

**A. Gugushvili, V. Salukvadaze, V. Chichinadze**

# **Optimal and Adaptive Systems**

**Georgian Technical University  
Tbilisi 1997**

**საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი**

**ა. გუგუშვილი, მ. სალუქვაძე, ვ. ჭიჭინაძე**

# **ოპტიმალური და ადაკტური სისტემები**

**დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ  
სტ-უ-ს სასწავლო-მეთოდური  
საბჭოს მიერ**

**გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“  
თბილისი 1997**



- სარჩევი -

**ნაწილი მესამე**

*სტოქასტიკური სისტემების ოპტიმალური მართვა და ფილტრაცია*

|   |     |
|---|-----|
| <b>თავი მცამეტი</b> .....   | 13  |
| <b>სტოქასტიკური სისტემების ოპტიმალური მართვა</b> .....                        | 13  |
| 13.1. შესავალი.....   | 13  |
| 13.2. შემთხვევითი პროცესი და მისი თვისებები.....                              | 16  |
| 13.3. დინამიკური პროგრამირების სტოქასტიკური ვარიანტი.....                     | 55  |
| 13.4. სტოქასტიკური სისტემების ოპტიმალური მართვის ძირითადი რეზულტატები.....    | 56  |
| <b>თავი მეთოთხმეტი</b> .....  | 63  |
| <b>ფილტრაციის თეორია და სისტემების მდგომარეობის შეფასება</b> .....            | 63  |
| 14.1. შესავალი.....   | 63  |
| 14.2. შემთხვევითი პროცესების წრფივი ფილტრაცია.<br>ვინერ-ჰოპფის განტოლება..... | 64  |
| 14.3 კალმანის ფილტრი (დისკრეტული დრო).....                                    | 80  |
| 14.4. კალმანის ფილტრი: სტაციონალური მდგომარეობის თეორია.....                  | 95  |
| 14.5. კალმან-ბიუსის ფილტრი (უწყვეტი დრო).....                                 | 96  |
| 14.6. კალმანის სტაციონალური ფილტრი.....                                       | 109 |
| 14.7. კალმანის გაფართოებული ფილტრი.....                                       | 117 |



|  |     |
|--|-----|
| 14.8. რიკატის განტოლების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები.....                                 | 125 |
| 14.9. ბრტყელი გიროსკოპული ქანქარას მდგრადობის<br>შეფასება და მისი ოპტიმალური მართვა..... | 132 |
| 14.10. ვონჰემის დაყოფის თეორემა.....   | 143 |

## ნაწილი მეოთხე

### *სისტემების ადაპტური მართვა*

|                      |     |
|----------------------|-----|
| თავი მეთხუთმეტი..... | 153 |
|----------------------|-----|

#### სისტემების ადაპტური მართვის

|  |     |
|--|-----|
| ძირითადი სახეები.....  | 153 |
| 15.1. შესავალი.....  | 153 |
| 15.2. მართვის ადაპტური სისტემების კლასიფიკაცია.....                      | 160 |
| 15.3. ჩქაროსნული გრადიენტის მეთოდი.....                                  | 165 |
| 15.4. ადაპტური მართვა და მასთან დაკავშირებული<br>ამოცანები.....          | 168 |
| 15.5. ადაპტური მართვის სისტემები ცხადი ეტალონური<br>მოდელით.....         | 173 |
| 15.6. ადაპტური მართვის სისტემები არაცხადი მოდელით.....                   | 176 |
| 15.7. მართვის პირდაპირი ადაპტური სისტემები.....                          | 181 |
| 15.8. მართვის პირდაპირი ადაპტური სისტემების<br>რეალიზაციის მეთოდები..... | 184 |
| 15.9. თვითაწყოების ალგორითმის რეალიზაცია.....                            | 190 |
| 15.10. დისკრეტული ადაპტური სისტემები.....                                | 195 |

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| თავი მეთექვსმეტი..... | 204 |
|-----------------------|-----|

|   |     |
|---|-----|
| ექსტრემალური რეგულირების სისტემები..... | 204 |
| 16.1. შესავალი.....                     | 204 |

|  |     |
|--|-----|
| 16.2. სისტემა ექსტრემუმის დამახსოვრებით.....   | 204 |
| 16.3. ერთგანზომილებიანი სისტემის მართვა გრადიენტის მიხედვით.....                     | 206 |
| 16.4. სისტემა დროში წარმოებულის გასომეით.....  | 208 |
| 16.5. ბიჯური ტიპის ექსტრემალური სისტემა.....   | 209 |
| 16.6. ექსტრემალური სისტემა დამხმარე მოღულაციით (სინქრონული დეტექტირების მეთოდი)..... | 210 |
| 16.7. დრეიფის გაელენა მდგრადობაზე.....   | 212 |
| 16.8. გარდამავალი პროცესები და პერიოდული მოძრაობები.....                             | 213 |
| 16.9. ექსტრემალური რეგულირების სისტემის მუშაობის თვისობრიობის გაუმჯობესება.....      | 217 |

**თავი მმმმმმმმმმმმ.....** 221

**ილენტიფიკაცია ადაპტურ სისტემებში.....** 221

|   |     |
|---|-----|
| 17.1. შესავალი.....   | 221 |
| 17.2. მოდელის სტრუქტურის შერჩევა და მისი ადეკვატურობა რეალურ ობიექტთან.....         | 223 |
| 17.3. არაწრფივი ობიექტების სტრუქტურის განსაზღვრა გახსნილ სისტემებში.....            | 231 |
| 17.4. სისტემის ილენტიფიცირებადობა.....  | 240 |
| 17.5. შემავალი სიგნალის ოპტიმალური სინთეზი. წრფივი სიგნალის ოპტიმალური სინთეზი..... | 242 |
| 17.6. შემავალი სიგნალის ოპტიმალური სინთეზი არაწრფივი ობიექტის ილენტიფიკაციისას..... | 250 |
| 17.7. პარამეტრების შეფასება და მაქსიმალური დამაჯერებლობის კრიტერიუმი.....           | 262 |
| 17.8. ოპტიმალური ფილტრაცია და მართვის ობიექტების ილენტიფიკაცია.....                 | 267 |
| 17.9. არაწრფივი ობიექტების პარამეტრების განსაზღვრა.....                             | 279 |

|   |     |
|---|-----|
| 17.10. ობიექტების იდენტიფიცირებადობა მართვის შეკრულ<br>სისტემებში ..... | 283 |
| 17.11. ადაპტური სისტემა იდენტიფიკატორით.....                            | 289 |
| 17.12. მილსაგლინაეი დგანის ადაპტური მართვა<br>იდენტიფიკატორით .....     | 294 |
| ლიტერატურა.....   | 306 |

# ნაწილი მესამე

სტოქასტიკური სისტემების  
ოპტიმალური მართვა და  
ფილტრაცია



# ნაწილი მესამე

## სტოქასტიკური სისტემების ოპტიმალური მართვა და ფილტრაცია

### თავი მეცამეტე

#### სტოქასტიკური სისტემების ოპტიმალური მართვა

##### § 13.1. შესავალი

სტოქასტიკური სისტემების ოპტიმალური მართვა, როგორც დეტერმინირებული სისტემების შემთხვევაში, დამოკიდებულია მოძრაობის განტოლებაზე, ფუნქციონალის სახეზე, მართვის შეზღუდვაზე, სისტემის ფაზურ ტრაექტორიაზე, დროის იმ ინტერვალზე, რომელშიც ცალ-ცალკე ვითარდება სამართავი პროცესები.

სისტემების განტოლებები.

სტოქასტიკური სისტემის აღმწერი განტოლებები დეტერმინირებული სისტემის განტოლებისგან იმით განსხვავდებიან, რომ მათში არიან წევრები, რომლებიც ითვალისწინებენ შემთხვევით შეშფოთებებს. ძირითადად განვიხილავთ სისტემებს, რომლებიც აღიწერებიან შემდეგი სახის განტოლებით:

$$dx(t) = a(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t), u(t))d\xi, \quad t \geq 0. \quad (13.1)$$

ფაზური ვექტორი  $x(t) \in R^n$ , მართვა  $u \in R^m$ , სტანდარტული ვინერის პროცესი  $\xi(t) \in R^k$ . ვექტორ-ფუნქცია

$$a: [0, \infty) \times R^n \times R^m \rightarrow R^n$$

და  $n \times k$  განზომილების  $\sigma$  ვექტორი წინასწარ მოცემულია. უნდა გავითვალისწინოთ, რომ

$$\xi(0) = 0; \quad E[\xi(t)] = 0; \quad E[\xi(t)\xi'(t)] = It, \quad (13.2)$$

$I$ -ერთეულოვანი მატრიცა. (13.1) განტოლებას უწოდებენ იტოს ტიპის განტოლებას. (13.1) განტოლების ამოხსნა  $t \geq 0$  შემთხვევაში დამოკიდებულია საწყის  $x(0) = x_0$  პირობაზე.

თუ (13.1) სისტემის მოძრაობის დრო  $T > 0$  მოცემულია, მაშინ ამბობენ, რომ გვაქვს მართვის ამოცანები დროის სასრულო  $[0, T]$  ინტერვალში. ზოგიერთ კონკრეტულ შემთხვევაში სისტემის მართვა მთავრდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის მიაღწევს მოცემულ მიზნის ფუნქციას. ასეთ შემთხვევაში მოძრაობის დამთავრების მომენტი წინასწარ არ არის განსაზღვრული და შემთხვევით სიდიდეს წარმოადგენს, განისაზღვრება მოძრაობის ტრაექტორიის კონკრეტული სახით. ასეთი სახის ამოცანას წარმოადგენს სტოქასტიკური სწრაფქმედების ამოცანა, ან გაჩერების შემთხვევითი მომენტის ამოცანა. განიხილება აგრეთვე მართვის ამოცანები დროის უსასრულო ინტერვალში.

შეზღუდვები მართვაზე. სტოქასტიკური მართვის ამოცანების გადაწყვეტა დამოკიდებულია იმ შეზღუდვებზე, რომლებიც არის დადებული მმართველ ზემოქმედებებზე.

$$u(t) \in U, \quad (13.3)$$

სადაც სიმრავლე  $U \subset R^m$  (13.3) შეზღუდვა ნიშნავს, რომ მართვის ყველა რეალიზაციები ეკუთვნიან  $U$  სიმრავლეს. (13.3) შეზღუდვის გარდა შეიძლება გამოვიყენოთ ინტეგრალური შეზღუდვები:

$$\int_0^T |u(t)|^\sigma \leq u_0 \quad (13.4)$$

სადაც  $\sigma > 0$ ,  $u_0 > 0$ —მოცემული მუდმივებია. თუ  $\sigma = 1$ , გვაქვს შეზღუდვა მართვის ჯამურ იმპულსზე. ხოლო  $\sigma = 2$  შემთხვევაში გვაქვს ენერგეტიკული შეზღუდვა.

იმ შემთხვევაში თუ ყველა ფაზური კოორდინატა არ იზომება, მაშინ ოპტიმალური მართვა შეიძლება დავაგეგმაროთ როგორც დროის ფუნქცია. ასეთ ოპტიმალურ მართვას უწოდებენ პროგრამულს. მას აღნიშნავენ—"პ-მართვა".

თუ ფაზური ვექტორი მთლიანად შეიძლება გაიზომოს მოძრაობის მთელ ინტერვალში, მაშინ ოპტიმალურ მართვას უწოდებენ "C-მართვას" და აღიწერება განტოლებით

$$dx(t) = \alpha(t, x(t), u(t, x_i))dt + \sigma(t, x(t), u(t, x_i))d\xi(t) \quad (13.5)$$

მიზნის ფუნქციონალი (თვისობრიობის კრიტერიუმი). სტოქსტიკური სისტემებისათვის თვისობრიობის კრიტერიუმი წარმოადგენს მოცემული ფუნქციონალების მათემატიკურ ლოდინს, რომლებიც დამოკიდებული არიან მართვაზე და სისტემის ტრაექტორიაზე. თვისობრიობის კრიტერიუმი  $[0, T]$  დროის ინტერვალში ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$I(u) = M \left[ F(x(T)) + \int_0^T F_1(t, x(t), u) dt \right], \quad (13.6)$$

$F$  და  $F_1$ —მოცემული ფუნქციებია, ე. ი.

$$F: R^n \rightarrow R', \quad F_1: [0, \infty] \times R^n \times R^m \rightarrow R' \quad (13.7)$$

როგორც დეტერმინირებულ შემთხვევაში, მართვის (13.1), (13.6) ამოცანას  $F = 0$  შემთხვევაში უწოდებენ ლაგრანჟის ამოცანას, ხოლო  $F_1 = 0$ —მაიერის ამოცანას და ზოგად შემთხვევაში—ბოლცის ამოცანას. (13.1), (13.6) ამოცანა ყოველთვის შეიძლება დავიყვანოთ მაიერის ამოცანაზე, თუ შემოვიტანთ ახალ  $x_{n+1}(t)$  ცვლადს

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F_1(t, x(t), u(t)); \quad x_{n+1}(0) = 0, \quad (13.8)$$

მაშინ  $x_{n+1}(T)$  ტოლია (13.6) განტოლების მეორე მდგენელის და თვისობრიობის (13.6) კრიტერიუმი მიიღებს სახეს:

$$I_1 = M \left[ F(x(T)) + x_{n+1}(T) \right], \quad (13.9)$$

ე.ი. მართვის საწყისი (13.1), (13.6) ამოცანა დაყვანილია მაიერის (13.1), (13.8) ამოცანაზე  $I_1$  თვისობრიობის კრიტერიუმით.

ზოგიერთ შემთხვევაში საინტერესოა იმ ალბათობის განსაზღვრა, როდესაც სისტემა მიაღწევს მოცემულ მიზნობრივ  $G$  სიმრავლეს. შესაბამისი თვისობრიობის კრიტერიუმი (13.6)–დან მიიღება:

$$P \{ x(t) \in G, \quad 0 \leq t \leq T \} \quad (13.10)$$

$P$  აღნიშნულია ხდომილობის ალბათობა. ეხლა განვიხილოთ მართვის ზოგიერთი ამოცანები, რომლებშიც მოძრა-



ობის დამთავრების მომენტი შემთხვევითი სიდიდეა და განისაზღვრება კონკრეტული ტრაექტორიით. ალენიშნით  $\tau_x(u)$  (13.1) სისტემის მიერ  $G$  სიმრავლის პირველადი მიღწევის მომენტი  $u$  მართვისას და საწყისი  $x(0) = x$  მნიშვნელობისას. სტოქასტიკური სწრაფქმედება მდგომარეობს  $u$  ცვლადით  $M\tau_x(u)$  ფუნქციონალის მინიმიზაციაში. თუ (13.1) სისტემის მოძრაობა მიმდინარეობს დროის შეუზღუდავ ინტერვალში, მაშინ თვისობრიობის კრიტერიუმს აქვს სახე:

$$M \int_0^{\infty} F_1(t, x(t), u(t)) dt \quad (13.11)$$

(13.1), (13.11) ამოცანას უწოდებს სტოქასტიკური სტაბილიზაციის ოპტიმალურ ამოცანას. ასეთი სახელწოდება გამომდინარეობს იქიდან, რომ (13.1), (13.11) ამოცანაში ზოგიერთი პირობების დაცვისას ოპტიმალური მართვა (13.1) სისტემას გახდის ასიმპტოტურად მდგრადს.

## § 13.2. შემთხვევითი პროცესი და მისი თვისებები.

ავტომატური მართვის ბევრი სისტემისათვის აუცილებელია განხილული იყოს შესასვლელი ზემოქმედებები დროითი შემთხვევითი პროცესების სახით. რეალურ სისტემებში მიმდინარე პროცესები ყოველთვის შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც შემთხვევითი პროცესები. შემდეგში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ არსებობს წრფივი დინამიკური სისტემა დეტერმინირებული პარამეტრებით და მის შესასვლელზე მოქმედებს დროის შემთხვევითი პროცესი.

შემთხვევითი ეწოდება ისეთ  $x(t)$  ფუნქციას, რომლის მნიშვნელობა ფიქსირებული  $t$  არგუმენტისას წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს. ამ შემთხვევითი სიდიდეების ოჯახი (ან სიმრავლე), მოცემული  $t \in T$  სიმრავლის გათვალისწინებით, შეადგენს შემთხვევით პროცესს.

$x_1, x_2, \dots, x_n$  შემთხვევითი სიდიდეების სასრულო თანამიმდევრობა შეიძლება დახასიათდეს  $n$ -განზომილებიანი ალბათობის განაწილების  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ფუნქციით. ზოგად შემ-

თხვევაში უწყვეტი შემთხვევითი ფუნქციების აღწერისათვის არ არის საკმარისი ალბათობის განაწილების ფუნქციების სასრულო რაოდენობის გამოყენება. ამიტომ იყენებენ ეგრეთ-წოდებულ მომენტურ ფუნქციებს (აღინიშნება ლიტერატურაში  $M[ \ ]$ , ან  $E[ \ ]$ , ან ხაზით თავზე). ჩვენ გამოვიყენებთ ასეთ ინდექსებს.

$$m_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = M\{[x(t_1)]^{i_1} [x(t_2)]^{i_2} \dots [x(t_n)]^{i_n}\},$$

$$i_k > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad \bullet \quad (13.12)$$

$M$ -მათემატიკური ლოდინის ოპერაციის განსაზღვრის სიმბოლოა. ინდექსების ჯამს  $i_1 + i_2 + \dots + i_n$  უწოდებენ მომენტური ფუნქციების ჯამს.

შემთხვევითი ფუნქცია გაუსის (ნორმალური) განაწილებით მთლიანად ხასიათდება პირველი და მეორე რიგის მომენტებით. პირველი რიგის მომენტია

$$m_x(t) = M[x(t)]; \quad (13.13)$$

$$m_x(t) = \bar{x},$$

ხოლო მეორე რიგის მომენტი ცენტრირებული შემთხვევითი ფუნქციისათვის ხასიათდება გამოსახულებით:

$$k(t_1, t_2) = M\{[x(t_1) - m_x(t_1)][x(t_2) - m_x(t_2)]\} \quad (13.14)$$

გამოსახულებას აგრეთვე უწოდებენ კორელაციურ ფუნქციას. საზღვარგარეთულ ლიტერატურაში კორელაციურ ფუნქციას უწოდებენ გამოსახულებას:

$$k(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad \bullet \quad (13.15)$$

ეს არის საშუალო მნიშვნელობა დროის მიხედვით  $x(t)x(t+\tau)$  ფუნქციების ნამრავლისა. მისგან განსხვავებით, საშუალოს სიმრავლის მიხედვით უწოდებენ კოვარაციულ ფუნქციას (ან კოვარაციას).

$$k_x(t_1, t_2) = M[x(t_1)x(t_2)]. \quad (13.16)$$

გასაშუალება დროის მიხედვით შესაძლებელია მხოლოდ სტაციონარული ერგოდიკული პროცესებისათვის, რაც ზღუდავს განსაზღვრას.

მათემატიკური ლოდინი და კორელაციური ფუნქცია ზოგად შემთხვევაში დამოკიდებულია დროის მომენტებზე და ამით ახასიათებენ არასტაციონარულ პროცესს.

ბევრი პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას ხშირად შემოაქვთ ცნება პროცესის სტაციონარულობის შესახებ და იყენებენ ამ მიზნებისათვის შესაბამის მათემატიკურ აპარატს.

სტაციონარული ფართო გაგებით ეწოდება ისეთ პროცესს, რომლის მათემატიკური ლოდინი მუდმივია. კორელაციური ფუნქცია დამოკიდებულია მხოლოდ არგუმენტების სხვაობაზე:

$$m_x(t) = m_x = const, \quad (13.17)$$

$$k(t_1, t_2) = k(t_1 - t_2) = k(\tau).$$

შემთხვევით პროცესს  $x(t)$  უწოდებენ სტაციონარულს ვიწრო გაგებით, თუ მისი ყველა სასრულგანზომილებიანი განაწილებები დამოკიდებულები არიან მხოლოდ არგუმენტების  $t_1, t_2, \dots, t_n$  სხვაობაზე. ამ განსაზღვრების საფუძველზე სტაციონარული ვიწრო გაგებით შემთხვევითი პროცესის სასრულგანზომილებიანი სიმკვრივეები (განაწილების ფუნქცია, მახასიათებელი ფუნქციები) აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$f_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = h_n(x_1, \dots, x_n, t_1 - t_2, \dots, t_1 - t_n). \quad (13.18)$$

$$(n = 1, 2, \dots).$$

როგორც აღენიშნეთ, ბევრ პრაქტიკულ მაგალითებში ოპერირებას აკეთებენ ტერმინებით: მათემატიკური ლოდინი, კორელაციური და კოვარიაციული ფუნქციები.

$$\xi(t) = \xi_1(t) + j\xi_2(t)$$

კომპლექსური შემთხვევით პროცესისათვის ამ ტერმინების შესაბამისი ფორმულებია:

$$\begin{aligned}
m_{\xi}(t) &= M\{\xi_1(t) + j\xi_2(t)\} = M\{\xi_1(t)\} + \\
&+ jM\{\xi_2(t)\} = m_{\xi_1}(t) + jm_{\xi_2}(t), \\
R_{\xi}(t_1, t_2) &= M\{[\xi(t_1) - m_{\xi}(t_1)][\xi^*(t_2) - m_{\xi}^*(t_2)]\}, \\
K_{\xi}(t_1, t_2) &= M\{\xi(t_1)\xi^*(t_2)\} = R_{\xi}(t_1, t_2) + m_{\xi}(t_1)m_{\xi}^*(t_2),
\end{aligned}$$

სადაც ვარსკვლავით აღნიშნულია კომპლექსურად შეუღლებული ფუნქცია. ნამდვილი ფუნქცია მიიღება თუ შემთხვევით პროცესის წარმოსახვითი ნაწილი ნულის ტოლია.

ბოლო ფორმულიდან ჩანს, რომ კოვარიაციული ფუნქცია განსხვავდება კორელაციურისაგან მასში  $m_{\xi}(t_1)m_{\xi}^*(t_2)$  დეტერმინირებული მდგენელის არსებობით.

თუ შემთხვევითი პროცესის მათემატიკური ლოდინი  $m_{\xi}(t) \equiv 0$ , მაშინ კოვარიაციული და კორელაციური ფუნქციები ერთმანეთს თანხვდებიან.

$\xi(t)$  შემთხვევითი პროცესის მნიშვნელობას დროის ორ  $t_1$  და  $t_2$  მომენტში ეწოდება არაკორელირებული, თუ

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = 0,$$

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = m_{\xi}(t_1)m_{\xi}^*(t_2).$$

განხილულ ორ მნიშვნელობას ეწოდება ორთოგონალური, თუ

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = 0.$$

ვთქვათ, აუცილებელი არ არის არსებობდეს ორი ნამდვილი  $\xi(t)$  და  $\eta(t)$  შემთხვევითი პროცესები  $R_{\xi}(t_1, t_2)$ ,  $R_{\eta}(t_1, t_2)$  კორელაციური და  $K_{\xi}(t_1, t_2)$  და  $K_{\eta}(t_1, t_2)$  კოვარიაციული ფუნქციებით. განვიხილოთ ურთიერთკორელაციური და ურთიერთკოვარიაციული ფუნქციები:

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = M\{[\xi(t_1) - m_{\xi}(t_1)][\eta^*(t_2) - m_{\eta}^*(t_2)]\},$$

$$R_{\eta\xi}(t_1, t_2) = M\left\{\left[\eta(t_1) - m_\eta(t_1)\right] \left[\xi^*(t_2) - m_\xi^*(t_2)\right]\right\},$$

ან

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = M\left\{\xi(t_1)\eta^*(t_2)\right\},$$

$$K_{\eta\xi}(t_1, t_2) = M\left\{\eta(t_1)\xi^*(t_2)\right\}.$$

მაშასადამე, კორელაციური თვისება ორ შემთხვევით  $\xi(t)$  და  $\eta(t)$  პროცესებს შორის დროის ორ სხვადასხვა მომენტში მოცემულია კორელაციური და კოვარიაციული მატრიცებით:

$$R = \begin{bmatrix} R_\xi(t_1, t_2) & R_{\xi\eta}(t_1, t_2) \\ R_{\eta\xi}(t_1, t_2) & R_\eta(t_1, t_2) \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} K_\xi(t_1, t_2) & K_{\xi\eta}(t_1, t_2) \\ K_{\eta\xi}(t_1, t_2) & K_\eta(t_1, t_2) \end{bmatrix}.$$

ორ შემთხვევით  $\xi(t)$  და  $\eta(t)$  პროცესს ეწოდება არაკორელირებული, თუ ურთიერთკორელაციური ფუნქცია დროის ნებისმიერი ორი მომენტისათვის ნულის ტოლია

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = 0,$$

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = m_\xi(t_1)m_\eta^*(t_2).$$

$\xi(t)$  და  $\eta(t)$  პროცესებს ეწოდებათ ორთოგონალური, თუ კოვარიაციული ფუნქცია ნულის ტოლია.

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = 0$$

ზოგიერთ შემთხვევაში მიზანშეწონილია  $R_\xi(t_1, t_2)$  ნაცვლად გამოვიყენოთ შესაბამისი ნორმირებული კორელაციური ფუნქცია  $z_\xi(t_1, t_2)$  ან ნორმირებული ურთიერთკორელაციური ფუნქცია  $z_{\xi\eta}(t_1, t_2)$ :

$$z_{\xi}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_1, t_2) / \sqrt{D_{\xi}(t_1)D_{\xi}(t_2)},$$

$$z_{\xi\eta}(t_1, t_2) = R_{\xi\eta}(t_1, t_2) / \sqrt{D_{\xi}(t_1)D_{\xi}(t_2)}.$$

სტაციონარულ პროცესს, რომლის კორელაციური ფუნქცია პროპორციულია დირაკის დელტა-ფუნქციისა, უწოდებენ სტაციონარულ თეთრ ხმაურს

$$K_x(\tau) = S_0 \delta(\tau), \quad (13.19)$$

სადაც  $S_0$ —მუდმივი თანამამრავლია;  $\delta(t)$ —დირაკის ფუნქციაა.

თეთრი ხმაური—შემთხვევითი პროცესია, როდესაც  $x(t)$  შემთხვევითი ფუნქცია დროის ძალიან მახლობელი მომენტებისათვის არაკორელირებულია. თეთრი ხმაურის ტიპის შემთხვევითი პროცესი პრაქტიკულად არარეალიზებადია, ვინაიდან პირველი დროის ძალიან ახლობელი მომენტებისათვის (ძალიან მცირე  $\tau$ ) შემთხვევითი ფუნქციები პრაქტიკულად დამოკიდებული არიან, მეორე,  $\tau = 0$  შემთხვევაში პროცესის დისპერსია უსასრულოა, ე.ი. ასეთი პროცესის განხორციელებისათვის საჭიროა უსასრულო სიმრავლე, რაც პრაქტიკულად შეუძლებელია. მიუხედავად ამისა თეთრი ხმაურის ტიპის შემთხვევითი პროცესები ფართოდ გამოიყენება სტატისტიკურ დინამიკაში.

სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციები, რომელთათვისაც ერთი რეალიზაციით შეიძლება დადგინდეს ალბათური მახასიათებლები, უწოდებენ შემთხვევით ფუნქციებს ერგოდიკულობის თვისებით, ან ერგოდიკულ სტაციონარულ შემთხვევით ფუნქციებს. ერგოდიკულობის თვისება მდგომარეობს იმაში, რომ შემთხვევითი ფუნქციის ცალკეული რეალიზაცია იძლევა შესაძლებლობას ვიმსჯელოთ მთლიანი რეალიზაციის სტატისტიკურ თვისებებზე.

მათემატიკური ლოდინი გამოითვლება დიდი  $T$ -თვის:

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (13.20)$$

კორელაციური ფუნქცია:

$$k_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt. \quad (13.21)$$

$\xi(t)$  შემთხვევითი პროცესისათვის  $t_1, t_2, \dots, t_n$  დროის ნებისმიერი შესაძლო მომენტისათვის (პროცესის განსაზღვრის არედან) ალბათობის განაწილების  $n$ -განზომილებიანი ფუნქცია განისაზღვრება გამოსახულებით:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2 \dots F(t_n) < x_n\},$$

ამასთან  $F_n\{\}$  ფუნქციაზე დადებულია შემდეგი პირობები:

1) ისინი თავისი  $x_1, x_2, \dots, x_n$  არგუმენტების არაუარყოფითი და არაკლებადი ფუნქციებია, ამასთან

$$F_n(-\infty, \dots, -\infty; t_1, \dots, t_n) = 0,$$

$$F_n(\infty, \dots, \infty; t_1, \dots, t_n) = 1.$$

2) კმაყოფილდება სიმეტრიის პირობები:

ნებისმიერ  $t_1, t_2, \dots, t_n$  გადაადგილებისას  $1, 2, \dots, n$  რიცხვებისათვის სრულდება ტოლობა.

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n).$$

3) აკმაყოფილებს შეთანხმების პირობას:

როდესაც  $m < n$  და ნებისმიერი  $t_{m+1}, t_{m+2}, \dots, t_n$  ადგილი აქვს ტოლობას:

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, +\infty, \dots, +\infty; t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n) =$$

$$= F_m(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m).$$

ალბათობის განაწილების ფუნქციის წარმოებულ

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) =$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

განსაზღვრავს  $n$ -განზომილებიან ალბათობის სიმკვრივეს. ის შეიძლება აგრეთვე განისაზღვროს გამოსახულებით:

$$P_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n =$$

$$P\{x_1 < \xi(t_1) \leq x_1 + dx_1, \dots, x_n < \xi(t_n) \leq x_n + dx_n\}$$

ალბათობის განაწილების ფუნქცია მოიძებნება ალბათობის სიმკვრივის ინტეგრირებით:

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} P_n(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) du_1 \dots du_n.$$

კერძოდ, ერთგანზომილებიანი ალბათობის სიმკვრივე და განაწილების ალბათობა დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან დამოკიდებულებით:

$$P_1(x; t) = \frac{d}{dx} F_1(x; t), F_1(x; t) = \int_{-\infty}^x P_1(u; t) du.$$

ალბათობის სიმკვრივე უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ ოთხ პირობას:

1) არაუარყოფითობის პირობა:

$$P_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) \geq 0.$$

2) ნორმირების პირობა

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n = 1.$$

3) სიმეტრიის პირობა:

$P_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$  ფუნქციები სიმეტრიულია  $x_i$  ნებისმიერი გადაადგილების შემთხვევაში. კვლევით სამუშაოებში ხშირად გამოყენებულია ალბათობის სიმკვრივეები.

4) შეთანხმების პირობა ნებისმიერი  $m < n$ :

$$P_n(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P_n(x_1, \dots, x_m; x_{m+1}, \dots, x_n) dx_{m+1} \dots dx_n.$$

შემდეგ ცხრილში აქვთ პრაქტიკული მნიშვნელობა (ცხრ.13.1) [2]. პრაქტიკულ საკითხებში გვხვდებიან შემთხვევითი ფუნქციები შემდეგი სახის კოვარაციული ფუნქციებით:









$$K_x(\tau) = De^{-a|\tau|},$$

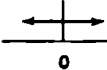
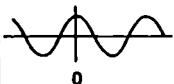

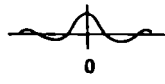

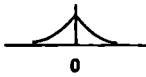

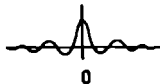
$$K_x(\tau) = De^{-a|\tau|} \cos \omega_0 \tau,$$



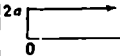




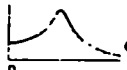
$$K_x(\tau) = De^{-a|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \gamma \sin \omega_0 |\tau|).$$

ყველაფერი ეს და კიდევ სხვა საკითხებიც მოცემულია 13.2, 13.3 ცხრილებში:



| ტიპი  | განაწილების ფუნქცია   |
|---|---|
| <p>ლსკრებული</p>           | <p><math>p(x) = A \delta(x-a) + B \delta(x-b) + \dots + N \delta(x-n)</math>,<br/> სადაც <math>A + B + \dots + N = 1</math></p>   |
| <p>თანბარი</p>             | <p>დანარჩენ შემთხვევებში<br/> <math>p(x) = (b-a)^{-1}, a \leq x \leq b;</math><br/> <math>p = 0</math></p>  |
| <p>ჰარმონიული</p>          | <p>დანარჩენ შემთხვევებში<br/> <math>p(x) = (\pi \sqrt{X^2 - x^2})^{-1},  x  &lt; X;</math><br/> <math>p = 0</math></p>  |
| <p>გაუსის (ნორმალური)</p>  | <p><math>p(x) = (\sigma_x \sqrt{2\pi})^{-1} e^{-(x-\mu_x)^2 / 2\sigma_x^2}</math></p>   |
| <p>ჩელუის</p>              | <p>დანარჩენ შემთხვევებში<br/> <math>p(x) = \frac{x}{c^2} e^{-x^2/c^2}, x \geq 0;</math><br/> <math>p = 0</math></p>   |
| <p>შაქველის</p>            | <p>დანარჩენ შემთხვევებში<br/> <math>p(x) = \frac{x^2}{c^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/c^2}, x \geq 0;</math><br/> <math>p = 0</math></p>  |
| <p>წაყვითლი</p>           | <p>ვთქვათ საწყისი <math>p_1(x)</math> განსაზღვრულია <math>(-\infty, \infty)</math> წაყვითლი და დანარჩენ შემთხვევებში<br/> <math>p(x) = C p_1(x), a \leq x \leq b;</math><br/> <math>p = 0</math><br/> <math>\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = C \int_a^b p_1(x) dx = 1</math></p>   |
| <p>წაქრილი</p>           | <p>ვთქვათ საწყისი <math>p_1(x)</math> განსაზღვრულია <math>(-\infty, \infty)</math> წაქრილი<br/> <math>p(x) = p_1(x), a &lt; x &lt; b;</math><br/> <math>= A \delta(x-a), x = a;</math><br/> <math>= B \delta(x-b), x = b;</math><br/> <math>= 0, x &lt; a \text{ ან } x &gt; b.</math><br/> <math>\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_a^b p_1(x) dx + A + B = 1</math></p> |

| ბ ი ჰ ი                                     | კოვარიაციული ფუნქცია  |
|---|---|
| მუდმივი                                     |  $R_{xx}(\tau) = c^2$  |
| ჰარმონიული                                  |  $R_{xx}(\tau) = \frac{\sigma^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau$                                    |
| თეთრი ხმაური                                |  $R_{xx}(\tau) = a \delta(\tau)$   |
| დაბალსიხშირიანი თეთრი ხმაური                |  $R_{xx}(\tau) = u B \left( \frac{\sin 2\pi B \tau}{2\pi B \tau} \right)$                  |
| სიხშირის მიხედვით შეზღუდული თეთრი ხმაური    |  $R_{xx}(\tau) = u B \left( \frac{\sin \pi B \tau}{\pi B \tau} \right) \cos 2\pi f_0 \tau$ |
| ექსპონენციალური                             |  $R_{xx}(\tau) = e^{-\alpha \tau }$  |
| ექსპონენციალურ-კოსინუსოიდალური              |  $R_{xx}(\tau) = e^{-\alpha \tau } \cos 2\pi f_0 \tau$                                    |
| ექსპონენციალურ-კოსინუსოიდალურ-სინუსოიდალური |  $R_{xx}(\tau) = e^{-\alpha \tau } (b \cos 2\pi f_0 \tau + c \sin 2\pi f_0  \tau )$      |

| ტიპი                                    | სპექტრალური სიმკვრივები   |
|---|---|
| მუდმივი                                 |  $G_{xx}(f) = c^2 \delta(f)$   |
| პარბოლული                               |  $G_{xx}(f) = \frac{X^2}{2} \delta(f - f_0)$   |
| თეთრი ხმაური                            |  $G_{xx}(f) = 2u, f \geq 0;$ დანარჩენ შემთხ. $G_{xx} = 0$  |
| დაბალსიხიანი თეთრი ხმაური               |  $G_{xx}(f) = a, 0 \leq f \leq B;$ დანარჩენ შემთხ. $G_{xx} = 0$  |
| სიხილის ძიხვდელი შეზღუდული თეთრი ხმაური |  $G_{xx}(f) = a, 0 \leq f_0 - (B/2) \leq f \leq f_0 + (B/2);$ დანარჩენ შემთხ. $G_{xx} = 0$   |
| ექსპონენციალური                         |  $G_{xx}(f) = \frac{4a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$   |
| ექსპონენციალურ-კოსინუსოიდალური          |  $G_{xx}(f) = 2a \left[ \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 (f + f_0)^2} + \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 (f - f_0)^2} \right]$                          |
| ექსპონენციალურ-კოსინუსოიდალური          |  $G_{xx}(f) = \frac{2ab + 4\pi c (f + f_0)}{a^2 + 4\pi^2 (f + f_0)^2} + \frac{2ab - 4\pi c (f - f_0)}{a^2 + 4\pi^2 (f - f_0)^2}$ |

მაგალითი 13.1.

დადგინდეს არის თუ არა შემთხვევითი ფუნქცია  $x(t)$  ერგოდიკული, თუ მის კორელაციურ ფუნქციას აქვს სახე:

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}.$$

შევიტანოთ  $K_x(\tau)$  მნიშვნელობა ერგოდიკულობის პირობაში  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) K_x(\tau) d\tau = 0$ ,

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) D_x e^{-\alpha|\tau|} d\tau = \\ & = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[ -\frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha T} - 1) - \frac{D_x}{T} \left( -\frac{T}{\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha T} + \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

ე.ი. შემთხვევითი ფუნქცია  $x(t)$  არის ერგოდიკული.

შემდეგი ფორმულები არის ძირითადი სპექტრალურ თეორიაში:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (13.22)$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (13.23)$$

ფურიეს (13.22) ინტეგრალი საშუალებას იძლევა წარმოვადგინოთ არაპერიოდული ფუნქცია სიხშირეების უწყვეტი მიმდევრობის სინუსოიდების ჯამის სახით. სიხშირის ყოველ დისკრეტულ მნიშვნელობას შეესაბამება ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტების  $C_k$  განსაზღვრული მნიშვნელობა. განვიხილოთ არაპერიოდული ფუნქციის სპექტრი. ზღვრული გადასვლისას მწკრივიდან ფურიეს ინტეგრალზე. ინტეგრალები ცალკეულ სპექტრალურ ხაზებს შორის შეუზღუდავად მცირდება, ვერტიკალური ხაზები სულ უფრო და უფრო უახლოვდებიან ერთმანეთს და ზღვარში მივიღებთ უწყვეტ მრუდს, რომლისთვისაც შემოვიტანოთ აღნიშვნა  $S(\omega)$ .

თითოეული ცალკეული რხევის კომპლექსური ამპლიტუდა უსასრულოდ მცირეა:

$$dc = \frac{1}{\pi} S(\omega) d\omega. \quad (13.24)$$

$S(\omega)$  არის ამპლიტუდა  $(\omega, \omega + d\omega)$  სიხშირის ინტერვალისათვის.  $S(\omega)$  შეიძლება განვიხილოთ როგორც ამპლიტუდების სიმკვრივე, რომელიც მოდის სიხშირის  $(\omega, \omega + d\omega)$  ინტერვალზე. ამიტომ  $S(\omega)$  ფუნქციას უწოდებენ სპექტრალურ სიმკვრივეს.

სპექტრალური ფუნქცია ნამდვილი შემთხვევითი პროცესებისათვის არის ლუწი ფუნქცია:

$$S(\omega) = S(-\omega). \quad (13.25)$$

სპექტრალურ და კორელაციურ ფუნქციებს შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (13.26)$$

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (13.27)$$

ვინაიდან კორელაციური ფუნქცია არის ლუწი ფუნქცია  $K_x(\tau) = K_x(-\tau)$ , ამიტომ (13.26), (13.27) გამოსახულებებიდან მივიღებთ ვინერ-ჰინჩინის ფორმულებს:

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \quad (13.28)$$

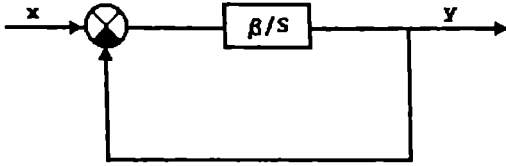
$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (13.29)$$

სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის დისპერსიას აქვს სახე:

$$k_x(0) = D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (13.30)$$

მაგალითი 13.2 [70].

ვიპოვოთ მიმყოლი სისტემის გამოსასვლელის მათემატიკური ლოდინი და კოვარაციული ფუნქცია. მიმყოლი სისტემა წარმოადგენს ინტეგრატორს გამაძლიერებლით. გაძლიერების კოეფიციენტია  $\beta$ . სისტემას ახასიათებს უარყოფითი უკუკავშირი. (ნახ. 13.1).



ნახ. 13.1

სისტემა აღიწერება დიფერენციალური განტოლებით:

$$\dot{y} = \beta(x - y),$$

ან

$$\dot{y} + \beta y = \beta x(t).$$

დაეუშვათ, რომ შემავალი  $x(t)$  სიგნალი შემთხვევითი ფუნქციაა მათემატიკური ლოდინით  $m_x(t) = a + bt$  და კოვარაციული ფუნქციით:  $K_x(t_1, t_2) = De^{-\alpha|t_1 - t_2|}$ .

გამომავალი სიგნალის საწყისი მნიშვნელობა წარმოადგენს შემთხვევით პროცესს,  $x(t)$ -გან დამოუკიდებელს.

ერთგვაროვანი განტოლების  $\dot{u} = -\beta u$  ამონახსნი საწყისი  $u = 1$  მნიშვნელობისას განისაზღვრება ფორმულით:

$$u(t, \tau) e^{-\beta(t-\tau)}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $b = 1$ ,  $a_1 = \beta$ ,

$$a_0 = b_0 = 0.$$

$$m_x(t) = \left( m_{y_0} - a - bt_0 + \frac{b}{\beta} \right) e^{-\beta(t-t_0)} + a - \frac{b}{\beta} + bt,$$

$$\begin{aligned} K_y(t_1, t_2) &= D_{y_0} e^{-\beta(t_1+t_2-2t_0)} + \beta^2 D \int_{t_0}^{t_1} d\tau_1 \int_{t_0}^{t_2} e^{-\beta(t_1-\tau_1+t_2-\tau_2)} - \alpha |\tau_1 - \tau_2| d\tau_2 = \\ &= D_{y_0} e^{-\beta(t_1+t_2-2t_0)} + \frac{\beta^2 D}{\beta^2 - \alpha^2} \left[ e^{-\alpha|t_1-t_2|} - \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta|t_1-t_2|} - e^{-\alpha|t_1-t_0|} - \right. \\ &\quad \left. - \beta(t_2 - t_0) - e^{-\alpha(t_2-t_0) - \beta(t_1-t_0)} + \frac{\alpha + \beta}{\beta} e^{-\beta(t_1+t_2-2t_0)} \right]. \end{aligned}$$

მაგალითი 13.3.

ვიპოვოთ  $x(t) = ue^{i\lambda t}$  შემთხვევითი ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი და კოვარაციული ფუნქცია.  $u$  და  $\lambda$  დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.  $Mu = 0$ ,  $Du = D$ , ხოლო  $\lambda$  განაწილებულია კოშის კანონით სიმკვრივით

$$F(\lambda) = \frac{\alpha}{\pi \alpha^2 + \lambda^2}.$$

ცხადია, რომ  $m_x(t) = 0$ , და მაშასადამე,  $u$  და  $\lambda$  დამოუკიდებლობის გამო

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= M[x(t_1)x(t_2)] = M|u|^2 Me^{i\lambda(t_1-t_2)} = DMe^{i\lambda(t_1-t_2)} = \\ &= \frac{D\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(t_1-t_2)}}{\alpha^2 + \lambda^2} d\lambda = De^{-\alpha|t_1-t_2|}. \end{aligned}$$

მაგალითი 13.4

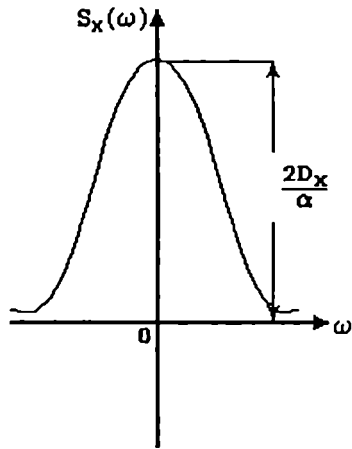
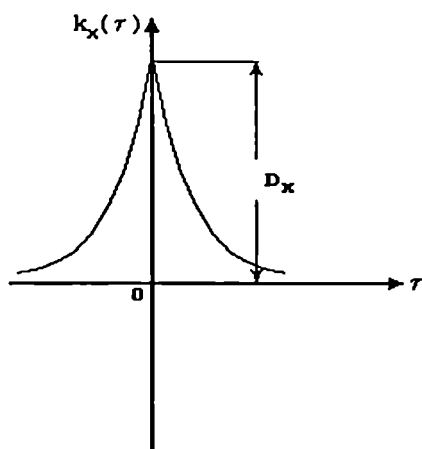
სტაციონარული შემთხვევითი ფუნქციის სახეა

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}.$$

საჭიროა განისაზღვროს სპექტრალური სიმკვრივე  $S(\omega)$ . მივიღებთ:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega \tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} D_x e^{-\alpha\tau} \cos \omega \tau d\tau = \frac{2D_x \alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

$S_x(\omega)$  და  $K_x(\tau)$  გრაფიკები მოცემულია (ნახ.13.2, 13.3).



ნახ.13.2.

ნახ.13.3.

ზოგიერთ ამოცანებში ალბათობის სიმკვრივის ნაცვლად უფრო მოსახერხებელია მახასიათებელი ფუნქციების გამოყენება, რომლებიც წარმოადგენენ ფურიეს გარდაქმნებს ალბათობის სიმკვრივიდან:

$$\begin{aligned} \Phi_n(j\nu_1, \dots, j\nu_n; t_1, \dots, t_n) &= M\{\exp(j\nu_1\xi_1 + \dots + j\nu_n\xi_n)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j(\nu_1 x_1 + \dots + \nu_n x_n)] P_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

(13.31)

მახასიათებელი ფუნქციების ფურიეს უკუ გარდაქმნით მოძებნება ალბათობის სიმკვრივე:

$$\begin{aligned} P_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j(\nu_1 x_1 + \dots + \nu_n x_n)] * \end{aligned}$$



$$* \Phi_n(j\nu_1, \dots, j\nu_n; t_1, \dots, t_n) d\nu_1 \dots d\nu_n. \quad (13.32)$$

ერთგანზომილებიანი შემთხვევისათვის გვექნება:

$$\Phi_1(j\nu; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\nu x) P(x; t) dx, \quad (13.33)$$

$$P_1(x; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\nu x) \Phi_1(j\nu; t) d\nu. \quad (13.34)$$

ამრიგად, განაწილების ფუნქციისა, ალბათობის სიმკვრივესა და მახასიათებელ ფუნქციას შორის არსებობს ცალსახა კავშირები.

მაგალითი 13.5.

ვაჩვენოთ, რომ  $x(t)$  თეთრი ხმაურს აქვს მუდმივი სპექტრალური სიმკვრივე.

ამოხსნა.

სტაციონარულ თეთრი ხმაურს აქვს შემდეგი სახის კორელაციური ფუნქცია:

$$K_x(\tau) = c\delta(\tau),$$

საიდანაც

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c\delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{c}{2\pi}.$$

$c$  სიდიდეს ეწოდება თეთრი ხმაური ინტენსივობა. ამრიგად, სტაციონარული თეთრი ხმაური წარმოადგენს შემთხვევით რხევებს ყველა სიხშირეებზე. ამ რხევების დისპერსია  $\Delta\omega$  უბანში არის მუდმივი და არ არის დამოკიდებული რხევების  $\omega$  სიხშირეზე. დისპერსია მიახლოებით ტოლია:

$$\Delta D_x = S_x^*(\omega) \Delta\omega = \frac{c}{2\pi} \Delta\omega$$

და არ არის დამოკიდებულია  $\omega$  სიხშირეზე.

მაგალითი 13.6.

ვიპოვოთ სპექტრალური სიმკვრივე  $S_x(\omega)$  სტაციონარული შემთხვევითი პროცესისა:

$$x_i(t) = V_k \cos \omega_k t + U_k \sin \omega_k t.$$

ამოხსნა.

კორელაციური ფუნქციის აქვს სახე:

$$K_{x_i}(\tau) = D_k \cos \omega_k \tau,$$

სადაც  $D_k = D[V_k] = D[U_k]$ .

ვაჩვენოთ, რომ სპექტრალური სიმკვრივე  $S_{x_i}(\omega)$  განისაზღვრება გამოსახულებით:

$$S_{x_i}(\omega) = D_k \delta(\omega - \omega_k),$$

სადაც  $\delta(x)$ -დელტა ფუნქციაა.

გამოვიყენოთ ვინერ-ხინჩინის განტოლება:

$$K_{x_i}(\tau) = \int_0^{\infty} S_{x_i}(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \int_0^{\infty} D_k \delta(\omega - \omega_k) \cos \omega \tau d\omega,$$

დელტა-ფუნქციის თვისების გამოყენებით:

$$K_{x_i}(\tau) = D_k \int_{\omega_k - \tau}^{\omega_k + \tau} \delta(\omega - \omega_k) \cos \omega \tau d\omega = D_k \cos \omega_k \tau.$$

შემოვიტანოთ ახალი ფუნქცია  $S_x^*(\omega)$  კომპლექსური სახით:

$$S_x^*(\omega) = S_x(\omega) / 2 \quad \omega \geq 0,$$

$$S_x^*(\omega) = S_x(-\omega) / 2 \quad \omega < 0,$$

$$S_x^*(\omega) = \frac{D_k}{2} \delta(\omega + \omega_k) + \frac{D_k}{2} \delta(\omega - \omega_k).$$

გამოვიყენოთ ფუნქცია:

$$K_{x_i}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega,$$

$$\begin{aligned}
 K_{x_k}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_k}{2} [\delta(\omega + \omega_k) e^{i\omega\tau} + \delta(\omega - \omega_k) e^{i\omega\tau}] d\omega = \\
 &= \frac{D_k}{2} \left[ \int_{-\omega_k - \tau}^{\omega_k + \tau} \delta(\omega + \omega_k) e^{i\omega\tau} d\omega + \int_{\omega_k - \tau}^{\omega_k + \tau} \delta(\omega - \omega_k) e^{i\omega\tau} d\omega \right] = \\
 &= D_k \cos \omega_k \tau.
 \end{aligned}$$

რაც უნდა ლაგვემტკიცებინა.

მაგალითი 13.7.

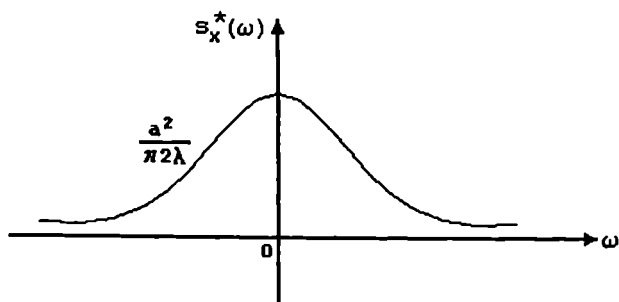
ვიპოვოთ ტელეგრაფული სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე, როდესაც

$$K_x(\tau) = a^2 e^{-2\lambda|\tau|}.$$

ამოხსნა.

$$\begin{aligned}
 S_x^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = & i = j \\
 &= \frac{a^2}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^0 e^{-2\lambda|\tau|} e^{i\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-2\lambda|\tau|} e^{i\omega\tau} d\tau \right] = \\
 &= \frac{a^2}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^0 e^{2\lambda\tau + i\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-2\lambda\tau + i\omega\tau} d\tau \right] = \\
 &= \frac{a^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{2\lambda + i\omega} - \frac{1}{-2\lambda + i\omega} \right] = \frac{a^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{2\lambda + i\omega} + \frac{1}{2\lambda - i\omega} \right] = \\
 &= \frac{a^2}{2\pi} \frac{4\lambda}{(2\lambda)^2 + \omega^2} = \frac{a^2}{\pi} \frac{2\lambda}{(2\lambda)^2 + \omega^2}.
 \end{aligned}$$

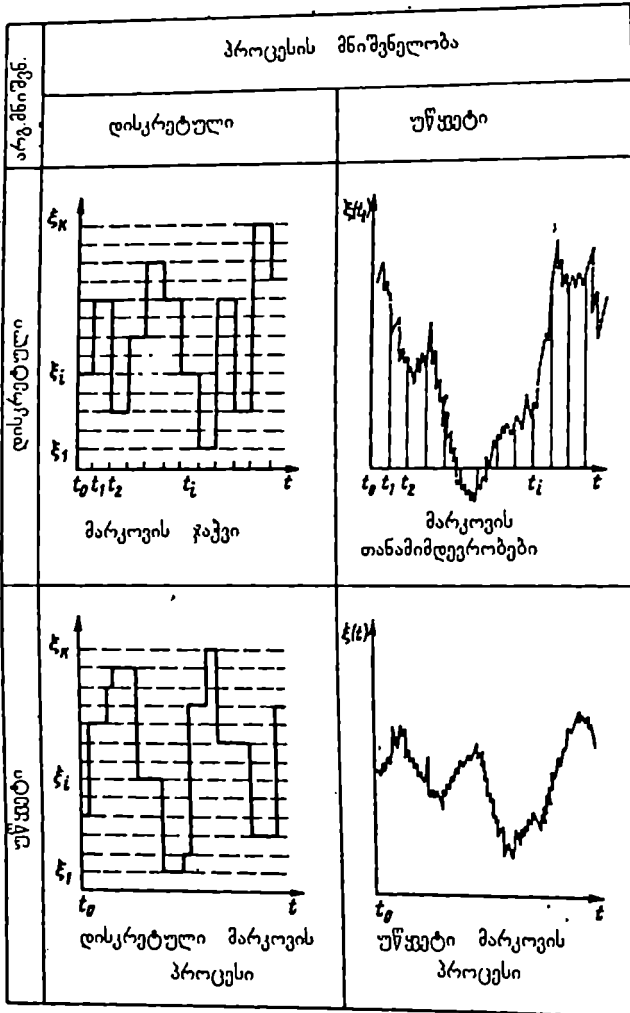
$S_x^*$  გრაფიკი მოცემულია (ნახ. 13.4).



ნახ. 13.4.

მარკოვის შემთხვევითი პროცესები.  
 მარკოვის პროცესების კლასიფიკაცია

განასხვავებენ მარკოვის პროცესების ოთხ ძირითად სახეს: მარკოვის წრედები (მარკოვის პროცესი, რომლის მნიშვნელობის და განსაზღვრების არე-დისკრეტული სიმრავლეებია), მარკოვის თანამიმდევრობები (მარკოვის პროცესი, რომლის მნიშვნელობების არე-უწყვეტი სიმრავლეა, ხოლო განსაზღვრის არე-დისკრეტულია), დისკრეტული მარკოვის პროცესი (მარკოვის პროცესი, რომლის მნიშვნელობის არა-დისკრეტულია, ხოლო განსაზღვრის არე-უწყვეტი სიმრავლეა), უწყვეტი მნიშვნელობის მარკოვის პროცესი (მარკოვის პროცესი, რომლის მნიშვნელობის და განსაზღვრის არე-უწყვეტი სიმრავლეებია). ზემოთ ჩამოთვლილი პროცესების სკალარული დროითი მახასიათებლები მოცემულია 13.4 ცხრილში [91].



მარკოვის პროცესი ეწოდება შემთხვევით პროცესს, რომლისათვის,  $\xi(u)$  ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის შემთხვევი-

თი სიდიდე  $\xi(t)$ ,  $t > u$  არ არის დამოკიდებული  $\xi(s)$ ,  $s > u$ . ამრიგად, ყველა მარკოვის პროცესებისათვის განმსაზღვრელი თვისება მდგომარეობს შემდეგში:  $\xi(t)$  შემთხვევითი პროცესი არის მარკოვისებური, თუ ნებისმიერი დროის  $n$  მომენტისათვის  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$   $[0, T]$  მონაკვეთიდან ბოლო მნიშვნელობის  $\xi(t_n)$  პირობითი განაწილების ფუნქცია  $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_{n-1})$  ფიქსირებული მნიშვნელობისას დამოკიდებულია მხოლოდ  $\xi(t_{n-1})$ , ე.ი. მოცემული  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  მნიშვნელობისას სამართლიანია ტოლობა:

$$P\{\xi(t_n) \leq \xi_n | \xi(t_1) = \xi_1, \dots, \xi(t_{n-1}) = \xi_{n-1}\} = P\{\xi(t_n) \leq \xi_n | \xi(t_{n-1}) = \xi_{n-1}\}. \quad (13.34)$$

დროის სამი მომენტისათვის  $t_i > t_j > t_k$  (13.34) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$P\{\xi(t_i) \leq \xi_i | \xi(t_k) = \xi_k, \xi(t_j) = \xi_j\} = P\{\xi(t_i) \leq \xi_i | \xi(t_j) = \xi_j\}. \quad (13.35)$$

ამიტომ ხშირად მარკოვის პროცესის დამახასიათებელი თვისება შემდეგში მდგომარეობს: თუ ზუსტად არის ცნობილი მარკოვის პროცესი დროის ახლანდელ  $(t_j)$  მომენტში, მაშინ მომავალი მდგომარეობა  $(t_k)$  არ არის დამოკიდებული წარსულ მდგომარეობაზე.

მარკოვის პროცესის განსაზღვრისათვის შეიძლება მივიღოთ აგრეთვე შემდეგი თანაფარდობები:

$$\begin{aligned} P\{\xi(t_i) \leq \xi_i, \xi(t_k) \leq \xi_k | \xi(t_j) = \xi_j\} &= \\ &= P\{\xi(t_i) \leq \xi_i | \xi(t_j) = \xi_j\} P\{\xi(t_k) \leq \xi_k | \xi(t_j) = \xi_j\} \end{aligned} \quad (13.36)$$

ასეთი ჩაწერა ნიშნავს, რომ მარკოვის პროცესის ახლანდელ მომენტში მომავალი და წარსული მდგომარეობები დამოუკიდებელია.

მოყვანილი განსაზღვრებებიდან გამომდინარეობს, რომ მარკოვის პროცესების  $n$ -განზომილებიანი ალბათობის სიმკვრივე

(ან განაწილების ფუნქცია), რომელიც იძლევა შემთხვევით პროცესის სრულ აღწერას, შეიძლება წარმოვადგინოთ განტოლებით:

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = P(\xi_1) \prod_{i=1}^{n-1} P(\xi_{i+1} | \xi_i). \quad (13.37)$$

მარტივი მარკოვის პროცესი აღიწერება ორგანზომილებიანი ალბათობის სიმკვრივით:

$$P_2(\xi_1, \xi_2) = P(\xi_1)P(\xi_2 | \xi_1). \quad (13.38)$$

დროის მიხედვით უწყვეტი მარკოვის პროცესებისათვის ალბათობის გადასვლის ევოლუცია  $P\{\xi(t) \leq \xi | \xi(t_0) = \xi_0\}$  აღიწერება შემდეგი ტიპის განტოლებით:

$$\frac{dP}{dt} = LP, \quad (13.39)$$

სადაც  $L$ —არის წრფივი ოპერატორი (მატრიცა, დიფერენციალური ოპერატორი და ა.შ.). ეს საშუალებას გვაძლევს გამოვიკვლიოთ მარკოვის პროცესის სტატისტიკური მახასიათებლები კარგად დამუშავებული დიფერენციალური განტოლების საშუალებით. მაგალითად, ეგრეთ წოდებული ფოკერ-პლანკ-კოლმოგოროვის ორი განტოლებით [91]. პირდაპირი განტოლებათა:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t | x_0, t_0) &= \frac{\partial}{\partial x} [a(t, x)P(x, t | x_0, t_0)] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b(t, x)P(x, t | x_0, t_0)]. \end{aligned} \quad (13.40)$$

მარკოვის პროცესის შებრუნებული განტოლება:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t_0} P(x, t | x_0, t_0) &= a(t_0, x_0) \frac{\partial}{\partial x_0} P(x, t | x_0, t_0) + \\ &+ \frac{1}{2} b(t_0, x_0) \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} P(x, t | x_0, t_0), \end{aligned} \quad (13.41)$$

სადაც  $P(x, t | x', t')$ —გადასვლის ალბათობის სიმკვრივეა.

$$a(t, x) = K_1(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M \{ [x(t + \Delta t) - x(t)] x(t) = x \} \quad (13.42)$$

უწოდებენ ალების კოეფიციენტს.

$$b(t, x) = K_2(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M \{ [x(t + \Delta t) - x(t)]^2 x(t) = x \} \quad (13.43)$$

უწოდებენ დიფუზიის კოეფიციენტებს.

(13.40) და (13.41) განტოლებები არის კერძოწარმოებულ-ანი განტოლებები და მათი ამოხსნისათვის უნდა გამოვიყენოთ ცნობილი მეთოდები: ცვლადთა დაცალკეების მეთოდი, ლაპლასის გარდაქმნების მეთოდი, მახასიათებელი ფუნქციების მეთოდი, დამოუკიდებელი ცვლადების შეცვლის მეთოდი, გაუსის მიახლოების მეთოდი, რიცხვითი მეთოდები. თავალსაჩინოებისათვის განვიხილოთ ცვლადთა დაცალკეების მეთოდი:

ალებისა და დიფუზიის კოეფიციენტები მუდმივია, მაშინ ფოკერ-პლანკის განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [a(x)P(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b(x)P(x, t)].$$

ამოხსნა ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$P(x, t) = \lambda(x)T(t).$$

გავყოთ ფოკერ-პლანკის განტოლების ორივე მხარე  $P(x, t)$ , გვექნება:

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} [a(x)\lambda(x)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b(x)\lambda(x)] \right\} \lambda^{-1}$$

განტოლების მარცხენა მხარე დამოკიდებულია  $t$ , ხოლო მარჯვენა  $x$ . ამიტომ განტოლების ორივე მხარე დამოკიდებულია ერთიდაიგივე  $-\gamma^2$  კონსტანტაზე, გვექნება:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -\gamma^2,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} [b(x)\lambda(x)] - \frac{d}{dx} [a(x)\lambda(x)] + \gamma^2 A(x) = 0.$$

ამონახსნებს აქვს სახე:



$$T(t) = e^{-\gamma t}$$

$$P(x, t) = \sum \lambda(x, A_n, B_n, \gamma_n) e^{\gamma_n t}$$

$A_n, B_n$  და  $\gamma_n$  განისაზღვრებიან სასაზღვრო და საწყისი პირობებიდან.

მაგალითი 13.8 [91].

განვიხილოთ ფოკერ-პლანკის განტოლების ამოხსნა მარტივი სისტემისათვის:

$$\dot{x} = -ax(t) + u(t), \quad E[u(t)] = 0,$$

$$\text{Cov}\{u(t)u(\tau)\} = D\delta(t - \tau)$$

ფოკერ-პლანკის განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{\partial P_{x(t), x(t_0)}[\beta(t), \beta(t_0)]}{\partial t} = a \frac{\partial \{ \beta(t) P_{x(t), x(t_0)}[\beta(t), \beta(t_0)] \}}{\partial \beta(t)} + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 P_{x(t), x(t_0)}[\beta(t), \beta(t_0)]}{[\partial \beta(t)]^2}$$

ეს განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ უფრო მარტივი სახით:

$$\frac{\partial P[x(t)]}{\partial t} = a \frac{\partial \{ P[x(t)] \}}{\partial x(t)} + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 P[x(t)]}{[\partial x(t)]^2}$$

დაეუშვათ, რომ ნორმალური განაწილება  $V_x(t) = \sigma_x^2(t)$  დისპერსიით და სიმკვრივით:

$$P[x(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x(t)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{[x(t) - \mu x]^2}{\sigma_x^2(t)} \right\},$$

წარმოადგენს ამ განტოლების ამონახსნს. შევიტანოთ სიმკვრივის მნიშვნელობა განტოლებაში და ექსპონენტური წევრის შეკვეცის შემდეგ გვექნება:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma_x^3(t)} \frac{d\sigma_x^2(t)}{dt} + \frac{x(t) - \mu_x(t)}{\sqrt{2\pi}\sigma_x^3(t)} \frac{d\mu_x(t)}{dt} + \\
& + \frac{[x(t) - \mu_x(t)]^2}{2\sqrt{2\pi}\sigma_x^3(t)} \frac{d\sigma_x^2(t)}{dt} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}\sigma_x(t)} - \frac{ax(t)[x(t) - \mu_x(t)]}{\sqrt{2\pi}\sigma_x^3(t)} + \\
& + \frac{1}{2} D \left\{ \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x^2(t)} + \frac{[x(t) - \mu_x(t)]^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_x^3(t)} \right\}.
\end{aligned}$$

გამოვყოთ განტოლების ორივე ნაწილში წევრები, რომლებიც შეიცავენ  $x(t)$  და  $\mu_x(t)$  და წევრები რომლებშიც არ შედიან ეს ცვლადები. გვექნება:

$$\frac{d\sigma_x^2(t)}{dt} = -2a\sigma_x^2(t) + D,$$

$$\frac{d\mu_x(t)}{dt} + \frac{x(t) - \mu_x(t)}{2\sigma_x^2(t)} \frac{d\sigma_x^2(t)}{dt} = -ax(t) + D[x(t) - \mu_x(t)]/2\sigma_x^2(t).$$

თუ პირველ განტოლებას შევიტანთ მეორეში და გავიხსენებთ, რომ  $V_x = \sigma_x^2$ , მაშინ მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს:

$$\frac{dV_x(t)}{dt} = -2aV_x(t) + D,$$

$$\frac{d\mu_x(t)}{dt} = -a\mu_x(t).$$

პირველი განტოლება არის დისპერსიის განტოლება. მეორე განტოლება გვიჩვენებს მათემატიკური ლოდინის ცვლილებას დროში.

ვინერის პროცესი.

ვინერის პროცესი  $v(t)$  განისაზღვრება თეთრი გაუსის ხმაურის საშუალებით და მოცემულია სტოქასტიკური დიფერენციალური განტოლების სახით

$$\frac{dv}{dt} = n(t), \quad v(0) = 0, \quad (13.44)$$

სადაც  $n(t)$ -არის გაუსის სტაციონალური პროცესი, ნულოვანი მათემატიკური ლოდინის და დელტასებური კორელაციური ფუნქციით.

$$M\{n(t)\} = 0 \quad R_n(t_2 - t_1) = \left(\frac{N}{2}\right)\delta(t_2 - t_1). \quad (13.45)$$

(13.44) განტოლებას შეიძლება შემდეგი ინტერპრეტაცია გაუკეთდეს: თეთრი გაუსის ხმაური განისაზღვრება ვინერის პროცესის საშუალებით. (13.44)-დან გამომდინარეობს:

$$v(t) = \int_0^t n(t) dt. \quad (13.46)$$

ეს გამოსახულება შეიძლება ჩაითვალოს ვინერის პროცესის განსაზღვრებად. ინაიდან, ვინერის პროცესი განისაზღვრება თეთრი გაუსის ხმაურის წრფივი გარდაქმნის საშუალებით, ამიტომ ვინერის პროცესი არის გაუსის პროცესი.

(13.46) გამოსახულების თანახმად,  $v(t)$  პროცესის მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, კორელაციური ფუნქცია განისაზღვრებიან შემდეგი გამოსახულებებით:

$$M\{v(t)\} = 0, \quad Dv(t) = \int_0^t \int_0^t M\{n(t_1)n(t_2)\} d\tau_1 d\tau_2 = \frac{N}{2}t,$$

$$R_v(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} M[n(\tau_1)n(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 = \frac{N}{2} \min(t_1, t_2).$$

ერთგანზომილებიან ალბათობას სიმკვრივეს აქვს სახე:

$$P(t, v) = (\pi N t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{v^2}{N t}\right), \quad t > 0.$$

ამრიგად, ვინერის პროცესი არის არასტაციონალური გაუსის პროცესი ნულოვანი მათემატიკური ლოდინით, და დროის პროპორციული დისპერსიით. ვინერის პროცესი მარკოვის პროცესია. დიფუზიის კოეფიციენტები შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

$$\begin{aligned}
 a(t, \nu) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M \{ [\nu(t + \Delta t) - \nu(t)] / \nu(t) \} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} M \{ n(\tau) \} d\tau = 0.
 \end{aligned}
 \tag{13.47}$$

$$\begin{aligned}
 b(t, \nu) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M \{ [\nu(t + \Delta t) - \nu(t)]^2 / \nu(t) \} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} M \{ n(\tau_1) n(\tau_2) \} d\tau_1 d\tau_2 = \frac{N}{2} = \text{const.}
 \end{aligned}
 \tag{13.48}$$

მიღებული კოეფიციენტებისათვის ფოკერ-პლანკის განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{\partial P(t, \nu)}{\partial t} = \left( \frac{1}{4} \right) N^2 P(t, \nu) / \nu^2
 \tag{13.49}$$

მისი ამონახსნია:

$$P(t, \nu) = (\pi N t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\nu^2}{N t}\right) \quad t > 0.
 \tag{13.50}$$

ვინაიდან ალბის კოეფიციენტი ტოლია ნულის, ვინერის ასეთ პროცესს უწოდებენ დიფუზიურს.

ვთქვათ, სისტემა აღიწერება ლანჯევანის დიფერენციალური განტოლებით:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + g(t, x)n(t), \quad x(t_0) = x_0,
 \tag{13.51}$$

სადაც  $f$  და  $g$  დეტერმინირებული თავისი არგუმენტების მიმართ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია, აკმაყოფილებენ ლიპშიცის პირობას.

$n(t)$ -თეთრი გაუსის ხმაურია. ვინერის პროცესის დიფერენციალის გამოყენებით (13.51) მიიღებს სახეს:

$$dx = f(t, x)dt + g(t, x)d\nu(t), \quad x(t_0) = x_0.
 \tag{13.52}$$

$x(t)$  შემთხვევით პროცესს უწოდებენ (13.51), (13.52)

სტოქასტიკური დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას:

$$x(t_0) = x_0.$$

(13.52) გამოსახულების მარჯვენა მხარეს—უწოდებენ სტოქსტიკურ დიფერენციალს, თუ ნებისმიერი  $t \geq t_0$  სამართლიანია შემდეგი ინტეგრალური წარმოდგენა:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t g(\tau, x(\tau)) d\nu(\tau). \quad (13.53)$$

აქ მარჯვენა მხარეში ფიგურირებენ ინტეგრალები შემთხვევითი ფუნქციებიდან—სტოქსტიკური ინტეგრალები. ისინი განსხვავდებიან ჩვეულებრივი ინტეგრალებისაგან. თუ  $f$  და  $g$  ფუნქციები არაშემთხვევითია, მაშინ ჩვეულებრივი ინტეგრალები (კოში-რიმანის და სტილტიესის) განისაზღვრებიან როგორც ზღვრები ინტეგრალური ჯამებისა, როდესაც  $\Delta \rightarrow 0$ .

$$\int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{m-1} f(\tau_i, x(\tau_i)) (t_{i+1} - t_i), \quad (13.54)$$

$$\int_{t_0}^t g(\tau, x(\tau)) d\nu(\tau) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{m-1} g(\tau_i, x(\tau_i)) [\nu(t_{i+1}) - \nu(t_i)]; \quad (13.55)$$

აქ  $t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$ ;  $\Delta = \max(t_{i+1} - t_i)$  და  $\tau_i$  აღნიშნულია ზოგიერთი წერტილები  $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$   $i$ -იური ქვეინტერვალიდან. ნებისმიერი უბან-უბან უწყვეტი  $f(\tau, x)$  და უწყვეტი  $g(\tau, \lambda)$  ფუნქციებისას ინტეგრალური (13.54) (13.55) ჯამების ზღვრული მნიშვნელობები  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = \overline{0, m}$  ქვეინტერვალში არ არიან  $\tau_i$  წერტილების განლაგებაზე.

აღმოჩნდა, რომ ინტეგრალები შემთხვევითი  $f(\tau, x(\tau))$  და  $g(\tau, x(\tau))$  ფუნქციებიდან შეიძლება განისაზღვროს (13.54), (13.55) ფორმულებით შემდეგი პირობების გათვალისწინებისას:

1. შემთხვევითი ფუნქციები  $f(\tau, x(\tau))$  და  $g(\tau, x(\tau))$  საშუალოკვადრატულად თანაბრად უწყვეტია  $[t_0, t]$  მონაკვეთში,

ე.ი.  $M \{ |f(\tau + \Delta, x(\tau + \Delta)) - f(\tau, x(\tau))|^2 \} \rightarrow 0, \Delta \rightarrow 0$  თანაბრად  $\tau \in [t_0, t]$ ; ანალოგიურად  $g(\tau, N(\tau))$  ფუნქციისათვის.

2.  $f(\tau, x(\tau))$  და  $g(\tau, x(\tau))$  ინტეგრირებადი კვადრატულად უფრო ზუსტად.

$$M \int_0^t f^2(\tau, x) d\tau < \infty, \quad M \int_0^t g^2(\tau, x(\tau, x(\tau))) d\tau < \infty$$

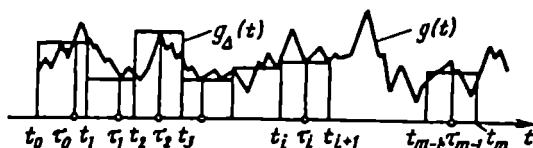
3. ზღვრები (13.54) და (13.55) გამოსახულებებში ცალკე გაგებულია, როგორც საშუალოკვადრატული.

ამ სამი პირობით (13.54) ზღვრები და (13.55) არსებობენ. სტოქასტიკური ინტეგრალების განსაზღვრა მოყვანილი ფორმულებით არის კორექტული.

ახალი მომენტი სტოქასტიკური ინტეგრალის განსაზღვრისას არის მისი დამოკიდებულება  $\tau$ , წერტილების ამორჩევის წესზე და როგორც შედეგი შესაძლებლობა მისი სხვადასხვა განსაზღვრისა. ეს ახალი მომენტი წარმოადგენს ვინერის პროცესის განსაკუთრებული თვისებების შედეგს. ამაში შეიძლება დავრწმუნდეთ:

(13.55) გამოსახულებაში უწყვეტი ფუნქცია  $g(\tau) = g(\tau, x(\tau))$

ინტეგრირების  $[t_0, t]$  ინტერვალში შეიცვალოს უბან-უბან მუდმივი  $g_\Delta(\tau)$  ფუნქციით; მისი მუდმივი მნიშვნელობა  $[t_i, t_{i+1}]$  ქვეინტერვალში თანხვდება  $g(\tau)$  უწყვეტ ფუნქციას ნებისმიერად ამორჩეულ  $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$  წერტილებში. (ნახ. 13.5.)



ნახ.13.5.

$\tau_i$  წერტილების ამოსარჩევად გამოვიყენოთ (13.56) ფორმულა:

$$\tau_i = \tau_{iv} = (1 - \nu)t_i + \nu t_{i+1}, \quad 0 \leq \nu \leq 1.$$

გამომდინარე  $x(\tau)$  უწყვეტობიდან მისი რეალიზაცია  $[t_i, t_{i+1}]$   $i = \overline{0, m}$  მცირე ქვეინტერვალში შეიძლება აპროქსიმირებული იყოს წრფის მონაკვეთით:

$$x(\tau) = x(t_i) + \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i}(\tau - t_i) + o(\Delta), \quad t_i \leq \tau \leq t_{i+1}. \quad (13.57)$$

(13.56) და (13.57) გათვალისწინებით გვაქვს:

$$x(\tau_{iv}) = (1 - \nu)x(t_i) + \nu x(t_{i+1}) + o(\Delta). \quad (13.58)$$

დავუშვათ, რომ  $g(\tau, x)$  უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა ორივე არგუმენტის მიმართ, მაშინ (13.56) და (13.58) დაყრდობით მივიღებთ:

$$g((\tau_i), x(\tau_{iv})) = g(t_i, (1 - \nu)x(t_i) + \nu x(t_{i+1})) + o(\Delta). \quad (13.59)$$

(13.59) გათვალისწინებით (13.55) სტოქასტიკური ინტეგრალი გარდაიქმნება გამოსახულებაში:

$$\begin{aligned} J_\nu &= \int_0^t g(\tau, x(\tau)) d_\nu \nu(\tau) = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{m-1} g(t_i, (1 - \nu)x(t_i) + \nu x(t_{i+1})) [\nu(t_{i+1}) - \nu(t_i)]. \end{aligned} \quad (13.60)$$

აქ  $N$  ინდექსი  $J_\nu$  ინტეგრალის და ვინერის პროცესის დიფერენციალის  $d_\nu \nu(\tau)$  აღნიშვნისას გვიჩვენებს ინტეგრალური ჯამის აგების წესს.

როდესაც  $\nu = 0$  ფორმულა განსაზღვრავს იტოს სტოქასტიკურ ინტეგრალს:

$$J_0 = \int_0^t g(\tau, x(\tau)) d_\nu \nu(\tau) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{m-1} g(t_i, x(t_i)) [\nu(t_{i+1}) - \nu(t_i)], \quad (13.61)$$

რომელიც ფართოდ გამოიყენება მარკოვის დიფუზიური პროცესების თეორიაში.

ადვილი სანახაევია, რომ სხვაობა  $J_\nu - J_0$  ინტეგრალებისათვის ტოლია:

$$\begin{aligned}
 J_\nu - J_0 &= \int_0^1 g(\tau, x(\tau)) d_\nu \nu(\tau) = \\
 &= \int_0^1 g\left(\tau, x(\tau) d_0 \nu(\tau) + \nu \frac{N}{2} \int_0^1 \frac{\partial g(\tau, x(\tau))}{\partial x} g(\tau, x(\tau))\right) d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{13.62}$$

მიღებული შედეგიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ თუ შემთხვევითი პროცესი  $x(t)$  აღიწერება (13.52) სტოქასტიკური განტოლებით და რომელიღაც  $\varphi(\tau, x(\tau))$ , ინტეგრირებადია კვადრატით და უწყვეტად დიფერენცირებადია ორივე არგუმენტის მიმართ, მაშინ სამართლიანია ფორმულა:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \varphi(\tau, x(\tau)) d_\nu \nu(\tau) &= \int_0^1 \varphi(\tau, x(\tau)) d_0 \nu(\tau) + \\
 &+ \nu \frac{N}{2} \int_0^1 \frac{\partial \varphi(\tau, x(\tau))}{\partial x} g(\tau, x(\tau)) d\tau,
 \end{aligned}
 \tag{13.63}$$

თუ ფუნქციები  $g$  და  $\varphi$  არ არიან  $x$  დამოკიდებული, მაშინ  $J_\nu$  და  $J_0$  ინტეგრალებს შორის იშლება სხვაობა. მარკოვის დიფუზური პროცესებში მნიშვნელოვან როლს თამაშობს სტოქასტიკური ინტეგრალი  $J_\nu$   $\nu = 0.5$  პარამეტრით:

$$\begin{aligned}
 J_{0.5} &= \int_0^1 g(\tau, x(\tau)) d_{0.5} \nu(\tau) = \\
 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{m-1} g\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}, \frac{x(t_i) + x(t_{i+1}))}{2}\right) [\nu(t_{i+1}) - \nu(t_i)]
 \end{aligned}
 \tag{13.64}$$

ეს ინტეგრალი შემოიტანა რ.ლ.სტრატონოვიჩმა და უწოდა სიმეტრიზებული [91], [122].

ფორმალური განსხვავება (13.64) და (13.61) ინტეგრალებს შორის მდგომარეობს იმაში, რომ  $g(\tau, x(\tau))$  ფუნქცია ინტეგრალური ჯამების ფორმირებისას (13.61)-ში აიღება ყოვე-



ლი  $\Delta$  კვინტერვალის დაყოფისას მარცხენა ბოლოში, ხოლო (13.64) კვინტერვალის შუაში.

(13.61) და (13.64) ინტეგრალები გვაძლევენ სხვადასხვა შემდეგებს.

მაგალითად, სტოქასტიკური ინტეგრალი ვინერის პროცესიდან შემდეგი ტოლობის გამოყენებით

$$v(t_1)[v(t_{i+1}) - v(t_i)] = \left( \frac{1}{2} \right) \{ v^2(t_{i+1}) - v^2(t_i) - [v(t_{i+1}) - v(t_i)]^2 \} \quad (13.65)$$

და აგრეთვე (13.61)-ში შემდეგი გამოსახულების გათვალისწინებით:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} S_m = N(t - t_0) / 2 \quad (13.66)$$

მივიღებთ:

$$J_v = \int_{t_0}^t v(\tau) d_v v(\tau) = \begin{cases} \left[ \left( \frac{1}{2} \right) [v^2(t) - v^2(t_0)] - N(t - t_0) / 2 \right], & v = 0; \\ \left[ \left( \frac{1}{2} \right) [v^2(t) - v^2(t_0)] \right], & v = 0.5; \end{cases} \quad (13.67)$$

შეიძლება დამტკიცდეს სამართლიანობა ტოლობისა:

$$\int_{t_0}^t \varphi(\tau, x(\tau)) d_{0.5} x(\tau) = \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x(\tau)) d_0 x(\tau) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t b(t, x) \frac{\partial \varphi(\tau, x)}{\partial x} d\tau \quad (13.68)$$

ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარეობს, რომ (13.53) ინტეგრალის განსაზღვრას მიეყვარათ (13.51), (13.52) სტოქასტიკური დიფერენციალური განტოლებების სხვადასხვა ფორმალურ ამსახლებამდე. ამიტომ უნდა მივითითოს რომელი აზრით გაიგება (13.50), (13.51) განტოლებები. გაუგებრობის თავიდან ასაცილებლად (13.51) საწყისი დიფერენციალური განტოლება ჩაიწერება განზოგადებულ სახეში:

$$dx(t) = f(t, x)dt + g(t, k) d_v v(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (13.69)$$

და მიეთითება როგორი აზრით გაიგება (13.53) გამოსახულებაში შემავალი ბოლო სტოქასტიკური ინტეგრალი. როდესაც  $v = 0$  (13.52) განტოლებას უწოდებენ სტოქასტიკურ დიფერ-

რენციალურ განტოლებას იტოს მიხედვით, ხოლო  $\nu = 0.5$  შემთხვევაში სტოქასტიკურ დიფერენციალურ განტოლებას სტრატონოვიჩის მიხედვით.

მარტინგალი ეწოდება  $\xi(t)$ ,  $t \in T$  ( $T$ -ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა) შემთხვევით სიდიდეთა ოჯახს, ხასიათდებიან გარკვეული „უგულვებელყოფით წარსულის“. ეს „უგულვებელყოფა“ მდგომარეობს იმაში, რომ  $\xi(t_2) - \xi(t_1)$  ( $t_1 < t_2$ ) ნაზრდის პირობითი მათემატიკური ლოდინი  $\xi(s)$ ,  $s \leq t$  მოცემული მნიშვნელობისას, მიუხედავად ამ მნიშვნელობისა, ნულის ტოლია. ე.ი.

$$M\{\xi(t) | D_s\} = \xi(s).$$

$D_s$  - შემთხვევითი  $\xi(t)$  სიდიდის დაყოფაა.

$$D_s = D_{\xi_1, \dots, \xi_s}, \quad 1 \leq s \leq n-1.$$

იტოს განტოლებების ძირითადი ღირსება მდგომარეობს იმაში, რომ  $x(t)$  ამონახსნები წარმოადგენენ მარტინგალებს, რომლისთვისაც კარგად არის დამუშავებული მათემატიკური აპარატი. ამასთანვე იტოს განტოლებების გამოყენება ძალიან ამარტივებს ჩანაწერებს. სტრატონოვიჩის განტოლებების დადებითი მხარე მდგომარეობს იმაში, რომ შეიძლება გამოვიყენოთ მათემატიკური ანალიზის ჩვეულებრივი ხერხები (ცვლადების შეცვლა, ნაწილობრივი ინტეგრირება და ა. შ.) მაშინ, როდესაც იტოს ინტეგრალს უნდა მოვეპყრათ გარკვეული წესებით (არ შეიძლება ჩვეულებრივი წესებით ჩავატაროთ ცვლადების შეცვლა, ნაწილობრივი ინტეგრირება და ა.შ). განსაკუთრებულია იტოს განტოლების ამონახსნის  $x(t)$  დიფერენცირების წესი.

იტოს დიფერენციალური განტოლების

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))d\nu(t) \quad (13.70)$$

აღების და დიფუზიის კოეფიციენტები გამოითვლება ფორმულებით:

$$\begin{aligned} a(t, x) &= f(t, x) + (\nu N/2)g(t, x)\partial g(t, x)/\partial x = \\ &= f_1(t, x) + (\nu/2)\partial b(t, x)/\partial x. \end{aligned} \quad (13.71)$$

$$b(t, x) = (N/2)g^2(t, x). \quad (13.72)$$

როგორც ჩანს კოეფიციენტები ცალსახად განისაზღვრებიან  $f(t, x)$  და  $g(t, x)$  ფუნქციებით, ამიტომ საწყისი (13.70) განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს  $a(t, x)$  და  $b(t, x)$  საშუალებით:

$$dx(t) = [a(t, x) - (v/2)\partial b(t, x)/\partial x]dt + b^{1/2}(t, x)d_v \nu(t) \quad (13.73)$$

აღნიშნული კოეფიციენტებისათვის  $v = 0$  შემთხვევაში ფორმულას განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [f(t, x)P] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{1}{2} P \frac{\partial}{\partial x} b(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} [b(t, x)P] \right]. \quad (13.74)$$

თუ კოეფიციენტები  $a(x)$  და  $b(x)$  არ არიან დროზე დამოკიდებული, მაშინ საწყისი პირობებისას

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} P(t, x) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial}{\partial x} P(t, x) = 0, \quad (13.75)$$

სტაციონარული ალბათობის სიმკვრივე განისაზღვრება ჩვეულებრივი წრფივი დიფერენციალური განტოლებით:

$$\frac{\partial}{\partial x} P_{st}(x) = \left( \frac{2f(x)}{b(x)} - \frac{1}{2b(x)} \frac{db(x)}{dx} \right) P_{st}(x). \quad (13.76)$$

მისი ამონახსნია:

$$\begin{aligned} P_{st}(x) &= \frac{c}{\sqrt{b(x)}} \exp \left( 2 \int_x^\lambda \frac{f(x)}{b(x)} dx \right) = \\ &= \frac{c_1}{g(\lambda)} \exp \left( \frac{4}{N} \int_x^\lambda \frac{f(x)}{g^2(x)} dx \right), \end{aligned} \quad (13.77)$$

სადაც  $c_1$  მუდმივა განისაზღვრება ნორმირების პირობიდან.

მაგალითი 13.9.

სისტემა აღიწერება სტოქასტიკური დიფერენციალური განტოლებით:

$$dx(t)/dt = x(t)n(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (13.78)$$

(13.78) განტოლება ჩაეწეროს ექვივალენტური სახით:

$$dx(t) = x(t)d\nu(t). \quad (13.79)$$

ამონახსნს აქვს სახე:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t x(\tau) n(\tau) d\tau = x_0 + \int_{t_0}^t x(\tau) d\nu(\tau). \quad (13.80)$$

(13.78)-ის ამონახსნია:

$$x(t) = x_0 \exp[\nu(t) - \nu(t_0)]. \quad (13.81)$$

ვინაიდან მაჩვენებელიანი ფუნქცია არაუარყოფითია, ამიტომ საწყის  $x_0$ -ზე დამოკიდებულით გვაქვს სამი შემთხვევა:

$$x(t) > 0, \text{ როდესაც } x_0 > 0, \quad x(t) \equiv 0, \text{ როდესაც } x_0 = 0$$

და  $x(t) < 0$  როდესაც  $x_0 < 0$ .

$x_0 > 0$ . ვისარგებლოთ ვინერის პროცესის ალბათობის ნორმალური სიმკვრივით:

$$\Delta\nu = \nu(t) - \nu(t_0)$$

და ზღვარზე გადასვლის შემდეგ, (13.81) გათვალისწინებით გვექნება:

$$P(x;t) = \frac{1}{\lambda} [2\pi D(t-t_0)]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2D(t-t_0)} \ln^2\left(\frac{x}{x_0}\right)\right], \quad (13.82)$$

$$D(t-t_0) = \frac{N}{2}(t-t_0)$$

ვნახოთ რომელ განსაზღვრებას ექვემდებარება (13.82) გამოსახულება. ამისათვის მივიღოთ ამონახსნები სტრატონოვიჩის და იტოს ფორმით.

1. ამონახსნი სტრატონოვიჩის ფორმით.

დავკოთ ინტეგრირების  $[t_0, t]$  ინტერვალის  $m$  ელემენტარულ ქვეინტერვალებად  $t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$  წერტილებით  $i$ -ური ქვეინტერვალისათვის გვაქვს:

$$x(t_i) = x(t_{i-1}) + [x(t_i) + x(t_{i-1})] \Delta\nu/2, \quad (13.83)$$

$$\Delta\nu_i = \nu(t_i) - \nu(t_{i-1}). \quad (13.84)$$

$$x(t_i) = x(t_{i-1})(1 + \Delta v_i/2) / (1 - \Delta v_i/2). \quad (13.85)$$

თუ ჩავსვამთ  $x(t_i)$  თანმიმდევრობით, ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) მივიღებთ:

$$x(t) = x_0 \prod_{i=1}^m \left(1 + \frac{1}{2} \Delta v_i\right) / \left(1 - \frac{1}{2} \Delta v_i\right). \quad (13.86)$$

რომ განვახორციელოთ ზღვრული გადასვლა, როდესაც

$$\max_i |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

გაველოგარიტმოსთ ეს გამოსახულება და მივიღოთ მხედველობაში:

$$\ln(1+x) \approx x - x^2/2,$$

მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \ln x(t) &= \ln x_0 + \sum_{i=1}^m \left[ \ln \left(1 + \frac{1}{2} \Delta v_i\right) - \ln \left(1 - \frac{1}{2} \Delta v_i\right) \right] \approx \\ &\approx \ln x_0 + \sum_{i=1}^m \left[ \frac{1}{2} \Delta v_i - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta v_i}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \Delta v_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta v_i}{2}\right)^2 \right] = \\ &= \ln x_0 + \sum_{i=1}^m \Delta v_i = \ln x_0 + v(t) - v(t_0), \end{aligned}$$

$$x(t) = x_0 \exp[v(t) - v(t_0)], \quad (13.87)$$

რაც თანხვედება (13.81). თუ გამოვიყენებთ  $v(t) - v(t_0)$  ვინერის პროცესის მახასიათებელ ფუნქციებს როგორც ერთგანზომილებიანს  $\Phi(jv)$ , ისე ორგანზომილებიანს  $\Phi_2(jv_1, jv_2)$ , როდესაც  $v = v_1 = v_2 = -j$ , ადვილად ვიპოვით  $x(t)$  არასტაციონალური პროცესის მათემატიკურ ლოდინს და კორელაციიურ ფუნქციას:

$$M\{x(t)\} = x_0 M\{\exp[v(t) - v(t_0)]\} = x_0 \exp[(N/4)(t - t_0)], \quad (13.88)$$

$$K_x(t_1, t_2) = x_0^2 M \{ \exp[\nu(t_1) - \nu(t_0) + \nu(t_2) - \nu(t_0)] \} = \quad (13.89)$$

$$= x_0^2 \exp\{ (N/4)[t_1 + t_2 - 2t_0 + 2 \min(t_1 - t_0, t_2 - t_0)] \}.$$

2. ამონახსნი იტოს ფორმით

იტოს ინტეგრალის გაგებისათვის ინტეგრალურ ჯამში  $x(t)$  მნიშვნელობა აიღება ელემენტალური ქვეინტეგრალების მარცხენა ბოლოებში. ე.ი  $i$ -ური ქვეინტეგრალისათვის:

$$x(t_i) = x(t_{i-1}) + x(t_{i-1})\Delta\nu_i = x(t_{i-1})(1 + \Delta\nu_i) \quad (13.90)$$

ამ ამონახსნის  $i=1, 2, \dots, m$  გვექნება:

$$x(t) = x_0 \prod_{i=1}^m (1 + \Delta\nu_i) \quad (13.91)$$

მოვიქცეთ ისე, როგორც ზევით, გალოგარიტმებისას მოვიქცე-  
ცით. მივიღებთ:

$$\ln x(t) = \ln x_0 + \sum_{i=1}^m \ln(1 + \Delta\nu_i) \approx \ln x_0 + \sum_{i=1}^m \left( \Delta\nu_i - \frac{1}{2} \Delta\nu_i^2 \right),$$

ან

$$x(t) = x_0 \exp \left\{ \sum_{i=1}^m \Delta\nu_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \Delta\nu_i^2 \right\} = \quad (13.92)$$

$$= x_0 \exp \left\{ \nu(t) - \nu(t_0) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \Delta\nu_i^2 \right\},$$

ან

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} S_m = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{m-1} [\nu(t_{i+1}) - \nu(t_i)]^2 = N(t - t_0) / 2.$$

შესაბამისად, როდესაც  $m \rightarrow \infty \quad \max_i |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0$

$$S_m = \sum_{i=1}^m \Delta\nu_i^2 = \sum_{i=1}^m [\nu(t_i) - \nu(t_{i-1})]^2 \rightarrow \frac{N}{2}(t - t_0), \quad (13.93)$$

ამიტომ

$$x(t) = x_0 \exp[\nu(t) - \nu(t_0) - (N/4)(t - t_0)]. \quad (13.94)$$

ადვილად დასადგენია, რომ ალბათობის სიმკვრივეა:

$$P(\lambda; t) = \frac{1}{\lambda} [2\pi D(t - t_0)]^{-1/2} * \exp \left\{ -\frac{1}{2D(t - t_0)} \left[ \ln \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \right) + \frac{N}{4}(t - t_0) \right]^2 \right\}. \quad (13.95)$$

მათემატიკურ ლოდინს და კორელაციურ ფუნქციას აქვს სახე:

$$M\{x(t)\} = x_0; \quad (13.97)$$

$$K_x(t_1, t_2) = x_0^2 \exp[(N/2) \min(t_1 - t_0, t_2 - t_0)].$$

ამავე შედეგამდე მივალთ, თუ საწყის (13.78) განტოლებაში მოვახდენთ ცვლადთა შეცვლას. იტოს განტოლებისათვის ამ ოპერაციის შესრულება არ შეიძლება, თუ  $\xi(t)$ -არის დიფუზური მარკოვის პროცესი, მოცემული იტოს სტოქასტიკური დიფერენციალური განტოლებით:

$$dx/dt = f(t, x(t)) + g(t, x(t))n(t). \quad (13.98)$$

საქიროა მისი გარდაქმნა  $\eta(t) = \varphi(x(t))$  გამოსახულებით. მაშინ იტოს განტოლებას აქვს სახე:

$$d\varphi(x(t))/dt = f(t, x(t))\varphi'(x(t)) + \left(\frac{1}{4}\right)Ng^2(t, x(t)) + g(t, x(t))\varphi'(x(t))n(t). \quad (13.99)$$

(13.78) განტოლებაში უნდა ჩავსვათ:  $f(t, x(t)) \equiv 0$ ,  $g(t, x(t)) = x(t)$ , მაშინ  $\eta(t) = \varphi(x(t)) = \ln x(t)$  საბოლოოდ მივიღებთ განტოლებას:

$$d\eta/dt = -\frac{N}{2} + n(t), \quad (13.100)$$

რომლის ამონახსნია:

$$\eta(t) = \eta_0 \frac{N}{4}(t - t_0) + \int_{t_0}^t n(\tau) d\tau. \quad (13.101)$$

მივიღეთ (13.94) მსგავსი განტოლება:

$$x(t) = x_0 \exp[\nu(t) - \nu(t_0) - (N/4)(t - t_0)]. \quad (13.102)$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ (13.83) და (13.90) ამონახსნები შეიძლება ჩავწეროთ ერთი სახით:

$$x(t_i) = x(t_{i-1}) + [(1 - \nu)x(t_{i-1}) + \nu x(t_i)]\Delta v_i. \quad (13.103)$$

როდესაც  $\nu = 0.5$ , განტოლება შეესაბამება (13.83), ხოლო  $\nu = 0$  შემთხვევაში (13.90). ჩავწეროთ განტოლება (13.103) შემდეგნაირად:

$$x(t_i) = x(t_{i-1}) + [1 + (1 - \nu)\Delta v_i] / (1 - \nu\Delta v_i). \quad (13.104)$$

გავალოგარიტმით მიღებული შედეგი და ლოგარიტმული ფუნქცია დავშალოთ მწკრივად, გვექნება:

$$\ln x(t_i) = \ln x(t_{i-1}) + \Delta v_i + (\nu - 0.5)\Delta v_i^2. \quad (13.105)$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \exp \left[ \sum_{i=1}^m \Delta v_i + (\nu - 0.5) \sum_{i=1}^m \Delta v_i^2 \right] = \\ &= x_0 \exp \left[ \nu(t) - \nu(t_0) + (\nu - 0.5) \frac{N}{2} (t - t_0) \right]. \end{aligned} \quad (13.106)$$

ამ რეზულტატიდან, როდესაც  $\nu = 0.5$  გამომდინარეობს (13.87) განტოლება სტრატონოვიჩის მიხედვით, ხოლო  $\nu = 0$  (13.94) განტოლება იტოს მიხედვით.

მაშასადამე, (13.78) განტოლების (13.81) და (13.82) ამონახსნები სამართლიანია, თუ მას ალვითქვევთ სტრატონოვიჩის ფორმით. ასეთ დასკვნას აქვს თავისი ზოგადი ხასიათი: სტოქასტიკური დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა, მიღებული ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნების მეთოდებით შეესაბამება ამონახსნებს მიღებულს სტრატონოვიჩის ფორმით.

### § 13.3 დინამიკური პროგრამირების მეთოდი (სტოქასტიკური ვარიანტი)

სტოქასტიკური სისტემების ოპტიმალური მართვის ერთ-ერთი ძირითადი მეთოდია დინამიკური პროგრამირების მეთოდი. როგორც დეტერმინირებულ შემთხვევაში, ძირითადი ტერმინოლოგიაა: ბელმანის ფუნქცია, ბელმანის განტოლება.



ბელმანის სკალარული ფუნქცია აღენიშნოთ  $S(t, x)$  განვიხილოთ (13.1), (13.3), (13.7) წინა პარაგრაფიდან, სადაც ოპტიმალური  $C$ -მართვა მოიძებნება  $u(t, x(t))$  სახით. ვუწოდოთ  $u(t, x(t))$  დასაშვები მართვა.

აღენიშნოთ (13.1) განტოლების ამონახსნი  $x_{t,x}(S, u)$   $s \geq t$ , საწყისი მნიშვნელობით  $x_{t,x}(t, u) = x$ .  $C$ -მართვის შემთხვევაში  $u = u(s, x(s))$ .

(13.1), (13.3), (13.7) ამონახსნისთვის ბელმანის ფუნქციას აქვს სახე:

$$S(t, x) = \inf_u M \left[ F(x_{t,x}(T, u)) + \int_t^T F_1(S, x_{t,x}(S, u), u(S, x_{t,x}(S, u))) ds \right]. \quad (13.108)$$

აქ ინფიმუმი გამოითვლება ყველა დასაშვები  $u_n$  სიმრავლის მიმართ.  $S(t, x)$ -დან გამომდინარეობს, რომ სასრულო  $T$  დროში, სამართლიანია სასაზღვრო პირობა:

$$S(T, x) = F(x_{T,x}(T, U)) = F(x), \quad x \in R_n. \quad (13.109)$$

სტოქასტიკური სწრაფქმედებისათვის ბელმანის ფუნქციას აქვს სახე:

$$S(t, x) = \inf_u M[\tau_{t,x}(u)], \quad u \in U \text{ დასაშვები,}$$

სადაც  $\tau_{t,x}(u) - G$  მიზნის სიმრავლის მიღწევის პირველი მომენტი,  $x_{t,x}(S, u)$ ,  $S \geq t$  ამონახსნის საშუალებით.

მაგალითი 13.10 [12].

შემდეგი სკალარული არამართვადი სისტემისათვის ავაგოთ ბელმანის ფუნქცია:

$$\begin{aligned} dx(t) &= a x(t)dt + \sigma d\xi(t), \\ 0 \leq t \leq T. \quad x \in R_1, \xi \in R_1, \end{aligned} \quad (13.110)$$

სადაც  $a$  და  $\sigma$ -მუდმივებია.

(13.108) ფუნქციონალში ფუნქცია  $F(x) = x^2$ ,  $F_1 = 0$ , მაშინ ბელმანის ფუნქციის შესაბამისად გვექნება

$$S(t, x) = M[x^2_{t,x}(T)]$$

სადაც  $x_{t,x}(S)$  არის (13.110) ამონახსნი  $S \geq t$  შემთხვევაში საწყისი  $x_{t,x}(t) = x$  მნიშვნელობისას. იტოს ფორმულის თანახმად:

$$x_{t,x}(S) = xe^{a(S-t)} + \int_t^S e^{a(r-t)} \sigma d\xi(\tau). \quad (13.111)$$

აქედან და იტოს სტოქასტიკური ინტეგრალის გათვალისწინებით გვექნება:

$$\begin{aligned} S(t, x) &= M[x^2(T)] = x^2 e^{2a(T-t)} + \\ &+ \int_t^T e^{2a(T-\tau)} \sigma^2 d\tau = x^2 e^{2a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a} [e^{2a(T-t)} - 1]. \end{aligned} \quad (13.112)$$

ახლა განვიხილოთ როგორი სახე აქვს სტოქასტიკური სისტემებისათვის ბელმანის განტოლებას. ჯერ ჩამოვაყალიბოთ ოპტიმალობის პრინციპი, რომლის საფუძველზეც მიიღება ბელმანის განტოლება: დაეუშვათ, რომ  $u_0$ -არის ოპტიმალური  $c$ -მართვა მოძრაობის მთელ  $[0, T]$  ინტერვალში. მაშინ  $u_0$  მართვას აქვს თვისება, რომ როგორც არ უნდა იყოს დროის მომენტი  $S \in [0, T]$  და დასაშვები  $v$  მართვა  $[0, S]$  მონაკვეთში, მართვა  $u_0$  აღმოჩნდება ოპტიმალური  $[S, T]$  მონაკვეთში  $x_{0,u_0}(S, v)$  მდგომარეობის მიმართ, რომელიც წარმოიშობა  $[0, S]$  მონაკვეთში  $v$  მართვის გამოყენებისას.

ბელმანის განტოლება ჩვენ მოვიყვანოთ დაუმტკიცებლად, ვინაიდან ეს მოითხოვს სპეციფიკურ მათემატიკურ აპარატს, რაც სცილდება ჩვენს კურსს.

ბელმანის განტოლებას აქვს სახე:

$$\inf_{u \in U} L_u S(t, x) = 0, \quad x \in R^n, \quad 0 \leq t \leq T \quad (13.113)$$

ოპერატორ  $L_u$  აქვს სახე:

$$L_u S(t, x) = V_t(t, x) + S_x^T(t, x) a(t, x, u) + \frac{1}{2} T_r [\sigma(t, x, u) \sigma^T(t, x, u) S_{xx}(t, x)]; \quad (13.114)$$

$$S_t = \frac{\partial S(t, x)}{\partial t}, \quad S_x = \frac{\partial S(t, x)}{\partial x_j}, \quad S_{xx} = \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

სასაზღვრო პირობას (11.113) განტოლებისათვის აქვს სახე:

$$S(T, x) = F(x_{T,x}(T, u)) = F(x), \quad x \in R_n. \quad (13.115)$$

ხოლო სტოქასტიკური სწრაფქმედების ამოცანისათვის ბელმანის განტოლებას აქვს სახე:

$$\inf_{u \in U} L_u S(t, x) = -1, \quad t \geq 0 \quad x \in R^n,$$

$$S(t, x) = 0, \quad x \in G.$$

ბოლოს შევზერდეთ ერთ საკითხზე. ეს არის დამოკიდებულება ბელმანის ფუნქციასა და ბელმანის განტოლებას შორის. როდესაც ვიყენებთ ბელმანის განტოლებას წარმოიშვება შემდეგი საკითხები:

1. ყოველთვის აკმაყოფილებს თუ არა ბელმანის განტოლებას ბელმანის ფუნქცია.

2. ყოველთვის თანხვდება თუ არა ბელმანის განტოლების ამონახსნი ბელმანის ფუნქციას.

3. არის თუ არა მართვა ოპტიმალური, რომელიც მოიძებნება ბელმანის განტოლების ამონახსნის შედეგად.

ზოგად შემთხვევაში სამივე შეკითხვაზე პასუხი უარყოფითია შემდეგი მიზეზების გამო:

1. ბელმანის ფუნქციას არ ახასიათებს სიგლუვე  $t$  და  $x$  მიხედვით, რომელიც გამოყენებული იყო ბელმანის განტოლების გამოყენების დროს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ბელმანის ფუნქცია ყოველთვის არ აკმაყოფილებს ბელმანის განტოლებას.

2. ბელმანის განტოლებას არა აქვს ერთადერთი ამონახსნი. საჭიროა ჩატარდეს დამატებითი კვლევები და გაირკვეს რომელ ამონახსნს აქვს ბელმანის ფუნქციაზე პრედენდენტობის როლი.

3. მიუხედავად იმისა, რომ ბელმანის განტოლებას აქვს გლუვი ამონახსნი, მართვა არ იქნება ოპტიმალური, ვინაიდან ის შეიძლება არ იყოს დასაშვები, იმიტომ რომ არ არსებობს მოძრაობის სტოქასტიკური განტოლების ამონახსნი. ამის გარდა დასაშვები მართვის მოცემულ კლასში ყოველთვის არ არსებობს ისეთი მართვა, რომ მიიღწიოს თვისობრიობის კრიტერიუმის ზუსტი ჯვედა ზღვარი.

ყველაფერი ეს მხედველობაში უნდა იყოს მიღებული სისტემის მართვის ამოცანის გადაწყვეტისას.

### § 13.4. სტოქასტიკური მართვის ძირითადი რეზულტატები

დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ სტოქასტიკური ოპტიმალური მართვის ძირითადი რეზულტატები [79]:

1. სტოქასტიკური სისტემის ოპტიმალური მართვის ამოცანა:

სისტემის ევოლუციის განტოლებაა:

$$dx(t) = a(t, x, u)dt + \sigma(t, x, u)d\xi(t);$$

თვისობრიობის კრიტერიუმში:

$$I(u) = M \left[ F(x(t)) + \int_0^T F_1(t, x(t), u) dt \right] \rightarrow \inf_u.$$

შეზღუდვები მართვაზე  $u(t) \in U(t)$ ;

ბელმანის ფუნქციაა:

$$S(t, x) = \inf_u \left[ F(x_{t,x}(T, u)) + \int_t^T F_1(S, x_{t,x}(S, u), u(S, x_{t,x}(S, u))) ds \right].$$

ბელმანის განტოლება:

$$\inf_{u \in U} [L_u S(t, x) + F_1(t, x, u)] = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$S(T, x) = F(x),$$

$$L_u S(t, x) = S_t(t, x) + v_x^T(t, x) a(t, x, u) +$$

$$+ \frac{1}{2} t_2 [\sigma(t, x, u) \sigma^T(t, x, u) S_{xx}(t, x)].$$

2. სტოქასტიკური წრფივ-კვადრატული ამოცანა:

$$dx(t) = [A(t)x(t) + f(t) + B(t)u]dt + \sigma_1(t)x(t)d\xi_1(t) + \sigma_2(t)ud\xi_2(t) + \sigma(t)d\xi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(0) = x_0,$$

$$I(u) = M[x^T(T)N_1x(T) + 2h_1^T x(T) + \int_0^T [x^T(t)N_2(t)u(t) + 2x^T(t)N_4(t)u(t) + 2h_2^T(t)x(t) + 2h_2^T(t)x(t) + 2h_3^T(t)u(t)]dt],$$

ოპტიმალური მართვა

$$u_0(t, x) = -k(t, P)[B^T(t)P(t)x + N_4^T(t)x + B^T(t)G(t) + h_3(t)],$$

სადაც

$$K(t, P) = [N_3(t) + \sigma_2^T P(t) \sigma_2(t)]^{-1} > 0;$$

$$\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + (P(t)B(t) + N_4(t))^*$$

$$* K(t, P)(P(t)B(t) + N_4(t))^T + N_2(t) + \sigma_1^T(t)P(t)\sigma_1(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$P(T) = N_1;$$

$$\dot{G}(t) + A^T G(t) + P(t)f(t) + h_2(t) +$$

$$+(N_4(t) + P(t)B(t))K(t, P)(h_3(t) + B^T(T)G(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$G(T) = h_1;$$

$$g(t) = \int_0^T [2G^T(s)f(s) + G^T(s)B(s)K(s, P)(h_3(s) + B^T(s)G(s)) + TrP(s)\sigma(s)\sigma'(s)]ds$$

3. წრფივ-კვადრატული ამოცანა არასრული ინფორმაციის შემთხვევაში:

$$dx(t) = [A(t)x(t) + B(t)u + f(t)]dt + \sigma(t)d\xi(t),$$

$$dy(t) = Q(t)x(t)dt + \sigma_0(t)d\xi_0(t);$$

მათემატიკური ლოდინი  $m(t)$  და კოვარიაციის მატრიცა  $D(t)$ ,  $x(t)$  ფუნქციის პირობითი განაწილებისას:

$$dm(t) = [A(t)m(t) + f(t) + B(t)u]dt + \sigma_3(t)d\xi_3(t),$$

$$0 \leq t \leq T, \quad m(0) = m_0,$$

$$\sigma_3(t)\sigma_3^T(t) = D(t)Q^T(t)(\sigma_0(t)\sigma_0^T(t))Q(t)D(t),$$

$$\dot{D} = AD + DA^T - DQ^T(\sigma_0\sigma_0^T)^{-1}QD + \sigma\sigma^T,$$

$$D(0) = D_0;$$

ობტიმალური მართვა

$$u_0(t, m) = -N_3^{-1}(t) \left[ (B^T(t)P(T) + N_4^T(t))m + B^T(t)G(t) + h_3(t) \right];$$

თვისობრიობის კრიტერიუმის მინიმალური მნიშვნელობა:

$$\min_u I = S(o, m_0) + t = (D(T)N_1) + \int_0^T (D(t)N_2(t))dt.$$

4. მართვადი სტოქასტიკური სისტემების სტაბილიზაცია:

$$dx(t) = a(t, x(t), u)dt + \sigma(t, x(t), u)d\xi(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0,$$

$$I(u) = \int_0^{\infty} MF(t, x(t), u(t, x(t)))dt \rightarrow \inf_{u \in U};$$

ბელმანის განტოლება:

$$\inf_{u \in U} [L_u S(t, x) + F(t, x, u)] = 0,$$

სადაც

$$L_u S(t, x) = \frac{\partial S(t, x)}{\partial t} + a^T(t, x, u) \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2} t_2 \sigma(t, x, u) \sigma^T(t, x, u) \frac{\partial^2 S(t, x)}{\partial x^2};$$

ობტიმალური მართვა არის შემდეგი განტოლების ამონახსნი:

$$L_{u^*} S^*(t, x) + F(t, x, u^*(t, x)) = 0$$

5. სტოქასტიკური წრფივ-კვადრატული ამოცანის სტაბილიზაცია:

$$dx(t) = [A(t)x(t) + B(t)u]dt + \sigma(t)x(t)d\xi(t), \quad x(0) = x_0.$$

$$I(u) = \int_0^{\infty} M[x^T(t)N_1(t)x(t) + u^T N_0(t)u]dt \rightarrow \inf, \quad N_0 > 0, \quad N_1 > 0;$$

ოპტიმალური მართვა:

$$U^*(t, x) = -N_0^{-1}(t)B^T(t)P(t)x,$$

სადაც  $P(t)$ —რიკატის მატრიცული განტოლების ერთადერთი დადებითად განსაზღვრული ამონახსნია:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)N_0^{-1}(t)B^T(t)P(t) + \\ + N_1(t) + \sigma'(t)P(t)\sigma(t) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

## თავი მეოთხმეტე

ფილტრაციის თეორია და სისტემების მდგომარეობათა შეფასება

### § 14.1. შესავალი

პრაქტიკაში მნიშვნელოვანია სისტემისა მდგომარეობის განსაზღვრის ამოცანა მიღებულ გაზომვების რეზულტატების შედეგად. ვინაიდან, გაზომვები ყოველთვის დაკავშირებულია შემთხვევით შეცდომებთან, ამიტომ უნდა ვილაპარაკოთ არა სისტემის მდგომარეობის განსაზღვრაზე, არამედ გაზომვის რეზულტატების სტატისტიკური დამუშავების შედეგად მის შეფასებაზე.

სისტემის მდგომარეობის შეფასებისას უნდა გადაწყდეს ორი ამოცანა:

1. დროის ნებისმიერ  $t > t_0$  მომენტში საჭიროა შეფასდეს სისტემის მდგომარეობის ვექტორი პროცესის უწყვეტი დაკვირვების რეზულტატების მიხედვით  $[t_0, t]$  დროის ინტერვალში.

2. საჭიროა შეფასდეს სისტემის მომავალი მდგომარეობა დროის ნებისმიერ  $t > t_0$  მომენტში პროცესის დაკვირვებისას დროის  $[t_0, t]$  ინტერვალში.

პირველ ამოცანას უწოდებენ ფილტრაციის ამოცანას, ვინაიდან ტექნიკურად იგი სრულდება დაკვირვებადი სიგნალის მოწყობილობაში გატარებით, რომელსაც უწოდებენ ფილტრს. ფილტრის დანიშნულებაა გაატაროს სასარგებლო სიგნალი და ჩაახშოს ხმაური, დიდი სიზუსტით აღადგინოს სისტემის მდგომარეობის ვექტორი.

მეორე ამოცანას უწოდებენ ექსტრაპოლაციის ამოცანას, ან პროგნოზს.



§ 14.2. შემთხვევითი პროცესების წრფივი ფილტრაცია. ვინერ-ჰოპფის განტოლება

განვიხილოთ ვარიაციულ პრინციპებზე დაყრდნობით შემთხვევითი პროცესების წრფივი ფილტრაციის ამოცანა ერთი შემავალი და ერთი გამომავალი სიგნალით. ეს ამოცანა და მისი ამოხსნა ცნობილია კოლმოგოროვ-ვინერ-ჰოპფის ფილტრის სახელწოდებით. ლიტერატურაში უფრო ხშირია სახელწოდება ვინერ-ჰოპფის ფილტრი [23], [75], [78], [79], [93], [119], [122].

მოცემულია:

1. ურთიერთ არაკორელირებული შემთხვევითი პროცესები  $u(t)$  და  $n(t)$ . კორელაციური ფუნქციები

$$\left. \begin{aligned} k_u(t_1, t_2) &= M[u(t_1)u(t_2)], \\ k_n(t_1, t_2) &= M[n(t_1)n(t_2)], \end{aligned} \right\}$$

2. წრფივი სისტემის  $\omega_{r,p}(t, \xi)$  გარდამავალი იმპულსური ფუნქცია წრფივად გარდაქმნის  $u(t)$  შემთხვევით ფუნქციას

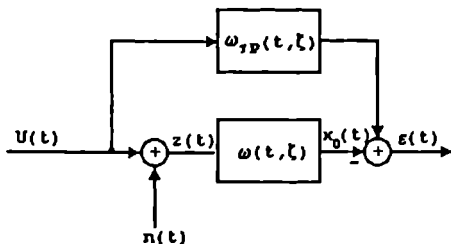
$$X(t) \text{ შემთხვევით ფუნქციაში } X(t) = \int_0^t \omega_{r,p}(t, \xi) u(\xi) d\xi.$$

3. საჭიროა მოიძებნოს ფილტრის იმპულსური გარდამავალი ფუნქცია  $\omega_{\text{ფ}}(t, \xi)$ , რომელიც გამოყოფს  $X(t)$  შემთხვევით პროცესს  $X_0(t)$  პროცესის სახით, როდესაც მის შესავეალზე მოდებულია ადითიური შემთხვევითი სიგნალი  $u(t) + n(t) = Z(t)$ .

4. ოპტიმალობის კრიტერიუმია საშუალო კვადრატული შეცდომის  $\varepsilon(t) = X(t) - X_0(t)$  მინიმუმი. ე. ი.

$$M[\varepsilon^2(t)] = \min.$$

ფილტრაციის სტრუქტურული სქემა მოცემულია (ნახ.14.1.).



ნახ. 14.1.

წრფივი სისტემის შემავალ და გამომავალ სიდიდეებს შორის არსებობს დამოკიდებულება  $t = 0$  მომენტში

$$X_0(t) = \int_0^t \omega(t, \xi) Z(\xi) d\xi \quad (14.1)$$

შევიტანოთ გამოსახულებაში

$$\varepsilon(t) = X(t) - X_0(t) = X(t) - \int_0^t \omega(t, \xi) Z(\xi) d\xi$$

კვადრატში აყვანის შემდეგ, გვექნება

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(t) = X^2(t) - \int_0^t \omega(t, \xi) Z(\xi) d\xi + \\ + \int_0^t \int_0^t \omega(t, \xi) \omega(t, \lambda) Z(\xi) Z(\lambda) d\xi d\lambda. \end{aligned} \quad (14.2)$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$\begin{aligned} M[x^2(t)] &= D_x(t), \\ M[Z(\xi) X(t)] &= k_{zx}(\xi, t), \\ M[Z(\xi) Z(\lambda)] &= k_z(\xi, \lambda). \end{aligned} \quad (14.3)$$

გვექნება:

$$M[\varepsilon^2(t)] = D_x(t) - 2 \int_0^t \omega(t, \xi) k_{zx}(\xi, t) d\xi + \quad (14.4)$$

$$+ \int_0^t \int_0^t \omega(t, \xi) \omega(t, \lambda) k_z(\xi, \lambda) d\xi d\lambda.$$

ახლა დავეუშვათ, რომ ფილტრის იმპულსური გარდამავალი ფუნქცია განსხვავდება ოპტიმალურისაგან  $\gamma h(t, \xi)$  სიდიდით:

$$\omega(t, \xi) = \omega_{\text{opt}}(t, \xi) + \gamma h(t, \xi). \quad (14.5)$$

შევიტანოთ (14.5) (14.4)-ში. ზოგიერთი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:

$$M[\varepsilon^2(t)] = D_x(t) - 2 \int_0^t \omega_{\text{opt}}(t, \xi) k_{zx}(\xi, t) d\xi +$$

$$+ \int_0^t \int_0^t \omega_{\text{opt}}(t, \xi) \omega_{\text{opt}}(t, \lambda) k_z(\xi, \lambda) d\xi d\lambda -$$

$$- 2\gamma \int_0^t h(t, \xi) k_{zx}(\xi, t) d\xi + 2\gamma \int_0^t \int_0^t \omega_{\text{opt}}(t, \lambda) h(t, \xi) k_z(\xi, \lambda) d\xi d\lambda +$$

$$+ \gamma^2 \int_0^t \int_0^t h(t, \lambda) h(t, \xi) k_z(\xi, \lambda) d\xi d\lambda. \quad (14.6)$$

თუ შევადარებთ (14.5) (14.6)-ის პირველ სამ წევრთან, ადვილად შესამჩნევია, რომ ისინი წარმოადგენენ საშუალო კვადრატული შეცდომის მინიმუმის მნიშვნელობებს, ვინაიდან მათში შედის იმპულსური გარდამავალი ფუნქცია  $\omega_{\text{opt}}$  ბოლო შესაკრები მკვეთრად არაურყოფითი ფუნქციაა და წარმოადგენს ინტეგრალის  $\int_0^t \omega(t, \xi) Z(\xi) d\xi$  კვადრატის მათემატიკურ ლოდინს. ე.ი.

$$M \left[ \int_0^t h(t, \xi) Z(\xi) d\xi \right]^2 =$$

$$= \int_0^t \int_0^t h(t, \xi) h(t, \lambda) M[Z(\xi) Z(\lambda)] d\xi d\lambda = E^2$$
(14.7)

ამრიგად, (14.7) გამოსახულება მიიღებს სახეს

$$M[\varepsilon^2(t)] = D_{z \min}(t) - 2\gamma \int_0^t h(t, \xi) k_{zx}(\xi, t) d\xi -$$

$$- \int_0^t \int_0^t \omega_{\text{რატ}}(t, \lambda) h(t, \xi) k_z(\xi, \lambda) d\xi d\lambda + \gamma^2 E^2.$$
(14.8)

იმისათვის, რომ  $M[\varepsilon^2(t)] = \min$ , აუცილებელია შემდეგი პირობის შესრულება

$$\int_0^t h(t, \xi) k_{zx}(\xi, t) d\xi -$$

$$- \int_0^t \int_0^t \omega_{\text{რატ}}(t, \lambda) h(t, \xi) k_z(\xi, \lambda) d\xi d\lambda = 0.$$
(14.9)

ვარიაციული აღრიცხვის წესის თანახმად  $M[\varepsilon^2(t)]$  ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ M[\varepsilon^2(t)] \right\}_{\gamma=0} = 0,$$
(14.10)

რომელშიც (14.8) შეტანა გვაძლევს (14.9). (14.9) არის აგრეთვე საშუალო კვადრატული შეცდომის მინიმუმის არსებობის საკმარისი პირობა. შევიტანოთ (14.9) (14.8)-ში, გვექნება

$$M[\varepsilon^2(t)] = D_{z \min}(t) + \gamma^2 E^2$$
(14.11)

ვინაიდან  $\gamma^2 E^2 > 0$ , მაშინ  $M[\varepsilon^2(t)] > D_z \min(t)$ . მაშასადამე,  $\omega_{\text{კბ}}(t, \xi)$  ნამდვილად განსაზღვრავს სისტემას მინიმალური საშუალო კვადრატული შეცდომით.

(14.9) განტოლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\int_0^t h(t, \xi) \left[ k_{zx}(\xi, t) - \int_0^t \omega_{\text{კბ}}(t, \lambda) k_z(\xi, \lambda) d\lambda \right] d\xi = 0.$$

$$0 \leq \xi \leq t$$

კვადრატულ ფრჩხილებში მოცემული გამოსახულება არის დამოკიდებულება სისტემის შემავალ და გამოშვალ სიდიდეებს შორის. სისტემის რეაქცია, როდესაც  $\xi > 0$ , შეიძლება ნულის ტოლი იყოს, შემავალი სიდიდე ნულთან ტოლობისას. ე. ი.

$$k_{zx}(\xi, t) = \int_0^t \omega_{\text{კბ}}(t, \lambda) k_z(\xi, \lambda) d\lambda, \quad \xi > 0 \quad (14.12)$$

$k_z(\xi, \lambda)$  და  $X(t)$ -პროცესების შემავალი სიგნალის კორელაციური ფუნქციაა.

$k_{zx}(\xi, t)$ -ურთიერთ კორელაციური ფუნქციაა.

(14.12) განტოლებას უწოდებენ ვინერ-ჰოპფის ინტეგრალურ განტოლებას. ის ამყარებს დამოკიდებულებას ფილტრის იმპულსურ გარდამავალ ფუნქციასა და კორელაციურ  $k_z$  და  $k_{zx}$  ფუნქციებს შორის.

ცალკე განვიხილოთ სტაციონარული წრფივი ფილტრი.

ა) შემავალი შემთხვევით  $Z(t)$  სიგნალი სტაციონარულია.

ბ)  $u(t)$ -ს გარდაქმნა ხდება სტაციონარული წრფივი ფილტრით  $\omega_{\text{კბ}}$  გარდამავალი იმპულსური ფუნქციით.

ვინერ-ჰოპფის განტოლებას აქვს სახე

$$k_{zx}(t - \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\text{კბ}}^*(t - \lambda) k_z(\xi - \lambda) d\lambda, \quad (14.13)$$

სადაც

$$k_{zx}(t - \xi) = \int_0^t \omega_{\tau p}(t - \lambda) k_z(\xi - \lambda) d\lambda, \quad (14.14)$$

ინდექსი \* ნიშნავს იმას, რომ იმპულსური გარდამავალი ფუნქცია არ არის აუცილებელი შესაბამებოდეს ფიზიკურად რეალიზებად ფილტრს. ცვლადების შეცვლა

$$t - \xi = \tau, \quad t - \lambda = u,$$

გვაძლევს

$$k_{zx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\text{ობ}}^*(u) k_z(u - \tau) du, \quad (14.15)$$

ან, თუ მივიღებთ მხედველობაში  $k_z$  კორელაციური ფუნქციის ლუწობას, გვექნება

$$k_{zx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\text{ობ}}^*(u) k_z(\tau - u) du. \quad (14.16)$$

გაეამრავლოთ გამოსახულების მარცხენა და მარჯვენა მხარე  $e^{-j\omega\tau}$  და მოვახდინოთ ინტეგრირება  $\tau$ -თი  $-\infty$ -დან  $\infty$ -მდე. მივიღებთ (მარჯვენა ნაწილში  $\tau$  შევცვალოთ  $S+u$ ),

$$S_{zx}(\omega) = W_{\text{ობ}}^*(j\omega) S_z(\omega), \quad (14.17)$$

სადაც

$$S_{zx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k_{zx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (14.18)$$

$$S_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k_z(S) e^{-j\omega S} dS \quad (14.19)$$

არიან შესაბამისი შემთხვევითი პროცესების სპექტრალური სიმკვრივები: გამოსახულება

$$W_{\text{ობ}}^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\text{ობ}}^*(u) e^{-j\omega u} du \quad (14.20)$$

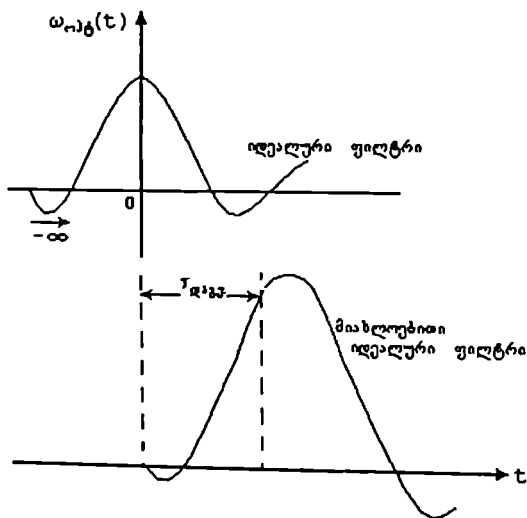
წარმოადგენს ოპტიმალური ფილტრის გადაცემით ფუნქციას, მის ფიზიკურ რეალიზაციაზე შეუზღუდულობით. ის ადვილად მოიძებნება

$$W_{\text{ობ}}^*(j\omega) = \frac{S_{zr}(\omega)}{S_z(\omega)}. \quad (14.21)$$

ფურიეს უკუგარდაქმნა გვაძლევს ფილტრის იმპულსურ გარდამავალ ფუნქციას

$$\omega_{\text{ობ}}^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\text{ობ}}^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega, \quad (14.22)$$

ღროის უარყოფითი მნიშვნელობისათვის  $\omega_{\text{ობ}}^* \neq 0$ . საწყისი ღროის ათვლის მომენტი თანხედება ფილტრის შესასვლელზე იმპულსის მოქმედებას. ე. ი. ფილტრი გამოსავალზე იძლევა სიგნალს, როდესაც შემავალი სიგნალი ჭერ კიდევ არ მოქმედებს. ასეთი სისტემა ფიზიკურად არარეალიზებადია. მაგრამ მიახლოებითი აგება ასეთი ფილტრისა შესაძლებელია. ამისათვის აუცილებელია აიგოს ფილტრის ისეთი იმპულსური გარდამავალი ფუნქცია  $t = 0$  მომენტში, რომ მისი სახე შეესაბამებოდეს მის მნიშვნელობებს  $t - \tau_{\text{ლაგ}}$  მომენტში.



(ნახ.14.2)

ცხადია, რომ რაც უფრო დიდია  $\tau_{ლაგ}$ , მით უფრო ზუსტად აისახება მოთხოვნილი  $\omega_{კატ}(t)$  ფუნქცია. შესაძლებელია (14.22), (14.21) ფორმულებით პრაქტიკულად აიგოს მიხლოებითი ოპტიმალური ფილტრი.

ახლა განვიხილოთ ფიზიკურად რეალიზებადი ფილტრის აგების ამოცანა. განისაზღვროს ისეთი ფილტრის გადაცემითი ფუნქცია, რომელიც დაგვიანების გარეშე ოპტიმალურად დაამუშავებს სიგნალს.

დავუშვათ, რომ დასამუშავებელი სტაციონარული შემთხვევითი  $Z(t)$  სიგნალი წარმოქმნილია რომელიღაც წრფივი ფილტრის თეთრი ხმაურის დამუშავების შედეგად. დამოკიდებულება ფილტრის შემავალი და გამომავალი სიგნალების სპექტრალურ სიმკვრივებს შორის გამოისახება შემდეგნაირად

$$S_{გა}(ω) = |k(jω)|^2 S_{შე}(ω), \quad (14.23)$$

$k(jω)$ - ფილტრის კომპლექსური გადაცემითი ფუნქციაა.

თეთრი ხმაურის სპექტრალური სიმკვრივე მუდმივია და ერთის ტოლია. გვექნება

$$S_z(ω) = |\psi_z(ω)|^2, \quad (14.24)$$

სადაც  $S_z(ω) - Z(t)$  სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივეა;

$\psi_z(ω)$  -მაფორმირებელი ფილტრის გადაცემითი ფუნქციაა.

ამასთან ცხადია, რომ

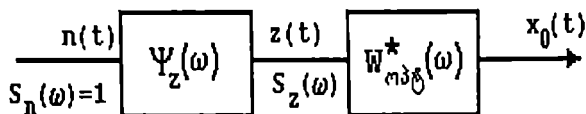
$$S_z(ω) = \psi_z(ω)\psi_z^*(ω), \quad (14.25)$$

სადაც

$$\psi_z^*(ω) = \psi_z(-ω).$$

მაშინ  $Z(t)$  სიგნალის ოპტიმალური ფილტრაციის სტრუქტურული სქემა შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც თეთრი ხმაურის ფილტრაციის სქემა (ნახ.14.3).





ნახ.14.3

სქემა შესდგება მიმდევრობით შეერთებული მაფორმირებელი და ოპტიმალური ფილტრებისაგან. საერთო გადაცემითი ფუნქცია ტოლია

$$k_0^*(j\omega) = \psi_z^*(\omega) W_{ობტ}^*(\omega), \quad (14.26)$$

ან (14.18), (14.21) გათვალისწინებით

$$k_0^*(j\omega) = \frac{S_{zx}(\omega)}{\psi_z^*(\omega)} \quad (14.27)$$

მიღებული სისტემა არარეალიზებადია, ვინაიდან გვაქვს  $W_{ობტ}^*(j\omega)$ . ფიზიკური რეალიზებისათვის  $k_0^*(j\omega)$  გამოიყოს ის ნაწილი, რომელიც შეესაბამება მნიშვნელობებს  $t > 0$  მომენტში. ცნობილია, რომ სიხშირულ არეში ეს შეესაბამება მდგენელებს, რომლებსაც პოლუსები აქვთ ნახევარსიბრტყის ზედა ნაწილში. (14.27) ფორმულიდან მივიღებთ

$$k_0(j\omega) = \left[ \frac{S_{zx}(\omega)}{\psi_z(\omega)} \right]_+ \quad (14.28)$$

ნიშანი "+" ნიშნავს, რომ კვადრატულ ფრჩხილებში მიღებულია მხედველობაში ის მდგენელები, რომლებიც შეიცავენ დადებით სიხშირეებს. ანალიზურად ეს შეიძლება მოხდეს შემდეგი ფორმულებით

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_0^*(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (14.29)$$

$$k_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (14.30)$$

ახლა ადვილად შეიძლება მოიძებნოს ოპტიმალური ფილტრის გადაცემითი ფუნქცია  $Z(f)$  შემავალი სიგნალისათვის. ამისათვის საჭიროა გავატაროთ თეთრი ხმაურის ფილტრში, რომლის გადაცემითი ფუნქცია მაფორმირებელი ფილტრის შებრუნებული გადაცემითი ფუნქციის ტოლია

$$W_{\text{ობ}}^*(j\omega) = k_0(j\omega) \frac{1}{\psi_z(\omega)}. \quad (14.31)$$

შევიტანოთ ეს ფორმულა (14.21) გამოსახულებაში, გვექნება

$$W_{\text{ობ}}^*(j\omega) = \frac{1}{\psi_z(\omega)} \frac{S_{zx}(\omega)}{\psi^*(\omega)} \quad (14.32)$$

ამრიგად, ოპტიმალური ფილტრის გადაცემითი ფუნქციის განსაზღვრისათვის აუცილებელია სრული შესავალი სიგნალის  $S_z(\omega)$  სპექტრალური სიმკვრივე დაიშალოს კომპლექსურ შეუღლებულ თანამამრავლებად და ვისარგებლოთ სასარგებლო შემავალი სიგნალის  $S_{zx}(\omega)$  მნიშვნელობით, (14.32) ფორმულით მივიღებთ საძიებელ რეზულტატს. (14.32) ფორმულა სამართლიანია, როდესაც არ არსებობს კორელაცია სასარგებლო სიგნალსა და ხმაურს შორის.

მაგალითი 14.1.

სასარგებლო სტაციანარული შემთხვევითი სიგნალი გადაიცემა არხში, რომელზედაც მოქმედებს თეთრი ხმაური. საჭიროა აიგოს ფიზიკურად რეალიზებადი ხმაურიდან სასარგებლო სიგნალის გამოყოფის ოპტიმალური ფილტრი. მოცემულია

ა) სასარგებლო სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე

$$S_{\text{გგ}}(\omega) = \frac{\beta^2}{\beta^2 + \omega^2}.$$

ბ) თეთრი ხმაურის სპექტრალური სიმკვრივე

$$S_n(\omega) = n^2$$

1. უნდა განისაზღვროს მთლიანი შემავალი სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე. ვინაიდან სასარგებლო სიგნალი და ხმაური ურთიერთ დამოუკიდებელი სიგნალებია. საძიებელი

სპექტრალური სიმკვრივე ტოლი იქნება ცალკეული სპექტრალური სიმკვრივების ჯამისა

$$S_z(\omega) = S_{\beta\omega}(\omega) + S_n(\omega) = \frac{\beta^2(n^2 + 1) + n^2\omega^2}{\beta^2 + \omega^2}.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$a^2 = \beta^2(n^2 + 1),$$

მაშინ

$$S_z(\omega) = \frac{a^2 + n^2\omega^2}{\beta^2 + \omega^2}.$$

$S_z(\omega)$  წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$S_z(\omega) = \frac{(a + jn\omega)(a - jn\omega)}{(\beta + j\omega)(\beta - j\omega)},$$

საიდანაც

$$\Psi_z(\omega) = \frac{a + jn\omega}{\beta + j\omega}; \quad \Psi_z^*(\omega) = \frac{a - jn\omega}{\beta - j\omega}.$$

2. (14.30) ფორმულით განისაზღვრება  $k_0^*(j\omega)$ :

$$k_0^*(j\omega) = \frac{S_{\beta\omega}(\omega)}{\Psi_z^*(\omega)} = \frac{\beta^2}{\beta^2 + \omega^2} \frac{\beta - j\omega}{a - jn\omega} = \frac{\beta^2}{(\beta + j\omega)(a - jn\omega)}.$$

3. დავშალოთ  $k_0^*(j\omega)$  ორ მდგენელად. ერთში შედიან დადებითი სიხშირეები, მეორეში-უარყოფითი. ამისათვის წარმოვადგინოთ შემდეგი ტოლობა

$$k_0^*(j\omega) = \frac{\beta^2}{(\beta + j\omega)(a - jn\omega)} = \frac{A}{\beta + j\omega} + \frac{B}{a - jn\omega},$$

საიდანაც

$$\beta^2 = A(a - jn\omega) + B(\beta + j\omega).$$

გაუტოლოთ მარჯვენა და მარცხენა მხარეების კოეფიციენტები ერთმანეთს, გვექნება

$$\beta^2 = Aa + B\beta; \quad B - An = 0;$$

საიდანაც

$$A = \frac{\beta^2}{a + n\beta}, \quad B = \frac{n\beta^2}{a + n\beta}.$$

$A$  და  $B$  გათვალისწინებით

$$k_0^*(j\omega) = \frac{\beta^2}{(a + n\beta)(\beta + j\omega)} + \frac{n\beta^2}{(a + n\beta)(\beta - j\omega)}.$$

ადვილად შევამჩნევთ, რომ პირველ მდგენელში არის დადებითი სიხშირე. მაშასადამე,

$$\left| \frac{S_{\Sigma\Phi}}{\Psi_z^*} \right|_+ = \frac{\beta^2}{(a + n\beta)(\beta + j\omega)}.$$

4. ვიპოვოთ ოპტიმალური ფილტრის გადაცემითი ფუნქცია

$$W_{\text{ობტ}}(j\omega) = \frac{1}{\Psi_z(\omega)} \left| \frac{S_{\Sigma\Phi}(\omega)}{\Psi_z^*(\omega)} \right|_+ = \frac{\beta^2}{(a + j\omega)(a + n\beta)} = \frac{\beta^2(a + n\beta)}{a + j\omega}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები

$$k = \frac{\beta^2}{a^2 + n\beta}, \quad T = \frac{n}{a}.$$

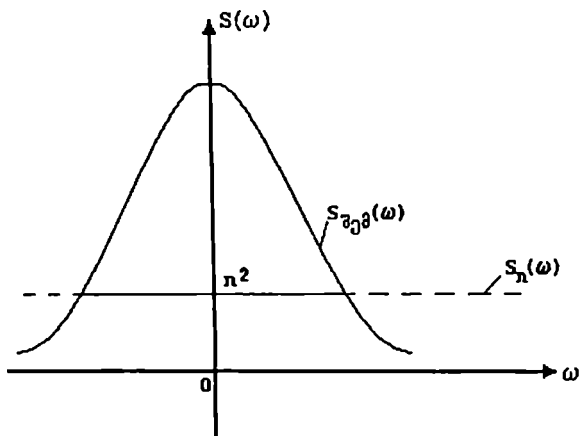
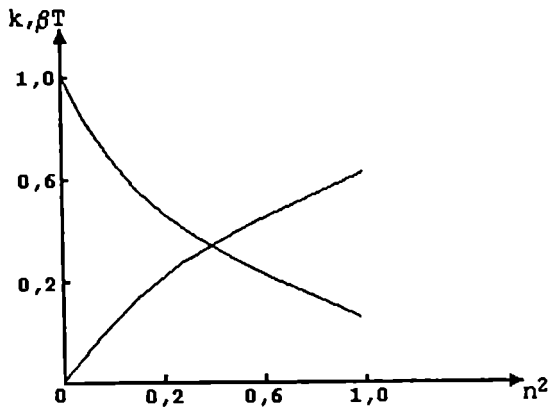
თუ მივიღებთ მხედველობაში  $a$ -ს მნიშვნელობას

$$k = \frac{1}{1 + n^2 + n\sqrt{n^2 + 1}}, \quad T = \frac{n}{\beta\sqrt{n^2 + 1}}$$

მაშინ გადაცემითი ფუნქცია მიიღებს სახეს

$$W_{\text{ობტ}}(j\omega) = \frac{k}{j\omega T + 1}.$$

ამრიგად, ოპტიმალური ფილტრი წარმოადგენს ინერციულ რგოლს, რომლის გაძლიერების კოეფიციენტი ყოველთვის ერთზე ნაკლებია და დამოკიდებულია ხმაურის სპექტრალური სიმკვრივის დონეზე.  $T$ -დროის მუდმივა განისაზღვრება სასარგებლო სიგნალის სპექტრალური სიგნალის სპექტრით. (ნახ.14.4-ში) მოცემულია გრაფიკი, რომელიც განსაზღვრავს ფილტრის პარამეტრებს ხმაურის დონის მიხედვით.



ნახ.14.4

ზოგად შემთხვევაში მრავალგანზომილებიან ამოცანებში ვიწრო  
 ჰობფის განტოლებას აქვს სახე

$$k_{zx}(t, u) = \int_{t_0}^t L(t, S) k_z(S, u) dS, \quad t_0 \leq S \leq t,$$

სადაც

$$\left. \begin{aligned} k_{zx}(t, u) &= M[x(t), Z^T(u)]; \\ k_z(s, u) &= M[Z(s), Z^T(u)]; \end{aligned} \right\}$$

$k_{zx}(t, u)$  არის კორელაციური მატრიცა მდგომარეობის ვექტორსა და მთლიანი გამომავალი სიგნალს შორის.  $k_z(s, u)$ - გამომავალი მთლიანი სიგნალის ვექტორის კორელაციური მატრიცაა.  $L(t, S)$ —ფილტრის იმპულსური ფუნქციების მატრიცაა.  $L(t, S)$  აკმაყოფილებს ვინერ-ჰოპფის მატრიცულ განტოლებას. ის უნდა აკმაყოფილებდეს ფილტრის ფიზიკური რეალიზაციის პირობას

$$L(t, S) \equiv 0. \quad t < S.$$

სხვა სიტყვებით ფილტრი წარმოადგენს სიგნალის „შემფასებელს“. შეფასება შეიძლება იყოს პარამეტრული: გვაქვს დაკვირვების  $n$  განზომილებიანი  $v$  ვექტორი და უნდა შევაფასოთ  $m$  განზომილებიანი  $\theta$  პარამეტრების ვექტორი. ამ ამოცანას უწოდებენ „პარამეტრების შეფასებას“ და კლასიკურ სტატისტიკაში დაკავშირებულია კრამერის და ფიშერის სახელებთან [55], [79].

ნებისმიერი  $\theta$  შეფასება ფუნქციითაა  $v$ . შეფასება აღენიშნოთ „სახურავით“ ე.ი.  $\hat{\theta} = f(v)$ . სადაც  $f(\cdot)$ —მთლიანად განსაზღვრავს შეფასებას,  $f(v)$ —შემთხვევითი სიდიდეა. ამიტომ ნებისმიერი ზომა უნდა დაკავშირებული იყოს „საშუალო სტატისტიკურთან“. დავიწყოთ პირველი მომენტი

$$E_{\theta}[\hat{\theta}] = \int f(v) p(v|\theta) d|v|,$$

სადაც  $\theta$  ინდექსი ნიშნავს, რომ  $\theta$ —ფიქსირებული პარამეტრია. სხვაობას

$$E_{\theta}[\hat{\theta}] - \theta$$

უწოდებენ „შეფასების წანაცვლებას“. ცნობილია, რომ წანაცვლება  $\theta$ -ს ფუნქციითაა:

$$b(\theta) = E_{\theta}[\hat{\theta}] - \theta.$$

შეთასებას უწოდებენ არა წანაცვლებადს, თუ მისი წანაცვლება ნულის ტოლია. ვთქვათ  $\theta_0$  ნიშნავს  $\theta$  პარამეტრის „ნამდვილ“ მნიშვნელობას, რომელიც ცხადია უცნობია და სინამდვილეში არ შეიძლება იყოს ცნობილი. მიუხედავად ამისა ჩვენ შეგვიძლია ვილაპარაკოთ  $f(v) - \theta_0$  „ცდომილებაზე“ ვინაიდან  $\theta_0$  უცნობია, ჩვენ ვიხილავთ ყველა  $\theta$ -თვის „საშუალო კვადრატულ ცდომილებას“

$$E_{\theta}(\|f(v) - \theta\|^2) = \int_{R^n} \|f(v) - \theta\|^2 p(v|\theta) d|v|,$$

ან უფრო ზოგადად—ცდომილების მეორე მომენტების მატრიცას

$$R(\theta) = E_{\theta}[(f(v) - \theta)(f(v) - \theta)^T] = \int_{R^n} (f(v) - \theta)(f(v) - \theta)^T p(v|\theta) d|v|,$$

როგორც  $\theta$  ფუნქციას:

შეგვიძლია მივიღოთ  $R(\theta)$  ქვედა ზღვარი

$$R(\theta) \geq (I + \nabla_{\theta} b(\theta)) \wedge (\theta)^{-1} (I + \nabla_{\theta} b(\theta))^T$$

სადაც

$$\begin{aligned} \wedge(\theta) &= E_{\theta}[(\nabla_{\theta} \log P(v|\theta))^T (\nabla_{\theta} \log P(v|\theta))] = \\ &= \int_{R^n} (\nabla_{\theta} \log P(v|\theta))^T (\nabla_{\theta} \log P(v|\theta)) p(v|\theta) d|v|, \end{aligned}$$

სადაც  $\nabla_{\theta}$  ნიშნავს გრადიენტს. იმისათვის, რომ გამოვიყენოთ  $R(\theta)$  გამოსახულება ჩვენ უნდა ვიცოდეთ შეფასების წანაცვლება, რომლის გამოთვლა საკმარის რთულია. ფაქტიურად უტოლობა სასარგებლოა იმ შემთხვევებში, როდესაც წანაცვლება ნულის ტოლია. ამრიგად, არაწანაცვლებადი შეფასებისას მეორე რიგის მომენტების  $R(\theta)$  მატრიცას აქვს ქვედა ზღვარი (კრამერ-რაოს ზღვარი):

$$R(\theta) \geq \left\{ E_{\theta} \left[ (\nabla_{\theta} \log P(v|\theta))^T (\nabla_{\theta} \log P(v|\theta)) \right] \right\}^{-1}$$

უტოლობა განსაკუთრებით ეფექტურია, როდესაც საზღვარი არ არის  $\theta$  დამოკიდებული.

ობტიმალური შეფასების მოსაძებნად (ე.ი. ცლომილების მომენტების მატრიცას მინიმიზაცია) გამოიყენება მაქსიმალური დამაჯერებლობის პრინციპი. ეს პრინციპი სხვა მეთოდებთან შედარებით უფრო ეფექტურია, ვინაიდან ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილში მისი გრადიენტი ნულის ტოლია, ამიტომ მაქსიმალური დამაჯერებლობის პრინციპი აკმაყოფილებს პირობას

$$\nabla_{\theta} \log p(\nu|\theta) = 0.$$

მაგალითი 14.2.

ვთქვათ,

$$p(\nu|\theta) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n |R|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} [R^{-1}(\nu - L\theta), (\nu - L\theta)]\right\},$$

სადაც  $L$  მატრიცას აქვს  $n \times m$  განზომილება. ეს იმას ნიშნავს, რომ  $\nu$ -გაუსის შემთხვევითი ვექტორია  $L\theta$  საშუალოთი და  $R$  დისპერსიული მატრიცით. ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\left(\nabla_{\theta} \log p(\nu|\theta)\right)^T = L^T R^{-1}(\nu - L\theta).$$

დაუშვათ, რომ  $L\theta = 0$  ტოლობას მოჰყვება  $\theta = 0$ , ან ექვივალენტურია  $L^T L$  გადაგვარებულობის. მაშინ მატრიცა

$$E\left[\left(\nabla_{\theta} \log P(\nu|\theta)\right)^T \left(\nabla_{\theta} \log P(\nu|\theta)\right)\right] = E\left[L^T R^{-1}(\nu - L\theta) \times (\nu - L\theta)^T R^{-1} L\right] = L^T R^{-1} L$$

აგრეთვე გადაგვარებულია. ამრიგად, რაო-კრამერის საზღვრის მატრიცას აქვს სახე

$$\left(L^T R^{-1} L\right)^{-1}$$

და საზღვარი არ არის  $\theta$ -ზე დამოკიდებული. მაქსიმალური დამაჯერებლობის მეთოდით მოცემულია შეფასების გამო-სახულება.



$$L^T R^{-1}(v - L\hat{\theta}) = 0,$$

ან

$$\hat{\theta} = (L^T R^{-1} L)^{-1} L^T R^{-1} v.$$

ეს შეფასება არაწანაცლებადია, ვინაიდან

$$E[\hat{\theta}] = (L^T R^{-1} L)^{-1} L^T R^{-1} E[v] = \theta.$$

შეფასების ეფექტურობისათვის გამოვიყენოთ გამოსახულება

$$f(v) - \theta = 0.$$

ჩვენ შემთხვევაში

$$\begin{aligned} (L^T R^{-1} L)^{-1} L^T R^{-1} v - \theta &= (L^T R^{-1} L)^{-1} L^T R^{-1} [v - L\theta] = \\ &= (L^T R^{-1} L)^{-1} (\nabla_{\theta}^{-1} (\nabla_{\theta} \log P(v|\theta)))^T \end{aligned}$$

შეფასების სხვა მეთოდებიდან უნდა გამოვყოთ ბაეისის მეთოდი.

### § 14.3. კალმანის ფილტრი (დისკრეტული დრო)

განვიხილოთ შეფასების ზოგიერთი კლასის ამოცანების გადაწყვეტა. პირველად ფორმულირებული და განვითარებული, კალმანის და ბიუსის მიერ როგორც ვინერის კლასიკური ამოცანის განზოგადება. ჩვენ შევისწავლით მდგომარეობის შეფასების წრფივი თანმიმდევრობის ალგორითმების კლასს, სადაც ხორციელდება საშუალო კვადრატული შეცდომის მინიმიზაცია. ამ ალგორითმებმა მიიღეს დასახელება „კალმან-ბიუსის“, „ფილტრი“, „კალმანის ფილტრები“. იმ ავტორების საპატივცემოდ, რომლებმაც წამოიწიეს ამ მიმართულებით თეორიული სამუშაოები. ჩვენ განვიხილავთ კალმანის ფილტრის, როგორც დისკრეტულს, ისე უწყვეტ ვარიანტებს.

როგორც აღვნიშნეთ, სტაციონარული ერგოდიკული პროცესების წრფივ ფილტრაციაში კოლმოგოროვის და ვინერის სამუშაოები გახდნენ ფილტრების თეორიის განვითარების ათვლივ წერტილად. ვინერის ფილტრის პრაქტიკულ გამოყენებას საკმაო დრო დასჭირდა. ეს აიხსნება იმ სიძნელეებით, რაც პირველ რიგში დაკავშირებულია ფილტრაციის განტოლებების ამოხსნასთან, მეორე რიგში მოთხოვნილი

სიგნალების სპექტრალური განაწილების და ხმაურის იდენტიფიკაციით, და მესამე ფიზიკური სისტემების მოდელირებით. პრაქტიკულად საინტერესო ბევრი სისტემები უბრალოდ არ შეესაბამებიან იმ დაშვებებს, რომლებიც მიღებულია ვინერის ფილტრის თეორიაში.

1960 წელს დამუშავებულმა კალმან-ბიუსის ფილტრმა ვინერის თეორიიდან ამოაგდო დაშვება სისტემის სტაციონარობის შესახებ და მონაცემების არსებობა დროის უსასრულო ინტერვალზე. ამას გარდა, ალგორითმი საშუალებას იძლევა შეფასების სტუმის უშუალო სინთეზს. კალმან-ბიუსის თეორია ფართოდ გამოიყენება კოსმოსურ ტექნიკაში, ავიაცი-აში, ტექნიკურ დიაგნოსტიკაში, ბიომედიცინაში და მრავალ ტექნიკურ ამოცანებში. საგულისხმოა, რომ არ გადაწყვეტილა ვინერის ძირითადი პრობლემები: სისტემების იდენტიფიკაცია და მოდელირება ხმაურის არსებობის შემთხვევაში, ფილტრების რეალიზაციის საკითხები. საბედნიეროდ, კალმანის ფილტრის მოდელირების და პროექტირების არაკორექტურობა შეიძლება შესწავლილი იყოს.

წრფივი სისტემებისათვის კალმანის ფილტრის ალგორითმები უწყვეტი და დისკრეტული სისტემებისათვის მოცემულია 1 და 2 ცხრილებში [79].

კალმანის ფილტრის ალგორითმი უწყვეტი გაზომვებისათვის  
ცხრილი 14.1

| დახასიათება                                  | განტოლება  | განტოლე-<br>ბის რიგითი<br>ნომერი |
|--|--|----------------------------------|
| სისტემის მოდელი                              | $\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$   | (1)                              |
| გაზომვები                                    | $y(t) = H(t)x(t) + v(t)$   | (2)                              |
| საწყისი პირობები                             | $E[x_0] = \bar{x}(0), Cov[x(0) - \bar{x}(0)] = P(0)$                                     | (3)                              |
| ხმაური                                       | $u(t)$ და $v(t)$ -დამოუკიდებელი თეთრი თეთრი ხმაურებია ნულოვანი სა-<br>შუალო მნიშვნელობით |                                  |
|  | $Cov[u(t)] = Q(t), Cov[v(t)] = R(t)$   | (4)                              |
| შეფასება                                     | $\dot{\hat{x}}(t) = F(t)\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - H(t)\hat{x}(t)]$                        | (5)                              |
| კოვარაციული მატ-<br>რიცა                     | $\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F(t)^T + G(t)Q(t)G(t)^T - K(t)R(t)K(t)^T$                   | (6)                              |
| გაძლიერების კო-<br>ეფი-<br>ციენტების მატრიცა | $K(t) = P(t)H(t)^T R(t)^{-1}$  | (7)                              |

კალმანის ფილტრის ალგორითი დისკრეტული  
გაზომვებისათვის

ცხრილი 14.2

| დახასიათება                 | განტოლება  | განტოლე-<br>ბის რიგითი<br>ნომერი |
|-----------------------------|--|----------------------------------|
| სისტემის მოდელი             | $\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$   | (8)                              |
|                             | $x(k) = \Phi(k, k-1)x(k-1) + \Gamma(k-1)\omega(k-1)$   | (9)                              |
| გაზომვები                   | $y(k) = H(k)x(k) + v(k)$   | (10)                             |
| საწყისი პირობები            | $E[x_0] = \hat{x}(0), \text{Cov}[x(0) - \hat{x}(0)] = P(0)$  | (11)                             |
| ხმაური                      | $u(t), \omega(k-1), v(k)$ -ღამოუცილებელი<br>ხმაური ნულოვანი მნიშვნელობით<br>$u(t)$ - თეთრი ხმაური კოვარიაციით<br>$\text{Cov}[u(t)] = Q(t)$ | (12)                             |
|                             | $\omega(k-1)$ გაუსური თანმიმდევრო-<br>ბები კოვარიაციით<br>$\text{Cov}[\omega(k-1)] = Q(k-1)$   | (13)                             |
|                             | $v(k)$ გაუსური თანმიმდევრობები<br>კოვარიაციით $\text{Cov}[v(k)] = R(k)$  | (14)                             |
|                             | $\dot{\hat{x}}(t) = F(t)\hat{x}(t)$ ან   | (15)                             |
| შეფასება გაზომვებს<br>შორის | $\hat{x}(k)^- = \Phi(k, k-1)\hat{x}(k-1)^+$ და   | (16)                             |
|                             | $\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F(t)^T + G(t)Q(t)G(t)^T$<br>ან  | (17)                             |
|                             | $P(k)^- = \Phi(k, k-1)P(k-1)^+ \Phi(k, k-1)^T +$<br>$+ \Gamma(k-1)Q(k-1)\Gamma(k-1)^T$   | (18)                             |
| შეფასება<br>გაზომვებისას    | $\hat{x}(k)^+ = \hat{x}(k)^- + K(k)[y(k) - H(k)\hat{x}(k)^-]$  | (19)                             |
|                             | $K(k) = P(k)^- H(k)^T [H(k)P(k)^- H(k)^T +$<br>$+ R(k)]^{-1}$  | (20)                             |
|                             | $P(k)^+ = [I - K(k)H(k)]P(k)^-$  | (21)                             |

კალმანის ფილტრი არის წრფივი სისტემა. ის კარგად  
აღიწერება მდგომარეობათა სივრცის მეთოდით. სისტემა ხა-  
სიათდება თავისი „შემაჯავლით“, თავისი „მდგომარეობით“ და  
„გამოსასვლელით“. ყველა ეს სიდიდეები დროის ფუნქციებია.

დრო შეიძლება იყოს როგორც უწყვეტი, ასევე დისკრეტული. დროის აღმნიშვნელი ინდექსი „მთელრიცხვანა“. აღვნიშნოთ  $\{u_n\}$  შემავალი თანმიმდევრობა, ხოლო  $\{v_n\}$  — გამომავალი. სისტემა „მდგომარეობა-შემავალი“ აღიწერება განტოლებით

$$X_{n+1} = A_n X_n + B_n u_n, \quad (14.33)$$

ხოლო სისტემა „შემავალი-მდგომარეობა-გამომავალი“ აღიწერება განტოლებით

$$v_n = C_n X_n + D_n u_n, \quad (14.34)$$

სადაც  $A_n$  — კვადრატული მატრიცაა,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  — სწორკუთხა მატრიცებია.  $A_n$  არის  $p \times p$  განზომილების მატრიცა,  $B_n$  —  $p \times p$  განზომილების მატრიცაა,  $v_n$  —  $m \times p$  განზომილების მატრიცაა,  $D$  —  $m \times q$ . (14.33) და (14.34) ამოხსნა შეიძლება მოიძებნოს შემდეგი სახით

$$X(n) = \psi_{n,k} X_k + \sum_{i=k}^{n-1} \psi_{n,i+1} B_i u_i, \quad (14.35)$$

სადაც  $\psi_{n,k}$  უწოდებენ მდგომარეობის გარდამავალ მატრიცას და შემდეგნაირად განისაზღვრება

$$\psi_{n,k} = A_{n-1} \dots A_k, \quad k \leq n-1 \quad (14.36)$$

$\psi_{n,n} = I$  (ერთეულოვანი მატრიცაა).

(14.36)-ს აქვს თვისება

$$\psi_{n,n} \psi_{k,m} = \psi_{n,m}, \quad \leq k \leq n. \quad (14.37)$$

(14.35) გათვალისწინებით (14.34) მიიღებს სახეს

$$v_n = C_n \psi_{n,k} X_k + \sum_{i=k}^{n-1} C_n \psi_{n,i+1} B_i u_i + D_n u_n. \quad (14.38)$$

აქ პირველი წევრი არის რეაქცია საწყის მდგომარეობაზე (ან საწყის პირობებზე), მეორე წევრი — რეაქციაა შემავალი თანმიმდევრობაზე. ფუნქცია

$$W_{n,i} = C_n \psi_{n,i+1} B_i = D_n \quad i < n \quad i = n \quad (14.39)$$

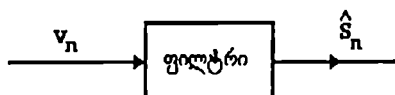
უწოდებენ სისტემის წონით მატრიცას ან წონით მოდელს. ძირითადი თეორია [16]. განვიხილოთ მოდელი

$$v_n = S_n + N_n^0 \quad n \geq 1, \quad (14.40)$$

სადაც  $\{S_n\}$  — არის სიგნალი,  $\{N_n^0\}$  — ხმაურია. ამოცანა, რომელსაც ჩვენ ეხლა ვიხილავთ მდგომარეობის  $S_n$  შეფასებაში, ყველა იმ მონაცემებით რომელიც ჩვენ გვაქვს დროის  $n$  მომენტში. შეფასების კრიტერიუმად ავირჩიოთ ბაიესის საშუალოკვადრატული ცდომილება. ოპტიმალური შეფასება გამოითვლება როგორც პირობითი მათემატიკური ლოდინი

$$\hat{S}_n = E\{S_n | v_n, v_{n-1}, \dots, v_1\}. \quad (14.41)$$

ამ პროცედურის ჩატარება უნდა მოხდეს ფილტრის საშუალებით. (ნახ.14.5).



ნახ.14.5.

ვინაიდან ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ გაუსის შემთხვევას და ფილტრი არის წრფივი სისტემა, ამიტომ იგი აღიწერება „შემაველი-გამომავალი“ განტოლებებით:

$$\hat{S}_n = \sum_1^n W_{n,k} \tilde{v}_k + E[S_n], \quad (14.42)$$

სადაც  $\tilde{v}_n = v_n - E[v_n]$ ,  $\tilde{S}_n = S_n - E[S_n]$ , ხოლო სისტემის მატრიცა  $\{W_{n,k}\}$  განისაზღვრება როგორც ვინერ-ჰოპფის განტოლების ამონახსნი:

$$E[\tilde{S}_n v_k^*] = \sum_{j=1}^n W_{n,k} E[\tilde{v}_j v_k^*].$$

(14.42) განტოლებიდან ჩანს, რომ ყველა  $n$ -თვის საჭიროა „დავაგროვოთ“  $v_k$  ამორჩევითი მნიშვნელობები  $k = n$ -მდე. ეს მოითხოვს დიდ მეხსიერებას, ამიტომ პრაქტიკულად შემდეგნაირად ვიქცევით. ავიღოთ

$$S_n = C_n X_n, \quad X_{n+1} = A_n X_n + u_n + u_n + N_n^s, \quad (14.43)$$

სადაც  $\{N_n^s\}$  — არის თეთრი ხმაური დისკრეტული დროით,  $\{u_n\}$  — ცნობილი დეტერმინირებული შემავალი სიდიდეა. მატრიცები  $A_n$  და  $C_n$  წინასწარ ცნობილია. პროცესები  $\{x_n\}$  და  $\{N_n^0\}$  არ არიან ურთიერთდამოკიდებული. თუ გამოვიყენებთ კოვარციული მატრიცის დაშლის მეთოდს, მაშინ  $N_n^s$  წარმოვადგინოთ

$$N_n^s = L_n z_n,$$

სადაც  $\{z_n\}$  — არის თეთრი ხმაური ერთეულოვანი კოვარაციით ან რაც იგივეა

$$v_n^0 = M_n Y_n,$$

სადაც  $\{Y_n\}$  — არის თეთრი ხმაური ერთეულოვანი კოვარიაციით, ე.ი. შემოვიტანეთ ვექტორი  $N_n = \begin{bmatrix} z_n \\ Y_n \end{bmatrix}$ , რომელიც თეთრი ხმაურია ერთეულოვანი კოვარიაციით.

$$N_n^s = F_n N_n,$$

$$N_n^0 = G_n N_n$$

და რასაკვირველია

$$E[N_n^s N_n^{s*}] = F_n N_n^T,$$

$$E[N_n^0 N_n^{0*}] = G_n G_n^T,$$

$$F_n G_n^T = 0.$$

მაშინ ჩვენი სისტემის განტოლებებია

$$v_n = S_n + G_n N_n,$$

$$S_n = C_n X_n,$$

$$X_{n+1} = A_n X_n + u_n + F_n N_n. \quad (14.45)$$

უნდა გათვალისწინებული იყოს აგრეთვე, რომ დაკვირვების ხმაურის კოვარციული მატრიცა არის არაგადაგვარებული

$$C_n C_n^T \neq 0.$$

კალმანის და ბიუსის შესანიშნავი მიღწევაა ის, რომ მათ შესძლეს ეჩვენებინათ: როდესაც სისტემა ალიწერება (14.45) განტოლებით, მაშინ ფილტრი ალიწერება მდგომარეობათა სივრცის მეთოდით.

უპირველეს ყოვლისა აღვნიშნოთ „მდგომარეობის შეფასება“

$$\hat{X}_n = E[X_n | v_n, \dots, v_1], \quad n \geq 2.$$

$X_0$  — გაუსის სიდიდე არ არის დამოკიდებული  $\{N_n\}$  ხმაურზე და  $\hat{X}_0 = E[X_0]$ .

კალმანის ფილტრი დამყარებულია ორ მარტივ ცნებაზე.

1) გაახლებული თანამიმდევრობა

$\{v_n\}$  თანამიმდევრობისათვის ჩავატაროთ გრამ-შმიტის ორთოგონალიზაცია

$$v_n = v_n - E[v_n | v_{n-1}, \dots, v_1]. \quad (14.46)$$

$\{v_n\}$  თანამიმდევრობას უწოდებენ გაახლებულს. ეს ფაქტი გვიჩვენებს იმას, რომ  $v_n$  ყველა  $n$ -თვის მოაქვს ახალი ინფორმაცია, რომელიც წარმოადგენს თეთრი ხმაურის თანამიმდევრობას.

გავამარტივოთ (14.46)

$$\begin{aligned} v_n &= C_n X_n + G_n N_n = \\ &= C_n (A_{n-1} X_{n-1} + u_{n-1} + F_{n-1} N_{n-1}) + G_n N_n. \end{aligned} \quad (14.47)$$

ამრიგად, ჩვენ შეიძლება შევეუდგეთ პირობითი საშუალოს რეკურენტული ფორმულის განსაზღვრას. მაგრამ უნდა შევნიშნოთ, რომ სიგნალის და ხმაურის დამოუკიდებლობის გამო

$$E[F_{n-1} N_{n-1} | v_{n-1}, \dots, v_1] = 0.$$

$\{N_n^v\}$  არის თეთრი ხმაური, ხოლო ინდექსები სხვადასხვა, მაშინ

$$E[N_{n-1} | v_{n-1}, \dots, v_1] = 0.$$

ამიტომ

$$E[v_n | v_{n-1}, \dots, v_1] = C_n(A_{n-1}\hat{X}_{n-1} + u_{n-1}),$$

და ამგვარად გვაქვს

$$v_n = v_n - C_n(A_{n-1}X_{n-1} + u_{n-1}). \quad (14.48)$$

გრამ-შმიტის ორთოგონალიზაციის თანახმად  $E[v_n] = 0$

და  $v_n$  არ არის დამოკიდებული  $\{v_n\}$  პროცესის საშუალო მნიშვნელობაზე. დაეუშვათ

$$\tilde{v}_n = v_n - E[v_n], \quad \tilde{X}_n = X_n - E[X_n], \quad (14.49)$$

$$\hat{X}_n = E[X_n] + E[\tilde{X}_n \tilde{v}_n, \dots, \tilde{v}_n], \quad (14.50)$$

ამიტომ

$$v_n = \tilde{v}_n - E[\tilde{v}_n | \tilde{v}_{n-1}, \dots, \tilde{v}_1] = \tilde{v}_n - C_n A_{n-1} \hat{X}_{n-1}, \quad (14.51)$$

სადაც

$$\hat{X} = E[\tilde{X}_n | \tilde{v}_n, \dots, v_1], \quad (14.52)$$

და მაშასადამე,

$$\hat{X} = E[X_n] + \hat{X}_n. \quad (14.53)$$

(14.51) განტოლება გვიჩვენებს, რომ გაახლებული  $v_n$  პროცესი უცვლელია და არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორია  $\{U_n\}$  შემავალი. ვინაიდან, ეს უკანასკნელი გამოიყენება მხოლოდ  $\{v_n\}$  გამოსათვლელად. მართლაც დაეუშვათ, რომ  $m_n = E[X_n]$ . თუ (14.43) მიმართ გამოვიყენებთ მათემატიკური ლოდინის ოპერაციას, გვექნება

$$m_n = A_{n-1}m_{n-1} + u_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad m_0 = E[x_0] \quad (14.53)$$

და მაშასადამე,

$$E[v_n] = C_n m_n. \quad (14.55)$$

2. მდგომარეობის გაახლების პროცესი

ახლა მოვახდინოთ  $\{\hat{X}_n\}$  მდგომარეობის ორთოგონალიზირება. დაეუშვათ



$$v_n^s = \hat{X}_n - E[\hat{X}_n | \hat{X}_{n-1}, \dots, \hat{X}_1], \quad (14.56)$$

$$v_1^s = \hat{X}_1 - m_1 = \hat{X}_1 - (A_0 m_0 + u_0).$$

$\{v_n^s\}$  თანმიმდევრობას უწოდებენ გაახლებულ მდგომარეობას. განვიხილოთ საშუალო  $E[\hat{X}_n | \hat{X}_{n-1}, \dots, \hat{X}_1]$ , რომელშიც თუ გავითვალისწინებთ  $\hat{X}_n$  და გამოსახულებას

$$E\{E[\theta/v_1], v_2\} = E[\theta/v_2], \quad (14.57)$$

მივიღებთ

$$\begin{aligned} E[X_n | v_{n-1}, \dots, v_1] &= E[(A_{n-1}X_{n-1} + u_{n-1} + F_{n-1}N_{n-1}) | v_{n-1}, \dots, v_1] = \\ &= A_{n-1}\hat{X}_{n-1} + u_{n-1}. \end{aligned} \quad (14.58)$$

კერძოდ, სხვაობას  $\hat{X}_n - (A_{n-1}X_{n-1} + u_{n-1})$  აქვს ნულოვანი საშუალო მნიშვნელობა და არ არის კორელირებული  $v_{n-1}, \dots, v_1$ , და აგრეთვე  $\hat{X}_{n-1}, \dots, \hat{X}_1$ . ბოლო სიდიდეები წრფივად გამოსახება  $v_{n-1}, \dots, v_1$  საშუალებით.

ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$E[\hat{X}_n | \hat{X}_{n-1}, \dots, \hat{X}_1] = A_{n-1}\hat{X}_{n-1} + u_{n-1} \quad (14.59)$$

და აგრეთვე, რომ

$$v_n^s = \hat{X}_n - (A_{n-1}\hat{X}_{n-1} + u_{n-1}). \quad (14.60)$$

თუ (14.60) გამოვაკლებთ საშუალო მნიშვნელობას, მივიღებთ

$$v_n^s = \hat{X}_n - A_{n-1}\hat{X}_{n-1}. \quad (14.61)$$

მაშასადამე, მდგომარეობის გაახლების პროცესი არ არის დამოკიდებული შემავალ თანმიმდევრობაზე და მას მივიღებთ, თუ (14.61)-ს გავუტოლებთ ნულს.

ახლა გადავიდეთ უშუალოდ კალმანის ფილტრზე. მას მივიღებთ, თუ ვაჩვენებთ, რომ

$$v_n^s = k_n v_n. \quad (14.63)$$

ის არის დამოკიდებული  $\{v_n\}$  თვისებებზე და თავის მხრივ  $v_n^s$ . ამიტომ

$$\begin{aligned} v_n^s &= \hat{x}_n - A_{n-1}\hat{x}_{n-1} = \hat{x}_n - \tilde{x}_n - A_{n-1}(\hat{x}_{n-1} - \tilde{x}_{n-1} + \tilde{x}_{n-1}) = \\ &= (\hat{x}_n - \tilde{x}_n) - A_{n-1}(\hat{x}_{n-1} - \tilde{x}_{n-1}) + \tilde{x}_n - A_{n-1}\tilde{x}_{n-1} = \\ &= (\hat{x}_n + \tilde{x}_n) - A_{n-1}(\hat{x}_{n-1} - \tilde{x}_{n-1}) + F_{n-1}N_{n-1}. \end{aligned} \quad (14.64)$$

პირველი ორი წევრი არ არის კორელირებული  $\tilde{v}_{n-k}$ ,  $k \geq 1$ ,  $\hat{x}_n$  და  $\hat{x}_{n-1}$  შეფასების ოპტიმალობის გამო. ხოლო რაც შეეხება მესამე წევრს, ჩვენ გვაქვს

$$E[F_{n-1}N_{n-1}\tilde{v}_{n-1}^T] = E[F_{n-1}N_{n-1}(C_{n-1}\tilde{x}_{n-1} + G_{n-1}N_{n-1})^T]. \quad (14.65)$$

ხმაური  $F_{n-1}N_{n-1}$  არ არის  $X_{n-1}$  დამოკიდებული ამიტომ წინა გამოსახულებაში

$$F_{n-1}G_{n-1}^T = 0. \quad (14.66)$$

ეს გამომდინარეობს სიგნალის და ხმაურის ერთმანეთის მიმართ დამოუკიდებლობით. ამის გამო  $v_n^s$  არ არის კორელირებული  $\tilde{v}_{n-k}$ ,  $k \geq 0$ . ეს იმას ნიშნავს, რომ არაკორელირებულია აგრეთვე  $\tilde{v}_{n-k}$ ,  $k \geq 1$ . იმისათვის რომ დავამტკიცოთ (14.63), ჩვენ უნდა განვსაზღვროთ მხოლოდ  $k$  მატრიცა, ისეთი, რომ

$$E[v_n^s v_n^T] = k_n E[v_n v_n^T]. \quad (14.67)$$

თუ გარდავქმნით (14.51) (14.60) (14.66)  $v_n^s$  და  $v_n$  გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\hat{X}_n - (A_{n-1}\hat{X}_{n-1} + u_{n-1}) = k_n (v_n - C_n(A_{n-1}\hat{X}_{n-1} + u_{n-1})), \quad (14.68)$$

აღ

$$\begin{aligned} \hat{X}_n &= (I_n - k_n C_n)A_{n-1}\hat{X}_{n-1} + (I - k_n C_n)u_{n-1} + k_n v_n \\ \hat{x}_0 &= E[x_0] \quad \hat{S}_n = C_n \hat{x}. \end{aligned} \quad (14.69)$$

(14.69)-ით აღიწერება კალმანის ფილტრი. „შემაჯალს“ წარმოადგენს წევრები

$$(I - k_n C_n) u_{n-1} + k_n v_n, \quad (14.70)$$

(14.70) შეიცავს როგორც  $\{v_n\}$  დასაკვირვებელ მონაცემების თანმიმდევრობებს, აგრეთვე შემაჯალ  $\{u_n\}$  თანმიმდევრობებს.

იმისათვის, რომ ვისარგებლოთ (14.70) განტოლებით, უნდა გამოითვალოს გაძლიერების  $k_n$  მატრიცა. შემოვიღოთ მდგომარეობის შეფასების ცდომილების მატრიცას აღნიშვნა

$$P_n = E[e_n e_n^*], \quad (14.71)$$

სადაც  $e_n = x_n - \hat{x}_n = \tilde{x}_n - \hat{\tilde{x}}_n$ .

პირველად გამოვითვალოთ სხვაობითი განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს შეცდომის  $\{e_n\}$  პროცესი. თუ ავიღებთ სხვაობას  $\{X_n\}$  და  $\{\hat{X}_n\}$  შორის, მივიღებთ

$$e_n = A_{n-1} e_{n-1} + F_{n-1} N_{n-1} - k_n v_n. \quad (14.72)$$

ახლა  $v_n \{e_n\}$ -ზე დამოკიდებულებით (14.51) გათვალისწინებით მიიღებს სახეს

$$v_n = G_n N_n + C_n X_n - C_n (A_{n-1} \hat{X}_{n-1} + u_{n-1}). \quad (14.73)$$

ჩავსვათ (14.73)-ში  $x_n$  მნიშვნელობა, (14.45)-ის გათვალისწინებით, გვექნება

$$v_n = G_n N_n + C_n A_{n-1} e_{n-1} + C_n F_{n-1} N_{n-1}. \quad (14.74)$$

შევიტანოთ (14.66)  $e_n$  გამოსახულებაში

$$e_n = (I - k_n C_n) A_{n-1} e_{n-1} + (I - k_n C_n) F_{n-1} N_{n-1} - k_n G_n N_n \quad (14.75)$$

ეს გვიჩვენებს, რომ  $\{e_n\}$  არის გაუსის მარკოვისებური პროცესი, ამასთან  $e_{n-1}$  არ არის დამოკიდებული თეთრ ხმაურზე

$$(I - k_n C_n) F_{n-1} N_{n-1} - k_n G_n N_n \quad (14.76)$$

და ვინაიდან ამ გამოსახულების ყოველი წევრი არ არის დამოუკიდებელი, ამიტომ ჩავწეროთ

$$P_n = (I - k_n C_n) H_{n-1} (I - k_n C_n)^T + k_n G_n G_n^T k_n^T. \quad (14.77)$$

სადაც

$$H_n = A_n P_n A_n^T + F_n F_n^T \quad (14.78)$$

გამოვთვალთ  $k_n$  (14.67) გამოსახულების გათვალისწინებით. ამისათვის უნდა შევნიშნოთ, რომ (14.75)-ში  $C_{n-1}$  არ არის დამოკიდებული  $C_n F_{n-1} N_{n-1}$

$$E[(x_{n-1} - \hat{X}_{n-1}) N_{n-1}^T F_{n-1}^T] = -E[\hat{X}_{n-1} N_{n-1}^T F_{n-1}^T] = 0. \quad (14.79)$$

ვინაიდან  $v_{n-1}, \dots, v_n$  არ არიან  $F_{n-1} N_{n-1}$  დამოკიდებული, ამიტომ (14.75) ყოველი წევრი დამოუკიდებელია დანარჩენი ორისაგან, ამასთან მატრიცას აქვს სახე

$$\begin{aligned} E[v_n v_n^T] &= G_n G_n^T + C_n (A_{n-1} P_{n-1} A_{n-1}^T + F_{n-1} F_{n-1}^T) C_n^T = \\ &= G_n G_n^T + C_n H_{n-1} C_n^T. \end{aligned} \quad (14.80)$$

(14.80) გადაუგვარებელია, ვინაიდან გადაუგვარებელია  $G_n G_n^T$ . ახლა გამოვთვალთ კორელაციური მატრიცა

$E[v_n^s v_n^T]$ . გამოვიყენოთ (14.65). პირველი წევრი და  $v_n$  არიან არაკორელირებული. მეორე და მესამე წევრებისათვის გამოვიყენოთ (14.74). იმის გათვალისწინებით, რომ  $e_{n-1}$  და  $F_{n-1} N_{n-1}$  არიან არაკორელირებული, გამომდინარეობს

$$E[v_n^s v_n^T] = (A_{n-1} P_{n-1} A_{n-1}^T + F_{n-1} F_{n-1}^T) C_n^T = H_{n-1} C_n^T. \quad (14.81)$$

ამრიგად, გვაქვს

$$H_{n-1} C_n^T = k_n E[v_n v_n^T] = k_n (G_n G_n^T + C_n H_{n-1} C_n^T). \quad (14.82)$$

ახლა დავუბრუნდეთ (14.77) და მარჯვენა მხარე ჩავწეროთ შემდეგ სახეში

$$\begin{aligned} P_n &= (I - k_n C_n) H_{n-1} - H_{n-1} C_n^T k_n^T + \\ &+ k_n (C_n H_{n-1} C_n^T + G_n G_n^T) k_n^T. \end{aligned} \quad (14.83)$$

შევიტანოთ (14.83)-ში (14.82) გამოსახულება, მივიღებთ, რომ

$$P_n = (I - k_n C_n) H_{n-1}. \quad (14.84)$$

გადავწეროთ (14.82) შემდეგ სახეში

$$(I - k_n C_n) H_{n-1} C_n^T = k_n G_n G_n^T. \quad (14.85)$$

ვისარგებლოთ (14.85),  $k_n$  გამოვსახოთ  $P_n$  საშუალებით

$$P_n C_n^T = k_n G_n G_n^T. \quad (14.86)$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$k_n = P_n C_n^T (G_n G_n^T)^{-1}, \quad (14.87)$$

$$P_n = \left( I - P_n C_n^T (G_n G_n^T)^{-1} C_n \right) H_{n-1}. \quad (14.88)$$

მოვიყვანოთ ყველა ის წევრები, რომლებიც შეიცავენ  $P_n$

$$P_n \left( I + C_n^T (G_n G_n^T)^{-1} C_n H_{n-1} \right) = H_{n-1}. \quad (14.89)$$

ვინაიდან ფრჩხილებში მოთავსებული მატრიცა გადაუგვარებელია, ამიტომ

$$P_n = H_{n-1} \left( I + C_n^T (G_n G_n^T)^{-1} C_n H_{n-1} \right)^{-1} \quad (14.90)$$

თუ გადავალთ შეუღლებულ მატრიცებზე გვექნება

$$P_n = \left( I + H_{n-1} C_n^T (G_n G_n^T)^{-1} \right) H_{n-1}. \quad (14.91)$$

ამრიგად,  $P_n$  გამოისახება  $H_{n-1}$  საშუალებით. მის გამოსათვლელად უნდა გავითვალისწინოთ

$$P_0 = E \left[ (X_0 - \hat{X}_0) (X_0 - \hat{X}_0)^T \right] = E \left[ \tilde{X}_0 \tilde{X}_0^T \right] = \Lambda, \quad (14.92)$$

ამით მთავრდება კალმანის ფილტრის განტოლების გამოყვანა, რომელიც საბოლოოდ შეიძლება შემდეგი ფორმულით გამოვსახოთ

$$\hat{X}_n = A_{n-1} \hat{X}_{n-1} + u_{n-1} + P_n C_n^T (G_n G_n^T)^{-1} \left( y_n - C_n (A_{n-1} \hat{X}_{n-1} + u_{n-1}) \right),$$

$$\hat{X}_0 = E[x_0], \quad (14.93)$$

სადაც  $P_n$  გამოითვლება (14.91), ხოლო საწყისი  $P_0$  გამოითვლება (14.90). ბოლოს აღვნიშნოთ: იმისათვის, რომ აიგოს ოპტიმალური ფილტრი, საჭიროა განვსაზღვროთ (14.88) ფორმულიდან  $P_n$ , რომელიც შეიცავს  $P_0 = \Lambda$ . მაგრამ ეს

საწყისი კოვარიაცია უცნობია, მაშასადამე, სინამდვილეში არ არსებობს კალმანის ოპტიმალური ფილტრი, გარდა შემთხვევისა, როდესაც სიგნალის გენერატორის მოდელი არის ინვარიანტულია დროში. ჭკემათ ნაჩვენები იქნება, რომ ზოგიერთი პირობის გათვალისწინებისას შეიძლება შეირჩეს ასიმპტოტურად ოპტიმალური ფილტრი. კერძოდ, მიუხედავად  $\Lambda$  მიახლოებითი შეფასებისა, შეიძლება შეირჩეს ასიმპტოტურად ოპტიმალური ფილტრი.

მაგალითი 14.3.

განვიხილოთ კალმანის ფილტრის ალგორითმის გამოყენება შემდეგი სისტემისათვის

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + w(k),$$

$$z(k) = x_1(k) + v(k).$$

შესასვლელი ხმაური არის სტაციონარული

$$v_w(j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

გაზომვის ხმაური არასტაციონარულია

$$v_v(j) = 2 + (-1)^j$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, გაზომვები ლუწი  $j$  ინდექსებისათვის განხორციელდება ნაკლები საზუსტით, ვიდრე კენტი ინდექსებისათვის.

შეცდომის დისპერსია მოცემულია მატრიცით

$$P_x(0) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

საჭიროა გამოითვალოს  $k(t)$  ყველა  $j$ -თვის 1-დან 10-მდე. გამოვიყენოთ განტოლებები

$$k(j) = P_x(j/j-1)H^T(j) \left[ H(j)P_x(j/j-1)H^T(j) + P_v(j) \right]^{-1}$$

$$P_x(j+1/j) = \Phi(j+1, j)P_x(j)\Phi^T(j+1, j) + \Gamma(j)P_w(j)\Gamma^T(j),$$

და აგრეთვე საწყისი პირობა  $P_x(0)$ . ადვილად გამოითვლება  $P_x(1/0)$  და  $k(1)$ , რომლებიც შესაბამისად

$$P_x(1/0) = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}; \quad k(1) = \begin{bmatrix} 0,95 \\ 0,48 \end{bmatrix}.$$

ახლა გამოვთვალოთ აპოსტერიორული დისპერსია განტოლებიდან

$$k(j+1, j) = \Phi(j+1, j)P_x(j/j-1)H^T(j) \times \\ \times [H(j)P_x(j/j-1)H^T(j) + P_v(j)]^{-1},$$

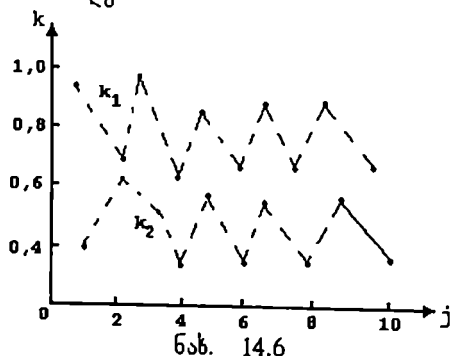
$$P_x(1) = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,48 \\ 0,48 & 0,24 \end{bmatrix}.$$

აპრიორული დისპერსია ტოლია

$$P_x(2/1) = \begin{bmatrix} 8,14 & 6,71 \\ 6,71 & 7,23 \end{bmatrix}.$$

ახლა შეიძლება გამოითვალოს  $k(2)$  და ა.შ.

$k(j)$  კოეფიციენტები მოცემულია (ნახ.14.6), როდესაც  $j$  იცვლება 1-დან 10-მდე.



§ 14.4. კალმანის დისკრეტული ფილტრი:  
სტაციონარული მდგომარეობის თეორია

განვიხილოთ კალმანის ფილტრის სტაციონარული მდგომარეობის თეორიის ძირითადი საკითხები. სისტემის განტოლებები ჩაეწეროს შემდეგი სახით.

$$\begin{aligned}v_n &= S_n + GN_n; \\S_n &= GN_n; \\X_{n+1} &= AX_n + U + FN_n; \\FG^T &= 0.\end{aligned}\tag{14.94}$$

მაშინ ჩვენი ფილტრის ფორმულებს აქვთ სახე:

$$\begin{aligned}\hat{X}_n &= \left( I - P_n C^T (GG^T)^{-1} C \right) A \hat{X}_{n-1} + P_n C^T (GG^T)^{-1} v_n + \\&+ \left( I - P_n C^T (GG^T)^{-1} C \right) U_{n-1},\end{aligned}\tag{14.95}$$

$$P_{n+1} = \left( I - H_n C^T (GG^T)^{-1} \right) H_n,\tag{14.96}$$

$$H_n = AP_n A^T + FF^T,\tag{14.97}$$

$$P_0 = E \left[ (X_0 - E[X_0]) (X_0 - E[X_0])^T \right].\tag{14.98}$$

გამარტივების მიზნით შემდეგში იგულისხმება, რომ

$$GG^T = 1.\tag{14.99}$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ჩვენ უნდა შევცვალოთ

$$C \rightarrow \sqrt{GG^T} C; \quad v_n \rightarrow \left( \sqrt{GG^T} \right)^{-1} v_n;\tag{14.100}$$

ჩვენ აგრეთვე ვთვლით, რომ  $E[X_0] = 0$  და  $U_n$  შესასვლელი ტოლია ნულის, ვინაიდან ჩვენთვის მთავარია შეცდომის კოვარაცია, რომელიც არ არის დამოკიდებული შესასვლელზე. კალმანის ფილტრის სტაციონარული მდგომარეობის ძირითადი შედეგი არის შემდეგი თეორემა, რომელსაც მოვიყვანოთ დაუმტკიცებლად. მანამდე შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები:



„ $(C \sim A)$  დაკვირვებადი“ ნიშნავს, რომ მდგომარეობის სივრცე დაკვირვებადი. აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ  $(C \sim A)$  დაკვირვებადობა ნიშნავს  $(A^T \sim C^T)$  მართვადობას.

თეორემა 14.1. [16]. დავუშვათ, რომ ყველა  $(C \sim A)$  არადაკვირვებადი მდგომარეობები  $A$ -მდგრადია და ყველა  $(F^T \sim A^T)$  არადაკვირვებადი მდგომარეობა  $A^T$ -მდგრადია. მაშინ რიკატის სტაციონარულ განტოლებას აქვს ერთადერთი თვითშეუღლებული არაუარყოფითი ამონახსნი. ის აღვნიშნოთ  $P_\infty$ :

$$\Phi(P_\infty) = P_\infty. \quad (14.101)$$

ამის გარდა, მატრიცა

$$(I - P_\infty C^T C)A$$

არის მდგრადი და ფილტრი

$$\hat{X}_n^a = A\hat{X}_{n-1}^a + P_\infty C^T [v_n - CA\hat{X}_{n-1}^a],$$

$$\hat{X}_0^a = 0. \quad (14.102)$$

ასიმპტოტურად ოპტიმალურია.

## § 14.5. კალმან-ბიუსის ფილტრი (უწყვეტი დრო)

მათემატიკური თვალსაზრისით ფილტრაცია და ექსტრაპოლაცია უწყვეტი დროთი გაცილებით რთული ამოცანაა ვიდრე ფილტრაცია დისკრეტული დროთი. დისკრეტული ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელია ალბათობის ელემენტარული ცნებების და ალგებრული მეთოდების გამოყენებით. უწყვეტი ამოცანის შემთხვევაში კი საქმე გვექნება ინტეგრალურ და დიფერენციალურ განტოლებებთან.

განვიხილოთ დასაკვირვებელი სისტემა, რომლის აღმწერი განტოლებებია

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A(t)X(t) + v(t), & t \geq t_0, \\ Y(t) &= C(t)X(t) + \omega(t). \end{aligned} \quad (14.103)$$

$X$ -არის  $n$  განზომილებიანი ვექტორი. მისი საწყისი მნიშვნელობა  $X(t_0)$  არის შემთხვევითი ვექტორი ნულოვანი მათემატიკური ლოდინით და მოცემული კოვარიაციის  $P(t_0)$  მატრიცით

$$E\left\{\left[X(t_0) - E\{X(t_0)\}\right]\left[X(t_0) - E\{X(t_0)\}\right]^T\right\} = P(t_0), \quad (14.105)$$

$Y$ -განზომილებაა  $m$ .  $A$  და  $C$  მატრიცების ელემენტები  $a_{ik}(t)$  და  $c_{ik}(t) - t$  დროის უწყვეტი ცნობილია ფუნქციებია.

$v(t)$  შემაჯავალი აღშფოთებები არის  $n$  განზომილების, გაზომვის შეცდომები  $\omega(t)$  არის  $m$  განზომილების.  $v(t)$  და  $\omega(t)$  არის თეთრი შემთხვევითი პროცესები წინასწარ მოცემული კოვარიაციული მატრიცებით.

$$E\{v(t)\} \equiv 0; \quad E\{v(t)v'(\tau)\} = Q(t)\delta(t - \tau); \quad (14.106)$$

$$E\{\omega(t)\} \equiv 0; \quad E\{\omega(t)\omega'(\tau)\} = R(t)\delta(t - \tau); \quad (14.107)$$

$\delta(t - \tau)$ - დირაკის დელტა ფუნქცია.  $Q$  და  $R$  სიმეტრიული მატრიცებია და მისი ელემენტები დროის უწყვეტი ფუნქციებია.

შესასვლელი აღშფოთებები და გაზომვის შეცდომები არიან არაკორელირებული

$$E\{X(t_0)v^T(t)\} = 0, \quad (14.108)$$

$$E\{X(t_0)\omega^T(t)\} = 0, \quad (14.109)$$

$$E\{v(t)\omega^T(\tau)\} = 0. \quad (14.110)$$

საძიებელია წრფივი არაწანაცვლებადი შეფასება  $X(t)$  ვექტორისა, რომელიც აგებულია  $Y(\tau)$  გაზომვების რეზულტატების შედეგად,  $t_0 \leq \tau \leq t$  დროის მონაკვეთში. ეს შეფასება აღინიშნება  $\hat{X}(t)$ . შეფასების შეცდომა განისაზღვრება ფორმულით

$$\tilde{X}(t) = X(t) - \hat{X}(t). \quad (14.111)$$

შეცდომის კოვარიაციის მატრიცას არაწანაცვლებადი შეფასება ტოლია

$$\tilde{P}(t) = E[\tilde{X}(t)\tilde{X}^T(t)]. \quad (14.112)$$

შეფასება იქნება ოპტიმალური იმ თვალსაზრისით, რომ შეფასების კომპონენტებს ექნებათ მინიმალური დისპერსია. ეს პირობა ექვივალენტურია მოთხოვნისა

$$\text{Spur } \tilde{P}(t) \rightarrow \min. \quad (14.113)$$

უწყვეტი დროისთვის მდგომარეობის შეიძლება წარმოვადგინოთ გამოსახულებით

$$\hat{X}(T/t) = \int_{t_0}^t G(T,t)Y(\tau)d\tau; \quad T, t \geq t_0. \quad (14.114)$$

$[t_0, t]$ —დაკვირვების ინტერვალია. თუ  $T < t$ , მაშინ ჩვენ გვაქვს მოგლუვება. როდესაც  $T = t$ —სუფთა ფილტრაცია.  $T > t$  დროს გვაქვს ექსტრაპოლაციის ამოცანა. წონით  $G(T, \tau)$  მატრიცას აქვს განზომილება  $n \times m$ , არის უწყვეტი და ნამდვილი.

გამოსახულება არის წრფივი. ვაჩვენოთ რომ ის არის არაწანაცვლებადი  $X(t)$ -ს მათემატიკური ლოდნი  $E[X(t_0)] = 0$ .  $E[v(t)] = 0$  შემთხვევაში ის ნულის ტოლია ყველა  $t$ -თვის. როდესაც  $E[w(t)] = 0$ , მაშინ  $Y(t)$  მათემატიკური ლოდნიც ნულის ტოლია. ანალოგიურად შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ  $E[\hat{X}(T/t)] = E[X(T)] = 0$ . მაშასადამე, შეფასება არის არაწანაცვლებადი.

იმისათვის, რომ განისაზღვროს წონითი  $G(T, \tau)$  ფუნქციის ოპტიმალობა, რომელიც ცნობილია ვინერის ფილტრაციის თეორიიდან. ამისათვის წარმოვადგინოთ წონითი ფუნქცია ორი შესაყრების ჯამის სახით

$$G(T, \tau) = G_0(T, \tau) + \lambda G_1(T, \tau). \quad (14.115)$$

$G_0$  არის ოპტიმალური წონითი ფუნქცია.  $\lambda$  და  $G_1$  აქვთ ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობები. ასეთნაირათვე, ორი შესაყრების ჯამის სახით წარმოვადგინოთ შეფასებები

$$\hat{X}(T/t) = \hat{X}_0(T/t) + \lambda X_1(T/t), \quad (14.116)$$

სადაც  $\hat{X}_0$  და  $\hat{X}_1$  აიგება  $G_0$  და  $G_1$ -ით გათვალისწინებით. შეფასების შეცდომა გამოისახება გამოსახულებით

$$\begin{aligned} \tilde{X}(T/t) &:= X(T) - \hat{X}(T/t) = X(T) - \hat{X}_0(T/t) - \\ &- \lambda \hat{X}_1(T/t) = \tilde{X}_0(T/t) - \lambda \hat{X}_1(T/t), \end{aligned} \quad (14.117)$$

სადაც  $\tilde{X}_0(T/t) := X(T) - \hat{X}_0(T/t)$ . თვისობრიობის კრიტერიუმში წარმოდგება შემდეგი სახით ( $T$  და  $t$  არგუმენტები გამოტოვებულია).

$$\begin{aligned} E\{\tilde{X}^T \tilde{X}\} &= E\left\{(\tilde{X}_0 - \lambda \hat{X}_0)^T (\tilde{X}_0 - \lambda \hat{X}_1)\right\} = E\{\tilde{X}_0^T \tilde{X}_0\} - \\ &- 2\lambda E\{\tilde{X}_0^T \hat{X}_1\} + \lambda^2 E\{\hat{X}_1^T \hat{X}_1\}. \end{aligned} \quad (14.118)$$

ვინაიდან  $G_0$  (14.116) განტოლებაში უნდა ჰქონდეს ოპტიმალური მნიშვნელობა. ამიტომ (14.118) კრიტერიუმს უნდა ჰქონდეს ექსტრემალური მნიშვნელობა ყველა  $G_1$   $\lambda = 0$  წერტილში. მაშასადამე,

$$\left. \frac{d}{d\lambda} E\{\tilde{X}^T \tilde{X}\} \right|_{\lambda=0} = -2E\{\tilde{X}_0^T \hat{X}_1\} = 0, \quad (14.119)$$

ან

$$\begin{aligned} \text{Spur } E\{\tilde{X}_0 \tilde{X}_1^T\} &= \text{Spur } E\left\{\tilde{X}_0 \int_{t_0}^T Y^T(\tau) G_1^T(T, \tau) d\tau\right\} = \\ &= \text{Spur } \int_{t_0}^T E\{\tilde{X}_0 Y^T(\tau)\} G_1^T(T, \tau) d\tau = 0 \end{aligned} \quad (14.120)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ კვალი  $\text{Spur}$  არის ჯამი, ის შეიძლება ინტეგრალქვეშ შევიტანოთ. უნდა განვიხილოთ

$E\{\dots\}G_1^T$  გამოსახულების მთავარი დიაგონალის ელემენტები. მთავარი დიაგონალის  $i$ -ური ელემენტის ასაგებად საჭიროა (14.120)-ში მათემატიკური მოლოდინის  $i$ -ური სტრიქონი გავმრავლოთ  $G_1^T$  მატრიცას  $i$ -ურ სვეტზე, ან  $G_1$  მატრიცას  $i$ -ურ სტრიქონზე. მივიღებთ

$$\int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m E\{\tilde{X}_0 Y^T(\tau)\}_{ij} [G_1(T, \tau)]_{ij} d\tau = 0. \quad (14.121)$$

ეს პირობა უნდა შესრულდეს ყველა  $G_1$ -თვის.  $G_1$  - შეიძლება შეირჩეს ნებისმიერად. მაგალითად:  $E\{\dots\}_{ij} = [G_1]_{ij}$  ყველა  $i, j$ . მაშინ (14.121) ინტეგრალქვეშ დარჩება უწყვეტი ფუნქციების კვადრატების ჯამი. ამიტომ, ინტეგრალი  $t - t_0 > 0$  პირობისას ყოველთვის არის დადებითი. ეს იმას ნიშნავს, რომ განსახილველი ფუნქციები ინტეგრირების მთელ ინტერვალში ნულის ტოლია. (14.121) სრულდება ყველა  $G_1$ , მაშინ როდესაც მათემატიკური მოლოდინის ელემენტები ინტეგრირების მთელ ინტერვალში ნულის ტოლია. ე.ი.

$$E[\tilde{X}_0(T/t)Y^T(\tau)] = 0, \quad t_0 < \tau < t. \quad (14.122)$$

მიღებული შედეგი გვიჩვენებს, რომ ოპტიმალური შეცდომის შეფასება არაკორელირებულია დაკვირვებასთან. თუ დავუშვებთ, რომ  $\tilde{X}_0 = X - \hat{X}_0$  და  $\hat{X}_0$ -ს წარმოვადგენთ (14.114) სახით, მივიღებთ

$$E\left\{ \left[ X(t) - \int_{t_0}^t G_0(T, \sigma) Y(\sigma) d\sigma \right] Y^T(\tau) \right\} = 0, \quad (14.123)$$

$$E\{X(T)Y^T(\tau)\} - \int_{t_0}^T G_0(T, \sigma) E\{Y(\sigma)Y^T(\tau)\} d\sigma = 0. \quad (14.124)$$

(14.123) განტოლება წარმოადგენს კარგად ცნობილი ვინერ-პოპფის ინტეგრალური განტოლების განზოგადებულ სახეს.

გავამრავლოთ (14.122)  $G_0^T(T, \tau)$  მარჯვნიდან მოვახდინოთ ინტეგრირება  $\tau$  ზღვრებში  $t_0$ -დან  $t$ -მდე. მივიღებთ

$$\int_{t_0}^t E \left\{ \tilde{X}_0(T/t) Y^T(\tau) \right\} G_0^T(T, \tau) d\tau = 0. \quad (14.125)$$

აქედან, მცირე გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:

$$E \left\{ \tilde{X}_0(T/t) \int_{t_0}^t Y^T(\tau) G_0^T(T, \tau) d\tau \right\} = 0. \quad (14.126)$$

თუ გავითვალისწინებთ (14.114), მივიღებთ

$$E \left\{ \tilde{X}_0(T/t) \hat{X}_0^T(T/t) \right\} = 0. \quad (14.127)$$

(14.127) გავითვალისწინებით ოპტიმალური შეცდომის შეფასების კოვარიაციული მატრიცა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\begin{aligned} E \left\{ \tilde{X}_0(T/t) \hat{X}_0^T(T/t) \right\} &= E \left\{ \tilde{X}_0(T/t) \left[ X(T) - \hat{X}_0(T/t) \right]^T \right\} = \\ &= E \left\{ \tilde{X}_0(T/t) X^T(T) \right\}. \end{aligned} \quad (14.128)$$

კლასიკურ შემთხვევაში სტაციონარული პროცესების ფილტრაციის ამოცანების გადაწყვეტისას ( $T=t$ ), ვინერ-ჰოპფის ინტეგრალური განტოლების ამოხსნა ხდება სიხშირულ არეში. გამოიყენება ძირითადად ორი მეთოდი [70], [91], [119].

1. განუზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდი

მეთოდის ძირითადი არსი მდგომარეობს შემდეგში: ოპტიმალური გადაცემითი ფუნქციების მატრიცის სახე მოცემულია მრიცხველის პოლინომის კოეფიციენტების სიზუსტით. შემდეგ ეს კოეფიციენტები განისაზღვრებიან წრფივი ალგებრული განტოლებათა სისტემის ამოხსნით. მაგრამ მეთოდის ნაკლია ის, რომ წინასწარ არ არის ცნობილი თუ როგორ არიან განაწილებული ეს კოეფიციენტები გადაცემითი ფუნქციების მატრიცას ელემენტებში.

2. მეორე მეთოდი დამყარებულია შემავალი სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივეების ფაქტორიზაციაზე. ე.ი. ისეთი

მეთოდის დამუშავებაზე, რომელიც საშუალებას გვაძლევს გამოვარკვიოთ კომპლექსური სიბრტყის რომელ ნაწილში მდებარეობენ გადაცემითი ფუნქციის პოლუსები. მაგრამ არსებობს გარკვეული წინამდებარეობები ამ ოპერაციის ჩასატარებლად კერძოდ, შებრუნებული გადაცემითი ფუნქციის მატრიცას მდგრადობის აუცილებლობა.

არასტაციონარული პროცესებისათვის უნდა მოიძებნოს სხვა პროცედურები. კერძოდ, უნდა დადგინდეს ის დიფერენციალური განტოლებები, რომლებიც განსაზღვრავენ ფილტრს, მის გაძლერების კოეფიციენტს და შეცდომის კოვარიაციის მატრიცას.

ჩაწერის გამარტივებისათვის შემდეგში ოპტიმალური მნიშვნელობის აღმნიშვნელი ნული გამოვტოვოთ და მივიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\hat{X}(t/t) := \hat{X}(t), \quad \tilde{X}(t/t) := \tilde{X}(t). \quad (14.129)$$

საწყის  $t_0$  წერტილში (14.114)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\tilde{X}(t_0) = 0. \quad (14.130)$$

შესაბამისი შეცდომის შეფასება ტოლია  $\tilde{X}(t_0) = 0$ . ე.ი. შეცდომის კოვარიაციის მატრიცას საწყისი მნიშვნელობის შეფასება გამოისახება ფორმულით

$$\tilde{P}(t_0) = E[X(t_0)X^T(t_0)] = P(t_0). \quad (14.131)$$

თუ გამოვიყენებთ რეკურენტულ მეთოდებს შეცდომის მინიმუმის საშუალო კვადრატული შეფასების დასადგენად  $t$  მომენტში, რომელიც უკვე განსაზღვრულია, შემდეგში შეიძლება დაისვას საკითხი შეფასების განსაზღვრისათვის დროის  $t + dt$  მომენტში. ვინაიდან  $\hat{X}(t)$  შეფასება არის ოპტიმალური, მისთვის სრულდება ვინერ-ჰოპფის განტოლება

$$E[\tilde{X}(t)Y^T(t)] = 0, \quad t_0 < \tau < t. \quad (14.132)$$

საკირო ხდება განისაზღვროს შუალედური შეფასების ექსტრაპოლირებული მნიშვნელობა.  $dt$  ინტერვალში (14.123) და (14.124) გათვალისწინებით სამართლიანია ტოლობა

$$E[\tilde{X}(t+dt|t)Y^T(\tau)] = 0, \quad t_0 < \tau < t. \quad (14.133)$$

ახალი შეფასება აკმაყოფილებს ვინერ-პოპოვის განტოლებას შემდეგი ფორმით

$$E[\tilde{X}(t+dt)Y^T(\tau)] = 0 \quad t_0 < \tau < t+dt. \quad (14.134)$$

(14.123) გათვალისწინებით  $X(t+dt)$  ჩავწეროთ

$$X(t+dt) = [I + A(t)dt]X(t) + \int_t^{t+dt} v(\sigma)d\sigma. \quad (14.135)$$

აღშფოთება  $v(\sigma)$  არ არის კორელირებული  $Y^T$ -თან ( $\tau$ ) ინტერვალში, ამიტომ (13.247) გამოსახულების მეორე შეფასების გავლენა (14.134)-ის მათემატიკურ ლოდინზე ნულის ტოლია. შეფასების ექსტრაპოლირებული მნიშვნელობა გამოისახება შემდეგი სახით

$$\hat{X}(t+dt/t) = [I + A(t)dt]\hat{X}(t). \quad (14.136)$$

ექსტრაპოლირების შეცდომა მიიღება, თუ (14.135)-ს გამოვაკლებთ (14.136)-ს

$$\tilde{X}(t+dt/t) = [I + A(t)dt]\hat{X}(t) + \int_t^{t+dt} v(\sigma)d\sigma. \quad (14.137)$$

თუ შევიტანთ ბოლო გამოსახულებას (14.133)-ის მარცხენა მხარეში, მივიღებთ (14.133)-ს.

კოვარიაციის მატრიცას ექსტრაპოლირებული შეფასება აღვნიშნოთ  $P^*$

$$P^*(t+dt/t) = E[\tilde{X}(t+dt/t)\tilde{X}^T(t+dt/t)]. \quad (14.138)$$

თუ ვისარგებლებთ (14.137) განტოლებით, გვქმნება

$$P^*(t+dt/t) = E\left\{ \left[ (I + A(t)dt)\tilde{X}(t) + \int_t^{t+dt} v(\sigma)d\sigma \right] \times \left[ \tilde{X}^T(t)[I + A^T(t)dt] + \int_t^{t+dt} v^T(\lambda d\lambda) \right] \right\}.$$

(14.139)



აღშფოთება  $\nu$   $[t, t + dt]$  ინტერვალში არ არის კორელირებული  $X(t), Y(t)$  და  $\hat{X}(t)$ . მაშასადამე, კორელაცია  $\nu(\sigma)$  და  $\nu(\lambda)$  ერთის მხრიდან და  $\tilde{X}(t)$  მეორე მხრიდან იგივეურად არიან ნულის ტოლი. საბოლოოდ

$$P^*(t + dt/t) = [I + A(t)dt]E\{\tilde{X}(t)\tilde{X}^T(t)\}[I + A^T(t)dt] +$$

გვექნება

$$+ \int_t^{t+dt} \int_t^{t+dt} E\{\nu(\sigma)\nu^T(\lambda)\}d\sigma d\lambda.$$

(14.140)

პირველ შესაკრებში მათემატიკური მოლოდინი წარმოადგენს შეცდომის შეფასების კოვარიაციულ მატრიცას. ორმაგი ინტეგრალის ქვეშ მოთავსებული მათემატიკური მოლოდინი (14.107) გათვალისწინებით ტოლია  $Q(\sigma)\delta(\sigma - \lambda)$ . მოვახდენოთ ინტეგრირება  $\sigma$  და  $\delta$  ფუნქციების გათვალისწინებით. მივიღებთ

$$\int_t^{t+dt} \int_t^{t+dt} Q(\sigma)\delta(\sigma - \lambda)d\sigma d\lambda = \int_t^{t+dt} Q(\lambda)d\lambda = Q(t)dt + O(dt)^2$$

(14.141)

აქედან გამომდინარეობს  $P^*$  გამოსახულება

$$P^*(t + dt/t) = \tilde{P}(t) + A(t)\tilde{P}(t)dt + \tilde{P}(t)A^T(t)dt = Q(t)dt + O(dt)^2$$

(14.142)

მას შემდეგ, რაც იქნა განსაზღვრული ოპტიმალური შეფასებები  $\hat{X}(t)$  და  $\hat{X}(t + dt/t)$ , შემდეგი ეტაპია განისაზღვროს ახალი  $\hat{X}(t + dt)$  შეფასება (14.133), (14.134), (14.135) გამოსახულებების შესაბამისად

$$\hat{X}(t + dt) = \hat{X}(t + dt/t) + k(t)\{Y(t) - c(t)\hat{X}(t)\}dt. \quad (14.143)$$

შეცდომის შეფასება განისაზღვრება ამ განტოლებიდან, თუ მას გავამრავლებთ  $-1$ -ზე და ორივე ნაწილს მივუმატებთ  $X(t + dt)$ . გვექნება

$$\tilde{X}(t+dt) = \tilde{X}(t+dt/t) + k(t)\{Y(t) - c(t)\hat{X}(t)\}dt. \quad (14.145)$$

(14.144) და (14.104)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\tilde{X}(t+dt) = \tilde{X}(t+dt/t) + k(t)c(t)\tilde{X}(t)dt - \int_t^{t+dt} k(\lambda)\omega(\lambda)d\lambda. \quad (14.145)$$

ეს გამოსახულება უნდა აკმაყოფილებდეს (14.133)-ს.

თავდაპირველად გამოვიკვლიოთ ეს პირობა წინა ინტერვალზე. (14.132) და (14.133)-ის გათვალისწინებით არც  $\tilde{X}(t+dt/t)$  და არც  $\tilde{X}(t)$  არ არიან კორელირებული

წინა დაკვირვებებზე. კოვარიაცია  $E[\omega(\lambda)Y^T(\tau)]$  უტოლდება ნულს  $\lambda$  და  $\tau$  მნიშვნელობებისათვის.  $(t_0, t)$  ინტერვალში (14.133) პირობა სრულდება. დარჩენილ  $(t, t+dt)$  ინტერვალში ის ჩაეწეროთ შემდეგი სახით

$$E[\tilde{X}(t+dt)Y^T(t+d\tau)] = 0, \quad 0 < d\tau < dt. \quad (14.146)$$

ან, თუ გავითვალისწინებთ (14.103) და (14.104)-ს მივიღებთ

$$E\{\tilde{X}(t+dt)[X^T(t+d\tau)c^T(t+d\tau) + \omega^T(t+d\tau)]\} = 0. \quad (14.147)$$

გაეხსნათ ფრჩხილები, პირველ შესაყრებში დავტოვოთ  $\tilde{X}(t+dt)$  შეუცვლელად, მეორეში შევცვალოთ (14.145) შესაბამისად. გვექნება

$$E\{\tilde{X}(t+dt)X^T(t+d\tau)\}c^T(t+d\tau) + E\left\{\left[\tilde{X}(t+dt/t) - k(t)c(t)X(t)dt - \int_t^{t+dt} k(\lambda)\omega(\lambda)d\lambda\right]\omega^T(t+d\tau)\right\} = 0. \quad (14.148)$$

მორე მათემატიკურ მოლოდინში  $\omega^T(t+d\tau)$  კორელაცია  $\tilde{X}(t+dt/t)$  და  $\tilde{X}(t)$  შორის ნულის ტოლია. მაშასადამე, (14.108), (14.109), (14.110)-ის გათვალისწინებით დაგვრჩება

$$\begin{aligned} - \int_I^{t+dt} k(\lambda) E \left\{ \omega(\lambda) \omega^T(t+d\tau) \right\} d\lambda &= - \int_I^{t+dt} k(\lambda) R(\lambda) \delta(\lambda - t - d\tau) = \\ &= -k(t+d\tau)R(t+d\tau). \end{aligned}$$

(14.149)

საბოლოოდ გვექნება:

$$E \left\{ \tilde{X}(t+dt) X^T(t+d\tau) \right\} c^T(t+d\tau) - k(t+d\tau)R(t+d\tau) = 0.$$

(14.150)

$d\tau$  ნაზრდი მდებარეობს ზღვრებში 0-დან  $dt$ -მდე. მატრიცები  $c$ ,  $k$ , და  $R$  და  $E[\tilde{X}X^T]$  არიან დროის უწყვეტი ფუნქციები, ამიტომ ბოლო პირობა სამართლიანია  $dt$ , აგრეთვე  $d\tau \rightarrow 0$  დროსაც. გვექნება

$$E[\tilde{X}(t)X^T(t)c^T(t)] - k(t)R(t) = 0. \quad (14.151)$$

მათემატიკური მოლოდინი (14.128)-ის თანახმად ტოლია  $E[\tilde{X}(t)\tilde{X}^T(t)]$ . საბოლოოდ გვექნება

$$\tilde{P}(t)c^T(t) = k(t)R(t). \quad (14.152)$$

ეს გამოსახულება გვაძლევს საშუალებას განვსაზღვროთ გაძლიერების კოეფიციენტის მატრიცას ოპტიმალური მნიშვნელობა. ვინაიდან  $R(t)$  არის არაგადაგვარებული მატრიცა.

ამიტომ ცნობილი  $\tilde{P}(t)$  დროს განტოლება ამოიხსნება  $k(t)$ -ს მიმართ. ასეთნაირად ნაპოვნი  $k(t)$  მატრიცასათვის გამოსახულება ახალი შეფასებისათვის აკმაყოფილებს ვინერ-პოპფის განტოლებას და მაშასადამე, ის ოპტიმალურია.

უცნობი  $\tilde{P}(t)$  განისაზღვრება დიფერენციალური განტოლებებიდან. (14.128) და (14.145)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t+dt) = E\{\tilde{X}(t+dt)X^T(t+d\tau)\} = E\left\{\left[ \tilde{X}(t+dt/t) - \right. \right. \\ \left. \left. - k(t)c(t)\tilde{X}(t)dt - \int_t^{t+dt} k(\lambda)\omega(\lambda)d\lambda \right] X^T(t+dt) \right\}. \end{aligned} \quad (14.153)$$

ინტეგრალის კოვარიაცია  $X^T(t+dt)$  ნულის ტოლია. თუ გავითვალისწინებთ (14.128) და (14.135)-ს მივიღებთ

$$\tilde{P}(t+dt) = P^*(t+dt/t) - k(t)c(t)\tilde{P}(t)dt + O(dt)^2$$

ახლა შევცვალოთ  $P^*$  (14.142)-ის გათვალისწინებით, ხოლო  $k(t)$  (14.152)-ის გათვალისწინებით. მივიღებთ ცნობილ რიკატის ტიპის მატრიცულ დიფერენციალურ განტოლებას.

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t+dt) = \tilde{P}(t) + \left[ A(t)\tilde{P}(t) + \tilde{P}(t)A^T(t) + Q(t) - \right. \\ \left. - \tilde{P}(t)c(t)R^{-1}(t)c(t)\tilde{P}(t) \right] dt + O(dt)^2 \end{aligned} \quad (14.154)$$

$\hat{X}(t)$  შეფასებისათვის (14.136)-ის გამოსახულება შევიტანოთ (14.143), მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\hat{X}(t+dt) = \hat{X}(t) + \left[ A(t)\hat{X}(t) + k(t)\{Y(t) - c(t)\hat{X}(t)\} \right] dt. \quad (14.155)$$

საბოლოო შედეგი მიღწეულია. ფილტრაციის ამოცანა ჩამოყალიბებულია (14.152), (14.154), (14.155) განტოლებების საშუალებით. ყველაფერი ზემოთქმული ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი თეორემის სახით.

თეორემა 14.4 (კალმან-ბიუსის ფილტრი) [23].

(i). ვთქვათ უწყვეტი სტოქასტიკური სისტემის მდგომარეობა  $X(t)$  და დაკვირვების პროცესი  $Y(\tau)$ ,  $t_0 \leq \tau \leq t$  აღიწერებიან განტოლებებით:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + v(t), \quad E\{X(t_0)\} = 0,$$

$$Y(t) = c(t)X(t) + \omega(t).$$

აპრიორული ინფორმაცია განისაზღვრება გამოსახულებებით

$$E[X(t_0)v^T(t)] \equiv 0; \quad E[X(t_0)\omega^T(t)] \equiv 0;$$

$$E[v(t_0)\omega^T(\tau)] \equiv 0$$

მაშინ მინიმალურ-კვადრატული შეცდომის წრფივი წაუნაც-  
ვლებადი შეფასება განისაზღვრება განტოლებით

$$\frac{d}{dt} \hat{X}(t) = A(t)\hat{X}(t) + k(t)\{Y(t) - c(t)\hat{X}(t)\},$$

$$\hat{X}(t_0) = 0.$$

(ii). გაძლიერების მატრიცა წარმოვიდგება ფორმულით:

$$k(t) = \tilde{P}(t)c^T(t)R^{-1}(t).$$

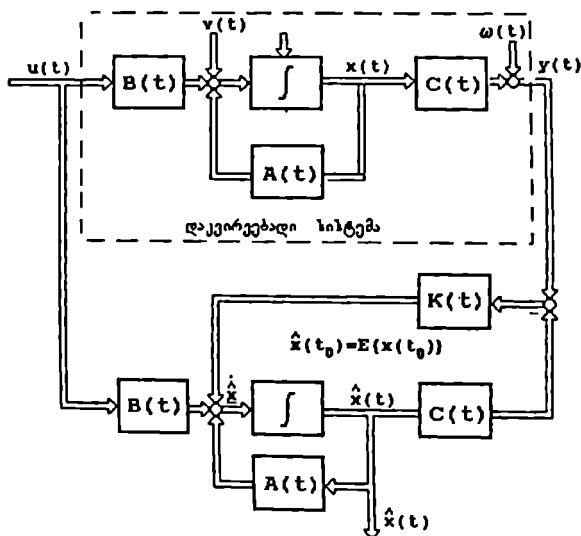
შეფასების შეცდომის კოვარიაციული მატრიცა აღიწერება რიკატის მატრიცული დიფერენციალური განტოლებით:

$$\frac{d}{dt} \tilde{P}(t) = A(t)\tilde{P}(t) + \tilde{P}(t)A^T(t) - \tilde{P}(t)c^T(t)R^{-1}(t)c(t)\tilde{P}(t) + Q(t),$$

$$\tilde{P}(t_0) = P(t_0).$$

(14.156)

ფილტრის ბლოკ-სქემა მოცემულია (ნახაზზე 14.8).



ნახ.14.8

იმ შემთხვევაში, როდესაც  $T = t$ , საქმე გვაქვს წინასწარმეტყველებასთან. საძიებელია მომავალი  $X(T)$

მდგომარეობების  $\hat{X}(T/t)$  შეფასება. ამ შემთხვევაში სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 14.5. ვთქვათ, სტოქასტიკური სისტემა აღიწერება შემდეგი თანაფარდობებით

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + v(t), \quad E\{X(t_0)\} = 0,$$

$$Y(t) = c(t)X(t) + \omega(t).$$

აპრიორული ინფორმაცია აკმაყოფილებს (14.106)-(14.110) განტოლებებს. მაშინ წრფივი წაუნაცვლებადი შეფასება საშუალო კვადრატული შეცდომით მომავალი  $X(T)$  მდგომარეობის  $T > t$  დროს, გამოისახება ფორმულით

$$\hat{X}(T/t) = \Phi(T,t)\hat{X}(t).$$

აქ  $\Phi(T,t)$ —გარდამავალი მატრიცაა, ხოლო  $\hat{X}(t)$  მიმდინარე  $X(t)$  მდგომარეობის შეფასებაა, რომელიც მიღებულია 14.4 თეორემის თანახმად.

შეგვიჩვენეთ ერთ მნიშვნელოვან ფაქტზე. ეს არის ვონჰემის დაყოფის თეორემა. ამ თეორემას ჩვენ გამოვიყვანთ §14.9, როდესაც განვიხილავთ კონკრეტულ მაგალითს. ამიტომ მკითხველს ვთხოვთ მიმართოს აღნიშნულ პარაგრაფს.

#### § 14.6 კალმანის სტაციონარული ფილტრი (უწყვეტი დრო)

სტაციონარულ ვარიანტში უნდა სრულდებოდეს შემდეგი სამი პირობა:

1. სისტემა აღიწერება შემდეგი განტოლებებით

$$\dot{X}(t) = FX(t) + Gv(t),$$

$$Y(t) = HX(t) + \omega(t),$$

სადაც  $F$ ,  $G$ ,  $H$  მუდმივი კოეფიციენტების მატრიცებია.

2. შემავალი გაზომვის ხმაური სტაციონარულია, ფართო გაგებით უკიდურეს შემთხვევაში. ე.ი.

$$\text{Cov}[w(t+\tau), w(t)] = V_w(t+\tau, t) = R_w(\tau) = \psi_w \delta_D(\tau),$$

$$\text{Cov}[v(t+\tau), v(t)] = V_v(t+\tau, t) = R_v(\tau) = \psi_v \delta_D(\tau),$$

სადაც  $\psi_w$  და  $\psi_v$  — მუდმივი კოეფიციენტების მატრიცებია.  $w$  და  $v$  არაკორელირებული თეთრი ხმაურია ნულოვანი საშუალო მნიშვნელობით.

3. დაკვირვების ინტერვალის იწყება  $t = -\infty$ . ეს პირობა პრაქტიკულად არასდროს არ სრულდება. მაგრამ თუ დაკვირვების მომენტის სათავე განლაგებულია საკმაოდ შორეულ წარსულში და ყველა გარდამავალი პროცესი ასწრებს დამთავრებას, მაშინ ეს დაშვება სამართლიანია.

თუ აღნიშნული სამი პირობა სრულდება, დისპერსიის განტოლებას აქვს სახე

$$O = FP_x(0) + P_x(0)F^T - H^T \psi_w^{-1} H P_x(0) + G \psi_w G^T$$

კალმანის ფილტრის გაძლიერების მუდმივი კოეფიციენტი განისაზღვრება განტოლებით

$$k(0) = P_x(0)H^T \psi_w^{-1}$$

და ბოლოს ფილტრაციის განტოლებას აქვს სახე

$$\dot{\hat{X}}(t) = F\hat{X}(t) + k(0)[Y(t) - H\hat{X}(t)],$$

$$\hat{X}(-\infty) = 0.$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ სტაციონარულ შემთხვევაში დისპერსიის განტოლებას აქვს გადაგვარებული რიკატის მატრიცული განტოლების სახე.

სანამ გადავიდოდეთ მაგალითზე, მოვიყვანოთ ფილტრის ფორმულები იტოს განტოლებების სახით. განვიხილოთ სისტემა

$$dy = (by + b_1 Z + b_0)dt + \psi_1 dw,$$

$$dZ = (ay + a_1 Z + a_0)dt + dw. \quad (14.157a)$$

ოპტიმალური შეფასებისათვის გამოვიყენოთ

$$d\hat{Z} = (ay + a_1 \hat{Z} + a_0)dt + (Rb_1^T + \psi_v \psi_1) (\psi_1 \psi_1^T)^{-1} \times \\ \times [dy - (by + b_1 \hat{Z} + b_0)dt], \quad (14.157b)$$

ხოლო აპოსტერიორული კოვარიაციული მატრიცასათვის

$$dR = [a_1 R + R a_1^T + \psi \nu \psi^T - (R b_1^T + \psi \nu \psi_1^T) \times \\ \times (\psi_1 \nu \psi_1^T)^{-1} (b R + \psi_1 \nu \psi^T)] dt, \quad (14.157\text{გ})$$

სადაც  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b$ ,  $\psi$  და  $\psi_1$  კოეფიციენტები ზოგად შემთხვევაში დროზეა დამოკიდებული.

მივაქციოთ ყურადღება ორ გარემოებას:

1. რიკატის მატრიცული განტოლება (14.157ბ) აპოსტერიორული კოვარიაციისათვის არ შეიცავს  $\hat{z}$  და შეიძლება გავანტეგრალოთ ცალკე.  $R$  განსაზღვრის შემდეგ ვიპოვოთ გაძლიერების კოეფიციენტის სიდიდე

$$\beta = (R b_1^T + \psi \nu \psi_1^T) (\psi_1 \nu \psi_1^T)^{-1}$$

და განისაზღვროს  $\hat{Z}$  შეფასება (14.157ა) ინტეგრირებით, რომელიც შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$d\hat{Z} = (aY - a_1 \hat{Z} + a_0) dt + \beta (bY - bY + b_1 \hat{Z} + b_0) dt. \quad (14.158)$$

2. (14.157ბ) განტოლება არ შეიცავს დაკვირვების რეზულტატებს. ამიტომ, მდგომარეობის ვექტორის აპოსტერიორული კოვარიაციული მატრიცა თანხვედრა შეცდომის ვექტორის  $\tilde{Z} = \hat{Z} - Z$  და  $\hat{Z}$  შეფასების აპრიორულ კოვარიაციულ მატრიცას.

ეს საშუალებას იძლევა განისაზღვროს  $R$  და  $\beta$  განტოლებაში წინასწარ, დაკვირვების შედეგების მიღებამდე.  $\hat{Z}$  განსაზღვრა დადის (14.158) ინტეგრირებაზე დაკვირვების მიმდინარე შედეგების გათვალისწინებით. პრაქტიკულად ეს ნიშნავს ამოცანის გადაწყვეტას დროის რეალურ მასშტაბში. (14.157ბ) და (14.158) განტოლებები განსაზღვრავენ საწყისი პირობებისას

$$\hat{Z}(t_0) = \hat{Z}_0 = M[Z_0/Y_0], \\ R(t_0) = R_0 = M[(z_0 - \hat{z}_0)(z_0^T - \hat{z}_0^T/Y_0)]$$



$z$  ვექტორის  $\hat{z}$  ოპტიმალურ შეფასებას და მის  $R$  კოვარიაციულ მატრიცას ყველა  $t > t_0$ . ეს შეფასება არის წაუნაცვლებელი.

მაგალითი 14.5.

განვიხილოთ კალმანის უწყვეტი ფილტრის სკალარული ამოცანა. სისტემა აღიწერება განტოლებით

$$\dot{X}(t) = 0,$$

სადაც  $F(t)$  და  $w(t)$  ნულის ტოლია.

დაკვირვების განტოლებაა

$$Y(t) = X(t) + v(t),$$

სადაც  $v(t)$  არის თეთრი ხმაური ნულოვანი საშუალო მნიშვნელობით და ერთეულოვანი დისპერსიით. საწყისი მდგომარეობის  $X(0)$  მათემატიკური მნიშვნელობა ნულის ტოლია, ხოლო დისპერსია ტოლია 10. რიკატის განტოლებას აქვს სახე

$$\dot{P}_X(t) = -[P_X(t)]^2, \quad P_X(0) = 10.$$

განტოლების ამოხსნას აქვს სახე

$$P_X(t) = 10/(10t + 1).$$

ვინაიდან  $H(t)$  და  $\psi_w(t)$  ერთის ტოლია, მაშინ გაძლიერების კოეფიციენტი  $k(t)$  თანხვედბა  $P_X(t)$ . ამიტომ  $X(t)$  შეფასების ალგორითმი შემდეგი სახისაა

$$\hat{X}(t) = \frac{10}{10t + 1} [Y(t) - \hat{X}(t)],$$

სადაც  $\hat{X}(t)$  საწყისი მნიშვნელობა ტოლია ნულის.

მაგალითი 14.6.

განვსაზღვროთ სტაციონარული ფილტრი, რომელიც იძლევა შეცდომის დისპერსიის მინიმუმს სისტემისათვის

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega(t),$$

$$Y(t) = [1 \quad 0] X(t) + v(t),$$

სადაც  $\psi_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;  $\psi_v = 3$ .

რიკატის განტოლებას აქვს სახე:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{X_{11}} & P_{X_{12}} \\ P_{X_{12}} & P_{X_{22}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{X_{11}} & P_{X_{12}} \\ P_{X_{12}} & P_{X_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} -$$

$$- \frac{1}{3} \begin{bmatrix} P_{X_{11}} & P_{X_{12}} \\ P_{X_{12}} & P_{X_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{X_{11}} & P_{X_{12}} \\ P_{X_{12}} & P_{X_{22}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

მატრიცების გადამრავლების შემდეგ, გვექნება

$$2P_{X_{12}} - \frac{1}{3}P_{X_{11}}^2 = 0,$$

$$P_{X_{22}} - P_{X_{11}} - \frac{1}{3}P_{X_{12}}P_{X_{11}} = 0,$$

$$-2P_{X_{12}} - \frac{1}{3}P_{X_{12}}^2 + 1 = 0.$$

ბოლო განტოლების ამოხსნა  $P_{X_{12}}$  მიმართ გვაძლევს

$$P_{X_{12}} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 12}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{3} = 0,464 - 6,464.$$

თუ ავირჩევთ დადებით ფესვს, მაშინ მივიღებთ  $P_{X_{11}} = \pm 1,67$  და შესაბამისად  $P_{X_{22}} = \pm 2,59$ . იმასათვის, რომ  $P_X(0)$  იყოს დადებითად განსაზღვრული, აუცილებელია ამოვარჩიოთ  $P_{X_{11}}$  და  $P_{X_{22}}$  დადებითი მნიშვნელობები, გვექნება

$$P_X(0) = \begin{bmatrix} 1,67 & 0,464 \\ 0,464 & 2,59 \end{bmatrix}.$$

ჩვენ ვიპოვეთ რიკატის განტოლების ნამდვილი დადებითად განსაზღვრული ფესვები.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ კალმანის ფილტრის  $k(0)$  გაძლიერების კოეფიციენტი, საკმარისია ნაპოვნი  $V_X(0)$  მატრიცა შევიტანოთ განტოლებაში

$$k(0) = P_X(0)H^1\psi_v^{-1},$$

$$k(0) = \begin{bmatrix} 0,557 \\ 0,155 \end{bmatrix}.$$

მაგალითი 14.7.

განვიხილოთ მატერიალური წერტილის მოძრაობა შემთხვევითი აღშფოთების ზემოქმედებისას

$$\dot{X}_1 = X_2, \quad dX_2 = \sqrt{2}d\xi_1(t).$$

კოორდინატის დაკვირვების განტოლებაა

$$dY(t) = X_1(t)dt + \sqrt{1/2}d\xi_2(t),$$

$\xi_1, \xi_2$  აღნიშნულია ურთიერთდამოუკიდებელი სტანდარტული ვინერის პროცესები. შემოტანილია შემდეგი აღნიშვნები

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_0 = \sqrt{1/2},$$

მაშინ

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

შემდეგ გვექნება

$$\det(\lambda I - A_1) = \lambda^4 + 4 = 0.$$

$\lambda_1, \lambda_2$  ფესვებს აქვთ ნამდვილი უარყოფითი ნაწილი  $\lambda_1 = -1 + j, \lambda_2 = -1 - j$ , მაშასადამე,

$$b(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + 2\lambda + 2,$$

ამიტომ  $b(A_1)$  აქვს სახე

$$b(A_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A_1^2 + 2A_1 + 2I,$$

სადაც  $I$  — ერთეულოვანი მატრიცაა.

$b(A_1)$  მატრიცის  $b_i$  ბლოკებს აქვთ სახე

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$b_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

ამრიგად, ერთადერთ დადებითად განსაზღვრულ  $\bar{D}$  ამონახსნს აქვს სახე

$$\bar{D} = b_4 b_2^{-1} = b_3 b^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

მაგალითი 14.8.

განვიხილოთ დაკვირვებადი სიგნალი  $Y(t)$ , რომელიც შესდგება სასარგებლო  $X[t]$  და  $w(t)$  ხმაურისაგან. ამ სიგნალების სპექტრალური სიმკვრივეებია

$$S_{xx}(w) = \frac{2}{1+w}, \quad S_{ww}(w) = 1.$$

საძიებელია კალმანის ფილტრის განტოლებები. სასარგებლო სიგნალის გამოსახულება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$S_{xx}(w) = \frac{\sqrt{2}}{1+jw}, \quad S_{xx}(w) = \frac{\sqrt{2}}{1-jw}.$$

მდგრადი პირველი მამრავლი შეესაბამება მაფორმირებელი ფილტრის სიხშირულ მახასიათებელს. მისი შესაბამისი დიფერენციალური განტოლება, რომელშიც  $X(t)$  აღიგზნება ჰი-

პოტენციური  $v(t)$  თეთრი ხმაურით, წარმოვადგინოთ შემდეგი

სახით  $\dot{X} + X = v$ , სადაც  $S_{vv}(\omega) = \sqrt{2}^2 = 2$ .

მაშასადამე, დაკვირვებადი პროცესის მოდელი მოცემულია თანაფარდობით

$$\dot{X}(t) = -X(t) + v(t),$$

სადაც  $E\{v(t)v(\tau)\} = 2\delta(t-\tau)$ ;  $Y(t) = X(t) + \omega(t)$ ,

სადაც  $E\{\omega(t)\omega(\tau)\} = \frac{1}{2}\delta(t-\tau)$ .

ცხადია, რომ  $A=1$ ,  $c=1$ ,  $Q=2$ ,  $R=1$ . კალმანის ფილტრის განტოლებაა

$$\dot{\hat{X}}(t) = -\hat{X}(t) + k(t)[Y(t) - \hat{X}(t)].$$

გაძლიერების კოეფიციენტი მოცემულია ფორმულით

$$k(t) = \tilde{P}(t).$$

სადაც  $\tilde{P}(t)$  რიკატის განტოლების ამონახსნია

$$\dot{\tilde{P}}(t) = -2\tilde{P}(t) - \tilde{P}^2(t) + 2.$$

ვიპოვოთ რიკატის განტოლების სტაციონარული ამონახსნი

$$\tilde{P}^2 + 2\tilde{P} - 2 = 0.$$

მისი ფესვებია

$$\tilde{P}_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

ვინაიდან  $\tilde{P}$  დისპერსიაა, ის არ შეიძლება იყოს უარყოფითი. ე.ი.  $\tilde{P}(\omega) = -1 + \sqrt{3} = 0,73$ . ახლა თუ გადავალთ ვინერის ფილტრზე, ფილტრის გაძლიერების კოეფიციენტი  $k = 0,73$ .

ვინერის ფილტრის განტოლებებია

$$\dot{\hat{X}}(t) = -\hat{X}(t) + 0,73\{Y(t) - \hat{X}(t)\} = -1,73\hat{X}(t) + 0,73Y(t),$$

$$\frac{\hat{X}(j\omega)}{Y(j\omega)} = \frac{0,73}{1,73 + j\omega}.$$

## § 14.7. კალმანის გაფართოებული ფილტრი

ზოგადად, ფილტრაციის ამოცანა ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: უშუალო დაკვირვებას ექვემდებარება  $\xi(t)$  შემთხვევითი პროცესი, რომელიც დეტერმინირებული ფუნქციას  $S(t, X(t))$  სასარგებლო სიგნალის, რომელიც დეტერმინირებული  $U(t)$  ფუნქციის და  $n(t)$  ხმაურის

$$\xi(t) = \Phi(S(t, X(t)), U(t), n(t)).$$

სასარგებლო  $S(t, X(t))$  სიგნალი არის ფუნქცია დროის მრავალკომპონენტიანი  $X(t) = \{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$  მდგომარეობის, რომელიც წარმოადგენს ვექტორულ შემთხვევით პროცესს.

$\xi(t)$  დაკვირვებად პროცესზე წინასწარ ცნობილია შემდეგი აპრიორული მონაცემები:

1. ცნობილია კონკრეტული სახე დეტერმინირებული  $\Phi(\cdot)$  ფუნქციისა ე.ი. (სიგნალის და ხმაურის) კომბინირების წესი.

2.  $S(t, X(t))$  არის  $t$  და  $x$  არგუმენტების ცნობილი დეტერმინირებული ფუნქცია.

3. ცნობილია  $X(t)$  შემთხვევითი პროცესის და  $n(t)$  ხმაურის აუცილებელი ალბათური მახასიათებლები. აპრიორული მახასიათებლები  $X(t)$  და  $n(t)$  მოცემულია სხვადასხვა ფორმით: ან მრავალგანზომილებიანი ალბათობის სიმკვრივით, ან დიფერენციალური განტოლებების სახით (დეტერმინირებული ან სტოქასტიკური). გვაქვს რა ეს აპრიორული მონაცემები და აგრეთვე  $\xi(t)$  შემთხვევითი პროცესის რეალიზაცია დროის  $[0, t]$  ინტერვალში, აუცილებელია ყოველი  $t$ -თვის ფორმირება გაეუკეთოთ აპოსტერიორულ ალბათობას, ან  $X(t)$  მდგომარეობას, რომელიც საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ მისი  $\hat{X}(t)$  შეფასება ნებისმიერი კრიტერიუმით. ზოგჯერ ამოცანები ამოიხსნება უფრო ზოგადად:  $\xi(t)$  დაკვირ-

ვებით  $[0, t]$  ინტერვალში მოიქებნება  $\hat{X}(t + \tau)$ . როდესაც  $\tau = 0$ , გვაქვს ფილტრაციის ამოცანა,  $\tau > 0$  ექსტროპოლაციის ამოცანა (ფილტრაცია წინგასწრებით, ან წინასწარმეტყველებით),  $\tau < 0$ —ინტერპოლაციის ამოცანა (ფილტრაცია დაგვიანებით).

1. კალმანის გაფართოებული ფილტრი უწყვეტი დროთი [91].

აპრიორულად ვუშვებთ, რომ სიმკვრივის ალბათობის განაწილების საწყისი მნიშვნელობა ნორმალურია. მოცემულია

$$\xi(t) = S(t, X(t)) + n_0(t) \quad (14.159)$$

$$\frac{dX}{dt} = g(t, \lambda) + n_x(t), \quad (14.160)$$

$n_x(t)$ —გაუსის თეთრი ხმაურია,  $\xi$ —დაკვირვების  $m$  განზომილების ვექტორ-სვეტია,  $S(t, X)$ — $m$  განზომილების ვექტორ-ფუნქცია-სვეტებია, უწყვეტია თავისი არგუმენტების მიხედვით.  $n_0(t)$ — $m$  განზომილების ვექტორ-სვეტია, გაუსის თეთრი ხმაურია. ამ განტოლებებში უნდა სრულდებოდეს პირობები

1. სასარგებლო სიგნალი  $S(t, X)$  დამოკიდებულია  $X$ -ზე წრფივად

$$S_i(t, X) = S_i(t) + \sum_{j=1}^m h_{ij}(t) X_j(t); \quad (14.161)$$

2. გასაფილტრი  $X(t)$  შეტყობინება გაუსის პროცესია, ე.ი

$$g_i(t, x) = \sum_{j=1}^n A_{ij}(t) X_j(t) + c_i(t), \quad (14.162)$$

$$N_{X_{ij}}(t) = N_{X_{ij}}(t, X).$$

კალმანის გაფართოებელი ფილტრი მიიღება შემდეგნაირად: ვთქვათ შევქელით ვიპოვოთ რომელიღაც  $X^*$  შეფასება, არ არის სავალდებულო ის იყოს ოპტიმალური. დავშალოთ (14.159) და (14.160) განტოლებების მარჯვენა მხარეები ტეილორის მწკრივად  $X = X^*$  წერტილში (უნდა მივალწიოთ ანალოგიას (14.162) განტოლებასთან)

$$S_i(t, X) \approx S_i(t, X^*) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial S_i(t, X^*)}{\partial X_j} (X_j - X_j^*), \quad (14.163)$$

$$g_i(t, X) \approx g_i(t, X^*) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_i(t, X^*)}{\partial X_j} (X_j - X_j^*). \quad (14.164)$$

ამასთან დაკვირვების განტოლებას აქვს სახე

$$\xi(t) = S_0(t) + H(t)X + n_0(t), \quad (14.165)$$

სადაც

$$S_0(t) = S(t, X^*) - H(t)X^*, \quad H(t) = \partial S(t, X^*) / \partial X^T$$

მდგომარეობის განტოლება ასეთნაირად ჩაიწერება:

$$\frac{dX}{dt} = A_0(t) + A(t)X + n_x(t), \quad (14.166)$$

სადაც

$$A_0(t) = g(t, X^*) - \partial g(t, X^*) / \partial X^T X^*, \quad (14.167)$$

$$A(t) = \partial g(t, X^*) / \partial X^T, \quad N_x(t) = N_x(t, X^*). \quad (14.168)$$

აქ გამოყენებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$\partial f(X^*) / \partial X$  არის  $f(X)$  წარმოებული  $X$  მიხედვით

$X = X^*$  წერტილში. იაკობის მატრიცას აქვს სახე

$$\left[ \partial S(t, X) / \partial X^T \right]_{ij} = \partial S_i(t, X) / \partial X_j, \quad i = \overline{1, m},$$

$$j = \overline{1, n}.$$

წრფივი ფილტრაციის განტოლებების თანახმად, ალბათობის სიმკვრივის აპოსტერიორული მნიშვნელობა არის ნორმალური



$$\frac{d\hat{X}}{dt} = A_0(t) + A(t)\hat{X} + R(t)H(t)N_0^{-1}(t)[\xi(t) - S_0(t) - H(t)\hat{X}] \quad (14.169)$$

$$\frac{dR}{dt} = N_x(t) + A(t)R + RA^T - RH^T(t)N_0^{-1}H(t)R. \quad (14.170)$$

განტოლებებში შემავალი კოეფიციენტები გამოითვლება (14.165), (14.167) გამოსახულებებით.

ძალიან ხშირად  $X^*(t)$  აიღება  $X^*(t) = \hat{X}(t)$ . ეს დაიშვება იმიტომ, რომ  $\hat{X}(t)$  გამოითვლება წარსული დაკვირვებებით და მიმდინარე  $t$ -თვის ითვლება ცნობილად. ამ შემთხვევაში

$$S_0(t) + H(t)\hat{X}(t) = S(t, X^*) + \left[ \partial S(t, X) / \partial X^T \right] \Big|_{X^* = \hat{X}} (\hat{X} - X^*) = S(t, \hat{X}), \quad (14.171)$$

$$A_0(t) + A(t)\hat{X}(t) = g(t, X^*) + \left[ \partial g(t, X^*) / \partial X^T \right] \times \\ \times (\hat{X} - X^*) \Big|_{X^* = \hat{X}} = g(t, \hat{X}). \quad (14.172)$$

საბოლოოდ მივიღებთ კალმანის გაფართოებული ფილტრის განტოლებებს უწყვეტი დროით:

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = g(t, \hat{X}) + R(t) \left[ \partial S(t, \hat{X}) / \partial X^T \right] N_0^{-1}(t) [\xi(t) - S(t, \hat{X})], \quad (14.173)$$

$$\frac{dR}{dt} = N_x(t, X) + \left[ \frac{\partial g(t, \hat{X})}{\partial X^T} \right] R + R \left[ \frac{\partial g(t, \hat{X})}{\partial X^T} \right]^T - \\ - R \left[ \frac{\partial S(t, \hat{X})}{\partial X^T} \right] N_0^{-1}(t) \left[ \frac{\partial S(t, \hat{X})}{\partial \hat{X}^T} \right] R \quad (14.174)$$

განტოლებები გაიგება სტრატონოვიჩის მიხედვით.  $R(t)$ -ფილტრაციის შეცდომის კორელაციური მატრიცაა და იგივე

$\tilde{P}(t)$ , რაც წინა პარაგრაფებში. აქ შეიძლება ჩაგვეწერა  $\xi(t)$ -ს მაგივრად  $Y(t)$ ,  $\omega(t)$  მაგივრად  $n_0(t)$ ,  $\nu(t)$ -ს მაგივრად  $n_x(t)$ .  $N_x(t) - n \times n$  განზომილების ორმხრივი სპექტრალური სიმკვრივის სიმეტრიული მატრიცაა.

(14.173) განტოლებაში მამრავლი  $\partial S(t, \hat{X}) / \partial X^T$  გაიგება როგორც გაწრფივების კოეფიციენტი. ის იცვლება დროის მიხედვით და დამოკიდებულია  $\hat{X}(t)$ . უნდა შევნიშნოთ, რომ ჩვეულებრივი კალმანის წრფივი ფილტრაციის ალგორითმები არიან  $\hat{X}$  მიმართ წრფივი, ხოლო გაფართოებულ ფილტრებში დამოკიდებულება არაწრფივია. ეს არაწრფივობა განმზოლოებულია  $S(t, \hat{X})$  და  $g(t, \hat{X})$ ,  $\hat{X}$ -ზე დამოკიდებულებით.

მეორე ძირითადი სირთულე გაფართოებული ფილტრაციისა მდგომარეობს იმაში, რომ (14.174)

განტოლებაში შედის მიმდინარე  $\hat{X}(t)$  შეფასება. ამიტომ ის არ შეიძლება წინასწარ გავანტიგერიროთ და აუცილებელია ამოხსნათ (14.172) განტოლებასთან ერთად. ეს იწვევს განზომილების გაზრდას და მოითხოვს დიდ მანქანურ დროს, ვინაიდან (14.173) ამოხსნის გარდა საჭიროებს შეცდომის კორელაციური მატრიცას ელემენტებისათვის  $n^2$  (14.173) სახის განტოლებებს.

წრფივი ფილტრების განხილვისას არა აქვს მნიშვნელობა როგორი ფორმითაა განხილული კალმანის ფილტრის განტოლებები იტოსი თუ სტრატონოვიჩისა. გაფართოებული ფილტრებისათვის ამას არა აქვს ადგილი. საქმე იმაშია, რომ (14.168) განტოლებაში  $\xi(t)$ -თან კოეფიციენტში შედის

$\partial S(t, \hat{X}) / \partial \hat{X}$ , რომელიც დამოკიდებულია  $\hat{X}(t)$ .

გამოვეყნოთ ოთხი ვარიანტი:

1. საწყისი (14.145) და (14.174) განტოლებები განვსაზღვროთ სტრატონოვიჩის ფორმით. ფილტრაციის განტოლებები წარმოვადგინოთ სტრატონოვიჩის ფორმით.

2. საწყისი განტოლებები და ფილტრაციის განტოლებები წარმოვადგინოთ იტოს სახით.

3. ფილტრაციის განტოლებებიდან მოცემული 1) სახით, გადავიდეთ იტოს სახეზე.

4. ფილტრაციის განტოლებებიდან მოცემული 2) სახით გადავიდეთ სტრატონოვიჩის სახეზე.

ზევით ჩვენ მივიღეთ კალმანის გაფართოებული ფილტრის განტოლებები სტრატონოვიჩის სახით. რომ მივიღოთ იტოს ტიპის განტოლებები, უნდა ჩატარდეს გამოყენების ისეთივე გზა. ადვილი სანახავია, რომ მივიღებთ იგივე (14.173) და (14.174) განტოლებებს, ოღონდ იტოს სახით.

ამრიგად, მიმდინარე გაწვრთვების მეთოდს მივყვართ კალმანის გაფართოებულ ფილტრების განტოლებებზე, რომელთა სახეც (14.173) და (14.174) სტრატონოვიჩისა და იტოს სახით ერთი და იგივეა. ალგორითმები შეიცვლება თუ ერთი ფორმიდან გადავალთ მეორეზე. (14.173) და (14.174) მოცემულია სტრატონოვიჩის სახით, სკალარულ შემთხვევაში ( $m=1, n=1$ ), გადავიდეთ იტოს სახეზე. მაშინ (14.173) განტოლებისათვის მივიღებთ დამატებით წევრს

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{2}{N_0} R \frac{\partial S(t, \hat{X})}{\partial X} \right) \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{2}{N} R \frac{\partial S(t, \hat{X})}{\partial X} \right) \frac{\lambda}{2} &= \\ &= \frac{1}{N_0} R^2 \frac{\partial S(t, \hat{X})}{\partial X} \frac{\partial^2 S(t, \hat{X})}{\partial X^2} \end{aligned} \quad (14.175)$$

საბოლოოდ გვექნება სხვა განტოლება (14.169) შეფასებისათვის:

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = g(t, \hat{X}) + R \frac{2}{N_0} \left[ \xi(t) - S(t, \hat{X}) - \frac{1}{2} R \frac{\partial^2 S(t, \hat{X})}{\partial X^2} \right] \frac{\partial S(t, \hat{X})}{\partial X}.$$

(14.174) განტოლება დარჩება იგივე. ამრიგად, მიღებული განტოლებები (14.174), (14.176) განსხვავდება (14.173) და (14.174) განტოლებებისაგან. ასეთივე მსჯელობა შეგვიძლია ჩავატაროთ (14.173), (14.174) განტოლებების იტოს ფორმიდან სტრატონოვიჩის ფორმაზე გადასვლისათვის.

გაწრფივებული კალმანის ფილტრის უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ გაძლიერების კოეფიციენტები არ არიან მდგომარეობაზე დამოკიდებული და შეიძლება განისაზღვრონ ნომინალური ამოხსნებიდან. უარყოფითი მხარეა, რომ დროის განმავლობაში შეფასება ნომინალურისაგან ძალიან განსხვავებულია და ხდებიან არსებითად არაწრფივი.

კალმანის გაფართოებულ ფილტრში ბოლო შეფასების მიმართ გამოიყენება წრფივი განტოლება, იმისათვის რომ შეფასება მივუახლოვოთ ფაქტიურს გაძლიერების კოეფიციენტები უნდა გამოითვალოს რეალურ დროში.

კალმანის იტერაციული გაფართოებული ფილტრი ხელს უწყობს არაწრფივობის გავლენის შემცირებას გაზომვებზე, შეფასების იტერაციულ დაზუსტებაზე მანამდე, სანამ შეფასების ცვლილება არ გახდება მცირე.

დისკრეტულ შემთხვევაში კალმანის გაფართოებული ფილტრის ალგორითმების გამოყანა ანალოგიურია, როგორც უწყვეტი დროის შემთხვევაში. ფილტრაციის ალგორითმს აქვს სახე

$$\hat{X}_v = g(t_v, \hat{X}_{v-1}) + R_v H_v^T V_v^{-1} (\xi_v - S(t_v, g(t_v, X_{v-1}))) \quad (14.177)$$

$$R_v^{-1} = [A_v R_{v-1} A_v^T + \psi_v]^{-1} + H_v^T V_v^{-1} H_v. \quad (14.178)$$

მცირე განზომილებისას ხელსაყრელია ალგორითმი

$$R_v = \tilde{R}_v - \tilde{R}_v H_v^T [H_v \tilde{R}_v H_v^T + V_v]^{-1} H_v \tilde{R}_v, \quad (14.179)$$

სადაც

$$\tilde{R}_v = A_v R_{v-1} A_v^T + \psi_v. \quad (14.180)$$

არაწრფივი ფილტრაციის მიახლოებითი ალგორითმები მოცემულია 3, 4 ცხრილებში [79], [133].

კალმანის გაწრფივებული ფილტრის ალგორითმი

| ლახასიათება                                      | განტოლება   | განტოლების რიგითი ნომერი |
|--|---|--------------------------|
| 1  | 2   | 3                        |
| სისტემის მოდელი<br>გაზომვები<br>საწყისი პირობები | $\dot{x} = f(x, t) + G(t)u(t)$ $y(k) = h[x(k)] + v(k)$ $E[x(0)] = \hat{x}(0)$ $Cov[x(0) - \hat{x}(0)] = P(0)$   | (1)<br>(2)               |
| შეფასება შორის<br>გაზომვებს                      | <p>საწყისი ტრეკტორია <math>\bar{x}(t)</math><br/>ცნობილია</p> $\dot{\hat{x}} = f(\bar{x}, t) + F(t)[\hat{x}(t) - \bar{x}(t)]$ $\dot{P} = F(t)P + PF(t)^T + G(t)Q(t)G(t)^T$ $F(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right _{x=\bar{x}(t)}$ | (3)<br>(4)<br>(5)        |
| შეფასება გაზომვისას                              | $\hat{x}(k)^+ = \hat{x}(k)^- + K(k)\{y(k) - h[\bar{x}(k)] - H(k)[\hat{x}(k)^- - \bar{x}^-(k)]\}$ $K(k) = P(k)^- - H(k)^T [H(k)P(k)^- - H(k)^T + R(k)]^{-1}$ $P(k)^+ = [1 - K(k)H(k)]P(k)^-$ $Hk = \left. \frac{h}{x} \right _{x=\hat{x}(t)}$    | (6)<br>(7)<br>(8)<br>(9) |

| დახასიათება           | განტოლება  | განტოლების რიგითი ნომერი |
|-----------------------|--|--------------------------|
| სისტემის მოდელი       | $\dot{x} = f(x, t) + G(t)u(t)$   | (10)                     |
| გაზომვები             | $y(k) = h[x(k)] + v(k)$  | (11)                     |
| საწყისი პირობები      | $E[x(0)] = \hat{x}(0)$   | (12)                     |
| შეფასება შორის        | $Cov[x(0) - \hat{x}(0)] = P(0)$  | (13)                     |
|                       | $\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, t)$  | (14)                     |
| გაზომვებს             | $\dot{P} = F(t)P + PF(t)^T + G(t)Q(t)G(t)^T$                                 | (15)                     |
|                       | $F(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right _{x=\hat{x}(t)}$         | (16)                     |
| შეფასება გაზომვებისას | $\hat{x}(k)^+ = \hat{x}(k)^- + K(k) \{ y(k) - h[\hat{x}(k)^-] \}$            | (17)                     |
|                       | $K(k) = P(k)^- H(k)^- [H(k)^- P(k)^- \times$<br>$\times H(k)^T + R(k)]^{-1}$ | (18)                     |
|                       | $P(k) = [1 - K(k)H(k)]P(k)^-$  | (19)                     |
|                       | $Hk = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right _{x=\hat{x}(k)^-}$         | (20)                     |

§ 14.8. რიკატის განტოლების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები

კალმან-ბიუსის ფილტრის თვისებები ძალიან არის დამოკიდებული რიკატის მატრიცული დიფერენციალური განტოლების ამოხსნაზე.  $\tilde{P}(t)$  არის ერთადერთი უცნობი  $k(t)$  გაძლიერების მატრიცას განსაზღვრისას.

როგორც წესი, რიკატის დიფერენციალური განტოლება ამოიხსნება რიცხობრივად. ამასთან, დამრგვალების შეცდომის შედეგად წარმოიშობება ორი პრობლემა [47], [123]:

(i)  $\tilde{P}$  მატრიცას სიმეტრიის დაკარგვა.

(ii)  $\tilde{P}$  მატრიცას არაუარყოფითად განსაზღვრულობის დარღვევა.

ინტეგრირების პირდაპირი მეთოდი.

დავწეროთ რიკატის მატრიცული განტოლება შემდეგ სახეში

$$-\dot{P}(t) = R_1(t) - P(t)B(t)R_2^{-1}B^T(t)P(t) + A^T(t)P + P(t)A(t), \quad (14.181)$$

საბოლოო პირობით  $P(t_1) = P_1$ .

პირდაპირი მეთოდი დამყარებულია (14.181) განტოლების  $n^2$  პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის სახით წარმოდგენაში. (იგულისხმება, რომ  $P(t)$  არის  $n \times n$  განზომილების მატრიცა) და განტოლების ინტეგრირებისათვის ნებისმიერი სტანდარტული რიცხვითი მეთოდის გამოყენებაში. მაგალითად, ეილერის მეთოდის

$$P(t - \Delta t) \approx P(t) - \dot{P}(t)\Delta t, \quad (14.182)$$

რომლის მიხედვითაც გამოითვლება  $P(t)$  მატრიცა დროის მომენტებში  $t = t_1 - \Delta t$  თუ ამოხსნა იკრიბება მულტიპლიკაციის მიხედვით, მაშინ როგორც ეს ხდება მულტიპლიკაციის მიხედვით ან სისტემების დროს, უნდა შემოვიტანოთ გაჩერების პირობა. ამ მეთოდის ნაკლი იმაში მდგომარეობს, რომ დასაშვები სიზუსტის მისაღებად, საჭიროა  $\Delta t$  იყოს ძალიან მცირე სიდიდე. ეს კი იწვევს ბიჯების დიდად ზრდას. ამავე დროს, როგორც აღვნიშნეთ გამოთვლის შეცდომის შედეგად ირღვევა  $P(t)$  მატრიცას სიმეტრიულობა. ეს შეიძლება ავიცილინოთ თუ მოვახდენთ ყოველ ბიჯზე  $P(t)$ -ს შევცვლას

$$\frac{1}{2}[P(t) + P^T(t)] \quad P(t) \text{ სიმეტრიულობა შეიძლება გამოვიყენოთ თუ შევცვლით (14.181) განტოლებას პირველი რიგის}$$

$(1/2)n(n+1)$  დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით, მაშინ მივიღებთ მანქანური დროის დიდ ეკონომიას.

პირდაპირი ინტეგრირების მეთოდები გამოიყენება, როგორც მულტიპლიკაციის ცვალებადპარამეტრიანი სისტემებისათვის.

## კალმან-ენგლარის მეთოდი

გამოიყენება მულტივარამეტრიანი სისტემებისათვის.  $P(t)$  მატრიცა განისაზღვრება გამოსახულებით

$$P(t) = [\theta_{21}(t, t_1) + \theta_{22}(t, t_1)P_1] [\theta_{11}(t, t_1) + \theta_{12}(t, t_1)P_1]^{-1} \quad (14.183)$$

სადაც  $\theta_{11}(t, t_0)$ ,  $\theta_{12}(t, t_0)$ ,  $\theta_{21}(t, t_0)$ , და  $\theta_{22}(t, t_0)$  მიიღებიან მდგომარეობის დიფერენციალური განტოლებებიდან

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{P}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t) \\ -R_1(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ P(t) \end{bmatrix}, \quad (14.184)$$

$$R_1(t) = D^T R_3(t) D(t). \quad (14.185)$$

$\theta(t, t_0)$  გარდამავალი მატრიცა დაყოფით მიიღებს სახეს

$$\theta(t, t_0) = \begin{bmatrix} \theta_{11}(t, t_0) & \theta_{12}(t, t_0) \\ \theta_{21}(t, t_0) & \theta_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}. \quad (14.186)$$

წარმოვადგინოთ (14.183) შემდეგი სახით

$$P(t) = [\theta_{21}(t_{i+1}, t_i) + \theta_{22}(t_{i+1}, t_i)P(t_i)] \times \\ \times [\theta_{11}(t_{i+1}, t_i) + \theta_{12}(t_{i+1}, t_i)P(t_i)]^{-1},$$

სადაც

$$t_{i+1} = t_i - \Delta t. \quad (14.187)$$

$\theta_{ij}(t, t_0)$  ჩვეურობით შემდეგი სახით

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{P}(t) \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} x(t) \\ P(t) \end{bmatrix}, \quad (14.188)$$

სადაც

$$Z = \begin{bmatrix} A & -BR_2^{-1}B^T \\ -D^T R_3 D & -A^T \end{bmatrix}, \quad (14.189)$$

$\theta(t_{i+1}, t_i)$  მატრიცა გამოითვლება ფორმულით



$$\theta(t_{i+1}, t_i) = e^{-z\Delta t} \quad (14.190)$$

გამოსახულების მარჯვენა მხარე შეიძლება დაიშალოს მწკრივად. რიკატის განტოლების ამონახსნი მოიძებნება (14.187) გამოსახულების მრავალჯერადი გამოყენებით. ამასთან ერთად ყოველ ბიჯზე უნდა მოვახდინოთ სიმეტრირება.

თუ ინტერვალი  $\Delta t$  ამორჩეულია ძალიან დიდი, მაშინ გვაქვს გამოთვლითი სირთულეები, გამოწვეული იმ მატრიცის არასინგულარულობით, რომელიც მიიღება (14.187) განტოლებიდან. თუ მატრიცას მახასიათებელი რიცხვების ნამდვილი ნაწილები დიდად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, მაშინ საჭიროა რომ ავიღოთ მცირე  $\Delta t$ , მაგრამ გამოთვლების დრო შეიძლება გაზდეს დიდი, განსაკუთრებით დამყარებული რეჟიმებისათვის.

დიაგონალიზაციის მეთოდის გამოყენება

იმისათვის, რომ მივიღოთ რიკატის მულტიპარამეტრიანი განტოლების დამყარებული ამონახსნი, გამოვიყენოთ  $2n \times 2n$  განზომილებიანი  $Z$  მატრიცას დიაგონალიზაციის მეთოდი.

ცნობილია, რომ ასიმპტოტური ამონახსნი გამოისახება გამოსახულებით

$$\bar{P} = W_{22} W_{12}^{-1} \quad (14.191)$$

სადაც  $W_{22}$  და  $W_{12}$  მიიღება  $W$  მატრიცას დაყოფით.

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}. \quad (14.192)$$

$W$ -მატრიცა შესდგება  $Z$  მატრიცას საკუთრივი ვექტორებისაგან:  $W$  მატრიცას პირველი  $n$  სვეტები შეესაბამებიან  $Z$ -ის მახასიათებელ რიცხვების დადებით ნამდვილ ნაწილებს,  $W$  მატრიცას ბოლო  $n$  სვეტები  $Z$  მატრიცას მახასიათებელ რიცხვებს, რომლებსაც აქვთ უარყოფითი ნამდვილი ნაწილები.

ხშირად  $Z$ -მატრიცას ზოგიერთი ან ყველა საკუთრივი ვექტორები არიან კომპლექსური. მაშინ  $W_{22}$  და  $W_{12}$  შეიძლება იყოს კომპლექსური მატრიცები. ოპერაციები კომპლექსურ რიცხვებზე შეიძლება ავიცილინოთ შემდეგნაირად: თუ  $e-Z$ -ის საკუთრივი ვექტორი შეესაბამება  $\lambda$  მახასი-

ათეხელ რიცხვს უარყოფითი ნამდვილი ნაწილით, მაშინ  $\bar{e}$  კომპლექსური შეუღლებული ვექტორი შეესაბამება  $\bar{\lambda}$  მახასიათებელ რიცხვს, ნამდვილი უარყოფითი ნაწილით.  $W$ -მატრიცას ბოლო  $n$  სვეტები ნამდვილი ვექტორ-სვეტების გარდა შეიცავენ მხოლოდ წყვილ კომპლექსურ შეუღლებულ ვექტორ-სვეტებს. ამ შემთხვევაში მოიძებნება წრფივი არასინგულარული გარდაქმნა

$$\begin{bmatrix} W_{12}^T \\ W_{22}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{12} \\ W_{22} \end{bmatrix} u, \quad (14.193)$$

ისეთი, რომ  $e$  და  $\bar{e}$   $Col(W_{12}, W_{22})$  შეიცვალოს ორ ნამდვილ ვექტორად  $Re(e)$  და  $Im(e)$   $Col(W_{12}^T, W_{22}^T)$ . მაშინ სამართლიანია თანაფარდობა

$$W_{22}^T W_{12}^{T-1} = (W_{22} u)(W_{12} u)^{-1} = W_{22} W_{12}^{-1} \quad (14.194)$$

აქედან გამოდინარეობს, რომ  $\bar{P}$  გამოსათვლელად  $W_{22}$  და  $W_{12}$  ნაცვლად გამოვიყენოთ  $W_{22}^T W_{12}^T$ .

სისტემატიზაცია გავუყუეთოთ  $\bar{P}$  გამოთვლას:

ა) შევადგინოთ  $Z$  მატრიცა და გამოვიყენოთ სტანდარტული მეთოდი საკუთრივი ვექტორების გამოსათვლელად, რომლებიც შეესაბამებიან მახასიათებელ რიცხვებს ნამდვილი უარყოფითი ნაწილებით.

ბ) ამ  $n$  საკუთრივი ვექტორებიდან შევადგენთ  $2n \times n$  მატრიცას

$$\begin{bmatrix} W_{12}^T \\ W_{22}^T \end{bmatrix}, \quad (14.195)$$

სადაც  $W_{21}^T$  და  $W_{22}^T$  არიან მატრიცას  $n \times n$  განზომილების ბლოკები. თუ  $e$  არის ნამდვილი საკუთრივი ვექტორი, მაშინ ის შეიძლება გახდეს (14.195) მატრიცას ერთ-ერთი სვეტი. ხოლო თუ  $e$  და  $\bar{e}$  შეადგენენ კომპლექსურ-შეუღლებულ წყვილს, მაშინ  $Re(e)$  არის (14.195) მატრიცას სვეტი, ხოლო  $Im(e)$  მისი სხვა სვეტი.

გ) გამოითვლება

$$\bar{P} = W_{22}^T W_{12}^{T-1} \quad (14.196)$$

აღნიშნული მეთოდის ეფექტურობა დამოკიდებულია  $Z$  მატრიცას საკუთრივი ვექტორების გამოთვლის ქვეპროგრამაზე.

ნიუტონ-რაფსონის მეთოდის გამოყენება

ეს მეთოდი გამოიყენება რიკატის განტოლების სტაციონარული ამოხსნისათვის. მეთოდი დამყარებულია შემდეგი სახის წრფივი მატრიცული განტოლების მრავალჯერად ამოხსნაზე.

$$O = A^T P + PA + R. \quad (14.197)$$

დამყარებული  $\bar{P}$  ამონახსნი უნდა აკმაყოფილებდეს რიკატის აღგებრულ განტოლებას

$$O = R_1 - PSP + A^T P + PA, \quad (14.198)$$

სადაც

$$S = BR_2^{-1} B^1 \quad (14.199)$$

განვიხილოთ მატრიცული ფუნქცია

$$F(P) = R_1 - PSP + A^T P + PA. \quad (14.200)$$

ამოცანა მდგომარეობს არაუარყოფითად განსაზღვრული სიმეტრიული  $\bar{P}$  მატრიცას განსაზღვრაში

$$F(\bar{P}) = 0. \quad (14.201)$$

ავაგოთ იტერაციული პროცედურა. დავუშვათ, რომ  $k$  ბიჯზე მივიღეთ  $P_k$  ამონახსნი, რომელიც მცირედ განსხვავდება საძიებელი  $\bar{P}$  ამონახსნისაგან. მაშინ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ

$$\bar{P} = P_k + \tilde{P} \quad (14.202)$$

თუ  $\tilde{P}$  არის მცირე სიდიდე, მაშინ შეიძლება აპროქსიმაცია გაუკეთდეს  $F(\bar{P})$  და არ მივიღოთ მხედველობაში  $\tilde{P}$  კვადრატული წევრები. გვექნება

$$F(\bar{P}) \approx R_1 - P_k S P_k - P_k S \tilde{P} - \tilde{P} S P_k + A^T (P_k + \tilde{P}) + (P_k + \tilde{P}) A. \quad (14.203)$$

ნიუტონ-რაფსონის მეთოდის არსი მდგომარეობს  $\bar{P}$  შეფასებაში, როდესაც (14.203) გაუტოლდება ნულს. თუ მიღებულ  $\bar{P}$  შეფასებას აღვნიშნავთ  $\bar{P}_k$  და გავუტოლებთ

$$P_{k+1} = P_k + \bar{P}_k, \quad (14.204)$$

მაშინ მას ვიპოვიტ (14.203) ნულთან გატოლებით

$$0 = R_1 + P_k SP + P_{k+1} A_k + A_k^T P_{k+1}, \quad (14.205)$$

სადაც

$$A_k = A - SP_k. \quad (14.206)$$

(14.205) განტოლებას აქვს ისეთივე სახე, როგორც (14.197), რომლის ამონხსნისათვის არსებობს ეფექტური მეთოდები. ამრიგად, გვაქვს შემდეგი ალგორითმი:

ა) ვირჩევთ შესაბამის  $P_0$  მატრიცას და ვუშვებთ, რომ იტერაციის  $k$  ნომერი ტოლია ნულის.

ბ) (14.205) განტოლებიდან განვსაზღვროთ  $P_{k+1}$ .

გ) თუ მიიღწევა კრებადობა, მაშინ ხდება გაჩერება, წინააღმდეგ შემთხვევაში  $k$  იზრდება ერთით და ვუბრუნდებით ბ) პუნქტს.

დ) თუ რიკატის განტოლებას აქვს ერთადერთი არაუაჩუფითი ამონახსნი, მაშინ

$$P_{k+1} \leq P_k, \quad k = 0, 1, 2. \quad (14.207)$$

და

$$\lim P_k = \bar{P} \quad (14.208)$$

იმ პირობებისას, როდესაც  $P_0$  მატრიცა ამორჩეულია ისეთნაირად, რომ გამოსახულება

$$A_0 = A - SP_0 \quad (14.209)$$

არის ასიმპტოტურად მდგრადი. ეს იმას ნიშნავს, რომ საწყისი სქემა სწორედაა ამორჩეული.

თუ საწყისი სქემა ამორჩეულია არაკორექტულად, მაშინ შეიმჩნევა კრებადობა რიკატის განტოლების ამონახსნისა ნებისმიერი მნიშვნელობისაყენ, ან საერთოდ კრებადობა არ მიიღწევა. თუ  $A$  მატრიცა ასიმპტოტურად მდგრადია, მაშინ მიზანშეწონილია ავირჩიოთ  $P_0 = 0$ . თუ  $A$  მატრიცა არ არის ასიმპტოტურად მდგრადი, მაშინ საწყისი მნიშვნელობის შერჩევა საკმაოდ რთულია. ძირითადი სიძნელე დაკავშირებულია (14.197) განტოლების მრავალჯერად ამონხსნაში.

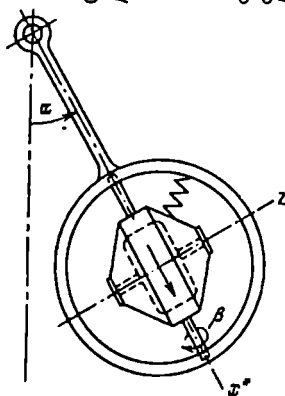
მიუხედავად იმისა, რომ ეს განტოლება არის წრფივი, მისი რიცხვითი ამოხსნა დაკავშირებულია გარკვეულ სიძნელეებთან, რადგან იმ წრფივი განტოლებების რიცხვი, რომელიც უნდა ამოიხსნას ყოველ იტერაციაზე, სწრაფად იზრდება ამოცანის განზომილების ზრდასთან ერთად. (როდესაც  $n = 15$  ეს რიცხვი ტოლია 120-ის).

§ 14.9. ბრტყელი გიროსკოპული ქანქარას მდგომარეობის შეფასება და მისი ოპტიმალური მართვა [75]

მაგალითის სახით განვიხილოთ ბრტყელი გიროსკოპული ქანქარას შეფასების ოპტიმალური ფილტრი (ნახ.14.9). იგულისხმება, რომ ჩაკიდების ღერძის გარშემო მომენტის განტოლებას, რომელიც გამოწვეულია რადიალური კორექციის მოწყობილობით, აქვს სახე

$$- [M\beta + b\omega(t)],$$

სადაც  $\omega(t)$  თეთრი ხმაურის ტიპის გაუსის შემთხვევითი პროცესია, ნულოვანი საშუალო მნიშვნელობით.



ნახ. 14.9

ქანქარა აღჭურვილია მბრუნავი  $Z$  ფიგურის ღერძის გარშემო  $k$  გიროსკოპით, მოთავსებულია გარსაცმში, რომელსაც შეუძლია მობრუნდეს ქანქარას  $X^1$  ღერძის გარშე-

მო.  $c$  ზამბარა ზღუდავს გარსაცმის ბრუნვას და ცდილობს შეინარჩუნოს ფიგურის ლერძი ქანქარას რხევების სიბრტყის მახლობლობაში. ჩვენ განვიხილოთ ამ სასტემის მცირე რხევები და დავადგინოთ, რომ გიროსკოპის გამო ქანქარას ინერცია მისი რხევებისას ჩაკიდების ლერძის მახლობლად მნიშვნელოვნად იზრდება.

აღენიშნოთ  $\alpha$ -თი ქანქარას ლერძის ვერტიკალიდან გადახრის კუთხე.  $\beta$ -გიროსკოპის ლერძის რხევების სიბრტყიდან გადახრის კუთხე. მათი ათვლის მიმართულებები მოცემულია ნახაზზე.  $Z, X^1$  ლერძებზე ჩვენ ვილაპარაკეთ.  $Y^1$  ლერძი მიმართულია მკითხველისკენ, ისეთნაირად, რომ  $X^1, Y^1, Z^1$  ლერძებმა ჩამოაყალიბონ მარჯვენა კოორდინატთა სისტემა.

თუ  $c$  ზამბარას შეეცვლით ხისტი კავშირით, მაშინ სისტემის რხევა ჩაკიდების ლერძის მახლობლად განისაზღვრება განტოლებით

$$A\ddot{\alpha} + L\alpha = M_y, \quad (14.210)$$

სადაც  $A$  მთელი სისტემის ინერციის მომენტია ჩაკიდების ლერძის მიმართ.  $L = Pl$ ;  $P$  წონის ნამრაველია მანძილზე ჩაკიდების ლერძიდან სიმძიმის ცენტრამდე.  $M_y$ , მომენტია ჩაკიდების ლერძის მიმართ, რომელიც შეიძლება მოედოს სისტემას.

ანალოგიურად უძრავი ქანქარას შემთხვევაში გარსაცმიანი გიროსკოპის რხევის განტოლება  $X^1$  ლერძის გარშემო წარმოსდგება შემდეგი სახით

$$B\ddot{\beta} + M\beta = -M_y, \quad (14.211)$$

სადაც  $B$ -გარსაცმიანი გიროსკოპის ინერციის მომენტია  $X^1$  ლერძის მიმართ.  $M$ -ზამბარის სიხისტეა,  $M_{X^1}$  აღმ-

შფოთი მომენტია  $X^1$  ლერძის მიმართ.

თუ სისტემას გააჩნია რხევების მთლიანი თავისუფლება  $\alpha, \beta$  კუთხეებში, მაშინ  $\dot{\beta}$  მობრუნება იძლევა გიროსკოპის მომენტს- $H\dot{\beta}$   $Y^1$  ლერძის მიმართ, ხოლო  $\dot{\alpha}$  ბრუნვა-

$H\dot{\alpha}$  გიროსკოპის მომენტს  $X^1$  ღერძის მიმართ. ჩვენ მივიღებთ განტოლებას

$$A\ddot{\alpha} + L\alpha + H\dot{\beta} = M_y, \quad (14.212)$$

$$B\ddot{\beta} + M\beta - H\dot{\alpha} = -M_x.$$

თუ  $M_x = M_y = 0$ , მაშინ სისტემა განახორციელებს თავისუფალ რხევებს, განსაზღვრულს განტოლებებს

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{\alpha} + L\alpha + H\dot{\beta} &= 0 \\ B\ddot{\beta} + M\beta - H\dot{\alpha} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (14.213)$$

განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც გემის განივი ქანაობის კუთხე  $\theta \equiv 0$ . ვუშვებთ აგრეთვე, რომ საკიდარის ჩაქიდების ღერძის საყრდენებში და გიროსკოპის გარსაცმის ღერძის საყრდენებში ბლანტი ხახუნის  $E$  და  $n$  კოეფიციენტები ნულის ტოლია. ამიტომ გიროსკოპული ქანქარას მოძრაობის განტოლებები დადის შემდეგ სახეზე

$$I_1\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + \ell P\alpha + M\beta + b\omega(t) = 0.$$

$$I_2\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + \wp\beta = 0, \quad (14.214)$$

სადაც  $\alpha$ —ქანქარას მობრუნების კუთხეა თავის ღერძის გარშემო,  $\beta$ —გიროსკოპის მობრუნების კუთხეა მისი გარსაცმის ღერძის გარშემო,  $I_1, I_2$ —შესაბამისი ინერციის მომენტებია,  $H$  გიროსკოპის კინეტიკური მომენტი,  $\ell P$ —ქანქარას სტატიკური მომენტი,  $\wp$  ზამბარას სიხისტეა, რომელიც აკავშირებს გიროსკოპის გარსაცმს ქანქარასთან. შემოვიფარგლოთ პრეციზიული მოძრაობის შესწავლით ამიტომ (14.214) განტოლებაში უკუვაგლოთ ინერციული  $I_1\ddot{\alpha}$  და  $I_2\ddot{\beta}$  წევრები, გვექნება

$$\dot{\alpha} = \frac{\wp}{H}\beta,$$

$$\dot{\beta} = -\frac{\ell P}{H}\alpha - \frac{M}{H}\beta - \frac{b}{H}\omega(t). \quad (14.215)$$

$\alpha(t_0)$  და  $\beta(t_0)$  საწყისი მნიშვნელობის მათემატიკური ლოდინები წინასწარ ცნობილია

$$M[\alpha(t_0)] = \bar{\alpha}_0 \quad M[\beta(t_0)] = \bar{\beta}_0. \quad (14.216)$$

გიროსკოპული ქანქარას მობრუნების  $\alpha$  კუთხე და გიროსკოპის გადაცემის მობრუნების  $\beta$  კუთხე უშუალო გაზომვებს არ ექვემდებარებიან. გაზომვის შედეგად შეიძლება მივიღოთ მხოლოდ სკალარული შემთხვევითი  $y(t)$  ( $t_0 \in [t_0, T]$ ) პროცესის რეალიზაცია

$$y(t) = \beta(t) + v(t), \quad (14.217)$$

სადაც  $v(t)$ —თეთრი ხმაურის ტიპის გაუსის შემთხვევითი პროცესია, ნულოვანი მათემატიკური ლოდინით. შემოვიტანოთ მატრიცები

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_0 = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_0 \\ \bar{\beta}_0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho}{H} \\ -\frac{\ell P}{H} & -\frac{M}{H} \end{bmatrix}, \quad (14.218)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{b}{H} \end{bmatrix},$$

$$C = [C_1 \quad C_2] = [0 \quad 1].$$

ამ აღნიშვნების შემოტანის შემდეგ (14.215), (14.216), (14.217), (14.218) წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\dot{X} = AX + B\omega(t); \quad (14.219)$$

$$y(t) = CX(t) + v(t);$$

(14.219) სისტემის საწყისი  $X(t_0)$  მდგომარეობა წარმოადგენს ვექტორულ შემთხვევით პროცესს, დამოუკიდებელია  $\omega(t)$  და



$v(t)$ ,  $\bar{X}_0$  საშუალო მნიშვნელობით და ცნობილი კორელაციური მატრიცით

$$M\left\{[X(t_0) - \bar{X}_0][X(t_0) - \bar{X}_0]^T\right\} = P_0. \quad (14.220)$$

ერთგანზომილებიანი  $\omega(t)$  და  $v(t)$  შემთხვევითი პროცესების კორელაციურ ფუნქციებს აქვთ სახე

$$M[\omega(t)\omega(\tau)] = Q(t)\delta(t - \tau) = q\delta(t - \tau);$$

$$M[v(t)v(\tau)] = R(t)\delta(t - \tau) = r\delta(t - \tau);$$

$$M[\omega(t)v(\tau)] = 0, \quad (14.221)$$

სადაც  $q$  და  $R$ —დადებითი მუდმივი სიდიდეებია.  $\dot{X} = AX$  განტოლების მახასიათებელ ლეტერმინანტს აქვს სახე

$$\Delta(P) = P^2 + \frac{M}{H}P + \frac{\wp \ell P}{H^2} \quad (14.222)$$

თუ  $\Delta(P)$  პოლინომის კოეფიციენტები არსებითად დადებითია, მაშინ  $\dot{X} = AX$  განტოლების ტრივიალური ამონახსნები ასიმპტოტურად მდგრადია.

განვიხილოთ (14.219) სისტემის დაკვირვებადობის და მართვადობის ამოცანები. ამ თეორიის საკითხები განხილულია [1], [42], [47], [64], [75], [138], [139].

(14.218) თანახმად

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12} & B_2 \\ A_{22} & B_2 \end{bmatrix},$$

ამიტომ კალმანის მატრიცას აქვს სახე

$$W = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & A_{12}B_2 \\ B_2 & A_{22}B_2 \end{bmatrix}.$$

$W$  მატრიცის ლეტერმინანტს კი

$$\det W = -A_{12}B_2^2 = -\frac{\wp}{H} \frac{b^2}{H^2} \neq 0.$$

მაშადადმე, (14.219) სისტემა მართვადია.

ანალოგიურად, (14.218)-ის შესაბამისად

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad AC = \begin{bmatrix} 0 & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{bmatrix}.$$

კალმანის  $S$  მატრიცას აქვს სახე

$$S = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_{21} \\ 1 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

$S$  მატრიცას დეტერმინანტია

$$\det S = -A_{21} = \frac{\ell P}{H} \neq 0.$$

მაშასადამე, სისტემა დაკვირვებადია.

ვიზოვოდ აღნიშნული ამოცანისათვის შედგენილი რიკატის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი

$$\frac{dP}{dt} = AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + BQB^T, \quad P(t_0) = P_0 \quad (14.223)$$

აქ,  $P$  სიმეტრიული კვადრატული  $2 \times 2$  განზომილების მატრიცაა

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}. \quad (14.224)$$

(14.218) თანახმად

$$A_{11} = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 1.$$

მაშინ (14.223) განტოლებას (14.218) და (14.224) გათვალისწინებით ექნება სახე.

$$\begin{aligned} AP &= \begin{bmatrix} A_{12}P_{12} & A_{12}P_{22} \\ A_{21}P_{11} + A_{22}P_{12} & A_{21}P_{12} + A_{22}P_{22} \end{bmatrix}; \\ PA^T &= \begin{bmatrix} P_{12}A_{12} & P_{11}A_{21} + P_{12}A_{22} \\ P_{22}A_{12} & P_{12}A_{21} + P_{22}A_{22} \end{bmatrix}; \\ PCR P &= \begin{bmatrix} hP_{12}^2 & hP_{12}P_{22} \\ hP_{12}P_{22} & hP_{22}^2 \end{bmatrix}; \quad BQB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & qB_2^2 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (14.225)$$

სადაც  $h$ -ით აღნიშნულია

$$h = r^{-1} \quad (14.226)$$

(14.225) და (14.226) განტოლების თანახმად, (14.223) რიკატის განტოლების ექვივალენტურია შემდეგ სკალარულ განტოლებათა სისტემა

$$\frac{dP_{11}}{dt} = 2A_{12}P_{12} - hP_{12}^2;$$

$$\frac{dP_{12}}{dt} = A_{21}P_{11} + A_{22}P_{12} + A_{12}P_{22} - hP_{12}P_{22};$$

$$\frac{dP_{22}}{dt} = 2A_{21}P_{12} + 2A_{22}P_{22} + hP_{22}^2 - qB_2^2; \quad (14.227)$$

(14.227) სისტემის საწყის პირობებს აქვთ სახე

$$P_{11}(t_0) = P_{11}^0, \quad P_{12}(t_0) = P_{12}^0, \quad P_{22}(t_0) = P_{22}^0, \quad (14.228)$$

სადაც  $P_{11}^0$ ,  $P_{12}^0$ ,  $P_{22}^0$  შემდეგი მატრიცის ელემენტებია

$$P_0 = \begin{bmatrix} P_{11}^0 & P_{12}^0 \\ P_{12}^0 & P_{22}^0 \end{bmatrix}.$$

ის განისაზღვრება (14.220) განტოლებით.

აღნიშნული ამოცანის ოპტიმალური ფილტრის განტოლებაა

$$\frac{d\rho}{dt} = A\rho + P(t)C^T R^{-1}[Y(t) - C\rho], \quad \rho(t_0) = \bar{X}_0, \quad (14.229)$$

სადაც  $\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}.$

(14.218) თანახმად

$$A_{11} = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 1.$$

მაშინ (14.229) განტოლებაში შემავალ წევრებს აქვთ სახე

$$A\rho = \begin{bmatrix} A_{12}\rho_2 \\ A_{21}\rho_1 + A_{22}\rho_2 \end{bmatrix}, \quad P(t)C^T R^{-1} = \begin{bmatrix} hP_{12}(t) \\ hP_{22}(t) \end{bmatrix},$$

$$C\rho = \rho_2, \quad Y(t) - C = Y(t) - \rho_2 \quad (14.230)$$

(14.229) და (14.230) განტოლებებიდან ვიპოვიოთ, რომ (14.223) დიფერენციალურ განტოლებას შეესაბამება სკალარულ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\frac{d\rho_1}{dt} = A_{12}\rho_2 + hP_{12}(t)[Y(t) - \rho_2],$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} = A_{21}\rho_1 + A_{22}\rho_2 + hP_{22}(t)[y(t) - \rho_2],$$

$$\rho_1(t_0) = \bar{\alpha}_0, \quad \rho_2(t_0) = \bar{\beta}_0. \quad (14.231)$$

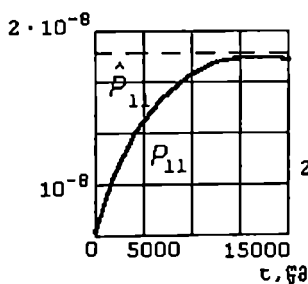
(14.231) სისტემა ბრტყელი გიროსკოპული ქანქარასათვის ოპტიმალური ფილტრის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაა.

ახლა გავითვალისწინოთ გიროსკოპული ქანქარას პარამეტრების მნიშვნელობები:

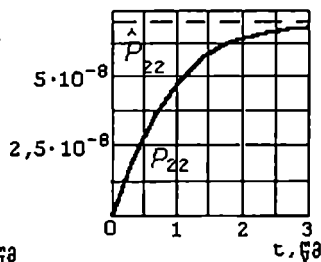
$$\frac{\ell P}{H} = 0,02 \text{ სეკ}^{-1}, \quad \frac{\rho}{H} = 0,005 \text{ სეკ}^{-1}, \quad \frac{M}{H} = \frac{b}{H} 0,01 \text{ სეკ}^{-1}$$

$$q = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ სეკ}, \quad r = 10^{-7} \text{ სეკ}, \quad P_0 = 0 \quad (14.232)$$

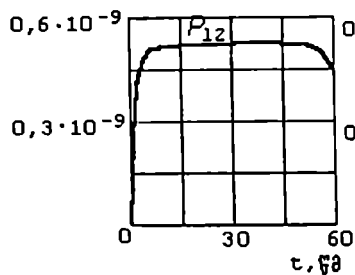
ავაგოთ  $P_{11}(t)$ ,  $P_{22}(t)$ ,  $P_{12}(t)$  ფუნქციების გრაფიკები (ნახ. 14.10, 14.11, 14.12, 14.13).



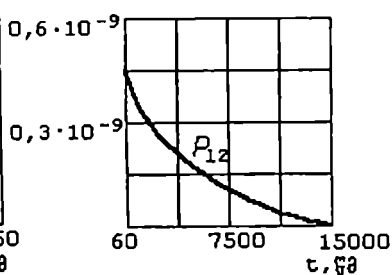
ნახ.14.10



ნახ.14.11



ნახ.14.12



ნახ.14.13

ამ ფუნქციების ზღვრული მნიშვნელობებია

$$\hat{P}_{jk} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{jk}(t),$$

$$\hat{P}_{11} = 1,74 \cdot 10^{-8}, \quad \hat{P}_{12} = 0, \quad \hat{P}^{22} = 6,97 \cdot 10^{-8} \quad (14.233)$$

ამრიგად,  $\alpha$  და  $\beta$  საშუალო კვადრატული შეფასების ზღვრული მნიშვნელობებია ( $t \rightarrow \infty$ ) შემთხვევაში

$$\sqrt{(\alpha - \hat{\alpha})^2} = \sqrt{\hat{P}_{11}} = 0,132 \cdot 10^{-3},$$

$$\sqrt{(\beta - \hat{\beta})^2} = \sqrt{\hat{P}_{22}} = 0,264 \cdot 10^{-3} \quad (14.234)$$

გამოვთვალოთ კიდევ ზღვრული ( $t \rightarrow t_0 \rightarrow \infty$ )  $\alpha$  და  $\beta$  საშუალო კვადრატული მნიშვნელობები. აღვნიშნოთ

$$\xi(t) = -\frac{b}{H} \omega(t). \quad (14.235)$$

(14.221) თანახმად გვექნება

$$M[\xi(t)] = 0, \quad M\left[\frac{b}{H} \omega(t) \quad \frac{b}{H} \omega(\tau)\right] = \frac{b^2}{H^2} q \delta(t - \tau). \quad (14.236)$$

ამრიგად,

$$M[\xi(t)\xi^T(\tau)] = \tilde{Q}(t)\delta(t-\tau) = q\delta(t-\tau),$$

სადაც  $\tilde{q} = \frac{b^2}{H^2} q$ .

(14.214) სისტემა ახლა გადაწეროთ შემდეგნაირად:

$$\dot{\alpha} = \frac{\rho}{H} \beta \quad \dot{\beta} = -\frac{\ell P}{H} \alpha - \frac{M}{H} \beta + \xi(t). \quad (14.237)$$

აღნიშნოთ

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (14.238)$$

(14.237) ჩაწეროთ ვექტორულ სახით

$$\dot{X} = AX + \tilde{B}\xi(t), \quad (14.239)$$

სადაც  $A$  მატრიცას აქვს (14.218) სახე.

(14.239) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$(ID - A)X = \tilde{B}\xi(t) \quad (14.240)$$

ან

$$X = (ID - A)^{-1} \tilde{B}\xi(t), \quad (14.241)$$

სადაც  $D = \frac{d}{dt}$ ,  $I$ -ერთეულოვანი მატრიცაა.  $N(t)$ -თი აღ-

ნიშნოთ ქვემოთ მოცემული მატრიცა, რომელიც  $P(IP - A)^{-1}$  გამოსახულების კარსონ-ხევისაიდის გარდაქმნით მიღებული მატრიცას ორიგინალია:

$$P(IP - A)^{-1} \longrightarrow N(t) = \begin{bmatrix} N_{11}(t) & N_{12}(t) \\ N_{21}(t) & N_{22}(t) \end{bmatrix}. \quad (14.242)$$

(14.239) განტოლების კოშის ამოცანის ამონახსნია

$$\begin{aligned} X(t) &= N(t-t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t-t_0} N(t-\tau)\tilde{B}\xi(\tau)d\tau = \\ &= N(t-t_0)X(t_0) + \int_0^{t-t_0} N(\nu)\tilde{B}\xi(t-\tau)d\nu. \end{aligned} \quad (14.243)$$

როგორც (14.243) ჩანს, (14.243) ასიმპტოტურად მდგრადია. ამიტომ ( $t_0 \rightarrow -\infty$ ) (14.243)-დან მივიღებთ დამყარებულ ამონახსნს

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} X(t) = \int_0^{\infty} N(\nu) \tilde{B} \xi(t - \nu) d\nu. \quad (14.244)$$

ვინაიდან

$$N(\nu) \tilde{B} = \begin{bmatrix} N_{11}(\nu) & N_{12}(\nu) \\ N_2(\nu) & N_{22}(\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{12}(\nu) \\ N_{22}(\nu) \end{bmatrix}, \quad (14.245)$$

ამიტომ (14.244) მიიღებს სახეს

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} X(t) = \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} N_{12}(\nu) \\ N_{22}(\nu) \end{bmatrix} \xi(t - \nu) d\nu. \quad (14.246)$$

აქედან გამომდინარეობს  $X(t)$  ვექტორის მნიშვნელობები

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} X_1(t) = \int_0^{\infty} N_{12}(\nu) \xi(t - \nu) d\nu,$$

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} X_2(t) = \int_0^{\infty} N_{22}(\nu) \xi(t - \nu) d\nu.$$

ვინაიდან  $\xi(t)$  თეთრი ხმაურია, ამიტომ (14.239) სისტემის გამოსასვლელზე

$$\bar{X}^2 = F \int_{-\infty}^{\infty} [k(t)]^2 dt = \frac{F}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega,$$

$$|\Phi(j\omega)| = A(\omega) \quad (14.247)$$

გათვალისწინებით გვექნება

$$\bar{X}_1^2 = \tilde{q} \int_0^{\infty} [N_{12}(\nu)]^2 d\nu, \quad \bar{X}_2^2 = \tilde{q} \int_0^{\infty} [N_{22}(\nu)]^2 d\nu. \quad (14.248)$$

თუ ჩავსვამთ (14.232) პარამეტრების მნიშვნელობებს გვექნება

$$\bar{X}_1^2 = 0,625 \cdot 10^{-6}, \quad \bar{X}_2^2 = 2,5 \cdot 10^{-6} \quad (14.249)$$

დამყარებულ რეჟიმში  $\alpha$  და  $\beta$  კუთხეების საშუალო კვადრატული მნიშვნელობებია

$$\alpha_{სყ} = \sqrt{\bar{X}_1^2} = 0,79 \cdot 10^{-3}; \quad \beta_{სყ} = \sqrt{\bar{X}_2^2} = 1,58 \cdot 10^{-3} \quad (14.250)$$

სანამ განვიხილავდეთ ბრტყელი გიროსკოპული ქანქარას ოპტიმალური მართვის საკითხებს, მოვიყვანოთ ვონჰემის დაყოფის მეთოდი, რომელსაც მნიშვნელოვანი როლი უკავია სტრუქტურული მართვის თეორიაში და ჩვენს მიერ განხილულ მაგალითში ვისარგებლებთ მისი შედეგებით.

### § 14.10. ვონჰემის დაყოფის თეორემა [93]

$u^*(t)$  ოპტიმალური მართვას სისტემაში, რომელიც აღიწერება განტოლებებით

$$\frac{dx}{dt} = A(t)X(t) + L(t)U(t) + B(t)\omega(t)$$

$$Y(t) = C(t)X(t) + v(t) \quad (14.251)$$

და ანიჭებს მინიმუმს ფუნქციონალს

$$I = M \left\{ \frac{1}{2} \langle X(T), S_1 X(T) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\langle X(s), Q_1(s) X(s) \rangle + \langle U(s), R_1(s) U(s) \rangle] ds \right\} \quad (14.252)$$

აქვს შემდეგი სახე

$$u^*(t) = -R_1^{-1}(t) L^T(t) k(t) \hat{X}(t; \bar{X}_0, t_0), \quad (14.253)$$

სადაც  $k(t)$ —რიკატის მატრიცული დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნია

$$\frac{dk}{dt} = -kA(t) - A^T(t)k + kL(t)R_1^{-1}(t)L^T(t)k - Q_1(t), \quad k(T) = S_1. \quad (14.254)$$

აქ  $\hat{X}(t; \bar{X}_0, t_0)$ —შემდეგი ვექტორული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია



$$\frac{d\hat{X}}{dt} = A(t)\hat{X} + L(t)U^0(t) + P(t)C^T R^{-1}[y(t) - C(t)\hat{X}],$$

$$\bar{X}(t)_0 = \bar{X}_0. \quad (14.255)$$

ხოლო  $P(t)$  რიკატის მატრიცული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია

$$\frac{dP}{dt} = A(t)P + PA^T(t) - \sum C^T(t)R^{-1}(t)C(t) + B(t)Q(t)B^T(t).$$

$$P(t_0) = P_0. \quad (14.256)$$

ამასთან ფუნქციონალის მინიმალური მნიშვნელობა

$$I[x, t] = M \left\{ \frac{1}{2} \langle X(T), S_1 X(T) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \langle X(s), Q_1(s) X(s) \rangle + \right. \\ \left. + \langle U(s), R_1(s) U(s) \rangle ds \right\} \quad (14.257)$$

იქნება ტოლი

$$I[\hat{x}, t] = \frac{1}{2} \left\{ \langle \hat{X}(t), k(t) \hat{X}(t) \rangle + \int_{t_0}^T Sp[P(s), C^T(s)R^{-1}(s)C(s)P(s)k(s)] ds + \right. \\ \left. + Sp[S_1 \sum(T; P_0, t_0)] + \int_{t_0}^T Sp[Q_1(s)P(s; P_0, t_0)] ds \right\}. \quad (14.258)$$

ახლა განვიხილოთ ბრტყელი გიროსკოპული ქანქარას ოპტიმალური მართვა, რომელიც დაიჭერს სისტემას მდგომარეობის ახლოს და მინიმიზაციას უკეთებს ფუნქციონალს

$$I = M \left\{ \frac{1}{2} \langle X(T), S_1 X(T) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \langle X(s), Q_1(s) X(s) \rangle + \right. \\ \left. + \langle U(s), R_1(s) U(s) \rangle ds \right\}, \quad (14.259)$$

სადაც  $T$  დროის რომელიღაცა ფიქსირებული მომენტია.  $S_1$  და  $Q_1$  სიმეტრიული არა უარყოფითად განსაზღვრულ  $n \times n$  მატრიცებია, ხოლო  $R_1(t)$  სიმეტრიული დადებითად

განსაზღვრული  $p \times p$  მატრიცაა. ფუნქციონალი შეფასებას უკეთებს სისტემის გადახრას  $X = 0$  მდგომარეობიდან.

ვუშვებთ, რომ მმართველი მომენტი  $mu(t)$  ( $m = Const$ ) მოდებულია გიროსკოპის გარსაცმის ლერძის გარშემო. ყველაფერი ამის გათვალისწინებით ბრტყელი გიროსკოპული ქანქარას განტოლება:

$$I_1 \ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + \ell P \alpha + M\beta + b\omega(t) = 0,$$

$$I_2 \ddot{\beta} + H\dot{\alpha} + \wp \beta + mu(t) = 0. \quad (14.260a)$$

აქაც შევიჩრდეთ პრეცეზიულ მოძრაობაზე, მაშინ (14.260a) განტოლება ჩაიწერება

$$\dot{\alpha} = \frac{\wp}{H} \beta + \frac{m}{H} u(t); \quad \dot{\beta} = -\frac{\ell P}{H} \alpha - \frac{M}{H} \beta - \frac{b}{H} \omega(t). \quad (14.260b)$$

აგრეთვე სამართლიანია (14.216), (14.217) განტოლებები. შემოვიტანოთ მატრიცები

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_0 = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_0 \\ \bar{\beta}_0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\wp}{H} \\ -\frac{\ell P}{H} & -\frac{M}{H} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{b}{H} \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \quad C_2] = [0 \quad 1],$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{H} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (14.261)$$

წარმოვადგინოთ (14.215), (14.216), (14.260) განტოლებები შემდეგი სახით

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Lu(t) + B\omega(t), \\ y(t) &= CX(t) + v(t). \end{aligned} \quad (14.262)$$

აქაც სამართლიანია (14.220) და (14.221) გამოსახულებები. როგორც ავლიწნეთ  $u(t)$  მართვა უნდა აკმაყოფილებდეს (14.220) ფუნქციონალის მინიმუმს. დავუშვათ, რომ

$$S_1 = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}, \quad Q_1(t) = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix}, \quad R_1(t) = r_1, \quad (14.263)$$

სადაც  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $r$  დადებითი მუდმივი რიცხვებია.

ოპტიმალური მართვის კანონია

$$u^*(t) = -R_1^{-1}(t)L^T(t)k(t)\hat{X}(t; \bar{X}_0, t_0), \quad (14.264)$$

სადაც  $k(t)$  რიკატის მატრიცული განტოლების ამონახსნია. ჩვენი შემთხვევის ოპტიმალური ფილტრის განტოლებაა

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = [A(t) - L(t)R_1^{-1}(t)L^T(t)k(t)]\hat{X} + P(t)C^T(t)R^{-1}(t)[y(t) - C(t)\hat{X}]$$

$$X(t_0) = \bar{X}_0, \quad (14.265)$$

სადაც  $P(t)$  რიკატის მატრიცული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია

$$\frac{dP}{dt} = A(t)P + PA^T(t) - PC^T R^{-1}(t)C(t) + B(t)Q(t)B^T(t),$$

$$P(t_0) = P_0. \quad (14.266)$$

$k(t)$  განისაზღვრება განტოლებიდან

$$\frac{dk}{dt} = -kA(t) - A^T(t)k + kL(t)R_1^{-1}L^T(t)k - Q_1(t).$$

$$k(T) = S_1. \quad (14.267)$$

$P$  სიმეტრიული კვადრატული მატრიცაა ელემენტებით  $2 \times 2$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}. \quad (14.268)$$

ოპტიმალური მართვისათვის სამართლიანია (14.227), (14.228), (14.226) გამოსახულებები.

$P$ -სიმეტრიული კვადრატული მატრიცა ტოლია

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}. \quad (14.269)$$

ვინაიდან (14.261) თანახმად  $A_{11} = 0$ ,  $B_1 = 0$ ,  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 1$ ,  $L_2 = 0$ , მაშინ განტოლებაში შემავალი მატრიცებს (14.261) და (14.269) შესაბამისად, აქვთ სახე

$$kA = \begin{bmatrix} k_{12}A_{21} & k_{11}A_{12} + k_{12}A_{22} \\ k_{22}A_{21} & k_{12}A_{12} + k_{22}A_{22} \end{bmatrix},$$

$$A^T k = \begin{bmatrix} A_{21}k_{12} & A_{21}k_{22} \\ A_{12}k_{11} + A_{22}k_{12} & A_{12}k_{12} + A_{22}k_{22} \end{bmatrix},$$

$$kLR_1^{-1}L^T k = \begin{bmatrix} \lambda L_1^2 k_{11} & \lambda L_1^2 k_{22} k_{12} \\ \lambda L_1^2 k_{11} k_{12} & \lambda L_1^2 k_{12} \end{bmatrix}.$$

$$QI = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix}, \quad (14.270)$$

სადაც

$$\lambda = r_1^{-1}. \quad (14.271)$$

(14.269) და (14.270) თანახმად ვიპოვით, რომ (§14.9) განსახილველ მაგალითში რიკატის მატრიცულ განტოლების ექვივალენტურია შემდეგი სკალარულ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\frac{dk_{11}}{dt} = -2A_{21}k_{12} + \lambda L_1^2 k_{11}^2 - g_1,$$

$$\frac{dk_{12}}{dt} = -A_{12}k_{11} - A_{22}k_{12} - A_{21}k_{22} + \lambda L_1^2 k_{11}k_{22},$$

$$\frac{dk_{22}}{dt} = -2A_{12}k_{12} - 2A_{22}k_{22} + \lambda L_1^2 k_{12}^2 - g_2. \quad (14.272)$$

(14.272) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი უნდა აკმაყოფილებდეს დროის  $[t_0, T]$  მონაკვეთის  $T$  ბოლოში შემდეგ პირობებს:

$$k_{11}(T) = S_1, \quad k_{12}(T) = 0, \quad k_{22}(T) = S_2.$$

ახლა შევხვით ოპტიმალური ფილტრის ვექტორული დიფერენციალური განტოლებების ცხადად აგების საკითხს.  $\hat{X}$  აღვნიშნოთ

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix}. \quad (14.273)$$

ცნობილია, რომ  $A_{11} = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 1, \quad L_2 = 0$ . მაშინ

$$A\hat{X} = \begin{bmatrix} A_{12}\hat{X}_2 \\ A_{21}\hat{X}_1 + A_{22}\hat{X}_2 \end{bmatrix},$$

$$LR_1^{-1}L^T k(t)\hat{X} = \begin{bmatrix} \lambda L_1^2 k_{11}(t) & \lambda L_1^2 k_{12}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda L_1^2 k_{11}(t)\hat{X}_1 + \lambda L_1^2 k_{12}(t)\hat{X}_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P(t)C^T R^{-1} = \begin{bmatrix} hP_{12}(t) \\ hP_{22}(t) \end{bmatrix},$$

$$C\hat{X} = X_2, \quad y(t) - C\hat{X} = y(t) - \hat{X}_2 \quad (14.274)$$

(14.273) და (14.274) თანახმად (14.265) ვექტორულ დიფერენციალურ განტოლებას შეესაბამება შემდეგი სკალარულ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა.

$$\frac{d\hat{X}_1}{dt} = -\lambda L_1^2 k_{11}(t)\hat{X}_1 + [A_{12} - \lambda L_1^2 k_{12}(t)]\hat{X}_2 + hP_{12}(t)[y(t) - \hat{X}_2],$$

$$\frac{d\hat{X}_2}{dt} = A_{21}\hat{X}_1 + A_{22}\hat{X}_2 + hP_{22}(t)[y(t) - \hat{X}_2].$$

$$\hat{X}_1(t_0) = \bar{\alpha}_0, \quad \hat{X}_2(t_0) = \bar{\beta}_0. \quad (14.275)$$

ეს არის ბრტყლი გიროსკოპული ქანქარასათვის ოპტიმალური ფილტრის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა.

ვიპოვოთ ცხადი სახით  $u^*(t)$  ოპტიმალური მართვის სა-  
ხე (14.274) გათვალისწინებით. ვინაიდან  $L_2 = 0$ , ამიტომ

$$-R_1^{-1}(t)L^T(t)k(t) = [-\lambda L_1 k_{11}(t), -\lambda L_1 k_{12}(t)]. \quad (14.276)$$

ოპტიმალური მართვის კანონია

$$u^*(t) = -\lambda L_1 k_{11}(t) \hat{X}_1(t) - \lambda L_1 k_{12}(t) \hat{X}_2(t), \quad (14.277)$$

სადაც  $\hat{X}_1(t)$  და  $\hat{X}_2(t)$  (14.275) განტოლებათა  
სისტემის ამონახსნებია.



ნაწილი მეოთხე

სისტემების აღაპტური მართვა





## თავი მეოთხთმეტე

### მართვის ადაპტური სისტემები

#### § 15.1. შესავალი

ადაპტაცია არის ცოცხალი ორგანიზმის ძირითადი რეაქცია. ის ნიშნავს ორგანიზმის შეგუებას გარე და შიდა პირობებთან. მართვის სისტემებში ამ პრინციპის განხორციელებას აქვს ბევრი უპირატესობა და ხშირ შემთხვევებში უბრალოდ აუცილებელია.

პირველად ადაპტაციის განსაზღვრება ლიტერატურაში გაჩნდა ჩვენი საუკუნის 50-იან წლებში, როდესაც ცინმა აღწერა რეჟების მიერ აგებული ადამიანის ტვინის მოდელი [99].

არსებობს მართვის ადაპტური სისტემების განსაზღვრის რამდენიმე ვარიანტი. დღესდღეობით არ არსებობს ადაპტური სისტემის ზუსტი და საყოველთაოდ მიღებული განსაზღვრა. ჩვენ შეგვირდებით ი.ციპკინის განსაზღვრაზე [97]: „ადაპტაცია ვუწოდოთ სისტემის პარამეტრების და სტრუქტურის ცვლილების პროცესს საწყისი განუზღვრელობისა და მუშაობის ცვლადი პირობებისას, სისტემის ოპტიმალური მდგომარეობის მისაღწევად შესაძლებელია მიმდინარე ინფორმაციის საფუძველზე მოხდეს მმართველი ზემოქმედების ცვლილება“ კი“, მაღალი თვისობრიობის მართვის სისტემების შექმნისას გათვალისწინებული უნდა იყოს მართვის ობიექტების მახასიათებლების და გარეშე ზემოქმედებების განუზღვრელობა ე.ი. მათი პარამეტრების შესახებ არასრული აპრიორული და მიმდინარე ინფორმაციის ნაკლებობა. განუზღვრელობის მიზეზებია: პარამეტრების სტადიაში მართვის ობიექტების „კარგი“ მათემატიკური მოდელების უქონლობა, რეჟიმული ფაქტორების სიძვირე და ა.შ.

ამას გარდა მართვის ობიექტის ექსპლუატაციისას და გარემოს ფუნქციონირებისას მათი პარამეტრები შეიძლება შეიცვალოს წინასწარ გაუთვალისწინებელი მიზეზებით და მაშინ არასტაციონარულობა გამოდის როგორც განუზღვრელობის ერთ-ერთი სახე. მართვის სისტემებში განუზღვრელობის ფაქტორებს განეკუთვნებიან: მოწყობილობების რეჟიმების შეცვლა (მაგალითად დატვირთვა) კატალიზატორის დაძველება,

მოწყობილობების გაცვეთა და გაქუქყიანება. მოქნილ ავტო-  
მატურ სისტემებში პროდუქციის ნომენკლატურის შეცვლა  
და ა.შ.

მართვის სისტემების თვისობრიობის გასაუმჯობესებლად  
პროექტირების ეტაპზე გათვალისწინებული უნდა იყოს არსე-  
ბული განუზღვრელობები, ამ პრობლემის გადაწყვეტის ყვე-  
ლაზე პერსპექტიული გზაა ადაპტაციის მეთოდების გამოყენე-  
ბა. ადაპტური მართვის სისტემებში ინფორმაცია ობიექტების  
და გარე ზემოქმედების შესახებ შეიკრიბება ექსპლუატაციის  
მსვლელობაში, მაშინვე დამუშავდება და გამოიყენება მმართ-  
ველი ზემოქმედებების გამოსამუშავებლად. ეს საშუალებას იძ-  
ლევს გაუმჯობესდეს მართვის თვისობრიობა ობიექტის და  
გარემოს ფუნქციონირების პარამეტრების განუზღვრელობისა  
და არასტაციონარულობის პირობებში. მხედველობაში უნდა  
იყოს მიღებული აგრეთვე ობიექტების სტოქასტიკურობა და  
მისი არაწრფივი დინამიკა.

ყველა ზემოთ ჩამოთვლილ ფაქტორებს, მივყევართ იქამდე,  
რომ მართვის არსებული მეთოდები ხშირ შემთხვევაში არ  
იძლევიან საშუალებას განხორციელდეს ადაპტური მართვის  
სისტემები.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი, სადაც კარგად ჩანს  
მართვის ადაპტური სისტემების გამოყენების აუცილებლობა.

მაგალითი 15.1.

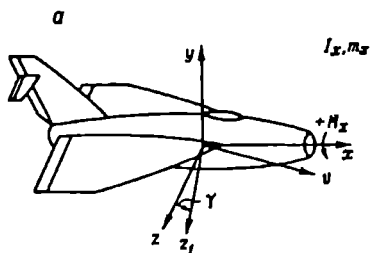
საფრენი აპარატის მოძრაობის მართვა გასწვრივი ღერძის  
მიმართ [4].

განვიხილოთ საფრენი აპარატის გამართივებული განტოლე-  
ბები, როდესაც იგულისხმება, რომ ის წარმოადგენს აბსო-  
ლუტურად ხისტ სხეულს გასწვრივი ღერძის მიმართ

$$I_x \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = m_x S l \frac{\rho g^2}{2} + M_x(t), \quad (15.1)$$

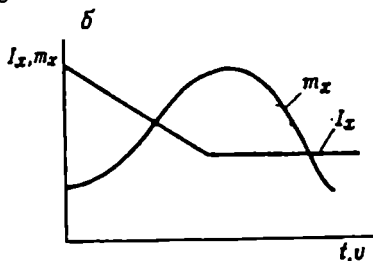
სადაც  $I_x = I_x(t)$ —საფრენი აპარატის ინერციის მომენტი  
გასწვრივი ღერძის მიმართ.  $\gamma$ —ღახრის კუთხეა;  $g$ —საფრენი  
აპარატის ფრენის სიჩქარეა;  $S$ —ფრთების ფართობი;  $l$ —ფრთა-  
თაშორის განია;  $\rho$ —ჰაერის სიმკვრივეა;  $m_x = f(g, \beta, \delta)$ —ძა-  
ლის მომენტის კოეფიციენტი, რომელიც მოქმედებს საფრენ  
აპარატზე.  $\delta$ —უღერონების გადახრის კუთხეა,  $\beta$ —საფრენი

აპარატის სრიალის კუთხეა.  $M_x(t)$ —აღმუფოთი ძალების მომენტი.



ნახ.15.1ა

(ნახ.15.1ა) საფრენი აპარატის მოძრაობის დინამიკა გასწვრივი ღერძის მიმართ ხასიათდება არაწრფივი და ცვლადი პარამეტრებით, ვინაიდან  $I_x$  ინერციის მომენტი და  $m_x$  კოეფიციენტი არაწრფივად არიან დამოკიდებული დროზე და ფრენის სიჩქარეზე (ნახ.15.1ბ)



ნახ.15.1ბ

თუ საფრენი აპარატის დახრა ხდება მცირე დროში ე.ი. შეიძლება უგულველყოთ საფრენი აპარატის სიჩქარის ცვლილებით ( $\Delta \vartheta = 0$ ) და არ მივიღოთ მხედველობაში.

ა) კურსიდან აქეთ-იქით გადახვევა;

ბ) კურსის საჭის გადახრის ძალის მომენტი;

გ) ძრავის წევის ძალის მომენტი;

მაშინ საფრენი აპარატის დახრის მოძრაობის გაწრფივებულ განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{d^2 \Delta \gamma}{dt^2} + k_1(t) \frac{d \Delta \gamma}{dt} = k_2(t) \Delta \delta(t) + k_3(t) M_x(t), \quad (15.2)$$

სადაც

$$\begin{aligned} k_1(t) &= U_x^{-1}(t) \rho S l m_{x \dot{\gamma}} \vartheta^2, \\ k_2(t) &= (U_x(t))^{-1} \rho S l m_{x \sigma} \vartheta^2, \\ k_3(t) &= I_3^{-1}(t). \end{aligned} \quad (15.3)$$

$m_{x \dot{\gamma}}$  და  $m_{x \sigma}$  დემფირების და ელერონების აეროდინამიკური კოეფიციენტებია.

(15.2) განტოლება არის ცვლადკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება. თუ გამოვიყენებთ წრფივ მარეგულირებელ მოწყობილობას (ავტოპილოტს), სადაც საფრენი აპარატის ფრენის დინამიკის მართვისათვის გამოიყენება აწყობის მუდმივი კოეფიციენტები, მივიღებთ არადამაკმაყოფილებელ შედეგებს. კერძოდ,  $k_1(t)$ ,  $k_2(t)$ ,  $k_3(t)$  კოეფიციენტების ყველა შესაძლო ცვლილების არეში არადამაკმაყოფილებელი სიდიდის გარდამავალ პროცესს. ასეთ შემთხვევაში საჭიროა აიგოს ადაპტური ავტოპილოტი. ასეთივე დასკვნასთან მივალთ, თუ განვიხილავთ საფრენი აპარატის მოძრაობას ტანგაჟის მიხედვით. (ტანგაჟი-საფრენი აპარატის კუთხური მოძრაობაა ინერციის მთავარი განივი ღერძის მიმართ. ის არასასურველი მოვლენაა).

მაგალითი 15.2 [94]

რეგიონში მოსახლეობის რაოდენობის მართვა. მართვის ობიექტის მათემატიკური აღწერისათვის ავირჩიოთ მოსახლეობის რაოდენობის დინამიკის წრფივი მოდელის დისკრეტული ვარიანტი. ამ მოდელის თანახმად ობიექტის განტოლებას აქვს სახე:

$$Y_{k+1} = Y_k + \vartheta_k + Z_k, \quad (15.4)$$

$$\vartheta_{k+1} = a_1 Y_k + a_2 \vartheta_k + b_1 u_{k-1} + \varphi_k \quad (15.5)$$

$$\omega_{k+1} = a_3 Y_k + a_4 \omega_k - b_0 (u_k - u_{k-1}) + \varphi_k \quad (15.6)$$

$$k = 0, 1, 2,$$

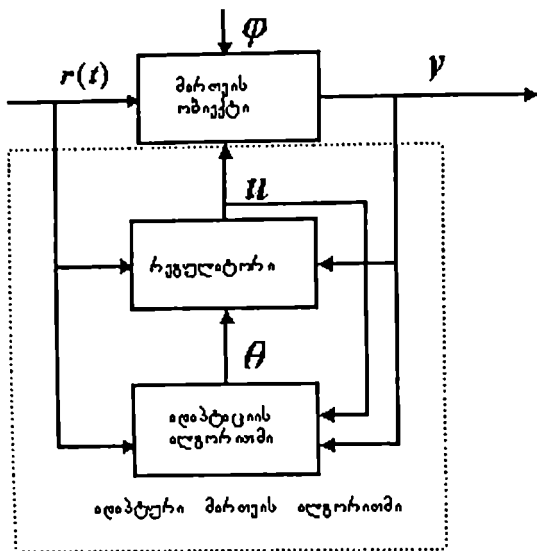
$(t_k)$  დისკრეტული დროა,  $Y_k$  — მოსახლეობის რაოდენობა რეგიონში  $(t_k)$  მომენტში,  $\rho_k, \omega_k, Z_k$  — შესაბამისად მოსახლეობის შემოსული, წასული და ბუნებრივი მატების რაოდენობაა  $t_{k-1}$  და  $t_k$  მომენტებს შორის;  $U_k$  — კაპიტალდაბანდების მოცულობაა  $t_k$  მომენტში იმ სფეროებში, რომლებიც განსაზღვრავენ ცხოვრების დონეს რეგიონში.  $a_1, \dots, a_4, b_0, b_1$  — დადებითი კოეფიციენტებია.

(15.4)–(15.6) მოდელი არ არის ზუსტი ზოგიერთი ფაქტორის გაუთვალისწინებლობის გამო. კერძოდ, სოციალურ-ფსიქოლოგიური ფაქტორი. ამ ფაქტორების არაპირდაპირი გათვალისწინებით (15.4)–(15.6) განტოლებებში შემოტანილია წევრები  $\varphi_k'$  და  $\varphi_k''$ , რომლებიც დროის მიხედვით არიან თანაბრად შეზღუდულები.

უნდა აღინიშნოს, რომ მმართველ ზემოქმედებად აღებული კაპიტალდაბანდების მოცულობა არ შეიძლება განხილული იყოს, როგორც სუფთა ეკონომიკური ფაქტორი: მისი ცვლილება ახდენს გავლენას მოსახლეობის არსებობის სხვადასხვა ასპექტზე, ხოლო ცხოვრების დონე ძალიან მოქმედებს მიგრაციულ პროცესზე. ამ გავლენის ხარისხი (კოეფიციენტები  $b_0, b_1$ ) პრაქტიკულად შეუძლებელია შეფასდეს. ხოლო მოსახლეობის დინამიკაზე დაკვირვება მოითხოვს ძალიან დიდ დროს.

ამრიგად, (15.4)–(15.6) განტოლებების უშუალოდ გამოყენება მოსახლეობის რაოდენობის რეგულირებისათვის გამწვანებულია, ვინაიდან ობიექტის მათემატიკური მოდელის კოეფიციენტები უცნობია. ამავე დროს ეს კოეფიციენტები დროში იცვლებიან (საკმაოდ ნელა). ამ პრობლემის გადაწყვეტისათვის უნდა გამოვიყენოთ ადაპტური მართვის მეთოდები.

ადაპტური მართვის სისტემის სტრუქტურა მოცემულია (ნახ.15.2)



ნახ. 15.2

მართვის ობიექტზე მოქმედებს დაკვირვებადი  $z = z(t)$  შეშფოთებები, არადაკვირვებადი  $\varphi = \varphi(t)$  შეშფოთებები და  $u = u(t)$  მმართველი ზემოქმედებები. დაკვირვებადია გამოსასვლელი  $y = y(t)$ . ობიექტის მოქმედება დამოკიდებულია აგრეთვე ზოგიერთ უცნობ პარამეტრებზე, რომელთა ერთობლიობა აღნიშნოთ  $\xi$ . მოცემულია  $\xi$  შესაძლო მნიშვნელობების  $Z$  სიმრავლე, რომლებიც განსაზღვრავენ ობიექტების და შეშფოთებების დასაშვებ კლასს. საჭიროა განისაზღვროს მმართველი ზემოქმედების ალგორითმი, რომელიც იყენებს გაზომილ სიდიდეებს, არ არის დამოკიდებული  $\xi \in Z$  და უზრუნველყოფს ნებისმიერი  $\xi \in Z$  მართვის მოცემულ მიზანს. უცნობი პარამეტრების ვექტორი  $\xi$  ჩვეულებრივად შესდგება ობიექტის და გარემოს აღმწერი განტოლებების კოეფიციენტებისაგან. მათი ზუსტი მნიშვნელობები თითქმის არასოდეს არ არის ცნობილი.

ზევით განხილული ამოცანა წარმოადგენს მართვის ამოცანას განუზღვრელობის პირობებში. ის შეიძლება გადაწყდეს ეტაპობრივად: თავდაპირველად შეისწავლება ობიექტი, განისაზღვრება მისი უცნობი პარამეტრები. მიღებული ინფორმაცია შემდეგ გამოიყენება მართვის ტრადიციულ ალგორითმებში. მაგრამ მართვის ასეთი სტრატეგია ობიექტის შესასწავლად საჭიროებს დამატებით დროს, იწვევს გადაწყვეტილების მიღების დაგვიანებას. ასეთი სტრატეგია მიუღებელია არასტაციონალური პირობებისათვის, სადაც სისტემის თვისობრიობა მკვეთრად იცვლება.

ადაპტური მართვის ალგორითმს აქვს ორდონიანი სტრუქტურა. 1 დონე—ძირითადი კონტურის ალგორითმი დამოკიდებულია  $\Theta$  ვექტორის პარამეტრებზე. ყოველი  $\xi \in Z$ -ის უნდა უზრუნველყოფდეს მართვის მიზნის მიღწევას. ალგორითმის მე-2 დონე (ადაპტაციის ალგორითმი)—უნდა გადააწყოს  $\Theta$  ვექტორი ისე, რომ მიღწეული იყოს მართვის მიზანი უცნობი  $\xi \in Z$ . რეგულირების და ადაპტაციის ალგორითმების ერთობლიობას უწოდებენ ადაპტური მართვის ალგორითმებს. დინამიკურ სისტემებს შემდგარს ობიექტისაგან და მოწყობილობისაგან, რომელებიც რეალიზებას უკეთებენ ადაპტური მართვის ალგორითმებს უწოდებენ მართვის ადაპტურ სისტემებს.

ყველა ზემოთ მოყვანილ შემთხვევებში მართვის ობიექტის მახასიათებლებზე მოქმედებენ შემოჭოთი ზემოქმედებები და განიცდიან ცვლილებებს. ცხადია, თუ საჭიროა შევინარჩუნოთ სისტემის გამოსასვლელი სტაციონარულ მდგომარეობაში მოცემული დონის რომელიმე ზღვარზე, ხოლო ზოგიერთი მახასიათებლები (მაგ. სტაბილიზაციის დრო, გადაარეგულირება და ა.შ.) უნდა იყოს მუდმივები, მაშინ საჭიროა მართვის შეცვლა, ე.ი. ის უნდა იყოს შეგუებადი მართვის ობიექტთან. სწორედ სისტემებს რომლებსაც აქვთ ასეთი ქცევა უწოდებენ ადაპტურს.

არსებობს სამი თვისება, რომლებიც ახასიათებენ ადაპტურ სისტემებს:

1. მთელი სისტემის მუშა მახასიათებლები დამატებითი ელემენტების და მოწყობილობების საშუალებით იმყოფებიან მუდმივი კონტროლის და მართვის ქვეშ.



2. დაკვირვებადი ქცევა გამოიხატება თვისობრიობის რომელიმე მახასიათებლებით. ე.ი. მახასიათებლები და ოპერაციები სისტემებში ფასდებიან რაოდენობრივად.

3. თუ თვისობრიობის მახასიათებელი შეიცვალა. იმისათვის, რომ სისტემამ მიაღწიოს თავის ოპტიმალურ მნიშვნელობას, შესაბამისი დამატებითი მოწყობილობების დახმარებით უნდა შეიცვალოს მართვის სისტემის პარამეტრები, რაც იწვევს მთელი სისტემის პარამეტრების ცვლილებას. ზევით ჩამოთვლილი პროცესები დამახასიათებელია ყველა ადაპტური სისტემებისათვის იმის გამო, რომ მართვაზე მოთხოვნილია დამატებითი პირობები. ყველა ადაპტური სისტემა არის უკუკავშირის სისტემა, მაგრამ ცხადია ყველა უკუკავშირის სისტემა არ არის ადაპტური.

## § 15.2. მართვის ადაპტური სისტემების კლასიფიკაცია

დღეისათვის არსებობს ადაპტური სისტემების კლასიფიკაციის რამდენიმე მიმართულება:

I მიმართულება [4], [12], [13], [41], [51], [62], [65], [83], [94], [95], [97], [102], [106].

ადაპტური სისტემების კლასიფიკაცია ხორციელდება ობიექტების განუზღვრელობის რანგის მოდელების საფუძველზე.

—განუზღვრელობის ნულოვანი რანგის მოდელი—იგულისხმება ე.წ. ნეინერის „შავი ყუთის“ ან ლ. ზადეს „ბუნდოვანი სიმრავლეები“.

—განუზღვრელობის პირველი რანგის მოდელი—როდესაც ცნობილია ობიექტის ტოპოლოგია (სტრუქტურა), ხოლო დამოკიდებულება შემავალ და გამომავალ სიდიდეებს შორის უცნობია. პირველი რანგის მოდელი ამყარებს მიზეზობრივ-შედგებობრივ დამოკიდებულებებს.

—განუზღვრელობის მეორე რანგის მოდელი—უკვე მოცემულია დამოკიდებულებები შემავალ და გამომავალ სიდიდეებს შორის მთლიანი ან ნაწილობრივი პარამეტრული განუზღვრელობისას.

თუ გამოვიყენებთ ზევით ჩამოთვლილ მოდელებს, მაშინ მართვის ადაპტური სისტემები შემდეგ კლასებად დაიყოფა:

თვითორგანიზებადი სისტემების კლასი. დანიშნულებაა ნულოვანი რანგის განუზღვრელობის მოდელის მქონე ობიექტების მართვა. მართვის სისტემის სტრუქტურის თვითორგანი-

ზაცია თხოულობს კლასიფიკაციის (გამოცნობის) ამოცანის გადაწყვეტას. მოცემული სიმრავლის სტრუქტურების კავშირებს და დროითი ფუნქციების  $X$  და  $Y$  წყვილების აღდგენას შემავალი და გამოშვებული ცვლადების გაზომვის შედეგად, რათა შემდეგში შესაძლებელი იყოს აღსდგეს დამოკიდებულება  $X$  და  $Y$  შორის. ასეთი სისტემების ავტომატიური მართვა ჰიპოთეზურია.

თვითაწყობადი სისტემების კლასი. მათი საშუალებით შეიძლება გადაწყდეს მართვის საკითხები პარამეტრული განუზღვრელობის, მულტივი სტრუქტურების მქონე ობიექტებისათვის გარე შემოთავაზების გათვალისწინებით.

თვითაწყობადი სისტემების კლასი დღეისათვის ყველა კარგად არის დამუშავებული როგორც თეორიულად, ასევე პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით. ჩვენ განვიხილავთ სწორედ ამ კლასს.

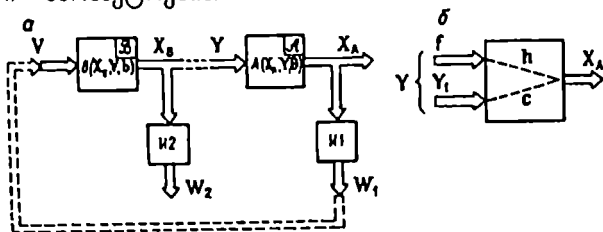
მართვის თვითაწყობადი სისტემები (მთს)  
(განზოგადოებული ბლოკ-სქემები)

ადაპტური სისტემების სტრუქტურადან. გამომდინარე მთსის ძირითადი სტრუქტურა შესდგება მართვის  $A$  ობიექტისაგან, აღწერილს წრფივი  $A$  ოპერატორით,  $\beta$  რეგულატორისაგან  $B$  ოპერატორით (ნახ.15.3).  $A$  და  $B$  ოპერატორები მოცემულია დიფერენციალური ან სხვაობითი განტოლებების კლასში. შეიძლება ისინი წარმოვადგინოთ მდგომარეობების განტოლებების კლასში.  $A, B$ -დიფერენცირების, ან წანაცვლების ოპერატორებია. განსაზღვრისათვის  $A$  ობიექტი და  $\beta$  რეგულატორი აპრიორულად მოცემულია დროის ინტერვალში  $(t_0, t] \in [0, \infty)$ , სადაც  $t_0 = 0$ , მოდულების სტრუქტურების კავშირით, მდგომარეობის ცვლადებით  $X_A \in \Omega_X^A$ ,  $Y \in \Omega_Y^B$ ,  $V \in \Omega_V$ .  $A$  ობიექტი და  $\beta$  რეგულატორი სისტემისათვის „შემავალი-მდგომარეობა-გამომავალი“ აღიწერებიან განტოლებებით:

$$A: W_1 = A(X_A, V, \Theta),$$

$$\beta: W_2 = B(X_B, V, b), X_B \in \Omega_X^B,$$

⊖ და  $b$  ობიექტების და რეგულატორის განტოლებების ვექტორული პარამეტრებია.



ნახ. 15.3

გამზომი  $U_1$  და  $U_2$  (ნახ. 15.3) მოწყობილობები ან-ხორციელებენ  $X_A$  და  $X_B$  მდგომარეობების გარდაქმნებს. მაგალითად, მასშტაბირებას, ფიზიკურ გარდაქმნებს.

არსებობს ორი გზა თვითაწყობადი სისტემების ასაგებად.

1. პირველი მიდგომა დაფუძნებულია იმაზე, რომ შეკ-რულ (მთს) მართვის მიზანი და ადაპტაციის მიზანი თან-ხვდებიან ერთმანეთს. ის მოცემულია ზოგადი მიზნობრივი უტოლობით:

$$Q_1(Z(t_0, t); \Theta; t) > 0, \quad (15.7)$$

ხოლო ადაპტური რეგულატორი მოიძებნება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} Y(t) &= \varphi_1(Z(t_1); b; t), \\ b(t) &= \varphi_2(b(t_1); Z(t_1); t), \end{aligned} \quad (15.8)$$

$$t_0 \leq t \leq 1.$$

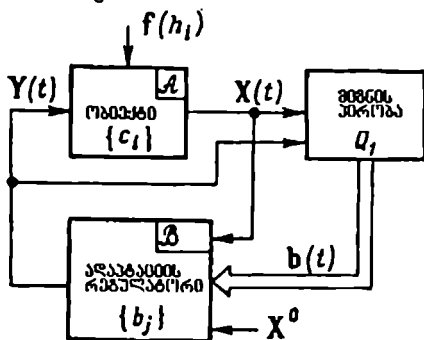
ადაპტური რეგულატორის განტოლება აიგება ისეთნაირად, რომ ის არ იქნება დამოკიდებული ცხადი სახით სამართი ობიექტის მიმდინარე კოეფიციენტებზე. ასეთი თვითაწყობადი სისტემების აგების დროს არ არის საჭირო ძირითადი კონ-ტურის ცვლადი ნაწილის მიმდინარე იდენტიფიკაცია. მართვა

(15.8) განტოლებების საშულებით ხდება  $b^T = \{b_i\}$  პარამეტ-რების შერჩევით, დროის შეზღუდულ  $t_i; t_{i+1}$  ინტერვალში.

თუ  $b(t) = \hat{b} = const$ , მაშინ ადაპტურ ალგორითმს აქვს სახე:

$$Y(t) = \varphi_1(Z(t_1); \hat{n}; t). \quad (15.9)$$

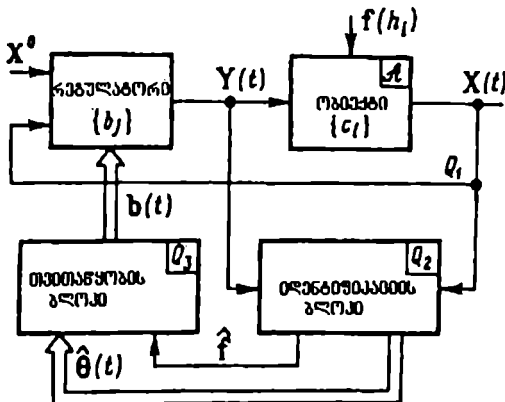
ამასთან მიზნის ფუნქციის (15.7) პირობა ყოველთვის შესრულდება. თვითაწყობადი სისტემის აგების პრველი მიდგომა მოცემულია (ნახაზზე 15.4).



ნახ.15.4

(მთს-ს) აგებას იდენტიფიკაციის გარეშე უწოდებენ სისტემის პირდაპირ ადაპტურ მართვას.

მეორე მიდგომა დამყარებულია ისეთი მართვის ადაპტური სისტემების დამუშავებაში, სადაც გამოიყენება იდენტიფიკაციის მეთოდები. (ნახ.15.5)



ნახ.15.5

განტოლებებს აქვთ სახე:

$$Y(t) = \varphi_1(Z(t_1); b(t_1); t),$$

$$b(t) = \varphi_2(b(t_1); Z(t_1); \hat{\Theta}(t_1); t),$$

$$\hat{\Theta}(t) = \varphi_3(\hat{\Theta}(t_1); Z(t_1); t).$$

(15.10)

$$t_0 < t < t_1.$$

მიმდინარე იდენტიფიკაციის  $Q_2(Z(t_0, t); \hat{\Theta}(t); t)$  კრიტერიუმით განისაზღვრება  $\Theta$  ვექტორის შეფასების ამოცანა. ასაწყობი პარამეტრების გამოთვლა ხდება (15.10) განტოლებების საშუალებით. და ზოგად შემთხვევაში წარმოადგენს ექსტრემალური ამოცანის გადაწყვეტას  $Q_3$  კრიტერიუმის საშუალებით. ძირითადი კონტურის მუშაობა თანხვედრა მიზნის პირობას.

იდენტიფიკაციური ტიპის თვითაწყობად სისტემებში ხდება სამი ექსტრემალური ამოცანის გადაწყვეტა, რომლის შედეგად რომელიღაც  $\tau < t$  მომენტიდან  $Y(\tau) = Y(Z(t); \hat{b}; \Theta; \tau)$  მართვის ალგორითმია, უზრუნველყოფს მიზნობრივ  $Q_1$  პირობას.

მეორე მიმართულება შეიძლება შემდგენიერად წარმოვადგინოთ: [83], [97], [62].

1. დეტერმინირებული და სტოქასტიკური მართვის ადაპტური სისტემები.

2. პირდაპირი იდენტიფიკაციური სტრუქტურის ადაპტური სისტემები.

3. ცხადი და არაცხადი ეტალონური მოდელის სტრუქტურის მქონე ადაპტური სისტემები.

4. ადაპტაციის სიგნალური და პარამეტრული ალგორითმები.

5. უწყვეტი და დისკრეტული მართვის ადაპტური სისტემები.

თავისთავად ცხადია, რომ არსებობს ბევრი საერთო ამ ორ მიმართულებებს შორის.

§ 15.3. ჩქაროსნული გრადიენტის მეთოდი [94]

მართვის  $e$  ობიექტი მოცემულია განტოლებით:

$$\dot{x} = F(x, \Theta, t), \quad (15.11)$$

სადაც  $x \in R^n$  — არის ობიექტის მდგომარეობის ვექტორი, აწყობის პარამეტრების ვექტორი.  $F(\cdot)$  ვექტორ-ფუნქცია განსაზღვრულია ყველა  $x \in R^n, \Theta \in R^m, t \geq 0$ ,  $t$ -მიხედვით უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციაა. მართვის მიზნის ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით;

$$Q_t \leq \Delta, \quad t > t_0, \quad (15.12)$$

სადაც  $Q_t$  — არის მიზნის ფუნქციონალი.

$\Delta \geq 0$  — არის ზღურბლი.

შეიძლება განვასხვაოთ მიზნის ფუნქციონალის ორი ტიპი: ლოკალური და ინტეგრალური. ლოკალურ ფუნქციონალს აქვს  $Q_t = Q(x(t), t)$  სახე, სადაც  $Q(x, t)$   $n+1$  ცვლადის სკალარული ფუნქციაა. შემდეგი სახის ფუნქციონალს

$$Q_t = \int_0^t R(x(s), \Theta(s), S) ds,$$

$(R(x, \Theta, t) - n+m+1$  ცვლადის სკალარული ფუნქციაა) უწოდებენ ინტეგრალურს.

ისმება ამოცანა: ისეთნაირად განისაზღვროს მართვის ალგორითმი

$$\Theta(t) = \Theta_0 [x_0, \Theta_0], \quad (15.13)$$

რომ (14.11), (14.13) სისტემაში მიღწეულ იქნას (15.12) მიზნის ფუნქცია და ყველა მისი ტრაექტორიები დარჩეს შეზღუდული  $t \geq 0$ .

კონკრეტული შემთხვევებისათვის, როდესაც  $n = m = 1$  ობიექტი აღიწერება

$$r\dot{x} + x = bu(t), \quad (15.14)$$

სადაც  $u(t) \in R'$  — საძიებელი შემავალი სიგნალია.

$$\Theta = u, F(x, \Theta, t) = -\frac{x}{r} + b \frac{\Theta}{r}.$$

თუ ობიექტს მივუერთებთ წრფივ რეგულატორს

$$u = C(x - x_*(t)), \quad (15.15)$$

სადაც  $x_*(t) \in R'$  — არის დავალება. უნდა განისაზღვროს გაძლიერების კოეფიციენტი  $c = c(t)$ . მაშინ (15.11) ექნება სხვა სახე. ძირითადი კონტურის განტოლებას მივიღებთ (15.15)-ის ჩასმით (15.14)-ში

$$\dot{x} = -\frac{x}{z} + \frac{cb(x - x_*(t))}{z}. \quad (15.16)$$

(15.16) გამოსახულებაში შესასვლელად შეიძლება ჩაითვალოს  $c$ . გარდაქმნის შემდეგ  $c \rightarrow \Theta$  (15.16) განტოლება მიიღებს (15.11) განტოლების სახეს.

ბოლო წლებში დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ადაპტური მართვის სისტემებს, რომლებიც აგებული არიან ჩქაროსნული გრადიენტის მეთოდზე. ამ სისტემებში ასაწყობი პარამეტრების ცვლილება ხდება არა ფუნქციონალის გრადიენტის საწინააღმდეგო მიმართულებით, არამედ ამ ფუნქციონალის სიჩქარის გრადიენტის ცვლილების მიხედვით. ჩქაროსნული გრადიენტის მეთოდი სხვა მეთოდებთან შედარებით (გრადიენტული, სწრაფდაშვების ნიუტონის და ა.შ.) საშუალებას იძლევა რეალურად შეიქმნას მუშაობისუნარიანი სისტემები.

მოკლედ განვიხილოთ ჩქაროსნული გრადიენტის ალგორითმის აგების პრინციპები.

მოცემულია მართვის მიზნის ფუნქციის ლოკალური სახე:  $Q_t = Q(x(t), t)$ . (15.13) მართვის ალგორითმის ასაგებად გამოვთვალოთ სკალარული ფუნქცია:

$$\dot{Q}_t = \omega(x, \Theta, t),$$

რომელიც წარმოადგენს  $Q_t$  ცვლილების სიჩქარეს (15.11) განტოლების გათვალისწინებით:

$$\omega(x, \Theta, t) = \frac{\partial Q(x, t)}{\partial a} + [\nabla_x Q(x, t)]^T F(x, \Theta, t). \quad (15.17)$$

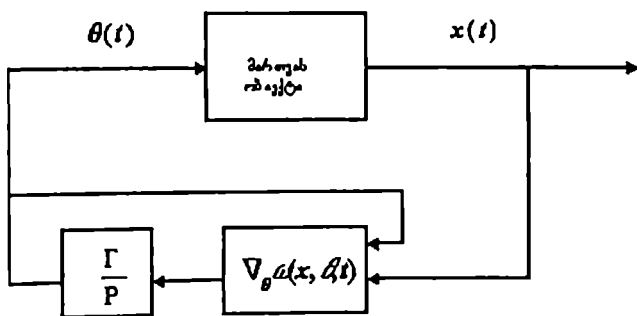
შემდეგ ვიპოვოთ  $\omega(x, \Theta, t)$ -ის გრადიენტი შემავალი ცვლადების მიხედვით:

$$\nabla_{\Theta} \omega(x, \Theta, t) = \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \Theta} \right]^T = \left[ \frac{\partial F}{\partial \Theta} \right]^T \nabla_x Q(x, t). \quad (15.18)$$

$\Theta$ -ს ცვლილება მოცემულია განტოლებით:

$$\frac{d\Theta}{dt} = -\Gamma \nabla_{\Theta} \omega(x, \Theta, t), \quad (15.19)$$

სადაც  $\Gamma = \Gamma^T > 0$  სიმეტრიული დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა. მაგალითად,  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ ,  $\gamma_i > 0$  (15.19) ალგორითმს უწოდებენ სწრაფი გრადიენტის ალგორითმს, ვინაიდან მასში  $\Theta(t)$ -ს ცვლილება სწარმოებს  $\Theta(t)$  ცვლილების სიჩქარის გრადიენტის პროპორციულად. მოვახდინოთ (15.19) ინტეგრება  $[0, t]$  შუალედში. მაშინ სწრაფი გრადიენტის ალგორითმი შეიძლება (ინტეგრალური ოპერატორით  $Q_i[\ ]$ ) ჩაიწეროს (15.13) გამოსახულების სახით. მართვის სისტემის (15.19) ალგორითმის ზოგადი სტრუქტურა მოცემულია (ნახ.15.6).



ნახაზი 15.6

(15.19) ალგორითმი შეიძლება შემდეგნაირად აიხსნას:  
 (15.12) მისაღწევად სასურველია  $\Theta(t)$  ცვლილება  $Q_i$  შემ-



ცირების მიმართებით. მაგრამ  $Q_i$  არ არის  $\Theta(t)$ -ზე დამოკიდებული და ასეთი მიმართულების მოძებნა გაძნელებულია (კერძოდ, საჭიროა მგრძნობიარობის ფუნქციის განსაზღვრა). ამიტომ უკეთესია შემცირდეს  $\dot{Q}_i$ , შესრულდეს უტოლობა  $\dot{Q}_i < 0$ , რაც ნიშნავს  $Q_i$  შემცირებას.

$$\dot{Q}_i = \omega(x, \Theta, t)$$

არის  $\Theta$ -ზე ცხადად დამოკიდებული, რაც გვაძლევს საშუალებას შევადგინოთ (15.19) ალგორითმი. თუ მიზნის ფუნქცია ინტეგრალური ხასიათისაა ე.ი.

$$Q_i = \int_0^1 R(x(s), \Theta(s), S) ds,$$

მაშინ მისი ცვლილების სიჩქარე მიუხედავად მართვის ობიექტის განტოლებისა, ტოლია  $R(x, \Theta, t)$ .

სწრაფი გრადიენტის ალგორითმია:

$$\frac{d\Theta}{dt} = -\Gamma \nabla_{\Theta} R(x, \Theta, t), \quad (15.20)$$

სადაც  $\Gamma = \Gamma^T > 0$

#### § 15.4. ადაპტური მართვა და მასთან დაკავშირებული ამოცანები.

განვიხილოთ წრფივი სტაციონარული ობიექტის მართვის ამოცანა, რომელიც აღიწერება შემდეგი განტოლებით:

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_0 u. \quad (15.21)$$

მართვის მიზანი მოცემულია წრფივი თანაფარდობით:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_0(t)) = 0. \quad (15.22)$$

$x_0(t)$ —ობიექტის მოძრაობის ეტალონური ან სასურველი პროგრამაა, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$x_g + a_1 \dot{x}_g + a_0 x_g = b_0 g, \quad (15.23)$$

სადაც  $x, u, g$  — შესაბამისად გამომავალი, შემავალი და დავალების ფუნქციებია.

მართვის ამოცანა დადის ისეთი  $u = u(t)$  ფუნქციების განსზღვრაში, ან შემავალი სიდიდის  $u = u(x, g, t)$  ისეთი კანონის ფორმირებაში, რომ (15.21) ობიექტზე მიიღწევა (15.22) მიზანი.

უკვე ამ ეტაპზე ჩანს მართვის ამოცანის ჩამოყალიბების განსაკუთრებულობა. განსხვავებით თვისობრიობის კლასიკური მაჩვენებლისაგან (სწრაფქმედება, გადარეგულირება, რხევები და ა.შ.) და ოპტიმალური მართვის მიზნის პირობებისაგან, აქ შემოგვაქვს ზღვრული მიზანი, რომელშიც აისახება ობიექტის ასიმპტოტური მოქმედება შესაბამისი (15.23) ეტალონური ტრაექტორიის მიმართ.

ეს განსაკუთრებულობა ატარებს არაშემთხვევით ხასიათს. სწორედ მართვის ასეთი ამოცანის ჩამოყალიბება საშუალებას გვაძლევს იმ პირობებში შეაკრად ამოგხსნათ ამოცანა, როდესაც ობიექტის  $a_0, a_1, b_0$  კოეფიციენტები აპრიორულად არ არიან განსაზღვრული. (15.21)–(15.23) ამოცანის ამოხსნა  $a_0, a_1, b_0$  პარამეტრების განუზღვრელობისას იყოფა ორ ეტაპად:

1 ეტაპზე აიგება მართვის ისეთი ალგორითმები (დგინდება  $u$  კოორდინატის ფორმირების წესი) იმ პირობებისას, როდესაც  $a_0, a_1, b_0$  პარამეტრები არიან ნებისმიერი, მაგრამ ცნობილი. ამისათვის ობიექტის განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\ddot{x} + a_1^0 \dot{x} + a_0^0 x = b_0 u - (a_1 - a_1^0)^2 \dot{x} + (a_0 + a_0^0) x - b_0^0 g. \quad (15.24)$$

ინდექსი "ე" ნიშნავს ეტალონურს.

(15.24) განტოლების მარცხენა მხარეს გამოვავლოთ (15.23) მივიღებთ

$$\ddot{\sigma}_2 + a_1^0 \dot{\sigma}_2 + a_0^0 \sigma_2 = b_0 u - (a_1 - a_1^0)^2 \dot{x} + (a_0 + a_0^0) x - b_0^0 g,$$

სადაც  $\sigma_2 = x - x_g$

დავუშვათ, რომ  $u$  მართვის კოორდინატა აკმაყოფილებს პირობას:

$$b_0 u = (a_0 - a_0^0)^2 x + (a_1 + a_1^0) \dot{x} - b_0^0 g. \quad (15.25)$$

მაშინ წინა განტოლების მარჯვენა მხარე უტოლდება ნულს და ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\ddot{\sigma}_2 + a_1^0 \dot{\sigma}_2 + a_0^0 \sigma_2 = 0.$$

თუ ეტალონის მოდელის ოპერატორი  $p^2 + a_1^0 p + a_0^0 p$  ( $p^i = d^i / dt^i$ ) ასიმპტოტურად მდგრადია, მაშინ  $\sigma_2$ -თვის სამართლიანია თანაფარდობა  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_2(t) = 0$ . ბოლო პირობა

(15.22) მიზნის ფუნქციის ექვივალენტურია. მაშასადამე, ეტალონური მართვის ალგორითმი მოცემულია (15.25) განტოლებით. მაგრამ ამ შემთხვევაში ადაპტური მართვა არ შეიძლება განხორციელდეს, რადგან  $a_0, a_1, b_0$  პარამეტრები უცნობებია. (15.25) ნაცვლად შეიძლება შემოვიტანოთ მართვის კანონი შემდეგი განტოლებით:

$$r_0^1 u = r_0^2 x + r_1^2 \dot{x} + b_0^0 g, \quad (15.26)$$

სადაც პარამეტრები  $r_0^1, r_0^2, r_1^2$  შეიძლება მართვის შეკრულ კონტურში უწყვეტად აიწყოს ობიექტის მიმდინარე მუშაობის შედეგად. ამ მომენტიდან  $u(t)$  ფუნქციის განსაზღვრა დადის (15.26) რეგულატორის პარამეტრების განსაზღვრაზე. ალგორითმის (რეგულატორის) პარამეტრების თვითაწყობის მეორე ალგორითმი არის ადაპტური სისტემის სინთეზის მეორე ეტაპი. თვითაწყობის ამოცანის გადასაწყვეტად აეჭამოთ (15.24) განტოლების მარჯვენა მხარე (15.26) განტოლებასთან, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \sigma = \dot{x} + a_1^0 \dot{x} + a_0^0 x - b_0 g &= (b_0 - r_0^1) \mu + \\ &+ (r_0^2 + a_0^0 - a_0) x + (r_1^2 + a_1^0 - a_1) \dot{x}. \end{aligned} \quad (15.27)$$

მიღებული თანაფარდობიდან გამომდინარეობს, რომ ზღვრული პირობების მიღწევისას  $r_0^1 \rightarrow b_0, r_0^2 \rightarrow a_0 - a_0^0, r_1^2 \rightarrow a_1 - a_1^0, t \rightarrow \infty$  შესრულდება პირობა  $\sigma \rightarrow 0$  და მაშასადამე, საწყისი მიზანიც  $x \rightarrow x_0$ .

აქედან პარამეტრული თვითაწყოების ამოცანა შეიძლება ჩამოყალბდეს, როგორც ექსტრემალური პარამეტრული განთანხმების მინიმიზაციის კრიტერიუმის ექსტრემალური ამოცანა.

$$I_2 = (b_0 - r_0^1)^2 + (r_0^2 + a_0^3 - a_0)^2 + (r_1^2 + a_1^3 - a_1)^2$$

ასეთი სახით ამოცანის გადაწყვეტა არ ხერხდება, ვინაიდან  $I_2$  გაზომვა უშუალოდ არ ხერხდება. პარამეტრული განთანხმების დონე შეიძლება შეფასდეს არაცხადად  $\sigma$  კორდინატის არანულოვანი მნიშვნელობისას. მართლაც, (15.27) თანახმად  $\sigma$  დაუმთხვეობით. ეს შეიძლება გამოისახოს გამოსახლებით:

$$\sigma = \ddot{x} + a_1^3 \dot{x} + a_0^3 g.$$

თუ განვიხილავთ მართვის მეორად კრიტერიუმს თანაფარდობით:

$$I_2 = \frac{1}{2} \sigma^2 \rightarrow \min, \quad (15.28)$$

მაშინ  $r_0^1, r_0^2, r_1^2$  პარამეტრების მიხედვით შეიძლება გადავიდეთ თვითაწყოების ალგორითმებზე, როგორც რიცხვითი გრადიენტული სტრატეგიების აგებაზე, რომლებიც ანიჭებენ  $I_2$  მინიმუმს. თუ ავიღებთ პარამეტრის მიხედვით გრადიენტული

მინიმიზაციის კანონს  $\dot{r} = -\gamma \frac{\partial I_2}{\partial z}$ , მივდივართ საძიებელ

ცვლადებზე:

$$\dot{r}_0^1 = \gamma \sigma u, \quad \dot{r}_0^2 = -\gamma \sigma x, \quad \dot{r}_1^2 = -\gamma \sigma \dot{x},$$

სადაც  $\gamma$  დადებითი კოეფიციენტია.

სისტემის სტრუქტურული სქემა მოცემულია (ნახ.15.7).



ენტების შეფასების  $\bar{C}$  ვექტორი. მივიღებთ განზოგადოებულ ასაწყობ ობიექტს, რომლის შესასვლელად შეიძლება ჩაითვალოს ასაწყობი პარამეტრების ვექტორი.

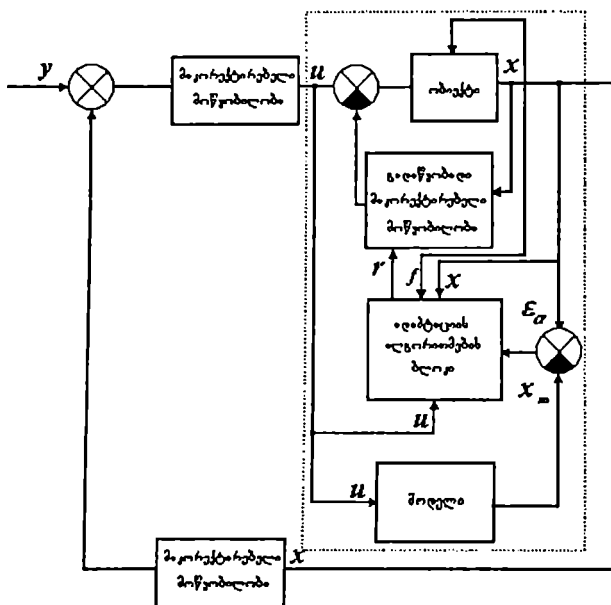
IV ეტაპი. ადაპტაციის ალგორითმის შერჩევა ჩქაროსნული (სწრაფი) გრადიენტის მეთოდით.

V ეტაპი. ადაპტურ მართვის სისტემების პარამეტრების წინასწარი ანგარიში და მათი გამოყენების პირობები.

### § 15.5 ადაპტური მართვის სისტემები ცხადი ეტალონური მოდელით

უძიებო ადაპტური სისტემების ერთ-ერთი ზოგადი კლასია ადაპტური სისტემები ცხადი ეტალონური და ასაწყობი მოდელებით. აქ მოდელი გამოდის, როგორც მოცემული დინამიკური რგოლი-სისტემაში ცხადად რეალზებული, ან არაცხადად არსებული მოცემული დავალების კოეფიციენტების სახით, რომლებიც ადაპტაციის პროცესის დამთავრების შემდეგ წარმოადგენენ მოთხოვნილებებს სისტემის მიმართ.

განვიხილოთ ადაპტური სისტემები ცხადი ეტალონური მოდელებით. [83], [94], [106]. სანამ გადავიდოდეთ თეორიულ ასპექტებზე, მოკლედ შევხვით მათ სტრუქტურას (ნახ.15.8) .



ნახ15.8

$x$ —მოდელის მდგომარეობის ვექტორია.

$\varepsilon_\alpha$ —ადაპტაციის შეცდომის ვექტორია.

$q$ —ობიექტის კოეფიციენტების მატრიცაა.

$r$ —გადაწყობადი მაკორექტირებელი მოწყობილობის კოეფიციენტების მატრიცაა.

დასაწყისში განვიხილოთ ეგრეთწოდებული "უშუალო ადაპტაციის" ამოცანა (პარამეტრული მართვის ამოცანა) როდესაც აიწყობა არა რეგულატორის კოეფიციენტები. არამედ საქმე გვაქვს მხოლოდ ადაპტაციის კონტურის სინთეზთან. 1-3 ეტაპები აქ არა გვაქვს. მართვის ობიექტი თანხედება განზოგადოებულ მართვის ობიექტს. მართვის ობიექტი აღიწერება განტოლებით:

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)r(t), \quad (15.30)$$

სადაც  $x = x(t) \in R^n$ —ობიექტის მდგომარეობის ვექტორია,

$r(t) \in R^m$ —მავალეული შეშფოთებებია,  $n \times n$ —განზომილების

$A$  მატრიცა და  $n \times m$ -მატრიცა  $B$  ობიექტის უცნობი პარამეტრებია.  $n \times n$ -მატრიცა  $\Delta A$  და  $n \times m$ -მატრიცა  $\Delta B$ —ასაწყობი კოეფიციენტებია. ამრიგად,  $\xi = \text{Col}(A, B)$  უცნობი პარამეტრების და ასაწყობი პარამეტრების

$$\Theta = \text{Col}(\Delta A, \Delta B)$$

ვექტორებს აქვთ ერთნაირი  $x_2(t) \in R^m$  განზომილება  $N = n(m+n)$ . მართვის მიზანია—უზრუნველყოს  $x(t)$  ვექტორის მიმართება ეტალონური მოდელის მდგომარეობისაკენ, რომელიც წარმოადგენს შემდეგი განტოლების ამონახსნს

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 r(t), \quad (15.31)$$

სადაც  $n \times n$ -მატრიცა  $A_2$  და  $n \times m$  მატრიცა  $B_2$  მოცემულია.  $A_2$ -ჰურვიცის მატრიცაა.

ამოვიჩიოთ კვადრატული ფუნქციონალი

$$Q_t = e^T H e, \quad (15.32)$$

სადაც  $e = e(t) = x(t) - x_2(t)$  შეცდომის ვექტორია,  $H = H^T > 0$  დადებითად განსაზღვრული  $n \times n$ -მატრიცაა, რომლის ამორჩევა ცალკე კვლევის საგანია. მიზნის ფუნქციას აქვს სახე:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t) = 0. \quad (15.33)$$

ადაპტაციის ალგორითმის მისაღებად თავდაპირველად განესაზღვროთ  $\dot{Q}_t = \omega(x, \Theta, t)$  ფუნქცია. (15.30), (15.31) გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\dot{Q}_t = e^T H [(A + \Delta A)x + (B + \Delta B)r(t) - A_2 x_2 - B_2 r(t)]. \quad (15.34)$$

მოვახდინოთ დიფერენცირება ასაწყობი პარამეტრების მიხედვით (რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის და  $\nabla f(z) = [\partial f / \partial r]^T$  თანაფარდობის გათვალისწინებით):

$$\nabla_{\Delta A} \dot{Q}_t = H e x^T, \quad \nabla_{\Delta B} \dot{Q}_t = H e z(t)^T \quad (15.35)$$

ახლა წარმოვადგინოთ ჩქაროსნული გრადიენტის ალგორითმი



$$\frac{d\Theta}{dt} = -\Gamma \nabla_{\Theta} \omega(x, \omega, t). \quad (15.36)$$

სიმარტივისათვის  $\Gamma - \gamma I_N$ ,  $\gamma > 0$  ( $I_N$  — ერთეულოვანი მატრიცა)

$$\frac{d\Delta A}{dt} = -\gamma Hex^T, \quad \frac{d\Delta B}{dt} = -\gamma Her(t)^T \quad (15.37)$$

დავადგინოთ ის პირობები, როდესაც (15.37) ალგორითმი არის მადიფერენცირებადი ე.ი.  $A + \Delta A \rightarrow A_2$ ,  $B + \Delta B \rightarrow B_2$ ,  $t \rightarrow \infty$  გამოვაკლოთ (14.31) (14.30) მივიღებთ შეცდომის განტოლებას:

$$\dot{e} = A_2 e + (A + \Delta A - A_2)(e + X_2) + r(t)(B + \Delta B - B_2). \quad (15.38)$$

სისტემები სიგნალური ადაპტაციით ეწოდება სისტემებს, რომლებშიც განუზღვრელობასთან ბრძოლაში, მმართველ ზემოქმედებას ემატება სპეციალური სიგნალი (ადაპტაციის სიგნალი). ადაპტაციის ალგორითმს აქვს სახე:

$$\nabla_u \omega(x, u, t) = B^T He. \quad (15.39)$$

ადაპტაციის ჩქარონულ ალგორითმს აქვთ სახე:

$$\begin{aligned} u(t) &= -\Gamma B^T He, \\ u(t) &= -\gamma \text{Sign}(B^T He) \end{aligned} \quad (15.40)$$

## § 15.6. ადაპტური მართვის სისტემები არაცხადი მოდელით

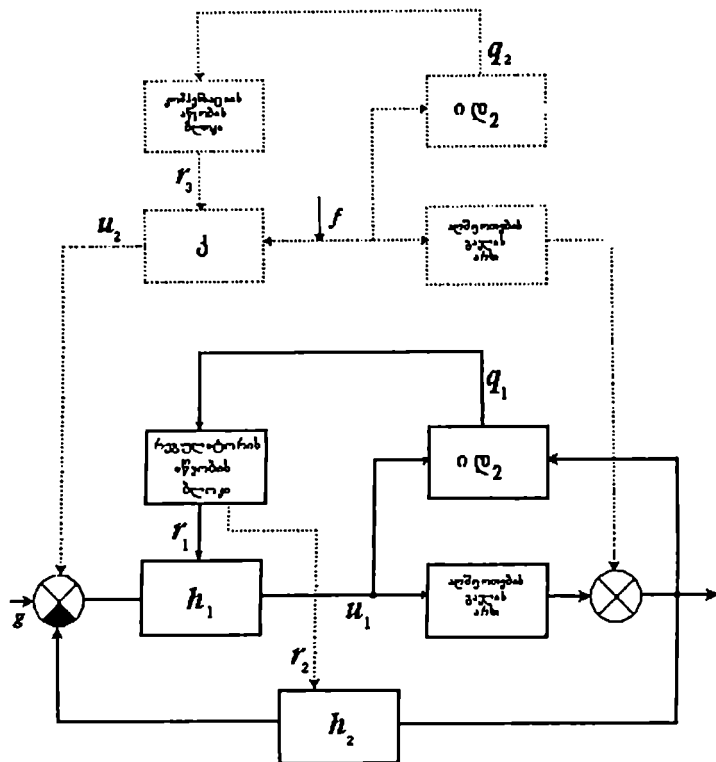
მართვის ადაპტური სისტემა არაცხადი მოდელით მდგომარეობს ძირითადი კონტურის პარამეტრების ისეთ აწყობაში, რომ მისი დინამიკური მახასიათებლები აეწყოს მოცემული ეტალონური მოდელის მახასიათებლების შესაბამისად. რანსხვა-ვებით ადაპტური სისტემებისაგან ცხადი მოდელით, ზევით აღნიშნული მოდელის აწყობის ალგორითმში იდენტიფიკაციის გათვალისწინებისას არ გამოიყენება ადაპტაციის შეცდომის სიგნალი, რომელიც წარმოადგენს ძირითადი კონტურის და ეტალონური მოდელის გამომავალი სიგნალების სხვაობას. მართვის ადაპტური სისტემის (არაცხადი ეტალონური მოდელით) სტრუქტურული სქემა მოცემულია (ნახ.15.9). მთლიანი

ხაზი-სტრუქტურის ძირითადი ვარიანტია. ის შესდგება განზოგადოებული ობიექტისაგან, რომელიც შეიცავს ამჟრავს, თვითონ ობიექტს, გადამწოდებს, პირდაპირი და უკუკავშირის წრედის  $h_1$  და  $h_2$  რეგულატორებს.

ადაპტაციის კონტური შესდგება  $ne_1$  იდენტიფიკატორისაგან და რეგულატორის აწყობის ბლოკისაგან. სიმარტივისათვის არ არის ნაჩვენები ლოგიკური ბლოკი, რომელიც გადართავს ადაპტაციის კონტურის მუშაობას იდენტიფიკაციიდან ციკლიდან რეგულატორის აწყობის ციკლზე და პირიქით. წყვეტილი ხაზებით აღნიშნულია შემოფოთების ადაპტური კომპენსაციის დამატებითი კონტური, რომელიც საჭიროა გამოვიყენოთ თუ არსებობს საშუალება გარე შემოფოთებების გაზომვისას. მაშინ დამატებითი კონტური შეიცავს კ კომპენსატორს და აღშფოთების გავლის არხს. (აგა). დამატებითი ადაპტაციის კონტური შესდგება იდ<sub>2</sub> ბლოკისაგან, რომელიც შეიძლება გავაერთიანოთ იდ<sub>1</sub> და კომპენსატორის აწყობის ბლოკთან.

ნახაზზე მოცემულია შემდეგი აღნიშვნები: გ—მაგვალბელი ზემოქმედება,  $f$ —შემოფოთება, რომლის გაზომვა შეიძლება,  $u_2$ —კომპენსაციის სიგნალი,  $u_1$ —მართვის სიგნალი,  $q_1$ —განზოგადოებული ობიექტის პარამეტრების შეფასებები,  $q_2$ —შემოფოთებების გამავალი არხის პარამეტრების შეფასებები,  $r_{1,2,3}$ —არის  $h_1$  და  $h_2$  რეგულატორების,  $K$  კომპენსატორის პარამეტრები.  $y_1$ —განზოგადოებული ობიექტის არადაკვირვებადი გამავალი სიგნალია,  $y_2$ —აღშფოთების გამავალი კონტურის არადაკვირვებადი გამავალი სიგნალია,  $y$ —ძირითადი კონტურის დაკვირვებადი გამავალი სიგნალია.

ხშირად უძიებო ადაპტურ სისტემას არაცხადი ეტალონური მოდელით უწოდებენ ადაპტურ სისტემებს არაპირდაპირი ადაპტური მართვით [83].



ნახ.15.9

აღნიშნულ სისტემაში ეტალონური მოდელი წარმოდგენილია ადაპტური რეგულატორის პარამეტრების ნაკრებით: „ეტალონური“ დიფერენციალური განტოლებების კოეფიციენტებით, რომლის ამონახსნებს აქვს სასურველი გარდამავალი პროცესი. ამასთან განთანხმების ზომა რეალურსა და ეტალონურ პროცესებს შორის შედის, როგორც შესაბამისი განტოლებების მარჯვენა მხარეების დაუმთხვეობა ე.ი. მათი ამონახსნების გამოთვლების გარეშე.

განვიხილოთ მართვის ობიექტი:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = L^T x, \quad (15.41)$$

სადაც  $x = x(t) \in R^n$  — მართვის მდგომარეობის ვექტორია,  $u = u(t) \in R^r$  არის სკალარული მართვა,  $y = y(t) \in R^r$  — გაზომვადი გამოსასვლლების ვექტორია,  $A = A(\xi)$ ,  $B = B(\xi)$ ,  $L = L(\xi)$  — ობიექტის პარამეტრებია, რომლებიც დამოკიდებულია  $\xi \in Z$ . რეგულატორი მოცემულია წრფივი ასაწყობი კოეფიციენტებით:

$$u = \Theta(t)^T y(t) \quad (15.42)$$

სადაც  $\Theta(t) \in R^T$  ჩამოვყალიბოთ ამოცანა: ვიპოვოთ ადაპტაციის ალგორითმი:

$$\dot{\Theta} = F(y(t)) \quad (15.43)$$

ისეთნაირად, რომ ნებისმიერი  $\xi \in Z$  (15.41), (15.42) სისტემაში მივალწიოთ მიზნის ფუნქციას:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

სისტემის ტრაექტორიები  $[x(t), \Theta(t)]$  შეზღუდულია. ამოცანა გადავწყვიტოთ ჩქაროსნული გრადიენტის მეთოდის საშუალებით. მიზნის ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$Q(x(t)) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{სადაც} \quad Q(x) = 0.5x^T Hx - \text{შეფასებითი}$$

ფუნქციაა,  $H = H^T > 0$   $n \times n$  — დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა. ვიპოვოთ  $\omega(x, \Theta, \xi) = Q(x)$  ფუნქციის წარმოებული (15.41) მიხედვით, ხოლო შემდეგ  $\nabla_{\Theta} \omega(x, \Theta, \xi)$  გვექნება:

$$\omega(x, \Theta, \xi) = x^T H(Ax + B\Theta^T y), \quad (15.44)$$

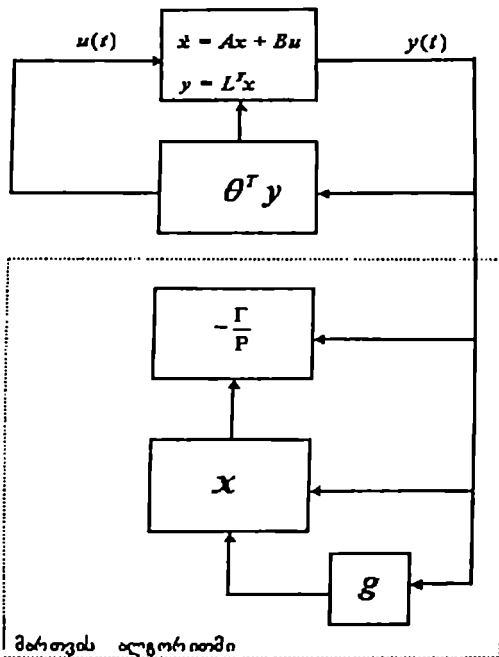
$$\nabla_{\Theta} \omega(x, \Theta, \xi) = x^T H B y. \quad (15.45)$$

ვინაიდან ადაპტაციის ალგორითმი უნდა სარგებლობდეს მხოლოდ  $y(t)$  შემავალი სიდიდეებით, (15.45) სკალარი  $x^T H B$  უნდა იყოს  $y(t)$  ვექტორის ფუნქცია. მაგრამ ვინაიდან  $x^T H B$ , როგორც  $y = L^T x$  არის წრფივი  $x$  მი-

ხედვით, ამიტომ  $x^T H B$  უნდა იყოს გამოსასვლელების წრფივი კომბინაცია ე.ი.  $B^T H x = g^T L^T x$ , რომელიც  $g \in R^l$  და ნებისმიერი  $x \in R^n$  ეს იმას ნიშნავს, რომ  $H B = L g$ . ჩვენ მიველით ადაპტაციის ალგორითმამდე:

$$\dot{\Theta} = -g^T y(t) \Gamma y(t), \quad (15.46)$$

სადაც  $\Gamma = \Gamma^T > 0$   $-l \times l$ -მატრიცაა. სტრუქტურული სქემა ადაპტური სიტემისა არაცხადი მოდელით მოცემულია (ნახ.15.10) ,



ნახ.15.10

§ 15.7 მართვის პირდაპირი ადაპტური სისტემები [62].

განვიხილოთ მართვის პირდაპირი ადაპტური სისტემების აგების წესები, როდესაც რეგულატორის აწყობა ხდება ობიექტის ფუნქციონირების პროცესში. ასეთ სისტემებს ხშირად უწოდებენ თვითაწყობად სისტემებს ან ადაპტურ სისტემებს ეტალონური მოდელით.

ობიექტი მოცემულია განტოლებით:

$$x^{(n)} + a_{n+1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u. \quad (15.47)$$

$u$ ,  $x$ —შემავალი და გამომავალი სიდიდეებია. ავიღოთ (15.47) განტოლების ოპერატორული ფორმა:

$$a_n(p)x = b_m(p)u,$$

სადაც  $a_n(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0$

$$b_m(p) = b_m p^m + \dots + b_0.$$

$p^i = d^i/dt^i$  —  $i$ -ჯერადი დიფერენცირების ოპერატორია. მართვის მიზანი ( $I_1$ -პირველადი მიზანი) მოცემულია ზღვრული თანაფარდობით:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_g(t)) = 0, \quad (15.48)$$

სადაც  $x_g(t)$ —მოძრაობის ეტალონური ტრაექტორია. მართვის ამოცანა მდგომარეობს ისეთი  $u(t)$  სიგნალის განსაზღვრაში, როდესაც მიიღწევა  $I$  კრიტერიუმში. ამოცანის თავისებურება იმაში გამოიხატება, რომ  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ),  $b_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ) პარამეტრები ზუსტად არ არიან განსაზღვრული და მოცემული არიან თავის ყველა შესაძლო მნიშვნელობების  $(n+m+1)$  განზომილების არეში. ამას გარდა ეტალონური მოდელის მოძრაობის განტოლებათ:

$$a_n^g(p)x_g = b_0^g g, \quad (15.49)$$

სადაც  $a_n^g(p) = p^n + a_{n-1}^g p^{n-1} + \dots + a_0^g$ .

$g$ —არის დავალება.

ეტალონის მოდელი ახასიათებს სასურველ გარდამავალ პროცესს და ამიტომ ის უნდა იყოს მდგრადი.  $n$  და  $m$  წინასწარ მოცემულია. სასინთეზო სისტემა უნდა იყოს თვითაწყობადი. მართვის ზემოქმედების კანონის და მისი შესაბამისი რეგულატორის განსაზღვრისათვის გადავწეროთ (15.47) განტოლება (15.49) გათვალისწინებით შემდეგ სახეში:

$$a_n^{\partial}(p)x - b_0^{\partial}g = b_m(p)u - \Delta_{n-1}(p)x - b_0^{\partial}g, \quad (15.50)$$

$$\text{სადაც } \Delta_{n-1}(p) = a_n(p) - a_n^{\partial}(p) = (a_{n-1} - a_{n-1}^{\partial})p^{n-1} + (a_0 - a_n^{\partial}).$$

გამოვკლოთ (15.50) განტოლებას ეტალონური მოდელის (15.49) განტოლება გვექნება:

$$a_n^{\partial}(p)\sigma_n = b_m(p)u - \Delta_{n-1}(p)x - b_0^{\partial}g, \quad (15.51)$$

$$\sigma_n = x - x_0.$$

დავუშვათ, რომ  $u$  მართვის ფორმირების კანონი აკმაყოფილებს განტოლებას

$$b_m(p)u = \Delta_{n-1}(p)x - b_0^{\partial}g, \quad (15.52)$$

მაშინ (15.52) თანახმად  $a_n^{\partial}(p)\sigma_n = 0$  და ოპერატორის მდგრადობის გათვალისწინებით  $\sigma_n \rightarrow 0$ , როდესაც  $t \rightarrow \infty$ , რაც თანხვედბა (15.48) მიზნის განტოლებას. ამრიგად, ჩვენ უფლება გვაქვს (15.52) ვუწოდოთ ეტალონური რეგულატორის განტოლება და  $u$  აღვნიშნოთ  $u_y$ . მაგრამ ეტალონური რეგულატორის განხორციელება არ შეიძლება, ვინაიდან უცნობია  $b_m(p)$  და  $\Delta_{n-1}(p)$ . რადგან (15.52) მიგვიითითებს მართვის სტრუქტურას, ამიტომ რეალური რეგულატორი შეიძლება განსაზღვრული იყოს განტოლებით:

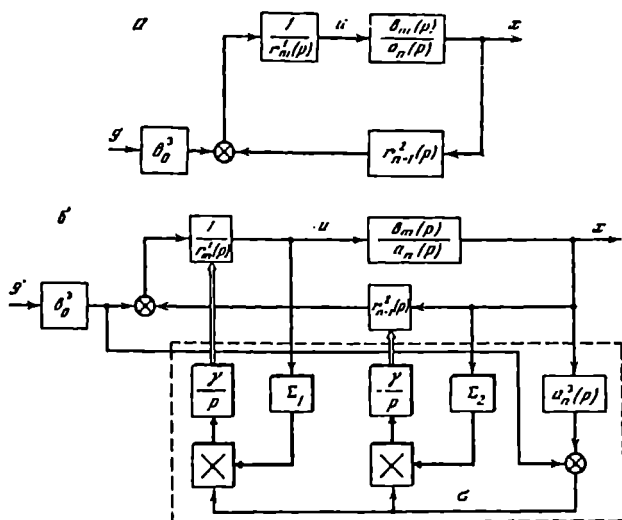
$$r_m^1(p)u = r_{n-1}^2(p)x + b_0^{\partial}g. \quad (15.53)$$

ოპერატრების სახეა:

$$r_m^1(p)u = r_m^1 p^m + \dots + r_0^1 r_{n-1}^2(p) = r_{n-1}^2 p^{n-1} + \dots + r_0^2,$$

რომელიც საჭიროა აიწყოს შეკრული სისტემის (15.57)–(15.53) მუშაობის პროცესში. თუ  $t \rightarrow \infty$ , სრულდება  $r_m^1(p) \rightarrow b_m(p)$ ,  $r_{n-1}^2(p) \rightarrow \Delta_{n-1}(p)$ , მაშინ (15.52) თანახმად  $u \rightarrow u_y$  შემთხვე-

ვაში სტრუქტურული სქემა შეკრული სისტემისა (15.53) რეგულატორით მოცემულია (ნახ.15.11).



ნახ.15.11

ზოგჯერ მიღებულ რეგულატორის სინთეზს უწოდებენ თვითაწყობადი სისტემის ძირითადი კონტურის სინთეზს.

მაგალითი 15.2.

განვიხილოთ მეორე რიგის ობიექტისათვის რეგულატორის სინთეზის ამოცანა:

$$(p^2 + a_1 p + a_0)x = (b_1 p + b_0)u.$$

მიზნის ფუნქციაა:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_3(t)) = 0.$$

სადაც  $x_3$  აკმაყოფილებს პირობას:

$$(p^2 + 5p + 6)x_3 = 12g.$$

(15.52) თანახმად ეტალონური რეგულატორის განტოლებას აქვს სახე:

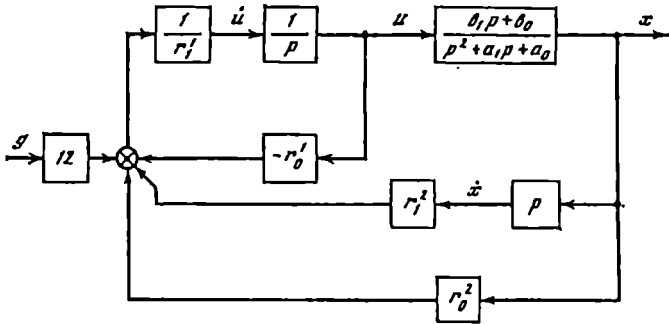


$$(b_1 p + b_0)u_0 = ((a_1 - 5)p + (a - 6))x + 12g.$$

აქედან ჩაიწერება გამომდინარე აწყობადი რეგულატორის განტოლება შემდეგი სახით:

$$r_1^1 \dot{u} + r_0^1 u = r_0^2 x + r_1^2 \dot{x} + 12g.$$

შეკრული სისტემის სტრუქტურული სქემა მოცემულია (15.12 ნახაზზე)



ნახ.15.12

### § 15.8. პირდაპირი ადაპტური მართვის სისტემების რეალიზაციის მეთოდები

პირდაპირი ადაპტური მართვის სისტემების რეალიზებადი სისტემები საკმაოდ რთული სახისაა. ამიტომ რეალიზაციის ამოცანა დაიყვანება ორ მარტივ ამოცანაზე: რეგულატორის და ალგორითმის რეალიზაცია. ამასთან აღნიშნული ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდები ერთმანეთთან სუსტად არიან დაკავშირებული. ყოველივე ეს საშუალებას გვაძლევს რეალიზაციის ამოცანები გამოვიყვანოთ პირდაპირი ადაპტური მართვის სისტემების ცალკე კლასად და გამოვიყენოთ ცნობილი მეთოდები: დამკვირვებლების თეორია, მდგომარეობის ფილტრები და გასაშუალოებები, მოდულირებული ფუნქციების მეთოდი. [6], [13], [47], [62], [94], [95], [120].

რეგულატორის რეალიზაცია

1. გამოვიყენოთ მთლიანი რიგის დამკვირვებლები განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა.

მოცემულია ობიექტი:

$$(p^2 + a_1 p + a_0)x = (b_1 p + b_0)u. \quad (15.54)$$

ეტალონური მოდელი

$$(p^2 + 5p + 6)x_g = 12g. \quad (15.55)$$

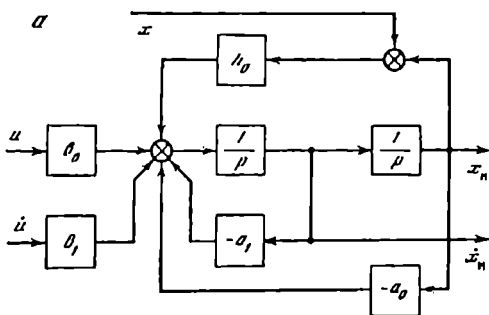
(15.55) გათვალისწინებით რეგულატორს აქვს სახე:

$$r_1^3 \dot{u} + r_0^3 u = r_0^2 x + r_1^2 \dot{x} + 12g. \quad (15.56)$$

ასეთი მართვის კანონის განხორციელება არ ხერხდება ვინაიდან  $\dot{x}$  არ იზომება. შემოვიტანოთ ფილტრი, რომლის განტოლებაა:

$$(p^2 + a_1 p + a_0)x = (b_1 p + b_0)u + h_0(x - x_e). \quad (15.57)$$

თუ ასეთ ფილტრს განვახორციელებთ, როგორც (ნახ.15.13ა) ჩანს, შეიძლება გაიზომოს არამართო  $x_e$  არამედ  $\dot{x}_e$ .



ნახ.15.13ა

გამოვავლოთ ობიექტის (15.54) განტოლებას (15.57) ფილტრის განტოლება მაშინ შეცდომის შეფასების განტოლებას ექნება სახე:

$$(p^2 + a_1 p + (a_0 + h_0))\varepsilon_e = 0, \quad (15.58)$$

სადაც  $\varepsilon_e = x - x_e$ .

თუ  $p^2 + a_1 p + a_0 + h_0$  ოპერატორი არის მდგრადი, მაშინ  $t \rightarrow \infty$  სრულდება  $\varepsilon_e, \dot{\varepsilon}_e \rightarrow 0$ . მაშასადამე, (15.56)

განტოლებაში  $\dot{x}$  მაგივრად შეიძლება შევიტანოთ ყოველგვარი ზიანის გარეშე  $\dot{x}_e$ , რომელიც ფილტრის მიერ არის რეალიზებადი. ასეთ ფილტრს უწოდებენ დამკვირვებელს. (15.57) დამკვირვებელის განხორციელება საკმაოდ რთულია, ვინაიდან ობიექტის  $a_0, a_1, b_0, b_1$  პარამეტრები აპრიორულად უცნობია. მეორეს მხრივ ადაპტური სისტემის ზღვრული ყოფაქცევა უნდა შეესაბამებოდეს ეტალონის დინამიკას (განტოლება (15.55)). დამკვირვებლის ზღვრული განტოლება სისტემის ძირითადი კონტურისათვის ანალოგიურია (15.57), გვექნება:

$$(p^2 + 5p + 6)x_e = 12g + h_0(x - x_e). \quad (15.59)$$

თუ (15.55) განტოლებას გამოვაკლებთ (15.59), მივიღებთ დაკვირვების ზღვრული შეცდომის განტოლებას:

$$(p^2 + 5p + 6 + h_0)e_e = 0, \quad (15.60)$$

$$e_e = x_g - x_e.$$

საიდანაც შეიძლება განისაზღვროს  $x_e$ . ეს  $x$ -ის  $p^2 + 5p + 6 + h_0$  ოპერატორის მდგრადობის პირობა. (15.55) და (15.59) საფუძველზე შემოვიტანოთ რეალიზებადი რეგულატორის განტოლება:

$$r_1^1 \dot{u} + r_0^1 u = r_0^2 x + r_1^2 \dot{x} + 12g. \quad (15.61)$$

დაუმთხვეობის განტოლებას აქვს სახე:

$$\begin{aligned} \sigma &= (p^2 + 5p + 6)x - 12g = b_1 \dot{u} + \\ &+ b_0 u + (5 - a_1)\dot{x} + (6 - a_0)x - 12g. \end{aligned} \quad (15.62)$$

თუ შევკრებთ ამ განტოლებას (15.61) განტოლებასთან, გვექნება შეცდომის მოდელი:

$$\begin{aligned} \sigma &= (b_1 - r_1^1)\dot{u} + (b_0 - r_0^1)u + \\ &+ (6 - a_0 + r_0^2)x + (5 - a_1)\dot{x} + r_1^2 \dot{x}_e. \end{aligned} \quad (15.63)$$

შემოვიტანოთ შეცდომის მოდელის მოდიფიცირებული გამომავალი სიდიდე:

$$\sigma_e = \sigma - r_1^2(\dot{x}_e - \dot{x}), \quad (15.64)$$

რომლისთვისაც სამართლიანია დამოკიდებულება:

$$\begin{aligned} \sigma_{\epsilon} = & (b_1 - r_1^1)x + (b_0 - r_0^1)x + \\ & + (6 - a_0 + r_0^2)x + (5 - a_1 + r_1^2) \end{aligned} \quad (15.65)$$

ეხლა უნდა გამოვიყვლიოთ, რომ  $\sigma_{\epsilon} \rightarrow 0$  გამომდინარეობს  $\sigma = 0$ . ასეთი ანალიზისათვის დაეუშვათ, რომ  $\sigma_{\epsilon} = 0$ . მაშინ (15.65) განტოლების თანახმად შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$(p^2 + 5p + 6)x - 12g - r_1^2(\dot{x}_{\epsilon} - x) = 0. \quad (15.66)$$

გამოვაცლოთ ამ განტოლებას (15.59). მივიღებთ შეცდომის მოდელის ზღვრულ შეფასებას:

$$(p^2 + (5 + z_1^2)p + 6 + h_0)\epsilon_{\epsilon} = 0, \quad (15.67)$$

$$\epsilon_{\epsilon} = x - x_{\epsilon}.$$

თვითაწყოების გრადიენტული ალგორითმის მუშაობის გათვალისწინებით (15.64)-ში  $\sigma_{\epsilon} \rightarrow 0$  გამომდინარეობს  $r_1^2 \epsilon_{\epsilon} \rightarrow 0$ ,

ე.ი.  $\sigma_{\epsilon} = 0$  დროს  $r_1^2$  პარამეტრის ვარიაციები ქრებიან.

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი დამყარებული  $r_1^2$ -

თვის  $p^2 + (5 + r)p + 6 + h_0$  ოპერატორი რჩება მდგრადი,

მაშინ  $\epsilon_{\epsilon} \rightarrow 0$ . მაშასადამე, თანათვარდობიდან  $\sigma_{\epsilon} \rightarrow 0$

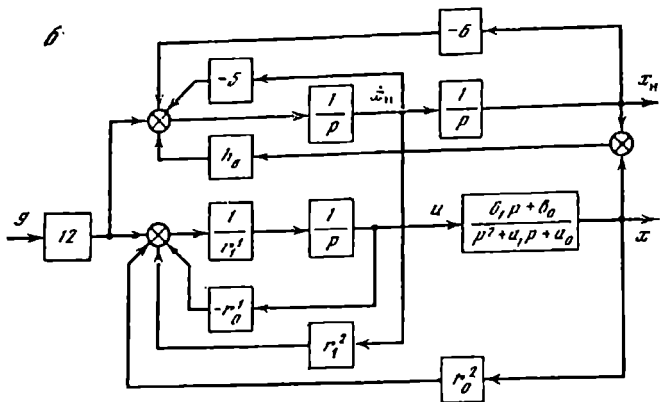
(15.64) თანახმად სრულდება  $\sigma \rightarrow 0$  პირობა. თუ პარამეტრების პროცესი არის დისიპატიური, ვარიაციების შესაძლო

$P\Delta_1^2$   $r_1^2$ -თვის არე არის შეზღუდული ( $P\Delta_1^2$  არეს ქვეშ აქ იგულისხმება მონაკვეთი  $[P_{21}^-, P_{21}^+]$ ). მაშინ რეგულატორის

რეალიზაციაში დამკვირვებლის გამოყენებისათვის უნდა არსებობდეს ისეთი პარამეტრი  $h_0$ , რომ  $\forall r_1^2 \in P\Delta_1^2$  ოპერატორები

$p^2 + 5p + 6 + h_0$  და  $p^2 + (5 + r_1^2)p + 6 + h_0$  დარჩნენ მდგრადები.

სისტემის ძირითადი კონტურის სტრუქტურა რეალიზებადი რეგულატორით მოცემულია. (ნახ.15.13ბ-ზე).



ნახ.15.13ბ

ძირითადი კონტურის განზოგადოებული სტრუქტურის სქემა დაშვებებით:

$$a_0^3(p)x_e = b_0^3 g + h_{s-1}(p)(x - x_e)$$

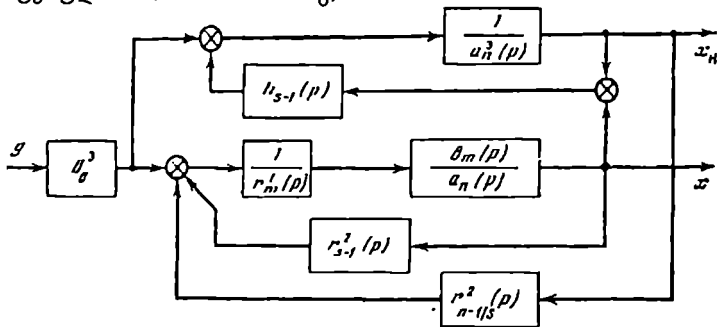
$$h_{s-1}(p) = h_{s-1}p^{s-1} + \dots + h_0$$

და რეალიზებადი რეგულატორით:

$$r_m^1(p)u = r_{s-1}^2(p)x + r_{n-1/s}^2(p)x_e + b_0^3 g$$

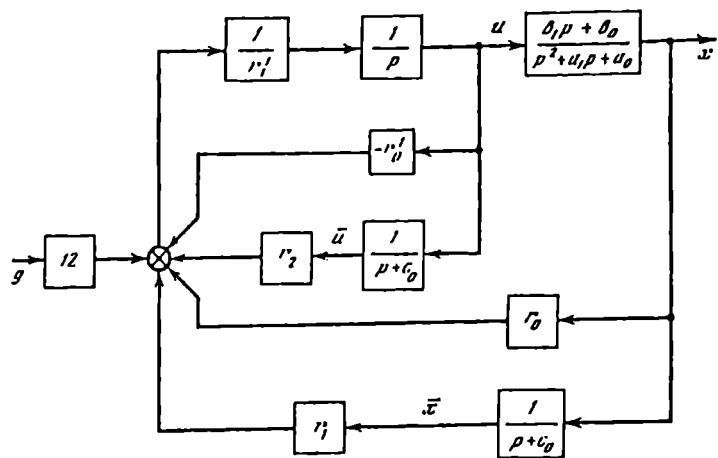
$$r_{s-1}^2 = r_{s-1}^2 p^{s-1} + \dots + r_0^2, \quad r_{n-1/s}^2(p) = r_{n-1}^2 p^{n-1} + \dots + r_s^2 p^s$$

მოცემულია (15.14 ნახაზზე).



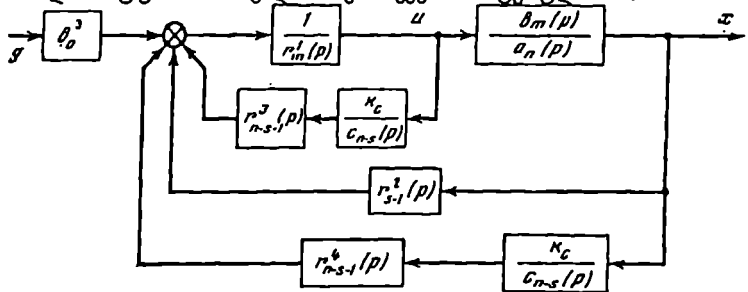
ნახ.15.14

აღნიშნული ამოცანა შეიძლება გადაწყდეს აგრეთვე მდგომარეობის ფილტრის გამოყენებით. ამისათვის  $X$  ვექტორის ნაცვლად შეიძლება გამოვიყენოთ ობიექტის მდგომარეობის ნებისმიერი ვექტორი, რომელიც შეიძლება გაიზომოს რეალურ დროში ობიექტის დინამიკური ფუნქციონირებისას. ასეთი სისტემის სტრუქტურული სქემა მეორე რიგის სისტემებისთვის მოცემულია (ნახ.15.15).



ნახ.15.15

ბოლო უფრო ზოგადი შემთხვევა მოცემულია (ნახ 15.16).



ნახ15.16

თუ შევადარებთ ამ ორ მიდგომას დავინახავთ, რომ მდგომარეობის ფილტრის გამოყენების უპირატესობა დამკვირვებლებთან შედარებით, ეს არის მისი დაუზიანებლობა. ფილტრების გამოყენებისას ძირითადი კონტურის თვისობრივი მაჩვენებლები გაცილებით მაღალია ვიდრე დამკვირვებლების გამოყენებისას. მაგრამ ფილტრებიან სქემას გააჩნია აგრეთვე უარყოფითი მხარეც. ძირითადია—რეგულატორის პარამეტრების გაზრდა  $n-s$  რიცხვით რეგულატორთან შედარებით, სადაც პარამეტრების რიცხვია  $n+m+1$ . ეს იწვევს გარკვეულ სიძნელეებს რეგულატორების აწყობისას, ხანდახან განუზღვრელობასაც კი.

### § 15.9. თვითაწყობის ალგორითმის რეალიზაცია

ამ ამოცანის გადაწყვეტისათვის გამოვიყენოთ გასაშუალოებების გარდაქმნების მეთოდი. ყოველ გასაშუალოებას თვითაწყობის პროცესში შეაქვს "დაგვიანება", რაც თავის მხრივ იწვევს რეგულატორის პარამეტრების აწყობის კრებადობის სიჩქარის შემცირებას, მაგარამ არ მოქმედებს მდგრადობის პირობებზე.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც შეცდომის მოდელს აქვს სახე:

$$\sigma = (\bar{\Delta} + \bar{F})^T \bar{F} \quad (15.68)$$

გამოვიყენოთ (15.68) განტოლების მიმართ გასაშუალოების გარდაქმნები, მივიღებთ:

$$\tilde{\sigma} = \bar{\Delta}^T \tilde{F} + \bar{F}^T \bar{F}, \quad (15.69)$$

სადაც  $\tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{F}$  და  $\bar{F}^T \bar{F}$  სიდიდეების ფორმირება შეიძლება. შეცდომის მოდელის მოდიფიცირებული გამოსასვლელი ტოლია:

$$\sigma^0 = \tilde{\sigma} + \bar{F}^T \tilde{F} - \bar{F}^T \bar{F} \quad (15.70)$$

$\tilde{\sigma}^0$  თვის სამართლიანია

$$\tilde{\sigma}^0 = (\bar{\Delta} + \bar{F})^T \tilde{F} \quad (15.71)$$

თვითაწყოების გრადიენტული ალგორითმი, რომელიც უზრუნველყოფს სიგნალის 0-ში კრებადობას არის:

$$\dot{\bar{r}} = -\gamma \tilde{\sigma}^0 \dot{\bar{r}}, \quad \gamma > 0, \quad (15.71-ა)$$

ადვილი სანახავია, რომ ლიაპუნოვის ფუნქცია წარმოებულის მიხედვით ტოლია:

$$v = \|\bar{\Delta} + \bar{r}\|^2 \quad (15.72)$$

რაც უზრუნველყოფილია აწყოების ვექტორის კრებადობით  $\bar{r} \rightarrow -\bar{\Delta}: \dot{v} = -2\gamma(\tilde{\sigma}^0)^2$  ცხადია, აგრეთვე, რომ  $\tilde{\sigma}^0 \rightarrow 0$  გამომდინარეობს  $\sigma \rightarrow 0$ .

ვთქვათ, შეცდომის მოდელი აღიწერება განტოლებით

$$\dot{\sigma} + d_0 \sigma_1 = (\bar{\Delta} + \bar{r})^T \bar{r}, \quad (15.73)$$

სადაც  $\sigma_1$  ფორმირდება განტოლებებით:

$$\begin{aligned} \sigma &= x^{(n)} + a_{n-1}^1 x^{(n-1)} + \dots + a_0^1 x - b_0^1 g, \\ \sigma_1 &= a_{n-1}^1 x^{(n-1)} + \dots + a_0^1 x - b_0^1 g, \end{aligned} \quad (15.74)$$

$$\dot{g}_1 + d_0 g_1 = g.$$

გამოვიყენოთ (15.73) მიმართ გასაშუალოების პროცედურა:

$$\dot{\tilde{\sigma}} + d_0 \tilde{\sigma}_1 = \bar{r}^T \bar{r} + \bar{\Delta}^T \bar{r}, \quad (15.75)$$

შემოვიტანოთ კორექციის სიგნალი:

$$\dot{\tilde{e}} + d_0 \tilde{e} = \bar{r}^T \bar{r} - \bar{\Delta}^T \bar{r} \quad (15.76)$$

და გავითვალისწინოთ მისი წვერების მნიშვნელობები. მივიღებთ პირველი რიგის შეცდომის მოდელის ტიპიურ სახეს:

$$\dot{\tilde{\sigma}}_1 + d_0 \tilde{\sigma}_1 = (\bar{\Delta} + \bar{r})^T \bar{r}, \quad (15.77)$$

$$\tilde{\sigma}_1^0 = \tilde{\sigma}_1 + \tilde{e}.$$

თვითაწყოების პროცედურას აქვს სახე:

$$\dot{\bar{r}} = -\gamma \tilde{\sigma}_1^0 \bar{r}, \quad \gamma > 0. \quad (15.78)$$

ეს ალგორითმი გარანტიას იძლევა ლიაპუნოვის ფუნქციის არაზრდადობისას მივიღოთ შემდეგი გამოსახულება

$$v_1 = (\tilde{\sigma}_1^0)^2 + \|\bar{\Delta} + \bar{r}\|^2 / \gamma \quad (15.79)$$



და უზრუნველყოფს  $\tilde{\sigma}_1^0$  სიგნალის კრებადობას ნულში.

განვიხილოთ მაგალითი, სადაც რეალიზებულია დამკვირვებლის სტრუქტურაზე აგებული (15.74) რეგულატორის პარამეტრების აწყობა.

მაგალითი 15.3.

შემოვიტანოთ გასაშუალოების მდგრადი წრფივი ფილტრი თავისი გადაცემითი ფუნქციით:

$$W(p) = K_1^1 / l_2^1(p) = 30(p^2 + 11p + 30). \quad (15.80)$$

გამოვიყენოთ ეს განტოლება (15.63) განტოლების მარჯვენა და მარცხენა მხარეებისათვის, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \sigma_1 \ddot{u} + \sigma_0 \dot{u} + (6 - a_0) \dot{x} + \\ &+ (5 - a_1) \dot{x} - r_1^1 \dot{u} - r_0^1 + r_0^2 x + r_1^2 \dot{x}_e, \end{aligned} \quad (15.81)$$

სადაც  $\tilde{\sigma} = \ddot{x} + 5\dot{x} + 6x - 12\tilde{g}$ . გადავიღოთ მოდიფიცირებულ გამოსასვლელზე:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_e^0 &= \tilde{\sigma} - r_1^1 \ddot{u} - r_0^1 \dot{u} + \\ &+ r_0^2 \dot{x} + r_1^1 \dot{u} + r_0^1 u - r_0^2 x - r_1^2 \dot{x}_e. \end{aligned} \quad (15.82)$$

გვექნება მეორადი მოდელის სტანდარტული წარმოდგენა:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_e^0 &= (b_1 - r_1^1) \ddot{u} + (b_0 - r_0^1) \dot{u} + \\ &+ (6 - a_0 + r_0^2) \dot{x} + (5 - a_1 + r_1^2) \dot{x}_e. \end{aligned} \quad (15.83)$$

თვითაწყობის გრადიენტული ალგორითმი, რომელიც კომპენსაციას უკეთებს  $\tilde{\sigma}_e^0$ , შემდეგი სახისაა

$$\begin{aligned} \dot{r}_1^1 &= \gamma \tilde{\sigma}_e^0 \ddot{u}, \quad \dot{r}_0^1 = \gamma \tilde{\sigma}_e^0 \dot{u}, \\ \dot{r}_0^2 &= -\gamma \tilde{\sigma}_e^0 \dot{x}, \quad \dot{r}_1^2 = -\gamma \sigma_0^0 \dot{x}_e. \end{aligned} \quad (15.84)$$

კომპენსაციის მიღწევის შემდეგ მიიღება თანათარლობა:

$$\sigma_e^0 \rightarrow \tilde{\sigma} + r_1^2 (\dot{x} - \dot{x}_e) = \tilde{\sigma}_e \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma_e \rightarrow 0 \quad (15.85)$$

ვინაიდან ვიყენებთ დამკვირვებელს, ვალწევთ მეორად მიზანს  $\sigma \rightarrow 0$ .

მიღებული ადაპტური სისტემა რეალიზებადია. მართლაც, წინა პარაგრაფის რეგულატორის განტოლებიდან გამომდინარეობს:

$$r_1^1 \dot{u} + r_0^1 u - r_0^2 x - r_1^2 \dot{x} = 12 \bar{g}, \quad (15.86)$$

მაშინ (15.82) თანახმად გვექნება:

$$\bar{\sigma}^0 = \bar{\sigma} - r_1^1 \dot{u} - r_0^1 u + r_0^2 \dot{x} + r_1^2 \ddot{x} + 12 \bar{g}.$$

$\bar{\sigma}$  მნიშვნელობის გათვალისწინება გვაძლევს:

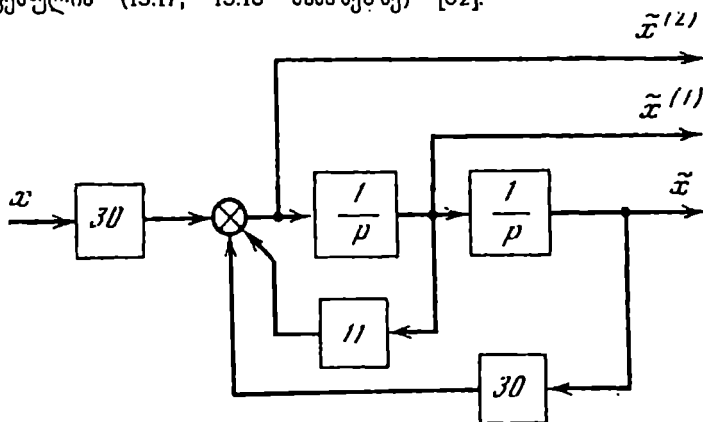
$$\bar{\sigma}^0 = \ddot{x} + 5\dot{x} + 6x - r_1^1 \dot{u} - r_0^1 u + r_0^2 \dot{x} + r_1^2 \ddot{x}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ  $\bar{\sigma}^0$  ასაგებად საჭიროა ფორმირება გაუყეთოთ  $\ddot{x}$ ,  $\dot{x}$ ,  $x$ ,  $\dot{u}$ ,  $u$  სიგნალებს. ეს სიგნალები ფორმირდება ორი გასაშუალოებული ფილტრის გამოსასვლელებიდან, რომელთა განტოლებებია:

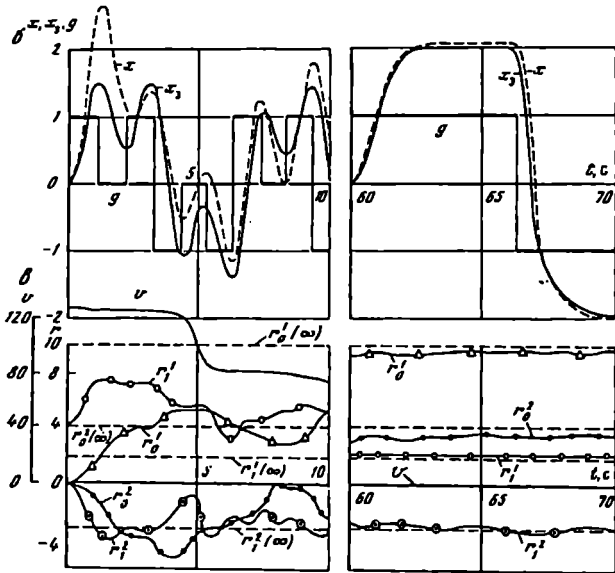
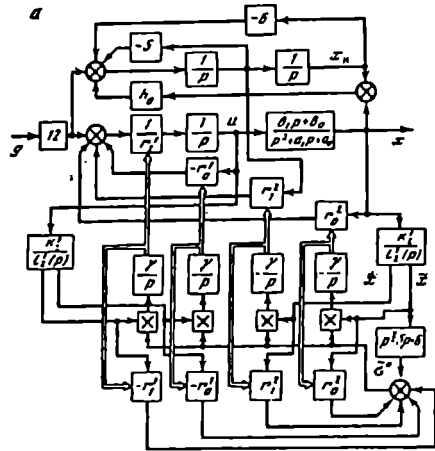
$$\ddot{x} + 11\dot{x} + 30x = 30x, \quad (15.87)$$

$$\ddot{u} + 11\dot{u} + 30u = 30u.$$

გასაშუალოებული კოორდინატის ფილტრის სქემა და მთელი რეალიზებადი სისტემის სტრუქტურული სქემები მოცემულია (15.17, 15.18 ნახაზებზე) [62].



ნახ.15.17



ნახ.17.18

- ა) სტრუქტურული სქემა;  
 ბ) B გარდამავალი პროცესების გრაფიკებია;

ადაპტური სისტემა განკუთვნილია მეორე რიგის ობიექტი-  
სათვის, აგებულია დამკვირვებლით ძირითად კონტურში  
და გასაშუალების ფილტრებით თვითაწყობის ალგორით-  
მებში.

§ 15.10 დისკრეტული ადაპტური სისტემები [83].

განვიხილოთ პროცესები დისკრეტული  $t_k$  დროითი  
( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). სამართი ობიექტი აღიწერება განტოლებით

$$x[k+1] = f(x[k], k, a_p). \quad (15.88)$$

დაკვირვების განტოლებაა

$$Z[k] = h(x[k], k, a_p), \quad (15.89)$$

აქ  $x[k]$ —არის მდგომარეობის ვექტორი  $k$  მომენტში.

$u[k]$ —მართვის ფუნქციაა  $k$  მომენტში.  $a_p$ —პარამეტრების  
გაფართოებული ვექტორია, რომელიც შესდგება უცნობი  $a$   
პარამეტრების ვექტორისაგან და აბსტრაქტული  $\omega$  პარამეტ-  
რებისაგან, რომლებიც ახასიათებენ შემთხვევას

$$a_p = (a, \omega), \quad \omega \in \Omega, a_p \in A_p. \quad (15.90)$$

$a_p$  ვექტორს უწოდებენ აგრეთვე "ვარიანტს". არადაპტუ-  
რი მართვისას  $a$  ვექტორის კომპონენტები ითვლებიან ცნო-  
ბილად.  $Z[k]$  არის დაკვირვების ვექტორი.

მართვის მიზანს აქვს სახე:

$\|x[k]\| \rightarrow 0, \|u[k]\| \rightarrow 0$ , როდესაც  $k \rightarrow \infty$ . თუ ადგილი  
არა აქვს გარეშე ზემოქმედებებს

$$\|x[k]\| < C_1 = Const, \|u[k]\| < C_2 = Const. \quad (15.92)$$

შეშფოთების არსებობისას

$$Q(x[k], u[k], k, a_p) \leq \varepsilon \quad (15.93)$$

ლოკალური კრიტერიუმი.

$$\sup_{\omega} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} Q(x[k], u[k], k, a_p) \rightarrow \inf \quad (15.94)$$

შეზღუდული შეშფოთებისას

$$E_\omega \left[ \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} Q(x[k], u[k], k, a_p) \right] \rightarrow \inf, \quad (15.95)$$

სადაც  $E_\omega$ -არის მათემატიკური ლოდინი.

ზოგადობის შეუზღუდავად ჩავთვალოთ  $k_0 = 0$ . განვიხილოთ ადაპტური მართვის სისტემის აგება, როდესაც მიზანს აქვს ლოკალური სახე:

$$Q(x[k+1], u[k+1], k+1, a_p) \leq \varepsilon. \quad (15.96)$$

აღნიშნოთ  $Q^* = \varepsilon - Q$ . მაშინ მართვის ლოკალურ მიზანს აქვს სახე:

$$Q^*(x[k+1], u[k+1], k+1, a_p) \geq 0. \quad (15.97)$$

დავუშვათ, რომ  $\tau^*$ -არის  $n$  განზომილების ვექტორი. ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ მოიძებნოს ისეთი ადაპტაციის ალგორითმები:

$$u[k] = U(z[k], \tau[k]), \quad (15.98)$$

$$\tau[k+1] = T(z[k+1], z[k], \tau[k]), \quad (15.99)$$

(სადაც  $u$  და  $T$  გაზომვების არგუმენტების ფუნქციონებია), რომ  $a_p \in A_p$  სრულდებოდეს:

$$Q^*(x[k+1], u[k+1], k+1, a_p) \geq 0, \quad (15.100)$$

ყველა  $k > k_0(a_p)$   $u(z, \tau)$  ავირჩიოთ როგორც არაადაპტურის შემთხვევაში  $u(z, \tau) \approx u^*(z, \tau)$ .  $T$  ფუნქცია ამოვირჩიოთ (15.97) საშუალებით.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც  $Q^*(x, u, k, a_p) = Q^*(x, k, a_p)$  არ არის დამოკიდებული  $u$ , მაშინ  $k+1$  მომენტისათვის რაც გამომდინარეობს (15.88), (15.89) (15.98), (15.99), მარცხენა ნაწილი (15.100) დამოკიდებულია,  $\tau[k], \dots, \tau[0]$ . გამოვყოთ  $\tau[k]$  დამოკიდებულება:

$$Q^*(x[k+1], k+1, a_p) = F[k+1, \tau[k]]. \quad (15.101)$$

მიზნის უტოლობა (14.100) შესრულებულია, თუ  $\tau[k] \in G_{k+1}$  არეა  $\{\tau\}$  სივრცეში, გამოყოფილი უტოლობით:

$$F[k+1, \tau] \geq 0. \quad (15.102)$$

ამოცანის პირობის თანახმად (15.102) წინასწარ არ არის მოცემული. იგი შეიძლება შევადგინოთ თუ ვიცით (15.99). ეს ალგორითმი არის საძიებელი. (15.102) მიზნის უტოლობები წარმოიშვება მიმდევრობით, რეკურენტულად:  $\tau[0], \dots, \tau[k-1]$  მონაცემებით განისაზღვრებიან  $u[k], x[k+1]$ , რომლებიც დამოკიდებული არიან  $\tau[k] = \tau$  და (15.102) არეზე. ამ უტოლობებს უწოდებენ რეკურენტულ მიზნის უტოლობებს. (15.99) ალგორითმი ისეთნაირად უნდა აიგოს, რომ  $k+1$  მომენტში  $G_{k+1} = \{\tau: F[k+1, \tau] \geq 0\}$  არე "ფარავდეს"  $\tau[k]$  წერტილს, ე.ი. ისეთნაირად, რომ

$$F[k+1, \tau] \geq 0, \quad a_p \in A_p. \quad (15.103)$$

მართვა არის ადაპტური, თუ ნებისმიერი  $a_p \in A_p$ , არსებობს მომენტი  $k_* = k_*(a_p)$  ისეთი, რომ აღნიშნული "დაფარვა" სწარმოებს ყველა  $k \geq k_*(a_p)$ . ე.ი. (15.103)

სრულდება ყველა  $k \geq k_*(a_p)$  ამას გარდა თუ  $\tau[k] = \hat{\tau} = Const \quad k \geq k_*(a_p)$ , მაშინ შეიძლება ითქვას, რომ ალგორითმი "პოულობს" მართვის ფუნქციას

$$u[k] = u[z[k], \hat{\tau}],$$

რომელიც უზრუნველყოფს მართვის მიზანს. (15.100) ალგორითმს, რომელსაც ახასიათებს ეს ორი თვისება უწოდებენ სასრულოდ კრებადს.

აღვწეროთ წარმოქმნილი სიტუაცია, ადაპტაციის ამოცანის განხილვის გარეშე. დავუშვათ არსებობს წესი, რომელსაც მოცემული  $\tau[0], \dots, \tau[k-1]$  ვექტორების მიხედვით მიგვიითითებს (15.102) ალგორითმი. ამგები  $\tau[k]$  წერტილი აიგება  $\tau[k-1]$  წერტილის და (15.102) მიხედვით. ისეთი, რომ

რომელიდაც  $k_*$ -თვის  $k \geq k_*$ . შესრულებულია (15.103). სისტემას უწოდებენ სასრულო გადამწყვეტი ალგორითმის რეკურენტული უტოლობების უსასრულო სისტემას. თუ  $\tau[k] = Const$ ,  $k \geq k_*$ , მაშინ ალგორითმი არის სასრულოდ კრებადი.

მაშასადამე, სასრულოდ კრებადი ალგორითმი საშუალებას იძლევა სასრულო ბიჯებისას ამოვხსნათ უცნობი რეკურენტული უტოლობების უსასრულო რაოდენობა. ამასთან მისაღებაში შემდეგი ორი დაშვება:

ა) არე  $G_k = \{F[k, \tau] \geq 0\}$  ამოხსნილია.

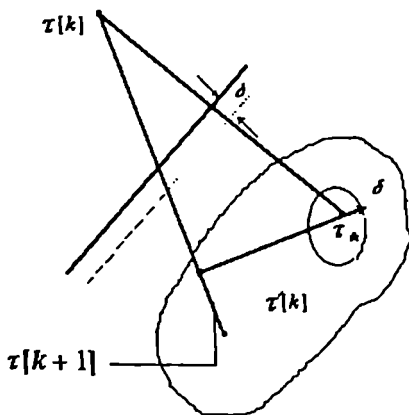
ბ) არსებობს სფერო  $B = \{\tau : |\tau - \tau_*| \leq \delta_*\}$ , რომელშიც მოთავსებულია ყველა  $G_k$ . ამასთან ერთად  $\tau_* = \tau_*(a_p)$ ,

$\delta_* = \delta_*(a_p) > 0$  არის დამოკიდებული  $a_p \in A_p$ . ა) და ბ) პირობები გვაძლევს საშუალებას ავაგოთ სასრულოდ კრებადი ალგორითმი თუ  $\tau[k] \in G_{k+1}$ , მაშინ დეფიციტით  $\tau[k+1] = \tau[k]$ . თუ  $\tau[k] \notin G_{k+1}$ , მაშინ ვაგებთ  $\tau[k+1]$  წერტილს ისეთნაირად, რომ სრულდებოდეს პირობა

$$|\tau[k+1] - \tau_*|^2 \leq |\tau[k] - \tau_*|^2 - \varepsilon^2 \quad (15.104)$$

სადაც  $\varepsilon^2 > 0$ -მუდმვაა, ერთნაირი ყველა  $k$ -თვის.  $\tau[k+1]$  წერტილის ასაგებად საჭიროა ჰიპერსიბრტყით განვაცალკევოთ  $\tau[k]$  წერტილი  $G_{k+1}$  არესაგან (ეს შესაძლებელია ა) დაშვებით და  $\tau[k+1]$  წერტილის წანაცვლებით ამ ჰიპერსიბრტყის ნორმალზე განსაზღვრულ მანძილზე  $G_{k+1}$  არეს მიმართებით. (ნახ15.19) ელემენტარული გეომეტრიული მსჯელობები გვჩვენებენ, რომ თუ  $\tau[k+1]$  წერტილი მდებარეობს  $[\tau[k], \tau'[k]]$  მონაკვეთზე, სადაც  $\tau'[k]$  სიმეტრიული  $\tau[k]$  წერტილია ზღვრული ჰიპერსიბრტყის მიმართ, მაშინ:

$$|\tau[k+1] - \tau_*|^2 \leq |\tau[k] - \tau_*|^2 \quad (15.104)$$



ნახ.15.19

შეიძლება, რომ  $\tau[k+1]$  წერტილის ხელსაყრელი მდგომარეობის შერჩევით შესრულდეს (15.104). მაშინ მართვა ადაპტურია. ყოველთვის, როდესაც გვაქვს შეცდომა, ე.ი. არ სრულდება (15.97) მიზანი, სამართლიანია (15.104). თუ  $k$  მომენტისათვის მოხდა  $\tau[k]$  შეცდომა, მაშინ (15.103) მიხედვით:

$$0 \leq |\tau[k+1] - \tau_*|^2 \leq |\tau[0] - \tau_*|^2 - z[k]\varepsilon^2. \quad (15.105)$$

$r[k]$  შეცდომების რიცხვი არის სასრულო და არ აღემატება სიდიდეს:

$$r[k] \leq z = |\tau[0] - \tau_*|^2 / \varepsilon^2. \quad (15.106)$$

მაშასადამე, მოიძებნება ისეთი მომენტი  $k = k_*(a_p)$  რომ  $\tau[k] = \hat{\tau} = \text{Const}$ ,  $k \geq k_*(a_p)$  და აღარ გვექნება შეცდომები  $\tau[k] = \hat{\tau} \in G_{k+1}$ . ჩვენი ალგორითმი-სასრულოდ კრებალია და მართვა ადაპტურია.

(15.103) პირობა გვიჩვენებს, რომ ადაპტური სისტემა "სწავლობს" შეცდომებზე: ყველა იმ შემთხვევაში, როდესაც არ სრულდება მიზნობრივი უტოლობა, ხდება მიახლოება  $\tau_{k+1}[k]$  მნიშვნელობისა უცნობ  $\tau_* = \tau_*(a_p)$  ე.ი. მიმდინა-



რე მართვის  $u[k] = u[r[k], \tau[k]]$  მიახლოება უცნობ "კარგ" მართვის კანონთან:

$$u[k] = u[r[k], \tau[k]].$$

ახლა განვიხილოთ ადაპტური სისტემები ეტალონური მოდულებით. აღნიშნოთ ძვრის ოპერატორი უკან ერთი ტაქტით (ბიჯით)  $r^{-1}$ , ამრიგად,  $r^{-1}x[k+1] = x[k]$ . წრფივი სტაციონალური ობიექტის განტოლებას, სკალარული შესასვლელებით  $u[k]$ ,  $x[k]$  და სკალარული გამოსასვლელით  $y[k]$ , აქვს სახე:

$$a(r^{-1})y[k] = (b(r^{-1}))u[k] + c(r^{-1})x[k] + f[k]. \quad (15.107)$$

მოდულის განტოლებაა:

$$a^{\partial}(r^{-1})y^{\partial}[k] = c^{\partial}(r^{-1})x[k]. \quad (15.108)$$

ხმაური შეზღუდულია მოდულით:

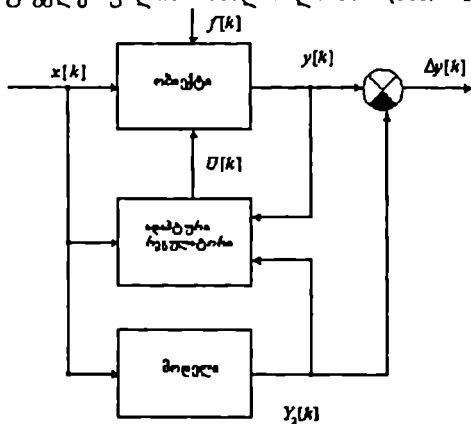
$$|f[k]| \leq F \quad (15.109)$$

დანარჩენში ნებისმიერია.  $a(r^{-1})$ ,  $b(r^{-1})$ ,  $c(r^{-1})$ ,  $a^{\partial}(r^{-1})$ ,  $c^{\partial}(r^{-1})$  არიან  $r^{-1}$  პოლინომები:

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= 1 + \sum_{j=1}^r a_j \lambda^j, & b(\lambda) &= \sum_{j=1}^r b_j \lambda^j, & b_1 &\neq 0, \\ c(\lambda) &= \sum_{j=1}^r c_j \lambda^j, & a^{\partial}(\lambda) &= 1 + \sum_{j=1}^r a^{\partial}_j \lambda^j, \\ c^{\partial}(\lambda) &= \sum_{j=1}^r c^{\partial}_j \lambda^j \end{aligned} \quad (15.110)$$

უნდა ვივარაუდოთ, რომ პოლინომებს  $b(\lambda)$  და  $a^{\partial}(\lambda)$  არა აქვთ ფესვები.  $|\lambda| \leq 1$  არეში შემავალი ზემოქმედება  $x[k]$  შეზღუდულია.

$|x[k]| \leq Const.$  (15.110) პოლინომის კოეფიციენტები იცვლება ზოგიერთი ფაქტორების ცვლილებისას. ამრიგად, ყველა ან ზოგიერთი კოეფიციენტები უცნობებია. ამოცანა მდგომარეობს ადაპტური რეგულატორის აგებაში, რომელიც გამოიმუშავებს  $u[k]$  სიგნალს, ამ ცვლილებების კომპენსაციისათვის. ობიექტის გამომავალ და ეტალონის შემაჯავალ სიდიდეებს შორის უზრუნველყოფილია მახლობლობა (ნახ. 15.20).



ნახ.15.20

$$|y[k] - y^p[k]| \leq C. \quad (15.111)$$

$C$ -მცირე რიცხვია. ამას გარდა შეკრული სისტემისათვის უნდა სრულდებოდეს მდგრადობის პირობა

$$|u[k]| \leq Const. \quad (15.112)$$

თავდაპირველად განვიხილოთ არაადაპტური ამოცანა ე.ი. უნდა ჩაეთვალოს, რომ ყველა (15.110) პოლინომის კოეფიციენტები ცნობილია. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ოპტიმალური რეგულატორის განტოლებაა:

$$\begin{aligned}
 & b_1 u[k] + \dots + b_r u[k-r+1] - a_1 y[k] - \dots - \\
 & - a_r y[k-r+1] + a_1^2 y^2[k] + \dots + a_1^2 y^2[k-r+1] + \quad (15.113) \\
 & + (c_1 - c_1^2)x[k] + \dots + (c_r - c_r^2)x[k-r+1] = 0.
 \end{aligned}$$

(15.111)-ში  $c$  მინიმალური მნიშვნელობა, ტოლია  $C = F$  მართლაც (15.113) შესრულებისას:

$$y[k] - y^2[k] = f[k] \quad \text{ე. ი.} \quad \|y[k] - y^2[k]\| \leq F$$

თუ (15.113) პირობა არ სრულდება, მაშინ

$$y[k] - y^2[k] = y[k-1] + f[k], \quad (15.114)$$

სადაც  $q[k-1] \neq 0$  შესაბამისი  $f[k]$  ამორჩევისას გვექნება

$$\|y[k] - y^2[k]\| > F \quad (15.113) \quad \text{ფორმულა შეიძლება ჩავწეროთ}$$

შემდეგი სახით:

$$u[k] = r^T[k] \tau^0, \quad (15.115)$$

სადაც

$$\begin{aligned}
 r^T[k] = & [u[k-1] \dots u[k-r+1] \quad y[k] \dots y[k-r+1] \\
 & y^2[k] \dots y^2[k-r+1] \quad x[k] \dots x[k-r+1]] .
 \end{aligned}$$

$\tau^0$  (15.113) არის მუდმივი ვექტორი.

განვიხილოთ ადაპტური მართვის ამოცანა. იგულისხმება, რომ ყველა თუ არა (15.110) პოლინომის ზოგიერთი კოეფიციენტები უცნობია. მართვის მიზანი მოცემულია უტოლობით:

$$y[k+1] - y^2[k+1] \leq F \rho^{-1}, \quad (15.116)$$

სადაც  $\rho$  მოცემული რიცხვია  $0 < \rho < 1$ . უნდა შესრულდეს (15.112) პირობა, რომელიც აგრეთვე შედის მართვის მიზნის ფუნქციაში.  $\tau$ . აღნიშნოთ (ყველა უცნობი კოეფიციენტების) მოწესრიგებული ნაკრები. გამოიყოს ამ პოლინომების დამოკიდებულება  $\tau$ . ვექტორზე

$$a(\lambda, \tau), b(\lambda, \tau), c(\lambda, \tau), a^2(\lambda, \tau), c^2(\lambda, \tau).$$

(15.113) მარცხენა მხარე წარმოვადგინოთ  $\tau$ . ვექტორის წრფივ ფუნქციებად

$$b_1 u[k] + \dots = \varphi^T[k] \tau_* + \psi[k],$$

სადაც  $\varphi[k] = \varphi z[k]$  არის ვექტორ-სვეტი,  $\psi[k] = \psi(z[k])$  — არის სკალარი,  $\varphi[k]$  და  $\psi[k]$  ზომადი სიდიდეებია. (15.107), (15.108) მივიღებთ, თუ ნებისმიერი მართვისათვის შესრულებულია:

$$y[k+1] - y^d[k+1] - \varphi^T[k] \tau_* - \psi[k] = f[k+1]. \quad (15.117)$$

## თავი მეთექვსმეტე

### ექსტრემალური რეგულრების სისტემები (ერს)

#### § 16.1 შესავლი

ადაპტური მართვის სისტემების ერთ-ერთი ქვეკლასია ექსტრემალური მართვის სისტემები. ექსტრემალური სისტემები პრაქტიკულად დამუშავებული იყო ჩვენი საუკუნის 20-იან წლებში, ხოლო თეორიულად დამუშავდა 40-იან წლებში. ეს რეგულატორები განკუთვნილია რეალური ობიექტის ფუნქციონირების რომელიმე მაჩვენებლის ექსტრემალურ დონეზე შესანარჩუნებლად. ექსტრემალური მახასიათებელი დამოკიდებულია ობიექტის შემავალ სიდიდეებზე. ობიექტი და ექსტრემალური რეგულატორი ერთობლიობაში გააძლევს ექსტრემალური რეგულირების სისტემებს (ერს).

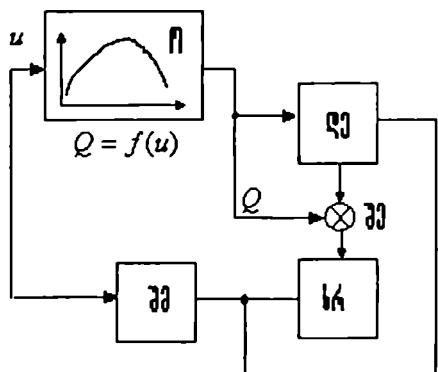
ადაპტური სისტემების ქვეკლასებს შორის ყველაზე კარგად არის შესწავლილი ექსტრემალური რეგულირების სისტემები (ერს) [53], [72], [83], [99].

ქვევით განვიხილავთ ცალკე ერს-ის ძირითად სახეებს. ჩვენ შევეცადეთ გამარტივებული ფორმით გადმოგვეცა ერს-ის სხვადასხვა კლასების დამახასიათებელი თვისებები.

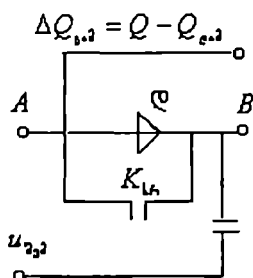
#### § 16.2. სისტემა ექსტრემუმის დამახსოვრებით

ექსტრემალური რეგულირების სისტემაში ექსტრემუმის დამახსოვრებით სიგნუმ-რელეზე მიეწოდება სხვაობა ობიექტის გამომავალი სიგნალის მიმდინარე მნიშვნელობასა და დროის წინა მნიშვნელობას შორის.

ერს სტრუქტურული სქემა ექსტრემუმის დამახსოვრებით მოცემულია (ნახ.16.1ა.).



ნახ.16.1ა



ნახ.16.1ბ

ობიექტის გამოსასვლელი, რომლის სტატიკური მახასიათებელია  $Q = f(u)$ , მიეწოდება ექსტრემალური რეგულატორის დამამახსოვრებელ მოწყობილობას. განვიხილოთ მინიმუმის შემთხვევა. ასეთი სისტემის დამამახსოვრებელი მოწყობილობა უნდა აფიქსირებდეს შემაჯავალი სიგნალის მხოლოდ ზრდას. ე.ი. დამახსოვრება ხდება მხოლოდ  $Q$  გაზრდისას.  $Q$ -ს შემცირებაზე დამამახსოვრებელი მოწყობილობა არ რეაგირებს. სიგნალი დამამახსოვრებელი მოწყობილობიდან უწყვეტად ეწოდება ექსტრემალური სისტემის შედარების ელემენტს, სადაც შეედარება  $Q$  სიგნალის მიმდინარე მნიშვნელობას. სხვაობითი  $Q - Q_{კ}$  სიგნალი შედარების ელემენტიდან მიეწოდება სიგნუმ-რელეს. როდესაც  $Q - Q_{კ}$  სხვაობა მიაღწევს სიგნუმ-რელეს  $\Delta Q_{კ}$  არამგრძობიარობის ზონას, სიგნუმ-რელე აწარმოებს შემსრულებელი მექანიზმის რევერს, რომელიც იმოქმედებს ობიექტის  $u$  შესასვლელზე. ტიგნუმ-რელეს მუშაობის შემდეგ დამამახსოვრებელ მოწყობილობა ჩამოაგდებს  $Q_{კ}$  დახსომებულ მნიშვნელობას და  $Q$  სიგნალის დამახსოვრება იწყება თავიდან.

დამამახსოვრებელი მოწყობილობის ერთ-ერთი ვარიანტი მოცემულია (ნახ.16.1ბ).  $u_{ჰჰ}$  ძაბვა პროპორციული ობიექტის გამოსასვლელი  $Q$  სიგნალისა, მიეწოდება დამამახსოვრებელ  $c$  კონდენსატორს  $D$  დიოდის გავლით. დიოდი შუნტირებულია სიგნუმ-რელეს ერთ-ერთი კონტაქტით. ეს კონტაქტი ჩაერთვება სიგნუმ-რელეს ჩართვისას, ე.ი. შემსრულებელი მექანიზმის რევერსისას.  $u_{ჰჰ}$  გაზრდისას დიოდი მას გაატარებს და ძაბვა  $c$  კონდენსატორზე გახდება  $u_{ჰჰ}$  შემავალის ტოლი. ამასთან სქემის  $A$  და  $B$  წერტილების პოტენციალი (ძაბვის ვარდნა დიოდზე არ მიიღება მწედველობაში) ერთმანეთის ტოლია და  $u_{ჰჰ}$  შემავალი ძაბვა ნულის ტოლია.  $u_{ჰჰ}$  შემცირებისას (ობიექტის გამომავალი სიგნალის შემცირებისას)  $B$  წერტილის პოტენციალი ხდება  $A$  წერტილის პოტენციალზე მეტი-დიოდი ჩაიკეტება. სქემის გამოსასვლელზე გაჩნდება ძაბვა. ამრიგად, გამომავალი ძაბვა პროპორციულია  $Q - Q_{ჰჰ}$ , როდესაც  $\Delta Q$  გამომავალი გადაჯარბებს სიგნუმ-რელეს მგრძობიარობის ზონას, ჩაერთვება სიგნუმ-რელე და მოხდება შემსრულებელი მექანიზმის რევერსი. ამასთან  $k_{სრ}$  კონტაქტი შეიკვრება და  $A$  და  $B$  წერტილის პოტენციალები გაუტოლდებიან ერთმანეთს. მოხდება დამახსოვრებული მნიშვნელობის ჩამოგდება. ამის შემდეგ  $c$  კონდენსატორი დაიმახსოვრებს მიმდინარე მნიშვნელობას და იწყება სქემის მუშაობის ახალი ციკლი. შემსრულებელი მექანიზმებს აქვთ გადანაცვლების მუდმივი სიჩქარე ე.ი.

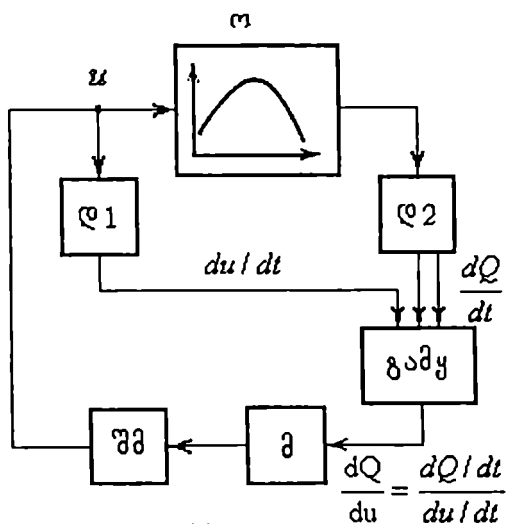
$$\frac{dv}{dt} = \pm k_1, \text{ სადაც } k_1 = Const.$$

### § 16.3 ერთგანზომილებიანი სისტემის მართვა გრადიენტის მეთოდით

ასეთი ექსტრემალური მართვის სისტემები სარგებლობენ ექსტრემალურ გლუვი სტატიკური მახასიათებლის იმ თვისე-

ბით, რომ წარმოებული  $dQ/du$  ნულის ტოლია, როდესაც ობიექტის შემაჯავლი სიგნალი  $u = u_{\text{ობ.}}$ .

აღნიშნული კლასის ექსტრემალური მართვის სქემა მოცემულია (ნახ.16.2)



$$\frac{dQ}{du} = \frac{dQ/dt}{du/dt}$$

ობიექტის შემაჯავლი და გამომავალი სიდიდეები მიეწოდება ორ  $D_1$  და  $D_2$  მადიფერენცირებელ ელემენტს, რომელთა გამოსასვლელებზე მივიღებთ  $du/dt$  და  $dQ/dt$ . აქედან სიგნალები მიეწოდება გამყოფ მოწყობილობას. მიღებული სიგნალი  $dQ/du$  გაძლიერების შემდეგ მიეწოდება შემსრულებელ მექანიზმს, ცვლადი გადაადგილების სიჩქარით, რომელიც პროპორციულია გაძლიერებლიდან გამოსული  $u$  სიგნალისა. შემსრულებელი მექანიზმის (შმ) გაძლიერების კოეფიციენტი ტოლია  $k_1$ . თუ ობიექტის სტატიკური მახასიათებელი პარამეტრია  $Q = -ku^2$ , მაშინ (ერს) აღიწერება წრფივი გან-

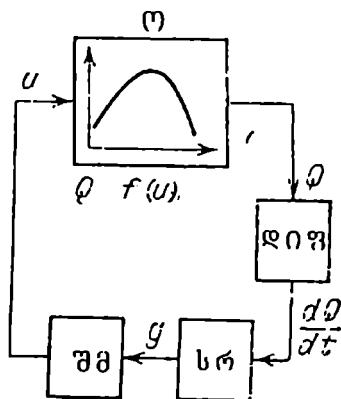


ტოლებებით, ვინაიდან  $dQ/du = -2ku$ , ხოლო სხვა რგოლები წრფივია. ასეთ სისტემაში მიმართულების განსაზღვრისათვის ლოგიკური მოწყობილობა არ გამოიყენება, ვინაიდან ექსტრემალური სისტემა არის წრფივი და წინასწარ ცნობილია ექსტრემუმის მნიშვნელობა ( $dQ/du = 0$ , როდესაც  $u = 0$ )

აღწერილ სისტემას აქვს მთელი რიგი ნაკლოვანებები, რაც მას ხდის პრაქტიკულად გამოუყენებელს. პირველ რიგში, როდესაც  $du/dt \rightarrow 0$ ,  $dQ/dt \rightarrow 0$  ექსტრემუმს განსაზღვრის ამოცანა ხდება განუზღვრელი. მეორეს მხრივ, ყველა რეალური ობექტები ინერციულია, ამიტომ გაყოფა  $dQ/dt$  მნიშვნელობისა  $du/dt$ -ზე არ არის კორექტული, რადგან ისინი დროში არიან ერთმანეთის მიმართ დაძრული. სისტემა კარგავს მუშაობის უნარიანობას სტატიკური მახასიათებლის მცრე დრეივის დროსაც კი.

#### § 16.4. სისტემა რომელშიც წაგმობული იზომება დროში

ასეთი სისტემის სტრუქტურული სქემა მოეცემა (ნახ. 16.3)



ნახ. 16.3

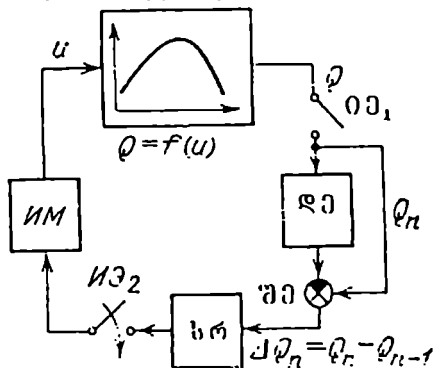
აღნიშნულ სისტემებში ხდება მხოლოდ ობიექტის გამოშვებული სიგნალის დიფერენცირება. შემდეგ ის მიეწოდება

სიგნუმ-რელეს. ვინაიდან, სისტემის ექსტრემუმზე გადასვლისას  $dQ/dt$  ნიშანი იცვლება. ექსტრემუმს მოსაძებნად, როდესაც  $dQ/dt$  წარმოებული ხდება უარყოფითი და აღემატება სიგნუმ-რელეს არამგრძობიარობის ზონას, საკროა (შმ) რევერსირება.

სისტემა რომელიც რეაგრებს  $dQ/dt$  ნიშანზე, მუშაობის პრინციპით ახლოსაა ბიჯურ ერს-თან, მაგრამ გაცილებით მდგრადია ხმაურის მიმართ.

### §. 16.5 ბიჯური ტიპის სისტემა

ბიჯური ტიპის ექსტრემალური რეგულირების სისტემის სტრუქტურული სქემა მოცემულია (ნახ.16.4).



ნახ.16.4

ობიექტის გამომავალი  $Q$  სიდიდის გაზომვა ხდება დისკრეტულად. ობიექტის გამომავალი სიდიდე დროის გარკვეულ  $\Delta t$  მომენტში გადის (იეს) იმპულსურ ელემენტში. აღნიშნოთ  $Q$  მნიშვნელობა  $t = n\Delta t$  მომენტში  $Q_n$ . შემდეგ ის მიეწოდება დამამახსოვრებელ ელემენტს. ამ ელემენტს მიეწოდება აგრეთვე გამომავალი სიდიდის წინა  $Q_{n-1}$  მნიშვნელობა. შედარების ელემენტის გამოსასვლელზე მივიღებთ სხვაობით სიგნალს  $\Delta Q_n = Q_n - Q_{n-1}$ .  $\Delta Q_n$  მიეწოდება სიგნუმ-

რელეს. თუ  $\Delta Q > 0$ , ასეთ მოძრაობას სიგნუმ-რელე უშვებს. თუ  $\Delta Q < 0$  სიგნუმ-რელე ჩაირთვება და შეცვლის  $u$  შემავალი სიგნალის მიმართულებას.

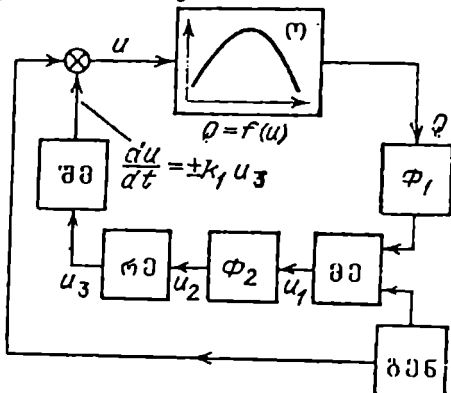
სიგნუმ-რელესა და შემსრულებელ მექანიზმს შორის ჩართულია კიდევ ერთი იმპულსური ელემენტი (იე2) (სინქრონულად მუშაობს (იე1)), რომელიც პერიოდულად თიშავს (შშ) კვების წრედს. (შშ) ცელის ობიექტის  $u$  შემავალ სილიდეს  $\Delta u$  მუდმივ მნიშვნელობით.

### § 16.6. სისტემა დამხმარე მოდულაციით (სინქრონული დეტექტირებით)

ასეთ სისტემებს აგრეთვე უწოდებენ სისტემებს უწყვეტი ძიებითი სიგნალით, ან უბრალოდ უწყვეტი ექსტრემალური რეგულირების სისტემებს.

ამ სისტემებში გამოიყენება სტატიკური მახასიათებლის თვისება: შეუცვალოს ფაზა  $180^\circ$  ობიექტის გამომავალ სიგნალს შემავალ სიგნალთან შედარებით, როდესაც გამომავალი სიგნალი გაივლის ექსტრემუმს. ამ სისტემის მუშაობა შეიძლება ინტერპრეტირებული იყოს, როგორც გრადიენტის განსაზღვრა ძიებითი რხევების და სინქრონული დეტექტირების საშუალებით.

ექსტრემალური რეგულირების სისტემის სტრუქტურული სქემა მოცემულია (ნახ.16.5-ზე).



ნახ.16.5

ობიექტის შესასვლელზე მოდებულია სიგნალი

$$u = u_0 + a \sin \omega t,$$

სადაც  $a$  და  $\omega$  მუდმივი სიდიდეებია. სიგნალი  $a \sin \omega t$  არის ძიებითი სიგნალი. მას გამოიმუშავენ (გ) გენერატორი.

$u_0(t)$  მდგენელი არის მუშა მოძრაობა. ექსტრემუმიდან გადახრისას  $a \sin \omega t$  მცირე ცვლადი მდგენელი იწვევს ობიექტის გამოსასვლელ სიგნალში იმავე სიხშირის ცვლადი მდგენელის წარმოქმნას. სიხშირე  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

თუ  $u = u_{\text{ობ}}$ , მაშინ ობიექტის გამოსასვლელზე წარმოიშება რხევები ორმაგი სიხშირით ( $2\omega$ ), ხოლო რხევები  $\omega$  სიხშირით აღარ გვხვდება.

ღ სიდიდის მდგენელი, რომელსაც აქვს  $\omega$  სიხშირე, გამოიყოფა ზოლური  $\Phi_1$  ფილტრით.  $\Phi_1$  ფილტრის დანიშნულებაა, რომ არ გაატაროს მუდმივი და მაღალი რიგის მდგენელები. იდეალურ შემთხვევაში უნდა გაატაროს მხოლოდ  $\omega$  სიხშირის მდგენელი. ფილტრით გამოყოფილი  $\omega$  სიხშირის სიგნალი მიეწოდება გამამრავლებელ რგოლს. ამ მოწყობილობის მეორე შესასვლელზე გენერატორიდან მიეწოდება სიგნალი  $v_1 = a \sin(\omega t + \varphi)$ .  $\varphi$  ფაზა შეირჩევა  $\Phi_1$  ფილტრის გამომავალი სიგნალის ფაზით, ვინაიდან  $\Phi_1$  ფილტრს შეაქვს ფაზის დამატებითი წანაცვლება.

გამამრავლებლის გამოსასვლელზე  $u = \nu v_1$ . როდესაც  $u < u_{\text{ობ}}$ .

$$u_1 = ab \sin^2(\omega t + \varphi) = 0.5ab[1 - \cos 2(\omega t + \varphi)],$$

როდესაც  $u < u_{\text{ობ}}$ .

$$u_1 = 0.5ab[1 - \cos 2(\omega t + \varphi)].$$

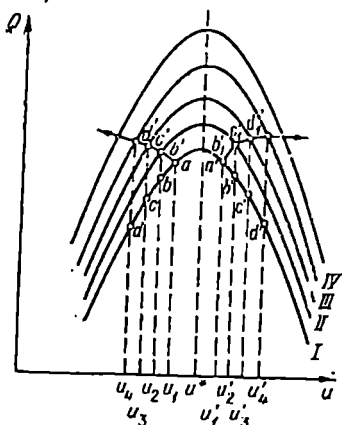
შემდეგ სიგნალი მიეწოდება დაბალსიხშირიან  $\Phi_2$  ფილტრს, რომელიც არ გაატარებს  $u_1$  სიგნალის ცვლად მდგენელს. მუდმივი მდგენელი მიეწოდება რელეურ ელემენტს.

რელეური ელემენტი მართავს შემსრულებელ მექანიზმს, რომლის გადაადგილების სიჩქარე მუდმივია.

### § 16.7. დრეიფის გავლენა მდგრადობაზე

იმასთან დაკავშირებით, რომ ექსტრემალური რეგულირების საფუძველია ძიებითი მოძრაობები, ხოლო აპრიორული ინფორმაცია არასრულია, მდგრადობის საკითხები ასეთ სისტემებში უფრო მკვეთრად დგას, ვიდრე ჩვეულებრივი სტაბილიზაციის სისტემებში [83].

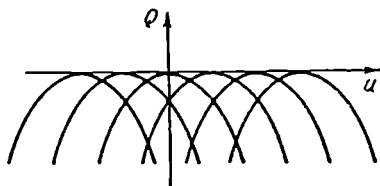
განვიხილოთ ექსტრემალური მახასიათებლის ვერტიკალური დრეიფის გავლენა. ვთქვათ, მოქმედებენ შემოთვლებები, რომლებიც გადაადგილებენ I ექსტრემალურ მახასიათებელს, მაგალითად ზევით (ნახ.16.6).



ნახ.16.6

I და II მრუდები შეესაბამიან ექსტრემალური მახასიათებელს დროის  $t_1$  ( $t_2 > t_1, \dots$ ) მომენტში,  $t = t_1$ .  $u = u_1$  შემავალი სიგნალი შემცირდება. (a წერტილში). მაშინ  $t_2$  მომენტი რომელსაც შეესაბამება  $u = u_2$ , b წერტილის ნაცვლად შეესაბამება II მრუდის b' წერტილის  $t_3$  მომენტს. როდესაც  $u = u_3$ , c წერტილის ნაცვლად გვაქვს c' წერტილი III მრუდზე და ა.შ. იმასთან დაკავშირებით,

რომ გამომავალი სიგნალის შემცირების მაგივრად  $abcd$  მრუდზე გვაქვს მისი გაზრდა  $ab'c'd'$  მრუდზე შმ რევერსი არ მოხდება და შემავალი სიგნალი იმის მაგივრად რომ მიუახლოვდეს ხელსაყრელ  $u'$  მნიშვნელობას, სცილდება მას და უახლოვდება მის უკიდურეს მნიშვნელობას, ე.ი. ექსტრემალური რეგულირების სისტემა კარგავს მდგრადობას. პორიზონტალური დრეიფის შემთხვევაში გვექნება შემდეგი სურათი (ნახ.16.7)



ნახ.16.7

აქაც სისტემა კარგავს მდგრადობას.

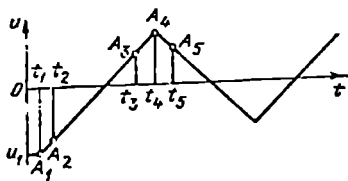
### § 16.8. გარდამავალი პროცესები და პერიოდული მოძრაობები

წინა პარაგრაფებში იგულისხმებოდა, რომ ობიექტები არიან უინერციო, რაც რეალურ ობიექტებში იშვიათი მოვლენაა. ყველა რეალური ობიექტები ინერციულია. ობიექტის მათემატიკური მოდელი შესდგება მიმდევრობით შეერთებული სტატიკური რგოლისაგან ექსტრემალური მახასიათებლით და ინერციული რგოლისაგან.

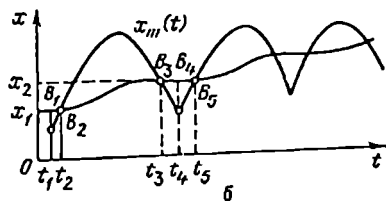
ახლა განვიხილოთ ექსტრემალური რეგულირების სისტემა ექსტრემუმის დამახსოვრებით მდგრადი 1 რიგის ობიექტისათვის [83]. ობიექტის განტოლებაა

$$T \frac{dx}{dt} + x = f(u) \equiv -bu^2 \quad (16.1)$$

$T$ —ობიექტის დროის მუდმივაა,  $x_s$ —სიგნუმ-რეგულს არამგრძნობიარობის ზონაა. დაუშვათ  $u = u_0 + k(t - t_1)$ .  $u$  ცვლილება მოცემულია  $A_1 A_2 A_3 A_4$  მონაკვეთით (ნახ.16.8).

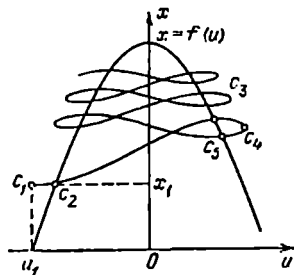


ნახ.16.8ა



ნახ.16.8ბ

$x$ -ის ცვლილება ხდება  $B_1 B_2 B_3 B_4$  მრუდით.  $T_4$  მომენტში, როდესაც  $x(t_3) - x(t_4) = x_n$  ხდება (შპ) რევერსი და  $k < 0$ . მოხდება  $u$  შემცირება (მონაკვეთი  $A_4 A_5 \dots$ ) და იწყება  $x$ -ის ცვლილება  $B_4 B_5 \dots$  და ა.შ.ორივე პროცესი შეიძლება წარმოვიდგინოთ ერთ ნახაზზე (ნახ.16.9).  $c_1 \dots c_5$  წერტილები შეესაბამებიან  $B_1 \dots B_5$  წერტილებს.  $(u, x)$  ფაზურ სიბრტყეზე ადეკვატურად არის აღბეჭდილი ერს-ში მიმდინარე პროცესები.



ნახ.16.9

ყოველ ეტაპზე გარდამავალი პროცესი მიიღება დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის გზით და შემდეგ ხდება მათი მორგება შემდეგი ეტაპის ამონახსნთან. განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. გვაქვს  $n$ -ური რიგის სისტემა.  $(n+1)$  განზომილებიანია ფაზური სივრცე. განვიხილოთ  $n+1$  განზომილებიანი ფაზური სივრცე, რომლის ყოველი წერტილი შეესაბამება ერს-ის კოორდინატებს, როდესაც ჩაირთვება სიგნუმ-რეულე.

გამოსახველი წერტილის კოორდინატები დროის საწყის მომენტში  $m$ -ეტაპზე  $x_i[m]$  ( $i = 1, n+1$ ) ტოლია, ხოლო  $(m+1)$  ეტაპის საწყისში—შესაბამისად  $x_i[m+1]$ .

დავუშვათ, რომ გადასვლა  $m$  მომენტიდან  $m+1$  მომენტამდე განისაზღვრება განტოლებით

$$\psi_1[x_i[m], \dots, x_{n+1}[m]] = \varphi_1[x_i[m+1], \dots, x_{n+1}[m+1]] \quad (16.2)$$

$i = \overline{1, n+1};$

ან ვექტორული ფორმით

$$\psi[x[m]] = \varphi[x[m+1]]. \quad (16.3)$$

ორივე გამოსახულებას უწოდებენ გარდაქმნილს. დავუშვათ, რომ ის არის ურთიერთცალსახა. პერიოდულობის პირობა  $x_i[m] = x_i[m+1] = x_{n+1}^*$  ( $i = 1, n+1$ ) განსაზღვრავს ზღვრული ციკლის კოორდინატებს, ე.ი. გარდაქმნის ინვარიანტულ წერტილს

$$\varphi_i(x_i^* \dots x_{n+1}^*) = \psi_1(x_i^* \dots x_{n+1}^*). \quad i = \overline{1, n+1}.$$

დავუშვათ, რომ ეს წერტილი მოქმეზნილია, მაშინ განვიხილოთ წერტილი, რომელიც ახლოსაა ინვარიანტულთან:

$x_i[m] = x_i^* + \alpha_i[m]$ , სადაც  $\alpha_i[m]$  გადახრაა  $m$  ციკლის  $i$ -ური კოორდინატის წერტილისა ზღვრული ციკლის კოორდინატიდან.

დავუშვათ, რომ  $\psi_1$  და  $\psi_2$  ფუნქციები—ანალიზურია, ინვარიანტულია წერტილის მიდამოში, მაშინ ამ წერტილის მახლობლობაში ისინი შეიძლება დავშალოთ მწკრივად  $\alpha_i$  მიხედვით, მივიღებთ.

$$\varphi_1(x_i^*) + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \alpha_j[m] = \psi_1(x_i^*) + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} \alpha_j[m+1], \quad (16.4)$$

სადაც კერძო წარმოებულები გამოთვლილია ზღვრული ციკლისათვის.  $\varphi_1 = \psi_1$  ტოლობის გათვალისწინებით სტაციონარულ წერტილში მივიღებთ შემდეგ მატრიცულ განტოლებას

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \alpha[m] = \frac{\partial \psi}{\partial x} \alpha[m+1], \quad (16.5)$$



სადაც  $\alpha[m] - \alpha_j[m]$  გადახრის ვექტორ-სვეტებია;

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  და  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  მატრიცებია  $\varphi$  და  $\psi$  ფუნქციების კერძო წარმოებულისა  $x$  ვექტორის მიხედვით.

განვიხილოთ  $\alpha[m+1]$  მიმართ განტოლება (16.4). შემოვიტანოთ აღნიშვნა  $D = D(x^*) = \det \frac{\partial \psi}{\partial x}$ . დავუშვათ, რომ ეს დეტერმინანტი არ არის ნულის ტოლი, მაშინ გადახრა განისაზღვრება გამოსახულებით

$$\begin{aligned} \alpha[m+1] &= \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \alpha[m] = \\ &= \frac{1}{D} \begin{bmatrix} B_{11} \dots B_{1n+1} \\ \dots \\ B_{n+11} \dots B_{n+1n+1} \end{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \alpha[m] \end{aligned} \quad (16.6)$$

გავშალოთ (16.6) გამოსახულება, მივიღებთ

$$\alpha_i(m+1) = \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} \alpha_j[m]. \quad i = \overline{1, n+1}, \quad (16.7)$$

სადაც  $B_{ij}$  არის ალგებრული დამატება  $D$  მიმართ.

$$C_{ij} = D^{-1} B_{ij}.$$

(16.7) განტოლებები არის წრფივი განტოლებები სასრულო სხვაობებში. ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი სახით

$$\alpha_j[m] = k_j r^m, \quad (16.8)$$

სადაც  $k_j$  და  $r$  სიდიდეებია, რომლებიც უნდა განისაზღვროს. (16.7) განტოლებისათვის (16.8) გათვალისწინებით შეიძლება ჩავწეროთ მახასიათებელი განტოლება

$$\det \begin{bmatrix} C_{11} - t, \dots, C_{1n+1} \\ \dots \\ C_{n+11} \dots C_{n+1n+1} \end{bmatrix} = 0. \quad (16.9)$$

მას აქვს  $n+1$  ფესვი  $r_1 \dots r_{n+1}$ . თუ ეს ფესვები მარტივია, მაშინ (16.7) ამოხსნას აქვს სახე

$$\alpha_i(m+1) = \sum_{j=1}^{n+1} k_{ij} r_j^m \quad (16.10)$$

ზღვრული ციკლის ასიმპტოტური მდგრადობისათვის აუცილებელია

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m[m] = 0. \quad (16.11)$$

ამ პირობის შესრულებისათვის აუცილებელი და საკმარისია: მახასიათებელი განტოლების ყველა ფესვები უნდა აკმაყოფილებდნენ

$$|r_1| < 1. \quad (16.12)$$

როგორც ყველა წრფივი სხვაობითი სისტემებისათვის  $C_{ij}$  კოეფიციენტებზე დადებულია მოთხოვნა, რომ შესრულდეს (16.12) პირობა, რაც საშუალებას გვაძლევს მდგრადობის შესწავლა დავიყვანოთ რაუს-ჰურვიცის კრიტერიუმზე.

### § 16.9. (ერს)-ის მუშაობის თვისობრიობის გაუმჯობესება

ამ სათაურის ქვეშ იგულისხმება:

—ინერციულ ობიექტში მართვის საუკეთესო მნიშვნელობის ძიების დროის შემცირება, როგორც უწყვეტი ძიებისას, ასევე დისკრეტული ტიპის ექსტრემალური რეგულირების სისტემებისათვის.

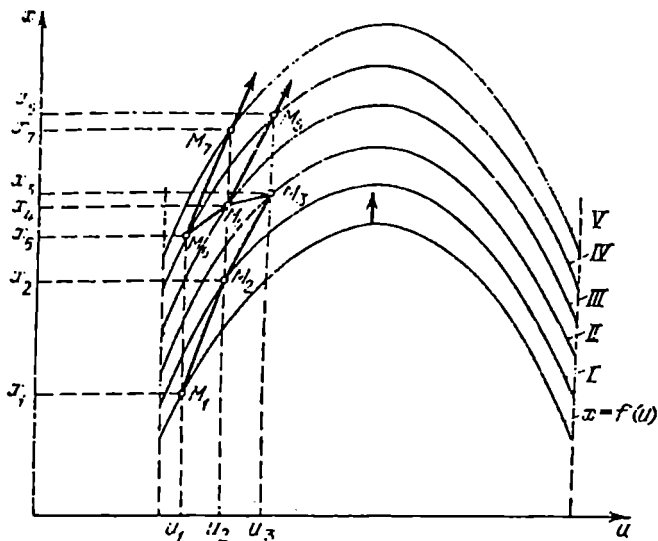
—ობიექტის ექსტრემალური მახასიათებლის მავნე დრეიფის გაელენის შემცირება რეგულირების მდგრადობაზე და თვისობრიობაზე. შემთხვევითი ხმაურის მავნე გაელენის შემცირება.

ერთ-ერთი ხერხი ზემოთ ჩამოთვლილი წინააღმდეგობების დასაძლევად არის ერს-ში კომუტატორის შემოტანა.

კომუტატორი არის მოწყობილობა, რომელიც უზრუნველყოფს სიგნუმ-რელეს მუშაობისგან დამოუკიდებლად (შმ) რევერსს.

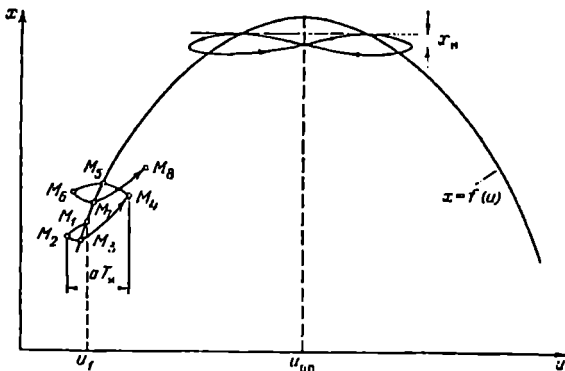
მიზანშეწონილია კომუტატორის პერიოდი (დროის მონაკვეთი ერთი რევერსიდან მეორეზე გადასვლისას) გადაითვალოს დროის იმ მომენტიდან როდესაც მოხდება (შმ) რევერსი, გამოწვეული სიგნუმ-რელეს მოქმედებით.

განვიხილოთ კომუტატორის მუშაობის პრინციპი დრეიფის შედეგად სტატიკური მახასიათებლის ვერტიკალურად გადაადგილებისას და მისი ექსტრემუმის შესაბამისი ცვლილებით (ნახ.16.10).



ნახ.16.10

ავიღოთ კომპუტატორის პერიოდი  $T_{კომ} = 2\Delta t$ , მაშინ  $u_3 = u_2 + 2\Delta t$ , სისტემაში მოხდება რევერსი. კომპუტატორის მუშაობის შედეგად და  $\Delta t$  დროის შემდეგ შემავალი სიგნალი ისევ გახდება  $u_2$  ტოლი. (ტრაექტორია  $M_1 M_2 M_3 M_4$  (ნახ.16.10)). თუ ამასთან ობიექტის გამომავალი სიგნალი შემცირდება სიგნუმ-რელეს არამგრძნობიარობის ზონის სიდიდეზე  $x_5 = x_3 - x_4$ , მაშინ სიგნუმ-რელეს მოქმედებისაგან  $M_4$  წერტილში მოხდება რევერსი. შემავალი სიგნალი კვლავ დაიწყებს გაზრდას და განაახლებს მოძრაობას ექსტრემუმისაკენ. სტატიკური მახასიათებლის დრეიფის პირობებში ექსტრემუმს იპოვის რეგულატორი.



ნახ.16.11

განვიხილოთ ნაკლებად ხელსაყრელი შემთხვევა, როდესაც დიდია სიგნუმ-რელეს არამგრძობიარობის ზონა. დიდია მაშინ რევერსი  $M_4$  წერტილში არ მოხდება და  $2\Delta I$  დროის შემდეგ სისტემა მივა  $M_6$  წერტილში. თუ  $x_5 > x_5 - x_6$ , მაშინ,  $M_6$  არ მოხდება რევერსი სიგნუმ-რელეს მოქმედებისაგან, მაგრამ მოხდება რევერსი კომუტატორის მოქმედების შედეგად. ამ შემთხვევაში შეშფოთების მოქმედება უფრო ძლიერია. (ერს) არ უახლოვდება ექსტრემუმს, მაგრამ არც სცილდება მას. ობიექტის შემავალი სიგნალი იცვლება  $u_1$ -დან  $u_2 = u_1 + \Delta u$ . როდესაც მახასიათებლის დრეიფი დამთავრდება, სისტემა გააგრძელებს მუშაობას ექსტრემუმისაკენ. ამრიგად, კომუტატორი უზრუნველყოფს ერს მდგრადობას ინტენსიური მონოტონური შეშფოთებისას.

განვიხილოთ ექსტრემუმის ძიება ინერციულ ობიექტში, კომუტატორის გამოყენებით. შევჩერდეთ ექსტრემალურ რეგულატორზე ექსტრემუმის დამახსოვრებით. დავუშვათ, რომ ექსტრემალური რეგულატორის ჩართვის მომენტში (ერს-ის) მდგომარეობა ხასიათდება სტატიკურ მახასიათებელზე  $x = f(u)$  (ნახ.16.11). დავუშვათ, რომ რეგულატორის ჩართვის შემდეგ შემცირდება შემავალი  $u$  სიგნალი. ერს-ის მუშაობის მოქმედება გამოისახება  $M_1 M_2$  ტრაექტორიით.

$M_2$  წერტილში, როდესაც დამამახსოვრებელ მაქსიმალურ

$x_1$  და მიმდინარე  $x$  სიდიდეებს შორის სხვაობა გახდება არამგრძობიარობის ზონაზე ნაკლები, მოხდება რევერსი და შემავალი სიგნალი დაიწყებს ზრდას. მოძრაობის ეს ტრაექტორია მოცემულია  $M_2 M_3 M_4$  მრუდზე.  $M_4$  წერტილში ჩაირთვება კომპუტატორი და ერს მოძრაობა გაგრძელდება  $M_4 M_5 M_6$  ტრაექტორიაზე  $M_2 M_3 M_4$  ტრაექტორიის მო-  
 ნაკეთის სიგრძე პროპორციულია  $T_j$  კომპუტატორის პერი-  
 ოდისა.

$M_6$  წერტილში სხვაობა დამახსოვრებულ მაქსიმუმსა და მიმდინარე მნიშვნელობას შორის გახდება არამგრძობიარობის ზონაზე ნაკლები. სიგნუმ-რელე ჩაირთვება, მოხდება რევერსი და ერს-ის მოძრაობა მოხდება  $M_6 M_7 M_8$  ტრაექტორიაზე.

$M_8$  წერტილში მოხდება რევერსი და ა.შ.

როგორც ჩანს (ნახ.16.11) ინერციულ სისტემაში მოძრაობა კომპუტატორიან (ერს-ში) განსხვავდება უკომპუტატორო (ერს-ის) მოძრაობისგან. კომპუტატორიან სისტემაში მოძრაობა მიმ-  
 დინარეობს სტატიკური მახასიათებლის ერთ შტოზე. ყოგი-  
 ერთ სისტემაში ეს აუცილებელია. ასეთ სისტემაში კომპუტა-  
 ტორი მდგრადობის უზრუნველყოფის გარდა ძიებით პრო-  
 ცესს აძლევს საჭირო ხასიათს აძლევს ძიებით პროცესს.

## თავი მეჩვიდმეტე

### ილენტიფიკაცია ადაპტურ სისტემებში

#### § 17.1. შესავალი

ადაპტური სისტემები ხშირად აიგება გაყოფის ჰიპოთეზის საფუძველზე, რომლის თანახმად ადაპტური მართვის ამოცანა შეიძლება შესრულდეს ორ ეტაპად:

1. ცნობილია ობიექტის ზუსტი აღწერა, განისაზღვროს ზოგიერთი (გარკვეული) გაგებით ოპტიმალური მართვა.

2. მართვის ალგორითმში ობიექტის უცნობი პარამეტრები შეიცვალოს მისი მიმდინარე შეფასებებით, რომელიც მიღებულია ილენტიფიკაციის შედეგად.

ამრიგად, ილენტიფიკაციის ამოცანა მართვის ადაპტური სისტემის განუყოფელი ნაწილია. ილენტიფიკაციის ამოცანა შეკრულ სისტემებში მკვეთრად განსხვავდება ილენტიფიკაციის მეთოდებისგან ღია სისტემებში. საერთოდ ილენტიფიკაციის თეორიის შესწავლა თავისი მნიშვნელობის გამო ცალკე სახელმძღვანელოთ უნდა იყოს წარმოდგენილი, რაც მოკლე ხანში იქნება განხორციელებული. არსებობს ობიექტის მოდელის წარმოდგენის სხვადასხვა ვარიანტები. ერთიდაიგივე ობიექტი შეიძლება სულ სხვადასხვა მოდელებით წარმოვადგინოთ. ამიტომ ობიექტის ილენტიფიკაციისას უნდა გადაწყდეს ორი ამოცანა:

1. ობიექტის სტრუქტურის განსაზღვრა (სტრუქტურული ილენტიფიკაცია). გვაქვს ობიექტის რამდენიმე მოდელი და ექსპერიმენტით უნდა განისაზღვროს რომელი მოდელი შეესაბამება რეალურ ობიექტს.

2. პარამეტრული ილენტიფიკაცია ე.ი. განისაზღვროს მოდელის აღმწერი განტოლებების პარამეტრები.

ობიექტის მოდელური სტრუქტურის შერჩევა არის ერთ-ერთი პირობა პრაქტიკული საკითხების გადაწყვეტისას. ეს შერჩევა უნდა ემყარებოდეს, როგორც ილენტიფიკაციის პროცედურას, ასევე შინაარსობრივ და ფორმალურიზებულ ინფორმაციას ილენტიფიკირებადი ობიექტის შესახებ.

მოდელური სტრუქტურების ამორჩევა შეიცავს სულ ცოტა სამ ძირითად ეტაპს:

1. მოდელების სიმრავლის ტიპის ამორჩევა.

აქ შედის კერძოდ, წრფივი თუ არაწრფივი მოდელების ამორჩევა, შემავალ-გამომავალი სისტემის აღწერა, პარამეტრიზირებული მოდელები (ვინერის ამოცანა), ფიზიკური პარამეტრიზირებული მოდელები მდგომარეობის სივრცეში და ა.შ.

2. მოდელების სიმრავლის განზომილებების ამორჩევა. ესაა მდგომარეობის სივრცეში მოდელების რიგის განსაზღვრა, ე.ი. მრავალწევრების ხარისხის დადგენა სხვადასხვა მოდელებში. აქ აგრეთვე წყდება აღმწერი ცვლადების შერჩევის ამოცანა. ამრიგად, უნდა ამოვიჩიოთ  $\mu$  მოცემული ჩაღებულ სტრუქტურების ჯაჭვიდან

$$\mu_1 \subset \mu_2 \subset \mu_3 \subset \dots$$

3. მოდელის პარამეტრიზაციის ამოცანის გადაწყვეტა. საჭიროა შეირჩეს ისეთი მოდელური სტრუქტურა  $\mu$ , რომელიც თანხვდება  $\mu^*$

$$\mu^* = \{W_\alpha(q) | \alpha \in A\}.$$

$W_\alpha(q)$ —არის პროგნოზირებადი მოდელები. წესი  $\alpha$ —გაირბენს  $A$  სიმრავლეს.

მოდელის თვისობრიობა შეიძლება შეფასებული იყოს საშუალო კვადრატული შეცდომის კრიტერიუმით. საშუალო კვადრატული შეცდომა შეიძლება წარმოვადგინოთ ორ კომპონენტად: წანაცვლების კომპონენტად და დისპერსიის კომპონენტად

$$J(D) = J_B(D) + J_p(D).$$

$\mu$  ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ წანაცვლება და დისპერსია იყოს მცირე.

მოდელების სტრუქტურა უნდა იყოს მოქნილი და ეკონომიკური ე.ი. სტრუქტურები უნდა იყოს უნივერსილური და პარამეტრები რაც შეიძლება მცირე. საქმე გვაქვს კომპრომისთან. მოდელის ფასი დამოკიდებულია ალგორითმის გამოთვლით სირთულეებზე, კრიტერიალური ფუნქციის თვისებებზე, მოდელის გამოყენების ხასიათზე.

§ 17.2. მოდელის სტრუქტურის შერჩევა და მისი ადეკვატურობა რეალურ ობიექტთან

ეს საკითხი ძალიან შორსაა საბოლოო გადაწყვეტისაგან. წარმატებები მიღწეულია წრფივი სისტემების სტრუქტურების შესწავლაში. გადაწყვეტილია კერძო საკითხი, თუ როდის უნდა გამოვიყენოთ წრფივი სტრუქტურები, ან არაწრფივი სტრუქტურები. ეს სამუშაოები ჩატარებული აქვთ ნ.რაიბმანს, ა.ჰაბერს, ვ. ლოტოცკის და სხვებს.[55], [71], [124], [125], [126], [127].

რიგის შეფასება. წრფივი სისტემის რიგის შეფასება შეიძლება სხვადასხვა გზით:

1. გადაცემითი ფუნქციების სპექტრალური შეფასების გამოკვლევა.

გამოიყენება სპექტრების არაპარამეტრული შეფასების მეთოდი, რომელიც განსაზღვრავს რეზონანსული პიკების ღირებულ ინფორმაციას მალალსიხშირიანი და ფაზური ძვრების მონაცემების შესახებ. ყველაფერი ეს გვეხმარება მოდელის რიგის შერჩევისათვის, რომელშიც აუცილებელია, რომ ადეკვატურად აისახოს სისტემის დინამიკა.

2. ამონაკრების კოვარაციული მატრიცას რანგის შემოწმება.

ვთქვათ, ქეშმარიტი სისტემა აღიწერება განტოლებით

$$\begin{aligned} y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) &= \\ &= b_1 u(t-1) + \dots + b_n u(t-n) + v_0(t) \end{aligned} \quad (17.1)$$

$v_0(t)$  ხმაურის რომელიმე მიმდევრობისათვის  $\{v_0(t)\}$ , ვთქვათ  $n$  უმცირესი რიცხვია, რომლისთვისაც შესაძლებელია ასეთი ჩაწერა: ( $n$ -"ქეშმარიტი" რიგია). როგორც ყოველთვის

$$\varphi_s(t) = [-y(t-1), \dots, -y(t-s), u(t-1), \dots, u(t-s)]^T \quad (17.2)$$

დაეუშვათ,  $v_0(t) \equiv 0$ , მაშინ (17.1)-დან გამომდინარეობს, რომ მატრიცა

$$R^s(N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi_s(t) \varphi_s^T(t) \quad (17.3)$$



$s \leq n$  იქნება გადაუგვარებელი, როდესაც  $s \leq n + 1$ . ამრიგად,  $k(s) = \det R^s(N)$  შეიძლება გამოვიყენოთ მოდელის რიგის შემოწმების სტატისტიკურ კრიტერიუმად. ხმაურის შემთხვევაშიც შეიძლება გამოვიყენოთ (17.3), თუ თანაფარდობა სიგნალი/ხმაური საკმარისად დიდია. ამ შემთხვევაში გამოიყენება "გაძლიერებული" მატრიცა

$$\hat{R}^s(N) = R^s(N) - \hat{\sigma}^2 R_\nu, \quad (17.4)$$

სადაც  $\hat{\sigma}^2 R_\nu$  აღნიშნულია  $\nu_0(t)$ -ის  $R_s(N)$  გავლენის შეფასება. თუ  $\nu_0(t)$  გავლენის უკუგდება არ შეიძლება მაშინ უნდა გამოყენებული იყოს უფრო რთული კრიტერიუმები. (მაგალითად, სრიალა საშუალოს კრიტერიუმი).

### 3. ცვლადების კორელირება

დგება ამოცანა შევიტანოთ თუ არა მოდელურ სტრუქტურაში კიდევ ერთი ცვლადი. მაგალითად, (17.1) განტოლებისათვის ეს არის  $y(t-n-1)$ , ან შესაძლო  $w(t)$  ხმაურის დაკვირვებადი მნიშვნელობები. ნებისმიერ შემთხვევაში უნდა ვიცოდეთ, შემატებს თუ არა რამე ახალს  $y$  გამოშვებული  $y(t)$  ახსნას. ეს ფასდება კორელაციით  $y(t)$  და  $w(t)$  შორის. უფრო სწორი იქნება მოვქმენოთ კავშირი  $w(t)$  და "იმას შორის, რაც ჯერ ახსნილია". (ე.ი. გაუთანხმებლობა  $\varepsilon(t, \hat{\Theta}_N) = Y(t) - \hat{y}(t/\hat{\Theta}_N)$ ).

რეგრესიულ ანალიზში ასეთ მიდგომას უწოდებენ კანონიკურ კორელაციას, ან ნაწილობრივ კორელაციას.

4. ინფორმაციული მატრიცა. თუ მოდელის რიგი წამატებულია მაშინ გლობალური და ლოკალური იდენტიფიცირების თვისებები იკარგება. ეს იმას ნიშნავს, რომ  $\psi(t, \Theta)$

მატრიცას არ ექნება მთლიანი რანგი  $\Theta = \Theta^*$  წერტილში და ინფორმაციული მატრიცა

$$M_N = \frac{1}{k_0} \sum_{t=1}^N E[\psi(t, \Theta_0) \psi^T(t, \Theta_0)] \quad (17.5)$$

გადაგვარებულია. ვინაიდან გაუს-ნიუტონის ალგორითმში გამოიყენება ინფორმაციული მატრიცას შებრუნებულობა, ბუნებრივი შემოწმება იმისა, ხომ არ არის გადამეტებული მოდელის რიგი, არსებობს მატრიცას შეპირობებულობის რიცხვი. მოდელის სტრუქტურების შერჩევისას უნდა შეირჩეს რამდენიმე ვარიანტი და შემდეგ მოხდეს მათი შედარება. კარგი იქნება მათი ფუნქციონირების შეფასება მოხდეს მონაცემთა ისეთ სიმრავლეზე, რომელიც არ არის გამოყენებული არც ერთი მოდელის აწყობისას. უპირატესობა მიენიჭება იმ მოდელს, რომელიც მოგვცემს საუკეთესო შედეგს. ასეთი პროცედურები ცნობილია ურთიერთ დამოწმების სახელწოდებით. განვიხილოთ დამოწმების სკალარული ზომა

$$\bar{V}(\Theta) = \bar{E}[l(\varepsilon(t, \Theta))] = \lim_{N \rightarrow \infty} E[V_N(\Theta, Z^N)], \quad (17.6)$$

სადაც  $V_N(\Theta, Z^N)$  - წინასწარმეტყველების შეცდომის კრიტერიუმია, რომელიც გამოიყენება პარამეტრული შეფასებისას. თქვათ,  $\hat{\Theta}_N^K$  - შეფასება მიღებული  $M_k$  სტრუქტურის ფარგლებში. დგება საკითხი შევაფასოთ  $M_k$  მოდელური სტრუქტურის "საშუალო" შეფასება

$$E[\bar{V}(\hat{\Theta}_N^k)] \triangleq J(M_k). \quad (17.7)$$

ამ ეტაპზე  $\bar{V}(\Theta)$  და  $J$  კრიტერიუმი უცნობია, ვინაიდან მათში შედის ფაქტიური მონაცემთა განაწილების მათემატიკური ლოდინის გამოთვლა. მაშასადამე,  $\bar{V}(\Theta)$  და  $J$  უნდა შეიცვალოს რომელიღაც აპროქსიმაციით, ან შეფასებით.

თქვათ,  $\Theta^* - \bar{V}(\Theta)$  ფუნქციის მინიმუმის წერტილია. დავშალოთ ეს ფუნქცია  $\Theta^*$  მახლობლობაში მწკრივად

$$\bar{V}(\hat{\Theta}_N) = \bar{V}(\Theta^*) + \frac{1}{2}(\hat{\Theta}_N - \Theta^*)^T V''(\xi_N)(\hat{\Theta}_N - \Theta^*). \quad (17.8)$$

ანალოგიურად, ვინაიდან  $V_N^1(\hat{\Theta}_N, Z^N) = 0$ ,

$$V_N(\hat{\Theta}_N, Z^N) = V_N(\Theta^*, Z^N) - \frac{1}{2}(\hat{\Theta}_N - \Theta^*)^T V_N''(\bar{\xi}_N, Z^N)(\hat{\Theta}_N - \Theta^*) \quad (17.9)$$

იმისათვის, რომ განისაზღვროს მათემატიკური ლოდინი ორივე გამოსახულებიდან, გამოვიყენოთ შემდეგი ასიმპტოტური ფორმულები [55]:

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{2}(\hat{\Theta}_N - \Theta^*)^T V''(\xi_N)(\hat{\Theta}_N - \Theta^*)\right] &= \\ &= \frac{1}{2}E\left[\text{tr}\left\{\bar{V}''(\xi_N)(\hat{\Theta}_N - \Theta^*)(\hat{\Theta}_N - \Theta^*)^T\right\}\right] \approx \\ &\approx \frac{1}{2}E\left[\text{tr}V''(\Theta^*)P_N\right], \end{aligned} \quad (17.10)$$

სადაც  $P_N = (1/N)P_{\Theta^*} - \hat{\Theta}_N$  შეფასების კოვარაციული ასიმპტოტური მატრიცაა.  $P_N$  მიიღევა როგორც  $1/N$  ამას გარდა

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{2}(\hat{\Theta}_N - \Theta^*)^T V''(\xi_N, Z^N)(\hat{\Theta}_N - \Theta^*)\right] &\approx \\ &\approx \frac{1}{2}\text{tr}V''(\Theta^*)P_N \end{aligned} \quad (17.11)$$

და

$$E[V_N(\Theta^*, Z^N)] \approx \bar{V}(\Theta^*) .$$

(17.8) და (17.9) ფორმულების გაშუალება შესაბამისად იძლევა

$$E[\bar{V}(\hat{\Theta}_N)] \approx \bar{V}(\Theta^*) + \frac{1}{2}\text{tr}\bar{V}''(\Theta^*)P_N, \quad (17.12)$$

$$E[V_N(\hat{\Theta}_N, Z^N)] \approx \bar{V}\left(\Theta^* - \frac{1}{2}\text{tr}\bar{V}''(\Theta^*)P_N\right) \quad (17.13)$$

აქედან ვპოულობთ, რომ

$$J(M) = E[\bar{V}(\Theta_N)] \approx E[V_N(\hat{\Theta}_N, Z^N)] + \quad (17.14)$$

$$+ \text{tr} \bar{V}''(\Theta^*) P_N \approx V_N(\hat{\Theta}_N, Z^N) + \frac{1}{2} \text{tr} \bar{V}''(\Theta^*) P_{\Theta^*},$$

სადაც ბოლო მიხლოება მდგომარეობს იმაში, რომ  $V_N(\hat{\Theta}_N, Z^N)$  საშუალო მნიშვნელობა შეიცვლება ერთადერთი არსებული დაკვირვებით და აიღება  $P_N = (1/N)P_{\Theta}$ .

თუ ვისარგებლებთ (17.14) ზოგადი გამოსახულებით, შეიძლება განვიხილოთ  $V_N$ -ის ზოგიერთი კერძო შემთხვევა. ერთ-ერთი მათგანია აკაიკეს ინფორმაციული კრიტერიუმი.

ვთქვათ, წინასწარმეტყველების შეცდომის კრიტერიუმი ამორჩეულია ნორმირებული ლოგარითმული დამაჯერებლობის ფუნქციის სახით

$$V_N(\Theta, Z^N) = \frac{1}{N} (\log\text{-დამაჯერებლობა}$$

$$\text{შეთვასების ამოცანისათვის}) = \frac{1}{N} L_N(\Theta, Z^N). \quad (17.15)$$

იმ შემთხვევისათვის, როდესაც-ჰეშმარიტი სისტემა აღიწერება  $\Theta^* = \Theta_0$  ვექტორით (ე.ი.  $\mathcal{E} \in M$ )-პარამეტრები იდენტიფიცირებადია ისე, რომ  $\bar{V}''(\Theta_0)$  მატრიცა არის შექცევადი.

ცნობილია ასიმპტოტური რეზულტატი

$$P_N = [\bar{V}''(\Theta_0)]^{-1} \quad \frac{1}{N} = \{E[L_N''(\Theta_0)]\}^{-1} \quad (17.16)$$

შევიტანოთ (17.16) (17.14)-ში, მაშინ კრიტერიუმი მიიღებს სახეს

$$J(\mu) = -\frac{1}{N} L_N(\Theta, Z^N) + \frac{dM}{N}, \quad (17.17)$$

ვინაიდან

$$\text{tr} \left\{ \bar{V}''(\Theta_0) [\bar{V}''(\Theta_0)]^{-1} \right\} = \dim \Theta^* = d\mu. \quad (17.18)$$

ამრიგად, შეიძლება ჩამოვყალიბოთ სტრუქტურის და პარამეტრების შეფასების ერთობლივი ამოცანა

$$\{\hat{\Theta}_M^\mu, \hat{\mu}\} = \arg \min_{\mu \in M} \min_{\Theta^\mu \in D_\mu} \frac{1}{N} [-L_N(\Theta^\mu, Z^N) + d\mu], \quad (17.19)$$

სადაც  $L_N$  ლოგარითმული დამაჯერებლობის ფუნქციაა, ზედა ინდექსი  $\mu$  ნიშნავს  $\Theta^\mu$  შეფასების კავშირს  $\mu$  მოდელურ სტრუქტურასთან.

მაგალითი 17.1 [55].

გამოვიყენოთ აკაიკეს კრიტერიუმი გაუსის განაწილებისათვის

$$L_N(\Theta, Z^N) = -\frac{1}{2} \sum_{z=1}^N \frac{\varepsilon^2(t, \Theta')}{\lambda} - \frac{N}{2} \log 2\pi - \frac{N}{2} \log \lambda.$$

$\lambda$ -უცნობი დისპერსიაა.  $\Theta = (\Theta', \lambda)$ .

შინაგანი მინიმიზაციისას გვექნება

$$\hat{\Theta}_N = (\hat{\Theta}'_N, \hat{\lambda}_N),$$

$$\hat{\lambda}_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t, \hat{\Theta}'_N),$$

$$\hat{\Theta}'_N = \arg \min_{\Theta \in D_\mu} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t, \Theta).$$

მაშასადამე,

$$L_N(\hat{\Theta}_N, Z^N) = -\frac{N}{2} - \frac{N}{2} \log \hat{\lambda}_N - \frac{N}{2} \log 2\pi.$$

ხოლო გარე მინიმიზაციისას ( $\mu$ -ს მიხედვით) (17.19)-ში რეალიზდება შემდეგი ჩაწერა:

$$\hat{\mu} = \arg \min_{\mu \in M} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{1}{2} \log \left[ \frac{1}{N} \sum \varepsilon^2(t, \hat{\Theta}_N^\mu) \right] + \frac{d\mu}{N} \right].$$

მინიმიზაციის მნიშვნელებან წევრს აქვს სახე

$$\log \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t, \hat{\Theta}_N^\mu) \right] + \frac{2d\mu}{N} \approx \log \left[ \left( 1 + \frac{2d\mu}{N} \right) \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t, \hat{\Theta}_N^\mu) \right],$$

სადაც ბოლო მიახლოება მიიღება შემდეგი უტოლობის  $\dim \Theta^\mu \ll N$  გათვალისწინებით.

ობიექტის პარამეტრების შეფასება დადის ფიქსირებული მოდელური სტრუქტურის ზღვრებში „საუკეთესო“ მოდელის შერჩევაში. უმთავრესი კითხვა მდგომარეობს იმაში „საკმარისად კარგი“ კია ეს „საუკეთესო“ მოდელი? ჩამოვყალიბოთ მოდელის დამაჯერებლობის ამოცანა. დასმულ შეკითხვას აქვს რამდენიმე ასპექტი:

1. საკმარისად ეთანადება თუ არა მოდელი დაკვირვების მონაცემებს?

2. რამდენად კარგი მოდელია მისი შექმნის მიზნის გათვალისწინებით?

3. აღწერს თუ არა მოდელი "ქეშმარიტ სისტემას"?

ზოგად შემთხვევაში პასუხი ამ შეკითხვებზე მდგომარეობს იმაში, რომ შევუთანხმოთ  $\mu(\hat{\Theta}_N)$ -ს მოდელის ქეშმარიტი სისტემიდან მიღებული პრაქტიკული ინფორმაცია. აქ შედის აპრიორული ინფორმაცია, ექსპერიმენტალური მონაცემები და მოდელის გამოყენების გამოცდილება. იდენტიფიკაციის გამოყენებით ამოცანებში ყველაზე ბუნებრივ ობიექტად მოდელთან შედარებისათვის არის თვითონ მონაცემები. პროცედურა დადის პირველ კითხვაზე. ჩვენ არ შევუდგებით ამ პრობლემასთან დაკავშირებული საკითხების (მოდელირების მიზანი, პარამეტრების ფიზიკური რეალიზება, მოდელის შემავალ-გამომავალი მდგომარეობის დახასიათება, პარამეტრებისათვის ნდობის ინტერვალები, იმიტაციური მოდელირება) განხილვას და გადავალთ პირდაპირი მოდელირების დამოწმებაზე დაუმთხვევობის ტერმინებში.

მოცემულია სისტემა

$$y(t) = g(t, z^{t-1}, \hat{\Theta}_N) + \varepsilon(t, \hat{\Theta}_N), \quad (17.20)$$

სადაც  $\varepsilon(t, \hat{\Theta}_N)$  აქვს ურთიერთ დამოუკიდებლობის თვისება და დამოუკიდებლობა ძველ მონაცემებთან

$$M(\Theta): \hat{y}(t/\Theta) = g(t, z^{t-1}, \Theta). \quad (17.21)$$

$\varepsilon(t, \Theta) = y(t) - \hat{y}(t/\Theta)$  დამოუკიდებელია და განაწილებულია  $f_{\varepsilon}(x, t, \Theta)$  შესაბამისად. ამ მონაცემებთან შეფარდებით მოდელის დამოწმება ხდება დამაჯერებლობის შედეგით იმის შესახებ, რომ  $z^N$  მონაცემების რეალიზაცია შეიძლება მოხდეს (17.21) თანაფარდობით.

ეს ექვივალენტურია მტკიცებისა, რომ მიმდევრობა

$$\varepsilon(t, \hat{\Theta}_N) \stackrel{\Delta}{=} y(t) - g(t, z^{t-1}, \hat{\Theta}_N) = y(t) - \hat{y}(t|\hat{\Theta}_N), \quad (17.22)$$

ალბათ წარმოადგენს ერთმანეთს შორის დამოუკიდებელ შემთხვევითი ვექტორების თანამიმდევრობას  $f_{\varepsilon}(x, t, \hat{\Theta}_N)$  ალბათობის სიმკვრივით. (17.22) შემოწმება ხდება  $\{\varepsilon(t, \hat{\Theta}_N)\}$

წინასწარმეტყველების შეცდომის გრაფიკის აგებით და შემდეგ მისი ვიზუალური შემოწმებით. ცნობილია რამდენიმე სითეთრის დაუმთხვევობის სტატისტიკური კრიტერიუმი. სტანდარტული კრიტერიუმია სითეთრის გამოთვლის დაყვანა კოვარაციული შეფასების გამოთვლაზე

$$\hat{R}_{\varepsilon}^N(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} \varepsilon(t) \varepsilon(t+\tau), \quad (17.23)$$

სადაც  $\varepsilon(t) = \varepsilon(t, \hat{\Theta}_N)$ . თუ  $\{\varepsilon(t, \cdot)\}$  თანამიმდევრობა არის ნამდვილად თეთრი ხმაური, მაშინ

$$\xi_{N,M} = \frac{N}{\hat{R}_{\varepsilon}(0)^2} \sum_{\tau=1}^M \left( \hat{R}_{\varepsilon}^N(\tau) \right)^2 \quad (17.24)$$

ასიმპტოტიკაში ექნება  $\chi^2(M)$  განაწილება. დაუმთხვევობების ურთიერთ დამოუკიდებლობები შეიძლება დამტკიცდეს  $\xi_{N,M} < \chi_{\alpha}^2(M)$  უტოლობის შესრულებით.  $\alpha - \chi^2(M)$  განაწილების მნიშვნელობის დონეა.

§ 17.3. არაწრფივი ობიექტების სტრუქტურის განსაზღვრა გახსნილ სისტემებში

განვიხილოთ სტრუქტურის განსაზღვრის მარტივი მეთოდი [33]. მოცემულია ობიექტის სამი სტრუქტურა (ნახ.17.1) არაწრფივი ელემენტები აღიწერებიან განტოლებით  $z = kx^2$  წრფივი რგოლი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებით

$$T_1 \frac{dy}{dt} + y = z. \quad (17.25)$$

შესასვლელზე მოდებულია სიგნალი  $X = A \sin \omega t + B,$  (17.26)

$A$  – შემავალი სიგნალის ამპლიტუდა;

$\omega$  – კუთხური სიხშირე;

$B$  – შემავალი სიგნალის წანაცვლება აბსცისათა ღერძზე; საჭიროა დავადგინოთ რომელი სტრუქტურით შეიძლება შევცვალოთ რეალური ობიექტი.

I ტიპი

არაწრფივი რგოლის განტოლებაა

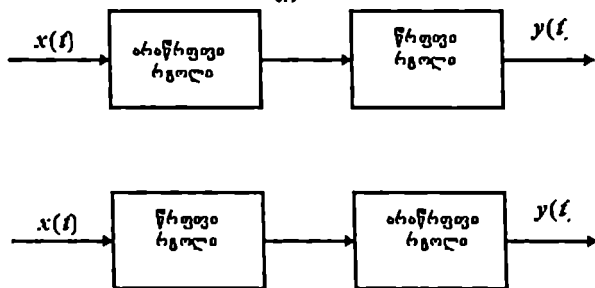
$$Z = kx^2 = k(A \sin \omega t + B)^2,$$

$k$  – კოეფიციენტი.

$$Z = \frac{kA^2}{2} + kB^2 + 2AB \sin \omega t - \frac{kA^2}{2} \cos 2\omega t. \quad (17.28)$$

აპერიოდული რგოლის განტოლებაა

$$T_1 \frac{dy}{dt} + y = z. \quad (17.29)$$



ნახ.17.1



$T_1$ -დროის მუდმივაა.

შევიტანოთ  $z$  მნიშვნელობა (17.29)-ში, მივიღებთ

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{T_1} y = \frac{kA^2}{2} + kB^2 + 2ABk \sin \omega t - \frac{kA^2}{2} \cos 2\omega t. \quad (17.30)$$

(17.30) ამოხსნა გვაძლევს

$$y = e^{-t/T_1} \left[ c + \frac{1}{T_1} \int_0^t \left( \frac{kA^2}{2} + kB^2 + 2ABk \sin \omega t - \frac{kA^2}{2} \cos 2\omega t \right) e^{t/T_1} dt \right], \quad (17.31)$$

$c$ -ინტეგრირების მუდმივაა.

გარდამავალი პროცესის დამთავრების შემდეგ,  $t \rightarrow \infty$  შემთხვევაში გვექნება

$$y = \frac{kA^2}{2} + kB^2 + \frac{2ABk}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}} \sin(\omega t - \varphi_1) - \frac{kA^2}{\sqrt{1 + 4\omega^2 T_1^2}} \cos(2\omega t + \varphi_2), \quad (17.32)$$

სადაც

$$\varphi_1 = \arctg \omega T_1, \quad \varphi_2 = \arctg 2\omega T_1$$

II. ტიპი

აპერიოდული რგოლი აღიწერება განტოლებით

$$\frac{dz}{dt} + \frac{1}{T_1} z = \frac{1}{T_1} x.$$

საბოლოოდ

$$y = kB^2 + \frac{kA^2}{2(1 + \omega^2 T_1^2)} + 2 \frac{ABk}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}} \text{Sin}(\omega t - \varphi_1) - \frac{kA^2}{2(1 + \omega^2 T_1^2)} \text{Cos}(2\omega t - \varphi_1). \quad (17.33)$$

III. სისტემა შესდგება მეორე ტიპისა და მასთან მიმდებარებით შეერთებული წრფივი რგოლისაგან.

სისტემის გამოსასვლელზე გვექნება

$$W = kB^2 + \frac{kA^2}{2(1 + \omega^2 T_1^2)} + \frac{2ABk}{\sqrt{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}} \text{Sin}(\omega t - \varphi_3) - \frac{kA^2}{2(1 + \omega^2 T_1^2)\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}} \text{Cos}(2\omega t + \varphi_4), \quad (17.34)$$

$$\varphi_3 = \text{arctg}\omega T_1 - \text{arctg}\omega T_2,$$

$$\varphi_4 = 2\text{arctg}\omega T_1 - \text{arctg}2\omega T_2.$$

(17.32), (17.33), (17.34) გამოსახულებები შესდგებიან სამი ნაწილისაგან: ძირითადი ჰარმონიკისაგან, გარკვევებული სიხშირის ჰარმონიკისაგან და მუდმივი მდგენელისაგან. I ვარიანტში მუდმივი მდგენელი არ არის სიხშირეზე დამოკიდებული, ხოლო II და III ტიპებში მუდმივი მდგენელი დამოკიდებულია შემავალი სიგნალის სიხშირეზე.

(17.33) (17.34) გამოსახულებების შემდეგი ანალიზი გვიჩვენებს, რომ სხვაობა მუდმივ მდგენელსა და მეორე ჰარმონიკის ამპლიტუდებს შორის II ტიპისათვის არ არის დამოკიდებული შემავალი სიგნალის სიხშირეზე და ტოლია  $kB^2$

$$y = \frac{kA^2}{2(1 + \omega^2 T_1^2)} + kB^2 - \frac{kA^2}{2(1 + \omega^2 T_1^2)} = kB^2 \quad (17.35)$$

III ტიპის ობიექტებისათვის სხვაობა არ არის მუდმივი და მცირდება სიგნალის სიხშირის გაზრდით

$$\frac{kA^2}{2(1 + \omega^2 T_1^2)} + kB^2 - \frac{kA^2}{2(1 + \omega^2 T_1^2)\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}} = f(\omega). \quad (17.36)$$

ზემოთ აღნიშნულის საფუძველზე შეიძლება გაკეთდეს შემდეგი დასკვნა: არაწრფივი ობიექტის სტრუქტურის დასადგენად საჭიროა ობიექტის შესასვლელზე მივაწოდოთ ერთი სიხშირის სინუსოიდალური სიგნალი, ეს სიხშირე უნდა იყოს მოჭრის სიხშირეზე ნაკლები. შემდეგ სიხშირე გავზარდოთ. თუ შევადარებთ ერთმანეთს გამომავალი სიგნალის მუდმივ მდგენელებს და დავინახავთ, რომ თუ მუდმივი მდგენელი არ იცვლება, მაშინ გვაქვს I ტიპის ობიექტი. წინააღმდეგ შემთხვევაში ობიექტი ეკუთვნის II ან III ტიპის ობიექტებს. თუ შევადგენთ (17.35) სხვაობას და დავინახავთ, რომ ის სრულდება, ე.ი. შემავალი სიგნალის სიხშირის ცვლილებისას სხვაობა გამომავალი სიგნალის მუდმივ მდგენელსა და მეორე ჰარმონიკის ამპლიტუდას შორის მუდმივი სიდიდეა. წინააღმდეგ შემთხვევაში გვაქვს III ტიპის ობიექტი.

მიღებული შედეგები შეიძლება განვაზოგადოთ უფრო რთული სტრუქტურის ობიექტებზე, აგრეთვე გავითვალისწინოთ სტოქასტიკური შემავალი და გამომავალი სიგნალები [136].

განვიხილოთ არაწრფივი ობიექტების სტრუქტურის განსაზღვრის მეთოდი, როდესაც ობიექტის შემავალი და გამომავალი სიგნალები სტაციონარული, ერგოდიკული შემთხვევითი პროცესებია. კორელაციური ანალიზი საშუალებას იძლევა განესაზღვროთ არაწრფივი ობიექტების სტრუქტურა. სიმარტივისათვის შემოვიფარგლოთ არაწრფივი ობიექტების შემდეგი სტრუქტურებით. (ნახ.17.1ა,ბ).

არაწრფივი რგოლის განტოლებაა

$$z = ax^2 + bx + c, \quad (17.38)$$

სადაც  $a, b, c$  — მუდმივი კოეფიციენტებია.

წრფივი რგოლისაგან განსხვავებით არაწრფივი რგოლის გამოსასვლელზე კორელაციური ფუნქციის გამოთვლა საკმაოდ რთული ამოცანაა.

არაწრფივი რგოლის გამოსასვლელზე კორელაციური ფუნქცია გამოვთვალოთ შემდეგი ფორმულით

$$R_z(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\tau) a_n^2, \quad (17.39)$$

სადაც

$$c_n = \int \int_{-\infty}^{\infty} Q_n(x) Q_n(x_r) W_z(x, x_r) dx dx_r, \quad (17.40)$$

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) Q_n(x) W_x(x) dx. \quad (17.41)$$

$W$  — ალბათობის განაწილების სიმკვრივეა

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (17.42)$$

$Q_n$  — ერმიტის პოლინომებია

$W_x(x, x_r)$  — ორგანზომილებიანი სიმკვრივეებია და ამ შემთხვევაში

$$c_n(\tau) = \frac{R''(\tau)}{n!}. \quad (17.43)$$

$$W_z(x, x_r) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-R^2(\tau)}} e^{-\frac{x^2 - 2R(\tau)xx_r + x_r^2}{2\sigma^2 \sqrt{1-R^2(\tau)}}} \quad (17.44)$$

გამოთვლების სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ  $\sigma = 1$  ჩავსვათ (17.38) და  $Q_n(x) = H_n(x)$  (17.41) — ში, მივიღებთ

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} (ax^2 + bx + c) H_n(x) W_x(x) dx. \quad (17.45)$$

(17.45) გამოსახულება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ax^2 \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}) dx + \\ &+ \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} bx^2 \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}) dx + \\ &+ \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}) dx. \end{aligned} \quad (17.46)$$

კენტი  $n$ -თვის (17.46) გამოსახულების პირველი და მესამე წევრები და ლუწი  $n$ -თვის (17.46)-ს. მეორე წევრი ნულის ტოლია. ინტეგრალქვეშა ფუნქციის კენტობის გამო (17.46) ლუწი  $n$ -თვის პირველ და მესამე წევრებში და კენტი  $n$ -თვის (17.46) მეორე შესაკრებში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ლუწობის გამო ინტეგრირების მუდმივები შეიძლება შევცვალოთ.

(17.46) განტოლების პირველი წევრისათვის

$$a_n = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-x^2/2} \right) dx. \quad (17.47)$$

ორჯერ ნაწილობრივი ინტეგრების შემდეგ გვექნება: (მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ პირველი წევრები საზღვრების ჩასმის შემდეგ ნულის ტოლი ხდება).

$$a_{n1} = \frac{4a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \left( e^{-x^2/2} \right) dx. \quad (17.48)$$

თუ  $n > 2$ , მაშინ ყველა კოეფიციენტები ნულის ტოლია (17.46) მეორე წევრისთვის

$$a_{n2} = -\frac{2b}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-x^2/2} \right) dx. \quad (17.49)$$

(17.46) მესამე წევრისათვის

$$a_{n3} = \frac{2c}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-x^2/2} \right) dx. \quad (17.50)$$

მოვახდინოთ (17.48), (17.49) და (17.50) უშუალო ინტეგრირება.

$n = 0$ ,  $n = 1$  და  $n = 2$  და  $\sigma^2 \neq 1$ .  $a_n$  (17.41) ფორმულაში  $f(x)$  ნაცვლად ჩაიწეროს  $f(\sigma x)$ , გვექნება

$$\begin{aligned} a_0 &= a\sigma^2 + c, \\ a_1 &= -b\sigma, \\ a_2 &= 2a\sigma^2. \end{aligned} \quad (17.51)$$

(17.39) ფორმულის თანახმად არაწრფივი რგოლის გამო-სასვლელზე კორელაციური ფუნქციის აქვს სახე:

$$R_z(\tau) = (a\sigma^2 + c)^2 + b^2 R_x(\tau) + 2a^2 B_x(\tau), \quad (17.52)$$

$$R_x(\tau) = \sigma^2 R(\tau).$$

სისტემის შესასვლელის კორელაციურ ფუნქციას აქვს სახე:

$$R_x(\tau) = \sigma^2 r^{-\alpha} |\tau|. \quad (17.53)$$

არაწრფივი რგოლის გამოსასვლელზე კორელაციურ ფუნქციას აქვს სახე:

$$R_z(\tau) = (a\sigma^2 + c)^2 + b^2 \sigma^2 e^{-\alpha |\tau|}. \quad (17.54)$$

შესაბამის ენერგეტიკულ სპექტრს აქვს სახე:

$$G_z = (a\sigma^2 + c)^2 \delta(\omega) + \frac{2b^2 \sigma^2 \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{8a^2 \sigma^2 \alpha}{4\alpha^2 + \omega^2} \quad (17.55)$$

სადაც 
$$\delta(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \text{Cos} \omega \tau d\tau.$$

წრფივი რგოლის კომპლექსურ გადაცემით ფუნქციას აქვს სახე

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + Tj\omega}; \quad (17.56)$$

წრფივი რგოლის გამოსასვლელის ენერგეტიკულ სპექტრს აქვს სახე

$$\begin{aligned} G_y(\omega) &= G_x(\omega) |W(j\omega)|^2; \\ G_y(\omega) &= (a\sigma^2 + c) \delta(\omega) + \\ &+ 2b^2 \sigma^2 \tau_0 \frac{1}{(1 + \omega^2 \tau_0^2)(1 + \omega^2 T^2)} + 2a^2 \sigma^4 \tau_0 \frac{1}{\pi}, \end{aligned} \quad (17.57)$$

სადაც 
$$\tau_0 = \frac{1}{\alpha}.$$

წრფივი რგოლის გამოსასვლელზე კორელაციურ ფუნქციას აქვს სახე:

$$R_y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_y(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega,$$

$$R_y(\tau) = (a\sigma^2 + c)^2 + 2b^2\sigma^2\tau_0 \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega \tau}{1 + \omega^2\tau_0^2} d\omega \quad (17.58)$$

$$+ 2a^2\sigma^4\tau_0 \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega \tau}{\left(1 + \frac{1}{4}\omega^2\tau_0^2\right)(1 + \omega^2T^2)} d\omega.$$

ინტეგრირების შემდეგ გვექნება

$$R_y(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_y(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega,$$

$$R_y(\tau) = (a\sigma^2 + c)^2 + b^2\sigma^2 \frac{\alpha}{1 + \alpha^2 T^2} \left[ \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|} - \right. \quad (17.59)$$

$$\left. - T e^{-\alpha|\tau|} \right] + 4a^2\sigma^4 \frac{\alpha}{1 - 4\alpha^2 T^2} \left[ \frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha|\tau|} - T e^{-\frac{|\tau|}{T}} \right].$$

რგოლების შეერთების II ვარიანტი.

წრფივი რგოლის გამოსასვლელზე კორელაციური ფუნქცია განისაზღვრება გამოსახულებით

$$R_z(\tau) = \frac{\tau_0}{\tau_0 + T} \sigma^2 \frac{e^{-\frac{|\tau|}{\tau_0}} - T e^{-\frac{|\tau|}{T}}}{\tau_0 - T}. \quad (17.60)$$

ვიპოვოთ

$$R_z(0) = \sigma^2 = \frac{\tau_0 \sigma^2 (\tau_0 - T)}{(\tau_0 + T)(\tau_0 - T)} = \frac{\tau_0}{\tau_0 + T} \sigma^2$$

ამრიგად, არაწრფივი რგოლის შესასვლელზე მოქმედებს შემთხვევითი სტაციონარული პროცესი  $\frac{\tau_0}{\tau_0 + T} \sigma^2$  დისპერ-

სიით და (17.60) სახის კორელაციური ფუნქციით. ჩავსვათ

$$\tau_0 = \frac{1}{\alpha}, \text{ მივიღებთ}$$

$$R_y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_y(\omega) \text{Cos} \omega \tau \, d\omega,$$

$$R_y(\tau) = \left( a \frac{\sigma^2}{1 + \alpha T} + c \right)^2 + b^2 \sigma^2 \frac{\alpha}{1 + \alpha^2 T^2} \left[ \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|} - \right. \quad (17.61)$$

$$\left. - T e^{-\frac{|\tau|}{T}} \right] + 2a^2 \sigma^4 \frac{\alpha^2}{(1 - \alpha^2 T^2)^2} \left[ \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|} - T e^{-\frac{|\tau|}{T}} \right]^2$$

როგორც ჩანს (17.59) და (17.61) გამოსახულებიდან I ტიპის ობიექტის გამოსასვლელი სიგნალი შეიცავს მუდმივ მდგენელს, რომელიც არ არის  $\alpha$ -ზე დამოკიდებული.  $\alpha$  განსაზღვრავს კორელაციური ფუნქციის გრაფიკის სიგანეს. II ვარიანტში კორელაციური ფუნქციის მუდმივი მდგენელი დამოკიდებულია  $\alpha$ -ზე. კორელაციური ფუნქციების მუდმივი მდგენელები არიან ობიექტის I და II სტრუქტურის განმასხვავებელი ნიშნები: ობიექტის შესასვლელზე უნდა მიეწოდოს სტაციონალური ნორმალური განაწილების მქონე სიგნალი. ჩავიწეროთ შემავალი და გამომავალი სიგნალები. შემდეგ შევცვალოთ შემავალი სიგნალის სიხშირე. ისევ ჩავიწეროთ შემავალი და გამომავალი სიგნალები. შემავალი სიგნალის სპექტრის შეცვლა შეესაბამება კორელაციური ფუნქციის გრაფიკის სიგანის შეცვლას, ე.ი.  $\alpha$ -კოეფიციენტის ცვლილებას. შემავალი და გამომავალი პროცესების საშუალებით ავაგოთ კორელაციური ფუნქციები. თუ გამომავალი სიგნალის კორელაციური ფუნქციის მუდმივი მდგენელი არ არის დამოკიდებული შემავალი სიგნალის სიხშირის სპექტრზე, გვაქვს I ტიპის ობიექტი. წინააღმდეგ შემთხვევაში საქმე გვექნება II ტიპის ობიექტებთან.



## § 17.4. სისტემების იდენტიფიცირებადობა

იდენტიფიცირებადობა წარმოადგენს იდენტიფიკაციის თეორიის ძირითად ცნებას. უხეშად რომ ვთქვათ, საკითხი მდგომარეობს იმაში, რომ დავადგინოთ გვაძლევს თუ არა იდენტიფიკაციის თეორია საშუალებას ცალსახად განისაზღვროს  $\Theta$  პარამეტრი და თანხვედბა თუ არა მიღებულ მოდელი რეალურ ობიექტს.

განსაზღვრა 17.1.  $M$  მოდელურ სტრუქტურას ეწოდება გლობალურად იდენტიფიცირებადი  $\Theta^*$  წერტილში, თუ

$$M(\Theta) = M(\Theta^*), \quad \Theta \in D_M \rightarrow \Theta = \Theta^*$$

მოდელების ტოლობა ნიშნავს მათი გადაცემითი ფუნქციების თანხვედრას.

მას შემდეგ რაც განსაზღვრულია იდენტიფიცირება წერტილში, გადავიდეთ იდენტიფიცირებაზე სიმრავლეზე.

განსაზღვრა 17.2.  $M$  მოდელურ სტრუქტურას ეწოდება მკაცრად გლობალურად იდენტიფიცირებადი, თუ ის გლობალურად იდენტიფიცირებადია  $M$  სიმრავლის ყოველ  $\Theta^*$  წერტილში. ეს განსაზღვრება საკმაოდ შეზღუდულია. მაგალითად, წრფივი სისტემებისათვის გლობალური იდენტიფიცირების თვისებები იკარგება ჰიპერზედაპირების წერტილებში, რომლებიც შეესაბამებიან დაბალი რიგის სისტემებს. ამიტომ შემოვიტანოთ უფრო სუსტი, მაგრამ რეალისტური თვისება.

განსაზღვრა 17.3.  $M$  მოდელურ სისტემას ეწოდება გლობალურად იდენტიფიცირებადი, თუ ის გლობალურად იდენტიფიცირებადია თითქმის  $\Theta^* \in D_M$  ყველა წერტილებში.

$M$  სტრუქტურის ლოკალური იდენტიფიცირება  $\Theta^*$  წერტილში მოითხოვს ისეთი  $\mathcal{E}$  არსებობას, რომ

$$M(\Theta) = M(\Theta^*), \quad \Theta \in B(\Theta^*, \mathcal{E}) \rightarrow \Theta = \Theta^*$$

სადაც  $B(\Theta^*, \mathcal{E})$  აღნიშნულია  $\Theta^*$  წერტილის  $\mathcal{E}$ -გარემო.

მაშინ ლოკალური იდენტიფიცირების განსაზღვრებები შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ 17.1, 17.2 განსაზღვრებების ანალოგიურად.

იდენტიფიცირების ცნება მოდელური სტრუქტურის ჩარჩო-  
ებში მოცემული სისტემის აღწერის ერთადერთობას წარ-  
მოადგენს. ვთქვათ,

$$F: y(t) = G_0(q)u(t) + H_0(q)e(t) \quad (17.62)$$

არის ასეთი აღწერა. ვთქვათ  $M$  არის მოდელური სტრუქ-  
ტურა

$$y(t) = G(q, \Theta)u(t) + H_0(q, \Theta)e(t), \quad (17.63)$$

მაშინ განისაზღვრება  $D_T(F, M)$  სიმრავლე  $\Theta \in D_M$  მნიშ-  
ვნელობებისა, რომელთათვისაც  $F = M(\Theta)$ , ე.ი.

$$D_T(F, M) = \{ \Theta = D_M \mid G_0(z) = G(z, \Theta), \quad (17.64)$$

$$H_0(z) = H(z, \Theta) \text{ ყველა } z\text{-თვის} \},$$

როდესაც  $F \notin M$  ეს სიმრავლე ცარიელია.

დავუშვათ, რომ ეხლა  $F \in M$ , და მაშასადამე, რომელი-  
ღაც  $\Theta_0$   $F = M(\Theta_0)$ . აგრეთვე დავუშვათ, რომ  $M$   
სტრუქტურა წარმოადგენს გლობალურად იდენტიფიცირებადს  
 $\Theta_0$  წერტილში. მაშინ

$$D_T(F, M) = \{ \Theta_0 \}. \quad (17.65)$$

მოდელური სტრუქტურის ამორჩევის ერთ-ერთ თავისებუ-  
რებად უნდა ჩაითვალოს ისეთი  $M$  ამორჩევა, რომ  $F$   
აღწერისათვის სრულდებოდეს (17.65) პირობა. ვინაიდან მომ-  
ხმარებლისათვის  $F$  უცნობია, პრაქტიკული პროცედურები  
მოითხოვენ რამდენიმე სხვადასხვა  $M$  სტრუქტურების ტეს-  
ტირებას. ჩვენს მიერ შემოტანილი იდენტიფიცირებადობის  
ცნება ხდება სასარგებლო მაჩვენებლად ისეთი  $M$  სტრუქ-  
ტურის მოძებნისას, რომლისთვისაც სრულდება (17.65)  
პირობა.

მაგალითის სახით მოვახდინოთ ე.წ. ერთგანზომილებიანი  
შავი ყუთის სტრუქტურის იდენტიფიცირება. განვიხილოთ  
ლ.ლიუნგის შემდეგი თეორემა[55].

თეორემა 17.1 განვიხილოთ  $M$  მოდელური სტრუქტურა,  
რომელიც შეესაბამება განტოლებას

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t). \quad (17.66)$$

⊖ პარამეტრების ვექტორი, მოცემულია

$$\Theta = [a_1, \dots, a_{n_a}, b_1, \dots, b_{n_b}, f_1, \dots, f_{n_f}, c_1, \dots, c_{n_c}, d_1, \dots, d_{n_d}]$$

მრავალწევრების კოეფიციენტების საშუალებით. მრავალწევრების ხარისხებია  $n_a, n_b$  და ა.შ. მოდელური სტრუქტურა წარმოადგენს ლოკალურად და გლობალურად იდენტიფიცირებადს  $\Theta^*$  წერტილში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც შესრულებულია შემდეგი პირობები:

ა)  $z^{n_a} A^*(z)$ ,  $z^{n_b} B^*(z)$  და  $z^{n_c} C^*(z)$  მრავალწევრებს არა აქვთ საერთო მამრავლი;

ბ)  $z^{n_b} B^*(z)$  და  $z^{n_f} F^*(z)$  არა აქვთ საერთო მამრავლი;

გ)  $z^{n_c} C^*(z)$  და  $z^{n_d} D^*(z)$  არა აქვთ საერთო მამრავლი

დ) თუ  $n_a \geq 1$ , მაშინ ამას გარდა, არ უნდა ჰქონდეს საერთო მამრავლები  $z^{n_f} F^*(z)$  და  $z^{n_d} D^*(z)$  მრავალწევრებს.

ვარსკვლავიანი მრავალწევრები შეესაბამებიან  $\Theta^*$  მოდელური მრავალწევრები გამოსახული (17.66) თანაფარდობით გლობალურად იდენტიფიცირებადია. თუ  $C$  და  $F$  ნულოვანი რიგის მრავალწევრებია, მაშინ შესაბამისი მოდელური სტრუქტურა მკაცრად იდენტიფიცირებადია.

## § 17.5. შემავალი სიგნალის ოპტიმალური სინთეზი

აქტიური იდენტიფიკაციის მეთოდები ითვალისწინებენ ობიექტის შესასვლელზე სპეციალური ტესტური სიგნალების მიწოდებას. მიუხედავად იმისა, რომ ირლვევა ტექნოლოგიური პროცესების ნორმალური მსვლელობა. აქტიური იდენტიფიკაციის მეთოდებს გააჩნიათ უფრო დიდი შესაძლებლობები,

ვიდრე პასიური იდენტიფიკაციის მეთოდებს. იდენტიფიკაციის რეზულტატები ძალიან არის დამოკიდებული ტესტური სიგნალის სტრუქტურაზე და პარამეტრებზე. ამრიგად, ამოცანა მდგომარეობს ისეთი შემავალი სიგნალის აგებაში, რომლის საშუალებით შეიძლება ოპტიმალურად შეფასდეს გამოსაკვლევი ობიექტის პარამეტრები. იდენტიფიკაციის პრობლემა შეიძლება დაისვას შემდეგი სახით: აუცილებელია ვიპოვოთ ოპტიმალური შემავალი ზემოქმედება და ოპტიმალური შეფასების ფუნქცია, რომლებიც საუკეთესო გზით მინიმიზაციას უკეთებს პარამეტრის შეფასების შეცდომას, შესაბამისი კრიტერიუმის გათვალისწინებით.

შემავალი სიგნალის ოპტიმალური პლანირება [55].

განვიხილოთ სისტემა ერთი შემავალი და ერთი გამოშვალის სიგნალით

$$y(t) = G(q, \Theta)u(t) + H(q, \Theta)e(t), \quad (17.67)$$

გამოვიყენოთ (17.67) ფორმულა და განვსაზღვროთ ერთ ტაქტში საშუალო ინფორმაციული მატრიცა

$$\bar{M}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} M_N = \frac{1}{k_0} \bar{E}[\psi(\psi, \Theta_0)\psi^T(t, \Theta_0)], \quad (17.68)$$

სადაც

$$\frac{1}{k_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f'_c(x)]^2}{f_c(x)} dx. \quad (17.69)$$

$f_c(x)$ -ქე შმარიტი გაახლების სიმკვრივის ფუნქციაა. მნიშვნელოვანი შედეგი ამ გამოსახულებიდან იმაშია, რომ  $I(\varepsilon)$  ნორმის ამორჩევა და გაახლების განაწილება მოქმედებს მხოლოდ შემავალი სიგნალისაგან დამოუკიდებელ სკალარულ  $I(\varepsilon, \Theta, t) = -\ln f_c(\varepsilon, \Theta, t)$  მამრავლზე. გაუსის განაწილების შემთხვევაში

$$I(\varepsilon, \Theta, t) = -\ln f_c(\varepsilon, \Theta, t) = Const + \frac{1}{2} \ln \sigma + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\sigma}, \quad (17.70)$$

სადაც  $\sigma$  — დისპერსიაა.

ზომის ოპტიმიზაცია დამყარებული  $\bar{M}(x)$ , მოიცავს  $P_0(x)$ -თვის კრამერ-რაოს ქვედა საზღვარს

$$P_0(x) = k(l) \left[ \bar{E} \psi(t, \Theta_0) \psi^T(t, \Theta_0) \right]^{-1} \quad (17.71)$$

$$k(l) = \frac{E \left[ l'(l_0(t)) \right]^2}{\left[ E l''(l_0(t)) \right]^2}, \quad (17.72)$$

სადაც  $(l(\varepsilon, \Theta, t))$  —საერთო კრიტერიუმი. (17.73)

$$l' \text{ და } l'', \quad l(\varepsilon, \Theta, t) = l(\varepsilon) \quad (17.74)$$

(17.74) პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებია  $l$  არგუმენტის მიხედვით, ასევე  $P_0(x)$  ყველა ასიმპტოტური გამოსახულებები

$$l'(x) = \left[ \ln f_e(x) \right]^T = f_e^T(x) / f_e(x). \quad (17.75)$$

$l_0(x)$  არის წარმოებული  $\varepsilon$ -მიხედვით.

$\varepsilon(t, \Theta_0) = l_0(t)$  შეიძლება განვიხილოთ, როგორც დამოუკიდებელი შემთხვევითი ვექტორების თანამიმდევრობა  $f_e(x)$  განაწილების სიმკვრივით. აღვნიშნოთ ეს მათემატიკური ლოდინი  $M_N$ .

პლანირების კრიტერიუმი მდგომარეობს  $x$  ისეთი მნიშვნელობის განსაზღვრას, რომლის დროსაც მინიმიზაცია უკეთდება კოვარაციის  $P_0(x)$  მატრიცას, მაქსიმიზირდება

$\bar{M}(x)$  ინფორმაციული მატრიცა. ჩვეულებრივად ეს ოპტიმიზაცია არ შეიძლება შესრულდეს მატრიცული სახით და უნდა მივმართოთ სკალარულ ზომას. ტიპური მაგალითია

$$\alpha(\bar{M}) = \text{tr} \left[ \bar{M}^{-1}(x) c \right], \quad (17.76)$$

ან

$$\alpha(\bar{M}) = \det \bar{M}^{-1}(x) = \frac{1}{\det \bar{M}(x)}, \quad (17.77)$$

ან

$$\alpha(\bar{M}) = \max \lambda_i(\bar{M}^{-1}(x)) = \frac{1}{\min \lambda_i(\bar{M}(x))}, \quad (17.78)$$

სადაც  $\lambda_i(A)$   $A$  მატრიცას საკუთრივი მნიშვნელობებია შესაბამისად ლაპარაკობენ  $A, D$  და  $E$  ოპტიმლობაზე. გამოვიყენოთ კოვარიაციის მატრიცას გამოსახულება

$$\text{Cov} \hat{\Theta}_N \sim \frac{1}{N} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\phi_v(\omega)} T'(e^{j\omega}, \Theta_0) \phi_{x0}(\omega) T'(e^{j\omega}, \Theta_0) d\omega \right]^{-1} \quad (17.79)$$

$$T'(q, \Theta) = \left[ \frac{d}{d\Theta} G(q, \Theta) \frac{d}{d\Theta} H(q, \Theta) \right]. \quad (17.80)$$

თუ გამოვიყენებთ  $\bar{M}(x)$  მივიღებთ

$$\bar{M}(x) = \frac{1}{k_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ G'_\Theta(e^{j\omega}, \Theta_0) [G'_\Theta(e^{-j\omega}, \Theta_0)]^T, \quad (17.81)$$

$$\phi_u(\omega) + H'_\Theta(e^{j\omega}, \Theta_0) [H'_\Theta(e^{-j\omega}, \Theta_0)]^T \} \lambda_0 / \phi_v(\omega) d\omega.$$

აქ გათვალისწინებულია პირობები, როდესაც  $u$  და  $l_0$  დამოუკიდებლობა.  $G'_\Theta$  და  $H'_\Theta$ ,  $G$  და  $H$  გრადიენტების  $d \times 1$  ვექტორებია. შემოვიტანოთ

$$\bar{M}(x) = \frac{(2\pi k_0)^{-1} G'_\Theta(e^{-j\omega}, \Theta_0) [G'_\Theta(e^{-j\omega}, \Theta_0)]^T}{\phi_v(\omega)}; \quad (17.82)$$

$$M_e = \frac{1}{2\pi k_0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{H'_\Theta(e^{j\omega}, \Theta_0) [H'_\Theta(e^{-j\omega}, \Theta_0)]^T}{\phi_v(\omega)} d\omega. \quad (17.83)$$

მაშინ გვექნება

$$\bar{M}(x) = \bar{M}(\phi_u) = \int_{-\pi}^{\pi} \bar{M}(\omega) \phi_u(\omega) d\omega + M_e. \quad (17.84)$$

ეს გამოსახულება გვაძლევს წარმოდგენას იმის შესახებ, თუ როგორ მოქმედებს შემავალი სიგნალის სპექტრი ინ-

ფორმაციულ მატრიცაზე (გახსნილი სისტემისათვის). იმისათვის რომ მივალწიოთ ინფორმაციული მატრიცას დიდ მნიშვნელობას, საჭიროა შემავალი სიგნალის ენერგია დავაგროვოთ იმ სიხშირეებზე, რომლებზედაც  $\bar{M}(\omega)$  დიდია.

უნდა შევნიშნოთ, რომ  $\bar{M}(x)$  დამოკიდებულია მართო შემავალი სიგნალის სპექტრზე. ამრიგად, ერთმანეთისაგან მკვეთრად განსხვავებული სიგნალები, ერთნაირი სპექტრით, მოგვცემენ ერთნაირ ინფორმაციულ მატრიცას. ეს რეზულტატი ძალიან სასარგებლოა, ვინაიდან აქედან გამომდინარეობს, რომ შეიძლება განისაზღვროს საუკეთესო შემავალი სპექტრი, ხოლო შემდეგ მოხდეს ამ სპექტრის რეალიზაცია. მხედველობაში მიიღება სიგნალების გენერაციის პრაქტიკული ასპექტები და შეზღუდვები შესასვლელზე. ეს რეზულტატი მკაცრად აყალიბებს ჩვენს მიერ ობიექტის სტრუქტურის სტატისტიკურ მეთოდს. შემავალ სიგნალის სიმძლავრეზე შეზღუდვების არ არსებობისას ინფორმაციული მატრიცა შეიძლება გაეზადოთ როგორც გვინდა დიდი. ამიტომ რეალური პლანირებისათვის მხედველობაში მისაღებია შეზღუდვები: ფიზიკური, ეკონომიკური, უსაფრთხოების ხასიათის. მათ შეიძლება ჰქონდეთ შემდეგი სახეები:

$$X_1: \quad (C_1 \leq u(t) \leq C_2 \quad \forall t),$$

$$X_2: \quad \bar{E}u^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_u(\omega) d\omega \leq C,$$

$$X_3: \quad \bar{E}y^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ |G_0(e^{i\omega})|^2 \phi_u(\omega) + \lambda_0 |H_0(e^{i\omega})|^2 \right] d\omega \leq C. \quad (17.87)$$

საინტერესოა ბოლო ორი შემთხვევა, ვინაიდან ისინი უშუალოდ არინ დაკავშირებული შემავალი სიგნალის სპექტრთან. ახლა შემავალი სიგნალის ოპტიმალური პლანირება შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ როგორც ამოცანა

$$\min_{\phi_u(\omega)} \alpha(\bar{M}(\phi_u)) \quad \text{მოძებნისა} \quad , \quad (17.88)$$

(17.86) და (17.87) გათვალისწინებით, სადაც  $\alpha(M)$  (17.76)–(17.78) ერთ-ერთი ზომაა. ჩვეულებრივად, ეს პრობლემა იხსნება რიცხვითი მეთოდებით. (17.88)–დან მიღებული

$\bar{M}$  პრაქტიკული გამოყენებისათვის მხედველობაში მისაღებია დამოკიდებულება  $\Theta_0$  ნამდვილი პარამეტრების ვექტორებზე:  $\bar{M} = \bar{M}(\phi_{\mu}, \Theta_0)$ . ეს ცხადია (17.82)–(17.84) განტოლებებიდან. იმისათვის, რომ განისაზღვროს ოპტიმალური შემავალი სიგნალი, უნდა ვფლობდეთ ინფორმაციას ნამდვილი სისტემის შესახებ. პრაქტიკაში ეს პრობლემა გადაილახება (17.82) და (17.83)–ში  $\Theta_0$ –ის საუკეთესო აპრიორული შეფასების პარამეტრის შეცვლით.

(17.88) გამოყენება დიდ სირთულეებთანაა დაკავშირებული, პირველ რიგში ეს ეხება  $\phi_{\mu}(\omega)$ –ით ფუნქციის მინიმიზაციას. ამოცანის გამარტივების თვალსაზრისით გამოვიყენოთ  $\phi_{\mu}(\omega)$  სასრულო განზომილებიანი პარამეტრიზაცია:

$$\phi_{\mu}(\omega, \rho); \quad \rho \in D_{\rho} \subset R^s \quad (17.89)$$

და  $\bar{M}(\rho) = \bar{M}(\phi_{\mu}(\cdot, \rho))$  ამოცანა მიიღებს სახეს

$$\min_{\rho \in D_{\rho}} \alpha(\bar{M}(\rho)). \quad (17.90)$$

(17.90) ამოცანა არის სასრულო განზომილებიანი მინიმიზაციის სტანდარტული ამოცანა. ერთადერთი ამოცანა მდგომარეობს იმაში, თუ როგორ ამოვარჩიოთ (17.89). იდეალში პარამეტრიზაცია არ უნდა მოქმედებდეს ამოცანის ამოხსნაზე. ჩვეულებრივად შემავალი სიგნალის პარამეტრიზაცია რეალიზდება სინუსების და სხვა სახის სიგნალების სასრულო ჯამების სახით.

გამომდინარე პრაქტიკული რეალობიდან შეეჩერდეთ როგორი ფორმა უნდა ჰქონდეს შემავალ სიგნალს. (შეზღუდვების გათვალისწინებით). ყველაზე უკეთესია (ვინაიდან სინუსოიდებს აქვთ შეზღუდული ამპლიტუდები). ამოვიჩიოთ შემავალი სიგნალის სახედ–რობითი შემავალი სიგნალი

$$u(t) = u_1, \quad \text{ან} \quad u_2, \quad (17.91)$$

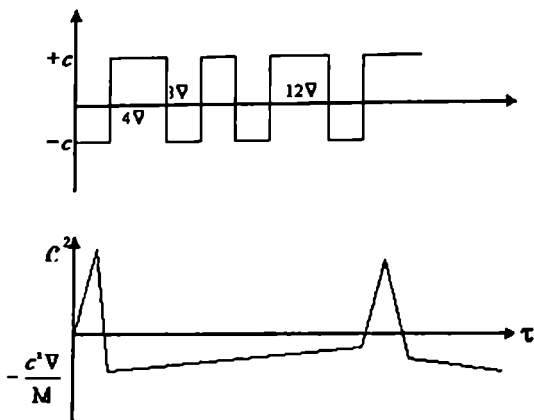


სადაც  $u_1$  და  $u_2$  —შემავალი სიგნალის დასაშვები დონეებია. გადასვლა ერთი დონიდან მეორეზე შეიძლება იყოს შემთხვევითი, მაგალითად

$$u(t) = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \text{Sign}(R(q(u(t-1) + W(t)))) \quad (17.92)$$

სადაც  $W(t)$  ეგმოს მიერ გენერირებული თეთრი ხმაურია. ასეთ სიგნალს ვუწოდოთ შემთხვევითი ორობითი სიგნალი, ამასთან სხვადასხვა სპექტრები შეიძლება შეიარჩეს შესაბამისი  $R(q)$  ფილტრის შერჩევით. (ნახ.17.2).

ეს რეზულტატი შეიძლება გამოვიყენოთ შეკრული სისტემებისათვის.



ნახ.17.2

შემავალი სიგნალის ოპტიმალური პლანირება დამოკიდებულია ბევრ სიძნელეებზე. ზევით ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ  $\bar{M}(\rho)$  დამოკიდებულია ჰესმარიტი სისტემის პარამეტრების შეფასებაზე. რაც ყველაზე მთავარია შემავალი სიგნალის ოპტიმიზაცია დამოკიდებულია სისტემის სტრუქტურაზე.

ახლა განვიხილოთ მართვადი და დაკვირვებადი დისკრეტული დინამიკური სისტემა ერთი შემავალი და გამომავალი სიგნალით

$$x(k+1) = \phi(a)x(k) + \gamma(a)u(k), \quad (17.93)$$

$$y(k) = h^T(a)x(k) + \omega(k), \quad (17.94)$$

სადაც  $\omega(k)$ —გაუსის თეთრი ხმაურია სისტემის გამოსავლელზე, რომლისთვისაც

$$E\{\omega(k)\} = 0, \quad E\{\omega(k)\omega(j)\} = r\delta_{kj}. \quad (17.95)$$

ალბათობის სიმკვრივე  $P(y^N/a)$  განისაზღვრება გამოსახულებით

$$P(y^N/a) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |R|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[y_N - \psi^T h]^T R^{-1}[y_N - \psi^T h]\right\}, \quad (17.96)$$

ხოლო  $\psi^T$  მატრიცა შედის მათემატიკური ლოდინის ფორმულაში და აქვს სახე

$$\bar{y}^N = E\{\psi^T h\},$$

$$\psi^T = \psi^T[x(0), a, u_N].$$

ამასთან  $u_N^T = [u(0), u(1), \dots, u(N-1)]$ .

ხმაურის ვექტორის კოვარიაციულ  $N \times N$  მატრიცას აქვს სახე

$$R = \begin{bmatrix} r & 0 \\ & r \\ 0 & r \end{bmatrix}.$$

(17.93) და (17.94) განტოლებისათვის კრამერ-რაოს განტოლებას აქვს სახე

$$\text{var}[a(y^N) - a] \geq 1 / \left\{ \left[ \frac{\partial [\psi^T h]^T}{\partial a} R^{-1} \left[ \frac{\partial [\psi^T - h]^T}{\partial a} \right] \right] \right\}. \quad (17.97)$$

ოპტიმალური შემავალი სიგნალი შეიძლება მივიღოთ, თუ დისპერსიის მინიმიზაციას მოვახდენთ  $u_N$  შემავალი სიგნალის შერჩევით. შემავალი სიგნალი არის შესაფასებელი როგორც  $a$  პარამეტრის ფუნქცია, ამიტომ ოპტიმალური შემავალი სიგნალის ფორმირებისას უნდა მხედველობაში მივიღოთ  $a$ -ს

აპრიორული მნიშვნელობა. გამოიყენება იტერაციული პროცედურა.

თუ შესასვლელზე მოქმედებს ხმაური, მაშინ კრამერ-რაოს უტოლობას აქვს სახე

$$\begin{aligned} \text{var} [\hat{a}(y^N) - a] \geq & 1 / \{ U_N^T A^T W^{-1} A u_N + \\ & + 2 U_N^T A^T W^{-1} k x^*(0) + x^*(0)^T k^T W^{-1} k x^*(0) + \\ & + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \left( W^{-1} \frac{\partial W}{\partial a} \right)^2 \right] \}. \end{aligned} \quad (17.98)$$

შემავალ სიგნალზე ენერგეტიკული შეზღუდვების გათვალისწინებისას

$$U_N^T U_N \leq \rho \quad x^*(0) = 0. \quad (17.99)$$

ოპტიმალური შემავალი სიგნალი  $u_N^*$  გამოითვლება როგორც საკუთრივი ვექტორი, რომელიც შეესაბამება  $A^T W^{-1} A$  მაქსიმალურ საკუთრივ მნიშვნელობას

$$u_N^* = \sqrt{\rho \varepsilon} \left[ \lambda_{\max} A^T W^{-1} A \right]. \quad (17.100)$$

### § 17.6. შემავალი სიგნალის ოპტიმალური სინთეზი არაწრფივი ობიექტის იდენტიფიკაციისას (რ.კალაბას მეთოდი [111])

განვიხილოთ არაწრფივი დინამიკური სისტემა

$$\dot{x} = f(x, u, a, t) \quad x(0) = c. \quad (17.101)$$

უცნობი  $a$  პარამეტრის შეფასება ხდება შემდეგი ჯამის მინიმიზაციით

$$S = \sum_{i=1}^N [x(t_i, a) - b_i]^2, \quad (17.102)$$

სადაც  $x(t)$ —სისტემის მდგომარეობაა,  $u(t)$ —მართვაა,  $b_i$ —დაკვირვებებია  $t_i (i = 1, \dots, N)$  მომენტში. აუცილებელია შეფასდეს  $\hat{a}$  პარამეტრების შეფასების მგრძობობიარობა  $b_i$  დაკვირვებებთან. სისტემის იდენტიფიკაციისას (17.102) ჯამი მინიმიზირ-

დება დიფერენცირების გზით  $a$ -ს მიხედვით და მიღებული რეზულტატის ნულთან გატოლებით

$$S_a = \sum_{i=1}^N 2[x(t_i, a) - b_i]x_a(t_i, a) = 0, \quad (17.103)$$

სადაც  $x_a$  მიიღება (17.101)-ის დიფერენცირებით  $a$ -ს მიხედვით

$$\dot{x}_a = \frac{\partial \dot{x}}{\partial a} = f_x x_a + f_a, \quad x_a(0) = 0. \quad (17.104)$$

$S_a$  წარმოადგენს  $\hat{a}$  შეფასების და  $b_i$  დაკვირვების ფუნქციას

$$S_a = S_a(\hat{a}, b_1, b_2, \dots, b_N), \quad (17.105)$$

$$\hat{a} = \hat{a}(b_1, b_2, \dots, b_N). \quad (17.106)$$

გავაწარმოთ (17.103)  $b_i$  გვეჭება

$$S_{aa} \frac{\partial \hat{a}}{\partial b_i} + S_{ab_i} = 0, \quad (17.107)$$

სადაც

$$S_{aa} = \sum_{i=1}^N 2x_a^2(t_i, a) + \sum_{i=1}^N 2[x_a^2(t_i, a) - b_i]x_{aa}(t_i, a), \quad (17.108)$$

$$S_{ab_i} = 2x_a(t_i, a). \quad (17.109)$$

ამოვხსნათ (17.107) განტოლება, მივიღებთ

$$\frac{\partial \hat{a}}{\partial b_i} = \frac{S_{ab_i}}{S_{aa}} = \frac{x_a(t_i, a)}{\sum_{i=1}^N x_a^2(t_i, a) + \sum_{i=1}^N [x_a(t_i, a) - b_i]x_{aa}(t_i, a)}, \quad (17.110)$$

სადაც  $x, x_a$  და  $x_{aa}$  არიან შემდეგი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნები

$$\dot{x} = f(x, u, a, t), \quad x(0) = c. \quad (17.111)$$

$$\dot{x}_a = f_x x_a + f_a, \quad x_a(0) = 0. \quad (17.112)$$

$$\dot{x}_{aa} = f_{xx} x_a + f_x x_{aa} + f_{aa}, \quad x_{aa}(0) = 0. \quad (17.113)$$

მივიღოთ, რომ  $x(t_i, a)$  ახლოსაა  $b_i$ , ამიტომ (17.110)-ში მნიშვნელის მეორე წევრი ძალიან მცირეა. ამიტომ

$$\frac{\partial \hat{a}}{\partial b_i} = \frac{x_a(t_i, a)}{\sum_{i=1}^N a_a^2(t_i, a)}. \quad (17.114)$$

(17.114) გვიჩვენებს, რომ  $x_a(t)$  მგრძობიარობის გაზრდა ამცირებს  $\partial \hat{a} / \partial b_i$  მგრძობიარობას, რაც თავის მხრივ მინიმიზაციას უკეთებს დაკვირვებებში ხმაურს, ან ამცირებს შეშფოთების გავლენას პარამეტრების შეფასებაზე.

(17.102) გამოსახულების მინიმიზაციისათვის გავაწრფივოთ (17.101) დიფერენციალური განტოლება. ამასთან  $k+1$  აპროქსიმაციას აქვს სახე

$$\begin{aligned} \dot{x}_{k+1} &= f_k + (a_{k+1} - a_k) \left. \frac{\partial f}{\partial a} \right|_k + \\ &+ (x_{k+1} - x_k) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_k, \quad x_{k+1}(0) = c. \end{aligned} \quad (17.115)$$

(17.115)-ის ამოხსნაა

$$x_{k+1}(t) = p(t) + a_{k+1} h(t). \quad (17.116)$$

$p(t)$  არის შემდეგი განტოლების ამონახსნი

$$\dot{p}(t) = f_k + a_k \left. \frac{\partial f}{\partial a} \right|_k + (p - x_k) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_k, \quad p(0) = c. \quad (17.117)$$

ხოლო  $h(t)$  ამონახსნია

$$\dot{h}(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial a} \right|_k + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_k h(t), \quad h(0) = c. \quad (17.118)$$

ჩავსვათ (17.116) (17.102)-ში, მივიღებთ

$$s = \sum_{i=1}^N [p(t_i) + a_{k+1} h(t_i) - b_i]^2 \quad (17.119)$$

$s$ -ის მინიმუმის პირობაა

$$\frac{\partial s}{\partial a_k} = 2 \sum_{i=1}^N h(t_i) [p(t_i) + a_{k+1} h(t_i) - b_i] = 0, \quad (17.120)$$

ამონახსნი  $a_{k+1}$  მიმართ ტოლია

$$a_{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^N [b_i - p(t_i)] h(t_i)}{\sum_{i=1}^N h^2(t_i)}. \quad (17.121)$$

ტიპური ციკლისათვის  $p$  და  $h$  განტოლებები ინტეგრირდება და შედეგები დაიმახსოვრება, როგორც დროის ფუნქციები  $t=0$   $t=N$ -მდე. ყოველ  $t_i$  წერტილში ჯამები (17.121)-ში განახლდებიან. (17.121) განტოლება ამოიხსნება მუდმივი  $a_{k+1}$ -თვის, როდესაც  $t=N$  შემდეგ  $x_{k+1}(t)$  შეფასდება (17.116)-ით და შედეგი დაიმახსოვრება როგორც დროის ფუნქცია. ვისარგებლოთ  $a$ -ს ახალი და  $x(t)$  დამახსოვრებული მნიშვნელობებით. პროცესი განმეორდება შემდეგი აპროქსიმაციის მიღებამდე.

ოპტიმალური შემავალი სიგნალის სინთეზისათვის გამოვიყენოთ კრიტერიუმი

$$M = \max_u \int_0^T x_a^2 dt. \quad (7.122)$$

შემავალი სიგნალის ენერგია შეზღუდულია

$$E = \int_0^T u^2 dt. \quad (17.123)$$

ეს ექვივალენტურია გამოსახულების

$$I = \max_u \int_0^T (x_a^2 - \lambda u^2) dt, \quad (17.124)$$

სადაც  $\lambda$  — ლაგრანჟის მამრავლია.

ექსპერიმენტში, როდესაც შესაფასებელი პარამეტრის ნამდვილი მნიშვნელობა უცნობია, აუცილებელია ვიპოვოთ  $a$ -ს საწყისი მნიშვნელობისათვის ოპტიმალური შემავალი სიგნალი. თუ აუცილებელია შემდეგ ოპტიმალური შესასვლელი ზუს-

ტდება. მას შემდეგ რაც იდენტიფიკაციის შედეგად მიიღება უცნობი პარამეტრის გაუმჯობესებული შეფასება თუ აუცილებელია ოპტიმალური შესასვლელი ზუსტდება.

განვიხილოთ წრფივი დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x} = -ax + u, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (17.125)$$

სადაც

$$u = k \sin \omega t \quad (17.126)$$

უცნობი  $a$  პარამეტრის შეფასებისათვის გამოვიყენოთ (17.121) განტოლება  $b_i$  დაკვირვებების საფუძველზე

$$b_i = x(t_i) + v(t_i),$$

სადაც  $v(t)$ —გაუსის პროცესია ნულოვანი საშუალო მნიშვნელობით.

შეფასების მგრძობიარობისათვის დაკვირვებების მიმართ შეიძლება გამოვიყენოთ (17.110) გამოსახულება.

ამას გარდა, მგრძობიარობა შეიძლება გამოვთვალოთ, თუ გამოვიყენებთ ოპტიმალურ შესასვლელს. გავაწარმოთ (17.125)  $a$ -ს მიხედვით, გვექნება

$$\dot{x}_a = -x - ax_a, \quad x_a(0) = 0. \quad (17.128)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები

$$x_1 = x, \quad x_2 = x_a, \quad (17.129)$$

მაშინ

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + u, \quad (17.130)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - ax_2. \quad (17.131)$$

თუ გამოვიყენებთ ლაგრანჟის მამრავლებს, თვისობრიობის კრიტერიუმი დადის შემდეგ სახეზე

$$I' = \int_0^T F dt, \quad (17.132)$$

სადაც

$$F = x_2^2 - \lambda u^2 + \lambda_1(t) [\dot{x}_1 + ax_1 - u] + \lambda_2(t) [\dot{x}_2 + x_1 - ux_2] \quad (17.133)$$

და

$$x_1(0) = c, \quad x_2(0) = 0. \quad (17.134)$$

ოპტიმალური შესასვლელი არის მართვის ფუნქცია, რომელიც მაქსიმიზაციას უკეთებს (17.132)-ს და მიიღება ეილერ-ლაგრანჟის განტოლების დახმარებით. ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებებს და შესაბამის ტრანსვერსალობის პირობებს აქვთ სახე:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \right|_{t=T} = 0. \quad (17.135)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} \right|_{t=T} = 0. \quad (17.136)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right|_{t=T} = 0. \quad (17.137)$$

მათ ემატებათ (17.130) და (17.131) განტოლებები. საბოლოოდ მივიღებთ ორწევრტილოვანი სასაზღვრო ამოცანების განტოლებებს:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 - \frac{1}{2\lambda} \lambda_1, & x_1(0) &= c. \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - ax_2, & x_2(0) &= 0. \\ \dot{\lambda}_1 &= -a\lambda_1 - \lambda_2, & \lambda_1(T) &= 0. \\ \dot{\lambda}_2 &= -2x_2 + a\lambda_2, & \lambda_2(T) &= 0. \end{aligned}$$

სადაც  $u = -\frac{1}{2\lambda} \lambda_1$ .

ამონახსნი მიიღება, როგორც რიცხვითი, ასევე ანალიზური მეთოდების საშუალებით.

როგორც ვიცით ორწევრტილოვანი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა საკმაოდ რთული ამოცანაა. შედარებით მარტივად მოიძებნება ოპტიმალური შესასვლელი სიდიდეები, თუ გამოვიყენებთ კავშირს ინვარიანტულობის პრინციპსა და შენახვის კანონებს შორის. ეს კავშირი მოიცავს ბუნებისმეტყველების სამ ძირითად პრინციპს: სიმეტრიის პრინციპს, ვარიაციულ პრინციპებს და შენახვის კანონებს[27],[34].

თანამედროვე გაგება აღნიშნული ტერმინების შედეგია:  
 ა) სიმეტრიის პრინციპები;



ჰვეილის გაგებით "სიმეტრიული ეწოდება ისეთ საგანს, რომელიც შეიძლება რაღაცნაირად ვცვალოთ, რეზულტატად მიიღება იგივე, საიდანაც დავიწყეთ." [137].

ბ) შენახვის კანონები;

ძალიან ხშირად მოძრაობის კანონები წარმოადგენენ რომელიმე ვარიაციული ამოცანის ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებებს. ამასთან შენახვის კანონები წარმოადგენენ სიმეტრიულობის პრინციპის გამოვლენის შედეგს. ეს პრინციპი ჩამოაყალიბა ე. ნეტერმა თავის ცნობილ თეორემებში [27]. ეს თეორემები საშუალებას იძლევა მოცემული ლაგრანჟის ფუნქციისას ვიპოვოთ მოძრაობის ადიტიური ინტეგრალები, ე.წ. პირველი ინტეგრალები, რომლებიც დამოკიდებული არიან კოორდინატებზე და სიჩქარეებზე. მათ მოსაძებნად არ არის საჭირო მოძრაობის განტოლების ამოხსნა. პირველი ინტეგრალები შეესაბამება შენახვის კანონებს.

სხვანაირად რომ ვთქვათ: მოძრაობის ოპტიმალური ტრაექტორიის გასწვრივ სრულდება შენახვის კანონები. ასე მაგალითად:

1. ენერჯიის მუდმივობის კანონი გამომდინარეობს ჰამილტონის ფუნქციის სიმეტრიულობით დროითი გადაადგილების მიმართ.

2. იმპულსის მუდმივობა გამომდინარეობს ჰამილტონის ფუნქციის სიმეტრიულობით ფიზიკური კოორდინატის მიმართ.

3. იმპულსის მომენტის შენახვის კანონი გამომდინარეობს ჰამილტონის ფუნქციის სიმეტრიულობით სივრცითი მობრუნების მიმართ.

ჩვენ გამოვიყენოთ შემდეგი პროცედურა:

ვიპოვოთ ის ფუნქციონალი, რომლისთვისაც სისტემის მოძრაობის განტოლება წარმოადგენს ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებას. შემდეგ მოვძებნოთ შენახვის კანონი (პირველი ინტეგრალი). ამისათვის გამოვიყენოთ ერთი რეზულტატი: სისტემის ოპტიმალური მოძრაობისას სრულდება შენახვის კანონები. [35], [34]. ეს რეზულტატები ჩვენ გამოვიყენებთ ძალიან ფორმალურად, ვინაიდან ამ პრობლემის დროს შესწავლა მოითხოვს ჯგუფთა თეორიის გამოყენებას, რაც სცილდება წიგნის შესაძლებლობებს.

განვიხილოთ ობიექტი, რომელიც აღიწერება რიკატის განტოლებით

$$\dot{x} = f(x, u, w, t) = Ax^2 + Bx + C + U \quad (17.138)$$

$A, B, C$  — უცნობი კოეფიციენტებია

$u_a$  — მართვანა,  $w_k$  — პარამეტრებია.

უცნობი  $w_k$  პარამეტრები შეფასდება შემდეგი ჯამის მინიმიზაციით

$$S = \sum_{i=1}^N [x(t_i, w_k) - b_i]^2, \quad (17.139)$$

სადაც  $x(t)$  — მდგომარეობაა,  $b_i$  — მთლიანად დაკვირვებადი  $x(t_i, w_k)$  მნიშვნელობებია.  $t_i (i=1, \dots, N)$ . აუცილებელია შევასწავოთ  $w_k$  პარამეტრის მგრძობიარობა  $b_i$  დაკვირვების მიმართ. სისტემის იდენტიფიკაციისას ხდება (17.139) ჯამის მინიმიზაცია. ამისათვის ის უნდა გავაწარმოოთ  $w_k$ -თი დაგაუტოლოთ ნულს

$$S_{w_k} = \sum_{i=1}^N 2[x(t_i, w_k) - b_i] x_{w_k}(t_i, w_0) = 0, \quad (17.140)$$

სადაც

$$x_{w_k} = \frac{\partial x}{\partial w_k} = f_k x_{w_k} + f_{w_k} x_{w_k} \quad (17.141)$$

$S_{w_k}$  წარმოადგენს  $\hat{w}_k$  შეფასების და  $b_i$  დაკვირვების ფუნქციას

$$S_{w_k} = S_{w_k}(\bar{w}_k, b_1, \dots, b_N).$$

თუ შევამცირობთ  $\frac{\partial w_k}{\partial b_i}$  მგრძობიარობას, რაც თავის

მხრივ მინიმიზაციას უკეთებს დაკვირვებებში პარამეტრების შეფასებაზე ხმაურის გავლენას. ამასთან დაკავშირებით (17.139) კრიტერიუმი წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$I = \max_u \int_0^T (w_k - \lambda u^2) dt. \quad (17.142)$$

(17.141) წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\begin{aligned}\dot{x}_{w_1} &= (2Ax + B) \frac{\partial x}{\partial A} + x^2, \\ \dot{x}_{w_2} &= (2Ax + B) \frac{\partial x}{\partial B} + 1, \\ \dot{x}_{w_3} &= (2Ax + B) \frac{\partial x}{\partial C_1} + 1.\end{aligned}\tag{17.143}$$

(17.143) გამოსახულებიდან განვსაზღვროთ

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial A} &= \frac{x^2 - \dot{x}_{w_1}}{2Ax + B}, \\ \frac{\partial x}{\partial c_1} &= \frac{1 - \dot{x}_{w_3}}{2Ax + B}, \\ \frac{\partial x}{\partial B} &= \frac{x - \dot{x}_{w_2}}{2Ax + B}, \quad c_1 = c + u.\end{aligned}\tag{17.144}$$

თუ გავითვალისწინებთ (17.143), შეგვიძლია მივიღოთ ენერჯის განტოლებები, რომლებიც შეესაბამებიან (17.144);

$$\begin{aligned}E_1 &= \int_0^T \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial A} \right)^2 - \lambda u^2 \right] dt, \\ E_2 &= \int_0^T \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial B} \right)^2 - \lambda u^2 \right] dt, \\ E_3 &= \int_0^T \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial C} \right)^2 - \lambda u^2 \right] dt.\end{aligned}\tag{17.145}$$

სადაც,  $\lambda$  ლაგრანჟის მამრაველია და ამ შემთხვევაში  $\lambda = 1$ . ღია სისტემისათვის შენახვის კანონები საერთოდ არ სრულდებიან. მაგრამ ამ სისტემის მოძრაობისას გარე ველში, თუ ველი ხასიათდება გარკვეული სიმეტრიით, შეიძლება შესრულდეს შენახვის გარკვეული კანონები. ასე მაგალითად, თუ ველი არ არის დამოკიდებული დროზე, მაშინ მასში მოთავსებული სისტემისათვის სრულდება ენერჯის მუდმივობის კანონი. თუ ველი არ უშვებს არაცვალებად გადაადგი-

ლებებს, მაშინ სრულდება იმპულსის პირობები. თუ ბრუნვა  
 ხდება რომელიღაც ღერძის გარშემო, მაშინ სრულდება  
 მომენტის პირობები.

საერთო ენერგია ტოლია

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4. \quad (17.146)$$

ენერგიის მუდმივობის კანონი შეესაბამება (17.138)-(17.145)  
 სისტემას

$$E_w = \frac{\dot{x}^2}{2} + \int f_w(x, w, t) dt,$$

სადაც  $\frac{\dot{x}^2}{2}$  კინეტიკური და  $\int f_w(x, w, t) dt$  პოტენციალური  
 ენერგიებია.

$$E_1 = \frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^T (Ax^2 + Bx + c_1) dt =$$

$$= \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + c_1 x,$$

$$E_2 = \frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^T \left[ (2Ax + B) \frac{\partial x}{\partial A} + x^2 \right] dt =$$

$$= \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\partial x}{\partial A} \left( Ax^2 + Bx + \frac{x^3}{3} \right),$$

$$E_3 = \frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^T \left[ (2Ax + B) \frac{\partial x}{\partial B} + x \right] dt =$$

$$= \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\partial x}{\partial B} (Ax^2 + Bx) + \frac{x^2}{2},$$

$$E_4 = \frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^T \left[ (2Ax + B) \frac{\partial x}{\partial C_1} + 1 \right] dt =$$

$$= \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\partial x}{\partial C_1} (Ax^2 + Bx) + x. \quad (17.147)$$

ოპტიმალური შემავალი ზემოქმედების მოძებნა დაკავშირებულია შემდეგ პროცედურებთან:

თუ გავითვალისწინებთ (17.144)-(17.149) მივიღებთ

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4.$$

$$E = 2\dot{x}^2 + \frac{A+1}{3}x^3 + \left[ \frac{B+1}{2} + A \left( \frac{\partial x}{\partial A} + \frac{\partial x}{\partial B} + \frac{\partial x}{\partial C_1} \right) \right] x^2 + \left[ C_1 + 1 + B \left( \frac{\partial x}{\partial A} + \frac{\partial x}{\partial B} + \frac{\partial x}{\partial C_1} \right) \right] x,$$

სადაც

$$\frac{\partial x}{\partial A} + \frac{\partial x}{\partial B} + \frac{\partial x}{\partial C_1} = \frac{3}{4} \frac{A+B}{A^2} + \sqrt{s/4B^2 - 12A(c_1 - 1)},$$

$$\left[ 18(c_1 - 1) + \frac{1}{2} \left( B^2 - \frac{9B}{8A} - 3 \right) \right] = P.$$

ჩაეწეროთ (17.145) განტოლება შემდეგ სახეში:

$$E = 2\dot{x}^2 + A_1x^3 + B_1x^2 + D_1x,$$

სადაც

$$A_1 = \frac{A_1 + 1}{3}, \quad B_1 = \frac{B_1 + 1}{2} + A_1P,$$

$$D_1 = c_1 + 1 + B\rho,$$

$$\rho = s_1 + \frac{1}{\sqrt{s_2 + 12Au}} (s_3 + 18u).$$

1. განისაზღვროს (17.145), (17.146), (17.147). ამისათვის უნდა მოიძებნოს  $\frac{\partial x}{\partial A}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial B}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial c_1}$  კოეფიციენტები, რომლებიც მოიძებნებიან განტოლების ინტეგრირების შემდეგ.

$$x = \frac{1}{3}Ax^3 + Bx^2 + c_1x + k. \quad (17.148)$$

$k$ -ინტეგრირების მუდმივაა.

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{\partial x}{\partial A} = \frac{3}{4} \frac{B}{A^2} + \frac{18(c_1 - 1) + \frac{1}{2} B^2}{\sqrt{9/4 B^2 - 12A(c_1 - 1)}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial B} = \frac{3}{4} - \frac{9B}{8A\sqrt{9/4 B^2 - 12A(c_1 - 1)}}, \quad (17.149)$$

$$\frac{\partial x}{\partial c_1} = -\frac{3}{\sqrt{9/4 B^2 - 12A(c_1 - 1)}},$$

$$s_1 = \frac{3}{4} \frac{B + A}{A^2},$$

$$s_2 = \frac{9}{4} B^2 - 12A(c_1 - 1),$$

$$s_3 = 18(c_1 - 1) + 12B^2 - \frac{9B}{8A} - 3.$$

2. მოვახდინოთ მმართველი ზემოქმედების ცვლილება შემდეგი ალგორითმით

$E = const$  მართვა  $u(t)$  არის ოპტიმალური.

3. თუ  $E \neq const$   $u(t)$  იცვლება შემდეგნაირად:

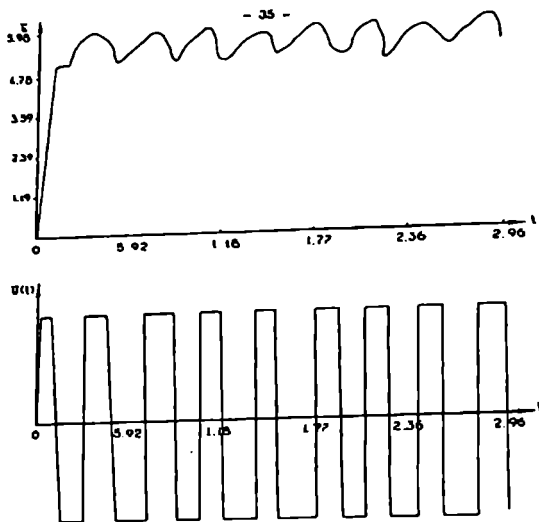
$$u = \begin{cases} +1 & \text{თუ } \partial E / \partial t < 0. \\ -1 & \text{თუ } \partial E / \partial t \geq 0. \end{cases}$$

4.  $\frac{\partial x}{\partial A}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial B}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial c_1}$  კოეფიციენტები განისაზღვრა 1

პუნქტში.

5. დავაფიქსიროთ  $A, B, c$  კოეფიციენტები.

6. გამოვიყნოთ პარამეტრული იდენტიფიკაციის ცნობილი მეთოდები. (მაგალითად კვაზილინეარიზაციის მეთოდი, ან წიგნში მოცემული მეთოდები.) ექსპერიმენტის შედეგები მოცემულია (ნახ.17.3)



ნახ.17.3

§ 17.7. პარამეტრების შეფასება და მაქსიმალური დამაჯერებლობის კრიტერიუმი

ვთქვათ, რომ დაკვირვებები წარმოდგენენ შემთხვევით  $y^N = (y(1), y(2), \dots, y(N))$  ვექტორს  $R^N$ -ში. დაუშვათ, რომ არსებობს ალბათობის სიმკვრივის განაწილების ფუნქცია, ტოლი

$$f(\Theta; x_1, x_2, \dots, x_N) = f_y(\Theta; x^N), \quad (17.150)$$

ე.ი.

$$P(y^N \in A) = \int_{x^N \in A} f_y(\Theta; x^N) dx^N \quad (17.151)$$

$\Theta$  - პარამეტრების  $d$ -განზომილების ვექტორია. იგულისხმება, რომ ის უცნობია. დაკვირვების ამოცანა მდგომარეობს  $y^N$ -ის მიხედვით  $\Theta$  ვექტორის შეფასების განსაზღვრაში. ეს მიზანი ხორციელდება შეფასებით

$$\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(y^N), \quad (17.152)$$

რომელიც წარმოადგენს ფუნქციას  $R^N$  ასახვისა  $R^d$ -ში. თუ  $y^N$  დაკვირვებები წარმოადგენს  $y^N$  ვექტორს, მაშინ  $\hat{\Theta}_* = \hat{\Theta}(y_*^N)$ .

შეიძლება ვისარგებლოთ შეფასების ბევრი ასეთი ფუნქციით. შეფასება, რომელიც მაქსიმიზაციას უკეთებს დაკვირვებადი ხდომილების ალბათობას, შემოტანილი იყო ფიშერის მიერ და მიიღო სახელწოდება—მაქსიმალური დამაჯერებლობის შეფასება. ის შეიძლება განისაზღვროს (17.150) გამოსახულების საშუალებით. ამრიგად, ალბათობა იმისა, რომ რეალიზაციამ (= დაკვირვება) ნამდვილად უნდა მიიღოს  $y^N$ , პროპორციულია

$$f_y(\Theta; y^N).$$

ეს არის  $\Theta$ -ს დეტერმინებული ფუნქცია, ვინაიდან  $y^N$ -ის მაგივრად ჩასმულია  $y^N$ -ის რიცხვითი მნიშვნელობები. მას ეწოდება დამაჯერებლობის ფუნქცია და ასახავს იმის „დამაჯერებლობას“, რომ დასაკვირვებელ ხდომილებას ნამდვილად აქვს ადგილი. ე.ი. ჩვენ ვეძებთ

$$\hat{\Theta}_{ML}(y^N) = \arg \max_{\Theta} f(\Theta; y^N), \quad (17.153)$$

სადაც მაქსიმიზაცია ხდება ფიქსირებული  $y^N$  ეს შეფასება ცნობილია, როგორც მაქსიმალური დამაჯერებლობის შეფასება, (მდშ),

მაგალითი 17.1 [55].

თქვით,  $y(i), i = 1 \dots N$ , დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია, უცნობი საშუალო  $\Theta_0$  და ცნობილი  $D_i$  დისპერსიით:

$$y(i) \in N(\Theta_0, D_i). \quad (17.154)$$

$\Theta_0$ —შეფასება ხდება მიმდინარე საშუალოთი



$$\hat{\Theta}_{SM}(y^N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y(i). \quad (17.155)$$

მაქსიმალური დამაჯერებლობის შეფასების გამოთვლისას, პირველად უნდა გამოვთვალოთ დაკვირვებებისათვის ერთობლივი განაწილების (17.150) სიმკვრივის ფუნქცია.  $y(i)$ -თვის იგი ტოლია

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi D_i}} \exp\left[-\frac{(x_i - \Theta)^2}{2D_i}\right], \quad (17.156)$$

თუ  $y(i)$  დამოუკიდებელია, გვექნება

$$f_y(\Theta; x^N) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi D_j}} \exp\left[-\frac{(x_i - \Theta)^2}{2D_i}\right]. \quad (17.157)$$

ამრიგად, (მდშ) ტოლია  $f_y(\Theta; y^N)$ . დამაჯერებლობის ფუნქციის მაქსიმიზაცია ექვივალენტურია მისი ლოგარითმის მაქსიმიზაციის. ამრიგად,

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_{ML}(y^N) &= \arg \max_{\Theta} \ln f_y(\Theta; y^N) = \\ &= \arg \max_{\Theta} \left\{ -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \sum_{i=1}^N \ln D_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(y(i) - \Theta)^2}{D_i} \right\}, \end{aligned} \quad (17.158)$$

საიდანაც ვპოულობთ

$$\hat{\Theta}_{ML}(y^N) = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (1/D_i)} \sum_{i=1}^N \frac{y(i)}{D_i}. \quad (17.159)$$

პარამეტრების შეფასება შეიძლება ბაიესის მეთოდით. ამ მეთოდში პარამეტრი განიხილება, როგორც შემთხვევითი სიდიდე. დაფუძნებულია სხვა შემთხვევითი სიდიდეების დაკვირვებებზე, კორელირებულია პარამეტრებთან, რაც საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ ინფორმაცია მათ შესახებ.

ბაიესის მიდგომისას  $\Theta$  ვექტორი განიხილება როგორც შემთხვევითი ვექტორი რომელიდაც აპრიორული განაწილებით ("აპრიორული" ნიშნავს-მოცემულია დაკვირვებამდე). ცხადია,

დაკვირვება  $y^N$  კორელირებულია  $\Theta$ -თან. იმის შემდეგ რაც დაკვირვებები მიღებულია, შეიძლება ფორმირება გაუკეთდეს  $\Theta$ -თვის ალბათობის განაწილების სიმკვრივის აპოსტერიორულ ფუნქციას. მისი გამოყენებით შეიძლება განისაზღვროს  $\Theta$ -ს სხვადასხვა შეფასებები, მაგალითად სიდიდე, რომლისთვისაც ალბათობის განაწილების სიმკვრივე მაქსიმალურია („ყველაზე ალბათური მნიშვნელობა“). ეს შეფასება ცნობილია, როგორც მაქსიმალური აპოსტერიორული ალბათობის შეფასება.

დავუშვათ, რომ  $y^N$  ალბათობის განაწილების პირობით სიმკვრივეს მოცემული  $\Theta$ -თვის აქვს სახე

$$f_y(\Theta; x^N) = P(y^N = x^N | \Theta), \quad (17.160)$$

ხოლო განაწილების აპრიორულ სიმკვრივეს  $\Theta$ -თვის აქვს სახე

$$g_\Theta(Z) = P(\Theta = Z). \quad (17.161)$$

(აქ  $P(A/B)$ -არის ხდომილების პირობითი ალბათობა მოცემული  $B$ -თვის). გამოვიყენოთ ბაიესის წესი

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ და } B)}{P(B)}, \quad (17.162)$$

მაშინ მოცემული დაკვირვებებისას,  $\Theta$ -თვის ალბათობის განაწილების პირობით სიმკვრივეს აქვს სახე:

$$P(\Theta | y^N) = \frac{P(y^N | \Theta) \cdot P(\Theta)}{P(y^N)} \sim f_y(\Theta; y^N) \cdot g_\Theta(\Theta). \quad (17.163)$$

ამრიგად, აპოსტერიორული სიმკვრივე პროპორციულია დამაჯერებლობის ფუნქციის და განაწილების აპრიორული სიმკვრივის ფუნქციის ნამრავლისა. აპოსტერიორული ალბათობის მაქსიმალური შეფასება ტოლია

$$\hat{\Theta}_{MAP}(y^N) = \arg \max_{\Theta} \{f_y(\Theta; y^N) \cdot g_\Theta(\Theta)\}, \quad (17.164)$$

რომელიც ძალიან ახლოსაა (17.153) მაქსიმალური დამაჯერებლობის კრიტერიუმთან.

კრამერ-რაოს უტოლობა. შეფასების ხარისხი შეიძლება განისაზღვროს მისი საშუალო კვადრატული შეცდომის მატრიცით

$$P = E\left[\hat{\Theta}(y^N) - \Theta_0\right]\left[\hat{\Theta}(y^N) - \Theta_0\right]^T \quad (17.165)$$

$\Theta_0$  -ნიშნავს  $\Theta$  -"ნამდვილ მნიშვნელობას," ხოლო (17.165)

გამოითვლება იმ დაშვებით, რომ  $y^N$  განაწილების სიმკვრივე ტოლია  $f_y(\Theta_0; y^N)$ .

საინტერესოა ისეთი შეფასების ამორჩევა რომლისთვის  $P$  მცირე სიდიდეა. ამასთან არსებობს  $P$ -ს მნიშვნელობის ქვედა ზღვარი ნებისმიერი არაწანაცვლებადი შეფასებისათვის. ეს არის-ეგრეთწოდებული კრამერ-რაოს უტოლობა. ვთქვათ,

$\hat{\Theta}(y^N) - \Theta$  შეფასებაა, რომლისთვისაც  $E\left[\hat{\Theta}(y^N)\right] = \Theta_0$  და დაუშვათ, რომ  $y^N \in R^N$  ქვესივრცეში იღებს სახეს, რომლის საზღვარიც  $\Theta$ -ზე არ არის დამოკიდებული. მაშინ

$$E\left[\hat{\Theta}(y^N) - \Theta_0\right]\left[\hat{\Theta}(y^N) - \Theta_0\right]^T \geq M^{-1},$$

სადაც

$$M = E\left[\frac{d}{d\Theta} \ln f_y(\Theta; y^N)\right]\left[\frac{d}{d\Theta} \ln f_y(\Theta; y^N)\right]^T \Bigg|_{\Theta=\Theta_0} = -E\left[\frac{d^2}{d\Theta^2} \ln f_y(\Theta; y^N)\right] \Bigg|_{\Theta=\Theta_0} \quad (17.166)$$

ვინაიდან  $\Theta$   $d$ -განზომილებიანი ვექტორია  $(d/d\Theta) \ln f_y(\Theta; y^N)$

$-d$ -განზომილებიანი ვექტორსებია, ხოლო ჰესიანი  $\left(\frac{d^2}{d\Theta^2}\right) \ln f_y(\Theta; y^N)$

$-d \times d - j$ -განზომილებიანი მატრიცაა.

$M$  მატრიცას უწოდებენ ფიშერის ინფორმაციულ მატრიცას. უნდა შევნიშნოთ, რომ  $M$ -ის გამოთვლისათვის საჭიროა  $\Theta_0$ -ის ცოდნა, ამიტომ  $M$ -ის ზუსტი მნიშვნელობა

მომხმარებლისათვის მიუღწეველია. დინამიკური სისტემებისათვის ფიშერის მატრიცას და კრამერ-რაოს უტოლობას აქვს სახე

$$M_N = \frac{1}{K_0} \sum_{t=1}^N E[\psi(t; \Theta_0) \psi^T(t, \Theta_0)], \quad (17.167)$$

სადაც

$$\psi(t, \Theta) = \frac{d}{d\Theta} \hat{y}(t|\Theta) = -\frac{d}{d\Theta} \varepsilon(t, \Theta), \quad (17.168)$$

$$\varepsilon(t, \Theta) = y(t) - \hat{y}(t|\Theta), \quad (17.169)$$

$$\text{Cov } \hat{\Theta}_N = M_N^{-1},$$

ახ

$$\text{Cov } \hat{\Theta}_N \geq K_0 \left[ \sum_{t=1}^N E[\psi(t, \Theta_0) \psi^T(t, \Theta_0)] \right]^{-1} \quad (17.170)$$

$K_0 = D_0$  გაუსის დისპერსიაა.

### § 17.8. ადაპტური ფილტრაცია და მართვის ობიექტის იდენტიფიკაცია [11]

განვიხილოთ მართვის წრფივი სტოქასტიკური ობიექტი, რომლის  $A$  და  $B$  პარამეტრები მუდმივებია, მაგრამ უცნობებია

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) + \omega(t), \quad (17.171)$$

$$x(t_0) = x_0,$$

$$y(t) = cx(t) + v(t), \quad (17.172)$$

სადაც  $x(t) \in R^n$  — ობიექტის მდგომარეობის ვექტორია,  $u(t) \in R^m$  — მართვის ვექტორია,  $y(t \in R^l)$  — გაზომვის ვექტორია,  $x_0$  — ობიექტის საწყისი მდგომარეობის გაუსის შემთხვევითი ვექტორია,  $\omega(t) \in R^n$   $v(t) \in R^l$  — თეთრი ხმაურებია, რომელთათვის

$$\begin{aligned}
 E[x_0] &= 0, & E[x_0 x_0^T] &= \chi_0 \\
 E[\omega(t)] &= 0, & E[v(t)] &= 0, & E[x_0 v(t)] &= \\
 &= E[x_0 \omega^T(t)] = 0, & E\left[\begin{pmatrix} \omega(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \omega^T(\tau) \quad v^T(\tau)\right] &= \\
 &= \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \delta(t - \tau).
 \end{aligned}$$

უნდა დაეუშვათ აგრეთვე, რომ ხმაურის ინტენსივობების მატრიცები  $W$  და  $V$  უცნობებია.

საჭიროა აიგოს ადაპტური ფილტრაციის ალგორითმი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს შევაფასოთ სისტემის  $\hat{x}_0(t)$  მდგომარეობა, სუბოპტიმალური შედეგი ფუნქციონალის მინიმუმის თვალსაზრისით

$$I(x, \hat{x}) = E\left[(x(t) - \hat{x}(t))^T (x(t) - \hat{x}(t))\right], \quad (17.173)$$

როდესაც  $u(t) = -H(t)\hat{x}(t)$ .  $H(t)$ —რომელიდაც მატრიცული ფუნქციაა,  $\hat{x}(t)$ —ობიექტის რომელიდაც წრფივი შეფასებაა.

$\hat{x}_0(t)$  შეფასება არის საუკეთესო (17.173) კრიტერიუმის გათვალისწინებით, თუ ის განისაზღვრება შემდეგი განტოლების ამონახსნით

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}_0(t) &= A_0 \hat{x}_0(t) - B_0 H(t) \hat{x}(t) + K_0(t, y(t) - c); \\
 \hat{x}_0(t_0) &= 0,
 \end{aligned} \quad (17.174)$$

სადაც  $A$  და  $B$  (17.171) ობიექტის უცნობი პარამეტრებია.

$$K_0 = P_0(t) c^T V^{-1},$$

$$\dot{P}_0(t) = A P_0(t) + P_0(t) A_0 - P_0(t) c^T V^{-1} c P_0(t) + W,$$

$$P(t_0) = \chi_0.$$

ამასთან სრულდება ვინერ-ჰოპფის განტოლება

$$E\left[(x(t) - \hat{x}(t)) y^T(t_1)\right] = 0, \quad t_0 \leq t_1 < t, \quad (17.175)$$

რომელიც აუცილებელი და საკმარისი პირობაა  $I(x, \hat{x})$  ფუნქციონალის მინიმუმის მოსაძებნად. ავაგოთ ადაპტური ფილტრი მულტივარიანტული ფილტრების სახით

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A_{\Psi}(t)\hat{x}(t) - B_{\Psi}(t)H(t)\hat{x}(t) + K_{\Psi}(t)[y(t) - c\hat{x}(t)], \\ \hat{x}(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (17.176)$$

ადაპტაციის გარდამავალი პროცესების დამთავრების შემდეგ გვექნება

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A_{\Psi}^*(t)\hat{x}(t) - B_{\Psi}^*(t)H(t)\hat{x}(t) + K_{\Psi}^*(t)[y(t) - c\hat{x}(t)], \\ \hat{x}(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (17.177)$$

განსახილველად შემოვიტანოთ თვისობრიობის ახალი ფუნქციონალი,  $I^*(y, \hat{x})$ , რომელიც დამოკიდებულია მართვის ობიექტის გამოსასვლელზე და ასაწყობი ფილტრის მდგომარეობაზე

$$\begin{aligned} I^*(y, \hat{x}) &= \int_{t_1}^t E[(y - c\hat{x}), y_1^T]^2 = \\ &= \int_{t_1}^t E[c(x - \hat{x}), y_1^T]^2 \end{aligned} \quad (17.178)$$

სადაც  $t - t_1 = d = \text{Const}$ ,  $d$ -მცირე სიდიდეა. (17.178) ფუნქციონალი წარმოადგენს (17.175) ვინერ-პოპფის მარცხენა მხარის მოდიფიკაციას.  $\hat{x}(t) = \hat{x}_0(t)$  შემთხვევაში აღწევს თავის მინიმუმს. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ (17.171), (17.172) ობიექტის არის დაკვირვებადი და რომელიც  $\hat{x}(t)$  წრფივი შეფასებისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს (17.177) განტოლებას და სრულდება პირობა

$$t_1 E[(y - c\hat{x}), y_1^T] = 0, \quad t_0 \leq t_1 < t,$$

მაშინ  $\hat{x}(t) = \hat{x}_0(t)$ . ამასთან ნულის ტოლია გაუთანხმებლობა (17.171) ობიექტის და (17.177) ფილტრის პარამეტრებს შორის.

$$\Phi \hat{x}(t) - \Psi u(t) + \sum(t)[y(t) - c\hat{x}(t)] = 0, \quad (17.179)$$

სადაც  $\Phi \hat{=} A_0 - A_{\Psi}^*$ ,  $\Psi \hat{=} B_0 - B_{\Psi}^*$ ,

$$\sum(t) \hat{=} K_0(t) - K_{\Psi}^*(t)$$

და მაშასადამე, სრულდება თანაფარდობა

$$(A_0 - B_0 H) = (A_0^* - B_0^* H), \quad \sum (t) = 0. \quad (17.180)$$

რაც უზრუნველყოფს ოპტიმალურ ფილტრაციას, მაგრამ ეს არ ნიშნავს იმას, რომ გაუთანხმებლობა ნულის ტოლია.

ადაპტური ფილტრის პარამეტრები  $A_{\Psi}(t), B_{\Psi}(t), K_{\Psi}(t)$ -აეწ-  
ყობა ისე, რომ მოხდეს  $I^*(y, \hat{x})$ -ის მინიმიზაცია.

შევადგინოთ  $\alpha_{\Psi}(t), \beta_{\Psi}(t), \gamma_{\Psi}(t)$  ვექტორები, (17.176) ადაპ-  
ტური ფილტრის  $A_{\Psi}(t), B_{\Psi}(t), K_{\Psi}(t)$  მატრიცების ელემენტები-  
საგან. მოვახდინოთ ფილტრის ოპტიმიზაციის ალგორითმების  
სინთეზირება  $\alpha_{\Psi}(t), \beta_{\Psi}(t), \gamma_{\Psi}(t)$  პარამეტრების მიხედვით,  
ისეთნაირად რომ უზრუნველყოფილი იყოს ასიმპტოტური  
ფუნქციონალური მდგრადობა:

$$I^*(y, x) \rightarrow 0, \quad \text{როდესაც } t \rightarrow \infty. \quad (17.181)$$

ამისათვის განხილვისათვის შემოვიტანოთ ლიაპუნოვის ფუნ-  
ქცია.

$$V(I^*) = (I' - I_{\min})^2 = I'^2 \quad (17.182)$$

გამოვთვალოთ ლიაპუნოვის ფუნქციის სრული წარმოებუ-  
ლი. (17.171), (17.172), (17.173) შეკრული სისტემა განისაზ-  
ღვრება მხოლოდ ფილტრის დროითი  $\alpha_{\Psi}(t), \beta_{\Psi}(t), \gamma_{\Psi}(t)$   
ცვლადებით

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & -4 \{t, E[(y - c\hat{x})_t]\}^3 \left\{ y_{t_1}^T \left( \frac{\partial \hat{x}}{\partial} \right) \right\} \alpha_{\Psi}(t) + \\ & + E \left[ y_{t_1}^T \left( \frac{\partial \hat{x}}{\partial \beta_{\Psi}} \right) \dot{\beta}_{\Psi}(t) + E \left[ y_{t_1} \left( \frac{\partial \hat{x}}{\partial \gamma_{\Psi}} \right) \right] \dot{\gamma}_{\Psi}(t) \right]. \end{aligned} \quad (17.183)$$

მოვახდინოთ ადაპტური ფილტრის პარამეტრების აწყობა  
შემდეგი სახით

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_g &= t, \{E[(y - c\hat{x}), y_{i_1}^T]\} E \left[ \left( \frac{\partial \hat{x}}{\partial \alpha_g} \right)_i^T y_{i_1} \right], \\ \alpha_g(t_0) &= 0, \\ \dot{\beta}_g &= t, \{E[(y - c\hat{x}), y_{i_1}^T]\} E \left[ \left( \frac{\partial \hat{x}}{\partial \beta_g} \right)_i^T y_{i_1} \right], \\ \beta_g(t_0) &= 0, \\ \dot{\gamma}_g &= t, \{E[(y - c\hat{x}), y_{i_1}^T]\} E \left[ \left( \frac{\partial \hat{x}}{\partial \gamma_g} \right)_i^T y_{i_1} \right], \\ \gamma_g(t_0) &= 0. \end{aligned} \tag{17.184}$$

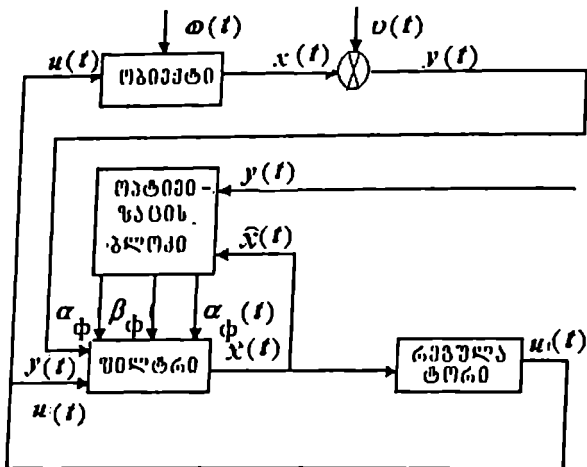
ამასთან  $V(I^*) \geq 0$ ,  $\dot{V}(I^*) \leq 0$ , ხოლო  $V(I^*) = 0$ ,  $\dot{V}(I^*) = 0$

$I^* = 0$  შემთხვევაში.

ამრიგად, (17.184) ადაპტაციის ალგორითმი უზრუნველყოფს ასიმპტოტურ მდგრადობას, ფუნქციონალის ნებისმიერი პერიოდული მნიშვნელობიდან მის მინიმალურ მნიშვნელობამდე. იმ შემთხვევაში, როდესაც (17.171), (17.172) სისტემა არის დაკვირვებადი,  $I^*$  ფუნქციონალის მინიმუმის მიღწევისას (17.174) ოპტიმალური და (17.177) ადაპტური ფილტრის მდგომარეობები ერთმანეთს თანხვდებიან.

ადაპტური ფილტრაციის სტრუქტურული სქემა მოცემულია (ნახ.17.4).





ნახ.17.4

ახლა განვიხილოთ, როგორ შეიძლება (17.184) ალგორითმით მოვახდინოთ (17.171), (17.172) ობიექტების  $A$  და  $B$  პარამეტრების იდენტიფიკაცია.  $V$  და  $W$  ხმაურის ინტენსივობები უცნობია. იდენტიფიკაციის ამოცანის გადაწყვეტისათვის გამოვიყენოთ (17.176) ალგორითმი

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_{\vartheta} \hat{x}(t) + B_{\vartheta}(t)u(t) + K_{\vartheta}[y(t) - c\hat{x}(t)]$$

$$\hat{x}(t_0) = 0,$$

რომელიც თვითაწყობის პროცესის დამთავრების შემდეგ მიიღებს (17.177) სახეს.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_{\vartheta}^* \hat{x}(t) + B_{\vartheta}^*(t)u(t) + K_{\vartheta}^*[y(t) - c\hat{x}(t)], \quad (17.185)$$

$$\hat{x}(t_0) = 0.$$

განვსაზღვროთ პირობები, საკმარისი იმისათვის, რომ ერთმანეთს თანხვედროდნენ (17.177) და (17.174) ფილტრის პარამეტრები ე.ი.  $A_{\vartheta}^* = A$ ,  $B_{\vartheta}^* = B$ ,  $\gamma_{\vartheta}^* = \gamma(t)$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, განისაზღვრება პირობები, რომლის დროსაც (17.176) და (17.184) ფილტრი წყვეტს იდენტიფიკაციის ამოცანას და (17.171), (17.172) ობიექტ-

ტებისათვის სუბოპტიმალურ ფილტრაციას. იმისათვის, რომ ვისარგებლოთ ობიექტის იდენტიფიკაციის ცნობილი მეთოდებით, საკმარისია გამოვიყენოთ შემდეგი პირობები:

1. მართვის ობიექტი მართვადია.

2. მართვის ვექტორის კოორდინატები დროის წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია.

3. მართვის ვექტორის ყოველი კოორდინატი შეიცავს არანაკლებ  $\frac{n+1}{2}$  სხვადასხვა სიხშირეს, სადაც  $n$ -არის მართვის ობიექტის განტოლების განზომილება.

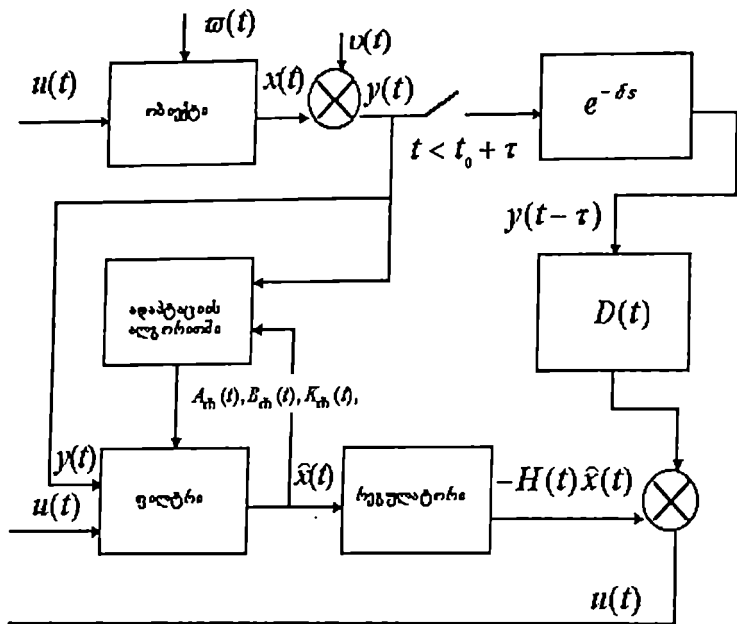
შევიტანოთ (17.171) ობიექტის მართვის ფუნქციაში დამხმარე სიგნალი  $\Theta(t) = D(t)\gamma(t - \tau)$ , ამასთან მართვას აქვს სახე:

$$u(t) = \begin{cases} -H(t)\hat{x}(t) & t_0 < t < t_0 + \tau, \\ -H(t)\hat{x}(t) + \Theta(t) & t_0 + \tau \leq t, \end{cases} \quad (17.186)$$

სადაც  $D(t)$ -არის  $(m+1)$  განზომილების მატრიცა, რომლის ელემენტებია  $d_{ij}(t)$ -დროის წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციები,  $\tau$  -დაგვიანების ფიქსირებული დროა, ამასთან ნებისმიერი

$$i = \overline{1, m}, j = \overline{1, l} \text{ სრულდება პირობა } |u_{ij}(t)| < c.$$

იდენტიფიკაციის სტრუქტურული სქემა მოცემულია (ნახ.175) როდესაც  $A_{\eta}^* = A$ ,  $B_{\eta}^* = B$ ,  $\gamma_{\eta}^*(t) = \gamma(t)$ ,  $I^*(y, \hat{x})$  აღწევს თავის მინიმუმს.



ნახ.17.5

განვაზოგადოთ ვინერ-ჰოპფის მეთოდი ზოგიერთ არაწრფივ ობიექტზე [31].

განვიხილოთ სისტემა, რომლის არაწრფივი ელემენტის განტოლებაა

$$y = b + Pa^2 - 2apx + px^2 \quad (17.187)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$y = c - 2apx + px^2, \quad (17.188)$$

$$c = b + pa^2$$

ჩავთვალოთ  $x = x(t)$  და  $y = y(t)$  ცვლადები დროის შემთხვევით პროცესებად. ისინი სტაციონარული და ერგოდიკულია. განვსაზღვროთ მომენტური  $\overline{yy_\tau}$  ( $\tau$  ინდექსი ნიშნავს ძვრას  $t$  დროის მიმართ) ფუნქცია. გასაშუალება დროის მიხედვით აღვნიშნოთ ზევიდან ნაზით.

გამოვიყენოთ (17.187) გამოსახულება, მივიღებთ

$$\overline{yy_r} = c^2 - 4acp\overline{x} + 2cp\overline{x}^2 + 4a^2 p^2 \overline{xx_r} - 4ap^2 (\overline{xx_r^2} + \overline{x^2 x_r}) + P^2 \overline{x^2 x_r^2}. \quad (17.189)$$

გაეპრაველოთ (17.188)  $W(t + \tau)$ -ზე, მოვახდინოთ გასაშუალება დროში და გამოვიყენოთ შემავალი ფუნქციების სტაციონარულობა, მივიღებთ

$$\overline{yW_r} = c\overline{W} - 2apx\overline{W_r} + p^2 \overline{x^2 W_r}. \quad (17.190)$$

გამოვიყენოთ ცნობილი ვინერ-ჰოპფის განტოლება

$$\overline{yW_r}(\tau) = \int_0^{\infty} g(\xi) \overline{yy_r}(t - \xi) d\xi \quad (17.191)$$

სადაც  $g(\xi)$  წონითი ფუნქციაა. შევიტანოთ (17.191) განტოლებაში (17.199) და (17.190) გამოსახულებები, გვექნება

$$\begin{aligned} c\overline{W} - 2apx\overline{W_r} + p^2 \overline{x^2 W_r} &= \int_0^{\infty} g(\xi) \{ c^2 - 4acp\overline{x} + 2cp\overline{x}^2 + \\ &+ 4a^2 p^2 \overline{xx_r}(\tau - \xi) - 4ap^2 [\overline{xx_r^2}(\tau - \xi) + \overline{x^2 x_r}(\tau - \xi)] + \\ &+ p^2 \overline{x^2 x_r^2}(\tau - \xi) \} d\xi. \end{aligned} \quad (17.192)$$

ყველა მომენტური ფუნქციები, რომლებიც შედიან (17.192) განისაზღვრებიან ექსპერიმენტიდან. მოვახდინოთ მათი აპროქსიმაცია გამოთვლისათვის მოსახერხებელი ფუნქციებით. იმპულსური გარდამავალი ფუნქციისათვის ავიღოთ ერთ-ერთი ტიპური გამოსახულება, მაგალითად  $g(t)$ -ს მიმართ. (17.192) გამოსახულება ამოვხსნათ განუზღვრელი კოეფიციენტების მეტოდით, როგორც ეს მოცემულია ლენინგის და ბეტნის ცნობილ წიგნში [119]. სხვა მიდგომა დამყარებულია  $\overline{x^2 W_r}$  ფუნქციასთან მიახლოება მარჯვენა მხარით. მივიღებთ არათავსებად განტოლებათა სისტემას, რომელიც ამოიხსნება ჩებიშევის მიახლოებით, თავის მხრივ ის დადის წარფივი პროგრამირების ამოცანებზე [44]. მაგალითად, მომენტური ფუნქციები შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\overline{xx_r} = A_1 e^{-\alpha|t|} \cos t,$$

$$\overline{x^2 x_r^2} = A_2 e^{-\tau|t|} \cos t + A_3 \sin \beta t,$$

$$\overline{x^2 x_r^2} + \overline{xx_r} = A_4 + A_5 e^{-\tau|t|}.$$

(17.192) განტოლების ამოხსნის ერთ-ერთი გზაა ტიხონოვის რეგულარიზაციის მეთოდი [90].

ვინერ-ჰოპფის განტოლების ამოხსნის ერთ-ერთი გავრცელებული მეთოდი—ალგებრული მეთოდი. ვინერ-ჰოპფის ინტეგრალური განტოლება იცვლება ალგებრულ განტოლებათა სისტემით, თუ ინტეგრალურ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი:

$$R_{xx}(\tau) = \sum \omega(rT) R_{xx}(\tau - rT), \quad \tau = \overline{0, N} \quad (17.193)$$

ან მატრიცული ფორმით:

$$\|R_{xx}\| = \|R_{xx}\| \cdot \|W\|. \quad (17.194)$$

ვინერ-ჰოპფის განტოლების ცული შეპირობება იწვევს ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ცულ შეპირობებას, რაც გამოისახება იმაში, რომ  $R_{xx}(\tau)$  და  $R_{xx}(\tau)$  კორელაციური ფუნქციების საწყის მნიშვნელობათა მცირე ვარიაციებიც კი იწვევს ამონახსნის ე.ი. იმპულსურ გარდამავალი ფუნქციის  $w(t)$ -ს მნიშვნელოვან ვარიაციებს. თუ კორელაციური ფუნქციები განსაზღვრულია ცდომილებით, რაც პრაქტიკულად გარდაუვალია დაკვირვების დროის სასრულობის გამო, ვინერ-ჰოპფის განტოლების ამონახსნი ისე ძლიერ არის დამახინჯებული, რომ არათუ სავსებით აღარ აქვს ზუსტ მნიშვნელობასთან.

ამრიგად, მიუხედავად იმისა, რომ ვინერ-ჰოპფის განტოლებიდან მიღებულ იმპულსურ გარდამავალ ფუნქციებს გააჩნით თითქმის მინიმალური საშუალო-კვადრატული ცდომილება, მათი ღირებულება დაბალია, ვინაიდან ეს ფუნქციები არ შეესაბამებიან ობიექტზე მიმდინარე პროცესების ფიზიკურ არსს. ფიზიკური აზრი აქვთ მხოლოდ ვინერ-ჰოპფის განტოლების გაგლუვებულ ამონახსნებს, მიღებულს რეგულარიზაციის მეთოდების გამოყენების შედეგად.

ერთ-ერთი პირველი რეგულარიზაციის მეთოდი-ტიხონოვის მეთოდი.[90] ამ მეთოდის არსი მდგომარეობს იმაში, რომ იდენტიფიკაციის კრიტერიუმად გამოიყენება ორი ნაწილისაგან შემდგარი ფუნქციონალი. პირველი ნაწილი წარმოადგენს ფართოდ გავრცელებულ იდენტიფიკაციის კრიტერიუმს— საშუალო კვადრატულ ცდომილებას, ხოლო მეორე ნაწილი არის ფუნქციონალი, რომელიც ახდენს საძიებელ წონითი ფუნქციის გაგლუვებას:

$$I = \int_0^{\infty} [y_2(t) - y(t)]^2 dt + \alpha \Omega[\omega(t)], \quad (17.195)$$

სადაც  $\alpha$ —დადებითი რიცხვია.

$\Omega[\omega(t)]$ —მაგლუვებელი ფუნქციონალია და განისაზღვრება გამოსახულებით

$$\Omega[\omega(t)] = \int_0^T \left[ k(t) \left[ \frac{d\omega(t)}{dt} \right]^2 + p(t) \omega^2(t) \right] dt, \quad (17.196)$$

სადაც  $k(t) > 0, p(t) > 0$ .

ფუნქციონალის მინიმუმის პირობიდან გამომდინარეობს

$$\alpha \left\{ -\frac{d}{dt} \left[ k \frac{d\omega}{dt} \right] + p\omega \right\} + \int_0^T R_{xx}(t-\tau) \omega(\tau) d\tau = R_{xy}(t), \quad (17.197)$$

$$\frac{d\omega}{dt}(0) = \frac{d\omega}{dt}(T) = 0, \quad 0 \leq \tau \leq T$$

ბოლო განტოლება განსხვავდება ვინერ-ჰოპფის განტოლები-საგან დამატებითი წევრით, რომელიც უზრუნველყოფს  $\omega(t)$ -ს ამონახსნის არსებობას, ერთადერთობას, უწყვეტობას და დიფერენცირებალობას.

როცა  $\alpha = 0$  განტოლება ემთხვევა ვინერ-ჰოპფის განტო-ლებას.

ამ განტოლების ამოხსნის ალგებრული მეთოდით მიიღება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა

$$R_{xy_j} = \alpha \left[ -k_j(\omega_{j+1} - \omega_j) + k_{j+1}(\omega_j - \omega_{j-1}) + p_j \omega_j \right] + \\ + \sum_{l=1}^j R_{xy_{j-l}} \omega_l.$$

$$\omega_0 = \omega_1; \omega_{n+1} = \omega_n.$$

განტოლებათა სისტემა ხასიათდება იმით, რომ  $R_{xx}$ -ის კორელაციურ მატრიცას ნაცვლად გამოიყენება  $R_{xx} + \alpha B$  მატრიცა, სადაც  $B$ —სამდიაგონალური მატრიცაა.  $k_j = k$  და  $p_j = p$  მუდმივების დროს ამ მატრიცას აქვს სახე:

$$B = \begin{vmatrix} p+k & -k & & & \\ -k & p+2k-k & & & \\ & & p+rk & -k & \\ & & -k & p+k & \\ & & & & \end{vmatrix}.$$

ხოლო განტოლება მატრიცული ფორმით ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$R_{yx} = (R_{xx} + \alpha B)W$$

როცა  $\alpha = 0$ , ემთხვევა ვინერ-ჰოპფის განტოლების მატრიცულ ფორმას.

მაშასადამე, რეგულარიზაციის  $\alpha$  პარამეტრის მცირე მნიშვნელობისას  $\omega(t)$  ამონახსნი ხდება ცუდად განპირობებული, ხოლო  $\alpha$ -ს გაზრდისას იზრდება ობიექტის და მოდელის გამოსასვლელი კოორდინატების საშუალო კვადრატული სხვაობა.

$\alpha$  კოეფიციენტის საუკეთესო მნიშვნელობის შერჩევა უნდა მოხდეს მომხმარებლის მიერ ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში ამოცანის პირობის შესაბამისად.

§ 17.9. არაწრფივი ობიექტების პარამეტრების განსაზღვრა

როდესაც განსაზღვრულია ობიექტის სტრუქტურა. დგება საკითხი მისი პარამეტრების განსაზღვრისა. პარამეტრული იდენტიფიკაციის მეთოდები საკმაოდ ფართოა. [55], [71], [82], [97], [78], [103], [124], [125], [126], [127]. ჩვენ არ შევუდგებით მათ დაწვრილებით განხილვას და მოვიტანთ პარამეტრების განსაზღვრისათვის ერთ მარტივ მეთოდს. ამ მეთოდის მაგალითზე შეიძლება წარმოვადგინოთ პარამეტრული იდენტიფიკაციის ძირითადი ეტაპები [32].

ვთქვათ, ობიექტის მათემატიკური მოდელი შესდგება მიმდევრობით შეერთებული არაწრფივი და ინერციული რგოლებისაგან. ობიექტის განტოლებას აქვს სახე:

$$T \frac{dy}{dt} + y = f(x), \quad (17.198)$$

სადაც,  $x, y$  — ობიექტის შემავალი და გამომავალი სიდიდეებია.  $T$  — საძიებელი დროის მუდმივაა. ობიექტის სტატისტიკური მახასიათებელი განისაზღვრება დამოკიდებულებით:

$$y = f(x). \quad (17.199)$$

ამ ფუნქციის მიმართ უნდა აღინიშნოს, რომ ის არის ცალსახა და უწყვეტი.

ობიექტის შესასვლელზე შევქმნათ პერიოდული აღშფოთება და ვცვალოთ მისი  $x$  მნიშვნელობა  $x_0$  — დან  $x_1 = x_0 + \delta$  და პირიქით —  $x_1 - x_0$  — მდე. (ნახ.17.6) მრუდეები 2, 3. მოსახერხებელი რომ იყოს ამ მრუდეების გამოყენება, დავადოთ ზოგიერთი შეზღუდვები; ისინი უნდა იყვნენ დროითი. ფუნქციები, პერიოდზე სასრულო წერტილების რაოდენობით, სადაც მათი წარმოებული ნულის ტოლია და ჰქონდეს დიფერენცირებადი მებრუნებული ფუნქცია

$$t = \psi(x), \quad (17.200)$$

როგორც აღშფოთების გაზრდისას ასევე მისი შემცირებისას. (17.200)-დან ვიპოვოთ

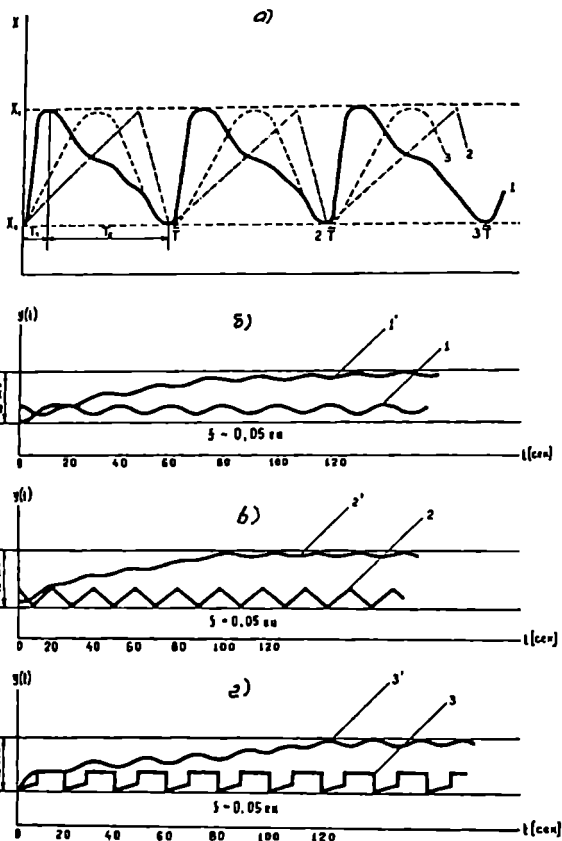
$$dt = \frac{d\psi}{dx} dx.$$

შევიტანოთ (17.198)-ში მივიღებთ



$$T \frac{dy}{d\psi} + y = f(x), \text{ რომელიც შემდეგი სახით წარმოვად-}$$

გინოთ



ნახ.17.6

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{T} \frac{d\psi(x)}{dx} y = \frac{1}{T} \frac{d\psi}{dx} f(x).$$

(17.201)

ამ განტოლების ამონახსნს აქვს სახე

$$y = e^{-\frac{1}{T} \int_{x_0}^x \frac{d\psi}{d\xi} d\xi} \left( c + \frac{1}{T} \int_{x_0}^x \frac{d\psi}{d\xi} f(\xi) e^{\frac{1}{T} \int_{x_0}^{\xi} \frac{d\psi(\eta)}{d\eta} d\eta} d\xi, \text{ ან რაც იგივეა} \right)$$

$$y = e^{-\frac{1}{T} [\psi(x) - \psi(x_0)]} \left[ c + \frac{1}{T} \int_{x_0}^x \frac{d\psi}{d\xi} f(\xi) e^{\frac{1}{T} [\psi(\xi) - \psi(x_0)]} d\xi \right]. \quad (17.202)$$

$c$  მუდმივაა  $y - y_0$  საწყისი მნიშვნელობისას, როდესაც  $x$  კოორდინატა აღწევს მაქსიმალურ  $x - x_1$  მნიშვნელობას. გამომავალი სიდიდე გახდება ტოლი:

$$y_1 = e^{-\frac{1}{T} [\psi(x_1) - \psi(x_0)]} y_0 + \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T} [\psi(x_1) - \psi(x_0)]} \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\psi}{d\xi} f(\xi) e^{\frac{1}{T} [\psi(\xi) - \psi(x_0)]} d\xi. \quad (17.203)$$

ასეთივე გზით, როდესაც შეშფოთება იცვლება  $x_1$ -დან  $x_0$ -მდე, გვექნება

$$y_1 = e^{-\frac{1}{T} [\psi(x_0) - \psi(x_1)]} y_1 + \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T} [\psi(x_0) - \psi(x_1)]} \int_{x_1}^{x_0} \frac{d\psi}{d\xi} f(\xi) e^{\frac{1}{T} [\psi(\xi) - \psi(x_1)]} d\xi. \quad (17.204)$$

(17.203) ტიპის განტოლება შეიძლება მივიღოთ კენტი  $2k + 1$  ინდექსისათვის ( $k = 0, 1, \dots$ )

$$y_{2k+1} = e^{-\frac{1}{T} [\psi(x_1) - \psi(x_0)]} y_{2k} + \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T} [\psi(x_1) - \psi(x_0)]} \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\psi}{d\xi} f(\xi) e^{\frac{1}{T} [\psi(\xi) - \psi(x_0)]} d\xi \quad (17.205)$$

და ლუწი ინდექსებისათვის

$$y_{2k} = e^{-\frac{1}{T}[\psi(x_0) - \psi(x_1)]} y_{2k-1} + \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T}[\psi(x_0) - \psi(x_1)]} \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\psi}{d\xi} f(\xi) e^{\frac{1}{T}[\psi(\xi) - \psi(x_1)]} d\xi. \quad (17.206)$$

გამოვიყენოთ (17.205) გამოსახულება იმ  $k$ -თვის, რომელიც განსხვავდება იმ ერთით და ავიღოთ მათ შორის სხვაობები, მივიღებთ

$$y_{2k+3} - y_{2k+1} = e^{-\frac{T_1}{T}} (y_{2k+2} - y_{2k}), \quad (17.207)$$

სადაც  $T_1 = \psi(x_1) - \psi(x_0)$ -ით აღნიშნულია დროის ინტერვალის ის ნაწილი, როდესაც შეშფოთება იცვლება. ასევე თუ გამოვიყენებთ (17.206)-ს მივიღებთ:

$$y_{2k+4} - y_{2k+2} = e^{-\frac{T_2}{T}} (y_{2k+3} - y_{2k+1}), \quad (17.208)$$

სადაც  $T_2$  შეესაბამება იმ დროის ინტერვალს, როდესაც  $x$  იცვლება  $x_0$ -დან  $x_1$ -მდე, ხოლო  $\psi$   $\psi(x_1)$ -დან  $\psi(x_0)$ -მდე. ზოგად შემთხვევაში  $T_1 \neq T_2$ , მაგრამ მათი ჯამი ტოლია შეშფოთების  $\tilde{T}$  პერიოდის.

გადავწეროთ (17.208) შემდეგ სახეში:

$$y_{2k+4} - y_{2k+2} = e^{-\tilde{T}/T} (y_{2k+3} - y_{2k+1}),$$

საიდანაც დროის მუდმივაა:

$$T = \tilde{T} \frac{1}{\ln \frac{y_{2k+2} - y_{2k}}{y_{2k+4} - y_{2k+2}}}. \quad (17.209)$$

ასევე (17.207)-დან მივიღებთ:

$$T = \tilde{T} \frac{1}{\ln \frac{y_{2k+3} - y_{2k+1}}{y_{2k+5} - y_{2k+3}}}. \quad (17.210)$$

ამრიგად,  $T$ -ს განსაზღვრისათვის საკმარისია ვიცოდეთ ობიექტის გამომავალი სიგნალის მნიშვნელობა ორი მეზობე-

ლი პერიოდისათვის. თუ ეს სიგნალი მცირეა, მაშინ შეიძლება ავიღოთ უფრო დაცილებული პერიოდები. ამით რეზულტატი არ შეიცვლება. მაგალითად:

$$T = \tilde{T} \frac{1}{\ln \frac{y_{2k+2n} - y_{2k+2n-2}}{y_{2k+2n+1} - y_{2k+2n-1}}}. \quad (17.211)$$

ხმაურის შემთხვევაში ექსპერიმენტები უნდა ჩატარდეს რამდენჯერმე და შემდეგ განესაზღვროთ  $T$  დროის მუდმივას საშუალო მნიშვნელობა.

### § 17.10. ობიექტების იდენტიფიცირებადობა მართვის შეკრულ სისტემებში

იდენტიფიცირებადობა წარმოადგენს იდენტიფიკაციის თეორიის ძირითად საკითხს. უხეშად რომ ვთქვათ, საკითხი მდგომარეობს იმაში, გვაძლევს თუ არა იდენტიფიკაციის პროცედურა ცალსახად განესაზღვროთ ობიექტის  $\Theta$  პარამეტრი და თუ თანხვდება მიღებული მოდელი რეალურ სისტემას. ვისარგებლოთ რამდენიმე განსაზღვრით [55]:

განსაზღვრა 17.4.  $\Theta^*$  წერტილში  $M$  მოდელურ სტრუქტურას ეწოდება გლობალურად იდენტიფიცირებადი, თუ

$$M(\Theta) = M(\Theta^*), \quad \Theta \in D_M \rightarrow \Theta = \Theta^*$$

განსაზღვრა 17.5.  $M$  მოდელურ სტრუქტურას ეწოდება მკაცრად გლობალურად იდენტიფიცირებადი, თუ ის გლობალურად იდენტიფიცირებადია  $M$  სიმრავლის ყოველ  $\Theta^*$  წერტილში. ამ განსაზღვრის პრაქტიკული მხარეა

განსაზღვრა 17.6.  $M$  მოდელურ სტრუქტურას უწოდებენ გლობალურად იდენტიფიცირებადს, თუ ის გლობალურად იდენტიფიცირებადია თითქმის ყველა  $\Theta^* \in D_M$  წერტილებში.

( $D_M - R^d$  ქვესიმრავლეა).

მოკლედ შევხვით იდენტიფიცირებადობის გამოყენებას. ვთქვათ,  $M$ -მოდელური სტრუქტურაა, დამყარებული ერთობიჯიან წინასწარმეტყველებაზე შემდეგი განტოლებისათვის

$$y|t = G(q, \Theta)u(t) + H(q, \Theta)e(t).$$

მაშინ განისაზღვრება  $\Theta \in D_M$  მნიშვნელობების  $D_T(\varepsilon, M)$  სიმრავლე, რომლისთვის  
 $\varepsilon = M(\Theta)$  ე.ი.

$$D_T(\varepsilon, M) = \{\Theta \in D_M | G_0(z) = G(z, 0),$$

$H_0(z) = H(z, \Theta)$  თითქმის ყველა  $z$  როდესაც  $\varepsilon \notin M$  ეს სიმრავლე ცარიელია. ეხლა დავუშვათ, რომ  $\varepsilon \in M$  მაშასადამე, ზოგიერთი  $\Theta_0 \varepsilon = M(\Theta_0)$ . აგრეთვე დავუშვათ, რომ  $M$  სტრუქტურა არის გლობალურად იდენტიფიცირებადი  $\Theta_0$  წერტილში, მაშინ

$$D_T(\varepsilon, M) = \{\Theta_0\}$$

კარგი მოდელის მოძებნის ერთ-ერთი თავისებურებაა ისეთი  $M$  ამორჩევა, რომ  $\varepsilon$  აღწერისათვის სრულდებოდეს ( $M(\Theta) = M(\Theta^*)$ ) პირობა. ვინაიდან მომხმარებლისათვის  $\varepsilon$  აღწერა უცნობია პრაქტიკული პროცედურები დადის  $M$ -ის სხვადასხვა სტრუქტურების ტესტირებაზე.

დეტერმინისტული გაგებით სისტემის იდენტიფიცირებადობა შემდეგი სახის ამოცანა:

$$x_{t+1} = Ax_t,$$

$x_t$  — დინამიკური სისტემის მდგომარეობაა.

$A$  — კვადრატული  $n \times n$  მატრიცაა.

$x_t (t = 1, 2, 3, \dots)$  გაზომვების შედეგად საჭიროებს  $A$  მატრიცას განსაზღვრას. ასეთ იდენტიფიცირებას უწოდებენ  $n$ -იდენტიფიცირებას. ცნობილია

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \dots \\ x_0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \dots \\ x_0 \end{bmatrix}$$

აქედან

$$A = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \dots \\ x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \dots \\ x_0 \end{bmatrix}^{-1} \quad (17.212)$$

და  $A$  მატრიცას შეფასების პირობაა

$$\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \dots \\ x_0 \end{bmatrix} = [A^{n-1} x_0, A^{n-2} x_0, \dots, x_0] \quad (17.213)$$

მატრიცას არაგადაგვარებულობა.

როდესაც მდგომარეობის ვექტორი  $x_i$  პირდაპირ არ გამოვლინდება, დინამიკური სისტემა:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= Ax_i, \\ y_i &= Cx_i, \end{aligned} \quad (17.214)$$

არის ილენტიფიცირებადი, თუ  $n$ -ილენტიფიცირების მატრიცა არასინგულარულია, ხოლო დაკვირვებადობის მატრიცას  $[C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T]$  აქვს რანგი  $n$ . ე.ი. სისტემა არის მთლიანად დაკვირვებადი.

დაკვირვებადი სისტემა არის არაილენტიფიცირებადი იმ შემთხვევაში, თუ  $n$ -ილენტიფიცირებადობის მატრიცა არის სინგულარული. განიჩევა ორი შემთხვევა: მარტივი, როდესაც  $x_0 = 0$ ; და არატრივიალური, როდესაც საწყის პირობებს აქვთ ნულოვანი პროექციები  $A$ -მატრიცას საკუთრივ ვექტორებზე. ე.ი. სისტემის ყველა საკუთარი რხევები აღგზნებულია.

არაავტონომიური მდგრადი სისტემისათვის.

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= Ax_i + Bu_i, \\ y_i &= Cx_i. \end{aligned} \quad (17.215)$$

ყველა საკუთარი რხევების აღგზნებულობის პირობა და  $n$ -ილენტიფიცირებადობა შესრულებულია, თუ მართვადობის მატრიცას  $[B, AB, \dots, A^2 B]$  რანგი ტოლია  $n$ , ხოლო მართვის სიგნალისთვის სრულდება პირობები:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i < \infty, \quad (17.216)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum U_i U_{i+r} = r(\tau) < \infty. \quad (17.217)$$

ხოლო მატრიცა

$$R_u = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(n-1) \\ r(1) & r(0) & \dots & r(n-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(n-1) & r(n-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix}. \quad (17.218)$$

არის დადებითად განსაზღვრული.  
 შეკრულ სისტემებში იდენტიფიკაციის ამოცანების თავისებურება დამოკიდებულია უკუკავშირზე, რომელიც ამყარებს დამატებით მიზეზ-შედეგობრივ კავშირს ობიექტზე, მის გამოშვალ და შემავალ მმართველ ზემოქმედებებს შორის. ასეთ პირობებში ღია სისტემების იდენტიფიკაციის ცნობილი მეთოდების გამოყენება უკუკავშირის გავლენის გათვალისწინების გარეშე მოგვცემს არასწორ შედეგებს, ან გვექნება იდენტიფიკაციის ამოცანების არაცალსახა გადაწყვეტა.

განვიხილოთ მარტივი ალგორითმი. ობიექტის პარამეტრების შეფასება ხდება შემდეგი ფორმულით [3]:

$$k_N = k_{N-1} + \alpha(y_N - y_N^*)x_N, \quad (17.219)$$

აქ  $y_N$ —არის ობიექტის გამომავალი სიდიდე,

$x_N$ —ობიექტის შემავალი ვექტორია;

$k_{N-1}$ —ობიექტის პარამეტრების შეფასების ვექტორი;

$y_N^*$ —ობიექტის გამოსასვლელის შეფასებაა:

$$y_N^* = \sum_{i=1}^n k_{i,N-1} x_{i,N} = (k_{N-1}, x_N);$$

$\alpha$ —მუდმივაა.

თუ არ ჩავთვლით გამრავლებას კონსტანტაზე, რომ დაზუსტდეს ობიექტის პარამეტრის შეფასება ეს ალგორითმი საჭიროებს  $2n$  გამრავლებას ტაქტზე. აგრეთვე საჭიროებს  $n$  გამრავლებას ობიექტის გამომავალი სიდიდის შეფასებისათვის და  $n$  გამრავლებას შესწორების ვექტორის გამოთვლისათვის.

აღნიშნოთ  $Q_N$  ობიექტის პარამეტრების განსაზღვრის შეცდომის ვექტორი, სადაც  $Q_N = h - k_N$ . გადავწეროთ ალგორითმი ახალ აღნიშვნებში:

$$\Theta_N = \Theta_{N-1} - \alpha(\Theta_{N-1}, x_N)x_N. \quad (17.220)$$

ალგორითმი იქნება კრებადი, თუ შეცდომის კვადრატთა ჯამი, განსაზღვრული ყველა კოეფიციენტებისათვის  $N$ —ურ ტაქტზე, იქნება ნაკლები, ვიდრე წინაზე, ე.ი. შესრულებულია პირობა

$$Q_N = \sum_{i=1}^n \Theta_{i,N-1}^2 - \sum_{i=1}^n \Theta_{i,N}^2 > 0. \quad (17.221)$$

შევიტანოთ (17.221)-ში (17.220), მივიღებთ კრებადობის პირობის შემდეგ გამოსახულებას

$$Q_N = \sum \Theta_{N-1}^2 - \sum \Theta_N^2 = 2\alpha(\Theta_{N-1}, x_N)^2 - \alpha^2(\Theta_{N-1}, x_N)(x_N, x_N) > 0. \quad (17.222)$$

ადვილად შესამჩნევია, რომ კრებადობა ყოველთვის შესრულდება, თუ  $\alpha$  მოიძებნება ინტერვალში

$$0 < \alpha < \frac{2(\Theta_{N-1}, x_N)}{(x_N, x_N)}. \quad (17.223)$$

პირველი დასკვნა, რომელიც აქედან შეიძლება გამოვიტანოთ, მდგომარეობს იმაში, რომ ნებისმიერი ფიქსირებული  $\alpha$ -თვის და შემთხვევითი  $x$  შემავალი სიგნალისათვის არსებობს ალბათობა კრებადობის დარღვევისა საკმაოდ დიდი  $x$ -თვის. თუ კრებადობის პირობა მხოლოდ საშუალოა, მაშინ არ გვექნება მონოტონური კრებადობა  $(\Theta_N, \Theta_N)$ -თვისაც კი.

გამოვთვალოთ  $\alpha$ -ს მნიშვნელობა, რომლის დროსაც ალგორითმის კრებადობის სიჩქარე არის მაქსიმალური. ამისათვის საკმარისია ვიპოვოთ  $\alpha$ , რომლის დროსაც  $Q$  შეცდომის შემცირების მათემატიკური ლოდინი არის მაქსიმალური. ასეთი  $\alpha$  განისაზღვრება, თუ დავუშვებთ, რომ  $x$  შემავალი ზემოქმედებები ურთიერთდამოუკიდებელი და არაკორელირებული დროში, ნორმალური განაწილების შემთხვევითი სიდიდეებია, ნულოვანი მათემატიკური ლოდინით და ერთნაირი დისპერსიით.

ავიღოთ მათემატიკური ლოდინი  $Q$ -დან, მივიღებთ

$$E[Q_N] = 2\alpha \sigma^2 \sum_{i=1}^n \Theta_{i,N-1}^2 - \alpha^2 [(n-1)\sigma^4 + E[x^4]] \sum_{i=1}^n \Theta_{i,N-1}. \quad (17.224)$$



ნორმალური  $x$  შემთხვევითი სიდიდის მეოთხე მომენტი ტოლია  $3\sigma^4$  თუ ამას გავითვალისწინებთ, საბოლოოდ მივიღებთ

$$E[Q_N] = \alpha \delta^2 (2 - \alpha(n+2)\delta^2) \sum_{i=1}^n \Theta^2_{i,N-1}. \quad (17.225)$$

$\alpha$ -ს მნიშვნელობა, რომლის დროსაც  $E[Q_n]$  ოპტიმალურია, ე.ი. აღწევს მაქსიმუმს ტოლია

$$\alpha_{\text{ობტ}} = \frac{1}{(n+2)\sigma^2}. \quad (17.226)$$

ამრიგად,

$$k_N = k_{N-1} + \frac{y_N - y_N^*}{(n+2)\sigma^2} x_N. \quad (17.227)$$

აღვილი მისაღებია შეფასების საშუალო შეცდომა  $N$  ტაქტის შემდეგ:

$$E\left[\sum_{i=1}^n Q_{i,N}^2\right] = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^N \sum_{i=1}^n Q_{i,0}^2. \quad (17.228)$$

ეს ფორმულა სამართლიანია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ზემოქმედებები ხასიათდებიან თვისებებით:

$$E[x_i] = 0; \quad E[x_i^2] = \sigma^2;$$

$$E[x_i x_l] = 0, \quad \text{როდესაც } i \neq l; \quad (17.229)$$

$$E[x_{i,N} x_{i,N+j}] = 0 \quad \text{როდესაც } i \neq 0;$$

ამ გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, რომ შემავალი ზემოქმედებები არ არიან ერთმანეთზე და დროზე დამოკიდებული.

მეორე მარტივი ალგორითმი. შეფასება მოვახდინოთ ფორმულით:

$$k_N = k_{N-1} + \alpha x_N \text{Sign}\left[\sum \Theta_{i,N-1} x_{i,N}\right]. \quad (17.230)$$

ეს ალგორითმი მოითხოვს მხოლოდ  $n$  გამრავლებას ტაქტზე, თუ არ ჩავთვლით გამრავლებას მუდმივაზე.  $\alpha$  პარა-

მეტრის მნიშვნელობა, რომლის დროს ალგორითმი კრებადია, მდებარეობს ინტერვალში:

$$0 < \alpha < \frac{2|(\Theta_{N-1}x_N)|}{(x_N, x_N)} = \frac{2|y_N - y_N^*|}{(x_N, x_N)}. \quad (17.231)$$

ცხადია, რომ კრებადობის პირობა ნებისმიერი ფიქსირებული  $\alpha$ -თვის დაირღვევა წინასწარმეტყველების საკმაოდ მცირე  $|(\Theta, x)|$  შეცდომისთვის. თუ წინასწარ დავადგენთ სიზუსტეს, რომლითაც გვინდა ვიწინასწარმეტყველოთ ობიექტის გამომავალი სიდიდე, მაშინ შეიძლება განისაზღვროს  $\alpha$ . ეს სიზუსტე შეიძლება იყოს გასაშუალებული. ვთქვათ, ეს სიზუსტე— $a$  დისპერსია ერთნაირად განაწილებული შემავალი

სიდიდეებისა, ტოლია  $\alpha_{\text{კბ}} = \frac{a}{n\sigma^2}$ , მაშინ  $\alpha_{\text{კბ}} = \alpha/n\sigma^2$

განვიხილოთ მართვის სისტემა იდენტიფიკატორით. ასეთი სისტემის მუშაობა მიმდინარეობს ორ რეჟიმში: სწავლების რეჟიმში და მართვის რეჟიმში. პირველ რეჟიმში მართვა გათიშულია და სისტემა გამოიყენება მხოლოდ ობიექტის იდენტიფიკაციისათვის. იდენტიფიკაციის ხარისხის კრიტერიუმად შეიძლება გამოვიყენოთ გამოსახულება:

$$A = \frac{D[\Delta y]}{D[y]}, \quad (17.232)$$

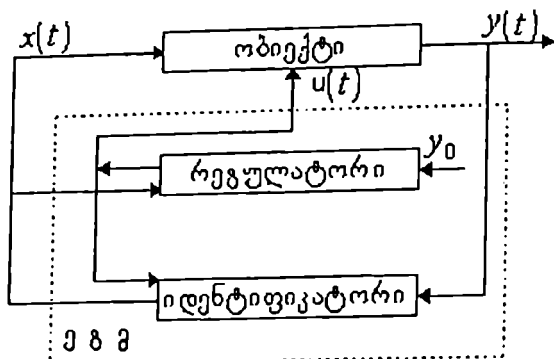
სადაც  $D[\Delta y]$ —წინასწარმეტყველების შეცდომის დისპერსიაა.

$D[y]$ —გამომავალი სიდიდის დისპერსიაა.

თუ ეს თანაფარდობა ერთზე ნაკლებია, მაშინ ის ნაკლებია წინასწარ მოცემულ მნიშვნელობაზე, შესაძლებელია გადასვლა მართვაზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში საჭიროა გაგრძელდეს სწავლების რეჟიმი.

## § 17.11. ადაპტური სისტემა იდენტიფიკატორით (ასი)

ასეთი სისტემის სტრუქტურული სქემა მოცემულია (ნახ. 17.7-ზე) [3].



ნახ17.7

ობიექტის პარალელურად ჩართულია იდენტიფიკატორი, ე.ი. მოწყობილობა, რომელიც რეალური ობიექტიდან მიღებული მონაცემებით აგებს მის მათემატიკურ მოდელს. ზოგად შემთხვევაში განსაზღვრავს ობიექტის სტრუქტურას და პარამეტრებს. მოდელის დაზუსტება ხდება უწყვეტად ობიექტის მოდელის მიხედვით, რომელიც წარმოადგენს ობიექტის უცნობი პარამეტრების შეფასების ვექტორს. ყოველ ტაქტში გამომუშავდება მმართველი ზემოქმედება. ნახაზზე მოცემული სისტემის დაყოფა ბლოკებად პირობითია. ჩვეულებრივ ეს არის ეგმ-ის შიდა პროგრამის სხვადასხვა ნაწილები.

როგორც ჩანს ძირითადი სქემაში იდენტიფიკატორია. ალგორითმი, რომლის მიხედვით მუშაობს იდენტიფიკატორი, უნდა აკმაყოფილებდეს რამდენიმე, ზოგიერთ შემთხვევაში ურთიერთსაწინააღმდეგო პირობებს: (კრებადობა, სიმარტივე, შემავალი და გამომავალი სიდიდეების რაოდენობის გაზრდა არ უნდა იწვევდეს გამოთვლების მკვეთრ გაზრდას). ვინაიდან, ობიექტები ძირითადად არასტაციონარულებია, ამიტომ პრინციპიალურად აუცილებელია ადაპტური მართვის სისტემების გამოყენება.

განვიხილოთ ასი-ის მუშაობა ავტომატური გადართვების რეჟიმში. ე.ი. სწავლების რეჟიმიდან მართვის რეჟიმში გადართვა.

ასი-ს სტანდარტულ სქემაში ობიექტის შესასვლელზე მოქმედებენ  $x$  შემთხვევითი ზემოქმედებები და მმართველი  $u$  სიგნალები. სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ  $x$  არის  $n-1$  განზომილების ვექტორი,  $u$  — სკალარია.  $y$

სკალარული გამოსავალი სიგნალი დაკავშირებულია შემავალ სიგნალებთან განტოლებით:

$$y_N = \sum_{i=1}^{n-1} h_{i,N} x_{i,N} + h_{n,N} u_N + \varepsilon_N, \quad (17.233)$$

სადაც  $h_{i,N}$ —ობიექტის უცნობი პარამეტრებია შეშფოთების არხში,  $h_{n,N}$ —ობიექტის პარამეტრია მართვის არხში;  $\varepsilon_N$ —ზმაჟურია.

გამომავალი და შემავალი ცვლადები  $x_N$ ,  $u_N$  და  $y_N$  მიეწოდება იდენტიფიკატორს, სადაც რომელიმე ალგორითმით შეფასდება ობიექტის პარამეტრები  $k$ . განვსაზღვროთ მოდელის პარამეტრები, რომლებიც მოცემულია შემდეგი სახით:

$$y_N^* = \sum_{i=1}^{n-1} k_{i,N-1} x_{i,N} + k_{n,N-1} u_N, \quad (17.234)$$

სადაც  $k_{i,N-1}$ —ობიექტის პარამეტრის შეფასებაა  $(N-1)$  ტაქტზე შეშფოთების ზემოქმედების არხის მიხედვით;  $k_{n,N-1}$ —ობიექტის პარამეტრის შეფასებაა მართვის არხის მიხედვით;  $y_N^*$ —ობიექტის გამომავალი სიდიდის შეფასებაა.

გამოვიკვლიოთ სისტემა, რომელიც სტაბილიზაციას უკეთებს გამოსასვლელის ნულოვან მნიშვნელობას ე.ი.  $y_0 = 0$  მართვის განტოლება ამ შემთხვევაში ასეთნაირად ჩაიწერება:

$$y_N^* = \sum_{i=1}^{n-1} k_{i,N-1} x_{i,N} + k_{n,N-1} u_N = 0, \quad (17.235)$$

საიდანაც გამოითვლება მმართველი ზემოქმედება:

$$u_N = \frac{1}{k_{n,N-1}} \sum_{i=1}^{n-1} k_{i,N-1} x_{i,N} \quad (17.236)$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ ნულოვანი გამოსასვლელის სტაბილიზაცია არის იდენტიფიკატორისათვის ყველაზე მძიმე რეჟიმი. საქმე იმაშია, რომ მხოლოდ ამ შემთხვევაში გამოსასვლელები არიან ერთმანეთთან წრფივად დაკავშირებული, რაც ართულებს იდენტიფიკაციის პროცესს. მაგალითად, ამ შემთხვევაში უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენება არ

შეიძლება, ვინაიდან საწყის მონაცემთა მატრიცა არის გადაგვარებული.

მიმდინარე იდენტიფიკაციისათვის გამოიყენება სხვადასხვა მეთოდები. ღია სისტემებში შეიძლება გამოვიყენოთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდი, ერთბიჯიანი ალგორითმები და ა.შ. შეკრულ სისტემებში ამ მეთოდებს გააჩნიათ გარკვეული სიძნელეები, ერთ-ერთი მთავარია—კრებადობის სიჩქარის შემცირება.

ასი-ში ობიექტის პარამეტრების დასაზუსტებლად ყოველ ბიჯზე ერთბიჯიანი ალგორითმების გამოყენებისას გამოვიყენოთ ფორმულები:

$$k_{i,N} = k_{i,N-1} + \Delta_N x_{i,N} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (17.237)$$

$$k_{n,N} = k_{n,N-1} + \Delta_N u_N. \quad (17.238)$$

თუ მიღებული შეფასებები გამოდინან  $k_{\min} < k_N < k_{\max}$  არედან (სადაც  $k_{\min}$  — არის ობიექტის პარამეტრის ცვლილების შეფასების ქვედა ზღვარი, ხოლო  $k_{\max}$  — შეფასების ზედა ზღვარი), მაშინ მათ ავტომატურად ენიჭებათ შესაბამისი ზღვრული მნიშვნელობა (17.238) ფორმულაში:

$$\Delta_N = \frac{y_N - \hat{y}_N}{\gamma + \sum_{i=1}^{n-1} x_{i,N}^2 + u_N^2}, \quad (17.239)$$

სადაც  $\gamma > 0$  — მუდმივაა, რომელიც ამოირჩევა წინასწარ. იდენტიფიკაციის შეცდომა გამოითვლება ფორმულით:

$$\sum_{i=1}^n \Theta_{i,N} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N \sum_{i=1}^n \Theta_{i,0}, \quad (17.240)$$

სადაც  $\Theta_{i,N} = h_{i,N} - k_{i,N}$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ .

შეკრული სისტემებისათვის ეს ფორმულები არ გამოიყენება.

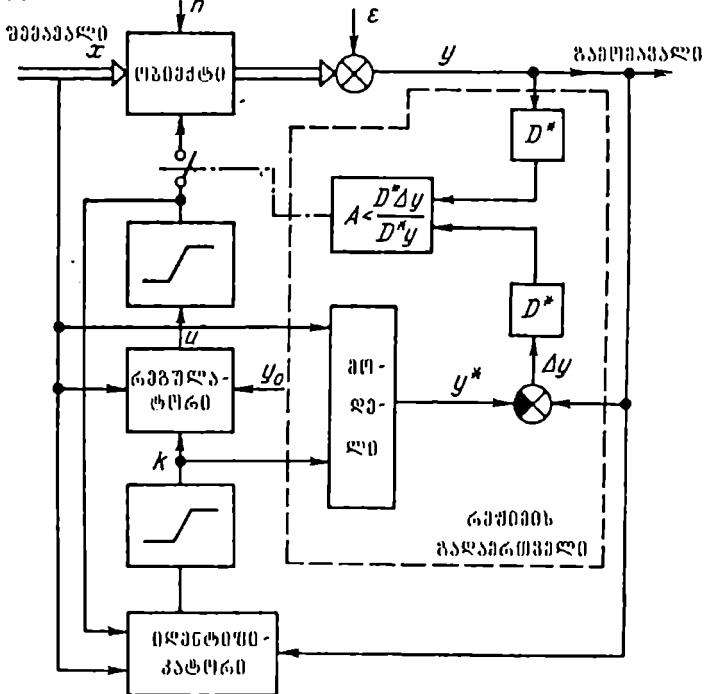
როგორც აღინიშნა, ჩაკეტილ სისტემაში იდენტიფიკაციის სიჩქარე მნიშვნელოვნად მცირდება. თეორიულად იდენტიფიკაციის ცდომილების განსაზღვრა, განტოლებათა არაწრფივობის გამო საკმაოდ რთულია, ამიტომ ასეთ შემთხვევაში იყენებენ სტატისტიკურ მოდელირებას.

იმისათვის, რომ უზრუნველყოფილ იქნას სტაბილიზაციის ცდომილების მინიმუმი, ჩაატარეთ გამოკვლევა (ნახ.17.8) მოცემული ასი-ს მოდელირების ბლოკსქემის შესაბამისად.

სისტემა მუშაობს, როგორც ჩვეულებრივი (ასი); მხოლოდ გადართვა სწავლების რეჟიმიდან მართვის რეჟიმში მიმდინარეობს ავტომატურად, იმისდა მიხედვით სრულდება თუ არა პირობა

$$A < D^*[\Delta y] / D^*[y],$$

სადაც  $D^*[\Delta y]$ —არის პროგნოზირების ცდომილების დისპერსიის შეფასება;  $D^*[y]$ —გამოსასვლელის დისპერსიის შეფასება, ხოლო  $A < 1$ . შემდეგ თუ საჭიროა შეიძლება აღიწეროს ალგორითმი და მოდელირების შედეგი.



ნახ.17.8

მიღების ცხლად გლინვის ტექნოლოგიის მოკლე  
დახასიათება [3], [134].

თანამედროვე მილსაგლინავი წარმოების დონე საშუალებას იძლევა დამზადდეს ზომათა ფართო დიაპაზონში ცხლად გაგლინული უნაყერო მილები. მილის გაგლინვის სიზუსტე განისაზღვრება მილის კედლის სისქის და დიამეტრის გადახრებით მოცემული მნიშვნელობიდან. მილის კედლის სისქე და დიამეტრი მისი ძირითადი პარამეტრებია, რომლებიც განსაზღვრავენ მილის ხარისხს.

მიღების სიზუსტე დამოკიდებულია ფაქტორთა დიდ რაოდენობაზე და ძირითადად განპირობებულია ტექნოლოგიის დონით და დამზადების ხერხით.

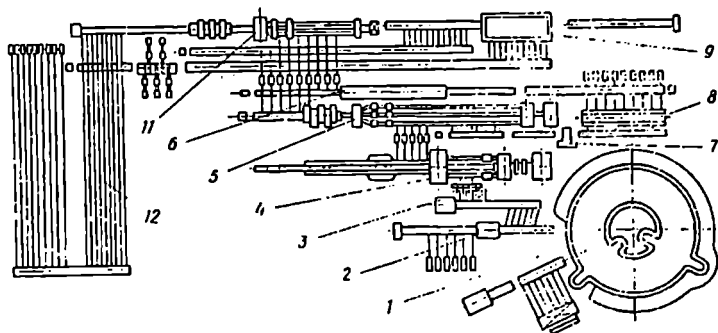
მიღების ცხლად გლინვას სხვადასხვა ზომების და ფოლადის მარკის, აგრეთვე მათი ხარისხის მიმართ მოთხოვნების შესაბამისად აწარმოებენ რამდენიმე ხერხით. თითოეულ მათგანს ახასიათებს თავიანთი ტექნოლოგიური თავისებურებანი. მიუხედავად ამ ხერხების სხვადასხვაობისა მიღების ძირითადი ოპერაციები ასეთია:

ლითონის (ნამზადის) მომზადება გლინვისათვის, ნამზადის გაცხელება, გაღრუბული მასრის მიღება, მასრის მილად გაგლინვა, კალიბრება ან რედუცირება გარე დიამეტრის მიხედვით და გამოყვანა.

ძირითად განმასხვავებელ თავისებურებას მიღების წარმოების ნებისმიერი ხერხისას წარმოადგენს მასრის მილად გაგლინვის ხერხი. დანარჩენი ოპერაციები მილის წარმოების სხვადასხვა ხერხებისათვის ერთნაირია.

ჩვენ განვიხილავთ მიღების გლინვას მილსაგლინავ აგრეგატებზე სამგლინინანი დგანით და ავტომატდგანზე.

მზა მიღების სიზუსტე ზოგადად განისაზღვრება დეფორმაციით მისი წარმოების სხვადასხვა ეტაპზე. მაგრამ განსაკუთრებულ ზეგავლენას ახდენს დეფორმაცია იმ დგანებზე, რომლებზეც საბოლოოდ ფორმირდება მილის ზომები—კედლის სისქე და დიამეტრი. კედლის სისქის ფორმირება ხდება სამგლინინან საგლინავ დგანზე ან ავტომატდგანზე, ხოლო მაკალიბრებელ დგანზე ხდება მილის დიამეტრის ფორმირება.



ნახ.17.9 1—რგოლური ღუმელი, 2—ჩამტვირთავი და გად-  
 მომტვირთავი მანქანები, 3—მაცენტრირებელი, 4—გამქოლი  
 დგანი, 5—სამგლინიანი საგლინავი დგანი, 6—სამართულამომღე-  
 ბი, 7—სამართულის შემზეთავი მანქანა, 8—სამართულის გასა-  
 ციებელი აბაზანა, 9—შემათბობელი ღუმელი, 10—სამგლინიანი  
 მაკალიბრებელი დგანი, 11—ხუთგალიანი ორგლინიანი მაკალიბ-  
 რებელი დგანი, 12—გამაცივებელი მაგიდა.

განვიხილოთ სამგლინიანი მილსაგლინავი აგრეგატის მაგა-  
 ლითზე ცხლად გაგლინული მილების წარმოების ძირითადი  
 ოპერაციები. (ნახ.17.9)

ნამზადის გაცხელება:

ნამზადის გაცხელების რეჟიმი მნიშვნელოვან წილად გან-  
 საზღერავს მილების ხარისხს, აგრეგატის მწარმოებლურობას.  
 ნამზადების გაცხელების ხანგრძლივობა დამოკიდებულია გა-  
 საცხელებელი ნამზადის ქიმიურ შემადგენლობაზე, ლითონის  
 ფიზიკურ და მექანიკურ თვისებებზე და ღუმელის კონ-  
 სტრუქციაზე.

თანამედროვე მილსაგლინავ დგანებზე ფართოდ გავრცელე-  
 ბულია რგოლური ღუმელი მოძრავი ჭვედით (1). ამ ღუ-  
 მლებში ნამზადებს ათავსებენ ერთ ან ორ რიგად მოძრავ  
 ჭვედზე და ისინი გადაადგილდებიან ჭვედთან ერთად გაცემის  
 ფანჯრისაკენ. ნამზადები თანდათანობით ცხელდებიან საჭირო  
 ტემპერატურამდე.

ნამზადის გაცხელების ტემპერატურა სხვადასხვა მარკის  
 ფოლადებისათვის ირჩევა  $1000 - 1250^{\circ}\text{C}$  ფარგლებში.



ნამზადების გაცხელება უნდა მიმდინარეობდეს თანაბრად ნამზადის კვეთისა და სიგრძის მიმართ.

გაქოლების პროცესი:

ეს პროცესი მიმდინარეობს გამჭოლ დგანზე (4), რომელზეც ხდება ღრუ მასრის მიღება მთლიანი ნამზადისაგან.

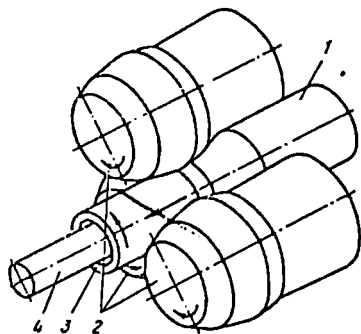
გაქოლების პროცესში გლინების მიერ წატაცებული ნამზადი იღებს ბრუნვით-გადატანით მოძრაობას და შემდეგ ღეროზე დამაგრებულ სამართულთან შეხვედრისას გაიქოლება მასრად.

გამჭოლი დგანის წინ აწარმოებენ ნამზადის ცენტრირებას პნევმატიკური მაცენტრირებელის (3) საშუალებით. ეს ამცირებს მასრის წინა ნაწილის ნაირკედლიანობას.

მასრა დახრილი სტელაჟების საშუალებით ჩამოგორდება საგლინავი დგანის (5) მიმღებ ღარში.

გაგლინვის პროცესი:

სამგლინიან საგლინავი დგანის მიმღებ ღარში მასრას უკეთდება გრძელი თავისუფლად მცურავი სამართული. გაგლინვის სქემა სამგლინიან საგლინავ დგანში მოცემულია (ნახ.17.10)



ნახ.17.10. 1-მასრა, 2-გლინები, 3-მილი, 4-სამართული.

მასრის (1) გაგლინვა მილად (3) მიმდინარეობს ცილინდრულ სამართულზე (4) და კალიბრში, რომელსაც ქმნიან სამი სიმეტრიულად განლაგებული გლინი (2), რაც უზრუნველყოფს მაღალი სიზუსტის მილის მიღებას კედლის სისქის მიხედვით, ვიდრე ნებისმიერ სხვა დგანზე.

გლინებს შორის მანძილის შესაცვლელად იყენებენ ამჟრავ-თან დაკავშირებულ დასაქერ ხრახნებს. გლინებს შორის მან-ძილი არის მმართველი ზემოქმედება მილის კედლის საშუა-ლო სისქის რეგულირებისას. გაგლინვის შემდეგ მილი სა-მართულიანად მიეწოდება სამართულამომღებს (ნახ.17.9). სა-მართული ამოღების შემდეგ გადაეცემა აბაზანას გასაცივებ-ლად და შემდეგ ისევ საგლინავ დგანს, ხოლო მილი შე-სათბობ ღუმელს (ნახ.17.9) და შემდეგ მაკალიბრებელ დგანს.

კალიბრების პროცესი:

მაკალიბრებელი დგანი უზრუნველყოფს მილების სიზუსტეს დიამეტრის მიხედვით. კალიბრება მიმდინარეობს სამართულის გარეშე. სამგლინიანი მაკალიბრებელი დგანის კონსტრუქცია სამგლინიანი საგლინავი დგანის ანალოგიურია.

გლინების მომართვა უნდა ვაწარმოვოთ ისე, რომ კალიბ-რის ზომა, რომელსაც გლინები ქმნიან, უნდა იყოს ტოლი ცხელ მდგომარეობაში მზა მილის გარე დიამეტრის.

მრავალ სამგლინიან საგლინავ აგრეგატზე აყენებენ მრავალგალიან მაკალიბრებელ-რედუქციულ დგანებს (11) მილების დიამეტრის შესამცირებლად.

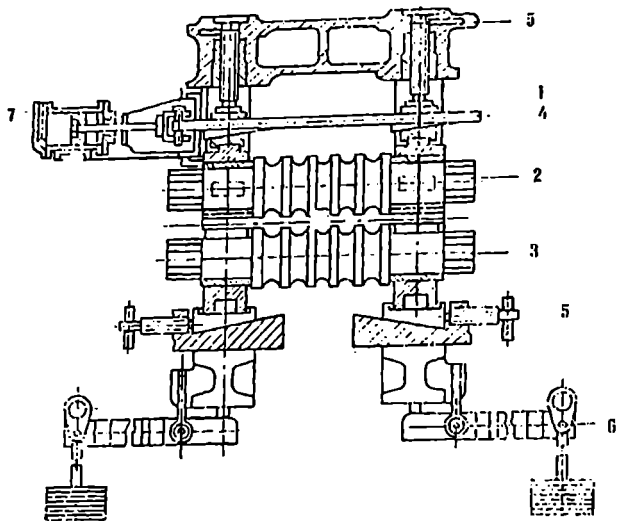
კალიბრების შემდეგ მილები იგზავნება გამაცივებელ მაგი-ლაზე.

მილების გამოყვანა:

ეს პროცესი მოიცავს მილების გასწორებას, ბოლოების ჩა-მოქრას, თერმოდამუშავებას და სხვა დამატებით დამუშავებებს.

ავტომატდგანიანი მილსაგლინავი აგრეგატის  
ტიქნოლოგიური პროცესის აღწერა .

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ კედლის სისქის რეგულირება მიმდინარეობს საგლინავ დგანში სამგლინიანი მილსაგლინავი აგრეგატებისათვის, ხოლო ავტომატდგანიანი მილსაგლინავ აგ-რეგატებში-ავტომატდგანში. ამიტომ განვიხილოთ ასეთი აგრე-გატის მხოლოდ ავტომატდგანი.



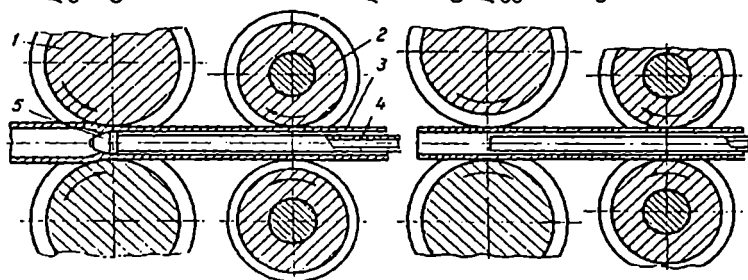
ნახ.17.11. 1-სადგარი, 2-ზედა გლინი, 3-ქვედა გლინი, 4-სოლური მექანიზმი, 5-ზედა და ქვედა დასაქერი მოწყობილობა, 6-გამაწონასწორებელი ტვირთი, 7-პნევმოცილინდრი.

შედგება ორი ვერტიკალურად განლაგებული სადგარისაგან (1), რომლებიც შეერთებული არიან სახურავით და შემწოვი ქანკიყებით. სადგარის შიგნით ბალიშებზე რხევად საკისარზე მიმაგრებულია ორი მუშა გლინი: ზედა (2) და ქვედა (3), რომლის კასრის გასწვრივ დაკუთხვილია კალიბრები. კალიბრების რაოდენობა გლინზე და მათი ზომები განისაზღვრება მიღების სორტამენტის მიხედვით.

ქვედა და ზედა გლინების მდგომარეობა სიმაღლის მიხედვით რეგულირდება სოლური მექანიზმებით (4) და დასაქერი ხრახნებით (5). იმისათვის, რომ ზედა გლინი მუდმივად მიქერილი იყოს დასაქერ ხრახნებთან გათვალისწინებულია გამაწონასწორებელი მოწყობილობა საპირწონეთი (6). სოლის გადაადგილება გლინების ღერძის გასწვრივ წარმოებს პნევმოცილინდრით (7), მუშა გლინების იქით მუშა გალის სადგა-

რის სპეციალურ ნაწილში განლაგებულია ჯგუფური უკუმიწოდების გორგოლაქები (2) (ნახ.17.12),

რომლებიც მოძრაობაში მოდიან ცალკე ძრავით.



ნახ.17.12 1—გლინები, 2—უკან მიწოდების გორგოლაქები, 3—მასრა, 4—ღერო, 5—სამართული.

ღგანის უკანა მაგიდაზე მოთავსებულია რამდენიმე რიგი მიმართველი გამყანები ძაბრებით, კალიბრების რაოდენობის შესაბამისად. სამართულის დასაქერად ლეფორმაციის არეში გამყანების შიგნით მოთავსებულია ღერო, რომელსაც ამაგრებენ საბჯენზე უკანა მაგიდის ბოლოს. მარეგულირებელი მექანიზმის საშუალებით ღერო შეიძლება გადაადგილდეს ღერძული მიმართულებით (ნახ.17.12).

გლინვის წინ წინა მაგიდას ღარით აყენებენ კალიბრის ღერძის გასწვრივ, რომელზეც მოხდება გლინვა, ხოლო ღეროს ბოლოზე აცმევენ სამართულს. მასრა მიეწოდება კალიბრს, იგლინება სამართულზე და მიეწოდება უკანა მაგიდას. შემდეგ ზედა მუშა გლინი სოლური მექანიზმის გამოწვევისას გამაწონასწორებელი მოწყობილობის ზემოქმედებით აიწევა ზევით, რის შედეგადაც იზრდება მანძილი გლინებს შორის, სამართული იხსნება ღეროსაგან, უკან მიწოდების ქვედა გორგოლაქი აიწევა, მილს მიაყრდნობს ზედა გორგოლაქს, გორგოლაქები იბრუნებენ შებრუნებული მიმართულებით და გამოადგებენ მილს უკანა მიმღებ ღარზე. სოლური მექანიზმი აბრუნებს ზედა გლინს წინანდელ მდგომარეობაში, ღეროზე დგება სამართული, ხოლო უკან მიწოდების ქვედა გორგოლაქი დაეშვება. მილი, რომელიც დევს ღარში შემობრუნდება  $90^{\circ}$ -ით და მიეწოდება ღგანს.

ავტომატღგანის მომართვა მდგომარეობს იმაში, რომ დავაყნოთ საჭირო კალიბრი სიმაღლის მიხედვით, რომელიც

ხორციელდება დასაქვარი ხრახნით ზედა გლინის მდგომარეობის რეგულირებით, რომელიც გადაადგილდება ძრავის საშუალებით. დეფორმაციის სიდიდე ავტომატდგანში განისაზღვრება კალიბრისა და სამართულის ზომებით.

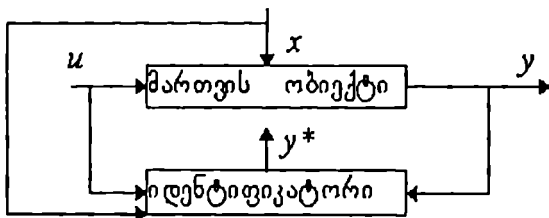
ფაქტიური და მოცემული კედლის სისქეების შესაბამისობას აკონტროლებენ თეორიული სიგრძის მიხედვით. ამ შემთხვევაში, როგორც სამგლინიან დგანზე მმართველი ზემოქმედება მილის კედლის სისქის რეგულირებისათვის არის გლინებს შორის მანძილი.

მაგალითი:

მილსაგლინაუი დგანის იდენტიფიკაცია.

რთული ტექნოლოგიური პროცესების, კერძოდ მილსაგლინაუი აგრეგატების მართვისათვის ფართოდ გამოიყენება ადაპტური მართვის სისტემები. ამ სისტემებისათვის ძირითად საკითხს ობიექტის იდენტიფიკაცია შეადგენს.

მართვის ობიექტის იდენტიფიკაციის ერთ-ერთი მეთოდია ობიექტის უკუკავშირში იდენტიფიკატორის ჩართვა (ნახ.17.13)



ნახ.17.13

იდენტიფიკატორის დანიშნულებაა ობიექტის მათემატიკური მოდელის აგება მისი შესავალი და გამოსავალი სიდიდეების გაზომვის შედეგების მიხედვით. დავუშვათ ობიექტის შესავალთა ვექტორი მოიცავს  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  კონტროლირებად შემთხვევით სიდიდეებს, ხოლო მმართველი ზემოქმედება  $u$ -სკალარია.

ობიექტის სკალარული გამოსასვლელი  $y$  დაკავშირებულია შესავალ სიდიდეებთან განტოლებით:

$$y_N = \sum_{i=1}^{n-1} h_{i,N} x_{i,N} + h_{n,N} u_N + \varepsilon_N, \quad (17.241)$$

სადაც  $h_{i,N}$ —ობიექტის უცნობი პარამეტრებია შემაშფოთებელი ზემოქმედების არხით;  $h_{n,N}$ —ობიექტის პარამეტრია მართვის არხის მიხედვით,  $\varepsilon_N$ —ხმაურის სიგნალია.

ჩავთვალოთ, რომ ობიექტის და მათემატიკური მოდელის სტრუქტურები ემთხვევიან ერთმანეთს, მაშინ ობიექტის მოდელის გამოსასვლელი— $y^*$  შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$y_N^* = \sum_{i=1}^{n-1} k_{i,N-1} x_{i,N} + k_{n,N-1} u_N, \quad (17.242)$$

სადაც  $k_{i,N-1}$ —ობიექტის  $i$ —ური პარამეტრის შეფასებაა  $(N-1)$  ტაქტზე შემაშფოთებელი ზემოქმედების არხით;  $k_{n,N-1}$ —ობიექტის პარამეტრის შეფასებაა მართვის არხის მიხედვით;  $y_N^*$ —მოდელის გამოსავალია (ობიექტის გამოსავლის შეფასება).

ობიექტის პარამეტრთა შეფასებას იდენტიფიკატორი აწარმოებს გარკვეული ალგორითმის შესაბამისად.

მილსაგლინაივი აგრეგატების იდენტიფიკაციისას უმრავლეს შემთხვევაში იყენებენ ერთბიჯიან ალგორითმს, რომელიც საშუალებას იძლევა დავაზუსტოთ ობიექტის პარამეტრების შეფასებები ყოველ ბიჯზე ფორმულებით:

$$\begin{aligned} k_{i,N} &= k_{i,N-1} + \Delta_N x_{i,N}, & (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ k_{n,N} &= k_{n,N-1} + \Delta_N u_N, \end{aligned} \quad (17.243)$$

სადაც

$$\Delta_N = \frac{y_N - y_N^*}{\gamma + \sum_{i=1}^{n-1} x_{i,N}^2 + u_N^2}.$$

$0 < \gamma < 1$  წინასწარ შერჩეული მუდმივაა.

იდენტიფიკაციის ალგორითმი უნდა აკმაყოფილებდეს ორ პირობას: უზრუნველყოს ბიჯთა მინიმალური რაოდენობა სწავლებაზე (ალგორითმის კრებადობა) და მაქსიმალურად ზუსტად მივუახლოვდეთ ობიექტის პარამეტრებს (იდენტიფიკაციის სიზუსტე).

ილენტიფიკაციის ამოცანის რეალიზაციისას წარმოებს მოდელის ყველა შესავალი  $x$ ,  $u$  და გამოსავალი  $y$  სიდიდეების გამოკითხვა, რომლებიც წარმოადგენენ საწყის ინფორმაციას.

გარდა ამისა საწყის მონაცემებში შედის:

$k_{i,0}$ —მოდელის პარამეტრების შეფასებების საწყისი მნიშვნელობები;

$\gamma$ —ალგორითმის მუდმივა  $0 < \gamma < 1$ ;

$\alpha$ —გასაშუალოების კოეფიციენტი  $0 < \alpha < 1$ .

ამ მონაცემების საფუძველზე ტარდება შემდეგი ოპერაციები:

—ცვლადების ცენტრირება საშუალო მნიშვნელობათა მიმართ. ეს ზრდის ალგორითმის კრებადობას. ამისათვის წარმოებს საშუალო მნიშვნელობათა გამოთვლა ფორმულით:

$$\bar{x}_{i,N} = (1 - \alpha)\bar{x}_{i,N-1} + \alpha x_{i,N} \quad (17.244)$$

და თითოეული ცვლადის გადახრა საშუალო მნიშვნელობიდან

$$x_{i,N} - \bar{x}_{i,N}.$$

—ცვლადების ნორმირება საშუალო კვადრატული გადახრის მიმართ. ნორმირება დაკავშირებულია იმასთან, რომ დისპერსია ერთიდაიგივე პარამეტრებისათვისაც კი სხვადასხვა ობიექტებზე სხვადასხვაა. გარდა ამისა დისპერსია შეიძლება შეიცვალოს სისტემის ფუნქციონირებისას. ნორმირება უზრუნველყოფს მათემატიკური მოდელის უნიფიკაციის მაღალ ხარისხს, შესაძლებლობას იძლევა გამოვიყნოთ ილენტიფიკაციის ალგორითმი წრფივი ობიექტისათვის ნებისმიერი საწყისი მნიშვნელობებით და დისპერსიით.

ნორმირებისათვის გამოითვლება დისპერსია:

$$\delta_N^2 = (1 - \alpha)\delta_{N-1}^2 + \alpha(x_N - \bar{x}_N)^2, \quad (17.245)$$

ამრიგად, ცენტრირების და ნორმირების შედეგად მივიღებთ ცვლადებს:

$$x_{i,N} = \frac{x_{i,N} - \bar{x}_{i,N}}{\delta_{i,N}^2}, \quad (17.246)$$

$$y_{i,N} = \frac{y_N - \bar{y}_N}{\delta_{y,N}^2}. \quad (17.247)$$

— მოდელის გამოსავალი სიდიდის პროგნოზირება:

$$y_n^* = \sum k_{i,N-1} x_{i,N} \quad (17.248)$$

— კოეფიციენტების კორექტირება ერთბიჯიანი ოპტიმალური ალგორითმით:

$$k_{i,N} = k_{i,N-1} + \frac{y_N^* - y_N}{\gamma + \sum_{i=1}^n x_{i,N}^2} x_{i,N} \quad (17.249)$$

მილსაგლინავ აგრეგატების ძირითადი ამოცანაა მიღების გეომეტრიული ზომების—კედლის სისქის და დიამეტრის ოპტიმალურ მნიშვნელობათა შენარჩუნება. კედლის სისქის და დიამეტრის სტაბილიზაცია ძირითადად განსაზღვრავს მიღების ხარისხს და თვითღირებულებას, ხოლო ამ პარამეტრების დისპერსიის შემცირება საშუალებას იძლევა ვიმუშაოთ კედლის სისქის და დიამეტრის უარყოფითი დაშვების არეში.

მილსაგლინავ აგრეგატებზე მილის კედლის სისქის ფორმირება ხდება სამგლინიან საგლინავ დგანზე ან ავტომატდგანზე, ხოლო მილის დიამეტრისა მაკალიბრებელ და რედუქციულ დგანებზე. ამ პარამეტრების რეგულირებისას გამოიყენება მართვის ადაპტური სისტემები.

განვიხილოთ სამგლინიანი საგლინავი დგანის იდენტიფიკაციის ამოცანა.

მიღების მიღების ტექნოლოგიური პროცესი ასეთია: მრგვალი მთლიანი ნამზადი მიეწოდება ლუმელს, სადაც ხდება მისი გაცხელება  $1100^{\circ}\text{C}$ —მდე, რის შემდეგ მიეწოდება გამაღრუბებელ დგანს, სადაც ის გარდაიქმნება მასრად და მიეწოდება საგლინავ დგანს. დგანში გატარების წინ მასრის შიგნით ათავსებენ სამართულს. საგლინავ დგანში გაგლინვის შედეგად ვღებულობთ გარკვეული სისქის მილს.

საგლინავი დგანის გამოსავალი სიდიდეა მილის კედლის სისქე— $S$ . შესავალი სიდიდეები, რომლებიც ძლიერად მოქმედებენ კედლის სისქეზე და განსაზღვრავენ მის გადახრას, შემდეგია: შემაშფოთებელი კონტროლირებადი პარამეტრები: მასრის კედლის სისქე  $S_3$ , ტემპერატურა— $T_3$ , სამარ-



თულის დიამეტრი— $D_{სა}$ , ხოლო მმართველი ზემოქმედება არის გლინებს შორის მანძილი— $h$ .

ამრიგად,  $N$  ნომრის მილისათვის მათემატიკურ მოდელს ექნება შემდეგი სახე:

$$S_N^* = K_{1,N-1} a_N + K_{2,N-1} D_{ა,N} + K_{3,N-1} S_{ა,N} + K_{4,N-1} T_{ა,N} + K_{5,N-1} D_{საა,N}, \quad (17.250)$$

სადაც  $S_N^*$ —მილის კედლის სისქის გადახრის პროგნოზირებული მნიშვნელობაა  $N$ —ური მილისათვის, ხოლო  $h_N, D_{ა,N}, S_{ა,N}, T_{ა,N}, D_{საა,N}$ —შესაბამისი პარამეტრის გადახრათა შეფასებები;  $K_{1,N-1} \div K_{5,N-1}$ —დგანის მოდელის კოეფიციენტთა შეფასებებია წინა მილისათვის.

კოეფიციენტთა დაზუსტების ალგორითმი ჩვენს შემთხვევაში ღებულობს ასეთ სახეს

$$K_{i,N} = K_{i,N-1} + \frac{S_N - S_N^*}{\gamma + \sum_{i=1}^N x_{i,N^2}} x_{i,N}. \quad (17.251)$$

მოდელის დაზუსტება მიმდინარეობს ადაპტური სისტემის მუშაობის ორივე რეჟიმში: სწავლების და მართვის რეჟიმში.

სწავლების რეჟიმში მთავრდება მაშინ, როდესაც კედლის სისქის პროგნოზირებულ მნიშვნელობათა დისპერსია ნაკლებია კედლის სისქის ფაქტიურ მნიშვნელობათა დისპერსიაზე.

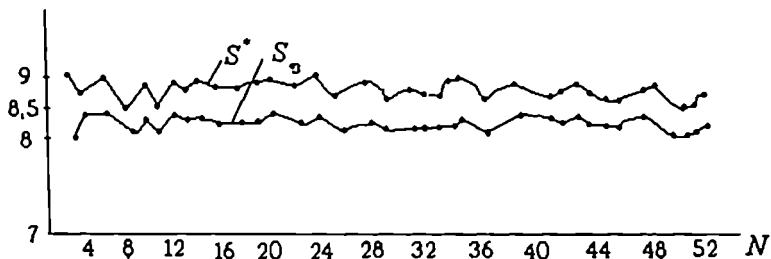
მოდელის დაზუსტების ხარისხის შეფასებისათვის განსაზღვრავენ მილის კედლის სისქის პროგნოზირებულ სიდიდეთა და ფაქტიურ მნიშვნელობათა დისპერსიის ფარდობას

$$\alpha = \frac{\delta(S_{ყ})}{\delta(S^*)}, \quad (17.252)$$

$$\delta(S_{ყ}) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n (S_{ყ,i} - \bar{S}_{ყ})^2}$$

$$\delta(S^*) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n (S_{ყ,i} - S_i^*)^2}$$

სადაც  $S_{\text{ყ}}$  — მილის ფაქტიური კედლის სისქის გადახრაა საშუალო მნიშვნელობიდან,  $S^*$  — მილის პროგნოზირებული კედლის სისქის გადახრაა;  $N$  — გაზომვათა რაოდენობა. (ნახ.17.14) წარმოდგენილია მილის კედლის სისქის ფაქტიური  $S_{\text{ყ}}$  და პროგნოზირებული  $S^*$  მნიშვნელობათა ცვლილების გრაფიკი



ნახ.17.14

გრაფიკიდან ჩანს, რომ 5-7 მილის გაგლინვის შემდეგ მილის კედლის სისქის მნიშვნელობა პრაქტიკულად ემთხვევა ფაქტიურს (კრებადობის ხარისხი მაღალია).

ცხრილში მოცემულია მოდელის სწავლების ხარისხის მაჩვენებელი სხვადასხვა პარტიათა მიღებისათვის.

ცხრილი 17.1

| მილის ზომა მმ | მილის კედლის სისქის დისპერსია |                                  | სწავლების ხარისხი — $\alpha$ |
|---------------|-------------------------------|----------------------------------|------------------------------|
|               | პროგნოზირებულის $\sigma(S^*)$ | ფაქტიურის $\sigma(S_{\text{ყ}})$ |                              |
| 74,3 X 8,8    | 0,24                          | 0,33                             | 1,37                         |
| 95 X 15,7     | 0,12                          | 0,14                             | 1,40                         |
| 83 X 14,0     | 0,21                          | 0,22                             | 1,10                         |

ამრიგად, კოეფიციენტი  $\alpha$  — იცვლება 1,1-1,4 ფარგლებში.

1. გუგუშვილი ა.შ., იმედაძე თ.გ., გარგი დ. - ავტომატური მართვის თეორია. მდგომარეობათა სივრცის მეტოდი. თბილისი, გამომცემლობა „საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი“ 1994. - 111გვ.
2. გოგიჩაიშვილი გ.გ., შონია ო.ბ., ქართველიშვილი ი.შ. „ოპერაციათა კვლევა“ ნაწილი 1, ნაწილი 2. თბილისი, 1996, 1997. ნაწილი 1 - 83გვ, ნაწილი 2 111გვ.
3. Адаптивное управление точностью прокатки труб. Под ред. Данилова Ф.А. и Райбмана Н.С. М.: Металлургия, 1980. 280с.
4. Адаптивные системы автоматического управления. Под ред. Яковлева В.Б. Л.: изд.-во ЛГУ. 1984. 204с.
5. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа; 1986. 319с.
6. Александров А.Г. Оптимальные и Адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1986. 263с.
7. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984. 288с.
8. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1976. 432с.
9. Анциферов Е.Г. Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск.: Наука, Сиб. отделение, 1990. 160с.
10. Атанс М., Фалб И. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764с.
11. Афанасьев В.Н., Данилина А.Н. Алгоритмическое конструирование систем управления с неполной информацией. - М.: МИЭМ, 1985. 94с.

12. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования системы управления. - М.: Высшая школа, 1989. 447с.
13. Афанасьев В.Н., Носов В.Р., Прокопов В.И. Адаптивные системы управления. М.: МИЭМ, 1990. 130с.
14. Ашманов С.А. Линейное программирование. М.: Наука, 1981. 304с.
15. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. - М.: Наука, 1991. 448с.
16. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана. М.: Мир, 1988. 168с.
17. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. - М.: Мир, 1982. 583с.
18. Банди Б. Основы линейного программирования. - М.: Радио и связь, 1989, 176с.
19. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. М.: Связь, 1988. 128с.
20. Бейко И.В. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. М.: Наука, 1987. 363с.
21. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989. 540с.
22. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987. 400с.
23. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. М.: Наука, 1982 - 199с.
24. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972 - 544с.
25. Васильев В.В. Тринадцать лекций по основам вариационного исчисления. Иркутск.: Изд-во Иркутского университета, 1989. 103с.
26. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. - 552с.

27. Вариационные принципы механики. Под ред. Полака Л.С. - М.: Физматгиз, 1959. 932с.
28. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. - Тбилиси.: Изд-во ТГУ, 1977. - 254с.
29. Гасс С. Линейное программирование. М.: Физматгиз, 1961. 303с.
30. Гилль Ф., Мюррей У. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509с.
31. Гугушвили А.Ш., Арефьев Б.А. Определение характеристик нелинейных объектов по их статистическим функциям. Тбилиси.: Труды ТНИИСА, Т.VII. 1966. 105-113с.
32. Гугушвили А.Ш., Арефьев Б.А., Буадзе Г.А. Экспериментальное определение постоянной времени нелинейных объектов. Известия ВУЗ-ов СССР, Приборостроение, Т.12, №4, 1969, 42-46с.
33. Гугушвили А.Ш., Арефьев Б.А., Эндаладзе Д.Л. Экспериментальный метод опознавания структуры одномерных нелинейных объектов управления с Экстремальной характеристикой. Автоматика, №2, 1970. 43-47с.
34. Гугушвили А.Ш. Принцип симметрии в идентификации нелинейных объектов управления. В кн.: Труды IX Всесоюзной школы семинара по адаптивным системам. Алма-Ата. 1979. 65-69с.
35. Гугушвили А.Ш. Синтез оптимального входного сигнала для идентификации нелинейных объектов управления. Сообщения АН ГССР Т.101, №1, 1981. 113-116с.
36. Гугушвили А.Ш. Фильтр Калмана для случайных полей. Сообщения АН ГССР, Т.63, №2, 1985. 242-246с.
37. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения. М.: Прогресс. 1966. 600с.

38. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. основы негладкого анализа и квазидифференциальные исчисления. М.: Наука, 1990. 432с.
39. Деннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988. 440с.
40. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432с.
41. Живоглазов В.П. Адаптация в автоматизированных системах управления технологическими процессами. Фрунзе.: Изд-во "Илим", 1974. 227с.
42. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. М.: Наука. 1970. 703с.
43. Злочевский С. Прикладные методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука. 1982. 432с.
44. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука. 1967. 460с.
45. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автоматического управления. М.: Наука. 1981. 336с.
46. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука. 1986. 288с.
47. Квакернак Х., Сивак Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир. 1977. 650с.
48. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука. 1988. 280с.
49. Козлов Ю.М., Юсупов Р.М. Беспойсковые самонастраивающиеся системы. М.: Наука. 1969. 455с.
50. Коша А. Вариационное исчисление. М.: Высшая школа. 1983. 279с.

51. Куликовский Р. Оптимальные и адаптивные процессы в системах автоматического регулирования. М.: Наука. 1967. 379с.
52. Летов А.М. Динамика полета и управления. М.: Наука. 1969. 359с.
53. Либерзон Л.М., Родов А.Б. Системы экстремального регулирования. М.: Энергия. 1965. 125с.
54. Лоусон Ч., Хенсен Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука. 1986. 232с.
55. Льюнг Л. Идентификация систем. М.: Наука. 1991. 432с.
56. Медведев А.В. Непараметрические системы адаптации. М.: Наука, 1980. 174с.
57. Мину М. Математическое программирование. М.: Наука. 1990, 488с.
58. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука. 1971. 424с.
59. Моисеев Н.Н., Иванюков Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. М.: Наука. 1978. 352с.
60. Ногин В.Д. Основы теории оптимизации. М.: Высшая школа. 1986. 383с.
61. Основы теории оптимального управления. Под ред. Кротова В.Ф. М.: Высшая школа. 1989. 430с.
62. Павлов Б.В. Соловьев И.Г. Системы прямого адаптивного управления. М.: Наука. 1989. 136с.
63. Параев Ю.И. Теория оптимального управления. Томск.: Изд-во Том. ун-та. 1986. 164с.
64. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука. 1986. 616с.
65. Перельман И.И. Анализ современных методов адаптивного управления с позиции приложения к автоматизации технологических процессов. АИТ, №7, 1991. 3-32с.

66. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления. Л.: Энергия. 1977. 288с.
67. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука. 1983. 384с.
68. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1976. 392с.
69. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования. М.: Наука. 1989. 304с.
70. Пугачев В.С., Синицин И.Н. Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука. 1990. 632л.
71. Райбман Н.С., Чадеев В.М. Адаптивные модели в системах управления. М.: Советское радио. 1966. 159с.
72. Растрингин Л.А. Системы экстремального управления. М.: Наука. 1974. 632с.
73. Рейклейстис Г., Рейвендран А., Рэгдел К. Оптимизация в технике. Т.1, Т.2. М.: 1986. Т.1 350с, Т.2 -320с.
74. Рейнфельд Н., Фогель У. Математическое программирование. М.: Изд-во иностранной литературы. 1960. 303с
75. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 552с.
76. Салуквадзе М.Е. Задачи векторной оптимизации в теории управления. Тбилиси.: Мецниереба. 1975. 201с.
77. Салуквадзе М.Е. Задачи А.М. Летова о синтезе оптимальных систем автоматического управления. Тбилиси.: Мецниереба. 1988. 286с.
78. Сеидж Э.П., Мелса Дж. Идентификация систем управления. М.: Наука, 1974. 246с.



79. Сендж Э.П., Мелса Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь. 1976. 495с
80. Сендж Э.П., Уайт Ч. Оптимальное управление системами. М.: Радио и связь, 1982. 392с.
81. Скурихин В.И. Адаптивные системы управления машиностроительным производством. М.: Мир. машиностроение, 1989. 207с.
82. Современные методы идентификации систем. Под ред. П. Эйкхоффа. М.: Мир. 1983. 400с.
83. Справочник по теории автоматического управления. Под ред. Красовского А.А. М.: Наука. 1987. 717с.
84. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука. 1986. 352с.
85. Сухарев А.Г. Минимаксные задачи в задачах численного анализа. М.: Наука. 1989. 299с.
86. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления. М.: Машиностроение 1972. 544с.
87. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т.1. М.: Мир, 1991. 360с.
88. Теория автоматического управления. Под ред. Воронова А.А., Т.1, Т.2. М.: Высшая школа, 1987. Т.1 367с, Т.2 375с.
89. Тимохов А. Введение в методы оптимизации. М.: Изд-во МГУ, 1989. 70с.
90. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 286с.
91. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь. 1991. 608с.
92. Уайльд Д.Дж. Методы поиска экстремума. М.: Наука, 1967. 267с.

93. Флеминг У, Ришел Ф. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978. 318с.
94. Фрадков А.А. Адаптивное управление в сложных системах. Беспойсковые методы. М.: Наука. 1990. 292с.
95. Фрадков А.А., Фомин В.Н. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. 423с.
96. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 534с.
97. Цыпкин Я.З. адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968. 400с.
98. Цыпкин Я.З. Основы инфорационной теории систем. Наука. 1995 352с.
99. Чаки Ф. Современная теория управления. М.: Мир, 1975. 424с.
100. Чичинадзе В.К. Решение невыпуклых нелинейных задач оптимизации. М.: Наука 1983. 256с.
101. Чичинадзе В.К. Введение в теорию систем административного управления и организайии. Тбилиси.: Изд-во ТГУ, 1988. 381с.
102. Чураков Е.П. Оптимальные и адаптивные системы. М.: Энергоатомиздат, 1987. 254с.
103. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 683с.
104. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424с.
105. Юдин Д.Б. Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. М.: Наука, 1969. 424с.
106. Fukushima M. A successive quadratic programming method for a class of contrained nonsmooth optimizaition problems "Math programming" 1991,49, #2-231-251p.

107. Ogata K. Modern Control Engineering. N.J.: Prentice - Hall, INC., 1990. - 963p.
108. Tzafestas S. G Optimization and Control of Technological Systems. National Technical University of Athens. 1995. - 350 p.
109. Salukvadze M. Vector-Valued Optimization Problems in Control Theory. Academic Press, N. Y. 1979. - 231p.
110. Unbehauen H. Regelungstechnik, v1, v2, v3. Braunschweig|Wiesbaden. 1988. - v1 - 406p., v2 - 274p, v3 - 437p.
111. Kalaba R.E., Spingarn K. Optimal input system identification for homogeneous and nonhomogeneous boundary Conditions. I. Optimiz. Theory and Appl~. 1975, 16, #5-6, 487-496p.
112. Fattorini H.O. Infinite Dimensional Optimization and Control Theory.-Cambridge, 1996.-410 p.

დამატებითი ლიტერატურა

113. Злочевский С.И. Прикладные методы оптимального управления движением. М.: изд-во МГУ, 1989. 180с.
114. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Методы оптимизаций. -Тверь: 1996. 322с.
115. Ащепков Л.Т. Лекции по оптимальному управлению. Владивосток, 1996. 206с.
116. Васильев О.В. Лекции по методам оптимизации. Иркутск.: Изд-во Иркут.университета. 1994. 147с.
117. Коломейцева М.Б. Методы теории оптимизации динамических систем. М.: Изд-во МЭИ, 1994. 141с.
118. Кардаш В.А. Введение в стохастическую Оптимизацию. КН1. 1995. 203С.
119. Лэннинг Дж., Бэттин Р. Случайные процессы в задачах автоматического управления. М.: Изд-во иностр. лит. 1958. 387с.

120. Козлов Ю.М. Адаптация и обучение в робототехнике. М.: Наука, 1990. 247с.
121. Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многоэкстремальных задач. М.: Наука, 1982. 254с.
122. Параев Ю.И. Введение в статистическую Динамику процессов управления и фильтрации. М.: Советское радио, 1976. 184с.
123. Параев Ю.И. Уравнения Ляпунова и Риккати. Томск.: изд-во Том. ун-та. 1989. 166с.
124. Райбман Н.С. Что такое идентификация? М.: Наука, 1970. 119с.
125. Райбман Н.С. Идентификация и оценка параметров систем. Т.1, Т.2, Т.3. М.: изд-во ИПУ АН СССР, 1976.
126. Райбман Н.С. Дисперсионная идентификация. -М.: Наука. 1981. -336с.
127. Райбман Н.С. Типовые линейные модели объектов управления. М.: Наука, 1983. 123с.
128. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. 192с.
129. Тимофеев А.В. Адаптивные робототехнические комплексы. Л.: Машиностроение 1988. 332с.
130. Тимофеев А.В. Адаптивные роботехнические комплексы для гибких автоматических производств. -Л.: ЛДНТП, 1988. -26с.
131. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М.: Мир, 1967. 425с.
132. Ту Ю. Современная теория управления. М.: Машиностроение, 1971. 472с.
133. Фильтрация и стохастические управление в динамических системах. Под ред. Леондеса К.Т. М.: Мир, 1980. 407с.

134. Салыга В.И., Карабутов Н.Н. Идентификация и управление процессами в черной металлургии. М.: Металлургия, 1986. 192с.
135. Александров В.В. и др. Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. М.: изд-во МГУ, 1988. 77с.
136. Гугушвили А.Ш., Шаншиашвили В.Г. Оpoznание структуры одного класса нелинейных объектов в процессе их нормальной эксплуатации. В кн.: Труды ГПИ „Приборостроение“ №9 (173), 174. 83-86с.
137. Вейль Г. Симметрия. М.: Наука, 1968. 191с.
138. Воронов А.А. устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979. 336с.
139. Андреев Ю.Н. управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976, 424с.
140. Батухтин В.Д., Майборода Л.А. Оптимизация разрывных функции. М.: Наука 1984. 208с.
141. Солодов А.В. Методы теории систем в задачах непрерывной линейной фильтрации. М.: Мир, 1979. 264с.
142. Острем К. Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973. 368с.
143. Попков Ю.С. и др. Идентификация и оптимизация нелинейных стохастических систем. М.: Энергия, 1976. 402с.
144. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973. 244с.
145. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управления. М.: Энергия, 1973. 440с.
146. Белман Р. динамическое программирование М.: ИЛ, 1960. 473с.
147. ლუსმანაშვილი ა. წრფივი ალგებრა და წრფივი დაპროგრამება. - თბილისი: თსუ, 1967. - 310გვ.

148. Гугушвили А.Ш., Шаншиашвили В.Г. Применение функциональных рядов Вольтерра-Винера для определения структуры нелинейных объектов. В кн: Труды ГПИ, приборостроение, №9 (173), 1974. 78-83с.
149. Арефьев Б.А. Оптимизация инерционных процессов. - Л.: Машиностроение, 1969. 160с.
150. ნაცვლიშვილი ზ. დისკრეტული მათემატიკის საფუძვლები. თბილისი: თსუ, 1990. - 98გვ.
151. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Оптимизация гарантии в многокритериальных задачах управления. Тбилиси: Мецниереба, 1996. 475с.
152. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Многокритериальные задачи управления в условиях неопределенности. Тбилиси: Мецниереба, 1991. 128с.
153. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408с.
154. ჯალაღიძე კ. მათემატიკური პროგრამირება (ლექცია წრფივი პროგრამირების მათემატიკურ საფუძვლებში). თბილისი: თსუ, 1981. 134გვ.
155. ჯღამაძე ო. მათემატიკური პროგრამირების გამოყენება საშენი მასალების მრეწველობაში. - თბილისი: „საბჭოთა საქართველო“, 1967. - 91გვ.
156. ლურსმანაშვილი ა. მათემატიკური დაპროგრამების ზოგიერთი საკითხი. თბილისი: თსუ, 1977. - 328გვ.
157. სარჩიმელია რ., წუწუნავა თ. ოპტიმალურობის პირობები მათემატიკური პროგრამირების ამოცანებში. თბილისი: თსუ, 1988. 58გვ.
158. მანია გ. წრფივი პროგრამირება. თბილისი: განათლება, 1967. - 295გვ.
159. კურტანიძე დ. ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდები დაგეგმვაში. თბილისი: თსუ, 1988. - 195გვ.
160. Salukvadze M., Zukovsky V.I. The Vector-Valued Maximin. Academic Press, N.Y. 1994. - 404p.
161. ბარამიძე კ.მ. ავტომატური მართვის თეორიის საფუძვლები. თბილისი: განათლება, 1966. 274გვ.

162. ბარდაველიძე ა.შ. ავტომატური მართვის თეორია. ქუთაისი.: ქპი, 1989, ტ1 235გვ., ტ2 - 274გვ.
163. ავტომატური მართვის თეორია. ანეტუშილის რედაქციით. - თბილისი.: განათლება, 1978. 458გვ.
164. Ядыкин И.Б., Шумский В.М., Овсебян Ф.А. Адаптивное управление непрерывными технологическими процессами. М.: Энергоиздат, 1985. 332с.
165. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. Санкт-Петербург.: ВНУ, 1997. 384с.
166. Арутюнов А.В. Условия экстремума. М.: Факториал, 1997. 240с.
167. Мерризм К.Ч. Теория оптимизации и расчёт систем управления с обратной связью. М.: Мир, 1967. 475с.

# Optimal and Adaptive System

## Part I

### Static Optimization Methods (Mathematical Programming ).

|   |     |
|---|-----|
| <b>Chapter 1. Basic Condition of Optimization.</b> .....  | 23  |
| 1.1 Introduction. ....  | 23  |
| 1.2 Build up of Optimization Problems Models.....   | 24  |
| 1.3 Application of the Mathematical programming for<br>solving some problems of the national production. .... | 29  |
| 1.4 The classification problems.....  | 38  |
| <b>Chapter 2. Linear Programming.</b> .....   | 43  |
| 2.1 Linear Programming basic concept. ....  | 43  |
| 2.2 Graphical methods of solution of linear programming<br>Problems. ....                                     | 56  |
| 2.3 Simplex method.....   | 67  |
| 2.4 The Duality problems of linear programming.....   | 82  |
| 2.5 Integer programming problems. ....  | 94  |
| 2.6 Solution of Transportation problems by Linear<br>Programming method. ....                                 | 104 |
| <b>3. Non-linear optimization without constraints.</b> .....  | 109 |
| 3.1 The minimization of one variable. ....  | 109 |
| 3.2 Gold crosssection method. ....  | 111 |
| 3.3 Method of Fibonachy. ....   | 115 |
| 3.4 Newton method. ....   | 117 |
| 3.5 Newton-Raphson method. ....   | 124 |
| 3.6 The cross section method. ....  | 126 |
| 3.7 Method of dichotomy. ....   | 127 |
| 3.8 The least square method. ....   | 128 |
| 3.9 The method of stochastic approctimation. ....   | 138 |



|  |            |
|--|------------|
| <b>Chapter 4. Non-linear optimization with constrains.....</b>                                   | <b>149</b> |
| 4.1 The Substance of problems.....   | 149        |
| 4.2 Convex-concave functions Subgradient and subdifferention. ...                                | 151        |
| 4.3 Lagrange method. ....  | 165        |
| 4.4 Kuhn-Tacker method. ....   | 173        |
| 4.5 Necessary condition of Kuhn-Tacker method. ....  | 180        |
| 4.6 Leas square method when there are constraints.....   | 190        |
| <b>Chapter 5. Gradient methods.....</b>  | <b>202</b> |
| 5.1 The substance of method. ....  | 202        |
| 5.2 Frank-Wulf method. ....  | 205        |
| 5.3 Method of penalty functions. ....  | 211        |
| 5.4 The geometrical interpretation of method. ....   | 224        |
| 5.5 The conditional optimization. Lagrange multiply method. ....                                 | 227        |
| <b>Chapter 6. Methods of optimization of non differentiated systems.....</b>                     | <b>232</b> |
| 6.1 The conditional of duality concept of Non-Linear Optimization problems with constraints..... | 232        |
| 6.2 Application of duality concept non- linear optimization problems with constraints.....       | 238        |
| 6.3 Rockaffeler generalize Language function and saddle points in non-linear programming.....    | 247        |
| 6.4 Fukishima method. ....   | 252        |
| 6.5 The $\Psi$ -Transformation method.....   | 260        |

## Part II

### Optimal Control of Dynamic Systems.

#### Introduction. The basic problems of optimal control.

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Chapter 7. Variational methods.....</b>       | <b>15</b> |
| 7.1 Introduction. ....                           | 15        |
| 7.2 Basic principle of variational calculus..... | 21        |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 7.3  | The obligations of conditions of extremum existing.<br>Euler-Lagrange equation. Examples.....            | 40  |
| 7.4  | Legendres condition.....   | 49  |
| 7.5  | Euler-Lagrange equation.....   | 52  |
| 7.6  | Many dimensional functional.....   | 56  |
| 7.7  | Functional depending on.....   | 58  |
| 7.8  | Conditional extremum variational tasks.....  | 62  |
| 7.9  | The izoperimetrical problems Calculus of Variations.....   | 70  |
| 7.10 | Variance boundary.....   | 77  |
| 7.11 | Piece-linear extremals.....  | 90  |
| 7.12 | Euler equation's of existing of extremum.....  | 94  |
| 7.13 | Sufficiently conditions of existing of extremum.....   | 96  |
| 7.14 | Euler-Lagrange method in optimal control theory.<br>Solution of two points boundary tasks. Examples..... | 104 |
| 7.15 | Examples of application of variational method.....   | 109 |
| 7.16 | The Optimal control System and finding of the Optimal<br>control problems.....                           | 119 |

## Chapter 8. General problems of optimal control.

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 8.1 | Influence and non-influence motion.....    | 123 |
| 8.2 | Some group of optimal control.....         | 128 |
| 8.3 | General structure of optimal system.....   | 134 |
| 8.4 | Fundation of Optimal control problems..... | 135 |

## Chapter 9. Define of optimal trajectory.

|      |  |     |
|------|--|-----|
|      | The maximal principle.....                                       | 144 |
| 9.1  | General considerations.....                                      | 144 |
| 9.2  | Putting of general task.....                                     | 150 |
| 9.3  | Maximal principle.....   | 150 |
| 9.4  | Principle of optimal quick descent.....                          | 154 |
| 9.5  | Optimal linear quick descent task.....                           | 159 |
| 9.6  | Examples of second order.....                                    | 163 |
| 9.7  | Myer's task.....   | 192 |
| 9.8  | The flight of automatic plane.....                               | 196 |
| 9.9  | Optimal control of System with nondifferentiable functional..... | 206 |
| 9.10 | Solution of optimal control processes by                         |     |

|  |            |
|--|------------|
| Demianoff-Rubinoff method.....   | 227        |
| 9.11 Solution of optimal control processes by Klarn method. ....                                   | 237        |
| 9.12 The solution of dynamical optimization problems<br>by $\Psi$ -Transformation method.....      | 246        |
| <b>Chapter 10. Analitical design of optimal regulations.....</b>                                   | <b>256</b> |
| 10.1 General problems. ....  | 256        |
| 10.2 The Solution by Lagrange multiply method.....   | 258        |
| 10.3 The Solution of Maximum Principe Method. ....   | 260        |
| 10.4 The Theorem of safficiatly of optimality. ....  | 262        |
| 10.5 Linear-square problem. ....   | 265        |
| 10.6 The solution of linear-square tasks by Lagrange method.....                                   | 266        |
| 10.7 The solution of linear-square tasks by maximaze method. ....                                  | 278        |
| 10.8 The solution of linear-square tasks founding on the<br>theorem of optimal sufficiently. ....  | 281        |
| 10.9 Stabilization of statelife on given direction.....  | 290        |
| <b>Chapter 11. Dynamic programming method.....</b>   | <b>296</b> |
| 11.1 Introduction. Optimality principle.....   | 296        |
| 11.2 Discrete variant of dynamic programming method.<br>Examples.....                              | 299        |
| 11.3 Continuous variant of dynamic programming<br>Bellman equations.....                           | 314        |
| 11.4 The examples application of dynamic programming<br>method in maximal quick descent tasks..... | 324        |
| 11.5 Synthesis of linear optimal systems with square quality<br>criteria. Examples.....            | 329        |
| 11.6 Dynamic programming method as sufficiently condition of<br>optimality. Examples.....          | 338        |
| 11.7 Quadratic optimization. Sufficently condition.....  | 342        |
| 11.8 Krotov's Sufficently condition. ....  | 347        |
| 11.9 The comparition of optimal control methods.....   | 355        |
| <b>Chapter 12. Multy criteria optimization method. ....</b>  | <b>362</b> |
| 12.1 Introduction.....   | 362        |
| 12.2 General observation of problem.....   | 363        |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 12.3 | General mathematical putting of problem. ....                                     | 367 |
| 12.4 | Programing of optimal traectory in case of multycriterial optimization case. .... | 368 |
| 12.5 | Second order ilustrative example.....   | 378 |
| 12.6 | The optimal fane of rocket in the spades given point. ....                        | 388 |
| 12.7 | The optimal fane-off of rocket in cosmose.....                                    | 397 |
| 12.8 | Problem of linear-programming. ....   | 406 |
| 12.9 | Planing problem in metallurgy. ....   | 414 |

## Part III

### Optimal control of stochastic systems and filtration

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Chapter 13. Optimal control of stochastic system. ....</b>                                | <b>13</b> |
| 13.1 Introduction.....   | 13        |
| 13.2 The random processes.....   | 16        |
| 13.3 Stochastic variant of dynamic programming. ....   | 55        |
| 13.4 Main results of optimal control of stochastic systems. ....                             | 56        |
| <b>Chapter 14. Filtration and state valuation of systems. ....</b>                           | <b>63</b> |
| 14.1 Introduction.....   | 63        |
| 14.2 Theory of optimal filtration. Linear filtration.<br>The equation of Wiener-Hoff.....    | 64        |
| 14.3 Kalman's filtre. (Discrete time). ....  | 80        |
| 14.4 Kalman's filtre. Stational state theory. ....   | 95        |
| 14.5 Kalman-Bucy filtre(dissccontinuos time). ....   | 96        |
| 14.6 Kalman's stational filter.....  | 109       |
| 14.7 Kalman's extended filter.....   | 117       |
| 14.8 Numerical solution of Riccati equation. ....  | 125       |
| 14.9 The Valuation of plane gyroscopic pendulum stability<br>and optimal control of her..... | 132       |
| 14.10 The Theorem Vonlem's divizion. ....  | 143       |

## Adaptive control of systems

|   |     |
|---|-----|
| <b>Chapter 15. Main aspects of adaptive control of systems.</b> .....                       | 153 |
| 15.1 Introduction.....  | 153 |
| 15.2 Clasification of adaptive system.....  | 160 |
| 15.3 The quicker gradient method.....   | 165 |
| 15.4 Adaptive control and some bounded problems. ....                                       | 168 |
| 15.5 Adaptive control systems with obvios standart model. ....                              | 173 |
| 15.6 Adaptive control systems with unobvios model.....                                      | 176 |
| 15.7 Direct adaptive control systems. ....  | 181 |
| 15.8 Realization of adaptiv control systems.....  | 184 |
| 15.9 Realization adaptive algorithm.....  | 190 |
| 15.10 Discrete adaptive systems. ....   | 195 |
| <br>  |     |
| <b>Capter 16. Extremal systems.</b> .....   | 204 |
| 16.1 The system with memory. ....   | 204 |
| 16.2 The control of one dimenssional system by gradient method. ....                        | 204 |
| 16.3 The system with measuring of derivative.....   | 206 |
| 16.4 Step by step extremal system. ....   | 208 |
| 16.5 Extremal system with auxiliary modulations. ....                                       | 209 |
| 16.6 Influence of drift on the stability.....   | 210 |
| 16.7 Transient processes and periodical motions. ....                                       | 212 |
| 16.8 The qualitative improvement of extremal regulation<br>processes. ....                  | 213 |
| <br>  |     |
| <b>Chapter 17. Identification in adaptive systems.</b> .....                                | 221 |
| 17.1 Introduction. ....   | 221 |
| 17.2 The selection of models strucure and problems of suitable<br>with real objective. .... | 223 |
| 17.3 The define of structure of non-linear objectives<br>in open systems. ....              | 231 |
| 17.4 Identification of systems. ....  | 240 |

|   |     |
|---|-----|
| 17.5 Optimal synthesis of input signal. The linear signal optimal synthesis.....                    | 242 |
| 17.6 Optimal synthesis problem of input signal in case of identification of non-linear object. .... | 250 |
| 17.7 Valuation of parameters and criteria of maximal convince. ....                                 | 262 |
| 17.8 The optimal filtration and identification of system objects. ....                              | 267 |
| 17.9 Define of parameters of non-linear system. ....  | 279 |
| 17.10 Identification in close system.....   | 283 |
| 17.11 Adaptive system with identifier. ....   | 289 |
| 17.12 Adaptive control of rolling mill with identifier.....   | 294 |

აღმასხან გუგუშვილი  
მინდია სალუქვაძე  
ვახტანგ კიკინაძე

ოპტიმალური და ადაპტური სისტემები

რედაქტორი თ.იმედაძე.

ტექნიკური რედაქტორი მ.გიორგაძე.

კორექტორები: ი.კუცია,  
ლ.თედიაშვილი,  
დ.კვერცხიშვილი.

გადაეცა წარმოებას 10.03. 1997წ.  
ხელმოწერილია დასაბეჭდად 10.07. 1997წ.  
ფორმატი 60X90  $\frac{1}{16}$  პირობითი ნაბეჭდი თაბახი-65,0.  
სააღრიცხვო საგამომცემლო თაბახი-65,8.  
ტირაჟი 500. შეკვეთა №521

ფასი სახელშეკრულებო.

© გამომცემლობა "ტექნიკური უნივერსიტეტი".

თბილისი 380075, კოსტავას ქ.77.

© გამომცემლობა "ცისარტყლა"

"ცისარტყლას" სტამბა, თბილისი 380078 ყაზბეგის გამზირი 18.