ავთანდილ გაგნიძე

საფინანსო ანალიზის მათემატიკური საწყისები

სახელმძღვანელოში მარტივი მათემატიკური აპარატის გამოყენებით გადმოცემულია საფინანსო ანალიზის საწყისი ცნებები და ოპერაციები და იგი განკუთვნილია ეკონომიკური პროფილის (განსაკუთრებით ფინანსების სპეციალობის) სტუდენტებისათვის. ვფიქრობთ, ის სასარგებლო იქნება აგრეთვე ზოგადად ეკონომისტებისათვის.

რედაქტორი: ეკონომიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი გივი გამსახურდია

რეცენზენტები: ეკონომიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი ელგუჯა მექვაბიშვილი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, დოცენტი თენგიზ ბუჩუკური

წინამდებარე სახელმძღვანელო დაწერილია TACIS TEMPUS-ის პროგრამით დაფინანსებული პროექტის ფარგლებში. მიზანი, რომელიც ჩვენ გვამოძრავებდა, გამოწვეული იყო ქართულ ლიტერატურაში ფინანსისტებისათვის განკუთვნილი სპეციალური მათემატიკური სახელმძღვანელოების არქონით.

ჩვენ შორს ვართ იმ აზრისაგან, რომ ამ ერთ სახელმძღვანელოში შევძლოთ საფინანსო და საინვესტიციო ანალიზის მათემატიკური თეორიის საფუძვლიანი განხილვა. ეს არც იყო ჩვენი ამოცანა. მაგრამ ვფიქრობთ, რომ სახელმძღვანელო შეიძლება განხილული იყოს როგორც საწყისი ეტაპი საფინანსო ანალიზის შესწავლისათვის.

სახელმძღვანელოს დაწერისას გამოყენებული იქნა ჩვენს ხელთ არსებული მრავალი წიგნი, რომელთაგან ძირითადი წიგნები მითითებული გვაქვს. დიდად მადლობელი ვარ ბატონი პატრიკ ბულონის და ბატონი დანიელ პიერ ლოტი-ვიუსი, რომელთაც მომცეს საშუალება მესარგებლა პარიზი-6 და პარიზი-8 უნივერსიტეტების ბიბლიოთეკებით. მადლობელი ვარ ბატონი ელგუჯა მექვაბიშვილის ყურადღებისა და თანამშრომლობისათვის. მადლობას ვუხდი მაია კვინიკაძეს და მანანა სურმავას წიგნის ხელნაწერის გამოსაცემად მომზადებისავის.

ავთანდილ გაგნიძე

თბილისი–პარიზი, 2001 წლის ნოემბერი

ფინანსური ოპერაციების ლოგიკა

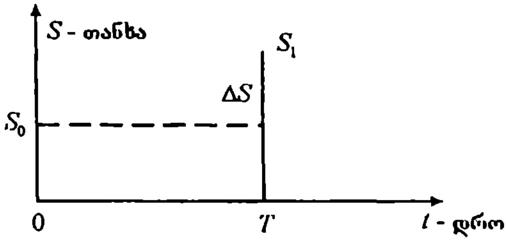
საბაზრო ეკონომიკის პირობებში უდიდესი მნიშვნელობა აქვს ფინანსების სწორად განაწილება-განთავსებას, რაც ცხადია, ხორციელდება სხვადასხვა ფინანსური ოპერაციების საშუალებით. თანამედროვე ფინანსური ოპერაციები შესაძლოა საკმაოდ რთული სქემებით ხორციელდებოდეს, მაგრამ ნებისმიერი ოპერაციის ჩატარებისას მთავარი იდეა და მიზანი ერთია: "ფულმა უნდა ფული მოიტანოს". განვიხილოთ უმარტივესი ფინანსური ოპერაციები და ვნახოთ, თუ როგორ ხდება ამ იდეის რეალიზაცია.

უმარტივესი ფინანსური ოპერაციაა ერთჯერადი კრედიტის გაცემა: ანუ ოპერაციაში მონაწილე ორი მხარიდან ერთ-ერთი (კრედიტორი) გასცემს რაღაც S_0 თანხას, რომელსაც მიიღებს მეორე მხარე (დებიტორი). ამასთან დროის T მონაკვეთის შემდეგ დებიტორმა უნდა დაუბრუნოს კრედიტორს რაღაც S_1 თანხა. ბუნებრივია, რომ $S_1 > S_0$.

როგორც ვხედავთ, ამ უმარტივეს ოპერაციაში რამდენიმე ძირითადი სიდიდე გვხვდება: ა) გაცემული (მიღებული) თანხა S_0, რომელსაც pv-თი აღნიშნავენ. (pv – present value, თანამედროვე მნიშვნელობა); ბ) დროის მონაკვეთი T, რომლის განმავლობაშიც უნდა მოხდეს ფინანსური ოპერაციის დასრულება და რომელსაც პერიოდს უწოდებენ; გ) დაბრუნებული თანხა S_1, რომელსაც fv-თი აღნიშნავენ (fv future value, მომავალი მნიშვნელობა).

ძირითადი სიდიდეების გარდა აქ გამოიყოფა ნაწარმოები სიდიდეებიც. მათ შორის პირველი არის სხვაობა $\Delta S = S_1 - S_0$, რომელსაც ნამატი ან მოგება ეწოდება. ცხადია, რომ კრედიტორის მიზანია ეს სხვაობა იყოს რაც შეიძლება დიდი, ხოლო დებიტორისათვის კი სასურველია, რომ ეს სხვაობა იყოს რაც შეიძლება მცირე. ადვილი დასანახია, რომ ფინანსური ოპერაცია რომ ჩატარდეს, მასში შემავალი სიდიდეები ორივე მხარისათვის მისაღები უნდა იყოს.

განვიხილოთ ფორმულა $S_1 = S_0 + \Delta S$, რომლის გრაფიკული გამოსახვაა



(ამ გრაფიკზე დროის საწყის მომენტად აღებულია $t = 0$).

როგორც ვხედავთ, ფორმულაში შედის ორი დამოუკიდებელი სიდიდე (ე.ი. მასში შემავალი სამი სიდიდიდან თუ ვიცით ნებისმიერი ორის მნიშვნელობა, მესამეს ავტომატურად გამოვითვლით).

როდესაც კრედიტი გაცემულია დროის t_0 მომენტში (მაგ. 2001 წლის 10 სექტემბერს), მაშინ გაცემულ თანხას აღნიშნავენ $S(t_0)$-ით. თუ კრედიტი გაცემულია T დროის პერიოდით (მაგ. 40 დღით), დასაბრუნებელი თანხა აღინიშნება $S(t_0+T)$-თი, ხოლო ნამატი (ანუ კრ ედიტის ფასი) აღინიშნება $I(t_0, T, S(t_0))$ სიდიდით და მიიღება ფორმულა

$$S(t_0 + T) = S(t_0) + I(t_0, T, S(t_0)).$$

ცხადია, რომ ფინანსური ოპერაციის ერთ-ერთი ძირითადი მახასიათებელია $I(t_0, T, S(t_0))$ სიდიდე. რამდენად სრულად ასახავს ეს სიდიდე ფინანსური ოპერაციის შინაარსს? ამის გასაგებად მოვიყვანოთ რამდენიმე უმარტივესი მაგალითი.

მაგალითი 1. კრედიტი 1000 ლარის ოდენობით გაცემულია 1 თვით იმ პირობით, რომ უნდა დაბრუნდეს 1200 ლარი. მაშინ აქ $S_0 = 1000$, $T = 1$ თვე, $S_1 = 1200$ და კრედიტის ფასი (ნამატი) $I = 200$.

მაგალითი 2. კრედიტი 1000 ლარის ოდენობით გაცემულია 3 თვით იმ პირობით, რომ უნდა დაბრუნდეს 1200 ლარი. მაშინ აქ $S_0 = 1000$, $T = 3$ თვე, $S_1 = 1200$ და $I = 200$.

მაგალითი 3. კრედიტი 100 ლარის ოდენობით გაცემულია 1 თვით იმ პირობით, რომ უნდა დაბრუნდეს 300 ლარი. მაშინ აქ $S_0 = 100$, $T = 1$ თვე, $S_1 = 300$ და $I = 200$.

მაგალითი 4. კრედიტი 100 ლარის ოდენობით გაცემულია 1 თვით იმ პირობით, რომ უნდა დაბრუნდეს 150 ლარი. მაშინ აქ $S_0 = 100$, $T = 1$ თვე და $I = 50$.

როგორ შეიძლება შევადაროთ ერთმანეთს ეს ოთხი ოპერაცია? თუ გამოვიყენებთ მხოლოდ I სიდიდეს, მაშინ პირველ სამს შორის განსხვავება არ არის. ამასთან ცხადად ჩანს, რომ № 1 ოპერაციის დროს 200 ლარის დაგროვებას № 2 ოპერაციასთან შედარებით 3-ჯერ ნაკლები დრო დასჭირდა და ამდენად პირველი ოპერაცია უფრო მომხიბლავია კრედიტორისათვის (დებიტორისთვის პირიქით). ასევე ცხადია, რომ № 3 ოპერაციის დროს 200 ლარის დასაგროვებლად № 1 ოპერაციასთან შედარებით საჭირო გახდა 10-ჯერ ნაკლები თანხის გაცემა და ამდენად კრედიტორისათვის № 3 ოპერაცია უფრო მომხიბლავია. თუ შევადარებთ № 2 და № 4 ოპერაციებს, მაშინ კიდევ უფრო მეტი გაუგებრობაა: მართალია № 2 ოპერატორს დაუგროვდა 4-ჯერ მეტი თანხა, მაგრამ სამაგიეროდ ოპერაციას დასჭირდა 3-ჯერ მეტი დრო და 10-ჯერ მეტი საწყისი თანხა (ინვესტიცია).

როგორც ჩანს საჭიროა ისეთი სიდიდეების შემოღება, რომლებიც უფრო კარგად ასახავს ფინანსური ოპერაციის შინაარსს და იქნება ფარდობითი მახასიათებლები. ფარდობითი მახასიათებელი უკვე დაახასიათებს კრედიტის ერთეულს. ასეთი შინაარსის მახასიათებელი ორია:

$$r_T = \frac{S(t_0 + T) - S(t_0)}{S(t_0)},$$

$$d_T = \frac{S(t_0 + T) - S(t_0)}{S(t_0 + T)}$$

r_T სიდიდეს საპროცენტო განაკვეთს ან უბრალოდ პროცენტს უწოდებენ (interest rate), ხოლო d_T სიდიდეს კი საალრიცხვო განაკვეთს ან დისკონტს (discount rate). ადვილი დასანახია

$$\frac{1}{d_T} - \frac{1}{r_T} = 1, \qquad r_T = \frac{d_T}{1 - d_T}, \qquad d_T = \frac{r_T}{1 + r_T}$$

ცხადია, რომ $r_T > 0$, $0 < d_T < 1$ (შემთხვევა, როცა $r_T = d_T =$

0 ტრივიალურია და მას არ განიხილავენ, რადგან თვლიან, რომ ფინანსური ოპერაცია არ შემდგარა. ასევე არ განიხილება შემთხვევა $d_T = 1$). ცხადია, რომ $d_T < r_T$ და ამიტომ

$$d_T < \min(r_T, 1).$$

r_T და d_T მაჩვენებლები გამოისახება ათწილადებით ან პროცენტებით. ასე მაგალითად, ჩვენს მიერ ზემოთ მოყვანილ ოპერაციებში ეს მაჩვენებლები ტოლია შესაბამისად:

მაგალით 1–ში $r_1 = 0,2 = 20\,\%$, $d_1 = 0,17 = 17\,\%$;
მაგალით 2–ში $r_3 = 0,2 = 20\,\%$, $d_3 = 0,17 = 17\,\%$;
მაგალით 3–ში $r_1 = 2 = 200\,\%$, $d_1 = 0,67 = 67\,\%$;
მაგალით 4–ში $r_1 = 0,5 = 50\,\%$, $d_1 = 0,33 = 33\,\%$.

საინტერესოა, რომ როცა r და d საკმაოდ მცირე სიდიდეებია, მაშინ მათ შორის განსხვავება დიდი არაა. მაგალითად: თუ $r = 8\%$, მაშინ $d = 7,4\%$; თუ $r = 7\%$, მაშინ $d = 6,54\%$; თუ $r = 0,5\%$, მაშინ $d = 4,76\%$; მაგრამ თუ r საკმაოდ დიდია, მაშინ განსხვავება არსებითი ხდება. მაგალითად: თუ $r = 50\%$, მაშინ $d = 33\%$; თუ $r = 100\%$, მაშინ $d = 50\%$;

ეკონომიკურად r და d სიდიდეების შინაარსი შემდეგნაირად შეიძლება აიხსნას:

r სიდიდე აღნიშნავს კრედიტორისათვის მისი ინვესტიციის თითოეული ერთეულის მიერ მოტანილ მოგებას; d სიდიდე აღნიშნავს კრედიტორისათვის დაბრუნებული თანხის თითოეულ ერთეულში მოგების წილს.

ზემოთ შემოღებულ r_T და d_T სიდიდეებთან ერთად ფინანსური ოპერაციის მაჩვენებლად გამოიყენება აგრეთვე სიდიდეები:

$$v_T = 1 - d_T = \frac{S(t_0)}{S(t_0 + T)} \text{ – დისკონტ-ფაქტორი;}$$

$$A_T = \frac{S(t_0 + T)}{S(t_0)} = \frac{1}{1 - d_T} = 1 + r_T \text{ – დაგროვების კოეფიციენტი.}$$

თუ გავითვალისწინებთ შემოღებულ r და d სიდიდეებს, მაშინ ფინანსური ოპერაციების ძირითადი ფორმულა შეიძლება გადავწეროთ

შემდეგი სახით:

$$S(t_0+T)=S(t_0)(1+r_T), \tag{0.1}$$
$$S(t_0)=S(t_0+T)(1-d_T). \tag{0.2}$$

როგორც (0.1) და (0.2) ფორმულიდან ჩანს, შესაძლოა საქმე გვქონდეს ორ ძირითად შემთხვევასთან:

ა) როცა მოცემულია საწყისი კაპიტალი $S(t_0)$ და r_T, მაშინ (0.1) ფორმულით შეგვიძლია გამოვთვალოთ მომავალში დაგროვებული თანხა $S(t_0+T)$. ასეთ შემთხვევაში ლაპარაკია ფულის ნაკადის გადაადგილებაზე მომავლისაკენ და პროცესს დაგროვების პროცესი ეწოდება:

აწმყო		მომავალი
საწყისი თანხა პროცენტი	დაგროვება (0.1) ფორმულით $\longrightarrow$	დასაბრუნებელი თანხა

ბ) როცა მოცემულია დასაბრუნებელი თანხა $S(t_0+T)$ და d_T, მაშინ (0.2) ფორმულით შეგვიძლია გამოვითვალოთ კრედიტად აღებული $S(t_0)$ თანხა. ასეთ დროს ლაპარაკია ფულის ნაკადის გადაადგილებაზე მომავლიდან აწმყოსაკენ და პროცესს დისკონტირების პროცესი ეწოდება:

აწმყო		მომავალი
გაცემული თანხა	$\longleftarrow$ დისკონტირება (0.2) ფორმულით	დასაბრუნებელი თანხა დისკონტი

შენიშვნა. როგორც ვხედავთ, ფინანსურ ოპერაციაში მონაწილეობს ორი მხარე (კრედიტორი, დებიტორი), რომელთა მიზნები ერთგვარად ურთიერთსაწინააღმდეგოა: კრედიტორის მიზანია r სიდიდის გაზრდა, ხოლო დებიტორისათვის კი მისი შემცირება. ფინანსური ოპერაცია არ შედგება, თუ მისი პირობები მისაღები არ იქნება ორივე მხარისათვის.

ამოცანები. 1. ფირმამ მიიღო 50000 ლარის კრედიტი 1 წლის ვადით იმ პირობით, რომ უნდა დააბრუნოს 70000 ლარი.

იპოვეთ r, d, A, v.

2. ფირმამ მიიღო 100000 ლარის კრედიტი 6 თვის ვადით იმ პირობით, რომ უნდა დააბრუნოს 120000 ლარი. იპოვეთ r, d, A, v.

3. ფირმამ 1 წლით აღებული კრედიტის სანაცვლოდ უნდა დააბრუნოს 15000 ლარი. იპოვეთ S_0, d, A, თუ $r = 12\%$.

4. ფირმამ 6 თვით აიღო 10000 ლარის ოდენობის კრედიტი 10%-იანი დისკონტით. იპოვეთ S_1, r, A, v.

5. ფირმამ 1 წლის ვადით აიღო 15%-იანი კრედიტი და უნდა დააბრუნოს 200000 ლარი. იპოვეთ S_0, d, A, v.

6. ბანკმა უნდა დააფინანსოს 2-წლიანი პროექტი, რომელიც ორი წლის განმავლობაში მოიტანს 20000 ლარის ტოლ მოგებას. შესაძლებელია შემოსავლის გადახდის ორი ვარიანტი: ა) ორი წლის მერე 20000 ლარი ერთდროულად; ბ) ყოველი წლის მერე 10000 ლარი. რომელი ვარიანტი უფრო მისაღებია ბანკისათვის და რატომ?

თავი I. მარტივი პროცენტები

§ 1. დაგროვება მარტივი პროცენტებით

უმარტივეს ფინანსურ ოპერაციებს, რომლებიც შესავალში განვიხილეთ, დიდი ისტორია აქვს. როცა კრედიტორი გასცემს თანხას. ის ბუნებრივია ელოდება რაღაც მოგებას, რომელიც გამოითვლება გარკვეული ალგორითმების მიხედვით დროის გარკვეულ პერიოდში. რადგან მოგების გამოთვლა დროის ინტერვალზეა დამოკიდებული, აუცილებელი ხდება დროის რაღაც ძირითადი ერთეულის გამოყოფა, რომელსაც დროის საბაზო ერთეული ეწოდება. როგორც წესი, ფინანსურ ოპერაციებში დროის საბაზო ერთეულად მიღებულია 1 წელიწადი. მაშინ ადვილი მისახვედრია, რომ მაგალითად 1 თვე ტოლია 1/12-ის, 6 თვე ტოლია 1/2-ის და ა.შ.

მარტივი პროცენტებით თანხის დაგროვება გულისხმობს დამატებული (დარიცხული) თანხის მუდმივ ოდენობას. განვიხილოთ ჯერ მარტივი პროცენტებით თანხის დაგროვების ერთი მაგალითი.

მაგალითი 1. ვთქვათ კრედიტი 20000 ლარის ოდენობით აღებულია იმ პირობით, რომ ყოველწლიურად ნამატი შეადგენს ამ თანხის 9%-ს. მაშინ $S_0 = 20000$, $r = 0,09$. აქედან გამომდინარე $S_1 = S_0(1 + 0,09) = 21800$, $S_2 = S_0(1 + 0,18) = 23600$, $S_3 = S_0(1 + 0,27) = 25400$, $S_4 = S_0(1 + 0,36) = 27200, \ldots$.

ამრიგად, თუ აღებულია S_0 ოდენობის კრედიტი წლიური r პროცენტით და დარიცხვა ხდება მარტივი პროცენტების წესით, მაშინ n წლის შემდეგ დაგროვდება

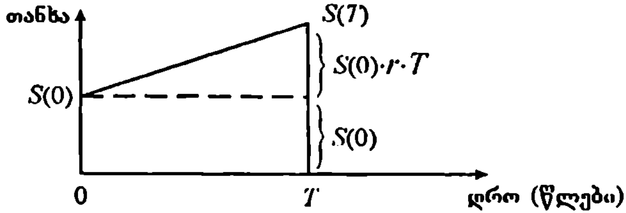
$$Sn = S_0(1 + n \cdot r) \tag{1.1}$$

თანხა. მაშასადამე ნამატი შეადგენს $I = S_0 \cdot n \quad r$-ს. ადვილი დასანახია, რომ $S_{n+1} - S_n = S_0 \cdot r$ და ამიტომ S_n სიდიდეები შეადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლის პირველი წევრია S_0 და სხვაობა $S_0 \cdot r$. ზოგადად თუ გვინდა გავიგოთ დროის T პერიოდის შემდეგ

დაგროვებული თანხის ოდენობა, მაშინ

$$S_T = S_0(1 + r \cdot T), \tag{1.2}$$

მაგრამ არ უნდა დაგვავიწყდეს, რომ დროის T მონაკვეთი იანგარიშება დროის საბაზო ერთეულთან ნორმირებაში. ე.ი. თუ T არის 2 წელი, მაშინ $T = 2$, თუ T არის 1 თვე, მაშინ $T = 1/12$, თუ T არის 15 თვე, მაშინ $T = 1,25$ და ა.შ. აქედან გამომდინარე ვხედავთ, რომ $S_T = S(T) = S(0)(1 + rT)$ წარმოადგენს წრფივ ფუნქციას:



შენიშვნა. მარტივი პროცენტების წესით დარიცხვა გამოიყენება, როგორც წესი, მოკლევადიანი საკრედიტო ოპერაციების დროს, როცა დროის პერიოდი 1 წელიწადზე ნაკლებია. ასევე იმ შემთხვევებში, როცა პროცენტი არ ემატება ძირითად თანხას და გაიცემა ყოველი შეთანხმებული (ე.წ. საკონვერსიო) პერიოდის შემდეგ. მაგალითისათვის: საკონვერსიო პერიოდი შესაძლოა იყოს 1 თვე ან 1 კვირა

მაგალითი 2. ვთქვათ 30000 ლარის კრედიტი გაცემულია 8 თვით ყოველდღიური 10%-ის დარიცხვით. თუ გამოვითვლით ყოველი თვის ბოლოსათვის დაგროვებული ვალის $S(n)$ მნიშვნელობას, მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$S(n)$	33000	36000	39000	42000	45000	48000	51000	54000

მაგალითი 3. კლიენტმა ბანკში შეიტანა 35000 ლარი წლიური მარტივი 24%-ით პროცენტის ყოველთვიური დარიცხვით. რა თანხას მიიღებს კლიენტი ყოველთვიურად?

აქ $S(0) = 35000$, $r = 0,24$ და საკონვერსიო პერიოდია $T = 1/12$. მაშასადამე ყოველთვიურად ანგარიშს ემატება $I = 35000 \cdot 0,24 \cdot 1/12 = 700$ და კლიენტი ყოველთვიურად მიიღებს 700 ლარს.

ამოცანები. 1. კრედიტი გაცემულია 2 წლით ყოველთვიურად მარტივი 10%-ის დარიცხვის პირობით. შეავსეთ მაგალითი 2-ის მაგვარი ცხრილი, თუ საწყისი თანხა შეადგენდა 1000 ლარს.

2. კრედიტი გაცემულია 1 წლით წლიური 15%-ით და პროცენტების ყოველთვიური დარიცხვის პირობით. შეავსეთ შესაბამისი ცხრილი, თუ საწყისი თანხა შეადგენს 2000 ლარს.

3. კლიენტმა ბანკში შეიტანა 10000 ლარი ყოველთვიურად მარტივი 7%-ის დარიცხვის პირობით. რა თანხას მიიღებს კლიენტი ყოველთვიურად?

4. კლიენტმა ბანკში შეიტანა 5000 ლარი წლიური მარტივი 18%-ით და პროცენტების ყოველთვიური გამოტანის პირობით. რა თანხას მიიღებს კლიენტი ყოველთვიურად?

§ 2. ჩვეულებრივი და ზუსტი მარტივი პროცენტები

როცა დროის t_0 მომენტში გაცემულია $S(t_0)$ კრედიტი წლიური r მარტივი პროცენტით, მაშინ დროის T პერიოდის შემდეგ

$$S_0(t_0 + T) = S(t_0)(1 + r \cdot T),$$

სადაც T ნორმირებულია დროის საბაზო ერთეულის მიმართ. ადრე განხილულ მაგალითებში ძირითადად საქმე გვქონდა ისეთ შემთხვევებთან, როცა $T = n \;\; 1/12$. ცხადია, რომ არაა აუცილებელი T ემთხვეოდეს თვეების სრულ რაოდენობას. როგორ მოვიქცეთ, მაგალითად, თუ კრედიტი გაცემულია 10 სექტემბერს და დასაბრუნებელია 15 ნოემბერს? როგორც ჩანს ასეთ შემთხვევებში საჭირო ხდება საკონვერსიო პერიოდად 1 დღის აღება და მაშინ ძირითადი ფორმულა

შემდეგი სახით გადაიწერება:

$$S(t_0 + T) = S(t_0)\Big(1 + r \cdot \frac{T}{K}\Big), \tag{2.1}$$

სადაც T არის დროის პერიოდის ხანგრძლივობა დღეებში და K არის ნორმირების კოეფიციენტი (წელიწადში დღეების რაოდენობა).

იმისდა მიხედვით, თუ როგორ ითვლება T და K, გამოიყოფა სხვადასხვა შემთხვევები:

A) K კოეფიციენტისათვის განიხილება ორი შესაძლებლობა: ა) $K = 360$ და ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ საქმე გვაქვს ჩვეულებრივ პროცენტებთან; ბ) $K = 365$ ან $K = 366$ (ზუსტად რამდენი დღეც არის შესაბამის წელიწადში) და ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ საქმე გვაქვს ზუსტ პროცენტებთან.

B) T დღეების დათვლაც ორნაირად შეიძლება: ა) დღეების მიახლოებით დათვლა – ამ შემთხვევაში კრედიტის გაცემისა და დაბრუნების თარიღებს შორის ითვლება სრული თვეების რაოდენობა, მრავლდება 30–ზე და ემატება დარჩენილი დღეების რაოდენობა, ამასთან გაცემისა და დაბრუნების დღეები ერთიანდება. მაგალითისათვის: ამ წესით 10 სექტემბრიდან 15 ნოემბრამდე არის 65 დღე. ბ) დღეების ზუსტი დათვლა – ამ შემთხვევაში წლის ყოველ დღეს მინიჭებული აქვს ნომერი, რომლის მიხედვითაც 1 იანვრის ნომერია 1, 1 თებერვლის ნომერია 32, 12 თებერვლის ნომერია 43 და ა.შ. მაშინ დღეების ზუსტი რაოდენობის დასათვლელად საკმარისია დაბრუნების დღის ნომერს გამოვაკლოთ გაცემის დღის ნომერი. მაგალითისათვის: 10 სექტემბრიდან 15 ნოემბრამდე არის 66 დღე.

როგორც ვხედავთ სულ არსებობს (2.1) ფორმულის გამოყენებისას გამოთვლების ოთხი ვარიანტი. მათგან პრაქტიკაში გამოიყენება სამი:

1. ინგლისური ვარიანტი, რომლის აღსანიშნავად გამოიყენება ჩანაწერი $\overline{365/365}$. ამ დროს იყენებენ ზუსტ პროცენტებს და დღეების ზუსტ რაოდენობას. მსგავსი პროცედურა გამოიყენება ინგლისში, ამერიკის შეერთებულ შტატებში და სხვა ქვეყნებშიც.

2. ფრანგული ვარიანტი, რომლის აღსანიშნავად გამოიყენება ჩანაწერი $\overline{365/360}$. ამ დროს იყენებენ ჩვეულებრივ პროცენტებს და

დღეების ზუსტ რაოდენობას. მსგავსი პროცედურა მიღებულია საფრანგეთში, ბელგიაში, შვეიცარიაში.

3. გერმანული ვარიანტი, რომლის აღსანიშნავად გამოიყენება ჩანაწერი 360/360. ამ დროს იყენებენ ჩვეულებრივ პროცენტებს და დღების მიახლოებით რაოდენობას. მსგავსი პროცედურა მიღებულია გერმანიაში, შვეციაში, დანიაში.

მაგალითი 1. ბანკში კლიენტმა 20 იანვარს შეიტანა 200000 ლარი წლიური 18%-ით. რა თანხა იქნება მის ანგარიშზე 5 ოქტომბერს? (ვიგულისხმოთ 2001 წელი).

დავითვალოთ სამივე მიღებული სქემით:

ა) ინგლისური ვარიანტით დათვლისას $K = 365$ და $T = 258$. ამიტომ დაგროვებული თანხაა

$$S = 200000\left(1 + 0,18 \cdot \frac{258}{365}\right) = 225446,6.$$

ბ) ფრანგული ვარიანტით დათვლისას $K = 360$ და $T = 258$. ამიტომ დაგროვებული თანხაა

$$S = 200000\left(1 + 0,18 \cdot \frac{258}{360}\right) = 225800.$$

გ) გერმანული ვარიანტით დათვლისას $K = 360$ და $T = 255$. ამიტომ დაგროვებული თანხაა

$$S = 200000\left(1 + 0,18 \cdot \frac{255}{360}\right) = 225500.$$

ამოცანები. 1. 100000 ლარის კრედიტი გაცემულია 2001 წლის 22 იანვარს ამავე წლის 3 ოქტომბრამდე წლიური 18%-ით. იპოვეთ დასაბრუნებელი თანხის რაოდენობა.

2. 20000 ლარის კრედიტი გაცემულია 2001 წლის 15 თებერვალს ამავე წლის 12 სექტემბრამდე წლიური 24%-ით. იპოვეთ დასაბრუნებელი თანხის ოდენობა.

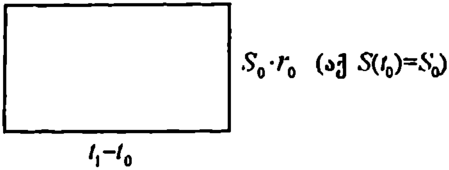
3. 70000 ლარის კრედიტი გაცემულია 2001 წლის 10 მარტს წლიური 20%-ით ამავე წლის 12 აგვისტომდე. იპოვეთ დასაბრუნებელი თანხის რაოდენობა.

4. კლიენტმა ბანკში 2001 წლის 5 იანვარს შეიტანა 20000 ლარი წლიური 9%-ით. რა თანხა იქნება ანგარიშზე ამავე წლის 30 ოქტომბერს?
5. კლიენტმა ბანკში 2001 წლის 6 ივლისს შეიტანა 10000 ლარი წლიური 18%-ით. რა თანხა იქნება ანგარიშზე 12 სექტემბერს?
6. კლიენტმა ბანკში 15 თებერვალს შეიტანა 10000 ლარი წლიური 12%-ით. შემდეგში მან 10 მაისს კიდევ შეიტანა 5000 ლარი იგივე პირობით. რა თანხა იქნება ანგარიშზე 4 ნოემბერს?

§ 3. მარტივი პროცენტები ცვლადი სიდიდეებით. რეინვესტირება

ფინანსური ოპერაცია შესაძლოა ითვალისწინებდეს, რომ მთელი პერიოდის განმავლობაში საპროცენტო განაკვეთი არ იცვლებოდეს (როგორც აქამდე ვთვლიდით). მაგრამ შესაძლებელია ისიც, რომ სხვადასხვა მიზეზების გამო (მაგალითად: ინფლაცია) მოხდეს ცვლილებები. მაგალითად: კლიენტმა ბანკში შეიტანა 10000 ლარი 3 თვით იმ პირობით, რომ პირველ თვეში საპროცენტო განაკვეთია 10%, მეორე თვეში 12% და მესამე თვეში 18%. მაშინ ცხადაა, რომ პირველი თვის ბოლოს ის მიიღებს 100 ლარს, მეორე თვის ბოლოს 120 ლარს და მესამე თვის ბოლოს 180 ლარს.

ვთქვათ ფინანსური ოპერაციის მიმდინარეობის დროს $(t_0, t_0 + T)$ პერიოდში საპროცენტო განაკვეთი შეიცვალა $t_1, t_2, \dots, t_{m-1}$ მომენტებში (აქ $t_0 < t_1 < \quad < t_{m-1} < T$). თუ ჩავთვლით, რომ დროის (t_0, t_1) მონაკვეთში საპროცენტო განაკვეთი იყო r_0, დროის (t_1, t_2) მონაკვეთში იყო r_1, (t_k, t_{k+1}) მონაკვეთში იყო r_k და ა.შ. (t_{m-1}, T) მონაკვეთში იყო r_{m-1}, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ (t_0, t_1) მონაკვეთში წარმოქმნილი ნამატი $I_0 = S(t_0)r_0(t_1 - t_0)$ და ეს ტოლია ნახაზზე მითითებული მართკუთხედის ფართობის:



შესაბამისად (t_1, t_2) მონაკვეთზე წარმოქმნილი ნამატია $I_1 = S_0 \cdot r_1(t_2 - t)$, (t_k, t_{k+1}) მონაკვეთზე წარმოქმნილი ნამატია $I_k = S_0$ $r_k(t_{k+1} - t_k), \ldots$.

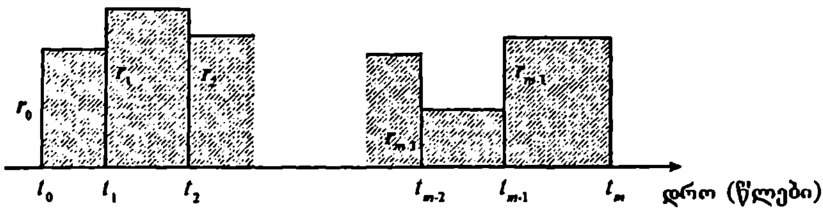
თუ გვინდა ვიპოვოთ $t_0 + T$ მომენტისათვის დაგროვებული თანხა, S_0-ს უნდა დავუმატოთ ყოველ მონაკვეთზე დაგროვებული თანხები და მიიღება

$$S(t_0 + T) = S_0 + S_0 \cdot r_0(t_1 - t_0) + S_0 r_1(t_2 - t_1) + \cdots .$$

აქედან ადვილი დასანახია, რომ თუ $t_0 + T$ სიდიდეს აღვნიშნავთ t_m-ით, მაშინ დაგროვების კოეფიციენტი $A(t_0, t_m)$ ტოლი იქნება

$$A(t_0, t_m) = 1 + (t_1 - t_0)r_0 + (t_2 - t_1)r_1 + \cdots + (t_m - t_{m-1})r_{m-1} = \\ = 1 + \sum_{j=0}^{m-1}(t_{j+1} - t_j)r_j. \tag{3.1}$$

ადვილი დასანახია, რომ $\sum_{j=0}^{m-1}(t_{j+1} - t_j)r_j$ ჯამი წარმოადგენს ქვემოთ ნახაზზე დაშტრიხული ფიგურის ფართობს (მართკუთხედების ფართობების ჯამს):



შევნიშნოთ, რომ თუ $r_0 = r_1 = r_2 = \cdots = r_{m-1}$ (ანუ საპროცენტო

განაკვეთი არ იცვლება), მაშინ (3.1) ფორმულიდან მიიღება, რომ

$$S(t_0, t_m) = S(t_0)(1 + r_0(t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + t_3 - t_2 + \cdots + \\ + t_m - t_{m-1})) = S(t_0)(1 + r_0(t_m - t_0)),$$

ანუ ფორმულა, რომელიც §1-ში გამოვიყვანეთ.

მაგალითი 1. ფინანსური ოპერაცია ითვალისწინებს მარტივი პროცენტების დარიცხვას შემდეგი წესით – პირველ წელს წლიური 30%, მეორე წელს წლიური 40%, მესამე წელს 50% – და ა.შ. ვიპოვოთ დაგროვების კოეფიციენტი 2 წელიწადში, 3 წელიწადში და 4,5 წელიწადში.

თუ გამოვიყენებთ (3.1) ფორმულას, მიიღება:

$$A(2) = 1 + 0,3 + 0,4 = 1,7;$$
$$A(3) = 1 + 0,3 + 0,4 + 0,5 = 2,2;$$
$$A(4,5) = 1 + 0,3 + 0,4 + 0,5 + 0,6 + 0,7 \cdot \frac{1}{2} = 3,15.$$

ადრე განხილულ მაგალითებში ვგულისხმობდით, რომ ნამატის წარმოქმნა ყოველ პერიოდში განპირობებული იყო მხოლოდ საწყისი თანხის რაოდენობით, მაგრამ შესაძლოა ეს ასე არ იყოს. განვიხილოთ ხელახლა ამ პარაგრაფის დასაწყისში გარჩეული პროცედურა გარკვეული შესწორებებით:

ვთქვათ დროის t_0 მომენტში ბანკში შეტანილია $S(t_0)$ თანხა r_0 პროცენტით დროის t_1 მომენტამდე. მაშინ ცხადია, რომ

$$S(t_1) = S(t_0)(1 + r_0(t_1 - t_0)).$$

თუ ახლა ჩავთვლით, რომ ეს თანხა არის t_1 მომენტში შეტანილი r_1 პროცენტი დროის t_2 მომენტამდე, მაშინ

$$S(t_2) = S(t_1)(1+r_1(t_2-t_1)) = S(t_0)(1+r_0(t_1-t_0))(1+r_1(t_2-t_1)).$$

ადვილი დასანახია, რომ თუ ყოველი პერიოდის ბოლოს ხდება დაგროვებული თანხის დატოვება, მაშინ დროის t_m მომენტისათვის და-

გროვებული თანხაა

$$S(t_m) = S(t_0) \prod_{j=0}^{m-1} \left(1 + r_j(t_{j+1} - t_j)\right). \qquad (3.2)$$

ასეთ პროცესს რეინვესტირება ანუ კაპიტალიზაცია ეწოდება. თუ (3.2) ფორმულაში $r_0 = r_1 = r_2 = \cdots = r_{m-1}$ და $t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \cdots = t_m - t_{m-1} = 1$, მაშინ

$$S(t_m) = S(t_0)(1 + r_0)^m$$

(ამ ფორმულას მომავალშიც გამოვიყვანთ).

ამოცანები. 1. ფინანსური ოპერაცია ითვალისწინებს პროცენტების დარიცხვის შემდეგ წესს: პირველ წელს წლიური 20%, ხოლო ყოველ შემდეგ წელს წინა წელთან შედარებით 4%-ით მეტი. იპოვეთ დაგროვების კოეფიციენტი $3,5$ წელიწადში: ა) რეინვესტირების გარეშე; ბ) რეინვესტირებით.

2. ხელშეკრულებით გათვალისწინებულია პროცენტების დარიცხვის შემდეგი წესი: პირველ კვარტალში თვიური 10%, მეორე კვარტალში თვიური 15%, მესამე კვარტალში თვიური 12% და მეოთხე კვარტალში თვიური 20%. იპოვეთ დაგროვების წლიური კოეფიციენტი: ა) რეინვესტირების გარეშე; ბ) რეინვესტირებით.

3. კლიენტმა ბანკში შეიტანა 1500 ლარი შემდეგი პირობებით: პირველ წელს საპროცენტო განაკვეთია 20%, შემდეგ ყოველ ნახევარ წელიწადში საპროცენტო განაკვეთი 4%-ით იზრდება. იპოვეთ დაგროვებული თანხა 2 წელიწადში: ა) რეინვესტირების გარეშე; ბ) რეინვესტირებით.

4. ბანკში შეტანილია 15000 ლარი წლიური 20%-ით. რა თანხა დაგროვდება 4 წელიწადში: ა) რეინვესტირების გარეშე; ბ) რეინვესტირებით?

§ 4. სამომხმარებლო კრედიტი

სამომხმარებლო კრედიტი ეწოდება ისეთ კრედიტს, რომელსაც ბანკი ან სხვა ვინმე გასცემს ინდივიდუალურ პირზე სამომხმარებლო მიზნებისათვის (მაგალითად ავტომობილის შესაძენად). ეს საკმაოდ გავრცელებული ფორმაა, როცა ადამიანს არა აქვს საშუალება ერთბაშად გადაიხადოს მთელი თანხა და საშუალება ეძლევა თანხა ნაწილ-ნაწილ გადაიხადოს.

არსებობს სამომხმარებლო კრედიტის დაფარვის სხვადასხვა ხერხი. ქვემოთ ჩვენ ორ სხვადასხვა ხერხს განვიხილავთ.

1. ერთი ხერხი სამომხმარებლო კრედიტის დაფარვისა შემდეგში მდგომარეობს: ვთქვათ აღებულია რაღაც S_0 კრედიტი n წლით და r წლიური პროცენტით (ცხადია, რომ შესაძლოა n არა მთელი). მაშინ დასაბრუნებელი ვალია

$$S_n = S_0(1 + rn).$$

გათვალისწინებულია, რომ ამ ვალის გასტუმრება მოხდება წელიწადში m-ჯერადი ერთნაირი თანხის გადახდით. მაშინ ყოველი გადასახადის რაოდენობაა

$$q = \frac{S_0(1 + rn)}{nm}$$

მაგალითი 1. ავტომობილი, რომლის ფასია 6000 ლარი იყიდება 2 წლიანი განვადებით წლიური 12%-ით და ყოველკვარტალური თანაბარი გადახდით. ვიპოვოთ ყოველკვარტალური გადასახადი.

ადვილი დასანახია, რომ $S_0 = 600$, $n = 2$, $m = 4$ და $r = 0,12$. მაშინ

$$S_2 = 6000(1 + 0,12 \cdot 2) = 7440 \quad \text{და} \quad q = \frac{7440}{8} = 930\ .$$

ამრიგად, ყოველ კვარტალში გადასახადელია 930 ლარი. აქედან შეიძლება ჩაითვალოს, რომ $750 = \frac{6000}{8}$ ლარით იფარება ძირითადი თანხა და $180 = \frac{1440}{8}$ ლარით კი იფარება ნამატი. თუ დავაკვირდებით გადახდისა და დარჩენილი ვალის დინამიკას, მაშინ დავინახავთ, რომ პირველ კვარტალში ვალის პროცენტად გადახდილია 180 ლარი, რაც

ტოლია 6000-ის 3%-ის (კვარტალში რაც უნდა დაგროვებულიყო). მაგრამ მეორე კვარტალში იგივე თანხაა გადახდილი და ამ დროს ვალი აღარაა 7440 (ახლა ის უკვე 6510 ლარია). მაშასადამე მეორე კვარტალში (და მერეც) უკვე უფრო მეტი პროცენტია გადახდილი.

2. მეორე ხერხი სამომხმარებლო კრედიტის დაფარვისა მდგომარეობს შემდეგში: ვთქვათ ისევ აღებულია S_0 კრედიტი n წლით და წლიური r პროცენტით. ვალის გასტუმრება უნდა მოხდეს m ჯერადი გადახდით წელიწადში. გათვალისწინებულია, რომ ძირითადი ვალის (S_0 თანხის) გადახდა ხდება თანაბარი შესატანებით. მაგრამ რაკი ეს იწვევს ვალის შემცირებას, ამიტომ საპროცენტო გადასახადები ყოველ გადახდისას ხელახლა ითვლება.

რადგან სულ m-ჯერ ხდება გადახდა წელიწადში, ამიტომ დარიცხვა ხდება ყოველ $\frac{12}{m}$ თვეში. პირველი გადახდის მომენტში ნამატი ტოლია $\frac{S_0 \cdot r}{m}$-ის. აღვნიშნოთ ეს სიდიდე I_1-ით. მაგრამ მაშინ ძირითადი ვალიდან დარჩენილი იქნება $(S_0 - \frac{S_0}{mn})$ და ამიტომ შემდეგი გადახდისათვის ნამატი იქნება

$$I_2 = \left(S_0 - \frac{S_0}{mn}\right) \cdot \frac{r}{m} = \frac{S_0 r}{m}\left(1 - \frac{1}{mn}\right).$$

გასაგებია, რომ შემდეგი გადახდებისათვის ნამატი იქნება შესაბამისად

$$I_3 = \frac{S_0 \cdot r}{m}\left(1 - \frac{2}{m \cdot n}\right),$$
$$I_4 = \frac{S_0 \cdot r}{m}\left(1 - \frac{3}{m \cdot n}\right), \ldots,$$

$$I_{mn} = \frac{S_0 \cdot r}{m}\left(1 - \frac{mn-1}{m \cdot n}\right).$$

სულ საბოლოოდ საერთო რაოდენობა კრედიტით სარგებლობისათვის გადასახადებისა ტოლია

$$I = \sum_{s=1}^{mn} I_s = \frac{S_0 \cdot r}{m}\Big[1 + \left(1 + \frac{1}{mn}\right) + \left(1 + \frac{2}{mn}\right) + \cdots +$$

$$+\left(1-\frac{mn-1}{mn}\right)\Big] = \frac{S_0\cdot r}{m}\Big[mn-\frac{mn-1}{2}\Big] =$$
$$= \frac{S_0\cdot r}{2m}(mn+1).$$

აქედან გამომდინარე სულ გადასახდელია

$$S_1 = S_0\Big(1+\frac{mn+1}{2m}r\Big)$$

თანხა. თუკი გადახდა უნდა მოხდეს თანაბარი შენატანებით, მაშინ ყოველი გადასახდელი შენატანი ტოლი იქნება

$$\frac{S_1}{mn} = \frac{S_0}{mn}\Big(1+\frac{mn+1}{2m}r\Big).$$

მაგალითი 2. განვიხილოთ ისევ ავტომობილის განვადებით შესყიდვის ამოცანა. ავტომობილის ფასია 6000 ლარი და ის იყიდება განვადებით 12% წლიური პროცენტით. კრედიტი უნდა დაიფაროს 2 წლის განმავლობაში ყოველკვარტალური შენატანებით. განვსაზღვროთ ყოველკვარტალური შენატანების ოდენობა მეორე სქემის მიხედვით.

როგორც ვხედავთ ძირითადი ვალი $S_0 = 6000$ და ყოველკვარტალურად უნდა გადავიხადოთ ამ თანხის $\frac{1}{8}$ ნაწილი, ანუ 750 ლარი და კიდევ რაღაც. თუ გავყვებით ზემოთ მოყვანილ სქემას მივიღებთ, რომ

$$I_1 = \frac{6000\cdot 0,12}{4} = 180, \quad I_2 = 180\Big(1-\frac{1}{8}\Big) = 157,5,$$

$$I_3 = 180\Big(1-\frac{2}{8}\Big) = 135, \quad I_4 = 180\Big(1-\frac{3}{8}\Big) = 112,5,$$

$$I_5 = 180\Big(1-\frac{4}{8}\Big) = 90, \quad I_6 = 180\Big(1-\frac{5}{8}\Big) = 67,5,$$

$$I_7 = 180\Big(1-\frac{6}{8}\Big) = 45, \quad I_8 = 180\Big(1-\frac{7}{8}\Big) = 22,5.$$

მაშასადამე საპროცენტო გადასახადების საერთო მოცულობაა

$$I = 180+157,5+135+112,5+90+67,5+45+22,5 = 810.$$

ამრიგად, თუ კრედიტის დაფარვა უნდა მოხდეს თანაბარი შენატანებით, ყოველკვარტალური შესატანი თანხა ტოლი იქნება

$$q = \frac{6000 + 810}{8} = 851,25.$$

თუკი ყოველკვარტალურად უნდა გადავიხადოთ ძირითადი ვალის $\frac{1}{8}$ და ნამატი, მაშინ კვარტალების მიხედვით შესატანიიქნება შესაბამისად

$$q_1 = 930, \quad q_2 = 907,5, \quad q_3 = 885, \quad q_4 = 862,5,$$
$$q_5 = 840, \quad q_6 = 817,5, \quad q_7 = 795, \quad q_8 = 772,5.$$

ამოცანები. 1. სამომხმარებლო კრედიტი 60000ლარის ოდენობით გახსნილია სამი წლით სახლის შესაძენად წლიური 18%-ით და ყოველთვიური გადახდით. აღწერეთ კრედიტის დაფარვის სურათი თვეების მიხედვით ორივე სქემის თანახმად.

2. სამომხმარებლო კრედიტი 10000 ლარის ოდენობით გახსნილია ორი წლით ავტომობილის შესაძენად წლიური 24%-ით და ყოველთვიური გადახდით. აღწერეთ კრედიტის დაფარვის დინამიკა ორივე სქემის მიხედვით.

§ 5. სალომბარდო კრედიტი

სალომბარდო კრედიტი წარმოადგენს საგირავნო ფინანსური ოპერაციების ერთ-ერთ ნაირსახეობას. თავისი არსით ეს არის კრედიტის მოკლევადიანი გაცემა რაიმე საკუთრების გირაოთი (ეს შეიძლება იყოს ფასიანი ქაღალდები, ძვირფასეულობა, სხვა ქონება). როგორც წესი სალომბარდო კრედიტის ხანრგძლივობა არ აღემატება რამდენიმე თვეს.

საგირავნო ხელშეკრულებით დაგირავებული საკუთრება დროებით მფლობელობაში გადაეცემა კრედიტორს, თუმცა იგი რჩება მოვალის საკუთრებაში. თუკი კრედიტი რაიმე მიზეზით არ იქნება დაფარული, მაშინ დაგირავებული ქონება გადადის კრედიტორის საკუთრებაში, რომელიც მისი რეალიზაციის გზით ალბათ შეეცდება გაცემული თანხის დაბრუნებას. პრაქტიკულად გაცემული სალომბარდო კრედიტის

სიდიდე არ აღემატება გირაოს სახით წარმოდგენილი ქონების ნომინალური ღირებულების 75–80 პროცენტს.

საგირავნო კონტრაქტით შესაძლოა გათვალისწინებული იყოს ვალის გადახდის სხვადასხვა ვარიანტები. მაგალითად: თუ კრედიტი სრულად არ იქნება დაფარული, შესაძლოა გათვალისწინებული იყოს ვალის ნაწილობრივი დაფარვა და კრედიტის ვადის გაგრძელება; თუ კრედიტის დაფარვის ვადები დაირღვა, შესაძლოა შემოღებული იყოს ე.წ. საჯარიმო საპროცენტო განაკვეთი. სალომბარდო კრედიტის გაანგარიშებისას, როგორც წესი, გამოიყენება გამოთვლების ფრანგული ვარიანტი 365/360 (ანუ დღეების რაოდენობა ითვლება ზუსტად, ხოლო წელიწადში იგულისხმება 360 დღე).

მაგალითი 1. კლიენტმა ბანკს მიმართა 7 აპრილს კრედიტის მისაღებად თავისი საკუთარი სახლის გირავნობით, ამასთან სახლის საბაზრო ღირებულებაა 40000 ლარი. ბანკი თანახმაა მას მისცეს კრედიტი 10%-ით სამი თვის ვადით (7 ივლისამდე) სახლის საბაზრო ფასის 80%-ის ოდენობით. კონტრაქტში აღნიშნულია, რომ კრედიტის მომსახურებისათვის ბანკი იღებს კრედიტის 1%-ს და ამ თანხას დაგროვებულ პროცენტებთან ერთად ბანკი იტოვებს კრედიტის გაცემისას. რეალურად რა თანხას იღებს კლიენტი?

რაკი სახლის საბაზრო ღირებულებაა 40000 ლარი, ამიტომ კრედიტის ნომინალური რაოდენობაა

$$40000 \cdot 0,8 = 32000 \text{ ლარი.}$$

რადგან 7 აპრილიდან 7 ივლისამდე 91 დღეა, ამიტომ პროცენტები ამ ხნის განმავლობაში ტოლია

$$\frac{32000 \cdot 0,1 \cdot 91}{360} \approx 860 \text{ ლარი.}$$

ამას გარდა ბანკი იტოვებს მომსახურეობისათვის

$$32000 \cdot 0,01 = 320 \text{ ლარს.}$$

მაშასადამე კლიენტი იღებს ხელზე

$$32000 - 860 - 320 = 30820 \text{ ლარს.}$$

ამოცანები. 1. კლიენტმა ბანკს მიმართა 16 აპრილს კრედიტის მისაღებად 300 ფასიანი ქაღალდის გირავნობით. ამ დროს თითოეული ქაღალდის საბაზრო ფასი 100 ლარი იყო. ბანკი თანახმაა მას მისცეს კრედიტი 3 თვით (16 ივლისამდე) წლიური 12%-ით ფასიანი ქაღალდების ღირებულების 80%-ის ოდენობით. კრედიტის მომსახურეობისათვის ბანკი იტოვებს 1,5%-ს კრედიტის გაცემისთანავე პროცენტებთან ერთად. თუ კლიენტმა ვალი დროზე ვერ გადაიხადა, მაშინ ყოველ გადამეტებულ დღეზე კლიენტი იხდის წლიური 18%-ის გაანგარიშებით. ა) რა თანხა მიიღო რეალურად კლიენტმა? ბ) თუ კლიენტმა ვალის დაბრუნება მოახერხა 5 აგვისტოს, რა თანხა გადაუხდია მას?

2. მეწარმეს 10 მაისს სჭირდება 80000 ლარი თავისი საწარმოს გირავნობით. ბანკმა მას კრედიტი მისცა საწარმოს ღირებულების 75%-ის ოდენობით წლიური 18% პროცენტით. ამასთან ეს პროცენტი და კრედიტის მომსახურეობის 600 ლარი დაიტოვა კრედიტის გაცემისთანავე. რა საბაზრო ღირებულება ჰქონია საწარმოს, თუ კრედიტი აღებულია 10 აგვისტომდე?

§ 6. ფულის თანამედროვე ღირებულება

ძალიან ხშირად ფინანსური ოპერაციების განხილვისას საჭირო ხდება ე.წ. შებრუნებული ამოცანის გადაწყვეტა: როცა ცნობილია მომავალში დაგროვებული თანხის რაოდენობა $S(t_0 + T)$ და საჭიროა იმის გაგება, თუ დროის t_0 მომენტში რა რაოდენობის ინვესტიციაა გასაკეთებელი T პერიოდის შემდეგ $S(t_0+T)$ თანხის დასაგროვებლად. ადვილი დასანახია, რომ

$$S(t_0) = \frac{S(t_0 + T)}{1 + rT} \tag{6.1}$$

$S(t_0)$ თანხას, რომლის ინვესტირებაც r მარტივი პროცენტით T პერიოდის შემდეგ მოგვცემს $S(t_0 + T)$ თანხას, ეწოდება $S(t_0 + T)$

თანხის თანამედროვე ღირებულება (present value). მოცემული ფულადი თანხის თანამედროვე ღირებულების გამოთვლის პროცედურას დისკონტირება ეწოდება, ხოლო

$$\frac{1}{1+rT}$$

სიდიდეს კი დისკონტის მამრავლი. $S(t_0+T)-S(t_0)$ სიდიდეს აღნიშნავენ $D(T)$ სიმბოლოთი და დისკონტს უწოდებენ.

თუ (6.1) ფორმულაში ჩავსვამთ $S(t_0+T)=1$ და $T=1$-ს მივიღებთ

$$S(t_0)=\frac{1}{1+r}=1-\frac{r}{1+r}$$

მაგალითი 1. კრედიტი გაცემულია ნახევარი წლით წლიური 80%-ით და დასაბრუნებელი თანხაა 4000 ლარი. რა თანხაა გაცემული კრედიტად და რას უდრის დისკონტი?

ადვილი დასანახია, რომ

$$S(t_0)=\frac{4000}{1+0,8\cdot 0,5}=3333,3\,\text{ლარი}$$

და დისკონტი $D(1/2)=4000-333,3=966,7$ ლარი.

მაგალითი 2. კრედიტი აღებულია 4 თვით წლიური 30%-ით და წარმოქმნილი ნამატი ტოლია 2000 ლარის. რა თანხა იყო გაცემული და დაბრუნებული?

თუ კრედიტის რაოდენობას აღვნიშნავთ S_0-ით, მაშინ დასაბრუნებელი თანხა იქნება $S_1=S_0+2000$, მაშასადამე

$$S_0\Big(1+0,3\cdot\frac{1}{3}\Big)=S_0+2000.$$

აქედან $S_0=20000$ და $S_1=22000$.

ამოცანები. 1. კრედიტი გაცემულია 6 თვით წლიური 12%-ით და დასაბრუნებელი თანხაა 200000 ლარი. რა თანხა იყო გაცემული და რას უდრის დისკონტი?

2. კრედიტი აღებულია 8 თვით წლიური 60%-ით და დისკონტი უდრის 1500 ლარს. რა თანხაა გაცემული?

3. რა თანხა უნდა შეიტანოთ ბანკში წლიური 20%-ით, რომ დააგროვოთ 20000 ლარი: ა) ნახევარ წელიწადში; ბ) ორ წელიწადში; გ) ოთხ წელიწადში; დ) 7 წელიწადში?

4. რა თანხა უნდა შეიტანოთ ბანკში, რომ ოთხი წლის შემდეგ მიიღოთ 40000 ლარი, თუ წლიური პროცენტია: ა) 12%; ბ) 24%; გ) 30%; დ) 72%?

5. კრედიტი აღებული იყო ორი წლით და დასაბრუნებელი თანხაა 240000 ლარი. რას უდრის დისკონტი, თუ წლიური საპროცენტო განაკვეთია: ა) 10%; ბ) 30%; გ) 6%?

6. რა დროში დაგროვდება 36000 ლარი ანგარიშზე, თუ საწყისი კაპიტალია 30000 ლარი და წლიური საპროცენტო განაკვეთია: ა) 10%; ბ) 15%?

7. რა დროით შეუძლია კლიენტს ბანკიდან 8000 ლარის კრედიტის აღება წლიური 12%-ით, თუ დასაბრუნებელი თანხა არ უნდა აღემატებოდეს 10000 ლარს?

8. კლიენტს უნდა ანგარიშზე 8000 ლარის შეტანა ისე, რომ 15 თვის შემდეგ ჰქონდეს არანაკლებ 10000 ლარისა. როგორი საპროცენტო განაკვეთი უნდა შესთავაზოს მას ბანკმა?

§ 7. პროცენტების წინასწარი გადახდა

განვიხილოთ სიტუაცია, როცა კრედიტის ფასი (ანუ პროცენტი) გადაიხდება არა ფინანსური ოპერაციის ბოლოს, არამედ დასაწყისში (მსგავსი რამ უკვე შეგვხვდა სალომბარდო კრედიტის განხილვისას).

ვთქვათ კრედიტი გაიცემა 1 წლით წლიური r პროცენტით. მაშინ

$$S(1) = S(0)(1+r), \qquad I = S(0)\cdot r.$$

რაკი პროცენტის წინასწარ გადახდაა საჭირო, გავიაზროთ – რამდენია გადასახდელი? მართალია კრედიტის ფასია $S(0)\cdot r$, მაგრამ წინასწარ მთელი ამ თანხის გადახდის მოთხოვნა არ იქნებოდა სამართლიანი. ამის ასახსნელად განვიხილოთ მარტივი მაგალითი.

მაგალითი 1. ვთქვათ კრედიტი 1000 ლარი აღებულია 1 წლით 20%-ით. მაშინ დასაბრუნებელი თანხაა 1200 ლარი და პროცენტია 200 ლარი. თუ წინასწარ გადაიხადეთ პროცენტი 200 ლარის ოდენობით, მაშინ სინამდვილეში აღებულია 800 ლარი და ერთ წელიწადში დასაბრუნებელია 1000 ლარი. მაგრამ მაშინ ადვილი დასანახია, რომ $1000 = 800(1 + 0,25)$, რაც ნიშნავს, რომ სინამდვილეში კრედიტი 25%-იანია. როგორ უნდა მოვიქცეთ? ამის გასარკვევად შევთანხმდეთ, რომ პროცენტის წინასწარი გადახდისას უნდა გადავიხადოთ არა 200 ლარი, არამედ ამ თანხის თანამედროვე ღირებულება $\frac{200}{1+0,2} = 166,7$ ლარი. მაშინ კრედიტად აღებული იქნება 833,3 ლარი და დასაბრუნებელი კი $833,3(1 + 0,2) = 1000$ ლარი.

ზოგად შემთხვევაშიც, $S(0) \cdot r$ პროცენტის წინასწარ გადახდისას უნდა გადავიხადოთ ამ თანხის თანამედროვე ღირებულება

$$\frac{S(0) \cdot r}{1 + r}$$

თუ გავიხსენებთ და გავიმეორებთ აღნიშვნას

$$d = \frac{r}{1 + r},$$

მაშინ პროცენტის წინასწარი გადახდისას უნდა გადავიხადოთ $S(0) \cdot d$ თანხა. (გავიხსენოთ, რომ d სიდიდეს სააღრიცხვო განაკვეთი ეწოდება და ის ექვივალენტურია r საპროცენტო განაკვეთის.)

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, $0 < d < 1$ და უფრო მეტიც $d < \min(1, r)$. ამასთან ადრე განმარტებული დისკონტის მამრავლი

$$\frac{1}{1 + rT}$$

$T = 1$-ის შემთხვევაში ემთხვევა ადრე განმარტებულ დისკონტ-ფაქტორს:

$$v = 1 - d = \frac{1}{1 + r}$$

შენიშვნა. ჩვენ ზემოთ შევეცადეთ მოგვეძებნა ახსნა ამ პროცედურისა, რომელსაც დისკონტი (ფასდაკლება) ეწოდება. ამასთან ფასდაკლება გამოწვეული და დაკავშირებული იყო საპროცენტო განაკვეთთან. ზოგად შემთხვევაში ფასდაკლება შესაძლოა ნაკარნახევი იყოს სხვა მოსაზრებებითაც.

ამოცანები. 1. ვთქვათ კრედიტი გაცემულია 4 წლით წლიური 10%-ით და პროცენტის წინასწარ გადახდაა საჭირო. რას უდრის სააღრიცხვო განაკვეთი და დისკონტ-ფაქტორი?
2. 200000 ლარის კრედიტი გაცემულია 2 წლით წლიური 24%-ით და პროცენტის წინასწარი გადახდით. რა თანხაა რეალურად აღებული კრედიტის სახით?
3. 100000 ლარის კრედიტი გაცემულია 2 წლით პროცენტის წინასწარი გადახდით, რამაც შეადგინა 9000 ლარი. რას უდრის სააღრიცხვო განაკვეთი?
4. 20000 ლარის კრედიტი გაცემულია 2 წლით პროცენტების წინასწარი გადახდით. ამასთან პირველ წელს საპროცენტო განაკვეთია 10%, მეორე წელს კი 18%. რა თანხაა აღებული რეალურად კრედიტის სახით?
5. 200000 ლარის კრედიტი აღებულია 2 წლით და წინასწარ პროცენტების სახით გადახდილია 34000 ლარი. რას უდრის საპროცენტო განაკვეთი პირველ წელს, თუ მეორე წელს ის 10%-ის ტოლია?

§ 8. საბანკო დისკონტირება

საბანკო დისკონტიება გამოიყენება ბანკის ან რომელიმე სხვა ფინანსური ორგანიზაციის მიერ ფასიანი ქაღალდის (უფრო ხშირად თამასუქების) შესყიდვისას.

თამასუქი (ვექსილი, bill) წარმოადგენს წერილობით ვალდებულებებს, რომლის მიხედვითაც ერთი მხარე ვალდებულია მეორე მხარეს მითითებულ დროს გადაუხადოს მითითებული თანხა. მაგალითისათვის განვიხილოთ თამასუქი:

მაგალითი 1.

2000 ლარი.	თბილისი. 10.09.2001 წ.
ვალდებული ვარ მითითებული თარიღიდან 60 დღის შემდეგ ბატონი X-ის მითითებით გადავიხადო 2000 ლარი წლიური 12% პროცენტით	
ხელმოწერა	ბატონი Y

გამოვიყენოთ ფრანგული ვარიანტი 365/360. მაშინ ვექსილის (თამასუქის) ნომინალური ღირებულებაა

$$2000\left(1+0,12\cdot\frac{60}{360}\right)=2040 \text{ ლარი}$$

და ეს თანხა X-მა უნდა მიიღოს 10 ნოემბერს.

მართალია თამასუქის მიხედვით გადახდის ვადა 10 ნოემბერია, X-ს შეუძლია თამასუქი გაყიდოს უფრო ადრე, მაგრამ დისკონტით. ამასთან საჭირო ხდება გაყიდვის მომენტისათვის თამასუქის ღირებულების გამოთვლა. განვიხილოთ ჯერ კიდევ ერთი მაგალითი.

მაგალითი 2. თამასუქის მფლობელმა 7 მაისს ბანკში წარადგინა 50000 ლარის ნომინალური ღირებულების თამასუქი, რომლის განაღდების ვადაა 22 მაისი. ბანკი თანახმაა თამასუქი შეიძინოს 30%-იანი წლიური დისკონტით. რა თანხას მიიღებს თამასუქის მფლობელი?

როგორც ვხედავთ $S(1)=50000$, $T=\frac{15}{360}$ და $d=0,3$. მაშინ

$$S(0)=50000\left(1-0,3\cdot\frac{15}{360}\right)=49375 \text{ ლარი.}$$

მაშასადამე თამასუქის მფლობელი მიიღებს 49375 ლარს, ხოლო სხვაობა 625 ლარი ბანკის შემოსავალია, რომელსაც ბანკი მიიღებს 22 მაისს.

მაგალითი 1. გავაგრძელოთ განხილვა და ჩავთვალოთ, რომ X-მა მოინდომა თამასუქის გაყიდვა 11 ოქტომბერს. ბანკი დათანხმდა შესყიდვაზე წლიური 20%-იანი დისკონტით. რა თანხას მიიღებს X და რა თანხას ბანკი?

თამასუქის ნომინალური ღირებულება უკვე გამოთვლილი გვაქვს და ესაა 2040 ლარი. მაშინ X ბანკისაგან მიიღებს

$$2040\left(1-0,2\cdot\frac{30}{360}\right)=2006 \text{ ლარს},$$

ხოლო ბანკის შემოსავალია 34 ლარი.

მაგალითი 3. 30000 ლარის ღირებულების თამასუქი ბანკში წარადგინეს მისი ვადის გასვლამდე 90 დღით ადრე. ბანკმა იგი გაანაღდა წლიური 22% საპროცენტო განაკვეთით. რა თანხა მიიღო თამასუქის მფლობელმა?

რადგან აქ $r=0,22$, ამიტომ

$$d=\frac{0,22}{1+0,22}=0,18\,.$$

მაშინ თამასუქის მფლობელი მიიღებს

$$30000\left(1-0,18\cdot\frac{90}{360}\right)=28650 \text{ ლარს}.$$

ამოცანები. 1. 20000 ლარის თამასუქი ბანკში წარდგენილია მისი ვადის გასვლამდე 60 დღით ადრე. რა თანხას მიიღებს მისი მფლობელი, თუ ბანკი გაანაღდებს თამასუქს: ა) წლიური 30%-იანი დისკონტით; ბ) წლიური 20%-იანი დისკონტით; გ) წლიური 10%-იანი დისკონტით?

2. 10000 ლარის თამასუქი ბანკში წარდგენილია მისი ვადის გასვლამდე 45 დღით ადრე. რა თანხას მიიღებს მისი მფლობელი, თუ ბანკი გაანაღდებს თამასუქს: ა) წლიური 20%-იანი; ბ) წლიური 10%-იანი საპროცენტო განაკვეთით?

3. თამასუქში, რომელიც განაღდეს მისი ვადის გასვლამდე 1,5 წლით ადრე წლიური: ა) 8%-იანი; ბ) 12%-იანი დისკონტით, გადაიხადეს 120000 ლარი. რას უდრის თამასუქის ნომინალური ღირებულება?

4. თამასუქი, რომლის საწყისი ღირებულებაა 100000 ლარი, გაცემულია 160 დღით წლიური 9%-ით. მისი ვადის გასვლამდე 50 დღით ადრე ბანკმა ის განაღდა წლიური 18%-იანი დისკონტით. იპოვეთ ბანკის მიერ მიღებული მოგება.

5. 15 მაისს ბანკმა განაღდა ორი თამასუქი 18%-იანი წლიური დისკონტით. პირველი თამასუქის გადახდის ვადაა 23 ივნისი, ხოლო მეორის კი 14 ივლისი. იპოვეთ მეორე თამასუქის ნომინალური ღირებულება, თუ პირველის ნომინალური ღირებულებაა 15000 ლარი და ბანკმა სულ მიიღო 885 ლარი მოგება.

თავი II. რთული პროცენტები

§ 1. დაგროვება რთული პროცენტებით

რთული და მარტივი პროცენტების წესით დაგროვებებს შორის პრინციპული განსხვავების გასარკვევად განვიხილოთ შემდეგი სიტუაცია. ვთქვათ ბანკი კლიენტს თავაზობს ანგარიშზე წელიწადში r მარტივი პროცენტის დარიცხვას და კლიენტს უნდა ანგარიში სამი წლით ვადით გახსნას. მაშინ, წინა თავის შედეგებიდან ვიცით, ყოველი წლის ბოლოს მის ანგარიშზე იქნება შესაბამისად

$$S(1) = S(0)(1 + r), \quad S(2) = S(0)(1 + 2r), \quad S(3) = S(0)(1 + 3r)$$

თანხა. მაგრამ კლიენტს შეუძლია პირველი წლის ბოლოს ანგარიში დახუროს, გამოიტანოს $S(1)$ თანხა და მაშინვე გახსნას ახალი ანაგარიში იგივე პირობებით. მაშინ მეორე წლის ბოლოს ის მიიღებს

$$S(0)(1 + r)^2 = S(0)(1 + 2r + r^2)$$

თანხას, რაც $S(0)r^2$-ით მეტია $S(2)$-ზე. თუ ის მეორე წლის ბოლოსაც იგივე კომბინაციას გაიმეორებს, მაშინ მესამე წლის ბოლოს იგი მიიღებს

$$S(0)(1 + r)^3 = S(0)(1 + 3r + 3r^2 + r^3)$$

თანხას, რაც $S(0)(3r^2 + r^3)$-ით მეტია $S(3)$-ზე.

ბუნებრივია, რომ კლიენტისათვის უფრო ხელსაყრელია ყოველი წლის ბოლოს დაგროვებული თანხის რეინვესტირება და ის ასეც მოიქცევა. ამიტომ ბანკი თავიდანვე შესთავაზებს კლიენტს, რომ ანგარიში გაიხსნას შემდეგი პირობებით: ყოველი წლის ბოლოს პროცენტი მიუერთდეს ძირითად კაპიტალს და შემდეგი წლის პროცენტი ითვლებოდეს ამ ახალი საწყისი კაპიტალიდან. მაშინ ადვილი დასანახია, რომ ყოველი წლის ბოლოს ანგარიშზე შესაბამისად დაგროვებული თანხებია

$$S_0(1 + r), \; S(0)(1 + r)^2, \; S(0)(1 + r)^3, \; S(0)(1 + r)^4, \ldots$$

როგორც ვხედავთ, მარტივი პროცენტებისაგან განსახვავებით, როცა $S(0), S(1), \ldots, S(n)$ სიდიდეები შეადგენდნენ არითმეტიკულ პროგრესიას, ამჯერად ეს სიდიდეები უკვე შეადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, რომლის საწყისი წევრია $b_0 = S(0)$ და მნიშვნელია $(1+r)$. ამრიგად, რთული პროცენტებით დაგროვებისას

$$S(n) = S(0)(1+r)^n. \tag{1.1}$$

ამ ფორმულას რთული პროცენტებით დაგროვების ძირითადი ფორმულა ეწოდება. ადვილი დასანახია, რომ დაგროვების კოეფიციენტია

$$A(0,n) = \frac{S(n)}{S(0)} = (1+r)^n.$$

შენიშვნა. მარტივი პროცენტების დროს კაპიტალის ნამატი ანუ პროცენტი $S(0) \cdot n \cdot r$ პირდაპირპროპორციულია საწყისი თანხის, პროცენტული განაკვეთის და დროის პერიოდის. რთული პროცენტების დროს კაპიტალის ნამატია

$$S(n) - S(0) = S(0)\left[(1+r)^n - 1\right]$$

და ის ალარაა პროპორციული არც პროცენტული განაკვეთის და არც დროის ინტერვალის (თუ $n \neq 1$).

მაგალითი 1. 20000 ლარი შეტანილია ბანკში 4 წლით წლიური 15%-ით. იპოვეთ ყოველი წლის ბოლოს დაგროვებული თანხა, თუ დარიცხვა ხდება: ა) მარტივი პროცენტებით; ბ) რთული პროცენტებით.

ადვილი დასანახია, რომ მარტივი პროცენტების შემთხვევაში

$$S(1) = 2000(1+0,15) = 23000,$$
$$S(2) = 20000(1+0,3) = 26000,$$
$$S(3) = 20000(1+0,45) = 29000,$$
$$S(4) = 20000(1+0,6) = 32000.$$

რთული პროცენტების შემთხვევაში კი

$$S(1) = 2000(1+0,15) = 23000,$$

$$S(2) = 20000(1 + 0,15)^2 = 26450,$$
$$S(3) = 20000(1 + 0,15)^3 = 30417,5,$$
$$S(4) = 20000(1 + 1,15)^4 = 34980,12.$$

როგორც ვხედავთ, მეორე წლიდანვე წარმოიქმნება განსხვავება, რომელიც დროის ზრდასთან ერთად სულ უფრო მნიშვნელოვანი ხდება.

ამოცანები. 1. 100000 ლარი შეტანილია ბანკში წლიური 10%-ით 4 წლით. რა თანხა იქნება ანგარიშზე ყოველი წლის ბოლოს, თუ დაგროვება ხდება: ა) მარტივი პროცენტებით; ბ) რთული პროცენტებით?

2. 50000 ლარი შეტანილია ბანკში 4 წლით: ა) წლიური მარტივი 15%-ით; ბ) წლიური რთული 12%-ით. რა თანხა იქნება ანგარიშზე ყოველი წლის ბოლოს?

3. 10000 ლარი შეტანილია ბანკში წლიური რთული 20%-ით 4 წლით. რა მარტივი პროცენტით უნდა იყოს ის შეტანილი, რომ საბოლოოდ დაგროვებული თანხა იყოს იგივე?

4. 20000 ლარი შეტანილია ბანკში წლიური მარტივი 20%-ით 8 წლით. რა რთული პროცენტი უნდა იყოს ის შეტანილი, რომ საბოლოოდ თანხა იყოს იგივე?

§ 2. ნებისმიერი ინტერვალი და ცვლადი საპროცენტო განაკვეთები

წინა პარაგრაფში მიღებული ფორმულა (1.1) აღწერს რთული პროცენტებით თანხის დაგროვებას დროის ინტერვალების მთელი რაოდენობებისათვის და ანალოგიურია წინა თავში გამოყვანილი (1.1) ფორმულის. ცხადია, რომ ამ ფორმულის განზოგადება შესაძლებელია დროის ნებისმიერი არაუარყოფითი ინტერვალისათვის და მაშინ

$$S(t) = S(t_0)(1 + r)^{t-t_0}, \qquad t \geq t_0. \tag{2.1}$$

თუ ამ ფორმულაში $t = t_0 + T$ და $t \geq 0$, მაშინ მივიღებთ წინა თავის (1.2) ფორმულის ანალოგს

$$S(t_0 + T) = S(t_0)(1 + r)^T, \qquad T \geq 0.$$

შესაბამისად დაგროვების $A(t_0, t)$ კოეფიციენტისათვის მიიღება ფორმულა

$$A(t_0, t) = (1 + r)^{t - t_0}, \qquad t \geq t_0.$$

(ცხადია, რომ ნებისმიერი r-თვის $A(t_0, t_0) = 1$.

შენიშვნა. დაგროვების კოეფიციენტების მნიშვნელობების გამოთვლა დროის მთელი ინტერვალისათვის შესაძლებელია მარტივი კალკულატორით. ამ წიგნის ბოლოში მოყვანილია ცხრილი, რომელშიც ზოგიერთი r და n-თვის კოეფიციენტის მნიშვნელობები ამოწერილია საკმაო სიზუსტით.

ვთქვათ (t_0, t_1) და (t_1, t_2) დროის ინტერვალებში ხდება კაპიტალის დაგროვება r რთული პროცენტით. მაშინ ცხადია, რომ

$$A(t_0, t_1) = (1 + r)^{t_1 - t_0}, \qquad A(t_1, t_2) = (1 + r)^{t_2 - t_1}.$$

ამავე დროს

$$S(t_0, t_1) = S(t_0)(1 + r)^{t_1 - t_0},$$
$$S(t_1, t_2) = S(t_1)(1 + r)^{t_2 - t_1} = S(t_0)(1 + r)^{t_2 - t_0}.$$

მაშასადამე $A(t_0, t_2) = (1 + r)^{t_2 - t_0} = A(t_0, t_1) \cdot A(t_1, t_2)$.

ადვილი დასანახია, რომ თუ განვიხილავთ კაპიტალის დაგროვებას (t_0, t_1), $(t_1, t_2), \ldots, (t_{m-1}, t_m)$ მონაკვეთებში და მთლიან (t_0, t_m) მონაკვეთში, მაშინ

$$\begin{aligned} A(t_0, t_m) &= (1 + r)^{t_m - t_0} \cdot (1 + r)^{t_2 - t_1} \cdots (1 + r)^{t_m - t_{m-1}} = \\ &= A(t_0, t_1) \cdot A(t_1, t_2) \cdot A(t_2, t_3) \cdots A(t_{m-1}, t_m). \end{aligned} \tag{2.2}$$

მიღებული ფორმულა (2.2) ასახავს ე.წ. ბაზრის სტაბილურობის პრინციპს (თუმცა უნდა აღინიშნოს, რომ ეს ფორმულა ჩვენ გამოვიყვანეთ ე.წ. იდეალურ პირობებში, როცა არ ვითვალისწინებდით გადასახადების, ინფლაციის და სხვა გარემოებათა გავლენას).

ხშირად დარიცხვის ანუ საკონვერსიო პერიოდი 1 წელიწადზე ნაკლებია, ამასთან წელიწადში ხდება რამდენიმე დარიცხვა. ყველაზე ხშირად გვხვდება: ყოველთვიური, ყოველკვარტალური დარიცხვები. ქვემოთ ცხრილში მოყვანილია გავრცელებული პერიოდები და მათი შესაბამისი დარიცხვების რაოდენობები წელიწადში:

დარიცხვის პერიოდი	1 დღე	1 კვ.	1 თვე	1 კვარტ.	4 თვე	6 თვე	12 თვე
დარიცხვათა რაოდენობა	365	52	12	4	3	2	1

ვთქვათ წლის განმავლობაში ხდება m-ჯერ დარიცხვა რთული r_m პროცენტით. მაშინ n წლის განმავლობაში დარიცხვა მოხდება mn-ჯერ და დაგროვების კოეფიციენტი $A(0,n)$ ტოლია

$$A(0,n) = (1+r_m)^{mn}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

საზოგადოდ, კი (t_0, t_0+T) ინტერვალზე დაგროვების კოეფიციენტი ტოლია

$$A(t_0, t_0+T) = (1+r_m)^{mT}, \qquad T \geq 0, \tag{2.3}$$

სადაც T დრო იზომება წლებში (მაგალითად, თუ $T = 2$ თვე, მაშინ $T = \frac{1}{6}$; თუ $T = 18$ თვე, მაშინ $T = 1,5, \dots$).

მაგალითი 1. ვთქვათ ბანკში შეტანილია $S(0) = 10000$ ლარი 4 წლით წლიური რთული 50%-ის დარიცხვით. აღვწეროთ კაპიტალის ზრდა წლების მიხედვით.

ცხადია, უნდა გამოვიყენოთ ფორმულა $S(n) = S(0)(1+0,5)^n$. მივიღებთ შემდეგ მიმდევრობას:

$$S(0) = 10000, \quad S(1) = 15000, \quad S(2) = 22500,$$
$$S(3) = 33750, \quad S(4) = 50625.$$

მაგალითი 2. ვთქვათ ბანკში შეტანილია $S(0) = 10000$ ლარი 4 წლით ყოველ ნახევარ წელიწადში 20%-ის დარიცხვით. აღვწეროთ კაპიტალის ზრდა წლების მიხედვით.

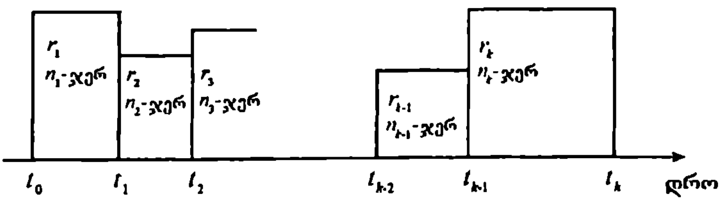
ამ შემთხვევაში უნდა გამოვიყენოთ ფორმულა $S(n) = S(0)(1 + r)^{mn}$, სადაც $m = 2$ და $r = 0,2$, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} &S(0) = 10000, \quad S(1) = 10000(1+0,2)^2 = 14400, \\ &S(2) = 10000(1+0,2)^4 = 20736, \\ &S(3) = 10000(1+0,2)^6 = 29860, \\ &S(4) = 10000(1+0,2)^8 = 42998. \end{aligned}$$

მარტივი პროცენტების შესწავლისას ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ ფინანსური ოპერაციის მიმდინარეობის პროცესში შესაძლებელია მოხდეს საპროცენტო განაკვეთების ცვლილებები. მაშინ გაანგარიშებები ცხადია შეიცვლება. თუ საანგარიშო პერიოდში n_1-ჯერ დარიცხვა მოხდა r_1 პროცენტით, n_2-ჯერ მოხდა r_2 პროცენტით, $\ldots, n_k$-ჯერ r_k პროცენტია, მაშინ გასაგებია, რომ დაგროვების კოეფიციენტი ტოლი იქნება ნამრავლის

$$(1 + r_1)^{n_1} \cdot (1 + r_2)^{n_2} \cdots (1 + r_k)^{n_k}.$$

თუ (t_0, t_k) ინტერვალში საპროცენტო განაკვეთის ცვლილება მოხდა $(k-1)$-ჯერ $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$ მომენტებში და შესაბამისად ისინი ტოლი იყო $r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}$-ის, ხოლო თითოეული (t_{s+1}, t_s) ინტერვალის შიგნით დარიცხვა მოხდა n_s-ჯერ, მაშინ მთელი დაგროვების პროცესი ნახაზზე შეიძლება შემდეგნაირად გამოვსახოთ:



მთლიანად დაგროვების კოეფიციენტი $A(t_0, t_m)$ მონაკვეთზე ტოლი იქნება თითოეულ ინტერვალზე დაგროვების კოეფიციენტების ნამ-

რაულის, ე.ი.

$$A(t_0, t_k) = \prod_{i=1}^{k}(1 + r_i)^{n_i}. \qquad (2.4)$$

(2.4) ფორმულა წარმოადგენს წინა თავში გამოყვანილი (3.1) ფორმულის ანალოგს რთული პროცენტებისათვის.

მაგალითი 3. მეწარმემ მიიღო კრედიტი ბანკისაგან 10000 ლარის ოდენობით 5 წლით შემდეგი პირობებით: საბაზო საპროცენტო განაკვეთია წლიური 12%. ამის გარდა ბანკი მომსახურეობისათვის დამატებით ითხოვს კიდევ პირველი ორი წლის განმავლობაში 0,5% წლიურს და დანარჩენი წლების განმავლობაში კი 0,75% წლიურს. (ამ დანამატს მარჟას უწოდებენ). რა თანხა უნდა დააბრუნოს მეწარმემ?

თუ გამოვიყენებთ (2.4) ფორმულას, მივიღებთ:

$$S(5) = A(0,5) \cdot S(0) = 10000(1 + 0,125)^2 \cdot (1 + 0,1275)^3 =$$
$$= 18141 \text{ ლარი.}$$

მაგალითი 4. მეწარმემ მიიღო კრედიტი ბანკისაგან 20000 ლარის ოდენობით 2 წლით შემდეგი პირობებით: პირველ წელს კვარტალური საპროცენტო განაკვეთია 30% და მარჟა 2% კვარტალში. მეორე წელს კი ნახევარწლიური საპროცენტო განაკვეთია 40% და მარჟა 3% ნახევარწელიწადში. რა თანხა უნდა დააბრუნოს მეწარმემ?

თუ გამოვიყენებთ (2.4) ფორმულას, მივიღებთ:

$$S(6) = A(0,6)S(0) = 20000(1 + 0,32)^4(1 + 0,43)^2 = 124164 \text{ ლარი.}$$

ამოცანები. 1. 8000 ლარი კრედიტი გაცემულია 3 წლით ყოველთვიურად 2%-ის დარიცხვით. რა თანხა იქნება დასაბრუნებელი?

2. 2000 ლარი შეტანილია ბანკში 4 წლით ყოველკვარტალურად 6%-ის დარიცხვით. რა თანხა დაგროვდება წლების მიხედვით?

3. 10000 ლარი შეტანილია ბანკში 2 წლით შემდეგი პირობებით: პირველ წელს ყოველთვიური 2%-ის დარიცხვით, ხოლო მეორე წელს კი ყოველკვარტალური 5%-ის დარიცხვით. რა თანხა დაგროვდება წლების მიხედვით?

4. 20000 ლარი კრედიტი გაცემულია 3 წლით შემდეგი პირობით: პირველ წელს ყოველთვიური 2%-ის დარიცხვით, მეორე წელს ყოველკვარტალური 6%-ის დარიცხვით, მესამე წელს ყოველ ნახევარ წელიწადში 15%-ის დარიცხვით. აღწერეთ ვალის ზრდა წლების მიხედვით.

5. 50000 ლარის ოდენობის კრედიტი გაცემულია 6 წლის ვადით შემდეგი პირობებით: საბაზო წლიური საპროცენტო განაკვეთია 10%. პირველ ორ წელს ბანკი არ ითხოვს მარჟას, შემდეგ ორ წელს მარჟა წლიურ 1%-ს შეადგენს, შემდეგ ორ წელს კი წლიურ 2%-ს. აღწერეთ ვალის ზრდა წლების მიხედვით.

6. 100000 ლარის ოდენობის კრედიტი გაცემულია 10 წლის ვადით შემდეგი პირობებით: პირველ ორ წელს წლიური საპროცენტო განაკვეთია 6%, შემდეგ ყოველ წელს წლიური განაკვეთი იზრდება 1%-ით, ამასთან ბოლო სამი წლის განმავლობაში ბანკი ითხოვს მარჟას წლიური $0,5\%$-ის ოდენობით. აღწერეთ ვალის ზრდა წლების მიხედვით.

§ 3. მარტივი და რთული პროცენტების შედარება

ვთქვათ 1000 ლარი შეტანილია ბანკში წლიური 10%-ით. შევადაროთ ერთმანეთს კაპიტალის ზრდა მარტივი და რთული პროცენტებით დარიცხვისას.

მარტივი პროცენტებით დარიცხვისას

$$S(0) = 1000, \quad S(1) = 1100, \quad S(2) = 1200,$$

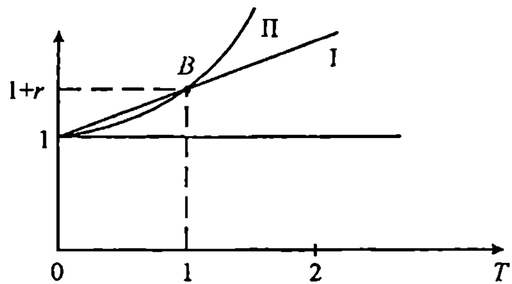
$$S(3) = 1300, \quad S(4) = 1400, \quad S(5) = 1500,$$
$$S(6) = 1600, \quad S(7) = 1700, \quad S(8) = 1800,$$
$$S(9) = 1900, \quad S(10) = 2000, \ldots$$

რთული პროცენტებით დარიცხვისას

$$S(0) = 1000, \quad S(1) = 1100, \quad S(2) = 1210,$$
$$S(3) = 1331, \quad S(4) = 1464, \quad S(5) = 1611,$$
$$S(6) = 1772, \quad S(7) = 1949, \quad S(8) = 2144,$$
$$S(9) = 235, \quad S(10) = 2594, \ldots .$$

როგორც ვხედავთ, ორივე შემთხვევაში $S(1) = 1100$. ამის შემდეგ რთული პროცენტებით დაგროვებული თანხა უფრო მეტია და ამასთან ეს განსხვავება თანდათან მატულობს. ასე მაგალითად, მარტივი პროცენტებით დარიცხვისას $S(50) = 6000$, $S(100) = 11000$, ხოლო რთული პროცენტებით დარიცხვისას $S(50) = 117390$, $S(100) = 13781000$.

ზოგადად, თუ ავაგებთ დაგროვების $A(0, T)$ კოეფიციენტების გრაფიკებს მარტივი და რთული პროცენტების შემთხვევაში, მივიღებთ შემდეგ სურათს:



აქ I გრაფიკი არის $1 + rT$ ფუნქციის გრაფიკი, ხოლო II გრაფიკი კი $(1 + r)^T$ ფუნქციის გრაფიკი. ეს ორი გრაფიკი იკვეთება A და B წერტილებში, რომელთა კოორდინატებია შესაბამისად $(0; 1)$ და $(0; 1 + r)$. როცა $0 < T < 1$, მაშინ $1 + rT > (1 + r)^T$ და I გრაფიკის წერტილები უფრო მაღლაა, ხოლო როცა $T > 1$, მაშინ

პირიქით $1 + rT < (1+r)^T$ და II გრაფიკის წერტილებია უფრო მაღლა.

დავუბრუნდეთ პარაგრაფის დასაწყისში მოყვანილ მაგალითს. მარტივი პროცენტების შემთხვევაში $S(10) = 2000 = 2S(0)$, ე.ი. 10 წელიწადში საწყისი კაპიტალი გაორმაგდება. რთული პროცენტების შემთხვევაში კი $S(8) = 2144 > 2S(0)$ და კაპიტალის გასაორმაგებლად 8 წელიც არ აღმოჩნდა საჭირო.

გაორმაგების (გაორკეცების) პერიოდი T_2 ვუწოდოთ დროის იმ მონაკვეთს, რომლის განმავლობაშიც ხდება საწყისი კაპიტალის გაორკეცება.

ადვილი დასანახია, რომ

$$S(0)(1 + rT) = 2S(0), \qquad S(0)(1+r)^T = 2S(0)$$

ტოლობიდან მიიღება:

ა) მარტივი პროცენტების შემთხვევაში

$$T_2 = \frac{1}{r}\,;$$

ბ) რთული პროცენტების შემთხვევაში

$$T_2 = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)}\,.$$

ქვემოთ ცხრილში მოყვანილია ზოგიერთი r-თვის ეს მაჩვენებლები:

i	0,05	0,1	0,2	0,4	0,5	1
T_2 მარტივი	20	10	5	2,5	2	1
T_2 რთული	14,2	7,3	3,9	2,1	1,7	1

წინა პარაგრაფში ჩვენ ვნახეთ, თუ როგორ ხდება დარიცხვა, როცა დარიცხვის პერიოდი არ ემთხვევა ერთ წელიწადს, მაგრამ ვთვლიდით, რომ დარიცხვები ხდებოდა წელიწადში რამდენჯერმე (მთელ რიცხვჯერ). მაგრამ შესაძლოა საინვესტიციო პერიოდი T არ იყოს მთელი რიცხვი (მაგალითად: დარიცხვა ხდებოდეს ყოველწლიურად და $T = 1,3$; დარიცხვა ხდებოდეს ყოველთვიურად და $T = 35$ დღე).

როგორ შეიძლება ანგარიში ამ შემთხვევაში?

აქ განიხილება ორი განსხვავებული ვარიანტი:

ა) დარიცხვა მოხდეს ზოგადი ფორმულის საფუძველზე:

$$S(T) = S(t_0)(1+r)^T; \tag{3.1}$$

ბ) T დაიშალოს მთელ და წილად ნაწილებად: $T = [T] + \{T\}$, სადაც $[T]$ არის T რიცხვის მთელი ნაწილი (ანუ უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება T-ს), ხოლო $\{T\} = T - [T]$. მაგალითად: თუ $T = 3,7$, მაშინ $[T] = 3$ და $\{T\} = 0,7$. მას შემდეგ, რაც T დაშლილია, დაგროვება იანგარიშება შემდეგი ფორმულით:

$$S(T) = S(t_0)(1+r)^{[T]}(1 + r\{T\}). \tag{3.2}$$

(3.2) ფორმულის შინაარსი შემდეგია: T დროის მთელი ნაწილის განმავლობაში დარიცხვა ხდება რთული პროცენტებით, ხოლო დანარჩენ ნაწილში კი მარტივი პროცენტებით. რა განსხვავება შეიძლება მივიღოთ (3.1) და (3.2) ფორმულით დათვლისას?

მაგალითი 1. კლიენტმა ბანკისაგან მიიღო 20000 ლარის კრედიტი 27 თვით წლიური 16%-ის დარიცხვით: ა) წლის ბოლოს; ბ) ყოველკვარტალურად 4%-ის დარიცხვით; რა თანხა ექნებოდა დასაბრუნებელი კლიენტს?

დავითვალოთ ჯერ ყოველკვარტალური დარიცხვის შემთხვევაში დასაბრუნებელი თანხა. აქ $r = 0,04$ და დარიცხვების რაოდენობა მთელია – უდრის 9-ს. მაშინ

$$S(27\,\text{თვე}) = 20000(1+0,4)^9 = 28500\,\text{ლარი}.$$

თუ ვიხილავთ ა) ვარიანტს, მაშინ დარიცხვის გაანგარიშება შეიძლება მოხდეს ორნაირად:

1. ზოგადი ფორმულით, მაშინ

$$S(27\,\text{თვე}) = S(2,25) = 20000(1+0,16)^{2,25} = 27930\,\text{ლარი};$$

2. შერეული ფორმულით მაშინ $2,25 = 2 + 0,25$ და

$$S(27\,\text{თვე}) = 20000(1+0,16)^2 \cdot (1 + 0,16 \cdot 0,25) = 27990\,\text{ლარი}.$$

შენიშვნა. თუ $\{T\} \neq 0$ მაშინ ცხადია, რომ შერეული ფორმულით მიღებული თანხა ყოველთვის მეტი იქნება.

ამოცანები. 1. ანგარიში გახსნილია წლიური 15%-ით. რა პერიოდში გაორმაგდება, გასამმაგდება თანხა რთული და მარტივი პროცენტების შემთხვევაში?

2. ბანკში შეტანისას კლიენტს უნდა თანხა გაორკეცდეს 5 წელიწადში. რა პროცენტით უნდა იყოს თანხა შეტანილი მარტივი და რთული პროცენტების შემთხვევაში ამისათვის?

3. 40000 ლარის კრედიტი გაცემულია 2,5 წლით წლიური 120%-ით. იპოვეთ დაგროვებული ვალის რაოდენობა მარტივი და რთული პროცენტების შემთხვევაში (სხვადასხვა წესებით).

4. 18000 ლარის ოდენობის კრედიტი გაცემულია 33 თვით წლიური 20%-ის დარიცხვით. იპოვეთ დაგროვებული ვალის რაოდენობა დარიცხვის სხვადასხვა შემთხვევაში: ა) წლიური; ბ) ყოველ ნახევარ წელიწადში 10%; გ) ყოველკვარტალური 5% (სხვადასხვა წესებით).

§ 4. ნომინალური და ეფექტური საპროცენტო განაკვეთები

თანამედროვე პირობებში პროცენტების კაპიტალიზაცია უფრო ხშირად ხდება, ვიდრე წელიწადში ერთჯერ. უფრო გავრცელებულია ისეთი სიტუაცია, რომელიც ჩვენ უკვე განვიხილეთ (2.3) ფორმულის გამოყვანისას – როცა პროცენტების დარიცხვა ხდება წელიწადში 2-ჯერ, 3-ჯერ, 4-ჯერ, 12-ჯერ, 52-ჯერ. თუმცა დარიცხვა შესაძლოა ყოველთვიურად (წელიწადში 12-ჯერ) ან თუნდაც ყოველდღიურად ხდებოდეს (წელიწადში 365-ჯერ), მაგრამ ფინანსურ გარიგებებში, როგორც წესი, მითითებულია წლიური განაკვეთი და დარიცხვების პერიოდების რაოდენობა.

თუ მითითებული გვაქვს წლიური განაკვეთი და დარიცხვების რაოდენობა, მაშინ ამბობენ, რომ მითითებულია ნომინალური წლიური

განაკვეთი $r^{(m)}$ (m – დარიცხვების რაოდენობაა). მაშინ ერთი პერიოდის განმავლობაში დარიცხვა ხდება $\frac{r^{(m)}}{m}$ პროცენტით. მაგალითად: თუ ნომინალური წლიური განაკვეთია 18% და დარიცხვა ხდება ყოველთვიურად, მაშინ თვეში იგულისხმება 1,5%-ის დარიცხვა. თუ T არის ფინანსური ოპერაციის მიმდინარეობის ხანგრძლივობა წლებში, მაშინ დარიცხვების რაოდენობაა mT და დაგროვებული თანხა გამოითვლება ფორმულით

$$S(t_0+T)=S(t_0)\Big(1+\frac{r^{(m)}}{m}\Big)^{mT} \tag{4.1}$$

ხოლო დაგროვების კოეფიციენტი კი ფორმულით

$$A(t_0,t_0+T)=\Big(1+\frac{r^{(m)}}{m}\Big)^{mT} \tag{4.2}$$

მაგალითი 1. 10000 ლარი შეტანილია ბანკში ნომინალური წლიური 60%-ით 3 წლის ვადით. ვიპოვოთ დაგროვებული თანხა, თუ დარიცხვა ხდება: ა) წელიწადში ერთჯერ; ბ) ყოველ ნახევარ წელიწადში; გ) ყოველ კვარტალში; დ) ყოველ თვეში.

თუ დარიცხვა ხდება წელიწადში ერთჯერ, მაშინ (4.1) ფორმულიდან დაგროვებული თანხაა

$$S(3)=10000(1+0,6)^3=40960 \text{ ლარი.}$$

თუ დარიცხვა ხდება წელიწადში 2-ჯერ, მაშინ დაგროვებული თანხაა

$$S(6)=10000(1+0,3)^6=48268 \text{ ლარი.}$$

თუ დარიცხვა ხდება ყოველკვარტალურად, მაშინ დაგროვებული თანხაა

$$S(12)=10000(1+0,15)^{12}=53503 \text{ ლარი.}$$

თუ დარიცხვა ხდება ყოველთვიურად, მაშინ დაგროვებული თანხაა

$$S(36)=10000(1+0,05)^{36}=57918 \text{ ლარი.}$$

როგორც ვხედავთ, რაც უფრო ხშირად ხდება დარიცხვები, მით უფრო სწრაფად იზრდება დაგროვებული თანხა (რაც მოსალოდნელი იყო, ამ დროს პროცენტების კაპიტალიზაცია უფრო სწრაფი ტემპით მიმდინარეობს).

ამრიგად, თუ ნომინალური წლიური განაკვეთი ვიცით, შესაძლოა ამით სრული ინფორმაცია დაგროვების შესახებ ვერ მივიღოთ – საჭიროა აგრეთვე დარიცხვების რაოდენობა წელიწადში.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: მოცემული გვაქვს ნომინალური წლიური განაკვეთი $r^{(m)}$ და წელიწადში დარიცხვების რაოდენობა m, რას უდრის წლიური საპროცენტო განაკვეთი, რომ ერთჯერ დარიცხვით მიღებული თანხა დაემთხვეს $r^{(m)}$ განაკვეთით m-ჯერ დარიცხულ თანხას?

ამისათვის გამოვითვალოთ $S(0)$ თანხიდან ნომინალური წლიური $r^{(m)}$ განაკვეთით m-ჯერადი დარიცხვის შედეგად დაგროვებული თანხა (4.1) ფორმულით:

$$S(1) = S(0)\Big(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\Big)^m$$

მეორეს მხრივ, თუ იგივე თანხა უნდა დაგროვდეს რაღაც x პროცენტით ერთჯერ დარიცხვის შედეგად, მაშინ

$$S(1) = S(0)(1 + x).$$

მაშასადამე, მიიღება განტოლება

$$1 + x = \Big(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\Big)^m$$

რომლის ამონახსნია

$$x = r_{ეფ} = \Big(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\Big)^m - 1.$$

ამ სიდიდეს ეწოდება $r^{(m)}$ ნომინალური წლიური განაკვეთის შესაბამისი ეფექტური წლიური განაკვეთი.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ ეფექტური წლიური განაკვეთი, თუ ნომინალური წლიური განაკვეთია 36% და დარიცხვა ხდება: ა) წელიწადში 2-ჯერ; ბ) წელიწადში 4-ჯერ; გ) წელიწადში 12-ჯერ.

თუ დარიცხვა ხდება წელიწადში 2-ჯერ, მაშინ

$$r_{ეფ} = (1 + 0,18)^2 - 1 = 0,3924;$$

თუ დარიცხვა ხდება წელიწადში 4-ჯერ, მაშინ

$$r_{ეფ} = (1 + 0,09)^4 - 1 = 0,4116;$$

თუ დარიცხვა ხდება წელიწადში 12-ჯერ, მაშინ

$$r_{ეფ} = (1 + 0,03)^{12} - 1 = 0,4258.$$

შენიშვნა. პრაქტიკული გამოთვლებისას ამერიკის ბანკებში პირდაპირ იყენებენ (4.1) ფორმულას, ხოლო ევროპაში კი, როგორც წესი, ჯერ ითვლიან ეფექტურ განაკვეთს და შემდეგ კი იყენებენ ფორმულას

$$S(t_0 + T) = S(t_0)(1 + r_{ეფ})^T$$

თუ გარიგების პირობებში დაფიქსირებულია $r_{ეფ}$ ეფექტური განაკვეთი და დარიცხვების m რაოდენობა, მაშინ შესაბამისი ნომინალური წლიური განაკვეთის გამოთვლა შეიძლება ფორმულით:

$$r^{(m)} = m\left[(1 + r_{ეფ})^{1/m} - 1\right].$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ ნომინალური წლიური განაკვეთი, თუ $r_{ეფ} = 60\%$ და დარიცხვა ხდება: ა) წელიწადში 2-ჯერ; ბ) წელიწადში 4-ჯერ.

თუ დარიცხვა ორჯერ ხდება, მაშინ ნომინალური წლიური განაკვეთია

$$r^{(2)} = 2\left[\sqrt{1 + 0,6} - 1\right] = 0,53,$$

ხოლო თუ დარიცხვა ოთხჯერ ხდება, მაშინ ნომინალური წლიური განაკვეთია

$$r^{(4)} = 4\left[\sqrt[4]{1 + 0,6} - 1\right] = 0,5.$$

თუ ორი განსხვავებული ნომინალური წლიური განაკვეთი $r^{(m)}$ და $r^{(n)}$ განსაზღვრავს ერთიდაიგივე ეფექტურ განაკვეთს, ანუ სამართლიანია ტოლობა

$$\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^{m}=\left(1+\frac{r^{(n)}}{n}\right)^{n}$$

მაშინ ამბობენ, რომ $r^{(m)}$ და $r^{(n)}$ **ექვივალენტურია.**

მაგალითი 4. ვიპოვოთ 36%-იანი ყოველთვიური დარიცხვითი წლიური ნომინალური განაკვეთის ექვივალენტური წლიური ნომინალური განაკვეთი ყოველკვარტალური დარიცხვით.

ვიპოვოთ ჯერ შესაბამისი წლიური ეფექტური განაკვეთი

$$r_{ეფ}=(1+0,03)^{12}-1=0,4258.$$

მაშინ შესაბამისი წლიური ნომინალური განაკვეთი ყოველკვარტალური დარიცხვით ტოლია

$$r^{(4)}=4(\sqrt[4]{1,4258}-1)\approx,371=37,1\%.$$

ამოცანები. 1. 100000 ლარი შეტანილია ბანკში ნომინალური წლიური 120%-იანი განაკვეთით. რა თანხა დაგროვდება ანგარიშზე 2 წლის შემდეგ, თუ დარიცხვა ხდება: ა) წელიწადში ერთჯერ; ბ) წელიწადში 2-ჯერ; გ) წელიწადში ოთხჯერ; დ) ყოველთვიურად; ე) ყოველკვირეულად?

2. მეწარმეს შეუძლია კრედიტის აღება ორ ბანკში. ერთი ბანკი მას სთავაზობს კრედიტს ნომინალური წლიური 26% განაკვეთით ყოველთვიური დარიცხვით, ხოლო მეორე ბანკი კი – კრედიტს ნომინალური წლიური 27% განაკვეთით ორჯერადი დარიცხვით წელიწადში. რომელი ვარიანტი უნდა აირჩიოს მეწარმემ?

3. იპოვეთ ნომინალური წლიური საპროცენტო განაკვეთი, თუ ეფექტური განაკვეთია 72% და დარიცხვა ხდება: ა) წელიწადში 2-ჯერ; ბ) ყოველთვიურად.

4. წლიური ეფექტური საპროცენტო განაკვეთია 40%. იპოვეთ მისი შესაბამისი ექვივალენტური ნომინალური წლიური განაკვეთები ყოველკვარტალური და ყოველთვიური დარიცხვით.

§ 5. ფულის თანამედროვე ღირებულება

ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ ისეთივე ამოცანებს, რომლებიც შევისწავლეთ წინა თავის §6-ში.

ვთქვათ გვაინტერესებს, თუ რა $S(0)$ ინვესტიცია უნდა გავაკეთოთ იმისათვის, რომ დროის T პერიოდის შემდეგ დაგროვდეს სასურველი $S(T)$ თანხა. ამ დროს $S(0)$-ს ეწოდება $S(T)$ თანხის თანამედროვე ანუ დაყვანილი ღირებულება (present value), ხოლო

$$S(T) - S(0) = D(T)$$

სხვაობას კი – რთული დისკონტი.

ადვილი გამოსაყვანია დაყვანილი ღირებულების გამოსათვლელი ფორმულები:

ა) თუ მოცემულია $S(T)$ და წლიური საპროცენტო განაკვეთი r, მაშინ

$$S(0) = \frac{S(T)}{(1+r)^T}, \qquad T > 0; \tag{5.1}$$

ბ) თუ მოცემულია $S(T)$ და წლიური ნომინალური საპროცენტო განაკვეთი $r^{(m)}$ m-ჯერადი დარიცხვით, მაშინ

$$S(0) = \frac{S(T)}{\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{mT}}, \qquad T > 0. \tag{5.2}$$

(5.1) და (5.2) ფორმულები აკავშირებს ერთმანეთთან ფულადი თანხის თანამედროვე $S(0)$ და მომავალ $S(T)$ ღირებულებას. თუ მხედველობაში არ ვიღებთ დამატებით ფაქტორებს (მაგალითად: ინფლაცია, გადასახადები, ...), მაშინ ეს ორი თანხა გარკვეული აზრით შეიძლება ექვივალენტურად ჩავთვალოთ: მართლაც დღეს $S(0)$ თანხის

გადახდა იქნება ტოლფასი T დროის შემდეგ $S(T)$ თანხის გადახდის.

მაგალითი 1. რა თანხის ინვესტირებით შეიძლება მივიღოთ 40000 ლარი 3 წლის შემდეგ წლიური რთული 24%-ით, თუ დარიცხვა ხდება: ა) წელიწადში ერთჯერ; ბ) წელიწადში 2-ჯერ; გ) წელიწადში 4-ჯერ; დ) ყოველთვიურად?

40000 ლარის თანამედროვე ღირებულების გამოსათვლელად უნდა გამოვიყენოთ (5.1) და (5.2) ფორმულები.

ა) თუ დარიცხვა ხდება წელიწადში ერთჯერ, მაშინ

$$S(0)=\frac{40000}{(1+0,24)^3}=20979 \text{ ლარი};$$

ბ) თუ დარიცხვა ხდება წელიწადში ორჯერ, მაშინ

$$S(0)=\frac{40000}{(1+0,12)^6}=20265 \text{ ლარი};$$

გ) თუ დარიცხვა ხდება წელიწადში 4-ჯერ, მაშინ

$$S(0)=\frac{40000}{(1+0,06)^{12}}=19879 \text{ ლარი};$$

დ) თუ დარიცხვა ხდება წელიწადში 12-ჯერ, მაშინ

$$S(0)=\frac{40000}{(1+0,02)^{36}}=19609 \text{ ლარი}.$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ერთიდაიგივე ფულად თანხას სხვადასხვა დროს სხვადასხვა ღირებულება აქვს, ისევე როგორც სხვადასხვა თანხას სხვადასხვა მომენტში შესაძლოა ერთიდაიგივე ღირებულება ჰქონდეს. როგორ შევადაროთ, მაგალითად, 1000 ლარი 1998 წლის 1 იანვარს და 4000 ლარი 2004 წლის 10 მარტს?

მსგავსი ამოცანის გადაწყვეტის ერთ-ერთი მეთოდია ორივე მოცემული ფულადი თანხის დაყვანა დროის ერთიდაიგივე მომენტზე. მაგალითად: ვთქვათ დღეს (ანუ დროის t_0 მომენტში) შემოგვთავაზეს ან დროის t_1 მომენტში C_1 თანხის გადახადა, ან დროის t_2 მომენტში C_2 თანხის გადახდა. თუ ამ პერიოდებში საპროცენტო განაკვეთი r-ის

ტოლია, მაშინ დროის t_0 მომენტში C_1 და C_2 თანხის ღირებულებები ტოლია შესაბამისად

$$S_1(t_0) = C_1(1+r)^{t_0-t_1}, \qquad S_2(t_0) = C_2(1+r)^{t_0-t_2}.$$

რადგან S_1 და S_2 ერთიდაიგივე დროის მომენტს განეკუთვნება, მათი შედარება უკვე ადვილია.

ვაჩვენოთ, რომ თუ დროის რომელიღაც t_0 მომენტისათვის $S_1(t_0) > S_2(t_0)$, მაშინ ეს უტოლობა შენარჩუნდება ნებისმიერი t-სთვის. მართლაც, ვთქვათ $S_1(t_0) > S_2(t_0)$, ე.ი. $C_1(1+r)^{t_0-t_1} > C_2(1+r)^{t_0-t_2} \Rightarrow C_1(1+r)^{t_2-t_1} > C_2$.

ადვილი დასანახია, რომ

$$S_1(t) = C_1(1+r)^{t-t_1} = C_1(1+r)^{t_2-t_1} \cdot (1+r)^{t-t_2} >$$
$$> C_2(1+r)^{t-t_2} = S_2(t).$$

მაგალითი 2. რა უფრო მომგებიანია: მივიღოთ 3 წლის შემდეგ 28000 ლარი, თუ 4 წლის შემდეგ 29000 ლარი, თუ წლიური საპროცენტო განაკვეთია 10%?

თუ გამოვითვლით ორივე შემთხვევაში თანამედროვე ღირებულებას, მივიღებთ

$$S_1(0) = \frac{28000}{(1+0,1)^3} = 21040 \text{ ლარი};$$
$$S_2(0) = \frac{29000}{(1+0,1)^4} = 19810 \text{ ლარი}.$$

მაშინ დავასკვნით, რომ უფრო მომგებიანია სამი წლის შემდეგ 28000 ლარის მიღება (ამ დასკვნის გაკეთება მეორე მოსაზრებიდანაც შეიძლებოდა: თუ სამი წლის შემდეგ მივიღებდით 28000 ლარს და ერთი წლით შევიტანდით მას ბანკში 10%-ით, მაშინ 4 წლის შემდეგ გვექნებოდა 30800 ლარი, რაც ცხადია 29000-ზე მეტია).

ამოცანები. 1. იპოვეთ თანხის თანამედროვე ღირებულება, თუ 3 წლის შემდეგ ეს თანხა მოგვცემთ 70000 ლარს და ამასთან პროცენტების დარიცხვა ხდება შემდეგი წესით:

ა) წელიწადში ერთხელ 40%; ბ) ყოველკვარტალურად 20%; გ) ყოველთვიურად 6%; დ) 120% ნომინალური წლიური პროცენტი ყოველთვიური დარიცხვით.

2. იპოვეთ თანხის თანამედროვე ღირებულება, თუ 5 წლის შემდეგ ის შეადგენს 45000 ლარს და პროცენტების დარიცხვა ხდება შემდეგი წესით: ა) წელიწადში 120%; ბ) ყოველ ნახევარ წელიწადში 60%; გ) ყოველკვარტალურად 30%; დ) ყოველთვიურად 10%.

3. რა თანხა უნდა ჩაიდოს ბანკში იმისათვის, რომ ერთი წლის შემდეგ ანგარიშზე იყოს 75000 ლარი, თუ დარიცხვა ხდება შემდეგი წესით: ა) წლიური ნომინალური 30%-ით ყოველკვარტალური დარიცხვით; ბ) წლიური ნომინალური 90%-ით ყოველთვიური დარიცხვით?

4. 36000 ლარის ოდენობის ვალი გადასახდელია 2 წლის შემდეგ. იპოვეთ მისი ექვივალენტური ვალი: ა) 1 წლის შემდეგ; ბ) 3 წლის შემდეგ; გ) 5 წლის შემდეგ (საპროცენტო განაკვეთია წლიური 60%).

5. 14000 ლარის ოდენობის ვალი გადასახდელია 3 წლის შემდეგ წლიური 90%-ის დარიცხვის პირობებში. რა თანხა უნდა გადაიხადოთ: ა) დღესვე; ბ) 2 წლის შემდეგ; გ) 5 წლის შემდეგ?

§ 6. საბანკო დისკონტირება

საბანკო დისკონტირების პროცესი ადრე განვიხილეთ მარტივი პროცენტების შემთხვევაში. ახლა იგივე საკითხები შევისწავლოთ რთული პროცენტებისათვისაც.

თუ $S(0)$ თანხა ინვესტირებულია დროის T პერიოდში r რთული პროცენტით, მაშინ ვიცით, რომ დაგროვებული თანხა $S(T)$ გამოითვლება ფორმულით

$$S(T) = S(0)(1+r)^T,$$

ხოლო ნამატი ანუ პროცენტი ტოლია

$$I = S(T) - S(0) = S(0)[(1+r)^T - 1].$$

ვთქვათ საჭიროა პროცენტების წინასწარ გადახდა. რამდენი უნდა გადავიხადოთ?

შემოვიღოთ **რთული სააღრიცხვო განაკვეთი** d შემდეგი სახით: მისი სიდიდე ექვივალენტურია წლიური r საპროცენტო განაკვეთისა. ე.ი. თუ $S(1)$ გვაქვს მოცემული, მაშინ $S(0) = S(1)(1-d)$. ცხადია, რომ ადვილი გამოსაყვანია ტოლობა

$$(1-d)(1+r) = 1$$

(რადგან $S(1) = S(0)(1+r) = S(1)(1-d)(1+r)$).

ამიტომ ნებისმიერი t_0 და t_1-სათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$S(t_0) = S(t)(1-d)^{t-t_0}, \qquad d < 1. \tag{6.1}$$

(თუ გავიხსენებთ მარტივ პროცენტებს, მაშინ ტოლობა შემდეგი სახის იყო:

$$S(t_0) = S(t)[1-(t-t_0)d].)$$

მაგალითი 1. 10000 ლარის ოდენობის ვალი, რომლის გადახდის ვადა 5 წლის შემდეგ იყო, ბანკმა შეისყიდა წლიური სააღრიცხვო 15%-იანი დისკონტით. რა თანხა გადაიხადა ბანკმა, თუ: ა) პროცენტები იყო მარტივი; ბ) პროცენტები იყო რთული?

მარტივი პროცენტების შემთხვევაში უნდა გამოვიყენოთ ფორმულა

$$S(0) = S(5)(1 - d\cdot 5) = 10000(1-0,75) = 2500;$$

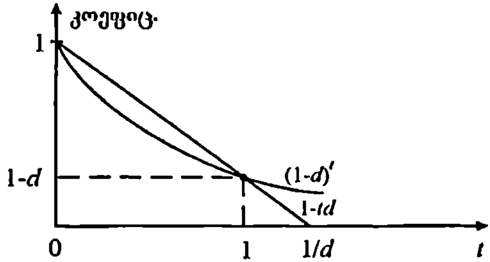
რთული პროცენტების შემთხვევაში კი – ფორმულა

$$S(0) = S(5)(1-0,15)^5 = 10000(1-0,15)^5 = 4437.$$

როგორც ვხედავთ, მარტივი პროცენტების შემთხვევაში დისკონტია 7500 ლარი, ხოლო რთული პროცენტების შემთხვევაში კი 5563 ლარი.

როგორც ვხედავთ დისკონტირებისას რთული პროცენტებით დისკონტი მოვალისათვის უფრო ხელსაყრელია. ეს ნათლად ჩანს, თუ შევადარებთ ერთმანეთს დისკონტირების კოეფიციენტების გრაფიკებს

და რთული პროცენტებისათვის. მარტივი პროცენტებისათვის ესაა $1 - td$, რთული პროცენტებისათვის კი $(1-d)^t$.



ამ გრაფიკიდან ჩანს რომ, თუ დროის მონაკვეთი ნაკლებია 1 წელიწადზე, მაშინ ბანკისათვის უფრო ხელსაყრელია დისკონტირება რთული პროცენტებით, ხოლო თუ დროის მონაკვეთი 1 წელიწადზე მეტია, მაშინ დისკონტირება მარტივი პროცენტებით (კლიენტისათვის პირიქით).

მაგალითი 2. 40000 ლარის ღირებულების თამასუქი, რომლის განაღდების ვადა 4 წლის შემდეგაა, ბანკმა გაანაღდა ვადამდე 2 წლით ადრე წლიური 12%-იანი დისკონტით. ვიპოვოთ დისკონტის სიდიდე: ა) მარტივი პროცენტების შემთხვევაში; ბ) რთული პროცენტების შემთხვევაში.

მარტივი პროცენტების შემთხვევაში

$$S(0) = 40000(1 - 0,12 \cdot 2) = 30400$$

და დისკონტია $D = 40000 - 30400 = 9600$ ლარი. რთული პროცენტების შემთხვევაში კი

$$S(0) = 40000(1 - 0,12)^2 = 30976$$

და დისკონტია $D = 9024$ ლარი.

თუ დროის მონაკვეთი T, რომლის განმავლობაშიც ხდება დისკონტირება, არაა მთელი რიცხვი, მაშინ დისკონტირების გამოთვლისას შეიძლება გამოვიყენოთ ორი ხერხი (ამის ანალოგი იხ. §3-ში):

ა) დისკონტირება მოვახდინოთ ზოგადი ფორმულით (6.1);

ბ) წარმოვადგინოთ $T = [T] + \{T\}$ და დისკონტირება მოვახდინოთ ფორმულით

$$S(0) = S(T)(1-d)^{[T]}(1-d\{T\}). \qquad (6.2)$$

მაგალითი 3. 60000 ლარის ოდენობის ვალი, რომლის გადახდის ვადა დგება 4 წლის შემდეგ, ბანკმა გამოისყიდა ვადის გასვლამდე 30 თვით ადრე წლიური რთული 20%-იანი დისკონტით. ვიპოვოთ დისკონტის სიდიდე ორივე წესით გამოთვლისას.

თუ დისკონტირება მოხდა ზოგადი ფორმულით, მაშინ

$$S(0) = 60000(1-0,2)^{2,5} = 34346$$

და დისკონტია $D = 25654$ ლარი.

თუ დისკონტირება მოხდა (6.2) ფორმულით, მაშინ

$$S(0) = 60000(1-0,2)^{2}(1-0,2\cdot 0,5) = 34560$$

და დისკონტია $D = 25440$ ლარი.

ამოცანები. 1. 50000 ლარის ვალი, რომლის გადახდის ვადა დგება 6 წლის შემდეგ, ბანკმა შეისყიდა ვადის გასვლამდე 4 წლით ადრე წლიური 15%-იანი დისკონტით. იპოვეთ დისკონტის რაოდენობა მარტივი და რთული დისკონტირებისას.

2. 20000 ლარის ვალი, რომლის გადახდის ვადა 4 წლის შემდეგაა, ბანკმა შეისყიდა ვადის გასვლამდე 2 წლით ადრე წლიური 10%-იანი დისკონტით. იპოვეთ დისკონტის რაოდენობა მარტივი და რთული დისკონტირებისას.

3. 80000 ოდენობის ვალი, რომლის გადახდის ვადა დგება 6 წლის შემდეგ, ბანკმა გამოისყიდა ვადის გასვლამდე: ა) 30 თვით ადრე; ბ) 42 თვით ადრე წლიური 10%-იანი დისკონტით. იპოვეთ დისკონტის სიდიდე ორივე წესით.

4. 100000 ლარის ოდენობის კრედიტი აღებულია 5 წლის ვადით წლიური რთული 9%-ით. ვალის გადახდაზე 27 თვით ადრე ბანკმა ვალი შეისყიდა წლიური

12%-იანი რთული დისკონტით. იპოვეთ დისკონტის სიდიდე ორივე წესით.

5. იპოვეთ 1 მილიონი ლარის ოდენობის ვალის დისკონტირებული ღირებულება მარტივი და რთული დისკონტირებისას, თუ წლიური დისკონტია 18% და განაღდება ხდება ვალის გასვლამდე: ა) 5 წლით ადრე; ბ) 1 წლით ადრე; გ) ნახევარი წლით ადრე; დ) ერთი თვით ადრე.

§ 7. ნომინალური და ეფექტური დისკონტირება

როგორც პროცენტების დარიცხვა შესაძლებელია წელიწადში რამდენიმეჯერ (იხ. §4), ასევე დისკონტირებაც შესაძლებელია რამდენჯერმე. თუ დისკონტირება ხდება წელიწადში m-ჯერ (m-მთელი რიცხვია), მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულია ნომინალური წლიური სააღრიცხვო ანუ დისკონტირების განაკვეთი $d^{(m)}$ და ყოველ სააღრიცხვო პერიოდში დისკონტირება ხდება $\frac{d^{(m)}}{m}$ განაკვეთით.

ადვილი დასანახია, რომ ამ დროს $S(T)$ მომავალი თანხის თანამედროვე ღირებულება გამოითვლება ფორმულით

$$S(0) = S(T)\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{Tm} \tag{7.1}$$

ცხადია, რომ აქაც შეიძლება შემოვიღოთ ეფექტური სააღრიცხვო განაკვეთის ცნება. $d^{(m)}$ ნომინალური წლიური სააღრიცხვო განაკვეთის შესაბამისი ეფექტური სააღრიცხვო განაკვეთი $d_{\text{ეფ}}$ ეწოდება სიდიდეს, რომელიც განისაზღვრება ტოლობიდან

$$1 - d_{\text{ეფ}} = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m} \tag{7.2}$$

(როგორც (7.2) ფორმულა გვიჩვენებს, $d_{\text{ეფ}}$ განაკვეთით ერთჯერადი დისკონტირებისას მიიღება იგივე შედეგი, რაც $d^{(m)}$ ნომინალური სააღრიცხვო განაკვეთით m-ჯერადი დისკონტირებისას).

შენიშვნა. საპროცენტო განაკვეთების შემთხვევაში სამართლიანი იყო უტოლობა $r_{\text{ეფ}} > r^{(m)}$. აქ პირიქითაა $d_{\text{ეფ}} < d^{(m)}$.

როგორც აღვნიშნეთ, საპროცენტო r და საღრიცხვო d განაკვეთები ექვივალენტურია, თუ

$$(1-d)(1+r)=1.$$

ბუნებრივია ნომინალურ წლიურ საპროცენტო $r^{(m)}$ და ნომინალურ საღრიცხვო $d^{(m)}$ განაკვეთს ვუწოდთ ექვივალენტურები, თუ მათი შესაბამისი ეფექტური განაკვეთებია ექვივალენტური. ამ განმარტებიდან ჩანს, რომ $r^{(m)}$ და $d^{(m)}$ სიდიდეები აკმაყოფილებენ ტოლობას

$$\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)=1,$$

საიდანაც მიიღება რამდენიმე მნიშვნელოვანი ტოლობა:

$$r^{(m)}\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)=d^{(m)}, \tag{7.3}$$

$$d^{(m)}\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)=r^{(m)}, \tag{7.4}$$

$$\frac{1}{d^{(m)}}=\frac{1}{r^{(m)}}+\frac{1}{m}. \tag{7.5}$$

(7.3) ტოლობა აღნიშნავს, რომ $d^{(m)}$ არის $r^{(m)}$ თანხის დისკონტირებული ღირებულება. (7.4) ტოლობა აღნიშნავს, რომ $r^{(m)}$ არის $d^{(m)}$ თანხის დაგროვებული ღირებულება. რაც შეეხება (7.5) ტოლობას, ის უშუალოდ გვაძლევს, რომ

$$d^{(m)}<r^{(m)}$$

და ამასთან $\lim\limits_{m\to\infty} d^{(m)}=\lim\limits_{m\to\infty} r^{(m)}$ (ამ ზღვარს მომავალში δ-თი აღვნიშნავთ). (ბოლო ტოლობა აღნიშნავს, რომ თუ დარიცხვების რაოდენობა წელიწადში უსასრულოდ იზრდება, რაც ნიშნავს დარიცხვის პერიოდის უსასრულოდ შემცირებას და ე.ი. უწყვეტად დარიცხვას, მაშინ განსხვავება პერიოდის დასაწყისში და ბოლოში დარიცხვებს შორის ქრება).

მაგალითი 1. 25000 ლარის ოდენობის ვალი, რომლის გადახდის ვადა დგება 4 წლის შემდეგ. ბანკმა შეისყიდა წლიური ნომინალური

რთული 20%-იანი დისკონტი: ა) წელიწადში ორჯერადი დარიცხვით; ბ) ყოველკვარტალური დარიცხვით. ვიპოვოთ დისკონტის რაოდენობა და შესაბამისი ეფექტური სააღრიცხვო განაკვეთები.

თუ წელიწადში დარიცხვა ხდება ორჯერ, მაშინ $d^{(2)} = 20\%$ და ბანკმა გადაიხადა

$$S(0) = 25000(1 - 0,1)^8 = 10762 \text{ ლარი.}$$

მაშასადამე, დისკონიტია $D = 14238$ ლარი. შესაბამისი ეფექტური სააღრიცხვო განაკვეთია

$$d_{\text{ეფ}} = 1 - (1 - 0,1)^2 = 0,19.$$

თუ დარიცხვა ხდება ყოველკვარტალურად, მაშინ $d^{(4)} = 20\%$ და ბანკმა გადაიხადა

$$S(0) = 25000(1 - 0,05)^{16} = 11003 \text{ ლარი}$$

და დისკონტია $D = 13997$ ლარი. შესაბამისი ეფექტური განაკვეთია

$$d_{\text{ეფ}} = 1 - (1 - 0,05)^4 = 0,1855.$$

მაგალითი 2. 8000 ლარის ოდენობის ვალი, რომლის გადახდის ვადა დგება 33 თვის შემდეგ, ბანკმა შეიძინა ნომინალური წლიური 10%-იანი ორჯერადი დისკონტირებით, რა თანხა გადაიხადა ბანკმა?

როგორც ვხედავთ $d^{(2)} = 10\%$ და $T = 2,75$. მაშინ $S(0)$-ის გამოსათვლელად გვაქვს ორი ვარიანტი: ან გამოვითვალოთ ზოგადი ფორმულით (7.1), ან გამოვიყენოთ ფორმულა (6.2).

თუ ვითვლით ზოგადი ფორმულით, მაშინ

$$S(0) = 8000(1 - 0,05)^{5,5} = 6034 \text{ ლარი.}$$

თუ ვითვლით (6.2) ფორმულით, მაშინ

$$S(0) = 8000(1 - 0,05)^5(1 - 0,025) = 6035,5 \text{ ლარი.}$$

ამოცანები. 1. 30000 ლარის ოდენობის ვალი, რომლის გადახდის ვადა დგება: ა) 2 წლის შემდეგ; ბ) 5 წლის შემდეგ, ბანკმა შეისყიდა წლიური 15%-იანი დისკონტით. რა თანხა გადაიხადა ბანკმა?

2. 50000 ლარის ოდენობის ვალი, რომლის გადახდის ვადა დგება 3 წლის შემდეგ, ბანკმა შეისყიდა წლიური ნომინალური 20%-იანი დისკონტით წელიწადში ორჯერადი დარიცხვით. რა თანხა გადაიხადა ბანკმა?

3. 12000 ლარის ოდენობის ვალი, რომლის გადახდის ვადა დგება 4 წლის შემდეგ, ბანკმა შეისყიდა წლიური ნომინალური 18%-იანი დისკონტით წელიწადში: ა) ორჯერადი დარიცხვით, ბ) ოთხჯერადი დარიცხვით. რა თანხა გადაიხადა ბანკმა?

4. 30000 ლარის ოდენობის ვალის შესყიდვისას წლიური 12%-იანი რთული დისკონტით. ბანკმა გადაიხადა 21000 ლარი. რა დრო ყოფილა დარჩენილი ვალის გადახდის ვადამდე?

5. თამასუქი განაღდებული იქნა ბანკში მისი ვადის გასვლამდე: ა) 2 წლით ადრე; ბ) 1,5 წლით ადრე. რა წლიური დისკონტით იქნა ის შესყიდული, თუ თამასუქის მფლობელმა მიიღო მასში მითითებული თანხის 80%?

§ 8. უწყვეტი დარიცხვა და დისკონტირება

როცა დარიცხვა ან დისკონტირება წელიწადში m-ჯერ ხდება, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$S(T) = S(0)\Big(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\Big)^{mT}$$

$$S(0) = S(T)\Big(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\Big)^{mT}$$

როგორც წინა პარაგრაფში გავარკვიეთ, თუ ეფექტური წლიური პროცენტი და დისკონტი მუდმივი სიდიდეებია, მაშინ

$$\lim_{m\to\infty} r^{(m)} = \lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \delta.$$

ამ δ სიდიდეს ეწოდება უწყვეტი პროცენტების დარიცხვის **ინტენსივობა.**

გავიხსენოთ, რომ მოცემული r ეფექტური წლიური პროცენტისა და d ეფექტური წლიური დისკონტის მიხედვით შეიძლებოდა $r^{(m)}$ და $d^{(m)}$ სიდიდეების გამოთვლა ფორმულებით:

$$r^{(m)} = m\left[(1+r)^{\frac{1}{m}} - 1\right], \tag{8.1}$$

$$d^{(m)} = m\left[1 - (1-d)^{\frac{1}{m}}\right]. \tag{8.2}$$

განვიხილოთ (8.1) ფორმულა. როცა $m \to \infty$, მაშინ $\sqrt[m]{1+r} \to 1$ ნებისმიერი r-სთვის, ამიტომ სხვაობა $\sqrt[m]{1+r} - 1 \to 0$. აღვნიშნოთ ეს სხვაობა h-ით. მაშინ

$$m = \frac{\ln(1+r)}{\ln(1+h)}.$$

თუ (8.1) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $m \to \infty$ ანუ $h \to 0$, მიიღება

$$\delta = \lim_{m\to\infty} r^{(m)} = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot \ln(1+r)}{\ln(1+h)} = \ln(1+r) \lim_{h\to 0} \frac{h}{\ln(1+h)}.$$

მაგრამ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{\ln(1+h)} = 1$. მაშასადამე $\delta = \ln(1+r)$. საბოლოოდ მიიღება, რომ r, d და δ სიდიდეები დაკავშირებული არიან ტოლობებით

$$1 + r = e^{\delta},$$

$$1 - d = e^{-\delta}$$

თუ ახლა ზღვარზე გადავალთ პარაგრაფის დასაწყისში მოყვანილ ფორმულებში, მივიღებთ, რომ

$$S(T) = S(0) \cdot e^{\delta T}, \tag{8.3}$$

$$S(0) = S(T) \cdot e^{-\delta T} \tag{8.4}$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $S(0) = 1000$ ლარისაგან 5 წელიწადში დაგროვებული თანხა, თუ დარიცხვა ხდება მუდმივი $r^{(m)} = 25\%$-ით: ა) წელიწადში 1-ჯერ; ბ) წელიწადში 2-ჯერ; გ) წელიწადში 4-ჯერ; დ) უწყვეტად.

როცა $m = 1$, მაშინ $S(5) = 1000(1 + 0,25)^5 = 3052$;
როცა $m = 2$, მაშინ $S(5) = 1000(1 + 0,125)^{10} = 3247$;
როცა $m = 4$, მაშინ $S(5) = 1000(1 + 0,0625)^{20} = 3362$;
როცა $m = \infty$, მაშინ $S(5) = 1000e^{5/4} = 3490$.

მაგალითი 2. 12000 ლარი შეტანილია ბანკში 5 წლით უწყვეტი დარიცხვის პირობით მუდმივი 10%-იანი ინტენსივობით. ვიპოვოთ კაპიტალის ზრდა წლების მიხედვით.

$$S(1) = 12000e^{0,1} = 13262, \quad S(2) = 12000e^{0,2} = 14657,$$
$$S(3) = 12000e^{0,3} = 16198, \quad S(4) = 12000e^{0,4} = 17892,$$
$$S(5) = 12000e^{0,5} = 19785,$$

ცხადია, წარმოიშობა შეკითხვა: როგორ დავითვალოთ e^δ? თვითონ e რიცხვიც კი პრობლემას იწვევს. მომავლისათვის შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $e = 2,718282$, ხოლო e^δ-ს გამოსათვლელად შესაძლოა გამოვიყენოთ მიახლოებითი ფორმულა, რომლის მიხედვითაც, თუ δ საკმაოდ მცირეა, მაშინ

$$e^\delta \approx 1 + \delta + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{6}.$$

(როგორც წესი ასეთი სიზუსტე საკმარისი იქნება).

მაგალითი 3. 80000 ლარის ოდენობის თანხაზე 5 წლის განმავლობაში მიმდინარეობდა პროცენტების უწყვეტი დარიცხვა 5%-იანი ინტენსივობით. იპოვეთ დაგროვებული თანხა და შესაბამისი დისკრეტული პროცენტი.

რადგან $\delta = 0,05$, ამიტომ დაგროვებული თანხაა

$$S(5) = 8000e^{0,25} = 8000\left(1 + 0,25 + \frac{0,0625}{2} + \frac{0,0039}{6}\right) = 10255.$$

შესაბამისი დისკრეტული პროცენტია $r = e^{0,05} - 1 = 0,05 + 0,00125 + 0,000021 = 0,0513$.

მაგალითი 4. 40000 ლარის დისკონტირება ხდება 5 წლის განმავლობაში: ა) დისკრეტული წლიური 12%-იანი დისკონტით, ბ) უწყვეტი 12%-იანი ინტენსივობის დისკონტით. იპოვეთ მიღებული თანხა.

თუ დისკონტირება ხდება წლიური 12%-იანი დისკრეტული დისკონტით, მაშინ

$$S(0) = 40000(1 - 0,12)^5 = 21109.$$

თუ დისკონტირება ხდება უწყვეტად, მაშინ

$$S(0) = 40000e^{-0,6} = 40000(1 - 0,6 + 0,18 - 0,036) = 21760.$$

ზემოთ განხილულ მაგალითებში ყველგან იგულისხმებოდა, რომ უწყვეტი დაგროვების ან დისკონტირების ინტენსივობა მუდმივი იყო და მაშინ ძირითადი ფორმულები, რომლითაც ითვლება დაგროვებული ან დაყვანილი თანხა, არის (8.3) და (8.4). ზოგადად შესაძლებელია ინტენსივობის სიდიდე ცვლადი იყოს (ისევე როგორც დისკრეტული პროცესის დროს შესაძლებელი იყო საპროცენტო განაკვეთების ცვლადობა). თუ $[0, T]$ დროის შუალედში უწყვეტი დარიცხვის ინტენსივობა ტოლია $\delta(t)$ ფუნქციის, მაშინ (8.3) და (8.4) ფორმულების ნაცვლად უნდა გამოვიყენოთ ფორმულები:

$$S(T) = S(0)e^{\int_0^T \delta(t)dt} \tag{8.5}$$

$$S(0) = S(T)e^{-\int_0^t l(t)dt} \tag{8.6}$$

როგორც ვხედავთ საჭირო ხდება ინტეგრალების გამოთვლა.

განვიხილოთ ორი კერძო შემთხვევა, რომლებიც უფრო ხშირად გვხვდება პრაქტიკული გამოთვლებისას.

1. $\delta(t)$ ფუნქცია უბან-უბან მუდმივია, ანუ

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta_1, & 0 \le t \le t_1, \\ \delta_2 & t_1 \le t \le t_2, \\ \\ \delta_m, & t_{m-1} \le t \le T. \end{cases}$$

თუ $0 \le t \le t_1$, მაშინ $\int\limits_0^t \delta(S)\,dS = \delta_1 t;$

თუ $t_1 \le t \le t_2$, მაშინ $\int\limits_0^t \delta(S)\,dS = \delta_1 t_1 + \delta_2(t - t_1);$

თუ $t_2 \le t \le t_3$, მაშინ $\int\limits_0^t \delta(S)\,dS = \delta_1 t_1 + \delta_2(t_2 - t_1) + \delta_3(t - t_2);$

თუ $t > t_{m-1}$, მაშინ $\int\limits_0^t \delta(S)\,dS = \delta_1 t_1 + \delta_2(t_2 - t_1) + \cdots +$

$$+ \delta_{m-1}(t_{m-1} - t_{m-2}) + \delta_m(t - t_m).$$

ამ გამოთვლების შემდეგ ვიყენებთ (8.5) და (8.6) ფორმულას.

მაგალითი 5. ვთქვათ საწყისი კაპიტალია 1000 ლარი და უახლოესი 4 წლის განმავლობაში $\delta(t)$ ფუნქციისათვის პროგნოზია

$$\delta(t) = \begin{cases} 0,1, & \text{თუ } 0 \le t \le 2, \\ 0,2, & \text{თუ } 2 < t \le 3, \\ 0,4, & \text{თუ } 3 < t \le 4. \end{cases}$$

ვიპოვოთ კაპიტალის ზრდის სურათი წლების მიხედვით.

როგორც ვიცით

$$S(t) = 1000e^{\int_0^t \delta(S)\,dS}$$

ამიტომ

$$S(1) = 1000e^{\int_0^2 0,1\,dS} = 1000e^{0,1},$$

$$S(2) = 1000e^{\int_0^2 0,1\,dS} = 1000e^{0,2},$$

$$S(3) = 1000e^{\int_0^2 0,1\,dS+\int_2^3 0,2\,dS} = 1000e^{0,4},$$

$$S(4) = 1000e^{\int_0^2 0,1\,dS+\int_2^3 dS+\int_3^4 0,4\,dS} = 1000e^{0,8}.$$

2. $\delta(t)$ ფუნქცია წრფივია, ე.ი. $\delta(t) = \delta_0 + \delta_1 \cdot t$. მაშინ

$$\int_0^T \delta(t)\,dt = \int_0^T (\delta_0 + \delta_1 t)dt = \delta_0 T + \frac{\delta_1}{2} T^2.$$

მაგალითი 6. ვიპოვოთ დაგროვების კოეფიციენტი უწყვეტი დარიცხვისას, თუ ინტენსივობის საწყისი სიდიდეა 8%, ხოლო მერე კი ინტენსივობა წრფივი სახით მატულობს წელიწადში 2%-ით.

რადგან $\delta_0 = 0,08$ და $\delta_1 = 0,02$, ამიტომ დაგროვების კოეფიციენტია

$$A = e^{0,08t+0,01t^2}$$

ამოცანები. 1. 12000 ლარის ოდენობის ვალზე მიმდინარეობს დარიცხვა 8%-იანი უწყვეტი ინტენსივობით 5 წლის განმავლობაში. იპოვეთ ვალის ზრდის სურათი წლების მიხედვით.

2. რა თანხა უნდა შევიტანოთ საბანკო დეპოზიტზე, რომ 4 წლის მერე მივიღოთ 10000 ლარი, თუ დარიცხვა მიმდინარეობს 10%-იანი უწყვეტი ინტენსივობით?
3. რა დროში მიაღწევს 300000 ლარი 1 მილიონს, თუ დარიცხვა მიმდინარეობს 20%-იანი უწყვეტი ინტენსივობით?
4. 3000 ლარის ოდენობის ვალზე მიმდინარეობს უწყვეტი დარიცხვა 7 წლის განმავლობაში. ამასთან პირველი ორი წლის განმავლობაში ინტენსივობა ტოლია 6%-ის, შემდეგი ორი წლის განმავლობაში ტოლია 8%-ის, შემდეგი წლების განმავლობაში კი ყოველწლიურად 0,5%-ით იზრდება. იპოვეთ საბოლოო თანხა.
5. 10000 ლარი შეტანილია საბანკო დეპოზიტზე 6 წლით უწყვეტი დარიცხვით. ამასთან $\delta(t)$ ინტენსივობის მნიშვნელობები მოსალოდნელია შემდეგი სახით:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0,02, & 0 \le t \le 2, \\ 0,08, & 2 < t \le 3, \\ 0,10, & 3 < t \le 5, \\ 0,15, & 5 < t \le 6. \end{cases}$$

იპოვეთ კაპიტალის ზრდის სურათი წლების მიხედვით.
6. იპოვეთ დაგროვების კოეფიციენტი 5 წლის განმავლობაში უწყვეტი დარიცხვისას, თუ ინტენსივობის საწყისი მნიშვნელობა იყო 20%, ხოლო მერე კი ის იკლებდა წრფივი სახით წელიწადში 2%-ით.

თავი III. პროცენტები დამატებით ფაქტორებით

§ 1. გასაშუალოებული პროცენტები

თუ ფინანსური ოპერაციის დროს პროცენტული განაკვეთი განიცდის ცვლილებას დროის მიხედვით (რაც ადრე რამდენჯერმე შეგვხვდა), მაშინ შესაძლებელია ყველა საპროცენტო განაკვეთის შეცვლა ერთი განაკვეთით, რომელსაც **საშუალო** ეწოდება.

განვიხილოთ ჯერ მარტივი პროცენტები. ვთქვათ დროის მიყოლებითი შუალედების $T_1, T_2, \ldots, T_k$ განმავლობაში ხდებოდა მარტივი პროცენტების დარიცხვა შესაბამისად $r_1, r_2, \ldots, r_k$ საპროცენტო განაკვეთებით. მაშინ მთლიანად დაგროვებული თანხა ტოლია

$$S(0)\left(1+\sum_{i=1}^{k} r_i T_i\right)$$

სიდიდის. თუ დავუშვებთ, რომ მთელი $T = \sum_{i=1}^{k} T_i$ პერიოდის განმავლობაში დარიცხვა ხდებოდა რაღაც $\bar{r}$ პროცენტით ისე, რომ საბოლოო შედეგი აღმოჩნდა იგივე, მაშინ უნდა სრულდებოდეს ტოლობა

$$S(0)(1+\bar{r}T) = S(0)\left(1+\sum_{i=1}^{k} r_i T_i\right),$$

საიდანაც მიიღება **საშუალო** პროცენტის გამოსათვლელი ფორმულა

$$\bar{r} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{k} r_i T_i. \tag{1.1}$$

ცხადია, რომ ზუსტად ანალოგიურად შეიძლება გამოვიყენოთ **საშუალო** სააღრიცხვო განაკვეთის ანუ დისკონტის გამოსათვლელი ფორმულა

$$\bar{d} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{k} d_i T_i. \tag{1.2}$$

მაგალითი 1. ფინანსური ოპერაციის დროს 3 თვის განმავლობაში საპროცენტო განაკვეთი იყო 22%, შემდეგ 4 თვის განმავლობაში იყო 18% და კიდევ 5 თვის განმავლობაში კი 23%. ვიპოვოთ საშუალო პროცენტი.

(1.1) ფორმულიდან უშუალოდ მიიღება, რომ

$$\overline{r} = \frac{3 \cdot 0,22 + 4 \cdot 0,18 + 5 \cdot 0,23}{12} = 0,2108.$$

შესაძლოა ფინანსური ოპერაციის დროს დროის თანაბარ ინტერვალებში ხდებოდეს სხვადასხვა საწყისი თანხიდან სხვადასხვა პროცენტული განაკვეთით დარიცხვა. მაგალითად, ერთნაირ $\underbrace{T, T, T, \ldots, T}_{k-\text{ჯერ}}$ პერიოდებში ხდებოდეს $S_1, S_2, \ldots, S_k$ თანხების პროცენტირება $r_1, r_2, \ldots, r_k$ საპროცენტო განაკვეთით. მაშინ მთლიანად დაგროვებული თანხაა

$$S_1(1 + r_1 T) + S_2(1 + r_2 T) + \cdot + S_k(1 + r_k T) = \sum_{i=1}^{k} S_i(1 + r_i T).$$

თუ გვინდა ვიპოვოთ საშუალო პროცენტი $\overline{r}$, მაშინ დაგროვებული თანხა იქნება

$$S_1(1 + \overline{r} T) + S_2(1 + \overline{r} T) + \cdot + S_k(1 + \overline{r} T) = (1 + \overline{r} T) \sum_{i=1}^{k} S_i.$$

მაშინ საშუალო პროცენტის გამოსათვლელად მიიღება ფორმულა

$$\overline{r} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{k} S_i r_i, \tag{1.3}$$

სადაც $S = \sum\limits_{i=1}^{k} S_i$ მთლიანი ინვესტირებული თანხაა.

განვიხილოთ ახლა ინვესტირება რთული პროცენტებით. ვთქვათ დროის მიყოლებით შუალედებში $T_1, T_2, \ldots, T_k$ ხდებოდა საწყისი $S(0)$ კაპიტალის ინვესტირება და დარიცხვა მიმდინარეობდა რთული

პროცენტებით შესაბამისად $r_1, r_2, \ldots, r_k$ განაკვეთებით. მაშინ მთლიანად დაგროვებული თანხაა

$$S(0)(1+r_1)^{T_1}(1+r_2)^{T_2}\cdots(1+r_k)^{T_k} = S(0)\prod_{i=1}^{k}(1+r_i)^{T_i}.$$

თუ გვინდა ვიპოვოთ დროის $T = \sum_{i=1}^{k} T_i$ პერიოდში საშუალო რთული პროცენტი, მაშინ მიიღება ტოლობა

$$(1+\bar{r})^T = \prod_{i=1}^{k}(1+r_i)^{T_i},$$

საიდანაც გამომდინარეობს საშუალო პროცენტის გამოსათვლელი ფორმულა

$$\bar{r} = \left(\prod_{i=1}^{k}(1+r_i)^{T_i}\right)^{1/T} - 1. \qquad (1.4)$$

მაგალითი 2. ვთქვათ რაღაც თანხის ინვერსიტებისას პირველი სამი წლის განმავლობაში დარიცხვა ხდებოდა რთული 15%-ით, შემდეგი სამი წლის განმავლობაში 20%-ით და კიდევ ორი წლის განმავლობაში 10%-ით. ვიპოვოთ საშუალო რთული პროცენტი.

(1.4) ფორმულიდან უშუალოდ მიიღება, რომ

$$\bar{r} = \sqrt[8]{1,15^3 \cdot 1,2^3 \cdot 1,1^2} - 1 = 0,1556.$$

ვთქვათ რთული პროცენტებით დარიცხვისას დარიცხვის პერიოდები ერთნაირია და განსხვავებულია ინვესტირებული თანხები და საპროცენტო განაკვეთები. მაშინ მთლიანი დაგროვებული თანხაა

$$S_1(1+r_1)^T + S_2(1+r_2)^T + \cdots + S_k(1+r_k)^T = \sum_{i=1}^{k} S_i(1+r_i)^T$$

ეს თანხა ტოლი უნდა იყოს საშუალო $\overline{r}$ პროცენტით დაგროვებული მთლიანი თანხის

$$S_1(1+\overline{r})^T + S_2(1+\overline{r})^T + \cdots + S_k(1+\overline{r})^T = (1+\overline{r})^T \sum_{i=1}^{k} S_i.$$

მაშასადამე

$$\overline{r} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} S_i(1+r_i)^T}{\sum_{i=1}^{k} S_i} \right)^{1/T} - 1.$$

ამოცანები. 1. ბანკი 2 თვის განმავლობაში დარიცხვას აწარმოებდა მარტივი 10%-ით, შემდეგი 3 თვის განმავლობაში მარტივი 12%-ით და კიდევ 6 თვის განმავლობაში 16%-ით. იპოვეთ საშუალო პროცენტი.

2. ბანკი პირველი ორი თვის განმავლობაში აწარმოებდა 2600 ლარის ოდენობის ანგარიშზე მარტივი 8%-ის დარიცხვას, შემდეგი ორი თვის განმავლობაში 3000 ლარის ანგარიშზე მარტივი 12%-ის დარიცხვას, კიდევ შემდეგი ორი თვის განმავლობაში კი 5000 ლარის ანგარიშზე მარტივი 15%-ის დარიცხვას. იპოვეთ საშუალო პროცენტი.

3. 5 თვის განმავლობაში ანგარიშზე დარიცხვა ხდებოდა რთული 10%-ით, შემდეგი 3 თვის განმავლობაში – 12%-ით და შემდეგი 8 თვის განმავლობაში კი 15%-ით. იპოვეთ საშუალო პროცენტი.

4. ბანკი ორი წლის განმავლობაში აწარმოებდა 4000 ლარზე რთული 10%-ის დარიცხვას, შემდეგი ორი წლის განმავლობაში 6000 ლარზე რთული 15%-ის დარიცხვას და შემდეგი ორი განმავლობაში კი 10000 ლარზე 20%-ის დარიცხვას. იპოვეთ საშუალო პროცენტი.

§ 2. ფინანსური ეკვივალენტობის ცნება

საკმაოდ ხშირად პრაქტიკული საქმიანობის დროს წარმოიქმნება სიტუაციები, როცა საჭიროა ერთი ფინანსური ვალდებულების შეცვლა მეორეთი, მაგალითად, ვალის გადახდის ვადის გადაწევა, რამდენიმე ვალის გაერთიანება და ა.შ. გასაგებია, რომ მსგავსი ცვლილებები რალაც პრინციპებზე უნდა იყოს დამყარებული და არ უნდა იყოს დამოკიდებული მხოლოდ სუბიექტურ მოსაზრებებზე. საყოველთაოდ აღიარებულია ფინანსური ვალდებულებების ეკვივალენტობის პრინციპი. ორი ფინანსური ვალდებულება ითვლება ეკვივალენტურად, თუ მათი დაძვანის შედეგად დროის ერთი ფიქსირებული მომენტისათვის (focal date), ისინი ტოლი აღმოჩნდება. დაყვანა შესაძლებელია ან დისკონტირების საშუალებით (ამ დროს დაყვანა ხდება უფრო ადრეულ დროის მომენტზე), ან დაგროვების საშუალებით (ამ დროს დაყვანა ხდება დროის მომავალ მომენტზე).

ვთქვათ გვინდა შევადაროთ ორი თანხა S_1 და S_2 გადახდის სხვადასხვა მომენტით. მაშინ ისინი შეიძლება დავიყვანოთ დღევანდელ დღეზე (present value) ერთიდაიგივე პროცენტით და მერე შევადაროთ. თუ $\mathrm{pv}\, S_1 = \mathrm{pv}\, S_2$, მაშინ S_1 და S_2 ეკვივალენტურია (ამ პრინციპს ჩვენ მომავალშიც გამოვიყენებთ საინვესტიციო პროექტების შეფასებისათვის).

მაგალითი 1. შევადაროთ ერთმანეთს ორი ფინანსური ვალდებულება. პირველის პირობებით 20000 ლარი გადასახდელია 4 თვის შემდეგ. მეორის პირობებით კი 30000 ლარი გადასახდელია 10 თვის შემდეგ. ა) შეიძლება თუ არა ჩაითვალოს ისინი ეკვივალენტურად, თუ დარიცხვა ხდები წლიური მარტივი 36%-ით? ბ) როგორი უნდა იყო საპროცენტო წლიური მარტივი განაკვეთი, რომ ისინი ეკვივალენტური იყოს?

მოვახდინოთ ორივე თანხის დაყვანა დღევანდელ დღეზე. მაშინ თანხების თანამედროვე ღირებულებებია შესაბამისად

$$\mathrm{pv}\, S_1 = \frac{20000}{1 + 0,36 \cdot \frac{4}{12}} = 17857,$$

$$\text{pv}\, S_2 = \frac{30000}{1 + 0,36 \cdot \frac{10}{12}} = 23077.$$

როგორც ვხედავთ $\text{pv}\, S_2 > \text{pv}\, S_1$ და ისინი არაა ექვივალენტური.

ვთქვათ რაღაც r წლიური საპროცენტო განაკვეთისათვის $\text{pv}\, S_1 = \text{pv}\, S_2$. მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{20000}{1 + r \cdot \frac{4}{12}} = \frac{30000}{1 + r \cdot \frac{10}{12}},$$

საიდანაც მიიღება, რომ $r = 1,5$ ანუ 150%.

ამ მაგალითის განხილვისას უკვე შეგვხვდა მნიშვნელოვანი ცნება – **კრიტიკული** განაკვეთით. განვიხილოთ ეს ცნება ზოგადად. ვთქვათ გვაქვს ორი ვალი S_1 და S_2 თავისი გადახდის ვადებით t_1 და t_2, ამასთან $S_1 < S_2$ და $t_1 < t_2$. თუ გვინდა ვიპოვოთ ე.წ. **კრიტიკული** საპროცენტო განაკვეთი, ანუ განაკვეთი, რომლის დროსაც ეს თანხები ექვივალენტურია, მაშინ უნდა ამოვხსნათ განტოლება

$$\frac{S_1}{1 + rt_1} = \frac{S_2}{1 + rt_2}. \tag{2.1}$$

ამ განტოლების ამონახსნია

$$r_{კრ} = \frac{S_2 - S_1}{S_1 t_2 - S_2 t_1} \tag{2.2}$$

ნათელია, რომ ნებისმიერი $r < r_{კრ}$-სთვის $\text{pv}\, S_2 > \text{pv}\, S_1$, ხოლო ნებისმიერი $r > r_{კრ}$-თვის კი პირიქით. ასე მაგალითად, თუ ზემოთ განხილულ მაგალითში $r = 200\%$, მაშინ

$$\text{pv}\, S_1 = \frac{20000}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 12000 > 11250 = \frac{30000}{1 + 2 \cdot \frac{5}{6}} = \text{pv}\, S_2.$$

ზემოთ ჩვენ ვთვლიდით, რომ დარიცხვა მარტივი პროცენტებით მიმდინარეობდა. როცა საქმე გვაქვს რთულ პროცენტებთან, მაშინ უნდა გამოვიყენოთ ფორმულა

$$\text{pv}\, S = \frac{S}{(1 + r)^T}.$$

რაც შეეხება კრიტიკული განაკვეთის მოძებნას, მისი გამოთვლისათვის მიიღება ნაცვლად (2.1) განტოლებისა, განტოლება

$$\frac{S_1}{(1+r)^{T_1}} = \frac{S_2}{(1+r)^{T_2}},$$

რომლის ამონახსნია

$$r_{კრ} = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{\frac{1}{T_2-T_1}} - 1. \qquad (2.3)$$

მაგალითი 2. 20000 ლარი დასაბრუნებელია 3 თვის შემდეგ, ხოლო 26000 ლარის ვალი კი 9 თვის შემდეგ. ა) არის თუ არა ეს ორი ვალი ექვივალენტური, თუ დარიცხვა მიმდინარეობს წლიური რთული 30%-ით? ბ) რას უდრის კრიტიკული განაკვეთი?

გამოვითვალოთ ორივე ვალის თანამედროვე ღირებულება:

$$\mathrm{pv}\, S_1 = \frac{20000}{(1+0,3)^{1/4}} = \frac{20000}{1,0678} = 18730,$$
$$\mathrm{pv}\, S_2 = \frac{26000}{(1+0,3)^{3/4}} = \frac{26000}{1,2175} = 21355.$$

მაშასადამე ექვივალენტური არ არიან, კრიტიკული განაკვეთის მოსაძებნად (2.3) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$r_{კრ} = (1,3)^2 - 1 = 0,69 = 69\%.$$

ამოცანები. 1. 10000 ლარის ოდენობის ვალი გადასახდელია 4 თვის შემდეგ. შეცვალეთ ის მისი ექვივალენტური ვალით, რომლის გადახდის ვადა დგება: ა) 2 თვის შემდეგ, ბ) 3 თვის შემდეგ; გ) 6 თვის შემდეგ; დ) 1 წლის შემდეგ. (დარიცხვა ხდება მარტივი წლიური 20%-ით).

2. 10000 ლარის ოდენობის ვალი გადასახდელია 4 თვის შემდეგ. ის შეიცვალა 12400 ლარის ვალით. როდისაა ამ ვალის გადახდის ვადა, თუ დარიცხვა ხდება მარტივი წლიური 10%-ით?

3. 1200 ლარის ოდენობის ვალის დაბრუნების ვადა დგება 3 თვის შემდეგ. შეცვალეთ ის მისი ექვივალენტური ვალით, რომლის გადახდის ვადა დგება: ა) 4 თვის შემდეგ; ბ) 6 თვის შემდეგ; გ) 9 თვის შემდეგ; დ) 1 წლის შემდეგ. (დარიცხვა ხდება რთული წლიური 36%-ით).

4. 8000 ლარის ვალი, რომლის დაბრუნების ვადაა 4 თვის შემდეგ, შეიცვალა 9600 ლარის ვალით. როდისაა ამ ვალის დაბრუნების ვადა, თუ დარიცხვა ხდება რთული წლიური 60%-ით?

§ 3. გადახდების კონსოლიდაცია

როგორც ზემოთ აღინიშნა, ფინანსური ოპერაციების პირობების შეცვლისას ძირითად პრინციპად აღიარებულია ფინანსური ექვივალენტობა. ზოგადად საჭირო ხდება ექვივალენტურობის განტოლების გამოყვანა (equation of value) და მისი ამოხსნა.

განვიხილოთ ერთ-ერთი გავრცელებული შემთხვევა კონტრაქტების ცვლილებისა – გადახდების კონსოლიდაცია ანუ გაერთიანება. ვთქვათ $S_1, S_2, \ldots, S_k$ თანხების გადახდა გათვალისწინებულია $T_1, T_2, \ldots, T_k$ დროის პერიოდებში. გვინდა ისინი შევცვალოთ ერთი S_0 თანხით და დროის ერთი T_0 პერიოდით. ასეთ დროს S_0 და T_0 სიდიდეებს ვერ ავიღებთ ნებისმიერად: ან ერთი უნდა იყოს მოცემული, ან მეორე. თუ S_0 ფიქსირებულია, მაშინ უნდა გამოვთვალოთ T_0 და პირიქით.

კონსოლიდირებული ვალის რაოდენობის განსაზღვრა. ვთქვათ $T_1 < T_2 < \cdots < T_k$ და T_0 მოცემულია. მაშინ იმ ვალებისთვის, რომელთათვისაც $T_i < T_0$ ვიყენებთ დარიცხვას, ხოლო იმ ვალებისათვის, რომელთათვისაც $T_i > T_0$ ვიყენებთ დისკონტირებას. მაშინ კონსოლიდირებული ვალის რაოდენობის განსაზღვრისათვის მივიღებთ ფორმულებს:

$$S_0 = \sum_{T_i < T_0} S_i(1 + r(T_0 - T_i)) + \sum_{T_j > T_0} S_j(1 + r(T_j - T_0))^{-1}, \quad (3.1)$$

$$S_0 = \sum_{T_i < T_0} S_i(1+r)^{T_0 - T_i} + \sum_{T_j > T_0} S_j(1+r)^{T_0 - T_j}. \qquad (3.2)$$

(3.1) და (3.2) ფორმულები გამოიყენება შესაბამისად მარტივი და რთული პროცენტებისათვის.

მაგალითი 1. 10000 ლარის გადახდის დრო დგება 2 წლის შემდეგ, ხოლო 6000 ლარის გადახდის დრო დგება 3 წლის შემდეგ. მხარეები შეთანხმდნენ, რომ ვალის გადახდა მოხდება 4 წლის შემდეგ წლიური 20%-ის გათვალისწინებით. რას უდრის კონსოლიდირებული თანხა?

თუ დარიცხვა ხდება მარტივი პროცენტებით, მაშინ

$$S_0 = 10000(1 + 2 \cdot 0,2) + 6000(1 + 0,2) = 21200.$$

თუ დარიცხვა ხდება რთული პროცენტებით, მაშინ

$$S_0 = 10000(1 + 0,2)^2 + 6000(1 + 0,2) = 21600.$$

კონსოლიდირებული ვალის პერიოდის განსაზღვრა. ვთქვათ ცნობილია კონსოლიდირებული ვალის მოცულობა S_0 და გვინდა განვსაზღვროთ მისი გადახდის ვადა T_0. დავიყვანოთ ყველა S_i თანამედროვე მომენტზე (მათ შორის S_0-იც) და დავწეროთ ტოლობა

$$\mathrm{pv}\, S_0 = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{pv}\, S_i,$$

რომელსაც ამ შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე:

$$S_0(1 + rT_0)^{-1} = \sum_{i=1}^{k} S_i(1 + rT_i)^{-1}.$$

აქედან მიიღება, რომ

$$T_0 = \frac{1}{r}\left(\frac{S_0}{\sum_{j=1}^{k} S_j(1 + r \cdot T_j)^{-1}} - 1\right) \qquad (3.3)$$

შენიშვნა. ცხადია, რომ (3.3) ფორმულის გამოყენება შეიძლება, თუკი $S_0 \geq \sum_{j=1}^{k} S_j(1 + r \cdot T_j)^{-1}$, ანუ შემცვლელი ვალის მოცულობა არ შეიძლება იყოს მთლიანი ვალის თანამედროვე ღირებულებაზე ნაკლები.

თუკი დარიცხვა ხდება რთული პროცენტებით, მაშინ განტოლებაა

$$S_0(1+r)^{-T_0} = \sum_{j=1}^{k} S_j(1+r)^{-T_j},$$

საიდანაც

$$T_0 = \frac{\ln S_0 - \ln\left(\sum_{j=1}^{k} S_j(1+r)^{-T_j}\right)}{\ln(1+r)} \tag{3.4}$$

(ცხადია, რომ (3.4) ფორმულაც მხოლოდ იმ შემთხვევაში გამოდგება, როცა $S_0 \geq \sum_{j=1}^{k} S_j(1+r)^{-T_j}$).

ამოცანები. 1. 12000 ლარის ვალი გადახდის 4-წლიანი ვადით და 8000 ლარის ვალი გადახდის 3 წლიანი ვადით გაერთიანდა გადახდის 7 წლიანი ვადით. რა თანხას შეადგენს ვალი, თუ დარიცხვა ხდება: ა) მარტივი წლიური 10%-ით; ბ) რთული წლიური 10%-ით?

2. 14000 ლარის ვალი გადახდის 3-წლიანი ვადით, 6000 ლარის ვალი გადახდის 4-წლიანი ვადით და 10000 ლარის ვალი გადახდის 6-წლიანი ვადით გაერთიანდა გადახდის 5-წლიანი ვადით. რა თანხას შეადგენს ვალით, თუ დარიცხვა ხდება: ა) მარტივი წლიური 20%-ით; ბ) რთული წლიური 20%-ით?

3. 10000 ლარის ვალი გადახდის 2 წლიანი ვადით, 18000 ლარის ვალი გადახდის 3-წლიანი ვადით, 32000 ლარის ვალი გადახდის 5 წლიანი ვადით შეიცვალა ერთი 70000 ლარის ვალით. დაადგინეთ მისი გადახდის

ვადა, თუ დარიცხვა ხდება: ა) მარტივი წლიური 10%-ით; ბ) რთული წლიური 10%-ით.

4. 30000 ლარის, 80000 ლარის და 50000 ლარის ვალების გადახდის ვადებია შესაბამისად 1 თვე, 2 თვე და 4 თვე. ეს ვალები გაერთიანდა 180000 ლარის ერთ ვალად. დაადგინეთ მისი გადახდის ვადა, თუ დარიცხვა ხდება: ა) მარტივი წლიური 18%-ით; ბ) რთული წლიური 24%-ით.

§ 4. გადასახადების გავლენა

ზოგიერთ ქვეყანაში იურიდიული და ზოგჯერ ფიზიკური პირების მიერ მიღებული პროცენტები იბეგრება, რაც რასაკვირველია ამცირებს რეალურ შემოსავალს.

პროცენტებზე გადასახადის გამოთვლისას შესაძლებელია ორი სხვადასხვა ვარიანტი: ან გადასახადით იბეგრება მთლიანი პროცენტი ერთდროულად (და მაშინ ეს ხდება ფინანსური ოპერაციის ბოლოს), ან დაბეგვრა ხდება ყოველი საკონვერსიო პერიოდის ბოლოს.

განვიხილოთ ჯერ დაგროვება მარტივი პროცენტებით. ვთქვათ საწყისი თანხაა $S(0)$, საპროცენტო განაკვეთია r და პერიოდია T. მაშინ დაგროვებული თანხა $S(T) = S(0)(1 + rT)$ და პროცენტებია $I = S(0)rT$. თუ პროცენტებზე საგადასახადო განაკვეთია q, მაშინ სახელმწიფოს უნდა გადავუხადოთ $Iq = S(0)rTq$. მაშასადამე რეალურად დაგროვებული თანხა იქნება

$$S(T) - Iq = S(0)[1 + r(1 - q)T], \tag{4.1}$$

რაც მიუთითებს იმაზე, რომ რეალურად დაგროვება ხდება $r(1 - q)$ პროცენტით (ცხადია, რომ ეს ნაკლებია r-ზე).

განვიხილოთ გრძელვადიანი ოპერაციები რთული პროცენტებით. ვთქვათ საწყისი თანხაა $S(0)$, რთული საპროცენტო წლიური განაკვეთია r და პერიოდია T.

დავუშვათ, რომ დაბეგვრა ხდება ერთიანად პერიოდის ბოლოს. დაგროვებული თანხაა $S(T) = S(0)(1 + r)^T$ და პროცენტებია $I = S(0)[(1 + r)^T - 1]$. მაშინ ბეგარაა Iq და რეალურად დაგროვებული

თანხაა

$$S(T) - Iq = S(0)[(1-q)(1+r)^T + q]. \qquad (4.2)$$

თუ დაბეგვრა ხდება ყოველწლიურად, მაშინ პირველ წელს გადასახადის სახით სახელმწიფოს გადაეცემა $S(0) \cdot r \cdot q$ თანხა, მეორე წელს $S(0)(1+r)rq$ თანხა, მესამე წელს $S(0)(1+r)^2 rq$ და ა.შ., k-ურ წელს გადაეცემა $S(0)(1+r)^{k-1}rq$ თანხა. მთლიანად n წლის განმავლობაში გადასახადია

$$G = S(0)r \cdot q \sum_{i=1}^{n}(1+r)^{i-1} =$$

$$= S(0) \cdot r \cdot q \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = S(0)q[(1+r)^n - 1].$$

როგორც ვხედავთ, გადასახადების საერთო რაოდენობა დარჩა ისეთივე, როგორც იყო ერთიანად დაბეგვრისას. თუმცა გადასახადის გადამხდელისათვის სულაც არაა ერთი, თუ როდის იხდის ის გადასახადს.

მაგალითი 1. ვთქვათ საწყისი კაპიტალია 100000 ლარი, საპროცენტო განაკვეთია 20% და პროცენტზე ბეგარაა 10%. განვსაზღვროთ გადასახადების რაოდენობა 3 წელიწადზე მარტივი და რთული პროცენტების შემთხვევაში.

მარტივი პროცენტების შემთხვევა. გადასახადების გათვალისწინების გარეშე დაგროვებული თანხაა

$$S(3) = 100000(1 + 0,6) = 160000.$$

აქედან $I = 60000$ და გადასახადი $G = 60000 \cdot 0,1 = 6000$ ლარი.

რთული პროცენტები ერთიანი დაბეგვრით. გადასახადების გათვალისწინების გარეშე დაგროვებული თანხაა

$$S(3) = 100000(1 + 0,2)^3 = 172800.$$

აქედან $I = 72800$ და გადასახადია $G = 7280$ ლარი.

რთული პროცენტები ყოველწლიური დაბეგვრით. პირველი წლის ბოლოს პროცენტი იყო $I_1 = 20000$ და გადასახადი $G_1 = 2000$.

მეორე წლის ბოლოს პროცენტი იყო $I_2 = 100000 \cdot 1,2 \cdot 0,2 = 24000$ და გადასახადი $G_2 = 2400$. მესამე წლის ბოლოს კი პროცენტი $I_3 = 100000 \cdot 1,2^2 \cdot 0,2 = 28800$ და $G_3 = 2880$. როგორც ვხედავთ $2000 + 2400 + 2880 = 7280$.

ამოცანები. 1. ვთქვათ საწყისი კაპიტალია 200000 ლარი, საპროცენტო განაკვეთია 30% და პროცენტზე ბეგარაა 10%. განსაზღვრეთ გადასახადების რაოდენობა 4 წლის განმავლობაში მარტივი და რთული პროცენტების შემთხვევაში.

2. ბანკში შეტანილია 80000 ლარი წლიური 36%-ით. იპოვეთ დაგროვებული თანხა 3 წლის განმავლობაში, თუ პროცენტზე ბეგარა 12%-ის ტოლია და დარიცხვა ხდება: ა) მარტივი პროცენტებით; ბ) რთული პროცენტებით.

3. ბანკში შეტანილია 20000 ლარი 4 წლით ნომინალური წლიური 24%-ით წელიწადში ორჯერადი დარიცხვით. იპოვეთ დაგროვებული თანხა, თუ პროცენტზე ბეგარა 8%-ის ტოლია.

§ 5. ინფლაციის გავლენა

ადრე განხილულ ამოცანებში და გამოთვლებში ყველა ფულადი თანხა იზომებოდა ნომინალურად, ანუ არ ვითვალისწინებდით ფულის მსყიდველობითი უნარის ცვლილებებს ფინანსური ოპერაციის მიმდინარეობის განმავლობაში. მაგრამ თანამედროვე პირობებში ინფლაციური პროცესები იმდენად მნიშვნელოვანია, რომ მათი გათვალისწინება მოკლევადიანი ოპერაციების დროსაც კი საჭირო ხდება.

ვთქვათ S არის დაგროვებული თანხა (მისი ნომინალური რაოდენობა), C არის დაგროვებული თანხა მისი გაუფასურების გათვალისწინებით და I_p განხილული პერიოდის განმავლობაში ფასების ინდექსი. მაშინ ცხადია, რომ

$$C = \frac{S}{I_p}.$$

შემოვიღოთ ინფლაციის ტემპის ცნება: ინფლაციის ტემპი h ვუწოდოთ პერიოდის განმავლობაში ფასების ფარდობით ნაზრდს. მისი გამოთვლა ხდება ფორმულით

$$h = 100(I_p - 1),$$

საიდანაც

$$I_p = \left(1 + \frac{h}{100}\right).$$

მაგალითისათვის: თუ განსახილველ პერიოდში ფასები საშუალოდ 1,5-ჯერ გაიზარდა, ანუ $I_p = 1,5$, მაშინ $h = 50\%$; თუ $h = 20\%$, მაშინ $I_p = 1,2$ და ეს ნიშნავს, რომ ფასები საშუალოდ 1,2-ჯერ გაიზარდა.

თავისი შინაარსით ინფლაცია ჯაჭვურ პროცესს წარმოადგენს. გასაგებია, რომ თუ ფასების ინდექსი დროის მიყოლებით $T_1, T_2, \ldots, T_n$ პერიოდებში იყო $I_{p_1}, I_{p_2}, \ldots, I_{p_n}$, მაშინ მთლიან პერიოდში ფასების ინდექსი იქნება მათი ნამრავლი. თუკი მომავალი პროგროზირებისას ერთი პერიოდის განმავლობაში მოსალოდნელია ინფლაცია h ტემპით, მაშინ n პერიოდისათვის

$$I_p = \left(1 + \frac{h}{100}\right)^n \tag{5.1}$$

მაგალითი 1. ა) ვთქვათ წლის განმავლობაში ინფლაციის ტემპი შეადგენს თვეში 10%-ს. ვიპოვოთ წლის განმავლობაში ფასების ზრდის კოეფიციენტი.

ერთი თვის განმავლობაში ფასების კოეფიციენტია 1,1. მაშინ 12 თვის განმავლობაში მიიღება

$$I_p = 1,1^{12} = 3,138.$$

მაშინ ინფლაციის წლიური მაჩვენებელია $h = 100(3,138 - 1) = 213,8\%$.

ბ) ვთქვათ ინფლაციის ტემპები ოთხი თვის განმავლობაში იყო 15%, 20%, 18% და 25%. ვიპოვოთ ფასების ინდექსი ოთხი თვის პერიოდში.

გამოვიყენოთ ფორმულა

$$I_p = I_{p_1} \cdot I_{p_2} \cdot I_{p_3} \cdot I_{p_4} = 1,15 \cdot 1,18 \cdot 1,2 \cdot 1,25 = 2,035.$$

მაშინ ინფლაციის ოთხთვიანი მაჩვენებელია

$$h = 100(2,0355 - 1) = 103,55\%.$$

დავუბრუნდეთ დაგროვების პროცესს და ამ პროცესში ფულის გაუფასურებას.

ვთქვათ დაგროვება მიმდინარეობს მარტივი პროცენტებით, საწყისი თანხაა S_0, საპროცენტო განაკვეთია r და ინფლაციის ტემპი h. მაშინ დაგროვებული თანხა გაუფასურების გათვალისწინებით ტოლია

$$C = \frac{S}{I_p} = S_0 \frac{1 + r \cdot T}{(1 + \frac{h}{100})^T}. \tag{5.2}$$

(5.2) ფორმულიდან ვხედავთ, რომ დაგროვებული თანხის რეალური ზრდა ხდება მხოლოდ მაშინ, როცა $1 + r \cdot T > (1 + \frac{h}{100})^T$.

თუ დაგროვება მიმდინარეობს რთული პროცენტებით, მაშინ

$$C = \frac{S}{I_p} = S_0 \left(\frac{1 + r}{1 + \frac{h}{100}} \right)^T \tag{5.3}$$

(5.3) ფორმულიდან ვხედავთ, რომ რეალური დაგროვება ხდება მხოლოდ მაშინ, როცა $r > \frac{h}{100}$.

ინფლაციის შედეგად განცდილი დანაკარგების კომპენსაციისათვის გამოიყენება სხვადასხვა მეთოდები. ერთი ასეთი მეთოდია საპროცენტო განაკვეთის კორექტირება, ანუ მისი გაზრდა. რას ნიშნავს ეს?

ვთქვათ დაგროვება მიმდინარეობს რთული პროცენტებით. როგორც (5.2) ფორმულა გვიჩვენებს, მაშინ რეალურად დაგროვება არ ხდება r პროცენტით. შემოვიღოთ ისეთი $r_ბ$ (იმ სიდიდეს ბრუტო-განაკვეთი ეწოდება), რომ სრულდებოდეს ტოლობა

$$1 + r_ბ = (1 + r)\left(1 + \frac{h}{100}\right).$$

მაშინ

$$r_{\text{ბ}} = r + \frac{h}{100} + r\,\frac{h}{100}. \qquad (5.4)$$

შენიშვნა. პრაქტიკული გამოთვლებისას (5.4) ფორმულის მაგივრად ხმარობენ ფორმულას

$$r_{\text{ბ}} = r + \frac{h}{100},$$

რომელშიც არ შედის $\frac{r \cdot h}{100}$ წევრი. როგორც წესი ის იმდენად მცირეა, რომ მისი უგულვებელყოფა შეიძლება.

თუ დაგროვება მიმდინარეობს მარტივი პროცენტებით, საჭიროა შესრულდეს ტოლობა

$$1 + nr_{\text{ბ}} = (1 + nr)I_p. \qquad (5.5)$$

მაგალითი 2. ა) ვთქვათ ინფლაციის წლიური ტემპია 20%, ბრუტო-განაკვეთია წლიური 25% და პერიოდია ნახევარი წელიწადი. ვიპოვოთ წლიური მარტივი რეალური საპროცენტო განაკვეთი, თუ ნახევარი წლის განმავლობაში ფასების ინდექსია 1.1.

(5.5) განტოლებიდან

$$1 + 0,5 \cdot 0.25 = (1 + 0,5 \cdot r) \cdot 1,1.$$

მაშინ

$$r = \frac{1}{0,5}\Big(\frac{1 + 0,5 \cdot 0,25}{1,1} - 1\Big) = 0,04545.$$

ბ) ვთქვათ ახლა პერიოდია 4 წელიწადი და ფასების ინდექსია 1,3, ხოლო დაგროვება მიმდინარეობს რთული პროცენტებით.

ასეთ შემთხვევაში ჯერ ვიპოვოთ h ფორმულიდან, რომელიც მას აკავშირებს I_p-სთან (ესაა (5.1) ფორმულა). აქედან

$$\frac{h}{100} = \sqrt[4]{1,8} - 1 = 1,1583 - 1 = 0,1583.$$

მაშინ

$$r = \frac{1 + 0,25}{1 + 0,1583} - 1 = 0,07916.$$

ამოცანები. 1. 1000 ლარის ტოლ თანხაზე სამი თვის განმავლობაში დაირიცხებოდა თანხა წლიური მარტივი 50%-ით. ამ სამი თვის განმავლობაში ფასები იზრდებოდა შესაბამისად 10%-ით, 18%-ით და 15%-ით. იპოვეთ დაგროვებული თანხა ინფლაციის გათვალისწინებით.

2. იპოვეთ რეალური წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთი, თუ ბრუტო-განაკვეთია 70% და წლიური ინფლაცია 40%.

3. 20000 ლარის თანხაზე მიმდინარეობს ყოველთვიურად დარიცხვა ნომინალური წლიური 50%-ით. იპოვეთ დაგროვებული თანხა 2 წლის განმავლობაში ინფლაციის გათვალისწინებით, თუ ინფლაციის ყოველთვიური ტემპია: ა) 2%; ბ) 5%.

4. იპოვეთ რეალური წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთი, თუ ბრუტო-განაკვეთია 30%, ინფლაციის კვარტალური ტემპია 10%, ოპერაცია მიმდინარეობს ორნახევარი წელიწადი.

თავი IV. ფინანსური რენტა

§ 1. რენტათა კლასიფიკაცია

თანამედროვე ფინანსური ოპერაციები ხშირად ითვალისწინებს არა ერთ ან რამდენიმე გამხოლოებულ გადახდას, არამედ მათ რაღაც მიმდევრობას, ანუ საქმე გვაქვს გადახდათა მიმდევრობასთან, **ფინანსურ ნაკადთან**. ამის მაგალითებია: პენსია, არენდის გადახდა, ინვესტიციების შედეგად პერიოდულად მიღებული შემოსავალი და სხვა.

ამრიგად, თუ ფინანსური ოპერაცია იწყება დროის t_0 მომენტში, მთავრდება დროის t_n მომენტში და დროის $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ მომენტებში ხდება შესაბამისად $S_0, S_1, \ldots, S_n$ თანხის გადახდა, მაშინ ვამბობთ, რომ მოცემული გვაქვს ფინანსური ნაკადი. ცხადია, რომ იმისდა მიხედვით, თუ როგორია t_i და S_i სიდიდეები, ფინანსური ნაკადები ფრიად მრავალფეროვანი შეიძლება იყოს. ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ ყველაზე მარტივ და ფართოდ გავრცელებულ ფინანსურ ნაკადებს. უფრო ზოგადი ფინანსური ნაკადები შეგვხვდება შემდეგ თავში.

ფინანსური რენტა ვუწოდოთ ისეთ ფინანსურ ნაკადს, რომელშიც ყველა S_i გადახდა ერთი ნიშნისაა (მაგალითად, $S_i > 0$) და დროის მომენტებს შორის ინტერვალები ერთნაირია, ანუ $\tau = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ, რომ ყველა $S_i > 0$.

რენტა საკმაოდ ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში. ასე, მაგალითად, რენტებს განეკუთვნება სხვადასხვა გადასახადები, სამომხმარებლო კრედიტის დასაფარავად შენატანები, პენსია, საბანკო ანაბრებზე პროცენტების რეგულარული გაცემა და სხვა.

განვიხილოთ რენტის ძირითადი პარამეტრები და მოვახდინოთ რენტათა კლასიფიკაცია. პირველ რიგში საჭიროა დროის საბაზო ერთეულის მითითება. როგორც წესი, საბაზო ერთეულად მიიღება 1 წელიწადი და ამის გამო რენტას ხშირად ანუიტეტსაც უწოდებენ (anno ლათინურად წელიწადს ნიშნავს). უნდა მივუთითოთ აგრეთვე

ეფექტური რთული საპროცენტო განაკვეთი r და პროცენტების დარიცხვის მეთოდი.

ცხადია, მნიშვნელოვანია დროის პერიოდის $r = t_k - t_{k-1}$ მითითება, ანუ ორ მომდევნო გადახდას შორის დროის ინტერვალის კალენდარული ხანგრძლივობა. მას შემდეგ, რაც მივუთითებთ გადახდათა რიცხვს n, მივიღებთ რენტის კალენდარულ ვადას, რომელიც ტოლია nr ნამრავლის. თეორიული ანალიზის დროს ხშირად r ემთხვევა დროის საბაზო ერთეულს და ამიტომ n ემთხვევა რენტის ვადას.

თუ ყველა S_i ერთნაირია, ანუ $S_i = S$, $i = 0, 1, \ldots, n$, მაშინ რენტას **მუდმივი** ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი **ცვალებადი**. შევთანხმდეთ, რომ ამ თავში ჩვენ მხოლოდ მუდმივ რენტებს შევისწავლით.

რენტის გადახდა შეიძლება ხდებოდეს წელიწადში ℓ-ჯერ, ხოლო პროცენტების დარიცხვა კი m-ჯერ, მაშინ ასეთ რენტას დისკრეტული (ℓ, m) სახის რენტა ეწოდება, ამასთან ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ შემთხვევას, როცა $\ell = m$. თუ გადახდა და დარიცხვა ხდება ძალიან ხშირად (მაგალითად, ყოველდღე), მაშინ, როგორც წესი, განიხილავენ ე.წ. უწყვეტ რენტას.

თუ გადახდა ხდება პერიოდის ბოლოს, მაშინ რენტას ჩვეულებრივი ანუ **პოსტნუმერანდო** ეწოდება. თუკი გადახდა ხდება ყოველი პერიოდის დასაწყისში, მაშინ რენტას ავანსირებული ანუ **პრენუმერანდო** ეწოდება. შევნიშნოთ, რომ შესაძლოა გადახდები ხდებოდეს თვით პერიოდის შიდა ფიქსირებულ მომენტშიც (მაგალითად, პენსია გაიცემოდეს ყოველი თვის 16 რიცხვში).

თუ რენტის ვადა თავიდანვე არის დადგენილი, ანუ მითითებულია პირველი და ბოლო გადახდის თარიღი, მაშინ რენტას **უპირობო** ეწოდება. მაშინ, როცა რენტის პირველი ან ბოლო (ან ორივესი) გადახდის თარიღი დამოკიდებულია რაღაც ფაქტორებზე და მითითებული მკაფიოდ არ არის, მაშინ რენტის **პირობითი** ეწოდება. ამის მაგალითია პენსია, როცა პირველი გადახდა ხდება რაღაც ასაკიდან და რომელიც გრძელდება გარდაცვალებამდე. პირობითი რენტების ანალიზი ძალიან მნიშვნელოვანი და საინტერესო საკითხია, მაგრამ ამისათვის საჭირო აპარატი საკმაოდ რთულია და ჩვენი წიგნის ფარ-

გლებს სცილდება.

როცა $n = \infty$, მაშინ რენტას უვადო ეწოდება. ეს ერთი შეხედვით გასაკვირია, მაგრამ უვადო რენტების შესწავლას არა მხოლოდ თეორიული ინტერესი აქვს. ამის მაგალითია ე.წ. კონსოლები", ანუ ბრიტანეთის ხაზინის მიერ ჯერ კიდევ XIX საუკუნის დასაწყისში გამოშვებული ფასიანი ქაღალდები, რომლებზეც პროცენტების გადახდა რეგულარულად ხდება.

თუ რენტის პერიოდი ემთხვევა პროცენტების დარიცხვის პერიოდს, მაშინ რენტას **უბრალო** ან **მარტივი** ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი **ზოგადი**.

ჩვენ ამ თავში განვიხილავთ მხოლოდ მარტივ მუდმივ უპირობო რენტას და თუ სხვა რამ არ მივუთითეთ, სიტყვა "რენტა" სწორედ ასეთ რენტებს იგულისხმებს.

§ 2. რენტის დაგროვება და დისკონტირება

მოხერხებულობისათვის ჩავთვალოთ, რომ რენტის პერიოდი τ ემთხვევა დროის საბაზო ერთეულს და რენტის ვადაა n, სადაც n ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვია. ვთქვათ რენტის ყოველი წევრი S-ის ტოლია, რენტის დაწყების მომენტი $t_0 = 0$ და დროის საბაზო ერთეულში ეფექტური საპროცენტო განაკვეთია r. პოსტნუმერანდო რენტის აღსანიშნავად გამოვიყენოთ R_0 და პრენუმერანდო რენტის აღსანიშნავად კი R_1. დავყოთ რენტის ვადა შემდეგი სახით:

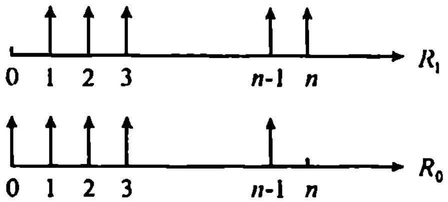
ა) პოსტნუმერანდო რენტისათვის

$$(0,1],\ (1,2],\ (2,3],\ldots,(n-1,n];$$

ბ) პრენუმერანდო რენტისათვის

$$[0,1),\ [1,2),\ [2,3),\ldots,[n-1,n).$$

ასეთი დაყოფა ცხადია პირობითია და უბრალოდ იმისათვის გვჭირდება, რათა მივუთითოთ რენტის გადახდის მომენტი: გადახდა ხდება ინტერვალის იმ ბოლოში, რომელიც ეკუთვნის ინტერვალს. ანუ: R_1 რენტისათვის გადახდის მომენტებია $1, 2, 3, \ldots, n$, ხოლო R_0 რენტისათვის კი $0, 1, 2, \ldots, n-1$ (იხ. ნახაზი)



(ისრები უჩვენებს გადახდის მომენტს).

როგორც ვიცით S თანხის ღირებულება დამოკიდებულია გადახდის დროზე. ამიტომ აღვნიშნოთ $S_0(t)$-თი R_0 რენტის მთლიანი თანხის ღირებულება დროის t მომენტისათვის, ხოლო $S_1(t)$-ით კი ანალოგიური ღირებულება R_1 რენტისათვის. მაშინ ამ აღნიშვნის თანახმად $S_0(0)$ არის R_0 რენტის თანამედროვე ღირებულება, $S_0(n)$ კი მისი ღირებულება რენტის ვადის ამოწურვისას. შესაბამისად $S_1(0)$ არის R_1 რენტის ღირებულება დროის $t = 0$ მომენტში და $S_1(n)$ კი მისი ღირებულება დროის $t = n$ მომენტში.

თუ გამოვიყენებთ ფულის დროითი ღირებულების გამოთვლის წესებს, მაშინ

$$S_0(0) = S(1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}) = S\,\frac{1 - v^n}{1 - v} =$$

$$= S\,\frac{1 - v^n}{d}\,, \tag{2.1}$$

$$S_1(0) = S(v + v^2 + \cdots + v^n) = S v\,\frac{1 - v^n}{1 - v} =$$

$$= S v\,\frac{1 - v^n}{d} = S\,\frac{1 - v^n}{r}\,. \tag{2.2}$$

აქ v არის დისკონტირების კოეფიციენტი და $v = 1 - d = \frac{1}{1+r}$.

მეორეს მხრივ კი

$$S_0(n) = S((1 + r)^n + (1_r)^{n-1} + \cdots + (1 + r)) =$$

$$= S(1 + r)\,\frac{(1 + r)^n - 1}{r} = S\,\frac{1 - v^n}{d \cdot v^n}\,, \tag{2.3}$$

$$
\begin{aligned}
S_1(n) &= S\left((1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \cdots + 1\right) = \\
&= S\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} = Sv\,\frac{1 - v^n}{r \cdot v^n}\,. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

შენიშვნა. (2.3) და (2.4) ფორმულები შეიძლება უშუალოდ (2.1) და (2.2) ფორმულებიდან მოვიყვანოთ თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$
S_0(n) = (1+r)^n S_0(0), \qquad S_1(n) = (1+r)^n S_1(0).
$$

მაგალითი 1. თქვენ გთავაზობენ მიწის ნაკვეთის არენდით გაცემას სამი წლით. ამასთან შესაძლებელია გადახდის ორი ვარიანტი: ა) სამი წლის ბოლოს ერთიანად 70000 ლარი; ბ) ყოველი წლის ბოლოს 20000 ლარი. რომელ ვარიანტს არჩევდით, თუ საბანკო პროცენტია 20% წლიური?

ა) ვარიანტი წარმოადგენს ერთჯერად გადახდას, ხოლო ბ) ვარიანტი კი რენტას. დავითვალოთ ორივე შემთხვევაში თანამედროვე ღირებულება.

ა) ვარიანტისათვის

$$
S(0) = 70000(1 + 0,2)^{-3} = 40509.
$$

ბ) ვარიანტისათვის

$$
S(0) = 20000\,\frac{1 - 0,2^{-3}}{0,2} = 42130.
$$

მაშინ გასაგებია, რომ ბ) ვარიანტი უფრო მისაღებია.

მაგალითი 2. მომავალი დანახარჯებისათვის შექმნილია ფონდი, რომელშიც ექვსი წლის განმავლობაში ხდება ყოველი წლის დასაწყისში 4000 ლარის შეტანა. საბანკო წლიური პროცენტია 15%. ვიპოვოთ ექვსი წლის ბოლოს დაგროვებული თანხა.

ადვილი დასანახია, რომ საქმე გვაქვს პრენუმერანდო რენტასთან. ამიტომ მისი საბოლოო ღირებულების დასათვლელად გამოვიყენოთ

(2.3) ფორმულა:

$$S(6) = 4000 \cdot 1,15\,\frac{1,15^6 - 1}{0,15} = 40267 \text{ ლარი}.$$

დავუბრუნდეთ (2.1), (2.4) ფორმულებს და შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$a_{\overline{n}|r} = v + v^2 + \cdots + v^n = \frac{1 - v^n}{r},$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|r} = 1 + v + \cdots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d},$$

$$S_{\overline{n}|r} = (1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \cdots + 1 = \frac{1 - v^n}{rv^n},$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|r} = (1+r)^n + (1+r)^{n-1} + \cdots + (1+r) = \frac{1 - v^n}{dv^n}.$$

$a_{\overline{n}|r}$ და $\ddot{a}_{\overline{n}|r}$ სიდიდეებს ეწოდებათ შესაბამისად პოსტნუმერანდო და პრენუმერანდო რენტის **დისკონტირების** კოეფიციენტები, ხოლო $S_{\overline{n}|r}$ და $\ddot{s}_{\overline{n}|r}$ სიდიდეებს კი რენტის **დაგროვების** კოეფიციენტები.

რენტის დაგროვებისა და დისკონტირების კოეფიციენტების შემოღების შემდეგ (2.1)–(2.4) ფორმულები შემდეგი სახით გადაიწერება:

$$S_0(0) = \ddot{a}_{\overline{n}|r} \cdot S, \tag{2.1}$$

$$S_1(0) = a_{\overline{n}|r} \cdot S, \tag{2.2}$$

$$S_0(n) = \ddot{S}_{\overline{n}|r} \cdot S, \tag{2.3}$$

$$S_1(n) = S_{\overline{n}|r} \cdot S. \tag{2.4}$$

ფორმულების ასეთი სახით ჩაწერა და დამახსოვრება მოხერხებულია. რადგან თითოეული ამ კოეფიციენტისათვის არსებობს სპეციალური ცხრილები, რომლებშიც მოყვანილია კოეფიციენტების მნიშვნელობები სხვადასხვა n და r-სთვის. მაშინ გამოთვლებისათვის მხოლოდ გამრავლების შესრულება რჩება.

მაგალითი 3. 20 მილიონი ლარის კრედიტი გადასახდელია 12 წლის განმავლობაში ერთნაირი თანხებით: ა) წლის დასაწყისში

გადახდით; ბ) წლის ბოლოს გადახდით. საპროცენტო განაკვეთია წლიური 5%. ვიპოვოთ ყოველწლიური გადასახადის ოდენობა.

ვთქვათ ყოველწლიური გადასახადია S. მაშინ ა) შემთხვევაში საქმე გვაქვს პრენუმერანდო რენტასთან და მიიღება ტოლობა

$$20 \cdot 10^6 = S\,\frac{1 - 1,05^{-12}}{10 - 1,05^{-1}} = \frac{0,7959}{0,0855}\,S = 9,30885\,S.$$

მაშასადამე $S = 2\,148505$ ლარი.

ბ) შემთხვევაში საქმე გვაქვს პოსტნუმერანდო რენტასთან და მიიღება ტოლობა

$$20 \cdot 10^6 = S\,\frac{1 - 1,05^{-12}}{0,05} == 8,8655\,S.$$

მაშასადამე $S = 2\,255936$ ლარი.

ამოცანები. 1. თქვენ გთავაზობენ ბინის გაქირავებას 4 წლით. შესაძლებელია სამი სხვადასხვა ვარიანტის არჩევა: ა) ოთხი წლის ბოლოს ერთიანად გადაგიხადონ 25000 ლარი; ბ) ყოველი წლის ბოლოს გადაგიხადონ 5500 ლარი; გ) ყოველი წლის დასაწყისში გადაგიხადონ 5000 ლარი. რომელ ვარიანტს ამჯობინებთ, თუ საშუალო საბანკო პროცენტია ა) 12%; ბ) 8%?

2. მომავალი ხარჯებისთვის საჭირო გახდა 6 წლით ფონდის შექმნა, რომელშიც ყოველწლიურად განზრახულია: ა) წლის დასაწყისში 5000 ლარის შეტანა; ბ) წლის ბოლოს 6000 ლარის შეტანა. რა თანხა დაგროვდება ფონდში, თუ საბანკო პროცენტია 12% წლიური?

3. 100000 ლარის კრედიტი გადასახდელია 15 წლის განმავლობაში ერთნაირი წლიური გადასახადებით: ა) ყოველი წლის დასაწყისში; ბ) ყოველი წლის ბოლოს. განსაზღვრეთ ყოველწლიური შესატანი თანხის რაოდენობა, თუ საპროცენტო განაკვეთია: ა) 30% წლიური; ბ) 5% წლიური.

§ 3. დაგროვებისა და დისკონტირების კოეფიციენტების თვისებები

გავიხსენოთ წინა პარაგრაფში გამოყვანილი მუდმივი რენტის დაგროვებისა და დისკონტირების კოეფიციენტების გამოსათვლელი ფორმულები

$$a_{\overline{n}|r} = \frac{1 - v^n}{r}, \qquad \ddot{a}_{\overline{n}|r} = \frac{1 - v^n}{d},$$
$$S_{\overline{n}|r} = \frac{1 - v^n}{rv^n}, \qquad \ddot{S}_{\overline{n}|r} = \frac{1 - v^n}{dv^n},$$

სადაც $v = \frac{1}{1+r}$ და $d = 1 - v = \frac{r}{r+1}$.

გამოვიკვლიოთ ამ კოეფიციენტების ზოგიერთი თვისება. რადგან კოეფიციენტები დამოკიდებულია n-ზე და r-ზე, სწორედ მათ მიმართ ყოფაქცევა შევისწავლოთ.

1. თუ $n = 0$, მაშინ არავითარ გადახდას ადგილი არ აქვს და ცხადია

$$a_{\overline{0}|r} = \ddot{a}_{\overline{0}|r} = S_{\overline{0}|r} = \ddot{S}_{\overline{0}|r}$$

ნებისმიერი r-სთვის.

თუ $n = 1$, მაშინ საქმე გვაქვს ერთჯერად გადახდასთან და ცხადია, რომ

$$a_{\overline{1}|r} = v, \;\; \ddot{a}_{\overline{1}|r} = 1, \;\; S_{\overline{1}|r} = 1, \;\; \ddot{S}_{\overline{1}|r} = \frac{1}{v} = 1 + r.$$

2. ვთქვათ r ფიქსირებულია. რა მოხდება, როცა n იზრდება? შევადაროთ ერთმანეთს $a_{\overline{n}|r}$ და $a_{\overline{n+1}|r}$. ადვილი დასანახია, რომ

$$\frac{a_{\overline{n+1}|r}}{a_{\overline{n}|r}} = \frac{1 - v^{n+1}}{1 - v^n} = \frac{(r+1)^{n+1} - 1}{(r+1)^n - 1} \cdot \frac{1}{r+1} =$$
$$= \frac{(r+1)^{n+1} - 1}{(r+1)^{n+1} - 1 - r} > 1,$$

ე.ი. $a_{\overline{n}|r}$ ფუნქცია ზრდადია n ცვლადის მიმართ. ამის შემჩნევა შეიძლებოდა პირდაპირ $a_{\overline{n}|r}$ კოეფიციენტის გამოსათვლელი ფორმულიდანაც: რადგან $v < 1$, ამიტომ v^n კლებადია და შესაბამისად $1 - v^n$ ზრდადი.

ანალოგიურად შეიძლება იმის დადგენა, რომ $\ddot{a}_{\overline{n}|r}$, $S_{\overline{n}|r}$ და $\ddot{S}_{\overline{n}|r}$ კოეფიციენტებიც ზრდადია n-ის მიმართ (მკითხველს ვთავაზობთ ამის გაკეთებას).

ფინანსური თვალსაზრისით ამ კოეფიციენტების ზრდადობა ადვილი ასახსნელია: მუდმივი საპროცენტო განაკვეთის პირობებში გადახდათა რაოდენობა იწვევს რეალური შემოსავლების ზრდას.

აქვე დავაკვირდეთ კოეფიციენტების ყოფაქცევას, როცა $n \to \infty$. რადგან $v < 1$ და $\lim_{n\to\infty} v^n = 0$, ამიტომ

$$a_{\overline{\infty}|r} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|r} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{r} = \frac{1}{r},$$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|r} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|r} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{d} = \frac{1}{d} = a_{\overline{\infty}|r} + 1.$$

რაც შეეხება $S_{\overline{n}|r}$ და $\ddot{S}_{\overline{n}|r}$ კოეფიციენტებს, ცხადია, რომ მათი ზღვარი ∞-ია.

ზემოთ მიღებულ ზღვრულ ტოლობებს აქვთ შემდეგი ინტერპრეტაცია: უსასრულოდ ბევრი გადასახდების თანამედროვე ღირებულება შემოსაზღვრულია, რადგან ძალიან "შორი" თანხები დღევანდელ დღეს მცირედ ფასობს.

3. ვთქვათ ახლა n ფიქსირებულია. რა მოხდება, როცა r იზრდება? ამის დადგენა ადვილია, თუ გავიხსენებთ კოეფიციენტების განმარტებას:

$$a_{\overline{n}|r} = v + v^2 + \cdot + v^{n-1},$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|r} = 1 + v + v^2 + \cdot + v^{n-1},$$

$$S_{\overline{n}|r} = (1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \cdots + 1,$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|r} = (1+r)^{n} + (1+r)^{n-1} + \cdots + (1+r).$$

რადგან r-ის გაზრდა იწვევს v-ს შემცირებას, ამიტომ ცხადია, რომ r სიდიდის მიმართ $a_{\overline{n}|r}$ და $\ddot{a}_{\overline{n}|r}$ კოეფიციენტები კლებადია, ხოლო $S_{\overline{n}|r}$ და $\ddot{S}_{\overline{n}|r}$ კოეფიციენტები კი ზრდადი.

ფინანსური თვალსაზრისით ეს ადვილი ასახსნელია: რაც უფრო მაღალია საპროცენტო განაკვეთი, მომავალი თანხების თანამედროვე

ღირებულება მით უფრო დაბალია, ხოლო თანამედროვე თანხების მომავალი ღირებულება კი უფრო მაღალი.

შენიშვნა. დაგროვების და დისკონტირების კოეფიციენტების თვისებების შესახებ თვალსაჩინო ინფორმაციას გვაძლევს ამ კოეფიციენტების ცხრილებზე დაკვირვება. ამისათვის საჭიროა ავარჩიოთ რომელიმე სტრიქონი ან სვეტი და გავყვეთ მას შესაბამისად მარჯვნივ ან ქვევით.

მაგალითი 1. ვთქვათ ყოველწლიური უვადო რენტის გადასახადია 10000 ლარი. ვიპოვოთ ამ რენტის თანამედროვე ღირებულება, თუ წლიური საპროცენტო განაკვეთია: ა) 5%; ბ) 10%; გ) 20%; დ) 50%; ე) 100%.

გამოვიყენოთ ფორმულები $S_1(0) = S \cdot a_{\overline{\infty}|r}$ და $S_0(0) = S \cdot \ddot{a}_{\overline{\infty}|r}$ შესაბამისად R_1 და R_0 რენტისათვის. მაშინ

$$S_1(0) = 10000 \cdot \frac{1}{r} \text{ და } S_0(0) = 10000 \cdot \frac{1}{d} = 10000\Big(\frac{1}{r} + 1\Big).$$

შესაბამისად მიიღება:

თუ $r = 0,05$, მაშინ $S_1(0) = 200000$ და $S_0(0) = 210000$;

თუ $r = 0,1$, მაშინ $S_1(0) = 100000$ და $S_0(0) = 110000$;

თუ $r = 0,2$, მაშინ $S_1(0) = 50000$ და $S_0(0) = 60000$;

თუ $r = 0,5$, მაშინ $S_1(0) = 20000$ და $S_0(0) = 30000$;

თუ $r = 1$, მაშინ $S_1(0) = 10000$ და $S_0(0) = 20000$.

ამ მაგალითში **ერთი საინტერესო** რამ შეგვხვდა: თუ ინფლაცია საკმაოდ მაღალია ($r = 100\%$), მაშინ უვადო პოსტნუმერანდო რენტის თანამედროვე ღირებულება ემთხვევა მარტო ერთი გადახდის ღირებულებას.

მაგალითი 2. რა თანხა უნდა იყოს საპენსიო ფონდის ანგარიშზე, რომ ამ ფონდმა შეძლოს ყოველწლიურად პენსიების სახით 2 მილიონი ლარის გაცემა, თუ ფონდს შეუძლია თავისი თანხების ინვესტირება: ა) თვიური 0, 5%-ით; ბ) თვიური 2%-ით?

თუ ჩავთვლით, რომ ფინანსური სისტემა მდგრადია, მაშინ ამოცანის ამოხსნისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ უვადო რენტის მოდელი

ყოველთვიური 2 მილიონი ლარის გადახდით. მაშინ საჭირო თანხა შეგვიძლია ვიპოვოთ როგორც ამ რენტის თანამედროვე ღირებულება.

თუ პენსიების გაცემა იწარმოებს ყოველი თვის ბოლოს, მაშინ გვაქვს პოსტნუმერანდო რენტა და საჭირო თანხაა

$$S_1(0) = 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{r} = 400 \text{ მილიონი ან } 100 \text{ მილიონი;}$$

თუ პენსიების გაცემა ხდება თვის დასაწყისში, მაშინ

$$S_0(0) = 2 \cdot 10^6 \ \left(\frac{1}{r} + 1\right) = 402 \text{ მილიონი ან } 102 \text{ მილიონი.}$$

ამოცანები. 1. ამ პარაგრაფში მიღებული შედეგების გამოყენებით ააგეთ $a_{\overline{n}|r}$ და $\ddot{a}_{\overline{n}|r}$ კოეფიციენტების n რიცხვზე დამოკიდებულების გრაფიკები.

2. გამოიყვანეთ დაგროვებისა და დისკონტირების კოეფიციენტებს შორის ურთიერთკავშირების ფორმულები:

ა) $a_{\overline{n}|r} \cdot r = \ddot{a}_{\overline{n}|r} \cdot d$;

ბ) $S_{\overline{n}|r} \cdot r = \ddot{S}_{\overline{n}|r} \cdot d$;

გ) $a_{\overline{n}|r} \cdot (1 + r)^n = S_{\overline{n}|r}$;

დ) $\ddot{a}_{\overline{n}|r} \cdot (1 + r)^n = \ddot{S}_{\overline{n}|r}$;

ე) $\ddot{a}_{\overline{n}|r} - 1 = a_{\overline{n}|r}$;

ვ) $\ddot{a}_{\overline{n}|r} + v^n = 1 + a_{\overline{n}|r}$;

ზ) $\ddot{S}_{\overline{n}|r} + 1 = \frac{1}{v^n} + S_{\overline{n}|r}$;

თ) $\ddot{a}_{\overline{n}|r} = (1 + r)a_{\overline{n}|r}$;

ი) $\ddot{S}_{\overline{n}|r} = (1 + r)S_{\overline{n}|r}$;

კ) $S_{\overline{n+1}|r} = 1 + \ddot{S}_{\overline{n}|r}$;

ლ) $r \cdot a_{\overline{n}|r} + v^n = 1$;

მ) $d \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|r} + v^n = 1$;

ნ) $\ddot{a}_{\overline{n}|r} = a_{\overline{\infty}|r} + 1$.

3. 1985 წელს ინდოეთის ქალაქ ბჰოპალში ამერიკული კორპორაცია "იუნიონ კარბაიდის" ქიმიურ ქარხანაში

მოხდა ავარია, რომლის შედეგადაც ძალიან ბევრი ადამიანი დაზარალდა. კორპორაციამ დაზარალებულებს კომპენსაციის სახით შესთავაზა 200 მილიონი დოლარის გადახდა 35 წლის განმავლობაში ყოველწლიური თანაბარი გადასახადებით. (სხვათა შორის წინადადება არ იყო მიღებული). თუ ჩავთვლით, რომ საპროცენტო განაკვეთი თვეში შეადგენს 1%-ს (დაახლოებით ასეც იყო 1985 წელს), რას უდრის შეთავაზებული თანხის იმდროინდელი ღირებულება?

4. ფირმა თავის თანამშრომელთან აფორმებს საპენსიო კონტრაქტს, რომლის პირობები შემდეგია: თანამშრომლის პენსიაზე გასვლამდე ფირმა ყოველწლიურად მის საპენსიო ანგარიშზე გადარიცხავს რაღაც ფიქსირებულ თანხას ისე, რომ დაგროვებულმა თანხამ უზრუნველყოს თანამშრომლისათვის 15 წლის განმავლობაში წელიწადში 3000 ლარის შემოსავალი. რა თანხა უნდა გადარიცხოს ფირმამ ყოველწლიურად საპენსიო ანგარიშზე, თუ საბანკო პროცენტია 10% წლიური, თანამშრომელი ახლა 40 წლისაა და პენსიაზე უნდა გავიდეს 65 წლის ასაკში?

§ 4. გადავადებული რენტა

განვიხილოთ საბაზო რენტის განზოგადება შემდეგი აზრით: პირველი გადახდა ხდება არა $t = 0$ მომენტში (R_0 რენტისათვის) ან $t = 1$ მომენტში (R_1 რენტისათვის), არამედ დროის h პერიოდის წანაცვლებით. ე.ი. პრენუმერანდო რენტისათვის $t = h$ მომენტში, ხოლო პოსტნუმერანდო რენტისათვის კი $t = h + 1$ მომენტში. ასეთ რენტას ეწოდება h ერთეულით გადავადებული რენტა.

გასაგებია, რომ გადავადებული რენტისათვისაც შეიძლება შემოვიღოთ დაგროვებისა და დისკონტირების კოეფიციენტები. h პერიოდით გადავადებული რენტის დისკონტირების კოეფიციენტების აღსანიშნავად გამოიყენება ${}_h a_{\overline{n}|r}$ და ${}_h \ddot{a}_{\overline{n}|r}$ სიმბოლოები შესაბამისად პოსტნუმერანდო (R_1) და პრენუმერანდო (R_0) რენტებისათვის.

ადვილი დასანახია, რომ

$$ {}_h\ddot{a}_{\overline{n}|r} = v^h + v^{h+1} + \cdots + v^{h+n+1} = v^h \ddot{a}_{\overline{n}|r} , $$

$$ {}_h a_{\overline{n}|r} = v^{h+1} + v^{h+2} + \cdots + v^{h+n} = v^h a_{\overline{n}|r} . $$

მაშასადამე ${}_h a_{\overline{n}|r}$ და ${}_h\ddot{a}_{\overline{n}|r}$ კოეფიციენტების გამოსათვლელად საკმარისია $a_{\overline{n}|r}$ და $\ddot{a}_{\overline{n}|r}$ კოეფიციენტების ცოდნა (თუნდაც ცხრილებიდან). ამასთან, თუ h მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ გამოთვლა სხვაგვარადაც შეიძლება. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ

$$ {}_h\ddot{a}_{\overline{n}|r} = v^h + v^{h+1} + \cdots + v^{h+n+1} = (1 + v + v^2 + \cdots + v^{h+n+1}) - $$
$$ - (1 + v + v^2 + \cdots + v^{h-1}) = \ddot{a}_{\overline{n+h}|r} - \ddot{a}_{\overline{h}|r} ; $$
$$ {}_h a_{\overline{n}|r} = v^{h+1} + v^{h+2} + \cdots + v^{h+n} = (v + v^2 + \cdots + v^{h+n}) - $$
$$ - (v + v^2 + \cdots + v^h) = a_{\overline{n+h}|r} - a_{\overline{h}|r} . $$

შენიშვნა. გასაგებია, რომ $h = 0$-სთვის ახლად შემოღებული კოეფიციენტები ემთხვევა შესაბამისად $a_{\overline{n}|r}$ და $\ddot{a}_{\overline{n}|r}$ სიდიდეებს.

მაგალითი 1. კლიენტს უნდა ბანკში შეიძინოს რენტა ყოველთვიური 400 ლარის ოდენობით 6 წლის განმავლობაში. საბანკო ყოველთვიური პროცენტი შეადგენს 1%-ს. რა ღირს ეს რენტა კონტრაქტის გაფორმების მომენტში, თუ: ა) გადახდა უნდა დაიწყოს მაშინვე; ბ) გადახდა უნდა დაიწყოს 4 წლის შემდეგ? (გადახდა ხდება თვის ბოლოს).

რადგან გადახდა ხდება თვის ბოლოს, ამიტომ საქმე გვაქვს პოსტნუმერანდო რენტასთან, ამასთან $n = 72$ და $r = 0,01$. ა) შემთხვევაში $h = 0$ და ბ) შემთხვევაში $h = 48$. რადგან გვჭირდება $a_{\overline{72}|0,01}$, $a_{\overline{48}|0,01}$ და $a_{\overline{120}|0,01}$ სიდიდეები, რომლებიც ცხრილში არაა, ისინი უნდა გამოვითვალოთ.

რადგან $r = 0,01$, ამიტომ $v = 0,9901$. მაშინ

$$ a_{\overline{72}|0,01} = 100(1 - 0,9901^{72}) = 51,51; $$
$$ a_{\overline{48}|0,01} = 100(1 - 0,9901^{48}) = 37,97; $$
$$ a_{\overline{120}|0,01} = 100(1 - 0,9901^{120}) = 69,7. $$

აქედან მიიღება, რომ ${}_{48}a_{\overline{72}|0,01} = 31,73$. მაშასადამე, თუ გადახდები უნდა დაიწყოს დაუყოვნებლივ, მაშინ რენტა ღირს

$$400 \cdot a_{\overline{72}|0,01} = 20460 \text{ ლარი.}$$

ხოლო თუ გადახდები უნდა დაიწყოს 4 წლის შემდეგ, მაშინ რენტის ღირებულებაა

$$400 \cdot {}_{48}a_{\overline{72}|0,01} = 12692 \text{ ლარი.}$$

ადვილი დასანახია, რომ თუ კიდევ გაიზრდება გადავადება, მაშინ რენტის ღირებულება სულ უფრო მცირე იქნება.

ამოცანები. 1. ვთქვათ თქვენ გინდათ შეიძინოთ ბანკში ყოველწლიური 1200 ლარის ოდენობის რენტა გადახდით: ა) წლის დასაწყისში; ბ) წლის ბოლოს. საბანკო პროცენტი შეადგენს წლიურ 9%-ს. რა ღირს ეს რენტა, თუ გადახდა თქვენი გინდათ დაიწყოს: ა) ახლავე; ბ) 10 წლის შემდეგ. (რენტის ვადაა 6 წელი).

2. ვთქვათ თქვენ გინდათ ბანკში შეიძინოთ 8 წლიანი ყოველწლიური რენტა გადახდის დაწყებით: ა) ახლავე; ბ) 8 წლის შემდეგ. თქვენ სულ გაქვთ ამისათვის 40000 ლარი. რა თანხა შეიძლება მიიღოთ ყოველწლიურად, თუ წლიური საპროცენტო განაკვეთია 12%?

3. სადაზღვევო კომპანიამ ფირმასთან გააფორმა 6 წლიანი კონტრაქტი, რომლის მიხედვითაც ფირმა ყოველწლიურად კომპანიას უხდის 10000 ლარს: ა) წლის დასაწყისში; ბ) წლის ბოლოს. იპოვეთ კომპანიის მიერ მიღებული თანხის თანამედროვე ღირებულება, თუ კომპანიას შეუძლია თანხების განთავსება წლიური 15%-ით. თუ 10 წლის შემდეგ კომპანიამ ფირმას 8 წლის განმავლობაში უნდა დაუბრუნოს თანხა ყოველწლიური გადახდებით, რისი ტოლი იქნება ყოველწლიური თანხა?

4. ბანკი გთავაზობთ 10 წლიან ყოველწლიურ რენტას წელიწადში 1800 ლარის გადახდით: ა) ყოველი წლის დასაწყისში; ბ) ყოველი წლის ბოლოს. რა ეღირება

რენტა, თუ გადახდები უნდა დაიწყოს: ა) ახლავე; ბ) 4 წლის შემდეგ; გ) 10 წლის შემდეგ; დ) მას შემდეგ, რაც გახდებით 60 წლის? საპროცენტო განაკვეთია: ა) 12% წლიური; ბ) 24% წლიური; გ) 6% წლიური.

§ 5. ჯერადი რენტა

ჩვენ უკვე განვიხილეთ შემთხვევები, როცა პროცენტების დარიცხვა ხდებოდა წელიწადში რამდენჯერმე. ანალოგიურად რენტის გადახდებიც შესაძლოა წელიწადში რამდენჯერმე ხდებოდეს.

ვთქვათ წლიური ეფექტური პროცენტია r და წლის განმავლობაში ხდება პროცენტების დარიცხვა m-ჯერ და $\frac{S}{m}$ რენტის გადახდაც m-ჯერ. განვიხილოთ ჯერ პოსტნუმერანდო რენტა n წლის განმავლობაში. როცა რენტის გადახდა წელიწადში m-ჯერ, საქმე გვაქვს **m-ჯერად** რენტასთან. შევადაროთ m-ჯერადი რენტა და 1-ჯერადი რენტა ერთმანეთს.

თუ m-ჯერადი რენტის თანხებს დავიყვანთ დროის საწყის მომენტზე, მივიღებთ, რომ თანამედროვე ღირებულებაა

$$\frac{S}{m}\left((1+r)^{-\frac{1}{m}}+(1+r)^{-\frac{2}{m}}+\cdots+(1+r)^{-\frac{mn}{m}}\right)=$$

$$=\frac{S}{m}\sum_{k=1}^{mn}v^{\frac{k}{m}}=\frac{S}{m}v^{\frac{1}{m}}\,\frac{1-v^{n}}{1-v^{1/m}}.$$

განვიხილოთ თანამამრავლი $\frac{v^{1/m}}{m(1-v^{1/m})}$. რადგან $v=\frac{1}{1+r}$, ამიტომ

$$\frac{v^{1/m}}{m(1-v^{1/m})}=\frac{1}{m[(1+r)^{1/m}-1]}$$

მაგრამ გავიხსენოთ, რომ $m[(1+r)^{\frac{1}{m}}-1]$ სიდიდე ტოლია $r^{(m)}$ წლიური ნომინალური საპროცენტო განაკვეთის, მაშინ m-ჯერადი რენტით დისკონტირების კოეფიციენტებისათვის

$$a^{(m)}_{\overline{n}|r^{(m)}}=\frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\,\frac{1-v^{n}}{1-v^{1/m}}=\frac{v^{\frac{1}{m}}}{m(1-v^{1/m})}\cdot r\cdot\frac{1-v^{n}}{r}.$$

აქედან მიიღება ტოლობა

$$a_{\overline{n}|r(m)} = \frac{r}{r(m)} \cdot a_{\overline{n}|r}, \tag{5.1}$$

რომელიც საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ ცნობილი $a_{\overline{n}|r}$ კოეფიციენტის საშუალებით $a^{(m)}_{\overline{n}|r(m)}$ კოეფიციენტი.

ანალოგიურად შეიძლება გამოვითვალოთ დაგროვების კოეფიციენტი $S^{(m)}_{\overline{n}|r(m)}$:

$$S^{(m)}_{\overline{n}|r(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{mn-1}(1+r)^{\frac{k}{m}} = \frac{1}{m}\,\frac{(1+r)^n-1}{(1+r)^{\frac{1}{m}}-1} = \frac{1-v^n}{v^n r(m)}.$$

აქედან მიიღება, რომ

$$S^{(m)}_{\overline{n}|r(m)} = \frac{r}{r(m)}\, S_{\overline{n}|r}, \tag{5.2}$$

$$S^{(m)}_{\overline{n}|r(m)} = (1+r)^n a^{(m)}_{\overline{n}|r(m)}. \tag{5.3}$$

(5.1) და (5.2) ფორმულის გამოყვანის ანალოგიურად (მკითხველს ვთავაზობთ ამის დეტალურად გაკეთებას) პრენუმერანდო m-ჯერადი რენტისათვის მიიღება

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|r(m)} = \frac{d}{d(m)}\, \ddot{a}_{\overline{n}|r},$$

$$\ddot{S}^{(m)}_{\overline{n}|r(m)} = \frac{d}{d(m)}\, \ddot{S}_{\overline{n}|r},$$

$$\ddot{S}^{(m)}_{\overline{n}|r(m)} = (1+r)^n\, \ddot{a}_{\overline{n}|r}.$$

გამოვიყვანოთ კიდევ ერთი სასარგებლო ფორმულა. განვიხილოთ დისკონტირების კოეფიციენტი 1-ჯერადი რენტისათვის mn წლის განმავლობაში პროცენტების $\frac{r(m)}{m}$ რაოდენობის წლიური დარიცხვით $a_{\overline{mn}|\frac{r(m)}{m}}$. მაშინ როგორც ვიცით, (2.1) ფორმულიდან

$$a_{\overline{mn}|\frac{r(m)}{m}} = \frac{1-\left(\frac{m}{m+r(m)}\right)^{mn}}{\frac{r(m)}{m}} = m\cdot\frac{1-v^n}{r(m)} = m\cdot a^{(m)}_{\overline{n}|r(m)}.$$

ბოლო ტოლობა გვაძლევს m-ჯერადი რენტის დისკონტირების კოეფიციენტის გამოთვლის კიდევ ერთ საშუალებას

$$a^{(m)}_{\overline{n}|r^{(m)}} = \frac{1}{m}\, a_{\overline{nm}|\frac{r^{(m)}}{m}}. \tag{5.4}$$

მაგალითი 1. ვთქვათ თქვენ შემოგთავაზეს მიწის ნაკვეთის გაქირავება სამი წლით ყოველი ნახევარი წლის ბოლოს 5000 ლარის გადახდით. რას უდრის თქვენს მიერ მიღებული მთლიანი თანხის თანამედროვე ღირებულება, თუ საბანკო პროცენტია 20% წლიური?

ამ მაგალითში საქმე გვაქვს ორჯერად პოსტნუმერანდო რენტასთან. საბანკო ნომინალური წლიური პროცენტია 20%. მაშინ დისკონტირების $a^{(2)}_{\overline{3}|0,1}$ კოეფიციენტისათვის (5.4) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$a^{(2)}_{\overline{3}|0,1} = \frac{1}{2}\, a_{\overline{6}|0,1} = 2,1776.$$

შესაბამისად რენტის თანამედროვე ფასია

$$2,1776 \cdot 10000 = 21776 \text{ ლარი}.$$

შეგვიძლია დავითვალოთ მომავალი ღირებულებაც ფორმულით

$$10000 \cdot S^{(2)}_{\overline{3}|0,2} = 10000(1+r)^3 \cdot 2,1776 = 38580 \text{ ლარი},$$

რადგან $r_{\text{ეფ}} = (1+0,1)^2 - 1$.

ამოცანები. 1. ვთქვათ შემოგთავაზეს ფართის გაქირავება 4 წლით: ა) ყოველი წლის ბოლოს 9000 ლარის გადახდით; ბ) ყოველი კვარტლის ბოლოს 2000 ლარის გადახდით. პროცენტების ნომინალური წლიური განაკვეთია 20%. რომელ ვარიანტს არჩევდით?

2. ბანკი გთავაზობთ 10-წლიან რენტას: ა) წელიწადში ერთჯერ 2600 ლარის გადახდით; ბ) წელიწადში 4-ჯერ 600 ლარის გადახდით. რა ეღირება ეს ორივე რენტა ახლა, თუ საპროცენტო განაკვეთია წლიური 15%?

3. ბანკი გვათავაზობთ 8 წლიან რენტას: ა) წელიწადში ერთჯერ წლის ბოლოს 1200 ლარის გადახდით; ბ) წელიწადში ორჯერ პერიოდის დასაწყისში 500 ლარის გადახდით. რა ღირება ეს ორივე რენტა ახლა, თუ საპროცენტო წლიური განაკვეთია 20%?

§ 6. უწყვეტი რენტა

თუ m-ჯერადი რენტის გადახდა ძალიან ხშირია, ანუ m დიდია, მაშინ შეიძლება ჩაითვალოს, რომ რენტის გადახდა უწყვეტად ხდება. ასეთ შემთხვევაში, რა თქმა უნდა განსხვავება პრენუმერანდო და პოსტნუმერანდო რენტებს შორის აღარაა. შემოვიღოთ აქაც დისკონტირებისა და დაგროვების კოეფიციენტების ცნება.

უწყვეტი რენტის **დისკონტირების** კოეფიციენტი $\overline{a}_{\overline{T}|\delta}$ ვუწოდოთ დროის ერთეულში ფულადი ერთეულის გაცემით და მუდმივი δ ინტენსივობით პროცენტების უწყვეტი დარიცხვით მიღებული რენტის თანამედროვე ღირებულებას.

რადგან დროის მცირე $(t, t+\Delta t)$ ინტერვალზე გაცემული იქნება Δt რენტა, ხოლო მისი თანამედროვე ღირებულება შეადგენს $e^{-\delta t}\Delta t$ სიდიდეს, მაშინ $[0, T]$ მონაკვეთზე გაცემული რენტის თანამედროვე ღირებულება ტოლია ინტეგრალის:

$$\overline{a}_{\overline{T}|\delta} = \int_0^T e^{-\delta t}dt. \qquad (6.1)$$

მაგრამ ეს ინტეგრალი იმ შემთხვევაში, როცა $\delta = const$, ადვილი გამოსათვლელია და მივიღებთ, რომ

$$\overline{a}_{\overline{T}|\delta} = \frac{1-e^{-T\delta}}{\delta} = \frac{1-v^n}{\delta}, \qquad (6.2)$$

რადგან უწყვეტი დისკონტის დროს $v = e^{-\delta}$. როგორც ვხედავთ, უწყვეტი და დისკრეტული დისკონტირების კოეფიციენტები ერთ-

მანეთთან დაკავშირებულია ტოლობით:

$$\overline{a}_{\overline{n}|\delta} = \frac{r}{\delta} a_{\overline{n}|r}.$$

ვთქვათ $h > 0$ რაიმე რიცხვია. მაშინ თუ ${}_h\overline{a}_{\overline{T}|\delta}$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ h დროით გადადებული δ ინტენსივობის რენტის დისკონტირების კოეფიციენტს, მაშინ

$$ {}_h\overline{a}_{\overline{T}|\delta} = \int_h^{h+T} e^{-\delta t}dt = \int_0^{h+T} e^{-\delta t}dt - \int_0^h e^{-\delta t}dt = \overline{a}_{\overline{h+T}|\delta} - \overline{a}_{\overline{h}|\delta}.$$

ანალოგიურად $a_{\overline{T}|\delta}$ სიდიდისა შეიძლება შემოვიღოთ დაგროვების კოეფიციენტი

$$\overline{S}_{\overline{T}|\delta} = \int_0^T e^{\delta(T-t)}dt = \frac{e^{\delta T} - 1}{\delta}. \tag{6.3}$$

როგორც მიღებული ფორმულებიდან ჩანს

$$\overline{S}_{\overline{n}|\delta} = \frac{n}{\delta} S_{\overline{n}|r}, \qquad \overline{S}_{\overline{n}|\delta} = e^{n\delta}\overline{a}_{\overline{n}|\delta}.$$

მაგალითი 1. 10 წლის განმავლობაში ყოველდღიურად ბანკში ანგარიშზე შევა 1 ლარი. გამოვითვალოთ ამ ვადის გასვლის შემდეგ ანგარიშზე მყოფი თანხა, თუ დარიცხვა წელიწადში 12%-ის ტოლია.

შეფასებისათვის ჩავთვალოთ, რომ საქმე გვაქვს უწყვეტ რენტასთან პროცენტების უწყვეტი დარიცხვით. მაშინ $r = 0,12$ და $\delta = \ln(1 + 0,12)$. ლოგარითმის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ მიახლოებითი ფორმულით

$$\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2}.$$

მაშინ $\delta = 0,1128$. დაგროვების კოეფიციენტია

$$\overline{S}_{\overline{10}|0,1128} = \frac{1,12^{10} - 1}{0,1128} = 18,669.$$

მაშინ დაგროვებული თანხა იქნება (წელიწადში 365 დღეს ვთვლით):

$$365 \cdot 18,669 = 6814 \text{ ლარი.}$$

ამოცანები. 1. 4 წლის განმავლობაში ანგარიშზე ყოველდღიურად შევა 10 ლარი. გამოვითვალოთ ამ ვადის ბოლოს ანგარიშზე მყოფი თანხა, თუ დარიცხვა წელიწადში 20%-ის ტოლია.

2. 5 წლის განმავლობაში ანგარიშზე ყოველდღიურად შედიოდა ერთიდაიგივე თანხა. იპოვეთ ამ თანხის სიდიდე, თუ საბოლოოდ ანგარიშზე აღმოჩნდა 24000 ლარი და დარიცხვა წელიწადში 10%-ის ტოლი იყო.

თავი V საფინანსო პროექტების შეფასების მეთოდები

§ 1. საინვესტიციო პროექტის ეფექტიანობის მახასიათებლები

საინვესტიციო თეორია საფინანსო მეცნიერების საკმაოდ რთული და საინტერესო შემადგენელი ნაწილია. საინვესტიციო პროექტების ანალიზის მთავარი ამოცანაა ინვესტიციების საბოლოო ფინანსური შედეგების შეფასება – ინვესტორებისათვის პროექტის შემოსავლიანობის პროგნოზირება. მსგავსი ამოცანა დაისმება როგორც ადრეულ ეტაპზე, როცა საჭიროა ამა თუ იმ პროექტის საფინანსო "მომხიბვლელობის" გარკვევა, ისე შემდეგ ეტაპზე – როცა საჭირო ხდება პირველადი შეფასების მიხედვით მოწონებული პროექტის დეტალური ბიზნეს-გეგმის შედგენა და ოპტიმიზაცია. პირველადი, თუნდაც მიახლოებითი ანალიზი, საშუალებას გვაძლევს უკუვაგდოთ პრინციპულად არასასურველი პროექტები და მთელი ყურადღება გადავიტანოთ შედარებით მომგებიანი პროექტების შესწავლაზე. რა თქმა უნდა, საფინანსო ეფექტიანობის შეფასება არაა ერთადერთი კრიტერიუმი პროექტის განხორციელების შესახებ საბოლოო გადაწყვეტილების მიღებისას. მნიშვნელოვანია, მაგალითად, პროექტის შესრულების ეკოლოგიური, სოციოლოგიური შედეგები. მაგრამ ფინანსური ეფექტიანობა მაინც რჩება საწყის კრიტერიუმად და ამდენად მნიშვნელოვნად მიგვაჩნია ამ საკითხების განხილვა.

საინვესტიციო პროექტის ეფექტიანობის შეფასების დაზუსტებული მეთოდების გამოყენებაში აუცილებლობა არ იგრძნობა იმ შემთხვევაში, როცა საქმე გვაქვს პროექტებთან, რომელთა შემოსავლიანობა ძალზე ცხადად ჩანს. ასე მაგალითად, ამერიკის შეერთებულ შტატებში მეორე მსოფლიო ომის შემდგომ გარკვეული პერიოდის განმავლობაში წარმოებაში ინვესტირებული კაპიტალის საშუალო მომგებიანობა 20%-ის ფარგლებში იყო და მსხვილ სანავთობო კომპანიებს არ სჭირდებოდათ შეფასებების ფაქიზი და ზუსტი მეთოდების გამოყენება. მხოლოდ 60-იანი წლების დასაწყისისათვის, როცა ახალი ჭაბურღილების

შექმნა უკვე აღარ იწვევდა ასეთ დიდ და სწრაფ მოგებას, გაჩნდა საჭიროება უფრო ზუსტი მეთოდების დახვეწისა.

ნებისმიერი საინვესტიციო თუ სხვა კომერციული პროექტი, როგორც წესი, გულისხმობს თავიდან რაღაც სფეროში (წარმოება, მშენებლობა, ვაჭრობა და სხვ.) კაპიტალის დაბანდებას, შემდგომ კი შემოსავლების მიღებას. ინვესტორის ამოცანაა სხვადასხვა შესაძლო კაპიტალდაბანდებიდან აარჩიოს ყველაზე მომგებიანი და პერსპექტიული. ეს ძალიან რთული ამოცანა და ჩვენ არ გვაქვს პრეტენზია, რომ ამ წიგნში გადავწყვეტთ ყველაფერს. ჩვენი მიზანია ზოგიერთი თეორიული მოდელის აგებისა და შესწავლის საფუძველზე დავადგინოთ რამდენიმე ძირითადი კანონზომიერება და მეთოდი, რომელიც სასარგებლო იქნება მენეჯერებისათვის ამა თუ იმ გადაწყვეტილების მისაღებად. ისიც გასაგებია, რომ შესწავლა უნდა დავიწყოთ შედარებით მარტივი მოდელებიდან, თუმცა თანამედროვე პირობებში საქმე საკმაოდ რთულ სიტუაციებთან გვაქვს ხოლმე. მაგრამ ამ მარტივი მოდელების შესწავლისას უკვე გამოვლინდება ის ზოგადი იდეები და მეთოდები, რომლებიც რთული მოდელებისათვისაც სამართლიანია. ცხადია, რომ ალბათურ-სტატისტიკური მონაცემების გამოყენება უფრო ზუსტად პროგნოზირებას მოგვცემს, მაგრამ ეს ჩვენი წიგნის ფარგლებში არ შედის – ჩვენ მხოლოდ ე.წ. დეტერმინისტულ მოდელებს განვიხილავთ და ამდენად აქ მოყვანილი მეთოდები მხოლოდ პირველ (მაგრამ არცთუ უმნიშვნელო) ნაბიჯებად შეიძლება ჩაითვალოს.

პირველი, რაც უნდა აღინიშნოს, სხვადასხვა ფირმები თავისი გამოცდილებისა და ტრადიციების მიხედვით, გადაწყვეტილების მიღებისას სხვადასხვა დროს იყენებენ საკუთარ მეთოდებს (ხშირად ეს გარკვეულ სუბიექტურ მოსაზრებებთან და ამბიციებთან არის დაკავშირებული). ამასთან ერთად ბოლო წლების განმავლობაში ჩამოყალიბდა საკმაოდ კონკრეტული და დახვეწილი მეთოდები, რომელთა გამოყენებაზე უარს არავინ ამბობს.

საფინანსო ანალიზში გამოყენებული მეთოდები შეიძლება დაიყოს ორ დიდ გუფებად – ერთი ჯგუფის მეთოდები არ ითვალისწინებს დროის ფაქტორს, მეორე კი მნიშვნელოვნად ემყარება მას. ჩვენ

ადრე ვნახეთ, რომ ფინანსების შეფასებისას დროის ფაქტორი საკმაოდ მნიშვნელოვანია, ამიტომ ძირითად ყურადებას მივაქცევთ მეთოდებს, რომლებიც ამას ითვალისწინებს. მით უმეტეს, რომ თანამედროვე მსხვილი და საშუალო ფირმებისათვის ძირითადად გამოიყენება სწორედ ასეთი მეთოდები. მცირე ფირმები მოკლევადიანი პროექტებისათვის მაინც უფრო გამოცდილებას და ინტუიციას აძლევენ უპირატესობას. (ჩვენი აზრით ქვემოთ მოყვანილი კრიტერიუმები არც მათთვის იქნებოდა უსარგებლო).

§ 2. ფინანსური ნაკადის შეფასების პირველი მეთოდი

ფინანსური ნაკადების ყველაზე მარტივი შემთხვევა (ფინანსური რენტა) ჩვენ წინა თავში შევისწავლეთ. ამჯერად ჩვენ შედარებით რთულ ნაკადებთან გვექნება საქმე.

ვთქვათ საინვესტიციო პროექტი იწყება დროის $t_0 = 0$ მომენტში რაღაც $x(0)$ კაპიტალდაბანდებით, ხოლო შემდეგ დროის $t_1, t_2, \dots, t_n$ მომენტებში ხდება $x(t_k)$ ხარჯების და $y(t_k)$ შემოსავლების შესაბამისად გაცემა და მიღება.

შემოვიღოთ შესაბამისი ვექტორ-სტრიქონები

$$
\begin{aligned}
\vec{t} &= (0, t_1, t_2, \dots, t_n),\\
\vec{x} &= (x(0), x(t_1), \dots, x(t_n)),\\
\vec{y} &= (0, y(t_1,), \dots, y(t_n)),
\end{aligned}
$$

ხოლო ხარჯებისა და შემოსავლების ნაკადები ცალ-ცალკე გამოვყოთ და შემოვიღოთ შესაბამისად $p(\vec{t}, \vec{x})$ და $\vec{p}(\vec{t}, \vec{y})$ აღნიშვნები. გასაგებია, რომ თუ შემოვიღებთ $\vec{c} = (c(0), c(t_1), \dots, c(t_n))$ ვექტორს, სადაც $c(0) = -x(0)$, $c(t_1) = y(t_1) - x(t_1), \dots, c(t_n) = y(t_n) - x(t_n)$, მაშინ ორი ნაკადის მაგივრად შეიძლება პირდაპირ სუფთა ნაკადი $p(\vec{t}, \vec{c})$ განვიხილოთ.

$x(t_k)$ და $y(t_k)$ თანხა გაიცემა ან მიიღება t_k მომენტში, ამიტომ მათი თანამედროვე ღირებულება (Present Value) ტოლია შესაბამისად

$$
\mathrm{PV}\, x(t_k) = x(t_k)v(t_k), \qquad \mathrm{PV}\, y(t_k) = y(t_k)v(t_k),
$$

სადაც $v(t_k)$ არის $(0,t_k)$ დროის ინტერვალში დისკონტირების კოეფიციენტი. მაშინ $p(\vec{t},\vec{x})$, $p(\vec{t},\vec{y})$ და $p(\vec{t},\vec{c})$ ნაკადებისათვის მათი თანამედროვე ღირებულებები (ანუ დროის $t_0=0$ მომენტზე დაყვანილი ღირებულებები) გამოითვლება შემდეგი ფორმულების თანახმად:

$$\mathrm{PV}\, p(\vec{t},\vec{x}) = x(0) + \sum_{k=1}^{n} x(t_k)v(t_k),$$

$$\mathrm{PV}\, p(\vec{t},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} y(t_k)v(t_k),$$

$$\mathrm{PV}\, p(\vec{t},\vec{c}) = c(0) + \sum_{k=1}^{n} c(t_k)v(t_k).$$

ცხადია, რომ $\mathrm{PV}\, p(\vec{t},\vec{c}) = \mathrm{PV}\, p(\vec{t},\vec{y}) - \mathrm{PV}\, p(\vec{t},\vec{x})$ და ამ სიდიდეს ეწოდება მოცემული ნაკადის სუფთა თანამედროვე ღირებულება (Netto Present Value). მაშასადამე

$$\mathrm{NPV}\, p(\vec{t},\vec{c}) = -x(0) + \sum_{k=1}^{n} c(t_k)v(t_k). \tag{2.1}$$

ანალოგიურად შეიძლება განისაზღვროს ფინანსური ნაკადის ღირებულება დროის სხვა მომენტებშიც. თუ გვაინტერესებს დროის რაღაც t მომენტისათვის ფინანსური ნაკადის მდგომარეობა, შეიძლება შემოვიღოთ $(0,t)$ ინტერვალში ნაკადის სუფთა დაგროვებული ღირებულების ცნება (Netto Accummulated Value)

$$\mathrm{NAV}_t\, p(\vec{t},\vec{c}) = \sum_{k:t_k\le t} c(t_k)A(t_k,t), \tag{2.2}$$

სადაც ჯამი აიღება იმ ინდექსისათვის, რომელთათვისაც $t_k \le t$, ხოლო $A(t_k,t)$ სიდიდე არის (t_k,t) დროის ინტერვალში დაგროვების კოეფიციენტი. კერძოდ, თუ $t \ge t_n$, მაშინ მიიღება მთელი ნაკადის სუფთა დაგროვებული ღირებულება

$$\mathrm{NAV}_t\, p(\vec{t},\vec{c}) = -x(0) + \sum_{k=1}^{n} c(t_k)A(t_k,t).$$

მაგალითი 1. ვთქვათ ფინანსური პროექტის მიხედვით საჭიროა საწყისი ინვესტიცია: ა) 20000 ლარი; ბ) 24000 ლარი; გ) 29000 ლარი. ხოლო შემოსავლებია: პირველი წლის ბოლოს 10000 ლარი, მეორე წლის ბოლოს 12000 ლარი და მესამე წლის ბოლოს კი 18000 ლარი. ვიპოვოთ სამივე შემთხვევაში პროექტის სუფთა თანამედროვე ღირებულება, თუ პირველ წელს ეფექტური საპროცენტო განაკვეთია 20% წლიური, მეორე წელს 30% წლიური და მესამე წელს კი 40% წლიური.

როგორც ვხედავთ, ამ ფინანსურ ნაკადებში განსხვავებულია $c(0)$ სიდიდე, ხოლო $c(1)$, $c(2)$, $c(3)$ სიდიდეები ერთნაირია.

თუ გამოვითვლით სუფთა თანამედროვე ღირებულებას, მაშინ მივიღებთ, რომ:

ა) შემთხვევაში

$$\mathrm{NPV}\,p = -20000 + \frac{10000}{1,2} + \frac{12000}{1,2 \cdot 1,3} + \frac{18000}{1,2 \cdot 1,3 \cdot 1,4} = 4266;$$

ბ) შემთხვევაში

$$\mathrm{NPV}\,p = -24200 + \frac{10000}{1,2} + \frac{12000}{1,2 \cdot 1,3} + \frac{18000}{1,2 \cdot 1,3 \cdot 1,4} = 266;$$

გ) შემთხვევაში

$$\mathrm{NPV}\,p = -29000 + \frac{10000}{1,2} + \frac{12000}{1,2 \cdot 1,3} + \frac{18000}{1,2 \cdot 1,3 \cdot 1,4} = -4734.$$

როგორც ვხედავთ, ა) შემთხვევაში პროექტის შესრულება აშკარად მომგებიანია, ბ) შემთხვევაში პროექტს თითქმის ნულოვანი მოგება მოაქვს, ხოლო გ) შემთხვევაში კი პროექტი აშკარად წამგებიანია.

ამ მაგალითის გარჩევისას ჩვენ გამოვიყენეთ საინვესტიციო პროექტების შედარების პირველი მეთოდი – **პროექტების სუფთა თანამედროვე ღირებულებების შედარების მეთოდი.** მისი შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს: თუ გვინდა შევადაროთ ერთმანეთს რამდენიმე საინვესტიციო პროექტი, მაშინ საჭიროა დავითვალოთ თითოეული

მათგანისათვის სუფთა თანამედროვე ღირებულება. ამის შემდეგ პირდაპირ უარვყოფთ იმ პროექტებს, რომელთათვისაც სუფთა თანამედროვე ღირებულება უარყოფითია. დარჩენილი პროექტების განხილვა უფრო დეტალურად შეიძლება. იმ პროექტებს, რომელთათვისაც სუფთა თანამედროვე ღირებულება დადებითია, მაგრამ ნულთან ახლოსაა (ზემოთ განხილული მაგალითისათვის ბ) შემთხვევაში $\mathrm{NPV} = 266 > 0$, მაგრამ 266 ლარი 24000 ლართან შედარებით შეიძლება თითქმის ნულად ჩაითვალოს), ეწოდებათ საშუალო საბაზრო პირობების შესაბამისი პროექტები. ადვილი დასანახია, რომ ძალიან "მომხიბლავი" არც ასეთი პროექტებია.

მაგალითის გარჩევისას ჩვენ ჩავთვალეთ, რომ შემოსავალი მთლიანად შემოდიოდა წლის ბოლოს. მსგავსი სიტუაცია ხშირად შეგვხვდება ამოცანებში და სასწავლო მიზნებისათვის სავსებით მისაღებია. ამასთან უნდა აღინიშნოს, რომ პრაქტიკაში საკმაოდ ხშირია ისეთი შემთხვევები, როცა შემოსავალი შემოდის არა ერთდროულად, არამედ გაწელილია დროში – მაგალითად წლის განმავლობაში თანაბრად შემოდის ყოველთვიურად, ყოველკვირეულად. ასეთი შემთხვევების განხილვისას უფრო ზუსტი შედეგების მიღება შეიძლება, თუ ჩავთვლით, რომ წლიური შემოსავალი შემოვიდა წლის შუაში და მაშინ მთელი ნაკადის თანამედროვე ღირებულება რამდენადმე შეიცვლება. ასე მაგალითად, თუ ხელახლა უკვე ასეთი მიდგომით დავუბრუნდებით ზემოთ განხილულ მაგალითს, მაშინ სუფთა თანამედროვე ღირებულება ტოლი იქნება:

ა) შემთხვევაში

$$\mathrm{NPV} = -20000 + \frac{10000}{1,2}\sqrt{1,2} + \frac{12000}{1,2\cdot 1,3}\sqrt{1,3} + \\ + \frac{18000}{1,2\cdot 1,3\cdot 1,4}\sqrt{1,4} = 7651.$$

ბ) შემთხვევაში

$$\mathrm{NPV} = -24000 + \frac{10000}{1,2}\sqrt{1,2} + \frac{12000}{1,2\cdot 1,3}\sqrt{1,3} +$$

$$+\frac{18000}{1,2\cdot 1,3\cdot 1,4}\sqrt{1,4}=3651;$$

გ) შემთხვევაში

$$\text{NPV}=-29000+\frac{10000}{1,2}\sqrt{1,2}+\frac{12000}{1,2\cdot 1,3}\sqrt{1,3}+$$
$$+\frac{18000}{1,2\cdot 1,3\cdot 1,4}\sqrt{1,4}=-1349.$$

როგორც ვხედავთ მნიშვნელობები რამდენადმე შეიცვალა (თუმცა დალაგების რიგი იგივე რჩება).

შენიშვნა. ამ პარაგრაფში ჩვენი შევისწავლეთ ფინანსური ნაკადების დისკრეტული მოდელების შეფასებები სუფთა თანამედროვე ღირებულებების კრიტერიუმის მიხედვით. დისკრეტული მოდელების გარდა არსებობს უწყვეტი მოდელებიც (სადაც პროცენტების დარიცხვა და დისკონტირება ხდება უწყვეტად) და ე.წ. შერეული მოდელებიც (დისკრეტულ-უწყვეტი მოდელები). ჩვენ შეგნებულად ვარიდებთ თავს ასეთი მოდელების აქ განხილვას, რათა თავიდან ავიცილოთ წიგნის მათემატიკური გართულება.

ამოცანები. 1. საინვესტიციო პროექტი სამწლიანია. პირველი წლის დასაწყისში საჭიროა 24000 ლარის ინვესტიცია, მესამე წლის დასაწყისში კიდევ 8000 ლარის ინვესტიცია. შემოსავლები შეადგენს შესაბამისად პირველი წლის ბოლოს 10000 ლარს, მეორე წლის ბოლოს 14000 ლარს და მესამე წლის ბოლოს კი 16000 ლარს. იპოვეთ პროექტის სუფთა თანამედროვე ღირებულება, თუ წლიური საპროცენტო განაკვეთია: ა) 20%; ბ) 30%; გ) 50%. როგორ შეიცვლება პასუხები, თუ შემოსავლები წლის განმავლობაში თანაბრად შემოდის?

2. საინვესტიციო პროექტი ოთხწლიანია. საწყისი კაპიტალდაბანდება 40000 ლარის ტოლია, შემდეგ კი მესამე წლის დასაწყისში კიდევ საჭიროა 10000 ლარის კაპიტალდაბანდება. პირველი წლის ბოლოს შემოსავალია 8000 ლარი, მეორე წლის ბოლოს 14000 ლარი, მესამე

წლის ბოლოს 19000 ლარი და სულ ბოლოს კი 30000 ლარი. წლიური საპროცენტო განაკვეთებია: ა) ოთხივე წლის განმავლობაში 10% წლიური; ბ) ოთხივე წლის განმავლობაში 20% წლიური; გ) პირველი ორი წლის განმავლობაში წლიური 10%, შემდეგი ორი წლის განმავლობაში 20% წლიური. იპოვეთ პროექტის სუფთა პროექტის სუფთა თანამედროვე ღირებულება. როგორ შეიცვლება პასუხი, თუ შემოსავლები წლის განმავლობაში თანაბრად შემოდის?

3. პროექტის მიხედვით ინვესტიციები უნდა განხორციელდეს სამი წლის განმავლობაში შემდეგი წესით: საწყისი ერთდროული ინვესტიცია 5000 ლარია; მეორე წლის განმავლობაში 10000 ლარი თანაბრად, მესამე წლის დასაწყისში 3000 ლარი ერთდროულად. დაგეგმილია შემოსავლები 15 წლის განმავლობაში შემდეგი წესით: პირველი სამი წლის განმავლობაში ყოველი წლის ბოლოს 2000 ლარი, შემდეგი 10 წლის განმავლობაში ყოველი წლის ბოლოს 6000 ლარი და ბოლო წლების განმავლობაში კი ყოველი წლის ბოლოს 3000 ლარი. იპოვეთ პროექტის სუფთა თანამედროვე ღირებულება. როგორ შეიცვლება პასუხი, თუ შემოსავლები წლის განმავლობაში თანაბრად შემოდის?

§ 3. საინვესტიციო პროექტის შემოსავლიანობის შინაგანი ნორმა

წინა პარაგრაფში ჩვენ შემოვიღეთ საინვესტიციო სუფთა თანამედროვე ღირებულების ცნება და მისი გამოყენების მეთოდი. გავიხსენოთ, რომ $p(\vec{t}, \vec{c})$ ნაკადის სუფთა თანამედროვე ღირებულება გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\mathrm{NPV}\, p(\vec{t}, \vec{c}) = c(0) + \sum_{k=1}^{n} c(t_k) v(t_k),$$

სადაც $c(0) = -x(0) < 0$ და $v(t_k)$ არის დროის $(0, t_k)$ ინტერვალზე დისკონტირების კოეფიციენტი. როგორც ვიცით ეს კოეფიციენტი გამოისახება შესაბამისი საპროცენტო განაკვეთის საშუალებით.

თუ $\mathrm{NPV}\, p(\vec{t}, \vec{c}) < 0$, მაშინ პროექტი ცალსახად მიუღებელია. აქედან გამომდინარე, თუ საპროცენტო განაკვეთი ნულის ტოლია და ე.ი. $v = 1$ (რაც ბუნებრივია არაა რეალური), მაშინ NPV-ს მნიშვნელობა რეალურზე მეტია და თუ ისიც კი უარყოფითია, მაშინ პროექტის განხილვის დაწყებასაც კი არა აქვს აზრი. მაშასადამე, პირველი რაც უნდა შევამოწმოთ პროექტზე მუშაობის დაწყებისას, უნდა დავითვალოთ სიდიდე

$$\sum_{k=0}^{n} c(t_k),$$

და თუ ეს სიდიდე უარყოფითია, პროექტის განხილვაც კი არაა საჭირო (ეს ის შემთხვევაა, როცა გაცემული თანხების ნომინალური სიდიდე მეტია შემოსული თანხების ნომინალურ სიდიდეზე).

ვთქვათ ახლა $\sum\limits_{k=0}^{n} c(t_k) > 0$. მაშინ აზრი აქვს დავითვალოთ სუფთა თანამედროვე ღირებულება

$$c(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{c(t_k)}{(1+r)^{t_k}} = \mathrm{NPV}\, p(\vec{t}, \vec{c})$$

(ჩავთვალოთ, რომ საპროცენტო განაკვეთი მუდმივია).

თუ ამ გამოსახულებაში r იზრდება და საკმაოდ დიდი ხდება, ჩანს, რომ NPV იწყებს კლებას. ამასთან

$$\lim_{r \to \infty} \mathrm{NPV}\, p(\vec{t}, \vec{c}) = c(0) < 0.$$

ეს ბოლო ტოლობა ნიშნავს, რომ საკმაოდ დიდი საპროცენტო განაკვეთების შემთხვევაში (რაც შეესაბამება ჰიპერინფლაციას) პრაქტიკულად არ არსებობს რამდენადმე მომგებიანი პროექტი.

რაკი თავიდან $\mathrm{NPV} > 0$ ($r = 0$-სთვის) და მერე r-ის ზრდის შედეგად ხდება უარყოფითი, ცხადია ის სადღაც გახდება ნულის

ტოლი. განვიხილოთ შესაბამისი განტოლება

$$c(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{c(t_k)}{(1+r)^{t_k}}=0. \tag{3.1}$$

(3.1) განტოლების ამონახსნი აღვნიშნოთ r_0 სიმბოლოთი. შინაარსის მიხედვით ესაა ისეთი საპროცენტო განაკვეთი, რომლის დროსაც პროექტში ჩადებული ინვესტიციები ზუსტად ანაზღაურდება. r_0 სიდიდეს საინვესტიციო პროექტის **შემოსავლიანობის შინაგანი ნორმა** ეწოდება.

განვიხილოთ r_0-ის თვისებები შემდეგი კუთხით: რა მოხდება, როცა $r<r_0$ ან $r>r_0$?

ადვილი დასანახია, რომ თუ $r>r_0$, მაშინ პროექტის NPV <0 და პროექტი არაა მისაღები. თუკი $r<r_0$, მაშინ NPV >0 და პროექტის განხილვა შესაძლებელია. ამასთან გასაგებია, რომ რაც უფრო დიდია სხვაობა r_0-r, მით უფრო კარგია პროექტი. ამ დაკვირვებიდან გამომდინარეობს საინვესტიციო პროექტების **შეფასების კიდევ ერთი მეთოდი**: ვთქვათ ვადარებთ ერთმანეთს რამდენიმე პროექტს. მაშინ უნდა დავითვალოთ თითოეულისათვის შემოსავლიანობის შინაგანი ნორმა IRR (Internal Rate of Return) და მათ შორის ავარჩიოთ უდიდესი. შესაბამისი პროექტი ამ კრიტერიუმის მიხედვით საუკეთესო იქნება.

მაგალითი 1. ვთქვათ რომელიღაც n-წლიანი პროექტის დასაწყისში კეთდება რაღაც S ინვესტიცია, ყოველი წლის ბოლოს მოსალოდნელია αS შემოსავალი და სულ ბოლოს კი დამატებითი საწყისი ინვესტიციის დაბრუნებაც. ვიპოვოთ ასეთი პროექტის შემოსავლიანობის შინაგანი ნორმა.

ამ პროექტში $c(0)=-S$, $c(1)=c(2)= \quad =c(n-1)=\alpha S$ და $c(n)=(\alpha+1)S$. მაშინ r_0-ის გამოსათვლელად უნდა ამოვხსნათ განტოლება

$$-s+\alpha s\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^k}+\frac{s}{(1+r)^n}=0. \tag{3.2}$$

აქედან მიიღება მისი ექვივალენტური განტოლება

$$(1+r)^n - 1 = \alpha \sum_{k=1}^{n} (1+r)^{k-1},$$

რადგან $\sum_{k=1}^{n} (1+r)^{k-1} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$, ამიტომ

$$r(1+r)^n - r = \alpha(1+r)^n - \alpha,$$

საიდანაც საბოლოოდ მიიღება

$$(r-\alpha)\left[(1+r)^n - 1\right] = 0.$$

ცხადია, რომ ამ განტოლების ამონახსნებია $r_0 = 0$ (რაც ტრივიალურ და არარეალურ შემთხვევად მიიჩნევა და არ წარმოადგენს საწყისი განტოლების ამონახსნს) და $r_0 = \alpha$.

მაშასადამე მოყვანილი პროექტის შემოსავლიანობის შინაგანი ნორმა ტოლია α სიდიდის.

შენიშვნა. ზემოთ მოყვანილი პროექტის ინტერპრეტაცია შეიძლება სხვაგვარადაც. ვთქვათ S რაოდენობის კრედიტი აღებულია n წლით და მისი დაბრუნების გრაფიკი შემდეგია: ყოველი წლის ბოლოს ბრუნდება αS თანხა, ბოლოს კი მთლიანი ვალიც. მაშინ ყოველი წლის ბოლოს დასაბრუნებელი ერთნაირი αS თანხა წარმოადგენს რენტას და r ნორმის საძიებლად მიიღება განტოლება

$$s = \alpha s a_{\overline{n}|r} + \frac{s}{(1+r)^n},$$

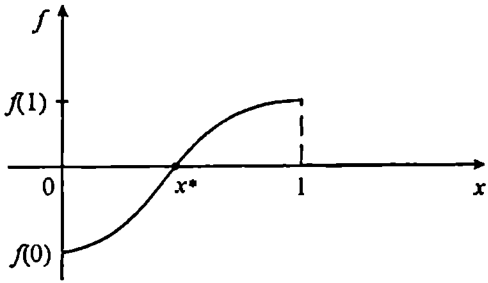
რაც ცხადია (3.2) განტოლების ტოლფასია.

ზემოთ გარჩეულ მაგალითში ჩვენ მოვახერხეთ ძირითადი განტოლების ამონახსნის მოძებნა ცხადი სახით ანალიზური მეთოდებით. ამის გაკეთება ყოველთვის ვერ ხერხდება (უფრო სწორედ ძალიან იშვიათად ხერხდება). მაშინ საჭიროა განტოლების ამოხსნა მიახლოებით. შემდეგ პარაგრაფში სწორედ ამ საკითხებზე გვექნება ლაპარაკი.

§ 4. განტოლებების მიახლოებითი (რიცხვითი) ამოხსნა

წინა პარაგრაფში აღვნიშნეთ, რომ საინვესტიციო პროექტის შემოსავლიანობის შინაგანი ნორმის საპოვნელად საჭირო ხდება ალგებრული განტოლების $f(x) = 0$ ამოხსნა, რაც ხშირად ანალიტიკური მეთოდებით ცხადი სახით არ ხერხდება. ამიტომ ამჯერად ჩვენ მოვიყვანთ ალგებრული განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნის ორ მარტივ ხერხს. როგორც წესი ეს ხერხები სავსებით საკმარისი აღმოჩნდება მიზნის მისაღწევად.

ვთქვათ გვინდა ამოვხსნათ $f(x) = 0$ განტოლება $[0,1]$ შუალედში (როგორც წესი რეალური პროექტების განხილვისას $r_0 < 1$). ცნობილია, რომ $f(0) < 0$ და $f(1) > 0$, ამასთან განტოლებას ამ შუალედში მხოლოდ ერთი ამონახსნი აქვს. რადგან f ფუნქცია უწყვეტია (განტოლება საერთოდ მრავალწევრების სახით შეიძლება ჩაიწეროს), ამიტომ მისი გრაფიკი დაახლოებით შემდეგი სახისაა:



მაშასადამე უნდა ვიპოვოთ გრაფიკის მიერ $0x$ ღერძის გადაკვეთის x^* წერტილი. ამასთან ცხადია, რომ ჩვენ ვეძებთ x^*-ის მნიშვნელობას რაღაც სიზუსტით. ეს სიზუსტე თავიდანვე უნდა ავარჩიოთ და მას h_0 ვუწოდოთ. ჩვენს მიერ განხილულ მაგალითებში მათი ეკონომიკურ შინაარსიდან გამომდინარე, როგორც წესი საკმარისია h_0 ავიღოთ $0,01$-ის ან $0,001$-ის ტოლად.

განვიხილოთ განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის ორი ყველაზე მარტივი ხერხი. თანაბარი დანაწევრების მეთოდი და შუაზე დაყოფის

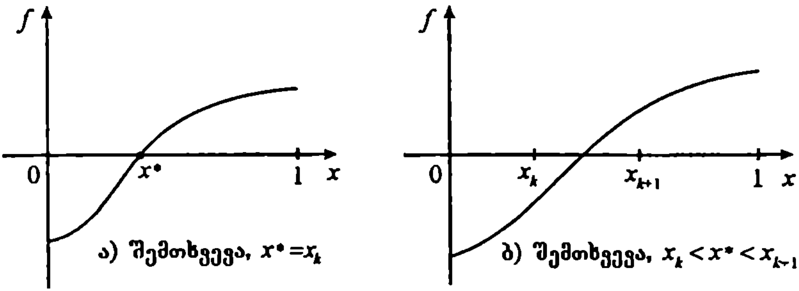
(ანუ დიხოტომიის) მეთოდი. ორივე ეს მეთოდი ერთ იდეაზეა დამყარებული და ერთმანეთისაგან განსხვავდება სასურველი შედეგის მისაღებად ჩატარებული გამოთვლების რაოდენობის მიხედვით.

A. თანაბარი დანაწევრების მეთოდი. განტოლების ამოხსნა იყოფა რამდენიმე ეტაპად და აღვწეროთ თითოეული მათგანი.

1. ამ ეტაპზე მონაკვეთი, რომელზეც ვეძებთ ამონახსნს (და თავიდან ესაა $[0,1]$ მონაკვეთი) იყოფა 10 ტოლ ნაწილად. მიიღება $x_0 = 0$, $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,2, \dots, x_9 = 0,9$ და $x_{10} = 1$ წერტილები გამოვითვლით f ფუნქციის მნიშვნელობებს $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{10})$. ამ დროს განვიხილავთ ორ შესაძლო შემთხვევას.

ა) რომელიღაც $|f(x_k)| < h_0$, მაშინ ამოხსნა მთავრდება და x^* შეიძლება ჩავთვალოთ x_k-ის ტოლად (ასეთი "გამართლება" იშვიათად ხდება);

ბ) $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{10})$ მნიშვნელობებს შორის ვირჩევთ ორ მომდევნოს, რომელთაც აქვთ განსხვავებული ნიშანი. ვთქვათ ესენია $f(x_k)$ და $f(x_{k+1})$. მაშინ ამონახსნი $[x_k, x_{k+1}]$ მონაკვეთზეა.



ა) შემთხვევა, $x^* = x_k$ ბ) შემთხვევა, $x_k < x^* < x_{k+1}$

2. ამ ეტაპზე მოთხოვნილი სიზუსტე h_0 უნდა შევადაროთ წინა ეტაპზე გამოყენებულ სიზუსტეს $h = (x_{k+1} - x_k)$. (თავიდან ეს იყო $0,1$). აქ შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

ა) თუ $h_0 \geq h$, მაშინ ამოხსნა დამთავრებულია და შეიძლება ჩავთვალოთ $x^* = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$;

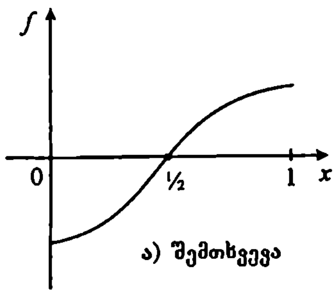
ბ) თუ $h_0 < h$, მაშინ ამოხსნა გრძელდება შემდეგნაირად: ამ ეტაპზე არჩეული მონაკვეთია $[x_k, x_{k+1}]$. ახლა უკვე ამ მონაკვეთს ვყოფთ 10 ტოლ ნაწილად და ვიმეორებთ 1. პუნქტში ჩამოთვლილ

ყველა ოპერაციას.

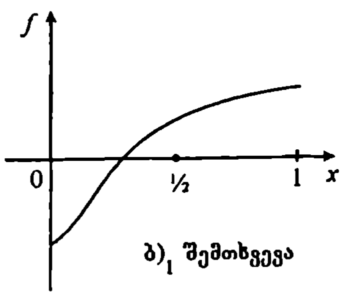
გასაგებია, რომ ასეთი განმეორებითი პროცედურები (ანუ ოპერაციები) უნდა გაგრძელდეს მანამდე, სანამ არ იქნება მიღწეული საჭირო სიზუსტე. მაგალითად: თუ $h_0 = 0,01$, მაშინ საკმარისი იქნება ორი იტერაცია და თითოეულს იტერაციაზე 10 10 მნიშვნელობის გამოთვლა; თუ $h_0 = 0,001$, მაშინ საკმარისი იქნება 3 იტერაცია.

B. დიხოტომის ანუ შუაზე დაყოფის მეთოდი. აქაც განტოლების ამოხსნა ხდება ეტაპობრივად (იტერაციებით) და აღვწეროთ თითოეული მათგანი.

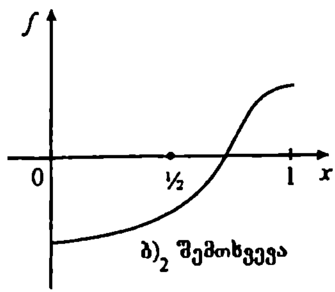
1. ამ ეტაპზე საწყისი მონაკვეთი იყოფა შუაზე და მიიღება სამი წერტილი $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$, ვითვლით $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$ სიდიდეებს. შესაძლებელია ორი შემთხვევა.



ა) შემთხვევა



ბ)$_1$ შემთხვევა



ბ)$_2$ შემთხვევა

ა) თუ $|f(x_1)| \le h_0$, მაშინ ამოხსნა მთავრდება და შეიძლება ჩაითვალოს, რომ $x^* = x_1$;

ბ) თუ $f(x_1) > 0$, მაშინ ძიება გრძელდება $[x_0, x_1]$ მონაკვეთზე; ხოლო თუ $f(x_1) < 0$, მაშინ ძიება გრძელდება $[x_1, x_2]$ მონაკვეთზე.

2. ამ ეტაპზე ვადარებთ წინა ეტაპზე დაზუსტებული მონაკვეთის h სიგრძეს (თავიდან ესაა $\frac{1}{2}$, მერე კი $\frac{1}{2^n}$) h_0 სიზუსტეს. თუ $h \le h_0$, მაშინ ამონახსნად შეიძლება ჩაითვალოს წინა ეტაპზე დადგენილი მონაკვეთის შუაწერტილი. თუ $h > h_0$, მაშინ ძიება გრძელდება არჩეულ მონაკვეთზე და მეორდება 1 ეტაპზე აღწერილი გამოთვლები.

გასაგებია, რომ პროცესი გაგრძელდება მანამდე, სანამ არ იქნება მიღწეული საჭირო სიზუსტე. მაგალითად: თუ $h_0 = 0,01$, მაშინ საკმარისი იქნება 7 იტერაცია, ხოლო $h_0 = 0,001$-სთვის კი 10 იტერაცია. თუმცა წინა მეთოდთან შედარებით აქ იტერაციების რაოდენობა იზრდება, სამაგიეროდ თითოეული ახალი იტერაციისათვის საჭირო ხდება მხოლოდ ერთი ახალი გამოთვლის ჩატარება.

გამოვიყენოთ ზემოთ აღწერილი მეთოდები კონკრეტული ამოცანის ამოსახსნელად.

მაგალითი 1. ვთქვათ საინვესტიციო პროექტი ითვალისწინებს 5000 ლარის საწყის ინვესტიციას, შემდეგ მეორე წლის დასაწყისში კიდევ 3000 ლარის ინვესტიციას და მეოთხე წლის ბოლოს 12000 ლარის შემოსავალს. ვიპოვოთ პროექტის შემოსავლიანობის შინაგანი ნორმა.

შევადგინოთ ჯერ პროექტის შესაბამისი ცხრილი:

t_k	0	1	2	3	4
$c(t_k)$	-5	0	-3	0	12

ამ ცხრილში დროის ყოველ მომენტს შეესაბამება თანხა, უარყოფითი ნიშნავს გასავალს, ხოლო დადებითი შემოსავალს.

შემოსავლიანობის შინაგანი ნორმის მოსაძებნად უნდა ამოვხსნათ განტოლება

$$-5000 - \frac{3000}{(1+r)^2} + \frac{12000}{(1+r)^4} = 0,$$

ანუ განტოლება

$$5(1+r)^4 + 3(1+r)^2 - 12 = 0.$$

ამოვხსნათ ეს განტოლება სამი ხერხით (აქ ეს შესაძლებელია).

1. ანალიზურად. განტოლება ბიკვადრატულია, ამიტომ თუ აღვნიშნავთ $(1+r)^2 = y$, მიიღება განტოლება $5y^2+3y-12 = 0$. მისი ამონახსნებია $y = \frac{-3\pm\sqrt{9+240}}{10}$. ამიტომ $1 + r_0 = \sqrt{1,2780} = 1,1305$ და $r_0 = 0,1305$.

2. თანაბარი დანაწევრებით. $f(x) = 5(1+x)^4+3(1+x)^2-12$.

ა) ავიღოთ $x_0 = 0$, $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,2, \ldots, x_{10} = 1$. მაშინ $f(0) = -4$, $f(0,1) = 7,3205 + 3,63 - 12 = -1,0495$, $f(0,2) = 10,368 + 4,32 - 12 = 2,688$. მაშასადამე ამონახსნი არის $[\frac{1}{10}; \frac{2}{10}]$ შუალედში.

ბ) ავიღოთ $x_0 = 0,1$, $x_1 = 0,11$, $x_2 = 0,12, \ldots, x_{10} = 0,2$. მაშინ $f(0,1) = -1,0495$, $f(0,11) = 7,5904 + 3,6963 - 12 = -0,7133$, $f(0,12) = 7,8676 + 3,7632 - 12 = -0,3692$, $f(0,13) = 8,1524 + 3,8307 - 12 = 0,0169$, $f(0,14) = 8,4449 + 3,8988 - 12 = 0,2837$. მაშასადამე ამონახსნი არის $[0,13; 0,14]$ შუალედში.

გ) ავიღოთ $x_0 = 0,13$, $x_1 = 0,131$, $x_2 = 0,132, \ldots, x_0 = 0,14$. მაშინ $f(0,13) = -0,0169$, $f(0,131) = 8,1813 + 3,8375 - 12 = 0,0188$. მაშასადამე ამონახსნი არის $[0,13; 0,131]$ შუალედში. თუ საჭირო სიზუსტედ ავიღებთ 0,001-ს, მაშინ ამონახსნია $r_0 = 0,1305$.

3. დიხოტომიით. $f(x) = 5(1+x)^4 + 3(1+x)^2 - 12$.

ა) ავიღოთ $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$. მაშინ $f(0) = -4$, $f(0,5) = 25,3125 + 6,75 - 12 = 20,0625$. მაშასადამე ამონახსნი არის $[0; 0,5]$ შუალედში.

ბ) ავიღოთ $x_0 = 0$, $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$. მაშინ $f(0) = -4$, $f(0,25) = 12,2070 + 4,6875 - 12 = 4,8945$. მაშასადამე ამონახსნი არის $[0; 0,25]$ შუალედში.

გ) ავიღოთ $x_0 = 0$, $x_1 = 0,125$, $x_2 = 0,25$, მაშინ $f(0) = -4$, $f(0,125) = 8,009 + 3,7969 - 12 = -0,1941$. მაშასადამე ამონახსნი არის $[0,125; 0,25]$ შუალუდში.

დ) ავიღოთ $x_0 = 0,125$, $x_1 = 0,1875$, $x_2 = 0,25$, მაშინ $f(0,125) = -0,1941$, $f(0,1375) = 9,9427 + 4,2305 - 12 = 2,1732$. მაშასადამე ამონახსნი არის $[0,125; 0,1875]$ შუალედში.

ე) ავიღოთ $x_0 = 0,125$, $x_1 = 0,15625$, $x_2 = 0,1875$. მაშინ $f(0,125) = -0,1941$, $f(0,15625) = 8,9367+4,0107-12 = 0,9474$.

მაშასადამე ამონახსნი არის $[0,125; 0,15625]$ შუალედში.

ვ) ავიღოთ $x_0 = 0,125$, $x_1 = 0,140625$, $x_2 = 0,15625$. მაშინ $f(0,125) = -0,1941$, $f(0,140625) = 8,4633 + 3,9031 - 12 = 0,3664$. მაშასადამე ამონახსნი არის $[0,125; 0,140625]$ შუალედში.

ზ) ავიღოთ $x_0 = 0,125$, $x_1 = 0,1328125$, $x_2 = 0,140625$. მაშინ $f(0,125) = -0,1941$, $f(0,1328125) = 8,2339 + 3,8498 - 12 = 0,0837$. მაშასადამე ამონახსნი არის $[0,125; 0,1328125]$ შუალედში.

თ) ავიღოთ $x_0 = 0,125$, $x_1 = 0,12890625$, $x_2 = 0,1328125$. მაშინ $f(0,125) = -0,1941$, $f(0,12890625) = 8,1209 + 3,8233 - 12 = -0,0558$. მაშასადამე ამონახსნი არის $[0,12890625; 0,1328125]$ შუალედში.

ი) ავიღოთ $x_0 = 0,12890625$, $x_1 = 0,13086$, $x_2 = 0,1328125$. მაშინ $f(0,12890625) = -0,0558$, $f(0,13086) = 8,1772 + 3,8365 - 12 = 0,0137$. მაშასადამე ამონახსნი არის $[0,12890625; 0,13086]$ შუალედში.

კ) ავიღოთ $x_0 = 0,1289$, $x_1 = 0,13$, $x_2 = 0,13086$. მაშინ $f(0,1289) = -0,055$, $f(0,13) = 8,15237+3,8307-12 = -0,01693$ და ამონახსნი არის $[0,13; 0,13086]$ შუალედში.

რადგან ამ შუალედის სიგრძე $0,001$-ზე ნაკლებია, ამიტომ ამონახსნად შეიძლება ჩავთვალოთ მისი შუაწერტილი $r_0 = 0,13043$.

შენიშვნა. პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნისას, რა თქმა უნდა, არაა აუცილებელი ყველა ხერხის გამოყენება. საკმარისია ერთი რომელიმე ხერხით ამოხსნა.

ამოცანები. 1. საინვესტიციო პროექტი მოცემულია ცხრილით:

t_k, წლები	0	1	2	3	4
$c(t_k)$, ათასი ლარი	-10	-4	0	6	15

იპოვეთ მისი შემოსავლიანობის შინაგანი ნორმა.

2. საინვესტიციო პროექტი მოცემულია ცხრილით:

t_k, წლები	0	1	2	3	4	5
$c(t_k)$, ათასი ლარი	-10	-4	-2	4	8	12

იპოვეთ მისი შემოსავლიანობის შინაგანი ნორმა.

3. საინვესტიციო პროექტი მოცემულია ცხრილით:

t_k, წლები	0	1	2	3	4	5
$c(t_k)$, ათასი ლარი	−20	−10	−6	10	14	24

იპოვეთ მისი შემოსავლიანობის შინაგანი ნორმა.

§ 5. საინვესტიციო პროექტის გამოსყიდვის ვადა

საინვესტიციო პროექტის შეფასებისას კიდევ ერთი ძირითადი მაჩვენებელია პროექტის გამოსყიდვის ვადა, ანუ ვადა, რომლის განმავლობაშიც მოსალოდნელია პროექტში ჩადებული ინვესტიციების ამოღება (ამ ვადის შემდეგ პროექტი უკვე მოგებაზე მუშაობს). ეს ვადა შეიძლება ორნაირად გამოვითვალოთ.

პროექტის გამოსყიდვის ვადა უხეში შეფასებით (Payback Period) არ ითვალისწინებს თანხების ღირებულების ცვლილებას დროის მიხედვით, ხოლო პროექტის გამოსყიდვის დაზუსტებული ვადა (Present Value Payback Period) კი ითვალისწინებს.

განვიხილოთ პროექტი, რომელიც მოცემულია ცხრილით:

t_k	0	1	2		l	$l+1$	$l+2$		n
$c(t_k)$	c	c_1	c_2		c_l	c_{l+1}	c_{l+2}		c_n

და ჩავთვალოთ, რომ $c_0 < 0,\ c_1 < 0, \ldots, c_l < 0,\ c_{l+1} > 0,\ c_{l+2} > 0, \ldots, c_n > 0$ (ანუ თავიდან კეთდება ინვესტიციები და l წლის შემდეგ იწყება შემოსავლები).

პროექტის გამოსყიდვის ვადა უხეში შეფასებით (PP) არის ის m, რომლისთვისაც

$$\sum_{i=0}^{m-1} c_i < 0 \le \sum_{i=0}^{m} c_i$$

(ანუ ესაა ის ნომერი, როცა შემოსავლების ჯამი გადააჭარბებს ინვესტიციების მთლიან თანხას).

პროექტის გამოსყიდვის დაზუსტებული ვადა (PVPP) არის ის m, რომლისთვისაც სამართლიანია უტოლობები

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{c_i}{(1+r)^i} < 0 \le \sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{(1+r)^i}.$$

ადვილი დასანახია, რომ PP < PVPP (მოგებები უფრო გვიან იწყება, ვიდრე ხარჯები, ამიტომ დისკონტირებისას მათი ღირებულება უფრო მეტად მცირდება).

პროექტის გამოსყიდვის ვადის შეფასება ფირმისათვის შესაძლოა ფრიად მნიშვნელოვანი იყოს. შესაძლოა ფირმამ უარი თქვას მომხიბლავ მომგებიან პროექტზე, თუ ამ პროექტის მიხედვით თანხების ამოღება ვერ ხერხდება ფირმისათვის აუცილებელი თარიღისათვის.

მაგალითი 1. საინვესტიციო პროექტი მოცემულია ცხრილით:

t_k, წლები	0	1	2	3	4	5	6
c_k, ათასი ლარი	-10	-6	-2	4	14	18	30

ვიპოვოთ ამ პროექტის გამოსყიდვის ვადის ორივე მნიშვნელობა, თუ $r = 20\%$.

ა) უხეში შეფასება. ადვილი გამოსათვლელია ჯამები $\sum_{i=0}^{m} c_i$. გამოვითვალოთ ეს ჯამები და შევადგინოთ ახალი ცხრილი:

t_k	0	1	2	3	4	5	6
c_k	-10	-6	-2	4	14	18	30
$\sum_{i=1}^{k} c_i$	-10	-16	-18	-14	0	18	30

აქედან ჩანს, რომ პროექტის გამოსყიდვის ვადა PP = 4.

ბ) დაზუსტებული შეფასება. ამ შემთხვევაში მოგვიწევს თითოეული k-სთვის დისკონტირებული თანხის ღირებულების გამოთვლა $\frac{c_k}{(1+r)^k}$ ფორმულით და მერე მათი ჯამების დათვლა. შედგება შემდეგი ცხრილი:

t_k	0	1	2	3	4	5	6
c_k	-10	-6	-2	4	14	18	30
$\frac{c_k}{(1+r)^k}$	-10	-5	$-1,39$	$2,31$	$6,75$	$7,29$	$10,05$
$\sum \frac{c_k}{(1+r)^k}$	-10	-15	$-16,39$	$-14,08$	$-7,33$	$-0,1$	$10,4$

აქედან ჩანს, რომ პროექტის გამოსყიდვის დაზუსტებული ვადა PVPP ოდნავ მეტია 5 წელიწადზე.

ამოცანები. 1. საინვესტიციო პროექტი მოცემულია ცხრილით:

t_k	0	1	2	3	4	5	6	7
c_k	-100	5	10	20	40	80	160	320

იპოვეთ მისი გამოსყიდვის ორივე ვადა, თუ $r = 10\%$.

2. საინვესტიციო პროექტი მოცემულია ცხრილით:

t_k	0	1	2	3	4	5	6	7
c_k	-200	-200	20	40	80	160	320	640

იპოვეთ მისი გამოსყიდვის ორივე ვადა, თუ $r = 15\%$.

3. საინვესტიციო პროექტი მოცემულია ცხრილით:

t_k	0	1	2	3	4	5	6	7
c_k	-200	-100	10	30	120	180	200	400

იპოვეთ მისი გამოსყიდვის ორივე ვადა, თუ $r = 10\%$.

§ 6. საინვესტიციო პროექტის რენტაბელობის ინდექსი

ბოლო კრიტერიუმი, რომელსაც ჩვენ განვიხილავთ, არის პროექტის რენტაბელობის ინდექსის კრიტერიუმი. პროექტის გამოსყიდვის ვადის მსგავსად, რენტაბელობის ინდექსიც ორნაირად ითვლება.

განვიხილოთ ისევ ცხრილის სახით ჩაწერილი პროექტი:

t_k	0	1	2		$n-1$	n
c_k	c_0	c_1	c_2		c_{n-1}	c_n

გამოვყოთ c_i სიდიდეებს შორის უარყოფითები და დადებითები ცალ-ცალკე.

საინვესტიციო პროექტის **რენტაბელობის ინდექსი უხეში შეფასებით** (RI) ეწოდება შეფარდებას

$$\mathrm{RI} = \sum_{c_k>0} c_k \Big/ \sum_{c_k<0} |c_k|\,,$$

და წარმოადგენს ყველა შემოსავლის ჯამის შეფარდებას ყველა ინვესტიციის ჯამთან.

საინვესტიციო პროექტის რენტაბელობის დაზუსტებული ინდექსი (PVRL) ეწოდება შეფარდებას

$$\text{PVRI} = \sum_{c_k > 0} \frac{c_k}{(1+r)^k} \Big/ \sum_{c_k < 0} \frac{|c_k|}{(1+r)^k}$$

და წარმოადგენს დისკონტირებული შემოსავლების ჯამის შეფარდებას დისკონტირებული ინვესტიციების ჯამთან.

გასაგებია, რომ თუ რენტაბელობის ინდექსი ნაკლებია 1-ზე, მაშინ პროექტი არაა მისაღები (ამ დროს ცხადია პროექტის სუფთა თანამედროვე ღირებულება $\text{NPV} < 0$).

მაგალითი 1. განვიხილოთ საინვესტიციო პროექტი, რომელიც შემდეგი ცხრილითაა მოცემული:

t_k, წლები	0	1	2	3	4	5	6
c_k, ათასი ლარი	-10	-6	1	8	10	14	18

და ვიპოვოთ მისი რენტაბელობის ინდექსი, თუ $r = 30\%$.

ა) თუ გვინდა ვიპოვოთ რენტაბელობის ინდექსი უხეში შეფასებით, მაშინ

$$\text{RI} = \frac{1+8+10+14+18}{10+6} = 3,1875\,;$$

ბ) თუ გვინდა ვიპოვოთ რენტაბელობის დაზუსტებული ინდექსი, მაშინ

$$\text{PVRI} = \frac{\frac{1}{1,3^2} + \frac{8}{1,3^3} + \frac{10}{1,3^4} + \frac{14}{1,3^5} + \frac{18}{1,3^6}}{10 + \frac{6}{1,3}} = 1,04\,.$$

როგორც ვხედავთ, პირველი შეხედვით მომგებიანი და მომხიბლავი პროექტი ($\text{RI} > 3$) რეალურად თითქმის არაფრის მომცემი აღმოჩნდა (რადგან $r = 30\%$ საკმაოდ დიდი პროცენტული განაკვეთია).

ამოცანები. 1. საინვესტიციო პროექტი მოცემულია ცხრილით:

t_k, წლები	0	1	2	3	4	5
$c(t_k)$, ათასი ლარი	-20	-10	10	20	30	40

იპოვეთ მისი რენტაბელობის ორივე ინდექსი, თუ $r = 20\%$.

2. საინვესტიციო პროექტი მოცემულია ცხრილით:

t_k, წლები	0	1	2	3	4	5	6
c_k, ათასი ლარი	−100	−100	0	100	200	300	500

იპოვეთ მისი რენტაბელობის ორივე ინდექსი, თუ $r = 30\%$.

3. საინვესტიციო პროექტი მოცემულია ცხრილით:

t_k, წლები	0	1	2	3	4	5	6
c_k, ათასი ლარი	−50	−50	−10	60	120	200	300

იპოვეთ მისი რენტაბელობის ორივე ინდექსი, თუ $r = 15\%$.

§ 7. საინვესტიციო პროექტის არჩევის მეთოდები

ზემოთ ჩვენ განვიხილეთ საინვესტიციო პროექტების შეფასების შესაძლებლობა ოთხი სხვადასხვა მაჩვენებლის მიხედვით. გავიხსენოთ კიდევ ერთხელ ეს მაჩვენებლები:

NPV – პროექტის სუფთა თანამედროვე ღირებულება;

IRR – პროექტის შემოსავლიანობის შინაგანი ნორმა;

PVPP – პროექტის გამოსყიდვის დაზუსტებული ვადა;

PVRI პროექტის რენტაბელობის დაზუსტებული ინდექსი.

თითოეული კრიტერიუმი თავისებურია, ამიტომ ძნელია ერთი საერთო კრიტერიუმის შემუშავება. როგორც ამერიკელი ეკონომისტების გამოკვლევები ადასტურებს, 1960 წლისათვის მხოლოდ რამდენიმე მსხვილი კორპორაცია იყენებდა საინვესტიციო პროექტების ანალიზის ზემოთ აღნიშნულ მეთოდს. 1976 წელს ჩატარებულმა გამოკვლევებმა ცხადყო, რომ მსხვილი ამერიკული კომპანიების 67,6% პროექტირების არჩევისას როგორც ძირითად ან დამატებით კრიტერიუმად იყენებდნენ შემოსავლიანობის შინაგან ნორმას, ხოლო სუფთა თანამედროვე ღირებულების შეფასებას იყენებდა კომპანიების 35,7%. შემდგომში ეს ტენდენცია შენარჩუნებულია.

როგორც წესი საინვესტიციო პროექტები, რომლებსაც ერთდროულად იხილავს მსხვილი კომპანია, ძალიან მრავალფეროვანია. ამიტომ კომპანიებს სჭირდებათ ზემოთ აღწერილი მეთოდების კომპლექსური გამოყენება.

თითქმის ყველა პროექტის განხილვა იწყება მისი გამოსყიდვის დაზუსტებული ვადის დადგენით, თუკი ვადები ფირმისათვის მნიშვნელოვანია. თუკი ვადებს დიდი მნიშვნელობა აქვს, მაშინ ეს კრიტერიუმი საერთოდ არ განიხილება.

ამის შემდეგ მიღებულია ორი კრიტერიუმის გამოყოფა: ძირითადი და დამხმარე კრიტერიუმების. უფრო ხშირად ესაა წყვილი (IRR, NPV) - ე.ი. ძირითადი კრიტერიუმია IRR, ხოლო დამხმარე კრიტერიუმია NPV. გამოყენების სიხშირის მიხედვით მეორე წყვილია (NPV, IRR).

როგორც ამერიკელი ეკონომისტები მიუთითებენ, მსხვილი და საშუალო ფირმები უფრო ხშირად იყენებენ საფინანსო ანალიზის მეთოდებს, ვიდრე მცირე ფირმები. ეს აიხსნება, ერთის მხრივ იმით, რომ მათ მიერ განსახილველი პროექტების მასშტაბები ძალიან განსხვავებულია, მეორეს მხრივ კი იმით, რომ საფინანსო ანალიზი მოითხოვს შესაბამისი კვალიფიკაციის თანამშრომლების ყოლას. თუმცა თანამედროვე პირობებში ეს ფაქტორი უკვე ნაკლებად მოქმედებს.

ამოცანები. 1. ახალი დანადგარი ღირს 5000 ლარი. მოსალოდნელია, რომ ეს დანადგარი 10 წლის განმავლობაში ყოველწლიურად 1000 ლარის მოგებას მოიტანს. ღირს თუ არა დანადგარის შეძენა? როგორ შეიცვლება პასუხი, თუ ფირმას დანადგარების ფასის ამოღება 4 წელიწადზე ადრე უნდა?

2. ფირმა განიხილავს საინვესტიციო პროექტს, რომელიც მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

წელი	0	1	2	3
თანხა (ათასი)	−27	12	14	16

მისაღებია თუ არა პროექტი ფირმისათვის, თუ კაპიტალის ფასი 15%-ია?

3. ფირმა განიხილავს ახალი დანადგარის შეძენის საკ-

ითხს. დანადგარის მიერ წლების მიხედვით მოტანილი შემოსავლები მოცემულია ცხრილით:

წელი	1	2	3	4	5
თანხა (ათასი)	5	3	3	2	1

რა მაქსიმალური თანხა შეიძლება გადაიხადოს ფირმამ დანარგაოში, თუ წლიური საპროცენტო განაკვეთია 20%?

4. ახალი დანადგარი ღირს 7000 ლარი. მისი ექსპლუატაციით მიღებული ყოველწლიური შემოსავლები ერთნაირია და მისი გამოსყიდვის უხეში ვადაა 7 წელი. წლიური საპროცენტო განაკვეთია 6%. სულ მცირე რამდენი წელი უნდა იმუშაოს დანადგარმა, რომ მის შეძენას აზრი ჰქონდეს?

5. შეადარეთ ერთმანეთს NPV კრიტერიუმით სამი საინვესტიციო პროექტი, რომლებიც მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

წელი		0	1	2	3	4
თანხა (ათასი)	A	-18	5	5	5	5
	B	-18	10	0	10	0
	C	-18	20	0	0	0

რომელ პროექტს მიანიჭებთ უპირატესობას, თუ კაპიტალის ფასია წლიური 5%?

6. შეადარეთ ერთმანეთს ორი საინვესტიციო პროექტი, რომლებიც მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

წელი		0	1	2
თანხა (ათასი)	A	-10	10	10
	B	-20	15	15

რომელს ამჯობინებთ, თუ კაპიტალის ფასია: ა) 10%, ბ) 30%; გ) 50%?

7. შეადარეთ ერთმანეთს სამი საინვესტიციო პროექტი, რომლებიც მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

წელი		0	1	2
თანხა (ათასი)	A	-10	2	12
	B	-10	10,5	0
	C	-10	1	13

რომელ პროექტს მიანიჭებთ უპირატესობას, თუ კაპიტალის ფასია: ა) 10%; ბ) 25%?

8. შეადარეთ ერთმანეთს სამი საინვესტიციო პროექტი, რომლებიც მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

წელი		0	1	2	3
თანხა (ათასი)	A	-10	5	5	5
	B	-100	20	20	120
	C	-110	53	53	53

რომელ პროექტს მიანიჭებთ უპირატესობას, თუ კაპიტალის ფასია 10%?

9. შეადარეთ ერთმანეთს ორი საინვესტიციო პროექტი, რომლებიც მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

წელი		0	1	2	3
თანხა (ათასი)	A	-26	10	10	10
	B	-100	40	40	40

რომელ პროექტს მიანიჭებთ უპირატესობას, თუ კაპიტალის ფასია 5%?

10. ფირმა განიხილავს საინვესტიციო პროექტს, რომელიც მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

წელი	0	1	2	3
თანხა (ათასი)	-10	4	8	12

ამავე დროს ფირმას შეუძლია ამ პროექტის გადადება 1 წლით და მაშინ მისი შესაბამისი ცხრილი იქნება:

წელი	1	2	3	4
თანხა (ათასი)	-10	4	8	12

როგორ უნდა მოიქცეს ფირმა, თუ კაპიტალის ფასია 5%?

ლიტერატურა

1. Баширин Г.П. "Начала финансовой математики" Москва, 1998.
2. Четыркин Е.М. "Финансовая математика". Москва, 2000.
3. Ковалев В.В., Уланов Б.А. "Курс финансовых вычислений". Москва, 2000.
4. Ковалев В.В. "Методы оценки финансовых проектов". Москва, 2000.
5. Крушвиц Л., Шефер Д., Шваке М. "Финансирование и инвестиции. Сборник задач и решений". Санкт-Петербург, 2001.
6. Бирман Г., Шмидт С. "Экономический анализ инвестиционных проектов". Москва, 1997.
7. Кочович Е. "Финансовая математика. Теория и практика финансово-банковских расчетов". Москва, 1994.
8. Холт Р., Барнес С. "Планирование инвестиций". Москва, 1994.
9. Mc Catheon J.J., Scott W.F. "An introduction to the mathematics of finance". Oxford, 1986.
10. Kellison S.G. "The theory of interest". 2nd ed. Boston, 1991.
11. Cartledge P. "Financial arithmetica. A practitioners guide". Euromoney Books, 1993.
12. Haugen R.A. "Modern Investment Theory" 4-th ed. Prentice Hall, 1997.

წელიწადის დღეების გადანომვრა

ცხრილი 1

თვის დღე	იან. 1	თებ. 2	მარ. 3	აპრ. 4	მაი. 5	ივნ. 6	ივლ. 7	აგვ. 8	სექ. 9	ოქტ. 10	ნოე. 11	დეკ. 12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	315	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	380	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	386	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	361	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	37	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

დაგროვების კოეფიციენტები (რთული პროცენტები)

ცხრილი 2

პერიოდების რაოდ. n	საპროცენტო განაკვეთი (%)					
	2	5	7	9	10	11
1	1,020000	1,050000	1,070000	1,090000	1,100000	1,110000
2	1.040400	1,102500	1,144900	1,188100	1,210000	1,232100
3	1.061208	1,157625	1,225043	1,295029	1,331000	1,367631
4	1,082432	1,215506	1,310796	1.411582	1,464100	1,518070
5	1,104081	1,276282	1,402552	1,538624	1,610510	1,685058
6	1,126162	1,340096	1,500730	1,677100	1,771561	1,870415
7	1,148686	1,407100	1,605781	1,828039	1,948717	2,076160
8	1,171659	1,477455	1,718186	1,992563	2,143589	2,304538
9	1,195093	1,551328	1,838459	2,171893	2,357948	2,558037
10	1,218994	1,628895	1,967151	2,367364	2,593742	2,839421
11	1,243374	1,710339	2,104852	2,580426	2,853117	3,151757
12	1,268242	1,795856	2,252192	2,812665	3,138428	3,498451
13	1,293607	1,885649	2,409845	3,065805	3,452271	3,883280
14	1,319479	1,979932	2,578534	3,341727	3,797498	4,310441
15	1,345868	2,078928	2,759032	3,642482	4,177248	4,784539
16	1,372786	2,182875	2,952164	3,970306	4,594973	5,310894
17	1,400241	2,292018	3,158815	4,327633	5,054470	5,895093
18	1,428246	2,406619	3,379932	4,717120	5,559917	6,543553
19	1,456811	2,526950	3,6f6528	5,141661	6,115909	7,263344
30	1,485947	2,653298	3,869684	5,604411	6,727500	8,062312
21	1,515666	2,785963	4,140562	6,108808	7,400250	8,949166
22	1,545980	2,925261	4,430402	6,658600	8,140275	9,933574
23	1,576899	3,071524	4,740530	7,257874	8,954302	11,02626
24	1,608437	3,225100	5,072367	7.911083	9,849733	12,23915
25	1,640606	3,386355	5,427433	8.623081	10,83470	13,58546
26	1,673418	3,555673	5,807353	9.399158	11,91817	15,07986
27	1,706886	3,733456	6,213868	10.24508	13,10999	16,73865
18	1,741024	3,920129	6,648838	11.16714	14,42099	18,57990
29	1,775845	4,116136	7, 114257	12,17218	15,86309	20,62369
30	1,811362	4,321942	7,612255	13.36767	17,44940	22,89229
35	1,999890	5,516015	10,67658	20.41396	28,10243	38,57485
40	2,208040	7,039989	14,97445	31.40942	45,25925	65,00086
45	2,437854	8,985008	21,00245	48.32728	72,89048	109,5302
50	2,691588	11,46740	29,45703	74.35752	117,3908	184,5648

ცხრილი 2

პერიო-დების რაოდ. n	საპროცენტო განაკვეთი (%)					
	13	15	18	20	22	25
1	1,130000	1,150000	1,180000	1,200000	1,220000	1,250000
2	1,276900	1,332500	1,392400	1,440000	1,488400	1,562500
3	1,442897	1,520875	1,643032	1,728000	1,815848	1,953125
4	1,630474	1,749006	1,938778	2,073600	2,215335	2,441406
5	1,842435	2,011357	2,287758	2,488320	2,702708	3,051758
6	2,081952	2,313061	2,699554	2,985984	3,297304	3,814697
7	2,352605	2,660020	3.185474	3,583181	4,022711	4,76B372
8	2,658444	3,059023	3,758859	4,399817	4,907707	5,960464
9	3,004042	3,517876	4,435454	5,159780	5,987403	7,450581
10	3,394567	4,045558	5,233836	6,191736	7,304631	9,313226
11	3,835861	4,652391	6,175926	7,430084	8,911650	11,641532
12	4,334523	5,350250	7,287593	8,916100	10,877213	14,551915
13	4,898011	6,152788	8,599359	10,699321	13,264100	18,189894
14	5,534753	7,075706	10,147244	12,839185	16,182202	22,737368
15	6,254270	8,137062	11,973748	15,407022	19,742287	28,421709
16	7,067326	9,357631	14,129023	18,488426	24,085590	35,527137
17	7,986078	10,761264	16,672247	22,186111	29,384420	44,408921
18	9,024268	12,375454	19,673251	26,623333	35,848992	55,511151
19	10,197423	14,231772	23,214436	31,948000	43,735771	69,388939
20	11,523088	16,366537	27,393035	38,337600	53,357640	86,736174
21	13.021089	18,821518	32,323781	46,005120	65,096321	108,420217
22	14,713831	21,644746	38,142061	55,206144	79,417512	135,525273
23	16,626629	24,891458	45,007632	66,247373	96,889364	169,406589
24	18,788091	28,625176	53,109006	79,496847	118,205024	211,758237
25	21,230542	32,918953	62,668627	95,396217	144,210130	264,697796
26	23,990513	37,856796	73,948980	114,475460	175,936358	330,872245
27	37,109279	43,535315	87,259797	137,370552	214,642357	413,590306
28	30,633486	50,065612	102,966560	164,844662	261,863675	516,987883
29	34,615839	57,575454	121,500541	197,813595	319,473684	646,234854
30	39,115898	66,211773	143,370638	237,376314	389,757894	807,793567
35	72,068506	133,175523	327,997290	590,668229	1053,401842	2465,190329
40	132,781552	267,863546	750,378345	1469,771568	2847,037759	7523,163845
45	244,641402	538,769269	1716,683879	3657,261988	7694,712191	22958,87404
50	450,735925	1083,657442	3927.356860	9100,438150	20796,56145	70064.92322

ᲓᲐᲒᲠᲝᲕᲔᲑᲘᲡ ᲙᲝᲔᲤᲘᲪᲘᲔᲜᲢᲔᲑᲘ (ᲣᲬᲧᲕᲔᲢᲘ)

ცხრილი 3

პერიოდების რაოდ. n	ინტენსივობა					
	2	5	7	9	10	11
1	1,020201	1,051271	1,072508	1,094174	1,105171	1,116278
2	1,040811	1,105171	1,150274	1,197217	1,221403	1,246077
3	1,061837	1,161834	1,233678	1,309964	1,349859	1,390968
4	1,083287	1,221403	1,323130	1,433329	1,491825	1,552707
5	1,105171	1,284025	1,419068	1,568312	1,648721	1,733253
6	1,127497	1,349B59	1,521962	1,716007	1,822119	1,934792
7	1,150274	1,419068	1,63 2316	1,877611	2,013753	2,159766
8	1,173511	1,491825	1,750673	2,054433	2,225541	2,410900
9	1,197317	1,568312	1,877611	2,247908	2,459603	2,691234
10	1,221403	1,643721	2,013753	2,459603	2,718282	3,004166
11	1,246077	1,733253	2,159766	2,691234	3,004166	3,353485
12	1,271249	1,822119	2,316367	2,944680	3,320117	3,743421
13	1,296930	1,915541	2,484323	3,221993	3,669297	4,178699
14	1,323130	2,013753	2,664456	3,525421	4,055200	4,664590
15	1,349859	2,117000	2,857651	3,857426	4,481689	5,206980
16	1,377128	2,325541	3,064854	4,220696	4,953032	5,812437
17	1,404948	2,339647	3,287081	4,618177	5,473947	6,488296
18	1,433329	2,459603	3,525421	5,053090	6,049647	7,242743
19	1,462285	2,585710	3,781043	5,528961	6,685894	8,084915
20	1,491825	2,718282	4,055200	6,049647	7,389056	9,025013
21	1,521962	2,857651	4,349235	6,619369	8,166170	10,074425
22	1,552707	3,004166	4,664590	7,242743	9,025013	11,345859
23	1,584074	3,158193	5,002811	7,924823	9,974182	12,553506
24	1,616074	3,320117	5,365556	8,671138	11,023176	14,013204
25	1,648721	3,490343	5,754603	9,487736	12,182494	15,642632
26	1,6S2028	3,669297	6,171858	10,381237	13,463738	17,461527
27	1,716007	3,857426	6,619369	11,358882	14,879732	19,491920
28	1,750673	4,055200	7,099327	12,428597	16,444647	21,758402
29	1,786038	4,263115	7,614086	13,599051	18,174145	24.288427
30	1,822119	4,481689	8,166170	14,879732	20.085537	27,112639
35	2,013753	5,754603	11,588347	23,336065	33.115452	46.993063
40	2,225541	7,389056	16,444647	36,598334	54,598150	81,450869
45	2,459603	9,487736	23,336065	57,397457	90,017131	141,17496
50	3,718282	12,182494	33,115452	90,017131	143,41315	244,69193

ცხრილი 3

პერიოდების რაოდ. n	ინტენსივობა					
	13	15	18	20	22	25
1	1,138628	1,161834	1,197217	1,221403	1,246077	1,284025
2	1,296930	1,349859	1,433339	1,491825	1,552707	1,648721
3	1,476981	1,568312	1,716007	1,822119	1,934792	2,117000
4	1,682028	1,822119	2,054433	2,225541	2,410900	2,718282
5	1,915541	2,117000	2,459603	2,718282	3,004166	3,490343
6	2,181472	2,459603	2,944680	3,320117	3,743421	4,481689
7	3,484323	3,857651	3,525421	4,055200	4,664590	5,754603
8	2,829217	3,320117	4,220696	4,953032	5,812437	7,389056
9	3,221993	3,857426	5,053090	6,049647	7,242743	9,487736
10	3,669297	4,481689	6,049647	7,389056	9,025013	12,182494
11	4,178699	5,206980	7,242743	9,025013	11,245859	15,642632
12	4,758821	6,049647	8,671138	11,023176	14,013204	20,085537
13	5,419481	7,028688	10,381337	13,463738	17,461527	25,790340
14	6,171858	8,166170	12,428597	16,444647	21,758402	33.115452
15	7,038688	9,487736	14,879732	20,085537	27,112639	42,521082
16	8,004469	11,023176	17,814273	24,532530	33,784428	54,598150
17	9,115716	12,807104	21,327557	29,964100	42,097990	70,105412
18	10,381237	14,879732	25,533722	36,598234	52,457326	90,017131
19	11,822447	17,287782	30,569415	44,701184	65,365853	115,58428
20	13.463738	20,085537	36,598234	54,598150	81.450869	148,41315
21	15,332887	23,336065	43,816042	66,686331	101,49403	190,56626
22	17.461527	27,112639	52,457326	81,450869	126,46935	244,69193
23	19,885682	31,500392	62,802821	99,484316	157,59051	314,19066
24	22,646380	36,598234	75,188628	121,51041	196,36987	403,42879
25	25,790340	42,521082	90,017131	148,41315	244,69193	518,01282
26	29,370771	49,402449	107,77007	181,27224	304,90492	665,14163
27	33.448268	57,397457	129,02420	221,40641	379,93493	854,05S76
28	38,091837	66,686331	154,47001	270,42640	473,42807	1096,6331
29	43,380065	77,478463	184,93418	330,29956	589,92770	1408,1048
30	49,402449	90,017131	221,40641	403,42S79	735,09518	1808,0424
35	94,632408	190,56626	544,57191	1096,6331	2208,3479	6310,6881
40	181,27224	403,42879	1339,4307	2980,9579	6634,2440	32026,465
45	347,23438	854,05876	3294,4680	8103,0839	19930,370	76879,919
50	665,14163	1808,0424	8103,0839	22026,465	59874,141	268337,28

დისკონტის კოეფიციენტები (რთული პროცენტი)

ცხრილი 4

პერიოდების რაოდ. n	საპროცენტო განაკვეთი (%)					
	2	5	7	9	10	11
1	0,980392	0,952381	0,934579	0,917431	0,909091	0,900901
2	0,961169	0,907029	0,873439	0,841680	0,826446	0,811622
3	0,942322	0,863838	0,816298	0,772183	0,751315	0,731191
4	0,923845	0,822702	0,762895	0,708425	0.683013	0,658731
5	0,905731	0,783526	0,712986	0,649931	0,620921	0,593451
6	0,887971	0,746215	0,666343	0,596267	0,564474	0,534641
7	0,870560	0,710681	0,622750	0,547034	0,513158	0,481658
8	0,853490	0,676839	0,582009	0,501866	0,466507	0,433926
9	0,836755	0,644609	0,543934	0,460428	0,424098	0,390925
10	0,830348	0,613913	0,508349	0,422411	0,385543	0,352184
11	0,804263	0,584679	0,475093	0,387533	0,350494	0,317283
12	0,788493	0,556S37	0,444012	0,355535	0,318631	0,285841
13	0,773033	0,530331	0,414964	0,326179	0,389664	0,257514
14	0,757875	0,505068	0,387817	0,299246	0,263331	0,231995
15	0,743015	0,481017	0,362446	0,274538	0,239392	0,209004
16	0,728446	0,458112	0,338735	0,251870	0,217629	0,188292
17	0,714163	0,436397	0,316574	0,231073	0,197845	0,169633
18	0,700159	0,415521	0,295864	0,211994	0,179859	0,152S32
19	0,686431	0,395734	0,276508	0.194490	0,163508	0,137678
20	0,672971	0,376889	0,258419	0,178431	0,148644	0,124034
21	0,659776	0,358942	0,241513	0,163698	0,135131	0,111742
22	0,646839	0,341850	0,325713	0,150182	0,122846	0,100669
23	0,634156	0,325571	0,210947	0,137781	0,111678	0,090693
24	0,621721	0,310068	0,197147	0,126405	0,101526	0,081705
25	0,609531	0,295303	0,184249	0,115968	0,092296	0,073608
26	0,597579	0,281241	0,173195	0,106393	0,083905	0,066314
27	0,585862	0,267848	0,160930	0,097608	0,076278	0,059742
28	0,574375	0,255094	0,150402	0,089548	0,069343	0,053822
29	0,563112	0,242946	0,140563	0,082155	0,063039	0,048488
30	0,552071	0,231377	0,131367	0,075371	0,057309	0,043683
35	0,500028	0,181290	0,093663	0,048986	0,035584	0,035924
40	0,452890	0,142046	0,066780	0,031838	0,022095	0,015384
45	0,410197	0,111297	0,047613	0,020692	0,013719	0,009130
50	0,371528	0,087204	0,033948	0,013449	0,008519	0,005418

ცხრილი 4

პერიოდების რაოდ. n	საპროცენტო განაკვეთი (%)					
	13	15	18	20	22	25
1	0,884956	0,869565	0,847458	0,833333	0,819672	0,800000
2	0,783147	0,756144	0,718184	0,694444	0,671862	0,640000
3	0,693050	0,657516	0,608631	0,578704	0,550707	0,512000
4	0.613319	0,571753	0,515789	0,482253	0,451399	0,409600
5	0,542760	0,497177	0,437109	0,401878	0,369999	0,327680
6	0,480319	0,432328	0,370432	0,334898	0,303278	0,262144
7	0,425061	0,375937	0,313925	0,279082	0,248589	0,209715
8	0,376160	0,326902	0,266038	0,232568	0,203761	0,167772
9	0,332885	0,284262	0,225456	0,193807	0,167017	0,134218
10	0,294588	0,247185	0,191064	0,161506	0,136899	0,107374
11	0,260698	0,214943	0,161919	0,134588	0,112213	0,085899
12	0,230706	0,186907	0,137220	0,112157	0,091978	0,068719
13	0,204165	0,162528	0,116288	0,093464	0,075391	0,054976
14	0,180677	0,141329	0,098549	0,077887	0,061796	0,043980
15	0,159891	0,122894	0,083516	0,064905	0,050653	0,035184
16	0,141496	0,106865	0,070776	0,054088	0,041519	0,028147
17	0,125218	0,092926	0,059980	0,045073	0,034032	0,022518
18	0,110812	0,080805	0,050830	0,037561	0,027895	0,018014
19	0,098064	0,070365	0,043077	0,031301	0,022865	0,014412
20	0,086782	0,061100	0,036506	0,026084	0,018741	0,011529
21	0,076798	0,053131	0,030937	0,021737	0,015362	0,009223
22	0,067963	0,046201	0,026218	0,018114	0,012592	0,007379
33	0,060144	0,040174	0,022218	0,015095	0,010321	0,005903
24	0,053225	0,034934	0,018829	0,012579	0,008460	0,004722
25	0,047102	0,030378	0,015957	0,010483	0,006934	0,003778
26	0,041683	0,026415	0,013523	0,008735	0,005684	0,003022
27	0,036888	0,022970	0,011460	0,007280	0,004659	0,002418
28	0,032644	0,019974	0,009712	0,006066	0,003819	0,001934
39	0,028889	0,017369	0,008230	0,005055	0,003130	0,001547
30	0,025565	0,015103	0,006975	0,004213	0,002566	0,001238
35	0,013876	0,007509	0,003049	0,001693	0,000949	0,000406
40	0,007531	0,003733	0,001333	0,000680	0,000351	0,000133
45	0,004083	0,001856	0,000583	0,000273	0,000130	0,000044
50	0,002219	0,000923	0,000255	0,000110	0,000048	0,000014

დისკონტის კოეფიციენტები (უწყვეტი)

ცხრილი 5

პერიოდების რაოდ. n	ინტენსივობა					
	2	5	7	9	10	11
1	0,980199	0,951229	0,932394	0,913931	0,904837	0,895834
2	0,960789	0,904837	0,869358	0,835270	0,818731	0,802519
3	0,941765	0,860708	0,810584	0,763379	0,740818	0,718924
4	0,923116	0,818731	0,755784	0,697676	0,670320	0,644036
5	0,904837	0,778801	0,704688	0,637628	0,606531	0,576950
6	0,886920	0,740818	0,657047	0,582748	0,548812	0,516851
7	0,869358	0,704688	0,612626	0,532592	0,496585	0,463013
8	0,852144	0,670320	0,571209	0,486752	0,449329	0,414783
9	0,835270	0,637628	0,532592	0,444858	0,406570	0,371577
10	0,818731	0,606531	0,496585	0,406570	0,367879	0,332871
11	0,802519	0,576950	0,463013	0,371577	0,332871	0,298197
12	0,786628	0,548812	0,431711	0,339596	0,301194	0,267135
13	0,771052	0,522046	0,402524	0,310367	0,272532	0,239309
14	0,755784	0,496585	0,375311	0,283654	0,246597	0,214381
15	0,740818	0,472367	0,349938	0,259240	0,223130	0,192050
16	0,726149	0,449329	0,326280	0,236928	0,201897	0,172045
17	0,711770	0,427415	0,304221	0,216536	0,182684	0,154124
18	0,697676	0,406570	0,283654	0,197899	0,165299	0,138069
19	0,683861	0,386741	0,264477	0,180866	0,149569	0,123687
20	0,670320	0,367879	0,246597	0,165299	0,135335	0,110803
21	0,657047	0,349938	0,229925	0,151072	0,122456	0,099261
22	0,644036	0,332871	0,214381	0,138069	0,110803	0,088922
23	0,631284	0,316637	0,199888	0,126186	0,100259	0,079659
24	0,618783	0,301194	0,186374	0,115325	0,090718	0,071361
25	0,606531	0,286505	0,173774	0,105399	0,082085	0,063928
26	0,594521	0,272532	0,162026	0,096328	0,074274	0,057269
27	0,582748	0,259240	0,151072	0,088037	0,067206	0,051303
28	0,571209	0,246597	0,140858	0,080460	0,060810	0,045959
29	0,559898	0,234570	0,131336	0,073535	0,055023	0,041172
30	0,548812	0,223130	0,122456	0,067206	0,049787	0,036883
35	0,496585	0,173774	0,086294	0,042852	0,030197	0,021280
40	0,449329	0,135335	0,060810	0,027324	0,018316	0,012277
45	0,406570	0,105399	0,042852	0,017422	0,011109	0,007083
50	0,367879	0,082085	0,030197	0,011109	0,006738	0,004087

ცხრილი 5

პერიოდების რაოდ. n	ინტენსივობა					
	13	15	18	20	22	25
1	0,878095	0,860708	0,835270	0.818731	0,802519	0,778801
2	0,771052	0,740818	0,697676	0,670320	0,644036	0,606531
3	0,677057	0,637628	0,582748	0,548812	0,516851	0,472367
4	0,594521	0,548812	0,486752	0,449329	0,414783	0,367879
5	0,522046	0,472367	0,406570	0,367879	0,332871	0,286505
6	0,458406	0,406570	0,339596	0,301194	0,267135	0,223130
7	0,402524	0,349938	0,283654	0,246597	0,214381	0,173774
8	0,153455	0,301194	0,236928	0,201897	0,172045	0,135335
9	0,310367	0,259240	0,197899	0,165299	0,138069	0,105399
10	0,272532	0,223130	0,165299	0,135335	0,110803	0,082085
11	0,239309	0,192050	0,138069	0,110803	0,088922	0,063928
12	0,210136	0,165299	0,115325	0,090718	0,071361	0,049787
13	0,184520	0,142274	0,096328	0,074274	0,057269	0,038774
14	0,162026	0,122456	0,080460	0,060810	0,045959	0,030197
15	0,142274	0,105399	0,067206	0,049787	0,036883	0,023518
16	0,124930	0,090718	0,056135	0,040762	0,029599	0,018316
17	0,109701	0,078082	0,046888	0,033373	0,023754	0,014264
18	0,096338	0,067206	0,039164	0,027324	0,019063	0,011109
19	0,084585	0,057844	0,032713	0,022371	0,015299	0,008652
20	0,074274	0,049787	0,027324	0,018316	0,012277	0,006738
21	0,065219	0,042852	0,022823	0,014996	0,009853	0,005248
22	0,057269	0,036883	0,019063	0,012277	0,007907	0,004087
23	0,050287	0,031746	0,015923	0,010052	0,006346	0,003183
24	0,044157	0,027324	0,013300	0,008230	0,005092	0,002479
25	0,038774	0,023518	0.011109	0,006738	0,004087	0,001930
26	0,034047	0,020242	0,009279	0,005517	0,003280	0,001503
27	0,029897	0,017422	0,007750	0,004517	0,002632	0,001171
28	0,026252	0,014996	0,006474	0,003698	0,003113	0,000913
29	0,023052	0,012907	0,005407	0,003028	0,001695	0,000710
30	0,020243	0,011109	0,004517	0,003479	0,001360	0,000553
35	0,010567	0,005248	0,001836	0,000912	0,000453	0,000158
40	0,005517	0,002479	0,000747	0,000335	0,000151	0,000045
45	0,002880	0,001171	0,000304	0,000123	0,000050	0,000013
50	0,001503	0,000553	0,000123	0,000045	0,000017	0,000004

დისკრეტული რენტის დაგროვების კოეფიციენტები

ცხრილი 6

პერიოდების რაოდ. n	საპროცენტო განაკვეთი (%)					
	2	5	7	9	10	11
1	1,000000	1.000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,020000	2,050000	2,070000	2,090000	2,100000	2.110000
3	3,060400	3,152500	3,214900	3,278100	3,310000	3.342100
4	4,121608	4,310125	4,439943	4,573129	4,641000	4,709731
5	5,204040	5,525631	5,750739	5,984711	6,105100	6,227801
6	6,308121	6,801913	7,153291	7,523335	7,715610	7,912860
7	7,434283	8,142008	8,654021	9,200435	9,487171	9,783274
8	8,582969	9,549109	10,259803	11,028474	11,435888	11,859434
9	9,754628	11,026564	11,977989	13,021036	13,579477	14,163972
10	10,949721	12,577893	13,816448	15,192930	15,937425	16,722009
11	12,168715	14,206737	15,753599	17,560293	18,531167	19,561430
12	13,412090	15,917127	17,888451	20,140730	21,384284	22,713187
13	14,680332	17,712983	30,140643	32,953385	24,522713	36,311635
14	15,973938	19,598632	22,550488	26,019189	27,974983	30,094918
15	17,393417	21,578564	35,139022	29,360916	31,772482	34,405359
16	18,639285	23,657493	27,888054	33,003399	35,949730	39,189948
17	20,012071	25,840366	30,840217	36,973705	40,544703	44,500843
18	21,412312	28,132385	33,999033	41,301338	45,599173	50,395936
19	33,840559	30,539004	37,378965	46,018458	51,159090	56,939488
20	24,297370	33,065954	40,995493	51,160120	57,374999	64,202832
21	25,783317	35,719252	44,865177	56,764530	64,002499	72,265144
22	37,298984	38,505214	49,005739	63,873338	71,402749	81,314309
23	28,844963	41,430475	53,436141	69,531939	79,543034	91,147884
24	30,421862	44,501999	58,176671	76,789813	88,497327	103,17415
25	32,030300	47,727099	63,249038	84,700896	98,347059	114,41331
26	33,670906	51,113454	68,676470	93,323977	109,18177	127,99877
27	35,344334	54,669126	74,483823	102,72313	131,09994	143,07864
28	37,051210	58,402583	80,697691	112,96832	134,20994	159,81729
29	38,792235	62,322713	87,346529	124,13536	148,63093	178,39719
30	40,568079	66,438848	94,460786	136,30754	164,49402	199,02088
35	49,994478	90,320307	138,33688	215,71075	271,02437	341,58955
40	60,401983	120,79977	199,63511	337,88345	442,59256	581,82607
45	71,892710	159,70016	385,74931	535,85873	718.90484	986,63856
50	84,579401	209,34800	406,52893	815,08356	1163,9085	1668,7712

ცხრილი 6

პერიოდების რაოდ. n	საპროცენტო განაკვეთი (%)					
	13	15	18	20	22	25
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,130000	2,150000	2,180000	2,200000	2,220000	2,250000
3	3,406900	3,473500	3,572400	3,640000	3,708400	3,812500
4	4,849797	4,993375	5,215432	5,368000	5,524248	5,765625
5	6,480271	6,742381	7,154210	7,441600	7,739583	8,207031
6	8,322706	8,753738	9,441968	9,929920	10,442291	11,258789
7	10,404658	11,066799	13,14!522	12,915904	13,739595	15,073486
8	13,757263	13,726819	15,326996	16,499085	17,762306	19,841858
9	15,415707	16,785843	19,085855	20,798902	32,670013	35,803322
10	18,419749	20,303718	23,521309	35,958682	28,657416	33,253903
11	21,814317	24,349276	28,755144	32,150419	35,962047	42,566129
12	25,650178	29,001667	34,931070	39,580502	44,873697	54,207661
13	39,984701	34,351917	43,318663	48,496603	55,745911	68,759576
14	34,882712	40,504705	50,818022	59,195933	69,010011	86,949470
15	40,417464	47,580411	60,965266	73,035108	85,193313	109,68684
16	46,671735	55,717472	73,939014	87,442129	104,93450	138,10855
17	53,739060	65,075093	87,068036	105,93056	129,02009	173,63568
18	61,725138	75,836357	103,74028	128,11667	158,40451	218,04460
19	70,749406	88,211811	133,41353	154,74000	194,25350	273,55576
20	80,946829	102,44358	146,62797	186,68800	237,98927	343,94470
21	92,469917	118,81012	174,03100	225,02560	291,34691	429,68087
22	105,49101	137,63164	306,34479	271,03072	356,44323	538,10109
23	120,20484	159,37638	344,48685	326,23686	435,86075	673,63636
24	136,83147	184,16784	289,49448	392,48424	532,75011	843,03295
25	155,61956	212,79302	342,60349	471,98108	650,95513	1054,7911
26	176,85010	245,71197	405,27211	567,37730	795,16526	1319,4889
27	200,84061	283,56877	479,22109	681,85276	971,10163	1650,3612
28	227,94989	327,10408	566,48089	819,22331	1185,7440	2063,9515
29	258,58338	377,16969	669,44745	984,06797	1447,6077	3580,9394
30	293,19923	434,74515	790,94799	1181,8816	1767,0813	3227,1742
35	546,68082	881,17016	1816,6516	2948,3411	4783,6447	9856,7613
40	1013,7042	1779,0903	4163,2130	7343,8578	12936,535	30088,655
45	1874,1646	3585,1285	9531,5771	18281,310	34971,419	91831,496
50	3459.5071	7217,7163	21813,094	45497,191	94525,279	280255,69

დისკრეტული რენტის დისკონტირების კოეფიციენტები

ცხრილი 7

პერიოდების რაოდ. n	საპროცენტო განაკვეთი (%)					
	2	5	7	9	10	12
1	0,980392	0,952381	0,934579	0,917431	0,909091	0,892857
2	1,941561	1,859410	1,808018	1,759111	1,735537	1,690051
3	2,883883	2,723348	2,624316	2,531295	2,486852	2,401831
4	3,807729	3,545951	3,387211	3,239720	3,169865	3,037349
5	4,713460	4,329477	4,100197	3,889651	3,790787	3,604776
6	5,601431	5,075693	4,766540	4,485919	4,355261	4,111407
7	6,471991	5,786371	5,389289	5,032953	4,868419	4,563757
8	7,325481	6,463213	5,971299	5,534819	5,334926	4,967640
9	8,162337	7,107822	6,515233	5,995247	5,759024	5,328250
10	8,982585	7,721735	7,033582	6,417658	6,144567	5,650223
11	9,786848	8,306414	7,498674	6,805191	6,495061	5,937699
12	10,575341	8,863252	7,943686	7,160725	6,813693	6,194374
13	11,348374	9,393573	8,357651	7,486904	7,103356	6,423548
14	12,106249	9,898641	8,745468	7,786150	7,166687	6,628168
15	12,849264	10,379658	9,107914	8,060688	7,606080	6,810864
16	13,577709	10,837770	9,446649	8,312558	7,823709	6,973986
17	14,291872	11,274066	9,763223	8,543631	8,021553	7,119630
18	14,992031	11,689587	10,059087	8,755625	8,201412	7,249670
19	15,678462	12,085321	10,335595	8,950115	8,364920	7,365777
20	16,351433	12,462310	10,594014	9,128546	8,513564	7,469444
21	17,011209	12,821153	10,835527	9,292244	8,648694	7,562003
22	17,658048	13,163003	11,061340	9,442425	8,771540	7,644646
23	18,292204	13,488574	11,272187	9,580207	8,883218	7,718434
24	18,913926	13,798643	11,469334	9,706612	8,984744	7,784316
25	19,523456	14,093945	11,653583	9,822580	9,077040	7,843139
26	20,121036	14,375185	11,825779	9,928972	9,160945	7,895660
27	20,706898	14,643034	11,986709	10,026580	9,237223	7,942554
28	21,281272	14,898127	12,137111	10,116128	9,306567	7,984423
29	21,844385	15,141074	12,277674	10,198283	9,369606	8,031806
30	22,396456	15,373451	12,409041	10,273654	9,426914	8,055184
35	24,998619	16,374194	12,947672	10,566821	9,644159	8,175504
40	27,355479	17,159086	13,331709	10,757360	9,779051	8,343777
45	29,490160	17,774070	13,605532	10,881197	9,863808	8,383516
50	31,423606	18,255925	13,800746	10,961683	9,914814	8,304498

ცხრილი 7

პერიოდების რაოდ. n	საპროცენტო განაკვეთი (%)					
	13	15	18	20	22	25
1	0,884956	0,869565	0,847458	0,833333	0,819672	0,800000
2	1,668102	1,625709	1,565642	1,527778	1,491535	1,440000
3	2,361153	2,283235	2,174273	3,106481	2,042241	1,952000
4	2,974471	2,854978	3,690062	3,588735	2,493641	2,361600
5	3,517231	3,352155	3,127171	2,990612	2,863640	2,689280
6	3,997550	3,784483	3,497603	3,325510	3,166918	2,951424
7	4,432610	4,160420	3,811528	3,604592	3,415506	3,161139
8	4.798770	4,487322	4,077566	3,837160	3,619268	3,328911
9	5,131655	4,771584	4,303022	4,030967	3,786385	3,463139
10	5,426243	5,018769	4,494086	4,192472	3,923184	3,570503
11	5,686941	5,333712	4,656005	4,327060	4,035397	3,656403
12	5,917647	5,420619	4,793325	4.439217	4,127375	3,725122
13	6,121812	5,583147	4,909513	4,533681	4,202766	3,780098
14	6,302488	5,724476	5,008062	4,610567	4,264562	3,834078
15	6,463379	5,847370	5,091578	4,675473	4,315215	3,859263
16	6,603875	5,954235	5,163354	4,739561	4,356734	3,887410
17	6,729093	6,047161	5,323334	4,774634	4,390765	3,909928
18	6,839905	6,127966	5,273164	4,812195	4,418660	3,927942
19	6,937969	6,198231	5,316241	4,843496	4,441525	3,942354
20	7,024752	6,259331	5,352746	4,869580	4,460266	3,953883
21	7,101550	6,312462	5,383683	4,891316	4,475628	3,963107
22	7,169513	6,358663	5,409901	4,909430	4,488230	3,970485
23	7,229658	6,398837	5,432120	4,924525	4,498541	3,976388
24	7,382883	6,433771	5,450949	4,937104	4,507001	3,981111
25	7,329985	6,464149	5,466906	4,947587	4,513935	3,984888
26	7,371668	6,490564	5,480429	4,956323	4,519619	3,987911
27	7,408556	6,513534	5,491889	4,963602	4,524278	3,990329
28	7,441200	6,533508	5,501601	4,969668	4,528096	3,992263
29	7,470088	6,550877	5,509831	4,974724	4,531227	3,993810
30	7,495653	6,565980	5,516806	4,978936	4,533792	3,995048
35	7,585572	6,616607	5,538618	4,991535	4,541140	3,998377
40	7,634376	6,641778	5,548152	4,996598	4,543858	3,199468
45	7,660864	6,654293	5,552319	4,998633	4,544864	3,999826
50	7,675242	6,660515	5,554141	4,999451	4,545236	3,999943

სარჩევი

Автандил Гагнидзе

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАЧАЛА ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА

Содержание

Avtandil Gagnidze

MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF FINANCIAL ANALYSIS

Summary

გამომცემლობა „უნივერსალი“

თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის გამზ. 1
☎: 29 09 60, 8(99) 17 22 30
E-mail: universal@posta.ge