შეიძლება კერძო შემთხვევებშიც, მათ შორის, ძელის ცენტრალური გაჭიმვა-კუმშვისთვისაც.

განვიხილოთ ცენტრალური გაჭიმვა-კუმშვის დროს ძელის ნიგა ძალების მუშაობა, ე. ი. ძელის დეფორმაციის პოტენციული ენერჯია. ამისათვის ძელიდან ამოკვეთოთ მცირე dx სიგრძის ცილინდრი, რომლის ფუძის ფართობი უდრის dF -ს (ნახ.2.7). ამ ცილინდრისათვის მოდებული ძალები გარე ძალების როლს ასრულებს და ამდენად, მათ მიერ შესრულებული მუშაობის დასადგენად შეიძლება გამოვიყენოთ (2.16) ფორმულა. ცილინდრზე მოქმედებს გამჭიმვი ძალა $dP = \sigma dF$, რის შედეგად მიღებულ წაგრძელებას ცილინდრისათვის დავადგენთ (1.10) და (2.1) ფორმულების გამოყენებით

$$du = \epsilon dz = \frac{\sigma}{E} dz$$

თუ გამოვიყენებთ (2.16) ფორმულას, მივიღებთ შესრულებულ მუშაობას

$$dU = \frac{(\sigma dF)\sigma dz}{2E} = \frac{\sigma^2}{2E} dV, \quad (2.18)$$

სადაც $dV = dF dz$ ელემენტარული ცილინდრის მოცულობაა, U - სხეულის შიგა ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა.

მიღებული ფორმულის საშუალებით შეგვიძლია დავადგინოთ ძელის მოცულობის ერთეულში დაგროვილი a ენერჯია, ანუ დეფორმაციის კუთრი პოტენციალური ენერჯია

$$a = \frac{dU}{dV} = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (2.19)$$

ამ შემთხვევაში, ძელის შიგა ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა გამოისახება განსაზღვრული ინტეგრალის საშუალებით

$$U = \int_{(V)} a dV = \int_{(V)} \frac{\sigma^2}{2E} dV, \quad (2.20)$$

სადაც V ძელის მოცულობაა. (2.19) და (2.20) ფორმულები გამოიყენება ძელის სხვა სახის დეფორმირების შემთხვევებშიც, კერძოდ, ლუნვის პროცესში შიგა ძალების მიერ შესრულებული მუშაობის დასადგენად.

ძელის გაჭიმვა-კუმშვის დეფორმაციის პოტენციალური ენერჯიის შესასწავლად შეიძლება განვიხილოთ (2.2) ნახაზზე ნაჩვენები ელემენტი. მისი მოცულობა არის $dV = F dz$. ეს შედეგი (2.3)-თან ერთად გავითვალისწინოთ (2.20)-ში

$$U = \int_{(l)} \frac{N^2}{2EF} dz, \quad (2.21)$$

სადაც l ძელის სიგრძეა.

მუდმივი ნორმალური ძალის შემთხვევაში, ძელისათვის, რომლის განივი კვეთი მუდმივია, (2.21)-ის ინტეგრების შედეგად მიიღება საბოლოო ფორმულა

$$U = \frac{N^2 l}{2EF}. \quad (2.22)$$

თუ განივი კვეთის ფართობი და ნორმალური ძალა იცვლება ძელის მთელ სიგრძეზე, მაგრამ ძელის ცალკეულ მონაკვეთებზე სრულდება პირობები კვეთის

ფართობისა და ნორმალური ძალის მუდმივობის შესახებ, მაშინ ამ მონაკვეთებისათვის (2.22) ფორმულა გამოიყენება ცალ-ცალკე და დეფორმაციის საერთო პოტენციალური ენერგია გამოითვლება მიღებული შედეგების შეჯამებით.

§8. დაძაბული მდგომარეობა წერტილში გაჭიმვა-კუმჭვის შემოსვენებაში

ძელის განივი AA კვეთის განხილვისას (ნახ.2.1), ნორმალური ძაბვა C წერტილში განვსაზღვრეთ (2.3) ფორმულით. ახლა დავადგინოთ ძაბვების მნიშვნელობა იმავე წერტილში, თუ კვეთი დახრილია განივი კვეთის მიმართ α კუთხით. ამისათვის C წერტილიდან ამოვკვეთოთ მცირე ელემენტი (ნახ.2.8). დახრილი კვეთის ფართობი აღვნიშნოთ dF_{α} -თი, რომელიც განივი კვეთის ფართობთან დაკავშირებულია შემდეგნაირად: $dF = dF_{\alpha} \cos \alpha$. ელემენტის წონასწორობიდან

გამომდინარე, დახრილ კვეთშიც მოქმედებს იმავე სიდიდის და მიმართულების σdF ძალა, როგორც განივ კვეთში. წარმოვადგინოთ ეს ძალა დახრილი კვეთის მართობ და მის პარალელურ ორ ძალად

$$dN_{\alpha} = (\sigma dF) \cos \alpha, \quad dT_{\alpha} = (\sigma dF) \sin \alpha.$$

განვსაზღვროთ დახრილ კვეთში ნორმალური და მხები ძაბვები

$$\sigma_{\alpha} = \frac{dN_{\alpha}}{dF_{\alpha}} = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \tau_{\alpha} = \frac{dT_{\alpha}}{dF_{\alpha}} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.23)$$

$0 \leq \cos^2 \alpha \leq 1$ და $-1 \leq \sin 2\alpha \leq 1$. ძაბვები კვეთის დახრისას იცვლება შემდეგ საზღვრებში:

$$(2.24)$$

უდიდესი ნორმალური ძაბვები მოქმედებს ძელის განივ კვეთში. უდიდესი მხები ძაბვები წარმოიქმნება 45°-ით დახრილ კვეთში

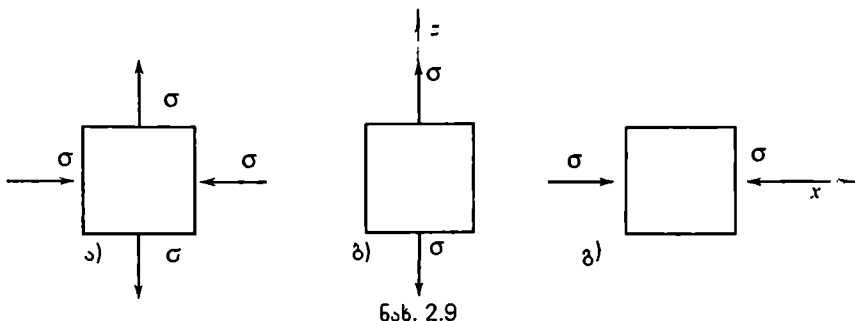
$$\alpha = 45^{\circ} \quad \sigma_{\alpha} = \frac{\sigma}{2}, \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2}. \quad (2.25)$$

წერტილში გამავალ ყველა კვეთში ძაბვების სიმრავლე განსაზღვრავს დაძაბულ მდგომარეობას ამ წერტილში. როგორც (2.23) ფორმულიდან ჩანს, გაჭიმვა-კუმჭვისას წერტილში დაძაბული მდგომარეობის შესასწავ-

ლად საკმარისია განვიკვეთოთ ნორმალური ძაბვის ცოდნა. წერტილში დაძაბული მდგომარეობის ზოგად თეორიას დეტალურად შევისწავლით მე-8 თავში.

§9. კავშირი დრეკადობის მუდმივებს შორის

განვიხილოთ მყარი სხეულიდან ამოკვეთილი მცირე მართკუთხა ელემენტი. რომელიც ერთი მიმართულებით განიცდის გაჭიმვას, ხოლო მეორე, მართობი მიმართულებით – კუმშვას (ნახ. 2.9ა). ასეთ დაძაბულ მდგომარეობას ორღერძა დაძაბული მდგომარეობა ეწოდება. გამოვიყენოთ ძალთა მოქმედების დამოუკიდებლობის პრინციპი და წარმოვადგინოთ ელემენტის დაძაბული მდგომარეობა ჩვენს მიერ უკვე შესწავლილი ერთღერძა ორი დაძაბული მდგომარეობის სახით (ნახ.2.9 ა,ბ,გ).



დამხმარე ელემენტებისათვის (1.10)-ის და (1.11)-ის საშუალებით, განვსაზღვროთ დეფორმაციები ε_z და ε_x ღერძების მიმართულებით. პირველი დამხმარე ელემენტისათვის (ნახ.2.9 ბ) ვადაგენთ

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma}{E}, \quad \varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma}{E}. \quad (2.26)$$

მეორე დამხმარე ელემენტისათვის (ნახ.2.9.გ) ანალოგიურად მივიღებთ

$$\varepsilon_x = \mu \frac{\sigma}{E}, \quad \varepsilon_z = -\frac{\sigma}{E}. \quad (2.27)$$

ამოკვეთით ყოველი დამხმარე ელემენტიდან ახალი მართკუთხა ელემენტი, რომლის წახნაგები დახრილია საწყისი ელემენტის წახნაგების მიმართ 45° -ით (ნახ. 2.10ბ და ნახ. 2.10გ).

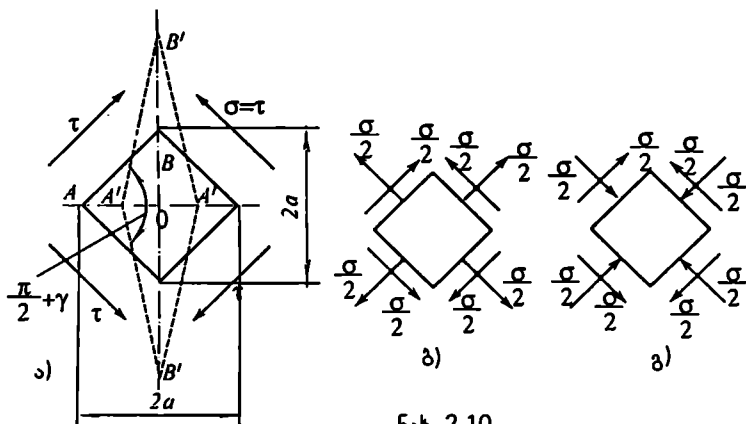
ამ ელემენტების წახნაგებზე მოქმედ ძაბვებს ვადაგენთ (2.23)-ის საშუალებით. შემდეგ ვაჩამებთ ორი ელემენტის ყოველ წახნაგზე მოქმედ ძაბვებს, რის შედეგადაც ვიღებთ საერთო დაძაბულ მდგომარეობას (ნახ. 2.10ა). აღნიშნული

ელემენტის წახნაგებზე მოქმედებს მხოლოდ ერთმანეთის ტოლი მხები ძაბვები. ასეთ დაძაბულ მდგომარეობას ვუწოდოთ სუფთა ძვრა.

ამრიგად, ურთიერთმართობ წახნაგებზე წარმოიქმნება ტოლი მხები ძაბვები, რომლებიც მიმართულია საერთო წიბოსაკენ, ან მისი საწინააღმდეგო მიმართულებით. შედეგი გამოხატავს მხები ძაბვის წვეილადობის კანონს, რომელსაც ზოგადი სახის დეფორმაციისათვის შემდგომში ჩამოვაყალიბებთ. 2.10ა ნახაზიდან მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობას

$$\frac{OB'}{OA'} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} \approx \frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}}. \quad (2.28)$$

ამ შემთხვევაში გავითვალისწინეთ ის გარემოება, რომ ვიხილავთ მცირე დეფორმაციებს, ამიტომ $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}$. ელემენტის საერთო დეფორმაციებს ვაღვანთ



ნახ. 2.10

(2.26)-ის და (2.27)-ის შესაბამისი მიმართულების დეფორმაციების შეკამებით

$$\epsilon_z = (1 + \mu) \frac{\sigma}{E}, \quad \epsilon_x = -(1 + \mu) \frac{\sigma}{E}.$$

ამ შედეგების საშუალებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ AA' და BB'

$$AA' = -a(1 + \mu) \frac{\sigma}{E}, \quad BB' = a(1 + \mu) \frac{\sigma}{E}.$$

განვსაზღვროთ OB' და OA' :

$$OB' = a + a(1 + \mu) \frac{\sigma}{E}; \quad OA' = a - a(1 + \mu) \frac{\sigma}{E}.$$

ამ შედეგების (2.28)-ში გათვალისწინებით მივიღებთ თანაფარდობას

$$\frac{1 + (1 + \mu) \frac{\sigma}{E}}{1 - (1 + \mu) \frac{\sigma}{E}} = \frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}}$$

შესაბამისი წევრების შედარების შედეგად ვაღგენთ შემდეგ ტოლობას:

$$\frac{\gamma}{2} = (1 + \mu) \frac{\sigma}{E}.$$

ვინაიდან მოცემული დაძაბული მდგომარეობისათვის $\sigma = \tau$, ეს ტოლობა გადაიწერება შემდეგი სახით

$$\gamma = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (2.29)$$

მაშინ ჰუკის კანონი სუფთა ძვრისთვის ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau, \quad (2.30)$$

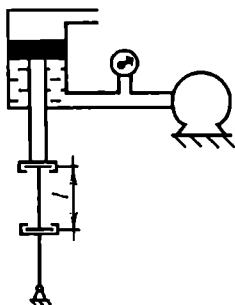
სადაც G მეორე რიგის დრეკადობის მოდულია.

ამრიგად, დრეკადი იზოტროპული მასალისათვის შემოვიღეთ დრეკადობის მახასიათებელი სამი მუდმივი: E , G და μ . მათგან მხოლოდ ორია დამოუკიდებელი, რადგან, თუ ნებისმიერი ორი მუდმივის მნიშვნელობა ცნობილია, მესამე განისაზღვრება (2.29)-ის საშუალებით.

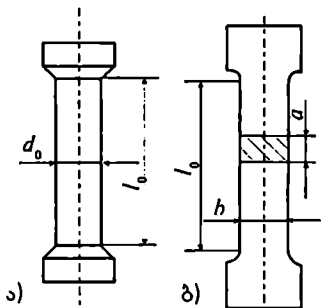
§10. მასალების გამოცდა გაჭიმვა-კუმშვაზე

კონსტრუქციის ელემენტების გაანგარიშებისას საჭიროა ვიცოდეთ მასალების დრეკადობის, პლასტიკურობისა და სიმტკიცის მახასიათებლები. დრეკადობის პირველი და მეორე რიგის E და G მოდულები და პუასონის μ კოეფიციენტი ჩვენს მიერ გამოყენებულ იქნა ჰუკის კანონის ჩამოსაყალიბებლად და გრძივი და განივი ხაზოვანი დეფორმაციების ერთმანეთთან დასაკავშირებლად. ისინი განისაზღვრებიან ექსპერიმენტალურად სპეციალურ მანქანაზე. ერთ-ერთი ასეთი მანქანის

სქემა ნაჩვენებია 2.11 ნახაზზე. ტუმბოს საშუალებით ცილინდრში შექმნილი წნევის გამო დგუში იწყებს მოძრაობას ქვემოდან ზემოთ. გამოსაცდელ ნიმუშს ძალა გადაეცემა საწვეის მეშვეობით, რის შედეგადაც ნიმუში განიცდის გაჭიმვას. ნიმუშის Δl წაგრძელებისა და მისი გამომწვევი P ძალის გასაზომად მანქანას გააჩნია სპეციალური მოწყობილობები. ზოგადად, ძალასა და გადაადგილებას შორის $P=f(\Delta l)$ დამოკიდებულების გრაფიკი ჩაიწერება ავტომატურად. ასეთ გრაფიკს ნიმუშის გაჭიმვის (კუმშვის) დიაგრამა ეწოდება.

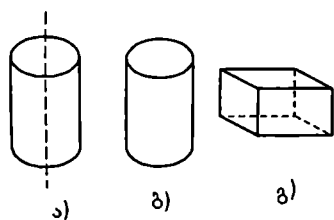


ნახ. 2.11

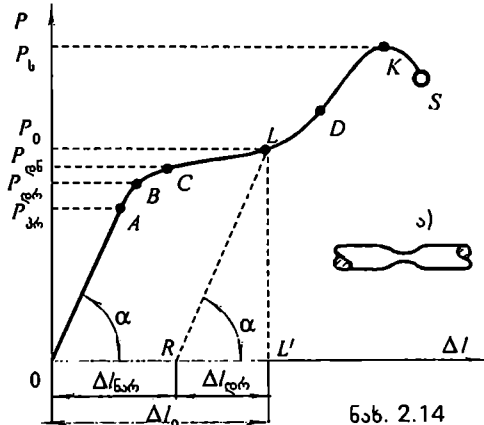


ნახ. 2.12

გაჭიმვაზე მასალის გამოსაცდელად გამოიყენება სპეციალური წრიული ან მართკუთხა განივკვეთიანი ნიმუშები (ნახ.2.12). ნიმუშის სამუშაო l_0 სიგრძე, რომელზედაც ექსპერიმენტის დროს ხდება დაკვირვება, აიღება ნიმუშის დიამეტრთან შედარებით 5-15-ჯერ მეტი. მართკუთხა განივი კვეთის შემთხვევაში ნიმუშის სამუშაო სიგრძის მახასიათებლად აიღება ტოლდიდი წრიული ნიმუშის d დიამეტრი.



ნახ. 2.13



ნახ. 2.14

მასალის კუმშვაზე გამოსაცდელად გამოიყენება მოკლე ცილინდრული ნიმუშები, რომელთა სიმაღლე ორჯერ აღემატება განივი კვეთის დიამეტრს (ნახ.2.13).

განვიხილოთ ფოლადის ნიმუშის გაჭიმვის ტიპური დიაგრამა (ნახ. 2.14). თვალსაჩინოებისათვის აღნიშნულ დიაგრამაზე მასშტაბი დაცული არ არის. დიაგრამის საწყის OA უბანს, რომელსაც ეწოდება *პროპორციულობის უბანი*, შეესაბამება P ძალის სიდიდის ცვლილების საზღვრები $0 \leq P \leq P_{\text{პ}}$; მასალა ემორჩილება ჰუკის კანონს და ნიმუშის წაგრძელება $\Delta l = (P/l)E$. ძალის სიდიდე ($P_{\text{პ}}$), სანამდეც სამართლიანია ჰუკის კანონი, დამოკიდებულია ნიმუშის ზომებსა და მასალის ფიზიკურ თვისებებზე.

ექსპერიმენტულად დადგენილია, თუ ნიმუშზე მოდებული ძალა არ აღემატება $P_{\text{პ}}$ -ს, განტვირთვის შემდეგ ნიმუში აღიდგენს საწყის სიგრძეს. ამიტომ დიაგრამის OB ნაწილს *დრეკადობის უბანი* ეწოდება. ნახშირბადმცირე ფოლადებისათვის, როგორც წესი, A და B წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა.

ძალის ზრდის შედეგად ვალწევთ დიაგრამის C წერტილს, რომელიც შეესაბამება ძალის ისეთ მნიშვნელობას, როცა ნიმუშის წაგრძელება ხდება თითქმის უცვლელი ძალის პირობებში. ასეთ მოვლენას დენადობა (ან პლასტიკურობა) ეწოდება. მას შეესაბამება დიაგრამის CD მონაკვეთი. ამ მონაკვეთის გავლის შემდეგ ნიმუში აღიდგენს დეფორმაციისადმი წინააღმდეგობის უნარს. წაგრძელების ზრდას დიაგრამის K წერტილამდე შეესაბამება ძალის ზრდა. DK უბანს ეწოდება განმტკიცების უბანი. დიაგრამის ექსტრემალურ K წერტილში ნიმუში საბოლოოდ კარგავს წინააღმდეგობის უნარს, ძალა მცირდება და N წერტილში ხდება ნიმუშის დამსხვრევა. ძალის ეს შემცირება წაგრძელების ზრდის პირობებში განპირობებულია ნიმუშის უსუსტეს არეში მისი განივი კვეთების ფართობების შემცირებით (ნახ. 2.14, ა).

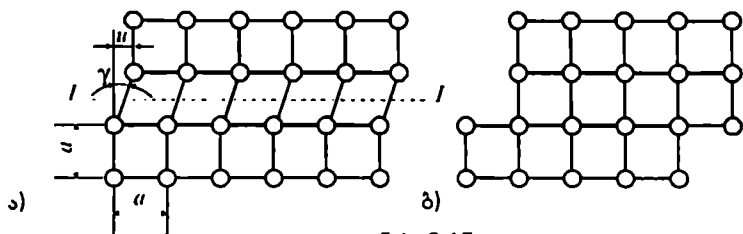
განვიხილოთ ნიმუშის ისეთი დატვირთვა, რომელიც შეესაბამება დიაგრამის BK ზონის ნებისმიერ L წერტილს. ამ წერტილში ნიმუშის მდგომარეობა ხასიათდება ნორმალური P_0 ძალით და Δl_0 წაგრძელებით. ნიმუშის განტვირთვის პროცესში ძალის შემცირებას მოჰყვება წაგრძელებების წრფივი კანონით შემცირება. ექსპერიმენტები გვიჩვენებს, რომ განტვირთვის RL წრფე საწყისი უბნის OA წრფის პარალელურია. განტვირთვისას (ძალის ნულამდე შემცირებისას) დეფორმაციები მთლიანად არ ქრება, არამედ მცირდება სრული წაგრძელების დრეკადი ნაწილის ტოლი სიდიდით (მონაკვეთი RL' , ნახ. 2.14) და ნიმუშის წაგრძელება $\Delta l_{\text{ნაკ}}$ -ის ტოლია (მონაკვეთი OR , ნახ. 2.14), რომელსაც, აგრეთვე, უწოდებენ პლასტიკურ წაგრძელებას, ხოლო მის შესაბამის დეფორმაციას – პლასტიკურ დეფორმაციას. ამდენად, დიაგრამის L წერტილის შესაბამისი მთლიანი Δl_0 წაგრძელება შედგება ორი ხაწილისაგან – ნარჩენი ($\Delta l_{\text{ნაკ}}$) და დრეკადი ($\Delta l_{\text{დრ}}$) წაგრძელებებისაგან

$$\Delta l_0 = \Delta l_{\text{ნაკ}} + \Delta l_{\text{დრ}} \quad (2.31)$$

ნიმუშის განმეორებით დატვირთვისას დამოკიდებულება ძალასა და წაგრძელებას შორის გამოიხატება $RLKS$ მრუდით, რაც ნიშნავს, რომ ნიმუშის წინასწარი დატვირთვისა და განტვირთვის შედეგად მისი დრეკადობის თვისებები იზრ-

დება, პლასტიკურობისა კი, პირიქით, მცირდება. ამიტომ, ზოგჯერ, მანქანათმშენებლობაში დეტალების ხელოვნურად წინასწარი გაჭიმვა და მათში პლასტიკური დეფორმაციის წარმოქმნა გამოიყენება, როგორც ტექნოლოგიური ოპერაცია, ამ დეტალების ექსპლუატაციისას ნარჩენი წაგრძელებების გამოსარიცხად.

ექსპერიმენტების შედეგად მიღებული ნიმუშის დეფორმაციის სურათი გამოსახავს მასალის შიგა სტრუქტურის თავისებურებას. კერძოდ, მანქანათმშენებლობაში გამოყენებული ლითონები წარმოადგენს პოლიკრისტალურ სტრუქტურას, ე. ი. შედგება მრავალი მცირე ზომის მოუწესრიგებლად განლაგებული კრისტალისაგან. კრისტალებში ატომები კონკრეტული მასალისათვის დამახასიათებელი კანონზომიერებითაა განლაგებული და შეადგენს სწორ სივრცით გისოსს. ატომებს შორის მოქმედებს ურთიერთქმედების ძალები, რომელთა მნიშვნელობა დამოკიდებულია მათ შორის მანძილზე. სხეულზე გარე ძალების მოქმედება იწვევს ატომებს შორის მანძილის შეცვლას, რასაც მოჰყვება ატომთა შორის ურთიერთქმედების ძალების ცვლილება. შედეგად, იცვლება თვით სხეულის ფორმა და ზომები. თუ ატომებს შორის მანძილის ცვლილება არ აღემატება გარკვეულ ზღვარს, ნიმუშის ზომების შეცვლა და გარე ძალები (რომლებიც გაწონასწორებულია შიგა ძალებით), ერთმანეთთან დაკავშირებულია ჰუკის კანონით. ასეთ შემთხვევაში, გარე ძალების მოხსნის შემდეგ ატომები უბრუნდება პირვანდელ მდგომარეობას და ნიმუში აღიდგენს საწყის ზომებსა და ფორმას. კრისტალის ფარგლებში პლასტიკური დეფორმაციები წარმოიქმნება კრისტალის ერთი ნაწილის მეორის მიმართ რომელიმე, მაგალითად, $1/1$ სიბრტყეში გისოსების ელემენტების მთელ რიცხვზე გადაადგილებისას (ნახ.2.15). ასეთი დეფორმაციის



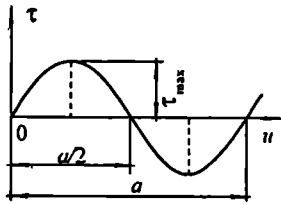
ნახ. 2.15

შედეგად ყოველი გადაადგილებული ატომი იკავებს გისოსში შემდეგ მდებარე ატომის ადგილს. ამრიგად, კრისტალი ფორმას იცვლის, მაგრამ ინარჩუნებს თვისებებს.

შევაფასოთ ძაბვების მნიშვნელობა, რომლებსაც შეუძლია გამოიწვიოს პლასტიკური დეფორმაციები. სანამ μ გადაადგილება მცირეა ორ მეზობელ ატომს შორის მანძილის ნახევარზე, ანუ $(a/2)$ -ზე, შეჭიდულობის ძალები ეწინააღმდეგება გადაადგილებას, ხოლო შემდეგ, პირიქით, ხელს უწყობს მას. ამიტომ კრისტალის დეფორმაციის გამომწვევი ძაბვები იცვლება პერიოდული კანონით (ნახ.2.16)

$$\tau = \tau_{\max} \sin \frac{2\pi u}{a}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ კუთხური დეფორმაცია მცირე სიდიდეა, მაშინ $\gamma = (u/a)$ (ნახ. 2.15 ა) და მხები ძაბვების ფორმულა მიიღებს სახეს



ნახ. 2.16

$$\tau = \tau_{\max} \sin 2\pi\gamma \approx \tau_{\max} 2\pi\gamma.$$

რადგან $\tau = G\gamma$, მაქსიმალური ძაბვის მნიშვნელობა

$$\tau_{\max} = \frac{G}{2\pi}.$$

ნიმუშის გაჭიმვისას მაქსიმალური მხები ძაბვა წარმოიქმნება ღერძის მიმართ 45° -ით დახრილ კვეთში და სიდიდით $(\sigma/2)$ -ის ტოლია. თუ (2.29)-ში დავუშვებთ, რომ $\mu = 0,25$, მივიღებთ მაქსიმალური ნორმალური ძაბვის მნიშვნელობას, რომელიც განსაზღვრავს ნიმუშში პლასტიკური დეფორმაციების შესაძლებლობას $\sigma_{\max} \approx 0,13E$.

თეორიულად მიღებული ეს შეფასება რეალობას არ შეესაბამება. მანქანათმშენებლობაში გამოყენებული მასალებისათვის (კერძოდ, ლითონებისათვის), პლასტიკური დეფორმაციების განმსაზღვრელი ძაბვა რამდენიმე ასეულჯერ მცირეა პირველი რიგის დრეკადობის მოდულთან შედარებით. ეს შეუსაბამობა ადვილად აიხსნება: 2.15 ნახაზზე კრისტალური გისოსი განხილვისას ჩავთვალოთ იდეალურად და ყოველ ატომს მიეუჩინეთ თეორიით განსაზღვრული ადგილი, ხოლო პლასტიკურობის შესაძლებლობა განვსაზღვრეთ $1/1$ სიბრტყის მიმართულებით ყველა ატომის ერთდროული გადაადგილებით. სინამდვილეში, რეალურ მასალებში, სურათი გაცილებით უფრო რთულია და ატომების მეზობელ მდგომარეობაში გადასვლა ხდება მასალაში ადგილობრივი სტრუქტურული ხარვეზების ხარჯზე, რომლებიც შემდგომ ტალღისებურად ვრცელდება. ასეთი ადგილობრივი ხასიათის სტრუქტურის დამახინჯებას დისლოკაცია ეწოდება.

ატომების გადასვლას მეზობელ მდგომარეობაში თან ერთვის დინამიკური ეფექტები - ისინი იწვებენ რხევას წონასწორობის ახალი მდგომარეობის მიდამოში, რის გამოც პლასტიკურ დეფორმაციებს, როგორც წესი, თან ერთვის სიბოხის გამოყოფა.

რეალურ მასალებში, საწყის დაუტვირთავ მდგომარეობაშიც კი, ყოველთვის არის სტრუქტურის ტექნოლოგიური დამახინჯებები. სწორედ მათ მიდამოებში იწვება პირველი პლასტიკური დეფორმაციები მოდებული ძალების შედარებით მცირე მნიშვნელობებისათვის. მაგრამ ასეთი არეები ვერ ცვლის საერთო სურათს და დატვირთვის პროცესის დასაწყისში დამოკიდებულება ძალებსა და გადაადგილებებს შორის წრფივია.

შედარებით დიდი ძალების მოქმედებისას პლასტიკური დეფორმაციები მნიშვნელოვან როლს ასრულებს და უმეტესად, მიმდინარეობს კრისტალების უსუსტეს სიბრტყეებში. ეს პროცესები უფრო ინტენსიურია, თუ ეს სიბრტყეები და მაქსიმალური მხები ძაბვების მოქმედების მიმართულებები ერთმანეთს ემთხვევა.

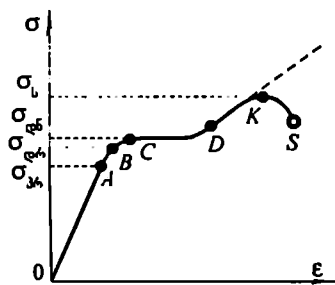
ამიტომ, ხშირად, გაჭიმული ნიმუშის ზედაპირზე პლასტიკური დეფორმაციების შედეგად წარმოიქმნება 45° -ით დახრილი ხაზები. ამ ხაზებს დაცურების ხაზები ეწოდება.

§11. მასალის ძირითადი მექანიკური მახასიათებლები

ნიმუშის გამოცდის შედეგად აგებული დიაგრამა (ნახ.2.14) დამოკიდებულია არა მარტო მასალის თვისებებზე, არამედ თვით ნიმუშის ზომებზე, ამიტომ მას ნიმუშის გაჭიმვის დიაგრამას უწოდებენ.

მასალის თვისების შესასწავლად აგებენ ახალ დიაგრამას, რისთვისაც მოქმედი ძალის და ნიმუშის წაგრძელების ნაცვლად განიხილავენ დამოკიდებულებას ნორმალურ ძაბვებსა და ხაზოვან დეფორმაციებს შორის

$$\sigma = \frac{P}{F_0}, \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2.32)$$



ნახ. 2.17

სადაც F_0 და l_0 ნიმუშის განივი კვეთის ფართობი და საშუალო სიგრძეა საწყის მდგომარეობაში. ასეთნაირად აგებული დიაგრამა, რომელსაც მასალის დიაგრამა ეწოდება (ნახ.2.17), 2.14 ნახაზზე მოცემული დიაგრამისაგან მხოლოდ კოორდინატთა ღერძებზე აღებული მასშტაბებით განსხვავდება.

იმ მაქსიმალურ $\sigma_{პლ}$ ძაბვას, სანამდეც მასალა ემორჩილება პუკის კანონს, პროპორციულობის ზღვარი ეწოდება

$$\sigma_{პლ} = \frac{P_{პლ}}{F_0}. \quad (2.33)$$

დიაგრამის მეორე დამახასიათებელი B წერტილი შეესაბამება დრეკადობის ზღვარს, ანუ ისეთ მაქსიმალურ ძაბვას, რომლის ფარგლებში $0 \leq \sigma \leq \sigma_{ღრ}$ ნიმუშის დეფორმაცია დრეკადია და დატვირთვის მოხსნის შემდეგ იგი მთლიანად აღიდგენს საწყის ფორმასა და ზომებს. დრეკადობის ზღვარი განისაზღვრება ფორმულით

$$\sigma_{ღრ} = \frac{P_{ღრ}}{F_0}. \quad (2.34)$$

ისევე, როგორც შესაბამისი ძალები, პროპორციულობის ზღვარი და დრეკადობის ზღვარი ნახშირბადმცირე ფოლადებისათვის ხშირ შემთხვევაში ერთი და იმავე სიდიდისაა.

ძაბვის ისეთ მნიშვნელობას, რომელსაც შეესაბამება დეფორმაციების ზრდა პრაქტიკულად უცვლელი გარე ძალის მოქმედების პირობებში, დენადობის ზღვარი ეწოდება

$$\sigma_{დნ} = \frac{P_{დნ}}{F_0} \quad (2.35)$$

მაქსიმალურ ძაბვას, რომელსაც ადგილი აქვს ნიმუშის გამოცდის პროცესში, სიმტკიცის ზღვარი ეწოდება. ამ სიდიდის განსაზღვრისათვის გამოიყენება ფორმულა

$$\sigma_{ს} = \frac{P_{ს}}{F_0} \quad (2.36)$$

პროპორციულობის ზღვარის განსაზღვრა გარკვეულ სირთულეებთანაა დაკავშირებული. როგორც აღინიშნა, ხშირად მასალაში არსებული დეფექტები განაპირობებს პლასტიკურ დეფორმაციებს შედარებით მცირე ძაბვებისათვის. ამ სიდიდის დასადგენად ყოველი დამატებითი დატვირთვის შემდეგ ნიმუში უნდა განვტვირთოთ და შევამოწმოთ, წარმოიქმნა თუ არა ნარჩენი დეფორმაციები. პრაქტიკულად, დრეკადობის ზღვარს განვსაზღვრავთ ნარჩენი დეფორმაციებისათვის: $\epsilon_{ნარ} = (1 \div 5) 10^{-5}$. ამ შემთხვევაში, დრეკადობის ზღვარი აღინიშნება $\sigma_{0,001}$ -ით ან $\sigma_{0,005}$ -ით.

ისეთი ტექნოლოგიური პროცესების გაანგარიშებისას, როგორცაა გლინვა, ჰედვა, ტვიფრა და სხვ., დიდი მნიშვნელობა აქვს მასალის პლასტიკურ თვისებებს. ერთ-ერთი ასეთი თვისების მახასიათებელია ნიმუშის გრძივი ნარჩენი დეფორმაცია გაწვევების წინ

$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} 100\% \quad (2.37)$$

სადაც l_1 არის ნიმუშის სიგრძე გაწვევების შემდეგ, l_0 - ნიმუშის საწყისი სიგრძე.

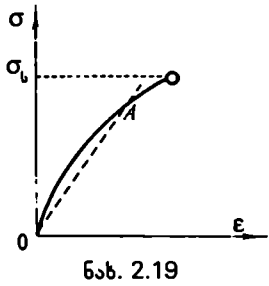
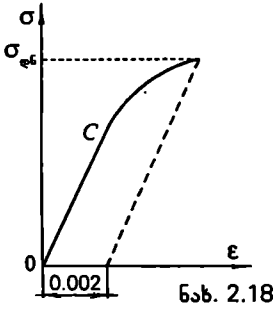
მასალის პლასტიკურობის მეორე მახასიათებელია ნიმუშის გაწვევების ადგილზე განივი კვეთის ფართობის ფარდობითი შემცირება

$$\psi = \frac{F_0 - F_1}{F_0} 100\% \quad (2.38)$$

სადაც F_0 და F_1 განივი კვეთის ფართობებია ნიმუშის საწყის მდგომარეობასა და გაწვევების ადგილზე გაწვევების შემდეგ. პრაქტიკაში გვხვდება პლასტიკური მასალები, რომელთა გაჭიმვის დიაგრამები მკვეთრად განსხვავდება 2.17 ნახაზზე გამოსახული დიაგრამისაგან. მაგალითად, სპილენძი, ბრინჯაო, ტყვია და სხვ. ასეთი მასალებისთვის დენადობის უბანი არ არის ნათლად გამოხატული და დენადობის ზღვარის დადგენა, გარკვეული თვალსაზრისით, პირობით ხასიათს

ატარებს. იგი განისაზღვრება როგორც ძაბვა, რომელსაც შეესაბამება ნარჩენი დეფორმაცია 0,002 ან 0,2% (ნახ.2.18). ამ შემთხვევაში, დენადობის ზღვარი აღინიშნება $\sigma_{0.2}$ -ით.

მყიფე მასალების გაჭიმვის დიაგრამა მკვეთრად განსხვავდება 2.17 ნახაზზე გამოსახული დიაგრამისაგან. საერთოდ, ასეთი მასალებისთვის (თუჩი, ბეტონი, მინა, ქვა და სხვ.) დამახასიათებელია მცირე დეფორმაციები. მცირე ძაბვების შემთხვევაშიც მყიფე მასალის დიაგრამას ხშირად მრუდხაზოვანი ფორმა აქვს, ე. ი. ჰუკის კანონი საერთოდ არ სრულდება. მაგრამ გაანგარიშებების გამართივების მიზნით, ხშირად საწყის უბანს (ნახ.2.19) გამოსახავენ სწორი ხაზით და გამოიყენებენ ჰუკის კანონს, რაც, როგორც წესი, იძლევა პრაქტიკულად მისაღები სიზუსტის შედეგებს.



ძაბვებისა და ხაზოვანი დეფორმაციების განსაზღვრისას არ არის გათვალისწინებული ნიმუშის დატვირთვის პროცესში კვეთის ფართობისა და სიგრძის ცვლილებები. აღნიშნულის გამო, 2.17 ნახაზზე წარმოდგენილ დიაგრამას პირობითი დიაგრამა ეწოდება. კვეთის ფართობისა და სიგრძის ცვლილებათა გათვალისწინებით აიგება მასალის ნამდვილი დიაგრამა. ნიმუშის განივი კვეთის ფართობი და სიგრძე მნიშვნელოვნად იცვლება მხოლოდ დიდი დეფორმაციების დროს. ამიტომ პირობითი და ნამდვილი დიაგრამები OBD უბანზე პრაქტიკულად ემთხვევა ერთმანეთს. ამ უბნის შემდეგ, 2.17 ნახაზზე ნამდვილი დიაგრამა წარმოდგენილია წყვეტილი მრუდით. პლასტიკური მასალებისთვის კუმშვის და გაჭიმვის დიაგრამები OAD უბანზე (ნახ.2.17) თითქმის ერთნაირია. შემდგომი კუმშვის პირობებში კვეთის ფართობი საგრძნობლად იზრდება, რის გამოც დიაგრამები განსხვავდება ერთმანეთისგან. აღსანიშნავია, რომ პლასტიკური მასალებისთვის რღვევას ადგილი არა აქვს.

მყიფე მასალებისთვის კუმშვის დიაგრამა, როგორც წესი, გაჭიმვის დიაგრამისაგან ფორმით თითქმის არ განსხვავდება. თუმცა, ხშირად ასეთი მასალები კუმშვაზე უკეთ მუშაობს, ვიდრე გაჭიმვაზე, რაც ძირითადი მექანიკური მახასიათებლების სხვაობით აიხსნება. კერძოდ, ასეთი მასალებისთვის სიმტკიცის ზღვარის მნიშვნელობა კუმშვაზე σ_{κ} აღემატება სიმტკიცის მნიშვნელობას σ_{κ} გაჭიმვაზე.

მაგალითად, თუ თუჩისათვის გვაქვს თანაფარდობა, $\sigma_{\Sigma} = (0,2+0,4)\sigma_{\Sigma_j}$, კერამიკული მასალებისათვის $\sigma_{\Sigma} = (0,1+0,2)\sigma_{\Sigma_j}$.

გვხვდება მასალები, რომლებიც უკეთ მუშაობს გაჭიმვაზე, ვიდრე კუმშვაზე. ასეთ მასალებს მიეკუთვნება ხე და ზოგიერთი სახის პლასტმასა.

როგორც 2.1 ცხრილიდანაც ჩანს, ზოგიერთი მასალისათვის პროპორციულობის ზღვრები გაჭიმვასა ($\sigma_{\Sigma_{კ}}$) და კუმშვაზე ($\sigma_{\Sigma_{კ}}$) – განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

ცხრილი 2.1

მასალა	დენადობის ზღვარი, მგპა		სიმტკიცის ზღვარი, მგპა		დრეკადობის მოდული $E \times 10^5$ მგპა
	გაჭიმვაზე	კუმშვაზე	გაჭიმვაზე	კუმშვაზე	
	$\sigma_{\Sigma_{კ}}$	$\sigma_{\Sigma_{კ}}$	$\sigma_{\Sigma_{კ}}$	$\sigma_{\Sigma_{კ}}$	
ფოლადი ნახშირბადმცირე	250	250	390	-	2,0
ფოლადი 30 უწრთობი	330	330	530	-	2,0
ფოლადი 45 უწრთობი	370	370	620	-	2,0
ფოლადი Y8 უწრთობი	250	430	630	-	2,0
ფოლადი Y8 ნაწრთობი	700	700	1100	-	2,0
ფოლადი 30XГC ნაწრთობი	1400	1400	1620	-	2,0
ფოლადი 40XHB ნაწრთობი	1720	2100	2050	-	2,0
თუჩი C428	140	310	150	640	0,7
გამომწვარი სპილენძი	55	55	220	-	1,1
ღეროვანი სპილენძი	250	250	320	-	1,1
თითბერი	330	330	450	-	1,1
ბრინჯაო	110	110	140	-	1,2
ალუმინი	50	50	84	-	0,7
დურალუმინი	340	340	540	-	0,75

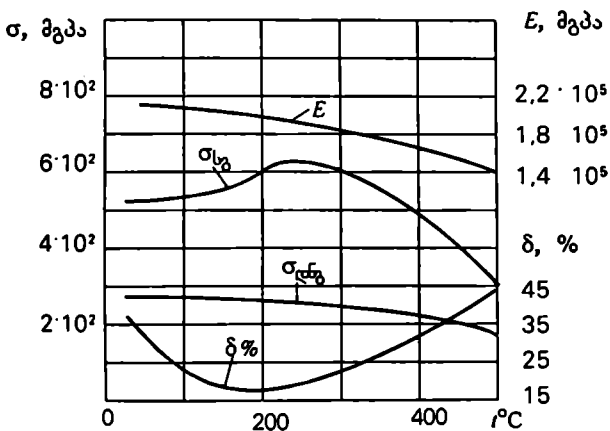
§12. სხვადასხვა ფაქტორის გავლენა მასალის მექანიკურ მახასიათებლებზე

საყოველთაოდ ცნობილია, რომ მასალების თვისებები დამოკიდებულია ტემპერატურაზე. ჭერ კიდევ უძველეს დროში ადამიანი სამუშაო ან საბრძოლო იარაღების შექმნას უკავშირებდა ლითონის გაცხელებასა და ჭედვით დამუშავებას. კონსტრუქციული მასალების თვისებებზე გავლენას ახდენს მრავალი სხვა ფაქტორიც. მაგალითად, ნიმუშზე მოდებული ძალის ცვლილებების სიჩქარე. §§10,11-ში განხილული შედეგები ითვალისწინებდა მასალის გამოცდას ნორმალური ტემპ-

პერატურისა (20°C) და დეფორმაციის ზრდის შედარებით მცირე სიჩქარის პირობებში

$$\frac{d\epsilon}{dt} = (0,01 \div 3) \frac{1}{წთ}$$

თანამედროვე კონსტრუქციებს მუშაობა უხდება გაცილებით უფრო რთულ და ძნელ პირობებშიც. მაგალითად, სხვადასხვა სახის სამეცნიერო ტექნიკის შექმნისათვის აუცილებელია, ერთი მხრივ, მასალების საიმედო მუშაობის უზრუნველყოფა დაბალი ტემპერატურების პირობებში, ხოლო მეორე მხრივ, მასალების თვისებების ცოდნა მაღალი ტემპერატურების მოქმედებისას (სითბოს გამოყენების პრინციპზე შექმნილი ლუმენები, კოსმოსური ხომალდის კონსტრუქციები, რომლებიც დედამიწის ატმოსფეროში შემოსვლისას განიცდის მკვეთრ გახურებას და სხვ). კონსტრუქციის ელემენტებზე დასახელებული ფაქტორების ზემოქმედების კომპლექსური შესწავლა რთულია. აღსანიშნავია ის გარემოებაც, რომ ეს ფაქტორები კონსტრუქციული მასალების მექანიკურ მახასიათებლებზე ერთი და იმავე სახის გავლენას არ ახდენენ. მაგალითისთვის 2.20 ნახაზზე ნაჩვენებია ნახშირბადმცირე ფოლადის მახასიათებლების დამოკიდებულება ტემპერატურაზე. გრაფიკები გვიჩვენებს, რომ 300°C-მდე პირველი რიგის დრეკადობის მოდული პრაქტიკულად არ იცვლება. შემდეგ კი - მცირდება. რაც შეეხება მასალის პლასტიკურობის მახასიათებელს, მისი სიდიდე მნიშვნელოვნად მცირდება დაახლოებით 250°C-მდე. ტემპერატურის შემდგომი ზრდა არა მარტო აღადგენს მასალის პლასტიკურ თვისებებს, არამედ ზრდის კიდევც მათ.



ნახ. 2.20

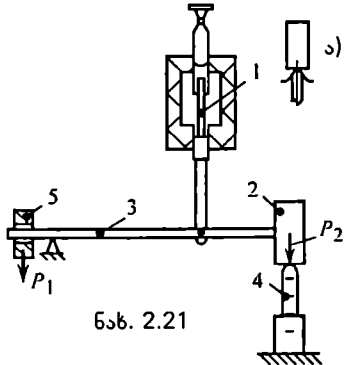
სიმტკიცის ზღვარი 250°C ტემპერატურამდე იზრდება. შემდეგ კი მკვეთრად მცირდება. რაც შეეხება დენადობის ზღვარს, ტემპერატურის ზრდისას მისთვის დამახასიათებელია მონოტონური შემცირება.

მახასიათებლების აღწერილი ზოგიერთი არამონოტონური ცვალებადობა დამახასიათებელია მხოლოდ ნახშირბადმცირე ფოლადებისათვის. ლეგირებული ფოლადებისათვის პირველი რიგის დრეკადობის მოდული, სიმტკიცისა და დენადობის ზღვრები ტემპერატურის ზრდისას მონოტონურად მცირდება, ხოლო პლასტიკურობის n მახასიათებელი, პირიქით – მონოტონურად იზრდება.

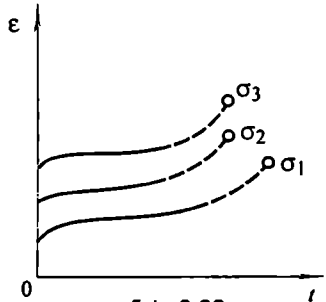
გარკვეულ პირობებში დატვირთულ კონსტრუქციულ მასალებში დროთა განმავლობაში შესაძლებელია ძაბვების და დეფორმაციების ცვალებადობა. ამ მოვლენას ცოცვადობა ეწოდება.

ცოცვადობას ფოლადებში ადგილი აქვს მხოლოდ მაღალი ტემპერატურის პირობებში. მაგრამ ზოგიერთი მასალისათვის (მაგალითად, ბეტონი), ცოცვადობა თავს იჩენს ჩვეულებრივი ტემპერატურის პირობებშიც.

ცოცვადობის ერთ-ერთი კერძო შემთხვევაა მერმექმედება, რომელიც ხასიათდება ხაზოვანი დეფორმაციების შეუქცევადი ზრდით მუდმივი ძაბვების მოქმედებისას. მერმექმედების ექსპერიმენტალური შესწავლა შეიძლება ელექტროლუმენში მოთავსებული ნიმუშის მუდმივი ძალით დატვირთვითა (ნახ. 2.21) და მისი წაგრძელების პერიოდულად გაზომვით. მერმექმედების დიაგრამები ნაჩვენებია 2.22 ნახაზზე.



ნახ. 2.21



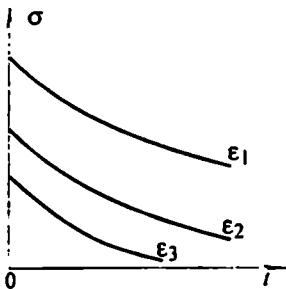
ნახ. 2.22

ცოცვადობის ზღვარი ეწოდება ისეთ ძაბვას, რომლის მოქმედებისას შეუქცევადი ხაზოვანი დეფორმაციები მოცემული დროის მონაკვეთში აღწევენ მოცემულ სიდიდეს.

ამრიგად, ცოცვადობის ზღვრის დასადგენად საჭიროა, წინასწარ განვსაზღვროთ დროის მონაკვეთი, კონსტრუქციის სამუშაო დროის რესურსის და მუშაობის პირობებიდან გამომდინარე.

ცოცვადობის მეორე სახის გამოვლინებაა ე. წ. რელაქსაცია – დროთა განმავლობაში ძაბვების თვითნებური ცვალებადობა დეფორმაციის უცვლელობის პირობებში. რელაქსაციას ხშირად ადგილი აქვს მაღალი ტემპერატურის პირობებში მომუშავე კონსტრუქციებში. ასეთ კონსტრუქციებში ჭანჭიკების მოჭერა ილბობა დროთა განმავლობაში სუსტდება.

რელაქსაციის მოვლენის შესწავლა შეიძლება იმავე დანადგარზე, რომელზე-
დაც შეისწავლება მერმექმედება (ნახ.2.21), ოღონდ, საჭიროა მუდმივი დეფორ-



ნახ. 2.23

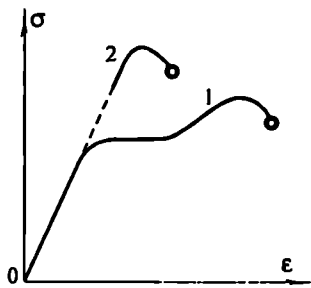
მაციებისა და ცვალებადი ძაბვების პირობების შექ-
მნა. ამ მიზნით, დასაწყისში, მოძრავი ტვირთის 5
საშუალებით ნიმუშში შევქმნით საწყის ძაბვებსა და
საჭირო დეფორმაციას. ამის შემდეგ, გადაადგილე-
ბის გამოშვება 4 და ტვირთს 2 შორის სუსტად ჩავა-
მაგრებთ პერგამენტის ქაღალდს (ნახ.2.21). დროთა
განმავლობაში ნიმუშში ძაბვები შემცირდება და სის-
ტემის წონასწორობის პირობა შეიცვლება. მაგრამ
სისტემა მდგომარეობას არ შეიცვლის, რადგან
ტვირთი 2 ეურდნობა გამოშვს 4 და წარმოიშობა
რეაქციის ძალა. ამის დადგენა შეიძლება ქაღალდის
ჩამაგრების გასინჯვით. ტვირთის 5 გადანაცვლებით

მივალწევთ ქაღალდის ჩამაგრების შესუსტებას, ე. ი. წარმოიშობილი რეაქციის
ძალის გაქრობას. ამ მდგომარეობაში ტვირთი 5 და ნიმუშის გაჯიმვის ძალა ერთ-
მანეთს აწონასწორებს, რაც საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ ნიმუშის ნორმა-
ლური ძალა ახალ მდგომარეობაში. რელაქსაციის გრაფიკები ნაჩვენებია 2.23
ნახაზზე.

*ხანგრძლივი სიმტკიცის ზღვარი ეწოდე-
ბა ძაბვას, რომელსაც შეესაბამება ნიმუშის
დამსხვრევა დროის მოცემულ მონაკვეთში.
ხანგრძლივი სიმტკიცის ზღვარი განისაზ-
ღვრება გამჭიმავი ძალის გაყოფით ნიმუშის
განივ კვეთის საწყის ფართობზე.*

ამრიგად, ხანგრძლივი სიმტკიცე დაკავშირე-
ბულია დროის გარკვეულ მონაკვეთთან. ეს უკა-
ნასკნელი განისაზღვრება კონსტრუქციის მუშაო-
ბის შესაძლებლობის ხანგრძლივობით და შეიძ-
ლება იცვლებოდეს რამდენიმე საათიდან ათობით
წლამდე. დატვირთვის სიჩქარის მნიშვნელობა,
როგორც წესი, მაღალი ტემპერატურის პირობებში უფრო მკვეთრად ვლინდე-
ბა.

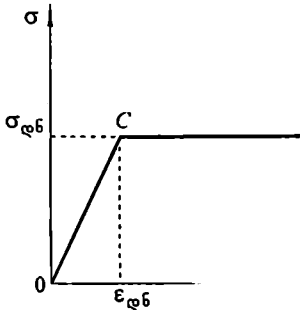
როდესაც ნიმუშის დატვირთვა ხდება მაღალი სიჩქარით, შესაძლებელია პლას-
ტიკურმა დეფორმაციებმა ვერ მოასწოროს გავრცელება. ასეთ პროცესებს თან
სდევს მასალის პლასტიკური თვისებების მახასიათებლების შემცირება და დრეკ-
დობის მახასიათებლების ზრდა, რასაც ადასტურებს 2.24 ნახაზზე წარმოდგენილი
ორი დამოკიდებულება: პირველი და მეორე მრუდეები ნიმუშის გამოცდის შე-
დეგებია, შესაბამისად, დაბალი და მაღალი სიჩქარეებით დატვირთვისას.



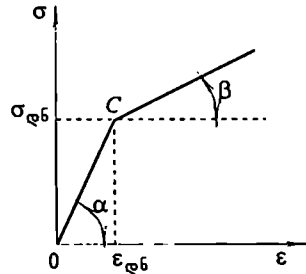
ნახ. 2.24

§13. გაჭიმვა-კუმშვის დიაგრამის სქემატიზაცია

მასალების დიაგრამების შესწავლა გვიჩვენებს, რომ პლასტიკური დეფორმაციების წარმოქმნის შემდეგ ნიმუშს შეუძლია წინააღმდეგობა გაუწიოს მნიშვნელოვანი სიდიდის დამატებითი ძალის მოქმედებას. ხშირ შემთხვევაში, ეს შეიძლება ჩავთვალოთ კონსტრუქციის სიმტკიცის დამატებით რეზერვად და კონსტრუქციის გაანგარიშება მოვანდინოთ პლასტიკური თვისებების გათვალისწინებით. გაანგარიშებისათვის გამოიყენება მასალის დიაგრამის ABC უბანი (ნახ.2.17), რისთვისაც არსებობს სხვადასხვა გზები. კერძოდ, შეიძლება ყველა საჭირო სიდიდე ავიღოთ უშუალოდ გრაფიკიდან და გაანგარიშება მოვანდინოთ გრაფიკულ-ანალიზური ხერხებით.



ნახ. 2.25



ნახ. 2.26

ხშირ შემთხვევაში, სრულყოფილი ანალიზის ჩასატარებლად უფრო მოსახერხებელია დიაგრამის სქემატიზაცია. ამისათვის პლასტიკურობის უბანს წარმოვადგენთ ჰორიზონტალური წრფის სახით და, საბოლოოდ, მივიღებთ 2.25 ნახაზზე ნაჩვენებ სურათს. სქემატიზირებული დიაგრამის C წერტილი შეესაბამება დენადობის ზღვარს. ამ შემთხვევაში, ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის დამოკიდებულება გამოისახება შემდეგნაირად

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_L, \\ \sigma &= \sigma_L, \quad \varepsilon > \varepsilon_L. \end{aligned} \quad (2.39)$$

შედარებით მცირე დეფორმაციების განხილვისას, როდესაც საჭიროა AC უბნის დახრილობის (ნახ.2.14) ასახვა, ანდა, მასალის პლასტიკური ზონა არ არის მკვეთრად გამოხატული, გამოიყენება უფრო ზოგადი სახის სქემატიზაცია (ნახ.2.26).

შუკის კანონის თანახმად, α კუთხე სქემატიზებულ დიაგრამაზე და დრეკადობის პირველი რიგის E მოდული ერთმანეთთან დაკავშირებულია ფორმულით $\tan \alpha = E$. ანალოგიურად შემოაქვთ აღნიშვნა $\tan \beta = E_g$, რომელსაც უწოდებენ *განმტკიცების მოდულს*. აღნიშნულის გათვალისწინებით, კავშირი ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის იღებს სახეს

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_{\text{ღ}}, \quad (2.40)$$

$$\sigma = \sigma_{\text{ღ}} + E_{\text{გ}}(\varepsilon - \varepsilon_{\text{ღ}}), \quad \varepsilon > \varepsilon_{\text{ღ}}.$$

მყიფე მასალებისათვის ჰუკის კანონი ხშირად არ სრულდება. მისი გავიშვების დიაგრამა არაწრფივ ხასიათისაა მცირე სიდიდის ძაბვებისათვისაც კი (ნახ.2.19). ასეთ შემთხვევაში გრაფიკის გაწრფივებას და გაანგარიშებას ახდენენ ჰუკის კანონის საფუძველზე. არსებობს მეორე გზაც, რომელიც ითვალისწინებს დიაგრამის არაწრფივ ხასიათს

$$\varepsilon = \frac{1}{\lambda} \sigma^m. \quad (2.41)$$

ამ ფორმულის გამოყენება, რა თქმა უნდა, ართულებს ამოცანების ამოხსნას, მაგრამ, ზოგჯერ, ამას მნიშვნელობა არა აქვს – შედეგი მაინც საკმაოდ იოლად მიიღება. მაგალითისათვის განვიხილოთ ერთი ბოლოთი ჩამაგრებული ძელი, რომლის თავისუფალ კვეთში მოქმედებს P ძალა (ნახ.2.3) ამ შემთხვევაში, (2.41) არაწრფივი დამოკიდებულება ძაბვებისა და ნორმალური ძალის მნიშვნელობებზე გავლენას არ ახდენს. ამიტომ ადრე მიღებული შედეგები ძალაში რჩება

$$N = P, \quad \sigma = \frac{P}{F}. \quad (2.42)$$

ძელის წაგრძელების მნიშვნელობას დავადგენთ (2.2)-ის საშუალებით, მასში (2.41)-ის გათვალისწინებით

$$u = \int_0^l \frac{1}{\lambda} \sigma^m dz = \int_0^l \frac{1}{\lambda} \left(\frac{P}{F} \right)^m dz = \frac{P^m l}{\lambda F^m}. \quad (2.43)$$

კერძო შემთხვევაში, თუ $m=1$, საქმე გვაქვს ჰუკის კანონთან და მიღებული შედეგი ემთხვევა (2.11)-ს.

§14. კონსტრუქციის გაანგარიშების ზოგადი პრინციპები

სწორი ძელის გავიშვა-კუმშვისათვის მიღებული ფორმულები (§6) საშუალებას გვაძლევს გავანგარიშოთ ნორმალური ძაბვები და გადაადგილებები, მაგრამ ჭერჭერობით ღიად რჩება საკითხი: რამდენად დასაშვებია ეს ძაბვები და გადაადგილებები, შეუძლია თუ არა მოცემულ კონსტრუქციას შეასრულოს თავისი დანიშნულება.

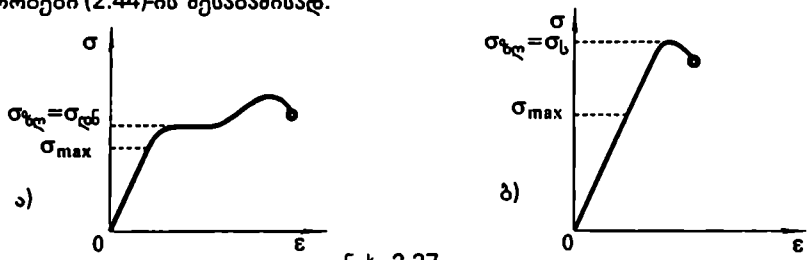
მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობაში ერთ-ერთი ძირითადი საკითხია კონსტრუქციის სიმტკიცეზე გაანგარიშება. ამისათვის საჭიროა, დავადგინოთ კონსტრუქციაში მაქსიმალური ძაბვები და მოვითხოვოთ, რომ ისინი არ აღემატებოდნენ დასაშვები ძაბვის მნიშვნელობას

$$\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma] \quad (2.44)$$

დასაშვები ძაბვის $[\sigma]$ -ს დასადგენად ზღვრული ძაბვის მნიშვნელობა გავყოთ ერთზე მეტ რიცხვზე, რომელსაც ვუწოდებთ სიმტკიცის მარაგის კოეფიციენტს

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{ზღ}}{n} \quad (2.45)$$

ზღვრული ძაბვის დადგენისას ვითვალისწინებთ კონსტრუქციის მასალის თვისებებს. პლასტიკური მასალისათვის ამ ძაბვას ვუტოლებთ დენადობის ზღვარს $\sigma_{ზღ} = \sigma_{დნ}$. თუ მასალის ეს მახასიათებელი გაჭიმვასა და კუმშვაზე განსხვავდება, მაშინ ყოველი მათგანისათვის ვიღებთ ზღვრულ ძაბვას და, შესაბამისად, ვანგარიშობთ ორი განსხვავებული დასაშვები ძაბვის მნიშვნელობას. ასეთ შემთხვევაში, დადგინდება წერტილები, რომლებშიც მოქმედებს მაქსიმალური გამჭიმავი და შემკუმშავი ძაბვები და მათთვის დამოუკიდებლად ჩამოყალიბდება სიმტკიცის პირობები (2.44)-ის შესაბამისად.



ნახ. 2.27

მყიფე მასალებისათვის ზღვრულ ძაბვად ვიღებთ სიმტკიცის ზღვარს, $\sigma_{ზღ} = \sigma_s$. აქაც შეიძლება საჭმე გვექონდეს ისეთ მასალასთან, რომლის სიმტკიცის ზღვრები გაჭიმვასა და კუმშვაზე ერთმანეთისაგან განმსხვავდება. ის, რაც ზემოთ ითქვა პლასტიკური მასალის შესახებ, მყიფე მასალისათვისაც ძალაში რჩება.

კონსტრუქციის სიმტკიცეზე გაანგარიშების მეთოდს (2.44)-ის შესაბამისად ზღვრული ძაბვების მეთოდი ეწოდება. ამ მეთოდის არსი ნაჩვენებია 2.27 ნახაზზე.

მიუხედავად გარკვეული ლოგიკური დაუსაბუთებლობისა, ზღვრული ძაბვების სიმტკიცეზე გაანგარიშების მეთოდი მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობაში ძირითადია. როდესაც კონსტრუქციას ვიხილავთ, არსებითი მნიშვნელობა არ უნდა ჰქონდეს იმას, თუ როგორი სიდიდის ძაბვები წარმოიშობა კონსტრუქციის ამა თუ იმ წერტილში. მთავარია, განვსაზღვროთ რა სიდიდის დატვირთვის გაუძლებს კონსტრუქცია სამუშაო თვისებების დაკარგვის გარეშე. ამიტომ არსებობს სიმტკიცეზე გაანგარიშების ზღვრული დატვირთვის მეთოდი. ამ მეთოდის შესაბამისად, გაიანგარიშება დასაშვები დატვირთვა შემდეგი ფორმულის საშუალებით

$$[P] = \frac{P_{ზღ}}{n} \quad (2.46)$$

სადაც $[P]$, P_{Σ} – შესაბამისად, დასაშვები და ზღვრული დატვირთვებია, n – ზღვრული დატვირთვის შესაბამისი სიმტკიცის მარაგის კოეფიციენტი.

თანამედროვე სამშენებლო ნაგებობებისა და კონსტრუქციების დაპროექტების პრაქტიკაში ასევე გამოიყენება სიმტკიცეზე გაანგარიშების მესამე, ე.წ. ზღვრულ მდგომარეობათა მიხედვით გაანგარიშების მეთოდი. ეს მეთოდი აზუსტებს მარაგის კოეფიციენტს და თვლის მას განსხვავებულად დატვირთვის მუდმივი და დროებითი მდგენელებისათვის, მხედველობაში იღებს, აგრეთვე, კონსტრუქციის მასალის ერთგვაროვნებას, მისი მუშაობის პირობებს ექსპლუატაციის პროცესში და ა. შ. ეს მეთოდი თანამედროვე მანქანათმშენებლობაში იშვიათად გამოიყენება. უნდა აღვნიშნოთ, რომ მანქანათმშენებლობაში კონსტრუქციების გაანგარიშებისას საანგარიშო მოდელის ანალოგიური დაზუსტებები ხორციელდება, გარკვეული თვალსაზრისით, განსხვავებული მიდგომით. ზოგიერთ მათგანზე ვისაუბრებთ, დალილობისა და ბზარის გავრცელების თეორიების განხილვისას.

მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობის მეორე ძირითადი ამოცანაა კონსტრუქციის გაანგარიშება სინისტრეზე. ამისათვის საჭიროა დადგინდეს დასაშვები გადაადგილება

$$[\delta] = \frac{\delta_{\Sigma}}{n}, \quad (2.47)$$

სადაც $[\delta]$, δ_{Σ} – შესაბამისად, დასაშვები და ზღვრული გადაადგილებებია, n – სინისტრის მარაგის კოეფიციენტი. ამის შემდეგ ვადგენთ δ გადაადგილებას, რომელსაც შეუძლია არსებითი ზეგავლენა მოახდინოს კონსტრუქციის მიერ თავისი დანიშნულების შესრულებაზე და ვადარებთ მას დასაშვებ გადაადგილებას

$$\delta \leq [\delta] \quad (2.48)$$

სამივე სახის გაანგარიშებისას მარაგის კოეფიციენტი ერთი და იმავე ასოთი – n -ით აღვნიშნეთ. მაგრამ ყოველი მათგანისათვის ეს კოეფიციენტი დამოუკიდებლად ირჩევა და მხოლოდ ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში შეიძლება მათი მნიშვნელობები ერთმანეთს დაემთხვეს.

მასალების და კონსტრუქციების გამძლეობის ამოცანები არ შემოიფარგლება მხოლოდ ზემოთ მოყვანილი ორი ამოცანით. საკულისძმო ამოცანებს მიეკუთვნება კონსტრუქციების გაანგარიშება მდგრადობაზე, რხევებზე, ცოცვადობაზე და ა. შ.

მარაგის კოეფიციენტის მნიშვნელობა მჭიდროდ არის დაკავშირებული კონსტრუქციის დანიშნულებაზე. რაც უფრო საპასუხისმგებლოა კონსტრუქცია, მით უფრო დიდია მარაგის კოეფიციენტი. მაგალითად, ადამიანების გადასაყვანი ლიფტისათვის მარაგის კოეფიციენტი, როგორც წესი, უფრო დიდი უნდა იყოს, ვიდრე ტვირთის გადასაზიდი ლიფტისათვის.

მარაგის კოეფიციენტის შერჩევაზე გავლენას ახდენს ისიც, თუ რამდენად ერთგვაროვანია მასალა და რა სიზუსტით შეიძლება განისაზღვროს მისი მექანი-

კური თვისებები. აგრეთვე, კონსტრუქციასზე მოქმედი ძალების განსაზღვრის სიზუსტე. საერთოდ, იმ დარგებში, რომლებიც ხასიათდებიან მაღალი ტექნოლოგიური კულტურით, მარაგის კოეფიციენტი უფრო მცირეა. მაგალითად, თვითმფრინავმშენებლობაში, სადაც განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს მსუბუქი კონსტრუქციების შექმნას, საჭიროა დიდი სიზუსტით ანგარიში. აქ მარაგის კოეფიციენტი შედარებით მცირეა $n=1,5-2$. მშენებლობაში კონსტრუქციებისადმი ასეთი მკაცრი მოთხოვნების წაყენება გაუმართლებელია და მარაგის კოეფიციენტის მნიშვნელობა აქ უფრო დიდია: $n=2-5$. რაც შეეხება მანქანათმშენებლობას, მისთვის მარაგის კოეფიციენტის მნიშვნელობა, როგორც წესი, უფრო მცირეა და მისი შერჩევა ხდება უფრო ვიწრო ზღვრებში. ეს, რა თქმა უნდა, არ ნიშნავს იმას, რომ მშენებლობაში არ არის საჭირო გაანგარიშების მეთოდების დაზუსტება და ტექნოლოგიის სრულყოფა. პრობლემა აქაც მწვავედ დგას. საანგარიშო მეთოდების სრულყოფა, გამოყენებული მასალების ხარისხის გაუმჯობესება, პროგრესული ტექნოლოგიის დანერგვით ზუსტი ზომების დაცვა და ასე შემდეგ, საშუალებას გვაძლევს ამ დარგებშიც მარაგის კოეფიციენტის მნიშვნელოვნად შემცირებით შევქმნათ მსუბუქი და სრულყოფილი კონსტრუქციები. საერთოდ, სამეცნიერო-ტექნიკური პროგრესის პირობებში ტექნიკის ყველა დარგში უმჯობესდება მასალების ხარისხი და კონსტრუქციების დამზადების სიზუსტე, ხდება გაანგარიშების მეთოდების სრულყოფა. ამიტომ, დროთა განმავლობაში, მცირდება მარაგის კოეფიციენტების მნიშვნელობა და იზრდება დასაშვები ძაბვები.

§15. სტატისტიკურად ურკვევი სისტემები

კონსტრუქციის შიგა და რეაქტიული ძალების განსაზღვრისათვის გამოიყენება სტატიკის განტოლებები. სისტემებს, რომლებისთვისაც სტატიკის განტოლებების მეშვეობით განისაზღვრება ყველა უცნობი ძალა, სტატიკურად რკვევადი ეწოდება. არსებობს, აგრეთვე, სტატიკურად ურკვევი სისტემები. ასეთ სისტემებში უცნობი ძალების რაოდენობა (S) აღემატება სტატიკის განტოლებათა რიცხვს (K)-ს.

$$R=S-K, \quad (2.49)$$

სადაც R სისტემის ურკვევობის ხარისხია.

სტატიკურად ურკვევი სისტემებისათვის, სტატიკის განტოლებათა გარდა, დამატებით საჭიროა შევადგინოთ R რაოდენობის გადაადგილებების განტოლებები, რომლებიც ითვალისწინებს სისტემის დეფორმაციას. მათ გადაადგილებების განტოლებები ეწოდება.

მეორე თავის მაგალითები.

მაგალითი 2.1. სიმტკიცის და სიხისტის პირობებიდან გამომდინარე, განვსაზღვროთ 2.28 ნახაზზე გამოსახული სწორი ძელის განივი კვეთის ფართობი F . ძელის მასალაა უწრობი ფოლადი $Y8$. კონსტრუქციის მუშაობის პირობებიდან გამომდინ-

ნარე. ზღვრული გადაადგილება $\delta_{\text{ზღ}} = 0.01$ სმ. სიმტკიცისა და სიხისტის მარაგის კოეფიციენტებისათვის ავიღოთ ერთი და იგივე მნიშვნელობა: $n=2$; $P=10$ კნ; $l=10$ სმ.

ძელი შეუქურსული ძალების მოდების წერტილებით იყოფა სამ უბნად. გამოვიყენოთ პირველი AB უბნისათვის კვეთის მეთოდი (ნახ.2.29). ძელის ნაწილის განხილვის შედეგად უბნის ნებისმიერი კვეთისათვის დავადგენთ ნორმალურ ძალას, ნორმალურ ძაბვას და წაგრძელებას

$$N = P, \quad \sigma = \frac{P}{F}, \quad \Delta l = \frac{Pz_1}{EF},$$

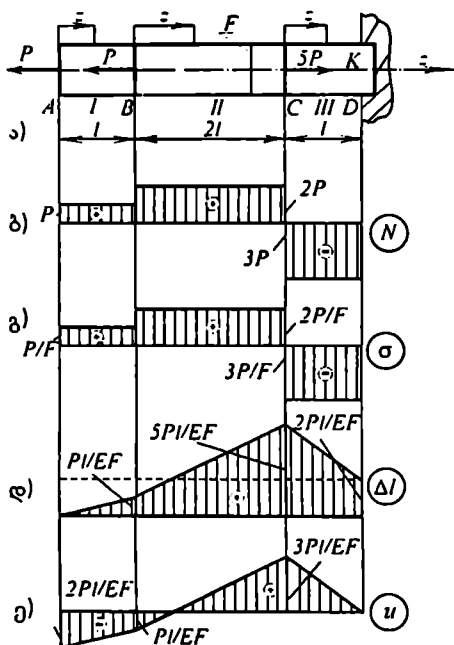
სადაც Δl არის z_1 სიგრძის მქონე ძელის წაგრძელება. საწყისი და ბოლო კვეთებისათვის ამ უბნის წაგრძელება

$$\Delta l(0) = 0, \quad \Delta l(l) = \frac{Pl}{EF}.$$

განვიხილოთ მეორე უბნის წონასწორობის პირობა (ნახ.2.30)

$$N - P - P = 0, \quad N = 2P,$$

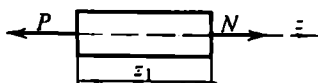
$$\sigma = \frac{2P}{F}, \quad \Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{2Pz_2}{EF}.$$



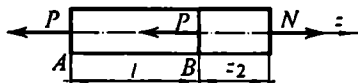
ნახ. 2.28

წაგრძელების ფორმულაში (2.8)-ის შესაბამისად, პირველი წევრი (უბნის საწყისი B კვეთის გადაადგილება) განსაზღვრულია, როგორც პირველი უბნის წაგრძელება. უბნის საწყისი და ბოლო კვეთებისათვის დავადგინოთ ძელის ნაწილის წაგრძელებების მნიშვნელობები

$$\Delta l(0) = \frac{Pl}{EF}, \quad \Delta l(2l) = \frac{5Pl}{EF}.$$



ნახ. 2.29



ნახ. 2.30

განვიხილოთ მესამე უბნის წონასწორობის პირობა (ნახ. 2.31)

$$N - P - P + 5P = 0, \quad N = -3P,$$

$$\sigma = -\frac{3P}{F}, \quad \Delta l = \frac{5Pl}{EF} - \frac{3Pz_3}{EF}.$$

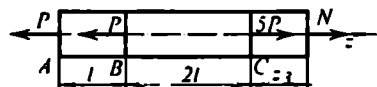
პირველი ორი უბნისაგან განსხვავებით, ამ უბნისათვის ნორმალური ძალა უარყოფითია, რაც ნიშნავს, რომ მისი მიმართულება არჩეული მიმართულების (ნახ.2.31) საწინააღმდეგოა და უბანი განიცდის კუმშვას.

დავადგინოთ უბნის საწყისი და ბოლო კვეთების შესაბამისი წაგრძელებები:

$$\Delta l(0) = \frac{5Pl}{EF}, \quad \Delta l(l) = \frac{2Pl}{EF}.$$

ნორმალური ძალების, ნორმალური ძაბვებისა და წაგრძელებების ცვლილების გრაფიკები ასახულია 2.28ბ-2.28გ ნახაზებზე. მასალათა გამძლეობაში ასეთ გრაფიკებს ეპიურებს უწოდებენ.

წაგრძელების ეპიურა საშუალებას არ გვაძლევს უშუალოდ განვსაზღვროთ კვეთების u გადაადგილებები. თუმცა, ამ ორ სიდიდეს შორის არსებობს მარტივი დამოკიდებულება. გადაადგილებების მისაღებად პირველი უბნის საწყის წერტილში, (2.8)-ის შესაბამისად, უნდა აგველო არა ნული, არამედ A კვეთის გადაადგილება, ე.ი. მთელი ძელის წაგრძელება. ეს სიდიდე განისაზღვრება D კვეთის შესაბამისი წაგრძელებით, ამიტომ გადაადგილებების დასადგენად საჭიროა Δl -ის მნიშვნელობას გამოვაკლოთ მუდმივი სიდიდე



ნახ. 2.31

$$u = \Delta l - \frac{2Pl}{EF}.$$

გადაადგილებების ეპიურა გამოსახულია 2.28ე ნახაზზე. ძელის ε დერძის დადებითი მიმართულებით გადაადგილებას შეესაბამება დადებითი გადაადგილებები.

მოცემული მასალისათვის დენადობის ზღვრები გაჭიმვასა და კუმშვაზე სხვადასხვაა. ამიტომ დამოუკიდებლად უნდა განვიხილოთ საშიში კვეთები დადებითი და უარყოფითი ძაბვების უბნებისათვის.

მაქსიმალური გამჭიმავი (დადებითი) ნორმალური ძაბვები მოქმედებს მეორე უბნის ნებისმიერ კვეთში (ნახ.2.28 გ). შესაბამისი სიმტკიცის პირობა ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\sigma_{\max} = \frac{2P}{F} \leq \frac{\sigma_{\text{დნგ}}}{n}, \quad F \geq \frac{2Pn}{\sigma_{\text{დნგ}}} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2}{250 \cdot 10^6} = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^2$$

მაქსიმალური მკუმშავი ძაბვები მოქმედებს მესამე უბნის ნებისმიერ კვეთში (ნახ.2.28 გ), სადაც ძაბვები 1,5-ჯერ აღემატება მეორე უბნის ძაბვებს. მაგრამ საშიში უბნის წინასწარი განსაზღვრა არ ხერხდება, რადგან მესამე უბნისათვის მასალის სიმტკიცის მახასიათებელი უფრო მაღალია. სიმტკიცის პირობა მესამე უბნის განივი კვეთის წერტილებისათვის ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\sigma_{\max} = \frac{3P}{F} \leq \frac{\sigma_{\text{დნკ}}}{n}, \quad F \geq \frac{3Pn}{\sigma_{\text{დნკ}}} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2}{430 \cdot 10^6} = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^2.$$

გავანგარიშებოდან სჩანს, რომ შეკუმშულ უბანთან შედარებით, გაკიმული საშიში უბნისათვის სიმტკიცის პირობა უფრო მძიმეა და მის დასაკმაყოფილებლად განივი კვეთის ფართობის მნიშვნელობაც მეტი აღმოჩნდა. ამრიგად, სიმტკიცის პირობების დასაკმაყოფილებლად ძელის ფართობი $F = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{მ}^2$

გავიანგარიშეთ კონსტრუქცია სიხისტეზე. ცხადია, ნებისმიერი კვეთისათვის შეუზღუდავი გადაადგილებები არასასურველია. ამიტომ სიხისტის პირობა განიხილება მაქსიმალური გადაადგილების მქონე C კვეთისათვის (ნახ. 2.28)

$$\delta_{\max} = \frac{3Pl}{EF} \leq \frac{\delta_{\text{ზღ}}}{n}, \quad F \geq \frac{3Pln}{E\delta_{\text{ზღ}}} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,01 \cdot 10^{-2}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{მ}^2.$$

საბოლოოდ, განივი კვეთის ფართობი $F = 3 \cdot 10^{-4} \text{მ}^2$. ამ შემთხვევაში, კონსტრუქცია აკმაყოფილებს როგორც სიხისტის, ისე სიმტკიცის პირობებს.

ამოცანის სრულყოფილად შესწავლის მიზნით, განვსაზღვროთ სისტემაზე მოდებული გარე ძალების მუშაობა, რისთვისაც გამოვიყენოთ (2.17) ფორმულა

$$A = \sum_{i=1}^3 \frac{P_i u_i}{2} = \frac{1}{2} \left[(-P) \left(-\frac{2Pl}{EF} \right) + (-P) \left(-\frac{Pl}{EF} \right) + (5P) \left(\frac{3Pl}{EF} \right) \right] = \frac{9P^2 l}{EF}$$

ფორმულაში ძალების მოდების წერტილების გადაადგილებები აღებულია 2.28 ნახაზზე გამოსახული ეპიურიდან.

დავადგინოთ შიგა ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა, ანუ დეფორმაციის პოტენციალური ენერჯია. თუ (2.22) ფორმულას გამოვიყენებთ ცალკეული უბნებისათვის და მიღებულ შედეგებს შევაჯამებთ, მივიღებთ

$$U = \frac{(P)^2 l}{2EF} + \frac{(2P)^2 2l}{2EF} + \frac{(-3P)^2 l}{2EF} = \frac{9P^2 l}{EF}.$$

ამრიგად, შიგა და გარე ძალების მიერ შესრულებული მუშაობების ერთმანეთთან ტოლობა მიუთითებს ამოცანის ამოხსნის სისწორეზე.

განხილულ ამოცანაში მესამე უბანი განიცდის კუმშვას და ამიტომ ამ უბნისათვის მდგრადობის საკითხი დამატებითაა შესასწავლი. ასეთი ამოცანები განხილული იქნება შემდგომში (თავი 14).

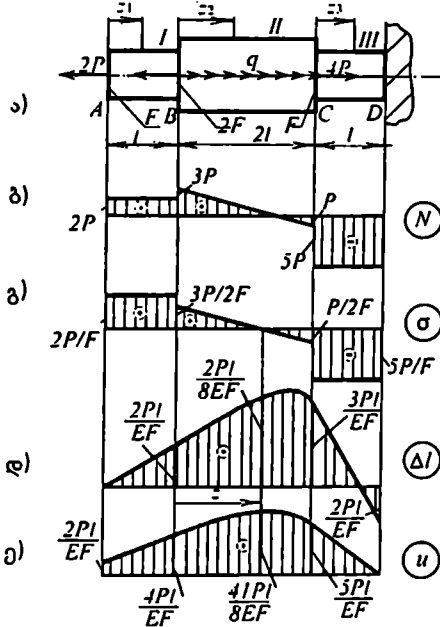
მაგალითი 2.2. გავიანგარიშოთ სიმტკიცესა და სიხისტეზე (ნახ.2.32) ცვალებადი განივიკვეთიანი სწორი ძელი და დავადგინოთ განივი კვეთების ფართობები. მოცემულია: $P=10$ კნ; $l=10$ სმ, $n=2,5$; $\delta_{\text{ზღ}}=0,08$ სმ, $q_l=2P$. ძელის მასალა არის უწყრთობი ფოლადი Y8.

ძელი, შეეურსული ძალების მოდების წერტილების მდებარეობის და განივი კვეთების ცვალებადობის გათვალისწინებით, იყოფა სამ უბნად. განვიხილოთ პირველი უბნის ნაწილის წონასწორობის პირობა (ნახ.2.33). დავადგინოთ ნორმალური ძალები, ნორმალური ძაბვა და τ_1 სიგრძის მქონე ძელის ნაწილის წაგრძელება:

$$N - 2P = 0, N = 2P,$$

$$\sigma = \frac{2P}{F}, \Delta l = \frac{2P z_1}{EF}$$

ამ უბნისათვის ნორმალური ძალა და ნორმალური ძაბვა მუდმივია. ხოლო წაგრძელება წრფივი კანონით იცვლება და მისი მნიშვნელობა უბნის საწყისი და ბოლო კვეთებისათვის იქნება



ნახ. 2.32

$$\Delta l(0) = 0, \Delta l(l) = \frac{2Pl}{EF}.$$

მეორე უბნის (ნახ.2.34) წონასწორობის პირობიდან

$$N - 2P - P + \int_0^{2l} q dz_2 = 0,$$

მივიღებთ ნორმალური ძალის და შესაბამისი ნორმალური ძაბვის გამოსახულებებს

$$N = 3P - qz_2, \sigma = \frac{3P - qz_2}{2F}.$$

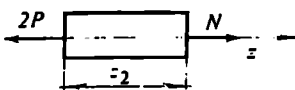
ნორმალური ძალის გამოსათვლელი ფორმულის მიღება შესაძლებელია უშუალოდ (2.5)-ის გამოყენებით. უბნის საწყის და ბოლო კვეთებისათვის

$$N(0) = 3P, N(2l) = 3P - q \cdot 2l = -P,$$

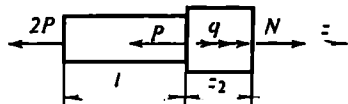
$$\sigma(0) = \frac{3P}{2F}, \sigma(2l) = -\frac{P}{2F}.$$

წაგრძელებების დასადგენად გავითვალისწინოთ პირველი უბნის წაგრძელება და გამოვიყენოთ (2.8) ფორმულა

$$\Delta l = \frac{2Pl}{EF} + \int_0^{2l} \frac{3P - qz_2}{E \cdot 2F} dz_2 = \frac{2Pl}{EF} + \frac{3Pz_2}{2EF} - \frac{qz_2^2}{4EF}.$$



ნახ. 2.33



ნახ. 2.34

ამრიგად, მეორე უბნისათვის წაგრძელებები იცვლება კვადრატული პარაბოლის კანონით. მისი მნიშვნელობა უბნის საწყისი და ბოლო კვეთებისათვის იქნება

$$\Delta l(0) = \frac{2Pl}{EF}$$

$$\Delta l(2l) = \frac{2Pl}{EF} + \frac{3Pl}{EF} - \frac{ql^2}{EF} = \frac{3Pl}{EF}$$

განვიხილოთ მესამე უბნის წონასწორობის პირობა (ნახ.2.35)

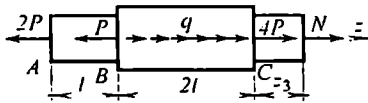
$$N - 2P - P + 2ql + 4P = 0, \quad N = -5P,$$

$$\sigma = -\frac{5P}{F}, \quad \Delta l = \frac{3Pl}{EF} - \frac{5Pz_3}{EF}$$

განვსაზღვროთ ძელის AC და AD ნაწილების წაგრძელებები

$$\Delta l(0) = \frac{3Pl}{EF}, \quad \Delta l(l) = -\frac{2Pl}{EF}$$

მიღებული შედეგების საფუძველზე აიგება ნორმალური ძალების, ნორმალური ძაბვების და წაგრძელებების ეპიურები (ნახ.2.32ბ-ნახ.2.32დ). გადაადგილებების ეპიურას (ნახ.2.32ე) კი ავაგებთ შემდეგი ფორმულის გამოყენებით



ნახ. 2.35

$$u = \Delta l - \left(-\frac{2Pl}{EF} \right) = \Delta l + \frac{2Pl}{EF}$$

2.1 ცხრილიდან ძელის მასალისათვის

$$\sigma_{დნ} = 250 \text{ მპა}, \quad \sigma_{დკ} = 430 \text{ მპა}, \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ მგპა}.$$

მაქსიმალური გამჭიმავი ძაბვები აღიძვრება პირველი უბნის კვეთებში. ასეთი კვეთისათვის სიმტკიცის პირობიდან დავადგენთ კვეთის ფართობს

$$\sigma_{\max} = \frac{2P}{F} \leq \frac{\sigma_{დნ}}{n}, \quad F \geq \frac{2Pn}{\sigma_{დნ}} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2,5}{250 \cdot 10^6} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^2$$

მკუმშავი ძაბვების თვალსაზრისით, საშიშია მესამე უბნის ნებისმიერი კვეთი. შევადგინოთ შესაბამისი სიმტკიცის პირობა და განვსაზღვროთ კვეთის ფართობი

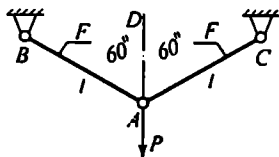
$$\sigma_{\max} = \frac{5P}{F} \leq \frac{\sigma_{დკ}}{n}, \quad F \geq \frac{5Pn}{\sigma_{დკ}} = \frac{5 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2,5}{430 \cdot 10^6} \approx 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^2$$

ამრიგად, სიმტკიცის პირობებიდან გამომდინარე, კვეთის ფართობი $F = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^2$ ძელის სიხისტის პირობიდან

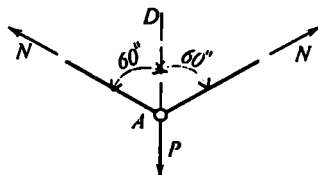
$$\delta_{\max} = \frac{4Pl}{8EF} \leq \frac{\delta_{\text{ფლ}}}{n}, \quad F \geq \frac{4Pl/n}{8E\delta_{\text{ფლ}}} = \frac{41 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0.1 \cdot 2.5}{8 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0.08 \cdot 10^{-2}} = 0.8 \cdot 10^{-4} \text{ გ}^2.$$

საბოლოოდ, მიღებული შედეგების შედარებით ვადგენთ, რომ განივი კვეთის ფართობის ზომები განისაზღვრება კუმშვაზე სიმტკიცის პირობიდან: $F = 2.9 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^2$

მაგალითი 2.3. შევამოწმოთ სიმტკიცის პირობის შესრულება წრიული d დიამეტრის განივიკვეთიანი ორი ძელისაგან შედგენილი სისტემისათვის (ნახ.2.36). დავადგინოთ A წერტილის ვერტიკალური გადაადგილება. მოცემულია: $l = 1.5 \text{ მ}$; $P = 7.54 \text{ კნ}$; $d = 0.8 \text{ სმ}$; $\alpha = 60^\circ$. ძელების მასალა ფოლადი 30 (უწრთობი).



ნახ. 2.36



ნახ. 2.37

განვსაზღვროთ ძელებში ნორმალური ძალები. A სახსართან სისტემას მოვკვეთოთ ქვედა ნაწილი და მოვდოთ მოცილებული ზედა ნაწილის ზემოქმედების შემცველი ძალები (ნახ.2.37). რადგან სისტემა AD ღერძის მიმართ სიმეტრიულია, ძელებში აღძრული ნორმალური ძალები ერთმანეთის ტოლია. ვთვლით, რომ ძელების დეფორმაციის შედეგად ძელებს შორის კუთხის ცვლილება უმნიშვნელოა. მაშინ საწყისი ზომების შენარჩუნების პრინციპის შესაბამისად, წინასწარობის პირობას დავადგენთ სისტემის არადეფორმირებული მდგომარეობისათვის.

დავაგეგმილოთ 2.37 ნახაზზე გამოსახული ძალები ვერტიკალურ მიმართულებაზე

$$P - 2N \cos 60^\circ = 0, \quad N = \frac{P}{2 \cos 60^\circ} = P.$$

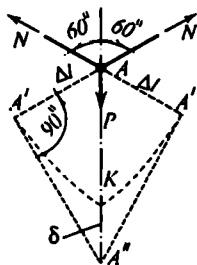
ძელში აღძრული ნორმალური ძაბვა

$$\sigma = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 7.54 \cdot 10^3}{3.14 \cdot (0.8 \cdot 10^{-2})^2} \approx 15 \cdot 10^7 \text{ პა} = 150 \text{ მგპა}.$$

რადგან ძელის მასალის დენადობის ზღვარი $\sigma_{\text{დნ}} = 330 \text{ მგპა}$, სიმტკიცის მარაგის კოეფიციენტი

$$n = \frac{\sigma_{\text{დნ}}}{\sigma} = \frac{330}{150} = 2.2$$

განვსაზღვროთ A წერტილის δ ვერტიკალური გადაადგილება. წარმოვიდგინოთ A სახსარში ძელები განცალკავებულად, ისე, რომ ამ ძელებში აღძრული ნორმალური ძალები დარჩეს მოქმედ ძალებად. ამ შემთხვევაში, წაგრძელების შედეგად ძელების A კვეთები გადაადგილდება შესაბამისი ღერძების მიმართულებით



ნახ. 2.38

და დაიკავებ A' მდებარეობებს (ნახ. 2.38). რეალურად, ძელები შეერთებულია და წაგრძელებასთან ერთად განიცდიან მობრუნებას B და C წერტილების ირგვლივ. დეფორმირებულ მდგომარეობაში A წერტილს შეესაბამება K წერტილი, რომელიც მიიღება, როგორც ორი რკალის გადაკვეთის წერტილი. რადგან გადაადგილებები მცირეა, რკალების მონაკვეთების მხებით შეცვლა დეფორმაციის სურათში იწვევს უმნიშვნელო ცდომილებას. $AA'A''$ სამკუთხედიდან მივიღებთ A წერტილის გადაადგილებას

$$\delta = |AK| \approx |AA''| = \frac{\Delta l}{\cos \alpha} = \frac{Nl}{EF \cos \alpha} = \frac{Pl}{2EF \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{7,54 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot (0,8 \cdot 10^{-2})^2} = 0,225 \cdot 10^{-2} \text{ მ}$$

(2.16)-ის გამოყენებით განვსაზღვროთ გარე ძალის მუშაობა

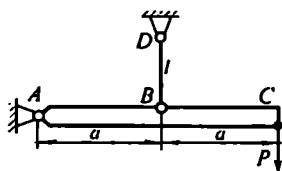
$$A = \frac{P\delta}{2} = \frac{P^2 l}{4EF \cos^2 \alpha} = \frac{P^2 l}{EF}$$

დეფორმაციის პოტენციალური ენერჯია გამოითვლება (2.22)-ის საშუალებით

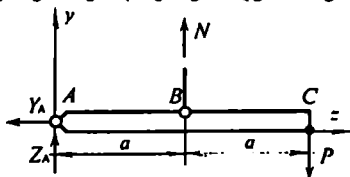
$$U = 2 \frac{N^2 l}{2EF} = \frac{P^2 l}{4EF \cos^2 \alpha} = \frac{P^2 l}{EF}$$

როგორც მიღებული შედეგებიდან სჩანს, გარე და შიგა ძალების მიერ შესრულებული მუშაობები ტოლია.

მაგალითი 2.4. მასიური (ხისტი) AC ძელის ერთი ბოლო კედელზე მიმაგრებულია უძრავი სახით (ნახ.2.39). შუა, B წერტილში ძელი დაკიდებულია l სიგრძისა და d დიამეტრის წრიული განივი კვეთის მქონე ვერტიკალური ზოლარით, რომელიც დამზადებულია ნახშირბადმცირე ფოლადისაგან. მოცემულია: $P=6000$ ნ; $l=0,8$ მ; $d=10$ მმ; $\alpha=0,5$ მ. შევამოწმოთ ზოლარის სიმტკიცე, გამოვთვალოთ C წერტილის გადაადგილება, AC ძელის მობრუნების კუთხე, შიგა და გარე ძალების მუშაობები.



ნახ. 2.39



ნახ. 2.40

ამოცანაში სამი უცნობია - A საყრდენის რეაქციები ვერტიკალური და ჰორიზონ-

ტალური მიმართულებით და D საყრდენის ვერტიკალური რეაქცია. მოცემულ ძალთა ბრტყელი სისტემისათვის შეიძლება შევადგინოთ წონასწორობის სამი პირობა. რადგან უცნობთა და წონასწორობის განტოლებათა რიცხვი ერთმანეთის ტოლია, ამოცანა სტატიკურად რკვევადია.

ზოლარში აღძრული ნორმალური ძალის განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ კვეთის მეთოდი (ნახ. 2.40). A წერტილის მიმართ მოდებული ძალების მომენტების ჯამის ნულთან ტოლობის პირობიდან

$$N \cdot a - P \cdot 2a = 0, \quad N = 2P.$$

ფაქტიურად, განვსაზღვრეთ D საყრდენის რეაქციაც, რომელიც ზოლარის ნორმალური ძალის ტოლია. შემდგომი განხილვისათვის დანარჩენი ორი რეაქციის ცოდნა საჭირო არ არის, მაგრამ სრული სურათის მისაღებად ისინი მაინც განვსაზღვროთ. დავაგეგმილოთ მოქმედი ძალები γ და z ღერძების მიმართულებაზე:

$$Y_A = 0, \quad Z_A = -P.$$

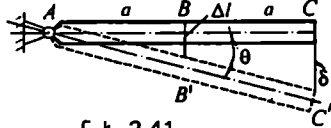
განვსაზღვროთ ზოლარში აღძრული ნორმალური ძაბვები

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{4 \cdot 2P}{\pi d^2} = \frac{8 \cdot 6000}{3,14 \cdot (1 \cdot 10^{-2})^2} \approx 15,30 \cdot 10^7 \text{ მგპა} = 153 \text{ მგპა}.$$

ზოლარის მასალის დენადობის ზღვარი $\sigma_{დნ} = 250$ მგპა (ცხრილი 2.1.), მაშინ სიმტკიცის მარაგის კოეფიციენტი

$$n = \frac{\sigma_{დნ}}{\sigma} = \frac{250}{153} = 1,6.$$

AC ძელი ხისტია და სისტემის დეფორმაციისას იგი მობრუნდება A სახსრის მიმართ (ნახ.2.41). რადგან გადაადგილებები მცირეა, B და C წერტილების გადაადგილება შეიძლება ჩავთვალოთ ვერტიკალურად. ამიტომ B წერტილის გადაადგილება იქნება ზოლარის Δl წაგრძელების ტოლი



ნახ. 2.41

$$\Delta l = \frac{NI}{EF} = \frac{2Pl}{EF}.$$

ხოლო C წერტილის გადაადგილება მიიღება ABB' და ACC' სამკუთხედების მსგავსებიდან

$$\delta = 2\Delta l = \frac{4Pl}{EF}.$$

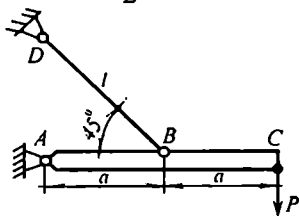
განვსაზღვროთ AC ძელის მობრუნების კუთხე და გარე და შიგა ძალების მუშაობები

$$\text{tg} \theta \approx \theta \approx \frac{\Delta l}{a} = \frac{2Pl}{EFa} = \frac{2 \cdot 6000 \cdot 0,8 \cdot 4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot (10^{-2})^2 \cdot 0,5} \approx 0,0012$$

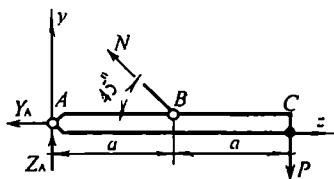
$$A = \frac{P\delta}{2} = \frac{2P^2l}{EF}, \quad U = \frac{N^2l}{2EF} = \frac{(2P)^2l}{2EF} = \frac{2P^2l}{EF}.$$

მაგალითი 2.წ. განვიხილოთ დახრილი ზოლარის მქონე სისტემა (ნახ.2.42). ამოცანისათვის საჭირო ყველა სიდიდე ავიღოთ 2.4. მაგალითიდან. ზოლარის სიგრძე $l = \sqrt{2}a$ ($a=0,5\text{მ.}$) გამოვიყენოთ კვეთების მეთოდი (ნახ. 2.43). შევადგინოთ წონასწორობის პირობები

$$N \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a - P \cdot 2a = 0, \quad Y_A + N \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad Z_A + N \frac{\sqrt{2}}{2} - P = 0,$$



ნახ. 2.42



ნახ. 2.43

საიდანაც დავადგინოთ უცნობების მნიშვნელობებს

$$N = 2\sqrt{2}P, \quad Y_A = -2P, \quad Z_A = -P.$$

გავინაგარიშოთ ნორმალური ძაბვები ზოლარში

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{2\sqrt{2}P}{F} = \frac{8\sqrt{2}P}{\pi d^2} = \frac{8 \cdot 1,41 \cdot 6000}{3,14 \cdot (10^{-2})^2} = 216 \text{ მგპა.}$$

მაშინ სიმტკიცის მარაგის კოეფიციენტი $n = \frac{250}{216} \approx 1,15$.

მიღებული მარაგის კოეფიციენტი არ იძლევა კონსტრუქციის საიმედო მუშაობის გარანტიას. ამიტომ, საჭიროა შევამოწმოთ მოღებულნი ძალა ან გავზარდოთ ზოლარის განივი კვეთის ფართობი, ანდა, შევცვალოთ ზოლარის მასალა. ავირჩიოთ მესამე გზა. ზოლარის დასამზადებლად გამოვიყენოთ უწითობი ფოლადი 45, რომლის დენადობის ზღვარი $\sigma_{დენ} = 370$ მგპა. ამ შემთხვევაში, სიმტკიცის მარაგის კოეფიციენტი

$$n = \frac{370}{216} \approx 1,7.$$

სისტემის დეფორმირებული მდგომარეობა დავადგინოთ 2.3 და 2.4 მაგალითების ანალოგიურად (ნახ.2.44).

განვსაზღვროთ ზოლარის წაგრძელება

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} = \frac{2\sqrt{2}P\sqrt{2}a}{EF} = \frac{4Pa}{EF},$$

მაშინ, ძელის B წერტილის ვერტიკალური გადაადგილება

$$\Delta l' = \frac{\Delta l}{\cos 45^\circ} = \frac{4\sqrt{2}Pa}{EF}.$$

ABB' და ACC' სამკუთხედების მსგავსებიდან დავადგინოთ C წერტილის ვერტიკალურ გადაადგილებას

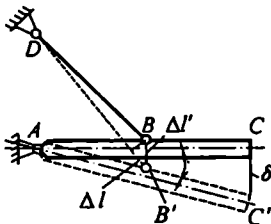
$$\delta = 2\Delta l' = \frac{8\sqrt{2}Pa}{EF}.$$

ხისტი AC ძელის მობრუნების კუთხე

$$\text{tg } \theta \approx \theta \approx \frac{\Delta l'}{a} = \frac{4\sqrt{2}P}{EF} \approx 0,0022.$$

დავადგინოთ გარე და შიგა ძალების მიერ შესრულებული მუშაობები

$$A = \frac{P\delta}{2} = \frac{4\sqrt{2}P^2a}{EF}, \quad U = \frac{N^2l}{2EF} = \frac{4\sqrt{2}P^2a}{EF}.$$



ნახ. 2.44

ზემოთ განხილული ამოცანები სტატიკურად რკვევადია. მათში უცნობი რეაქციები და შიგა ძალები განისაზღვრა სტატიკის განტოლებებით, ხოლო სიმტკიცის პირობა შედგენილი იქნა მხოლოდ ზღვრული ძაბვების მეთოდის საფუძველზე და ეს შემთხვევითი არ არის. პლასტიკური მასალებისათვის, რომელთა გაჭიმვა-კუმშვის სქემატიზირებული დიაგრამა გამოსახულია 2.25 ნახაზზე, სტატიკურად რკვევადი სისტემების გაანგარიშება სიმტკიცეზე ორივე მეთოდით (ზღვრული ძაბვების და ზღვრული დატვირთვის მეთოდებით) იძლევა ერთსა და იმავე შედეგს.

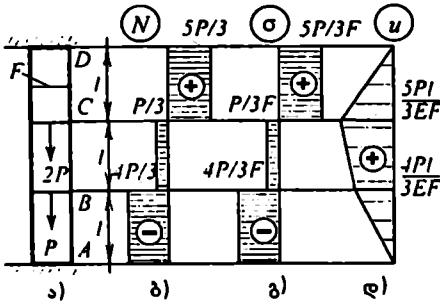
მაგალითი 2.6. ორივე ბოლოთი ჩამაგრებული ძელისათვის დავადგინოთ განივი კვეთის ზომები (ნახ.2.45). მოცემულია: $P=30$ კნ; $l=0,2$ მ; $\delta_{\text{ზღ}}=2,5 \cdot 10^{-4}$ მ. მარჯვის კოეფიციენტები სიმტკიცესა და სიხისტეზე შესაბამისად ტოლია $n=2,5$ და $n=2$. ძელი დამზადებულია ნახშირბადმცირე ფოლადისაგან.

ამოცანაში უცნობი რეაქციის ძალებია R_A და R_B . ე. ი. გვაქვს ძელის ღერძის გასწვრივ მოქმედ ძალთა სისტემა. ასეთი სისტემისათვის შეიძლება შევადგინოთ წონასწორობის ერთი პირობა - ვერტიკალურ - ღერძზე ძალების გეგმილების ჯამის ნულთან ტოლობა. ამრიგად, (2.49)-ის შესაბამისად, სისტემის ურკვევობის ზარისხი უდრის ერთს. უცნობი რეაქციების განსაზღვრისათვის, სტატიკის განტოლების გარდა, საჭიროა შევადგინოთ გადაადგილებების ერთი განტოლება.

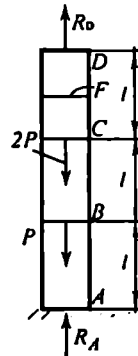
დავაგეგმილოთ ძელზე მოქმედი ძალები = ლერძზე (ნახ.2.46)

$$2P + P - R_A - R_D = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ პირველ განტოლებას $R_A + R_D = 3P$.



ნახ. 2.45



ნახ. 2.46

შევადგინოთ გადაადგილების განტოლება. გავათავისუფლოთ ძელის ზედა კვეთი და მოცილებული საყრდენის ზემოქმედება შევცვალოთ რეაქციის ძალით (ნახ.2.46). დროებით დავივიწყოთ, რომ ძალა R_D უცნობია. ძელის წაგრძელება, რომელიც და-მოკიდებულია სისტემაზე მოდებულ ძალებზე, გავიანგარიშოთ ცნობილი მეთოდით. ძელის სრული წაგრძელება წარმოვიდგინოთ სამი უბნის წაგრძელების ჯამის სახით (ნახ.2.46)

$$\Delta l_{AD} = \Delta l_{CD} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{AB}.$$

რადგან ძელის ბოლოები ჩამაგრებულია (ნახ.2.45), მისი საერთო წაგრძელება ნუ-ლის ტოლია $\Delta l_{AD} = \Delta l_{CD} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{AB} = 0$. ფაქტიურად, მეორე განტოლება შედ-გენილია, მაგრამ საჭიროა წაგრძელებები განვსაზღვროთ უცნობი რეაქციების სა-შუალებით. ამ მიზნით, ყოველი უბნისათვის დავადგინოთ ნორმალური ძალა და (2.10) ფორმულით განვსაზღვროთ უბნების წაგრძელებები

$$\Delta l_{CD} = \frac{R_D l}{EF}, \quad \Delta l_{BC} = \frac{(R_D - 2P)l}{EF}, \quad \Delta l_{AB} = \frac{(R_D - 3P)l}{EF}.$$

გავითვალისწინოთ ეს გამოსახულებები გადაადგილებების განტოლებაში, საიდანაც მივიღებთ $3R_D = 5P$, $R_D = (5/3)P$. მეორე უცნობა რეაქციის მნიშვნელობას დავად-გენთ წონასწორობის განტოლებიდან $R_A = (4/3)P$.

შევისწავლოთ ძაბვები და გადაადგილებები ცალკეული უბნებისათვის. პირვე-ლი უბნისათვის

$$N_1 = \frac{5}{3}P, \quad \sigma = \frac{5P}{3F}, \quad \Delta l(z_1) = \frac{5Pz_1}{3EF}.$$

ამ უბანზე ნორმალური ძალა და ძაბვა მუდმივია. წაგრძელებები წრფივი კანონით იცვლება და უბნის საწყის და ბოლო კვეთებში იღებს შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$\Delta l(0) = 0, \quad \Delta l(l) = \frac{5Pl}{3EF}.$$

ანალოგიურად განიხილება მეორე უბანი, ოღონდ წაგრძელების ფორმულაში გავითვალისწინოთ პირველი უბნის წაგრძელება

$$N_2 = -\frac{1}{3}P, \quad \sigma = -\frac{P}{3F}, \quad \Delta l(z_2) = \frac{5Pl}{3EF} - \frac{Pz_2}{3EF},$$

$$\Delta l(0) = \frac{5Pl}{3EF}, \quad \Delta l(l) = \frac{4Pl}{3EF}.$$

ამრიგად, პირველისაგან განსხვავებით, მეორე უბანი განიცდის კუმშვას. მესამე უბნისათვის წაგრძელების ფორმულაში გავითვალისწინოთ პირველი და მეორე უბნების წაგრძელებების ჯამი, რაც ფაქტიურად ნაპოვნია და უდრის მეორე უბნის B კვეთის შესაბამის წაგრძელებას

$$N_3 = -\frac{4}{3}P, \quad \sigma = -\frac{4P}{3F}, \quad \Delta l(z_3) = \frac{4Pl}{3EF} - \frac{4Pz_3}{3EF},$$

$$\Delta l(0) = \frac{4Pl}{3EF}, \quad \Delta l(l) = 0.$$

ნორმალური ძალების, ძაბვებისა და წაგრძელებების ეპიურები გამოსახულია 2.45 ბ.გ.დ ნახაზებზე. აღსანიშნავია, რომ ამ შემთხვევაში წაგრძელებების ეპიურა ემთხვევა ძელის განივი კვეთების გადაადგილებების ეპიურას. ეს დასკვნა უშუალოდ გამომდინარეობს (2.9)-დან, ვინაიდან სისტემის საწყისი D კვეთის გადაადგილება $u_0 = 0$ ნორმალური ძაბვის ეპიურიდან სჩანს, რომ პირველი უბნის ნებისმიერ კვეთში მოქმედებს მაქსიმალური გამჭიმავი ძაბვები. ამდენად, საშიშია ამ უბნის ნებისმიერი კვეთი და ძელის სიმტკიცის პირობიდან

$$\sigma_{\max} = \frac{5P}{3F} \leq \frac{\sigma_{\text{დნ}}}{n}, \quad F \geq \frac{5Pn}{3\sigma_{\text{დნ}}}.$$

ნახშირბადმცირე ფოლადისათვის დენადობის ზღვარი $\sigma_{\text{დნ}} = 250$ მგა (ცხრილი 2.1).

$$F \geq \frac{5 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 2,5}{3 \cdot 250 \cdot 10^6} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^2.$$

თუ ძელს წრიული განივი კვეთი აქვს, მაშინ

$$F = \frac{\pi d^2}{4} \geq 5 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^2, \quad d \geq \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 4}{3,14}} \approx 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ მ}$$

სიხისტის პირობის გათვალისწინებით გავიანგარიშოთ ძელის განივი კვეთის ფართობი

$$\delta_{\max} = \frac{5Pl}{3EF} \leq \frac{\delta_{\text{ზღ}}}{n}, \quad F \geq \frac{5Pl/n}{3E\delta_{\text{ზღ}}} = \frac{5 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 0,2 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^2,$$

საიდანაც მივიღებთ განივი კვეთის დიამეტრის მნიშვნელობას

$$F = \frac{\pi d^2}{4} \geq 4 \cdot 10^{-4}; \quad d = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-4} \cdot 4}{3,14}} \approx 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ მ}.$$

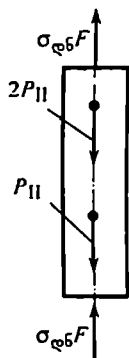
ამრიგად, სიმტკიცის პირობები უფრო მკაცრია და ძელის განივი კვეთის დიამეტრი $d = 2,5 \cdot 10^{-2}$ მ. პრაქტიკულად, გაანგარიშება დამთავრებულია. თუ მიღებული შედეგი არ გვაკმაყოფილებს და მოვინდომებთ კონსტრუქციის შემსუბუქებას, გავიანგარიშოთ კონსტრუქცია სიმტკიცეზე ზღვრული დატვირთვის მეთოდით. გაანგარიშებისას გამოვიყენოთ 2.25 ნახაზზე ნაჩვენები სქემატიზირებული დიაგრამა და სიმტკიცის მარაგის კოეფიციენტი ავილოთ $n=2,5$.

დავადგინოთ ზღვრული ძაბვების მეთოდის შესაბამისი ზღვრული დატვირთვა. სისტემაზე მოდებული ძალების თანდათანობით ზრდის შედეგად მივალწვეთ ისეთ დატვირთვას, რომლის დროსაც საშიშ კვეთში მაქსიმალური ძაბვები გაუტოლდება დენადობის ზღვარს

$$\frac{5P_I}{3F} = \sigma_{\text{დნ}},$$

საიდანაც ზღვრული ძაბვების მეთოდის შესაბამისი ზღვრული ძალა

$$P_I = \frac{3\sigma_{\text{დნ}}F}{5}.$$



P_I ძალის მოქმედებისას პირველი უბნის ნებისმიერ კვეთში ძაბვები დენადობის ზღვრის ტოლია და მასში ნორმალური ძალა განისაზღვრება ფორმულით

$$N = \sigma_{\text{დნ}}F.$$

სისტემაზე მოდებული ძალების შემდგომი გაზრდა შესაძლებელია ძელის მესამე უბანში პლასტიკური დეფორმაციების წარმოქმნამდე (მესამე უბანი მეორე უბანთან შედარებით უფრო დაძაბულ მდგომარეობა- ნახ. 2.47 შია). ძელის ასეთი მდგომარეობა განვსაზღვროთ ზღვრული P_{II} ძალით, რომლის მნიშვნელობასაც დავადგენთ ძელის ცენტრალური ნაწილის (ნახ.2.47) წონასწორობის პირობიდან

$$\sigma_{\text{დნ}}F + \sigma_{\text{დნ}}F - 2P_{II} - P_{II} = 0,$$

საიდანაც ზღვრული დატვირთვის მეთოდის შესაბამისი ზღვრული დატვირთვა

$$P_{II} = \frac{2}{3} \sigma_{\text{დნ}} F.$$

მაშინ დასაშვები ძალის მნიშვნელობის შესაბამისი სიმტკიცის პირობა

$$P \leq [P] = \frac{P_{II}}{n} = \frac{2\sigma_{\text{დნ}} F}{3n}.$$

აქედან, განვიკვთის ფართობის მნიშვნელობა

$$F \geq \frac{3Pn}{2\sigma_{\text{დნ}}} = \frac{3 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 2,5}{2 \cdot 250 \cdot 10^6} = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^2.$$

ამ შემთხვევაში, განვიკვთის დიამეტრი განისაზღვრება პირობიდან

$$\frac{\pi d^2}{4} \geq 4,5 \cdot 10^{-4}, \quad d = \sqrt{\frac{4 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}}{3,14}} \approx 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ მ}.$$

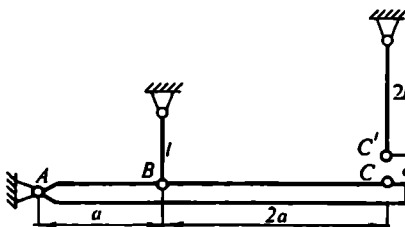
ამრიგად, ზღვრული დატვირთვის მეთოდით გაანგარიშებული ძელის დიამეტრი ნაკლებია (თუმცა, უმნიშვნელოდ) ზღვრული ძაბვების მეთოდით მიღებულ დიამეტრზე.

ძელის მასალის დრეკადობის ფარგლებში დეფორმირების შემთხვევისათვის და ვადგინოთ გარე და შიგა ძალების მუშაობები

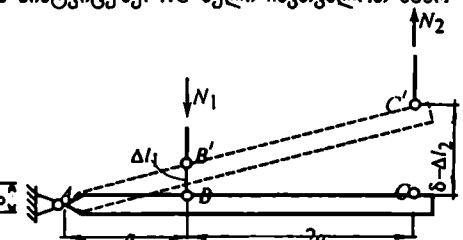
$$A = \frac{2P \cdot 5Pl}{2 \cdot 3EF} + \frac{P \cdot 4Pl}{2 \cdot 3EF} = \frac{7P^2 l}{3EF},$$

$$U = \frac{\left(\frac{5}{3}P\right)^2 l}{2EF} + \frac{\left(-\frac{1}{3}P\right)^2 l}{2EF} + \frac{\left(-\frac{4}{3}P\right)^2 l}{2EF} = \frac{7P^2 l}{3EF}.$$

მაგალითი 2.7. კონსტრუქციაში არსებული δ ღრეჩოს (ნახ.2.48) დახურვის შემდეგ C და C' წერტილების შეერთებით ვერტიკალურ ძელებში წარმოიქმნება სამონტაჟო ძაბვები. გავიანგარიშოთ სისტემა სიმტკიცეზე. AC ძელი ჩავთვალოთ აბსო-



ნახ. 2.48



ნახ. 2.49

ლუტურად ხისტად. მოცემულია: $l=50$ სმ, $\delta=0,2$ სმ, $n=1,5$. ვერტიკალური ძელები დამზადებულია უწრთობი ფოლადი 45-საგან.

აღნიშნოთ პირველი და მეორე ძელების წაგრძელებები. შესაბამისად, Δl_1 -ით და Δl_2 -ით. წარმოვადგინოთ სისტემა დეფორმირებულ მდგომარეობაში (ნახ.2.49). სისტემაზე მოდებული ძალების A წერტილისადმი მომენტების ჯამის ნულთან ტოლობის პირობებიდან $N_1 a - N_2 3a = 0$, $N_1 = 3N_2$. გადაადგილების განტოლება მიიღება ABB' და ACC' სამკუთხედების მსგავსების საფუძველზე

$$3\Delta l_1 + \Delta l_2 = \delta.$$

გამოვსახოთ წაგრძელებები ნორმალური ძალების საშუალებით

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 2l}{EF}.$$

გავითვალისწინოთ წაგრძელებების მნიშვნელობები გადაადგილების განტოლებაში

$$3N_1 + 2N_2 = \frac{EF\delta}{l}.$$

მიღებული განტოლებისა და წონასწორობის განტოლების ერთობლივი განხილვით ვადგენთ ძელებისათვის ნორმალური ძალებისა და ძაბვების მნიშვნელობებს:

$$N_1 = \frac{3EF\delta}{11l}, \quad \sigma_1 = \frac{3E\delta}{11l},$$

$$N_2 = \frac{EF\delta}{11l}, \quad \sigma_2 = \frac{E\delta}{11l}.$$

მაქსიმალური ძაბვები აღიძვრება პირველ ძელში

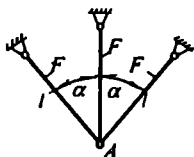
$$\sigma_1 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,2 \cdot 10^{-2}}{11 \cdot 0,5} = 21,8 \cdot 10^7 = 218 \text{ მგა.}$$

ძელის მასალისათვის დენადობის ზღვარი $\sigma_{დნ}=370$ მგა (ცხრილი2.1). განვსაზღვროთ დასაშვები ძაბვა

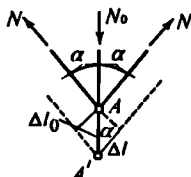
$$[\sigma] = \frac{370}{1,5} = 247 \text{ მგა.}$$

ამრიგად, კონსტრუქციის მაქსიმალური ძაბვა დასაშვებ ძაბვაზე ნაკლებია და მაშასადამე, სიმტკიცის პირობა სრულდება.

მაგალითი 2.8. სამძელიანი სახსროვანი სისტემის შუა ძელი ხურდება l გრადუსით (ნახ.2.50). განვსაზღვროთ ძელებში წარმოქმნილი ტემპერატურული ძაბვები და A წერტილის გადაადგილება, თუ მასალის წრფივი გაფართოების კოეფიციენტი γ .



ნახ. 2.50



ნახ. 2.51

სისტემიდან ამოვკვეთთ A კვანძი და წარმოვადგინოთ სისტემის დეფორმირებული მდგომარეობის შესაბამისად (ნახ.2.51). აქ გვერდითი და შუა ძელების წაგრძელებები შესაბამისად აღნიშნულია Δl და Δl_0 -ით.

წონასწორობის პირობიდან მივიღებთ პირველ განტოლებას

$$2 N \cos \alpha = N_0,$$

ხოლო სისტემის დეფორმირებული მდგომარეობის სურათის საფუძველზე - მეორე განტოლებას

$$\Delta l = \Delta l_0 \cos \alpha.$$

განვსაზღვროთ ძელების წაგრძელებები

$$\Delta l_0 = \gamma l - \frac{N_0 l}{EF}, \quad \Delta l = \frac{Nl}{EF}.$$

თუ ამ შედეგს გავითვალისწინებთ გადაადგილების განტოლებაში, მივიღებთ

$$N + N_0 \cos \alpha = \gamma l EF \cos \alpha.$$

წონასწორობის და გადაადგილებების განტოლებების ერთობლივი განხილვით დაადგენთ ძელების ნორმალურ ძალებს და შესაბამის ძაბვებს

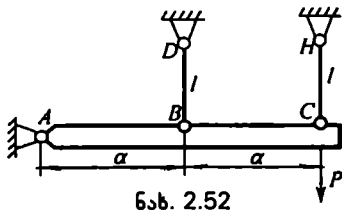
$$N = \frac{\gamma l EF \cos \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha}, \quad \sigma = \frac{\gamma l E \cos \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha},$$

$$N_0 = \frac{2 \gamma l EF \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha}, \quad \sigma_0 = \frac{2 \gamma l E \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha}$$

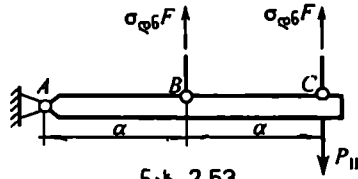
განვსაზღვროთ A კვანძის გადაადგილება, რომელიც შუა ძელის წაგრძელების ტოლია

$$\Delta l_0 = \gamma l - \frac{2 \gamma l \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha} = \frac{\gamma l}{1 + 2 \cos^2 \alpha}.$$

მაგალითი 2.9. მასიური AC ძელი, რომელიც შემდგომში შეიძლება განვიხილოთ როგორც ხისტი, დაკიდებულია ორ კვადრატულ განივკვეთიან ღეროზე (ნახ.2.52). ზღვრული დატვირთვის მეთოდის საფუძველზე განვსაზღვროთ ღეროს განივი კვეთის ზომები. ზღვრული მდგომარეობისათვის დავადგინოთ ძელის მობრუნების კუთხე. მოცემულია: $l=1$ მ, $P=12$ კნ, $n=2.5$. ღეროები დამზადებულია ნახშირბად-მცირე ფოლადისაგან.



ნახ. 2.52



ნახ. 2.53

ამოცანა ამოხსნება შემდეგი თანმიმდევრობით: ჯერ განვიხილავთ დეფორმაციებს. შემდეგ გავითვალისწინებთ პლასტიკურობას 2.6 მაგალითის მსგავსად. დრეკადობის ფარგლებში ამონახსნის პოვნა ამ შემთხვევაში არ არის აუცილებელი, რაც ამარტივებს ამოცანის ამოხსნას.

ძალის თანდათანობით ზრდით ერთ-ერთ ღეროში მივალწევთ პლასტიკური დეფორმაციების წარმოქმნას. რომელ ღეროში დაიწყება ეს პროცესი, ამოცანისათვის არააარსებითია. თუმცა, ადვილი შესამჩნევია, რომ CH ღეროს წაგრძელება BD ღეროს წაგრძელებაზე მეტი იქნება და ამდენად, პლასტიკური დეფორმაციები პირველად სწორედ CH ღეროში დაიწყება.

განვავაჩოთ ძალის შემდგომი ზრდა იმ ღეროს ნორმალური ძალის ზრდის ხარჯზე, რომელიც ჯერჯერობით დრეკადობის ფარგლებში დეფორმირდება. რაც შეეხება მეორე ღეროს, მისი წინააღმდეგობის უნარი ამოწურულია და დატვირთვის მეორე ეტაპზე მისი შიგა ძალა $N = \sigma_{დნ} F$ უცვლელი რჩება. ამ ეტაპის დასასრულს მეორე ღეროს ძაბვებიც დენადობის ზღვარს უტოლდება. ეს გარემოება განსაზღვრავს სისტემის ზღვრულ მდგომარეობას (ნახ.2.53).

სისტემის ამ მდგომარეობისათვის წონასწორობის პირობიდან დავადგენთ $P_{||}$ ზღვრული ძალის მნიშვნელობას:

$$\sigma_{დნ} F \cdot a + \sigma_{დნ} F \cdot 2a - P_{||} \cdot 2a = 0, \quad P_{||} = \frac{3}{2} \sigma_{დნ} F.$$

მაშინ ზღვრული დატვირთვის მეთოდის შესაბამისი სიმტკიცის პირობა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$P \leq [P] = \frac{P_{||}}{n} = \frac{3\sigma_{დნ} F}{2n}.$$

აქედან, მივიღებთ ღეროს განივი კვეთის ფართობის მნიშვნელობას

$$F \geq \frac{2Pn}{3\sigma_{დნ}} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 2,5}{3 \cdot 250 \cdot 10^6} = 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^2.$$

აღვნიშნოთ კვადრატული განივი კვეთის გვერდის სიგრძე b ასოთი და განვსაზღვროთ მისი მნიშვნელობა

$$b^2 \geq 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^2; \quad b \geq 0,9 \cdot 10^{-2} \text{ მ}.$$

სისტემის ზღვრულ მდგომარეობაში BD ღეროში დაძაბული მდგომარეობა შეესაბამება C წერტილს (ნახ.2.25). ამრიგად, ერთი მხრივ, BD ღეროში ნორმალური

ძაბვები აღწევენ დენადობის ზღვარს, შესაბამისი ნორმალური ძალაა $N = \sigma_{\text{დნ}} F$ მეორე მხრივ. შეიძლება ჰუკის კანონის გამოყენება და ღეროს წაგრძელების განსაზღვრა

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} = \frac{\sigma_{\text{დნ}} l}{E}.$$

ახლა შეგვიძლია დავადგინოთ ძელის მობრუნების კუთხე, რომელიც შეესაბამება სისტემის ზღვრულ მდგომარეობას

$$\text{tg} \theta \approx \theta \approx \frac{\Delta l}{a} = \frac{\sigma_{\text{დნ}} l}{Ea}.$$

მაგალითი 2.10. მასალის პლასტიკური თვისებების გათვალისწინებით გავიანგარიშოთ 2.45 ნახაზზე გამოსახული ძელის დამახასიათებელი კვეთების გადაადგილებები. მასალის სქემატიზირებული დიაგრამა ნაჩვენებია 2.25 ნახაზზე. ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ 2.6 მაგალითის შედეგები.

ძელის პლასტიკური დეფორმაციები იწყება მაშინ, როდესაც $P = P_1$; ძალის ამ მნიშვნელობისას პირველ უბანში ნორმალური ძაბვები უტოლდება დენადობის ზღვარს. აღნიშნულიდან გამომდინარე,

$$P_1 = \frac{3\sigma_{\text{დნ}} F}{5} = 27\lambda, \quad \lambda = \frac{\sigma_{\text{დნ}} F}{45}$$

ჰუკის კანონი სრულდება ძელის ყველა უბნისათვის ძალის ამ მნიშვნელობამდე. შესაბამისი ნორმალური ძალების მნიშვნელობები ცალკეულ უბნებზე იქნება

$$N_1 = \frac{5}{3} P_1 = 45\lambda, \quad N_2 = -\frac{1}{3} P_1 = -9\lambda, \quad N_3 = -\frac{4}{3} P_1 = -36\lambda.$$

რაც შეეხება გადაადგილებებს, მათი განსაზღვრა შეიძლება ნახ. 2.45-ის ეპიურების გამოყენებით

$$\Delta l_B = \frac{4}{3} \frac{P_1 l}{EF} = 36\eta, \quad \Delta l_C = \frac{5}{3} \frac{P_1 l}{EF} = 45\eta, \quad \eta = \frac{\sigma_{\text{დნ}} l}{45E}$$

ძალის შემდგომი ზრდის პირობებში CD ნაწილი განიცდის პლასტიკურ დეფორმაციას და მისთვის ნორმალური ძალა ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას:

$N_1 = R_1 = \sigma_{\text{დნ}} \cdot F$. დატვირთვის ამ ეტაპზე ნორმალური ძალების მნიშვნელობები იქნება

$$N_1 = \sigma_{\text{დნ}} F, \quad N_2 = \sigma_{\text{დნ}} F - 2P, \quad N_3 = \sigma_{\text{დნ}} F - 3P.$$

გარე ძალების შემდგომი ზრდით მივალწევთ პლასტიკურ დეფორმაციებს AB უბნის კვეთებში და შესაბამის ზღვრულ მდგომარეობებში

$$N_3 = -\sigma_{\text{დნ}} F = \sigma_{\text{დნ}} F - 3P_{\text{II}}.$$

აქედან გამოდინარე, მივიღებთ შემდეგ მნიშვნელობას:

$$P = P_{\text{II}} = \frac{2}{3} \sigma_{\text{დნ}} F = 30 \lambda.$$

ასეთი ზღვრული დატვირთვისათვის შიგა ძალები განისაზღვრება

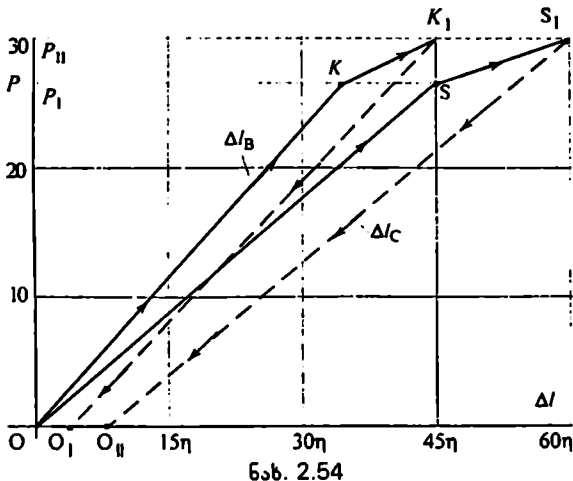
$$N_1 = \sigma_{\text{დნ}} F = 45 \lambda, \quad N_2 = \sigma_{\text{დნ}} F - 2P_{\text{II}} = -15 \lambda,$$

$$N_3 = \sigma_{\text{დნ}} F - 3P_{\text{II}} = -45 \lambda.$$

ვინაიდან გარე ძალების შემდგომი ზრდა შეუძლებელია, P_{II} ძალა განსაზღვრავს კონსტრუქციის ზღვრულ მდგომარეობას. ძალის ასეთი მნიშვნელობისას ძელის უნარი გაუწიოს წინააღმდეგობა ძალების შემდგომ ზრდას, ამოწურულია: გადაადგილებები კი შეიძლება გაიზარდოს ძალების ზრდის გარეშეც (ნახ.2.25). ვინაიდან C წერტილის შემდეგ დეფორმაციების ზრდა შესაძლებელია ძაბვების უცვლელობის პირობებში. მაგრამ C წერტილის შესაბამისი დეფორმაციების განსაზღვრისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ჰუკის კანონი. ასევე, ზღვრული მდგომარეობისათვის ძელის მესამე უბნის წაგრძელებების დასადგენად შესაძლებელია (2.10) ფორმულის გამოყენება. ამიტომ გადაადგილებები განისაზღვრება

$$\Delta l_B = -\frac{N_3 \cdot l}{EF} = 45 \eta, \quad \Delta l_C = \Delta l_B - \frac{N_2 \cdot l}{EF} = 60 \eta.$$

მიღებულ გამოსახულებებში კვეთის O -ღერძის დადებითი მიმართულებით გადაადგილება მიჩნეულია დადებითად. შესაბამისი გრაფიკები, რომლებიც ახასიათებს



ნახ. 2.54

B და C კვეთების გადაადგილებების დამოკიდებულებას P ძალაზე. გამოსახულია 2.54 ნახაზზე.

განვიხილოთ ძელის განტვირთვის პროცესი. ნიშნის დიაგრამის განხილვისას (ნახ. 2.14) აღვნიშნეთ, რომ განტვირთვა ხდება დატვირთვის გრაფიკის საწყისი წრფის პარალელურად. ანალოგიურად, ძელის განტვირთვისას ძალასა და B კვეთის გადაადგილებებს შორის დამოკიდებულება გამოისახება OK წრფის პარალელური წრფით O_1K_1 (ნახ. 2. 54). C კვეთისათვის ეს დამოკიდებულება წარმოდგენილია O_2K_2 წრფით.

ძელის კვეთების მთლიანი გადაადგილება შეიძლება წარმოვიდგინოთ

$$\Delta l_B = \Delta l_{B\text{ნარ}} + \Delta l_{B\text{დრ}},$$

$$\Delta l_C = \Delta l_{C\text{ნარ}} + \Delta l_{C\text{დრ}}.$$

გადაადგილებების დრეკადი ნაწილი განისაზღვრება ჰუკის კანონით ნახ. 2.45 დ მონაცემების გამოყენებით

$$\Delta l_B = \Delta l_{B\text{ნარ}} + \frac{4}{3} \frac{Pl}{EF},$$

$$\Delta l_C = \Delta l_{C\text{ნარ}} + \frac{5}{3} \frac{Pl}{EF}.$$

ახლა მოვახდინოთ ძელის განტვირთვა ზღვრული მდგომარეობის შესაბამისი გარე ძალების ნულამდე შემცირებით; განვსაზღვროთ ნარჩენი გადაადგილებები

$$\Delta l_{B\text{ნარ}} = 45 \eta - \frac{4}{3} \frac{P_{II}l}{EF} = 5 \eta;$$

$$\Delta l_{C\text{ნარ}} = 60 \eta - \frac{5}{3} \frac{P_{II}l}{EF} = 10 \eta.$$

ძელის დატვირთვის და განტვირთვის სურათი წარმოდგენილია ნახ. 2.54-ზე.

ნორმალური ძალები, გადაადგილებების მსგავსად, შეიძლება წარმოვიდგინოთ ნარჩენი და დრეკადი ნორმალური ძალების ჩამის სახით:

$$N_1 = N_{1\text{ნარ}} + N_{1\text{დრ}}; \quad N_2 = N_{2\text{ნარ}} + N_{2\text{დრ}}; \quad N_3 = N_{3\text{ნარ}} + N_{3\text{დრ}}.$$

გავითვალისწინოთ განტვირთვის კანონი და განსაზღვროთ ამ ძალების დრეკადი ნაწილი ჰუკის კანონის შესაბამისად (ნახაზი 2.54):

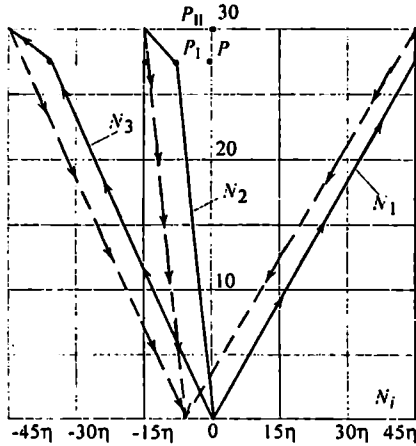
განვიხილოთ ზღვრული მდგომარეობიდან, $P = P_{II}$, ძელის განტვირთვის შედეგად ნარჩენი ნორმალური ძალები

$$N_{1\text{ნარ}} = 45 \lambda - \frac{5}{3} P_{II} = -5 \lambda,$$

$$N_{2\text{ნარ}} = -15\lambda + \frac{1}{3}P_{II} = -5\lambda,$$

$$N_{3\text{ნარ}} = -45\lambda + \frac{4}{3}P_{II} = -5\lambda.$$

ამრიგად, დატვირთვის მოხსნის შემდეგ ძელში რჩება მკუმშავი ნორმალური ძალები. ეს შიგა ძალები თვითგაწონასწორებულია.



ნახ. 2.55

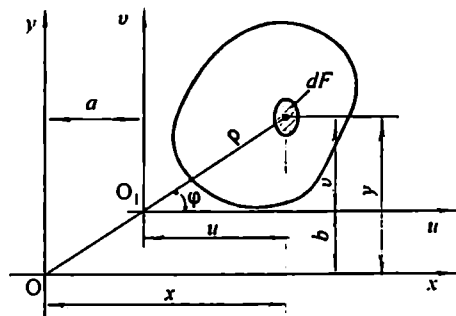
ძელის დატვირთვის და განტვირთვის შესაბამისი პროცესები ასახულია 2.55 ნახაზზე. ნორმალური ძალების ცვლელადობის გრაფიკებზე ისრებით მითითებულია დატვირთვის და შემდგომი განტვირთვის პროცესების მიმართულება.

ნარჩენი ნორმალური ძაბვების ეპიურა იმეორებს შესაბამისი ნორმალური ძალების ეპიურას იმ განსხვავებით, რომ საჭიროა მისი ორდინატების კვეთის ფართობზე გაყოფა.

III თავი. ძელის განივი კვეთის გეომეტრიული მახასიათებლები

§16. ძირითადი ცნებები. სტატიკური მომენტები

წინა თავის შესწავლისას დავადგინეთ, რომ ფართობი, როგორც ბრტყელი ფიგურის გეომეტრიული პარამეტრი, ახასიათებს სწორი ძელის წინააღმდეგობას გაჭიმვა-კუმშვაზე. მაგრამ არსებობს სხვა ნაკლებად ცნობილი მახასიათებლებიც, რომლებიც მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ ძელის ღუნვის, გრეხის, მდგრადობის, რხევისა და სხვა მოვლენების შესწავლისას.



ნახ. 3.1.

განვიხილოთ ძელის ნებისმიერი განივი კვეთი (ფიგურა) (ნახ.3.1) და დავუკავშიროთ მას კოორდინატთა x, y სისტემა. ავიღოთ dF ფართობის დიფერენციალი, გავამრავლოთ იგი Ox ღერძამდე მანძილზე და მიღებული სიდიდეები შევაჯამოთ მთელი ფართობისათვის

$$S_x = \int_F y dF. \quad (3.1)$$

ასეთი წესით განსაზღვრულ სიდიდეს Ox ღერძის მიმართ კვეთის სტატიკური მომენტი ეწოდება.

განვიხილოთ სტატიკური მომენტის ცვლილება ღერძების პარალელური გადატანისას. გამოვთვალოთ კვეთის სტატიკური მომენტი Ox ღერძის პარალელური O_1y ღერძის მიმართ.

სტატიკური მომენტის ცნების შესაბამისად,

$$S_{O_1y} = \int_F y dF = \int_F (y-b) dF = \int_F y dF - b \int_F dF$$

და (3.1) ფორმულის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$S_{O_1y} = S_x - bF. \quad (3.2)$$

ამრიგად, ღერძის პარალელური გადატანისას სტატიკური მომენტი იცვლება სიდიდით, რომელიც კვეთის ფართობისა და ღერძებს შორის მანძილის ნამრავლის ტოლია.

(3.2) ფორმულაში b სიდიდეს შეუძლია მიიღოს როგორც დადებითი, ისე უარ-

ყოფითი მნიშვნელობა. ამდენად, შესაძლებელია ვიპოვოთ ისეთი O_1 ღერძი, რომლის მიმართ სტატიკური მომენტი ნულის ტოლია, $S_H=0$. ასეთ ღერძს ცენტრალური ღერძი ეწოდება და მისი მდებარეობა განისაზღვრება (3.2) ფორმულის გამოყენებით:

$$b = y_c = \frac{S_x}{F} \quad (3.3)$$

ანალოგიურად განისაზღვრება სტატიკური მომენტი y ღერძის მიმართ

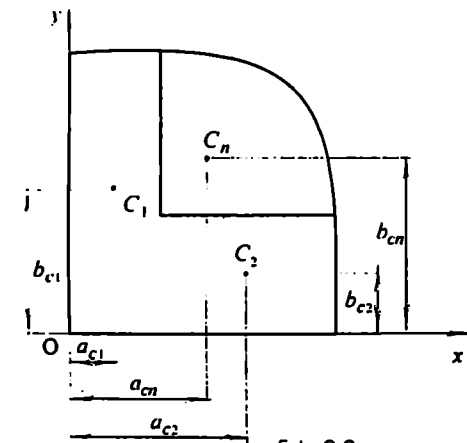
$$S_y = \int x dF. \quad (3.4)$$

x ღერძის პარალელური ცენტრალური ღერძის მდებარეობის დასადგენად მივიღებთ (3.3)-ის მსგავს ფორმულას

$$a = x_c = \frac{S_y}{F}. \quad (3.5)$$

ცენტრალური ღერძების გადაკვეთის წერტილს კვეთის სიმძიმის ცენტრი ეწოდება.

თუ ცნობილია კვეთის სტატიკური მომენტები და ფართობი, (3.3) და (3.5)



ნახ. 3.2.

ფორმულების საშუალებით შესაძლებელია კვეთის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატების დადგენა. მაგრამ ეს ფორმულები სხვა დანიშნულებითაც გამოიყენება. კერძოდ, თუ ცნობილია სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები და ფართობი, გავიანგარიშებთ კვეთის სტატიკურ მომენტებს.

განვიხილოთ მარტივი ფიგურები-საგან შედგენილი კვეთი (ნახ. 3.2), რომლის ყოველი შემადგენელი ფიგურისათვის ცნობილია სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები a_i , b_i და ფართობი F_i ; დავადგინოთ კვეთის სტატიკური მომენტები და სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

სტატიკური მომენტის ცნების შესაბამისად, 3.1. ფორმულაში, ინტეგრება F ფართზე წარმოვადგინოთ ცალკეულ შემადგენელ ფართობებზე აღებული ინტეგრალების ჯამის, ანუ შემადგენელი ფიგურების სტატიკური მომენტების ჯამის სახით

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_{x_i} = \sum_{i=1}^n F_i b_{ci};$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n S_{y_i} = \sum_{i=1}^n F_i a_{ci}. \quad (3.6)$$

შედგენილი კვეთის ფართობი

$$F = \sum_{i=1}^n F_i.$$

მაშინ შედგენილი კვეთის C სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები გამოითვლება (3.3) და (3.5)-ის გამოყენებით

$$a_c = x_c = \frac{\sum_{i=1}^n a_{ci} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad b_c = y_c = \frac{\sum_{i=1}^n b_{ci} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}. \quad (3.7)$$

სტატიკური მომენტი კვეთის ისეთი მახასიათებელია, რომელსაც შეუძლია ჰქონდეს ნებისმიერი დადებითი ან უარყოფითი მნიშვნელობა. კერძო შემთხვევაში, თუ კვეთს აქვს სიმეტრიის ღერძი, ამ ღერძის მიმართ სტატიკური მომენტი ნულის ტოლია და ღერძი გადის კვეთის სიმძიმის ცენტრში. აქედან გამომდინარე, *ორი სიმეტრიის ღერძის არსებობის შემთხვევაში კვეთის სიმძიმის ცენტრი ამ ღერძების გადაკვეთის წერტილში მდებარეობს.*

შემოვიღოთ პოლარული სტატიკური მომენტის ცნება

$$S_p = \int_F p dF. \quad (3.8)$$

ეს გეომეტრიული მახასიათებელი გამოიყენება წრიული განივი კვეთის მქონე ძელისათვის ზღვრული მგრეხავი მომენტის მნიშვნელობის დასადგენად.

§17. კვეთის ღერძული და პოლარული ინერციის მომენტები. ცენტრიდანული ინერციის მომენტი

განვიხილოთ 3.1 ნახაზზე გამოსახული კვეთისათვის შემდეგი სახის ინტეგრალები

$$I_x = \int_F y^2 dF; \quad I_y = \int_F x^2 dF. \quad (3.9)$$

კვეთის ასეთ გეომეტრიულ მახასიათებლებს ეწოდება *ინერციის ღერძული მომენტები* შესაბამისად, Ox და Oy ღერძების მიმართ. ეს პარამეტრები ახასიათებს არა მარტო კვეთის ფართობის სიდიდეს, არამედ წარმოდგენას გვიქმნის შესაბამისი ღერძების მიმართ ფართობის განაწილებაზეც.

კვეთის *პოლარული მომენტი* O წერტილის მიმართ გამოითვლება ფორმულით:

$$I_p = \int_F \rho^2 dF. \quad (3.10)$$

მაგრამ ეს გეომეტრიული პარამეტრი უკვე ახასიათებს კვეთის ფართობის განაწილებას O წერტილის მიმართ, რომელსაც *პოლუსი* ეწოდება.

პოლარული და ღერძული მომენტები ურთიერთდაკავშირებულია. შესაბამისად ფორმულის მისაღებად (3.10)-ში წარმოვადგინოთ ρ^2 , როგორც კათეტების კვადრატების ჯამი (ნახ.3.1). მაშინ:

$$I_p = \int_F (x^2 + y^2) dF = \int_F y^2 dF + \int_F x^2 dF.$$

(3.9) ფორმულის გათვალისწინებით მივიღებთ კავშირს ინერციის პოლარულ და ღერძულ მომენტებს შორის:

$$I_p = I_x + I_y. \quad (3.11)$$

ამრიგად, *ღერძული ინერციის მომენტების ჯამი უდრის კვეთის პოლარულ მომენტს ღერძების გადაკვეთის წერტილის მიმართ.*

(3.10) ფორმულით ინერციის პოლარული მომენტის განსაზღვრა დამოკიდებული არ არის Ox და Oy კოორდინატთა ღერძების მიმართულებაზე (ნახ.3.1). ამდენად, (3.11)-ის საფუძველზე ვასკვნით, რომ O წერტილში გამავალი ნებისმიერი ურთიერთმართობი ღერძების მიმართ კვეთის ინერციის მომენტების ჯამი მუდმივი სიდიდეა:

$$I_x + I_y = I_p = \text{const}. \quad (3.12)$$

კვეთის ინერციის ღერძული და პოლარული მომენტები მხოლოდ დადებითი სიდიდეებია, ამიტომ მათი წარმოდგენა შეიძლება შემდეგი სახით:

$$I_x = i_x^2 F; \quad I_y = i_y^2 F, \quad (3.13)$$

სადაც i_x და i_y კვეთის ინერციის რადიუსებია x და y ღერძების მიმართ. ინერციის რადიუსები განისაზღვრება ფორმულით:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}. \quad (3.14)$$

შევისწავლოთ ინერციის ღერძული მომენტის ცვლილება ღერძის პარალელური გადაადგილებებისას (ნახ.3.1)

$$I_u = \int_F y^2 dF = \int (y-b)^2 dF = \int y^2 dF - 2b \int y dF + b^2 \int dF,$$

ანუ

$$I_u = I_x - 2bS_x + b^2 F. \quad (3.15)$$

ანალოგიურად მივიღებთ ინერციის ღერძული მომენტის ფორმულას O_y -ს მიმართ

$$I_v = I_y - 2aS_y + a^2 F. \quad (3.16)$$

მიღებული ფორმულების საშუალებით გამოითვლება ინერციის მომენტები მოცემული ღერძის პარალელური ნებისმიერი ღერძის მიმართ, თუ მოცემული ღერძის მიმართ კვეთის გეომეტრიული მახასიათებლები ცნობილია.

(3.15) და (3.16) ზოგადი ხასიათის ფორმულებია. თუ x და y ღერძები კვეთის ცენტრალური ღერძებია, მაშინ აღნიშნული ფორმულები მარტივდება:

$$I_u = I_{x_c} + b^2 F; \quad I_v = I_{y_c} + a^2 F. \quad (3.17)$$

ნებისმიერი ღერძის მიმართ კვეთის ინერციის მომენტი უდრის ამ ღერძის პარალელური ცენტრალური ღერძის მიმართ ინერციის მომენტისა და ღერძებს შორის მანძილის კვადრატის კვეთის ფართობზე ნამრავლის ჯამს.

აქედან გამომდინარე, პარალელურ ღერძებს შორის ცენტრალურია ის ღერძი, რომლის მიმართაც ინერციის მომენტი იძენს მინიმალურ მნიშვნელობას.

განვიხილოთ კიდევ ერთი გეომეტრიული მახასიათებელი, რომელსაც კვეთის ინერციის ცენტრიდანული მომენტი ეწოდება:

$$I_{xy} = \int_F xy dF. \quad (3.18)$$

ამ მახასიათებელმა, ღერძული ინერციის მომენტებისაგან განსხვავებით, შეიძლება მიიღოს ნებისმიერი დადებითი ან უარყოფითი მნიშვნელობა. კერძოდ, თუ ერთი (ან ორივე) ღერძი კვეთის სიმეტრიის ღერძია, ასეთი ღერძისა და მისი მართობი ღერძისადმი ინერციის ცენტრიდანული მომენტი ნულის ტოლია.

დავადგინოთ ცენტრიდანული ინერციის მომენტის გამოსათვლელი ფორმულა u და v ღერძების მიმართ

$$I_{uv} = \int_F u v dF = \int_F (y-b)(x-a) dF = \int_F x y dF - b \int_F x dF - a \int_F y dF + ab \int_F dF,$$

ანუ,

$$I_{uv} = I_{xy} - b S_y - a S_x + ab F.$$

თუ x და y ცენტრალური ღერძებია, მიღებული ზოგადი ფორმულა მარტივდება:

$$I_{uv} = I_{x_c y_c} + ab F. \quad (3.19)$$

ინერციის ცენტრიდანული მომენტი u და v ღერძების მიმართ უდრის ამ ღერძების პარალელური ცენტრალური ღერძების მიმართ ცენტრიდანული ინერციის მომენტისა და კვეთის ფართობის ღერძებს შორის მანძილებზე ნამრავლის ჯამს.

ცენტრალური ღერძების მიმართ განსაზღვრულ მახასიათებლებს ეწოდება ცენტრალური ღერძული და ცენტრალური ცენტრიდანული მომენტები. (3.19) ფორმულის საფუძველზე ვასკენით: თუ ახალი u და v ღერძებიდან ერთ-ერთი ღერძი რჩება ცენტრალური, ინერციის ცენტრიდანული მომენტი არ იცვლის მნიშვნელობას, ვინაიდან, ამ შემთხვევაში a და b სიდიდეებიდან ერთ-ერთი ნულის ტოლია.

§18. კვეთის გეომეტრიული მახასიათებლების გარდაქმნა ღერძების მობრუნებისას. მთავარი ღერძები და ინერციის მთავარი ღერძული მომენტები.

განვიხილოთ ფიგურა, რომლის გეომეტრიული მახასიათებლები x და y ღერძების მიმართ ცნობილია (ნახ.3.3). დავადგინოთ კვეთის გეომეტრიული მახასიათებლების მნიშვნელობები ახალი u და v ღერძების მიმართ, რომლებიც საწყის სისტემასთან ადგენს α კუთხეს.

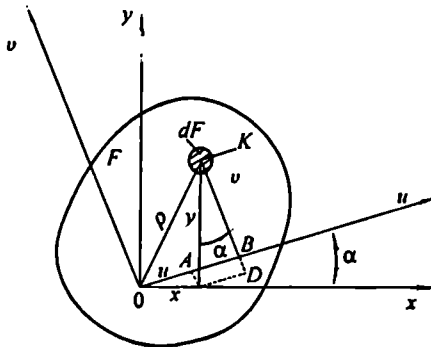
განვსაზღვროთ dF ელემენტის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები ახალ u , v კოორდინატთა სისტემაში:

$$\begin{aligned} u &= AB + OA = y \sin \alpha + x \cos \alpha, \\ v &= DK - BD = y \cos \alpha - x \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.20)$$

ახლა შეგვიძლია განვსაზღვროთ კვეთის გეომეტრიული მახასიათებლები. ინერციის მომენტი u ღერძის მიმართ.

$$I_u = \int_F \nu^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF = \cos^2 \alpha \int_F y^2 dF +$$

$$+ \sin^2 \alpha \int_F x^2 dF - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int_F xy dF$$



ნახ. 3.3.

გავითვალისწინოთ გეომეტრიული მახასიათებლები საწყისი ღერძების მიმართ, მაშინ

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha.$$

გამოსათვლელი ფორმულები დანარჩენი ორი მახასიათებლებისათვის მიიღება ანალოგიურად

$$I_\nu = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$I_{u\nu} = I_x \sin \alpha \cos \alpha - I_y \sin \alpha \cos \alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \quad (3.21)$$

მიღებული ფორმულების შემდგომი გამარტივება შესაძლებელია ტრიგონომეტრიული ფორმულების გათვალისწინებით:

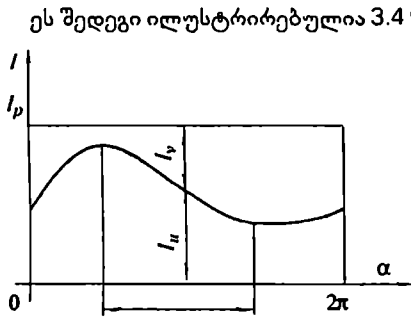
$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \text{და} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

საბოლოოდ, მივიღებთ ინერციის ღერძული და პოლარული მომენტების ფორმულებს ახალი u და ν ღერძების მიმართ:

$$\begin{aligned}
 I_u &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha; \\
 I_v &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha; \\
 I_{uv} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha.
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

ამრიგად, ღერძების მობრუნებისას გეომეტრიული მახასიათებლები იცვლება და მათი მნიშვნელობები გამოითვლება (3.22) ფორმულებით. როგორც ზემოთ აღინიშნა, ინერციის ღერძული მომენტების ჯამი მუდმივი სიდიდეა. ეს დებულება გამომდინარეობს (3.22) ფორმულებიდანაც.

$$I_u + I_v = I_x + I_y = \text{const.} \tag{3.23}$$



ნახ. 3.4.

ეს შედეგი ილუსტრირებულია 3.4 ნახაზზე გამოსახული გრაფიკით, საიდანაც ჩანს, რომ უნდა არსებობდეს ღერძები, რომელთა მიმართაც ინერციის მომენტები მიიღებენ მინიმალურ და მაქსიმალურ მნიშვნელობებს. ამასთან, ახალი ღერძები, (3.22)-ის შესაბამისად, ურთიერთმართობულია.

ღერძებს, რომელთა მიმართ ინერციის მომენტები იღებს მაქსიმალურ ან მინიმალურ მნიშვნელობებს, მთავარი ღერძები ეწოდებათ. ხოლო ამ ღერძების მიმართ ინერციის მომენტებს - ინერციის მთავარი მომენტები.

შევისწავლოთ ინერციის ღერძული მომენტი I_u ექსტრემუმზე:

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = -2 \left[\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{xy} \cos 2\alpha_0 \right] = 0, \tag{ა}$$

საიდანაც

$$\text{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \tag{3.24}$$

α_0 კუთხე ვანსაზღვრავს მთავარი ღერძის მდებარეობას Ox ღერძის მიმართ. დავამტკიცოთ, რომ u ღერძის მართობი ღერძიც მთავარი ღერძია. ამისათვის საკმარისია დავრწმუნდეთ, რომ კუთხე $\beta = (\alpha_0 + \pi/2)$ აკმაყოფილებს (ა) პირობას:

$$\begin{aligned}
 & -2 \left[\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2 \left(\alpha_0 + \frac{\pi}{2} \right) + I_{xy} \cos 2 \left(\alpha_0 + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\
 & = 2 \left[\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2 \alpha_0 + I_{xy} \cos 2 \alpha_0 \right] = 0,
 \end{aligned}$$

ე. ი. მთავარი ღერძები ურთიერთმართობული ღერძებია. ეს დებულება ფაქტიურად დავამტკიცეთ (3.22) თანაფარდობების გაანალიზებითაც.

შევადართო (3.22)-ის მესამე ფორმულა (ა) გამოსახულებას. როგორც ვხედავთ, მთავარი ღერძების მიმართ ცენტრიდანული მომენტი ნულის ტოლია. ვისარგებლოთ ამ შედეგით და განვსაზღვროთ მთავარი ინერციის მომენტების მნიშვნელობები. მთავარი ღერძებისათვის (3.22)-ის პირველი და მესამე ფორმულა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned}
 I_{\text{მთ}} - \frac{I_x + I_y}{2} &= \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2 \alpha_0 - I_{xy} \sin 2 \alpha_0; \\
 0 &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2 \alpha_0 + I_{xy} \cos 2 \alpha_0.
 \end{aligned}$$

განტოლების ორივე ნაწილი ავიყვანოთ კვადრატში და მიღებული შედეგები (მარჯვენა და მარცხენა ნაწილები) შევაჯამოთ

$$\left(I_{\text{მთ}} - \frac{I_x + I_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2,$$

საიდანაც მივიღებთ მთავარი ინერციის მომენტის ორ მნიშვნელობას

$$I_{\text{მთ}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2}. \quad (3.25)$$

ამ ფორმულაში ნიშანი „+“ განსაზღვრავს ღერძული ინერციის მომენტის მაქსიმალურ მნიშვნელობას, ხოლო „-“ მინიმალურ მნიშვნელობას.

ზოგიერთ შემთხვევაში, ინერციის მთავარი ღერძების დადგენა ხდება გაანგარიშების გარეშე. მაგალითად, თუ კვეთს აქვს სიმეტრიის ღერძი, ეს ღერძი მთავარი ღერძია. მეორე მთავარი ღერძი ამ ღერძის მართობია. ეს დებულება უშუალოდ გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ ცენტრიდანული ინერციის მომენტი კოორდინატთა ღერძების მიმართ, რომელთაგან ერთ-ერთი სიმეტრიის ღერძია, ნულის ტოლია.

მთავარ ღერძებს, რომლებიც კვეთის სიმძიმის ცენტრში გადის, მთა-

ვარი ცენტრალური ღერძები ეწოდება. ინერციის მომენტები ამ ღერძების მიმართ მთავარი ცენტრალური ინერციის მომენტებია.

როგორც დავრწმუნდით, კოორდინატთა ღერძების მობრუნებას მოჰყვება ბრტყელი ფიგურის გეომეტრიული მახასიათებლების ცვლილებები. მაგრამ ამ მახასიათებლიდან შეიძლება ისეთი კომბინაციის შერჩევა, რომ მიღებული სიდიდის (რომელსაც ინვარიანტს უწოდებენ) მნიშვნელობა არ შეიცვლება, (3.23).

მეორე ინვარიანტს, რომლის მნიშვნელობები ჩაიწერება (3.22) ფორმულების გამოყენებით, აქვს სახე

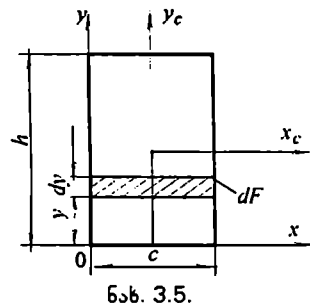
$$I_x \cdot I_y - I_{xy}^2 = I_u \cdot I_v - I_{uv}^2 = \text{const.} \quad (3.26)$$

ეს სიდიდე გამოყენებული იქნება ძელის ღუნვის ზოგადი ამოცანის განხილვისას.

მესამე თავის მაგალითები

მაგალითი 3.1. განვსაზღვროთ მართკუთხედის ინერციის ღერძული და ცენტრიდანული მომენტები მახასიათებელი ღერძების მიმართ (ნახ.3.5).

ინერციის მომენტი Ox ღერძის მიმართ განისაზღვრება (3.9)-ის შესაბამისად



ნახ. 3.5.

$$I_x = \int_F y^2 dF = \int_0^h y^2 c dy = c \int_0^h y^2 dy = c \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^h$$

საიდანაც მივიღებთ ფორმულას

$$I_x = \frac{ch^3}{3}. \quad (3.27)$$

(3.17)-ის პირველი ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ ინერციის მომენტს ცენტრალური ღერძის მიმართ

$$I_{x_c} = I_x - b^2 F = \frac{ch^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 ch,$$

აქედან

$$I_{x_c} = \frac{ch^3}{12}. \quad (3.28)$$

ანალოგიურად მიიღება ინერციის მომენტები y და y_c ღერძების მიმართ

$$I_y = \frac{hc^3}{3}; \quad I_{y_c} = \frac{hc^3}{12}. \quad (3.29)$$

რადგანაც x_c და y_c მთავარი ღერძებია, მათ მიმართ ცენტრიდანული მომენტი ნულის ტოლია: $J_{x_c y_c} = 0$. ამიტომ (3.19)-ის გამოყენებით იოლად დავადგენთ x და y ღერძების მიმართ კვეთის ცენტრიდანულ მომენტს

$$I_{xy} = abF = \left(-\frac{c}{2}\right)\left(-\frac{h}{2}\right)ch = \frac{c^2 h^2}{4}. \quad (3.30)$$

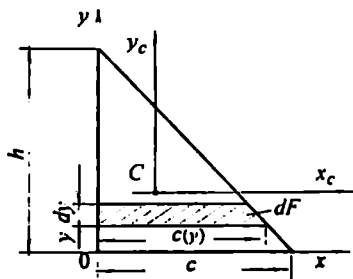
მაგალითი 3.2. განვიხილოთ სამკუთხედის ფორმის ფიგურა (ნახ.3.6). დავადგინოთ მისი გეომეტრიული მახასიათებლების მნიშვნელობები.

განვსაზღვროთ ინერციის მომენტი x ღერძის მიმართ

$$I_x = \int_F y^2 dF = \int_0^h y^2 c(y) dy = \int_0^h y^2 \frac{c}{h} (h-y) dy = \frac{c}{h} \left(h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^h = \frac{ch^3}{12}. \quad (3.31)$$

ინერციის მომენტი x_c ღერძის მიმართ განისაზღვრება (3.17)-ის პირველი ფორმულის გამოყენებით

$$I_{x_c} = I_x - b^2 F = \frac{ch^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{ch}{2} = \frac{ch^3}{36}. \quad (3.32)$$



ნახ. 3.6.

ანალოგიურად მიიღება ინერციის მომენტები y და y_c ღერძების მიმართ

$$I_y = \frac{hc^3}{12}; \quad I_{y_c} = \frac{hc^3}{36}. \quad (3.33)$$

განვსაზღვროთ ცენტრიდანული მომენტი x და y ღერძების მიმართ. ამისათვის წინასწარ გამოვთვალოთ ეს სიდიდე dF ფართობის დიფერენციალისათვის

$$\begin{aligned} dI_{xy} &= \frac{c(y)}{2} y [c(y) dy] = \frac{c^2(y)}{2} y dy = \frac{1}{2} \left[\frac{c}{h} (h-y) \right]^2 y dy = \\ &= \frac{c^2}{2h^2} (h^2 y - 2hy^2 + y^3) dy. \end{aligned}$$

ინტეგრირებით მივიღებთ სამკუთხედის ცენტრიდანულ მომენტს

$$I_{xy} = \int_0^h \frac{c^2}{2h^2} (h^2 y - 2hy^2 + y^3) dy = \frac{c^2 h^2}{24}. \quad (3.34)$$

ცენტრალური ღერძების მიმართ ინერციის ცენტრიდანული მომენტის განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ (3.19) ფორმულა

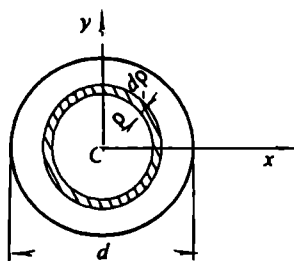
$$I_{x_c y_c} = I_{xy} - abF = \frac{c^2 h^2}{24} - \left(\frac{c}{3}\right)\left(\frac{h}{3}\right)\frac{ch}{2} = -\frac{c^2 h^2}{72}. \quad (3.35)$$

მაგალითი 3.3. განვსაზღვროთ ინერციის პოლარული და ღერძული მომენტები წრიული ფიგურისათვის (ნახ.3.7). ინერციის პოლარული მომენტის დასადგენად გამოვიყენოთ (3.10) ფორმულა. ელემენტარული ფართობი წარმოვიდგინოთ $d\rho$ სიგანისა და $2\pi\rho$ სიგრძის წრიული ფიგურის სახით (ნახ.3.7), რომლის ფართობი $dF = 2\pi\rho d\rho$. გავითვალისწინოთ ეს შედეგი (3.10) ფორმულაში

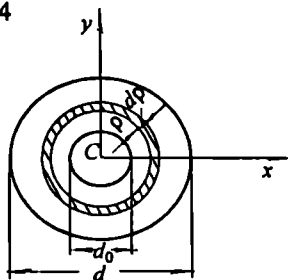
$$I_P = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi\rho^4}{2} \Big|_0^{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (3.36)$$

განვსაზღვროთ ინერციის ღერძული მომენტები. აღვნიშნოთ, რომ ეს მომენტები x და y ღერძების მიმართ ტოლია $I_x = I_y$. მაშინ (3.11)-დან მივიღებთ

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (3.37)$$



ნახ. 3.7.



ნახ. 3.8.

განვსაზღვროთ ფიგურისათვის პოლარული სტატიკური მომენტი (3.8)-ის შესაბამისად

$$S_P = \int_F \rho dF = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi d^3}{12}. \quad (3.38)$$

მაგალითი 3.4. წრიული ღრუ ფიგურისათვის განვსაზღვროთ ინერციის პოლარული და ღერძული მომენტები (ნახ.3.8).

ელემენტარული ფართობი და ინტეგრალი ჩაიწერება მაგალითი 3.3-ის მსგავსად: შეიცვლება მხოლოდ ინტეგრირების ქვედა საზღვარი:

$$I_P = \int_F \rho^2 dF = \int_{\frac{d_0}{2}}^{\frac{d}{2}} 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32} - \frac{\pi d_0^4}{32}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $c = d_0/d$. ამ შემთხვევაში ინერციის პოლარული მომენტი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4) \quad (3.39)$$

ინერციის ღერძული მომენტები, წინა მაგალითის ანალოგიურად, ერთმანეთის ტოლია. ამიტომ (3.11) ფორმულიდან მივიღებთ:

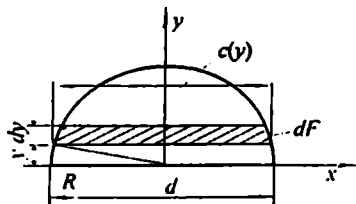
$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4) \quad (3.40)$$

გავინაგარიშოთ პოლარული სტატიკური მომენტი

$$S_P = \int_{\frac{d_0}{2}}^{\frac{d}{2}} \rho 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi d^3}{12} (1 - c^3) \quad (3.41)$$

მაგალითი 3.5. განვსაზღვროთ ფიგურის ინერციის მთავარი ცენტრალური მომენტები (ნახ.3.9).

y სიმეტრიის ღერძია. ამასთან, იგი მთავარი ცენტრალური ღერძიცაა და მის მიმართ ინერციის მომენტი წრის ღერძული ინერციის მომენტის ნახევრის ტოლია. ფორმულის (3.37)-ის შედეგების გათვალისწინებით, განვსაზღვროთ ეს სიდიდე ($d=2R$)



ნახ. 3.9.

$$I_y = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi R^4}{8}.$$

გამოვთვალოთ ფიგურის სიმძიმის ცენტრის b_c კოორდინატი (ნახ.3.9). ამისათვის, წინასწარ ვიპოვოთ ფიგურის სტატიკური მომენტი x ღერძის მიმართ

$$S_x = \int_F y dF = \int_0^R y c(y) dy = \int_0^R 2y \sqrt{R^2 - y^2} dy =$$

$$= \int_0^R \sqrt{R^2 - y^2} d(y^2) = -\frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2} \Big|_0^R = \frac{2R^3}{3}. \quad (3.42)$$

ფიგურის ფართობი $F = (\pi R^2/2)$. (3.3) ფორმულით დავადგენთ სიმძიმის ცენტრის b_c კოორდინატს

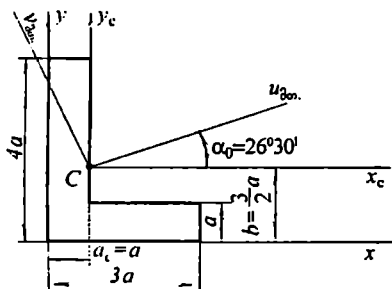
$$b_c = \frac{S_x}{F} = \frac{2R^3/2}{3\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0,42R. \quad (3.43)$$

x_c ღერძის მიმართ ინერციის მომენტი გამოითვლება (3.17)-ის პირველი ფორმულის საშუალებით:

$$I_{x_c} = I_x - b^2 F = \frac{\pi d^4}{128} - \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \frac{\pi d^2}{8} \approx 0,0069d^4 = 0,11R^4$$

მაგალითი 3.6. დავადგინოთ ფიგურის (ნახ.3.10) მთავარი ცენტრალური ღერძების მდებარეობა. გავიანგარიშოთ ინერციის მომენტები ამ ღერძების მიმართ.

მოცემული ფიგურა წარმოვიდგინოთ ორი მართკუთხედისაგან შედგენილი ფიგურის სახით. (3.7) ფორმულებით დავადგინოთ მისი სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები



ნახ. 3.10.

$$a_c = \frac{4a^2 \frac{a}{2} + 2a^2 2a}{4a^2 + 2a^2} = a;$$

$$b_c = \frac{4a^2 2a + 2a^2 \frac{a}{2}}{4a^2 + 2a^2} = \frac{3}{2}a.$$

განვსაზღვროთ კვეთის ინერციის მომენტები ცენტრალური ღერძების მიმართ

$$I_{x_c} = \frac{a(4a)^3}{12} + \left(-\frac{a}{2}\right)^2 4a^2 + \frac{2aa^3}{12} + (a)^2 2a^2 = 8,5a^4;$$

$$I_{y_c} = \frac{4aa^3}{3} + \frac{a(2a)^3}{3} = 4a^4$$

დავადგინოთ ინერციის ცენტრიდანული მომენტი ცენტრალური ღერძების მიმართ

$$I_{x_c y_c} = \left(-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)4a^2 + a(-a)2a^2 = -3a^4$$

კვეთის მთავარი ცენტრალური ღერძების მდებარეობა განისაზღვრება (3.24) ფორმულის საშუალებით:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} = \frac{2(-3a^4)}{4a^4 - 8,5a^4} = 1,33.$$

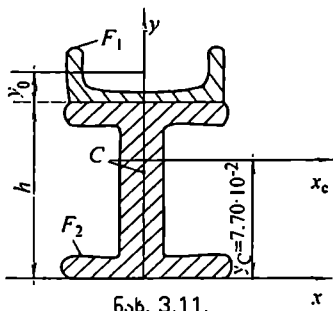
აქედან, კუთხე, რომელსაც პირველი მთავარი ღერძი ადგენს x_c ღერძთან, $\alpha_0 = 26^\circ 30'$. მეორე მთავარი ღერძი პირველის მთავარი ღერძის მართობულია (ნახ. 3.10) განვსაზღვროთ მთავარი ცენტრალური მომენტების მნიშვნელობები (3.25)-ის მიხედვით:

$$I_{\text{მთ}} = \frac{8,5a^4 + 4a^4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8,5a^4 - 4a^4}{2}\right)^2 + (-3a^4)^2}$$

საბოლოოდ, მივიღებთ ფიგურის ინერციის ცენტრალური ღერძული მომენტების მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობებს

$$I_{\max} = 10a^4; \quad I_{\min} = 2,5a^4$$

მაგალითი 3.7. კვეთი შედგენილია ვარცლოვანი (№8) და ორტესებრი (№10) პროფილებისაგან (ნახ.3.11). განვსაზღვროთ კვეთის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა



ნახ. 3.11.

და დავადგინოთ ინერციის მომენტი ჰორიზონტალური ცენტრალური ღერძის მიმართ (ნახ.3.11). გაანგარიშებისას ვისარგებლოთ სტანდარტული პროფილების შესაბამისი ცხრილების მონაცემებით (იხ. დანართი), რომელთა საშუალებითაც განვსაზღვრავთ გაანგარიშებისათვის საჭირო სიდიდეებს:

ა) ვარცლოვანი პროფილი №8:

$$y_0 = 1,31 \cdot 10^{-2} \text{ მ}; \quad I_{x_{c_1}} = 12,8 \cdot 10^{-8} \text{ მ}^4;$$

$$F_1 = 9,98 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^2$$

ბ) ორტესებრი პროფილი №10:

$$h = 0,1 \text{ მ}; \quad I_{x_{c_2}} = 198 \cdot 10^{-8} \text{ მ}^4; \quad F_2 = 12 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^2.$$

დავადგინოთ კვეთის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები

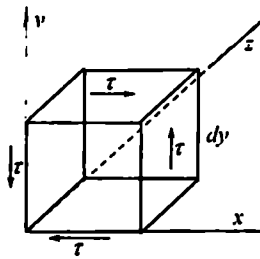
$$y_c = \frac{8,98(10+1,31)+12 \cdot 5}{8,98+12} 10^{-2} = 7,70 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

კვების ინერციის ცენტრალური ლერძული მომენტი

$$\begin{aligned} I_{x_c} &= [12,8 + (1,31+10-7,70)^2 8,98 + 198 + (7,65-5)^2 + 12] \cdot 10^{-8} \\ &= 415,31 \cdot 10^{-8} \text{ მ}^4. \end{aligned}$$

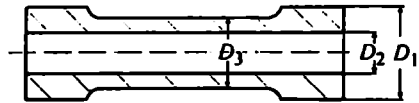
§19. სუფთა ძვრა. დეფორმაციის ხვედრითი პოტენციალური ენერგია

როგორც ცენტრალური გაკიშვა-კუმშვის განხილვისას (თავი II) ვნახეთ, არსებობს ნორმალური ძაბვებით ელემენტის დატვირთვის ისეთი შემთხვევა, როცა საწყისი ელემენტის წახნაგებისადმი 45° -ით დახრილი ელემენტის წახნაგებზე აღიძვრება მხოლოდ მხები ძაბვები (ნახ.4.1). ასეთი დაძაბული მდგომარეობისათვის, რომელსაც სუფთა ძვრა ვუწოდებთ (§9), სამართლიანია მხები ძაბვების წვეტილადობის კანონი. სუფთა ძვრისათვის ჰუკის კანონი ჩაიწერება შემდეგი სახით



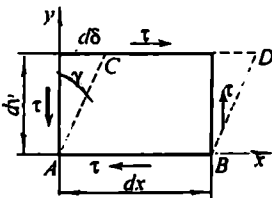
ნახ. 4.1

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (4.1)$$



ნახ. 4.2

მეორე რიგის დრეკადობის მოდული G განისაზღვრება (2.29)-ის გამოყენებით პირველი რიგის დრეკადობის მოდულის და პუასონის კოეფიციენტის საშუალებით. არსებობს G -ს განსაზღვრის სხვა გზაც. კერძოდ, თხელკედლიანი მილისებრი ნიმუშის გრებაზე (ნახ.4.2) გამოცდის შედეგად დავადგენთ დრეკადობის მეორე რიგის მოდულს და პროპორციულობის, დრეკადობის, დენადობისა და სიმტკიცის ზღვრებს სუფთა ძვრისათვის. აღნიშნული საკითხების დეტალურად განხილვა საჭირო არ არის, რადგანაც შეგვიძლია ვისარგებლოთ მასალის გაკიშვის დიაგრამითაც, სადაც σ და ϵ შეიცვლება შესაბამისად τ მხები ძაბვებით და γ კუთხური დეფორმაციით.



ნახ. 4.3

სუფთა ძვრის დროს ელემენტის დეფორმირების შედეგად შიგა ძალები ასრულებს მუშაობას, რომელსაც დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია ვუწოდებთ. განვსაზღვროთ დეფორმაციის ხვედრითი პოტენციალური ენერგია. ამისათვის წარმოვადგინოთ 4.1 ნახაზზე ნაჩვენები ელემენტი დეფორმირებულ მდგომარეობაში (ნახ.4.3). ჩავთვალოთ, რომ AB წახნაგი უძრავია. რაც შეეხება AC და BD წახნაგებს, ისინი გადა-

ადგილებიან მათზე მოქმედი ძალის მართობული მიმართულებით. ამდენად, მუშაობას ასრულებს მხოლოდ CD წახნაგზე მოქმედი ძალა $dT = \tau dx dz$. შესაბამისი გადაადგილებაა $d\delta = \gamma dy$. შესრულებული მუშაობა განისაზღვრება (2.16)-ის საშუალებით

$$dU = \frac{dT d\delta}{2} = \frac{\tau \gamma dx dy dz}{2} = \frac{\tau^2}{2G} dV,$$

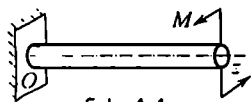
სადაც $dV = dx dy dz$ არის ელემენტის მოცულობა. დეფორმაციის ხვედრითი პოტენციალურა ენერგია არის

$$a = \frac{dU}{dV} = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (4.2)$$

სხეულისათვის, სუფთა ძვრის შემთხვევაში დეფორმაციის საერთო პოტენციალური ენერგია მიიღება (4.2) ფორმულიდან ინტეგრებით

$$U = \int (V) \frac{\tau^2}{2G} dV \quad (4.3)$$

დავადგინოთ მუშაობა, რომელსაც ასრულებს სწორი ძელის ღერძის მართობ სიბრტყეში მოქმედი მომენტი (ნახ.4.4). ჩავთვალოთ, რომ ამ შემთხვევაშიც დრეკად სხეულზე მოდებულ ძალასა და შესაბამის გადაადგილებას შორის დამოკიდებულება წრფივია და (ნახ.2.5)-ის ანალოგიური იქნება. ამიტომ მომენტის მიერ შესრულებული მუშაობა



ნახ. 4.4

$$A = \frac{M\phi}{2}, \quad (4.4)$$

სადაც ϕ არის მომენტის მოქმედების კვეთის მობრუნების კუთხე.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ძელზე ერთდროულად მოქმედებს n მომენტები, მუშაობის გამოსათვლელად მივიღებთ (2.17)-ის ანალოგიურ ფორმულას

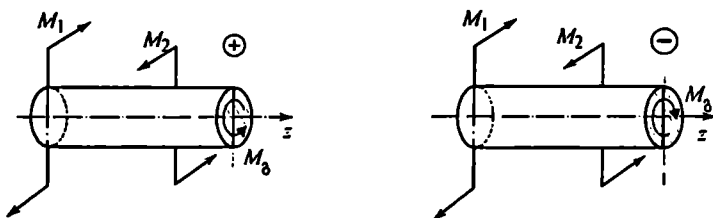
$$A = \sum_{i=1}^n \frac{M_i \phi_i}{2}, \quad (4.5)$$

სადაც ყოველი M_i მომენტი მრავლდება მისი მოქმედების კვეთის მობრუნების ϕ_i კუთხეზე.

§20. წრიული განივკვეთიანი სწორი ძელის გრეხა

გრეხა არის დატვირთვის ისეთი შემთხვევა, როდესაც ძელის განივ კვეთში აღიძვრება მხოლოდ მგრები მომენტი. მგრები მომენტი დადებითია, თუ კვეთის გარე ნორმალის მხრიდან დაკვირვებისას კვეთში მისი მიმართულება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგოა და უარყოფითია, თუ მისი მიმართულება ემთხვევა საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებას (ნახ. 4.5).

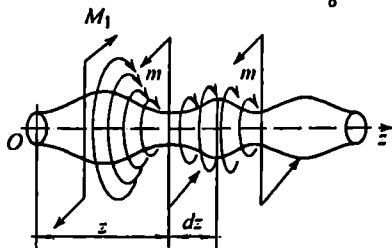
გრების შედეგად ძელის განივ კვეთში აღიძვრება მხები ძაბვები და ძელის ელემენტები განიცდის კუთხურ დეფორმაციებს. დავადგინოთ ძაბვებისა და დეფორმაციების განაწილების კანონზომიერება, მათი მაქსიმალური მნიშვნელობები, კვეთის მოზრუნების კუთხე და გაანგარიშებისათვის საჭირო სხვა სიდიდეები.



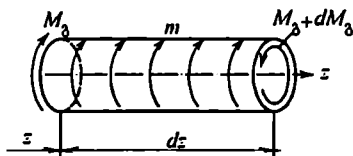
ნახ. 4.5

განვიხილოთ წრიული განივი კვეთის ძელი, რომელიც დატვირთულია ძელის ღერძის მართობ სიბრტყეში (ნახ. 4.6) მოქმედი M , შეეურსული და m ინტენსიურობის განაწილებული მომენტებით. ძელის საწყისი კვეთიდან z მანძილზე ამოვკვეთოთ dz სიგრძის ელემენტი (ნახ. 4.7). შევადგინოთ ელემენტის წონასწორობის პირობა

$$M_0 + dM_0 - M_0 - mdz = 0,$$



ნახ. 4.6



ნახ. 4.7

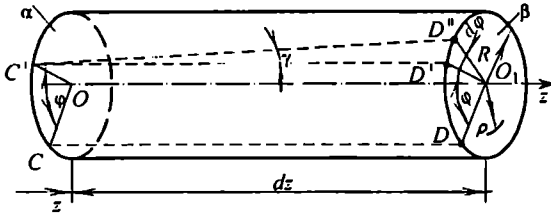
საიდანაც მივიღებთ დიფერენციალურ დამოკიდებულებას მგრებ მომენტსა და გარე მომენტებსა: ინტენსიურობას შორის

$$\frac{dM_0}{dz} = m. \quad (4.6)$$

მიღებული ფორმულით დავადგენთ მგრებს მომენტს ძელის ნებისმიერ კვეთში

$$M_z = M_0 + \int_0^z m dz. \quad (4.7)$$

(4.7) ფორმულა ითვალისწინებს შეყურსული მომენტების მოქმედებას მხოლოდ საწყის კვეთამდე. მგრები მომენტის M_0 მნიშვნელობა განისაზღვრება საწყის კვეთამდე მოქმედი შეყურსული და განაწილებული მომენტების ჯამით.



ნახ. 4.8

მხები ძაბვებისათვის საანგარიშო ფორმულების მისაღებად ვაკეთებთ ძირითად დაშვებას, რომ ძელის გრებისას განივი კვეთი მობრუნდება დეფორმაციის გარეშე და კვლავ ბრტყელი და ღერძის მართობი რჩება. მუდმივი განივი კვეთიანი ძელისათვის დრეკადობის თეორიის გამოყენებით ამოცანა ზუსტად ამოიხსნება აღნიშნული დაშვების გარეშე, და შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ძელის დეფორმაციების თაობაზე ვაკეთებული ზემოაღნიშნული დაშვება სინამდვილეს შეესაბამება. აქ, წინასწარი დაშვების საშუალებით შესაძლებელია სასურველი შედეგის მარტივი გზით მიღება.

განვიხილოთ ძელის ელემენტი დეფორმირებულ მდგომარეობაში (ნახ.4.8).

ძელის დეფორმაციის შედეგად α კვეთი მობრუნდება φ კუთხით და OC რადიუსი გადავა OC' რადიუსში. ელემენტის გრების შედეგად β კვეთის მობრუნება იქნება $(\varphi + d\varphi)$.

აღწერილი სურათის შესაბამისად, კუთხური დეფორმაცია, რომელიც მართი კუთხის ცვლილებას წარმოადგენს, უდრის $D'C'D''$ კუთხეს

$$\gamma \approx \text{tg } \gamma = \frac{D'D''}{CD} = R \frac{d\varphi}{dz}. \quad (4.8)$$

ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ მცირე სიდიდის დეფორმაციებს და გადაადგილებებს, რის საფუძველზე ვაკეთდა დაშვება, რომ $\gamma \approx \text{tg } \gamma$

ამრიგად, განვიხილოთ და დავადგინოთ ძელის ზედაპირთან მდებარე ელემენტის კუთხური დეფორმაცია. ანალოგიურად შეიძლება ამოიკვეთოს ძელის ღერძის

განვიხილოთ ρ რადიუსის ცენტრალური ცილინდრული ნაწილი და განვიხილოთ მისი დეფორმირების სურათი, მივიღოთ ამოკვეთილი ცილინდრის ზედაპირზე კუთხური დეფორმაციის მნიშვნელობა, რომელიც (4.8) განსხვავდება მხოლოდ რადიუსის მნიშვნელობით $-R$ -ის ნაცვლად გვექნება ρ

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz} \quad (4.9)$$

აქედან გამომდინარე, კუთხური დეფორმაციები კვეთში წრფივი კანონით იცვლება: ნულის ტოლია ცენტრში და მაქსიმალური მნიშვნელობისაა ძელის ზედაპირთან.

გამოვიყენოთ ჰუკის კანონი და დავუკავშიროთ ერთმანეთს დეფორმაციები და ძაბვები

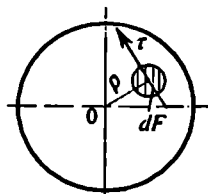
$$\tau = G\gamma = G\rho \frac{d\varphi}{dz} \quad (4.10)$$

სადაც

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} \quad (4.11)$$

θ არის ძელის ფარდობითი გრების კუთხე, ანუ კუთხე, რომელზედაც მობრუნდება ძელის ერთეულოვანი სიგრძის ელემენტის მარჯვენა ბოლო კვეთი მარცხენა საწყისი კვეთის მიმართ (რად/მ).

გამოვიანგარიშოთ განივ კვეთში მოქმედი მგრები მომენტი, (ნახ.4.9).



ნახ. 4.9

განვიხილოთ კვეთის ცენტრიდან ρ მანძილზე მდებარე dF სიდიდის ფართობის მქონე ელემენტი. ამ ელემენტზე იმოქმედებს ძეები τ ძაბვა, ამიტომ რადიუსის მართობი მიმართული ელემენტზე მოქმედი ძალა იქნება τdF . ეს ძალა კვეთის ცენტრის მიმართ გვაძლევს მგრები მომენტის დიფერენციალს

$$dM_{\phi} = (\tau dF) \rho. \quad (4.12)$$

მგრები მომენტის მნიშვნელობის დასადგენად საჭიროა ჩავატაროთ ინტეგრება კვეთის მთელ ფართობზე (4.10)-ის გათვალისწინებით

$$M_{\phi} = \int_F G\theta \rho^2 dF = G\theta \int_F \rho^2 dF.$$

ამ გამოსახულებაში გავითვალისწინოთ ინერციის პოლარული მომენტის გამოსათვლელი (3.10) ფორმულა და გადავწეროთ იგი შემდეგი სახით

$$M_{\phi} = G\theta J_{\rho}.$$

მიღებული ფორმულის საშუალებით დავადგენთ ფარდობითი გრების კუთხეს

$$\theta = \frac{M_b}{GI\rho}. \quad (4.13)$$

თუ შევადარებთ ამ ფორმულასა და წრფივი დეფორმაციების (2.6) ფორმულას, დავრწმუნდებით მათ მსგავსებაში: მგრები მომენტი გრების პროცესში იმავე როლს ასრულებს, რასაც ნორმალური ძალა გაჰიმვა-კუმშვისათვის. ამ უკანასკნელისათვის (2.6) ფორმულაში სიხისტე განისაზღვრება EF ნამრავლით. გრებისათვის სიხისტე ეწოდება $GI\rho$ სიდიდეს. ამრიგად, პოლარული მომენტი გრებისათვის იმავე როლს ასრულებს, როგორსაც გაჰიმვა-კუმშვისათვის კვეთის F ფართობი.

ძაბვების საბოლოო ფორმულის მისაღებად (4.10) გამოსახულებაში გავითვალისწინოთ (4.13) ფორმულა

$$\tau = \frac{M_b}{I\rho} \rho. \quad (4.14)$$

მხები ძაბვები, ისევე როგორც კუთხური დეფორმაციები, კვეთში წრფივი კანონით იცვლება. მათი მნიშვნელობა ნულს უდრის ცენტრში და მაქსიმუმს აღწევს კვეთის ზედაპირთან

$$\tau_{\max} = \frac{M_b}{I\rho} \rho_{\max}. \quad (4.15)$$

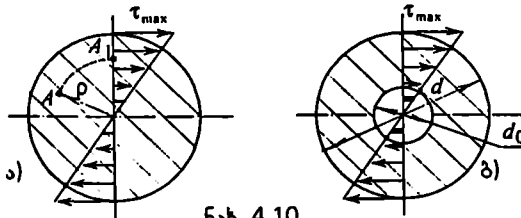
შემოვიღოთ წინააღობის პოლარული მომენტის ცნება

$$W_p = \frac{I\rho}{\rho_{\max}}. \quad (4.16)$$

(4.16)-ის გათვალისწინებით (4.15) ფორმულა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\tau_{\max} = \frac{M_b}{W_p}. \quad (4.17)$$

წრიული განივი კვეთისათვის წინააღობის პოლარული მომენტის მნიშვნელობას ვადგენთ (3.36) ფორმულის გამოყენებით (ნახ.4.10ა)



ნახ. 4.10

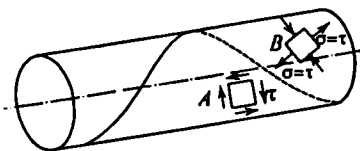
$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (4.18)$$

წრიული ღრუ კვეთისათვის მისი მნიშვნელობა მიიღება (3.39)-ის საფუძველზე (ნახ.4.10 ბ)

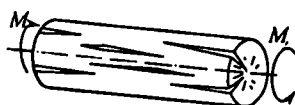
$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4) \approx 0,2d^3(1 - c^4) \quad (4.19)$$

სადაც $c = d_0 / d$.

წრიულ და წრიულ ღრუ კვეთებში მხები ძაბვების ეპიურები ნაჩვენებია 4.10 ნახაზზე. ამ ეპიურების შესაბამისად, კვეთის ნებისმიერ A წერტილში ძაბვა ცენტრიდან იმავე რადიუსით დაცილებულ A_1 წერტილში არსებული ძაბვის ტოლია.



ნახ. 4.11



ნახ. 4.12

ამრიგად, გრეხისას ძელის წინააღმდეგობის უნარი განპირობებულია არა უშუალოდ კვეთის ფართობით, არამედ მისი წინაღობის პოლარული მომენტის სიდიდით. ამ თვალსაზრისით უფრო რაციონალურია მილისებრი ძელები, რომელთა წინააღობის მომენტი ერთი და იგივე განივი კვეთის ფართობის შემთხვევაში მეტია მთლიანი კვეთის წინააღობის მომენტზე. ეს იმით აიხსნება, რომ მთლიანი კვეთის ცენტრალურ ზონაში ძაბვები უმნიშვნელოა და შესაბამისი მასალის სიმტკიცის თვისებები სრულყოფილად არ გამოიყენება. მილისებრი ძელის კვეთს ასეთი ზონა არა აქვს – კვეთში ძაბვები შედარებით თანაბრადაა განაწილებული.

განვიხილოთ ძელის ზედაპირთან მდებარე ორი ელემენტის დაძაბული მდგომარეობა (ნახ.4.11), პირველი, A ელემენტი ამოკვეთილია ძელის ღერძის მართობი და ამ ღერძზე გამავალი კვეთებით, მეორე, B ელემენტის წახნაგები პირველი ელემენტის წახნაგების მიმართ მობრუნებულია 45° -ით. პირველი ელემენტის წახნაგებზე მხოლოდ მხები ძაბვები მოქმედებს.

როგორც დავადაგინეთ, მეორე ელემენტი, რომელზეც მოქმედებს ნორმალური ძაბვა $\sigma = \tau$, ერთი მიმართულებით განიცდის გაჭიმვას, ხოლო მეორე, მართობული მიმართულებით – კუმშვას, ხოლო მასზე მოქმედი ნორმალური ძაბვა იმავე სიდიდისაა. ელემენტების დაძაბულობის ასეთი თავისებურებები თავს იჩენს სხვადასხვა მასალისაგან დამზადებული ძელების გრეხისას. თუ თუქისაგან (ან რომელიმე მყიფე მასალისაგან), რომელიც სუსტად ეწინააღმდეგება გაჭიმვას, დამზადებული მილისებრი ნიმუში დამსხვრევამდე დაიგრძობება, მაშინ მის ზედაპირთან წარმოიქმნება ხრახნისებრი ბზარები, რომელთა მიმართულება

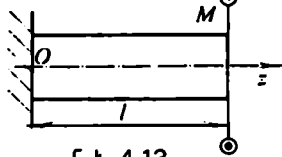
ღერძის მიმართულებასთან შეადგენს 45° -ს (ნახ.4.11). ეს მაქსიმალური გამჭიმავი ნორმალური ძაბვების მოქმედების შედეგია. თუ იგივე ნიმუში დამზადებულია ხის მასალისაგან, დამსხვრევისას სურათი სხვაგვარია: ხე ანიზოტროპული მასალაა და მისი სიმტკიცის მახასიათებელი ბოჭკოების გასწვრივ შედარებით დაბალია. ამიტომ, აქ უკვე თავს იჩენს მაქსიმალური მხები ძაბვები და ნიმუშზე წარმოიქმნება გრძივი ბზარები (ნახ.4.12).

კვეთის მობრუნების კუთხეს განვსაზღვრავთ (4.13)-ის საშუალებით

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^z \frac{M_\delta dz}{GI_p} \quad (4.20)$$

თუ საწყისი კვეთის მობრუნების კუთხე $\varphi_0=0$, ამასთან, ძელი მუდმივ განივ-კვეთიანია და ნებისმიერ კვეთში მგრები მომენტიც ერთი და იმავე სიდიდისაა. ე.ი. $M_\delta = M$ (ნახ.4.13), ძელის მობრუნების კუთხე განისაზღვრება ფორმულით

$$\varphi = \frac{Ml}{GI_p} \quad (4.21)$$



ნახ. 4.13

გარე ძალების მუშაობა გრებისას გაიანგარიშება (4.5) ფორმულის გამოყენებით. დეფორმაციის პოტენციალური ენერჯიის დასადგენად გამოვიყენოთ (4.3) ფორმულა, რომელშიც გავითვალისწინოთ მხები ძაბვების მნიშვნელობა (4.14)-ის შესაბამისად:

$$U = \int_V \frac{1}{2G} \left(\frac{M_\delta}{I_p} \rho \right)^2 dV = \int_l \left[\frac{M^2}{2GI_p^2} \int_F \rho^2 dF \right] dz.$$

თუ გავითვალისწინებთ ინერციის პოლარული მომენტის მნიშვნელობას (3.10)-ის მიხედვით, მივიღებთ დეფორმაციის პოტენციალური ენერჯიის გამოსათვლელ ფორმულას ძელის გრებისათვის.

$$U = \int_l \frac{M_\delta^2}{2GI_p} dz \quad (4.22)$$

მუდმივი განივკვეთიანი ძელის მუდმივი მომენტით დატვირთვისას (ნახ.4.13), (4.22)-ის ინტეგრირებით მივიღებთ:

$$U = \frac{M_\delta^2 l}{2GI_p} \quad (4.23)$$

(4.22) და (4.23) ფორმულების ადრე მიღებულ შედეგებთან შედარებისას

კიდევ ერთხელ ვრწმუნდებით გაქიმვა-კუმშვისა და გრების პროცესების ანალოგიურობაში.

§21. წრიული განიგვეთიანი ძელის გაანგარიშება სიმტკიცესა და სიხისტეზე

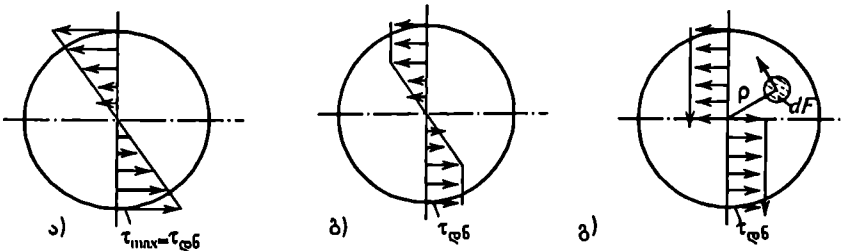
ზღვრული ძაბვების მეთოდით კონსტრუქციის გაანგარიშებისათვის დასაშვები მხები ძაბვების მნიშვნელობას დავადგენთ პლასტიკური მასალისათვის დენადობის ზღვრის ($\tau_{\phi} = \tau_{\phi n}$), ხოლო მყიფე მასალისათვის – სიმტკიცის ზღვრისა ($\tau_{\phi} = \tau_{\phi}$) და მარაგის კოეფიციენტის საშუალებით

$$[\tau] = \frac{\tau_{\phi}}{n} \quad (4.24)$$

სიმტკიცის პირობას აქვს სახე:

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad (4.25)$$

მაქსიმალური ძაბვების ძელის ღერძის გასწვრივ ეპიურის ასაგებად ვიყენებთ (4.17) ფორმულას. ეპიურის საშუალებით ვადგენთ საშიშ კვეთს. შევნიშნოთ, რომ (4.17)-ში მაქსიმალური ძაბვა გამოხატავს კვეთში ძაბვის უდიდეს მნიშვნელობას, რომელიც ყოველთვის ძელის ზედაპირთანაა. რაც შეეხება (4.25) ფორმულას, მასში მაქსიმალური ძაბვა აღნიშნავს ძელის ზედაპირთან მოქმედი მაქსიმალური ძაბვებიდან უდიდესს.



ნახ. 4.14

ძელის სიხისტეზე გაანგარიშებისათვის დავადგენთ მობრუნების კუთხის მნიშვნელობას ყველა იმ კვეთისათვის, რომელიც განსაზღვრავს კონსტრუქციის ნორმალურ მუშაობას და შევადარებთ მას დასაშვებ კუთხეს. დასაშვები კუთხე მიიღება გაანგარიშებით ან გამოცდილებების საფუძველზე. სიხისტის პირობა ასეთია:

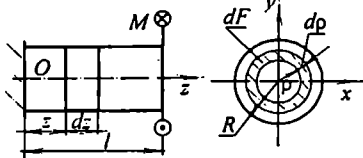
$$\varphi_{\max} \leq [\varphi] \quad (4.26)$$

გრების შემთხვევაში, ისევე, როგორც გაქიმვა-კუმშვისას, მაქსიმალური ძაბვების მეთოდი არ იძლევა ძელის სიმტკიცის რესურსის სრულად გამოყენების

საშუალებას. პლასტიკური მასალის შემთხვევაში, კვეთისათვის, ზღვრული ძაბვების მეთოდით ზღვრული დაძაბული მდგომარეობის განსაზღვრისას, ვითხოვთ მაქსიმალური ძაბვების დენადობის ზღვართან ტოლობას (ნახ. 4.14 ა). ასეთი მდგომარეობის შესაბამისი ზღვრული მგრები მომენტის მნიშვნელობა განისაზღვრება (4.17)-ის საშუალებით

$$M_I = \tau_{\text{ღ}} W_p. \quad (4.27)$$

მაგრამ, ამ შემთხვევაში, ძელის განივი კვეთის ცენტრალურ არეში მასალის წინააღმდეგობის უნარი ამოწურული არ არის. ამიტომ კონსტრუქციაზე დატვირთვის შემდგომი ვაზრდა გამოიწვევს პლასტიკური ზონის თანდათან კვეთის სიღრმეში გავრცელებას (ნახ. 4.14 ბ) და ზღვრული მდგომარეობის შემთხვევაში, პლასტიკური ზონა მოიცავს მთელ კვეთს (ნახ. 4.14 გ). აქ გამოყენებულია 2.25 ნახაზზე გამოსახული დიაგრამის ანალოგიური სქემატიზებული დიაგრამა $\tau \mp \gamma$



ნახ. 4.15

დავადგინოთ ამ მდგომარეობის შესაბამისი ზღვრული მომენტის მნიშვნელობა. განვიხილოთ კვეთში dF ფართობის მქონე მცირე ელემენტი (ნახ. 4.15), როგორც კვეთის ნებისმიერ წერტილში, ამ ელემენტის წერტილებშიც ძაბვა $\tau_{\text{ღ}}$ -ის ტოლია. შესაბამისი მგრები მომენტის დიფერენციალი იქნება

$$dM_{II} = (\tau_{\text{ღ}} dF) \rho,$$

საიდანაც ინტეგრების შედეგად მივიღებთ ზღვრული მომენტის მნიშვნელობას:

$$M_{II} = \tau_{\text{ღ}} \int_F \rho dF.$$

(3.8) ფორმულის შესაბამისად, კვეთის პოლარული სტატიკური S_p მომენტის გათვალისწინების შემდეგ, ზღვრული მომენტის მნიშვნელობა ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$M_{II} = \tau_{\text{ღ}} S_p. \quad (4.28)$$

ამრიგად, გრებისას ზღვრული დატვირთვის მეთოდის გამოყენება საშიში კვეთის ყველა წერტილში ძაბვის დენადობის ზღვართან გათანაბრებასთანაა დაკავშირებული. ამ მეთოდის გამოყენების ეფექტურობა განისაზღვრება შემდეგი კოეფიციენტით

$$k = \frac{M_{II}}{M_I} = \frac{S_p}{W_p}.$$

წრიული მთლიანი კვეთისათვის გამოვიყენოთ (3.38) და (4.18) ფორმულები

$$S_p = \frac{\pi d^3}{12}; W_p = \frac{\pi d^3}{16}, \text{ მაშინ } k = \frac{4}{3} \approx 1,33, \quad (4.29)$$

ხოლო წრიული ღრუ კვეთისათვის (3.41) და (4.19) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ

$$S_p = \frac{\pi d^3}{12} (1 - c^3), \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4), \quad k = \frac{4}{3} \cdot \frac{1 - c^3}{1 - c^4}. \quad (4.30)$$

გრებისაგან განსხვავებით, გაჭიმვა-კუმშვის შემთხვევაში ძაბვები კვეთში თანაბარადაა განაწილებული. ამიტომ გრების ანალოგიური სიმტკიცის რეზერვი მისთვის არ არსებობს. რაც შეეხება სტატიკურად ურკვევ სისტემებს, მათთვის ზღვრული მდგომარეობის კრიტერიუმი ძაბვების გათანაბრება არა მარტო ერთ, არამედ რამდენიმე კვეთში, რომელთა რაოდენობა განისაზღვრება კონსტრუქციის კინემატიკურად ცვალებად სისტემად გარდაქმნის შესაძლებლობით. ამიტომ, როგორც გრებისას, ისე გაჭიმვა-კუმშვისათვის ზღვრული დატვირთვის მეთოდის გამოყენება იძლევა სიმტკიცის რეზერვების გამოვლენის საშუალებას.

§22. წრიული განიგვეთიანი ძელის გაანგარიშება სიმტკიცესა და სისხისტეზე გრებისას ძაბვების და დეფორმაციების ნებისმიერი დიაგრამის შემთხვევაში

ზემოთ განვიხილეთ ძელის გაანგარიშების მეთოდიკა მასალის პლასტიკური თვისებების გათვალისწინებით. მაგრამ ამ მეთოდიკას საფუძვლად დავუდეთ (2.25. ნახაზზე ნაჩვენები დიაგრამის ანალოგიური) მარტივი სქემატიზირებული დიაგრამა. მიუხედავად იმისა, რომ პრაქტიკაში, არც თუ იშვიათად, გამოიყენება მიახლოებითი გაანგარიშების მეთოდიკა, ზოგიერთ შემთხვევაში, დიაგრამის ასეთი გამარტივება არ არის მისაღები და გაანგარიშებას ახდენენ ექსპერიმენტულად მიღებული დიაგრამის საფუძველზე, გამარტივების გარეშე.

განვიხილოთ / სიგრძის წრიული მუდმივი განიგვეთიანი ძელი, რომელიც განიცდის გრებას (ნახ. 4.15), რადგან კვეთში დეფორმაციების განაწილების კანონზომიერება (4.9) მიღებულია მასალის თვისებებისაგან დამოუკიდებლად, ფორმულა

$$\gamma = \rho \theta \quad (4.31)$$

ძალაშია ძელის განივ კვეთში პლასტიკური დეფორმაციების არსებობის შემთხვევაშიც.

(4.12) ფორმულის შესაბამისად, (3.3) მაგალითიდან ელემენტარული ფართობის მნიშვნელობის გათვალისწინებით, მგრები მომენტი ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$M_g = M = \int_0^R (2\pi r dr) r \rho = 2\pi \int_0^R r^2 dr. \quad (4.32)$$

(4.31) ფორმულის თანახმად, მაქსიმალური დეფორმაცია გვაქვს ძელის ზედაპირთან

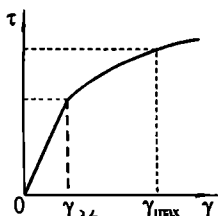
$$\gamma_{\max} = R\theta. \quad (4.33)$$

ამ შედეგის გათვალისწინებით, (4.31) ფორმულიდან მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

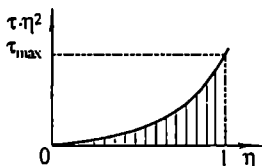
$$\eta = \frac{\gamma}{\gamma_{\max}} = \frac{\rho}{R}. \quad (4.34)$$

განგარიშების ჩასატარებლად ამ სიდიდის გამოყენება მოსახერხებელია, რადგან იგი იცვლება საზღვრებში ნულიდან ერთამდე. საბოლოოდ, (4.32) ფორმულის ნაცვლად მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

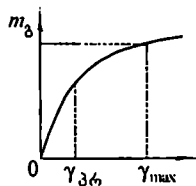
$$m_{\delta} = \frac{2M_{\delta}}{\pi R^3} = 4 \int_0^1 \tau \eta^2 d\eta. \quad (4.35)$$



ნახ. 4.16



ნახ. 4.17



ნახ. 4.18

τ_{\max} წიშის დიაგრამის (ნახ.4.16) გამოყენებით ავაგებთ დამხმარე გრაფიკებს $\tau_{\max} > \tau_{\text{კრ}}$ სიდიდის სხვადასხვა კონკრეტული მნიშვნელობისათვის. ასეთი გრაფიკის მაგალითი ნაჩვენებია 4.17 ნახაზზე. ამ გრაფიკის საშუალებით, მიახლოებითი რიცხვითი ხერხების გამოყენებით, გამოვთვლით (4.35)-ის ინტეგრალს, რომელიც უდრის დაშტრიხული ფიგურის ფართობს. მცირე დეფორმაციებისათვის ($\gamma_{\max} \leq \gamma_{\text{კრ}}$) კაჟირის m_{δ} -სა და γ_{\max} -ს შორის დავადგენთ (4.15) ფორმულის საშუალებით. აღნიშნული ფორმულა გარდაქმნების შედეგად ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$m_{\delta} = G\gamma_{\max}. \quad (4.36)$$

მიღებული შედეგების გამოყენებით ვაგებთ გრაფიკს, რომელიც გამოსახავს კაჟირის მგრები მომენტის m_{δ} პარამეტრს და γ_{\max} -ს შორის (ნახ.4.18). ასეთი გრაფიკის გამოყენებით შეიძლება ძელის სიმტკიცესა და სიხისტეზე გაანგარიშება მასალის პლასტიკური თვისებების გათვალისწინებით. თუ ვიცით მგრები მომენტის მნიშვნელობა, (4.35)-ის საფუძველზე დავადგენთ მისი შესაბამისი m_{δ} პარამეტრის მნიშვნელობას. ძელის დრეკადობის ფარგლებში გაანგარიშების შემთხვევაში, ეს პარამეტრი არის მაქსიმალური მხები ძაბვა.

4.18 ნახაზზე გამოსახული გრაფიკით განვსაზღვრავთ შესაბამისი მაქსიმალური დეფორმაციის γ_{\max} მნიშვნელობას, რომლის საშუალებით, 4.16 ნახაზის გამოყენებით, დავადგენთ მაქსიმალურ τ_{\max} ძაბვებს და საშუალება გვქვია ვიმსჯელოთ ძელის სიმტკიცეზე.

ძელის სიხისტეზე გასაანგარიშებლად (4.9) ფორმულის გამოყენებით, დავადგენთ ფართობითი გრეხის კუთხის მნიშვნელობას

$$\theta = \frac{\gamma_{\max}}{R} \quad (4.37)$$

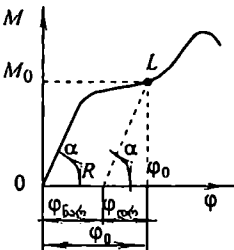
მუდმივი განივი კვეთის მქონე ძელისათვის, მუდმივი მგრები მომენტის შემთხვევაში, ეს სიდიდე ნებისმიერ კვეთში ერთი და იგივეა. მაშინ, ძელის საერთო გრეხის კუთხე

$$\varphi = \theta l = \gamma_{\max} \frac{l}{R} \quad (4.38)$$

განხილული გაანგარიშების მეთოდის დადებითი თვისება არის ის, რომ აგებული დამხმარე გრაფიკები ასახავს მხოლოდ მასალის თვისებებს. ამდენად, ერთხელ მიღებული დამხმარე შედეგები შეიძლება მრავალჯერ იქნეს გამოყენებული სხვადასხვა ამოცანის განხილვისას. საგულისხმოა ისიც, რომ ეს მეთოდიც გამოიყენება როგორც მუდმივი, ასევე ცვლადი განივკვეთიანი ძელების გაანგარიშებისას, ოღონდ, ცვლილებები შესატანია გრეხის კუთხის (4.38) ფორმულაში. მობრუნების φ კუთხის მნიშვნელობის მისაღებად ვადგენთ θ -ს მნიშვნელობას სხვადასხვა კვეთებისათვის, რომლის გამოყენებით ავაგებთ გრაფიკს $\theta = \theta(z)$ ნულიდან l -მდე საზღვრებში. ამის შემდეგ მხედველობაში მივიღებთ (4.11) ფორმულას და ერთ-ერთი რიცხვითი მეთოდის გამოყენებით გავანგარიშებთ მობრუნების კუთხეს, როგორც განსაზღვრულ ინტეგრალს

$$\varphi = \int_0^l \theta dz \quad (4.39)$$

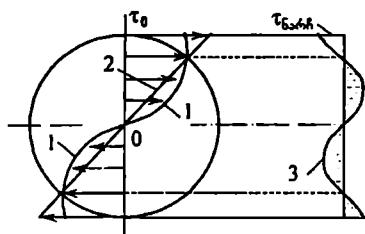
მიღებულ ფორმულაში დაშვებულია, რომ საწყისი კვეთის მობრუნების კუთხე ნულის ტოლია.



ნახ. 4.19

განვიხილოთ ძელის განტვირთვის საკითხი. როგორც აღვნიშნეთ, დრეკადობის ზღვრის გადაჭარბებისას, ნიმუშის დატვირთვის და შემდგომ განტვირთვის თანსდევს ნარჩენი დეფორმაციები. ამ პროცესის ილუსტრაციაა ნიმუშის გაჭიმვა-კუმშვის დიაგრამა (ნახ. 2.14). გრეხისათვის სურათი იგივეა, მხოლოდ ნორმალური ძალის და წაგრძელების ნაცვლად უნდა ვიგულისხმოთ მგრები მომენტი და გრეხის კუთხე. მგრები M_0 მომენტი, რომელიც შეესაბამება L წერტილს, იწვევს ძელის დაგრეხას φ_0 კუთხით (ნახ. 4.19)

ძელის კვეთისათვის შესაბამისი ძაბვების ეპიურა წარმოდგენილია 4.20 ნახაზზე პირველი მრუდით. მომენტის თანდათანობით შემცირებისას მცირდება



ნახ. 4.20

გრების კუთხეც - ეს პროცესი მიმდინარეობს წრფივი კანონით. ძელის მთლიანი განტვირთვისას გრების კუთხის ფარული ალდგება, მეორე ფარული კი შენარჩუნდება. ამრიგად, მთლიანი გრების კუთხე შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ორი მდგენელის ჯამი

$$\varphi_0 = \varphi_{ნარ} + \varphi_{დრ} \quad (4.40)$$

გადაადგილებების დრეკადი ნაწილი შეგვიძლია გავიანგარიშოთ ძელის დრეკადი თვისებების საფუძველზე მიღებული ფორმულების გამოყენებით

$$\varphi_{დრ} = \frac{M_0 l}{GI \rho} \quad (4.41)$$

მაშინ ნარჩენი გრების კუთხე

$$\varphi_{ნარ} = \varphi_0 - \frac{M_0 l}{GI \rho} \quad (4.42)$$

ძელის მთლიანი გადაადგილების მნიშვნელობის დასადგენად გამოვიყენებთ (4.39) ფორმულას.

(4.41) ფორმულა განსაზღვრავს მობრუნების კუთხის დრეკად ნაწილს კერძო შემთხვევისათვის, რომელიც ასახულია 4.15 ნახაზზე. ძელის ღერძის გასწვრივ განივი კვეთის ზომების და მგრები მომენტის ცვლადობის გათვალისწინება არ არის დაკავშირებული რაიმე სირთულესთან. ამიტომ ამ საკითხზე აქ არ შევჩერდებით.

წარმოვადგინოთ კვეთში მოქმედი ძაბვები (4.40) ფორმულის ანალოგიურად

$$\tau_0 = \tau_{ნარ} + \tau_{დრ} \quad (4.43)$$

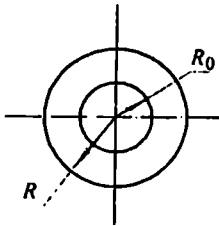
ძაბვების დრეკადი ნაწილი გაიანგარიშება განტვირთვის კანონის გამოყენებით, (4.14) წრფივი დამოკიდებულების საფუძველზე:

$$\tau_{დრ} = \frac{M_0}{I \rho} \rho \quad (4.44)$$

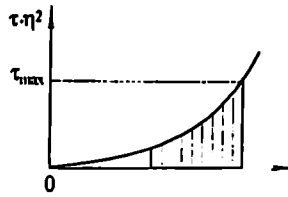
ამ ძაბვების ეპიურა გამოსახულია 4.20 ნახაზზე 2 წრფით. ნარჩენი ძაბვების დასადგენად ვიყენებთ (4.43) და (4.44)-ს ფორმულებს

$$\tau_{ნარ} = \tau_0 - \frac{M_0}{I \rho} \rho \quad (4.45)$$

შესაბამისი ეპიურა გამოსახულია 4.20 ნახაზზე მესამე მრუდით. ცვლადი განივი კვეთის მქონე ძელის შემთხვევაში, გაანგარიშების მეთოდიკა ძირითადად უცვლელი რჩება. იცვლება მხოლოდ გაანგარიშების ურომატიურობა. (4.42) ფორმულის ორივე წევრი უნდა გავიანგარიშოთ ძელის განივი კვეთის ფართობის



ნახ. 4.21



ნახ. 4.22

ცვლილებების გათვალისწინებით. რაც შეეხება ნარჩენე ძაბვებზე განსაზღვრას, (4.45)-ის გამოყენებისას რაიმე ცვლილების შეტანა საჭირო არ არის. ნარჩენი ძაბვების მნიშვნელობის დასადგენად საჭიროა ამ ფორმულის დამოუკიდებლად გამოყენება გაანგარიშებისათვის საინტერესო ყველა კვეთში. მილისებრი ძელი-სათვის გაანგარიშების მეთოდიკა უმნიშვნელო ცვლილებების შეტანას მოითხოვს, ვინაიდან განივი კვეთის ცენტრალური ზონა არა აქვს (ნახ. 4.21). (4.32) ფორმულაში ინტეგრალის ქვედა საზღვარი განისაზღვრება R_0 -ით. შესაბამისი ცვლილებაა შესატანი (4.35) ფორმულაშიც, - ინტეგრალის ქვედა საზღვარი, ნულის ნაცვლად იქნება $r_0 = R_0 / R$. ამიტომ 4.17 ნახაზზე ნაჩვენები ფიგურის ფართობის ნაცვლად, საჭიროა, ფართობის მნიშვნელობის გაანგარიშება 4.22 ნახაზის შესაბამისად.

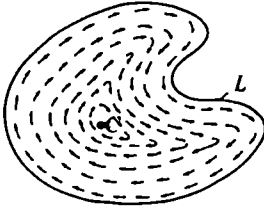
როგორც აღინიშნა, დეტალებში წინასწარი პლასტიკური დეფორმაციების გამოწვევით შეიძლება პლასტიკურობის მახასიათებლების შემცირება, და, პირიქით, - დრეკადობის გაზრდა. ამიტომ დეტალებისათვის, რომლებისთვისაც პლასტიკური მოვლენები მუშაობის პროცესში არასასურველია, მაგალითად, ზამბარებისათვის, მაღალი დონის წინასწარი დატვირთვა, ხშირ შემთხვევაში გამოიყენება როგორც ტექნოლოგიური ოპერაცია.

§23. არაწრიული განივკვეთიანი ძელის გრეხა

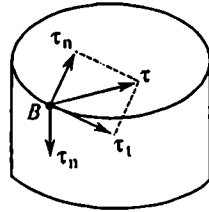
წრიული განივკვეთიანი ძელის გრეხის შესწავლისას გაკეთებული წინასწარი დაშვება კვეთის სიბრტყის და ღერძის მართობულობის შესახებ, ზოგად შემთხვევაში მიუღებელია და შეიძლება მკდარ დასკვნებამდე მიგვიყვანოს. ამიტომ არაწრიული განივკვეთიანი ძელის გრეხის შესწავლისას მასალათა გამძლეობის მეთოდები არ გამოიყენება. ეს ამოცანა შეისწავლება დრეკადობის თეორიის მეთოდებით.

მექანიკაში ხშირად საქმე გვაქვს სხვადასხვა ხასიათის მოვლენებთან, რომლებ-

საც თავისი ფიზიკური არსით ერთმანეთთან არავითარი საერთო არ გააჩნით. მაგრამ, მიუხედავად ამისა, შეიძლება ამ მოვლენების მოდლებს შეესაბამებოდეს ერთი და იგივე მათემატიკური აღწერილობანი დიფერენციალურ ან სხვა განტოლებათა სახით.



ნახ. 4.23



ნახ. 4.24

არაწრიული განივკვეთიანი ძელის გრებისას ფართოდ გამოიყენება ჰიდროდინამიკური ანალოგია, რომლის არსი შემდეგშია. ვთქვათ, გვიანტერესებს გრების შესწავლა ძელისათვის, რომლის განივი კვეთის ფორმა ნაჩვენებია 4.23 ნახაზზე. წარმოვიდგინოთ იმავე ფორმის ჭურჭელი, რომელშიც იდეალური სითხე ასრულებს ბრტყელ სტაციონარულ ბრუნვით მოძრაობას.

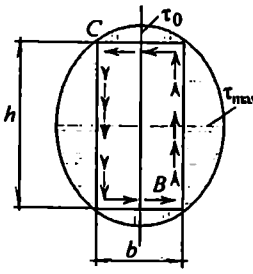
ჰიდროდინამიკური ანალოგიიდან გამომდინარეობს, რომ სითხის ნაწილაკების სიჩქარეები და დენის ხაზები შეესაბამება მხებ ძაბვებს და მათ ტრანსპორტირებს, ე. ი. მრუდებს, რომელთა მხები მიმართულებით მოქმედებს ძაბვები, ხოლო ძაბვა არის სითხის სიჩქარის პროპორციული. ამიტომ იქ, სადაც სითხის მოძრაობის სიჩქარე ნულის ტოლია, ძაბვაც ნულია. 4.23 ნახაზზე ასეთია C წერტილი. სითხის მოძრაობის მაქსიმალური სიჩქარეები, როგორც წესი, კვეთის კონტურთანაა და, ამდენად, ძელის ამ წერტილებში მოქმედებენ მაქსიმალური ძაბვები. მაგრამ წრიული კვეთისაგან განსხვავებით, მაქსიმალური მხები ძაბვები აუცილებელი არ არის მოქმედებდეს კვეთის სიმძიმის ცენტრიდან ყველაზე დაცილებულ წერტილში.

პრაქტიკაში გამოიყენება აგრეთვე აპკის ანალოგია, რომლის არსი შემდეგშია: წარმოვიდგინოთ L კონტურზე (ნახ. 4.23) ჭურჭელში თანაბრად განაწილებული წნევეთ დაჭიმული თხელი აპკი. წნევის მოქმედების შედეგად აპკი ამოიბერება და გარკვეულ სივრცით ფორმას მიიღებს. ზედაპირის მხების დახრის კუთხე ძელის გრებისას ახსნავს ძაბვას შესაბამის წერტილში. აპკის ზედაპირსა და კონტურის სიბრტყეს შორის მოცულობა ახსნათებს მგრები მომენტის მნიშვნელობას. არსებობს სპეციალური, საკმაოდ მარტივი დანადგარები, რომელთა საშუალებით აწარმოებენ სათანადო გამოკვლევებს.

აღწერილი ანალოგიები გვიჩვენებს, რომ კვეთის კონტურთან ძაბვები მიმართულია კონტურის მხების გასწვრივ, რისი დამტკიცებაც შეიძლება მხები ძაბვების წყვილადობის კანონის საფუძველზე. დავუშვათ, რომ მხები ძაბვა B წერტილში (ნახ. 4.24) არ არის კონტურის მხების გასწვრივ მიმართული. მაშინ ეს ძაბვა შეგ-

ვიძლია წარმოვადგინოთ ორი მდგენელი ძაბვის სახით: ერთი τ_0 მიმართულია კონტურის მართობის მიმართულებით, მეორე τ_1 – კონტურის მხების მიმართულებით.

მხები ძაბვების წყვილადობის კანონის შესაბამისად, რადგანაც კვეთში არსებობს კონტურის მართობი მიმართულების ძაბვა, ასეთივე სიდიდის ძაბვა წარმოიქმნება კვეთის მართობ წახნაგზეც. ე.ი. ძელის ზედაპირზე (ნახ. 4.24), მაგრამ ძელის ზედაპირი თავისუფალია დატვირთვისაგან და ამდენად, მასზე ასეთი ძაბვა არ მოქმედებს. მიღებული წინააღმდეგობა იძლევა საფუძველს დავამტკიცოთ, რომ მთლიანი ძაბვა მხოლოდ კონტურის მხების მიმართულებით მოქმედებს.



ნახ. 4.25

ანალოგიურად შეიძლება იმ ფაქტის დამტკიცება, რომ კონტურის გარე კუთხეების წვეროს წერტილებში, მაგალითად, C წერტილში (ნახ.4.25) ძაბვა ნულის

ტოლია. ეს ფაქტი უშუალოდ გამომდინარეობს ჰიდროდინამიკური ანალოგიიდანაც.

განვიხილოთ მართკუთხა განივკვეთიანი ძელის გრეხა. დრეკადობის თეორიის მეთოდების გამოყენებით მიღებული შესაბამისი ძაბვების ეპიურები ნაჩვენებია 4.25 ნახაზზე.

მაქსიმალური ძაბვები მოქმედებს გრძელი გვერდების შუა წერტილებში. ეს ძაბვები, (4.17)-ის ანალოგიურად, შეიძლება წარმოვადგინოთ ფორმულით

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{ბ}}}{W_k}, \quad (4.46)$$

სადაც გრეხის წინალობის მომენტი

$$W_k = \alpha hb^2. \quad (4.47)$$

მოკლე გვერდების შუა წერტილებში ძაბვები გაიანგარიშება შემდეგი ფორმულით

$$\tau_0 = \eta \tau_{\max}. \quad (4.48)$$

მუდმივი განივკვეთიანი / სიგრძის ძელის გრეხის კუთხე, მუდმივი სიდიდის მგრეხი მომენტის შემთხვევაში, (4.21)-ის ანალოგიურად, მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\varphi = \frac{Ml}{GI_k}, \quad (4.49)$$

სადაც

$$I_k = \beta hb^3. \quad (4.50)$$

α , β და η კოეფიციენტები დამოკიდებულია მართკუთხედის გვერდების შეფარ-

დებაზე. მათი მნიშვნელობები მოცემულია 4.1 ცხრილში. ვიწრო მართკუთხედის შემთხვევაში, $h:b > 10$. ამ კოეფიციენტებისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი მიახლოებითი მნიშვნელობები

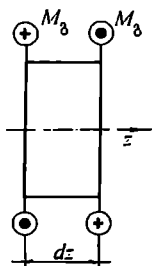
$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3}. \quad (4.51)$$

გარე ძალების მუშაობა ამ შემთხვევაშიც (4.4) ან (4.5) ფორმულებით განისაზღვრება. რაც შეეხება (4.22) ფორმულას, მისი მიღების გზა ისეთია, რომ

ცხრილი 4.1

h/b	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	>10
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
η	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

ერთი შეხედვით, არაწრიული კვეთისათვის მისი გამოყენება შიგა ძალების მუშაობის დასადგენად არ შეიძლება. ამიტომ შესაბამისი ფორმულის მისაღებად განვიხილოთ ძელიდან ამოკვეთილი dz სიგრძის ელემენტი (ნახ. 4.26). გრების შედეგად ელემენტის მარჯვენა კვეთი შემობრუნდება მარცხენა კვეთის მიმართ $d\varphi$ კუთხით. მაშინ (4.4) ფორმულის შესაბამისად, შესრულებული მუშაობა



ნახ. 4.26

$$dU = \frac{M_g d\varphi}{2}.$$

გრების კუთხეს განვსაზღვრავთ (4.49)-ის საშუალებით

$$d\varphi = \frac{M_g dz}{GI_k}.$$

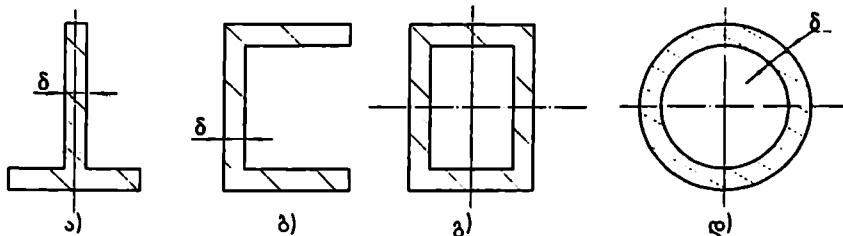
მაშინ დეფორმაციის პოტენციალური ენერგიისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$U = \int_0^l \frac{M_g^2}{2GI_k} dz. \quad (4.52)$$

(4.46), (4.47), (4.49), (4.51) და (4.52) ფორმულები ზოგადი ხასიათისაა. ისინი გამოიყენება არა მარტო მართკუთხა განივკვეთიანი ძელისათვის. სხვა სახის კვეთების გეომეტრიული მახასიათებლების მნიშვნელობები მოცემულია ცნობარებში.

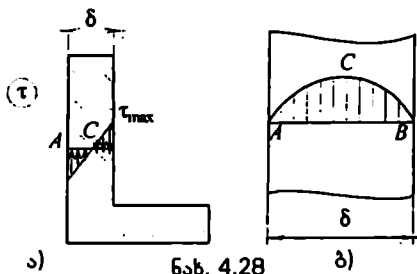
§24. თხელკედლიანი ძელების გრეხა

მასალის ეკონომიურად ხარჯვა და შედარებით მსუბუქი მანქანებისა და კონსტრუქციების შექმნა თანამედროვე მეცნიერებისა და ტექნიკის ერთერთი ძირითადი ამოცანაა. სხვა მიზეზებთან ერთად სწორედ ამან განაპირობა პრაქტიკაში თხელკედლიანი ძელების ფართო გამოყენება. ისინი ინარჩუნებენ სიმტკიცის და სიხისტის შედარებით მაღალ მახასიათებლებს და მასიური დეტალებისაგან სიმსუბუქით განსხვავდებიან. ასეთი ძელების განივი კვეთები თხელკედლიანი პროფილებია, რომელთა სისქე კვეთის სხვა ხაზოვან ზომებზე ბევრად მცირეა (ნახ. 4.27).



ნახ. 4.27

თხელკედლიანი კვეთები შეიძლება იყოს ღია და ჩაკეტილი პროფილის. პირველის მაგალითია 4.27 ნახაზზე გამოსახული პირველი ორი კვეთი, მეორის – იმავე ნახაზის ბოლო ორი კვეთი. ასეთი კვეთებისათვის დამახასიათებელია პროფილის მართობი მიმართულებით ძაბვების განაწილების სხვადასხვა კანონზომიერება. ეს განსხვავება განსაზღვრავს მათი გაანგარიშების თავისებურებასაც.



ნახ. 4.28

წარმოვიდგინოთ ჩარჩო, რომელიც იმეორებს ღია პროფილის კონტურს. მასზე დაკიმულია თხელი აპკი (ნახ. 4.28). წნევის მოქმედების შედეგად აპკი გამოიბერება და მიიღებს 4.28ბ ნახაზზე ნაჩვენებ ფორმას. ეს ფორმა გვიჩვენებს, რომ A და B წერტილებში აპკის ზედაპირის დახრის კუთხეები ტოლია, მაგრამ განსხვავდებიან ნიშ-

ნით. ამიტომ პროფილის A და B წერტილებში ძაბვები ერთმანეთის ტოლია და აქვს საწინააღმდეგო მიმართულება. შუა წერტილში მხების დახრის კუთხე ნულის უდრის და ძაბვაც შესაბამის წერტილში ნულის ტოლია. ძაბვების განაწილების ეპიურა ნაჩვენებია 4.28ა ნახაზზე.

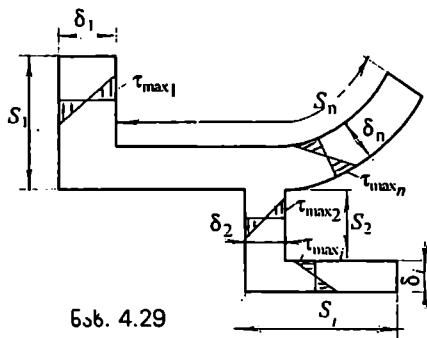
პროფილის გასწორება აპკის ფორმას უმნიშვნელოდ შეცვლის. აქედან გამომდინარე, 4.28-ე ნახაზზე ნაჩვენები პროფილისა და მისი გასწორებით მიღებული მართკუთხა კვეთისათვის ეს ფორმა ერთი და იგივე იქნება. საჭიროა მხოლოდ თხელკედლიანი პროფილების გეომეტრიის მოთხოვნების გათვალისწინება და

დაშვება: $S/\delta \geq 10$; სადაც S , δ არის პროფილის სიგრძე და სისქე. აღნიშნულის გათვალისწინება, მომენტის და გრძობის კუთხის განსაზღვრისას შეიძლება გამოვიყენოთ კოეფიციენტების მნიშვნელობები 4.51-ს მიხედვით. ამიტომ მაქსიმალური ძაბვისათვის მივიღებთ ფორმულას

$$\tau_{\max} = \frac{3M_{\delta}}{S\delta^2}. \quad (4.53)$$

თუ მუდმივი განივი კვეთის მქონე / სიგრძის ძელი იგრძობა მუდმივი მგრძობი მომენტით, მაშინ ძელის გრძობის კუთხე განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$$\varphi = \frac{3M_{\delta}l}{GS\delta^3}. \quad (4.54)$$



ნახ. 4.29

განვიხილოთ იგივე ძელი, რომლის განივი კვეთი ლიაკონტურიანია და რომელიც არ შეიძლება გაიშალოს მართკუთხედად (ნახ.4.29). კვეთი შედგება n ელემენტისაგან. i ნომრიანი ელემენტის სიგრძე და სისქე, შესაბამისად აღვნიშნოთ S_i და δ_i ასოებით. ჩავთვალოთ, რომ ამ ელემენტის გრძობას ხმარდება ძელის მგრძობი

მომენტის M_i ნაწილი. ამიტომ მთლიანი მგრძობი მომენტი ტოლი იქნება კვეთის ცალკეული ელემენტების მგრძობი მომენტების ჯამის

$$M_{\delta} = \sum_{i=1}^n M_i. \quad (4.55)$$

განვიხილოთ ძელის დეფორმაცია. მისი კვეთის i ნომრის ელემენტი გრძობის შედეგად მობრუნდება φ_i კუთხით, რომელიც უდრის ნებისმიერი სხვა ელემენტის მობრუნების კუთხეს და, საერთოდ, კვეთის მობრუნების φ კუთხეს.

i ნომრის ელემენტისათვის მობრუნების კუთხე (4.54)-ის საშუალებით განისაზღვრება

$$\varphi_i = \frac{3M_i l_i}{GS_i \delta_i^3}. \quad (4.56)$$

საიდანაც i -ნომრიანი ელემენტის მგრძობი მომენტის მნიშვნელობა

$$M_i = \frac{GS_i \delta_i^3}{3l_i} \varphi_i = \frac{G\varphi}{3l} S_i \delta_i^3. \quad (4.57)$$

ამ შედეგის (4.55)-ში გათვალისწინებით დავადგენთ კვეთში მგრძობი მომენტის მნიშვნელობას

$$M_{\delta} = \frac{G\varphi}{3l} \sum_{i=1}^n S_i \delta_i^3. \quad (4.58)$$

კვეთის გეომეტრიული მახასიათებლისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$I_k = \sum_{i=1}^n \frac{S_i \delta_i^3}{3}. \quad (4.59)$$

მაშინ ძელის გრების კუთხისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$\varphi = \frac{M_{\delta} l}{G I_k}. \quad (4.60)$$

განვსაზღვროთ კვეთის i ნომრის ელემენტისათვის მაქსიმალური ძაბვა. ვიწრო მართკუთხა კვეთებისათვის გამოვიყენოთ (4.53) ფორმულა

$$\tau_{\max i} = \frac{3M_i}{S_i \delta_i^2} = \frac{3}{S_i \delta_i^2} \cdot \frac{G\varphi}{3l} S_i \delta_i^3 = \frac{G\varphi}{l} \delta_i. \quad (4.61)$$

გავითვალისწინოთ ამ ფორმულაში (4.60) გამოსახულება და კვეთის ნებისმიერ ელემენტისათვის განვსაზღვროთ მაქსიმალური ძაბვის მნიშვნელობა

$$\tau_{\max i} = \frac{M_{\delta}}{I_k} \delta_i.$$

რადგანაც კვეთის ელემენტის მაქსიმალური ძაბვა ელემენტის სისქის პროპორციულია, საერთოდ კვეთისათვის მაქსიმალური ძაბვა იმოქმედებს მაქსიმალური სისქის მქონე ელემენტში

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\delta}}{I_k} \delta_{\max} = \frac{M_{\delta}}{W_k}, \quad (4.62)$$

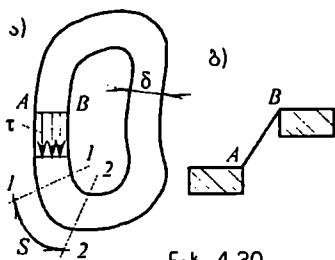
სადაც

$$W_k = \frac{I_k}{\delta_{\max}}. \quad (4.63)$$

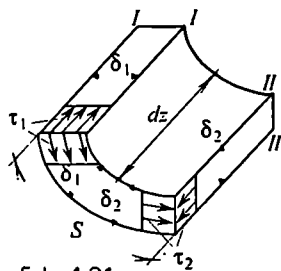
კვეთის ელემენტებისათვის ძაბვების ეპიურები ნაჩვენებია 4.29 ნახაზზე. ამით დავამთავროთ ღია კონტურის განივკვეთიანი ძელების განხილვა და შევისწავლოთ ძელების ძაბვები და გადაადგილებები, როდესაც განივი კვეთი ჩაკეტილი პროფილია (ნახ. 4.30).

ვთქვათ, კვეთის შიგა კონტური აპკითაა დაკავშირებული გარე კონტურთან. წნევის მოქმედებისას გარე კონტური უძრავი რჩება, შიგა კონტური კი გადაადგილდება (ნახ. 4.30 ბ). A და B წერტილებში და, საერთოდ, AB მონაკვეთის ნების-

მიერ წერტილში აპკის მხების დახრის კუთხე მუდმივია, აქედან გამომდინარე, მათში ძაბვებიც ერთი და იმავე მნიშვნელობის იქნება, მაგრამ კონტურის გას-



ნახ. 4.30



ნახ. 4.31

წვრივ სხვადასხვა ადგილებზე ძაბვები ერთმანეთისაგან განსხვავდება. განვიხილოთ ეს საკითხი.

ამოკვეთოთ ძელიდან ელემენტი, რომლის სიგრძე კონტურის მიმართულებით S -ის, ხოლო ძელის ღერძის მიმართულებით dz -ის ტოლია (ნახ. 4.31).

კვეთის სისქე $l-l$ წრფესთან δ_1 -ს უდრის, ამ ადგილზე მოქმედებს τ_1 ძაბვები. მეორე წრფესთან, რომელიც პირველიდან Δ მანძილითაა დაცილებული, კვეთის სისქე δ_2 -ის, ხოლო შესაბამისი ძაბვები კი τ_2 -ის ტოლია. მხები ძაბვების წყვილადობის კანონიდან გამომდინარე, ასეთივე ძაბვები მოქმედებს განივი კვეთების მართობ კვეთებში.

განვიხილოთ ელემენტის წონასწორობა და დავაგვიგმილოთ მასზე მოქმედი ძალები ძელის ღერძის მიმართულებაზე: $\tau_1 \delta_1 dz - \tau_2 \delta_2 dz = 0$, რომლის მიხედვით კვეთის ნებისმიერ ადგილზე მხები ძაბვის ნამრავლი კვეთის სისქეზე მუდმივია

$$\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2 = \tau \delta = \text{const.} \quad (4.64)$$

დავადგინოთ მგრეხი მომენტის მნიშვნელობა. განვიხილოთ კონტურის dS სიგრძის ელემენტზე მოქმედი dT ძალა (ნახ. 4.32): $dT = \tau \delta ds$.

ავილოთ კონტურის შიგნით ნებისმიერი O წერტილი (ნახ. 4.32); ამ წერტილის მიმართ ძალის მომენტი

$$dM_g = (\tau \delta ds) r.$$

4.32 ნახაზზე CD - კონტურის მხებია; r - მან-

ძილია O წერტილიდან ამ წრფემდე.

კონტურის გასწვრივ ინტეგრირებით მივიღებთ მგრეხი მომენტის მნიშვნელობას

$$M_g = \int_{(S)} \tau \delta r dS = \tau \delta \int_{(S)} r dS.$$

ამ ფორმულის მიღებისას გამოყენებულია (4.64) პირობა და მუდმივი სიდიდე გატანილია ინტეგრალის გარეთ. განვსაზღვროთ მიღებული ინტეგრალის არსი. ნამრავლი $dF^* = (1/2)r dS$ არის OCD სამკუთხედის ფართობი. ამიტომ მთელი კონტურის გასწვრივ ინტეგრების შედეგად მივიღებთ შუა კონტურით შემოფარგლული ფიგურის გაორკეცებულ ფართობს, $2F^*$ -ს. მაშინ, მგრები მომენტის ფორმულა ჩაიწერება ასე:

$$M_g = 2\tau\delta F^* \quad (4.65)$$

ძაბვების მნიშვნელობები მგრები მომენტის და კვეთის გეომეტრიული მახასიათებლების საშუალებით გამოისახება შემდეგნაირად

$$\tau = \frac{M_g}{2F^*\delta} \quad (4.66)$$

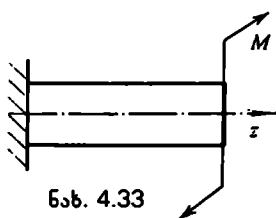
იოლი შესაძრნევა, რომ მაქსიმალური ძაბვები წარმოიქმნება კონტურის იმ ადგილზე, სადაც სისქე იქნება მინიმალური

$$\tau_{\max} = \frac{M_g}{2F^*\delta_{\min}} = \frac{M_g}{W_k} \quad (4.67)$$

სადაც

$$W_k = 2F^*\delta_{\min} \quad (4.68)$$

ფორმულების მიღებისას ძაბვებს და დეფორმაციებს შორის დამოკიდებულებაზე საუბარი არ ყოფილა. ამიტომ მიღებული (4.67) ფორმულა გამოიყენება ნებისმიერი მასალისათვის და, თავისთავად ცხადია, კერძო შემთხვევაშიც, როდესაც ძალაშია შუკის კანონი.



ნახ. 4.33

განვიხილოთ l სიგრძის მუდმივი ჩაკეტილი განივკვეთიანი ძელის გრება მუდმივი მგრები მომენტის მოქმედებისას (ნახ. 4.33). გამოვიყენოთ შიგა და გარე ძალების მუშაობის ტოლობის პირობა $U = A$. დავდგინოთ შიგა ძალების მუშაობა, რისთვისაც გამოვიყენოთ (4.3) გამოსახულება.

$$U = \int_{(V)} \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_{(S)} \left[\int_{(l)} \frac{\tau^2 \delta}{2G} dz \right] dS.$$

ჩავთვალოთ, რომ δ სისქე შეიძლება იცვლებოდეს მხოლოდ კონტურის გასწვრივ, $\delta = \delta(s)$ ინტეგრებისას გავითვალისწინოთ ეს პირობა

$$U = \int_{(V)} \left[\frac{\tau^2 \delta}{2G} \int_{(l)} dz \right] dS = \int_{(S)} \frac{\tau^2 \delta l}{2G} dS.$$

(4.64) პირობის გათვალისწინებით დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$U = \frac{(\tau\delta)^2 l}{2G} \int_{(s)} \frac{dS}{\delta}. \quad (4.69)$$

(4.4)-ის შესაბამისად გარე ძალების მუშაობა

$$A = \frac{M\varphi}{2}. \quad (4.70)$$

გავუტოლოთ ერთმანეთს (4.69) და (4.70) ფორმულებით გამოსახული შიგა და გარე ძალების მუშაობა. ელემენტარული გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ ძელის გრების კუთხის გამოსათვლელ ფორმულას

$$\varphi = \frac{Ml}{GI_k}, \quad (4.71)$$

სადაც

$$I_k = \frac{(2F^*)^2}{\int_{(s)} \frac{dS}{\delta}}. \quad (4.72)$$

შევადაროთ სიმტკიცის და სიხისტის მაჩვენებლები ღია და ჩაკეტილი პროფილების შემთხვევებისათვის. ზოგადი შემთხვევისათვის ზუსტი შედეგების მიღება ძნელია და არც არის საჭირო. საკმარისია სიდიდეების რიგების ზოგადი განსაზღვრა და მათი შედარება.

ღია პროფილის შემთხვევისათვის (4.59) და (4.63) ფორმულების შესაბამისად, სიმტკიცის და სიხისტის მახასიათებლების რიგები განისაზღვრება შემდეგი სახით:

$$W_k^* = \frac{I_k}{\delta_{\max}} \sim \frac{1}{\delta_{\max}} \sum_{i=1}^n \frac{S_i \delta_i^3}{3} \sim S \delta^2,$$

$$I_k^* = \sum_{i=1}^n \frac{S_i \delta_i^3}{3} \sim S \delta^3$$

ჩაკეტილი კონტურების შემთხვევისათვის გავანალიზოთ (4.68) და (4.72) ფორმულები იმ ვარაუდით, რომ კვეთის ორი ზომა, რომლებიც გამოსახავენ მის გაბარიტს, ერთიდაიმავე სიდიდისაა და გაცილებით დიდია სისქეზე:

$$W_k = 2F^* \delta_{\min} \sim S^2 \delta,$$

$$I_k = \frac{4F^{*2}}{\int \frac{dS}{\delta}} \sim \frac{S^4}{\frac{S}{\delta}} = S^3 \delta.$$

განვსაზღვროთ შესაბამისი სიდიდეების შეფარდებები

$$k_1 = \frac{W_k^*}{W_k} \sim \frac{\delta}{S}, \quad k_2 = \frac{I_k^*}{I_k} \sim \frac{\delta^2}{S^2}. \quad (4.73)$$

თხელკედლიანი ძელებისათვის $(\delta/S) < 0,1$, ამიტომ სხვა თანაბარ პირობებში ღია და ჩაკეტილი პროფილების შემთხვევაში მაქსიმალური ძაბვების შეფარდება ასეთივე რიგის იქნება. აქედან გამომდინარე, ჩაკეტილი პროფილის შემთხვევაში ძელის სიმტკიცე მაღალია. კიდევ უფრო მნიშვნელოვანი განსხვავებაა სიხისტის მახასიათებლებში, ვინაიდან $\delta^2/S^2 < 0,01$.

მეოთხე თავის მაგალითები

მაგალითი 4.1 გავიანგარიშოთ წრიული განივკვეთიანი ძელი, რომლის დატვირთვა ნაჩვენებია 4.34 ნახაზზე. ავგოთ მგრები მომენტების და კვეთის მობრუნების კუთხეების ეპიურები. მაქსიმალური ძაბვების სიმტკიცის პირობის საფუძველზე განვსაზღვროთ კვეთის დიამეტრი; ასევე გამოვთვალოთ შიგა და გარე მომენტების მუშაობა. ძელის მასალა ნახშირბადმცირე ფოლადია $\tau_{ღ} = 150$ მპა; $M = 300$ ნმ; $n = 2$.

წონასწორობის პირობიდან დავადგინოთ საყრდენის რეაქციული მომენტი:

$$M_A - 5M + M + M = 0; \quad M_A = 3M.$$

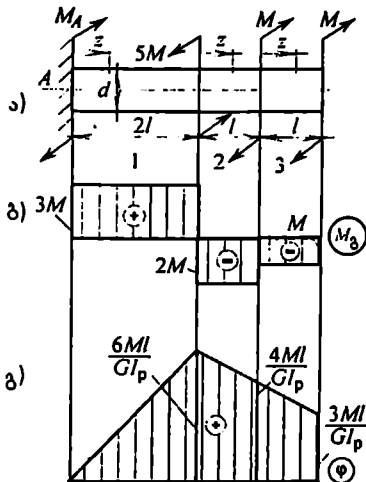
დავიწყოთ პირველი უბნით. კვეთის მეთოდის და წონასწორობის პირობის გამოყენებით დავადგინოთ მგრები მომენტის მნიშვნელობა (ნახ. 4.35). ჩავწეროთ წონასწორობის პირობა

$$3M - M_3 = 0, \quad M_3 = 3M.$$

განვსაზღვროთ მაქსიმალური ძაბვები

$$\tau_{\max} = \frac{3M}{W_p}.$$

მხედველობაში მივიღოთ, რომ საწყისი კვეთი

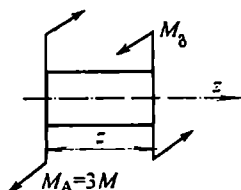


ნახ. 4.34

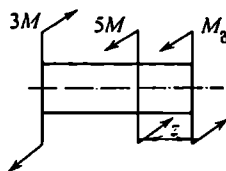
ჩამატებულია ($\varphi=0$) და კვეთების მობრუნების კუთხის დასადგენათ გამოვიყენოთ (4.21) ფორმულა:

$$\varphi = \frac{3Mz}{GI_p}; \quad \varphi(0) = 0; \quad \varphi(2l) = \frac{6Ml}{GI_p}.$$

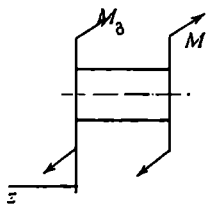
განვიხილოთ მეორე უბანი (ნახ. 4.36). მგრები მომენტის მნიშვნელობას დავადგენთ წონასწორობის პირობიდან



ნახ. 4.35



ნახ. 4.36



ნახ. 4.37

$$3M - 5M - M_B = 0; \quad M_B = -2M.$$

ამ უბნისათვის მაქსიმალური ძაბვები

$$\tau_{\max} = -\frac{2M}{W_p}.$$

კვეთის მობრუნების კუთხის დასადგენად ვიყენებთ (4.21) ფორმულას და ვითვალისწინებთ მასში საწყისი კვეთის მობრუნების კუთხეს, რომელიც განსაზღვრულია, როგორც წინა უბნის ბოლო კვეთის მობრუნების კუთხე:

$$\varphi = \frac{6Ml}{GI_p} - \frac{2Mz}{GI_p};$$

$$\varphi(0) = \frac{6Ml}{GI_p}; \quad \varphi(l) = \frac{4Ml}{GI_p}.$$

ახლა განვიხილოთ ბოლო, მესამე უბანი. აქ უმჭობესია კვეთის მეთოდის გამოყენების შემდეგ დავტოვოთ ძელის მარჯვენა ნაწილი (ნახ. 4.37). განვსაზღვროთ მგრები მომენტი წონასწორობის პირობიდან

$$M_B + M = 0, \quad M_B = -M.$$

მაქსიმალური ძაბვები

$$\tau_{\max} = -\frac{M}{W_p}.$$

კვეთის მობრუნება განისაზღვრება ისე, როგორც მეორე უბნისათვის

$$\varphi = \frac{4Ml}{GI_p} - \frac{Mz}{GI_p};$$

$$\varphi(0) = \frac{4Ml}{GI_p}; \quad \varphi(l) = \frac{3Ml}{GI_p}.$$

მგრები მომენტის და კვეთების მობრუნების კუთხეების ეპიურები აგებულია გაანგარიშების შედეგების საფუძველზე. 4.34 ნახაზიდან ჩანს, რომ პირველი უბნის ნებისმიერი კვეთი საშიშია. ამ კვეთისათვის ჩამოვყალიბოთ სიმტკიცის პირობა

$$\tau_{\max} = \frac{3M}{W_p} \leq \frac{\tau_{\text{დნ}}}{n},$$

საიდანაც მივიღებთ წინალობის პოლარული მომენტის მნიშვნელობას

$$W_p \geq \frac{3Mn}{\tau_{\text{დნ}}} = \frac{3 \cdot 300 \cdot 2}{150 \cdot 10^6} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ მ}^3$$

მაშინ ძელის დიამეტრი

$$W_p = 0,2d^3 \geq 12 \cdot 10^{-6} \text{ მ}^3; \quad d \geq \sqrt[3]{60 \cdot 10^{-6}} = 0,039 \text{ მ}.$$

განვსაზღვროთ გარე ძალების მუშაობა, რისთვისაც გამოვიყენოთ (4.5) ფორმულა

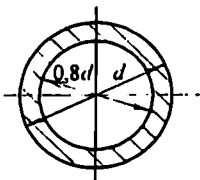
$$A = \sum_{i=1}^3 \frac{M_i \varphi_i}{2} = \frac{1}{2} \left[5M \left(\frac{6Ml}{GI_p} \right) + (-M) \left(\frac{4Ml}{GI_p} \right) + (-M) \left(\frac{3Ml}{GI_p} \right) \right] = \frac{23}{2} \cdot \frac{M^2 l}{GI_p}.$$

დეფორმაციის პოტენციურ ენერჯიას უკველი უბნისათვის განვსაზღვრავთ (4.23)-ის გამოყენებით და მიღებული შედეგების შეჯამებით

$$U = \sum_{i=1}^3 \frac{M_i^2 l_i}{2GI_p} = \frac{1}{2GI_p} \left[(3M)^2 2l + (-2M)^2 l + (-M)^2 l \right] = \frac{23}{2} \cdot \frac{M^2 l}{GI_p}.$$

მაგალითი 4.2. სიმტკიცეზე მაქსიმალური ძაბვების მეთოდის გამოყენებით დავადგინოთ 4.34 ნახაზზე ნაჩვენები ძელის განივი კვეთის ზომები. განივი კვეთი მილისებრია (ნახ. 4.38). საშიში კვეთი და მასში მაქსიმალური ძაბვის ფორმულა არ შეიცვლება და დარჩება ისეთივე, როგორც წინა მაგალითშია. (4.19)-ის შესაბამისად, წინალობის პოლარული მომენტის მნიშვნელობა

$$W_p = 0,2 \left[1 - \left(\frac{0,8d}{d} \right)^4 \right] d^3 = 0,118d^3 \cong 12 \cdot 10^{-6} \text{ მ}^3,$$



ნახ. 4.38

საიდანაც ძელის კვეთის გარე კონტურის დიამეტრის მნიშვნელობა

$$d = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 10^{-6}}{0,118}} = 0,047 \text{ მ.}$$

ამრიგად, თუ მთლიანი კვეთისათვის დიამეტრი ტოლია 3,9 სმ-ის, ღრუ კვეთის შემთხვევაში იგი 4,7 სმ-მდე გაიზარდა. განვსაზღვროთ ძელების მოცულობები და შევადაროთ ერთმანეთს. პირველ მაგალითში განხილული ძელის მოცულობა

$$V_1 = \frac{\pi d^2}{4} 4l = 15,21 \cdot 10^{-4} \pi l.$$

მეორე ძელის მოცულობა გაიანგარიშება ფორმულით

$$V_2 = \left(\frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi d_0^2}{4} \right) 4l = 7,95 \cdot 10^{-4} \pi l.$$

მასალის ეკონომია პირველი კონსტრუქციის მეორე კონსტრუქციით შეცვლისას იქნება

$$\frac{V_1 - V_2}{V_1} 100\% = \frac{15,21 \cdot 10^{-4} \pi l - 7,95 \cdot 10^{-4} \pi l}{15,21 \cdot 10^{-4} \pi l} 100\% = 48\%.$$

მაგალითი 4.2. ზღვრული დატვირთვის მეთოდით სიმტკიცეზე გავიანგარიშოთ პირველ მაგალითში განხილული ძელი და დავადგინოთ განივი კვეთის დიამეტრი. მასალის დიაგრამა შეიძლება იყოს სქემატიზებული 2.25 ნახაზის შესაბამისად. მარჯვის კოეფიციენტი: $n=2$.

დასაშვები მომენტის მნიშვნელობის დასადგენად გამოვიყენოთ (4.28) ფორმულა

$$[M] = \frac{M_{II}}{n} = \frac{\tau_{ღ6} S_p}{n} = \frac{\tau_{ღ6} \pi d^3}{12n}.$$

შევადგინოთ სიმტკიცის პირობა საშიში კვეთისათვის

$$M_{\max} = 3M \leq \frac{\tau_{ღ6} \pi d^3}{12n},$$

საიდანაც მივიღებთ კვეთის დიამეტრის მნიშვნელობას

$$d = \sqrt[3]{\frac{36Mn}{\pi \tau_{ღ6}}} = \sqrt[3]{\frac{36 \cdot 300 \cdot 2}{3,14 \cdot 150 \cdot 10^6}} = 0,0368.$$

განვსაზღვროთ ახალი ზომების ძელის მოცულობა

$$V_3 = \frac{\pi d^2}{4} 4l = 12,96 \cdot 10^{-4} \pi l.$$

დავადგინოთ მასალის ეკონომიის პროცენტი კონსტრუქციის პირველი ვარიანტის შესამეტი შეცვლისას

$$\frac{V_1 - V_3}{V_1} 100\% = \frac{15,21 \cdot 10^{-4} \pi l - 12,96 \cdot 10^{-4} \pi l}{15,21 \cdot 10^{-4} \pi l} 100\% = 15\%.$$

ამ შემთხვევაში მასალის ეკონომია გაცილებით უფრო მცირეა, ვიდრე კონსტრუქციის მეორე ვარიანტის გამოყენებისას.

აღნიშნული ფაქტი შემთხვევითი არ არის. ზღვრული დატვირთვის მეთოდის გამოყენება ითვალისწინებს ძაბვების მნიშვნელობის გათანაბრებას კვეთის ყველა წერტილისათვის და მგრები მომენტის დასაშვები მნიშვნელობის გაზრდას. მაგრამ ეს გათანაბრება ხდება ძაბვების ზრდის ხარჯზე იმ წერტილებში, რომლებიც კვეთის ცენტრალურ ზონაშია - ცენტრალური წერტილის მიმართ ამ ძაბვების შესაბამისი მომენტი არ არის მნიშვნელოვანი. ისმის კითხვა, შეიძლება თუ არა მეორე მაგალითში განხილული კვეთისათვის მოსალოდნელი იყოს ზღვრული დატვირთვის მეთოდის უფრო მაღალი ეფექტურობა? შევნიშნოთ, რომ ასეთი მაგალითისთვისაც შემდგომში არ უნდა ველოდოთ სერიოზულ ცვლილებას, მაგრამ უკვე სხვა მიზეზით. მილისებრი ძელებში ძაბვები თავისთავად მნიშვნელოვნად არის გათანაბრებული და ზღვრული დატვირთვის მეთოდის გამოყენება მით უფრო არაეფექტურია, რაც უფრო თხელ-კედლიანია ძელი.

სტატიკურად რკვევად გრების ამოცანებში ზღვრული დატვირთვის მეთოდის გამოყენებით ძელის განივი კვეთის ზომების განსაზღვრა, მასალის ეკონომიის თვალსაზრისით, მაქსიმალური ძაბვების მეთოდთან შედარებით უმნიშვნელო ეფექტს იძლევა, მაგრამ თუ ვიხილავთ ერთი და იმავე ზომის ძელებს და დავადგინოთ სისტემაზე მოდებული მომენტების ზღვრულ მნიშვნელობას, ეფექტი უფრო მაღალია და (4.29)-ის შესაბამისად 33%-ს შეადგენს.

გავიხსენოთ, რომ გაჭიმვა-კუმშვის სტატიკურად რკვევად ამოცანებში სიმტკიცეზე გაანგარიშების ორივე მეთოდი ერთი და იგივე შედეგს იძლევა.

მაგალითი 4.4. მაქსიმალური ძაბვების მეთოდით სიმტკიცეზე გაანგარიშებით განვსაზღვროთ სტატიკურად ურკვევი წრითელი განივკვეთიანი ძელის დიამეტრის ზომები (ნახ.4.39), ძელი დამზადებულია პლასტიკური მასალისაგან: $\tau_{ღ} = 160$ მპა; $n=2$; $M=10^3$ ნმ,

ამოცანაში ორი უცნობი რეაქციაა M_A და M_B . მათი განსაზღვრისათვის შეიძლება შევადგინოთ მხოლოდ ერთი წონასწორობის პირობა: $M_A + M_B = M$.

ამრიგად, ამოცანა ერთჯერ სტატიკურად ურკვევია და, შესაბამისად საჭიროა, შევადგინოთ კიდევ ერთი, გადაადგილებების განტოლება. ასეთი განტოლება მიიღება პირობიდან, რომ A კვეთი B კვეთის მიმართ არ მობრუნდება. გავათავისუფლოთ A საყრდენი ჩამაგრებისაგან, შევცვალოთ მისი მოქმედება რეაქტიული მომენტის

მოქმედებით (ნახ. 4.40), განვსაზღვროთ A კვეთის მობრუნების კუთხე და გავუტოლოთ ნულს

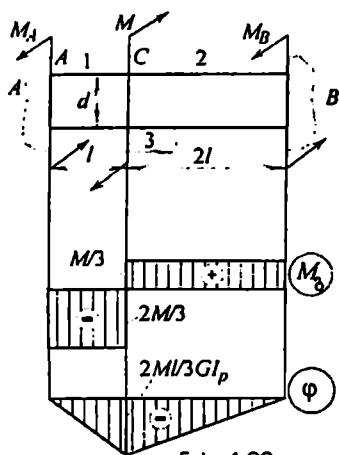
$$\varphi_A = -\frac{M_A 3l}{GI_p} + \frac{M 2l}{GI_p} = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ მარცხენა საყრდენის რეაქტიული მომენტის მნიშვნელობას

$$M_A = \frac{2}{3} M.$$

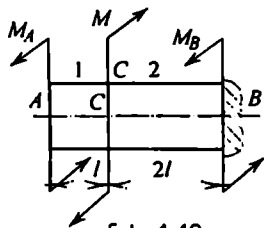
წონასწორობის განტოლებაში ამ შედეგის გათვალისწინებით დავადგენთ მეორე უცნობის მნიშვნელობასაც

$$M_B = \frac{1}{3} M.$$

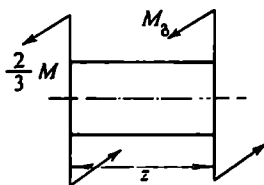


ნახ. 4.39

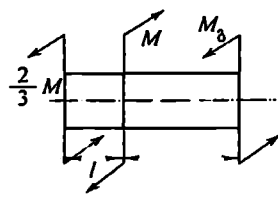
განვიხილოთ პირველი უბანი და მგრები მომენტის მნიშვნელობის დასადგენად გამოვიყენოთ კვეთის მეთოდი (ნახ. 4.41). წონასწორობის პირობიდან $(2/3) M + M_g = 0$, მივიღებთ $M_g = -(2/3) M$.



ნახ. 4.40



ნახ. 4.41



ნახ. 4.42

მაქსიმალური ძაბვები კვეთში

$$\tau_{\max} = -\frac{2M}{3W_p}.$$

ძაბვების მიმართულებას სიმტკიცეზე გაანგარიშებისას მნიშვნელობა არა აქვს და ამიტომ მაქსიმალური ძაბვების დადგენა ხდება ძაბვის ნიშნის გაუთვალისწინებლად.

დავადგინოთ ნებისმიერი კვეთის მობრუნების კუთხე

$$\varphi = -\frac{2Mz}{3GI_p}; \quad \varphi(0) = 0; \quad \varphi(l) = -\frac{2Ml}{3GI_p}.$$

გამოვიყენოთ კვეთების მეთოდი მეორე უბნისათვის (ნახ. 4.42) და განვსაზღვროთ მგრები მომენტი

$$\frac{2}{3}M - M + M_{\delta} = 0; \quad M_{\delta} = \frac{1}{3}M.$$

ამ უბნის კვეთებში მაქსიმალური ძაბვები

$$\tau_{\max} = \frac{M}{3W_p}.$$

გავითვალისწინოთ პირველი უბნის განხილვისას მიღებული საწყისი კვეთის მობრუნების კუთხე და განვსაზღვროთ მეორე უბნის ნებისმიერი კვეთის მობრუნების კუთხე

$$\varphi = -\frac{2Ml}{3GI_p} + \frac{Mz}{3GI_p}; \quad \varphi(0) = -\frac{2Ml}{3GI_p}; \quad \varphi(2l) = 0.$$

მეორე უბნის ბოლო კვეთის მობრუნების კუთხე ნულის ტოლია, რაც ამოცანის სწორად ამოხსნის დამადასტურებელია. მიღებული შედეგების გამოყენებით აგებული მგრები მომენტების და კვეთების მობრუნების კუთხეების ეპიურები ნაჩვენებია 4.39 ნახაზზე. როგორც ჩანს, საშიშია პირველი უბნის ნებისმიერი კვეთი, ვინაიდან მასში მოქმედებს მაქსიმალური ძაბვები. ამ კვეთში საშიში კონტურის წერტილებია. შევადგინოთ სიმტკიცის პირობა

$$\tau_{\max} = \frac{2M}{3W_p} \leq [\tau] = \frac{\tau_{\text{დნ}}}{n}.$$

წინალობის პოლარული მომენტის მნიშვნელობა

$$W_p \geq \frac{2Mn}{3\tau_{\text{დნ}}} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 2}{160 \cdot 10^6 \cdot 3} = 8,3 \cdot 10^{-6} \text{ მ}^3$$

საიდანაც დავადგენთ კვეთის დიამეტრის სიდიდეს

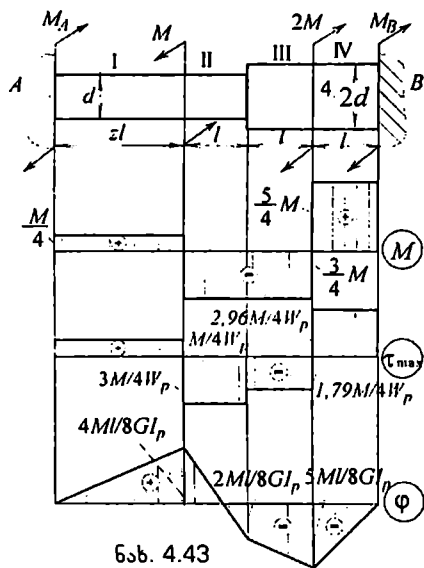
$$W_p = 0,2d^3 = 8,3 \cdot 10^{-6}; \quad d = \sqrt[3]{42 \cdot 10^{-6}} = 0,035 \text{ მ}.$$

განვსაზღვროთ შიგა და გარე ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა

$$A = \frac{M\varphi_C}{2} = \frac{M \cdot 2Ml}{2 \cdot 3GI_p} = \frac{M^2l}{3GI_p};$$

$$U = \frac{\left(-\frac{2}{3}M\right)^2 l}{2GI_p} + \frac{\left(\frac{1}{3}M\right)^2 2l}{2GI_p} = \frac{M^2l}{3GI_p}.$$

მაგალითი 4.წ. სიხისტესა და სიმტკიცეზე მაქსიმალური ძაბვების მეთოდით გავიანგარიშოთ ორსაფეხურიანი წრიული განივკვეთიანი ძელი და განვსაზღვროთ კვეთის დიამეტრი (ნახ. 4.43). ძელი დამზადებულია პლასტიკური მასალისაგან $\tau_{ღ} = 160$ მგპა; $M = 10$ კნმ; $l = 0,20$ მ; $n = 2$; $[\varphi] = 0,015$; $G = 8 \cdot 10^4$ მგპა.



ნახ. 4.43

შევადგინოთ წონასწორობის პირობა

$$M_A + M_B - M + 2M = 0$$

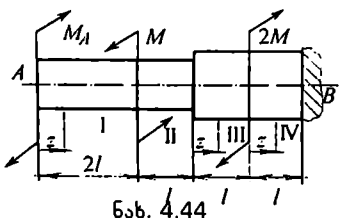
მივიღებთ შემდეგ განტოლებას

$$M_A + M_B = -M.$$

უცნობია რეაქციის ორი მომენტი, გვაქვს წონასწორობის ერთი განტოლება. მაშასადამე, ამოცანა ერთჯერ სტატიკურად ურკვევია. მოვაცილოთ ძელს მარცხენა საყრდენი, შევცვალოთ მისი მოქმედება რეაქციის მომენტით და შევადგინოთ დამატებითი გადაადგილებების განტოლება, რომელიც გამოხატავს A კვეთის B კვეთის მიმართ უძრავობას (ნახ. 4.44)

$$\varphi_{AB} = \frac{M_A 2l}{GI_p} + \frac{(M_A - M)l}{GI_p} + \frac{(M_A - M)l}{GI_p^0} + \frac{(M_A + M)l}{GI_p^0} = 0,$$

სადაც GI_p და GI_p^0 . შესაბამისად, ძელის მცირე და დიდი საფეხურების სიხისტეობა



ნახ. 4.44

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad I_p^0 = \frac{\pi (4\sqrt{2}d)^4}{32} = 2I_p;$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}; \quad W_p^0 = \frac{\pi (4\sqrt{2}d)^3}{16} = 1,68W_p.$$

გავითვალისწინოთ ეს შედეგები გადაადგილების განტოლებაში

$$2M_A + M_A - M + \frac{M_A - M}{2} + \frac{M_A + M}{2} = 0,$$

$$4M_A - M = 0.$$

ამ განტოლების წონასწორობის განტოლებასთან ერთად განხილვით დავადგენთ რეაქციის მომენტების მნიშვნელობებს

$$M_A = \frac{1}{4}M; \quad M_B = -\frac{5}{4}M.$$

მომენტების მოდების და კვეთის ცვლილების წერტილებით ძელი ოთხ უბნად იყოფა (ნახ. 4.44). დავიწყოთ პირველი უბნის განხილვა კვეთების მეთოდის გამოყენებით (ნახ. 4.45). წონასწორობის პირობის საშუალებით განვსაზღვროთ მგრები მომენტის მნიშვნელობა

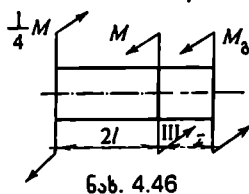
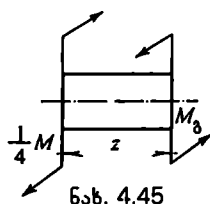
$$\frac{1}{4}M - M_\delta = 0; \quad M_\delta = \frac{1}{4}M.$$

ამ უბნისათვის მაქსიმალური ძაბვები

$$\tau_{\max} = \frac{1}{4} \frac{M}{W_p}.$$

განვსაზღვროთ კვეთების მობრუნების კუთხე

$$\varphi = \frac{Mz}{4GI_p}; \quad \varphi(0) = 0; \quad \varphi(2l) = \frac{4Ml}{8GI_p}.$$



განვიხილოთ მეორე უბანი (ნახ. 4.46). შევადგინოთ წონასწორობის პირობა და განვსაზღვროთ მგრები მომენტის მნიშვნელობა

$$\frac{1}{4}M - M - M_\delta = 0; \quad M_\delta = -\frac{3}{4}M.$$

ამ უბნის კვეთებში მაქსიმალური ძაბვა

$$\tau_{\max} = -\frac{3M}{4W_p}.$$

განვსაზღვროთ უბნის კვეთების მობრუნების კუთხე

$$\varphi = \frac{4}{8} \frac{Ml}{GI_p} - \frac{3}{4} \frac{Mz}{GI_p}; \quad \varphi(0) = \frac{4}{8} \frac{Ml}{GI_p}; \quad \varphi(l) = -\frac{2Ml}{8GI_p}.$$

მესამე უბანზე მგრები მომენტი უცვლელი დარჩება $M_\delta = -\frac{3}{4}M$.

უბნის კვეთებში მაქსიმალური მხები ძაბვა

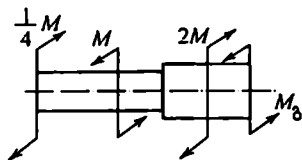
$$\tau_{\max} = -\frac{3M}{4 \cdot 1,68 \cdot W_p} = -1,79 \frac{M}{4W_p}.$$

ამ უბნისათვის განვსაზღვროთ კვეთების მობრუნების კუთხეები

$$\varphi = -\frac{2Ml}{8GI_p} - \frac{3Mz}{8GI_p}; \quad \varphi(0) = -\frac{2Ml}{8GI_p}; \quad \varphi(l) = -\frac{5Ml}{8GI_p}.$$

განვიხილოთ მეოთხე უბანი (ნახ. 4.47), შევადგინოთ წონასწორობის პირობა:

$$\frac{1}{4}M - M + 2M - M_8 = 0; \quad M_8 = \frac{5}{4}M.$$



ნახ. 4.47

ამ უბნის განივი კვეთებისათვის მაქსიმალური ძაბვები

$$\tau_{\max} = -\frac{5M}{4 \cdot 1,69 \cdot W_p} = -2,96 \frac{M}{4W_p}.$$

განვსაზღვროთ კვეთების მობრუნების კუთხეები

$$\varphi = -\frac{5Ml}{8GI_p} + \frac{5Mz}{8GI_p}; \quad \varphi(0) = -\frac{5Ml}{8GI_p}; \quad \varphi(l) = 0.$$

მიღებული შედეგების გამოყენებით 4.43 ნახაზზე აგებულია მგრები მომენტების, მაქსიმალური ძაბვების და კვეთების მობრუნების კუთხეების ეპიურები.

გავიანგარიშოთ ძელი სიხისტეზე. მაქსიმალური მობრუნების კუთხე შეესაბამება მესამე და მეოთხე უბნების სასაზღვრო კვეთს

$$\varphi_{\max} = \frac{5}{8} \frac{Ml}{GI_p} \leq [\varphi]$$

საიდანაც მივიღებთ

$$I_p = 0,1d^4 \geq \frac{5Ml}{8G[\varphi]}; \quad d = \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 10^4 \cdot 0,2}{0,1 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,015}} \approx 0,057 \text{ მ.}$$

საშიშია მეორე უბნის ნებისმიერი კვეთი და ამიტომ სიმტკიცის პირობას ექნება სახე

$$\tau_{\max} = \frac{3M}{4W_p} \leq \frac{\tau_{\text{ღნ}}}{n}.$$

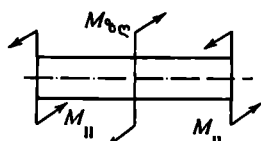
საიდანაც განვსაზღვრავთ d -ს მნიშვნელობას:

$$W_p = 0,2d^3; \quad d = \sqrt[3]{\frac{3Mn}{4 \cdot 0,2 \cdot \tau_{\text{ღ}}}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^4 \cdot 2}{4 \cdot 0,2 \cdot 160 \cdot 10^6}} \approx 0,078 \text{ მ.}$$

მიღებული შედეგები მოწმობს, რომ განსაზღვრულია ძელის სიმტკიცის პირობა. ამიტომ საბოლოოდ $d = 7,8$ სმ. დასკვნა შეიძლება შეიცვალოს, თუ გაანგარიშებებში მარაგის კოეფიციენტები განსხვავებულები იქნება.

მაგალითი 4.6. გავიანგარიშოთ მეოთხე მაგალითში განხილული ძელი სიმტკიცეზე ზღვრული დატვირთვის მეთოდით და დავადგინოთ მისი დიამეტრი. ძელის მასალის ძაბვების და დეფორმაციების დიაგრამა, 2.25 ნახაზზე გამოსახული დიაგრამის მსგავსად, შეიძლება იყოს სქემატიზებული.

ძელზე მოდებული მომენტის თანმიმდევრული ზრდით მივალწევთ, რომ პირვე-



ნახ. 4.48

ლი უბნის კვეთების კონტურის წერტილებში დაიწყება პლასტიკური დეფორმაციები (ნახ. 4.14ა). მომენტის შემდგომი ზრდა გამოიწვევს პლასტიკური დეფორმაციების კვეთების სიღრმეში გავრცელებას (ნახ. 4.14, ბ). პირველი უბნის კვეთების სიმტკიცის რესურსი მთლიანად ამოიწურება, როდესაც მათში ძაბვების განაწილების სურათი იქნება ისეთი, როგორც 4.14გ ნახაზზეა ნაჩვენები. მაგრამ, მთელი ძელის სიმტკიცის მარაგი, ამით არ ამოიწურება,

ვინაიდან მეორე უბნის კვეთების შესაძლებლობები მთლიანად არ არის გამოყენებული. ძელი ზღვრულ მდგომარეობაშია მაშინ, როდესაც მეორე უბნის კვეთები მთლიანად პლასტიკურ ზონაში იქნება (ნახ. 4.14, გ). ძელზე მოდებული მომენტი, რომელიც განსაზღვრავს ასეთ მდგომარეობას, იქნება ზღვრული მომენტი. მისი განსაზღვრისათვის განვიხილოთ ძელის ცენტრალური ნაწილის წონასწორობის პირობა იმ ვარაუდით, რომ პირველი და მეორე უბნების მგრები მომენტები (4.28)-ის შესაბამისი ზღვრული მომენტების ტოლია (ნახ. 4.48)

$$M_{\phi} = 2M_{II} = \tau_{\text{ღ}} \frac{\pi d^3}{6}.$$

ზღვრული დატვირთვის მეთოდის შესაბამისი სიმტკიცის პირობა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$M \leq \frac{M_{\phi}}{n} = \frac{\tau_{\text{ღ}} \pi d^3}{6n},$$

საიდანაც კვეთის დიამეტრის მნიშვნელობა

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{6Mn}{\pi \tau_{\text{ღ}}}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 10^3 \cdot 2}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} \approx 0,029 \text{ მ.}$$

შეადაროთ მასალის ხარჭი ძელის ზომების დადგენისას მაქსიმალური ძაბვების და ზღვრული დატვირთვის მეთოდების გამოყენებით

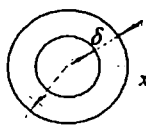
$$V_1 = \frac{\pi(3,5 \cdot 10^{-2})^2}{4} 3l = 12,3 \cdot 10^{-4} \frac{3\pi l}{4} \text{ მ}^3;$$

$$V_2 = \frac{\pi(2,9 \cdot 10^{-2})^2}{4} 3l = 8,4 \cdot 10^{-4} \frac{3\pi l}{4} \text{ მ}^3; \quad \frac{V_1 - V_2}{V_1} 100\% = 31,7\%.$$

მაგალითი 4.7. თხელკედლიანი ჩაკეტილი (შეკრული) პროფილისათვის (ნახ. 4.49) განვსაზღვროთ გეომეტრიული მახასიათებლები.

განვსაზღვროთ კვეთის სექტორული ფართობი

$y \uparrow$



ნახ. 4.49

$$F^* = \pi R^2.$$

მაშინ (4.68)-ის საშუალებით, დავადგენთ კვეთის პოლარული წინაღობის მომენტს

$$W_k = 2F^* \delta_{\min} = 2\pi R^2 \delta. \quad (4.74)$$

გამოვიყენოთ (4.72) ფორმულა და დავადგინოთ სიხისტის მაჩვენებელი მახასიათებლის მნიშვნელობა

$$I_k = \frac{(2F^*)^2}{\int (S) \frac{dS}{\delta}} = \frac{(2\pi R^2)^2}{\frac{2\pi R}{\delta}} = 2\pi R^3 \delta. \quad (4.75)$$

ნაპოვნი მახასიათებელი არის კვეთის პოლარული I_p მომენტი, ამიტომ (3.11)-ის შესაბამისად ვადგენთ ინერციის ღერძულ მომენტებს

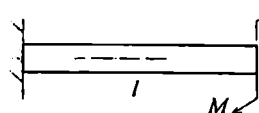
$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \pi R^3 \delta. \quad (4.76)$$

(4.75) და (4.76) ფორმულები უშუალოდ მიიღება (3.39) და (3.40) გამოსახულებიდან, თუ გავითვალისწინებთ თხელკედლიანი კვეთებისათვის დამახასიათებელ პირობას, რომ $(\delta/R) \ll 1$.

მაგალითი 4.8. დავადგინოთ მაქსიმალური ძაბვები და კვეთის მობრუნების კუთხე 4.50 ნახაზზე, ნაჩვენები ძელისათვის. ძელის განივი კვეთი თხელკედლიანი შეკრული პროფილია (ნახ. 4.51).

დავადგინოთ კვეთის სექტორული ფართობი

$$F^* = a^2$$



ნახ. 4.50

გავინგარიშოთ კვეთის სიმტკიცის მახასიათებელი

$$W_k = 2F^* \delta_{\min} = 2a^2 \delta.$$

მაქსიმალური მხები ძაბვები თანაბრად განაწილებული კონტურის მართობი მიმართულებით კვეთის AB და $A'B'$ ელემენტებში. (4.67) ფორმულის შესაბამისად

$$\tau_{\max} = \frac{M}{2a^2 \delta}.$$

სიხისტის მახასიათებლის დასადგენად გავინაგარიშთ (4.72)-ის ინტეგრალი

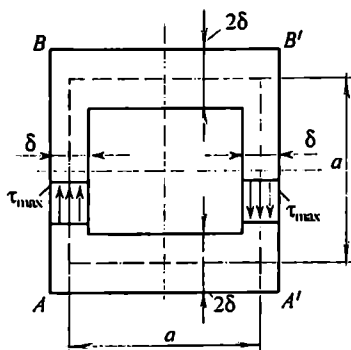
$$\int_{(S)} \frac{dS}{\delta} = \frac{2}{2\delta} \int_0^a dS + \frac{2}{\delta} \int_0^a dS = \frac{3a}{\delta}.$$

(4.72)-ის ფორმულის გამოყენებით დავადგინოთ I_k მახასიათებლის მნიშვნელობა

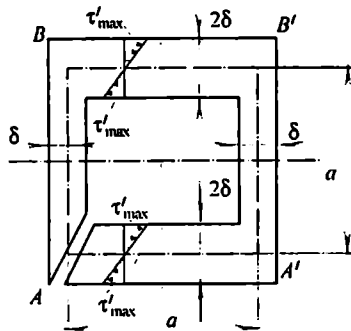
$$I_k = \frac{(2a^2)^2 \delta}{3a} = \frac{4a^3 \delta}{3}.$$

მობრუნების კუთხეს განვსაზღვრავთ (4.71) ფორმულით

$$\varphi = \frac{Ml}{GI_k} = \frac{3Ml}{4Ga^3 \delta}.$$



ნახ. 4.51



ნახ. 4.52

დავადგინოთ იმავე ძელის გადაადგილებები და ძაბვები, თუ მისი განივი კვეთი ჩაკეტილის ნაცვლად ღია პროფილია (ნახ. 4.52). (4.59) ფორმულით დავადგინოთ კვეთის სიხისტის მახასიათებელი

$$I_k = \sum_{i=1}^4 \frac{S_i \delta_i^3}{3} = \frac{1}{3} [2a(2\delta)^3 + 2a(\delta)^3] = 6a\delta^3$$

სიმტკიცის მახასიათებლის მნიშვნელობა განისაზღვრება (4.63) ფორმულის საშუალებით

$$W_k = \frac{I_k}{\delta_{\max}} = \frac{6a\delta^3}{2\delta} = 3a\delta^2$$

ამ შემთხვევაში მაქსიმალური ძაბვები მოქმედებს კვეთის ელემენტის AA' -ის და BB' -ის ზედაპირებთან (ნახ.4.52) და მათი მნიშვნელობა განისაზღვრება (4.62) ფორმულით

$$\tau_{\max} = \frac{M}{3a\delta^2}.$$

ძელის გრეხის კუთხის დასადგენად გამოვიყენოთ (4.60) ფორმულა

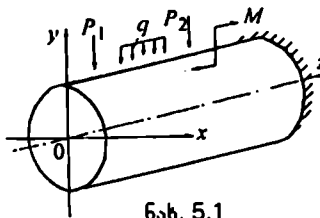
$$\varphi = \frac{Ml}{6Ga\delta^3}.$$

განვსაზღვროთ ღია და ჩაკეტილი პროფილების სიმტკიცის და სიხისტის მახასიათებლების თანაფარდობა

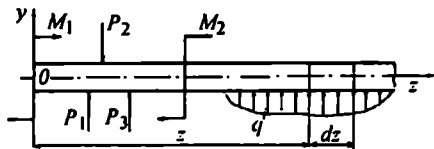
$$k_1 = \frac{3a\delta^2}{2a^2\delta} = 1,5 \frac{\delta}{a} \quad k_2 = \frac{6a\delta^3 \cdot 3}{4a^3\delta} = 4,5 \frac{\delta^2}{a^2}.$$

§25. შიგა ძალოვანი ფაქტორები ძელის ღუნვისას

ღუნვა ეწოდება ძელის ისეთ დატვირთულ მდგომარეობას, როდესაც მის განივ კვეთებში წარმოიშობა მღუნავი მომენტები. თუ განივ კვეთებში მოქმედებს მხოლოდ მღუნავი მომენტები, მოვლენას სუფთა ღუნვა ეწოდება. საჭიროა მისგან გ. წსხვავებით განვიხილოთ განივი ღუნვა, რომლისთვისაც დამახასიათებელია კვეთში მღუნავ მომენტთან ერთად განივი ძალის მოქმედება. განვიხილოთ სწორი ძელის დატვირთვა ისეთი ძალებით, რომლებიც მოქმედებენ ძელის ღერძზე გამავალ სიბრტყეებში Ox ღერძის მართობი მიმართულებით (ნახ. 5.1). ძალთა მოქმედების სიბრტყისა და განივი კვეთის გადაკვეთის წრფეს ძალთა წრფე ეწოდება. თუ ეს წრფე ემთხვევა განივი კვეთის



ნახ. 5.1

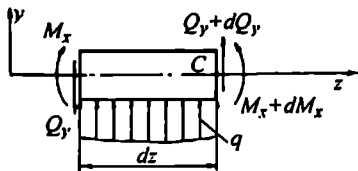


ნახ. 5.2

ერთ-ერთ მთავარ ცენტრალურ ღერძს, საქმე გვაქვს პირდაპირ ღუნვასთან. წინააღმდეგ შემთხვევაში ღუნვა ირიბია. შემდგომში, აღნიშნული ტერმინები დეტალურად იქნება ახსნილი.

განვიხილოთ სწორი ძელი, რომელზედაც მოქმედებს ძალთა სისტემა, როგორც ეს 5.2 ნახაზზეა ნაჩვენები.

შევისწავლოთ ძელის კვეთებში მოქმედი შიგა ძალოვანი ფაქტორები. ამისათვის ძელიდან ამოკვეთოთ საწყისი 0 წერტილიდან z მანძილით დაცილებული dz სიგრძის ძელის ელემენტი (ნახ. 5.3).



ნახ. 5.3

განვიხილოთ ელემენტის წონასწორობის პირობები. ვინაიდან ელემენტი უსასრულოდ მცირე სიგრძისაა, ამ მონაკვეთზე განაწილებული ძალების ინტენსიურობა შეიძლება ჩავთვალოთ მუდმივად და მათი ტოლქმედი წარმოვად-

გინოთ qdz ნამრავლის სახით. დავაგეგმილოთ ელემენტზე მოქმედი ძალები y ღერძზე; გვემიღების ჯამი გაუტოლოთ ნულს

$$(Q_y + dQ_y) - Q_y + qdz = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ კვეთის კვეთში მოქმედ განივ ძალასა და განაწილებული

განივი ძალების ინტენსიურობას შორის, გამოსახულს დიფერენციალური განტოლების სახით

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q. \quad (5.1)$$

ამ განტოლების ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ ფორმულას, რომლის საშუალებითაც განვსაზღვრავთ განივი ძალის მნიშვნელობას ნებისმიერ კვეთში

$$Q_y = Q_0 - \int_0^z q dz, \quad (5.2)$$

სადაც Q_0 – განივი ძალის მნიშვნელობაა უბნის საწყის კვეთში. (5.2) ფორმულა გამოიყენება შეყურსული ძალების მოქმედებას საწყისი კვეთიდან z კოორდინატით განსაზღვრულ კვეთამდე.

შევადგინოთ წონასწორობის მეორე პირობა, რომლის შესაბამისად C წერტილის მიმართ ელემენტზე მოდებული ძალების მომენტების ჯამი ნულის ტოლია

$$M_x + dM_x - M_x + Q_y dz - q \frac{dz \cdot dz}{2} = dM_x + Q_y dz - q \frac{dz^2}{2} = 0.$$

ამ პირობაში ბოლო წევრი უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეა დანარჩენ წევრებთან შედარებით, ამიტომ შეგვიძლია მისი უგულებელყოფა. მაშინ, ელემენტალური გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ კავშირს დიფერენციალური სახით მდუნავ მომენტსა და განივ ძალას შორის

$$\frac{dM_x}{dz} = -Q_y. \quad (5.3)$$

როგორც აღინიშნა, სუფთა ღუნვისათვის განივი ძალა ნულის ტოლია, რაც (5.3)-ის შესაბამისად გვაძლევს პირობას

$$\frac{dM_x}{dz} = 0, \quad M_x = C = \text{const}. \quad (5.4)$$

ამრიგად, სუფთა ღუნვის შემთხვევაში მდუნავი მომენტი მუდმივია. მდუნავი მომენტის მნიშვნელობის დასადგენად საჭიროა (5.3)-ის ინტეგრება

$$M_x = M_0 - \int_0^z Q_y dz, \quad (5.5)$$

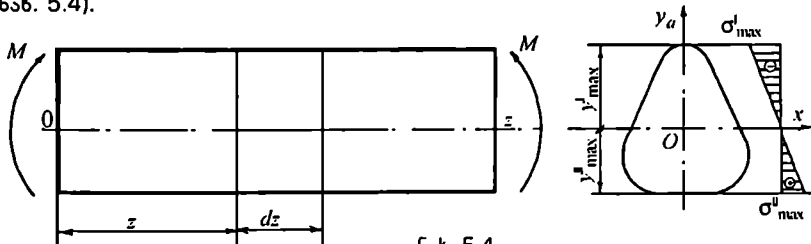
სადაც M_0 არის მდუნავი მომენტის მნიშვნელობა უბნის საწყის კვეთში.

მიღებული (5.5) ფორმულის საფუძველზე შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი

დასკვნა: თუ ძელზე მოდებულია მხოლოდ მომენტები და შეეყურსული ძალები ($q=0$). მათი მოდების წერტილებს შორის, (5.2)-ის შესაბამისად, განივი ძალის მნიშვნელობა იქნება მუდმივი და ამიტომ, (5.5)-ის თანახმად, მღუნავი მომენტები ამ მონაკვეთებზე წრფივი კანონით იცვლება.

§26. ქაბვები სწორი ძელის სუფთა ღუნვისას

განვიხილოთ მუდმივი განივი კვეთის მქონე ძელის პირდაპირი სუფთა ღუნვა (ნახ. 5.4).

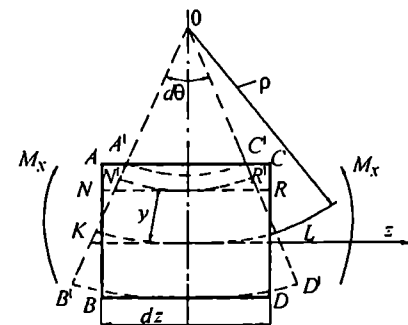


ნახ. 5.4

რადგან მღუნავი მომენტი ძელის ნებისმიერ კვეთში მუდმივია და M -ის ტოლია, განსახილველი ერთგვაროვანი ძელის ღერძის სიმრუდის ცვლილებაც ნებისმიერ კვეთთან მუდმივი იქნება. ეს იმას ნიშნავს, რომ ღერძი ძელის ღუნვისას მიიღებს წრეწირის მონაკვეთის ფორმას. განვიხილოთ dz სიგრძის ძელის ელემენტი (ნახ. 5.4 და ნახ. 5.5).

ვაკეთებთ დაშვებას, რომ ძელის ღუნვისას განივი კვეთი რჩება ბრტყელი და ძელის დეფორმირებული ღერძის მართობი, ამიტომ AB და CD კვეთები მობრუნდება სიბრტყის დამახინჯების გარეშე და დაიკავებს $A'B'$ და $C'D'$ მდებარეობას. შესასწავლი ამოცანისათვის აღნიშნული დაშვების სისწორის დამტკიცება საკმაოდ მარტივად შეიძლება.

გავაკეთოთ კიდევ ერთი დაშვება, რომ ძელის დეფორმაციისას Oz ღერძის პარალელური ბოჭკოები ერთმანეთზე არ მოქმედებენ, განიცდიან მხოლოდ გაჭიმვას ან კუმშვას და მათ შორის მანძილი არ იცვლება. ეს იმას ნიშნავს, რომ აქაც, ისევე როგორც გაჭიმვა-კუმშვისათვის, გვაქვს ერთღერძა დაძაბული მდგომარეობა და



ნახ. 5.5

შეგვიძლია გამოვიყენოთ ჰუკის კანონი (1.10) სახით.

დეფორმირებული ელემენტის განხილვა გვიჩვენებს, რომ ძელის ბოჭკოები ელემენტის ქვედა ნაწილში განიცდიან გაჭიმვას, ზედა ნაწილში კი შეკუმშვას.

გაუმუშავებული და შეკუმშული არეების სასაზღვრო KL ბოჭკო იქნება ნეიტრალურ მდგომარეობაში და ძელის დეფორმაციის შედეგად მისი სიგრძე არ შეიცვლება. შრეს, რომელშიც ასეთი ბოჭკოებია მოთავსებული, დავარქვათ ნეიტრალური შრე, ხოლო ამ შრის და განივი კვეთის გადაკვეთის ხაზს – ნეიტრალური წრფე.

განვიხილოთ ნეიტრალური შრიდან y მანძილით დაცილებული NR ბოჭკო, რომელიც ძელის დეფორმაციის შედეგად გადავა $N'R'$ მდებარეობაში. ამ ბოჭკოს საწყისი სიგრძე

$$NR = KL = dz = \rho d\theta,$$

სადაც ρ ნეიტრალური შრის სიმრუდის რადიუსია.

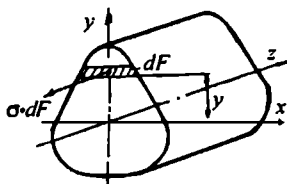
ელემენტის დეფორმაციის შედეგად NR ბოჭკოს სიგრძე შეიცვლება

$$N'R' = (\rho - y)d\theta.$$

ახლა შეგვიძლია განვსაზღვროთ z ღერძის მიმართულების ბოჭკოს ხაზოვანი დეფორმაცია

$$\epsilon = \frac{N'R' - NR}{NR} = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = -\frac{y}{\rho}. \quad (5.6)$$

ნორმალური ძაბვების მნიშვნელობებს ვაღგენთ ჰუკის კანონის გამოყენებით



ნახ. 5.6

$$\sigma = E\epsilon = -\frac{E}{\rho}y. \quad (5.7)$$

მიღებული შედეგი გვაძლევს დასკვნის გაკეთების საფუძველს: ნორმალური ძაბვები და ხაზოვანი დეფორმაციები კვეთში y ღერძის მიმართულებით იცვლებიან წრფივი კანონით და აღწევენ მაქსიმალურ მნიშვნელობას ნეიტრალური შრიდან მაქსიმალურად დაცილებულ წერტილებში. თვით ნეიტრალურ შრეზე მდებარე წერტილებში ნორმალური ძაბვები ნულის ტოლია.

შევადგინოთ წონასწორობის პირობები. ვინაიდან კვეთში ნორმალური ძალა ნულის ტოლია, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი პირობა (ნახ.5.6):

$$N = \int_F \sigma dF = \int_F \left(-\frac{E}{\rho}y \right) dF = -\frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0.$$

რადგანაც ვიხილავთ ძელს დეფორმირებულ მდგომარეობაში, $(E/\rho) \neq 0$, ამიტომ $\int_F y dF = 0$. ამრიგად, დავადგინეთ, რომ ნეიტრალური წრფის მიმართ კვეთის სტა-

ტიკური მომენტი ნულის ტოლია. ასეთი წრფე, როგორც ვიცით, გადის კვეთის სიმძიმის ცენტრში და არის კვეთის ცენტრალური ღერძი.

განვსაზღვროთ მლუნავი მომენტის მნიშვნელობა:

$$M_x = \int_F (-\sigma dF) y = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF.$$

მიღებული ფორმულის ინტეგრალური წევრი, (3.9) ფორმულის თანახმად, კვეთის ინერციის I_x მომენტია მისი ცენტრალური x ღერძის მიმართ. მაშინ

$$M_x = \frac{EI_x}{\rho}, \quad (5.8)$$

საიდანაც დეფორმირებული ძელის სიგრძედ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}. \quad (5.9)$$

თუ შევადარებთ ამ ფორმულას ადრე მიღებულ (2.6) და (4.13) ფორმულებს, დავრწმუნდებით, რომ გაჭიმვა-კუმშვის, გრეხისა და ღუნვის ფორმულები სტრუქტურულად ერთმანეთის ანალოგიურადაა აგებული, აქედან გამომდინარე. ბუნებრივია EI_x მახასიათებელს ვუწოდოთ ძელის სიხისტე ღუნვისას.

(5.9) გამოსახულება გავითვალისწინოთ (5.7) ფორმულაში და გამოვხატოთ ძაბვები მლუნავი მომენტის საშუალებით

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} y. \quad (5.10)$$

უდიდესი აბსოლუტური მნიშვნელობის ძაბვები მოქმედებს კვეთის იმ წერტილებში, რომლებიც მაქსიმალურადაა დაცილებული ცენტრალური ღერძიდან (ნახ. 5.4). ეს ძაბვები, (5.10)-ის შესაბამისად, იქნება

$$\sigma'_{\max} = \frac{M_x y'_{\max}}{I_x}; \quad \sigma''_{\max} = \frac{M_x y''_{\max}}{I_x}. \quad (5.11)$$

შემოვიღეთ კვეთის წინაღობის ღერძული მომენტების ცნებები და განვსაზღვროთ ისინი შემდეგი ფორმულებით

$$W'_x = \frac{I_x}{y'_{\max}}; \quad W''_x = \frac{I_x}{y''_{\max}}. \quad (5.12)$$

მაშინ, (5.11)-ის ნაცვლად მივიღებთ

$$\sigma'_{\max} = \frac{M_x}{W'_x}; \quad \sigma''_{\max} = \frac{M_x}{W''_x}. \quad (5.13)$$

კერძო შემთხვევაში, როდესაც Ox ღერძი სიმეტრიის ღერძია, გვაქვს

$$y'_{\max} = y''_{\max} = y_{\max}.$$

ამ შემთხვევაში, შეიძლება ვისაუბროთ კვეთის საერთო წინაღობის მომენტი-ზე, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}. \quad (5.14)$$

ასეთი კვეთებისათვის მაქსიმალური ძაბვები გაქიმულ და შეკუმშულ არეებში ერთმანეთის ტოლია და ნაცვლად (5.13) ფორმულისა, განისაზღვრება შემდეგი საერთო ფორმულით

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}. \quad (5.15)$$

პლასტიკური მასალებისათვის, სიმტკიცის მაქსიმალური ძაბვების მეთოდის შესაბამისად, ზღვრული მდგომარეობა და შესაბამისი ზღვრული M_l მომენტი განისაზღვრება (5.15) ფორმულით გამოთვლილი მაქსიმალური ძაბვისა და დენადობის ზღვრის ტოლობიდან

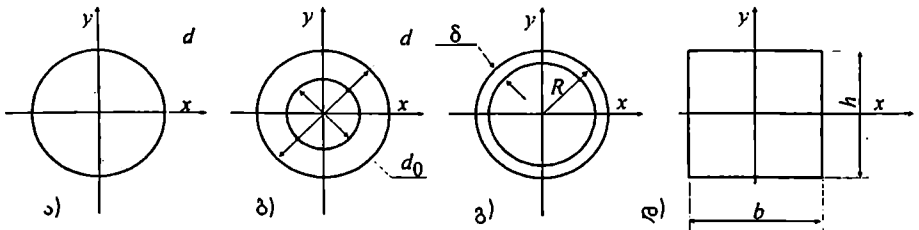
$$M_l = \sigma_{\text{ღვ}} W_x. \quad (5.16)$$

განვიხილოთ პრაქტიკაში ფართოდ გავრცელებული ზოგიერთი კვეთი;

წრიული მთლიანი კვეთისათვის (ნახ. 5.7,ა) $y_{\max} = \frac{d}{2}$ და (3.37) ფორმულის

შესაბამისად ღერძული წინაღობის მომენტი

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3 \quad (5.17)$$



ნახ. 5.7

წრიული ღრუ კვეთისათვის (ნახ. 5.7,ბ) წინაღობის ღერძული მომენტის გამოსახულება (3.40) ფორმულის გამოყენებით.

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} (1 - c^4) \approx 0,1(1 - c^4) d^3, \quad (5.18)$$

სადაც $c = d_0 / d$.

რაც შეეხება თხელკედლიან წრიულ პროფილს (ნახ. 5.7,გ), მისი ღერძული წინაღობის მომენტის დასადგენად, ცხადია, შეიძლება (5.18) ფორმულის გამოყენება, მაგრამ პრაქტიკისათვის საკმარისი სიზუსტის შედეგი მიიღება ფორმულითაც, რომელიც ითვალისწინებს პირობას, რომ $\delta \ll R$. ასეთი ფორმულა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\gamma_{\max} = R$, მიიღება (4.76)-ის საშუალებით

$$W_x = \pi R^2 \delta. \quad (5.19)$$

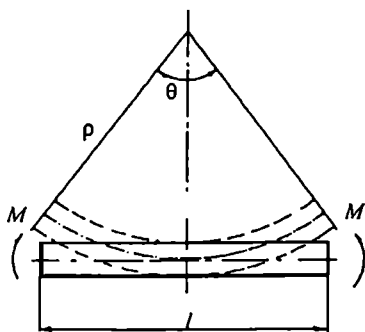
მართკუთხა განივი კვეთისათვის (ნახ.5.7,დ) $\gamma_{\max} = \frac{h}{2}$, ამიტომ (3.28)-ის საშუალებით მივიღებთ წინაღობის ღერძული მომენტის შემდეგ მნიშვნელობას

$$W_x = \frac{bh^2}{6}. \quad (5.20)$$

§27. გარე და შიგა ძალების მუშაობა სუფთა ღუნვისას

გამოვსახოთ 5.4 ნახაზზე ნაჩვენებ ძელი დეფორმირებულ მდგომარეობაში (ნახ.5.8). ამ შემთხვევაში გარე მომენტების მუშაობა

$$A = \frac{M\theta}{2}. \quad (5.21)$$



ნახ. 5.8

განვსაზღვროთ ძელის ბოლო კვეთების ურთიერთმობრუნების θ კუთხე. ძელის დეფორმაციის პროცესში ნეიტრალური შრის სიგრძე არ იცვლება, რაც საშუალებას გვაძლევს შევადგინოთ შემდეგი თანაფარდობა

$$\theta \rho = l,$$

საიდანაც (5.9)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$\theta = \frac{l}{\rho} = \frac{Ml}{EI_x}, \quad (5.22)$$

მაშინ, 5.21-ის ნაცვლად გარე ძალების მუშაობა შეიძლება გამოვსახოთ სხვაგვარადაც

$$A = \frac{M^2 l}{2EI_x}. \quad (5.23)$$

ამ შედეგის გამოყენებით იოლად დავადგენთ შიგა მომენტების მუშაობას. (5.23) ფორმულა მივუსადაგოთ ძელის ელემენტს, რომელიც გამოსახულია 5.5 ნახაზზე

$$dU = \frac{M_x^2 dz}{2EI_x}. \quad (5.24)$$

ინტეგრების შედეგად მივიღებთ შიგა მომენტების მუშაობას

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2 dz}{2EI_x}. \quad (5.25)$$

ცხადია, განხილულ ამოცანაში გვაქვს ტოლობა $M_x = M = const.$ ამიტომ შეიძლება (5.25) ჩავწეროთ სხვაგვარადაც

$$U = \frac{M_x^2 l}{2EI_x}. \quad (5.26)$$

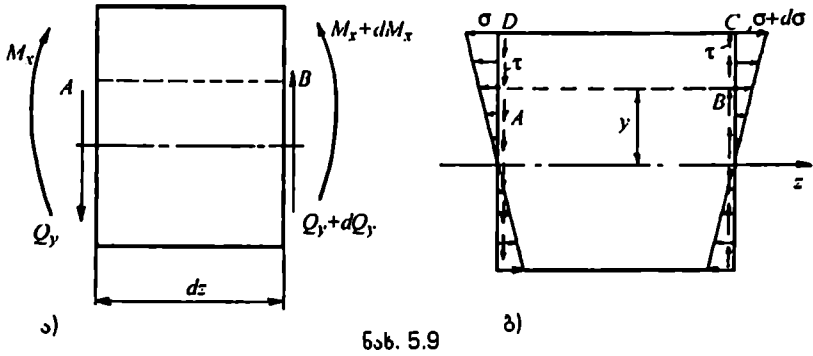
ასეთი ფორმით გამოსახული შიგა და გარე ძალების მუშაობები როგორც (5.23) და (5.26) ფორმულებიდან ჩანს, ერთნაირად გამოსახება, ვინაიდან შიგა მომენტი და გარე ძალების მომენტი ერთმანეთის ტოლია.

თუ ძელი საფეხურებიანია და რამდენიმე უბნისაგან შედგება, (5.23) ფორმულა გამოიყენება ყოველი უბნისათვის დამოუკიდებლად და შიგა მომენტების საერთო მუშაობა განისაზღვრება მიღებული შედეგების შეჯამებით. (5.21) და (5.25) ფორმულები გამოიყენება ცვალებადი განივი კვეთის მქონე ძელების შემთხვევაშიც.

§28. ძაბვები განივი ღუნვისას

ძელის განივი ღუნვისას კვეთში მოქმედი განივი ძალა წარმოადგენს მხები ძაბვების ტოლქმედს. ამ ძაბვების მოქმედების შედეგად განივი კვეთი არ რჩება ბრტყელი და ძელის დეფორმირებული ღერძის მართობი, მაგრამ, იშვიათი გამონაკლისის გარდა, სუფთა ღუნვისათვის მიღებული ფორმულები შეიძლება განვაზოგადოთ განივ ღუნვაზეც. კერძოდ, განივი ღუნვისათვის ნორმალური ძაბვების

მნიშვნელობის დასადგენად ფართოდ გამოიყენება (5.10) ფორმულა. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როდესაც განივი ძალა მუდმივია, ეს ფორმულა ზუსტ შედეგს იძლევა. განივი ძალის მნიშვნელობის ცვლილებისას ნორმალური ძაბვის განსაზღვრისას მიღებული ფორმულები იძლევა ცდომილებას,

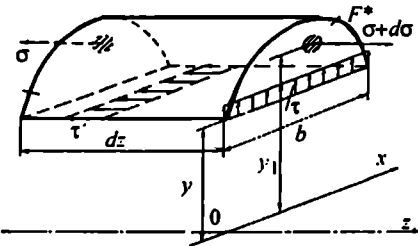


ნახ. 5.9

მაგრამ ეს ცდომილება ისეთივე რივისაა, როგორიც (h/l) ერთთან შედარებით (აქ h და l შესაბამისად, კვეთის სიმაღლე და ძელის სიგრძეა).

მხები ძაბვების ფორმულის მისაღებად განვიხილოთ ძელის dx სიგრძის ელემენტი (ნახ. 5.9). ელემენტის მარჯვენა და მარცხენა კვეთებში ნორმალური ძაბვები განსხვავდება ერთმანეთისაგან $d\sigma$ სიდიდით და ეს სხვაობა განპირობებულია ამ კვეთებში მღუნავი მომენტების dM_x სხვაობით.

დავადგინოთ მხები ძაბვების მნიშვნელობა კვეთის ნეიტრალური ღერძიდან y მანძილით დაცილებულ წერტილებში. ამისათვის dx სიგრძის ელემენტს AB სიბრტყით მოკვეთთ $ABCD$ ნაწილი (ნახ. 5.9,ბ და ნახ. 5.10).



ნახ. 5.10

F^* ძალები Oz ღერძის მიმართულებაზე და გვერდობის F^* ფართობის მქონე კვეთის

$$-\int_{F^*} \sigma dF + \int_{F^*} (\sigma + d\sigma) dF - \tau b dx = 0.$$

ამ განტოლებაში ინტეგრალები გაიანგარიშება F^* ფართობის მქონე კვეთის

ნაწილისათვის, რაც ნაჩვენებია 5.10 ნახაზზე. მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$\tau = \frac{1}{b} \int_{F^*} \frac{d\sigma}{dz} dF.$$

(5.10)-ის საშუალებითა და (5.3)-ის გათვალისწინებით, ნორმალური ძაბვის წარმოებული

$$\frac{d\sigma}{dz} = -\frac{y}{I_x} \frac{dM_x}{dz} = \frac{Q_y}{I_x} y.$$

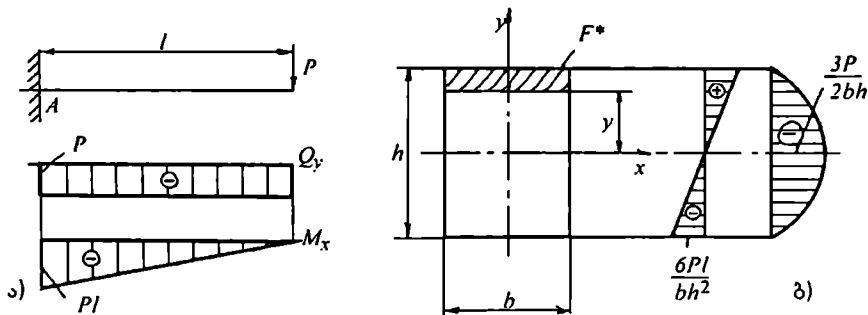
გავითვალისწინოთ ეს შედეგი მხები ძაბვის გამოსახულებაში

$$\tau = \frac{1}{b} \int_{F^*} \frac{Q_y}{I_x} y dF = \frac{Q_y}{I_x b} \int_{F^*} y dF,$$

და მხები ძაბვების ფორმულა შეგვიძლია ჩავწეროთ საბოლოო სახით

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{I_x b}. \quad (5.27)$$

ამ ფორმულაში Q_y განივი ძალის მნიშვნელობაა იმ კვეთში, რომელშიც განისაზღვრება მხები ძაბვები; S_x^* -განივი კვეთის F^* ფართობის მქონე ნაწილის სტატიკური მომენტი ცენტრალური Ox ღერძის მიმართ; I_x – მთელი კვეთის ინერციის მომენტი Ox ღერძის მიმართ; b – კვეთის სიგანეა იმ ადგილზე, სადაც განისაზღვრება მხები ძაბვები.



ნახ. 5.11

განვიხილოთ მართკუთხა განივიკვეთიანი ძელი (ნახ. 5.11). საშიშ კვეთში დავადგინოთ ნორმალური და მხები ძაბვები. საშიშია A კვეთი, რომელშიც მოქმედ

დებს მაქსიმალური მღუნავი მომენტი $M_x = -Pl$. რაც შეეხება განივ ძალას, მისი მნიშვნელობა ძელის ნებისმიერ კვეთისათვის P -ს ტოლია.

დავადგინოთ მაქსიმალური ნორმალური ძაბვის მნიშვნელობა (5.15) და (5.20) ფორმულების გამოყენებით

$$\sigma_{\max} = \frac{Pl}{W_x} = \frac{6Pl}{bh^2}.$$

განვსაზღვროთ (5.27) ფორმულაში შემავალი სიდიდეები

$$Q_y = -P; \quad S_x^* = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right); \quad I_x = \frac{bh^3}{12}.$$

კვეთის ნებისმიერ წერტილში მხები ძაბვის მნიშვნელობა

$$\tau = -\frac{3Q}{2bh} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right]. \quad (5.28)$$

ცხადია, მაქსიმალური ძაბვები მიიღება მაშინ, როდესაც $y=0$. ასეთი ძაბვები მოქმედებს კვეთის ცენტრალურ Ox ღერძზე მდებარე წერტილებში

$$\tau_{\max} = \frac{3P}{2bh}. \quad (5.29)$$

ეს ძაბვა უარყოფითია, მაგრამ მის ნიშანს ამ შემთხვევაში მნიშვნელობა არა აქვს და ამიტომ მხედველობაში არ ვიღებთ.

შევაფასოთ კვეთში მოქმედი მხები და ნორმალური ძაბვების მაქსიმალურ მნიშვნელობათა შეფარდება

$$k = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{3P \cdot bh^2}{2bh \cdot 6Pl} = \frac{h}{4l}. \quad (5.30)$$

ძელებისათვის $(h/l) \ll 1$, ამიტომ მხები ძაბვები გაცილებით მცირეა ნორმალურ ძაბვებთან შედარებით და ძელის სიმტკიცეზე გაანგარიშებისას მხედველობაში არ მიიღება.

(5.30) შეფარდება შეიძლება განზოგადდეს ნებისმიერი მასიური კვეთისათვის სიდიდეების რიგების განსაზღვრით. აღვნიშნოთ კვეთის დამახასიათებელი ზომა a ასოთი, ხოლო ძელის სიგრძე l -ით.

დავუშვათ, რომ განივი ძალა P -ს ტოლია, მაშინ მღუნავ მომენტს, (5.5) ფორმულის შესაბამისად, შევაფასებთ შემდეგნაირად: $M_x \sim Pl$.

შევაფასოთ დანარჩენი სიდიდეებიც. კვეთის ინერციის ლერძული და კვეთის ნაწილის სტატიკური მომენტებისათვის მივიღებთ:

$$I_x = \int_F y^2 dF \sim a^2 \cdot a^2 = a^4; \quad S_x = \int_F y dF \sim a \cdot a^2 = a^3;$$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} \sim a^3; \quad b \sim a.$$

შევაფასოთ მაქსიმალური ნორმალური და მხები ძაბვების რიგები

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \sim \frac{Pl}{a^3}; \quad \tau_{\max} = \frac{Q_y S_x^*}{I_x b} \sim \frac{P \cdot a^3}{a^4 \cdot a} = \frac{P}{a^2},$$

მაშინ მხები და ნორმალური ძაბვების მაქსიმალურ მნიშვნელობათა შეფარდების რიგი

$$k = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}} \sim \frac{P \cdot a^3}{a^2 \cdot Pl} = \frac{a}{l}.$$

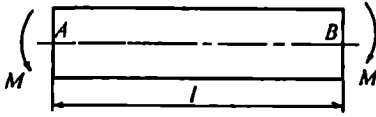
ამრიგად, მართკუთხა განივი კვეთისათვის მიღებული შეფასებები ძალაშია ზოგადი შემთხვევისთვისაც. მაგრამ მოყვანილ მსჯელობაში კვეთი განიხილება, როგორც მასიური. თხელკედლიანი პროფილებისათვის ზემოაღნიშნული შეფასებები ძალას კარგავს და დასცნა, ნორმალურ ძაბვებთან შედარებით მხები ძაბვების მნიშვნელოვანი სიმცირის შესახებ, ყოველთვის მართებული არ არის.

მხები ძაბვების (5.27) ფორმულის მიღებისას არ ვიყავით ბოლომდე თანამიმდევრული და გარდაქმნებში დავუშვიტ გარკვეული წინააღმდეგობა, კერძოდ, ნორმალური ძაბვების ფორმულა, რომელიც გარდაქმნებში გამოვიყენეთ, მიღებულია კვეთის სიბრტყის შენარჩუნების დაშვებით. როდესაც ელემენტს მოვდეთ მხები ძაბვები, თავისთავად დავუშვიტ კვეთში მართი კუთხეების დამახინჯება და ამით ძირითადი დაშვება პრაქტიკულად უარვყავით. მიუხედავად ამ წინააღმდეგობისა, ასეთი მიახლოებითი ხერხი ხშირად გამოვიყენება და იძლევა პრაქტიკისათვის დამაკმაყოფილებელი სიზუსტის შედეგს.

§29. ძელის გაანგარიშება ღუნვაზე მასალის პლასტიკური ოვისებების გათვალისწინებით

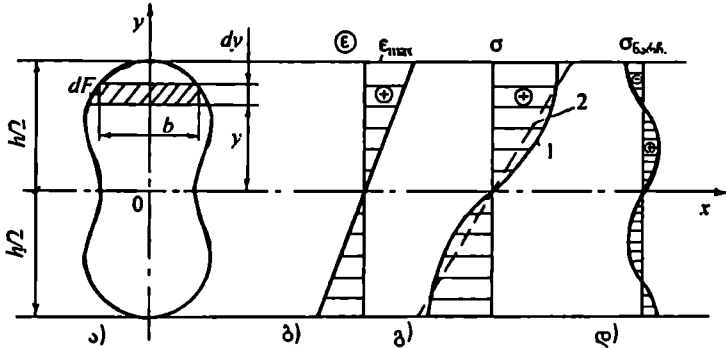
განვიხილოთ სწორი ძელის სუფთა ღუნვა (ნახ.5.12). დადებითი მღუნავი მომენტის მიმართულება განსხვავდება 5.4 ნახაზზე ნაჩვენებისაგან, რაც შემდგომი გარდაქმნებისათვის მოსახერხებელია. იგივე შეიძლება ითქვას ხაზოვანი დეფორ-

მაციების შესახებაც. ძელის განივ კვეთს აქვს სიმეტრიის ორი ღერძი (ნახ. 5.13).



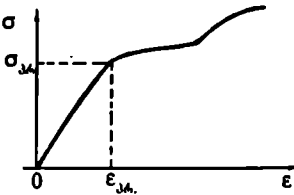
ნახ. 5.12

მასალას, რომლისგანაც დამზადებულია ძელი, აქვს გაჭიმვის და კუმშვის მსგავსი მახასიათებლები. შესაბამისი ნორმალური ძაბვების და ხაზოვანი დეფორმაციების დიაგრამა გამოსახულია 5.14 ნახაზზე.



ნახ. 5.13

სწორი ძელის სუფთა ღუნვისათვის მიღებულ ძირითად დაშვებებს განივი კვეთის მიერ სიბრტყის შენარჩუნებისა და ბოჭკოების განივი მიმართულებით ურთიერთმოქმედების შესახებ, კავშირი არა აქვს მასალის თვისებებთან. ამიტომ ისინი გამოიყენება ძელის პლასტიკურობის პირობებში დატვირთვის შემთხვევაშიც. რაც საშუალებას იძლევა (5.6) ფორმულის გამოყენებისა, რომლის თანახმად, ხაზოვანი დეფორმაციები კვეთში განაწილებულია წრფივი კანონით



ნახ. 5.14

$$\epsilon = \frac{y}{\rho} \quad (5.31)$$

ამ ფორმულის თანახმად, კვეთის მაქსიმალური დეფორმაცია

$$\epsilon_{\max} = \frac{h}{2\rho} \quad (5.32)$$

და ძელის დეფორმირებული ღერძის სიგრძე

$$\frac{l}{\rho} = \frac{2\epsilon_{\max}}{h} \quad (5.33)$$

ხაზოვანი დეფორმაციებისათვის, ნაცვლად (5.31) ფორმულისა, შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი ფორმულა

$$\epsilon = \epsilon_{\max} \frac{2y}{h} \quad (5.34)$$

გამოვიყენოთ პირობა $N=0$ და დავაგეგმილოთ კვეთში მოქმედი ნორმალური ძაბვების ტოლქმედი ძელის ღერძის მიმართულებათ:

$$N = \int_F \sigma dF = 0. \quad (5.35)$$

თუ დავუშვებთ, რომ კვეთის ცენტრალური ღერძის ზემოთ და ქვემოთ, შესაბამისად გვაქვს გაჭიმული და შეკუმშული ზონები და მხედველობაში მივიღებთ, რომ Ox ღერძი გადის სიმეტრიის ცენტრში, აგრეთვე, მასალის ერთნაირ თვისებებს გაჭიმვაზე და კუმშვაზე, (5.35) პირობა შესრულდება. ამრიგად, ნეიტრალური და ცენტრალური ღერძები ერთმანეთს ემთხვევა.

განვსაზღვროთ კვეთში მღუნავი მომენტის მნიშვნელობა (ნახ.5.13)

$$M_x = \int_F \sigma y dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma y b(y) dy. \quad (5.36)$$

ინტეგრალის გარდაქმნისათვის გამოვიყენოთ (5.34) ფორმულა და გავითვალისწინოთ, რომ ინტეგრალის მნიშვნელობები ნულიდან $(h/2)$ -მდე და $(-h/2)$ -დან ნულამდე ერთმანეთის ტოლია:

$$m_x = 3 \int_0^1 \sigma(\eta) b(\eta) \eta d\eta, \quad (5.37)$$

სადაც

$$m_x = \frac{6M_x}{b_0 \cdot h^2}; \quad \eta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\max}} = \frac{2y}{h}; \quad b(\eta) = \frac{b(y)}{b_0}. \quad (5.38)$$

აქ b_0 – კვეთის დამახასიათებელი სიგანეა.

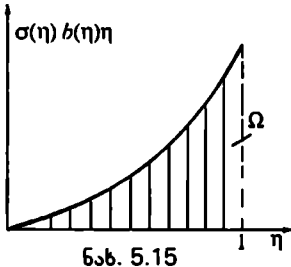
ასეთი სახით წარმოდგენილი მღუნავი მომენტის პარამეტრი კვეთის მაქსიმალური ძაბვების რიგის სიდიდეა.

მცირე სიდიდის მაქსიმალური დეფორმაციებისათვის $\varepsilon_{\max} \leq \varepsilon_{პრ}$, მღუნავი მომენტის პარამეტრის მნიშვნელობის დასადგენად გამოვიყენოთ ჰუკის კანონი და (5.15) ფორმულა

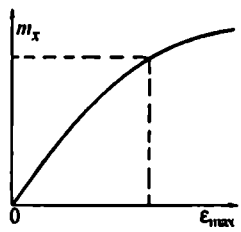
$$m_x = 6E\varepsilon_{\max} \frac{W_x}{b_0 \cdot h^2}. \quad (5.39)$$

როცა $\varepsilon_{\max} > \varepsilon_{პრ}$, მღუნავი მომენტის პარამეტრის მნიშვნელობის დასადგენად საჭიროა (5.37) ინტეგრალის მიახლოებითი რიცხვითი მეთოდით გამოთვლა; ვიღებთ ε_{\max} -ის კონკრეტულ მნიშვნელობას და მისთვის ვაკებთ დამხმარე ემპირიკას (ნახ. 5.15), შემდეგ გავიანგარიშებთ დაშტრიხული ფიგურის Ω ფართობს და

განვსაზღვრავთ მლუნავი მომენტის პარამეტრის მნიშვნელობას $m_x = 3\Omega$ -ს. ϵ_{\max} -ის სხვა მნიშვნელობებისათვის, ანალოგიური გაანგარიშებების ჩატარების შედეგად, ვაგებთ გრაფიკს, რომელიც ამჟამად კავშირს მომენტის პარამეტრსა და კვეთში არსებულ მაქსიმალურ დეფორმაციას შორის (ნახ. 5.16).



ნახ. 5.15



ნახ. 5.16

აგებული გრაფიკის საშუალებით დავადგენთ ძელის დეფორმაციებს, გადაადგილებებს და ძაბვებს, რომლებიც შეესაბამება ძელის კვეთში მოქმედ მლუნავ მომენტს. ამისათვის, (5.38)-ის პირველი ფორმულის საშუალებით ვადგენთ მლუნავი მომენტის პარამეტრის მნიშვნელობას და 5.16 ნახაზზე ნაჩვენები გრაფიკის გამოყენებით განვსაზღვრავთ კვეთში მაქსიმალური დეფორმაციის მნიშვნელობას, ხოლო შემდეგ 5.14 ნახაზით, - მოქმედი მაქსიმალური ძაბვის შესაბამის მნიშვნელობებსაც. (5.22) ფორმულის საშუალებით შეგვიძლია დავადგინოთ ძელის კიდურა A და B კვეთების (ნახ. 5.12) ურთიერთმობრუნების კუთხე

$$\theta = \frac{l}{\rho} = \frac{l}{2h} \cdot \frac{2h}{\rho} = 2 \frac{l}{h} \epsilon_{\max}. \tag{5.40}$$

განვიხილოთ ძელის განტვირთვისა და ნარჩენი გადაადგილებების და ძაბვების დადგენის საკითხი.

განტვირთვის კანონის შესაბამისად, ძელის კვეთში მოქმედი მთლიანი ძაბვები შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ორი მდგენელის ჯამი

$$\sigma = \sigma_{\text{ნარ}} + \sigma_{\text{დრ}}. \tag{5.41}$$

მთლიანი ძაბვების მნიშვნელობების დადგენის მეთოდიკა უკვე აღწერილია. ეს ძაბვები 5.13,გ ნახაზზე წარმოდგენილია 1 მრუდით. რაც შეეხება ამ ძაბვების დრეკად მდგენელს, კვეთში მოქმედი მლუნავი მომენტისათვის იგი განისაზღვრება ჰუკის კანონის საფუძველზე, ე.ი. (5.10) ფორმულის გამოყენებით. ეს ძაბვები 5.13,გ, ნახაზზე წარმოდგენილია 2 წრფით. ნარჩენი ძაბვები განისაზღვრება (5.41) ფორმულის შესაბამისად, მთლიანი ძაბვების და მათი დრეკადი ნაწილის სხვაობით, ე.ი. როგორც 5.13,გ ნახაზზე წარმოდგენილი პირველი და მეორე გრაფიკების წერტილების ორდინატების სხვაობა. ნარჩენი ძაბვების ეპიურა წარმოდგენილია 5.13,დ ნახაზზე.

ქელის კიდური კვეთების ურთიერთმობრუნების კუთხე შეიძლება წარმოვადგინოთ (5.41)-ის ანალოგიურად

$$\theta = \theta_{\text{ნარ}} + \theta_{\text{დრ}} \quad (5.42)$$

ქელის მთლიან დეფორმაციას განვსაზღვრავთ (5.40) ფორმულით. მისი დრეკადი ნაწილი განისაზღვრება ჰუკის კანონის შესაბამისად. მიღებული (5.22) წრფივი დამოკიდებულების გამოყენებით:

$$\theta_{\text{დრ}} = \frac{M_x l}{EI_x} \quad (5.43)$$

ამრიგად, ქელის განტვირთვის შემდეგ კიდური კვეთების ურთიერთმობრუნების კუთხის ნარჩენი მნიშვნელობა განისაზღვრება ფორმულით

$$\theta_{\text{ნარ}} = \theta - \theta_{\text{დრ}} = 2 \frac{l}{h} \varepsilon_{\text{max}} - \frac{M_x l}{EI_x} \quad (5.44)$$

ეს ფორმულა, (5.40)-ის ანალოგიურად, საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ ქელის ლერძის სიმრუდე განტვირთვის შემდეგ

$$\theta_{\text{ნარ}} = \frac{l}{\rho_{\text{ნარ}}}, \quad \frac{1}{\rho_{\text{ნარ}}} = \frac{\theta_{\text{ნარ}}}{l} \quad (5.45)$$

აქედან გამომდინარე, მივიღებთ ფორმულას:

$$\frac{1}{\rho_{\text{ნარ}}} = 2 \frac{\varepsilon_{\text{max}}}{h} - \frac{M_x}{EI_x} \quad (5.46)$$

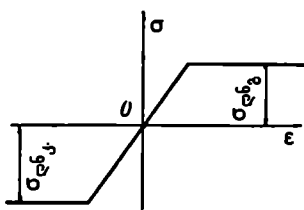
განივი კვეთის წერტილებში ნარჩენი ხაზოვანი დეფორმაციები განისაზღვრება (5.46) ფორმულაში ნარჩენები სიმრუდის მნიშვნელობის გათვალისწინებით:

$$\varepsilon_{\text{ნარ}} = \frac{y}{\rho_{\text{ნარ}}} = \left(\frac{2\varepsilon_{\text{max}}}{h} - \frac{M_x}{EI_x} \right) y \quad (5.47)$$

მიღებული ფორმულები ითვალისწინებს ქელის სუფთა ღუნვის შესწავლას. ყველა ფორმულა, რომელიც ეხება კვეთში არსებულ სხვადასხვა მთავარ სიდიდეს – ძაბვებს, დეფორმაციებს, სიმრუდეს, – შეიძლება განზოგადდეს განივ ღუნვაზეც. რაც შეეხება ისეთ ინტეგრალურ სიდიდეებს, როგორიცაა გადაადგილებები და კვეთების მობრუნების კუთხეები, მათი დადგენის საკითხი არ არის რთული, მაგრამ მოითხოვს ცალკე შესწავლას.

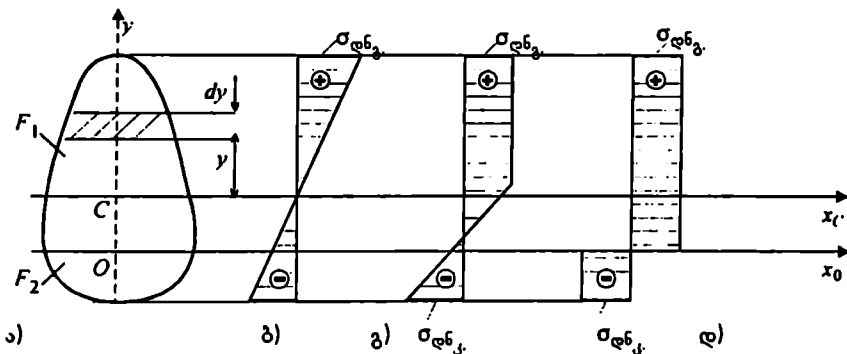
§30. ძელის ღუნვის ზღვრული მომენტი

ზოგიერთ მასალას გააჩნია განსაკუთრებული პლასტიკური თვისებები და პრაქტიკისათვის საკმარისი სიზუსტით შეიძლება მისი გაკეპვა-კუმშვის დიაგრამის სქემატიზაცია პლასტიკურობის უბნის ჰორიზონტალური წრფის სახით წარმოდგენით (ნახ. 5.17), ასეთი დიაგრამის შესაბამისად, ძაბვების ზრდა შესაძლებელია გარკვეულ ზღვრამდე; შემდგომში დეფორმაციების ზრდა მიმდინარეობს ძაბვების უცვლელი პირობებში. ანალოგიური სურათი გვაქვს ძელის ღუნვის შემთხვევაშიც.



ნახ. 5.17

განვიხილოთ ძელის სუფთა ღუნვა (ნახ. 5.12), ძელის განივი კვეთი წარმოვიდგინოთ როგორც ერთი Oy სიმეტრიის ღერძის მქონე ფიგურა (ნახ. 5.18,ა).



ნახ. 5.18

ძელზე მოდებული მომენტის თანდათანობითი ზრდით მივალწევთ იმას, რომ ცენტრალური ღერძიდან ყველაზე დაშორებულ წერტილებში წარმოიქმნება პლასტიკური დეფორმაციები (ნახ. 5.18,ბ), შემდეგ ეს დეფორმაციები გავრცელდება კვეთის სიღრმეში (ნახ. 5.18,გ), საბოლოოდ, მივალწევთ პლასტიკური დეფორმაციების გავრცობას მთელ კვეთში (ნახ. 5.18,დ).

ძაბვების განაწილების ასეთი სურათი შეესაბამება ძელის ზღვრულ მდგომარეობას და მისი შემდგომი დეფორმაცია შესაძლებელია მღუნავი მომენტის ზრდის გარეშე. ამიტომ, ამბობენ, რომ ძელში წარმოიქმნა პლასტიკური სახსარი.

დავადგინოთ ზღვრული მღუნავი მომენტის მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება ძელში პლასტიკური სახსრის წარმოქმნას. ნორმალური ძალის ნულთან ტოლობის პირობა ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\int_F \sigma dF = \int_{F_1} \sigma dF + \int_{F_2} \sigma dF = \int_{F_1} \sigma_{ღვ.გ} dF - \int_{F_2} \sigma_{ღვ.კ} dF = 0,$$

სადაც F_1, F_2 , შესაბამისად, კვეთის გაჭიმული და შეკუმშული ზონების ფართობებია. ცხადია, კვეთის ფართობი

$$F = F_1 + F_2 \quad (5.48)$$

რადგანაც დენადობის ზღვრები მუდმივი სიდიდეებია, წონასწორობის პირობა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\sigma_{დნგ} \cdot F_1 - \sigma_{დნკ} \cdot F_2 = 0,$$

საიდანაც

$$k = \frac{\sigma_{დნგ}}{\sigma_{დნკ}} = \frac{F_2}{F_1}. \quad (5.49)$$

მიღებული ფორმულის (5.48)-ში გათვალისწინებით დავადგენთ კვეთის გაჭიმული და შეკუმშული ზონების ფართობებს

$$F_1 = \frac{1}{1+k} F; \quad F_2 = \frac{k}{1+k} F. \quad (5.50)$$

დავადგინოთ ზღვრული მღუნავი მომენტის მნიშვნელობა (5.36) გამოსახულების შესაბამისად

$$M_{II} = \int_F \sigma y dF = \int_{F_1} \sigma_{დნგ} y dF - \int_{F_2} \sigma_{დნკ} y dF = \sigma_{დნგ} S_{F_1} - \sigma_{დნკ} S_{F_2},$$

სადაც S_{F_1} და S_{F_2} კვეთის F_1 და F_2 ფართობების მქონე ნაწილების სტატიკური მომენტებია მათი სასაზღვრო ჰორიზონტალური Ox_0 ღერძის მიმართ. რადგანაც S_{F_2} უარყოფითი სიდიდეა, მიღებული ფორმულა შეიძლება დაიწეროს შემდეგი სახით

$$M_{II} = \sigma_{დნგ} |S_{F_1}| + \sigma_{დნკ} |S_{F_2}|. \quad (5.51)$$

მომენტების მიმართულების შეცვლისას (ნახ.5.12, ნახ.5.18,ა) შეიცვლება ზღვრული მომენტის მნიშვნელობაც, მაგრამ ყველა ფორმულა დარჩება ძალაში, თუ გაჭიმული და შეკუმშული ზონების ფართობებს შესაბამისად აღვნიშნავთ F_1 -ით და F_2 -ით.

მასალისათვის, რომელიც ერთნაირად ეწინააღმდეგება გაჭიმვასა და კუმშვას, განვიხილოთ ზოგიერთი კერძო შემთხვევა. შესაბამისი დენადობის ზღვრები $\sigma_{დნგ} = \sigma_{დნკ} = \sigma_{დნ}$. ამ შემთხვევაში, (5.48) და (5.49) გამოსახულებების თანახმად, გაჭიმული და შეკუმშული ზონების ფართობები ერთმანეთის ტოლია

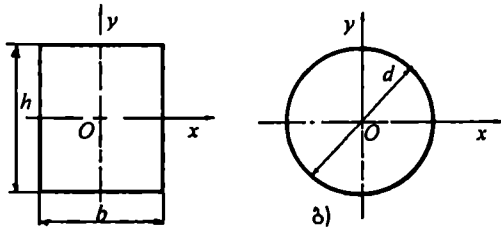
$$F_1 = F_2 = \frac{F}{2}, \quad (5.52)$$

და ზღვრული მღუნავი მომენტის (5.51) ფორმულა ჩაიწერება შედარებით მარტივი სახით

$$M_{II} = \sigma_{დნ} (|S_{F_1}| + |S_{F_2}|) \quad (5.53)$$

თუ ასეთი ძელის განივ კვეთს სიმეტრიის ორი ღერძი აქვს (ნახ. 5.13), (5.51) ფორმულა კიდევ უფრო მარტივდება, რადგან სტატიკური მომენტების აბსოლუტური მნიშვნელობები $|S_{F_1}|$ და $|S_{F_2}|$ ერთმანეთის ტოლია.

$$M_{II} = 2\sigma_{დნ} S_{F_1}. \quad (5.54)$$



ნახ. 5.19

ამ შემთხვევაში (5.52) პირობა აღნიშნავს, რომ კვეთის ცენტრალური ღერძი გაჭიმული და შეკუმშული ზონების გამყოფია.

დავადგინოთ ზღვრული მომენტის მნიშვნელობა მარტყუხა და წრიული კვეთებისათვის (ნახ. 5.19).

მარტყუხა კვეთის Ox ღერძის მიმართ მის ზემოთ განლაგებული ნაწილის სტატიკური მომენტი

$$S_{F_1} = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}. \quad (5.55)$$

(5.52) ფორმულის თანახმად, ასეთი კვეთის ზღვრული მომენტის მნიშვნელობა

$$M_{II} = \sigma_{დნ} \frac{bh^2}{4}. \quad (5.56)$$

წრიული განივი კვეთისათვის (ნახ. 5.19,ბ) ვისარგებლოთ (3.42) ფორმულით და დავადგინოთ ზღვრული მომენტის მნიშვნელობა:

$$M_{II} = \sigma_{დნ} \frac{4R^3}{3} = \sigma_{დნ} \frac{d^3}{6}. \quad (5.57)$$

(5.54) ფორმულაში $2S_{F_2}$ გამოსახულება ისეთივე როლს ასრულებს, როგორც წინააღობის ღერძული მომენტი (5.16) ფორმულაში. ამ ანალოგიის საფუძველზე, პლასტიკური წინააღობის ღერძული მომენტი დავარქვათ შემდეგ სიდიდეს

$$W_{3\text{ლ}} = 2S F_1. \quad (5.58)$$

ძელის სიმტკიცეზე გაანგარიშების ზღვრული დატვირთვის მეთოდის ეფექტურობაზე შეიძლება ვიმსჯელოთ შემდეგი კოეფიციენტის საშუალებით

$$k = \frac{M_{11}}{M_1} = \frac{W_{3\text{ლ}}}{W_x}. \quad (5.59)$$

მართკუთხა კვეთისათვის გამოვიყენოთ (5.20), (5.55) და (5.58) ფორმულები და დავადგინოთ ამ კოეფიციენტის მნიშვნელობა

$$k = \frac{6bh^2}{4bh^2} = 1,5.$$

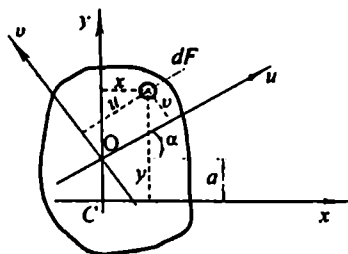
წრიული განივი კვეთისათვის შედეგის მისაღებად ვიყენებთ (5.17) და (5.57) ფორმულებს ($d=2R$):

$$k = \frac{4R^3 \cdot 4}{3\pi R^3} \approx 1,7.$$

ამრიგად, მიღებული შედეგების შესაბამისად, მაქსიმალური ძაბვების მეთოდის ნაცვლად, ზღვრული დატვირთვის მეთოდის გამოყენებით განხილული ფორმის მქონე განივიკვეთიანი ძელებისათვის ზღვრული მომენტის მნიშვნელობა შეიძლება გავზარდოთ 50-70%-ით.

§31. ძელის ირიბი ღუნვა

სწორი ძელის სუფთა ღუნვის განხილვისას, განივი კვეთის ფორმაზე დაშვებული იყო გარკვეული შეზღუდვები, კერძოდ, მას უნდა ჰქონოდა სიმეტრიის



ნახ. 5.20

ღერძი, რომელიც ემთხვეოდა ძალოვან წრფეს. ამ შემთხვევაში მტკიცებას არ საჭიროებდა, რომ ძელის ღუნვას ადგილი ექნებოდა ძალების მოქმედების სიბრტყეში და ნეიტრალური წრფე ძალოვანი წრფის მართობი იქნებოდა. რაც შეეხება ზოგად შემთხვევას, როცა ძელის განივი კვეთს ასეთი სიმეტრიის წრფე არ გააჩნია (ნახ. 5.20), რაიმე წინასწარი ვარაუდის დაშვება ღუნვის სიბრტყის თაობაზე შეუძლებელია. ასეთ ზოგად შემთხვევაზე, ახდენენ კერძო შემთხ-

ვევის შედეგის გადატანას, მაგრამ ეს, იშვიათი გამონაკლისის გარდა, კორექტულად არ ხდება.

ამრიგად, განვიხილავთ ისეთ შემთხვევას, რომლისთვისაც განვიკვეთებთ მოქმედი ძალების ტოლქმედი (მდუნავი მომენტი M_x) M -ის ტოლია. შედეგების ზოგადობა არ იქნება შეზღუდული, თუ ჩავთვლით, რომ ამ მომენტის მოქმედების სიბრტყე გადის კვეთის სიმიძის C წერტილში, ე.ი. კოორდინატთა სისტემის Cy ღერძი ემთხვევა ძალოვან წრფეს, ხოლო მეორე Cx ღერძი მისი მართობია. აქ C -კვეთის სიმიძის ცენტრია.

აქაც გავაკეთოთ დაშვება, რომ ძელის ღუნვის შედეგად მისი განივი კვეთები მობრუნდება ფორმისა და ზომების შეუცვლელად და დარჩება ძელის დეფორმირებული ღერძის მართობი. დავუშვათ, რომ მობრუნება ხდება u -ღერძის ირგვლივ (ნახ. 5.20), რომელიც კვეთს Cy ღერძს O წერტილში და Cx ღერძთან ადგენს α კუთხეს. ეს კუთხე არ უდრის $\pi/2$ -ს, - ე.ი. ნეიტრალური და ძალოვანი ღერძები ერთმანეთს არ ემთხვევა. მსჯელობით მივიღებთ (5.6)-ის ანალოგიურ შედეგს, ოღონდ მასში y უნდა შეიცვალოს dF ელემენტის სიმიძის ცენტრიდან u ღერძამდე მანძილით, ე.ი. u -ით. ამიტომ, გრძივი ბოქვების დეფორმაციებისათვის ფორმულა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\epsilon = -\frac{y}{\rho}. \quad (5.60)$$

ისევე, როგორც ზემოთ, აქაც გავაკეთოთ მეორე დაშვება, რომ განივი მიმართულებით გრძივი ბოქვები ერთმანეთზე ზემოქმედებას არ ახდენენ, რის გამოც ადგილი აქვს ერთღერძა დაძაბულ მდგომარეობას. მაშინ, (5.60)-ის გამოყენებით, განვიკვეთებთ მოქმედი ნორმალური ძაბვისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\sigma = -E \frac{y}{\rho}. \quad (5.61)$$

დავუკავშიროთ ერთმანეთს 5.20 ნახაზზე წარმოდგენილი კოორდინატთა ორი სისტემა. ამისათვის გამოვიყენოთ (3.20) ფორმულები და მათში გავითვალისწინოთ u :

$$\begin{aligned} u &= (y - a) \sin \alpha + x \cos \alpha \\ u &= (y - a) \cos \alpha - x \sin \alpha \end{aligned} \quad (5.62)$$

და ნორმალური ძაბვის მნიშვნელობა წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\sigma = -E \frac{(y - a) \cos \alpha - x \sin \alpha}{\rho}. \quad (5.63)$$

შევადგინოთ წონასწორობის სამი პირობა:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_F \sigma dF = - \int_F \frac{E}{\rho} [(y-a)\cos\alpha - x\sin\alpha] dF = 0 \\
 M_y &= \int_F \sigma x dF = - \int_F \frac{E}{\rho} [(y-a)\cos\alpha - x\sin\alpha] x dF = 0 \\
 M_x &= \int_F \sigma y dF = \int_F \frac{E}{\rho} [(y-a)\cos\alpha - x\sin\alpha] y dF = M
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

ინტეგრების და კვეთის გეომეტრიული მახასიათებლების მნიშვნელობების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
 (S_x - aF)\cos\alpha - S_y \sin\alpha &= 0 \\
 (I_{xy} - aS_y)\cos\alpha - I_y \sin\alpha &= 0 \\
 \frac{E}{\rho} [(I_x - aS_x)\cos\alpha - I_{xy} \sin\alpha] &= M
 \end{aligned} \tag{5.65}$$

ამ ფორმულებში გათვალისწინებულია, რომ ძელი მოღუნულ მდგომარეობაშია და ამიტომ $(E/\rho) \neq 0$.

რადგან C_y ცენტრალური ღერძია, $S_y = 0$ და $(S_x - aF)\cos\alpha = 0$. ამ გამოსახულებაში მეორე მამრავლი არ არის ნულის ტოლი, ამიტომ ნულის ტოლია პირველი მამრავლი: $S_x - aF = 0$. რადგან Ox ღერძიც ცენტრალური ღერძია, ამიტომ $S_x = 0$. აქედან გამომდინარე, ნეიტრალური x წრფის და y ღერძის გადაკვეთის O წერტილსა და სიმძიმის C ცენტრს შორის მანძილი a , ნულის ტოლია. ამრიგად, კერძო შემთხვევისათვის ადრე მიღებული შედეგი, - ნეიტრალური წრფე გადის განივი კვეთის სიმძიმის ცენტრში, - ძალაში რჩება კვეთის ზოგადი ფორმის შემთხვევაშიც.

ახლა განვიხილოთ (5.65)-ის მეორე თანაფარდობა და დავადგინოთ x ღერძის მიმართ x წრფის დახრის α კუთხის განმსაზღვრელი ფორმულა:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{I_{xy}}{I_y}. \tag{5.66}$$

ამრიგად, ზოგად შემთხვევაში, კერძო შემთხვევისგან განსხვავებით, ნეიტრალური წრფე აუცილებლად არ არის ძალოვანი წრფის მართობი.

(5.66) ფორმულა გვაძლევს საშუალებას ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი თეორემა: იმისათვის, რომ ნეიტრალური წრფე იყოს ძალოვანი წრფის მართობი,

აუცილებელი და საკმარისია, რომ ძალოვანი წრფე ემთხვეოდეს განვიც კვეთის ერთ-ერთ მთავარ ღერძს.

დავამტკიცოთ ეს თეორემა.

პირდაპირი დებულება: თუ ძალოვანი ხაზი, რომელიც ემთხვევა Cy ღერძს, ერთდროულად არის კვეთის მთავარი ღერძი, მაშინ, მისი მართობი Cx ღერძიც მთავარი ღერძია. ამიტომ მათ მიმართ ინერციის ცენტრინალური მომენტი I_{xy} ნულის ტოლია. აღნიშნულის (5.66) ფორმულაში გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ $\sin \alpha = 0$ და $\alpha = 0$, ე.ი. კუთხე ნეიტრალურ u ღერძსა და x ღერძს შორის ნულის ტოლია და x ღერძი ძალოვანი წრფის მართობია.

ახლა დავამტკიცოთ შებრუნებული თეორემა: დავუშვათ, რომ $I_{xy} = 0$, აქედან გამომდინარე, x და y მთავარი ღერძებია და (5.66) ფორმულის შესაბამისად, u და x ღერძებს შორის კუთხე ნულის ტოლია. ამიტომ ნეიტრალური წრფე u და ძალოვანი წრფე y ურთიერთმართობი წრფეებია.

ამრიგად, პირდაპირ ღუნვას, რომლის დროსაც დეფორმირებული ძელის ღერძი განლაგდება ძალოვან სიბრტყეში და ნეიტრალური წრფე იქნება მისი მართობი, ადგილი აქვს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ძალოვანი წრფე ემთხვევა კვეთის ერთ-ერთ მთავარ ღერძს.

(5.65)-ის შესაბამე თანაფარდობის საშუალებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ სიმრუდის მნიშვნელობა:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E(I_x \cos \alpha - I_{xy} \sin \alpha)} \quad (5.67)$$

ამ ფორმულის გარდაქმნისათვის გამოვიყენოთ თანაფარდობა (5.66):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M I_y}{E(I_x I_y - I_{xy}^2) \cos \alpha} \quad (5.68)$$

მაშინ, ნორმალური ძაბვების (5.63) ფორმულა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით.

$$\sigma = - \frac{M I_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (5.69)$$

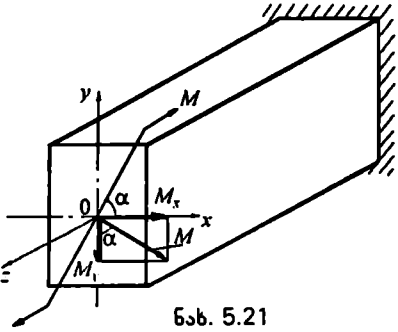
როგორც ადრე აღვნიშნეთ, $(I_x I_y - I_{xy}^2)$ არის ფიგურის გეომეტრიული მახასიათებლების მეორე ინვარიანტი და ყველა შემთხვევაში მისი მნიშვნელობა მეტია ნულზე.

თუ ძალოვანი წრფე კვეთის მთავარი ღერძია, და ემთხვევა y ღერძს, მაშინ $I_{xy} = 0$, $\alpha = 0$ და (5.69) გამოისახება გამარტივებული სახით

$$\sigma = -\frac{M}{I_x} y. \quad (5.70)$$

ამრიგად, ადრე მიღებული შედეგი ძალაშია ნებისმიერი ფორმის კვეთის შემთხვევაში, მაგრამ ძალოვანი წრფე კვეთის ერთ-ერთ მთავარ მიმართულებას უნდა ემთხვეოდეს.

ეს შედეგი შეიძლება გამოვიყენოთ ზოგად შემთხვევაშიც. მღუნავი მომენტი მთავარი ღერძების მიმართულებით შეგვიძლია დავშალოთ ორ მდგენელად. გამოვიყენოთ ძალთა მოქმედების დამოუკიდებლობის პრინციპი, ყოველი ამოცანა განვიხილოთ ცალ-ცალკე და საბოლოო შედეგი მივიღოთ მათი შედეგების შეჯამებით. განვიხილოთ ეს საკითხი დეტალურად.



ნახ. 5.21

განვიხილოთ ღუნვის ზოგადი შემთხვევა: ძალოვანი წრფე არ ემთხვევა კვეთის არც ერთ მთავარ ღერძს (ნახ. 5.21). ძელზე მოდებული M მომენტის მოქმედების სიბრტყე გადის z ღერძზე და დახრილია მთავარი ცენტრალური x ღერძის მიმართ α კუთხით. წარმოვიდგინოთ ($M_L = M$) მღუნავი მომენტი როგორც ვექტორი (ნახ.5.21). მისი მდგენელი მომენტები მოქმედებენ yz და xz სიბრტყეებში და განისაზღვრებიან ფორმულებით:

$$M_x = M \sin \alpha; \quad M_y = M \cos \alpha.$$

გამოვიყენოთ ძალთა მოქმედების დამოუკიდებლობის პრინციპი და განვიხილოთ თითოეული მდგენელის მოქმედება ცალ-ცალკე. M_x მომენტის მოქმედების სიბრტყე გადის კვეთის მთავარ Oy ღერძზე და ემთხვევა yz სიბრტყეს. ამიტომ, ძაბვების განსაზღვრისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ (5.10) ფორმულა:

$$\sigma_1 = -\frac{M_x}{I_x} y = -\frac{M \sin \alpha}{I_x} y. \quad (5.71)$$

მომენტის მეორე მდგენელიც იწვევს პირდაპირ ღუნვას xz სიბრტყეში. აქაც, ძაბვის მნიშვნელობის დასადგენად, სათანადო ცვლილებების შეტანის შემდეგ შეიძლება (5.10) ფორმულის გამოყენება

$$\sigma_2 = -\frac{M_y}{I_y} x = -\frac{M \cos \alpha}{I_y} x. \quad (5.72)$$

კვეთში მოქმედი ძაბვები განისაზღვრება მიღებული შედეგების შეჯამებით

$$\sigma = -\frac{M \sin \alpha}{I_x} y - \frac{M \cos \alpha}{I_y} x. \quad (5.73)$$

სადაც x და y – იმ წერტილის კოორდინატებია, რომელშიც განისაზღვრება ძაბვის მნიშვნელობა.

განვსაზღვროთ კვეთის წერტილები, რომლებშიც ძაბვა ნულის ტოლია. ამისათვის (5.73) გავუტოლოთ ნულს

$$-\frac{M \sin \alpha}{I_x} y - \frac{M \cos \alpha}{I_y} x = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ იმ წერტილების სიმრავლის კოორდინატებს შორის ურთიერთდამოკიდებულებას, რომლებშიც ნორმალური ძაბვა ნულის ტოლია

$$y = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{I_x}{I_y} x. \quad (5.74)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$k_1 = \operatorname{tg} \gamma = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{I_x}{I_y}, \quad (5.75)$$

მაშინ (5.74) ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$y = k_1 x. \quad (5.76)$$

ამრიგად, წერტილების სიმრავლე, რომლებშიც ნორმალური ძაბვები ნულის ტოლია, წარმოადგენს წრფეს, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეში ე.ი. კვეთის სიმძიმის ცენტრში. ამ წრფეს ნეიტრალური წრფე ეწოდება.

განვსაზღვროთ ნეიტრალური და ძალოვანი წრფეების ურთიერთგანლაგება. პირდაპირი ღუნვის განხილვისას დადგინდა, რომ ნეიტრალური და ძალოვანი წრფეები ურთიერთმართობია. ისმის კითხვა, შენარჩუნებულია თუ არა ნეიტრალური და ძალოვანი ხაზების ურთიერთმართობობა ირიბი ღუნვისათვის, თუ სურათი განსხვავებულია?

ძალოვანი წრფის განტოლება, რომელიც Ox ღერძთან შეადგენს α კუთხეს, ჩაიწერება შემდეგი სახით

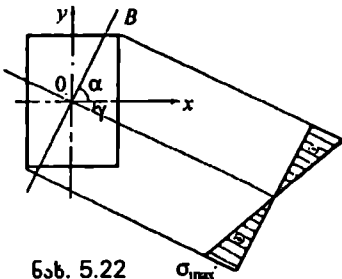
$$y = k_2 x \quad (5.77)$$

სადაც $k_2 = \operatorname{tg} \alpha$.

რადგანაც I_x და I_y დადებითი სიდიდეებია, შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი პირობა

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{I_x}{I_y} < 0. \quad (5.78)$$

აქედან ვაკეთებთ დასკვნას, რომ ნეიტრალური და ძალოვანი წრფეები კოორდინატთა სისტემის სხვადასხვა მეოთხედში გადის. განხილულ შემთხვევაში (ნახ. 5.22), ნეიტრალური წრფე გადის მეორე და მესამე მეოთხედებში, ხოლო ძალოვანი წრფე – პირველ და მესამე მეოთხედებში. ზოგად შემთხვევაში, ეს წრფეები არ არის ურთიერთმართობი, ვინაიდან (5.78) გა-



ნახ. 5.22

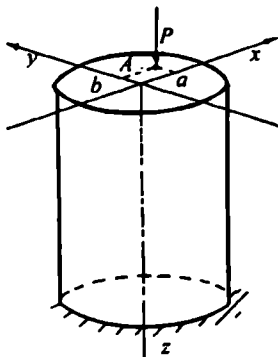
მოსახულებაში გვაქვს თანაფარდობა $k_1 \cdot k_2 \neq -1$. ამ პირობაში ტოლობის ნიშანი გვექნება მხოლოდ კერძო შემთხვევაში, როდესაც ინერციის მთავარი ღერძული მომენტები I_x და I_y ერთმანეთის ტოლია. ამ შემთხვევაში, თუ განვიხილავთ

(პ.22)-ის მესამე ფორმულას, დავრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი u და v ღერძებისათვის ცენტრიდანული მომენტი ნულის ტოლია და კვეთისათვის ეს მიმართულებები მთავარი მიმართულებებია. ასეთი კვეთებისათვის, როგორი მიმართულებისაც არ უნდა იყოს ძალოვანი ხაზი, გვაქვს პირდაპირი ღუნვა.

მიღებული შედეგები გვიჩვენებს, რომ კვეთში ძაბვები განაწილებულია წრფივი კანონით და ძაბვა უდიდეს მნიშვნელობებს იღებს ნეიტრალური ღერძიდან მაქსიმალურად დაშორებულ წერტილებში.

§32. ძელის არაცენტრალური გაჭიმვა-კუმშვა

განვიხილოთ სწორი ძელი, რომლის ბოლო კვეთში მოქმედებს Oz ღერძის პარალელური ძალები. ამ ძალების P ტოლქმედი მო-



ნახ. 5.23

დებულია A წერტილში (ნახ. 5.23), მთავარი ცენტრალური ღერძების მიმართ ამ წერტილის კოორდინატებია a და b . ნორმალური ძაბვების დასადგენად საჭიროა P ძალა დავიყვანოთ კვეთის სიმძიმის ცენტრში, მივიღებთ ნორმალურ ძალას და მღუნავ მომენტებს:

$$N = -P; \quad M_x = Pb; \quad M_y = Pa. \quad (5.79)$$

ძალთა მოქმედების დამოკიდებულების პრინციპის საფუძველზე, შეგვიძლია დავადგინოთ ძაბვები ყოველი ძალოვანი ფაქტორისათვის დამოუკიდებლად, ხოლო კვეთის ნებისმიერ წერტილში, რომ-

ლის კოორდინატებია x და y , საერთო ძაბვა განვსაზღვროთ მიღებული შედეგების შეჯამებით:

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{Pb}{I_x} y - \frac{Pa}{I_y} x. \quad (5.80)$$

დავადგინოთ ნეიტრალური ღერძის მდებარეობა. ამისათვის (5.80) ფორმულის შესაბამისად, ნორმალური ძაბვების მნიშვნელობები გავუტოლოთ ნულს:

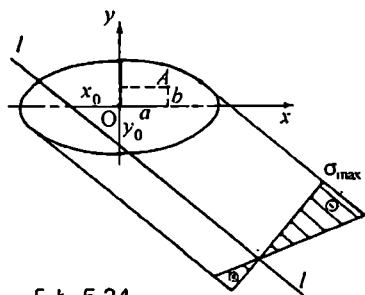
$$-\frac{P}{F} - \frac{Pb}{I_x} y - \frac{Pa}{I_y} x = 0.$$

მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ ნეიტრალური წრფის განტოლებას

$$\frac{a}{i_y^2} x + \frac{b}{i_x^2} y + 1 = 0, \quad (5.81)$$

სადაც i_x, i_y – ინერციის მთავარი რადიუსებია, რომლებიც განისაზღვრება (3.14) ფორმულებით.

ამრიგად, ირიბი ღუნვისაგან განსხვავებით, არაცენტრალური გაკიმვა-კუმშვის



ნახ. 5.24

შემთხვევაში ნეიტრალური წრფე კვეთის სიმძიმის ცენტრში არ გადის (ნახ. 5.24), რაზეც მიუთითებს განტოლებაში ნულისაგან განსხვავებული ბოლო თავისუფალი წევრის არსებობა. მაქსიმალური ძაბვა მოქმედებს წერტილში, რომელიც ყველაზე მეტადაა დაშორებული ნეიტრალური წრფისაგან. დავადგინოთ ძალის მოდების წერტილის კოორდინატების და ნეიტრალური წრფის ურთიერთმდებარეობა. ამისათვის

განვსაზღვროთ ამ წრფის და კოორდინატა ღერძების გადაკვეთის წერტილები

$$\begin{aligned} x = 0: \quad y_0 &= -\frac{i_x^2}{b}; \\ y = 0: \quad x_0 &= -\frac{i_y^2}{a}. \end{aligned} \quad (5.82)$$

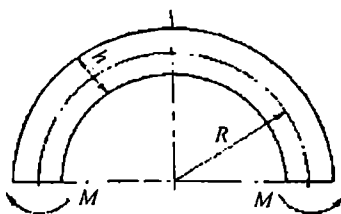
მიღებული ფორმულები გვიჩვენებს, რომ ძალის მოდების წერტილის a კოორდინატსა და l ნეიტრალური წრფის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილის x_0

კოორდინატს საწინააღმდეგო ნიშნები აქვთ. იგივე ეთქმის b და γ სიდიდეებზეც (ნახ. 5.24), რაც მიუთითებს, რომ ძალის მოდების წერტილი და ნეიტრალური წრფე მდებარეობენ საწესის წერტილის მიმართ სხვადასხვა მხარეზე. მიღებული ფორმულების თანახმად, ძალის მოდების წერტილის კვეთის სიმძიმის ცენტრთან მიახლოებისას, ე.ი. a -ს და b -ს შემცირების შემთხვევაში, ნეიტრალური წრფე თანდათან სცილდება ცენტრალურ წერტილს. ზღვრული მდგომარეობა, როცა $a=h=0$, შეესაბამება ცენტრალურ გაჭიმვა-კუმშვას და კვეთში ძაბვების თანაბრად განაწილებას. საწინააღმდეგო შემთხვევაა, როცა ძალის მოდების წერტილი თანდათან სცილდება კვეთის სიმძიმის ცენტრს, ე.ი. a და b იზრდება, ზღვარში შეესაბამება ირბო ლუნვას, რომლისთვისაც ნეიტრალური წრფე გადის კვეთის სიმძიმის ცენტრში. აღნიშნულიდან გამომდინარე, ნეიტრალურ წრფეს შეუძლია კვეთის გადაკვეთა. ამ შემთხვევაში, კვეთში მოქმედებს როგორც გაჭიმვის, ისე კუმშვის ძაბვები (ნახ. 5.24). მაგრამ, თუ ძალის მოდების წერტილი ცენტრთან საკმარისად ახლოსაა, ნეიტრალური წრფე გავა კვეთის გარეთ და ძაბვებს კვეთში ერთი და იგივე ნიშანი ექნება. ზოგ შემთხვევაში, ამას აქვს პრაქტიკული მნიშვნელობა, კერძოდ: თუ ძელის მასალა ცუდად ეწინააღმდეგება გაჭიმვას, მკუმშავი ძალა უნდა მოვდოთ ცენტრთან საკმარისად ახლოს, რომ კვეთში იმოქმედოს მხოლოდ მკუმშავმა ძაბვებმა.

კვეთის სიმძიმის ცენტრთან არსებობს ისეთი ზონა, რომელსაც კვეთის გული ეწოდება. თუ ძალა მოდებულია ამ ზონაში, ნეიტრალური წრფე კვეთის ფართობს არ კვეთს. როდესაც ძალა ამ ზონის სასაზღვრო წერტილშია მოდებული, ნეიტრალური ღერძი ეხება კვეთის კონტურს. კვეთის გულის დასადგენად შეიძლება გამოვიყენოთ (5.82) ფორმულები. თუ კვეთის კონტურის წერტილში გავატარებთ მხებს და ამ წერტილს მხებთან ერთად შემოვაველებთ კონტურს, ძალის მოდების წერტილი შემოხაზავს კვეთის გულს.

§33. დიდი სიმრუდის ძელის ღუნვა

განვიხილოთ ძელი, რომლის ცენტრალური ღერძი წრეწირის რკალს წარმოადგენს (ნახ. 5.25). ასეთი ძელის დასახასიათებლად გამოიყენება გეომეტრიული პარამეტრი, რომელიც ცენტრალური ღერძის რადიუსთან კვეთის სიმაღლის შეფარდების ტოლია: $k = \gamma(h/R)$. იმ შემთხვევაში, თუ $(h/R) \leq 0,2$, ძელი შეიძლება ჩავთვალოთ მცირე სიმრუდის ძელად. მის გასაანგარიშებლად გამოიყენება სწორი ძელის ღუნვისათვის მიღებული ფორმულები.

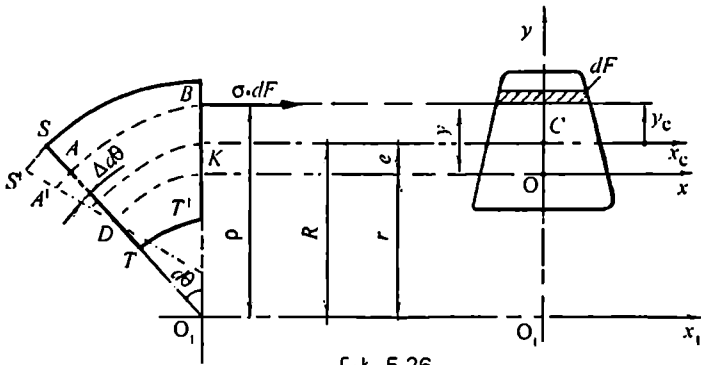


ნახ. 5.25

ძელს, რომლის სიმრუდის პარამეტრი დიდია, $k > 0,2$, დიდი სიმრუდის ძელი ეწოდება. ასეთი ძელი საგანგებო განხილვას მოითხოვს, რადგან მასში ნორმალური ძაბვების განაწილება განსხვავდება სწორი ძელი-

სათვის დამახასიათებელი წრფივი განაწილებისაგან.

განვიხილოთ დიდი სიმრუდის ძელის სუფთა ღუნვა (ნახ. 5.25). ამ შემთხვევაშიც გამოვიყენოთ სწორი ძელის ღუნვისას გაკეთებული დაშვებები განივი კვეთის სიბრტყის შენარჩუნებისა და კვეთის განივი მიმართულებით ბოქკოების ურთიერთდაუწინელობის შესახებ. ასეთი დაშვებების საფუძველზე, გამოვსახოთ დეფორმირებულ მდგომარეობაში ძელიდან ამოკვეთილი მცირე ელემენტი (ნახ. 5.26), რომელიც შეესაბამება ცენტრალურ $d\theta$ კუთხეს.



ნახ. 5.26

ელემენტის დეფორმაციის სურათის უფრო ნათლად წარმოდგენის მიზნით, გადაადგილებები შეიძლება წარმოვადგინოთ მხოლოდ მარცხენა მხრიდან, რაც, ფაქტიურად, რაიმე ცვლილებებს არ იწვევს.

ელემენტის დეფორმაციის შედეგად, მარცხენა კვეთი ST მობრუნდება $\Delta\theta$ კუთხით, დაიკავებს ახალ $S'T'$ მდებარეობას და, დაშვების შესაბამისად, დარჩება ბრტყელი. ელემენტის ზედა ნაწილებში ბოქკოები გაჭიმვას განიცდის და, ცხადია, მათი სიგრძე გაიზრდება. ქვედა ნაწილში ბოქკოები შეკუმშულ მდგომარეობაშია. ეს ორი ზონა გაყოფილია ნეიტრალური DK შრით, რომლის შესაბამისი ბოქკო სიგრძეს არ იცვლის. ამ შრის მდებარეობა ჭერჭერობით უცნობია.

განვიხილოთ ნეიტრალური შრიდან y მანძილით დაცილებული ნებისმიერი AB ბოქკო და განვსაზღვროთ მისი ხაზოვანი დეფორმაცია. ბოქკოს საწყისი სიგრძე და ელემენტის დეფორმაციის შედეგად წარმოქმნილი წაგრძელება შესაბამისად ტოლია: $AB = (y+r)d\theta$; $AA' = y\Delta\theta$. სადაც r - ნეიტრალური შრის სიმრუდის რადიუსია.

განვსაზღვროთ ბოქკოს ხაზოვანი დეფორმაცია

$$\epsilon = \frac{AA'}{AB} = \frac{y\Delta\theta}{(r+y)d\theta}. \quad (5.83)$$

ბოქკოების ურთიერთქმედების ხასიათის შესახებ გაკეთებული დაშვების საფუძველზე, შეიძლება გამოვიყენოთ შუკის კანონი ერთდერძა დაძაბულ მდგომარეობაში.

რეობისათვის (1.10) და განივი კვეთის ნებისმიერ B წერტილში ნორმალური ძაბვები წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\sigma = \frac{Ey}{r+y} \cdot \frac{\Delta d\theta}{d\theta}. \quad (5.84)$$

კვეთში მოქმედი ძალების ტოლქმედის გეგმილი მის მართობზე, ანუ ნორმალური ძალა, ნულის ტოლია

$$N = \int_F \sigma dF = E \frac{\Delta d\theta}{d\theta} \int_F \frac{y dF}{r+y} = 0,$$

სადაც F ძელის განივი კვეთის ფართობია.

რადგან $E \frac{\Delta d\theta}{d\theta} \neq 0$, ამიტომ

$$\int_F \frac{y dF}{r+y} = 0. \quad (5.85)$$

ამრიგად, ფაქტიურად, მივიღეთ განტოლება ინტეგრალური სახით, რომელიც განსაზღვრავს ნეიტრალური შრის მდებარეობას. ელემენტარული გარდაქმნებით გავამარტივოთ ეს განტოლება:

$$\int_F \frac{y dF}{r+y} = \int_F \frac{(\rho-r)}{\rho} dF = \int_F dF - r \int_F \frac{dF}{\rho} = 0.$$

ამ განტოლებაში პირველი ინტეგრალი უდრის კვეთის ფართობს. აღნიშნულის გათვალისწინებით, ნეიტრალური შრის სიმრუდის რადიუსის ფორმულა ჩაიწერება შემდეგი სახით

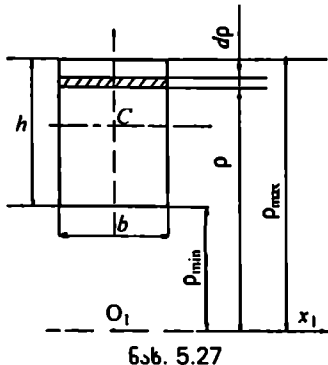
$$r = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{\rho}}, \quad (5.86)$$

სადაც ρ ელემენტის ნებისმიერი ბოჭკოს სიმრუდის რადიუსია.

განვსაზღვროთ ეს გეომეტრიული მახასიათებელი მართკუთხა კვეთისათვის (ნახ. 5.27) კვეთის ელემენტის ფართობი $dF = b d\rho$ გავითვალისწინოთ (5.86) გამოსახულებაში:

$$r = \frac{bh}{b \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{d\rho}{\rho}} = \frac{h}{\ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}} = \frac{h}{\ln \left(1 + \frac{h}{\rho_{\min}} \right)}. \quad (5.87)$$

ნებისმიერი კვთვი შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც n რაოდენობის მცირე მართკუთხედებისაგან შედგენილი. ყოველი მათგანისათვის დამოუკიდებლად დავადგინოთ (5.86) ინტეგრალი, ფართობი და მიღებული შედეგების გამოყენებით განვსაზღვროთ კვთვის გეომეტრიული მახასიათებელი



ნახ. 5.27

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n b_i h_i}{\sum_{i=1}^n b_i \ln \left(1 + \frac{h_i}{P_{i \min}} \right)}, \quad (5.88)$$

სადაც P_{\min} , b_i , h_i არის i ნომრის მქონე მართკუთხედის ქვედა დანაყოფების ზღვრის სიშრუდის რადიუსი, სიგანე და სიმაღლე. ამგვარი გაანგარიშებები თანამედროვე გამოთვლითი ტექნიკის გამოყენებით მარტივად კეთდება.

მიღებული ფორმულების გამოყენება ყოველთვის არ არის მოსახერხებელი, ვინაიდან ყოველ კერძო შემთხვევაში გასაანგარიშებელია ინტეგრალური წევრი, ამიტომ, ზოგ შემთხვევაში, უპირატესობას ანიჭებენ მიახლოებით ფორმულას, რომელიც განსაზღვრავს ნეიტრალურ და ცენტრალურ ღერძებს შორის მანძილს (ნახ. 5.26). ჩავატაროთ წინასწარი გარდაქმნები

$$\frac{y}{r+y} = \frac{e+y_c}{R+y_c} = \frac{1}{R} (e+y_c) \left(1 + \frac{y_c}{R} \right)^{-1} \quad (5.89)$$

სადაც R - ცენტრალური ღერძის სიშრუდის რადიუსია, y_c - მანძილი ნებისმიერი B წერტილიდან ცენტრალურ ღერძამდე.

ვინაიდან $\left| \frac{y_c}{R} \right| < 1$, (5.89) გამოსახულების ბოლო სიდიდე შეგვიძლია მიახლოებით წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად:

$$\left(1 + \frac{y_c}{R} \right)^{-1} \approx 1 - \frac{y_c}{R}. \quad (5.90)$$

ამ შედეგის გათვალისწინებით გავამარტივოთ (5.89)

$$\frac{y}{r+y} \approx \frac{1}{R} \left[e + \left(1 - \frac{e}{R} \right) y_c - \frac{y_c^2}{R} \right].$$

გამოვიყენოთ ეს შედეგი (5.85)-ში

$$\int_F \frac{1}{R} \left[e + \left(1 - \frac{e}{R} \right) y_c - \frac{y_c^2}{R} \right] dF = \frac{e}{R} F + \frac{1}{R} \left(1 - \frac{e}{R} \right) \int_F y_c dF - \frac{1}{R^2} \int_F y_c^2 dF = 0. \quad (5.91)$$

მიღებული განტოლების მეორე წევრის ინტეგრალი არის კვეთის სტატიკური მომენტი ცენტრალური ღერძის მიმართ და ამიტომ, იგი ნულის ტოლია. მესამე წევრის ინტეგრალიც კარგადაა ცნობილი – იგი არის კვეთის ინერციის მომენტი იმავე ღერძის მიმართ. აღნიშნულის გათვალისწინებით, (5.91) გამარტივდება და ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$eF - \frac{I_{x_c}}{R} = 0.$$

საბოლოოდ, ნეიტრალურ და ცენტრალურ ღერძებს შორის მანძილი განისაზღვრება ფორმულით:

$$e = \frac{I_{x_c}}{FR}. \quad (5.92)$$

ვინაიდან საქმე გვაქვს სუფთა ღუნვასთან, კვეთში მოქმედი ძალების ტოლქმედი მხოლოდ მღუნავი მომენტია და მნიშვნელობა არა აქვს იმას, თუ რომელ ღერძს ვიყენებთ მისი განსაზღვრისათვის. გარდაქმნები მარტივია, თუ მღუნავი მომენტის მნიშვნელობა განისაზღვრება O_1x_1 ღერძის მიმართ (ნახ. 5.26).

$$M_x = \int_F \sigma(r+y) dF = \frac{E\Delta d\theta}{d\theta} \int_F y dF.$$

ამ გამოსახულების ინტეგრალი კვეთის სტატიკური მომენტია ნეიტრალური ღერძის მიმართ. (3.3) ფორმულის შესაბამისად, ეს ინტეგრალი Fe -ის ტოლია, ამიტომ მღუნავი მომენტის მნიშვნელობა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

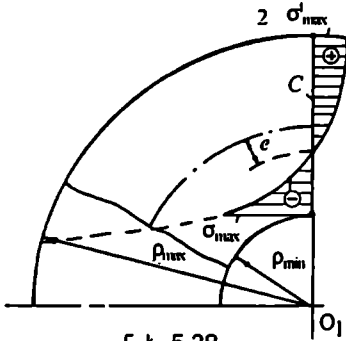
$$M_x = E \frac{\Delta d\theta}{d\theta} Fe. \quad (5.93)$$

ამ შედეგის (5.84) ფორმულაში გათვალისწინებით, მივიღებთ ნორმალური ძაბვების დამოკიდებულებას მღუნავი მომენტის მნიშვნელობისგან:

$$\sigma = \frac{M_x}{Fe} \cdot \frac{y}{r+y}. \quad (5.94)$$

ძელის კვეთში მოქმედი ნორმალური ძაბვების ეპიურა წარმოდგენილია 5.28

ნახაზზე. სწორი ძელისაგან განსხვავებით, ამ შემთხვევაში ძაბვები არაწრფივი კანონით იცვლება. მათი მაქსიმალური მნიშვნელობები მოქმედებს პირველ და მეორე წერტილებში:



ნახ. 5.28

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{Fe} \cdot \frac{r - \rho_{\min}}{\rho_{\min}};$$

$$\sigma'_{\max} = \frac{M_x}{Fe} \cdot \frac{\rho_{\max} - r}{\rho_{\max}}. \quad (5.95)$$

თუ (5.94) ფორმულაში γ მიისწრაფვის $(-r)$ -კენ, ე.ი. წერტილი უახლოვდება ძელის სიმრუდის ცენტრს, (5.94) გამოსახულება მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ. ძაბვების ასეთი ცვალებადობა განსაზღვრავს ძელის შიგა კონტურთან საშიში წერტილების

მდებარეობას და ამიტომ, დიდი სიმრუდის ძელებისათვის კვეთის ეს ნაწილი, როგორც წესი, უფრო მასიური მზადება (ნახ. 5.28).

§34. ძელის გაანგარიშება სიმტკიცესა და სიხისტეზე ღუნვისას

სუფთა ღუნვისათვის დავადგინეთ ნორმალური ძაბვების გამოსათვლელი ფორმულები და მიღებული შედეგები განვაზოგადეთ განივ ღუნვაზე. განვსაზღვრეთ, აგრეთვე, მხები ძაბვები. მაგრამ მხები ძაბვები ნორმალურ ძაბვებთან შედარებით უმნიშვნელოა და ამიტომ ძელის სიმტკიცეზე გაანგარიშებისას მხედველობაში არ მიიღება. გამონაკლისი შემთხვევების შესახებ ზემოთ უკვე აღნიშნული იყო.

სიმტკიცეზე გაანგარიშების დასაშვები ძაბვების მეთოდის შესაბამისად, ვადგენთ საშიშ კვეთს და ამ კვეთში საშიშ წერტილს, ე.ი. წერტილს, რომელშიც მოქმედებს უდიდესი ნორმალური ძაბვა. მისი მნიშვნელობა განისაზღვრება (5.13) და (5.15) ფორმულებით. ამის შემდეგ ვადგენთ სიმტკიცის პირობას ისე, როგორც ეს აღწერილი იყო §14-ში.

სიმტკიცეზე გაანგარიშების ზღვრული დატვირთვის მეთოდის შესაბამისად, საჭიროა, დავადგინოთ ძელის მღუნავი მომენტის უდიდესი $M_{x\max}$ მნიშვნელობა და შევადაროთ დასაშვები მომენტის მნიშვნელობას

$$M_{x\max} \leq [M] \quad (5.96)$$

დასაშვები მომენტი გამოითვლება ფორმულით

$$[M] = \frac{M_{II}}{n}, \quad (5.97)$$

სადაც n სიმტკიცის კოეფიციენტია.

მარაგის კოეფიციენტის მნიშვნელობები სიხისტეზე და სიმტკიცეზე ზღვრული ძაბვების და დატვირთვის მეთოდებისათვის მნიშვნელობით განსხვავდებიან და მათი ურთიერთტოლობის ადგილი შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ცალკეულ შემთხვევებში.

ზღვრული მომენტის მნიშვნელობის დადგენა ხდება მეთოდიკით, რომელიც განხილული იყო §29-ში, მაგრამ, თუ დიაგრამისათვის დასაშვებია მარტივი სქემატიზაცია (ნახ. 5.17), მისი განსაზღვრა ხდება (5.51)-ის ან (5.54)-ის საშუალებით.

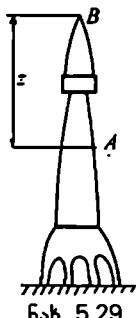
გაქიმვა-კუმშვის განხილვისას, ძაბვების განაწილებისათვის კვეთის ფორმას მნიშვნელობა არა აქვს – კვეთის ნებისმიერ წერტილში მოქმედებს ერთი და იგივე სიდიდის ნორმალური ძაბვა.

ღუნვისას სურათი უფრო რთულია. აქ ძაბვების სიდიდეზე გავლენას ახდენს არა მარტო კვეთის ზომები, არამედ მისი ფორმაც. მაშინ, როცა კვეთის პერიფერიული ზონები განიცდის მაქსიმალური ძაბვების მოქმედებას, კვეთის ცენტრალური ზონა პრაქტიკულად არ მუშაობს. ამიტომ კონსტრუქტორის წინაშე დგება ამოცანა – ძელების კვეთების ნაკლებად დატვირთული ნაწილების შემცირებით, მიაღწიოს მანქანის საერთო წონის შემცირებას, ან პირიქით, – მაღალი ძაბვების მოქმედების ადგილების გაფართოებით მიაღწიოს მანქანის სიმტკიცის გაზრდას.

ერთ-ერთ ასეთ ამოცანად განვიხილოთ სატელევიზიო ანძის გაანგარიშების საკითხი (ნახ.5.29), რომლის გადასაწყვეტად არჩეულია სხვა გზა.

ანძის ნებისმიერ განივ A კვეთში მოქმედებს ნორმალური ძალა, რომელიც უდრის ანძის AB ნაწილის $G(z)$ წონას. ამიტომ, ნორმალური ძაბვები განისაზღვრება (2.3) ფორმულით:

$$\sigma_1 = \frac{G(z)}{F(z)} \quad (5.98)$$

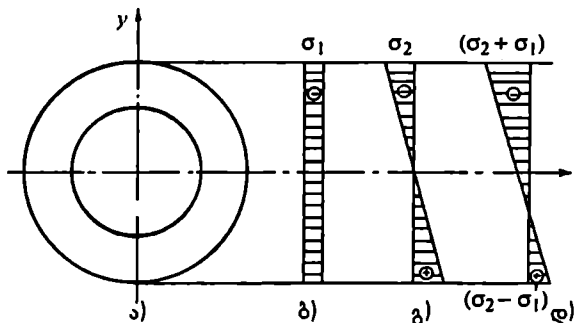


კვეთში ამ ძაბვების განაწილების ეპიურა გამოსახულია 5.30ბ ნახაზზე.

აღნიშნულის გარდა, ანძა განიცდის ტემპერატურის ცვალებადობას და ქარის მოქმედებას, რის შედეგადაც მასში აღიძვრება მღუნავი მომენტები და შესაბამისი ნორმალური ძაბვები (ნახ. 5.30 გ), ძალთა მოქმედების დამოუკიდებლობის პრინციპის შესაბამისად. კვეთში მოქმედი საერთო ძაბვები განისაზღვრება, როგორც ორი მდგენელის ჯამი, რომლის შედეგი შეიძლება წარმოვიდგინოთ საერთო ძაბვების ეპიურის სახით (ნახ. 5.30 დ).

კვეთში მოქმედი საერთო ძაბვების ეპიურა გვიჩვენებს, რომ არსებული საწყისი σ_1 ძაბვები ზრდის მღუნავი მომენტით გამოწვეულ მაქსიმალურ მკუმშავ

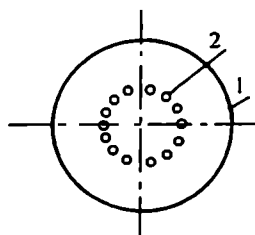
ქაბვებს და ამცირებს მაქსიმალურ გამჭიმ ქაბვებს (ნახ. 5.30 დ), მკუმშავი ქაბვების ზრდა გარკვეულ საზღვრებში არ არის საშიში, რადგან, ხშირად, ანძების ასაგებად გამოიყენება ისეთი მასალები, რომლებიც კარგად ეწინააღმდეგება კუმშვას, მაგალითად, ბეტონი, რაც შეეხება მაქსიმალური გამჭიმ ქაბვების შემცირებას, ეს გარემოება მეტად მნიშვნელოვანია, რადგან ასეთი მასალები



ნახ. 5.30

სუსტად ეწინააღმდეგება გამჭიმ ქაბვებს. ამრიგად, საწყისი ქაბვები ანძის საერთო სიმტკიცის ზრდის, მაგრამ აღნიშნული ეფექტი, σ_1 -ის სიმცირის გამო საკითხს ბოლომდე ვერ წყვეტს. მაგრამ პრობლემის გადაწყვეტის გზა უკვე ჩანს: კონსტრუქციაში როგორმე უნდა შევქმნათ საჭირო სიდიდის საწყისი მკუმშავი ქაბვები. მოსკოვის ოსტანკინოს სატელევიზიო ანძის დაპროექტებისას ეს საკითხი საინტერესოდ იქნა გადაწყვეტილი.

ანძა 1 ცვალებადკვეთიანი მილისებრი კონსტრუქციაა, რომელშიც მოთავსებულია ვერტიკალური ფოლადის გვარლები (ნახ. 5.31). გვარლები დამაგრებულია ანძის ქვედა და ზედა ნაწილში და დაჭიმულია დომკრატების საშუალებით.



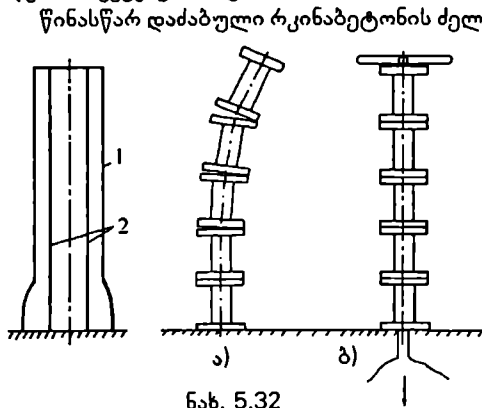
ნახ. 5.31

დაჭიმვის ძალები ქმნის საჭირო სიდიდის ანძის წინასწარ დაძაბულ მდგომარეობას. საკითხის ასეთმა გადაწყვეტამ იშვიათი კონსტრუქციის აგების შესაძლებლობა შექმნა: კონსტრუქციის სიმალლე აღემატება 530 მეტრს (საკმაოდ მცირე სიდიდის განივი ზომებით).

კონსტრუქციის სიმტკიცის ხელოვნური გაზრდის აღწერილი ხერხის ეფექტურობა შეიძლება ერთი მარტივი მაგალითის განხილვითაც დავადასტუროთ.

ვცადოთ სათამაშო ანძის აგება ძაფის კოჭებით. დავრწმუნდებით, რომ მიუხედავად ამოცანის მოჩვენებითი სიმარტივისა, ბევრს ვერაფერს მივაღწევთ (ნახ.5.32ა). მაგრამ თუ ძაფს მოვაბამთ ასანთის ლეროს, გავუყრით მას კოჭებში და დაჭვიმავთ ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია 5.32 ბ ნახაზზე, მაშინ აგებული კონსტრუქცია საიმედო გახდება.

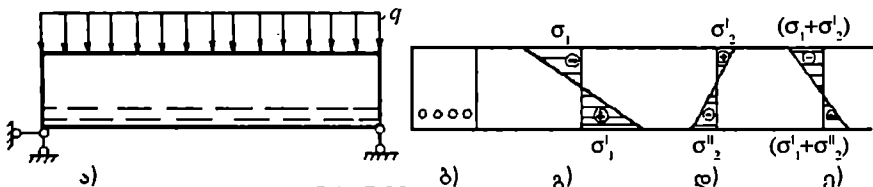
ასეთ ამოცანებში საგულისხმოა ძელის მდგრადობის შესწავლაც, რაზეც შემდგომში გვექნება საუბარი.



ნახ. 5.32

წინასწარ დაძაბული ბეტონის ძელები და ფილები ფართოდ გამოიყენება მშენებლობაში. მათი დამზადების პროცესში ლითონის არმატურას წინასწარ აგრძელებენ დომკრატებით, ან ელექტროგახურების საშუალებით. ასეთი არმატურა მოთავსებულია იმ ზონაში, რომელიც კონსტრუქციის მუშა მდგომარეობაში გაჭიმვას განიცდის (ნახ. 5.33ა). ბეტონის გამყარების შემდეგ არმატურას ათავისუფლებენ; არმატურა ცდილობს დაიბრუნოს საწყისი სიგრძე, რასაც გამყარებული ბეტონის მასა ეწინააღმდეგება და ძე-

ლში იქმნება არცენტრალური კუმშვის ეფექტი. ნორმალური ძაბვების შესაბამისი ეპიურა ნაჩვენებია 5.33 დ ნახაზზე. თუ გამოვიყენებთ ძალთა მოქმედების დამოუკიდებლობის პრინციპს და გავითვალისწინებთ ნორმალური ძაბვების ეპიურას უარმატურო ძელის კვეთში (ნახ. 5.33 გ), მაშინ, ბეტონისათვის ნორმა-



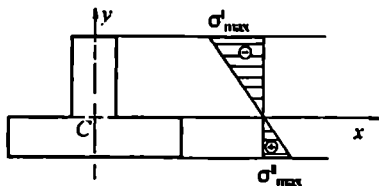
ნახ. 5.33

ლური ძაბვების საბოლოო ეპიურას მივიღებთ 5.33 ე ნახაზის სახით. ამ შემთხვევაში, წინასწარ დაძაბულობის ეფექტი უფრო მაღალია, ვიდრე ეს გვექონდა ანძისათვის (ნახ. 5.30). ვიცოდით რა კვეთისათვის გაჭიმვის და კუმშვის ზონები, წინასწარ, არმატურის შესაბამისი განლაგებით, შევძელით შეგვემცირობინა როგორც გაჭიმვის, ისე კუმშვის ნორმალური ძაბვები.

თანამედროვე მანქანათმშენებლობაში სულ უფრო და უფრო ფართოდ გამოიყენება ძელები, ფილები და გარსები, რომლებიც დამზადებულია სხვადასხვა მექანიკური თვისების მქონე მასალების ფენებისაგან. ძელის სიმტკიცის მახასიათებლების გაზრდა შეიძლება განივი კვეთის ფორმის შესაბამისი შერჩევითაც. თუ კვეთის იმ ნაწილს, რომელიც ძელის მუშა მდგომარეობაში გაჭიმვას განიცდის, უფრო მასიურს დავამზადებთ, კვეთის სიმძიმის ცენტრი შუა წერტილიდან მისკენ გადაინაცვლებს და მაქსიმალური გამჭიმვი ძაბვები შემცირდება (ნახ. 5.34).

მასალების გაჭიმვის და კუმშვის მახასიათებლების სხვაობის შემთხვევისათ-

ვის კვეთის ფორმის შერჩევისა და ძელის სიმტკიცის ხელოვნური ხერხებით გაზრდის ზოგიერთი საკითხის განხილვის შემდეგ, უნდა აღინიშნოს, რომ იგივე საკითხები არანაკლებ მნიშვნელოვანია ისეთი მასალებისათვისაც, რომლებიც ხასიათდება გაჭიმვის და კუმშვის ერთნაირი მაჩვენებლებით.



ნახ. 5.34

განვიხილოთ კვეთის რაციონალური ფორმის შერჩევის საკითხი. ორი განსხვავებული კვეთიდან ძელის უფრო მაღალ სიმტკიცეს უზრუნველყოფს ის კვეთი, რომლის წინააღობის ღერძული მომენტი, (5.14) ფორმულის შესაბამისად, უფრო დიდი იქნება. ცხადია,

შედარებას აზრი აქვს კვეთების ფართობების ტოლობის შემთხვევაში. ეს საშუალებას გვაძლევს კვეთების ეფექტურობის შედარებისათვის, ძელის სიმტკიცის უზრუნველყოფის თვალსაზრისით, გამოვიყენოთ შემდეგი კოეფიციენტი:

$$k_1 = \frac{W'_x}{W_x^0}; \quad (F_0 = F), \quad (5.99)$$

სადაც W'_x , F და W_x^0 , F_0 პირველი და მეორე კვეთების შესაბამისი გეომეტრიული მახასიათებლებია.

კვეთის ფორმის ეფექტურობაზე შეიძლება ვიმსჯელოთ შესაბამისი ზღვრული მომენტების საშუალებით. ყერძოდ, კვეთებისათვის, რომლებსაც ორი სიმეტრიის ღერძი აქვთ, (5.58) ფორმულის საფუძველზე, მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$k_2 = \frac{S_F}{S_{F_0}}; \quad (F = F_0), \quad (5.100)$$

სადაც S_F , S_{F_0} – პირველი და მეორე კვეთებისათვის ჰორიზონტალური სიმეტრიის ღერძის მიმართ კვეთის ზედა ნახევრის სტატიკური მომენტებია; F , F_0 – შესაბამისად, პირველი და მეორე კვეთის ფართობები.

ასეთი კრიტერიუმის გამოყენებით, ფართობების ტოლობის საფუძველზე შევადაროთ ერთმანეთს მართკუთხა და წრიული კვეთები. მივიღებთ (ნახ.5.19):

$$F = bh; \quad F_0 = \frac{\pi d^2}{4}; \quad bh = \frac{\pi d^2}{4}; \quad b = \frac{\pi d^2}{4h}.$$

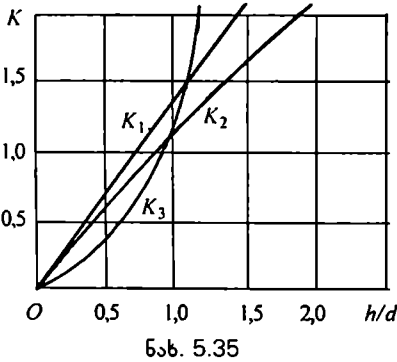
ეფექტურობის პირველი კოეფიციენტის განსაზღვრისათვის, (5.99)-ის შესაბამისად, გამოვიყენოთ (5.17) და (5.20) ფორმულები:

$$k_1 = \frac{bh^2 32}{6\pi d^3} = \frac{4}{3} \frac{h}{d}. \quad (5.101)$$

ანალოგიურად, (5.56) და (5.57) ფორმულების საშუალებით დავადგენთ ეფექტურობის მეორე კრიტერიუმის მნიშვნელობასაც:

$$k_2 = \frac{6bh^2}{4d^3} = \frac{3\pi}{8} \frac{h}{d}. \quad (5.102)$$

მიღებული შედეგები წარმოდგენილია 5.35 ნახაზზე წრფეების სახით. პირველი კრიტერიუმის შესაბამისად, სიმტკიცის თვალსაზრისით, მართკუთხა კვეთი წრიულ კვეთზე უკეთესია, თუ სრულდება პირობა $h > 0,75d$. ეს შედეგი შეიძლება შემდგენიარად ავხსნათ: დიდი სიმაღლის და, შესაბამისად, მცირე სიგანის მართკუთხა კვეთისათვის, დამახასიათებელია ფართობების ნაწილების Ox ღერძიდან მეტი დაცილება, ვიდრე იგივე ღერძიდან წრიული კვეთის ფართობების ნაწილების დაცილებაა, (ნახ. 5.19).

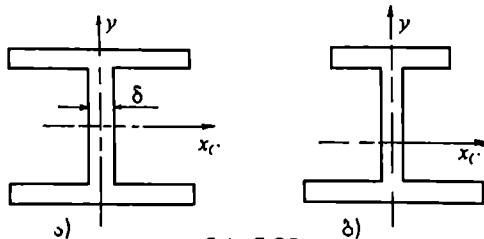


ნახ. 5.35

რაც შეეხება მცირე სიმაღლის მართკუთხა კვეთს, გვაქვს საპირისპირო სურათი. როდესაც $h = 0,75d$, ორივე კვეთის ნაწილები, ინტეგრალური თვალსაზრისით, ერთნაირადაა დაცილებული Ox ღერძიდან და ეფექტურობის კოეფიციენტი უდრის ერთს.

მეორე კრიტერიუმის შესაბამისი წრფე მოთავსებულია პირველი წრფის ქვემოთ, კვეთის შეფასებაშიც მცირე სხვაობაა. კერძოდ, მეორე კრიტერიუმის შესაბამისად, კვეთების ეფექტურობა ერთნაირია, თუ გვაქვს $h \approx 0,85d$

ჩატარებული ანალიზი კიდევ ერთხელ მიუთითებს იმ ჭეშმარიტებაზე, რომ ძელის წინააღმდეგობის უნარი ღუნვისადმი დამოკიდებულია მისი განივი კვე-



ნახ. 5.36

თის ფორმასა და ზომაზე, რაც უფრო დაცილებულია კვეთის ფართობის ძირითადი ნაწილი ცენტრალური ღერძიდან, მით უფრო მაღალია ძელის სიმტკიცე. ამიტომ, პრაქტიკაში, ღუნვაზე მომუშავე ძელების დასამზადებლად ფართოდ გამოიყენება ორტესებრი პროფილები (ნახ. 5.36).

პირველი პროფილი შეესაბამება გაჭიმვასა და კუმშვაზე მასალის ერთნაირ წინაღობის უნარს, ხოლო მეორე – სხვადასხვა წინაღობის უნარს. კვეთის ვერტიკალური ელემენტი თარობის შემაერთებლის როლს ასრულებს და მისი როლი ღუნვისადმი წინაღობაში უმნიშვნელოვანია. მისი δ სისქე შეიძლება საკმაოდ მცირე ავილოთ, მაგრამ არსებობს δ -ს შემცირების ზღვარიც. თხელკედლიან ძელებში არსებითად მაღლდება მხები ძაბვების როლი და მათი მოქმედების შედეგად შემაერთებელმა ელემენტმა, შეიძლება, დაკარგოს მდგრადობა, თუ δ -ს შემცირებისას ეს გარემოება არ იქნა გათვალისწინებული.

ღუნვისას ძელის სიხისტეზე გაანგარიშებისას, გამოიყენება 26-ე პარაგრაფში განხილული მეთოდი. გადაადგილების განსაზღვრისათვის გამოვიყენებთ (5.9) ფორმულას, რომელიც ფაქტიურად დეფორმირებულ ძელის ღერძის დიფერენციალური განტოლებაა. ამ განტოლების ამოხსნის მეთოდები განიხილება შემდეგ თავში.

როგორც აღვნიშნეთ, ღუნვისას ძელის სიხისტე El_x -ით განსაზღვრება. ინერციის ღერძული მომენტის მნიშვნელობა დამოკიდებულია როგორც კვეთის ზომებზე, ისე მის ფორმაზე. ამ უკანასკნელის რაციონალური შერჩევით შეიძლება ძელის სიხისტის მნიშვნელოვნად გაზრდა. სიხისტის თვალსაზრისით, ორი განსხვავებული ფორმის კვეთის რაციონალურობის შედარება შეიძლება შემდეგი კოეფიციენტის საშუალებით:

$$k_3 = \frac{I_x}{I_x^0}; \quad (F = F^0) \quad (5.103)$$

სადაც I_x , F და I_x^0 , F^0 შესაბამისად, პირველი და მეორე კვეთების გეომეტრიული მახასიათებლებია. ღუნვაზე სიხისტის მახასიათებლების ეფექტურობის დასადგენად გამოვიყენებთ (3.28) და (3.37) ფორმულებს და გავითვალისწინებთ მათ (5.103) თანაფარდობაში:

$$k_3 = \frac{bh^3 64}{12\pi d^4} = \frac{16h^3 \pi d^2}{3\pi d^4 4h} = \frac{4}{3} \left(\frac{h}{d} \right)^2 \quad (5.104)$$

შესაბამისი გრაფიკი ნაჩვენებია 5.35 ნახაზზე. სიხისტის თვალსაზრისით მართკუთხა და წრიული განივი კვეთები ტოლფასია, თუ სრულდება პირობა $h=0,86d$. როგორც წესი, საინჟინრო გაანგარიშებებში გადამწყვეტად ითვლება სიმტკიცის პირობების დაკმაყოფილება და, თუ ეს პირობა სრულდება, მაშინ, შესრულებულია სიხისტის პირობაც. ცხადია, აქ საუბარი არ არის უნივერსალურ წესზე. შეიძლება დავასახელოთ გამოწკლისი შემთხვევებიც. უფრო მეტიც, არსებობს მანქანებისა და ხელსაწყოების ელემენტები, რომლებისთვისაც სიხისტეზე გაანგარიშება ძირითადია.

მაგრამ, მიუხედავად ამისა, გამოთქმული აზრი სიმტკიცეზე კონსტრუქციების გაანგარიშების პრიორიტეტის თაობაზე რჩება ძალაში.

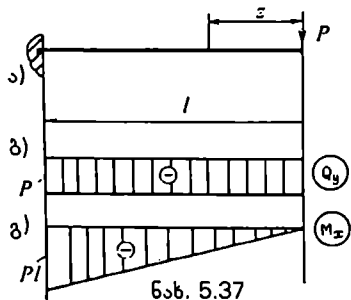
სამეცნიერო-ტექნიკის პროგრესის ვითარებაში იქმნება ახალი მასალები, უმჯობესდება არსებული მასალების თვისებები. სულ უფრო ფართოდ გამოიყენება შედგენილი ძელები, ფირფიტები, გარსები. ყოველივე ამან გამოიწვია მასალების და კონსტრუქციების სიმტკიცის თვისებების მკვეთრი ზრდა. ავიღოთ, თუნდაც, მანქანათმშენებლობის ერთ-ერთი ძირითადი კონსტრუქციული მასალა – ფოლადი. ახალმა ტექნოლოგიურმა პროცესებმა, მალეგირებელი მასალების შესაბამისმა შერჩევამ და სტრუქტურის სრულყოფამ ფოლადის სიმტკიცის მახასიათებლები რამდენიმე ათეულჯერ გაზარდა. მაგრამ დრეკადობის პირველი რიგის მოდული E პრაქტიკულად არ შეცვლილა. ამაზე მოწმობს თუნდაც 2.1 ცხრილის მონაცემები; სიმტკიცის მახასიათებლები, დენადობისა და სიმტკიცის ზღვრები ერთმანეთისაგან $(5+8)$ -ჯერ განსხვავდება, რაც შეეხება დრეკადობის მოდულის მნიშვნელობას, ის ყველა ფოლადისათვის თითქმის ერთი და იგივეა და შეიძლება მივიღოთ $(1,9+2,0) \cdot 10^5$ მგპა-ს ტოლად. ახალი მასალების გამოყენებით სიმტკიცის პირობების დაკმაყოფილება შესაძლოა ელემენტების განივი ზომების მნიშვნელოვანი შემცირების შემთხვევაშიც. ასეთი კონსტრუქციები ხასიათდება სიხისტის დაბალი მაჩვენებლებით, ვინაიდან სიხისტე კვეთის სიმაღლის კუბის პროპორციულია.

განხილული მასალა, ძირითადად, მეთოდურ ხასიათს ატარებს. როგორც ჩანს, თანამედროვე პირობებში სიმტკიცესა და სიხისტეზე ზრუნვა არაზოგადაადა საჭირო. დღეს ისეთი მანქანებისა და კონსტრუქციების შექმნის აუცილებლობაა, რომლებიც საიმედოდ შეასრულებენ სამსახურებრივ დანიშნულებას და, ერთდროულად, დამზადებისათვის მოითხოვენ მასალის მინიმალურ დანახარჯს.

რაც შეეხება რეალურ კონსტრუქციასა თუ მანქანას, მათი კონსტრუქციებისათვის არსებობს მანქანური პროექტირების პროგრამები.

მეხუთე თავის მაგალითები

მაგალითი 5.1. განვიხილოთ კონსოლური ძელი (ნახ. 5.37), გავიანგარიშოთ იგი სიმტკიცეზე და შევარჩიოთ განივი კვეთის ზომები. ძელი დამზადებულია ნახშირბადმცირე ფოლადისაგან. მოცემულია: $P=10$ კნ; $l=1,2$ მ; $\sigma_{დ}=300$ მგპა; $n=2$.



გამოვიყენოთ კვეთის მეთოდი და განვიხილოთ ძელის ნაწილის (ნახ. 5.38) წონასწორობის პირობები:

$$Q_y + P = 0; \quad Q_y = -P;$$

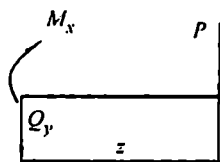
$$M_x + Pz = 0; \quad M_x = -Pz;$$

$$M_x(0) = 0, \quad M_x(l) = -Pl.$$

ამრიგად, განივი ძალა მუდმივი და უარყოფითია. რაც შეეხება მღუნავ მომენტს, მისი მნიშვნელობა წრფივი კანონით იცვლება, განივი ძალის და მღუნავი მომენტის ეპიურები აგებულია 5.37.ბ და გ ნახაზზე.

კვეთი საშიშოა ძელის ჩამაგრებასთან, ვინაიდან ამ კვეთში მომენტი მაქსიმალურია - მისი აბსოლუტური მნიშვნელობა Pl -ის ტოლია.

შევადგინოთ სიმტკიცის პირობა:

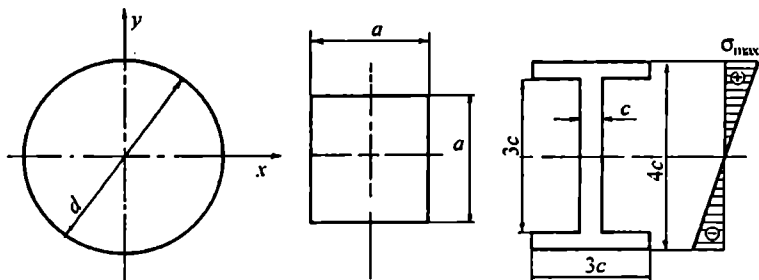


ნახ. 5.38

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{დნ}}}{n}$$

$$W_x \geq \frac{P \cdot l \cdot n}{\sigma_{\text{დნ}}} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 2}{300 \cdot 10^6} = 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^3$$

განვიხილოთ სამი ფორმის განივი კვეთი (ნახ. 5.39), დავადგინოთ მათი ზომები და ფართობები.



ნახ. 5.39

წრიული განივი კვეთისათვის, (5.17)-ის შესაბამისად, მივიღებთ

$$\frac{\pi d^3}{32} = 0,8 \cdot 10^{-4}; \quad d = \sqrt[3]{\frac{0,8 \cdot 10^{-4} \cdot 32}{3,14}} = 9,3 \cdot 10^{-2} \text{ მ}$$

კვეთის ფართობი

$$F_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 (9,3 \cdot 10^{-2})^2}{4} = 68 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^2$$

კვადრატული კვეთისათვის ღერძული წინააღობის მომენტის მნიშვნელობას დავდგენთ (5.20)-ის საშუალებით და გავუტოლოებთ მას განსაზღვრულ სიდიდეს:

$$\frac{a^3}{6} = 0,8 \cdot 10^{-4}; \quad a = \sqrt[3]{4,8 \cdot 10^{-4}} = 7,8 \cdot 10^{-2} \text{ მ}$$

ამ კვეთის ფართობი $F_2 = a^2 \approx 61 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^2$.

ორტესებრივი კვეთის ინერციის ცენტრალური ღერძული მომენტის მნიშვნელობის დასადგენად გამოვიყენოთ (3.28) ფორმულა:

$$I_x = \frac{3c(4c)^3}{12} - \frac{2c(3c)^3}{12} = 11,5c^4$$

ღერძული წინაღობის მომენტის გასაანგარიშებლად ვიყენებთ (5.14) ფორმულას:

$$W_x = \frac{I_x}{\gamma_{\max}} = \frac{11,5c^4}{2c} = 5,75c^3.$$

შევადგინოთ კვეთის ზომების განმსაზღვრელი პირობა

$$5,75c^3 = 0,8 \cdot 10^{-4}, \quad c = \sqrt[3]{\frac{0,8 \cdot 10^{-4}}{5,75}} \approx 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

კვეთის ფართობი

$$F_3 = 12c^2 - 6c^2 = 6c^2 = 6(2,4 \cdot 10^{-2})^2 = 35 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^2.$$

ამრიგად, ორტესებრი კვეთის გამოყენება სხვა კვეთების გამოყენებაზე უფრო სასურველია, ვინაიდან მისთვის ფართობი მინიმალურია. ფართობი კი უშუალოდ განსაზღვრავს ძელის წონას. დავადგინოთ ასეთი კვეთის ეფექტურობის კოეფიციენტები:

$$k_1 = \frac{F_1}{F_3} = 1,9, \quad k_2 = \frac{F_2}{F_3} = 1,7.$$

მიღებული შედეგებიდან ვასკვნით, რომ წრიული კვეთის გამოყენების შედეგად მასალის გადახარჯვა შეადგენს 90%-ს. მართკუთხა კვეთის შემთხვევაში ეს მაჩვენებელი ნაკლებია - 70%.

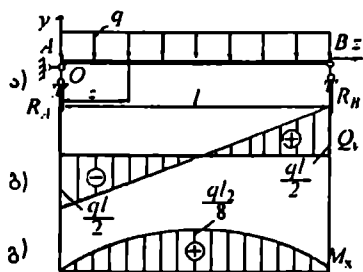
კვეთის ფორმის ეფექტურობას ღუნვისას განსაზღვრავს ის, თუ შედარებით რამდენად მაღალი დონის ძაბვები მოქმედებს კვეთის ძირითად ნაწილზე. ორტესებრი კვეთის ძირითად ფართობზე მოქმედებს ძაბვები, რომლებიც ახლოსაა მაქსიმალურთან. საწინააღმდეგო სურათია. წრიული კვეთის შემთხვევაში, აქ ძირითად ნაწილში ძაბვები ნაკლებ განსხვავდება ნულისაგან.

მაგალითი 5.2. გავიანგარიშოთ სიმტკიცეზე ძელი, რომელზედაც მოქმედებს მუდმივი ინტენსიურობის განაწილებული ძალები (ნახ. 5.40). ძელის განივი კვეთი მართკუთხედიანია (ნახ. 5.41). მოცემულია $q=10^5$ ნ/მ; $l=1,2$ მ; $\sigma_{\text{დნ}}=400$ მგპა; $n=2$.

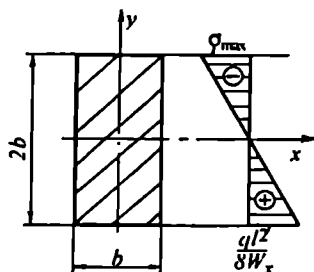
დავაგვიპილოთ ძელზე მოქმედი ძალები Oy ღერძზე: $R_A + R_B - ql=0$.

ვინაიდან ძელი სიმეტრიულია შუა წერტილის მიმართ, რეაქციის ძალები ტოლია და წონასწორობის განტოლების შესაბამისად

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$$

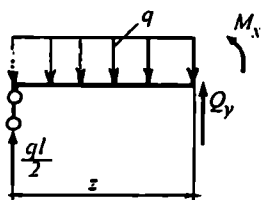


ნახ. 5.40



ნახ. 5.41

გამოვიყენოთ კვეთის მეთოდი (ნახ. 5.42) და შევადგინოთ ძელის ელემენტის წონასწორობის პირობები



ნახ. 5.42

$$Q_y - qz + \frac{ql}{2} = 0; \quad M_x + \frac{qz^2}{2} - \frac{ql}{2}z = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ განივი ძალის და მღუნავი მომენტის გამოსახულებებს

$$Q_y = q\left(z - \frac{l}{2}\right); \quad M_x = \frac{qz}{2}(l - z)$$

ამრიგად, განივი ძალა იცვლება წრფივი კანონით. მღუნავი მომენტის განტოლება წარმოდგენილია მეორე ხარისხის პარაბოლით. ძალოვანი ფაქტორების ასეთი ცვალებადობის კანონზომიერება გამომდინარეობს მათ შორის არსებული (5.3) და (5.5) დიფერენციალური და ინტეგრალური დამოკიდებულებებიდან. დავადგინოთ ძელში განივი ძალისა და მომენტის მნიშვნელობები დამახასიათებელი წერტილებისათვის

$$Q_y(0) = -\frac{ql}{2}; \quad Q_y\left(\frac{l}{2}\right) = 0; \quad Q_y(l) = \frac{ql}{2}.$$

$$M_x(0) = 0; \quad M_x\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^2}{8}; \quad M_x(l) = 0.$$

განივი ძალის და მღუნავი მომენტის ეპიურები აგებულია 5.40 ნახაზზე. მეორე ეპიურის საშუალებით ვადაგნთ, რომ საშიშია ძელის შუა კვეთი. ამ კვეთისათვის ნორმალური ძაბვების ეპიურა გამოსახულია 5.41 ნახაზზე. კვეთის ზომების განსაზღვრისათვის შევადგინოთ სიმტკიცის პირობა

$$\sigma_{\max} = \frac{ql^2}{8W_x} = \frac{\sigma_{\text{ღნ}}}{n},$$

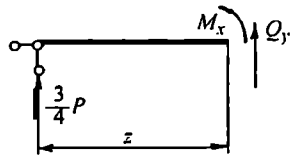
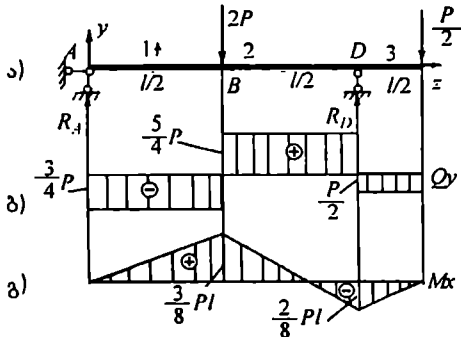
საიდანაც მივიღებთ წინააღობის ლერძული მომენტის მნიშვნელობას:

$$W_x = \frac{gl^2 n}{8\sigma_{\text{ღ}} \sigma_{\text{ღ}}} = \frac{10^5 (1,2)^2 \cdot 2}{8 \cdot 400 \cdot 10^6} = 90 \cdot 10^{-6} \text{ მ}^3$$

ღერძული წინაღობის მომენტის მნიშვნელობას დავადგენთ (5.20)-ის საშუალებით. შემდეგ კი გავიანგარიშებთ კვეთის სიგანის მნიშვნელობას:

$$W_x = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3} b^3 = 90 \cdot 10^{-6} \text{ მ}^3; \quad b = \sqrt[3]{\frac{90 \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{2}} = 5,2 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

მაგალითი 5.3. გავიანგარიშოთ თუჯის ძელი სიმტკიცეზე და დავადგინოთ კვეთის ზომები (ნახ. 5.43). მოცემულია: $\sigma_{\text{ღ}} = 150$ მგპა; $\sigma_{\text{კ}} = 600$ მგპა; $l = 1$ მ; $P = 20$ კნ; $n = 2$.



ნახ. 5.44

ნახ. 5.43

განვსაზღვროთ რეაქციის ძალები. შევადგინოთ ძელზე მოდებული ძალების მომენტის ჭამი A წერტილის მიმართ:

$$-\frac{P}{2} \cdot \frac{3}{2} l + R_D l - 2 \frac{P l}{2} = 0; \quad R_D = \frac{7}{4} P.$$

დავაგეგმილით ძელზე მოქმედი ძალები y ღერძზე:

$$R_A + R_D - 2P - \frac{P}{2} = 0; \quad R_A = \frac{3}{4} P.$$

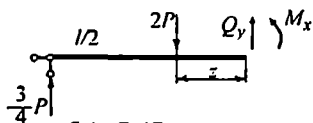
ძალების მოდების წერტილები ძელს ყოფს სამ უბნად (ნახ.5.43). კვეთის მეთოდის გამოყენებით განვიხილოთ პირველი უბანი (ნახ. 5.44). ძელის ნაწილის წონასწორობის პირობების განხილვით მივიღებთ განივი ძალის და მღუნავი მომენტის მნიშვნელობებს:

$$Q_y = -\frac{3}{4} P; \quad M_x = \frac{3}{4} Pz; \quad M_x(0) = 0; \quad M_x\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{3}{8} Pl.$$

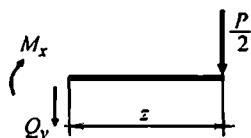
ანალოგიურად განვიხილავთ მეორე უბანს (ნახ. 5.45)

$$Q_y = 2P - \frac{3}{4}P = \frac{5}{4}P; \quad M_x = \frac{3}{4}P\left(\frac{l}{2} + z\right) - 2Pz = \frac{P}{8}(3l - 10z);$$

$$M_x(0) = \frac{3}{8}Pl; \quad M_x\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{Pl}{4}.$$



ნახ. 5.45



ნახ. 5.46

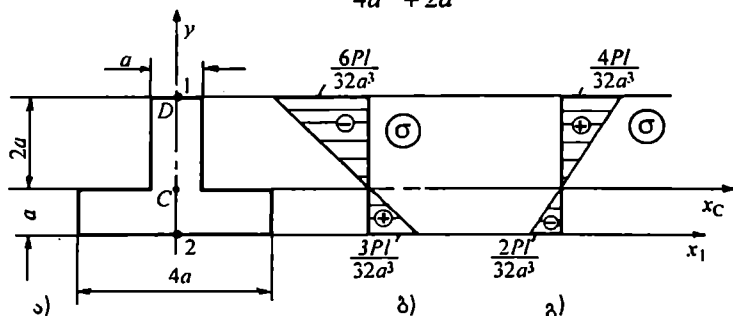
მესამე უბნის განხილვისას მიზანშეწონილია განვიხილოთ ძელის მოკვეთილი მარჯვენა ნაწილი (ნახ. 5.46)

$$Q_y = -\frac{P}{2}; \quad M_x = -\frac{P}{2}z; \quad M_x(0) = 0; \quad M_x\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{Pl}{4}.$$

მიღებული შედეგების გათვალისწინებით 5.43 ნახაზზე აგებულია განივი ძალების და მღუნავი მომენტის ეპიურები.

განვსაზღვროთ ძელის კვეთის გეომეტრიული მახასიათებლები. (ნახ. 5.47). კვეთის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატის დასადგენად საწყისად ავიღოთ x_1 ღერძი და გამოვიყენოთ (3.7) ფორმულა

$$y_c = \frac{4a^2 \cdot \frac{a}{2} + 2a^2 \cdot 2a}{4a^2 + 2a^2} = a.$$



ნახ. 5.47

გავიანგარიშოთ კვეთის ინერციის მომენტი ცენტრალური ღერძის მიმართ, რისთვისაც ორი მართკუთხედისათვის გამოვიყენოთ (3.27) და მიღებული შედეგები შევაჯამოთ:

$$I_{x_c} = \frac{4a(a)^3}{3} + \frac{a(2a)^3}{3} = 4a^4$$

ძელის მასალის თვისებები გაქიმვასა და კუმშვაზე განსხვავდება და კვეთიც არასიმეტრიულია ცენტრალური ღერძის მიმართ. ამიტომ, (5.12)-ის შესაბამისად, განვსაზღვროთ კვეთის ორივე ღერძული წინაღობის მომენტი

$$W'_x = \frac{I_{x_c}}{y'_{\max}} = \frac{4a^4}{2a} = 2a^3; \quad W''_x = \frac{I_{x_c}}{y''_{\max}} = \frac{4a^4}{a} = 4a^3.$$

მღუნავი მომენტების ეპიურის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ მოსალოდნელი საშიში კვეთებია B და D (ნახ.5.43). პირველ კვეთში ცენტრალური ღერძიდან მაქსიმალურად დაცილებულ წერტილებში ნორმალური ძაბვები იქნება

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{W'_x} = \frac{3Pl}{16a^3}; \quad \sigma_2 = \frac{M_x}{W''_x} = \frac{3Pl}{32a^3}.$$

ამ კვეთისათვის ნორმალური ძაბვების ეპიურა გამოსახულია 5.47,ბ ნახაზზე. ანალოგიურად განისაზღვრება ძაბვები D კვეთში:

$$\sigma_1 = \frac{Pl}{8a^3}; \quad \sigma_2 = \frac{Pl}{16a^3}.$$

ამ კვეთისათვის ნორმალური ძაბვების ეპიურა გამოსახულია 5.47 გ ნახაზზე.

აგებული ეპიურების მონაცემების შედარებით ვაღდგენთ, რომ მაქსიმალური გამჭვიში ძაბვები მოქმედებს D კვეთის პირველ წერტილში. შევადგინოთ ამ წერტილისათვის სიმტკიცის პირობა:

$$\sigma_{\max} = \frac{Pl}{8a^3} = \frac{\sigma_{სგ}}{n}; \quad a = \sqrt[3]{\frac{P \cdot l \cdot n}{8\sigma_{სგ}}} = \sqrt[3]{\frac{20 \cdot 10^3 \cdot 1,0 \cdot 2}{8 \cdot 150 \cdot 10^6}} = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

მოდულით უდიდესი მკუმშავი ძაბვები მოქმედებს B კვეთის პირველი წერტილში, რომლისთვისაც სიმტკიცის პირობა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

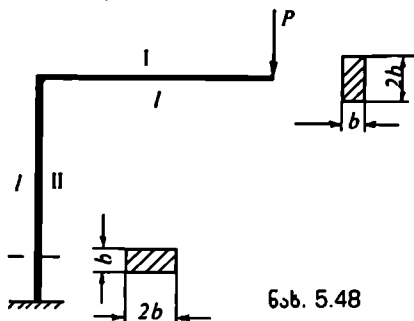
$$\sigma_{\max} = \frac{3Pl}{16a^3} = \frac{\sigma_{სკ}}{n}; \quad a = \sqrt[3]{\frac{3P \cdot l \cdot n}{16\sigma_{სკ}}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 1,0 \cdot 2}{16 \cdot 600 \cdot 10^6}} = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

ამრიგად, გაქიმვასე სიმტკიცის პირობის შესრულება მოითხოვს კვეთის უფრო დიდ ზომებს, ვიდრე კუმშვის სიმტკიცის პირობებიდან მიღებული ზომებია, ამიტომ, საბოლოოდ, საჭიროა ავიღოთ, $a=3,2$ სმ. ამრიგად, საშიშია D კვეთი და მასში საშიშია x_c ღერძიდან $2a$ მანძილით დაცილებული წერტილები, მათ შორის პირველი წერტილიც (ნახ.5.47).

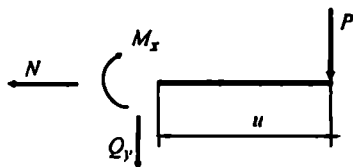
ძელის მოთავსება საყრდენებზე კვეთის თაროთი ზემოთ შეცვლის ძაბვების

განაწილების სურათს და სიმტკიცის პირობას. გაანგარიშების შედეგად მივიღებთ: $a=3,7$ სმ.

მაგალითი 5.4. გავიანგარიშოთ ჩარჩო სიმტკიცეზე მაქსიმალური ძაბვების მეთოდის საშუალებით და დავადგინოთ მისი განივი კვეთის ზომები. განივი კვეთი მართკუთხედია, რომლის სიმაღლე ორჯერ მეტია სიგანეზე. მოცემულია: $l=0,5$ მ; $P=40$ კნ; $\sigma_{დ} = 450$ მპა; $n=2$.

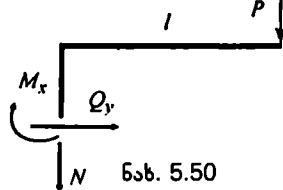


ნახ. 5.48



ნახ. 5.49

ავგოთ ნორმალური ძალების, განივი ძალების და მღუნავი მომენტების ეპიურები. გამოვიყენოთ კვეთის მეთოდი პირველი უბნისათვის (ნახ. 5.49) და შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:



ნახ. 5.50

$$N = 0; \quad Q_y = -P; \quad M_x = -Pu;$$

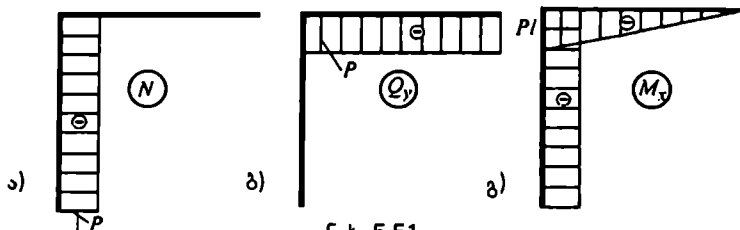
$$M_x(0) = 0; \quad M_x(l) = -Pl.$$

განვიხილოთ მეორე უბანი (ნახ. 5.50)

$$N = -P; \quad Q_y = 0; \quad M_x = -Pl.$$

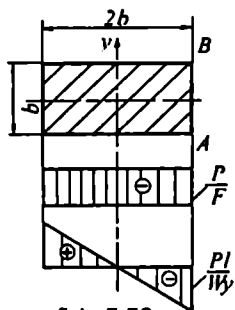
მიღებული შედეგების გამოყენებით 5.51 ნახაზზე ავებულია ეპიურები. ისინი გვაძლევს საშუალებას დავადგინოთ, რომ საშიშია მეორე უბნის წებისმიერი კვეთი. ვინაიდან მათში მაქსიმალური მნიშვნელობის მღუნავ მომენტთან ერთად მოქმედებს ნორმალური ძალაც. ნორმალური ძალის მიერ გამოწვეული ძაბვები კვეთში თანაბარადაა განაწილებული და განისაზღვრება (2.3) ფორმულით

$$\sigma = \frac{N}{F} = -\frac{P}{2b^2}.$$



ნახ. 5.51

რაც შეეხება მლუნავი მომენტის მიერ გამოწვეულ ძაბვებს, ისინი კვეთში წრფივი კანონით იცვლებიან და განისაზღვრებიან (5.10) ფორმულით



ნახ. 5.52

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} y = -\frac{(-Pl) \cdot 12}{b(2b)^3} y = \frac{3}{2} \cdot \frac{Pl}{b^4} y;$$

$$\sigma(b) = \frac{3}{2} \cdot \frac{Pl}{b^3}; \quad \sigma(0) = 0; \quad \sigma(-b) = -\frac{3Pl}{2b^3}.$$

საშუალო კვეთში ნორმალური ძაბვების ეპიურები გამოსახულია 5.52 ნახაზზე. კვეთში საშიშია AB გვერდის ნებისმიერი წერტილი, რომელშიც საერთო ნორმალური ძაბვა შემაღენელი ძაბვების მნიშვნელობის ჯამის ტოლია

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{2b^2} + \frac{3Pl}{2b^3} = \frac{3Pl}{2b^3} \left(1 + \frac{b}{3l}\right).$$

რადგანაც როგორც ძელების, ასევე ჩარჩოებისთვისაც ელემენტების გრძივი ზომები გაცილებით მეტია კვეთის ზომებზე, $(b/l) \ll 1$, ამიტომ მაქსიმალური ძაბვების ფორმულაში ბოლო მამრავლი შევცვალოთ ერთით:

$$\sigma_{\max} \approx \frac{3Pl}{2b^3}.$$

ასეთი გამარტივება იმას ნიშნავს, რომ ნორმალური ძალის შესაბამისი ძაბვები სიმცირის გამო მხედველობაში არ მიიღება.

შეფასებები, რომლებიც გაკეთდა ძელის განივი ღუნვის მხები და ნორმალური ძაბვების სიდიდეების შესახებ 28-ე პარაგრაფში, ჩარჩოებისათვის ძალაში რჩება.

სიმტკიცის პირობა დაიწერება შემდეგი სახით:

$$\sigma_{\max} = \frac{3Pl}{2b^3} = \frac{\sigma_{\text{დნ}}}{n},$$

საიდანაც მივიღებთ კვეთის სიგანეს

$$b = \sqrt[3]{\frac{3P \cdot l \cdot n}{2 \cdot \sigma_{\text{დნ}}}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 2}{2 \cdot 450 \cdot 10^6}} = 5,1 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

განესაზღვროთ ჩარჩოს განივი კვეთის ზომები ზღვრული დატვირთვის მეთოდის გამოყენებით, მარაგის კოეფიციენტი $n=2$. სიმტკიცის პირობას ჩავწერთ შემდეგი სახით:

$$M_{\max} \leq [M] = \frac{M_{II}}{n}.$$

თუ ამ პირობაში ჩავსვამთ მაქსიმალური მღუნავი მომენტის მნიშვნელობას, რომელსაც განვსაზღვრავთ შესაბამისი ეპიურის საშუალებით და M_{II} -ის მნიშვნელობას დავადგენთ (5.56) ფორმულით, მივიღებთ:

$$Pl = \sigma_{დნ} \cdot \frac{b \cdot (2b)^2}{4n} = \frac{\sigma_{დნ} \cdot b^3}{n},$$

საიდანაც

$$b = \sqrt[3]{\frac{P \cdot l \cdot n}{\sigma_{დნ}}} = \sqrt[3]{\frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 2}{450 \cdot 10^6}} \approx 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

5.48 ნახაზის მიხედვით კვეთის სიმაღლე $2b=9$ სმ.

შევადართო ერთმანეთს ჩარჩოს წონები, რომლებიც შეესაბამება დასაშვები ძაბვების (G_1) და ზღვრული დატვირთვის (G_2) მეთოდებით განსაზღვრულ ზომებს:

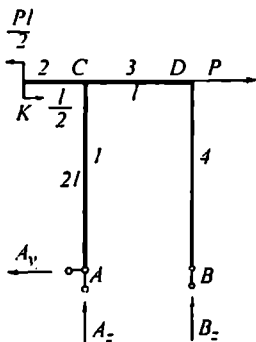
$$G_1 = b \cdot 2b \cdot 2l \cdot \gamma = 4 \cdot (5,1)^2 \cdot \gamma \cdot 10^{-4}$$

$$G_2 = b \cdot 2b \cdot 2l \cdot \gamma = 4 \cdot (4,5)^2 \cdot \gamma \cdot 10^{-4}.$$

$$k = \frac{G_1 - G_2}{G_1} 100\% = 22\%$$

მაგალითი 5.5. განვიხილოთ წრიული განივკვეთიანი ჩარჩო (ნახ. 5.53) და სიმტკიცეზე გაანგარიშებით დავადგინოთ განივი კვეთის ზომები. მოცემულია: $P=10$ კნ, $l=0,5$ მ., $\sigma_{დნ}=450$ მგპ, $n=2$.

გავიანგარიშოთ ჩარჩოზე მოდებული ძალების მომენტები A წერტილის მიმართ და წონასწორობის პირობის შესაბამისად მათი ჯამი გავუტოლოთ ნულს:



$$\frac{Pl}{2} - P \cdot 2l + B_z l = 0; \quad B_z = \frac{3}{2} P.$$

დავაგვიგვილოთ ჩარჩოზე მოქმედი ძალები, შესაბამისად, ჰორიზონტალურ და ვერტიკალურ დერძებზე და გვე მიიღების ჯამი გავუტოლოთ ნულს:

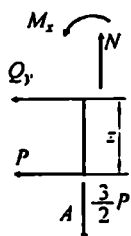
$$A_y - P = 0; \quad A_y = P; \quad A_z + B_z = 0; \quad A_z = -\frac{3}{2} P.$$

განვიხილოთ ჩარჩოს პირველი უბანი (ნახ. 5.54) და წონასწორობის პირობების საშუალებით განვსაზღვროთ კვეთში მოქმედი ძალოვანი ფაქტორები

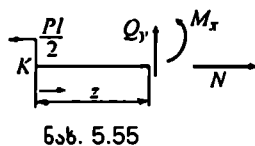
ნახ. 5.53

$$N = \frac{3}{2} P; \quad Q_y = -P; \quad M_x = P \cdot z.$$

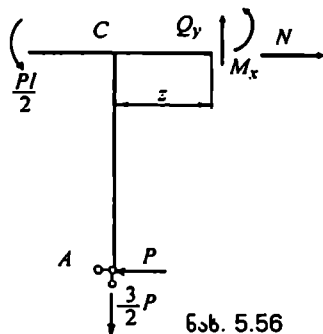
$$M_x(0) = 0; \quad M_x(2l) = 2Pl.$$



ნახ. 5.54



ნახ. 5.55

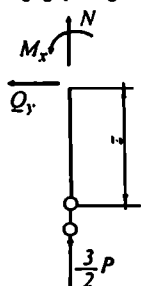


ნახ. 5.56

მეორე უბანს განვიხილავთ ანალოგიურად (ნახ. 5.55):

$$N = 0; \quad Q_y = 0; \quad M_x = -\frac{Pl}{2}.$$

მესამე უბნისათვის კვეთის მეთოდის გამოყენებით (ნახ. 5.56) ვსაზღვრავთ კვეთში მოქმედ შიგა ძალოვან ფაქტორებს:



ნახ. 5.57

$$N = P; \quad Q_y = \frac{3}{2}P;$$

$$M_x = 2Pl - \frac{Pl}{2} - \frac{3}{2}Pz = \frac{3}{2}P(l - z).$$

$$M_x(0) = \frac{3}{2}Pl; \quad M_x(l) = 0.$$

გამოვიყენოთ კვეთის მეთოდი მეოთხე უბნისათვის (ნახ. 5.57) და შევადგინოთ ელემენტის წონასწორობის პირობები

$$N = -\frac{3}{2}P; \quad Q_y = 0; \quad M_x = 0.$$

მიღებული შედეგების გამოყენებით აგებული ეპიურები გამოსახულია 5.58 ნახაზზე.

მლუნავი მომენტების ეპიურის საშუალებით ვადგენთ, რომ საშიშია პირველი უბნის C კვეთი, რომლისთვისაც სიმტკიცის პირობა შემდგენიარად ჩაიწერება:

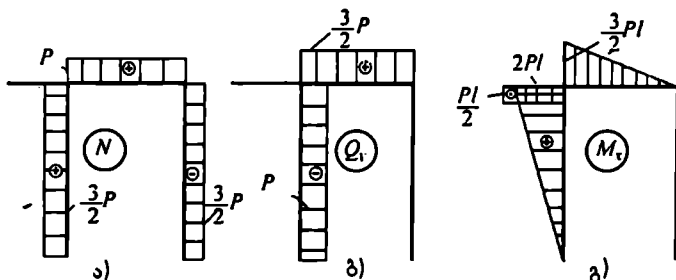
$$\sigma_{\max} = \frac{2Pl}{W_x} = \frac{2Pl}{0,1d^3} = \frac{\sigma_{\text{დნ}}}{n}.$$

ეს პირობა საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ კვეთის დიამეტრი

$$d = \sqrt[3]{\frac{2P \cdot l \cdot n}{0,1 \sigma_{\text{დნ}}}} = \sqrt[3]{\frac{20 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 2}{0,1 \cdot 450 \cdot 10^6}} \approx 7,6 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

ჩავთვალოთ, რომ ჩარჩოს მასალისათვის დასაშვებია გაჭიმვის დიაგრამის სქემატიზაცია, 2.25 ნახაზის შესაბამისად. ამ პირობის საფუძველზე ჩარჩოს სიმტკიცეზე გასაანგარიშებლად გამოვიყენოთ ზღვრული დატვირთვის მეთოდი

$$M_{\text{max}} = 2Pl = [M] = \frac{M_{II}}{n} = \frac{\sigma_{\text{დნ}} \cdot d^3}{6n},$$



ნახ. 5.58

საიდანაც მივიღებთ კვეთის დიამეტრის მნიშვნელობას:

$$d = \sqrt[3]{\frac{12 Pln}{\sigma_{\text{დნ}}}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 2}{450 \cdot 10^6}} \approx 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

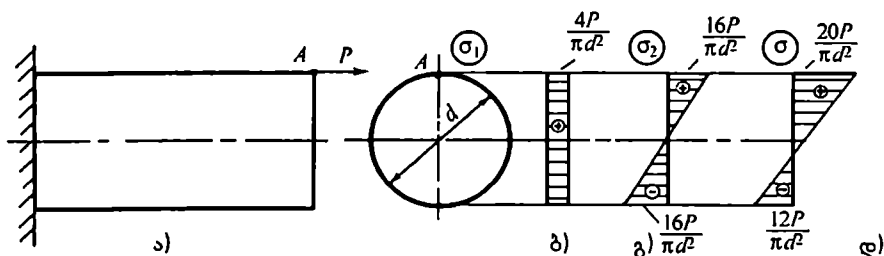
საჭიროა ხაზი გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ ძელებისა და ჩარჩოებისათვის ზემოთ განხილულ მაგალითებში მღუნავი მომენტების ეპიურები აგებულია შეკუმშული ბოჭკოების მხრიდან. აღნიშნული გარემოება ემთხვევა მღუნავი მომენტებისათვის ჩვენს მიერ არჩეულ ნიშნების წესს.

მაგალითი 5.6. განვიხილოთ წრიული განივკვეთიანი ძელის სიმტკიცე (ნახ. 5.59) და დავადგინოთ კვეთის ზომები. მოცემულია: $P=10 \text{ კნ}$; $[\sigma]=160 \text{ მგპა}$ ძელის განიცდის არაცენტრალურ გაჭიმვას. მის ნებისმიერ კვეთში, ნორმალური ძალა $N=P$; მღუნავი მომენტი $M_x=(-Pd/2)$.

განვსაზღვროთ მათი შესაბამისი ნორმალური ძაბვები:

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} = \frac{4P}{\pi d^2}; \quad \sigma_2 = -\frac{M_x}{I_x} y = \frac{64Pd}{2\pi d^4} y = \frac{32P}{\pi d^3} y$$

$$\sigma_2\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{16P}{\pi d^2}; \quad \sigma_2\left(-\frac{d}{2}\right) = -\frac{16P}{\pi d^2}.$$

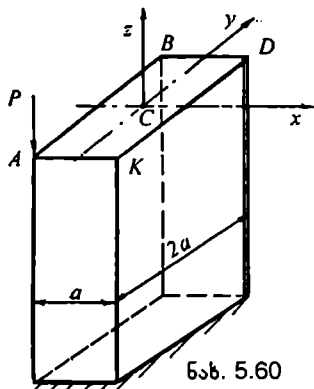


ნახ. 5.59

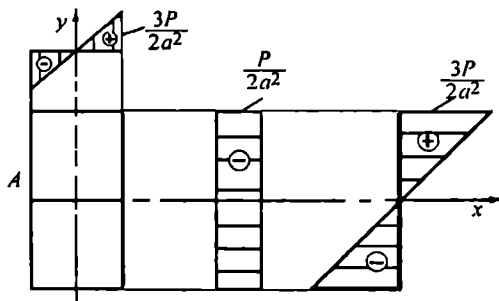
ამ ძაბვების შესაბამისი და ჩამური ეპიურები გამოსახულია 5.59 ნახაზზე. საშიში A წერტილისათვის სიმტკიცის პირობა ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\frac{20P}{\pi d^2} = [\sigma]; \quad d = \sqrt{\frac{20P}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 10 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

მაგალითი 5.7. განესაზღვროთ მართკუთხა განივკვეთიანი ძელის კვეთის ზომები (ნახ. 5.60). მოცემულია: $P=65\text{კნ}$; $[\sigma]=200\text{მგპა}$.



ნახ. 5.60



ნახ. 5.61

ძელი განივდის არაცენტრალურ კუშშვას და მის გასაანგარიშებლად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ზემოთ მიღებული ფორმულები. მაგრამ, ზოგ შემთხვევაში, მიზანშეწონილია ამოცანის უშუალო განხილვა. სწორედ ასეთია განსახილველი ამოცანაც.

დავადგინოთ ძელის განივ კვეთებში მოქმედი ნორმალური ძალა და მღუნავი მომენტების მნიშვნელობები:

$$N = -P; \quad M_x = -P \cdot a; \quad M_y = -\frac{Pa}{2}.$$

შესაბამისი ნორმალური ძაბვები იქნება:

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} = -\frac{P}{2a^2}; \quad \sigma_2 = -\frac{M_x}{I_x} y = \frac{3P}{2a^3} y; \quad \sigma_3 = -\frac{M_y}{I_y} x = \frac{3P}{a^3} x.$$

ძაბვების ეპიურები გამოსახულია 5.61 ნახაზზე. კვეთში საშიშია A წერტილი, რომელშიც ჯამდება სამივე უარყოფითი ნიშნის ძაბვა:

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{2a^2} - \frac{3P}{2a^2} - \frac{3P}{2a^2} = -\frac{7P}{2a^2}.$$

შევადგინოთ სიმტკიცის პირობა:

$$\sigma_{\max} = \frac{7P}{2a^2} = [\sigma]; \quad a = \sqrt{\frac{7P}{2[\sigma]}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 65 \cdot 10^3}{2 \cdot 200 \cdot 10^6}} \approx 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

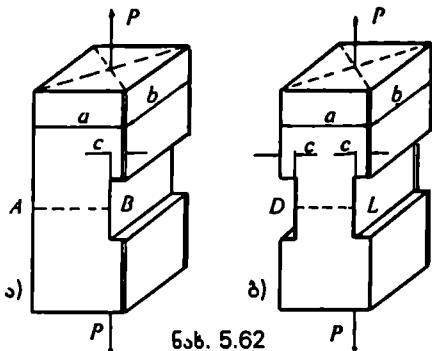
მაგალითი 5.8. გავანალიზოთ 5.62 ნახაზზე ნაჩვენები ძელების სიმტკიცე მაქსიმალური ძაბვების მეთოდის გამოყენებით. დაეადგინოთ, თუ რომელი ძელია უფრო მტკიცე.

განვიხილოთ პირველი ძელი (ნახ. 5.62, ა), რომლისთვისაც ადგილი აქვს არაცენტრალურ გაჭიმვას. აქ საშიშია B წერტილი, რომელშიც ნორმალური ძაბვა

$$\sigma_B = \frac{P}{b(a-c)} + \frac{6P \cdot \frac{c}{2}}{b(a-c)^2} = \frac{P(1+2\lambda)}{a \cdot b(1-\lambda)^2},$$

სადაც $\lambda = (c/a)$.

მეორე ძელისათვის საშიშია DL კვეთი (ნახ. 5.62 ბ), რომელშიც ადგილი აქვს ცენტრალურ გაჭიმვას და კვეთში ძაბვები თანაბრად განაწილებული



ნახ. 5.62

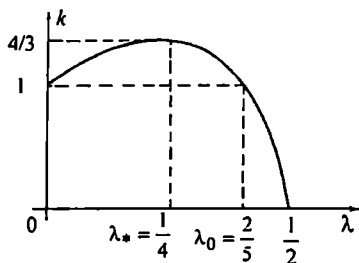
$$\sigma_D = \frac{P}{b(a-2c)} = \frac{P}{ab(1-2\lambda)}.$$

გავინაგარიშოთ ძელების მაქსიმალური ძაბვების შეფარდება

$$k = \frac{\sigma_B}{\sigma_D} = \frac{1-4\lambda^2}{(1-\lambda)^2}.$$

ავაგოთ გრაფიკი, რომელიც ახსიათებს k კოეფიციენტის დამოკიდებულებას გეომეტრიული λ პარამეტრისაგან

(ნახ. 5.63). თუ $\lambda=0$, ე.ი. ძელებზე ფაქტიურად ამოჭრილები არ არის, მაშინ $k=1$,



ნახ. 5.63

ე.ი. ორივე ძელი სიმტკიცის თვალსაზრისით ტოლფასოვანია. ასეთი თანაფარდობა მიიღება k -ს გამოსახულების ერთზე გატოლების შემთხვევაშიც:

$$1 = \frac{1 - 4\lambda_0^2}{(1 - \lambda_0)^2}; \quad 1 - 2\lambda_0 + \lambda_0^2 = 1 - 4\lambda_0^2;$$

$$\lambda_0(5\lambda_0 - 2) = 0.$$

ერთი მნიშვნელობა $\lambda_0 = 0$ უკვე მიღებულია. λ_0 -ის მეორე მნიშვნელობა მიიღება მეორე ნამრავლის ნულთან გატოლებით: $5\lambda_0 - 2 = 0$; $\lambda_0 = 2/5$. დავადგინოთ λ -ს მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება k -ს მაქსიმალურ მნიშვნელობას:

$$\frac{dk}{d\lambda} = -\frac{-8\lambda_*(1-\lambda_*)^2 + (1-4\lambda_*^2) \cdot 2(1-\lambda_*)}{(1-\lambda_*)^4} = 0;$$

$$2(1-\lambda_*)(1-4\lambda_*) = 0; \quad \lambda_{*1} = 1, \quad \lambda_{*2} = \frac{1}{4}.$$

პირველ ფესვს პრაქტიკული მნიშვნელობა არა აქვს, ვინაიდან λ იცვლება $0 \leq \lambda \leq (0,5)$ საზღვრებში. მეორე ფესვს შეესაბამება k -ს მაქსიმალური მნიშვნელობა:

$$k_{\max} = \frac{1 - \frac{4}{16}}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{4}{3}.$$

თუ λ პარამეტრი აკმაყოფილებს პირობებს $0 < \lambda < (2/5)$, მეორე ძელი უფრო მტკიცეა.

მაგალითი 5.9. განვსაზღვროთ მაქსიმალური ძაბვები მრუდე ძელში (ნახ. 5.64). მოცემულია: $a = 2 \cdot 10^{-2}$ მ; $R = 6 \cdot 10^{-2}$ მ; $P = 6$ კვ; $[\sigma] = 120$ მგპა. საშიშია AB კვეთი და ამ კვეთში საშიშია B წერტილი. ნორმალური ძალის შესაბამისი ძაბვა

$$\sigma_N = -\frac{P}{3a^2} = -\frac{6 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} = -5 \cdot 10^6 \text{ პა} = -5,0 \text{ მგპა}.$$

გავიანგარიშოთ მღუნავი მომენტით გამოწვეული ძაბვები. წინასწარ განვსაზღვროთ e -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა (5.92) ფორმულის გამოყენებით:

$$e = \frac{I_{xc}}{F \cdot R} = \frac{a(3a)^3}{12 \cdot 3a^2 \cdot R} = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ მ}.$$

გავიანგარიშოთ ძაბვები A და B წერტილებში. ამისათვის ჯერ დავადგინოთ დამხმარე სიდიდეები:

$$\frac{M_x}{Fe} = \frac{2PR}{3a^2e} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}} = 12 \cdot 10^7 \text{ კა}$$

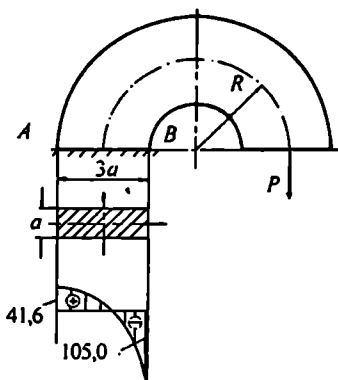
$$y_A = 1,5a + e = 1,5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} + 0,5 \cdot 10^{-2} = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ მ}$$

$$y_B = 1,5a - e = 1,5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} - 0,5 \cdot 10^{-2} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ მ}$$

$$\rho_A = R + 1,5a = 6 \cdot 10^{-2} + 1,5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 9,0 \cdot 10^{-2} \text{ მ}$$

$$\rho_B = R - 1,5a = 6 \cdot 10^{-2} - 1,5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 3,0 \cdot 10^{-2} \text{ მ}$$

მაშინ ძაბვები A და B წერტილებში ტოლი იქნება:



ნახ. 5.64

$$\sigma_A = \frac{M_x y_A}{Fe \rho_A} = 12 \cdot 10^7 \frac{3,5 \cdot 10^{-2}}{9,0 \cdot 10^{-2}} = 46,7 \text{ მგპა.}$$

$$\sigma_B = \frac{M_x y_B}{Fe \rho_B} = 12 \cdot 10^7 \frac{2,5 \cdot 10^{-2}}{3,0 \cdot 10^{-2}} = 100,0 \text{ მგპა.}$$

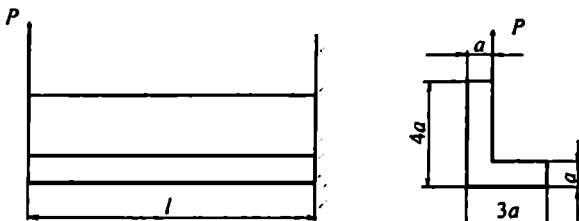
თუ გავითვალისწინებთ ნორმალური ძალით გამოწვეულ ძაბვებსაც საბოლოოდ A და B წერტილებში მივიღებთ ძაბვების შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$\sigma_A = 46,7 - 5,0 = 41,7 \text{ მგპა.}$$

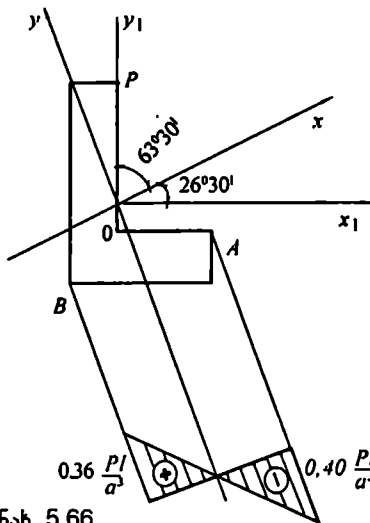
$$\sigma_B = -100,0 - 5,0 = -105,0 \text{ მგპა.}$$

ამრიგად, ძელი სიმტკიცის პირობას აკმაყოფილებს, რადგან მაქსიმალური ძაბვა დასაშვებ ძაბვაზე მცირეა.

მაგალითი 5.10. განვიხილოთ კონსოლური ძელის სიმტკიცე (ნახ. 5.65) და დავადგინოთ კვეთის ზომები. მოცემულია: $P=5$ კნ; $l=1,5$ მ; $\sigma_{\text{კ}}=450$ მგპა; $n=3$.



ნახ. 5.65



ნახ. 5.66

მაქსიმალური მომენტი, რომელიც Pl -ის ტოლია, მოქმედებს ჩამაგრების კვეთში, ამიტომ იგი საშიში კვეთია. ძელის განივი კვეთი განხილულია 3.6 მაგალითში; აღნიშნული კვეთისათვის დავადგინეთ მთავარი ღერძები და ინერციის მთავარი მომენტები. რადგანაც ძალოვანი ხაზი არ ემთხვევა არც ერთ მთავარ მიმართულებას (ნახ. 5.66), ძელი განიცდის ირიბ ღუნვას.

ინერციის მომენტები კვეთის მთავარი ღერძების მიმართ

$$I_x = 10a^4; \quad I_y = 2,5a^4.$$

ძალოვანი ხაზი ემთხვევა Oy_1 ღერძს და Ox ღერძთან ქმნის $\alpha = 63^\circ 30'$ კუთხეს, ამიტომ, (5.73)-ის შესაბამისად, ნორმალური ძაბვის ფორმულა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\sigma = -\frac{Pl \cdot \sin \alpha}{I_x} y - \frac{Pl \cdot \cos \alpha}{I_y} x = -\frac{Pl}{a^4} (0,0895 y + 0,178 x)$$

(5.74)-ის შესაბამისად, დავადგინოთ ნეიტრალური ღერძის განტოლება

$$y = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{I_x}{I_y} x = -2x.$$

A და B წერტილებიდან საშიშია ერთ-ერთი, რომელიც მაქსიმალურადაა დაცილებული ნეიტრალური წრფიდან. მთავარი ღერძების მიმართ ამ წერტილების კოორდინატებს ვადგენთ (3.20)-ის საშუალებით: $A(1,12a; 2,24a)$; $B(-1,56a; -0,90a)$.

დავადგინოთ ამ წერტილებში ნორმალური ძაბვების მნიშვნელობები:

$$\sigma_A = -\frac{Pl}{a^4} (0,0895 \cdot 2,24a + 0,178 \cdot 1,12a) = -0,40 \frac{Pl}{a^3};$$

$$\sigma_B = -\frac{Pl}{a^4} [0,0895(-0,90a) + 0,178(-1,56a)] = 0,36 \frac{Pl}{a^3}.$$

ამდენად, საშიშია A წერტილი; მისთვის ვადგენთ სიმტკიცის პირობას და განვსაზღვრავთ a -ს მნიშვნელობას:

$$\sigma_{\max} = 0,4 \frac{Pl}{a^3} = \frac{\sigma_{\text{დფ}}}{n}, \quad a = \sqrt[3]{0,4 \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 3}{450 \cdot 10^6}} \approx 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

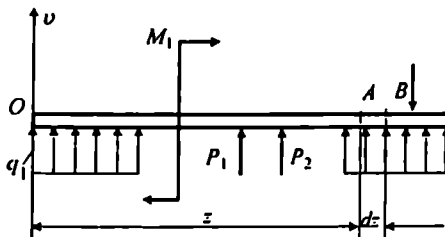
VI თავი. ძელებისა და ჩარჩოების გადაადგილებების განსაზღვრა ღუნვისას

§35. სწორი ძელის ღუნვით გამოწვეული გადაადგილებების დიფერენციალური განტოლებები. საწყისი პარამეტრების მეთოდი

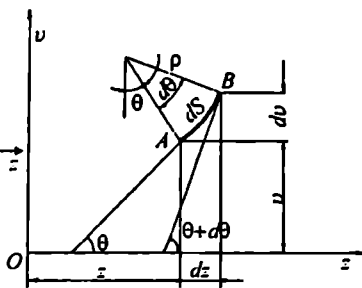
განვიხილოთ ძალეებით და მომენტებით დატვირთული სწორი ძელი (ნახ. 6.1). განვიად განაწილებული ძალების ინტენსიურობას, განვი ძალასა და მღუნავ მომენტებს შორის არსებობს შემდეგი დიფერენციალური დამოკიდებულებები (5.1), (5.3):

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q; \quad \frac{dM_x}{dz} = -Q_y. \quad (6.1)$$

ამოკვეთოთ ძელიდან dz სიგრძის უბანი და განვიხილოთ ამ უბნის დეფორმაციის სურათი (ნახ. 6.2).



ნახ. 6.1



ნახ. 6.2

დავუშვათ, რომ ძელის A კვეთი, რომლის კოორდინატია z , გადაადგილდება Ov ღერძის მიმართულებით v სიდიდით და მობრუნდება θ კუთხით, ხოლო მისგან dz მანძილით დაცილებული B კვეთის გადაადგილება და მობრუნების კუთხე, შესაბამისად, $(v+dv)$ და $(\theta+d\theta)$.

მიღებული წესის თანახმად კვეთის გადაადგილება დადებითია Ov ღერძის დადებითი მიმართულებით. რაც შეეხება θ კუთხეს, იგი დადებითია იმ შემთხვევაში, თუ კვეთი მობრუნდება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

უბნის დეფორმირებული მდგომარეობის განხილვით მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს:

$$\frac{dv}{ds} = \sin \theta; \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}, \quad (6.2)$$

სადაც ds და ρ დეფორმირებული ძელის უბნის ცენტრალური ღერძის შესაბამისი მონაკვეთის სიგრძე და სიძრუდის რადიუსია.

განვიხილოთ მცირე სიდიდის გადაადგილებებს და დეფორმაციებს, ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ შემდეგი პირობები: $ds \approx dz$; $\sin \theta \approx \theta$. ამის შედეგად, (6.2)-ის ნაცვლად მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს:

$$\frac{dv}{dz} = \theta; \quad \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\rho}. \quad (6.3)$$

ამრიგად, ძელის დაძაბული და დეფორმირებული მდგომარეობა აღიწერება დიფერენციალურ განტოლებათა ორი ჯგუფით, (6.1) და (6.3). პირველი ჯგუფი (6.1) ამყარებს კავშირს შიგა ძალოვან ფაქტორებსა და დატვირთვის შორის. განტოლებათა მეორე ჯგუფი ასახავს დეფორმირებული ძელის სახეს. განტოლებათა ეს ორი ჯგუფი, ჭერჭერობით, ერთმანეთთან არ არის დაკავშირებული და მიღებული ფორმით მათი გამოყენება შეიძლება ნებისმიერი, – როგორც პლასტიკურობის, ისე დრეკადობის პირობებში მყოფი ძელისათვის. ნორმალურ ძაბვებს და ხაზოვან დეფორმაციებს შორის დამოკიდებულების გათვალისწინებას ამოცანა დაჭყავს კონკრეტულ სახემდე, კერძოდ, წრფივი დრეკადობის ფარგლებში მიღებული (5.9) ფორმულა საშუალებას გვაძლევს წარმოვადგინოთ (6.3) ფორმულები შემდეგი სახით:

$$\frac{dv}{dz} = \theta; \quad \frac{d\theta}{dz} = \frac{M_x}{EI_x}. \quad (6.4)$$

ამრიგად, გვაქვს ოთხი დიფერენციალური განტოლება, რომლებშიც შედის ოთხი უცნობი Q_y , განივი ძალა, M_x მღუნავი მომენტი, v გადაადგილება და θ მობრუნების კუთხე:

$$Q_y, M_x, v, \theta. \quad (6.5)$$

სტატიკურად რკვევადი ძელისათვის საყრდენების რეაქციები და შიგა ძალოვანი ფაქტორები განისაზღვრება სტატიკის განტოლებების გამოყენებით. ამიტომ, ასეთი ამოცანებისათვის მღუნავი მომენტი შეიძლება ჩავთვალოთ ცნობილად და (6.4)-ის ინტეგრებით განვსაზღვროთ კვეთის მობრუნების კუთხე და გადაადგილება. ზოგ შემთხვევაში გამოიყენება მეორე რიგის განტოლება, რომელიც უშუალოდ გამომდინარეობს (6.4)-დან, თუ მისგან გამოვრიცხავთ მობრუნების კუთხეს

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{M_x}{EI_x}, \quad (6.6)$$

მაშინ კვეთის მობრუნების კუთხე და გადაადგილება

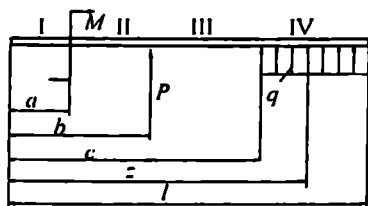
$$\theta = \theta_0 + \int_0^z \frac{M_x}{EI_x} dz; \quad (6.7)$$

$$v = v_0 + \theta_0 z + \int_0^z \left[\int_0^z \frac{M_x}{EI_x} dz \right] dz. \quad (6.8)$$

დავადგინოთ ინტეგრების მუდმივების ფიზიკური არსი. განვსაზღვროთ კოორდინატა სათავეში მოთავსებული ძელის საწყისი წერტილის შესაბამისი კვეთის გადაადგილებები, (6.7) და (6.8) გამოსახულებებში გავითვალისწინოთ $z=0$, მივიღებთ:

$$\theta(0) = \theta_0; \quad v(0) = v_0. \quad (6.9)$$

პირველი მუდმივი – საწყისი კვეთის მობრუნების კუთხეა, მეორე – იგივე კვეთის სიძიმის ცენტრის გადაადგილება.



ნახ. 6.3

განვიხილოთ მუდმივი განივი კვეთის მქონე ძელი, რომელზედაც მოქმედებს მომენტი, შეყურსული და განაწილებული ძალები (ნახ. 6.3). ასეთი ძელისათვის (6.6)-ის ინტეგრება ჩვეულებრივად, თითოეული უბნისათვის დამოკიდებულად უნდა მოვახდინოთ. ცხადია, მუდმივთა საერთო რიცხვი უბნების რაოდენობაზე ორჯერ მეტი იქნება. მათი მნიშვნელობების დასადგენად გამოიყენება

უბნების სასაზღვრო კვეთებში გადაადგილებების და კვეთების მობრუნების კუთხეების ტოლობის პირობა. რატომ უნდა, თანამედროვე გამოთვლითი ტექნიკის საშუალებებისათვის ასეთი სირთულეები ადვილად დასაძლევია, მაგრამ, ზოგ შემთხვევაში, სასარგებლოა და გამოიყენება ე.წ. საწყისი პარამეტრების ინტეგრების მეთოდი.

შევადგინოთ მლუნავი მომენტის გამოსახულება ბოლო, მეოთხე უბნისათვის (ნახ. 6.3)

$$M_x = M(z-a)^0 + P(z-b)^1 + \frac{q(z-c)^2}{2!}. \quad (6.10)$$

პირველი წევრის მაძრაველი ერთს უდრის და შეიძლება არ დაგვეწერა, მაგრამ $M(z-a)^0$ მომენტის ასეთ ფორმალურ წარმოდგენას შემდგომისათვის აქვს გარკვეული მნიშვნელობა.

გავითვალისწინოთ მლუნავი მომენტის გამოსახულება (6.6)-ში და ჩავატაროთ ინტეგრება:

$$EI_x \theta = B_4 + \frac{M(z-a)}{1!} + \frac{P(z-b)^2}{2!} + \frac{q(z-c)^3}{3!}. \quad (6.11)$$

მეორედ ინტეგრება განსაზღვრავს მეოთხე უბნის კვეთის გადაადგილებებს

$$EI_{x^{\nu}} = A_4 + B_4 z + \frac{M(z-a)^2}{2!} + \frac{P(z-b)^3}{3!} + \frac{q(z-c)^4}{4!}. \quad (6.12)$$

ანალოგიური ფორმულები მიიღება ნებისმიერი უბნისათვის, მხოლოდ მათში საჭიროა გავითვალისწინოთ მღუნავი მომენტების ის წევრები, რომლებიც კვეთის მარცხნივ მდებარე ძალებითაა განსაზღვრული. კერძოდ, მესამე უბნისათვის (ნახ. 6.3) არ გავითვალისწინოთ q და (6.11)-სა და (6.12)-ის ნაცვლად მივიღებთ

$$EI_{x^{\theta}} = B_3 + \frac{M(z-a)}{1!} + \frac{P(z-b)^2}{2!};$$

$$EI_{x^{\nu}} = A_3 + B_3 z + \frac{M(z-a)^2}{2!} + \frac{P(z-b)^3}{3!}. \quad (6.13)$$

განხილული უბნების $z=c$ სასაზღვრო კვეთის მობრუნების კუთხეები და გადაადგილებები ერთმანეთის ტოლია. ამიტომ მესამე უბნის ბოლო კვეთისათვის და მეოთხე უბნის საწყისი კვეთისათვის შესაბამისი განტოლებებით მიღებული მობრუნების კუთხეების და გადაადგილებების გატოლებით მივიღებთ $A_3=A_4$; $B_3=B_4$. ანალოგიურად მტკიცდება მუდმივების ტოლობა სხვა უბნებისათვისაც. ამიტომ შეიძლება მათი აღნიშვნა გავამარტივოთ $A_i=A$; $B_i=B$. მუდმივების ფიზიკური არსის დასადგენად განვიხილოთ პირველი უბანი

$$EI_{x^{\theta}} = B; \quad EI_{x^{\nu}} = A + Bz.$$

განვსაზღვროთ ძელის საწყისი კვეთის მობრუნების კუთხე და გადაადგილება

$$EI_{x^{\theta}}(0) = EI_{x^{\theta}} = B; \quad EI_{x^{\nu}}(0) = EI_{x^{\nu}} = A.$$

ამრიგად, საწყისი პარამეტრების ინტეგრების მეთოდით მიღებულ ფორმულებში მუდმივები ძელის საწყისი კვეთის ν_0 გადაადგილება და მობრუნების მ₀ კუთხეა მუდმივი მაშვრავლის სიზუსტით. აღნიშნულის გათვალისწინებით (6.11) და (6.12) ფორმულები დაიწერება შემდეგნაირად:

$$EI_{x^{\theta}} = EI_{x^{\theta}} + \frac{M(z-a)}{1!} + \frac{P(z-b)^2}{2!} + \frac{q(z-c)^3}{3!}; \quad (6.14)$$

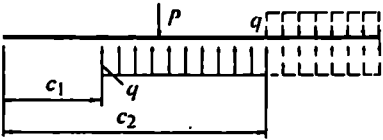
$$EI_{x^{\nu}} = EI_{x^{\nu}} + EI_{x^{\theta}} z + \frac{M(z-a)^2}{2!} + \frac{P(z-b)^3}{3!} + \frac{q(z-c)^4}{4!}. \quad (6.15)$$

ამ სახით ფორმულები განსაზღვრავს კვეთის მობრუნების კუთხეს და გადაადგილებას ბოლო უბნის კვეთისათვის. მაგრამ მათი გამოყენება შეიძლება ნების-

მიერი უბნის კვეთისათვის, თუ ფორმულებში დავტოვებთ იმ წევრებს, რომლებიც შეესაბამება კვეთის მარცხნივ ძელზე მოდებულ ძალებს და მომენტებს.

სურათის გამარტივებისა და გარდაქმნების გათვალისწინებით ნახ. 6.3. ნახაზზე განხილულია მომენტების, შეყურსული და განაწილებული ძალების მხოლოდ თითო წარმომადგენელი. სინამდვილეში, ძელზე ერთდროულად შეიძლება მოდებული იყოს ერთი და იმავე სახის რამდენიმე ძალა.

მუდმივი ინტენსიურობის განაწილებული ძალები შეიძლება მოქმედებდნენ ძელის სიგრძის ნაწილზე და არ გრძელდებოდნენ ძელის ბოლომდე (ნახ. 6.4), ამ შემთხვევაში მიღებული ფორმულები არ გამოიყენება, რადგან (6.10)-ის შესაბამისად, ფორმულები ითვალისწინებენ განაწილებული ძალების ძელის ბოლო



ნახ. 6.4

კვეთამდე მოქმედებს (ნახ. 6.3). ამიტომ ვგრძელებთ ამ ძალების მოქმედებას ბოლომდე და რომ არ დაირღვეს წონასწორობა, ძელს მოვდებთ საწინააღმდეგო მიმართულების განაწილებულ ძალებს (ნახ. 6.4). ამრიგად, ერთი განაწილებული ძალის ნაცვლად

ვღებულობთ ორს, მაგრამ ყოველი მათგანის მოქმედების უბანი გრძელდება ძელის ბოლო კვეთამდე.

განვიხილოთ ძელი, რომელზედაც $z=a_i$ წერტილებში მოქმედებს n_1 რაოდენობის შეყურსული M_i მომენტები, $z=b_i$ წერტილებში n_2 რაოდენობის შეყურსული P_i ძალები და n_3 რაოდენობის თანაბრად განაწილებული ძალები, რომელთა მოქმედება იწყება $z=c_i$ წერტილებში და გრძელდება ძელის ბოლომდე. ამ შემთხვევაში კვეთის მობრუნების კუთხის და გადაადგილების განსაზღვრა ხდება (6.14)-ის და (6.15)-ის განზოგადებით, ძალთა მოქმედების დამოკიდებულების პრინციპის გამოყენებით:

$$EI_x \theta = EI_x \theta_0 + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{M_i(z-a_i)}{1!} + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{P_i(z-b_i)^2}{2!} + \sum_{i=1}^{n_3} \frac{q_i(z-c_i)^3}{3!}; \quad (6.16)$$

$$EI_x v = EI_x v_0 + EI_x \theta_0 z + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{M_i(z-a_i)^2}{2!} + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{P_i(z-b_i)^3}{3!} + \sum_{i=1}^{n_3} \frac{q_i(z-c_i)^4}{4!}. \quad (6.17)$$

ზოგი ამოცანის განხილვისას (6.1), (6.4) სისტემის ნაცვლად სასარგებლოა გვეყენდეს ერთი მეოთხე რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} \right) = q. \quad (6.18)$$

მუდმივი სიხისტის ძელისათვის განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$EI_x \frac{d^4 v}{dz^4} = q. \quad (6.19)$$

მიღებული განტოლებების ინტეგრებით განისაზღვრება არა მარტო გადაადგილებები (v, θ), არამედ მღუნავი მომენტი და განივი ძალა.

§36. სწორი ძელის გადაადგილებების განსაზღვრის რიცხვითი მეთოდი

განტოლებათა სისტემა (6.4) შეიძლება წარმოვადგინოთ მატრიცული ფორმით:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{T}, \quad (6.20)$$

სადაც შტრიხით z -ით წარმოებულია აღნიშნული; \mathbf{A} მატრიცაა, ხოლო \mathbf{X} - უცნობ გადაადგილებათა და \mathbf{T} - დატვირთვის ვექტორებია

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} v \\ \theta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{M_x}{EI_x} \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

ვექტორული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{X}^0 + \mathbf{X}^* \quad (6.22)$$

სადაც \mathbf{C} მუდმივია, \mathbf{X}^0 - (6.20)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, \mathbf{X}^* - (6.20)-ის კერძო ამონახსნია. ამ ამონახსნების მიღება ხდება შესაბამისი ვექტორული დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ინტეგრებით. ამისათვის საჭიროა ვექტორების საწყისი მნიშვნელობების განსაზღვრა.

განვიხილოთ ბოლოებით სახსრულად დამაგრებული ძელის ღუნვა (ნახ. 6.5). ამ შემთხვევაში საყრდენების შესაბამისი ძელის განივი კვეთების გადაადგილებები ნულის ტოლია

$$v(0) = 0; \quad v(l) = 0. \quad (6.23)$$

ვექტორების საწყის მნიშვნელობებს ვიღებთ შემდეგი სახით:

$$\mathbf{X}^0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}^*(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

ადვილად დასადგენია, რომ ამ შემთხვევაში (6.23)-ის პირველი პირობა დაკმაყოფილებულია

$$\mathbf{X}(0) = C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}.$$

საწყისი ვექტორების ასეთი ფორმით წარმოდგენისას, მუდმივი C - საწყისი კვეთის მობრუნების კუთხეა.

მუდმივის დასადგენად განვიხილოთ ვექტორის მნიშვნელობა ძელის მეორე ბოლოზე

$$\mathbf{X}(l) = \begin{pmatrix} C\nu^0(l) + \nu^*(l) \\ C\theta^0(l) + \theta^*(l) \end{pmatrix}.$$

დასაკმაყოფილებელი დაგვრჩა (6.23)-ის მეორე პირობა, რომლის საშუალებითაც განვსაზღვრავთ მუდმივის მნიშვნელობას

$$C\nu^0(l) + \nu^*(l) = 0; \quad C = -\frac{\nu^*(l)}{\nu^0(l)}. \quad (6.25)$$

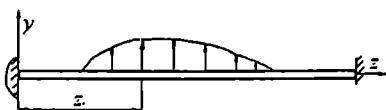
ანალოგიურად განვიხილება საყრდენების სხვა სახის დამაგრების მქონე ძელები.

წარმოდგენილი მეთოდია არ შეიძლება უშუალოდ იქნას გამოყენებული სტატიკურად ურკვევი სისტემის შესასწავლად. ამ მიზნით მიზანშეწონილია (6.1) და (6.4) მეოთხე რიგის სისტემების გამოყენება. ამ შემთხვევაში, (6.20)-ში გამოყენებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} Q_y \\ M_x \\ \nu \\ \theta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{EI_x} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

ვინაიდან სისტემა მეოთხე რიგისაა, მისი ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\mathbf{X} = C_1 \mathbf{X}_1^0 + C_2 \mathbf{X}_2^0 + \mathbf{X}^*, \quad (6.27)$$



ნახ. 6.6

სადაც $\mathbf{X}_1^0, \mathbf{X}_2^0$, არის (6.20)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებების ($T=0$) ზოგადი ამონახსნები, \mathbf{X}^* - (6.20)-ის კერძო ამონახსნია; C_1, C_2 მუდმივებია.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ძელი, რომლის ბოლო კვეთები ჩამაგრებულია ხისტად (ნახ. 6.6); ამ შემთხვევაში სრულდება შემდეგი პირობები:

$$v(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad v(l) = 0, \quad \theta(l) = 0. \quad (6.28)$$

ვექტორების მნიშვნელობები საწყის კვეთში იქნება:

$$\mathbf{X}_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

ადვილი დასადგენია, რომ (6.28)-ის შესაბამისად, პირობები საწყის წერტილში დაკმაყოფილებულია: პირველი და მეორე მუდმივები, შესაბამისად, განივი ძალის და მღუნავი მომენტის მნიშვნელობებია საწყის კვეთში. ეს მუდმივები განისაზღვრება ბოლოში ორი დარჩენილი პირობიდან:

$$\begin{aligned} C_1 v_1^0(l) + C_2 v_2^0(l) + v^*(l) &= 0; \\ C_1 \theta_1^0(l) + C_2 \theta_2^0(l) + \theta^*(l) &= 0. \end{aligned} \quad (6.30)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$B = \begin{pmatrix} v_1^0(l) & v_2^0(l) \\ \theta_1^0(l) & \theta_2^0(l) \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} v^*(l) \\ \theta^*(l) \end{pmatrix}.$$

ამ აღნიშვნების გამოყენებით (6.30) ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$BC = -R \quad (6.31)$$

ამ განტოლების ამონახსნი იქნება

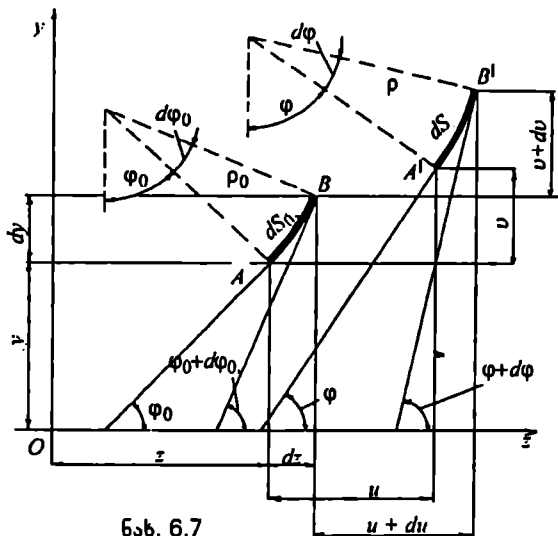
$$C = -B^{-1}R, \quad (6.32)$$

სადაც B^{-1} შესაბამისი მატრიცის შებრუნებული მატრიცაა.

ანალოგიურად განიხილება ბოლოებით სხვა სახის ჩამაგრებული ძელებიც.

§37. მცირე სიმრუდის ბრტყელი ძელის დიდი გადაადგილებების განსაზღვრა

განვიხილოთ მცირე სიმრუდის ბრტყელი ძელის დიდი გადაადგილებები. ამ ძელის უსასრული მცირე ზომების AB ელემენტი ძელის დეფორმაციის შედეგად გადავა $A'B'$ მდებარეობაში (ნახ.6.7).



ნახ. 6.7

საწყის მდებარეობაში ძელის შუა ხაზის ნებისმიერი A წერტილის კოორდინატებია z და y . ამ წერტილში გამავალი ღერძის მხები Oz ღერძთან შეადგენს φ_0 კუთხეს. განვიხილოთ მეზობელი B წერტილი, რომლის კოორდინატები და მხების დახრის კუთხე შესაბამისად იქნება

$$\begin{aligned} &(z + dz), \\ &(y + dy), \\ &(\varphi_0 + d\varphi_0). \end{aligned} \quad (6.33)$$

ამ ელემენტის განხილვა საწყის AB მდებარეობაში შემდეგი საში ფორმულის მიღების საშუალებას გვაძლევს:

$$\cos \varphi_0 = \frac{dz}{ds_0}; \quad \sin \varphi_0 = \frac{dy}{ds_0}; \quad \frac{1}{\rho_0} = \frac{d\varphi_0}{ds_0}. \quad (6.34)$$

ელემენტის დეფორმირების შედეგად A წერტილი გადაადგილდება Oz და Oy ღერძების მიმართულებით, შესაბამისად u და v სიდიდეებზე. ამ წერტილში დეფორმირებული ღერძის მხები Oz ღერძთან φ კუთხეს ქმნის. მეზობელი B' წერტილისათვის ანალოგიური სიდიდეები იქნება

$$(u + du), \quad (v + dv), \quad (\varphi + d\varphi) \quad (6.35)$$

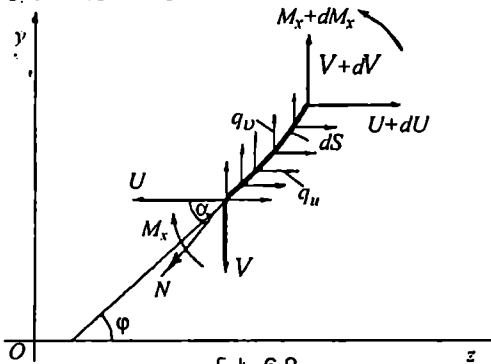
დეფორმირების შედეგად შეიცვლება ძელის ღერძის სიგრძეც და თუ ჩავთვლით, რომ წრფივი დეფორმაცია უდრის ε -ს, მივიღებთ $ds = ds_0(1 + \varepsilon)$. ამის გათვალისწინებითა (6.35)-დან მივიღებთ:

$$\cos \varphi = \frac{du + dz}{ds}; \quad \sin \varphi = \frac{dv + dy}{ds}; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

მესამე განტოლებაში, ε -ის მნიშვნელობა, როგორც მცირე ერთთან შედარებით, უგულვებელყოფილია, რისი გაკეთებაც პირველ ორ განტოლებაში არ შეიძლებოდა, დეფორმირებული და არადეფორმირებული მდგომარეობის შესაბამისი სიდიდეების გამოკვლევებით მივიღებთ პირველი ჯგუფის განტოლებებს:

$$\frac{du}{ds_0} = (1 + \epsilon) \cos \varphi - \cos \varphi_0; \quad \frac{dv}{ds_0} = (1 + \epsilon) \sin \varphi - \sin \varphi_0; \quad \frac{d(\varphi - \varphi_0)}{ds_0} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}.$$

უღმემენტის წონასწორობის პირობები უნდა შევადგინოთ მისი დეფორმირებული მდგომარეობისათვის, რადგანაც უარი ვთქვით ძელის კვეთების გადაადგილებების სიმცირეზე და, ამ შემთხვევაში, საწყისი ზომების შენარჩუნების პრინციპი ძალას კარგავს.



ნახ. 6.8

გამოვიყენოთ კვეთის მეთოდი და წარმოვადგინოთ შიგა ძალოვანი ფაქტორები, როგორც ძალის შორიზონტალური და ვერტიკალური მდგენელები და მღუნავი მომენტი. გარე ძალებიდან ელემენტზე მოქმედებს შორიზონტალური და ვერტიკალური განაწილებული ძალები (ნახ. 6.8).

ელემენტისათვის წონასწორობის პირობები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$(U + dU) - U + q_u ds = 0; \quad (V + dV) - V + q_v ds = 0; \\ (M_x + dM_x) - M_x - U ds \sin \varphi + V ds \cos \varphi = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ მეორე ჯგუფის განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\frac{dU}{ds_0} = -q_u; \quad \frac{dV}{ds_0} = -q_v; \quad \frac{dM_x}{ds_0} = U \sin \varphi - V \cos \varphi. \quad (6.36)$$

ამ განტოლებებშიც შეიძლება ძელის ღერძის წაგრძელება მხედველობაში არ მივიღოთ და დავუშვათ, რომ $ds_0 = ds$.

ამრიგად, მივიღებთ განტოლებათა ორ ჯგუფს. პირველი ჯგუფის საში განტოლება ასახავს ძელის დეფორმაციის სურათს, ხოლო მეორე ჯგუფის საში განტოლება (6.36) ახასიათებს ძელის შიგა ძალოვან ფაქტორებს. რადგანაც ამ განტოლებების შედგენისას არ გაგვივალისწინებია ძელის მასალის თვისებები, მიღებული შედეგები ძალაშია დაბეჭდვა და ხაზოვან დეფორმაციებს შორის როგორც წრფივი, ისე არაწრფივი დამოკიდებულებისას.

განვიხილოთ ძელი, რომლის მასალა ემორჩილება ჰუკის კანონს, ისევე, როგორც ეს გავაკეთეთ სწორი ძელისათვის. (6.4)-ის მეორე თანაფარდობის ნაცვლად მივიღებთ ფორმულას

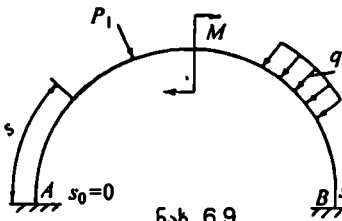
$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{M_x}{EI_x}. \quad (6.37)$$

ძელის კვეთის მობრუნების კუთხე

$$\theta = \varphi - \varphi_0. \quad (6.38)$$

საბოლოოდ, მიღებული განტოლებათა სისტემა (6.37)-ის და (6.38)-ის გათვალისწინებით ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds_0} &= (1 + \varepsilon) \cos(\varphi_0 + \theta) - \cos \varphi_0; & \frac{dv}{ds_0} &= (1 + \varepsilon) \sin(\varphi_0 + \theta) - \sin \varphi_0; \\ \frac{d\theta}{ds_0} &= \frac{M_x}{EI_x}; & \frac{dU}{ds_0} &= -q_u; & \frac{dV}{ds_0} &= -q_v; \\ \frac{dM_x}{ds_0} &= U \sin(\varphi_0 + \theta) - V \cos(\varphi_0 + \theta). \end{aligned} \quad (6.39)$$



ნახ. 6.9

რომლის ღერძის მონაკვეთის სიგრძე უდრის s -ს (ნახ. 6.9).

სასაზღვრო პირობები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$s_0 = 0 \quad u = 0; \quad v = 0; \quad \theta = 0. \quad (6.40)$$

$$s_0 = l \quad u = 0; \quad v = 0; \quad \theta = 0. \quad (6.41)$$

საწყის კვეთში უცნობი შიგა ძალის ჰორიზონტალური და ვერტიკალური მდგენელები და მღუნავი მომენტი, შესაბამისად, იქნება:

$$U(0) = x; \quad V(0) = y; \quad M_x(0) = z; \quad (6.42)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (6.40)-ს და x -ს, y -ს, z -ს მივანიჭებთ სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობებს, შეიძლება მოვახდინოთ სისტემის ინტეგრება და დავადგინოთ ყველა უცნობის მნიშვნელობა B კვეთისათვის:

$$u(l) = \varphi_1(x, y, z); \quad v(l) = \varphi_2(x, y, z); \quad \theta(l) = \varphi_3(x, y, z). \quad (6.43)$$

რა თქმა უნდა, უცნობ (6.42) პარამეტრებს შეიძლება მივანიჭოთ ნებისმიერი მნიშვნელობა. მაგრამ ამ მნიშვნელობების სიმრავლიდან ამოცანის ამონახსნს განსაზღვრავს მხოლოდ ის მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებს (6.41) პირობებს:

$$\varphi_1(x, y, z) = 0; \quad \varphi_2(x, y, z) = 0; \quad \varphi_3(x, y, z) = 0. \quad (6.44)$$

მივიღოთ სამი არაწრფივი ტრანსცედენტური განტოლების სისტემა, რომლის ამონახსნისათვის გამოვიყენოთ ნიუტონ-კანტოროვიჩის მეთოდი. დავუშვათ, რომ $x_k; y_k; z_k$ (6.44)-ის მიახლოებითი ამონახსნია. მაშინ, ამ სისტემის ჰეშმარიტი ამონახსნი შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი სახით:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k; \quad y_{k+1} = y_k + \beta_k; \quad z_{k+1} = z_k + \gamma_k, \quad (6.45)$$

სადაც $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ მიახლოებითი ამონახსნის დამაზუსტებელი წევრებია.

რადგანაც (6.45) განსაზღვრავს (6.44)-ის ჰეშმარიტ ამონახსნს, ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_k + \alpha_k; y_k + \beta_k; z_k + \gamma_k) &= 0; \\ \varphi_2(x_k + \alpha_k; y_k + \beta_k; z_k + \gamma_k) &= 0; \\ \varphi_3(x_k + \alpha_k; y_k + \beta_k; z_k + \gamma_k) &= 0. \end{aligned} \quad (6.46)$$

ეს შედეგები, თუ მხედველობაში მივიღებთ ამონახსნის დამაზუსტებელი წევრების სიმცირეს, შეგვიძლია შევცვალოთ მიახლოებითი ფორმულებით:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_k, y_k, z_k) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \alpha_k + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \beta_k + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \gamma_k &\approx 0; \\ \varphi_2(x_k, y_k, z_k) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \alpha_k + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \beta_k + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \gamma_k &\approx 0; \\ \varphi_3(x_k, y_k, z_k) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \alpha_k + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \beta_k + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \gamma_k &\approx 0. \end{aligned} \quad (6.47)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \Delta \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}; \quad (6.48)$$

$$W = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (6.49)$$

მიღებული აღნიშვნების გათვალისწინებით, (6.47) ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$F(X_k) + W(X_k)\Delta X_k = 0, \quad (6.50)$$

საიდანაც მივიღებთ ამონახსნის დამაზუსტებელი ვექტორის მნიშვნელობას:

$$\Delta X_k = -W^{-1}(X_k)F(X_k). \quad (6.51)$$

ამის შემდეგ შეგვიძლია განვსაზღვროთ დაზუსტებული ამონახსნიც.

$$X_{k+1} = X_k - W^{-1}(X_k)F(X_k) \quad (6.52)$$

ამ ფორმულის თანმიმდევრობით გამოყენებით ვაზუსტებთ ამონახსნს, სანამ იგი საჭირო სიზუსტით არ დააკმაყოფილებს (6.44) განტოლებათა სისტემებს.

რიცხვითი მეთოდით (6.49) მატრიცის ფორმირება უნდა განვახორციელოთ შემდეგნაირად. x , y , z პარამეტრებს ვაძლევეთ გარკვეულ რიცხვით მნიშვნელობებს და დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ინტეგრირებით ვადგენთ ამ პარამეტრებისათვის φ_1 -ის, φ_2 -ის და φ_3 -ის მნიშვნელობებს. ამის შემდეგ, უმნიშვნელოდ, Δx -ით, ვცვლით პირველი არგუმენტის მნიშვნელობას, ხოლო ორ დანარჩენს ვტოვებთ უცვლელად. ინტეგრირების შედეგად ვანგარიშობთ φ_1 -ის, φ_2 -ის და φ_3 -ის ახალ მნიშვნელობებს. შემდეგ წარმოებულებს ვსაზღვრავთ მიახლოებითი ფორმულებით:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &\approx \frac{\varphi_1(x + \Delta x, y, z) - \varphi_1(x, y, z)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &\approx \frac{\varphi_2(x + \Delta x, y, z) - \varphi_2(x, y, z)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} &\approx \frac{\varphi_3(x + \Delta x, y, z) - \varphi_3(x, y, z)}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

კერძო წარმოებულები ორი დანარჩენი არგუმენტისათვისაც განისაზღვრება ანალოგიურად.

§38. მცირე სიძრუდის ბრტყელი ძელის მცირე გადაადგილებების განსაზღვრა

წინა პარაგრაფში რიცხვითი მეთოდით ძელების გადაადგილებების და შიგა ძალოვანი ფაქტორების დასადგენად გვიხდებოდა არაწრფივი განტოლებების ამოხსნა. ეს გამოწვეული იყო დიდი გადაადგილებების განხილვით. თუ უარს ვიტყვით დიდი გადაადგილებების განხილვაზე, ამოცანა დადის წრფივ განტოლებათა სისტემაზე. აქ უკვე გამოიყენება საწყისი ზომების შენარჩუნების პრინციპი და წონასწორობის განტოლებები შეიძლება დაიწეროს ძელის არადეფორმირებული მდგომარეობისათვის. ამისათვის (6.36) განტოლებებში θ კუთხე უნდა შევცვალოთ φ_0 კუთხით. მივიღოთ მხედველობაში კვეთის მობრუნების კუთხის და ძელის ღერძული ხაზის შესაბამისი წრფივი დეფორმაციის სიმცირე, რაც მათემატიკურად გამოიხატებოდა შემდეგი სახით:

$$\theta^2 \ll 1, |\epsilon\theta| \ll 1, (\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1).$$

ამ თანაფარდობების გათვალისწინებით გავამარტივოთ (6.39)-ის პირველი ორი განტოლება:

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds_0} &= (1 + \epsilon)\cos(\varphi_0 + \theta) - \cos\varphi_0 = (1 + \epsilon)(\cos\varphi_0 \cos\theta - \sin\varphi_0 \sin\theta) - \\ & - \cos\varphi_0 = \epsilon \cos\varphi_0 - \theta \sin\varphi_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds_0} &= (1 + \epsilon)\cos(\varphi_0 + \theta) - \sin\varphi_0 = (1 + \epsilon)(\sin\varphi_0 \cos\theta + \cos\varphi_0 \sin\theta) - \\ & - \sin\varphi_0 = \epsilon \sin\varphi_0 + \theta \cos\varphi_0 \end{aligned}$$

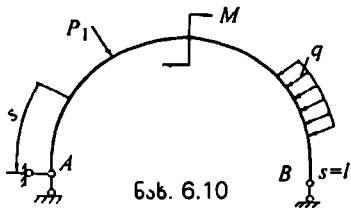
ამ თანაფარდობებში გავითვალისწინოთ ნორმალური ძელის მნიშვნელობა $N = U\cos\varphi_0 + V\sin\varphi_0$ (ნახ. 6.8) და მისი საშუალებით განვსაზღვროთ დეფორმაცია. საბოლოოდ, (6.39) სისტემის გაწრფივებულ ვარიანტს წარმოვადგენთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds_0} &= \frac{U \cos^2 \varphi_0 + V \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{EF} - \theta \sin \varphi_0 \\ \frac{dv}{ds_0} &= \frac{U \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + V \sin^2 \varphi_0}{EF} + \theta \cos \varphi_0 \\ \frac{d\theta}{ds_0} &= \frac{M_x}{EI_x}, \quad \frac{dU}{ds_0} = -q_u, \quad \frac{dV}{ds_0} = -q_v, \quad \frac{dM_x}{ds_0} = U \sin \varphi_0 - V \cos \varphi_0 \end{aligned} \tag{6.54}$$

სტატიკურად რკვევადი ამოცანებისათვის (6.54) სისტემის ბოლო სამი განტოლების ამოხსნა შეიძლება დანარჩენი სამიდან დამოუკიდებლად. უფრო მეტიც, შიგა ძალოვანი ფაქტორების დადგენა, მარტივ შემთხვევებში იოლდება კვეთის მეთოდისა და წონასწორობის პირობების გამოყენებით. ამიტომ, თუ საჭიროდ ჩავთვლით, (6.54)-ის პირველ სამ განტოლებაში შიგა ძალოვანი ფაქტორები შეგვიძლია ცნობილად ჩავთვალოთ და სამი პირველი განტოლების სისტემის ინტეგრირებით დავადგინოთ გადაადგილებების და მობრუნების კუთხის მნიშვნელობები. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \varphi_0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \frac{U \cos^2 \varphi_0 + V \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{EF} \\ \frac{U \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + V \sin^2 \varphi_0}{EF} \\ \frac{M_x}{EI_x} \end{pmatrix} \quad (6.55)$$

და წარმოვიდგინოთ (6.54)-ის პირველი სამი განტოლება (6.20)-ის სახით. უცნობი X ვექტორის განსაზღვრისათვის საჭიროა (6.20)-ის რიცხვითი ამოხსნა. მაგალითისათვის განვიხილოთ 6.10 ნახაზზე ნაჩვენები ჩარჩო. ამ ჩარჩოს სასაზღვრო პირობები ჩაიწერება შემდეგი სახით:



$$\begin{aligned} s=0: \quad u=0; \quad v=0. \\ s=l: \quad v=0. \end{aligned} \quad (6.56)$$

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი იქნება

$$X = CX^0 + X^*, \quad (6.57)$$

რომლის შემადგენელი ვექტორებისათვის ავიღოთ შემდეგი საწყისი პირობები:

$$X^0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad X^*(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.58)$$

ამონახსნის ვექტორის მნიშვნელობა ჩარჩოს ბოლო $s=l$ კვეთში იქნება

$$X(l) = CX^0(l) + X^*(l) = \begin{pmatrix} Cu^0(l) + u^*(l) \\ Cv^0(l) + v^*(l) \\ C\theta^0(l) + \theta^*(l) \end{pmatrix}. \quad (6.59)$$

ეს საშუალებას გვაძლევს დავაკმაყოფილოთ (6.56)-ის მესამე პირობა

$$Cv^0(l) + v^*(l) = 0,$$

საიდანაც დავადგენთ C მუდმივის მნიშვნელობას

$$C = -\frac{v^*(l)}{v^0(l)}. \quad (6.60)$$

ეს მუდმივი საწყისი A კვეთის მობრუნების კუთხეა, რაშიც ადვილად დავრწმუნდებით საწყის კვეთში ამონახსნის ვექტორის მნიშვნელობის განსაზღვრით.

ანალოგიურად განიხილება სტატიკურად ურკვევი ჩარჩოებიც. მაგალითისათვის შევისწავლოთ 6.10 ნახაზზე ნაჩვენები ჩარჩო, მხოლოდ მის მარჯვენა B საყრდენს დამატებით შევუზღუდოთ ჰორიზონტალურად გადაადგილების საშუალება. ამ შემთხვევაში, (5.56)-ის ნაცვლად საყრდენი კვეთებისათვის პირობები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} s = 0: \quad u(0) = 0; \quad v(0) = 0; \quad M_x(0) = 0; \\ s = l: \quad u(l) = 0; \quad v(l) = 0; \quad M_x(l) = 0. \end{aligned}$$

სისტემა (6.54) შეიძლება ჩაიწეროს (6.20)-ის სახით, თუ შემოვიღებთ შემდეგ აღნიშვნებს:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \varphi_0 & \frac{\cos^2 \varphi_0}{EF} & \frac{\sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{EF} & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_0 & \frac{\sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{EF} & \frac{\sin^2 \varphi_0}{EF} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \varphi_0 & -\cos \varphi_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \\ U \\ V \\ M_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q_u \\ -q_v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ამ სისტემის საერთო ამონახსნი განსახილველი ჩარჩოსათვის მიიღება მისი ოთხჯერადი რიცხვითი ინტეგრებით და ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\mathbf{X} = C_1 \mathbf{X}_1^0 + C_2 \mathbf{X}_2^0 + C_3 \mathbf{X}_3^0 + \mathbf{X}^*$$

სისტემის შესაბამისი ერთჯვაროვანი ($T=0$) სისტემის ზოგადი და კერძო ამონახსნების მისაღებად საწყის ($s=0$) კვეთში შესაბამისი ვექტორების მნიშვნელობები ავიღოთ შემდეგი სახით:

$$\mathbf{X}^*(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_1^0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2^0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3^0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ნებისმიერი კვეთისათვის უცნობი ფუნქციების მნიშვნელობები იქნება:

$$\mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} C_1 u_1^0(s) + C_2 u_2^0(s) + C_3 u_3^0(s) + u^*(s) \\ C_1 \rho_1^0(s) + C_2 \rho_2^0(s) + C_3 \rho_3^0(s) + \rho^*(s) \\ C_1 \theta_1^0(s) + C_2 \theta_2^0(s) + C_3 \theta_3^0(s) + \theta^*(s) \\ C_1 U_1^0(s) + C_2 U_2^0(s) + C_3 U_3^0(s) + U^*(s) \\ C_1 V_1^0(s) + C_2 V_2^0(s) + C_3 V_3^0(s) + V^*(s) \\ C_1 M_{x_1}^0(s) + C_2 M_{x_2}^0(s) + C_3 M_{x_3}^0(s) + M_x^*(s) \end{pmatrix}$$

ადვილად დასადგენია, რომ ვექტორების საწყისი მნიშვნელობები უზრუნველყოფს მარცხენა საყრდენზე მოცემული პირობების შესრულებას:

$$u(0) = 0, \quad \rho(0) = 0, \quad \theta(0) = C_1, \quad U(0) = C_2, \quad V(0) = C_3, \quad M_x(0) = 0.$$

ამრიგად, აღებული საწყისი ვექტორები, გარდა აღნიშნულისა, საშუალებას გვაძლევს მივანიჭოთ ინტეგრების მუდმივებს გარკვეული ფიზიკური არსი - ისინი საწყის კვეთში არანულოვანი ფუნქციების მნიშვნელობებია.

ინტეგრების მუდმივების განსაზღვრისათვის ჩარჩოს მარჯვენა საყრდენზე საჭიროა დავაკმაყოფილოთ შემდეგი პირობები:

$$C_1 u_1^0(l) + C_2 u_2^0(l) + C_3 u_3^0(l) + u^*(l) = 0;$$

$$C_1 \rho_1^0(l) + C_2 \rho_2^0(l) + C_3 \rho_3^0(l) + \rho^*(l) = 0;$$

$$C_1 M_{x_1}^0(l) + C_2 M_{x_2}^0(l) + C_3 M_{x_3}^0(l) + M_x^*(l) = 0.$$

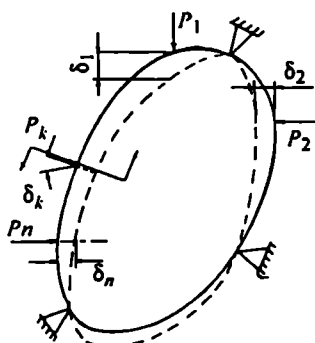
მიღებულ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა (6.30)-ის ანალოგიურია. ამიტომ მისი ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ (6.32)-ის სახით, ოღონდ მასში შემავალი ვექტორები იქნება სამგანზომილებიანი, ხოლო მატრიცა - (3×3) - განზომილების კვადრატული მატრიცაა.

§39. მუშაობის და გადაადგილებების ურთიერთობის პრინციპები

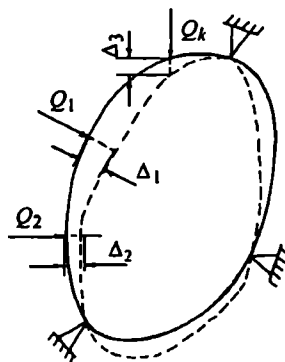
განვიხილოთ დრეკადი სხეული, რომელიც დატვირთულია ძალთა სისტემით (ნახ. 6.11). როგორც ძალები, ისევე მომენტები აქ აღნიშნულია ერთი და იგივე P ასოთი. აგრეთვე, ერთი და იგივე δ ასოა გამოყენებული ზაზოვანი და კუთხური გადაადგილებებისათვის. ამ სისტემაში მოქმედი ძალების რაოდენობა უდრის n -ს. წარმოდგენილი ძალთა სისტემის მიერ სხეულის დატვირთვის პროცესში შესრულებული მუშაობა

$$A_I = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + \dots + \frac{P_n \delta_n}{2}. \quad (6.61)$$

განხილულ მდგომარეობას ვუწოდოთ პირველი დატვირთული მდგომარეობა. განვიხილოთ იგივე დრეკადი სხეულის მეორე ძალთა სისტემით დატვირთვის შემთხვევა (ნახ. 6.12). სისტემაში ძალთა რაოდენობა უდრის k -ს.



ნახ. 6.11



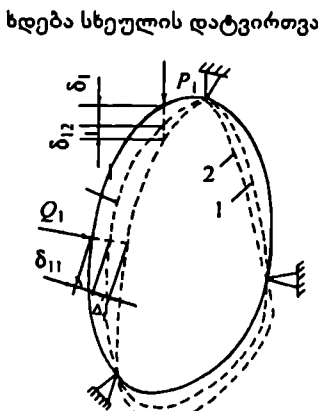
ნახ. 6.12

მეორე მდგომარეობისათვის ძალების მუშაობა

$$A_{II} = \frac{Q_1 \Delta_1}{2} + \frac{Q_2 \Delta_2}{2} + \frac{Q_3 \Delta_3}{2} + \dots + \frac{Q_k \Delta_k}{2}. \quad (6.62)$$

წარმოვიდგინოთ, რომ სხეულზე ერთდროულად მოდებულია ძალთა ორივე სისტემა, მაგრამ სურათის გამარტივების მიზნით ვაჩვენოთ ყოველი სისტემის მხოლოდ ერთი ძალა (ნახ. 6.13).

ჩავთვალოთ, რომ სხეულზე ძალთა მოდების თანამიმდევრობა შემდეგია: ჯერ



ნახ. 6.13

პირველი ძალთა სისტემით, ხოლო შემდეგ - დამატებითი დატვირთვა მეორე სისტემის ყველა ძალებით (ნახ. 6.13). ამ შემთხვევაში სხეულის დეფორმაციის სურათი ასეთია: დატვირთვის პირველ ეტაპზე სხეული გადავა პირველი მრუდით შემოხაზულ მდგომარეობაში (ნახ. 6.13) და გარე ძალები შეასრულებს A_I მუშაობას. სხეულის ძალთა მეორე სისტემით დატვირთვისას ეს ძალები სხეულის დამატებით Δ_i გადაადგილებებზე შეასრულებს A_{II} მუშაობას. მაგრამ ამ დამატებითი დატვირთვისას გადაადგილდება, აგრეთვე, პირველი სისტემის ძალების მოდების წერტილებიც. გადაადგილების პროცესში ეს ძალები არ იცვლება. მათ მიერ შესრულებული მუშაობა ტოლია P_i ძალების და შესაბამისი δ_{i2} დამატებითი გადაადგილებების ნამრავლის ჯამის.

ამიტომ ბოლო მდგომარეობაში, სხეულზე ორივე ძალთა სისტემის ერთდროულად მოდებისას, გარე ძალების მუშაობა

$$A_{I-II} = A_I + A_{II} + P_i \delta_{i2} + P_2 \delta_{22} + \dots + P_n \delta_{n2} = A_I + A_{II} + \sum_{i=1}^n P_i \delta_{i2}. \quad (6.63)$$

ახლა წარმოვადგინოთ სხეულის დატვირთვა სხვა თანმიმდევრობით: ჯერ მოვდოთ ძალთა მეორე სისტემა და მერე სხეული დამატებით დავტვირთოთ პირველი სისტემის ძალებით. ეს ძალები გამოიწვევს მეორე სისტემის ძალების მიმართულებით δ_{i1} დამატებით გადაადგილებებს ისე, რომ თვით მეორე სისტემის ძალები უცვლელი რჩება. ამიტომ გარე ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა განისაზღვრება ფორმულით

$$A_{II-I} = A_{II} + A_I + Q_1 \delta_{11} + Q_2 \delta_{12} + \dots + Q_k \delta_{1k} = A_{II} + A_I + \sum_{i=1}^k Q_i \delta_{1i}. \quad (6.64)$$

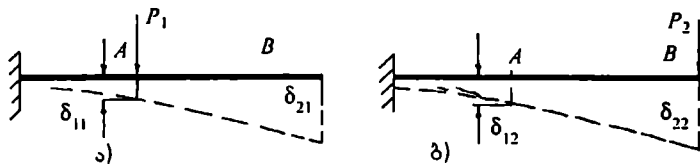
რადგანაც ორივე თანმიმდევრობით სხეულის დატვირთვისას, მის საბოლოო მდგომარეობაში, სხეულზე მოქმედებს ერთი და იგივე ძალები, მათ მიერ შესრულებული მუშაობაც ერთი და იგივე იქნება $A_{I-II} = A_{II-I}$

ამ პირობის გათვალისწინებით, და შესაბამისად, (6.63)-ის და (6.64)-ის გატოლების შედეგად, მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\sum_{i=1}^n P_i \delta_{i2} = \sum_{i=1}^k Q_i \delta_{1i}. \quad (6.65)$$

მიღებული შედეგი გამოხატავს მუშაობათა ურთიერთობის პრინციპს. ამ პრინციპის შესაბამისად პირველი სისტემის ძალების მუშაობა მეორე სისტემის ძალებზე

ბით გამოწვეულ გადაადგილებებზე ტოლია მეორე სისტემის ძალების მუშაობისა პირველ სისტემის ძალებით გამოწვეულ გადაადგილებებზე.



ნახ. 6.14

განვიხილოთ ამ პრინციპის კერძო შემთხვევა, რომელიც ითვალისწინებს სხეულზე ყოველი სისტემის მხოლოდ ერთი ძალის მოქმედებას (ნახ. 6.14).

მუშაობის ურთიერთობის პრინციპი ამ სისტემისათვის ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$P_1 \delta_{12} = P_2 \delta_{21}. \quad (6.66)$$

როდესაც ადგილი აქვს ძალების ტოლობას, $P_1 = P_2$ მიღებული შედეგიდან გამომდინარეობს გადაადგილებების ურთიერთობის პრინციპი

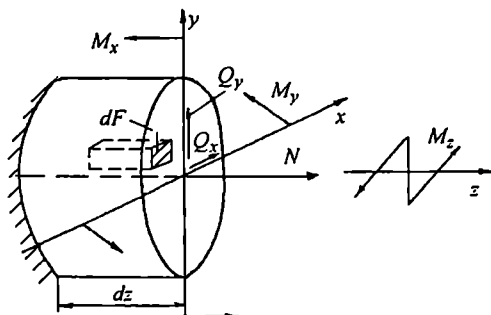
$$\delta_{12} = \delta_{21}. \quad (6.67)$$

ამ პრინციპის შესაბამისად დრეკადი სხეულის პირველ კვეთში პირველი მიმართულებით მოდებული ძალის მიერ მეორე კვეთში მეორე მიმართულებით გამოწვეული გადაადგილება ტოლია გადაადგილებისა პირველ კვეთში პირველი მიმართულებით, რომელიც გამოწვეულია მეორე კვეთში მეორე მიმართულებით მოდებული იგივე მნიშვნელობის ძალით.

§40. ძელის დეფორმაციის პოტენციალური ენერჯია ზოგადი ხასიათის დატვირთვისას

განვიხილოთ სწორი ძელი, რომელიც განიცდის გაჭიმვა-კუმშვას, ღუნვას ორ სიბრტყეში და გრეხას. ამოკვეთთ ძელიდან dz სიგრძის ელემენტი (ნახ. 6.15).

ამ ელემენტისათვის ძელის შიგა ძალოვანი ფაქტორები წარმოგვიდგება რო-



ნახ. 6.15

გორც გარე ძალები, ამიტომ შეიძლება განვსაზღვროთ ამ ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა და შემდეგ z მიმართულებით ინტეგრირებით მივიღოთ სრული დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია. ელემენტის დატვირთვა წარმოვიდგინოთ შემდეგი თანმიმდევრობით: პირველ ეტაპზე მასზე მოქმედებს მხოლოდ მლუნავი მომენტები და ნორმალური ძალა. ელემენტის ენერგია ტოლია dU_{σ} -ის. მეორე ეტაპზე დამატებით მოვდით მგრები მომენტი, რომლის მიერ შესრულებული მუშაობა იქნება dU_{τ} ვინაიდან მგრები მომენტის მიერ გამოწვეულ გადაადგილებებზე მლუნავი მომენტები და ნორმალური ძალა მუშაობას არ ასრულებენ. ამ ორი ეტაპისათვის ენერგიის დიფერენციალი ($dU_{\sigma} + dU_{\tau}$)-ს ტოლია. ანალოგიური შენიშვნები შეიძლება გაკეთდეს შემდგომშიც განივი ძალების მოდებისას. თუ dU_{Q_x} -ით და dU_{Q_y} -ით აღვნიშნავთ ენერგიის შესაბამის დიფერენციალებს, მაშინ, ელემენტის პოტენციალური ენერგიის დიფერენციალი ტოლი იქნება

$$dU = dU_{\sigma} + dU_{\tau} + dU_{Q_x} + dU_{Q_y}.$$

ინტეგრების შედეგად მივიღებთ ძელის დეფორმაციის პოტენციალური ენერგიის მნიშვნელობას

$$U = U_{\sigma} + U_{\tau} + U_{Q_x} + U_{Q_y}. \quad (6.68)$$

დეფორმაციის პოტენციური ენერგიის შემადგენელი U_{σ} (2.20)-ის თანახმად გამოითვლება შემდგომნაირად:

$$U_{\sigma} = \int_V adV = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV. \quad (6.69)$$

ნორმალური ძაბვის მნიშვნელობა ძელის არაცენტრალური გაკეიფვა-კუმშვის შემთხვევაში გამოითვლება ფორმულით:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x. \quad (6.70)$$

dF ფართობის მქონე ელემენტის (ნახ. 6.15) მოცულობა $dV = dzdF$. ამიტომ, (6.69)-დან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} U_{\sigma} &= \int_{(i)} \left[\frac{1}{2E} \int_F \left(\frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \right)^2 dF \right] dz = \\ &= \int_{(i)} \frac{1}{2E} \left[\left(\frac{N^2}{F^2} \int_F dF \right) + \left(\frac{M_x^2}{I_x^2} \int_F y^2 dF \right) + \left(\frac{M_y^2}{I_y^2} \int_F x^2 dF \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(2 \frac{NM_x}{FI_x} \int_F y dF \right) + \left(2 \frac{NM_y}{FI_y} \int_F x dF \right) + \left(2 \frac{M_x M_y}{I_x I_y} \int_F xy dF \right) \right] dz. \quad 205 \end{aligned} \quad (6.71)$$

განხილულ შემთხვევაში x და y მთავარი ცენტრალური ღერძებია და ამიტომ გვაქვს ტოლობები:

$$\int_F y^2 dF = I_x; \quad \int_F x^2 dF = I_y; \quad \int_F dF = F; \quad (6.72)$$

$$\int_F xy dF = 0; \quad \int_F x dF = 0; \quad \int_F y dF = 0; \quad (6.73)$$

საბოლოოდ, (6.71) ფორმულა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$U_\sigma = \int_{(i)} \frac{N^2 dz}{2EF} + \int_{(i)} \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \int_{(i)} \frac{M_y^2 dz}{2EI_y}. \quad (6.74)$$

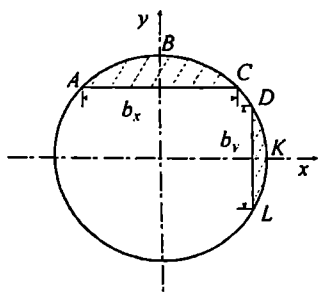
მგრეხი მომენტი, (4.52)-ის შესაბამისად, განსაზღვრავს შემდეგ პოტენციალურ ენერგიას

$$U_\tau = \int_{(i)} \frac{M_z^2 dz}{2GI_k}. \quad (6.75)$$

პოტენციური ენერგიის ნაწილი, რომელიც შეესაბამება Q_y განივ ძალას, განისაზღვრება (4.3) ფორმულის გამოყენებით:

$$U_{Q_y} = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_{(i)} \frac{1}{2G} \left[\int_F \left(\frac{Q_y S_x^*}{I_x b_x} \right)^2 dF \right] dz = k_y \int_{(i)} \frac{Q_y^2 dz}{2GF} \quad (6.76)$$

სადაც გამოყენებულია შემდეგი აღნიშვნა:



ნახ. 6.16

$$k_y = \frac{F}{I_x^2} \int_F \left(\frac{S_x^*}{b_x} \right)^2 dF. \quad (6.77)$$

ამ ფორმულაში S_x^* არის კვეთის ABC ნაწილის სტატიკური მომენტი ცენტრალური x ღერძის მიმართ (ნახ. 6.16). ანალოგიურად მივიღებთ ენერგიის გამოსახულებას მეორე მიმართულებების მხები ძალისათვის

$$U_{Q_x} = k_x \int_{(i)} \frac{Q_x^2 dz}{2GF}, \quad (6.78)$$

$$k_x = \frac{F}{I_y^2} \int \left(\frac{S_y^*}{b_y} \right)^2 dF. \quad (6.79)$$

ფორმულაში S_y^* არის კვეთის DKL ნაწილის სტატიკური მომენტი ცენტრალური y ღერძის მიმართ (ნახ. 6.16).

განვსაზღვროთ k_y კოეფიციენტი მართკუთხა კვეთისათვის (ნახ. 6.17):

$$S_x^* = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right); \quad I_x = \frac{bh^3}{12}; \quad F = b \cdot h;$$

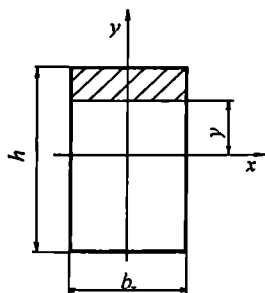
$$\begin{aligned} k_y &= \frac{bh(12)^2}{b^2h^6} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{b}{2b} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right]^2 bdy = \frac{36}{h^5} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2y^2}{2} + y^4 \right) dy = \\ &= \frac{36}{h^5} \left(\frac{h^5}{16} - 8 \cdot 3 + \frac{h^5}{16 \cdot 5} \right) = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

ანალოგიურად მივიღებთ $k_x = (6/5)$.

წრიული განივი კვეთისათვის ანალოგიური ხასიათის გაანგარიშებით მივიღებთ კოეფიციენტების შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$k_x = k_y = (10/9).$$

საბოლოოდ, ძელის პოტენციური ენერჯიის გამოსახულება ჩაიწერება შემდეგნაირად:



ნახ. 6.17

$$\begin{aligned} U &= \int_{(l)} \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \int_{(l)} \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \int_{(l)} \frac{M_z^2 dz}{2GI_k} + \int_{(l)} \frac{N^2 dz}{2EF} + \\ &+ k_y \int_{(l)} \frac{Q_y^2 dz}{2GF} + k_x \int_{(l)} \frac{Q_x^2 dz}{2GF}. \end{aligned} \quad (6.80)$$

მიღებული ფორმულის შესაბამისად, შეიძლება ცალკეული ძალოვანი ფაქტორისათვის დამოუკიდებლად განვსაზღვროთ ენერჯია, საერთო ენერჯია კი

მივიღოთ მათი შეჯამებით. მაგრამ უნდა გვახსოვდეს, რომ ეს ფაქტი არ არის დაკავშირებული ძალთა მოქმედების დამოუკიდებლობის პრინციპთან.

საჭიროა აღინიშნოს, რომ კონსტრუქციებისათვის, რომელთა ელემენტები მუშაობს ღუნვასა და გრეხაზე, როგორც წესი, (6.80) ფორმულაში საკმარისია გავითვალისწინოთ პირველი სამი წევრი, ვინაიდან გაკიმვა-კუმშვის და ძვრის ენერგია ბევრად მცირეა ღუნვის და გრეხის ენერგიებზე. მაგრამ არსებობს სისტემები, რომლებისთვისაც ასეთმა დაშვებამ შეიძლება მიგვიყვანოს მცდარ შედეგებამდე.

§41. კასტილიანოს თეორემა

განვიხილოთ მყარი სხეული, რომელზეც მოქმედებს n ძალისაგან შედგენილი სისტემა (ნახ. 6.11). განვსაზღვროთ რომელიმე ძალის მოდების წერტილის გადაადგილება ამ ძალის მიმართულებით, მაგალითად, P_j ძალის მოდების წერტილის δ_j გადაადგილება.

სისტემის პოტენციალური ენერგიაა U . მივცეთ P_j ძალას უსასრულოდ მცირე ნაზრდი dP_j . ამ შემთხვევაში შესაბამისი გადაადგილებაც მიიღებს $d\delta_j$ ნაზრდს. სისტემის ენერგია ახალ მდგომარეობაში იქნება.

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_j} \cdot dP_j. \quad (6.81)$$

შეიძლება განვიხილოთ სისტემის დატვირთვა სხვა თანმიმდევრობით: პირველად მოვდოთ dP_j ძალა; შესაბამისი გადაადგილება იქნება $d\delta_j$ და შესრულებული მუშაობა განისაზღვრება შემდეგნაირად: $0,5dP_j d\delta_j$. ამის შემდეგ სისტემას მოვდოთ საწყისი ძალთა სისტემა, რომლის მიერ შესრულებული მუშაობაა U . ძალა dP_j მოდებულია იმავე წერტილში და იგივე მიმართულებით, რომელ წერტილში და რა მიმართულებითაც მოდებულია P_j ძალა. ვინაიდან dP_j უცვლელია ძალთა სისტემის მოქმედების პროცესში და მისი მოდების წერტილი გადაადგილდება მისი მოქმედების მიმართულებით δ_j სიდიდით. სისტემის სრული პოტენციალური ენერგია განისაზღვრება ფორმულით:

$$U + dP_j \delta_j + \frac{1}{2} dP_j d\delta_j. \quad (6.82)$$

თუ გავუტოლებთ ერთმანეთს ორ სხვადასხვა გზით ნაპოვნ ერთი და იმავე სისტემის ენერგიას, გამოთვლილს (6.81) და (6.82) გამოსახულებებით, და თუ ბოლო გამოსახულებაში მხედველობაში არ მივიღებთ მესამე წევრს, როგორც უფრო მაღალი რიგის უსასრულო მცირეს იგივე გამოსახულებების მეორე წევრთან შედარებით, საბოლოოდ მივიღებთ:

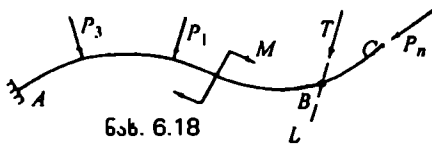
$$\delta_j = \frac{\partial U}{\partial P_j}. \quad (6.83)$$

ამრიგად, დრეკადი სხეულის პოტენციალური ენერჯიის კერძო წარმოებული სისტემის რომელიმე ძალით ტოლია ამ ძალის მოდების წერტილის გადაადგილებებისა იმავე ძალის მიმართულებით.

კასტილიანოს თეორემის არსს გამოხატავს (6.83) ფორმულა. ეს ფორმულა მიღებულია ნებისმიერი ფორმის სხეულისათვის, რომელიც დატვირთულია ნებისმიერი ძალთა სისტემით. კერძოდ, P_i შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც სხეულზე მოდებული მომენტი. მაშინ δ_i განსაზღვრავს მომენტის მოქმედების სიბრტყეში მომენტის მოდების კვეთის მობრუნების კუთხეს. საერთოდ, P_i შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც განზოგადებული ძალა, ხოლო δ_i – შესაბამისი განზოგადებული გადაადგილება. რაც შეეხება სხეულის მასალას, მის თვისებებზე აქ არაფერი თქმულა, მაგრამ ენერჯიის ორი გამოსახულების განტოლება გულისხმობს მასალისათვის ჰუკის კანონის შესრულებას. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ენერჯიის სიდიდე დამოკიდებული იქნებოდა ძალთა მოდების თანამიმდევრობაზე და ამიტომ არამართებული იქნებოდა ენერჯიის გამოსახულებების ერთმანეთთან გატოლება. მასალათა გამძლეობაში ასეთი ამოცანები, როგორც წესი, გამონაკლისია.

§42. მორის ინტეგრალი

კასტილიანოს თეორემის გამოყენებით შეიძლება განვსაზღვროთ სხეულის წერტილის გადაადგილება ამ წერტილში მოდებული ძალის მიმართულებით.



მაგრამ, თუ გვინტერესებს გადაადგილების განსაზღვრა სხეულის იმ წერტილისათვის, რომელშიც ძალა არ არის მოდებული, კასტილიანოს თეორემა ამაზე უშუალოდ პასუხს ვერ გვაძლევს. ამიტომ შევეცადოთ

ამ თეორემის საშუალებით განვიხილოთ ნებისმიერი წერტილის გადაადგილების გაანგარიშების საკითხი.

განვიხილოთ ABC ძელი (ნახ. 6.18) და განვსაზღვროთ B წერტილის გადაადგილება L წრფის მიმართულებით. ძელში მოქმედი ძალოვანი ფაქტორებია

$$M_{xP}, M_{yP}, M_{zP}; N_P; Q_{xP}, Q_{yP}. \quad (6.84)$$

მოვდოთ ძელს B წერტილში L წრფის მიმართულებით T ძალა. ძელის შიგა ძალოვანი ფაქტორები, რომლებიც შეესაბამება T-ს მიმართულების ერთეულოვან ძალას, აღვნიშნოთ შემდეგნაირად:

$$M_{x1}; M_{y1}; M_{z1}; N_1; Q_{x1}; Q_{y1}. \quad (6.85)$$

ავილოთ მოდებული T ძალისათვის ნებისმიერი მნიშვნელობა. ამ შემთხვევაში ძელის კვეთებში იმოქმედებს T -ჩერ მეთი მნიშვნელობის შიგა ძალოვანი ფაქტორები, ვიდრე $T=1$ ძალის მოქმედებისას:

$$T \cdot M_{x1}; T \cdot M_{y1}; T \cdot M_{z1}; T \cdot N_1; T \cdot Q_{x1}; T \cdot Q_{y1}. \quad (6.86)$$

განვიხილოთ ძელზე მოცემული ძალთა სისტემისა და T ძალის ერთდროული მოქმედება. თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ ძალაშია ძალთა მოქმედების დამოუკიდებლობის პრინციპი, შიგა ძალოვან ფაქტორებს განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} M_x &= M_{xP} + T \cdot M_{x1}; & M_y &= M_{yP} + T \cdot M_{y1}; & M_z &= M_{zP} + T \cdot M_{z1}; \\ N &= N_P + T \cdot N_1; & Q_x &= Q_{xP} + T \cdot Q_{x1}; & Q_y &= Q_{yP} + T \cdot Q_{y1}. \end{aligned} \quad (6.87)$$

სისტემის დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია ტოლია

$$\begin{aligned} U &= \int_{(l)} \frac{(M_{xP} + TM_{x1})^2 dz}{2EI_x} + \int_{(l)} \frac{(M_{yP} + TM_{y1})^2 dz}{2EI_y} + \int_{(l)} \frac{(M_{zP} + TM_{z1})^2 dz}{2GI_z} + \\ &+ \int_{(l)} \frac{(N_P + TN_1)^2 dz}{2EF} + k_y \int_{(l)} \frac{(Q_{yP} + TQ_{y1})^2 dz}{2GF} + k_x \int_{(l)} \frac{(Q_{xP} + TQ_{x1})^2 dz}{2GF}. \end{aligned} \quad (6.88)$$

ახლა შეგვიძლია განვსაზღვროთ B წერტილის გადაადგილება L მიმართულებით, როდესაც სისტემაზე ერთდროულად მოქმედებს მოცემული ძალთა სისტემა და T ძალა. ამისათვის საჭიროა გავაწარმოთ დეფორმაციის პოტენციალური ენერჯიის (6.88) გამოსახულება T -თი. რადგანაც, სინამდვილეში, ძელზე T ძალა არ მოქმედებს, მიღებულ შედეგში T -ს გავუტოლებთ ნულს და საბოლოოდ მივიღებთ საწყისი მოცემული სისტემისათვის B წერტილის გადაადგილებას:

$$\begin{aligned} \delta_B &= \frac{\partial U}{\partial T} \Big|_{T=0} = \int_{(l)} \frac{M_{xP} M_{x1}}{EI_x} dz + \int_{(l)} \frac{M_{yP} M_{y1}}{EI_y} dz + \int_{(l)} \frac{M_{zP} M_{z1}}{GI_z} dz + \\ &+ \int_{(l)} \frac{N_P N_1}{EF} dz + k_x \int_{(l)} \frac{Q_{xP} Q_{x1}}{GF} dz + k_y \int_{(l)} \frac{Q_{yP} Q_{y1}}{GF} dz. \end{aligned} \quad (6.89)$$

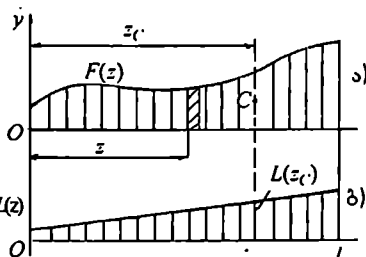
ფორმულაში (6.89) შემავალ ინტეგრალებს ეწოდება მორის ინტეგრალები. ფორმულა (6.89) საშუალებას იძლევა გავიანგარიშოთ გადაადგილება სის-

ტემის პოტენციალური ენერჯის დადგენის გარეშე. ამისათვის საჭიროა, გადადგინოთ სისტემაზე მოდებული ძალების მიერ გამოწვეული შიგა ძალოვანი ფაქტორების (6.84)-ის გამოსახულებები. შემდეგ იმ წერტილში და იმ მიმართულებით, სადაც საჭიროა გადაადგილების განსაზღვრა, სისტემას მოვდოთ ერთის ტოლი ძალა და შევადგინოთ შესაბამისი შიგა ძალოვანი ფაქტორების (6.85)-ის გამოსახულებები; შემდეგ ვადგენთ მორის ინტეგრალებს, რომელთა გამოყენებით ვპოულობთ გადაადგილების მნიშვნელობას. თუ მიღებული შედეგი დადებითია, გადაადგილება ხდება მოდებული ერთეულოვანი ძალის მიმართულებით, წინააღმდეგ შემთხვევაში ერთეულოვან ძალას და გადაადგილებას აქვს საწინააღმდეგო მიმართულებები.

ისე, როგორც კასტილიანოს თეორემით, მორის ინტეგრალის საშუალებით შეიძლება მობრუნების კუთხის განსაზღვრა. აქაც საჭიროა ერთეულოვანი ძალის ნაცვლად სისტემას მოვდოთ ერთეულოვანი მომენტი და განვსაზღვროთ მობრუნების კუთხე. მორის ინტეგრალების გაანგარიშება შეიძლება ვაწარმოოთ გრაფიანალიზური ხერხით, რომელსაც ვერეშჩაგინის ხერხი ეწოდება.

§4.3. ვერეშჩაგინის ხერხი

დავუშვათ, საჭიროა გავიანგარიშოთ ორი ფუნქციის ნამრავლის ინტეგრალი



ნახ. 6.19

$$I = \int_0^l F(z) \cdot L(z) dz, \quad (6.90)$$

სადაც

$$L(z) = a + bz. \quad (6.91)$$

მოცემულია, რომ $L(z)$ იცვლება წრფივი კანონით $[0, l]$ მონაკვეთზე (ნახ.6.19). რაც

შეეხება $F(z)$ ფუნქციას, მისი ცვალებადობა ნებისმიერია.

მოვახდინოთ (6.90) ინტეგრალის გარდაქმნა (6.91)-ის გათვალისწინებით:

$$I = \int_0^l F(z)(a + bz) dz = a \int_0^l F(z) dz + b \int_0^l zF(z) dz.$$

პირველი ინტეგრალი წარმოადგენს ზედა ეპიურის $F(z)$ -ის ფართობს Ω_F -ს; მეორე – იმავე ეპიურის სტატიკურ მომენტს Oy ღერძის მიმართ, z_c - Ω_F -ს. აღნიშნულის გათვალისწინებით ინტეგრალი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$I = a\Omega_F + bz_c\Omega_F = (a + bz_c)\Omega_F,$$

სადაც z_c პირველი ეპიურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატია.

მიღებული ფორმულის პირველი მამრავლი წარმოადგენს (6.91)-ის გამოსახულების მნიშვნელობას, როდესაც წრფივი ეპიურის კოორდინატი პირველი ეპიურის სიმძიმის C ცენტრის ქვემოთაა (ნახ. 6.19). აღნიშნულის გათვალისწინებით, (6.90) ინტეგრალის მნიშვნელობა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$I = \Omega_F \cdot L(z_C) \quad (6.92)$$

ამრიგად, ვერეშჩაგინის ხერხის შესაბამისად, ორი ფუნქციის ნამრავლის ინტეგრალი, რომლიდანაც ერთი იცვლება წრფივი კანონით, ტოლია ზოგადი ფუნქციის ეპიურის ფართობის ნამრავლისა პირველი ეპიურის სიმძიმის ცენტრის ქვემოთ წრფივი ეპიურის ორდინატაზე.

მიღებული შედეგებიდან ჩანს, რომ ინტეგრალის გაანგარიშების განხილული ხერხი ზოგადია და თუ ფუნქციები აკმაყოფილებს საჭირო მოთხოვნებს, შეიძლება გამოვიყენოთ ნებისმიერი

ამოცანის ამოხსნისას (თუ სისტემის სიხისტე მუდმივ სიდიდეს წარმოადგენს და შეიძლება მისი ინტეგრალს გარეთ გამოტანა). ადვილი საჩვენებელია, რომ ძელის სწორი ნაწილებისათვის ერთეულოვანი ძალით გამოწვეული შიგა ძალოვანი ფაქტორების ეპიურები წრფივი კანონით იცვლება. ამიტომ, მათთვის ყოველთვის შეიძლება გამოვიყენოთ ვერეშჩაგინის ხერხი.

ვერეშჩაგინის ხერხის გამოყენებისათვის სასარგებლოა ცოცხალი ზოგიერთი მარტივი ფიგურის ფართობი და სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა. ამისათვის განვიხილოთ პარაბოლური სამკუთხედი (ნახ. 6.20):

$$y = h \left(\frac{z}{l} \right)^n \quad F = \int_0^l y dz = \frac{hl}{n+1}; \quad S_y = \int_0^l yz dz = \frac{hl^2}{n+2};$$

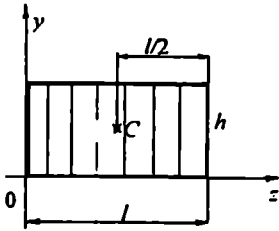
$$z_C = \frac{S_y}{F} = \frac{n+1}{n+2} l; \quad b = l - z_C = \frac{l}{n+2}.$$

ამ სამკუთხედის ხარისხის მახასიათებლის კერძო მნიშვნელობისათვის ვიღებთ სხვადასხვა ფიგურებს:

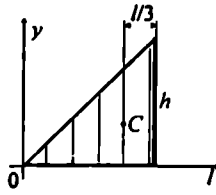
1. მართკუთხედი ($n=0$) (ნახ. 6.21)

$$F = hl, \quad b = \frac{l}{2}.$$

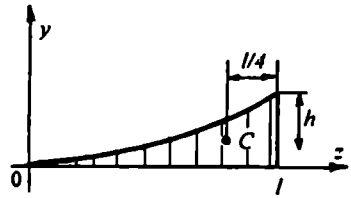
2. სამკუთხედი ($n=1$) (ნახ. 6.22): $F = \frac{1}{2}hl$, $b = \frac{1}{3}l$.



ნახ. 6.21



ნახ. 6.22

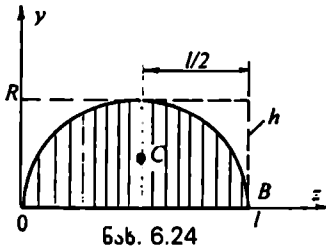


ნახ. 6.23

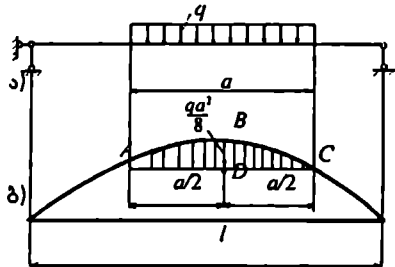
3. კვადრატული პარაბოლური სამკუთხედი ($n=2$) (ნახ. 6.23)

$$F = \frac{1}{3}hl, \quad b = \frac{1}{4}l.$$

4. კვადრატული პარაბოლით შემოფარგლული ფიგურა (ნახ. 6.24)
როდესაც ძელის ნაწილზე მოქმედებს ინტენსიურობის q თანაბრად განაწი-



ნახ. 6.24



ნახ. 6.25

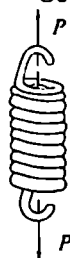
ლებული ძალა (ნახ. 6.25), ამ უბანზე მღუნავი მომენტების ეპიურა კვადრატულ პარაბოლას წარმოადგენს. ეპიურის ABCD ნაწილი შეესაბამება 6.24 ნახაზზე გამოსახულ ფიგურას და მისი სიმაღლე

$$h = |BD| = \frac{qa^2}{8} \text{-ის ტოლია, } F = \frac{2}{3}hl.$$

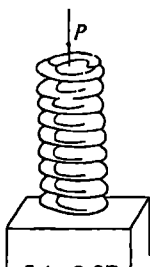
§44. ცილინდრული ზრახნული ზამბარის გაანგარიშება

ზამბარები ფართოდ გამოიყენება მანქანათმშენებლობასა და ხელსაწყოთმშენებლობაში. მათ შორის ყველაზე გავრცელებულია ცილინდრული ზამბარები (ნახ. 6.26 - ნახ.6.28). ასეთ ზამბარებზე შედარებით მცირე ძალების მოქმე-

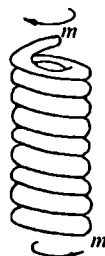
დება იწვევს დიდ გადაადგილებებს, რაც საშუალებას იძლევა გამოვიყენოთ ისინი პოტენციალური ენერჯიის აკუმულატორებად.



ნახ. 6.26



ნახ. 6.27



ნახ. 6.28

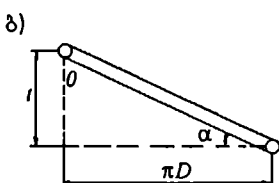
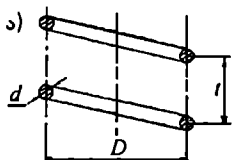
ზამბარის კვეთი ნაჩვენებია 6.29 ნახაზზე. ზამბარის მახასიათებლებია: D – ზამბარის საშუალო დიამეტრი, n – ხვიათა რიცხვი, l – ბიჯი, რომელიც განისაზღვრება ერთი ხვიის გაშლილად წარმოდგენით (ნახ. 6.29,ბ):

$$l = \pi D t g \alpha. \quad (6.93)$$

რადგანაც α კუთხე, როგორც წესი, მცირეა ($\alpha \leq 5^\circ$), ფორმულა შეიძლება წარმოდგინდეს შემდეგნაირად:

$$l = \pi D \alpha. \quad (6.94)$$

d დიამეტრის მქონე მავთულიანი ზამბარებისათვის, როგორც წესი, გვაქვს პირობა $d \ll D$ და, ამიტომ, ისინი შეიძლება განვიხილოთ როგორც მცირე სიმრუდის ძელები.



ნახ. 6.29

ზამბარები განირჩევა მოდებული ძალოვანი ფაქტორის მიხედვით, და შესაბამისად გვაქვს გაჭიმვის

(ნახ. 6.26), კუმშვის (ნახ. 6.27) და გრეხის (ნახ. 6.28) ზამბარები.

პირველი და მეორე ტიპის ზამბარების გაანგარიშების მეთოდები ერთნაირია და ამიტომ საკმარისია განვიხილოთ მხოლოდ გაჭიმვის ზამბარა (ნახ. 6.26). შიგა ძალების დასადგენად ამოვიკვეთოთ ზამბარის ნაწილი (ნახ. 6.30):

$$Q = P; \quad M_{გრ} = \frac{PD}{2}. \quad (6.95)$$

ამრიგად, ასეთი ზამბარის განივ კვეთში წარმოიშობა განივი ძალა და მგრეხი მომენტი; რაც შეეხება ნორმალურ ძალას და მღუნავ მომენტს, ისინი მცირე სიდიდისაა. ეს დებულება უშუალოდაა დამოკიდებული აღმართის α კუთხის სიმცირის პირობასთან.

მგრეხი მომენტის მიერ გამოწვეული მაქსიმალური მხები ძაბვა

$$\tau_{\max} = \frac{PD}{2W_k}. \quad (6.96)$$

წრიული კვეთის შემთხვევაში $W_k = \pi d^3 / 16$ და (6.96)-ის ნაცვლად მივიღებთ ფორმულას:

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3}. \quad (6.97)$$

რაც შეეხება განივი ძალის მოქმედებით გამოწვეულ მხებ ძაბვებს, ისინი τ_{\max} -თან შედარებით მცირე მნიშვნელობისა და მხედველობაში არ მიიღება. მაგალითად, წრიული კვეთის შემთხვევაში, ასეთი ძაბვები შეგვიძლია გავიანხარიშოთ მიახლოებითი ფორმულით:

$$\tau \approx \frac{Q}{F} = \frac{4P}{\pi d^2}. \quad (6.98)$$

ძაბვების თანაფარდობის დასადგენად გამოვიყენოთ (6.97) და (6.98) ფორმულები:

$$k = \frac{\tau}{\tau_{\max}} = \frac{d}{2D}. \quad (6.99)$$

ზემოთ გამოთქმული დებულება გამომდინარეობს პირობიდან $D \gg d$.

დავადგინოთ ღერძული მიმართულებით ზამბარის ბოლოების ურთიერთგადაადგილება. ამისათვის მოვდოთ ზამბარას $P=1$ ძალა (ნახ. 6.26), შესაბამისი მგრეხი მომენტი $M_1=(D/2)$ ზამბარის სიგრძე უდრის ერთი ხეიის πD სიგრძეს გამრავლებულს ხეიათა n რიცხვზე: $l=\pi Dn$. მორის ინტეგრალის საშუალებით დავადგინოთ გადაადგილებას

$$\lambda = \int_0^l \frac{M_{gr} M_1 dz}{GI_k} = \frac{PD^2 l}{4GI_k}. \quad (6.100)$$

ზამბარის სიგრძის მნიშვნელობის გათვალისწინებით მივიღებთ ფორმულას

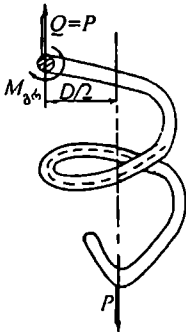
$$\lambda = \frac{P\pi D^3 n}{4GI_k}. \quad (6.101)$$

წრიული განივი კვეთის შემთხვევაში ინერციის პოლარული მომენტი

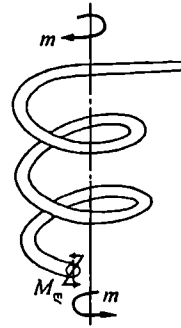
$I_p = \pi d^4 / 32$. ამიტომ (6.101)-ის ნაცვლად მივიღებთ ახალ ფორმულას:

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4}. \quad (6.102)$$

მიღებული ფორმულები გამოიყენება როგორც გაჭიმვის, ისე კუმშვის ზამბარებისათვის, ოღონდ საჭიროა ხვიათა რიცხვის დადგენის პირობების დაზუსტება. პირველისთვის (ნახ. 6.26) მხედველობაში არ უნდა მივიღოთ ზამბარის მოღუნული ბოლოები, რომელთა საშუალებითაც ხდება ძალების გადაცემა. რაც შეეხება კუმშვის ზამბარას (ნახ. 6.27), მისი ბოლო ხვია ჰორიზონტალური მიმართულებისაა, რაც სიბრტყის საშუალებით მასზე ძალის გადაცემის საშუალებას იძლევა. ამიტომ ამ ხვიის დეფორმირება შეზღუდულია, რადგან ზამბარის დეფორმაციის საწყის პროცესში იგი შეეხება მეორე ხვიას და შემდგომში ვეღარ გადაადგილდება. ასეთი შეზღუდული დეფორმაციის პირობებში, ზამბარის ერთ ბოლოზე აქტიური მუშაობიდან გამოთიშულია ხვიის 3/4 ნაწილი. ამიტომ კუმშვის ზამბარების საანგარიშო ხვიათა რიცხვის დასადგენად მათ საერთო რიცხვს ვამცირებთ 1,5 ხვით.



ნახ. 6.30



ნახ. 6.31

განვიხილოთ გრების ზამბარა (ნახ. 6.31), რომლის განივ კვეთში წარმოიშობა მღუნავი მომენტი $M_{\varphi} = m$. შესაბამისი მაქსიმალური ნორმალური ძაბვა

$$\sigma_{\max} = \frac{m}{W_x}. \quad (6.103)$$

ასეთი ზამბარებისათვის საინტერესოა ბოლო კვეთების ურთიერთმობრუნების φ კუთხის დადგენა. ამ კუთხის დასადგენად 6.31 ნახაზზე მოდებულ მომენტებს ავიღებთ ერთის ტოლს $M=1$, შესაბამისი მღუნავი მომენტებიც იმავე სიდიდის იქნება $M_1=1$. მორის ინტეგრალის საშუალებით დავადგენთ მობრუნების კუთხეს:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{\varphi} \cdot M_1}{EI_x} dz = \int_0^l \frac{m \cdot 1}{EI_x} dz = \frac{m \cdot l}{EI_x}. \quad (6.104)$$

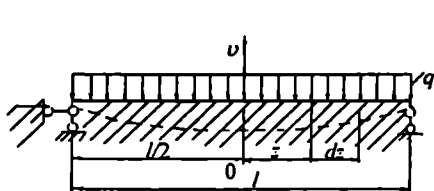
ზამბარის სიგრძის მნიშვნელობის გათვალისწინებით მივიღებთ საბოლოო ფორმულას:

$$\varphi = \frac{m\pi Dn}{EI_x} \quad (6.105)$$

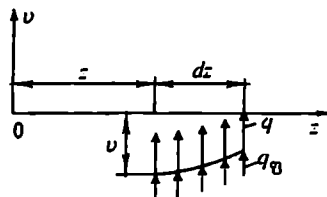
ცილინდრული ზამბარებისათვის მიღებულ ფორმულებში დაშვებულია, რომ სრულდება შემდეგი პირობები $d \ll D$ და α მცირე კუთხეა. ცხადია, შეიძლება ამ პირობის უარყოფა და უფრო ზოგადი ხასიათის ფორმულების მიღება, მაგრამ ისინი უფრო რთული სახის იქნება.

§45. ძელი დრეკად ფუძეზე

განვიხილოთ ძელი, რომელიც დამაგრებულია დრეკად ფუძეზე (ნახ. 6.32). მოდებული ძალების მოქმედებისას ძელი ჩაიდუნება და ფუძის შესაბამისი წერტილები გადაადგილდება. ძელისა და ფუძის ურთიერთშეხების წერტილებში



ნახ. 6.32



ნახ. 6.33

წარმოიშობა რეაქტიული ძალები, რომლებიც ძელზე მოქმედებს განაწილებული ძალების სახით. თუ ძელი თავისუფლად დევს ფუძეზე, რეაქციის ძალები წარმოიშობა მხოლოდ იმ უბნებზე, რომლებსაც შეესაბამება უარყოფითი გადაადგილებები $v < 0$. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ საქმე გვაქვს ცალმხრივ ბმებიან ფუძესთან. ასეთი ამოცანის შესწავლა, როგორც წესი, შრომატევადია, ვინაიდან მოითხოვს იმ უბნების ცალ-ცალკე გაანგარიშებას, რომლებსაც შეესაბამება დადებითი და უარყოფითი გადაადგილებები, ხოლო შემდეგ, მათი ერთობლივი განხილვით, ინტეგრების მუდმივების დადგენას. მაგრამ ამ შემთხვევაში პრინციპული ხასიათის სირთულეები არ წარმოიშობა. იმ უბნების გაანგარიშების მეთოდიკა, რომლებისთვისაც $v > 0$. უკვე გვაქვს. რაც შეეხება მეორე სახის უბნებს, რომლებისთვისაც $v < 0$, მათი გაანგარიშების მეთოდიკას განვიხილავთ ქვემოთ.

არსებობს ორმხრივბმებიანი ფუძეები, რომლებიც წინააღმდეგობას უწევს ძელის კვეთის გადაადგილებას როგორც უარყოფითი, ისე დადებითი მიმართულებით. ასეთ შემთხვევასთან საქმე გვაქვს 6.32 ნახაზზე ნაჩვენები ძელისათვის, თუ მას წარმოვიდგენთ მთელ სიგრძეზე უწყვეტად დამაგრებულად. მაგალითად, დაწებებულად.

განვიხილოთ ძელის dz სიგრძის ელემენტი (ნახ. 6.33). ამ ელემენტზე ერთდროულად იმოქმედებს როგორც q ინტენსიურობის გარე ძალები, ისე $q_{ფ}$ ინტენსიურობის რეაქტიული ძალები. ამიტომ, ძელის გადაადგილებების დიფერენციალური განტოლება, (ნახ. 6.19)-ის შესაბამისად, ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$EI_x v^{(IV)} = q + q_{ფ}. \quad (6.106)$$

რეაქტიული ძალების $q_{ფ}$ ინტენსიურობა უშუალოდაა დაკავშირებული ელემენტის გადაადგილებასთან და ამ უკანასკნელის ზრდას მოჰყვება შესაბამისი რეაქციის ზრდა. ზოგადად, ეს დამოკიდებულება შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$q_{ფ} = -\sum_{i=1}^n k_{2i-1} v^{2i-1}. \quad (6.107)$$

ფორმულაში გამოტოვებულია ლუწი ხარისხის მქონე წევრები, რადგან ვთვლით, რომ ერთი და იმავე სიდიდის დადებით და უარყოფით გადაადგილებებს შეესაბამება ტოლი აბსოლუტური სიდიდის განაწილებული ძალების ინტენსიურობა.

ზოგ შემთხვევაში, უფრო მოსახერხებელია და, ამასთან ერთად, უფრო ზუსტად ასახავს მოვლენას შემდეგი ფორმულა

$$q_{ფ} = -\operatorname{sign} v \cdot k |v|^m \quad (6.108)$$

ფორმულაში k , m ფუძის დრეკადობის მახასიათებელი კოეფიციენტებია; $\operatorname{sign} v$ აღნიშნავს გადაადგილების ნიშანს (დადებითი გადაადგილებისათვის $\operatorname{sign} v = 1$, უარყოფითისათვის $\operatorname{sign} v = -1$). ორივე ფორმულა ისეა შედგენილი, რომ უარყოფით გადაადგილებებს შეესაბამება ფუძის დადებითი რეაქცია.

პრაქტიკული ამოცანების განხილვისას ფართო გამოყენებას პოულობს (6.107)-ის კერძო სახე $q_{ფ} = -kv$, რომლის საშუალებითაც მიიღება წრფივი დიფერენციალური განტოლება. ამ განტოლების ამოხსნა შედარებით იოლია. k კოეფიციენტს დრეკადი ფუძის კოეფიციენტი ეწოდება. ასეთი კერძო შემთხვევისათვის (6.106) განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$v^{(IV)} + 4\alpha^4 v = \frac{q}{EI_x}. \quad (6.109)$$

განტოლებაში გამოყენებულია აღნიშვნა

$$\alpha = 4 \sqrt{\frac{k}{4EI_x}}.$$

ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$v = C_1 \sin \alpha z \operatorname{sh} \alpha z + C_2 \cos \alpha z \operatorname{ch} \alpha z + C_3 \cos \alpha z \operatorname{sh} \alpha z + C_4 \sin \alpha z \operatorname{ch} \alpha z + v^*, \quad (6.110)$$

სადაც v^* – განტოლების კერძო ამონახსნია. ასეთი განტოლებით შეგვიძლია განვიხილოთ ამოცანები განაწილებული q ძალების ცვალებადობის სხვადასხვა კანონზომიერებისათვის.

განვიხილოთ 6.32 ნახაზზე ნაჩვენები შემთხვევა, რომლისთვისაც q უარყოფითი და მუდმივია. (6.109) განტოლების შესაბამისი კერძო ამონახსნის შედგენა იოლად ხდება:

$$v = -\frac{q}{EI_x 4\alpha^4} = -\frac{q}{k}. \quad (6.111)$$

ძელის დეფორმირებული მდგომარეობა სიმეტრიულია O_v ღერძის მიმართ $v(z) = v(-z)$. აქედან გამომდინარე, (6.110) გამოსახულებაში უნდა შედიოდეს მხოლოდ სიმეტრიული მდგენელები. მაშინ, მივიღებთ $C_3 = C_4 = 0$ დანარჩენი ორი მუდმივი განისაზღვრება სასაზღვრო პირობებიდან:

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = 0; \quad M_{\mathcal{L}}\left(\frac{l}{2}\right) = EI_x v''\left(\frac{l}{2}\right) = 0. \quad (6.112)$$

რადგან საწყისი წერტილის მიმართ ფუნქციების სიმეტრიულობა წინასწარ იქნება მოთხოვნილი, სასაზღვრო პირობები ძელის მეორე ბოლოზე ($z = -l/2$) ავტომატურად სრულდება. ყოველივე ეს გავითვალისწინოთ (6.110) გამოსახულებაში და მივიღოთ მისი წარმოებულები:

$$\begin{aligned} v &= C_1 \sin \alpha z \operatorname{sh} \alpha z + C_2 \cos \alpha z \operatorname{ch} \alpha z - \frac{q}{k} \\ v' &= C_1 \alpha (\cos \alpha z \operatorname{sh} \alpha z + \sin \alpha z \operatorname{ch} \alpha z) + \\ &\quad + C_2 \alpha (\cos \alpha z \operatorname{sh} \alpha z - \sin \alpha z \operatorname{ch} \alpha z); \\ v'' &= 2C_1 \alpha^2 \cos \alpha z \operatorname{ch} \alpha z - 2C_2 \alpha^2 \sin \alpha z \operatorname{sh} \alpha z. \end{aligned} \quad (6.113)$$

ახლა შეგვიძლია გამოვიყენოთ (6.112) პირობები; მუდმივების დასადგენად მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} C_1 \sin \lambda \operatorname{sh} \lambda + C_2 \cos \lambda \operatorname{ch} \lambda &= \frac{q}{k}; \\ C_1 \cos \lambda \operatorname{ch} \lambda - C_2 \sin \lambda \operatorname{sh} \lambda &= 0; \end{aligned} \quad (6.114)$$

საიდანაც მივიღებთ მუდმივების შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$C_1 = \frac{\sin \lambda \operatorname{sh} \lambda}{\operatorname{sh}^2 \lambda + \cos^2 \lambda} \frac{q}{k}; \quad C_2 = \frac{\cos \lambda \operatorname{ch} \lambda}{\operatorname{sh}^2 \lambda + \cos^2 \lambda} \frac{q}{k}.$$

აქ გამოყენებულია აღნიშვნა $\lambda = (\alpha/2)$, მიღებული შედეგების გათვალისწინებით გადაადგილებების (6.110) ფორმულა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$v = -\frac{q}{k} \left[1 - \frac{\sin \lambda \operatorname{sh} \lambda \sin \alpha z \operatorname{sh} \alpha z + \cos \lambda \operatorname{ch} \lambda \cos \alpha z \operatorname{ch} \alpha z}{\operatorname{sh}^2 \lambda + \cos^2 \lambda} \right]. \quad (6.115)$$

ძელის შუა $z=0$ კვეთის გადაადგილება

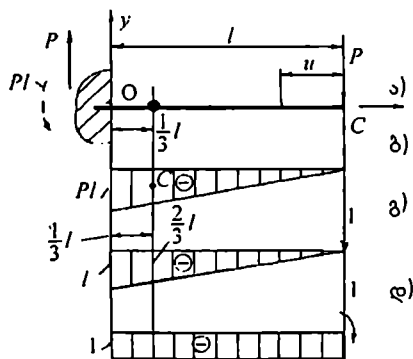
$$v(0) = -\frac{q}{k} \left[1 - \frac{\cos \lambda \operatorname{ch} \lambda}{\operatorname{sh}^2 \lambda + \cos^2 \lambda} \right].$$

(6.113)-ის მეორე გამოსახულების გამოყენებით, საჭიროების შემთხვევაში, ანალოგიურად განისაზღვრება მღუნავი მომენტებიც.

შეკვეთის თავის მაგალითები

მაგალითი 6.1. დრეკადი ხაზის და კვეთის მობრუნების კუთხის განტოლებების, მორის ინტეგრალის და ვერეშჩაგინის ხერხის გამოყენებით, გავიანგარიშოთ ძელის C კვეთის გადაადგილება და მობრუნების კუთხე (ნახ. 6.34).

საწყისი კვეთის მობრუნების კუთხე და გადაადგილება ნულის ტოლია და (6.14) და (6.15) გამოსახულებების გამოყენებით შევადგინოთ ნებისმიერი კვეთის მობრუნების კუთხისა და გადაადგილების გამოსახულებები:



ნახ. 6.34

$$EI_x \theta = -Plz + \frac{Pz^2}{2};$$

$$EI_x v = -\frac{Plz^2}{2} + \frac{Pz^3}{6},$$

საიდანაც C კვეთისათვის ($z=l$) მივიღებთ:

$$\theta_c = -\frac{Pl^2}{2EI_x}; \quad v_c = -\frac{Pl^3}{3EI_x}.$$

ეს შედეგი მოწმობს, რომ C კვეთის მობრუნება ხდება საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, გადაადგილება კი -

Oy ღერძის მიმართულების საწინააღმდეგოდ.

ჩავატაროთ გაანგარიშება მორის ინტეგრალის გამოყენებით. მღუნავი მომენტის გამოსახულება იქნება $M_{xp} = -Pu$. გადაადგილების სამოვნელად ძელის C წერტილში მოვდოთ ერთეულოვანი ძალა (ნახ. 6.34,გ), $M_{x1} = -1 \cdot u$, მაშინ

$$v_c = \int_0^l \frac{(-P \cdot u)(-u)}{EI_x} du = \frac{Pl^3}{3EI_x}.$$

მობრუნების კუთხის საბოლოოდ ძელს C კვეთში მოვლოთ ერთეულოვანი მომენტი $M = -1$ (ნახ. 6.34, დ):

$$\theta_c = \int_0^l \frac{(-P \cdot u)(-1)}{EI_x} du = \frac{Pl^2}{2EI_x}.$$

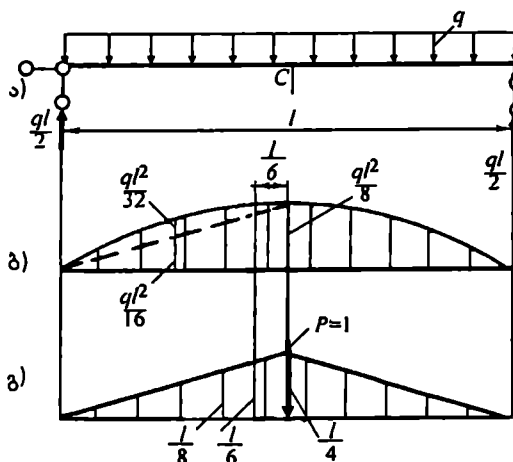
მიღებული გადაადგილება და მობრუნების კუთხე დადებითია. ეს იმას ნიშნავს, რომ მათი მიმართულება ემთხვევა მოდებული ერთეული ძალის და მომენტის მიმართულებებს.

ჩაეტაროთ გაანგარიშება ვერეშჩაგინის ხერხის გამოყენებით. კვეთის გადაადგილება და მობრუნების კუთხე განვსაზღვროთ ერთეულოვანი მომენტის და მღუნავი მომენტის ეპიურების გადამრავლებით (ნახ. 6.34):

$$v_c = \frac{\left(-\frac{1}{2}Pl^2\right)\left(-\frac{2}{3}l\right)}{EI_x} = \frac{Pl^3}{3EI_x}.$$

$$\theta_c = \frac{\left(-\frac{1}{2}Pl^2\right)(-1)}{EI_x} = \frac{Pl^2}{2EI_x}.$$

მაგალითი ნ.2. განვსაზღვროთ C წერტილის ვერტიკალური გადაადგილება (ნახ. 6.35) დრეკადი ხაზის განტოლების და ვერეშჩაგინის ხერხის გამოყენებით. გამოვიყენოთ დრეკადი ხაზის განტოლება



ნახ. 6.35

$$EI_x v = EI_x \theta_0 z + \frac{ql}{6} z^3 - \frac{qz^4}{24}$$

საწყისი კვეთის მობრუნების კუთხე განვსაზღვროთ პირობიდან, რომ მარჯვენა საყრდენზე გადაადგილება ნულის ტოლია

$$EI_x v(l) = 0 = EI_x \theta_0 l + \frac{ql^4}{12} - \frac{ql^4}{24} = 0;$$

$$\theta_0 = -\frac{ql^3}{24EI_x}.$$

გადაადგილების განტოლება საბოლოოდ ჩაიწერება ასეთი სახით:

$$EI_x v = -\frac{ql^3}{24} z + \frac{ql}{12} z^3 - \frac{qz^4}{24}.$$

განვსაზღვროთ C კვეთის გადაადგილება

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{ql^4}{48} + \frac{ql^4}{96} - \frac{ql^4}{384} \right) = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_x}.$$

გამოვიყენოთ ვერეშაგინის ხერხი.

ძელის C წერტილში მოვდოთ ერთეულოვანი ძალა და ავგავთ შესაბამისი მლუნავი მომენტების ეპიურა (ნახ. 6.35, გ). გადაადგილებას განვსაზღვრავთ ეპიურების გამამრავლებით:

$$v_c = 2 \left[\frac{\frac{2}{3} \left(\frac{ql^2}{32} \cdot \frac{l}{2} \right) \frac{l}{8}}{EI_x} + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \right) \frac{l}{6}}{EI_x} \right] = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_x}.$$

მაგალითი 6.3. გავინაგარიშოთ C კვეთის გადაადგილება (ნახ. 6.36) დრეკადი ხაზის განტოლებისა და ვერეშაგინის ხერხის გამოყენებით.

გამოვიყენოთ დრეკადი ხაზის განტოლება

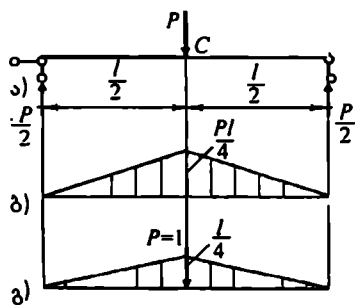
$$EI_x v = EI_x \theta_0 z + \frac{Pz^3}{2 \cdot 6} - \frac{P \left(z - \frac{l}{2} \right)^3}{6}.$$

საწყისი კვეთის მობრუნების კუთხეს განვსაზღვრავთ პირობიდან $v(l) = 0$:

$$EI_x \theta_0 l + \frac{Pl^3}{12} - \frac{Pl^3}{48} = 0; \quad \theta_0 = -\frac{Pl^2}{16EI_x}.$$

დრეკადი ხაზის საბოლოო განტოლება იქნება

$$EI_x v = -\frac{Pl^2}{16} z + \frac{Pz^3}{12} - \frac{P \left(z - \frac{l}{2} \right)^3}{6}.$$



ნახ. 6.36

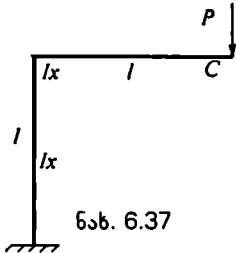
განვსაზღვროთ C წერტილის გადაადგილება, როცა $z = (l/2)$.

$$v_C = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{Pl^3}{32} + \frac{Pl^3}{96} \right) = -\frac{Pl^3}{48EI_x}.$$

გამოვიყენოთ ვერეშჩაგინის ხერხი. C წერტილში მოვდოთ ერთეულოვანი ძალა და მისთვის ავაგოთ მლუნავი მომენტების ეპიურა, (ნახ. 6.36, გ). ეპიურების გადამრავლებით მივიღებთ:

$$v_C = \frac{2}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{Pl}{4} \frac{l}{2} \right) \frac{l}{6} \right] = \frac{Pl^3}{48EI_x}.$$

მაგალითი 6.4. განვსაზღვროთ ჩარჩოს C კვეთის გადაადგილება და მობრუნების კუთხე ვერეშჩაგინის ხერხის გამოყენებით (ნახ. 6.37). ავაგოთ მლუნავი მომენტის ეპიურა (ნახ. 6.38).



ნახ. 6.37

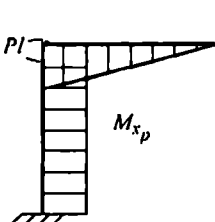
ვინაიდან C კვეთის გადაადგილების მიმართულება უცნობია, ცალ-ცალკე განვსაზღვროთ ვერტიკალური და შორიზონტალური გადაადგილებები. საერთო გადაადგილება განისაზღვრება როგორც მათი გეომეტრიული ჯამი.

განვსაზღვროთ ვერტიკალური გადაადგილება. ჩარჩოს C კვეთში მოვდოთ ერთეულოვანი ვერტიკალური ძალა და ავაგოთ მისი მლუნავი მომენტების M_{11} ეპიურა (ნახ. 6.39). ეპიურების გადამრავლებით განვსაზღვროთ C კვეთის ვერტიკალური გადაადგილება

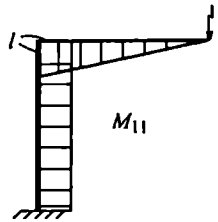
$$\delta_{1C} = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} (Pl \cdot l) \frac{2l}{3} + (Pl \cdot l) l \right] = \frac{4}{3} \frac{Pl^3}{EI_x}.$$

განვსაზღვროთ C კვეთის შორიზონტალური გადაადგილება. ჩარჩოს ამ კვეთში მოვდოთ ერთეულოვანი შორიზონტალური ძალა და ავაგოთ მლუნავი მომენტების ეპიურა (ნახ. 6.40). ეპიურების გადამრავლებით მივიღებთ:

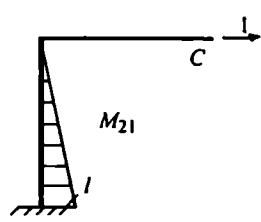
$$\delta_{2C} = \frac{1}{EI_x} (Pl \cdot l) \frac{l}{2} = \frac{Pl^3}{2EI_x}.$$



ნახ. 6.38



ნახ. 6.39



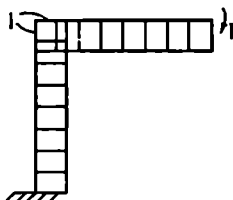
ნახ. 6.40

საბოლოოდ, C კვეთის გადაადგილება

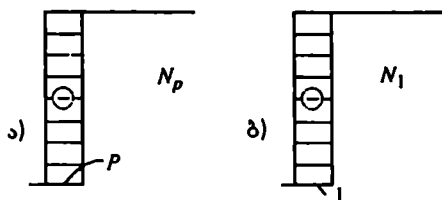
$$\delta_C = \sqrt{\delta_{1C}^2 + \delta_{2C}^2} = 1,4 \frac{Pl^3}{EI_x}$$

კვეთის მობრუნების კუთხის განსაზღვრისათვის ჩარჩოს C კვეთში მოვდოთ ერთეულოვანი მომენტი, ავავოთ მისი მლუნავი მომენტების ეპიურა (ნახ. 6.41) და იგი გადავამრავლოთ M_{xp} ეპიურაზე (ნახ. 6.38)

$$\theta_C = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} (Pl \cdot l) \cdot 1 + (Pl \cdot l) \cdot 1 \right] = \frac{3}{2} \frac{Pl^2}{EI_x}$$



ნახ. 6.41



ნახ. 6.42

გადაადგილებების განსაზღვრისას მხედველობაში არ მივიღია ნორმალური ძალა, რადგან ჩავთვალეთ, რომ მისი როლი C კვეთის გადაადგილებაში უმნიშვნელოა. შევამოწმოთ ეს მტკიცება C კვეთის ვერტიკალური გადაადგილებისათვის. ამისათვის ავავოთ სისტემის და პირველი ერთეულოვანი ძალის ნორმალური ძალების ეპიურები (ნახ. 6.42). ამ ეპიურების გადამრავლებით მივიღებთ ნორმალური ძალით გამოწვეულ

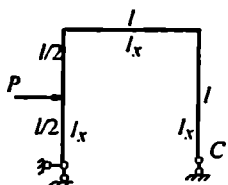
ვერტიკალურ $\Delta\delta_{1C} = \frac{Pl \cdot l}{EF}$ გადაადგილებას. საბოლოოდ, C კვეთის ვერტიკალური გადაადგილება

$$\Delta\delta_{1C}^* = \delta_{1C} + \Delta\delta_{1C} = \frac{4}{3} \frac{Pl^3}{EI_x} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{i_x}{l} \right)^2 \right]$$

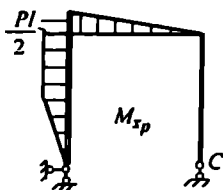
რადგან ჩარჩო ძელებისაგან შედგება და კვეთის ინერციის i_x რადიუსი ბევრად ნაკლებია ელემენტის l სიგრძეზე, გადაადგილების განსაზღვრისას შეიძლება ფრჩხილებში მოთავსებული მეორე შესაკრების უგულვებელყოფა, როგორც ერთთან შედარებით უფრო მაღალი რიგის მცირე სიდიდისა. ეს იმაზე მიუთითებს, რომ გადაადგილებების განსაზღვრისას ნორმალური ძალის გათვალისწინება აუცილებელი არ არის.

მაგალითი ნ.წ. ვერეშჩაგინის ხერხის გამოყენებით განვსაზღვროთ ჩარჩოს C კვეთის ჰორიზონტალური გადაადგილება და მობრუნების კუთხე (ნახ. 6.43), ავავოთ მლუნავი მომენტების ეპიურა (ნახ. 6.44).

ჩარჩოს C კვეთში მოვდოთ ჰორიზონტალური ერთეულოვანი ძალა და ავაგოთ შესაბამისი მლუნავი მომენტების M_{11} ეპიურა (ნახ. 6.45 ა),



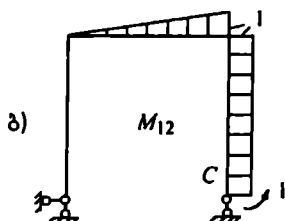
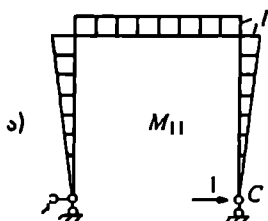
ნახ. 6.43



ნახ. 6.44

კვეთის ჰორიზონტალურ გადაადგილებას განვსაზღვრავთ M_{xp} და M_{11} ეპიურების გადამრავლებით:

$$\delta_C = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{Pl}{2} \cdot \frac{l}{2} \right) \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \left(l + \frac{l}{2} \right) \frac{l}{2} \cdot \frac{Pl}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{Pl}{2} \cdot l \right) \cdot l \right] = \frac{23 Pl^3}{48 EI_x}.$$



ნახ. 6.45

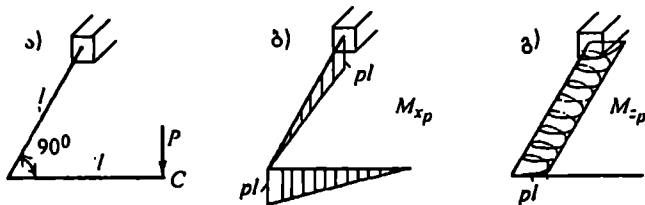
განვსაზღვროთ C კვეთის მობრუნების კუთხე, რისთვისაც ჩარჩოს ამ კვეთში მოვდოთ ერთეულოვანი მომენტი და ავაგოთ შესაბამისი მლუნავი მომენტების M_{12} ეპიურა (ნახ. 6.45 ბ). მისი M_{xp} -ზე გადამრავლებით განვსაზღვრავთ C კვეთის მობრუნების კუთხეს

$$\theta_C = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{Pl}{2} \cdot l \right) \frac{1}{3} \right] = \frac{Pl^2}{12EI_x}.$$

მაგალითი 6.6. განვსაზღვროთ ჩარჩოს C კვეთის ვერტიკალური გადაადგილება (ნახ. 6.46, ა). მოცემულია, რომ ჩარჩოს ელემენტებს გააჩნიათ ერთი და იმავე ზომების წრიული განივი კვეთები. ავაგოთ მლუნავი და მგრები მომენტების ეპიურები (ნახ. 6.46).

ჩარჩოს C კვეთში მოვდოთ ერთეულოვანი ვერტიკალური ძალა და ავაგოთ მისთვის მლუნავი და მგრები მომენტების ეპიურები (ნახ. 6.47). ამ ეპიურების 6.46 ნახაზის შესაბამის ეპიურებზე გადამრავლებით განვსაზღვრავთ კვეთის ვერტიკალურ გადაადგილებას

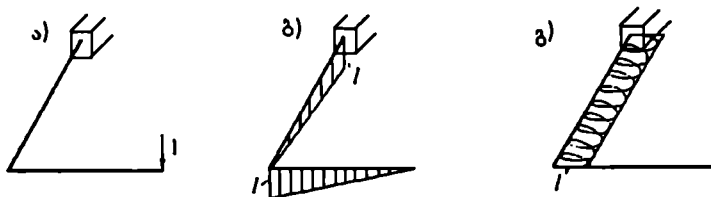
$$\delta_C = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} (Pl \cdot l) \frac{2l}{3} + \frac{1}{2} (Pl \cdot l) \frac{2l}{3} \right] + \frac{1}{GI_p} (Pl \cdot l) \cdot l = \frac{2 Pl^3}{3 EI_x} + \frac{Pl^3}{GI_p}.$$



ნახ. 6.46

თუ ჩავთვლით, რომ პუასონის კოეფიციენტის მნიშვნელობა $\mu = 0,25$ და გავითვალისწინებთ წრიული კვეთის ღერძული და პოლარული მომენტების მნიშვნელობებს, მივიღებთ:

$$GI_p = \frac{E \cdot 2I_x}{2(1 + \mu)} = \frac{4}{5} EI_x,$$

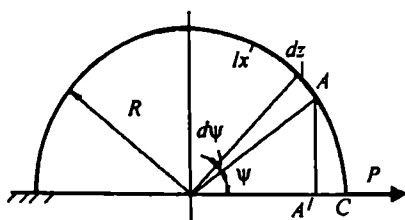


ნახ. 6.47

კვეთის ვერტიკალური გადაადგილება

$$\delta_C = \frac{2 Pl^3}{3 EI_x} + \frac{5 Pl^3}{4 EI_x} = \frac{23 Pl^3}{12 EI_x}.$$

მაგალითი 6.7. მცირე სიძრულის ნახევარწრიული ჩარჩოსათვის შორის ინტეგრალის



ნახ. 6.48

გამოყენებით გავინაგარიშოთ C კვეთის გადაადგილება და მობრუნების კუთხე (ნახ. 6.48).

ნებისმიერ A კვეთში დავადგინოთ მლუნავი მომენტების მნიშვნელობა

$$M_P = PR \sin \psi.$$

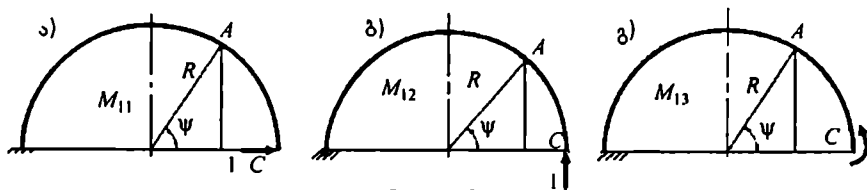
ჩარჩოს C კვეთში მოვდოთ შორიზონტალური და ვერტიკალური ერთეულოვანი ძალები და ერთეულოვანი მომენტი (ნახ. 6.49).

ამ ერთეულოვანი ფაქტორებისათვის განვსაზღვროთ მლუნავი მომენტების გამოსახულებები ნებისმიერ კვეთში:

$$M_{11} = R \sin \psi, \quad M_{12} = R(1 - \cos \psi), \quad M_{13} = 1, \quad dz = R d\psi.$$

გავიანგარიშოთ C კვეთის შორიზონტალური გადაადგილება

$$\delta_{C1} = \int_{(l)} \frac{M_P M_{11}}{EI_x} dz = \int_0^\pi \frac{PR^3 \sin^2 \psi}{EI_x} d\psi = \frac{PR^3}{EI_x} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\psi}{2} d\psi = \frac{\pi PR^3}{2EI_x}.$$



ნახ. 6.49

გავიანგარიშოთ C კვეთის ვერტიკალური გადაადგილება:

$$\begin{aligned} \delta_{C2} &= \int_{(l)} \frac{M_P M_{12}}{EI_x} dz = \int_0^\pi \frac{PR^3 \sin \psi (1 - \cos \psi)}{EI_x} d\psi = \\ &= \frac{PR^3}{EI_x} \left(-\cos \psi - \frac{\sin^2 \psi}{2} \right) \Big|_0^\pi = 2 \frac{PR^3}{EI_x}. \end{aligned}$$

გავიანგარიშოთ C კვეთის მობრუნების კუთხე:

$$\theta_C = \int_{(l)} \frac{M_P M_{13}}{EI_x} dz = \int_0^\pi \frac{PR^2 \sin \psi d\psi}{EI_x} = \frac{PR^2}{EI_x} (-\cos \psi) \Big|_0^\pi = \frac{2PR^2}{EI_x}.$$

კვეთის გადაადგილება განისაზღვრება, როგორც კვეთის შორიზონტალური და ვერტიკალური გადაადგილებების გეომეტრიული ჯამი:

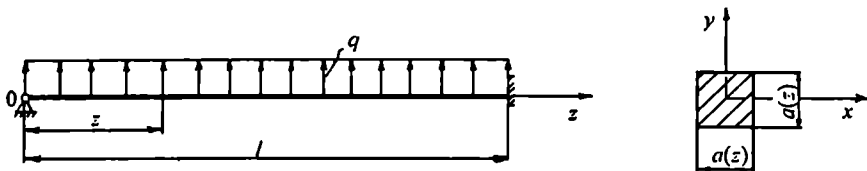
$$\delta_C = \sqrt{\delta_{C1}^2 + \delta_{C2}^2} = \frac{PR^3}{EI_x} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2^2} \approx 2,54 \frac{PR^3}{EI_x}.$$

მაგალითი ნ.წ. ცვალეზადი განივი კვეთის მქონე ძელზე მოქმედებს მუდმივი ინტენსიურობის დატვირთვა (ნახ. 6.50). მისი მარცხენა საყრდენი უძრავი ცილინდრული სახსრითაა დამაგრებული, ხოლო მარჯვენა - ხისტად, ე.ი. სრულდება პირობები: $z=0$: $u(0)=M_{\ell}(0)=0$; $z=l$: $u(l)=\theta(l)=0$. გავიანგარიშოთ ძელი, თუ მოცემულია მისი გეომეტრიული ზომები: დატვირთვები და მასალის მახასიათებლები: $E=2 \cdot 10^5$ მგპა,

$$q=1 \cdot 10^5 \text{ ნ/მ}, l=1,5 \text{ მ}, a=0,02 \text{ მ}, \quad a(z) = a \left[1 + \left(\frac{z}{l} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ძელის განივი კვეთის ღერძული ინერციის მომენტის ცვლილების კანონის დასადგენად გამოვიყენოთ (3.28) ფორმულა:

$$I_x = \frac{ch^3}{12} = \frac{a^4}{12} \left[1 + \left(\frac{z}{l} \right)^4 \right]^2 = I_0 \left[1 + \left(\frac{z}{l} \right)^4 \right]^2, \quad I_0 = \frac{a^4}{12}.$$



ნახ. 6.50

შემოვიღოთ შემდეგი უგანზომილებო ცვლადები და პარამეტრები:

$$t = \frac{z}{l}; \quad x_1 = \frac{v}{l}; \quad x_2 = \theta; \quad x_3 = \frac{Q_y l^2}{EI_0}; \quad ()' = \frac{d()}{dt};$$

$$x_4 = \frac{M_x l}{EI_0}; \quad p = \frac{q l^3}{EI_0}; \quad \lambda = \frac{I_0}{I_x} = \left[1 + (t)^4 \right]^{-2}$$

ამ აღნიშვნების გამოყენებით, (6.1) და (6.4) განტოლებების შესაბამისად, მივიღებთ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = \lambda x_4; \quad \frac{dx_3}{dt} = -p; \quad \frac{dx_4}{dt} = -x_3.$$

წარმოვადგინოთ სისტემა შემდეგი ვექტორულ-მატრიცული სახით:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{T}.$$

აქ გამოყენებულია აღნიშვნები:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \\ 0 \end{pmatrix}.$$

სასაზღვრო პირობები ჩაიწერება ასეთნაირად:

$$t = 0: \quad x_1(0) = 0; \quad x_4(0) = 0;$$

$$t = 1: \quad x_1(1) = 0; \quad x_2(1) = 0.$$

ამოცანის ამოხსნელად საჭიროა რიცხვითი ინტეგრირების საშუალებით მივიღოთ სისტემის ერთი კერძო \mathbf{X}^* ამონახსნი და შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემის (სისტემაში საჭიროა დავუშვათ, რომ $T=0$) ორი ზოგადი \mathbf{X}_1^0 და \mathbf{X}_2^0 ამონახსნი. მიღებული შედეგების გამოყენებით ვადგენთ ამოცანის საერთო ამონახსნს:

$$\mathbf{X} = C_1 \mathbf{X}_1^0 + C_2 \mathbf{X}_2^0 + \mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} C_1 x_{11}^0 + C_2 x_{21}^0 + x_1^* \\ C_1 x_{12}^0 + C_2 x_{22}^0 + x_2^* \\ C_1 x_{13}^0 + C_2 x_{23}^0 + x_3^* \\ C_1 x_{14}^0 + C_2 x_{24}^0 + x_4^* \end{pmatrix}.$$

სისტემის ინტეგრებისათვის ვიღებთ ვექტორის შემდეგ საწყის მნიშვნელობებს:

$$\mathbf{X}_1^0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_2^0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}^*(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ამ შემთხვევაში საწყისი პირობა $t=0$ კვეთში წინასწარაა დაკმაყოფილებული, რა-შიც ადვილად დავრწმუნდებით ამ კვეთისათვის ამოცანის ამონახსნის მნიშვნელობის განხილვით

$$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ C_1 \\ C_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ამრიგად, დასაკმაყოფილებელი დავგვრჩა ძელის მარჯვენა საყრდენის ჩამაგრების ხასიათიდან გამომდინარე პირობები. ამის შესაძლებლობას გვაძლევს C_1 და C_2 ინტეგრების მუდმივების შერჩევა, რომლებიც ფიზიკური არსით შეესაბამება საწყის კვეთში მობრუნების კუთხისა და განივი ძალის პარამეტრის მნიშვნელობებს.

მუდმივების დასადგენად განვიხილავთ ვექტორის მნიშვნელობას მარჯვენა საყრდენის შესაბამისი $t=1$ კვეთში და, არსებული პირობების თანახმად, მის პირველ და მეორე კოორდინატებს გავუტოლობთ ნულს

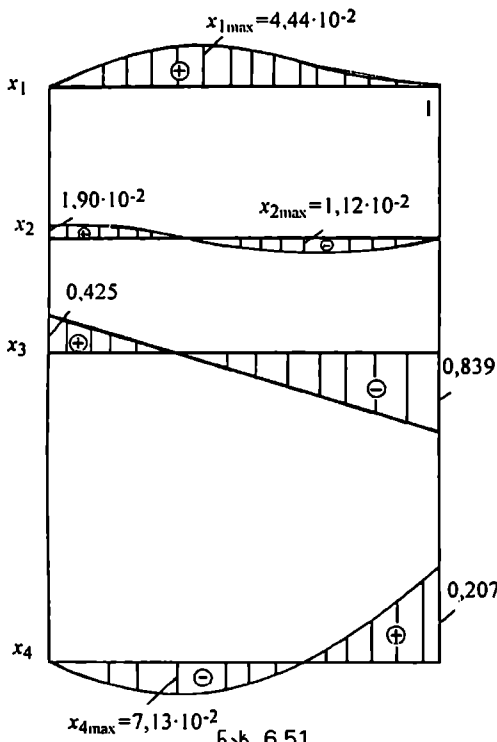
$$C_1 x_{11}^0(1) + C_2 x_{21}^0 + x_1^* = 0;$$

$$C_1 x_{12}^0(1) + C_2 x_{22}^0 + x_2^* = 0.$$

სისტემის ამოხსნით დავადგენთ მუდმივების მნიშვნელობებს:

$$C_1 = 0,019018; \quad C_2 = 0,424857.$$

ამრიგად, ინტეგრების მუდმივები ცნობილია და არსებული ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავადგინოთ უცნობი ვექტორის მნიშვნელობა ნებისმიერი კვებისათვის.



მაგრამ ასეთი გზით ამოცანის ამო-
სახსნელად საჭიროა მანქანის მეხ-
სიერებაში დავიმახსოვროთ დამხ-
მარე მასალა, თუმცა ეს, დიდ სირ-
თულეს არ წარმოადგენს. უფრო
მარტივია მოვახდინოთ სისტემის
ერთი, დამატებითი ინტეგრირება
საწყისი ვექტორის მნიშვნელობის
გამოყენებით:

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,019018 \\ 0,424857 \\ 0 \end{pmatrix}$$

და გზადაგზა დავადგინოთ ვექტო-
რის მნიშვნელობები სასურველ
კვებებში.

ამოცანის ამოხსნის პროგრამა
ითვლისწინებს ამოცანის სრულად
ამოხსნას, მუდმივების დადგენას,
შემდგომ ძელის სიგრძის შესაბამი-
სი მონაკვეთის ოც თანაბარ ნაწი-
ლად დაყოფას და სასაზღვრო წერ-
ტილებისათვის ვექტორის მნიშვნე-
ლობის გაანგარიშებას. გაანგარიშე-
ბის შედეგი ეპიურების სახით გამო-
სახულია 6.51 ნახაზზე.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ აქ განხილული ფორმულები და პროგრამა, მათში შესაბა-
მისი ცვლილებების შეტანის შემდეგ, იძლევა ნებისმიერი ცვლადი განიკვეთის მქონე
ძელის გაანგარიშების საშუალებას სხვადასხვა სახის დატვირთვების მოქმედებისას და
საყრდენების ჩამატებისას.

თაზი VII. სტატისტიკურად ურკვევი სისტემები

§46. ძალთა მუთოლი. კანონიკურ განტოლებათა სისტემა

ღეროვან სისტემას, რომელიც შედგება ერთ სიბრტყეში მოთავსებული ურთიერთხისტად შეერთებული ღეროებისაგან, ბრტყელი ღეროვანი სისტემა ეწოდება. ასეთ სისტემას შეუძლია თავის თავზე აილოს სხვადასხვა სახის გარე ძალები, რომლებიც მისი კონტურის სიბრტყეში მოქმედებენ, მაგრამ, ამისათვის, საჭიროა, რომ არსებობდეს წონასწორობა აქტიურ და რეაქტიულ ძალებს შორის. და, მეორე – სისტემა იყოს გეომეტრიულად არაცვლადი. ასეთ გაწონასწორებულ და გეომეტრიულად არაცვლად სისტემებში კვეთების გადაადგილებები განპირობებულია მხოლოდ დრეკადი დეფორმაციებით.

ბრტყელი სისტემებისათვის, იშვიათი გამონაკლისის გარდა, წონასწორობის უზრუნველსაყოფად საჭიროა არანაკლებ სამი ბმა, რომლებიც შეიძლება ზღუდავდნენ ხაზოვან კუთხურ გადაადგილებებს, განპირობებულია ბმების სახით. ასეთი სისტემებისათვის შეიძლება ჩაიწეროს წონასწორობის შემდეგი სამი განტოლება:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_i = 0. \quad (7.1)$$

სტატისტიკურად რკვევადი სისტემის სიმტკიცე და სიხისტე შეიძლება აღმოჩნდეს არასაკმარისი და ამიტომ, მის ძირითად ბმებს შეიძლება დამატოს სხვა ბმები, რომლებიც შეზღუდავენ სისტემის გადაადგილებებს და გაზრდიან მის სიხისტეს, მაგრამ წონასწორობის განტოლებათა რაოდენობა ამ შემთხვევაშიც უცვლელად დარჩება, თუმცა, დამატებითი ბმები განპირობებენ ახალი რეაქციის ძალების წარმოშობას. შევნიშნოთ, რომ აქ სახსროვნად შეერთებული ძელების სისტემებს არ ვინილაფთ.

სისტემებს, რომლებშიდაც უცნობი რეაქციული ფაქტორების რაოდენობა შეესაბამება სტატისტიკის წონასწორობის განტოლებათა რიცხვს, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, სტატისტიკურად რკვევადი სისტემები ეწოდება. სტატისტიკურად ურკვევი ისეთი სისტემაა, რომლის რეაქტიული ფაქტორების რაოდენობა აღემატება სტატისტიკის წონასწორობის განტოლებათა რიცხვს.

როგორც აღვნიშნეთ, ნებისმიერ სტატისტიკურად ურკვევ სისტემას აქვს ზედმეტი უცნობები და ამიტომ მხოლოდ სტატისტიკის განტოლებების საშუალებით მისი განხილვა შეუძლებელია.

სტატისტიკურად ურკვევ სისტემას, თავისი რეაქციის ძალებით ეწოდება საწყისი სისტემა. ამ სისტემის განხილვისა და უცნობების დასადგენად საჭიროა გამოვიყენოთ ძირითადი სისტემა, რომელიც მიიღება საწყისი სისტემიდან, თუ

მას მოვაცილებთ ყველა ძალას, როგორც აქტიურს, ისე რეაქტიულს. ძირითადი სისტემა უნდა იყოს სტატიკურად რკვევადი და გეომეტრიულად არაცვლადი. საწყისი სისტემის გადაადგილებებს ზედმეტი ბმები ზღუდავენ. ამიტომ ეკვივალენტური სისტემის გადაადგილებები, რომლებიც ზედმეტ ბმებს შეესაბამება, ნულის ტოლია. *n*-ქერ სტატიკურად ურკვევი სისტემისათვის მივიღებთ იმავე რაოდენობის პირობას:

$$\Delta_1 = 0; \quad \Delta_2 = 0; \quad \dots, \quad \Delta_n = 0. \quad (7.2)$$

ძალთა მოქმედების დამოუკიდებლობის პრინციპის გამოყენებით გავშალოთ პირველი განტოლება, რომლის შესაბამისად სისტემის გადაადგილება პირველი ზედმეტი უცნობის მიმართულებით (პირველი მიმართულებით) ნულის ტოლია

$$\Delta_1 = \Delta_{1,x_1} + \Delta_{1,x_2} + \dots + \Delta_{1,x_n} + \delta_{1p} = 0. \quad (7.3)$$

სადაც Δ_{1,x_i} არა-ეკვივალენტური სისტემის გადაადგილება პირველი მიმართულებით, გამოწვეული X_i უცნობი ძალით; δ_{1p} არის გადაადგილება იმავე მიმართულებით, გამოწვეული ძირითად სისტემაზე მოდებული გარე ძალებით.

გავამარტივოთ (7.3) განტოლება. ამისათვის გამოვიყენოთ ძალებსა და გადაადგილებებს შორის წრფივი დამოკიდებულება (1.9):

$$\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{1p} = 0. \quad (7.4)$$

აქ δ_{1i} არის სისტემის გადაადგილება პირველი მიმართულებით, გამოწვეული X_i უცნობის მიმართულებით მოდებული ერთეულოვანი ძალით.

საბოლოოდ, თუ ანალოგიურად გავშლით სხვა განტოლებებსაც, გადაადგილებების განტოლებების სისტემა შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \dots + \delta_{2n}X_n + \delta_{2p} &= 0; \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \dots + \delta_{nn}X_n + \delta_{np} &= 0; \end{aligned} \quad (7.5)$$

გადაადგილებების ურთიერთობის პრინციპიდან გამომდინარე, შეგვიძლია დავადგინოთ შემდეგი თანაფარდობა:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}. \quad (7.6)$$

ამრიგად, მივიღეთ წრფივ ალგებრულ n განტოლებათა სისტემა შესაბამისი რაოდენობის უცნობი რეაქციის ძალებისა და შიგა ძალოვანი ფაქტორებისათვის. ამიტომ ამ გზით სისტემის განგარიშების მეთოდს ძალთა მეთოდი ეწოდება. (7.5) სისტემას კანონიკური სისტემა ეწოდება. ეს სისტემა შეიძლება წარმოვადგინოთ მატრიცულ-ვექტორული ფორმით:

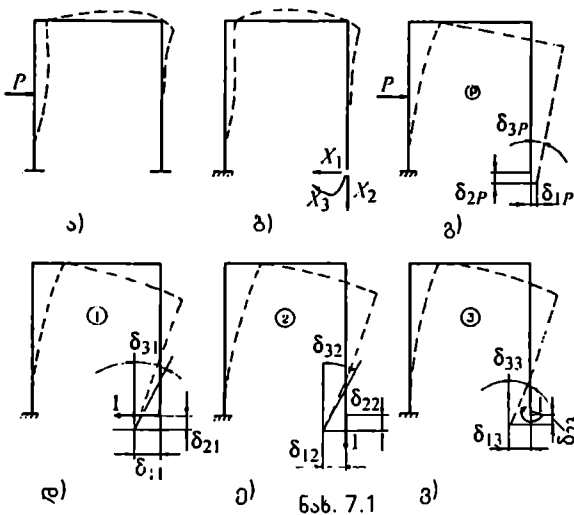
$$AX = -B; \quad X = -A^{-1}B.$$

(7.7)

აქ გამოყენებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$$A = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots & \delta_{2n} \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \delta_{1P} \\ \delta_{2P} \\ \delta_{nP} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_n \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

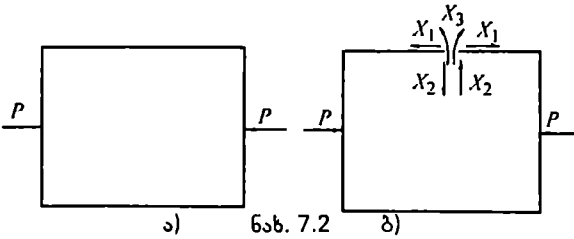
სამჭერ სტატიკურად ურკვევი სისტემა ილუსტრირებულია 7.1 ნახაზზე. სისტემა, რომლისთვისაც ზედმეტ უცნობებად აღებულია რეაქციის ძალები,



ნახ. 7.1

გარე სტატიკურად ურკვევია. ასეთი სისტემის მაგალითი მოცემულია 7.1 ნახაზზე. სისტემა, რომლისთვისაც ზედმეტ უცნობებად აღებულია შიგა ძალოვანი ფაქტორები, შიგა სტატიკურად ურკვევია. ასეთი სისტემისათვის ძალაში რჩება (7.5) განტოლებათა სისტემა, მაგრამ მათი არსი სხვაა. ყოველი განტოლება იმას მოწმობს, რომ გამკვეთი სიბრტყით ერთმანეთს მოცილებული კვეთები არ განიცდიან ურთიერთგადაადგილებას შესაბამისი მიმართულებით. მაგალითად, 7.2 ნახაზზე ნაჩვენებია სისტემის მარჯვენა და მარცხენა კვეთები არ განიცდის ურთიერთდაშორებას (X_1 მიმართულებით), ურთიერთცოცვას (X_2 მიმართულებით) და ურთიერთმობრუნებას (X_3 მიმართულებით).

გარე და შიგა ურკვევი სისტემებად კლასიფიკაცია, გარკვეული თვალსაზრისით პირობითია. ვინაიდან, ზოგ შემთხვევაში, ერთი და იგივე სისტემა შეიძლება წარმო-

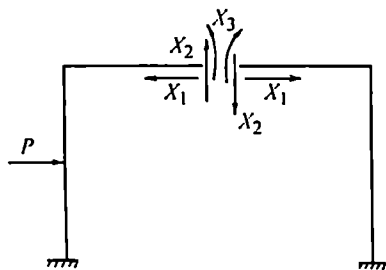


ნახ. 7.2

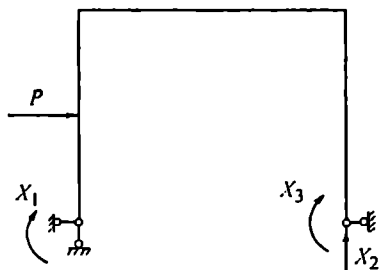
ვადგინოთ როგორც პირველი, ისე მეორე სახით. მაგალითად, 7.1 ნახაზზე სისტემა განხილულია როგორც გარე სტატიკურად ურკვევი. მაგრამ იგივე სისტემა 7.3 ნახაზზე წარმოდგენილია, როგორც შიგა სტატიკურად ურკვევი.

სტატიკური ურკვევობის ამოხსნის შემდეგ საჭიროა ავადგინოთ შიგა ძალოვანი ფაქტორების ჯამური ეპიურები. მაგალითად, ჯამური მღუნავი მომენტების ეპიურის ასაგებად გამოვიყენოთ ძალთა მოქმედების დამოუკიდებლობის პრინციპი თითოეული უცნობისათვის, ამ უცნობის შესაბამისი ერთეულოვანი ძალის მღუნავი მომენტების ეპიურის გადამრავლებით შესაბამისი უცნობის მნიშვნელობაზე, განვსაზღვრავთ მღუნავ $M_i X_i$ მომენტს, ხოლო მათი ექვივალენტურ სისტემაზე მოდებულ აქტიური ძალების მღუნავი მომენტების ეპიურასთან შეჯამებით მივიღებთ ჯამური მღუნავი მომენტის მნიშვნელობას:

$$M_{\Sigma} = M_P + M_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots + M_n X_n. \quad (7.9)$$



ნახ. 7.3



ნახ. 7.4

როგორც აღვნიშნეთ, ძირითადი სისტემა უნდა იყოს სტატიკურად რკვევადი და გეომეტრიულად უცვლელი. ეს უკანასკნელი პირობა მოწმობს, რომ სისტემას ყოველთვის არ შეიძლება მოვაცილოთ ნებისმიერი ზედმეტი ბმები. მაგალითად, თუ 7.1 ნახაზზე ნაჩვენებ ჩარჩოს სამ ზედმეტ ბმას მოვაცილებთ, როგორც ეს ნაჩვენებია 7.4 ნახაზზე. მივიღებთ კინემატიკურად ცვალებად სისტემას. ასეთი სისტემის ძირითად სისტემად გამოყენება არ შეიძლება.

§47. ძირითადი სისტემის რაციონალური არჩევა. გადაადგილებების განსაზღვრა სტატიკურად ურკვევ სისტემებში

როგორც აღვნიშნეთ, სტატიკურად ურკვევობის ხარისხი და შესაბამისი ზედმეტი უცნობების რაოდენობა განისაზღვრება ზედმეტი ბმების რიცხვით. მაგრამ, კერძო შემთხვევაში, მაგალითად, სისტემის სიმეტრიის პირობების გამოყენებით შეიძლება წინასწარ განვსაზღვროთ ზოგიერთი უცნობი და კანონიკური განტოლებების შედგენისას გავითვალისწინოთ მათი მნიშვნელობა. ასეთი მიდგომა იძლევა განტოლებათა რიცხვის შემცირების შესაძლებლობას.

სტატიკურად ურკვევი სისტემებისათვის გადაადგილებების გაანგარიშება ხდება მორის ინტეგრალის ან ვერეშჩაგინის ხერხის გამოყენებით. ამისათვის საჭიროა მოცემულ სისტემას მოვლით ერთეულოვანი ძალა იმ კვეთში, რომლის გადაადგილებაც გვინტერესებს. ამ შემთხვევაში საჭიროა სტატიკური ურკვევობის კიდევ ერთხელ ამოხსნა, რის შემდეგაც ავაგებთ შიგა ძალოვანი ფაქტორების ჩამურ ეპიურებს სისტემაზე ერთეულოვანი ძალის მოდებისას; გადაადგილებას კი განვსაზღვრავთ მოცემულ სისტემაზე მოდებული ძალების და ერთეულოვანი ძალის შიგა ძალოვანი ფაქტორების ეპიურების გადამრავლებით.

შეიძლება ვისარგებლოთ უფრო მარტივი ხერხით. ვინაიდან მოცემული და ექვივალენტური სისტემის გადაადგილებები ერთნაირია, გადაადგილებას განვსაზღვრავთ ამ უკანასკნელისათვის. ამისათვის ერთეულოვან ძალას მოვდებთ ძირითად სისტემას, რომელიც სტატიკურად რკვევადია. ამ შემთხვევაში თავიდან ავიცილებთ სტატიკურად ურკვევობის ზედმეტად გახსნის აუცილებლობას.

განვიხილოთ სტატიკურად ურკვევი სისტემის ამოხსნის სისწორის საკითხი. ამისათვის საჭიროა ავირჩიოთ ახალი ძირითადი სისტემა. რადგან შესაბამისი ექვივალენტური სისტემის გადაადგილება ზედმეტი უცნობების მიმართულებით ნულის ტოლია, ყოველი უცნობის შესაბამისი ერთეულოვანი ძალის შიგა ძალოვანი ფაქტორების ეპიურების სისტემის მლუნავი მომენტების ჩამურ ეპიურაზე გადამრავლებით უნდა მივიღოთ ნული. ამ პირობების შესრულება საშუალებას გვაძლევს დავრწმუნდეთ ამოცანის ამოხსნის სისწორეში. რა თქმა უნდა, ახალი ძირითადი სისტემა ისეთი უნდა იყოს, რომ თუ ყველა არა, ერთეულოვანი ძალების შიგა ძალოვანი ფაქტორების ეპიურებიდან ერთი მაინც განსხვავდებოდეს სისტემის გაანგარიშებისას უკვე გამოყენებული ერთეულოვანი ძალების შიგა ძალოვანი ფაქტორების ეპიურებისაგან.

§48. სტასტიკურად ურკვევი სისტემების რიცხვითი მეთოდით გაანგარიშების შესახებ

თანამედროვე ელექტრონულ ციფრული გამოთვლითი ტექნიკის შექმნამ სერიოზული ცვლილებები შეიტანა კონსტრუქციების გაანგარიშების პრაქტიკაში. ახალმა შესაძლებლობებმა არსებული გაანგარიშების მეთოდების ეფექტურობის გადასინჯვა მოითხოვა. დღის წესრიგში დადგა ახალი მეთოდების შექმნის საკითხი. აგრეთვე, საჭირო გახდა ფსიქოლოგიური ცვლილებების შეტანა საინჟინრო-საანგარიშო პრაქტიკაში. ის, რაც წინათ, ანგარიშის გამართვების და შრომატევადობის შემცირების თვალსაზრისით, ბუნებრივად და უდავოდ ითვლებოდა, ახალ პირობებში, არც თუ იშვიათად, პირიქით, – ზედმეტი და მიუღებელი გახდა. მაგალითად, წინათ ძირითადი სისტემის კარგად შერჩევა და მისი მეშვეობით უცნობთა რიცხვის შემცირება ინჟინრის მაღალ კვალიფიკაციაზე მეტყველებდა. უფრო მეტიც, ზოგ შემთხვევაში, კონსტრუქციის გაანგარიშების შესაძლებლობის ბედსაც კი წყვეტდა. დღეისათვის მდგომარეობა სხვა-

გვარია. თანამედროვე გამოთვლით ტექნიკაში უცნობთა რიცხვს აღარ აქვს გადაწყვეტი მნიშვნელობა. იმ განტოლებათა სისტემების ამოხსნა, რომლებიც მოიცავენ ათობით და ასობით ათას უცნობს, ჩვეულებრივი ამბავი გახდა. ახლა, ძირითადად, სხვაგვარ საკითხებს ექცევა ყურადღება. საანგარიშო მოდელი, მისი განხილვის და ამოხსნის მეთოდი მარტივი ელემენტებისაგან უნდა შედგებოდეს. ეს საშუალებას იძლევა შეიქმნას შესაბამისი მარტივი საანგარიშო პროგრამა, რომელშიც განსახილველ ელემენტთა და საანგარიშო ოპერაციათა რაოდენობას გადაწყვეტი მნიშვნელობა არა აქვს. მთავარია, შეიძლებოდეს ამოცანის ალგორითმიზაცია, ე. ი. მისი ამოხსნის პროცესის თანამიმდევრობის ფორმალურ მანქანურ ენაზე აღწერა.

ავილოთ მეორე მაგალითი. იყო დრო, როდესაც ძელებისათვის გადაადგილებების გაანგარიშება (6.6) დიფერენციალური განტოლების გამოყენებით პრობლემას წარმოადგენდა. ამ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება ხდებოდა უოველი უბნისათვის ცალ-ცალკე. ამ შემთხვევაში ინტეგრების მუდმივთა რიცხვი ორჯერ აღმატება უბანთა რიცხვს. ასეთი მიდგომის შრომატევადობამ ბიძგი მისცა გრაფოანალიზური მეთოდების დამუშავებას და პრაქტიკაში ფართოდ დანერგვას. გადაადგილებების (6.15) ფორმულის სახით წარმოდგენას, როცა მთელი ძელისათვის გამოიყენება მხოლოდ ორი ინტეგრების მუდმივი, მეცნიერთა მთელ ო თაობის დაძაბული შრომა დასჭირდა.

მრავალ ძიებასთან იყო დაკავშირებული ისიც კი, რომ (6.10) ფორმულაში მომენტის ნამრავლი ფორმალურად ჩაწერილიყო ერთიანი $(z-u)^0$ -ის სახით და ამის საფუძველზე საბოლოო ფორმულას უფრო ზოგადი ხასიათი მიეღო. დღეს ასეთი საკითხების გადაწყვეტა მარტივად ხდება. თანამედროვე გამოთვლითი ტექნიკის საშუალებით (6.20) განტოლების რიცხვითი ინტეგრება არავითარ სირთულეს აღარ წარმოადგენს, არც უბანთა რაოდენობას აქვს მნიშვნელობა. უფრო მეტიც, თუ (6.17) ფორმულა გამოიყენებოდა მხოლოდ მუდმივი კვეთის მქონე ძელებისათვის, (6.20)-ის ინტეგრება შეიძლება ძელის განივი კვეთის ნებისმიერი კანონით ცვალებადობისას.

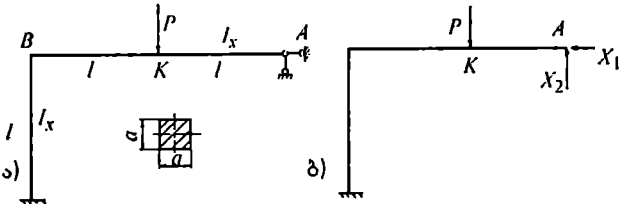
თანამედროვე პირობებში სისტემის გაანგარიშების პრაქტიკაში განსაკუთრებული გავრცელება პოვა ისეთმა უნივერსალურმა მეთოდებმა, როგორიცაა სასრული ელემენტების და სასრული სხვაობების მეთოდები. ისინი საშუალებას იძლევიან ნებისმიერი კონსტრუქცია და მათი მათემატიკური მოდელი წარმოვადგინოთ როგორც დადგენილი ტიპის მრავალი ელემენტისაგან შედგენილი. ამ ელემენტების თვისებები წინასწარ არის შესწავლილი. გამოთვლელი მანქანა მათი კონსტრუქციაში განლაგების, გაანალიზების, ურთიერთმოქმედების განხილვისა და ამის საფუძველზე შიგა ძალოვანი ფაქტორებისა და გადაადგილებების დადგენის საშუალებას იძლევა. ასეთი ხერხებით კონსტრუქციის გაანგარიშების საკითხი საბოლოოდ დაიყვანება წრფივ ან არაწრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემამდე, რომელიც, არც თუ იშვიათად, ათასობით უცნობებს შეიცავს. გაანგარიშების ასეთი მეთოდის, კერძოდ, სასრული ელემენტების მეთოდის, დადებით მხარედ უნდა ჩაითვალოს ის, რომ ამოცანის ამოსახსნელად არ

არის საჭირო შევადგინოთ კონსტრუქციის ელემენტების დიფერენციალური განტოლებების სისტემა – შესაძლებელია მისი ენერჯიის გამოსახულების უშუალოდ გამოყენება.

სტატიკურად ურკვევი სისტემები, თანამედროვე გამოთვლითი ტექნიკის გამოყენებით, შეიძლება შევისწავლოთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის რიცხვითი მეთოდებით ინტეგრების საშუალებითაც. ასეთი გზა საკმაოდ უნივერსალურია. საშუალებას იძლევა გავითვალისწინოთ კონსტრუქციის შემადგენელი ელემენტების განივი კვეთის ცვალებადობა და დატვირთვის მრავალფეროვნება. ამ მეთოდის გამოყენებისას უბნების რაოდენობა, რომლებისგანაც შედგება სისტემა, არ არის შემზღვევლი გარემოება. აღსანიშნავია ისიც, რომ უშუალოდ რიცხვითი ინტეგრირების გამოყენებით შეიძლება ამოვხსნათ როგორც წრფივი, ისე არაწრფივი ამოცანები. შესაბამისი მაგალითები განხილული იყო 36-ე და 37-ე პარაგრაფებში.

მე შვიდე თავის მაგალითები

მაგალითი 7.1. მოცემული ჩარჩოსათვის (ნახ.7.5) განვსაზღვროთ რეაქციის ძალები. ავაგოთ მლუნავი მომენტების ჯამური ეპიურა და დავადგინოთ ცვლადი კვეთის ზომები. მოცემულია: $P=5000$ ნ; $l=0,6$ მ; $\sigma_{დნ}=400$ მგპა; $n=2,5$.



ნახ. 7.5

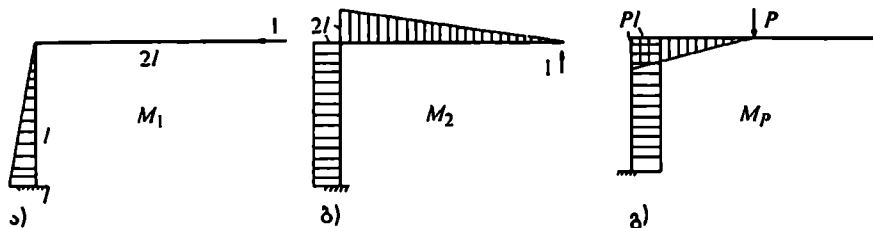
სისტემას ორი ზედმეტი ბმა აქვს და, შესაბამისად, იგი ორჯერ სტატიკურად ურკვევია. მოვხსნათ ზედმეტი ბმები და განვიხილოთ ეკვივალენტური სისტემა (ნახ. 7.5.ბ). შესაბამისი კანონიკური განტოლებათა სისტემაა

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{2P} = 0.$$

პირველი და მეორე განტოლებები, შესაბამისად, გამოხატავენ იმ გარემოებას, რომ A კვეთის ჰორიზონტალური და ვერტიკალური გადაადგილებები ნულის ტოლია.

განვსაზღვროთ სისტემის კოეფიციენტები. ამისათვის ავაგოთ ეკვივალენტური სისტემისათვის მლუნავი მომენტების ეპიურები, როდესაც მასზე მოქმედებენ ზედმეტი უცნობების შესაბამისი ერთეულოვანი ძალები და გარე ძალები (ნახ. 7.6).



ნახ. 7.6

ვერეშჩაგინის ხერხის გამოყენებით, ეპიურების გადაპრავლებით, მივიღებთ:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} l^2 \frac{2}{3} l \right) = \frac{l^3}{3EI_x}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} l^2 2l \right) = \frac{l^3}{EI_x};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} 4l^2 \frac{4}{3} l + 4l^2 \cdot l \right) = \frac{20}{3} \frac{l^3}{EI_x};$$

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EI_x} \left(-Pl^2 \frac{1}{2} l \right) = -\frac{Pl^3}{2EI_x};$$

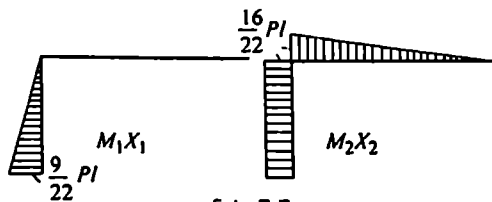
$$\delta_{2P} = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{2} Pl^2 \frac{5}{3} l - Pl^2 2l \right) = -\frac{17Pl^3}{6EI_x}.$$

მიღებული კოეფიციენტების კანონიკურ განტოლებებში გათვალისწინებით და შემდგომ საერთო მაპრავლზე შეკვეცით, მივიღებთ:

$$\frac{1}{3} X_1 + X_2 = \frac{P}{2}; \quad X_1 + \frac{20}{3} X_2 = \frac{17}{6} P;$$

$$X_1 = \frac{9}{22} P; \quad X_2 = \frac{8}{22} P.$$

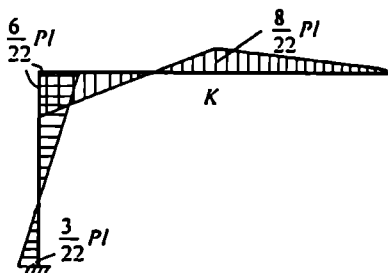
ჩამოთვლილი ეპიურის მისაღებად გადავამრავლოთ ერთეულოვანი ძალების მდუნავი მომენტების ეპიურები შესაბამისი უცნობების მნიშვნელობებზე (ნახ. 7.7). ამის შემდეგ შეგვიძლია საკვანძო წერტილებში ორდინატების მნიშვნელობების შექამებით მივიღოთ ჩამოთვლილი ეპიურა (ნახ. 7.8).



ნახ. 7.7

$$M_{\Sigma} = M_P + M_1 X_1 + M_2 X_2.$$

შევამოწმოთ მიღებული შედეგების სისწორე. ამისათვის ავირჩი-

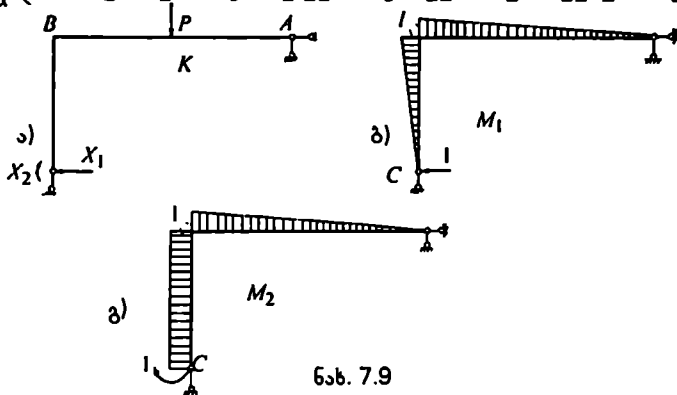


ნახ. 7.8

ოთ ახალი ძირითადი სისტემა და ავგოთ შესაბამისი ერთეულოვანი ძალების მლუნავი მომენტების ეპიურები (ნახ. 7.9).

ვინაიდან C კვეთი ჩამაგრებულია, მისი გადაადგილება X_1 -ის მიმართულებით ნულის ტოლი უნდა იყოს. ამ გადაადგილების მიღება შეიძლება 7.9.ბ და 7.8 ნახაზზე გამოსახული ეპიურების გადამრავლებით. მაგრამ ამ უკანასკნელის ნაცვლად შეგვიძლია ავიღოთ მისი შემადგენელი ცალკეული ეპიურები, მაშინ

$$\delta_C = \frac{1}{EI_x} \left(-Pl^2 \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} Pl^2 \frac{5}{6} l + \frac{1}{2} \frac{9}{22} Pl^2 \frac{l}{3} + \frac{16}{22} Pl^2 \frac{1}{2} l + \frac{16 \cdot 2}{22 \cdot 2} Pl^2 \frac{2}{3} l \right) = 0.$$



ნახ. 7.9

შეგვიძლია ჩავატაროთ მეორე შემოწმებაც იმ პირობის გამოყენებით, რომ C კვეთის მობრუნების კუთხე ნულის ტოლია. ამისათვის ერთმანეთზე უნდა გადავამრავლოთ 7.9 ნახაზზე გამოსახული მეორე ეპიურა და მლუნავი მომენტების ჩამური ეპიურა. მაგრამ ასეთ შემოწმებას არსებითი მნიშვნელობა არა აქვს, რადგან 7.6.ბ და 7.9.გ ეპიურები განსხვავდება მხოლოდ მასშტაბით. ერთი მათგანი ჩვენ უკვე ვისარგებლეთ ამოცანის ამოხსნისას.

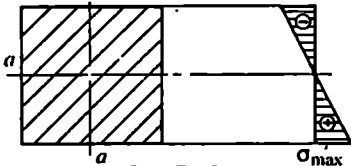
განვსაზღვროთ კვეთის ზომები. საშიშია K კვეთი, მისთვის მაქსიმალური ძაბვა და სიმტკიცის პირობა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{8Pl \cdot 6}{22a^3} = \frac{24Pl}{11a^3} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{დნ}}}{n},$$

საიდანაც, ტოლობის ნიშნის გამოყენებით, მივიღებთ კვეთის გვერდის ზომას

$$a = \sqrt[3]{\frac{24Pl \cdot n}{11\sigma_{\text{დნ}}}} = \sqrt[3]{\frac{24 \cdot 5000 \cdot 0,6 \cdot 2,5}{11 \cdot 400 \cdot 10^6}} = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

საშიშ კვეთში ნორმალური ძაბვების ეპიურა ნაჩვენებია 7.10 ნახაზზე. განვსაზღვროთ კვეთის ზომები ზღვრული დატვირთვის მეთოდის გამოყენებით. ჩარჩოზე მოდებული



ნახ. 7.10

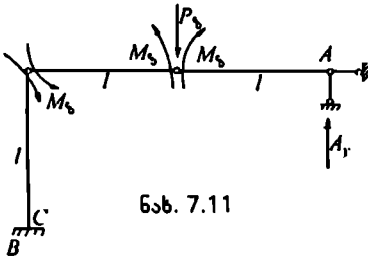
ძალის ზრდის შედეგად, პირველ რიგში, პლასტიკური სახსარი წარმოიშობა იმ კვეთში, რომელშიც მღუნავი მომენტი მაქსიმალურია. ასეთია K კვეთი (ნახ. 7.8). ძალის შემდგომი ზრდის შედეგად B კვეთში წარმოიშობა მეორე პლასტიკური სახსარი. ეს პირობა განსაზღვრავს სისტემის ზღვრულ მდგომარეობას (ნახ. 7.11). P ძალის შემდგომი ზრდა შეუძლებელია.

ვინაიდან სისტემა გადაიქცა კინემატიკურად ცვალებად სისტემად.

წონასწორობის განტოლებები მოგვცემს

$$M_{\Phi} = A_y l; \quad M_{\Phi} = -A_y \cdot 2l + R_{\Phi} l;$$

საიდანაც მივიღებთ ზღვრული ძალის მნიშვნელობას



ნახ. 7.11

$$R_{\Phi} = \frac{3M_{\Phi}}{l} = \frac{3\sigma_{\text{დნ}} a^3}{4l}.$$

დასაშვები ძალის მნიშვნელობა

$$[P] = \frac{R_{\Phi}}{n} = \frac{3\sigma_{\text{დნ}} a^3}{4l \cdot n} \geq P.$$

საბოლოოდ, თუ ზღვრული ძაბვებისა და დატვირთვის მეთოდებისათვის დავეუშვებთ მარაგის კოეფიციენტების ტოლობას, მივიღებთ

$$a \geq 3 \sqrt{\frac{4Pl \cdot n}{3\sigma_{\text{დნ}}}} = 3 \sqrt{\frac{4 \cdot 5000 \cdot 0,6 \cdot 2,5}{3 \cdot 400 \cdot 10^6}} = 2,9 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

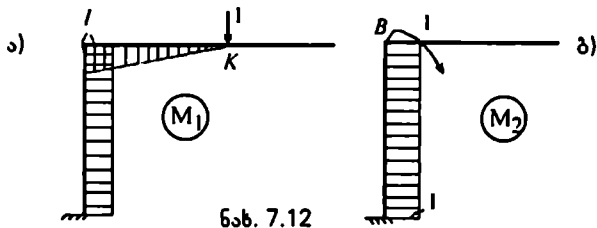
ვინაიდან სისტემის მოცულობა პირდაპირ პროპორციულია კვეთის ფართობისა, მასალის ეკონომია ზღვრული დატვირთვით ზომების დადგენისას განისაზღვრება მიღებული ზომების კვადრატების შეფარდებით:

$$k = \left(\frac{3,5}{2,9} \right)^2 = 1,46.$$

ამრიგად, მეორე მეთოდი გვაძლევს მასალის ეკონომიას 46%-ით.

ამოცანის ამოხსნისას ჩავთვალოთ, რომ ძირითადი და განმსაზღვრელია მღუნავი მომენტი, ამიტომ სისტემის ზღვრული მდგომარეობის დასადგენად მხედველობაში არ მივიღებთ ნორმალური და განივი ძალები. ანალოგიურად მოვიქცევით შემდგომშიც, თუმცა, ზოგ შემთხვევაში, ნორმალური და განივი ძალების გათვალისწინება აუცილებელია.

განვსაზღვროთ K კვეთის ვერტიკალური გადაადგილება და B კვეთის მობრუნების კუთხე. ამ მიზნით ძირითად სისტემას ამ კვეთებში მოვდით ერთეულოვანი ძალოვანი ფაქტორები და ავაგოთ შესაბამისი მლუნავი მომენტების ეპიურები (ნახ. 7.12).



ნახ. 7.12

ამ ეპიურების ჩამური მლუნავი მომენტების ეპიურაზე (მოსახერხებელია, მის შედგენელ ეპიურებზე) გადამრავლებით მივიღებთ:

$$\delta_K = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{Pl^3}{3} + Pl^3 - \frac{16Pl^3}{22} - \frac{16Pl^3}{22 \cdot 3} - \frac{16Pl^3}{22 \cdot 2 \cdot 6} - \frac{9Pl^3}{22 \cdot 2} \right) = \frac{13}{132} \frac{Pl^3}{EI_x};$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI_x} \left(Pl^2 - \frac{9Pl^2}{22 \cdot 2} - \frac{16Pl^2}{22} \right) = \frac{3Pl^2}{44EI_x}.$$

მიღებული შედეგები გამოიყენება იმ შემთხვევაში, თუ სისტემაზე მოდებული ძალის მნიშვნელობა ისეთია, რომ საშიშ კვეთში მაქსიმალური ძაბვები არ აღემატება პროპორციულობის ზღვარს.

მაგალიტი 7.2. განვსაზღვროთ 7.13 ნახაზზე ნაჩვენები ჩარჩოს წრიული კვეთის ფართობი და C კვეთის გადაადგილება.

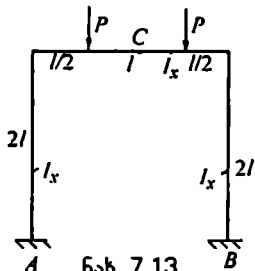
სისტემა სტატიკურად ურკვევია, მაგრამ მას აქვს სიმეტრიის ღერძი და შეიძლება ძირითადი სისტემის რაციონალური არჩევით მისი მნიშვნელოვნად გამარტივება. ამისათვის, წარმოდგენით გავკვეთოთ მოცემული სისტემა სიმეტრიის ღერძზე. შესაბამისი ეკვივალენტური სისტემა ნაჩვენებია 7.14 ნახაზზე.

კანონიკურ განტოლებათა სისტემა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

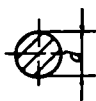
$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = -\delta_{1P};$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = -\delta_{2P};$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = -\delta_{3P}$$

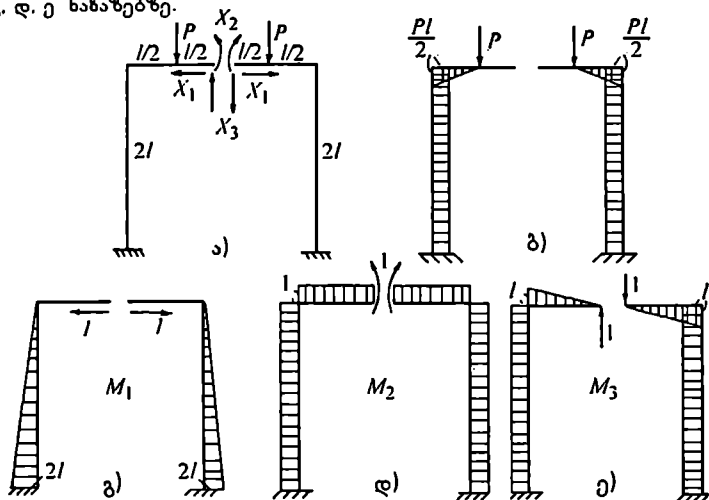


ნახ. 7.13



აქ სისტემა გამოსახულია, როგორც შიგა სტატიკურად ურკვევი. სისტემის პირველი განტოლება აღნიშნავს, რომ მარჯვენა და მარცხენა კვეთები ჩარჩოს დეფორმაციის პროცესში, ერთმანეთის მიმართ შორი-

ზონტალური მიმართულებით (პირველი მიმართულებით) არ გადაადგილდება. მეორე განტოლება აღნიშნავს ამ კვეთების ურთიერთმობრუნების გამორიცხვას, ხოლო მესამე განტოლება - ვერტიკალური მიმართულებით მათი ურთიერთგადაადგილების ნულთან ტოლობას. ერთეულოვანი ძალების მღუნავი მომენტების ეპიურები ნაჩვენებია 7.14.გ. დ. ე ნახაზებზე.



ნახ. 7.14

შესაბამისი ეპიურების გადამრავლებით განვსაზღვრავთ განტოლებების კოეფიციენტებს:

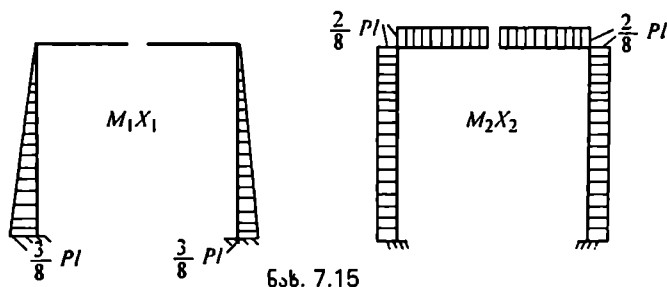
$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 2 \frac{(2l)^3}{3EI_x} = \frac{16l^3}{3EI_x}; & \delta_{12} = \delta_{21} &= 2 \frac{(2l)^2}{2EI_x} = \frac{4l^2}{EI_x}; \\ \delta_{13} = \delta_{31} &= 0; & \delta_{22} &= 3 \frac{2l}{EI_x} = \frac{6l}{EI_x}; & \delta_{23} = \delta_{32} &= 0; \\ \delta_{33} &= \frac{2}{EI_x} \left(\frac{l^3}{3} + 2l^3 \right) = \frac{14l^3}{3EI_x}; & \delta_{1P} &= -2 \frac{Pl^3}{EI_x}; \\ \delta_{2P} &= \frac{2}{EI_x} \left(-\frac{Pl^2}{8} - Pl^2 \right) = -\frac{9Pl^2}{4EI_x}; & \delta_{3P} &= 0. \end{aligned}$$

მიღებული კოეფიციენტების მნიშვნელობების გათვალისწინებით და საერთო მამრავლზე შეკვეციტო კანონიკურ განტოლებათა სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$\frac{8}{3}X_1 + 2\frac{X_2}{l} = P; \quad 2X_1 + 3\frac{X_2}{l} = \frac{9}{8}P; \quad X_3 = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ საძიებელი უცნობების მნიშვნელობებს:

$$X_1 = \frac{3}{16} P; \quad X_2 = \frac{1}{4} Pl; \quad X_3 = 0.$$

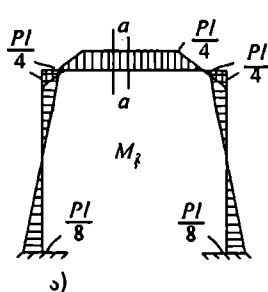


ნახ. 7.15

მიღებული შედეგი შეიძლება განვაზოგადოთ და აღვნიშნოთ, რომ ნებისმიერი სიმეტრიული სისტემისათვის, რომელიც დატვირთულია სიმეტრიული ძალებით, ასიმეტრიული შიგა ძალოვანი ფაქტორი ნულის ტოლია.

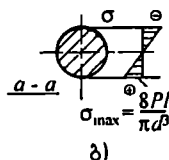
ავაგოთ დამხმარე ეპიურები (ნახ. 7.15), ფორმულის

$$M_x = M_p + M_1 X_1 + M_2 X_2.$$

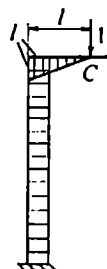


ა)

ნახ. 7.16



ბ)



ნახ. 7.17

გამოყენებით შეგვიძლია ავაგოთ მღუნავი მომენტების ჯამური ეპიურაც (ნახ. 7.16.ა) საშიშაა ზედა ძელის შუა ნაწილის ნებისმიერი კვეთი, ამ ჩარჩოს ბოლო და ვერტიკალური ძელების ზედა კვეთები. ამ კვეთებში მოქმედებს მაქსიმალური მღუნავი მომენტები და, შესაბამისად, მაქსიმალური ნორმალური ძაბვები (ნახ. 7.16, ბ):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{Pl \cdot 32}{4\pi d^3} = \frac{8Pl}{\pi d^3} \leq \frac{\sigma_{\text{დნ}}}{n},$$

საიდანაც, ტოლობის ნიშნის გამოყენებით, მივიღებთ კვეთის დიამეტრის მნიშვნელობას:

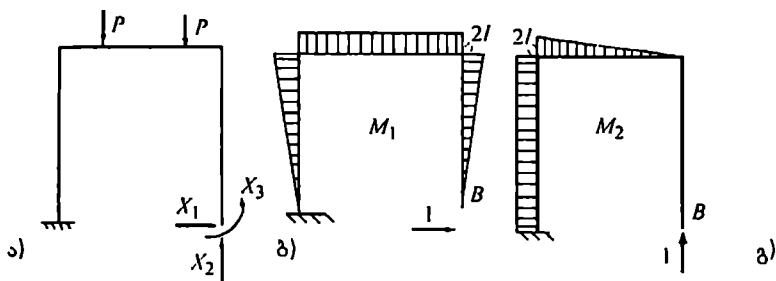
$$d = 3 \sqrt[3]{\frac{8Pl \cdot n}{\pi \sigma_{\text{დნ}}}}.$$

განვსაზღვროთ C კვეთის ვერტიკალური გადაადგილება, რისთვისაც ძირითადი სისტემას ამ კვეთში მოვდოთ ერთეულოვანი ძალა და ავაგოთ შესაბამისი მლუნავი მომენტების ეპიურა (ნახ. 7.17).

ერთეულოვანი ძალის და ჩამური მლუნავი მომენტების ეპიურების გადამრავლებით მივიღებთ C კვეთის გადაადგილებას

$$\delta_C = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{8} Pl^2 \cdot \frac{5}{6} l + Pl^2 \cdot l - \frac{3}{8} Pl^2 \cdot l - \frac{1}{4} Pl^2 \cdot \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} Pl^2 \cdot l \right) = \frac{5}{48} \frac{Pl^3}{EI_x}.$$

შევამოწმოთ მლუნავი მომენტების ჩამური ეპიურის სისწორე. ამისათვის ავირჩიოთ ახალი ძირითადი სისტემა და ავაგოთ შესაბამისი ერთეულოვანი ძალების მლუნავი მომენტების ეპიურები (ნახ.7.18).



ნახ. 7.18

ერთეულოვანი მომენტისათვის მლუნავი მომენტების ეპიურა ნახაზზე არ არის ნაჩვენები. ვინაიდან იგი, ფაქტიურად, იმეორებს 7.14, დ ნახაზზე გამოსახულ ეპიურას.

რადგან B კვეთის ჰორიზონტალური და ვერტიკალური გადაადგილებები ნულის ტოლია (ნახ. 7.18), შესაბამისი ერთეულოვანი ძალების ეპიურების მლუნავი მომენტების ჩამურ ეპიურაზე (ნახ.7.16) ან მის შემადგენელ ეპიურებზე გადამრავლების შედეგად უნდა მივიღოთ ნულოვანი მნიშვნელობები. ამ პირობების შესრულებით გრწმუნდებით ამოცანის ამოხსნის სისწორეში:

$$\delta_{B_{\text{ჰორ}}} = \frac{1}{EI_x} \left[-2 \left(\frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \cdot \frac{l}{2} \right) 2l - 2 \left(\frac{Pl}{2} \cdot 2l \right) l + 2 \left(\frac{1}{2} \frac{3}{8} Pl \cdot 2l \right) \frac{2}{3} l + 2 \left(\frac{1}{4} Pl \cdot 2l \right) l + \left(\frac{1}{4} Pl \cdot 2l \right) 2l \right] = 0;$$

$$\delta_{B_{\text{ვერ}}} = \frac{1}{EI_x} \left(-2 \frac{1}{8} Pl^2 \cdot l - Pl^2 \cdot 2l + \frac{3}{8} Pl^2 \cdot 2l + \frac{1}{2} Pl^2 \cdot l + \frac{1}{2} Pl^2 \cdot 2l \right) = 0.$$

ამრიგად, ორივე პირობა შესრულებულია.

განვსაზღვროთ კვეთის ზომები ზღვრული დატვირთვის მეთოდის გამოყენებით. სის-

ტემაზე მოდებული ძალების ზრდის შედეგად მივალწევთ, რომ პლასტიკური სახსარი წარმოიშობა საშიშ კვეთებში (ნახ. 7.19). ამ შემთხვევაში გარე ძალები იღებენ ზღვრულ მნიშვნელობებს და მათი შემდგომი გაზრდა შეუძლებელია, რადგან კონსტრუქცია ხდება კინემატიკურად ცვალებადი.

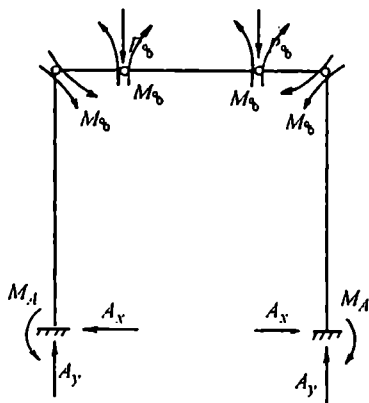
წონასწორობის განტოლებიდან მივიღებთ:

$$2A_y = 2P_b; \quad M_b = M_A - A_x \cdot 2l;$$

$$M_b = A_y \cdot \frac{l}{2} - M_A + A_x \cdot 2l,$$

საიდანაც ზღვრული ძალის მნიშვნელობა

$$P_b = \frac{4M_b}{l} = \frac{2\sigma_{დნ} \cdot d^3}{3l}.$$



ნახ. 7.19

განესაზღვროთ დასაშვები ძალის მნიშვნელობა და შევადგინოთ შესაბამისი სიმტკიცის პირობა:

$$[P] = \frac{P_b}{n} = \frac{2\sigma_{დნ} \cdot d^3}{3l \cdot n} \geq P,$$

საიდანაც ტოლობის ნიშნის გამოყენებით მივიღებთ:

$$d = \sqrt[3]{\frac{3P \cdot l \cdot n}{2\sigma_{დნ}}}.$$

ზღვრული ძაბვების და ზღვრული დატვირთვის მეთოდებით მიღებული დიამეტრების კვადრატების შეფარდებით განესაზღვროთ მასალის ეკონომიის მახასიათებელი კოეფიციენტი

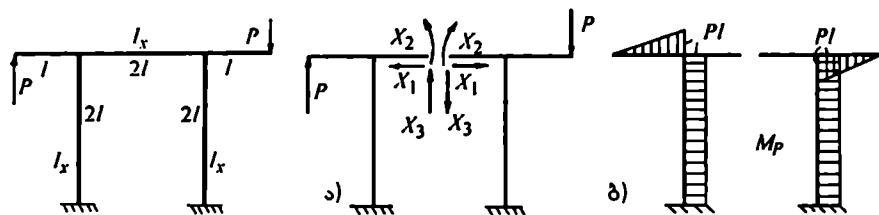
$$k = \left(\frac{16}{3\pi}\right)^{2/3} = 1,42.$$

ამ მაგალითში ორივე მეთოდისათვის დაშვებულია მარაგის კოეფიციენტების ტოლობა.

მაგალითი 7.2. განვიხილოთ 7.20 ნახაზზე ჩაჩენები ჩარჩო და ავაგოთ ჭამური მღუწავი მომენტების ეპიურა.

როგორც წინა მაგალითში, აქაც საქმე გვაქვს სიმეტრიულ ჩარჩოსთან, მაგრამ მასზე მოდებული ძალთა სისტემა უკუსიმეტრიულია. აქაც, მიზანშეწონილია ავირჩიოთ ძირითადი სისტემა ჩარჩოს სიმეტრიის ღერძზე გაკვეთით (ნახ. 7.21)

ერთეულგანი ძალების მლუნავი მომენტების ეპიურები ისეთივე იქნება, როგორც მეორე მაგალითში. ამიტომ კანონიკურ განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტებიც ისეთივე იქნება. განვსაზღვროთ მხოლოდ განსხვავებული კოეფიციენტები:



ნახ. 7.20

ნახ. 7.21

$$\delta_{1P} = \delta_{2P} = 0; \quad \delta_{3P} = -4 \frac{Pl^3}{EI_x}$$

მიღებული შედეგების გათვალისწინებით კანონიკური სისტემა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

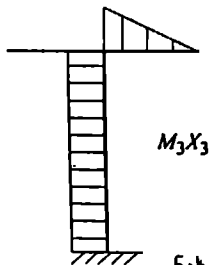
$$\frac{8}{3} X_1 + 2 \frac{X_2}{l} = 0; \quad 2X_1 + 3 \frac{X_2}{l} = 0; \quad \frac{14}{3} X_3 = 4P,$$

საიდანაც მივიღებთ

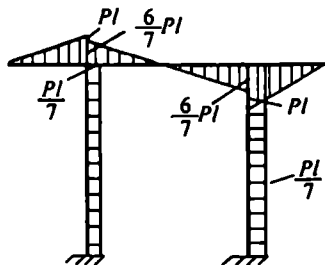
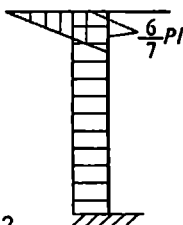
$$X_1 = X_2 = 0; \quad X_3 = \frac{6}{7} P.$$

მიღებული შედეგი შეიძლება განზოგადდეს და აღინიშნოს, რომ სიმეტრიული სისტემის უკუსიმეტრიული ძალებით დატვირთვისას სიმეტრიის კვთში სიმეტრიული ძალოვანი ფაქტორები ნულის ტოლია.

ავაგოთ დამხმარე ეპიურა (ნახ.7.22). ჭამური ეპიურა მიიღება შემდეგი ფორმულის გამოყენებით: $M_x = M_P + M_3 X_3$.



ნახ. 7.22



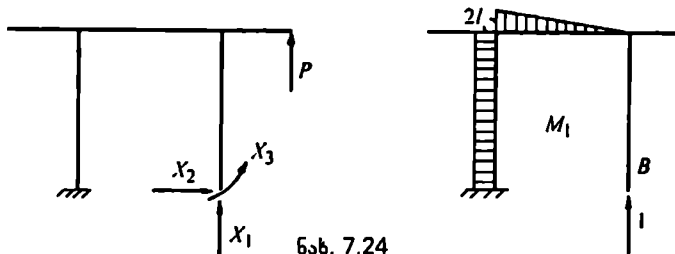
ნახ. 7.23

საბოლოო შედეგი ნაჩვენებია 7.23 ნახაზზე.

შევამოწმოთ მიღებული შედეგის სისწორე, რისთვისაც ავირჩიოთ ახალი ძირითადი სისტემა და ავაგოთ ერთეულგანი ძალების მლუნავი მომენტების ეპიურები (ნახ. 7.24).

დანარჩენი ორი ერთეულოვანი ძალის მღუნავი მომენტების ეპიურების აგებას აზრი არა აქვს, რადგან ისინი სიმეტრიულია და, ცხადია, მათი ნაპრავლი ჯამურ ეპიურაზე ნულის ტოლი იქნება. B წერტილი ვერტიკალური მიმართულებით არ უნდა გადაადგილდეს. შევამოწმოთ ამ პირობის შესრულება:

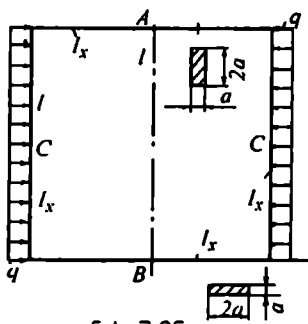
$$\delta_{B_{ვერ}} = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{2}{7} Pl^2 \cdot 2l + \frac{1}{2} 4l^2 \frac{6}{7} \frac{Pl}{3} \right) = 0.$$



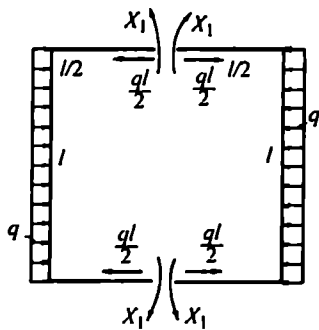
ნახ. 7.24

ამრიგად, ამოცანა სწორადაა ამოხსნილი.

მაგალითი 7.4. განვიხილოთ 7.25 ნახაზზე ნაჩვენები ჩარჩო და დავადგინოთ კვეთის ზომები. განვსაზღვროთ A და B წერტილების ურთიერთგადაადგილება.



ნახ. 7.25

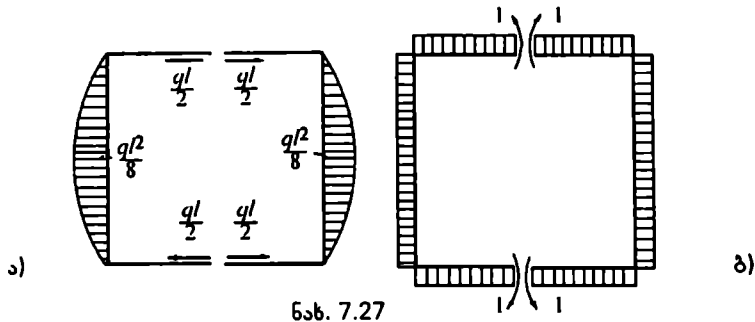


ნახ. 7.26

მოცემულია: $l=0,4$ მ; $q=100$ კნ/მ; $\sigma_{დ} = 250$ მგპა; $n=2,5$. სისტემა სამჯერ სტატიკურად ურკვევია. მაგრამ ძირითადი და ეკვივალენტური სისტემის რაციონალური შერჩევით (ნახ. 7.26) შეიძლება კანონიკურ განტოლებათა სისტემის მნიშვნელოვნად გამარტივება. უკუსიმეტრიული ფაქტორი, როგორც ეს ნაჩვენები იყო 7.2 მაგალითში, ნულის ტოლია.

ნორმალური ძალები განისაზღვრება სისტემის ნახევრის წონასწორობის პირობიდან მოქმედი ძალების ჰორიზონტალურ მიმართულებაზე დაგეგმილებით. ამრიგად, რჩება ერთი უცნობი – შიგა ძალოვანი X_1 ფაქტორი და კანონიკური განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1P} = 0.$$



ნახ. 7.27

ავაგოთ ეპიურები (ნახ. 7.27), რომლებიც მოგვცემენ განტოლების კოეფიციენტების მნიშვნელობების დადგენის საშუალებას:

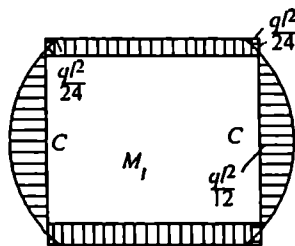
$$\delta_{1P} = \frac{2}{EI_x} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^3}{8} = \frac{1}{6} \cdot \frac{ql^3}{EI_x}; \quad \delta_{11} = \frac{4l}{EI_x},$$

მაშინ

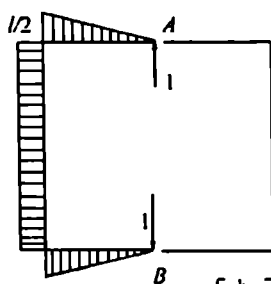
$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{1}{24} ql^2.$$

ჩამურ ეპიურას ავაგებთ შემდეგი ფორმულის გამოყენებით

$$M_x = M_p + M_1 X_1.$$



ნახ. 7.28



ნახ. 7.29

ეს ეპიურა ნაჩვენებია 7.28 ნახაზზე. მაქსიმალური მღუნავი მომენტი მოქმედებს C კვეთში და მისთვის სიმტკიცის პირობას ექნება შემდეგი სახე:

$$\sigma_{\max} = \frac{ql^2}{12W_x} = \frac{6ql^2}{12a(2a)^2} = \frac{ql^2}{8a^3} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{დნ}}}{n},$$

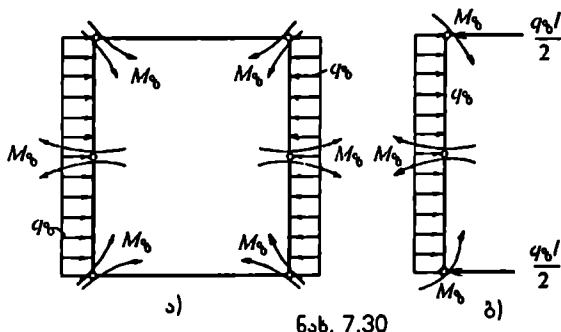
საიდანაც, ტოლობის ნიშნის გამოყენებით, მივიღებთ:

$$a = \sqrt[3]{\frac{ql^2 n}{8\sigma_{დნ}}} = \sqrt[3]{\frac{100 \cdot 10^3 \cdot (0.4)^2 \cdot 2.5}{8 \cdot 250 \cdot 10^6}} \approx 2,72 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

განვსაზღვროთ A და B წერტილების ურთიერთდაცილება. ამისათვის ძირითადი სისტემის ამ წერტილებში მოვდოთ ერთეულოვანი ძალები და ავაგოთ შესაბამისი მღუნავი მომენტების ეპიურა (ნახ. 7.29). ამ ეპიურის ჯამურ (ან მის შემადგენელ) ეპიურაზე გადამრავლებით მივიღებთ:

$$\delta_{AB} = \frac{1}{EI_x} \left(-2 \frac{ql^3 l}{48 \cdot 4} - \frac{ql^3 l}{24 \cdot 2} + \frac{2 ql^3 l}{3 \cdot 8 \cdot 2} \right) = \frac{ql^4}{96EI_x}.$$

განვსაზღვროთ კვეთის ზომები ზღვრული დატვირთვის მეთოდის გამოყენებით. მოდებული ძალების ზრდის შედეგად სისტემა გადავა ზღვრულ მდგომარეობაში (ნახ. 7.30).



მოდებული ძალების ზღვრულ მნიშვნელობას განვსაზღვრავთ შემდეგი წონასწორობის პირობიდან:

$$M_{\Phi} = \frac{q_{\Phi} l}{2} \cdot \frac{l}{2} - q_{\Phi} \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} - M_{\Phi},$$

საიდანაც მივიღებთ ზღვრული განივი ძალების ინტენსიურობის გამოსახულებას:

$$q_{\Phi} = \frac{16M_{\Phi}}{l^2} = \frac{16\sigma_{დნ} b h^2}{l^2 \cdot 4} = \frac{16\sigma_{დნ} a (2a)^2}{4l^2} = \frac{16\sigma_{დნ} a^3}{l^2}.$$

შევადგინოთ სიმტკიცის პირობა

$$q \leq [q] = \frac{q_{\Phi}}{n} = \frac{16\sigma_{დნ} a^3}{nl^2}.$$

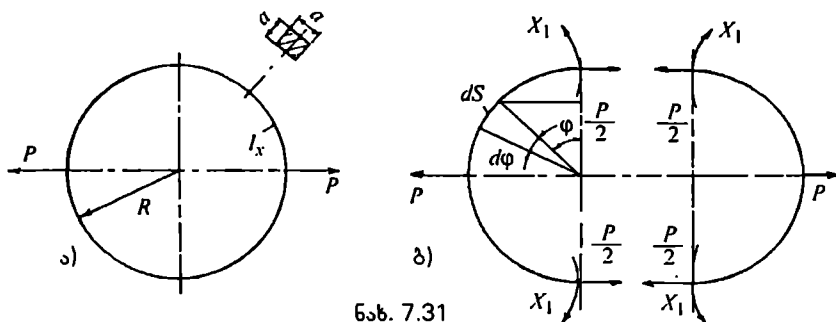
თუ დავეუშვებთ, რომ $n=2,5$ და გამოვიყენებთ ტოლობის ნიშანს, მივიღებთ:

$$a = \sqrt[3]{\frac{ql^2 n}{16\sigma_{\text{დნ}}}} = \sqrt[3]{\frac{100 \cdot 10^3 (0,4)^2 \cdot 2,5}{16 \cdot 250 \cdot 10^6}} = 2,16 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

ზღვრული დატვირთვის მეთოდისათვის მასალის ეკონომიის დამახასიათებელი კოეფიციენტი

$$k = \left(\frac{2,72}{2,16} \right)^2 = 1,58.$$

მაგალითი 7.5. განვიხილოთ ჩარჩო, რომლის ღერძული ხაზი წრეწირია, ხოლო განივი კვეთი - კვადრატი (ნახ. 7.31), მოცემულია: $P=5$ კნ; $R=5$ სმ; $n=2,5$; $\sigma_{\text{დნ}}=500$ მგპა. განვსაზღვროთ კვეთის ზომები.



ნახ. 7.31

განსახილველი სისტემისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ისეთივე გამარტივება, როგორც ზემოთ განვიხილულ მაგალითში. ამ შემთხვევისათვის გამარტივებული ეკვივალენტური სისტემა გამოსახულია 7.31 ნახაზზე. კანონიკური განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1P} = 0.$$

კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის საჭიროა გამოვიყენოთ მორის ინტეგრალი. შევადგინოთ ძირითად სისტემაზე მოდებული გარე და ერთეულოვანი ძალების მღუნავი მომენტების გამოსახულებები:

$$M_P = \frac{PR}{2}(1 - \cos \varphi); \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad M_1 = -1.$$

განვსაზღვროთ კოეფიციენტები:

$$\delta_{11} = 4 \int_{(S)} \frac{(-1)(-1)dS}{EI_x} = \frac{4}{EI_x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R d\varphi = \frac{2\pi R}{EI_x};$$

$$\begin{aligned} \delta_{1P} &= \frac{4}{EI_x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR}{2} (1 - \cos \varphi) (-1) R d\varphi = -\frac{2PR^2}{EI_x} (\varphi - \sin \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\frac{2PR^2}{EI_x} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = -1,14 \frac{PR^2}{EI_x}. \end{aligned}$$

განესაზღვროთ უცნობის მნიშვნელობა:

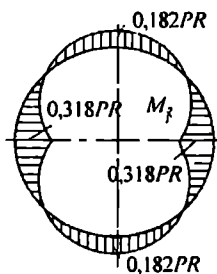
$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{1,14}{2\pi} PR = 0,182PR.$$

ჩავეწეროთ ჩამოთვლილი მომენტის ცვალებადობის კანონი:

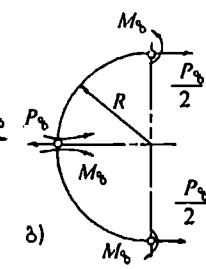
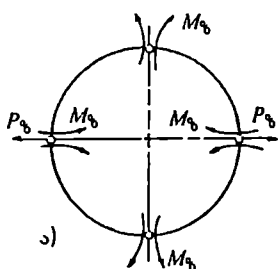
$$M_{\xi} = M_P + M_1 X_1 = \frac{PR}{2} (1 - \cos \varphi) - 0,182PR = PR(0,318 - 0,5 \cos \varphi),$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

შესაბამისი ეპიურა გამოსახულია 7.32 ნახაზზე.



ნახ. 7.32



ნახ. 7.33

დავადგინოთ კვეთის ზომები. სიმტკიცის პირობიდან

$$\sigma_{\max} = \frac{0,318PR}{W_x} = \frac{0,318PR \cdot 6}{a^3} = 1,91 \frac{PR}{a^3} \leq [\sigma],$$

ტოლობის ნიშნის გამოყენების შემთხვევაში, მივიღებთ:

$$a = \sqrt[3]{1,91 \frac{PRn}{\sigma_{\text{დნ}}}} = \sqrt[3]{1,91 \frac{5000 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5}{500 \cdot 10^6}} = 1,34 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

განვსაზღვროთ კვეთის ზომები ზღვრული დატვირთვის მეთოდის გამოყენებით, რისთვისაც წარმოვიდგინოთ სისტემა ზღვრულ მდგომარეობაში (ნახ. 7.33 ბ.).

შევადგინოთ წონასწორობის განტოლება

$$M_{\Phi} = \frac{R_{\Phi} R}{2} - M_{\Phi},$$

საიდანაც მივიღებთ ზღვრული ძალის მნიშვნელობას:

$$R_{\Phi} = \frac{4M_{\Phi}}{R} = \frac{\sigma_{დნ} a^3}{R}.$$

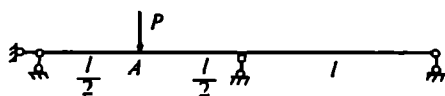
სიმტკიცის პირობას ექნება სახე:

$$P \leq \frac{R_{\Phi}}{n} = \frac{\sigma_{დნ} a^3}{Rn}.$$

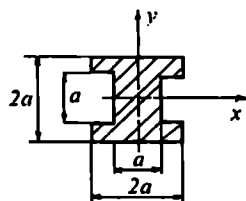
ტოლობის ნიშნის გამოყენებით მივიღებთ:

$$a = \sqrt[3]{\frac{PRn}{\sigma_{დნ}}} = \sqrt[3]{\frac{5000 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5}{500 \cdot 10^6}} = 1,08 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

მაგალითი 7.6. განვსაზღვროთ ზღვრული ძალის მნიშვნელობა 7.34 ნახაზზე ნაჩვენებ ძელისათვის. მოცემულია: $l=0,50$ მ; $\sigma_{დნ}=300$ მგპა; $a=0,04$ მ.



ნახ. 7.34

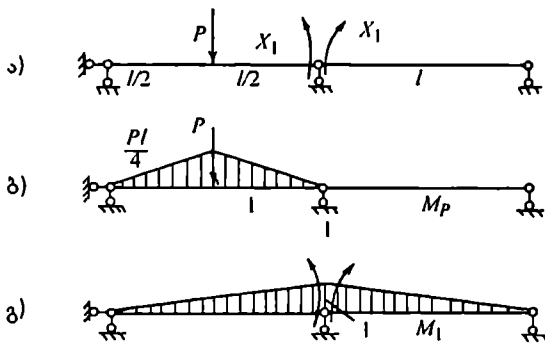


სისტემა ერთჯერ სტატიკურად ურყვევია და მისი ეკვივალენტური სისტემა და დამხმარე ეპიურები გამოსახულია 7.35 ნახაზზე.

გავიანგარიშოთ კანონიკური განტოლებების კოეფიციენტები და დავადგინოთ უცნობის მნიშვნელობა:

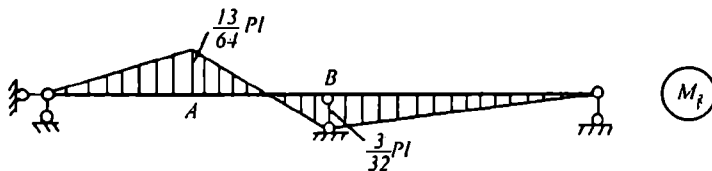
$$\delta_{1P} = \frac{1}{EI_x} \frac{Pl^2}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Pl^2}{16EI_x}; \quad \delta_{11} = \frac{2}{EI_x} \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \frac{l}{EI_x};$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{3}{32} Pl.$$



ნახ. 7.35

ამის შემდეგ ავავთო ჩამოური ებიურა (ნახ. 7.36).



ნახ. 7.36

საშიშია A კვეთი. თუ ამ კვეთში მაქსიმალურ ძაბვას გავუტოლებთ დენადობის ზღვარს, მივიღებთ ზღვრული ძალის მნიშვნელობას ზღვრული ძაბვების მეთოდისათვის:

$$\sigma_{\max} = \frac{13Pl}{64W_x} = \sigma_{\text{დნ}}; \quad P_1 = \frac{64\sigma_{\text{დნ}}W_x}{13l}$$

განვსაზღვროთ კვეთის ღერძული წინალობის მომენტი

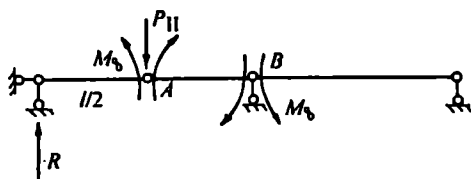
$$I_x = \frac{2a(2a)^3}{12} - \frac{a \cdot a^3}{12} = \frac{5}{4}a^4;$$

$$W_x = \frac{I_x}{a} = \frac{5}{4}a^3 = \frac{5}{4}4^3 = 80\text{სმ}^3.$$

ახლა შეგვიძლია დავადგინოთ ზღვრული ძალის მნიშვნელობა ზღვრული ძაბვების მეთოდის შესაბამისად:

$$P_1 = \frac{64\sigma_{\text{დნ}}W_x}{13l} = \frac{64 \cdot 300 \cdot 10^6 \cdot 80 \cdot 10^{-6}}{13 \cdot 0,5} = 236 \text{ კნ.}$$

განვსაზღვროთ ზღვრული ძალის მნიშვნელობა ზღვრული დატვირთვის მეთოდით.



ამისათვის წარმოვიდგინოთ სისტემა ზღვრულ მდგომარეობაში. მოდებული ძალის ზრდით მივალწვეთ იმას, რომ პლასტიკური სახსარი წარმოიშობა ჯერ A კვეთში, შემდეგ B კვეთში (ნახ. 7.37). დავწეროთ წონასწორობის განტოლებები

$$\text{ნახ. 7.37} \quad M_{\phi} = R \frac{l}{2}; \quad M_{\phi} = P_{II} \frac{l}{2} - Rl; \quad P_{II} \frac{l}{2} = 3M_{\phi},$$

საიდანაც მივიღებთ ზღვრული ძალის მნიშვნელობას

$$P_{II} = \frac{6M_{\phi}}{l} = \frac{12\sigma_{\text{დნ}} S_{F/2}}{l}.$$

დავადგინოთ კვეთის ნახევრის სტატიკური მომენტი x ღერძის მიმართ (ნახ. 7.34,ბ)

$$S_{F/2} = 2a^2 \frac{a}{2} - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{7}{8} a^3.$$

საბოლოოდ, ზღვრული ძალის მნიშვნელობა

$$P_{II} = \frac{12\sigma_{\text{დნ}} 7a^3}{8l} = \frac{12 \cdot 300 \cdot 10^6 \cdot 7 \cdot (0,04)^3}{8 \cdot 0,5} = 403 \text{ კნ.}$$

ამრიგად, ზღვრული დატვირთვის მეთოდი საშუალებას გვაძლევს გავზარდოთ ზღვრული ძალის მნიშვნელობა. ამ ზრდის მახასიათებელი პარამეტრი

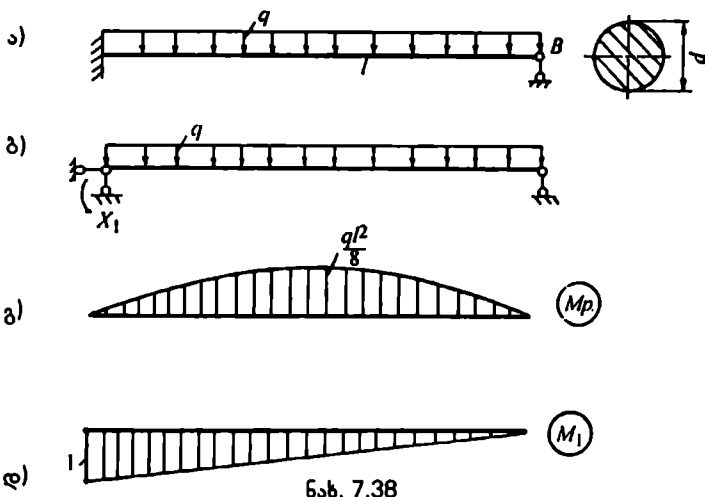
$$k = \frac{403}{236} = 1,71.$$

მაგალითი 7.7. განვსაზღვროთ თანაბრადგანაწილებული ძალებით დატვირთული ძელის განივი კვეთის ზომები (ნახ. 7.38). ამოცანა ერთჯერ სტატიკურად ურკვევია. მისი შესაბამისი ექვივალენტური სისტემა და დამხმარე ეპიურები ნაჩვენებია 7.38. ბ.გ.დ. ნახაზზე. კანონიკური განტოლება

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1P} = 0.$$

დავადგინოთ ამ განტოლების კოეფიციენტების მნიშვნელობები

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \frac{l}{2} \frac{2}{3} = \frac{l}{3EI_x}; \quad \delta_{1P} = \frac{1}{EI_x} \frac{2}{3} \frac{ql^3}{8} \frac{1}{2} = -\frac{ql^3}{24EI_x}.$$

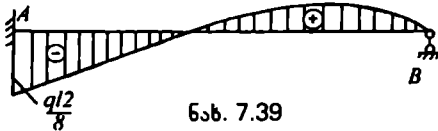


ნახ. 7.38

განვსაზღვროთ უცნობი რეაქცია

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{ql^2}{8}$$

ამ შედეგის გათვალისწინებით, მლუნავი მომენტების ჯამური ეპიურა გამოსახულია 7.39 ნახაზზე, საშიშია A კვეთი, რომლისთვისაც სიმტკიცის პირობას აქვს სახე:



$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{4ql^2}{\pi d^3} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{დნ}}}{n}$$

საიდანაც ტოლობის ნიშნის შემთხვევა-

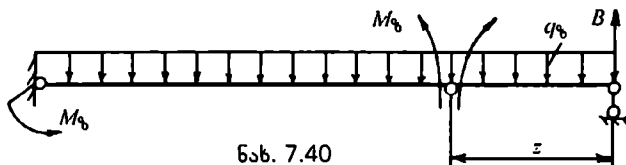
ში მივიღებთ

$$d = \sqrt[3]{\frac{4ql^2 n}{\pi \sigma_{\text{დნ}}}}$$

გავიანგარიშოთ ძელი ზღვრული დატვირთვის მეთოდის გამოყენებით. მოდებული ძალების თანამიმდევრული ზრდით გადავიყვანოთ სისტემა ზღვრულ მდგომარეობაში (ნახ. 7.40). კვეთი, რომელშიც მოქმედებს მაქსიმალური დადებითი მომენტი, დატვირთვის ზრდის პროცესში იცვლის მდებარეობას (ძელის მასალა მუშაობს დენადობის პირობებში). ზღვრულ მდგომარეობაში ამ კვეთის მდებარეობა განისაზღვრება π კოორდინატით. ჩავეწეროთ წონასწორობის განტოლებები

$$M_{\varphi} = -\frac{q_{\varphi} z^2}{2} + Bz; \quad M_{\varphi} = \frac{q_{\varphi} l^2}{2} - Bl.$$

პირობა, რომ პლასტიკურ სახსართან მომენტი მაქსიმალურია, (6.1)-ის მეორე განტოლების შესაბამისად, ამ კვეთისათვის გვაძლევს, განივი ძალის ნულთან ტოლობას $B - q_{\varphi} z = 0$.



ნახ. 7.40

ამ განტოლების პირველ განტოლებასთან ერთად განხილვით მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$M_{\varphi} = \frac{q_{\varphi} z^2}{2}$$

სამი განტოლების გამოყენებით მივიღებთ z -ის მნიშვნელობის დასადგენ შემდეგ განტოლებას:

$$z^2 + 2lz - l^2 = 0,$$

საიდანაც

$$z = -l \pm \sqrt{2l^2} = -l \pm 1,41l,$$

$$z_1 = 0,41l; \quad z_2 = -2,41l.$$

ამ ორი სიდიდიდან მხოლოდ პირველი მნიშვნელობა შეესაბამება წერტილის ძელის ბოლოებს შორის. ამიტომ, საბოლოოდ ვადგენთ, რომ $z = 0,41l$.

გავითვალისწინოთ z -ის მნიშვნელობა ზღვრული მომენტის ფორმულაში

$$M_{\varphi} = \frac{q_{\varphi} z^2}{2} = \frac{q_{\varphi} (0,41l)^2}{2} = \frac{0,168}{2} q_{\varphi} l^2$$

ამ ფორმულით შეგვიძლია დავადგინოთ განივი განაწილებული ძალების ინტენსიურობის ზღვრული მნიშვნელობა

$$q_{\varphi} = 11,9 \frac{M_{\varphi}}{l^2} \approx 2 \frac{\sigma_{\text{დნ}} d^3}{l^2}.$$

სიმტკიცის პირობაა

$$q \leq [q] = \frac{q_{\varphi}}{n} = 2 \frac{\sigma_{\text{დნ}} d^3}{l^2 n}.$$

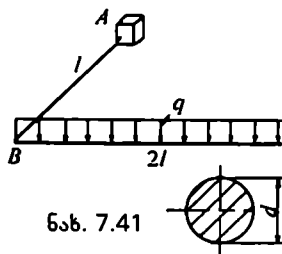
ზღვრული დატვირთვის მეთოდით განაგარიშებისას, თანაფარდობაში ტოლობის ნიშნის შემთხვევაში, კვეთის დიამეტრის მნიშვნელობა იქნება

$$d = \sqrt[3]{\frac{ql^2 n}{2\sigma_{დნ}}}$$

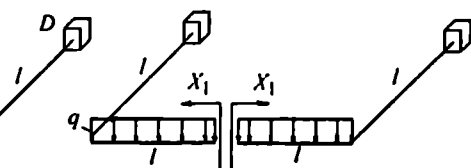
მასალის ეკონომიის მახასიათებელი კოეფიციენტი მარაგის კოეფიციენტების ტოლობის შემთხვევაში

$$k = \left(\frac{8}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,86.$$

მაგალითი 7.8. განვიხილოთ 7.41 ნახაზზე ნაჩვენები სტატიკურად ურკვევი ჩარჩო. ავავთ შიგა ძალოვანი ფაქტორების ეპიურები.



ნახ. 7.41



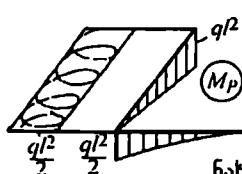
ნახ. 7.42

ყოველ საყრდენში მოქმედებს ო რეაქცია, ე.ი. სულ უნდა განვსაზღვროთ თორმეტი უცნობი. სტატიკის განტოლება კი შეიძლება ამოიწეროს მხოლოდ ექვსი. ამრიგად, სისტემა ექვსეფერ სტატიკურად ურკვევია. მაგრამ, რადგან სისტემა ბრტყელ-სივრცულია, ადვილი საჩვენებელია, რომ მის სიბრტყეში მდებარე უცნობები ნულის ტოლია. აგრეთვე, სისტემის და დატვირთვის სიმეტრიის გათვალისწინებით, მივიღებთ უკუსიმეტრიული ძალოვანი ფაქტორების ნულთან ტოლობას. ეკვივალენტური სისტემა გამო-

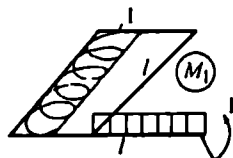
სახულია 7.42 ნახაზზე. კანონიკური განტოლება, აღნიშნულის გათვალისწინებით, ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1P} = 0.$$

ავავთ დამხმარე ეპიურები (ნახ.7.43).

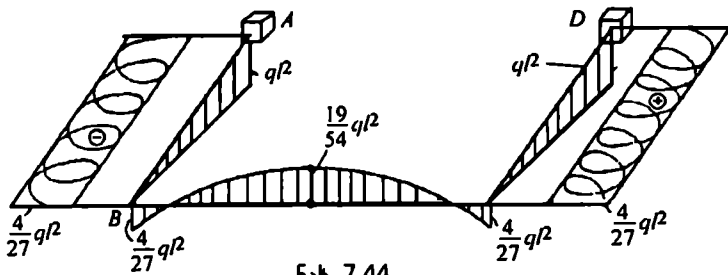


ნახ. 7.43



ეპიურებზე წარმოდგენილია მხოლოდ სისტემის ნახევარი, რაც განსახილველად საკმარისია. მგრები მომენტების ეპიურები აღნიშნულია მრუდე ხაზებით. დავადგინოთ ღუნვისა და გრებისათვის ძელის სიხისტეთა შორის დამოკიდებულება:

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64}; \quad I_P = \frac{\pi d^4}{32} = 2I_x; \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{2}{5}E; \quad GI_P = \frac{4}{5}EI_x; \quad (\mu = 0,25).$$



ნახ. 7.44

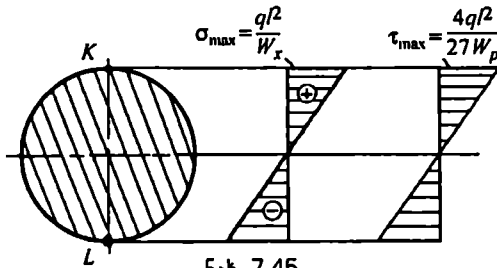
ახლა განვსაზღვროთ კანონიკური განტოლების კოეფიციენტების მნიშვნელობები:

$$\delta_{11} = \frac{l}{EI_x} + \frac{l}{GI_p} = \frac{9}{4} \frac{l}{EI_x};$$

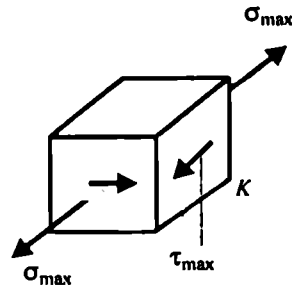
$$\delta_{1P} = -\frac{1}{6} \frac{ql^3}{EI_x} - \frac{ql^3}{2GI_p} = -\frac{19}{24} \frac{ql^3}{EI_x}.$$

დავადგინოთ უცნობის მნიშვნელობა

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{19}{54} ql^2.$$



ნახ. 7.45



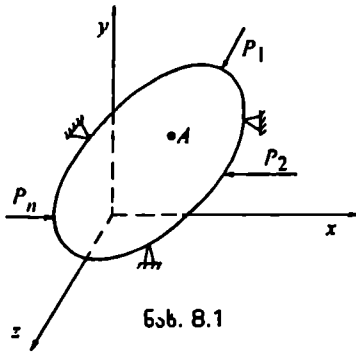
ნახ. 7.46

ავგავთ მღუნავი და მგრები მომენტების ჯამური ეპიურები (ნახ. 7.44). აგებული ჯამური ეპიურებიდან გამოვდინარეობს, რომ საშიშია A და D კვეთები. პირველისათვის მხები და ნორმალური ძაბვების ეპიურები მოცემულია 7.45 ნახაზზე. ამ კვეთში საშიშია K და L წერტილები, სადაც ამოკვეთილი მართკუთხედის გვერდებზე ერთდროულად მოქმედებს როგორც მხები, ისე ნორმალური ძაბვები (ნახ. 7.46). ჭერ-ჭერობით ჩვენთვის არ არის ცნობილი ასეთი რთული დაძაბული მდგომარეობისათვის, თუ როგორ უნდა ჩამოვყალიბოთ სიმტკიცის პირობა ან დავადგინოთ კვეთის ზომები. ამიტომ საჭიროა, საგანგებოდ შევისწავლოთ რთული დაძაბულობის შემთხვევები და მათთვის სიმტკიცის პირობები.

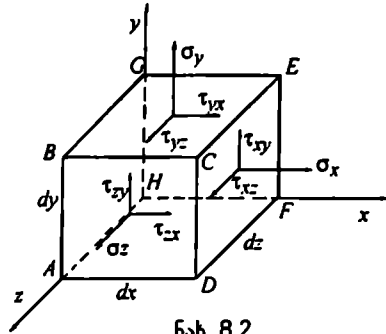
VIII თავი. დაკავებული და დეფორმირებული მდგომარეობის თეორიები

§49. დაძაბული მდგომარეობა წერტილში. მხები ძაბვების წყვილადობის კანონი

ერთსა და იმავე წერტილში გამავალ სხვადასხვა მიმართულების კვეთებში ძაბვები, როგორც წესი, განსხვავდება ერთმანეთისაგან. უფრო მეტიც, თუ ერთ კვეთში მოქმედებს მხოლოდ ნორმალური ძაბვები, მეორე კვეთში ნორმალურ ძაბვებთან ერთად შეიძლება მოქმედებდეს მხები ძაბვებიც. ამის მაგალითია გაჭიმვა-კუმშვა.



ნახ. 8.1



ნახ. 8.2

ერთ წერტილში გამავალი სხვადასხვა მიმართულების კვეთებში მოქმედი ძაბვების ერთობლიობას ეწოდება დაძაბული მდგომარეობა წერტილში. ამ მდგომარეობის შესწავლა, მაქსიმალური ნორმალური და მხები ძაბვების დადგენა უშუალოდ დააკავშირებული ზოგადი ხასიათის დატვირთვისას სხეულების სიმტკიცეზე განაგარიშებასთან.

განვიხილოთ წონასწორობაში მყოფი მყარი დეფორმირებადი სხეული (ნახ. 8.1) და შევისწავლოთ A წერტილში დაძაბული მდგომარეობა. ამ წერტილის ირგვლივ შეგვიძლია ამოვკვეთოთ უსასრულოდ მცირე ზომების მართკუთხა ელემენტი (ნახ. 8.2). ელემენტის წახნაგზე მოქმედი ძაბვა წარმოვადგინოთ ნორმალური და მხები ძაბვების საშუალებით. ნორმალური ძაბვა წახნაგის მართობულადაა მიმართული და აღინიშნება ამ წახნაგის მართობი კოორდინატთა ღერძის ინდექსით. გამჭიმვი ნორმალური ძაბვა დადებითია, მკუმშვაჲ - უარყოფითი. წახნაგზე მოქმედი მხები ძაბვა იშლება კოორდინატთა ღერძის მიმართულების ორ მდგენელად. ეს ძაბვები აღინიშნება ორი ინდექსით. პირველი ინდექსი აღნიშნავს წახნაგის მართობ კოორდინატთა ღერძს, მეორე კი ორი დანარჩენი ღერძიდან იმ ღერძის ინდექსია, რომლის პარალელურიცაა ეს ძაბვა. მაგალითად, σ_x

ღერძის მართობ კვეთში მოქმედებს σ_x ნორმალური ძაბვა და τ_{xy} და τ_{xz} მხები ძაბვები (ნახ. 8.2). მხები ძაბვები დადებითია, თუ ისინი მოქმედებენ საკოორდინატო სისტემის სიბრტყეების პარალელურ სიბრტყეებში შესაბამისი კოორდინატა ღერძების დადებითი მიმართულებით (ნახ. 8.2).

ელემენტის უხილავ წახნაგებზე მოქმედებს ძაბვები; მათი მიმართულებები ნაჩვენები ძაბვების მიმართულებების საწინააღმდეგაა.

ელემენტის წახნაგზე მოქმედი ძალები ადვილად განისაზღვრება ძაბვების მნიშვნელობების საშუალებით. მაგალითად, $DCEF$ წახნაგზე მოქმედი ძალა

$$dT = dydz \sqrt{\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}. \quad (8.1)$$

განვიხილოთ ელემენტის წონასწორობის პირობა, რომელიც გამოხატავს მასზე მოქმედი ძალების z ღერძის მიმართ მომენტების ჯამის ნულთან ტოლობას

$$(\tau_{yx} dx dz) dy - (\tau_{xy} dy dz) dx = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ პირობას $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. ანალოგიური განხილვით, საბოლოოდ, მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

მიღებული შედეგი გამოსახავს მხები ძაბვების წყვილადობის კანონს, რომლის არსი შემდეგში მდგომარეობს: თუ ორი ურთიერთმართობი წახნაგიდან ერთერთ მათგანზე წარმოიშობა მხები ძაბვა, რომელიც წახნაგების გადაკვეთის წიბოს მართობია, მაშინ მეორე წახნაგზეც წარმოიშობა იმავე წიბოს მართობი იგივე სიდიდის მხები ძაბვა. ორივე ძაბვა მიმართულია წიბოსაკენ ან საწინააღმდეგო მიმართულებით.

§50. ძაბვების განსაზღვრა დახრილ კვეთში

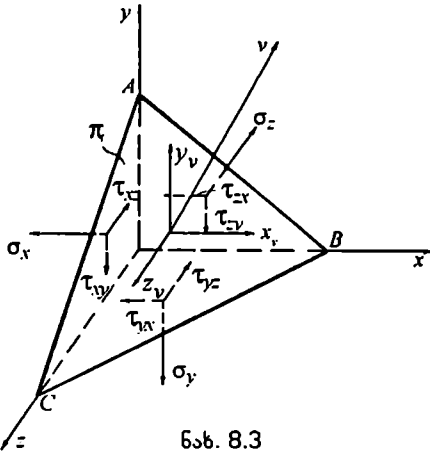
მყარი სხეულიდან ამოკვეთილ მართკუთხა ელემენტის წიბოებზე (ნახ. 8.2) დაძაბული მდგომარეობა ხასიათდება ექვსი სიდიდით:

$$\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z; \tau_{xy}; \tau_{yz}; \tau_{zx}. \quad (8.2)$$

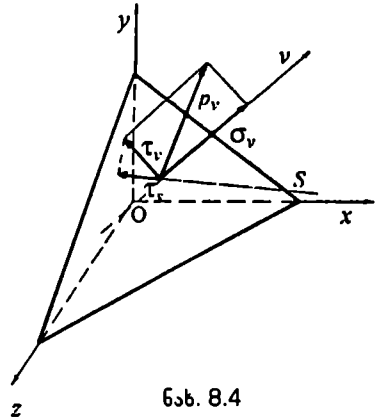
ვინაიდან ეს ელემენტი ამოკვეთილია A წერტილთან და მისი ზომები უსასრულოდ მცირეა, თუ შევძლებთ (8.2) სიდიდეების საშუალებით წერტილში გამავალი ნებისმიერი მიმართულების კვეთის ძაბვების დადგენას, მაშინ ამ სიდიდეებზე შეგვიძლია ვისაუბროთ, როგორც წერტილში დაძაბული მდგომარეობის მახასიათებლებზე.

განვიხილოთ 8.2 ნახაზზე ნაჩვენები ელემენტის ნებისმიერი π კვეთი, კვეთის მდებარეობა განისაზღვრება მისი u მართობით, რომლის მიმართულების კოსინუსები

$$l = \cos(v, x); \quad m = \cos(v, y); \quad n = \cos(v, z). \quad (8.3)$$



ნახ. 8.3



ნახ. 8.4

აღნიშნოთ დახრილი კვეთის ფართობ dF_v -ით. კოორდინატთა სისტემის სიბრტყეზე მისი გეგმილების ფართობები იქნება

$$dF_x = dF_v l; \quad dF_y = dF_v m; \quad dF_z = dF_v n; \quad (8.4)$$

დახრილ კვეთში მოქმედი მთლიანი p_v ძაბვა შეგვიძლია გამოვსახოთ კოორდინატთა სისტემაზე გეგმილების სახით $\{X_v, Y_v, Z_v\}$.

წონასწორობის პირობებიდან გამომდინარე, დავაგეგმილოთ 8.3 ნახაზზე ნაჩვენებ ელემენტზე მოქმედი ძალები კოორდინატთა ღერძებზე

$$X_v dF_v - \sigma_x dF_x - \tau_{yx} dF_y - \tau_{zx} dF_z = 0;$$

$$Y_v dF_v - \tau_{xy} dF_x - \sigma_y dF_y - \tau_{zy} dF_z = 0;$$

$$Z_v dF_v - \tau_{xz} dF_x - \tau_{yz} dF_y - \sigma_z dF_z = 0.$$

გავითვალისწინოთ (8.4) თანაფარდობები და დავადგინოთ დახრილ კვეთზე მოქმედი სრული ძაბვის გეგმილები:

$$X_v = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n;$$

$$Y_v = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n;$$

$$Z_v = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n.$$

(8.5)

მაშინ მთლიანი ძაბვის მნიშვნელობა

$$p_v = \sqrt{X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2}. \quad (8.6)$$

მთლიანი p_v დაბვა შეგვიძლია გამოვსახოთ ნორმალური და მხები დაბვის სახით (ნახ. 8.4). განვსაზღვროთ ნორმალური დაბვა, რომელიც წარმოადგენს მთლიანი დაბვის მდგენელების გეგმილს ν მიმართულებაზე.

$$\begin{aligned} \sigma_v &= X_v l + Y_v m + Z_v n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + \\ &+ 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl. \end{aligned} \quad (8.7)$$

ახლა შეგვიძლია განვსაზღვროთ დახრილ კვეთში მხები დაბვაც

$$\tau_\nu = \sqrt{p_\nu^2 - \sigma_\nu^2}. \quad (8.8)$$

ავილოთ ნებისმიერი N წრფე, რომელიც მიეკუთვნება დახრილ კვეთს და რომლის მიმართულების კოსინუსებია l_1 , m_1 და n_1 . განვსაზღვროთ მხები დაბვის გეგმილი ამ მიმართულებაზე. ამისათვის საჭიროა τ_ν დავაგეგმილოთ N წრფეზე. მაგრამ იმავე შედეგს მივიღებთ, თუ ამ მიმართულებაზე დავაგეგმილებთ დახრილი კვეთის მთლიან p_ν დაბვას:

$$\begin{aligned} \tau_\nu &= X_\nu l_1 + Y_\nu m_1 + Z_\nu n_1 = \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + \\ &+ \tau_{xy} (l_1 m_1 + m_1 l_1) + \tau_{yz} (m_1 n_1 + n_1 m_1) + \tau_{zx} (n_1 l_1 + l_1 n_1). \end{aligned} \quad (8.9)$$

ამრიგად, დავადგინეთ, რომ დაბვები ნებისმიერ დახრილ კვეთში შეიძლება განისაზღვროს (8.2) სიდიდეების საშუალებით. წარმოვადგინოთ ეს სიდიდეები მატრიცული სახით:

$$I_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

მხები დაბვების წვეტილადობის კანონის შესაბამისად, ეს მატრიცა სიმეტრიულია მთავარი დიაგონალის მიმართ და მას დაბვების ტენზორი ეწოდება. აღნიშნულიდან გამომდინარე, დაბვების ტენზორი, ფაქტიურად, ექვსი სიდიდით განისაზღვრება.

რა თქმა უნდა, თუ A წერტილთან ავიღებთ სხვა საწყის მართკუთხედს, მაშინ მის წახნაგებზე მოქმედი დაბვებიც სხვა სიდიდის იქნება და (8.10) მატრიცაც შეიცვლება. მაგრამ ნებისმიერი მართკუთხედისათვის მატრიცას ექნება გარკვეული რაოდენობის უცვლელი სიდიდეები, რომლებიც, ფაქტიურად, განსაზღვრავს დაბვების ტენზორს. ამ მუდმივებს დაბვების ტენზორის ინვარიანტები ეწოდება. მათი დადგენა შემდგომში საგანგებო შესწავლის საგანი იქნება.

§51. მთავარი კვებები და მთავარი ქაბვები

წინა პარაგრაფში მივიღეთ ნებისმიერ დახრილ კვებში ნორმალური და მხები ქაბვების მნიშვნელობები. არსებობს თუ არა ისეთი სიბრტყე, რომელზედაც მხები ქაბვა ნულის ტოლია? თუ ასეთი კვები არსებობს, მაშინ რას უდრის მასზე ნორმალური ქაბვა?

დავუშვათ, რომ ასეთი კვები არსებობს. ვინაიდან მასზე არ აღიძრება მხები ქაბვა, მთლიანი ქაბვა ნორმალური ქაბვის ტოლია $p_y = \sigma_y = \sigma$. ამ ქაბვის გეგმილება საკოორდინატო ღერძებზე შეგვიძლია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$X_y = \sigma l; \quad Y_y = \sigma m; \quad Z_y = \sigma n.$$

ამ პირობების (8.5)-ში გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0; \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n &= 0; \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0. \end{aligned} \quad (8.11)$$

ამრიგად, კვების, რომელზედაც მოქმედებს მხოლოდ ნორმალური ქაბვა, - მართობი მიმართულებების კოსინუსების l, m, n განსაზღვრისათვის მივიღეთ ერთგვაროვან წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა. რადგან ეს კოსინუსები ერთმანეთთან დაკავშირებულია თანაფარდობით

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad (8.12)$$

ისინი ერთდროულად ვერ მიიღებენ ნულოვან მნიშვნელობებს და, აქედან გამომდინარე, (8.11) სისტემას აქვს არანულოვანი ამონახსნი. ამიტომ, კრამერის თეორემის შესაბამისად, სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0, \quad (8.13)$$

საიდანაც მივიღებთ შემდეგ კუბურ განტოლებას

$$\sigma^3 - I_{\sigma_1}\sigma^2 + I_{\sigma_2}\sigma - I_{\sigma_3} = 0. \quad (8.14)$$

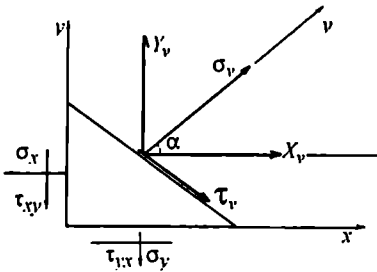
ამ განტოლების კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია, ვინაიდან მათი გაანგარიშება ხდება საწყისი ელემენტის ქაბვების შემდეგი ფორმულებით:

$$I_{\sigma_1} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$I_{\sigma_2} = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \quad (8.15)$$

$$I_{\sigma_3} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}.$$

(8.14) კუბურ განტოლებას აქვს სამი ფესვი. თუ ეს ფესვები ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ ისინი განსაზღვრებენ ნორმალურ ძაბვებს ისეთ კვეთებში, რომლებშიც მხები ძაბვები ნულის ტოლია. მათ მთავარი კვეთები ეწოდება, ხოლო მათში მოქმედი ნორმალური ძაბვები მთავარი ძაბვებია.



ნახ. 8.5

ვინაიდან (8.14) კენტი ხარისხის ალგებრული განტოლებაა, რომლის კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია, მას ერთი ნამდვილი ფესვი მაინც აქვს. ამრიგად, ვაძგენთ, რომ ერთი მთავარი კვეთი არსებობს და მასში ნორმალური ძაბვა განისაზღვრება (8.14) განტოლების ნამდვილი ფესვით. ახლა შევისწავლოთ (8.14)-ის ორი დანარჩენი ფესვის ხასიათი.

ავიღოთ A წერტილთან ახალი მართკუთხა ელემენტი და მისი წახნაგების მიმართულება შევარჩიოთ ისე, რომ Oz ღერძი მივმართოთ დადგენილი მთავარი კვეთის მართობულად. შევისწავლოთ ძაბვები ამ მთავარი კვეთის მართობ კვეთებში (ნახ. 8.5).

ასეთი კვეთების მიმართულების კოსინუსები ტოლია

$$l = \cos(v, x) = \cos \alpha; \quad m = \cos(v, y) = \sin \alpha; \quad n = \cos(v, z) = 0.$$

გამოვიყენოთ (8.5) ფორმულები და განვსაზღვროთ ძაბვის გეგმილები:

$$X_v = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \sin \alpha; \quad Y_v = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha; \quad Z_v = 0.$$

მიღებული შედეგები საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ ნორმალური და მხები ძაბვები დახრილ კვეთში:

$$\sigma_v = X_v \cos \alpha + Y_v \sin \alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\tau_v = X_v \sin \alpha - Y_v \cos \alpha = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha - \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

საიდანაც, საბოლოოდ, მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$\begin{aligned}\sigma_v &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha; \\ \tau_v &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha.\end{aligned}\quad (8.16)$$

დავადგინოთ მთავარი კვეთების მდებარეობა, რისთვისაც მხები ძაბვები გავუტოლოთ ნულს

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 - \tau_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0. \quad (8.17)$$

საიდანაც მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (8.18)$$

ამრიგად, დადგინდა კიდევ ერთი მთავარი კვეთის მდებარეობა. ეს მთავარი კვეთი განისაზღვრება იმ კვეთის მართობი წრფით, რომელიც Ox ღერძთან ადგენს α_0 კუთხეს. ეს უკანასკნელი განისაზღვრება (8.18) ფორმულით. დავამტკიცოთ, რომ მესამე მთავარი კვეთი ამ კვეთის მართობია. ცხადია, ამ შემთხვევაში მისი მართობი წრფე Ox ღერძთან $\beta_0 = \alpha_0 + \pi/2$ კუთხეს შეადგენს და საჭიროა დავადგინოთ, რომ ეს კუთხე აკმაყოფილებს (8.17) პირობას:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\beta_0 - \tau_{xy} \cos 2\beta_0 &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\alpha_0 + \pi) - \\ - \tau_{xy} \cos(2\alpha_0 + \pi) &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0.\end{aligned}$$

მიღებული შედეგი, (8.17)-ის შესაბამისად, ნულის ტოლია.

ამრიგად, დავადგინოთ, რომ არსებობს მხოლოდ სამი მთავარი კვეთი და ეს კვეთები ურთიერთმართობია, ე. ი. ნებისმიერ წერტილიდან სივრცეში შეიძლება ამოვკვეთოთ გარკვეული მდებარეობის მხოლოდ ერთი მართკუთხა ელემენტი, რომლის წახნაგებზე მოქმედებენ მხოლოდ ნორმალური ძაბვები. ამ ძაბვების მნიშვნელობები განისაზღვრება (8.14) განტოლების ამოხსნით. ეს ძაბვები სიდიდის მიხედვით აღვნიშნოთ σ_1 ; σ_2 ; σ_3 ასობით ისე, რომ სრულდებოდეს პირობა

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (8.19)$$

თუ სამიდან ერთი მთავარი ძაბვა ცნობილია, ორი დანარჩენი შეგვიძლია განვსაზღვროთ (8.16)-ის საშუალებით. ამისათვის ავიღოთ $\alpha = \alpha_0$, $\sigma_v = \sigma_3$, $\tau_v = 0$, მაშინ

$$\sigma_{\theta} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha_0 + \tau_{xy} \sin 2\alpha_0;$$

$$0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 - \tau_{xy} \cos 2\alpha_0.$$

ავიყვანოთ განტოლებების მარჯვენა და მარცხენა ნაწილები კვადრატში და მიღებული შედეგები შესაბამისად შევავსოთ:

$$\left(\sigma_{\theta} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2,$$

საიდანაც მივიღებთ მთავარი ძაბვების მნიშვნელობებს:

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad (8.20)$$

მთავარი სიბრტყეების მართობ მთავარი მიმართულებები ეწოდება. ამ მიმართულების შესაბამისი კოორდინატთა ღერძები მთავარი ღერძები.

მთავარი ძაბვის მნიშვნელობები ახასიათებს დაძაბულ მდგომარეობას წერტილში და დამოკიდებული არ არის იმაზე, თუ როგორი საწყისი ელემენტი აღებული დაძაბულობის შესასწავლად. აქედან გამომდინარე, (8.14) განტოლების კოეფიციენტები, რომლებიც განისაზღვრება (8.15) ფორმულებით ნებისმიერი საწყისი სისტემისათვის ერთი და იგივეა და მათ, შესაბამისად, დაძაბული მდგომარეობის ტენზორის პირველი, მეორე და მესამე ინვარიანტები ეწოდება. რა თქმა უნდა, ისინი სხვადასხვა სისტემებისათვის გარეგნული ფორმით შეიძლება განსხვავდებოდნენ. კერძოდ, თუ საწყისი ელემენტი მთავარი კვეთებით განისაზღვრება, ინვარიანტები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} I_{\sigma_1} &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_{\sigma_2} &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \\ I_{\sigma_3} &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \quad (8.21)$$

დავუშვათ, რომ საწყისი ელემენტის წახნაგები მთავარი კვეთებია. ამ შემთხვევაში კოორდინატების სისტემის სათანადო არჩევით მივალწევთ იმას, რომ შესრულდეს შემდეგი თანაფარდობები:

$$\sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_2, \quad \sigma_z = \sigma_3, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

(8.5)-ის შესაბამისად განვსაზღვროთ დახრილ კვეთში მოქმედი მთლიანი ძაბვის გეგმილები:

$$X_v = \sigma_1 l; \quad Y_v = \sigma_2 m; \quad Z_v = \sigma_3 n.$$

ახლა შეგვიძლია დავადგინოთ დახრილ კვეთში როგორც სრული ძაბვა, ისე მისი ნორმალური მდგენელი (ნახ. 8.4):

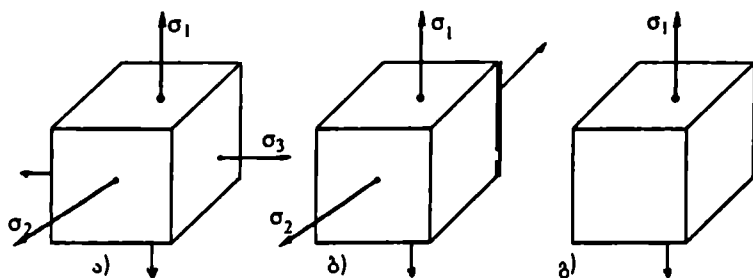
$$P_v^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2; \\ \sigma_v = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2. \quad (8.22)$$

ამ ფორმულების გამოყენებით, საჭიროების შემთხვევაში, დახრილ კვეთში მხებ ძაბვებს იოლად დავადგენთ (8.8) გამოსახულების საშუალებით.

§52. დაძაბული მდგომარეობის სახეები

დაძაბული მდგომარეობის სახეები განისაზღვრება მთავარ კვეთებში ძაბვების მნიშვნელობებით და ამიტომ მათი შესწავლისათვის საჭიროა გავაანალიზოთ (8.14) განტოლების ამონახსნის შესაძლო შემთხვევები.

დავუშვათ, რომ ძაბვების ტენზორის მესამე ინვარიანტი განსხვავებულია ნულისაგან, $I_{\sigma_3} \neq 0$. ამ შემთხვევაში განტოლებას აქვს ნულისაგან განსხვავებული სამი ამონახსნი და საქმე გვაქვს სამღერძა დაძაბულ მდგომარეობასთან (ნახ. 8.6ა).



ნახ. 8.6

დაძაბულ მდგომარეობას, რომლისთვისაც სამივე მთავარი ძაბვა განსხვავდება ნულისაგან, სამღერძა ან სივრცული დაძაბული მდგომარეობა ეწოდება.

განვიხილოთ მეორე შემთხვევა, რომლისთვისაც ძაბვების მესამე ინვარიანტი ნულის ტოლია $I_{\sigma_3} = 0$, მაგრამ მეორე ინვარიანტი განსხვავდება ნულისაგან $I_{\sigma_2} \neq 0$. ამ შემთხვევაში (8.14) განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\sigma(\sigma^2 - I_{\sigma_1} \sigma + I_{\sigma_2}) = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ სამივე მთავარი ძაბვის მნიშვნელობას:

$$\sigma_{I,II} = \frac{I_{\sigma I}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{\sigma I}}{2}\right)^2 - I_{\sigma 2}}; \quad \sigma_{III} = 0.$$

დაძაბულ მდგომარეობას, რომლისთვისაც ნულის ტოლია მხოლოდ ერთი მთავარი ძაბვა (ნახ. 8.6.ბ), ორღერძა ან ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა ეწოდება.

დავუშვათ, რომ $I_{\sigma 3} = I_{\sigma 2} = 0$ და $I_{\sigma I} \neq 0$. ამ შემთხვევაში, (8.14) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\sigma^2(\sigma - I_{\sigma I}) = 0.$$

ამ განტოლების ამოხსნით მივიღებთ სამივე მთავარი ძაბვის მნიშვნელობას:

$$\sigma_I = I_{\sigma I}; \quad \sigma_{II} = 0; \quad \sigma_{III} = 0.$$

დაძაბულ მდგომარეობას, რომლისთვისაც ნულისაგან განსხვავდება მხოლოდ ერთი მთავარი ძაბვა, ერთღერძა ან ხაზოვანი დაძაბული მდგომარეობა ეწოდება (ნახ. 8.6.გ).

ამ პარაგრაფში იძულებული ვიყავით მთავარი ძაბვებისათვის გამოგვეყენებინა რომაული ციფრები. კონკრეტულ შემთხვევაში, მათი რეალური სიდიდეების დადგენის შემდეგ, შესაბამისი არაბული ინდექსების მინიჭებით ვაკმაყოფილებთ (8.19) პირობას.

§5.3. დაძაბული მდგომარეობის წრიული დიაგრამები

დაძაბული მდგომარეობა წერტილში შეგვიძლია შევისწავლოთ გრაფიკულ-სახეობის ხერხების საშუალებით. ამისათვის კვეთში მთლიან ძაბვას, (8.8)-ის შესაბამისად, გამოვსახავთ შემდეგი სახით:

$$\sigma_v^2 + \tau_v^2 = p_v^2.$$

ამ გამოსახულების მარჯვენა და მარცხენა ნაწილებს მივუმატოთ ერთი და იგივე სიდიდეები

$$\begin{aligned} & \sigma_v^2 - \sigma_v(\sigma_3 + \sigma_1) + \left(\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau_v^2 = \\ & = p_v^2 - \sigma_v(\sigma_3 + \sigma_1) + \left(\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (8.23)$$

(8.23) ფორმულაში გავითვალისწინოთ (8.22) თანაფარდობა. ელემენტარული გარდაქმნების საშუალებით და (8.12)-ის გათვალისწინებით, (8.23) ფორმულას დავიყვანოთ შემდეგ სახამდე:

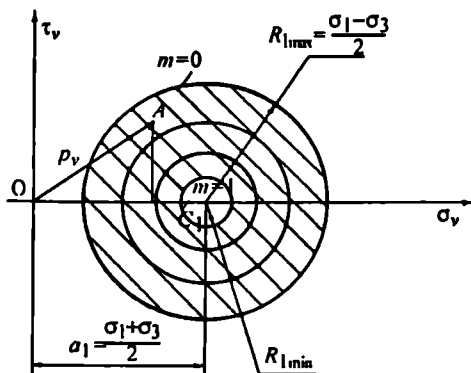
$$\left(\sigma_v - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau_v^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)m^2.$$

გადავწეროთ ეს გამოსახულება შემდეგი სახით

$$(\sigma_v - a_1)^2 + \tau_v^2 = R_1^2, \quad (8.24)$$

სადაც მიღებულია აღნიშვნები:

$$a_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}; \quad R_1 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)m^2}. \quad (8.25)$$



ნახ. 8.7

(8.24) განტოლება არის წრეწირების სიმრავლე, რომლის ცენტრი დევს C_1 წერტილში (ნახ. 8.7).

(8.12) და (8.19) პირობების გათვალისწინებით დავადგინოთ შემდეგ უტოლობებს:

$$\begin{aligned} (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) &\leq 0; \\ 0 &\leq m^2 \leq 1. \end{aligned} \quad (8.26)$$

ეს შედეგი საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ წრეწირთა სიმრავლის მინიმალური და მაქსიმალური რადიუსები:

$$R_{1 \min} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}; \quad R_{1 \max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (8.27)$$

ამრიგად, ნებისმიერ სიბრტყეში, რომლის მიმართულების კოსინუსი m -ის ტოლია, ნორმალური და მხები ძაბვები შეიძლება განისაზღვროს მხოლოდ სიმრავლის ერთ-ერთი წრეწირის კოორდინატების საშუალებით, ე.ი. წერტილების კოორდინატებით დაშტრიხული არიდან (ნახ. 8.7). თვით ამ არის წერტილიდან მანძილი კოორდინატთა სისტემის საწყის 0 წერტილამდე წარმოადგენს მთლიანი ძაბვის მნიშვნელობას დახრილ კვეთში.

ანალოგიური გამოკვლევებით მივიღებთ წრეწირთა მეორე სიმრავლეს (ნახ. 8.8), რომლის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$(\sigma_v - a_2)^2 + \tau_v^2 = R_2^2, \quad (8.28)$$

სადაც

$$a_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}; \quad R_2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}n^2 \quad (8.29)$$

ამ სიმრავლის მინიმალური და მაქსიმალური რადიუსები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$R_{2\min} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad R_{2\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)}. \quad (8.30)$$

მესამე წრეწირთა სიმრავლისათვის (ნახ. 8.9) მივიღებთ შემდეგ განტოლებას

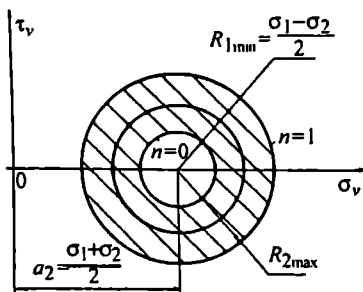
$$(\sigma_v - a_3)^2 + \tau_v^2 = R_3^2,$$

სადაც

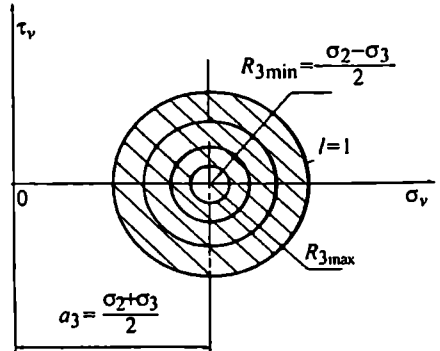
$$a_3 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}; \quad R_3 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}l^2 \quad (8.31)$$

ამ სიმრავლის მინიმალური და მაქსიმალური რადიუსები, შესაბამისად, იქნება

$$R_{3\min} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad R_{3\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}. \quad (8.32)$$

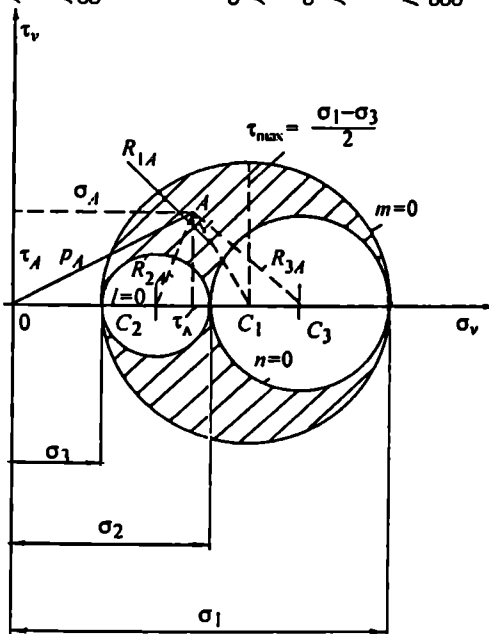


ნახ. 8.8



ნახ. 8.9

სამივე სიმრავლის ზღვრული წრეწირები ნაჩვენებია 8.10 ნახაზზე. ადვილი დასადგენია, რომ სხვადასხვა დახრილ კვეთში, რომლებიც განისაზღვრება l, m, n



ნახ. 8.10

მიმართულების კოსინუსებით, და-
 ძაბული მდგომარეობა წარმოგ-
 ვიდგება დაშტრიხული არის წერ-
 ტილის კოორდინატებით. მაგალი-
 თად, σ_A და τ_A ნორმალური და მხე-
 ბი ძაბვებია დახრილ კვეთში, რო-
 მელიც განისაზღვრება შესაბამისი
 მეორე (მრუდი 2) და მესამე (მრუ-
 დი 3) სიმრავლეების წრეწირის გა-
 დაკვეთის A წერტილით. რადგან
 $R_2 = C_2A$ და $R_3 = C_3A$, (8.29) და
 (8.31) ფორმულების საშუალებით
 შეგვიძლია დავადგინოთ წახნაგის
 მართობის l და n მიმართულების
 კოსინუსები. რაც შეეხება მესამე
 მიმართულების m კოსინუსს, მისი
 მნიშვნელობა შეიძლება განისა-
 ზღვროს როგორც (8.25) ($R_1 = C_1A$),
 ისე (8.12) თანაფარდობის გამოყე-
 ნებით.

მიღებული შედეგების საშუა-
 ლებით განვსაზღვროთ ნორმალუ-

რი და მხები ძაბვების ცვლილების საზღვრები:

$$\sigma_3 \leq \sigma_v \leq \sigma_1; \quad -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \tau_v \leq \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია დავადგინოთ უდიდესი და უმცირესი ძაბვის მნიშვნელობები:

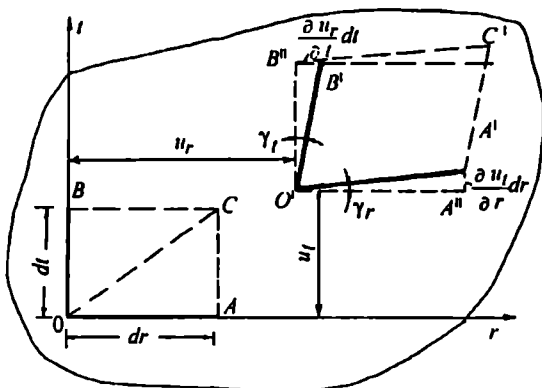
$$\sigma_{\max} = \sigma_1; \quad \sigma_{\min} = \sigma_3; \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (8.33)$$

შევეცადოთ განვსაზღვროთ მთლიანი ძაბვის აბსოლუტური სიდიდის უდი-
 დესი მნიშვნელობა.

მთლიანი ძაბვა A წერტილის შესაბამის წახნაგში წარმოადგენს ნორმალური
 და მხები ძაბვების გეომეტრიულ ჯამს. ამიტომ იგი განისაზღვრება OA მონაკვე-
 თით. აქედან გამომდინარე, მაქსიმალური მთლიანი ძაბვა წარმოიქმნება წრეწი-
 რის ($m=0$) შესაბამის წახნაგებში (ნახ. 8.10), ამიტომ ადვილი აქვს უტოლობას:
 $\rho_1 \leq \sigma_1$.

§54. დეფორმირებული მდგომარეობა წერტილში

განვიხილოთ მოდებული ძალებით გამოწვეული მყარი სხეულის დეფორმირება. დავეუკავშიროთ სხეულს კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 8.11). სხეულის დეფორმირებამდე ავიღოთ ამ სისტემის საწყის წერტილთან ორი ურთიერთმართობი OA და OB მონაკვეთი.



ნახ. 8.11

სხეულის დეფორმაციის შედეგად O წერტილი გადაადგილდება O' და O' მიმართულებით. შესაბამისად, u_r და u_l სიდიდეებზე და გადავა O' წერტილში. OA მონაკვეთი დაიკავებს $O'A'$ მდებარეობას. შესაბამისად, r მიმართულებით A წერტილის გადაადგილება იქნება

$$u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} dr.$$

ახლა შეგვიძლია გავინახარიშოთ O წერტილში Or მიმართულებით სხეულის დეფორმაცია

$$\epsilon_r = \frac{\left(dr + u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} dr \right) - (dr + u_r)}{dr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}. \quad (8.34)$$

ანალოგიური ხერხით მივიღებთ დეფორმაციას მეორე მიმართულებით

$$\epsilon_l = \frac{\left(dl + u_l + \frac{\partial u_l}{\partial l} dl \right) - (dl + u_l)}{dl} = \frac{\partial u_l}{\partial l}. \quad (8.35)$$

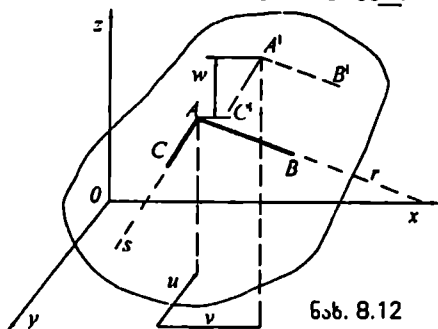
დავადგინოთ მართი BOA კუთხის ცვლილება, ე.ი. კუთხური დეფორმაცია:

$$\gamma_{rl} = \gamma_r + \gamma_l = \frac{\partial u_l}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial l}. \quad (8.36)$$

განვაზოგადოთ მიღებული შედეგები. განვიხილოთ სივრცითი ამოცანა და სხეულს დავეუკავშიროთ ორი ურთიერთმართობი r და S წრფე, რომელთა მიმართულებები, შესაბამისად, განისაზღვრება l, m, n , და l_1, m_1, n_1 მიმართულებების კოსინუსებით (ნახ. 8.12).

სხეულის დეფორმაციის შედეგად მონაკვეთები გადაადგილდება და CAB დიკავებს $C'A'B'$ მდებარეობას.

აღნიშნოთ A წერტილის გადაადგილებები Ox , Oy და Oz ღერძების მიმართულებით, შესაბამისად, u , v , w ასობით. განვსაზღვროთ A წერტილის გადაადგილების გეგმილები r და s მიმართულებებზე:



$$\begin{aligned} u_r &= ul + vm + wn; \\ u_s &= ul_1 + vm_1 + wn_1. \end{aligned} \quad (8.37)$$

განვსაზღვროთ Ar მიმართულების წრფივი დეფორმაცია, (8.34)-ის შესაბამისად

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial x} \frac{dx}{dr} + \frac{\partial u_r}{\partial y} \frac{dy}{dr} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{dz}{dr}. \quad (8.38)$$

მიღებული შედეგის გარდასაქმნელად გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულები:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dr} &= l; & \frac{dy}{dr} &= m; & \frac{dz}{dr} &= n; \\ \frac{dx}{ds} &= l_1; & \frac{dy}{ds} &= m_1; & \frac{dz}{ds} &= n_1; \end{aligned}$$

გარდავქმნათ (8.38) გამოსახულება:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial x} l + \frac{\partial u_r}{\partial y} m + \frac{\partial u_r}{\partial z} n = l \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right) + m \left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n \right) + \\ &+ n \left(\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) = l^2 \frac{\partial u}{\partial x} + m^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) lm + \\ &+ \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) mn + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) nl. \end{aligned}$$

წრფივი და კუთხური დეფორმაციების განსაზღვრისათვის საჭიროა გამოვიყენოთ (8.35) და (8.36) ფორმულები:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (8.39)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (8.40)$$

საბოლოოდ ϵ_r -ის მნიშვნელობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\epsilon_r = \epsilon_x l^2 + \epsilon_y m^2 + \epsilon_z n^2 + 2 \frac{\gamma_{xy}}{2} lm + 2 \frac{\gamma_{yz}}{2} mn + 2 \frac{\gamma_{zx}}{2} nl. \quad (8.41)$$

(8.36)-ის შესაბამისად, ანალოგიურად დავადგინოთ კუთხური დეფორმაცია:

$$\begin{aligned} \gamma_{rs} = \frac{\partial u_s}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial s} = & 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} ll_1 + \frac{\partial v}{\partial y} mm_1 + \frac{\partial w}{\partial z} nn_1 \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (lm_1 + ml_1) + \\ & + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) (mn_1 + m_1n) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) (nl_1 + n_1l), \end{aligned}$$

საიდანაც მივიღებთ ფორმულას:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{rs}}{2} = & \epsilon_x ll_1 + \epsilon_y mm_1 + \epsilon_z nn_1 + \frac{\gamma_{xy}}{2} (lm_1 + l_1m) + \\ & + \frac{\gamma_{yz}}{2} (mn_1 + m_1n) + \frac{\gamma_{zx}}{2} (nl_1 + n_1l). \end{aligned} \quad (8.42)$$

(8.41), (8.42) ფორმულების და (8.7), (8.9) ფორმულების ერთმანეთთან შედარებით ვრწმუნდებით, რომ წრფივი და კუთხური დეფორმაციები ერთი მიმართულებიდან მეორეზე გადასვლისას იმავე კანონზომიერებით იცვლება, როგორც იმავე სახის გარდაქმნებისას ნორმალური და მხები ძაბვები. აქედან გამომდინარე, დეფორმირებული მდგომარეობა წერტილში განისაზღვრება დეფორმაციების ტენზორით:

$$I_\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (8.43)$$

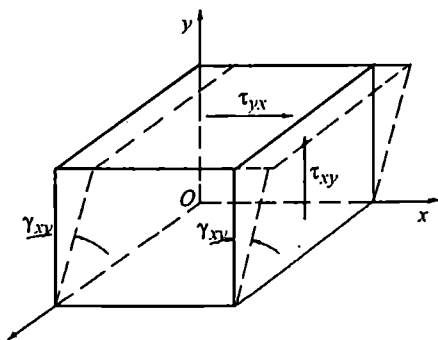
აღნიშნული შესაბამისობა საშუალებას გვაძლევს ძაბვებისათვის მიღებული ფორმულები, დასკვნები და ცნებები საგანგებო განხილვის გარეშე განვაზოგადოთ დეფორმირებულ მდგომარეობაზე.

დაძაბული მდგომარეობის ანალოგიურად, დეფორმირებული მდგომარეობე-

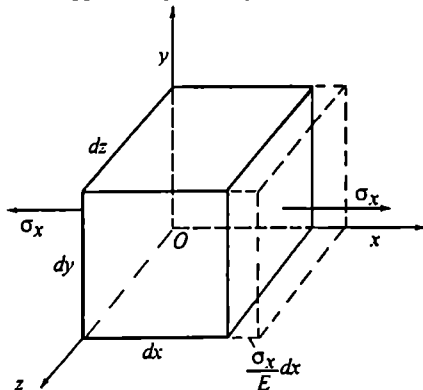
ბისათვისაც არსებობს სამი მთავარი მიმართულება და შესაბამისი სამი მთავარი დეფორმაცია. ამ მთავარი მიმართულებით შედგენილ კოორდინატთა სისტემაში კუთხური დეფორმაციები ნულის ტოლია. დეფორმაციების ტენზორსაც გააჩნია სამი ინვარიანტი, რომელთა საშუალებითაც მთავარი დეფორმაციების მნიშვნელობის დასადგენად შეიძლება შევადგინოთ კუბური განტოლება.

§55. ჰუკის განზოგადებული კანონი

დაძაბული და დეფორმირებული მდგომარეობები განვიხილეთ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. მაგრამ როდესაც კონკრეტულ ამოცანებს ვიხილავთ, მხედველობაში ვიღებთ მათ შორის არსებულ ამ თუ იმ სახის ურთიერთკავშირს. ეს დამოკიდებულება, როგორც წესი, ექსპერიმენტების საშუალებით დგინდება და მისი სირთულე დამოკიდებულია მასალის თვისებებზე. პრაქტიკაში გამოყენებული იზოტროპული მასალებისათვის ფართოდ გამოიყენება წრფივი დამოკიდებულებები, რომელთა საშუალებითაც მრავალი მასალისათვის შეიძლება ჩავატაროთ გაანგარიშებები ძაბვების საკმაოდ ფართო საზღვრებში ცვლილების პირობებში.



ნახ. 8.13



ნახ. 8.14

ამოკვეთით მყარი დეფორმირებული სხეულიდან მართკუთხა ელემენტი (ნახ. 8.2), დავადგინოთ ელემენტის გადაადგილებები, რისთვისაც გამოვიყენოთ ძალთა მოქმედების დამოუკიდებლობის პრინციპი. განვიხილოთ ელემენტზე მხოლოდ τ_{yx} -ის მოქმედება (ნახ. 8.13). ნახაზიდან ჩანს, რომ ამ შემთხვევაში მართი კუთხე იცვლება მხოლოდ γ_{yx} სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებში. ანალოგიურად შეგვიძლია განვიხილოთ კუთხური გადაადგილებები, რომლებიც გამოწვეულია τ_{yz} და τ_{zx} ძაბვებით. თუ დავუშვებთ, რომ ძაბვებსა და კუთხურ გადაადგილებებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება და მასალის თვისებები ყველა მიმართულებით ერთნაირია, ე.ი. მასალა იზოტროპულია, მაშინ, იგი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad (8.44)$$

სადაც G მეორე რიგის დრეკადობის მოდელია.

ახლა განვიხილოთ გადაადგილებები, რომლებიც გამოწვეულია Ox ღერძის მიმართულების ნორმალური ძაბვებით (ნახ. 8.14). ამ ძაბვის მოქმედებით გამოწვეული Ox მიმართულების დეფორმაცია (σ_x/E)-ის ტოლია. ორი დანარჩენი ღერძის მიმართულებით დეფორმაციები დგინდება პუასონის კოეფიციენტის საშუალებით შემდეგი ფორმულით: $-\mu(\sigma_x/E)$. ანალოგიურად ვადგენთ σ_y -ის და σ_z -ის მიერ გამოწვეულ დეფორმაციებს. საბოლოოდ, ცალკეული ძაბვების მიერ გამოწვეული ერთი და იმავე მიმართულების დეფორმაციების შეკრებით ვადგენთ სრულ დეფორმაციებს:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (8.45)$$

ვინაიდან (8.44)-ის შესაბამისად, მხები ძაბვები და კუთხური დეფორმაციები ერთდროულად იღებს ნულოვან მნიშვნელობებს, დაძაბული და დეფორმირებული მდგომარეობების მთავარი მიმართულებები ერთმანეთს ემთხვევა.

თუ სხეულის ტემპერატურა t გრადუსით იზრდება და მასალის წრფივი გაფართოების კოეფიციენტია α , მაშინ (8.45)-ის მარჯვენა ნაწილებს უნდა დავუმატოთ αt სიდიდე. რაც შეეხება (8.44) თანაფარდობებს, ისინი უცვლელი რჩება. (8.44) და (8.45) ფორმულები გამოხატავს *შუკის განზოგადებულ კანონს*.

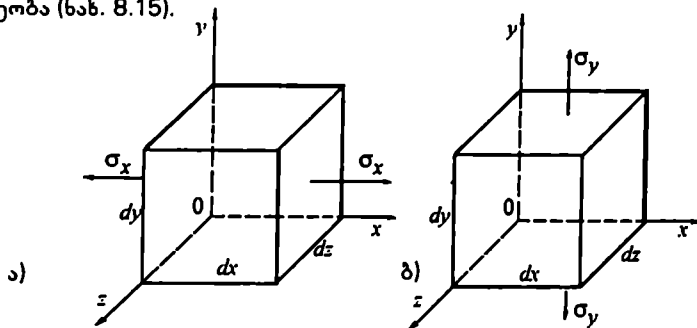
ანიზოტროპული მასალებისათვის, რომლებსაც სხვადასხვა მიმართულებით დრეკადობის სხვადასხვა მაჩასიათებელი გააჩნია, შუკის კანონი ზოგადი სახით ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{zx} + a_{16}\tau_{xy}; \\ \epsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{zx} + a_{26}\tau_{xy}; \\ \epsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{zx} + a_{36}\tau_{xy}; \\ \gamma_{yz} &= a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{63}\sigma_z + a_{64}\tau_{yz} + a_{65}\tau_{zx} + a_{66}\tau_{xy}, \end{aligned} \quad (8.46)$$

სადაც a_{ij} დრეკადობის მუდმივებია, რომლებიც გამოხატავს მასალის თვისებებს. იზოტროპული მასალისათვის სამი E , G μ მუდმივიდან, როგორც უკვე დავადგინეთ მეცხრე პარაგრაფში, დამოუკიდებელია მხოლოდ ორი მუდმივი.

ანიზოტროპული მასალისათვის სურათი გაცილებით უფრო რთულია და

შუკის კანონის ჩასაწერად გამოყენებულია 36 მუდმივი. დავადგინოთ დამოუკიდებელი მუდმივების რიცხვი, რისთვისაც განვიხილოთ ორი დაძაბული მდგომარეობა (ნახ. 8.15).



ნახ. 8.15

პირველი დაძაბული მდგომარეობით განპირობებული y მიმართულებით ელემენტის წაგრძელება $d\Delta_{xy} = a_{21} \sigma_x dy$. ანალოგიურად განისაზღვრება მეორე დაძაბულობით განპირობებული ელემენტის წაგრძელება პირველი მიმართულებით $d\Delta_{yx} = a_{12} \sigma_y dx$.

მუშაობის ურთიერთობის პრინციპიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ჩამოვყავალიბოთ შემდეგი პირობა:

$$(\sigma_y dx dz) a_{21} \sigma_x dy = (\sigma_x dy dz) a_{12} \sigma_y dx,$$

საიდანაც დავადგენთ, რომ $a_{12} = a_{21}$. ასე დავადგენთ კიდევ 14 ანალოგიურ ტოლობას. ამრიგად, ზოგადი ხასიათის ანიზოტროპული სხეულისათვის (8.46)-ის 36 მუდმივიდან დამოუკიდებელია მხოლოდ 21 მუდმივი.

დავუშვათ, რომ x, y, z დაძაბული მდგომარეობის მთავარი ღერძებია და ამიტომ $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. ამ შემთხვევაში, (8.46)-ის შესაბამისად, კუთხური დეფორმაციები არ უდრის ნულს, რაც მოწმობს, რომ იზოტროპული საგან განსხვავებით, ანიზოტროპული სხეულისათვის დაძაბული და დეფორმირებული მდგომარეობების მთავარი მიმართულებები ერთმანეთს არ ემთხვევა.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}; \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}, \quad (8.47)$$

მაშინ (8.46) შეგვიძლია გამოვსახოთ შემდეგი სახით

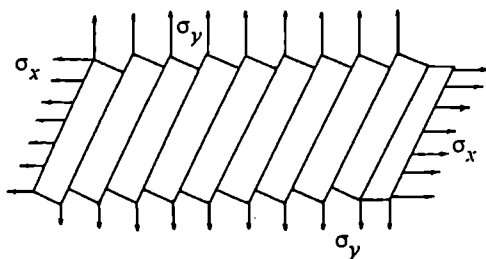
$$\epsilon = A\sigma \quad \text{ან} \quad \sigma = A^{-1}\epsilon, \quad (8.48)$$

სადაც ϵ , σ შესაბამისად დეფორმაციების და ძაბვების ვექტორებია. კვადრატული სიმეტრიული მატრიცის შებრუნებული A^{-1} მატრიცა მასალის დრეკად თვისებებს ახასიათებს და მას დრეკადობის მატრიცა ეწოდება.

იზოტროპული მასალებისათვის დრეკადობის მახასიათებლების რაოდენობა ნაკლებია, ამიტომ (8.45)-ის შესაბამისად, შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი ფორმულა:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} \end{pmatrix} \quad (8.49)$$

მასალის მოდელი, რომელიც აღიწერება (8.46) თანაფარდობებით, გამოიყენება ე.წ. კონსტრუქციული ანიზოტროპიის გასათვალისწინებლად, როდესაც დეტალისათვის დამახასიათებელი გეომეტრიული თავისებურებანი მრავალჯერ

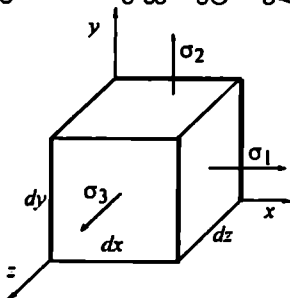


ნახ. 8.16

მეორდება, როგორც ეს, მაგალითად, ნაჩვენებია 8.16 ნახაზზე. განგარიშებისას ზომებისა და ფორმის მასალის თვისებების მახასიათებლად წარმოდგენა შესაძლებელია, თუ ყოველი გეომეტრიული თავისებურებით განსხვავებული უბნის ზომები გაცილებით მცირეა კონსტრუქციის საერთო ზომებთან შედარებით.

წინ. დეფორმირებული სხეულის მოცულობის ცვლილება.
დეფორმაციის ენერჯია

დრეკადი სხეული გარე ძალების მოქმედების შედეგად იცვლის როგორც ფორმას, ისე გეომეტრიულ ზომებს, ე.ი. მოცულობას. ამ უკანასკნელის შესასწავლად განვიხილოთ უსასრულოდ მცირე ზომების ელემენტი (ნახ. 8.17) და დავადგინოთ დაძაბულობით გამოწვეული მოცულობის ცვლილება. ელემენტის საწყისი ზომებია dx , dy , dz . ამიტომ შესაბამისი მოცულობა განისაზღვრება ფორმულით:



ნახ. 8.17

$$dV_0 = dx dy dz. \quad (8.50)$$

დეფორმაციის შემდეგ ელემენტის ზომები, შესაბამისად, იქნება

$$dx(1 + \epsilon_1); \quad dy(1 + \epsilon_2); \quad dz(1 + \epsilon_3).$$

ელემენტის მოცულობა დეფორმირებულ მდგომარეობაში არის

$$\begin{aligned} dV &= dx dy dz (1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_3) = \\ &= dV_0 (1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_3 \epsilon_1 + \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3). \end{aligned} \quad (8.51)$$

აქ განვიხილება მხოლოდ მცირე სიდიდის დეფორმაციები და ამიტომ მათი ნამრავლები, როგორც სხვა სიდიდეებთან შედარებით მცირე სიდიდეები, შეგვიძლია მხედველობაში არ მივიღოთ. აღნიშნულის გათვალისწინებით, (8.51) ფორმულა შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სახით:

$$dV = dV_0 (1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3).$$

მაშინ მოცულობის ცვლილებების დიფერენციალია.

$$d(\Delta V) = dV - dV_0 = dV_0 (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3). \quad (8.52)$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარე, ინტეგრების საშუალებით დავადგინოთ სხეულის მოცულობის ცვლილებას

$$\Delta V = \int_{V_0} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) dV_0. \quad (8.53)$$

(8.52) ფორმულის საშუალებით შეიძლება დავადგინოთ მოცულობის ფარდობითი ცვლილება:

$$\theta = \frac{d(\Delta V)}{dV_0} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = I_{\epsilon_1}. \quad (8.54)$$

ამრიგად, მოცულობის ფარდობითი ცვლილება დეფორმაციების ტენზორის პირველი ინვარიანტის ტოლია, მოცულობის ერთეულის ცვლილება დამოკიდებული არ არის კოორდინატთა საწყისი სისტემის არჩევაზე.

მიღებული შედეგები არ არის დამოკიდებული მასალის თვისებებზე და ამ თვალსაზრისით, ზოგად ხასიათს ატარებს. თუ მასალა იზოტროპულია, ემორჩილება ჰუკის განზოგადებულ კანონს და კოორდინატთა სისტემა განისაზღვრება მთავარი მიმართულებებით, (8.45)-ის გათვალისწინებით, ნაცვლად (8.54) ფორმულისა მივიღებთ მ-ს გამოსახულებას ძაბვების საშუალებით:

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2\mu}{E} I_{\sigma_1}. \quad (8.55)$$

მიღებული ფორმულით შეიძლება იზოტროპული მასალისათვის დავადგინოთ პუასონის კოეფიციენტის ზღვრული მნიშვნელობა. განვიხილოთ დაძაბული მდგომარეობის (ნახ. 8.17) კერძო შემთხვევა, როცა $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$, რაც შეესაბამება ელემენტის ყოველმხრივ თანაბარ შეკუმშვას. ადვილი წარმოსადგენია, რომ ასეთ პირობებში ელემენტის მოცულობა უნდა მცირდებოდეს ან უკიდურეს შემთხვევაში, უცვლელი რჩებოდეს, ე.ი. θ უნდა იყოს არადადებითი:

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(-3p) = -\frac{3(1-2\mu)}{E} p \leq 0,$$

რისთვისაც, აუცილებელია სრულდებოდეს პირობა: $1-2\mu \geq 0$. ამასთან, თუ გავითვალისწინებთ (1.11)-ს, საბოლოოდ დავადგენთ პუასონის კოეფიციენტის ცვლილების ზღვრებს: $0 \leq \mu \leq 0,5$.

დავადგინოთ 8.17 ნახაზზე გამოსახული ელემენტის დეფორმაციის ენერჯია, რისთვისაც გამოვიყენოთ (6.61) ფორმულა:

$$\begin{aligned} dU &= \frac{(\sigma_1 dydz) \epsilon_1 dx}{2} + \frac{(\sigma_2 dzdx) \epsilon_2 dy}{2} + \frac{(\sigma_3 dxdy) \epsilon_3 dz}{2} = \\ &= \frac{dV_0}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3) = \\ &= \frac{dV_0}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)] = \\ &= \frac{dV_0}{2E} [(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2(1+\mu)(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)] = \\ &= \frac{dV_0}{2E} [I_{\sigma_1}^2 - 2(1+\mu)I_{\sigma_2}] \end{aligned}$$

ხვედრითი მოცულობითი ენერგია

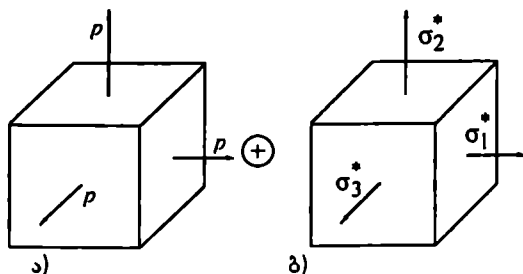
$$a = \frac{dU}{dV_0} = \frac{1}{2E} \left[I \sigma_1^2 - 2(1+\mu) I \sigma_2 \right] \quad (8.56)$$

მივიღეთ ადვილად გასაგები შედეგი, რომ ხვედრითი ენერგია დამოკიდებული არ არის კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე და გამოიხატება ძაბვების ტენზორის პირველი და მეორე ინვარიანტის საშუალებით.

ელემენტის დეფორმაციაზე დახარჯული ენერგიის ნაწილი ხმარდება მისი ფორმის, ხოლო ნაწილი – მისი მოცულობის ცვლილებას. ენერგიის ეს ორი შემადგენელი ნაწილი, შესაბამისად აღვნიშნოთ $a_{ფ}$ და $a_{ც}$ ასოებით და შევეცადოთ მათ განცალკევებას. ამისათვის 8.17 ნახაზზე ნაჩვენებ დამაბული მდგომარეობა წარმოვადგინოთ როგორც ორი დამაბული მდგომარეობის ჯამი (ნახ. 8.18). დაშვების შესაბამისად გვაქვს შემდეგი ტოლობები:

$$\sigma_1 = p + \sigma_1^*; \quad \sigma_2 = p + \sigma_2^*; \quad \sigma_3 = p + \sigma_3^* \quad (8.57)$$

ჩავთვალოთ, რომ დამაბული მდგომარეობის განცალკევება მოხდა ისე, რომ



ნახ. 8.18

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3p + (\sigma_1^* + \sigma_2^* + \sigma_3^*) \quad (8.58)$$

მეორე დამხმარე დამაბული მდგომარეობისათვის მოცულობა არ იცვლება და ამიტომ, (8.55)-ის შესაბამისად, გვაქვს ტოლობა $\sigma_1^* + \sigma_2^* + \sigma_3^* = 0$. მაშინ (8.58)-დან მივიღებთ:

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I \sigma_1 \quad (8.59)$$

ახლა დავადგინოთ მოცულობის ცვლილებაზე დახარჯული ენერგია. გავიანგარიშოთ პირველი დამაბული მდგომარეობის (ნახ. 8.18) ძაბვების ტენზორის ინვარიანტები:

$$I_{\sigma_1}^* = 3p = I_{\sigma_1}; \quad I_{\sigma_2}^* = pp + pp + pp = \frac{1}{3} I_{\sigma_1}^2. \quad (8.60)$$

მიღებული შედეგი გავითვალისწინოთ (8.56)-ში და დავადგინოთ სხეულის მოცულობის ცვლისათვის საჭირო ხვედრითი ენერგიის ფორმულა

$$a_{\text{გ}} = \frac{1}{2E} \left[\left(I_{\sigma_1}^* \right)^2 - 2(1+\mu) I_{\sigma_2}^* \right] = \frac{1-2\mu}{6E} I_{\sigma_1}^2. \quad (8.61)$$

ელემენტის ფორმის შესაცვლელად დახარჯული ხვედრითი ენერგიის მისაღებად საჭიროა ელემენტის სრულ ხვედრით ენერგიას გამოვაკლოთ სხეულის მოცულობის შეცვლაზე დახარჯული ხვედრითი ენერგია:

$$\begin{aligned} a_{\text{ფ}} &= a - a_{\text{გ}} = \frac{1}{2E} \left[I_{\sigma_1}^2 - 2(1+\mu) I_{\sigma_2} \right] - \frac{1-2\mu}{6E} I_{\sigma_1}^2 = \\ &= \frac{1+\mu}{3E} \left(I_{\sigma_1}^2 - 3I_{\sigma_2} \right) \end{aligned} \quad (8.62)$$

ეს ფორმულა შეგვიძლია გამოვსახოთ ძაბვების საშუალებითაც:

$$\begin{aligned} a_{\text{ფ}} &= \frac{1+\mu}{3E} \left[(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 3(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right] = \\ &= \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \end{aligned} \quad (8.63)$$

მიღებული შედეგი შემდგომში გამოიყენება პლასტიკურობის და სიმტკიცის ერთ-ერთი კრიტერიუმის ჩამოსაყალიბებლად.

IX თავი. ზღვრული დაძაბული მდგომარეობის თეორიები

§57. ზღვრული დაძაბული მდგომარეობა

გაქვიშვა-კუმშვაზე ნიმუშის გამოცდით დადგინდა, რომ მცირე სიდიდის ძაბვები მასალაში იწვევს დრეკად დეფორმაციებს. მაგრამ ძალების ზრდასთან ერთად პროცესი რთულდება. არსებობს ისეთი მასალებიც, რომლებსთვისაც გარკვეული სიდიდის ძაბვების მოქმედებებისას დამახასიათებელია დეფორმაციების და გადაადგილებების სწრაფი ზრდა პრაქტიკულად უცვლელი ძაბვების მოქმედების შემთხვევაში, ეს პლასტიკური მასალებია. საგულისხმოა, რომ ძალების მოხსნის შემდეგ დეფორმაციების მნიშვნელოვანი ნაწილი არ ქრება, რჩება მასალაში ნარჩენი დეფორმაციის სახით, რის გამოც დეტალი კარგავს საწყის ფორმას და ზომებს.

მეყვე მასალებისთვის მცირე სიდიდის ძაბვების მოქმედების დროსაც იგივე სურათი გვაქვს. მცირე სიდიდის ძაბვები მასალაში იწვევს დრეკად დეფორმაციებს, მაგრამ ძაბვების ზრდასთან ერთად, სიმტკიცის ზღვართან მიახლოებისას, მასალაში იწყება ადგილობრივი ბზარების წარმოშობა, მათი შემდგომი განვითარება და გაერთიანებაც. თუ ამ პროცესის დასაწყისში, როგორც წესი, საქმე გვაქვს ცალკეულ მიკრობზარებთან, პროცესის ბოლო ფაზაში მიკრობზარები, ძირითადად, განსაზღვრავს მასალის მდგომარეობას და ამას, საბოლოოდ მიყვავართ მასალის მსხვრევამდე. ამ მოვლენის სირთულე და მასალათა გამძლეობის ერთ-ერთ ძირითად დებულებასთან მისი წინააღმდეგობრივი დამოკიდებულება იოლად აღიქმება. ერთი მხრივ, უსასრულოდ მცირეს ცნებაზე დაყრდნობით შექმნილი მათემატიკური აპარატის გამოსაყენებლად დავუშვით, რომ მასალა ერთგვაროვანი და უწყვეტია. ყველა ძირითადი შედეგი როგორც მასალათა გამძლეობაში, ისე დრეკადობის თეორიაში, არსებითად ამ დებულებაზეა დაყრდნობილი. მეორე მხრივ, როგორც პლასტიკური დეფორმაციების, ისე მიკრობზარების ჩასახვა და გავრცელება დაკავშირებულია მასალების მიკროსტრუქტურის არაერთგვაროვნებასთან. უფრო მეტიც, პლასტიკური დეფორმაციების და დამსხვრევისადმი წინააღმდეგობის შესაძლებლობები მჭიდროდაა დაკავშირებული მასალის მოლეკულურ აღნაგობასთან. ამის ნათელ მაგალითს გვაძლევს ჩვეულებრივი და მაღალი სიმტკიცის ფოლადების თვისებების შედარება. მაღალი სიმტკიცის ფოლადები მიიღება მალეგირებული მცირე დანამატებისა და სპეციალური თერმოდამუშავების საშუალებით სტრუქტურის ცვლილებით. ათეული წლების მანძილზე ამ მიმართულებით გაწეულმა თანმიმდევრულმა კვლევამ-ძიებამ უზრუნველყო მასალის პლასტიკურობის და სიმტკიცის მახასიათებლების ათჯერ და, ზოგ შემთხვევაში, ასჯერ გაზრდაც კი. რაც შეეხება დრეკადობის მახასიათებლებს, დრეკადობის მოდულებს, არსებუ-

ლი ფოლადებისათვის ისინი თითქმის ერთი და იგივე სიდიდისაა და მათ შორის განსხვავება, როგორც წესი, არ აღემატება 6-7%-ს.

მეორე სირთულე დაკავშირებულია შესწავლის მეთოდოლოგიასთან. როგორც დავინახეთ, პლასტიკური დეფორმაციები და დამსხვრევა მყისვე არ წარმოიშობა. მათი ჩასახვა და შემდგომი გავრცელება ხდება დროში და ამიტომ, ისინი შესწავლილი უნდა იქნეს, როგორც პროცესები. მაგრამ ასეთი შესწავლა ყოველთვის არ ხერხდება და იძულებული ვხდებით ვეძებთ დაძაბულობის ისეთი საზღვრები, რომლებიც ასეთ პრიცესებს მნიშვნელოვნად ზღუდავს ან საერთოდ წყვეტს. პლასტიკური მასალებისათვის ზღვრულად ითვლება ისეთი დაძაბული მდგომარეობა წერტილში, რომელიც შეესაბამება მნიშვნელოვანი ნარჩენი დეფორმაციების წარმოშობას, მყიფე მასალისათვის კი ისეთი დაძაბული მდგომარეობა, რომლისთვისაც დამახასიათებელია რღვევის პროცესის დაწყება.

ამრიგად, წერტილში ზღვრული დაძაბული მდგომარეობა პლასტიკური და მყიფე მასალებისათვის განსაზღვრება სხვადასხვაგვარად. როდესაც საქმე გვაქვს ერთდერძა დაძაბულ მდგომარეობასთან, კერძოდ, ნიმუშის გაჭიმვა-კუმშვასთან, არანაირი გაუგებრობა არ წარმოიშობა, რადგან ზღვრულ ძაბვად ვთვლით დენადობის ოდნეულად ან სიმტკიცის ოდნეულად.

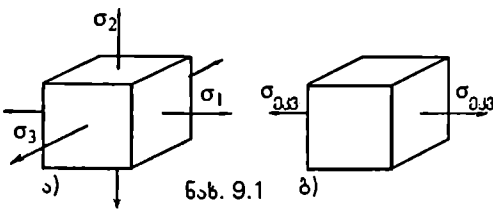
რთული დაძაბული მდგომარეობისთვის ვითარება ასეთი მარტივი არ არის. თვით პლასტიკური და მყიფე მასალის განსაზღვრა მნიშვნელოვნადაა დაკავშირებული ერთდერძა დაძაბულობის პირობებში მასალების მიერ გამოვლენილ თვისებებთან. რთულ დაძაბულ მდგომარეობაში მასალები, რომლებიც ტრადიციულად მყიფედ ითვლება (მაგალითად: ქვა, მინა, თუჩი), ზოგჯერ ავლენენ პლასტიკური მასალებისათვის დამახასიათებელ თვისებებს. ამრიგად, ზღვრული დაძაბული მდგომარეობის განსაზღვრისათვის ზემოთ მოყვანილი განსხვავებული მიდგომა ყველა შემთხვევაში უდავო და უნაკლო არ არის, თუმცა, ასეთი მიდგომა პრაქტიკულად ფართოდ გამოიყენება და სასარგებლოც არის.

აღნიშნული სირთულის გადალახვის გზა, თეორიული თვალსაზრისით, იოლი მისაკვლეია. შეიძლება ყოველი სახის რთული დაძაბული მდგომარეობისათვის (σ_1 , σ_2 , σ_3) ჩავატაროთ ცდები, დავადგინოთ მათთვის დამახასიათებელი ზღვრული მდგომარეობა და მიღებული შედეგები საფუძვლად დავუდოთ ჩვენთვის საინტერესო კონსტრუქციის საიმედობის შეფასებას. ასეთი გზა ცალკეული, მეტად საპასუხისმგებლო იფიათი შემთხვევებისათვის არა მარტო მისაღებია, არამედ აუცილებელიც არის, ხოლო ფართო პრაქტიკული გამოყენებისათვის მიუღებელია სირთულისა და შრომატევადობის გამო. ამიტომ ცდილობენ შეზღუდული რაოდენობის ცდების შედეგების განზოგადების საფუძველზე მიიღონ საერთო საანგარიშო მეთოდიკა. ასეთი განზოგადება ზღვრული დაძაბული მდგომარეობის და სიმტკიცის თეორიის შესწავლის საგანია.

ასეთი თეორიის შექმნისას არსებობს ორი პრინციპულად განსხვავებული მიდგომა. პირველი ითვალისწინებს შიპოთეზების ჩამოყალიბებას და მათ საფუძველზე თეორიის შექმნას. შემდგომში ეს თეორიები ექსპერიმენტალურად

მოწმდება და კეთდება დასკვნა, თუ საწყისი ჰიპოთეზები რამდენად სწორად ასახავს სინამდვილეს.

მეორე გზა. პირიქით, თეორიის შექმნას საფუძვლად უდებს ექსპერიმენტების შედეგებს, რომელთა განზოგადების საფუძველზეც მიიღება საერთო ხასიათის თეორიული დებულებები. ეს დებულებები კვლავ ექსპერიმენტების საშუალებით მოწმდება, ცხადია, ეს ექსპერიმენტები განსხვავდება საწყისი ექსპერიმენტებისაგან. თეორიის შექმნის ასეთი გზა უფრო მისაღებია, რადგან საჭიროების შემთხვევაში თეორიის დაზუსტების კარგ საშუალებას იძლევა. თუ შექმნილი



ნახ. 9.1

თეორია არაზუსტია, საჭიროა გავზარდოთ საწყისი ექსპერიმენტების რაოდენობა და მათი მრავალფეროვნება.

განვიხილოთ 9.1, ა ნახაზზე გამოსახული დაძაბული მდგომარეობა. გავამრავლოთ მოცემული დაძაბული მდგომარეობის

ყოველი კომპონენტი დადებით რიცხვზე n . ამ უკანასკნელის მნიშვნელობა ისეთნაირად შევარჩიოთ, რომ მიღებული ახალი ძაბვები განსაზღვრავდეს ზღვრულ მდგომარეობას

$$(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*) = (n\sigma_1, n\sigma_2, n\sigma_3).$$

მოცემული დაძაბული მდგომარეობის მარაგის კოეფიციენტი არის რიცხვი, რომელიც გვიჩვენებს, ერთდროულად რამდენჯერ უნდა გავზარდოთ დაძაბული მდგომარეობის ყოველი კომპონენტი, რომ ეს მდგომარეობა გახდეს ზღვრული.

აქედან გამომდინარე, ორი დაძაბული მდგომარეობა თანაბრად საშიშია, თუ მათი მარაგის კოეფიციენტები ტოლია. შემოღებული ცნება საშუალებას გვაძლევს განვიხილოთ ერთდერძა დაძაბული მდგომარეობა (ნახ. 9.1, ბ), რომელიც მოცემული დაძაბული მდგომარეობის ეკვივალენტურია იმ თვალსაზრისით, რომ ორივე დაძაბული მდგომარეობის მარაგის კოეფიციენტები ერთმანეთის ტოლია.

ეკვივალენტური ძაბვის დადგენის საკითხებს შემდგომში განვიხილავთ. მარაგის კოეფიციენტის დასადგენად გამოვიყენოთ ფორმულა

$$n = \frac{\sigma_{გვ}}{\sigma_{გვ3}}, \tag{9.1}$$

სადაც $\sigma_{გვ}$ ზღვრული ძაბვაა ერთდერძა გაჭიმვისათვის. პლასტიკური და მყიფე მასალებისათვის ეს სიდიდე განისაზღვრება, შესაბამისად გაჭიმვისათვის დენადობის და სიმტკიცის ზღვრებით.

§58. ზღვრული მდგომარეობის ძირითადი ჰიპოთეზები

როგორც აღვნიშნეთ, ზღვრული დაძაბული მდგომარეობის თეორიების შექმნას შეიძლება საფუძვლად დაედოს წინასწარ ჩამოყალიბებული ჰიპოთეზები. ვინაიდან სხვადასხვა მასალის თვისებები ერთმანეთისაგან განსხვავდება, ასეთი გზით მიღებულმა თეორიამ შეიძლება ერთ შემთხვევაში კარგი შედეგი მოგვცეს, მეორე შემთხვევაში – არა; რაც შეეხება ნებისმიერი ამოცანისთვის ასეთი სხვადასხვა თეორიის საფუძველზე მიღებული შედეგების დამთხვევის აუცილებლობას, ამაზე საუბარიც ზედმეტია.

ერთ-ერთი პირველი მოსაზრება, რომელიც გამოთქმული იყო ზღვრული დაძაბული მდგომარეობის განსაზღვრის თაობაზე ეკუთვნის გ. გალილეის. ამ თეორიის შესაბამისად, საშუალო და უმცირესი ძაბვები შეგვიძლია მხედველობაში არ მივიღოთ და წერტილში პლასტიკურობის ან სიმტკიცის მდგომარეობაზე ვიმსჯელოთ მხოლოდ მაქსიმალური ნორმალური ძაბვის სიდიდით. ამ თეორიის შესაბამისად, ეკვივალენტური ძაბვა განისაზღვრება ფორმულით

$$\sigma_{\text{ეკვ}} = \sigma_1. \quad (9.2)$$

ამ თეორიის სერიოზული ნაკლია ის, რომ მისი საშუალებით შეუძლებელია განვიხილოთ ისეთი მარტივი ამოცანაც კი, როგორცაა ერთღერძა შეკუმშვა. ამ შემთხვევაში $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -p$. ამიტომ (9.2)-ის შესაბამისად, ეკვივალენტური ძაბვა ნულის ტოლია და როგორი დიდიც არ უნდა იყოს მკუმშავი ძაბვები, მაგალითად, ქვისათვის ან აგურისათვის, ისინი შეინარჩუნებენ სიმტკიცეს. ასეთი დასკვნა მიუღებელია და ეწინააღმდეგება პრაქტიკულ გამოცდილებას.

ვინაიდან მასალის დამსხვრევა მოლეკულათა შორის შეჭიდულობის ძალების გამორიცხვის შედეგია, ბუნებრივია, ეს პროცესი დავუკავშიროთ მაქსიმალურ დადებით დეფორმაციებს. მთავარი დეფორმაციებისათვის გვაქვს პირობა $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$. დავუშვათ, რომ ϵ_1 დადებითია, მაშინ მოცემული და დამხმარე ეკვივალენტური მდგომარეობებისათვის (ნახ. 9.1), გამოთქმული მოსაზრებიდან გამომდინარე, მაქსიმალური დეფორმაციები ერთმანეთის ტოლი იქნება:

$$\frac{\sigma_{\text{ეკვ}}}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)],$$

საიდანაც მივიღებთ მაქსიმალური წრფივი დეფორმაციების ზღვრული დაძაბული მდგომარეობის თეორიის შესაბამის ეკვივალენტური ძაბვის მნიშვნელობას

$$\sigma_{\text{ეკვ}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3). \quad (9.3)$$

მაქსიმალური ნორმალური ძაბვების და წრფივი დეფორმაციების ზღვრული

დაძაბული მდგომარეობის თეორიები საანგარიშო პრაქტიკაში ადრე გამოიყენებოდა მყიდვე მასალებისთვის. მაგრამ უნდა აღვნიშნოთ, რომ თანამედროვე პირობებში მათ უკვე ნაკლები მნიშვნელობა აქვს. პლასტიკური მასალებისათვის, ამ თეორიებიდან გამომდინარე დასკვნები, როგორც წესი, მიუღებელია.

პლასტიკური დეფორმაციები გამოწვეულია მასალის ნაწილაკების ურთიერთქმედებით. ეს უკანასკნელი დავუკავშიროთ მაქსიმალური მხები ძაბვების დონეს. აქედან გამომდინარე, ტრესკამ გამოთქვა მოსაზრება, რომ სხეულში პლასტიკური დეფორმაციები წარმოიშობა მაშინ, როდესაც მაქსიმალური მხები ძაბვები გაუტოლდება მათ ზღვრულ მნიშვნელობას. ამ შიპოტეზას ტრესკას, ანუ მაქსიმალური მხები ძაბვების კრიტერიუმი ეწოდება.

რთული დაძაბული მდგომარეობისათვის (ნახ. 9.1.ა) მაქსიმალური მხები ძაბვები განისაზღვრება (8.33)-ის შესაბამისად:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (9.4)$$

ეკვივალენტური ერთღერძა დაძაბული მდგომარეობისათვის (ნახ. 9.1, ბ)

$\sigma_1 = \sigma_{\text{ეკვ}}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, ამიტომ მაქსიმალური მხები ძაბვა

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\text{ეკვ}}}{2}. \quad (9.5)$$

მაქსიმალური მხები ძაბვების მნიშვნელობების გატოლებით მივიღებთ ეკვივალენტურ ძაბვის ფორმულას

$$\sigma_{\text{ეკვ}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (9.6)$$

ეს თეორია პლასტიკური მასალებისთვის დამაკმაყოფილებელ შედეგს იძლევა, რის გამოც ფართოდ გამოიყენება მანქანათმშენებლობაში დეტალების გაანგარიშებისას, მაგრამ ნაკლი ამ თეორიასაც გააჩნია. თუ წარმოვიდგინთ მასალას, რომელიც განიცდის ყოველმხრივ თანაბარ გაჭიმვას, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$, ეკვივალენტური ძაბვისათვის, (9.6)-ის შესაბამისად, მივიღებთ ნულოვან მნიშვნელობას. ეს იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი მაღალი დონის ძაბვები, აღნიშნული თეორიის შესაბამისად, ვერ გამოიწვევენ პლასტიკურ დეფორმაციებს. ასეთი დასკვნა ეწინააღმდეგება რეალურ სურათს. აღნიშნული თეორია არადაამაკმაყოფილებელ შედეგებს იძლევა, აგრეთვე, ისეთი მასალებისთვის, რომლებიც არათანაბრად ეწინააღმდეგება გაჭიმვას და კუმშვას.

აღსანიშნავია, რომ (9.6) ფორმულაში მთავარი σ_1 და σ_3 ძაბვები არასიმეტრიულადაა წარმოდგენილი, რაც შეეხება საშუალო σ_2 მთავარ ძაბვას, ტრესკას შიპოტეზის შესაბამისად, მისი სიდიდე არავითარ გავლენას არ ახდენს ზღვრული დაძაბული მდგომარეობის განსაზღვრაზე. აღნიშნული გარემოება, რაც შემთხვევაში, ართულებს ანალიზს, ვინაიდან მხოლოდ ძაბვების კონკრეტული მნიშ-

ენელოგების დადგენის შემდეგ შეიძლება მათ მიენიჭოს შესაბამისი ინდექსები. ეს განსაკუთრებით მოუხერხებელია თანამედროვე გამოთვლითი ტექნიკის გამოყენებით გაანგარიშების პროცესის ავტომატიზაციის დროს, თუმცა ვერ ვიტყვით, რომ წარმოიქმნება რაიმე გადაულახავი სირთულეები.

აღნიშნული ნაკლი არ ახასიათებს *ჭუბერ-მიზისის კრიტერიუმს*, რომელიც 1904 წელს ჩამოაყალიბა ჭუბერმა. ამ ჰიპოთეზას 1924 წელს ჰენკიმ შეუსაბამა ენერგეტიკული საფუძველი. მან ჩათვალა, რომ *პლასტიკური დეფორმაციები გამოწვეულია მოცულობის ერთეულში გარკვეული ზღვრული დონის პოტენციალური ენერჯიის იმ ნაწილის დაგროვებით, რომელიც დაკავშირებულია სხეულის ფორმის ცვლილებასთან*. მოცემული სამღერძა დაძაბული მდგომარეობისათვის (ნახ. 9.1.ა) ეს ენერჯია განისაზღვრება (8.63) ფორმულით. ექვივალენტური დაძაბული მდგომარეობისათვის (ნან. 9.1.ბ), იმავე ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\sigma_{\text{ეკვ}} = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_{\text{მკვ}}^2 \quad (9.7)$$

(8.63) და (9.7) ფორმულების გამოყენებით განსაზღვრული ხვედრითი ენერჯიების მნიშვნელობების გატოლებით ექვივალენტური ძაბვის მნიშვნელობებისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$\sigma_{\text{ეკვ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (9.8)$$

კონსტრუქციული ფოლადებისათვის ექსპერიმენტულად დადგენილია, რომ დენადობის ზღვრული ერთღერძა გაჭიმვა და სუფთა ძვრა ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი დამოკიდებულებით: $\tau_{\text{დნ}} = 0,58\sigma_{\text{დნ}}$. დავადგინოთ თეორიულად ანალოგიური დამოკიდებულება მაქსიმალური მხები ძაბვებისა და ენერგეტიკული კრიტერიუმების საფუძველზე.

სუფთა ძვრის შემთხვევაში $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\tau$.
მაქსიმალური მხები ძაბვების კრიტერიუმის საფუძველზე მივიღებთ

$$\sigma_{\text{ეკვ}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \tau - (-\tau) = 2\tau \quad \tau_{\text{დნ}} = 0,5\sigma_{\text{დნ}}$$

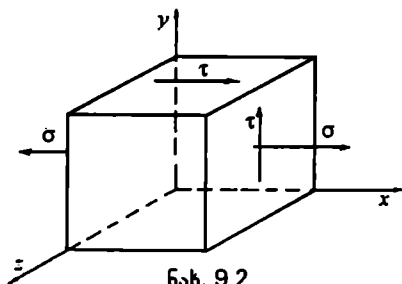
გამოვიყენოთ ენერგეტიკული კრიტერიუმი, მაშინ

$$\sigma_{\text{ეკვ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau^2 + \tau^2 + 4\tau^2} = \sqrt{3}\tau;$$

$$\tau_{\text{დნ}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_{\text{დნ}} = 0,575\sigma_{\text{დნ}}$$

ამრიგად, განხილულ შემთხვევაში, ენერგეტიკული კრიტერიუმით მიღებუ-

ლი თეორიული შედეგი უფრო ზუსტად ასახავს პლასტიკურობის წარმოშობის პირობებს.



პრაქტიკაში ხშირად ვხვდებით ე.წ. ბრტყელ, გამარტივებულ დაძაბულ მდგომარეობას (ნახ. 9.2). ერთი მთავარი σ_2 ძაბვა აქ ნულის ტოლია. ორი დანარჩენი მთავარი ძაბვა განისაზღვრება (8.20) ფორმულის გამოყენებით

$$\sigma_{\text{გთ}} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

საბოლოოდ, ინდექსების გათვალისწინებით, მთავარი ძაბვებისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (9.9)$$

ამ შედეგების (9.6)-ში გათვალისწინებით, მაქსიმალური მხები ძაბვების კრიტერიუმის შესაბამისად, ეკვივალენტური ძაბვა ბრტყელი გამარტივებული დაძაბული მდგომარეობისათვის ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\sigma_{\text{ეკვ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (9.10)$$

ანალოგიურად, ენერგეტიკული კრიტერიუმის საფუძველზე, ბრტყელი გამარტივებული დაძაბული მდგომარეობისათვის დაეადგენთ შემდეგ ფორმულას:

$$\sigma_{\text{ეკვ}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (9.11)$$

მიღებული ფორმულების საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ 9.2 ნახაზზე ნაჩვენებ დაძაბულ მდგომარეობას მაქსიმალური მხები ძაბვების კრიტერიუმში, ენერგეტიკულ კრიტერიუმთან შედარებით, უფრო მკაცრ პირობას უყენებს.

§59. ზღვრული დაძაბული მდგომარეობის ემპირიული კრიტერიუმები

წინა პარაგრაფში განხილული ზღვრული დაძაბული მდგომარეობის კრიტერიუმებით განსაზღვრული ეკვივალენტური ძაბვის მნიშვნელობები შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

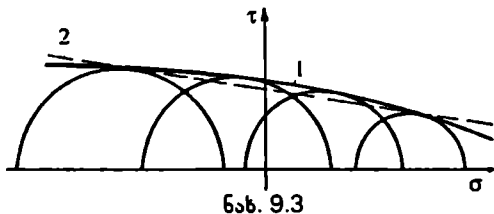
$$\sigma_{\text{ეკვ}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (9.12)$$

შეიძლება მთავარი ძაბვები ჩავწეროთ როგორც ძაბვების ინვარიანტების ფუნქცია და (9.12) გამოსახულებას მივცეთ უფრო ზოგადი სახე:

$$\sigma_{\text{ეკვ}} = \varphi(I_{\sigma_1}, I_{\sigma_2}, I_{\sigma_3}) \quad (9.13)$$

ამრიგად, ეკვივალენტური ძაბვა განისაზღვრება მხოლოდ მთავარი ძაბვების მნიშვნელობებით. მაგრამ ეს დებულება ძალაშია მხოლოდ იზოტროპიული მასალისათვის. რაც შეეხება ანიზოტროპიულ მასალებს, მათთვის (9.12) და (9.13) გამოსახულებების მარჯვენა ნაწილში დამატებით უნდა გავითვალისწინოთ მთავარი ღერძების ორიენტაცია, რადგან ასეთი მასალებისათვის ძაბვების და დეფორმაციების მთავარი ღერძების მიმართულებები ერთმანეთს არ ემთხვევა.

წინა პარაგრაფში განხილული ნებისმიერი თეორია უშუალოდ გამომდინარეობს (9.12)-დან f ფუნქციის დაკონკრეტების გზით. ანალოგიურად მიიღება, აგრეთვე, სხვა თეორიებიც, რომლებსაც აქ არ განვიხილავთ. მაგრამ, როგორც აღვნიშნეთ, არსებობს თეორიის ჩამოყალიბების მეორე გზაც. ეს გზა ითვალის-



წინებს ექსპერიმენტული შედეგების ანალიზის საფუძველზე ფუნქციის შერჩევას. ერთ-ერთი ასეთი თეორიაა *მორის თეორია*.

ავიღოთ კონკრეტული სამღერძა დაძაბული მდგომარეობა. მისი ყოველი კომპონენტის n -ჯერ გაზრდით მივიღებთ მოცუ-

მულის შესაბამის ზღვრულ დაძაბულ მდგომარეობას. ამ ზღვრული დაძაბული მდგომარეობისათვის, (8.24)-ის შესაბამისად, ავაგოთ მაქსიმალური რადიუსის წრეწირი. ამის შემდეგ ავიღოთ სხვა დაძაბული მდგომარეობა და ანალოგიურად მისთვისაც ავაგოთ წრეწირი. ასეთნაირად ავაგებთ ზღვრული წრეწირების სიმრავლეს (ნახ. 9.3) და მის მომვლელ 1 მრუდს. აქ ვაკეთებთ დაშვებას, რომ დაძაბულობის ზღვრული მდგომარეობა არ არის დამოკიდებული საშუალო σ_2 ძაბვის სიდიდეზე.

გამარტივების მიზნით მრუდი 1 შევცვალოთ 2-წრფით (ნახ. 9.3). ეს საშუალებას გვაძლევს დავკმაყოფილოდეთ მხოლოდ ორი ექსპერიმენტის შედეგებით და ავაგოთ წრფე, როგორც შესაბამისი წრეწირების მხებში.

განვიხილოთ ერთღერძა გაჭიმვა. მისი ზღვრული მდგომარეობისათვის მთავარი ძაბვები იქნება

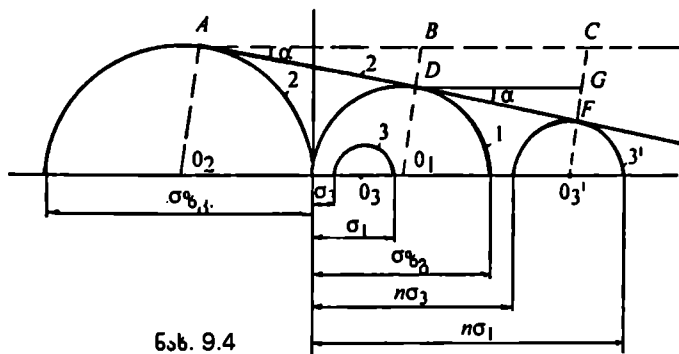
$$\sigma_1 = \sigma_{\text{ზგ}}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = 0.$$

ეს დაძაბული მდგომარეობა ნაჩვენებია 9.4 ნახაზზე პირველი წრეწირით.

მეორე ექსპერიმენტი წარმოვადგინოთ როგორც ერთღერძა შეკუმშვა, რომლის ზღვრული მდგომარეობისათვის მთავარი ძაბვები იქნება

$$\sigma_1 = 0; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\sigma_{\text{კ}}$$

ეს დაძაბული მდგომარეობა წარმოდგენილია 9.4 ნახაზზე მეორე წრეწირით.



ნახ. 9.4

დავუშვათ, მოცემული გვაქვს ნებისმიერი სამღერძა დაძაბული მდგომარეობა, რომლის უდიდესი და უმცირესი მაქსიმალური ძაბვები, შესაბამისად, σ_1 -ის და σ_3 -ის ტოლია. 9.4 ნახაზზე შესაბამისი წრეწირი წარმოდგენილია მესამე მრუდით. საჭიროა, განვსაზღვროთ ამ დაძაბული მდგომარეობის ეკვივალენტური ძაბვა, თუ მისი სამივე მთავარ ძაბვას გავამრავლებთ მარაგის n კოეფიციენტზე, მივიღებთ ახალ $3'$ წრეწირს, რომელიც ახასიათებს მასალის ზღვრულ მდგომარეობას და ამიტომ ეხება მეორე წრეწევს F წერტილში (ნახ. 9.4).

განვსაზღვროთ მოცემული დაძაბული მდგომარეობის შესაბამისი ეკვივალენტური ძაბვა.

განვიხილოთ ABD სამკუთხედი

$$\sin \alpha = \frac{\frac{\sigma_{\text{კ}}}{2} - \frac{\sigma_{\text{გ}}}{2}}{\frac{\sigma_{\text{კ}}}{2} + \frac{\sigma_{\text{გ}}}{2}} = \frac{1-k}{1+k},$$

სადაც $k = \frac{\sigma_{\text{გ}}}{\sigma_{\text{კ}}}$.

ანალოგიურად განვიხილოთ DGF სამკუთხედი

$$\sin \alpha = \frac{\frac{\sigma_{\Sigma}}{2} - \frac{n(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}}{\frac{n(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} - \frac{\sigma_{\Sigma}}{2}}$$

ერთი და იმავე კუთხის სინუსის ორი გამოსახულების გატოლებით და შემდგომ ელემენტარული გარდაქმნებით მარაგის კოეფიციენტისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$n = \frac{\sigma_{\Sigma}}{\sigma_1 - k\sigma_3} \quad (9.14)$$

ახლა (9.1) და (9.14) ფორმულების შედარებით შეგვიძლია მივიღოთ ეკვივალენტური ძაბვის მნიშვნელობა

$$\sigma_{\text{ეკ}} = \sigma_1 - k\sigma_3, \quad k = \frac{\sigma_{\Sigma}}{\sigma_{\Sigma}} \quad (9.15)$$

ეს ფორმულა, რომელიც შეესაბამება მორის თეორიას, საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ ეკვივალენტური ძაბვა მასალის გაჭიმვასა და კუმშვაზე განსხვავებული თვისებების გათვალისწინებით. კერძო შემთხვევაში, როდესაც მასალა ერთნაირად მუშაობს გაჭიმვასა და კუმშვაზე, $k=1$, მორის ფორმულა ემთხვევა მაქსიმალური მხები ძაბვების თეორიის ფორმულას. მაგრამ უნდა გვახსოვდეს, რომ ეს მსგავსება მხოლოდ ფორმალურია და არა შინაარსობრივი. მაქსიმალური მხები ძაბვების და მორის თეორიები მიღებულია პრინციპულად განსხვავებული გზებით. თუ მორის თეორია გამომდინარეობს ექსპერიმენტული შედეგებიდან, მაქსიმალური მხები ძაბვების თეორია ყალიბდება წინასწარ, არსებითად დაუსაბუთებელი დაშვებების საფუძველზე.

ბრტყელი გამარტივებული დაძაბული მდგომარეობისათვის მორის თეორიის შესაბამისი (ნახ. 9.2) ეკვივალენტური ძაბვის მნიშვნელობა მიიღება (9.15)-დან (9.9)-ის გათვალისწინებით:

$$\sigma_{\text{ეკ}} = \frac{1-k}{2} \sigma + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (9.16)$$

§60. დამსხვრევის პროცესი. ინტენსიურობის კოეფიციენტი

ნებისმიერი თეორია, რომელიც გამომდინარეობს (9.12) ან (9.13) გამოსახულებიდან, ახასიათებს მასალის დამსხვრევის მოვლენას როგორც მყისიერ აქტს და არა პროცესს. ამ ფორმულების შესაბამისად, თუ მთავარი ძაბვები არ აღწევენ ზღვრული მდგომარეობის შესაბამის მნიშვნელობებს, ისინი მასალაში არავითარ კვალს არ ტოვებენ.

სინამდვილეში, დამსხვრევა დროში მიმდინარე პროცესია და ის იწყება უფრო ადრე, ვიდრე დაძაბული მდგომარეობა მიაღწევდეს ზღვრულ მდგომარეობას. რეალურ სხეულში ყოველთვის აქვს ადგილი მიკრობზარებს. ძაბვების ზრდისას ისინი იზრდებიან და, რიგ შემთხვევაში, ერთიანდებიან კიდევ, რასაც საბოლოოდ მიყვავართ მასალის დამსხვრევამდე.

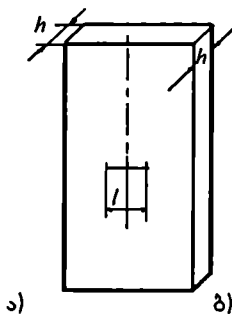
ამრიგად, დამსხვრევის სრულყოფილი თეორია უნდა ითვალისწინებდეს როგორც ძაბვების სიდიდეს, ისე მასალაში არსებულ მიკრობზარებს და სხვა დეფექტებს. სწორედ ისინი განსაზღვრავენ მყარი სხეულის დამსხვრევის პროცესის სრულ მექანიზმს. ამიტომ განხილვაში შემოაქვთ ე.წ. დაზიანების ა პარამეტრი, რომელიც იცვლება შემდეგ საზღვრებში: $0 \leq \omega \leq 1$. ამ უტოლობებში ქვედა ზღვარი შეესაბამება მასალაში სხვადასხვა სახის დაზიანების არარსებობას, ზედა - მათ მიერ კრიტიკული სიდიდის მიღწევას, რასაც მოჰყვება მასალის დამსხვრევა.

დაზიანების პარამეტრის ცვლილების სიჩქარე განისაზღვრება შემდეგი დიფერენციალური განტოლებით:

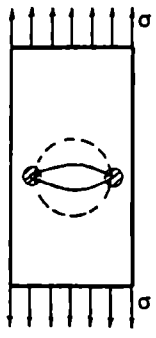
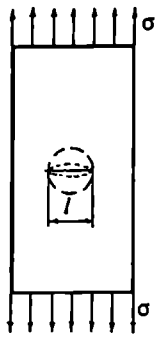
$$\frac{d\omega}{dt} = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots), \quad (9.17)$$

სადაც t დროა. წერტილებით აღნიშნულია ის გარემოება, რომ F არის არა მარტო მთავარი ძაბვების ფუნქცია, არამედ იგი შეიძლება დამოკიდებული იყოს სხვა პარამეტრებზეც, მაგალითად, ძაბვების სიჩქარეებზე. ამ ფუნქციის დადგენა დრეკადი სხეულის მექანიკის ურთულესი ამოცანაა. შემდგომში, მასალების დაღლილობის შესწავლისას, ნაწილობრივ განვიხილავთ ამ საკითხს.

ზოგ შემთხვევაში შეგვიძლია ამოცანა მნიშვნელოვნად გავამარტივოთ. წარმოვიდგინოთ, რომ რაღაც მიზეზების შედეგად სხეულში წარმოიშვა ბზარი და გამოვრიცხოთ პროცესის საწყისი პერიოდის განხილვის აუცილებლობა. ამის შემდეგ შეგვიძლია შევისწავლოთ სისტემის პირობა ენერგეტიკული თანაფარდობების საფუძვლებზე და დავადგინოთ ბზარის თვითნებური ზრდის პირობები. ასეთი მიდგომით მინისმაგვარი მასალების სიმტკიცის ამოცანა პირველად 1921 წელს შეისწავლა გრიფიტსმა.



ნახ. 9.5



ნახ. 9.6

განვიხილოთ ბრტყელი ნიმუში, რომელშიც დაძაბულობის გარეშე, საწყის მდგომარეობაში არის / სიგრძის ბზარი (ნახ. 9.5, ა). ნიმუშის გაჭიმვის შედეგად ბზარის ნაპირები ერთმანეთს დაშორდება და ნიმუშში წარმოიშობა ნაპრალი.

წარმოვიდგინოთ იგივე ნიმუში ნაპრალის გარეშე და ჩავთვალოთ, რომ ნორმალური ძაბვების მოქმედების შედეგად მასში გროვდება პოტენციალური U_0 ენერჯია. ასეთ დაძაბულ ნიმუშზე გავაკეთოთ / სიგრძის ჭრილი. ცხადია, ნიმუშის სიხსტე შემცირდება და ეს გამოიწვევს მისი პოტენციალური ენერჯიის შემცირებას:

$$U = U_0 + \Delta U; \quad \Delta U < 0. \quad (9.18)$$

მექანიკის საერთო პრინციპებიდან გამომდინარე, წონასწორობის პირობებში სისტემის ენერჯია მინიმალურია, რაც მიუთითებს, რომ ნიმუშზე მოდებულმა ნებისმიერმა მცირე სიდიდის ძალებმა უნდა გამოიწვიოს ნაპრალის სიგრძის უწყვეტი ზრდა. აქ გარკვეულ წინააღმდეგობას ვაწყდებით, რადგან მასალები, რომლებშიც პრაქტიკულად ყოველთვის არის მიკრობზარები, უძლებენ გარე ძალების მოქმედებას მაშინაც კი, როცა, ხშირად, ამ ძალების მიერ გამოწვეული ძაბვების დონე საკმაოდ მაღალია. პროცესის თავისებურებაზე მოწმობს შემდეგი მაგალითიც: მანქანის საქარე მინა ხშირად ზიანდება მასზე მოხვედრილი კენჭით. ზოგ შემთხვევაში, დაზიანება ხანგრძლივი დროის განმავლობაში არ იცვლის ზომებს და ფორმას, ზოგჯერ კი პირიქით, - იზრდება და მინაზე წარმოიშობა გამჭოლი ბზარები. შეიძლება გაგვიჩინდეს აზრი, რომ აქ საერთო პრინციპი წონასწორობის მდგომარეობაში ენერჯიის მინიმუმის აუცილებლობაზე არ სრულდება. მაგრამ ეს, რა თქმა უნდა, ასე არ არის და აღნიშნული გარემოება შედეგია მსჯელობაში ერთი მნიშვნელოვანი ნიუანსის გათვალისწინებლობისა. ჭრილის გახსნისას ენერჯიის ნაწილი გადადის დრეკადობის ენერჯიაში, მეორე ნაწილი კი ზედაპირულ ენერჯიაში, რაც დაკავშირებულია ბზარის ზრდის პროცესში ახალი ზედაპირების წარმოშობასთან.

გაჭიმული ნიმუშის დეფორმაციის ხვედრითი ენერჯია, (2.19)-ის შესაბამისად, $\sigma^2/2E$ -ის ტოლია. ნაპრალის მომიჯნავე მოცულობაში, რომლის დიამეტრი და სისქე, შესაბამისად, აღნიშნულია l და h ასობით (ნახ.9.5), ძაბვები შემცირებულია და ამიტომ ბზარის გახსნასთან დაკავშირებული მუშაობა

$$A = -\lambda^2 \frac{\sigma^2}{2E} l^2 h, \quad (9.19)$$

სადაც λ^2 პროპორციულობის კოეფიციენტია, h - ნიმუშის სისქე.

აღვნიშნოთ γ ასოთი ერთეულოვანი ფართობის შესაბამისი ზედაპირული ენერჯია. ჭრილის წარმოშობის შედეგად ნიმუშის დამატებითი ფართობი $2lh$ - ის ტოლია და ამიტომ, (9.19)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$\Delta U = -\lambda^2 \frac{\sigma^2}{2E} l^2 h + 2h\gamma l.$$

საბოლოოდ, სისტემის მთლიანი ენერგია განისაზღვრება ფორმულით

$$U = U_0 - \lambda^2 \frac{\sigma^2}{2E} l^2 h + 2h\gamma. \quad (9.20)$$

მიღებული ფორმულა გვიჩვენებს, რომ სისტემის ენერჯიის მნიშვნელობა დამოკიდებულია ნაპარალის სიგრძეზე, რაც შეეხება ფორმულაში შემავალ სიდიდეებს, ნაპარალის ზრდის პროცესში ისინი არ იზრდება.

დავადგინოთ ენერჯიის მინიმუმობის პირობა

$$\frac{dU}{dl} = -\lambda^2 \frac{\sigma^2}{E} lh + 2h\gamma = 0.$$

ეს პირობა გვაძლევს ძაბვების ისეთი ზღვრული მნიშვნელობის დადგენის საშუალებას, რომლის მიღწევისას არსებული / სიგრძის ბზარი იწყებს თვითნებურ ზრდას, ხდება გამჭოლი და ნიმუშიც იმსხვრევა:

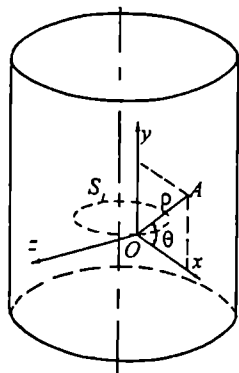
$$\sigma_{\text{J}} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2E\gamma}{l}}. \quad (9.21)$$

თუ ნორმალური ძაბვა მის კრიტიკულ მნიშვნელობაზე მცირეა, $\sigma < \sigma_{\text{J}}$, ბზარის სიგრძე არ იცვლება. წინააღმდეგ შემთხვევაში, როცა $\sigma \geq \sigma_{\text{J}}$ ბზარი იზრდება.

გრიფიტის თეორია ვარაუდობს, რომ ნიმუშის მასალა ერთგვაროვანი და უწყვეტია. ასეთი პირობები შედარებით კარგად სრულდება ზოგიერთი მყიფე მასალისთვის, მაგალითად, მინისათვის. მანქანათმშენებლობაში გამოყენებული უმეტესი მასალებისთვის, მაგალითად ლითონებისთვის, იმ მცირე სიდიდის მოცულობებში, რომლებიც დამახასიათებელია ბზარის გავრცელების პროცესებისათვის, ეს პირობები არ სრულდება და სურათი მნიშვნელოვნად რთულდება. აღსანიშნავია პლასტიკური მოვლენებიც, განსაკუთრებით ნაპარალის ბოლოებში, სადაც ძაბვების კონცენტრაციის შედეგად შეიძლება წარმოიშვას პლასტიკური არეები (ნახ. 9.6).

დაშვებები მასალის ერთგვაროვნების და უწყვეტობის შესახებ დრეკადობის თეორიასა და მასალათა გამძლეობაში ერთ-ერთი ძირითადია. ამიტომ ზემოთ გაკეთებული შენიშვნის მიზანია ხაზი გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ როცა საუბარია მცირე მოცულობებზე, საერთოდ, მასალისათვის მართებული დებულებები ყოველთვის არ იძლევა საიმედო შედეგს.

აღსანიშნავია კიდევ ერთი, მეტად საგულისხმო გარემოება. გრიფიტის თეორია არსებითად ეყრდნობა ენერგეტიკულ დამოკიდებულებებს მთელი სხეულისათვის, მაგრამ ბზარი და მისი გავრცელების პროცესი საწყის სტადიაში დაკავშირებულია მასალის მცირე მოცულობებთან. ამიტომ ბოლო წლებში მუშავდება თეორიები, რომლებიც ითვალისწინებენ ბზარის გაფართოების ადგილობრივ ხასიათს.



ნახ. 9.7

განვიხილოთ მყარი სხეული, რომელშიც არსებობს S გლუვი მრუდით შემოფარგლული ადგილობრივი ჭრილი (ნახ. 9.7). ნებისმიერ წერტილში კონტურის სიმრუდე იმდენად მცირეა, რომ ძაბვების ცვალებადობა მის ნორმალურ xOy სიბრტყეში შეიძლება ჩავთვალოთ ბევრად მეტად, მხებ Oz მიმართულებით ცვალებადობასთან შედარებით.

xOy სიბრტყეში, O წერტილის მცირე არეში განვიხილოთ ნებისმიერი A წერტილი, რომლის მდებარეობა განისაზღვრება θ კუთხით და ρ რადიუსით.

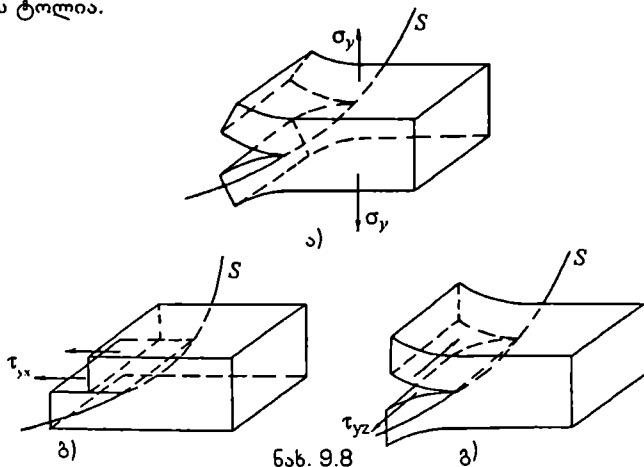
სხეულის დატვირთვის შესაბამისად შეიძლება განვასხვაოთ ჭრილის ნაპირების გადაადგილებების სამი შემთხვევა (ნახ. 9.8).

პირველ შემთხვევაში σ_y ნორმალური ძაბვები იწვევს ჭრილის ნაპირა სიბრტყეების ურთიერთგადაადგილებას Oy მიმართულებით (ნახ. 9.8 ა). τ_{yx} და τ_{yz} მხები ძაბვები განპირობებულია ამ სიბრტყეების გადაადგილებისადმი წინააღმდეგობით, შესაბამისად, Ox და Oz -ის მიმართულებით (ნახ. 9.8, ბ და ნახ. 9.8, გ).

ჭრილთან მიახლოებისას ძაბვები იზრდება და ჭრილის კონტურზე ($\rho \rightarrow 0$), მათი მნიშვნელობები უსასრულოდ დიდია. ამიტომ პირველი შემთხვევისათვის (ნახ. 9.8, ა) ძაბვები შეიძლება მიახლოებით წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\sigma_x \approx \frac{K_1}{\sqrt{\rho}} f_x(\theta); \quad \sigma_y \approx \frac{K_1}{\sqrt{\rho}} f_y(\theta). \quad (9.22)$$

დანარჩენი σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} ძაბვები აქ წარმოდგენილი ფორმულების სიზუსტით ნულის ტოლია.



ნახ. 9.8

ფორმულაში შემავალ K_1 კოეფიციენტს ინტენსიურობის კოეფიციენტი ეწოდება. მისი მნიშვნელობა დამოკიდებულია სხეულის ფორმასა და მოდებულ ძალებზე. რაც შეეხება $f_x(\theta)$ და $f_y(\theta)$ ფუნქციებს, მათი დადგენა ხდება დრეკადობის თეორიის ამოცანის ამოხსნით.

თუ სხეულზე მოდებული ძალები ნულის ტოლია, მაშინ ჭრილის ნაპირები შეერთებულია და ინტენსიურობის K_1 კოეფიციენტი ნულის ტოლია. მაგრამ ძალების ზრდასთან ერთად ინტენსიურობის კოეფიციენტიც იზრდება. ბუნებრივია, გავაკეთოთ დაშვება, რომ არსებობს კოეფიციენტის ისეთი ზღვრული K_1^* მნიშვნელობა, რომელიც განსაზღვრავს ჭრილის ზრდის შესაძლებლობას. თუ ინტენსიურობის კოეფიციენტი ამ ზღვრულ მნიშვნელობაზე მცირეა, $K_1 < K_1^*$, ჭრილის ზომები არ იზრდება. საწინააღმდეგო შემთხვევაში, $K_1 \geq K_1^*$, არის ბზარის თვითნებური ზრდის პირობა, რასაც თან სდევს სხეულის დამსხვრევა.

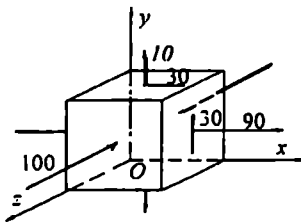
ანალოგიურად ხდება ორი დანარჩენი შემთხვევის განხილვაც და მათთვის ინტენსიურობის K_2 და K_3 კოეფიციენტების დადგენა. ზოგად შემთხვევაში, როდესაც ჭრილის მიდამოში ადგილი აქვს რთულ დაძაბულ მდგომარეობას, ჭრილის თვითნებური ზრდის პირობის ჩამოსაყალიბებლად გამოიყენება ინტენსიურობის სამივე კოეფიციენტის ფუნქცია

$$f(K_1, K_2, K_3) \geq K. \quad (9.23)$$

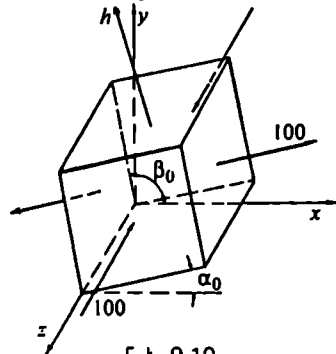
თუ მარცხენა ნაწილი მარჯვენა ნაწილზე მცირეა, ბზარის თვითნებურად ზრდა არ მოხდება, შემდგომში, დადლილობითი სიმტკიცის შესწავლისას, ინტენსიურობის კოეფიციენტის განხილვას კიდევ ერთხელ დავუბრუნდებით.

მეცხრე თავის მავალითები

მავალითი 9.1. კონსტრუქციის საშიში წერტილის დაძაბული მდგომარეობა ნაჩვენებია 9.9 ნახაზზე. მასალის თვისებები გაქიმვასა და კუმშვაზე განსხვავებულია. შესაბამისი სიმტკიცის ზღვრები მოცემულია $\sigma_{sg} = 200$ მგპა, $\sigma_{sk} = 400$ მგპა.



ნახ. 9.9



ნახ. 9.10

დავადგინოთ სიმტკიცის მარაგის კოეფიციენტის მნიშვნელობა. მოცემული დაძაბული მდგომარეობისათვის ძაბვების ტენზორის ელემენტები იქნებ $\sigma_x=90$ მგპა, $\sigma_y=10$ მგპა, $\sigma_z=-100$ მგპა, $\tau_{xy}=30$ მგპა, $\tau_{yz}=0$, $\tau_{zx}=0$.

აქედან გამოდინარე, ერთი მთავარი ძაბვის მნიშვნელობა σ_z -ის ტოლია და ამიტომ ორი დანარჩენი მთავარი ძაბვის მნიშვნელობა შეიძლება დავადგინოთ (8.20) ფორმულის გამოყენებით:

$$\sigma_{\text{მთ}} = \frac{90+10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{90-10}{2}\right)^2 + 30^2} = 50 \pm 50.$$

საბოლოოდ, ინდექსების გათვალისწინებით, მთავარი ძაბვები, შესაბამისად, იქნება:

$$\sigma_1=100 \text{ მგპა, } \sigma_2=0, \sigma_3=-100 \text{ მგპა.}$$

ეკვივალენტური ძაბვის მნიშვნელობის დასადგენად გამოვიყენოთ მორის ფორმულა (9.15):

$$\sigma_{\text{ეკვ}} = 100 - \frac{200}{400}(-100) = 150 \text{ მგპა.}$$

სიმტკიცის მარაგის კოეფიციენტს ვანგარიშობთ (9.1) ფორმულით:

$$n = \frac{200}{150} = 1,33.$$

ამოცანის სრულყოფილად შესწავლისათვის დავადგინოთ მთავარი კვეთების მდებარეობა. ერთი ასეთი კვეთია Oz ღერძის მართობი კვეთი (ნახ. 9.9); ორი დანარჩენი კვეთის დადგენა შეგვიძლია (8.18)-ის გამოყენებით

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 30}{90 - 10} = 0,750;$$

$$\alpha_0 = 0,322; \quad \beta_0 = \alpha_0 + \frac{\pi}{2} = 1,893.$$

ამრიგად, მეორე და მესამე მთავარი კვეთები Oz ღერძის პარალელურია და მათი მართობები Ox ღერძთან შეადგენენ, შესაბამისად, $\alpha_0=0,322$ და $\beta_0=1,893$ კუთხეს (ნახ. 9.10).

ამრიგად, დავადგინოთ, რომ განხილულ წერტილში გვაქვს ორღერძა დაძაბული მდგომარეობა. აღსანიშნავია ის ფაქტიც, რომ შეიძლება ელემენტის ისეთნაირად ამოკვეთა, რომ მის წახნაგებზე იმოქმედებს მხოლოდ მხები ძაბვები, ე.ი. განხილულ შემთხვევაში ადგილი ექნება სუფთა ძვრას. ადვილი შესამჩნევია, რომ ასეთი ელემენტი მობრუნებულია მთავარი კვეთებისაგან შემდგარი ელემენტის მიმართ n მართობის ირგვლივ 45° -ით.

იმისათვის, რომ უშუალოდ გამოვიყენოთ (8.16) ფორმულები, საჭიროა Ox და Oy

ღერძების მიმართვა შესაბამისად σ_x -ისა და σ_y -ის მიმართულებით. ამ შემთხვევაში, აღნიშნულ ფორმულებში უნდა გავითვალისწინოთ შემდეგი სიდიდეები:

$$\sigma_x = 100 \text{ მგპა, } \sigma_y = -100 \text{ მგპა, } \sigma_z = 0.$$

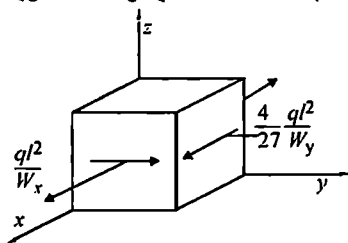
ახლა შეგვიძლია დავადგინოთ ძაბვები კვეთში, რომლისთვისაც $\alpha = 45^\circ$:

$$\sigma_\alpha = \frac{100 - 100}{2} + \frac{100 - (-100)}{2} \cos 90^\circ = 0,$$

$$\tau_\alpha = \frac{100 - (-100)}{2} \sin 90^\circ = 100 \text{ მგპა.}$$

მაგალითი 9.2. დავადგინოთ განივი კვეთის ზომები ჩარჩოსთვის, რომელიც განვიხილეთ 7.8 მაგალითში. ჩარჩო დამზადებულია პლასტიკური მასალისაგან. მოცემულია

$l = 1 \text{ მ, } q = 10 \text{ კნ/მ; } n = 1,5; \sigma_{დნ} = \sigma_{დკ} = 300 \text{ მგპა.}$



ნახ. 9.11

დადგენილია, რომ ამ ამოცანაში საშიშია A კვეთი (ნახ. 7.44). ამ კვეთში საშიშ K წერტილთან (ნახ. 7.45) ამოკვეთით ელემენტი და წარმოვადგინოთ მისი დაძაბული მდგომარეობა (ნახ. 9.11).

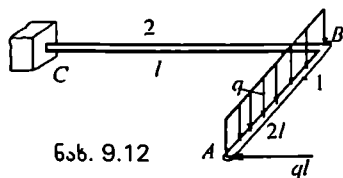
რადგან გვაქვს ბრტყელი გამარტივებული დაძაბული მდგომარეობა, ეკვივალენტური ძაბვის მნიშვნელობა შეიძლება დავადგინოთ (9.10) ფორმულით

$$\sigma_{ეკვ} = \sqrt{\left(\frac{ql^2}{W_x}\right)^2 + 4\left(\frac{4}{27} \frac{ql^2}{W_p}\right)^2} = 1,02 \frac{ql^2}{W_x} \leq \frac{\sigma_{დნ}}{n},$$

საიდანაც ტოლობის ნიშნის გამოყენებით მივიღებთ კვეთის დიამეტრის ზომას.

$$d = \sqrt[3]{1,02 \frac{32 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 1^2 \cdot 1,5}{3,14 \cdot 300 \cdot 10^6}} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

მაგალითი 9.3. დავადგინოთ კვეთის ზომები 9.12 ნახაზზე გამოსახული ჩარჩოსთვის. მოცემულია: $q = 10 \text{ კნ/მ; } l = 0,5 \text{ მ, } \sigma_{დნ} = \sigma_{დკ} = 300 \text{ მგპა, } n = 2.$



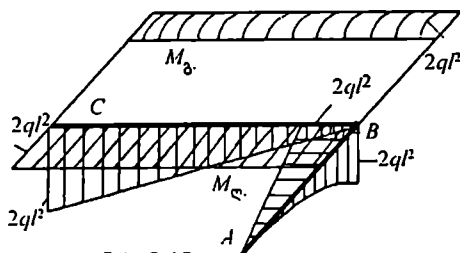
ნახ. 9.12



საშიშ კვეთების დასადგენად ავარჯთ მღუნავი და მგრები მომენტების ეპიურები (ნახ. 9.13).

პირველი ძელისათვის საშიშია B კვეთი, რომლისთვისაც მღუნავი მომენტი მოქმედებს ორ სიბრტყეში. მათი ჯამური მომენტი

$$M_{\Sigma} = \sqrt{(2ql^2)^2 + (2ql^2)^2} = 2\sqrt{2}ql^2.$$



ნახ. 9.13

ვინაიდან წრიული კვეთისათვის ებისმიერი ცენტრალური ღერძი მთავარი ღერძია, შეგვიძლია განვიხილოთ ძელის ღუნვა ჯამური მომენტის მოქმედების სიბრტყეში და B კვეთისათვის ავაგოთ ნორმალური ძაბვების ებიურა (ნახ. 9.14). ამ კვეთში საშიშ წერტილთან გამოვყოთ ელემენტი და წარმოვადგინოთ მისი დაძაბული მდგომარეობა (ნახ. 9.14, ბ).

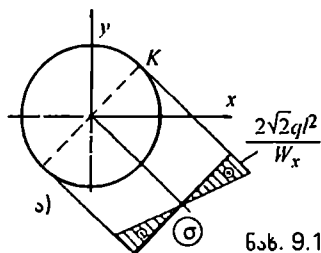
შევადგინოთ სიმტკიცის პირობა

$$\sigma_{\max} = \frac{2\sqrt{2} \cdot ql^2}{W_x} = \frac{2\sqrt{2} \cdot ql^2}{0,1d^3} = \frac{\sigma_{\text{დნ}}}{n},$$

საიდანაც მივიღებთ კვეთის დიამეტრს

$$d = \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{2} \cdot ql^2 \cdot n}{0,1\sigma_{\text{დნ}}}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 1,41 \cdot 10^3 \cdot 10^3 (0,5)^2 \cdot 2}{0,1 \cdot 300 \cdot 10^6}} = 7,8 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

განვიხილოთ BC ძელის საშიში C კვეთი. ამ კვეთისათვის ჯამური მღუნავი მომენტი



ნახ. 9.14

$$M_{\Sigma} = \sqrt{(2ql^2)^2 + (2ql^2)^2} = 2\sqrt{2}ql^2$$

ბ)

საშიში კვეთისათვის ნორმალური და მხები ძაბვების ებიურები და საშიშ წერტილის დაძაბული მდგომარეობა ნაჩვენებია 9.15 ნახაზზე.

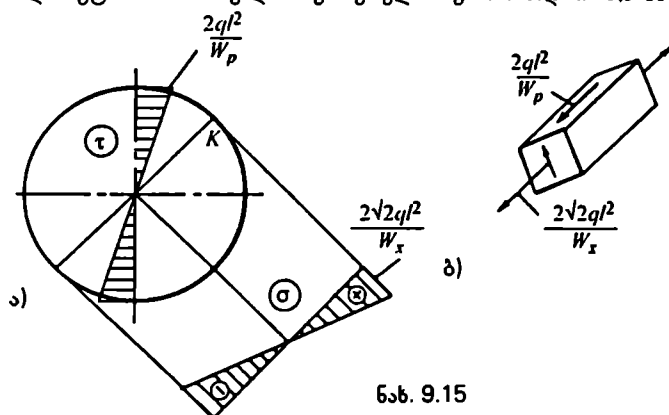
საშიშ K წერტილში განვსაზღვროთ ეკვივალენტური ძაბვა და შევადგინოთ სიმტკიცის პირობა

$$\sigma_{\text{ეკვ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{2ql^2}{W_x} \sqrt{2+1} = 3,46 \frac{ql^2}{W_x} = \frac{\sigma_{\text{დნ}}}{n}.$$

ახლა შეგვიძლია დავადგინოთ მეორე ძელის განივი კვეთის დიამეტრი

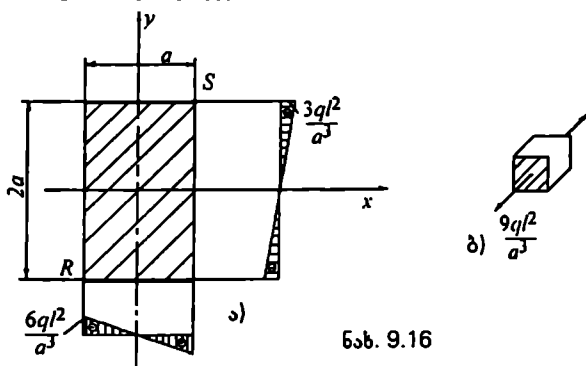
$$d = \sqrt[3]{\frac{3,46 \cdot 10^3 \cdot 10^3 (0,5)^2 \cdot 2}{0,1 \cdot 300 \cdot 10^6}} = 8,3 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

საბოლოოდ, თუ გვინდა, რომ ჩარჩოს ნებისმიერი კვეთი ერთი და იმავე ზომისა იყოს, საჭიროა დიამეტრის ზომა მივიღოთ მეორე ძელის შესაბამისად: $d=8,3$ სმ.



ნახ. 9.15

მაგალითი 9.4. დავადგინოთ წინა მაგალითში განხილული ჩარჩოს ძელების განივი კვეთის ზომები, თუ მათი განივი კვეთი მართკუთხედიანია (ნახ. 9.16).



ნახ. 9.16

პირველი ძელის საშიშ კვეთში მღუნავი მომენტები ორ სიბრტევეში მოქმედებს და მათ მიერ გამოწვეული მაქსიმალური ძაბვებია

$$\sigma'_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{2ql^2 \cdot 6}{a(2a)^2} = \frac{3ql^2}{a^3},$$

$$\sigma''_{\max} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{2ql^2 \cdot 6}{2a \cdot a^2} = \frac{6ql^2}{a^3}.$$

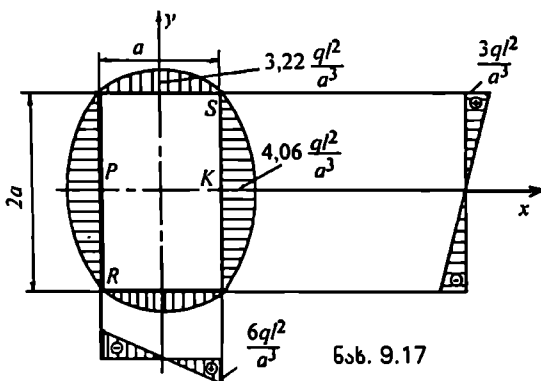
ნორმალური ძაბვების ეპიურებიდან გამოვძინარე, საშიშია N წერტილი, რომლის დაძაბული მდგომარეობა წარმოდგენილია 9.16ნახაზზე. შესაბამისი სიმტკიცის პირობა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\sigma_{\max} = \frac{9ql^2}{a^3} = \frac{\sigma_{\text{დნ}}}{n},$$

საიდანაც მივიღებთ კვეთის ზომების დამახასიათებელი პარამეტრის მნიშვნელობას

$$a = \sqrt[3]{\frac{9ql^2 \cdot n}{\sigma_{\text{დნ}}}} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot (0,5)^2 \cdot 2}{300 \cdot 10^6}} = 5,3 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

განვიხილოთ მეორე ძელის საშიში C კვეთი, რომლისთვისაც, ისე, როგორც პირველი ძელისათვის, ღუნვა ხდება ორ ურთიერთმართობ სიბრტყეში. შესაბამისი მაქსიმალური ძაბვებიც იმავე სიდიდისაა, როგორც პირველი ძელის საშიშ კვეთში.



მხები ძაბვების მნიშვნელობა განისაზღვრება (4.46) და (4.48) ფორმულების საშუალებით. ამისათვის საჭიროა 4.1 ცხრილით დავადგინოთ α და η კოეფიციენტების მნიშვნელობა:

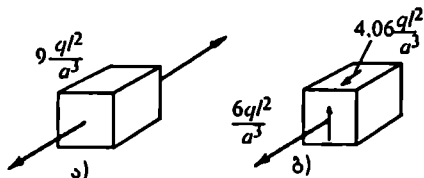
$$\frac{h}{b} = \frac{2a}{a} = 2; \quad \alpha = 0,246; \quad \eta = 0,795;$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{ბ}}}{\alpha hb^2} = \frac{2ql^2}{0,246 \cdot 2a \cdot a^2} = 4,06 \frac{ql^2}{a^3};$$

$$\tau_0 = \eta \tau_{\max} = 0,795 \cdot 4,06 \cdot \frac{ql^2}{a^3} = 3,22 \frac{ql^2}{a^3}.$$

კვეთში მოქმედი ძაბვების ეპიურები წარმოდგენილია 9.17 ნახაზზე.

ამ კვეთში შესაძლო საშიშაა N ან K წერტილები. მათი შესაბამისი ელემენტების დაძაბული მდგომარეობები ნაჩვენებია 9.18 ნახაზზე.



ნახ. 9.18

ვინაიდან N წერტილის და განხილული პირველი ძელის საშიში წერტილის დაძაბული მდგომარეობები ერთნაირია, სიმტკიცის პირობებიც ერთი და იგივე იქნება. ამიტომ N წერტილის განხილვისას მივიღებთ $a = 5,3 \cdot 10^{-2} \text{ მ}$.

განვიხილოთ K წერტილის დაძაბული მდგომარეობა (ნახ. 9.18, ბ) და მისთვის შევადგინოთ სიმტკიცის პირობა

$$\sigma_{\text{კვ}} = \sqrt{\left(6 \frac{ql^2}{a^3}\right)^2 + 4 \left(4,06 \frac{ql^2}{a^3}\right)^2} = 10,1 \frac{ql^2}{a^3} = \frac{\sigma_{\text{დნ}}}{n},$$

საიდანაც მივიღებთ a -ს ახალ მნიშვნელობას

$$a = \sqrt[3]{10,1 \frac{ql^2 n}{\sigma_{\text{დნ}}}} = \sqrt[3]{\frac{10,1 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot (0,5)^2 \cdot 2}{300 \cdot 10^6}} = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ მ}.$$

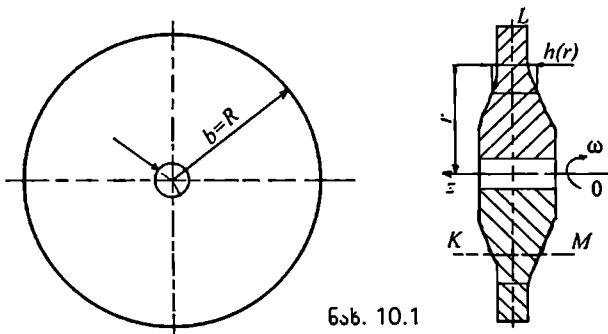
ამრიგად, მეორე ძელისათვის მივიღეთ a -ს ორის მნიშვნელობა. მათგან საჭიროა ავირჩიოთ უდიდესი. ამდენად საბოლოოდ ვაღგენთ $a = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ მ}$.

როგორც საშიში, შეიძლება განვიხილოთ R და P წერტილებიც (ნახ. 9.17), მაგრამ მათთვის სიმტკიცის პირობები ისეთივე იქნება, როგორც N და K წერტილების განხილვისას.

X თავი. დისკოებისა და სქელკედლიანი ცილინდრების გაანგარიშება

§61. დისკოს გაანგარიშების ძირითადი დებულებები და განტოლებები

განვიხილოთ მბრუნავი სხეული, რომლის მახასიათებელი h სისქე ბევრად მცირეა მისი გარე კონტურის რადიუსთან შედარებით, $h \ll R$. ასეთ სხეულს დის-



ნახ. 10.1

კო ეწოდება (ნახ. 10.1) დისკო სიმეტრიულია L სიბრტყისადმი, რომელსაც შემდგომში დისკოს შუა ზედაპირს ვუწოდებთ. გასაგებია, რომ მანძილი ამ სიბრ-

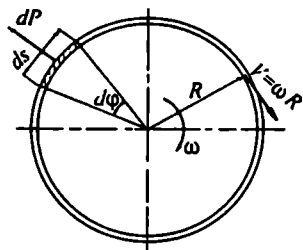
ტყიდან ზედა და ქვედა ზედაპირებამდე, შესაბამისად, $\frac{h(r)}{2}$ და $-\frac{h(r)}{2}$ იქნება.

მანქანათმშენებლობის სხვადასხვა დარგში, სწრაფად მბრუნავი დეტალების სახით ფართოდ გამოიყენება დისკოები. მათი მუშაობის პირობებისათვის ხშირად მაღალ სიჩქარეებთან ერთად დამახასიათებელია რადიალური მიმართულებით ცვალებადი მაღალი ტემპერატურა. დისკოს პერაფერიაზე შეიძლება დამაგრებული იყოს გარკვეული სამუშაო დანიშნულების მქონე ფრთები.

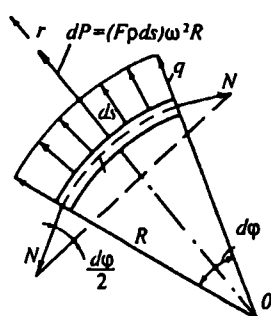
მაღალი კუთხური სიჩქარეები იწვევს დიდ ინერციის ძალებს. ეს ძალები, ტემპერატურის რადიალური მიმართულებით მკვეთრ ცვლილებასთან ერთად, იწვევს საკმაოდ მაღალი ინტენსიურობის ძაბვებს და ამიტომ, ასეთი კონსტრუქციების შექმნისას, სიმტკიცეცხვა და სიხისტეზე გაანგარიშება, როგორც წესი, ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მომენტია. მაგალითისათვის შეიძლება აღვნიშნოთ, რომ თანამედროვე ტურბომანქანათმშენებლობაში სიჩქარეები აღწევს 500 მ/წმ. თუ რა რიგის ძაბვებს წარმოქმნის მბრუნავ სხეულებში ასეთი სიჩქარეები, წარმოდგენას მოგვცემს შემდეგი ამოცანის განხილვა. რგოლი, რომლის მასალის ხვედრითი სიმკვრივეა ρ , თავის სიბრტყეში ბრუნავს ω მუდმივი კუთხური

სიჩქარით (ნახ. 10.2). ამოკვეთით რგოლიდან ds სიგრძის ელემენტი (ნახ. 10.3), განვსაზღვროთ ინერციის ძალების ინტენსიურობა

$$q = \frac{dP}{ds} = F\rho\omega^2 R. \quad (10.1)$$



ნახ. 10.2



ნახ. 10.3

დალაშქრის პრინციპის შესაბამისად, ელემენტზე მოქმედ ძალებს დავუმატოთ ინერციის ძალა და დავაგეგმილოთ რადიალურ მიმართულებაზე

$$qds - 2N \sin \frac{d\phi}{2} = 0; \quad (10.2)$$

გარდაქმნებისათვის გავითვალისწინოთ შემდეგი თანაფარდობები:

$$ds = R d\phi; \quad \sin \frac{d\phi}{2} = \frac{d\phi}{2}. \quad (10.3)$$

მაშინ, ნორმალური ძალის მნიშვნელობა

$$N = qR = F\rho\omega^2 R^2 = F\rho V^2, \quad (10.4)$$

სადაც V რგოლის ხაზოვანი სიჩქარეა; F - განივი კვეთის ფართობი. რგოლის კვეთში ნორმალური ძაბვა

$$\sigma = \frac{N}{F} = \rho V^2. \quad (10.5)$$

მაგალითისათვის განვიხილოთ ფოლადის რგოლი, რომლის სიჩქარეა 500 მ/წმ, მაშინ

$$\sigma = \rho V^2 = \frac{\gamma}{g} V^2 = \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^8}{10^3} = 20000 \frac{\text{კგ}}{\text{სმ}^2} = 2000 \text{ მგა.}$$

ასეთი დიდი ძაბვის ატანა შეუძლია მხოლოდ მაღალი სიმტკიცის სპეციალურ ფოლადებს.

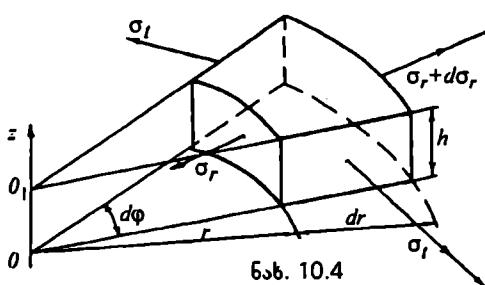
(10.5) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ძაბვების შემცირება შეიძლება მხოლოდ რგოლის დამზადებით მსუბუქი შენადნობებისაგან, კერძოდ, ტიტანისაგან, რომელიც სიმტკიცით ფოლადს უახლოვდება და ამასთანავე, დაახლოებით 2,5-ჯერ მასზე მსუბუქია.

დისკოს გაანგარიშების მეთოდების შექმნისას არსებითად ვიყენებთ იმ გარემოებას, რომ მისი მახასიათებელი h სისქე გაცილებით მცირეა გარე კონტურის R რადიუსზე (ნახ. 10.1). ეს საშუალებას გვაძლევს გავაკეთოთ შემდეგი ორი დაშვება:

1. დისკოს შუა ზედაპირის ყოველი მართობი KM ელემენტი დისკოს დეფორმაციის შემდეგ რჩება პირდაპირი, არ იცვლის მიმართულებას და გადაადგილდება მხოლოდ რადიალური მიმართულებით;

2. რადგან $h \ll R$ და დისკოს ზედაპირები Oz მიმართულებით თავისუფალია ნორმალური ძალებისაგან, შეიძლება შესაბამისი მიმართულების ნორმალური ძაბვები მხედველობაში არ მივიღოთ და დავუშვათ, რომ $\sigma_z = 0$. მაშინ, დისკოს ნებისმიერ წერტილში რეალიზებული იქნება ორღერძა დაძაბული მდგომარეობა.

ორი კონცენტრული ცილინდრული ზედაპირით, რომელთა რადიუსებია r



ნახ. 10.4

და $r+dr$ და ორი Oz ღერძზე გამავალი რადიალური სიბრტყით დისკოდან ამოვკვეთთ ელემენტი (ნახ. 10.4). აღვნიშნოთ რადიალური და წრიული მიმართულების ნორმალური ძაბვები, შესაბამისად, σ_r და σ_t ასობით. ზოგჯერ უფრო მოსახერხებელი იქნება

კონტურის სიგრძის ერთეულზე მოსული ძალების გამოყენება.

$$T_r = \sigma_r h; \quad T_t = \sigma_t h. \quad (10.6)$$

ელემენტზე მოქმედებს აგრეთვე ინერციის dP ძალა, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით

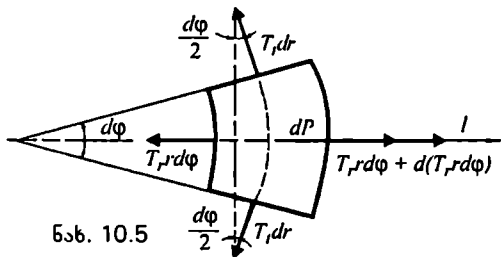
$$dP = (hrd\varphi dr\rho)\omega^2 r = hr^2 \rho \omega^2 drd\varphi.$$

გამოვსახოთ 10.5 ნახაზზე ნაჩვენები ელემენტი სიბრტყეზე და დავაგვიგმიოთ ელემენტზე მოდებული ძალები l მიმართულებაზე:

$$T_r r d\varphi + d(T_r r d\varphi) - T_r r d\varphi - 2T_t dr \sin \frac{d\varphi}{2} + hr^2 \rho \omega^2 drd\varphi = 0.$$

რადგან ელემენტისათვის $d\varphi$ ერთი და იგივეა, იგი შეგვიძლია გამოვიტანოთ დიფერენციალის ნიშნის გარეთ. აგრეთვე, თუ გავითვალისწინებთ (10.3) გამოსახულებებს ელემენტარული გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{d(rT_r)}{dr} = T_l - \rho\omega^2 r^2 h. \quad (10.7)$$



ნახ. 10.5

მიღებულ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებაში შედის ორი T_r და T_l უცნობი. ამიტომ აუცილებელია მეორე განტოლე-

ბის შედგენა. ამისათვის გავითვალისწინოთ დისკოს ელემენტის დეფორმაცია (ნახ. 10.6). დავუშვათ, რომ ელემენტის დეფორმაციის შედეგად შიგა AB ბოჭკო გადაადგილდება რადიალური მიმართულებით u მანძილზე და დაიკავებს AB' მდებარეობას. ელემენტის დეფორმაციამდე და დეფორმაციის შემდეგ ამ ბოჭკოს სიგრძე იქნება:

$$dl_0 = rd\varphi; \quad dl = (r + u)d\varphi,$$

მაშინ წრიული მიმართულებით წრფივი დეფორმაცია

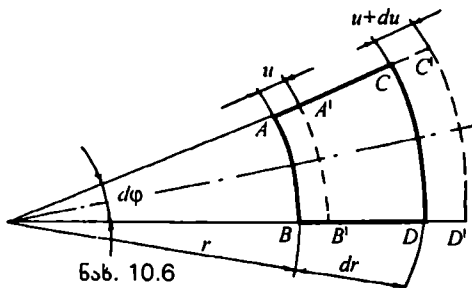
$$\epsilon_l = \frac{dl - dl_0}{dl_0} = \frac{(r + u)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{u}{r}. \quad (10.8)$$

ელემენტის დეფორმაციის შედეგად გარე CD ბოჭკო გადაადგილდება რადიალური მიმართულებით $(u + du)$ -ზე და დაიკავებს $C'D'$ მდებარეობას, ე.ი. დეფორმაციამდე და დეფორმაციის შემდეგ ელემენტის ზომები რადიალური მიმართულებით იქნება

$$dl_0 = dr; \quad dl = dr + (u + du) - u = dr + du.$$

ამიტომ რადიალური მიმართულების წრფივი დეფორმაცია განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\epsilon_r = \frac{dl - dl_0}{dl_0} = \frac{du}{dr}. \quad (10.9)$$



ნახ. 10.6

დავაკავშიროთ ერთმანეთთან ძაბვები და დეფორმაციები. ამისათვის გამოვიყენოთ ჰუკის განზოგადებული კანონი (8.45) ორღერძა დაძაბული მდგომარეობისათვის და დამატებით გავითვალისწინოთ

ტემპერატურის ცვლილებით გამოწვეული დეფორმაციები:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_t) + \alpha\theta, \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_r) + \alpha\theta, \end{aligned} \quad (10.10)$$

სადაც α წრფივი გაფართოების კოეფიციენტია, θ – ტემპერატურის ცვლილება, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ r -ზე; Oz მიმართულებით θ მუდმივია.

ზოგად შემთხვევაში, მასალის მექანიკური E და μ მახასიათებლები არ არის მუდმივი და მათი ცვლილება დამოკიდებულია ტემპერატურის ცვლილებაზე, ე. ი. მათი ცვლილება შეიძლება დავუკავშიროთ r კოორდინატს. მაგრამ თუ ტემპერატურა შედარებით ვიწრო ფარგლებში იცვლება, მაშინ მასალის მექანიკური თვისებების ცვალებადობა შეიძლება არ მივიღოთ მხედველობაში.

დავუკავშიროთ ერთმანეთს გადაადგილებები და ძალები (10.6), (10.8), (10.9) და (10.10) ფორმულების საშუალებით

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= \frac{1}{Eh}(T_r - \mu T_t) + \alpha\theta; \\ \frac{u}{r} &= \frac{1}{Eh}(T_t - \mu T_r) + \alpha\theta. \end{aligned} \quad (10.11)$$

ძირითად უცნობებად ჩავთვალოთ u გადაადგილება და T_r რადიალური ძალა. შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლებები ამ უცნობების მიმართ (10.11)-ის მეორე განტოლებიდან მივიღებთ

$$T_t = Eh \frac{u}{r} + \mu T_r - Eh\alpha\theta. \quad (10.12)$$

ამ შედეგის (10.7)-ში და (10.11)-ის პირველ განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ ორი წრფივი დიფერენციალური განტოლების სისტემას ძირითადი უცნობებისათვის:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= -\frac{\mu}{r}u + \frac{1-\mu^2}{Eh}T_r + (1+\mu)\alpha\theta; \\ \frac{dT_r}{dr} &= \frac{Eh}{r^2}u - \frac{1-\mu}{r}T_r - \frac{Eh\alpha\theta}{r} - \rho\omega^2rh. \end{aligned} \quad (10.13)$$

ამ სისტემის ამოხსნით ვადგენთ ძირითადი უცნობების მნიშვნელობებს და

შემდეგ (10.12) ფორმულის საშუალებით გავიანგარიშებთ T_r წრიულ ძალასაც. ამის შემდეგ არავითარ სირთულეს არ წარმოადგენს (10.6) თანაფარდობების გამოყენებით რადიალური და წრიული ნორმალური ძაბვების დადგენა და მათი საშუალებით დისკოს სიმტკიცეზე გაანგარიშება. (10.13) სისტემის მიღებისას არ გავვიკეთებია დაშვება ტემპერატურის ცვლადობის ხასიათზე და მისგან დრეკადობის მუდმივების დამოკიდებულებაზე. ამიტომ ეს განტოლებები ზოგადი ხასიათისაა და მათი გამოყენება შეიძლება იმ შემთხვევაშიც, თუ E და μ დამოკიდებულია ტემპერატურაზე.

ზოგიერთი ამოცანის განხილვისას სასარგებლოა (10.13) სისტემის ნაცვლად ერთი, მეორე რიგის განტოლების მიღება. ამ მიზნით სისტემიდან გამოვრიცხოთ u გადაადგილება. გარდაქმნებისას ჩავთვალოთ, რომ ტემპერატურა მცირე საზღვრებში იცვლება და ამიტომ მასალის მექანიკური მახასიათებლები მუდმივია.

(10.13) სისტემის მეორე განტოლებიდან მივიღებთ u -ს მნიშვნელობას

$$u = \frac{r^2}{Eh} \frac{dT_r}{dr} + \frac{(1-\mu)r}{Eh} T_r + r\alpha\theta + \rho \frac{\omega^2 r^3}{E}. \quad (10.14)$$

ახლა (10.13)-ის მეორე განტოლებიდან შეგვიძლია გამოვრიცხოთ რადიალური გადაადგილების მნიშვნელობა

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} + \frac{\mu}{r} u &= \frac{1-\mu^2}{Eh} T_r + (1+\mu)\alpha\theta = \frac{r^2}{Eh} \frac{d^2 T_r}{dr^2} + \frac{2r}{Eh} \frac{dT_r}{dr} - \\ &- \frac{r^2}{Eh^2} \frac{dh}{dr} \frac{dT_r}{dr} + \frac{(1-\mu)r}{Eh} \cdot \frac{dT_r}{dr} + \frac{(1-\mu)}{Eh} T_r - \frac{(1-\mu)r}{Eh^2} \frac{dh}{dr} T_r + \\ &+ \alpha\theta + r\alpha \frac{d\theta}{dr} + 3\rho \frac{\omega^2 r^2}{E} + \frac{\mu r}{Eh} \frac{dT_r}{dr} + \frac{(1-\mu)\mu}{Eh} T_r + \mu\alpha\theta + \mu \frac{\rho\omega^2 r^2}{E}, \end{aligned}$$

საიდანაც, საბოლოოდ, T_r ძალისათვის მივიღებთ მეორე რიგის წრფივ განტოლებას

$$\frac{d^2 T_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{dT_r}{dr} - \frac{dh}{hdr} \left(\frac{dT_r}{dr} + \frac{(1-\mu)}{r} T_r \right) = -Eh\alpha \frac{d\theta}{rdr} - (3+\mu)\rho\omega^2 h. \quad (10.15)$$

ამ განტოლების გამოყენებით შემდგომში განვიხილავთ ზოგიერთ ამოცანას.

§62. სწრაფად მბრუნავი მუდმივი სისქის მქონე დისკოს ქაბეცებისა და გადაადგილებების გაანგარიშება

შევისწავლოთ ω თანაბარი კუთხური სიჩქარით მბრუნავი მუდმივი სისქის დისკოში ქაბეცები და გადაადგილებები. ჩავთვალოთ, რომ დისკოს ტემპერატურა მუდმივია. აღნიშნულის გათვალისწინებით, (10.15) განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\frac{d^2 T_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{dT_r}{dr} = -(3 + \mu)\rho\omega^2 h. \quad (10.16)$$

მიღებული წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი იქნება

$$T_r = T_r^0 + T_r^*, \quad (10.17)$$

სადაც T_r^0 წარმოადგენს შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების

$$\frac{d^2 T_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{dT_r}{dr} = 0. \quad (10.18)$$

ზოგად ამონახსნს. ეს ამონახსნი კი შეიძლება ვეძიოთ შემდეგი სახით $T_r^0 = r^\alpha$, მაშინ (10.18)-დან მივიღებთ შემდეგ პირობას: $r^{\alpha-2} [\alpha(\alpha-1) + 3\alpha] = 0$. რადგან $r^{\alpha-2} \neq 0$, მაშინ:

$$\alpha(\alpha-1) + 3\alpha = 0,$$

საიდანაც $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -2$. ამრიგად, ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$T_r^0 = A + \frac{B}{r^2}. \quad (10.19)$$

რაც შეეხება (10.16) განტოლების კერძო ამონახსნს, ადვილი შესამჩნევია, რომ იგი შეიძლება ვეძიოთ შემდეგი სახით: $T_r^* = Cr^2$. ჩავსვათ ეს გამოსახულება (10.16)-ში და განვსაზღვროთ C კოეფიციენტი:

$$2C + 6C = -(3 + \mu)\rho\omega^2 h; \quad C = -\frac{3 + \mu}{8}\rho\omega^2 h.$$

საბოლოოდ (10.16) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$T_r = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3 + \mu}{8}\rho\omega^2 hr^2. \quad (10.20)$$

დავადგინოთ წრიული მიმართულების ნორმალური ძალის მნიშვნელობა, რისთვისაც გამოვიყენოთ (10.7) ფორმულა:

$$T_r = \frac{d(rT_r)}{dr} + \rho\omega^2 hr^2 = A - \frac{B}{r^2} - \frac{3(3+\mu)}{8}\rho\omega^2 hr^2 + \rho\omega^2 hr^2 = A - \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8}\rho\omega^2 hr^2. \quad (10.21)$$

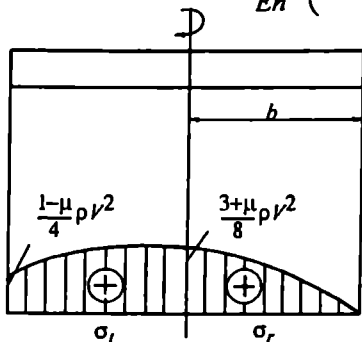
(10.11) თანაფარდობების მეორე ფორმულის საშუალებით დავადგინოთ რადიალური გადაადგილება

$$u = \frac{r}{Eh} \left[A - \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8}\rho\omega^2 hr^2 - \mu \left(A + \frac{B}{r^2} - \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2 hr^2 \right) \right] = \frac{r}{Eh} \left[(1-\mu)A - (1+\mu)\frac{B}{r^2} - \frac{1-\mu^2}{8}\rho\omega^2 hr^2 \right]. \quad (10.22)$$

მიღებული შედეგები ზოგადი ხასიათისაა და მათი საშუალებით შესაძლებელია განვიხილოთ სხვადასხვა სახის კონკრეტული ამოცანა.

განვიხილოთ დისკო, რომელსაც არა აქვს ცენტრალური ნახვრეტი. ნებისმიერ წერტილში, კერძოდ, ცენტრში, როცა $r=0$, ძალების მნიშვნელობა შემოსაზღვრულია. ეს პირობა შესრულდება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ (10.20), (10.21) და (10.22) ფორმულებში დავუშვებთ, რომ $B=0$. მაშინ მიღებული ფორმულები შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$T_r = A - \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2 hr^2, \quad T_t = A - \frac{1+3\mu}{8}\rho\omega^2 hr^2, \quad u = \frac{(1-\mu)}{Eh} \left(A - \frac{1+\mu}{8}\rho\omega^2 hr^2 \right) r. \quad (10.23)$$



ნახ. 10.7

მეორე მუდმივის მნიშვნელობის დასადგენად საჭიროა დისკოს გარე კონტურზე სასაზღვრო პირობის გამოყენება. თუ ეს კონტური თავისუფალია (ნახ. 10.7), მასზე რადიალური მიმართულების ნორმალური ძალა ნულის ტოლია.

$$r = b: T_r(b) = A - \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2 hb^2 = 0, \quad A = \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2 hb^2.$$

მიღებული შედეგის (10.23)-ში გათვალისწინებით და შემდეგ (10.6)-ის გამოყენებით, მივიღებთ რადიალური და წრიული მიმართულების ნორმალური ძაბვების მნიშვნელობებს

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8} \rho V^2 \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right);$$

$$\sigma_l = \frac{3+\mu}{8} \rho V^2 \left(1 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} \frac{r^2}{b^2} \right).$$

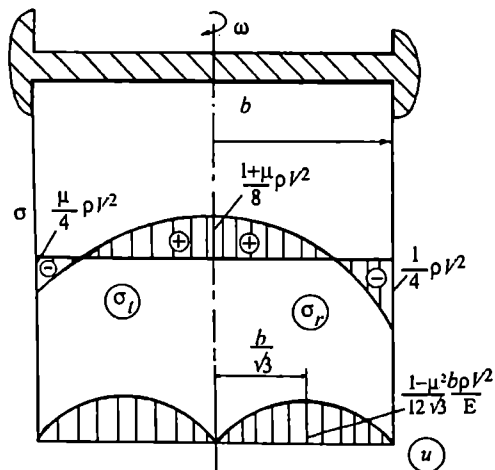
სადაც $V = \omega b$ დისკოს გარე კონტურის წერტილების ხაზოვანი სიჩქარეა. ძაბვების ეპიურები გამოსახულია 10.7 ნახაზზე.

მაქსიმალური მხები ძაბვების კრიტერიუმის შესაბამისად, საშიშია დისკოს ცენტრალური წერტილი და მისთვის ეკვივალენტური ძაბვის საშუალებით ვაღვნთ პირობას

$$\sigma_{\text{ეკვ}} = \frac{3+\mu}{8} \rho V^2 = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 b^2 \leq \sigma_{\text{დნ}}.$$

აქედან გამომდინარე, ტოლობის ნიშნის გამოყენებით დისკოს ზღვრული მდგომარეობისათვის მივიღებთ კუთხური სიჩქარის შემდეგ მნიშვნელობას:

$$\omega^2 = \frac{8}{3+\mu} \frac{\sigma_{\text{დნ}}}{\rho b^2}; \quad \omega = 1,57 \sqrt{\frac{\sigma_{\text{დნ}}}{\rho b^2}}.$$



დისკოსთვის, რომლის გარე კონტური ხისტადაა ჩამაგრებული (ნახ.10.8), გარე კონტურის რადიალური გადაადგილება ნულის ტოლია:

$$r = b: u(b) = 0;$$

$$A - \frac{1+\mu}{8} \rho \omega^2 h b^2 = 0,$$

$$A = \frac{1+\mu}{8} \rho \omega^2 h b^2.$$

ამ შედეგის (10.23) ფორმულებში გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\sigma_r = \frac{1+\mu}{8} \rho V^2 \left(1 - \frac{3+\mu}{1+\mu} \frac{r^2}{b^2} \right); \quad \sigma_t = \frac{1+\mu}{8} \rho V^2 \left(1 - \frac{1+3\mu}{1+\mu} \frac{r^2}{b^2} \right);$$

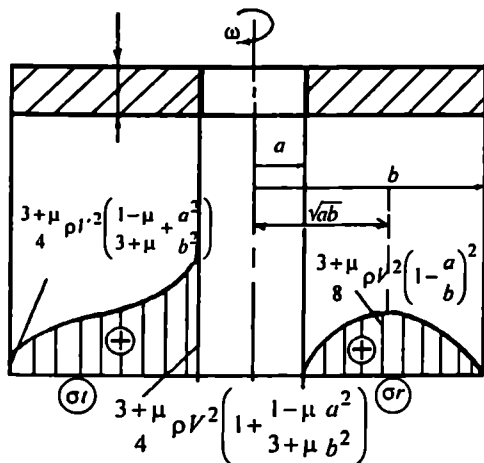
$$u = \frac{1-\mu^2}{8E} \rho V^2 \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right) r.$$

შესაბამისი ეპიურები გამოსახულია 10.8 ნახაზზე.

განვიხილოთ ცენტრალური ნახვრეტის შქონე დისკო (ნახ. 10.9), რომლის შიგა და გარე კონტურებზე რადიალური მიმართულების ნორმალური ძალა ნულის ტოლია. ამიტომ მუდმივების დასადგენი პირობები ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$r = a: T_r(a) = A + \frac{B}{a^2} - \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 h a^2 = 0;$$

$$r = b: T_r(b) = A + \frac{B}{b^2} - \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 h b^2 = 0.$$



ნახ. 10.9

განტოლებათა სისტემის ამოხსნის შედეგად მივიღებთ მუდმივების შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$A = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 h (a^2 + b^2)$$

$$B = -\frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 h a^2 b^2.$$

გავითვალისწინოთ ეს შედეგები ნორმალური ძალების ფორმულებში, მაშინ (10.6)-ის თანახმად მივიღებთ

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8} \rho V^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{r^2} - \frac{r^2}{b^2} \right); \quad \sigma_t = \frac{3+\mu}{8} \rho V^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{1+3\mu}{3+\mu} \frac{r^2}{b^2} \right).$$

შესაბამისი ეპიურები აგებულია 10.9 ნახაზზე.

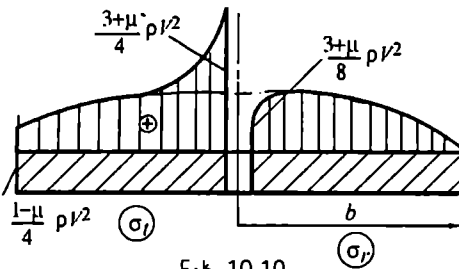
განვიხილოთ ამ ამოცანის ზოგიერთი კერძო შემთხვევა. რგოლის შემთხვევაში $a=b$ და 10.9 ნახაზზე გამოსახული შედეგების შესაბამისად მივიღებთ:

$$\sigma_r = 0; \quad \sigma_l = \rho V^2$$

ეს შედეგები ემთხვევა რგოლის უშუალო განხილვით მიღებულ (10.5) შედეგს წრიული მიმართულების ძაბვებისათვის.

რაც შეეხება რადიალური მიმართულების ძაბვების ნულთან ტოლობას, იგი ადრე მიღებული იყო როგორც წინასწარი დაშვება. აქ ასეთი შედეგი უშუალოდ ამოცანის ამოხსნით დავადაგინეთ.

საინტერესოა ისეთი დისკოს განხილვა, რომელსაც ცენტრში გააჩნია უსასრულოდ მცირე ზომის ნახვრეტი (ნახ. 10.10), $b > a$. შევადაროთ ერთი და იმავე



ნახ. 10.10

ზომის ნახვრეტიანი და უნახვრეტო დისკოების ძაბვების ეპიურები (ნახ. 10.7 და ნახ.10.10). მიღებული შედეგებიდან გამომდინარე, დავასკვნით, რომ ეპიურები ძირითადად ერთმანეთს იმეორებენ. განსხვავება მხოლოდ ნახვრეტის ვიწრო მიდამოში. კერძოდ, ნახვრეტის კონტურთან რადიალური ნორმალური ძაბვა მკვეთრად მცირდება ნულამდე. რაც შეეხება წრიული მიმართუ-

ლების ნორმალურ ძაბვას, ის სიდიდით ორჯერ აღემატება უნახვრეტო დისკოს შესაბამის ძაბვას. ძაბვების ასეთ ადგილობრივ ზრდას ეწოდება ძაბვების კონცენტრაცია და მას, როგორც წესი, ადგილი აქვს დრეკადი სხეულის დატვირთვისას მისი ფორმის მკვეთრი ცვლილებების ადგილებში. განხილული დისკოსათვის შეგვიძლია დავადაგინოთ საშიში წერტილის შესაბამისი ეკვივალენტური ძაბვა და ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი პირობა:

$$\sigma_{\text{მკვ}} = \frac{3+\mu}{4} \rho V^2 = \frac{3+\mu}{4} \rho \omega^2 b^2 \leq \sigma_{\text{დნ}}$$

საიდანაც შეგვიძლია ტოლობის პირობის გამოყენებით განვსაზღვროთ დოსკოს ზღვრული მდგომარეობის შესაბამისი კუთხური სიჩქარე:

$$\omega^2 = \frac{4}{3+\mu} \frac{\sigma_{\text{დნ}}}{\rho b^2}; \quad \omega = 1,11 \sqrt{\frac{\sigma_{\text{დნ}}}{\rho b^2}}$$

მიღებული შედეგებიდან ვაკეთებთ დასკვნას, რომ ზღვრული მდგომარეობის შესაბამისი სიჩქარეები ცენტრალური ნახვრეტიანი და უნახვრეტო დისკოებისათვის განსხვავდება ერთმანეთისაგან 30%-ით.

§63. ტემპერატურული ძაბვები დისკოში

განვიხილოთ მუდმივი სისქის მქონე დისკო, რომლის ტემპერატურა $\theta(r)$ იცვლება რადიალური მიმართულებით ისეთ საზღვრებში, რომ დრეკადობის მუდმივი შეიძლება ჩავთვალოთ მუდმივ სიდიდედ. ჩავთვალოთ, რომ $\alpha=0$. აღნიშნულის გათვალისწინებით (10.15) განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{d^2 T_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{dT_r}{dr} = -E\alpha \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr}. \quad (10.24)$$

ამ განტოლების ამონახსნი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ (10.17) გამოსახულების სახით, მაგრამ აქ მივმართოთ ამოხსნის სხვა ხერხს.

გავამრავლოთ (10.24) განტოლების ორივე მხარე r^3 -ზე, რის შედეგად განტოლების მარცხენა მხარე შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$\frac{d}{dr} \left(r^3 \frac{dT_r}{dr} \right) = -E\alpha r^2 \frac{d\theta}{dr}. \quad (10.25)$$

ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ ამოცანის ზოგად ამონახსნს:

$$T_r = A + \frac{B}{r^2} - \int \frac{E\alpha}{r^3} \left[\int r^2 \frac{d\theta}{dr} dr \right] dr. \quad (10.26)$$

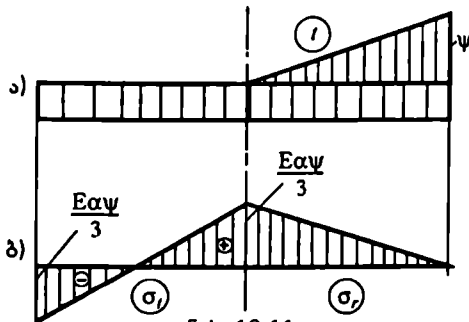
დავაკონკრეტოთ ამოცანა და განვიხილოთ დისკო, რომლის ტემპერატურა იცვლება შემდეგი კანონით: $\theta = \psi(r/h)$, $\psi = \text{const}$, (ნახ. 10.11). მაშინ (10.26) ფორმულის თანახმად

$$T_r = A + \frac{B}{r^2} - \frac{E\alpha\psi}{3b} r. \quad (10.27)$$

პირობიდან, რომ დისკოს ცენტრში ($r=0$) ძალის მნიშვნელობა შემოსაზღვრულია, მივიღებთ $B=0$. მეორე მუდმივის მნიშვნელობის დასადგენად ვიყენებთ შემდეგ პირობას:

$$r = b: \quad T_r(b) = A - \frac{E\alpha\psi}{3} = 0, \quad A = \frac{E\alpha\psi}{3}.$$

ახლა შეგვიძლია დავადგინოთ რადიალური მიმართულების ძალის მნიშვნელობა



ნახ. 10.11

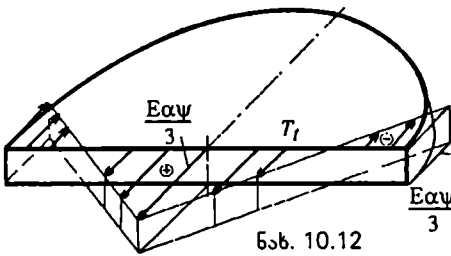
$$T_r = \frac{Eh\alpha\psi}{3} \left(1 - \frac{r}{b}\right).$$

წრიული მიმართულების ნორმალური ძალის დასადგენად ვიყენებთ (10.7) ფორმულას

$$T_r = \frac{Eh\alpha\psi}{3} \left(1 - 2\frac{r}{b}\right).$$

განვსაზღვროთ ნორმალური ძაბვები. შესაბამისი ეპიურები ნაჩვენებია 10.11 ნახაზზე.

ასეთი ამოცანების თავისებურება იმაში მდგომარეობს, რომ მათთვის შიგა ძალები თვითგაწონასწორებულია. მაგალითისათვის 10.12 ნახაზზე ნაჩვენებია



განხილული დისკოს ნახევარი მასზე მოდებული შიგა ძალებით. ადვილი შესამოწმებელია, რომ დისკოს ეს ნაწილი წონასწორობაშია და წონასწორობის პირობები სრულდება მხოლოდ შიგა ძალების ხარჯზე.

წმირ შემთხვევაში დისკო ერთდროულად განიცდის სწრაფ ბრუნვას და არათანაბარ გახურებას. ასე-

თი ამოცანების განხილვა შეიძლება როგორც ორივე ფაქტორის ერთდროული გათვალისწინებით, ისე ორი ამოცანის დამოუკიდებლად ამოსნით. პირველი ამოცანა ითვალისწინებს დისკოს სწრაფი ბრუნვით გამოწვეული ძაბვებისა და გადაადგილებების დადგენას. ამ შემთხვევაში განტოლებიდან უნდა გამოირიცხოს ტემპერატურული წევრები. მეორე ამოცანა ეხება მხოლოდ ტემპერატურული ძაბვების და გადაადგილებების გაანგარიშებას. საერთო ძაბვების და გადაადგილებები მიიღება ორი ამოცანის ამონახსნების შეჯამებით.

თუ ტემპერატურის ცვალებადობა ისეთია, რომ საჭიროა დრეკადობის მახასიათებლების ცვალებადობის გათვალისწინება, ამის გაკეთება საჭიროა ორივე ამოცანის ამონახსნისას.

§54. სწრაფად მბრუნავი დისკოს ოპტიმალური პროფილის დადგენა

დისკოს გაანგარიშების მეთოდოლოგია ითვალისწინებს მასში ორდერძა დაძაბული მდგომარეობის რეალიზაციას. ამიტომ, თუ ვივარაუდებთ, რომ სწრაფად მბრუნავი დისკოს ნებისმიერ წერტილში ორივე ძაბვა დადებითია, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ეკვივალენტური ძაბვა ტოლი იქნება σ_r და σ_t ძაბვებს შორის უდიდესის. მასალის სრულყოფილად გამოყენების თვალსაზრისიდან გამომდინარე, ოპტიმალური ფორმის დისკოში უნდა შესრულდეს შემდეგი პირობა:

$\sigma_{\text{კვ}} = \sigma_r = \sigma_l = \sigma_0 = \text{const}$, მაშინ რადიალური და წრიული მიმართულების ძალები, (10.6)-ის შესაბამისად, განისაზღვრება ასეთნაირად:

$$T_r = \sigma_0 h; \quad T_l = \sigma_0 h. \quad (10.28)$$

გავითვალისწინოთ (10.28) გამოსახულება (10.15) განტოლებაში და ჩავწეროთ იგი შემდეგი სახით

$$h'' + \frac{3}{r}h' - \frac{h'}{h} \left(h' + \frac{1-\mu}{r}h \right) = -(3+\mu) \frac{\rho \omega^2 h}{\sigma_0}.$$

გადავწეროთ ეს განტოლება ასეთნაირად

$$r \left(\frac{h'}{h} \right)' + (2+\mu) \frac{h'}{h} = - \frac{(3+\mu) \rho \omega^2 r}{\sigma_0}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $z = h'/h$. ახალი უცნობისათვის განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$rz' + (2+\mu)z = - \frac{(3+\mu) \rho \omega^2 r}{\sigma_0}. \quad (10.29)$$

ამ განტოლების ამონახსნი, წარმოვადგინოთ (10.18)-ის ანალოგიურად შემდეგი სახით

$$z_0 = Ar^\alpha, \quad \alpha = -(2+\mu), \quad z_0 = Ar^{-(2+\mu)}$$

(10.29) განტოლების კერძო z^* ამონახსნი ვეძიოთ შემდეგი სახით: $z^* = Cr$. გავითვალისწინოთ ეს გამოსახულება (10.29)-ში:

$$C + (2+\mu)C = - \frac{3+\mu}{\sigma_0} \rho \omega^2,$$

საიდანაც მივიღებთ უცნობი კოეფიციენტის მნიშვნელობას

$$C = -\rho \frac{\omega^2}{\sigma_0}.$$

ამრიგად, (10.29) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$z = \frac{h'}{h} = Ar^{-(2+\mu)} - \rho \frac{\omega^2 r}{\sigma_0}. \quad (10.30)$$

დაგკმაყოფილდეთ ისეთი დისკოს განხილვით, რომელსაც არა აქვს ცენტრალური ნახვრეტი. პირობიდან, რომ დისკოს ცენტრში შეზღუდულია h და h' სიდიდეები, მივიღებთ, რომ $A=0$. მაშინ (10.30) შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\frac{h'}{h} = -\rho \frac{\omega^2 r}{\sigma_0},$$

საიდანაც ინტეგრების შედეგად მივიღებთ თანაფარდობას

$$\ln h = -\rho \frac{\omega^2 r^2}{2\sigma_0} + \ln C,$$

მაშინ დისკოს სისქის ცვლილების კანონი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$h = Ce^{-\rho \frac{\omega^2 r^2}{2\sigma_0}} = h_0 e^{-\rho \frac{\omega^2 r^2}{2\sigma_0}} \quad (10.31)$$

ამოცანა ისეა შედგენილი, რომ ნებისმიერ წერტილში $\sigma_r = \sigma_0$. ეს პირობა უნდა სრულდებოდეს დისკოს გარე კონტურზეც, რაც შეიძლება გაკეთდეს ხელლოვნურად. მასზე ფრთების დამაგრებით. ამ ფრთების ინერციის ძალებით დისკოს გარე კონტურთან უნდა წარმოიშვას სასურველი სიდიდის ძაბვები. განხილულ ამოცანაში გაკეთებული დაშვებები ზღუდავს მიღებული შედეგების გამოყენების შესაძლებლობის ფარგლებს. კერძოდ, დისკოში გამოვრიცხეთ ცენტრალური ნახვრეტი, ხოლო ტემპერატურა ჩავთვალოთ მუდმივად. ეს პირობები პრაქტიკულ ამოცანებში ხშირად არ სრულდება. ამჟამად დამუშავებულია სპეციალური რიცხვითი ალგორითმები, რომლებიც საშუალებას იძლევა თანამედროვე გამოთვლითი ტექნიკის გამოყენებით სრულყოფილად შევისწავლოთ დისკოების ოპტიმალური კონსტრუირების საკითხები.

§6წ. სწრაფად მბრუნავი დისკოს ზღვრული წონასწორობა

განვიხილოთ ω კუთხური სიჩქარით მბრუნავი დისკო, რომელიც ხურდება მუდმივი ტემპერატურით. ასეთი დისკოებისთვის ზემოთ დავადგინეთ, რომ ორივე მიმართულების ნორმალური ძაბვები დადებითია და სრულდება პირობა $\sigma_r > \sigma_t$ (ნახ. 10.9). შესამე მთავარი ძაბვა, როგორც ეს დისკოებისთვის წინასწარიყო მიღებული, აქაც ნულის ტოლია. ამიტომ მაქსიმალური მხები ძაბვების კრიტერიუმის შესაბამისად, დისკოს ნებისმიერ წერტილში ზღვრული მდგომარეობა განისაზღვრება პირობით

$$\sigma_{\text{ეკვ}} = \sigma_t = \sigma_{\text{დნ}}. \quad (10.32)$$

განვაზოგადოთ დებულება ნორმალური ძაბვების დადებითობის შესახებ და გავავრცელოთ იგი დისკოს პლასტიკურ მდგომარეობაში მუშაობაზე. ჩავთვალოთ რომ ზღვრულ მდგომარეობაში დისკოს ნებისმიერი წერტილისათვის გვაქვს (10.32) პირობა, რომლის (10.7) განტოლებაში გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\frac{d(rT_r)}{dr} = h\sigma_{\text{ღნ}} - \rho\omega^2 r^2 h.$$

ინტეგრების შედეგად მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობას:

$$rT_r \Big|_a^b = \sigma_{\text{ღნ}} \int_a^b h dr - \rho\omega^2 \int_a^b r^2 h dr. \quad (10.33)$$

გამოვიყენოთ აღნიშვნები

$$\int_a^b h dr = F; \quad \int_a^b r^2 h dr = I_z,$$

სადაც F , I_z შესაბამისად, დისკოს განივი კვეთის ნახევრის ფართობი და ინერციის მომენტია ცენტრალური ღერძის მიმართ.

ამ აღნიშვნების (10.33) გამოსახულებაში გათვალისწინებით მივიღებთ

$$bT_r(b) - aT_r(a) = \sigma_{\text{ღნ}} F - \rho\omega^2 I_z.$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ დისკოს ზღვრული მდგომარეობის შესაბამისი კუთხური სიჩქარის მნიშვნელობა

$$\omega^2 = \frac{\sigma_{\text{ღნ}} F - [bT_r(b) - aT_r(a)]}{\rho I_z}. \quad (10.34)$$

განვიხილოთ ზოგიერთი კონკრეტული ამოცანა.

სწრაფად მბრუნავი თხელკედლიანი რგოლისათვის (ნახ. 10.2) გვაქვს შემდეგი თანაფარდობები:

$$T_r(b) = T_r(a) = 0; \quad I_z = R^2 F.$$

გავითვალისწინოთ ეს შედეგები (10.34) გამოსახულებაში:

$$\omega^2 = \frac{\sigma_{\text{ღნ}} F}{\rho R^2 F} = \frac{\sigma_{\text{ღნ}}}{\rho R^2}. \quad (10.35)$$

ეს შედეგი გამომდინარეობს, აგრეთვე, უშუალოდ (10.5) ფორმულიდან. მუდმივი სისქის დისკოსათვის (ნახ. 10.9) მართებულია შემდეგი თანაფარდობები:

$$T_r(a) = T_r(b) = 0;$$

$$I_z = \frac{hb^3}{3} - \frac{ha^3}{3} = \frac{h}{3}(b-a)(a^2 + ab + b^2) = \frac{F}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

გავითვალისწინოთ ეს შედეგები (10.34) გამოსახულებაში:

$$\omega^2 = \frac{3\sigma_{\text{დნ}}}{\rho(b^2 + a^2 + ab)}; \quad \omega = 1,73 \sqrt{\frac{\sigma_{\text{დნ}}}{\rho(b^2 + a^2 + ab)}}.$$

უსასრულოდ მცირე ზომის ცენტრალური ნახვრეტის მქონე დისკოსათვის $a \rightarrow 0$ და ფორმულები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\omega^2 = \frac{3\sigma_{\text{დნ}}}{\rho b^2}; \quad \omega = 1,73 \sqrt{\frac{\sigma_{\text{დნ}}}{\rho b^2}}.$$

იგივე შედეგი მიიღება დისკოს განხილვით, რომელსაც არა აქვს ცენტრალური ნახვრეტი. მეტად საინტერესო და საგულისხმოა, რომ დრეკადობის ფარგლებში დისკოს გაანგარიშებისას ზღვრული კუთხური სიჩქარეები უსასრულოდ მცირე სიდიდის ნახვრეტიანი და უნახვრეტო დისკოებისათვის ერთმანეთისაგან 30%-ით განსხვავდება. ამრიგად, როდესაც ვანგარიშობთ დისკოს მასალის პლასტიკური თვისებების გათვალისწინებით, ძაბვების კონცენტრაციას არსებითი მნიშვნელობა არა აქვს, მაშინ, როდესაც კონსტრუქციის დრეკადობის ფარგლებში გაანგარიშებისას ამ მოვლენას შედეგების მნიშვნელოვნად შეცვლა შეუძლია. ეს გარემოება იოლი ასახსნელია: პლასტიკური დეფორმაციის შემთხვევაში დისკოს ყველა წერტილში ძაბვები თანაბრდება და $\sigma_{\text{დნ}}$ -ის ტოლი ხდება, რის შედეგადაც გამოირიცხება კონცენტრაციის ეფექტი.

§66. დისკოს გაანგარიშების რიცხვითი მეთოდი

წინა ორ პარაგრაფში განვიხილეთ დისკოს გაანგარიშების ზოგიერთი ამოცანა და შევძელით მათი ზუსტი ამონახსნის მიღებაც. მაგრამ ყოველივე გაკეთდა შედარებით მარტივი სისტემებისათვის და მათზე, გარკვეული თვალსაზრისით, შეზღუდული პირობების დადებით. კერძოდ, იშვიათი გამონაკლისის გარდა, ჩავთვალეთ რომ დისკოს სისქე მუდმივია და არ გავითვალისწინეთ ტემპერატურის ცვალებადობა, მაგრამ დისკოს მექანიკური თვისებები (E და μ) ჩავთვალეთ მუდმივ სიდიდეებად და ა.შ. დისკოს შედარებით რთული ამოცანების სრულყოფილი შესწავლა ანალიზური ხერხებით, როგორც წესი, არ ხერხდება. მათ

თვის გამოიყენება რიცხვითი მეთოდები, რომელთა რეალიზაციაც ხდება თანამედროვე გამოთვლითი ტექნიკის საშუალებით. განვიხილოთ ერთ-ერთი ასეთი მეთოდი.

გარდაქმნების შედეგად (10.13) სისტემა ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right) = -\frac{1+\mu}{r}\left(\frac{u}{r}\right) + \frac{1-\mu^2}{Ehr}T_r + \frac{1+\mu}{r}\alpha\theta, \quad (10.36)$$

$$\frac{dT_r}{dr} = \frac{Eh}{r}\left(\frac{u}{r}\right) - \frac{1-\mu}{r}T_r - \frac{Eh\alpha\theta}{r} - \rho\omega^2rh,$$

სადაც E , h , μ , θ ზოგად შემთხვევაში რადიალური მიმართულებით ცვალებადი პარამეტრებია.

შემოვიღოთ ახალი უგანზომილებო ცვლადები და პარამეტრები

$$x_1 = \frac{u}{r}; \quad x_2 = \frac{T_r}{E_0h_0}; \quad x_3 = \frac{T_l}{E_0h_0}; \quad \zeta = \frac{r}{b}; \quad \lambda = \frac{h}{h_0};$$

$$\Omega^2 = \frac{\rho\omega^2b^2}{E_0}; \quad \alpha\theta = T; \quad \eta = \frac{Eh}{E_0h_0}; \quad \zeta_0 = \frac{a}{b}; \quad \zeta' = \frac{d}{d\zeta} \quad (10.37)$$

სადაც a , b შესაბამისად, დისკოს შიგა და გარე კონტურის რადიუსებია (ნახ. 10.1), h_0 , E_0 - რომელიმე მახასიათებელ კვთში დისკოს სისქე და პირველი რიგის დრეკადობის მოდული.

მიღებული აღნიშვნების გათვალისწინებით (10.36) სისტემა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$x_1' = -\frac{1+\mu}{\zeta}x_1 + \frac{1-\mu^2}{\eta\zeta}x_2 + \frac{1+\mu}{\zeta}T;$$

$$x_2' = \frac{\eta}{\zeta}x_1 - \frac{1-\mu}{\zeta}x_2 - \frac{\eta}{\zeta}T - \lambda\zeta\Omega^2. \quad (10.38)$$

წრიული მიმართულების ნორმალური ძალის შესაბამისი პარამეტრისათვის, (10.12) ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ

$$x_3 = \eta x_1 + \mu x_2 - \eta T. \quad (10.39)$$

შემოვიღოთ შემდეგი ვექტორული და მატრიცული აღნიშვნები:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1+\mu}{\zeta} T \\ -\frac{\eta}{\zeta} T - \lambda \zeta \Omega^2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} -\frac{1+\mu}{\zeta} & \frac{1-\mu^2}{\eta \zeta} \\ \frac{\eta}{\zeta} & -\frac{1-\mu}{\zeta} \end{pmatrix} \quad (10.40)$$

რომელთა გათვალისწინებით (10.38) სისტემა ჩაიწერება შემდეგი ვექტორულ-მატრიცული ფორმით:

$$\mathbf{X}' = L\mathbf{X} + \mathbf{R} \quad (10.41)$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

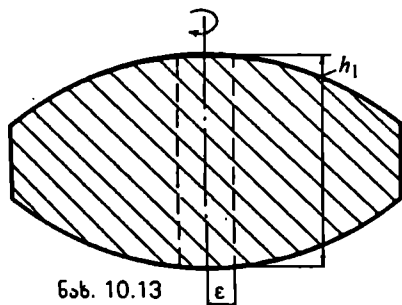
$$\mathbf{X} = C\mathbf{X}^0 + \mathbf{X}^* \quad (10.42)$$

სადაც C ინტეგრების მუდმივია; \mathbf{X}^0 - (10.41) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი; \mathbf{X}^* - (10.41)-ის კერძო ამონახსნი. ამ ვექტორების კოორდინატები აღინიშნება მათი შესაბამისი ინდექსებით. ორივე ამონახსნი მიიღება (10.41) განტოლებისა და მისი შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების რიცხვითი ინტეგრებით. \mathbf{X}^* კერძო ამონახსნის მიღებისას ვიღებთ ნულოვან საწყის პირობებს

$$\mathbf{X}^*(\zeta_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.43)$$

ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნის საწყისი პირობა დაკავშირებულია დისკოს შიგა კონტურის მდგომარეობაზე. მაგალითად, თავისუფალი კონტურისათვის (ნახ. 10.1) ვექტორის საწყისი მნიშვნელობა

$$\mathbf{X}^0(\zeta_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.44)$$



ნახ. 10.13

ჩამაგრებულ შიგა კონტურზე ნორმალური მიმართულების გადაადგილება ნულის ტოლია და ამიტომ უნდა ავიღოთ შემდეგი საწყისი ვექტორი

$$\mathbf{X}^0(\zeta_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.45)$$

საგანგებო განხილვას მოითხოვს საწყისი პირობების დადგენა დისკოსათვის, რომელსაც არა აქვს ცენტრალური ნახვრეტი. ასეთი დისკოს ცენტრის მცირე მიდამო $\zeta < \zeta_0$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც მუდმივი სისქის მქონე $h = h_1$ (ნახ. 10.13), ამიტომ წინა პარაგრაფებში მიღებული შედეგების შესაბამისად

(ნახ. 10.7 და ნახ. 10.11), შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ამ ცენტრალურ არეში ძალები და მათი შესაბამისი პარამეტრები მუდმივია და ერთმანეთის ტოლი. ასევე უცვლელია ტემპერატურაც.

$$x_2(\zeta_0) = x_3(\zeta_0) = C. \quad (10.46)$$

ამ შედეგის (10.39)-ში გათვალისწინებით, მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობას

$$x_1(\zeta_0) = \frac{C(1-\mu)}{\eta(\zeta_0)} + T(\zeta_0). \quad (10.47)$$

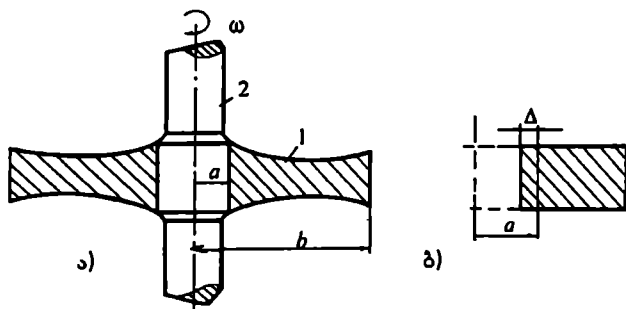
ამოცანის ამოხსნისას მიღებული ფორმულის საშუალებით გამოვრიცხავთ ცენტრალურ არეს და ინტეგრირებას დავიწყებთ უშუალოდ $\zeta_0 = h_1/b$ წერტილიდან. ამისათვის ამ საწყის კვეთში დისკოს მდგომარეობის ვექტორი წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\mathbf{X}(\zeta_0) = C \begin{pmatrix} \frac{(1-\mu)}{\eta(\zeta_0)} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T(\zeta_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.48)$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარე, ადვილი დასადგენია ინტეგრების საწყისი პირობები:

$$\mathbf{X}^*(\zeta_0) = \begin{pmatrix} T(\zeta_0) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}^0(\zeta_0) = \begin{pmatrix} l(1-\mu) \\ \eta(\zeta_0) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

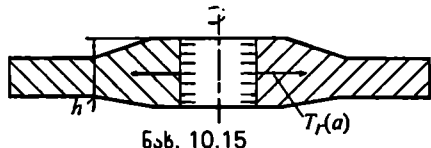
ზემოთ განვიხილეთ მხოლოდ რიცხვითი მეთოდით ამოცანის ამოხსნის ზოგიერთი მაგალითი. ამ მეთოდის შესაძლებლობაზე უფრო ნათელი წარმოდგენა რომ შეგვექმნას, განვიხილოთ კიდევ ერთი, შედარებით რთული ამოცანა, რომელიც შეეხება ლილვზე ჩაწნეხილი დისკოს გაანგარიშებას (ნახ. 10.14).



ნახ. 10.14

დისკო 1 და ლილვი 2 შეერთებულია Δ ჰეჩით. ეს ჰეჩი მთლიანადაა განპირობებული დისკოს დეფორმაციით - მისი შიგა კონტური რადიალური გადაადგილებით (ნახ. 10.14,ბ.). რაც შეეხება ლილვს, ვთვლით, რომ მისი დეფორმაციები უმნიშვნელოა და მათ მხედველობაში არ ვიღებთ, თუმცა, საჭიროების შემთხვევაში, მისი გათვალისწინება არ არის რთული.

წინასწარ განვიხილოთ დამხმარე ამოცანა, რომელიც ეხება 10.15 ნახაზზე ნაჩვენებ დისკოში ძაბვისა და გადაადგილების განსაზღვრას. ამ დისკოს შიგა კონტურზე მოდებულია ნორმალური ძალა $T_r(a) = -T_0$, ე.ი. გვაქვს პირობა



ნახ. 10.15

$$x_2(\zeta_0) = -\frac{T_r 0}{E_0 h 0} = -p. \quad (10.50)$$

განვიხილოთ ამოცანა იმ შემთხვევისათვის, როცა $X_2(\zeta_0) = -1$, რომლისთვისაც საწყისი პირობები აიღება შემდეგი სახით:

$$X^*(\zeta_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X^0(\zeta_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (10.51)$$

ორჯერ ინტეგრების შედეგების გამოყენებით, (10.42)-ის საფუძველზე, ვადგენთ ამოცანის $X^{(p)}$ ამონახსნს. თუ შიგა კონტურზე მოქმედი ძალის პარამეტრი (-1)-ის ნაცვლად უდრის (-p)-ს (ნახ.10.15), ამონახსნი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით: $pX^{(p)}$. აღსანიშნავია, რომ (10.41) განტოლების ორივე ინტეგრებისას ვიღებთ $R=0$. რაც შეეხება მასალის მექანიკურ თვისებებს, ისინი ცვალებადია და განისაზღვრება ტემპერატურის ცვლილების კანონზომიერებით.

საჭიროა მივიღოთ ამოცანის კიდევ ორი ამონახსნი. რაც შეეხება მათგან პირველს, $X^{(7)}$ -ს, იგი ითვალისწინებს ტემპერატურის ცვალებადობით გამოწვეულ ძაბვებსა და გადაადგილებებს. მის დასადგენად საჭიროა ზემოთ განხილული მეთოდით ამოვხსნათ (10.41) განტოლება (10.40) და (10.42) თანაფარდობების გამოყენებით. ამ შემთხვევაში ბრუნვას მხედველობაში არ ვიღებთ - (10.40) თანაფარდობებში ვიღებთ $\Omega^2=0$. განვსაზღვროთ მესამე ამონახსნი. იგი ითვალისწინებს დისკოში ბრუნვით გამოწვეულ გადაადგილებებს და ძაბვებს. ამ ამონახსნის დასადგენად (10.40) თანაფარდობებში ვიღებთ $T=0$, ე.ი. გამოვრიცხავთ ტემპერატურის ცვალებადობას, განვსაზღვრავთ $\Omega^2=1$ -ის შესაბამის $X(\Omega)$ ამონახსნს, რის შედეგადაც შეგვიძლია დავადგინოთ შემდეგი სახის მესამე ამონახსნიც: $\Omega^2 X(\Omega)$. საჭიროა ხაზი გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ მიუხედავად იმისა, რომ (10.40) თანაფარდობიდან ტემპერატურული წევრები გამორიცხულია, ტემპერატურის ზეგავლენა მასალის მექანიკურ თვისებებზე ძალაში რჩება და პარამეტრები η და μ ცვალებადია.

როდესაც დისკოზე ერთდროულად მოქმედებს ტემპერატურა, ბრუნვით გამოწვეული ინერციის ძალები და შიგა კონტურზე განაწილებული ნორმალური

ძალები, სამი ამონახსნის გამოყენებით შესაძლებელია ავაგოთ ამოცანის საერთო ამონახსნი.

$$X = X^{(T)} + pX^{(P)} + \Omega^2 X^{(\Omega)}. \quad (10.52)$$

ასეთი სახის ამონახსნის საშუალებით შეიძლება ჩავატაროთ ზოგიერთი ჩვენთვის საინტერესო ანალიზი. მაგალითად, შეიძლება დავადგინოთ ჰექსის სიდიდე (ნახ. 10.14. ბ), რომელიც უზრუნველყოფს დისკოსა და ლილვს შორის საჭირო სიდიდის კონტაქტური ძაბვის წარმოქმნას.

გავშალოთ (10.52) გამოსახულება

$$X = \begin{pmatrix} x_1(\zeta) \\ x_2(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(T)}(\zeta) + px_1^{(P)}(\zeta) + \Omega^2 x_1^{(\Omega)}(\zeta) \\ x_2^{(T)}(\zeta) + px_2^{(P)}(\zeta) + \Omega^2 x_2^{(\Omega)}(\zeta) \end{pmatrix}. \quad (10.53)$$

აქედან გამომდინარე, მივიღებთ შემდეგ პირობას

$$x_1^{(T)}(\zeta_1) + px_1^{(P)}(\zeta_1) + \Omega^2 x_1^{(\Omega)}(\zeta_1) = \frac{\Delta}{b}. \quad (10.54)$$

ამ პირობის საშუალებით დავუკავშიროთ ერთმანეთს კონტაქტური ძაბვა p პარამეტრი და Δ ჰექსი

$$p = \frac{\frac{\Delta}{b} - x_1^{(T)}(\zeta_1) - \Omega^2 x_1^{(\Omega)}(\zeta_1)}{x_1^{(P)}(\zeta_1)}. \quad (10.55)$$

მიღებული ფორმულიდან გამომდინარე, Ω^2 -ის ზრდის შედეგად ეს ძაბვა მცირდება, ე.ი. სუსტდება დისკოსა და ლილვის შეერთების ძაბვა.

კუთხურ სიჩქარეს, რომელიც შეესაბამება ნულოვან კონტაქტურ ძაბვას, განმანთავისუფლებელი კუთხური სიჩქარე ეწოდება. თუ ლილვის კუთხური სიჩქარე აღემატება ასეთ ზღვრულ მნიშვნელობას, კონტაქტი დისკოს და ლილვს შორის ირღვევა. ამ ზღვრული სიჩქარის შესაბამისი პარამეტრი განისაზღვრება (10.55) თანაფარდობიდან. თუ ამ უკანასკნელში დავუშვებთ, რომ $p=0$:

$$\frac{\Delta}{b} - x_1^{(T)}(\zeta_1) - \Omega_0^2 x_1^{(\Omega)}(\zeta_1) = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ განმათავისუფლებელი კუთხური სიჩქარის შესაბამის პარამეტრის მნიშვნელობას

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{\Delta}{b} - x_1^{(T)}(\zeta_1)}{x_1^{(\Omega)}(\zeta_1)}}. \quad (10.56)$$

აღნიშნოთ, რომ ლილვსა და დისკოს შორის კონტაქტის დარღვევის მიზეზი შეიძლება ტემპერატურის მნიშვნელოვანი ცვალებადობაც იყოს, კერძოდ, თუ

$$x_1^{(T)}(\zeta_1) = \frac{\Delta}{b},$$

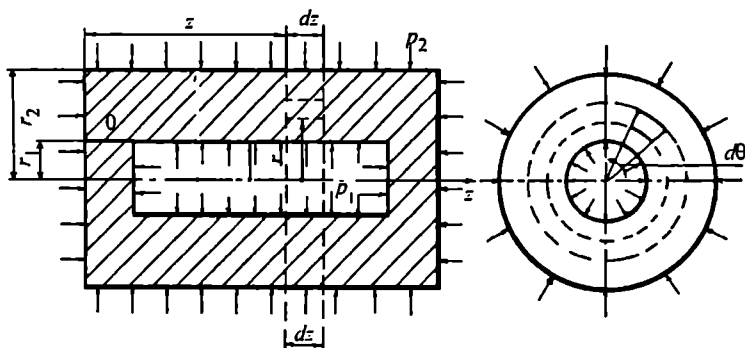
განმათავისუფლებელი კუთხური სიჩქარე ნულის ტოლია.

§67. სქელკედლიანი ცილინდრის ძირითადი განტოლებები

შევისწავლოთ ცილინდრის დაძაბული და დეფორმირებული მდგომარეობა გარე p_2 და შიგა p_1 წნევების მოქმედებისას. ჩავთვალოთ, რომ ცილინდრის შუა რადიუსის შეფარდება მის სისქესთან აკმაყოფილებს პირობებს:

$$(r_2 + r_1) : 2(r_2 - r_1) \leq 5, \quad (\text{ნახ. 10. 16}).$$

ასეთ ცილინდრს სქელკედლიანი ვუწოდოთ. შემდგომში ცნებები სქელკედლიანი და თხელკედლიანი დაზუსტდება და რაოდენობრივად დაუკავშირდება ცილინდრის გეომეტრიულ ზომებს.



ნახ. 10.16

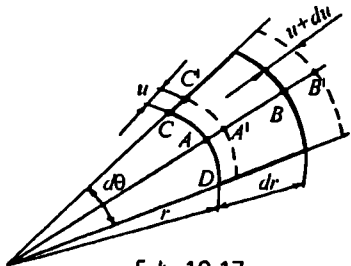
ვთქვათ, მოცემულია დიდი სიგრძის მილი, რის გამოც შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ცილინდრის კიდეები არ ახდენს მნიშვნელოვან გავლენას მისი ცენტრალური ნაწილის დეფორმირებულ და დაძაბულ მდგომარეობებზე. ამიტომ ქვემოთ განხილული თეორია მართებულია სწორედ ცილინდრის კიდეებიდან დაცილებული ნაწილებისთვის.

აღნიშნოთ დეფორმაციები რადიალური მიმართებით ϵ_r -ით, ხოლო წრიული მიმართულებით ϵ_θ -ით. მათი განსაზღვრის მიზნით, ცილინდრიდან ამოვკვეთოთ ელემენტი ღერძის მართობი ორი სიბრტყით, რომელთა შორის მანძილია dz (ნახ. 10.16), ორი ცილინდრული ზედაპირით, რომელთა რადიუსებია r და $r+dr$ და ცილინდრის Oz ღერძზე გამავალი ორი სიბრტყით, რომელთა შორის კუთხეა $d\theta$ (ნახ. 10.17).

ცილინდრის ნებისმიერი წერტილი გადაადგილდება რადიალურ სიბრტყეში, რაც დასმული ამოცანის ღერძის მიმართ სიმეტრიულობიდან გამომდინარეობს.

შიგა ცილინდრული ზედაპირის ნებისმიერი A წერტილის რადიალური მიმართულებით გადაადგილება აღვნიშნოთ u ასოთი, მაშინ B წერტილი გადაადგილდება $(u+du)$ -ზე და რადიალური დეფორმაციისათვის მივიღებთ

$$\epsilon_r = \frac{(u+du)-u}{dr} = \frac{du}{dr} \quad (10.57)$$



ნახ. 10.17

წრიული მიმართულებით დეფორმაციის დასადგენად განვიხილოთ CD ბოჭკო, რომლის სიგრძე დეფორმაციამდე და დეფორმაციის

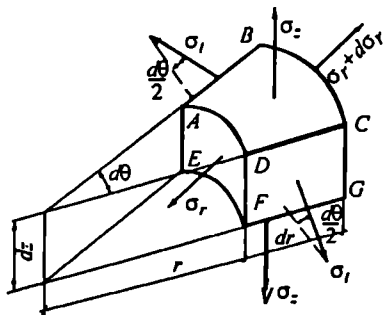
შემდეგ შესაბამისად $r d\theta$ და $(r+u)d\theta$ -ს ტოლია. აქედან გამომდინარე, წრიული მიმართულებით დეფორმაცია

$$\epsilon_t = \frac{(r+u)d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r} \quad (10.58)$$

მიღებული ფორმულები დეფორმაციების ერთმანეთთან დაკავშირების საშუალებას იძლევა

$$\frac{d}{dr}(\epsilon_t r) - \epsilon_r = 0 \quad (10.59)$$

(10.18) ნახაზზე წარმოდგენილია ამოკვეთილ ელემენტზე მოქმედი ძაბვები. ღერძის მიმართ ამოცანის სიმეტრიულობიდან გამომდინარე, ვაღვინთ, რომ რადიალურ წახნაგებში მოქმედებს მხოლოდ წრიული მიმართულების ნორმალური σ_t ძაბვები. ცილინდრის ღერძის პერპენდიკულარულ წახნაგებში შეხები ძაბვები არ აღიძვრება, რაც იქიდან გამომდინარეობს, რომ u რადიალური გადაადგილება არ არის დამოკიდებული z კოორდინატზე.



ნახ. 10.18

ამრიგად, დავადგინეთ, რომ ამოკვეთილი ელემენტის ორი წახნაგი ABCD და DCGF მთავარი კვეთებია. ცხადია, რომ ADFE მესამე კვეთიც ასევე მთავარი კვეთია და მასში მოქმედებს მხოლოდ რადიალური მიმართულების ნორმალური ძაბვა.

განვიხილოთ ელემენტის წონასწორობის პირობები. ელემენტზე მოქმედი ძა-

ლები დავაგეგმილოთ რადიუსის მიმართულებაზე

$$\sigma_r r d\theta dz - (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) d\theta dz - 2\sigma_l dr dz \sin \frac{d\theta}{2} = 0.$$

თუ ამ უკანასკნელში მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$ და არ გავითვალისწინებთ მეოთხე რიგის უსასრულო მცირე სიდიდეებს, მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_l}{r} = 0. \quad (10.60)$$

ოთხი უცნობისათვის – ორი დეფორმაციისა და ორი ნორმალური ძაბვისათვის მივიღეთ ორი – (10.59) და (10.60) დიფერენციალური განტოლება. ორ დანაზრჩენ განტოლებას მივიღებთ ჰუკის განზოგადებული კანონიდან

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_l + \sigma_z)], \\ \epsilon_l &= \frac{1}{E} [\sigma_l - \mu(\sigma_r + \sigma_z)] \end{aligned} \quad (10.61)$$

ამრიგად, მივიღეთ ორი ძირითადი (10.59) და (10.60) განტოლება. მაგრამ ერთი მოიცავს უცნობ დეფორმაციებს, მეორე – უცნობ ძაბვებს. მათი ერთობლივად განხილვისათვის საჭიროა (10.59) განტოლება გადავწეროთ ძაბვებისათვის, რისთვისაც გამოვიყენოთ დეფორმაციების (10.61) გამოსახულებები:

$$\frac{d\sigma_l}{dr} + \frac{\sigma_l - \sigma_r}{r} = 0. \quad (10.62)$$

თუ ახლა (10.60) და (10.62) განტოლებებს შევკრებთ წევრობრივ, მივიღებთ

$$\frac{d}{dr} (\sigma_r + \sigma_l) = 0,$$

საიდანაც ინტეგრებით დავადგენთ რადიალური და წრიული მიმართულების ძაბვების ჯამის მუდმივობას

$$\sigma_r + \sigma_l = 2A. \quad (10.63)$$

გავითვალისწინოთ მიღებული შედეგი (10.60)-ში

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\sigma_r}{r} = \frac{2A}{r}.$$

ეს განტოლება შეიძლება გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$\frac{d(r^2 \sigma_r)}{dr} = 2Ar.$$

ინტეგრების შედეგად მივიღებთ

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2}. \quad (10.64)$$

ამ შედეგის (10.63)-ში გათვალისწინება საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ წრიული მიმართულების ნორმალური ძაბვა

$$\sigma_t = A - \frac{B}{r^2}. \quad (10.65)$$

ამრიგად, მივიღეთ რადიალური და წრიული ნორმალური ძაბვების გამოსათვლელი ფორმულები, რომლებშიც შედის ორი მუდმივი A და B . ამ მუდმივების მნიშვნელობის დასადგენად გამოვიყენოთ სასაზღვრო პირობები

$$\begin{aligned} r = r_1: \quad \sigma_r = -p_1 \quad A + \frac{B}{r_1^2} &= -p_1; \\ r = r_2: \quad \sigma_r = -p_2 \quad A + \frac{B}{r_2^2} &= -p_2, \end{aligned} \quad (10.66)$$

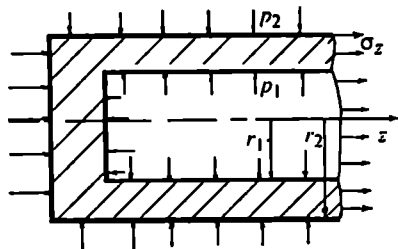
საიდანაც მივიღებთ მუდმივების მნიშვნელობებს

$$A = -\frac{p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad B = \frac{(p_2 - p_1) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (10.67)$$

ამ შედეგების გათვალისწინებით რადიალური და წრიული ნორმალური ძაბვების გამოსახულებები ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_2 - p_1) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}; \\ \sigma_t &= -\frac{p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_2 - p_1) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \quad (10.68)$$

ღერძული მიმართულების ნორმალური ძაბვების მნიშვნელობის დასადგენად საჭიროა გამოვიყენოთ კვეთების მეთოდი და განვიხილოთ მოკვეთილი ნაწილის (ნახ. 10.19) წონასწორობის პირობა



ნახ. 10.19

$$\sigma_z \pi (r_2^2 - r_1^2) + \pi r_2^2 p_2 - \pi r_1^2 p_1 = 0,$$

საიდანაც დავადგენთ მესამე ნორმალური ძაბვის მნიშვნელობას

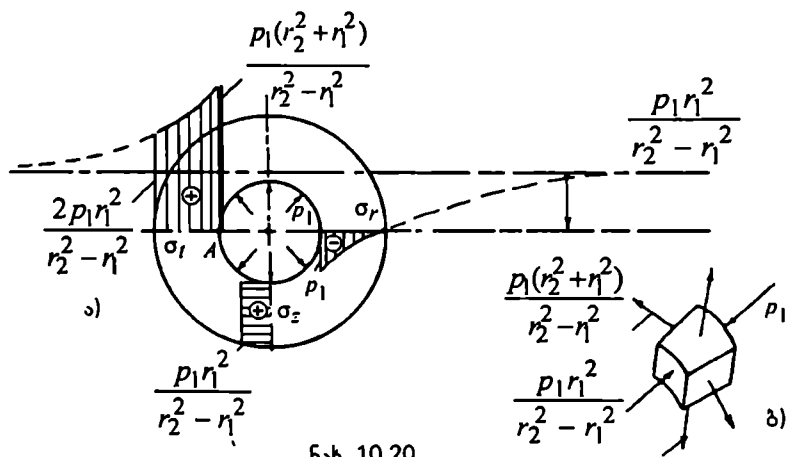
$$\sigma_z = -\frac{r_2^2 p_2 - r_1^2 p_1}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (10.69)$$

მიღებული შედეგების გამოყენებით შეისწავლება სქელკედლიანი ცილინდრის დატვირთვის სხვადასხვა კერძო შემთხვევები.

§8. სქელკედლიანი ცილინდრი შიგა წნევის მოქმედებისას

განვიხილოთ სქელკედლიანი ცილინდრი, რომელზეც მოქმედებს მხოლოდ p_1 შიგა წნევა, ხოლო $p_2 = 0$ -ს. ამ შემთხვევაში (10.68) და (10.69) ფორმულები შეიძლება ჩავწეროთ ასეთნაირად

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right); \quad \sigma_t = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right); \quad \sigma_z = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (10.70)$$



ნახ. 10.20

(10.20) ნახაზზე წარმოდგენილია ნორმალური ძაბვების ცვლილების ეპიურები, საიდანაც ჩანს, რომ საშიშია A წერტილი. ამ წერტილში მთავარი ძაბვების მნიშვნელობები იქნება

$$\sigma_1 = \frac{p_1(r_2^2 + r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2}; \quad \sigma_2 = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad \sigma_3 = -p_1. \quad (10.71)$$

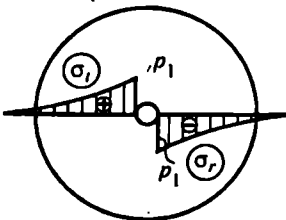
თუ მასალის თვისებები გაჭიმვასა და კუმშვაზე ერთნაირია, ვიყენებთ მაქსიმალური მხები ძაბვების სიმტკიცის კრიტერიუმს

$$\sigma_{\text{ეკვ}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2p_1 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \leq [\sigma], \quad (10.72)$$

საიდანაც ვადგენთ ცილინდრის გარე რადიუსის მნიშვნელობას

$$r_2 = \frac{r_1}{\sqrt{1 - \frac{2p_1}{[\sigma]}}}. \quad (10.73)$$

თუ ცილინდრზე მოქმედი შიგა წნევა დასაშვები ძაბვის ნახევარს უახლოვდება ($p_1 = 0,5[\sigma]$), მაშინ სიმტკიცის პირობის შესრულება შეუძლებელია, რადგან გარე რადიუსის მნიშვნელობა უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის. უფრო დიდი სიდიდის შიგა წნევის მოქმედების შემთხვევაში საჭიროა გავითვალისწინოთ მასალის პლასტიკური თვისებები, რასაც შემდგომში განვიხილავთ. ახლა კი განვიხილოთ კერძო შემთხვევები და (10.70)-დან გამოვმდინარე, გავაკეთოთ ზოგიერთი დასკვნა.



ნახ. 10.21

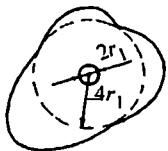
განვიხილოთ ცილინდრი, რომლის გარე რადიუსი გაცილებით მეტია შიგა რადიუსზე: $r_2 \gg r_1$ (ნახ.

10.21). ამ შემთხვევაში (10.70) ფორმულები შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

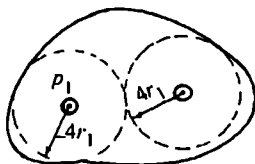
$$\sigma_r = -p_1 \frac{r_2^2}{r^2}; \quad \sigma_t = p_1 \frac{r_2^2}{r^2}; \quad \sigma_z = p_1; \quad \sigma_{\text{ეკვ}} \approx 2p_1. \quad (10.74)$$

შესაბამისი ეპიურები წარმოდგენილია 10.21 ნახაზზე. როგორც (10.74)-დან ჩანს, რადიუსის ზრდასთან ერთად მცირდება ნორმალური ძაბვები. როდესაც

$r \geq 4r_1$, მაშინ $|\sigma_r| = |\sigma_t| \approx 0$ აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ, თუ $r \geq 4r_1$, შეიძლება ცილინდრი განვიხილოთ როგორც უსასრულოდ დიდი გარე რადიუსის მქონე. ამ შემთხვევაში მნიშვნელობა არა აქვს იმას, თუ როგორი იქნება სხეულის გარე კონტურის ფორმა. საჭიროა მხოლოდ დაცული იქნას პირობა, რომ მისი



ა) ნახ. 10.22 ბ)



ნებისმიერი წერტილი დაცილებულია ნახვრეტის ცენტრიდან $4r_1$ -ზე მეტი მანძილით (ნახ. 10.22).

განვიხილოთ თხელკედლიანი მილი, რომლის საშუალო რადიუსია R , ხოლო სისქე δ

(ნახ. 10.23), თხელკედლიანი და სქელკედლიანი მილების განსხვავება ხდება შემდეგი მაჩვენებლებით:

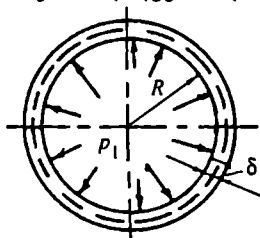
$$\frac{R}{\delta} \geq 5, \quad r_2 + r_1 \approx 2R.$$

ამ პირობების გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$\sigma_r = \frac{p_1 \left(R - \frac{\delta}{2} \right)^2}{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)} \frac{(r - r_2)(r + r_2)}{r^2} \approx p_1 \frac{r - r_2}{\delta};$$

$$\sigma_t = \frac{p_1 \left(R - \frac{\delta}{2} \right)^2}{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)} \cdot 2 \approx p_1 \frac{R}{\delta}; \quad \sigma_z = \frac{p_1 R^2}{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)} \approx p_1 \frac{R}{2\delta}.$$

ამრიგად, წრიული და ლერძული მიმართულების ნორმალური ძაბვები $p_1(R/\delta)$ რიგის სიდიდებია და მილის ნებისმიერ წერტილში ისინი იღებენ ერთი და იგივე მნიშვნელობებს; რადიალური ნორმალური ძაბვა კი რადიუსის გასწვრივ წრფივი კანონით იცვლება და ცილინდრის კედლის შიგა და გარე წერტილებში შესაბამისად ღებულობს $-p_1$ და



ნახ. 10.23

ნულის ტოლ მნიშვნელობებს. რადგანაც $\frac{R}{\delta} \gg 1$,

ამიტომ σ_r ძაბვების მნიშვნელობა გაცილებით უფრო მცირე სიდიდისაა, ვიდრე დანარჩენი ძაბვები. საბოლოოდ ვაღგენთ:

$$\sigma_t = p_1 \frac{R}{\delta}; \quad \sigma_z = p_1 \frac{R}{2\delta}; \quad \sigma_r = 0. \quad (10.76)$$

მიღებული შედეგი მოწმობს, რომ რიგ შემთხვევაში, როდესაც ვიხილავთ თხელკედლიან კონსტრუქციებს, შეიძლება რადიუსის მიმართულების ნორმალური ძაბვები ჩავთვალოთ ნულის ტოლად და მხედველობაში მივიღოთ მხო-

ლოდ წრიული და ღერძული მიმართულებების ნორმალური ძაბვები. სწორედ ეს დებულება შემდგომში საშუალებას მოგვცემს განვიხილოთ ე.წ. გარსების უმო-მენტო თეორია.

§69. სქელკედლიანი ცილინდრის ზღვრული შიგა წნევა

განვიხილოთ პლასტიკური მასალისაგან დამზადებული სქელკედლიანი მილი, რომლის თვისებები გაჭიმვასა და კუმშვაზე ერთი და იგივეა. 10.20 ნახაზზე გამოსახული ნორმალური ძაბვების ცვლილების ეპიურები ცილინდრის ნებისმიერ წერტილში მთავარი ძაბვების დადგენის საშუალებას გვაძლევს

$$\sigma_1 = \sigma_r; \quad \sigma_2 = \sigma_z; \quad \sigma_3 = \sigma_r.$$

მაშინ ზღვრულ მდგომარეობაში ცილინდრის ნებისმიერი წერტილისათვის. (10.70)-ის თანახმად, მივიღებთ ზღვრული მდგომარეობის შესაბამის პირობას

$$\sigma_{ეკვ} = \sigma_r - \sigma_r = \sigma_{ღნ}. \quad (10.77)$$

ამ შედეგის გათვალისწინებით (10.60) წონასწორობის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_{ღნ}}{r} = 0,$$

საიდანაც ინტეგრირების შედეგად მივიღებთ

$$\sigma_r = \sigma_{ღნ} \cdot \ln r + C. \quad (10.78)$$

მაშინ (10.77)-ის თანახმად დავადგენთ მეორე ნორმალური ძაბვის მნიშვნელობასაც

$$\sigma_r = \sigma_{ღნ}(1 + \ln r) + C. \quad (10.79)$$

შევადგინოთ სასაზღვრო პირობები:

$$r = r_1: \quad \sigma_r = -p_1 = -p_2 = \sigma_{ღნ} \cdot \ln r_1 + C;$$

$$r = r_2: \quad \sigma_r = 0 = \sigma_{ღნ} \cdot \ln r_2 + C,$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ $C = -\sigma_{ღნ} \ln r_2$. ამ შედეგის პირველ პირობაში გათვალისწინებით დავადგენთ შიგა წნევის ზღვრულ მნიშვნელობას

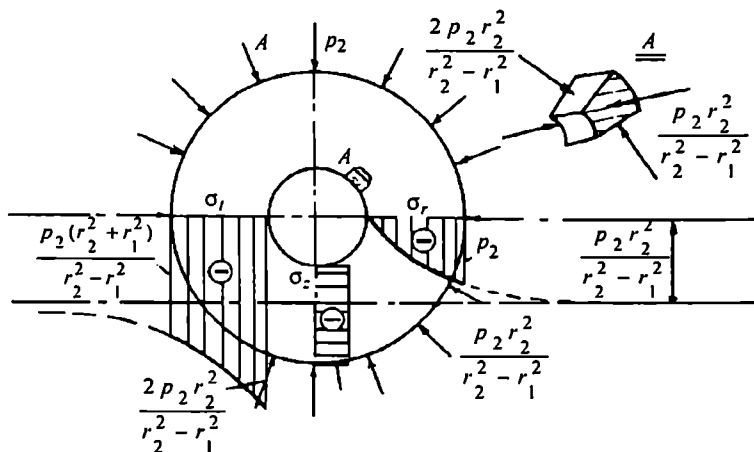
$$p_{ზღ} = \sigma_{ღნ} (\ln r_2 - \ln r_1) = \sigma_{ღნ} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (10.80)$$

ამრიგად, წინააღმდეგობა, რომელიც წარმოიშვა (10.73) ფორმულის გამოყენებისას, აქ მოხსნილია. მასალის პლასტიკური თვისებების გათვალისწინება საშუალებას გვაძლევს ცილინდრის გარე რადიუსის გადიდებით გავზარდოთ შიგა წნევის მნიშვნელობაც და აქ რაიმე განსაკუთრებული შეზღუდვები უკვე აღარ არსებობს.

§70. სქელკედლიანი ცილინდრი გარე წნევის მოქმედებისას

განვიხილოთ სქელკედლიანი ცილინდრი, რომელზეც მოქმედებს მხოლოდ გარე p_2 წნევა, ხოლო $p_1=0$. ამ შემთხვევაში რადიალური, წრიული და ღერძული ნორმალური ძაბვებისათვის (10.68) და (10.69) ფორმულებიდან მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს:

$$\sigma_r = -\frac{p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right); \quad \sigma_\theta = -\frac{p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right); \quad \sigma_z = -\frac{p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad (10.81)$$



ნახ. 10.24

10.24 ნახაზზე წარმოდგენილია ნორმალური ძაბვების ეპიურები. ამ შემთხვევაშიც, წინა პარაგრაფში განხილული შემთხვევის მსგავსად, საშიშია ცილინდრის შიგა კონტურის ნებისმიერი წერტილი. ამ წერტილებისთვის მთავარი ძაბვები იქნება

$$\sigma_1 = 0; \quad \sigma_2 = -\frac{p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad \sigma_3 = -\frac{2p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (10.82)$$

სიმპტიკის პირობას, მაქსიმალური მხები დაბევის კრიტერიუმის შესაბამისად, ექნება შემდეგი სახე

$$\sigma_{\text{მაკ}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \leq [\sigma]$$

საიდანაც ტოლობის ნიშნების გამოყენებით დავადგენთ ცილინდრის გარე რადიუსის მნიშვნელობას

$$r_2 = \frac{r_1}{\sqrt{1 - \frac{2p_2}{[\sigma]}}} \quad (10.83)$$

მიღებული ფორმულის გამოყენებით დავადგინოთ ცილინდრზე მოქმედი გარე წნევის ზღვრული მნიშვნელობა. ცხადია, რომ იგი იქნება $p_2 = 0,5[\sigma]$. შევნიშნოთ, რომ ეს ზღვრული მნიშვნელობა მიღებულია დასაშვები დაბევის მეთოდით. როგორც აღვნიშნეთ, მასალის პლასტიკური თვისებების გათვალისწინება იძლევა განსხვავებულ შედეგს.

განვიხილოთ უსასრულოდ მცირე ნახვრეტის მქონე ცილინდრი და მასში გარე წნევისაგან აღძრული ნორმალური დაბევი. შევადაროთ ისინი აღძრულ დაბევებს ერთიან ცილინდრში ($r_1 = 0$), რომელიც ასევე განიცდის გარე წნევის მოქმედებას. ერთიანი ცილინდრისათვის ვისარგებლოთ (10.64) და (10.65) ფორმულებით. რადგან ნორმალური დაბევი შემოსაზღვრულია ზემოდან, B მუდმივი ნული ტოლი უნდა იყოს. მეორე მუდმივი განისაზღვრება სასაზღვრო პირობიდან

$$r = r_2, \quad \sigma_r = -p_2 = A.$$

ამრიგად, წრიული და რადიალური ნორმალური დაბევი ასეთი ცილინდრის ნებისმიერ წერტილში ერთნაირია

$$\sigma_r = \sigma_l = -p_2. \quad (10.84)$$

განვიხილოთ მეორე ცილინდრი. ამ ცილინდრის წერტილებშიც დაბევი პრაქტიკულად მუდმივია და განისაზღვრება (10.81) ფორმულების გამოყენებით, მაგრამ განსაკუთრებულ შესწავლას მოითხოვს ცილინდრის ცენტრალური წერტილი. ამ მიზნით (10.81) ფორმულებში გავითვალისწინოთ, რომ $r = r_2 \rightarrow 0$:

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_l = -2p_2; \quad \sigma_z = -p_2. \quad (10.85)$$

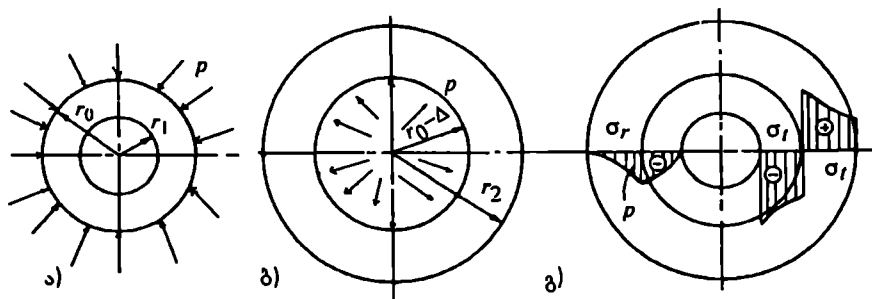
ამრიგად, ცენტრალურ წერტილში წრიული ნორმალური დაბევი სიდიდით ორჯერ აღემატება მთლიან ცილინდრში წრიული ნორმალური დაბევის მნიშვნელობას. როგორც აღვნიშნეთ, ამ მოვლენას დაბევის კონცენტრაცია ეწო-

დება და ხასიათდება ძაბვების K_{σ} კონცენტრაციის კოეფიციენტით. განხილულ შემთხვევაში $K_{\sigma} = 2$.

§71. შედგენილი სქელკედლიანი ცილინდრები

ტექნიკაში გამოიყენება სქელკედლიანი ცილინდრები, რომლებსაც შეუძლიათ გაუძლონ დიდი სიდიდის შიგა წნევის მოქმედებას. ხშირად წნევა მნიშვნელოვნად აღემატება ცილინდრის მასალის პლასტიკურობის ზღვარს. ამიტომ საჭირო ხდება ისეთი კონსტრუქციების შექმნა, რომლებშიც ძაბვების განაწილება უფრო რაციონალური იქნება, ვიდრე ეს ნაჩვენებია 10.20 ნახაზზე.

მეცნიერებმა ყურადღება მიაქციეს იმ გარემოებას, რომ გარე და შიგა წნევების მოქმედებისას ცილინდრში წრიული და ღერძული მიმართულების ნორმალური ძაბვების განაწილების კანონები ანალოგიურია და განსხვავდებიან მხოლოდ ნიშნით. რაც შეეხება რადიალურ ნორმალურ ძაბვებს, მათ ერთი და იგივე ნიშანი და ცვალებადობის საწინააღმდეგო მიმართულებები აქვთ: როდესაც ცილინდრზე მოქმედებს მხოლოდ შიგა წნევა, მაშინ σ_r იღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას შიგა კონტურის წერტილებში და ნულს უდრის გარე კონტურზე (ნახ. 10.20). გარე წნევის მოქმედებისას სურათი საწინააღმდეგოა. გაჩნდა აზრი, რომ თუ ცილინდრს ხელოვნურად შევეუქმნით გარე წნევას, მაშინ შესაძლებელია მოქმედი შიგა წნევის დასაშვები მნიშვნელობის გაზრდა.



ნახ. 10.25

ამ იდეის განხორციელება შეიძლება ორი ცილინდრის ერთმანეთთან ჰექვით შეერთებით (ნახ. 10.25). განვიხილოთ ეს საკითხი.

პატარა ცილინდრის გარე რადიუსია r_0 , დიდი ცილინდრის შიგა რადიუსია $(r_0 - \Delta)$. მათი შეერთებისათვის წინასწარ გავაცხელოთ დიდი ან პატარა ცილინდრი გავაცივოთ. შეერთების შემდეგ დროთა განმავლობაში ცილინდრების ტემპერატურა გათანაბრდება და ცილინდრები შეეცდებიან აღიდგინონ საწყისი ზომები; შედეგად წარმოიშობა ჰექვი. ამიტომ საკონტაქტო ზედაპირზე წარმოიქმნება p წნევა, რომელიც პირველი ცილინდრისთვის გარე, ხოლო მეორისათვის

- შიგა წნევაა. წნევის მოქმედების შედეგად ცილინდრები განიცდიან დეფორმაციას. პირველი და მეორე ცილინდრისთვის გადაადგილებები ზედაპირებთან აღვნიშნოთ. შესაბამისად, u_1 და u_2 -ით, მაშინ დეფორმირებული სხეულების შეერთების ცილინდრული ზედაპირების რადიუსები იქნება $r_0 + u_1$; $r_0 - \Delta + u_2$, და შეერთების პირობების თანახმად

$$r_0 + u_1 = r_0 - \Delta + u_2; \quad \Delta = u_2 - u_1. \quad (10.86)$$

განვსაზღვროთ გადაადგილებები. (10.58) და (10.61) ფორმულებიდან გამომდინარე ($\sigma_z = 0$), მივიღებთ

$$u = \frac{r}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\theta). \quad (10.87)$$

ძაბვების მნიშვნელობები შიგა და გარე ცილინდრების სასაზღვრო ზედაპირებზე გაიანგარიშება (10.70) და (10.81) ფორმულების გამოყენებით:

შიგა ცილინდრისათვის $r = r_0$ (ნახ. 10.25,ა)

$$\sigma_r = -\frac{p(r_0^2 + r_1^2)}{r_0^2 - r_1^2}; \quad \sigma_\theta = -p; \quad u_1 = \frac{r_0}{E} \left[-p \frac{r_0^2 + r_1^2}{r_0^2 - r_1^2} + \mu p \right].$$

გარე ცილინდრისათვის $r = r_2$ (ნახ. 10.25,ბ)

$$\sigma_r = \frac{p(r_2^2 + r_0^2)}{r_2^2 - r_0^2}; \quad \sigma_\theta = -p; \quad u_2 = \frac{r_2}{E} \left[p \frac{r_2^2 + r_0^2}{r_2^2 - r_0^2} + \mu p \right].$$

მაშინ, (10.86)-ის თანახმად მივიღებთ ფორმულას

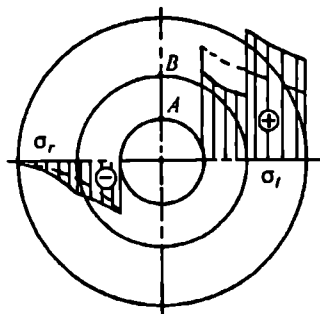
$$\Delta = \frac{p r_0}{E} \left(\frac{r_2^2 + r_0^2}{r_2^2 - r_0^2} + \frac{r_0^2 + r_1^2}{r_0^2 - r_1^2} \right).$$

ამ ფორმულიდან შეგვიძლია დავადგინოთ p -ს მნიშვნელობა

$$p = \frac{E \Delta}{2 r_0^3} \frac{(r_2^2 - r_0^2)(r_0^2 - r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (10.88)$$

ჰექსის შედეგად წარმოქმნილი ნორმალური ძაბვების ცვლილების ეპიურები ნაჩვენებია 10.25,გ ნახაზზე.

თუ ასეთ შედეგნილ ცილინდრში შევქმნით შიგა წნევას, ჰამური ნორმალური



ნახ. 10.26

ძაბვების განსაზღვრისათვის საჭირო იქნება როგორც კონტაქტური წნევით (ნახ. 10.25.გ), ასევე შიგა წნევით აღძრული ძაბვების (ნახ. 10.20) გათვალისწინება საბოლოოდ, ჯამური ნორმალური ძაბვების ეპიურები წარმოდგენილია 10.26 ნახაზზე უწყვეტი მრუდებით.

განსაზღვროთ ჰექსისა და ცილინდრების ზომების ოპტიმალური მნიშვნელობები, რომლებიც მოგვცემს ორივე ცილინდრში თანაბარი სიმტკიცის უზრუნველყოფის საშუალებას. იოლი დასადგენია, რომ საშიში წერტილებია შიგა ცილინდრის A და გარე ცილინდრის B წერტილები. ამ წერტილებში ეკვივალენტური ძაბვების მნიშვნელობებია

$$\begin{aligned} \sigma_{A_{\text{ეკვ}}} &= \sigma_1 - \sigma_3 = p_1 \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - p \frac{2r_0^2}{r_0^2 - r_1^2} - (-p_1); \\ \sigma_{B_{\text{ეკვ}}} &= \sigma_1 - \sigma_3 = p_1 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r_0^2} \right) + p \frac{r_2^2 + r_0^2}{r_2^2 - r_0^2} - \\ &\quad - \left[-p + p_1 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r_0^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.89)$$

თანაბარი სიმტკიცის პირობიდან გამომდინარე, მივიღებთ

$$p_1 \frac{r_2^2 (r_0^2 - r_1^2)}{r_0^2 (r_2^2 - r_1^2)} = p \left(\frac{r_0^2}{r_0^2 - r_1^2} + \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_0^2} \right). \quad (10.91)$$

თუ მიღებულ შედეგებში გავითვალისწინებთ კონტაქტური წნევის მნიშვნელობას, მივიღებთ ჰექსის ფორმულას, რომელიც მოცემული შიგა წნევისათვის უზრუნველყოფს ორივე ცილინდრის თანაბარ სიმტკიცეს

$$\Delta = 2 \frac{p_1}{E} \frac{r_0 r_2^2 (r_0^2 - r_1^2)}{r_2^2 (r_0^2 - r_1^2) + r_0^2 (r_2^2 - r_0^2)}. \quad (10.92)$$

განვიხილოთ უფრო რთული ამოცანა. შეერთებული ცილინდრების ზომები ისეთნაირად იყოს შერჩეული, რომ ცილინდრების თანაბარ სიმტკიცესთან ერთად უზრუნველყოფილი იყოს ამ სიმტკიცის მაქსიმალურობა, რაც მიიღწევა,

(10.89) ფორმულების თანახმად, ეკვივალენტური ძაბვის მინიმალური მნიშვნელობით. ჭეჭის სიდიდის გამოსათვლელი ფორმულით განსაზღვრული კონტაქტური წნევა გამოითვლება (10.91) ფორმულის გამოყენებით

$$p = \frac{r_2^2}{r_0^2} \frac{(r_2^2 - r_0^2)(r_0^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2)(r_2^2(r_0^2 - r_1^2) + r_0^2(r_2^2 - r_0^2))} p_1. \quad (10.93)$$

თუ (10.89)-დან გამოვრიცხავთ კონტაქტური წნევის მნიშვნელობას, მივიღებთ

$$\sigma_{\text{მკვ}} = \frac{2p_1 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left[1 - \frac{(r_2^2 - r_0^2)(r_0^2 - r_1^2)}{r_2^2(r_0^2 - r_1^2) + r_0^2(r_2^2 - r_0^2)} \right]. \quad (10.94)$$

ეკვივალენტური ძაბვის ექსტრემუმის პირობიდან დავადგენთ, რომ ეს ძაბვა მინიმალურია, თუ ცილინდრების შეერთების რადიუსი აკმაყოფილებს პირობას $r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$. ამ შედეგის გათვალისწინებით, (10.94) ფორმულის თანახმად, ეკვივალენტური ძაბვის მინიმალური მნიშვნელობა

$$\sigma_{\text{მკვ}}^{\min} = p_1 \frac{r_2}{r_2 - r_1}. \quad (10.95)$$

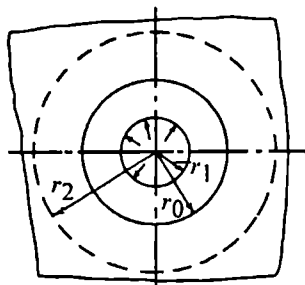
შევადაროთ ეკვივალენტური ძაბვები შედგენილი და იგივე ზომების მქონე მთლიანი ცილინდრებისათვის (10.72) და (10.95) ფორმულების საშუალებით:

$$k = \frac{\sigma_{\text{მკვ}}^{\min}}{\sigma_{\text{მკვ}}} = 0,5 \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right). \quad (10.96)$$

ცხადია, რომ $0,5 < k < 1,0$. იმ შემთხვევაში, როდესაც ცილინდრების შიგა რადიუსი ბევრად მცირეა გარე რადიუსზე, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $(r_1/r_2) = 0$. მაშინ ეკვივალენტური ძაბვა შედგენილი ცილინდრებისათვის ორჯერ ნაკლებია მთლიან ცილინდრში ეკვივალენტური ძაბვის მნიშვნელობაზე. რაც შეეხება ზედა ზღვარს, იგი შეესაბამება თხელკედლიან შედგენილ ცილინდრებს, როცა $r_1 = r_2$ და $k = 1$. ამ შემთხვევაში შედგენილი კონსტრუქციების გამოყენება უკვე მიზანშეუწონელია

პრაქტიკაში სიმტკიცის ორჯერ ზრდა ხშირად საკმარისი არ არის, რაც, უკეთეს შემთხვევაში, ორი შედგენილი ცილინდრით მიიღწევა. ამიტომ, ხშირად ჭეჭით აერთებენ რამდენიმე ცილინდრს. უფრო მეტიც, ზოგ შემთხვევებში გარე ცილინდრის ნაცვლად შეიძლება გამოყენებულ იქნას ფოლადის ლენტის, რომელსაც ახვევენ შიგა ცილინდრზე. ლენტი წინასწარ დაჭიმულია და ქმნის დიდი რაოდენობის ცილინდრების ჭეჭით შეერთების იმიტაციას.

მანქანათმშენებლობაში ფართოდ გამოიყენება აგრეთვე ავტოფრეტაჟირება, რომელიც ითვალისწინებს ცილინდრში ისეთი მაღალი წინასწარი შიგა წნევის შექმნას, რომ შიგა ფენებში ადგილი ექნება ნარჩენ მკუმშავ, ხოლო გარე ფენებში – გამჭიმ წრიული მიმართულების ძაბვებს. ამის შემდეგ ცილინდრში სამუშაო წნევის მოქმედებისას ხდება ნარჩენი და სამუშაო ძაბვების შეჯამება და შიგა ფენებში მოქმედი მაღალი გამჭიმო წრიული ძაბვები ნაწილობრივ მცირდება.



ნახ. 10.27

გაბარიტულ ზომებთან შედარებით $r_0 < r_2$ ამ შემთხვევაში, ფილის გარე კონტურის ფორმას მნიშვნელობა არა აქვს.

როცა r_2 მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, მაშინ (10.88) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ ცილინდრზე მოქმედი კონტაქტური წნევის შემდეგ მნიშვნელობას.

$$p = \frac{E\Delta(r_0^2 - r_1^2)}{2r_0^3} \quad (10.97)$$

რადგან კონტაქტური წნევის მნიშვნელობა ცნობილია, ფილაში ძაბვების გაანგარიშებისათვის შეიძლება გამოყენებულ იქნეს (10.74) ფორმულები. რაც შეეხება ცილინდრს, მისი გაანგარიშება ხდება ჩვეულებრივ, გარე წნევის მოქმედებისას.

ვთქვათ, ფილაში ჩაწნეხილია თხელკედლიანი მილი $r_1 = r_0$. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $r_1 - r_2 = \delta$, $r_1 + r_2 = 2R$. აქ δ მილის კედლის სისქეა, ხოლო R – მილის საშუალო რადიუსი, აღნიშნულის გათვალისწინებით, (10.97)-დან მივიღებთ

$$p = \frac{E\delta}{R^2} \Delta \quad (10.98)$$

ვთქვათ, ფილაში ჩაწნეხილია მთლიანი ცილინდრი ($r_1 = 0$), მაშინ (10.97)-დან მივიღებთ

$$p = \frac{E\Delta}{2r_0} \quad (10.99)$$

მიღებული ფორმულით განისაზღვრება სასაზღვრო ზედაპირებზე კონტაქტური წნევის მნიშვნელობა. ცილინდრში ძაბვების მნიშვნელობების დადგენი-

სათვის საჭიროა ვისარგებლოთ (10.81) ფორმულებით, რისთვისაც მათში გავითვალისწინებთ (10.99)-ით გამოთვლილი კონტაქტური წნევის მნიშვნელობას. ამ შემთხვევაში, ცილინდრის ღერძის პარალელური ძე დაბვა უნდა ავიღოთ ნულის ტოლი.

მეათე თავის მაგალითები

მაგალითი 10.1 სქელკედლიან ცილინდრზე მოქმედებს შიგა წნევა $P=20$ მგპა და არაცენტრალური მკუმშავი ძალა $P=5 \cdot 10^5$ ნ (ნახ.10.28) მოცემულია: $r_1=0,04$ მ; $r_2=0,08$ მ; $\sigma_{დნ.გ}=\sigma_{დნ.კ}=300$ მგპა. გავიანგარიშოთ ცილინდრი სიმტკიცეზე.

ცილინდრის განივ კვეთში ნორმალური ძალის მნიშვნელობა

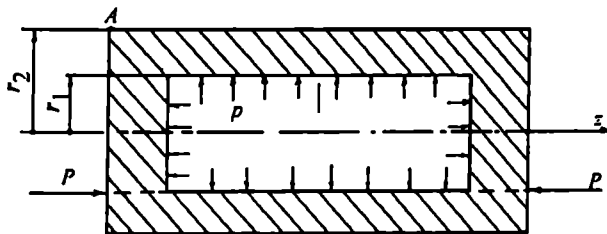
$$N = p\pi r_1^2 - P = 20 \cdot 10^6 \cdot 3,14(4 \cdot 10^{-2})^2 - 5 \cdot 10^5 = -399,5 \text{ კნ.}$$

არაცენტრალური ღერძული ძალით გამოწვეული მღუნავი მომენტი

$$M_{\text{ღ}} = P \cdot r_1 = 5 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^4 \text{ ნმ.}$$

დავადგინოთ დაბვების მნიშვნელობები კვეთის დამახასიათებელ წერტილებში (ნახ. 10.29). ნორმალური ძალისაგან გამოწვეული ნორმალური დაბვა.

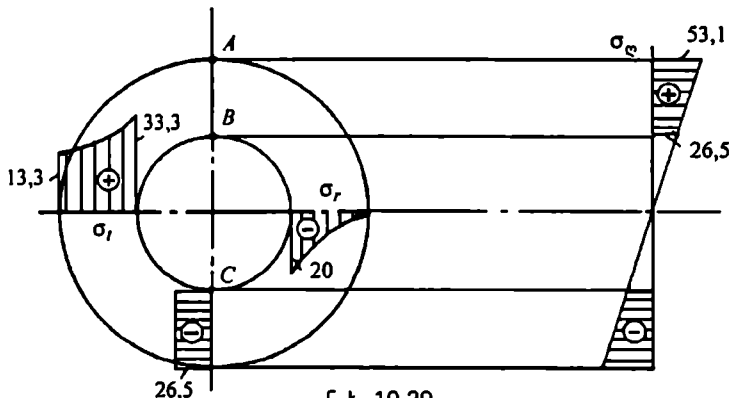
$$\sigma_N = \frac{N}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} = -\frac{399,5 \cdot 10^3}{3,14(0,08^2 - 0,04^2)} = -26,5 \text{ მგპა.}$$



ნახ. 10.28

A წერტილში მღუნავი მომენტისაგან გამოწვეული ნორმალური დაბვა

$$\sigma_M^A = \frac{32M_{\text{ღ}}}{\pi(2r_2)^3(1-\alpha^4)} = \frac{32 \cdot 2 \cdot 10^4}{3,14(16 \cdot 10^{-2})^3(1-0,5^4)} = 53,1 \text{ მგპა.}$$



ნახ. 10.29

წრიული მიმართულების ნორმალური ძაბვები. 10.20 ნახაზის შესაბამისად. იქნება:

$$\sigma_t^B = \frac{p(r_2^2 + r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{20 \cdot 10^6 \left[(8 \cdot 10^{-2})^2 + (4 \cdot 10^{-2})^2 \right]}{(8 \cdot 10^{-2})^2 - (4 \cdot 10^{-2})^2} = 33,3 \text{ მგპა};$$

$$\sigma_t^A = \frac{2pa^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^6 (4 \cdot 10^{-2})^2}{(8 \cdot 10^{-2})^2 - (4 \cdot 10^{-2})^2} = 13,3 \text{ მგპა};$$

მიღებული შედეგებიდან ჩანს, რომ საშიშ წერტილში მთავარი ძაბვები იქნება:

$$\sigma_1 = \sigma_t = 33,3 \text{ მგპა}; \quad \sigma_2 = \sigma_r = -20 \text{ მგპა};$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = -26,5 - 26,5 = -53,0 \text{ მგპა}.$$

მაქსიმალური მხები ძაბვების კრიტერიუმის შესაბამისად, ამ წერტილში ეკვივალენტური ძაბვა

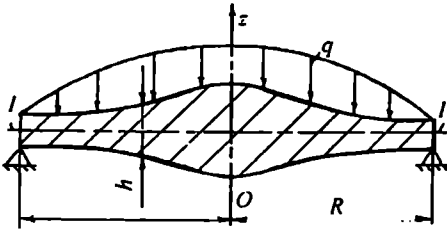
$$\sigma_{\text{ეკვ}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 33,3 - (-53,0) = 86,3 \text{ მგპა},$$

მაშინ, დენადობის ზღვრის შესაბამისად, მარაგის კოეფიციენტი

$$n = \frac{\sigma_{\text{დნ}}}{\sigma_{\text{ეკვ}}} = 3,47.$$

§72. მრგვალი სიმეტრიულად დატვირთული ფირფიტების ღუნვა

განვიხილოთ ფირფიტა, რომელიც შემოფარგლულია წრიული ცილინდრული ზედაპირით (ნახ. 11.1). საერთო დებულების შესაბამისად, მისი h სისქე ნებისმიერ კვეთში ბევრად ნაკლებია გარე კონტურის რადიუსზე, $h/R \ll 1$. ფირფიტაზე მოქმედებს Oz ღერძის პარალელური სიმეტრიული ძალები. $l-l$ შუა სიბრტყე სხეულის ქვედა და ზედა ზედაპირებიდან ერთნაირად არის დაცილებული. აღნიშნოთ ამ სიბრტყის წერტილების გადაადგილება Oz ღერძის მიმართულებით w ასოთი.



ნახ. 11.1

ფირფიტების გასაანგარიშებლად ვაკეთებთ შემდეგ დაშვებებს:

1. ფირფიტის შუა სიბრტყის წერტილების გადაადგილებები ბევრად მცირეა

მის მახასიათებელ სისქესთან შედარებით, $\frac{|w|}{h} \leq \frac{1}{5}$, ამიტომ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ეს წერტილები გადაადგილდება მხოლოდ ვერტიკალური მიმართულებით.

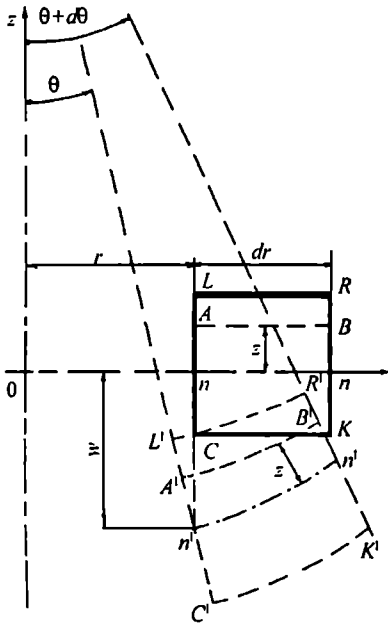
2. ფირფიტის შუა სიბრტყე ღუნვის შედეგად გადადის Oz ღერძისადმი სიმეტრიულ, სუსტად გაღუნულ ზედაპირში.

3. დეფორმაციამდე შუა ზედაპირის მართობი, ღუნვის პროცესში მხოლოდ შემობრუნდება და რჩება დეფორმირებული შუა ზედაპირის მართობად.

4. შუა სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებში ადგილი აქვს ორღერძა დაძაბულ მდგომარეობას, ე.ი. მათში განლაგებული ბოჭკოები ურთიერთდაწოლას არ განიცდიან.

პირველი დაშვების თანახმად, შეიძლება მხედველობაში არ მივიღოთ შუა სიბრტყის გაჭიმვა-კუმშვა. რაც შეეხება მეორე დაშვებას, ის, ერთი შეხედვით, ბუნებრივია და ძნელია წარმოვიდგინოთ, თუ რატომ გვხდება მისი ხაზგასმით აღნიშვნა. მაგრამ ეს არც თუ ისე მარტივი საკითხია, რაშიც შეიძლება დაგვარწმუნოს შემდეგმა მაგალითმა. როგორც ცნობილია, რძე და მაწონი იყიდება ფართო მრგვალიპირიან ბოთლებში. მათი ფერადი ლითონის სახურავი ფურცლოვანია. თუ სახურავს დავაჭერთ თითს შუაში და ჩავლუნავთ, ჩვენი მცდელობა, რომ სახურავმა არ დაკარგოს სიმეტრიული ფორმა, უშედეგო იქნება - სახურავი საყრდენთან ნაოჭებს გაიკეთებს. ასეთ მოვლენას აგრეთვე ხშირად ვხვდებით ფურცლოვანი მრგვალი დეტალების დაშტამპვით დამზადებისას. მაგრამ ეს დაშ-

გება უშუალოდ არის დაკავშირებული პირველ დაშვებასთან და მცირე სიდიდის გადაადგილების შემთხვევაში მართებული და მისაღებია.



ნახ. 11.2

მისი სიგრძე $l_0 = 2\pi r$. ფირფიტის დეფორმაციის შედეგად A წერტილი გადაინაცვლებს A' წერტილში და განხილული წრეწირის სიგრძე დეფორმირებულ მდგომარეობაში იქნება $l = 2\pi(r - \theta z)$, ამიტომ წრიული მიმართულებით დეფორმაცია

$$\epsilon_r = \frac{l - l_0}{l_0} = -\frac{\theta}{r} z. \quad (11.1)$$

რადიალური მიმართულებით დეფორმაციის დასადგენად განვიხილოთ AB ელემენტი, რომლის სიგრძე ელემენტის დეფორმაციამდე და დეფორმაციის შემდეგ, შესაბამისად, იქნება $dl_0 = dr$; $dl = dr - z d\theta$.

მაშინ რადიალური მიმართულებით დეფორმაცია

$$\epsilon_r = \frac{dl - dl_0}{dl_0} = -\frac{d\theta}{dr} z. \quad (11.2)$$

ფირფიტის შუა სიბრტყის მართობის მობრუნების კუთხე θ დაკავშირებულია w გადაადგილებასთან (ნახ. 11.2) თანაფარდობით

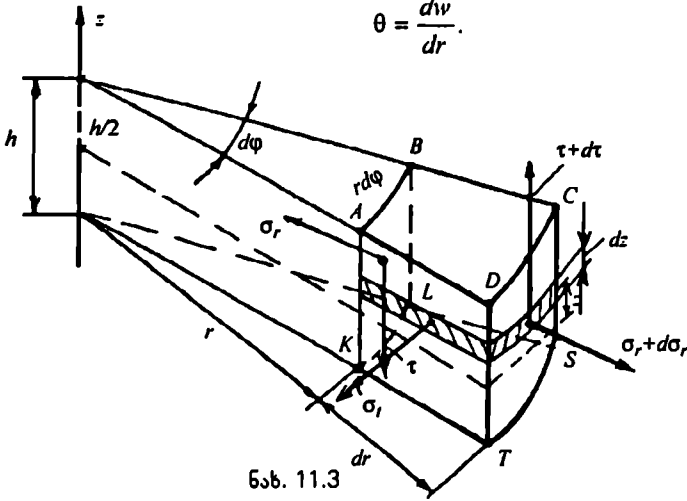
მესამე დაშვება ანალოგიურია ძელის სუფთა დუნვისას ძელის კვეთისათვის გაკეთებული დაშვებისა.

განვიხილოთ ფირფიტის ამოჭრილი რგოლური ელემენტი, რომლის კვეთი დეფორმაციამდე $CLRK$ და დეფორმაციის შემდეგ $C'L'R'K'$ წარმოადგენილია 11.2 ნახაზზე. მესამე დაშვების თანახმად, CL შუა ზედაპირის მართობი მობრუნდება θ კუთხით და დაიკავებს $C'L'$ მდებარეობას, რომელიც $n'n'$ -ის გადაკვეთის წერტილში ამ უკანასკნელთან შეადგენს მართობ კუთხეს. ანალოგიურად მობრუნდება RK კვეთიც, რომლის მობრუნების კუთხე იქნება $\theta + d\theta$.

დავადგინოთ რადიალური და წრიული მიმართულებების წრფივი დეფორმაციები A წერტილში, რომლის კოორდინატებია r და z (ნახ.11.2).

ფირფიტის დეფორმაციამდე A წერტილში გამავალი წრეწირის რადიუსია r ,

$$\theta = \frac{d\psi}{dr}. \quad (11.3)$$



ნახ. 11.3

განვიხილოთ ძაბვები რადიალური და წრიული მიმართულების სიბრტყეებში. ორი ცილინდრული ზედაპირით, რომელთა რადიუსია r და $r+dr$ და Oz ღერძზე გამავალი ორი სიბრტყით, რომელთა შორის კუთხე უდრის $d\phi$ -ს, ფირფიტისა და ამოკვეთით ელემენტი (ნახ. 11.3). მეოთხე დაშვების შესაბამისად, შუა სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებში σ_z ნორმალური ძაბვები ნულის ტოლია. მაშინ, ჰუკის განზოგადებული კანონი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\phi), \\ \epsilon_\phi &= \frac{1}{E}(\sigma_\phi - \mu\sigma_r), \end{aligned} \quad (11.4)$$

საიდანაც, (11.1) და (11.2) ფორმულების გათვალისწინებით, დავადგენთ ძაბვების მნიშვნელობებს:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_r + \mu\epsilon_\phi) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{d\theta}{dr} + \mu \frac{\theta}{r} \right); \\ \sigma_\phi &= \frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_\phi + \mu\epsilon_r) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\theta}{r} + \mu \frac{d\theta}{dr} \right). \end{aligned} \quad (11.5)$$

სიმეტრიის პირობიდან გამომდინარე, ამოკვეთილ ელემენტზე (ნახ.11.3) მოქ-

მედებს მხოლოდ $\tau_{rz} = \tau$ მხები ძაბვები. დავადგინოთ შიგა ძალების ტოლქმედების მნიშვნელობები. ამისათვის აღვნიშნოთ შუა ზედაპირის ელემენტის $rd\varphi$ რკალის სიგრძის ერთეულზე მოდებული რადიალური მლუნავი მომენტი და განვიცაღა, შესაბამისად, M_r და Q ასობით. დავადგინოთ მათი მნიშვნელობები:

$$M_r rd\varphi = - \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r rd\varphi dz) z = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{d\theta}{dr} + \mu \frac{\theta}{r} \right);$$

$$Q rd\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} \tau rd\varphi dz = rd\varphi \int_{-h/2}^{h/2} \tau dz.$$

ანალოგიურად განვიხილოთ წრიური მლუნავი მომენტის მნიშვნელობაც

$$M_t dr = - \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_t dr dz) z = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\theta}{r} + \mu \frac{d\theta}{dr} \right) dr.$$

შემოვიღოთ ახალი D პარამეტრი, რომელსაც ვუწოდოთ ფირფიტის სიხისტე ლუნვაზე

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (11.6)$$

აღნიშნულის გათვალისწინებით, სიგრძის ერთეულზე მოსული რადიალური და წრიული მლუნავი მომენტისათვის მივიღებთ ფორმულებს:

$$M_t = D \left(\frac{\theta}{r} + \mu \frac{d\theta}{dr} \right); \quad M_r = D \left(\frac{d\theta}{dr} + \mu \frac{\theta}{r} \right). \quad (11.7)$$

განივი ძალა

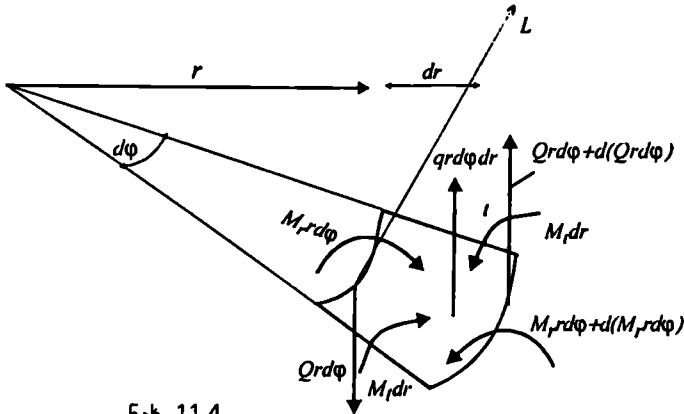
$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} \tau dz.$$

განვიხილოთ ფირფიტის შუა ზედაპირის ელემენტის (ნახ. 11.4) წონასწორობის პირობები. დავაგეგმილოთ ელემენტზე მოქმედი ძალები z ღერძის მიმართულეობაზე

$$Qrd\varphi + d(Qrd\varphi) - Qrd\varphi + qrd\varphi dr = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ განივი ძალის ინტენსივობისთვის შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{d(rQ)}{dr} = -qr. \quad (11.8)$$



ნახ. 11.4

ელემენტზე მოქმედი ძალების L ღერძის მიმართ მომენტების ჯამის ნულთან ტოლობის პირობიდან მივიღებთ

$$M_r r d\varphi + d(M_r r d\varphi) - M_r r d\varphi - qrd\varphi dr \frac{dr}{2} - 2M_r dr \frac{d\varphi}{2} + Qrd\varphi dr = 0.$$

რადგან ზედაპირული განაწილებული ძალების მომენტი, დანარჩენ შესაკრებებთან შედარებით, წარმოადგენს უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეს. განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\frac{d(rM_r)}{dr} - M_r = -Qr. \quad (11.9)$$

(11.3), (11.7), (11.8) და (11.9) განტოლებების გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ ოთხი წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისაგან შემდგარ სისტემას

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dr} &= \theta; & \frac{d\theta}{dr} &= -\frac{\mu}{r}\theta + \frac{1}{D}M_r; \\ \frac{dQ}{dr} &= -\frac{Q}{r} - q; & \frac{dM_r}{dr} &= \frac{Eh^3}{12r^2}\theta - Q - \frac{1-\mu}{r}M_r. \end{aligned} \quad (11.10)$$

რომელიც შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი ვექტორულ-მატრიცული ფორმულით

$$\frac{d\mathbf{X}}{dr} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{T}. \quad (11.11)$$

აქ შემოღებულია აღნიშვნები

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} w \\ \theta \\ Q \\ M_r \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -q \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu}{r} & 0 & \frac{1}{D} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{Eh^3}{12r^2} & -1 & -\frac{1-\mu}{r} \end{pmatrix}. \quad (11.12)$$

მიღებული (11.11) განტოლების საშუალებით გაიანგარიშება ცვლადი სისქის მქონე მრგვალი სიმეტრიულად დატვირთული ფირფიტების ძაბვები და გადაადგილებები. მარტივ შემთხვევებში შეიძლება განვივი ძალის დადგენა (11.8) განტოლების ინტეგრირებით. მაშინ, მღუნავი მომენტებისა და ძაბვების მნიშვნელობების დასადგენად საკმარისია, განვიხილოთ (11.10) სისტემის მხოლოდ მეორე და მეოთხე განტოლებები. ამ შემთხვევაში ვექტორულ-მატრიცული განტოლება ჩაიწერება ისევ (11.11) სახით, ოღონდ ვექტორებსა და მატრიცას ექნება შემდეგი სახე:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \theta \\ M_r \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Q \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{r} & \frac{1}{D} \\ \frac{Eh^3}{12r^2} & -\frac{1-\mu}{r} \end{pmatrix}. \quad (11.13)$$

მიღებულ განტოლებათა სისტემების ამოხსნა ზოგად შემთხვევაში წარმოებს ელექტრონულ-ციფრულ გამოთვლით მანქანაზე 36-ე პარაგრაფში აღწერილი ინტეგრების რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით.

მუდმივი სისქის მქონე ფირფიტისათვის ($h = \text{const}$) მიიღება მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება მართობის მობრუნების θ კუთხის მიმართ. ამისათვის საჭიროა M_r და M_θ მნიშვნელობები (11.7)-დან გავითვალისწინოთ (11.9) განტოლებასში, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{\theta}{r^2} = -\frac{Q}{D}. \quad (11.14)$$

ეს განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\theta r) \right] = -\frac{Q}{D}. \quad (11.15)$$

განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ

$$\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{Dr} \int [r \int Q dr] dr. \quad (11.16)$$

გამოვსახოთ ნორმალური ძაბვების მნიშვნელობები მღუნავი მომენტების საშუალებით. ამ მიზნით ერთობლივად განვიხილოთ (11.5) და (11.7) ფორმულები, მივიღებთ:

$$\sigma_r = -\frac{12M_r}{h^3} z, \quad \sigma_l = -\frac{12M_l}{h^3} z. \quad (11.17)$$

ამრიგად, მაქსიმალური ნორმალური ძაბვები აღიძვრება ფირფიტის ზედაპირებთან, როცა $z=(h/2)$ (ნახ.11.5):

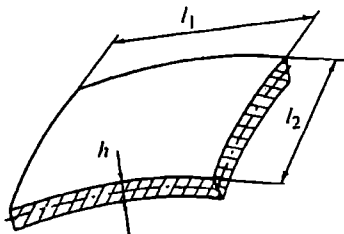
$$\sigma_{r \max} = \frac{6M_r}{h^2}, \quad \sigma_{l \max} = \frac{6M_l}{h^2}. \quad (11.18)$$

§73. გარსების გაანგარიშების ძირითადი თავისებურებები

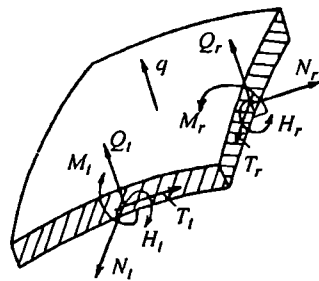
როგორც აღვნიშნეთ, გარსი ეწოდება ისეთ სხეულს, რომლის ერთი ზომა (სისქე) გაცილებით მცირეა მის ორ დანარჩენ ზომასთან შედარებით (ნახ. 11.6). ზედაპირს, რომელიც თანაბრად არის დაცილებული გარსის შემოსაზღვრელი ზედა და ქვედა ზედაპირებიდან, შუა ზედაპირი ეწოდება. გარსის კერძო შემთხვევაა ფირფიტა, რომლისთვისაც შუა ზედაპირი სიბრტყეს წარმოადგენს.

გარსი ფართოდ გამოიყენება მშენებლობაში, ტექნიკასა და, საერთოდ, ადამიანის მოღვაწეობის სხვადასხვა სფეროში. ვაგონისა თუ სატვირთო ავტომანქანის ძარები, თვითმფრინავის, წყალქვეშა ნავისა და ზომაღდების კორპუსები, სხვადასხვა სახის ცისტერნები და ბოლოს, ფეხბურთის ბურთიც კი წარმოადგენს გარსული ტიპის კონსტრუქციას.

ჩვენ განვიხილეთ მრგვალი ფირფიტა, რომელიც წარმოადგენს გარსის კერძო შემთხვევას და დავადგინეთ, რომ მის ურთიერთმართობ კვეთებში მოქმედებს რადიალური და წრიული მიმართულების მღუნავი მომენტები. წრიული ცილინდრული გარსი შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც სქელკედლიანი მილის კერძო შემთხვევა.



ნახ. 11.6



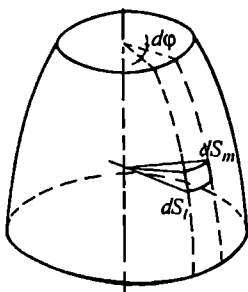
ნახ. 11.7

განვიხილოთ ნებისმიერი გარსიდან ამოკვეთილი ელემენტი, რომლის კვეთებში, ზოგად შემთხვევაში, მოქმედებს მღუნავი მომენტები, ნორმალური ძალები, განივი ძალები და მგრები მომენტები. 11.7 ნახაზზე ნაჩვენებია ამ სიდიდეების ინტენსივობა. რაც შეეხება ნორმალურ ძალებს შუა ზედაპირის პარალელურ სიბრტყეებში, მათი მნიშვნელობები გაცილებით მცირეა. ვიდრე ნორმალური ძალები ორ დანარჩენ სიბრტყეში და ამიტომ ისინი მხედველობაში არ მიიღება. 10.23 ნახაზზე წარმოდგენილი ცილინდრული გარსის განხილვისას დავრწმუნდით ამ დაშვების სისწორეში. გარსებისა და ფირფიტების ზოგადი თეორია რთულია. ამ თეორიის შექმნაში დიდი წვლილი შეიტანეს ჩვენმა სახელოვანმა თანამემამულეებმა: ნიკო მუსხელიშვილმა, ილია ვეკუამ, ვიქტორ კუპრაძემ და სხვებმა.

გარსების ზოგადი თეორიის განხილვა სცილდება მასალათა გამძლეობის კურსის ფარგლებს. შემდეგ პარაგრაფში შესწავლილი იქნება სიმეტრიული გარსების მხოლოდ ზოგიერთი, კერძო შემთხვევა.

§74. ძაბვების განსაზღვრა სიმეტრიულ უმომენტო გარსებში

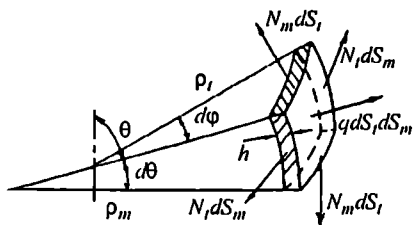
განვიხილოთ გარსი, რომლის შუა ზედაპირი ბრუნვითი ზედაპირია (ნახ. 11.8). ამ ზედაპირის მთავარი სიბრუდის რადიუსები მერიდიანული და წრული



ნახ. 11.8

მიმართულებით აღვნიშნოთ, შესაბამისად, ρ_m და ρ_l ასოებით. ვთქვათ, გარსზე მოქმედებს ზედაპირული, ბრუნვის ღერძის მიმართ სიმეტრიული ძალები. საჭიროა განისაზღვროს გარსში აღძრული ძაბვები. დასმული ამოცანა განვიხილოთ გარსების უმომენტო თეორიის საფუძველზე. ამ თეორიის თანახმად, ნორმალური ძაბვები გარსის სისქეში, ზედაპირის ნორმალის მიმართულებით, მუდმივია და ამიტომ კვეთებში წარმოიქმნება მხოლოდ ნორმალური ძალები. რაც შეეხება მღუნავ მომენტებს, მათი მნიშვნელობები ნულის ტოლია და ამიტომ გარსის ღუნვა გამოირიცხულია. ცილინდრულ გარსზე

შიგა წნევის მოქმედების შემთხვევის (ნახ. 10.23) განხილვისას დავადგინეთ, რომ უმომენტო თეორია მით უფრო ზუსტ შედეგს გვაძლევს, რაც უფრო მცირეა გარსის სისქე სხვა ზომებთან შედარებით. იგივე მდგომარეობაა ზოგადი გარსის შემთხვევაშიც. ასეთი დაძაბული მდგომარეობა წარმოიშობა მაშინაც, როცა მდორედ იცვლება გარსის გეომეტრია და მოქმედი ზედაპირული ძალები, ადგილი არა აქვს სისქისა და შუა ზედაპირის სიმრუდის რადიუსების ნახტომისებრ ცვლილებებს, გარსზე არ არის მოდებული შეყურსული ძალები და მომენტები, გარსის კონტურები ხისტად არ არის ჩამაგრებული. თუ ეს პირობები არ სრულდება, გარსის უმომენტო სქემით გაანგარიშება არ იქნება მართებული. მაგრამ, როგორც წესი, არათანაბარი დაძაბულობა, რომლის შედეგიცაა ღუნვა, წარმოიქმნება გარსის იმ განსაკუთრებული ადგილების მცირე მიდამოში. სადაც ზემოთ დასახელებული პირობები არ სრულდება. უმომენტო თეორია ამ შემთხვევაშიც არ კარგავს თავის მნიშვნელობებს, ოღონდ მისი გამოყენებით მიღებული შედეგები მოითხოვს დაზუსტებას ზემოაღნიშნულ ვიწრო ზონებში



ნახ. 11.9

განვიხილოთ ბრუნვითი გარსი, რომელზეც შუა ზედაპირის მართობი მიმართულებით მოქმედებს წრიული მიმართულების მუდმივი და მერიდიანული მიმართულების ცვლადი წნევა. გარსიდან ორი რადიალური სიბრტყით, რომელთა შორის კუთხე არის $d\phi$,

და ორი კონუსური ზედაპირით ამოვკვეთოთ მცირე ელემენტი (ნახ. 11.9). უმომენტო თეორიის შესაბამისი შიგა ძალები და მოქმედი წნევით განპირობებული ძალა წარმოდგენილია 11.9 ნახაზზე.

დავაგვიგმილოთ ელემენტზე მოქმედი ძალები შუა ზედაპირის მართობი მიმართულებაზე

$$2N_m dS_l \sin \frac{d\theta}{2} + 2N_l dS_m \sin \frac{d\phi}{2} - q dS_l dS_m = 0.$$

რადგან

$$d\theta = \frac{dS_m}{\rho_m}, \quad d\phi = \frac{dS_l}{\rho_l}, \quad \sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}, \quad \sin \frac{d\phi}{2} = \frac{d\phi}{2},$$

წონასწორობის განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$\frac{N_m}{\rho_m} + \frac{N_l}{\rho_l} = q. \quad (11.19)$$

(11.19)-ს ეწოდება **ლაპლასის განტოლება**. მერიდიანული და წრიული მიმარ-

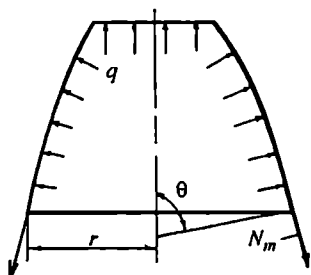
თულების ნორმალური ძაბვები განისაზღვრება შესაბამისი ნორმალური ძალების ინტენსიურობის ელემენტის სისქეზე გაყოფით:

$$\sigma_m = \frac{N_m}{h}; \quad \sigma_l = \frac{N_l}{h}. \quad (11.20)$$

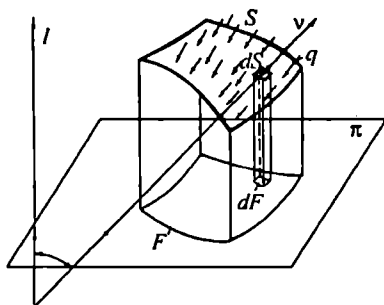
მეორე განტოლებას მივიღებთ გარსის ზედა ნაწილის წონასწორობის პირობიდან (ნახ. 11.10). თუ აღნიშნავთ P ასოთი მოკვეთილ ნაწილზე მოქმედი აქტიური ძალების ტოლქმედის გეგმილს სიმეტრიის ღერძზე, მაშინ

$$N_m = \frac{P}{2\pi r \sin \theta}. \quad (11.21)$$

გარსის S ზედაპირის ყოველ წერტილში მართობულად მოქმედი თანაბარი ინტენსიურობის მქონე განაწილებული ძალების ტოლქმედის გეგმილი ნებისმიერი მიმართულების l წრფეზე შეიძლება გავიანგარიშოთ შემდეგი ხერხით: გავატაროთ l წრფის მართობი π სიბრტყე (ნახ.11.11). ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტზე იმოქმედებს $q dS$ -ის ტოლი ძალა. ამ ძალის გეგ-



ნახ. 11.10



ნახ. 11.11

მილი l მიმართულებაზე არის $dP_l = q dS \cos(\hat{v}, l)$. აქ v - არის dS ფართობის

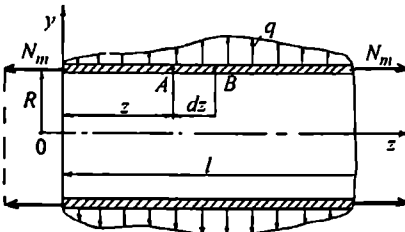
ნორმალის ცენტრში. მაშინ მთლიანად S ზედაპირზე მოქმედი ძალის ტოლქმედის გეგმილი l წრფეზე იქნება

$$P_l = \int_S q \cos(v, l) dS = q \int_F dF = qF. \quad (11.22)$$

ამრიგად, S ზედაპირზე მოქმედი თანაბრად განაწილებული q ინტენსიურობის ძალის ტოლქმედის გეგმილი ნებისმიერ l მიმართულების წრფეზე გამოითვლება როგორც ძალების ინტენსიურობის q -ს და l წრფის მართობი სიბრტყეზე ზედაპირის ფართობის გეგმილის F -ის ნამრავლი.

§75. წრიული ცილინდრული გარსის ღუნვა სიმეტრიული დატვირთვისას

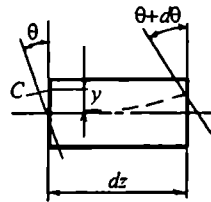
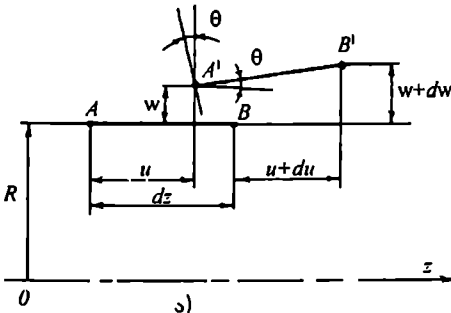
გავიანგარიშოთ წრიულ ცილინდრულ გარსში ძაბვები და გადაადგილებები სიმეტრიული რადიალური მიმართულების დატვირთვისას (ნახ. 11.12).



ნახ. 11.12

გარსის შუა ზედაპირზე განვიხილოთ A და B წერტილები, რომელთა შორის მანძილია dz . გარსის დეფორმაციის შედეგად ეს წერტილები დაიკავებენ ახალ A' და B' მდებარეობებს (ნახ. 11.13). რადიალური მიმართულებით A წერტილის გადაადგილება აღვნიშნოთ w ასოთი. შუა ზედაპირის A წერტილში გამავალი წრეწირის სიგრძე $l_0 = 2\pi R$. გარსის დეფორმაციის შედეგად შესაბამისი წრეწირის სიგრძე $l = 2\pi(R+w)$. მაშინ, შუა ზედაპირის დეფორმაცია წრიული მიმართულებით

$$\epsilon_r^0 = \frac{2\pi(R+w) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{w}{R}. \quad (11.23)$$



ნახ. 11.13

აღვნიშნოთ A წერტილის გადაადგილება Oz ღერძის მიმართულებით u ასოთი. A წერტილიდან dz მანძილით დაცილებულ შუა ზედაპირზე მდებარე B წერტილი გადაინაცვლებს ღერძული მიმართულებით $(u+du)$ მანძილზე. მაშინ, შუა ზედაპირზე ღერძული მიმართულების დეფორმაცია

$$\epsilon_m^0 = \frac{(u+du) - u}{dz} = \frac{du}{dz}. \quad (11.24)$$

A წერტილში გამავალი შუა ზედაპირის მართობი წრფე გარსის დეფორმაციის შედეგად მობრუნდება θ კუთხით. ეს კუთხე დაკავშირებულია შუა ზედაპირის რადიალური მიმართულების გადაადგილებებთან შემდეგი თანაფარდობით

$$\theta = \frac{dw}{dz}. \quad (11.25)$$

დავადგინოთ გარსის დეფორმაციები A წერტილიდან y მანძილზე დაცილებული კვეთის ნებისმიერ C წერტილში. წინასწარ დავუშვათ, რომ A და C წერტილებს შორის მანძილი გარსის დეფორმაციის შედეგად არ იცვლება და შუა ზედაპირის მართობი გარსის დეფორმაციის შემდეგაც გადადის დეფორმირებული შუა ზედაპირის მართობ მდებარეობაში. თუ, ამასთანავე, გავითვალისწინებთ პირობას, რომ $(h/R) \ll 1$, მივიღებთ C წერტილის მახასიათებელ სიდიდეებს:

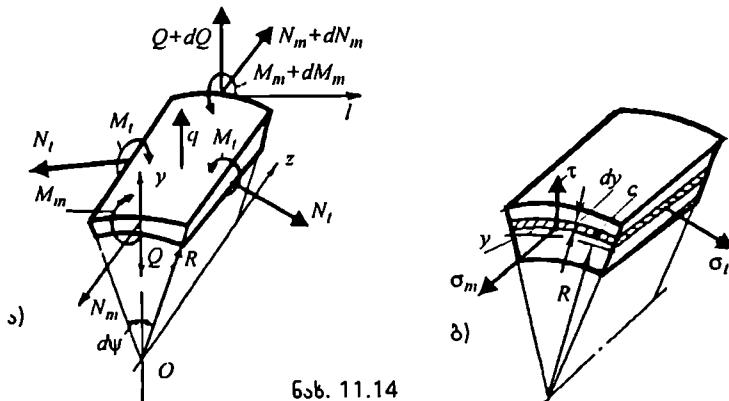
$$w^* = w; \quad u^* = u - \theta y; \quad R^* = R + z = R \left(1 + \frac{y}{R}\right) \approx R.$$

ახლა, (11.23) და (11.24) ფორმულების საშუალებით, შესაბამისი სიდიდეების გავალისწინებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ დეფორმაციები C წერტილში:

$$\epsilon_l = \epsilon_l^0 = \frac{w}{R}; \quad \epsilon_m = \frac{du^*}{dz} = \frac{du}{dz} - y \frac{d\theta}{dz} = \epsilon_m^0 - y \frac{d^2 w}{dz^2}. \quad (11.26)$$

ისევე, როგორც მრგვალი ფირფიტების გაანგარიშებისას, აქაც ვაკეთებთ დაშვებას, რომ ბოჭკოები განივი მიმართულებით ერთმანეთს არ აწევენ, რის გამოც შესაბამისი ნორმალური ძაბვები ნულის ტოლია და ჰუკის კანონი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \epsilon_l &= \frac{1}{E} (\sigma_l - \mu \sigma_m), & \epsilon_m &= \frac{1}{E} (\sigma_m - \mu \sigma_l) \\ \sigma_l &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_l + \mu \epsilon_m), & \sigma_m &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_m + \mu \epsilon_l). \end{aligned} \quad (11.27)$$



11.14.ა ნახაზზე ნაჩვენებია გარსის ელემენტებზე მოდებული შიგა ძალოვანი ფაქტორების ინტენსიურობები. დავუკავშიროთ ისინი დეფორმაციებს:

$$\begin{aligned}
 N_m R d\psi &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_m (R+y) d\psi dy = \int_{-h/2}^{h/2} R \sigma_m \left(1 + \frac{y}{R}\right) d\psi dy \approx \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_m R d\psi dy = \\
 &= \frac{ER d\psi}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\epsilon_m^0 - y \frac{d^2 w}{dz^2} + \mu \epsilon_t^0 \right) dy = BR d\psi \left(\epsilon_m^0 + \mu \epsilon_t^0 \right) \\
 M_m R d\psi &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_m (R+y) y d\psi dy = DR d\psi \frac{d^2 w}{dz^2},
 \end{aligned}$$

სადაც

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad B = \frac{Eh}{1-\mu^2}$$

გარსის სიხისტეებია ღუნვაზე და გაკიშვა-კუმშვაზე.

მიღებული თანაფარდობების გამოყენებით დავადგენთ მერიდიანული მიმართულების შიგა ძალოვანი ფაქტორების ფორმულებს:

$$N_m = B \left(\epsilon_m^0 + \mu \epsilon_t^0 \right), \quad M_m = D \frac{d^2 w}{dz^2}. \quad (11.28)$$

ანალოგიური გარდაქმნებით დავადგენთ ნორმალური ძალის და მღუნავი მომენტის ინტენსიურობებს მეორე კვეთშიც:

$$N_t = B \left(\epsilon_t^0 + \mu \epsilon_m^0 \right), \quad M_t = \mu D \frac{d^2 w}{dz^2}. \quad (11.29)$$

მიღებული შედეგების გათვალისწინებით, (11.27)-ის საშუალებით, ნორმალური ძაბვების გამოსათვლელი ფორმულები მიიღებს სახეს:

$$\sigma_z = \frac{N_t}{h} - \frac{12M_t}{h^3} y; \quad \sigma_m = \frac{N_m}{h} - \frac{12M_m}{h^3} y. \quad (11.30)$$

მაქსიმალური ნორმალური ძაბვები მოქმედებს გარსის ზედაპირთან

$$\sigma_{l \max} = \frac{|N_l|}{h} + \frac{6|M_l|}{h^2}; \quad \sigma_{m \max} = \frac{|N_m|}{h} + \frac{6|M_m|}{h^2}. \quad (11.31)$$

განვიხილოთ გარსის ელემენტის (ნახ. 11.14, ა) წონასწორობის პირობები. დავაგვეგმილოთ ელემენტზე მოქმედი ძალები Oz და Oy მიმართულებებზე:

$$(N_m + dN_m)Rd\psi - N_m R d\psi = 0;$$

$$(Q + dQ)Rd\psi - Q R d\psi - 2N_l dz \frac{d\psi}{2} + q R d\psi dz = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$\frac{dN_m}{dz} = 0; \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{N_l}{R} - q. \quad (11.32)$$

წონასწორობის მესამე განტოლება, - მომენტების ჯამი l ღერძის მიმართ, გვაძლევს

$$(M_m + dM_m)Rd\psi - M_m R d\psi + Q R d\psi dz = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ თანაფარდობას მღუნავი მომენტის და განივი ძალის ინტენსიურობას შორის

$$\frac{dM_m}{dz} = -Q. \quad (11.33)$$

წონასწორობის პირველი განტოლებიდან დავადგენთ, რომ შერიდიანული მიმართულების ნორმალური ძალა მუდმივაა: $N_m = N_0 = \text{const}$. ამრიგად, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ეს ძალა ცნობილია და მისი მნიშვნელობა განისაზღვრება გარსის ტორსებზე მოდებული შესაბამისი ძალებით. წრიული მიმართულების ნორმალური ძალის დასადგენად ვისარგებლოთ (11.28) და (11.29) სისტემების პირველი განტოლებებით:

$$N_l = Eh \frac{w}{R} + \mu N_m. \quad (11.34)$$

მიღებული შედეგი, (11.28)-ის მეორე განტოლება და (11.33) თანაფარდობა გავითვალისწინოთ (11.32)-ის მეორე განტოლებაში

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(D \frac{d^2 w}{dz^2} \right) + \frac{Eh}{R^2} w = -\mu \frac{N_m}{R} + q. \quad (11.35)$$

თუ გარსის სისქე მუდმივია, მაშინ $D = \text{const}$ და ეს განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\frac{d^4 w}{dz^4} + 4\beta^4 w = \frac{qR - \mu N_m}{DR}, \quad (11.36)$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნა

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{Rh}}. \quad (11.37)$$

ვიპოვოთ მიღებული (11.36) განტოლების ამონახსნი. შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნია

$$w_0 = e^{\alpha z} \quad (11.38)$$

მახასიათებელ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$\alpha^4 + 4\beta^4 = 0,$$

საიდანაც დავადგენთ ამ განტოლების ფესვებს:

$$\alpha_1 = \beta(1+i), \quad \alpha_2 = \beta(1-i), \quad \alpha_3 = -\beta(1+i), \quad \alpha_4 = -\beta(1-i).$$

მაშინ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი

$$w_0 = c_1 e^{-\beta z} \cos \beta z + c_2 e^{-\beta z} \sin \beta z + c_3 e^{\beta z} \cos \beta z + c_4 e^{\beta z} \sin \beta z. \quad (11.39)$$

ამონახსნების შესაბამისი კომბინაციების შედგენით, ეს ზოგადი ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირადაც

$$w_0 = A_1 \text{sh} \beta z \cos \beta z + A_2 \text{sh} \beta z \sin \beta z + A_3 \text{ch} \beta z \cos \beta z + A_4 \text{ch} \beta z \sin \beta z. \quad (11.40)$$

თუ გარსზე მოქმედი განაწილებული ძალების ინტენსიურობა q მუდმივი ან ცვალებადია პოლინომური კანონით და მისი ხარისხი არ აღემატება სამს, (11.36) განტოლების კერძო ამონახსნი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$w^* = \frac{R}{Eh} (qR - \mu N_m) \quad (11.41)$$

მაშინ, (11.36) განტოლების ზოგადი ამონახსნი

$$w = w_0 + w^*.$$

რადიალური მიმართულების w გადაადგილების განსაზღვრის შემდეგ შეგვიძლია დავადგინოთ სხვა უცნობების მნიშვნელობებიც. ამისათვის ვიყენებთ ზემოთ მიღებულ ფორმულებს.

§76. წრიული ცილინდრული გარსის გაანგარიშების რიცხვითი მეთოდი

წინა პარაგრაფში განხილული ამოხსნის მეთოდიცა გამოიყენება მხოლოდ მუდმივი სისქის მქონე გარსის გაანგარიშებისას. რაც შეეხება ცვლადი სისქის მქონე გარსის გაანგარიშებას, ე.ი. როცა $h = \text{const}$, ეფექტურად გამოიყენება რიცხვითი მეთოდები. ამ მეთოდების გამოყენება მოითხოვს განტოლებების სათანადო სახით წარმოდგენას.

სისტემის პირველი და მეორე განტოლებების მიღება შეიძლება (11.25) და (11.28)-ის საშუალებით:

$$\frac{d\nu}{dz} = \theta; \quad \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{D} M_m. \quad (11.42)$$

მესამე და მეოთხე განტოლებებს მივიღებთ (11.32) და (11.33) განტოლებების გამოყენებით, თუ მათში გავითვალისწინებთ N_l -ს მნიშვნელობას (11.34) თანაფარდობიდან

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{Eh}{R^2} w + \frac{\mu}{R} N_m - q, \quad \frac{dM_m}{dz} = -Q. \quad (11.43)$$

მიღებული სისტემა ჩავწეროთ შემდეგი ვექტორულ-მატრიცული ფორმით

$$\frac{d\mathbf{X}}{dz} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{T}, \quad (11.44)$$

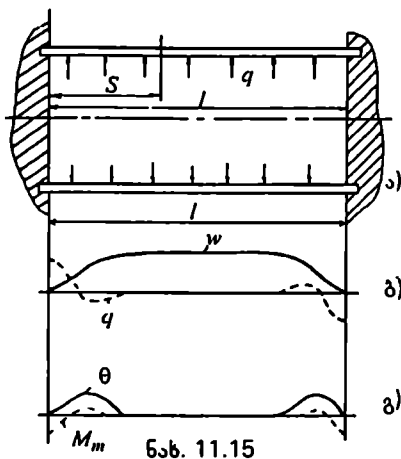
სადაც

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} w \\ \theta \\ Q \\ M_m \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu}{R} N_m - q \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{D} \\ \frac{Eh}{R^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11.45)$$

(11.44) განტოლება შეიძლება ამოხსნათ იგივე რიცხვითი მეთოდით, რომელიც გამოყენებული იყო ძელის გაანგარიშებისას, მაგრამ, თუ გარსი შედარებით გრძელია, $l > (2,5 + 3)\sqrt{Rh}$, ამ მეთოდის გამოყენება რთულდება, რაც გამოწვეულია შემდეგი გარემოებით.

განვიხილოთ მუდმივი სისქის ცილინდრული გარსი, რომელზედაც მოქმედებს მუდმივი ინტენსიურობის შიგა წნევა (ნახ. 11.15).

ამ გარსისთვის გვაქვს შემდეგი სასაზღვრო პირობები



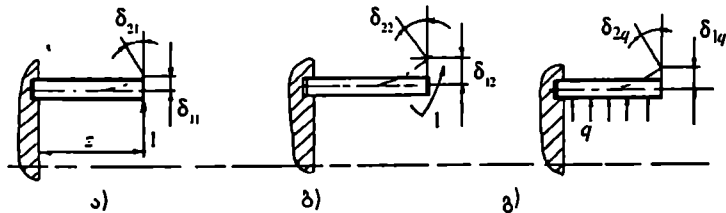
ნახ. 11.15

$$z = 0: w = 0, \theta = 0;$$

$$z = l: w = 0, \theta = 0. \quad (11.46)$$

11.15. ბ.გ ნახაზზე მოცემული გრაფიკები ახასიათებს გადაადგილებებისა და შიგა ძალოვანი ფაქტორების ცვლილებას გარსის მთელ სიგრძეზე. ტორსებთან ეს სიდიდეები სწრაფად იცვლება. მაშინ, როდესაც გარსის ძირითად შუა ნაწილში ეს სიდიდეები თითქმის უცვლელი რჩება. ამიტომ საწყისი პარამეტრების მნიშვნელობები აღებული უნდა იქნას დიდი სიზუსტით, რომ შესაძლებელი იყოს სისტემის ინტეგრებისას გავცილდეთ გარსის შუა ნაწილს და მივიღოთ სიდიდეების

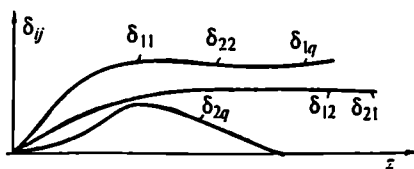
ცვლილების კანონი გარსის მეორე ტორსზე. გამოთვლითი ტექნიკის განვითარების თანამედროვე დონეზე ეს ამოცანა ძნელად შესასრულებელია. ამიტომ საჭიროა მივიღოთ ახალი განტოლებათა სისტემა, რომლის უცნობების ცვლილების კანონი უფრო ხელსაყრელი იქნება.



ნახ. 11.16

განვიხილოთ გარსის z სიგრძის ნაწილი (ნახ. 11.16), მოვდოთ მასზე ცალ-ცალკე ერთეულოვანი განივი ძალა, მღუნავი მომენტი და ზედაპირული დატვირთვა (ნახ. 11.16).

ამ ძალოვანი ფაქტორებით გამოწვეული გადაადგილებები დამოკიდებულია z ცვლადზე. თუ z მცირეა, გადაადგილებები განიცდის სწრაფ ცვლილებას. z -ის



ნახ. 11.17

დიდი მნიშვნელობებისათვის ეს სიდიდეები პრაქტიკულად არ იცვლება. ეს ვითარება ხარისხობრივად ილუსტრირებულია 11.17 ნახაზზე. ამიტომ, თუ შევადგენთ დიფერენციალურ განტოლებებს ამ სიდიდეების მიმართ, განტოლებების ინტეგრება არ იქნება დაკავშირებული სირთულესთან.

ძალთა მოქმედების დამოუკიდებლობის პრინციპის გამოყენებით რადიალური გადაადგილება და მართობის მობრუნების კუთხე შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} w &= \delta_{11}Q + \delta_{12}M_m + \delta_{1q}; \\ \theta &= \delta_{21}Q + \delta_{22}M_m + \delta_{2q}. \end{aligned} \quad (11.47)$$

ან

$$\begin{pmatrix} w \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ M_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_{1q} \\ \delta_{2q} \end{pmatrix}. \quad (11.48)$$

ამრიგად, მივიღებთ შემდეგ ვექტორულ-მატრიცული სახით ჩაწერილ დამოკიდებულებას

$$\mathbf{X}_I(z) = I(z)\mathbf{X}_{II}(z) + \mathbf{F}(z), \quad (11.49)$$

სადაც

$$\mathbf{X}_I = \begin{pmatrix} w \\ \theta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_{II} = \begin{pmatrix} Q \\ M_m \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \delta_{1q} \\ \delta_{2q} \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}. \quad (11.50)$$

გამოვიყვანოთ დიფერენციალური განტოლებები \mathbf{X}_I და \mathbf{X}_{II} უცნობების მიმართ. წარმოვადგინოთ (11.44) განტოლება შემდეგნაირად:

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_I \\ \mathbf{X}_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_I \\ \mathbf{X}_{II} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{T}_I \\ \mathbf{T}_{II} \end{pmatrix}. \quad (11.51)$$

ამ განტოლებაში, (11.45)-ის შესაბამისად, მიღებულია აღნიშვნები

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{D} \end{pmatrix}; \quad A_{21} = \begin{pmatrix} \frac{Eh}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

მიღებული (11.51) განტოლება ტოლფასია შემდეგი ორი ვექტორულ-მატრიცული სახით ჩაწერილი განტოლებისა:

$$\frac{d\mathbf{X}_I}{dz} = A_{11}\mathbf{X}_I + A_{12}\mathbf{X}_{II} + \mathbf{T}_I; \quad \frac{d\mathbf{X}_{II}}{dz} = A_{21}\mathbf{X}_I + A_{22}\mathbf{X}_{II} + \mathbf{T}_{II}. \quad (11.52)$$

(11.51) და (11.52) განტოლებებში (11.49) გამოსახულების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dz} \mathbf{X}_{II} + l[A_{21}(l\mathbf{X}_{II} + \mathbf{F}) + A_{22}\mathbf{X}_{II} + \mathbf{T}_{II}] + \frac{d\mathbf{F}}{dz} = \\ = A_{11}(l\mathbf{X}_{II} + \mathbf{F}) + A_{12}\mathbf{X}_{II} + \mathbf{T}_I, \end{aligned} \quad (11.53)$$

საიდანაც მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებებს:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dz} &= -l(A_{21}l + A_{22}) + A_{11}l + A_{12}; \\ \frac{d\mathbf{F}}{dz} &= -l(A_{21}\mathbf{F} + \mathbf{T}_{II}) + A_{11}\mathbf{F} + \mathbf{T}_I. \end{aligned} \quad (11.54)$$

ამრიგად, (11.49) დამოკიდებულებაში შემავალი სიდიდეებისთვის გვაქვს არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებები. გვექნება წრფივი ამოცანა, მივიღეთ არაწრფივი ამოცანა. ერთი შეხედვით, ამოცანა გართულდა, მაგრამ ასეთი შეფასება არ არის სწორი, რადგან გვექნება სასაზღვრო ამოცანა, მივიღეთ კი პრინციპულად განსხვავებული ამოცანა საწყისი პირობებით. (11.46) სასაზღვრო პირობებიდან საწყისი პირობების დადგენა არ არის დაკავშირებული რაიმე სირთულესთან:

$$I(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11.55)$$

ამის შემდეგ შესაძლებელია (11.54)-ის რიცხვითი ინტეგრება, რის შედეგადაც დავადგენთ მატრიცისა და ვექტორის მნიშვნელობებს გარსის მეორე ბოლოში

$$z = l: \quad I = I(l), \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}(l).$$

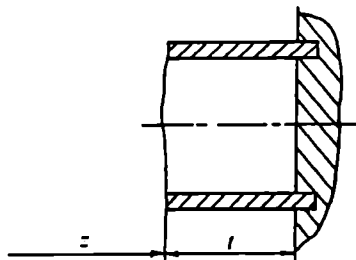
(11.46) და (11.49) თანაფარდობების გათვალისწინება გვაძლევს:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_I(l) &= I(l)\mathbf{X}_{II}(l) + \mathbf{F}(l), \\ \mathbf{X}_I(l) &= 0, \quad \mathbf{X}_{II}(l) = -I^{-1}(l)\mathbf{F}(l). \end{aligned} \quad (11.56)$$

ამრიგად, ამოხსნისას გამოვიყენეთ ორი პირობა, რომლებიც სრულდებოდა გარსის საწყის ტორსთან და, შესაბამისად, მივიღეთ (11.56) ორი ახალი პირობა გარსის მარჯვენა ტორსზე. ფაქტიურად მოხდა ამოცანის პირობების გადატანა ინტეგრების საწყისიდან ბოლო წერტილში. ამიტომ ამ მეთოდს გადატანის მეთოდი ეწოდება.

თუ გვავინტერესებს უცნობების მნიშვნელობა რომელიმე შუალედური $z=z_0$ წერტილისთვის, განტოლებათა სისტემის ინტეგრების პროცესში საჭიროა დამახსოვროთ $I(z_0)$ -ის და $\mathbf{F}(z_0)$ -ის მნიშვნელობები.

ვექტორთა შორის (11. 49) წრფივი დამოკიდებულების ანალოგიური დამოკიდებულება შეიძლება განვიხილოთ გარსის მარჯვენა ნაწილისთვის (ნახ.11. 18):



ნახ. 11.18

$$\mathbf{X}_I(t) = I(t)\mathbf{X}_{II}(t) + \mathbf{F}(t), \quad (11.57)$$

ამ განტოლების პარამეტრების დადგენისთვის საჭიროა კვლავ ჩავატაროთ (11. 54) განტოლებათა სისტემის ინტეგრება, მაგრამ უკვე მარჯვნიდან მარცხნივ, ე.ი. $z=l$ ($t=0$) წერტილიდან $z=0$ ($t=l$) წერტილამდე. ასეთი ინტეგრებით დავადგენთ მატრიცის და ვექტორის მნიშვნელობებს ჩვენთვის საინტერესო $z = z_0$ ($t=t_0$) კვეთისათვის.

პირდაპირი და შებრუნებული ინტეგრების შედეგების გამოყენებით შეგვიძლია შევადგინოთ ორი ვექტორული თანაფარდობა

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_I(z_0) &= I(z_0)\mathbf{X}_{II}(z_0) + \mathbf{F}(z_0), \\ \mathbf{X}_I(t_0) &= I(t_0)\mathbf{X}_{II}(t_0) + \mathbf{F}(t_0). \end{aligned} \quad (11.58)$$

აქ t_0 გამოყენებულია სიდიდეებისათვის, რომლებიც მიღებულია საწინააღმდეგო მიმართულების ინტეგრებით. ვინაიდან ვექტორებისათვის გვაქვს შემდეგი ტოლობა

$$\mathbf{X}_I(z_0) = \mathbf{X}_I(t_0), \quad \mathbf{X}_{II}(z_0) = \mathbf{X}_{II}(t_0), \quad (11.59)$$

(11.58)-დან ადვილად დავადგენთ ამ ვექტორების მნიშვნელობებს:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_I(z_0) &= I(z_0)[I(z_0) - I(t_0)]^{-1}[\mathbf{F}(t_0) - \mathbf{F}(z_0)] + \mathbf{F}(z_0), \\ \mathbf{X}_{II}(z_0) &= [I(z_0) - I(t_0)]^{-1}[\mathbf{F}(t_0) - \mathbf{F}(z_0)]. \end{aligned} \quad (11.60)$$

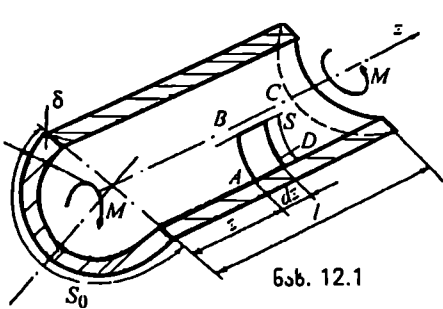
ასეთი თანაფარდობები შეიძლება შევადგინოთ ჩვენთვის საინტერესო ყველა წერტილისთვის და, საბოლოოდ, დავადგინოთ შიგა ძალოვანი ფაქტორების და გადაადგილებების ცვლილების კანონზომიერებები.

XII თავი. თხელკედლიანი კალების ღუნვა და ბრძსა

§77. საყროთ დებულეებეი. ღუნყის ცენტრი

თანამედროვე მანქანათმშენებლობაში განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება მასალის ეკონომიას. ეს საკითხი უშუალოდა დაკავშირებული როგორც მაღალი სიმტკიცის ახალი მასალების შექმნასთან, ასევე სპეციალური პროფილების და კონსტრუქციების გამოყენებასთან. ამ კონსტრუქციებში რაციონალური დაძაბული მდგომარეობის მიღწევა საშუალებას გვაძლევს შედარებით სრულყოფილად გამოვიყენოთ არსებული მასალების თვისებები. ეს გარემოება განსაზღვრავს თხელკედლიანი კონსტრუქციების ფართო გამოყენებას პრაქტიკაში.

დღეს, ნედლეულის დეფიციტის პირობებში, მსუბუქი კონსტრუქციების შექმნას არა მარტო დიდი ეკონომიკური მნიშვნელობა აქვს, არამედ იგი, როგორც წესი, მნიშვნელოვნად განსაზღვრავს მანქანის მიერ შესრულებული სამუშაოს ხარისხსაც. მაგალითად, თუ ავტომანქანა სიმტკიცის პირობების გაუარესების გარეშე გაკეთდება არსებულზე მსუბუქი, მაშინ, შესაბამისად გაიზრდება მანქანის ტვირთამწეობა და შემცირდება საკუთარი მასის გადატანაზე დახარჯული საწვავის რაოდენობა. თანამედროვე ტექნიკის ისეთ დარგებში, როგორიცაა თვითმფრინავმშენებლობა და ა.შ., ეს პრობლემები მეტად მწვავედ დგას.



თხელკედლიანი კონსტრუქციები, რომლებიც ნაწილობრივ განვიხილეთ 24-ე პარაგრაფში, აკმაყოფილებს ზემოთ დასახელებულ პირობებს. ასეთი კონსტრუქციები სულ უფრო ფართოდ გამოიყენება პრაქტიკაში. მათთვის, ისევე როგორც საერთოდ ძელებისათვის, l სიგრძე გაცილებით დიდია განივი კვეთის ზომებთან შედარებით (ნახ. 12.1). თხელკედლიან კონსტრუქციებში დამატებით პირობად გვევ-

ლინება ის, რომ კვეთის კონტურის სიგრძე გაცილებით აღემატება მის სისქეს, ე.ი. $\pi r \gg \delta$. 24-ე პარაგრაფში განვიხილეთ რა თხელკედლიანი ძელების თავისუფალი გრება, შემოვიღეთ მათი კლასიფიკაცია, კერძოდ, განვასხვავეთ ჩაკეტილი და ღია განივი კვეთის მქონე ძელები. ღია პროფილებში მხები ძაბვები და მობრუნების კუთხე განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$\tau_i = \frac{M_z}{I_k} \delta_i, \quad \varphi = \frac{M_z l}{G I_k}, \quad (12.1)$$

სადაც გამოყენებულია აღნიშვნა

$$I_k = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n S_i \delta_i^3. \quad (12.2)$$

ამ შემთხვევაში, ძაბვები კედლის მართობი მიმართულებით წრფივი კანონით იცვლება. - კედლის შუა წერტილში იგი ნულის ტოლია, ხოლო ზედაპირებთან აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობებს. კვეთის ცალკეული ელემენტებისთვის მაქსიმალური ძაბვების ერთმანეთთან შედარებით ვადგენთ, რომ მათ შორის უდიდესი წარმოიქმნება განივი კვეთის უდიდესი სისქის მქონე ელემენტში

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_k} \delta_{\max}. \quad (12.3)$$

შემოვიღოთ გრების ინტენსიურობის ცნება, რომელიც განსაზღვრავს ძელის ერთეულოვანი სიგრძის მქონე ელემენტის ბოლო კვეთის მობრუნების კუთხეს მეორე ბოლო კვეთის მიმართ, და აღვნიშნოთ იგი θ ასოთი. განვიხილოთ ძელის dz სიგრძის ელემენტი და (12.1) ფორმულის თანახმად, დავადგინოთ გრების კუთხე

$$d\theta = \frac{M_z dz}{GI_k}.$$

ამ ფორმულის საშუალებით განვსაზღვროთ გრების ინტენსიურობა

$$\theta = \frac{d\theta}{dz} = \frac{M_z}{GI_k}. \quad (12.4)$$

ჩაკტილი პროფილის მქონე განივკვეთიანი ძელების გრებისას მხები ძაბვები თანაბრადაა განაწილებული კონტურის მართობი მიმართულებით და მათი მნიშვნელობა განისაზღვრება ფორმულით

$$\tau = \frac{M_z}{2F^* \delta}. \quad (12.5)$$

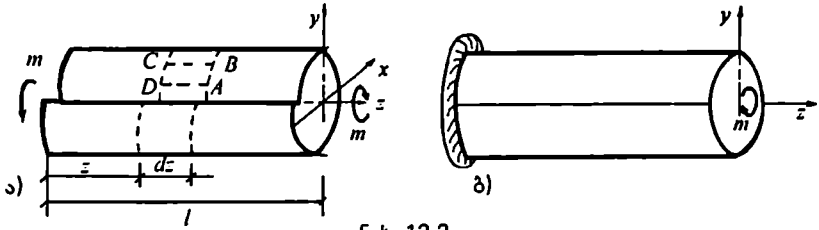
მაქსიმალური ძაბვები წარმოიქმნება პროფილის კონტურის გასწვრივ იმ ადგილზე, სადაც კედლის სისქე მინიმალურია

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2F^* \delta_{\min}}. \quad (12.6)$$

რაც შეეხება გრების კუთხეს და ინტენსიურობას, მათი განსაზღვრისათვის გა-

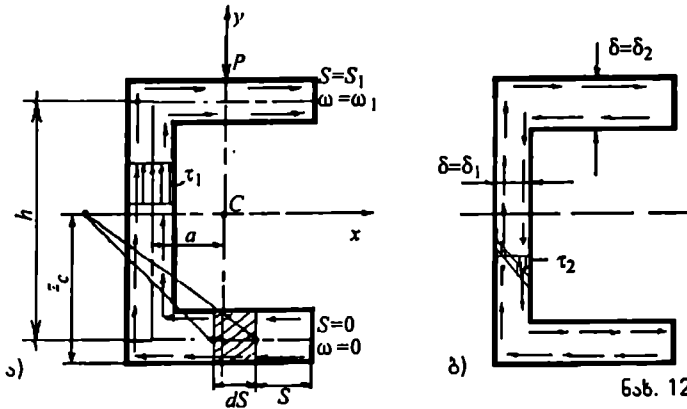
მოიყენება (12.1) და (12.4) ფორმულები. ამ თანაფარდობებში ძელის კვეთის სიხისტის გეომეტრიული მახასიათებლის გასაანგარიშებლად საჭიროა გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულა:

$$I_k = \frac{(2F^*)^2}{\int_S \frac{dS}{\delta}} \quad (12.7)$$



ნახ. 12.2

გრებისას თხელკედლიანი ძელის განივი კვეთები არ რჩება ბრტყელი (გამონაკლისია ჩაკეტილი წრიული კვეთის მქონე ძელის გრების შემთხვევა). კვეთის ცალკეული წერტილები გადაადგილდება ძელის ღერძის გასწვრივ სხვადასხვა სიდიდით, რის გამოც დეფორმაციის შემდეგ ისინი ერთ სიბრტყეში აღარ მდებარეობენ. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ კვეთი განიცდის დეპლანაციას (ნახ. 12.2, ა). ძელის ერთი ბოლოს ჩამაგრებით შეიძლება კვეთის წერტილების ღერძული გადაადგილებების საგრძნობლად შეზღუდვა, რაც მნიშვნელოვნად ზრდის



ნახ. 12.3

გრებისას კონსტრუქციის სიხისტეს. ასეთ მოვლენას, ზემოაღნიშნული თავისუფალი გრებისაგან განსხვავებით, შეზღუდული გრება ეწოდება. იოლი წარ-

მოსადგენია, რომ კონსტრუქციის დეფორმაციის განხილული შეზღუდვები მასში წარმოქმნის გრებისათვის უჩვეულო ნორმალურ ძაბვებს. ეს ძაბვები თვითგაწონასწორებულია და მათი ჯამური ნორმალური ძალა და მღუნავი მომენტები ნულის ტოლია. ამიტომ ასეთი ძაბვების მნიშვნელობების დადგენა კვეთის მეტოდიით არ ხერხდება და საჭირო ხდება სპეციალური დაშვებების გამოყენება. კერძოდ, ვაკეთებთ დაშვებას: მიუხედავად იმისა, რომ კვეთის წერტილები ერთ სიბრტყეში აღარ მდებარეობს, დეფორმაციების შედეგად კვეთის ფორმა არ იცვლება. მაგალითად, თუ კვეთი იყო წრიული, დარჩება წრიული, თუ მართკუთხა – დარჩება მართკუთხა ფორმის და ა.შ.

განვიხილოთ თხელკედლიანი ძელის განივი ღუნვა. მისი განივი კვეთისთვის (ნახ. 12.3) C_x და C_y არის მთავარი ცენტრალური ღერძები. დავუშვათ, ღუნვის გამომწვევი ძალები მოთავსებულია C_y ღერძზე გამავალ კვეთის მართობი სიბრტყეში. თუ გავითვალისწინებთ წნ 26-28-ში მიღებულ დაშვებებს და განვახორციელებთ ანალოგიურ გარდაქმნებს, დავრწმუნდებით, რომ თხელკედლიანი ძელებისთვის ნორმალური და მხები ძაბვების ადრე მიღებული ფორმულები რჩება ძალაში:

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} y, \quad \tau = \frac{Q_y S_x^*}{I_x \delta}, \quad (12. 8)$$

ოღონდ, მეორე ფორმულაში კვეთის სიგანის ნაცვლად შედის მისი კედლის სისქე (ნახ. 12.3).

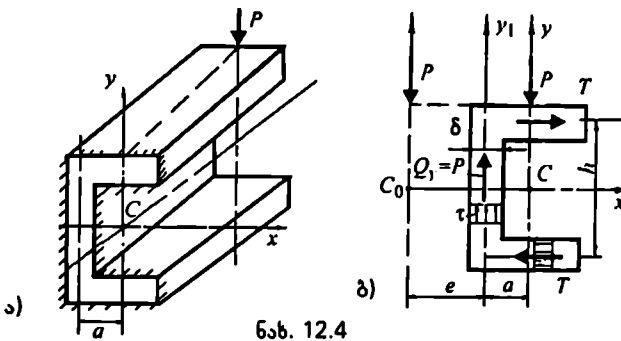
თუ C_y ძალოვანი ხაზი არ არის კვეთის სიმეტრიის ღერძი, როგორც ეს ნაჩვენებია 12.3 ნახაზზე, ძელის ღუნვის პროცესი რთულდება და მას თან ერთვის გრებაც.

კვეთის ვერტიკალურ კედლებში მოქმედი მხები ძაბვების ტოლქმედი უდრის განივ P ძალას. ჰორიზონტალურ თარობებში მოქმედი ძაბვების ტოლქმედი აღვნიშნოთ T ასოთი. მაშინ კვეთის მგრები მომენტის მნიშვნელობა

$$M_z = Th + Pa. \quad (12. 9)$$

ამრიგად, ზოგად შემთხვევაში, განივი ღუნვისას მხები ძაბვები განპირობებულია როგორც თვით განივი ძალით, ისე მგრები მომენტით. განივი ძალით წარმოქმნილი T_1 მხები ძაბვა მუდმივია კონტურის მართობი მიმართულებით (ნახ. 12.3,ა) და გაიანგარიშება (12. 8)-ის მეორე ფორმულის გამოყენებით. რაც შეეხება მგრები მომენტის მოქმედებით წარმოქმნილ T_2 ძაბვებს, ისინი კონტურის მართობი მიმართულებით წრფივი კანონით იცვლება (ნახ. 12.3,ბ) და ზედაპირებთან აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობებს. ეს ძაბვები განისაზღვრება (12.1) ფორმულის საშუალებით.

შეიძლება თუ არა გრების მოვლენის გამორიცხვა? ამისათვის აუცილებელია, მგრები მომენტი, რომელიც განისაზღვრება (12. 9) ფორმულით, უდრიდეს ნულს.



ნახ. 12.4

პირველი შესაკრების შეცვლა რაიმე ხერხით შეუძლებელია. მეორე შესაკრები კი შეიცვლება, თუ ძალოვან ხაზს არ დავამთხვევთ C_y ცენტრალურ ღერძს და დავაცილებთ მას $(a+e)$ მანძილით (ნახ. 12. 4, ბ). ამ შემთხვევაში მგრები მომენტი

$$M_z = Th - Pe. \quad (12.10)$$

მომენტის ნულთან ტოლობის პირობა საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ ძალოვანი ხაზის ისეთი მდებარეობა, რომელიც გამოირიცხავს გრების ეფექტს. ამისათვის საჭიროა ძალოვანი ხაზი დავაცილოთ y_1 ღერძს e მანძილით:

$$e = \frac{Th}{P}. \quad (12.11)$$

ნეიტრალურ ღერძზე მდებარე C_0 წერტილს, რომელშიც უნდა გადაიოდეს ძალოვანი ხაზი, რათა გამოირიცხოს გრების მოვლენა, ღუნვის ცენტრი ეწოდება. ამდენად, თუ ძალთა მოქმედების სიბრტყე გადის ღერძის ღუნვის ცენტრში, ამოცანა განიხილება ისე, როგორც სუფთა ღუნვის ზოგადი შემთხვევისას. განივი კვეთის ფორმას მნიშვნელობა არა აქვს.

ამრიგად, ღუნვის ცენტრი (ანუ კვეთის სიბისტის ცენტრი) არის კვეთის ისეთი წერტილი, რომლის მიმართ ძელის ღუნვით გამოწვეული ძაბვების მომენტი ნულის ტოლია.

ეკრძოდ, ღუნვის ცენტრების წირის გადაადგილებების დიფერენციალური განტოლება, ჩაიწერება (6. 6)-ის შესაბამისად:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{M_x}{EI_x}. \quad (12.12)$$

განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა, როცა ძელი განიცდის ღუნვას ორივე მთავარი მიმართულებით. Q_y და Q_x მხები ძალების მიერ გამოწვეული ძაბვები განი-

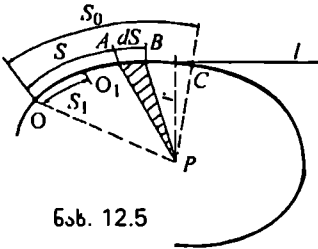
საზღვრება დამოუკიდებლად, ხოლო საერთო ძაბვის მნიშვნელობა – მიღებული შედეგების შეჯამებით:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{I_x \delta} + \frac{Q_x S_y^*}{I_y \delta}. \quad (12.13)$$

ნორმალური ძაბვები და გადაადგილებები განისაზღვრება (12.8)-ის პირველი ფორმულის ანალოგიურად და (12.12) დიფერენციალური განტოლების გამოყენებით. ცხადია, უკანასკნელ შემთხვევაში მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ ორი გადაადგილების გეომეტრიული ჯამი.

§78. თხელკედლიანი კვეთის სექტორული მახასიათებლები

კვეთის გეომეტრიული მახასიათებლები განვიხილეთ სახელმძღვანელოს მე-სამე თავში. მაგრამ თხელკედლიანი კვეთების თავისებურებებიდან გამომდინარე, აუცილებელია დამატებით ე.წ. *სექტორული მახასიათებლების შემოღება*. განვიხილოთ კვეთის კონტურის შუა ხაზი (ნახ. 12.5), ავირჩიოთ მასზე საწყისი O წერტილი და P პოლუსი.



ნახ. 12.5

კონტურზე ნებისმიერი A წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება საწყისი O წერტილიდან S მანძილით. გავატაროთ ამ წერტილში კონტურის მხები. PAB სამკუთხედის გაორკეცებული ფართობი (მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეების სიზუსტით)

$$d\omega = rds,$$

სადაც r არის მანძილი P წერტილიდან კონტურის I მხებამდე. ნებისმიერი C წერტილისათვის ინტეგრების საშუალებით მივიღებთ

$$\omega = \int_0^{S_0} rds \quad (12.14)$$

როგორც ვხედავთ, ინტეგრების საზღვრები წარმოდგენილია O და C წერტილების მდებარეობით. ამრიგად, ნებისმიერი C წერტილის მდებარეობა რკალზე შეიძლება განისაზღვროს ახალი სიდიდით, რომელიც მრუდგვეგვრდიანი POC სამკუთხედის გაორკეცებული ფართობია. ამ სიდიდეს *სექტორულ კოორდინატს* ან *სექტორულ ფართობს* უწოდებენ.

თუ კონტურის რკალის გასწვრივ მოძრაობისას r რადიუს-ვექტორის ბოლო ბრუნავს საათის ისრის მიმართულებით, სექტორული ფართობი იზრდება, საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით მოძრაობისას კი – მცირდება.

სექტორული ფართობის მნიშვნელობა დამოკიდებულია O საწყისი წერტილისა და P პოლუსის მდებარეობაზე. მისი ეპიურის აგება შეიძლება კვების კონტურზე მართობი მიმართულებით ω -ს მნიშვნელობის გადაზომვით.

განვიხილოთ სექტორული ფართობის სიდიდის დამოკიდებულება საწყისი წერტილის არჩევაზე. ავიღოთ ახალი საწყისი O_1 წერტილი და მის მიმართ განვსაზღვროთ სექტორული ფართობი

$$\omega_1 = \int_{s_1}^s r ds = \int_0^s r ds - \int_0^{s_1} r ds.$$

მეორე შესაკრები O_1 წერტილის შესაბამისი სექტორული ფართობია ძველ სისტემაში, ე.ი. ის მუდმივი სიდიდეა. თუ აღვნიშნავთ ამ სიდიდეს c ასოთი, მივიღებთ ფორმულას

$$\omega_1 = \omega - c. \quad (12.15)$$

ამრიგად, საწყისი წერტილის შეცვლა ამცირებს ნებისმიერად აღებულ წერტილის შესაბამის სექტორულ ფართობს ერთი და იმავე სიდიდით. ეს სიდიდე ძველი სისტემის მიმართ ახალი სისტემის საწყისი წერტილის სექტორული ფართობია.

განვიხილოთ P პოლუსის შეცვლის შემთხვევა. მის ნაცვლად ავირჩიოთ ახალი P_1 პოლუსი (ნახ. 12. 6).

მრუდგვერდიან PAB სამკუთხედის გაორკეცებული ფართობი მაღალი

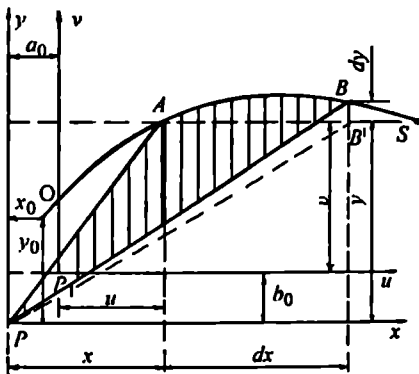
რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდის სიზუსტით შეიძლება შეიცვალოს PAB და P_1BB' სამკუთხედების გაორკეცებული ფართობების სხვაობით

$$d\omega = ydx - xdy, \quad (12.16)$$

საიდანაც მივიღებთ ფორმულას

$$\omega = \int_0^s (ydx - xdy). \quad (12.17)$$

ანალოგიურად განისაზღვრება სექტორული ფართობი P_1 პოლუსის შემთხვევაშიც



ნახ. 12.6

$$\omega_1 = \int_0^s (vdu - udv). \quad (12.18)$$

ძველ და ახალ კოორდინატებს შორის გვაქვს შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$u = x - a_0; \quad v = y - b_0; \quad du = dx; \quad dv = dy.$$

ეს შედეგები გამოვიყენოთ (12.18) ფორმულის გარდაქმნისათვის

$$\omega_1 = \int_0^s [(y - b_0)dx - (x - a_0)dy] = \int_0^s ydx - xdy - b_0 \int_0^s dx + a_0 \int_0^s dy,$$

საიდანაც, საბოლოოდ, მივიღებთ ძველი და ახალი პოლუსების მიმართ კვეთის სექტორული ფართობების ერთმანეთთან დამაკავშირებელ ფორმულას

$$\omega_1 = \omega - b_0(x - x_0) + a_0(y - y_0). \quad (12.19)$$

ამ ფორმულაში x_0 და y_0 საწყისი წერტილის კოორდინატებია, ნახ. 12.6.

ამრიგად, პოლუსის შეცვლისას საწყისი სისტემის კოორდინატების მიმართ კვეთის სექტორული ფართობი იცვლება წრფივი კანონით.

თხელკედლიანი ძელების გაანგარიშებისას გამოვიყენება კვეთის გეომეტრიული სხვა მახასიათებლებიც. კერძოდ, სექტორული სტატიკური მომენტი

$$S_{\omega} = \int_F \omega dF. \quad (12.20)$$

ამ ფორმულაში და შემდგომში ადგილი აქვს ტოლობას $dF = \delta \cdot ds$, სადაც δ არის კვეთის კედლის სისქე.

სექტორული წრფივი სტატიკური მომენტი C_x და C_y ღერძების მიმართ განისაზღვრება ფორმულებით

$$S_{\omega x} = \int_F \omega x dF; \quad S_{\omega y} = \int_F \omega y dF. \quad (12.21)$$

სექტორული ინერციის მომენტი

$$I_{\omega} = \int_F \omega^2 dF. \quad (12.22)$$

თუ კვეთის კედლის სისქე მუდმივია, მაშინ სექტორული მახასიათებლების გამოსათვლელი ფორმულები შეიძლება გარდავქმნათ შემდეგნაირად

$$S_{\omega} = \delta \int_0^s \omega ds; \quad I_{\omega} = \delta \int_0^s \omega^2 ds;$$

$$S_{\omega x} = \delta \int_0^s \omega x ds; \quad S_{\omega y} = \delta \int_0^s \omega y ds. \quad (12.23)$$

განვსაზღვროთ სექტორული მახასიათებლების მნიშვნელობები ახალი საწყისი წერტილისათვის. ამისთვის გავითვალისწინოთ ω_1 -ის მნიშვნელობა (12.15) გამოსახულებიდან (12.20), (12.21), (12.22) ფორმულებში:

$$S_{\omega_1} = \int_F \omega_1 dF = \int_F (\omega - c) dF = S_{\omega} - cF;$$

$$S_{\omega_1 x} = \int_F \omega_1 x dF = \int_F (\omega - c) x dF = \int_F \omega x dF - c \int_F x dF;$$

$$S_{\omega_1 y} = \int_F \omega_1 y dF = \int_F (\omega - c) y dF = \int_F \omega y dF - c \int_F y dF;$$

$$I_{\omega_1} = \int_F \omega_1^2 dF = \int_F (\omega - c)^2 dF = \int_F \omega^2 dF - 2c \int_F \omega dF + c^2 \int_F dF.$$

Cx და Cy მთავარი ცენტრალური ღერძისთვის გვაქვს შემდეგი ტოლობები:

$$\int_F y dF = 0; \quad \int_F x dF = 0; \quad \int_F xy dF = 0 \quad (12.24)$$

და საბოლოოდ, მივიღებთ:

$$S_{\omega_1} = S_{\omega} - cF; \quad (12.25)$$

$$S_{\omega_1 x} = S_{\omega x}; \quad S_{\omega_1 y} = S_{\omega y}; \quad (12.26)$$

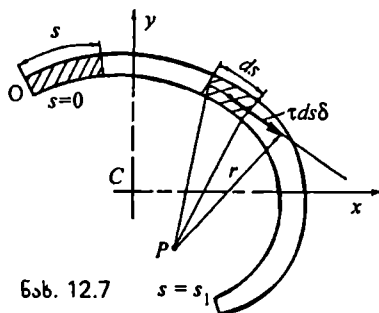
$$I_{\omega_1} = I_{\omega} - 2cS_{\omega} + c^2 F. \quad (12.27)$$

ამრიგად, ახალი საწყისი წერტილისთვის კვეთის სექტორული სტატიკური და სექტორული ინერციის მომენტები განისაზღვრება (12.25), (12.26) და (12.27) ფორმულებით. რაც შეეხება ღერძულ სექტორულ წრფივ სტატიკურ მომენტებს, მათი მნიშვნელობები არ არის დამოკიდებული საწყისი წერტილის მდებარეობაზე.

განვიხილოთ ახალი პოლუსის მიმართ კვეთის სექტორული სტატიკური და ღერძული წრფივი სტატიკური მომენტების მნიშვნელობები. ამისათვის (12.20) და (12.21) ფორმულებში გავითვალისწინოთ შესაბამისი სექტორული ფართობის მნიშვნელობა ახალი პოლუსის მიმართ:

$$\begin{aligned}
 S_{\omega_1} &= \int_F \omega_1 dF = \int_F [\omega - b_0(x - x_0) + a_0(y - y_0)] dF = \\
 &= \int_F \omega dF - b_0 \int_F x dF + b_0 x_0 \int_F dF + a_0 \int_F y dF - a_0 y_0 \int_F dF; \\
 S_{\omega_1 x} &= \int_F \omega_1 x dF = \int_F [\omega - b_0(x - x_0) + a_0(y - y_0)] x dF = \\
 &= \int_F \omega x dF - b_0 \int_F x^2 dF + b_0 x_0 \int_F x dF + a_0 \int_F x y dF - a_0 y_0 \int_F x dF; \\
 S_{\omega_1 y} &= \int_F \omega_1 y dF = \int_F [\omega - b_0(x - x_0) + a_0(y - y_0)] y dF = \\
 &= \int_F \omega y dF - b_0 \int_F x y dF + b_0 x_0 \int_F y dF + a_0 \int_F y^2 dF - a_0 y_0 \int_F y dF.
 \end{aligned}$$

საბოლოოდ, მთავარი ცენტრალური ღერძებისათვის (12.24)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ:



ნახ. 12.7

$$S_{\omega_1} = S_{\omega} + (b_0 x_0 - a_0 y_0) F; \quad (12.28)$$

$$S_{\omega_1 x} = S_{\omega x} - b_0 I_y;$$

$$S_{\omega_1 y} = S_{\omega y} + a_0 I_x; \quad (12.29)$$

ზოგადი შემთხვევისათვის დავადგინოთ ღუნვის ცენტრის მდებარეობა. ამისათვის გავიანგარიშოთ შიგა ძალების მომენტი P პოლუსის მიმართ (ნახ. 12.7)

$$M_P = \int_0^s (\tau \delta s) r = \frac{Q_y}{I_x} \int_0^s S_x^* r ds + \frac{Q_x}{I_y} \int_0^s S_y^* r ds.$$

მიღებულ ფორმულებში S_x^* და S_y^* კვეთის ნაწილის სტატიკური მომენტებია C_x და C_y ღერძების მიმართ

$$S_x^* = \int_0^s y \delta ds; \quad S_y^* = \int_0^s x \delta ds. \quad (12.30)$$

(12.24) და (12.30) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\frac{dS_x^*}{ds} = y \delta, \quad S_x^*(0) = 0, \quad S_x^*(S_1) = 0 \quad (12.31)$$

$$\frac{dS_y^*}{ds} = x \delta, \quad S_y^*(0) = 0, \quad S_y^*(S_1) = 0 \quad (12.32)$$

თუ (12.31) და (12.32) ფორმულების გათვალისწინებით გარდავქმნით ინტეგრალურ გამოსახულებებს, მივიღებთ:

$$\int_0^s S_x^* r ds = S_x^* \omega_1 \Big|_0^{s_1} - \int_0^{s_1} \omega_1 \frac{dS_x^*}{ds} ds = - \int_0^{s_1} \omega_1 \delta y ds = -S_{\omega_1 y};$$

$$\int_0^s S_y^* r ds = S_y^* \omega_1 \Big|_0^{s_1} - \int_0^{s_1} \omega_1 \frac{dS_y^*}{ds} ds = - \int_0^{s_1} \omega_1 \delta x ds = -S_{\omega_1 x}.$$

ამ შედეგის გათვალისწინებით შიგა ძალების მომენტი ჩაიწერება ასეთნაირად

$$M_p = -\frac{Q_y}{I_x} S_{\omega_1 y} - \frac{Q_x}{I_y} S_{\omega_1 x}. \quad (12.33)$$

ამ ფორმულის საშუალებით შეიძლება პოლუსის ისეთნაირად შერჩევა, რომ მგრები მომენტი ნულის ტოლი იყოს. ამისათვის საჭიროა შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$S_{\omega_1 x} = 0, \quad S_{\omega_1 y} = 0. \quad (12.34)$$

ამრიგად, თუ სრულდება (12.34) პირობები Q_x და Q_y მხები ძალების ნებისმიერი მნიშვნელობებისას, მგრები მომენტი ნულის ტოლია და ძელი გრეხას არ განიცდის.

დავადგინოთ პოლუსის ისეთი მდებარეობა, რომლისთვისაც სრულდება (12.34) პირობები. ასეთი წერტილი ერთდროულად ღუნვის ცენტრიც იქნება.

რადგანაც ამ წერტილში გარე ძალების მოქმედების სიბრტყეების გავლისას მის მიმართ განივი ძალების მომენტებიც ნულის ტოლია.

ღუნვის ცენტრის კოორდინატების დასადგენად ვისარგებლოთ (12.34) პირობით. ავირჩიოთ ნებისმიერი P პოლუსი და O საწყისი წერტილი. განვსაზღვროთ კვეთის S_{ax} და S_{ay} სექტორული წრფივი ღერძული მომენტები ნებისმიერი სხვა პოლუსისათვის. ასეთი გეომეტრიული მახასიათებლები გაიანგარიშება (12.29) ფორმულების გამოყენებით. მაგრამ პოლუსი ისე უნდა შეიარჩეს, რომ სრულდებოდეს (12.34) პირობები:

$$S_{ay} + a_0 I_x = 0, \quad S_{ax} - b_0 I_y = 0. \quad (12.35)$$

(12.35) განტოლებები გვაძლევს ღუნვის ცენტრის კოორდინატების დადგენის საშუალებას:

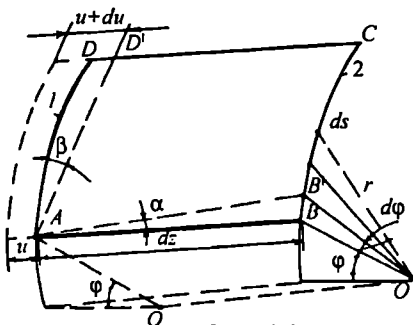
$$a_0 = -\frac{S_{ay}}{I_x}, \quad b_0 = \frac{S_{ax}}{I_y}. \quad (12.36)$$

აღსანიშნავია, რომ საწყისი წერტილის შეცვლა შინაარსობრივად რაიმე ცვლილებას არ იწვევს, რაშიც ვრწმუნდებით (12.26) ფორმულების განხილვით.

§79. ნორმალური და მეორეული მხები ძაბვები ღია პროფილის თხელკედლიანი ძელის გრენისას

თხელკედლიანი ძელის გრენისას, როგორც აღვნიშნეთ, გვაქვს კვეთის დეპლანაცია, მისი წერტილები გადაადგილდება z ღერძის მიმართულებით u მანძილზე (ნახ. 12.2 და ნახ.12.8) კონტურის გასწვრივ. ამ გადაადგილებების არათანაბრობა იწვევს ნორმალური ძაბვების წარმოქმნას.

მიუხედავად დეპლანაციისა, ვთვლით, რომ პირველი კვეთის ფორმა (ნახ.12.8) არ იცვლება და იგი მობრუნდება O უძრავი წერტილის მიმართ φ კუთხით. ამ წერტილს გრენის ცენტრი ეწოდება. მეორე კვეთი, რომელიც პირველისაგან dz მანძილითაა დაშორებული, მობრუნდება $\varphi + d\varphi$ კუთხის



ნახ. 12.8

ტოლი სიდიდით. განვსაზღვროთ მართი DAB კუთხის ცვლილება

$$\gamma = \alpha + \beta = \frac{|BB'|}{|AB|} + \frac{|DD'|}{|AD|},$$

სადაც მონაკვეთების სიგრძეები

$$|BB'| = r d\varphi; \quad |AB| = dz; \quad |DD'| = du; \quad |AD| = ds.$$

ამ მნიშვნელობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dz} + \frac{du}{ds} = r\theta + \frac{du}{ds}.$$

გამოვიყენოთ ჰუკის კანონი და წარმოვადგინოთ შედეგი შემდეგი სახით

$$\frac{\tau}{G} = \theta r + \frac{du}{ds}. \quad (12.37)$$

მაშინ გადაადგილებების დიფერენციალი

$$du = \left(\frac{\tau}{G} - \theta r \right) ds. \quad (12.38)$$

როგორც დავადგინეთ, ღია პროფილის მქონე თხელკედლიანი ძელის გრები-სას კედლის შუა წერტილებში მხები ძაბვები ნულის ტოლია. თუ განვიხილავთ ასეთი წერტილების გადაადგილებას, ცხადია, რომ (12. 38) განტოლება მიიღებს სახეს

$$du = -\theta r ds, \quad (12.39)$$

და გადაადგილება

$$u = - \int_0^s \theta r ds = -\theta \omega. \quad (12.40)$$

ფორმულაში საწყისი წერტილის გადაადგილება z ღერძის მიმართულებით მიჩნეულია ნულის ტოლად $u_0=0$, რასაც საკითხის შემდგომი განხილვისათვის არსებითი მნიშვნელობა არა აქვს.

აღვნიშნოთ, რომ ყოველი კვეთისათვის θ ფარდობითი გრების კუთხე მუდმივია, რამაც საშუალება მოგვცა (12. 40) ფორმულის მიღებისას ეს სიდიდე გამოგვეტანა ინტეგრალის ნიშნის გარეთ. ამრიგად, დეპლანაცია, რომელიც ხასიათდება u გადაადგილებით, იცვლება სექტორული ფართობის ცვლილების კანონზომიერებით.

დეპლანაციის ფორმულაში არის თავისებური განუსაზღვრელობა: რადგან ω -ს მნიშვნელობა დამოკიდებულია საწყისი წერტილისა და პოლუსის მდებარეობაზე, პირველის შეცვლა იწვევს ω -ს შეცვლას კვეთის ყველა წერტილისათვის ერთი და იმავე მუდმივი სიდიდით, რაც (12.40)-ის თანახმად, შეესაბამება მთელი კვეთის, როგორც ერთიანი ხისტი სხეულის, გადაადგილებას z ღერძის

მიმართულებით. პოლუსის შეცვლის შედეგად სექტორული ფართობი შეიცვლება (12.19)-ის შესაბამისად. რაც შეეხება ძელის კვეთს, სექტორული ფართობის შეცვლა ცვლილებებს შეიტანს კვეთის წერტილების გადაადგილებებში. მაგრამ ეს გადაადგილებები შეესაბამება სივრცეში კვეთის მობრუნებას.

მიუხედავად აღნიშნული განუსაზღვრელობისა, (12. 40) ფორმულა სრულყოფილად ასახავს კვეთის სიბრტყის დეფორმაციას.

როგორც ცნობილია, წრფივი დეფორმაცია

$$\varepsilon = \frac{du}{dz} = -\omega \frac{d\theta}{dz}. \quad (12.41)$$

მაშინ ჰუკის კანონის საფუძველზე დავადგენთ კვეთში ნორმალური ძაბვების მიწვენილობებს:

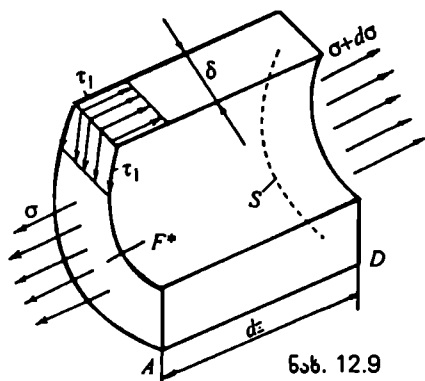
$$\sigma = E\varepsilon = -E\omega \frac{d\theta}{dz}. \quad (12.42)$$

ამრიგად, თუ გრების θ ინტენსივობა ცვლადია z მიმართულებით, კვეთში წარმოიქმნება ნორმალური ძაბვები. მაგრამ, თუ ნორმალური ძაბვები ცვლადია z მიმართულებით, როგორც უკვე დავრწმუნდით განივი ლუნვის განხილვისას, ისინი თვით იწვევენ მხებ ძაბვებს.

12.1 ნახაზზე გამოსახული ძელიდან ამოვკრათ s სიგრძის კონტურის მქონე ელემენტი. მასზე მოდებული ძაბვები ნაჩვენებია 12.9 ნახაზზე. შევადგინოთ ელემენტის წონასწორობის პირობა

12.1 ნახაზზე გამოსახული ძელიდან ამოვკრათ s სიგრძის კონტურის მქონე ელემენტი. მასზე მოდებული ძაბვები ნაჩვენებია 12.9 ნახაზზე. შევადგინოთ ელემენტის წონასწორობის პირობა

$$\tau_1 \delta dz + \int_{F^*} d\sigma dF = 0,$$



საიდანაც მივიღებთ მხები ძაბვების ფორმულას

$$\tau_1 = -\frac{1}{\delta} \int_{F^*} \frac{d\sigma}{dz} dF.$$

თუ გავითვალისწინებთ (12. 42)-სა, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\tau_1 = \frac{ES\omega^*}{\delta} \frac{d^2\theta}{dz^2} \quad (12.43)$$

სადაც $\Delta \sigma^*$ არის F^* ფართობის მქონე კვეთის ნაწილის სექტორული სტატიკური მომენტი (ნახ. 12.9). მიღებული შედეგი მოწმობს, რომ მეორეული მხები ძაბვები თანაბრადაა განაწილებული კონტურის მართობი მიმართულებით (ნახ. 12.9). მაგრამ ეს ეწინააღმდეგება საწყის დაშვებას (12.38) გამოსახულებაში, რომ კედლის შუა წერტილებში მხები ძაბვები ნულის ტოლია. ასეთივე ხასიათის წინააღმდეგობას ადგილი ჰქონდა ძელის განივი ღუნვის განხილვისას. აღნიშნული უზუსტობა არსებით გავლენას არ ახდენს ორივე ამოცანის ამოხსნის საბოლოო შედეგებზე.

§80. თხელკედლიანი ძელის შეზღუდული გრესა

როგორც ზემოთ აღინიშნა, თუ თხელკედლიანი ძელის გრესისას შევზღუდავთ გადაადგილებებს, მაგალითად, ხისტად ჩავამაგრებთ კვეთს, ე.ი. გამოვრიცხავთ დეპლანაციას, ძელში წარმოიქმნება გრესისათვის უჩვეულო ნორმალური ძაბვები. ეს გარემოება ზეგავლენას ახდენს ძირითად დეფორმირებულ მდგომარეობაზე და ძელის სიხისტე გრესაზე იზრდება. რაც შეეხება ნორმალურ ძაბვებს, ისინი თვითგაწონასწორებულია:

$$N = \int_F \sigma dF = 0; \quad M_x = \int_F \sigma y dF = 0; \quad M_y = \int_F \sigma x dF = 0.$$

ამ პირობებიდან გამომდინარე, (12.42)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$E \frac{d\theta}{dz} \int_F \omega dF = 0; \quad E \frac{d\theta}{dz} \int_F \omega y dF = 0; \quad E \frac{d\theta}{dz} \int_F \omega x dF = 0.$$

რადგანაც $(E d\theta/dz) \neq 0$, საბოლოოდ, პირობებს, რომლებიც სრულდება შეზღუდული გრესისათვის, აქვს სახე:

$$\int_F \omega dF = 0; \tag{12.44}$$

$$\int_F \omega y dF = 0; \quad \int_F \omega x dF = 0. \tag{12.45}$$

ნორმალური ძაბვების ფორმულის გამოყენებისას კვეთის პოლუსი მოვათავსეთ გრესის ცენტრში და ამ პირობის გათვალისწინებით მივიღეთ (12.42) ფორმულა, რომლის გამოყენებამ მიგვიყვანა (12.45) პირობამდე. ამრიგად, თუ გრესის ცენტრი ემთხვევა პოლუსს, სრულდება (12.45) პირობები, რაც მოწმობს, რომ ეს წერტილი ამავე დროს ღუნვის ცენტრიც არის. (12.44) პირობის შესრულება მოითხოვს საწყისი წერტილის შესაბამის შერჩევას. ამისთვის თავდაპირველად ვიღებთ ნებისმიერ საწყის წერტილს, მის მიმართ დავადგენთ სექტორული სტა-

ტიკური მომენტის მნიშვნელობას და შემდეგ, (12.25)-ის გამოყენებით, ვადგენთ იმ მუდმივის მნიშვნელობას, რომლითაც უნდა შეიცვალოს სექტორული ფართობი კონტურის ყოველ წერტილში, რომ შესრულდეს (12.44) პირობა:

$$S_{\omega} - cF = 0, \quad c = \frac{S_{\omega}}{F}. \quad (12.46)$$

წერტილი, რომელშიც გადაანგარიშებული სექტორული სტატიკური მომენტი ნულის ტოლია, განსაზღვრავს ახალ საწყის წერტილს.

მთავარი სექტორული ფართობი ეწოდება კვეთის შესაბამის მახასიათებელს, რომელიც აგებულია მთავარი ცენტრალური ღერძებისთვის, ღუნვის ცენტრი აღებულია როგორც პოლუსი, საწყისი წერტილი კი შერჩეულია ისე, რომ სრულდება (12.44) პირობა.

როგორც აღვნიშნეთ, მხები ძაბვები შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც კონტურის მართობი მიმართულებით თანაბრად განაწილებული τ_1 და წრფივი კანონით ცვლადი τ_2 ძაბვები (ნახ. 12.3). ამიტომ, მგრები მომენტი შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც შესაბამისი ორი მგრები მომენტის ჯამი

$$M_z = M_1 + M_2. \quad (12.47)$$

პირველი მომენტი შეესაბამება თანაბრად განაწილებულ ძაბვებს (ნახ. 12.3, ა)

$$M_1 = \int_0^s \tau_1 \delta r ds = E \frac{d^2\theta}{dz^2} \int_0^s S_{\omega}^* d\omega = E \frac{d^2\theta}{dz^2} \left[S_{\omega}^* \omega \Big|_0^{\omega_1} - \int_0^{\omega_1} \omega \frac{dS_{\omega}^*}{d\omega} d\omega \right]$$

გავიანგარიშოთ ზოგიერთი დამხმარე სიდიდე

$$S_{\omega}^*(0) = 0; \quad S_{\omega}^*(\omega_1) = 0; \quad \int_0^{\omega_1} \omega dS_{\omega}^* = \int_0^{\omega_1} \omega^2 dF = I_{\omega}.$$

ამ შედეგების გათვალისწინებით, საბოლოოდ მივიღებთ ფორმულას

$$M_1 = -EI_{\omega} \frac{d^2\theta}{dz^2}. \quad (12.48)$$

მეორე მომენტი შეესაბამება ძაბვების განაწილებას, წარმოდგენილს 12.3, ბ ნახაზზე. ამ მომენტის მნიშვნელობას დავადგენთ (12.4) ფორმულის საშუალებით

$$M_2 = \theta GI_k. \quad (12.49)$$

მიღებული შედეგების (12.47) გამოსახულებაში გათვალისწინებით, მივიღებთ მობრუნების კუთხის ინტენსიურობის მიმართ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \frac{GI_k}{EI_\omega} \theta = -\frac{M_z}{EI_\omega}. \quad (12.50)$$

ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\theta = C_1 \operatorname{sh} \alpha z + C_2 \operatorname{ch} \alpha z + \theta^*, \quad (12.51)$$

სადაც $\alpha = \sqrt{\frac{GI_k}{EI_\omega}}$; θ^* - დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნია. მისი

განსაზღვრა, როგორც წესი, რთული არ არის. კერძოდ, თუ გრების მომენტი იცვლება წრფივი კანონით

$$M_z = A + Bz,$$

მაშინ

$$\theta^* = \frac{A + Bz}{GI_k}. \quad (12.52)$$

მხები ძაბვის პირველი მდგენელის დასადგენად (12.43) ფორმულაში მ-ს მნიშვნელობის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$\tau_1 = -\frac{M_1}{I_\omega \delta} S_\omega^*. \quad (12.53)$$

რაც შეეხება მეორე მხებ ძაბვას, მისი განსაზღვრისათვის გამოიყენება (12.1) ფორმულა.

§81. თხელკედლიანი ძეგლის დატვირთვის ზოგადი შემთხვევა

თხელკედლიანი ძეგლის კვეთის დებლანაციის შედეგად ცალკეული წერტილები გადაადგილდება z ღერძის მიმართულებით (12.40)-ის შესაბამისად. მაგრამ, ზოგად შემთხვევაში, თუ ძელი დამატებით განიცდის გაჭიმვა-კუმშვას და ღუნვას ორ სიბრტყეში, შესაბამისი გადაადგილებები განისაზღვრება კვეთის x ღერძის მიმართულებით u_0 გადაადგილებებით და C_x და C_y ღერძების მიმართ მისი მობრუნების φ_x და φ_y კუთხეებით. ამიტომ კვეთის წერტილების სრული გადაადგილება

$$u = u_0 + \varphi_y x + \varphi_x y - \theta z. \quad (12.54)$$

ამ შემთხვევისათვის ნორმალური ძაბვები გამოითვლება შემდეგნაირად

$$\sigma = E \frac{du}{dz} = E \left(\frac{du_0}{dz} + x \frac{d\varphi_y}{dz} + y \frac{d\varphi_x}{dz} - \omega \frac{d\theta}{dz} \right). \quad (12.55)$$

გარდაქმნებისას მხედველობაში მივიღოთ (12.44) და (12.45) პირობები და გავითვალისწინოთ, რომ C_x და C_y – მთავარი ცენტრალური ღერძებია.

გავამრავლოთ (12.55) თანაფარდობა dF სიდიდეზე და განვსაზღვროთ ნორმალური ძალა

$$N = \int_F \sigma dF = EF \frac{du_0}{dz}. \quad (12.56)$$

ანალოგიურად დავადგენთ მღუნავი მომენტების მნიშვნელობებს, თუ (12.55) გამოსახულებას გავამრავლებთ შესაბამისად $y dF$ და $x dF$ სიდიდეებზე და მიღებულ გამოსახულებებს შემდგომ ინტეგრირებით:

$$M_x = \int_F \sigma y dF = EI_x \frac{d\varphi_x}{dz}; \quad (12.57)$$

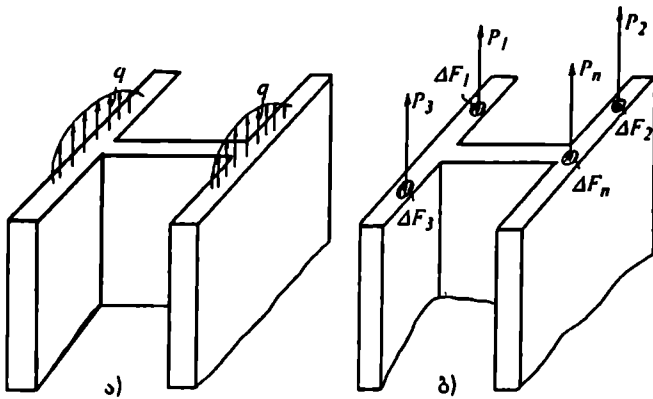
$$M_y = \int_F \sigma x dF = EI_y \frac{d\varphi_y}{dz}. \quad (12.58)$$

ახლა (12.55) თანაფარდობა გავამრავლოთ ωdF -ზე და ინტეგრირებით განვსაზღვროთ ახალი ძალოვანი ფაქტორი, რომელსაც *ბიმომენტრი* ეწოდება

$$B = \int_F \sigma \omega dF = -EI_\omega \frac{d\theta}{dz}. \quad (12.59)$$

ნორმალური ძალა და მღუნავი მომენტები ცნობილი ძალოვანი ფაქტორებია; ასევე კარგადაა ცნობილი მათი დადგენის ხერხი – კვეთის მეთოდი და წონასწორობის პირობები. რაც შეეხება ბიმომენტს, იგი ჩვენთვის ახალი, ჯერ კიდევ უცნობი ძალოვანი ფაქტორია და ახასიათებს თვითგაწონასწოებულ დაძაბულ მდგომარეობას. მისი განსაზღვრისთვის წონასწორობის პირობები ვერ იძლევა შედეგს. ამიტომ გამოიყენება უშუალოდ (12.59) ფორმულა. მაგალითად, თუ ძელის კვეთში მოდებულია განაწილებული ძალები (ნახ. 12.10,ა), მივიღებთ

$$B = \int_F \sigma(s) \omega(s) dF. \quad (12.60)$$



ნახ. 12.10

(12.59) ფორმულიდან განისაზღვრება ბიომომენტი კვეთში შეეუღრსული ძალების მოქმედებისას (ნახ. 12.10,ბ)

$$B = \int_F \sigma \omega dF = \sum_{i=1}^n \lim_{\Delta F_i \rightarrow 0} \frac{P_i}{\Delta F_i} \Delta F_i \omega_i = \sum_{i=1}^n P_i \omega_i. \quad (12.61)$$

ამ ფორმულაში ω_i აღნიშნავს სექტორულ ფართობს P_i ძალის მოდების კოორდინატისათვის. (12.56), (12.57), (12.58) და (12.59) ფორმულების საშუალებით განვსაზღვროთ ცალკეული ძალოვანი ფაქტორების შესაბამისი ნორმალური ძაბვების მნიშვნელობები:

$$\begin{aligned} \sigma_N &= E \frac{du_0}{dz} = \frac{N}{F}; & \sigma_{M_x} &= E \frac{d\varphi_x}{dz} y = \frac{M_x}{I_x} y; \\ \sigma_{M_y} &= E \frac{d\varphi_y}{dz} x = \frac{M_y}{I_y} x; & \sigma_B &= -E \frac{d\theta}{dz} \omega = \frac{B}{I_\omega} \omega. \end{aligned} \quad (12.62)$$

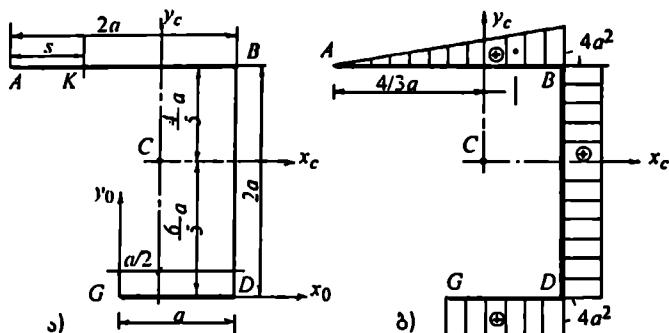
ამ შედეგების (12.55) ფორმულაში გათვალისწინებით მივიღებთ კვეთში ნორმალური ძაბვების საერთო მნიშვნელობას

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x + \frac{B}{I_\omega} \omega. \quad (12.63)$$

ამრიგად, (12. 63) ფორმულაში უკვე კარგად ცნობილ სამ წევრს დაემატა მეოთხე წევრი, რომელიც ახასიათებს კვეთის სიბრტყის გამრუდებით წარმოქმნილ თვითგაწონასწორებულ ძაბვებს.

მეთოდურე თაყის მაგალითები

მაგალითი 12.1. ავავთ 12.11 ნახაზზე ნაჩვენები მუდმივი δ სისქის კედლის მქონე კვეთების სექტორული ფართობის ეპიურა (ნახაზზე ნაჩვენებია კვეთის შუა ხაზი)



ნახ. 12.11

ავილოთ A წერტილი საწყის წერტილად, პოლუსი კი დავამთავროთ D წერტილს. როდესაც რადიუს-ვექტორის ბოლო A წერტილიდან B წერტილამდე მოძრაობს, სექტორული ფართობი დადებითია და იზრდება წრფივი კანონით:

$$\omega = 2as;$$

$$s = 0: \quad \omega = 0;$$

$$s = 2a: \quad \omega = 4a^2.$$

რადიუს-ვექტორის ბოლოს მოძრაობა B წერტილიდან G წერტილამდე არ ცვლის სექტორულ ფართობს.

მაგალითი 12.2. ავავთ 12.12 ნახაზზე ნაჩვენები მუდმივი δ სისქის კედლის მქონე კვეთისათვის მთავარი სექტორული ფართობის ეპიურა.

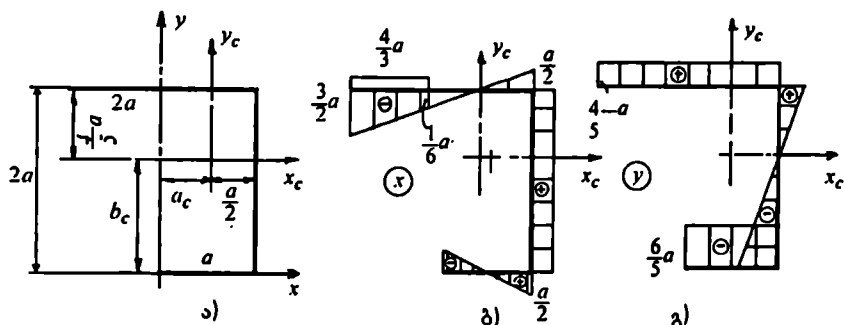
დავადგინოთ კვეთის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები

$$a_c = \frac{\left(2a \cdot 0 + 2a \cdot a + a \frac{a}{2}\right) \delta}{(2a + 2a + a) \delta} = \frac{a}{2}; \quad b_c = \frac{(2a \cdot 2a + 2a \cdot a + a \cdot 0) \delta}{(2a + 2a + a) \delta} = \frac{6}{5} a.$$

ცენტრალური ღერძების მიმართ (ნახ. 12.12) კვეთის ინერციის მომენტები და მისი ფართობი იქნება

$$I_{x_c} = \delta 2a \left(\frac{4a}{5}\right)^2 + \frac{\delta (2a)^3}{12} + \delta 2a \left(\frac{1}{5} a\right)^2 + \delta a \left(\frac{6}{5} a\right)^2 = \frac{52}{15} \delta a^3;$$

$$I_{y_c} = \frac{\delta (2a)^3}{12} + \delta 2a \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{\delta a^3}{12} + \delta 2a \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} \delta a^3; \quad F = \delta (2a + 2a + a) = 5\delta a.$$



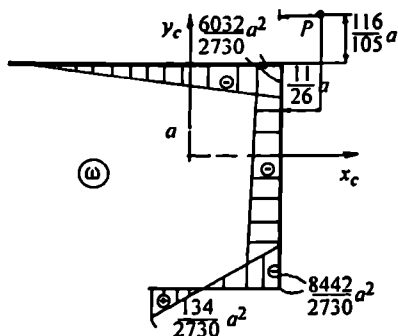
ნახ. 12.12

ღუნვის ცენტრის კოორდინატების დასადგენად განვსაზღვროთ ღერძული სექტორული სტატიკური მომენტები. ამისათვის, (12.12) გამოსახულებების შესაბამისად, გამოვიყენოთ ინტეგრების ვერეშჩაგინის ხერხი. დამხმარე ეპიურების (ნახ. 12.12,ბ და გ) აგებითა და სექტორული ფართობის ეპიურაზე (ნახ.12.11,ბ) მათი გადამრავლებით მივიღებთ:

$$S_{\omega x_c} = \delta \left[4a^3 \left(-\frac{1}{6}a \right) + 8a^3 \left(\frac{1}{2}a \right) \right] = \frac{10}{3} \delta a^4;$$

$$S_{\omega y_c} = \delta \left[4a^3 \left(\frac{4}{5}a \right) + \left(\frac{4}{5}a - \frac{6}{5}a \right) a \cdot 4a^2 + 4a^3 \left(-\frac{6}{5}a \right) \right] = -\frac{16}{5} \delta a^4.$$

ღუნვის ცენტრის კოორდინატები განისაზღვრება (12.36) ფორმულების გამოყენებით



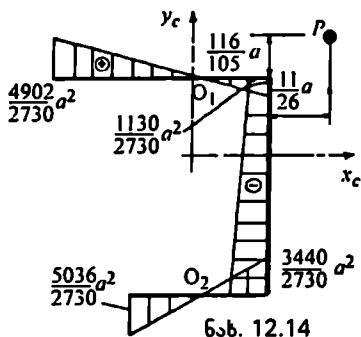
$$a_0 = -\frac{S_{\omega y_c}}{I_{x_c}} = \frac{16\delta a^4 \cdot 15}{5 \cdot 52 \cdot \delta a^3} = \frac{12}{13} a;$$

$$b_0 = \frac{S_{\omega x_c}}{I_{y_c}} = \frac{10\delta a^4 \cdot 4}{3 \cdot 7 \cdot \delta a^3} = \frac{40}{21} a.$$

ავიღოთ ღუნვის ცენტრი, როგორც პოლუსი და ავაგოთ სექტორული ფართობის ეპიურა (ნახ.12.13), რომლის საშუალებითაც გავიანგარიშებთ სექტორულ სტატიკურ მომენტს

ნახ. 12.13

$$S_{\omega} = \int_F \omega dF = \delta \int_0^{s_0} \omega ds = \delta \left[-\frac{6032}{2730} a^2 \cdot \frac{2a}{2} - \left(\frac{6032}{2730} a^2 + \frac{8342}{2730} a^2 \right) \frac{2a}{2} - \left(\frac{8342}{2730} a^2 - \frac{134}{2730} a^2 \right) \frac{a}{2} \right] = -\frac{24510}{2730} \delta a^3.$$



ნახ. 12.14

(12.46) ფორმულის თანახმად, მუდმივის მნიშვნელობა

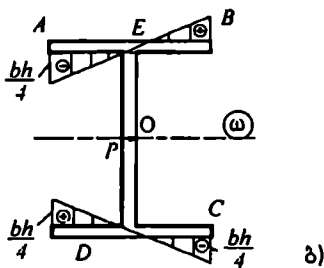
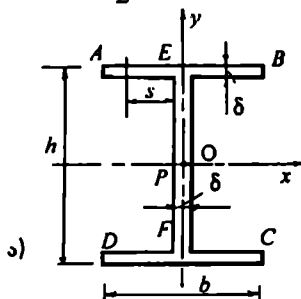
$$c = \frac{S_{\omega}}{F} = -\frac{24510\delta a^3}{2730 \cdot 5\delta a} = -\frac{4902}{2730} a^2.$$

ეს შედეგი გვაძლევს მთავარი სექტორული ფართობის ეპიურის აგების საშუალებას. ამისათვის 12.13 ნახაზზე მოცემულ სექტორული ფართობის ეპიურის ყველა ორდინატს გამოვაკლებთ მიღებული მუდმივის მნიშვნელობას (ნახ. 12.14). ამ შემთხვევაში საწყისია O_1 ან O_2 წერტილი.

მაგალითი 12.3. ავაგოთ 12.15 ნახაზზე ნაჩვენები კვეთისათვის სექტორული ფართობის ეპიურა.

სიმეტრიის ღერძების გადაკვეთის წერტილი არის ღუნვის ცენტრი. მოვათავსოთ საწყისი წერტილი და პოლუსი ამ წერტილში. როდესაც რადიუს-ვექტორის ბოლო მოძრაობს O წერტილიდან E წერტილამდე, სექტორული ფართობი არ იცვლება და ნულის ტოლია. თუ შემდეგ გავაგრძელებთ მოძრაობას E -დან A წერტილამდე, ვექტორის ბოლო იბრუნებს, საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით და შესაბამისი სექტორული ფართობი იქნება:

$$\omega = -\frac{h}{2}s; \quad s = 0: \quad \omega_E = 0; \quad s = \frac{b}{2}: \quad \omega_A = -\frac{bh}{4}.$$



ნახ. 12.15

კვეთის სხვა უბნების ანალოგიური განხილვით ავაგებთ შესაბამის ეპიურას (ნახ. 12.15,ბ).

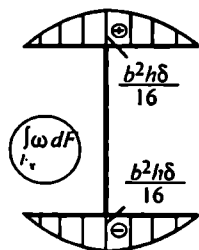
გავანგარიშოთ კვეთის სექტორული ინერციის მომენტი

$$I_{\omega} = \delta \int_s \omega^2 ds = 4\delta \cdot \frac{bh}{4} \cdot \frac{bh}{4} \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^3 h^2}{24} \delta.$$

განგარიშებისას გათვალისწინებულია ეპიურების წრფივი კანონით ცვალებადობა და გამოყენებულია ვერეშჩაგინის ხერხი.

ავაგოთ F^* ფართობის მქონე კვეთის მოკვეთილი ნაწილის სექტორული სტატიკური მომენტის ეპიურა (ნახ.12.16).

დავადგინოთ სხვა გეომეტრიული მახასიათებლების მნიშვნელობები:



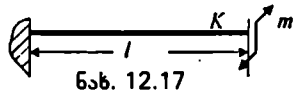
ნახ. 12.16

$$I_k = 2 \frac{b\delta^3}{3} + \frac{h\delta^3}{3} = \frac{(2b+h)\delta^3}{3};$$

$$I_x = 2 \left(\frac{h}{2} \right)^2 (\delta b) + \frac{\delta h^3}{12} = \frac{\delta h^2 (6b+h)}{12};$$

$$I_y = 2 \frac{b^3\delta}{12} = \frac{\delta b^3}{6}; \quad F = \delta(h+2b).$$

მაგალითი 12.4. გავიანგარიშოთ 12.17 ნახაზზე ნაჩვენები თხელკედლიანი ძელი, რომლის განივი კვეთი განვიხილეთ წინა მაგალითში. რადგანაც $M_z = m = A$, (12.51) და (12.52) ფორმულების შესაბამისად მივიღებთ



ნახ. 12.17

$$\theta = C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z + \frac{m}{GI_k}.$$

დავადგინოთ ინტეგრების მუდმივების მნიშვნელობები. როცა $z=0$, მაშინ $u=0$ და (12.40) ფორმულის თანახმად მივიღებთ:

$$z=0: \theta=0; \quad C_2 + \frac{m}{GI_k} = 0, \quad C_2 = -\frac{m}{GI_k}.$$

მეორე პირობა დაკავშირებულია K კვეთში ნორმალური ძაბვების ნულთან ტოლობასთან: $z=l, \sigma=0$. (12.42) ფორმულის შესაბამისად მივიღებთ:

$$z=l: \frac{d\theta}{dz} = 0; \quad C_1 \sin \alpha l + C_2 \cos \alpha l = 0.$$

მიღებული განტოლებების ერთობლივი განხილვით დავადგენთ მუდმივების მნიშვნელობებს:

$$C_1 = \frac{m}{GI_k} \tan \alpha l, \quad C_2 = -\frac{m}{GI_k}.$$

მიღებული შედეგების გათვალისწინებით ფარდობითი მობრუნების კუთხის გამოსათვლელი ფორმულა ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\theta = \frac{m}{GI_k} (1 + \tan \alpha l \sin \alpha z - \cos \alpha z).$$

ძელის ნებისმიერი კვეთის მობრუნების კუთხის მნიშვნელობა

$$\varphi = \int_0^z \theta dz = \frac{m}{GI_k} \left[z + \frac{th\alpha l(ch\alpha z - 1) - sh\alpha z}{\alpha} \right].$$

მობრუნების კუთხე უდიდესია k კვეთისთვის

$$\varphi(l) = \frac{ml}{GI_k} \left(1 - \frac{th\alpha l}{\alpha l} \right) = \eta \frac{ml}{GI_k}.$$

თავისუფალი გრებისათვის $\eta=1$. შეზღუდული გრებისათვის კუთხის მნიშვნელობა მცირდება, რადგანაც $\eta < 1$. კერძოდ, 12.3 მაგალითში განხილული კვეთისათვის, თუ დავუშვებთ, რომ $l=10b$, $(h\delta)=10$, $b=h$, $\mu=0,25$. (ძელის მასალა ფოლადია), მივიღებთ

$$\alpha l = l \sqrt{\frac{GI_k}{EI_\omega}} = l \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu)} \frac{(2b+h)\delta^3 \cdot 24}{3b^3 h^2 \delta}} = \sqrt{\frac{12}{1,25}} \frac{\delta l}{b^2} = 3,10;$$

$$\eta = 1 - \frac{th\alpha l}{\alpha l} = 1 - \frac{th3,10}{3,10} \approx 0,68.$$

ამრიგად, ერთი ბოლოს ჩამაგრებით გრების შეზღუდვა ძელის გეომეტრიული ზომების მოცემული თანაფარდობისთვის მობრუნების კუთხეს ამცირებს 32%-ით.

(12.42) ფორმულის შესაბამისად დაედადინოთ ნორმალური ძაბვების მნიშვნელობები

$$\begin{aligned} \sigma &= -E\omega \frac{d\theta}{dz} = -\frac{E}{G} \frac{m\alpha}{I_k} \omega (th\alpha l \cdot ch\alpha z - sh\alpha z) = \\ &= -2(1+\mu) \frac{m\alpha}{I_k} \omega (th\alpha l \cdot ch\alpha z - sh\alpha z). \end{aligned}$$

მაქსიმალური ნორმალური ძაბვები გვაქვს ჩამაგრების კვეთში ($z=0$):

$$\sigma = -2(1+\mu) \frac{m\alpha\omega}{I_k} th\alpha l.$$

თვით კვეთში მაქსიმალური ძაბვები წარმოიქმნება თაროების კუთხურ წერტილებში. სადაც სექტორული ფართობების მნიშვნელობები უდიდესია:

$$\omega_{\max} = \frac{bh}{4}; \quad \sigma_{\max} = \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{m\alpha}{I_k} bhth\alpha l.$$

დავადგინოთ მხები ძაბვების მნიშვნელობები. ზერ გავიანგარიშოთ მგრები მომენტის შემადგენელი მომენტები (12.48) და (12.49) ფორმულების შესაბამისად:

$$M_1 = -EI_{\omega} \frac{d^2\theta}{dz^2} = -m(th\alpha l \cdot sh\alpha z - ch\alpha z),$$

$$M_2 = GI_k \theta = m(1 + th\alpha l \cdot sh\alpha z - ch\alpha z),$$

ჩამატების კვეთში $M_1 = m$ და $M_2 = 0$. მაქსიმალური მხები ძაბვების მნიშვნელობები. (12.53) და (12.3) ფორმულების თანახმად, იქნება

$$\tau_{1 \max} = \frac{m}{I_{\omega} \delta} \cdot S_{\omega \max}^* = \frac{m \cdot 24}{b^3 \cdot b^2 \cdot \delta \cdot \delta} \cdot \frac{b^2 h \delta}{16} = \frac{3}{2} \frac{m}{b^2 \delta};$$

$$\tau_{2 \max} = 0.$$

თავისუფალ კვეთში ($z=l$) მგრები მომენტის შემადგენელი მომენტების მნიშვნელობებია

$$M_1 = -m(th\alpha l \cdot sh\alpha l - ch\alpha l) = \frac{m}{ch\alpha l};$$

$$M_2 = m(1 + th\alpha l shl - ch\alpha l) = m \left(1 - \frac{1}{ch\alpha l} \right).$$

მაქსიმალური მხები ძაბვები გვაქვს კედლისა და თაროს შერთვის ადგილზე:

$$\tau_{1 \max} = \frac{m 24}{b^3 h^2 \delta \cdot \delta ch\alpha l} \cdot \frac{b^2 h \delta}{16} = \frac{3}{2} \frac{m}{bh \delta \cdot ch\alpha l};$$

$$\tau_{2 \max} = \frac{m 3 \delta}{(2b+h) \delta^3} \left(1 - \frac{1}{ch\alpha l} \right) = \frac{3m}{(2b+h) \delta^2} \left(1 - \frac{1}{ch\alpha l} \right);$$

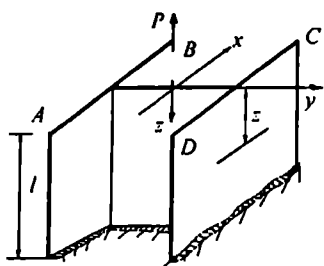
$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \tau_{1 \max} + \tau_{2 \max} = \frac{3m}{(2b+h) \delta^2} \left(1 - \frac{1}{ch\alpha l} \left[1 - \frac{(2b+h) \delta}{2bh} \right] \right) = \\ &= (1-\lambda) \frac{3m}{(2b+h) \delta^2}. \end{aligned}$$

ფორმულაში მიღებულია შემდეგი აღნიშვნა

$$\lambda = \frac{1}{ch\alpha l} \left[1 - \left(1 + \frac{h}{2b} \right) \frac{\delta}{h} \right].$$

თავისუფალი გრებისათვის $\lambda=0$, ე.ი. $\tau_{1\max}=0$.

მაგალითი 12.5. განვიხილოთ თხელკედლიანი ძელი, რომელიც განიცდის არაცენტრალურ გაჭიმვას (ნახ. 12.18). განვივი კვეთის ფორმა და ზომები ნაჩვენებია 12.15 ნახაზზე.



ნახ. 12.18

ძელის განივ კვეთში მოქმედი ძალოვანი ფაქტორები

$$N = P, \quad M_x = \frac{Ph}{2}, \quad M_y = \frac{Pb}{2}.$$

განესაზღვროთ ბიმომენტის მნიშვნელობა

$$B = \int \sigma \omega dF = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{P}{\Delta F} \Delta F \omega_B = \frac{Pbh}{4}.$$

აქ გამოყენებულია კვეთის სექტორული ფართობის მნიშვნელობა 12.15 ნახაზზე გამოსახული ეპიურის შესაბამისად. რადგანაც გრების მომენტი ნულის ტოლია, (12.51) გამოსახულებიდან მივიღებთ

$$\theta = C_1 sh \alpha z + C_2 ch \alpha z.$$

ჩამოვყალიბოთ სასაზღვრო პირობები საწყის კვეთში ($z=0$) ბიმომენტის მნიშვნელობა ცნობილია, მაშინ (12.59) ფორმულის თანახმად

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{Pbh}{4EI_\omega}.$$

ჩამაგრებულ კვეთში $\theta=0$, ამიტომ მუდმივების დასადგენად მივიღებთ შემდეგ პირობებს

$$\alpha \cdot C_1 = -\frac{Pbh}{4EI_\omega}; \quad C_1 sh \alpha l + C_2 ch \alpha l = 0.$$

მუდმივების სიდიდეები განისაზღვრება მიღებული განტოლებების საშუალებით

$$C_1 = -\frac{Pbh}{4EI_\omega \alpha}; \quad C_2 = -C_1 th \alpha l = \frac{Pbh}{4EI_\omega \alpha} th \alpha l.$$

ამ შედეგების გათვალისწინებით კვეთების მობრუნების კუთხის ინტენსიურობა

$$\theta = -\frac{Pbh}{4EI_\omega \alpha} (sh \alpha z - th \alpha l ch \alpha z).$$

თუ ძელის სიგრძე დიდია, $\alpha l \gg 1$, მაშინ

$$\theta = \frac{Pbh}{4EI_{\omega}\alpha} e^{-\alpha z}.$$

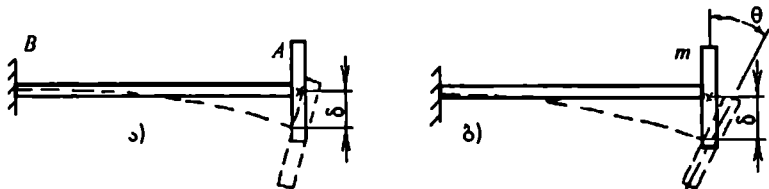
მიღებული ფორმულა მოწმობს, რომ ბიმომენტის მოქმედება z კოორდინატის ზრდასთან ერთად სწრაფად მიილევა.

XIII თავი. ღრეპაღი სისტემების რეპეპი. ღინამიკური ღატვირთეპი

§82. რეეების თეორიის ძირითადი ცნებები

კონსტრუქციებისა და მანქანების სიმტკიცესა და სიხისტეზე გაანგარიშებისას დიდი მნიშვნელობა აქვს მათ რეეებს. არცთუ იშვიათად, სტატიკური დატვირთვებისას მყარი და მტკიცე კონსტრუქცია პერიოდულად ცვალებადი დატვირთვებისას არ არის საიმედო და, პირიქით, შეიძლება მსუბუქმა, ერთი შეხედვით არამყარმა კონსტრუქციამ უკეთ გაუძლოს ასეთი დატვირთვების მოქმედებას.

კონსტრუქციის მდგომარეობა განისაზღვრება დამოუკიდებელი კოორდინატებით, მათ რიცხვს სისტემის თავისუფლების ხარისხი ეწოდება. ეს რიცხვი უშუალოდაა დამოკიდებული საანგარიშო მოდელის შერჩევის სიზუსტეზე. მა-



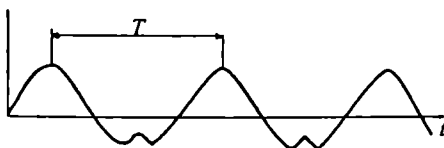
ნახ. 13.1

გალითად, განვიხილოთ ძელი, რომელზეც დაგებულია დისკო (ნახ.13.1). ჩავთვალოთ, რომ ძელის მასა დისკოს მასასთან შედარებით მცირეა და შესაძლებელია მისი უგულვებელყოფა. მაშინ შეიძლება დისკოს მასა წარმოვადგინოთ A წერტილში შეყურსულად. ამ შემთხვევაში სისტემის მდგომარეობის განსაზღვრისათვის საკმარისია ერთი n კოორდინატი და, მაშასადამე, სისტემას თავისუფლების ერთი ხარისხი აქვს (ნახ.13.1,ა). თუ დავაზუსტებთ საანგარიშო მოდელს და გავითვალისწინებთ არა მარტო დისკოს მასას, არამედ მისი ინერციის მომენტსაც, მაშინ დისკოს ვერტიკალური გადაადგილების გარდა, საჭირო იქნება მისი მობრუნების კუთხის განხილვაც (ნახ.13.1,ბ) და დაზუსტებული მოდელი დახასიათდება ორი თავისუფლების ხარისხით. ძელის მასის გათვალისწინების შემთხვევაში, თავისუფლების ხარისხი კიდევ უფრო გაიზრდება.

ნებისმიერ ღრეკად სისტემას მოვდით ძალა, რომელიც ნულოვანი მნიშვნელობიდან მის საბოლოო P მნიშვნელობას აღწევს თანდათანობით ისე, რომ დატვირთვის ზრდის ყოველ ეტაპზე შიგა და გარე ძალებს შორის დაცული იყოს წონასწორობის პირობა. მაგალითად, დისკოს (ნახ.13.1) ცენტრში მოვდით ვერტიკალური ძალა. თუ ამ ძალას მყისიერად შევამკირებთ ნულამდე, წონასწორობის პირობა გარე და შიგა ძალებს შორის დაირღვევა და დისკო დაიწყებს

მოძრაობას საწყისი მდებარეობის მიმართულებით. ამ მოძრაობის პროცესში ძელის შიგა პოტენციალური ენერგია თანდათან შემცირდება, რის ხარჯზეც გაიზარდება კინეტიკური ენერგია. როდესაც სისტემა მიაღწევს საწყის მდგომარეობას და შიგა ძალები და შიგა ენერგია გაუტოლდება ნულს, კინეტიკური ენერგია მიაღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას, ამიტომ სისტემა საწყის მდგომარეობაში არ გაჩერდება და განაგრძობს მოძრაობას. შემდეგ, საწყისი მდგომარეობიდან მოძრაობისას იწყება კინეტიკური ენერგიის მნიშვნელობის შემცირება და ამის ხარჯზე შიგა ენერგიის ზრდა. მეორე უკიდურეს მდგომარეობას სისტემა მიაღწევს მაშინ, როდესაც დისკოს სიჩქარე და კინეტიკური ენერგია შემცირდება ნულამდე, შიგა ენერგიას კი ექნება მაქსიმალური მნიშვნელობა. შიგა ენერგიის ხარჯზე ისევ დაიწყება სისტემის საწინააღმდეგო მიმართულებით მოძრაობა, შიგა ენერგიის თანდათან შემცირება, დისკოს სიჩქარის და კინეტიკური ენერგიის ზრდა და ა.შ. თუ მხედველობაში არ მივიღებთ ენერგიის დანაკარგებს, ასეთი რხევის პროცესი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც მუდმივი პროცესი.

ავტონომური დრეკადი სისტემის რხევებს, რომლებიც განპირობებულია შიგა და გარე ძალებს შორის წონასწორობის დარღვევით, თავისუფალი რხევები ეწოდება. თავისუფალი რხევებისაგან განსხვავებით, განიხილავენ სისტემის იძულებით რხევას, რომლის გამოწვევები მიზეზია სისტემაზე მოქმედი პერიოდული ხასიათის გარე ძალები. ამ გარე ძალებს შემაფოთებელი ძალები ეწოდება.



ნახ. 13.2

განვიხილოთ კონსტრუქცია, რომელიც განიცდის პერიოდულ რხევებს. მისი მახასიათებელი გადაადგილების ცვლილებების გრაფიკი ნაჩვენებია 13.2 ნახაზზე.

განვიხილოთ კონსტრუქცია, რომელიც განიცდის პერიოდულ რხევებს.

დროის მონაკვეთს თანმიმდევრულ ორ ერთნაირ, მაგალითად მაქსიმალურ, გადახრას შორის რხევის პერიოდი ეწოდება და აღინიშნება T ასოთი. მისი შებრუნებული სიდიდე სისტემის მოძრაობის სიხშირეა

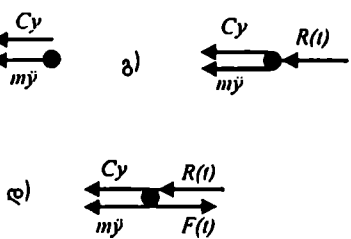
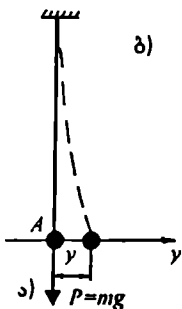
$$v = \frac{1}{T}. \quad (13.1)$$

განასხვავებენ აგრეთვე წრიულ სიხშირეს, რომელიც აღინიშნება ω ასოთი და განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$$\omega = 2\pi v = \frac{2\pi}{T}. \quad (13.2)$$

§83. ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის საკუთარი რხევა

განვიხილოთ ვერტიკალურ დრეკად ძელზე დამაგრებული m მასის მქონე ტვირთი (ნახ. 13.3). თუ ტვირთს გადავხრით წონასწორობის მდგომარეობიდან



ნახ. 13.3

და შემდეგ გავუშვებთ, იგი დაიწყებს თავისუფალ რხევას.

ამ რხევის შესასწავლად საჭიროა შევადგინოთ A სხეულის მოძრაობის განტოლება, რისთვისაც გამოვიყენოთ დალამბერის პრინციპი. ამ პრინციპის შესაბამისად, აჩქარებით მოძრაე

სისტემას შეგვიძლია მივუსადაგოთ სტატიკის განტოლებები, თუ ინერციის ძალას განვიხილავთ როგორც გარე ძალას და ჩავრთავთ გარე ძალების საერთო სისტემაში. ინერციის ძალა ტოლია სისტემის მასისა და მისი აჩქარების ნამრავლის და მიმართულია ამ უკანასკნელის საწინააღმდეგოდ (ნახ. 13.3, ბ). ამ ნახაზზე l დროით წარმოებული აღნიშნულია წერტილით. სხეულზე მოქმედებს აგრეთვე დრეკადობის Cy ძალა, რომელიც გადაადგილების პროპორციულია და მის საწინააღმდეგოდაა მიმართული. აქ C - სისტემის სიხისტის კოეფიციენტი. ნახაზზე არ არის ნაჩვენები სხეულზე ვერტიკალური მიმართულებით მოქმედი ძალები, რადგანაც მათ ამ შემთხვევაში არსებითი მნიშვნელობა არა აქვს. თვით ძელის მასა მხედველობაში არ მიიღება, ვინაიდან ვთვლით, რომ იგი სხეულის მასასთან შედარებით ბევრად მცირეა.

დავაგეგმილოთ სხეულზე მოქმედი ძალები (ნახ. 13.3,ბ) ჰორიზონტალურ მიმართულებაზე

$$m\ddot{y} + Cy = 0. \tag{13.3}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}, \tag{13.4}$$

მივიღებთ

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0. \tag{13.5}$$

ამ განტოლების ამონახსნი შეიძლება ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$y = Ae^{\omega t}$$

ამ გამოსახულების (13.3) განტოლებაში გათვალისწინებით და არანულოვან წევრზე შეკვეცით მივიღებთ ალგებრულ განტოლებას და მის ფესვებს:

$$\alpha^2 + \omega^2 = 0, \quad \alpha_1 = \omega i, \quad \alpha_2 = -\omega i.$$

მაშინ (13.3) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$y = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \quad (13.6)$$

სადაც C_1 და C_2 ინტეგრების მუდმივებია, რომლებიც განისაზღვრება საწყისი პირობებიდან:

$$y = y(0), \quad (13.7)$$

$$\dot{y} = \dot{y}(0). \quad (13.8)$$

და (13.6) ტოლობა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად

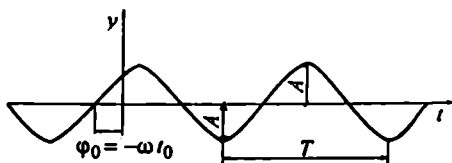
$$y = \frac{\dot{y}(0)}{\omega} \sin \omega t + y(0) \cos \omega t. \quad (13.9)$$

მიღებული გამოსახულება წარმოადგინოთ უფრო მოსახერხებელი ფორმულით. რისთვისაც შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები

$$\frac{\dot{y}(0)}{\omega} = A \cos \varphi_0; \quad y(0) = A \sin \varphi_0, \quad (13.10)$$

რომელთა (13.9) გამოსახულებაში გათვალისწინებით გადაადგილებებისათვის მივიღებთ ფორმულას

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (13.11)$$



ნახ. 13.4

ამრიგად, დავადგინეთ, რომ თავისუფალი რბევა წინააღმდეგობის გარეშე არის მარპმონიული რბევა. (13.11) ფორმულაში A რბევის ამპლიტუდაა, φ_0 - საწყისი ფაზა. ეს სიდიდეები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით

$$A = \sqrt{y^2(0) + \frac{\dot{y}^2(0)}{\omega^2}}; \quad \varphi_0 = \arcsin \frac{y(0)}{\sqrt{y^2(0) + \frac{\dot{y}^2(0)}{\omega^2}}}. \quad (13.12)$$

რხევების პერიოდის დასადგენად საჭიროა გავითვალისწინოთ სინუსოიდის პერიოდულობა

$$[\omega(t+T) + \varphi_0] - (\omega t + \varphi_0) = 2\pi,$$

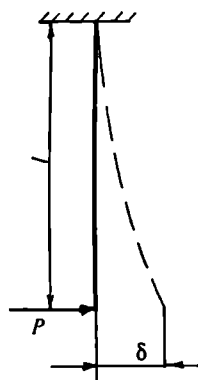
საიდანაც მივიღებთ თავისუფალი რხევის პერიოდის მნიშვნელობას

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (13.13)$$

პარამეტრების არსის ნათელი წარმოდგენისათვის 13.4 ნახაზზე გამოსახულია (13.11) ფუნქციის გრაფიკი.

მიღებული ფორმულებისა და (13.2)-ის შედარებით ვადგენთ, რომ ω არის სისტემის წრიული სიხშირე და მისი მნიშვნელობა განისაზღვრება (13.4) ფორმულით. აღნიშნულის გათვალისწინებით, სისტემის თავისუფალი რხევის პერიოდი იქნება

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}. \quad (13.14)$$



ნახ. 13.5

მიღებული შედეგები მართებულია ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე ნებისმიერი სისტემისთვის, ოღონდ, ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში უნდა გავითვალისწინოთ განსახილველი სისტემის შესაბამისი დრეკადობის C კოეფიციენტი. ამ კოეფიციენტის დასადგენად საჭიროა რხევის მიმართულებით სისტემას მოვდოთ მუდმივი ძალა, დავადგინოთ შესაბამისი გადაადგილება და ეს უკანასკნელი გავუტოლოთ ერთს. ამ პირობიდან მივიღებთ ძალის მნიშვნელობას, რომელიც განსაზღვრავს C კოეფიციენტს. მაგალითად, ზემოთ განხილული სისტემისათვის (ნახ. 13.5):

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI_x}; \quad 1 = \frac{Cl^3}{3EI_x}; \quad C = \frac{3EI_x}{l^3}. \quad (13.15)$$

§84. ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის მილევადი საკუთარი რხევა

განვიხილოთ წინა პარაგრაფში დასმული ამოცანა იმ განსხვავებით, რომ ძელზე მოქმედებს მოძრაობის წინააღმდეგობის $R(t)$ ძალა (ნახ. 13. 3, გ). ხშირად, ეს ძალა განიხილება როგორც სიჩქარის პროპორციული $R(t) = av$. აქ a - სისტემის თვისებების მახასიათებელი მუდმივია. თუ სხეულზე (ნახ.13.3) მოდებულ ძალებს დავაგეგმილებთ y ღერძის მიმართულებაზე, მივიღებთ:

$$m\ddot{y} + a\dot{y} + Cy = 0, \quad (13.16)$$

საიდანაც

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega^2 y = 0. \quad (13.17)$$

აქ გამოყენებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$$n = \frac{a}{2m}; \quad \omega = \sqrt{\frac{C}{m}}. \quad (13.18)$$

(13.17) განტოლების ამონახსნი ვეძიოთ შემდეგი სახით: $y = e^{\alpha t}$, მაშინ მივიღებთ (13.17)-ის მახასიათებელ განტოლებას

$$\alpha^2 + 2n\alpha + \omega^2 = 0,$$

საიდანაც

$$\alpha = -n \pm \sqrt{\omega^2 - n^2} \cdot i. \quad (13.19)$$

ხშირ შემთხვევაში, გვაქვს შემდეგი თანაფარდობა

$$\omega^2 \gg n^2. \quad (13.20)$$

ამრიგად, (13.17) განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$y = C_1^* e^{\left(-n + \sqrt{\omega^2 - n^2} \cdot i\right)t} + C_2^* e^{\left(-n - \sqrt{\omega^2 - n^2} \cdot i\right)t} \quad (13.21)$$

თუ გამოვიყენებთ ცნობილ თანაფარდობას

$$e^{\alpha + \beta i} = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta), \quad (13.22)$$

მაშინ (13.21) შეიძლება გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$y = e^{-nt} \left[(C_1^* + C_2^*) \cos \sqrt{\omega^2 - n^2} t + i(C_1^* - C_2^*) \sin \sqrt{\omega^2 - n^2} t \right].$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$C_1 = (C_1^* - C_2^*) \cdot i; \quad C_2 = C_1^* + C_2^*; \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}. \quad (13.23)$$

რომელთა გათვალისწინებით გადაადგილების ფორმულა მიიღებს სახეს

$$y = e^{-nt} [C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t] \quad (13.24)$$

ინტეგრების მუდმივების დასადგენად აქაც გამოიყენება (13.7) და (13.8) საწყისი პირობები, საიდანაც

$$C_1 = \frac{1}{\omega_1} [ny(0) + \dot{y}(0)], \quad C_2 = y(0). \quad (13.25)$$

თუ გადაადგილების (13.24) ფორმულაში გავითვალისწინებთ მუდმივების მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$y = e^{-nt} \left[\frac{ny(0) + \dot{y}(0)}{\omega_1} \sin \omega_1 t + y(0) \cos \omega_1 t \right].$$

შემოვიღოთ ახალი აღნიშვნები:

$$\frac{ny(0) + \dot{y}(0)}{\omega_1} = A \cos \varphi_0; \quad y(0) = A \sin \varphi_0.$$

და მათი საშუალებით მიღებული გადაადგილების ფორმულა ჩავწეროთ ასეთნაირად

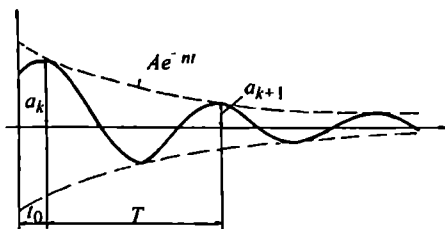
$$y = Ae^{-nt} \sin(\omega_1 t + \varphi_0). \quad (13.26)$$

A და φ_0 მუდმივების განსაზღვრისათვის გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$A = \sqrt{y^2(0) + \frac{[ny(0) + \dot{y}(0)]^2}{\omega_1^2}};$$

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{\omega_1 y(0)}{\sqrt{[\omega_1 y(0)]^2 + [ny(0) + \dot{y}(0)]^2}}. \quad (13.27)$$

ამრიგად, წრფივი კანონით ცვლადი წინაღობის ძალის მოქმედებისას, თავისუფლების ერთი ხარისხის მქონე სისტემის მოძრაობა რხევით ხასიათს ატარებს. მაგრამ გადაადგილების ამპლიტუდური მნიშვნელობები დროთა განმავლობაში მცირდება და რხევა მიიღევა. წონასწორობის მდებარეობიდან ერთსა და იმავე მხარეს ორ მეზობელ მაქსიმალურ გადაადგილებას შორის დროის შუალედში T (ნახ.13.6), (13.13)-ის ანალოგიურად, განისაზღვრება ფორმულით



ნახ. 13.6

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1}. \quad (13.28)$$

ამ ფორმულაში (13.20) პირობის შესაბამისად შეიძლება ხშირ შემთხვევაში მიახლოებით ჩავთვალოთ $\omega_1 \approx \omega$ და დავადგინოთ თავისუფალი მიღვევადი რხევების ამპლიტუდის ცვლილება. ამისათვის გავიანგარიშოთ ამპლიტუდები დროის $t = t_0$ და $t = (t_0 + T)$ მომენტებისთვის (ნახ. 13.6):

$$a_k = Ae^{-n t_0}; \quad a_{k+1} = Ae^{-n(t_0 + T)}. \quad (13.29)$$

ამ ორი ამპლიტუდის შეფარდება

$$\lambda = \frac{a_k}{a_{k+1}} = e^{nT} \quad (13.30)$$

რხვეითი სისტემის მადემპფირებული თვისების შეფასებისათვის შემოგვაქვს ლოგარითმული მიღვევის დეკრემენტი

$$\delta = \ln \frac{a_k}{a_{k+1}} = nT. \quad (13.31)$$

ამრიგად, დროის ზრდასთან ერთად ლოგარითმული დეკრემენტი არ იცვლება.

პრაქტიკაში ხშირად ვხვდებით ისეთ რხევებს, რომლებიც არ ხასიათდება წრფივი კანონით და ცვალებადი წინაღობის ძალებით. ამიტომ ასეთი რხევებისთვის ზემოთ მიღებული შედეგები არ იქნება მართებული. მაგრამ სპეციალური მეთოდის საშუალებით რთული კანონზომიერების ცვალებადი წინაღობის ძალები შეიძლება შევცვალოთ მარტივი, წრფივი კანონით ცვალებადი ძალებით. ერთ-ერთი ასეთი მეთოდი ემყარება ენერგეტიკული ბალანსის განტოლებას.

დავადგინოთ სისტემის პოტენციალური ენერგია U_0 და $U_0 + T$ დროის მომენტებისთვის

$$U_k = \frac{Ca_k a_k}{2} = \frac{Ca_k^2}{2}; \quad U_{k+1} = \frac{Ca_{k+1}^2}{2}.$$

ერთი პერიოდის განმავლობაში სისტემის ენერგიის ფარდობითი ცვლილება

$$\frac{U_k - U_{k+1}}{U_k} = \frac{a_k^2 - a_{k+1}^2}{a_k^2} = \frac{(a_k - a_{k+1})(a_k + a_{k+1})}{a_k^2}.$$

თუ ერთი პერიოდის განმავლობაში ამპლიტუდა უმნიშვნელოდ იცვლება, შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი მიახლოებითი თანაფარდობები

$$a_k - a_{k+1} = \Delta a_k; \quad a_k + a_{k+1} \approx 2a_k.$$

ამ შედეგის გათვალისწინებით მივიღებთ ფორმულას

$$\frac{U_k - U_{k+1}}{U_k} = \frac{2\Delta a_k}{a_k}. \quad (13.32)$$

მეორე მხრივ, იგივე თანაფარდობა შეიძლება გავიანგარიშოთ (13.29)-ის საშუალებით

$$\frac{U_k - U_{k+1}}{U_k} = \frac{(Ae^{-n\tau})^2 - (Ae^{-n(\tau_0 + T)})^2}{(Ae^{-n\tau})^2} = 1 - e^{-2nT} \quad (13.33)$$

გავუტოლოთ ერთმანეთს ენერჯიის ცვლილების ფარდობითი მნიშვნელობის გამოსახულებები

$$\frac{2\Delta a_k}{a_k} = 1 - e^{-2nT}$$

საიდანაც მივიღებთ ლოგარითმული მიღების დეკარემენტის მნიშვნელობას, რომელიც განსაზღვრავს მიღებით რხევებს (13.26)-ის შესაბამისად

$$n = -\frac{1}{2T} \ln \left(1 - \frac{2\Delta a_k}{a_k} \right). \quad (13.34)$$

როგორც აღვნიშნეთ, საკითხისადმი ასეთი მიდგომა ითვალისწინებს რეალური ამოცანის გამარტივებას რთული ხასიათის წინააღობის ძალების ისეთი ძალებით შეცვლით, რომლებიც სიჩქარის პროპორციულია, ეს ახალი მოდელური ამოცანა რეალური ამოცანის ეკვივალენტურია ერთი პერიოდის განმავლობაში ენერჯიის გაბნევის თვალსაზრისით.

მიღებულ ფორმულაში შემავალი პერიოდის, ამპლიტუდის და მისი ერთი პერიოდის განმავლობაში ცვლილების სიდიდეების დადგენა ხდება ექსპერიმენტულად.

(13.34) ფორმულის მიღებისას დავუშვიტ, რომ a_k და a_{k+1} სიდიდეები უმნიშვნელოდ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. ეს პირობა პრაქტიკულ ამოცანებში, როგორც წესი, სრულდება, რის გამოც განხილული მეთოდი ფართოდ გამოიყენება.

§85. ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის იძულებითი რხევა

განვიხილოთ ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემა, რომელზედაც მოქმედებს $F(t)$ შემაშვოთებელი და მოძრაობის სიჩქარის პროპორციული წინაღობის ძალები (ნახ. 13.3,დ). სხეულის მოძრაობის განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$m\ddot{y} + a\dot{y} + Cy = F(t).$$

თუ გამოვიყენებთ (13.18) აღნიშვნებს, მივიღებთ

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega^2 y = \frac{1}{m} F(t). \quad (13.35)$$

ამ განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც მისი შესაბამისი (13.17) ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი და (13.35)-ის კერძო ამონახსნების ჯამი

$$y = Ae^{-nt} \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + y^* \quad (13.36)$$

კერძო ამონახსნი დამოკიდებულია $F(t)$ ძალის სახეზე. ჩავთვალოთ, რომ $F(t)$ პერიოდულად ცვლადი ფუნქციაა, რომლის პერიოდი T -ს ტოლია. წარმოვადგინოთ იგი ტრიგონომეტრიული მწკრივის სახით

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{2k\pi t}{T}. \quad (13.37)$$

ფურიეს მწკრივად ფუნქციის დაშლის ფორმულების გამოყენება a_k და b_k კოეფიციენტებისათვის გვაძლევს შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt & (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt & (k = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (13.38)$$

ამრიგად, თუ (13.35) განტოლების მარჯვენა ნაწილი პერიოდული სახისაა, მისი წარმოდგენა შეიძლება (13.37) გამოსახულებით. ამიტომ საკმარისია ვიცოდეთ y^* ამონახსნის სახე ორი კერძო შემთხვევისთვის:

$$F(t) = F_0 \sin \Omega t; \quad F(t) = F_0 \cos \Omega t. \quad (13.39)$$

საკითხის ასეთგვარად დაყენება საშუალებას გვაძლევს შევისწავლოთ ამოცანა უოველი ნომრის ჰარმონიკისათვის და საერთო ამონახსნი დავადგინოთ მათთვის მიღებული შედეგების შეჯამებით.

განვიხილოთ (13.39)-ის პირველი გამოსახულების შესაბამისი ამოცანა და (13.35)-ის კერძო ამონახსნი ვეძიოთ შემდეგი სახით

$$y^* = R_1 \sin \Omega t + R_2 \cos \Omega t. \quad (13.40)$$

თუ y^* -ის ამ მნიშვნელობას (13.39)-ის პირველ გამოსახულებასთან ერთად გავითვალისწინებთ (13.35)-ში, მივიღებთ

$$-\Omega^2 (R_1 \sin \Omega t + R_2 \cos \Omega t) + 2n\Omega (R_1 \cos \Omega t - R_2 \sin \Omega t) + \omega^2 (R_1 \sin \Omega t + R_2 \cos \Omega t) = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t.$$

განტოლების დასაკმაყოფილებლად საჭიროა შესრულდეს შემდეგი პირობები

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \Omega^2) R_1 - 2n\Omega R_2 &= \frac{F_0}{m}; \\ 2n\Omega R_1 + (\omega^2 - \Omega^2) R_2 &= 0. \end{aligned} \quad (13.41)$$

ამ სისტემის ამოხსნით დავადგენთ მუდმივების მნიშვნელობებს:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\omega^2 - \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2 \Omega^2} \cdot \frac{F_0}{m}; \\ R_2 &= \frac{-2n\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2 \Omega^2} \cdot \frac{F_0}{m}. \end{aligned} \quad (13.42)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\sin \psi_0 = \frac{2n\Omega}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2 \Omega^2}}; \quad \cos \psi_0 = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2 \Omega^2}}.$$

იოლი დასადგენია, რომ მათი კვადრატების ჯამი ერთის ტოლია, ამიტომ ასეთი აღნიშვნები მისაღებია. მათი (13.36)-ში გათვალისწინებით ამოცანის ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$y = Ae^{-n't} \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + \frac{F_0}{C \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left(2\frac{n}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \sin(\Omega t - \psi_0). \quad (13.43)$$

როგორც ვხედავთ, გადაადგილებების გამოსათვლელ ფორმულაში ორი შესაყარებია. პირველი გამოხატავს გარდამავალ პროცესს და დროის ზრდასთან ერთად ნულისაკენ მიისწრაფვის, მეორე წევრი ახასიათებს სისტემის მოძრაობის პერიოდულ პროცესს, რომლის პერიოდი შემაშფოთებელი ძალის პერიოდის ტოლია.

აღნიშნულიდან გამომდინარე, რადგან დროის ზრდასთან ერთად (13.43)-ის პირველი წევრი ნულისაკენ მიისწრაფვის, გადაადგილებები დამყარებულ პროცესში შეიძლება განისაზღვროს შემდეგი ფორმულით

$$y = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left(2\frac{n}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \frac{F_0}{C} \sin(\Omega t - \psi_0). \quad (13.44)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$y_0 = \frac{F_0}{C}; \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left(2\frac{n}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}}, \quad (13.45)$$

სადაც: F_0 არის სისტემაზე მოქმედი პერიოდული ძალის ამპლიტუდა; y_0 - სისტემის გადაადგილება გამოწვეული სტატიკურად მოქმედი F_0 სიდიდის ძალით; η - სისტემის დინამიკურობის კოეფიციენტი, რომელიც გვიჩვენებს, თუ ძალის მოქმედების დინამიკურობის ეფექტის შედეგად რამდენჯერ იზრდება y_0 სტატიკური გადაადგილება.

მიღებული აღნიშვნების გათვალისწინებით მაქსიმალური გადაადგილება

$$y_{\max} = \eta y_0. \quad (13.46)$$

ახლა შესაძლებელია სისტემის სიმტკიცეზე გაანგარიშების შესახებ დასკვნების გაკეთება ისე, რომ დინამიკური პროცესისათვის, (13.46)-ის შესაბამისად, გამოთვლილი მაქსიმალური ძაბვებიც შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმულებით

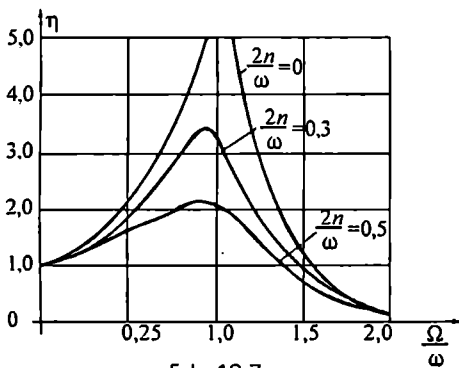
$$\sigma_{\max} = \eta \sigma_0, \quad (13.47)$$

სადაც σ_c სისტემაში აღძრული მაქსიმალური ძაბვაა, რომელიც გამოწვეულია F_0 სიდიდის სტატიკურად მოქმედი ძალით.

ამრიგად, დრეკადი სისტემის გადაადგილების და ძაბვის განსაზღვრა რხევების პროცესში მოითხოვს, პირველ რიგში, შესაბამისი სტატიკის ამოცანის ამოხსნას. დინამიკური ეფექტის გათვალისწინება ხდება შესაბამისი სიდიდეების გამრავლებით სისტემის დინამიკურობის კოეფიციენტზე. ეს კოეფიციენტი დამოკიდებულია წინალობის ძალაზე, შემაშფოთებელი ძალის და სისტემის საკუთარ სიხშირეზე. პირველი ფაქტორი, ნაწილობრივ, თვით სისტემასაც ეხება, რადგანაც რხევის წინალობას ქმნის, აგრეთვე, მასალის შიგა ცოცვადობაც, რომელიც იწვევს ენერჯის გარკვეული ნაწილის გაბნევას. ზოგ შემთხვევაში, შეიძლება საერთოდ არ მივიღოთ მხედველობაში გარემოს წინალობის ძალები და გაანგარიშება ვაწარმოოთ დაშვებით $n=0$. ამ შემთხვევაში სისტემის დინამიკურობის კოეფიციენტის ფორმულა გამარტივდება

$$\eta = \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right|} \quad (13.48)$$

კერძო შემთხვევაში, როდესაც შემაშფოთებელი ძალის სიხშირე უტოლდება სისტემის თავისუფალი რხევის სიხშირეს, დინამიკურობის კოეფიციენტი უსასრულოდ იზრდება და, შესაბამისად,



ნახ. 13.7

იზრდება გადაადგილება და ძაბვა (ნახ. 13.7). ამ მოვლენას რეზონანსი ეწოდება. წინალობის ძალების გათვალისწინება გარკვეულად ცვლის სურათს, მაგრამ რეზონანსის მოვლენას ამ შემთხვევაშიც აქვს ადგილი (ნახ. 13.7).

ამრიგად, რეზონანსი ხასიათდება სისტემის მაქსიმალური გადაადგილების და ძაბვის მკვეთრი ზრდით. ამიტომ, დინამიკური გაანგარიშებისას, პირველ რიგში, საჭიროა სისტემის საკუთარი და შემაშფოთებელი

ძალების სიხშირეების თანაფარდობის დადგენა. თუ ეს სიდიდეები ერთმანეთისაგან მნიშვნელოვნად განსხვავდება, დინამიკურობის კოეფიციენტის დასადგენად შეიძლება გამოვიყენოთ (13.48) ფორმულა. 13.7 ნახაზზე გამოსახული გრაფიკიდან ჩანს, რომ რეზონანსის ზონაში წინალობის ძალები მოვლენაზე მნიშვნელოვან გავლენას ახდენს და ამიტომ გაანგარიშების დროს საჭიროა სრული (13.45) ფორმულის გამოყენება. მაგრამ, როგორც წესი, კონსტრუქციის მუშაობა

რეზონანსის მახლობელ რეჟიმში არ არის სასურველი და მას უნდა ვერიდოთ. ამ მიზნით, სხვადასხვა კონსტრუქციული ცვლილებებით ვზრდით ან ვამცირებთ სისტემის საკუთარ სიხშირეს და Ω -სა და ω -ს მნიშვნელობებს ერთმანეთს დავაშორებთ. რა თქმა უნდა, არსებობს საკითხის გადაწყვეტის მეორე გზაც – შემაშფოთებელი ძალის სიხშირის შეცვლა. ცხადია, ეს დასაშვები უნდა იყოს კონსტრუქციის მუშაობის პირობიდან გამომდინარე.

სხვადასხვა მიზეზის გამო, ზოგ შემთხვევაში, არც ერთი ზემოთ დასახელებული ხერხი არ გამოიყენება და სისტემას მუშაობა უხდება რეზონანსულ რეჟიმში. ამ შემთხვევაში საჭიროა სპეციალური დემფერების გამოყენება ან სხვა ღონისძიების განხორციელება წინააღობის ძალების გასაზრდელად. ე.ი. დინამიკური კოეფიციენტის შესამცირებლად.

ამრიგად, ვანგარიშობთ ძაბვებისა და გადაადგილებების ამპლიტუდურ მნიშვნელობებს და ვადგენთ სიხისტის და სიმტკიცის პირობებს

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad \gamma_{\max} \leq [\gamma] \quad (13.49)$$

ზოგიერთ შემთხვევაში სიმტკიცეზე გაანგარიშების ასეთი მეთოდი მიუღებელია და საჭირო ხდება ძაბვების ციკლური ცვალებადობის მიმართ კონსტრუქციის მასალის წინააღობის შესაძლებლობის გათვალისწინება. კერძოდ, ამას ადგილი აქვს მაშინ, როდესაც ძაბვების ცვალებადობის ციკლთა რაოდენობა დიდია. ეს საკითხები შემდგომში სპეციალური განხილვის საგანი იქნება.

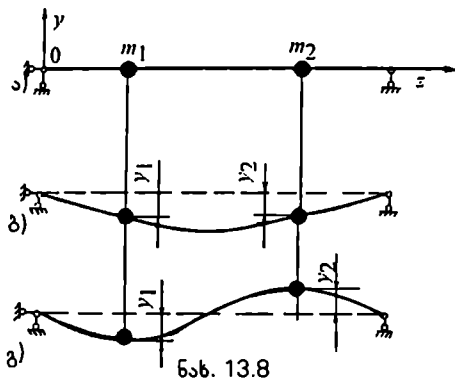
აღნიშნული, როგორც სასურველი პირობა სისტემის და წინააღობის ძალის სიხშირეების განსხვავების თაობაზე, არ არის უნივერსალური. ზოგ შემთხვევაში, პირიქით, სასურველია მათი სიახლოვე. მაგალითად, სხვადასხვა სახის ტექნოლოგიური მანქანებისთვის ეს ბოლო პირობა შეიძლება დაცვაში არსებული იყოს მოთხოვნასთან, მაქსიმალურ ზეგავლენას ვახდენდეთ გადასამუშავებელ პროდუქტიაზე შემაშფოთებელი ძალის სიხშირის სისტემის სიხშირესთან მიახლოებით. კონსტრუქციების პრიცეპსში ასეთი პრინციპების გამოყენება, არც თუ იშვიათად, პროდუქციის ხარისხის, მასალისა და ენერგოტეგადობის თვალსაზრისით რაციონალური მანქანების შექმნის საშუალებას იძლევა, რაც თანამედროვეობის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა.

§86. მრავალი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის რხევა

სტატიკურად ურკვევი სისტემების განხილვისას შევადგინეთ (7.5) სახის განტოლებათა სისტემა, რომელიც გამოხატავდა გარკვეული მიმართულებით გადაადგილებების ნულთან ტოლობას. იგივე პრინციპი შეიძლება გამოვიყენოთ მრავალი თავისუფლების ხარისხის მქონე დრეკადი სისტემების რხევისთვის. მხოლოდ აქ სისტემაზე მოდებული X_i ძალებით გამოწვეული გადაადგილებების ჩამი ნულის ნაცვლად საჭიროა გავუტოლოთ Y_i გადაადგილებებს, რომლებიც

ახასიათებს ცალკეული თავისუფლების ხარისხის შესაბამისი მიმართულების გადაადგილებებს:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \dots + \delta_{1n}X_n; \\
 y_2 &= \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \dots + \delta_{2n}X_n; \\
 &\dots \\
 y_n &= \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \dots + \delta_{nn}X_n.
 \end{aligned}
 \tag{13.50}$$



ზოგად შემთხვევაში რხევის პროცესის შესწავლა შრომატევადია და თანამედროვე გამოთვლითი ტექნიკის გამოყენების გარეშე სირთულეებთან არის დაკავშირებული. მაგრამ, როდესაც $n \leq 2$, ამოცანის შესწავლა შესაძლებელია ანალიზური ხერხების გამოყენებით. შემთხვევა, როდესაც $n=1$, უკვე განხილულია. შევივსწავლოთ მეორე შემთხვევა, როცა $n=2$ (ნახ.13.8).

ძელზე დამაგრებულია ორი m_1 და m_2 მასების მქონე სხეული. ამ სხეულებზე შესაბამისად მოქმედებს შემდეგი ინერციის ძალები:

$$X_1 = -m_1\ddot{y}_1; \quad X_2 = -m_2\ddot{y}_2. \tag{13.51}$$

მაშინ (13.50) განტოლებათა სისტემა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \delta_{11}(-m_1\ddot{y}_1) + \delta_{12}(-m_2\ddot{y}_2); \\
 y_2 &= \delta_{21}(-m_1\ddot{y}_1) + \delta_{22}(-m_2\ddot{y}_2),
 \end{aligned}
 \tag{13.52}$$

საიდანაც მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned}
 \delta_{11}m_1\ddot{y}_1 + \delta_{12}m_2\ddot{y}_2 + y_1 &= 0; \\
 \delta_{21}m_1\ddot{y}_1 + \delta_{22}m_2\ddot{y}_2 + y_2 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{13.53}$$

სისტემის ამონახსნი ვეძიოთ (13.11)-ის ანალოგიურად:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

ამის გათვალისწინებით (13.53)-დან მივიღებთ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას A_1 -ისა და A_2 -ს მიმართ:

$$\begin{aligned} (\delta_{11}m_1\omega^2 - 1)A_1 + \delta_{12}\omega^2 m_2 A_2 &= 0; \\ \delta_{21}m_1\omega^2 A_1 + (\delta_{22}m_2\omega^2 - 1)A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (13.54)$$

სისტემას აქვს არანულოვანი ამონახსნი, თუ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია

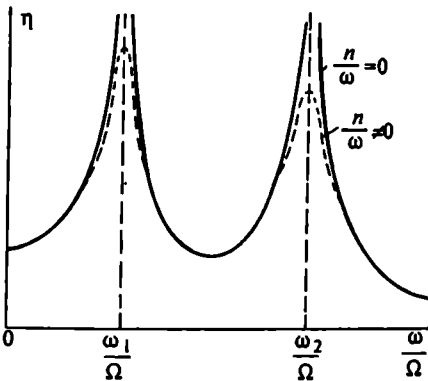
$$(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)m_1m_2\omega^4 - (\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2)\omega^2 + 1 = 0,$$

საიდანაც რხევის სიხშირეების კვადრატისათვის მივიღებთ შემდეგ ორ მნიშვნელობას:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2 \pm \sqrt{(\delta_{11}m_1 - \delta_{22}m_2)^2 + 4\delta_{12}^2m_1m_2}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}. \quad (13.55)$$

თუ სიხშირის უმცირეს მნიშვნელობას გავითვალისწინებთ (13.54)-ის ერთ-ერთ განტოლებაში, დავრწმუნდებით, რომ $A_1:A_2 > 0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ ორივე მასა ერთდროულად გადაადგილებულია დადებითი ან უარყოფითი მიმართულებით (ნახ. 13.8.ბ). შემთხვევას $A_1:A_2 < 0$ შეესაბამება სისტემის მეორე სიხშირე (ნახ. 13.8.გ).

წინაღობის ძალების გავთვალისწინება რთული არ არის. ამ დროს შეიცვლება ყოველ მასაზე მოქმედი ძალის მნიშვნელობა, ე.ი. (13.51)-ის მარჯვენა ნაწილები.



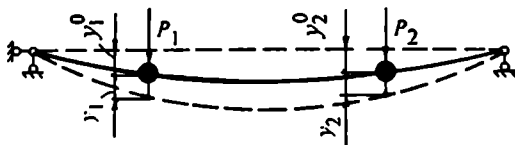
ნახ. 13.9

შესაბამისი ცვლილებები იქნება (13.53)-შიც. სისტემის ამოხსნა ნაწილობრივ რთულდება, რადგანაც ახალი სისტემის ამონახსნი უნდა ვეძიოთ (13.26)-ის ანალოგიურად.

სისტემის იძულებითი რხევების შესწავლისას მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ ის გარემოება, რომ რეზონანსულ მოვლენას შეიძლება ადგილი ჰქონდეს შემაშფოთებელი ძალის ორი სიხშირისათვის $\Omega = \omega_1$ და $\Omega = \omega_2$ (ნახ.13.9).

ამოცანის განხილვისას ჩავთვალოთ, რომ სისტემაზე მოდებული

მასების მიერ გამოწვეული საწყისი გადაადგილებები ინერციის ძალების მიერ გამოწვეულ გადაადგილებებთან შედარებით მცირეა და ამიტომ ისინი მხედველობაში არ მივიღებთ. მაგრამ ამ დაშვებას არა აქვს პრინციპული მნიშვნელობა და შეიძლება მიღებული შედეგის იოლად განზოგადება. ამისათვის საჭიროა γ_1 და γ_2 გადაადგილებები გადავზომოთ არა Oz ღერძთან (ნახ.13.8), არამედ $P_1 = m_1g$



ნახ. 13.10

და $P_2 = m_2 g$ ძალების მიერ დეფორმირებული ძელის ღერძიდან (ნახ. 13.10). ამიტომ საერთო გადაადგილებები შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

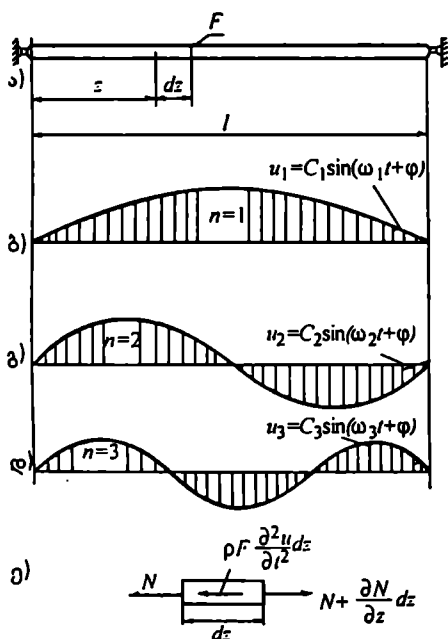
$$y_1 = y_1^0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_0); \quad y_2 = y_2^0 + A_2 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (13.56)$$

ანალოგიური ცვლილებებია გასათვალისწინებელი ძაბვების მნიშვნელობებშიც.

§87. განაწილებული მასის მქონე სისტემის თავისუფალი რხევა

ზემოთ განვიხილეთ n თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების რხევა. n -ის ზრდას განტოლებებში პრინციპული სხვაობა არ გამოუწვევია. საბოლოოდ, ამოცანა ყოველთვის დაიყვანებოდა წრფივ ერთგვაროვან ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე. მაგრამ, როდესაც n უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის, ვღებულობთ ე.წ. განაწილებული მასის მქონე სისტემას, რომლის შესასწავლად საჭიროა კერძოწარმოებულიანი განტოლებების გამოყენება. მაგალითისთვის განვიხილოთ ძელის გრძივი და განივი რხევები.

განვიხილოთ ბოლოებით ჩამაგრებული ძელი (ნახ. 13.11), მისი გრძივი რხევების შესასწავლად ამოვკვეთთ dz სიგრძის ელემენტი და შევადგინოთ ამ ელემენტის მოძრაობის განტოლება



ნახ. 13.11

$$N + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho F dz - \left(N + \frac{\partial N}{\partial z} dz \right) = 0.$$

აქ გამოყენებულია შემდეგი აღნიშ-

ვნები: ρ მასალის ძელის სიმკვრივეა, F , u – განივი კვეთის ფართობი და მისი გრძივი გადაადგილება. ელემენტარული გარდაქმნებით მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho F} \frac{\partial N}{\partial z} = 0. \quad (13.57)$$

მეორე განტოლების შესადგენად, რომელიც ერთმანეთთან დააკავშირებს u და N სიდიდეებს, გამოვიყენოთ ჰუკის კანონი

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{N}{EF}. \quad (13.58)$$

მუდმივი განივი კვეთის მქონე ძელისათვის ამ შედეგის (13.57)-ში გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (13.59)$$

წარმოვადგინოთ განტოლების ამონახსნი შემდეგი სახით: $u = w(z) \sin(\omega t + \varphi)$. მაშინ (13. 59)-დან მივიღებთ მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{\rho \omega^2}{E} w = 0. \quad (13.60)$$

ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი

$$w = C_1 \sin \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega z + C_2 \cos \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega z. \quad (13.61)$$

მუდმივების განსაზღვრისათვის საჭიროა გამოვიყენოთ სასაზღვრო პირობები (ნახ.13.11):

$$z = 0: \quad w(0) = 0; \quad z = l: \quad w(l) = 0.$$

ამ პირობების (13.61)-ში გათვალისწინებით მივიღებთ ორ განტოლებას

$$C_2 = 0; \quad C_1 \sin \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega l = 0. \quad (13.62)$$

აქ $C_1 \neq 0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში (13.61)-დან გამომდინარეობს, რომ $w \equiv 0$. ასეთი

ამონახსნი ჩვენთვის საინტერესო არ არის, ამიტომ $\sin \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega l = 0$, საიდანაც მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობებს

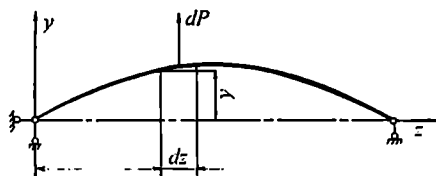
$$\sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega_n l = \pi n; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{\pi n}{l}. \quad (13.63)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

საბოლოოდ, (13.61)-დან ძელის საკუთარი რხევებისათვის მივიღებთ ფორმულას

$$u_n = C_1 \sin \frac{\pi n}{l} z \cdot \sin(\omega_n t + \varphi_0). \quad (13.64)$$

ამრიგად, ამ ამოცანაში n -ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება (13.63)-ით განსაზღვრული სისტემის საკუთარი სიხშირე. შესაბამისი გადაადგილებების ფორმები დადგინდება (13.64)-ის საშუალებით. ძელის რხევების სამი პირველი ფორმა წარმოდგენილია 13.11 ნახაზზე. საკუთარი რხევების მინიმალური, პირველი სიხშირე მიიღება (13.63)-დან, თუ მასში დავეუშვებთ, რომ $n=1$



ნახ. 13.12

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{\pi}{l}. \quad (13.65)$$

განვიხილოთ ძელის განივი ღუნვი-თი არამილევადი თავისუფალი რხევები (ნახ. 13.12). ძელის dz სიგრძის ელემენტზე მოდებული ინერციის ძალა

$$dP = -\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dz,$$

საიდანაც განივი განაწილებული ძალების ინტენსიურობა

$$q = \frac{dP}{dz} = -\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

შევადგინოთ ელემენტის მოძრაობის განტოლება, რისთვისაც გამოვიყენოთ (6.19) ფორმულა

$$EI_x \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = q = -\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (13.66)$$

საიდანაც მივიღებთ ძელის მოძრაობის განტოლებას

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{\rho}{EI_x^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (13.67)$$

ამ განტოლებაში i_x ინერციის რადიუსია, $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}$.

განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით: $y = u(z) \sin(\omega t + \varphi)$. ამ ფორმულის გათვალისწინებით (13.67)-დან მივიღებთ მეოთხე რიგის ჩვეულებრივ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{d^4 u}{dz^4} - \alpha^4 u = 0, \quad (13.68)$$

სადაც: $\alpha = 4 \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E i_x^2}}$.

მიღებული განტოლების ზოგადი ამონახსნი

$$u = C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z + C_3 \operatorname{sh} \alpha z + C_4 \operatorname{ch} \alpha z. \quad (13.69)$$

მუდმივების განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ სასაზღვრო პირობები (ნახ. 13.12):

$$z = 0: u(0) = 0; \quad C_2 + C_4 = 0;$$

$$\frac{d^2 u(0)}{dz^2} = 0; \quad -C_2 + C_4 = 0$$

$$z = l: u(l) = 0; \quad C_1 \sin \alpha l + C_2 \cos \alpha l + C_3 \operatorname{sh} \alpha l + C_4 \operatorname{ch} \alpha l = 0.$$

$$\frac{d^2 u(l)}{dz^2} = 0; \quad -C_1 \sin \alpha l - C_2 \cos \alpha l + C_3 \operatorname{sh} \alpha l + C_4 \operatorname{ch} \alpha l = 0.$$

პირველი ორი განტოლებიდან დავადგენთ, რომ $C_2 = C_4 = 0$. ამ შედეგის შესაბამე და მეოთხე განტოლებებში გათვალისწინებით ვრწმუნდებით, რომ შესაბამე მუდმივის მნიშვნელობა $C_3 = 0$. მაშინ სისტემის შესაბამე განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად: $C_1 \sin \alpha l = 0$.

ეს პირობა შემდეგი თანაფარდობის დადგენის საშუალებას გვაძლევს: $\alpha l = \pi n$. გავითვალისწინოთ ეს შედეგი α -ს ფორმულაში და მივიღებთ ძელის თავისუფალი განივი რხევის საკუთარი სიხშირის ფორმულას

$$\omega_n = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{i_x \pi^2 n^2}{l^2}. \quad (13.70)$$

პირველ სიხშირეს შეესაბამება $n=1$ და განისაზღვრება ფორმულით

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{i_x \pi^2}{l^2}}. \quad (13.71)$$

ამრიგად, თუ თავისუფალი გრძივი რხევის სიხშირის ფორმულაში n შედოდა პირველ ხარისხში, (13.70)-ში იგი შედის მეორე ხარისხში, ე.ი. განივი რხევისთვის თანამიმდევრული სიხშირეები უფრო მკვეთრად განსხვავდება ერთმანეთისაგან.

შევადაროთ ერთმანეთს გრძივი და განივი თავისუფალი რხევების სიხშირეები. ამისათვის განვსაზღვროთ (13.70)-ის და (13.63)-ის ფარდობა

$$k = \frac{\omega_{nგნ}}{\omega_{nგრძ}} = \pi n \frac{i_x}{l}.$$

ეს ფარდობა დაბალი ნომრის შარმონიკებისათვის (n -ის პატარა სიდიდეებისათვის) მცირე სიდიდეა, ვინაიდან ძელებისათვის გვაქვს უტოლობა $(i_x/l) \ll 1$. ვაკეთებთ დასკვნას, რომ გრძივი რხევების შესაბამისი სიხშირეების სიდიდე გაცილებით მცირეა განვი რხევებთან შედარებით. მაღალი ნომრის შარმონიკებისათვის სურათი საწინააღმდეგო ხასიათისაა.

მიღებული შედეგები საშუალებას გვაძლევს ძელის განივი საკუთარი რხევები წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$y_n = C_{1n} \sin(\omega_n t + \varphi_{0n}) \sin \frac{\pi n}{l} z. \quad (13.72)$$

ამრიგად, აქაც ფორმები გრძივი რხევების ფორმების ანალოგიურია. ამიტომ 13.11 ნახაზზე ნაჩვენებია პირველი სამი ფორმა ძალაში რჩება განივი რხევებისათვისაც.

მიღებულ (13.72) ფორმულაში შედის ორი, C_{1n} და φ_{0n} მუდმივი. მათი მნიშვნელობები დამოკიდებულია საწყის გადაადგილებებსა და სიჩქარეებზე ანუ, სხვაწარად რომ ვთქვათ, თუ რომელი ნომრიანი სიხშირეები იქნება ძელის რხევებში განმსაზღვრელი დამოკიდებულია ალგუნების ხერხზე, თუ ძელს შუა წერტილში $z=l/2$ დავარტყამთ ჩაქუჩს და გადავხრით მას წონასწორობიდან, ალგუნებულ რხევაში გადაწყვეტ როლს ითამაშებს პირველი, ე.წ. ძირითადი შარმონიკა და ყველა დანარჩენი ფორმა, რომლებისთვისაც n კენტი რიცხვია. თუ დარტყმას მოვახდენთ $z=0,25l$ წერტილში, მაშინ წარმოქმნილ რხევებში განმსაზღვრელი მნიშვნელობა იქნება მეორე და ყველა დანარჩენ შარმონიკას, რომლებიც ხასიათდება ამ წერტილში მაქსიმალური გადაადგილებით.

§88. სისტემის საკუთარი სიხშირის განსაზღვრის რელეის მიახლოებითი ხერხი

პრაქტიკაში ხშირად საქმე გვაქვს რთულ სისტემებთან, რომლებიც ხასიათდება მრავალი მიერთებული მასით. ამასთან, არ არის გამორიცხული, რომ სისტემის განაწილებული მასები თავისი სიდიდით ზეგავლენას ახდენს სისტემის მახასიათებლებზე, რის გამოც დაუშვებელია მათი გაუთვალისწინებლობა. ასეთი ამოცანების ზუსტი ამოხსნა ანალიზური ხერხების გამოყენებით, როგორც წესი, დიდ სირთულეებთანაა დაკავშირებული. ბოლო დროს, ამ მიზნით, სულ უფრო და უფრო ფართოდ გამოიყენება თანამედროვე გამოთვლითი ტექნიკა. ეს საკითხები შეისწავლება შემდეგ პარაგრაფში. აქ კი განვიხილოთ *სისტემის საკუთარი სიხშირის განსაზღვრის მიახლოებითი ხერხი, რომელიც რელეის სახელს ატარებს.*

განვიხილოთ ძელის განივი თავისუფალი რხევები. ძელზე განაწილებული მასების გარდა დამაგრებულია შეყურსული მასები (ნახ. 13.13). დავადგინოთ სისტემის ძირითადი ფორმის შესაბამისი საკუთარი სიხშირე. ამისათვის ძელის რხევები წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$y = u(z) \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (13.73)$$

ამ გამოსახულების შესაბამისად, ძელის ღერძის ყოველი წერტილის გადაადგილება ერთდროულად აღწევს როგორც ნულს, ისე თავის უდიდეს და უმცირეს

მნიშვნელობებს. ასეთივე კანონზომიერებით მოძრაობენ ძელზე დამაგრებული მასებიც.

როდესაც ძელის ღერძის წერტილები Oz ღერძს მიაღწევენ, სისტემის დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია ნულის ტოლი ხდება. რაც შეეხება კინეტიკურ ენერგიას, იგი მაქსიმუმს აღწევს და მისი მნიშვნელობა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$A_{\max} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{y}^2(z_i, t_0)}{2} + \int_0^l \frac{F p y^2(z, t) dz}{2}, \quad (13.74)$$

სადაც დროით წარმოებული აღნიშნულია წერტილით. ეს ენერგია (13.73)-ის გათვალისწინებით ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$A_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \left[\sum_{i=1}^n m_i u^2(z_i) + \int_0^l F p u^2(z) dz \right]. \quad (13.75)$$

განვიხილოთ ძელის უკიდურესი მდგომარეობა, როდესაც სიჩქარეები ნულის ტოლია. ამ მდგომარეობაში კინეტიკური ენერჯია ნულის ტოლია, ლუნვის პოტენციალური ენერჯია კი მაქსიმუმს აღწევს

$$U_{\max} = \int_0^l \frac{M^2 \text{ლუნ} dz}{2EI_x} = \frac{1}{2} \int_0^l EI_x [u''(z)]^2 dz.$$

ამ ფორმულაში შტრიხით აღნიშნულია წარმოებული z -ით.

რადგან სისტემის საერთო ენერჯია არ იცვლება, ნებისმიერი მდგომარეობისთვის გვაქვს ენერჯეტიკული ბალანსის განტოლება

$$A + U = A_{\max} + 0 = 0 + U_{\max} = \text{const.}$$

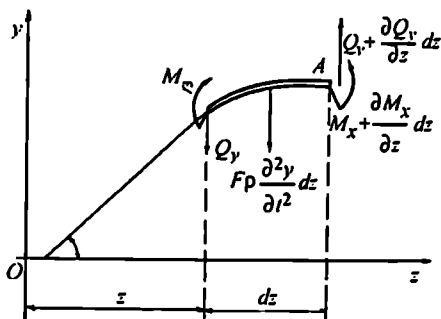
ამ პირობიდან გამომდინარე, მივიღებთ თანაფარდობას, რომლის საშუალებითაც შეიძლება დავადგინოთ ძელის საკუთარი სიხშირის კვადრატის ფორმულა

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI_x [u''(z)]^2 dz}{\sum_{i=1}^n m_i u^2(z_i) + \int_0^l F \rho u^2(z) dz} \quad (13.76)$$

ფორმულის გამოყენებისათვის საჭიროა ვიცოდეთ ძელის დრეკადი ღერძის ფორმა $u(z)$. ამ შემთხვევაში (13.76) ფორმულა მოგვცემს სიხშირის ზუსტ მნიშვნელობას. მაგრამ ეს გამოსახულება ჩვენთვის, როგორც წესი, უცნობია, მისი შერჩევა პრაქტიკული ამოცანებისთვის ხდება მიახლოებით. ამის გამო (13.76) ფორმულა სიხშირისათვის იძლევა მიახლოებით მნიშვნელობას. შედეგის სიზუსტე მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული $u(z)$ -ის ზუსტ გამოსახულებასთან შესატყვისობაზე. მაგრამ, ყველა შემთხვევაში, (13.76) ფორმულა სიხშირისათვის გვაძლევს ისეთ მნიშვნელობას, რომელიც ტოლია ან აღემატება სიხშირის ზუსტ მნიშვნელობას.

§89. ძელის საკუთარი სიხშირეების დადგენის რიცხვითი მეთოდი

ჩვეულებრივად განხილული ფორმულით შეიძლება ეფექტურად ვისარგებლოთ ზოგიერთი პრაქტიკული ამოცანის ამოსახსნელად. მაგრამ მისი გამოყენების სფერო მაინც შეზღუდულია. პირველი სიხშირისათვისაც კი სისტემისათვის ყოველთვის არ ხერხდება გადაადგილებების ფუნქციების თუგინდ მიახლოებით შერჩევა. რაც შეეხება მაღალი ნომრის სიხშირეებს, ამის გაკეთება გაცილებით რთულია. ამიტომ ბოლო პერიოდში სულ უფრო და უფრო ფართოდ



ნახ. 13.14

გამოიყენება რხევითი სისტემის მანქანური გამოკვლევები, რომლებიც არ საჭიროებენ გადაადგილებების ფუნქციის წინასწარ დადგენას.

განვიხილოთ ძელი, რომელიც განიცდის თავისუფალ რხევას (ნახ. 13.13). საწყისი O წერტილიდან z მანძილის დაცილებით ამოვკვეთთ dz სიგრძის ელემენტი და გავაწონასწოროთ იგი შიგა და გარე ძალებით დალაშქრის პრინციპის გათვალისწინებით (ნახ.13.14).

დავაგეგმილოთ ელემენტზე მოდებული ძალები ვერტიკალური ღერძის მიმართულებაზე

$$\frac{\partial Q_y}{\partial z} dz - F_p \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{\partial Q_y}{\partial z} = F_p \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}. \quad (13.77)$$

განვიხილოთ ელემენტზე მოდებული ძალების A წერტილის მიმართ მომენტების ჯამის ნულთან ტოლობის პირობა

$$Q_y dz + \frac{\partial M_x}{\partial z} dz = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ მეორე განტოლებას

$$\frac{\partial M_x}{\partial z} = -Q_y. \quad (13.78)$$

გადაადგილებების დიფერენციალური თანაფარდობებისათვის ძალაში რჩება (6.4) ფორმულები, მაგრამ საჭიროა მათში ჩვეულებრივი წარმოებულები შევცვალოთ კერძო წარმოებულებით

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \theta; \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{M_x}{EI_x}. \quad (13.79)$$

წარმოვადგინოთ ამოცანის ამონახსნი შემდეგი სახით

$$Q_y(z, t) = Q_y^*(z)e^{\omega t i}; \quad M_x(z, t) = M_x^*(z)e^{\omega t i} \quad (13.80)$$

$$y(z, t) = y^*(z)e^{\omega t i}; \quad \theta = \theta^*(z)e^{\omega t i}$$

მათი გათვალისწინებით ზემოთ მიღებულ კერძო წარმოებულნიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას დაეყვანათ ჩვეულებრივ წარმოებულნიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემამდე

$$Q_y^*{}' = -F\rho\omega^2 y^*; \quad M_x^*{}' = -Q_y^*;$$

$$y^*{}' = \theta^*; \quad \theta^*{}' = \frac{M_x^*}{EI_x}. \quad (13.81)$$

აქ შტრიხით აღნიშნულია ფუნქციის z -ით წარმოებული. შემოვიღოთ შემდეგი უგანზომილებო ცვლადები და პარამეტრები

$$x_1 = \frac{Q_y^* l^2}{E_0 I_{x0}}; \quad x_2 = \frac{M_x^* l}{E_0 I_{x0}}; \quad x_3 = \frac{y^*}{l}; \quad x_4 = \theta^*;$$

$$\zeta = \frac{z}{l}; \quad \Omega^2 = l^4 \frac{\rho_0 F_0 \omega^2}{E_0 I_{x0}};$$

$$\lambda_1 = \frac{F\rho}{F_0 \rho_0}; \quad \lambda_2 = \frac{E_0 I_{x0}}{EI_x}, \quad (13.82)$$

სადაც $E_0 I_{x0}$; $F_0 \rho_0$ მუდმივები შესაბამისი სიდიდეების მახასიათებელი პარამეტრებია. კერძოდ, ისინი შეიძლება ტოლი იყოს პარამეტრების მნიშვნელობებისა ძელის რომელიმე კონკრეტულ კვეთში. აღნიშნულის გათვალისწინებით სისტემა (13.81) ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$x_1' = -\lambda_1 \Omega^2 x_3; \quad x_2' = -x_1; \quad x_3' = x_4; \quad x_4' = \lambda_2 x_2. \quad (13.83)$$

შემოვიღოთ ვექტორული და მატრიცული აღნიშვნები:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda_1 \Omega^2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13.84)$$

და გადავწეროთ (13.83) შემდეგი სახით

$$X' = AX \quad (13.85)$$

(13.85) ვექტორული დიფერენციალური განტოლოების ზოგადი ამონახსენი ორსაყრდენიანი ძელისათვის შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$X = C_I X_I + C_{II} X_{II} \quad (13.86)$$

განტოლების ამონახსნებს X_I და X_{II} -ს ვპოულობთ რიცხვითი ინტეგრებით საწყისი პირობების გათვალისწინებით. მაგალითად 13.13 ნახაზზე ნაჩვენებია ძელისათვის

$$X_I(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_{II}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (13.87)$$

განვიხილოთ ძელზე დამაგრებული მასა და წარმოვადგინოთ ის კვთში შეყურსულად, ნახაზი 13.15.

განტოლებების სისტემის რიცხვითი ინტეგრების პროცესში მასის დამაგრების ადგილის გავლისათვის საჭიროა ვიცოდეთ კავშირი საანგარიშო სიდიდეებს შორის მასის მარჯვენა და მარცხენა მხარეებზე.

საანგარიშო პარამეტრების მნიშვნელობები მასის მარცხენა მხარეიდან აღვნიშნოთ მინუსით:

$$Q_y^-, M_x^-, y^-, \theta^- \quad (13.88)$$

იგივე პარამეტრების მნიშვნელობები მასის გავლის შემდეგ, ე.ი. მარჯენიდან, აღვნიშნოთ პლუსით:

$$Q_y^+, M_x^+, y^+, \theta^+ \quad (13.89)$$

მასის გავლისას საანგარიშო პარამეტრები, გაჭდა პირველი პარამეტრისა, არ შეიცვლიან მნიშვნელობებს. პირველი პარამეტრის ცვლილების განსაზღვრისათვის შევადგინოთ მასის წონასწორობის განტოლება, ნახაზი 13.15:

$$Q_y^+ = Q_y^- + M \frac{\partial^2 y^-}{\partial t^2} \quad (13.90)$$

(13.80)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$Q_y^+ = Q_y^- - M\omega^2 y^{*+} \quad (13.91)$$

თანაფარდობები გარდაეკმნათ (13.82)-ის გამოყენებით

$$\begin{aligned} x_1^+ &= x_1^- - \Omega^2 \cdot mx_3^-, & x_2^+ &= x_2^-, \\ x_3^+ &= x_3^-, & x_4^+ &= x_4^-, \end{aligned} \quad (13.92)$$

სადაც

$$m = \frac{M}{\rho_0 F_0 l}$$

თანაფარდობა (13.92) წარმოვადგინოთ ვექტორული სახით

$$\mathbf{X}^+ = K\mathbf{X}^- \quad (13.93)$$

ფორმულაში გამოყენებულია აღნიშვნები

$$\mathbf{X}^+ = \begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_2^+ \\ x_3^+ \\ x_4^+ \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}^- = \begin{pmatrix} x_1^- \\ x_2^- \\ x_3^- \\ x_4^- \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\Omega^2 m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13.94)$$

კონკრეტული Ω^2 სიხშირის პარამეტრის მნიშვნელობისათვის გაანგარიშებებს ვახდენთ სისტემის ინტეგრების რიცხვითი მეთოდის გამოყენებით, მაგალითად, რუნგე-კუტას მეთოდით. თუ მარცხნიდან მარჯვნივ Oz ღერძის დადებითი მიმართულებით ინტეგრებისას ვხვდებით ძელზე დამაგრებულ მასას, ამ კვეთში \mathbf{X}^- ვექტორი ცნობილია; ამის შემდეგ, (13.93)-ის შესაბამისად, ვექტორის მატრიცაზე გამრავლებით მივიღებთ \mathbf{X}^+ ვექტორის მნიშვნელობას მასის მარჯვნივ და ვაგრძელებთ ინტეგრებას.

ინტეგრებას (13.87) საწყისი პირობებით ვაწარმოებთ ორჯერ, ზოგად ამონახსნს წარმოვადგენთ (13.86) გამოსახულების სახით. მაშინ ვექტორის მნიშვნელობა ძელის მარჯვენა საყრდენის შესაბამის წერტილში შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$C_1 \begin{pmatrix} x_1(1)_I \\ x_2(1)_I \\ x_3(1)_I \\ x_4(1)_I \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_1(1)_{II} \\ x_2(1)_{II} \\ x_3(1)_{II} \\ x_4(1)_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 x_1(1)_I + C_2 x_1(1)_{II} \\ 0 \\ 0 \\ C_1 x_4(1)_I + C_2 x_4(1)_{II} \end{pmatrix} \quad (13.95)$$

საიდანაც მუდმივების დასადგენად მივიღებთ წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} C_1 x_2(1)_I + C_2 x_2(1)_{II} &= 0; \\ C_1 x_3(1)_I + C_2 x_3(1)_{II} &= 0. \end{aligned} \quad (13.96)$$

სისტემის არანულოვანი ამონახსნის არსებობის პირობიდან გამომდინარე, ვაღგენთ, რომ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია

$$\Delta(\Omega^2) = \begin{vmatrix} x_2(1)_I & x_2(1)_{II} \\ x_3(1)_I & x_3(1)_{II} \end{vmatrix} = 0. \quad (13.97)$$

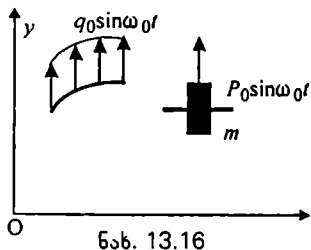
ამრიგად, თუ Ω -ს მნიშვნელობა აკმაყოფილებს (13.97)-ს, მაშინ ეს მნიშვნელობა შეესაბამება სისტემის საკუთარ სიხშირეს. ამ პარამეტრის დასადგენად ვიღებთ Ω -ს სხვადასხვა მნიშვნელობას და ვაწარმოებთ შესაბამის განგარიშებს. როდესაც შევძლებთ (13.97) პირობის დაკმაყოფილებას, (13.86)-ში ჩავთვლით ერთ მუდმივს ცნობილად, მაგალითად, ავიღებთ $C_1=1$, ხოლო მეორე მუდმივს განვსაზღვრავთ (13.96)-ის ერთ-ერთი განტოლების საშუალებით. ამის შემდეგ, (13.86)-ის გამოყენებით, შეგვიძლია დავადგინოთ საკუთარი სიხშირის შესაბამისი ფორმა.

§90. სისტემის იძულებითი რხევების შესწავლის რიცხვითი მეთოდი

დავუშვათ, რომ ძელზე და მასზე დამაგრებულ მასაზე შესაბამისად მოქმედებენ პერიოდული განწილებული ძალა და შეეუღრსული ძალები

$$q_0 = q_0(z) \sin \omega t, \quad P_* = P_0 \sin \omega t. \quad (13.98)$$

13.16 ნახაზზე ნაჩვენებია ამ ძალებით დატვირთული ძელის ელემენტი და მასზე დამაგრებული მასა. ამ ძალებთან ერთად მოქმედებენ წინა პარაგრაფში განხილული ძალებიც. განვიხილოთ მხოლოდ თანაფარდობები (13.77) და (13.90), რომლებიც ამ შემთხვევაში შეიცვლის სახეს



$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_y}{\partial z} &= -q_0 \sin \omega t + F \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \\ Q_y^+ &= Q_y^- + M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - P_0 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (13.99)$$

თანაფარდობები წარმოვადგინოთ (13.80)-

(13.83) სახით, მხოლოდ მათში თავისუფალი რხევების სისწირის ნაცვლად გამოვიყენოთ შემაშფოთებელი ძალების სისწირე.

საბოლოოდ (13.83)-ს ნაცვლად მივიღებთ შემდეგ ოთხ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას.

$$\begin{aligned}x_1' &= -\lambda_1 \Omega^2 x_3 - q; & x_2' &= -x_1; \\x_3' &= x_4; & x_4' &= \lambda_2 x_2.\end{aligned}\quad (13.100)$$

უცნობების მნიშვნელობები მასის მარჯვენა მხარეს დაკავშირებულია იგივე უცნობთან მასის მარცხენა მხარიდან შემდეგი თანაფარდობებით:

$$\begin{aligned}x_1^+ &= x_1^- - \Omega^2 m x_3^- - P & x_2^+ &= x_2^-; \\x_3^+ &= x_3^-; & x_4^+ &= x_4^-.\end{aligned}\quad (13.101)$$

თანაფარდობებში გამოყენებულია აღნიშვნა

$$q = \frac{q_0 l^3}{E_0 I x_0}; \quad P = \frac{P_0 l^2}{E_0 I x_0}; \quad \Omega^2 = l^2 \frac{\rho_0 F_0}{E_0 I x_0} \omega_0^2.$$

საბოლოოდ თანაფარდობებს წარმოვადგენთ შემდეგი სახით

$$\mathbf{X}^+ = \mathbf{KX}^- + \mathbf{L}, \quad \mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{T}. \quad (13.102)$$

სადაც მატრიცების და ვექტორებისათვის გამოყენებულია ფორმულები

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda_1 \Omega^2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\Omega^2 m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.103)$$

m მასა შეიძლება არ იყოს დამაგრებული და შეყურსული ძალა უშუალოდ მოქ-

მედებდეს ძელზე. ამ შემთხვევაშიც გამოიყენება თანაფარდობები, თუ (13.103)-ის მეორე მატრიცაში m -ს გავუტოლებთ ნულს.

ამოცანის ზოგადი ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\mathbf{X} = C_1 \mathbf{X}_I + C_2 \mathbf{X}_{II} + \mathbf{X}^* \quad (13.104)$$

ამრიგად, მეოთხე რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნში ოთხის ნაცვლად ორი ინტეგრების მუდმივია. ეს საშუალებას მოგვცემს დავაკმაყოფილოთ სასაზღვრო პირობები მხოლოდ ძელის მარჯვენა კიდესთან, რაც შეეხება პირობებს ძელის მარცხენა კიდესთან, მათი დაკმაყოფილება მოხდება ავტომატურად ინტეგრებისათვის საწყის წერტილში უცნობთა ვექტორის შესაბამისი შერჩევით.

ამ გამოსახულებაში \mathbf{X}_I და \mathbf{X}_{II} (13.102)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნებია. მათი დადგენა ხდება ზუსტად ისევე, როგორც (13.86) გამოსახულებაში შემავალი ამონახსნებისათვის, - ე.ი. (13.87) საწყისი პირობებით (13.102)-ის რიცხვითი ინტეგრებით, როცა $\mathbf{T}=0$ და $\mathbf{L}=0$. \mathbf{X}^* არაერთგვაროვანი (13.102) განტოლების კერძო ამონახსნია, რომლის მისაღებად ვაწესებთ ნულოვან საწყის პირობებს

$$\mathbf{X}^*(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

სამჯერ ინტეგრების შედეგად მივიღებთ ვექტორული დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს (13.104). მუდმივების დასადგენად წარმოვადგინოთ ამ ამონახსნის მნიშვნელობა ძელის მარჯვენა საყრდენის შესაბამის წერტილში. ნახ. 13.13

$$C_1 \begin{pmatrix} x_1(l)_I \\ x_2(l)_I \\ x_3(l)_I \\ x_4(l)_I \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_1(l)_{II} \\ x_2(l)_{II} \\ x_3(l)_{II} \\ x_4(l)_{II} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^*(l) \\ x_2^*(l) \\ x_3^*(l) \\ x_4^*(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 x_1(l)_{I+} + C_2 x_1(l)_{II} + x_1^*(l) \\ 0 \\ 0 \\ C_1 x_4(l)_{I+} + C_2 x_4(l)_{II} + x_4^*(l) \end{pmatrix} \quad (13.105)$$

საიდანაც მივიღებთ ორ განტოლებას:

$$C_1 x_2(l)_{I+} + C_2 x_2(l)_{II} = -x_2^*(l),$$

$$C_1 x_3(l)_{I+} + C_2 x_3(l)_{II} = -x_3^*(l)$$

ამ განტოლების ამოხსნით დავადგენთ მუდმივების მნიშვნელობებს:

$$C_1 = \frac{x_2(1)_{II} x_3^*(1) - x_3(1)_{II} x_2^*(1)}{x_2(1)_I x_3(1)_{II} - x_3(1)_I x_2(1)_{II}};$$

$$C_2 = \frac{x_3(1)_I x_2^*(1) - x_2(1)_I x_3^*(1)}{x_2(1)_I x_3(1)_{II} - x_3(1)_I x_2(1)_{II}}. \quad (13.106)$$

ამის შემდეგ (13.104)-ის გამოყენებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ თვით სისტემის მდგომარეობის დამახასიათებელი ვექტორიც. შეიძლება ძელზე უშუალოდ იყოს მოდებული შეუქურსული ძალა, ამ შემთხვევაშიც გამოიყენება (13.102) ფორმულები, მაგრამ მათში უნდა დავუშვათ რომ $m=0$.

სისტემაზე შეიძლება მოდებული იყოს სხვადასხვა სიხშირის მქონე ძალები. ამ შემთხვევაში ვაერთიანებთ ერთნაირ სიხშირეების მქონე მოქმედ ფაქტორებს და გაანგარიშებას ვაწარმოებთ ყოველი მათგანისათვის. ყველა ძალის ერთდროული მოქმედების შედეგი მიიღება შედეგების შეკამებით.

§91. ლილვის ბრუნთა კრიტიკული რიცხვი

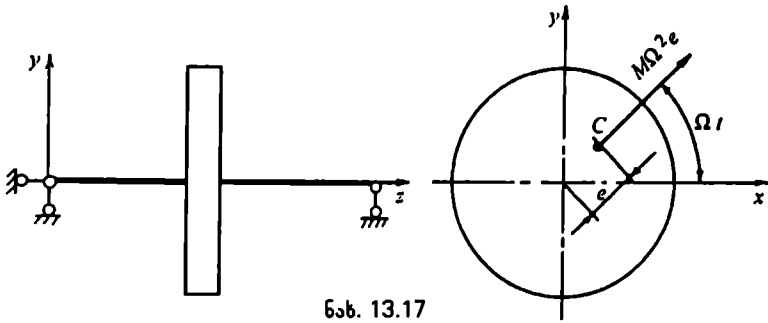
სწრაფად მბრუნავი ლილვისთვის დიდი მნიშვნელობა აქვს ზუსტ ბალანსირებას, მაგრამ ასეთი ოპერაცია მანაც არ გამოირიცხავს გარკვეულ უზუსტობას და ამგვარი სისტემისთვის დამახასიათებელია ინერციის ძალების წარმოქმნა. ეს ძალები ასრულებს შემაშფოთებელი ძალების როლს. მათი წრიული სიხშირე განისაზღვრება n ლილვის ბრუნთა რიცხვით

$$\Omega = \frac{\pi n}{30}.$$

პრაქტიკაში ხშირად ლილვის კუთხური სიჩქარის თანდათანობითი ზრდით ვაღწევთ ისეთ ბრუნთა რიცხვს, რომ კონსტრუქციის რხევების ამპლიტუდა მკვეთრად იზრდება. ბრუნთა რიცხვის შემდგომ ზრდას მოჰყვება რხევების ამპლიტუდის შემცირება. ეს მოვლენები უშუალოდაა დაკავშირებული რეზონანსთან და შეიძლება შევისწავლოთ ზემოთ განხილული ხერხებით.

განვიხილოთ ლილვი, რომელზედაც დამაგრებულია M მასის დისკო. ვთქვათ, ამ უკანასკნელის სიმძიმის ცენტრი დაცილებულია ლილვის ღერძიდან e მანძილით (ნახ. 13.17). ლილვის ბრუნვის პროცესში წარმოიქმნება ცენტრიდანული ძალა $S = M\Omega^2 e$, რომლის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე

$$S_x = M\Omega^2 e \cos \Omega t; \quad S_y = M\Omega^2 e \sin \Omega t. \quad (13.107)$$



ნახ. 13.17

ამრიგად, ვერტიკალურ და ჰორიზონტალურ სიბრტყეებში მოქმედებს Ω სიხშირის შემაშფოთებელი ძალები, რის შედეგადაც ადგილი აქვს იძულებით რხევებს. როგორც დავადგინეთ, ასეთი რხევებისთვის შეიძლება წარმოიშვას რეზონანსის მოვლენა, როცა შემაშფოთებელი ძალის და სისტემის საკუთარი სიხშირეები გაუტოლდება ერთმანეთს: $\Omega_{კრ} = \omega$. აქედან გამომდინარე, ლილვის კრიტიკული ბრუნთა რიცხვი

$$n_{კრ} = \frac{30\Omega_{კრ}}{\pi} = \frac{30\omega}{\pi} \quad (13.108)$$

როგორც აღინიშნა, როდესაც ლილვის ბრუნთა რიცხვი გაუტოლდება კრიტიკულს, რხევების ინტენსიურობა მკვეთრად იზრდება. ამ რეჟიმში ხანგრძლივი მუშაობა, როგორც წესი, არ არის სასურველი. ლილვის ბრუნთა რიცხვი უნდა იყოს ნაკლები ან მეტი კრიტიკულ ბრუნთა რიცხვზე, იმის მიხედვით, თუ როგორ რეჟიმში მუშაობს ლილვი, რეზონანსამდე თუ რეზონანსს შემდეგ ზონაში, შესაბამისად განასხვავებენ ხისტ და მოქნილ ლილვებს. პირველთათვის დამახასიათებელია კრიტიკულზე მცირე ბრუნთა რიცხვით მუშაობა, მეორეებისთვის – რეზონანსული რეჟიმის ისეთი სწრაფი გავლა, რომ რხევის ამპლიტუდები ვერ ასწრებენ მნიშვნელოვან ზრდას. შემდგომ კონსტრუქცია მუშაობს უშიშარ, რეზონანსის ზონას დაცილებულ რეჟიმში.

ბოლო წლებში დიდი მიღწევებია ისეთი ახალი მასალების შექმნის მიმართულებით, რომლებიც ხასიათდება სიმტკიცის მაღალი თვისებებით, რაც სიმტკიცის პირობების შესრულებასთან ერთად ლილვების ზომების მკვეთრად შემცირების საშუალებას იძლევა. მაგრამ წამოიჭრება მეორე პრობლემა – სიხისტის პირობების გაუარესების პრობლემა. ამიტომ კონსტრუქტორი ხშირად არჩევანის წინაშეა, – გამოიყენოს დაბალი მექანიკური თვისებების მქონე შედარებით იაფი მასალა და ერთდროულად დააკმაყოფილოს სიმტკიცისა და ხისტი ლილვის სიხისტის პირობები, თუ აირჩიოს ძვირად ღირებული მაღალი მექანიკური თვისებების მქონე მასალა, შეამციროს ლილვის ზომები და მოითხოვოს მხოლოდ სიმტკიცის პირობის დაკმაყოფილება. უკანასკნელ შემთხვევაში ლილვი იქნება

მოქნილი. ასეთი შემსუბუქებული კონსტრუქციები გამოიყენება საავიაციო და სხვა საფრენ აპარატებში. ამ კონსტრუქციებში ყოველი კილოგრამით კონსტრუქციის შემსუბუქებას განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება. საქმე არა მარტო მასალის ეკონომიაშია, თუმცა ეს საკითხი ყველგან ყოველთვის მწვავედ იდგა და ამჟამადაც დგას. თუ შესაძლებელი იქნება არსებულზე მჩატე თვითმფრინავის დამზადება ისე, რომ ერთდროულად არ გაუარესდა მისი ძირითადი მახასიათებლები, მაშინ ამ შემსუბუქების ხარჯზე გაიზრდება ტვირთამწეობა ან საწვავის მარაგი, რაც გაზრდის თვითმფრინავის მიწაზე დაუშვებლად ფრენის ხანგრძლივობას.

§92. დინამიკური დატვირთვის ცნება

დრეკად სისტემაზე მოქმედი სწრაფადცვლადი ნებისმიერი დატვირთვა დინამიკურ დატვირთვას მიეკუთვნება. ასეთ დატვირთვებზე კონსტრუქციების ანგარიში, როგორც წესი, დაკავშირებულია გარკვეულ სირთულეებთან. კერძოდ, ძნელი დასადგენია ის ენერგია, რომელიც სხეულების ურთიერთდარტყმის დროს იკარგება, ენერგიის რა ნაწილი ხმარდება დრეკადი სხეულის დეფორმაციას და რა ნაწილი გადადის თბურ ენერგიაში. სირთულეს წარმოადგენს, აგრეთვე, დარტყმის ადგილზე დაძაბულობის განსაზღვრა და ა.შ.

ზემოთ ძალების დინამიკურობის ხასიათი უშუალოდ დავეუკავშირეთ ძალის ცვლილების ხასიათს. მაგრამ ასეთი შეფასება არ არის ზუსტი. ეს ცნება დაკავშირებულია, აგრეთვე, იმ კონსტრუქციის თვისაბაზეც, რომელზედაც მოქმედებს ძალა. ერთი და იმავე ხასიათის ძალა ერთი კონსტრუქციისათვის შეიძლება ჩაითვალოს სტატიკურ ძალად, მეორისათვის კი ასეთმა მიდგომამ შეიძლება მიგვიყვანოს მცდარ შედეგებამდე და აუცილებელი გახდეს დინამიკურობის ხასიათის გათვალისწინება. ეს საკითხები პირველად შეისწავლა აკადემიკოსმა ა.ნ. კრილოვმა საზღვაო ქვემეხების გამოცდასთან დაკავშირებით. აქ არ შეეჩერდებით ასეთი ამოცანების დაწვრილებით ანალიზზე, განვიხილავთ მხოლოდ საბოლოო შედეგებს.

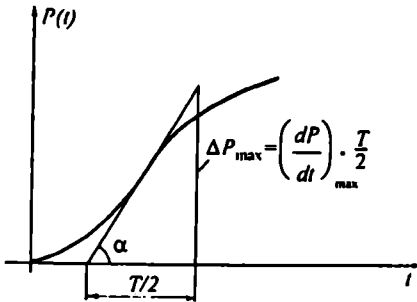
ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემაზე დინამიკური ძალის მოქმედებისას გადაადგილება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმულით:

$$y = \frac{P(t)}{C} + \Delta y. \quad (13.109)$$

ფორმულის პირველი წევრი წარმოადგენს $P(t)$ დინამიკური ძალის მნიშვნელობას, გაყოფილს სისტემის სიხისტეზე. ის შეიძლება განვმარტოთ როგორც გადაადგილება გამოწვეული სისტემაზე მოქმედი ძალით, თუ ამ უკანასკნელს ჩავთვლით სტატიკურად. ასე რომ, ძალის დინამიკური ხასიათი განპირობებს Δy დამატებით გადაადგილებას, რომელიც შეიძლება შეფასდეს შემდეგი უტოლობით

$$\Delta y < \frac{\Delta P_{\max}}{C} \quad (13.110)$$

ამ თანაფარდობაში ΔP_{\max} წარმოადგენს სისტემის თავისუფალი რხევების ნახევარი პერიოდის ტოლი დროის მონაკვეთში ძალის ნაზარდის მაქსიმალური მნიშვნელობას (ნახ.13.18).

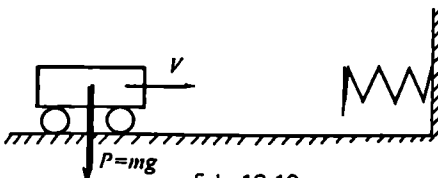


ნახ. 13.18

სად, სისტემის თავისუფალი რხევების სიხშირე დიდია, პერიოდი კი - მცირე და სისტემაზე მოქმედი სწრაფად ცვლადი ძალა შეიძლება ჩაითვალოს სტატიკურად მოქმედ ძალად.

§93. დრეკადი სისტემის გადაადგილებების და ძაბვების გაანგარიშება დინამიკური დატვირთვისას

სისტემის დინამიკის შესასწავლად საჭიროა მისი მოძრაობის განტოლების შედგენა და ამ განტოლების საფუძველზე, დროის ზრდასთან ერთად, გადაადგილებებისა და ძაბვების ცვლილების კანონზომიერების დადგენა. ასეთი სახის სრული გამოკვლევა პასუხს გასცემს ყველა იმ კითხვას, რომელიც დაკავშირებულია დროის ნებისმიერ მომენტში სისტემის მდგომარეობასთან. მაგრამ, ზოგ შემთხვევაში, ჩვენთვის საკმარისია დარტყმის პროცესში წარმოქმნილი მაქსიმალური გადაადგილებებისა და ძაბვების ცოდნა. ეს ამოცანა, ხშირ შემთხვევაში, გაცილებით მარტივია და შეიძლება უშუალოდ ამოიხსნას ენერგეტიკული ბალანსის განტოლებების საშუალებით. ამ შემთხვევაში სისტემის მოძრაობის განტოლების ამოხსნა არ არის საჭირო.



ნახ. 13.19

ამრიგად, ძალის დინამიკური ეფექტით გამოწვეული გადაადგილებები განისაზღვრება, ერთი მხრივ, თვით ძალის

მახასიათებლით, - მისი ზრდის $\left(\frac{dP}{dt}\right)_{\max}$

მაქსიმალური სიჩქარით, ხოლო, მეორე მხრივ, სისტემის მაჩვენებლით, - მისი თავისუფალი რხევების ნახევარი პერიოდით. ამიტომ, თუ სისტემა ძალიან ხისტია, ე.ი. C დიდია, (13.4)-ის შესაბამის

განვიხილოთ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე მუდმივი V სიჩქარით მოძრავი m მასის მქონე ურიკა (ნახ. 13.19). ურიკა ეჩახება ზამბარას, მისი სიჩქარე თანდათან მცირდება და

ურიკა ჩერდება. ურიკის უკან დაბრუნება ამ შემთხვევაში საინტერესო არ არის. დავადგინოთ დარტყმით გამოწვეული ზამბარის მაქსიმალური გადაადგილება (შეკუმშვა) და ძაბვა.

მოძრავი ურიკის კინეტიკური ენერგია

$$A = \frac{mV^2}{2}. \quad (13.111)$$

დარტყმის პროცესში ზამბარა თანდათან იკუმშება, მისი მაქსიმალური გადაადგილება, რომელიც შეესაბამება ურიკის გაჩერების მომენტს, აღვნიშნოთ $\delta_{\text{დ}}$ ასოთი. წარმოვიდგინოთ, რომ ზამბარაზე მოქმედებს $P_{\text{დ}}$ სტატიკური ძალა, რომელიც გამოიწვევს ზამბარის იმავე $\delta_{\text{დ}}$ გადაადგილებას. ამ ძალას ვუწოდოთ დარტყმის პროცესის ეკვივალენტური ძალა. ეკვივალენტობა აქ იგულისხმება დინამიკური და სტატიკური პროცესების შესაბამისი გადაადგილებების, ძაბვებისა და ენერგიების ტოლობის თვალსაზრისით.

ზამბარაზე $P_{\text{დ}}$ ძალის მოქმედების შედეგად დაგროვილი პოტენციალური ენერგია

$$U = \frac{P_{\text{დ}} \delta_{\text{დ}}}{2} = \frac{C \delta_{\text{დ}}^2}{2}, \quad (13.112)$$

სადაც C არის ზამბარის სიხისტე.

რადგან ენერგიის დანაკარგებს არ ვითვალისწინებთ, ვთვლით, რომ ურიკის მოძრაობის კინეტიკური ენერგია მთლიანად ხმარდება ზამბარის შეკუმშვას. (13.111) და (13.112)-ით გამოთვლილი ენერგიების გამოსახულების ტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი თანაფარდობა

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{C \delta_{\text{დ}}^2}{2}. \quad (13.113)$$

ენერგეტიკული ბალანსის ამ განტოლების საფუძველზე გადაადგილებისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$\delta_{\text{დ}} = V \sqrt{\frac{m}{C}}. \quad (13.114)$$

დავადგინოთ დარტყმის პროცესის ეკვივალენტური სტატიკური ძალის მნიშვნელობა

$$P_{\text{დ}} = C \delta_{\text{დ}} = V \sqrt{mC}. \quad (13.115)$$

ძირითადი საანგარიშო ფორმულების მიღებისას ჩვენ განგებ ავუარეთ გვერდი C სიხისტის კოეფიციენტის მნიშვნელობის კონკრეტული გამოსახულების გამოყენებას, რადგანაც მიღებული შედეგები ზოგად ხასიათს ატარებს და მოი-

ცავს ამოცანათა ფართო კლასს. ზამბარა ნაჩვენებია მხოლოდ ამოცანის უფრო ნათლად წარმოდგენის მიზნით. წრიული განივკვეთიანი ზამბარისათვის გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4}; \quad l = \frac{8CD^3n}{Gd^4}; \quad C = \frac{Gd^4}{8D^3n}.$$

ამ შედეგის (13.114) და (13.115)-ში გათვალისწინებით მივიღებთ დარტყმის პროცესის შესაბამის გადაადგილებას და ძალას

$$\delta_{\text{დ}} = 2V \left(\frac{D}{d} \right)^2 \sqrt{2 \frac{mn}{GD}}; \quad P_{\text{დ}} = \frac{1}{2} V \left(\frac{d}{D} \right)^2 \sqrt{\frac{mGD}{2n}}.$$

ჩამოვყალიბოთ სიმტკიცის პირობა

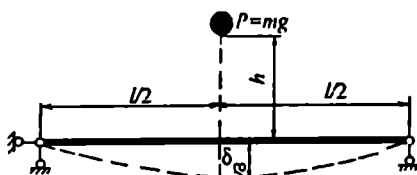
$$\tau_{\text{max}} = \frac{8P_{\text{დ}}D}{\pi d^3} = 4 \frac{V}{\pi d} \sqrt{\frac{mG}{2Dn}} \leq [\tau]$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ზამბარის ნაცვლად ურიკა ეჭახება ვერტიკალურ კონსოლურ ღეროს(ნახ.13.20):

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI_x}; \quad l = \frac{Cl^3}{3EI_x}; \quad C = \frac{3EI_x}{l^3}.$$



ნახ. 13.20



ნახ. 13.21

ამ შედეგის ზემოთ მიღებულ ფორმულებში გათვალისწინებით შეიძლება ძელის სიხისტეზე და სიმტკიცეზე გაანგარიშება.

შევსწავლოთ დრეკად სისტემაზე თავისუფლად ვარდნილი სხეულის დარტყმის შემთხვევა (ნახ.13.21). ამ შემთხვევაშიც ამოცანა განვიხილოთ ზოგადად.

h მანძილის გავლის შემდეგ ვარდნილი სხეული შეეხება ძელს, ეს უკანასკნელი დაიწყებს გაღუნვას. ვთვლით, რომ სხეულის და ძელის შეხების შემდეგ

მათი მოძრაობა ერთობლივია და დარტყმის შედეგად სხეულის ძელიდან დაცილება არ ხდება.

ძელისა და სხეულის მოძრაობის სიჩქარე თანდათან მცირდება და ისინი შეჩერდებიან მაშინ, როცა ძელის ღუნვით გამოწვეული დეფორმაციის ენერგია და სხეულის პოტენციალური ენერგია გაუტოლდება ერთმანეთს. სისტემის ამ მდგომარეობას შესაბამება ძელის და სხეულის მაქსიმალური გადაადგილება.

შემოვიღოთ დარტყმის პროცესის ეკვივალენტური $P_{\text{დ}}$ სტატიკური ძალის ცნება. ეს ძალა, ისე როგორც ზემოთ განხილულ ამოცანაში, იმავე გადაადგილებას იწვევს, როგორც დარტყმა.

სხეული ვარდნის შედეგად გაივლის $h + \delta_{\text{დ}}$ მანძილს (ნახ. 13.21). შესაბამისად, შეიცვლება მისი პოტენციალური ენერგიაც

$$A = P(h + \delta_{\text{დ}}) \quad (13.116)$$

დარტყმის შედეგად ძელი მოიღუნება და მაქსიმალური გადაადგილება მიაღწევს $\delta_{\text{დ}}$ სიდიდეს. ასეთი სიდიდის გადაადგილებას იწვევს, აგრეთვე, სტატიკურად მოქმედი $P_{\text{დ}}$ ძალა. ამიტომ ძელის დეფორმაციის პოტენციალური ენერგიის სათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას

$$U = \frac{P_{\text{დ}} \delta_{\text{დ}}}{2} = \frac{C \delta_{\text{დ}}^2}{2}.$$

ენერგეტიკული ბალანსის განტოლება ჩაიწერება ასეთი სახით:

$$P(h + \delta_{\text{დ}}) = \frac{C \delta_{\text{დ}}^2}{2}. \quad (13.117)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\delta_{\text{ს}} = \frac{P}{C}. \quad (13.118)$$

$\delta_{\text{ს}}$, არის გადაადგილება გამოწვეული სისტემაზე სტატიკურად მოდებული P ძალით. საბოლოოდ, (13.117)-ის ნაცვლად მივიღებთ შემდეგ განტოლებას

$$\delta_{\text{დ}}^2 - 2\delta_{\text{ს}} \delta_{\text{დ}} - 2h\delta_{\text{ს}} = 0. \quad (13.119)$$

განტოლების ამოხსნით დავადგენთ დინამიკური დატვირთვით გამოწვეულ გადაადგილებას

$$\delta_{\text{დ}} = \delta_{\text{ს}} + \sqrt{\delta_{\text{ს}}^2 + 2h\delta_{\text{ს}}} \quad (13.120)$$

მიღებული ფორმულა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად

$$\delta_{\text{დ}} = \eta \delta_{\text{ს}}, \quad (13.121)$$

სადაც η დინამიკურობის კოეფიციენტია. ეს კოეფიციენტი გვიჩვენებს, თუ რამდენჯერ აღემატება დინამიკური ეფექტით გამოწვეული გადაადგილება სტატიკური პროცესის შესაბამის გადაადგილებას სიდიდეს. დინამიკურობის კოეფიციენტი

$$\eta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{\text{ს}}}}. \quad (13.122)$$

ანალოგიურად განისაზღვრება დინამიკური ძალა და ძაბვები:

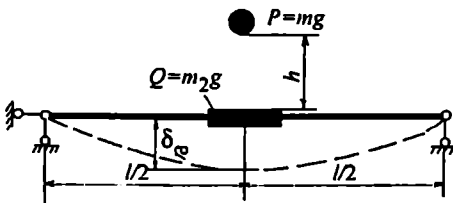
$$P_{\text{დ}} = \eta P; \quad \sigma_{\text{დ}} = \eta \sigma_{\text{ს}}. \quad (13.123)$$

სხეულისათვის, რომელიც მხოლოდ ეხება ძელს, $h=0$, და მყისიერად ეშვება მასზე, დინამიკურობის კოეფიციენტი $\eta=2$. ეს იმას ნიშნავს, რომ ასეთი დინამიკური დატვირთვით გადაადგილებები და ძაბვები ორჯერ აღემატება სტატიკურად მოქმედი იგივე ძალით გამოწვეულ შესაბამის სიდიდეებს. ამ კერძო შემთხვევის გარდა, დინამიკურობის კოეფიციენტი $\eta > 2$.

დინამიკურობის კოეფიციენტის მისაღებად გამოვიყენებთ კვადრატული განტოლების მხოლოდ ერთი ფესვი. რაც შეეხება მეორე ფესვს, იგი შეესაბამება სისტემის მეორე უკიდურეს მდგომარეობას, რომელსაც სისტემა დაიკავებს უკუ-მძრაობის შედეგად. ადვილი საჩვენებელია, რომ მეორე ფესვის შესაბამისი დინამიკურობის კოეფიციენტის მნიშვნელობა (13.122)-ით განსაზღვრულ სიდიდეზე მცირეა.

§94. დარტყმის გადაცემა დრეკად სისტემაზე მასიური შუალედური სხეულის საშუალებით

განვიხილოთ წინა პარაგრაფის ამოცანა ახალი პირობებით. ვარდნილი სხეული ეშვება h სიმალიდან ძელზე და მავრებულ მეორე სხეულზე (ნახ. 13.22)



ნახ. 13.22

ვარდნილი სხეული სისტემის შეხების შემდეგ დამატებით გადაადგილდება ძელზე დამავრებულ სხეულთან ერთად $\delta_{\text{დ}}$ მანძილზე. ამიტომ ორივე სხეულის პოტენციალური ენერჯიის ცვლილება

$$A = Ph + (P + Q)\delta_{\text{დ}}. \quad (13.124)$$

ძელში დარტყმით გამოწვეული ღუნვის შედეგად დაგროვდება დეფორმაციის პოტენციალური ენერჯია

$$U = \frac{P_{\text{დ}}\delta_{\text{დ}}}{2} = \frac{C\delta_{\text{დ}}^2}{2}. \quad (13.125)$$

ფორმულაში $\delta_{\text{დ}}$ და $P_{\text{დ}}$ სიდიდეებს აქვთ იგივე მნიშვნელობა, როგორც წინა პარაგრაფში განხილულ მათ შესაბამის სიდიდეებს.

ენერგეტიკული ბალანსის განტოლებას ექნება სახე:

$$Ph + (P + Q)\delta_{\text{დ}} = \frac{C\delta_{\text{დ}}^2}{2}. \quad (13.126)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\delta_{\text{ს}} = \frac{P + Q}{C}. \quad (13.127)$$

მაშინ (13.126) განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\delta_{\text{დ}}^2 - 2\delta_{\text{ს}}\delta_{\text{დ}} - 2h\delta_{\text{ს}} \frac{P}{P + Q} = 0. \quad (13.128)$$

ამ განტოლების ამოხსნის შედეგად მივიღებთ (13.121)-ის და (13.123)-ის ანალოგიურ ფორმულებს, ოღონდ ამ შემთხვევაში დინამიკურობის კოეფიციენტი

$$\eta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{\text{ს}}} \frac{P}{P + Q}}. \quad (13.129)$$

როდესაც სხეულის ვარდნის სიმაღლე ნულის ტოლია, განხილული დატვირთვისათვის ამ შემთხვევაშიც $\eta = 2$.

მიღებული შედეგები ზოგადი ხასიათისაა და გამოიყენება მრავალი სხვა ანალოგიური ამოცანის ამოხსნისას. ოღონდ ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში აუცილებელია სისტემის დრეკადობის კოეფიციენტის მნიშვნელობის გათვალის-

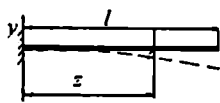
წინება. კერძოდ, 13.22 ნახაზზე გამოსახული სისტემისათვის $C = \frac{48EI_x}{l^3}$.

§95. დრეკადი სისტემის დაყვანილი მასის კოეფიციენტი

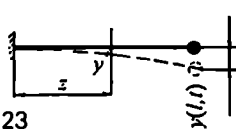
დარტყმის პროცესების შესწავლისას ჩავთვალოთ, რომ სისტემის განაწილებული მასა მცირეა სხეულის მასასთან შედარებით და ამიტომ იგი მხედველობაში არ მივიღებთ. ასეთი დაშვება მიუღებელია, თუ სხეულის მასა ვარდნილი სხეულის მასის რიგისაა. ამ შემთხვევაში, სისტემის განაწილებული G მასის გარკვეული kG ნაწილი დარტყმის კვთში პირობითად გამოვსახოთ როგორც შეყურსული; გამოვიყენოთ წინა პარაგრაფში განხილული მეთოდიკა, თუ დავუშვებთ, რომ $Q=kG$. მაშინ (13.129)-ის შესაბამისად, დინამიკურობის კოეფიციენტისათვის მივიღებთ ახალ გამოსახულებას

$$\eta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_s} \frac{P}{P + kG}}. \quad (13.130)$$

k სიდიდეს დაყვანილი მასის კოეფიციენტი ეწოდება. მისი განსაზღვრისთვის ვიყენებთ ენერგეტიკული ბალანსის განტოლებას, რომელსაც საფუძვლად უდევს რეალური და დაყვანილი სისტემების კინეტიკური ენერგიების ტოლობა.



ნახ. 13.23



განვიხილოთ რეალური და დაყვანილი ძალების დარტყმით

გამოწვეული მოძრაობები (ნახ.13.23) პირველისათვის კინეტიკური ენერგია

$$A_k = \int_0^l \frac{F(z)\rho}{2} [y(z, t)]^2 dz. \quad (13.131)$$

აქ გამოყენებულია შემდეგი აღნიშვნები: წერტილით აღნიშნულია წარმოებული დროის მიხედვით, $F(z)$ - ვანივი კვთის ფართობი, ρ - ძელის მასალის კუთრი სიმკვრივე.

დაყვანილი სისტემისთვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას

$$A_d = \int_0^l \frac{kF(z)\rho [y(l, t)]^2 dz}{2}. \quad (13.132)$$

გავუტოლოთ ერთმანეთს (13.131) და (13.132) გამოსახულებები და დავადგინოთ დაყვანილი მასის კოეფიციენტის ფორმულა

$$k = \frac{\int_0^l F(z) [y(z, t)]^2 dz}{[y(l, t)]^2 \int_0^l F(z) dz}.$$

დამატებით დავუშვათ, რომ სიჩქარეები ისე შეესაბამებიან ერთმანეთს, როგორც გადაადგილებები

$$\frac{\dot{y}(z, t)}{\dot{y}(l, t)} = \frac{y(z)}{y(l)}$$

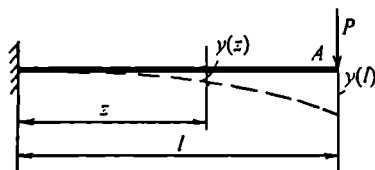
ამ დაშვების გათვალისწინებით, საბოლოოდ, დაყვანილი მასის კოეფიციენტისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$k = \frac{1}{V} \int_0^l \left[\frac{y(z)}{y(l)} \right]^2 F(z) dz, \quad (13.133)$$

სადაც V არის სისტემის მოცულობა. მუდმივი განივი კვეთის მქონე სისტემის (13.133)-ის ნაცვლად გვექნება

$$k = \frac{1}{l} \int_0^l \left[\frac{y(z)}{y(l)} \right]^2 dz. \quad (13.134)$$

დავადგინოთ 13.24 ნახაზზე ნაჩვენები ძელისათვის A წერტილში დაყვანილი მასის კოეფიციენტი. ამ შემთხვევაში გადაადგილებები იქნება



$$y(l) = -\frac{Pl^3}{3EI_x}; \quad y(z) = \frac{P}{EI_x} \left(\frac{z^3}{6} - \frac{lz^2}{2} \right).$$

გავითვალისწინოთ ეს შედეგები (13.134) გამოსახულებაში:

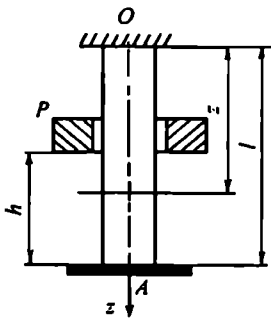
ნახ. 13.24

$$k = \frac{9}{l^7} \int_0^l \left(\frac{z^3}{6} - \frac{lz^2}{2} \right)^2 dz = \frac{9}{4l^7} \left(\frac{l^7}{63} - \frac{l^7}{9} + \frac{l^7}{5} \right) = \frac{33}{140}.$$

ზემოთ განხილული დაყვანილი მასის კოეფიციენტის დადგენის მეთოდიკა შეიძლება გამოვიყენოთ დრეკადი სისტემების რხევების შესწავლისთვისაც.

§96. გრძივი დარტყმა

განვიხილოთ ძელი, რომელიც ვარდნილი სხეულის მოქმედების შედეგად განიცდის გაჭიმვას (ნახ. 13.25). წინა პარაგრაფებში ჩატარებული ყველა მსჯელობა და გარდაქმნა, ფაქტიურად ამ შემთხვევაშიც ძალაში რჩება. ამიტომ დინამიკური კოეფიციენტისთვის მივიღებთ (13.122) ფორმულას. როდესაც განიხილება A კვეთში დამაგრებული Q მასის სხეული, ძალაშია (13.129) ფორმულა. აქ დრეკადობის კოეფიციენტი



ნახ. 13.25

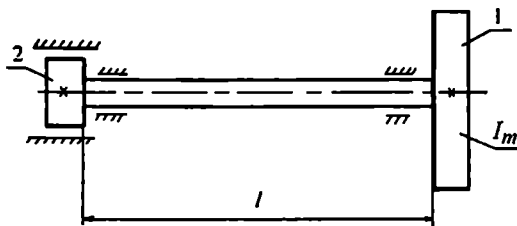
$$C = \frac{EF}{l}$$

(13.134)-ის საშუალებით დავადგინოთ ძელის დაყვანილი მასის კოეფიციენტი. ამ შემთხვევაში საჭიროა Oz ღერძის მიმართულებით გადაადგილებების გავალისწინება:

$$y(z) = \frac{Pz}{EF}; \quad y(l) = \frac{Pl}{EF}; \quad k = \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{z}{l}\right)^2 dz = \frac{1}{3}$$

§97. მგრესხავი დარტყმა

დრეკადი ელემენტების ბრუნვისას წარმოქმნილმა ინერციის ძალებმა შეიძლება გამოიწვიოს დარტყმითი ეფექტი, რის შედეგადაც სისტემაში მკვეთრად იზრდება გადაადგილებები და ძაბვები. ასეთი სისტემის მაგალითია 13.26 ნახაზზე ნაჩვენები ლილვი, რომელზედაც დამაგრებულია ორი დისკო. პირველი, დიდი დისკოს I_m ინერციის მომენტი გაცილებით აღემატება ლილვისა და მეორე დისკოს ინერციის მომენტებს. ამიტომ ამ უკანასკნელთა კინეტიკურ ენერჯიას მხედველობაში არ ვიღებთ. მეორე, პატარა დისკო, მუხრუჭისა და გამოიყენება სისტემის ბრუნვის შესაწყვეტად.



ნახ. 13.26

ნახაზზე ნაჩვენები ლილვი, რომელზედაც დამაგრებულია ორი დისკო. პირველი, დიდი დისკოს I_m ინერციის მომენტი გაცილებით აღემატება ლილვისა და მეორე დისკოს ინერციის მომენტებს. ამიტომ ამ უკანასკნელთა კინეტიკურ ენერჯიას მხედველობაში არ ვიღებთ.

მეორე, პატარა დისკო, მუხრუჭისა და გამოიყენება სისტემის ბრუნვის შესაწყვეტად.

სისტემა ბრუნავს თანაბარი ω კუთხური სიჩქარით და მისი კინეტიკური ენერჯია $A = (I_m \omega^2 / 2)$.

მეორე დისკო მყისიერად მუხრუჭდება, მაგრამ პირველი დისკო ინერციით დამატებით მობრუნდება $\varphi_{დ}$ -ს ტოლი კუთხით და გაჩერდება. მხოლოდ ამის შემდეგ $M_{დ}$ მგრესხი დარტყმის ეკვივალენტური სტატიკური მომენტი ჩავთვალოთ პირველ დისკოზე მოდებულიად. ეს მომენტი დისკოს მოაბრუნებს $\varphi_{დ}$ ტოლი კუთხით. ამიტომ ლილვის დეფორმაციის პოტენციალური ენერჯია

$$U = \frac{M_{დ} \varphi_{დ}}{2} = \frac{C \varphi_{დ}^2}{2}$$

ენერგეტიკული ბალანსის განტოლების საფუძველზე მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\varphi_{\text{ღ}} = \sqrt{\frac{I_m}{C}} \omega. \quad (13.135)$$

რაც შეეხება მგრებს მომენტს, გვაქვს შემდეგი თანაფარდობა

$$M_{\text{ღ}} = C \varphi_{\text{ღ}} = \sqrt{CI_m} \omega. \quad (13.136)$$

მიღებული ფორმულები გამოიყენება როგორც მუდმივი, ისე ცვლადი განივი კვეთის მქონე ლილვების გაანგარიშებისას, განსხვავება მხოლოდ სიხისტის მნიშვნელობებშია. კერძოდ, 13.26 ნახაზზე ნაჩვენები მუდმივი განივიკვეთიანი ლილვისთვის გვაქვს ფორმულა

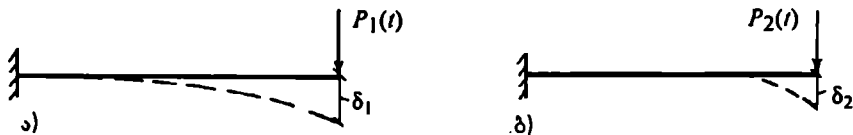
$$C = \frac{GI_p}{l}.$$

დარტყმის შედეგად ლილვში წარმოიქმნება მხები ძაბვები; ამ ძაბვების მაქსიმალური მნიშვნელობის გათვალისწინებით სიმტკიცის პირობას ექნება შემდეგი სახე:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sqrt{CI_m} \omega}{W_p} \leq [\tau] \quad (13.137)$$

ამრიგად, დინამიკური დატვირთვისას დრეკადი სისტემების გაანგარიშების ზემოთ მოყვანილ მეთოდებს ამოცანა ფაქტიურად დაშუავთ შესაბამისი სტატიკური დატვირთვის ამოცანამდე. ცხადია, საკითხისადმი ასეთი მიდგომა მოსახერხებელია, მაგრამ იგი ყოველთვის არ გამოიყენება. ერთი შეხედვით ეს გაუგებარია, რადგან ენერგეტიკული ბალანსის განტოლებების გამოყენების შესაძლებლობა ექვს არ იწვევს. აქ აუცილებელია შევნიშნოთ, რომ სისტემის დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია, როგორც სტატიკური, ისე დინამიკური დატვირთვისასთვის გაიანგარიშებოდა ერთი და იმავე ფორმულებით, რაც დასაშვებია ძალების ცვლილების გარკვეულ საზღვრებში. როდესაც ძალები იზრდება განსაკუთრებით მაღალი სიჩქარეებით, სურათი შეიძლება მკვეთრად განსხვავებული იყოს. მაგალითისათვის განვიხილოთ 13.25 ნახაზზე გამოსახული ძელი. დაბალი და საშუალო სიჩქარეებით ძელის დატვირთვისას იგი თანაბრად იჭიმება და მასში პოტენციალური ენერგიაც თანაბრადაა განაწილებული. მაღალი სიჩქარეებით დატვირთვისას ძელის დეფორმაციას, ძირითადად, ადგილი ექნება დარტყმის ზონაში. შესაბამისად ენერგიის კონცენტრირებაც ამ ზონაში ხდება და აქვეა შესაძლებელი კიდურა ნაწილის გაწყვეტა. ანალოგიური სურათი გვაქვს ღუნვითი დარტყმის შემთხვევაშიც. დაბალი სიჩქარით ცვლადი ძალებისთვის საყრდენთან მიახლოებისას დეფორმაციები იზრდება და, შესაბამისად, საშიშობა ჩამატების კვეთი (ნახ.13.27,ა), მაღალი სიჩქარით ძელის დატვირთვისას

დეფორმაციამ დამაგრების ზონამდე შეიძლება ვერც მოასწროს გაგრძელება, მაშინ, როცა დარტყმის ზონაში უკვე მოხდა მისი დამსხვრევა ან გაღუნვა

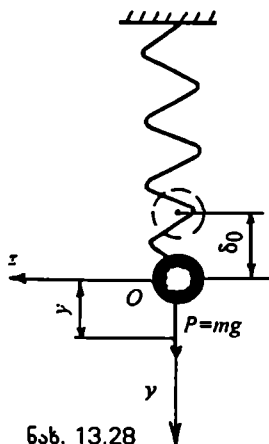


ნახ. 13.27

(ნახ.13.27,ბ). განმარტებები დიდი, საშუალო და მცირე სიჩქარეების თაობაზე მოითხოვს ცალკე კვლევას.

მეცამეტე თავის მაგალითები

მაგალითი 13.1. შევისწავლოთ ზამბარაზე დაკიდებული მასის ვერტიკალური თავისუფალი რხევები (ნახ.13.28)



ნახ. 13.28

დაკიდებული მასა გამოიწვევს ზამბარის გაჭიმვას δ_0 სიდიდით. აქვე მოვათავსოთ კოორდინატა სისტემის საწყისი წერტილი და განვიხილოთ მასის გადაადგილება y საწყისი წერტილიდან ქვემოთ. ვინაიდან ზამბარის სრული წაგრძელება $(\delta_0 + y)$ სიდიდის ტოლია, მასზე იმოქმედებს დრეკადობის ძალა $C(\delta_0 + y)$. დალაშქრის პრინციპის შესაბამისად, განვიხილოთ მასზე მოქმედი ძალები (ნახ.13.29) და დავაგვიგმილოთ ეს ძალები ლერძზე

$$C(\delta_0 + y) + m\ddot{y} - P = 0.$$

აღვნიშნოთ, რომ $C\delta_0 = P$. ამიტომ, საბოლოოდ, მივიღებთ შემდეგ განტოლებას

$$m\ddot{y} + Cy = 0.$$

ეს განტოლება იმეორებს (13.3) განტოლებას, ამიტომ სისტემის საკუთარი სიხშირე განისაზღვრება (13.4) ფორმულით.

ხოლო გადაადგილება y - (13.11) ფორმულის საშუალებით. მაშინ ზამბარის წაგრძელება

$$Y = \delta_0 + y = \delta_0 + A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

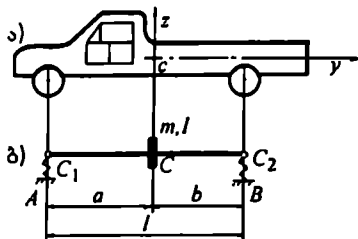
ნახ. 13.29

ამრიგად, სრული გადაადგილება განისაზღვრება ორი, მუდმივი და პერიოდული კანონით ცვლადი მდგენელით.

ასეთივე სურათი გვაქვს იმავე ტიპის სისტემების იძულებითი რხევების განხილვისას. მათთვის, ისე, როგორც გადაადგილებებისათვის, საჭიროა განვასხვავოთ ძაბვების მუდმივი მდგენელი, რომელიც შეესაბამება კონსტრუქციის საწყის დაძაბულობას და

პერიოდული კანონზომიერებით ცვლადი მდგენელი. სიმტკიცეზე გაანგარიშებისას ძაბვების ერთმანეთისგან განსხვავება, ჩვეულებრივ, საჭირო არ არის. მაგრამ შემდეგში, კონსტრუქციების დალილობის საკითხების შესწავლისას, დავრწმუნდებით, რომ ძაბვების განსხვავება ხშირ შემთხვევაში აუცილებელია.

მაგალითი №2. დავადგინოთ მანქანის ძარის საკუთარი სიხშირეები, თუ მისი ვერტიკალური და კუთხური რხევები განიხილება zCy სიბრტყეში (ნახ.13.30). მანქანის მასა m -ის ტოლია.

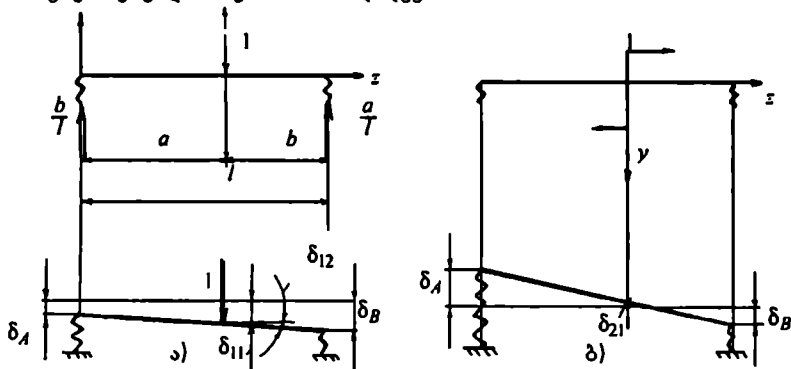


ნახ. 13.30

მანქანის ინერციის მომენტი C წერტილში გამავალი ნახაზის მართობული ცენტრალური ღერძის მიმართ I -ის, ზოლო წინა და უკანა რესორების სიხისტის კოეფიციენტები, შესაბამისად, C_1 -სა და C_2 -ის ტოლია.

მანქანის რხევების შესასწავლად გამოვიყენოთ (13.53) სისტემა, ოღონდ აუცილებელია თანაფარდობებში შემავალი სიდიდეების განსაზღვრა.

ვერტიკალური ერთეულოვანი ძალის შესაბამისი რეაქციები და ძარის სიმძიმის ცენტრის გადაადგილებები ნაჩვენებია 13.31 ნახაზზე. გამოვთვალოთ შესაბამისი სიდიდეები:



ნახ. 13.31

$$\delta_A = \frac{b}{lC_1}; \quad \delta_B = \frac{a}{lC_2};$$

$$\delta_{11} = \delta_A + \frac{\delta_B - \delta_A}{l} a = \frac{b^2}{l^2 C_1} + \frac{a^2}{l^2 C_2} = \frac{1}{l^2} \left(\frac{a^2}{C_2} + \frac{b^2}{C_1} \right);$$

$$\delta_{12} = \frac{\delta_B - \delta_A}{l} = \frac{a}{l^2 C_2} - \frac{b}{l^2 C_1} = \frac{1}{l^2} \left(\frac{a}{C_2} - \frac{b}{C_1} \right).$$

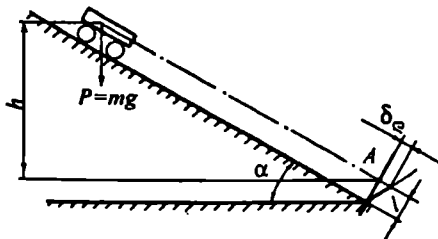
მეორე სისტემის მდგომარეობის განმსაზღვრელი კოეფიციენტები შეესაბამება C წერტილში გამავალი ნახაზის მართობი ღერძის მიმართ ძარის მობრუნების კუთხეს C წერტილში ერთეულოვანი მომენტის მოდების შემთხვევისათვის. შესაბამისი რეაქციები და გადაადგილებები ნაჩვენებია 13.30 ნახაზზე. გავიანგარიშოთ ეს სიდიდეები:

$$\delta_A = -\frac{1}{IC_1}; \quad \delta_B = \frac{1}{IC_2};$$

$$\delta_{22} = \frac{\delta_B - \delta_A}{I} = \frac{1}{I^2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right); \quad \delta_{21} = \delta_{12} = \frac{1}{I^2} \left(\frac{a}{C_2} - \frac{b}{C_1} \right).$$

ასეთი ამოცანა ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის თავისუფალი რხევებისათვის. ფაქტიურად, უკვე განხილული გვაქვს. ამიტომ (13.55) ფორმულაში გავითვალისწინოთ დადგენილი სიდიდეების მნიშვნელობები, აგრეთვე $m_1 = m$ და $m_2 = I$.

მაგალითი 13.3. დახრილ სიბრტყეზე მდებარე ურიკა (ნახ.13.32) იწვევს მოძრაობას და ექახება ძელს. დავადგინოთ მაქსიმალური გადაადგილებები და ძაბვები. მათი საშუალებით ჩამოვაყალიბოთ ძელის სიმტკიცის პირობა.



ნახ. 13.32

ურიკას დარტყმა გამოიწვევს ძელის A წერტილის δ სიდიდით გადაადგილებას. აღწინააღმდეგოთ სტატიკურად მოქმედი ურიკის მოძრაობის მიმართულების ძალა P -ით. რომელიც იწვევს იმავე გადაადგილებას, როგორცაა დარტყმის პროცესი.

ურიკის მოძრაობის შედეგად მისი სიმძიმის ცენტრი გადაადგილდება ვერტიკალური მიმართულებით ($h + \delta \sin \alpha$) სიდიდით. ამიტომ ურიკის პოტენციალური ენერჯიის ცვლილება

$$A = P(h + \delta \sin \alpha)$$

ძელის დეფორმაციის პოტენციალური ენერჯია გაიანგარიშება ფორმულით

$$U = \frac{P \delta}{2} = \frac{C \delta^2}{2}.$$

შევადგინოთ ენერგეტიკული ბალანსის განტოლება

$$P(h + \delta \sin \alpha) = \frac{C \delta^2}{2},$$

საიდანაც δ -ის განსაზღვრისთვის მივიღებთ შემდეგ განტოლებას

$$\delta_{\text{დ}}^2 - 2\delta_{\text{ს}} \delta_{\text{დ}} \sin \alpha - 2h\delta_{\text{ს}} = 0.$$

ამ განტოლებაში $\delta_{\text{ს}} = \frac{P}{C}$. ეს არის P სტატიკური ძალით გამოწვეული გადაადგილება.

რომელიც პირობით მოდებულია ძელზე ურეის მოძრაობის მიმართულებით.

განტოლების ამოხსნით მივიღებთ გადაადგილების გამოსათვლელ ფორმულას და ჩამოვყალიბებთ ძელის სიხისტის პირობას

$$\delta_{\text{დ}} = \eta \delta_{\text{ს}} \leq [\delta]$$

ანალოგიურად განისაზღვრება დარტყმით გამოწვეული მაქსიმალური ძაბვა და ძელის სიმტკიცის პირობა მიიღებს სახეს

$$\sigma_{\text{დ}} = \eta \sigma_{\text{ს}} \leq [\sigma]$$

სადაც

$$\eta = \sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 2 \frac{h}{\delta_{\text{ს}}}}; \quad \delta_{\text{ს}} = \frac{Pl^3}{3EI_x}$$

როდესაც $\alpha = 90^\circ$, ურეია ვარდება ძელზე h სიმალიდან და ვლებულობთ ჩვენთვის ცნობილ (13.122) ფორმულას.

მაგალითი 13.4. მძიმე დისკო (ნახ.13.33), რომლის ინერციის მომენტი ნახაზის მართობი მიმართულებით O წერტილში გამავალი ღერძის მიმართ I -ს ტოლია, ბრუნავს აღნიშნული ღერძის ირგვლივ ω თანაბარი კუთხური სიჩქარით. ძელი სწრაფად უახლოვდება დისკოს. დისკოზე დამაგრებული მყარი შტიფტი-2 ეჭახება მას და დისკო ჩერდება. განსაზღვროთ დარტყმით გამოწვეული ძელის გადაადგილება და მაქსიმალური ძაბვა.

დარტყმის პროცესამდე დისკოს კინეტიკური ენერჯია

$$A = \frac{I\omega^2}{2}$$

როდესაც შტიფტი შეეხება ძელს, დისკო მყისვე არ ჩერდება - ძელის $\delta_{\text{დ}}$ სიდიდის გადაადგილების ხარჯზე იგი დამატებით მობრუნდება გარკვეული კუთხით და მხოლოდ შემდეგ გაჩერდება. ამ მდგომარეობაში დისკოს ბრუნვის მთელი კინეტიკური ენერჯია გადადის ძელის დეფორმაციის პოტენციალურ ენერჯიაში. ეს ენერჯია

$$U = \frac{P_{\text{დ}} \delta_{\text{დ}}}{2} = \frac{C \delta_{\text{დ}}^2}{2}$$

ენერგეტიკული ბალანსის განტოლების გამოყენებით შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ძელის სიხისტიისათვის შემდეგი პირობა

$$\delta_{\text{დ}} = \omega \sqrt{\frac{I}{C}} \leq [\delta]$$

ამ გადაადგილებას შეესაბამება ძელის მაქსიმალური ნორმალური ძაბვა და სიმტკიცის პირობა

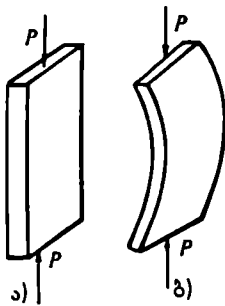
$$\sigma_{\text{max}} = \frac{C\delta_{\text{დ}}^2}{W_x} = \frac{\sqrt{CI}\omega l}{W_x} \leq [\sigma]$$

თუ ძელის გეომეტრიული ზომები ცნობილია, მიღებული ფორმულის საშუალებით გამოწმობთ სიმტკიცის პირობის შესრულებას. შეიძლება სხვა სახის ამოცანის ამოხსნაც კერძოდ. შევარჩიოთ ძელის გეომეტრიული ზომები, რომლებიც დააკმაყოფილებს სიხისტიისა და სიმტკიცის პირობებს.

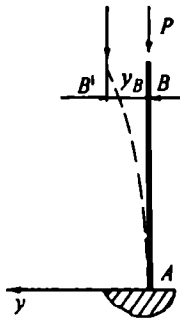
XIV თავი. დეფორმირებადი სისტემების წონასწორობის მდგრადობა

§98. მდგრადობის ცნების შესახებ. მდგრადობის კრიტერიუმები

სწორი ძელის ცენტრალური კუმშვა განვიხილეთ სახელმძღვანელოს მეორე თავში, სადაც დავადგინეთ ნორმალური ძაბვები, გადაადგილებები და შევიმუშავეთ სიმტიცესა და სიხისტეზე გაანგარიშების ხერხები. აღნიშნული თეორია მოკლე ძელების გამოკვლევისას იძლევა უკეთეს შედეგებს, ვიდრე გრძელი ძელებისათვის. რაც შეეხება გრძელ ძელებს, ცენტრალური კუმშვისას მოსალოდნელია მათი მდგრადობის დაკარგვა და სწორხაზოვანი ფორმის მრუდწირულ



ნახ. 14.1



ნახ. 14.2

ფორმაში გადასვლა (ნახ. 14.1). აქ დავკმაყოფილდეთ მოკლე და გრძელი ძელის ზოგადი, მხოლოდ ხარისხობრივი, განსაზღვრით.

ცენტრალური კუმშვისას ძელში მხოლოდ შიგა ნორმალური ძალა აღიძვრება და ყოველ განივ კვეთში წარმოიშობა შესაბამისი ძაბვები. მდგრადობის დაკარგვისას განივ კვეთში დამატებით აღიძვრება მღუნავი მომენტი, რომლის მიერ გამოწვეული ნორმალური ძაბვები, როგორც წესი,

თავისი სიდიდით მნიშვნელოვნად აღემატება კუმშვისას წარმოქმნილ ნორმალურ ძაბვებს.

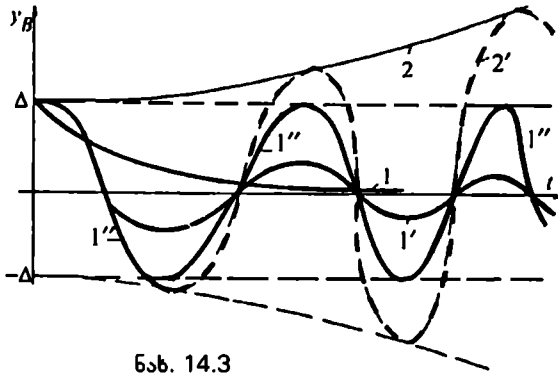
სისტემის თვისებას, შეინარჩუნოს საწყისი მდგომარეობა მდგრადობა ეწოდება, ხოლო თვით ასეთ მდგომარეობას – მდგრადი.

განვიხილოთ ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებული ცენტრალურად შეკუმშული ძელი (ნახ.14.2). ძელს საწყის მდგომარეობაში აქვს სწორხაზოვანი AB ფორმა, რომლის შენარჩუნების შესაძლებლობა დამოკიდებულია მკუმშავი ძალის სიდიდეზე. თუ ძელს გადავხრით საწყისი მდგომარეობიდან ნებისმიერ მეზობელ AB' მდგომარეობაში, შემდეგ კი გავუშვებთ და მივცემთ თავისუფალი მოძრაობის საშუალებას, ამ მოძრაობის კანონზომიერების საფუძველზე შეგვიძლია ვიმსჯელოთ ძელის მდგრადობაზე.

წარმოვადგინოთ B წერტილის y_B გადაადგილების დამოკიდებულება l დროზე შემდეგი ფორმულით

$$y_B = \Delta l^{-\lambda} \cos \omega t. \quad (14.1)$$

დავუშვათ, $\lambda > 0$. თუ ω უდრის ნულს, გადაადგილება დროის ზრდასთან ერთად მონოტონურად მცირდება (ნახ. 14.3, 1-მრუდი). თუ $\omega \neq 0$, მოძრაობას აქვს რხევითი



ნახ. 14.3

ხასიათი, მაგრამ გადაადგილების ამპლიტუდური მნიშვნელობა დროის განმავლობაში მცირდება რაც წარმოდგენილია 14.3 ნახაზზე 1' - მრუდით, დავუშვათ, $\lambda = 0$ და $\omega \neq 0$. ამ შემთხვევაში მოძრაობა პერიოდული ხასიათისაა და მას შეესაბამება 1'' მრუდი.

განხილული შემთხვევები, მდგრადობის დინამიკური კრიტერიუმის თანახმად, შეესაბამება ძელის

მდგრად მდგომარეობას და ხასიათდება დროის განმავლობაში მაქსიმალური გადაადგილებების შემცირებით ან მუდმივობით, როცა მკუმშავი ძალის მნიშვნელობა $P < P_{კ}$.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $\lambda < 0$. თუ $\omega = 0$, გადაადგილება დროის ცვლილებასთან ერთად მონოტონურად იზრდება (მრუდი 2). როდესაც $\omega \neq 0$, მოძრაობა რხევითი ხასიათისაა და გადაადგილების ამპლიტუდის მნიშვნელობაც იზრდება (მრუდი 2'). აქ დინამიკური კრიტერიუმის შესაბამისად გვაქვს ძელის არამდგრადი მდგომარეობა, რომელსაც შეესაბამება დატვირთვა $P \geq P_{კ}$.

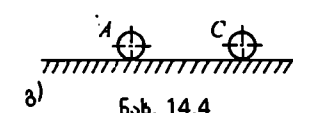
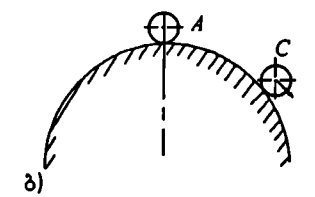
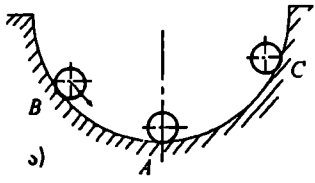
მინიმალურ ძალას $P = P_{კ}$, რომელსაც ასეთი არამდგრადი მდგომარეობა შეესაბამება, კრიტიკული ძალა ეწოდება.

კრიტიკული ძალის განსაზღვრისათვის დინამიკური კრიტერიუმის გამოყენება, როგორც წესი, დაკავშირებულია რთული დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნასთან. ამიტომ, სწორად მასზე უარს ამბობენ და იყენებენ ე.წ. მდგრადობის სტატიკურ კრიტერიუმს. ამ კრიტერიუმის გამოყენებით პრაქტიკული ამოცანა პირველად ამოხსნა ლ.ეილერმა.

განვიხილოთ ძელის ძირითადი სწორხაზოვანი AB მდგომარეობა (ნახ. 14.2). თუ მოდებულ P ძალას შეესაბამება მხოლოდ ეს წონასწორობის მდგომარეობა, მაშინ ძელი მდგრად მდგომარეობაშია. მაგრამ შეგვიძლია შევარჩიოთ ძალის ისეთი მნიშვნელობა $P = P_{კ}$, რომ წონასწორობის პირობები სრულდებოდეს როგორც ძირითადი AB , ისე რომელიმე სხვა მეზობელი AB' მდგომარეობისთვისაც. ასეთ ძალას კრიტიკული ძალა ეწოდება და ამ ძალის განსაზღვრისათვის გამოყენებული კრიტერიუმი მდგრადობის სტატიკური კრიტერიუმია.

სისტემის მდგრადობის საკითხების შესწავლა შეიძლება ენერგეტიკული კრიტერიუმის საფუძველზე. ამ კრიტერიუმის შესაბამისად, მდგრად მდგომარეო-

ბაში სისტემის პოტენციალური ენერგია მინიმალურ მნიშვნელობას იღებს. ამიტომ ასეთი სისტემის მოდელი შეიძლება გამოვსახოთ ფოსოს ძირზე მოთავსებული ბურთულის (ნახ. 14.4,ა) სახით. ამ შემთხვევაში წონასწორობიდან გამოყვანილი ბურთულა ცდილობს დაბრუნდეს B მდგომარეობიდან A მდგომარეობაში. მაგრამ იგი ამ მდგომარეობაში არ რჩება, ვინაიდან ბურთულის პოტენციალური ენერგიის შემცირების ხარჯზე იზრდება მისი კინეტიკური ენერგია. A მდგომარეობიდან C მდგომარეობამდე მოძრაობისას პროცესი საწინააღმდეგოა: კინეტიკური ენერგია მცირდება ნულამდე, პოტენციალური კი იზრდება. ამის შემდეგ იწყება მოძრაობა საწინააღმდეგო მიმართულებით და, ამდენად, ადგილი აქვს რხევით პროცესს.



ნახ. 14.4

არამდგრად მდგომარეობაში მყოფი სისტემის მოდელი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც გუმბათის წვერზე მოთავსებული ბურთულა (ნახ. 14.4,ბ). თუ ბურთულას საწყის მდგომარეობიდან გადავხრით, იგი საწყის მდგომარეობაში აღარ დაბრუნდება. პირიქით, ბურთულა თანდა-

თან შორდება წონასწორობის მდგომარეობას. განვიხილოთ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე მოთავსებული ბურთულა (ნახ. 14.4,გ), რომლისთვისაც ჰორიზონტალური სიბრტყის ენერგიის დონე ერთი და იგივეა როგორც საწყის, ისე ნებისმიერ მეზობელ მდგომარეობაში. ეს მოდელი შეესაბამება სისტემის განურჩეველ მდგომარეობას.

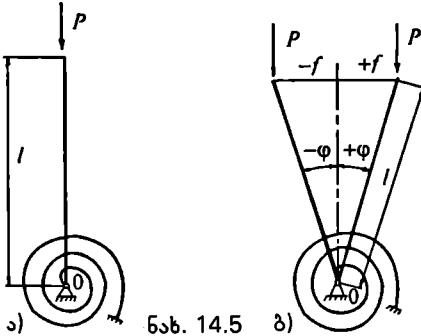
აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ე.წ. მდგრადობის ენერგეტიკული კრიტერიუმი: სისტემა მდგრად მდგომარეობაშია, თუ ამ მდგომარეობას შეესაბამება სისტემის პოტენციალური ენერგიის მინიმალური მნიშვნელობა ნებისმიერი სხვა უსასრულოდ მცირედ განსხვავებული მდგომარეობის ენერგიასთან შედარებით (ე.ი. წონასწორობის მდგომარეობაში პოტენციალურ ენერგიას უნდა გააჩნდეს იზოლირებული მინიმუმი).

მდგრადობის სამივე კრიტერიუმი ფართოდ გამოიყენება პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას და, როგორც წესი, ერთსა და იმავე შედეგს იძლევა. მაგრამ არსებობს იშვიათი გამოწაკლისიც. მაგალითად, შეიძლება ზოგიერთ სისტემაზე მოდებულმა ძალამ განსაზღვროს ისეთი მდგომარეობა, რომლისთვისაც არ არსებობს ძირითადიდან განსხვავებული არც ერთი წონასწორობის მდგომარეობა. ამ მდგომარეობიდან გამოყვანილი სისტემა იწყებს რხევას ან მონოტონურ მოძრაობას. რის შედეგადაც გადაადგილებები შეიძლება უსასრულოდ გაიზარდოს. ამ შემთხვევაში, სტატიკური კრიტერიუმიდან გამომდინარე კრიტიკული ძალა არ არსებობს. რაც შეეხება დინამიკურ კრიტერიუმს, ის საშუალებას გვაძლევს

დავადგინოთ კრიტიკული ძალის მნიშვნელობა. ასეთ შემთხვევებთან გვაქვს საქმე ე.წ. არაკონსერვატიული სისტემების განხილვისას, რომლის ერთ-ერთ მაგალითს შემდგომში განვიხილავთ.

§99. მდგრადობის შესწავლის შესაძლებლობა წრფივი განტოლების გამოყენებით. ეილერის ამოცანა

განვიხილოთ მყარი ძელი, რომლის ერთი ბოლო სახსრულადაა ჩამაგრებული საყრდენზე (ნახ. 14.5). ძელი ინარჩუნებს ვერტიკალურ მდგომარეობას ზამბარის მეშვეობით. ზამბარას წრფივი მახასიათებელი აქვს, ე.ი. თუ ძელი მობრუნდება φ კუთხით (ნახ. 14.5,ბ), დრეკადობის მომენტი იქნება $C\varphi$. აქ C პროპორციულობის კოეფიციენტია. ძალის თანდათანობითი ზრდით მივალწევთ მის კრიტიკულ მნიშვნელობას, რომლის დროსაც ძელი შეიძლება გამოვიდეს ვერტიკალური მდგომარეობიდან. დახრილი ძელის ღერძი ვერტიკალთან შეადგენს რაღაც φ კუთხეს.



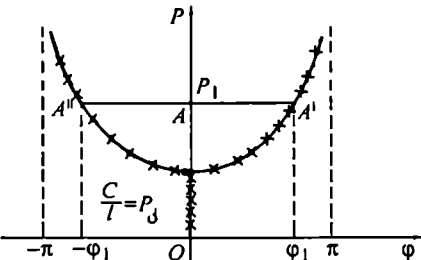
ნახ. 14.5

შევადგინოთ ამ დახრილი მდგომარეობისათვის წონასწორობის პირობა. ძელზე მოდებული P ძალის მომენტი უნდა უდრიდეს ზამბარის წინაღობის მომენტს

$$Pl \sin \varphi = C\varphi. \quad (14.2)$$

აქედან მივიღებთ დამოკიდებულებას ძალასა და კუთხეს შორის

$$P = \frac{C}{l} \frac{\varphi}{\sin \varphi}. \quad (14.3)$$



ნახ. 14.6

ჩვენთვის საკმარისია, განვიხილოთ φ კუთხის ცვლილება $[-\pi, \pi]$ შუალედში, შესაბამისი გრაფიკი წარმოდგენილია 14.6 ნახაზზე. თუ $\varphi=0$, (14.2) განტოლებას აკმაყოფილებს P ძალის ნებისმიერი მნიშვნელობა, რაც იმას ნიშნავს, რომ ძელის ვერტიკალური მდგომარეობა ყოველთვის აკმაყოფილებს წონასწორობის პირობებს. მაგრამ არსებობს ძელის ისეთი ზღვრული მდგომარეობა და შესაბამისი კრიტიკული მკუმშავი P_k ძალა, რომ, თუ ძელზე მოდებული ძალა ნაკლებია კრიტიკულზე, $P < P_k$, ძელის ვერ-

ტიკალური მდგომარეობა მდგრადია. ასეთ ძალას შეესაბამება მხოლოდ ეს ერთი მდგრადი მდგომარეობა. წინააღმდეგ შემთხვევაში, როცა $P \geq P_{\text{კ}}$, ვერტიკალური მდგომარეობა არამდგრადია. მაგრამ აქ უკვე ფიქსირებული ძალის P_1 მნიშვნელობას შეესაბამება წონასწორობის სამი მდგომარეობა წარმოდგენილი A , A' და A'' წერტილებით.

ძალის კრიტიკული მნიშვნელობის დასადგენად მხედველობაში მივიღოთ ცნობილი ტოლობა

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\sin \varphi} = 1.$$

ამ შედეგის გათვალისწინებით (14.3) ფორმულიდან მივიღებთ

$$P_{\text{კ}} = \frac{C}{l}. \quad (14.4)$$

ზემოთ განვიხილეთ ძელის მდგრადი და არამდგრადი მდგომარეობები. მაგრამ გამოთქმული მოსაზრებები სავარაუდო ხასიათისა იყო და ჩატარებული ანალიზი არ გვაძლევდა საშუალებას A წერტილის შესაბამისი მდგომარეობა არამდგრადად ჩაგვეთვალა. ამიტომ საჭიროა ამოცანის განხილვა მდგრადობის ენერგეტიკული კრიტერიუმის გამოყენებით და იმის დადგენა, წონასწორობის თუ რომელ ფორმას შეესაბამება პოტენციალური ენერჯიის მინიმუმი.

სისტემის მთლიანი ენერჯია შედგება ორი ნაწილისაგან: ზამბარის დეფორმაციის ენერჯიისა და ტვირთის პოტენციალური ენერჯიისაგან. პირველი განისაზღვრება როგორც ზამბარაზე მოდებული $C\varphi$ მომენტისა და მობრუნების φ კუთხის ნამრავლის ნახევარი. მეორე წარმოადგენს ტვირთის მასის ნამრავლს ძალის მოდების წერტილის ორდინატზე

$$A = \frac{1}{2} C \varphi^2 + Pl \cos \varphi. \quad (14.5)$$

გამოვიკვლიოთ ენერჯიის გამოსახულება ექსტრემუმზე. გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{dA}{d\varphi} = C\varphi - Pl \sin \varphi = 0. \quad (14.6)$$

ამრიგად, მიღებული განტოლება ფაქტიურად იმეორებს წონასწორობის (14.2) განტოლებას, ე. ი. ძელის წონასწორობის მდგომარეობები, რომლებიც შეესაბამება ენერჯიის ექსტრემალურ მნიშვნელობებს, შეიძლება განისაზღვროს მხოლოდ (14.2) განტოლების ამოსხნით. მაგრამ იმის დასადგენად, ნამდვილად განსაზღვრავენ თუ არა ისინი ასეთ მდგომარეობას, საჭიროა (14.5) გამოსახულების მეორე წარმოებულის ნიშნის დადგენა

$$\frac{d^2 A}{d\varphi^2} = C - Pl \cos \varphi. \quad (14.7)$$

განვიხილოთ ძელის ვერტიკალური მდგომარეობა, $\varphi=0$:

$$\frac{d^2 A(0)}{d\varphi^2} = l \left(\frac{C}{l} - P \right) = l(P_s - P) \quad (14.8)$$

მიღებული შედეგიდან გამომდინარე, იოლად დავადგენთ, რომ, თუ $P < P_s$, მეორე წარმოებული დადებითია, სისტემის ენერგია მინიმალურია და, შესაბამისად, ძელის ვერტიკალური მდგომარეობა მდგრადია. წინააღმდეგ შემთხვევაში, როცა $P > P_s$, მეორე წარმოებული უარყოფითია, სისტემის ენერგია მაქსიმალურია და ძელის ვერტიკალური მდგომარეობა არამდგრადია.

ახლა შევისწავლოთ ძელის წონასწორობის მდგომარეობები, რომლებიც შეესაბამება A' და A'' წერტილებს, ე.ი. $\varphi \neq 0$ (ნახ.14.6). ამ შემთხვევაში, (14.7)-ის შესაბამისად, მდგრადობის პირობას აქვს სახე

$$C - Pl \cos \varphi_1 > 0. \quad (14.9)$$

ეს პირობა შეგვიძლია გარდავიქმნათ (14.6) გამოსახულების გამოყენებით და წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$\frac{\sin \varphi_1}{\varphi_1} > \cos \varphi_1. \quad (14.10)$$

ეს პირობა სრულდება, თუ $\varphi \in [-\pi, \pi]$, ამრიგად, A' და A'' წერტილების შესაბამისი ძელის წონასწორობის მდგომარეობები მდგრადია.

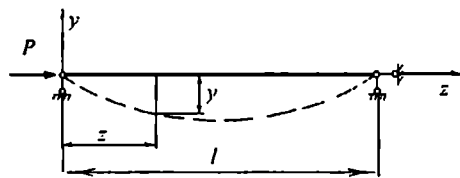
შევეცადოთ განვიხილოთ იგივე ამოცანა გაწრფივებული თანაფარდობების გამოყენებით. დავუშვათ, რომ ვიხილავთ ვერტიკალური მდგომარეობიდან ძელის მცირე გადახრებს. რადგანაც ამ შემთხვევაში $\sin \varphi \approx \varphi$, (14.2) გამოსახულება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$\varphi(Pl - C) = 0. \quad (14.11)$$

ამ განტოლებაში $\varphi \neq 0$ და ამიტომ $Pl - C = 0$. მიღებული შედეგის საშუალებით დავადგენთ კრიტიკული ძალის მნიშვნელობას, რომელიც ემთხვევა არაწრფივი განტოლების ამოხსნით მიღებულ შედეგს. მაგრამ (14.11) გაწრფივებული განტოლება არ გვაძლევს გადაადგილების განსაზღვრის საშუალებას, რადგან კრიტიკული ძალისთვის (14.11) ტოლობა სრულდება φ კუთხის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

ამრიგად, გამარტივებული წრფივი განტოლების საშუალებით იოლად და-

ვადგენთ ძალის კრიტიკულ მნიშვნელობას, მაგრამ მდგრადობის დაკარგვის შემდეგ ძელის გადაადგილებების განსაზღვრის შესაძლებლობა, ამ შემთხვევაში, გამოირიცხულია. თუ არსებობს გადაადგილებების განსაზღვრის აუცილებლობა, მაშინ ანალიზისთვის საჭიროა გამოვიყენოთ არაწრფივი განტოლებები. ამრიგად, დეფორმირებადი სისტემების მდგრადობის დაკარგვის შემდეგ გადაადგილებების განსაზღვრისათვის არაწრფივი განტოლებების გამოყენება აუცილებელია. ეს დებულება ზოგადია და მართებულია ყოველთვის.



ნახ. 14.7

განვიხილოთ ცენტრალურად შეკუმშული ძელის მდგრადობის საკითხი (ნახ. 14.7)

დავუშვათ, რომ ძელზე მოდებული ძალა კრიტიკული ძალის ტოლია და საწყისი სწორხაზოვანი წონასწორობის ფორმის გარდა მას შეესაბამება მეორე, გაღუნული ფორმაც (ნახ.14.7), რომელიც ნახაზზე წარმოდგენილია წყვეტილი ხაზით.

გაღუნული ძელის გადაადგილებების დიფერენციალური განტოლება, (6.6)-ის შესაბამისად, ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$EI_x y'' = M_x = -Py, \quad (14.12)$$

საიდანაც მივიღებთ განტოლებას

$$y'' + k^2 y = 0. \quad (14.13)$$

აქ შემოღებულია აღნიშვნა

$$k^2 = \frac{P}{EI_x}. \quad (14.14)$$

მიღებული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz. \quad (14.15)$$

მუდმივების დასადგენად გამოვიყენოთ ძელის ბოლოების ჩამაგრების პირობები

$$\begin{aligned} z = 0: & \quad y(0) = 0; \\ z = l: & \quad y(l) = 0. \end{aligned} \quad (14.16)$$

პირველი პირობის შესაბამისად ვღებულობთ, რომ $C_2 = 0$. მეორე პირობა გვაძლევს შემდეგ თანაფარდობას

$$C_1 \sin kl = 0. \quad (14.17)$$

ამ თანაფარდობაში $C_1 \neq 0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში (14.15) გამოსახულებაში ორივე მუდმივი ნულის ტოლი იქნება და $y \equiv 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ძელს გაღუნული მდგომარეობა არ გააჩნია. ჩვენ კი სწორედ ასეთი მდგომარეობა გვინტერესებს. ამრიგად, საბოლოოდ გვაქვს ტოლობა $\sin kl = 0$. ამ თანაფარდობის საშუალებით დავადგენთ კრიტიკული ძალის განსაზღვრის შემდეგ პირობას: $kl = n\pi$. თუ გავითვალისწინებთ (14.14) გამოსახულებას, კრიტიკული ძალისთვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

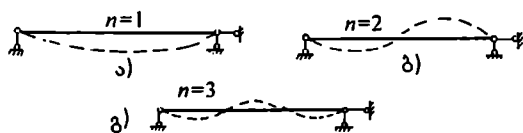
$$P_{\text{კ}} = \frac{n^2 \pi^2 EI_x}{l^2}. \quad (14.18)$$

ამ შედეგის გათვალისწინებით დავადგინოთ ძელის ღერძის წერტილების გადაადგილების ფორმულა

$$y = C_1 \sin \frac{n\pi z}{l}. \quad (14.19)$$

(14.18) და (14.19) ფორმულებში n იღებს მთელ მნიშვნელობებს: 1, 2, 3, ...

ძირითადი, პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს შემთხვევას, როცა $n=1$, რომლის-



ნახ. 14.8

თვისაც კრიტიკული ძალა იღებს მინიმალურ მნიშვნელობას და გაღუნული ძელის ღერძის ფორმა შეიძლება წარმოვადგინოთ სინუსოიდის ერთი ტალღით (ნახ.14.8,ა), შემთხვე-

ვებს $n=2$ და $n=3$ შეესაბამება ე.წ. მეორე და მესამე კრიტიკული ძალები. მათთვის გაღუნული ძელის ღერძის ფორმა წარმოდგენილია შესაბამისად სინუსოიდის ორი და სამი ტალღით (ნახ. 14.8,ბ და ნახ.14.8, გ).

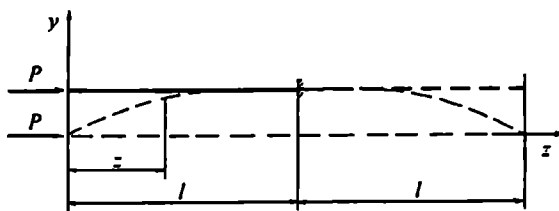
საბოლოოდ, კრიტიკული ძალისათვის მივიღებთ ფორმულას

$$P_{\text{კ}} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}. \quad (14.20)$$

ამ ამოცანის ფორმულირება და მისი პირველი ამოხსნა ეკუთვნის ლ. ეილერს, მე-18 საუკუნის ცნობილ მათემატიკოსს. ამიტომ (14.20) ფორმულას ეილერის ფორმულა ეწოდება.

§100. ეილერის ფორმულის განზოგადება

განვიხილოთ ძელი, რომლის ერთი ბოლო კვეთი ჩამაგრებულია ხისტად. მეორე თავისუფალ კვეთში კი მოდებულია ცენტრალური მკუმშავი ძალა (ნახ.14.9). ზოგადი ამონახსნი, ჩაწერილი (14.15) სახით, ამ შემთხვევაშიც ძალაში რჩე-



ნახ. 14.9

ბა. მუდმივების დასადგენად გამოვიყენოთ შემდეგი სასაზღვრო პირობები

$$\begin{aligned} z = 0: & \quad y(0) = 0; \\ z = l: & \quad y'(l) = 0. \end{aligned} \quad (14.21)$$

მაგრამ შეიძლება მოვიქცეთ სხვაგვარადაც: პირობით გავაგრძელოთ ძელი საყრდენიდან მარჯვნივ სიმეტრიულად, მაშინ

(14.21)-ის ნაცვლად მივიღებთ შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned} z = 0: & \quad y(0) = 0; \\ z = 2l: & \quad y(2l) = 0. \end{aligned} \quad (14.22)$$

ამრიგად, ამოცანა ფაქტიურად ემთხვევა ზემოთ განხილულ ამოცანას, რომელიც აისახება (14.13) ერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებით და (14.16) სასაზღვრო პირობებით, იმ განსხვავებით, რომ საბოლოო შედეგში საჭიროა l შეიცვალოს $2l$ -ით. ამოცანის ამოხსნის შედეგად მივიღებთ

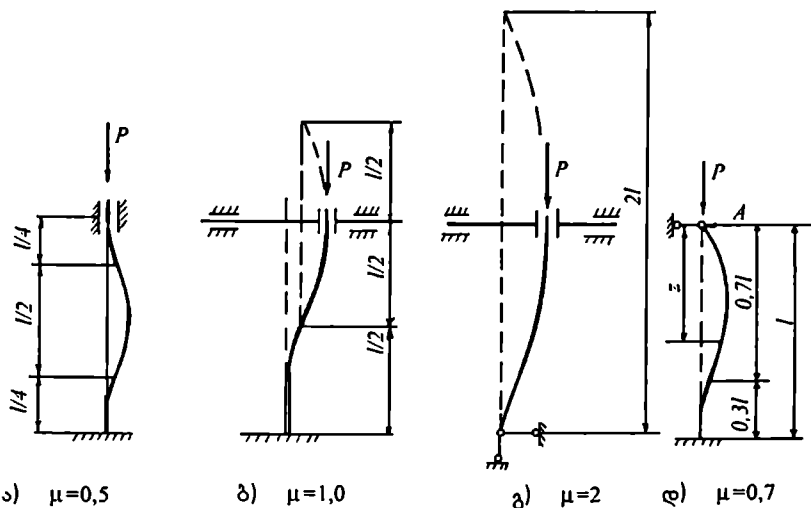
$$P_j = \frac{\pi^2 EI x}{(2l)^2}. \quad (14.23)$$

ელიერის ფორმულა შეგვიძლია განვაზოგადოთ, აგრეთვე, ძელის ჩამაგრების სხვა შემთხვევებისთვისაც. ამისათვის საჭიროა კრიტიკული ძალის საანგარიშო ფორმულაში ძელის ნამდვილი სიგრძის ნაცვლად ჩავსვათ დეფორმირებული ძელის სინუსოიდური ფორმის ერთი ტალღის სიგრძე μl

$$P_j = \frac{\pi^2 EI x}{(\mu l)^2}. \quad (14.24)$$

აქ l და μ შესაბამისად ძელის სიგრძე და ძელის სიგრძის დაყვანის კოეფიციენტია. 14.7 და 14.9 ნახაზზე ნაჩვენებია ძელების ჩამაგრების სახეები, რომლებსაც შეესაბამება $\mu=1$ და $\mu=2$. ანალოგიურად შეგვიძლია განვიხილოთ ძელის ჩამაგრების სხვა შემთხვევებიც (ნახ.14.10).

ადვილი დასადგენია, რომ 14.10 ნახაზზე ნაჩვენები პირველი სამი ამოცანის სიგრძის დაყვანის კოეფიციენტის მნიშვნელობა ზუსტია. რაც შეეხება მეოთხე ამოცანას, მისთვის დეფორმირებული ძელის ღერძის განხილვით μ -ის მნიშვნელობა დადგენილია მიახლოებით. განვიხილოთ ეს ამოცანა.



ნახ. 14.10

დეფორმირებული ძელის ღერძის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$EI_x y'' = -Py - Az. \quad (14.25)$$

აქ A - ზედა საყრდენის შორიზონტალური რეაქციის ძალაა. (14.25) განტოლების გარდაქმნით და (14.14) გამოსახულების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$y'' + k^2 y = -\frac{A}{EI_x} z. \quad (14.26)$$

მიღებული განტოლება, (14.13) განტოლებისაგან განსხვავებით, არაერთგვაროვანია. მისი ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება როგორც შესაბამისი (14.13) ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნისა და (14.26) განტოლების კერძო ამონახსნის

$$y^* = -\frac{A}{EI_x k^2} z. \quad (14.27)$$

გამი

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz - \frac{A}{EI_x k^2} z. \quad (14.28)$$

აქ A სიდიდეც ინტეგრების მუდმივის როლს ასრულებს და ამდენად, აუცილებელია სამი სასაზღვრო პირობის ჩამოყალიბება:

$$z = 0: y(0) = 0; z = l: y(l) = 0; y'(l) = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ შემდეგ სამ განტოლებას:

$$C_2 = 0;$$

$$C_1 \sin kl + C_2 \cos kl - \frac{Al}{EI_x k^2} = 0;$$

$$C_1 k \cos kl - C_2 k \sin kl - \frac{A}{EI_x k^2} = 0.$$

მიღებულ განტოლებათა სისტემას აქვს არანულოვანი ამონახსნი, თუ სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & -\frac{l}{EI_x k^2} \\ k \cos kl & -k \sin kl & -\frac{1}{EI_x k^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (14.29)$$

აქედან კრიტიკული ძალის დასადგენად მივიღებთ შემდეგ არაწრფივ განტოლებას

$$\operatorname{tg} x = x, \quad (14.30)$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნა $x = kl$.

ამ განტოლების ნულისაგან განსხვავებული უმცირესი დადებითი ფესვი შეიძლება განისაზღვროს მიახლოებით. ჩავთვალოთ, რომ ამოცანის x ზუსტი ამონახსნი მცირე Δ სიდიდით განსხვავდება მისი მიახლოებითი x_0 ამონახსნისაგან

$$x = x_0 + \Delta. \quad (14.31)$$

ამრიგად, გაკეთებული დაშვების შესაბამისად, (14.31) გამოსახულება აკმაყოფილებს (14.30) განტოლებას

$$\operatorname{tg}(x_0 + \Delta) = x_0 + \Delta. \quad (14.32)$$

ეს განტოლება შეგვიძლია გარდავაქმნათ და წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$\frac{\operatorname{tg} x_0 + \operatorname{tg} \Delta}{1 - \operatorname{tg} x_0 \operatorname{tg} \Delta} = x_0 + \Delta. \quad (14.33)$$

ენიდან Δ მცირე სიდიდეა, ამიტომ $\text{tg}\Delta \approx \Delta$. მაშინ (14.33) მიიღებს სახეს

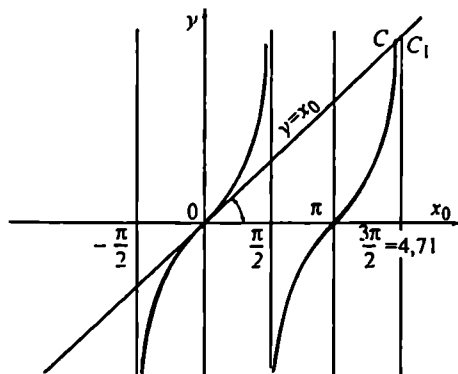
$$\frac{\text{tg}x_0 + \Delta}{1 - \Delta \text{tg} x_0} = x_0 + \Delta. \quad (14.34)$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$x_0 - \text{tg}x_0 = \Delta(x_0 + \Delta)\text{tg}x_0. \quad (14.35)$$

რადგან Δ მცირეა x_0 -თან შედარებით, (14.35) გამოსახულებებიდან

$$\Delta = \frac{1}{\text{tg}x_0} - \frac{1}{x_0}. \quad (14.36)$$



ნახ. 14.11

დავადგინოთ არაწრფივი განტოლების მიახლოებითი ამონახსნი, რისთვისაც ავაგოთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები

$$y = \text{tg}x, \quad y = x_0. \quad (14.37)$$

უმცირესი არანულოვანი ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობაა $x_0 = 4,71$ (ნახ. 14.11).

ტანგენსოიდის და OC წრფის გადაკვეთის C წერტილი განსაზღვრავს (14.30) განტოლების ზუსტ ამონახსნს, C_1 წერტილი კი მის მიახლოებით მნიშვნელობას $x_0 = 4,71$. თუ ვისარგებლებთ (14.36) ტოლობით, მივიღებთ

$$\Delta = \frac{1}{\text{tg}1,5\pi} - \frac{1}{4,71} = -0,21.$$

ფესვის დაზუსტებული მნიშვნელობა

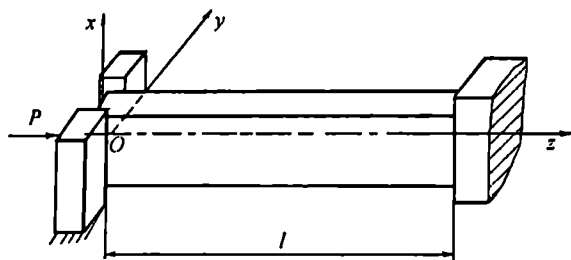
$$x = x_0 + \Delta = 4,71 - 0,21 = 4,50.$$

მაშინ

$$kl = \sqrt{\frac{P_j}{EI_x}} l = 4,50; \quad P_j = \frac{\pi^2 EI_x}{(0,7l)^2}.$$

ამრიგად, დადგინდა, რომ განხილული ძელის სიგრძის დაყვანის კოეფიციენტი, რომელიც ადრე მიახლოებით იქნა განსაზღვრული, პრაქტიკულად მისაღები სიზუსტითაა გამოთვლილი.

კრიტიკული ძალის ფორმულაში შედის ძელის განივი კვეთის ინერციის ღერძული მომენტი I_x , რადგან წინასწარ გაკეთდა დაშვება, რომ ძელი კარგავს მდგრადობას და იღუნება Ox ღერძის მართობი მიმართულებით. მაგრამ საყრდენების ჩამაგრების ხასიათი შეიძლება ისეთი იყოს, რომ ძელის დეფორმაცია ყველა მიმართულებით ერთნაირად შესაძლებელი გახდეს. ამ შემთხვევაში ძელი გაიღუნება იმ ღერძის მართობი მიმართულებით, რომლის მიმართაც განივი კვეთის ინერციის ღერძული მომენტი მინიმალურია, მე-18 პარაგრაფის შედეგების შე-



ნახ. 14.12

საბამისად, ეს ერთ-ერთი მთავარი მიმართულებაა. ამრიგად, ჩვენი წინასწარი დაშვება ნიშნავს, რომ Ox ღერძის მიმართულება ემთხვევა ძელის განივი კვეთის მთავარ მიმართულებას და გვაქვს ტოლობა $I_x = I_{\min}$. საყრდენების თავისებურმა განლაგე-

ბამ შეიძლება ეს შედეგი შეცვალოს.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ძელი, რომელიც ნაჩვენებია 14.12 ნახაზზე.

ძელის მარჯვენა საყრდენი ხისტადაა ჩამაგრებული და ცხადია, რომ გადაადგილებები ყველა მიმართულებით ერთნაირადაა შეზღუდული. რაც შეეხება მარცხენა საყრდენს, აქ სურათი განსხვავებულია. განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

Ox მიმართულებით კვეთის გადაადგილებები არ არის შეზღუდული და თუ ჩავთვლით, რომ მდგრადობის დაკარგვის შედეგად ძელი მოიღუნება xOz სიბრტყეში, კრიტიკული ძალა უნდა განვსაზღვროთ (14.24) ფორმულის საშუალებით

$$P_{\text{კ1}} = \frac{\pi^2 EI_y}{(2l)^2}. \quad (14.38)$$

Oy მიმართულებით საყრდენი ზღუდავს კვეთის გადაადგილებას, ხოლო Ox ღერძის ირგვლივ - მის მობრუნებას. ამიტომ, თუ ჩავთვლით, რომ ძელი დაკარგავს მდგრადობას yOz სიბრტყეში, კრიტიკული ძალის განსაზღვრისათვის საჭიროა გამოვიყენოთ 14.10, ა ნახაზზე ნაჩვენები სქემა. მაშინ

$$P_{\text{კ2}} = \frac{4\pi^2 EI_x}{l^2}. \quad (14.39)$$

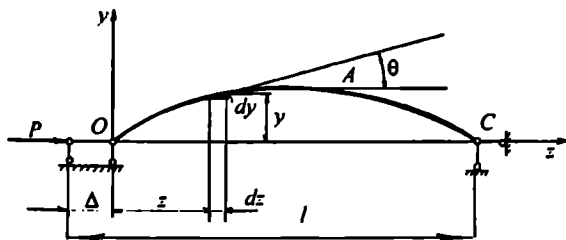
დავადგინოთ თანაფარდობა კრიტიკულ ძალებს შორის

$$P_{\text{კ2}} = 16 \frac{I_x}{I_y} P_{\text{კ1}} \quad (14.40)$$

ამრიგად, განხილულ ამოცანაში ძელის მდგრადობის დაკარგვის მიმართულეობა დამოკიდებულია მთავარი ინერციის მომენტების თანაფარდობაზე. თუ $I_y > I_x < 16$, კრიტიკული ძალა განისაზღვრება (14.38) ფორმულით, წინააღმდეგ შემთხვევაში გამოიყენება (14.39) ფორმულა.

§101. კრიტიკული ძალის დადგენის ენერგეტიკული მეთოდი

კრიტიკული ძალის დადგენა დიფერენციალური განტოლების შედგენითა და მისი უშუალო ინტეგრებით უნივერსალურ ხასიათს ატარებს. მაგრამ ზოგ შემთხვევაში, შეიძლება უფრო ეფექტური აღმოჩნდეს მიახლოებითი ენერგეტიკული მეთოდი, რომელიც ზოგადად უკვე განვიხილეთ. მივცეთ ამ მეთოდს პრაქტიკული გამოყენებისათვის მოსახერხებელი სახე.



ნახ. 14.13

დავუშვათ, რომ ძელზე მოდებულია მკუმშავი ძალა (ნახ.14.13). ამ ძალის მნიშვნელობა შევადაროთ კრიტიკული ძალის მნიშვნელობას.

გამოვიყვანოთ ძელი ხელოვნურად სწორხაზოვანი მდგომარეობიდან. მოლუნვის შედეგად ძელში დაგროვდება დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dz}{2EI_x}$$

(6.6) დიფერენციალური თანაფარდობა გვაძლევს ამ ინტეგრალის გარდაქმნის საშუალებას

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI_x (y'')^2 dz \quad (14.41)$$

ძელი დეფორმაციის შედეგად ძალის მოდების წერტილი გადაადგილდება Δ

სიდიდით (ნახ.14.13). ვინაიდან დეფორმაციის პროცესში ძალის მნიშვნელობა უცვლელია, მის მიერ შესრულებული მუშაობა

$$A = P\Delta.$$

დავადგინოთ Δ -ს მნიშვნელობა. ამისათვის ძელის l სიგრძეს გამოვაცლოთ OAC ძელის მოღუნული ღერძის სიგრძის გეგმილი Oz მიმართულებაზე. განვსაზღვროთ ეს სიდიდე დიფერენციალური ფორმით

$$d\Delta = dz - dz \cos \theta = dz(1 - \cos \theta) \approx dz \left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \theta^2 dz.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ განიხილება მხოლოდ მცირე გადაადგილებები და გვაქვს ტოლობა $\theta = \gamma'$, ინტეგრებით დავადგენთ Δ -ს მნიშვნელობას

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^l (\gamma')^2 dz. \quad (14.42)$$

ამ შედეგის გათვალისწინებით გარე ძალის მუშაობა

$$A = \frac{P}{2} \int_0^l (\gamma')^2 dz. \quad (14.43)$$

შევადაროთ ერთმანეთს ძელის ღუნვის ენერგია და (14.43) ფორმულით გამოთვლილი გარე ძალის მუშაობა. თუ $U > A$, მაშინ ძელი გაღუნულ მდგომარეობაში არ დარჩება და აღიდგენს პირვანდელ სწორხაზოვან ფორმას. წინააღმდეგ შემთხვევაში ღუნვის პროცესი გაგრძელდება და O წერტილის გადაადგილება გაიზრდება. ენერგიის სიდიდეების ტოლობისას ადგილი ექნება წონასწორობას და ეს პირობა განსაზღვრავს ძელის კრიტიკულ მდგომარეობას

$$\frac{1}{2} \int_0^l EI_x (\gamma'')^2 dz = \frac{P_k}{2} \int_0^l (\gamma')^2 dz.$$

საბოლოოდ, კრიტიკული ძალის მნიშვნელობის დასადგენად მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$P_k = \frac{U}{\Delta} = \frac{\int_0^l EI_x (\gamma'')^2 dz}{\int_0^l (\gamma')^2 dz}. \quad (14.44)$$

ამ ფორმულით სარგებლობისათვის დეფორმირებული ძელის ღერძის გადაადგილებების გამოსახულება $y(z)$ წინასწარ უნდა შეირჩეს. თუ შევძლებთ ამ გამოსახულების ზუსტად დადგენას, (14.44) ფორმულა მოგვცემს კრიტიკული ძალის ზუსტ მნიშვნელობას. მაგრამ, როგორც წესი, $y(z)$ -ის გამოსახულება ზუსტად არ არის ცნობილი. ამიტომ გამოვიყენებთ მის მიახლოებით გამოსახულებას. ამ მეთოდში საბოლოო შედეგის სიზუსტე მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული რეალურ გამოსახულებასთან არჩეული ფორმის მიახლოების სიზუსტეზე. ამ საკითხის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ამოცანა (ნახ.14.9), რომლის ზუსტი ამონახსნიც ცნობილია. ავირჩიოთ გადაადგილებისათვის შემდეგი ფორმულა

$$y = C \sin \frac{\pi z}{2l}. \quad (14.45)$$

(14.44) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ კრიტიკული ძალის შემდეგ მნიშვნელობას

$$P_{\text{კ}} = \frac{\pi^2 EI x}{4l^2} \approx 2,45 \frac{EI x}{l^2}.$$

ჩვენთვის უკვე ცნობილია, რომ ეს არის კრიტიკული ძალის ზუსტი მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება გადაადგილების ზუსტ გამოსახულებას. ავიღოთ გადაადგილებებისათვის შემდეგი მიახლოებითი ფორმულა

$$y = C \left(l^2 z - \frac{z^3}{3} \right).$$

ეს გამოსახულება შეესაბამება ძელის გადაადგილებებს, როდესაც მის თავისუფალ ბოლოებზე მოდებულია განივი ძალა (ნახ.13.20), y -ის პირველი და მეორე წარმოებულები იქნება

$$y' = C(l^2 - z^2), \quad y'' = C(-2z).$$

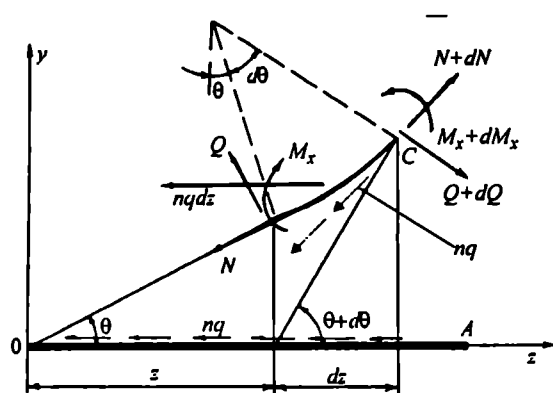
ელემენტარული გარდაქმნების შედეგად, (14.44) ფორმულიდან მივიღებთ კრიტიკული ძალის შემდეგ მნიშვნელობას

$$P_{\text{კ}} = 2,50 \frac{EI x}{l^2}.$$

ამრიგად, მიღებული შედეგი განსხვავდება კრიტიკული ძალის ზუსტი მნიშვნელობისაგან მხოლოდ 2%-ით.

§102. კრიტიკული ძალის დადგენა ელექტრონულ-ციფრული მანქანების გამოყენებით

განვიხილოთ ცვლადი სიხისტის მქონე OA ძელი, რომელიც დატვირთულია გრძივი მიმართულებით nq ინტენსიურობის განაწილებული და შეყურსული ცენტრალური ძალებით. ეს ძალები მიმართულია Oz



ნახ. 14.14

ღერძის პარალელურად და ძელის მდგრადობის დაკარგვის შემდეგაც ინარჩუნებს საწყის მიმართულებას. თანაფარდობებში n არის რიცხვითი პარამეტრი, რომელზეც მრავლდება ძელზე მოდებული ნებისმიერი ძალა. ამ პარამეტრის ნულოვანი სიდიდიდან თანდათანობით ზრდით ვახდენთ ყველა ძალის ერთდროულ და ერთი და იმავე სიდიდით შეცვლას.

განვიხილოთ მდგრადობის დაკარგვის შემდეგ დეფორმირებული ძელის dz სიგრძის ელემენტის წონასწორობის პირობები (ნახ. 14.14). დავაგვიმოთ მასზე მოდებული ძალები ნორმალის და მხების მიმართულებებზე:

$$Q - (Q + dQ) + nqdz\theta + 2N \sin \frac{d\theta}{2} = 0;$$

$$N - (N + dN) + nqdz = 0.$$

წონასწორობის მესამე პირობის მისაღებად განვიხილოთ ელემენტზე მოდებული ძალების მომენტების ჯამი C წერტილის მიმართ

$$Qdz + M_x - (M_x + dM_x) = 0.$$

მიღებულ სამ განტოლებას დაემატება ძელის ღუნვის თეორიიდან ცნობილი კიდევ ორი განტოლება

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{M_x}{El_x}; \quad \frac{dy}{dz} = \theta.$$

რადგან მცირე კუთხეების შემთხვევაში გვაქვს თანაფარდობა. $\sin(d\theta/2) \approx (d\theta/2)$,

ამიტომ მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dz} &= nq\theta + \frac{NM_x}{EI_x}; & \frac{dM_x}{dz} &= Q; \\ \frac{dy}{dz} &= \theta; & \frac{d\theta}{dz} &= \frac{M_x}{EI_x}. \end{aligned} \quad (14.46)$$

ნორმალური ძალისათვის გვაქვს დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dN}{dz} = nq. \quad (14.47)$$

(14.46) სისტემა შეიძლება ჩავწეროთ ვექტორულ-მატრიცული ფორმით. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$X = \begin{pmatrix} Q \\ M_x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{N}{EI_x} & 0 & nq \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{EI_x} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14.48)$$

რაც შეეხება (14.47) განტოლებას, იგი ამოიხსნება დამოუკიდებლად. მიღებული ნორმალური ძალის მნიშვნელობა გამოიყენება H მატრიცის გაანგარიშებისათვის.

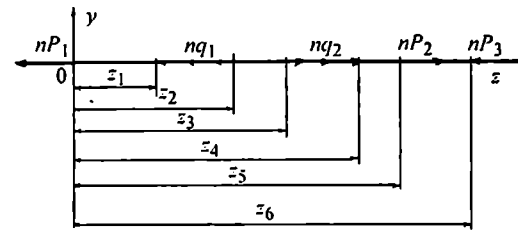
საბოლოოდ, ძელის დეფორმირებული მდგომარეობის დამახასიათებელი ვექტორულ-მატრიცული დიფერენციალური განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\frac{dX}{dz} = HX. \quad (14.49)$$

განვიხილოთ ამოცანის ამოხსნის თანმიმდევრობა. ჩავთვალოთ, რომ ძელის მარჯვენა საყრდენის გადაადგილება Oz ღერძის მიმართულებით გამოირიცხებულია. რაც შეეხება მარცხენა საყრდენს, იგი მოთავსებულია კოორდინატთა სისტემის O სათავეში. ძელის შესაბამის კვეთში შეიძლება მოდებული იყოს P_1 ძალა. ამოცანის ამოხსნისას (14.47) და (14.49) განტოლებების რიცხვითი ინტეგრება უნდა ვაწარმოოთ პარალელურად და პირველის შედეგი უშუალოდ გამოვიყენოთ ინტეგრების ყოველ ბიჯზე H მატრიცის გაანგარიშებისათვის. ცხადია, მარ-

ტივი შემთხვევისათვის (14.47) განტოლების ინტეგრება რთული არ არის და რიცხვითი მეთოდის გამოყენების აუცილებლობაც მოხსნილია.

განვიხილოთ (14.49) სისტემის ინტეგრების თანამიმდევრობა. დავეუშვათ, რომ



ნახ. 14.15

ძელის საწყის კვეთში მოდებულია nP_1 ძალა (ნახ. 14.15).

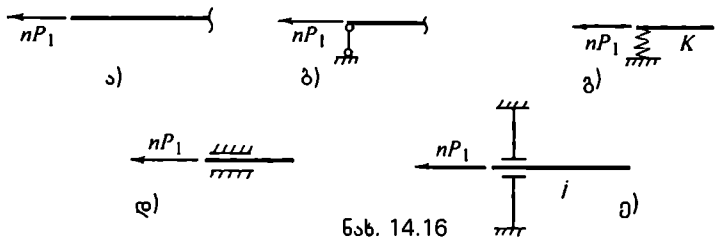
ინტეგრების საწყის წერტილში $N(0) = nP_1$. იმ უბნებზე, სადაც განაწილებული ძალები არ არის მოდებული, მაგალითად, $0 \leq z \leq z_1$, (14.47) განტოლების მარჯვენა ნაწილს ვუტოლებთ ნულს. განტოლების მარჯვენა ნაწილი დადებითია იმ

შემთხვევაში, თუ nq დატვირთვის აქვს დადებითი ნიშანი. მაგალითად, $z_3 \leq z \leq z_4$ უბანზე q_2 ინტენსივობის განაწილებული ძალები უარყოფითი ნიშნისაა.

ინტეგრების შედეგად ნორმალური ძალის მნიშვნელობა განისაზღვრება შეყურსული ძალის მოდების წერტილამდე. ინტეგრების შემდგომ გასაგრძელებლად საჭიროა მიღებული ნორმალური ძალის მნიშვნელობას დავემატოთ მოდებული შეყურსული ძალა, თუ იგი დადებითია და გამოვაკლოთ, - თუ იგი უარყოფითია.

განვიხილოთ (14.49) განტოლების ინტეგრების თანამიმდევრობა საწყისი კვეთის ჩამაგრების სხვადასხვა შემთხვევისათვის (ნახ. 14.16). ამოცანის ზოგადი ამონახსნი წარმოვადგინოთ როგორც (14.49) წრფივი დიფერენციალური განტოლების ორი კერძო ამონახსნის წრფივი კომბინაცია

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2. \tag{14.50}$$



ნახ. 14.16

განვიხილოთ თავისუფალი საწყისი კვეთი (ნახ. 14.16, ა). ამ კვეთში გადაადგილებები არ არის შეზღუდული და ამიტომ $y(0)$ -ს და $\theta(0)$ -ს შეუძლიათ მიიღონ ნებისმიერი მნიშვნელობა. რაც შეეხება ამ კვეთში განივი ძალისა და მღუნავი მომენტის მნიშვნელობებს, ისინი შესაბამისად $nP_1 \theta(0)$ -ის და ნულის ტოლია. ამიტომ ინტეგრებისათვის საჭიროა ავილოთ

$$X_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_2(0) = \begin{pmatrix} nP_1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14.51)$$

აქ და შემდგომში უცნობი საწყისი პარამეტრის მნიშვნელობა აღებულია ერთის ტოლად.

ახლა განვიხილოთ 14.16,ბ ნახაზზე გამოსახული ჩამაგრების სახე. აქ უკვე მობრუნების კუთხეს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა, ხოლო მღუნავი მომენტი და ვერტიკალური გადაადგილება ნულის ტოლია. რაც შეეხება განივ ძალას, იგი განისაზღვრება ფორმულით

$$Q(0) = nP_1\theta(0) + R. \quad (14.52)$$

(14.52) ფორმულაში R – საყრდენის ვერტიკალური რეაქციაა. აღნიშნულის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$X_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_2(0) = \begin{pmatrix} nP_1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14.53)$$

დავუშვათ, რომ ძელის საყრდენი კვეთი მოთავსებულია ზამბარაზე, რომლის დამყოლობა k -ს უდრის, ე.ი. თუ მასზე მოდებულია R ძალა, დაჯდომა $\gamma(0) = -kR$ (ნახ. 14.16,გ). ამ შემთხვევაში, კვეთის მობრუნების კუთხე და საყრდენის რეაქცია იღებს ნებისმიერ მნიშვნელობებს. ვერტიკალური გადაადგილება განისაზღვრება ზემოთ განხილული ფორმულის საშუალებით, მღუნავი მომენტი ნულის ტოლია, ხოლო განივი ძალის მნიშვნელობა განისაზღვრება (14.52) ფორმულის საშუალებით. საბოლოოდ მივიღებთ

$$X_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -k \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_2(0) = \begin{pmatrix} nP_1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14.54)$$

დავუშვათ, რომ გამორიცხულია საწყისი კვეთის მობრუნება და გადაადგილება (ნახ. 14.16,დ). ამ შემთხვევაში რეაქციის ვერტიკალურ ძალასა და მომენტს

შეუძლიათ მიიღონ ნებისმიერი მნიშვნელობა. ამიტომ საწყისი ვექტორები შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$X_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

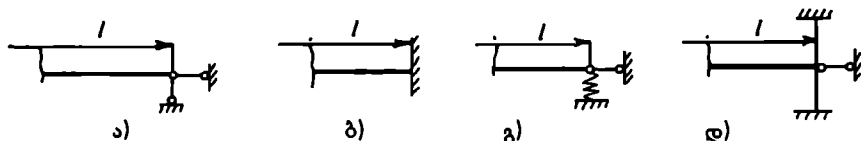
განვიხილოთ საწყისი კვეთის ჩამაგრების ისეთი სახე, რომელიც გამორიცხავს კვეთის ვერტიკალურ გადაადგილებას, მაგრამ საწყისი კვეთის მობრუნების კუთხე რეაქტიულ მომენტთან დაკავშირებულია წრფივი კანონით

$$\theta(0) = -jM_x(0).$$

ამ შემთხვევაში, ვერტიკალური რეაქციის ძალა და მომენტი იღებს ნებისმიერ მნიშვნელობებს. განივი ძალის მნიშვნელობის დასადგენად გამოიყენება (14.52) ფორმულა. საბოლოოდ მივიღებთ:

$$X_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_2(0) = \begin{pmatrix} -jnP_1 \\ 1 \\ 0 \\ -j \end{pmatrix}.$$

მუდმივების დასადგენად (14.50) გამოსახულებაში გავითვალისწინოთ ძელის მარჯვენა საყრდენის ჩამაგრების ხასიათი (ნახ.14.17).



ნახ. 14.17

დავუშვათ, რომ საყრდენის სახე გამორიცხავს ძელის შესაბამისი კვეთის ვერტიკალურ გადაადგილებას, ხოლო რეაქტიული მომენტი ნულის ტოლია (ნახ.14.17, ა). ამ შემთხვევაში შეგვიძლია შევადგინოთ ორი წრფივი ალგებრული განტოლების სისტემა:

$$\begin{aligned} C_1 M_{x_1}(l) + C_2 M_{x_2}(l) &= 0; \\ C_1 y_1(l) + C_2 y_2(l) &= 0. \end{aligned} \quad (14.55)$$

მიღებულ სისტემას რომ გააჩნდეს არანულოვანი ამონახსნი, უნდა სრულდებოდეს პირობა

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} M_{x1}(l) & M_{x2}(l) \\ y_1(l) & y_2(l) \end{vmatrix} = 0. \quad (14.56)$$

ისეთი n -ის განსაზღვრის მიზნით, რომელიც აკმაყოფილებს (14.56) პირობას, ბიჭით ვცვლით n -ის მნიშვნელობას და ვადგენთ ინტერვალს, რომელშიც Δ იცვლის ნიშანს. შემდგომში ბიჭის შემცირებით ვაზუსტებთ n -ის მნიშვნელობას, რომლისთვისაც სრულდება ეს პირობა. ამ შემთხვევაში შეიძლება გამოვიყენოთ ნებისმიერი არაწრფივი ალგებრული განტოლების ამოხსნის მეთოდი, კერძოდ, ნიუტონ-კანტოროვიჩის მეთოდი.

ამრიგად, შერჩეული n განსაზღვრავს კრიტიკული ძალების სისტემას.

ხისტის ჩამაგრებისთვის (ნახ. 14.17,ბ) ვერტიკალური გადაადგილება და მობრუნების კუთხე ნულის ტოლია

$$\begin{aligned} C_1 y_1(l) + C_2 y_2(l) &= 0; \\ C_1 \theta_1(l) + C_2 \theta_2(l) &= 0. \end{aligned} \quad (14.57)$$

შესაბამისი პირობა n -ის კრიტიკული მნიშვნელობის დასადგენად ჩაიწერება ასეთნაირად

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} y_1(l) & y_2(l) \\ \theta_1(l) & \theta_2(l) \end{vmatrix} = 0. \quad (14.58)$$

განვიხილოთ 14.17,გ ნახაზზე წარმოდგენილი შემთხვევა. აქ ვერტიკალური გადაადგილება და განივი ძალა საყრდენებთან დაკავშირებულია ფორმულით $y(l) = kQ(l)$, რეაქციული მომენტი კი ნულის ტოლია

$$\begin{aligned} C_1 [y_1(l) - kQ_1(l)] + C_2 [y_2(l) - kQ_2(l)] &= 0; \\ C_1 M_{x1}(l) + C_2 M_{x2}(l) &= 0. \end{aligned} \quad (14.59)$$

სისტემის კრიტიკული მდგომარეობისათვის მივიღებთ პირობას

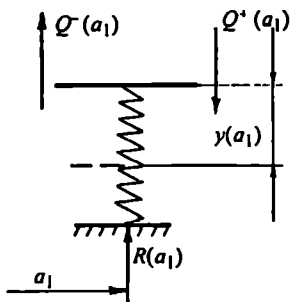
$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} y_1(l) - kQ_1(l) & y_2(l) - kQ_2(l) \\ M_{x1}(l) & M_{x2}(l) \end{vmatrix} = 0. \quad (14.60)$$

განვიხილოთ ძელის კვეთის ისეთი ჩამაგრება, რომელიც გამოირიცხავს ვერტიკალურ გადაადგილებას, ხოლო მღუნავ მომენტსა და მობრუნების კუთხეს შორის გვაქვს შემდეგი თანაფარდობა: $\theta(l) = -jM(l)$ (ნახ. 14.17,დ). აღნიშნულიდან გამომდინარე, მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{aligned} C_1 [\theta_1(l) + jM_{x1}(l)] + C_2 [\theta_2(l) + jM_{x2}(l)] &= 0; \\ C_1 y_1(l) + C_2 y_2(l) &= 0. \end{aligned} \quad (14.61)$$

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} \theta_1(l) + jM_{x1}(l) & \theta_2(l) + jM_{x2}(l) \\ y_1(l) & y_2(l) \end{vmatrix} = 0. \quad (14.62)$$

განვიხილოთ ძელი, რომელსაც აქვს შუალედური დამყოლი საყრდენი (ნახ. 14.18). ამ საყრდენთან მოკვეთილ ელემენტზე ნაჩვენებია მხოლოდ ის ძალები, რომლებიც განიცდიან წყვეტას.



ნახ. 14.18

დამყოლ შუალედურ საყრდენთან კვეთი გადაადგილება $y(a_1)$ მანძილზე და ეს გადაადგილება წრფივი კანონითაა დაკავშირებული რეაქციის ძალასთან

$$y(a_1) = -kR(a_1)$$

$$R(a_1) = -\frac{1}{k}y(a_1)$$

ელემენტის წონასწორობის პირობიდან გამომდინარე, დავაკავშიროთ განივი ძალის მნიშვნელობები საყრდენის მარცხენა და მარჯვენა მხარეებზე:

$$Q^+(a_1) = Q^-(a_1) - \frac{1}{k}y(a_1) \quad (14.63)$$

ინტეგრების შედეგად, საყრდენის მარცხენა მხარეს მიღებულ ვექტორში შევცვლით მხოლოდ პირველ კოორდინატს (14.63) გამოსახულების შესაბამისად. ეს შედეგი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც სისტემის დეფორმირებული მდგომარეობის მახასიათებელი X^- და X^+ ვექტორების - საყრდენის მარცხნივ და მარჯვნივ მდებარე ძელის განივი კვეთების საანგარიშო პარამეტრების კავშირი:

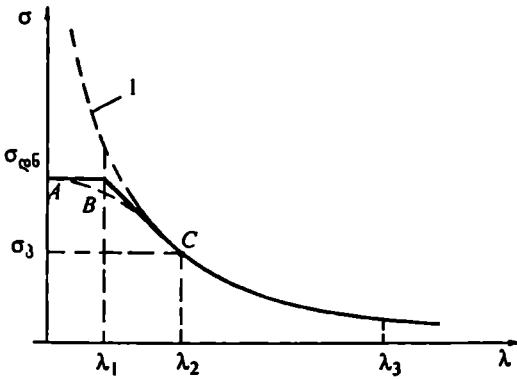
$$X^+ = LX^-, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14.64)$$

ამ გზით მივიღებთ ვექტორის მნიშვნელობას საყრდენის მარჯვენა მხარეზე და შემდეგ, ჩვეულებრივ ვაგრძელებთ ინტეგრებას. ამოცანები განვიხილეთ ზოგადად და განტოლებათა სისტემის სასაზღვრო პირობები, რომლებიც შეესაბამებიან ძელის საწყის და ბოლო კვეთებს, შევადგინეთ ურთიერთშეწონას-

წორების გარეშე. ამიტომ ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში მათი შერჩევისას უნდა გამოვიყენოთ სისტემისკინემატიკური ცვლებადობა და სხვა შესაძლო შეუსაბამობა.

§103. ეილერის ფორმულის გამოყენების საზღვრები. მდგრადობის გაანგარიშების პრაქტიკული ხერხი

მდგრადობის განხილვისას არსებითად გამოვიყენეთ დაშვება, რომ ძელის განივ კვეთში აღძრული ძაბვები არ აღემატება დენადობის ზღვარს. ძაბვების ასეთ დონეს ადგილი აქვს მხოლოდ შედარებით მოქნილი ძელების ცენტრალურ



ნახ. 14.19

შეკუმშვისას. რაც შეეხება მოკლე ძელებს, მათ შეკუმშვას, როგორც წესი, თან ახლავს დიდი ძაბვების წარმოქმნა და ზემოთ აღნიშნული პირობა ($\sigma < \sigma_{დწ}$) ყოველთვის არ სრულდება. ამიტომ მოკლე ძელებისთვის აუცილებელი ხდება მდგრადობაზე გაანგარიშების ეილერის მიდგომისგან განსხვავებული მეთოდის გამოყენება. მაგრამ სანამ ამ ამოცანის განხილვას შევუდგებოდეთ, საჭიროა, შემოვიღოთ ძელის

მოქნილობის ცნება და მისი საშუალებით შევისწავლოთ ეილერის ფორმულის გამოყენების საზღვრები.

უშუალოდ მდგრადობის დაკარგვის წინ შეკუმშულ ძელში წარმოქმნილი ძაბვების მნიშვნელობა

$$\sigma = \frac{P_k}{F} = \frac{\pi^2 EI_x}{F(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E i_x^2}{(\mu l)^2} \tag{14.65}$$

კომბინირებულ მახასიათებელს, რომელიც დამოკიდებულია ძელის კვეთის ფორმასა და ზომებზე (i_x), ბოლოების ჩამაგრების ხასიათზე (μ) და ძელის სიგრძეზე (l). ვუწოდოთ ძელის მოქნილობა და აღვნიშნოთ λ ასოთი

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_x} \tag{14.66}$$

მაშინ (14.65) გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\sigma = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (14.67)$$

ამ ფორმულის შესაბამისი გრაფიკი წარმოდგენილია 14.19 ნახაზზე 1 მრუდით. მას ეილერის ჰიპერბოლა ეწოდება. ხშირად μ_1 -ს და μ_2 -ს შესაბამისად ძელის დაყვანილი სიგრძეს და სიგრძის დაყვანის კოეფიციენტს უწოდებენ.

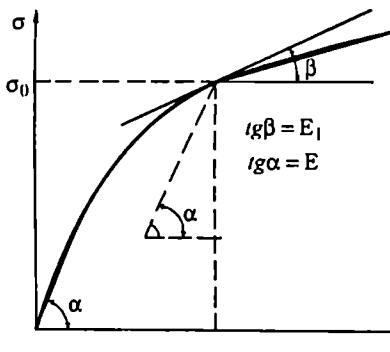
თუ ძელის მოქნილობა მცირდება და მიისწრაფვის ნულისაკენ, ნორმალური ძაბვები უსასრულოდ იზრდება. ამდენად, (14.67) ფორმულის გამოყენება შეიძლება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ძაბვის მნიშვნელობა არ აღემატება პროპორციულობის ზღვარს

$$\sigma_3 \geq \sigma = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

ეს პირობა საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ $\lambda = \lambda_2$ მოქნილობის ისეთი მნიშვნელობა, რომელიც განსაზღვრავს ეილერის ფორმულის გამოყენების ქვედა საზღვარს

$$\sigma_3 = \frac{\pi^2 E}{\lambda_2^2}; \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_3}}. \quad (14.68)$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც მოქნილობის მნიშვნელობა მცირეა, $\lambda \leq \lambda_2$ რასაც ადგილი აქვს მოკლე ძელებისათვის, საჭიროა გავითვალისწინოთ მასალის პლასტიკური თვისებები.



ნახ. 14.20

ცენტრალური შეკუმშვისას განივი კვეთის ნებისმიერ წერტილში ნორმალური ძაბვა σ_0 -ის ტოლია (ნახ. 14.20) და გვაქვს შემდეგი ტოლობა

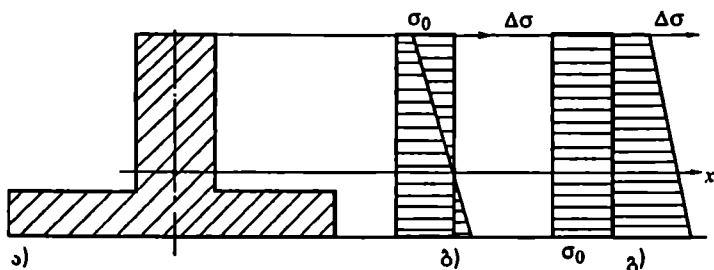
$$P = \sigma_0 F.$$

მდგრადობის დაკარგვის შემდეგ ძელი გადადის სწორხაზოვანი საწყისი მდგომარეობის მეზობელ, გაღუნულ მდგომარეობაში, რის შედეგადაც კვეთში წარმოიქმნება ლუნვით გამოწვე-

ული დამატებითი ნორმალური $\Delta\sigma$ ძაბვები. შესაბამისი წრფივი დეფორმაციები განისაზღვრება (5.6) ფორმულით $\epsilon_{\text{ლ}} = \nu/\rho$.

განვიხილოთ მხოლოდ მცირე სიდიდის დამატებითი ძაბვები (ნახ.14.21,ბ). ძელის ბოჭკოები ჩაზნექილი მხრიდან განიცდის დამატებით შეკუმშვას. ამიტომ ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის გვაქვს შემდეგი თანაფარდობა

$$\Delta\sigma = E_1 \frac{\gamma}{\rho}, \quad (\Delta\sigma < 0) \quad (14.69)$$



ნახ. 14.21

ამოზნექილი მხრიდან $\Delta\sigma > 0$ და გვაქვს განტვირთვა. ამიტომ (14.69) გამოსახულების ნაცვლად უნდა გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულა:

$$\Delta\sigma = E \frac{\gamma}{\rho}, \quad (\Delta\sigma > 0) \quad (14.70)$$

ეილერის თეორიის შესაბამისად, ძელის მდგრადობის დაკარგვისას ნორმალური ძალა არ იცვლება, ე.ი. ძალის გაზრდისთვის გვაქვს შემდეგი პირობა

$$\Delta N = \int_F \Delta\sigma dF = 0. \quad (14.71)$$

ეს პირობა (14.69) და (14.70) ტოლობების გამოყენებით წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$E_1 S_1 = E S_2. \quad (14.72)$$

ძელის მდგრადობის დაკარგვის შედეგად აღძრული მღუნავი მომენტი

$$M_x = \int_F \gamma \Delta\sigma dF = \frac{1}{\rho} (I_1 E_1 + I_2 E) \quad (14.73)$$

(14.72) ფორმულაში S_1 და S_2 განივი კვეთის იმ ნაწილების სტატიკური მომენტებია ნეიტრალური ღერძის მიმართ, რომლებშიც შესაბამისად, გვაქვს დამა-

ტებითი დატვირთვა და განტვირთვა. (14.73) ფორმულაში I_1 და I_2 შესაბამისად, განივი კვეთის ზემოაღნიშნული ნაწილების ღერძული ინერციის მომენტებია იმავე ღერძის მიმართ.

$$E_{\text{ფხ}} = \frac{I_1 E_1 + I_2 E}{I_x}. \quad (14.74)$$

აქ I_x განივი კვეთის ინერციის მომენტია ცენტრალური ღერძის მიმართ. (14.73) ფორმულა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$M_x = \frac{E_{\text{ფხ}} I_x}{\rho}. \quad (14.75)$$

ეს ფორმულა ფაქტობრივად ემთხვევა (14.12) ფორმულას, თუ მასში შევცვლით E -ს ეფექტური დრეკადობის მოდულის მნიშვნელობით. ამიტომ კრიტიკული ძალა შეგვიძლია განვსაზღვროთ (14.24) ფორმულით მასში შესაბამისი ცვლილების გათვალისწინებით

$$P_{\text{კრ}} = \frac{\pi^2 E_{\text{ფხ}} I_x}{(\mu l)^2}. \quad (14.76)$$

ამ შემთხვევაში, კრიტიკული ძაბვა გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\sigma_{\text{კ}} = \frac{\pi^2 E_{\text{ფხ}}}{\lambda^2}. \quad (14.77)$$

მიღებულ ფორმულაში დრეკადობის ეფექტური მოდული დამოკიდებულია კრიტიკული ძაბვის მნიშვნელობაზე. ამიტომ საქმე გვაქვს ტრანსცენდენტულ განტოლებასთან. ამ განტოლების ამონახსნის საფუძველზე მიღებული შედეგები 14.19 ნახაზზე ნაჩვენებია ABC მრუდით, რომელსაც ხშირად, მიახლოებით წარმოადგენენ ორი წრფის მონაკვეთით:

$$\sigma_{\text{კ}} = a - b\lambda; \quad (\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2); \quad (14.78)$$

$$\sigma_{\text{კ}} = \sigma_{\text{ღნ}}; \quad (\lambda \leq \lambda_1) \quad (14.79)$$

დავადგინოთ მცირე ნახშირბადიანი ფოლადის ძელისათვის ეილერის ფორმულის გამოყენების საზღვარი. მხედველობაში მივიღოთ $\sigma_{\text{ღნ}}=200$ მგპა, $E=2 \cdot 10^5$ მგპა. მაშინ, (14.68) ფორმულიდან მივიღებთ $\lambda_2=100$.

λ	ფოლადი				თუჯი				სუ		ბეტონი			
	cm.0, cm.2, cm.3, cm.4		cm.5		C _q .15-30, C _q .15-18, C _q .15-36, C _q .21-40		C _q .21-44, C _q .24-48		ქოვსტან და მოუკიდებლად		მიამე		მსუბუქი	
	φ	η	φ	η	φ	η	φ	η	φ	η	φ	η	φ	η
0	1.00													
10	0.99	10.1	0.98	10.1	0.97	10.2	0.95	10.3	0.99	10.1	1.0	10.0	1.0	10.0
20	0.97	20.1	0.95	20.5	0.91	21.0	0.87	21.4	0.97	20.1	0.96	20.4	0.96	20.4
30	0.95	30.8	0.93	31.1	0.81	33.3	0.75	34.6	0.92	31.3	0.90	31.6	0.86	32.3
40	0.92	41.7	0.90	42.2	0.69	48.2	0.60	51.6	0.87	42.9	0.84	43.6	0.73	46.8
50	0.89	53.0	0.84	54.6	0.57	66.2	0.43	76.3	0.80	55.9	0.76	57.4	0.68	60.6
60	0.86	67.1	0.80	67.1	0.44	90.5	0.32	106	0.71	71.2	0.70	71.7	0.59	78.1
70	0.81	77.8	0.74	81.4	0.34	120	0.23	146	0.61	89.6	0.63	88.2	0.52	97.1
80	0.75	92.4	0.66	98.5	0.26	157	0.18	189	0.49	114	0.57	106	0.46	118
90	0.69	108	0.59	117	0.20	201	0.14	241	0.38	146	0.51	126		
100	0.60	129	0.50	141	0.16	250	0.12	289	0.31	180	0.45	149		
110	0.52	153	0.43	168					0.26	216				
120	0.45	179	0.38	195					0.22	256				
130	0.40	206	0.32	230					0.18	306				
140	0.36	233	0.28	265					0.16	350				
150	0.32	265	0.27	289					0.14	401				
160	0.29	297	0.24	327					0.12	462				
170	0.26	333	0.21	371					0.11	513				
180	0.23	375	0.19	413					0.10	569				
190	0.21	415	0.17	461										
200	0.19	459	0.16	500										

ასეთი ძელებისთვის ეილერის ფორმულის გამოყენების მეორე ზღვარია $\lambda_1=40$ და ფორმულაში (14.78): $a=3100$, $b=11,4$.

მიღებული შედეგიდან გამომდინარე, ძელს ვუწოდებთ მოკლეს, თუ მისი მოქნილობა მცირეა, $\lambda \leq \lambda_1$. ასეთი ძელების გაანგარიშება ხდება ჩვეულებრივ ცენტრალურ შეკუმშვაზე. საშუალო სიგრძის ძელებისთვის მოქნილობა აკმაყოფილებს პირობას $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ ასეთი ძელების გაანგარიშება ხდება (14.78) ფორმულის გამოყენებით. გრძელი ძელებისთვის $\lambda > \lambda_2$ გაანგარიშებას ახდენენ ეილერის ფორმულის მეშვეობით.

მდგრადობაზე ნებისმიერი მოქნილობის ძელების გაანგარიშება შეიძლება განხორციელდეს შემდეგი მეთოდით. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\varphi = \frac{\sigma_{\text{კ}}}{\sigma_{\text{დნ}}}$$

საიდანაც კრიტიკული ძაბვის მნიშვნელობა

$$\sigma_{\text{კ}} = \varphi \sigma_{\text{დნ}} \quad (14.80)$$

მაშინ დასაშვები ძაბვებისათვის მივიღებთ შესაბამის თანაფარდობას

$$[\sigma]_{\text{კ}} = \varphi [\sigma] \quad (14.81)$$

ამ ფორმულაში $[\sigma]_{\text{კ}}$, $[\sigma]$, შესაბამისად, დასაშვები ძაბვების მნიშვნელობებია კუმშვასა და მდგრადობაზე; φ კოეფიციენტი, რომელიც იცვლება $0 \leq \varphi \leq 1$ საზღვრებში. მისი მნიშვნელობა დამოკიდებულია ძელის კვეთის ზომებზე, ფორმასა და მასალაზე. შეიძლება გავასაშუალოთ ძელის კვეთის გავლენა ამ პარამეტრზე და მასალებისთვის, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება პრაქტიკაში, შევადგინოთ სპეციალური ცხრილები (ცხრილი 14.1).

ძელის მდგრადობაზე შემოწმება, თუ მოცემულია მისი გეომეტრიული ზომები და მასალა, იოლია: გამოვთვლით მოქნილობის λ მნიშვნელობას, დავადგენთ მისი შესაბამისი φ კოეფიციენტის მნიშვნელობას და განვსაზღვრავთ დასაშვები ძაბვის $[\sigma]_{\text{კ}}$ მნიშვნელობას. შედარებით რთულია ძელის განივი კვეთის შერჩევა, ვინაიდან φ კოეფიციენტის დასადგენად აუცილებელია ვიცოდეთ კვეთის ინერციის მინიმალური რადიუსი. ეს უკანასკნელი განისაზღვრება კვეთის ზომების საშუალებით, რომლებიც, თავის მხრივ, უცნობია. ამიტომ გამოიყენება მიმდევრობით მიახლოების მეთოდი. ვიღებთ, მაგალითად, $\varphi=0,5$ და ვადგენთ კვეთის ზომებს, შემდეგ დავადგენთ φ -ს ახალ მნიშვნელობას და მის შესაბამის კვეთის ზომებს; შემდეგ დავადგენთ ამ უკანასკნელის შესაბამის φ -ს მნიშვნელობას და ასე შემდეგ, სანამ ორი, მიმდევრობით დადგენილი კვეთის ზომები პრაქტიკულად არ დაემთხვევა ერთმანეთს.

ამრიგად, დადგინდა, რომ არსებობს მცირე, საშუალო და დიდი მოქნილობის ძელები. ყოველი მათგანი თავისებურ მიდგომას და განაგარიშებისათვის შესაბამის ფორმულებს მოითხოვს. მაგრამ შემოვიღეთ ისეთი ანგარიშის მეთოდიც, რომელსაც Φ კოეფიციენტის მდგრადობაზე ანგარიშის მეთოდი ეწოდება, რომელიც უნივერსალურია და სამივე ტიპის ძელებისთვის გამოიყენება. თუმცა, მისი გამოყენება ძელის განივი კვეთის ფართობის დასადგენად მოითხოვს მიმდევრობითი მიახლოებით შედეგის მიღებას. არსებობს ამ მეთოდის მოდიფიცირებული ვარიანტი, რომელიც ასევე უნივერსალურია და კვეთის ფართობის უშუალოდ განსაზღვრის საშუალებას იძლევა.

გამოვიყენოთ (14.81) ფორმულა და განვსაზღვროთ კვეთის ფართობი

$$F = \frac{P}{\phi[\sigma]} \quad (14.82)$$

შემოვიღოთ ახალი კომბინირებული პარამეტრი

$$\eta^2 = \frac{\lambda^2}{\phi}, \quad \eta = \frac{\lambda}{\sqrt{\phi}} \quad (14.83)$$

მაშინ (14.82) შეგვიძლია ჩავწეროთ ახალი ფორმით

$$F = \frac{P\eta^2}{[\sigma]\lambda^2}. \quad (14.84)$$

დავადგინოთ η -ს მნიშვნელობა (14.84) გამოყენებით

$$\eta = (\mu l) \sqrt{\frac{[\sigma]F}{I_x^2 P}} = (\mu l) \sqrt{\frac{F^2 [\sigma]}{I_x P}}. \quad (14.85)$$

შემოვიღოთ ახალი კოეფიციენტი

$$\psi = \frac{F^2}{I_x}. \quad (14.86)$$

ეს კოეფიციენტი ხშირ შემთხვევაში არ არის დამოკიდებული კვეთის ზომებზე და მისი ფორმით განისაზღვრება. მაგალითად, კვადრატული და წრიული კვეთებისათვის ψ კოეფიციენტის მნიშვნელობა შესაბამისად იქნება

$$\psi = 12, \quad \psi = 4\pi. \quad (14.87)$$

მართკუთხა კვეთისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\psi = 12 \frac{b}{h}. \quad (b \geq h) \quad (14.88)$$

ნაგლინი პროფილებისათვის (14.86)-ის მუდმივობა ზუსტად არ არის დაცული. მაგრამ მათთვის გარკვეული მიახლოებით, მაინც შეიძლება კოეფიციენტის საშუალო მნიშვნელობაზე საუბარი. მაგალითად, ორტესებრი პროფილისთვის ადგილი აქვს თანაფარდობებს

$$\begin{aligned} N10 \div N40: & \quad \psi = 6 \div 8, \\ N45 \div N60: & \quad \psi = 9 \div 11. \end{aligned} \quad (14.89)$$

ამიტომ მიზანშეწონილია ფორმულა (14.85) ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$\eta = (\mu l) \sqrt{\psi \frac{\sigma}{P}}. \quad (14.90)$$

ამ ფორმულის გამოყენებით შესაძლებელია ძელისთვის η კოეფიციენტის განსაზღვრა: η კოეფიციენტის მნიშვნელობების λ და φ კოეფიციენტებზე დამოკიდებულება ასახულია 14.1 ცხრილში. ამ მიზნით, გამოყენებულია ფორმულა (14.80). ასე, რომ 14.1 ცხრილის გამოყენებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ შესაბამისი კოეფიციენტების $-(\lambda\text{-სა და } \varphi\text{-ს})$ - მნიშვნელობები. ამის შემდეგ ვუბრუნდებით (14.82) ფორმულას და დავადგენთ განივი კვეთის ფართობსაც. ამ მეთოდს ვუწოდოთ η კოეფიციენტის მეთოდი.

დავეშვათ, რომ ძელის მდგრადობის დაკარგვის პროცესში მკუმშავი ძალა იზრდება ისეთი სიჩქარით, რომ კვეთის ყოველ წერტილში გვაქვს დამატებითი დატვირთვა (ნახ. 14.21, გ). ამ შემთხვევაში (14.69) ფორმულა გამოიყენება მთელი კვეთისთვის და, საბოლოოდ, კრიტიკული ძალისთვის, ნაცვლად (14.76) გამოსახულებისა, მივიღებთ

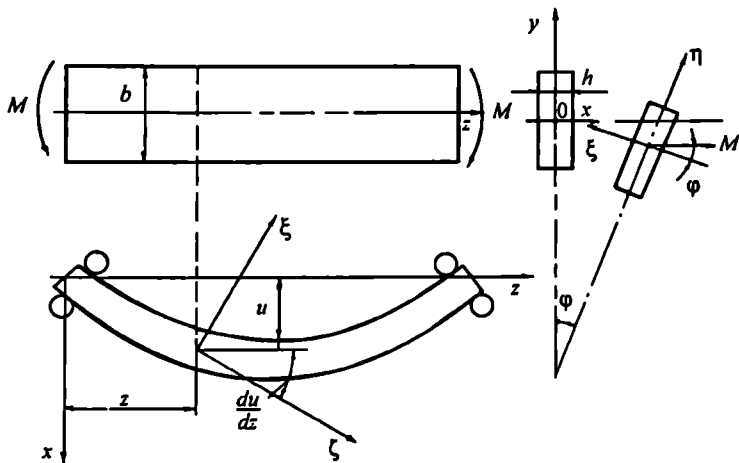
$$P_{\sigma} = \frac{\pi^2 E_1 I_x}{(\mu l)^2}. \quad (14.91)$$

§104. ძელის გვერდითი ამოხურცვა

განვიხილოთ ძელი, რომელზეც yOz სიბრტყეში მოქმედებს მომენტები (ნახ. 14. 22), რის შედეგადაც გვაქვს ღუნვა იმავე სიბრტყეში. აქ Oy მთავარი ცენტრალური ღერძია. ასეთი ამოცანა ჩვენ უკვე განვიხილეთ. მაგრამ თუ განივი კვეთი ისეთია, რომ Ox ღერძის მიმართ ღერძული ინერციის მომენტი ბევრად

მეტია Oy ღერძის მიმართ ინერციის მომენტზე, $I_x \gg I_y$, ძელმა შეიძლება მდგარადობა დაკარგოს და განიცადოს ე.წ. გვერდითი ამობურცვა.

შეიძლება განისაზღვროს მომენტის ისეთი კრიტიკული მნიშვნელობა $M_{კ}$, რომლის მოქმედებისას, ძელის ბრტყელი გაღუნული ფორმის გარდა იარსებებს მეორე ფორმაც. ეს ფორმა შეესაბამება ძელის ცენტრალური ღერძის წერტილების დამატებით გადაადგილებას Ox ღერძის მიმართულებით და განივი კვეთების მობრუნებას Oz ღერძის ირგვლივ. ასეთი კრიტიკული მომენტის მნიშვნელობის განსაზღვრა ხდება ისევე, როგორც განისაზღვრებოდა კრიტიკული ძალის მნიშვნელობა შეკუმშული ძელისათვის.



ნახ. 14.22

დავუშვათ, მოდებული მომენტის მნიშვნელობა ისეთია, რომ წარმოიშობა ძელის გვერდითი ამობურცვა (ნახ. 14.22). აღნიშნოთ კვეთის ცენტრალური ღერძის წერტილების გადაადგილებები Ox და Oy ღერძების მიმართულებით და Oz ღერძის მიმართ განივი კვეთის მობრუნების კუთხე შესაბამისად u, v და φ ასოებით. შემოვიღოთ ახალი ξ, η, ζ კოორდინატა სისტემა, რომლის სათავე მოთავსებულია კვეთის სიმძიმის ცენტრში. პირველი ორი ღერძი მიმართულია განივი კვეთის მთავარი ღერძების მიმართულებით, მესამე კი – დეფორმირებული ღერძის მხების გასწვრივ. დეფორმირებული ძელის ცენტრალური ღერძის სიმრუდის მნიშვნელობები xOz და yOz სიბრტყეებში, შესაბამისად, (d^2u/dz^2) და (d^2v/dz^2) იქნება. ვინაიდან მობრუნების φ კუთხე მცირეა, შეიძლება ჩავთვალოთ მიახლოებით, რომ სიმრუდეებიც $\xi\zeta$ და $\eta\zeta$ სიბრტყეებში იგივე სიდიდეები იქნება. მიღებული დაშვებები საშუალებას გვაძლევს ძელის დეფორმირებული მდგომარეობის განმსაზღვრელი დიფერენციალური განტოლებები ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned}
 EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} &= M_\xi; \\
 EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} &= M_\eta; \\
 EI_k \frac{d\varphi}{dz} &= M_\zeta.
 \end{aligned}
 \tag{14.92}$$

შემდგომში მხედველობაში მივიღებთ, რომ $I_x=I_\xi$, $I_y=I_\eta$.

(14.92) განტოლებებში განვსაზღვროთ მომენტების მნიშვნელობები. ამისათვის 14.22 ნახაზზე ნაჩვენები მომენტი-ვექტორი დავაგეგმილოთ შესაბამის ღერძებზე:

$$M_\xi = -M \cos \varphi \approx -M; \quad M_\eta = M \sin \varphi \approx M\varphi; \quad M_\zeta = -M \frac{du}{dz}.$$

მიღებული შედეგების გათვალისწინებით (14.92) განტოლებები ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} = -M; \quad EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = M\varphi; \quad GI_k \frac{d\varphi}{dz} = -M \frac{du}{dz}.$$

თუ ბოლო ორი განტოლებიდან u -ს გამოვრიცხავთ, მივიღებთ მეორე რიგის განტოლებას φ -ს მიმართ

$$GI_k \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -\frac{M^2 \varphi}{EI_y}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\frac{M^2}{EGI_y I_k} = k^2,$$

მაშინ წინა განტოლება გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + k^2 \varphi = 0.$$

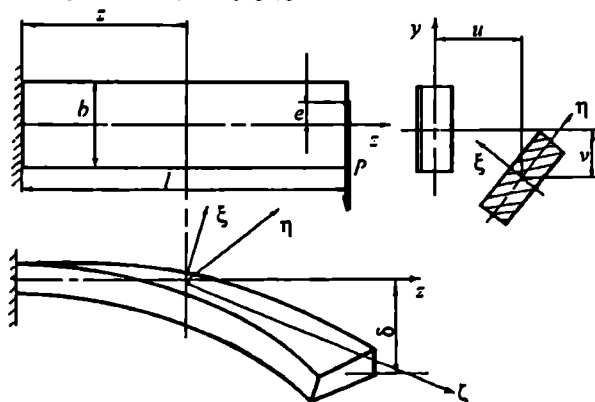
ამ ამოცანაში გამოიყენებულია საწყისი და ბოლო განივი კვეთების მობრუნება. ამიტომ გვექნება შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$z=0: \quad \varphi=0; \quad z=l: \quad \varphi=0.$$

ამრიგად, ფაქტობრივად, მივიღეთ უკვე განხილული ამოცანა, რომელიც აღიწერებოდა (14.13) და (14.16) თანაფარდობით. ამიტომ, აქაც $kl=n\pi$ და საბოლოოდ, მინიმალური კრიტიკული მომენტისთვის ($n=1$), ფორმულა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$M_k = \frac{\pi \sqrt{EGI_y J_k}}{l}. \quad (14.93)$$

ახლა განვიხილოთ კონსოლური ძელის გვერდითი ამობურცვა, როდესაც მასზე ვერტიკალური P ძალა მოქმედებს (ნახ.14.23).



ნახ. 14.23

ეს ძალა მოდებულია კვეთის სიმძიმის ცენტრიდან e მანძილზე. ძელის მიმდინარე z კვეთში მღუნავი მომენტები გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$M_\xi = -P(l-z); \quad M_\eta = P(l-z)\varphi;$$

$$M_\zeta = -P(l-z)\frac{du}{dz} + P[\delta + e\varphi(l) - u]$$

ამ შედეგის გათვალისწინებით (14.92) განტოლებები მიიღებს სახეს:

$$EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} = -P(l-z); \quad EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = P(l-z)\varphi;$$

$$GI_k \frac{d\varphi}{dz} = -P(l-z)\frac{du}{dz} + P[\delta + e\varphi(l) - u] \quad (14.94)$$

მივიღოთ ერთი განტოლება φ უცნობისათვის. ამისათვის ჯერ გავაწარმოოთ (14.94) სისტემის ბოლო განტოლების ორივე ნაწილი

$$GI_k \frac{d^2\varphi}{dz^2} = -P(l-z) \frac{d^2u}{dz^2},$$

ხოლო შემდეგ, ამ განტოლებაში გავითვალისწინოთ (14.94)-ის მეორე განტოლება. მივიღებთ

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{k^2(l-z)^2}{l^4} \varphi = 0. \quad (14.95)$$

აქ გამოყენებულია აღნიშვნა $k = \frac{Pl^2}{\sqrt{GI_k EI_y}}$ ბოლო კვეთში, როცა $z=l$, მგრები

მომენტი იქნება $Pe\varphi(l)$ და შესაბამისი გრების კუთხის ინტენსიურობის განსაზღვრით შეიძლება დავადგინოთ სასაზღვრო პირობა. საბოლოოდ, სასაზღვრო პირობები ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$z=0: \quad \varphi(0)=0; \quad z=l: \quad GI_k \frac{d\varphi(l)}{dz} = Pe\varphi(l).$$

ამდენად, ამოცანა ჩამოყალიბებულია და მისი ამოხსნა შეიძლება სპეციალური ფუნქციების გამოყენებით ან რიცხვითი მეთოდით. ჩვენ გამოვიყენებთ მეორე გზას.

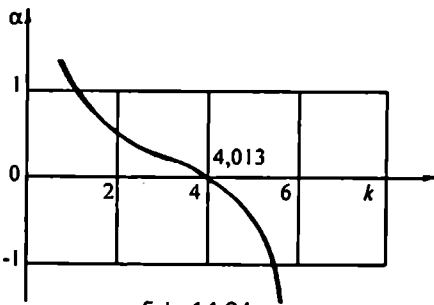
შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\frac{z}{l} = t; \quad \alpha = \sqrt{\frac{EI_y}{GI_k}} \frac{e}{l}; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'.$$

ამ აღნიშვნების გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ განტოლებას და შესაბამის პირობებს:

$$\begin{aligned} \varphi'' + k^2(1-t)^2 \varphi &= 0; \\ \varphi(0) &= 0; \quad \varphi'(1) = k^2 \alpha \varphi(1). \end{aligned} \quad (14.96)$$

საწყის წერტილში მობრუნების კუთხე ნულის ტოლია, ხოლო მისი წარმოებულის მნიშვნელობა განსხვავდება ნულისაგან. ინტეგრების განხორციელებისათვის მას შეიძლება მივცეთ ნებისმიერი არანულოვანი მნიშვნელობა, მაგალითად, $\varphi'(0) = 1$. ახლა შეგვიძლია ავიღოთ k -ს ფიქსირებული მნიშვნელობა და განტოლების რიცხვითი ინტეგრებით მივიღოთ φ და φ' -ის მნიშვნელობები მარჯვენა სასაზღვრო კვეთში, სადაც $t=1$. დავადგინოთ აღებული k -ს შესაბამისი α -ს მნიშვნელობა (14.96)-ის მეორე პირობის საფუძველზე



ნახ. 14.24

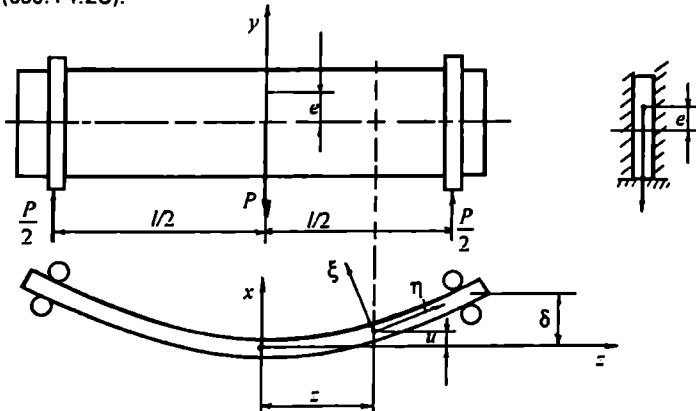
$$\alpha = \frac{\varphi'(l)}{k^2 \varphi(l)} \quad (14.97)$$

ასეთნაირად შეიძლება დავადგინოთ α -ს სხვადასხვა მნიშვნელობა და ავაგოთ გრაფიკი, რომელიც ახასიათებს $\alpha = \alpha(k)$ დამოკიდებულებას (ნახ.14.24). ამ გრაფიკის საშუალებით ვადგენთ, რომ, თუ ძალა კვეთის სიმძიმის ცენტრშია მოდებული, მაშინ

$\alpha=0$, $k=4.013$ და შესაბამისი კრიტიკული ძალის მნიშვნელობა

$$P_J = 4,013 \frac{\sqrt{GEI_k l y}}{l^2} \quad (14.98)$$

განვიხილოთ ორ საყრდენზე მდებარე ძელი, რომლის ცენტრალური კვეთის სიმძიმის ცენტრიდან e მანძილით დაცილებით მოდებულია P ვერტიკალური ძალა (ნახ.14.25).



ნახ. 14.25

დავადგინოთ მომენტების მნიშვნელობები:

$$M_\xi = -\frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right); \quad M_\eta = \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \varphi;$$

$$M_\zeta = \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \frac{du}{dz} - \frac{P}{2} [\delta + \varphi(0)e - u]$$

ამ შედეგების გათვალისწინებით მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{aligned} EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} &= -\frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right); & EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} &= -\frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \varphi; \\ GI_k \frac{d\varphi}{dz} &= \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \frac{du}{dz} - \frac{P}{2} [\delta + \varphi(0)e - u] \end{aligned} \quad (14.99)$$

სასაზღვრო პირობებს ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} z = 0: & \quad GI_k \frac{d\varphi(0)}{dz} = -\frac{Pe}{2} \varphi(0); \\ z = \frac{l}{2}: & \quad \varphi\left(\frac{l}{2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (14.100)$$

(14.99)-ის ბოლო ორი განტოლებიდან გამოვრიცხოთ u :

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -\frac{P}{4EGI_k I_y} \left(\frac{l}{2} - z \right)^2 \varphi.$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\frac{2z}{l} = t, \quad \frac{Pl^2}{4\sqrt{GEI_k I_y}} = k, \quad \alpha = \sqrt{\frac{EI_y}{GI_k l}} \frac{e}{l}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'.$$

ამ აღნიშვნების გათვალისწინებით, საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ განტოლებას და შესაბამის სასაზღვრო პირობებს:

$$\begin{aligned} \varphi'' + \frac{k^2}{4} (1-t)^2 \varphi &= 0; \\ t = 0: & \quad \varphi'(0) = -\frac{k\alpha}{2} \varphi(0); \\ t = 1: & \quad \varphi(1) = 0. \end{aligned} \quad (14.101)$$

მიღებული სისტემის თავისებურების გამო, მიზანშეწონილია ინტეგრირების განხორციელება მარჯვნიდან მარცხნივ. რადგან ცნობილია, რომ $\varphi(1)=0$, ამიტომ შესაძლებელია დავუშვათ $\varphi'(1)=1$ და k -ს კონკრეტული მნიშვნელობისთვის განტოლების ინტეგრებით დავადგინოთ $\varphi(0)$ -სა და $\varphi'(0)$ -ის მნიშვნელობები. ამის შემდეგ განვსაზღვრავთ α -ს მნიშვნელობას

$$\alpha = -\frac{2\varphi'(0)}{k\varphi(0)}. \quad (14.102)$$

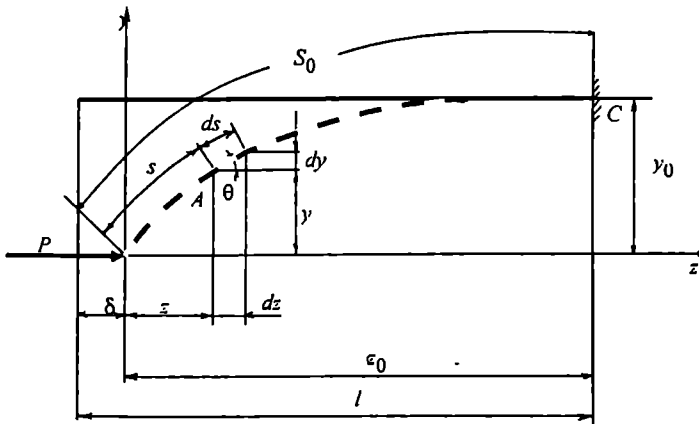
ჩატარებული გაანგარიშების საშუალებით ავაგებთ 14.24 ნახაზზე ნაჩვენები გრაფიკის ანალოგიურ გრაფიკს და დავადგენთ ძალების კრიტიკულ მნიშვნელობებს. კერძოდ, იმ შემთხვევისთვის, როდესაც ძალა კვეთის სიმძიმის ცენტრშია მოდებული, $\alpha=0$ და კრიტიკული ძალისთვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$P_{\text{კ}} = \frac{16,93\sqrt{GEI_k I_y}}{l^2}. \quad (14.103)$$

§105. უკუმშული ძელის გადაადგილებების განსაზღვრა მდგრადობის დაკარგვის შემდეგ

განვიხილოთ სწორი ძელი, რომლის ერთ ბოლოზე მოდებულია მკუმშავი ცენტრალური ძალა (ნახ. 14.26). დავუშვათ, რომ ძელი კარგავს მდგრადობას და იღუნება. მისი დეფორმირებული ღერძის დიფერენციალური განტოლებათა სისტემა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = -\frac{M_x}{EI_x} = -\frac{Py}{EI_x}; \\ \frac{dz}{ds} = \cos\theta; \quad \frac{dy}{ds} = \sin\theta. \end{aligned} \quad (14.104)$$



ნახ. 14.26

ეს სისტემა, (14.46) განსხვავებით, არ არის გაწრფივებული.

თუ (14.104) სისტემის პირველი განტოლების გაწარმოებით და მიღებულ შედეგში გავითვალისწინებთ მესამე განტოლებას, მივიღებთ

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{P}{EI_x} \frac{dy}{ds} = -\frac{P}{EI_x} \sin\theta.$$

გავამრავლოთ ორივე ნაწილი $d\theta$ -ზე და განვახორციელოთ ინტეგრება

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d^2\theta}{ds^2} d\theta = \int_0^s \frac{d}{ds} \left(\frac{d\theta}{ds} \right) \frac{d\theta}{ds} ds = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{ds} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 ds = -\frac{P}{EI_x} \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta d\theta,$$

საიდანაც მიიღება შემდეგი თანაფარდობა

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 \Big|_0^s = \frac{P}{EI_x} (\cos\theta - \cos\theta_0).$$

ვინაიდან საწყის კვეთში მღუნავი მომენტი ნულის ტოლია, $d\theta/ds$ აგრეთვე ნულს უდრის. აღნიშნულის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \frac{2P}{EI_x} (\cos\theta - \cos\theta_0).$$

ეს უკანასკნელი თანაფარდობა საშუალებას იძლევა განისაზღვროს ელემენტარული რკალის ds სიგრძე

$$ds = -\frac{1}{K\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} d\theta = -\frac{d\theta}{2K\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}. \quad (14.105)$$

აქ გამოყენებულია აღნიშვნა $K = \sqrt{\frac{P}{EI_x}}$.

მიღებული ფორმულის გასამარტივებლად შემოვიღოთ ახალი პარამეტრი და ცვლადი

$$\sin\frac{\theta_0}{2} = m; \quad \sin\frac{\theta}{2} = m \sin\phi.$$

ახალი და ძველი ცვლადების სასაზღვრო მნიშვნელობები ერთმანეთთან და-

კავშირებულია შემდეგი თანაფარდობებით:

$$\theta = \theta_0 : \sin \varphi = 1; \quad \varphi = \frac{\pi}{2};$$

$$\theta = 0 : \sin \varphi = 0; \quad \varphi = 0.$$

დავადგინოთ კავშირი ძველი და ახალი ცვლადების დიფერენციალებს შორის

$$\frac{d\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = d\varphi m \cos \varphi; \quad d\theta = \frac{2m \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}}.$$

ამ მნიშვნელობების (14.105)-ში გათვალისწინებით მივიღებთ

$$ds = -\frac{1}{2K\sqrt{m^2 - m^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \frac{2m \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}} = -\frac{d\varphi}{K\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}}.$$

ახლა შეგვიძლია დავადგინოთ საწყისი წერტილიდან A წერტილამდე დეფორმირებული ძელის ღერძის მონაკვეთის სიგრძე

$$s = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{d\varphi}{K\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}} = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{K\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}}.$$

საბოლოოდ, ეს ფორმულა წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$Ks = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}} - \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (14.106)$$

მიღებული ინტეგრალების გამოთვლა ელემენტარულ ფუნქციებში არ ხერხდება. ეს ინტეგრალები ცნობილია, როგორც *ძირველი გვარის ელიფსური ინტეგრალები*. მათი მნიშვნელობები დამოკიდებულია φ და m სიდიდეებზე და მოცემულია სპეციალური ცხრილების საშუალებით.

განვიხილოთ საკითხი იმის შესახებ, თუ ძალის როგორი მნიშვნელობისათვის შეიძლება არსებობდეს ძელის გაღუნული ფორმა. ამისათვის (14.106) ფორმულა ჩავწეროთ ძელის მთელი სიგრძისათვის

$$Kl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (14.107)$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ პირობა, რომელიც განსაზღვრავს ძელის გაღუნული ფორმის არსებობის შესაძლებლობას. მართლაც, (14.107) ტოლობას აზრი აქვს მაშინ, თუ სრულდება შემდეგი პირობა

$$Kl \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}. \quad (14.108)$$

ახლა შეგვიძლია კრიტიკული ძალის განსაზღვრა. ე.ი. ძალის ისეთი მინიმალური მნიშვნელობის დადგენა, რომლის მოქმედებისას შესაძლებელია ძელის სწორხაზოვან ფორმასთან ერთად არსებობდეს გაღუნული ფორმაც

$$Kl = \sqrt{\frac{P}{EI_x}} l = \frac{\pi}{2}, \quad P_{\text{კ}} = \frac{\pi^2 EI_x}{4l^2}.$$

ამრიგად, არაწრფივი განტოლებების საფუძველზე მივიღეთ იგივე შედეგი, რომელიც ადრე მიღებული გვქონდა (14.13) წრფივი განტოლების საშუალებით. მაგრამ ძელის გადაადგილებების შესწავლა წრფივი განტოლების საფუძველზე არ ხერხდება. განვიხილოთ ეს საკითხიც.

დეფორმირებული ძელის ღერძის ნებისმიერი წერტილის გადაადგილებების დიფერენციალები (14.104) განტოლებების შესაბამისად იქნება

$$dz = ds \cos \theta, \quad dy = ds \sin \theta. \quad (14.109)$$

გარდავქმნათ პირველი ფორმულა

$$\begin{aligned} dz &= \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) ds = 2 \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) ds - ds = \\ &= -2 \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \frac{d\varphi}{K \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}} - ds = -\frac{2}{K} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - ds, \end{aligned}$$

საიდანაც ინტეგრებით მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$z = -\frac{2}{K} \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - s.$$

ეს უკანასკნელი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$z = \frac{2}{K} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-m^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - \int_0^{\varphi} \sqrt{1-m^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - s.$$

ამ ფორმულაში შემავალ ინტეგრალებს მეორე გვარის ელიფსური ინტეგრალები ეწოდება.

ძალის მოდების წერტილის ჰორიზონტალური გადაადგილება განისაზღვრება მიღებული ფორმულიდან $\varphi=0$ და $s=l$ პირობების გათვალისწინებით

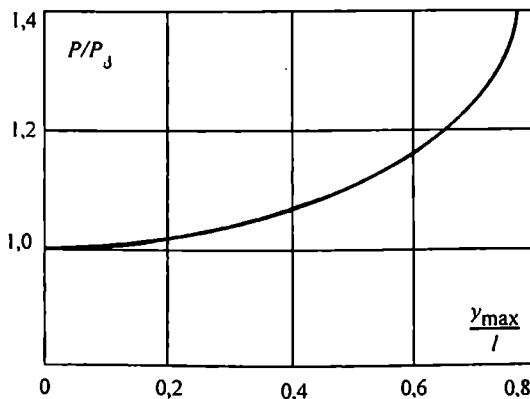
$$\delta = \frac{2}{K} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-m^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - l.$$

ახლა მივიღოთ ვერტიკალური გადაადგილებების ფორმულა

$$\begin{aligned} dy &= ds \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} ds = \\ &= -2m \sin \varphi \sqrt{1-m^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{K \sqrt{1-m^2 \sin^2 \varphi}} = -2 \frac{m}{K} \sin \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

ინტეგრების შედეგად მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$y = 2 \frac{m}{K} \cos \varphi. \quad (14.110)$$



მაქსიმალური გადაადგილება გვაქვს C წერტილში, რომლისთვისაც $\varphi=0$

$$y_{\max} = y_0 = 2 \frac{m}{K}. \quad (14.111)$$

რიცხვითი მონაცემები, რომლებიც ახასიათებს გადაადგილებების დამოკიდებულებას ძელზე მოდებული ძალის მნიშვნელობაზე, მოცემულია 14.2 ცხრილში; შესაბამისი გრაფიკი აგებულია

ნახ. 14.27

14.27 ნახაზზე. როგორც ჩანს, მდგრადობის დაკარგვის შემდეგ გადაადგილებები სწრაფად იზრდება ძალის უმნიშვნელო ზრდის პირობებშიც კი. მაგალითად, თუ ძალა მხოლოდ 1,5%-ით ან 10,2%-ით აღემატება მის კრიტიკულ მნიშვნელობას, მაქსიმალური გადაადგილებები შესაბამისად ტოლია $\gamma_{max} = 0,220/$ და $\gamma_{max} = 0,514/$.

ცხრილი 14.2

P/P_c	1	1,004	1,015	1,035	1,064	1,102	1,215	1,393
γ_{max}/l	0	0,110	0,220	0,324	0,422	0,514	0,662	0,762

§106. ქელის მდგრადობის თეორიის შექმნის ისტორიიდან

კაცობრიობას თავისი განვითარების საწყის ეტაპზე უკვე გაუჩნდა სხვადასხვა დანიშნულების კონსტრუქციების შექმნის მოთხოვნა, რომლებშიც ერთ-ერთი ძირითადი ელემენტი იყო გრძივი მკუმშავი ძალებით დატვირთული ძელები. მიუხედავად იმისა, რომ მაშინ ასეთი ძელების გაანგარიშების არავითარი მეცნიერული საფუძვლები არ არსებობდა, ამოცანა წარმატებით წყდებოდა და კონსტრუქციები ხანგრძლივი დროის განმავლობაში ასრულებდნენ თავის დანიშნულებას. ამის ნათელი მაგალითია დღემდე შემორჩენილი მრავალი რელიგიური თუ სხვა დანიშნულების ნაგებობების სვეტები. ისმება კითხვა, როგორ გაართვა თავი ადამიანმა ასეთ ამოცანას? შეიძლება თუ არა საერთოდ არ ვიხელმძღვანელოთ მეცნიერულად დასაბუთებული გაანგარიშების მეთოდებით ან ვიხელმძღვანელოთ მხოლოდ ინტუიციით და დავეყრდნოთ წლობით დაგროვილ გამოცდილებას? თუ როგორ ართმევდნენ თავს ასეთ ამოცანებს ძველი დროის მშენებლები, წარმოდგენას გვაძლევს ძვ. წელთაღრიცხვის I საუკუნის არქიტექტორისა და ინჟინრის ვეტრევიუსის შრომა, რომელშიც გამოთქმულია მოსაზრებები ტექნიკური და ესთეტიკური ასპექტების ერთიანობის შესახებ. ვეტრევიუსი თვლიდა, რომ ნაგებობას უნდა ახასიათებდეს გამძლეობა, სარგებლიანობა და სილამაზე.

ამ პრინციპების განხორციელებისთვის ადამიანი ფართოდ იყენებდა ბუნებაში არსებულ სხვადასხვა სახის ანალოგებს. აი რას წერდა ვეტრევიუსი მცირე აზიაში მცხოვრები ბერძენი კოლონისტების შესახებ წიგნში „არქიტექტურის შესახებ“:

„უპირველეს ყოვლისა აუგეს ტაძარი აპოლონ პანაიონელს... როდესაც ამ ტაძარში სვეტების დადგმა მოინდომეს, აღმოჩნდა, რომ მათ არ იცოდნენ სვეტების ზომების თანაფარდობა და დაიწყეს საშუალებების ძებნა, რათა სვეტები გაეკეთებინათ ისეთი, რომ გაეძლოთ სიმძიმის დაწოლისთვისაც და უნაკლოდ შეენარჩუნებინათ გარეგნული მომზიბველელობაც. მათ გაზომეს მამაკაცის ნაფე-

ხურების სიგარძე და შეადარეს მისსავე სიმაღლეს. აღმოჩნდა, რომ ფეხის ზომამ შეადგინა სიმაღლის ერთი მეექვსედი და მათაც ეს პროპორცია გამოიყენეს სვეტებისთვის, რომელთა სიმაღლეც მის (ღეროს) სისქეს ექვსჯერ აღემატებოდა. ამრიგად, სვეტი გახდა განსახიერება მამაკაცური სხეულის პროპორციისა, მისი სიძლიერისა და სილამაზისა.

შემდგომში მათ ააშენეს დიანას ტაძარი... ამასთანავე, ეძებდნენ რა გარეგნულად განსხვავებულ სახეს, კვლავ ადამიანთან მიმსგავსების საშუალებით მიანიჭეს ტაძარს გრაციოზულობა ქალისა. უპირველეს ყოვლისა, სვეტის სისქე აიღეს სიმაღლის ერთი მეშვიდედის ტოლი, რათა შესახედავად უფრო მაღალი გამოსულიყო... ამრიგად, მოიგონეს სვეტების ორი განსხვავებული ტიპი: ერთი-გარეგნულად მამაკაცის სხეულის მსგავსი, მეორე, რომელიც თავისი ფორმითა და ზომების თანაფარდობით მომზიბვლელ ქალს მოგაგონებდათ". რა თქმა უნდა, ჩვენ ვაღიარებთ მაშინდელი მშენებლების საზრიანობას, მაგრამ მათი მეთოდები გამორიცხავდნენ კონსტრუქციების შექმნისას მასალის ეკონომიური ხარჯვის მოთხოვნას. სხვათა შორის, ეს მოთხოვნა არც იყო გათვალისწინებული ვეტრუვიუსის ზემოთ მოყვანილ პრინციპებში. დღეს კი ეს ერთ-ერთი მთავარი მოთხოვნაა ნებისმიერი მანქანისა თუ სხვა კონსტრუქციის შექმნისას. ზოგჯერ გვესმის მოსაზრება, რომ წარსულში, მიუხედავად იმისა, რომ არ არსებობდა მეცნიერება, ადამიანები აშენებდნენ ისე, რომ ამა თუ იმ ნაგებობამ საუკუნეებს გაუძლო და ეს ნაგებობები კიდევ დიდხანს იარსებებს. დღეს კი, როცა ფართოდ გამოიყენება მეცნიერების მიღწევები, ნაგებობები მწყობრიდან გამოდის რამდენიმე ათეული წლის შემდეგ. ეს აზრი მცდარია, რადგან არ არის რთული ვაშენოთ ისე, რომ ნაგებობა იდგეს ათასობით წლის განმავლობაში. ამისათვის საჭიროა ვაშენოთ დიდი მარაგის კოეფიციენტებით, ვაშენოთ ისე, რომ ერთ შენობას მოვახმაროთ რამდენიმეწლევითი საკმარისი მასალა. გაცილებით უფრო რთულია შეექმნათ ეკონომიკურად გამართლებული კონსტრუქციები მასალის მინიმალური რაოდენობით, კონსტრუქციის არსებობის პერიოდი (მაგალითად, რამდენიმე ათეული წელი) კი წინასწარ განვსაზღვროთ. ასეთი ამოცანები მეცნიერების რეკომენდაციების გარეშე ვერ გადაწყდება.

ამრიგად, პრაქტიკა ათასობით წლის წინათ აყენებდა საკითხს ძელების მდგრადობაზე გაანგარიშების შესახებ. მაგრამ კაცობრიობის განვითარების საერთოდ არ იყო მზად ასეთი საკითხების მეცნიერულ საფუძვლებზე გადასაწყვეტად. მხოლოდ მაშინ, როდესაც დაიწყო თანამედროვე მექანიკისა და მათემატიკის ფუძემდებლური მიმართულებების განვითარება, კერძოდ, შეიქმნა დიფერენციალური, ინტეგრალური და ვარიაციული აღრიცხვის საფუძვლები, ვითარება შეიცვალა. ლეონარდ ეილერი (1707-1783), მეცნიერ-მათემატიკოსი, მექანიკოსი და ფიზიკოსი, წარმოშობით შვეიცარიელი, რომელიც მოღვაწეობდა რუსეთში პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიაში (1727-1741, 1766-1783 წწ.) და გერმანიაში, ბერლინის მეცნიერებათა აკადემიაში (1741-1766 წწ.), თავისი მასწავლებლის დ. ბერნულის წინადადებით 1744 წელს შეუდგა ამ საკითხების დამუშავებას. დ. ბერნულიმ ეს ამოცანა ჩამოაყალიბა როგორც ვარიაციული,

რასაც ხელი შეუწყო იმ გარემოებაშიც, რომ როცა ეილერი ცხოვრობდა ფრიდრიხ II-ის კარზე ბერლინში, იგი არც თუ იშვიათად იღებდა დავალებებს, გაეკეთებინა დასკვნები ახალი მშენებარე ნაგებობების სვეტების სიმტკიცის თაობაზე. აღსანიშნავია ის გარემოებაც, რომ ამ საკითხებზე ეილერის პირველ შრომაზე 15 წლით ადრე გამოვიდა პ. მუსშენბროკის (1729 წ.) ექსპერიმენტული ნაშრომი, რომელიც შეეხებოდა სვეტების მდგრადობაზე გამოცდის შედეგებს.

ლ. ეილერმა 1744 წ. გამოაქვეყნა მეცნიერული ნაშრომი, რომელშიც გადაწვევითა ბოლო კვეთებში მკუმშავი ძალებით დატვირთული ძელის მდგრადობის საკითხი (ნახ. 14.7). ლ. ეილერმა გადაწვევითა სხვა ანალოგიური საკითხებიც, კერძოდ, მეტად საინტერესოა ძელის მდგრადობის საკითხი საკუთარი წონის მოქმედებისას (ნახ. 14.28). ლ. ეილერი ამ ამოცანას არაერთხელ დაუბრუნდა და გადასინჯა ადრე მიღებული შედეგების საფუძველზე გაკეთებული დასკვნები. ამოცანა იმსახურებს სპეციალურ განხილვას, რისთვისაც გამოვიყენოთ (14.46) და (14.47) სისტემა, რომელშიც დავუშვათ, რომ $n = -1$. მაშინ ბოლო განტოლება ჩაიწერება ასეთნაირად

$$\frac{dN}{dz} = -q.$$

ინტეგრების შედეგად მივიღებთ ნორმალური ძალის მნიშვნელობას $N = -qz$. ამ შედეგის გათვალისწინებით (14.46) განტოლებათა სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს ასეთი სახით:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dz} &= -q\theta - qz \frac{M_x}{EI_x}; & \frac{dM_x}{dz} &= Q; \\ \frac{dy}{dz} &= \theta; & \frac{d\theta}{dz} &= \frac{M_x}{EI_x}. \end{aligned} \quad (14.112)$$

პირველ განტოლებაში გავითვალისწინოთ მეოთხე თანაფარდობა

$$\frac{dQ}{dz} = -q\theta - qz \frac{d\theta}{dz} = -\frac{d}{dz}(qz\theta).$$

ამ განტოლების ინტეგრების შედეგად მივიღებთ განივი ძალის მნიშვნელობას

$$Q = -qz\theta + A. \quad (14.113)$$

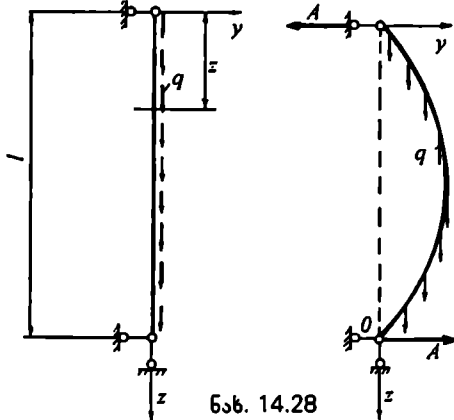
(14.112) სისტემის მეორე განტოლება გადაწეროთ ასეთნაირად:

$$Q = EI_x \frac{d^2\theta}{dz^2} = EI_x \frac{d^3y}{dz^3}. \quad (14.114)$$

თუ ამ განტოლებაში გავითვალისწინებთ Q -ს მნიშვნელობას, საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას

$$EI_x \frac{d^3 y}{dz^3} + qz \frac{dy}{dz} = A. \quad (14.115)$$

ამ დიფერენციალურ განტოლებაში ინტეგრების A მუდმივი წარმოადგენს ზედა საყრდენის რეაქციას (ნახ. 14.28). ლ. ეილერიმა 1778 წელს გამოქვეყნებულ



ნახ. 14.28

ნაშრომში არ გაითვალისწინა ეს ძალა და ჩათვალა ის ნულის ტოლად. ახლა ადვილი შესამჩნევია, რომ 14.28 ნახაზზე ნაჩვენები ძელისთვის ამ ძალის გაუთვალისწინებლად არ შესრულდება წონასწორობის პირობა – განაწილებული ძალების მომენტი O საყრდენის მიმართ არ იქნება ნულის ტოლი. დაშვებული შეცდომის შედეგად გაკეთდა საბოლოო დასკვნა, რომ ნებისმიერი მნიშვნელობის განაწილებული გრძივი ძალების მოქმედებისას ძელი მდგრადობას არ დაკარგავს.

ლ. ეილერი გრძობდა რა მიღებული შედეგის პარადოქსულობას, შემდგომში რამდენჯერმე დაუბრუნდა ამ ამოცანას და ახალ გამოქვეყნებულ ნაშრომში ახსნა შეცდომის მიზეზი, რამაც საშუალება მისცა გაეკეთებინა სწორი დასკვნა ძელის მდგრადობის შესახებ. მაგრამ ამ უკანასკნელ ნაშრომში გაიპარა გამოთვლითი ხასიათის შეცდომა, რის გამოც მიღებულ იქნა კრიტიკული ძალის არასწორი მნიშვნელობა. ეს შეცდომა გამოასწორა თითქმის ას ორმოცდათი წლის შემდეგ აკადემიკოსმა ა. დინიკმა (1876-1950). განვიხილოთ ეს საკითხი (14.112) სისტემის საფუძველზე. მოცემული ამოცანისათვის გვაქვს შემდეგი სასაზღვრო პირობები

$$\begin{aligned} z=0: \quad y(0) &= 0; & M_x(0) &= 0; \\ z=l: \quad y(l) &= 0; & M_x(l) &= 0. \end{aligned} \quad (14.116)$$

შემოვიღოთ ახალი უგანზომილებო ცვლადები და პარამეტრი

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{ql^3}{EI_x}; & x_1 &= \frac{Ql^2}{EI_x}; & x_2 &= \frac{M_x l}{EI_x}; & x_3 &= \frac{y}{l}; \\ x_4 &= \theta; & \zeta &= \frac{z}{l}. \end{aligned} \quad (14.117)$$

ამ აღნიშვნების გათვალისწინებით (14.112) განტოლებათა სისტემა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$x_1' = -q_0 x_4 - q_0 \zeta x_2; \quad x_2' = x_1; \quad x_3' = x_4; \quad x_4' = x_2. \quad (14.118)$$

$$\begin{aligned} \zeta = 0: \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0; \\ \zeta = 1: \quad x_2(1) = 0, \quad x_3(1) = 0. \end{aligned} \quad (14.119)$$

შემოვიღოთ შემდეგი ვექტორი და მატრიცა

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; \quad L(q_0, \zeta) = \begin{pmatrix} 0 & -q_0 \zeta & 0 & -q_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

მაშინ (14.118) სისტემა შეიძლება გადაიწეროს ასეთნაირად

$$\mathbf{X}' = L(q_0, \zeta) \cdot \mathbf{X}, \quad (14.120)$$

$$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \\ 0 \\ C_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}(1) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (14.121)$$

აქ C_1 , C_2 ინტეგრების მუდმივებია, რომელთა მნიშვნელობების დასადგენად გამოიყენება სასაზღვრო პირობები $z=1$ წერტილში. რაც შეეხება α და β -ს, ისინი, შესაბამისად, განივი ძალის და კვეთის მობრუნების კუთხის პარამეტრების მნიშვნელობებია ძელის ქვედა საყრდენის შესაბამის წერტილში. ისინი მიიღება ამოცანის ამოხსნის შედეგად.

(14.120) განტოლების ზოგადი ამონახსნი წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$\mathbf{X}(\zeta) = C_1 \mathbf{X}_I(\zeta) + C_2 \mathbf{X}_{II}(\zeta). \quad (14.122)$$

\mathbf{X}_I და \mathbf{X}_{II} ვექტორები განისაზღვრება (14.120) განტოლების ინტეგრებით, შემდეგი საწყისი პირობების გამოყენებით:

$$\mathbf{X}_I(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_{II}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14.123)$$

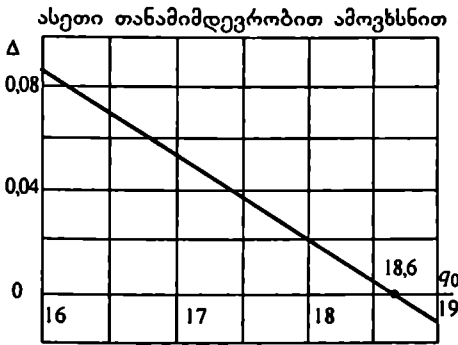
ინტეგრების შედეგად ვაღვენთ (14.122) ვექტორის მნიშვნელობას. ინტეგრების მუდმივების დასადგენი სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარე, შეიძლება, დაიწეროს შემდეგი წრფივი ალგებრულ განტოლებათა სისტემა:

$$C_1 x_{2I}(1) + C_2 x_{2II}(1) = 0;$$

$$C_1 x_{3I}(1) + C_2 x_{3II}(1) = 0; \quad (14.124)$$

(14.124) სისტემის არანულოვანი ამონახსნის არსებობის პირობიდან გამომდინარე ვწერთ

$$\Delta(q_0) = \begin{vmatrix} x_{2I}(1) & x_{2II}(1) \\ x_{3I}(1) & x_{3II}(1) \end{vmatrix} \quad (14.125)$$



ნახ. 14.29

ასეთი თანამიმდევრობით ამოვხსნით ამოცანას q_0 პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის და ვაგებთ შესაბამის გრაფიკს (ნახ. 14.29), რომლის საშუალებითაც ვაღვენთ პარამეტრის კრიტიკულ მნიშვნელობას $q_0 = 18,6$. ამის შემდეგ შეგვიძლია დავაღვინოთ გრძივი განაწილებული ძალების ინტენსივობის კრიტიკული მნიშვნელობაც

$$q_{\text{კ}} = 18,6 \frac{EI x}{l^3}.$$

მეცხრამეტე საუკუნეში საინჟინრო პრაქტიკაში ეილერის ფორმულას იშვიათად იყენებდნენ, რაც გამოწვეული იყო იმით, რომ მის საფუძველზე მიღებული შედეგები ვერ უზრუნველყოფდნენ საკმარის მარაგის კოეფიციენტებს. კონსიდერება ექსპერიმენტულად გამოსცადა შეკუმშვაზე 32 ძელი და დაადგინა მათთვის კრიტიკული ძალების მნიშვნელობები, რომელთა საფუძველზეც 1889 წელს გააკეთა დასკვნა, რომ, თუ ძაბვების მნიშვნელობა აღემატება დრეკადობის ზღვარს, ეილერის თეორიის გამოყენება არ შეიძლება და საჭიროა ანგარიშისათვის გამოვიყენოთ (14. 78)-ის შესაბამისი გაანგარიშების მეთოდიკა.

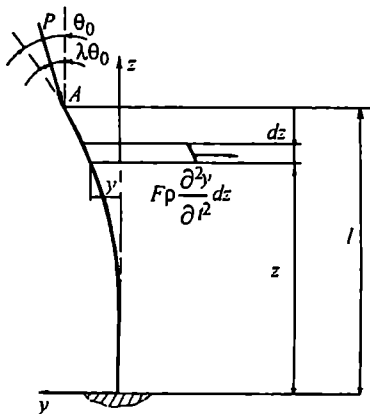
პროფესორმა ენგესერმა იმავე წელს არ გაითვალისწინა განტვირთვისა და დატვირთვისას არსებული განსხვავებული კანონზომიერებანი და საანგარიშოდ წარმოადგინა (14.91) ფორმულა. აქ დაშვებული იყო პრინციპული შეცდომა, რადგან ეს ფორმულა მიღებულია იმ შემთხვევისთვის, რომელშიც გამორიცხულია განტვირთვა როგორც კვეთის გაჭიმული, ისე შეკუმშული ბოჭკოებისთვის.

ამ შეცდომაზე მიუთითა 1895 წელს პეტერბურგის პოლიტექნიკური ინსტი-

ტუტის პროფესორმა ფ.იასინსკიმ. იმავე წელს ენგესერმა არა მარტო გაითვალისწინა კრიტიკა, არამედ შეძლო ზოგადი ფორმის კვეთისთვის დაედგინა სწორი ფორმულა. ამის შემდეგ გამოითქვა არა ერთი წინადადება ძელების მდგრადობაზე განგარიშების პრინციპებთან დაკავშირებით. 1946 წელს ფ. შენლიმ აღნიშნა, რომ მდგრადობაზე ანგარიშისას უფრო მართებულია (14.91) ფორმულის გამოყენება. მაგრამ, აღსანიშნავია, რომ ამ დროს გაკეთებული იყო არსებითი დაშვება, რომლის მიხედვით მდგრადობის დაკარგვის პროცესში ძელზე მოდებული ძალა იზრდება ისევე, როგორც ეს გათვალისწინებული იყო (14.91) ფორმულის მიღებისას.

ამრიგად, დადგინდა, რომ ძალის სიდიდის ცვლილება ძელის მდგრადობის დაკარგვის პროცესში ცვლის კრიტიკული ძალის მნიშვნელობას. ცხადია, სანტერესოა იმის გარკვევა, თუ როგორ მოქმედებს მდგრადობაზე ძალის სიდიდის უცვლელობა იმ შემთხვევაში, როდესაც იცვლება მისი მოქმედების მიმართულება.

განვიხილოთ ძელი, რომელიც ჩამაგრებულია ერთი ბოლოთი, ხოლო მეორე ბოლოზე მოდებულია მკუშშავი ძალა (ნახ. 14.30). ძალის მნიშვნელობა ისეთია,



ნახ. 14.30

რომ ძელი კარგავს მდგრადობას და გადადის მეზობელ მდგომარეობაში. ამ პროცესს თან სდევს ძალის მოქმედების მიმართულების ცვლადობა ისეთი კანონზომიერებით, რომ A კვეთის θ_0 კუთხით მობრუნებისას ძალის მოქმედების წრფეც მობრუნდება $\lambda\theta_0$ კუთხით, სადაც $0 \leq \lambda \leq 1$. როდესაც $\lambda=0$, ძალა მიმართულებას არ იცვლის და გვაქვს ეილერის ჩვეულებრივი ამოცანა. როცა $\lambda=1$, ძალის მოქმედების წრფე ძელის მდგრადობის დაკარგვის პროცესში რჩება A კვეთის მართობი.

ვინაიდან ამოცანად დავისახეთ ძელის მოძრაობის კანონზომიერების შესწავლა, ძელის ელემენტის წონასწორობის განხილ-

ვისას (14.46) სისტემაში საჭიროა დამატებით გავითვალისწინოთ Oy ღერძის მიმართულების ინერციის ძალები (ნახ.14.30).

აქ მიღებულია შემდეგი აღნიშვნები $Fp dz$ - ძელის dz სიგრძის ელემენტის მასა, l - ღრ.ა. ამრიგად, (14.46) სისტემაში შემაჯავლი ყველა უცნობი დამოკიდებულია როგორც z კოორდინატზე, ისე l ღრ.აზე, რის გამოც მივიღებთ კერძოწარმოებულებიან სისტემას. გარდა ამისა, ჩვენი ამოცანისთვის საჭიროა მხედველობაში მივიღოთ, რომ $q=0$ და $N=-P$. საბოლოოდ, (14. 46)-ის ნაცვლად მივიღებთ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{P}{EI_x} M_x - F\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_x}{\partial z} = Q;$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{M_x}{EI_x}. \quad (14.126)$$

სასაზღვრო პირობებს აქვს შემდეგი სახე:

$$z = 0: \quad y(0) = 0; \quad \frac{\partial y(0)}{\partial z} = 0;$$

$$z = l: \quad M_x(l) = 0; \quad Q(l) = -P\theta_0(1-\lambda).$$

განვიხილოთ ამოცანა ეილერის მდგრადობის კრიტერიუმის შესაბამისად. ამისათვის (14.126) სისტემაში უცნობები ჩავთვალოთ მხოლოდ z -ის ფუნქციებად. მივიღებთ:

$$\frac{dQ}{dz} = -\frac{P}{EI_x} M_x; \quad \frac{dM_x}{dz} = Q;$$

$$\frac{dy}{dz} = \theta; \quad \frac{d\theta}{dz} = \frac{M_x}{EI_x};$$

$$z = 0: \quad y(0) = 0; \quad \frac{dy(0)}{dz} = 0;$$

$$z = l: \quad M_x(l) = 0; \quad Q(l) = -P\theta_0(1-\lambda). \quad (14.127)$$

ამ სისტემის საფუძველზე ადვილად მიიღება ერთი მეოთხე რიგის განტოლება y -ის მიმართ შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით:

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + K^2 \frac{d^2 y}{dz^2} = 0. \quad (14.128)$$

$$z = 0: \quad y(0) = 0; \quad \frac{dy(0)}{dz} = 0;$$

$$z = l: \quad \frac{d^2 y(l)}{dz^2} = 0; \quad \frac{d^3 y(l)}{dz^3} + K^2(1-\lambda) \frac{dy(l)}{dz} = 0. \quad (14.129)$$

აქ გამოყენებულია აღნიშვნა $K^2 = \frac{P}{EI_x}$.

ორჭერადი უშუალო ინტეგრების შედეგად, (14.128) განტოლების ნაცვლად, მივიღებთ მეორე რიგის არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + K^2 y = C_3^* z + C_4^*, \quad (14.130)$$

რომლის ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$y = C_1 \sin Kz + C_2 \cos Kz + C_3 z + C_4. \quad (14.131)$$

აღვნიშნოთ, რომ C_3 და C_4 , ისე, როგორც (14.130) განტოლებაში შემაჯავლი მუდმივები, ინტეგრების მუდმივებია, მაგრამ მათი მნიშვნელობები განსხვავდება ერთმანეთისაგან.

სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარე მუდმივების დასადგენად მივიღებთ შემდეგ წრფივ ერთგვაროვან ალგებრულ განტოლებებს:

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0; & KC_1 + C_3 &= 0; \\ -C_1 \sin Kl - C_2 \cos Kl &= 0; & -C_1 K\lambda \cos Kl + C_2 K\lambda \sin Kl + (1-\lambda)C_3 &= 0. \end{aligned}$$

სისტემის არანულოვანი ამონახსნის არსებობის პირობის თანახმად

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ K & 0 & 1 & 0 \\ -\sin Kl & -\cos Kl & 0 & 0 \\ -K\lambda \cos Kl & K\lambda \sin Kl & (1-\lambda) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

საიდანაც

$$\cos Kl = -\frac{\lambda}{1-\lambda}. \quad (14.132)$$

მიღებულ განტოლებას აქვს ნამდვილი ფესვი, თუ სრულდება პირობა $\lambda \leq 0,5$. თუ $\lambda = 0$, მაშინ $\cos Kl = 0$ და ვღებულობთ უკვე ცნობილ (14.23) ფორმულას. თუ $\lambda = 0,5$, $\cos Kl = -1$

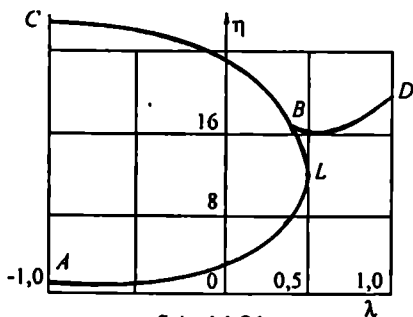
$$\sqrt{\frac{P}{EI_x}} l = \pi, \quad P_{\text{კ}} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2} \approx 9,87 \frac{EI_x}{l^2}.$$

ზოგად შემთხვევაში; კრიტიკული ძალის გამოსათვლელი ფორმულა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$P_{\text{კ}} = \eta \frac{EI_x}{l^2}. \quad (14.133)$$

η კოეფიციენტის λ-თან დამოკიდებულება წარმოდგენილია 14.31 ნახაზზე ABC მრუდით.

ამრიგად, დადგინდა, რომ იმ შემთხვევაში, თუ სრულდება $\lambda > 0,5$ პირობა,



ნახ. 14.31

ეილერის კრიტერიუმის შესაბამისად კრიტიკული ძალა არ არსებობს. ეს იმას ნიშნავს, რომ მოდებული ძალის მიმართულების ცვალებადობის ასეთი კანონზომიერებისთვის, ძალის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის არსებობს მხოლოდ ერთი სწორხაზოვანი წონასწორობის ფორმა.

ისმის კიხვა, საკმარისია თუ არა აღნიშნული ამოცანის ასეთნაირი შესწავლა და შეგვიძლია თუ არა ჩავთვალოთ, რომ ასეთ პირობებში ძელი არ დაკარგავს

მდგრადობას მოქმედი ძალის ნებისმიერი მნიშვნელობისას. კერძოდ, თუ ასეთ ძელს გამოვიყვანთ წონასწორობიდან და შემდეგ მივცემთ თავისუფალი მოძრაობის საშუალებას, როგორი იქნება ძელის მოძრაობის კანონზომიერება? შევისწავლოთ ეს საკითხი.

ადვილი შესამჩნევია, რომ (14.126) სისტემის ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} Q(z,t) &= Q^*(z)e^{i\Omega t}; & M_x(z,t) &= M_x^*(z)e^{i\Omega t}; \\ y(z,t) &= y^*(z)e^{i\Omega t}; & \theta(z,t) &= \theta^*(z)e^{i\Omega t}. \end{aligned} \quad (14.134)$$

აქ ყოველ გამოსახულებაში პირველი თანამამრაველი არის მხოლოდ z კოორდინატის ფუნქცია. რაც შეეხება მეორე თანამამრაველს, იგი ახასიათებს მოძრაობის კანონზომიერებას. თუ Ω -ს მნიშვნელობა ნამდვილი რიცხვია, მაშინ მოძრაობა პერიოდულ ხასიათს ატარებს, წინააღმდეგ შემთხვევაში მოძრაობა აპერიოდულია.

(14.139) გამოსახულებების გათვალისწინებით, (14.126) განტოლებათა სისტემის ნაცვლად, მივიღებთ შემდეგ წრფივ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} \frac{dQ^*(z)}{dz} &= -\frac{P}{EI_x} M_x^*(z) + F\rho\Omega^2 y^*(z); \\ \frac{dM_x^*(z)}{dz} &= Q^*(z); & \frac{dy^*(z)}{dz} &= \theta^*(z); & \frac{d\theta^*(z)}{dz} &= \frac{1}{EI_x} M_x^*(z). \end{aligned} \quad (14.135)$$

შემოვიღოთ ახალი პარამეტრები და ცვლადები:

$$\begin{aligned}
 K^2 &= \frac{Pl^2}{EI_x}; & \omega^2 &= \frac{F\rho l^4}{EI_x} \Omega^2; & \zeta &= \frac{z}{l}; \\
 x_1 &= \frac{Q^*(z)l^2}{EI_x}; & x_2 &= \frac{M_x^*(z)l}{EI_x}; \\
 x_3 &= \frac{y^*(z)}{l}; & x_4 &= \theta(z).
 \end{aligned}
 \tag{14.136}$$

ეს საშუალებას მოგვცემს გადავწეროთ (14.135) სისტემა შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}
 x_1' &= -K^2 x_2 + \omega^2 x_3; & x_2' &= x_1; \\
 x_3' &= x_4; & x_4' &= x_2.
 \end{aligned}
 \tag{14.137}$$

სასაზღვრო პირობებს ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}
 \zeta = 0: & \quad x_3(0) = 0; \quad x_4(0) = 0; \\
 \zeta = 1: & \quad x_2(1) = 0; \quad x_1(1) + K^2(1-\lambda)x_4(1) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{14.138}$$

(14.137)-(14.138) განტოლებათა სისტემა და სასაზღვრო პირობები შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ვექტორულ-მატრიცული ფორმით

$$\mathbf{X}' = L\mathbf{X}'; \tag{14.139}$$

$$F_1\mathbf{X}(0) = 0; \quad F_2\mathbf{X}(1) = 0, \tag{14.140}$$

სადაც გამოყენებულია აღნიშვნები

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -K^2 & \omega^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & K^2(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(\zeta) \\ x_2(\zeta) \\ x_3(\zeta) \\ x_4(\zeta) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}(1) = \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \\ x_4(1) \end{pmatrix}$$

მიღებული (14.139) წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\mathbf{X} = C_1 \mathbf{X}_I + C_2 \mathbf{X}_{II}. \quad (14.141)$$

აქ C_1, C_2 ინტეგრების მუდმივებია, \mathbf{X}_I და \mathbf{X}_{II} მიიღება (14.139) განტოლების რიცხვითი ინტეგრებით შემდეგი საწყისი პირობების გამოყენებით:

$$\mathbf{X}_I(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_{II}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ინტეგრების მუდმივების დასადგენად ვიყენებთ სასაზღვრო პირობებს $\zeta=1$ წერტილში და (14.140)-ის მეორე პირობის საშუალებით ვადგენთ შემდეგ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

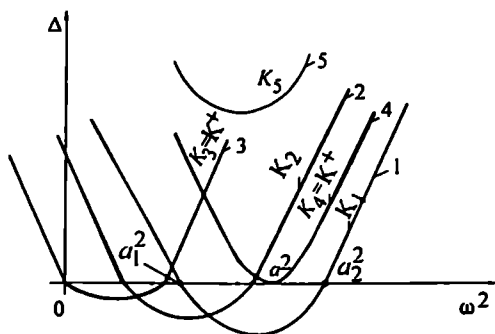
$$\begin{aligned} C_1 x_{2I}(1) + C_2 x_{2II}(1) &= 0. \\ C_1 [x_{1I}(1) + K^2(1-\lambda)x_{4I}(1)] + C_2 [x_{1II}(1) + K^2(1-\lambda)x_{4II}(1)] &= 0. \end{aligned} \quad (14.142)$$

ამ სისტემის არანულოვანი ამონახსნის არსებობის პირობა გვაძლევს შემდეგი სახის განტოლებას

$$\begin{aligned} \Delta(K, \omega^2, \lambda) &\equiv x_{2I}(1)[x_{1II}(1) + K^2(1-\lambda)x_{4II}(1)] - \\ &- x_{2II}(1)[x_{1I}(1) + K^2(1-\lambda)x_{4I}(1)] = 0. \end{aligned} \quad (14.143)$$

ამ განტოლებაში ω^2 უშუალოდ არ შედის, მაგრამ შესაბამისი დამოკიდებულება განისაზღვრება (14.139) დიფერენციალური განტოლებით.

როგორც დავადგინეთ, მდგრადობის სტატიკური კრიტერიუმში ძალაშია, თუ ძელის მიმართულების განმსაზღვრელი პარამეტრის მნიშვნელობა აღებულია საზღვრებში $0 \leq \lambda \leq 0,5$. ამ შემთხვევაში კრიტიკული ძალა განისაზღვრება (14.133) ფორმულისა და 14.3 ცხრილის გამოყენებით. მაგრამ



ნახ. 14.32

საკითხი, თუ რამდენად შეესაბამება ეს შედეგი დინამიკური კრიტერიუმის მოთხოვნას, ღიადაა დარჩენილი და პასუხს მოითხოვს.

გამოვიყენოთ (14.143) თანაფარდობა და ავავთ მრუდები ძალის პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის, თუ ძალის მიმართულების განსაზღვრელი პარამეტრი იცვლება საზღვრებში: $0 \leq \lambda \leq 0,5$. როგორც ირკვევა, ამ შემთხვევაში მრუდები კვეთენ $O\alpha^2$ ღერძს ორ წერტილში, ნახ. 14.32. რაც უფრო მცირეა ძალის პარამეტრი, მით უფრო მარჯვნივაა განლაგებული მრუდი და მით უფრო დიდია მისი მარცხენა შტოს $O\alpha^2$ ღერძთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატი. ეს სიდიდე განსაზღვრავს ძელის მდგრადობას.

ძალის პარამეტრის ზრდასთან ერთად შესაბამისი მრუდი გადაადგილდება მარჯვნიდან მარცხნივ და ასეთი გზით ვადგენთ ძალის შესაბამისი პარამეტრის ისეთ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც მრუდის მარცხენა შტო გადაკვეთს კოორდინატთა ღერძს საწყის O წერტილში, - ე.ი. სიხშირე გაუტოლდება ნულს, $\omega^2 = 0$.

ავიღოთ ძალის პარამეტრის მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს: $K_1 < K_2 < K_3 = K^+$

განსახილველებიდან უმცირესის K_1 -ის შესაბამისი მრუდი 1-ის მარცხენა შტოსა და კოორდინატთა სისტემის ღერძის გადაკვეთის წერტილი განსაზღვრავს სიხშირეებს: $\omega_1 = a_1, \omega_2 = -a_1$. ამიტომ გადაადგილებების ფუნქცია ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$x_3(z, t) = x_3(z) \left(A e^{ia_1 t} + B e^{-ia_1 t} \right).$$

გამოსახულების გასამარტივებლად გამოვიყენოთ ცნობილი ფორმულები და ინტეგრების ახალი მუდმივები

$$e^{ia_1 t} = \cos a_1 t + i \sin a_1 t, \quad e^{-ia_1 t} = \cos a_1 t - i \sin a_1 t, \\ A + B = C \sin a, \quad i(A - B) = C \cos a.$$

ამის გათვალისწინებით გადაადგილებების ფორმულა ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$x_3(z, t) = C x_3(z) \cdot \sin(a_1 t + \alpha).$$

ამრიგად, გადაადგილებები წარმოდგებიან ჰარმონიული კანონით ცვლადი ფუნქციით და მათი მნიშვნელობა დროში შემოსაზღვრულია შემდეგი თანაფარდობით

$$|x_3(z, t)|_{\max} \leq |C x_3(z)|.$$

აღნიშნულიდან გამომდინარე, განხილული დატვირთვისას სისტემის მდგრადობა დინამიკური კრიტერიუმის მიხედვით მდგრადია.

ახლა განვიხილოთ ძალის პარამეტრი K_2 , რომელიც K_1 -ზე დიდი, მაგრამ

კრიტიკულზე, K_3 -ზე, მცირეა. შესაბამისი გაანგარიშებების შედეგები ნახ. 14.32-ზე წარმოდგენილია მე-2 მრუდით. ეს მრუდი, 1-ელ მრუდთან შედარებით, გადაადგილებულია ზემოთ და მარცხნივ, ნახ. 14.32. ჰორიზონტალურ ღერძს იგი ისევ ორ წერტილში კვეთს. რაც შეეხება ძელის რხევის სიხშირეს, მისი მნიშვნელობა, ზემოთ განხილული ამოცანის სიხშირესთან შედარებით, მცირეა, მაგრამ მთლიანობაში ძელის რხევის პროცესის ხასიათი უცვლელი რჩება.

ძალის შემდგომი ზრდით და სათანადო გაანგარიშებების განხორციელებით დავადგენთ ძალის პარამეტრის ისეთ მნიშვნელობას, $K_3 = K^+$ -ს, რომელსაც შეესაბამება კოორდინატთა სისტემის საწყის წერტილში გამავალი მრუდი 3. ამ შემთხვევაში, ადგილი აქვს ტოლობას $\omega^2 = 0$. ამიტომ ამოცანის შესაბამისი ამონახსენი შემდეგი სახისაა

$$x_3(z, t) = x_3(z)(A + Bt).$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარე, გადაადგილებები დროში შეზღუდული არ არიან და წრფივი კანონის შესაბამისად იზრდებიან. ამიტომ ძელის მდგომარეობა არამდგრადია და განისაზღვრება პარამეტრის კრიტიკული მნიშვნელობით, K^+ -ით.

როგორც აღენიშნეთ, ამ შემთხვევაში კრიტიკული ძალა შეესაბამება სიხშირის ნულოვან მნიშვნელობას, $\omega = 0$. ეს იმის ტოლფასია, რომ ამოცანა განგეხილა (14.127) განტოლებათა სისტემისა და შესაბამისი სასაზღვრო პირობების გამოყენებით. ამდენად, თუ ადგილი აქვს თანაფარდობას $0 \leq \lambda \leq 0.5$, მდგრადობის სტატიკური და დინამიკური კრიტერიუმები იძლევიან ერთიდაიგივე შედეგს.

ამოცანის ამონახსენს ოთხი სიხშირე განაპირობებს: $\omega_1 = \pm \sqrt{a_1}$ და

$\omega_2 = \pm \sqrt{a_2}$, ნახ. 14.32. ამიტომ სრული სახით წარმოდგენილ გადაადგილებების ფორმულაში უნდა შეგვეტანა ოთხი წევრი და იგივე რაოდენობის ინტეგრების მუდმივი. მაგრამ განხილულ ამოცანებში დასკვნებისათვის მაღალი სიხშირეების გათვალისწინებას არსებითი მნიშვნელობა არ ჰქონდა და ამიტომ დავკმაყოფილდით მხოლოდ ორი წევრით. ქვემოთ განსახილველ ამოცანებში ამის გაკეთება უკვე აღარ შეიძლება და გადაადგილებების ფორმულა სრული სახით უნდა იქნას წარმოდგენილი.

თუ ძალის მიმართულების პარამეტრი მოთავსებულია საზღვრებში $0,5 \leq \lambda \leq 1,0$, სურათი სხვაგვარია. ამ შემთხვევაში, სტატიკური კრიტერიუმის შესაბამისად ძელი მდგრადობას არ კარგავს, რაც წინააღმდეგობაშია საღაზრთან. ახლო წარსულში ამან განაპირობა მეცნიერთა შორის მსჯელობები მდგრადობის თეორიაში არსებულ პარადოქსებზე, დისკუსიები, მწვავე კამათები და დაპირისპირებებიც კი.

თუ ძალის მიმართულების პარამეტრი λ იცვლება ზემოთ მითითებულ საზღვრებში, ძალის ზრდას არ მოჰყვება მრუდის მნიშვნელოვანი გადაადგილება მარჯვნიდან მარცხნივ და მის მიერ კოორდინატთა სისტემის საწყის ო წერტილში გადაკვეთა. ამიტომ სტატიკური კრიტერიუმი, რომელიც გულისხმობს ძელის წონასწორობის სწორხაზოვან მდგომარეობასთან ერთდროულად მეზობელ

მოდულულ მდგომარეობის არსებობას, არ გამოიყენება. ასეთ შემთხვევებში, ძალის ზრდის შედეგად მრუდი ზემოთ იწევს, ღერძის გადაკვეთის წერტილები ერთმანეთს უახლოვდება და ზღვრულ მდგომარეობაში ერთმანეთს ემთხვევა. ასე, რომ მრუდი - 4 ჰორიზონტალურ ღერძს კი არ კვეთს, არამედ ეხება, ნახ. 14.32. ძალის შემდგომ უმნიშვნელო ზრდასაც კი მრუდი გადაჰყავს კოორდინატთა სისტემის პირველ და მეორე მეოთხედებში, მრუდე 5. ასეთი ამოცანების ამონახსენი უკვე ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეშია საძებნი. ამიტომ მე-4 მრუდი სასაზღვრო მდგომარეობაშია. ღერძისადმი მისი შეხების წერტილი განსაზღვრავს სიხშირის ოთხ მნიშვნელობას. მოძრაობის ფორმულა მათი გერადობის გათვალისწინებით ჩაიწერება

$$\begin{aligned} x_3(z, t) &= x_3(z) \left[(C_1 + C_2 t) e^{ati} + (C_3 + C_4 t) e^{-ati} \right] = \\ &= x_3(z) \left[(C_1 + C_2 t) (\cos at + i \sin at) + (C_3 + C_4 t) (\cos at - i \sin at) \right] \end{aligned}$$

ფორმულის გამარტივების მიზნით შემოვიღოთ ინტეგრების ახალი მუდმივები

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= A_0 \sin \alpha_0 & i(C_1 - C_3) &= A_0 \cos \alpha_0 \\ C_2 + C_4 &= A_1 \sin \alpha_1 & i(C_2 - C_4) &= A_1 \cos \alpha_1 \end{aligned}$$

ამ თანაფარდობების გათვალისწინებით გადაადგილებების ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$x_3(z, t) = x_3(z) [A_0 \sin(at + \alpha_0) + A_1 t \sin(at + \alpha_1)]$$

გამოსახულების მარჯვენა ნაწილის მეორე მამრავლი წარმოადგენს ტოლი სიხშირეების ორი სინუსოიდის ჯამს. რაც შეეხება მათ ამპლიტუდებს, აქ საქმე სხვაგვარადაა. პირველი სინუსოიდის ამპლიტუდა დროში არ იცვლება. ამას ვერ ვიტყვით მეორე სინუსოიდის ამპლიტუდაზე, რომელიც დროში წრფივი კანონით იზრდება. ეს გარემოება განაპირობებს გადაადგილებების შეუზღუდავ ზრდას და ამიტომ დინამიკური კრიტერიუმის შესაბამისად, ძელზე მოდებული ძალა კრიტიკულს უდრის და თვით ძელის წონასწორობაც არამდგრადია.

გაანგარიშებების საფუძველზე დადგინდა (14.133) ფორმულის η კოეფიციენტის მნიშვნელობების დამოკიდებულება λ -გან, ეილერის კრიტერიუმის შესაბამისი პირველი და მეორე კრიტიკული ძელებისათვის (η_1 და η_2) ეს დამოკიდებულება წარმოდგენილია 14.31 ნახაზზე AL და CL მრუდებით. დინამიკური კრიტერიუმის შესაბამისი ასეთი კოეფიციენტი η დ ნახაზზე წარმოდგენილია BD მრუდით. კოეფიციენტის რიცხვითი მნიშვნელობები მოცემულია 14.3 ცხრილში.

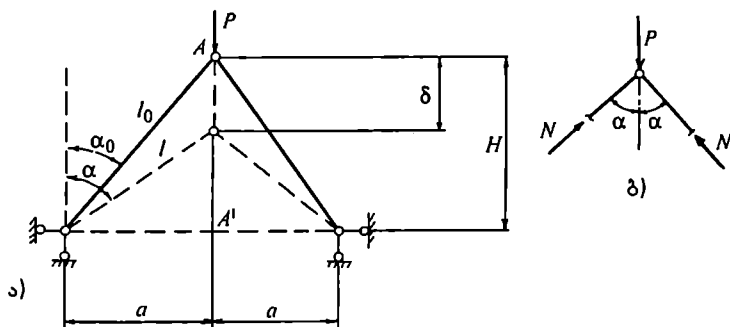
განსაკუთრებულ განხილვას იმსახურებს ამოცანა, როდესაც ძალის მოქმედების მიმართულების ცვლადობის კოეფიციენტი λ განისაზღვრება ფარგლებში $0,38 \leq \lambda \leq 1,0$. ამ მონაკვეთის საწყის ნაწილზე $0,38 \leq \lambda < 0,5$, როგორც სტატიკური, ისე დინამიკური კრიტერიუმის გამოყენებით მიიღწევა კრიტიკული ძა-

ლის დადგენა. მაგრამ პირველი მათგანის შესაბამისი კრიტიკული ძალის მნიშვნელობა ნაკლებია მეორე კრიტერიუმით განსაზღვრულზე. როდესაც ადგილი აქვს პირობას $0,5 < \lambda \leq 1,0$, სტატიკური კრიტერიუმის შესაბამისი კრიტიკული ძალა არ არსებობს.

ცხრილი 14.3

$\eta \backslash \lambda$	0	0.25	0.30	0.38	0.40	0.50	0.75	1.00
η_1	2.47	3.65	4.06	4.98	5.30	9.87	-	-
η_2	22.20	19.11	18.22	16.04	16.86	9.87	-	-
$\eta_{\text{ფ}}$	-	-	-	16.65	16.42	16.05	17.20	20.05

ზემოთ ჩვენ სპეციალურად შევისწავლეთ დეფორმირებადი სისტემის მდგრადობის განხილვის შესაძლებლობის საკითხი წრფივი განტოლებების გამოყენებით და დავასკვნით, რომ ასეთი მიდგომა სისტემის მდგრადობის შესახებ სწორი დასკვნების გაკეთების საშუალებას იძლევა, თუმცა, უნდა აღინიშნოს, რომ ასეთი გამოკვლევები არ გვაძლევს სრული ანალიზის საშუალებას. კერძოდ, შეუძლებელია გადაადგილებების მნიშვნელობების დადგენა. არსებობს ისეთი სისტემებიც, რომელთა შესწავლა შეიძლება მხოლოდ არაწრფივი განტოლებების საფუძველზე და სხვაგვარად მდგრადობის საკითხის განხილვა არამართებულია. ასეთი სისტემის მაგალითია ე.წ. მიზის ფერმა (ნახ.14.33).



ნახ. 14.33

ძალის მოქმედების შედეგად ორი ღერო, რომლებიც შეერთებულია ერთმანეთთან და საყრდენთან სახსრულად, განიცდის კუმშვას, რის შედეგადაც A წერტილი გადაადგილდება ვერტიკალური მიმართულებით δ სიდიდეზე. დავამყაროთ კავშირი ამ გადაადგილებასა და ძალის მნიშვნელობას შორის.

განვიხილოთ სისტემა α კუთხით განსაზღვრულ დეფორმირებულ მდგომარეობაში, რომელიც განსხვავდება α_0 კუთხის მქონე საწყისი მდგომარეობისგან (ნახ.14.33), A კვანძის წონასწორობის პირობას აქვს ასეთი სახე

$$2N \cos \alpha = P; \quad N = \frac{P}{2 \cos \alpha}.$$

განვსაზღვროთ ძელის წრფივი ფარდობითი დეფორმაცია

$$\varepsilon = \frac{l_0 - l}{l_0} = \frac{\frac{a}{\sin \alpha_0} - \frac{a}{\sin \alpha}}{\frac{a}{\sin \alpha_0}}.$$

მეორე მხრივ, იგივე დეფორმაცია

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} = \frac{P}{2 \cos \alpha EF}.$$

მიღებული შედეგების გათვალისწინებით დავადგენთ ძალასა და კუთხეს შორის დამოკიდებულებას

$$P = 2EF \left(\cos \alpha - \frac{\sin \alpha_0}{\operatorname{tg} \alpha} \right).$$

დავუკავშიროთ ერთმანეთს α კუთხე და A წერტილის ვერტიკალური გადაადგილება

$$\delta = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha_0} - \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

ამის შემდეგ მივიღებთ $\cos \alpha$ -სა და $\operatorname{tg} \alpha$ -ს გამოსახულებებს, საიდანაც, თუ გამოვი-

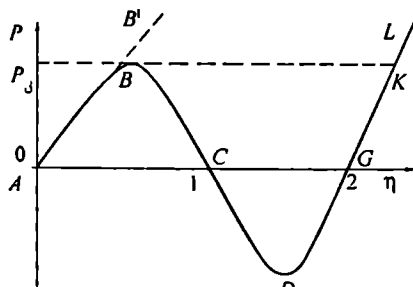
ყენებთ აღნიშვნას $\eta = \frac{\delta}{H}$, საბოლოოდ

$$P = 2EF(1 - \eta) \left[\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_0 + (1 - \eta)^2}} - \cos \alpha_0 \right].$$

ამ ფორმულის შესაბამისი გრაფიკი წარმოდგენილია 14.34 ნახაზზე. A წერტილიდან B წერტილამდე ძალის თანამიმდევრულ ზრდას შეესაბამება გადაადგილებების ზრდაც. მაგრამ შემდგომ სურათი მკვეთრად იცვლება. გადაადგილების ზრდას ადგილი აქვს ძალის შემცირების პირობებში B წერტილიდან D წერტილამდე. უფრო მეტიც, C წერტილში, რომელსაც შეესაბამება $\eta = 1$ მნიშვნელობა, რაც ნიშნავს $\delta = H$ ტოლობას, ძალა ნულს უტოლდება და შემდგომში

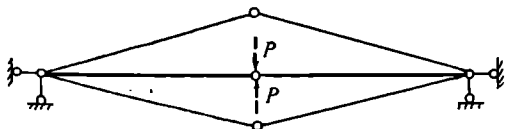
უარყოფითი ხდება. D წერტილის შემდეგ ისევ იწყება გრაფიკის აღმავალი DL ნაწილი. შევეცადოთ ავხსნათ მიღებული შედეგები.

დატვირთვისას დრეკადი სისტემის წინააღმდეგობა თანდათანობით იზრდება და ცხადია, მზრდად გადაადგილებებს შეესაბამება შედარებით მალალი დონის ძალები. ამ პროცესის შედეგად სისტემა თანდათან უახლოვდება შორი-ზონტალურ მდგომარეობას (ნახ. 14.35).



ნახ. 14.34

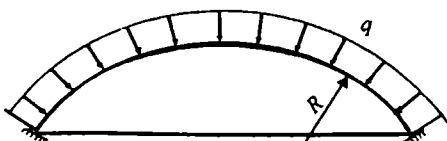
მატიკურად ცვლად სისტემასთან გვაქვს საქმე, რომელსაც ვერტიკალური ძალისაღმე წინააღმდეგობის უნარი არ გააჩნია. სისტემის ამ მდგომარეობაში გადასვლა მდებარე მისი წინააღმდეგობის უნარი თანდათანობით მცირდება. ეს პროცესი იწყება B წერტილში, რომლის შესაბამისი P_j ძალა შეიძლება ჩაითვალოს, როგორც ძალის კრიტიკული მნიშვნელობა.



ნახ. 14.35

სისტემა B წერტილს მიაღწევს და შესაბამისი ძალა P^+ -ს გაუტოლდება, ის იწყებს მოძრაობას და გადახტება K წერტილის შესაბამის მდგომარეობაში, ე.ი. ფაქტიურად ამობრუნდება საპირისპირო მხარეს. თუ ამ მდგომარეობაში მას თანდათანობით განვტვირთავთ ძალის შემცირებით, მივიღებთ სისტემის მდგომარეობას, რომელიც შორი-ზონტალური წრფის მიმართ საწყისი მდგომარეობის საკისებური გამოსახულებაა.

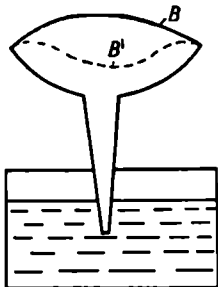
წრფივი განტოლებების გამოყენებით მიიღება OB' წრფე, რომელიც სრულად არ ასახავს სისტემის თვისებებს დიდი გადაადგილებების შემთხვევაში.



ნახ. 14.36

ამრიგად, არსებობს ამოცანათა კლასი, რომლის შესასწავლად საჭიროა გამოვიყენოთ არაწრფივი განტოლებები. ამ კლასს მიეკუთვნება, კერძოდ, სიმეტრიულად დატვირთული ბრუნვითი გარსები. თუ ავიღებთ გა-

რე წნევით დატვირთულ სფერულ გარსს (ნახ. 14.36), მისთვისაც დამახასიათებელია ზემოაღწერილი პროცესის მსგავსი პროცესი. ეს ეფექტი ფართოდ გამოიყენება სხვადასხვა დანიშნულების მარტივ და რთულ ხელსაწყოებში. მაგალითად, უმარტივესია მექანიზმების დასაზეთი ხელსაწყო, რომელიც ნაჩვენებია 14.37 ნახაზზე. თითის დაქერით ხდება მოქნილი სფერული ელემენტის დეფორმაცია და B' მდგომარეობაში გადახტომა. განთავისუფლების შემდეგ ელემენტი უბრუნდება საწყის მდგომარეობას, რის შედეგადაც ხდება ზეთის შეწოვა. მიუხედავად კონსტრუქციის სიმარტივისა, ამ მექანიზმს სპეციალური გაანგარიშება სჭირდება, რომ სფერული ელემენტი B' მდგომარეობიდან დამოუკიდებლად დაუბრუნდეს საწყის მდგომარეობას დატვირთვის მოხსნის შემდეგ. ამისათვის საჭიროა გარსის ზომები ისე შეირჩეს, რომ D წერტილს (ნახ. 14.34) უნდა შეესაბამებოდეს დადებითი ძალა და გრაფიკის CDG ნაწილი მოთავსებული იყოს ჰორიზონტალური ღერძის ზემოთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში ადგილი ექნება ისეთ არასასურველ ეფექტს, როგორცაა, მაგალითად, მაგიდის ჩოგბურთის ბურთულას მდგრადობის დაკარგვის შემთხვევა: ბურთულას ზედაპირი ჩაილუნება და მისი გასწორება, როგორც წესი, თავისთავად აღარ მოხდება.

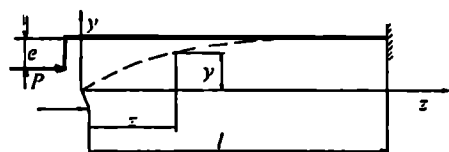


ნახ. 14.37

წილის (ნახ. 14.34) უნდა შეესაბამებოდეს დადებითი ძალა და გრაფიკის CDG ნაწილი მოთავსებული იყოს ჰორიზონტალური ღერძის ზემოთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში ადგილი ექნება ისეთ არასასურველ ეფექტს, როგორცაა, მაგალითად, მაგიდის ჩოგბურთის ბურთულას მდგრადობის დაკარგვის შემთხვევა: ბურთულას ზედაპირი ჩაილუნება და მისი გასწორება, როგორც წესი, თავისთავად აღარ მოხდება.

§107. ძელის არაცენტრალური შეკუმშვა. გრძივ-განივი ღუნვა

32-ე პარაგრაფში განვიხილეთ არაცენტრალური გაჭიმვა-კუმშვა. მაგრამ იქ მიღებული შედეგები გამოიყენება მხოლოდ მოკლე ძელებისთვის. რაც შეეხება გრძელ ძელებს, ისინი სპეციალურ შესწავლას მოითხოვს.



ნახ. 14.38

განვიხილოთ ძელი, რომლის ერთი ბოლო ჩამაგრებულია ხისტად, ხოლო მეორე ბოლოზე მოქმედებს არაცენტრალური მკუმშავი ძალა (ნახ. 14.38).

ამ შემთხვევისათვის (14.12) დიფერენციალურ განტოლებაში საჭიროა, დამატებით გავითვალისწინოთ ძალის არაცენტრალური მოდებით შექმნილი მღუნავი მომენტი

$$EI_x y'' = M_x = -P(y + e), \quad (14.144)$$

(14.14) აღნიშვნის გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას

$$y'' + k^2 y = -k^2 e. \quad (14.145)$$

ამრიგად, (14.13)-ის ნაცვლად მივიღებთ არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება. მის ამონახსნში, (14.15)-გან განსხვავებით, უნდა გავითვალისწინოთ (14.145) დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნიც

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz - e. \quad (14.146)$$

მუდმივების დასადგენად გამოვიყენოთ სასაზღვრო პირობები:

$$z = 0: \quad y(0) = 0; \quad z = l: \quad y'(l) = 0.$$

აქედან გამომდინარე, მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას და დავადგენთ მუდმივების მნიშვნელობებს:

$$C_2 - e = 0; \quad C_1 \cos kl - C_2 \sin kl = 0;$$

$$C_2 = e; \quad C_1 = e \cdot \operatorname{tg} kl.$$

თუ ამ შედეგებს გავითვალისწინებთ (14.146) გამოსახულებაში, მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$y = e \frac{\cos k(l-z) - \cos kl}{\cos kl}. \quad (14.147)$$

მაქსიმალური გადაადგილება გვაქვს მაშინ, როდესაც $z=l$.

$$y(l) = e \frac{1 - \cos kl}{\cos kl}. \quad (14.148)$$

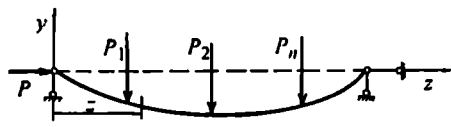
მაქსიმალური მღუნავი მომენტი წარმოიშობა იმავე კვეთში

$$M_{\max} = P[e + y(l)] = \frac{Pe}{\cos kl} = \frac{Pe}{\cos \sqrt{\frac{P}{EI_x}} l}. \quad (14.149)$$

როგორც მიღებული ტოლობიდან ჩანს, თუ $e \neq 0$ და $\cos kl = 0$, ძელის გადაადგილებები განუსაზღვრელად იზრდება. ამ პირობიდან ვიღებთ ჩვენთვის უკვე ცნობილი კრიტიკული ძალის ფორმულას. დასკვნა იმის შესახებ, რომ, თუ ძალა გაუტოლდა თავის კრიტიკულ მნიშვნელობას, ძელში გადაადგილებები განუსაზღვრელად იზრდება, რატივ მცირეც არ უნდა იყოს ძალის მოდების წერტილის e ექსცენტრისიტეტი, - არ არის სწორი და განპირობებულია წრფივი განტოლებების გამოყენებით. ამიტომ (14.148) ფორმულა იძლევა ჩალუნვის სწორ მნიშვნელობებს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ძალა თავის კრიტიკულ მნიშვნელობებზე ბევრად მცირეა.

ანალოგიურად შეისწავლება ძელი, რომელზეც ერთდროულად მოქმედებს

ცენტრალური მკუმშავი და განივი ძალები (ნახ. 14.39). ვიხილავთ რა მცირე გადაადგილებას განივი ძალების მიერ გამოწვეული მლუნავი M_x მომენტი მხოლოდ z კოორდინატზე იქნება დამოკიდებული. რაც შეეხება P ძალის მიერ გამოწვეულ მლუნავ მომენტს, იგი დამოკიდებულია მხოლოდ y -ზე და



ნახ. 14.39

ტოლია $P y$ -ის. განივ კვეთში საერთო მლუნავი მომენტი გამოითვლება როგორც მათი ჯამი. აღნიშნულის გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას

$$EI_x y'' = -Py + M_x. \quad (14.150)$$

ეს განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$y'' + k^2 y = \frac{M_x}{EI_x}, \quad (14.151)$$

საიდანაც განტოლების ამოხსნის შემდეგ მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + y^*$$

აქ y^* - (14.151) განტოლების კერძო ამონახსნია. იმ შემთხვევაში, როდესაც ორსაყრდენიან ძელზე მოდებული ძალები (ნახ.14.39) იწვევს ერთი და იმავე მიმართულების გადაადგილებებს, იყენებენ (14.150) განტოლების ამოხსნის მიახლოებით ხერხს.

წარმოვიდგინოთ, რომ ძელზე მოქმედებს მხოლოდ განივი მიმართულების ძალები. მათ მიერ გამოწვეული გადაადგილებები აღვნიშნოთ y_0 -ით. ამ გადაადგილებების განსაზღვრა შეიძლება (14.150) განტოლებიდან, თუ დავუშვებთ, რომ მკუმშავი ძალა ნულის ტოლია

$$EI_x y_0'' = M_x. \quad (14.152)$$

ახლა გავითვალისწინოთ მიღებული შედეგი (12.150) განტოლებაში

$$EI_x y'' = EI_x y_0'' - Py. \quad (14.153)$$

დეფორმირებული ძელის ღერძის ფორმა, მიღებული როგორც განივი მიმართულების, ისე ყველა ძალის ერთდროული მოქმედებით, მიახლოებით წარმოვადგინოთ სინუსოიდის სახით

$$y = f \sin \frac{\pi z}{l}; \quad y_0 = f_0 \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (14.154)$$

გადაადგილებების (14.154) სახით წარმოდგენა ყოველთვის მისაღებია, თუ ძელზე მოქმედი განივი მიმართულების ძალები ერთიდაიმავე ნიშნისაა. წინააღმდეგ შემთხვევაში, საჭიროა γ_0 ფუნქციის დამატებითი შესაწავლა. გავითვალისწინოთ ეს გამოსახულება (14.153) განტოლებაში

$$-f \frac{EI_x \pi^2}{l^2} = -f_0 \frac{EI_x \pi^2}{l^2} - Pf.$$

საიდანაც მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{P}{P_j}}. \quad (14.155)$$

თუ დავუშვებთ, რომ მლუნავი მომენტები გადაადგილებების პროპორციულია, მათთვის შეიძლება მივიღოთ (14.155)-ის მსგავსი ფორმულა

$$M_{\text{ღ}} = \frac{M_x}{1 - \frac{P}{P_j}}. \quad (14.156)$$

როგორც აღვნიშნეთ, მიღებული ფორმულები ძალაშია მხოლოდ 14.39 ნახაზზე ნაჩვენები ძელისათვის, რომლის დეფორმირებული ღერძი შეგვიძლია მიახლოებით წარმოვადგინოთ სინუსოიდური კანონით. მაგრამ მათ იყენებენ აგრეთვე სხვა სახის საყრდენებიან ძელებისთვისაც შესაბამისი კრიტიკული ძალის მნიშვნელობების გამოსათვლელ ფორმულებში გათვალისწინებით.

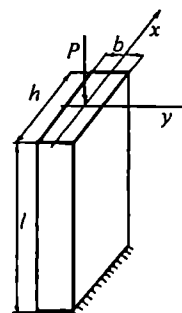
მეთოდებზე თავის მაგალითები

მაგალითი 14.1 14.40 ნახაზზე გამოსახული ძელებისთვის განვსაზღვროთ კრიტიკული P_j ძალის მნიშვნელობა, თუ მოცემულია: $l = 0,4$ მ; $b = 0,02$ მ; $h = 0,06$ მ. ძელის მასალა - ფ.3.

როგორც ცნობილია, აღნიშნული მასალებისაგან დამზადებული ძელებისთვის ეილერის ფორმულის გამოყენება შეიძლება იმ შემთხვევაში, თუ გვაქვს თანაფარდობა

$$100 \leq \lambda \leq 200.$$

მოცემული ძელისათვის $\mu = 2$. დავადგინოთ მოქნილობის მნიშვნელობა



ნახ. 14.40

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{3,46} \approx 0,578 \cdot 10^{-2} \text{ მ};$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 0,4}{0,578 \cdot 10^{-2}} \cong 138 > 100,$$

ე.ი. კრიტიკული ძალის მნიშვნელობის დასადგენად შეიძლება გამოვიყენოთ ეილერის ფორმულა:

$$P_{\text{კ}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 Ehb^3}{12(\mu l)^2} = \frac{(3,14)^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot (2 \cdot 10^{-2})^3}{12(2 \cdot 0,4)^2} \cong 123 \text{ კნ.}$$

ცხადია, რომ

$$\sigma_{\text{კ}} = \frac{P_{\text{კ}}}{F} = \frac{123 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \approx 103 \text{ მგპა.}$$

თუ მოცემულია მარაგის კოეფიციენტი მდგრადობაზე (დავუშვათ $n=2$), მაშინ დასაშვები დატვირთვა

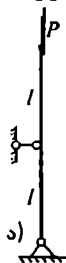
$$[P] = \frac{P_{\text{კ}}}{n} = \frac{123}{2} = 61,5 \text{ კნ.}$$

მაგალითი 14.2. ორსაყრდენიანი ძელი განიცდის შეკუმშვას (ნახ.14.41). ენერგეტიკული მეთოდის გამოყენებით მივიღოთ კრიტიკული ძალის ფორმულა.

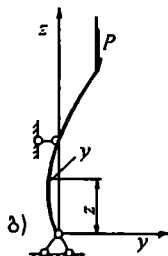
დეფორმირებული ძელის ღერძის განტოლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$y = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4.$$

უცნობი კოეფიციენტების შერჩევით დავაკმაყოფილოთ პირობები ძელის ბოლო კვებებში და შუალედურ საყრდენთან:



ნახ. 14.41



$$y(0) = a_0 = 0; \quad y''(0) = 2a_2 = 0;$$

$$y(l) = a_0 + a_1 l + a_2 l^2 + a_3 l^3 + a_4 l^4 = 0;$$

$$y''(2l) = 2a_2 + 6a_3(2l) + 12a_4(2l)^2 = 0.$$

სისტემის ერთობლივი განხილვით დავადგინოთ კოეფიციენტების მნიშვნელობები:

$$a_0 = 0; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = -\frac{4}{3l^2} a_1; \quad a_4 = \frac{1}{3l^3} a_1.$$

გავანგარიშოთ ძელის დეფორმაციის პოტენციალური ენერჯია

$$U = \frac{EI_x}{2} \int_0^{2l} (y'')^2 dz = \frac{EI_x}{2} \int_0^{2l} \left(-\frac{8a_1 z}{l^2} + \frac{4a_1 z^2}{l^3} \right)^2 dz = \frac{128}{15} \frac{EI_x}{l} a_1^2.$$

განვსაზღვროთ P ძალის მოდების წერტილის გადაადგილება

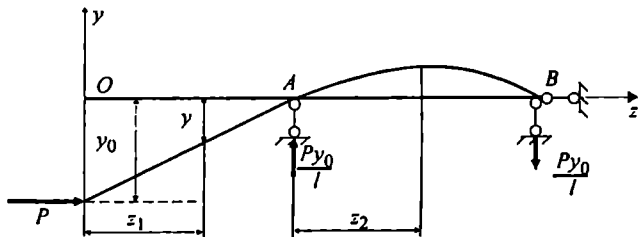
$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^{2l} (y')^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^{2l} \left(a_1 - \frac{4a_1}{l^2} z^2 + \frac{4a_1}{3l^3} z^3 \right)^2 dz \approx 6,23la_1^2.$$

კრიტიკული ძალის დასადგენად გამოვიყენოთ (14.44) ფორმულა:

$$P_{\text{კ}} = \frac{128EI_x a_1^2}{15l \cdot 6,23la_1^2} = 1,37 \frac{EI_x}{l^2}.$$

მაგალითი 14.3. შევამოწმოთ წინა მაგალითში მიღებული შედეგის სიზუსტე განტოლების უშუალო ინტეგრებით.

ამოცანის ამოხსნისათვის სასურველია ახალი კოორდინატთა სისტემის არჩევა და ძელის ორ უბნად წარმოდგენა, ნახაზი 14.42.



ნახ. 14.42

პირველი OA უბნისათვის, განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$EI_x y_1'' = P(y_0 - y_1)$$

გარდაეკმნათ განტოლება და წარმოვადგინოთ იგი შემდეგი სახით

$$y_1'' + k^2 y_1 = k^2 y_0$$

სადაც

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI_x}}$$

$$y_1 = C_1 \sin kz_1 + C_2 \cos kz_1 + y_0.$$

პირველი უბნის სასაზღვრო პირობებია

$$y_1(0) = y_0 = C_2 + y_0$$

$$y_1(l) = 0 = C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + y_0.$$

სისტემის ამოხსნის შედეგად დავადგენთ

$$C_2 = 0, \quad y_0 = -C_1 \sin kl.$$

შედეგის გათვალისწინებით პირველი უბნის დიფორმირებული ძელის გადაადგი -
ლებების განტოლება ჩაიწერება

$$y_1 = C_1 (\sin kz_1 - \sin kl)$$

მეორე უბნის გადაადგილებების დიფერენციალური განტოლების შედგენისას
საჭიროა გავითვალისწინოთ საყრდენის რეაქციის ვერტიკალური მდგენელი

$$EI_x y_2'' = P(y_0 - y_2) - \frac{P y_0}{l} z_2.$$

გარდაკვმნათ განტოლება და წარმოვადგინოთ ის შემდეგი სახით

$$y_2'' + k^2 y_2 = k^2 \left(1 - \frac{z_2}{l} \right) y_0.$$

განტოლების ამონახსენია

$$y_2 = C_3 \sin kz_2 + C_4 \cos kz_2 + \left(1 - \frac{z_2}{l} \right) y_0.$$

სასაზღვრო პირობებია

$$y_2(0) = 0 + C_4 + y_0 = 0$$

$$y_2(l) = C_3 \sin kl + C_4 \cos kl = 0.$$

სისტემის ამოხსნის შედეგად დავადგენთ

$$C_3 = -C_1 \cos kl, \quad C_4 = C_1 \sin kl.$$

შედეგის განტოლებაში გათვალისწინებით, მეორე უბნისათვის გადაადგილებების
ფორმულა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$y_2 = C_1 \left[\sin k(l - z_2) - \left(1 - \frac{z_2}{l} \right) \sin kl \right].$$

უბნების სასაზღვრო კვეთში ძელის უწყვეტობის პირობის შესაბამისად

$$y_1'(l) = y_2'(0)$$

გარდაქმნების შედეგად

$$C_1 k \cos kl = C_1 \left(-k \cos kl + \frac{1}{l} \sin kl \right).$$

არანულოვანი ამონახსნის არსებობის პირობიდან გამომდინარე $C_1 \neq 0$. კრიტიკული ძალის მნიშვნელობის დასადგენად მივიღებთ განტოლებას

$$\operatorname{tg} kl = 2kl,$$

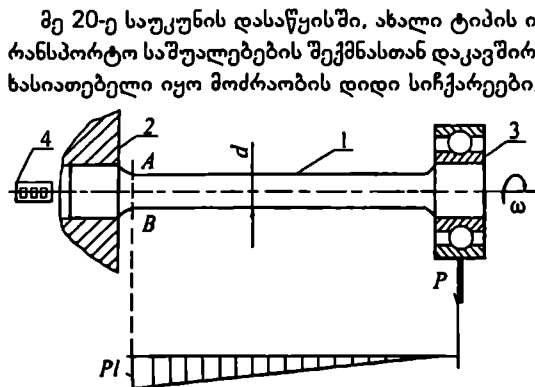
რომლის ამოხსნის შედეგად

$$kl = \sqrt{\frac{P_J l}{EI_x}} = 1,165, \quad P_J = 1,36 \frac{EI_x}{l^2}$$

შედეგების შედარებით ვრწმუნდებით, რომ ზუსტი და მიახლოებითი მეთოდები უზრუნველყოფენ პრაქტიკულად ერთი და იგივე შედეგს.

XV თავი. დეტალის განაგარიშება სიმტკიცეში დროში ქაზვების ცვალეხალოვის გათვალისწინებით

§108. წარმოდგენა დაღლილობით სიმტკიცეში



ნახ. 15.1

ბოდა შთაბეჭდილება, რომ დროთა განმავლობაში მასალა იღლებოდა, იცვლიდა თვისებებს და ვეღარ უძლებდა ადრე მისთვის ჩვეულ დაძაბული მდგომარეობის დონეს. ამიტომ დაუკავშირეს ახლად აღმოჩენილი მოვლენა ადრე ცნობილ, ადამიანისათვის ჩვეულ და გასაგებ მოვლენას – დაღლილობას. შემდგომში დადგინდა, რომ ამის მიზეზი იყო ძაბვების ცვალეხადობა დროში. განვიხილოთ შპინდელში ერთი ბოლოთი ჩამაგრებული ლილვი, რომლის მეორე თავისუფალ ბოლოზე საკისრის საშუალებით მოდებულია P ძალა (ნახ. 15.1). ლილვის მღუნავი მომენტის ეპიურა წრფივი კანონით იცვლება და მისი მაქსიმალური მნიშვნელობა Pl -ის ტოლია. ლილვის განივი კვეთის A და B წერტილებში წარმოიქმნება მაქსიმალური ძაბვები (ნახ. 15.2), რომლებიც განისაზღვრება ფორმულით

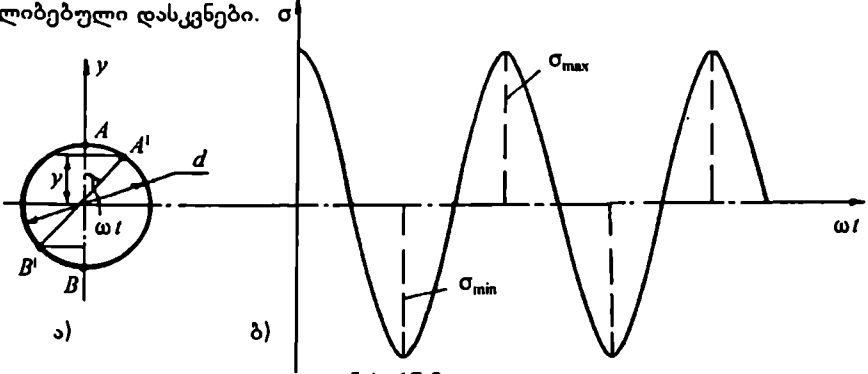
$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_x}{W_x} \quad (15.1)$$

ეს წერტილები უძრავია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ლილვი არ ბრუნავს. ლილვის ω კუთხური სიჩქარით ბრუნვის შემთხვევაში წერტილები იცვლიან მდებარეობას. l დროის შემდეგ მათი ახალი მდებარეობები განისაზღვრება A'

და B' წერტილებით, რომლებსაც შეესაბამება მობრუნების ფაზა ωt კუთხე. ახალ მდებარეობაში კვების წერტილებში ძაბვები

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{M_x}{I_x} \frac{d}{2} \cos \omega t = \sigma_{\max} \cos \omega t. \quad (15.2)$$

ამრიგად, ლილვის ბრუნვისას A წერტილი იცვლის მდებარეობას და მასში ნორმალური ძაბვა იცვლება კოსინუსის კანონით (ნახ.15.2,ბ). სხვადასხვა მანქანების, სატრანსპორტო საშუალებების, დაზგების და სხვა დანადგარების ექსპლუატაციისათვის, როგორც წესი, დამახასიათებელია დროში ძაბვის ცვალებადობა. ამ გარემოებამ შეიძლება სერიოზულად შეცვალოს დასაშვები ძაბვებისა და მაქსიმალური ძაბვების ურთიერთშედარების საფუძველზე კონსტრუქციის სიმტკიცეზე მსჯელობის შესაძლებლობის შესახებ წინა თავებში ჩამოყალიბებული დასკვნები. σ



ნახ. 15.2

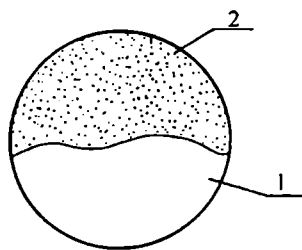
თუ ცვალებადი ძაბვების მაქსიმალური მნიშვნელობა აღემატება გარკვეულ ზღვარს, დეტალის მასალაში განვითარებას იწყებს მიკროდაზიანებები, რომლებსაც მიეყვარათ მაკრობზარების წარმოქმნამდე და შემდგომ, მათი განვითარების საფუძველზე, დეტალის დამსხვრევამდეც კი. ამ პროცესს ლითონების დაღლას უწოდებენ, ხოლო შესაბამის მსხვრევას - დაღლილობით მსხვრევას.

დაღლილობითი მსხვრევა უშუალოდ დაკავშირებულია ლითონების სტრუქტურულ არაერთგვაროვნებასთან, რომელიც გამოიხატება ცალკეულ კრისტალურ გისოსებში სხვადასხვა სახის დეფექტებისა და გარეშე ჩანართების არსებობით. ძაბვების ცვალებადობის პირობებში აღნიშნული არაერთგვაროვნება იწვევს ადგილობრივ ე.წ. ციკლურ პლასტიკურ დეფორმაციებს, რის შედეგადაც ცალკეულ მარცვლებში წარმოიქმნება ძვრის ხაზები. ისინი თანდათან იზრდებიან და გადადიან სხვა მარცვლებზეც. ასეთი პროცესის განვითარების

შედეგად კვეთი თანდათან სუსტდება და გარკვეულ მომენტში ხდება დეტალის დამსხვრევა.

აღნიშნული პროცესი შეიძლება დაიწყო დეტალის ნებისმიერ ადგილზე, სადაც იქნება მასალის სტრუქტურული არაერთგვაროვნება. მაგრამ ის, უპირატესად, იწყება დეტალის ზედაპირთან, სადაც ცალკეული მარცვლების წინააღმდეგობის უნარიანობა ნაკლებია. ამას ისიც უწყობს ხელს, რომ დეტალის ზედაპირზე, არც თუ იშვიათად, ადგილი აქვს მიკროუსწორობებს, სხვადასვა სახის ნაკაწრებს. აქედან გამომდინარე, ცხადია, დეტალის მუშაობის გასახანგრძლივებლად დიდი მნიშვნელობა აქვს ზედაპირის უკეთ დამუშავებას. უფრო მეტიც, გარკვეული დროის განმავლობაში დეტალის ექსპლუატაციის შედეგად მის ზედაპირთან განვითარებას დაიწყებს მიკრობზარები. თუ ელექტროპოლირების საშუალებით მოვაცილებთ ამ დაზიანებულ თხელ ფენას და შემდეგ გავგრძელებთ დეტალის ექსპლუატაციას, მისი ვარგისიანობის ხანგრძლივობა გაიზარდება. ასეთი ოპერაციის განმეორება შეიძლება რამდენჯერმე, რის შედეგადაც დეტალის მუშაობის ხანგრძლივობა კიდევ უფრო იზარდება.

მკირე სიდიდის ლოკალურ არეს, რომელშიც წარმოიქმნება პირველი ბზარი და საიდანაც იწყება მისი განვითარება, დაღლილობის დამსხვრევის ფოკუსი ეწოდება. ასეთი არე, როგორც აღინიშნა, დეტალის ზედაპირთანაა, მაგრამ არ არის გამორიცხული, რომ ის წარმოიშვას დეტალის სიღრმეში, თუ იქ აღმოჩნდება რაიმე სახის დაზიანება. შეიძლება არსებობდეს რამდენიმე ასეთი არე და დეტალის დამსხვრევის პროცესი ერთდროულად რამდენიმე ცენტრიდან დაიწყო.



ნახ. 15.3

დეტალის დაღლილობით გამოწვეული დამსხვრევის კვეთში, ჩვეულებრივ, შეიმჩნევა ორი მკვეთრად განსხვავებული არე (ნახ. 15.3). პირველი არე ხასიათდება პრიალა ზედაპირით და შეესაბამება ბზარის თანდათანობით გავრცელების საწყის პროცესს, რომელიც მიმდინარეობს მასალაში შედარებით დაბალი სიჩქარით, სუსტი ადგილების შერჩევით. როდესაც ამ პროცესის შედეგად კვეთი საკმაოდ დასუსტდება,

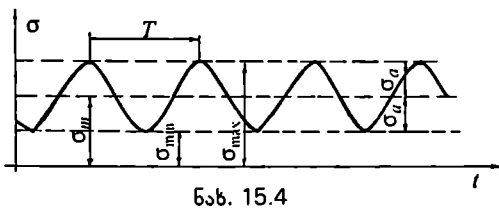
ხდება დეტალის სწრაფი დამსხვრევა. ამ უკანასკნელს შეესაბამება კვეთის მეორე არე, რომლისთვისაც დამახასიათებელია უსწორმასწორო, უხეში ზედაპირი.

ლითონების დაღლილობის პროცესის სრულყოფილი თეორიული შესწავლა მეცნიერების განვითარების თანამედროვე ეტაპზე დიდ სირთულეებთან არის დაკავშირებული და შეუძლებელიც არის. ამიტომ მისი შესწავლისთვის ფართოდ გამოიყენება ექსპერიმენტული მეთოდები და მათი შედეგების საფუძველზე ხდება ძაბვების ცვალებადობის გათვალისწინებით დეტალების გასაანგარიშებელი ფორმულების დადგენა.

§109. დადლილობის მახასიათებლები სიმეტრიული და ასიმეტრიული ციკლებისათვის

განვიხილოთ ძაბვები, რომლებიც დროთა განმავლობაში პერიოდული კანონით იცვლებიან (ნახ. 15.4).

ძაბვების თანამიმდევრულ ცვლილებას ერთი პერიოდის განმავლობაში ციკლი ეწოდება. ძაბვების უდიდესი, უმცირესი, საშუალო და ამპლიტუდური მნიშვნელობები, შესაბამისად, აღვნიშნოთ σ_{\max} , σ_{\min} , σ_m და σ_a ასოებით (ნახ. 15.4).



ნახ. 15.4

უმცირესი და უდიდესი ძაბვების შეფარდებას ციკლის ასიმეტრიულობის კოეფიციენტი ეწოდება

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \quad (15.3)$$

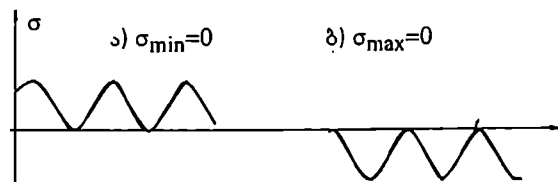
ციკლის მახასიათებელი ძაბვები ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი ფორმულებით:

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a; \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a. \quad (15.4)$$

ამ ფორმულებიდან მიიღება ძაბვების საშუალო და ამპლიტუდური მნიშვნელობები

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (15.5)$$

თუ საშუალო ძაბვა უდრის ნულს, მაშინ $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$ და საქმე გვაქვს სიმეტრიულ ციკლთან (ნახ. 15.2). ასეთი ციკლის ასიმეტრიულობის



ნახ. 15.5

კოეფიციენტი $r = -1$. როდესაც $\sigma_{\min} = 0$ ან $\sigma_{\max} = 0$ (ნახ. 15.5), საქმე გვაქვს პულსაციურ ციკლთან, რომლისთვისაც, შესაბამისად, $r = 0$ და $r = \infty$. საერთო მიდგომის ფარგლებში მუდმივი ხასიათის ძაბვა შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც კერძო შემთხვევა. მისი ციკლის მახასიათებელი

სიდიდეები იქნება:

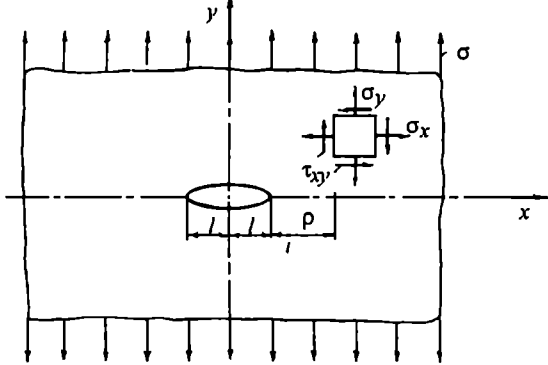
$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma_m; \quad \sigma_a = 0 \quad \text{და} \quad r = 1.$$

ციკლებს, რომლებსაც ერთი და იმავე სიდიდის ასიმეტრიულობის კოეფიციენტი აქვთ, ერთგვაროვანი ან მსგავსი ციკლები ეწოდება.

§110. დაღლილობის ბზარების განვითარების კანონზომიერებანი

როგორც აღვნიშნეთ, დეტალების დაღლილობით გამოწვეული დამსხვრევა დაკავშირებულია მათში ბზარების წარმოქმნასა და განვითარებასთან. ეს საკითხები ფართო შესწავლის საგანია როგორც ჩვენს ქვეყანაში, ისე საზღვარგარეთ. დღეისათვის დაგროვილია დიდი გამოცდილება, რომელიც განზოგადებული და წარმოდგენილია პრაქტიკული რეკომენდაციების სახით.

მანქანების ელემენტების დამზადებისას შეიძლება წარმოიშვას სხვადასხვა სახის დეფექტები, რომლებსაც შეუძლია საწყისი ბზარების როლის შესრულება.



ნახ. 15.6

ბზარები მანქანის ექსპლუატაციის პროცესში თანდათან ფართოვდებიან, აღწევენ კრიტიკულ ზომებს, რასაც მოჰყვება დეტალის მოულოდნელი დამსხვრევა. კონსტრუქციის მუშაობის პერიოდი დაღლილობის პირველი მაკროსკოპული ბზარის გაჩენიდან (რომლის სიდიდეს, როგორც წესი, იღებენ 0,1-0,5 მმ) კონსტრუქციის დამსხვრევამდე იზომება გარბენის კილო-

მეტრებში, მუშაობის საათებში ან წლებში, გაფრენების რაოდენობაში. ამ მახასიათებელს კონსტრუქციის ელემენტის ან მანქანის სიცოცხლისუნარიანობა ეწოდება. ამ ცნებას დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს, ვინაიდან კონსტრუქციის პროფილაქტიკური დათვალიერების ვადების დადგენა ხდება მისი სიცოცხლისუნარიანობის გათვალისწინებით.

განვიხილოთ უსასრულოდ დიდი სიფართის ფირფიტა, რომელსაც აქვს $2l$ სიგრძის ბზარი (ნახ.15.6). ფირფიტა განიცდის გაჭიმვას y ღერძის მიმართულებით. σ გამჭიმვი ძაბვები ბზარიდან საკმაოდ დაცილებულ ნებისმიერ წერტილში მუდმივია.

ძაბვების მნიშვნელობები ბზარის გაგრძელებაზე შეიძლება დადგინდეს ირვინის მიერ დრეკადობის თეორიის საფუძველზე მიღებული ფორმულებით:

$$\sigma_y = \sigma \frac{x}{\sqrt{x^2 - l^2}} = \sigma \frac{l + \rho}{\sqrt{2l\rho + \rho^2}} \quad (15.6)$$

ბზარის ბოლოებში $\rho=0$ და შესაბამისი ძაბვები უსასრულოდ იზრდება. ამიტომ ამ წერტილებში ხდება სიმტკიცის მახასიათებლის დადგენა. გავამრავლოთ (15.6) გამოსახულების ორივე ნაწილი $\sqrt{2\pi\rho}$ -ზე და გავიანგარიშოთ მიღებული ზღვარი როცა $\rho \rightarrow 0$:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\rho} \frac{l+\rho}{\sqrt{2l\rho+\rho^2}} = \sigma\sqrt{\pi l}. \quad (15.7)$$

ეს სიდიდე ახასიათებს ძაბვების ცვალებადობის სისწრაფეს ბზარის მომიჯნავე არეში. მას ძაბვების ინტენსიურობის კოეფიციენტი ეწოდება და აღინიშნება K_I ასოთი. ამრიგად, უსასრულო დიდი სიფართის გაჭიმული ფირფიტისათვის (ნახ.15.6), რომელსაც აქვს $2l$ სიგრძის ბზარი, ძაბვების ინტენსიურობის კოეფიციენტი

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l}. \quad (15.8)$$

ფირფიტისათვის, რომლის სიფართიც შეზღუდულია და b -ს ტოლია, მართებულია შემდეგი ფორმულა

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l} \sqrt{\sec \frac{\pi l}{b}}. \quad (15.9)$$

ცხადია, (15.9) ფორმულა მიიღებს (15.8) ფორმულის სახეს მაშინ, როცა ფირფიტის სიფართე უსასრულოდ იზრდება. სხვა ფორმის ბზარებისა და განსხვავებული დაძაბული მდგომარეობის მქონე დეტალებისათვის ძაბვების ინტენსიურობის კოეფიციენტისათვის მიიღება ანალოგიური ფორმულები.

ბზარის განვითარების პროცესის აღწერისათვის გამოიყენება პირსონის განტოლება

$$\frac{dl}{dN} = C(\Delta K_I)^n, \quad (15.10)$$

სადაც dl/dN ბზარის განვითარების სიჩქარეა (მმ/ციკლი); C, n - რიცხვითი კოეფიციენტები; $\Delta K_I = K_{I\max} - K_{I\min}$ - ძაბვების ინტენსივობის კოეფიციენტის რხევების მანძილი. ამ უკანასკნელში შემაჯავლი სიდიდეები განისაზღვრება (15.8) და (15.9) ტიპის ფორმულების საშუალებით, რომლებშიც ძაბვა უნდა შეიცვალოს σ_{\max} და σ_{\min} სიდიდეებით; კერძოდ, თუ $r \geq 0$ და $\sigma_{\min} \geq 0$, (15.10) განტოლების შესაბამისად მივიღებთ

$$\frac{dl}{dN} = C \left[\sigma_{\max} \sqrt{\pi l} - \sigma_{\min} \sqrt{\pi l} \right]^n \quad (15.11)$$

გამოვიყენოთ აღნიშვნა

$$C[\sqrt{\pi}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})]^n = A. \quad (15.12)$$

მაშინ ბზარის განვითარების განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{dl}{dN} = Al^{\frac{n}{2}}. \quad (15.13)$$

ცვლადების განცალკევებისა და შემდეგ ინტეგრების შედეგად მივიღებთ

$$\int_{l_0}^{l_{\text{დ}}} \frac{dl}{l^{\frac{n}{2}}} = A \int_0^{N_{\text{დ}}} dN, \quad (15.14)$$

სადაც l_0 , $l_{\text{დ}}$ ბზარის სიგრძეებია შესაბამისად საწყის მდგომარეობაში და დამსხვრევის მომენტში, $N_{\text{დ}}$ - ციკლების რიცხვი, რომელიც ესაჭიროება ბზარის განვითარებას l_0 -დან $l_{\text{დ}}$ -მდე, ანუ ელემენტის სიცოცხლისუნარიანობა. ინტეგრების შედეგად მივიღებთ

$$N_{\text{დ}} = \frac{1}{A} \ln \frac{l_{\text{დ}}}{l_0}, \quad n = 2$$

$$N_{\text{დ}} = \frac{1}{A} \frac{2}{(n-2)} \left(\frac{1}{l_0^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{1}{l_{\text{დ}}^{\frac{n-2}{2}}} \right), \quad n \neq 2. \quad (15.15)$$

მიღებული შედეგების შესაბამისად, თუ $l_0 \rightarrow 0$, $N_{\text{დ}} \rightarrow \infty$ და ამოცანა კარგავს ფიზიკურ არსს. ეს გასაგებიც არის, ვინაიდან აღებულ მოდელი ითვალისწინებს პროცესის დასაწყისში ბზარის არსებობას და შემდგომ მის განვითარებას, ამიტომ დაუშვებელია ბზარის საწყისი სიგრძის ნულთან გატოლება.

(15.15) ფორმულა გამოიყენება იმ შემთხვევაშიც, თუ ციკლების ასიმეტრიულობის კოეფიციენტი უარყოფითია, $r < 0$. ამ შემთხვევისათვის A -ს გაანგარიშებისას (15.12) ფორმულაში უნდა დავუშვათ,

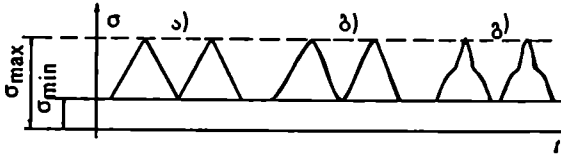
$$\sigma_{\min} = 0.$$

ზემოთ განხილული მეთოდი გამოიყენება აგრეთვე რეალურ კონსტრუქციებში დაღლილობის ბზარების განვითარების პროგნოზირებისათვის. თუ ვიცით ბზარის კრიტიკული სიგრძე, რომელიც იწვევს კონსტრუქციის მოულოდნელ მყიფე დამსხვრევას, და ელემენტის სიცოცხლისუნარიანობა, შეგვიძლია დავადგინოთ საწყისი ბზარების დასაშვები სიდიდეები. ამგვარი მიდგომა საშუა-

ლებას გვაძლევს ჩამოვყალიბოთ პირობები, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს დამზადებული კონსტრუქცია.

§111. დაღლილობითი სიმტკიცის დიაგრამა. დაღლილობის ზღვარი

როგორც აღვნიშნეთ, ცვლადი ძაბვების პირობებში ბზარების წარმოქმნა და განვითარება დაკავშირებულია დეტალში ციკლური პლასტიკური დეფორმაციების დაგროვებასთან.



ნახ. 15.7

აქედან გამომდინარე, დაღლილობითი სიმტკიცე უშუალოდაა დაკავშირებული ციკლის უდიდეს და უმცირეს ძაბვებთან და ნაკლებადაა

დამოკიდებული ძაბვების ცვალებადობის სიხშირეზე. ამ თვალსაზრისით 15.7 ნახაზზე ნაჩვენებები ციკლები ტოლფასია.

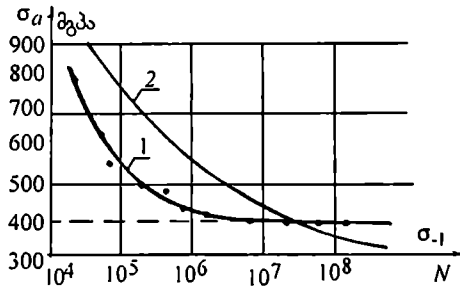
ვინაიდან ძაბვების უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები განისაზღვრება (15.4) ფორმულების საშუალებით, დეტალის დაღლილობითი სიმტკიცე შეგვიძლია დავაკავშიროთ ძაბვების საშუალო და ამპლიტუდურ მნიშვნელობებთან. გამოხატვისა ნიმუშის გამოცდა მაღალი ტემპერატურის, წნევის ან კოროზიული გარემოს ზემოქმედების პირობებში. ეს უკანასკნელი ზემოთ აღწერილ სურათს, როგორც წესი, ცვლიან და მათთვის ძაბვების ცვალებადობის სიხშირის ზრდა გარკვეულად ამალღებს დეტალის წინაღობას დაღლილობისადმი.

დაღლილობითი სიმტკიცის შესწავლა ხდება საგანგებოდ გაპრიალებული ნიმუშის გამოცდით, რომლის დიამეტრი ფართო ფარგლებში იცვლება ($l=300$ მმ). გამოცდების ჩასატარებლად გამოიყენება სპეციალური მანქანები, რომლებიც ძალების აღმგზნების პრინციპის მიხედვით იყოფა მექანიკურ, შიდრავლიკურ, ელექტრომექანიკურ და პნევმატურ მანქანებად. დატვირთვის სახის მიხედვით განასხვავებენ ლუნვაზე, გრუნვაზე, გაჰიშვა-კუმშვასა და რთულ დაძაბულ მდგომარეობაზე გამოსაცდელ მანქანებს.

არსებული მანქანების საშუალებით ნიმუშები გამოიცდება სხვადასხვა სახის ციკლებისთვის. მაგრამ შედარებით უფრო გავრცელებულია მანქანები, რომლებზეც ნიმუშების გამოცდა ხდება სიმეტრიული ციკლისთვის. ასეთი უმარტივესი მანქანის სქემა ნაჩვენებია 15.1 ნახაზზე. მრგვალი განივი კვეთის მქონე 1 ნიმუში ჩამაგრებულია შპინდელის ვაზნაში 2, რომელიც ბრუნავს გარკვეული სიჩქარით. ნიმუშის ბოლოზე დამაგრებულია საკისარი 3, რომლის საშუალებით ხდება ნიმუშზე მუდმივი მიმართულების P ძალის გადაცემა. შპინდელთან მიერთებულია მრიცხველი 4, რომელიც აღრიცხავს ციკლების რიცხვს გამოცდის დასაწყისიდან ნიმუშის დამსხვრევამდე.

დაღლილობის წინააღმდეგობის მახასიათებლების მისაღებად საჭიროა გა-

მოიცადოს 10 ნაგლინი ერთნაირი ნიმუში და სხმული შენადნობის 15 ნიმუში. პირველი ნიმუშის გამოცდა ხდება ძაბვის ამპლიტუდური მნიშვნელობისთვის $\sigma_a = (0,65 \pm 0,75)\sigma_s$, დადგინდება ციკლთა N რაოდენობა, რომელიც შეესაბამება



ნახ. 15.8

ნიმუშის დამსხვრევას. ამის შემდეგ წარმოებს ახალი გამოცდა ძაბვის შემცირებული ამპლიტუდური მნიშვნელობისთვის და განისაზღვრება ამ ნიმუშის დამსხვრევის შესაბამისი ციკლთა რაოდენობა. თანმიმდევრულად ყველა ნიმუშისთვის ასეთი გამოცდის ჩატარების შედეგად აიგება $\sigma_a - N$ გრაფიკი (ნახ. 15.8). ასეთ დიაგრამას დალლილობითი სიმტკიცის დიაგრამა ეწოდება.

მრავალი ექსპერიმენტის შედეგად დადგენილ იქნა, რომ, თუ ნორმალური ტემპერატურისა და ჩვეულებრივ ატმოსფერულ (კოროზიის გამორიცხვის შემთხვევაში) გარემოში დაბალი და საშუალო სიმტკიცის ფოლადი $\sigma_s \leq 120$ მგა, და ტიტანის შენადნობის ნიმუშები არ დაიმსხვრევა $N \leq 10^7$ ძაბვების ციკლთა რაოდენობისათვის, ისინი არც შემდგომში დაიმსხვრევიან. ასეთ ნიმუშებს 15.8 ნახაზზე შეესაბამება 1 მრუდი. ამ ციკლთა რაოდენობას გამოცდის საბაზო ციკლთა რაოდენობა ეწოდება. შეზღუდული რაოდენობის ნიმუშების გამოცდისას დალლილობის ზღვრის დადგენა ხდება ციკლის ძაბვების მაქსიმუმებს შორის იმ უდიდესი მნიშვნელობის მიხედვით, რომლის მოქმედებისას საბაზო ციკლთა რაოდენობამდე მოცემული სიგრძის დალლილობის ბზარები არ წარმოიქმნება ან არ ხდება დალლილობით დამსხვრევა.

მაღალი სიმტკიცის ფოლადების და ფერადი ლითონებისათვის დალლილობის დიაგრამას ჰორიზონტალური უბანი არა აქვს. ამიტომ როგორც არ უნდა შევამციროთ მაქსიმალური ძაბვების მნიშვნელობები, ნიმუშის რღვევის პროცესს ვერ გამოვრიცხავთ. ანალოგიური ხასიათისაა მონაცემები მცირე და საშუალო სიმტკიცის ფოლადების და ტიტანის შენადნობის ნიმუშებისათვის, თუ მათი გამოცდა ხდება მაღალი ტემპერატურის ან ინტენსიური კოროზიის პირობებში. ასეთი ნიმუშის დიაგრამა 15.8 ნახაზზე წარმოდგენილია 2 მრუდით. ვინაიდან დალლილობის ზღვარი დიაგრამაზე ზუსტად არ იკვეთება, მისი დადგენა ხდება პირობითი კრიტერიუმით. მას საზღვრავენ როგორც მაქსიმალური ძაბვის უდიდეს მნიშვნელობას, რომელსაც შეუძლია გაუძლოს ნიმუშმა და დაუმსხვრევლად იმუშაოს საბაზო $N = 10^8$ ციკლთა რაოდენობამდე.

დალლილობის ზღვარი აღინიშნება σ_r ასოთი. აქ r ციკლის ასიმეტრიულობის კოეფიციენტია, ამიტომ სიმეტრიული ციკლისათვის 15.8 ნახაზზე გამოყენებულია აღნიშვნა σ_{-1} .

ზოგიერთი მანქანის მუშაობის თავისებურება განსაზღვრავს დეტალის არახანგრძლივი მუშაობის აუცილებლობას ან შესაძლებლობას. მაგალითად, თუ დეტალმა უნდა გაუძლოს ძაბვების საბაზო ციკლთა რაოდენობას, ეს მოთხოვნა შეიძლება მკაცრი აღმოჩნდეს და მან განსაზღვროს კონსტრუქციისთვის დეტალის მიუღებლად დიდი ზომები. ასეთ შემთხვევასთან ხშირად საქმე გვაქვს საფრენი, წყალქვეშა მუშავე და სხვა აპარატების შექმნისას, როდესაც ყოველი დეტალის მინიმალური წონა განაპირობებს კონსტრუქციის მიერ სამსახურებრივი დანიშნულების უკეთ შესრულების უნარს (ტვირთაშეწობას, მიწაზე დაშვების გარეშე დიდი მანძილის გადაფრენის შესაძლებლობას, სიჩქარის გაზრდას და ა.შ.). ასეთ და ზოგიერთ სხვა განსაკუთრებულ ვითარებაში დეტალების გაანგარიშებისთვის შემოაქვთ σ_{-1N} დალილობის შეზღუდული ზღვრის ცნება, რომელიც შეესაბამება N ციკლთა რაოდენობას. ეს უკანასკნელი საბაზო რიცხვზე მცირეა. დალილობის შეზღუდული ზღვრის დადგენა შეიძლება ჩვეულებრივი დალილობის მრუდეების საშუალებით. მაგალითად, თუ $N=10^5$ (1 მრუდი), შესაბამისად მივიღებთ $\sigma_{-1N}=540$ მგპა (ნახ.15.8).

მრავალი ცდის ჩატარების შედეგად, დადგენილია ნიმუშის დალილობის ზღვრის უხეში შეფასების კრიტერიუმები. ასე მაგალითად, ფოლადებისთვის $\sigma_{-1}=(0,4-0,5)\sigma_s$; ფერადი ლითონებისთვის $\sigma_{-1}=(0,25-0,50)\sigma_s$.

ანალოგიურად ღუნვისა, შეგვიძლია განვიხილოთ ნიმუშის გრეხა ძაბვების ციკლური ცვალებადობის პირობებში. ამ შემთხვევისათვის განზოგადდება ზემოთ მოყვანილი ყველა ცნება, მხოლოდ საჭიროა ნორმალური ძაბვების შეცვლა τ მხები ძაბვებით. ექსპერიმენტულად დადგენილია, რომ ჩვეულებრივი ფოლადებისთვის $\tau_{-1}=0,6\sigma_{-1}$, მაღალი სიმტკიცის ფოლადებისათვის კი $\tau_{-1}=0,8\sigma_{-1}$.

როგორც აღვნიშნეთ დალილობითი სიმტკიცის მახასიათებლები დაკავშირებულია ნიმუშში ბზარების წარმოქმნასთან და მათი გავრცელების პროცესთან. ეს უკანასკნელი, თავის მხრივ დაკავშირებულია როგორც ნიმუშის მასალის თავისებურებასთან, ისე მისი გამოცდის სახესთან. ამ თავალსაზრისით, დალილობის ზღვარი, მასალის სხვა მექანიკური მახასიათებლებისგან, მაგალითად, დრეკადობის მოდულის ან პუასონის კოეფიციენტისაგან განსხვავებით, განისაზღვრება როგორც მასალის, ისე თვით დეტალის თვისებით და მისი დატვირთვის სახით. ამიტომ ნიმუშის ღუნვის და გრეხისათვის მიღებული შედეგების განზოგადებას სხვა სახის დატვირთვისთვის დიდი სიფრთხილით უნდა მივუდგეთ.

§112. ნიმუშის ძაბვების ზღვრული ამპლიტუდების დიაგრამა

წინა პარაგრაფში განხილული იყო ნიმუშის სიმეტრიული ციკლის ძაბვების შემთხვევა, მაგრამ, ფაქტიურად, მოვახდინეთ ნებისმიერი ციკლისთვის დალილობის ზღვრის განსაზღვრა. თუ ავიღებთ $\sigma_{\text{ჩ}}$ საშუალო ძაბვის კონკრეტულ მნიშვნელობას და შევარჩევთ ამპლიტუდური ძაბვის ისეთ $\sigma_{\text{კ}}$ ზღვრულ მნიშვე-

შემა. ადგილი დასადგენია, რომ ყველა ერთგვაროვანი ციკლი OC მონაკვეთზე წარმოდგენილია წერტილით და მათგან ზღვრულს შეესაბამება C წერტილი. ამისათვის საკმარისია დავადგინოთ, რომ ამ მონაკვეთზე განლაგებული წერტილებისათვის ასიმეტრიულობის კოეფიციენტი ერთი და იგივეა

$$\text{tg}\varphi = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}} = \frac{1-r}{1+r}. \quad (15.17)$$

მუშა და შესაბამისი ზღვრული ციკლები C_1 და C წერტილებით აისახება. ამიტომ, თუ აღვნიშნავთ დადებითობის ზღვრის შესაბამის სიმტკიცის მარაგის კოეფიციენტს $n_{r\sigma}$ სიმბოლოთი, OCB და OC_1D სამკუთხედების განხილვით მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\begin{aligned} |OC| &= n_{r\sigma}|OC_1|; & |OB| &= n_{r\sigma}|OD|; & |BC| &= n_{r\sigma}|C_1D|; \\ |OB| + |BC| &= n_{r\sigma}(|OD| + |C_1D|), \end{aligned}$$

საიდანაც მარაგის კოეფიციენტის სხვადასხვა გამოსახულებისთვის მივიღებთ ფორმულას

$$n_{r\sigma} = \frac{\sigma_{mზ}}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{aზ}}{\sigma_a} = \frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}}. \quad (15.18)$$

ეს ფორმულები მართებულია, თუ დადებითობის ზღვარი სიმტკიცის ზღვარზე მცირეა, ე.ი. სრულდება პირობა $\sigma_r < \sigma_s$. წინააღმდეგ შემთხვევაში, მარაგის კოეფიციენტი

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\max}}. \quad (15.19)$$

განგარიშების ასეთი მეთოდით გამოიყენება მყიფე მასალებისთვის. რაც შეეხება პლასტიკურ მასალებს, მათი მუდმივი ციკლისათვის 15.10 ნახაზზე საჭიროა σ_s შევცვალოთ $\sigma_{ფ-ით}$. ანალოგიური ცვლილებათა შესატანი (15.19) ფორმულაშიც.

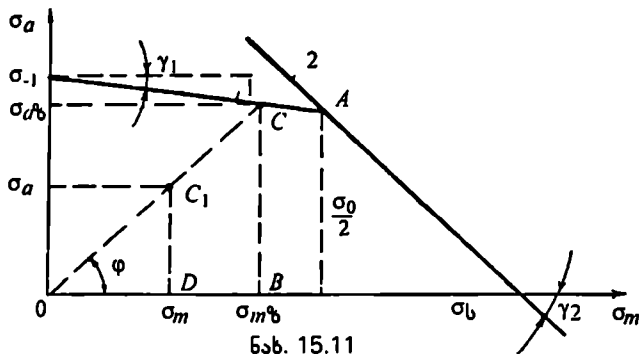
აღწერილი მეთოდით გრაფიკულად ითვალისწინებს 15.10 ნახაზზე გამოსახული დიაგრამის საშუალებით მარაგის კოეფიციენტის დადგენას. მაგრამ ეს ყოველთვის არ არის მოსახერხებელი. ზოგჯერ უფრო ხელსაყრელია დიაგრამის სქემატიზაცია და მისი მიახლოებითი შეცვლა ორი წრფის მონაკვეთით (ნახ.15.11).

პირველი წრფისათვის დახრის კუთხის განმსაზღვრელი ტანგენსი

$$\psi_{1\sigma} = \text{tg}\gamma_1 = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}. \quad (15.20)$$

ამიტომ ამ უბანზე ძაბვების ზღვრული ამპლიტუდებისთვის შეგვიძლია დავწეროთ ფორმულა

$$\sigma_{a\beta} = \sigma_{-1} - \psi_{1\sigma} \sigma_{m\beta}, \quad (-1 \leq r \leq 0), \quad (15.21)$$



ნახ. 15.11

ამ უბნისათვის დავადგინოთ მარაგის კოეფიციენტის ფორმულა. (15.18) თანაფარდობების გათვალისწინებით გარდავქმნათ (15.21) გამოსახულება

$$\sigma_a \cdot n_{r\sigma} = \sigma_{-1} - \psi_{1\sigma} \sigma_m n_{r\sigma}.$$

საბოლოოდ, მარაგის კოეფიციენტის მნიშვნელობაა

$$n_{r\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \psi_{1\sigma} \sigma_m}, \quad (-1 \leq r \leq 0), \quad (15.22)$$

ამ შედეგის და (15.5)-ის გათვალისწინებით შეგვიძლია მივიღოთ დადლილობის ზღვრის შემდეგი გამოსახულება

$$\sigma_r = \frac{2\sigma_{-1}}{(1-r) + (1+r)\psi_{1\sigma}}, \quad (-1 \leq r \leq 0), \quad (15.23)$$

ანალოგიურად განვიხილავთ მეორე წრფესაც და დავადგინოთ მისი დახრის კუთხის ტანგენსს

$$\psi_{2\sigma} = \operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{\sigma_0}{2\sigma_s - \sigma_0}, \quad (0 \leq r \leq 1), \quad (15.24)$$

ამ უბნის შესაბამისი ძაბვების ამპლიტუდური მნიშვნელობების ფორმულა ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\sigma_{a\beta} = \psi_{2\sigma} (\sigma_s - \sigma_{m\beta}), \quad (15.25)$$

გარდავქმნათ ეს გამოსახულება (15.18) ფორმულის საშუალებით

$$n_{r\sigma} \sigma_a = \psi_{2\sigma} \sigma_s - \psi_{2\sigma} n_{r\sigma} \sigma_m$$

აქედან დალილოლობის ზღვრის შესაბამისი სიმტკიცის მარაგის კოეფიციენტი

$$n_{r\sigma} = \frac{\psi_{2\sigma} \sigma_s}{\sigma_a + \psi_{2\sigma} \sigma_m}, \quad (0 \leq r \leq 1), \quad (15.26)$$

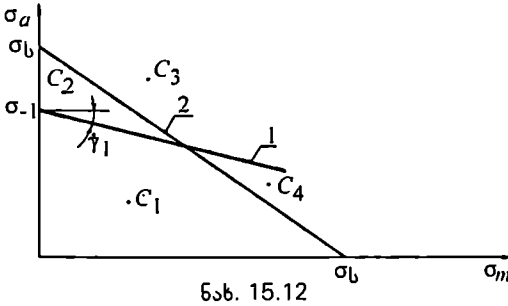
ამ უბნისთვის ელემენტარული გარდაქმნების შემდეგ დალილოლობის ზღვრის ფორმულა ჩაიწერება ასეთნაირად

$$\sigma_r = \frac{2\psi_{2\sigma} \sigma_s}{(1-r) + (1+r)\psi_{2\sigma}}, \quad (0 \leq r \leq 1). \quad (15.27)$$

მიღებული ფორმულები უშუალოდ გამოიყენება გრეხისთვისაც, მხოლოდ მათში ნორმალური ძაბვა უნდა შევცვალოთ მხები ძაბვით.

$\psi_{1\sigma}$ და $\psi_{2\sigma}$ კოეფიციენტები ახასიათებს ციკლის ასიმეტრიულობის გავლენას ძაბვების ამპლიტუდების ზღვრულ მნიშვნელობაზე. ექსპერიმენტების

საშუალებით დადგინდა, რომ ნახშირბადმცირე ფოლადებისათვის $\psi_{1\sigma} = 0, 1-0, 2$; $\psi_{1r} = 0-0, 1$; ლეგირებული ფოლადებისა და მსუბუქი შენადნობისათვის $\psi_{1\sigma} = 0, 15-0, 30$; $\psi_{1r} = 0, 05-0, 15$; რაც შეეხება მეორე უბანს, მისთვის თვლიან $\psi_{2\sigma} = 1$, $\psi_{2r} = 1$. ამ დაშვების არსი იოლი დასადგენია. (15.



ნახ. 15.12

25) ფორმულიდან გამომდინარე $\sigma_r = \sigma_s$. ამრიგად, აქ საკმარისია ჩავატაროთ ჩვეულებრივი გაანგარიშება სიმტკიცეზე, რომელსაც შეესაბამება 2 წრფე (ნახ. 15.12). ეს წრფე შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი ფორმულით

$$\sigma_{a\sigma} + \sigma_{m\sigma} = \sigma_s$$

ამ დიაგრამის საშუალებით შეიძლება ორივე უბნისათვის ერთი და იმავე ფორმულების გამოყენებით გაანგარიშება. ნებისმიერი ციკლისათვის ვადგენთ სიმტკიცის მარაგის ორ კოეფიციენტს; პირველს (n_{σ} -ს) ვანგარიშობთ (15.19) ფორმულით სიმტკიცის ზღვრის შესაბამისად. მეორეს ($n_{r\sigma}$ -ს) ვადგენთ (15.22) ფორმულით დალილოლობის ზღვრის შესაბამისად. დავუშვათ, რომ $n_{\sigma} > 1$ და $n_{r\sigma} > 1$. ამ შემთხვევაში ნიშნის მუშა ციკლი შეესაბამება C_1 წერტილს, ნიშნში გაუძლებს მოდებულ ძალებს და მისი მუშაობის ხანგრძლივობა აღემატება საბაზო ციკლთა რაოდენობას. განვიხილოთ დიაგრამაზე C_2 წერტილის შესაბამისი შემ-

თხვევა, რომლისთვისაც $n_{\sigma} > 1$ და $n_{\tau} < 1$. ამ შემთხვევაში ნიმუში გაუძლებს მოდებულ ძალებს, მაგრამ მისი მუშაობის ხანგრძლივობა უფრო მცირე იქნება, ვიდრე საბაზო ციკლთა რაოდენობა. ეს სრულიადაც არ ნიშნავს, რომ ნიმუში ვერ შეასრულებს თავის დანიშნულებას. შეიძლება ნიმუშისადმი მოთხოვნა არ იყოს განსაკუთრებით მაკაცრი და საკმარისი იყოს მუშაობის შესაძლებლობის შედარებით მცირე რეზერვი. ეს საკითხი დადლილობითი სიმტკიცის დიაგრამის საფუძველზე დამატებით სპეციალურ შესწავლას მოითხოვს. როგორც აღვნიშნეთ, ასეთი მიდგომა საკითხისადმი, არც თუ იშვიათად, გამოიყენება კონსტრუირების პრაქტიკაში. განვიხილოთ მესამე შემთხვევა, რომელიც გამოსახულია 15.12 ნახაზზე C_3 წერტილით. გვაქვს უტოლობები: $n_{\sigma} < 1$, $n_{\tau} < 1$. ამ შემთხვევაში ნიმუში ვერ უძლებს საწყის დატვირთვას და მისი მუშაობის ხანგრძლივობაზე ლაპარაკიც კი ზედმეტია. შეგვიძლია განვიხილოთ კიდევ ერთი შემთხვევა გამოსახული C_4 წერტილით, რომლისთვისაც, წინა შემთხვევისაგან განსხვავებით, მეორე უტოლობა შეიცვლება საწინააღმდეგო უტოლობით. მაგრამ ამ უკანასკნელისთვის წინა წერტილისთვის გაკეთებული დასკვნა ძალაში დარჩება.

პლასტიკური მასალისაგან დამზადებული ნიმუშისთვის ზემოთ მოყვანილი გაანგარიშების მეთოდითაა ძალაში რჩება. საჭიროა მხოლოდ როგორც დიაგრამებზე, ისე ფორმულებში შევცვალოთ სიმტკიცის ზღვარი დენადობის ზღვრით.

რეალური დეტალის გასაანგარიშებლად ნიმუშისთვის მიღებული შედეგების უშუალო გამოყენება, როგორც წესი, არ ხერხდება. რა თქმა უნდა, ისე როგორც ნიმუში, შეიძლება გამოვცადოთ დეტალი და მისთვის ექსპერიმენტულად დავადგინოთ დადლილობის ზღვარი. იმ შემთხვევაში, როდესაც განსაკუთრებით საპასუხისმგებლო დეტალის გაანგარიშებასთან აქვთ საქმე, ასეც იქცევიან. მაგრამ ვინაიდან ეს დაკავშირებულია დიდ შრომატევადობასთან, ასეთ ხერხს იშვიათ შემთხვევაში მიმართავენ. ძირითადად, ცდილობენ ნიმუშისთვის მიღებული შედეგების რეალურ დეტალებზე განზოგადებას, რისთვისაც საჭიროა ვიცოდეთ დეტალის დადლილობის ზღვრის დამოკიდებულება ძაბვების კონცენტრაციაზე, განივი კვეთის აბსოლუტურ ზომებზე (მასშტაბური ფაქტორი), ზედაპირის დამუშავების ხარისხზე, ექსპლუატაციურ ფაქტორებსა (კოროზია, მაღალი და დაბალი ტემპერატურები, რადიაცია, ძაბვების ცვლებადობის სიხშირე) და ზედაპირის განმტკიცების ტექნოლოგიურ მეთოდებზე (ზედა შრის გორგოლაჭებით ან საფანტით ცივი ქედვა და სხვ.). ქიმიურ-თერმული მეთოდები – დაზოტირება, ცემენტაცია, ნიტროცემენტაცია და სხვ., მაღალი სიხშირის დენით ზედაპირული წითობა, კომბინირებული მეთოდები).

§113. დადლილობის ზღვარზე ძაბვების კონცენტრაციის გავლენა

თეორიული და ექსპერიმენტული გამოკვლევების საფუძველზე დადგინონია, რომ დეტალის ფორმის მკვეთრი ცვლილებისა და დეტალების კონტაქტების ადგილებში, წარმოიქმნება ადგილობრივი ხასიათის გადიდებული ძაბვები. თუ ძაბვები დროის ზრდასთან ერთად არ იცვლება, ასეთი ადგილობრივი

ბასიათის ძაბვები, როგორც წესი, კონსტრუქციის სიმტკიცეზე არსებით ზეგავლენას არ ახდენს და ამიტომ მხედველობაში არ მიიღება. მათ მიერ გამოწვეული პლასტიკური დეფორმაციების შედეგად ხდება შიგა ძალების გადანაწილება და შესაბამისი ძაბვების მეტნაკლები გათანაბრება. ამ შემთხვევაში, როგორც წესი, ბზარები არ წარმოიქმნება, მაგრამ იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც ისინი წარმოიქმნება, რაც უპირატესად მყიფე მასალისთვისაა მოსალოდნელი, კონსტრუქცია სიმტკიცეს ინარჩუნებს, ვინაიდან დროში ბზარების ზრდა არ ხდება.

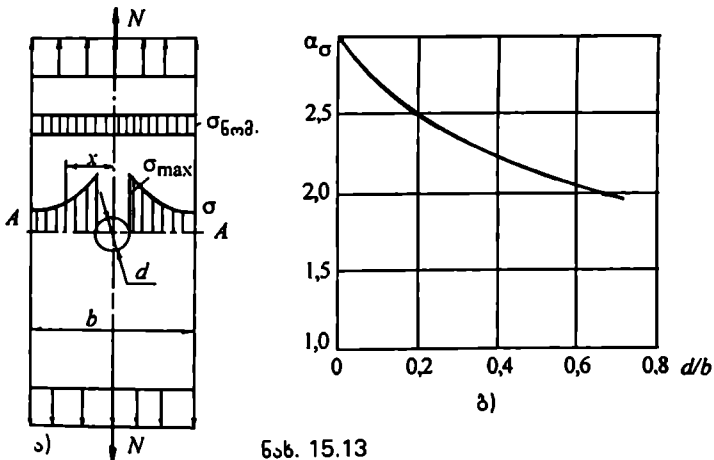
ციკლური დატვირთვისას სურათი მკვეთრად განსხვავებულია. ძაბვების კონცენტრაციის არეში წარმოქმნილი უმნიშვნელო ბზარიც კი შეიძლება თანდათან იზრდებოდეს, რასაც მოჰყვება დეტალის დამსხვრევა. ამიტომ კონსტრუქციის შექმნისას უნდა ვეცადოთ თავი ავარიდოთ დეტალებში მკვეთრი გადასვლების გაკეთებას, რაც ამცირებს დაღლილობით სიმტკიცეზე ძაბვების კონცენტრაციის მავნე გავლენას, თუმცა საბოლოოდ ვერ გამოირიცხავს მას.

ადგილობრივი ძაბვების მნიშვნელობებს განსაზღვრავენ დრეკადობის თეორიის საშუალებით. ამ თეორიის დამუშავებაზე სხვა მეცნიერებთან ერთად დიდი წვლილი შეიტანეს ქართველმა მეცნიერებმა ნ. მუსხელიშვილმა, ი. ვეკუამ და ვ. კუპრაძემ. ამ საკითხების შესასწავლად გამოიყენება ექსპერიმენტული მეთოდებიც (ტენზომეტრირება, პოლარიზაციულ-ოპტიკური მეთოდი და სხვ.).

ადგილობრივი ძაბვების ძირითადი მახასიათებელია ძაბვების კონცენტრაციის თეორიული კოეფიციენტი

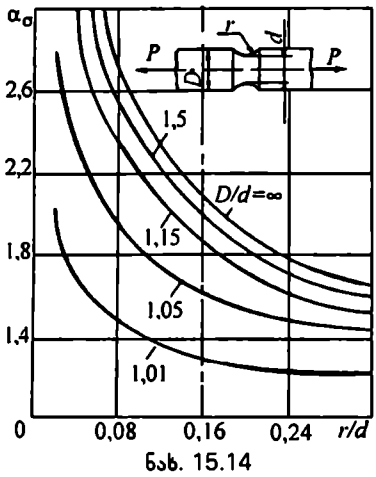
$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ნომ}}}, \quad (15.28)$$

სადაც σ_{\max} - მაქსიმალური ადგილობრივი ძაბვაა, $\sigma_{\text{ნომ}}$ - ნომინალური ძაბვაა, რომელიც განისაზღვრება, კონცენტრაციის ეფექტის გათვალისწინების გარეშე.



ნახ. 15.13

ანალოგიურად განისაზღვრება კოეფიციენტი მხები ძაბვებისთვისაც. მათთვის (15.2B) ფორმულაში საჭიროა ნორმალური ძაბვების ნაცვლად გავითვალისწინოთ



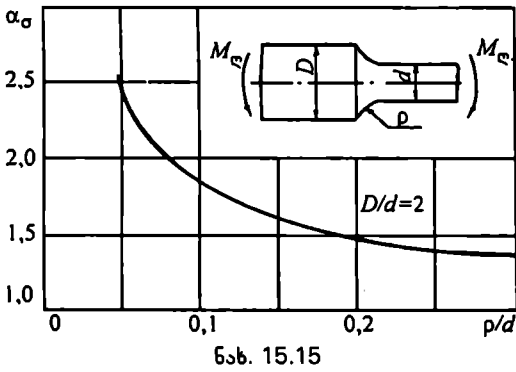
ნახ. 15.14

მხები ძაბვების სიმბოლიკა. ეს შენიშვნა შემდგომშიც ძალაში რჩება. განვიხილოთ ნახვრეტის მქონე ფირფიტის გაჭიმვა (ნახ. 15.13). ნომინალური ძაბვა ამ შემთხვევაში უდრის ნორმალურ ძალას, გაყოფილს ფირფიტის შესუსტებული განივი კვეთის ფარ-

$$\text{თობზე } \sigma_{\text{ნომ}} = \frac{N}{F_A}$$

თუ შესუსტებული კვეთის მახასიათებლის დადგენისას წარმოიქმნება სირთულე, შეიძლება ნომინალური ძაბვა განისაზღვროს დაუსუსტებელი კვეთისთვის. როდესაც ფირფიტას აქვს უსასრულოდ მცირე დიამეტრის ნახვრეტი, ძაბვების მაქსიმალური მნიშვნელობა სამკერ

აღმატება მათ ნომინალურ მნიშვნელობას. ნახვრეტის დიამეტრის ზრდას მოჰყვება მაქსიმალური ძაბვების შემცირება და $d/b=0,7$ შეფარდებისათვის ძაბვების კონცენტრაციის თეორიული კოეფიციენტი მიახლოებით ორის ტოლია (ნახ.15.13, ბ).



ნახ. 15.15

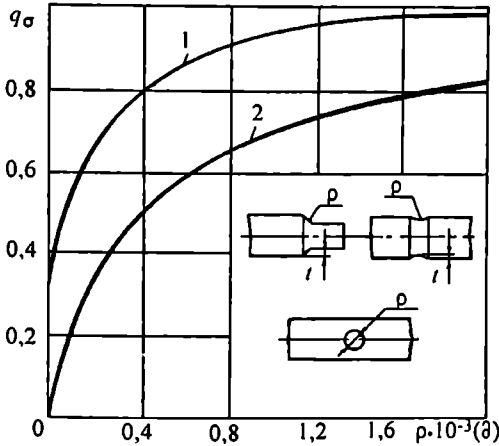
შემცირება. ამ შემთხვევაში ნომინალური ძაბვა განისაზღვრება ფორმულით

$$\sigma_{\text{ნომ}} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

ანალოგიურად განიხილება ძელის ერთდროული ღუნვა და გრეხა, მაგალითად, 15.15 ნახაზზე გამოსახულია ნახშირბადიანი ფოლადის საფხეუროვანი ლილვისათვის გეომეტრიული ზომებისაგან α_{σ} -ს დამოკიდებულების გრაფიკი. ამ შემთხვევაში ნომინალური ნორმალური ძაბვა

$$\sigma_{\text{ნომ}} = \frac{32M_x}{\pi d^3}$$

ძაბვების კონცენტრაციის თეორიული კოეფიციენტი ახასიათებს მხოლოდ დაძაბული მდგომარეობის ერთ-ერთი ძაბვის ფარდობით ზრდას და არ ახასიათებს დაძაბულობას მთლიანობაში. მეორე მხრივ, დაძაბული მდგომარეობის



ნახ. 15.16

ახასიათს დიდი მნიშვნელობა აქვს დაღლილობის ბზარების განვითარებისთვის. კონცენტრაციის ერთნაირი თეორიული კოეფიციენტების შემთხვევაში, მაგრამ განსხვავებული საერთო დაძაბული მდგომარეობისას, დაღლილობის ზღვრები შეიძლება მნიშვნელოვნად განსხვავდებოდეს ერთმანეთისაგან. კიდევ უფრო მნიშვნელოვანია თვით დეტალის მასალის თვისებების გათვალისწინება, მისი მგრძობიარობა ადგილობრივი ძაბვებისადმი.

ამასთან დაკავშირებით შემოაქვთ ე.წ. კონცენტრაციის ეფექტური კოეფიციენტის ცნება, რომელიც წარმოადგენს გლუვი ნიმუშის დაღლილობის σ_{-1} ზღვრის შეფარდებას ძაბვების კონცენტრაციის მქონე იმავე ზომების ნიმუშის დაღლილობის σ_{-1} ზღვართან

ტური კოეფიციენტის ცნება, რომელიც წარმოადგენს გლუვი ნიმუშის დაღლილობის σ_{-1} ზღვრის შეფარდებას ძაბვების კონცენტრაციის მქონე იმავე ზომების ნიმუშის დაღლილობის σ_{-1} ზღვართან

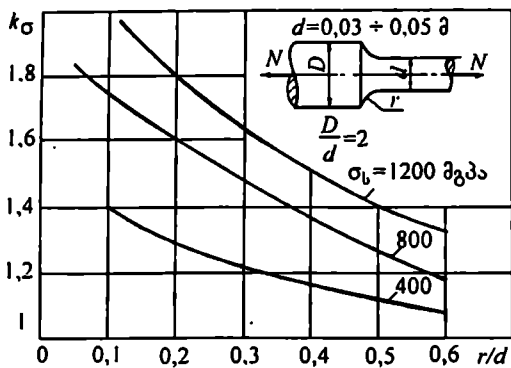
$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1d}} \quad (15.29)$$

არსებობს აგრეთვე ფორმულა, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს თეორიული და ეფექტური კონცენტრაციის კოეფიციენტებს

$$K_\sigma = 1 + q_\sigma (\alpha_\sigma + 1) \quad (15.30)$$

სადაც q_σ არის ადგილობრივი ძაბვებისადმი მასალის მგრძობიარობის კოეფიციენტი. ამ კოეფიციენტის მნიშვნელობა დამოკიდებულია მასალის თვისებებზე. მაგალითად, 15.16 ნახაზზე ნაჩვენებია ამ კოეფიციენტის დამოკიდებულება მომრგვალებულობის ρ რადიუსზე მაღალი სიმტკიცის (1 მრუდი) და საშუალო სიმტკიცის (2 მრუდი) ნორმალიზებული ფოლადების დეტალებისთვის.

მასალებისთვის, რომლებიც კონცენტრაციისადმი არამგრძობიარენი არიან



ნახ. 15.17

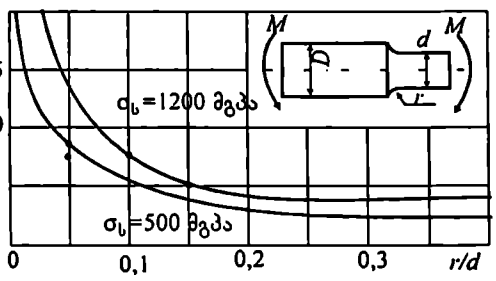
$q_\sigma = 0$, კონცენტრაციის ეფექტური კოეფიციენტი $K_\sigma = 1$. ასეთია მაგალითად, რუხი თუჯი, რომელსაც აქვს შინაგანი ძაბვების კონცენტრაციის წყაროები მსხვილი გრაფიტის ჩანართების სახით. სწორედ ისინი განსაზღვრავენ დადლილობის ზღვრის სიდიდეს როგორც გლუვი, ისე ჩაჭრილი ნიმუშისათვის.

(15.30) ფორმულის გამოყენება სასურველია მხოლოდ იმ

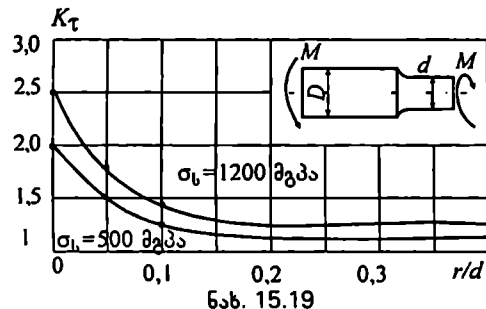
შემთხვევაში, თუ სხვა გამოსავალი არა გვაქვს. ყველაზე სარწმუნო მონაცემი

მიიღება უშუალოდ ექსპერიმენტების საშუალებით. ასეთი გზით დადგენილი შედეგები წარმოდგენილია 15.17-15.19 ნახაზებზე.

საფეხურიანი წრიული განიკვეთიანი ძელის გაჭიმვა-კუმშვისთვის ძაბვების კონცენტრაციის ეფექტური კო-



ნახ. 15.18



ნახ. 15.19

ეფიციენტის გრაფიკები სხვადასხვა სიმტკიცის ფოლადებისთვის გამოსახულია 15.17 ნახაზზე იმ შემთხვევისთვის, როცა დიდი დიამეტრის პატარა დიამეტრთან შეფარდება უდრის ორს და პატარა დიამეტრის ზომები იცვლება ფარგლებში $d = (0,03 + 0,05) \text{ მ}$. გრაფიკებიდან

ჩანს, რომ საფეხურების შეერთების მომრგვალების რადიუსის ზრდასთან ერთად მკვეთრად მცირდება ამ კოეფიციენტის მნიშვნელობა.

ძაბვების კონცენტრაციის ეფექტური კოეფიციენტის მნიშვნელობების ცვალებადობის კანონზომიერება ღუნვისა და გრეხისათვის იგივე ზომების დეტალებისათვის გამოსახულია შესაბამისად 15.18 და 15.19 ნახაზზე. აქაც შეერთების ადგილის მომრგვალების რადიუსის ზრდას მოჰყვება K_σ -ს და K_τ -ს მკვეთრი შემცირება.

§114. მასშტაბური ეფექტი

როგორც ნაჩვენები იყო, რაც უფრო დიდია დეტალის ზომები, რომელიც ღუნვას განიცდის, მით მეტია ძაბვის ეფექტური კოეფიციენტი. (ნახ.15.18). ეს ეხება არა მარტო განხილულ კონკრეტულ მაგალითს, არამედ ზოგად ხასიათს ატარებს. ამ ეფექტის გამოვლენის მიზეზია მეტალურგიული, ტექნოლოგიური და სტატისტიკური ფაქტორები.

მეტალურგიული ფაქტორი დაკავშირებულია ნაჭედის ან სხმულის ზომების ზრდის შემთხვევაში ლითონის მექანიკური თვისებების გაუარესებასთან. ეს გასაგები იქნება, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ ამ შემთხვევაში გაუარესდება ჰედვის დროს დამუშავების პირობები. მთელ მოცულობაში რთულდება ხარისხიანი თერმული დამუშავება და ა.შ. ამ ფაქტორის გასათვალისწინებლად უნდა დავამზადოთ საჭირო ზომების ნიმუშები ნამზადიდან და მათი გამოცდით დავადგინოთ დადლილობის ზღვარი.

მეორე ტექნოლოგიური ფაქტორი დაკავშირებულია იმასთან, რომ ნიმუშების მექანიკური დამზადებისას მათ ზედაპირთან წარმოიქმნება ნარჩენი ძაბვები და ცივანჭედი, რომლებიც მცირე და დიდი ზომების ნიმუშების დადლილობის ზღვარზე სხვადასხვაგვარად მოქმედებენ. ამ ფაქტორის მოქმედების შესუსტებისთვის საჭიროა დეტალის ზედაპირის ჰრით დამუშავება მრავალი გავლით ან ნიმუშის მოწვა ვაკუუმში ნარჩენი ძაბვების და ცივკედის მოსახსნელად და ერთდროულად ჟანგვის გამოსარიცხად.

მასშტაბური ფაქტორის კოეფიციენტი უდრის დეტალის დადლილობის ზღვრის შეფარდებას სტანდარტული ნიმუშის დადლილობის ზღვართან

$$\epsilon_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}} \quad (15.31)$$

ეს კოეფიციენტი, როგორც აღვნიშნეთ, გამოხატავს ნიმუშის ზომებისგან დადლილობის ზღვრის დამოკიდებულებას. მაგრამ ძაბვების კონცენტრაციის განხილვისას ნიმუშის ზომები სხვა მხრივაც მოქმედებს დადლილობის ზღვარზე. ამის დასტურია 15.18 ნახაზზე გამოსახული გრაფიკები. ამიტომ ამ ფაქტორების გაყოფას პირობითი ხასიათი აქვს და ხშირად მათ აერთიანებენ და კომპლექსურად გამოხატავენ. ასეთი მიდგომის საფუძველი ისიც არის, რომ დადლილობის ბზარების წარმოქმნა და მათი გავრცელება სტატისტიკურ ხასიათს ატარებს და შესაბამისი პროცესების შესასწავლად, როგორც წესი, გამოიყენება ალბათობის თეორიის მეთოდები.

როგორც აღვნიშნეთ, ძაბვების კონცენტრაციას შეუძლია ზეგავლენა მოახდინოს ცალკეულ დეფექტებზე, გამოიწვიოს მიკრობზარების წარმოქმნა და პლასტიკური დეფორმაციების დაგროვებით მათი გავრცელება. თუ მაღალი დონის ძაბვების მოქმედების არე მცირე იქნება, იმის ალბათობა, რომ ნიმუშის მასალის დეფექტები ზუსტად ამ არეში მოხვდებიან, ნაკლებია და დადლილობის

ზღვარიც იზრდება. პირიქით, თუ ეს არე საკმაოდ დიდია, სურათი საწინააღმდეგო იქნება და დალილობის ზღვარიც მცირდება. ამრიგად, არა მარტო ძაბვების დონეს, მათ ცვალებადობასაც აქვს მნიშვნელობა. ეს უკანასკნელი შეიძლება გამოიხატოს ადგილობრივი ძაბვების გრადიენტის საშუალებით (ნახ. 15.13)

$$G = \left. \frac{d\sigma}{dx} \right|_{x=\frac{d}{2}}$$

გრადიენტის ფარდობითი მნიშვნელობაა

$$G_0 = \frac{1}{\sigma_{\max}} \frac{d\sigma}{dx}$$

როგორც აღვნიშნეთ, დალილობის ზღვარი უშუალოდ დაკავშირებულია ზემოაღნიშნული არის სიდიდესთან, რომელშიც მაღალი დონის ძაბვები მოქმედებენ. ძაბვების ცვალებადობის გრადიენტის ზრდას მოჰყვება დალილობის ზღვარზე ადგილობრივი ძაბვების ზეგავლენის შემცირება. გრადიენტით ეს არე მხოლოდ ერთი მიმართულებით, ძაბვების ცვალებადობის მიმართულებით, განიხილავრება. მეორე მიმართულებით ეს არე შემოიფარგლება მაქსიმალური ძაბვების მოქმედების კერის L სიგრძით. მაგალითად, თუ 15.13 ნახაზზე ნაჩვენებია ფირფიტის სისქეა t , მაშინ სიგრძე $L=2t$. გრადიენტისაგან განსხვავებით, L სიგრძის ზრდა აფართოებს მაღალი ძაბვების მოქმედების არეში მასალის სტრუქტურული დეფექტების მოხვედრის ალბათობას და ამიტომ მას მოჰყვება დალილობის ზღვრის შემცირება.

ამრიგად, მაღალი ძაბვების მოქმედების არის მახასიათებელია L/G . ეს სიდიდე განსაზღვრავს დეტალის მგრძობიარობას ადგილობრივი ძაბვებისადმი. თეორიული გამოკვლევების შედეგად, რომლებიც ეყრდნობა ექსპერიმენტულ მონაცემებს პლასტიკური ფოლადებისთვის, ბურთისებრი გრაფიტიანი თუჯისთვის, ალუმინისა და მაგნიუმის შენადნობებისთვის მიღებულია შემდეგი ფორმულა

$$\frac{K_{\sigma}}{\epsilon_{\sigma}} = \frac{2\alpha_{\sigma}}{1 + \left(88,3 \frac{L}{G_0}\right)^{0,5}} \quad (15.32)$$

ამრიგად, დეტალში დეფექტების განაწილების სტატისტიკური ხასიათის გათვალისწინებით მიღებული (15.32) ფორმულა ქამური კოეფიციენტის მნიშვნელობის გაანგარიშების საშუალებას იძლევა, რომელიც ერთდროულად ითვალისწინებს აბსოლუტური ზომების და კონცენტრაციის ეფექტური კოეფიციენტის გავლენას დეტალის დალილობის ზღვარზე.

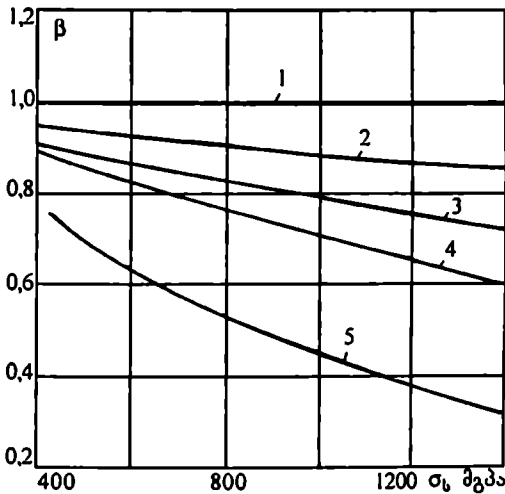
(15.32) ფორმულაში $1/G_0$ და L სიდიდეების განზომილებაა მილიმეტრი. სხვა-

დასხვა სახის კონსტრუქციული ელემენტებისთვის ამ სიდიდეების მნიშვნელობები შეტანილია ცნობარებში. რაც შეეხება ხარისხის ν მაჩვენებელს მისი მნიშვნელობა დამოკიდებულია დეტალის მუშაობის სხვადასხვა პირობებზე, მაგრამ გამოცდის სიხშირის და ტემპერატურის გარკვეული მნიშვნელობების პირობებში მოცემული მასალისთვის ν შეგიძლია მუდმივად ჩავთვალოთ. ნახშირბადიანი ფოლადებისთვის გვაქვს შემდეგი ტოლობა: $\nu = 0,10 - 0,14$.

გრუნისათვის ძაბვების კონცენტრაციის და დეტალის ზომების გასათვალისწინებლად გამოიყენება, აგრეთვე, (15.32) ფორმულა, რომელშიც ნორმალური ძაბვების ნაცვლად უნდა გავითვალისწინოთ მხები ძაბვები. რაც შეეხება ν -ს, მისი მნიშვნელობა (1,5-2,0)-ქერ მეთია ν -ს მნიშვნელობაზე.

§15. დეტალის ზედაპირის დამუშავების ხარისხის გავლენა დაღლილობის ზღვარზე

როგორც აღვნიშნეთ, ზედაპირზე არსებული ყოველგვარი დეფექტი შეიძლება გახდეს დაღლილობის ბზარის ზრდის მიზეზი და დეტალი ადრე გამოვიდეს მწყობრიდან. ამიტომ ზედაპირის დამუშავების ხარისხის ამაღლებით შეიძლება მნიშვნელოვნად გაიზარდოს დაღლილობის ზღვარი. ზედაპირის დამუშავების ხარისხის გავლენის კოეფიციენტი ტოლია მოცემული დამუშავების ხარისხის ზედაპირის მქონე ნიმუშის დაღლილობის ზღვრის σ_{-1d} ფარდობისა საგანგებოდ პოლირებულ ზედაპირიანი ნიმუშის დაღლილობის ზღვართან:



ნახ. 15.20

$$\beta = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}} \quad (15.33)$$

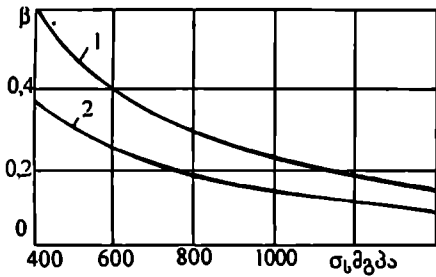
ფოლადებისთვის ამ კოეფიციენტის დამოკიდებულება სიმტკიცის ზღვრის მნიშვნელობაზე წარმოდგენილია 15.20 ნახაზზე. სადაც მრუდები შეესაბამება შემდეგ ნიმუშებს: 1 - საგანგებოდ გაპრიალებული, 2 - გახეხილი, 3 - წმინდად გაჩარხული, 4 - უხეშად გაჩარხული, 5 - ხენჭით დაფარული.

გაჩარხული ალუმინისა და მანგანუმის შენადნობების ნიმუშებისთვის, შესა-

ბამისად, გვექნება: $\beta=0,8\pm 0,9$ და $\beta=0,7\pm 0,8$, ზედაპირის დამუშავების ხარისხი განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ტიტანის შენადნობებისთვის. ასე, მაგალითად, მისგან დამზადებული გაჩარხული ნიმუშებისთვის დადლილობის ზღვარი ნორმალური ტემპერატურის პირობებში დაახლოებით 33%-ით მცირეა გახეხილი ნიმუშის იმავე მახასიათებელთან შედარებით.

აქ განხილული ფაქტორები ამცირებენ დადლილობის ზღვარს, რაზეც მოწმობს ის, რომ $\beta < 1$. კერძოდ, მრუდი 5-ის შესაბამისად (ნახ.15.20), ის შეიძლება სამჯერ შემცირდეს.

დადლილობის ზღვარი შეიძლება მნიშვნელოვნად შემცირდეს ზედაპირის სხვადასხვა სახის დაზიანების შედეგად. მეტად არასასურველია მასზე რბილი ფენის წარმოქმნა, რაჩიგ უმნიშვნელო სისქისაც უნდა იყოს იგი. ასეთი ფენა



ნახ. 15.21

შეიძლება წარმოიქმნას ზედაპირზე, მაგალითად, გაუნახშირბადების ან სპილენძით დაფარვის შედეგად. ამ რბილ ფენაში არსებობს დადლილობის ბზარების ჩასახვის და გავრცელების ხელსაყრელი პირობები, რის შედეგად ისინი შემდგომ იოლად ვრცელდებიან მთელ კვეთზე.

კოროზიის გამო აგრესულ გარემოში მოთავსებული ნიმუშის დადლილობის ზღვარი, როგორც წესი,

მნიშვნელოვნად მცირდება და ეს გარემოება შეიძლება გავითვალისწინოთ (15.33) ფორმულის საშუალებით, სადაც σ_{-1} და σ_{-1} უნდა ჩავთვალოთ საგანგებოდ გაპრიალებული ნიმუშის დადლილობის ზღვრებად, ხოლო პირველი მათგანი მიღებულია აგრესიულ გარემოში გამოცდით. ამ კოეფიციენტის მნიშვნელობების სიმტკიცის ზღვარზე დამოკიდებულება, მიღებული მტკნარ და ზღვის წყალში ფოლადის ნიმუშების გამოცდით, ნაჩვენებია 15.21 ნახაზზე შესაბამისად 1 და 2 მრუდებით.

განვიხილოთ სამი ფაქტორის ერთდროული ჯამური მოქმედება. ამისთვის გამოვიყენოთ ბოლო წლებში ჩატარებული ექსპერიმენტების საფუძველზე ასეთი შემთხვევისთვის მიღებული ფორმულა, რომლის საშუალებით გაიანგარიშება დეტალის დადლილობის ზღვარი

$$\sigma_{-1} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma}} \quad (15.34)$$

სადაც გამოყენებულია აღნიშვნა

$$K_{\sigma} = \frac{K_{\sigma}}{\epsilon_{\sigma}} + \frac{1}{\beta} - 1 \quad (15.35)$$

არსებობს ზედაპირების ეფექტური დამუშავების მეთოდები, რომლებსაც შეუძლია ნიმუშის დაღლილობის ზღვრის მნიშვნელოვნად გაზრდა. ამ მეთოდებს განეკუთვნება ზედაპირის ციკვიდვა, გორგოლაჭებით მოგორვა, საფანტით შემოქრევა, მაღალი სიხშირის დენების გამოყენებით ზედაპირული წრთობა, ცემენტაცია და შემდგომ საფანტით შემოქრევა.

ასეთი სახით ზედაპირის დამუშავების ეფექტურობა შეგვიძლია დავადგინოთ შემდეგი ფორმულით

$$\beta^* = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1e}}, \quad (15.36)$$

ცხრილი 15.1

დამუშავების ტიპი	ნიმუშის ტიპი	დიამეტრი (მმ)	β^*
მაღალი სიხშირის დენებით წრთობა	კონცენტრაციის გარეშე	7-20 30-40	1,3÷1,6 1,2÷1,5
	კონცენტრაციის ვითარებაში	7÷20 30-40	1,6-2,8 1,5-2,5
აზოტება 0,1÷0,4 მმ სიღრმეზე	კონცენტრაციის გარეშე	8÷15 30-40	1,15-1,25 1,10-1,15
	კონცენტრაციის ვითარებაში	8÷15 30-40	1,9-3,0 1,3-2,0
ცემენტაცია 0,2 ÷0,6 მმ სიღრმეზე	კონცენტრაციის გარეშე	8÷15 30÷40	1,2-2,1 1,1-1,5
	კონცენტრაციის ვითარებაში	8÷15 30-40	1,5-2,5 1,2-2,0
გორგოლაჭებით მოგორვა	კონცენტრაციის გარეშე	7÷20 30÷40	1,2-1,4 1,1-1,3
	კონცენტრაციის ვითარებაში	7÷20 30-40	1,5-2,2 1,3-1,8
შემოქრევა საფანტით	კონცენტრაციის გარეშე	7-20 30÷40	1,1-1,3 1,0-1,2
	კონცენტრაციის ვითარებაში	7-20 30÷40	1,4-2,5 1,1-1,5

სადაც σ_{-1}^* -ლ σ_{-1} ლ ზედაპირის დამუშავების გარეშე და დამუშავების შემდეგ მოცემული დეტალის დაღლილობის ზღვრებია. (15.35) ფორმულის გათვალისწინებით საბოლოოდ მივიღებთ

$$K_{\sigma} = \left(\frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}} + \frac{1}{\beta} - 1 \right) \frac{1}{\beta^*}. \quad (15.37)$$

β^* კოეფიციენტის მნიშვნელობები ნახშირბადოვანი და ლეგირებული კონსტრუქციული ფოლადებისთვის მოცემულია 15.1 ცხრილში.

დეტალის ზედაპირის დამუშავების მეთოდები, რომლებზეც ზემოთ იყო საუბარი, მნიშვნელოვნად ამალლებს დაღლილობის ზღვარს. მაგრამ საგულისხმოა ისიც, რომ თუ ზედაპირის დამუშავება ხარისხიანი არ იქნება, დაღლილობის ზღვარი შეიძლება შემცირდეს.

§116. დეტალის ძაბვების ზღვრული ამპლიტუდების დიაგრამა. დაღლილობითი სიმტკიცის მარაგის კოეფიციენტი

ნიმუშის ძაბვების ზღვრული ამპლიტუდების დადგენა და მათ საფუძველზე ფორმულების მიღება ნიმუშის სიმტკიცეზე გაანგარიშებისა და დაღლილობის ზღვრის შესაბამისი სიმტკიცის მარაგის კოეფიციენტის გაანგარიშების საშუალებას იძლევა. მაგრამ, როგორც აღინიშნა ასეთი მონაცემებით არ შეიძლება რეალური დეტალის გაანგარიშება, რადგანაც, ნიმუშისაგან განსხვავებით, გასათვალისწინებელია შემდეგი დამახასიათებელი მონაცემები: ძაბვების კონცენტრაცია, გეომეტრიული ზომები, ზედაპირის დამუშავების ხარისხი და ა.შ. კერძოდ, სიმეტრიული ციკლის შემთხვევისთვის ნიმუშის და დეტალის დაღლილობის ზღვრები ერთმანეთთან დაკავშირებულია $(K_{\sigma})_{-1}$ კოეფიციენტის საშუალებით

$$\sigma_{-1} = \frac{\sigma_{-1}}{(K_{\sigma})_{-1}}. \quad (15.38)$$

ნიმუშის დაღლილობის ზღვარი ნებისმიერი ციკლისთვის შეიძლება წარმოვადგინოთ (15.16) ფორმულით.

მრავალი ექსპერიმენტის საფუძველზე დადგინდა, რომ დეტალის თავისებურებანი ზეგავლენას ახდენს მხოლოდ ძაბვების ცვალებად მდგენელზე, ე.ი. σ_{α} -ზე. ძაბვების ამპლიტუდის ზღვრული მნიშვნელობის დადგენისთვის გამოიყენება (15.38) ფორმულის მსგავსი თანაფარდობა

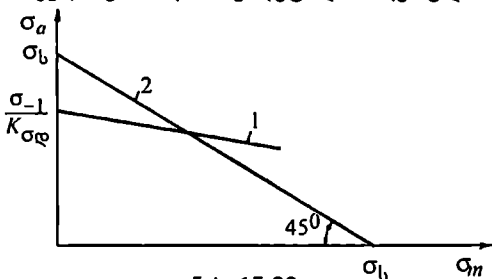
$$(\sigma_{\alpha})_{\sigma} = \frac{\sigma_{\alpha}}{(K_{\sigma})_r}. \quad (15.39)$$

ექსპერიმენტების საშუალებით აგრეთვე დადგინდა, რომ ნებისმიერი ციკლისთვის დეტალის თავისებურებები მიახლოებით განისაზღვრება ერთი და იგივე კოეფიციენტის საშუალებით, ე.ი. გვაქვს თანაფარდობები

$$(K_{\sigma\epsilon})_r = (K_{\sigma\epsilon})_{-1} = K_{\sigma\epsilon} \quad (15.40)$$

ამ კოეფიციენტის დასადგენად გამოიყენება (15.37) ფორმულა.

აქედან გამომდინარე, დეტალის ზღვრული ამპლიტუდების დიაგრამა მიიღება ნიმუშის დიაგრამებიდან (ნახ. 15.10; ნახ. 15.12) ორდინატების $K_{\sigma\epsilon}$ სიდიდეებზე გაყოფით. კერძოდ, 15.12 ნახაზის სქემატული დიაგრამის ნაცვლად დეტალისათვის მივიღებთ 15.22 ნახაზზე გამოსახულ დიაგრამას.



ნახ. 15.22

ნათქვამიდან გამომდინარე, დეტალის ძაბვების ზღვრული ამპლიტუდა მიიღება (15.21) ფორმულიდან 15.11 ნახაზის პირველი უბნის შესაბამისად

$$\sigma_{\sigma\epsilon} = \frac{1}{K_{\sigma\epsilon}} (\sigma_{-1} - \psi_{1\sigma} \sigma_m) \quad (15.41)$$

ისეთივე გარდაქმნებით, როგორც ვაკეთდა (15.22) ფორმულის მიღებისას, დავადგენთ დადებითი სიმტკიცის მარაგის კოეფიციენტს

$$n_{r\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma\epsilon} \sigma_a + \psi_{1\sigma} \sigma_m}, \quad (-1 \leq r \leq 0). \quad (15.42)$$

ანალოგიურად, (15.25)-ის საფუძველზე, მეორე უბნისთვისაც მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$n_{r\sigma} = \frac{\psi_{2\sigma} \sigma_s}{K_{\sigma\epsilon} \sigma_a + \psi_{2\sigma} \sigma_m}, \quad (0 \leq r \leq 1). \quad (15.43)$$

აქაც, როგორც ნიმუშისთვის, შეგვიძლია არ განავსხვაოთ უბნები და დადებითი ზღვრის და სიმტკიცის ზღვრის შესაბამისად ჩავატაროთ ორი განვარცხება. ანალიზი, რომელიც ვაკეთდა ნიმუშისთვის მარაგის კოეფიციენტების სხვადასხვა მნიშვნელობის შესწავლისას, აქაც ძალაში რჩება.

დეტალებისთვის, რომლებიც მუშაობს ციკლურად ცვალებადი მხები ძაბვების პირობებში, ფორმულები ინარჩუნებს სტრუქტურას, მხოლოდ საჭიროა

ნორმალური ძაბვების შეცვლა მხები ძაბვებით. კერძოდ, (15.42) ფორმულის ნაცვლად მივიღებთ

$$n_{\tau r} = \frac{\tau - 1}{K_{\tau\sigma} \tau_{\sigma} + \psi_{1\tau} \tau_m}, \quad (-1 \leq r \leq 0). \quad (15.44)$$

ხშირად დეტალები მუშაობს რთული დაძაბული ციკლურად ცვალებადი ნორმალური და მხები ძაბვების მოქმედების პირობებში. ასეთი დაძაბული მდგომარეობის ანალიზისთვის, როგორც წესი, გამოიყენება გაფისა და პოლარდის ემპირიული ფორმულა

$$\frac{1}{n_r^2} = \frac{1}{n_{r\sigma}^2} + \frac{1}{n_{\tau r}^2}, \quad (15.45)$$

სადაც n_r დაღლილობის ზღვრის შესაბამისი დეტალების სიმტკიცის მარაგის კოეფიციენტი; $n_{r\sigma}$, $n_{\tau r}$ - იგივე კოეფიციენტებია, მაგრამ პირველი მათგანი გაანგარიშებულია, როცა $\tau=0$, მეორე კი, როცა $\sigma=0$. (15.45) ფორმულა შეიძლება გადაიწეროს შემდეგნაირად

$$n_r = \frac{n_{r\sigma} \cdot n_{\tau r}}{\sqrt{n_{r\sigma}^2 + n_{\tau r}^2}}. \quad (15.46)$$

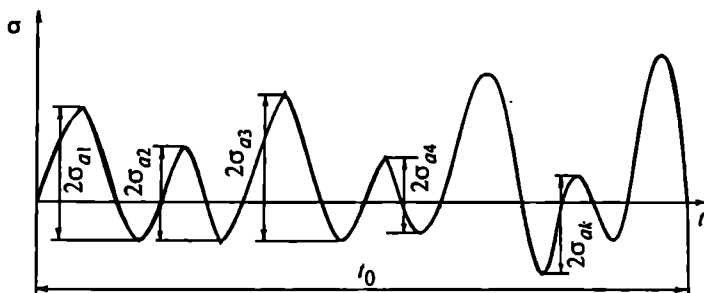
ეს ფორმულა გამოიყენება როგორც დროთა განმავლობაში ერთი და იმავე პერიოდულობით ცვალებადი σ და τ ძაბვების მოქმედებისას, რომლებიც ერთდროულად აღწევს თავის ექსტრემალურ მნიშვნელობებს, ასევე იმ შემთხვევაშიც, როდესაც ეს პირობა არ სრულდება.

მუშაობისუნარიანი დეტალისთვის საჭიროა დაღლილობის ზღვრის შესაბამისი სიმტკიცის მარაგის კოეფიციენტის დადგენა. მისი სიდიდე განპირობებულია კონსტრუქციების შექმნის ტექნოლოგიური კულტურით, მასალების ხარისხით, დეტალების ექსპლუატაციის პირობების განასაზღვრის სიზუსტით და ა.შ. თუ ყოველგვარი შემთხვევითი ფაქტორები, რომლებსაც შეუძლიათ გაანგარიშების შედეგებზე გაუთვალისწინებელი ზეგავლენის მოხდენა, მინიმუმამდე ადევანილი, მარაგის კოეფიციენტი შეიძლება შესაბამისად შემცირდეს. საერთოდ, მანქანათმშენებლობაში იღებენ $n_{\sigma} = 1.5-2.5$.

განგარიშებების განხილული მეთოდი, კა ფართოდ გამოიყენება მანქანათმშენებლობაში. მაგრამ თანამედროვე პირობებში სულ უფრო და უფრო აქტუალური ხდება დეტალების გაანგარიშება ძაბვების არასტაციონარული ცვალებადობის და მასალის მექანიკური თვისებების შემთხვევითი ხასიათის გათვალისწინებით.

§117. დეტალის სიმტკიცის შეფასება მუშაობის არასტაციონარული რეჟიმებისათვის

თანამედროვე მანქანათმშენებლობაში ზემოთ მოყვანილი ფორმულები ფართოდ გამოიყენება. მაგრამ მომწიფდა ვითარება, რომელიც მოითხოვს ძაბვების ცვალებადობის არასტაციონარული რეჟიმების გათვალისწინებით საანგარიშო მეთოდების შემდგომ დაზუსტებას. ეს უშუალოდ დაკავშირებულია ექსპლუატაციის პირობებთან. მაგალითად, ავტომანქანის სამუშაო დროის რესურსის დადგენისას გასათვალისწინებელია გზების ზარისხი, რომლებზედაც შემდგომში მას, ძირითადად, მოუწევს გამოყენება. ამ თვალსაზრისით, საწყისი საანგარიშო კრიტერიუმები სხვადასხვა იქნება ქალაქში და სოფლად მოსავლის აღებისთვის გამოსაყენებელი მანქანების გაანგარიშებისას.



ნახ. 15.23

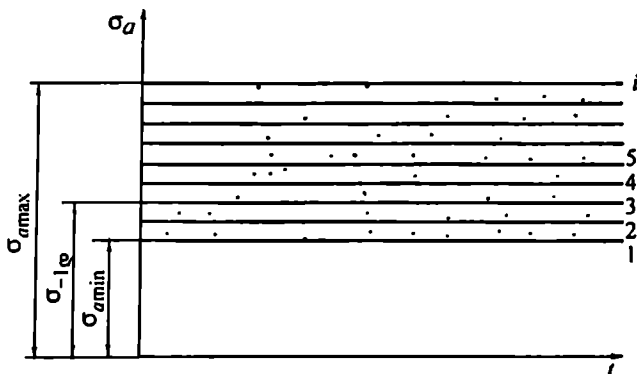
არსებობს არასტაციონარული რეჟიმების დადგენის სხვადასხვა ხერხი. ერთი მათგანი ითვალისწინებს მანქანის საცდელი ნიმუშის დამზადებას და მის გამოცდას რეალურ სამუშაო პირობებში. ასეთი გამოცდა საშუალებას გვაძლევს ხელსაწყოების დახმარებით ჩავწეროთ ცალკეული დეტალების ძაბვების ცვალებადობის გრაფიკი (ნახ.15.23) და იგი გამოვიყენოთ დეტალის მუშაობის დროის რესურსის დასადგენად. გრაფიკი აგებული უნდა იყოს ისეთი შედარებით დიდი l_0 დროის მონაკვეთისთვის, რომ შეიძლებოდეს შედეგების სტატისტიკური დამუშავება. ორი მეზობელი ექსტრემალური წერტილის შესაბამისი ძაბვების მნიშვნელობების ნახევარსხვაობას ვიღებთ, როგორც ამპლიტუდას. მათ სიმრავლეს გაზომილ მონაკვეთში ბლოკი ეწოდება.

შემდგომში გაანგარიშებისას ჩავთვლით, რომ დეტალის მუშაობის რესურსი ასეთი ბლოკებისაგან შედგება და მათი რაოდენობით განისაზღვრება. სარწმუნო შედეგების მისაღებად ბლოკში ასობით, ზოგჯერ ათასობით ამპლიტუდა უნდა იყოს მოთავსებული.

ამის შემდეგ ვაგებთ ბლოკისთვის ძაბვების ამპლიტუდებიდან σ_{amax} უდიდეს და σ_{amin} უმცირეს მნიშვნელობებს და მათ მიერ განსაზღვრულ მონაკვეთს ვყოფთ

ვიწრო ზოლებად (ნახ. 15.24). ნებისმიერ ბლოკში შემავალი ამპლიტუდა მოხვდება ერთ-ერთ ზოლში, რომელიც 15.24 ნახაზზე წარმოდგენილია წერტილით.

აღნიშნოთ ბლოკის i -ნომრიან ზოლში შემავალი ამპლიტუდების საშუალო სიდიდე σ_{ai} და მათი რიცხვი P_i ასობით. შემოვიღოთ დაზიანების დაგროვების ცნება. განვიხილოთ სიმეტრიული ციკლის შემთხვევა. ჩავთვალოთ, რომ ყოველ



ნახ. 15.24

ციკლს დეტალში შეაქვს გარკვეული სიდიდის დაზიანება და ის საერთო დაზიანებათა რიცხვს ასეთივე დაზიანებას უმატებს. თუ σ_{ai} ძაბვების ამპლიტუდური მნიშვნელობაა, დალილობითი სიმტკიცის დიაგრამის საშუალებით შეგვიძლია დავადგინოთ ციკლთა რაოდენობა, რომელიც გამოიწვევს დაზიანების დაგროვებას. ჩავთვალოთ დაზიანების დაგროვება 1-ის ტოლად, თუ მას მოჰყვება დეტალის დამსხვრევა. ამ შემთხვევაში ერთ ციკლს შეესაბამება დაზიანება $1/N_i$. ვინაიდან i -ნომრიან ზოლში P_i ასეთი ციკლია, მათ მიერ გამოწვეული დაზიანება იქნება P_i/N_i . ახლა შეგვიძლია ცალკეული ზოლების ამპლიტუდების მიერ გამოწვეული დაზიანებების შეკრებით დავადგინოთ ბლოკის შესაბამისი დაზიანება

$$I_0 = \sum \frac{P_i}{N_i}. \quad (15.47)$$

ამ ჯამში გათვალისწინებულია მხოლოდ ის ზოლები, რომლებისთვისაც $\sigma_{ai} > \sigma_{-1}$. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ზოლისთვის საჭიროა N_i ავიღოთ უსასრულოდ დიდი, რაც იმას ნიშნავს, რომ შესაბამისი ძაბვები დეტალის დაზიანებას არ იწვევს. ნიმუშის დალილობითი სიმტკიცის დიაგრამიდან (ნახ. 15.8) დეტალის დიაგრამის მისაღებად საჭიროა ორდინატების K_{σ} სიდიდეზე გაყოფა.

ბლოკისთვის დაგროვილი დაზიანება, როგორც წესი, მცირეა $I_0 \ll 1$. დეტალის დამსხვრევას იწვევს λ რაოდენობის ბლოკი და მისი განსაზღვრისათვის ვადგენთ პირობას

$$I_0 \lambda = 1. \quad (15.48)$$

ამრიგად, დეტალის მუშაობის რესურსი შეგვიძლია განვსაზღვროთ ბლოკების რაოდენობით, რომელიც იწვევს მის დამსხვრევას

$$\lambda = \frac{1}{\sum \frac{P_i}{N_i}}. \quad (15.49)$$

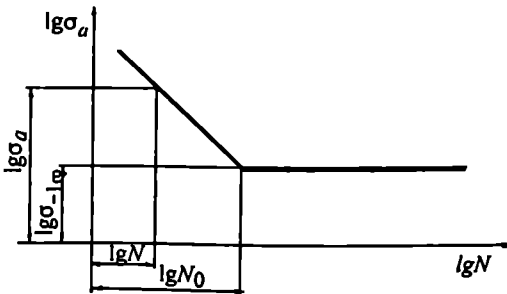
თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ ერთ ბლოკს შეესაბამება დროის t_0 მონაკვეთი (ნახ. 15.23), იოლი დასადგენია დეტალის მუშაობის დროის რესურსიც

$$t = t_0 \lambda = \frac{t_0}{\sum \frac{P_i}{N_i}}. \quad (15.50)$$

დეტალის დამსხვრევის ზომად (15.48) ფორმულაში მივიღეთ ერთის ტოლი დაზიანების სიდიდე. პრაქტიკაში ეს სიდიდე ფართო საზღვრებში იცვლება (0,1-2,0) ამ პარამეტრის ქვედა საზღვრებთან სიახლოვე დამახასიათებელია მანქანებისთვის, რომლებშიც ძაბვების შედარებით მცირე სიდიდის ამპლიტუდებთან ერთად მკვეთრად განსხვავებული ამპლიტუდებიც არის. თუ ბლოკის ამპლიტუდები მკვეთრად არ განსხვავდება ერთმანეთისგან, კრიტიკული დაზიანების სიდიდე უახლოვდება ზედა ზღვარს.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ბლოკში შემავალი ამპლიტუდები დეტალის დაღლილობის ზღვარზე მცირეა. ამ შემთხვევაში, ზემოთ აღნიშნულის შესაბამისად, ნებისმიერი N_i უსასრულოდ დიდია და დაზიანების დაგროვებას ადგილი არა აქვს. შეიძლება ამოცანა სხვაგვარადაც იყოს ჩამოყალიბებული. მოცემულია დეტალის მუშაობის რესურსი და საჭიროა გავიანგარიშოთ სამუშაო რეჟიმის მარაგის n კოეფიციენტი, რომელიც განსაზღვრავს, თუ რამდენჯერ შეიძლება გავზარდოთ ბლოკის ამპლიტუდები, რომ შევინარჩუნოთ მუშაობის რესურსი.

ლოგარითმულ კოორდინატებში დეტალის დაღლილობითი სიმეტრიის დიაგრამა დიდი სიზუსტით შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი წრფის საშუალებით (ნახ. 15.25). დახრილი წრფის განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად:



ნახ. 15.25

$$m(\lg \sigma_a - \lg \sigma_{-1\text{დ}}) = \lg N_0 - \lg N,$$

საიდანაც მივიღებთ შემდეგ განტოლებას

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1\text{დ}}} \right)^m = \frac{N_0}{N}, \quad (15.51)$$

ფორმულაში ხარისხის მაჩვენებელი m ახასიათებს წრფის დახრის კუთხეს, N_0 ციკლთა რიცხვია, რომელიც შეესაბამება წრფეების გადაკვეთის წერტილს. ამ პარამეტრების სიდიდის დადგენა ხდება ექსპერიმენტების საშუალებით.

ამპლიტუდის n -ჯერ გაზრდით ცალკეული ზოლების შესაბამისი N -თვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$\frac{1}{N_i} = \frac{1}{N_0} \left(\frac{n \cdot \sigma_{ai}}{\sigma_{-1\text{დ}}} \right)^m \quad (15.52)$$

შეგვიძლია დავადგინოთ საწყისი ბზარების დასაშვები სიდიდეები, ე.ი. პირობები, რომელთაც უნდა აკმაყოფილებდეს დამზადებული კონსტრუქცია. მიღებული შედეგი გავითვალისწინოთ (15.47) ფორმულაში

$$I_0 = \frac{n^m}{N_0 \cdot \sigma_{-1\text{დ}}^m} \sum P_i \sigma_{ai}^m. \quad (15.53)$$

გამოვიყენოთ (15.48) ფორმულა დეტალის დამსხვრევის მომენტის დასადგენად

$$\frac{n^m \lambda}{N_0 \sigma_{-1\text{დ}}^m} \sum P_i \sigma_{ai}^m = 1.$$

საიდანაც მივიღებთ მარაგის კოეფიციენტის გამოსათვლელ ფორმულას

$$n = \sigma_{-1\text{დ}} \sqrt[m]{\frac{N_0}{\lambda \sum P_i \sigma_{ai}^m}}. \quad (15.54)$$

ამ ფორმულის $\sum P_i \sigma_{ai}^m$ წევრში უნდა გავითვალისწინოთ მხოლოდ ის ამპლიტუდეები, რომლებისთვისაც სრულდება პირობა $n \sigma_{ai} \geq \sigma_{-1\text{დ}}$. ამრიგად, (15.54)

ფორმულის როგორც მარჯვენა, ისე მარცხენა ხაწილი დამოკიდებულია n -ზე. ამიტომ მარაგის კოეფიციენტის მნიშვნელობის დასადგენად ვიყენებთ თანამიმდევრული მიახლოების მეთოდს. ვიღებთ n -ის კონკრეტულ მნიშვნელობას, მაგალითად $n=2$; მისი საშუალებით ვახდენთ (15.54) ფორმულის მარჯვენა ნაწილის გაანგარიშებას და n -ის დაზუსტებული მნიშვნელობის დადგენას. მიღებულ შედეგს ისევ ვიყენებთ (15.54) ფორმულაში და კვლავ ვაზუსტებთ n -ის მნიშვნელობას. ასეთ გაანგარიშებებს ვიმეორებთ მანამ, სანამ ორი თანამიმდევრული გაანგარიშების შესაბამისი n -ის მნიშვნელობები საჭირო სიზუსტით არ დაემთხვევა ერთმანეთს.

ანალოგიური ამოცანები წამოიჭრება დეტალებისთვისაც, როდესაც მათში ერთდროულად მოქმედებს ნორმალური და მხები ძაბვები. ასეთ შემთხვევაში საჭიროა მათთვის ჩავატაროთ დამოუკიდებელი გაანგარიშებები და დავადგინოთ შესაბამისი მარაგის კოეფიციენტები. ნორმალური ძაბვებისთვის მარაგის კოეფიციენტი გამოითვლება (15.54) ფორმულის საშუალებით. მხები ძაბვისთვის გამოიყენება იგივე ფორმულა, ოღონდ მასში ნორმალური ძაბვები უნდა შეიცვალოს მხები ძაბვებით. საბოლოოდ, მარაგის ჯამური კოეფიციენტის დადგენა ხდება (15.46) ფორმულის საშუალებით.

ფანქარე ფანქარე	ზომები			კუთხის ფანქარე	საქონლო სიღრმეები დონებისათვის												1 კმ. მ მასა
					b	d	R	x-x		x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀		x ₁ -x ₁		z ₀	
	i _x	i _x	i _{x0max}					i _{x0max}	i _{y0min}	i _{y0min}	i _{x1}	i _{x1}					
	z ₀				სმ ²	სმ ⁴	სმ	სმ ⁴	სმ	სმ ⁴	სმ	სმ ⁴	სმ	სმ ⁴	სმ		
5	50	4	5.5	1.8	2.96	7.11	1.55	11.27	1.95	2.95	1.00	4.16	1.33	2.32			
					3.89	9.21	1.54	14.63	1.94	3.80	0.99	5.42	1.38	3.05			
					4.80	11.20	1.53	17.77	1.92	4.63	0.98	6.57	1.42	3.77			
5.6	56	4	6.0	2.0	5.69	13.07	1.52	20.72	1.91	5.43	0.98	7.65	1.46	4.47			
					4.38	13.10	1.73	20.79	2.18	5.41	1.11	7.69	1.52	3.44			
					5.41	16.00	1.72	25.36	2.16	6.59	1.10	9.41	1.57	4.25			
6.3	63	4	7.0	2.3	4.96	18.90	1.95	29.90	2.45	7.81	1.25	11.0	1.69	3.90			
					6.13	23.10	1.94	36.80	2.44	9.52	1.25	13.7	1.74	4.81			
					7.28	27.10	1.93	42.90	2.43	11.20	1.24	15.9	1.78	5.72			
7	70	4.5	8	2.7	6.20	29.0	2.16	46.0	2.72	12.0	1.39	17.0	1.88	4.87			
					6.86	31.9	2.16	50.7	2.72	13.2	1.39	18.7	1.90	5.38			
					8.15	37.6	2.15	59.6	2.71	15.5	1.38	22.1	1.94	6.39			
7.5	75	6	9	3.0	9.42	43.0	2.14	68.2	2.69	17.8	1.37	25.2	1.99	7.39			
					10.7	48.2	2.12	76.4	2.68	20.0	1.37	28.2	2.02	8.37			
					7.39	39.5	2.31	62.6	2.91	16.4	1.49	23.1	2.02	5.80			
7.5	75	7	9	3.0	8.78	46.6	2.30	73.9	2.90	19.3	1.48	27.3	2.06	6.99			
					10.1	53.3	2.29	84.6	2.89	22.1	1.47	31.2	2.10	7.96			
					11.5	59.8	2.28	94.9	2.87	24.8	1.47	35.0	2.15	9.02			
		9			12.8	66.1	2.27	105.0	2.86	27.5	1.46	27.5	2.18	10.1			

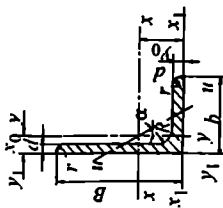
დანართი № 1, გაგრძელება

პროცენტის დასახელება	ზომები			კვლევის ფართობი	საქონლარს სიდიდეები დერეფნისთვის										1 კმ-ის მ შასა
	b	d	R		x-x		x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀		x ₁ -x ₁		z ₀		
					I _x	i _x	I _{x0max}	i _{x0max}	I _{y0min}	i _{y0min}	I _{xv}	i _{xv}			
შ				სკ ²	სკ ⁴	სკ	სკ ⁴	სკ	სკ ⁴	სკ	სკ ⁴	სკ			
8	80	5.5	9	3.0	8.63	52.7	2.47	83.6	3.11	21.8	1.59	30.9	2.17	6.78	
		9.38			57.0	2.47	90.4	3.11	23.5	1.58	33.4	2.19	7.36		
		10.80			65.3	2.45	104.6	3.09	27.0	1.58	38.3	2.23	8.51		
9	90	6	10	3.3	12.30	73.4	2.44	116.4	3.08	30.3	1.57	43.0	2.27	9.65	
		10.60			82.10	2.78	130.0	3.50	34.0	1.79	48.1	2.43	8.33		
		12.30			94.30	2.77	150.0	3.49	38.9	1.78	55.4	2.47	9.64		
10	100	6.5	12	4.0	13.90	106.0	2.76	168.4	3.48	43.8	1.77	62.3	2.51	10.90	
		15.60			118.0	2.75	186.0	3.46	48.6	1.77	68.0	2.55	12.20		
		12.80			122.0	3.09	193.5	3.89	50.7	1.99	71.4	2.68	10.10		
11	110	7	12	4.0	13.80	131.0	3.08	207.0	3.88	54.2	1.98	76.4	2.71	10.80	
		15.60			147.0	3.07	233.5	3.87	60.9	1.98	86.3	2.75	12.20		
		19.20			179.0	3.05	284.8	3.84	74.1	1.96	110.0	2.83	15.10		
11	110	12	12	4.0	22.80	209.0	3.03	331.0	3.81	86.9	1.95	122.0	2.91	17.90	
		26.30			237.0	3.00	375.0	3.78	99.3	1.94	138.0	2.99	20.60		
		29.70			264.0	2.98	416.0	3.74	112.6	1.94	152.0	3.06	23.30		
11	110	7	12	4.0	15.20	176.0	3.40	279.0	4.29	72.7	2.19	106.0	2.96	11.90	
		17.20			198.2	3.39	315.0	4.28	81.8	2.18	116.0	3.00	13.50		

დანართი № 1, კატეგორიული

ფორმები	საქონლის ფაბრიკა		საქონლო სიდიდეები დერეფნისთვის												1 გრძ. მ მბა
			x-x		x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀		x ₁ -x ₁		z				
			I _x	I _x	I _{x,max}	I _{x,min}	I _{y,max}	I _{y,min}	I _y						
			სმ ⁴	სმ	სმ ⁴	სმ	სმ ⁴	სმ	სმ ⁴	სმ					
			სმ ²												
			19,7	3,87	467	4,87	122	2,49	172	3,36	15,5				
			22,0	3,86	520	4,86	136	2,48	192	3,40	17,3				
			24,3	3,85	571	4,84	149	2,47	211	3,45	19,1				
12,5		14	28,9	3,82	670	4,82	174	2,46	248	3,53	22,7				
			33,4	3,80	764	4,78	200	2,45	282	3,61	26,2				
			37,8	3,78	853	4,75	224	2,44	315	3,68	29,6				
			24,7	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,76	19,4				
14		14	27,3	4,33	814	5,46	211	2,78	301	3,82	21,5				
			32,5	4,31	957	5,43	248	2,76	354	3,90	25,5				
			31,4	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,30	24,7				
			34,4	4,95	1341	6,24	348	3,18	496	4,35	27,0				
			37,4	4,94	1450	6,23	376	3,17	537	4,39	29,4				
16		16	43,6	4,92	1662	6,20	431	3,16	615	4,47	34,0				
			49,1	4,89	1866	6,17	485	3,14	690	4,55	38,5				
			54,8	4,87	2061	6,13	537	3,13	771	4,63	43,0				
			60,4	4,85	2248	6,10	589	3,12	830	4,70	47,4				

საქმის ფართობი	ზომები		* საცნობარო სიდიდეები დერეხნისათვის												1 გრძ. მ მბს
	b	d	R	x-x		x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀		x ₁ -x ₁		z ₀			
				f _x	i _x	f _{x,0max}	f _{x,0min}	f _{y,0min}	f _{y,0max}	f _{x1}	f _{x1}				
	შე			სმ ⁴	სმ	სმ ⁴	სმ	სმ ⁴	სმ	სმ ⁴	სმ	სმ ⁴	სმ	სმ	სმ
18	180	12	16	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	716	4,95	30,5			
		12		1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	776	4,89	33,1			
		12		1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	1073	5,37	37,0			
		13		1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	1156	5,42	39,9			
		14		2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	1236	5,46	42,8			
	200	16	18	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	1393	5,54	48,7			
		20		2871	6,12	4860	7,72	1182	3,93	1689	5,70	60,1			
		25		3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	2028	5,89	74,0			
		30		4020	6,00	6351	7,55	1698	3,89	2332	6,07	87,6			
		14		2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	1655	5,91	47,4			
22	220	16	21	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	1869	6,02	53,8			
		16		4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	2775	6,75	61,5			
		18		5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	3069	6,83	68,9			
		20		5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	3395	6,91	76,1			
	250	22	24	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	3691	7,00	83,3			
		25		7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	4119	7,11	94,0			
		28		7717	7,61	12244	9,59	3190	4,90	4527	7,23	104,5			
25	250	30		8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	4788	7,31	111,4			
		35		9281	7,53	14683	9,47	3879	4,87	5402	7,53	128,5			



პრატანატოლგვერდიანი კუთხოვანები გოტ-8510-80 დანართი №2

ფანქვანის ფანქვანის ფანქვანის	ზომები						სვეტის ფართობი F	სვეტის საკუთარი სიდიდეები ფორმულებით						I _{xy}	γ ₀	ფორმულად დაბრუნებული კუთხე	1 გრადუსის კუთხე
	B	b	d	R	r	მ		x-x		y-y		II-II					
								I _x	i _x	I _y	i _y	I _{imin}	i _{imin}				
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,70	0,78	0,22	0,44	0,13	0,34	0,22	0,42	0,85	0,392	0,91
3/2*	30	20	3	3,5	1,2	1,43	1,27	0,94	0,45	0,56	0,26	0,43	0,43	0,51	1,0	0,427	1,12
		4	1,86	1,61	0,93	0,56	0,55	0,34	0,43	0,54	0,54	1,04	0,421	1,46			
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	0,28	0,43	0,47	0,49	1,08	0,382	1,17
		4	1,94	1,93	1,00	0,57	0,54	0,35	0,43	0,59	1,12	0,374	1,52				
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	3,06	1,27	0,93	0,70	0,56	0,54	0,96	0,59	1,32	0,365	1,48
		4	2,47	3,93	1,26	1,18	0,69	0,71	0,54	1,22	0,63	1,37	0,281	1,94			
		5	3,03	4,73	1,25	1,41	0,68	0,86	0,53	1,44	0,66	1,41	0,374	2,37			
4/3*	40	30	4	4,0	1,3	2,67	4,18	1,25	2,01	0,87	1,09	0,64	1,68	0,78	1,28	0,544	2,26
		5	3,28	5,04	1,24	2,41	0,85	1,33	0,64	2,00	0,82	1,32	0,539	2,46			
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	4,41	1,48	1,32	0,79	0,79	0,61	1,38	0,64	1,47	0,382	1,68
		4	2,80	5,68	1,42	1,69	0,78	1,02	0,60	1,77	0,68	1,51	0,379	2,20			
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	6,18	1,60	1,99	0,91	1,18	0,70	2,01	0,72	1,60	0,403	1,90
		4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	2,59	0,76	1,65	0,401	2,49			
5,6/3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58	11,37	1,78	3,70	1,02	2,19	0,78	3,74	0,84	1,82	0,406	2,81
		5	4,41	13,82	1,77	4,48	1,01	2,65	0,78	4,50	0,88	1,87	0,404	3,46			

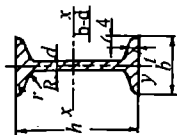
დანართი №2. გეგარქლები

ფენიტის მს/მც/სა/პ	ზომები			კუთხის ფარ თობი F	საქონლობრი სიდიდეები დერეგისტრაციის												ლერძი- სადმი დაბობის კუთხე	1 გრძ. გ მზის	
	B	b	d		R	r	x-x			y-y			z-z			x0			y0
							I _x	I _y	I _z	I _x	I _y	I _z	I _{min}	I _{min}	I _{min}				
6,3/4,0	63	40	6	7,0	2,3	4,04	16,33	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	5,25	0,91	2,03	0,397	3,17		
						4,98	19,90	2,00	6,26	1,12	3,73	0,86	6,41	0,95	2,08	0,396	3,91		
						5,90	23,30	1,99	7,29	1,11	4,36	0,86	7,44	0,99	2,12	0,393	4,63		
6,5/5*	65	50	6	6,0	2,0	7,68	29,60	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	9,27	1,07	2,20	0,386	6,03		
						5,56	23,40	2,05	12,08	1,47	6,41	1,07	9,77	1,26	2,00	0,576	4,36		
						6,60	27,50	2,04	14,10	1,46	7,52	1,07	11,46	1,30	2,04	0,575	5,18		
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	7,62	31,30	2,03	16,10	1,45	8,60	1,06	12,94	1,34	2,08	0,571	5,98		
						8,62	35,00	2,02	18,90	1,44	9,65	1,06	13,61	1,37	2,12	0,570	6,77		
						5,59	27,80	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	9,12	1,05	2,28	0,406	4,39		
7,5/5	75	50	6	8,0	2,7	6,11	34,80	2,39	12,50	1,43	7,24	1,09	12,00	1,17	2,39	0,436	4,79		
						7,25	40,90	2,38	14,60	1,42	8,48	1,08	14,10	1,21	2,44	0,435	5,69		
						8,37	46,80	2,36	16,60	1,41	9,69	1,08	16,20	1,25	2,48	0,435	6,57		
8/5	80	50	5	8,0	2,7	9,47	52,40	2,35	18,50	1,40	10,9	1,07	17,80	1,29	2,52	0,430	7,43		
						6,36	41,60	2,56	12,70	1,41	7,58	1,00	13,20	1,13	2,60	0,387	4,49		
						7,55	49,00	2,55	14,80	1,40	8,88	1,08	15,50	1,17	2,65	0,386	5,92		

საქონლის დასახელება	შეფასების შედეგები				საქონლის სიდიდეები				საქონლის სიდიდეები				საქონლის სიდიდეები	საქონლის სიდიდეები	საქონლის სიდიდეები	საქონლის სიდიდეები	საქონლის სიდიდეები					
	B	b	d	R	r	x-x		y-y		u-u		I _{xy}						x ₀	y ₀	I _{xy}	x ₀	y ₀
						I _x	I _y	I _x	I _y	I _{min}	I _{min}											
						სმ ⁴	სმ	სმ ⁴	სმ	სმ ⁴	სმ											
8/6*	80	60	7	8,0	2,7	52,10	2,53	25,20	1,76	13,60	1,29	21,00	1,49	2,47	0,547	6,39	6,39					
						9,40	2,52	28,70	1,75	15,60	1,29	24,00	1,53	2,52	0,546	7,39	7,39					
						10,7	2,50	32,10	1,74	17,50	1,28	26,80	1,57	2,56	0,544	8,37	8,37					
9/5,6	90	56	6	9,0	3,0	7,86	2,88	19,7	1,58	11,8	1,22	20,50	1,26	2,92	0,384	6,17	6,17					
						8,54	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	22,20	1,28	2,95	0,384	6,70	6,70					
						11,18	2,85	27,1	1,56	16,3	1,21	28,30	1,36	3,04	0,380	8,77	8,77					
10/6,3	100	63	7	10,0	3,3	9,58	3,20	30,6	1,79	18,2	1,38	31,50	1,42	3,23	0,393	7,53	7,53					
						11,10	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	36,10	1,46	3,28	0,392	8,70	8,70					
						12,60	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	40,50	1,50	3,32	0,391	9,87	9,87					
						15,50	3,15	47,2	1,75	28,3	1,35	48,60	1,58	3,40	0,387	12,1	12,1					
10/6,5*	100	65	8	10,0	3,3	11,23	3,19	38,3	1,85	22,77	1,41	38,00	1,52	3,24	0,415	8,81	8,81					
						12,73	3,18	43,0	1,84	25,24	1,41	42,60	1,56	3,28	0,414	9,99	9,99					
						15,67	3,15	51,7	1,82	30,60	1,40	51,20	1,64	3,37	0,410	12,30	12,30					
11/7	110	70	8	11,0	3,3	11,40	3,53	45,6	2,00	26,90	1,53	46,80	1,58	3,55	0,402	8,98	8,98					
						13,90	3,51	54,6	1,98	32,30	1,52	55,90	1,64	3,61	0,400	10,9	10,9					
12,5/8	125	80	7	12,5	3,7	14,10	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	74,70	1,80	4,01	0,407	11,0	11,0					
						16,00	4,00	81,0	2,28	48,8	1,75	84,10	1,84	4,05	0,406	12,6	12,6					
						19,70	3,98	100,0	2,26	59,30	1,74	102,0	1,92	4,14	0,404	15,5	15,5					
						23,40	3,95	117,0	2,24	67,50	1,72	118,0	2,00	4,22	0,400	18,3	18,3					

დანართი. №2. გავრცელება

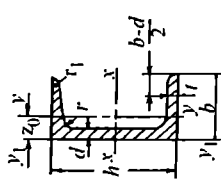
დასახელება	ზოგადი				საშუალო	საშუალო სიდიდეები დერეგისტრაციის				x ₀	y ₀	დერივაციის კოეფიციენტი	1 გრძობის მანძილი			
	B	b	d	R		x-x		y-y						z-z		
						f _x	f _y	f _z	f _{min}					f _{min}	f _{min}	
	140	90	10	12	4,0	18,00	364,0	4,49	120,0	2,58	70,30	1,58	121,0	4,49	0,411	14,1
						22,20	444,0	4,47	146,0	2,56	85,50	1,96	147,0	4,58	0,409	17,5
						22,90	606,0	5,15	186,0	2,85	110,4	2,20	194,0	5,19	0,391	18,0
						25,30	667,0	5,13	204,0	2,84	121,2	2,19	213,0	5,23	0,390	19,8
	160	100	12	13	4,3	30,00	784,0	5,11	239,0	2,82	142,0	2,18	249,0	5,32	0,388	23,6
						34,70	897,0	5,08	272,0	2,80	162,5	2,16	282,0	5,40	0,385	27,3
						28,30	952,0	5,80	276,0	3,12	165,0	2,42	295,0	5,88	0,376	22,2
	180	110	12	14	4,7	33,70	1123	5,77	324,0	3,10	194,0	2,40	348,0	5,97	0,374	26,4
						34,9	1449	6,45	446,0	3,58	264,0	2,75	465,0	6,50	0,392	27,4
						37,9	1568	6,43	482,0	3,57	285,0	2,74	503,0	6,54	0,392	29,7
	200	125	14	14	4,7	43,9	1801	6,41	551,0	3,54	326,0	2,73	575,0	6,62	0,390	34,4
						49,8	2026	6,38	617,0	3,52	367,0	2,72	643,0	6,71	0,388	39,1



დანართი №3

ორტეხები პრეფორირებული ღერებოსათვის

საქონლის რეკვიზიტები	ზომები				კუთხის ფაქტორი	საქონლარით სიდიდეები ღერებოსათვის						I კლ. მ მასა		
	h	b	d	r		R	x-x			y-y				
							I_x სმ ⁴	W_x სმ ³	i_x სმ	S_x^* სმ ³	I_y სმ ⁴		W_y სმ ³	i_y სმ
10	100	55	4.5	7.2	7.0	2.5	198	39.7	4.06	23.0	17.9	6.49	1.22	9.46
12	120	64	4.8	7.3	7.5	3.0	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38	11.50
14	140	73	4.9	7.5	8.0	3.0	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.50	1.55	13.70
16	160	81	5.0	7.8	8.5	3.5	873	109.0	6.57	62.3	58.6	14.50	1.70	15.90
18	180	90	5.1	8.1	9.0	3.5	1290	143.0	7.42	81.4	82.6	18.40	1.88	18.40
20	200	100	5.2	8.4	9.5	4.0	1840	184.0	8.28	104.0	115.0	23.10	2.07	21.00
22	220	110	5.4	8.7	10.0	4.0	2550	232.0	9.13	131.0	157.0	28.60	2.27	24.00
24	240	115	5.6	9.5	10.5	4.0	3460	289.0	9.97	163.0	198.0	34.50	2.54	27.30
27	270	125	6.0	9.8	11.0	4.5	5010	371.0	11.20	210.0	260.0	41.50	2.69	31.50
30	300	135	6.5	10.2	12.0	5.0	7080	472.0	12.30	268.0	337.0	49.90	2.79	36.50
33	330	140	7.0	11.2	13.0	5.0	9840	597.0	13.50	339.0	419.0	59.90	2.89	42.20
36	360	145	7.5	12.3	14.0	6.0	13380	743.0	14.70	423.0	516.0	71.10	3.03	48.60
40	400	155	8.3	13.0	15.0	6.0	19062	953.0	16.20	545.0	667.0	86.10	3.09	57.00
45	450	160	9.0	14.2	16.0	7.0	27696	1231.0	18.10	708.0	808.0	101.00	3.23	66.50
50	500	170	10.0	15.2	17.0	7.0	39727	1589.0	19.90	919.0	1043.0	123.00	3.39	78.55
55	550	180	11.0	16.5	18.0	7.0	55962	2035.0	21.80	1181.0	1356.0	151.00	3.54	92.60
60	600	190	12.0	17.8	20.0	8.0	76806	2560.0	23.60	1491.0	1725.0	182.00	3.54	108.00



დანართი № 4
ვარცლოვანი პროფილი (შეღებრი) ბ(ო)სტ 8240-07
საცნობარო სიდიდეები ღერებებისათვის

იყენებ განმარტავ	ზომები				სვეობის ფარ- ობი	X-Y				Y-Y				Z ₀	1 გდ შ მასა	
	h	b	d	r		F	I _x	W _x	I _x *	i _x	I _y	W _y	I _y			I _y
5	50	32	4,4	7,0	2,5	6,16	22,8	9,1	5,61	1,92	5,161	2,89	0,950	1,16	4,84	
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	7,51	48,6	15,0	9,00	2,54	8,70	3,68	1,090	1,24	5,90	
8	80	40	4,5	7,4	6,5	8,98	89,4	22,4	13,30	3,16	12,80	4,75	1,190	1,31	7,05	
10	100	46	4,5	7,6	7,0	10,90	174,0	34,8	20,40	3,99	20,40	6,46	1,370	1,44	8,59	
12	120	52	4,8	7,8	7,5	13,30	304,0	50,6	29,60	4,78	31,20	8,52	1,530	1,54	10,40	
14	140	58	4,9	8,1	8,0	15,60	491,0	70,2	40,80	5,60	45,40	11,00	1,700	1,67	12,30	
16	160	64	5,0	8,4	8,5	18,10	747,0	93,4	54,10	6,42	63,30	13,80	1,870	1,80	14,20	
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	19,50	823,0	103,0	64,9	6,49	78,80	16,40	2,010	2,00	15,30	
18	180	70	5,1	8,7	9,0	20,70	1090,0	121,0	76,10	7,24	86,00	17,00	2,040	1,94	16,30	
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	22,20	1190,0	132,0	87,80	7,32	105,00	20,00	2,180	2,13	17,40	
20	200	76	5,2	9,0	9,5	23,40	1520,0	152,0	97,80	8,07	113,00	20,50	2,200	2,07	18,40	
22	220	82	5,4	9,5	10,0	26,70	2110,0	192,0	139,00	9,73	151,00	25,10	2,370	2,21	21,00	
24	240	90	5,6	10,0	10,5	30,60	2900,0	242,0	178,00	10,90	208,00	31,60	2,60	2,42	24,00	
27	270	95	6,0	10,5	11,0	35,20	4160,0	308,0	221,00	12,00	262,00	37,30	2,750	2,47	27,70	
30	300	100	6,5	11,0	12,0	40,50	5810,0	387,0	281,00	13,10	327,00	43,60	2,840	2,52	31,80	
33	330	105	7,0	11,7	13,0	46,50	7980,0	484,0	350,00	14,20	410,00	51,80	2,970	2,59	36,50	
36	360	110	7,5	12,6	14,0	53,40	10820,0	601,0	444,00	15,70	517,00	61,90	3,100	2,68	41,90	
															48,50	