

პროფ. ა. ი. ასტვაცატუროვი

ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი

სამშენებლო მექანიკა

ნაწილი II

სტატიკურად უჩქვევი სისტემები

თბილისი და უკრაინა

თბილისი—1956

წ ი ნ ა ს ი ტ ყ ვ ა ო ბ ა

წინამდებარე წიგნი წარმოადგენს სამშენებლო მექანიკის კურსის მეორე ნაწილს და შეიცავს სტატიკურად ურკვევე სისტემების ანგარიშს.

ისე როგორც პირველ ნაწილში, ჩვენ შევეცადეთ წიგნი არ გადაგვეტვირთა პროგრამის გარეშე მასალით.

წიგნში დაცულია პირველი ნაწილის მეთოდური აგებულება, ე. ი. ანგარიშის თეორიულ მეთოდებთან ერთად გარჩეულია სათანადო პრაქტიკული მაგალითები და მოცემულია სავარჯიშო ამოცანები. მასალის ასეთი განაწილება ხელს შეუწყობს სტუდენტებს თეორიული მასალის ათვისებაში.

სტატიკურად ურკვევე სისტემების ანგარიშის თეორიის დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს საინჟინრო ნაშენების დასაპროექტებლად.

საბჭოთა კავშირის კომუნისტური პარტიის XX ყრილობის დირექტივები მშენებლობის დარგში სამშენებლო მექანიკის წინაშე აყენებს მთელ რიგ ახალ ამოცანებს, რომეთა შესრულებაც მოითხოვს სამშენებლო მექანიკის განვითარებას.

სამშენებლო მექანიკის განვითარებამ თავის მხრივ ხელი უნდა შეუწოს ახალ ეკონომიური კონსტრუქციების შექმნას და განვითარებას.

ამ წიგნის შედგენისას ჩვენ ვისარგებლეთ ჩვენი მოკლე კურსით, რომელიც გამოსცა ე. ი. ლენინის სახელობის თბილისის ტრანსპორტის ინჟინერთა ინსტიტუტმა 1941 წელს.

ძალთა მეთოდს, როგორც სტატიკურად ურკვევე სისტემების ანგარიშის ძირითად მეთოდს, დათმობილი აქვს შედარებით მეტი ადგილი; აქ ჩვენ გავითვალისწინეთ ისიც, რომ სტუდენტებს უჭირთ მლუნავი მომენტების ეპიურების აგება და ძირითადი სისტემის შერჩევა რთულ შემთხვევებში.

მნიშვნელოვანი ადგილი აქვს დათმობილი აგრეთვე გადაადგილებათა მეთოდს, რომელმაც უკანასკნელ ხანებში დიდი განვითარება მიიღო და რომელიც მთელ რიგ შემთხვევებში მნიშვნელოვნად ამარტივებს ამოცანის გადაწყვეტას.

გადაადგილებათა მეთოდი მოცემულია იმავე თანამიმდევრობით, როგორც ძალთა მეთოდი, რაც ხელს უწყობს მის ათვისებას.

მიხსლოებითი მეთოდებიდან ვიხილავთ სამომენტო ფოკუსების მეთოდს, რომელსაც იყენებენ უმთავრესად უჭირი ჩარჩოების საანგარიშოდ.

ზღვრული დატვირთვების მეთოდი, რომელიც არ შედის ამ წიგნში, შეტანილი იქნება კურსის მესამე ნაწილში.

დიდ მადლობას ვუცხადებ რეცენზენტს—ტექნიკის მეცნიერებათა კან-
დიდატს დოც. ვ. ვართაპეტოვს საყურადღებო შენიშვნებისათვის.

უღრმეს მადლობას ვუძღვნი საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის წევრ
კორესპონდენტს პროფ. ო. ონიაშვილს, რომელიც დამეხმარა საქმიანი შენი-
შვნებით წიგნის რედაქტირების დროს.

მადლობას ვუცხადებ ასისტენტ ო. კვირიკაძეს, რომელმაც გადაიკითხა
ხელნაწერი და ინჟინერ ა. ხარებავის, რომელიც დამეხმარა ნახაზების შედ-
გენაში.

მკითხველის საქმიან შენიშვნებს ავტორი მიიღებს დიდი სიამოვნებით.

ავტორი

ტექნიკის სწრაფმა განვითარებამ წარმოშვა უდიდესი და მრავალფეროვანი საინჟინრო ნაშენები როგორც სამოქალაქო-საქარბნო, ისე სატრანსპორტო მშენებლობაში. ამას ხელი შეუწყო ახალი საინჟინერო მასალის რკინაბეტონის წარმოშობამ, რომელსაც სულ 40—50 წლის ისტორია აქვს.

რკინაბეტონის ნაშენები უმთავრესად მასიურ და ხისტად შეერთებულ ელემენტებიანი კონსტრუქციების (ჩარჩოების) სახით გვხვდება.

ჩარჩოები, თაღები, გარსები და სხვა, რომლებიც რკინაბეტონის ყველაზე გავრცელებული ფორმებია, წარმოადგენენ სტატიკურად ურკვევ სისტემებს და მოითხოვენ განსაკუთრებულ ანგარიშს, რამაც დიდი ბიძგი მისცა სტატიკურად ურკვევი სისტემების ანგარიშის თეორიის განვითარებას.

სტატიკურად ურკვევი სისტემების ანგარიშის თეორიას სულ 100—120 წლის ისტორია აქვს, მაგრამ მან დაწმენდილი—ჩამოყალიბებული სახე ისე, როგორც დღეს ჩვენ მას ვიკუთვით, მიიღო მხოლოდ უკანასკნელი 30—40 წლის განმავლობაში.

მიუხედავად თავისი ნოკლე ისტორიისა სტატიკურად ურკვევი სისტემების ანგარიშის თეორიამ დღეს უმაღლეს მწვერვალს მიაღწია და წარმოადგენს სამშენებლო მექანიკის ერთ-ერთ განვითარებულ და მნიშვნელოვან ნაწილს, რომელიც სამშენებლო ტექნიკის შემდგომი განვითარების მძლავრი იარაღია. თუ ამ ასიოდე წლის წინათ ნაკლებად აჩვენებდნენ სტატიკურად ურკვევ სისტემებს, სტატიკურად რკვევადისაგან და მისი ანგარიშის თეორიაც ნაკლებად იყო განვითარებული, ეს კიდევ იმას არ ნიშნავს, რომ პრაქტიკაში მათ გამოყენება არ ჰქონია. ქვისა და ხის ხიდები, გუმბათები და სხვა მრავალი, რომლებსაც საუკუნეების ისტორია აქვთ, წარმოადგენენ სტატიკურად ურკვევ სისტემებს. სტატიკურად ურკვევი სისტემებია აგრეთვე რთული და ჯვარედინა გისოსიანი ლითონის ფერმები, რომლებსაც დიდი გამოყენება ჰქონდა ზე-19 საუკუნის დასაწყისიდანვე. ამ სისტემებს აწინებდნენ არა სტატიკური ანგარიშის, არამედ უხეში ემპირიზმის და პრაქტიკული გამოცდილების საფუძველზე.

უნდა აღინიშნოს, რომ სტატიკურად ურკვევი კონსტრუქციების გავრცელების ერთ-ერთი მიზეზი ისიცაა, რომ უმეტეს შემთხვევაში ისინი ეკონომიურია რკვევად კონსტრუქციებთან შედარებით. სტატიკურად ურკვევი კონსტრუქციის ცნება ჩვენთვის ცნობილია როგორც მასალათა გამძლეობიდან, ისე ამ კურსის პირველ ნაწილიდან (§ 11).

როგორც სახელწოდება გვიჩვენებს, სტატიკურად ურკვევი სისტემებს ვუწოდებთ ისეთ სისტემებს, სადაც მოქმედი

ძალებისაგან წარმოშობილი რეაქციების ან შინაგანი ძალების განსაზღვრა მხოლოდ მყარი ტანის წონასწორობის განტოლებებით შეუძლებელია. მოკლედ რომ ვთქვათ, სისტემის გადაწყვეტა სტატიკის მეთოდებით არ შეიძლება, რადგან უცნობ ძალვათა რიცხვი სწარმოებს წონასწორობის განტოლებათა იმ რიცხვს, რომლის შედგენაც ჩვენ შეგვიძლია.

ამიტომ სტატიკურად ურკვევი სისტემების გადასაწყვეტად საჭიროა დამატებითი განტოლებების შედგენა, რომლებიც ტანის დრეკადი თვისებების და დეფორმაციების შესწავლის საფუძველზე წარმოებს.

ნაშენის ანგარიშის დროს განსახვედრებენ ორი კატეგორიის ძალებს: 1) სტატიკურად რკვევად ძალებს, რომელთა განსაზღვრავად საკმარისია წონასწორობის განტოლებები და 2) სტატიკურად ურკვევ ძალებს, რომელთა ანგარიში მართოდ წონასწორობის განტოლებების საშუალებით შეუძლებელია.

მაგალითად, პირველი კატეგორიის ძალებია ორ საყრდენზე მდებარე კოქის რეაქციები ან მარტივი ფერმის ღეროების ძალები, რომლებიც განისაზღვრება მთელი ტანის ან მისი ცალკეული ნაწილების წონასწორობის განტოლებებით. სტატიკურად რკვევადი ძალების სიდიდებზე სისტემის ან მისი ნაწილების განივი კვეთის ზომები გავლენას არ ახდენენ.

სტატიკურად ურკვევ ძალებს ეკუთვნიან, მაგალითად, უკრი კოქის საყრდენი მომენტები ან რეაქციები, რომელთა სიდიდე დამოკიდებულია სისტემის დეფორმაციაზე და, მაშასადამე, მის განივი კვეთის ზომებზე.

სტატიკურად ურკვევი სისტემის ძირითად დამახასიათებელ თვისებას შეადგენს ის, რომ მისი ყველა ან ზოგიერთი ძალების სიდიდე დამოკიდებულია სისტემის შემადგენელი დეროების განივი კვეთის ზომებზე.

სტატიკურად ურკვევი სისტემების ანგარიშის მეთოდების შესწავლამდე ჩვენ უნდა შევისწავლოთ სისტემის დრეკადი დეფორმაციები, რადგან მათ გარეშე სტატიკურად ურკვევი სისტემის გადაწყვეტა შეუძლებელია. ამიტომ იყო, რომ სტატიკურად ურკვევი სისტემების ანგარიშის თეორია სწრაფად გზითარდა მხოლოდ იმის შემდეგ, რაც მიღებული იქნა დეფორმაციის განსაზღვრის მარტივი და უნივერსალური ფორმულები. როგორც ეს ფორმულები, ისე დეფორმაციის განტოლებები დამყარებულია ძირითად დაშვებებზე, როგორც არის ძალთა დამოუკიდებლობის და პროპორციულობის პრინციპი, ჰუკის კანონი და სხვა (იხ. I ნაწილი, § 3).

სტატიკურად ურკვევი სისტემების ანგარიშის ძირითადი მეთოდებია—ძალთა მეთოდი და გადაადგილებათა მეთოდი. ამიტომ, წინამდებარე კურსში ისინი საკმარისად ფართოდ არის განხილული. საკითხი იმის შესახებ, თუ რომელ მეთოდს მივცეთ უპირატესობა აშა თუ იმ ამოცანის გადაწყვეტის დროს, უმჯობესია გავარჩიოთ ამ მეთოდების შესწავლის შემდეგ. ერთი კი შეიძლება ითქვას, რომ ეს ორი მეთოდი ერთმანეთს ავსებს, რადგან იმ სისტემების ანგარიში, რომლებსთვისაც ძალთა მეთოდი მოუხერხებელია, გადაადგილებათა მეთოდით წარმოებს და პირიქით.

ძირითადი თეორემები გადაადგილებებზე დრეკად სისტემებში

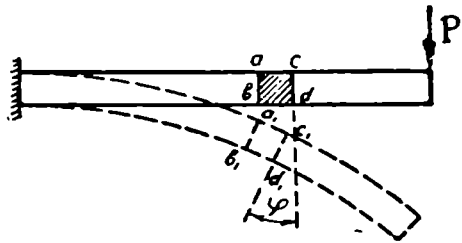
§ 1. დეფორმაციები და გადაადგილებები

საინჟინრო ნაშენი ისეა მიმაგრებული საყრდენებზე, რომ მას, როგორც ერთ მთლიან მყარ ტანს, არ შეუძლია გადაადგილდეს. ნაშენის ნებისმიერი წერტილის გადაადგილება მხოლოდ თვით ნაშენის დეფორმაციის გამო იდება. ტანის დეფორმაციას იწვევს როგორც მასზე უშუალოდ მოქმედი ძალები, ისე ტემპერატურის ცვლილება, საყრდენების დაჯდომა და სხვა.

მაგალითად, კონსოლური კოჭის (ნახ. 1) ნაწილები მოქმედი ძალის გავლენით გადაადგილდება და შეიცვლის თავის ფორმას. cd კვეთი მიიღებს c_1d_1 მდებარეობას და შობრუნდება φ კუთხით.

სამშენებლო მექანიკის ძირითადი თეორემები, როგორც ჩვენ ეს პირველ ნაწილში აღენიშნეთ, დამყარებულია აბსოლუტურად დრეკად და წრფივად დეფორმადი ტანის ცნებაზე. ე. ი. მოქმედი ძალების მოშორების შემდეგ ტანი მთლიანად უბრუნდება თავის პირვანდელ მდგომარეობას და ძალები და დეფორმაციები ერთმანეთთან წრფივად არიან დამოკიდებული. ეს უკანასკნელი იმას ნიშნავს, რომ გადაადგილებები და დეფორმაციები მოქმედი ძალების პროპორციულად იცვლება და ემორჩილება ძალთა დამოუკიდებლობის პრინციპს.

პრაქტიკულ ანგარიშებში ჩვენ მოგვიხდება შემდეგი ძირითადი სახის გადაადგილებათა განსაზღვრა:



ნახ. 1.

- 1) წერტილის წრფივი გადაადგილება მოცემული მიმართულებით (ნახ. 2, ა);
- 2) ნაშენის ელემენტის ღერძის შობრუნების კუთხე (ნახ. 2, ბ);
- 3) ნაშენის ორ წერტილს შორის მანძილის ცვლილება, ე. ი. ამ წერტილების ურთიერთ დაშორება ან დაახლოება (ნახ. 2, გ);
- 4) ორი ელემენტის ურთიერთ შობრუნების კუთხე (ნახ. 2, დ, ე) ან დრეკადი ღერძის ორ მხებს შორის კუთხის ცვლილება (გადატების კუთხე).

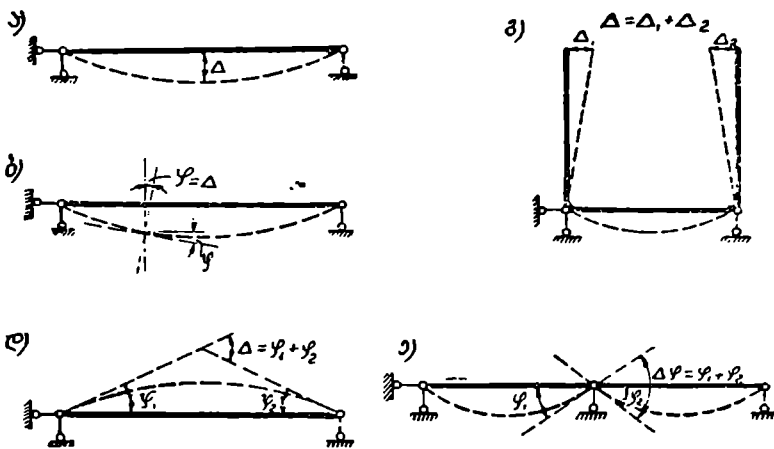
შემდეგში ჩვენ დაგვირდება ვიცოდეთ დრეკადი სისტემის ცალკეული წერტილების არა მთლიანი გადაადგილება, არამედ მისი გვეგმილები სხვადასხვა

მიმართულებით. გადაადგილება გამოწვეული ნებისმიერ ძალთა ფაქტორისაგან (შეყურსული ძალა, მომენტი და სხვა) აღინიშნება სიმბოლოთი Δ , ერთეული ძალისაგან გამოწვეული გადაადგილება კი სიმბოლოთი δ .

გადაადგილება აღენიშნოთ ორი ინდექსით. პირველი ინდექსი გვიჩვენებს გადაადგილების გეგმილის მიმართულებას, მეორე კი—გადაადგილების გამომწვევე ძალას და, რასაკვირველია, მის მიმართულებას.

მაგალითად, ვთქვათ, ნაშენზე მოქმედებს P ძალა (ნახ. 3, ა), რომელიც a წერტილის გადაადგილებს a_1 წერტილში.

a წერტილის მთლიანი გადაადგილება იქნება $\Delta = a\delta_1$. ავირჩიოთ ორი მიმართულება—ვერტიკალური i და ჰორიზონტალური k . მთლიანი გადაადგილების გეგმილი i და k ღერძზე აღენიშნოთ სათანადოთ Δ_{ii} და Δ_{ki} .



ნახ. 2.

Δ_{ii} არის გადაადგილება i მიმართულებით, გამოწვეული i მიმართულებით მოქმედი ძალისაგან.

მთლიანი გადაადგილება გამოითვლება ფორმულით

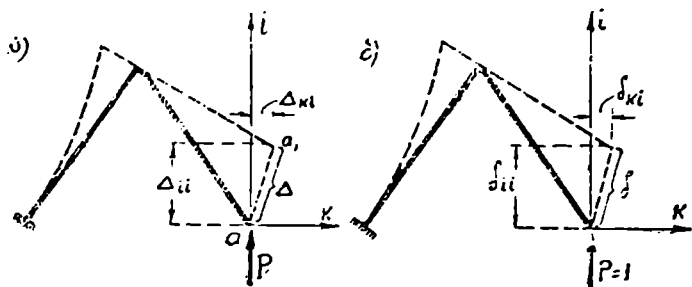
$$\Delta = \sqrt{\Delta_{ii}^2 + \Delta_{ki}^2};$$

თუ P ძალის მაგიერ მოქმედებს ერთეული ძალა (ნახ. 3, ბ), მაშინ გვექნება δ_{ii} , რომელიც წაიკითხება ასე: გადაადგილება i მიმართულებით, i მიმართულებით მოქმედი ერთეული ძალისაგან გამოწვეული, და δ_{ki} გადაადგილება k მიმართულებით, i მიმართულებით მოქმედი ერთეული ძალისაგან გამოწვეული. შეიძლება გადაადგილების გამომწვევი მიზეზი იყოს წყვილძალა—მომენტი, რომელსაც შეესაბამება როგორც კუთხური გადაადგილება (მობრუნების კუთხე), ისე ხაზობრივი. ამ შემთხვევაშიც გადაადგილება აღინიშნება ორი ინდექსით.

მაგალითად, კონსოლზე მოქმედი m_i მომენტით გამოწვეული გადაადგილება ამავე ძალის მიმართულებით იქნება მობრუნების კუთხე Δ_{ii} (ნახ. 4).

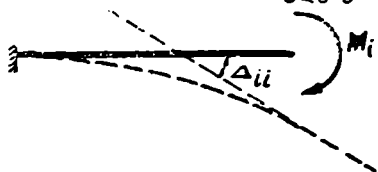
შემდეგში გაგვიადგილდება მუშაობა თუ გადაადგილების აღნიშვნას და-
 ვუკავშირებთ არა მარტო მოქმედი ძალის მიმართულებას, არამედ მისი მო-
 ღების წერტილის მდებარეობასაც.

აეილოთ ორ საყრდენზე მდებარე კოჭი და ჰსაზე ორი წერტილი i და
 k . მათგან i წერტილზე ვამოქმედოთ P ძალა. კოჭის დეფორმირებული ღერ-



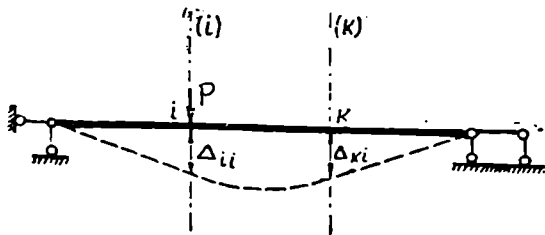
ნახ. 3.

ძი ნაჩვენებია მე-5 ნახაზზე. i და k წერტილზე აეილოთ ორი ვერტიკალური
 მიმართულება და მთლიან გადაადგილებათა გეგმილები ამ მიმართულებებზე
 აღენიშნოთ სათანადოდ Δ_{ii} და Δ_{ki} .
 სადაც Δ_{ii} წარმოადგენს i წერტილის
 გადაადგილებას i მიმართულებით. გა-
 მოწვეულს ამავე წერტილზე მოქმედი
 ძალით, ხოლო Δ_{ki} კი k წერტილის გა-
 დაადგილებას k მიმართულებით, გა-
 მოწვეულს i წერტილზე მოქმედი ძალით.



ნახ. 4.

მაშასადამე, პირველი ინდექსი
 გვიჩვენებს გადაადგილების ადგილს და მიმართულე-
 ბას, მეორე ინდექსი კი — გადაანაცვლების გამომწვევი



ნახ. 5.

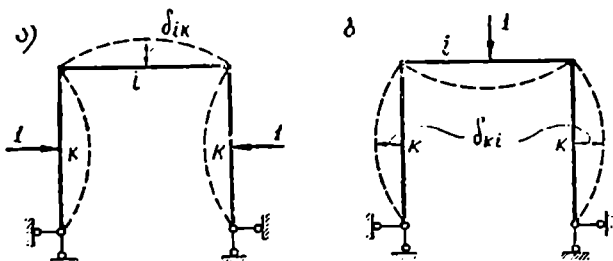
ძალის მიმართულე-
 ბას და მისი მოღების
 წერტილს. თუ მოქმედებს
 $P=1$ ძალა, მაშინ გვექნე-
 ბა δ_{ki} , რომელიც სიმარტი-
 ვისათვის წაიკითხება ასე:
 k წერტილის გადაადგი-
 ლება. გამოწვეული წერ-
 ტილზე მოქმედი ერთეული
 ძალით.

§ 2. განზომალბებული ძალევი და განზომალბებული გადაადგილბეანი

გადაადგილება შეიძლება გამოწვეული იყოს არა ერთი, არამედ რამო-
 დენიმე ძალით. მაგალითად, k წერტილზე მოქმედი ორი ერთეული ძალით
 გამოწვეული i წერტილის გადაადგილება იქნება δ_{ii} (ნახ. 6, ა). ეს ძალები

შეიძლება წარმოვიდგინოთ ერთ ძალად, რომელსაც განზოგადებული ძალა ეწოდება. თუ ერთეული ძალით ვიმოქმედებთ i წერტილზე (ნახ. 6, ბ), მაშინ k და k წერტილის ურთიერთ გადაადგილება (დაშორება ან დაახლოება) იქნება δ_{ik} . ამ გადაადგილებას ეწოდება ჯგუფური ან განზოგადებული გადაადგილება.

განზოგადებული გადაადგილება იქნება აგრეთვე ორი ღეროს ურთიერთ

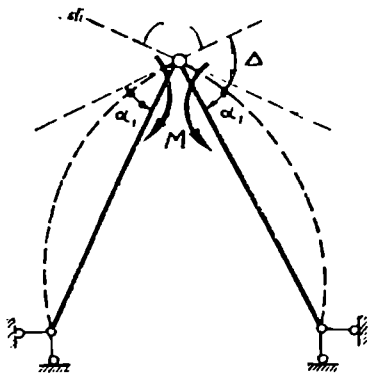


ნახ. 6.

მობრუნების კუთხე (Δ), რომელიც გამოწვეულია ორი წვეილძალით (ნახ. 7); სათანადო წვეილძალა კი—განზოგადებული ძალაა.

მე-2 ნახაზზე მოყვანილი გადაადგილებები Δ (ნახ. 2, გ, დ, ე) განზოგადებული ან ჯგუფური გადაანაცვლებებია.

თუ წარმოვიდგენთ, რომ ძელზე მოქმედებს ორი ერთმანეთის ტოლი და საწინააღმდეგო მიმართულების ძალა P (ნახ. 8), მაშინ განზოგადებული გადაადგილება იქნება ძელის პირვანდელი სიგრძის ნახრდი Δ , ხოლო განზოგადებული ძალა კი P .



ნახ. 7.

განზოგადებული ან ჯგუფური გადაადგილების და სათანადოდ განზოგადებული ძალის ცნების გაგებას გაგვიადვილებს მოქმედი ძალების მუშაობის განხილვა. გავიხსენოთ, რომ შეყურსული ძალა ასრულებს მუშაობას ძალის მოდების წერტილის ხაზობრივ გადაადგილებაზე, ხოლო წვეილძალა კი—ელემენტის მობრუნების კუთხეზე. როდესაც ტანზე მოქმედებს წვეილძალა M და ტანი მობრუნდება რაღაც α კუთხით (ნახ. 7), მაშინ წვეილძალების

მიერ შესრულებული მუშაობა იქნება:

$$T = M \cdot \alpha + M \cdot \alpha = M \cdot 2\alpha = M \cdot \Delta.$$

რადგანაც წვეილძალის და მობრუნების მიმართულებანი თანხედენილია, ამიტომ მუშაობა აღებულია დადებითი ნიშნით. როგორც ვხედავთ, მუშაობა გამოიხველება სათანადო წვეილძალის და ორი ელემენტის ურთიერთ მობრუნების კუთხის (გადაადგილების) გადამრავლებით.

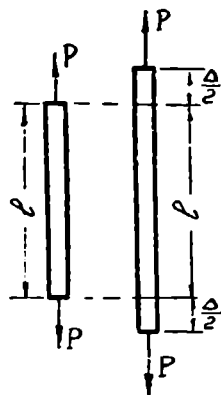
ამ შემთხვევაში წყვილძალა M იქნება განზოგადებული ძალა, მობრუნების კუთხე Δ კი—განზოგადებული გადაადგილება.

ორი ერთმანეთის ტოლი და საწინააღმდეგო მიმართულების ძალების მოქმედების შემთხვევაში (ნახ. 8), ამ ძალების მუშაობა სათანადო გადაადგილებაზე იქნება:

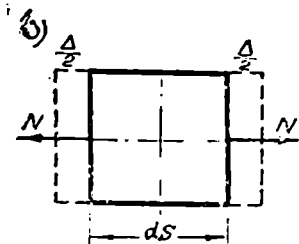
$$T = P \frac{\Delta}{2} + P \frac{\Delta}{2} = P \cdot \Delta,$$

სადაც Δ იქნება განზოგადებული გადაადგილება P კი—განზოგადებული ძალა.

განზოგადებული ძალის და გადაადგილების ცნება ჩვენ შეგვიძლია გავაერთოთ შიგა ძალების



ნახ. 8.



და გადაადგილებების მიმართაც. ვთქვათ ტანიდან ამოკვეთილ ds ელემენტზე მოქმედებენ შიგა ძალები—

გრძივი ძალა N (ნახ. 9, ა), მღუნავი მომენტი M (ნახ. 9, ბ) და ვანივი ძალა Q (ნახ. 9, გ).

ამ ძალების მუშაობა სათანადო შესაძლო გადაადგილებებზე იქნება:

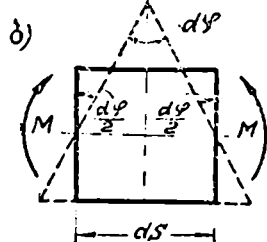
ა) გრძივი ძალის

$$V = N \frac{\Delta}{2} + N \frac{\Delta}{2} = N \Delta,$$

სადაც N არის განზოგადებული ძალა, ხოლო ds ელემენტის წაგრძელება, $\Delta = \frac{N ds}{EF}$ კი—

განზოგადებული გადაადგილება.

ბ) მღუნავი მომენტის



$$V = M \frac{d\varphi}{2} + M \frac{d\varphi}{2} = M d\varphi = M \Delta.$$

აქ M არის განზოგადებული ძალა, ხოლო მობრუნების კუთხე $\Delta = d\varphi = \frac{M ds}{EI}$ კი—განზოგადებული გადაადგილება.

გ) ვანივი ძალის

$$V = Q \frac{\Delta}{2} + Q \frac{\Delta}{2} = Q \cdot \Delta.$$

სადაც Q განზოგადებული ძალაა, $\Delta = \kappa \frac{Q ds}{GF}$ (აბსოლუტური ძვრა) კი—განზოგა-

ნახ. 9.

დებული გადაადგილება. შესაძლო მუშაობას ყველგან უნდა ჰქონდეს მუშაობის განზომილება (კგმ).

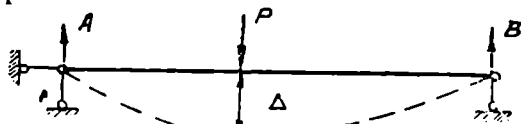
განზოგადებული გადაადგილების და ძალის არჩევა დამყარებულია იმაზე, რომ განზოგადებული ძალის და სათანადო განზოგადებული გადაადგილების ნამრავლმა უნდა მოგვცეს მოქმედი ძალების (რომელიც შეცვლილია განზოგადებული ძალით) მუშაობა სათანადო შესაძლო გადაადგილებაზე (რომელიც შეცვლილია განზოგადებული გადაადგილებით).

ქვემოთ მიღებული ძირითადი თეორემები სამართლიანია არა მარტო უბრალო ძალების და გადაადგილების მიმართ, არამედ განზოგადებული (ჯგუფური) ძალების და გადაადგილების მიმართაც. ამიტომ განზოგადებული ძალები და გადაადგილებები ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ისე, როგორც უბრალო ძალები და გადაადგილებები.

განვიხილოთ განზოგადებული ძალის და მისი შესაბამი განზოგადებული გადაადგილების კიდევ რამდენიმე შემთხვევა.

1 მაგალითი. ორ საყრდენზე მდებარე მარტივ კოქზე მოქმედებს შეყურსული ძალა P (ნახ. 10), რომელიც იწვევს კოქის ღუნვას. კოქზე მოქმედებს ძალთა ჯგუფი P , A და B , რომელთა შესრულებული მუშაობა სათანადო გადაადგილებაზე იქნება: Δ

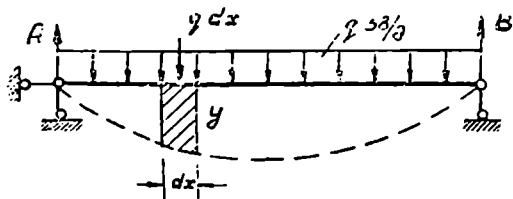
$$T = P \cdot \Delta + A \cdot 0 + B \cdot 0 = P \cdot \Delta.$$



ნახ. 10.

მაშასადამე, აქ განზოგადებული ძალა იქნება P , ხოლო განზოგადებული გადაადგილება კი—კოქის ჩალუნვა Δ .

2 მაგალითი. ორ საყრდენზე მდებარე მარტივ კოქზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი ინტენსივობით q კგ/მ (ნახ. 11). თანაბრად განაწილებული ტვირთი ჩვენ შეგვიძლია შევცვალოთ ელემენტარული ძალებით $q dx$. კოქზე მოქმედი ყველა ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა იქნება (რეაქტივების მუშაობა ნულის ტოლია):



ნახ. 11.

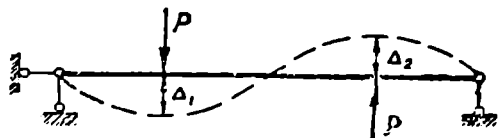
$$T = \int_0^l q dx \cdot y = q \int_0^l y dx = q \cdot \omega = q \cdot \Delta.$$

სადაც ω -თი აღნიშნულია ფართობი, რომელიც მოთავსებულია კოქის სწორხაზოვან ღერძსა და გაღუნულ ღერძს შორის. ამ შემთხვევაში ეს ფართობი იქნება განზოგადებული გადაადგილება, ხოლო q კი—განზოგადებული ძალა. ა-ს განზომილებაა მ² და ამიტომ მუშაობა $q \cdot \omega$ გაიზომება კგმ-ში.

3 მაგალითი. კოქზე მოქმედებს ორი ერთმანეთის ტოლი და საწინააღმდეგო მიმართულების ძალა P . კოქის დეფორმირებული მდგომარეობა ნახვენება ნახაზზე (ნახ. 12).

კოქზე მოქმედი ძალების მუშაობა იქნება:

$$T = P \cdot \Delta_1 + P \cdot \Delta_2 = P(\Delta_1 + \Delta_2) = P \cdot \Delta.$$



ნახ. 12.

აქ P არის განზოგადებული ძალა, ხოლო Δ — ძალების მიყენების წერტილების ურთიერთ დაშორება ვერტიკალური მიმართულებით — განზოგადებული გადაადგილება.

§ 3. შესაძლო გადაადგილების პრინციპი ღრმად სისტემაში

შესაძლო გადაადგილების პრინციპი წარმოადგენს მექანიკის ყველაზე განზოგადებულ და მნიშვნელოვან პრინციპს. ის არის მექანიკის უდიდესი მიღწევა და საშუალებას იძლევა მივიღოთ დრეკადი ტანის წონასწორობის მრავალფეროვანი განტოლებები, რომლებსაც ვხვდებით ამა თუ იმ ამოცანის გადაწყვეტის დროს. არ იქნება გადაქარბებული თუ ვიტყვით, რომ სამშენებლო მექანიკის თითქმის ყველა ძირითადი თეორემა დამყარებულია ამ პრინციპზე.

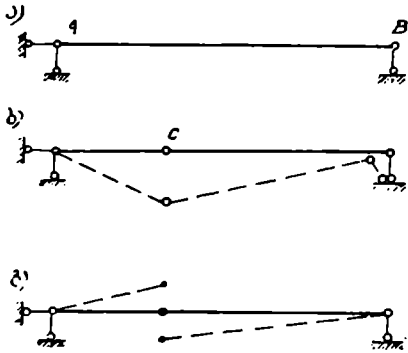
შესაძლო გადაადგილების პრინციპი მექანიკაში დაამკვიდრა ივანე ბერნულმა, თუმცა ელემენტარული ამოცანების გადასაწყვეტად მას აღრეც იყენებდნენ. შემდეგში ლაგრანჟმა ეს განავითარა და დაამუშავა. ამიტომ მას ხშირად ლაგრანჟის პრინციპს უწოდებენ. უფრო სამართლიანი იქნებოდა, თუ მას ლაგრანჟ-ბერნულის პრინციპს დავარქმევდით.

თეორიული მექანიკიდან ცნობილია, რომ შესაძლო გადაადგილების პრინციპი მდგომარეობს შემდეგში: თუ მატერიალურ სისტემაზე მოქმედებენ მოკემული ძალები და სისტემა იმყოფება წონასწორობაში, მაშინ ამ ძალების მუშაობათა ჯამი ნებისმიერ უსასრულოდ მცირე შესაძლო გადაადგილებაზე ტოლია ნულის, და პირიქით, თუ რაიმე მატერიალურ სისტემაზე მოქმედი ძალების მუშაობათა ჯამი უსასრულოდ მცირე შესაძლო გადაადგილებაზე ტოლია ნულის, მაშინ სისტემა იმყოფება წონასწორობაში. ეს არის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

ეს თეორემა, რომ სწორად იყოს გაგებული, საკიროა ზოგიერთი განმარტება. უპირველესად ყოვლისა გავიხსენოთ, თუ როგორ გადაადგილებებს ეწოდება შესაძლო.

შესაძლო გადაადგილება არის ისეთი გადაადგილება, რომელიც შეესაბამება სისტემის ბმების ხასიათს, მის კონსტრუქციას და არ ეწინააღმდეგება მას, ე. ი. რომელიც არ დაარღვევს სისტემის ბმებს.

საერთოდ, დრეკადი გადაადგილებანი, გამოწვეული ნებისმიერი სახის დატვირთვისაგან: ტემპერატურისაგან, საყრდენების დაჯდომისაგან და სხვა, შესაძლო გადაადგილებებია.



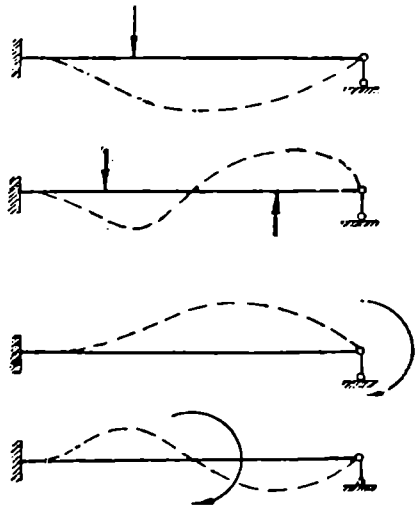
ნახ. 13.

თუ იმავე კოქის *C* წერტილში სახსარია მოწყობილი, მაშინ ის იქცევა მექანიზმად და მე-13, ბ ნახაზზე ნაჩვენები გადაადგილება იქნება შესაძლო, ხოლო მე-13, გ ნახაზზე ნაჩვენები გადაადგილება კი არ იქნება შესაძლო, რადგან ის ეწინააღმდეგება სახსრის კონსტრუქციას.

მე-14 ნახაზზე ნაჩვენებია კოქის შესაძლო გადაადგილებანი, ხოლო მე-15-ზე კი—არა შესაძლო.

შესაძლო გადაადგილება უნდა იყოს უსასრულოდ მცირე ან სასრულო, მაგრამ იმდენად მცირე, რომ ძაბვები არ აღემატებოდეს დრეკადობის ზღვრებს. ჰიპოტეზა იდეალური დრეკადი ტანის და სათანადოდ დეფორმაციის განვითარების წრფივობის შესახებ (ჰუკის განზოგადებული კანონი) საშუალებას იძლევა არ განვსხვავოთ ერთმანეთისაგან უსასრულოდ მცირე და მცირე სასრულო დეფორმაციები. დრეკადი დეფორმაციები მცირე სასრულო დეფორმაციებია.

ამ წინასწარი განმარტების შემდეგ, ჩვენ შეგვიძლია გადავიდეთ თვით პრინციპის განხილვაზე. წარმოვიდგინოთ, რომ სისტემა, რომელზედაც



ნახ. 14.

მოქმედებენ გაწონასწორებული ძალები P_1, P_2, \dots, P_n , მიიღო უსასრულოდ მცირე შესაძლო გადაადგილება Δ (ნახ. 16). თუ გადაადგილების მიმართულებასა და P_n ძალის მიმართულებას შორის კუთხეს აღვნიშნავთ α_n -თი, მაშინ P_n ძალის მოდების წერტილის გადაადგილება ამავე ძალის მიმართულებით ან მთლიანი გადაადგილების გეგმილი P_n -ს მიმართულებაზე იქნება:

$$\Delta \cos \alpha_n$$

და შესაძლო გადაადგილების პრინციპი დაიწერება შემდეგნაირად:

$$\sum_{k=1}^n P_k \Delta \cos \alpha_k = 0.$$

ან, თუ P_k ძალის მოდების წერტილის გადაადგილებას თავისივე მიმართულებით აღვნიშნავთ $\Delta_k = \Delta \cos \alpha_k$, მაშინ შესაძლო მუშაობის პრინციპი გამოისახება ტოლობით:

$$\sum_{k=1}^n P_k \Delta_k = 0. \quad (1)$$

ამ სახით ეს პრინციპი მიღებულია აბსოლუტურად ხისტი სისტემებისათვის, სადაც მოქმედ ძალებად ითვლება მხოლოდ გარე ძალები დრეკად

~~სისტემებში მოქმედ ძალებად გარდა გარე ძალებისა შიგა ძალებიც ითვლება (მლუნავეი მომენტი, განივი ძალა, გრძივი ძალა).~~

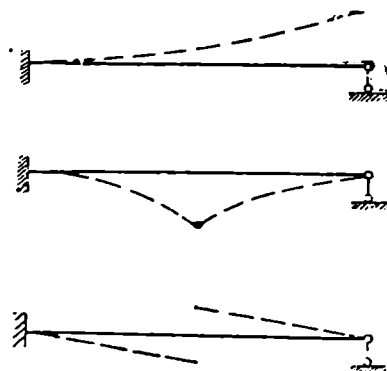
შესაძლო გადაადგილების პრინციპი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს დრეკად სისტემებშიც, თუ მუშაობის განტოლებაში შევიტანთ ყველა მოქმედ ძალას როგორც გარეს, ისე შიგას.

წარმოვიდგინოთ, რომ დრეკად სისტემაზე მოქმედებს P_1 და P_2 ძალა

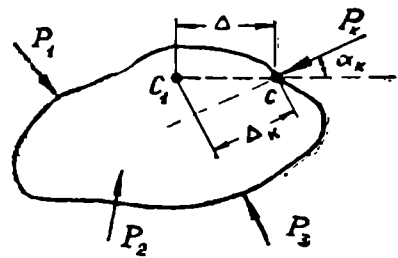
(ნახ. 17). კოკი მიიღებს უსასრულოდ მცირე დრეკად დეფორმაციას, რის დამთავრების შემდეგ კოკი მოვა წონასწორობაში. კოკზე მოქმედი გარე ძალები სათანადო შესაძლო გადაადგილებაზე შეასრულებს მუშაობას:

$$T = \sum P_k \Delta_k = P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 \dots \quad (2)$$

გარე ძალების და სათანადო გადაადგილებათა მიმართულებები ერთმანეთს ემთხვევა და მათ მიერ შესრულებული მუშაობა ირ იქნება ნულის ტოლი, თუმცა კოკი წონასწორობაშია. ამიტომ, ცხადია, რომ გარე ძალების



ნახ. 15.



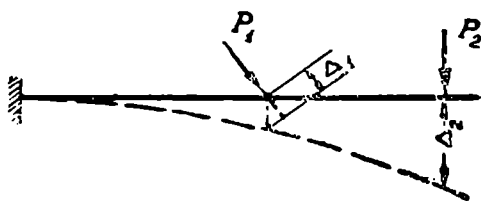
ნახ. 16.

შესრულებული მუშაობა უნდა გააბათილოს შინაგანი ძალების შესრულებულმა მუშაობამ. მაშასადამე, დრეკადი დეფორმაციების განვითარების პროცესში გარე და შიგა ძალების შესრულებული მუშაობათა ჯამი ნულის ტოლია.

გარე ძალების შესრულებულ მუშაობას შესაძლო გადაადგილებაზე თუ აღვნიშნავთ T -თი, ხოლო შიგა ძალების შესრულებულ მუშაობას იმავე გადაადგილებაზე კი V -თი, მაშინ

$$T + V = 0, \quad (3)$$

$$T = -V. \quad (3')$$

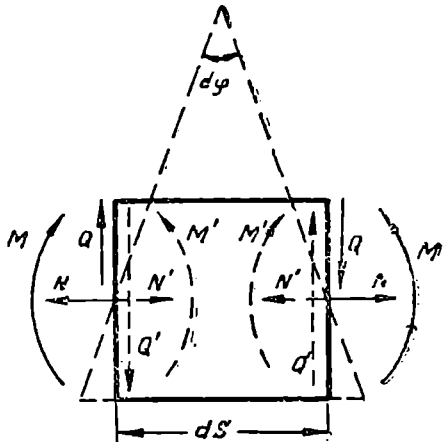


ნახ. 17.

შიგა ძალების მუშაობას ყოველთვის გარე ძალების მუშაობის შებრუნებული ნიშანი აქვს. რადგანაც გარე ძალების მიმართულებანი ემთხვევა გადაადგილებათა მიმართულებებს, ამიტომ ამ ძალების შესრულებული მუშაობა ყოველთვის დადებითია.

რაც შეეხება შიგა ძალებს, მათ ყოველთვის გადაადგილების საწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ და ამიტომ შიგა ძალების მუშაობა უარყოფითია.

მართლაც, ტანიდან გამოვყოთ ნებისმიერი ds ელემენტი (ნახ. 18), რომელზეც მოქმედებს მღუნავი მომენტი M , გრძივი ძალა N და განივი ძალა Q . ამ ძალებს შეესაბამება ტოლი და საწინააღმდეგო მიმართულების შინაგანი ძალები M' , N' და Q' , რომლებიც ეწინააღმდეგება ელემენტის დეფორმაციას. ნახაზზე ნაჩვენებია მხოლოდ M -ით გამოწვეული დეფორმაცია (მეზობელი კვეთების ურთიერთ მობრუნების კუთხე). წინააღმდეგობის შინაგანი M' ძალის მუშაობა იქნება უარყოფითი ($-M'd\varphi$), ხოლო ელემენტზე მოქმედი შინაგანი ძალის M -ის (ელემენტის მიმართ ეს გარე ძალაა) მუშაობა კი დადებითი. საერთოდ, მოქმედი ძალა (გარე ძალა) ავითარებს დეფორმაციას, წინააღმდეგობის ძალა (შიგა ძალა) კი—ეწინააღმდეგება მას.



ნახ. 18.

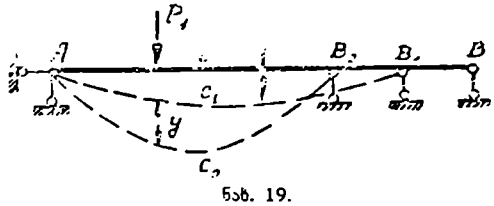
თუ მუშაობებს ავიღებთ აბსოლუტური სიდიდით, მაშინ შესაძლო გადაადგილების პრინციპი შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$T - V = 0, \tag{4}$$

$$T = V. \tag{4'}$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა სიტყვიერად გამოითქმის ასე: გარე ძალების შესაძლო მუშაობა შიგა ძალების შესაძლო მუშაობის ტოლია.

საბოლოოდ, დრეკადი ტანისათვის შესაძლო გადაადგილების პრინციპი შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ასე: თუ მატერიალურ სისტემაზე მოქმედებენ მოცემული ძალები და სისტემა იმყოფება წონასწორობაში, მაშინ გარე და შიგა ძალების მუშაობათა ჯამი სათანადო უსასრულოდ მცირე შესაძლო გადაადგილებაზე ტოლია ნულისა და პირიქით.



უნდა გვახსოვდეს, რომ (4) განტოლება სამართლიანია მანამ, სანამ ადგილი აქვს დრეკად დეფორმაციებს. (4) განტოლება გამოხატავს ენერჯიის შენახვის კანონს დრეკად სისტემაში.

უნდა შევნიშნოთ, რომ შესაძლო მუშაობის მთლიანი სიდიდე არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორი გზით მივიდა ტანი საწყისი მდგომარეობიდან დეფორმირებულ მდგომარეობამდე; მუშაობის სიდიდე დამოკიდებულია მხოლოდ საწყის და ბოლო (დეფორმირებულ) მდგომარეობაზე.

ზემოთ განხილული თეორიის დროს ჩვენ მხედველობაში გვქონდა, რომ დეფორმაციის განვითარების პროცესში როგორც გარე, ისე შიგა ძალების სიდიდეები და მიმართულებანი უცვლელია.

შესაძლო მუშაობის პრინციპის განხილვის დროს მნიშვნელობა არა აქვს, თუ რა იწვევს გადაადგილებას, ის ძალა, რომელიც ასრულებს მუშაობას, თუ სხვა რომელიმე ძალა.

მაგალითად, ვთქვათ, კოქზე მოქმედებს P₁ ძალა, რომელიც კოქს მისცემს AC₁B₁ დეფორმირებულ მდგომარეობას და გარე და შიგა ძალების გავლენით კოქი მოვა წონასწორობაში (ნახ. 19). ამის შემდეგ ვიმოქმედოთ P₂ ძალით, რომელიც კოქს მისცემს A₂C₂B₂ მონახულობას. P₁ ძალა შეასრულებს მუშაობას P₂ ძალისაგან გამოწვეულ გადაადგილებაზე (P₁y). აქ შესაძლო გადაადგილების პრინციპი მდგომარეობს იმაში, რომ პირველი მდგომარეობის ძალების (P₁) მუშაობა მეორე მდგომარეობის ძალებისაგან გამოწვეულ გადაადგილებაზე (y) ტოლი უნდა იყოს ნულის. რასაკვირველია, ჩვენ მხედველობაში გვაქვს როგორც გარე, ისე შიგა ძალების მუშაობა.

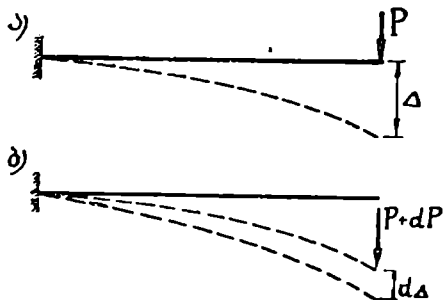
§ 4. გარე ძალების მუშაობა

გადაადგილებათა თეორიის შესასწავლად დაგვეკირდება ვიცოდეთ გარე და შიგა ძალების მუშაობა. ჩვენ შემდეგში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ

2. ა. ი. ასტვაცატუროვი.

ძალის მოქმედება ნაშენზე არის სტატიკური, ე. ი. ის თავისი მოქმედების დროს იზრდება თანდათანობით ნულიდან თავის საბოლოო მნიშვნელობამდე იმდენად ნელა, რომ არ წარმოიშვება ინერციის ძალები (ან წარმოიშვება უმნიშვნელო ძალები, რომლებიც მხედველობაში არ მიიღება).

ასევე თანდათანობით იზრდება დეფორმაციებიც. როდესაც P ძალა მი-
აღწევს თავის საბოლოო მნიშვნელობას P_{max} -ს, მაშინ გადაადგილება Δ -ც მი-
აღწევს თავის მაქსიმალურ სიდი-
დეს Δ_{max} -ს.



ნახ. 20.

გარე ძალების მუშაობის ფორმულა შეიძლება მივიღოთ როგორც ანალიზურად, ისე გრაფიკულად. გავარჩიოთ ანალიზური წესი.

ეთქვით, რომ კონსოლზე მოქმედებს სტატიკური ძალა F , რომლის საბოლოო სიდიდე არის P_{max} . განვიხილოთ კოქის დეფორმაცია რალაც შუალედ დროში, როდესაც ძალამ მიაღ-

წია P სიდიდეს, ჩაღუნვამ კი Δ -ს (ნახ. 20, ა). ამის შემდეგ, ძალის მიცეით უსასრულოდ მცირე ნაზრდი dP , რის შედეგად ჩაღუნვაც მიიღებს უსასრულო მცირე ნაზრდს $d\Delta$ -ს. ამ შუალედ დროში მოქმედი ძალის $(P+dP)$ მუშაობა ელემენტარულ გადაადგილებაზე ($d\Delta$) იქნება:

$$dT = (P+dP)d\Delta = Pd\Delta + dP \cdot d\Delta.$$

თუ მხედველობაში არ მივიღებთ მეორე რიგის მცირე სიდიდეს, გვექნება:

$$dT = P \cdot d\Delta.$$

რადგანაც დეფორმაციები არ სცილდება დრეკადობის ზღვრებს, ამიტომ, ჰუკის კანონის საფუძველზე, ძალას და დეფორმაციას შორის იქნება პროპორციული დამოკიდებულება:

$$P = k \cdot \Delta, \tag{5}$$

სადაც k არის პროპორციულობის კოეფიციენტი.

მაშასადამე, ელემენტარული მუშაობა იქნება:

$$dT = k\Delta d\Delta.$$

P ძალის მთლიანი მუშაობა, ე. ი. მუშაობის სიდიდე, რომელსაც შეასრულებს ის თავისი მოქმედების მთელი ხნის განმავლობაში, განისაზღვრება ელემენტარულ მუშაობათა აჯამებით (ძალა იზრდება 0-დან P_{max} -მდე, დეფორმაცია კი—0-დან Δ_{max} -მდე):

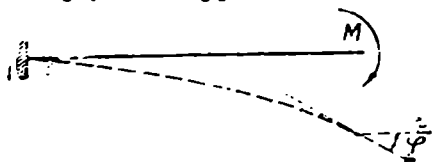
$$T = \int_0^{\Delta_{max}} k\Delta d\Delta = \frac{k\Delta_{max}^2}{2} = \frac{P_{max} \Delta_{max}}{2}. \tag{6}$$

(მე-4 ფორმულის საფუძველზე $P_{max} = k\Delta_{max}$).

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ, რომ სტატიკურად მოქმედი ძალის მუშაობა ტოლია ამ ძალის საბოლოო სიდიდის და სათანადო საბოლოო გადადგილების ნამრავლის ნახევრისა.

ეს ფორმულა განსხვავდება თეორიული შექანიკის ფორმული-საგან კოეფიციენტით $1/2$, რადეფორმაციებსა და ძალებს შორის პროპორციული დამოკიდებუ-ლებით აიხსნება.

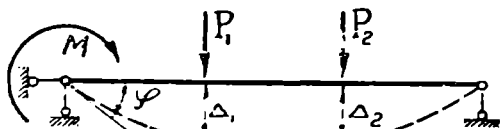
მე-6 ფორმულა მიღებული იყო შეუქრსული ძალის მოქმედების შემთხვევაში. მაგრამ ის სამართლიანია მაშინაც, როცა ნაშენზე მოქმედებს შეუქრსული მომენტი ან რაიმე განზოგადებული ძალა, მხოლოდ ყოველთვის უნდა ავი-ლოდ ძალის შესაბამი გადა-ადგილება.



ნახ. 21.

მაგალითად, თუ კონ-სოლზე მოქმედებს შეუქრ-სული მომენტი M (ნახ. 21),

მაგალითად, თუ კონ-სოლზე მოქმედებს შეუქრ-სული მომენტი M (ნახ. 21),



ნახ. 22.

მაშინ მომენტის შესაბამი გადაადგილება იქნება მობრუნების კუთხე მომენტის მოღების ადგილზე და გვექნება:

$$T = \frac{M \cdot \varphi}{2}. \quad (7)$$

თუ ნაშენზე მოქმედებს არა ერთი, არამედ რამდენიმე სხვადასხვა კატე-გორიის სტატიკური ძალა (ნახ. 22), მაშინ მთლიანი მუშაობა იქნება:

$$T = \frac{1}{2} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + M \varphi).$$

ზოგადად

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i, \quad (8)$$

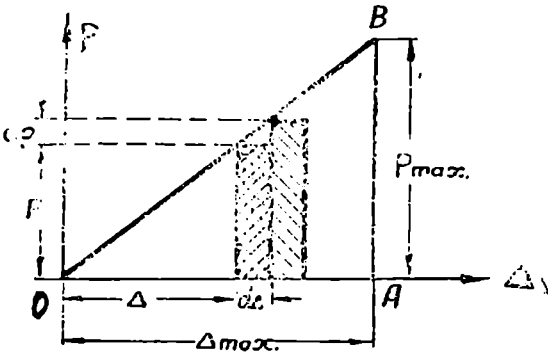
სადაც ძალასა და გადაადგილებაში იჯულისხმება განზოგადებული ძალა და გადაადგილება. გარდა ამისა, აღებული უნდა იყოს მთლიანი დატვირთვისა-გან გამოწვეული საბოლოო გადაადგილება.

მუშაობის სიდიდე არ არის დამოკიდებული იმაზე, ძალები ერთდროუ-ლად არის მოღებული თუ ცალ-ცალკე, ე. ი. ის არ არის დამოკიდებული ძა-ლების მოღების თანმიმდევრობაზე და ამიტომ (8) ფორმულა სამართლიანია ძალთა ნებისმიერი სისტემისათვის როგორი თანმიმდევრობითაც არ უნდა იყოს მოღებული ძალები (იხ. § 7).

იგივე თეორემა დავამტკიცოთ გრაფიკულად. რადგანაც ძალასა და დე-ფორმაციას შორის არსებობს პროპორციული დამოკიდებულება, ამიტომ ძა-

ლის და სათანადო დეფორმაციის ზრდის პროცესი გამოიხატება გრაფიკულად ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახ. 23).

ელემენტარულ გადაადგილებაზე ძალა $P+dP$ შეასრულებს მუშაობას $(F+dP)d\Delta \approx Pd\Delta$, რომელიც დიაგრამაზე გამოიხატავს ორმაგად დაშტრიხული



ნახ. 23.

სწორკუთხედის ფართობს. ძალის შემდეგი გაზრდისას მუშაობის სიდიდე გაიზრდება მეზობელი სწორკუთხედის ფართობით და ასე შემდეგ. OBA სამკუთხედის ფართობი მოგვცემს სთულ მუშაობას.

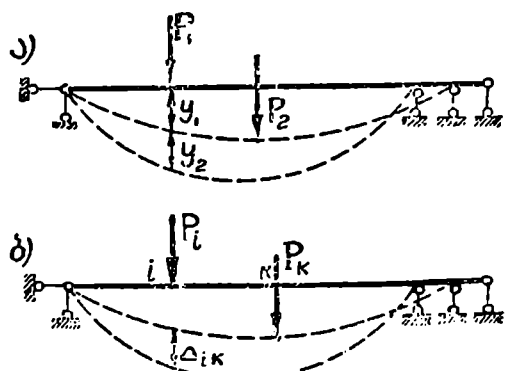
$$T = \frac{P_{max} \cdot \Delta_{max}}{2}$$

ჩვენ შევისწავლეთ ძალის მუშაობა ამავე ძალით გა-

მოწვეულ გადაადგილებაზე, ე. ი. გარე ძალის ნამდვილი მუშაობა, მაგრამ ხშირად შეგვხვდება ისეთი შემთხვევა, როდესაც მუშაობას ასრულებს არა ის ძალა, რომელიც იწვევს გადაადგილებას, აოამედ სხვა რომელიმე ძალა. ეს ჩვენ წინა §-შიც განვიხილეთ. მაგალითად, ვთქვათ, რომ კოჭზე მოქმედებს სტატიკური ძალა P_1 , რომელიც გამოიწვევს კოჭის დეფორმაციას;

ამის შემდეგ დეფორმირებულ კოჭზე ვიმოქმედოთ P_2 ძალით, რომელიც თავის მხრივ გამოიწვევს დამატებით დეფორმაციას (ნახ. 24, ა). რადგანაც P_2 ძალის მოქმედების დროს P_1 მუდმივია, ამიტომ P_2 ძალით გამოწვეულ გადაადგილებაზე P_1 შეასრულებს მუშაობას $P_1 y_2$, რომელიც იქნება P_1 ძალის ვირტუალური ანუ შესაძლო მუშაობა. ამ შემთხვევაში დეფორმაცია არ არის დამოკიდებული იმ ძალზე, რომელიც მუშაობას ასრულებს და ამიტომაც მუშაობა გამოითვლება ძალისა და გადაადგილების გადამრავლებით.

ერთი ძალის მუშაობას მეორე ძალით გამოწვეულ გადაადგილებაზე ეწოდება ვირტუალური ანუ შესაძლო მუშაობა. P_1 ძალის ნამდვილი მუშაობა იქნება $\frac{P_1 y_1}{2}$.



ნახ. 24.

ზოგადად, თუ ნაშენზე რამდენიმე ძალა მოქმედებს, გარე ძალების შე-
საძლო ან ვირტუალური მუშაობა შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგნაირად:

$$T_{ik} = \sum_{i=1}^n P_i \Delta_{ik} \quad (9)$$

პირველი ინდექსი გვიჩვენებს იმ ძალას, რომელიც მუშაობის ასრულებს,
მეორე კი — რომელიც იწვევს გადაადგილებას. მაშასადამე, T_{ik} წაიკითხება ასე:
 i კატეგორიის ძალების მუშაობა k კატეგორიის ძალებით გამოწვეულ გადა-
ადგილებაზე.

§ 5. შიგა ძალების მუშაობა. კონვენციალური ნიშანები

ჩვენ შევისწავლეთ გარე ძალების შესრულებული მუშაობა, ეხლა გადა-
ვიდეთ შიგა ძალების შესრულებული მუშაობის შესწავლაზე.

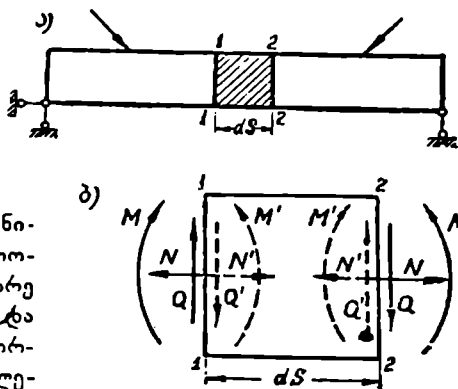
როგორც ადრე (§ 3) იყო აღნიშნული, გარე ძალების მოქმედების შედე-
გად განვითარებული დეფორმაციები წარმოშობენ შიგა ძალებს, რომლებიც
თავის მხრივ შეასრულებენ მუშაობას.

მე-3 პარაგრაფში ჩვენ ვნახეთ, რომ შიგა ძალებს, რომლებიც ეწინააღ-
მდეგებიან დეფორმაციებს, ყოველთვის დეფორმაციის საწინააღმდეგო მიმარ-
თულება აქვთ და ამიტომ მათი მუშაობა მუდამ უარყოფითია.

განივილით ორ საყრდენზე მდებარე კოქი, რომელიც დაყოფილია უსა-
სრულოდ მცირე ds ელემენტებად (ნახ. 25) და ვთქვათ, რომ ყველა ელემენ-
ტი განიცდის დეფორმაციას. გა-
მოვყოთ ერთ-ერთი ასეთი ელე-
მენტი და შევისწავლოთ მასზე
მოქმედი შიგა ძალების მუშაობა.

გამოყოფილ ელემენტზე უქუვ-
დებული ნაწილის გავლენა შეიძ-
ლება გამოვსახოთ M მღუნავი მო-
მენტი, N გრძივი ძალით და Q განი-
ვი ძალით (ნახ. 25,ბ). ამ ძალებს, რო-
სლებიც ds ელემენტის მიმართ გარე
ძალებია, შეესაბამება ტოლი და
საწინააღმდეგო მიმართულების დეფორ-
მაციის წინააღმდეგობის შიგა ძალები
 $M' = M$, $N' = N$ და $Q' = Q$. საზო-
გადოდ, თუ 1—1 კვეთში მოქმედი ძა-
ლებია M , N და Q , მაშინ 2—2 კვეთში მოქმედი ძალები უნდა იყოს $M + dM$,
 $N + dN$ და $Q + dQ$. მაგრამ, რადგანაც ნაზრდები უსასრულოდ მცირეა. ელე-
მენტის წონასწორობის განხილვისას შეგვიძლია ისინი მხედველობაში არ
მივიღოთ.

ds ელემენტზე მოქმედი შინაგანი ძალები და სათანადოდ წინააღმდეგო-
ბის შინაგანი ძალები (M' , N' და Q') განვიხილოთ ცალ-ცალკე (ნახ. 26).



ნახ. 25.

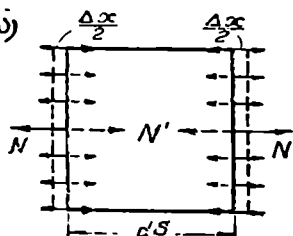
გრძივი ძალა N განივ კვეთზე განაწილება თანაბრად (ნახ. 26, ა) და ჰუ-
კის კანონის საფუძველზე ds ელემენტს წააგრძელებს სიდიდით:

$$\Delta x = \frac{N ds}{EF}, \quad (10)$$

სადაც E და F დრეკადობის მოდული და განივი კვეთის ფართობია.

მღუნავი მომენტის გავლენით განივი კვეთები მობრუნდება $\Delta \varphi$ კუთხით
(ნახ. 26, ბ), რომელიც იმავე ჰუკის კანონის საფუძველზე გამოითვლება ფორ-
მულით:

$$\Delta \varphi = \frac{M ds}{EI}, \quad (11)$$



სადაც I კვეთის ინერციის მომენტია.

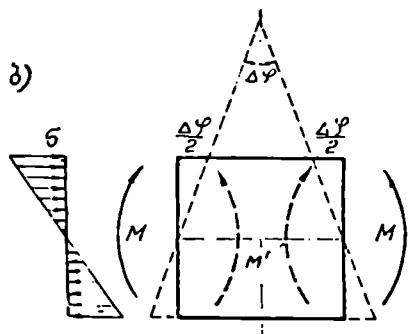
განივი ძალა გამოიწვევს ძვრის დე-
ფორმაციას

$$\Delta y = d\gamma ds.$$

ძვრის კუთხე

$$d\gamma = \frac{\tau}{G}.$$

ბ)



მხები ძაბვები რომ თანაბრად
ყოფილიყო გავრცელებული განივ-
კვეთში, მაშინ გვექნებოდა

$$\tau = \frac{Q}{F}.$$

მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ მხები ძაბ-
ვები კვეთში ვრცელდება პარაბოლის
კანონით (ნახ. 26, გ), ამიტომ უნდა
შევიტანოთ შემასწორებელი კოეფი-
ციენტი, რომლის მნიშვნელობა მა-
სალათა გამძლეობაშია გამოთვლილი

$$\tau = k \frac{Q}{F}.$$

საბოლოოდ ძვრის დეფორმაცია

$$\Delta y = d\gamma \cdot ds = \frac{\tau}{G} ds = k \frac{Q ds}{GF}, \quad (12)$$

სადაც G მეორე რიგის დრეკადობის
მოდულია (ძვრის მოდული).

ნაშენზე მოკმედი გარე ძალები.

სტატიკურია და რადგანაც შიგა ძალები წარმოიშევა გარე ძალებთან ერ-
თად, ამიტომ ისინიც სტატიკური იქნება და აუშაობა (8) ფორმულის საფუძე-
ვლზე გამოითვლება.

ნახ. 26.

პრიზმული ძელების შემთხვევაში გრძივი დეფორმაცია დამოკიდებულია მხოლოდ N -ზე, ღუნვის დეფორმაცია M -ზე და ძვრის დეფორმაცია კი— Q -ზე, ამიტომ მთლიანი მუშაობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც ცალკეული ძალების მუშაობათა ჯამი:

$$dV = - \left(\frac{M \Delta \varphi}{2} + \frac{N \Delta x}{2} + \frac{Q \Delta y}{2} \right) = - \left(\frac{M^2 ds}{2EI} + \frac{N^2 ds}{2EF} + k \frac{Q^2 ds}{2GF} \right).$$

შიგა ძალების მუშაობის მთელი სიდიდის მისაღებად უნდა შევაჯამოთ მიღებული ელემენტარული მუშაობები ნაშენის მთელ სიგრძეზე:

$$V = - \left(\int \frac{M^2 ds}{2EI} + \int \frac{N^2 ds}{2EF} + k \int \frac{Q^2 ds}{GF} \right). \quad (13)$$

თუ ნაშენი შედგება მრავალი ღეროსაგან, მაშინ მთლიანი მუშაობის გამოსაანგარიშებლად სამივე ინტეგრალი უნდა გავრცელდეს ყველა ღეროზე:

$$V = - \frac{1}{2} \sum \left(\int \frac{M^2 ds}{EI} + \int \frac{N^2 ds}{EF} + k \int \frac{Q^2 ds}{GF} \right). \quad (13')$$

ნიშანი მინუსი აღებულია იმიტომ, რომ შიგა ძალების მუშაობა უარყოფითია. მხები ძაბვების შემასწორებელ k კოეფიციენტს აქვს შემდეგი მნიშვნელობა:

$$\text{სწორკუთხა კვეთისათვის } k = -\frac{6}{5},$$

$$\text{მრგვალი კვეთისათვის } k = \frac{10}{9}.$$

მიღებული ფორმულა (13 ან 13') იძლევა შიგა ძალების ნამდვილ მუშაობას. ამ მუშაობის ორი მხარე უნდა გავარჩიოთ: ერთი, რომელსაც მივიღებთ დეფორმაციის ზრდის დროს (ნაშენის დატვირთვა), მეორე კი—დეფორმაციის მოსპობისას (ნაშენის განტვირთვა). პირველ შემთხვევაში შიგა ძალების მუშაობა უარყოფითია, მეორე შემთხვევაში კი—დადებითი. ამ უკანასკნელს პოტენციალური ენერჯია ეწოდება.

მაშასადამე, პოტენციალური ენერჯია არის შიგა ძალების ნამდვილი მუშაობა, აღებული შებრუნებული ნიშნით.

რადგანაც შიგა ძალების მუშაობა უდრის გარე ძალების მუშაობას, აღებულს შებრუნებული ნიშნით, ამიტომ პოტენციალური ენერჯია გარე ძალების მუშაობის ტოლია.

ადვილი წარმოსადგენია, რომ ტანის დატვირთვის მთელი პროცესის განმავლობაში მოქმედი ძალების მუშაობა გროვდება დრეკად ტანში პოტენციალური ენერჯიის სახით, რომელიც მოქმედი ძალების თანდათანობით მოშორების შემთხვევაში იხარჯება ნაშენის პირვანდელი ფორმის აღსადგენად, ე. ი. მთლიანად გვიბრუნდება უკანვე. დაგროვილი პოტენციალური ენერჯიის სიდიდე არ არის დამოკიდებული ძალების მოქ-

მედების თანმიმდევრობაზე. პოტენციალური ენერგია ყოველთვის დადებითია და გამოითვლება ფორმულით.

$$V = \frac{1}{2} \sum \left(\int \frac{M^2 ds}{EI} + \int \frac{N^2 ds}{EF} + k \int \frac{Q^2 ds}{GF} \right) \quad (14)$$

ისეთ ნაშენებში, სადაც მთავარ როლს თამაშობს მღუნავი მომენტი (კოკები, ჩარჩოები, თალები), უკანასკნელი ორი წევრის გავლენა პირველ წევრთან შედარებით მცირეა და შეიძლება უქუვადლოთ. მაშინ პოტენციალური ენერგია გამოითვლება ფორმულით

$$V = \frac{1}{2} \sum \int \frac{M^2 ds}{EI} \quad (14')$$

მაგალითად, გრძელ ძალაზე დამოკიდებული ინტეგრალი უმეტეს შემთხვევაში პირველი წევრის $3 \div 4\%$ -ს შეადგენს დაახლოებით, ხოლო განივ ძალაზე დამოკიდებული კი $2 \div 3\%$ -ს. ამიტომ პრაქტიკული ანგარიშის დროს განივი ძალის გავლენას მხედველობაში არ იღებენ, ხოლო გრძივი ძალის გავლენას კი ზოგიერთ შემთხვევაში იღებენ მხედველობაში.

ფორმებში, სადაც ვითარდება მხოლოდ გრძივი ძალები, რომლებიც ღეროს მთელ სიგრძეზე უცვლელია, პოტენციალური ენერგია გამოითვლება ფორმულით:

$$V = \frac{1}{2} \sum \frac{N^2 S}{EF} \quad (14'')$$

სადაც N , S და F ნებისმიერი ღეროს ძალეა, სიგრძე და განივი კვეთის ფართობია.

პოტენციალური ენერგია ნულად არასდროს არ იქცევა, ის ნულია მხოლოდ მაშინ, როცა ტანის არც ერთი ნაწილი დეფორმაციას არ განიცდის და, მაშასადამე, ენერგია სრულებით არ არის დაგროვილი. მიღებული ფორმულები დიდი სიმრუდის ძელებისათვის არ გამოდგება.

შესაძლო გადაადგილების პრინციპს (ფორ. 4) თუ გამოვიყენებთ ნამდვილი მუშაობათა მიმართ, მაშინ მივიღებთ კიდევ ერთ მნიშვნელოვან განტოლებას:

$$\frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i = \frac{1}{2} \sum \left(\int \frac{M^2 ds}{EI} + \int \frac{N^2 ds}{EF} + k \int \frac{Q^2 ds}{GF} \right) \quad (15)$$

ან

$$\frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i = \frac{1}{2} \sum \int \frac{M^2 ds}{EI} \quad (15')$$

ეს არის ენერგიის მუდმივობის კანონის მათემატიკური გამოსახვა ნამდვილი მუშაობის შემთხვევაში.

(15') ფორმულა შეიძლება გამოვიყენოთ გადაადგილების განსასაზღვრავად. მაგალითად, ვთქვათ, კონსოლურ კოქზე მოქმედებს P ძალა (ნახ. 27) და საჭიროა ვიპოვოთ ჩაღუნვა P ძალის ქვეშ f . (15') ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

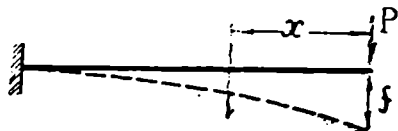
$$\frac{1}{2} P \cdot f = \frac{1}{2} \int \frac{M^2 ds}{EI} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{P^2 x^2 dx}{EI} = \frac{P^2 l^3}{6EI},$$

საიდანაც

$$f = \frac{Pl^3}{3EI}.$$

მე-15' ფორმულით შეიძლება გამოითვალოს ჩაღუნვა მხოლოდ მოქმედი ძალის ქვეშ: სხვა წერტილებში ჩაღუნვა ამ ფორმულით არ გამოითვლება.

აქ უნდა აღვნიშნოთ პოტენციალური ენერჯიის და საერთოდ გარეგანი და შინაგანი ძალების ნამდვილი მუშაობის დამახასიათებელი თვისებები: პოტენციალური ენერჯია (ასევე შიგა და გარე ძალების ნამდვილი მუშაობა) არის მოქმედი ძალის ან სისტემის დეფორმაციის ერთგვაროვანი კვადრატული ფუნქცია. პირველი გაზომვინარეობს უშუალოდ მე-14 ფორმულიდან, მეორე კი იქიდან, რომ ძალასა და დეფორმაციას შორის არსებობს პროპორციული დამოკიდებულება.



ნახ. 27.

ან თვისებიდან ცხადია, რომ ნამდვილი მუშაობის გამოთვლის დროს ძალთა დამოუკიდებლობის პრინციპის გამოყენება არ შეიძლება.

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი. კონსოლურ კოჭზე ორი P_1 და P_2 ძალის ერთდროული მოქმედების დროს (ნახ. 28, ა) $M = (P_1 + P_2)x$ და სათანადო პოტენციალური ენერჯია იქნება

$$V = \frac{1}{2} \int \frac{M^2 ds}{EI} = \frac{1}{2} \int \frac{(P_1 + P_2)^2 x^2 dx}{EI} = \frac{1}{2} \int \frac{P_1^2 x^2 dx}{EI} + \frac{1}{2} \int \frac{P_2^2 x^2 dx}{EI} + \int \frac{P_1 P_2 x^2 dx}{EI}.$$

თუ ძალებს ვამოქმედებთ ცალ-ცალკე, მაშინ ერთ შემთხვევაში (ნახ. 28, ბ) პოტენციალური ენერჯია იქნება

$$V_1 = \frac{1}{2} \int \frac{M_1^2 dx}{EI} = \frac{1}{2} \int \frac{P_1^2 x^2 dx}{EI},$$

მეორე შემთხვევაში კი

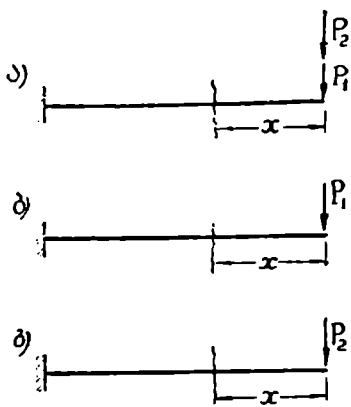
$$V_2 = \frac{1}{2} \int \frac{M_2^2 dx}{EI} = \frac{1}{2} \int \frac{P_2^2 x^2 dx}{EI}.$$

აღვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$V \neq V_1 + V_2.$$

მესამე წევრი V -ს განოსახულებაში წარმოადგენს ვირტუალურ ან შესაძლო მუშაობას.

აქამდე ვიხილავდით შიგა ძალების ნამდვილ მუშაობას, მაგრამ საჭიროა შევისწავლოთ შიგა ძალების შესაძლო ან ვირტუალური მუშაობის

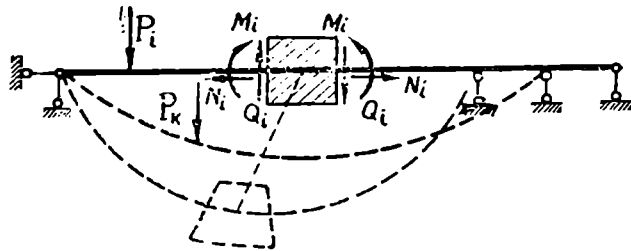


ნახ. 28.

გამოთვლის წესი. გარე ძალების ვირტუალური მუშაობის დროს, რომელიც წინა §-ში განვიხილეთ, ნაშენზე მოქმედებს ორი კატეგორიის ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი ძალა; ერთი, რომელიც ასრულებს მუშაობას, მეორე კი, რომელიც იწვევს გადაადგილებას. აქაც ვიქცევით ანალოგიურად, მხოლოდ ვანგარიშობთ არა გარე ძალების, არამედ შიგა ძალების მუშაობას.

წარმოვიდგინოთ, ნაშენზე მოქმედებს პირველი კატეგორიის ძალა P_i , რომელიც რომელიმე ელემენტში ds ელემენტში განავითარებს მღებულ მომენტს, გრძივ და განივ ძალებს (M_i ,

N_i , Q_i) (ნახ. 29), რომლებსაც შეესაბამება შებრუნებული მიმართულების შიგა ძალები (იხ. ნახ. 18). დეფორმაციის დამთავრების შემდეგ ვამოქმედოთ



ნახ. 29.

მეორე კატეგორიის ძალა P_k , რომელიც იმავე ds ელემენტს მისცემს დამატებით დეფორმაციას:

$$\Delta y_k = \frac{M_i ds}{EI}; \quad \Delta x_k = \frac{N_i ds}{EF} \quad \text{და} \quad \Delta y_k = k \frac{Q_i ds}{GF}.$$

აქ M_k , N_k და Q_k მხოლოდ P_k ძალისაგან გამოწვეული ძალებია.

P_k ძალის მოქმედების დროს პირველი მდგომარეობის შიგა ძალები შეასრულებენ დამატებით მუშაობას

$$dV_{ik} = -M_i \Delta \varphi_k - N_i \Delta x_k - Q_i \Delta y_k.$$

რადგან დამატებითი დეფორმაციის განვითარების დროს M_i , N_i და Q_i არ იცვლება, ანიტომ მუშაობას არ ეწეება კოეფიციენტი $1/2$. ნიშანი მინუსი მიღებულია იმიტომ, რომ შიგა ძალების (M_i , N_i , Q_i) მიმართულებანი არ ემთხვევა $\Delta \varphi_k$, Δx_k და Δy_k მიმართულებებს.

მაშასადამე,
$$dV_{ik} = - \frac{M_i M_k ds}{EI} - \frac{N_i N_k ds}{EF} - \frac{Q_i Q_k ds}{GF}.$$

ღამატებითი მუშაობათა ჯამი მთელი ნაშენისათვის იქნება:

$$V_{ik} = - \int \frac{M_i M_k ds}{EI} - \int \frac{N_i N_k ds}{EF} - k \int \frac{Q_i Q_k ds}{GF}. \quad (16)$$

თუ ნაშენი შედგება ცალკეული ღეროებისაგან, მაშინ

$$V_{ik} = - \sum \left(\int \frac{M_i M_k ds}{EI} + \int \frac{N_i N_k ds}{EF} + k \int \frac{Q_i Q_k ds}{GF} \right). \quad (16')$$

მუშაობა აღნიშნულია ორი ინდექსით: პირველი ინდექსი გვიჩვენებს იმ ძალას, რომელიც მუშაობას ასრულებს, მეორე კი—რომელიც იწვევს გადაადგილებას. ამგვარად V_{ik} არის i მდგომარეობის შიგა ძალების მუშაობა k მდგომარეობის ძალებისაგან გამოწვეულ შიგა გადაადგილებაზე, ე. ი. შიგა ძალების ვირტუალური მუშაობა.

შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპს (ფორ. 4') თუ დაწვევთ ვირტუალური მუშაობისათვის, მივიღებთ შემდეგ მნიშვნელოვან განტოლებას

$$T_{ik} = V_{ik}. \quad (17)$$

ან, თუ ამ ფორმულაში შევიტანთ T_{ik} და V_{ik} მნიშვნელობებს (ფორ. 9 და 16'), მივიღებთ შესაძლო გადაადგილების პრინციპის კიდევ ერთ გამოსახვას

$$\sum P_i \Delta i = \sum \left(\int \frac{M_i M_k ds}{EI} + \int \frac{N_i N_k ds}{EF} + k \int \frac{Q_i Q_k ds}{GF} \right). \quad (18)$$

თუ მე-15 ფორმულა წარმოადგენს ენერჯიის მუდმივობის კანონის მათემატიკურ გამოსახვას ნამდვილი მუშაობისათვის, მე-18 ფორმულა გამოსახავს იმასვე. მხოლოდ ვირტუალურ მუშაობის დროს.

მე-17 ან მე-18 განტოლება სიტყვიერად შეიძლება ჩამოვყალიბოთ შემდეგნაირად: თუ სისტემაზე მოქმედებს ორი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი გარე ძალა, მაშინ პირველი მდგომარეობის გარე ძალების მუშაობა, მეორე მდგომარეობის ძალებისაგან გამოწვეულ სათანადო გადაადგილებაზე, ტოლია პირველი მდგომარეობის შიგა ძალების მუშაობისა, მეორე მდგომარეობის ძალებისაგან გამოწვეულ სათანადო გადაადგილებაზე.

ეს მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელიც მიღებული იყო მორის მიერ, საშუალებას იძლევა გამოვიყვანოთ გადაადგილების საერთო ფორმულა (იხ. § 10).

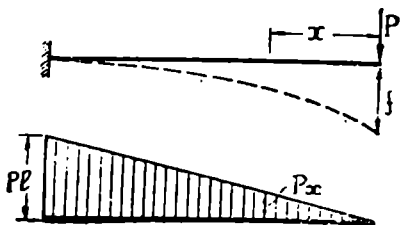
§ 6. მაგალითები გარე და შიგა ძალების მუშაობაზე და შესაძლო გადაადგილების პრინციპზე

1 მაგალითი. ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებულ კოქზე მოქმედებს შეყურსული P ძალა (ნახ. 30), შევამოწმოთ შესაძლო გადაადგილების პრინციპი (ფორ. 4).

გადაწყვეტა. P ძალის მუშაობა (ფორ. 6)

$$T = \frac{1}{2} P \cdot f.$$

წინა §-ში ვნახეთ, რომ



ნახ. 30.

$$f = \frac{Pl^2}{3EI}.$$

ამგვარად

$$T = \frac{1}{2} P \cdot f = \frac{P^2 l^2}{6EI}.$$

შიგა ძალების მუშაობა აღებული უბრუნებელი ნიშნით ან პოტენციალური ენერგია (ფორ. 14')

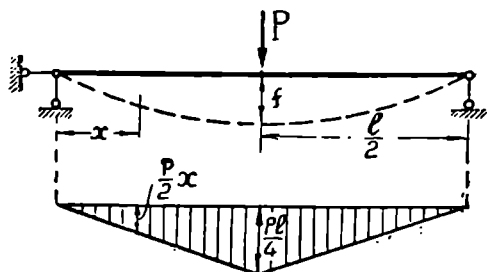
$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 ds}{EI} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{P^2 x^2 dx}{EI} = \frac{P^2 l^3}{6EI}.$$

ორივე მუშაობა აბსოლუტური სიდიდით ტოლია და განტოლება $T - V = 0$ დატყდება.

შემაჯღლით. ორ საყრდენზე მდებარე კოქზე მოქმედებს ზეყურსული P ძალა (ნახ. 31). ვიპოვოთ: ა) პოტენციალური ენერგია, ბ) ჩაღუნვა P ძალის ქვეშ და გ) განივი ძალის გაღუნვა პოტენციალურ ენერგიაზე.

გადაწყვეტა. ნახაზზე მოყვანილია მღუნავი მომენტის ეპიურა. მღუნავი მომენტი x კვეთში

$$M_x = A \cdot x = \frac{P}{2} x.$$



ნახ. 31.

მღუნავი მომენტის ეპიურა სიმეტრიულია, ამიტომ პოტენციალური ენერგია გამოითვლება ფორმულით:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{l/2} \frac{M^2 dx}{EI} = \int_0^{l/2} \frac{P^2 x^2 dx}{4EI} = \frac{P^2 l^3}{96EI}$$

P ძალის შესრულებული მუშაობა $T = \frac{Pf}{2}$. (4') ან (15') ფორმულის საფუძველზე მივიღებთ

$$\frac{Pf}{2} = \frac{P^2 l^3}{96EI}, \quad f = \frac{Pl^3}{48EI}.$$

საიდანაც

$$f = \frac{El^2}{48EI}.$$

თუ განვიხილავთ მხოლოდ პოტენციალურ ენერჯიას გამოითვლება ფორმულით

$$V = \frac{1}{2} \int \frac{M^2 dx}{EI} + \frac{k}{2} \int \frac{Q^2 dx}{GF} = \frac{P^2 l^3}{96EI} + 2 \frac{k}{2} \int_0^l \frac{P^2 dx}{4GF} =$$

$$= \frac{P^2 l^3}{96EI} + k \frac{P^2 l}{8GF} = \frac{P^2 l^3}{96EI} \left(1 + \frac{12kEI}{GF l^2} \right).$$

ამ ფორმულაში, თუ შევიტანთ მნიშვნელობებს

$$k = \frac{6}{5}; G = 0,4E; F = bh \text{ და } I = \frac{bh^3}{12},$$

მივიღებთ

$$V = \frac{P^2 l^3}{96EI} \left(1 + 3 \frac{h^3}{l^2} \right).$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$, მაშინ

$$V = \frac{P^2 l^3}{96EI} 1,03.$$

განვიხილოთ ძალის გავლენა პოტენციალურ ენერჯიაზე ამ მაგალითში 3^o შეადგენს.

3^o მაგალითი. ტეხილი ძელის თავისუფალ ბოლოზე მოქმედებს შეყურსული P ძალა (ნახ. 32). გამოვთვალოთ პოტენციალური ენერჯია V და შევადგინოთ გრძივი ძალის გავლენა მასზე, როცა $l = h$ და $l = \text{const}$.

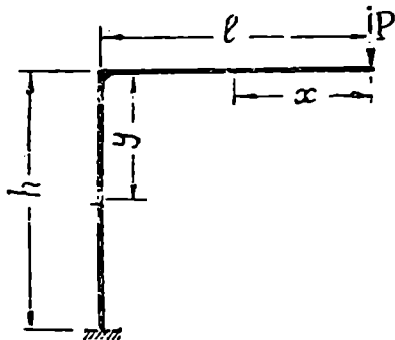
გადაწყვეტა. მღუნავი ნომენტი და გრძივი ძალა: ჰორიზონტალურ ლეროში

$$M_x = -Px \text{ და } N_x = 0,$$

ვერტიკალურ ლეროში

$$M_y = -Pl \text{ და } N_y = -P.$$

რადგანაც ძელს აქვს ორი უბანი, ამიტომ თითოეულ უბანზე ინტეგრირება გამოითვლება ცალ-ცალკე:



ნახ. 32.

$$V = \frac{1}{2} \left(\int_0^l \frac{M_x^2 dx}{EI} + \int_0^l \frac{N_x^2 dx}{EF} + \int_0^h \frac{M_y^2 dy}{EI} + \int_0^h \frac{N_y^2 dy}{EF} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^l \frac{P^2 x^2 dx}{EI} + \int_0^l \frac{P^2 l^2 dy}{EI} + \int_0^h \frac{P^2 dy}{EF} \right) = \frac{P^2 l^3}{6EI} + \frac{P^2 l^2 h}{2EI} +$$

$$+ \frac{P^2 h}{2EF} = \frac{2P^2 l^3}{3EI} + \frac{P^2 l}{2EF}$$

მეორე წვერი გამოსახავს გრძივი ძალის გავლენას პოტენციალურ ენერგიაზე. გამოვთვალოთ მისი სიდიდე.

მივიღოთ $F' = bd$; $I = \frac{bd^3}{12}$.

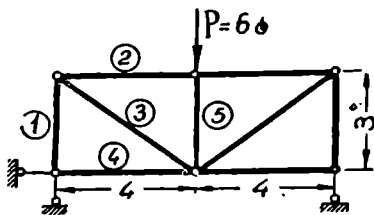
მაშინ

$$V = \frac{2P^3 I^2}{3EI} \left(1 + \frac{3I}{4F'^3} \right) = \frac{2P^3 I^2}{3EI} \left(1 + \frac{d^2}{16I^2} \right).$$

თუ მივიღებთ, რომ $\frac{d}{l} = \frac{1}{5}$, მაშინ გრძივი ძალის გავლენა პოტენციალურ ენერგიაზე უმნიშვნელოა (მეორე წვერი შეიძენს პირველის 0,25% -ს).

ჩვეულებრივად, $\frac{d}{l}$ ფარდობა (განივი კვეთის სიმაღლე ძალის სიგრძესთან) ყოველთვის $1/5$ -ზე ნაკლებია და, ცხადია, რომ გრძივი ძალის გავლენა უფრო ნაკლები იქნება.

4 მაგალითი. ორ საყრდენზე მდებარე მარტივ ფერმაზე მოქმედებს $P = 6\delta$ ძალა (ნახ. 33). გამოვთვალოთ პოტენციალური ენერგიის რაოდენობა. ყველა ღეროს სიხისტე ერთნაირია $EF = \text{const}$.



ნახ. 33.

გადაწყვეტა. პოტენციალური ენერგია გამოითვლება ფორმულით:

$$V = \frac{1}{2} \sum \frac{N^2 S}{EF}$$

საჭიროა, რომ თითოეული ღეროსათვის გამოითვალოს N ძალა და S სიგრძე. ეს სიდიდეები მოყვანილია 1

ცხრილში. რადგანაც დატვირთვა სიმეტრიულია, ამიტომ ანგარიშს ვასრულებთ ნახევარფერმისათვის და შედეგს ვაორკეცებთ (მე-5 ღეროს გარდა).

ცხრილი 1

ღეროს №	ღეროს სიგრძე S მ	ძალის სიდიდე N ტ	$\frac{N^2 S}{EF}$
1	3	-3	$27 \frac{1}{EF}$
2	4	-4	$64 \frac{1}{EF}$
3	5	5	$125 \frac{1}{EF}$
4	4	0	0
5		-6	$108 \frac{1}{EF}$

მაშასადამე:

$$V = 2 \frac{1}{2EF} (27 + 64 + 125) + \frac{1}{2EF} 108 = \frac{270}{EF}$$

თუ მივიღებთ $E \cong 20\,000\,000$ ტ/მ² და $F = 10$ სმ² = 0,001 მ², საბოლოოდ გვექნება

$$V = \frac{270}{20000} = 0,0135 \text{ ტმ} = 1350 \text{ კგსმ.}$$

§ 7. მუშაობათა ურთიერთობის პრინციპი

მუშაობათა ურთიერთობის პრინციპი წარმოადგენს სამშენებლო მექანიკის ერთ-ერთ ყველაზე მნიშვნელოვან თეორემას, რომელიც საშუალებას იძლევა გამოვიყვანოთ ფორმულები დრეკადი სისტემის დეფორმირებული მდგომარეობის შესასწავლად. ამ პრინციპის საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ მთელი რიგი პრაქტიკულად მნიშვნელოვანი ფორმულები.

განვიხილოთ ერთი და იგივე ნაშენის ერთნაირი P_i და P_k ძალით დატვირთვის ორი მიმდევრობა. ჯერ ვიმოქმედოთ P_i ძალით, რომელიც ნაშენს მისცემს რაღაც დეფორმაციას (ნახ. 34-ა). P_i ძალა თავის მიერ გამოწვეულ გადაადგილებაზე შეასრულებს მუ-

შაობას $T_{ii} = -\frac{P_i y_1}{2}$. დეფორმა-

ციის დამთავრების შემდეგ ვიმოქმედოთ მეორე P_k ძალით, რომელიც თავის მხრივ გამოიწვევს დამატებით დეფორმაციას. ამ დამატებით დეფორმაციაზე მუშაობას შეასრულებს როგორც P_k , ისე P_i ძალა. პირველის მუშაობა იქნება

$$T_{ik} = -\frac{P_k y_2}{2}, \text{ მეორესი კი } T_{ik} = P_i y_2$$

(P_k ძალის მოქმედების დროს P_i მუდმივია).

ორივე ძალის მოქმედებით გამოწვეული მთლიანი მუშაობა იქნება

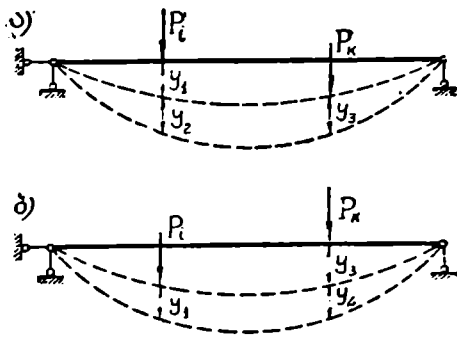
$$T_{ii} + T_{ik} + T_{ik}$$

პირველი ინდექსი გვიჩვენებს იმ ძალას, რომელიც ასრულებს მუშაობას, მეორე კი — რომელიც იწვევს გადაადგილებას. შევეცვალოთ ძალების მოქმედების თანმიმდევრობა (ნახ. 34, ბ). ჯერ ვიმოქმედოთ P_k ძალით, რომელიც შეასრულებს მუშაობას T_{kk} , შემდეგ კი P_i ძალით, რომელიც შეასრულებს T_{ii} მუშაობას. P_k ძალის დამატებითი (ვირტუალური) მუშაობა იქნება T_{ki} .

მთლიანი მუშაობა ამ შემთხვევაში იქნება:

$$T_{kk} + T_{ii} + T_{ki}$$

წინა §-დან ვიცით, რომ შიგა ძალების მუშაობის სიდიდე არ არის და-



ნახ. 34.

მოკიდებული ძალების მოქმედების თანმიმდევრობაზე, ის დამოკიდებულია მხოლოდ ტანის პირვანდელ და გოლო მდგომარეობაზე, რომელიც ორივე შემთხვევაში ერთნაირია. მაგრამ, რადგან გარე ძალების მუშაობა ტოლია შიგა ძალების მუშაობისა, ამიტომ არც გარე ძალების მუშაობა იქნება დამოკიდებული ძალების მოქმედების თანმიმდევრობაზე და შეგვიძლია დაეწეროს

$$T_{ii} + T_{ik} + T_{ik} = T_{kk} + T_{ii} + T_{ki},$$

საიდანაც

$$T_{ik} = T_{ki}. \quad (19)$$

ეს არის ე. წ. მუშაობათა ურთიერთობის პრინციპი, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში¹:

თუ ნაშენზე მოქმედებს ორი მდგომარეობის ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი გარე ძალა, მაშინ პირველი მდგომარეობის (P_1) ძალების მუშაობა, მეორე მდგომარეობის (P_2) ძალებით გამოწვეულ გადაადგილებაზე, ტოლია მეორე მდგომარეობის (P_2) ძალების მუშაობის პირველი მდგომარეობის (P_1) ძალებით გამოწვეულ გადაადგილებაზე.

რადგანაც ლაპარაკია ვირტუალურ მუშაობაზე, ამიტომ იგივე თეორემა შეიძლება გამოითქვას შემოკლებულად ასე: პირველი მდგომარეობის ძალების ნამრავლი მეორე მდგომარეობის ძალებით გამოწვეულ სათანადო გადაადგილებაზე ტოლია მეორე მდგომარეობის ძალების ნამრავლის პირველი მდგომარეობის ძალებით გამოწვეულ სათანადო გადაადგილებაზე.

მე-19 ფორმულა მიღებულია გარე ძალების მუშაობისათვის, მაგრამ სრულებით ანალოგიურად ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ იგივე თეორემა შიგა ძალების მიმართაც შემდეგი სახით

$$V_{ik} = V_{ki}; \quad (20)$$

სიტყვიერად ეს ისევე გამოითქმის, როგორც წინა თეორემა, მხოლოდ აქ მუშაობაში ვიგულისხმებთ შიგა მუშაობას. რადგან $T_{ik} = V_{ik}$ (ფორმ. 17), ამიტომ შეგვიძლია მივიღოთ კიდევ ერთი ფორმულა

$$T_{ik} = V_{ki} \quad (21)$$

მიღებული ფორმულები (19), (20), (21) წარმოადგენს სხვადასხვა სახით გამოსახულ მუშაობათა ურთიერთობის პრინციპს და ეხება, როგორც ეს ზემოთ იყო აღნიშნული, ვირტუალურ მუშაობას. ფორმულები ვარგისია არა მარტო უბრალო, არამედ ჯგუფურ-განზოგადებული ძალების მოქმედების დროსაც, მაგრამ ყველა ცალკეულ შემთხვევაში უნდა ავიღოთ ძალის შესაბამისი გადაადგილება.

მაგალითად, ვთქვათ ერთი და იგივე კოქი დატვირთულია ჯერ შეყურსული P ძალით შემდეგ კი M მომენტით (ნახ. 35). i მდგომარეობის ძალის (P) მუშაობა k მდგომარეობის გადაადგილებაზე (Δ) იქნება

$$T_{ik} = P \cdot \Delta,$$

¹ ეს თეორემა ვუთვნის იტალიელ მეცნიერს ბეტს, რომელმაც გამოაქვეყნა ის 1872 წელს.

და პირიქით, k მდგომარეობის ძალის (M) მუშაობა i მდგომარეობის გადაადგილებაზე (φ) იქნება

$$T_{ki} = M \varphi.$$

მაშასადამე, მე-17 ფორმულა დაიწერება შემდეგი სახით:

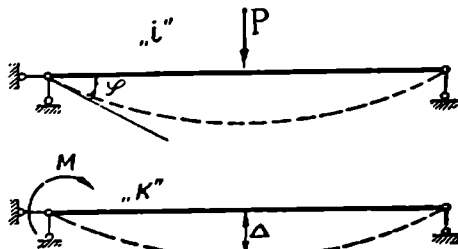
$$P \cdot \Delta = M \varphi.$$

მასალათა გამძლეობიდან ვიცით, რომ

$$\varphi = \frac{P l^2}{16 EI} \text{ და } \Delta = \frac{M l^3}{16 EI}.$$

დეფორმაციის ამ მნიშვნელობებს თუ შევითანთ მიღებულ განტოლებაში, გვექნება

$$P \cdot \frac{M l^3}{16 EI} = M \frac{P l^2}{16 EI},$$



ნახ. 35.

რაც ადასტურებს ბეტის თეორემის სამართლიანობას.

§ 8. გადაადგილებათა ურთიერთობის პრინციპი

გადაადგილებათა ურთიერთობის პრინციპი წარმოადგენს ბეტის თეორემის კერძო შემთხვევას.

მართლაც, (19) ფორმულა გამოყვანილი იყო ორი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი ნებისმიერ ძალთა სისტემის მოქმედების დროს. რასაკვირველია, ეს თეორემა დარჩება ძალაში იმ კერძო შემთხვევაშიც, როცა ძალთა ორივე მდგომარეობის დროს ნაშენზე იმოქმედებს თითო და ერთმანეთის ტოლი ძალა.

განვიხილოთ დატვირთვის ორი მდგომარეობა: 1) კოქის i წერტილზე მოქმედებს P_i ძალა (ნახ. 36, ა) და 2) იმავე კოქის k წერტილზე მოქმედებს P_k ძალა (ნახ. 36, ბ).

ჩვენ განვიხილოდ ის კერძო შემთხვევა, როდესაც

$$P_i = P_k = P.$$

მოქმედი ძალებისაგან გამოწვეული გადაადგილებანი სთანადო მიმართულებით აღნიშნულია ნახაზზე.

მაშასადამე,

$$T_{ik} = P_i \cdot \Delta_{ik},$$

$$T_{ki} = P_k \cdot \Delta_{ki}$$

და მე-19 ფორმულის საფუძველზე მივიღებთ

$$P_i \cdot \Delta_{ik} = P_k \cdot \Delta_{ki}.$$

P -ზე შეკვეცის შემდეგ გვექნება

$$\Delta_{ik} = \Delta_{ki}.$$

(22)

გადაადგილებები აღნიშნულია ისე, როგორც ეს იყო შემოღებული პირველ §-ში. ვაიხსენოთ, რომ პირველი ინდექსი გვიჩვენებს გადაადგილების ადგილს და მიმართულებას, მეორე კი გადაადგილების გამომწვევი ძალის მიმართულებას და მოდების წერტილს. მაგალითად, Δ_{ik} ირის i წერტილის გადაადგილება P_i ძალის მიმართულებით, გამოწვეული k წერტილზე მოქმედი P_k ძალით.

22-ე ფორმულა წარმოადგენს გადაადგილებათა ურთიერთობის პრინციპს და სიტყვიერად გამოითქმის ასე:

თუ ნაშენზე რიგრიგობით მოქმედებს ორი რიცხობრივად ერთმანეთის ტოლი ძალა, მაშინ პირველი ძალის მოდების i წერტილის გადაადგილება (ამ ძალის მიმართულებით), გამოწვეული მეორე ძალით, ტოლია მეორე ძალის მოდების k წერტილის გადაადგილების (ამ ძალის მიმართულებით), გამოწვეული პირველი ძალით.

მოკლედ რომ ვთქვათ: პირველი ძალით გამოწვეული გადაადგილება მეორე ძალის მიმართულებით რიცხობრივად ტოლია, მეორე ძალით გამოწვეული გადაადგილების პირველის მიმართულებით (მაქსველის თეორემა).

უნდა გვახსოვდეს, რომ აქ, ისე როგორც ბეტის თეორემის შემთხვევაში, იგულისხმება განზოგადებული ძალები და მათი სათანადო განზოგადებული გადაადგილებანი.

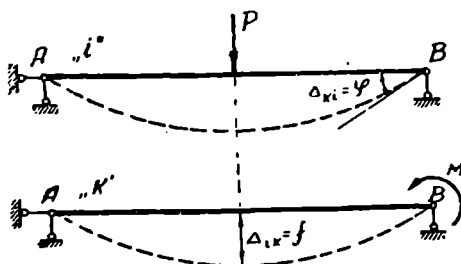
თუ ნებისმიერი ძალების მაგიერ ნაშენზე მოქმედებს ორი ერთეული ძალა $P_i = P_k = 1$, მაშინ მივიღებთ გადაადგილებათა ურთიერთობის პრინციპს ერთეული ძალებისათვის:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}. \quad (22')$$

ამ თეორემას სწორედ ამ სახით აქვს დიდი გამოყენება სამშენებლო მექანიკაში, განსაკუთრებით სტატიკურად ურკვევი სისტემების ანგარიშის დროს.

განვიხილოთ მაგალითი. ორ საყრდენზე მდებარე კოჭზე რიგრიგობით მოქმედებს შეყურსული P ძალა და M მომენტი (ნახ. 37). რიცხობრივად

$P=M$. გადაადგილებათა ურთიერთობის პრინციპის თანახმად P ძალით გამოწვეული მობრუნების კუთხე B საყრდენზე ტოლი უნდა იყოს M მომენტით გამოწვეული ჩალუნების კოჭის შუაში (P ძალის ქვეშ). მართლაც, $\Delta_{ik} = \varphi = \frac{Pl^2}{16EI}$; $\Delta_{ik} = f = \frac{Ml^2}{16EI}$

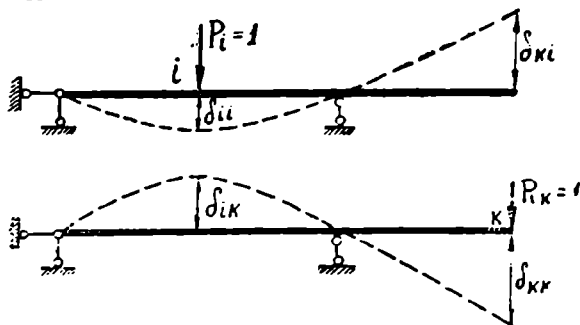


ნახ. 37.

და, რადგან $P=M$, ამიტომ $\varphi = f$ (მობრუნების კუთხე გაიზომება რადიანებში).

მე-38 ნახაზზე მოყვანილია ორი ერთეული ძალის მოქმედების შემთხვევა, რომელიც საშუალებას იძლევა ცხადად წარმოვიდგინოთ (22') ფორმულის

აზრი[✓] გარდა ამისა, ნახაზზე აღნიშნულია δ_{ii} ($P_i=1$ ძალით გამოწვეული გადაადგილება ამავე ძალის მიმართულებით) და δ_{ik} ($P_k=1$ ძალით გამოწვეული გადაადგილება ამავე ძალის მიმართულებით).



ნახ. 38.

შენიშვნა. ხემათ მიღებული შედეგი ($\varphi=f$) გაუგებრობას არ გამოიწვევს განზომილების მხრივ, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ გადაადგილებათა ურთიერთობის პრინციპი ($\Delta_{ik} = \Delta_{ki}$) მიღებულია მუშაობათა ურთიერთობის პრინციპის ($P_i \Delta_{ik} = P_k \Delta_{ki}$) საფუძველზე, რომელიც ჩვენ შემთხვევაში გამოისახება ასე

$$P \cdot f = M \cdot \varphi.$$

აქ განზომილება დაკულია. მაგალითად, $P=10$ კგ და $M=10$ კგ სმ, მაშინ მივიღებთ $10 \text{ კგ} \cdot f = 10 \text{ კგ სმ} \cdot \varphi$, ან $f = \text{სმ} \cdot \varphi$. განზოგადებული ერთეული ძალით გამოწვეული გადაადგილების (δ_{ik}) განზომილება ყოველთვის განსხვავდება მოცემული განზოგადებული ძალით გამოწვეული გადაადგილების (Δ_{ik}) განზომილებისაგან.

პროპორციულობის პრინციპის თანახმად

$$\Delta_{ik} = P_k \delta_{ik}.$$

საიდანაც

$$\delta_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{P_k} = \frac{\text{განზოგადებული გადაადგილება}}{\text{განზოგადებული ძალა}}$$

მაშასადამე, δ_{ik} გადაადგილების მისაღებად გადაადგილება უნდა გავყოთ იმ ძალის განზომილებაზე, რომელიც იწვევს გადაადგილებას. მაგალითად, $P_k = 1$ კგ შეყურსული ძალით გამოწვეული ხაზობრივი გადაადგილების განზომილება იქნება

$$\delta_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{P_k} = \frac{\text{სმ}}{\text{კგ}} = \text{სმ კგ}^{-1}. \quad (\text{ა})$$

იმავე P_k ძალით გამოწვეულ მობრუნების კუთხის კი

$$\delta_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{P_k} = \frac{\text{კუთხე}}{\text{კგ}} = \frac{1}{\text{კგ}} = \text{კგ}^{-1}. \quad (\text{ბ})$$

წყვილძალით ($P_k = M_k = 1$ კგ სმ) გამოწვეული ხაზობრივი გადაადგილების განზომილება იქნება

$$\delta_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{M_k} = \frac{\text{სმ}}{\text{მომენტი}} = \frac{\text{სმ}}{\text{კგ სმ}} = \frac{1}{\text{კგ}} = \text{კგ}^{-1}, \quad (\text{გ})$$

ხოლო წყვილძალით გამოწვეული მობრუნების კუთხის განზომილება კი

$$\delta_{ik} = \frac{\text{კუთხე}}{\text{მომენტი}} = \frac{1}{\text{კგ სმ}} = (\text{კგ სმ})^{-1}. \quad (\text{დ})$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ შეყურსული ერთეული ძალით გამოწვეული მობრუნების კუთხის (ბ), განზომილება ემთხვევა შეყურსული წვეილძალით გამოწვეულ ხაზობრივი გადაადგილების განზომილებას (გ). ამგვარად 22' ფორმულის განზომილება დაცულია.

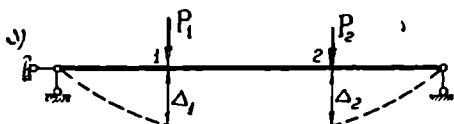
§ 9. მახალითები მუშაობათა და გადაადგილებათა ურთიერთობის პრინციპებზე

1 მაგალითი. დავამტყიკოთ, რომ მუშაობის სიდიდე P_1 და P_2 ძალის ერთდროული და ცალ-ცალკე მოქმედების დროს ერთნაირია.

$$\Delta_1 = y_{11} + y_{12}; \quad \Delta_2 = y_{22} + y_{21}.$$

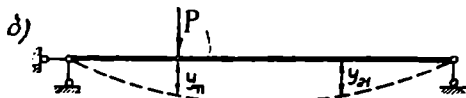
გადაწყვეტა. ძალების ერთდროული მოქმედების დროს (ნახ. 39) შესრულებული მუშაობა იქნება

$$T = \frac{P_1 \Delta_1}{2} + \frac{P_2 \Delta_2}{2} = P_1 \frac{y_{11} + y_{12}}{2} + P_2 \frac{y_{22} + y_{21}}{2}.$$



თუ პირველად ვიმოქმედებთ P_1 -ით და შემდეგ კი P_2 -თი (ნახ. 39, ბ) მაშინ P_1 -ის შესრულებული მუშაობა

$$T_1 = \frac{P_1 y_{11}}{2} + P_1 y_{12}$$

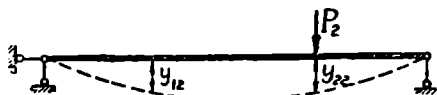


და P_2 -ს შესრულებული მუშაობა

$$T_2 = \frac{P_2 y_{22}}{2}$$

ჯამური მუშაობა

$$T_1 + T_2 = \frac{P_1 y_{11}}{2} + P_1 y_{12} + \frac{P_2 y_{22}}{2}$$



ნახ. 39.

მე-19 ფორმულის საფუძველზე

$P_1 y_{12} = P_2 y_{21}$ და, მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ

$$T_1 + T_2 = \frac{P_1 y_{11}}{2} + \frac{P_1 y_{12}}{2} + \frac{P_2 y_{21}}{2} + \frac{P_2 y_{22}}{2}.$$

ამგვარად

$$T = T_1 + T_2.$$

2 მაგალითი. AB მრუდე ძელის შუაში მოქმედი ვერტიკალური P_1 ძალი იწვევს B წერტილის ჰორიზონტალურ გადაადგილებას $BB_1 = \Delta$ (ნახ. 40, ა)-რა სიდიდის H ძალით უნდა ვიმოქმედოთ B წერტილზე, რომ ძელის შუანაწილი აიწიოს ზემოთ Δ სიდიდით?

გადაწყვეტა. მე-19 ფორმულის თანახმად

$$P_1 \Delta = H \Delta,$$

საიდანაც, ცხადია,

$$H = P_1.$$

3 მაგალითი. დავამტკიცოთ, რომ c წერტილზე მოქმედ P ძალით გამოწვეული cb და cd ირიბანებს შორის (ნახ. 41, ა) კუთხის ცვლილება (ურთიერთ მობრუნების კუთხე) ტოლია cb და cd ირიბანზე მოქმედი ორი წვეტილძალით გამოწვეული c წერტილის ჩაღუნვისა (ნახ. 41, ბ), ე. ი.

$$x_1 + x_2 = f.$$

გადაწყვეტა. გამოვიყენოთ მუშაობათა ურთიერთობის პრინციპი (ფორ. 19). პირველი მდგომარეობის (i) P ძალის მუშაობა, მეორე მდგომარეობის (k) ძალებით გამოწვეულ გადაადგილებაზე იქნება Pf , ხოლო მეორე მდგომარეობის (k) ძალების მუშაობა პირველი მდგომარეობის (i) გადაადგილებაზე (მობრუნების კუთხეზე) კი

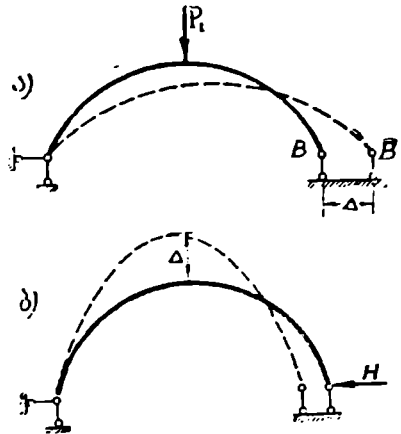
$$\frac{P}{S} S x_1 + \frac{P}{S} S x_2 = P (x_1 + x_2).$$

მაშასადამე,

$$Pf = P (x_1 + x_2).$$

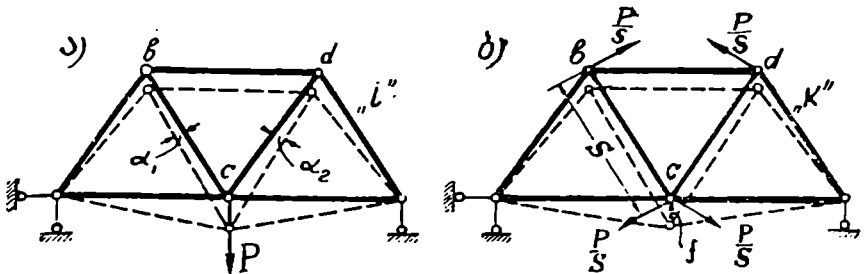
და საბოლოოდ

$$f = x_1 + x_2.$$



ნახ. 40.

აქედან ცხადია, რომ P ძალით გამოწვეული cb და cd ირიბანის ურთიერთ მობრუნების ($x_1 + x_2$) კუთხის მაგიერ შეიძლება განისაზღვროს ოთხი $\frac{P}{S}$ ძალით გამოწვეული c წერტილის ვერტიკალური გადაადგილება.



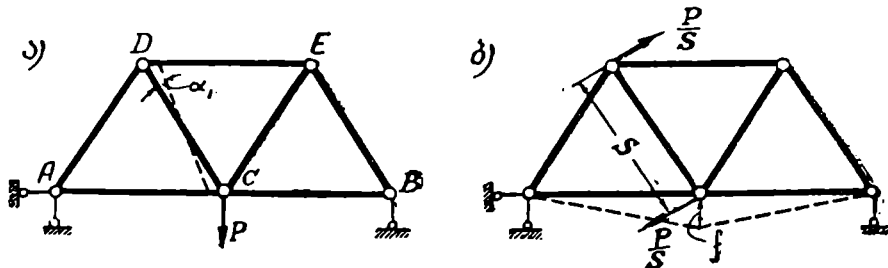
ნახ. 41.

4 მაგალითი. ფერმის c კვანძზე მოდებულია P ძალა, რომელიც DC ირიბანს აბრუნებს α_1 კუთხით (ნახ. 42, ა). დავამტკიცოთ, რომ P ძალა შეეცვალეთ წვეტილძალით, რომელიც რიცხობრივად P -ს ტოლია და მოდებულია DC ღეროზე. მაშინ C წერტილის ვერტიკალური გადაადგილება ტოლი იქნება α_1 კუთხისა (ნახ. 42, ბ).

გადაწყვეტა. მუშაობათა ურთიერთობის პრინციპის საფუძველზე შეგვიძლია დაწვეროთ:

$$Pf = \frac{P}{S} S \cdot \alpha_1 = P\alpha_1, \text{ ან } f = \alpha_1.$$

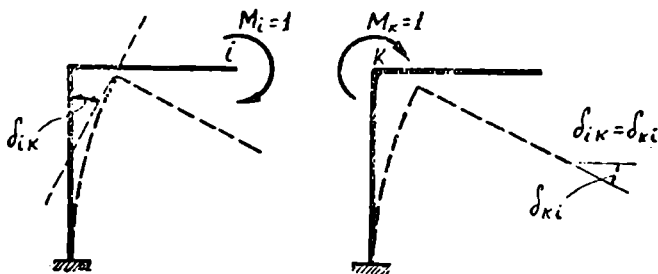
მაშასადამე, P ძალით გამოწვეული DC ღეროს მობრუნება ტოლია D და C წერტილებზე მოდებული ორი ძალით გამოწვეული C წერტილის ვერტიკალური გადაადგილებისა.



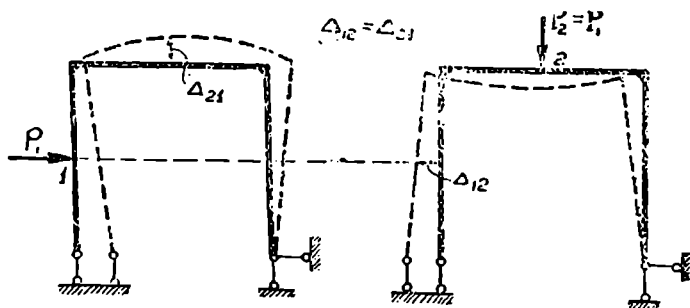
ნახ. 42.

ჩ მაგალითი. 43-ე და 44-ე ნახაზზე მოყვანილია დატვირთვის ორი მდგომარეობა და სათანადო გადაადგილებები.

გაფერკვეთ ტოლობებში $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ და $\Delta_{12} = \Delta_{21}$.



ნახ. 43.



ნახ. 44.

§ 10. გადაადგილებათა ზოგადი ფორმულა დეროვანი სისტემისათვის—მორის ფორმულა

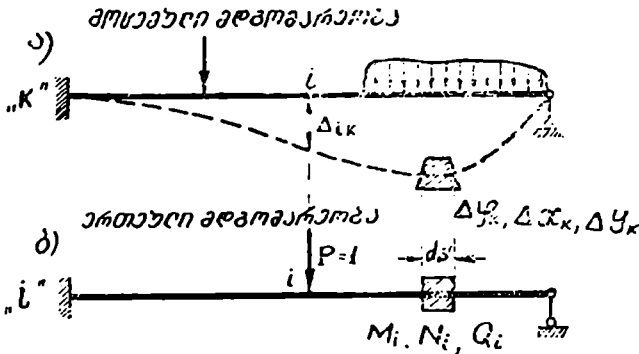
ეხლა ჩვენ გადავდივართ იმ ფორმულის გამოყენაზე, რომელიც საშუალებას იძლევა განვსაზღვროთ სისტემის ნებისმიერი წერტილის გადაადგილება.

ეს ფორმულა გამომდინარეობს შესაძლო გადაადგილების პრინციპიდან

$$T_{ik} = V_{ik} \quad (\text{ფორმ. 17})$$

ან უშუალოდ მე-18 ფორმულიდან (მორის ფორმულა).

ვთქვათ, გვინდა განვსაზღვროთ ნებისმიერი დატვირთვით გამოწვეული რომელიმე i წერტილის გადაადგილება (ნახ. 45, ა).



ნახ. 45.

განვიხილოთ დატვირთვის ორი მდგომარეობა: პირველი—მოცემული დატვირთვის მდგომარეობა (k) და მეორე—ფიქტიური დამხმარე მდგომარეობა (i), სადაც i წერტილზე საძიებელი გადაადგილების გასწვრივ მოქმედებს ერთეული ძალა $P_i = 1$ (ნახ. 45, ბ).

პირველი მდგომარეობის დროს ds ელემენტში ვითარდება შინაგანი ძალები M_k, N_k, Q_k , რომლებსაც შეესაბამებათ სათანადო დეფორმაციები (იხ. § 5):

$$\Delta \varphi_k = -\frac{M_k ds}{EI}; \quad \Delta x_k = \frac{N_k ds}{EF} \quad \text{და} \quad \Delta y_k = k \frac{Q_k ds}{GF}.$$

მეორე (ერთეული ძალის) მდგომარეობის შინაგანი ძალები ds ელემენტში იქნება M_i, N_i და Q_i , ან ორი მდგომარეობისათვის გამოვიყენოთ შესაძლო გადაადგილების პრინციპი.

i მდგომარეობის გარე ძალის (ერთეული ძალის) ვირტუალური მუშაობა k მდგომარეობის ძალებისაგან (მოცემული დატვირთვისაგან) გამოწვეულ გადაადგილებაზე იქნება:

$$T_{ik} = P_i \Delta_{ik} = 1 \cdot \Delta_{ik},$$

სადაც Δ_{ik} არის i წერტილის საძიებელი გადაადგილება. იმავე i მდგომარეობის შინაგანი ძალების მუშაობა k მდგომარეობის სათანადო გადაადგილებებზე იქნება (მუშაობა აღებულია აბსოლუტური სიდიდით):

$$V_{ik} = \sum \left(\int M_i \Delta \varphi_k + \int N_i \Delta x_k + \int Q_i \Delta y_k \right)$$

და, მაშასადამე,

$$\Delta_{ik} = \sum \left(\int M_i \Delta \varphi_k + \int N_i \Delta x_k + \int Q_i \Delta y_k \right). \quad (23)$$

თუ ამ ფორმულაში შევიტანთ $\Delta \varphi_k$, Δx_k და Δy_k -ს მნიშვნელობებს, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\Delta_{ik} = \sum \left(\int \frac{M_i M_k ds}{EI} + \int \frac{N_i N_k ds}{EF} + k \int \frac{Q_i Q_k ds}{GF} \right). \quad (24)$$

ეს ფორმულა, რომელიც ჩვენ შეგვეძლო მიგველო უშუალოდ მე-18 ფორმულიდან, თუ დავუშვებდით $P_i = 1$, წარმოადგენს მორისის ცნობილ ფორმულას.

მიღებული ფორმულა საშუალებას იძლევა გამოეთვალათ ნებისმიერი ლეროვანი ნაშენის ნებისმიერი ხასიათის როგორც უბრალო (წრფივი გადაადგილება, მობრუნების კუთხე), ისე ჯგუფური გადაადგილებანი, რადგან პირობით ერთეულ ძალაში ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ განზოგადებული (ჯგუფური) ერთეული ძალა და საძიებელ Δ_{ik} გადაადგილებაში კი—განზოგადებული გადაადგილება.

24-ე ფორმულის გამოყენება იმდენად მარტივი და მრავალფეროვანია, რომ მას უნივერსალურ ფორმულას უწოდებენ.

როგორც ვხედავთ, (24) ფორმულის მიხედვით, ნებისმიერი წერტილის გადაადგილების საპოვნელად უნდა განვიხილოთ ორი მდგომარეობა: პირველი—მოცემული დატვირთვის (k) მდგომარეობა და მეორე—პირობითი ერთეული ძალის (i) მდგომარეობა.

მორისის წესით გადაადგილების გამოთვლა წარმოებს შემდეგი თანმიმდევრობით: ვანგარიშობთ მოცემული დატვირთვით გამოწვეულ შინაგან ძალებს— M_k , N_k და Q_k -ს, შემდეგ წარმოვიდგენთ იმავე სისტემის მეორე (პირობით) მდგომარეობას, ე. ი. იმ წერტილზე, რომლის გადაადგილებაც გვინტერესებს, ვიმოქმედებთ ერთეული ძალით და ვანგარიშობთ მისგან გამოწვეულ M_i , N_i და Q_i -ს; ორივე შემთხვევაში მიღებული შიგა ძალები შეგვაქვს (24) ფორმულაში და ვანტეგრებთ მთელი ნაშენის საზღვრებში.

ერთეული ძალის ხასიათი საძიებელი გადაადგილების ხასიათს უნდა შეესაბამებოდეს. მაგალითად, თუ ვეძებთ ვერტიკალურ გადაადგილებას, მაშინ ერთეული ძალა უნდა მოვდეთ ვერტიკალურად და თუ ვეძებთ პორიზონტალურ გადაადგილებას—ერთეული ძალა უნდა მოვდეთ პორიზონტალურად; მობრუნების კუთხის შემთხვევაში ვიმოქმედებთ ერთეული მომენტით და სხვა.

საკითხი ისმის ერთეული ძალის მიმართულების შესახებ, ე. ი. საით უნდა იყოს მიმართული ერთეული ძალა ფიქტიურ მდგომარეობაში—ზევით თუ ქვევით, მარცხნივ თუ მარჯვნივ. ჩვენ ყოველთვის გვეცოდინება საძიებელი გადაადგილების ადგილი, ე. ი. ერთეული ძალის მოდების წერტილი, მაგრამ არ გვეცოდინება თუ რა მიმართულებით ხდება გადაადგილება. ერთხელ და სამუდამოდ უნდა ვიცოდეთ, რომ ერთეული ძალის მიმართულებას

არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს, მას შეიძლება ჰქონდეს ნებისმიერი მიმართულება, მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ გამოთვლილ გადაადგილების ნიშანს: თუ გადაადგილება მივიღეთ დადებითი ნიშნით—ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემული დატვირთვით გამოწვეული გადაადგილება ხდება იმ მიმართულებით, რა მიმართულებითაც მოქმედებს ერთეული ძალა, და, თუ მივიღეთ უარყოფითი ნიშნით, მაშინ, პირაქით, გადაადგილება ხდება ფიქტიური ერთეული ძალის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

ამიტომ, შემდეგში ერთეული ძალის მიმართულებას ავიჩვენებთ ნებისმიერად.

პრაქტიკული ანგარიშების დროს (24) ფორმულის მთლიანად გამოყენება იშვიათად მოგვიხდება, რადგან განივი ძალის ვაულენა დეფორმაციაზე ყოველთვის უმნიშვნელოა და შეგვიძლია მხედველობაში არ მივიღოთ. ჩარჩოების და კოქების ანგარიშის დროს გრძივი ძალისაგან გამოწვეულ დეფორმაციასაც არ იღებენ მხედველობაში თავისი სიმციროს გამო.

მაშასადამე, ასეთ ნაშენებში გადაადგილება განისაზღვრება ფორმულით

$$\Delta_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k ds}{EI}. \quad (25)$$

ფერმებში, როგორც ცნობილია. მღუნავი მომენტი ნულის ტოლია და ჯერმის ლეროებში ვითარდება მხოლოდ გრძივი ძალები, რომლებიც მუდმივია ლეროს მთელ სიგრძეზე, ამიტომ აქ გადაადგილება გამოითვლება ფორმულით

$$\Delta_{ik} = \sum \int \frac{N_i N_k ds}{EF} = \sum \frac{N_i N_k}{EF} \int ds = \sum \frac{N_i N_k S}{EF}. \quad (26)$$

სადაც S —ლეროს სიგრძეა.

26-ე ფორმულა მიღებული იყო მაქსველის მიერ (1864), ხოლო 24-ე საერთო ფორმულა კი—მორის მიერ (1874), ამიტომ ამ უკანასკნელს ხშირად მორ-მაქსველის ფორმულა ეწოდება.

თუ ნაშენზე მოქმედი დატვირთვა შედგება ერთი ერთეული ძალისაგან, მაშინ გადაადგილება გამოითვლება ფორმულით

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k ds}{EI}, \quad (25')$$

სადაც M_i და M_k ერთეული ძალებით გამოწვეული მომენტებია.

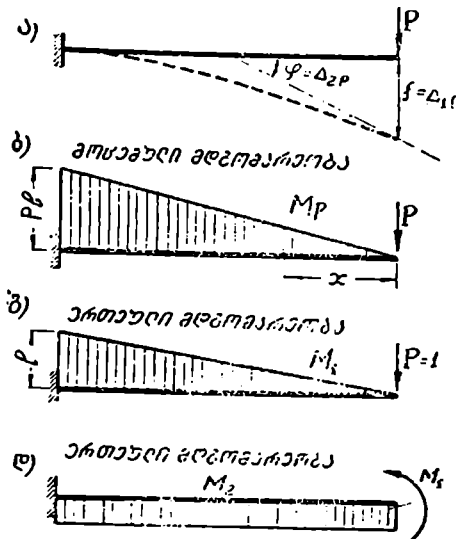
თუ ნაშენზე მოქმედებს ერთად ერთი ძალა $P_i=1$ და საჭიროა განვსაზღვროთ ამ ძალით გამოწვეული გადაადგილება თავისივე მიმართულებით, მაშინ $M_i=M_k$ და გადაადგილება გამოითვლება ფორმულით

$$\delta_{ii} = \sum \int \frac{M_i^2 ds}{EI}. \quad (25'')$$

მიღებული ფორმულების გამოყენება განვიხილოთ კონკრეტულ მაგალითებზე.

§ 11. მაგალითები გადაადგილებათა განსაზღვრავთ

1 მაგალითი. კონსოლურ კოჭზე მოქმედებს P ძალი. ვიპოვოთ კოჭის თავისუფალი ბოლოს ვერტიკალური გადაადგილება და მობრუნების კუთხე (ნახ. 46, ა). განივი ძალის გავლენა არ მივიღოთ მხედველობაში (ფორმ. 24) გადაწყვეტა. მორის ფორმულის თანახმად უნდა განვიხილოთ



ორი მდგომარეობა: მოცემული დატვირთვის (k) და ერთეული პირობითი ძალის (i). მოცემული დატვირთვის მდგომარეობა k -ს მაგიერ აღენიშნოთ P -თი. ეს უფრო ნათლად გვიჩვენებს, რომ გადაადგილების მიზეზი არის მოცემული ტვირთი P (ნახ. 46, ბ).

ვერტიკალური გადაადგილების საპოვნელად კონსოლის ბოლოზე ვიმოქმედოთ ერთეული ძალით $P=1$ და ამ მდგომარეობას დავარქვათ პირველი (ნახ. 46, გ).

როგორც მოცემული დატვირთვით, ისე $P=1$ ძალით ზედა ბოქკოები იქიმება და ამიტომ ეპიურები აგებულია კოჭის ზედა მხარეს.

მლუნავი მომენტები

$$M_p = -P \cdot x,$$

$$M_1 = -1 \cdot x.$$

ნახ. 46.

მორის ფორმულის საფუძველზე, გადაადგილება

$$\Delta_{1P} = f = \int_0^l \frac{M_1 M_p dx}{EI} = \int_0^l \frac{Px \cdot x dx}{EI} = \frac{Pl^3}{3EI}.$$

გადაადგილება მივიღოთ დადებითი ნიშნით, რაც იმას ნიშნავს, რომ ჩაღუნვა ხდება მოდებული პირობითი ერთეული ძალის მიმართულებით.

მობრუნების კუთხის საპოვნელად ვიმოქმედოთ ერთეული მომენტით $M=1$ (ნახ. 46, დ), ეს იყოს მეორე მდგომარეობა. რადგან ამ შემთხვევაში იქიმება კოჭის ქვედა ბოქკოები, ამიტომ ეპიურა აგებულია ქვედა მხარეს.

მლუნავი მომენტები

$$M_p = -Px;$$

$$M_2 = 1.$$

საძიებელი გადაადგილება

$$\Delta_{2P} = \varphi = \int_0^l \frac{M_2 M_p dx}{EI} = - \int_0^l \frac{Px \cdot 1 dx}{EI} = - \frac{Pl^2}{2EI}.$$

ნიშანი მინუსი გეიჩვენებს, რომ მოცემული დატვირთვით კონსოლის ბოლო კვეთი მობრუნდება პირობითი ერთეული მომენტის მოქმედების საწინააღმდეგო მიმართულებით.

2 მაგალითი. ორ საყრდენზე მდებარე კოქის ნახევარმალი დატვირთულია თანაბრად განაწილებული ტვირთით (ნახ. 47). ვიპოვოთ ჩალუნვა კოქის შუაში.

გ ა დ ა წ ყ ვ ე ტ ა. მოცემული დატვირთვის მდგომარეობა ნახვენებია 47, ბ ნახაზზე. რადგანაც ვეძებთ ჩალუნვას კოქის შუაში, ამიტომ ერთეული ძალი უნდა ვიმოქმედოთ შუაში (ნახ. 47, გ).

მოცემული დატვირთვით გამოწვეული მლუნავი მომენტი კოქის დატვირთულ ნახევარმალში

$$M_p = \frac{3}{8} q l x - \frac{q x^2}{2},$$

დაუტვირთავ ნახევარმალში კი

$$M_1 = \frac{1}{8} q l x$$

(ეხლა x აღებულია B საყრდენიდან).

ერთეული ძალით გამოწვეული მლუნავი მომენტი

$$M_1 = \frac{1}{2} x.$$

მორის ფორმულის თანახმად

$$\Delta_{1p} = f = \sum \int \frac{M_1 M_p dx}{EI} = \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \left(\frac{3}{8} q l x - \frac{q x^2}{2} \right) \frac{1}{2} x dx +$$

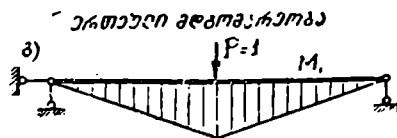
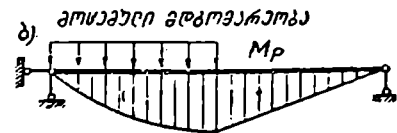
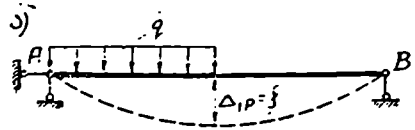
$$+ \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \frac{1}{8} q l x \cdot \frac{1}{2} x dx = \frac{5}{768} \frac{q l^4}{EI}.$$

3 მაგალითი. იმავე კოქის მთელ მალზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი (ნახ. 48). შევაფასოთ განივი ძალის გავლენა ჩალუნვაზე კოქის შუაში. კოქს აქვს სწორკუთხა კვეთი.

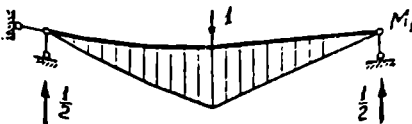
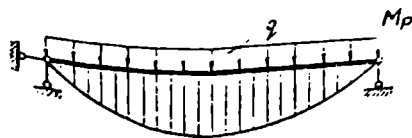
გ ა დ ა წ ყ ვ ე ტ ა. მოცემული დატვირთვით გამოწვეული მლუნავი მომენტი და განივი ძალა

$$Q_p = \frac{q l}{2} - q x.$$

$$M_p = \frac{q l}{2} x - \frac{q x^2}{2},$$



ნახ. 47.



ნახ. 48.

პირობითი ერთეული ძალით გამოწვეული მომენტი და განივი ძალა

$$M_1 = \frac{1}{2} x; \quad Q_1 = \frac{1}{2}.$$

ჩალუნვა შუაში

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} = f &= \sum \int \frac{M_1 M_P dx}{EI} + \sum k \int \frac{Q_1 Q_P dx}{GF} = \\ &= 2 \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \left(\frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{1}{2} x dx + 2 \frac{k}{GF} \int_0^{l/2} \left(\frac{ql}{2} - qx \right) \frac{1}{2} dx = \\ &= \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} + k \frac{ql^2}{8GF}. \end{aligned}$$

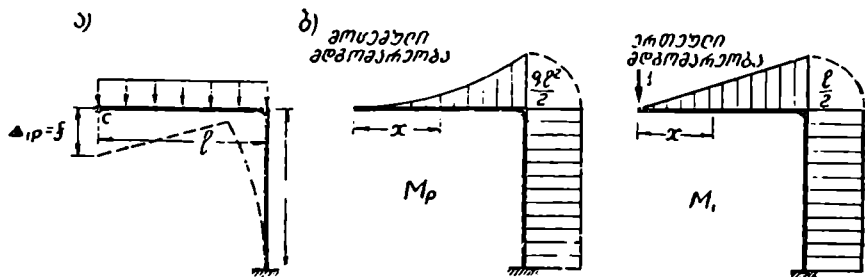
თუ მივიღებთ $G = \frac{3}{8} E$ და $k = \frac{6}{5}$, საბოლოოდ გვექნება.

$$\Delta_{1P} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \left(1 + \frac{64}{25} \frac{h^2}{l^2} \right).$$

განივი კვეთის სიმაღლის ფარდობა მალთან მივიღოთ $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$.

მაშინ ფრჩხილებში მოთავსებულ სიდიდის მეორე წევრი იქნება 0,0256. მაშასადამე, განივი ძალის გავლენა ჩალუნვაზე შუაში შეადგენს მლუნავი მომენტის გავლენის 2,56%-ს. რადგან პრაქტიკულად ფარდობა $\frac{h}{l}$ ყოველთვის $< \frac{1}{10}$, ამიტომ განივი ძალის გავლენა უმნიშვნელოა და შეიძლება მხედველობაში არ იქნეს მიღებული.

‡ მაგალითი. ტეხილ კონსოლურ ძელზე მოქმედებს თანაბრად განაწი-



ნახ. 49.

ლებული ტვირთი ინტენსივობით q (ნახ. 49), ვიპოვოთ c წერტილის ვერტიკალური გადაადგილება.

გადაწყვეტა. მორის ფორმულის საფუძველზე ვიხილავთ ორ მდგო-

მარეობას: მოცემული დატვირთვის (ნახ. 49, ბ) და პირობითი ერთეული ძალის მდგომარეობას (ნახ. 49, გ). ნახაზზე ნაჩვენებია მხოლოდ მლუნავი მომენტის ეპიურები.

ძელის ჰორიზონტალურ ნაწილში

$$M_p = -\frac{qx^2}{2}; \quad N_p = 0; \quad Q_p = -qx;$$

$$M_1 = -1 \cdot x; \quad N_1 = 0; \quad Q_1 = -1.$$

დგარში

$$M_p = -\frac{ql^2}{2}; \quad N_p = -ql; \quad Q_p = 0;$$

$$M_1 = -1 \cdot l; \quad N_1 = -1; \quad Q_1 = 0.$$

გადაადგილებათა საერთო ფორმულის (24) საფუძველზე მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \sum \int \frac{M_1 M_p dx}{EI} + \sum \int \frac{N_1 N_p dx}{EF} + \sum k \int \frac{Q_1 Q_p dx}{GF} = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^l \frac{qx^2}{2} x dx + \frac{1}{EI} \int_0^h \frac{ql^2}{2} l dx + \frac{1}{EF} \int_0^h ql dx + \\ &+ \frac{k}{GF} \int_0^l qx dx = \frac{ql^4}{8EI} + \frac{ql^3 h}{2EI} + \frac{ql h}{EF} + \frac{k ql^2}{2GF}. \end{aligned}$$

თუ $l = h$, მაშინ

$$\Delta_{1p} = \frac{5ql^4}{8EI} + \frac{ql^3}{EF} + \frac{kql^2}{2GF}.$$

გადაადგილება მივიღეთ დადებითი ნიშნით, ე. ი. C წერტილი გადაადგილდება არჩეული ერთეული ძალის მიზართულებით (ქვემოთ). თუ მივიღებთ

$k = \frac{6}{5}$, $G = \frac{3}{8} E$ და $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია შევაფასოთ გრძივი

და განივი ძალის გავლენა გადაადგილებაზე.

$$\Delta_{1p} = \frac{5}{8EI} ql^4 \left(1 + \frac{2}{15} \frac{h^2}{l^2} + \frac{8}{45} \frac{h^2}{l^2} \right) = \frac{5}{8EI} ql^4 (1 + 0,0013 + 0,0018)$$

ამგვარად, გრძივი ძალის გავლენა C წერტილის ჩალუნვაზე შეადგენს მლუნავი მომენტის გავლენის 0,13%, ხოლო განივი ძალის გავლენა კი—0,18%-ს.

5 მაგალითი. პარაბოლური მოხაზულობის მრუდე ძელზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი (ნახ. 50). ვიპოვოთ C წერტილის ჩალუნვა და B საყრდენის ჰორიზონტალური გადაადგილება. ძელის კვეთის ინერციის მომენტი იცვლება კოსინუსის კანონით, ე. ი.

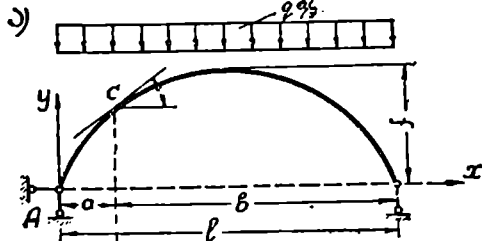
$$I = \frac{I_0}{\cos \varphi},$$

სადაც I_0 ინერციის მომენტია კლიტეში, φ კი ძელის ღერძის მხედის დახრის კუთხე პორიზონტთან. თალის ღერძის განტოლება მოცემულია შემდეგი სახით:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x).$$

გადაწყვეტა. C წერტილის ვერტიკალური გადაადგილების საპოვნელად ამ წერტილზე უნდა ვიმოქმედოთ პირობითი ერთეული ვერტიკალური ძალით (ნახ. 50, ბ).

ა) მოსახელი მდგომარეობა



თუ მივიღებთ $ds = \frac{dx}{\cos \varphi}$,
მაშინ

$$\frac{ds}{l} = \frac{dv}{I_0}$$

და გადაადგილება გამოითვლება ფორმულით

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{M_1 M_P ds}{EI} = \int_0^l \frac{M_1 M_P dx}{I_0}$$

მლუნავი მომენტები I უბანში

$$M_P = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} = \frac{q}{2} x(l-x);$$

$$M_1 = \frac{b}{l} x$$

(x მოზომილია A საყრდენიდან).

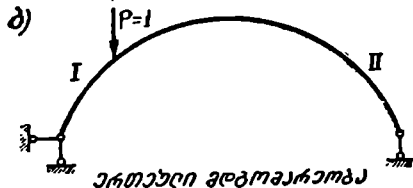
მლუნავი მომენტები II უბანში

$$M_P = \frac{q}{2} x(l-x);$$

$$M_1 = \frac{a}{l} x$$

(x მოზომილია B საყრდენიდან).

ბ) ერთეული მდგომარეობა



ერთეული მდგომარეობა



ნახ. 50.

მაშასადამე, გვექნება

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \frac{1}{EI_0} \int_0^a \frac{q}{2} x(l-x) \frac{b}{l} x dx + \frac{1}{EI_0} \int_0^b \frac{q}{2} x(l-x) \frac{a}{l} x dx = \\ &= \frac{qab(l^2+ab)}{24EI_0}. \end{aligned}$$

თუ მიღებულ ფორმულაში შევიტანთ $a=b=\frac{l}{2}$, მივიღებთ ჩალუნვას ძელის შუაში

$$\Delta_{1P} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_0},$$

ე. ი. მივიღეთ ისეთივე სიდიდე, რაც ორ საყრდენზე მდებარე კოქის შემთხვევაში. ეს იმიტომ, რომ გრძივი ძალის გავლენა მხედველობაში არ მივიღეთ.

B საყრდენის ჰორიზონტალური გადაადგილების საპოვნელად უნდა ავირჩიოთ ახალი პირობითი ერთეული ძალის მდგომარეობა, ე. ი. B წერტილზე უნდა ვიმოქმედოთ ერთეული ჰორიზონტალური ძალით (ნახ. 50, გ).

ერთეული ძალით გამოწვეული მომენტი

$$M_2 = -1y = -\frac{4f}{l^2} x(l-x).$$

B წერტილის ჰორიზონტალური გადაადგილება გამოითვლება ფორმულით

$$\Delta_{2P} = \int_0^l \frac{M_2 M_P dx}{EI_0} = -\frac{2qf}{EI_0 l^2} \int_0^l x^2(l-x)^2 dx = -\frac{q l^2 f}{15 EI_0}.$$

ნიშანი ნიშნის გვიჩვენებს, რომ მოცემული დატვირთვის გავლენით B წერტილი გადაადგილდება ერთეული ძალის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ე. ი. გარეთ.

ს მაგალითი. განვსაზღვროთ ფერმის ქვედა სართულის მე-2 კვანძის ვერტიკალური გადაადგილება (ნახ. 51). აქვლა ღეროს განივი კვეთის ფართობი ერთნაირია და ტოლია $F = 100$ სმ². $P = 100$ ტ.

გადაწყვეტა. გადაადგილება გამოითვლება 26-ე ფორმულის საშუალებით, რომელიც შეიძლება გადმოვწვიოთ შემდეგი სახით:

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{N_1 N_P S}{EF}$$

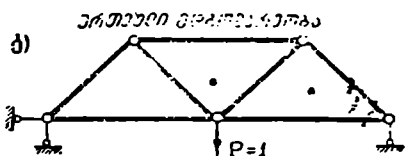
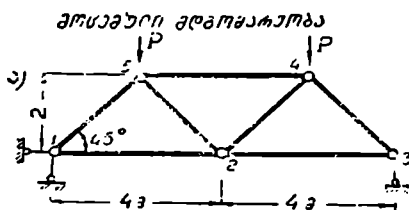
სადაც N_P წარმოადგენს მოცემული დატვირთვით გამოწვეულ ძალვას ფერმის ნებისმიერ ღეროში,

N_1 კი—ერთეული ძალით გამოწვეულ ძალვას ფერმის იმავე ღეროში,

S —სათანადო ღეროს სიგრძე.

მაშასადამე, ფერმებშიც ვიხილავთ ორ მდგომარეობას: მოცემული P დატვირთვისა (ნახ. 51, ა) და ფიქტიური ერთეული ძალისა (ნახ. 51, ბ).

ძალები განისაზღვრება ძალვითა დიაგრამის საშუალებით ან სხვა რომელიმე მეთოდით. ანგარიშის შედეგად მიღებული ძალები და აქვლა საჭირო გამოთვლები მოყვანილია მე-2 ცხრილში.



ნახ. 51.

ღეროს დასახელება	ღეროს სიგრძე, S სმ	ღეროს განივი კვეთის ფართობი, F სმ ²	N _p ტ-ში	N _i ტ-ში	N _i N _p S F
1-2	400	100	100	0,5	200
2-3	400	100	100	0,5	200
3-4	200√2	100	-100√2	-0,5√2	200√2
4-5	400	100	-100	-1,0	400
1-5	200√2	100	-100√2	-0,5√2	200√2
5-2	200√2	100	0	0,5√2	0
2-4	200√2	100	0	0,5√2	0

$$\Sigma = 1364 \frac{\text{ტ}}{\text{სმ}}$$

მაშასადამე,

$$EA_{1p} = \Sigma N_i N_p \frac{S}{F} = 1364, \text{ საიდანაც, } \Delta_{1p} = \frac{1364}{E}, \text{ თუ ფერმა ლითონისაა, მაშინ}$$

$$E = 2\,100\,000 \frac{\text{კგ}}{\text{სმ}^2} = 2100 \frac{\text{ტ}}{\text{სმ}^2}$$

და საბოლოოდ მივიღებთ

$$\Delta_{1p} = \frac{1364}{2100} = 0,65 \text{ სმ.}$$

§ 12. გადაადგილებათა გამოთვლა მკიურების გადაკრავლების საშუალებით (პარაშაჰინის წესი) ✓

იმ შემთხვევაში, როდესაც დატვირთვის ერთ-ერთი მდგომარეობა იძლევა სწორხაზოვან ეპიურას, გადაადგილებათა გამოსათვლელად შეიძლება მივიღოთ მეტად მარტივი პრაქტიკული წესი.

როგორც ვნახეთ, გადაადგილებათა განსაზღვრა მდგომარეობს შემდეგ სახის ინტეგრალების გამოთვლაში

$$\Delta_{ik} = \int \frac{M_i M_k ds}{EI}$$

თუ ნაშენის განსახილავ უბანზე სიხისტე EI მუდმივია, მაშინ

$$\Delta_{ik} = \frac{1}{EI} \int M_i M_k ds.$$

წარმოვიდგინოთ რომ განსახილავი ორი ეპიურიდან M_i სწორხაზოვანია, ხოლო M_k კი ნებისმიერი მოხაზულობისაა (ნახ. 52). ნახაზიდან, ცხადია

$$M_i = xiga.$$

M_i მნიშვნელობას თუ შევითანთ ინტეგრალის გამოსახულებაში, მივიღებთ:

$$\int M_i M_k ds = ig \int x M_k ds = ig \int x dx dx_k$$

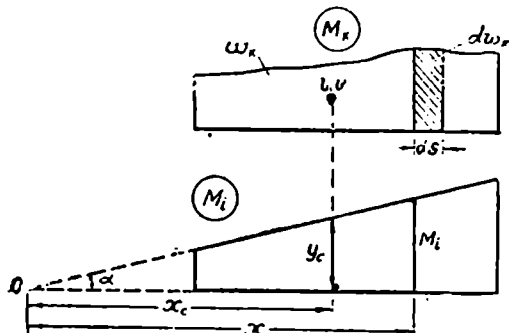
x dx_k წარმოადგენს M_k ეპიურის ელემენტარული ფართობის სტატიკურ მო-

მენტს 0 წერტილის მიმართ, ხოლო $\int x d\omega_x$ კი მთელი M_x ეპიურის ფართობის სტატიკურ მომენტს იმავე 0 წერტილის მიმართ, რომელიც ტოლია $\omega_x \cdot x_c$, სადაც x_c არის M_x ეპიურის ფართობის ცენტრის კოორდინატი 0 წერტილის მიმართ.

მაშასადამე, შეგვიძლია დაწეროთ:

$$\int M_i M_i ds = I_g x \int x d\omega_x = I_g x \omega_x x_c = \omega_x y_c \quad (27)$$

ამგვარად, მივიღეთ შემდეგი თეორემა:



ნახ. 52.

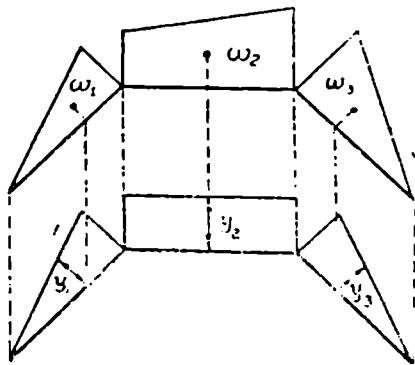
$\int M_i M_i ds$ ინტეგრალის მისაღებად M_x (მრუდხაზოვანი) ეპიურის ფართობი უნდა გადამრავლდეს M_i (სწორხაზოვანი) ეპიურის ორდინატზე, აღებულზე M_x ეპიურის სიმძიმის ცენტრის ქვეშ.

საბოლოოდ გადაადგილება გამოითვლება ფორმულით

$$\Delta_{ik} = \frac{1}{EI} \omega_i y_c \quad (28)$$

თუ ეპიურა შედგება რამდენიმე უბნისაგან, მაშინ გადაადგილება გამოითვლება, როგორც ჯამი რამდენიმე ნაშრავლისა. მაგალითად, გვაქვს სამუბნიანი ნაშენი (ნახ. 53), მაშინ გვექნება

$$\Delta = \frac{\omega_1 y_1}{EI_1} + \frac{\omega_2 y_2}{EI_2} + \frac{\omega_3 y_3}{EI_3}$$



ნახ. 53.

ან საზოგადოდ

$$\Delta = \sum \frac{\omega_i y_c}{EI} \quad (28')$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ გრძივი ძალის გავლენას, მაშინ გადაადგილება გამოითვლება ფორმულით:

$$\Delta = \sum \frac{\omega_1 y'_c}{EI} + \sum \frac{\omega'_1 y''_c}{EF}, \quad (28')$$

სადაც ω'_1 არის k მდგომარეობის გრძივი ძალის ეპიურის ფართობი, y'_c კი ამ ფართობის სიმძიმის ცენტრის გასწვრივ მეორე (i) მდგომარეობის გრძივი ძალის ეპიურის ორდინატა. ეს პრაქტიკული წესი, რომელსაც ეპიურების გადაშრაულების ან ვერეშჩაგინის წესი ეწოდება, საგრძნობლად ამარტივებს გადაადგილების პოვნას.

ვიმეორებთ, რომ ეს წესი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ერთ-ერთი ეპიურა სწორხაზოვანია. თუ ორივე ეპიურა სწორხაზოვანია, მაშინ არა აქვს მნიშვნელობა თუ რომლის ფართობს რომლის ორდინატაზე გადავამრავლებთ, ე. ი. M_1 და M_2 -ს შეიძლება შეეცვალოს როლები. მიღებულ ნამრავლს დაეწერება დადებითი ნიშანი, თუ M_1 და M_2 ეპიურები ერთნაირი ნიშნისაა და უარყოფითი, თუ სხვადასხვა ნიშნისაა.

შეეთანხმდეთ და შემდეგში ეპიურები ავაგოთ გაკიმული ბოქვების მხარეს (უნიშნოდ), მაშინ ეპიურების ნამრავლი აიღება დადებითი ნიშნით, თუ ორივე ეპიურა ერთმხარესაა აგებული და უარყოფითი ნიშნით—თუ სხვადასხვა მხარეს. ეს წესი უზრუნველყოფს გადაადგილების ნიშნის სისწორეს.

მიღებული ფორმულის საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია ადვილად განვსაზღვროთ შორის ინტეგრალი მთელი რიგი შემთხვევისათვის.

ორი სამკუთხედისათვის, რომელთა წვეროები ერთ მხარესაა მიმართული (ნახ. 54, ა), მივიღებთ:

$$\Delta_{12} = \frac{1}{EI} \int M_1 M_2 ds = \frac{\omega_1 y'_c}{EI} = \frac{1}{EI} \frac{al}{2} \frac{2}{3} b = \frac{abl}{3EI}.$$

თუ სამკუთხედის წვეროები მიმართულია საწინააღმდეგო მხარეს (ნახ. 54, ბ), მაშინ

$$\Delta_{12} = \frac{1}{EI} \int M_1 M_2 ds = \frac{\omega_1 y'_c}{EI} = \frac{1}{EI} \frac{al}{2} \frac{1}{3} b = \frac{abl}{6EI}.$$

როდესაც გადასამრავლებელია ორი ტრაპეცია (ნახ. 54, გ), მაშინ სიმარტივისათვის ერთ-ერთი ტრაპეცია დავეყოთ ორ სამკუთხედათ და გადამრავლება შევასრულოთ ცალ-ცალკე:

$$\Delta_{12} = \frac{1}{EI} \int M_1 M_2 ds = \frac{1}{EI} \left(\frac{al}{2} y_1 + \frac{bl}{2} y_2 \right) = \frac{l}{6EI} (2ac + 2bd + ad + cb).$$

ეს ფორმულა ადვილი დასამახსოვრებელია, რადგან ფრჩხილებში მოთავსებული სიდიდე წარმოადგენს ერთმანეთის ქვეშ მოთავსებული ორდინატების გაორკეცებული ნამრავლის და ჯვარედინად მოთავსებული ორდინატების ნამრავლის ჯამს.

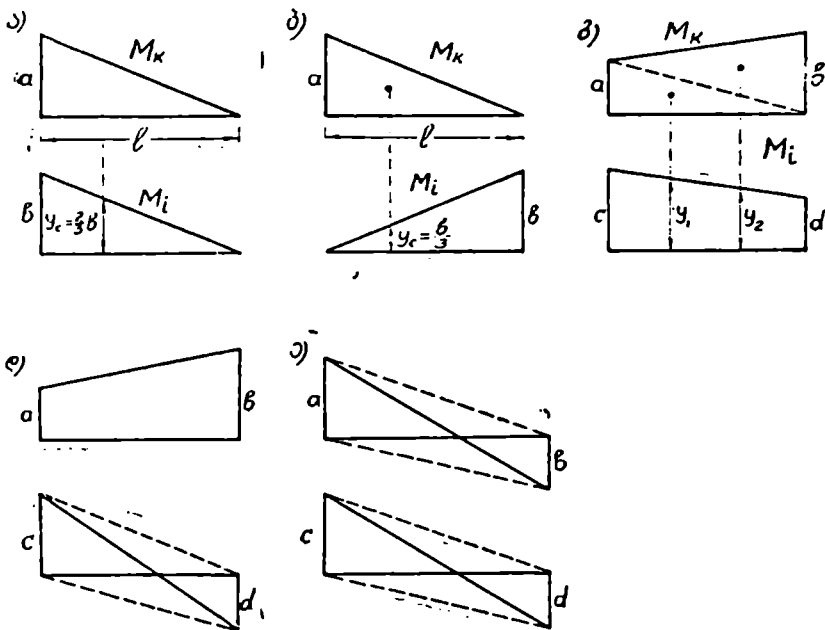
უკანასკნელი ფორმულა შეიძლება გამოვიყენოთ 54, დ ნახაზზე მოყვანილი შემთხვევისთვისაც, თუ d ორდინატს ავიღებთ უარყოფითი ნიშნით:

$$\Delta_{ik} = \frac{l}{6EI} (2ac - 2bd - ad + cb).$$

54, ე ნახაზზე მოყვანილ შემთხვევაში უარყოფითი ნიშნით აიღება b და d ორდინატა:

$$\Delta_{ik} = \frac{l}{6EI} (2ac + 2bd - ad - cb).$$

ყველა ეს ფორმულა ადვილად მიიღება, თუ ეპიურებს წარმოვიდგენთ ისე: როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები წყვეტილი ხაზით.



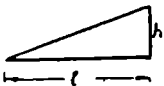

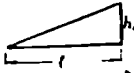
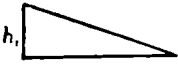
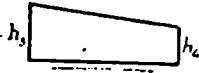
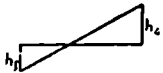
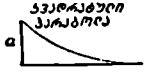
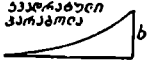
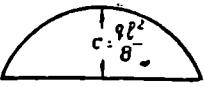
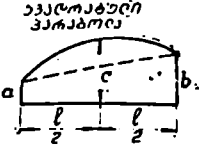
ნახ. 54.

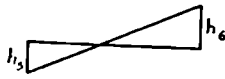
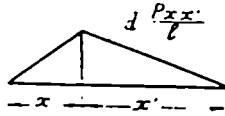
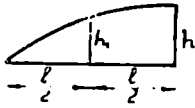
ანგარიშის გამარტივებისათვის $\int M_i M_k ds$ ინტეგრალის გამოსათვლელად შედგენილია ცხრილი, სადაც მოყვანილია თითქმის ყველა შესაძლო შემთხვევა (მე-3 ცხრილი).

✓ **§ 13. მაგალითები გადაადგილებაზე განსაზღვრაზე ვიკისთვის გადასაკვლევის საშუალებით**

1 მაგალითი. ორ საყრდენზე მდებარე კოქის ნახევარმალი დეტვირთულია თანაბრად განაწილებული ტვირთით (ნახ. 55). ვიკოვით ჩაღუნვა კოქის შუაში.

$$\int M_i M_k dx$$

M_i ებიურა M_k ებიურა		2	4
			
1		$\frac{h_1 h_3 l}{3}$	$\frac{h_1}{6} (2h_6 + h_3)$
3		$\frac{h_1 h_3 l}{6}$	$\frac{h_1}{6} (2h_3 + h_6)$
5		$\frac{h_1 h_2}{6} (2h_4 + h_3)$	$\frac{l}{6} (2h_3 h_3 + 2h_4 h_6 + h_3 h_6 + h_4 h_3)$ რომცა $h_3 = h_3$ და $h_3 = h_6$ $\frac{l}{3} (h_3^2 + h_4^2 + h_3 h_4)$
7		$\frac{h_1 h_2}{6} (2h_4 - h_6)$	$\frac{l}{6} (2h_4 h_6 - 2h_4 h_3 - h_3 h_6 + h_4 h_3)$
9	 ანაკრებელი კარკამოა	$\frac{l a h_2}{12}$	$\frac{l a}{12} (h_6 + 3h_3)$
11	 ანაკრებელი კარკამოა	$\frac{l b h_2}{4}$	$\frac{l b}{12} (h_3 + 3h_6)$
13		$\frac{h_1 h_2 c}{3}$	$\frac{l c}{3} (h_3 + h_6)$
15	 ანაკრებელი კარკამოა	$\frac{h_1 h_2}{6} (2c + b)$	$\frac{l}{6} (a h_3 + b h_6 + 2c (h_3 + h_6))$

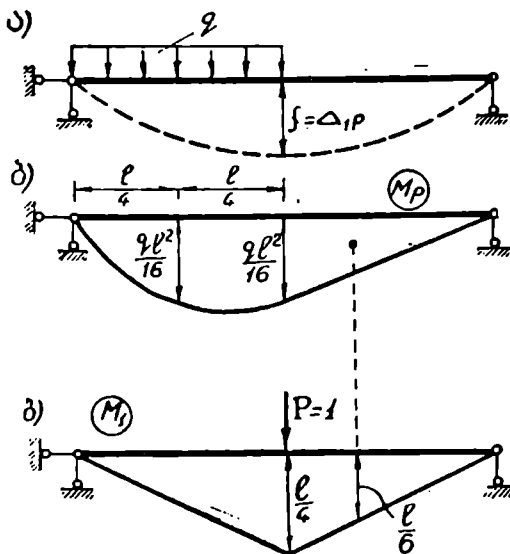
6	8	10
		
$\frac{lh_1}{6} (2h_c - h_3)$	$\frac{ldh_1}{6} \left(1 + \frac{x}{l} \right)$	$\frac{lh_1}{6} (2h_c + h)$
$\frac{lh_1}{6} (h_3 - 2h_2)$	$\frac{ldh_1}{6} \left(1 + \frac{x'}{l} \right)$	$\frac{lh_2h_1}{3}$
$\frac{l}{6} (2h_4h_c - 2h_2h_3 + h_3h_c - h_4h_2)$	$\frac{ld}{6} \left[h_2 \left(1 + \frac{x'}{l} \right) + h_3 \left(1 + \frac{x}{l} \right) \right]$	$\frac{l}{6} [hh_4 + 2h_c(h_2 + h_3)]$
$-\frac{l}{6} (2h_2h_3 + 2h_4h_c - h_3h_c - h_4h_2)$	$\frac{ld}{6} \left[h_3 \left(1 + \frac{x}{l} \right) - h_2 \left(1 + \frac{x'}{l} \right) \right]$	$\frac{l}{6} [hh_2 + 2h_c(h_4 - h_3)]$
$\frac{la}{12} (h_c - 3h_2)$	$\frac{lbJ}{12} \left[1 + \frac{x'}{l} \left(1 + \frac{x'}{l} \right) \right]$	
$\frac{lb}{12} (3h_c - h_3)$	$\frac{lbJ}{12} \left[1 + \frac{x}{l} \left(1 + \frac{x}{l} \right) \right]$	
$\frac{bc}{3} (h_6 - h_3)$	$\frac{lcd}{3} \left(1 + \frac{xx'}{l} \right)$	
$-\frac{l}{6} [bh_c - ah_c + 2c(h_6 - h_3)]$		

გადაწყვეტა. ავგოთ მლუნაევი მომენტის ეპიურა მოცემული დატვირთვისაგან (ნახ. 55, ბ) და ერთეული $P=1$ ძალისაგან გამოწვეული (ნახ. 55, გ). ეპიურები აგებულია გაკიმული ბოქკოების მხარეს.

გადაადგილების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ინტეგრალის ცხრილი, ეპიურის მარცხენა ნაწილისათვის (1) (10) და მარჯვენა ნაწილისათვის კი (1) (2), მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \Delta_{1r} = f &= \\ &= \frac{1}{EI} \frac{1}{6} \frac{l}{2} \frac{l}{4} \left(2 \cdot \frac{ql^2}{16} + \right. \\ &+ \left. \frac{ql^2}{16} \right) + \frac{1}{EI} \frac{1}{3} \frac{l}{4} \frac{ql^2}{16} \frac{l}{2} = \\ &= \frac{ql^4}{EI \cdot 16 \cdot 16} + \\ &+ \frac{ql^4}{EI \cdot 24 \cdot 16} = \frac{5}{768} \frac{ql^4}{EI}. \end{aligned}$$

მივიღეთ იგივე შედეგი, რაც

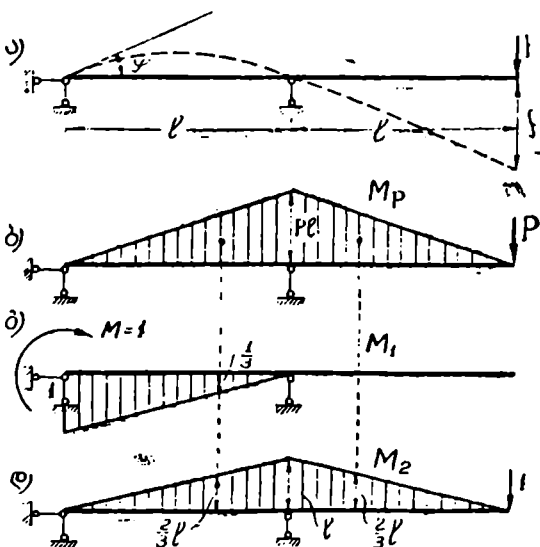


ნახ. 55.

§ 11-ში განხილულ მაგალითში.

მაგალითი. განვსაზღვროთ კონსოლიანი კოქის მარცხენა საყრდენის მობრუნების კუთხე და კონსოლის თავისუფალი ბოლოს ჩაღუნვა (ნახ. 56).

გადაწყვეტა. მოცემული დატვირთვით გამოწვეული ეპიურა ნაჩვენებია 56, ბ ნახაზზე. ფ კუთხის საპოვნელად მარცხენა საყრდენზე ეპოქმედოთ ერთეული მომენტი $M=1$ და ავგოთ მლუნაევი მომენტის ეპიურა (ნახ. 56, გ). ვერეშჩაგინის წესის გამოყენება (ფორმ. 28') მოგვცემს:



ნახ. 56.

$$\Delta_{1P} = \varphi = -\frac{1}{EI} \frac{Pl}{2} l \frac{1}{3} = -\frac{Pl^2}{6EI}.$$

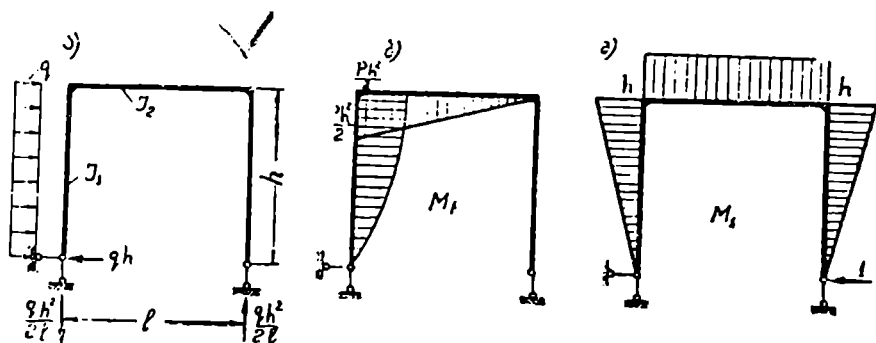
ნიშანი მინუსი აღებულია იმიტომ, რომ ეპიურები აგებულია სხვადასხვა მხარეს, და ეს კი იმის მაჩვენებელია, რომ მოქმედი ძალის გავლენით საყრდენი მობრუნდება მოდებული ფიქტიური ერთეული მომენტის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ჩალუნვის საპონელად კონსოლის ბოლოზე ვიმოქმედოთ ფიქტიური ერთეული ძალით და ავაგოთ ეპიურა (ნახ. 56, დ).

56, ბ და დ ეპიურების გამრავლება მოგვცემს:

$$\Delta_{2P} = f = \frac{1}{EI} \left(Pl \frac{l}{2} \frac{2}{3} l + Pl \frac{l}{2} \frac{2}{3} l \right) = \frac{2Pl^2}{3EI}.$$

მ მავალითი. ჩარჩოზე მოქმედებს ჰორიზონტალური ტვირთი. განვსაზღვროთ ჩარჩოს მოძრავი საყრდენის ჰორიზონტალური გადაადგილება (ნახ. 57). ჩარჩოს გეომეტრიული სიდიდეები ნაჩვენებია ნახაზზე.

გ ა დ ა წყვეტ ა. მოცემული ტვირთისაგან გამოწვეული საყრდენი რეაქციები და ეპიურა ნაჩვენებია ნახაზზე. მოძრავ საყრდენზე ჰორიზონტალური



ნახ. 57.

მიმართულებით ვიმოქმედოთ ერთეული ძალით ($P=1$) და ავაგოთ ეპიურა (ნახ. 57, გ).

თუ გამოვიყენებთ ეპიურების გამრავლების წესს და ინტეგრალის ცხრილს (1) (10), მივიღებთ

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= -\frac{1}{EI_1} \frac{1}{6} h h \left(2 \frac{3}{8} qh^2 + \frac{qh^2}{2} \right) - \frac{1}{EI_2} \frac{qh^2}{2} \frac{l}{2} h = \\ &= -\frac{5ql^3}{24EI_1} - \frac{qh^3l}{4EI_2}. \end{aligned}$$

როცა

$$I_1 = I_2 \text{ და } l = h,$$

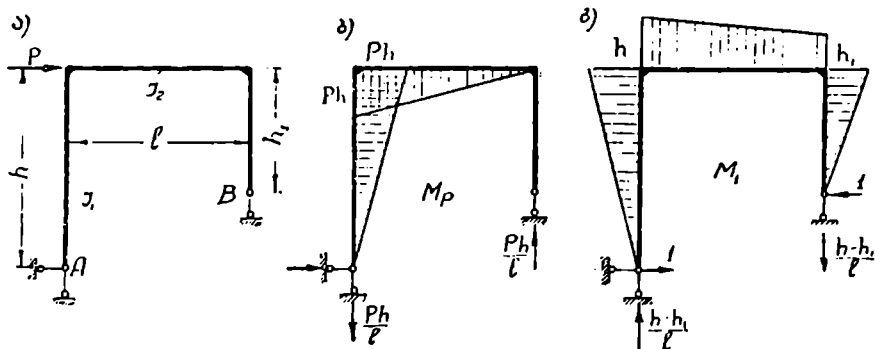
მივიღებთ

$$\Delta_{1P} = - \frac{1}{EI} \frac{11}{24} qh^4.$$

ნიშანი (—) გვიჩვენებს, რომ საყრდენი გადაადგილება ერთეული ძალის მოპირდაპირე მიმართულებით, ე. ი. მარჯვნივ.

4 მაგალითი. ჩარჩოს ერთ დეარს მოწყობილი აქვს უძრავი სახსროვანი საყრდენი, მეორეს კი მოძრავი სახსროვანი. ვიპოვოთ პორიზონტალური P (ძალით გამოწვეული მოძრავი B საყრდენის პორიზონტალური გადაადგილება ნახ. 58).

გ ა და წ ყ ვ ე ტ ა. ავაგოთ მოცემული დატვირთვით გამოწვეული მღუნავი მომენტის ეპიურა (ნახ. 58, ბ). ეპიურის ასაგებად საჭიროა წინასწარ განი-



ნახ. 58.

საზღვროს საყრდენი რეაქციები. საძიებელი გადაადგილების მიმართულებით მოქმედი ერთეული ფიქტიური ძალით გამოწვეული მომენტის ეპიურა მოცემულია 58, გ ნახაზზე.

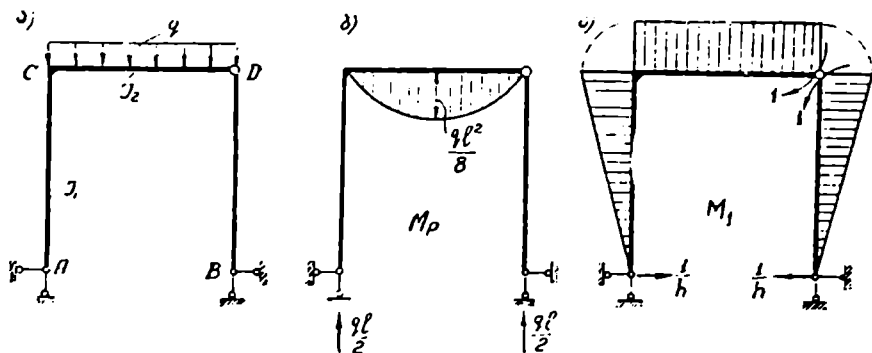
M_p ეპიურის გადამრავლება ერთეული ძალით გამოწვეულ M_1 ეპიურაზე მოგვცემს:

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= - \frac{1}{EI_1} \frac{Ph^2}{2} \frac{2}{3} h - \frac{1}{EI_2} \frac{Phl}{6} (h_1 + 2h) = \\ &= - \frac{Ph^3}{3EI_1} - \frac{Phl(h_1 + 2h)}{6EI_2}. \end{aligned}$$

B საყრდენი გადაადგილება შარჯვნივ.

5 მაგალითი. განუსაზღვროთ სამსახსრიანი ჩარჩოს CD და DB ღეროების ურთიერთ მობრუნება D სახსარში, ე. ი. D კუთხის ცვლილება გამოწვეული თანბრად განაწილებულ ტვირთისაგან (ნახ. 59).

გადაწყვეტა. რადგანაც ჩვენ ვეძებთ ორი კვეთის ურთიერთ მობრუნების კუთხეს, ამიტომ ერთეულ მდგომარეობად უნდა ავიღოთ განზოგადებული ერთეული წყვილი ძალის მდგომარეობა, ე. ი. ორი ერთმანეთის ტოლი და საწინააღმდეგო მიმართულების წყვილძალა (ნახ. 59, გ).



ნახ. 59.

59-ე ნახაზზე მოყვანილია დატვირთვით და ერთეული წყვილი ძალით გამოწვეული ეპიურები. M_p და M_1 ეპიურების გადამრავლება მოგვცემს

$$\Delta_{1p} = -\frac{1}{EI_2} \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l \cdot 1 = -\frac{ql^3}{12EI_2}.$$

ნიშანი (—) გვიჩვენებს, რომ CD და DB ღეროების ურთიერთ მობრუნება მოხდა ერთეული წყვილი ძალების საწინააღმდეგო მიმართულებით.

■ მაგალითი. განესაზღვროთ წინა ამოცანის ჩარჩოს A და B კვეთების ურთიერთ მობრუნების კუთხე.

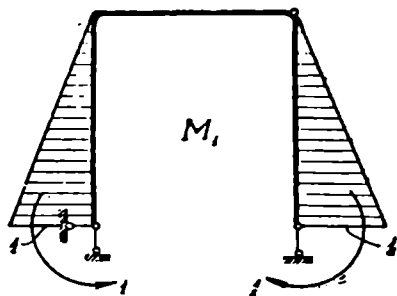
გადაწყვეტა. განზოგადებული ერთეული წყვილი ძალის მდგომარეობა ნაჩვენებია მე-60 ნახაზზე.

რადგანაც M_p (ნახ. 59, ბ) და M_1 (ნახ. 60) ეპიურებს საერთო უბნები არა აქვთ, ამიტომ A და B კვეთები ურთიერთ არ მობრუნდება.

§ 14. ტემპერატურის ცვლილებით გამოწვეული გადაადგილებები

გადაადგილებებს იწვევს ტემპერატურის ცვლილებაც. ის იწვევს ნაშენის ღეროების დაბრუნებას და მათ სიგრძეთა ცვლილებას.

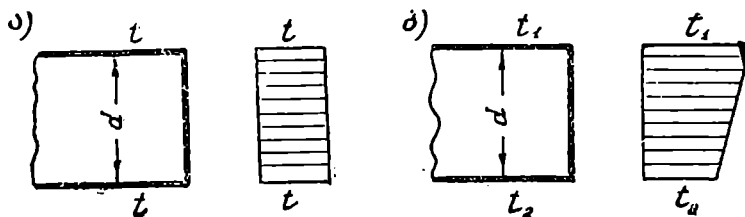
თანაბარი გახურების ან გაცივების შემთხვევაში (ღეროს განივი კვეთის მთელ სიმაღლეზე ტემპერატურის ნაზრდი მუდმივია) ღეროების განივი კვეთები გადაადგილდება მხოლოდ წრფივად, არათანაბარი გახურების დროს კი ღეროების განივი კვეთები მობრუნდება კიდევც.



ნახ. 60.

რადგან სტატიკურად რკვევად სისტემებში გადაადგილებანი თავისუფლად ხდება, ამიტომ ტემპერატურა მასში შიგა ძალებს არ წარმოშობს. ნაშენის ანგარიშის დროს საჭიროა ვიცოდეთ არა ტემპერატურის აბსოლუტური სიდიდე, არამედ მისი ცვლილება ნაშენის საწყის (აშენების) მდგომარეობიდან. ამიტომ შემდეგში, ჩვენ განვიხილავთ ტემპერატურის ნაზრდის გავლენას სისტემაზე. ტემპერატურის აწევა ჩავთვალოთ დადებითად, დაწევა კი — უარყოფითად.

თანაბარი ტემპერატურის მოქმედების დროს ტემპერატურის გავრცელების ეპიურა განივ კვეთში წარმოადგენს სწორკუთხედს (ნახ. 61, ა). საერთოდ მივიღოთ, რომ კვეთის შიგნით ტემპერატურა ვრცელ-



ნახ. 61.

დება წრფივად და, მაშასადამე, კვეთი დეფორმაციის დროს ბრტყელი რჩება. ამ შემთხვევაში ტემპერატურით გამოწვეული წაგრძელება გამოითვლება ფორმულით

$$\alpha t l,$$

სადაც α ხაზობრივი გაფართოების კოეფიციენტი,

l — ღეროს სიგრძე და

t — ტემპერატურის ნაზრდი.

უფრო ხშირად კვეთის სიმაღლეზე ტემპერატურა არა თანაბრად იცვლილება. მაგალითად, ღეროს ერთი მხარე ხურდება მზის სხივებით, მეორე მხარე კი მოქცეულია ჩრდილში. ამ შემთხვევაში ტემპერატურის გავრცელების ეპიურა იქნება ტრაპეციული (ნახ. 61, ბ) და ადგილი ექნება არა მარტო ხაზობრივ წაგრძელებას, არამედ გამრუდებასაც, ე. ი. ცალკეული კვეთები მობრუნდებიან რაღაც კუთხით.

ტემპერატურული გადაადგილების ფორმულის მიღება შეიძლება უშუალოდ მორის (26) ფორმულიდან. თუ განვიცაძლის გავლენას არ მივიღებთ მხედველობაში, მაშინ

$$\Delta_{ik} = \sum \left(\int M_i \Delta \varphi_k + \int N_i \Delta x_k \right).$$

ამ ფორმულაში $\Delta \varphi_k$ და Δx_k წარმოადგენს k მდგომარეობის ძალებისაგან გამოწვეულ ds ელემენტის დეფორმაციებს. ჩვენ შემთხვევაში k მდგომარეობის ძალების მაგიერ მოქმედებს ტემპერატურა და ამიტომ k -ს მაგიერ t მდგომარეობა გვექნება. სათანადოდ $\Delta \varphi_k$ და Δx_k უნდა შევცვალოთ ტემპერატურით გამოწვეული დეფორმაციებით:

$$\Delta_{1t} = \sum \left(\int M_i \Delta \varphi_i + \int N_i \Delta x_i \right) \quad (29)$$

ვთქვათ, კოქის ds ელემენტზე მოქმედებს არათანაბარი ტემპერატურა — ზედა ბოქოები ხურდება t_1° -ით, ქვედა კი t_2° -ით. მივიღოთ $t_1 > t_2$ (ნახ. 62). დეფორმაციის შემდეგ ab სიბრტყე მიიღებს $a_1 b_1$ მდებარეობას.

ზედა ბოქოები წაგრძელდება სიდიდით

$$\alpha t_1 ds,$$

ქვედა ბოქოები კი

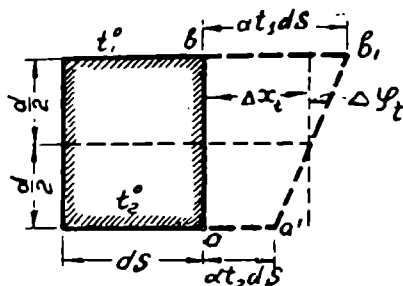
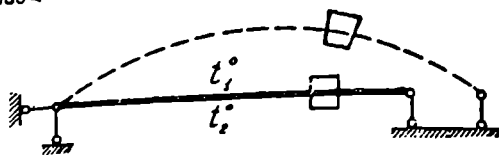
$$\alpha t_2 ds.$$

თუ სიმძიმის ცენტრი კვეთის სიმაღლის შუაშია, მაშინ ღერძის წაგრძელება იქნება

$$\Delta N_i = \frac{\alpha t_1 ds + \alpha t_2 ds}{2} = \frac{\alpha (t_1 + t_2)}{2} ds.$$

ab კვეთის მობრუნების კუთხე

$$\Delta \varphi_i = \frac{\alpha t_1 ds \cdot \alpha t_2 ds}{d} = \frac{\alpha (t_1 - t_2)}{d} ds,$$



ნახ. 62.

სადაც d კვეთის სიმაღლეა.

ΔN_i და $\Delta \varphi_i$ მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ (29) ფორმულაში, მივიღებთ

$$\Delta_{1t} = \alpha \sum \left(\frac{t_1 - t_2}{d} \int M_i ds + \frac{t_1 + t_2}{2} \int N_i ds \right) \quad (30)$$

ეს არის ტემპერატურული გადაადგილების საერთო ფორმულა.

თუ ნაშენი შედგება სწორი ელემენტებისაგან, მაშინ (30) ფორმულაში შემავალი ინტეგრალები მოგვცემენ სათანადო ერთეული (M_i და N_i ერთეული ძალისაგან გამოწვეული სიდიდეებია) ეპიურების ფართობებს და ფორმულა მიიღებს შემდეგ მარტივ სახეს:

$$\Delta_{1t} = \alpha \sum \left(\frac{t_1 - t_2}{d} \omega_{M_i} + \frac{t_1 + t_2}{2} \omega_{N_i} \right) \quad (31)$$

აქ ω_{M_i} და ω_{N_i} ერთეული ძალით გამოწვეული მღუნავი მომენტის და გრძივი ძალის ეპიურების ფართობებია.

ნიშვნების წესი მიიღება $M_i \Delta \varphi_i$ ან $N_i \Delta x_i$ შესაძლო მუშაობის ნიშნის მიხედვით, ე. ი., თუ ერთეული მომენტის და გრძივი ძალის მიმართულებები ერთმანეთს ტემპერატურით გამოწვეული დეფორმაციების მიმართულებებს, მაშინ სათანადო წევრი აიღება დადებითი ნიშნით, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი — უარყოფითი ნიშნით. ტემპერატურა $t_1 + t_2$ და $t_1 - t_2$ აიღება აბსოლუტური სიდიდით.

მაგალითად, (30), (31) ფორმულებს პირველი წევრი აიღება დადებითი ნიშნით. თუ ერთეული ძალით გამოწვეული მღუნავი მომენტი (M_i) და ($l_1 - l_2$) ტემპერატურით გამოწვეული სიმრუდე მიმართულია ერთ და იგივე მხარეს; წინააღმდეგ შემთხვევაში სათანადო წევრს დაეწერება უარყოფითი ნიშანი. მეორე წევრი აიღება დადებითი ნიშნით, თუ ერთეული ძალით გამოწვეული გრძივი ძალა გამჭიმავია და $\frac{l_1 + l_2}{2}$ კი — დადებითი (გახურება),

ან, თუ ერთეული გრძივი ძალა მკუმშავია და $\frac{l_1 + l_2}{2}$ — უარყოფითი (გაცივება).

ფერმებისათვის ტემპერატურით გამოწვეული გადაადგილების ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

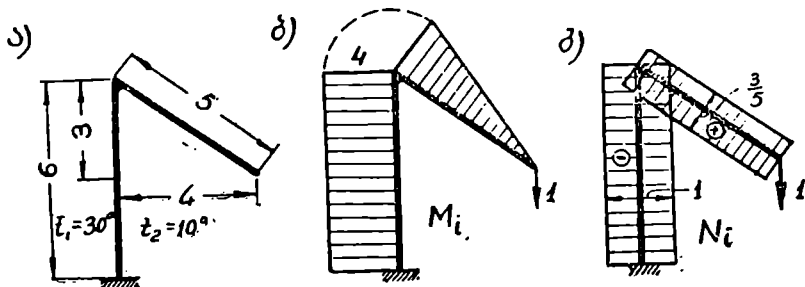
$$\Delta_{it} = \alpha \sum \frac{l_1 + l_2}{2} N_i S, \quad (32)$$

სადაც S ღეროს სიგრძეა.

საერთოდ, ტემპერატურული გადაადგილების გამოთვლის დროს გრძივი ძალის გავლენა ყოველთვის მხედველობაში უნდა იყოს მიღებული.

§ 15. მაგალითები ტემპერატურულ გადაადგილებებზე

1 მაგალითი. ტეხილი კონსოლური ძელის გარეთა მხარეს მოქმედებს ტემპერატურა $t_1 = 30^\circ$, შიგნითა მხარეს კი $t_2 = 10^\circ$. განვსაზღვროთ ტემპერატურისაგან გამოწვეული C წერტილის ვერტიკალური გადაადგილება. განვიკვეთის სიმაღლე იყოს d (ნახ. 63, ა).



ნახ. 63.

გადაწყვეტა. C წერტილზე ვიმოქმედოთ ფიქტიური ერთეული ძალით და ავაგოთ მღუნავი მომენტის და გრძივი ძალის ეპიურები (ნახ. 63, ბ, გ). ტემპერატურული პარამეტრები:

$$\frac{l_1 + l_2}{2} = \frac{30 + 10}{2} = 20^\circ;$$

$$l_1 - l_2 = 30 - 10 = 20^\circ.$$

ერთეული ეპიურების ფართობები

$$\omega_M = 4 \cdot 4 + \frac{4 \cdot 5}{2} = 26$$

ვერტიკალური ღეროსათვის

$$\omega_N = 1 \cdot 4 = 4 \dots$$

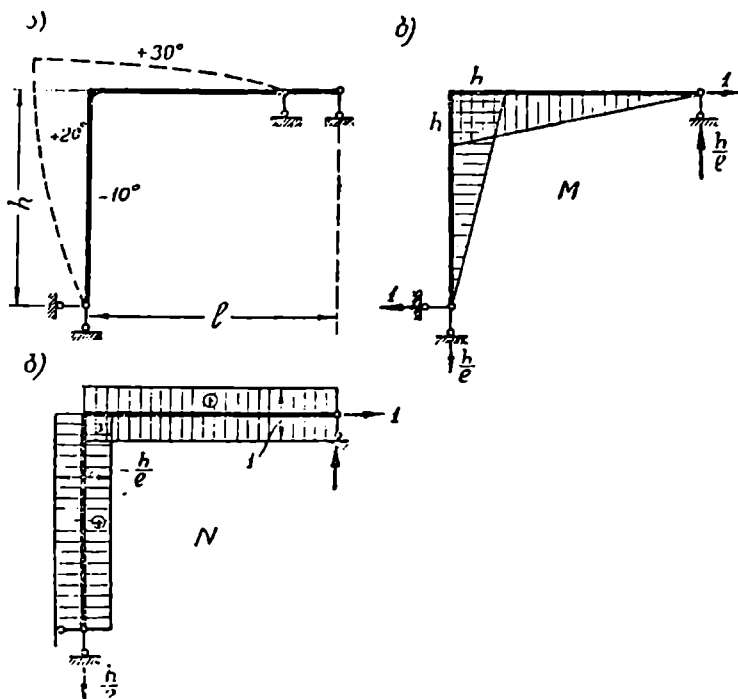
დახრილი ღეროსათვის

$$\omega_N = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3.$$

(31) ფორმულით:

$$\Delta_{11} = \alpha \left(\frac{20}{d} 26 - 20 \cdot 4 + 20 \cdot 3 \right) = \alpha \left(\frac{520}{d} - 20 \right).$$

მეორე წევრი აღებულია უარყოფითი ნიშნით იმიტომ, რომ ვერტიკალურ ღეროს ტემპერატურა კიბავს, ერთეული ძალა კი კუმშავს.



ნახ. 64.

შ მაგალითი. განესაზღვროთ მოძრავი საყრდენის პორიზონტალური გადაადგილება, გამოწვეული ტემპერატურისაგან. ტემპერატურის ცვლილების სიდიდე ნაჩვენებია ნახაზზე (ნახ. 64).

გადაწყვეტა. მოძრავ საყრდენზე ვამოქმედოთ ერთეული პორიზონ-

ტალური ძალა და ავადგომ შლუნავეი მომენტის (ნახ. 64, ბ) და გრძივი ძალის (ნახ. 64, გ) ეპიურები. ტემპერატურული პარამეტრები და ერთეული ეპიურის ფართობები:

$$\text{ღვარისათვის} \quad \frac{I_1 + I_2}{2} = \frac{20 - 10}{2} = 5^\circ;$$

$$I_1 - I_2 = 20 + 10 = 30^\circ;$$

$$\omega_{\text{II}} = \frac{h^2}{2}; \quad \omega_{\text{N}} = \frac{h^2}{l}.$$

ჰორიზონტალური ღვარისათვის

$$\frac{I_1 + I_2}{2} = \frac{30 - 10}{2} = 10^\circ,$$

$$I_1 - I_2 = 30 + 10 = 40^\circ,$$

$$\omega_{\text{II}} = \frac{hl}{2}; \quad \omega_{\text{N}} = 1 \cdot l.$$

ტემპერატურისაგან ორივე ღვარს გარეთა ბოქკოები იკვირება (ნახ. 64, ა), ერთეული მომენტისაგან კი, პირიქით, იკუმშება (ნახ. 64, ბ), ამიტომ (31) ფორმულის პირველ წევრს დაეწერება უარყოფითი ნიშანი.

მეორე წევრი აიღება დადებითი ნიშნით, რადგან როგორც ტემპერატურა, ისე ერთეული ძალა იწვევს ღვარების გაკვივას.

მაშასადამე, (31) ფორმულა მოგვცემს:

$$\begin{aligned} \Delta_{1t} &= \alpha \left(-\frac{30}{d} \frac{h^2}{2} - \frac{40}{d} \frac{hl}{2} + 5 \frac{h^2}{l} + 10 l \right) = \\ &= -\frac{20\alpha}{d} h \left(\frac{3h}{4} + l \right) + 5\alpha \frac{h^2 + 2l^2}{l}. \end{aligned}$$

თუ $l = h$, მივიღებთ

$$\Delta_{1t} = -\frac{35\alpha h^2}{d} + 15\alpha h.$$

დაეუშვათ, რომ კვეთის სიმაღლე $d = \frac{h}{10}$, მაშინ

$$\Delta_{1t} = -350\alpha h + 15\alpha h = -335\alpha h.$$

ნიშანი მინუსი გვიჩვენებს, რომ მოძრავი საყრდენი ტემპერატურის გავლენით გადაადგილდება მარცხნივ.

3 მაგალითი. განვსაზღვროთ მოძრავი საყრდენის ჰორიზონტალური გადაადგილება. $I_1 = -10^\circ$, $I_2 = 20^\circ$ და კვეთის სიმაღლე $d = \frac{l}{10}$ (ნახ. 65).

გ ა და წ ყ ვ ე ტ ა. ერთეული ძალით გამოწვეული ეპიურები ნაჩვენებია ნახაზზე (ნახ. 65, ბ, გ).

ტემპერატურული პარამეტრები და ერთეული ეპიურის ფართობები

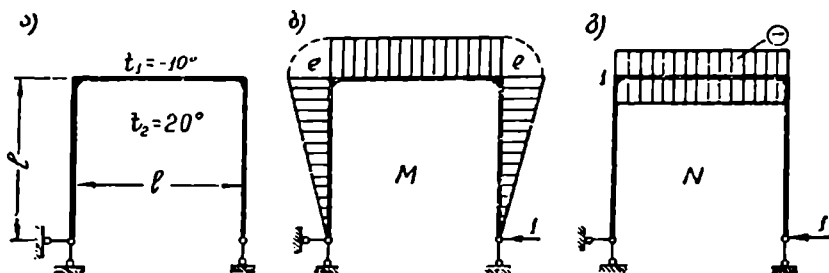
$$\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{-10 + 20}{2} = 5^\circ; \quad t_1 - t_2 = |-10 - 20| = 30^\circ.$$

$$\omega_{\Sigma} = 2 \frac{l^2}{2} + l^2 = 2l^2; \quad \omega_{\Sigma} = l$$

და საბოლოოდ მივიღებთ

$$\Delta_{12} = -\frac{\alpha 30}{d} 2l^2. \quad 5 \alpha l = -600 \alpha l - 5 \alpha l = -605 \alpha l.$$

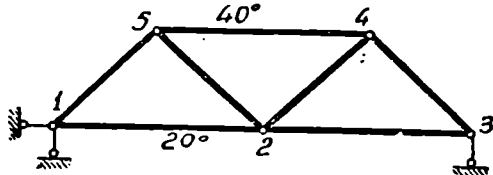
შოდრავი საყრდენი გადაადგილება მარჯვნივ.



ნ.ბ. 65.

4 მაგალითი. ფერმის ზედა სარტყელი გახურებულია 40° . ქვედა სარტყელი კი 20° (ნახ. 66). განვსაზღვროთ მე-2 კვანძის ვერტიკალური გადაადგილება. ფერმის ზომები ისეთივეა, როგორც მე-6 ამოცანაში (§ 11).

გადაწყვეტა. ერთეული ძალით გამოწვეული ძალები ფერმის ღეროებში ნოყვანილია მე-2 ცხრილში (გვ. 48).



ნახ. 66.

(32) ფორმულის საფუძველზე მივიღებთ (ტემპერატურა თანაბარია, ე. ი. $t_1 = t_2$)

$$\Delta_{12} = \alpha \sum N_i S_i = -\alpha 40(0,5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + 1,4 + 0,5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}) + \alpha 20(0,5 \cdot 4 + 0,5 \cdot 4) = -320 \alpha + 80 \alpha = -240 \alpha.$$

ნიშანი მინუსი გვიჩვენებს, რომ მე-2 კვანძი გადაადგილება ზევით. თუ ნივთიერება $\alpha = 0,00001$, მაშინ

$$\Delta_{12} = -240 \cdot 0,00001 = -0,0024 \text{ მ.}$$

§ 16. საყრდენების დაჯდომით (გადაადგილებით) გამოწვეული გადაადგილებების განსაზღვრა

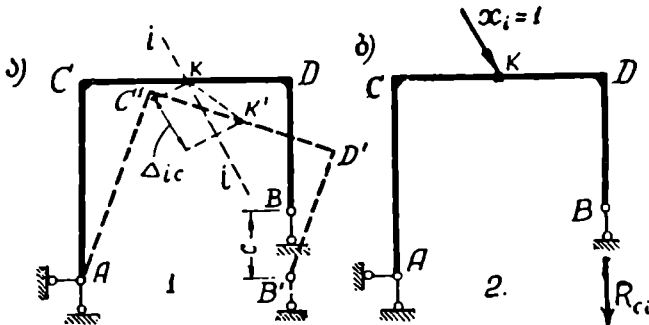
ნაშენის საყრდენების გადაადგილება ხდება როგორც ფუძის დრეკალი დეფორმაციებით, ისე გრუნტის გამორეცხვით საყრდენის ფუძის ძირში, ან

სხვა რაიმე შემთხვევითი ფაქტორებით. დრეკადი დეფორმაციით გამოწვეული გადაადგილებები შეიძლება წინასწარ გავითვალისწინოთ ანგარიშის საფუძველზე, ხოლო საყრდენების გამორეცხვით გამოწვეული გადაადგილებები კი ადგილზე უშუალო გაზომვით განისაზღვრება.

საყრდენების დაჯდომა სტატიკურად რკვევად სისტემებში არ იწვევს არავითარ ძალებს, სტატიკურად ურკვევ სისტემებში კი მნიშვნელოვან ძალებს იწვევს.

რადგანაც სტატიკურად ურკვევი სისტემების ანგარიში წარმოებს სტატიკურად რკვევადი, ე. წ. ძირითადი სისტემის საშუალებით, ამიტომ ჩვენ წინასწარ უნდა შევისწავლოთ სტატიკურად რკვევადი სისტემების გადაადგილებები, გამოწვეული საყრდენების დაჯდომით. საყრდენების დაჯდომით გამოწვეული სტატიკურად რკვევადი სისტემის ცალკეული წერტილების გადაადგილებათა განსაზღვრავად გამოვიყენოთ მუშაობათა ურთიერთობის პრინციპი.

წარმოვიდგინოთ, რომ მოცემული ჩარჩოს საყრდენმა დაიწია ვერტიკალურად c სიდიდით (ნახ. 67, ა). ჩარჩოს გადაადგილებული მდგომარეობა ნაჩვენებია წვეტილი ხაზით.



ნახ. 67.

განესაზღვროთ k წერტილის გადაადგილება ნებისმიერი $i-i$ მიმართულებით Δ_{ci} , ე. ი. მთლიანი kk' გადაადგილების გეგმილი $i-i$ მიმართულებაზე. განვიხილოთ ორი მდგომარეობა: საყრდენის დაჯდომით გამოწვეული გადაადგილებული მდგომარეობა (ნახ. 67, ა) და ფიქტიური ერთეული ძალის მდგომარეობა, ე. ი. k წერტილზე საძიებელი გადაადგილების მიმართულებით ეამოქმედოთ ძალა $X_i=1$ (ნახ. 67, ბ). პირველ მდგომარეობაზე ძალები არ მოქმედებს და ის შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ნულოვანი ტვირთით დატვირთული.

$X_i=1$ ძალით გამოწვეული საყრდენი რეაქცია იმ ღეროში, რომელიც მოცემულ მდგომარეობაში გადაადგილებულია—ჩვენს შემთხვევაში B საყრდენ ღეროში—აღენიშნოდ R_{ci} -ით. R_{ci} -ის მიმართულება ავიღოთ c გადაადგილების მიმართულებით და ეს მიმართულება ჩავთვალოთ დადებითად. 67, ბ ნახაზზე ნაჩვენებია რეაქციის დადებითი მიმართულება.

განხილული ორი მდგომარეობისათვის დაწეროთ მუშაობათა ურთიერთობის პრინციპი (პირველი მდგომარეობის ძალების მუშაობა ნულის ტოლია):

$$X_1 \Delta_{1c} + R_{c1} c = 0,$$

ან

$$1 \cdot \Delta_{1c} + R_{c1} c = 0,$$

საიდანაც

$$\Delta_{1c} = -R_{c1} \cdot c. \quad (33)$$

მაშასადამე, საყრდენის გადაადგილებით გამოწვეული სტატიკურად კვვევადი სისტემის ნებისმიერი წერტილის გადაადგილება ტოლია საძირბელი გადაადგილების მიმართულებით მოქმედებულ ერთეული ძალით გამოწვეული რეაქციისა (გადაადგილებულ ღეროში) და c გადაადგილების ნამრავლის. განესაზღვროდ იმავე ჩარჩოს C კვანძის პორიზონტალური გადაადგილება. ამისათვის C წერტილზე ვიმოქმედოთ ერთეული ძალით

$X_1=1$ და განესაზღვროთ რეაქცია B საყრდენ ღეროში (ნახ. 68, ა)

$$R_{c1} = -\frac{h}{l}.$$

მივიღებთ

$$\Delta_{1c} = -R_{c1} \cdot c = -\left(-\frac{h}{l}\right) c = \frac{hc}{l}.$$

იმავე კვანძის მობრუნების კუთხის საპოვნელად უნდა ვიმოქმედოთ

ერთეული მომენტი $X_2=1$ (ნახ. 68, ბ). რეაქცია B ღეროში $R_{c2} = -\frac{1}{l}$ და

მობრუნების კუთხე

$$\Delta_{2c} = -R_{c2} \cdot c = -\left(-\frac{1}{l}\right) c = \frac{c}{l}.$$

უფრო რთულ შემთხვევაში, როდესაც საყრდენის გადაადგილება ხდება ორი მიმართულებით ან როდესაც რამდენიმე საყრდენი განიციდის გადაადგილებას, (33) ფორმულა დაიწერება შემდეგი სახით

$$\Delta_{ic} = -\sum R_{ci} \cdot c. \quad (34)$$

განვიხილოთ მაგალითი. სამსახსრიანი ჩარჩოს A საყრდენმა განიცადა ვერტიკალური გადაადგილება, B საყრდენმა კი როგორც ვერტიკალური, ისე პორიზონტალური გადაადგილება (ნახ. 69, ა). წყვეტილი ხაზით ნაჩვენებია ჩარჩოს ახალი მდგომარეობა. განესაზღვროთ C წერტილის პორიზონტალური გადაადგილება.

ვიმოქმედოთ C წერტილზე ერთეული ძალით და გამოვთვალოთ საყრდე-

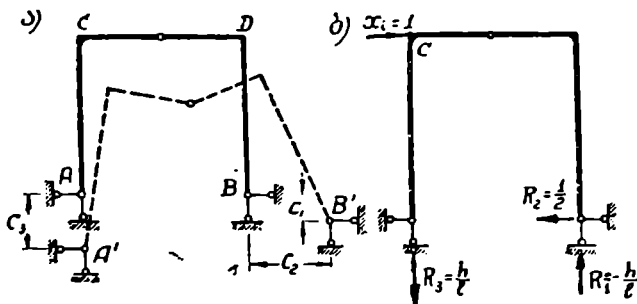
ნი რეაქციები გადაადგილებულ ღეროებში (ნახ. 69,ბ). მუშაობათა ურთიერთობის პრინციპის საფუძველზე მივიღებთ:

$$1 \cdot \Delta_{1c} - R_1 \cdot c_1 - R_2 \cdot c_2 + R_3 \cdot c_3 = 0,$$

საიდანაც

$$\Delta_{1c} = R_1 \cdot c_1 + R_2 \cdot c_2 - R_3 c_3 = \frac{hc_1}{l} + \frac{c_2}{2} - \frac{hc_3}{l}.$$

ან უშუალოდ (34) ფორმულა მოგვცემს:



ნახ. 69.

$$\begin{aligned} \Delta_{1c} &= - \sum R_{ci} \cdot c_i = - \left(-\frac{h}{l} \right) c_1 - \left(-\frac{1}{2} \right) c_2 - \left(\frac{h}{l} \right) c_3 = \\ &= \frac{hc_1}{l} + \frac{c_2}{2} - \frac{hc_3}{l}. \end{aligned}$$

§ 17. გადაადგილებათა განსაზღვრა კოტენციალური მინიმუმის საშუალებით (კახტილიანოს თეორემა)

მორის თეორემა, რომელიც დაწვრილებით იყო შესწავლილი წინა პარაგრაფში, მთლიანად წყვეტს ნებისმიერი ნაშენის გადაადგილებათა განსაზღვრის საკითხს და ღეროვან სისტემებში ის მარტივად იძლევა საბოლოო პასუხს. ამავე მიზანს ემსახურება კასტილიანოს თეორემაც, რომელიც ამოცანას წყვეტს სრულებით სხვა—ენერგეტიკული წესით.

ღეროვან სისტემებში კასტილიანოს თეორემის გამოყენება მიზანშეუწონელია, რადგან მოითხოვს უფრო მეტ გამოთვლებს, ვიდრე მორის თეორემა. მაგრამ არის ისეთი შემთხვევები, როდესაც მორის თეორემის გამოყენება არ შეიძლება (გარსები, ფილები და სხვა), ხოლო კასტილიანოს თეორემისა კი—შეიძლება. გარდა ამისა, კასტილიანოს თეორემა თავისებურად წყვეტს საკითხს და განსაზღვრავს ამოცანას ენერგეტიკულ აზრს ანიკებს.

ეს თეორემა მდგომარეობს შემდეგში:

კოტენციალური ენერგიის კერძო წარმოებულ რაიმე განზოგადებული ძალით ტოლია ამ ძალის მოდების წერტილის გადაადგილებებისა ამავე ძალის მიმართულებით. ეს გადაადგილება გამოწვეულია მოქმედი დატვირთვით.

მაშასადამე,

$$\frac{\partial V}{\partial P_k} = \Delta_{kP}$$

ამ თეორემის დამტკიცება მორის ფორმულის საშუალებით მარტივად ხდება. პოტენციალური ენერგია (ფორ. 14')

$$V = \sum \int \frac{M_p^2 ds}{2EI}$$

წარმოვიდგინოთ, რომ ნაშენი დატვირთულია ნებისმიერი $P_1, P_2, P_3, P_4 \dots P_n$ ძალებით.

ძალთა დამოუკიდებლობის და პროპორციულობის პრინციპის თანახმად ამ ძალებით გამოწვეული მთლიანი მლუნაეი მომენტი შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი სახით:

$$M_p = M_1 P_1 + M_2 P_2 + M_3 P_3 + \dots + M_k P_k + \dots + M_n P_n, \quad (a)$$

სადაც $M_1, M_2, M_3 \dots M_k \dots M_n$ სათანადო ერთეული ძალებით გამოწვეული მომენტებია. თუ გვინდა ვიპოვოთ გადაადგილება P_k ძალის მიმართულებით, უნდა ავიღოთ კერძო წარმოებულნი ამ ძალით

$$\frac{\partial V}{\partial P_k} = \sum \frac{\partial}{\partial P_k} \left[\int \frac{M_p^2 ds}{2EI} \right] = \sum \int \frac{M_p \frac{\partial M_p}{\partial P_k} ds}{EI}$$

(a) განტოლებიდან

$$\frac{\partial M_p}{\partial P_k} = M_k$$

ეს მნიშვნელობა შევითანოთ წინა განტოლებაში, მივიღებთ

$$\frac{\partial V}{\partial P_k} = \sum \int \frac{M_p M_k ds}{EI}$$

ტოლობის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს მორის ფორმულას (იხ. ფორ. 25) და საბოლოოდ გვექნება:

$$\frac{\partial V}{\partial P_k} = \Delta_{kP} \quad (33)$$

კასტილიანოს თეორემის საშუალებით გადაადგილება განისაზღვრება შემდეგნაირად: ვწერთ ნაშენზე მოქმედი ძალებით გამოწვეულ მლუნავ მომენტს და შემდეგ პოტენციალური ენერგიის გამოსახულებას, მისი წარმოებულნი ერთ-ერთი ძალით მოგვცემს გადაადგილებას ამ ძალის მიმართულებით.

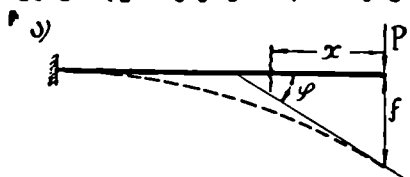
იმ შემთხვევაში, როდესაც იმ წერტილზე, რომლის გადაადგილებასაც ვეძებთ, გარე ძალა არ მოქმედებს, უნდა ვამოკმედოთ ფიქტიური ძალა, შემდეგ დავწეროთ პოტენციალური ენერგიის მთლიანი გამოსახულება და გავაწარმოოთ ის ამ ძალით. ბოლოს მიღებულ შედეგში ფიქტიური ძალა უნდა გავუტოლოთ ნულს. თუ ხაზობრივ გადაადგილებას ვეძებთ, ვამოქმედებთ შეყურსულ P ძალას და თუ მობრუნების კუთხეს—შეყურსულ M მომენტს.

1 მაგალითი. ვიპოვოთ კონსოლის ბოლო წერტილის ვერტიკალური გადაადგილება და მობრუნების კუთხე გამოწვეული P ძალით (ნახ. 70).

გადაწყვეტა. ჯერ განვსაზღვროთ ვერტიკალური გადაადგილება-მლუნავი მომენტი ნებისმიერ კვეთში

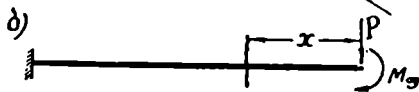
$$M_p = -Px.$$

პოტენციალური ენერჯიის წარმოებული P ძალით



$$\frac{\partial V}{\partial P} = \int \frac{M_p \frac{\partial M_p}{\partial P} dx}{EI};$$

$$\frac{\partial M_p}{\partial P} = -x.$$



ნახ. 70.

მაშასადამე, მივიღებთ:

$$\Delta_{pp} = f = \int_0^l \frac{(-Px)(-x)dx}{EI} = \frac{Pl^3}{3EI}.$$

მობრუნების კუთხის საპოვნელად კონსოლის ბოლოზე ვიმოქმედოთ ფიქტიური მომენტით M_θ (ნახ. 70, ბ).

მლუნავი მომენტი

$$M_p = -Px - M_\theta,$$

$$\frac{\partial V}{\partial M_\theta} = \varphi = \int \frac{M_p \frac{\partial M_p}{\partial M_\theta} dx}{EI},$$

$$\frac{\partial M_p}{\partial M_\theta} = -1$$

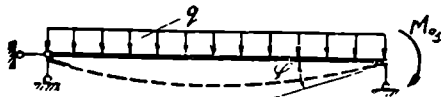
და

$$\Delta_{M\theta} = \varphi = \frac{\partial V}{\partial M_\theta} = \int_0^l \frac{(Px + M_\theta)dx}{EI} = \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{M_\theta l}{EI}.$$

რადგან $M_\theta = 0$, საბოლოოდ

მივიღებთ:

$$\varphi = \frac{Pl^2}{2EI}.$$



ნახ. 71.

2 მაგალითი. ორ საყრდენზე

მდებარე კოჭზე მოქმედებს თანაბრად

განაწილებული ტვირთი. განვსაზღვროთ მობრუნების კუთხე მარჯვენა საყრდენზე (ნახ. 71).

გადაწყვეტა. მარჯვენა საყრდენზე ვამოქმედოთ მომენტი M_θ . მლუნავი მომენტი

$$M_p = \left(\frac{ql}{2} + \frac{M_0}{l} \right) x - \frac{qx^2}{2}.$$

$$\frac{\partial M_p}{\partial M_0} = \frac{x}{l}.$$

მაშასადამე,

$$\Delta_{x,p} = \varphi = \frac{\partial V}{\partial M_0} = \int_0^l \frac{M_p}{EI} \frac{\partial M_p}{\partial M_0} dx = \int_0^l \frac{\left[\left(\frac{ql}{2} + \frac{M_0}{l} \right) x - \frac{qx^2}{2} \right] \frac{x}{l} dx}{EI} =$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{ql^3}{6} + \frac{M_0 l}{3} - \frac{ql^3}{8} \right) = \frac{1}{EI} \left(\frac{ql^3}{24} + \frac{M_0 l}{3} \right).$$

რადგანაც $M_0 = 0$, მივიღებთ:

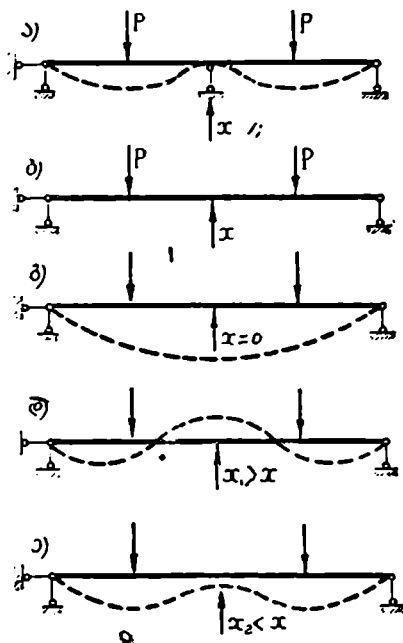
$$\varphi = \frac{ql^3}{24EI}.$$

§ 18. უმცირესი მუშაობის პრინციპი

წარმოვიდგინოთ, რომ ორმალიან უკრ კოჭზე მოქმედებს ნებისმიერი ძალები (ნახ. 72, ა). ამ ძალებით გამოწვეული შუა საყრდენის რეაქცია აღვნიშნოთ X -ით. კოჭის ნამდვილი დეფორმირებული მდგომარეობა ნაჩვენებია 72, ა ნახაზზე. უკუვადლოთ შუა საყრდენი ღერო და მის მაგიერ ვიმოქმედოთ X რეაქციით (ნახ. 72, ბ).

კასტილიანოს თეორემის თანახმად კოჭზე მოქმედი ძალებით გამოწვეული გადაადგილება X -ის მიმართულებით ტოლია მთლიანი პოტენციალური ენერჯიის კერძო წარმოებულისა X -ით. მაგრამ, რადგან X -ის მოდების წერტილის გადაადგილება თავისი მიმართულებით ნულის ტოლია, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0.$$



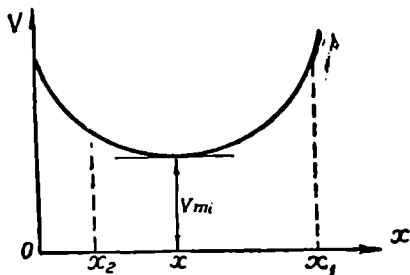
ნახ. 72.

ეს განტოლება საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ X -ის ის სიდიდე, რომლის დროსაც პოტენციალური ენერჯია მინიმალურია (V -ს მეორე წარმოებულის X -ით იძლევა $X=1$ -საგან გამოწვეულ გადაადგილებას თავისავე მიმართულებით, რომელიც ყოველთვის დადებითია), ე. ი. რეაქციის ნამდვილი სიდიდე. მაშასადამე, ჩვენ ვხედავთ, რომ უკუვადებული ბმის X ძაღვის ცვლილებით იზრდება სისტემის პოტენციალური ენერჯია.

72-ე ნახაზზე განხილული შემთხვევებიდან მინიმალურ პოტენციალურ

ენერჯიას ადგილი აქვს მხოლოდ პირველ შემთხვევაში (ნახ. 72, ა). დამოკიდებულება $V = f(X)$ შეიძლება გამოვსახოთ გრაფიკულად (ნახ. 73). მიღებულ თეორემას, პოტენციალური ენერჯიის მინიმუმის შესახებ, ეწოდება უმცირესი მ. შ. შაობის პრინციპი.

ეს პრინციპი სამართლიანია არა მარტო ერთი რეაქციის შემთხვევაში, არამედ მრავალი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი რეაქციების შემთხვევაშიც:



ნახ. 73.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial X_1} &= 0; & \frac{\partial V}{\partial X_2} &= 0; \\ \frac{\partial V}{\partial X_3} &= 0, \dots & \frac{\partial V}{\partial X_i} &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

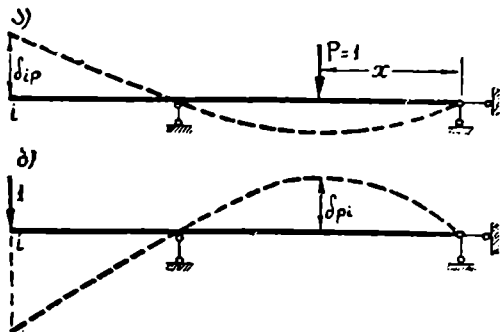
პოტენციალური ენერჯიის მიღებული თვისება სამართლიანია ნებისმიერი შიგა ან გარე ბმების უკუგდების დროს (გარდა იმ ბმებისა, რომელთა უკუგდება სისტემას გეომეტრიულად ცვლადად აქცევს) და საშუალებას იძლევა განვსაზღვროთ ძალები უკუგდებულ

ლეროებში, ე. ი. ვიანგარიშით სტატიკურად ურკვევი სისტემა.

§ 19. გადაადგილების გავლენის ხაზი

ჩვენ გვინდა ვიპოვოთ ნებისმიერი გადაადგილების ცვლილების კანონი და მისი გრაფიკული გამოსახულება, გამოწვეული მოძრავი ერთეული ძალით, ე. ი. ავაგოთ გავლენის ხაზი.

გადაადგილების გავლენის ხაზის აგება შეიძლება როგორც უშუალოდ მორის ფორმულით, ისე ჩალუნვის ხაზის საშუალებით.



ნახ. 74.

ჯერ გავარჩიოთ პირველი წესი. გვინდა ავაგოთ ნებისმიერი i წერტილის ვერტიკალური გადაადგილების გავლენის ხაზი (ნახ. 74). მორის ფორმულის საფუძველზე უნდა განვიხილოთ ორი მდგომარეობა: მოცემული მოძრავი ტვირთის, რომელიც დაშორებულია მარჯვენა საყრდენიდან x მანძილზე (ნახ. 74, ა), და ერთეული ფიქტიური ძალის. ფიქტიური ძალა მოდ-

ბულია i წერტილზე საძიებელი გადაადგილების მიმართულებით (ნახ. 74, ბ). i წერტილის გადაადგილება (გრძობივი ძალის გავლენა უგულებელყოფილია)

$$\delta_{ip} = \int \frac{M_i M_p ds}{EI}$$

M_i და M_p და სათანადოდ δ_{ip} იქნება x -ის ფუნქცია. თუ x -ს მივცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობას, მივიღებთ i წერტილის გადაადგილების სიდიდეს მოძრაივი ტვირთის სხვადასხვა მდებარეობის დროს. ამ ცვლილების გრაფიკული გამოსახულება იქნება i წერტილის ვერტიკალური გადაადგილების გავლენის ხაზი.

მეორე წესი მდგომარეობს იმაში, რომ გავლენის ხაზის აგებას ცვლით ჩალუნვის ხაზის აგებით.

გადაადგილებათა ურთიერთობის პრინციპის თანახმად

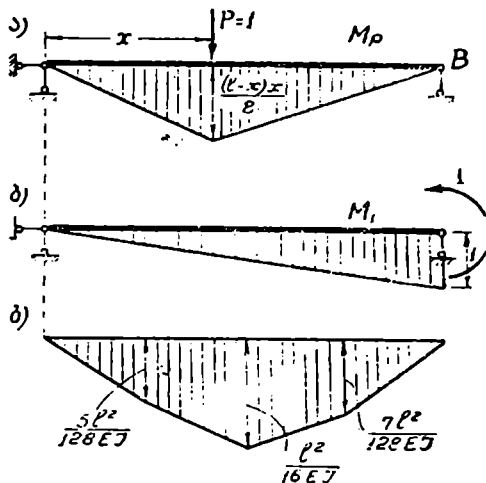
$$\delta_{ip} = \delta_{pi}$$

74-ე ნახაზზე გამოსახულია კოქის დეფორმირებული ღერძი ორი მდგომარეობის ერთეული ძალისათვის. δ_{ip} წარმოადგენს i წერტილის ვერტიკალურ გადაადგილებას, გამოწვეულს ნებისმიერ წერტილზე მოდებული ერთეული ($P=1$) ძალით, ხოლო δ_{pi} კი P ძალის მოდების წერტილის გადაადგილებას, გამოწვეულს i წერტილზე მოქმედი ერთეული ძალით. რადგან P ძალას შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მდებარეობა კოქზე (x იცვლება), ამიტომ δ_{pi} მოგვცემს ჩალუნვის ხაზს. განვიხილოთ i წერტილზე მოქმედი მუდმივი ერთეული ძალით.

ამგვარად, გადაადგილების გავლენის ხაზის აგება შეეცვალებოდა ჩალუნვის ხაზის აგებით. ეს წესი სამართლიანია ნებისმიერი გადაადგილებისათვის, უფრო მარტივია. ვიდრე მორის ფორმულის უშუალო გამოყენება და ამიტომ პრაქტიკაში მას დიდი გამოყენება აქვს, განსაკუთრებით რთული სისტემებისათვის.

მაგალითი. ავაგოთ ორ საყრდენზე მდებარე კოქის მარჯვენა ბოლოს მობრუნების კუთხის გავლენის ხაზი (ნახ. 75).

გადაწყვეტა. გავლენის ხაზი ავაგოთ მორის ფორმულის საშუალებით. 75-ე ნახაზზე მოყვანილია P ძალის (ნახ. 75, ა) და ფიქტიური ერთეული მომენტის (ნახ. 75, ბ) მდგომარეობა. მობრუნების კუთხის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ინტეგრალის ცხრილით (1) (8), მივიღებთ:



ნახ. 75.

$$\delta_{1P} = \int \frac{M_1 M_P dx}{EI} = \frac{1}{6EI} \frac{Px(l-x)}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) = \frac{Px(l^2 - x^2)}{6EI \cdot l^2}.$$

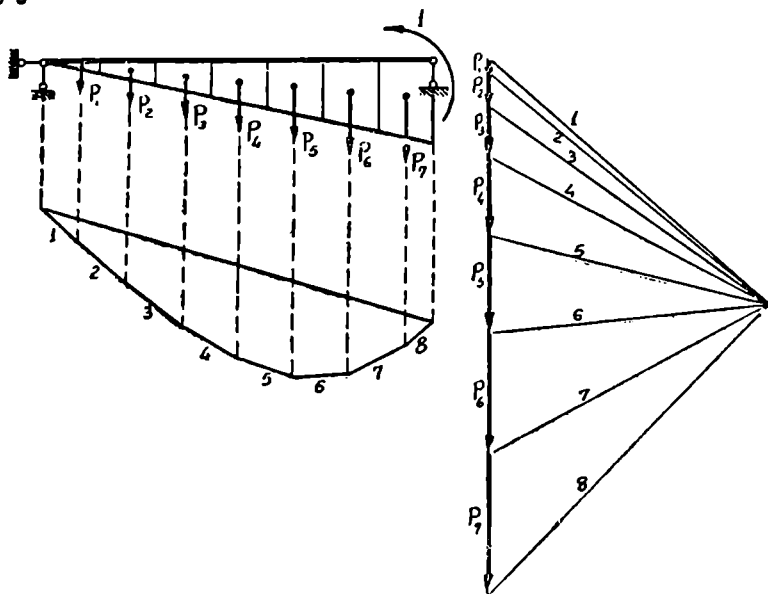
x -ს თუ მივცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობას, მივიღებთ B საყრდენის მობრუნების კუთხის გავლენის ხაზის ორდინატებს (ნახ. 75, გ):

$$\text{როცა } x = \frac{l}{4}, \quad \delta_{1P} = \frac{5l^2}{128EI};$$

$$\text{როცა } x = \frac{l}{2}, \quad \delta_{1P} = \frac{l^2}{16EI};$$

$$\text{როცა } x = \frac{3}{4}l, \quad \delta_{1P} = \frac{7l^2}{128EI}.$$

იმავე მობრუნების კუთხის გავლენის ხაზი ავაგოთ მეორე წესით, ე. ი. ავაგოთ B საყრდენზე მოქმედი მუდმივი ერთეული მომენტიტ გამოწვეული ჩაღუნვის ხაზი.



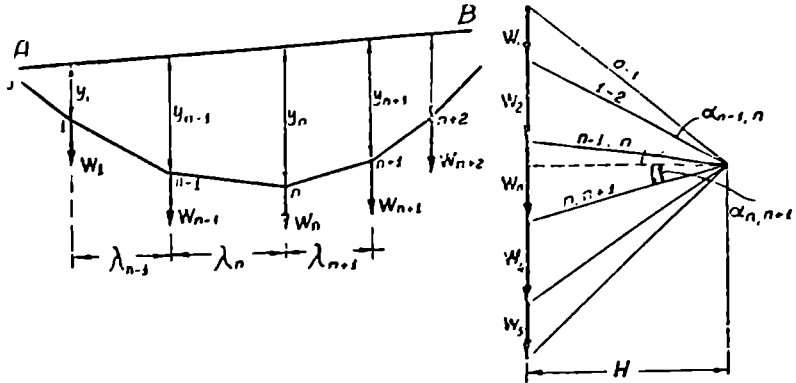
ნახ. 76.

ჩაღუნვის ხაზი შეიძლება აიგოს ანალიზურად და გრაფიკულად. ერთეული მომენტიტ გამოწვეული მღუნავი მომენტის ეპიურა მივიღოთ ფიქტიურ დატვირთვად. ამ დატვირთვით გამოწვეული მღუნავი მომენტის ეპიურა (ფიქტიური) იქნება საძიებელი მობრუნების კუთხის გავლენის ხაზი. იმავეს მივიღებთ, თუ ავაგებთ ფიქტიური დატვირთვით გამოწვეულ თოკის მრავალკუთხედს (ნახ. 76).

§ 20. გადაადგილებათა განსაზღვრა ღრუბლი ტვირთების საშუალებით

ნაშენის ვერტიკალური გადაადგილებათა ხაზის (ჩალუნვის ხაზის) აგება მორის ფორმულით ბევრ არითმეტიკულ გამოთვლებს მოითხოვს, რადგან ამ შემთხვევაში საჭიროა განისაზღვროს ნაშენის თითქმის ყველა წერტილის გადაადგილება. ამიტომ, ამოცანის გასამარტივებლად მიმართავენ ე. წ. ღრუბლი ტვირთების მეთოდს.

ეს მეთოდი დამყარებულია შემდეგ ძირითად თეორემაზე: ყოველგვარი (0-1-2-3...) მრავალკუთხედი წარმოადგენს 1, 2, 3... წერტილებზე მოქმედ W_1, W_2, W_3, \dots ძალების თოკის მრავალკუთხედს (ნახ. 77).



ნახ. 77.

თუ 0-1-2, ..., n, n+1 მრავალკუთხედს ჩავთვლით $W_1, W_2, \dots, W_n, W_{n+1}$ პარალელური ძალების თოკის მრავალკუთხედად, მაშინ H საპოლუსო მანძილსა, W_n ძალასა და y_n ორდინატებს შორის (რომლებიც მოზომილია ნებისმიერი AB ხაზიდან სათანადო ძალების გასწვრივ) არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება:

$$W_n = H(\varepsilon \alpha_{n-1, n} + \varepsilon \alpha_{n, n+1}) = H \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\lambda_n} - \frac{y_{n+1} - y_n}{\lambda_{n+1}} \right) \quad (35)$$

თუ საპოლუსო მანძილს მივიღებთ ერთეულის ტოლად, მაშინ

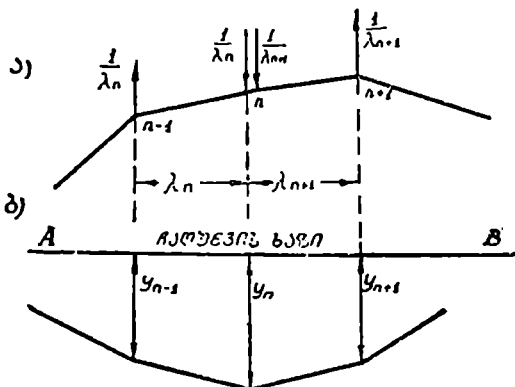
$$W_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{\lambda_n} - \frac{y_{n+1} - y_n}{\lambda_{n+1}}$$

ან

$$W_n = -y_{n-1} \frac{1}{\lambda_n} + y_n \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) - y_{n+1} \frac{1}{\lambda_{n+1}} \dots \quad (36)$$

ჩვენ მივიღეთ ღრუბლი (ფიქტიური) ტვირთის საერთო ფორმულა, სადაც y_{n-1}, y_n, y_{n+1} უცნობი სიდიდეებია. რადგანაც AB ხაზი ნებისმიერია. ამიტომ ჩვენ იგი ისე შეგვიძლია ავირჩიოთ, რომ y_{n-1}, y_n, y_{n+1} ორდინატებმა მოგვეცეს ნამდვილი ჩალუნვის ხაზი (ნახ. 78, ბ).

ამ შემთხვევაში (36) ფორმულის მარჯვენა ნაწილი იქნება $n-1$, n და $n+1$ წერტილებზე მოქმედი ოთხი ძალის (ორი $\pm \frac{1}{\lambda_n}$ და ორი $\pm \frac{1}{\lambda_{n+1}}$, რომლებიც ქმნიან ორ ერთეულ წყვილძალას), ვირტუალური მუშაობა ნაშენის კვანძების ნამდვილ გადაადგილებებზე (ნახ. 78, ა). მაგრამ გარე ერთეული



ნახ. 78.

წყვილი ძალების ვირტუალური მუშაობა შეიძლება შეიცვალოს მისგან გამოწვეული შიგა ძალების ვირტუალური მუშაობით მოცემული დატვირთვით განვითარებულ შიგა გადაადგილებებზე, უკანასკნელი სიდიდეები გამოისახება ფორმულებით:

$$\Delta \varphi_p = \frac{M_p ds}{EI};$$

$$\Delta \gamma_p = \frac{N_p ds}{EF};$$

$$\Delta y_p = \frac{k Q_p ds}{GF}$$

ორი ერთეული წყვილძალით გამოწვეული შიგა ძალები აღენიშნოთ M_λ , N_λ და Q_λ . მორის ფორმულის (23) საფუძველზე მივიღებთ:

$$W_n = \sum \left(\int \frac{M_\lambda M_p ds}{EI} + \int \frac{N_\lambda N_p ds}{EF} + k \int \frac{Q_\lambda Q_p ds}{GF} \right). \quad (37)$$

ეს არის დრეკადი ტვირთის უნივერსალური ფორმულა, რომელიც გამოსახულია შიგა ძალებით.

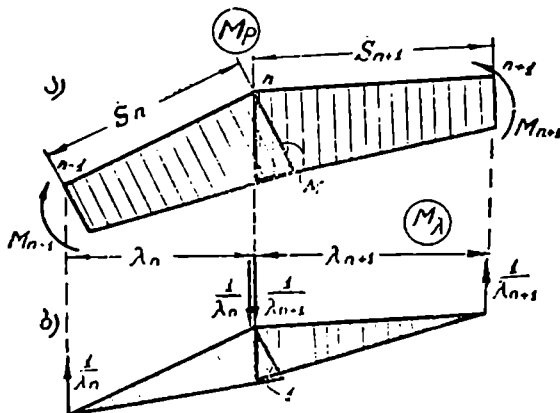
კიდევ ერთხელ აღენიშნოთ, რომ ამ ფორმულაში M_λ , N_λ , Q_λ წარმოადგენენ ორი ერთეული წყვილძალით გამოწვეულ მღუნავ მომენტს, გრძივ და განივ ძალას; M_p , N_p და Q_p კი მოცემული დატვირთვით გამოწვეულ მომენტს, გრძივ და განივ ძალას.

როგორც ვხედავთ, (37) ფორმულა არის მორის ფორმულა, სადაც ერთეული ძალის მდომარეობად მიღებულია ორი ერთეული მომენტი, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ დრეკადი ტვირთი წარმოადგენს ორი მეზობელი მონაკვეთის მობრუნების კუთხეს, გამოწვეულს მოქმედი დატვირთვით. კოქებისა და ჩარჩოების და აგრეთვე თალების ანგარიშის დროს განივი და გრძივი ძალების გავლენას მხედველობაში არ იღებენ და დრეკადი ტვირთების სიდიდეს ანგარიშობენ მხოლოდ პირველი წვერის საშუალებით

$$W_n = \sum \int \frac{M_\lambda M_p ds}{EI} \dots \quad (37')$$

დრეკადი ტვირთის უნივერსალური ფორმულა მთლიანი კვეთის მქონე სისტემებისათვის (კოქები, ჩარჩოები, თალები) მიიღებს მარტივ სახეს.

წარმოვიდგინოთ, რომ მოცემული სისტემა დაყოფილია მცირე ნაწილებად, რომლებიც შეგვიძლია ჩავთვალოთ სწორ მონაკვეთებად. ადვილად შევამჩნევთ, რომ შორის ინტეგრალი გავრცელდება n კვანძის მხოლოდ ორ მეზობელ ელემენტზე. სისტემიდან გამოვყოთ ორი ასეთი ელემენტი და განვიხილოთ მისი ორი მდგომარეობა: მოცემული დატვირთვის (ნახ. 79, ა) და ორი ერთეული წყვილძალის (ნახ. 79, ბ). ორივე შემთხვევაში მღუნავი მომენტის ეპიურა აგებულია გაკვიმული ბოკოების მხარეს. დავუშვათ, რომ განსახილავ ელემენტებზე ეპიურები სწორხაზოვანია და სიხისტე მუდმივი.



ნახ. 79.

M_p და M_x ეპიურების კომბინაცია ვერეშჩაგინის წესით მოგვცემს დრეკადი ტვირთის სიდიდეს n კვანძისათვის

$$W'_n = \frac{S_n}{6EI_n} (2M_n + M_{n-1}) + \frac{S_{n+1}}{6EI_{n+1}} (2M_n + M_{n+1}). \quad (38)$$

ეს არის დრეკადი ტვირთის გაშლილი ფორმა მთლიანი კვეთის მქონე სისტემებისათვის გრძივი ძალის გავლენის გარეშე.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ (38) ფორმულით მიღებული დრეკადი ტვირთის სიდიდე არ იცვლება, თუ ჩვენ ვეძებთ გადაადგილებას არა ვერტიკალური, არამედ სხვა რომელიმე მიმართულებით. ამ შემთხვევაში შეიცვლება მხოლოდ დრეკადი ტვირთების მიმართულება.

(39) ფორმულა საშუალებას იძლევა, სრულებით მარტივად, ყოველგვარი დამატებითი ერთეული მდგომარეობის გარეშე, გამოვთვალოთ დრეკადი ტვირთის სიდიდე.

თუ $n-1$, n , $n+1$ წერტილები ერთმანეთთან უსასრულოდ ახლოს იმყოფება, მაშინ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ

$$M_{n-1} = M_n = M_{n+1} = M, \quad S_n = S_{n+1} = ds$$

და დრეკადი ტვირთის ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$W_n = \frac{Mds}{EI}.$$

ამით ჩვენ მივიღეთ დეფორმაციის განსაზღვრის ცნობილი გრაფიკული-ზურის მეთოდი, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ წლუნავი მომენტის ეპიურა უნდა მივიღოთ ფიქტიურ დატვირთვად და შემდეგ ხელახლა ავაგოთ მლუნავი მომენტის ეპიურა. ამ უკანასკნელის ორდინატები გაყოფილი EI -ზე, მოგვცემს ჩალუნვის მრუდს.

დრეკადი ტვირთის საშუალებით ჩალუნვის ხაზის აგების მსვლელობა იქნება შემდეგი:

1. ნაშენს დაეყოფთ რამდენიმე სწორ ელემენტად და გამოვთვლით მოცემული დატვირთვით გამოწვეული მლუნავი მომენტის ეპიურის ორდინატებს კვანძებში.

2. (38) ფორმულის საშუალებით გამოვთვლით დრეკადი ტვირთის სიდიდეს თითოეული კვანძისათვის;

3. მიღებულ ძალებს ეამოქმედებთ პირობით ნაშენზე და ავაგებთ გრაფიკულად თოკის მრავალკუთხედს ან ანალიზურად მლუნავი მომენტის ეპიურას, რომლებიც იქნება საძიებელი ჩალუნვის ეპიურა.

თუ ტვირთით გამოწვეული ეპიურა აგებულია გაკიშული ბოქკოების მხარეს, მაშინ, ჩალუნვის ნამდვილი მიმართულების მისაღებად, დრეკადი ტვირთი მშობრთული უნდა იყოს ამ ეპიურის მხარეს. ორნიშნა ეპიურის შემთხვევაში დრეკადი ტვირთი აიღება იმ ორდინატის მიმართულებით, რომელიც უფრო მეტ გავლენას ახდენს მის სიდიდეზე.

ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ დრეკადი ტვირთებით უნდა ვიმოქმედოთ პირობით ნაშენზე, რომლის არჩევა ჩვენს ნება-სურვილზე არ არის დამოკიდებული, რადგან მან უნდა უზრუნველჰყოს ჩალუნვის ხაზის სისწორე.

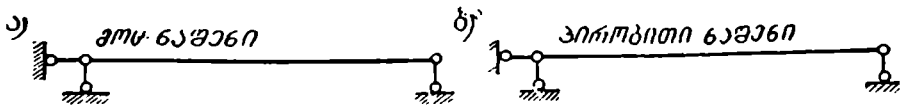
პირობითი ნაშენი ისე უნდა იყოს არჩეული, რომ, თუ ნამდვილი ნაშენის რომელიმე წერტილის გადაადგილება ტოლია ნულის, მაშინ დრეკადი ტვირთებით გამოწვეული მომენტიც პირობითი ნაშენის იმავე წერტილში ტოლი უნდა იყოს ნულის და, პირიქით, თუ ჩალუნვა არ არის ნულის ტოლი, მაშინ ფიქტიური მომენტიც არ უნდა იყოს ნულის ტოლი.

ანალოგიურად, თუ ნამდვილი ნაშენის რომელიმე წერტილში მობრუნების კუთხეს არა აქვს ადგილი, მაშინ პირობით ნაშენში დრეკადი ტვირთებით გამოწვეული განივი ძალა იმავე წერტილში ტოლი უნდა იყოს ნულის და, პირიქით, თუ აქვს ადგილი, ფიქტიური განივი ძალა არ უნდა იყოს ნულის ტოლი.

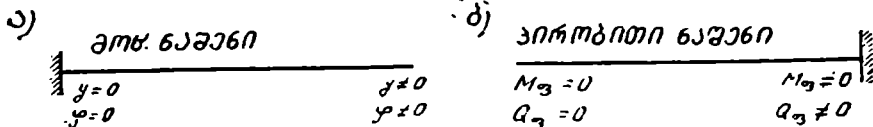
განვიხილოთ მაგალითად, ორ საყრდენზე მდებარე მარტივი კოკი (ნახ. 80, ა). საყრდენებზე ჩალუნვა ნულის ტოლია, მობრუნების კუთხე კი არ არის ნულის ტოლი, ამიტომ პირობითი ნაშენის საყრდენები ისე უნდა ავირჩიოთ, რომ მომენტი ნულის ტოლი იყოს, ხოლო განივი ძალა კი ნულისაგან განსხვავდებოდეს. ამას მივიღებთ, თუ საყრდენებს დავტოვებთ უცვლელად

(ნახ. 88, ბ). კონსოლური კოქის (ნახ. 81) და ორივე ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებული კოქის (ნახ. 82) პირობითი სქემები ნაჩვენებია ნახაზზე.

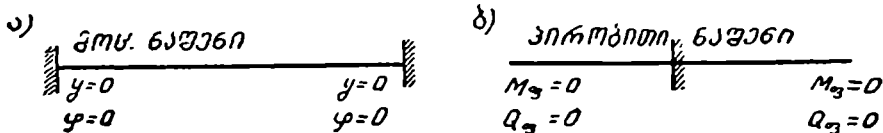
პირობითი კოქის საყრდენების არჩევასთან ერთად უნდა ავირჩიოთ მისი მდებარეობა. პირობითი ნაშენი უნდა იყოს საძიებელი გადაადგილების



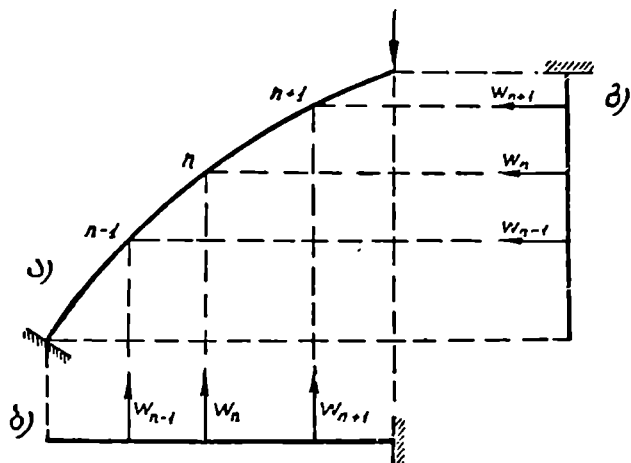
ნახ. 80.



ნახ. 81.



ნახ. 82.



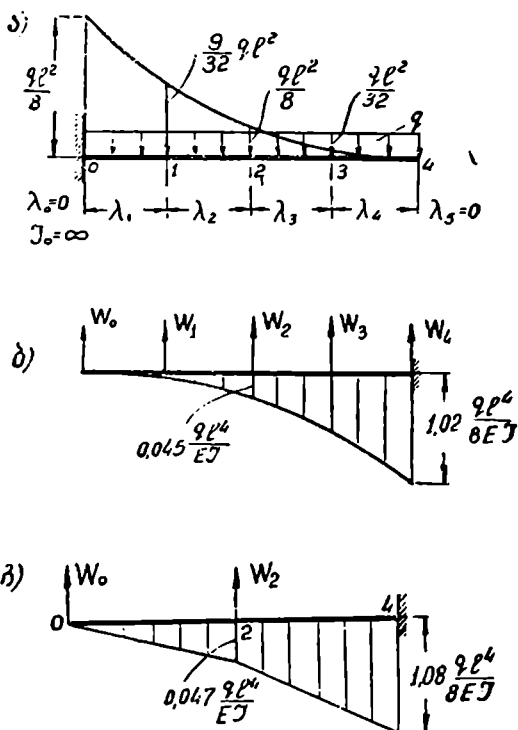
ნახ. 83.

მართობი და მოცემული ნაშენის პროექცია. დრეკადი ტვირთები უნდა მოქმედებდნენ პირობით ნაშენზე მართობად.

მაგალითად, კონსოლის შემთხვევაში (ნახ. 83, ა) ვერტიკალური გადაადგილების საპოვნელად პირობითი კოქი უნდა იყოს ჰორიზონტალური (ნახ. 83, ბ), ხოლო ჰორიზონტალური გადაადგილების საპოვნელად კი ვერტიკალური (ნახ. 83, გ).

შავალთი. კონსოლურ კოჭზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტერითი ინტენსივობით q (ნახ. 84). ავაგოთ ჩალუნვის ხაზი.

გადაწყვეტა. კოჭი დაეყოთ ოთხ თანასწორ ნაწილად. მღუნავი მომენტის ეპიურა ავაგოთ გავიმული ბოქკოების მხარეს და გამოვთვალოთ ორდინატები დანაყოფებში (ნახ. 84, ა).



ნახ. 84.

(38) ფორმულის საფუძველზე მივიღებთ:

$$W_0 = \frac{\lambda_0}{6El_0} (2M_0 + M_{-1}) + \frac{\lambda_1}{6El} (2M_0 + M_1) = \frac{\lambda_0}{\infty} (2M_0 + M_{-1}) + \frac{l}{24El} \left(2 \frac{ql^3}{2} + \frac{9}{32} ql^3 \right) = \frac{41}{768} \frac{ql^3}{El};$$

$$W_1 = \frac{\lambda_1}{6El} (2M_1 + M_0) + \frac{\lambda_2}{6El} (2M_1 + M_2) = \frac{l}{24El} \left(2 \frac{9}{32} ql^3 + \frac{ql^3}{2} \right) + \frac{l}{24El} \left(2 \frac{9}{32} ql^3 + \frac{ql^3}{8} \right) = \frac{7}{96} \frac{ql^3}{El};$$

$$W_2 = \frac{\lambda_2}{6 EI} (2M_2 + M_1) + \frac{\lambda_3}{6 EI} (2M_2 + M_3) = \frac{l}{24 EI} \left(2 \frac{ql^2}{8} + \frac{9}{32} ql^2 \right) + \frac{l}{24 EI} \left(2 \frac{ql^2}{8} + \frac{ql^2}{32} \right) = \frac{26ql^3}{768 EI}$$

$$W_3 = \frac{\lambda_3}{6 EI} (2M_3 + M_2) + \frac{\lambda_4}{6 EI} (2M_3 + M_4) = \frac{l}{24 EI} \left(2 \frac{ql^2}{32} + \frac{q^2}{8} \right) + \frac{l}{24 EI} \left(\frac{ql^2}{16} + 0 \right) = \frac{ql^3}{96 EI}$$

$$W_4 = \frac{\lambda_4}{6 EI} (2M_4 + M_3) + \frac{\lambda_5}{6 EI} (2M_4 + M_5) = \frac{l}{24 EI} \left(0 + \frac{ql^2}{32} \right) + 0 = \frac{ql^3}{768 EI}$$

ავირჩიოთ პირობითი კოეფიციენტები და ვიმოქმედოთ დრეკადი ტვირთებით სათანადო წერტილებში ნამდვილი ეპიურის მხარეს (ნახ. 84, ბ). ფიქტიური მღუპნავი მომენტის სიდიდე 1, 2, 3 და 4 წერტილებში იქნება:

$$M_1 = W_0 \frac{l}{4} = \frac{41}{3072} \frac{ql^4}{EI}$$

$$M_2 = M_1 + (W_0 + W_1) \frac{l}{4} = \frac{138}{3072} \frac{ql^4}{EI} = 0,045 \frac{ql^4}{EI}$$

$$M_3 = M_2 + (W_0 + W_1 + W_2) \frac{l}{4} = \frac{261}{3072} \frac{ql^4}{EI}$$

$$M_4 = M_3 + (W_0 + W_1 + W_2 + W_3) \frac{l}{4} = \frac{392}{3072} \frac{ql^4}{EI} = 1,02 \frac{ql^4}{8 EI}$$

84, ბ ნახაზზე მოყვანილი ეპიურა წარმოადგენს მოცემული ტვირთით გამოწვეული ჩალუნვის ეპიურას. რაც უფრო მცირე მონაკვეთებადაა დაყოფილი ნაშენი, მით უფრო ზუსტია ანგარიში. იმავე ამოცანის გადასაწყვეტად კოეფიციენტთა ორ ნაწილად (ნახ. 84, გ), მივიღებთ:

$$W_0 = \frac{l}{12 EI} \left(2 \frac{ql^2}{2} + \frac{ql^2}{8} \right) = \frac{3}{32} \frac{ql^2}{EI}$$

$$W_2 = \frac{l}{12 EI} \left(2 \frac{ql^2}{8} + \frac{ql^2}{2} \right) + \frac{l}{12 EI} \left(2 \frac{ql^2}{8} + 0 \right) = \frac{ql^2}{12 EI}$$

ფიქტიური მომენტები

$$M_2 = W_0 \frac{l}{2} = \frac{3}{64} \frac{ql^4}{EI} = 0,047 \frac{ql^4}{EI}$$

$$W_1 = W_0 l + W_2 \frac{l}{2} = \frac{3}{32} \frac{ql^4}{EI} + \frac{ql^4}{24 EI} = \frac{13}{12} \frac{ql^4}{8 EI} = 1,08 \frac{ql^4}{8 EI}$$

ზუსტი ანგარიშით ჩალუნვის სიდიდე კონსოლის ბოლოს ტოლია $\frac{ql^4}{8 EI}$. მასთანავე, პირველ შემთხვევაში შედეგი უფრო ზუსტია, ვიდრე მეორეში.

თუ ნამდვილი მღუპნავი მომენტის ეპიურა წრფეა, მაშინ გადაადგილებათა სიდიდე კვანძებში მიიღება ზუსტად.

§ 21. ბაღალაღვილებათა განსაზღვრა ფარგლებში ღრმადი ტვირთების საშუალებით

ღრეკადი ტვირთების საანგარიშო უნივერსალური (37) ფორმულა ფერმებისათვის მიიღებს შემდეგ სახეს

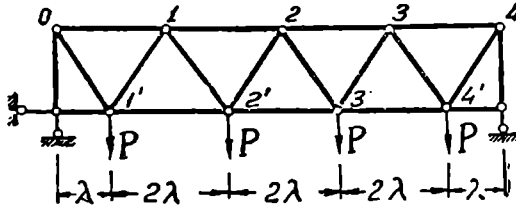
$$W_n = \sum \frac{N_\lambda N_p S}{EF} = \sum N_\lambda \Delta S_p, \quad (39)$$

სადაც N_λ არის ორი ერთეული წყვილძალით გამოწვეული ძალეა ფერმის რომელიმე ღეროში (წყვილი ძალები მოდებულია n კვანძის მეზობელ ღეროებზე),

N_p მოცემული დატვირთვით გამოწვეული ძალეა იმავე ღეროში, ხოლო

$$\Delta S_p = \frac{N_p S}{EF} \text{ კი მოცემუ-$$

ლი დატვირთვით გამოწვეული წაგრძელება იმავე ღეროში.



ნახ. 85.

ფერმის იმ სარტყელის კვანძებისათვის უნდა იყოს გამოთვლილი, რომლის

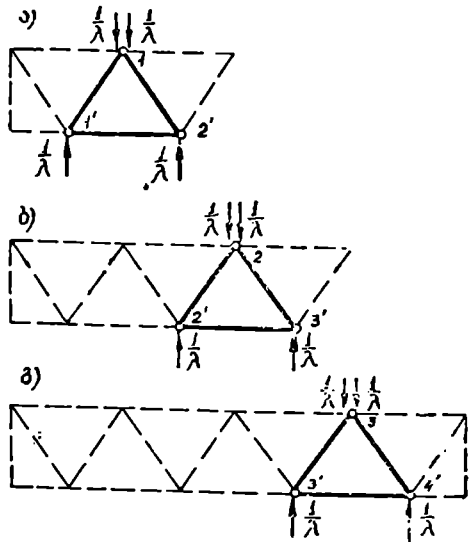
(სარტყლის) ჩაღუნვის ხაზიც გვინტერესებს. ფერმის ანგარიშის მსულებლობა ღრეკადი ტვირთების საშუალებით გავარჩიოთ კონკრეტულ მაგალითზე.

ავაგოთ მოცემული ფერმის (ნახ. 85) ზედა სარტყლის ჩაღუნვის ხაზი. ამისათვის მოვიქცეთ შემდეგი თანმიმდევრობით:

1) ღრეკად ტვირთებს ვანგარიშობთ იმ კვანძებისათვის, რომლებიც ჩაღუნვის ხაზს ქმნის (1, 2, 3). ამისათვის, რიგრიგობით, თითოეული კვანძის მეზობელ ღეროებზე ვიმოქმედებთ ერთეული წყვილძალებით და ვსაზღვრავთ ძალებს ფერმის ღეროებში (N_λ).

მაგალითად, W_1 -ის გამოსასვლელად მოდებული ორი ერთეული წყვილძალი ნაჩვენებია 86, ა ნახაზზე. ამ შემთხვევაში მუშაობს მხოლოდ მთლიანი ხაზებით აღნიშნული ღეროები. W_2 და W_3 -ის გამოსათვლელად ვიქცევით ანალოგიურად (ნახ. 86, ბ, გ.).

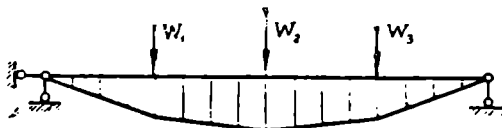
2) ვანგარიშობთ მოცემული დატვირთვით გამოწვეულ ძალებს ფერმის ღეროში (N_p).



ნახ. 86.

3) მიღებული ძალები $N\lambda$, N_p შეგვიქვს (39) ფორმულაში და ვანგარიშობთ დრეკადი ტვირთის სიდიდეს ყველა კვანძისათვის.

4. ვირჩევთ პირობით ნაშენს და მასზე ვიმოქმედებთ დრეკადი ტვირთებით (ნახ. 87); თუ დრეკადი ტვირთები დადებითია, მაშინ მათ მიეზარათავე წყვილძალების შუა ძალის მიმართულებით და თუ უარყოფითი—მის საწინააღმდეგო მიმართულებით.



ნახ. 87.

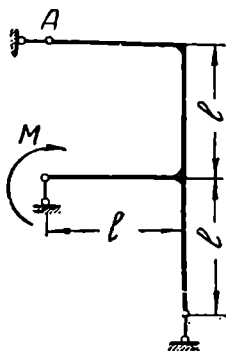
5. ვაგებთ დრეკადი ტვირთებით გამოწვეულ მლუნავი მომენტის (ფიქტიურ) ეპიურასს, რომელიც იქნება საძიებელი ჩალუნვის ხაზი.

რას, რომელიც იქნება საძიებელი ჩალუნვის ხაზი.

თუ ეს ეპიურა აგებულია გაკეცილი ბოქვების მხარეს, მაშინ ის დაემთხვევა ნამდვილი გადაადგილების მიმართულებას. გამარტივების მიზნით მთელი რიგი სტანდარტული გისოსებიათვის წინასწარ არის შესრულებული სპეციალური გამოთვლები და მიღებულია დრეკადი ტვირთის განოსათვლელი ფორმულები, რომლებიც მოყვანილია სამშენებლო მექანიკის ძირითად სახელმძღვანელოებში.

§ 22. სავარჯიშო მაგალითები გადაადგილებათა განსაზღვრავაში

1. განესაზღვროთ A წერტილის ვერტიკალური გადაადგილება (ნახ. 88). $EI = \text{const.}$

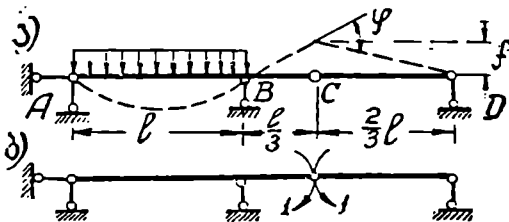


ნახ. 88.

პასუხი:

$$\Delta_{1p} = -\frac{Ml^3}{6EI}$$

2. განესაზღვროთ C სახსრის ვერტიკალური გადაადგილება და ABC და CD ღეროს ურთიერთ მობრუნების კუთხე (ნახ. 89).



ნახ. 89.

მითითება: φ კუთხის შესაბამისი განზოგადებული ერთეული ძალა იქნება ორი ერთეული მომენტი (ნახ. 89, ბ).

პასუხი:

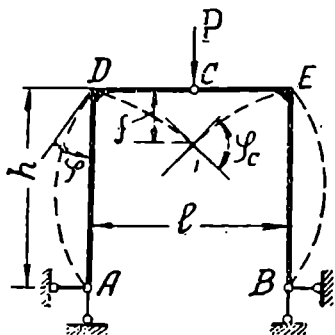
$$f = -\frac{ql^4}{72EI}$$

$$\varphi = -\frac{ql^3}{17EI}$$

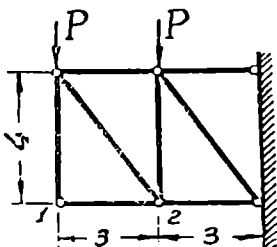
3. განესაზღვროთ სამსახსრიანი ჩარჩოს C სახსრის ვერტიკალური გადაადგილება და D კვანძის მობრუნების კუთხე, გამოწვეული C წერტილზე მოქმედი ვერტიკალური ძალით (ნახ. 90). $EI = \text{const.}$

პასუხი:

$$f = \frac{Pl^2}{96 EI} (l + 4h); \quad \varphi = \frac{Plh}{12 EI}$$



ნახ. 90.



ნახ. 91.

4. ვიპოვოთ იმავე სამსახსრიანი ჩარჩოს C კვეთის მობრუნების კუთხე φ_c .

პასუხი:

$$\varphi_c = \frac{Pl}{12 EI} (4h + 3l)$$

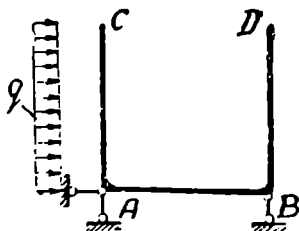
5. ვიპოვოთ ფერმის ქვედა სარტყლის ჩაღუნვის ხაზი (ნახ. 91). $EF = \text{const.}$

პასუხი:

$$\delta_1 = \frac{655}{16 EF} P;$$

$$\delta_2 = \frac{395}{16 EF} P.$$

6. ვიპოვოთ C და D წერტილების ურთიერთ დაახლოება, გამოწვეული პორიზონტალურად მოქმედი თანაბრად განაწილებული ტვირთით (ნახ. 92).



ნახ. 92.

პასუხი:

$$\Delta = \frac{qh^3}{8EI} (h + 2l)$$

7. განესაზღვროთ B წერტილის პორიზონტალური გადაადგილება შემდეგი ორი შემთხვევისათვის (ნახ. 93):

1) $t_1 = -20^\circ, t_2 = 20^\circ;$

2) $t_1 = -20^\circ, t_2 = 10^\circ.$

პასუხი:

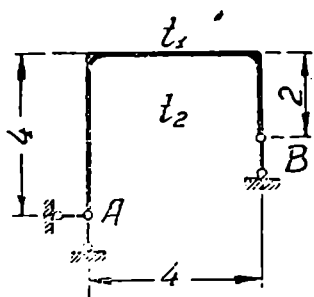
$$\Delta_{1t} = -\frac{880 \alpha}{d};$$

$$\Delta_{2t} = -25\alpha - \frac{330}{d} \alpha.$$

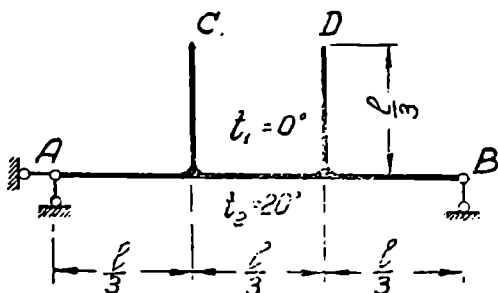
8. განესაზღვროთ C და D წერტილის ურთიერთ დაახლოება კოქის ქვედა ბოქკოების გახურებით გამოწვეული (ნახ. 94).

პასუხი:

$$\Delta_i = -\frac{10\alpha a}{3} + \frac{20\beta^2}{9d}$$



ნახ. 93.



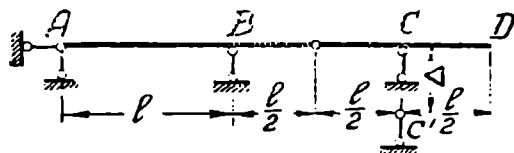
ნახ. 94.

9. განესაზღვროთ D კვების ვერტიკალური გადაადგილება და მობრუნების კუთხე C საყრდენის ვერტიკალური დაჯდომით გამოწვეული (ნახ. 95).

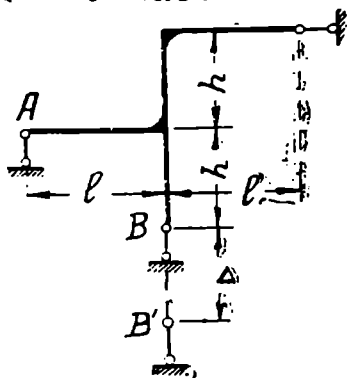
პასუხი:

$$f = 2\Delta;$$

$$\varphi = \frac{2\Delta}{l}$$



ნახ. 95.



ნახ. 96.

10. განესაზღვროთ A კვების მობრუნების კუთხე B საყრდენის ვერტიკალური გადაადგილებით გამოწვეული (ნახ. 96).

პასუხი:

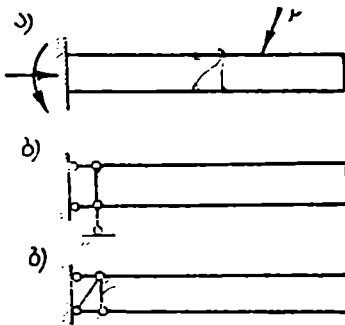
$$\varphi = \frac{\Delta}{l}$$

საერთო ცნობები სტატიკურად ურკვევი სისტემების შესახებ

§ 23. სტატიკური ურკვევობა და მისი ხარისხი, ზედმეტი უცნობები

საინჟინრო ნაშენმა, რომ შეასრულოს თავისი დანიშნულება, ე. ი. იყოს გეომეტრიულად უცვლელი და უმოძრაო, საკმარისია, რომ ის მიმაგრებული იყოს მიწაზე ან სხვა რაიმე უცვლელ სისტემაზე სამი ღეროს საშუალებით (იხ. 1 ნაწილი § 10), რომლებიც ნაშენს მოუსაბობს სამივე თავისუფლების ხარისხს.

ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებული ძელი (ნახ. 97), წარმოადგენს გეომეტრიულად უცვლელ სისტემას, რადგან ხისტი ჩამაგრება სამი საყრდენი ბმის ეკვივალენტურია (ნახ. 97, ბ, გ).



ნახ. 97.

ნებისმიერი მთლიანი ძელი ჩვენ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ უძრავი ელემენტებისაგან შედგეხილ სხეულად, სადაც ელემენტები ერთმანეთთან დაკავშირებულია სამი შინაგანი ღეროს საშუალებით (ნახ. 98). ეს ღეროები სავსებით უზრუნველყოფენ ერთი ელემენტის უძრაობას მეორის მიმართ.

I—I კვეთის გატარებით გადაიკვეთება სამი ღერო და დაირღვევა კავშირი მე-3 და მე-4 ელემენტებს შორის. მაშასადამე, მთლიანი ღეროს გაკვეთით ისპობა სამი შინაგანი ბმა.

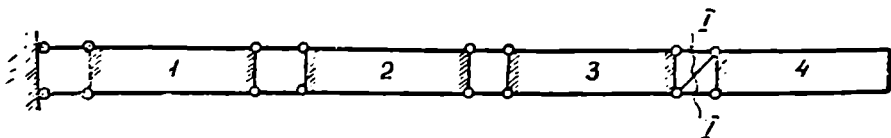
სამ ღეროს, რომელიც უზრუნველყოფს სისტემის გეომეტრიულ უცვლელობას, უწოდებენ აუცილებელ ღეროებს. თუ სისტემას აქვს მხოლოდ აუცილებელი ღეროები, მაშინ ის წარმოადგენს სტატიკურად რკვევად სისტემას, რადგან სამ ღეროს შეესაბამება სამი უცნობი, რომლებიც განისაზღვრება წონასწორობის სამი განტოლების საშუალებით.

98-ე ნახაზზე ნაჩვენებია სისტემა, რომელიც სტატიკურად რკვევადია, რადგან მთლიანი ელემენტი სამი ღეროთია მიმაგრებული. ნაშენი მიწასთან ან სხვა რაიმე უცვლელ სისტემასთან შეიძლება მიმაგრებული იყოს სამზე მეტი ღეროთი. ამ დამატებითი ღეროებს ეწოდება ზედმეტი ღეროები. ზედმეტი ღეროები კი არ არღვევს სისტემის გეომეტრიულ უცვლელობას, არამედ, პირიქით, მას აძლევს უფრო მეტ სიხისტეს, ე. ი. ამცირებს სისტემის დრეკად დეფორმაციებს და ამავე დროს სისტემას აქცევს სტატიკურად ურკვევად.

სტატიკურად ურკვევი სისტემები ისეთი სისტემებია, რომელთა ანგარიში მხოლოდ მყარი ტანის წონასწორობის

განტოლებებით შეუძლებელია, რადგან აქ უცნობი ძალების რიცხვი აღემატება წონასწორობის განტოლებათა რიცხვს.

ამის მიზეზი, როგორც ეს ზემოთ აღვნიშნეთ, შეიძლება იყოს სისტემის მიწასთან მიმაგრება ე. წ. ზედმეტი ღეროების საშუალებით, ან თვით სისტემის ელემენტების ურთიერთ შეერთების ხასიათი.

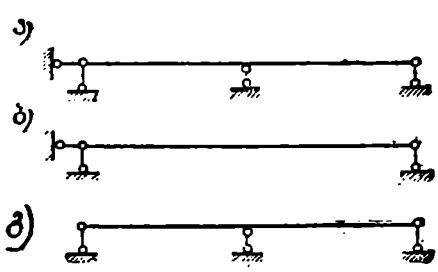


ნახ. 98.

ტერმინი „ზედმეტი ღეროება“ (ბმები) პირობითია და იმას კი არ ნიშნავს, რომ თითქოს ისინი საჭირო არ არის. ეს ტერმინი წარმოდგება იქიდან, რომ ისინი ნაშენის გეომეტრიული უცვლელობის უზრუნველყოფისათვის ზედმეტია და მათი მოშორებით ნაშენის უცვლელობა არ დაირღვევა.

კონსტრუქციის სიმტკიცისათვის ეს ღეროები საჭიროა და ამიტომ უნჯობესი იქნებოდა, თუ მათ დავარქმევდით ჰარბ ღეროებს.

ორმალიანი უკრი კოკი (ნახ. 99), რომელსაც აქვს ერთი ზედმეტი ღერო, წარმოადგენს სტატიკურად ურკვევ სისტემას; შუალედი ღეროს მოშორებით კოკი დარჩება გეომეტრიულად უცვლელი (ნახ. 99, ბ). მაშასადამე, თუ სტატიკურად ურკვევ სისტემას მოვაშორებთ ზედმეტ ბმებს, მისი გეომეტრიული უცვლელობა და უძრაობა არ დაირღვევა. ზედმეტ ღეროებში განვითარებულ ძალებს ზედმეტი უცნობები ეწოდება.



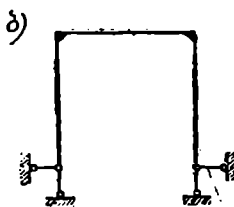
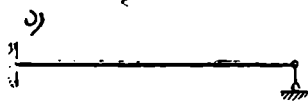
ნახ. 99.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ ზედმეტ ღეროდ ნებისმიერი ღეროს მიჩნევა არ შეიძლება. მაგალითად, თუ ზედმეტ ღეროდ ჩავთვლით ჰორიზონტალურ საყრდენ ღეროს და უკუვაგდებთ მას, მივიღებთ მოძრავ სისტემას (ნახ. 99, გ). იმ ზედმეტ ბმებს, რომელთა უკუგდებაც სისტემას გეომეტრიულად ცვლად ან მოძრავად ხდის აუცილებლად საჭირო ბმები ეწოდება. რაც შეეხება ვერტიკალურ ბმებს, მათი ცალ-ცალკე მოშორება არ დაარღვევს სისტემის უცვლელობას და ამიტომ მათ პირობით აუცილებელი ბმები ეწოდებათ.

მოცემული სტატიკურად ურკვევი სისტემა რომ ვაქციოთ სტატიკურად რკვევად, საჭიროა უკუვაგდოთ ყველა ზედმეტი ღერო. ზედმეტი ღეროების რიცხვს, რომელთა მოშორებითაც სისტემა გადაიქცევა სტატიკურად რკვევად, სტატიკური ურკვევობის ხარისხი ეწოდება.

სტატიკური ურკვევობის ხარისხი გვიჩვენებს თუ რამდენი დამატებითი განტოლება უნდა იყოს შედგენილი სისტემის საანგარიშოდ. ზედმეტი ბმების რიცხვი ყოველთვის ტოლია ზედმეტ უცნობთა რიცხვის და ამიტომ სტატიკური ურკვევობის ხარისხი ჩვენ შეგვიძლია გავიგოთ ორნაირად: ზედმეტი უცნობების ან ზედმეტი ბმების დათვლით.

ერთმალთან კოქს (ნახ. 100, ა) და ორსახსრიან ჩარჩოს (ნახ. 100, ბ) აქვთ ოთხ-ოთხი საყრდენი ღერო და, მაშასადამე, თითო ზედმეტი ღერო და-

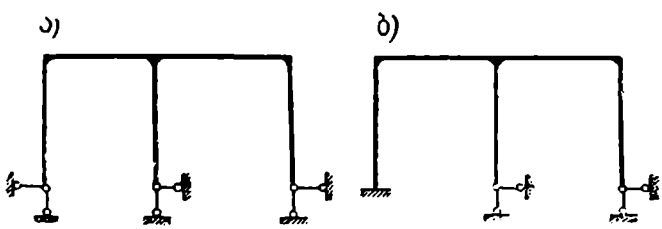


ნახ. 100.

სათანადოდ თითო ზედმეტი უცნობი. ისინი ერთჯერ სტატიკურად ურკვევი სისტემებია. 101, ა ნახაზზე ნაჩვენებ სისტემას აქვს სამი ზედმეტი ღერო, ხოლო 101, ბ ნახაზზე ნაჩვენებ სისტემას კი ოთხი ზედმეტი ღერო. პირველი წარმოადგენს სამჯერ სტატიკურად ურკვევ სისტემას, მეორე კი ოთხჯერ.

ყველა გარჩეულ შემთხვევაში საყრდენი ღეროებია ზედმეტი და ამიტომ მათ ეწოდებათ სტატიკურად ურკვევი სისტემები საყრდენი ღეროების მიმართ ან გარეგანად სტატიკურად ურკვევი სისტემები.

წარმოვიდგინოთ, გვაქვს ჩაკეტილი ჩარჩო, რომელიც მიმაგრებულია მიწასთან სამი ღეროს საშუალებით (ნახ. 102, ა). საყრდენ ღეროებში ძალები განისაზღვრება წონასწორობის სამი განტოლების საშუალებით და, მაშასადამე, საყრდენი დამაგრების შიხედვით სისტემა არის სტატიკურად რკვევადი. მაგ-



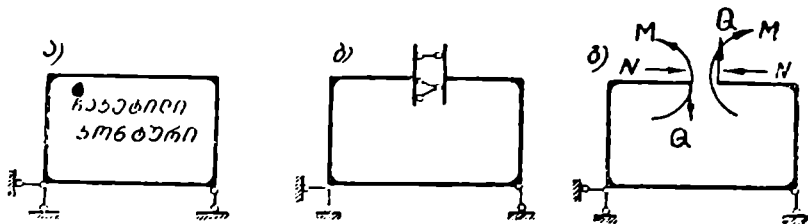
ნახ. 101.

რამ, თუ ჩვენ გვინდა გავიგოთ შინაგანი ძალები ჩაკეტილი კონტურის რომელიმე კვეთში, მაშინ უკვე წონასწორობის განტოლებები აღარ არის საკმარისი. აქ ზედმეტია შინაგანი ღეროები და, ამიტომ ასეთ სისტემებს ეწოდება სტატიკურად ურკვევი სისტემები შინაგანი ბმების მხრივ ან შინაგანად სტატიკურად ურკვევი სისტემები.

თუ გავკვეთათ ჩაკეტილი კონტურის რომელიმე ღეროს, მაშინ ის გადაიქცევა უბრალო კონსოლიან სისტემად. კვეთის გატარებით უკუუვადღეთ სამი შინაგანი ბმა (ნახ. 102, ბ), რომლებიც გადაცემენ ერთი ნაწილიდან მეორეს-

სამი სახის ძალეას—მომენტს, გრძივ და განივ ძალას (ნახ. 102, გ). მაშასადამე, თითოეული ჩაკეტილი კონტური შეიცავს სამ ზედმეტ ღეროს და სათანადოდ სამ ზედმეტ უცნობს.

უმეტეს შემთხვევაში, სტატიკურად ურკვევი სისტემების დაყოფა გარეგანად და შინაგანად ურკვევ სისტემებად პირობითია, რადგან ეს დამოკიდებულია იმაზე, თუ რომელ ბმებს ჩავთვლით ზედმეტად. გარდა ამისა, ანგარიშის თვალსაზრისით არავითარი მნიშვნელობა არ აქვს, სისტემა გარეგანად არის



ნახ. 102.

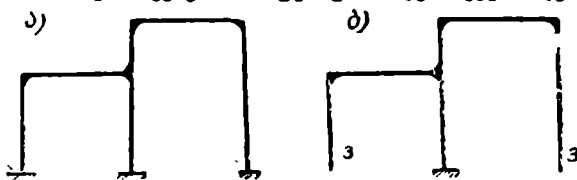
ურკვევი, თუ შინაგანად. ამიტომ, შემდეგში ჩვენ არ მოვახდენთ ასეთ დაყოფას და საერთოდ ლაპარაკი გვქონება სტატიკურად ურკვევ სისტემებზე, მით უმეტეს, რომ ხშირად ადგილი აქვს ურკვევობის ორივე სახეს. მაგალითად, 103-ე ნახაზზე ნაჩვენებია სისტემა ერთჯერ ურკვევია საყრდენი ღეროების მხრივ, ერთჯერ კი—შინაგანი ბმების მხრივ.

სტატიკური ურკვევობის ხარისხის გამოსარკვევად მოცემული სისტემა ვაქციოთ სტატიკურად რკვევადად, ე. ი. მოვაშოროთ ზედმეტი ღეროები. უკუგდებულ ღეროების რიცხვი განსაზღვრავს სტატიკური ურკვევობის ხარისხს.

მაგალითად, 104, ა ნახაზზე მოყვანილი სისტემა რომ ვაქციოთ სტატიკურად რკვევადად, უნდა მოვაშოროთ 6 ზედმეტი ღერო (ნახ. 104, ბ) და მაშასადამე, სისტემა ექვსჯერ სტატიკურად ურკვევია. ექვსჯერ სტატიკურად ურკვევია აგრეთვე 105, ა ნახაზზე ნაჩვენებია სისტემა, რადგან ექვსი ღეროს მოშორე-



ნახ. 103.



ნახ. 104.

ბით ის იქცევა სტატიკურად რკვევადად (ნახ. 105, ბ). საზოგადოდ, თუ სისტემა სტატიკურად ურკვევია მხოლოდ საყრდენი ღეროების მხრივ, მაშინ მისი

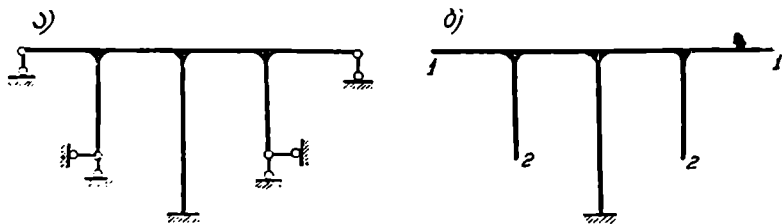
სტატიკური ურკვევობის ხარისხი ან ზედმეტი ღეროების რიცხვი გამოითვლება ფორმულით:

$$M = C_0 - 3,$$

სადაც M — ზედმეტი ღეროების რიცხვია

C_0 — კი საყრდენი ღეროების რიცხვი.

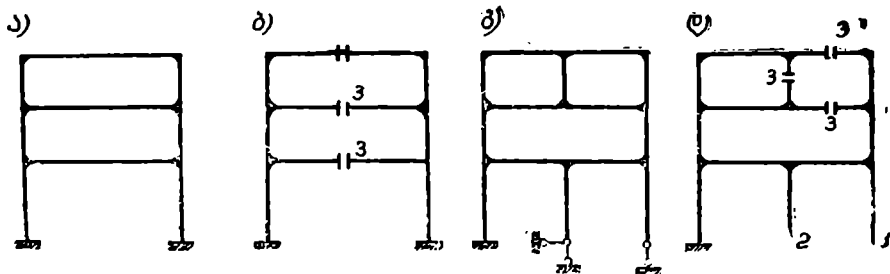
უფრო რთულ შემთხვევებში, როდესაც განსახილავი სისტემა, გარდა ზედმეტი საყრდენი ღეროებისა, შეიცავს ჩაკეტილ უსახსრო კონტურებს, სტატიკური ურკვევობის ხარისხის მისაღებად ზედმეტ საყრდენ ღე-



ნახ. 105.

როების რიცხვს უნდა დავუმატოთ იმ გაკვეთების გასამკვეცებელი რიცხვი, რომლითაც სქემა გადაიქცევა სტატიკურად რკვევად და გეომეტრიულად უცვლელ სისტემად.

მაგალითად, 106, ა ნახაზზე ნაჩვენებია სისტემა რომ ვაქციოთ სტატიკურად რკვევად, საჭიროა სამი კვეთის გატარება (ნახ. 106, ბ) და მათსა-



ნახ. 106.

დამე, სისტემა 9-ჯერ ურკვევია. 106, გ ნახაზზე წარმოდგენილი სისტემა იქცევა სტატიკურად რკვევად, თუ გავატარებთ სამ კვეთს და მოვაშორებთ 3 საყრდენ ღეროს (ნახ. 106, დ). ამგვარად სისტემა 12-ჯერ ურკვევია.

სტატიკური ურკვევობის ხარისხი შეიძლება განისაზღვროს ჩაკეტილი უსახსრო კონტურების და ზედმეტი საყრდენი ღეროების დათვლის საშუალებითაც, შემდეგი ფორმულით...

$$M = 3K + C_0 - 3,$$

სადაც K ჩაკეტილი კონტურების რიცხვია.

მაგალითად, 106, ა სქემის შემთხვევაში $K=2$; $C_0=6$ და მივიღებთ:

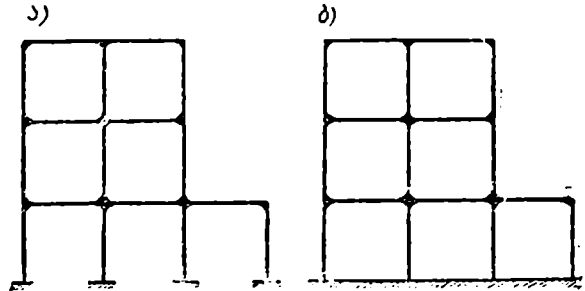
$$J=3 \cdot 2 + 6 - 3 = 9.$$

მეორე შემთხვევაში (ნახ. 106, გ) $K=3$, $C_0=6$ და სტატიკური ურკვეობის ხარისხი

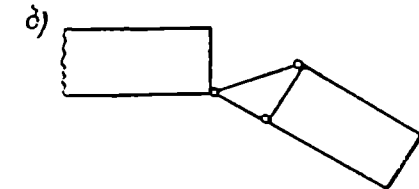
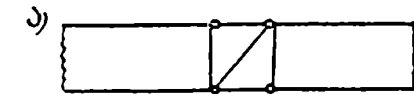
$$J=3 \cdot 3 + 6 - 3 = 12.$$

თუ საყრდენ ღეროებს (ვალკე არ გამოვყოფთ და ჩარჩოს ჩამაგრებას გავერთიანებთ ერთ საძირკველად (ნახ. 107, ბ), მაშინ ჩვენ მივიღებთ 7 ჩაკეტილ კონტურს და სისტემა იქნება $3 \cdot 7 = 21$ -ჯერ სტატიკურად ურკვევი. ჩვენ შეგვხვდება უფრო რთული კომბინირებული სისტემები, სადაც ზოგი ღერო ერთმანეთთან სახსრებით იქნება შეერთებული.

სახსრის მოწყობა, არსებითად ერთი შინაგანი პორიზონტალური ბმის მოშორებას წარმოადგენს (ნახ. 108) და ერთ უცნობს სპობს. მართლაც, ერთი პორიზონტალური ბმის მოშორებით კონსტრუქციის ერთი ნაწილი მეორის მიმართ შეასრულებს ბრუნვით მოძრაობას (ნახ. 108, ბ).



ნახ. 107.



ნახ. 108.

დარჩენილ ბმებს შეუძლიათ გადასცენ მხოლოდ გრძივი და განივი ძალები და არ შეუძლიათ გადასცენ მღუნავი მოძენტი.

ამგვარად, სახსარი სპობს ერთ უცნობს — მღუნავ მომენტს. ორი ღეროს შემაერთებულ სახსარს დეარქვით მარტივი სახსარი.

თუ კვანძში შედის სამი ღერო, მაშინ ერთი ბმის მოშორებით ჩვენ ვერ მივიღებთ სამივე ღეროს ურთიერთ მობრუნებას (ნახ. 109, ა). ასეთ სახსარს ნაწილობრივი სახსარი ეწოდება.

თუ მოვაშორებთ კიდევ ერთ ბმას, მაშინ კვანძში შემავალ სამივე ღეროს მიეცემა ბრუნვის საშუალება (ნახ. 109, ბ). ასეთ სახსარს მთლიანი სახსარი ეწოდება.

ჩვენ ვხედავთ, რომ, როცა კვანძში შედის სამი ღერო, მაშინ მთლიანი სახსრის მისაღებად საჭიროა ორი შინაგანი ბმის უკუგდება, ე. ი. კვანძში შემავალ ღეროების რიცხვზე ერთით ნაკლები.

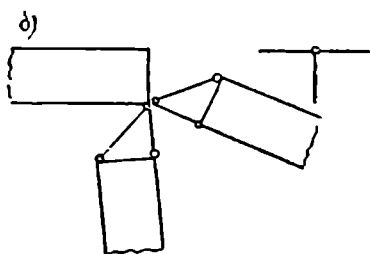
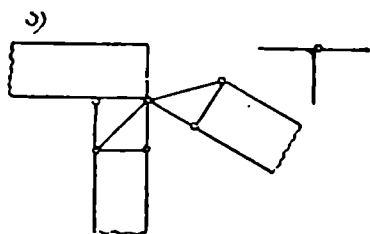
მაშასადამე, n ღეროს შემაერთებელი ძოლიანი სახსარი ეკვივალენტურია $n-1$ უბრალო სახსრის, ან $n-1$ ბმის მოშორების და ის სტატიკურად ურკვევობის ხარისხს $n-1$ -ით აძვირებს.

მაგალითად, ზემოთ განხილული სისტემა (ნახ. 107, ა) 21-ჯერ ურკვევია, 110-ე ნახაზზე მოყვანილი სისტემა კი 21-11=10-ჯერ (ნახაზზე აღნიშნულია უბრალო სახსრების რიცხვი).

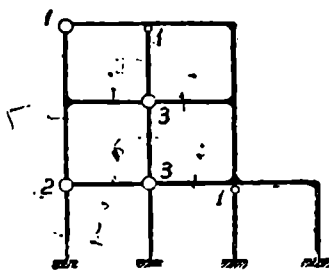
ზემოთ განხილულ მაგალითების საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია დაწვიროთ სტატიკურად ურკვევობის ხარისხის გამოსათვლელი საერთო ფორმულა შემდეგი სახით

$$\Pi = 3K + C_0 - III - 3, \quad (40)$$

სადაც III უბრალო სახსრების რიცხვია.



ნახ. 109.

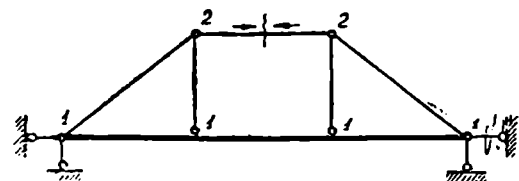


ნახ. 110.

ჩაკეტილი კონტურების რიცხვი K გამოითვლება სახსრების მხედველობაში მიუღებლად.

განვიხილოთ კომბინირებული სისტემა—შპრენგელიანი კოჭი (ნახ. 111). ჩაკეტილ კონტურების რიცხვი $K=3$, უბრალო სახსრების რიცხვი III=8, მე-40 ფორმულით მივიღებთ

$$\Pi = 3 \cdot 3 + 3 - 8 - 3 = 1.$$



ნახ. 111.

112, ა ნახაზზე მოყვანილი შემკოჭიანი ურკვევია. მართლაც $K=5$, III=14 და

$$\Pi = 3 \cdot 5 + 3 - 14 - 3 = 1.$$

იმავე სისტემაში, თუ საკიდებს ავიღებთ დახრილად (დახრილ საკიდე-

ბიანი თალი, ნახ. 112, ბ), სტატიკური ურკვევობის ხარისხი მნიშვნელოვნად გაიზარდება და იქნება ($K=9, \text{III}=22$)

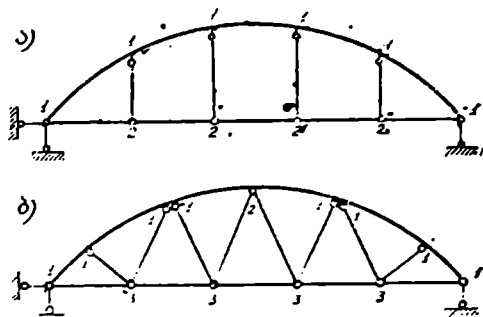
$$\text{II}=3 \cdot 9 + 3 - 22 - 3 = 5.$$

სახსროვანი ფერმისათვის (ნახ. 113) მე-40 ფორმულა მოგვცემს ($K=6, \text{III}=22$) $\text{II}=3 \cdot 8 + 3 - 22 - 3 = 2$, ე. ი. ფერმა ორჯერ ურკვევია.

ფერმებში სტატიკური ურკვევობის ხარისხის გამორკვევა უმჯობესია ვაწარმოოთ შემდეგი მარტივი ფორმულით (იხ. I ნაწილი, § 9).

$$\text{II} = C + C_0 - 2Y. \quad (41)$$

სადაც C ფერმის ღეროების რიცხვია, Y კი კვანძების რიცხვი. წინა მაგალითში $C=15$; $C_0=3$, $Y=8$ და $\text{II}=15 - 2 \cdot 8 = -1$.



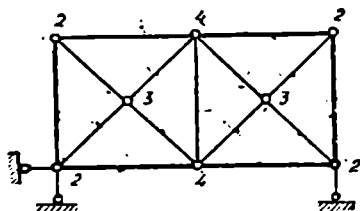
ნახ. 112.

104-ე ნახაზისათვის გვექნება: $C=23$, $C_0=4$, $Y=12$ და $\text{II}=23 - 24 = -1$, ე. ი. ფერმა სამჯერ სტატიკურად ურკვევია. ამას თვალითაც ადვილად შევამჩნევთ, რადგან საკმარისია უკუვადლოთ შუა საყრდენი ღერო და ორი ირიბანი, რომ ფერმა იქცეს სტატიკურად რკვევალად.

ჩვენ შეგვიძლია მოცემული ბრტყელი სისტემის ცალკეული უწყვეტი ნაწილები (ღეროები) დისკობად ჩავთვალოთ და ზედმეტი ღეროების რიცხვი გამოვთვალოთ ფორმულით (იხ. I ნახ. § 8).

$$\text{II} = -W = C_0 + 2\text{III} - 3\text{IV} \quad (42)$$

სადაც C_0 საყრდენი ღეროების რიცხვია, III —დისკოების დამაკავშირებელი უბრალო (დაყვანილი) სახსრების რიცხვი, IV კი დისკოების რიცხვი. (42) ფორმულა გამოდგება მაშინ, თუ ცალკეული კონტური ზედმეტ ღეროს არ შეიცავს.



ნახ. 113.

მაგალითად, 110-ე ნახაზზე მოყვანილი სისტემისათვის გვექნება $\text{II}=8$, $\text{III}=11$, $C_0=12$ და

$$\text{II}=12 + 2 \cdot 11 - 3 \cdot 8 = 10.$$

შპრენგელიანი კოქის შემთხვევაში (ნახ. 111) $\text{IV}=6$, $\text{III}=8$, $C_0=3$ და $\text{II}=3 + 2 \cdot 8 - 3 \cdot 6 = 1$.

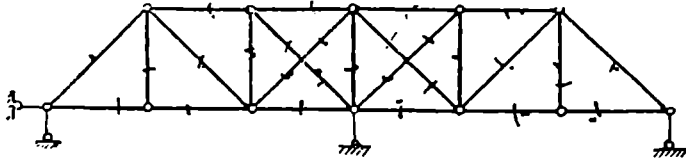
გავარჩიოთ ფერმა (ნახ. 113). $\text{IV}=15$, $C_0=3$, $\text{III}=22$ და

$$\text{II}=3 + 2 \cdot 22 - 3 \cdot 15 = 2.$$

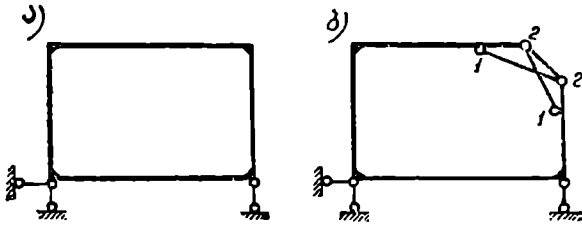
(42) ფორმულა შეიძლება გამოვიყენოთ ჩაკეტილი უსახსრო კონტურის შესასწავლად, თუ მას წარმოვიდგენთ ისე, როგორც ნაჩვენებია 115, ბ ნახაზზე. $\text{IV}=4$, $C_0=3$, $\text{III}=6$ და

$$\text{II}=3 + 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 3.$$

ანგვარად, ერთხელ კიდევ ვრწმუნდებით, რომ ჩაკეტილი კონტური სამჯერ სტატიკურად ურკვევია.



ნახ. 114.



ნახ. 115.

§ 24. ხაზბარჯიშო მარტივები სტატიკური ურკვევობის ხარისხის გამოთვლაზე

ზემოთ შესწავლილი ფორმულები საფუძველზე ან ზეპირი მსჯელობით განესასაღვროთ 116-ე ნახაზზე მოყვანილი სისტემების სტატიკური ურკვევობის ხარისხი.

- | | |
|-----------------------------|-----------------------|
| პასუხი 1. $\mathcal{N}=2$; | 7. $\mathcal{N}=21$; |
| 2. $\mathcal{N}=6$; | 8. $\mathcal{N}=9$; |
| 3. $\mathcal{N}=5$; | 9. $\mathcal{N}=1$; |
| 4. $\mathcal{N}=1$; | 10. $\mathcal{N}=3$; |
| 5. $\mathcal{N}=12$; | 11. $\mathcal{N}=3$; |
| 6. $\mathcal{N}=6$; | 12. $\mathcal{N}=3$. |

§ 25. სტატიკურად ურკვევი სისტემების თავისებურებანი

სტატიკურად ურკვევი სისტემები ხასიათდება მთელი რიგი ძირითადი თვისებებით, რომლებიც სტატიკურად რკვევად სისტემებს არ აქვთ. მოვიყვანოთ ეს თვისებები.

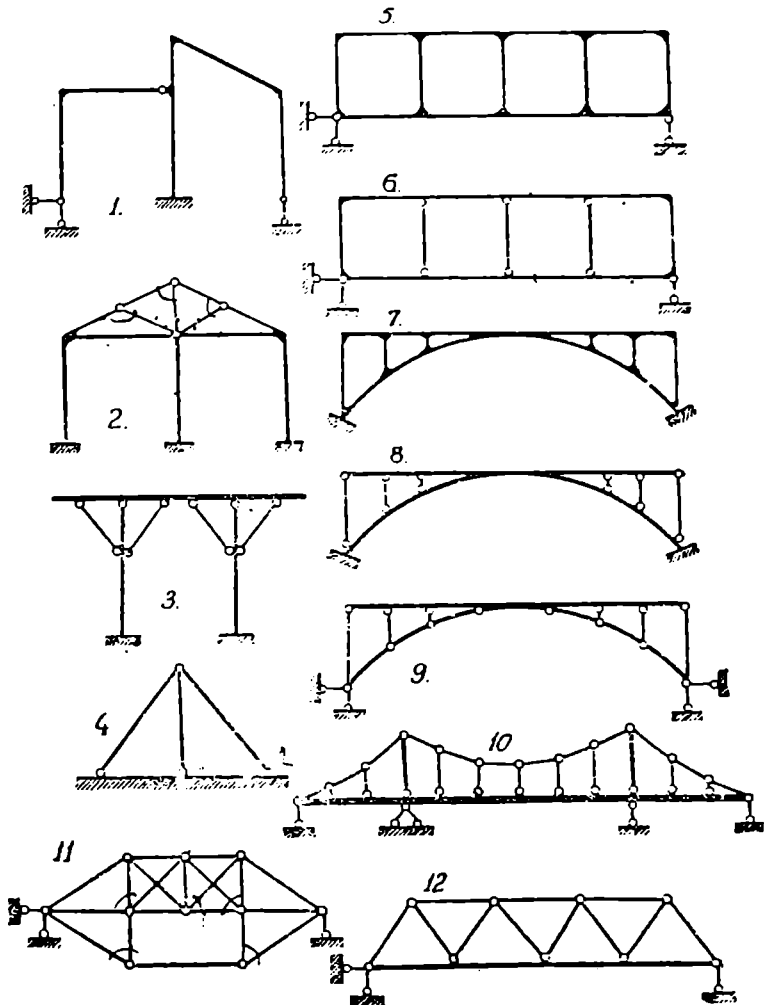
1. ძალები სტატიკურად ურკვევი სისტემის ელემენტებში დამოკიდებულია ელემენტების განივი კვეთის გეომეტრიულ ზომებზე.

მაგალითად, ჯკრი კოჭის მალეების სიხისტის შეცვლა (ნახ. 117) გამოიწვევს მლუნაი მომენტების შეცვლას, ზოგიერთ კვეთში გაიზრდება, ზოგიერთში კი—შემცირდება.

სტატიკურად ურკვევი სისტემის საანგარიშოდ საკეროა წინასწარ ეციოდეთ ლეროების განივი კვეთის ზომები, რომელთა სწორი შერჩევა შესაძლებელია მხოლოდ სტატიკური ანგარიშის შესრულების შემდეგ. ამიტომ, ანგარიშის დაწყებისას წინასწარ მიხელოებით უნდა შევარჩიოთ განივი კვეთის ზომები და შემდეგ შევამოწმოთ მისი ვარგისიანობა (ვანგარიშობთ ძაბ-

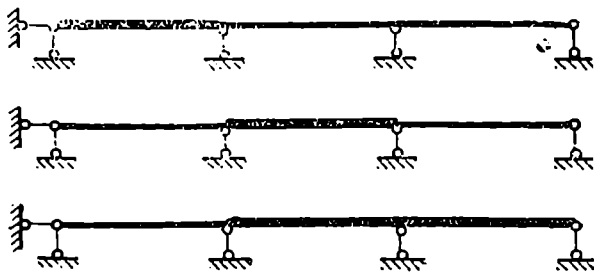
ვებს). თუ ნაპოვნი ძალებით განსაზღვრული განივი კვეთის ზომები მნიშვნელოვნად განსხვავდება წინასწარ არჩეულ ზომებისაგან, მაშინ ანგარიში მეორდება. ეს გარემოება ამცირებს სტატიკურად ურკვევი სისტემების ანგარიშის სიზუსტეს.

2. სტატიკურად ურკვევი სისტემას თუ მოვაშორებთ ზედმეტ ღეროებს, ამით მისი გეომეტრიული უცვლელობა არ დაირღვევა და ის შეინარჩუნებს მუშაობის უნარს. რაც შეეხება სტატიკურად რკვევად სისტემას, აქ ერთი რომელიმე ელემენტის მოშორება ან დარღვევა კი გამოიწვევს მთელი ნაშენის კატასტროფას.



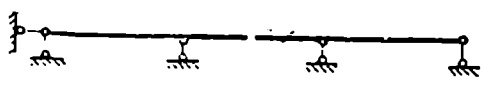
ნახ. 116.

რადგან ადგილობრივი დაზიანება არ იწვევს კონსტრუქციის დანგრევას ამიტომ ამ თვისებას გარკვეული პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს (სამხედრო თვალსაზრისით). მაგალითად, უკრი კოჭი და ხისტად ჩამაგრებული საყრდენებიანი ჩარჩო (ნახ. 118) მთლიანი ვაკეეთის შედეგათ წყობილებიდან არ გამოვლენ და შეძლებენ გარკვეული დატვირთვის ატანას.



ნახ. 117.

3. სტატიკურად ურკვევ სისტემებში ტემპერატურის ცვლილება, საყრდენების დაჯდომა და დამზადების არასიზუსტე იწვევს ძალებს, მაშინ როდესაც სტატიკურად რკვევად სისტემებში ეს ფაქტორები არაერთაა ძალებს არ იწვევს. ეს იმას ნიშნავს, რომ სტატიკურად ურკვევ სისტემებში ძალები შეიძლება წარმოიშვას გარეგანი დატვირთვის გარეშე.



ვთქვათ, მაგალითად, სტატიკურად ურკვევ ჩარჩოზე მოქმედებს არათანაბარი ტემპერატურა (ნახ. 119, ა). რადგან ჩარჩოს საყრდენები უძრავია, ამიტომ წარმოიშვება პორიზონტალური რეაქციები და ჩარჩო გაიღუნება დაახლოებით ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახაზზე; ჩარჩოში წარმოიშვება ძაბვები. სტატიკურად რკვევად ჩარჩოში ტემპერატურის გავლენით მარჯვენა საყრდენი თავისუფლად გადაადგილდება (ნახ. 119, ბ) და არაერთაა ძაბვები არ წარმოიშვება.

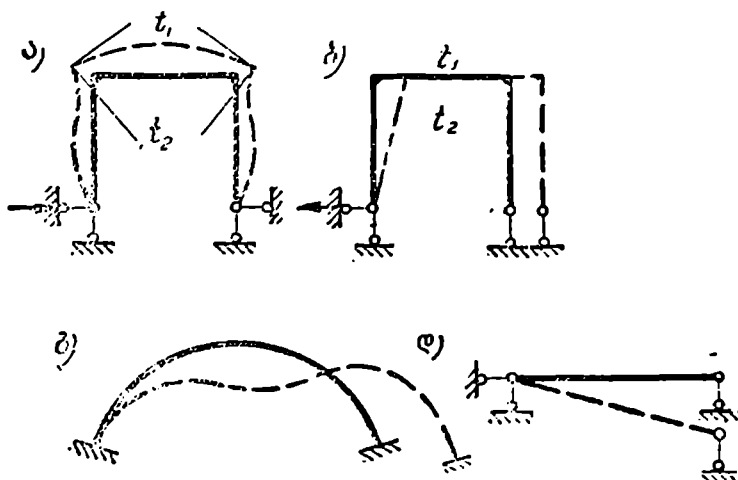


ნახ. 118.

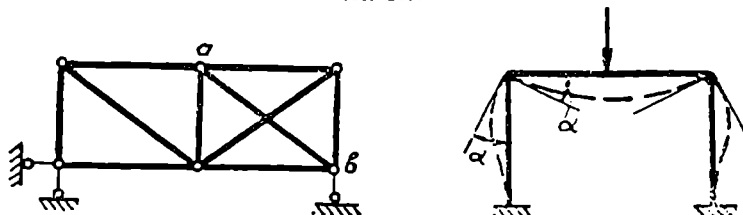
ანალოგიურ სურათს აქვს ადგილი საყრდენების დაჯდომის შემთხვევაშიაც. მაგალითად, თუ სტატიკურად ურკვევი თლის მარჯვენა საყრდენი დაიწვეს (ნახ. 119 გ), წარმოიშვება რეაქციები და სათანადო მლუნაეი მომენტები. სტატიკურად რკვევადი კოჭის საყრდენების დაჯდომა არაერთაა რეაქციებს და მომენტებს არ წარმოშობს, რადგან ამ შემთხვევაში კოჭი თავისუფლად მოძრუნდება (ნახ. 119, დ).

სტატიკურად ურკვევი სისტემის აწყობის დროს შეიძლება *ab* ზედმეტი ლეროს, (ნახ. 120) სიგრძე აღმოჩნდეს საანგარიშო სიგრძეზე მეტი ან ნაკლები. მის მისამაგრებლად საჭიროა *a* და *b* კვანძების ნაძალადეად დაშორება ან დაახლოება, რისთვისაც გარკვეული ძალების მოქმედებაა საჭირო. ეს გამო-

იწვევს ძალებს ფორმის ღეროებში. ეს ძალები გარე ძალების მოქმედების გარეშე განვითარდნენ და მათ საწყისი ან საკუთარი ძალები ეწოდებათ. სტატიკურად რკვევად სისტემებში ამას ადგილი არა აქვს.



ნახ. 119.



ნახ. 120.

ნახ. 121.

§ 26. ჩარჩოს ცემა

ყველაზე გავრცელებულ და ზოგად სტატიკურად ურკვევ სისტემას წარმოადგენს ჩარჩო.

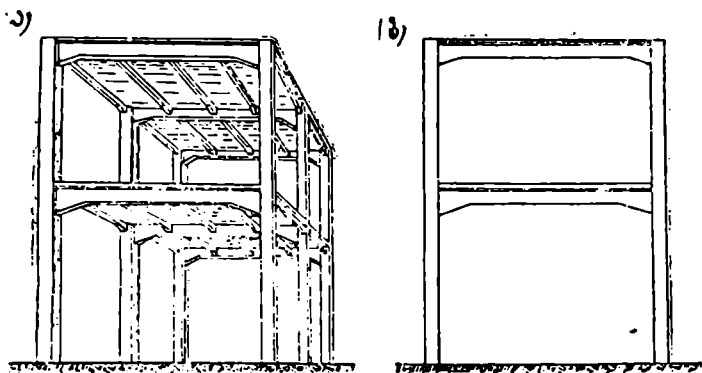
ჩარჩო ეწოდება ისეთ ნაშენს, რომლის შემაღგენელი ღეროები ურთიერთ შეერთებულია ხისტად ან ზოგი სახსროვნად.

კვანძების სიხისტე მდგომარეობს იმაში, რომ ღეროებს შორის კუთხე ინარჩუნებს მუდმივ სიდიდეს ჩარჩოს ნებისმიერი დეფორმაციის შემთხვევაში (ნახ. 121). ჩარჩოს ღეროები მუშაობენ როგორც გრძივ ძალებზე. ისე ღუნვაზე. ხისტ კვანძებში ვითარდება მომენტები და ამცირებს მომენტებს მალში, რაც ჩარჩოს დადებით თვისებად უნდა ჩაითვალოს. კვანძების სიხისტე ჩარჩოს აძლევს გეომეტრიულ უცვლელობას.

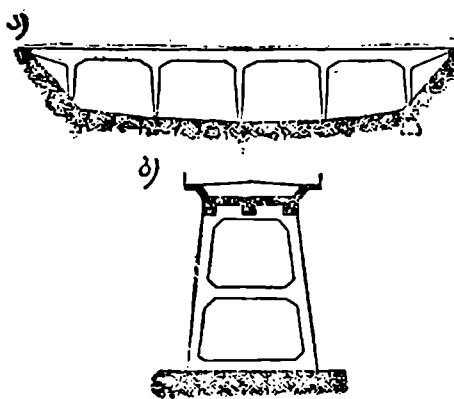
ჩარჩოს, როგორც ყველა სტატიკურად ურკვევი სისტემის ძირითად

უარყოფით მხარეს წარმოადგენს საყრდენების დაჯდომის უარყოფითი გავ-
ლენა მის მუშაობაზე.

რადგანაც ჩარჩოები კეთდება უმთავრესად რკინაბეტონისაგან, ამიტომ
პრაქტიკაში ჩვენ ვხვდებით ჩარჩოს მრავალი სხვადასხვა სახის კონსტრუქციებს



ნახ. 122.



ნახ. 123.

მშენებლობის ყველა დარგში. მაგა-
ლითად, 122-ე ნახაზზე მოყვანილია
რკინაბეტონისათვის დამახასიათე-
ბელი კონსტრუქცია, რომლის ყვე-
ლა ელემენტი ერთმანეთთან შეერთე-
ბულია ხისტად და ჰქმნის ერთ
მთლიან ხისტ სისტემას. ეს სისტემა
სიერცულია, მაგრამ საანგარიშოდ
მას ცალკეულ ბრტყელ ჩარჩოებად
ანაწილებენ (ნახ. 122, ბ).

ესტაკადები (ნახ. 123), რომლებიც
შენდება მშრალ გადასასველელებზე,
მრავალმალიან ჩარჩოებს წარმოად-
გენენ. ესტაკადის საყრდენები განი-
ვი მიმართულებით ან ხიდის ცალ-

კეული საყრდენები შეიძლება ჩარჩოებს წარმოადგენდნენ (ნახ. 123, ბ).

ზემოთ შესწავლილი თეორემები ღრეკად სისტემებზე საშუალებას იძლევა
გავარჩიოთ ჩარჩოს ანგარიშის ძირითადი მეთოდები—ძალთა მეთოდი
და გადაადგილებათა მეთოდი.

პირველად შევისწავლოთ ძალთა მეთოდი, რომელიც გამოგვადგება არა
მარტო ჩარჩოების საანგარიშოდ, არამედ თაღების, ფერმების, უკრი კოქების
და სხვა სტატიკურად ურკვევი სისტემების საანგარიშოდაც.

სტატიკურად ურკვევი სისტემების ანგარიშის საერთო წესი ქალთა მეთოდით

§. 27. ძირითადი სისტემა. კანონიკურ განტოლებათა სისტემა

სტატიკურად ურკვევი სისტემის საანგარიშოდ, როგორც ეს ჩვენ უკვე ვიცით, საჭიროა შევადგინოთ იმდენი დამატებითი განტოლება, რამდენი ზედმეტი ბმაც აქვს მოცემულ სისტემას. ამ განტოლებათა სისტემის შედგენა ხდება ნაშენის დრეკადი თვისებების შესწავლის საფუძველზე.

წარმოვიდგინოთ გვაქვს ორმალიანი კოქი, რომელზეც მოქმედებს ძალა P (ნახ. 124). კოქს აქვს ერთი ზედმეტი ღერო და, მაშასადამე, ის ერთჯერ სტატიკურად ურკვევია. მოცემულ სისტემას მოვიშოროთ ზედმეტი ღერო, მივიღებთ სტატიკურად რკვევად სისტემას, რომელსაც ძირითადი სისტემა ეწოდება (ნახ. 124, ბ).

ძირითადი სისტემა განსხვავდება მოცემული სისტემისაგან, რადგან აქ მოიხსნა ძალვა (რეაქცია) უკუგდებულ ღეროში და ამ ღეროს გასწვრივ კოქს მიეცა გადაადგილების საშუალება.

ამ განსხვავების აღსადგენად ძირითად სისტემაზე უნდა ვიმოქმედოთ მოსპობილი X_1 ძალით და მისი სიდიდე განვსაზღვროთ იმ პირობით, რომ გადაადგილება უკუგდებულ ღეროს გასწვრივ იყოს ნულის ტოლი.

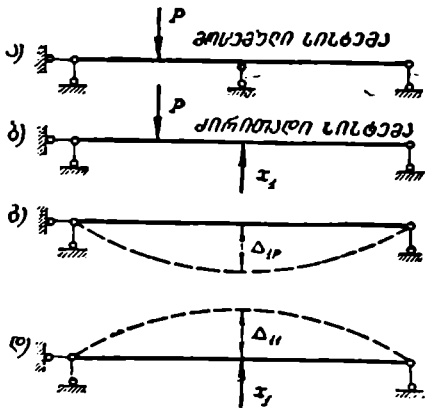
P ძალისაგან გამოწვეულ გადაადგილებას უკუგდებულ ღეროს გასწვრივ (X_1 -ის მიმართულებით) თუ აღვნიშნავთ Δ_{1P} (ნახ. 124, გ) და X_1 ძალისაგან გამოწვეულ გადაადგილებას თავისივე მიმართულებით კი Δ_{11} (ნახ. 124, დ), მაშინ ამოცანის პირობის თანახმად ამ გადაადგილებათა ჯამი იყოს ნულის ტოლი

$$\Delta_{11} + \Delta_{1P} = 0.$$

პროპორციულობის პრინციპის საფუძველზე

$$\Delta_{11} = X_1 \delta_{11}$$

სადაც δ_{11} წარმოადგენს $X_1=1$ ძალისაგან გამოწვეულ გადაადგილებას თავისივე მიმართულებით.



ნახ. 124.

საბოლოოდ მივიღებთ

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0. \quad (43)$$

ეს არის ერთჯერ ურკვევი სისტემის კანონიკური განტოლება. ამ განტოლებაში X_1 უცნობია. Δ_{1p} და δ_{11} წარმოადგენს გადაადგილებებს სტატიკურად რკვევად ძირითად სისტემაში და განისაზღვრება ცნობილი შეთოდებით.

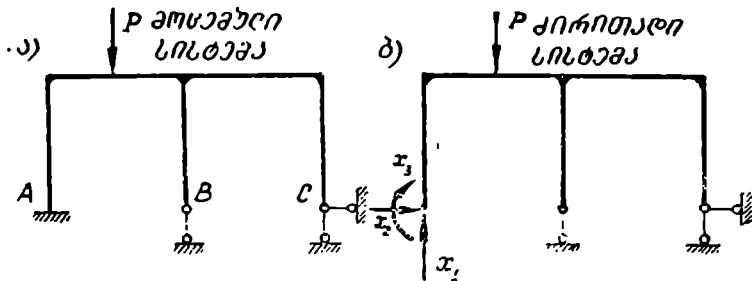
(43) განტოლების გადაწყვეტა მოგვცემს

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}. \quad (44)$$

სტატიკურად ურკვევი სისტემის გარჩეული ანგარიშის მსვლელობა წარმოადგენს ძალთა მეთოდის არსს.

განვიხილოთ სამჯერ სტატიკურად ურკვევი სისტემა (ნახ. 125). ავირჩიოთ ძირითადი სისტემა, ე. ი. უკუვადლოთ ზედმეტი ბმები. ზედმეტი უკუვადლებული ღეროები ისე უნდა ავირჩიოთ, რომ ძირითადი სისტემა იყოს სტატიკურად რკვევადი და გეომეტრიულად უცვლელი.

Δ საყრდენი გავათავისუფლოთ დამაგრებისაგან (ნახ. 125, ბ). დამაგრების ადგილზე მოვსპეთ სამი ბმა და, მაშასადამე, ძალები ამ ღეროებში; გარ-



ნახ. 125.

და ამისა Δ საყრდენს მიეცა გადაადგილების საშუალება უკუვადებული ღეროების მიმართულებით.

ამგვარად, ძირითადი სისტემის არჩევით ჩვენ დავარღვიეთ მოცემული კონსტრუქციის მუშაობის ხასიათი. ძირითადი სისტემა რომ იყოს მოცემული სისტემის ეკვივალენტური, საჭიროა უკუვადებული ბმების მაგიერ ვიმოქმედოთ უცნობი ძალებით X_1 (Δ საყრდენის ვერტიკალური რეაქცია), X_2 (Δ საყრდენის ჰორიზონტალური რეაქცია) და X_3 (საყრდენი მომენტი).

თუ X_1 , X_2 და X_3 ძალებს ექნებათ ზუსტად ის მნიშვნელობები, რაც Δ საყრდენზე განვითარებულ რეაქციებს მოცემულ სისტემაში, მაშინ Δ საყრდენი უძრავად დარჩება და, მაშასადამე, ძირითადი სისტემა მოცემული სისტემის ეკვივალენტურია.

ეს პირობა საშუალებას იძლევა შევადგინოთ დამატებითი განტოლებები, საიდანაც განისაზღვრება საძიებელი უცნობები.

A საყრდენის უძრობის პირობა მდგომარეობს იმაში, რომ ძირითად სისტემაზე მოქმედი ძალებით გამოწვეული გადაადგილებათა ჯამი X_1 -ის, X_2 -ის და X_3 -ის (მობრუნების კუთხე) მიმართულებით უნდა იყოს ნულის ტოლი. გადაადგილება X_1 -ის მიმართულებით შეიძლება დაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{1p} = 0.$$

ჩვენ შევთანხმდით, რომ გადაადგილება აღვნიშნოთ ორი ინდექსით (§ 1). პირველი ინდექსი გვიჩვენებს გადაადგილების მიმართულებას, მეორე კი—გადაადგილების გამომწვევ ძალას.

მაგალითად, Δ_{12} არის გადაადგილება X_1 -ის მიმართულებით გამოწვეული X_2 ძალისაგან; Δ_{1p} კი გადაადგილება იმავე X_1 -ის მიმართულებით გამოწვეული მოქმედი P ძალისაგან.

თუ მთლიან გადაადგილებებს შევცვლით ერთეული ძალებისაგან გამოწვეული გადაადგილებებით

$$\Delta_{11} = X_1 \delta_{11};$$

$$\Delta_{12} = X_2 \delta_{12};$$

$$\Delta_{13} = X_3 \delta_{13}.$$

და შევიტანთ წინა განტოლებაში, მივიღებთ

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1p} = 0.$$

ეს განტოლება გამოსახავს იმ აზრს, რომ მოქმედი ძალებისაგან გამოწვეული გადაადგილებათა ჯამი X_1 -ის მიმართულებით ტოლია ნულისა. ასევე, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ გადაადგილებათა ჯამი X_2 -ის და X_3 -ის მიმართულებით და გავუტოლოდ ნულს, მივიღებთ კიდევ ორ განტოლებას.

მთლიანად გვექნება

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1p} = 0;$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2p} = 0; \quad (45)$$

$$X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} = 0.$$

მიღებული განტოლებათა სისტემა წარმოადგენს ნებისმიერ სამჯერ სტატიკურად ურკვევი სისტემისათვის შედგენილ კანონიკურ განტოლებას.

თუ სისტემა *n*-ჯერ სტატიკურად ურკვევია, მაშინ უნდა მოვაშუროთ *n* შპა და კანონიკურ განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \dots + X_n \delta_{1n} + \Delta_{1p} = 0;$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \dots + X_n \delta_{2n} + \Delta_{2p} = 0; \quad (46)$$

$$X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \dots + X_n \delta_{3n} + \Delta_{3p} = 0;$$

$$X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + X_3 \delta_{n3} + \dots + X_n \delta_{nn} + \Delta_{np} = 0.$$

რადგანაც პირველი განტოლება წარმოადგენს A წერტილის გადაადგილებათა ალგებრულ ჯამს X_1 -ის მიმართულებით, ამიტომ უცნობთა კოეფიციენტების პირველი ინდექსი ყველგან არის 1, მეორე ინდექსი კი სათანადოდ 1, 2, 3, ..., n . ასევე მეორე განტოლება გამოსახავს A წერტილის გადაადგილებათა ჯამს X_2 -ის მიმართულებით და მასში შემავალი კოეფიციენტების პირველი ინდექსია 2, მეორე ინდექსი კი სათანადოდ 1, 2, 3, ..., n . ასევეა დანარჩენ განტოლებებშიც.

ამგვარად, n ზედმეტი უცნობის განსასაზღვრავად ჩვენ მივიღეთ n ხაზობრივი განტოლება, რომელთა ამოხსნა პრინციპულად არავითარ სირთულეს არ წარმოადგენს.

უცნობთა კოეფიციენტები (δ_{ik}) არ არის დამოკიდებული მოქმედ გარე ძალებზე და დამოკიდებულია სათანადო ერთეულ ძალაზე ($X_k=1$) და სისტემის გეომეტრიულ ზომებზე. განტოლების თავისუფალი წევრები (Δ_{ip}), პირიქით, დამოკიდებულია გარე ძალებზე.

ერთეული ძალებისაგან და დატვირთვისაგან გამომწვეული გადაადგილებანი გამოითვლება ცნობილი ფორმულებით (§ 10)

$$\delta_{ii} = \sum \int \frac{M_i^2 ds}{EI};$$

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k ds}{EI};$$

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{M_i M_p ds}{EI};$$

ან, როდესაც ლეროები სწორხაზოვანია, ეპიურების გადამრავლების (ვერეშჩაინის) წესით.

გადაადგილებათა ურთიერთობის პრინციპის თანახმად

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}.$$

და კანონიკური განტოლებების კოეფიციენტები მთავარი დიაგონალის მიმართ სიმეტრიულად არიან დალაგებული.

მთავარ დიაგონალზე მოთავსებულ ერთნაირინდექსებიან კოეფიციენტებს δ_{11} , δ_{22} , ..., δ_{nn} მთავარ გადაადგილებებს უწოდებენ, ხოლო სხვადასხვა ინდექსებიან δ_{ik} კოეფიციენტებს კი — არამთავარ გადაადგილებებს.

მთავარი გადაადგილებები ყოველთვის დადებითია და არასოდეს არ იქცევა ნულად; არა მთავარი გადაადგილებანი კი შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი და ძირითადი სისტემის მოხერხებულად არჩევის შემთხვევაში შეიძლება ნულადაც იქცეს.

ერთხელ კიდევ გავიხსენოთ თუ რას წარმოადგენენ კანონიკურ განტოლებათა კოეფიციენტები.

δ_{ii} არის X_i -ის მოდების წერტილის გადაადგილება ამავე ძალის მიმართულებით, გამოწვეული $X_i=1$ ძალისაგან.

δ_{ik} წარმოადგენს X_i -ის მოდების წერტილის გადაადგილებას ამავე ძალის მიმართულებით, გამოწვეულს $X_k=1$ ძალისაგან.

Δ_{ip} გამოსახავს X_i -ის მოდების წერტილის გადაადგილებას ამ ძალის მიმართულებით, გამოწვეულს მოქმედი დატვირთვისაგან.

რადგანაც კანონიკურ განტოლებაში უცნობებად შედიან ძალები, ამიტომ სტატიკურად ურკვევი სისტემის ანგარიშის გარჩეულ მეთოდს ძალთა მეთოდი ეწოდება, ხოლო კანონიკურ განტოლებებს კი ძალთა მეთოდის კანონიკური განტოლებები.

განტოლებებმა მიიღეს სახელწოდება კანონიკური იმიტომ, რომ ისინი შედგენილია გარკვეული კანონით.

თუ სტატიკურად ურკვევ სისტემას ვანგარიშობთ ტემპერატურის გავლენაზე, მაშინ კანონიკურ განტოლებებში თავისუფალი წევრები უნდა შეეცვალოს ტემპერატურისაგან გამოწვეული გადაადგილებებით:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \dots + X_n\delta_{1n} + \Delta_{1i} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \dots + X_n\delta_{2n} + \Delta_{2i} &= 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \dots + X_n\delta_{3n} + \Delta_{3i} &= 0; \end{aligned} \quad (47)$$

$$X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + X_3\delta_{n3} + \dots + X_n\delta_{nn} + \Delta_{ni} = 0.$$

ამ ფორმულებში Δ_{ii} წარმოადგენს X_i ძალის მოდების წერტილის გადაადგილებას თავისივე მიმართულებით, გამოწვეულს ტემპერატურის გავლენისაგან.

ტემპერატურული გადაადგილებანიც გამოითვლება სტატიკურად რკვევად ძირითად სისტემაში (31) ფორმულით.

ზედმეტი უცნობების განსაზღვრის შემდეგ გადავივართ საბოლოო (ჯამური) შინაგანი ძალების განსაზღვრაზე. ძირითად სისტემაზე მოქმედებს მოცემული დატვირთვა და ნაპოვნი ზედმეტი უცნობები; ამ ძალებისაგან გამოწვეული ძალების შეჯამება მოგვცემს საბოლოო ძალებს სტატიკურად ურკვევ სისტემაში:

$$\begin{aligned} M &= M_p + X_1M_1 + X_2M_2 + X_3M_3 + \dots + X_nM_n, \\ Q &= Q_p + X_1Q_1 + X_2Q_2 + X_3Q_3 + \dots + X_nQ_n, \\ N &= N_p + X_1N_1 + X_2N_2 + X_3N_3 + \dots + X_nN_n, \end{aligned} \quad (48)$$

სადაც M_p , Q_p და N_p წარმოადგენს მოცემული დატვირთვისაგან გამოწვეულ მღუნავ მომენტს, განივ და გრძივ ძალას ძირითად სისტემაში, ხოლო M_i , Q_i და N_i კი $X_i=1$ ძალისაგან გამოწვეულ მომენტს, განივ და გრძივ ძალას იმავე სისტემაში.

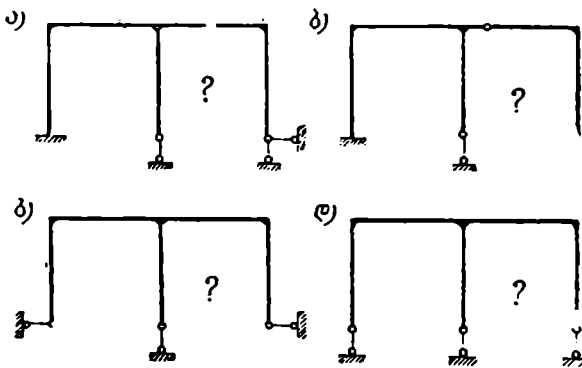
ძირითადი სისტემის არჩევის დროს ყურადღება უნდა მივაქციოთ უკუგდებული ბმების განლაგებას, რომ არ მივიღოთ გეომეტრიულად ცვლადი სისტემა.

მაგალითად, ზემოთ განხილულ ორმალიან კოქშე პორიზონტალური ღეროს უკუდგება (ნახ. 126) კოქს აქცევს გეომეტრიულად ცვლადად, რადგან სამი პარალელური ღერო არ უზრუნველყოფს სისტემის უძრავობას.

განხილულ სამჯერ სტატიკურად ურკვევ სისტემაში (ნახ. 125, ა) ძირითადი სისტემების არჩევა ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია 127-ე ნახაზზე, უვარგისია, რადგან ა და ბ სქემების მარცხენა ნაწილი სტატიკურად ურკვევია, მარჯვენა კი—მოძრავი; გ სისტემა მყისად მოძრავია (სამი ღერო იკვეთება ერთ წერტილში), ხოლო დ კი მიიღებს სასრულო გადაადგილებას. ძირითადი სისტემის სწორედ არჩევის მაგალითები გარჩეულია 41-ე წ-ში.



ნახ. 126.



ნახ. 127.

§ 28. სტატიკურად ურკვევი მარტივი სისტემების ანგარიშის მაგალითები ბარე და ბიკრთვაზე

ერთჯერ სტატიკურად ურკვევი სისტემის ანგარიში

1 მაგალითი. ერთი თავით ხისტად ჩამაგრებულ და მეორე თავით თავისუფლად შდებარე კოქზე მოქმედებს შეყურსული ძალა P (ნახ. 128). ავაგოთ მლუნავი მომენტის ეპიურა.

გადაწვევტა. ავირჩიოთ ძირითადი სისტემა, ე. ი. კოქი ვაქციოთ სტატიკურად რკვევად. ამისათვის მოვაშოროთ მარჯვენა საყრდენი ღერო და მის მაგიერ ვამოქმედოთ უცნობი X_1 ძალა (ნახ. 128, ბ).

ძირითად სისტემაზე მოქმედი ძალებისაგან გამოწვეულ გადაადგილებათაში X_1 -ის მიმართულებით უნდა იყოს ნულის ტოლი. ეს პირობა გამოისახება კანონიკური განტოლებით:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0.$$

δ_{11} არის $X_1 = 1$ ძალისაგან გამოწვეული გადაადგილება თავისივე მიმართულებით და გამოითვლება მორის ფორმულით ან ვერეშაგინის წესით

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2 ds}{EI} = \frac{\omega_1 \cdot y_c}{EI},$$

ე. ი. M_1 ეპიურის გადამრავლებით თავის თავზე.

Δ_{1P} არის P ძალისაგან გამოწვეული გადაადგილება X_1 -ის მიმართულე-ბით და განისაზღვრება ფორმულით

$$\Delta_{1P} = \int \frac{M_1 M_P ds}{EI} = \frac{\omega_P y_c}{EI},$$

ე. ი. M_P ეპიურის გადამრავლებით M_1 ეპიურაზე.

ძირითად სისტემაზე ეამოქმედოთ $X_1=1$ (ნახ. 128, გ) და მოცემული დატვირთვა (ნახ. 128, დ) და ავაგოთ მლუნაეი მომენტის ეპიურები. ეპიურები ავაგოთ გაკვიმული ბოქკოების მხარეს.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{l^3}{2} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3EI};$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EI} \frac{Pa^2}{2} \cdot \frac{2l+b}{3} = -\frac{Pa^2(2l+b)}{6EI}.$$

ნიშანი მინუსი აღებულია იმიტომ, რომ ეპიურები აგებულია სხვადასხვა მხარეს.

მიღებულ მნიშვნელობებს თუ შევიტანთ კანონიკურ განტოლებაში, მივიღებთ

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{Pa^2(2l+b)}{2EI}.$$

საბოლოო ეპიურის მისაღებად საჭიროა ერთეული ძალისაგან გამოწვეული ეპიურის ორდინატები გავადილოთ X_1 -ჯერ და ალგებრულად შევაჯამოთ P ძალისაგან გამოწვეულ ეპიურასთან (ფორ. 48):

$$M = M_P + X_1 M_1.$$

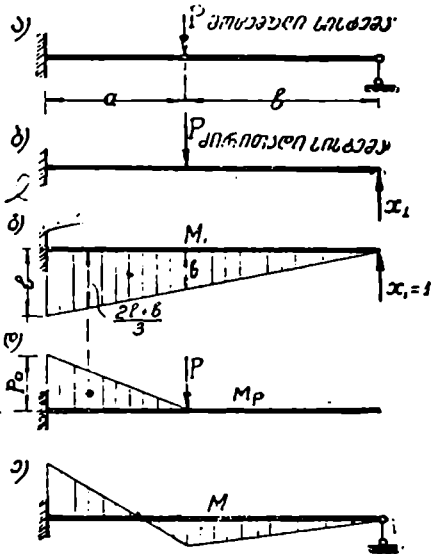
რადგანაც შესაჯამებელი ეპიურები სწორხაზოვანია, ამიტომ საკმარისია ეპიურების ორდინატების შეჯამება გადატების ადგილებში. საბოლოო ეპიურა ნაჩვენებია 128, ე ნახაზე.

2 მაგალითი. ვიანგარიშოთ ორსახსრიანი ჩარჩო, რომელზეც მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი ინტენსივობით $q=4$ ტ/მ (ნახ. 129). დგარების სიმაღლე $h=6$ მ, ინერციის მომენტი I_1 -ს, რიგელის სიგრძე $l=4$ მ და ინერციის მომენტი $I_2=2I_1$.

გ ა დ ა წ ყ ე ტ ა. უკუვადლოთ მარჯვენა პორიზონტალური საყრდენი ღერო, მივიღებთ სტატიკურად რკვევად ძირითად სისტემას (ნახ. 129, ბ).

შევადგინოთ კანონიკური განტოლება

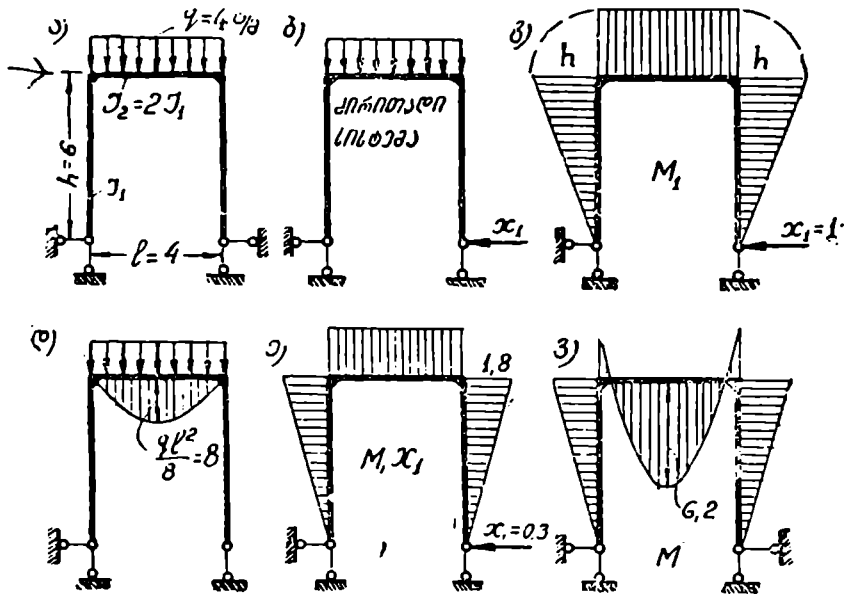
$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0.$$



ნახ. 128.

ძირითად სისტემაზე ეიმოქმედოთ ძალით $X_1 = 1$ და მოცემული თანაბრად განაწილებული ტვირთით ცალ-ცალკე და ავსგოთ მლუნაეი მომენტის ეპიურები (ნახ. 129, გ, დ).

δ_{11} -ის მისაღებად M_1 ეპიურა უნდა გადავამრავლოთ თავის თავზე ვერეშაგინის წესით. გადავამრავლება უნდა შევასრულოთ ჩარჩოს ყველა ელემენტზე



ნახ. 129.

და მიღებული შედეგები შევჯამოთ. არ უნდა დაგვავიწყდეს თითოეული ელემენტისათვის მიღებული შედეგის გაყოფა სათანადო ინერციის მომენტზე

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_1} 2 \frac{h^2}{2} \frac{2}{3} h + \frac{1}{EI_2} hl \cdot h = \frac{h^3}{6EI_1} (4h + 3l).$$

M_1 და M , ეპიურების კომბინაცია მოგვცემს

$$\Delta_{1p} = - \frac{1}{EI_2} \left(2 \frac{ql^2}{8} \right) l \cdot h = - \frac{ql^3 h}{24EI_1}.$$

მაშასადამე,

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{ql^3}{4h(4h+3l)} = \frac{4 \cdot 4^3}{4 \cdot 6(4 \cdot 6 + 3 \cdot 4)} = 0,3 \text{ ტ.}$$

X_1 ძალისაგან გამოწვეული ეპიურის ორდინატები გადავამრავლოთ 0,3-ზე (ნახ. 129, ე) და შევჯამოთ ტვირთისაგან გამოწვეულ ეპიურასთან (ნახ. 129, დ), მივიღებთ საბოლოო მლუნაეი მომენტის ეპიურას (ნახ. 129, ე).

შევაჯამოთ. ვიანგარიშოთ იგივე ორსახსრიანი ჩარჩო პორიზონტალურ დატვირთვაზე (ნახ. 130).

გადაწყვეტა. ძირითადი სისტემა ნაჩვენებია 130, ბ ნახაზზე.

X_1 განისაზღვრება კანონიკური განტოლებიდან

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0.$$

$X_1 = 1$ ძალისაგან გამოწვეული ეპიურა გამოსახულია 129, გ ნახაზზე და δ_{11} -ს ექნება იგივე მნიშვნელობა, რაც წინა მაგალითში:

$$\delta_{11} = \frac{h^2}{6EI_1} (4h + 3l).$$

ტვირთისაგან გამოწვეული ეპიურის ასაგებად წინასწარ უნდა განვსაზღვროთ საყრდენი რეაქციები. უძრავ საყრდენზე ვერტიკალური რეაქციის გარდა გვექნება ჰორიზონტალური რეაქცია $H = P$. მლუნავი მომენტის ეპიურა წაჩვენებია 130, გ ნახაზზე.

M_1 (ნახ. 129, გ) და M_p (ნახ. 130, გ) ეპიურების კომბინაცია მოგვცემს

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EI_1} \frac{Fh^2}{2} \frac{2}{3} h - \frac{1}{EI_2} \frac{Pl \cdot l}{2} h = -\frac{Ph^2}{12EI_1} (4h + 3l).$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{P}{2}.$$

საბოლოო მლუნავი მომენტის ეპიურა (ნახ. 130, დ) აიგება შემდეგი ფორმულის საფუძველზე

$$M = M_p + X_1 M_1.$$

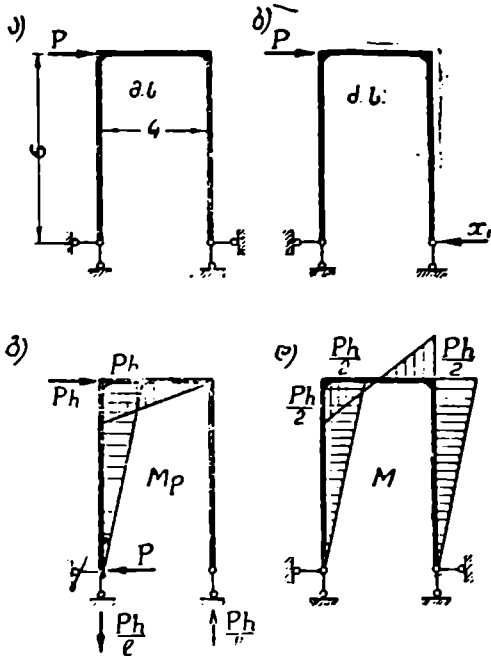
4 მაგალითი. მოცემულია ორსახსრიანი ჩარჩო ტეხილი რიგელებით და მასზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი ინტენსივობით $q = 2$ ტ/მ (ნახ. 131). ავაგოთ მლუნავი მომენტის ეპიურა. ჩარჩოს ელემენტების გეომეტრიული სიდიდეები მოცემულია ნახაზზე.

გ ა და წყვეტა. უკუვაგდოთ მარცხენა ჰორიზონტალური საყრდენი ღერო, მივიღებთ ორსაყრდენზე მდებარე სტატიკურად ჯგერად ძირითად სისტემას. უკუგდებული ღეროს მაგიერ ვამოქმედოთ X_1 (ნახ. 131, ბ).

გამოვთვალოთ კანონიკური განტოლების

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0$$

კოეფიციენტები, ამისათვის ავაგოთ $X_1 = 1$ და მოცემული დატვირთვისაგან გამოწვეული ეპიურები (ნახ. 131, გ, დ). ეპიურები აგებულია გაჭიმული ბოქკოების მხარეს.

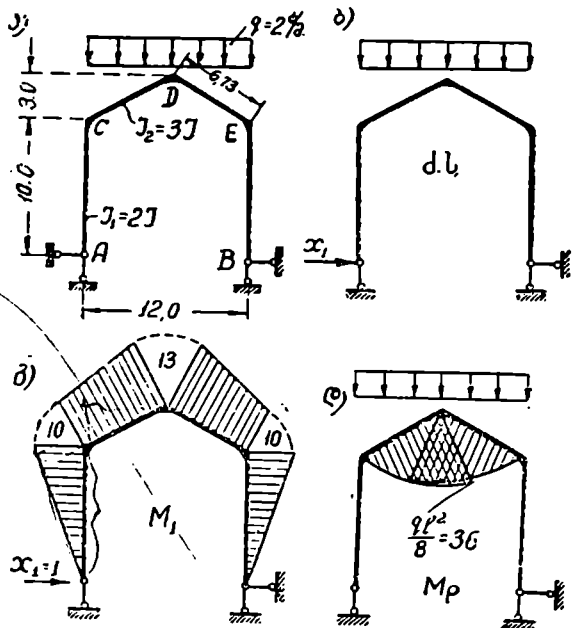


ნახ. 130.

გადაადგილების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ინტეგრალის ცხრი-
ლით:

$$\delta_{11} = 2 \frac{1}{3EI} \frac{1}{3} (13^2 + 13 \cdot 10 + 10^2) 6,73 + 2 \frac{1}{EI} \frac{1}{3} 10 \cdot 10 \cdot 10 = \frac{930}{EI}.$$

ცხრილის მე-5 სტრიქონი მოგვცემს (ნახ. 131, ვ)



ნახ. 131.

$$\Delta_{1P} = -2 \frac{1}{3EI} \frac{1}{6} [36 \cdot 13 + 2 \cdot 27(10 + 13)] 6,37 = -\frac{1278,7}{EI}.$$

შევიღებთ

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{1278,7}{930} = 1,375 \text{ ტ.}$$

მლუნავი მომენტის საბოლოო ეპიურის ასაგებად ვისარგებლოთ ფორ-
მულით

$$M = M_p + X_1 M_1.$$

მლუნავი მომენტი C და E წერტილებში

$$M_C = M_E = -X_1 M_1 = -1,375 \cdot 10 = -13,75 \text{ ტმ};$$

მლუნავი მომენტი D წერტილში

$$M_D = \frac{q l^2}{8} - X_1 M_1 = 36 - 1,375 \cdot 13 = 18,12 \text{ ტმ}.$$

საბოლოო მლუნავი მომენტის ეპიურა მოყვანილია 131, ე ნახაზზე.

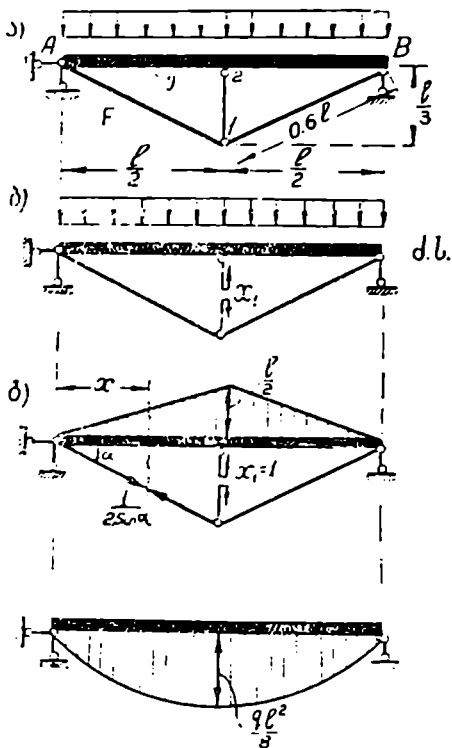
— ნ შავალითი. შპრენგელიან კოქზე (კომბინირებული სისტემა) მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი ინტენსივობით q ტ/მ (ნახ. 132). შპრენგელის ღეროების განივი კვეთის ფართობი ერთნაირია და I' -ის ტოლია.

სისტემა არის შინაგანად სტატიკურად ურკვევი, რადგან საყრდენი რეაქციები განისაზღვრება წონასწორობის განტოლებებით. აქ ძირითადი კოქი მუშაობს ღუნვაზე (გრძივი ძალა უმნიშვნელოა), შპრენგელის ღეროები კი—მხოლოდ გრძივ ძალებზე. შპრენგელის ღეროები აძლიერებს კოქს, რადგან ის დამატებით საყრდენს ქმნის კოქის შუაში. ასეთი სახის კოქებს ხმარობენ რკინიგზის ვაგონებში; გარდა ამისა შპრენგელებს იყენებენ კოქის გასაძლიერებლადაც. მოცემული სისტემა არის ერთჯერ სტატიკურად ურკვევი.

გ ა და წყვეტა. ზედმეტ უცნობად მივიღოთ ძალვა 1—2 ლეროში; ამ ლეროს გაკვეთით სისტემა გადაიქცევა სტატიკურად რკვევად. გაკვეთილი ლეროს გასწვრივ ვამოქმედოთ უცნობი X_1 (ნახ. 132, ბ), რომელიც განისაზღვრება კანონიკური განტოლებიდან

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0.$$

ძირითად სისტემაზე ვიმოქმედოთ ერთეული ძალით $X_1 = 1$, ავავოთ მლუნავი მომენტის ეპიურა კოქზე და გამოვთვალოთ ძალები შპრენგელის ღეროებში (ნახ. 132, გ).



ნახ. 132.

მლუნავი მომენტი ნებისმიერ კვეთში

$$M_1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2\sin\alpha} \sin\alpha \cdot x = -x,$$

$$\text{როცა } x = \frac{l}{2} \quad M_1 = -\frac{l}{2}.$$

ძალები შპრენგელის ღეროებში:

$$1-2 \text{ ღეროში} \quad N_1 = 1 \text{ ტ};$$

$$A-1 \quad N_1 = \frac{1}{2\sin\alpha} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{1,8}} = 0,9 \text{ ტ};$$

$$B-1 \quad N_1 = 0,9 \text{ ტ}.$$

გადაადგილება გამოითვლება ფორმულით

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2 dx}{EI} + \sum \frac{N_1^2 S}{EF},$$

სადაც S შპრენგელის სათანადო ღეროს სიგრძეა. მეორე წევრი გამოსახავს შპრენგელის დეფორმაციის გავლენას δ_{11} -ზე.

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 2 \frac{1}{EI} \frac{l}{2} \frac{l}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{l}{2} + \frac{1}{EF} \left(1 \frac{l}{3} + 0,81 \cdot 0,6l + 0,81 \cdot 0,6l \right) = \\ &= \frac{l^3}{12EI} + \frac{1,305l}{EF}. \end{aligned}$$

M_1 და M_p ეპიურების კომბინაცია მოგვეცემს (იხ. ინტეგრალის ცხრილის მე-13 სტრიქონი)

$$\Delta_{1p} = \int \frac{M_1 M_p dx}{EI} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{3} \frac{l}{2} \cdot \frac{ql^2}{8} \left(l + \frac{l^3}{4l} \right) = -\frac{5}{192} \frac{ql^3}{EI}.$$

გადაადგილებათა მიღებულ მნიშვნელობებს თუ შევიტანთ კანონიკურ განტოლებაში, მივიღებთ

$$X_1 = \frac{\frac{5}{192} \frac{ql^3}{EI}}{\frac{l^3}{12EI} + \frac{1,305l}{EF}} = \frac{5ql^3}{16l^3 + 250 \frac{l}{F}}.$$

X_1 მივიღეთ დადებითი ნიშნით; ეს იმას ნიშნავს, რომ X_1 -ის არჩეული მიმართულება ყოფილა სწორი, ე. ი. 1-2 ღერო იკუმშება.

მლუნავი მომენტი კოქში და გრძივი ძალები ფერმის ღეროებში განსაზღვრება ფორმულებით

$$M = M_p + M_1 X_1;$$

$$N = X_1 N_1.$$

მაგალითად, მლუნავი მომენტი კოქის შუაში იქნება

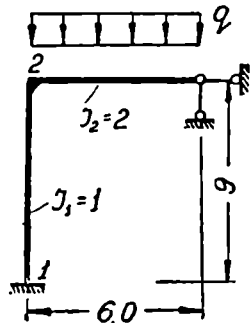
$$M = \frac{ql^3}{8} - \frac{l}{2} \cdot X_1.$$

როგორც ვხედავთ შპრენგელი ამცირებს მლუნავ მომენტს.

ორჯერ სტატიკურად ურკვევი ხისტემების ანგარიში

6 მაგალითი. ეხლა განვიხილოთ ორჯერ სტატიკურად ურკვევი სისტემა, რომელზედაც მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი ინტენსივობით $q=3$ ტ/მ (ნახ. 133). ჩარჩოს გეომეტრიული სიდიდეები მოცემულია ნახაზზე.

გადაწყვეტა. ავირჩიოთ ძირითადი სისტემა, ე. ი. ვაქცოთ ის სტატიკურად რკვევადად. ამისათვის აუცილებელია მოვაშოროთ ორი ზედმეტი ბმა. იმის მიხედვით, თუ რომელ ბმებს ავირჩევთ ზედმეტად, ჩვენ მივიღებთ ძირითადი სისტემის სხვადასხვა ვარიანტს (ნახ. 134). პირველ ვარიანტში უკუგდებულა მარჯვენა საყრდენი ღეროები და ზედმეტ უცნობებად მიღებულია რეაქციის ვერტიკალური და ჰორიზონტალური მდგენელი; მეორე ვარიანტში უცნობებად მიღებულია მარჯვენა საყრდენის ვერტიკალური რეაქცია და მარცხენა საყრდენის ჩამაგრების მომენტი; მესამე ვარიანტში კი უცნობებად აღებულია მომენტები საყრდენზე და მე-2 კვანძში. რადგანაც სახსრის მოწყობით ისპობა მომენტი, ამიტომ სახსარში მოდებულია წყვილი ძალა.



ნახ. 133.

საანგარიშო ძირითად სისტემად უნდა ავირჩიოთ ის, რომელიც იძლევა ყველაზე მარტივ ეპიურას. მესამე ვარიანტი ყველაზე მარტივია, რადგან $X_2=1$ -საგან გამოწვეული ეპიურა ვრცელდება მხოლოდ ვერტიკალურ ღეროზე, მოცემული დატვირთვისაგან გამოწვეული ეპიურა კი—მხოლოდ ჰორიზონტალურზე. განვიხილოთ მე-3 ვარიანტი (ნახ. 134, გ). ზედმეტი ცნობები X_1 და X_2 განისაზღვრება კანონიკური განტოლებებიდან:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1P} &= 0; \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned}$$

პირველი განტოლება გამოსახავს იმ აზრს, რომ X_1 , X_2 და მოცემული ტვირთისაგან გამოწვეულ გადაადგილებათა ჯამი ძირითად სისტემაში X_1 -ის მიმართულებით ტოლია ნულისა; ასევე მეორე განტოლება გამოსახავს, რომ გადაადგილებათა ჯამი X_2 -ის მიმართულებით ტოლია ნულის. მოკლედ, პირველი განტოლება გამოსახავს მობრუნების კუთხის უარყოფას მე-2 კვანძში, მეორე კი—ხისტად ჩამაგრებულ საყრდენზე.

კანონიკური განტოლების კოეფიციენტების გამოსათვლელად ძირითად სისტემაზე ვიმოქმედოთ ძალებით $X_1=1$, $X_2=1$ და მოცემული დატვირთვით და ავაგოთ მლუნავი მომენტის ეპიურები (ნახ. 134, გ).

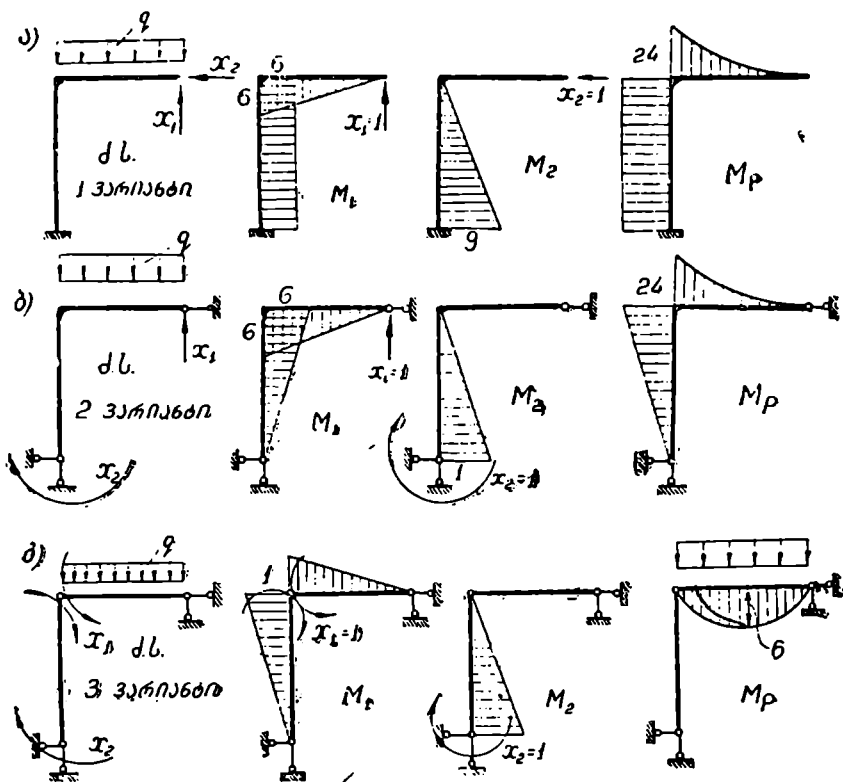
ძირითადი სისტემა სამსახსრიანია და ამიტომ ის იანგარიშება, როგორც სამსახსრიანი თალი.

ეპიურების კომბინაცია ვერეშჩაგინის წესით მოგვცემს

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2 dx}{EI} = \frac{1}{EI_1} \frac{1.6}{2} \frac{2}{3} 1 + \frac{1}{EI_1} \frac{1.9}{2} \frac{2}{3} 1 = \frac{4.0}{E};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{M_2^2 dx}{EI} = \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{1.9}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{3}{E};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{M_1 M_2 dx}{EI} = -\frac{1}{EI_1} \cdot \frac{1.9}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1.5}{E};$$



ნახ. 134.

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{M_1 M_p dx}{EI} = -\frac{1}{EI_2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{6}{E};$$

$$\Delta_{2p} = 0.$$

კანონიკური განტოლებები რიცხობრივად მიიღებს შემდეგ სახეს

$$4X_1 - 1.5X_2 = 6;$$

$$-1.5X_1 + 3X_2 = 0.$$

განტოლებათა სისტემა გადავწყვიტოთ დეტერმინანტის საშუალებით, მივიღებთ:

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6, & -1,5 \\ 0, & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4, & -1,5 \\ -1,5, & 3 \end{vmatrix}} = \frac{18}{12 - 2,25} = \frac{18}{9,75} = 1,84 \text{ ტმ};$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4, & 6 \\ -1,5, & 0 \end{vmatrix}}{9,75} = \frac{9}{9,75} = 0,92 \text{ ტმ}.$$

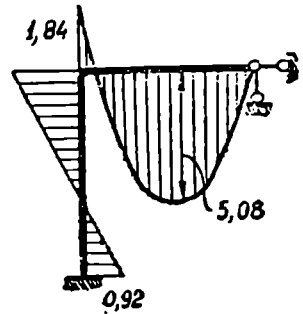
ზედმეტი უცნობების განსაზღვრის შემდეგ ვაგებთ მღუნავი მომენტის საბოლოო ეპიურას ფორმულით

$$M = M_p + X_1 M_1 + X_2 M_2.$$

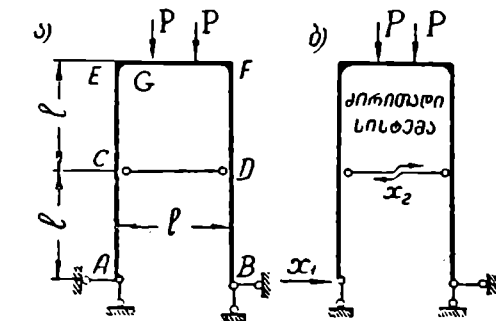
მაშასადამე, ერთეული ძალებით გამოწვეულ მღუნავ მომენტთა ეპიურის ორდინატებს ვამრავლებთ სათანადო X_1 და X_2 -ის მნიშვნელობებზე და ვაჯამებთ M_p ეპიურასთან. მღუნავი მომენტის საბოლოო ეპიურა მოყვანილია 135 ნახაზზე.

7 მაგალითი. მოცემულია ჩარჩო, რომლის CD ღერო (შემკოჭი) შეერთებულია დგარებთან სახსრებით. ავაგოთ მღუნავი მომენტის, განივი და გრძივი ძალების ეპიურები. რიგელზე მოქმედებს ორი შეუქრსული ძალა (ნახ. 136). $EI = \text{const}$.

გ ა და წ უ ყ ვ ე ტ ა. CD შემკოჭის გარეშე ჩარჩო იქნებოდა ერთჯერ სტატიკურად ურკვევი. CD ღერო უმატებს კიდევ ერთ უცნობს—გრძივ ძალას ამ ღეროში. რადგანაც CD ღერო დგარებთან სახსრებითაა შეერთებული, ამიტომ მასში განვითარდება მხოლოდ გრძივი ძალა, ე. ი. $M = Q = 0$.



ნახ. 135.



ნახ. 136.

უქუვადლოთ მარცხენა პორიზონტალური საყრდენი ღერო და გავკვეთოთ შემკოჭი, მივიღებთ სტატიკურად რკვევად ძირითად სისტემას (ნახ. 136, ბ).

უქუვადებული ღეროების მაგიერ ვიმოქმედოთ უცნობი ძალებით X_1 და X_2 .

შევადგინოთ კანონიკური განტოლებები

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1p} = 0;$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2p} = 0.$$

გადაადგილებების საპონენლად ავაგოთ $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ და მოცემული დატვირთვისაგან გამოწვეული ეპიურები (ნახ. 137).

სათანადო ეპიურების კომბინაცია მოგვეცემს

$$\delta_{11} = \frac{28 l^3}{3EI}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{11 l^3}{3EI}; \quad \delta_{22} = \frac{5 l^3}{3EI}.$$

დატვირთვისაგან გამოწვეული გადაადგილებები

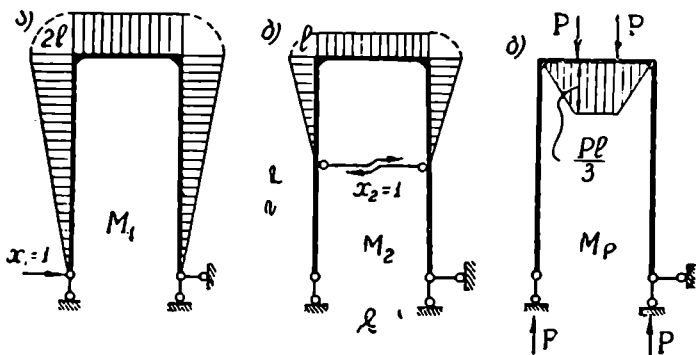
$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \left(l + \frac{l}{3} \right) \frac{Pl}{3} 2l = -\frac{4Pl^3}{9EI};$$

$$\Delta_{2P} = -\frac{1}{EI} \frac{2Pl^3}{9EI}.$$

კანონიკური განტოლების ყველა კოეფიციენტი შევკვეთოთ $-\frac{l^3}{3EI}$ -ზე, მაშინ მივიღებთ

$$28X_1 + 11X_2 - \frac{4}{3}P = 0;$$

$$11X_1 + 5X_2 - \frac{2}{3}P = 0.$$



ნახ. 137.

ამ განტოლებათა ამოხსნა მოგვეცემს:

$$X_1 = \frac{\frac{4}{3}P \cdot 5 - \frac{2}{3}P \cdot 11}{28 \cdot 5 - 11^2} = -\frac{\frac{2}{3}P}{19} = -\frac{2}{57}P;$$

$$X_2 = \frac{28 \cdot \frac{2}{3}P - 11 \cdot \frac{4}{3}P}{19} = \frac{12}{57}P.$$

X_1 განბრჯენს აქვს არჩეული მიმართულების საწინააღმდეგო მიმართულება, ე, ი. მიმართულია გარეთ.

მლუნავი მომენტის ჯამურ ეპიურას ავაგებთ ფორმულით

$$M = M_p + X_1 M_1 + X_2 M_2$$

C კვეთში

$$M_c = -l \left(-\frac{2}{57} P \right) = \frac{2}{57} Pl;$$

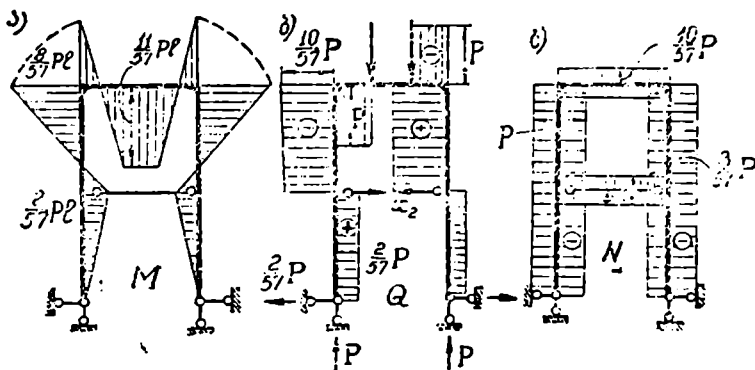
E კვეთში

$$M_E = -2l \left(-\frac{2}{57} P \right) - \frac{12}{57} Pl = -\frac{8}{57} Pl;$$

G კვეთში

$$M_G = \frac{Pl}{3} - 2l \left(-\frac{2}{57} P \right) - \frac{12}{57} Pl = \frac{11}{57} Pl.$$

მლუნავი მომენტის ეპიურა აგებულია 138, ა ნახაზზე. თუ განვიხილავთ კვეთის მარცხენა ან მარჯვენა მხარეს და მასზე მოქმედ ძალებს დავაგვიგმი-



ნახ. 138.

ლებთ განსახილავ ღეროს პერპენდიკულარულ ღერძზე, მივიღებთ განივი ძალის სიდიდეს. იმავე ძალების დავაგვიგმილება განსახილავი ღეროს ღერძზე მოგვცემს გრძივ ძალას. რადგანაც ჩარჩოზე მოქმედი ყველა ძალა ცნობილია, ამიტომ ამ ამოცანის შესრულება მარტივად ხდება. განივი და გრძივი ძალები განისაზღვრება ფორმულებით (§ 25):

$$Q = Q_p + Q_1 X_1;$$

$$N = N_p + N_1 X_1.$$

Q და N -ის ეპიურები წარმოდგენილია 138, ბ, გ ნახაზზე.

§ 29. მარტივი სისტემების ანგარიშის მავალითაში ტემპერატურის მოქმედებაზე

ზემოთ (§ 14), ჩვენ შევისწავლეთ ტემპერატურისაგან გამოწვეული გადაადგილებების განსაზღვრის მეთოდი სტატიკურად რკვევად სისტემებში, რომელიც გამოგვადგება სტატიკურად ურკვევი ამოცანების გადასაწყვეტად. უნდა აღვნიშნოთ, რომ სტატიკურად რკვევად სისტემებში ტემპერატურა ძალებს არ იწვევს, რადგან ტემპერატურული დეფორმაციები თავისუფლად ვითარდება.

სტატიკურად ურკვევი სისტემების ანგარიშის მსვლელობა ტემპერატურაზე ისეთივეა, როგორც გარე დატვირთვაზე და წარმოებს სითანადო კანონიკური განტოლებების საფუძველზე, სადაც თავისუფალი წევრები ტემპერატურისაგან გამოწვეულ გადაადგილებებს წარმოადგენენ (ფორ. 47).

1 მაგალითი. ორმალიანი ლითონის კოქის ზედა ბოქკოები ხურდება $t_1=60^\circ$, ქვედა ბოქკოები კი $t_2=10^\circ$.

აეგოთ მლუნავი მომენტის ეპიურა და გამოვთვალოთ ძაბვები, თუ მოცემულია $l=6$ მ, $I=23850$ სმ⁴ (ორტესებრი კვეთი № 40), ხაზობრივი გაფართოების კოეფიციენტი $\alpha=$

$=0.000012$ და დრეკადობის მოდული $E=2 \cdot 10^6$ კგ/სმ².

გადაწყვეტა. უკუვადოთ შუა საყრდენი ღერო, მოვიღებთ სტატიკურად ურკვევად ძირითად სისტემას (ნახ. 139, ბ)

კანონიკური განტოლებადიწერება შემდეგი სახით

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1t} = 0.$$

δ_{11} -ის საპოვნელად ძირითად სისტემაზე ეამოქმედოთ $X_1=1$ და აეგოთ მლუნავი მომენტის ეპიურა (ნახ. 139, გ) მივიღებთ

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^3}{6EI}$$

ნახ. 139.

ტემპერატურისაგან გამოწვეული გადაადგილება X_1 -ის მიმართულებით გამოითვლება (31) ფორმულით.

აქ $N_1=0$ და ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\Delta_{1t} = \alpha \sum \frac{l_1 - l_2}{d} \omega_{N_1} = \alpha \frac{60 - 10}{20} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2l}{2} = \frac{25\alpha l^2}{20}.$$

რადგანაც X_1 და ტემპერატურა კიმავეს ზედა ბოქკოებს, ამიტომ Δ_{1t} აღებულა დადებითი ნიშნით.

შევიტანოთ δ_{11} და Δ_{1t} კანონიკურ განტოლებაში და გადავწყვიტოთ X_1 მიმართ, მივიღებთ

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}} = -\frac{7,5\alpha EI}{l} = -\frac{7,5 \cdot 0,000012 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 23850}{600} = -7150 \text{ კგ.}$$

რეაქცია მიმართულია ქვემოთ და მლუნავი მომენტი იქნება დადებითი.

მაქსიმალური მლუნავი მომენტი საყრდენზე

$$M = \frac{l}{2} X_1 = 300 \cdot 7150 = 2145000 \text{ კგმ.}$$

ტემპერატურისაგან გამოწვეული დაბევა

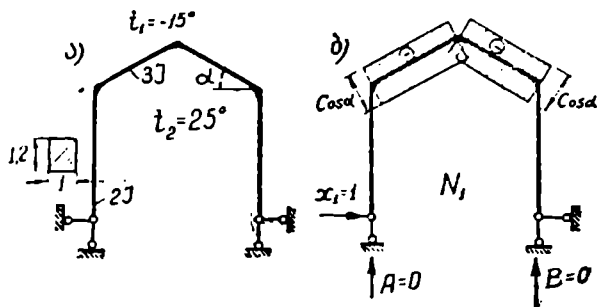
$$\sigma = \frac{M}{I\nu} = \frac{2145000 \cdot 20}{23850} = 1800 \frac{\text{კმ}}{\text{სმ}^2}.$$

როგორც ვხედავთ, ტემპერატურის ცვლილება 50° -ით ძალიან დიდ დაბევებს იწვევს.

შემაგალითოთ. ვიანგარიშოთ 131-ე ნახაზზე მოყვანილი რკინაბეტონის

ჩარჩო (§ 28, მაგალითი 4) არათანაბარ ტემპერატურაზე. შიგნითა ტემპერატურა $t_2 = 25^\circ$, გარეთა ტემპერატურა $t_1 = -15^\circ$ (ნახ. 140) ბაზობრივი გაფართოების კოეფიციენტი $\alpha = 0,00001$.

დგარების განივი კვეთის სიმაღლე $d = 1,0$ მ, რიგელის $d = 1,2$ მ, $l = 0,1$ მ³, დრეკადობის მოდული



ნახ. 140.

$$E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{კმ}}{\text{სმ}^2} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{ტ}}{\text{მ}^2}.$$

გადაწვევტა. ზედმეტ უცნობად მივიღოთ მარცხენა საყრდენის ჰორიზონტალური რეაქცია X_1 (ნახ. 131, ბ).

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0.$$

ერთეული ძალით გამოწვეული გადაადგილება უკვე გამოთვლილი გვქონდა

$$\delta_{11} = \frac{930}{EI}.$$

ვიპოვოთ ტემპერატურით გამოწვეული გადაადგილება

$$\Delta_{1t} = \alpha \sum \left(\frac{t_1 - t_2}{d} \omega_{N1} + \frac{t_1 + t_2}{2} \omega_{N1} \right)$$

ამ ფორმულაში ω_{N1} არის $X_1 = 1$ ძალით გამოწვეული მღუნავი მომენტის ეპიურის (ნახ. 131, გ) ფართობი; ω_{N1} კი იმავე ძალით გამოწვეული გრძივი ძალის ეპიურის (ნახ. 140, ბ) ფართობი.

$$\text{ტემპერატურათა სხვაობა } t_1 - t_2 = -15^\circ - 25^\circ = -40^\circ;$$

$$\text{საშუალო ტემპერატურა } \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{-15 + 25}{2} = 5^\circ,$$

დგარებისათვის

$$\omega_{N_1} = 2 \frac{10 \cdot 10}{2} = 100 \text{ ტმ}^2;$$

რიგელისათვის

$$\omega_{N_1} = 2 \frac{10+13}{2} \cdot 6,73 = 154,8 \text{ ტმ}^2;$$

$$\omega_{N_1} = 2 \cos \alpha \cdot 6,73 = 2 \frac{6}{6,73} \cdot 6,73 = 12 \text{ ტმ}^2;$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1t} &= -\alpha \left(\frac{40}{1,0} \cdot 100 + \frac{40}{1,2} \cdot 154,8 \right) - \alpha \cdot 5 \cdot 12 = -9160\alpha - 60\alpha = \\ &= -9220 \cdot 0,00001 = -0,0922. \end{aligned}$$

ორივე წვერი აღებულია უარყოფითი ნიშნით იმიტომ, რომ ერთეული ძალი-საგან და ტემპერატურისაგან გამოწვეული დეფორმაციები სხვადასხვა ხასიათისაა.

ტემპერატურის გავლენისაგან გამოწვეული რეაქცია იქნება

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}} = \frac{0,0922 \text{ ელ}}{930} = \frac{0,0922 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0,1}{930} = 19,8 \text{ ტ.}$$

გადავამრავლოთ ერთეული ძალისაგან გამოწვეული მღუნავი მომენტის ეპიურა 19,8-ზე, მივიღებთ ტემპერატურით გამოწვეულ ეპიურას.

§ 30. სტატიკურად ურკვევი სისტემების ანგარიში საპარამეტრების გადაადგილებაზე (დაჯდომაზე)

ნაშენთა საყრდენებმა შეიძლება განიცადონ გადაადგილება (დაჯდომა) არა მარტო შემთხვევით (გრუნტის გამორეცხვით საძირკველის ძირზე), არამედ თვით გრუნტის სისუსტის გამოც. სტატიკურად რკვევად სისტემებში საყრდენების გადაადგილება არ იწვევს დამატებით ძალებს, ხოლო სტატიკურად ურკვევ სისტემებში კი, როგორც ეს აღნიშნული იყო, მნიშვნელოვან დამატებით ძალებს იწვევს ნაშენის ელემენტებში. ამიტომ, ჩვენ უნდა ვიცოდეთ ნაშენთა ანგარიშის წესი როგორც გარე დატვირთვაზე და ტემპერატურაზე, ისე საყრდენის გადაადგილებაზე.

საყრდენთა გადაადგილება ყოველთვის მოცემულია ან უშუალოდ ადგილზე გაზომვის, ან წინასწარ გაანგარიშების საფუძველზე.

რადგანაც ძალების გამომწვევი მიზეზი აქ არის საყრდენების გადაადგილება (დაჯდომა), ამიტომ ძირითად კანონიკურ განტოლებებში თავისუფალი წევრები უნდა შევცვალოთ საყრდენების დაჯდომისაგან გამოწვეული გადაადგილებებით სათანადო უცნობების მიმართულებით. ეს გადაადგილებები შეიძლება გამოწვეული იყოს ერთი ან რამდენიმე საყრდენის დაჯდომით.

კანონიკური განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \dots + X_n\delta_{1n} + \Delta_{1c} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \dots + X_n\delta_{2n} + \Delta_{2c} &= 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \dots + X_n\delta_{3n} + \Delta_{3c} &= 0; \end{aligned} \quad (49)$$

$$X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + X_3\delta_{n3} + \dots + X_n\delta_{nn} + \Delta_{nc} = 0.$$

აქ $\Delta_{1c}, \Delta_{2c}, \Delta_{3c}, \dots, \Delta_{nc}$ წარმოადგენენ საყრდენების გადაადგილებით გამოწვეულ გადაადგილებებს $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ უცნობების მიმართულებით.

კანონიკური განტოლების შედგენა განვიხილოთ კონკრეტულ მაგალითზე. ვთქვათ, მოცემული ჩარჩოს მარჯვენა B საყრდენმა გადაინაცვლა L_1 წერტილში და მობრუნდა φ კუთხით (ნახ. 141).

კანონიკური განტოლებების თავისუფალი წევრების (Δ_{ic}) განსაზღვრა დამოკიდებულია ძირითადი სისტემის არჩევაზე და ამიტომ გავარჩიოთ რამდენიმე ვარიანტი.

პირველ ვარიანტ-

ში ზედმეტ უცნობებად ავიღოთ B საყრდენის რეაქციები (ნახ. 141, ბ), რომელთა მოქმედების მიმართულებები საყრდენის გადაადგილების მიმართულებებს ემთხვევა. მოცემულ სისტემაში X_1, X_2 და X_3 უცნობების მიმართულებით გადაადგილებათა ჯამი არ არის ნულის ტოლი და ამიტომ კანონიკური განტოლება გამოსახავს იმ აზრს, რომ საყრდენის გადაადგილება ძირითად სისტემაში X_1, X_2 და X_3 ძალებისაგან გამოწვეული სათანადოდ a, b და φ -ის ტოლია

$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} = -a;$$

$$X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} = -b;$$

$$X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} = \varphi.$$

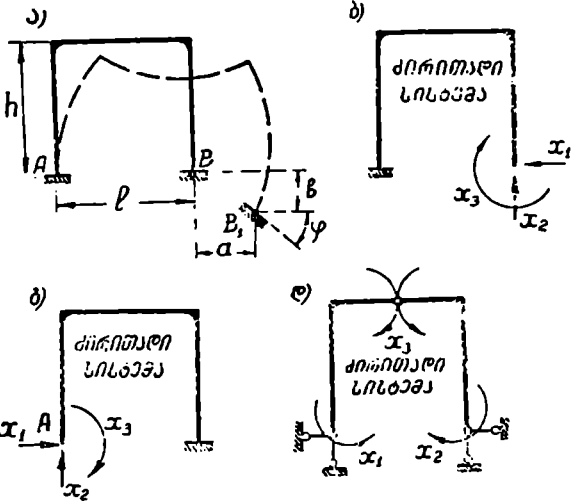
a და b აღებულია უარყოფითი ნიშნით იმიტომ, რომ X_1 -ის და X_2 -ის საყრდენის გადაადგილების საწინააღმდეგო მიმართულებაა აქვს.

გავარჩიოთ მეორე ძირითადი სისტემა (ნახ. 141, გ), კანონიკური განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1c} = 0,$$

$$X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2c} = 0,$$

$$X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3c} = 0,$$

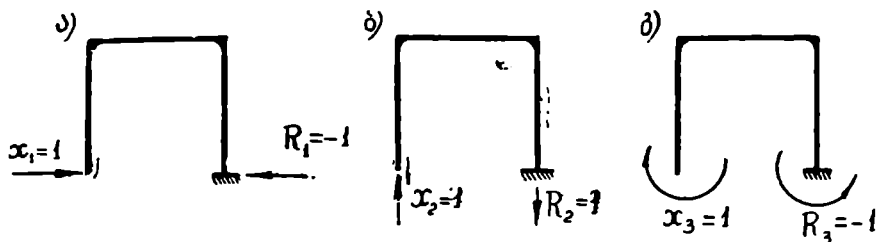


ნახ. 141.

სადაც Δ_{1c} , Δ_{2c} და Δ_{3c} B საყრდენის გადაადგილებით გამოწვეული A წერტილის გადაადგილებაა X_1 , X_2 და X_3 -ის მიმართულებით სტატიკურად რეაქვად-ძირითად სისტემაში და გამოითვლება ფორმულით (§ 16)

$$\Delta_{ic} = -\sum R_{ci} \cdot c_i \quad (50)$$

სადაც R_{ci} არის $X_i=1$ -საგან გამოწვეული რეაქცია B საყრდენზე (იმ საყრდენ-



ნახ. 142.

ზე, რომელიც გადაადგილდა). R_{ci} -ს ავიღებთ დადებითი ნიშნით, თუ მისი მიმართულება ემთხვევა საყრდენის გადაადგილების მიმართულებას.

$X_1=1$ -საგან გამოწვეული რეაქცია B საყრდენზე ტოლია $R_1=-1$ (ნახ. 142, ა) და A საყრდენის (ნახ. 141, გ) პორიზონტალური გადაადგილება გამოწვეული B საყრდენის გადაადგილებით იქნება

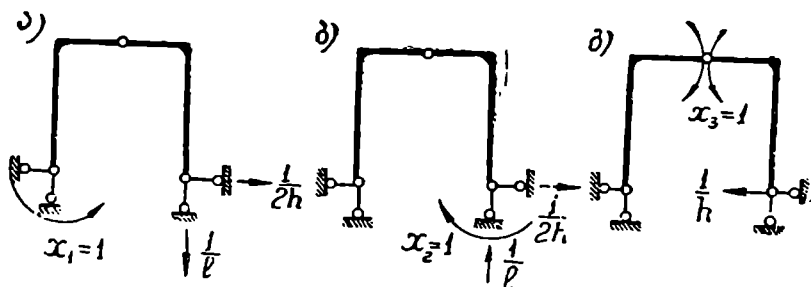
$$\Delta_{1c} = -R_1 a = -(-1)a = a.$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\Delta_{2c} = -R_2 b = -b;$$

$$\Delta_{3c} = -R_3 \varphi = -(-1)\varphi = \varphi.$$

თუ ძირითად სისტემად ავირჩევთ სამსახსრიან ჩარჩოს და ზედმეტ უცნობებად—მომენტებს (ნახ. 141, დ), მაშინ Δ_{1c} , Δ_{2c} და Δ_{3c} მობრუნების კუთხე-



ნახ 143.

ები იქნება სათანადო სახსრებში, გამოწვეული B საყრდენის გადაადგილებით. $X_1=1$, $X_2=1$ და $X_3=1$ -ით გამოწვეული საყრდენი რეაქციები B საყრდენზე მოყვანილია 143-ე ნახაზზე და (50) ფორმულის საფუძველზე მივიღებთ:

$$\Delta_{1c} = - \sum R_{1c} \cdot c = - \left(\frac{1}{l} b + \frac{1}{2h} a \right) = - \frac{b}{l} - \frac{a}{2h};$$

$$\Delta_{2c} = - \sum R_{2c} \cdot c = - \left(-\frac{1}{l} b + \frac{1}{2h} a \right) = \frac{b}{l} - \frac{a}{2h};$$

$$\Delta_{3c} = - \sum R_{3c} \cdot c = - \left(-\frac{1}{h} a \right) = \frac{a}{h}.$$

განვიხილოთ რიცხობრივი მაგალითები.

1 მაგალითი. მუდმივი კვეთის მქონე ორმალიანი კოქის შუა საყრდენი დაჯდა c სმით (ნახ. 144, ა). ვიანგარიშოთ საყრდენი რეაქციები და ავგავთ მლუნაფი მომენტის ეპიურა.

გადაწყვეტა: ავარჩიოთ ძირითადი სისტემა. ზედმეტ უცნობად მივიღოთ მარჯვენა განაპირა საყრდენი რეაქცია (ნახ. 144, ბ).

კანონიკური განტოლება დაიწერება შემდეგი სახით

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1c} = 0.$$

Δ_{1c} არის X_1 -ის მოდების წერტილის გადაადგილება X_1 -ის მიმართულებით, გამოწვეული B საყრდენის დაჯდომით, ძირითად სისტემაში (ნახ. 144, გ). უშუალოდ ნახაზიდან მივიღებთ. რომ

$$\Delta_{1c} = -2c.$$

ნიშანი მინუსი აღებულია იმიტომ, რომ გადაადგილება ხდება X_1 -ის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

Δ_{1c} შეიძლება გამოვთვალოთ (50) ფორმულითაც.

$X_1 = 1$ -საგან გამოწვეული რეაქცია B საყრდენზე $R=2$ (აღებულია დადებითი ნიშნით, რადგან B საყრდენის გადაადგილების მიმართულება აქვს) და, მაშასადამე,

$$\Delta_{1c} = -R \cdot c = -2c.$$

δ_{11} გამოითვლება ჩვეულებრივად

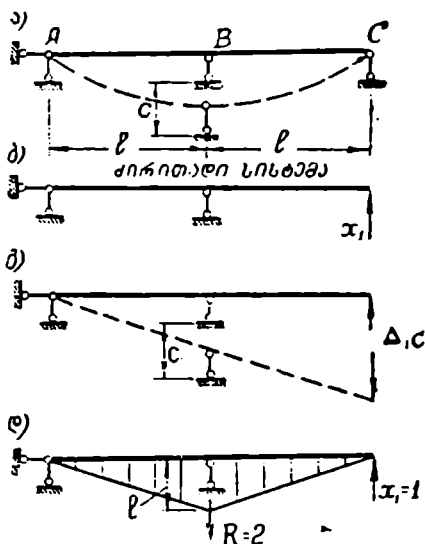
$$\delta_{11} = \frac{2l^3}{3EI}.$$

მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ კანონიკურ განტოლებაში, მივიღებთ

$$X_1 \frac{2l^3}{3EI} - 2c = 0,$$

საიდანაც

$$X_1 = \frac{3EI}{l^3} c.$$



ნახ. 144.

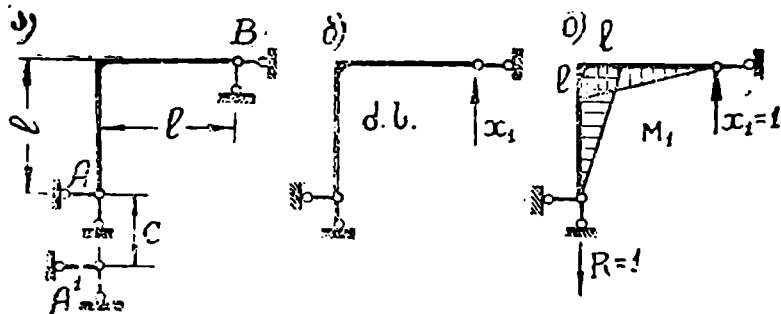
მაქსიმალური მღუნავი მომენტი B საყრდენზე $M = \frac{3EI}{l^2}c$.

მივიღოთ: კოქის მალის სიგრძე $l=10$ მ, განივი კვეთის $I=6 \cdot 10^6$ სმ⁴ დრეკადობის მოდული $E=200000$ კგ/სმ² (ბეტონი) და საყრდენის დაჯდომა $c=1$ სმ. მღუნავი მომენტი საყრდენზე

$$M = \frac{3 \cdot 6 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3}{100^2} \cdot 1 = 36 \text{ ტმ.}$$

როგორც ვხედავთ, საყრდენის ერთი სანტიმეტრით დაწევამ მნიშვნელოვანი მომენტი წარმოშვა.

2 მაგალითი. 145 ნახაზზე ნაჩვენებია ჩარჩოს B საყრდენმა დაიწია ვერტიკალურად c სანტიმეტრით. ავაგოთ მღუნავი მომენტის ეპიურა. $EI = \text{const}$.



ნახ. 145.

გადაწყვეტა. ზედმეტ უცნობად მივიღოთ B საყრდენის ვერტიკალური რეაქცია (ნახ. 145, ბ). ამ რეაქციის საპოვნელად შევადგინოთ კანონიკური განტოლება:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1c} = 0.$$

145, გ ნახაზზე მოყვანილია ერთეული მდგომარეობა. (50) ფორმულის საფუძველზე მივიღებთ

$$\Delta_{1c} = -R \quad c = -1 \cdot c.$$

ერთეული გადაადგილება

$$\delta_{11} = \frac{2l^3}{3EI}.$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$X_1 = \frac{c}{\delta_{11}} = \frac{3EI}{2l^3} c.$$

მაქსიმალური მღუნავი მომენტი იქნება:

$$M = \frac{3EI}{2l^3} c.$$

2 მაგალითი. ორჯერ სტატიკურად ურკვევი ჩარჩოს მარჯვენა საყრდენი გადაადგილდა როგორც ვერტიკალური, ისე ჰორიზონტალური მიმართულებით (ნახ. 146). ავაგოთ მღუნავი მომენტის ეპიურა, თუ $a=b=1$ სმ, $l=10$ მ, $EI = \text{const}$.

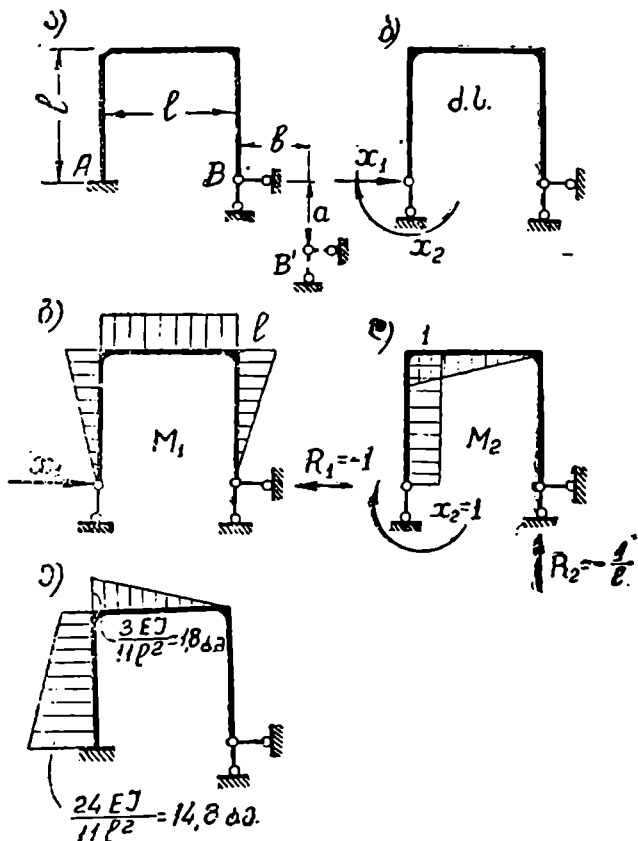
გადაწყვეტა. ზედმეტ უცნობებად მივიღო მარცხენა საყრდენის ჩამაგრების მომენტი და ჰორიზონტალური რეაქცია (ნახ. 146, ბ), მივიღებთ ორსაყრდენზე მდებარე სტატიკურად რკვევად ჩარჩოს.

კანონიკური განტოლება იქნება

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1c} = 0;$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2c} = 0.$$

საყრდენის გადაადგილებით გამოწვეული გადაადგილებანი X_1 და X_2 მიმარ.



ნახ. 146.

თულებით გამოითვლება (50) ფორმულით. $X_1 = 1$ და $X_2 = 1$ მდგომარეობანი. მოყვანილია 146, გ და 146, დ ნახაზზე.

$$\Delta_{1c} = -R_1 \cdot b = -(-1)b = b;$$

$$\Delta_{2c} = -R_2 \cdot a = -\left(-\frac{1}{l}\right)a = \frac{a}{l}.$$

გადაადგილებანი

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(2 \frac{l^2}{2} \frac{2}{3} l + l^3 \right) = -\frac{5l^3}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left(l + \frac{l}{3} \right) = \frac{4l}{3EI};$$

$$\delta_{12} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{l^3}{2} + \frac{l^2}{2} \right) = -\frac{l^2}{EI}.$$

განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$X_1 \frac{5}{3} l^3 - X_2 l^3 + bEl = 0;$$

$$-X_1 l^2 + X_2 \frac{4}{3} l + \frac{a}{l} El = 0.$$

აბ

$$\frac{5}{3} l^2 X_1 - l X_2 = -\frac{bEl}{l};$$

$$-l X_1 + \frac{4}{3} X_2 = -\frac{aEl}{l^2}.$$

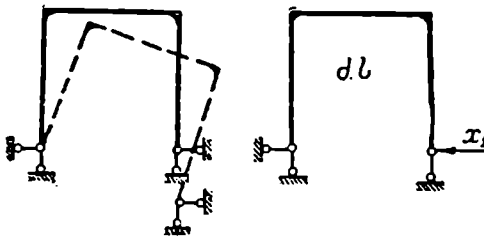
გადაწყვეტა მოგვცემს

$$X_1 = -\frac{21}{11} \frac{El}{l^3}; \quad X_2 = -\frac{24}{11} \frac{El}{l^2}.$$

მივიღოთ $l = \frac{40 \cdot 80^3}{12} = 3400000$ სმ³. მღუნავი მომენტის საბოლოო მნიშვნე-

ლობა მოყვანილია 146, ე ნახაზზე.

არის შემთხვევები, როდესაც სტატიკურად ურკვევ სისტემებში საყრდენების დაჯდომა არ იწვევს ძალებს.



ნახ. 147.

მაგალითად, ორსახსრიანი (ნახ. 147) ჩარჩოს (ან თალის) რომელიმე საყრდენის ვერტიკალური გადაადგილება არ გამოიწვევს არაფეთარ ძალებს.

ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ ავირჩევთ ძირითად სისტემას და შევადგენთ კანონიკურ განტოლებას:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1e} = 0.$$

B საყრდენის გადაადგილება X_1 -ის მიმართულებით $\Delta_{1e} = 0$ და $X_1 = 0$.

საყრდენები სხვადასხვა სიმაღლეზე რომ ყოფილიყო, მაშინ $X_1 \neq 0$ და წარმოიშებოდა დამატებითი ძალები.

ა) ურთიერთ ნულოვანი ეპიურების წესი. უცნობთა მიმართულების არჩევა

უცნობების რიცხვის ზრდასთან ერთად რთულდება კანონიკური განტოლებები და ცხადია, რომ მისი კოეფიციენტების გამოთვლა და განტოლებათა სისტემის გადაწყვეტა ბევრ არითმეტიკულ გამოთვლებს მოითხოვს. გარდა ამისა განტოლებათა სისტემის გადაწყვეტა მაქსიმალური სიზუსტით უნდა მოხდეს. ამიტომ კანონიკურ განტოლებათა სისტემის გამარტივებას განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა. კანონიკური განტოლებები გამარტივდება, თუ არამთავარი გადაადგილებები ექცევა ნულად. ამას მივალწევთ ძირითადი სისტემის მოხერხებულად არჩევით.

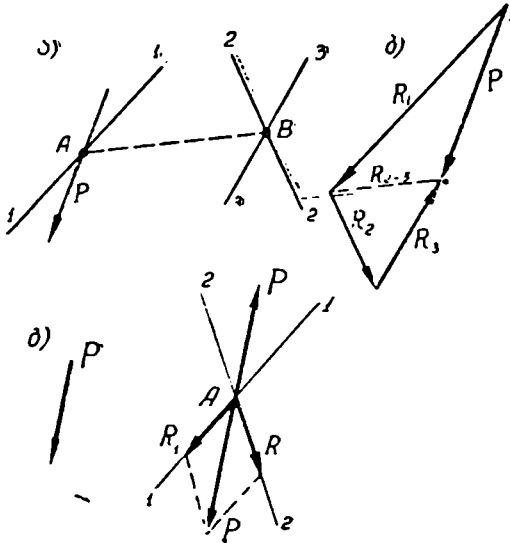
მაშასადამე, ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ უცნობების მიმართულბანი და მოდების წერტილები ისე ავირჩიოთ, რომ არამთავარი გადაადგილებები იქცეს ნულად. ამ გამარტივების აზრის სიცხადისათვის საჭიროა ვიცოდეთ უცნობთა გარდაქმნის და ერთი უცნობის მეორით შეცვლის წესები.

დავამტკიცოთ უცნობების შემადგენელ ნაწილებად დაშლის ორი თეორემა. პირველი თეორემა. ძალა P , რომლის სიდიდე და მიმართულება ცნობილია, ყოველთვის შეგვიძლია დავშალოთ მოცემულ სამ მიმართულებით, თუ სამივე მიმართულება არ არის ურთიერთ პარალელური.

ვთქვათ, მოცემულია ძალა P და სამი მიმართულება (ნახ. 148, ა); P ძალა A წერტილში დაეშალოთ 1 და Al მიმართულებით; მივიღებთ R_1 -ს და R_{2-3} -ს. ამის შემდეგ, R_{2-3} დავშალოთ B წერტილში მე-2 და მე-3 მიმართულებით: მივიღებთ R_2 და R_3 -ს (ნახ. 148, ბ). ეს თეორემა სამართლიანია მაშინაც, თუ ორი რომელიმე მიმართულება ურთიერთ პარალელურია.

მეორე თეორემა. ძალა P შეგვიძლია დავშალოთ მოცემული ორი მიმართულებით მოქმედ ძალად და წყვილ ძალად.

მოცემულ ორ 1 და 2 მიმართულების გადაკვეთის წერტილზე ვიმოქმედოთ ორი ერთმანეთის ტოლი და საწინააღმდეგო მიმართულების ძალით

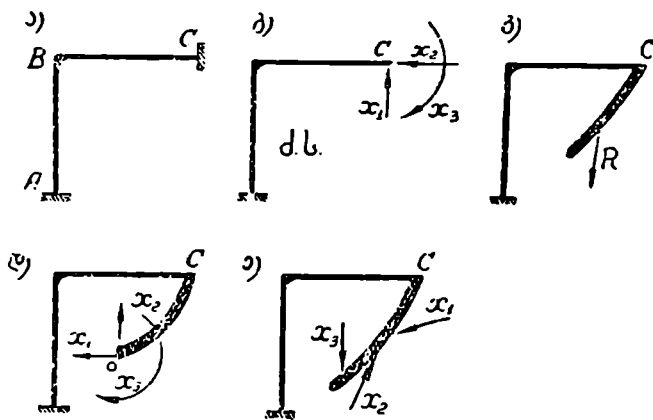


ნახ. 148.

(ნახ. 148, გ). რომელთაგან ერთი დავშალოთ 1 და 2 მიმართულებით R_1 და R_2 მდგენელებად. მეორე ძალა მოცემულ ძალასთან ერთად მოგვცემს წვეილ-ძალას. გარჩეული თეორემები საშუალებას იძლევა უცნობები გადავიტანოთ ერთი ადგილიდან მეორეზე და შევცვალოთ ნებისმიერი მიმართულებით მოქმედ ძალებად.

გარდა ამისა, ძალა (უცნობი) შეგვიძლია დავშალოთ არა მარტო ურთიერთ პერპენდიკულარულ მდგენელებად, როგორც ეს ხშირად გვხვდება, არამედ ორი ნებისმიერი მიმართულებით.

გავარჩიოთ კონკრეტული მაგალითები. მოცემულია ორი ბოლოთი ხისტად ჩაბაგრებული სამჯერ სტატიკურად ურკვევი ჩარჩო (ნახ. 149, ა). უკუ-



5ახ. 149.

ვადლოთ მარჯვენა საყრდენი ბმები და მიღებულ ძირითად სისტემაზე ვაპოქმედოთ უცნობი ძალები X_1 , X_2 და X_3 (ნახ. 149, ბ). მეორე თეორემის თანახმად ეს ძალები შეიძლება შეიცვალოს ერთი ძალით R -ით, რომელიც არ გაივლის C წერტილში (ნახ. 140, გ). ამის უფლება ჩვენ გვაქვს იმ შემთხვევაში, თუ ნახ. 149, გ სქემის მუშაობის პირობები იქნება ისეთივე, როგორც მოცემული სისტემის ან ნახ. 149, ბ სქემის, ე. ი. C წერტილი დარჩება უძრავად. ამას მივიღებთ თუ R ძალა მოქმედებს C კვეთთან დაკავშირებულ უსასრულო სიხისტის მქონე კონსოლზე, რომელიც არაერთარ დეფორმაციას არ განიცდის.

იმავე თეორემის საფუძველზე ძალა R დაიშლება ნებისმიერ მიმართულებით მოქმედ ძალად და წვეილძალად (ნახ. 149, დ). პირველი თეორემის ძალით კი R დაიშლება არჩეული სამი მიმართულებით (ნახ. 149, ე).

უპტიურად ჩვენ გავარჩიეთ ძირითადი სისტემის არჩევის სხვადასხვა ვარიანტი, სადაც უცნობები მოქმედებენ ან ჩარჩოს რომელიმე კვეთზე ან მასთან დაკავშირებულ უსასრულო სიხისტის მქონე კონსოლზე. რადგანაც ძალების მოდების წერტილები და მიმართულებანი ნებისმიერად შეიძლება ავირჩიოთ, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ძირითადი სისტემის არჩევის

მრავალი ვარიანტი, რომელთაგან საანგარიშოდ მივიღებთ იმას, რომელიც მეტ გამარტივებას იძლევა.

ზემოთ გარჩეული ჩარჩოსათვის ძირითადი სისტემა ავირჩიოთ ისე, როგორც ნაჩვენებია 150-ე ნახაზზე. კანონიკური განტოლების კოეფიციენტების გამოსათვლელად ძირითად სისტემაზე ვიმოქმედოთ ერთეული ძალებით და ავაგოთ მლუნაყი მომენტის ეპიურები (ნახ. 151). X_2 -ის მიმართულება არჩეულია ისე, რომ ღეროები გადაიკვეთოს სიგრძის მესამედზე. ეპიურების გადამრავლება ვერეშჩაგინის წესით მოგვცემს $\delta_{12} = 0$, რადგან M_1 და M_2 -ს არა აქვთ საერთო უბანი. M_1 და M_2 ეპიურების დართობების სიმძიმის ცენტრების გასწვრივ M_3 ეპიურის ორდინატა ნულის ტოლია და ამიტომ მათი კომბინაცია მოგვცემს

$$\delta_{12} = \delta_{23} = 0.$$

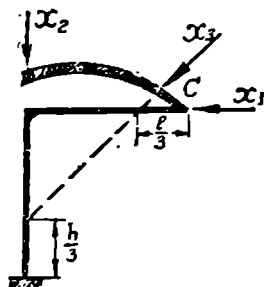
კანონიკური განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0;$$

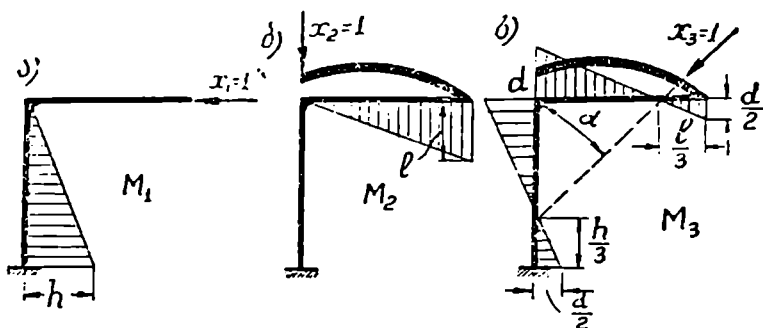
$$X_2 \delta_{22} + \Delta_{2p} = 0;$$

$$X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} = 0.$$

მე-2 და მე-3 განტოლება კონსოლზე აღებული წერტილების უძრავობის პირობას გამოსახავს. რადგანაც ფიქტიური კონსოლი თავისი უსასრულოდ დიდი სიხისტის გამო დეფორმაციას არ განიცდის, ამიტომ C კვეთიც იქნება უძრავი. მაშასადამე, ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია დაწვეროთ კანონიკური



ნახ. 150.



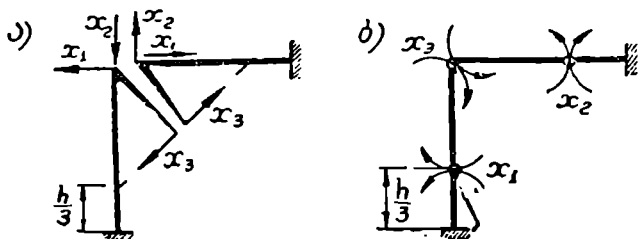
ნახ. 151.

განტოლება კონსოლის ნებისმიერ წერტილზე მოქმედი ძალებისათვის ჩვეულებრივი სახით.

ერთეული ძალებისაგან გამოწვეული ეპიურები კონსოლებზე არ არის აგებული, რადგან ისინი გადაადგილებათა სიდიდეზე ვავლენას არ ახდენენ; $EI = \infty$, $EF = \infty$ და სათანადო ინტეგრალები კონსოლებისათვის ნულად იქცევა.

ხისტი კონსოლი შეიძლება მიმაგრებული იყოს ნებისმიერ შუალედ კვეთ-შიც, როგორც ეს ნაჩვენებია 152, ა ნახაზზე.

152, ბ ნახაზზე მოყვანილია ძირითადი სისტემა, სადაც უცნობებად მი-ღებულია მღუნავი მომენტები სათანადო კვეთებში. ორივე ამ შემთხვევაში

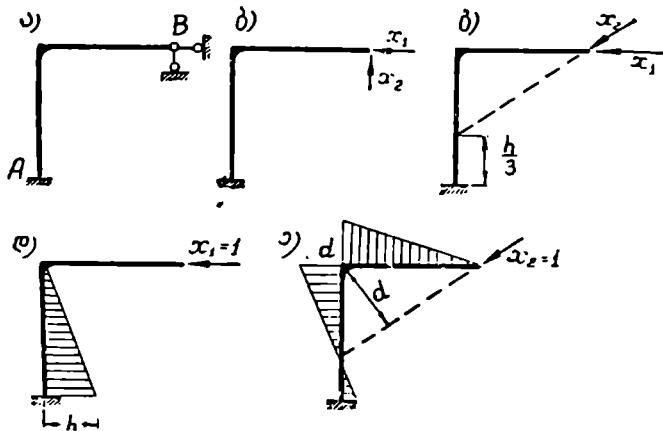


ნახ. 152.

ეპიურებს ექნებათ ისეთივე მოხაზულობა, როგორც წინა მაგალითში და ყვე-ლა არამთავარი გადაადგილება იქცევა ნულად.

ურთიერთ ნულოვანი ეპიურები შეიძლება მივიღოთ ორჯერ სტატიკურად ურკვევ სისტემაშიც, თუ უცნობების მიმართულებებს ავირჩევთ სათანადოდ.

მაგალითად, 153 ნახაზზე მოყვანილი სისტემის საანგარიშოდ უცნობე-ბად შეიძლება მივიღოთ B საყრდენი რეაქციის როგორც ორთოგონალური X_1 და X_2 (ნახ. 153, ბ), ისე ნებისმიერი მიმართულების მდგენელები (ნახ.



ნახ. 153.

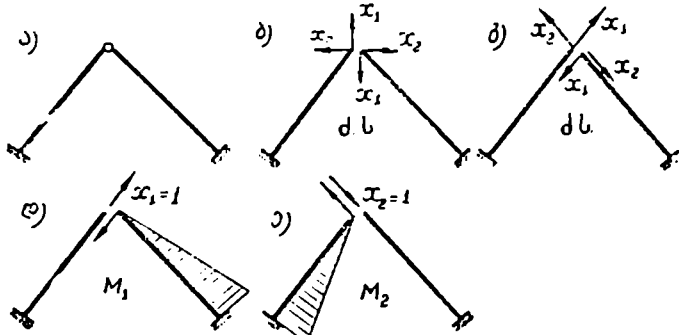
153, გ), რადგან ტოლქმედი ძალა (რეაქცია) ყოველთვის შეიძლება დაიშალოს ორი ნებისმიერი მიმართულებით. თუ X_2 -ის მიმართულებას ავირჩევთ ისე, რომ ის კვეთს დგარს სიმაღლის მესამედზე, როგორც ზემოთ განხილულ მაგალი-თებში, მაშინ ერთეული ეპიურები იქნება ურთიერთ ნულოვანი (ნახ. 153, დ, ე) და $\bar{c}_{11} = 0$.

როგორც ვხედავთ, შემადგენელი ძალების მიმართულების შეცვლით არა-მთავარი გადაადგილებები შეიძლება ნულად იქცეს. კანონიკური განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0;$$

$$X_2 \delta_{22} + \Delta_{2p} = 0.$$

განვიხილოთ სხვა შემთხვევა (ნახ. 154). ძირითადი სისტემა შეიძლება ავირჩიოთ ისე, როგორც ნაჩვენებია 154, ბ ნახაზზე, ე. ი. ვაქვრათ სახსარზე



ნახ. 154.

და ვამოქმედოთ ორთოგონალური ძალები X_1 და X_2 . მათგან გამოწვეული ეპიურები ორივე ღეროზე ვაგორცლებმა და არაერთარ გამარტივებას არ მივიღებთ. თუ უცნობების მიმართულებებს შევეცვლით და დავამთხვევთ ღეროების ღერძებს (ნახ. 154, გ), მაშინ მივიღებთ ურთიერთ ნულოვან ეპიურებს და $\delta_{12} = 0$. კანონიკური განტოლება გამართლება.

ბ) უცნობების გადატანა სიმძიმის ღრეკად ცენტრში

ჩვენ შევისწავლეთ უცნობების გარდაქმნის წესი, მათი ხისტი კონსოლზე გადატანის საშუალებით. განხილულ მარტივ შემთხვევებში ძალების მიმართულების და მოდების წერტილის არჩევა უშუალოდ ხდებდა.

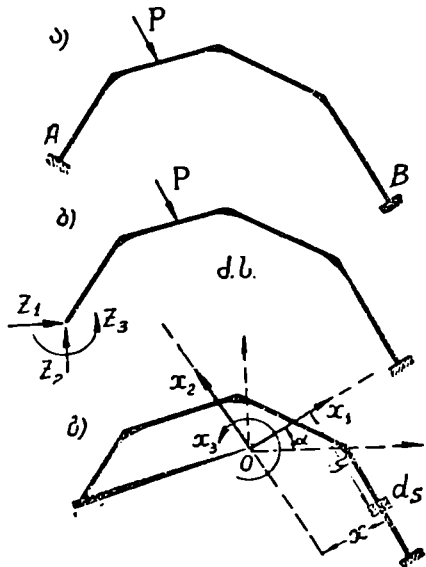
ხისტი კონსოლი შეიძლება გამოყენებული იყოს უფრო რთულ შემთხვევაშიც, როდესაც წინასწარ შეუძლებელია უცნობთა მოდების წერტილების და მიმართულების არჩევა.

წარმოვიდგინოთ სამჯერ სტატიკურად ურკვევი სისტემა (ნახ. 155). უკუვადლოთ მარცხენა საყრდენი ღეროები და მათ მაგიერ ვამოქმედოთ უცნობი ძალები Z_1 , Z_2 და Z_3 (ნახ. 155, ბ).

უცნობების ამოსახსნელად ჩვენ მოგვიხდება შევადგინოთ სამუცნობიანი სამი განტოლება.

Δ კვეთზე მივამაგროთ უსასრულოდ ხისტი კონსოლი და უცნობები გადავიტანოთ მის ბოლოზე (ნახ. 155, გ). ახალი უცნობები X_1 , X_2 და X_3 რიცხობრივად განსხვავდება პირვანდელი უცნობებისაგან. თუ კონსოლის ბოლო

წერტილი O იქნება უძრავი, მაშინ ცხადია, რომ კონსოლის სიხისტის გამო Δ კვეთიცი იქნება უძრავი და, ამგვარად, გარდაქმნილი ძირითადი სისტემა (ნახ. 155, გ) მოცემული სისტემის ეკვივალენტური იქნება.



ნახ. 155.

O წერტილის უძრავობის პირობა გამოისახება სათანადო კანონიკური განტოლებებით:

$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1P} = 0;$$

$$X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2P} = 0;$$

$$X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3P} = 0.$$

ამ განტოლებებში შემავალი კოეფიციენტები წარმოადგენს კონსოლის O წერტილის გადაადგილებებს და ცხადია მათი სიდიდეები დამოკიდებულია კონსოლის სიგრძეზე (O წერტილის მდებარეობაზე) და უცნობთა მიმართულებაზე.

ჩვენ შეგვიძლია კონსოლის სიგრძე და უცნობთა მიმართულებანი ისე ავირჩიოთ, რომ ყველა არამთავარი გადაადგილება ნულად იქცეს

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = 0.$$

მაშინ კანონიკური განტოლებები გამარტივდება და მიიღებს შემდეგ სახეს

$$X_1\delta_{11} + \Delta_{1P} = 0;$$

$$X_2\delta_{22} + \Delta_{2P} = 0;$$

$$X_3\delta_{33} + \Delta_{3P} = 0.$$

(ა)

სისტემის ნებისმიერ წერტილის კოორდინატები X_1 და X_2 ღერძების მიმართ აღენიშნოთ x, y , მაშინ ერთეული ძალებისაგან გამოწვეული მლუნავი მომენტები ნებისმიერ კვეთში იქნება:

$$M_1 = 1 \cdot y;$$

$$M_2 = 1 \cdot x;$$

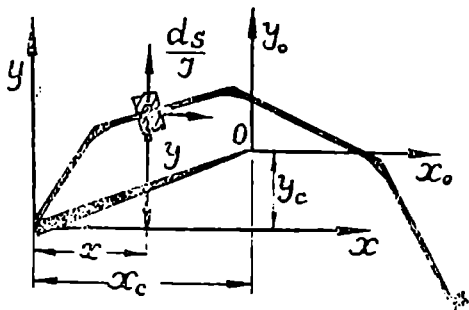
$$M_3 = -1.$$

მორის ფორმულის საფუძველზე მივიღებთ:

$$\delta_{12} = \int \frac{M_1 M_2 ds}{EI} = \int \frac{xy ds}{EI} = 0;$$

$$\delta_{13} = \int \frac{M_1 M_3 ds}{EI} = - \int \frac{y ds}{EI} = 0;$$

$$\delta_{23} = \int \frac{M_2 M_3 ds}{EI} = \int \frac{x ds}{EI} = 0.$$



ნახ. 156.

Е-ზე შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$\int xy \frac{ds}{I} = 0; \quad \int y \frac{ds}{I} = 0; \quad \int x \frac{ds}{I} = 0. \quad (b)$$

$\frac{ds}{I}$ წარმოვიდგინოთ ფაქტიურ ელემენტარულ ძალად, მაშინ (b) განტოლებების პირველი ინტეგრალი იქნება ამ ძალების ცენტრიდან ინერციის მომენტი X_1 და X_2 ღერძების მიმართ, ხოლო ორი უკანასკნელი ინტეგრალი კი სტატიკური მომენტი X_1 და X_2 ღერძების მიმართ.

როგორც მასალათა გამძლეობიდან ცნობილია, სტატიკური მომენტები იქცევა ნულად მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც კოორდინატთა სათავე O წერტილი ემთხვევა ფიქტიური ძალების სიმძიმის ცენტრს (ძალთა ტოლქმედი გადის O წერტილზე) და ცენტრიდან ინერციის მომენტი იქცევა ნულად, თუ X_1 და X_2 ღერძი ემთხვევა ინერციის მთავარ ცენტრალურ ღერძებს.

ამგვარად, ორი თავით ხისტად ჩამაგრებული სამჯერ სტატიკურად ურკვევი ჩარჩოს ანგარიშის დროს, არამთავარი გადაადგილებები რომ იქცნენ ნულად, O წერტილი უნდა დაემთხვეს ფიქტიური ძალების სიმძიმის ცენტრს, და უცნობების მიმართულებანი კი იმავე ძალების ინერციის მთავარ ღერძებს.

რადგანაც O წერტილის მდებარეობა დამოკიდებულია ჩარჩოს დრეკად თვისებებზე (ინერციის მომენტზე), ამიტომ მას სიმძიმის დრეკადი ცენტრი ეწოდება.

$\frac{ds}{I}$ სიდიდეთა სიმძიმის ცენტრს და ინერციის მთავარ ღერძებს ვიპოვით ცნობილი წესების საშუალებით.

156-ე ნახაზიდან ცხადია რომ $\frac{ds}{I}$ ფიქტიური ძალების, სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები განისაზღვრება ფორმულებით

$$x_c = \frac{\int x \frac{ds}{I}}{\int \frac{ds}{I}}, \quad y_c = \frac{\int y \frac{ds}{I}}{\int \frac{ds}{I}}, \quad (51)$$

სადაც მრიცხველები წარმოადგენს $\frac{ds}{I}$ ძალების სტატიკური მომენტების ჯამს y და x ღერძების მიმართ, მნიშვნელი კი ამ ძალების ჯამია.

თუ სისტემა ტეხილი ელემენტებისაგან შედგება, მაშინ

$$x_c = \frac{\sum_1^n x \frac{S_i}{I_i}}{\sum_1^n \frac{S_i}{I_i}}; \quad y_c = \frac{\sum_1^n y \frac{S_i}{I_i}}{\sum_1^n \frac{S_i}{I_i}}, \quad (51')$$

სადაც I_i და S_i — i ღეროს ინერციის მომენტი და სიგრძეა.

მთავარი ღერძების მიმართულება განისაზღვრება ფორმულით:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{x_0}y_0}{I_{x_0}I_{y_0}} . \quad (52)$$

აქ I_{x_0} , I_{y_0} და $I_{x_0}y_0$ ინერციის მომენტები და ცენტრიდან ინერციის მომენტია x_0 და y_0 ღერძების მიმართ (ნახ. 156).

თუ მოცემული სისტემა სიმეტრიულია, მაშინ ინერციის მთავარი ღერძები დაემთხვევა სიმეტრიის ღერძებს და უცნობთა მიმართულება მირტივად განისაზღვრება. არასიმეტრიულ ჩარჩოში უცნობთა მიმართულების განსაზღ-

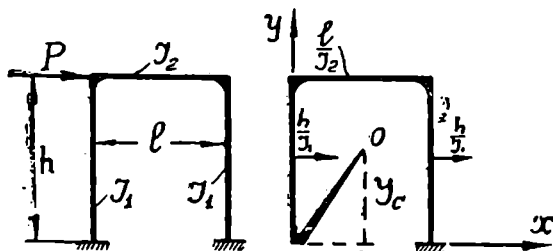


ნახ. 157.

ვრა (52) ფორმულით დამატებით გამოთვლებს მოითხოვს და ფაქტიურად არავითარ გამარტივებას არ იძლევა. ამიტომ არასიმეტრიული სისტემების საანგარიშოდ ღრეკადი ცენტრის მეთოდს იშვიათად იყენებენ.

• თუ სისტემას სიმეტრიის ერთი ღერძი აქვს, მაშინ საჭირო იქნება განისაზღვროს მხოლოდ ერთი კოორდინატი; სიმეტრიის ორი ღერძის შემთხვევაში სიმძიმის ღრეკადი ცენტრი დაემთხვევა სისტემის გეომეტრიულ ცენტრს.

ნაშენი რომ სიმეტრიულად ჩაითვალოს მისი ელემენტების განივი კვეთის ზომები სიმეტრიულად ერთმანეთის ტოლი უნდა იყოს, ე. ი. უნდა არსებობდეს ე. წ. ღრეკადი სიმეტრია.



ნახ. 158.

157 ნახაზზე მოყვანილია სისტემები, სადაც უცნობების გადატანა ღრეკად ცენტრში მნიშვნელოვან გამარტივებას იძლევა.

1 მაგალითი. მოცემულია სიმეტრიული სამჯერ სტატიკურად ურკვევი სისტემა (ნახ. 158). ვიანგარიშოთ ღრეკადი ცენტრის მეთოდით.

გადაწყვეტა. ვიპოვოთ ღრეკადი ცენტრის მდებარეობა. რადგანაც ჩარჩო სიმეტრიულია, საჭიროა განისაზღვროს ერთი კოორდინატი y_c , $x_c = \frac{l}{2}$.

ცალკეულ ღეროს სიგრძეზე ინერციის მომენტი მუდმივია და ამიტომ d_s მონაკვეთი შეიცვლება სათანადოდ h და l -ით.

სტატიკური მომენტების ღერძები y , x ნაჩვენებია 158, ბ ნახაზზე.

სიმძიმის დრეკადი ცენტრის ორდინატა (ფორ. 51)

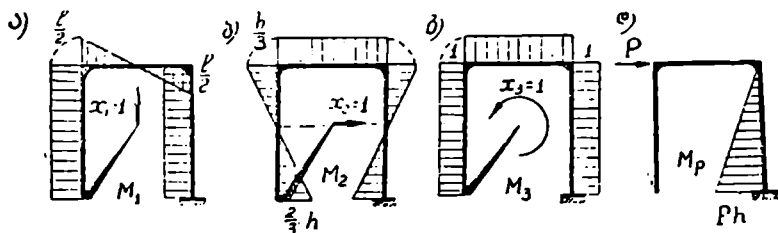
$$y_c = \frac{\int y \frac{ds}{I}}{\int \frac{ds}{I}} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \frac{S_i}{I_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{S_i}{I_i}} = \frac{2 \frac{h_1}{I_1} \cdot \frac{h_1}{2} + \frac{l}{I_2}}{2 \frac{h_1}{I_1} + \frac{l}{I_2}} h = \frac{\frac{h_1^2}{I_1} + \frac{lh_1}{I_2}}{2 \frac{h_1}{I_1} + \frac{l}{I_2}} = h \frac{k+1}{2k+1},$$

სადაც $k = \frac{h \cdot I_2}{l \cdot I_1}$.

თუ $I_1 = I_2$ და $h = l$, ნაშინ $k = 1$, $y_c = \frac{2}{3} h$. რიგელის ინერციის მომენტის ვაზრდით დრეკადი ცენტრი ქვემოთ გადაადგილდება.

ეთქვათ, $I_2 = 2I_1$, მაშინ $k = 2$ და $y_c = \frac{3}{5} h$.

გამარტივებული კანონიკური განტოლება მოყვანილია ზემოთ (ფორ. ა). ვადაადგილებათა გამოსათვლელად ძირითად სისტემაზე დრეკად ცენტრში



ნახ. 159.

ვიმოქმედოთ ერთეული ძალებით და აევაგოთ მლუნავი მომენტის ეპიურები (ნახ. 159).

შემდგომი ანგარიში წარმოებს ჩვეულებრივი წესით და აქ არ მოგვყავს. Σ მაგალითი. ვიანგარიშოთ ორმალიანი ჩარჩო (ნახ. 160).

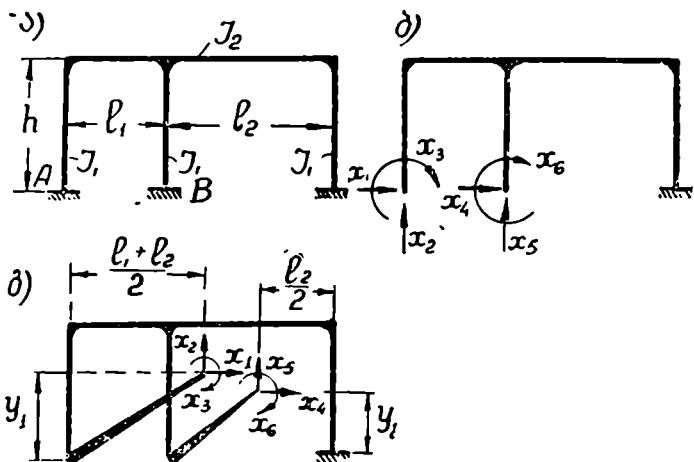
გადაწვევება. ჩარჩო 6-ჯერ სტატიკურად ურკვევია. თუ უქუევაგდებთ A და B საყრდენ ღეროებს, მივიღებთ ძირითად სისტემას (ნახ. 160, ბ). ადვილად შევამჩნევთ, რომ კანონიკური განტოლების არც ერთი კოეფიციენტი არ იქცევა ნულად და, მაშასადამე, არჩეული ძირითადი სისტემა არავითარ გამარტივებას არ იძლევა. ამოცანის ამოსახსნელად მოგვიხდება 6-უცნობიანი განტოლებათა სისტემის შედგენა და გადაწვევება.

ამოცანის გამარტივების მიზნით უცნობები გადავიტანოთ უსასრულო სიხისტის მქონე კონსოლის ბოლოზე დრეკად ცენტრში (ნახ. 160, გ). აქ გვექნება ორი დრეკადი ცენტრი—ერთი მთლიანი ჩარჩოსათვის, მეორე კი—მარჯვენა მალისათვის. დრეკადი ცენტრის კოორდინატები განისაზღვრება ცალ-ცალკე, როგორც ერთმალიანი ჩარჩოსათვის.

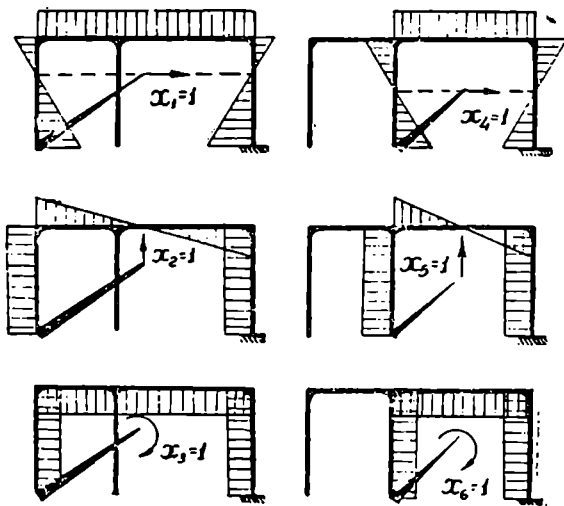
ორდინატები:

$$y_1 = \frac{2 \frac{h}{I_1} \frac{h}{2} + \frac{l_1 + l_2}{I_2} h}{2 \frac{h}{I_1} + \frac{l_1 + l_2}{I_2}};$$

$$y_2 = \frac{2 \frac{h}{I_1} \frac{h}{2} + \frac{l_2}{I_2} h}{2 \frac{h}{I_1} + \frac{l_2}{I_2}}.$$



ნახ. 160.



ნახ. 161.

161 ნახაზზე აგებულია ერთეული ძალებით გამოწვეული მდუნავი წომენ-
ტის ეპიურები. აქ გადაადგილებინი

$$\bar{c}_{12} = \bar{c}_{13} = \bar{c}_{23} = 0; \quad \bar{c}_{45} = \bar{c}_{46} = \bar{c}_{56} = 0.$$

და კანონიკურ განტოლებათა სისტემის თითოეულ განტოლებაში შეეა 4 უცნობი.

გადაადგილებათა ანგარიში და განტოლებათა გადაწყვეტა პრინციპულ სირთულეს აღარ წარმოადგენს.

§ 32. სიმეტრიის გამოყენება

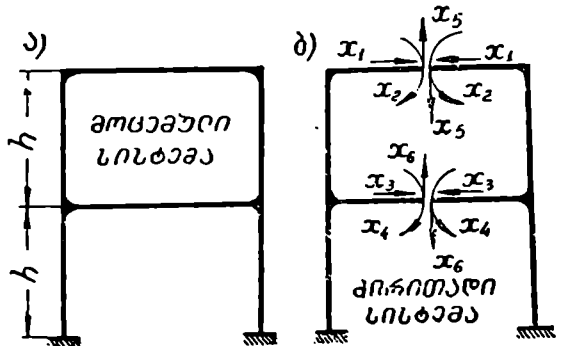
წინა პარაგრაფში აღენიშნეთ, რომ ძირითადი სისტემა ისე უნდა იყოს არჩეული, რომ რაც შეიძლება მეტი არამთავარი გადაადგილებები იქცნენ ნულად, ე. ი. მივიღოთ ისეთი ეპიურები, რომელთა გამამრავლება შოგვეცემს ნულს.

ძალთა მეთოდით ჩარჩოს ანგარიშის ძირითადი სირთულე კანონიკური განტოლების გადაწყვეტაში მდგომარეობს და ამიტომ ჩვენი ყურადღება მის გამარტივებისაკენ უნდა იყოს მიმართული. საგრძნობ გამარტივებას მივიღებთ, თუ კანონიკურ განტოლებათა სისტემა გაიყოფა ორ დამოუკიდებელ ნაწილად.

სიმეტრიული ჩარჩოს ანგარიშის დროს უნდა ავირჩიოთ სიმეტრიული ძირითადი სისტემა. ეს მდგომარეობს იმაში, რომ ზედმეტი უცნობები უნდა გაიყოს ორ ნაწილად—სიმეტრიულ და ირიბადსიმეტრიულ უცნობებად.

სიმეტრიულ უცნობებს ვეძახით ისეთ უცნობებს, რომლებიც იძლევა სიმეტრიულ ეპიურებს, ირიბადსიმეტრიულს კი, რომლებიც იძლევა ირიბადსიმეტრიულ ეპიურებს.

განვიხილოთ ორსართულიანი სიმეტრიული ჩარჩო (ნახ. 162, ა). ჩარჩო გავკვეთოთ სიმეტრიის ღერძზე და ვიმოქმედოთ შინაგანი ძალებით— X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 და X_6 , მივიღებთ სიმეტრიულ ძირითად სისტემას (ნახ. 162, ბ).



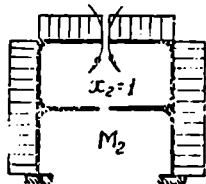
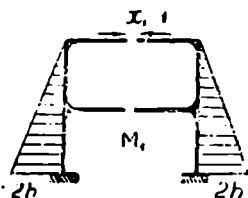
ნახ. 162.

X_1 , X_2 , X_3 და X_4 სიმეტრიის ღერძის მიმართ იძლევა სიმეტრიულ ეპიურებს (ნახ. 163), X_5 და X_6 კი ირიბადსიმეტრიულ ეპიურებს (ნახ. 164). ამგვარად, უცნობები გაიყო სიმეტრიულ და ირიბადსიმეტრიულ უცნობებად. დავამტკიცოდ შემდეგი თეორემა.

არამთავარი გადაადგილებები, რომლებიც მიიღებებიან სიმეტრიული და ირიბადსიმეტრიული ეპიურების კომბინაციის შედეგად, ტოლია ნულისა, ე. ი. სიმეტრიული და

ირიბადსიმეტრიული ეპიურები ურთიერთ ორთოგონალურია.

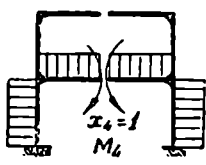
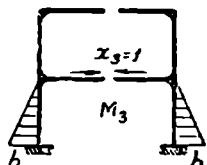
გავისენოთ გადაადგილების საერთო ფორმულა.



$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_1 ds}{EI}$$

მაგალითად, ჩვენ თუ გვინდა განვსაზღვროთ δ_{11} , უნდა მოვახდინოთ M_1 და M_2 ეპიურების კომბინაცია:

$$\delta_{15} = \int \frac{M_1 M_5 ds}{EI}$$



ეს ინტეგრალი ალგებრული მარცხენა ნახევარჩარჩოსათვის მოგვცემს უარყოფით სიდიდეს, ხოლო მარჯვენა ნახევარათლისათვის კი დადებითს. აბსოლუტური სიდიდით ისინი ერთნაირია და

ნახ. 163.

მათი ჯამი იქნება ნულის ტოლი. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ გადაადგილებები

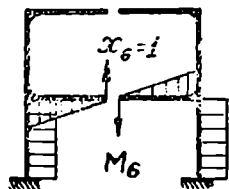
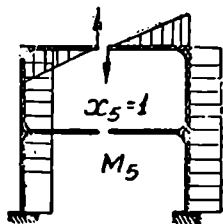
$$\delta_{25} = \delta_{35} = \delta_{45} = 0$$

და

$$\delta_{16} = \delta_{26} = \delta_{36} = \delta_{46} = 0.$$

ამავე შედეგს მივიღებთ, თუ გადაადგილებებს წარმოვიდგენთ გეომეტრიულად.

მაგალითად, δ_{15} არის $X_1=1$ ძალის მოდების წერტილის გადაადგილება პორიზონტალური მიმართულებით, გამოწვეული $X_5=1$ ძალით.



ნახ. 164.

საერთო კანონიკური განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + X_4 \delta_{14} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + X_4 \delta_{24} + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + X_4 \delta_{34} + \Delta_{3p} &= 0; \\ X_1 \delta_{41} + X_2 \delta_{42} + X_3 \delta_{43} + X_4 \delta_{44} + \Delta_{4p} &= 0. \end{aligned} \right\} (a)$$

$$\left. \begin{aligned} X_5 \delta_{55} + X_6 \delta_{56} + \Delta_{5p} &= 0; \\ X_5 \delta_{65} + X_6 \delta_{66} + \Delta_{6p} &= 0. \end{aligned} \right\} (b)$$

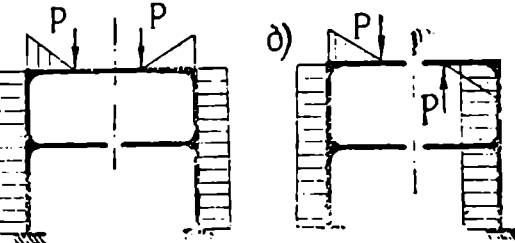
როგორც ვხედავთ კანონიკური განტოლება გაიყო ორ დამოუკიდებელ ნაწილად. პირველ ნაწილში შედის მხოლოდ სიმეტრიული უცნობები, მეორეში კი—მხოლოდ ირიბადსიმეტრიული.

ამის საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია დამტკიცებულად ჩავთვალოთ მეორე თეორემა:

თუ ძირითადი სისტემა ისეა აჩვენული, რომ ზედმეტი უცნობები გაიყოს სიმეტრიულ და ირიბადსიმეტრიულ უცნობებად, მაშინ მთლიანი კანონიკურ განტოლებათა სისტემა გაიყოფა ორ დამოუკიდებელ ნაწილად; პირველში შევა მხოლოდ სიმეტრიული უცნობები, მეორეში კი ირიბადსიმეტრიული.

განტოლებათა სისტემის ასეთი გაყოფა მნიშვნელოვნად ამცირებს არითმეტიკული გამოთვლების რიცხვს და ამოცანაც მარტივდება.

თუ განტოლებებს ვწყვეტთ დეტერმინანტის საშუალებით, მაშინ n -უცნობიანი n განტოლების გადასაწყვეტად საჭირო გადამრავლებათა რიცხვი გამოითვლება ფორმულით:



ნახ. 165.

$$m = 2n \cdot (n^2 - 1)$$

ეს ფორმულა სამართლიანია, როცა $n \geq 3$

მაგალითად, განხილული ამოცანის მთლიანი განტოლების გადასაწყვეტად ($n=6$) საჭიროა შესრულდეს $m = 2 \cdot 6 \cdot (36 - 1) = 420$ გადამრავლება.

კანონიკური განტოლების გაყოფის შემდეგ (ა) განტოლებისათვის საჭიროა $m = 2 \cdot 4 \cdot (16 - 1) = 120$ გადამრავლება და (ბ) განტოლებისათვის n ; სულ 126.

როგორც ვხედავთ, გადამრავლებათა რიცხვი შემცირდა დაახლოებით სამნახევარჯერ.

ჩვენ მივიღებთ ამოცანის შემდგომ გამარტივებას, თუ ნაშენზე მოქმედებს სიმეტრიული ან ირიბადსიმეტრიული დატვირთვა.

წარმოვიდგინოთ, ჩარჩოზე მოქმედებს სიმეტრიული დატვირთვა, რომელიც იძლევა სიმეტრიულ ეპიურას (ნახ. 165, ა).

(ბ) განტოლებაში შემავეალი სატვირთო გადაადგილებები

$$\Delta_{3p} = \int \frac{M_s M_p ds}{EI} = 0;$$

$$\Delta_{6p} = \int \frac{M_s M_p ds}{EI} = 0,$$

რადგან მიიღებთ ორი სიმეტრიული (M_p) და ირიბადსიმეტრიული (M_s , M_6) ეპიურის კომბინაციის შედეგად.

(ბ) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$X_3 \delta_{33} + X_6 \delta_{36} = 0,$$

$$X_3 \delta_{63} + X_6 \delta_{66} = 0,$$

$$X_3 = X_6 = 0.$$

თუ ნაშენზე მოქმედებს ირიბადსიმეტრიული დატვირთვა (ნახ. 165, ბ), მაშინ იმავე თეორემის თანახმად (M_p ირიბადსიმეტრიულია, M_1, M_2, M_3 და M_4 —სიმეტრიული)

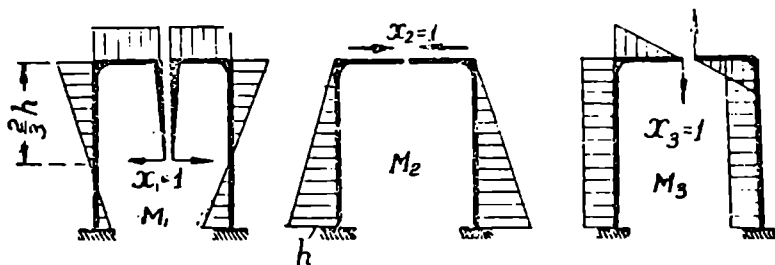
$$\Delta_{1p} = \Delta_{2p} = \Delta_{3p} = \Delta_{4p} = 0,$$

რადგან (ა) განტოლების თავისუფალი წევრები ნულის ტოლია, მივიღებთ

$$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0.$$

ამგვარად, სიმეტრიული დატვირთვა ნულად აქცევს ირიბადსიმეტრიულ უცნობებს და ირიბადსიმეტრიული დატვირთვა კი სიმეტრიულ უცნობებს. პირველ შემთხვევაში მოგვიხდება გადავწყვიტოთ მხოლოდ სიმეტრიული განტოლებები, მეორეში კი—ირიბადსიმეტრიული.

მიღებული შედეგი ჩვენ შეგვიძლია ჩამოვაცალიბოთ მესამე ძირითადი თეორემის სახით: თუ სიმეტრიულ ნაშენზე სიმეტრიული ტვირთი მოქმედებს, მაშინ ირიბადსიმეტრიული უცნობები ტოლია ნულისა და, პირიქით, თუ ირიბადსიმეტრიული ტვირთი მოქმედებს, მაშინ სიმეტრიული უცნობებია ნულის ტოლი.



ნახ. 166.

წინა პარაგრაფში გავარჩიეთ სამჯერ სტატიკურად ურკვევი ჩარჩოს ანგარიში ღრეკალი ცენტრის მეთოდით (ნახ. 158). ამ ჩარჩოს ანგარიშში იმავე გამარტივებას მივიღებთ, თუ გამოვიყენებთ სიმეტრიის და X_1 ძალას გადავიტანთ ხისტი კონსოლის ბოლოზე რიგელიდან $\frac{2}{3}h$ მანძილზე (ნახ. 166).

იმის გამო, რომ M_2 ეპიურის სიმძიმის ცენტრის გასწვრივ M_1 -ის ორდინატა ნულის ტოლია, $\delta_{12} = 0$. $\delta_{13} = \delta_{23} = 0$, რადგან M_1 და M_2 სიმეტრიულია, ხოლო M_3 კი ირიბადსიმეტრიული.

§. 33. უცნობთა დაჯგუფების მეთოდი

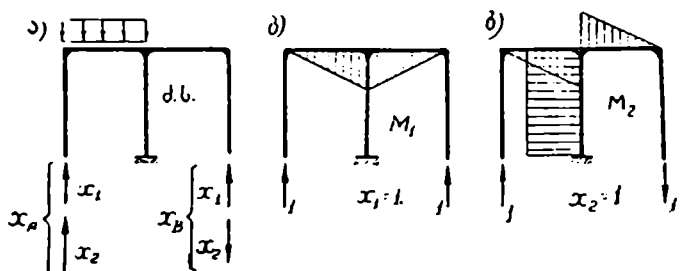
წინა პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლეთ თუ რა გამარტივებას იძლევა სიმეტრიული ძირითადი სისტემა. შესაძლებელია, რომ ძირითადი სისტემა იყოს სიმეტრიული, მაგრამ ზედმეტი უცნობები არ გაიყოს სიმეტრიულ და ირიბადსიმეტრიულ უცნობებად.

ამ შემთხვევაში მივმართავთ უცნობთა დაჯგუფების მეთოდს, რომელიც მდგომარეობს უცნობების გარდაქმნაში სიმეტრიულ და ირიბადსიმეტრიულ უცნობებად. ამიტომ უცნობებად გვექნება არა უბრალო ცალკეული ძალები, რომლებიც ერთ რომელიმე წერტილში იქნება მოდებული, არამედ ძალთა ჯგუფი, ე. ი. განზოგადებული ძალები. სათანადოდ გადაადგილებებიც იქნება ჯგუფური ან განზოგადებული. საზოგადოდ, თუ უცნობები შედგება რამდენიმე ძალისაგან, მათ ჯგუფური უცნობები ეწოდებათ. თუ რა საჩვენებლობა მოაქვს უცნობთა დაჯგუფებას, გავარჩიოთ კონკრეტულ მაგალითებზე.

1 მაგალითი. მოცემულია ორმალიანი ორჯერ სტატიკურად ურყევეი ჩარჩო (ნახ. 167). უქუფავდოთ A და B საყრდენი ლერო და უცნობებად მივიღოთ რეაქციები X_A და X_B (ნახ. 167, ბ). მიუხედავად ძირითადი სისტემის სიმეტრიულობისა, ერთეული ეპიურები არ არიან ორთოგონალური და $\delta_{12} \neq 0$.

X_A და X_B წარმოვიდგინოთ, როგორც ჯამი და სხვაობა ორი ახალი X_1 და X_2 უცნობისა (ნახ. 168, ა):

ნახ. 167.



ნახ. 168.

$$X_A = X_1 + X_2;$$

$$X_B = X_1 - X_2.$$

აქედან, ახალი უცნობი

$$X_1 = \frac{X_A + X_B}{2}; \quad X_2 = \frac{X_A - X_B}{2}.$$

ცხადია, რომ $X_1 = 1$ (ე. ი. $X_A = 1, X_B = 1$) იძლევა სიმეტრიულ ეპიურას (ნახ. 168, ბ) და $X_2 = 1$ (ე. ი. $X_A = 1, X_B = -1$) კი—ირიბადსიმეტრიულს (ნახ.

168, გ). X_1 იქნება სიმეტრიული უცნობი, X_2 კი ირიბადსიმეტრიული. ეპიურების ორთოგონალურობის გამო $\delta_{12}=0$ და კანონიკური განტოლებები გაიწერა ორ დანოჟიკიდებელ ნაწილად: —

$$X_1 \delta_{11} + A_{1P} = 0;$$

$$X_2 \delta_{22} + A_{2P} = 0.$$

გადაადგილებები განისაზღვრება ჩვეულებრივად, როგორც უბრალო უცნობების შემთხვევაში.

X_1 და X_2 -ის განსაზღვრის შემდეგ ჩვენ შეგვიძლია ეპიუროთ X_A და X_B , მაგრამ საანგარიშო ეპიურების ასაგებად ეს არ არის საკმარისი, რადგან ჯგუფურ უცნობებს შეგვიძლია მოვექცეთ ისე, როგორც უბრალო უცნობებს:

$$M = M_P + X_1 M_1 + X_2 M_2.$$

შემაჯალითი. განვიხილოთ უფრო რთული ჩარჩო (ნახ. 169). მოეაშუროთ განაპირა საყრდენი ღეროები და მათ მაგიერ ვიმოქმედოთ

უცნობი ძალებით $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6$ (ნახ. 169, ბ). ძირითადი სისტემა სიმეტრიულია, მაგრამ უცნობები კი არც სიმეტრიული და არც ირიბადსიმეტრიული, და ამიტომ ერთეული ეპიურები არ იქნება ურთიერთ ორთოგონალური.

გამარტივების მიზნით არჩეული უცნობები შევცვალოთ ახალი ჯგუფური უცნობებით — $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ (ნახ. 169, გ).

X_1 შედგება ორი პორიზონტალური სიმეტრიული ძალისაგან.

X_2 — ორი ერთ მხარეს მიმართული, პორიზონტალური, ირიბადსიმეტრიული ძალისაგან; X_3 — ორი ზევით მიმართული, ვერტიკალური, სიმეტრიული ძალისაგან; X_4 — ორი ვერტიკალური, სხედანსხვა მხარეს მიმართული, ირიბადსიმეტრიული ძალისაგან; X_5 — ორი ერთმანეთის საწინააღმდეგო მიმართულებით სიმეტრიულად მოქმედი მომენტისაგან და X_6 — ორი ერთი მიმართულებით ირიბადსიმეტრიულად მოქმედი მომენტისაგან.

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_1 + X_2; & Z_2 &= X_1 - X_2; \\ Z_3 &= X_3 + X_4; & Z_4 &= X_3 - X_4; \\ Z_5 &= X_5 + X_6; & Z_6 &= X_5 - X_6. \end{aligned}$$

აქედან ახალი სიმეტრიული და ირიბადსიმეტრიული უცნობები გამო-
ისახება შემდეგი სახით

$$X_1 = \frac{Z_1 + Z_2}{2}; \quad X_2 = \frac{Z_1 - Z_2}{2};$$

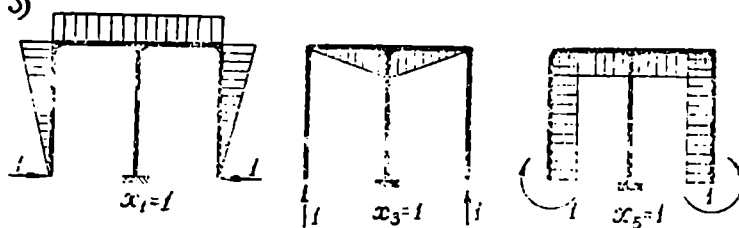
$$X_3 = \frac{Z_3 + Z_4}{2}; \quad X_4 = \frac{Z_3 - Z_4}{2};$$

$$X_5 = \frac{Z_5 + Z_6}{2}; \quad X_6 = \frac{Z_5 - Z_6}{2}.$$

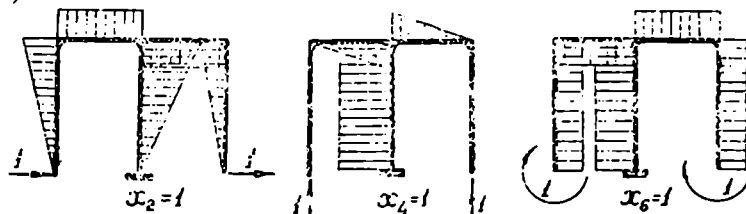
სიმეტრიული (ნახ. 170, ა) და ირიბადსიმეტრიული (ნახ. 170, ბ) ერთე-
ული ძალებისაგან გამოწვეული ეპიურები ურთიერთ ორთოგონალურია და
ამიტომ არამთავარი გადაადგილებები

$$\delta_{12} = \delta_{14} = \delta_{16} = \delta_{32} = \delta_{34} = \delta_{36} = \delta_{52} = \delta_{54} = \delta_{56} = 0.$$

ექვსი ერთადი განტოლების მაგიერ ნივილებთ ორ დამოუკიდებელ გან-
ა))



ბ))



ნახ. 170.

ტოლებას; პირველში შევა მხოლოდ სიმეტრიული უცნობები, მეორეში კი
ირიბადსიმეტრიული:

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_3 \delta_{13} + X_5 \delta_{15} + \Delta_{1P} &= 0; \\ X_1 \delta_{31} + X_3 \delta_{33} + X_5 \delta_{35} + \Delta_{3P} &= 0; \\ X_1 \delta_{51} + X_3 \delta_{53} + X_5 \delta_{55} + \Delta_{5P} &= 0. \end{aligned} \right\} (a)$$

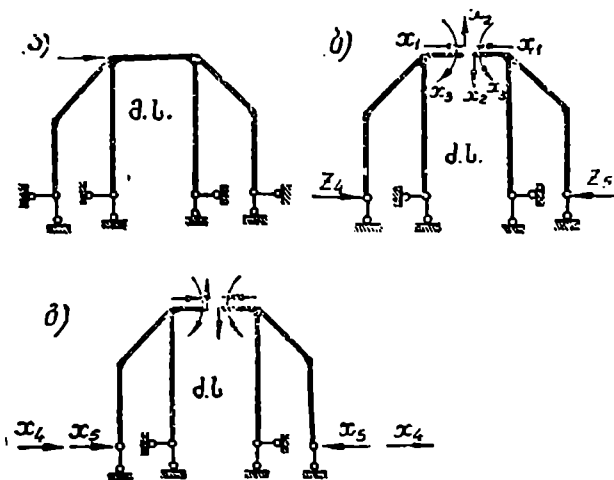
$$\left. \begin{aligned} X_2 \delta_{22} + X_4 \delta_{24} + X_6 \delta_{26} + \Delta_{2P} &= 0; \\ X_2 \delta_{42} + X_4 \delta_{44} + X_6 \delta_{46} + \Delta_{4P} &= 0; \\ X_2 \delta_{62} + X_4 \delta_{64} + X_6 \delta_{66} + \Delta_{6P} &= 0. \end{aligned} \right\} (b)$$

უცნობების განსაზღვრის შემდეგ საბოლოო ეპიურის ასაგებად არ არის

საპირო პირველადი (Z_1, Z_2, \dots) უცნობების პოვნა, რადგან მლუნავი მომენტის ეპიურა აიგება ჯგუფური ძალების საშუალებით, ჩვეულებრივად

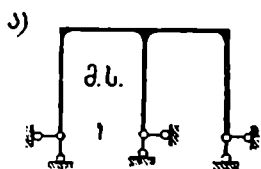
$$M = M_P + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_3 M_3 + \dots$$

3 მაგალითი. მოცემულია ხუთჯერ სტატიკურად ურკვევი სიმეტრიული ჩარჩო (ნახ. 171, ა). გავკვეთოთ ჩარჩო სიმეტრიის ღერძზე და მოვაშოროთ გა-

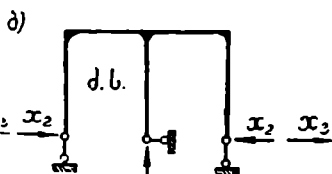


ნახ. 171.

ნაპირა პორიზონტალური საყრდენი ღერო (ნახ. 171, ბ). ზედნეტი უცნობებიდან მხოლოდ Z_1 და Z_3 არ იქნება არც სიმეტრიული და არც ირიბადსიმეტრიული. თუ Z_4 და Z_5 დავაჯგუფებთ სიმეტრიულ და ირიბადსიმეტრიულ



უცნობებად, მაშინ უცნობები გაიყოფა სიმეტრიულ (X_1, X_2, X_3) და ირიბადსიმეტრიულ (X_4, X_5) უცნობებად (ნახ. 171, გ). ამ შემთხვევაში ჩვენ მოგვიხდება ორი უცნობის დაჯგუფება.



ნახ. 172.

კანონიკურ განტოლებათა პირველ ჯგუფში შევა სამი (X_1, X_2, X_3) უცნობი, მეორეში კი ორი (X_4, X_5).

4 მაგალითი. მოცემულია უძრავი სახსროვანი საყრდენებით დამაგრებული სამჯერ სტატიკურად ურკვევი ჩარჩო (ნახ. 172, ა). უცნობებად მივიღოთ შუა საყრდენის ვერტიკალური რეაქცია და განაპირა საყრდენების პორიზონტალური რეაქციები, რომლებიც დაჯგუფებულია სიმეტრიულ (X_2) და ირიბადსიმეტრიულ (X_3) უცნობებად. მიღებული ძირითადი სისტემა სტატიკურად რკვევადი და გეომეტრიულად უცვლელ-

ფებულია სიმეტრიულ (X_2) და ირიბადსიმეტრიულ (X_3) უცნობებად. მიღებული ძირითადი სისტემა სტატიკურად რკვევადი და გეომეტრიულად უცვლელ-

ლია, რადგან მიმაგრებულია მიწაზე სამი ღეროს საშუალებით, რომლებიც ერთ წერტილში არ იკვეთება.

X_1 , X_2 სიმეტრიული და X_3 ირიბადსიმეტრიული უცნობებისაგან გამოწვეული ეპიურები ურთიერთ ორთოგონალურია და $\delta_{13} = \delta_{23} = 0$. კანონიერი განტოლება გაიყოფა ორ ნაწილად:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1P} = 0;$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2P} = 0.$$

$$X_3 \delta_{33} + \Delta_{3P} = 0.$$

§ 34. დატვირთვის გარდაქმნა

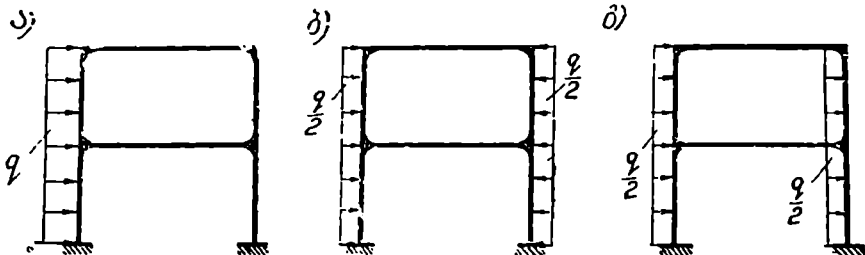
აქამდე ჩვენ ვიხილავდით ანგარიშის გამარტივების მეთოდებს, რომლებიც დამყარებული იყო ძირითადი სისტემის და უცნობთა სათანადო არჩევაზე.

ახლა ჩვენ გავარჩიოთ. გამარტივების წესი, რომელიც დამყარებულია დატვირთვის გარდაქმნაზე.

ძალთა დამოუკიდებლობის პრინციპის თანახმად რამდენიმე ძალით გამოწვეული ეფექტი ტოლია ამ ძალების ცალ-ცალკე მოქმედებით გამოწვეული ეფექტების ჯამის.

სიმეტრიული ჩარჩოს ანგარიშის დროს მოცემული არასიმეტრიული დატვირთვა შეიძლება დაეშალოს სიმეტრიულ და ირიბადსიმეტრიულ დატვირთვად.

განვიხილოთ § 32-ში მოყვანილი ჩარჩო (ნახ. 162). მარცხენა მხრიდან მოქმედი თანაბრად განაწილებული ტვირთი ინტენსივობით q (ნახ. 173, ა)



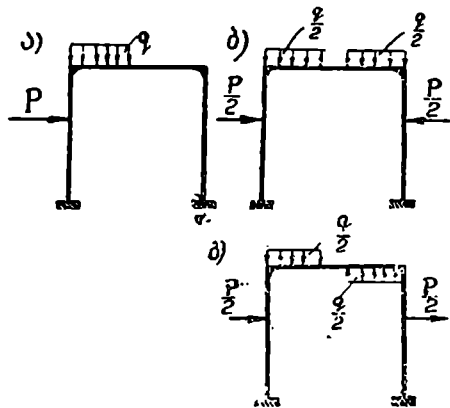
ნახ. 173.

შეეცვალოს ორი სახის სიმეტრიულ და ირიბადსიმეტრიულ დატვირთვებად-პირველ შემთხვევაში ორივე მხრიდან ერთმანეთის მოპირდაპირე მიმართულე-ბით მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი ინტენსივობით $\frac{q}{2}$

(ნახ. 173, ბ), მეორეში მოქმედებს იმავე სახის დატვირთვა, მხოლოდ ერთი მიმართულებით (ნახ. 173, გ).

ცხადია რომ უკანასკნელი ორი დატვირთვით გამოწვეული ეპიურების შეჯამება მოგვცემს მოცემული დატვირთვით გამოწვეულ ეპიურას. დატვირთ-

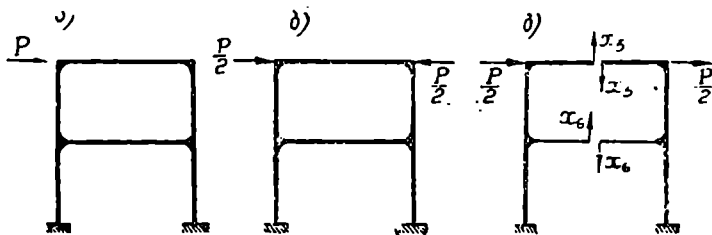
ვის ასეთი განაწილება ამარტივებს ეპიურების აგებას. გარდა ამისა, მარტივდება ტვირთით გამოწვეული გადაადგილებების გამოთვლა. რადგან ერთეული ძალებით და ტვირთით გამოწვეული ეპიურები სიმეტრიული ან ირიბადსიმეტრიულია, ამიტომ საკმარისია ანგარიში ვაწარმოოთ ჩარჩოს ნახევარზე.



ნახ. 174.

ჩვენ ვიცით, რომ სიმეტრიულ ნაშენზე მოქმედი სიმეტრიული დატვირთვა მხოლოდ სიმეტრიულ უცნობებს წარმოშობს და ირიბადსიმეტრიული დატვირთვა კი ირიბადსიმეტრიულ უცნობებს. მაშასადამე, სიმეტრიული დატვირთვის შემთხვევაში განისაზღვრება X_1 , X_2 , X_3 და X_4 (ნახ. 162), ხოლო ირიბადსიმეტრიული დატვირთვის დროს კი X_5 და X_6 .

დატვირთვის გარდაქმნა განვიხილოთ 174 ნახაზზე მოყვანილი სისტემისათვის. ვთქვათ, რომ ჩარჩოზე მოქმედებს არასიმეტრიული ტვირთი, რომელიც შეიძლება შევცვალოთ სიმეტრიულ (ნახ. 174, ბ) და ირიბადსიმეტრიულ (ნახ. 174, გ) დატვირთვად. ამ ორი მდგომარეობის შეჯამება მოგვცემს მოცემულ დატვირთვას. დატვირთვის გარდაქმნა ძირითადი სისტემის სათანადოდ



ნახ. 175.

დოდ არჩევასთან ერთად ხშირად მნიშვნელოვან გამარტივებას იძლევა. ის უფრო ეფექტურია, როცა ჩარჩოს სიმეტრიის ორი ღერძი აქვს.

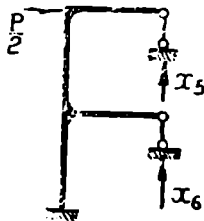
განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითები.

1 მაგალითი. ორსართულიან ჩარჩოზე მოქმედი ძალა P (ნახ. 175, ა) წარმოედგინოთ სიმეტრიულ (ნახ. 175, ბ) და ირიბადსიმეტრიულ (ნახ. 175, გ) დატვირთვად. ძირითადი სისტემა მოყვანილია 162 ნახაზზე. სიმეტრიულ დატვირთვა მხოლოდ ზედა რიგელს კუმშავს და ღუნვას არ იწვევს. თუ გადაადგილებების გამოთვლის დროს გრძივი ძალის გავლენას არ მივიღებთ მხედველობაში, მაშინ ჩარჩოს კვანძები დარჩება უძრავად და მლუნავ მომენტს

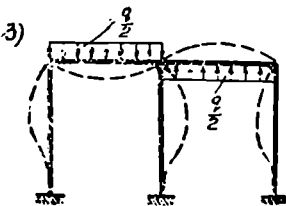
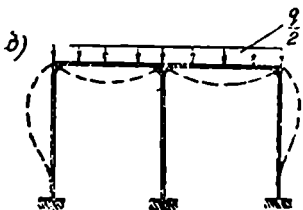
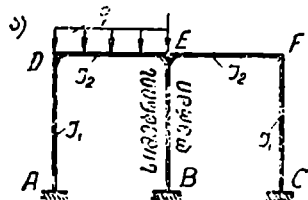
არ ექნება ადგილი. ყველა სიმეტრიული უცნობი, გარდა X_1 -ისა, ნულის ტოლია. მაშასადამე, სიმეტრიულ დატვირთვაზე ჩარჩოს ანგარიში შესრულებულად ჩაითვლება. ზედა რიგელში განვითარდება ნეუმშაევი ძალა $X_1 = \frac{P}{2}$.

განვიხილოდ ირიბადსიმეტრიული დატვირთვა. რადგანაც მოცემული სისტემა გაკვეთილია სიმეტრიის ღერძზე და უცნობები დალაგებულია სიმეტრიულ და ირიბადსიმეტრიულ უცნობებად (ნახ. 162), ამიტომ ყველა სიმეტრიული უცნობი—მლუნაევი მომენტი და გრძივი ძალა ორივე რიგელში—ტოლია ნულისა ($X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0$) და დაგვრჩება მხოლოდ X_5 და X_6 .

ამგვარად, მოცემული ჩარჩო შეიძლება შეიცვალოს მისი ეკვივალენტური მარტივი ჩარჩოთი, რომელსაც ექნება ორი უცნობი X_5 და X_6 (ნახ. 176), ე. ი. ნ-ჯერ



ნახ. 176.



ნახ. 177.

სტატიკურად ურკვევი სისტემის ანგარიში დავყვანეთ ორჯერ ურკვევი სისტემის ანგარიშზე. ჩვენ რომ დატვირთვის გარდაქმნა არ გამოვიყენებინა, მოვიხილებოდა დამატებით ოთხ უცნობიანი ოთხი განტოლების გადაწყვეტა, რის შედეგადაც მივიღებდით $X_1 = \frac{P}{2}$ და $X_2 = X_3 = X_4 = 0$.

თუ ავაგებთ 176 ნახაზზე მოყვანილი ჩარჩოს მლუნაევი მომენტის ეპიურას, მაშინ ირიბადსიმეტრიული დატვირთვის გამო მარჯვენა ნაწილის ეპიურას ექნება საწინააღმდეგო ნიშანი.

2 მავალითი. განვიხილოთ ორმალიანი ნ-ჯერ სტატიკურად ურკვევი ჩარჩო, რომელზედაც მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი ინტენსივობით q ტ/მ (ნახ. 177).

მოცემული დატვირთვა გარდავქმნად სიმეტრიულ და ირიბად სიმეტრიულ დატვირთვებად (ნახ. 177, ბ, გ). სიმეტრიული დატვირთვის დროს შუა დგარი დეფორმაციას არ განიცდის, რადგან ის სიმეტრიის ღერძს არ ემთხვევა. აქედან ცხადია, რომ E კვანძი უძრავია და შერ-

ძლება განვიხილოთ როგორც ხისტი ჩამაგრება. ამის გამო მოცემული ჩარჩოს ანგარიში სიმეტრიულ დატვირთვაზე შეიძლება შეიცვალოს მეტად მარტივი სამჯერ სტატიკურად ურკვევი სისტემის ანგარიშით (ნახ. 178). თავის ზნრეც ამ ამოცანის გამარტივებაც შეიძლება, თუ გამოვიყენებთ ხისტ კონსოლს და

უცნობებს გადავიტანთ სათანადო ადგილებში (ნახ. 179), როგორც ეს შეარულებული იყო 31-ე პარაგრაფში.

კანონიერ განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს

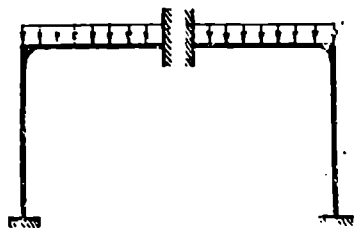
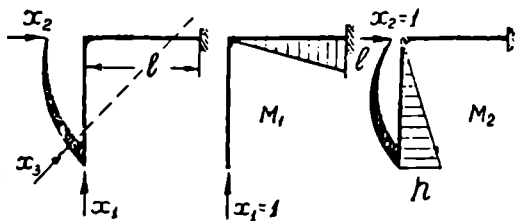
$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0;$$

$$X_2 \delta_{22} + \Delta_{2p} = 0;$$

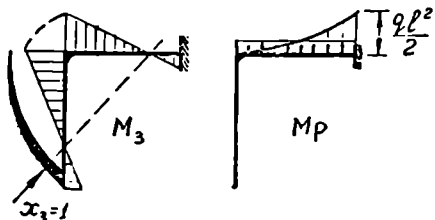
$$X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} = 0.$$

$$\Delta_{2p} = 0 \text{ და ამიტომ } X_2 = 0.$$

ირიბადისიმეტრიული დატვირთვით გამოწვეული დეფორმირებული მდგომარეობა (ნახ.



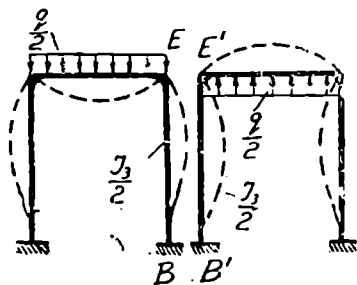
ნახ. 178.



ნახ. 179.

177, გ) შეიძლება წარმოვიდგინოთ ისე, როგორც ნაჩვენებია 180-ე ნახაზზე, ე. ი. ჩარჩო გავკვეთოთ სიმეტრიის ღერძზე ორ ჩარჩოდ, სადაც BE და B'E' დგარს აქვს ერთნაირი ინერციის მომენტი $\frac{J_3}{2}$. ასეთი წარმოდგენის უფლებ

ა ჩვენ გვაქვს, რადგან BE და B'E' დგარს ექნება სრულიად ერთნაირი და ერთმანეთის პარალელური დრეკადი ხაზები და დგარების შეერთება ერთ საერთო დგარად არ გამოიწვევს არაერთარ ურთიერთ მოქმედებას, ე. ი. მივიღებთ ისეთივე გაღუნულ ღერძს, როგორიც აქვს მთლიან ჩარჩოს (ნახ. 177).



ნახ. 180.

ამგვარად, მოცემული ჩარჩოს ანგარიში ირიბადისიმეტრიულ დატვირთვაზე დაიყვანეთ სამჯერ სტატიკურად ურკვევი სისტემის ანგარიშზე, რომელიც კიდევ შეიძლება გამარტივდეს იმის მიხედვით, თუ როგორ ავირჩევთ ძირითად სისტემას.

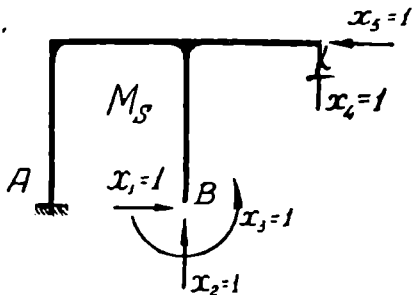
როგორც ვხედავთ დატვირთვის გარდაქმნამ საშუალება მოგვცა მოცემული ჩარჩოს ანგარიში შეგვეცვალა ორი მარტივი ჩარჩოს ანგარიშით.

კანონიკური განტოლებების კოეფიციენტები-გადაადგილებები — მიიღება სათანადო ეპიურების გადამრავლების შედეგად და მოითხოვს ბევრი არითმეტიკული ოპერაციის შესრულებას, რის გამოც მოსალოდნელია არითმეტიკული შეცდომის დაშვება.

კანონიკურ განტოლებათა სისტემის გადაწყვეტამდე ჩვენ უნდა მოვახდინოთ გადაადგილებათა შემოწმება და განტოლებათა გადაწყვეტას შევეუდგეთ მხოლოდ იმის შემდეგ, როცა დაერწმუნდებით მის სისწორეში. დასაწყისში დაშვებული შეცდომა შეიძლება აღმოვაჩინოთ მხოლოდ ანგარიშის ბოლოს, როდესაც ავაგებთ ჯამურ ეპიურას. განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მიექცეოდნენ ერთეული ეპიურების სისწორეს, რადგან მათ საფუძველზე ხდება გადაადგილებების ანგარიში.

გადავიდეთ შემოწმების წესის შესწავლაზე. წარმოვიდგინოთ, გვაქვს სტატიკურად რკვევადი ძირითადი სისტემა, რომელზეც მოქმედებს უცნობი ძალები X_1, X_2, X_3, X_4 და X_5 . ძირითად სისტემაზე ერთდროულად ვიმოქმედოთ ყველა ერთეული ძალით $X_1=1, X_2=1, X_3=1, X_4=1, X_5=1$ (ნახ. 181) და ავაგოთ მლუნაჯი მომენტის ეპიურა M_s .

M_s და M_1 ეპიურების კომბინაცია მოგვცემს B წერტილის ჰორიზონტალურ გადაადგილებას გამოწვეულს ყველა ერთეული ძალის ერთდროული მოქმედებით



ნახ. 181

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1 M_s ds}{EI} \quad (53)$$

ძალთა დამოუკიდებლობის პრინციპის საფუძველზე δ_{11} ტოლი უნდა იყოს ცალკეული ერთეული ძალებით გამოწვეული გადაადგილებათა ჯამისა X_1 -ის მიმართულებით, ე. ი. კანონიკური განტოლებების პირველი განტოლების კოეფიციენტების ჯამის

$$\delta_{11} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14} + \delta_{15}. \quad (54)$$

მიზსადამე, შემოწმება მდგომარეობს იმაში, რომ (53) და (54) ფორმულებით მიღებული სიდიდეები ერთმანეთის ტოლი უნდა იყოს.

ანალოგიურად მოვახდენთ მეორე, მესამე და ა. შ. განტოლებების კოეფიციენტების შემოწმებას:

$$\delta_{21} = \sum \int \frac{M_2 M_s ds}{EI} = \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \delta_{24} + \delta_{25};$$

$$\delta_{31} = \sum \int \frac{M_3 M_s ds}{EI} = \delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33} + \delta_{34} + \delta_{35};$$

$$\delta_{6s} = \sum \int \frac{M_s M_s ds}{EI} = \delta_{s1} + \delta_{s2} + \delta_{s3} + \delta_{s4} + \delta_{s5}$$

ამგვარად ჩვენ შევამოწმებთ თითოეული განტოლების კოეფიციენტებს თანდათანობით. გარდა ცალკეული განტოლებების კოეფიციენტების შემოწმებისა, შეიძლება მოვახდინოთ ყველა კოეფიციენტის განზოგადებული ანუ უნივერსალური შემოწმება. წინა ტოლობების მარცხენა და მარჯვენა ნაწილები შევაჯამოთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \delta_{s1} + \delta_{s2} + \delta_{s3} + \delta_{s4} + \delta_{s5} &= \sum \int \frac{M_1 M_s ds}{EI} + \sum \int \frac{M_2 M_s ds}{EI} + \sum \int \frac{M_3 M_s ds}{EI} + \\ &+ \sum \int \frac{M_4 M_s ds}{EI} + \sum \int \frac{M_5 M_s ds}{EI} = \sum \int M_s (M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5) \frac{ds}{EI} = \\ &= \sum \int \frac{M_s^2 ds}{EI} = \delta_{ss} \end{aligned}$$

M_s ეპიურის გადამრავლება თავის თავზე მოგვცემს კანონიკური განტოლების ყველა კოეფიციენტის ჯამს.

საბოლოოდ მივიღებთ

$$\begin{aligned} \delta_{ss} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \delta_{44} + \delta_{55} + 2(\delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14} + \delta_{15} + \\ &+ \delta_{23} + \delta_{24} + \delta_{25} + \delta_{34} + \delta_{35} + \delta_{45}) \end{aligned} \quad (55)$$

თუ ეს ტოლობა დაკმაყოფილებულია, მაშინ ცალკეული განტოლებების შემოწმება აღარ არის საჭირო. შემოწმებული უნდა იყოს განტოლებების თავისუფალი წევრებიც.

კანონიკური განტოლებების თავისუფალი წევრების შეჯამება მოგვცემს

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \Delta_{3p} + \Delta_{4p} + \Delta_{5p} &= \sum \int M_p (M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5) \frac{ds}{EI} = \\ &= \sum \int \frac{M_s M_p ds}{EI} = \Delta_{sp} \end{aligned} \quad (56)$$

მაშასადამე, ტვირთით გამოწვეული ეპიურის კომბინაცია M_s ეპიურასთან ტოლი უნდა იყოს სატვირთო წევრების ჯამის.

კანონიკურ განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტების შემოწმების შემდეგ გადავდივართ თვით განტოლებათა სისტემის გადაწყვეტაზე.

§ 36. კანონიკურ განტოლებათა სისტემის გადაწყვეტა გაუსის მეთოდით

სტატიკური ურკვევობის ხარისხის ზრდასთან ერთად იზრდება კანონიკურ განტოლებათა რიცხვი, რომელთა გადაწყვეტაც დეტერმინანტების საშუალებით დიდ არითმეტიკულ გამოთვლებს მოითხოვს. დამრგვალებები ცალკეული ოპერაციების შესრულების დროს აგროვებს იმდენ შეცდომას, რომ ხშირად საბოლოო შედეგი მიუღებელი ხდება. გარდა ამისა, დეტერმინანტების გამოთვლის დროს ჩვენ არ შეგვიძლია მოვახდინოთ შუალედი ოპერაცი-

ების შემოწმება და შემთხვევით შეცდომას შეუძლია ამაოდ ჩაატაროს მთელი ჩვენი მუშაობა.

პრაქტიკული გაანგარიშებისათვის ყველაზე სიიშედო და ამასთანავე მარტივ მეთოდს წარმოადგენს უცრობების თანდათანობითი გამორიცხვის გაუსის მეთოდი.

გაუსის შემოკლებული ალგორითმი (ცხრილი) წარმოადგენს კანონიკურ განტოლებათა სისტემის გადაწყვეტის ერთ გარკვეულ პროცესს და იძლევა შუალედი ოპერაციების შემოწმების საშუალებას.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ ქვემოთ გარჩეული მეთოდი გამოსადეგია მხოლოდ კანონიკურ განტოლებათა სისტემის გადასაწყვეტად, ე. ი. ისეთი სისტემის, სადაც დაცულია კოეფიციენტების ურთიერთობა

$$\bar{b}_i = \bar{b}_{i1}$$

ჩვენ აქ არ მოვიყვანთ გაუსის მეთოდის თეორიულ დასაბუთებას და გავარჩევთ მხოლოდ განტოლებათა სისტემის გადაწყვეტის ტექნიკას.

წარმოვიდგინოთ, გვაქვს ოთხუცნობიანი კანონიკურ განტოლებათა სისტემა შემდეგი სახით

$$\begin{array}{l|l} X_1\bar{b}_{11} + X_2\bar{b}_{12} + X_3\bar{b}_{13} + X_4\bar{b}_{14} = K_1 & S_1 \\ X_1\bar{b}_{21} + X_2\bar{b}_{22} + X_3\bar{b}_{23} + X_4\bar{b}_{24} = K_2 & S_2 \\ X_1\bar{b}_{31} + X_2\bar{b}_{32} + X_3\bar{b}_{33} + X_4\bar{b}_{34} = K_3 & S_3 \\ X_1\bar{b}_{41} + X_2\bar{b}_{42} + X_3\bar{b}_{43} + X_4\bar{b}_{44} = K_4 & S_4 \end{array} \quad (57)$$

კანონიკური განტოლებების თავისუფალი წევრები გადატანილია ტოლობის მარჯვნივ და აღნიშნულია K -თი.

$S_1, S_2, S_3,$ და S_4 წარმოადგენს პირველი, მეორე, მესამე და მეოთხე განტოლების ერთეულ გადაადგილებათა ალგებრულ ჯამს

$$\begin{aligned} S_1 &= \bar{b}_{11} + \bar{b}_{12} + \bar{b}_{13} + \bar{b}_{14}; \\ S_2 &= \bar{b}_{21} + \bar{b}_{22} + \bar{b}_{23} + \bar{b}_{24}; \\ S_3 &= \bar{b}_{31} + \bar{b}_{32} + \bar{b}_{33} + \bar{b}_{34}; \\ S_4 &= \bar{b}_{41} + \bar{b}_{42} + \bar{b}_{43} + \bar{b}_{44}. \end{aligned}$$

ეს სიდიდეები დაგვიკირდება შუალედი ოპერაციების შესამოწმებლად.

განტოლებათა სისტემის გადაწყვეტა მოყვანილია ცხრილის სახით. შევისწავლოთ ამ ცხრილის შედგენის წესი. პირველი სვეტი გვიჩვენებს სათანადო სტრიქონის ნომერს და ამ სტრიქონში შესრულებულ მოქმედებას. 2÷5 სვეტებში მოყვანილია კანონიკური განტოლების კოეფიციენტები. მე-6, მე-7 და მე-8 სვეტში მოყვანილია დამხმარე კოეფიციენტები α . მე-9 სვეტში ჩამოწერილია თავისუფალი წევრები K , ხოლო მე-10 სვეტში კი სათანადო განტოლებების კოეფიციენტების ჯამი S .

პირველ სტრიქონში, რომელიც აღნიშნულია რომაული რიცხვით I, ამოწერილია პირველი განტოლების კოეფიციენტები. ამავე სტრიქონში მოყვანილია დამხმარე კოეფიციენტები $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$ და ჯამი S_1 .

დამხმარე კოეფიციენტები წარმოადგენს არამთავარი გადაადგილებების ფარდობას მთავარ გადაადგილებაზე აღებულს შებრუნებული ნიშნით:

$$\alpha_{12} = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}; \quad \alpha_{13} = -\frac{\delta_{13}}{\delta_{11}}; \quad \alpha_{14} = -\frac{\delta_{14}}{\delta_{11}}.$$

გაუსის შემოკლებული ალგორითმის სქემა.

ცხრილი 4

განტოლებათა №	X_1	X_2	X_3	X_4	მამრავლები α_{ki}			K	S
					α_{k2}	α_{k3}	α_{k4}		
					6	7	8		
I	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	$\alpha_{12} = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}$	$\alpha_{13} = -\frac{\delta_{13}}{\delta_{11}}$	$\alpha_{14} = -\frac{\delta_{14}}{\delta_{11}}$	K_1	S_1
2 I α_{12}		δ_{22} $\delta_{12} \alpha_{12}$	δ_{23} $\delta_{13} \alpha_{12}$	δ_{24} $\delta_{14} \alpha_{12}$				K_2 $K_1 \alpha_{12}$	S_2 $S_1 \alpha_{12}$
II		δ'_{22}	δ'_{23}	δ'_{24}		$\alpha_{23} = -\frac{\delta'_{23}}{\delta'_{22}}$	$\alpha_{24} = -\frac{\delta'_{24}}{\delta'_{22}}$	K'_2	S'_2
3 I α_{12} II α_{23}			δ_{33} $\delta_{13} \alpha_{12}$ $\delta'_{23} \alpha_{23}$	δ_{34} $\delta_{14} \alpha_{12}$ $\delta'_{24} \alpha_{23}$				K'_3 $K_1 \alpha_{12}$ $K'_2 \alpha_{23}$	S_3 $S_1 \alpha_{12}$ $S'_2 \alpha_{23}$
III			δ'_{33}	δ'_{34}			$\alpha_{34} = -\frac{\delta'_{34}}{\delta'_{33}}$	K'_3	S'_3
4 I α_{12} II α_{23} III α_{34}				δ_{44} $\delta_{14} \alpha_{12}$ $\delta'_{24} \alpha_{23}$ $\delta'_{34} \alpha_{34}$				K_4 $K_1 \alpha_{12}$ $K'_2 \alpha_{23}$ $K'_3 \alpha_{34}$	S_4 $S_1 \alpha_{12}$ $S'_2 \alpha_{23}$ $S'_3 \alpha_{34}$
IV				δ'_{44}				K'_4	S'_4

მეორე სტრიქონში დაწერილია მეორე განტოლების კოეფიციენტები, ხოლო მესამეში კი პირველი განტოლების კოეფიციენტები გადამრავლებული α_{12} -ზე.

ორივე ამ განტოლებაში გამოტოვებულია პირველი წევრი, რადგან მათი შეჯამების შედეგად X_1 -ის კოეფიციენტი 0-ის ტოლია

$$\delta_{11} + \alpha_{12} \delta_{11} = \delta_{21} - \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} \delta_{11} = \delta_{21} - \delta_{12} = 0.$$

მე-2 და მე-3 სტრიქონი შეეჯამოთ, მოვიღებთ II განტოლებას

$$II = (2) + I \cdot \alpha_{12}$$

ამ განტოლების კოეფიციენტები აღნიშნულია ისე, როგორც 2 განტოლების, მხოლოდ სათანადო ინდექსებით (δ'_{22} , δ'_{23} და ა. შ.). მიღებულ განტოლებაში შედის სამი უცნობი (X_2 , X_3 და X_4).

ამ ოპერაციის შესრულების შემდეგ უნდა მოვახდინოთ შემოწმება, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში: მე-10 სვეტის შეჯამების შედეგად მიღებულ სიდიდე

$$S'_3 = S_1 + S_1 \alpha_{12}$$

ტოლი უნდა იყოს II განტოლების კოეფიციენტების ჯამის

$$S'_2 = \delta'_{22} + \delta'_{23} + \delta'_{24}$$

თუ ეს ტოლობა დაკმაყოფილებულია, მაშინ ანგარიშს ვაგრძელებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი ვახდენთ ანგარიშის შემოწმებას. II განტოლების საშუალებით ვანგარიშობთ დამხმარე კოეფიციენტებს

$$\alpha_{23} = -\frac{\delta'_{23}}{\delta'_{22}}; \quad \alpha_{24} = -\frac{\delta'_{24}}{\delta'_{22}}$$

III განტოლებას მივიღებთ შემდეგი სამი სტრიქონის შეჯამებით:

$$III = (3) + I \cdot \alpha_{13} + II \cdot \alpha_{23}$$

ანალოგიურად მივიღებთ IV განტოლებას

$$IV = (4) + I \cdot \alpha_{14} + II \cdot \alpha_{24} + III \cdot \alpha_{34}$$

ამ განტოლებების მიღების დროსაც დაცული უნდა იყოს შემოწმება

$$S'_3 = \delta'_{33} + \delta'_{34}$$

$$S'_4 = \delta'_{44}$$

II განტოლების მიღების დროს ისპობა X_1 -ის კოეფიციენტი, III განტოლების მიღებისას X_1 და X_2 -ის კოეფიციენტები, ხოლო IV განტოლების მიღებისას კი X_1 , X_2 და X_3 -ის კოეფიციენტები. ამიტომ შათ მაგიერ სათანადო ადგილებში წერტილებია დასმული.

მაშასადამე, განტოლებებიდან თანდათანობით ვრიცხავთ თითო უცნობს მანამ არ მივიღებთ ერთ განტოლებას ერთი უცნობით.

IV განტოლება იქნება

$$X_4 \delta'_{44} = K'_4$$

საიდანაც

$$X_4 = \frac{K'_4}{\delta'_{44}}$$

III განტოლებაში

$$X_3 \delta'_{33} + X_4 \delta'_{34} = K'_3$$

თუ შევიტანთ X_4 -ის მნიშვნელობას, ვიპოვიოთ X_3 -ს. ანალოგიურად X_2 -ს განვსაზღვრავთ II განტოლებიდან, ხოლო X_1 -ს კი I განტოლებიდან.

მიღებული განტოლებების კოეფიციენტები არ არის დამოკიდებული თავისუფალ წევრებზე, ე. ი. გარე დატვირთვაზე და ამიტომ დატვირთვის

შეცვლით მხოლოდ K სვეტი შეიცვლება. მაშასადამე, გაუსის წესი განსაკუთრებით ხელსაყრელია, როდესაც ნაშენს ვანგარიშობთ სხვადასხვა სახის დატვირთვაზე. კანონიკური განტოლების გადაწყვეტის მაგალითი გაუსის წესით მოყვანილია § 42-ში.

განტოლებათა გადაწყვეტის შემდეგ უცნობების მიღებული მნიშვნელობები უნდა შევიტანოდ პირველად კანონიკურ განტოლებებში, რათა დავრწმუნდეთ მიღებული უცნობების სისწორეში. შემოწმების დროს განტოლების მარცხენა ნაწილის დადებითი და უარყოფითი წევრები ცალ-ცალკე უნდა შევაჯამოთ და შემდეგ ორივე ჯამი შევადაროთ ერთმანეთს.

**§ 37. მღუნავი მომენტის, განივი და გრძივი ძალის მკიურების აგება
სტატიკურად ურკვევ ჩარჩოში**

უცნობების განსაზღვრის შემდეგ საჭიროა აიგოს მღუნავი მომენტის, განივი და გრძივი ძალის ჯამური ეპიურები. ეს არის ანგარიშის ძირითადი მიზანი.

პირველად უნდა აიგოს მღუნავი მომენტის ჯამური ეპიურა. რადგანაც ძირითად სისტემაზე მოქმედებს მოცემული დატვირთვა და ზედმეტი უცნობები X_1, X_2, \dots, X_n , ამიტომ ძალთა დამოუკიდებლობის პრინციპის საფუძველზე ჯამური ეპიურა მიიღება ამ ძალებით გამოწვეული ეპიურების შეჯამებით (ფორ. 48)

$$M = M_p + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_3 M_3 + \dots + X_n M_n, \quad (58)$$

სადაც $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ სათანადოდ $X_1=1, X_2=1, \dots, X_n=1$ ძალებით გამოწვეული მომენტებია; M_p მოცემული დატვირთვით გამოწვეული მომენტია.

მაშასადამე, ჯამური ეპიურის მისაღებად ერთეული ეპიურების ორდინატები უნდა გადავამრავლოთ უცნობების მნიშვნელობაზე და შევაჯამოთ ტვირთით გამოწვეულ ეპიურასთან. თუ უცნობები უარყოფითია, მაშინ სათანადო ეპიურები შებრუნდება. მღუნავი მომენტის ეპიურის ორდინატები მოზომილი უნდა იყოს გაკვიმული ბოქკოების მხარეს, როგორც ეს მიღებული გეგონდა.

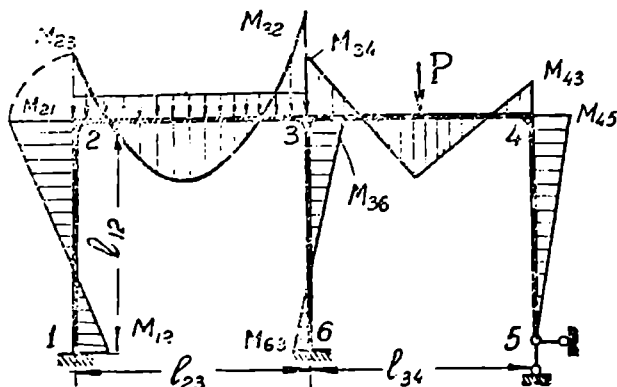
მღუნავი მომენტის ეპიურის აგების და მისი სისწორის შემოწმების შემდეგ (§ 38) გადავდივართ განივი ძალის ეპიურის აგებაზე.

განივი ძალის ეპიურის აგება. ჩარჩოს ანგარიშის მთავარი სირთულე უცნობთა განსაზღვრაშია. მღუნავი მომენტის ჯამური ეპიურის აგების შემდეგ განივი ძალის ეპიურის აგება არავითარ სირთულეს არ წარმოადგენს და ამოცანა ძირითადად გადაწყვეტილად შეიძლება ჩაითვალოს.

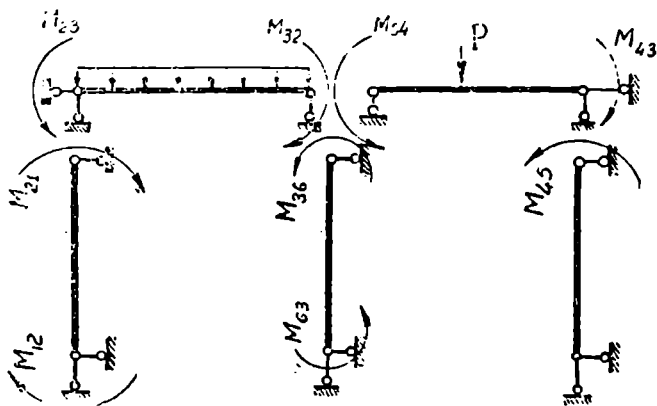
რადგანაც ჩარჩოს ელემენტების ბოლო კვეთების მომენტები ცნობილია, ამიტომ პრაქტიკულად განივი ძალის განსაზღვრის წესი ასეთია:

ჩარჩოდან ამოვკვეთთ თითოეულ დეროს და განვიხილავთ მას როგორც მარტივ, ორსაყრდენზე მდებარე კოქს, რომლის საყრდენებზე (კვეთის ადგილებზე) ვმოქმედებთ მომენტებით, რომელთა სიდიდე ცნობილია მღუნავი მომენტის ჯამური ეპიურიდან.

განივი ძალის ეპიურას აგება განვიხილოთ კონკრეტულ მაგალითზე. წარმოვიდგინოთ ჩარჩო, რომლის ჯამური ეპიურა უკვე აგებულია (ნახ. 182). მლუნავი მომენტის ორდინატები კვანძებში აღინიშნულია ნახაზზე. მოცემული ჩარჩო ჩვენ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ გაქრილად კვანძებში, რომლის



ნახ. 182.



ნახ. 183.

ნაწილებზე მოქმედებენ კვანძური მომენტები და გარე ძალები (ნახ. 183); თითოეულ ამ ნაწილს დანარჩენ ნაწილებისაგან დამოუკიდებლად განვიხილავთ.

განვიხილოთ 1—2 კოჭი (184), რომელზეც მოქმედებს მხოლოდ საყრდენი მომენტები. საყრდენ მომენტებს ავიღებთ თავისი მიმართულებით, ე. ი. მისი მიმართულება უნდა შეესაბამებოდეს გაკიმული ბოჭკოების მდებარეობას.

განივი ძალა განსახილავი ღეროს ნებისმიერ კვეთში საყრდენი რეაქციის ტოლია

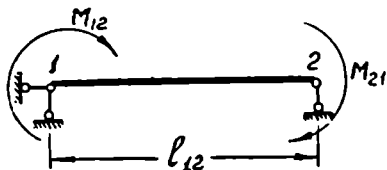
$$Q_{12} = A_1 = -\frac{M_{12} + M_{21}}{l_{12}}$$

განვიხილოთ 2—3 ღერო. მასზე მოქმედებს საყრდენი მომენტები და გარე დატვირთვა (ნახ. 185).

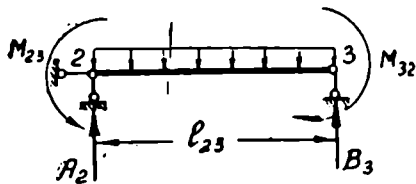
მარცხენა საყრდენის რეაქცია

$$A_2 = \frac{ql_{23}}{2} - \frac{M_{32} - M_{23}}{l_{23}}$$

განივი ძალა ნებისმიერ კვეთში:



ნახ. 184.



ნახ. 185.

$$Q_x = A_2 - qx = \frac{ql^2_{23}}{2} - qx - \frac{M_{32} - M_{23}}{l_{23}}$$

ან

$$Q_x = Q^0_x - \frac{M_{32} - M_{23}}{l_{23}}$$

სადაც Q^0_x წარმოადგენს ორ საყრდენზე მდებარე მარტივი კოქის განივ ძალას გამოწვეულს დატვირთვით. განივი ძალა საყრდენებზე საყრდენი რეაქციების ტოლია

$$Q_{23} = A_2 \text{ და } Q_{32} = -B_3.$$

ანალოგიურად განვიხილავთ ყველა დანარჩენ ღეროს. როგორც ვხედავთ, რთული, სტატიკურად ურკვევი სისტემის განივი ძალის ეპიურა აიგება ისე, როგორც სტატიკურად რკვევადის.

განივი ძალის განსაზღვრის დროს ყურადღება უნდა მივაქციოთ მის ნიშანს. განივი ძალის ნიშნების წესი მასალათა გამძლეობაში იყო შესწავლილი და რჩება ძალაში.

განივი ძალის ნიშნის გამოსარკვევად ჩვენ უნდა მივიღოთ ისეთი წესი, რომელიც გამოდგება ნებისმიერი ღეროსათვის.

წარმოვიდგინოთ ორსაყრდენზე მდებარე კოქი (ნახ. 186, ა). C კვეთში განივი ძალა შედგება ორი ტოლი და საწინააღმდეგო მიმართულების ძალისაგან. მოკვეთილი ნაწილი რომ წონასწორობაში იყოს, განივ ძალას არჩეული მიმართულება უნდა ჰქონდეს (ნახ. 186, ბ). მოკვეთილი მარცხენა (AC) და მარჯვენა (CB) ნაწილი ცდილობს მობრუნდეს საათის ისრის ბრუნვის მიმართულებით. ამ შემთხვევაში განივი ძალა აიღება დადებითი ნიშნით.

D კვეთში განივ ძალას ექნება ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულება (ნახ. 186, გ). მარცხენა (DA) და მარჯვენა (DB) ნაწილი ცდილობს მობრუნდეს საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით და განივი ძალა აიღება უარყოფითი ნიშნით.

პირველ შემთხვევაში კვეთის მარცხენა ნაწილზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი (A) მიმართულია ზევით, მეორეში ტოლქმედი ($A-P'$) მიმართულია ქვევით.

ჯამური ეპიურა საშუალებას იძლევა განვსაზღვროთ განივი ძალის როგორც სიდიდე, ისე ნიშანი, თუ გამოვიყენებთ ცნობილ დამოკიდებულებას განივი ძალასა და მღუნავე მომენტს შორის:

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

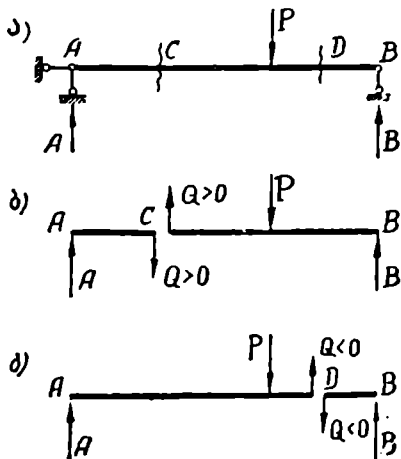
მაშასადამე, განივი ძალა ტოლია მღუნავე მომენტის ეპიურის დახრის კუთხის ტანგენსის და მისი ნიშანი დამოკიდებულია მომენტის ცვლილების კანონზე.

ამის საფუძველზე შეიძლება ჩამოვყალიბოთ შემდეგი წესი:

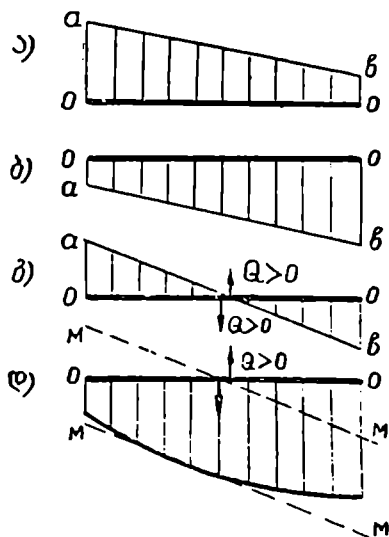
1. დაუტვირთავ ღეროზე, რომელზეც მღუნავე მომენტის ეპიურა ყოველთვის სწორხაზოვანია, განივი ძალა მუდმივია;

2. იქ, სადაც მღუნავე მომენტის ეპიურა გადატეხილია, განივი ძალა აკეთებს ნახტომს;

3. თუ მღუნავე მომენტის ეპიურა აგებულია კოქის გაკიმული ბოქკოების მხარეს და შემოზღუდულია აღმავეალი ხაზით, მაშინ განივი ძალა უარყოფითია (დახრის კუთხე უარყოფითია) და თუ შემოზღუდულია დაღმავეალი ხაზით, მაშინ დადებითია (დახრის კუთხე დადებითია).



ნახ. 186.

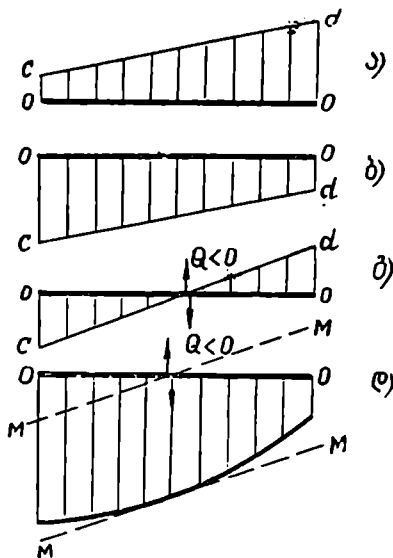


ნახ. 187.

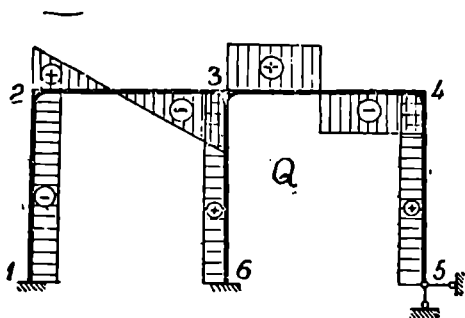
მაგალითად, 187-ე ნახაზზე წარმოდგენილია მღუნავე მომენტის ეპიურის სხვადასხვა შემთხვევა, მაგრამ, რადგანაც ყველა დაღმავეალია (მარცხნიდან მარჯვნივ), ამიტომ განივი ძალა ყველგან დადებითია. ამას ადვილად შევამჩნევთ, თუ გამოვიყენებთ მღუნავე მომენტის ნულოვან წერტილს. მართლაც,

187, გ ნახაზზე ნაჩვენებია ეპიურა რომშივილით, განივ ძალას უნდა ჰქონდეს აღებულ მიმართულება. დანარჩენ შემთხვევაში ნულოვან წერტილს მივიღებთ, თუ ah ხაზს გადავადგილებთ თავის პარალელურად ნულოვანი ხაზის გადაკვეთამდე. თუ ეპიურა მრუდხაზოვანია, მაშინ განსახილავ წერტილზე გავატარებთ ეპიურის MM მხებს და გადავადგილებთ თავის პარალელურად ნულოვანი ხაზის გადაკვეთამდე (ნახ. 187, დ).

183 ნახაზზე მოყვანილი ეპიურები აღმავალია (მარცხნიდან მარჯვნივ) და განივი ძალა ყველგან უარყოფითია. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ წარმოვიდგინოთ ნულოვან წერტილებს წინა შემთხვევის ანალოგიურად. ზემოთ განხილულ ჩარჩოს (ნახ. 182) 1—2 ღეროში ეპიურა აღმავალია (თუ მარჯვნიდან ვუცქერთ 1-დან 2-საკენ და თუ მარცხნიდან—2-დან 1-საკენ) და, მაშასადამე, განივი ძალა უარყოფითია. თუ ab (cd) ხაზები პარალელურებია, მაშინ განივი



ნახ. 188.



ნახ. 189.

ძალა სათანადოდ 187 (188) ნახაზზე განხილულ შემთხვევებში ერთმანეთის ტოლია. 6—3 და 5—4 ღეროში ეპიურები დაღმავალია და განივი ძალა დადებითია. 3—4 ღეროს მარცხენა უბანზე განივი ძალა დადებითია, მარჯვენაზე კი უარყოფითი.

განივი ძალის ეპიურის ორდინატები შეიძლება მოიზომოს ნებისმიერი მიმართულებით, მხოლოდ აუცილებლად უნდა დაეწეროს სათანადო ნიშანი. განივი ძალის მთლიანი ეპიურა ნაჩვენებია 189 ნახაზზე.

განვიხილოთ 28-ე პარაგრაფში გარჩეული მაგალითი (ნახ. 190, ა).

AC უბანზე განივი ძალა უარყოფითია (ეპიურა აღმავალია) და ტოლია

$$Q_{A0} = -\frac{13,75}{10} = -1,375 \text{ ტ.}$$

ჩარჩოდან ამოკვეთოდ CD ნაწილი და განვიხილოდ ის როგორც ორსაყრდენზე მდებარე კოჭი (ნახ. 191).

რეაქციები

$$C = \frac{2 \cdot 6,0}{2} + \frac{13,75 + 18,12}{6,0} = 6,0 + 5,32 = 11,32 \text{ ტ.}$$

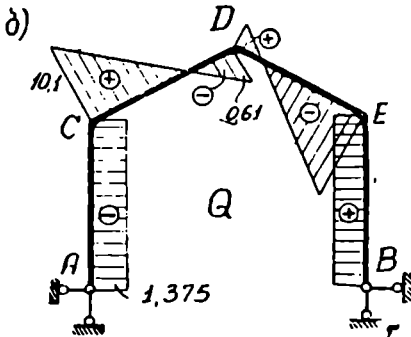
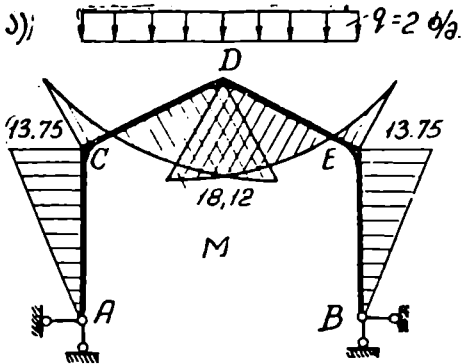
$$D = 6,0 - \frac{13,75 + 18,12}{6,0} = 6,0 - 5,32 = 0,68 \text{ ტ.}$$

განივი ძალა C საყრდენზე

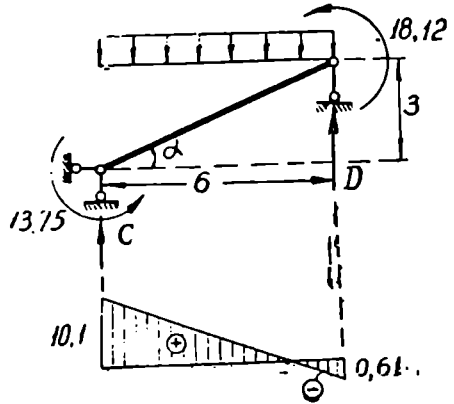
$$Q_{CD} = C \cos \alpha = 11,32 \cdot \frac{6}{6,73} = 10,1 \text{ ტ.}$$

განივი ძალა D საყრდენზე

$$Q_{DC} = -D \cos \alpha = -0,68 \cdot \frac{6}{6,73} = -0,61 \text{ ტ.}$$



ნახ. 190.



ნახ. 191.

განივი ძალის საბოლოო ეპიურა მოყვანილია 190, ბ ნახაზზე.

გრძივი ძალის ეპიურის აგება. განივი ძალების განსაზღვრის შემდეგ გადავდივართ გრძივი ძალების განსაზღვრაზე. ჩარჩოდან თანდათანობით ამოვკვეთთ კვანძები და შევადგინოთ მათი წონასწორობის პირობა. დავიწყოთ იმ კვანძის განხილვით, რომელშიც შედის ორი ღერო. განვიხილოთ პირველი მაგალითი (ნახ. 189). ამოკვეთთ მე-2 კვანძი (ნახ. 192, ა). კვანძზე მოქმედი განივი ძალები ცნობილია როგორც სიდიდით, ისე ნიშნით.

Q_{23} დადებითია და კვანძს (მარჯვენა ნაწილს) უნდა უვლიდეს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, Q_{21} უარყოფითია და კვანძს (მარჯვენა ნაწილს) უვლის საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

გრძივ ძალებს თუ ჩავთვლით გამჟიმავად, მივიღებთ

$$\Sigma X = Q_{21} + N_{23} = 0; \quad \Sigma Y = -Q_{23} - N_{21},$$

აქედან

$$N_{23} = -Q_{21}; \quad N_{21} = -Q_{23}.$$

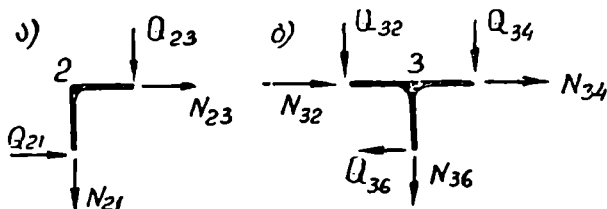
ნიშანი მინუსი გვიჩვენებს, რომ ორივე ღერო იკუმშება. ამოვეყვითოთ მე-3 კვანძი (ნახ. 192, ბ). მასზე მოქმედი ცნობილი ძალები ავიღოთ თავისი მიმართულებით. N_{32} მკუმშავია და მივმართოთ კვანძისაკენ.

$$\Sigma X = N_{32} - Q_{36} + N_{34} = 0,$$

$$\Sigma Y = -N_{36} - Q_{32} - Q_{34} = 0,$$

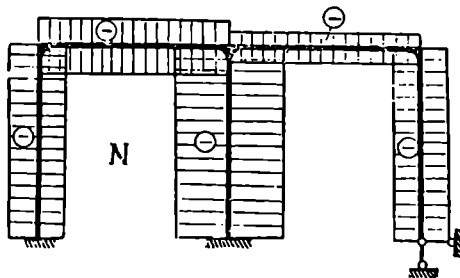
საიდანაც განისაზღვრება N_{34} და N_{36} .

გრძივი ძალის ორდინატები მოვზომოთ ღერძის ორივე მხარეს და დავეწეროთ გამჟიმავს პლუსი, ხოლო მკუმშავს კი მინუსი (ნახ. 193).



ნახ. 192.

როდესაც განსახილავ კვანძში შედის დახრილი ღეროები (ნახ. 190), მაშინ უმჯობესია კვანძის წონასწორობის პირობა შევადგინოთ გრაფიკულად, ე. ი. შევკრათ ძალთა მრავალკუთხედი.

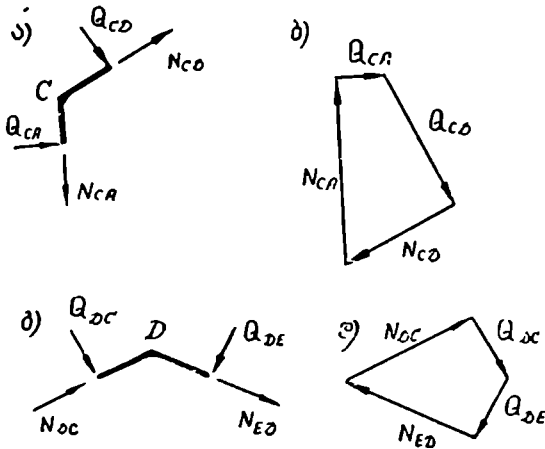


ნახ. 193.

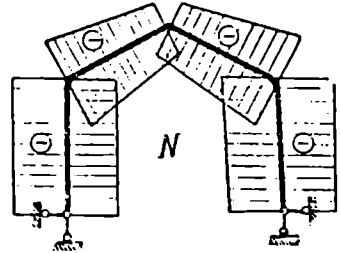
ამოვეყვითოთ C კვანძი (ნახ. 194, ა) და შევადგინოთ ძალთა მრავალკუთხედი (ნახ. 194, ბ). ცნობილი Q_{CA} და Q_{CD} ძალების მიმართულება განსაზღვრავს გრძივი ძალების მიმართულებას. CD და CA ღერო იკუმშება. D

კვანძისათვის შედგენილი ძალთა ჩაკეტილი მრავალკუთხედი მოყვანილია 194, დ ნახაზზე.

გრძივი ძალის საბოლოო ეპიურა წარმოდგენილია 195 ნახაზზე. დგარების გრძივი ძალების ჯამი ტოლი უნდა იყოს ტვირთის ვერტიკალური გეგმილის.



ნახ. 194.

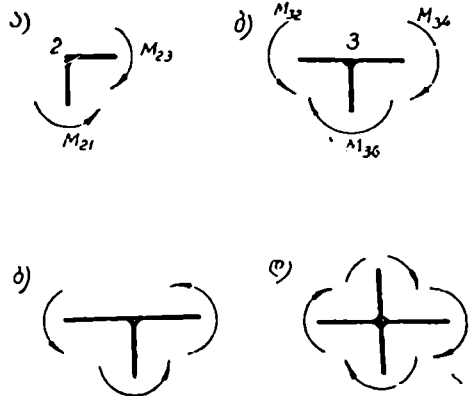


ნახ. 195.

§ 38. მლუნავი მომენტის ჯამური ეპიურების შემოწმება

მლუნავი მომენტის საბოლოო ეპიურის სისწორის შემოწმება წარმოებს ორი ხერხით: სტატიკური და კინემატიკური. სტატიკური შემოწმება მდგომარეობს იმაში, რომ ჩარჩოდან ამოკვეთილმა ნებისმიერმა ნაწილმა უნდა დააკმაყოფილოს წონასწორობის პირობა.

მაგალითად, ჩარჩოს რომელიმე კვანძზე მოქმედი მომენტების ჯამი ტოლი უნდა იყოს ნულის. 196 ნახაზზე გამოსახულია წინა პარაგრაფში განხილული მაგალითის (ნახ. 182) ამოკვეთილი კვანძები. ნახაზზე არ არის ნაჩვენები განივი და გრძივი ძალები, რადგან კვეთი გატარებულია კვანძთან უსასრულოდ ახლოს და მათი სტატიკური მომენტები ნულის ტოლია. მე-2 კვანძის წონასწორობის პირობა მოგვცემს (მომენტების მიმართულება აღებულია გაჭიმული ბოკოების მიხედვით, ნახ. 196, ა)



ნახ. 196.

$$M_{23} - M_{21} = 0,$$

$$M_{23} = M_{21}$$

სახოგადოდ, თუ კვანძში შედის ორი ღერო და კვანძზე გარე შეყურსული მომენტი არ მოქმედებს, მაშინ მომენტები ორივე ღეროზე ტოლია და ერთმანეთის საწინააღმდეგო მიმართულება აქვს, ე. ი. ორივე ღეროში იქიმება გარეთა ან შიგნითა ბოქკოები.

მე 3 კვანძის წონასწორობის პირობიდან მივიღებთ (ნახ. 196, ბ):

$$M_{34} + M_{36} - M_{32} = 0,$$

ან

$$M_{32} = M_{34} + M_{36}$$

სამი ღეროს შემთხვევაში, ერთ-ერთი ღეროს მომენტმა ორი დანარჩენი ღეროს მომენტების ჯამი უნდა გააწონასწოროს.

ადვილად შევამჩნევთ, რომ 196, გ, დ ნახაზზე წარმოდგენილი შემთხვევები სწორი არ არის, რადგან არ აკმაყოფილებს წონასწორობის პირობებს.

თუ მოცემული გვაქვს ერთმალისანი ჩარჩო (ნახ. 197), ჩვენ შეგვიძლია გავკვეთოთ ის ისე, როგორც ნაჩვენებია ნახაზზე (ნულოვან წერტილებზე) და განვიხილოთ ზედა ნაწილის წონასწორობის პირობა; მივიღებთ

$$Q_{21} = Q_{34}$$

ამ პირობის დასაკმაყოფილებლად საჭიროა მღუნავი მომენტის ეპიურის დახრის კუთხის ტანგენსები ორივე ღეროზე იყოს ერთმანეთის ტოლი და საწინააღმდეგო მიმართულება ჰქონდეთ.

უნდა აღინიშნოს, რომ სტატიკური შემოწმება არ იძლევა იმის გარანტიას, რომ შეცდომა არ არის გაპარული; ის მხოლოდ ჯამური ეპიურის მისაღებად შესრულებულ ოპერაციებს ამოწმებს. ამიტომ, სტატიკური შემოწმებით დაკმაყოფილება არ შეიძლება.

შემოწმების უფრო საიმედო მეთოდს წარმოადგენს კინემატიკური მეთოდი, რომელიც დამყარებულია მოცემული სისტემის გადაადგილების შესწავლაზე.

ჯამური ეპიურის საშუალებით ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ მოცემული სტატიკურად ურკვევი სისტემის ნებისმიერი წერტილის დეფორმაცია; ამისათვის საჭიროა მოვხადინოთ ჯამური და სათანადო ფიქტიური ერთეული ეპიურების კომბინაცია ვერეშჩაგინის წესით. ჩვენ უნდა გამოვთვალოთ ის დეფორმაციები, რომლებიც წინასწარ ცნობილია. ასეთებია მაგალითად, საყრდენების გადაადგილებები ან ორი მეზობელი კვეთის ურთიერთ მობრუნების კუთხე, რომლებიც ნულის ტოლია.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, გვინდა შევამოწმოთ 198, ა ნახაზზე წარმოდგენილი ჯამური ეპიურა. სისტემის საყრდენი დამაგრების მიხედვით

ნახ. 197.

წინასწარ ვიცით, რომ მე-5 კვანძის გადაადგილება, როგორც ვერტიკალური, ისე ჰორიზონტალური მიმართულებით ნულის ტოლია. ნულის ტოლია აგრეთვე 1 საყრდენის მობრუნების კუთხე და გადაადგილებანი.

აღნიშნული დეფორმაციების საპონენლად ნებისმიერ, სტატიკურად რკვევად ძირითად სისტემაზე ვიმოქმედოთ ერთეული ძალებით და ავაგოთ მლუნავი მომენტის ეპიურები. ამ ეპიურების კომბინაცია ჯამურ ეპიურასთან მოგვცემს ნულს. ძირითად სისტემად შეიძლება მივიღოთ არა ის, რომელიც მიღებული იყო საანგარიშოდ, არამედ სხვა რომელიმე.

ეპიურის მარჯვენა ნაწილის შესამოწმებლად განვიხილოთ M_1 და M ეპიურა (ნახ. 198, ა, ბ), ე. ი. განვსაზღვროდ მე-5 კვანძის ვერტიკალური გადაადგილება

$$\sum \int \frac{MM_1 ds}{EI} = \sum \int MM_1 \frac{ds}{l} = 0.$$

იმევე კვანძის ჰორიზონტალური გადაადგილება

$$\sum MM_3 \frac{ds}{l} = 0.$$

ეპიურის მარცხენა ნაწილის შესამოწმებლად განვიხილოთ M_2 და M ეპიურა (ნახ. 198, ა, გ). მათ კომბინაციამ უნდა მოგვცეს ნული

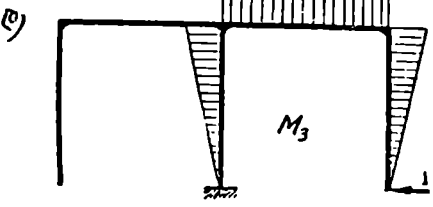
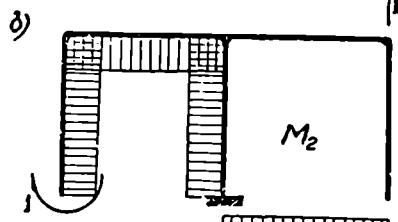
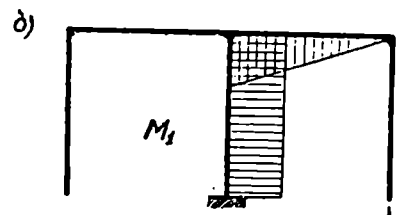
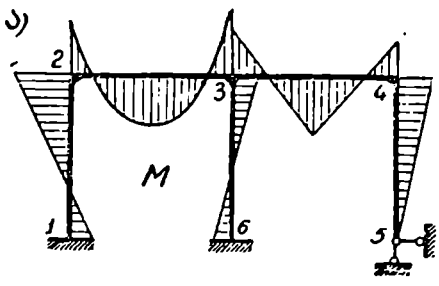
$$\varphi = \sum MM_2 \frac{ds}{EI} = 0.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $M_2=1$ და შევკვცავთ EI -ზე, მაშინ

$$\sum \int \frac{M ds}{l} = 0.$$

ჩვენ მივიღეთ მნიშვნელოვანი ფორმულა, რომელიც შეიძლება ჩამოვყავალიბოთ შემდგენიარად: მლუნავი მომენტის ეპიურის დაყვანილი ფართობი $\left(\frac{\omega M}{l}\right)$ ჩაკეტილ (უსახსრო) კონტურზე ნულის ტოლია.

თუ ეს პირობა არ არის დაცული, მაშინ სადღაც შეცდომაა დაშვებული.



ნახ. 198.

პრაქტიკულად ანგარიშს ვაწარმოებთ შემდეგნაირად: გარეთა და შიგ-
ნითა ეპიურების ფართობებს ვყოფთ სათანადო ღეროს ინერციის მომენტზე
და ვაჯამებთ ცალ-ცალკე. მიღებულ დადებით და უარყოფით სიდიდეთა ჯამმა
უნდა მოგვცეს ნული. განსხვავება 2%-მდე დასაშვებია.

**§ 39. სტატიკურად ურკვევი სისტემის ანგარიშის მსვლელობა
ძალთა მეთოდით**

ძალთა მეთოდის საერთო წესის და გარჩეული მაგალითების შესწავლის
საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ნებისმიერი სტატიკურად ურკვევი
სისტემის ანგარიშის მსვლელობა:

1. ვარკვევთ სტატიკური ურკვევობის ხარისხს;
2. ვირჩევთ სტატიკურად რკვევად ძირითად სისტემას, ე. ი. უკუვაგდებთ
ზედმეტ ბმებს;
3. უკუგდებული ბმების მაგიერ ძირითად სისტემაზე ვიმოქმედებთ უც-
ნობი ძალებით X_1, X_2, \dots, X_n და მოცემული დატვირთვით;
4. ვწერთ ძალთა მეთოდის კანონიკურ განტოლებებს;
5. ძირითად სისტემაზე რიგრიგობით ვამოქმედებთ ერთეულ ძალებს
 $X_1=1, X_2=1, \dots, X_n=1$ და მოცემულ დატვირთვას და ვაგებთ მლუნავი
მომენტის ეპიურებს;
6. შორ-მაქსიმუმს ან ვერეშჩაგინის ფორმულით ვანგარიშობთ კანონი-
კური განტოლებების კოეფიციენტებს—გადაადგილებებს;
7. ვამოწმებთ მიღებულ გადაადგილებებს;
- ✓ 8. ვწერთ კანონიკურ განტოლებათა სისტემას რიცხობრივი სახით და
ვწყვეტთ მას, ე. ი. ვსაზღვრავთ უცნობებს;
9. ერთეული ძალებით გამოწვეული ეპიურის ორდინატებს ვამრავლებთ
უცნობთა სათანადო მნიშვნელობებზე და ვაჯამებთ ტვირთით გამოწვეულ
ეპიურასთან, მივიღებთ მლუნავი ეპიურის ჯამურ (საბოლოო) ეპიურას, ე. ი.

$$M = M_p + X_1 M_1 + X_2 M_2 + \dots + X_n M_n.$$

10. ვამოწმებთ ჯამურ ეპიურას სტატიკური და კინემატიკური მეთოდით;
11. ვანგარიშობთ საბოლოო (ჯამურ) საყრდენ რეაქციებს:

$$A = A_p + X_1 A_1 + X_2 A_2 + \dots + X_n A_n$$

12. ვაგებთ განივი და გრძივი ძალების ეპიურებს.

მრავალჯერ სტატიკურად ურკვევი სისტემის ანგარიში დიდ არითმეტი-
კულ გამოთვლებს მოითხოვს და ამიტომ განსაკუთრებული ყურადღება უნდა
მიექცეს ანგარიშის გამარტივების საშუალებებს, კერძოდ ძირითადი სისტემის
არჩევას.

§ 40. მღუნავი მომენტის ეპიურების აგება რთულ, სტატიკურად რკვევად სისტემაში

სტატიკურად ურკვევი სისტემების ანგარიში ძალთა მეთოდით მოითხოვს მღუნავი მომენტის ეპიურების აგების კარგ ცოდნას. ეპიურების აგება მასალათა გამძლეობის საგანს შეადგენს, მაგრამ რთულ შემთხვევებში ერთგვარ სიძნელეს იწვევს და ამიტომ საჭიროა მასზე შეჩერება. მღუნავი მომენტის ეპიურების ორდინატები მოვზომოთ სისტემის სათანადო ღეროს პერპენდიკულარულად გაკიმული ბოკკოების მხარეს, ე. ი. ნულოვან ღერძად მივიღოთ ჩარჩოს ღეროების ღერძები, როგორც წინა თავში.

1 მაგალითი. მოცემულია სტატიკურად რკვევადი ჩარჩო, ავადგოთ მღუნავი მომენტის ეპიურა გამოწვეული ვერტიკალური და ჰორიზონტალური ძალით (ნახ. 199).

გადაწყვეტა. ეპიურების აგებას საყრდენი რეაქციების განსაზღვრით ვიწყებთ.

ვერტიკალური ძალისაგან გამოწვეული რეაქციები:

$$A = -\frac{Pl_1}{2l}; \quad B = \frac{Pl_1}{2l}.$$

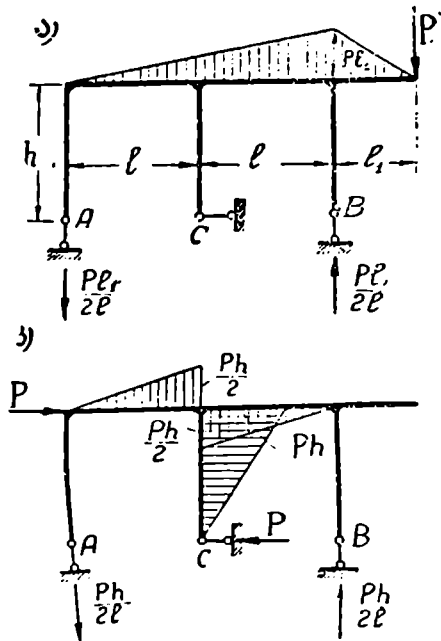
რეაქცია ჰორიზონტალურ საყრდენ ღეროში $C=0$.

დგარებში მომენტი ნულია და მღუნავ მომენტს ექნება ადგილი მხოლოდ ჰორიზონტალურ ღეროში (ნახ. 199, ა). ჰორიზონტალური დატვირთვის შემთხვევაში (ნახ. 199, ბ)

$$A = -\frac{Ph}{2l}; \quad B = \frac{Ph}{2l}.$$

თუ ჩარჩოზე მოქმედ ძალებს დავაგვიღებთ ჰორიზონტალურ ღერძზე, მივიღებთ $C=P$.

მღუნავი მომენტის ეპიურა მოყვანილია 199, ბ ნახაზზე.



ნახ. 199.

შ მაგალითი. ავადოთ სამსახსრიანი ჩარჩოს მღუნაეი მომენტის ეპიურა, სამი სახის დატვირთვისაგან გამოწვეული (ნახ. 200).

გადაწყვეტა. ჩარჩოზე მოქმედებს ორი ერთმანეთის ტოლი და საწინააღმდეგო მიმართულების ერთეული ძალა (ნახ. 200, ა). ამ შემთხვევაში რეაქციის ვერტიკალური მდგენელები

$$V_a = V_b = 0.$$

განბრჯენების სანგარიშოდ დაწეროთ განტოლება

$$M_c = -H_a h - 1 \cdot \frac{h}{2} = 0,$$

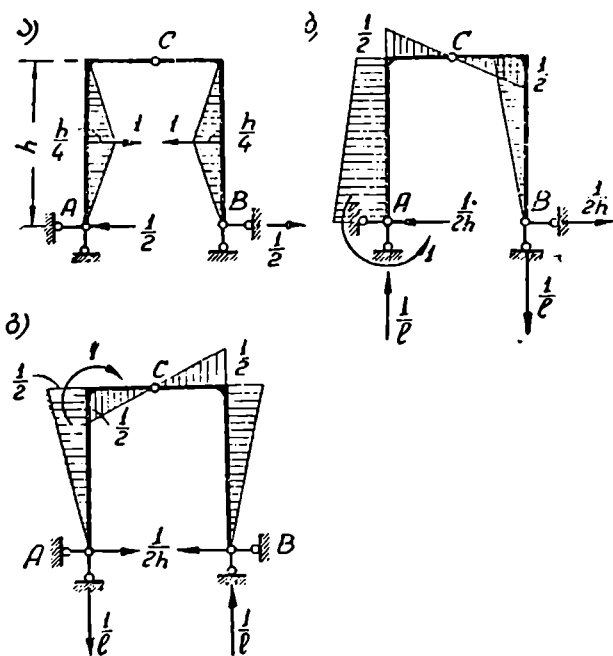
საიდანაც

$$H_a = -\frac{1}{2}.$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$H_b = -\frac{1}{2}.$$

ორივე საყრდენის განბრჯენი მიმართულია გარეთ. მღუნაეი მომენტის ეპიურა ნაჩვენებია 200, ა ნახაზზე.



ნახ. 200.

მეორე შემთხვევაში A საყრდენზე მოქმედებს ერთეული მომენტი (ნახ. 200, ბ).

რეაქციის ვერტიკალური მდგენელები

$$V_a = -V_b = -\frac{1}{l}.$$

მლუნაი მომენტი სახსარში

$$M_c = -H_a h + \frac{1}{l} \cdot \frac{l}{2} - 1 = 0,$$

აქედან

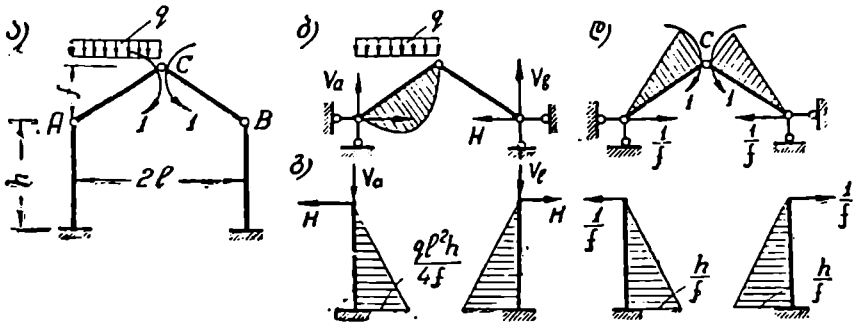
$$H_a = -\frac{1}{2h}. \text{ ასევე მივიღებთ } H_b = -\frac{1}{2h}.$$

რეაქციების განსაზღვრის შემდეგ ვაგებთ მლუნაი მომენტის ეპიურას (ნახ. 200, ბ).

შესამე შემთხვევაში (შეყურსული მომენტი მოქმედებს მარცხენა ზედა კენძზე) ეპიურა აიგება ანალოგიურად (ნახ. 200, გ).

შ მაგალითი. სტატიკურად რკვევად სისტემაზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი და ორი ერთეული წყვილი ძალა (ნახ. 201). ავაგოთ მლუნაი მომენტის ეპიურა ცალ-ცალკე თითოეული დატვირთვით გამოწვეული.

გ ა და წ ყ ვ ე ტ ა. მოცემული სისტემის ზედა ნაწილი—სამსახსრიანი ჩარჩო—გამოვყოთ ცალკე, ვიპოვოთ საყრდენი რეაქციები და ავაგოთ მლუნა-



ნახ. 201.

ვი მომენტის ეპიურა (ნახ. 201, ბ); ზედა ნაწილის გავლენა ქვედა ნაწილზე გამოიხატება საყრდენების დაწოლით, ე. ი. რეაქციების ტოლი და საწინააღმდეგო ძალებით (ნახ. 201, გ).

თანაბრად განაწილებული დატვირთვისაგან გამოწვეული რეაქციები:

$$V_a = \frac{3ql}{4}; \quad V_b = \frac{ql}{4}; \quad H = \frac{ql^2}{4f}.$$

ორი ერთეული და ურთიერთ მოპირდაპირე მომენტის მოქმედების შემთხვევაში (ნახ. 201, დ) რეაქციის ვერტიკალური მდგენელები ნულის ტოლია. ჰორიზონტალური მდგენელები განისაზღვრება განტოლებით

$$M_c = -H \cdot f + 1 = 0,$$

$$H = \frac{1}{f}.$$

მლუნავი მომენტის ეპიურა წარმოდგენილია 201, დ, ნახაზზე.

4 მაგალითი. ორი სამსახსრიანი ჩარჩო მოთავსებულია ერთი მეორეზე და მასზე მოქმედებს ჰორიზონტალური ძალა P (ნახ. 202). ავადგოთ მლუნავი მომენტის ეპიურა.

გადაწყვეტა. პირველად განვიხილოთ ზედა სართული (ნახ. 202, ბ). საყრდენი რეაქციები:

$$V_a = -\frac{Ph}{l}; \quad V_b = \frac{Ph}{l}; \quad H_a = -\frac{P}{2};$$

$$H_b = \frac{P}{2}.$$

ქვედა სართულზე ვიმოქმედოთ ზედა სართულის რეაქციების ტოლი და საწინააღმდეგო ძალებით და გამოვთვალოთ ამ ძალებისაგან გამოწვეული რეაქციები (ნახ. 202, გ).

მლუნავი მომენტის ეპიურა ნაჩვენებია ნახაზზე.

5 მაგალითი. იმავე ორსართულიან ჩარჩოზე მოქმედებს ორი ერთმანეთის ტოლი და საწინააღმდეგო მიმართულების წყვილი ძალა (ნახ. 203). ავადგოთ მლუნავი მომენტის ეპიურა.

გადაწყვეტა. ზედა და ქვედა სართული განვიხილოთ ცალ-ცალკე ისე, როგორც ნაჩვენებია 203, ბ ნახაზზე. ზედა ჩარჩოს ანალოგიური მაგალითი ჩვენ უკვე განვიხილეთ (2 მაგალითი) და მლუნავი მომენტის ეპიურას ექნება 200, ბ ნახაზზე წარმოდგენილი სახე.

ქვედა ჩარჩოზე მოქმედებს ერთეული წყვილი ძალა და ზედა სართულის საყრდენი დაწოლები. უკანასკნელი მლუნავ მომენტებს არ იძლევა. მლუნავ მომენტს მოგვცემს მხოლოდ ერთეული წყვილი ძალა, ეს შემთხვევატ განხილული გვექონდა მე-2 მაგალითში (ნახ. 200, გ). აღნიშნული ორი ეპიურის შეერთება მოგვცემს მთლიან ეპიურას (ნახ. 203, გ).

6 მაგალითი. სამშალიან, სტატიკურად კვევად სისტემაზე მოქმედებს ორი საწინააღმდეგო მიმართულების ერთეული წყვილი ძალა (ნახ. 204, ა).

მოცემული სისტემა განვიხილოთ ისე, როგორც ნაჩვენებია 204, ბ ნახაზზე და შევამოწმოთ ავტობული ეპიურის სისწორე.

7 მაგალითი. შევამოწმოთ 205 ნახაზზე წარმოდგენილი მლუნავი მომენტის ეპიურის სისწორე და გამოვიანგარიშოთ ეპიურის ორდინატების სიდიდეები.

§ 41. ძირითადი სისტემის არჩევის მაგალითები

ჩვენ ვნახეთ, რომ მოცემული სტატიკურად ურკვევე სისტემის საანგარიშოდ მრავალის ხეიდასხვა ძირითადი სისტემის არჩევა შეიძლება იმის მიხედვით, თუ რომელ ღეროებს ჩავთვლით ზედმეტად. რადგანაც ძირითადი სისტემის სათანადო არჩევით ჩვენ შეგვიძლია ამოცანა გავამარტივოთ ან გავართულოთ, ამიტომ მის შერჩევას დიდი ყურადღება უნდა მიექცეს, განსაკუთრებით რთული ჩარჩოს ანგარიშის დროს. გარდა იმისა, რომ ძირითადი სისტემა გეომეტრიულად უცვლელი უნდა იყოს, მას უნდა ჰქონდეს შემდეგი ნიშნები:

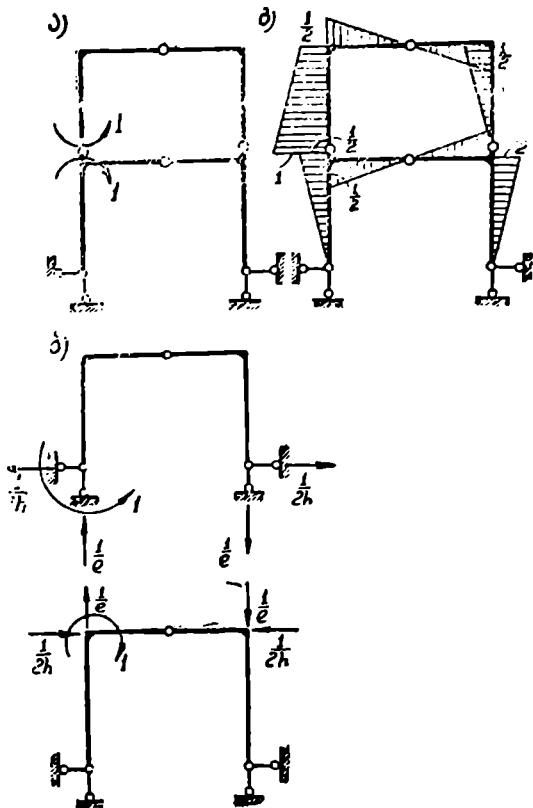
1. საანგარიშოდ იყოს მარტივი;
2. მლუნავი მომენტის ეპიურები უნდა ვრცელდებოდეს რაც შეიძლება ნაკლებ ღეროებზე და იყოს მარტივი;

3. რაც შეიძლება მეტი არამთავარი გადაადგილება იქცეს ნულად,
 4. სიმეტრიულ ნაწილში უცნობები უნდა დალაგდეს სიმეტრიულად.
- ორი უკანასკნელი მოთხოვნები ძირითადია და მათ უფრო მეტი ყურადღება უნდა მიექცეს, ვიდრე დანარჩენებს.
- თუ ძირითადი სისტემა აკმაყოფილებს აღნიშნულ პირობებს, მაშინ ის იქნება რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ ი.

თუ ძირითადი სისტემის არჩევის რამდენიმე მაგალითი.

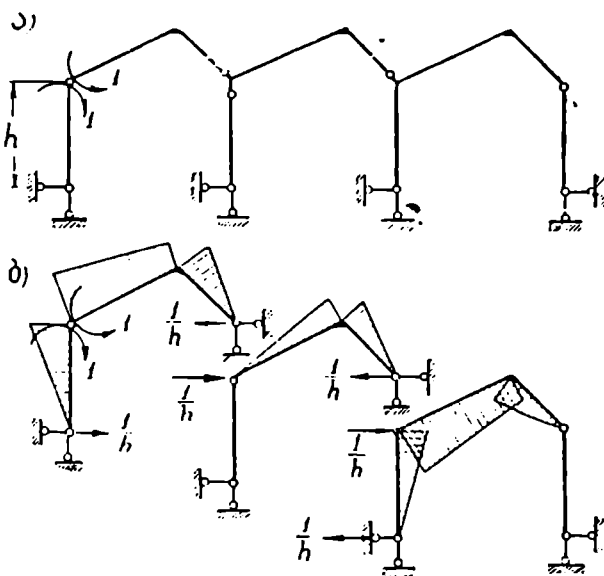
1 მაგალითი. მოცემულია არასიმეტრიული სამშალიანი ჩარჩო (ნახ. 206, ა) მრავალი შესაძლო ძირითადი სისტემიდან ჩვენ გავარჩიოთ ოთხი.

პირველ ვარიანტში ზედმეტ უცნობებად მიღებულია საყრდენი ღერო-



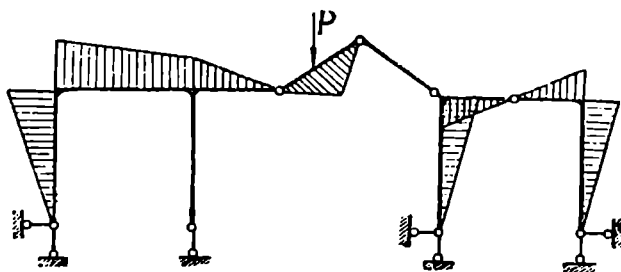
ნახ. 203.

ების ძალები (ნახ. 206, ბ). ამ ძალებისაგან მიღებულ ყველა ეპიურას ექნება საერთო უბნები და არც ერთი გადაადგილება არ იქცევა ნულად. შაშასადაჟე, კანონიკურ განტოლებათა სისტემის ყველა განტოლებაში შვეა 9 უცნობი და



ნახ. 204.

არაერთარ გამარტივებას არ მივიღებთ. ძირითადი სისტემის მეორე ვარიანტი მოცემულია 206, გ ნახაზზე. აქ მოცემული სისტემა გაიყო ოთხ ნაწილად და



ნახ. 205.

თითოეული უცნობისაგან გამოწვეული ეპიურა ვრცელდება მხოლოდ ორ მე-ზობელ ნაწილზე, რის გამოც მთელი რიგი არამთავარი გადაადგილება იქცევა ნულად.

მაგალითად,

$$\delta_{17} = \delta_{13} = \delta_{19} = 0;$$

$$\delta_{27} = \delta_{26} = \delta_{29} = 0;$$

$$\delta_{37} = \delta_{36} = \delta_{39} = 0.$$

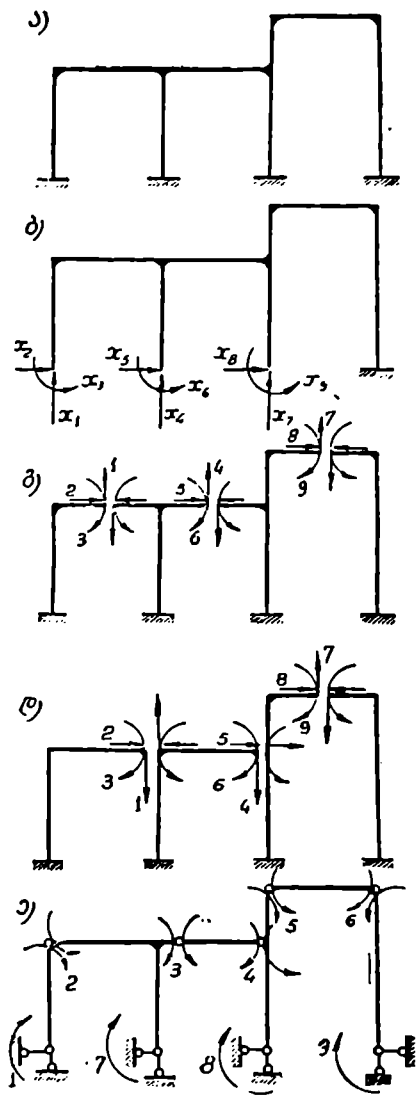
რადგანაც კვეთები გატარებულია თითოეული მალის სიმეტრიის ღერძზე, ამიტომ $\bar{m}_{12} = \bar{m}_{13} = \bar{m}_{45} = \bar{m}_{46} = \bar{m}_{78} = \bar{m}_{79} = 0$. ეს მნიშვნელოვნად გაამარტივებს კანონიკურ განტოლებათა სისტემას.

მესამე ვარიანტში (ნახ. 206, დ) პირველი ორი მალი გაკვეთილია დგარებთან. აქ \bar{m}_{12} , \bar{m}_{13} , \bar{m}_{45} და \bar{m}_{46} აღარ იქნება ნულის ტოლი, სამაგიეროდ ნულად იქცევა \bar{m}_{14} , \bar{m}_{15} , \bar{m}_{16} , \bar{m}_{47} , \bar{m}_{48} და \bar{m}_{49} . მაშასადამე, ეს ვარიანტი უკეთესია მეორე ვარიანტზე. ეს უფრო ცხადი იქნება, თუ გამოვხაზავთ ერთეულ ეპიურებს.

206, ე ნახაზზე წარმოდგენილია მეოთხე ვარიანტი, სადაც ზედმეტ უცნობებად მიღებულია მომენტები კვანძებში. ეს ძირითადი სისტემა შედგება სამხარისხიანი ჩარჩოებისაგან და ეპიურების აგება წინა ვარიანტებზე უფრო ძნელია. გარდა ამისა აქ ნულად იქცევა მხოლოდ რამდენიმე გადაადგილება.

3 მაგალითი. 207-ე ნახაზზე გამოსახულია არასიმეტრიული სამჯერ სტატიკურად ურკვევი სისტემა. პირველ ვარიანტში ზედმეტ უცნობებად არჩეულია საყრდენი რეაქციები (ნახ. 207, ბ), მეორეში კი — მომენტები კვანძებში (ნახ. 207, გ). არც პირველი და არც მეორე ვარიანტში არც ერთი გადაადგილება არ იქცევა ნულად. ნახაზზე მოცემულია ერთეული უცნობებისაგან ვაშოწვეული მღუნავი მომენტის ეპიურები მეორე ვარიანტში. ამ ვარიანტის უპირატესობა პირველთან შედარებით მდგომარეობს მხოლოდ იმაში, რომ აქ ეპიურის ორდინატები უმთავრესად ერთეულის ტოლია. მკითხველს ევალება შეამოწმოს ეპიურები და გამოთვალოს მისი ორდინატები.

3 მაგალითი. განვიხილოთ კიდევ ერთი არასიმეტრიული ჩარჩო (ნახ. 208). რადგანაც სისტემა შედგება ჩაკეტილ კონტურებისაგან, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია გადავკვეთოთ ღეროები და ამასთანავე უცნობები გადავიტანოთ ხისტი კონსოლებზე. კვეთების შერჩევა და უცნობების გადატანა კონსოლებზე კარ-



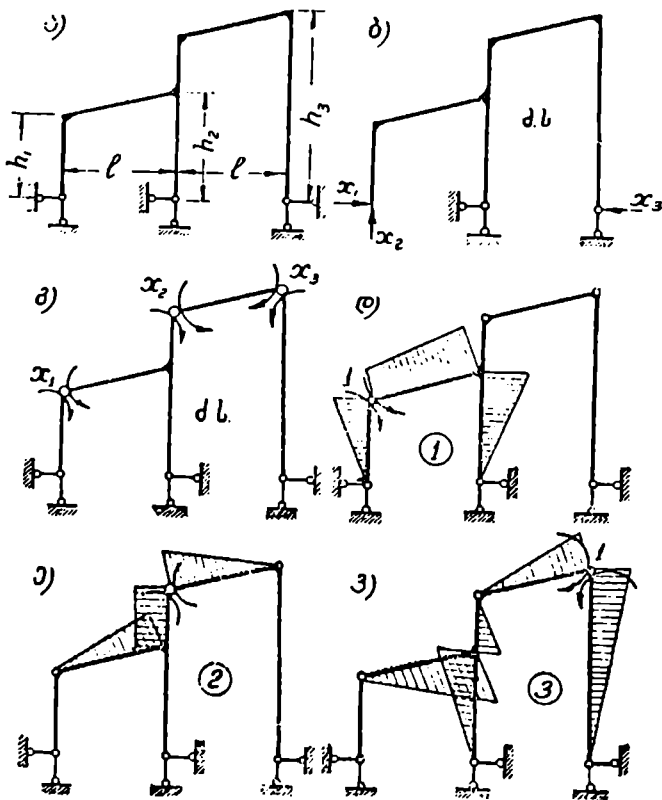
ნახ. 206.

გად უნდა იყოს მოფიქრებული. 208, ბ ნახაზზე ნაჩვენებია ძირითადი სისტემა. გაკვეთილია ზედა დახრილი ლერო და X_1 გადატანილია ხისტი კონსოლის ბოლოზე ჰორიზონტალური ლეროს სიმაღლეზე; მარცხენა საყრდენის რეაქციები გადატანილია ხისტ კონსოლზე, ისე როგორც ნაჩვენებია ნახაზზე. ერთეული ეპიურების კომბინაცია მოგვეცემს:

$$\delta_{14} = \delta_{15} = \delta_{16} = \delta_{25} = \delta_{26} = \delta_{34} = \delta_{35} = \delta_{45} = \delta_{46} = 0,$$

და კანონიკური განტოლება მნიშვნელოვნად გამარტივდება.

უცნობების გადატანა ღრეკად ცენტრებზე არ მოგვეცემდა ასეთ გამარტივე-



ნახ. 207.

ბას, რადგან ამ შემთხვევაში X_1 და X_3 -საგან გამოწვეული ეპიურები გავრცელდება ჩაკეტილი კონტურების გამყოფ შუა ლეროზეც და მთელი რიგი გადაადგილებებისა აღარ იქცევა ნულად. ამგვარად, არასიმეტრიული ჩაკეტილი კონტურების დროს უზღობესია უცნობები გადავიტანოთ კონტურების გამყოფი ლეროს შუაში.

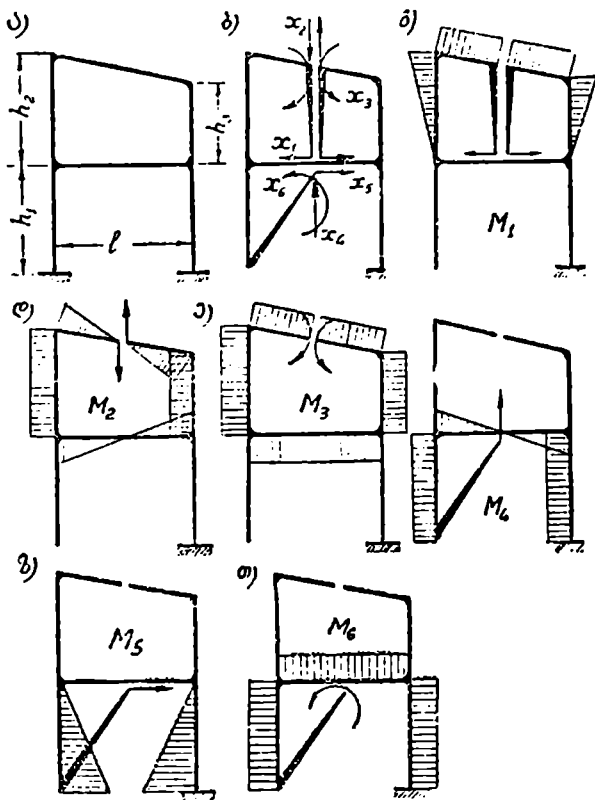
4 მაგალითი. თუ მოცემულია ჩაკეტილი კონტურებისაგან შედგენილი

სიმეტრიული ჩარჩო (ნახ. 209), მაშინ მიზანშეწონილია უცნობები გადავრტანოთ დრეკად ცენტრებში (ნახ. 209, ბ). რადგანაც დრეკადი ცენტრები სიმეტრიის ღერძზეა მოთავსებული, ამიტომ ეს მნიშვნელოვან გამარტივებას იძლევა. გადაადგილებები:

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{16} = \delta_{17} = \delta_{18} = \delta_{19} = \delta_{23} = \delta_{24} = \delta_{26} = \delta_{27} = \delta_{28} = \delta_{29} = 0:$$

$$\delta_{36} = \delta_{37} = \delta_{38} = \delta_{39} = \delta_{45} = \delta_{46} = \delta_{48} = \delta_{49} = \delta_{56} = \delta_{57} = \delta_{58} = \delta_{59} = 0.$$

ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ ავაგებთ ერთეულ ეპიურებს.



ნახ. 208.

მაგალითი. მოცემულია სიმეტრიული ხუთჯერ სტატიკურად ურკვევი სისტემა (ნახ. 210, ა). ძირითადი სისტემა ისე უნდა ავირჩიოთ, რომ უცნობები დალაგდნენ სიმეტრიულ და ირიბასიმეტრიულ უცნობებად. ზედა სართლის რიგელი გავკვეთოთ სიმეტრიის ღერძზე და უკუვაგდოთ ორი საყრდენი ღერო (ნახ. 210, ბ). X_4 და X_5 არ არის არც სიმეტრიული და არც ირიბასიმეტრიული, ამიტომ დავაჯგუფოთ ისინი და გარდა ამისა X_2 გადა-

ვიტანოთ ხისტ კონსოლზე ქვედა ჰორიზონტალური ღეროს სიმალღებზე (ნახ. 210. გ). ეს გაუმჯობესებული ძირითადი სისტემა მნიშვნელოვან გამარტივებას იძლევა.

კანონიკურ განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$X_1 \delta_{11} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1p} = 0;$$

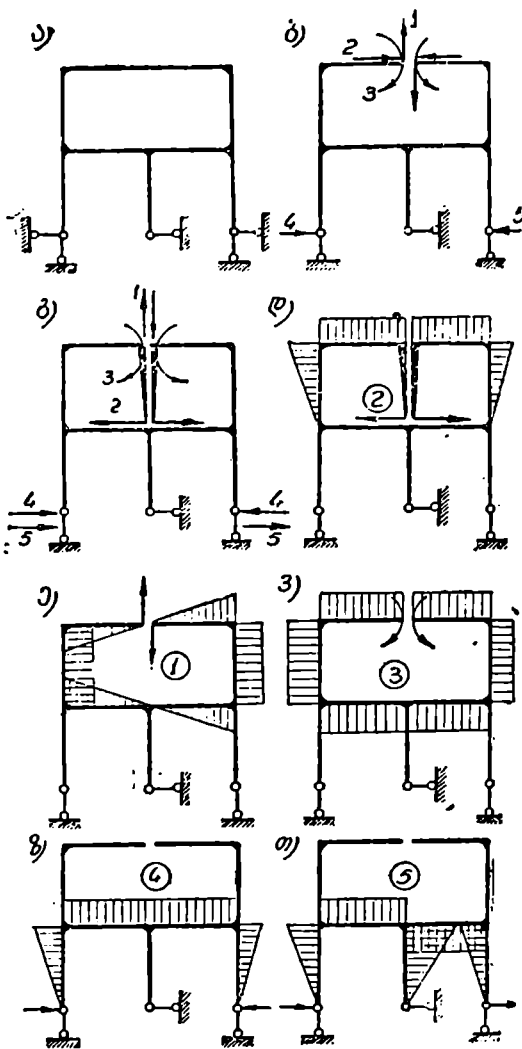
$$X_1 \delta_{21} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2p} = 0.$$

$$X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2p} = 0;$$

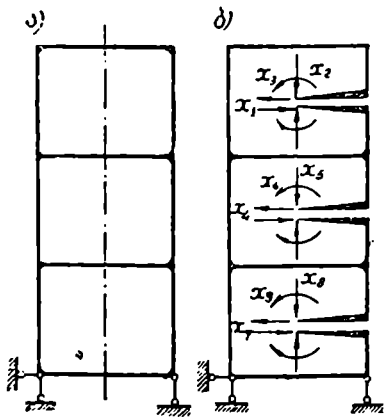
$$X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + X_4 \delta_{34} + \Delta_{3p} = 0;$$

$$X_3 \delta_{43} + X_4 \delta_{44} + \Delta_{4p} = 0.$$

6 მაგალითი. განვიხილოთ ორმალბანი უსახსრო ჩარჩო (ნახ. 211). ძირითადი სისტემის არჩევისას გამოვიყენოთ უცნობთა დაჯგუფების მეთოდი, გარდა ამისა ზოგიერთი უცნობი გადავიტანოთ ხისტ კონსოლზე. ჩარჩო გავკვეთოდ განაპირა კვანძებში და უცნობები დავაჯგუფოდ სიმეტრიულ და ირიბდსიმეტრიულ უცნობებად. უფრო მეტ გამარტივებას მივიღებთ, თუ სიმეტრიულ (ნახ.



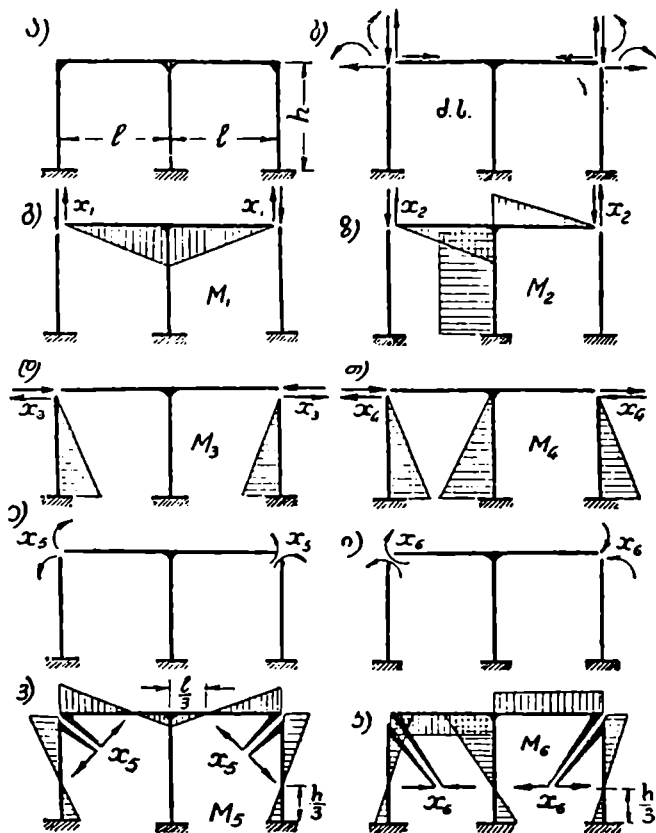
ნახ. 210.



ნახ. 209.

211, ე) და ირიბდსიმეტრიულ (ნახ. 211, ი) მომენტებს შეეცვლით ხისტ კონსოლებზე გადატანილი ძალებით (ნახ. 211, ვ, კ). X_6 -ს მიმართულება ისე უნდა ავირჩიოთ, რომ M_6 ეპიურის ნულოვანი წერტილები დაემთხვეს M_1

და M_2 ეპიურების სიმძიმის ცენტრებს. ასევე M_6 -ის ნულოვანი წერტილები უნდა დაემთხვეს M_4 ეპიურის ცენტრებს. მიღებული ეპიურებიდან ცხადია, რომ სიმეტრიული ეპიურები (M_1 , M_3 და M_5) ურთიერთ ნულოვანია და დამატებით $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{33} = 0$. ირრისიმეტრიული ეპიურებიდან ურთიერთნულოვანია M_4 და M_6 და დამატებით ნულად იქცევა δ_{46} .



ნახ. 211.

ამგვარად, ყველა არაძთივარი გადაადგილება, გარდა δ_{34} და δ_{26} -ისა, ნულად იქცევა და კანონიკურ განტოლებათა სისტემა მნიშვნელოვნად გამარტივდება:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0; \quad X_2 \delta_{22} + X_4 \delta_{24} + X_6 \delta_{26} + \Delta_{2p} = 0;$$

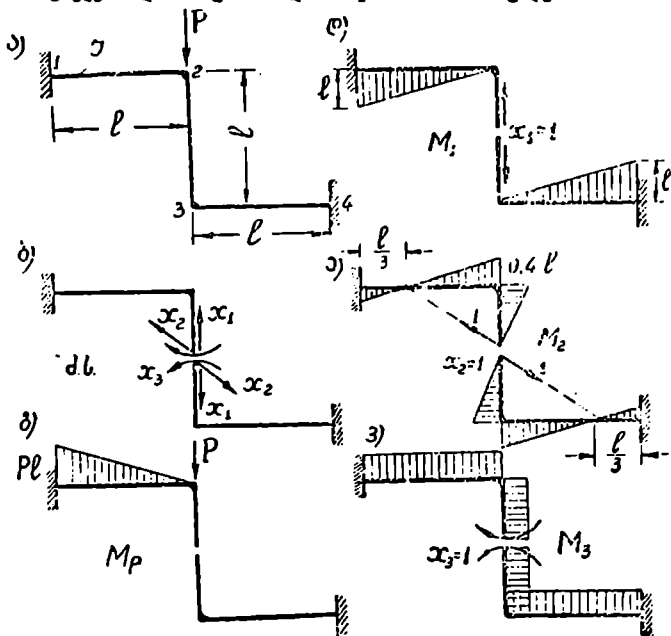
$$X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} = 0; \quad X_4 \delta_{44} + X_6 \delta_{46} + \Delta_{4p} = 0;$$

$$X_5 \delta_{55} + \Delta_{5p} = 0; \quad X_7 \delta_{77} + X_8 \delta_{78} + \Delta_{7p} = 0.$$

§ 42. რთული ჩაჩრის ანგარიშის მაგალითები

1 მაგალითი. ავადოთ მღუნავი მომენტის, განივი და გრძივი ძალის ეპიურები საშუალო სტატიკურად ურკვევ სისტემაში (ნახ. 212).

გადაწყვეტა. ძირითადი სისტემა მოყვანილია 212, ბ ნახაზე. ძირითად სისტემაზე ვიმოკმედლო ერთეული ძალებით და მოცემული დატვირთვით და ავადოთ მღუნავი მომენტის ეპიურები. იმის გამო, რომ ვერტიკალური ღერო გაკვეთილია შუაში და X_2 -ის მიმართულება ჰორიზონტალურ



ნახ. 212.

ღეროებს კვეთს სიგრძის მესამედზე, ყველა არამთავარი გადაადგილება იქცევა ნულად:

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = 0.$$

გარდა ამისა $\Delta_{2p} = 0$. გადაადგილებები:

$$\delta_{11} = 2 \frac{1}{EI} \frac{l^2}{2} \frac{2}{3} l = \frac{2l^3}{3EI};$$

$$\delta_{33} = \frac{3l}{EI};$$

$$\Delta_{1p} = - \frac{1}{EI} \frac{Pl^2}{2} \frac{2}{3} l = - \frac{Pl^3}{3EI};$$

$$\Delta_{2p} = - \frac{l^2}{2EI}$$

კანონიკური განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0;$$

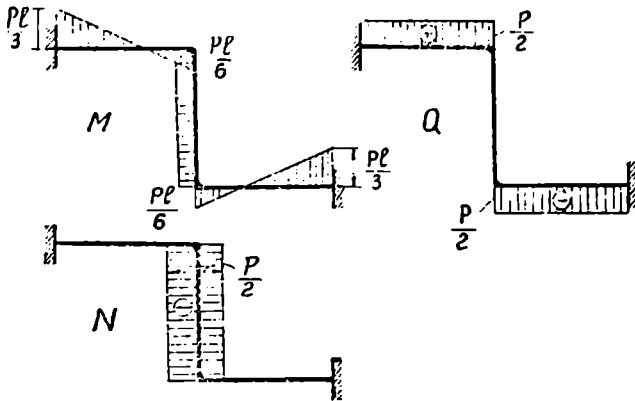
$$X_2 \delta_{22} + \Delta_{2P} = 0;$$

$$X_3 = 0.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$X_1 = \frac{P}{2}; \quad X_2 = -\frac{Pl}{6}.$$

მღუნავე მომენტის ჯამურ ეპიურას მივიღებთ შემდეგი ფორმულის საფუძველზე:



ნახ. 213.

$$M = M_p + X_1 M_1 + X_2 M_2.$$

$$M_1 = -Pl + l \frac{P}{2} + \frac{Pl}{6} = -\frac{Pl}{3}.$$

$$M_2 = \frac{Pl}{6};$$

$$M_3 = \frac{Pl}{6};$$

$$M_4 = -l \frac{P}{2} + \frac{Pl}{6} = -\frac{Pl}{6}.$$

განივი ძალა

$$Q_{12} = \frac{\frac{Pl}{3} + \frac{Pl}{6}}{l} = \frac{P}{2}; \quad Q_{21} = -\frac{P}{2}; \quad Q_{33} = 0.$$

მღუნავე მომენტის, განივი და გრძივი ძალის ეპიურები მოყვანილია 213-ე ნახაზზე.

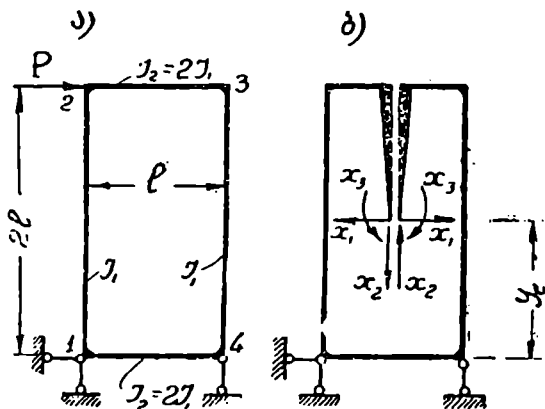
შემაჯალითო. ვიანგარიშით სამჯერ სტატიკურად ურკვევი ჩაკეტილი კონტური (ნახ. 214, ა). ჩარჩოს ზომები და დატვირთვა ნაჩვენებია ნახაზზე.

გადაწყვეტა. ამოცანის გადაწყვეტა მნიშვნელოვნად გამარტივდება თუ გამოვიყენებთ ღრეკალი ცენტრის მეთოდს. რადგანაც სისტემას აქვს სიმეტრიის ორი ღრეკი (დასულაა ღრეკალი სიმეტრიაც), ამიტომ ღრეკალი ცენტრი დაემთხვევა გეომეტრიულ ცენტრს (ნახ. 214, ბ).

მართლაც (51') ფორმულა მოგვცემს

$$y_c = \frac{\sum_1^n y \frac{S_i}{I_i}}{\sum_1^n \frac{S_i}{I_i}} = \frac{\frac{l}{2I_1} 2l + \frac{2l}{I_1} l \cdot 2}{\frac{l}{2I_1} + \frac{2l}{I_1} \cdot 2} = l.$$

ერთეული ძალებით და მოცემული დატვირთვით გამოწვეული ეპიურები ნახ.



ნახ. 214.

ვენებია 215-ე ნახაზზე. არამთავარი გადაადგილებები $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = 0$. მთავარი გადაადგილებები:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 2 \frac{1}{2EI_1} l^3 + 4 \frac{1}{EI_1} \frac{l^2}{2} \frac{2}{3} l = \frac{7l^3}{3EI_1}; \\ \delta_{22} &= 2 \frac{1}{EI_1} \frac{l}{2} 2l \frac{l}{2} + 4 \frac{1}{2EI_1} \frac{l^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{2} = \frac{13}{12} \frac{l^3}{EI_1}; \\ \delta_{33} &= 2 \frac{1}{EI_1} \cdot 2l + 2 \frac{1}{2EI_1} \cdot l = \frac{5l}{EI_1}. \end{aligned}$$

სატვირთო გადაადგილებები:

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= -\frac{1}{EI_1} \frac{1}{6} 2Pl(2l-l)2l - \frac{1}{2EI_1} Pl^2 = -\frac{7Pl^3}{6EI_1}; \\ \Delta_{2P} &= \frac{1}{EI_1} \frac{2Pl \cdot 2l}{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2EI_1} \frac{1}{6} 2Pl \cdot \frac{l}{2} l = \frac{13Pl^3}{12EI_1}; \end{aligned}$$

$$\Delta_{3P} = -\frac{1}{EI_1} 2 Pl^2 - \frac{1}{2EI_1} Pl^2 = -\frac{5Pl^2}{2EI_1}.$$

კანონიკური განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0;$$

$$X_2 \delta_{22} + \Delta_{2P} = 0;$$

$$X_3 \delta_{33} + \Delta_{3P} = 0.$$

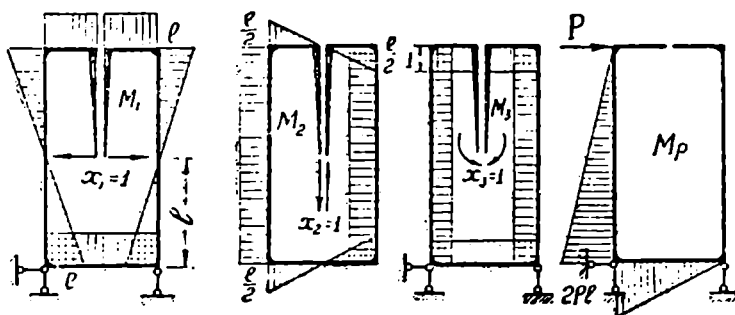
საიდანაც მივიღებთ

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{P}{2};$$

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2P}}{\delta_{22}} = -P;$$

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3P}}{\delta_{33}} = \frac{Pl}{2}.$$

ერთეული ძალებით გამოწვეული ეპიურის ორდინატები გადავაზრავლოთ უცნო-



ნახ. 215.

ბების სათანადო მნიშვნელობებზე და შევაჯამოთ P ძალით გამოწვეულ ეპიურასთან, მივიღებთ:

$$M_1 = -2Pl + \frac{P}{2} l + P \frac{l}{2} + \frac{Pl}{2} = -\frac{Pl}{2};$$

$$M_2 = -\frac{P}{2} l + P \frac{l}{2} + \frac{Pl}{2} = \frac{Pl}{2};$$

$$M_3 = -\frac{P}{2} l - P \frac{l}{2} + \frac{Pl}{2} = -\frac{Pl}{2};$$

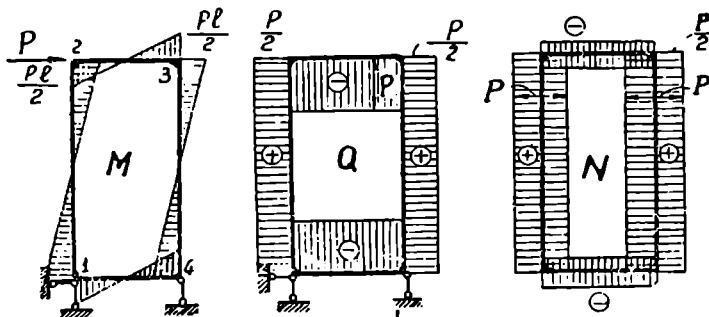
$$M_4 = \frac{P}{2} l - P \frac{l}{2} + \frac{Pl}{2} = \frac{Pl}{2}.$$

მღუნაეი მომენტის საბოლოო ეპიურა მოყვანილია 216, ა ნახაზზე.

განივი ძალის ეპიურის ასაგებად თითოეული ღერო განვიხილოთ

როგორც მარტივი, ორსაყრდენზე მდებარე კოქი (იხ. § 37) ან გამოვიყენოთ ფორმულა $Q = \frac{dM}{dx}$.

რადგანაც მღუნავი მომენტის ეპიურა სწორხაზოვანია, ამიტომ ამ ფორ-



ნახ. 216.

მულის გამოყენება მარტივად ხდება

$$Q_{12} = \frac{M_1 + M_2}{2l} = \frac{0,5Pl + 0,5Pl}{2l} = 0,5P$$

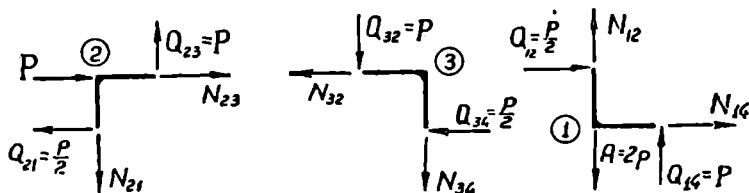
და მუდმივია მთელ ღეროზე.

$$Q_{23} = -\frac{M_2 + M_3}{l} = -\frac{0,5Pl + 0,5Pl}{l} = -P.$$

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$Q_{34} = 0,5P \text{ და } Q_{41} = -0,5P.$$

განივი ძალის ეპიურა წარმოდგენილია 216, ბ ნახაზზე.



ნახ. 217.

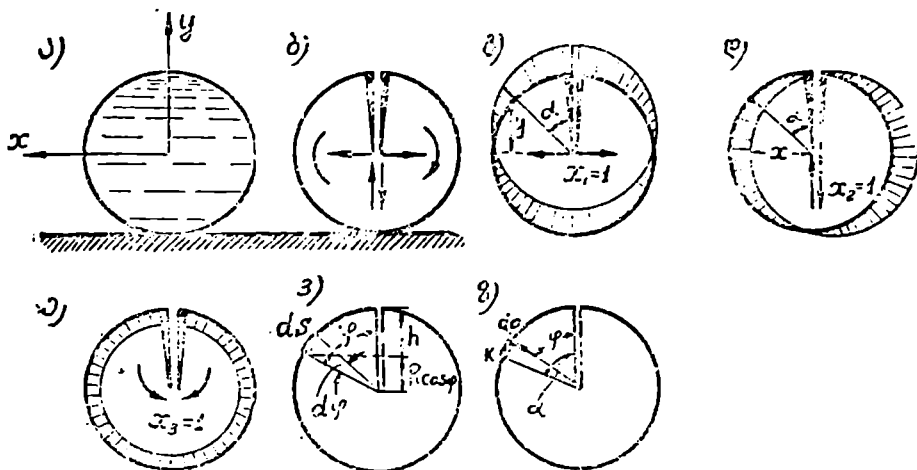
გრძივი ძალის საანგარიშოდ განვიხილოთ ჩარჩოს კვანძების წონასწორობის პირობა (ნახ. 217), მივიღებთ:

$$N_{21} = P; N_{23} = -0,5P; N_{31} = -P; N_{41} = -0,5P.$$

გრძივი ძალის ეპიურა გამოსახულია 216, გ ნახაზზე.

ჰ მაგალითი. ვიანგარიშოთ ცილინდრული მილი, რომელიც გავსებულია წყლით. ფუძის დეფორმაციას მხედველობაში ნუ მივიღებთ (ნახ. 218).

გადაწყვეტა. მსახველის ზიპართულებით მილიდან გამოვყოთ ერთეული სიგრძის რგოლი და განვიხილო ის, როგორც ჩაკეტილი კონტური. გავკვეთოთ რგოლი და უცნობები გადავიტანოთ დრეკად ცენტრში, რომელიც დაენთხვევა წრის გეომეტრიულ ცენტრს (ნახ. 218, ბ).



ნახ. 218.

ავაგოთ ერთეული ძალებისაგან გამოწვეული ეპიურები. $X_1=1$ -საგან გამოწვეული მლუნავი მომენტი ნებისმიერ კვეთში იქნება (ნახ. 218, გ)

$$M_1 = -1 \cdot y = -R \cdot \cos \alpha.$$

$X_2=1$ და $X_3=1$ -საგან გამოწვეული მლუნავი მომენტები იმავე კვეთში (ნახ. 218, დ, ე)

$$M_2 = 1 \cdot x = R \cdot \sin \alpha;$$

$$M_3 = 1.$$

მთავარი გადაადგილებები:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EI} \int M_1^2 ds = \frac{4}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos^2 \alpha \cdot R d\alpha = \frac{4R^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha d\alpha = \\ &= \frac{4R^3}{EI} \left[\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^3}{EI}; \\ \delta_{22} &= \frac{1}{EI} \int M_2^2 ds = \frac{4}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin^2 \alpha \cdot R d\alpha = \frac{4R^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha d\alpha = \\ &= \frac{4R^3}{EI} \left[-\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^3}{EI}; \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{EI} \int M_3^2 ds = \frac{R}{EI} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{2\pi R}{EI}.$$

ჰიდროსტატიკური დაწოლა ds ელემენტზე გამოითვლება ფორმულით (ნახ. 218, ვ)

$$dP = \gamma dsh = \gamma R d\varphi (R - R \cos \varphi) = \gamma R^2 (1 - \cos \varphi) d\varphi.$$

მივიღოთ $\gamma = 1$, მაშინ

$$dP = R^2 (1 - \cos \varphi) d\varphi.$$

მლუნავი მომენტი ნებისმიერ k კვეთში, რომლის მდებარეობა α კუთხით განისაზღვრება, ტოლია

$$M_\alpha = \int_0^\alpha dP \cdot R \sin(\alpha - \varphi).$$

თუ შევიტანთ dP -ის მნიშვნელობას, მივიღებთ

$$M_\alpha = R^3 \int_0^\alpha (1 - \cos \varphi) \cdot \sin(\alpha - \varphi) d\varphi = R^3 \int_0^\alpha (\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi - \sin \alpha \cos^2 \varphi + \cos \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi) d\varphi.$$

k კვეთისათვის α მუდმივია და ამიტომ

$$\int_0^\alpha \sin \alpha \cos \varphi d\varphi = \sin \alpha \int_0^\alpha \cos \varphi d\varphi = \sin^2 \alpha;$$

$$\cos \alpha \int_0^\alpha \sin \varphi d\varphi = \cos \alpha \left| -\cos \varphi \right|_0^\alpha = \cos \alpha - \cos^2 \alpha;$$

$$\sin \alpha \int_0^\alpha \cos^2 \varphi d\varphi = \sin \alpha \left| \frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right|_0^\alpha = \frac{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha \sin \alpha}{2};$$

$$\cos \alpha \int_0^\alpha \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{\cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{2}.$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$M_\alpha = R^3 \left(1 - \cos \alpha - \frac{\alpha \cdot \sin \alpha}{2} \right).$$

α -ს ცვლით 0-დან π -მდე მივიღებთ მლუნავი მომენტის ეპიურის ორდინატებს. სატიკური გადაადგილებები

$$\Delta_{1P} = \frac{2}{EI} \int M_1 M_P ds = \frac{2R^2}{EI} \int_0^\pi M_1 M_P d\alpha = \frac{2R^5}{EI} \int_0^\pi \cos \alpha \left(1 - \cos \alpha - \frac{\alpha \sin \alpha}{2} \right) d\alpha.$$

ინტეგრირების შემდეგ მივიღებთ:

$$\Delta_{1P} = \frac{3}{4EI} \pi R^5.$$

რადგან M_p ეპიურა სიმეტრიულია და M_2 ირიბადსიმეტრიულია, ამიტომ

$$\Delta_{2p} = 0,$$

$$\Delta_{3p} = \frac{2}{EI} \int M_2 M_p ds = \frac{2R^2 \pi}{EI} \int_0^\pi \left(1 - \cos \alpha - \frac{\alpha \sin \alpha}{2} \right) d\alpha.$$

საბოლოოდ გვექნება:

$$\Delta_{3p} = \frac{\pi R^4}{EI}.$$

გადაადგილებათა მიღებული ნიშნულებები შევითანოთ კანონიკურ ვანტოლებათაში, მივიღებთ

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{3}{4} R^2;$$

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} = -\frac{R^3}{2}; \quad X_2 = 0.$$

შლუნავი მომენტი ნებისმიერ კვეთში

$$\begin{aligned} M &= R^2 \left(1 - \cos \alpha - \frac{\alpha \cdot \sin \alpha}{2} \right) + \frac{3}{4} R^2 \cos \alpha - \frac{R^3}{2} = \\ &= R^2 \left(0,5 - 0,25 \cos \alpha - \frac{\alpha \cdot \sin \alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

როცა

$$\alpha = 0, \quad M = 0,25 R^2;$$

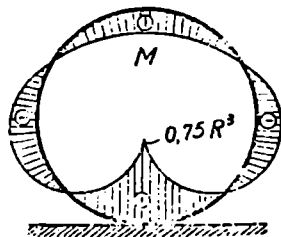
$$\alpha = \frac{\pi}{2}; \quad M = R^2 \left(0,5 - \frac{\pi}{4} \right) = -0,285 R^2;$$

$$\alpha = \pi, \quad M = R^2 (0,5 + 0,25) = 0,75 R^2.$$

ეპიურა მოყვანილია 219-ე ნახაზზე.

4 მაგალითი. ვიანგარიშოთ სამსართულიანი სიმეტრიული ჩარჩო, რომელზეც მოქმედებს ორი ჰორიზონტალური ძალა $P=10$ ტ (ნახ. 220). ლეროების ზომები და ინერციის მომენტები ნაჩვენებია ნახაზზე.

გადაწყვეტა. ძირითადი სისტემა ისე ავირჩიოთ, რომ უცნობები დალაგდნენ სიმეტრიულ და ირიბად სიმეტრიულ უცნობებად. ამ მიზნით ჩარჩო გავყვეთოთ სიმეტრიის ღერძზე (ნახ. 220, ბ). X_1, X_2, X_3 (ნახ. 221) ირიბადსიმეტრიული უცნობებია (იძლევა ირიბადსიმეტრიულ ეპიურებს), ხოლო X_4, X_5, X_6, X_7, X_8 და X_9 კი სიმეტრიული. ეპიურების ორთოგონალურობის გამო (იხ. § 32) არამთავარი გადაადგილებანი



ნახ. 219.

$$\delta_{14} = \delta_{15} = \delta_{16} = \delta_{17} = \delta_{18} = \delta_{19} = 0;$$

$$\delta_{24} = \delta_{25} = \delta_{26} = \delta_{27} = \delta_{28} = \delta_{29} = 0;$$

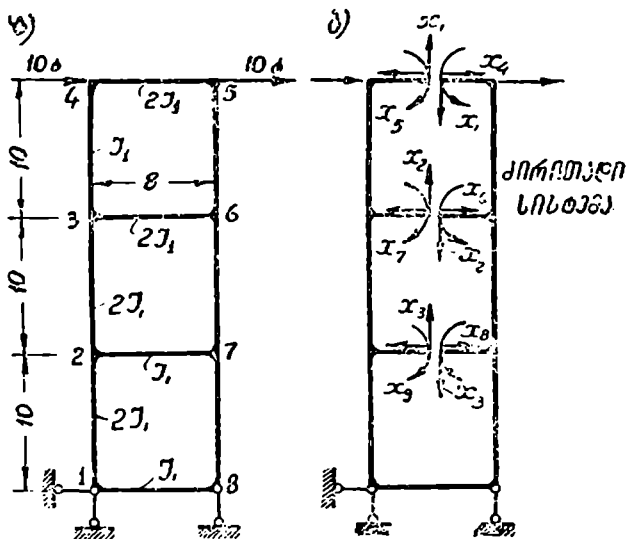
$$\delta_{34} = \delta_{35} = \delta_{36} = \delta_{37} = \delta_{38} = \delta_{39} = 0.$$

კანონიკურ განტოლებათა სისტემა გაიყოფა ორ ნაწილად: პირველში შევა სიმეტრიული უცნობები, მეორეში კი ირიბადსიმეტრიული.

მოცემული დატვირთვა ირიბადსიმეტრიულია (ნახ. 221, დ). ამიტომ M_4, \dots, M_9 და M_p ეპიურების ორთოგონალურობის გამო სატვირთო გადაადგილებები

$$\Delta_{4p} = \Delta_{5p} = \Delta_{6p} = \Delta_{7p} = \Delta_{8p} = \Delta_{9p} = 0.$$

ამის გამო, კანონიკურ განტოლებათა პირველი ნაწილი მოგვცემს (ირი-



ნახ. 220.

ბალისმეტრიული დატვირთვა ნულად აქცევს სიმეტრიულ უცნობებს):

$$X_4 = X_5 = X_6 = X_7 = X_8 = X_9 = 0.$$

დაგვრჩება სამი განტოლება სამი უცნობით:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1p} = 0;$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2p} = 0;$$

$$X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} = 0.$$

221-ე ნახაზზე მოყვანილია ერთეული ირიბადსიმეტრიული უცნობებით და მოცემული დატვირთვით გამოწვეული ეპიურები. გამოვთვალოთ გადაადგილებები:

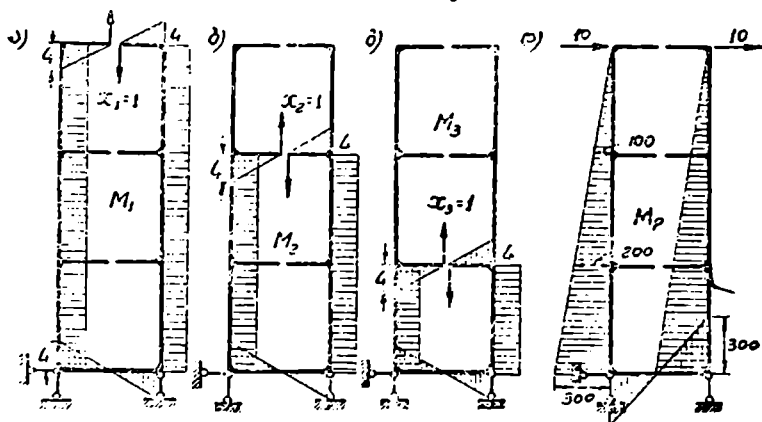
$$\delta_{11} = 2 \left(\frac{4 \cdot 10 \cdot 4}{EI_1} + \frac{4 \cdot 20 \cdot 4}{2EI_1} \right) + 2 \left(\frac{4 \cdot 4}{EI_1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} + \frac{1}{2EI_1} \frac{4 \cdot 4}{2} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \right) = \frac{704}{EI_1};$$

$$\delta_{12} = \frac{2}{EI_1} \left(\frac{20 \cdot 4 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \right) = \frac{362,6}{EI_1};$$

$$\delta_{12} = \frac{2}{EI_1} \left(\frac{10 \cdot 4 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{202,6}{EI_1};$$

$$\delta_{23} = \frac{2}{EI_1} \left(\frac{20 \cdot 4 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{384}{EI_1}$$

$$\delta_{22} = \delta_{33} = \frac{202,6}{EI_1};$$



ნახ.

$$\delta_{33} = \frac{2}{EI_1} \left(\frac{10 \cdot 4 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 \right) = \frac{245,3}{EI_1}.$$

სატვირთო გადაადგილებები:

$$\Delta_{1p} = - \frac{2}{EI_1} \left(\frac{100 \cdot 10}{2} \cdot 4 + \frac{100 + 300}{2} \cdot 20 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{300 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = - \frac{23\ 200}{EI_1};$$

$$\Delta_{2p} = - \frac{2}{EI_1} \left(\frac{100 + 300}{2} \cdot 20 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 1\ 600 \right) = - \frac{19\ 200}{EI_1};$$

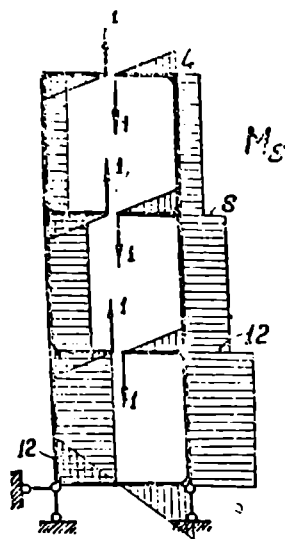
$$\Delta_{3p} = - \frac{2}{EI_1} \left(\frac{200 + 300}{2} \cdot 10 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 1\ 600 \right) = - \frac{13\ 200}{EI_1}.$$

გადაადგილებათა შემოწმება

ძირითად სისტემაზე ვაშკებდით $X_1=1$, $X_2=1$ და $X_3=1$ ერთდროულად და ავავით მდუნავი მომენტის ეპიურა M_x (ნახ. 222).

M_1 და M_2 ეპიურების კომბინაცია ვერეშაგინის წესით მოგვცემს

$$\delta_{1s} = \frac{2}{EI_1} \left(10 \cdot 4 \cdot 4 + \frac{10 \cdot 8}{2} 4 + \frac{10 \cdot 12}{2} 4 + \frac{4 \cdot 4}{2} \frac{2}{3} 4 \frac{1}{2} + \frac{12 \cdot 4}{2} \frac{2}{3} 4 \right) = \frac{1269,3}{EI_1}.$$



ნახ. 222.

M_2 , M_s და M_3 , M_s ეპიურების კომბინაცია მოგვცემს:

$$\delta_{2s} = \frac{2}{EI_1} \left(\frac{10 \cdot 8}{2} 4 + \frac{10 \cdot 12}{2} 4 + \frac{4 \cdot 4}{2} \frac{2}{3} 4 \frac{1}{2} + \frac{12 \cdot 4}{2} \frac{2}{3} 4 \right) = \frac{949,3}{EI_1};$$

$$\delta_{3s} = \frac{2}{EI_1} \left(\frac{10 \cdot 12}{2} 4 + \frac{4 \cdot 4}{2} \frac{2}{3} 4 + \frac{12 \cdot 4}{2} \frac{2}{3} 4 \right) = \frac{650,6}{EI_1}.$$

შეორე მხრივ გვექნება:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{1s} &= \bar{\delta}_{11} + \bar{\delta}_{12} + \bar{\delta}_{13} = \frac{1}{EI_1} (704 + 362,6 + 202,6) = \\ &= \frac{1269,2}{EI_1}; \end{aligned}$$

$$\bar{\delta}_{2s} = \bar{\delta}_{21} + \bar{\delta}_{22} + \bar{\delta}_{23} = \frac{1}{EI_1} (362,6 + 384 + 202,6) = \frac{949,2}{EI_1};$$

$$\bar{\delta}_{3s} = \bar{\delta}_{31} + \bar{\delta}_{32} + \bar{\delta}_{33} = \frac{1}{EI_1} (202,6 + 202,6 + 245,3) = \frac{650,5}{EI_1}.$$

მიღებული შედეგი ვერიფიცირებთ, რომ შთაყარი და არამთაყარი გადაადგილებების გამოთვლაში შეცდომა არ არის დაშვებული.

სატვირთო გადაადგილებების შესამოწმებლად გამოთვალეთ Δ_{sp} .

$$\begin{aligned} \Delta_{sp} &= -\frac{2}{EI_1} \left(\frac{100 \cdot 10}{2} 4 + \frac{100 + 200}{2} 10 \cdot 8 \frac{1}{2} + \right. \\ &\left. + \frac{200 + 300}{2} 10 \cdot 12 \frac{1}{2} + \frac{300 \cdot 4}{2} \frac{2}{3} 12 \right) = -\frac{55600}{EI_1}. \end{aligned}$$

შეორე მხრივ

$$\Delta_{sp} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \Delta_{3p} = -\frac{1}{EI_1} (23200 + 19200 + 13200) = -\frac{55600}{EI_1}.$$

კანონიკურ განტოლებათა სისტემა რიცხობრივი სახით მიიღებს შემდეგ სახეს (შევკვეციეთ EI_1 -ზე)

$$704,0X_1 + 362,6X_2 + 202,6X_3 = 23200;$$

$$362,6X_1 + 384,0X_2 + 202,6X_3 = 19200;$$

$$202,6X_1 + 202,6X_2 + 245,3X_3 = 13200.$$

განტოლებები გადაწვევით გაუსის შემოკლებული ალგორითმის საშუალებით, რომლის პირდაპირი მსვლელობა მოცუნილია მე-5 ცხრილში. ამ ცხრილის საშუალებით ვწვევთ III, II და I განტოლებას უკუსვლით.

III განტოლება იქნება

$$138,71 \cdot X_3 = 2951,86$$

ცხრილი 5.

განტოლება №	X_1	X_2	X_3	მაშრავლება α_{ki}		თავისუფალი წევრები K	S
				α_{k3}	α_{k2}		
I	704,0	362,6	202,6	$\alpha_{13} = -\frac{352,6}{704,0} = -0,515$	$\alpha_{12} = -\frac{202,6}{704,0} = -0,237$	23 200	1269,2
2 α_{11} I		384,0 -186,73	202,6 -104,33			19 200 -119,48	949,2 -653,639
II		198,27	98,27		$\alpha_{23} = -\frac{98,27}{198,27} = -0,495$	7 252	295,52
3 α_{11} I α_{21} II			245,3 -58,15 -48,44			13 200 -6558,4 -3569,74	650,5 -364,3 -146,28
III			138,71			2951,86	139,92

$$\text{საიდანაც } X_3 = \frac{2951,86}{138,71} = 21,2 \text{ ტ.}$$

II განტოლება იქნება

$$198,27X_2 + 98,27X_3 = 7 252.$$

საიდანაც

$$X_2 = \frac{7 252 - 98,27 \cdot 21,2}{198,27} = \frac{7 252 - 2081,33}{198,27} = \frac{5170,67}{198,27} = 26,07 \text{ ტ.}$$

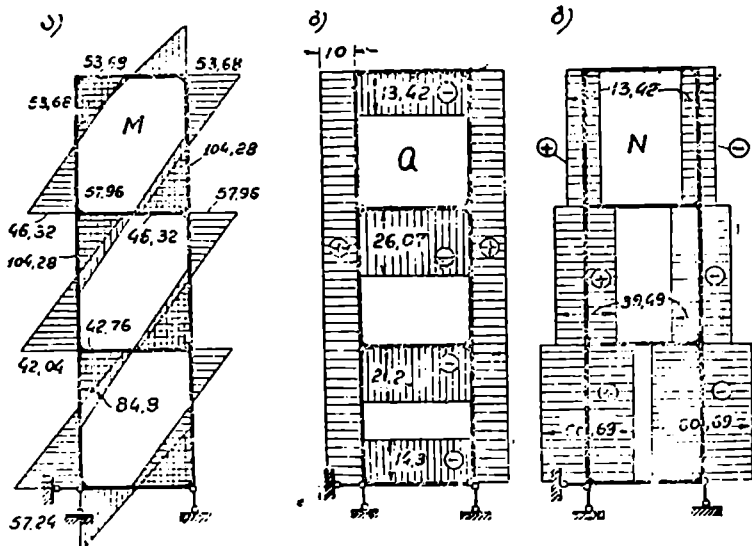
I განტოლებიდან მივიღებთ:

$$X_1 = \frac{23 200 - 362,6 \cdot 26,07 - 202,6 \cdot 21,2}{704,0} = \frac{9451,9}{704,0} = 13,42 \text{ ტ.}$$

მლუნავი მომენტის ჯამურ ეპიურას მივიღებთ ფორმულით:

$$M = M_p + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3,$$

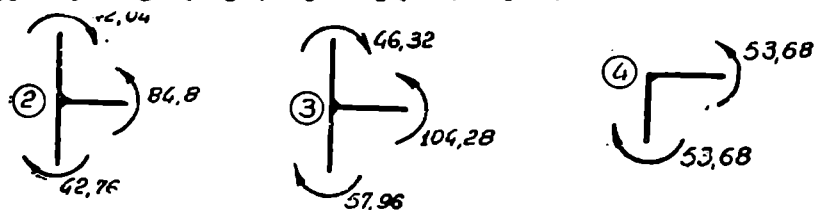
ე. ი. ერთეული ეპიურების ორდინატები უნდა გადავამრავლოთ უცნობების მიღებულ მნიშვნელობებზე და შევაჯამოთ ტვირთისაგან გამოწვეულ ეპიურასთან (ნახ. 223,ა).



ნახ. 223.

მღუნავი მომენტის ჯამური ეპიურის შემოწმება

სტატიკური შემოწმება მდგომარეობს იმაში, რომ ჩარჩოს ცალკეული ამოკვეთილი კვანძები უნდა იყოს წონასწორობაში, ე. ი. კვანძზე მოქმედი მომენტების ჯამი ტოლი უნდა იყოს ნულის (იხ. § 38).



ნახ. 224.

ამოკვეთილ კვანძებზე მოქმედი მომენტების ჯამი (ნახ. 224) მოგვცემს:

$$\Sigma M_2 = 42,04 + 42,76 - 84,8 = 0;$$

$$\Sigma M_3 = 46,32 + 57,96 - 104,28 = 0;$$

$$\Sigma M_4 = 53,68 - 53,68 = 0.$$

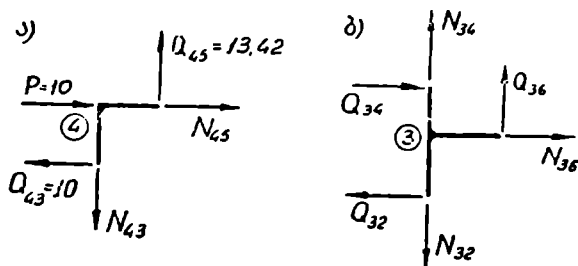
ადვილად შევამჩნევთ, რომ ჯამური ეპიურის დაყვანილი ფართობი ჩაკეტილ უსახსრო კონტურზე ტოლია ნულის (გარეთა ეპიურების ფართობი ტოლია შიგნითა ეპიურების ფართობის). მაშასადამე, დეფორმაციის პირობაც დაკმაყოფილებულია.

განივი ძალის ეპიურის ასაგებად ჩარჩოს ნებისმიერი ღერო განვიხილოთ როგორც ორ საყრდენზე მდებარე კოკი, რომელზეც იმოქმედებს საყრდენი მომენტები. მაგალითად, განივი ძალა 3—4 ღეროში იქნება

$$Q_{31} = \frac{53,68 + 47,32}{10} = 10 \text{ ტ.}$$

განივი ძალის ეპიურა მოყვანილია 223,ბ ნახაზზე.

გრძივი ძალის საანგარიშოდ ამოვკვეთთ კვანძები და შევადგინოთ მასზე მოქმედი ძალების წონასწორობის პირობა. ამოვკვეთთ მე-4 კვანძი (ნახ. 225,ა). Q_{13} დადებითია და მოკვეთილ მარჯვენა ნაწილს უნდა აბრუნებ-



ნახ. 225.

დეს საათის ისრის მიმართულებით, ხოლო Q_{45} უარყოფითია და მოკვეთილ მარცხენა ნაწილს უნდა აბრუნებდეს საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

$$\sum X = P + N_{45} - Q_{43} = 0,$$

აქედან

$$N_{45} = Q_{43} - P = 10 - 10 = 0.$$

$$\sum Y = Q_{45} - N_{43} = 0$$

და

$$N_{43} = Q_{45} = 13,42 \text{ ტ.}$$

მე-3 კვანძის განხილვა მოგვცემს (ნახ. 225,ბ)

$$\sum X = N_{36} + Q_{34} - Q_{31} = 0,$$

აქედან

$$N_{36} = Q_{31} - Q_{34} = 10 - 10 = 0.$$

$$\sum Y = N_{32} + Q_{36} - N_{31} = 0,$$

საიდანაც

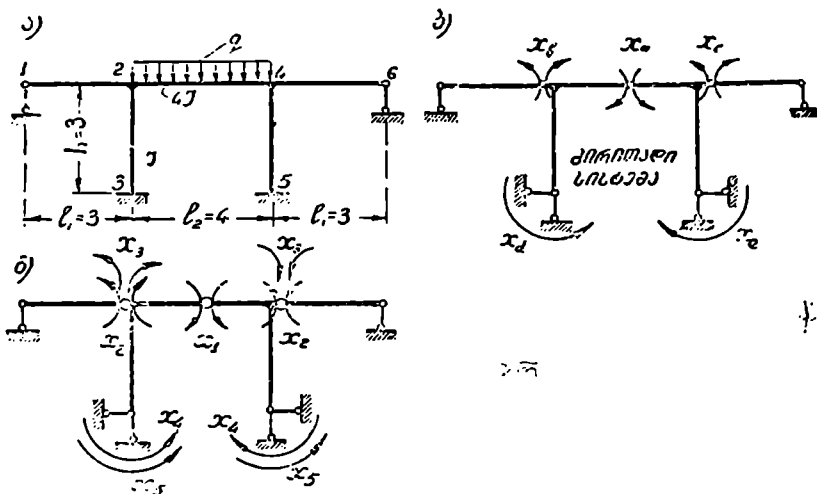
$$N_{32} = N_{31} + Q_{36} = 13,42 + 26,07 = 39,49 \text{ ტ.}$$

გრძივი ძალა დანარჩენ ღეროებში გამოითვლება ანალოგიურად (ნახ. 223,გ).

განივი და გრძივი ძალების ეპიურები შეიძლება ავაგოთ უშუალოდ, ძირითადი სისტემის განხილვითაც, თუ მასზე ვიმოქმედებთ ყველა ცნობილი ძალით.

მაგალითი. ვიანგარიშოთ სამმალიანი უკრი ჩარჩო, რომელზედაც მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი ინტენსივობით $q=1 \text{ ტ/მ}$ (ნახ. 226).

გადაწყვეტა. ზედმეტ უცნობებად მივიღოთ მომენტები ჩარჩოს კვეთებში სიმეტრიულად (ნახ. 226,ბ). ჩარჩო სიმეტრიულია და ამიტომ გამოვიყენოთ დაჯგუფების მეთოდი, ე. ი. მივიღოთ



ნახ. 226.

$$\begin{aligned} X_u &= X_1; & X_b &= X_2 + X_3; & X_c &= X_2 - X_3; \\ X_d &= X_4 + X_5; & X_e &= X_4 - X_5. \end{aligned}$$

მაშასადამე, ჯგუფურ უცნობებს ექნება შემდეგი მნიშვნელობები:

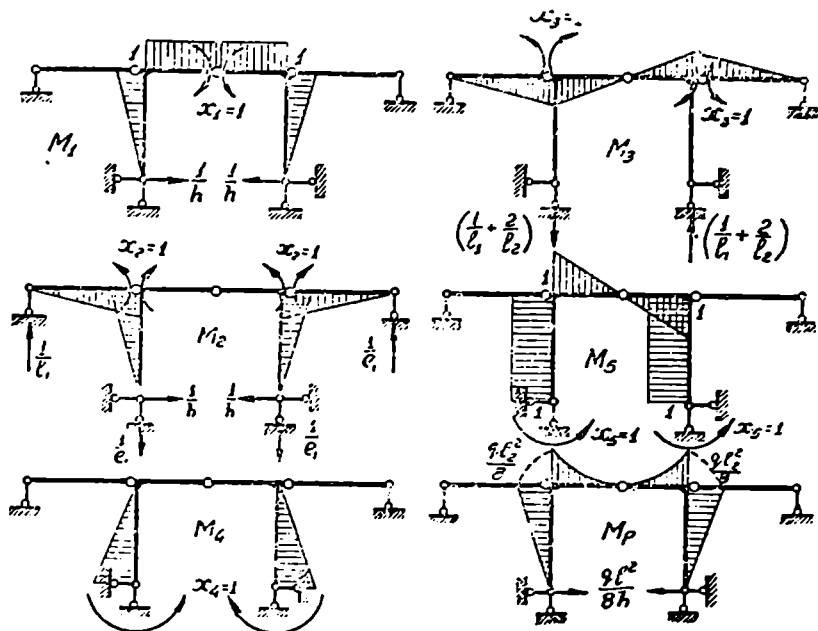
$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{X_b + X_c}{2}; & X_3 &= \frac{X_b - X_c}{2}; \\ X_4 &= \frac{X_d + X_e}{2}; & X_5 &= \frac{X_d - X_e}{2}. \end{aligned}$$

X_1, X_2 და X_4 იქნება სიმეტრიული უცნობი, ხოლო X_3 და X_5 კი ირიბადსიმეტრიული (ნახ. 226, გ). ძირითად სისტემაზე ვიმოქმედოთ ძალებით $X_1=1, X_2=1, X_3=1, X_4=1, X_5=1$ და მოცემული ტვირთით აევაოთ მღუნავი მომენტის ეპიურები (ნახ. 227). თუ გამოვიყენებთ ეპიურების გადამრავლების წესს, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{4EI} l_2 + 2 \frac{1}{EI} \frac{h}{3} = \frac{3}{EI}; \\ \delta_{22} &= 2 \frac{1}{4EI} \frac{l_1}{3} + 2 \frac{1}{EI} \frac{h}{3} = \frac{2,5}{EI}; \\ \delta_{33} &= 2 \frac{1}{4EI} \frac{l_1}{3} + 2 \frac{1}{4EI} \frac{l_2}{4} \frac{2}{3} = \frac{5}{3EI}; \end{aligned}$$

$$\delta_{11} = 2 \frac{1}{EI} \frac{h}{2} \frac{2}{3} = \frac{2}{EI};$$

$$\delta_{33} = 2 \frac{1}{EI} h + 2 \frac{1}{4EI} \frac{l_2}{4} \frac{2}{3} = \frac{6,333}{EI};$$



6ახ. 227.

$$\delta_{12} = 2 \frac{1}{EI} \frac{h}{2} \frac{2}{3} = \frac{2}{EI};$$

$$\delta_{14} = 2 \frac{1}{EI} \frac{h}{2} \frac{1}{3} = \frac{1}{EI};$$

$$\delta_{21} = \frac{1}{EI};$$

$$\delta_{34} = -2 \frac{1}{4EI} \frac{l_2}{4} \frac{2}{3} = \frac{1}{3EI};$$

$$\delta_{13} = \delta_{15} = \delta_{23} = \delta_{25} = \delta_{34} = \delta_{35} = 0.$$

ტვირთისაგან გამოწვეული გადაადგილებები

$$\Delta_{1p} = 2 \frac{1}{4EI} \frac{1}{3} \frac{ql_2^2}{8} \frac{l_2}{2} + 2 \frac{1}{EI} \frac{ql_2^2}{8} \frac{h}{2} \frac{2}{3} = \frac{ql_2^2}{96EI} (l_2 + 8h) = 4,67 \frac{q}{EI};$$

$$\Delta_{2p} = 2 \frac{1}{EI} \frac{ql_2^3}{8} \frac{h}{2} \frac{2}{3} = \frac{ql_2^3 h}{12EI} = 4q \frac{1}{EI} ;$$

$$\Delta_{1p} = 2 \frac{1}{EI} \frac{ql_2^3}{8} \frac{h}{2} \frac{1}{3} = \frac{ql_2^3 h}{24EI} = 2q \frac{1}{EI} ;$$

$$\Delta_{3p} = \Delta_{5p} = 0.$$

ირიბადსიმეტრიული უცნობები

$$X_3 = X_5 = 0 \text{ და}$$

მოკვიხდება მხოლოდ სიმეტრიული უცნობების განსაზღვრა

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_4 \delta_{14} + \Delta_{1p} = 0;$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_4 \delta_{24} + \Delta_{2p} = 0;$$

$$X_1 \delta_{41} + X_2 \delta_{42} + X_4 \delta_{44} + \Delta_{4p} = 0.$$

თუ შევიტანთ გადაადგილებათა მნიშვნელობებს, მივიღებთ კანონიერ განტოლებებს კრიცობრივი სახით (მივიღოთ $q = 1 \text{ ტ/მ}$ და შევკვეცოთ EI -ზე):

$$3X_1 + 2X_2 + X_4 + 4,67 = 0;$$

$$2X_1 + 2,5X_2 + X_4 + 4,0 = 0;$$

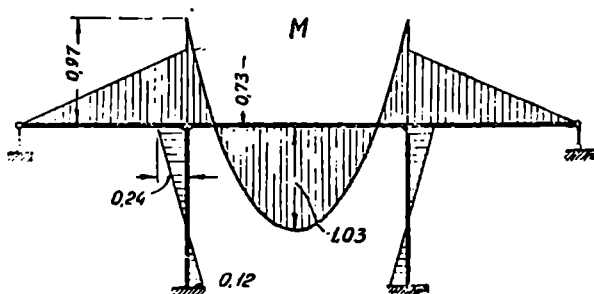
$$X_1 + X_2 + 2X_4 + 2,0 = 0.$$

ამ განტოლებათა სისტემის გადაწყვეტა მოგვცემს:

$$X_1 = -1,03 \text{ ტმ};$$

$$X_2 = -0,726 \text{ ტმ};$$

$$X_4 = -0,121 \text{ ტმ}.$$



ნახ. 228.

აუგოთ ჯამური ეპიურა

$$M = M_p + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_4 X_4.$$

მომენტი მე-2 კვანძში

$$M_{21} = -0,726 \text{ ტმ};$$

$$M_{21} = -\frac{ql_2^2}{8} + 1,03 = -2,0 + 1,03 = -0,97 \text{ ტმ};$$

$$M_{23} = -\frac{ql_2^2}{8} + 1,03 + 0,726 = -2 + 1,759 = -0,241 \text{ ტმ}.$$

მლუნავი ნომენტი მეორე მალის შუაში

$$M = X_1 = 1,03 \text{ ტმ}.$$

მლუნავი ნომენტი მე-3 კვანძში

$$M_{32} = X_4 = 0,121 \text{ ტმ}.$$

ჯამური ეპიურა აგებულია 228-ე ნახაზზე.

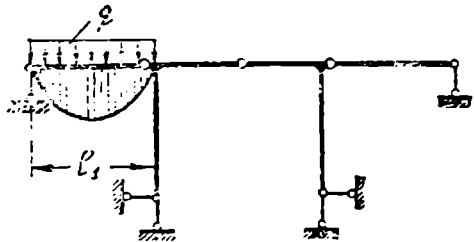
მიღებული ეპიურის შემოწმების შემდეგ ვაგებთ განივი და გრძივი ძალების ეპიურებს.

განვიხილოთ იგივე მაგალითი არასიმეტრიულ დატვირთვაზე. თუ გამოვიყენებთ იმავე ძირითად სისტემას, მაშინ აქ ჩვენ დამატებით დავტვირთავთ ნახაზით დატვირთვისაგან გამოწვეული ეპიურის აგება (ნახ. 229, ბ) და სატვირთო გადაადგილებების გაპოთვლა. მივიღებთ:

$$\Delta_{1p} = \Delta_{4p} = \Delta_{3p} = 0$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{4EI} \cdot \frac{ql_1^2}{8} \cdot \frac{2}{3} l_1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{ql_1^3}{96EI};$$

$$\Delta_{3p} = -\frac{ql_1^3}{96EI}.$$



ნახ. 229.

კანონიკური განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_4 \delta_{14} = 0;$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_4 \delta_{24} + \Delta_{2p} = 0;$$

$$X_1 \delta_{41} + X_2 \delta_{42} + X_4 \delta_{44} = 0.$$

$$X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} = 0;$$

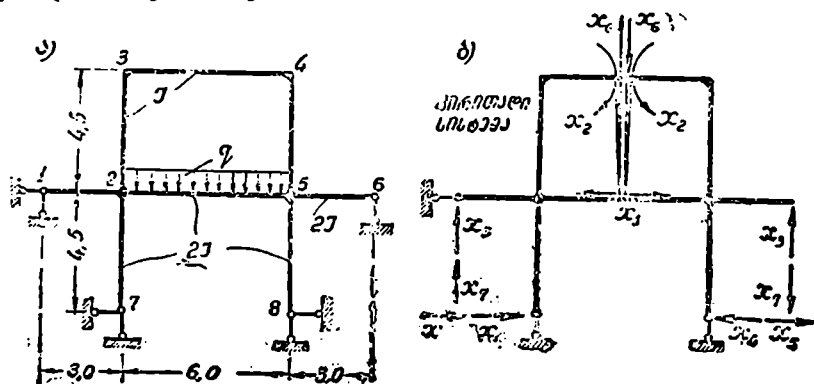
$$X_3 \delta_{33} + X_4 \delta_{34} = 0.$$

ამგვარად ჩვენ მოგვიხდება ორი მარტივი განტოლების გადაწყვეტა. იმავე განტოლებებს მივიღებთ, თუ დატვირთულია მარჯვენა განაპირა მალი.

6 მაგალითი. ორსართულიან შედარებით სტატიკურად ურყვევ სისტემაზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი ინტენსივობით $q = 1$ ტმ (ნახ. 230). ავაკოთ M , Q და N -ის ეპიურები. გეომეტრიული სიდიდეები მოცემულია ნახაზზე.

გადაწყვეტა. ზემოთ უცნობებად მივიღოთ განაპირა საყრდენების ვერტიკალური რეაქციები, შუა საყრდენების ჰორიზონტალური რეაქციები და ძალები ზედა ჰორიზონტალურ ღეროში. X_1 გადავიტანოთ ხისტ კონსოლზე

ქვედა სართლის სიძალღზე (ეს მოგვეცემს $\delta_{13} = \delta_{14} = 0$ და $\Delta_{1p} = 0$) და გამოვიყენოთ უცნობთა დაჯგუფების მეთოდი (ნახ. 230, ბ). ერთეული უცნობებისაგან და მოცემული ტვირთისაგან გამოწვეული მღუნავი მომენტის ეპიურები მოყვანილია 231-ე ნახაზზე.



ნახ. 230.

ირიბადსიმეტრიული უცნობები $X_5 = X_6 = X_7 = 0$. დაგვრჩება ოთხი სიმეტრიული უცნობი.

გადაადგილებები.

$$\delta_{11} = 2 \frac{1}{EI} \frac{4,5^3}{3} + \frac{4,5^3 \cdot 6}{EI} = \frac{182,25}{EI};$$

$$\delta_{22} = 2 \frac{1}{2EI} \frac{3^3}{3} + \frac{6 \cdot 3^2}{2EI} = \frac{36}{EI};$$

$$\delta_{33} = \frac{182,25}{2EI} = \frac{91,125}{EI};$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \left(2 \frac{4,5^2}{2} + 6 \cdot 4,5 \right) = \frac{47,25}{EI};$$

$$\delta_{13} = \delta_{14} = 0;$$

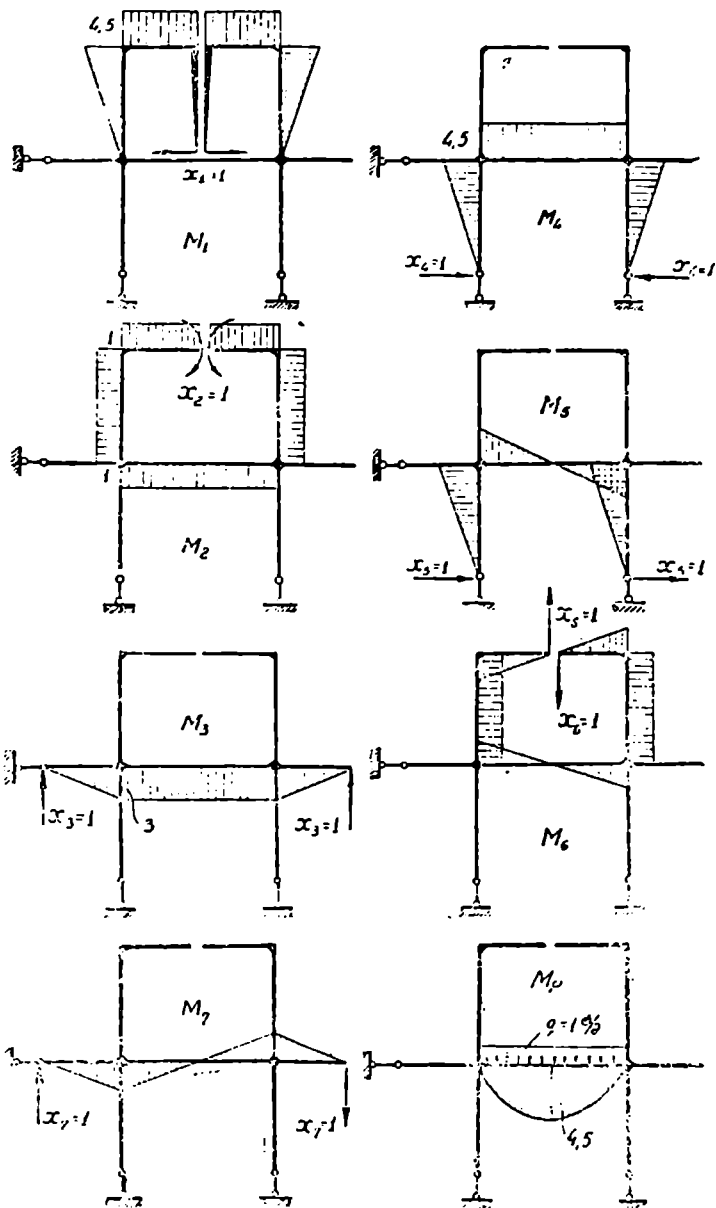
$$\delta_{23} = \frac{1}{2EI} 3 \cdot 6 = \frac{9}{EI};$$

$$\delta_{24} = -\frac{1}{2EI} 4,5 \cdot 6 = -\frac{13,5}{EI};$$

$$\delta_{34} = -\frac{1}{2EI} 4,5 \cdot 6 \cdot 3 = -\frac{40,5}{EI}.$$

სატვირთო გადაადგილებები:

$$\Delta_{1p} = 0;$$



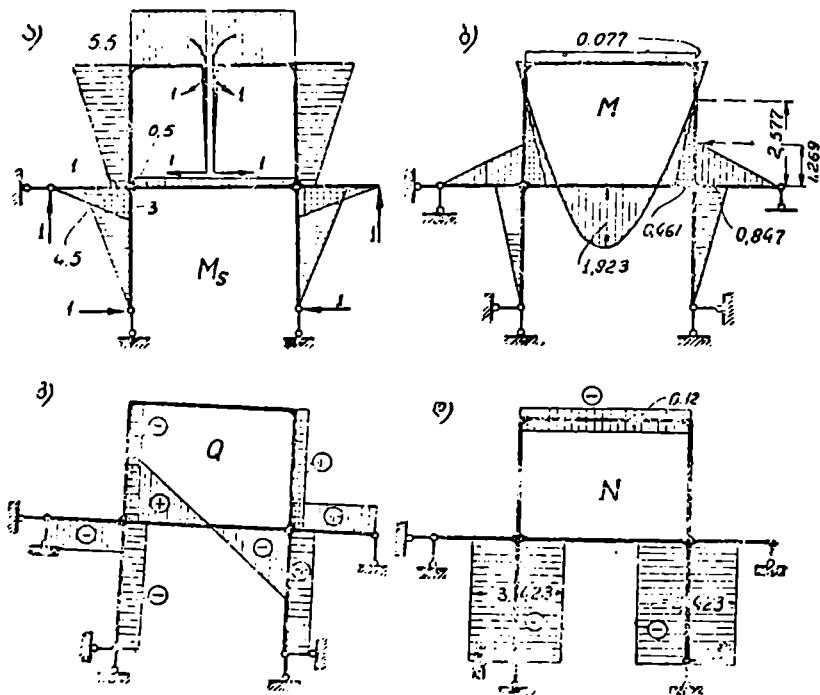
65b. 231.

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{2EI} \frac{2}{3} 4,5 \cdot 6 = \frac{9}{EI};$$

$$\Delta_{3P} = \frac{1}{2EI} \frac{2}{3} 4,5 \cdot 6 \cdot 3 = \frac{27}{EI}; \quad \text{II}$$

$$\Delta_{4P} = -\frac{1}{2EI} \frac{2}{3} 4,5 \cdot 6 \cdot 4,5 = -\frac{40,5}{EI}.$$

გადაადგილებათა შესამოწმებლად ძირითად სისტემაზე ვიმოქმედოთ $X_1=1$, $X_2=1$, $X_3=1$ და $X_4=1$ ძალებით ერთდროულად და ავავოთ მლუნავი მოპენტის ეპიურა (ნახ. 232, ა).]



ნახ. 232.

მოვახდინოთ უნივერსალური შემოწმება

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \int \frac{M_i^2 dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left[5,5 \cdot 5,5 \cdot 6 + \frac{2 \cdot 4,5(5,5^2 + 1 \cdot 5,5)}{3} + \frac{2 \cdot 3^3}{2 \cdot 2} + \right. \\ &+ \left. \frac{2 \cdot 4,5^2}{2 \cdot 3} + \frac{0,5^2 \cdot 6}{2} \right] = \frac{1}{EI} (181,5 + 110,25 + 9,0 + 30,375 + 0,75) = \\ &= 331,875 \frac{1}{EI}. \end{aligned}$$

მეორე მხრივ, კანონიკური განტოლებების ყველა კოეფიციენტის ჯამი იქნება

$$\delta_{,,} = \frac{1}{EI} \left[182,25 + 91,125 + 54,0 + 2(47,25 + 9 - 13,5 - 40,5) \right] =$$

$$= 331,875 \frac{1}{EI}.$$

ამგვარად, ერთეულ გადაადგილებათა გამოთვლაში შეცდომა არ არის დაშვებული.

$$\Delta_{,,p} = \sum \int M_p M_p \frac{ds}{EI} = -\frac{1}{EI} - \frac{2 \cdot 4,5 \cdot 6}{2 \cdot 3} 0,5 = -\frac{4,5}{EI}.$$

მეორე მხრივ სატვირთო კოეფიციენტების ჯამი ტოლია:

$$\Delta_{,,p} = \frac{1}{EI} (9 + 27 - 40,5) = -\frac{4,5}{EI}.$$

საბოლოოდ, კანონიკური განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} 182,25X_1 + 47,25X_2 &= 0; \\ 47,25X_1 + 18,0X_2 + 9X_3 - 13,5X_4 + 9 &= 0; \\ 9,0X_2 + 36X_3 - 40,5X_4 + 27 &= 0; \\ -13,5X_2 - 40,5X_3 + 91,125X_4 - 40,5 &= 0, \end{aligned}$$

რომლის გადაწყვეტა მოგვცემს

$$X_1 = 0,1195 \text{ ტ}; \quad X_2 = -0,461 \text{ ტ}; \quad X_3 = -0,423 \text{ ტ}; \quad X_4 = 0,1882 \text{ ტ}.$$

მლუნაეი მომენტის ჯამური ეპიურის ორდინატებს გამოვითვლით ფორმულით

$$M = M_p + M_1X_1 + M_2X_2 + M_3X_3 + M_4X_4.$$

$$M_{21} = -3 \cdot 0,423 = -1,269 \text{ ტ};$$

$$M_{23} = 0,461 \text{ ტ};$$

$$M_{32} = -4,5 \cdot 0,1195 + 0,423 = -0,077 \text{ ტ};$$

$$M_{35} = -0,461 - 3 \cdot 0,423 - 4,5 \cdot 0,1882 = -2,577 \text{ ტ};$$

$$M_{27} = -4,5 \cdot 0,1882 = -0,847 \text{ ტ}.$$

მლუნაეი მომენტი დატვირთული მალის შუაში

$$M = 4,5 - 0,461 - 3 \cdot 0,423 - 4,5 \cdot 0,1882 = 1,923 \text{ ტ}$$

ეპიურა ნაჩვენებია 232,ბ ნახაზზე.

აეაგოთ განივი ძალის ეპიურა:

$$Q_{23} = -\frac{0,461 + 0,077}{4,5} = -0,12 \text{ ტ};$$

$$Q_{12} = -\frac{1,269}{3} = -0,423 \text{ ტ};$$

$$Q_{27} = -\frac{0,847}{4,5} = -0,188 \text{ ტ};$$

$$Q_{25} = 3 \text{ ტ};$$

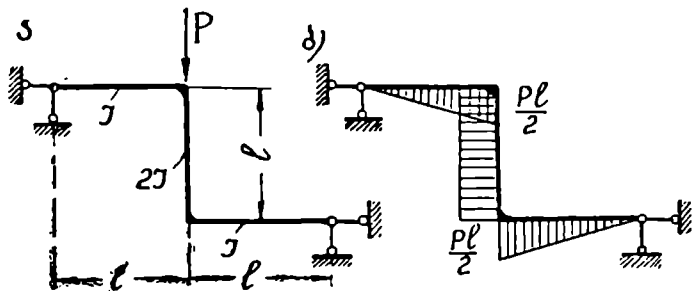
$$Q_{82} = -3 \text{ ტ}.$$

განივი ძალის ეპიურა აგებულია 232, გ ნახაზზე.

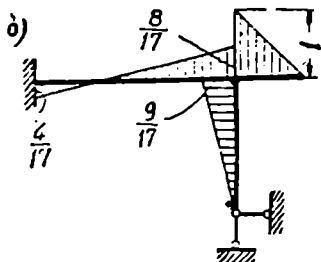
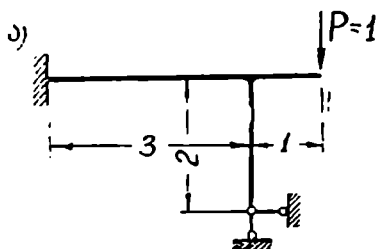
თუ განვიხილავთ კვანძების წონასწორობას, მივიღებთ გრძივ ძალებს სათანადო ღეროებში (ნახ. 232).

§ 43. სავარჯიშო მაგალითები

1. ვიანგარიშით 233 ნახაზზე წარმოდგენილი ჩარჩო, ავაგოთ M , Q და N -ის ეპიურები. პასუხი: ნახ. 233, ბ.



ნახ. 233.



ნახ. 234.

2. ვიანგარიშით ორჯერ სტატიკურად ურკვევი ჩარჩო (ნახ. 234, ა).

პასუხი: ნახ. 234, ბ.

3. განისაზღვროს მომენტი ჩამაგრების ადგილზე, მარცხენა საყრდენი რეაქციები და აივოს მღუნავი ნომენტის ეპიურა (ნახ. 235).

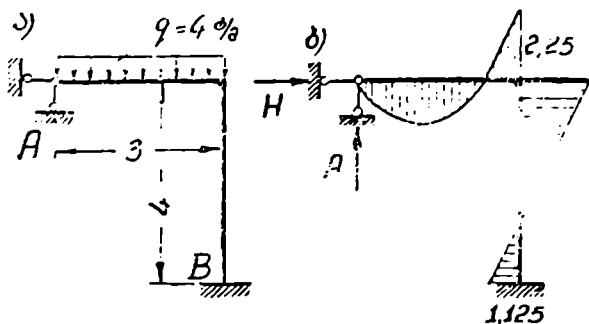
$$\text{პასუხი: } H = \frac{27}{32} \text{ ტ};$$

$$A = \frac{21}{4} \text{ ტ};$$

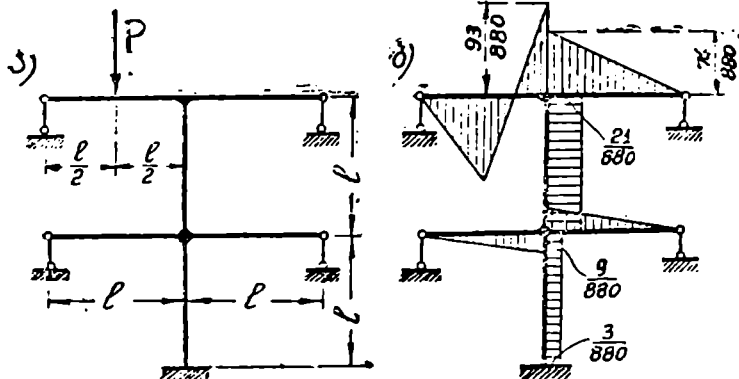
$$M_B = 1,125 \text{ ტმ (ნახ. 235,ბ)}.$$

4. ავირჩიოთ საუკეთესო ძირითადი სისტემა, გამოვთვალოთ ხედმეტი უსწოებები და ავა-
 ვოთ მლუნავე მომენტის ჯამური ეპიურა (ნახ. 236 ა).

პასუხი: ნახ. 236, ბ.

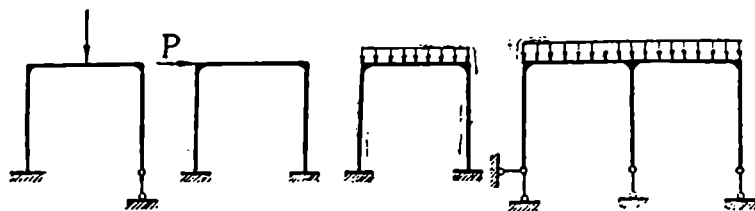


ნახ. 235.



ნახ. 236.

5. ანგარიშის შეუსრულებლად ავაგოთ მლუნავე მომენტის ეპიურები (ნახ. 237).



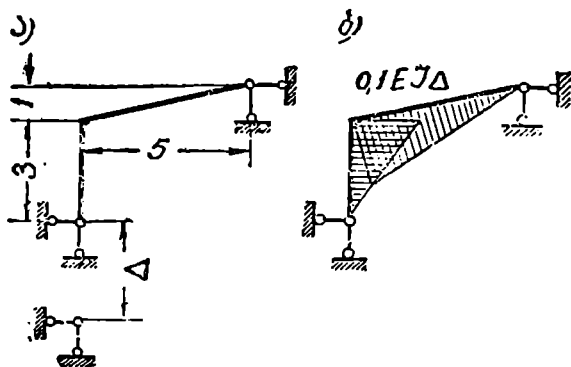
ნახ. 237.

6. ავაგოთ მლუნავე მომენტის ეპიურა მარცხენა საყრდენის ვერტიკალური გადაადგილე-
 ბით (დაჯდომით) გამოწვეული (ნახ. 238, ა).

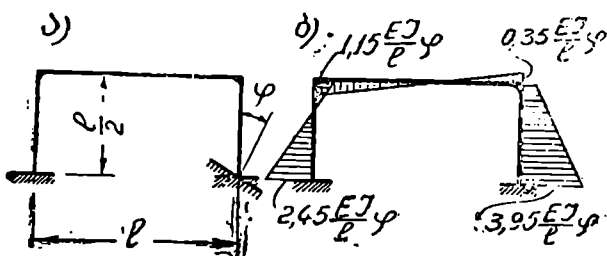
პასუხი: ნახ. 238, ბ.

7. ავავთ მლუნაეი მომენტის ეპიურა, გამოწვეული მარჯვენა საყრდენის დ კუთხით მო-
ბრუნებით (ნახ. 239, ა).

პასუხი: ნახ. 239. ბ.

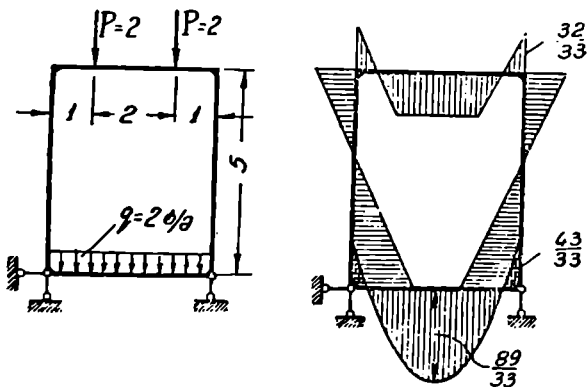


ნახ. 238.



ნახ. 239.

8. შევამოწმოთ 240-ე ნახაზზე წარმოდგენილი ეპიურის სიზუსტე.

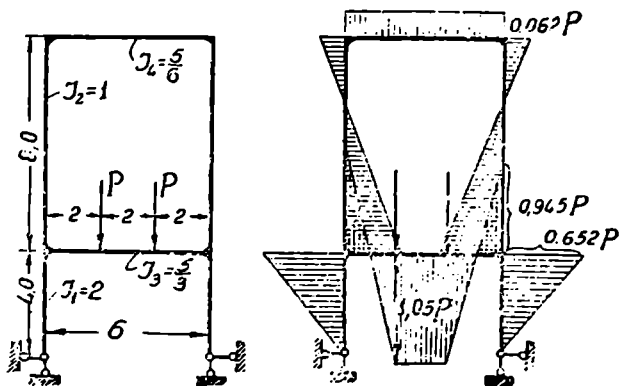


ნახ. 240.

9. ვიანგარიშეთ ორსართულიანი ჩარჩო (ნახ. 241).

შითითება: ძირითადი სისტემის არჩევის დროს გამოვიყენოთ დრეკადი ცენტრის მეთოდი.

პასუხი: ნახ. 241, ბ.



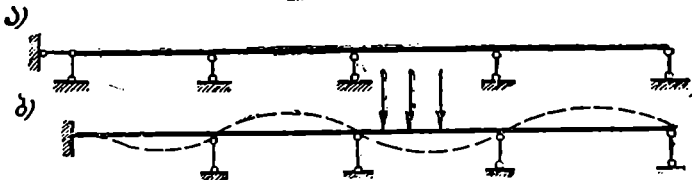
ნახ. 241.

უპრი კოჭების ანბარიში

§ 44. სამართო ცნობები. უპრი კოჭების გამოყენება

უპრი კოჭი წარმოადგენს უმარტივეს სტატიკურად ურკვევ სისტემას. მას დიდი გამოყენება აქვს საამუშენებლო პრაქტიკაში და ამიტომ მისი ანგარიშის პრაქტიკული მეთოდების შესწავლას სათანადო ყურადღება უნდა მიექცეს.

მთლიან უწყვეტ ძელს, რომელიც მოთავსებულია ორზე მეტ საყრდენზე უპრი კოჭი ეწოდება. უპრი კოჭის ერთ-ერთი საყრდენი უნდა იყოს უძრავი, დანარჩენი კი მოძრავი. ზოგიერთ შემთხვევაში უპრი კოჭი შეიძლება იყოს ერთი ან ორივე ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებული (ნახ. 242). მოძრავი საყრდენების რეაქციები ყოველთვის ვერტიკალურია, უძრავის კი ვერტიკალურია მხოლოდ ვერტიკალური დატვირთვის დროს. უპრი კოჭის საყრდენები ისეა მოწყობილი,



ნახ. 242.

რომ შეიძლება წარმოიშვას როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი რეაქციები. ამის გამო, ერთ რომელიმე მალზე მოქმედი ტვირთი იწვევს კოჭის გაღუნვას მთელ სიგრძეზე, როგორც ეს ნაჩვენებია წყვეტილი ხაზით (ნახ. 242). ე. ი. ერთ მალზე მოქმედი ტვირთის გავლენა ვრცელდება ყველა მალზე.

უპრი კოჭში მდუნავე მომენტი უფრო ნაკლებია, ვიდრე გაქრილში და ამიტომ ის მასზე უფრო ეკონომიურია. უპრი კოჭები გვხვდება შენობის სართულთა შორის გადახურვებში, ხიდებში და სხვა მრავალ ნაშენებში, რომლებიც შეიძლება შესრულებული იყოს ხის, რკინაბეტონის და ლითონისაგან.

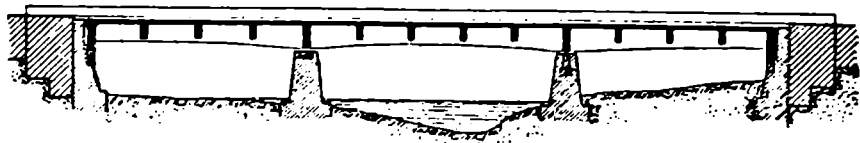
უპრი კოჭში საყრდენების არათანაბარი დაჯდომა და ტემპერატურა იწვევს საგრძნობ დამატებით ძაბვებს, რაც მის უარყოფით მხარეს წარმოადგენს.

243-ე ნახ.ზე წარმოდგენილია რკინაბეტონის ხიდი, რომლის მალის ნაშენი უპრი კოჭებისაგან შედგება.

სტატიკური ურკვევობის ხარისხი უპრი კოჭში განისაზღვრება ზედმეტი ღეროების რიცხვით. თუ გავიხსენებთ, რომ ხისტი ჩამაგრება სამი ღეროს ეკვივალენტურია, უძრავი ორის და მოძრავი ერთის, მაშინ ადვილად გამო-

ვარკვევთ ზედმეტი ღერობის რიცხვს. საყრდენი ღერობის რიცხვი მინუს სამი მოგვცემს სტატიკური ურკვევობის ხარისხს.

242-ე ნახაზზე ნაჩვენებია სამჯერ და ოთხჯერ სტატიკურად ურკვევო კოჭი.



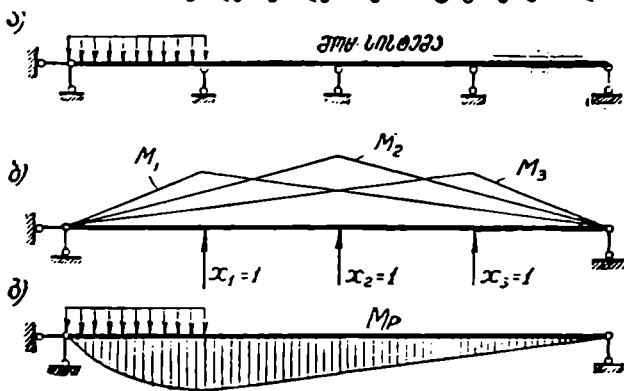
ნახ. 243.

§ 45. ძირითადი სისტემის აჩვენება

უკრი კოჭის ანგარიშის საერთო და მარტივ მეთოდს წარმოადგენს ძალთა მეთოდი. ამ მეთოდით ანგარიში ძირითადი სისტემის არჩევით იწყება.

ძირითადი სისტემა ისე უნდა ავირჩიოთ, რომ რაც შეიძლება შერტი არამთავარი გადაადგილება იქცეს ნულად.

თუ ზედმეტ უცნობებზე მივიღებთ საყრდენ რეაქციებს, მაშინ ძირითადი სისტემა იქნება ორ საყრდენზე მდებარე მარტივი კოჭი, და, მაშასადამე,

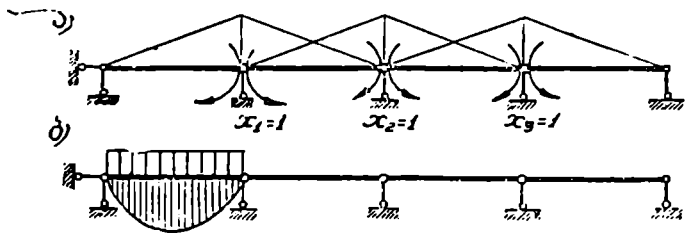


ნახ. 244.

ერთეული ძალებისაგან და მოცემული დატვირთვისაგან გამოწვეული ეპიურები გავრცელდება მთელ კოჭზე (ნახ. 244). ცხადია, რომ არც ერთი არამთავარი გადაადგილება არ იქცევა ნულად და, ამგვარად, არჩეული ძირითადი სისტემა გამარტივებას არ იძლევა.

ყველაზე უკეთეს გადაწყვეტას იძლევა 245-ე ნახაზზე ნაჩვენები ძირითადი სისტემა, სადაც ზედმეტ უცნობებზე მიღებულია მდუნავი მომენტები საყრდენებზე. ამ შემთხვევაში ერთეული ეპიურები გავრცელდება მხოლოდ ორ მოსაზღვრე მალზე და მრავალი არამთავარი გადაადგილება იქცევა ნულად. გარდა ამისა, ეპიურებს ექნებათ მარტივი სახე და ერთეულ გადაადგილე-

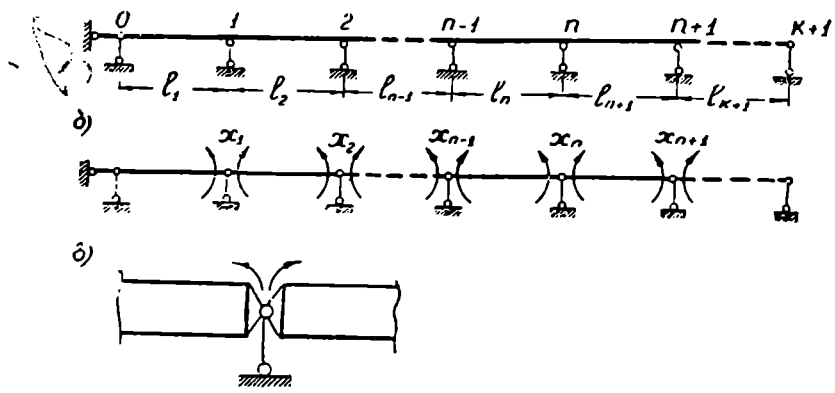
ბათა გამოთვლა საგრძნობლად მარტივდება. ტვირთით გამოწვეული ეპიურა ვრცელდება მხოლოდ იმ მალზე, რომელზედაც დატვირთვა მოქმედებს. კანონიკური განტოლება გადაიქცევა სამწევრა ანუ კლაპეირონის ცნობილ სამომენტთა განტოლებად.



ნახ. 245.

§ 46. უპირი კოჭის კანონიკური განტოლება
(სამ მომენტთა განტოლება)

განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა—არატოლმალისანი უპირი კოჭი, რომლის ინერციის მომენტი თითოეული მალის სიგრძეზე მუდმივია (ნახ. 246, ა). ზედმეტ უცნობებად მივიღოთ მღუნავი მომენტები საყრდენებზე $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, ე. ი. ძირითად სისტემალ ავირჩიოთ მარტივი ორ საყრდენზე მდებარე კოჭების ერთობლიობა (ნახ. 246, ბ). ამას მივიღებთ, თუ მოცემულ სისტემას შუალედ



ნახ. 246.

საყრდენ კვეთებში შოეუწყობთ სახსრებს. სიცხადისათვის ეს სახსარი სკემატურად გამოსახულია 246, გ ნახაზზე.

რადგანაც თითოეული უცნობისაგან გამოწვეული ეპიურა ვრცელდება მხოლოდ ორ მუზობელ მალზე (ნახ. 247), ამიტომ გადაადგილებები

$$\delta_{12} = \delta_{14} = \delta_{16} = \delta_{24} = \delta_{26} = \dots = \delta_{28} = \dots = 0$$

და კანონიკური განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1p} = 0;$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2p} = 0;$$

$$X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + X_4 \delta_{34} + \Delta_{3p} = 0;$$

$$\dots$$

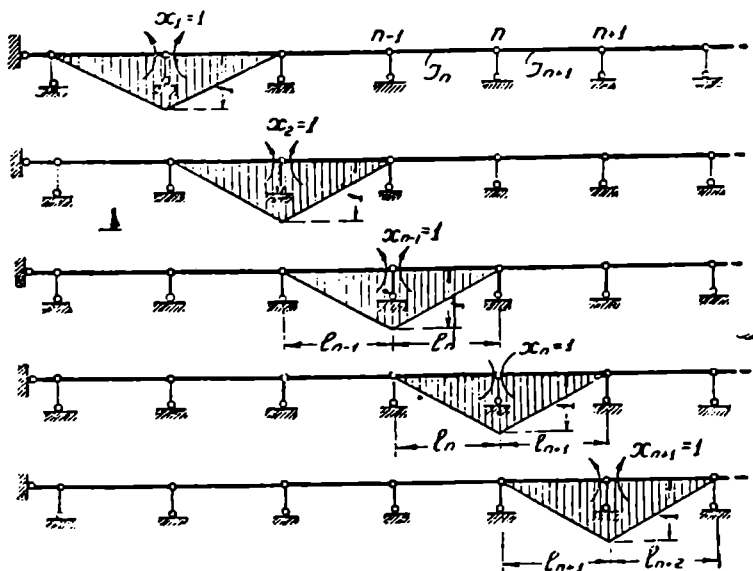
$$X_{n-1} \delta_{n, n-1} + X_n \delta_{nn} + X_{n+1} \delta_{n, n+1} + \Delta_{np} = 0$$

$$\dots$$

$$X_{k-1} \delta_{k, k-1} + X_k \delta_{kk} + \Delta_{kp} = 0.$$

მივიღეთ ე. წ. სამწვევრა ან კლაპეირონის განტოლებები, რომლის პირველ და უკანასკნელ განტოლებაში შედის ო-ო-რი უცნობი, დანარჩენებში კი სამ-სამი.

ამ განტოლებათა სისტემის თითოეული განტოლება გამოსახავს იმას, რომ ყველა საყრდენი მომენტისაგან გამოწვეულ გადაადგილებათა ჯამი სათანადო უცნობის მიმართულებით (ერთიერთ მობრუნების კუთხეები საყრდენებზე)



ნახ. 247.

ტოლია ნულია. ეს გამომდინარეობს უშუალოდ მოცემული სისტემის უპრელომის პირობიდან, ე. ი. საყრდენებზე (და საერთოდ) დრეკადი ბაზი არ უნდა გადატყდეს.

განვიხილოთ ნებისმიერი n საყრდენი და შევადგინოთ ტიპიური კანონიკური განტოლება ამ საყრდენისათვის:

$$X_{n-1} \delta_{n, n-1} + X_n \delta_{nn} + X_{n+1} \delta_{n, n+1} + \Delta_{np} = 0. \quad (59)$$

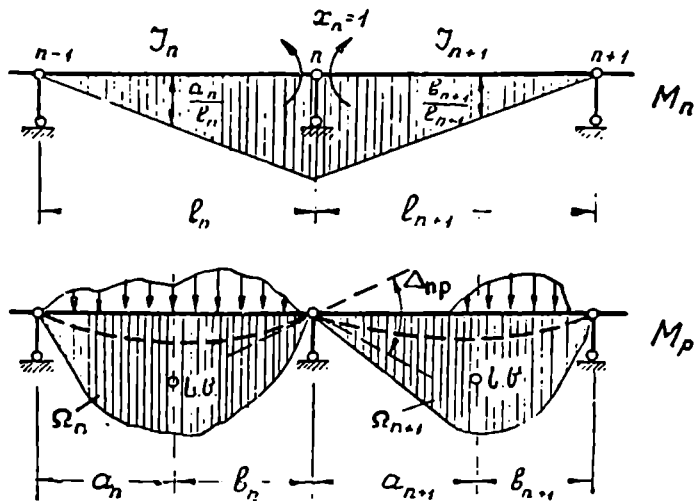
ერთეული უცნობებით გამოწვეული ეპიურების (ნახ. 247) კომბინაცია ვერეჩაგინის წესით მოგვცემს

$$\delta_{n, n-1} = \frac{1}{EI_n} \frac{1 \cdot l_n}{2} \cdot \frac{1}{3} l = \frac{l_n}{6EI_n};$$

$$\delta_{nn} = \frac{1}{EI_n} \frac{1 \cdot l_n}{2} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{l_n}{3EI_n};$$

$$\delta_{n, n+1} = \frac{1}{EI_{n+1}} \frac{1 \cdot l_{n+1}}{2} \cdot \frac{1}{3} l = \frac{l_{n+1}}{6EI_{n+1}}.$$

გამოვთვალოთ Δ_{np} . მოვახდინოთ M_n და M_p ეპიურების (ნახ. 248) კომბინაცია ვერეშჩაგინის წესით. მოცემული დატვირთვით გამოწვეული მლუნავე



ნახ. 248.

მომენტის ეპიურის ფართობებს თუ აღვნიშნავთ Ω_n , Ω_{n+1} და მათი სიმძიმის ცენტრებიდან საყრდენებამდე მანძილს სათანადოდ a_n , b_n და a_{n+1} , b_{n+1} , მივიღებთ:

$$\Delta_{np} = \frac{1}{EI_n} \Omega_n \frac{a_n}{l_n} + \frac{1}{EI_{n+1}} \Omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} \quad (60)$$

თუ მოცემული დატვირთვით გამოწვეულ ეპიურას წარმოვიდგენთ ფაქტიურ დატვირთვად, მაშინ

$$\frac{\Omega_n a_n}{l_n} = B_n^0$$

წარმოადგენს l_n მალის მარჯვენა ფიქტიურ რეაქციას, ხოლო

$$\frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} = A_{n+1}^0$$

კი l_{n+1} მალის მარცხენა ფიქტიურ რეაქციას.

მაშასადამე, დრეკადი ლერძის გადატების კუთხე n საყრდენზე ძირითად სისტემაში (ნახ. 248)

$$\Delta_{np} = \frac{1}{El_n} (B_n^{\text{ფ}} + A_{n+1}^{\text{ფ}}). \quad (61)$$

არითმეტიკული გამოთვლების გამარტივების მიზნით კანონიკური განტოლების ყველა კოეფიციენტი გადავაშრავლოთ $\frac{6El_0}{l_0}$ -ზე, სადაც l_0 , l_0 სრულებით ნებისმიერი ინერციის მომენტი და სიგრძეა. მივიღებთ

$$X_{n-1} \frac{l_0}{l_n} \frac{l_n}{l_0} + X_n 2 \left(\frac{l_0}{l_n} \frac{l_n}{l_0} + \frac{l_0}{l_{n+1}} \frac{l_{n+1}}{l_0} \right) + X_{n+1} \frac{l_0}{l_{n+1}} \frac{l_{n+1}}{l_0} + 6 \left(\frac{l_0}{l_n l_0} B_n^{\text{ფ}} + \frac{l_0}{l_{n+1} l_0} A_{n+1}^{\text{ფ}} \right) = 0.$$

თუ აღვნიშნავთ

$$l'_n = \frac{l_0}{l_n} \frac{l_n}{l_0}; \quad l'_{n+1} = \frac{l_0}{l_{n+1}} \frac{l_{n+1}}{l_0}, \quad (62)$$

რომლებსაც მაღის დაყვანილ სიგრძეებს უწოდებენ, X_{n-1} , X_n , X_{n+1} -ს შევცვლით სათანადოდ M_{n-1} , M_n , M_{n+1} -ით და თავისუფალ წევრს გადავიტანთ ტოლობის მარჯვნივ, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$M_{n-1} l'_n + M_n 2(l'_n + l'_{n+1}) + M_{n+1} l'_{n+1} = -6 \left(\frac{l'_n}{l_n} B_n^{\text{ფ}} + \frac{l'_{n+1}}{l_{n+1}} A_{n+1}^{\text{ფ}} \right) \quad (63)$$

ეს არის სამ მომენტთა ცნობილი განტოლება.

თუ უკრი კოქის ყველა მაღის ინერციის მომენტი ერთმანეთის ტოლია, ე. ი. $l_n = l_{n+1} = l_0$ და თუ ავიღებთ $l_0 = 1$, მაშინ $l'_n = l_n$ და $l'_{n+1} = l_{n+1}$ და სამ მომენტთა განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$M_{n-1} l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -6(B_n^{\text{ფ}} + A_{n+1}^{\text{ფ}}). \quad (64)$$

მაშასადამე სამ მომენტთა განტოლება წარმოადგენს ძალთა მეთოდის კანონიკურ განტოლებას გაშლილი სახით.

ასე ეწოდება კანონიკური განტოლების ისეთ ფორმას, რომელიც მიიღება საერთო განტოლებიდან თუ δ_{n1} , δ_{n2} და Δ_{np} კოეფიციენტებს შევცვლით მათი მნიშვნელობებით გამოსახულს ნაშენის ზომების და დატვირთვის საშუალებით.

თუ უკრი კოქის ერთი ბოლო ხისტად არის ჩამაგრებული, მაშინ შემოგვაქვს დამატებითი ცრუ მაღი $l_0 = 0$ (ნახ. 249), რაც ჩამაგრების ეკვივალენტურია.

ამ შემთხვევაში, o საყრდენისათვის სამ მომენტთა განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$2M_0(l_0 + l_1) + M_1 l_1 = -6A_1^{\text{ფ}}.$$

ამ განტოლებაში თუ შევიტანთ $l_0 = 0$, მივიღებთ:

$$2M_0 l_1 + M_1 l_1 = -6A_1^{\text{ფ}}. \quad (65)$$

თუ l_1 მალი დაუტვირთავია, მაშინ $A_1^0 = 0$ და მლუნავი მომენტი ჩამავრების

ადგილზე

$$M_0 = -\frac{1}{2} M_1.$$

სამ მომენტთა სამწვერა განტო-
ლებათა სისტემის გადაწყვეტა
უმჯობესიო მოვახდინოთ გაუსის
შემოკლებული ალგორითმის სა-
შუალებით.

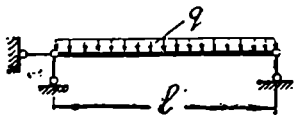
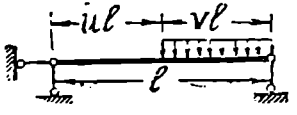
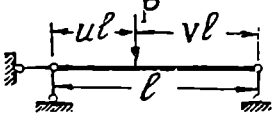
ძილებულ განტოლებაში ირ-
სად არ შედის დრეკადობის მო-

დული E და, მაშასადანე, მომენტების სიდიდეზე ის გავლენას არ ახდენს.

ანგარიშის გამარტივების მიზნით ფიქტიური რეაქციების მნიშვნელობები
სხვადასხვა დატვირთვისათვის მოცემულია ცხრილში. მე-6 ცხრილში მოყვა-
ნილია ფიქტიური რეაქციები ზოგიერთი დატვირთვისათვის.

ნახ. 249.

ცხრილი 6

დატვირთვის ხასიათი	A^0	B^0
	$\frac{ql^3}{24}$	$\frac{ql^3}{24}$
	$\frac{ql^3}{24} v^2(2-v^2)$	$\frac{ql^3}{24} v^2(2-v)^2$
	$\frac{Pl^3 uv(1+v)}{6}$	$\frac{Pl^3 uv(1+u)}{6}$

§ 47. მლუნავი მომენტის, განივი ძალის და საყრდენი რეაქციების
განსაზღვრა უპირ კოორდინატებში

საყრდენი მომენტების განსაზღვრის შემდეგ უპირი კოორდინატის ანგარიში დაი-
ვანება მარტივი, ორსაყრდენზე მდებარე კოორდინატის ანგარიშზე, რომელზეც მოქ-
მედებს საყრდენი მომენტები და მოცემული დატვირთვა.

განვიხილოთ l_n მალი (ნახ. 250). თუ ჩავთვლით, როგორც საყრდენი მომენტები
 M_n , M_n და დატვირთვისაგან გამოწვეული მომენტი M^0 , დადებითაა, მაშინ

მლუნაევი მომენტი კოქის ნებისმიერ x კვეთში განისაზღვრება ეპიურების სათანადო ორდინატების შეჯამებით:

$$M_x = M^0_p + M_{n-1} \frac{l_n - x}{l_n} + M_n \frac{x}{l_n} \quad (66)$$

ამ ფორმულაში M_{n-1} და M_n უნდა შევიტანოთ თავიანთი ნიშნებით.

ეპიურის აგების დროს M_x -ის დადებითი ორდინატა მოვზომოთ კოქის ღერძიდან ქვემოთ, უარყოფითი კი — ზემოთ.

ასევე მარტივად მივიღებთ განივი ძალის ფორმულას, თუ გამოვიყენებთ ეურავსკ-შვედლერის ფორმულას:

$$Q = \frac{dM_x}{dx} = \frac{dM^0_p}{dx} - \frac{M_{n-1}}{l_n} + \frac{M_n}{l_n},$$

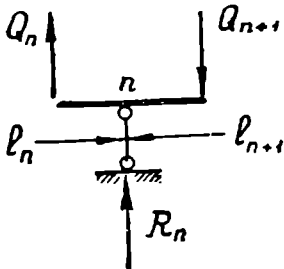
ან საბოლოოდ

$$Q = Q^0_p + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}, \quad (67)$$

სადაც Q^0_p არის მოცემული დატვირთვისაგან გამოწვეული უბრალო კოქის განივი ძალა.

საყრდენი რეაქციის განსაზღვრავად კოქიდან ამოვკვეთოთ ელემენტარული ნაწილი n საყრდენიდან და განვიხილოთ მისი წონასწორობის პირობა.

განივი ძალა Q_n და Q_{n+1} დადებითია, რადგან მოკვეთილ ნაწილს აბრუნებს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით (ნახ. 251). ✓



ნახ. 251.

ამოკვეთილ ელემენტზე მოქმედი ძალები დავაგეგმილოთ ვერტიკალურ ღერძზე, მივიღებთ:

$$R_n = Q_{n+1} - Q_n \quad (68)$$

თუ ამ ფორმულაში შევიტანთ Q_{n+1} და Q_n -ის მნიშვნელობებს, ან რაც იგივეა, თუ შევაჯამებთ საყრდენი მომენტებით და მოცემული დატვირთვით გამოწვეულ რეაქციებს n საყრდენზე (ნახ. 252), მივიღებთ რეაქციის გაშლილი სახით:

$$R_n = B'_n + A'_{n+1} + B^0_n + A^0_{n+1},$$

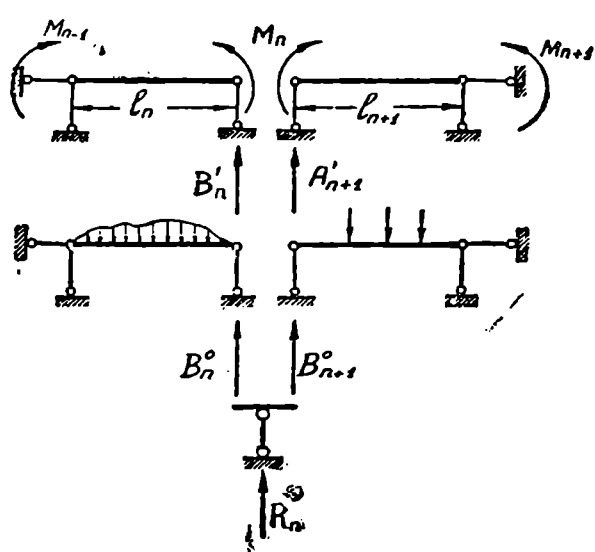
სადაც

$$B'_n = \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n};$$

$$A'_{n+1} = \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}}.$$

საბოლოოდ მივიღებთ

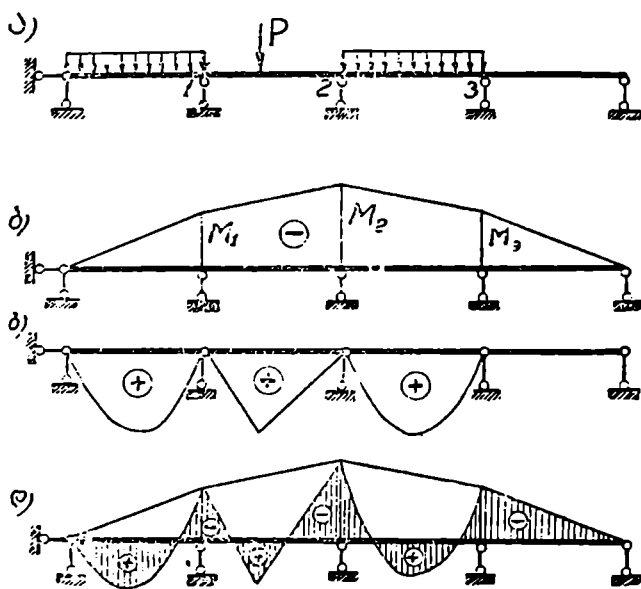
$$R_n = B_n + A_{n+1} + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}}. \quad (69)$$



ნახ. 252.

აქ B'_n და A'_{n+1} წარმოადგენს ორსაყრდენზე მდებარე კოქის რეაქციებს გამოწვეულს მოცემული დატვირთვისაგან. უნდა გვახსოვდეს, რომ, რადგანაც კანონიკური განტოლებების შედგენისას უცხოებები ავიღეთ დადებითი მიმართულებით, (66), (67) და (69) ფორმულებში მონენტები უნდა შევიტანოთ თავიანთი ნიშნით.

მლუნავი მომენტის ეპიურის აგება შეიძლება გამარტივ-

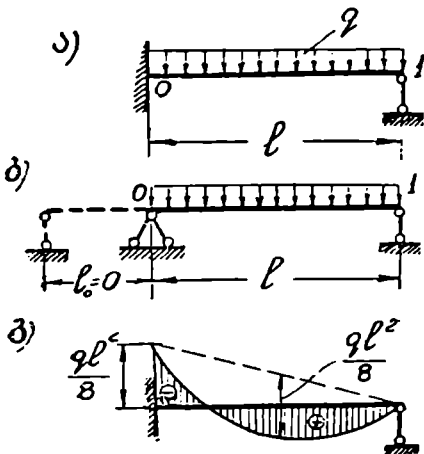


ნახ. 253.

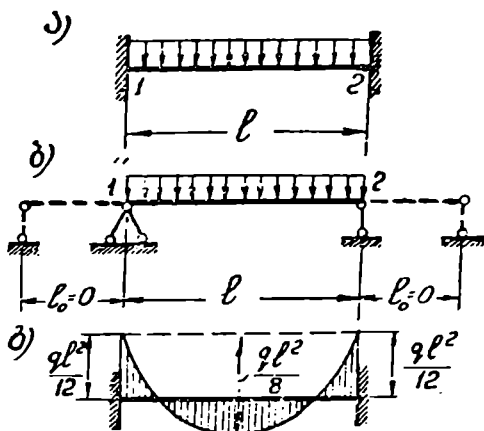
დეს თუ გამოვიყენებთ გრაფიკულ წესს, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში: ჯერ ვაგებთ საყრდენი მომენტებისაგან გამოწვეულ ეპიურას, ე. ი. სათანადო საყრდენების ქვეშ მოვზომავთ ორდინატებს $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots, M_k$ და ვაერთებთ სწორი ხაზით (ნახ. 253, ბ). დადებითი ორდინატა მოვზომოთ ნულოვანი ხაზის ქვემოთ, უარყოფითი კი—ზემოთ. შემდეგ ვაგებთ ტვირთისაგან გამოწვეულ ეპიურებს ორ საყრდენზე მდებარე კოქებისათვის (ნახ. 253, გ) და მიღებულ ეპიურებს-ვაჯამებთ. ამისათვის, საყრდენი მომენტების შემაერთებელი ხაზიდან ვერტიკალურად მოვზომოთ ტვირთისაგან გამოწვეული ეპიურის ორდინატები. ეს ცხადია 253, დ ნახაზიდან.

§ 48. უბრაო კოქების ანგარიშის მახალითები

1 მაგალითი. ვიანგარიშოთ ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებული და მეორე ბოლოთი თავისუფლად მდებარე კოქი (ნახ. 254, ა).



ნახ. 254.



ნახ. 255.

გ ა დ ა წ ყ ვ ე ტ ა. გამოვიყენოთ სამ მომენტთა განტოლება (ფორ. 64). ხისტი ჩამაგრება შევცვალოთ ცრუ მალით $l_0 = 0$ (ნახ. 254, ბ). სამ მომენტთა განტოლება 0 საყრდენისათვის მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$2M_0 l = -6A^u,$$

აქედან

$$M_0 = \frac{3A^u}{l}$$

$$A^u = \frac{ql^3}{24}$$

(იხ. ცხრილი მე-6).

საბოლოოდ

$$M_0 = -\frac{ql^2}{8}.$$

მლუნავი მომენტის ეპიურა ნაჩვენებია 254, გ ნახაზზე.

ჰ მაგალითი. ვიანგარიშით ორი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებული კოქი (ნახ. 255, ა).

გა დაწყვეტა. ხისტი ჩამაგრება ორივე მხარეს შეეცვალთ ცრუ მალთ $l_0=0$ (ნახ. 255, ბ).

სამ მომენტთა განტოლება (ფორ. 64) 1 საყრდენისათვის იქნება:

$$2M_1l + M_2l = -6A^0$$

სიმეტრიის გამო
და მივიღებთ

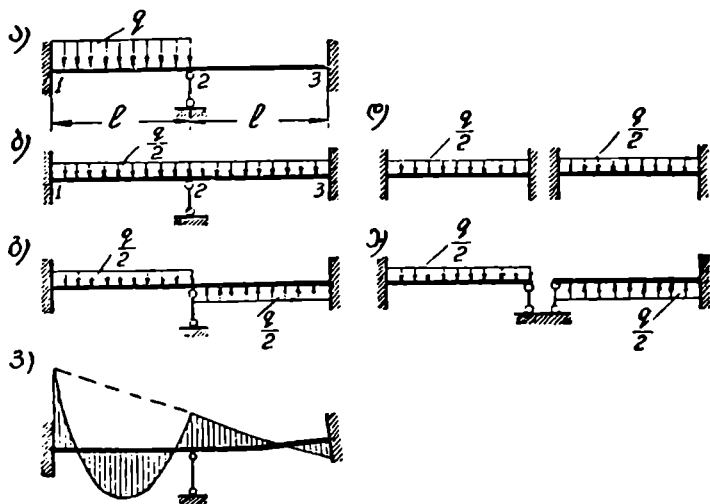
$$M_1 = M_2$$

$$M_1 = M_2 = -\frac{2A^0}{l} = -\frac{ql^3}{12}.$$

მლუნავი მომენტის ეპიურა წარმოდგენილია 255, გ ნახაზზე.

ჰ მაგალითი. ვიანგარიშით ორმალისანი კოქი, რომლის მარცხენა მალი დატვირთულია თანაბრად განაწილებული ტვირთით ინტენსივობით q ტ/მ (ნახ. 256, ა).

გა დაწყვეტა. მოცემული დატვირთვა დავანაწილოთ სიმეტრიულ და ირიბადსიმეტრიულ დატვირთებად (ნახ. 256, ბ, გ).



ნახ. 256.

პირველ შემთხვევაში, სიმეტრიის გამო, კვეთი 2 საყრდენზე არ მობრუნდება და ამიტომ თითოეული მალი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ორი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებული კოქი (ნახ. 256, დ):

$$M_1 = M_2 = M_3 = -\frac{q}{2} \frac{l^3}{12} = -\frac{ql^3}{24}.$$

მეორე შემთხვევაში ირიბადისიმეტრიული დაჭვირთვის გამო, მღუნავი მომენტი მე-2 საყრდენზე $M_2=0$ და კოქის თითოეული ნაწილი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებული და მეორე ბოლოთი თავისუფლად მდებარე კოქი (ნახ. 2:6, ე).

$$M_1 = -\frac{q}{2} \frac{l^2}{8} = -\frac{ql^2}{16};$$

$$M_3 = \frac{q}{2} \frac{l^2}{8} = \frac{ql^2}{16}.$$

საბოლოოდ

$$M_1 = -\frac{ql^2}{24} - \frac{ql^2}{16} = -\frac{5ql^2}{48}; \quad M_3 = -\frac{ql^2}{24};$$

$$M_3 = -\frac{ql^2}{24} + \frac{ql^2}{16} = \frac{ql^2}{48}.$$

ეპიურა აგებულია 256.ვ ნახაზზე.

⊕ 4 შავალითი. ავაგოთ მღუნავი მომენტის და განივი ძალის ეპიურა 257-ე ნახაზზე წარმოდგენილი უკრი კოქისათვის. ინერციის მომენტები და კოქის ზომები მოყვანილია ნახაზზე.

გ ა დ ა წ ყ ვ ე ტ ა. შევადგინოთ სამ მომენტთა განტოლება თანდათანობით 1, 2 და მე-3 საყრდენისათვის (ფორ. 63), წინასწარ გამოვთვალოთ დაყვანილი სიგრძეები (ფორ. 62).

დაეუშვათ $l_0=4$ მ. $l_0=2$; მაშინ

$$l'_1 = \frac{l_0}{l_1} \frac{l_1}{l'_0} = \frac{2}{1} \frac{4}{4} = 2;$$

$$l'_2 = \frac{l_0}{l_2} \frac{l_2}{l'_0} = \frac{2}{2} \frac{4}{4} = 1;$$

$$l'_3 = \frac{l_0}{l_3} \frac{l_3}{l'_0} = \frac{2}{3} \frac{6}{4} = 1;$$

$$l'_4 = \frac{l_0}{l_4} \frac{l_4}{l'_0} = \frac{2}{2.5} \frac{5}{4} = 1.$$

სამ მომენტთა განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს ($M_0=M_4=0$):

1 საყრდენისათვის

$$2M_1(l'_1+l'_2)+M_2l'_2 = -6\left(\frac{l'_1}{l_1}B_1^0 + \frac{l'_2}{l_2}A_2^0\right),$$

სადაც

$$B_1^0 = \frac{ql_1^3}{24} = \frac{2 \cdot 4^3}{24} = \frac{16}{3} \text{ ტმ}^2; \quad A_2^0 = 0.$$

საბოლოოდ

$$6M_1 + M_2 = -16.$$

მე-2 საყრდენისათვის

$$M_1 l'_2 + 2M_2 (l'_2 + l'_3) + M_3 l'_3 = -6 \left(\frac{l'_2}{l_2} B_2^0 + \frac{l'_3}{l_3} A_3^0 \right),$$

სადაც

$$B_2^0 = 0; \quad A_3^0 = \frac{Pl_3^2}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{2}{3} \right) = 20 \text{ ტმ}^2.$$

საბოლოოდ

$$M_1 + 4M_2 + M_3 = -20.$$

მე-3 საყრდენისათვის

$$M_1 l'_3 + 2M_2 (l'_3 + l'_4) = -6 \left(\frac{l'_3}{l_3} B_3^0 + \frac{l'_4}{l_4} A_4^0 \right).$$

აქ

$$B_3^0 = \frac{Pl_3^2}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = 16 \text{ ტმ}^2;$$

$$A_4^0 = \frac{q_2 l_4^3}{24} = \frac{4 \cdot 5^3}{24} = \frac{125}{6} \text{ ტმ}^3.$$

საბოლოოდ

$$M_1 + 4M_2 = -6 \left(\frac{1}{6} \cdot 16 + \frac{1}{5} \cdot \frac{125}{6} \right),$$

ან

$$M_1 + 4M_2 = -41.$$

ანგვარად ჩვენ მივიღეთ განტოლებათა სისტემა:

$$6M_1 + M_2 = 16;$$

$$M_1 + 4M_2 + M_3 = -20;$$

$$M_2 + 4M_3 = -41.$$

მათი გადაწყვეტა მოგვცემს:

$$M_1 = -2,35 \text{ ტმ}, \quad M_2 = -1,98 \text{ ტმ}, \quad M_3 = -9,75 \text{ ტმ}.$$

ამის შემდეგ ვაგებთ საყრდენი მომენტების ეპიურას (ნახ. 257, ბ) და მოცემული დატვირთვისაგან გამოწვეულ ეპიურებს ორსაყრდენზე მდებარე კოქებისათვის (ნახ. 257, ვ). ამ ორი ეპიურის ორდინატების შეჯამება ალგებრულად მოგვცემს მლუნაევი მომენტის საბოლოო ეპიურას უკრ კოქში (ნახ. 257, დ). განივ ძალას განესაზღვრავთ (67) ფორმულის საშუალებით:

$$Q_{01} = Q_{01}^0 + \frac{M_1}{l_1} = 4 - \frac{2,35}{4} = 3,412 \text{ ტ};$$

$$Q_{10} = Q_{10}^0 + \frac{M_1}{l_1} = -4 - \frac{2,35}{4} = -4,588 \text{ ტ};$$

$$Q_{12} = \frac{M_2 - M_1}{l_2} = \frac{-1,98 + 2,35}{4} = 0,092 \text{ ტ};$$

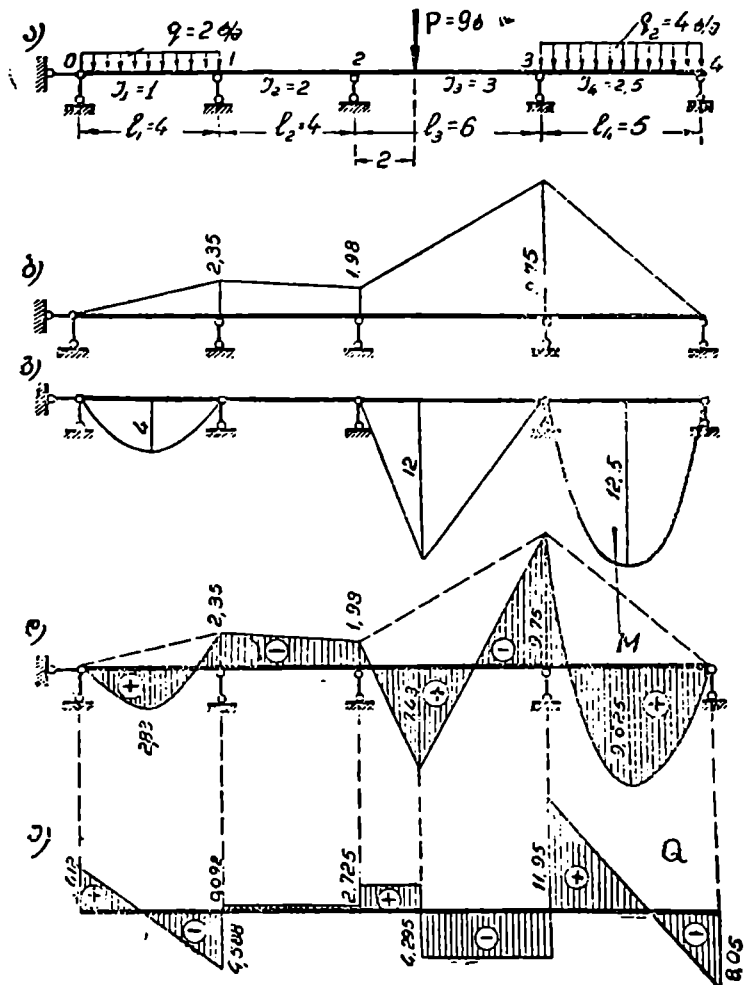
$$Q_{23} = 6 + \frac{-9,75 + 1,98}{4} = 2,725 \text{ ტ};$$

$$Q_{31} = -3 + \frac{-9,75 + 1,98}{4} = -4,295 \text{ ტ.}$$

$$Q_{30} = 10 + \frac{9,75}{5} = 11,95 \text{ ტ.}$$

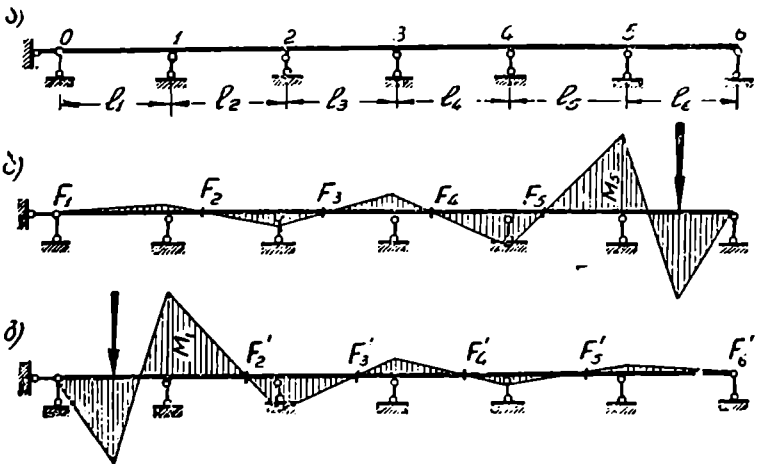
$$Q_{45} = -10 + \frac{9,75}{5} = -8,05 \text{ ტ.}$$

ეპიურა ნაჩვენებია 257, ე ნახაზზე.



1. საფოკუსო წერტილები და საფოკუსო ფარლობანი

უპირი კოქის მალეების რიცხვის ზრდასთან ერთად იზრდება საანგარიშო განტოლებების რიცხვი და უცნობთა განსაზღვრა, მიუხედავად კანონიერ განტოლებათა სისტემის სიმარტივისა, საკმაოდ დიდ დროს მოითხოვს. ანგარიშის ძირითად სირთულეს შეადგენს ერთადი განტოლებების გადაწყვეტა და ამიტომ ისეთ მეთოდს, რომელიც გაგვათავისუფლებს ამ განტოლებების გადაწყვეტისაგან დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. ასეთ მეთოდს ფოკუსების მეთოდი წარმოადგენს. წარმოვიდგინოთ უპირი კოქი, რომლის მარჯვენა განაპირა მალზე მოქმედებს შეყურსული ძალა P (ნახ. 258). სამ მომენტთა განტოლების შედგენისა და გადაწყვეტის საფუძველზე მივიღებთ მლუნავ მომენტთა ეპიურას (ნახ. 258, ბ). ამ ეპიურიდან ჩანს, რომ ყველა დაუტვირთავ მალზე მარცხენა საყრდენების მახლობლად არსებობს ნულოვანი წერტილები. ამ ნულოვან წერტილებს $F_1, F_2, F_3, F_4,$ მარცხენა ფოკუსები ან საფოკუსო წერტილები ეწოდება.



ნახ. 258.

საფოკუსო წერტილების მდებარეობა უცვლელია და სრულებით არ არის დაშოკიდებული P ძალის სიდიდეზე. მართლაც, P ძალას თუ გავზრდით n -ჯერ, მაშინ M_5 -იც გაიზრდება n -ჯერ და პროპორციულობის პრინციპის საფუძველზე მლუნავი მომენტის ყველა ორდინატა გაიზრდება იმავე პროპორციით. (ცხადია, ნულოვანი წერტილები დარჩება თავის ადგილზე. ეხლა წარმოვიდგინოთ, რომ ძალა მოქმედებს მარცხენა განაპირა მალზე (ნახ. 258, გ). მაშინ მლუნავი მომენტის ნულოვანი წერტილები მარჯვენა საყრდენების მახლობლად იქნება მოთავსებული. ამ ნულოვან წერტილებს F'_1, F'_2, F'_3, \dots მარჯვენა ფოკუსები ან საფოკუსო წერტილები ეწოდება.

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ არც მარჯვენა საფოკუსო წერტილების მდებარეობაა დამოკიდებული P ძალის და სათანადო M_1 -ის სიდიდეზე. მაშასადამე, დაუტვირთავი მალეზის მღუნავი მომენტების ეპიურის ნულოვანი წერტილების (ფოკუსების) მდებარეობა არ არის დამოკიდებული დატვირთვის სიდიდეზე.

არ უნდა დაგვაფიწყდეს, რომ დატვირთული მალის ნულოვანი წერტილები არ იენება ფოკუსები. როგორც ვნახეთ, თითოეულ მალს აქვს ორი ფოკუსი: მარცხენა და მარჯვენა.

რომელიმე მალის მარცხენა ფოკუსი არის ამ მალის მღუნავი მომენტის ეპიურის ნულოვანი წერტილი, როცა დატვირთვა მოქმედებს მხოლოდ მარჯვენა მალეზზე, ე. ი. განსახილავი მალი და ყველა მარცხენა მალი დაუტვირთავია.

რომელიმე მალის მარჯვენა ფოკუსი არის ამ მალის მღუნავი მომენტის ეპიურის ნულოვანი წერტილი, როცა დატვირთვა მოქმედებს მხოლოდ მარცხენა მალეზზე, ე. ი. განსახილავი მალი და ყველა მარჯვენა მალი დაუტვირთავია.

ჩვენ გვარჩიეთ მღუნავი მომენტის ეპიურის ნულოვანი წერტილები და ამიტომ მათ სამომენტო ფოკუსები ეწოდებათ.

რადგანაც ფოკუსების მდებარეობა მუდმივია და დამოკიდებული არაა დატვირთვაზე, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია წინასწარ განვსაზღვროთ მათი მდებარეობა. ფოკუსების მდებარეობა დამოკიდებულია მხოლოდ კოქის გეომეტრიულ სიდიდეებზე. განვიხილოდ უკრი კოქი და ვთქვათ, რომ დატვირთვა მოქმედებს მარჯვენა განაპირა მალზე (ნახ. 258, ბ).

დავწეროთ სამ მომენტთა განტოლება (ფორ. 63) 1, 2, 3, ..., n საყრდენისათვის.

პირველი საყრდენისათვის გვექნება

$$M_0 l'_1 + M_1 2(l'_1 + l'_2) + M_2 l'_3 = 0.$$

ამ განტოლებიდან ვიპოვით საყრდენი მომენტების ფარდობას ($M_0 = 0$):

$$\frac{M_2}{M_1} = - \frac{2(l'_1 + l'_2)}{l'_3} = -2 \left(1 + \frac{l'_1}{l'_3} \right) = -2k_2.$$

შეორე საყრდენისათვის

$$M_1 l'_2 + M_2 2(l'_2 + l'_3) + M_3 l'_3 = 0.$$

განტოლების ყველა წევრი გავყოთ M_2 -ზე და შევითანოთ $\frac{M_1}{M_2} = - \frac{1}{k_2}$, მივიღებთ:

$$\frac{M_3}{M_2} l'_3 + 2(l'_2 + l'_3) - \frac{1}{k_2} l'_2 = 0,$$

საიდანაც

$$\frac{M_3}{M_1} = - \left[2 + \frac{l'_2}{l'_3} \left(2 - \frac{1}{k_2} \right) \right] = -k_3.$$

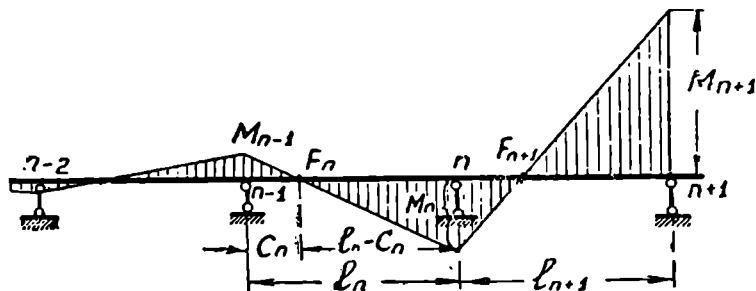
მესამე საყრდენისათვის

$$M_2 l'_3 + M_3 2(l'_3 + l'_4) + M_4 l'_4 = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\frac{M_4}{M_3} = - \left[2 + \frac{l'_3}{l'_4} \left(2 - \frac{1}{k_3} \right) \right] = -k_4.$$

ჩვენ თუ დავწერთ სამ მომენტთა განტოლებას n საყრდენისათვის.



ნახ. 259.

(ნახ. 259), სრულებით ანალოგიურად მივიღებთ საერთო რეკურენტულ ფორმულას:

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = - \left[2 + \frac{l'_n}{l'_{n+1}} \left(2 - \frac{1}{k_n} \right) \right] = -k_{n+1},$$

ე. ი.

$$k_{n+1} = 2 + \frac{l'_n}{l'_{n+1}} \left(2 - \frac{1}{k_n} \right). \quad (70)$$

ეს ფარდობები გვიჩვენებს: 1. ორი მეზობელი საყრდენი მომენტის ფარდობა დამოკიდებულია მხოლოდ კოქის მალეების დაყვანილ სიგრძეზე და არ არის დამოკიდებული დატვირთვაზე; 2. მეზობელ საყრდენ მომენტებს აქვს საწინააღმდეგო ნიშანი; 3. საყრდენი მომენტების სიდიდეები მცირდება დატვირთული მალიდან კოქის ბოლოსაკენ.

რომელიმე მალის საყრდენი მომენტების ფარდობის აბსოლუტურ სიდიდეს (k -ს) მომენტების საფოკუსო ფარდობა ეწოდება.

თუ ცნობილია მარცხენა საფოკუსო ფარდობები:

$$k_1 = -\frac{M_1}{M_0}; \quad k_2 = -\frac{M_2}{M_1}; \quad k_n = -\frac{M_n}{M_{n-1}}; \quad k_{n+1} = -\frac{M_{n+1}}{M_n},$$

ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ მარცხენა ფოკუსების მდებარეობა ფორმულით (ნახ. 259):

საიდანაც

$$\left. \begin{aligned} k_n &= -\frac{M_n}{M_{n-1}} = \frac{l_n - c_n}{c_n}, \\ c_n &= \frac{l_n}{1+k_n} \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

(70) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ რომელიმე მალის საფოკუსო ფარდობის საპოვნელად საჭიროა ვიცოდეთ წინა მალის საფოკუსო ფარდობა.

თუ პირველი მარცხენა საყრდენი სახსროვანია (ნახ. 258, ბ), მაშინ $M_0 = 0$ და

$$k_1 = -\frac{M_1}{0} = \infty$$

მეორე მალის საფოკუსო ფარდობა

$$k_2 = 2 + \frac{l'_1}{l'_2} \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 2 \left(1 + \frac{l'_1}{l'_2} \right),$$

ე. ი. მივიღეთ იგივე მნიშვნელობა, რაც პირველი საყრდენის სამ მომენტთა განტოლებიდან.

თუ კოქის მარცხენა საყრდენი ჩამაგრებულია ხისტად, მაშინ ჩამაგრება შეიძლება შევეცვალოთ ცრუ მალით (ნახ. 249) $l_4 = 0$.

ამ შემთხვევაში მივიღებთ:

$$k_0 = \infty$$

და

$$k_1 = 2 + \frac{l'_0}{l'_1} \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 2.$$

ზემოთ (§ 46) ეს შედეგი მივიღეთ (65) ფორმულის საფუძველზე. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში საფოკუსო წერტილი ჩამაგრებიდან დაშორებულია მანძილით:

$$c_1 = \frac{l_1}{1+k_1} = \frac{l_1}{3}.$$

თუ დატვირთვა მოქმედებს მარცხენა განაპირა მალზე (ნახ. 258, გ), მაშინ ანალოგიური ანგარიშით მივიღებთ მარჯვენა საფოკუსო ფარდობების ფორმულას საერთო სახით (ნახ. 260):

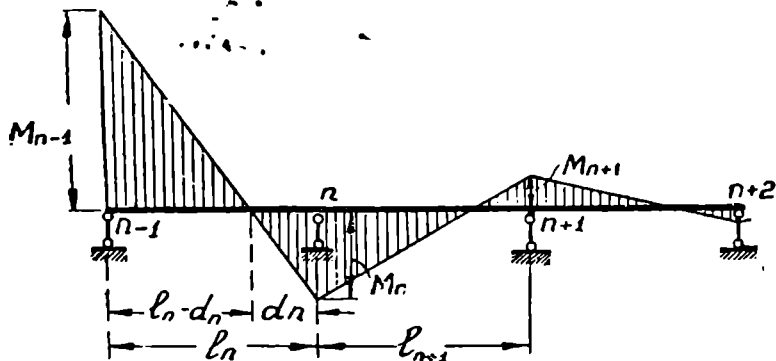
$$k'_n = 2 + \frac{l'_{n+1}}{l'_n} \left(2 - \frac{1}{k'_{n+1}} \right). \quad (72)$$

მარჯვენა ფოკუსების მდებარეობა განისაზღვრება ფორმულით (ნახ. 260)

საიდანაც

$$\left. \begin{aligned} k'_n &= -\frac{M_{n-1}}{M_n} = \frac{l_n - d_n}{d_n}, \\ d_n &= \frac{l_n}{1+k'_n}. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

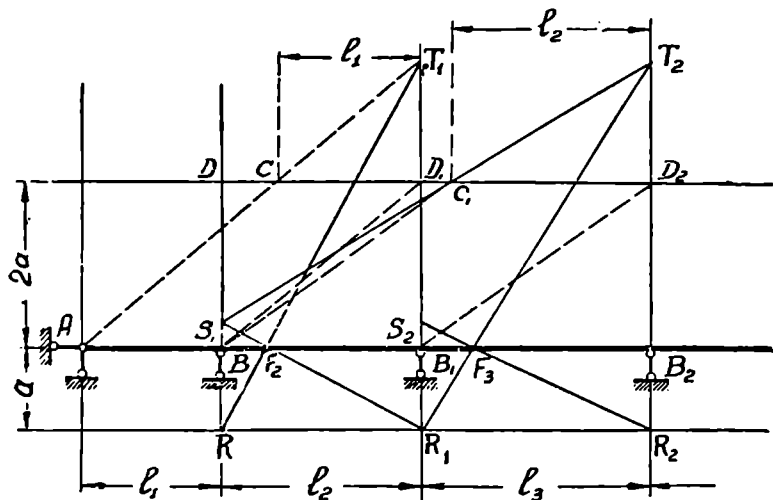
რადგანაც საფოკუსო ფარდობანი იცვლება ∞ -დან (კოკის ბოლო სახსროვანია) 2-მდე (კოკის ბოლო ჩამაგრებულია), ფოკუსების დაშორება საყრდენებიდან იცვლება სათანადოდ 0-დან $\frac{l}{3}$ -მდე.



ნახ. 260.

2. ფოკუსების პოვნა გრაფიკულად

არსებობს ფოკუსების განსაზღვრის რამდენიმე გრაფიკული წესი. ჩვენ გავარჩიოთ პროფ. ბ. ნ. ემბოჩინის წესი, რომელიც შედარებით უფრო მარტივია. ინერციის მომენტი კოკის მთელ სიგრძეზე ერთნაირია. კოკის ღერძის



ნახ. 261.

პარალელურად გავატაროთ ორი ხაზი; ერთი კოკის ქვევით ნებისმიერ a მანძილზე, მეორე კი კოკის ზევით $2a$ მანძილზე (ნახ. 261). საყრდენებიდან აღე-

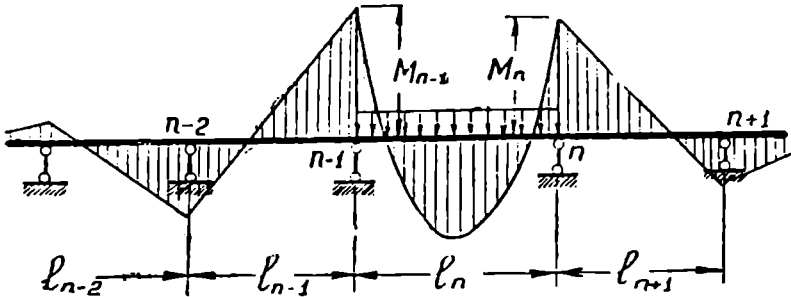
მართოდ ვერტიკალური ხაზები პარალელური ხაზების გადაკვეთამდე R, R_1, R_2, \dots , და D, D_1, D_2 წერტილებში. პირველი მალის ფოკუსი ყოველთვის ცნობილია; ის ემთხვევა A საყრდენს, თუ საყრდენი სახსროვანია, და მალის შესაშვლდება—თუ საყრდენი ჩამაგრებულია. გავატაროთ BD_1, B_1D_2, \dots სწორი ხაზები. A წერტილიდან გავატაროთ ხაზი $AC \parallel BD_1$ და გავაგრძელოთ B_1D_1 ხაზის გადაკვეთამდე T_1 წერტილში. T_1 წერტილი შევეერთოთ R -თან. T_1R ხაზის გადაკვეთის წერტილი კოქის ღერძთან მოგვცემს საფოკუსო წერტილს F_2 -ს. შემდეგ, გავატაროთ R_1F_2 ხაზი და გავაგრძელოთ BD ხაზის გადაკვეთამდე S_1 წერტილში. B წერტილიდან გავატაროთ ხაზი $BC_1 \parallel B_1D_2$. S_1 წერტილი შევეერთოთ C_1 -თან და გავაგრძელოთ B_2D_2 ხაზის გადაკვეთამდე T_2 წერტილში. გავატაროთ T_2R_1 ხაზი. რომლის გადაკვეთის წერტილი კოქის ღერძთან მოგვცემს F_3 საფოკუსო წერტილს. ასევე განისაზღვრება დანარჩენი ფოკუსებიც.

თუ A საყრდენი ჩამაგრებულია, მაშინ F_1 წერტილი იქნება ცნობილი და აგება იწარმოებს ანალოგიურად. განხილული წესის დამტკიცება მოყვანილია სპეციალურ სახელმძღვანელოებში.

3. დატვირთული მალის საყრდენი მომენტების განსაზღვრა

საფოკუსო ფარდობები საშუალებას იძლევა განვსაზღვროთ დაუტვირთავი მალის საყრდენი მომენტები; თუ ცნობილია დატვირთული მალის საყრდენი მომენტები.

განვიხილოთ უკრი კოქი, რომლის მხოლოდ ერთი რომელიმე მალი,



ნახ. 262.

ვთქვათ, l_n არის დატვირთული (ნახ. 262).

დაწვრივით სამ მომენტთა განტოლება დატვირთული მალის საყრდენებისათვის.

$n-1$ საყრდენისათვის:

$$M_{n-2}l_{n-1} + M_{n-1}2(l'_{n-1} + l'_n) + M_n l'_n = -6 \frac{l'_n}{l_n} A_n^0.$$

n საყრდენისათვის:

$$M_{n-1}l'_n + M_n 2(l'_n + l'_{n+1}) + M_{n+1}l'_{n+1} = -6 \frac{l'_n}{l_n} B_n^0.$$

l_{n-1} და l_{n+1} მალი დაუტვირთავია და ამიტომ M_{n-1} და M_{n+1} გამოისახება მარცხენა და მარჯვენა საფოკუსო ფარდობით:

$$M_{n-2} = -\frac{M_{n-1}}{k_{n-1}}; \quad M_{n+1} = -\frac{M_n}{k'_{n+1}}.$$

თუ შევიტანთ ამ მნიშვნელობებს წინა განტოლებებში, მივიღებთ:

$$M_{n-1} \left[2(l'_{n-1} + l'_n) - \frac{l'_{n-1}}{k'_{n-1}} \right] + M_n l'_n = -6 \frac{l'_n}{l_n} A_n^0;$$

$$M_{n-1} l'_n + M_n \left[2(l_n + l'_{n+1}) - \frac{l'_{n+1}}{k'_{n+1}} \right] = -6 \frac{l'_n}{l_n} B_n^0.$$

თუ შევკვეცავთ l'_n -ზე და მხედველობაში მივიღებთ, რომ კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებები იძლევა საფოკუსო ფარდობებს:

$$k_n = \left[2 + \frac{l'_{n+1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{K_{n-1}} \right) \right],$$

$$k'_n = \left[2 + \frac{l'_{n+1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{K'_{n+1}} \right) \right],$$

მაშინ განტოლებები მიიღებს მარტივ სახეს:

$$M_{n-1} k_n + M_n = -\frac{6}{l_n} A_n^0;$$

$$M_{n-1} + M_n k'_n = -\frac{6}{l_n} B_n^0.$$

ამ განტოლებათა სისტემის გადაწყვეტა მოგვცემს

$$\left. \begin{aligned} M_{n-1} &= -\frac{6}{l_n} \cdot \frac{A_n^0 k'_n - B_n^0}{k_n k'_n - 1} \\ M_n &= -\frac{6}{l_n} \cdot \frac{B_n^0 k_n - A_n^0}{k_n k'_n - 1} \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

დატვირთული მალის საყრდენი მომენტების განსაზღვრის შემდეგ ჩვენ შეგვიძლია ვინაგარიშოთ დანარჩენი საყრდენი მომენტები საფოკუსო ფარდობების საშუალებით:

$$M_{n-2} = -\frac{M_n}{k_{n-1}}; \quad M_{n-3} = -\frac{M_{n-2}}{k'_{n-2}} \quad \text{და ა. შ.}$$

$$M_{n+1} = -\frac{M_n}{k'_{n+1}}; \quad M_{n+2} = -\frac{M_{n+1}}{k'_{n+2}} \quad \text{და ა. შ.}$$

თუ დატვირთულია რამდენიმე მალი, მაშინ გამოვთვლით თითოეული მალის დატვირთვით გამოწვეულ საყრდენ მომენტებს ცალ-ცალკე და ძალთა დამოუკიდებლობის პრინციპის საფუძველზე მიღებულ შედეგებს შევჯამებთ.

A_n^0 და B_n^0 -ის მნიშვნელობები მოცემულია ცხრილებში (იხ. ცხრ. 6).

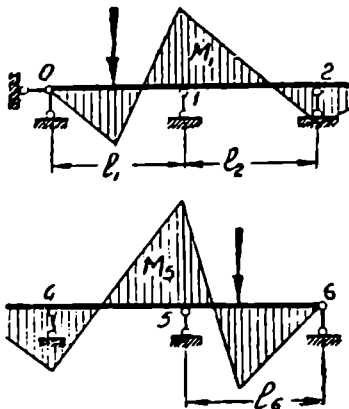
როცა დატვირთულია პირველი ან უკანასკნელი მალი (ნახ. 263), მაშინ ერთ-ერთი საყრდენი მომენტი იქნება ნულის ტოლი და მივიღებთ:

$$k_1 = k_n = \infty \text{ ან } k'_1 = k'_n = \infty.$$

(74) განტოლება იქცევა განუზღვრელობად, რომელიც გარდაქმნის შემდეგ მიიღებს სახეს:

$$M_1 = \frac{6}{l_1} \frac{B_1^0 - \frac{A_1^0}{k_1}}{k'_1 - \frac{1}{k_1}} = \frac{6}{l_n} \frac{B_n^0}{k'_1} \quad (75)$$

$$M_n = \frac{6}{l_n} \frac{A_n^0}{k_1}$$

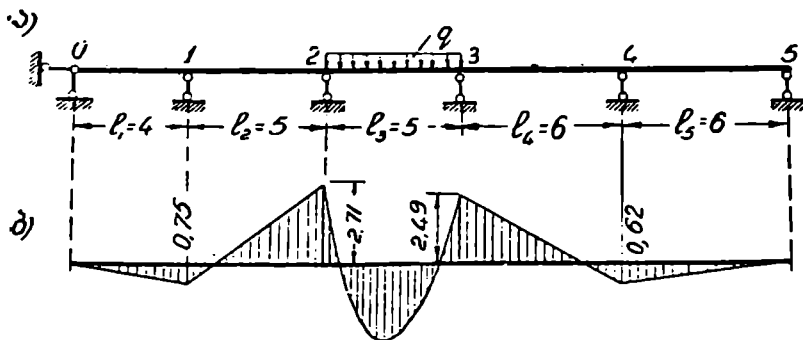


ნახ. 263.

მაგალითი. ვიანგარიშოთ ხუთ-მალისანი უპირი კოქი ფოკუსების მეთოდით (ნახ. 264, ა).

$$l_1 = 4 \text{ მ}; l_2 = 5 \text{ მ}; l_3 = 5 \text{ მ}; l_4 = l_5 = 6 \text{ მ}. q = 2 \text{ ტ/მ.}$$

ინერციის მომენტი $I = \text{const}$ და ამიტომ $l'_n = l_n$.



ნახ. 264.

გ ა დ ა წ ვ ე ტ ა. გამოვთვალოთ მარცხენა საფოკუსო ფარდობანი:

$$k_1 = \infty;$$

$$k_2 = 2 + \frac{l_1}{l_2} \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 2 + 1,6 = 3,6;$$

$$k_3 = 2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 - \frac{1}{k_2} \right) = 2 + \left(2 - \frac{1}{3,6} \right) = 3,73;$$

$$k_4 = 2 + \frac{l_2}{l_4} \left(2 - \frac{1}{k_3} \right) = 2 + \frac{5}{6} \left(2 - \frac{1}{3,73} \right) = 3,44;$$

$$k_5 = 2 + \frac{l_4}{l_5} \left(2 - \frac{1}{k_4} \right) = 2 + \left(2 - \frac{1}{3,44} \right) = 3,71.$$

მარჯვენა საფოკუსო ფარდობანი:

$$k'_5 = \infty;$$

$$k'_4 = 2 + \frac{l_5}{l_4} \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 4;$$

$$k'_3 = 2 + \frac{l_4}{l_3} \left(2 - \frac{1}{k'_4} \right) = 2 + \frac{6}{5} \left(2 - \frac{1}{4} \right) = 4,1;$$

$$k'_2 = 2 + \frac{l_3}{l_2} \left(2 - \frac{1}{k'_3} \right) = 2 + \left(2 - \frac{1}{4,1} \right) = 3,75;$$

$$k'_1 = 2 + \frac{l_2}{l_1} \left(2 - \frac{1}{k'_2} \right) = 2 + \frac{5}{4} \left(2 - \frac{1}{3,75} \right) = 4,16.$$

დატვირთული მალის საყრდენი მომენტები იქნება

$$M_2 = -\frac{6}{l_3} \frac{A_3^0 k'_3 - B_3^0}{k_3 k'_3 - 1}; \quad M_3 = -\frac{6}{l_2} \frac{B_3^0 k_3 - A_3^0}{k_3 k'_3 - 1}.$$

ფიქტიური რეაქციები

$$A_3^0 = B_3^0 = -\frac{q l_3^3}{24} = \frac{2 \cdot 125}{24} = 10,42 \text{ ტმ}^2.$$

თუ შევიტანთ ამ მნიშვნელობებს წინა გამოსახულებებში მივიღებთ:

$$M_2 = -\frac{6}{5} \frac{10,42 \cdot 4,1 - 10,42}{3,73 \cdot 4,1 - 1} = -\frac{6}{5} \frac{10,42 \cdot 3,1}{14,3} = -2,71 \text{ ტმ};$$

$$M_3 = -\frac{6}{5} \frac{10,42 \cdot 3,73 - 10,42}{14,3} = -2,49 \text{ ტმ}.$$

დაუტვირთავი მალის საყრდენი მომენტები

$$M_1 = -\frac{M_2}{k_2} = -\frac{-2,71}{3,6} = 0,75 \text{ ტმ};$$

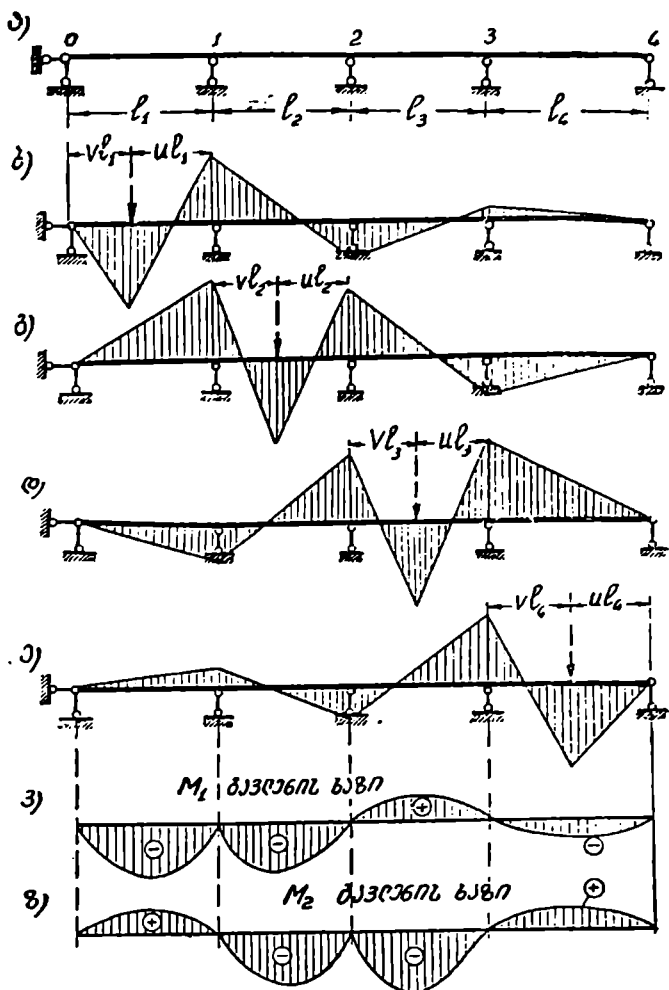
$$M_4 = -\frac{M_3}{k'_4} = -\frac{-2,49}{4} = 0,623 \text{ ტმ}.$$

ეპიურა ნაჩვენებია 264, ბ ნახაზზე.

§ 50. გავლენის ხაზების აბეზა უპრ კოვებში

როდესაც უპრ კოვზე მოქმედებს მოძრავი ტვირთი, ანგარიში უნდა ეწარმოთ გაღუნის ხაზების საშუალებით. გაღუნის ხაზები საშუალებას იძლევა ადვილად განესაზღვროთ ამა თუ იმ ძალის არახელსაყრელი დატვირთვა და უდიდესი ძალები ამა თუ იმ კვეთში.

უპირველეს ყოვლისა უნდა, ავაგოთ ზედმეტი უცნობების, ე. ი. საყრდენი მომენტების გავლენის ხაზები. გავლენის ხაზების აგება შეიძლება მოვახდინოთ სტატიკური მეთოდით, საყრდენი მომენტების ორდინატების უშუალოდ



ნახ. 265.

გამოთვლის გზით ძალის სხვადასხვა მდებარეობის დროს და ჩალუნვის ხაზის საშუალებით, რომელიც დამყარებულია გადაადგილებათა ურთიერთობის პრინციპზე.

ამ პარაგრაფში ჩვენ გავარჩევთ სტატიკურ მეთოდს. განვიხილოთ ოთხ-მალისანი უკრი კოქი (ნახ. 265). ავაგოთ M_1 -ის და M_2 -ის გავლენის ხაზი. ამისათვის ერთეული ძალა უნდა მოვთავსოთ სათითაოდ ყველა მალზე და

გამოვთვალათ საძიებელი მონენტების ორდინატები, რომლებიც იქნება ერთეული ძალის მდებარეობის ფუნქციები.

ერთეული ძალა მოთავსებულია 1 მალზე (ნახ. 265, ბ). მარცხენა საყრდენიდან ერთეულ ძალამდე მანძილი აღვნიშნოთ x_1 , მარჯვენა საყრდენიდან კი x_2 . სადაც v და u წესიერი ნაწევრებია.

(75) ფორმულის საშუალებით ვიპოვიტ M_1 -ს, რომელიც იქნება v და u -ს ფუნქცია.

თუ v და u -ს მივცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობას, მივიღებთ M_1 -ის გავლენის ხაზის ორდინატებს პირველ მალში.

ამ ორდინატების გაყოფა მარჯვენა საფოკუსო ფარდობაზე (k_2) მოგვცემს M_2 -ის გავლენის ხაზის ორდინატებს პირველ მალში, ე. ი. $M_2 = -\frac{M_1}{k_2}$.

ერთეული ძალა მოთავსებულია მე-3 მალზე (ნახ. 265, გ). (74) ფორმულის საშუალებით განვსაზღვროთ M_1 და M_2 , რომლებიც იქნება v და u -ს ფუნქცია. v და u -ს შევცვლა. მოგვცემს M_1 და M_2 -ის გავლენის ხაზის ორდინატებს მე-2 მალში.

ერთეული ძალა მოთავსებულია მე-3 მალზე (ნახ. 265, დ). M_2 -ის გავლენის ხაზის ორდინატებს ვიპოვიტ იმავე (74) ფორმულის საშუალებით, ხოლო M_1 -ისას კი მარცხენა საფოკუსო ფარდობის საშუალებით, ე. ი.

$$M_1 = -\frac{M_2}{k_2}$$

ერთეული ძალა მოთავსებულია მე-4 მალზე (ნახ. 265, ე). ჯერ განვსაზღვრავთ M_3 -ს (ფორ. 75), შემდეგ კი M_2 -ს და M_1 -ს ფორმულებით:

$$M_3 = -\frac{M_2}{k_3}; \quad M_1 = -\frac{M_2}{k_2} = \frac{M_3}{k_3 k_2}$$

კოჭი რამდენი მალისაგანაც უნდა შედგებოდეს ანგარიში წარმოებს ანალოგიურად. ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ დატვირთული მალის საყრდენი მომენტები და საფოკუსო ფარდობებით ყველა დანარჩენი საყრდენი მომენტი.

M_1 და M_2 -ის გავლენის ხაზები წარმოადგენს კუბურ პარაბოლას და მოყვანილია 265, ვ, ზ ნახაზზე.

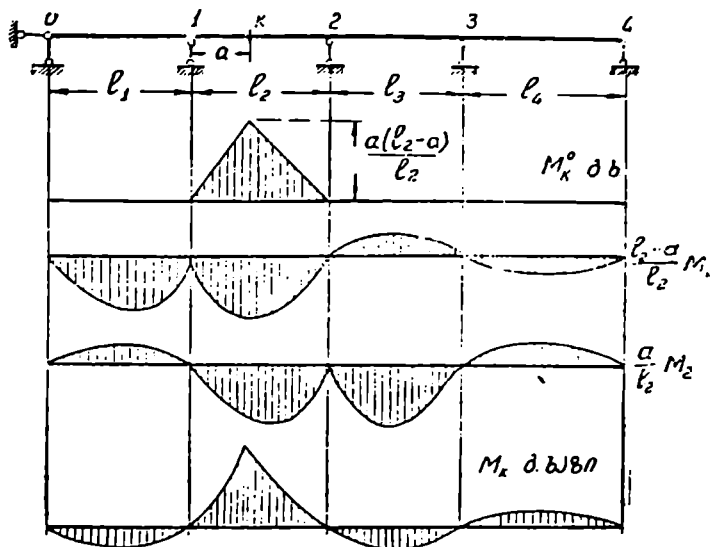
საყრდენი მომენტების გავლენის ხაზების აგების შემდეგ ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ მალის შუალედი კვეთის მდუნავი მომენტის და განივი ძალის გავლენის ხაზები (66) და (67) ფორმულებით. მაგალითად, მეორე მალის k კვეთის მდუნავი მომენტი და განივი ძალა გამოისახება შემდეგი სახით (ნახ. 266):

$$M_k = M^0_k + M_1 \frac{l_2 - a}{l_2} + M_2 \frac{a}{l_2};$$

$$Q_k = Q^0_k + \frac{M_2 - M_1}{l_2}.$$

ამ ფორმულებში M^0_k და Q^0_k წარმოადგენს უბრალო, ორ საყრდენზე მდებარე კოქის მლუნავ მომენტს და განივ ძალას k კვეთში.

მაშასადამე, M_k და Q_k -ის გავლენის ხაზის ორდინატების გამოსათვლელად უნდა შევავაშოთ სამი გავლენის ხაზის ორდინატები, როგორც ეს ნახვენებია 267-ე და 268-ე ნახაზზე.



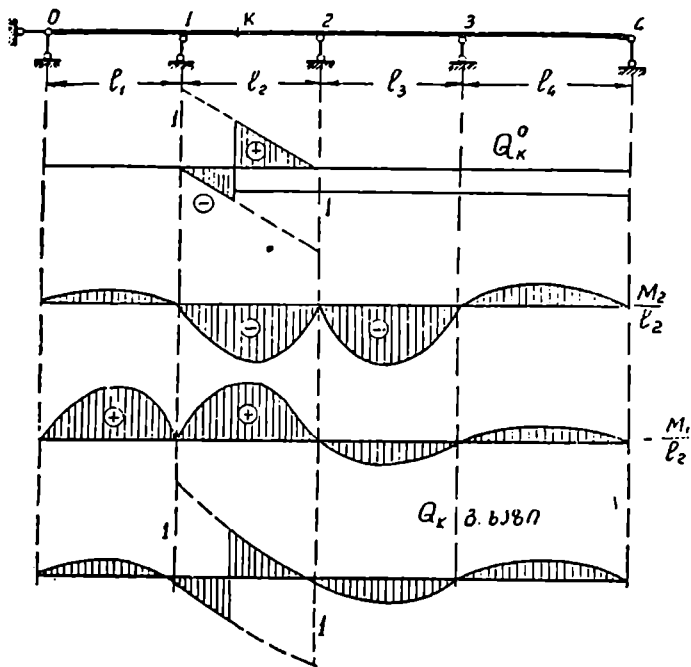
ნახ. 267.

საყრდენი რეაქციის გავლენის ხაზი აიგება (69) ფორმულის საშუალებით, რომელიც შეგვიძლია გადმოვწეროთ შემდეგი სახით:

$$R_n = R^0_n + \frac{M_{n-1}}{l_n} + \frac{M_{n+1}}{l_{n+1}} - M_n \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right), \quad (76)$$

სადაც R^0_n წარმოადგენს n საყრდენის რეაქციას ძირითად სისტემაში, ე. ი. ორ საყრდენზე მდებარე კოქის რეაქციას. მაშასადამე, ჩვენ უნდა ავაგოთ ოთხი გავლენის ხაზი და შევავაშოთ ალგებრულად ისე, როგორც წინა შემთხვევაში.

საზოგადოდ, უკრი კოქის გავლენის ხაზების ორდინატები ზედასხვა შემთხვევისათვის წინასწარაა ნაანგარიშები და მოცემულია ცხრილში.



ნახ. 268.

§ 51. უპირი კოჭის გავლენის ხაზების აგება ჩალუნვის ხაზის საშუალებით (გავლენის ხაზის მოდელი)

გავლენის ხაზი ემთხვევა სათანადო ძალისაგან გამოწვეულ ჩალუნვის ხაზს და ეს საშუალებას იძლევა სრულებით მარტივად წარმოვიდგინოთ გავლენის ხაზის მოხაზულობა და მისი ხასიათი, ე. ი. გავლენის ხაზის მოდელი.

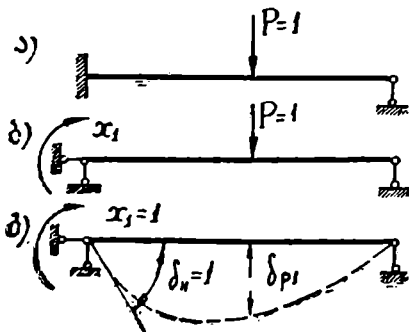
პირველად განვიხილოთ მარტივი სისტემა—ერთჯერ სტატიკურად ურკვევი კოჭი (ნახ. 269, ა). ავავოთ საყრდენი მომენტის გავლენის ხაზი. ზედმეტ უცნობად ავირჩიოთ საყრდენი მომენტი, მაშინ ძირითადი სისტემა იქნება მარტივი, ორსაყრდენზე მდებარე კოჭი (ნახ. 269, ბ).

კანონიკური განტოლება დაწერება შემდეგი სახით:

$$X_1 \delta_{11} + \delta_{1P} = 0,$$

საიდანაც

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}$$



ნახ. 269.

გადაადგილებათა ურთიერთობის პრინციპის თანახმად $\bar{z}_{1p} = \bar{z}_{p1}$ და გვექ-

$$X_1 = -\frac{\bar{z}_{p1}}{\bar{z}_{11}},$$

სადაც \bar{z}_{p1} წარმოადგენს $P=1$ ძალის მოდების წერტილის ვერტიკალურ გადაადგილებას (ჩალუნვას), გამოწვეულს $X_1=1$ ძალისაგან. X_1 უძრავია, $P=1$ კი მოძრავი. $P=1$ შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მდებარეობა კოქზე და ამიტომ \bar{z}_{p1} არის კოქის ნებისმიერი წერტილის გადაადგილება, გამოწვეული უძრავი ($X_1=1$) ძალის მოქმედებით ძირითად სისტემაზე.

მაშასადამე, \bar{z}_{p1} წარმოადგენს კოქის ჩალუნვის ხაზს გამოწვეულს $X_1=1$ ძალისაგან. თუ ჩალუნვის ხაზის ორდინატებს გავყოფთ \bar{z}_{11} -ზე მივიღებთ X_1 -ის გავლენის ხაზის ორდინატებს. დავუშვათ $\bar{z}_{11}=1$ (მუდმივი სიდიდე და შევვიძლია მივიღოთ მასშტაბის ერთეულად), მაშინ

$$X_1 = -\bar{z}_{p1}.$$

ამგვარად, X_1 -ის გავლენის ხაზის აგება წევრ(ვალეთ ჩალუნვის ხაზის აგებით. რადგან \bar{z}_{11} -ს გარკვეული მნიშვნელობა აქვს, ამიტომ ჩალუნვის ხაზი (ნახ. 269, გ) იქნება საძიებელი გავლენის ხაზის მოდელი.

უცნობად შეიძლება მივიღოთ როგორც საყრდენი მომენტი ისე რეაქცია, ამიტომ ნებისმიერი ძალვის გავლენის ხაზი (მოდელი) აიგება შემდეგი თანმიმდევრობით:

1. მოცემულ სისტემას ვაშორებთ იმ ბმას, რომელშიც ვითარდება საძიებელი ძალვა;

2. მიღებულ ძირითად სისტემას, უკუგდებულ ბმის მიმართულებით, ვაძლევთ ერთეულის ტოლ გადაადგილებას. ამის შედეგად მიღებული ჩალუნვის ხაზი იქნება საძიებელი გავლენის ხაზის მოდელი.

3. გავლენის ხაზის ნამდვილი ორდინატების მისაღებად ჩალუნვის ხაზის ორდინატები უნდა გავყოთ \bar{z}_{11} -ზე. რადგანაც გავლენის ხაზის ორდინატების გამოთვლა სტატიკური მეთოდით მარტივად ხდება, ამიტომ ჩალუნვის ხაზს გამოვიყენებთ უპოვრესად გავლენის ხაზის მოდელის ასაგებად, რომელიც საშუალებას მოგვცემს სწრაფად წარმოვიდგინოთ ესა თუ ის გავლენის ხაზი.

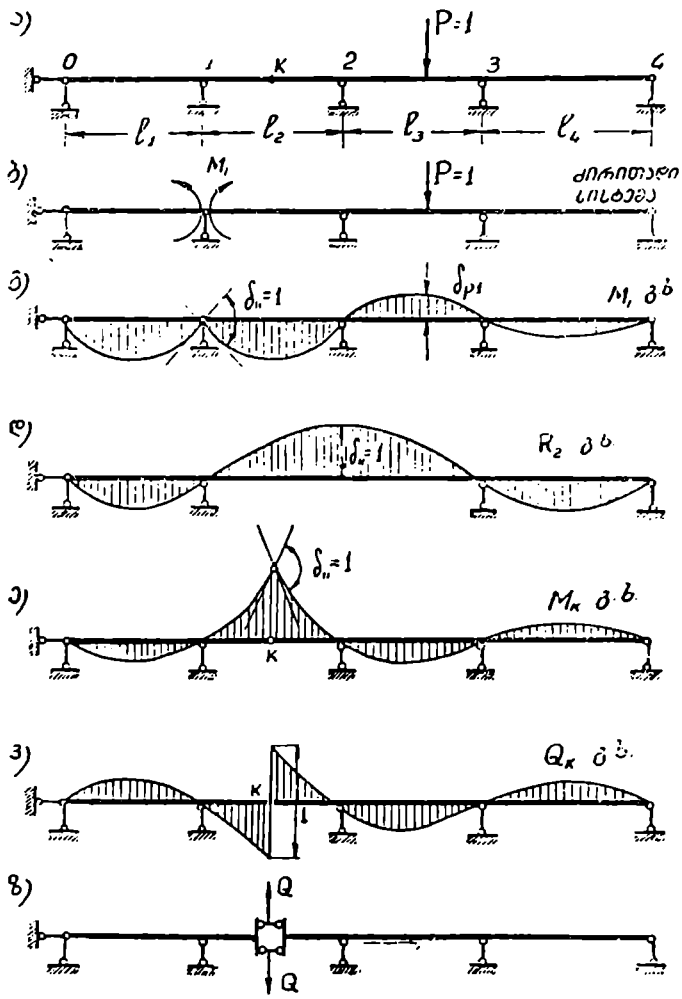
X_1 -ს აქვს \bar{z}_{p1} -ის შებრუნებული ნიშანი, ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ \bar{z}_{p1} დადებითია (მიმართულია P ძალისაკენ), მაშინ X_1 უარყოფითია და პირიქით. განხილულ შემთხვევაში (ნახ. 269) \bar{z}_{p1} დადებითია და, მაშასადამე, X_1 -ის გავლენის ხაზი უარყოფითია.

გადავიდეთ უკრი კოქის განხილვაზე. ავავთ M_1 საყრდენი მომენტის გავლენის ხაზი (ნახ. 270). მოვაწყოთ 1 საყრდენზე სახსარი და უკუგდებულ ბმის მაგიერ ძირითად სისტემაზე ვიმოქმედოთ საყრდენი მომენტი $X_1=M_1$, რომელიც მივიღოთ ზედმეტ უცნობად (ნახ. 270, ბ).

წინა შემთხვევის ანალოგიურად M_1 გამოითვლება ფორმულით:

$$M_1 = -\frac{\bar{z}_{1p}}{\bar{z}_{11}} = -\frac{\bar{z}_{p1}}{\bar{z}_{11}}$$

ბრ, წარმოადგენს $M=1$ -ით გამოწვეულ გადაადგილებას $P=1$ ძალის მიმართულებით, ე. ი. ძირითადი სისტემის ჩალუნვის ხაზს. δ_{11} არის 1 საყრდენი კვების მოძრუნების კუთხე ძირითად სისტემაში $M_1=1$ -ით გამოწვეული. მაშასადამე, აქაც გავლენის ხაზის აგება შეიძლება შევცვალოთ $M_1=1$ -ით



ნახ. 270.

გამოწვეული ჩალუნვის ხაზის აგებით. ამგვარად, M_1 -ის გავლენის ხაზის მოდელის მისაღებათ 1 საყრდენი კვებით უნდა მოვებრუნოთ ერთეული კუთხით, ე. ი. მივიღოთ $\delta_{11}=1$ (ნახ. 270, გ).

R_2 საყრდენი რეაქციის გავლენის ხაზის (მოდელის) ასაგებად უქუვავ-

დროთ 2 საყრდენი ღერო და მიღებულ ძირითად სისტემას (ნახ. 270, დ) უწყვეტებული ღეროს გასწვრივ (ვერტიკალურად) მიეცეთ ერთეული გადაადგილება $\delta_{11} = 1$; ამის შედეგად მიღებული ჩალუნვის ხაზი წარმოადგენს R_x -ის გავლენის ხაზს.

k კვეთის მღუნავი მომენტის გავლენის ხაზის მისაღებად k კვეთში მოვაწოთ სახსარი და კვეთი მოვაბრუნოთ ერთეული კუთხით $\delta_{11} = 1$; მიღებული გაღუნული ღერო იქნება M_x -ის გავლენის ხაზი.

Q_x განივი ძალის გავლენის ხაზი დაემთხვევა ჩალუნვის ხაზს, რომელსაც მივიღებთ კოქის გაკვეთით k წერტილში და გაკვეთილი ბოლოების გადაადგილებით ერთმანეთის მიმართ ერთეული სიდიდით $\delta_{11} = 1$ (ნახ. 270, ვ). აქ გადაადგილება უნდა მოხდეს ისე, რომ გაკვეთილი ბოლოები არ მობრუნდნენ ერთმანეთის ირგვლივ და არ გადაადგილდნენ პორიზონტალურად. ამას მივიღებთ, თუ კვეთის ადგილზე წარმოვიდგინოთ ისეთ შეერთებას, როგორც ეს ნაჩვენებია 270, ზ ნახაზზე.

§ 52. უპირი კოქის უპეღაუე არახელსაყრელი დატვირთვა

უპირი კოქის ანგარიშის დროს ჩვენ უნდა განვსაზღვროთ საანგარიშო ძალებების მაქსიმალური სიდიდე. რადგანაც უპირი კოქის გავლენის ხაზები ნიშანცვლადია, ამიტომ ძალების ორი საანგარიშო სიდიდე გვექნება ერთი მაქსიმუმი (+) მეორე კი მინიმუმი (-). მაქსიმალური ძალის მისაღებად უნდა დავტვირთოთ გავლენის ხაზის დადებითი უბნები, ხოლო მინიმალური ძალების მისაღებად კი უარყოფითი უბნები.

დროებითი ტვირთის ყველაზე არახელსაყრელი დატვირთვა რომ ვიპოვოთ უნდა წარმოვიდგინოდ გავლენის ხაზების მოხაზულობა.

წარმოვიდგინოდ მაგალითად, ხუთმალიანი უპირი კოქი და მისი სათანადო ძალების გავლენის ხაზები (ნახ. 271). ამ გავლენის ხაზების საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ დროებითი ტვირთით უპირი კოქის ყველაზე არახელსაყრელი დატვირთვის წესი:

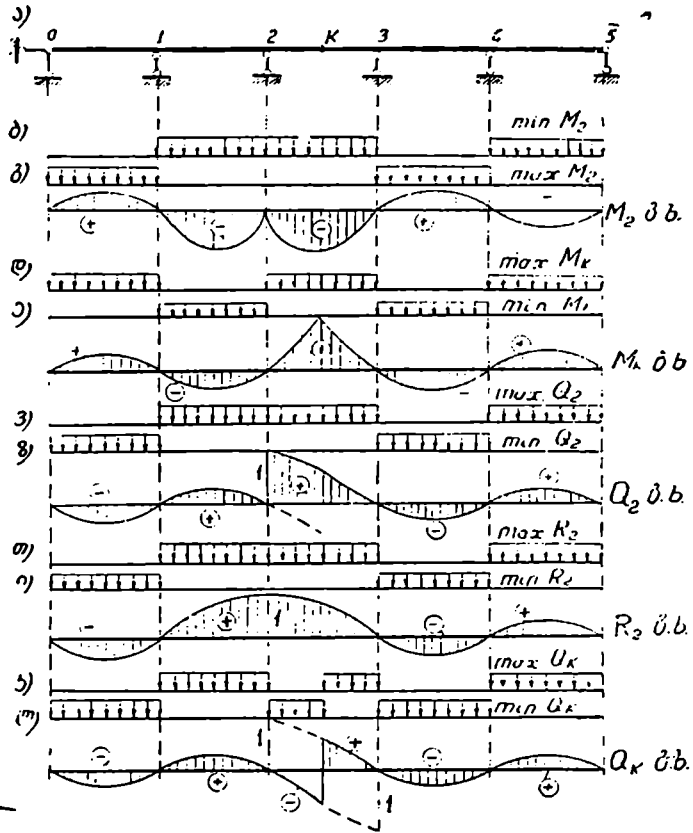
1. უდიდესი უარყოფითი საყრდენი მომენტის მისაღებათ უნდა დავტვირთოთ ამ საყრდენის ორი მოსაზღვრე მალი და შემდეგ თითოს გამოშვებით (ნახ. 271, ბ); უდიდესი დადებითი საყრდენი მომენტის მისაღებად უნდა დავტვირთოთ ამ საყრდენის მოსაზღვრე მალეების მომდევნო მალეები, შემდეგ კი თითოს გამოშვებით (ნახ. 271, გ).

2. მალის შუალედი კვეთის უდიდესი დადებითი მომენტის მისაღებად უნდა დავტვირთოთ განსახილავი მალი და შემდეგ თითოს გამოშვებით (ნახ. 271, დ), იმავე კვეთის უდიდესი უარყოფითი მომენტის მისაღებად უნდა დავტვირთოთ განსახილავი მალის მეზობელი მალეები და შემდეგ კი თითოს გამოშვებით (ნახ. 271, ე).

3. მაქსიმალური განივი ძალის მისაღებად საყრდენის მახლობელ კვეთში უნდა დავტვირთოთ ამ საყრდენის მოსაზღვრე მალეები და შემდეგ კი თითოს გამოშვებით (ნახ. 271, ვ).

4. მაქსიმალური საყრდენი რეაქციის მისაღებად უნდა დავტვირთოთ ამ საყრდენის ორი მოსაზღვრე მალი და შემდეგ თითოს გამოშვებით (ნახ. 271, თ).

საერთოდ უდიდესი დადებითი, ან უარყოფითი ძალებების შესაბამის დატვირთვები ერთმანეთს ავსებენ მთელი კოჭის დატვირთვამდე და ამიტომ საკმარისია ერთ-ერთი დატვირთვის ცოდნა.



ნახ. 271.

271, კ, ლ ნახაზზე ნაჩვენებია Q_x -ს გავლენის ხაზის დატვირთვა $max Q_x$ და $min Q_x$ -ს მისაღებად.

სტატიკურად ურკვევი ფერმების ანგარიში

§ 53. სტატიკურად ურკვევი ფერმები, მათი სტატიკური ურკვევობის ხარისხი

სტატიკურად ურკვევი ფერმები ისტორიულად წინ უძღოდა სტატიკურად რკვევად ფერმებს. ანგარიშის თეორიის უქონლობა იძულებულს ხდიდა მშენებლებს შეექმნათ რთული და მრავალელებნიანი ფერმები, გისოსის გართულება (გახშირება) ითვლებოდა სიმტკიცის ზრდის ძირითად საშუალებად. მრავალგისოსიანი და მრავალრიბნიანი ფერმები ამ პერიოდს ეკუთვნიან. მათი ანგარიში ხდებოდა გისოსის მთელ რიგ მარტივ გისოსებად დაშლის წესით.

სტატიკურად ურკვევი ფერმების ანგარიშის ზუსტი თეორია შეიქმნა XIX საუკუნის დამლევს და თანდათანობით რთული და ანგარიშის მხრივ გაურკვეველი სქემები შეიცვალა მარტივი სქემებით.

უჭრი და სტატიკურად ურკვევი თაღოვანი ფერმები, რომლებსაც დიდი გამოყენება აქვთ ხიდების მშენებლობაში, ხასიათდება როგორც ტექნიკური, ისე ეკონომიური უპირატესობით სტატიკურად რკვევად ფერმებთან შედარებით.

პრაქტიკაში ჩვენ ვხვდებით მრავალფეროვან სტატიკურად ურკვევ ფერმებს, რომლებიც როგორც ეს საერთოდ § 23-ში აღენიშნეთ შეიძლება გაიყოს ორ ჯგუფად, გარეგანად სტატიკურად ურკვევად, სადაც ზედმეტ ღეროებს საყრდენი ღეროები წარმოადგენენ (ნახ. 272), და შინაგანად სტატიკურად ურკვევად, სადაც ზედმეტ ღეროებს წარმოადგენენ ფერმის შინაგანი ღეროები (ნახ. 273.)

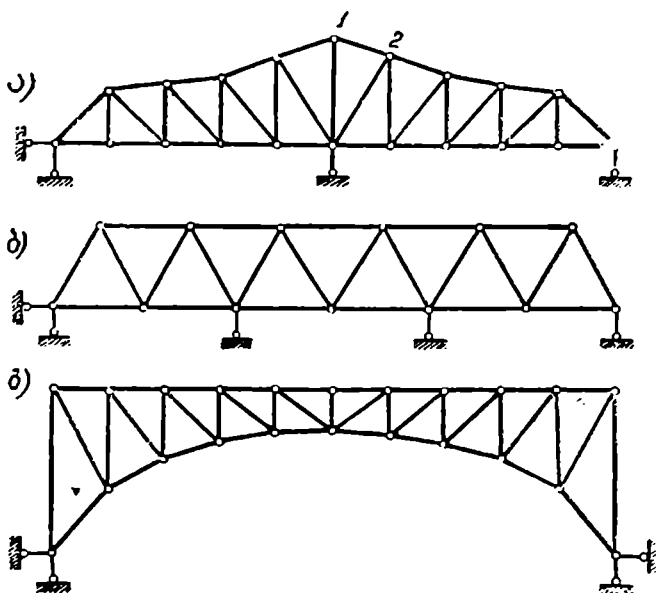
272, ა, ბ ნახაზზე მოყვანილი ფერმები უჭრი ფერმებია და ზედმეტ უცნობებად შეიძლება შივილოთ ძალები საყრდენ ღეროებში (გარდა პორიზონტალურისა). 272, გ ნახაზზე ნაჩვენები ფერმა წარმოადგენს ორსახსრიან თაღოვან ფერმას. აქ ზედმეტ უცნობად შეიძლება ავიჩიოთ ძალვა პორიზონტალურ საყრდენ ღეროში.

მეორე ჯგუფის ფერმებში (ნახ. 273) საყრდენი რეაქციები წონასწორობის განტოლებებით განისაზღვრება და ამიტომ ზედმეტ უცნობებად მიღებული უნდა იყოს ძალები ფერმის შინაგან ღეროებში.

სტატიკურად ურკვევი ფერმების დაყოფა გარეგანად და შინაგანად ურკვევ ფერმებად პირობითია. მაგალითად, თუ ზედმეტ უცნობებად მივიღებთ ძალებს ფერმის ზედა სარტყლის ღეროებში (ნახ. 272, ბ), ფერმა იქცევა შინაგანად ურკვევად. ანგარიშის მეთოდი ორივე შემთხვევაში ერთნაირია და ამიტომ შემდგომში ამ დაყოფას ყურადღებას არ მივაქცევთ, ისე როგორც ჩარჩოების ანგარიშის დროს.

ფერმებში სტატიკური ურკვევობის ხარისხი გამოითვლება ფორმულით.
(იხ. § 23):

$$J = C + C_0 - 2Y, \quad (77)$$



ნახ. 272.

სადაც C არის ფერმის ლეროების რიცხვი;
 C_0 —საყრდენი ლეროების რიცხვი და
 Y —ფერმის კვანძების რიცხვი.

§ 54. ბალახდგილებათა განსაზღვრა უპრემიუმო

ფერმებში გადაადგილებები განისაზღვრება ფორმულით (იხ. § 10):

$$\Delta_{ik} = \sum \frac{N_i N_k S}{EF} \quad (78)$$

იმის მიხედვით, თუ რა სახის გადაადგილებას ვეძებთ, ეს ფორმულა მიიღებს სათანადო სახეს.

ერთეული გადაადგილებები გამოითვლება ფორმულით:

$$\delta_{ii} = \sum \frac{N_i^2 S}{EF} \quad (79)$$

$$\delta_{ik} = \sum \frac{N_i N_k S}{EF},$$

დატვირთვისაგან გამოწვეული გადაადგილება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\Delta_{ip} = \sum \frac{\lambda N_i N_p S}{EF}. \quad (80)$$

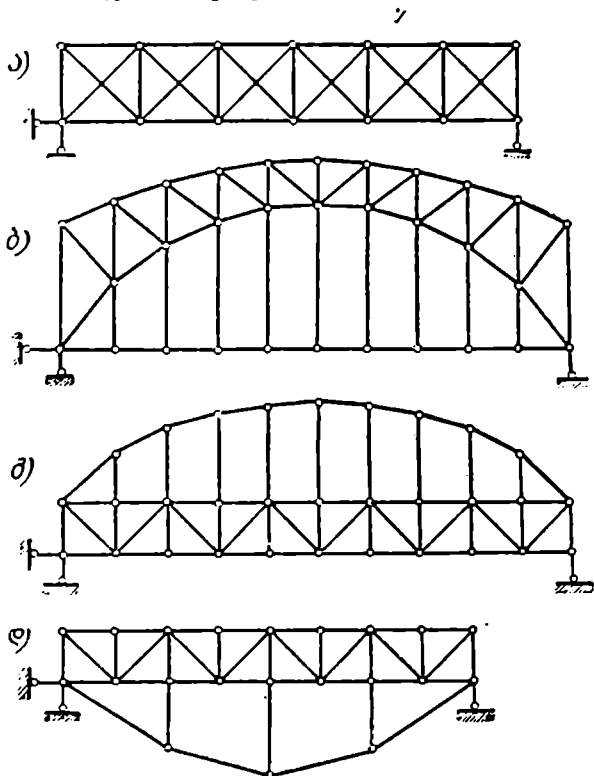
ჭამი გავრცელებული უნდა იყოს ფერმის ყველა ღეროზე.

ამ ფორმულაში N_i არის $\lambda_i = 1$ ძალით გამოწვეული ძალვა ფერმის ნებისმიერ ღეროში;

$N_i - \lambda_i = 1$ ძალით გამოწვეული ძალვა იმავე ღეროში;

N_p —მოცემული დატვირთვით გამოწვეული ძალვა ნებისმიერ ღეროში;

S —ღეროს სიგრძე.



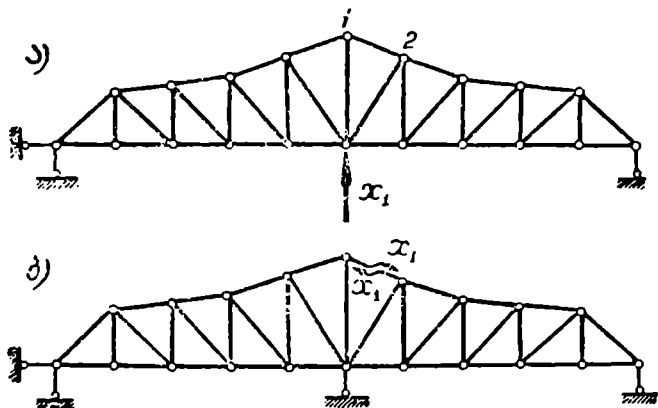
ნახ. 273.

ტემპერატურით გამოწვეული გადაადგილებანი გამოითვლება ფორმულით (იხ. § 14).

$$\Delta_{it} = \alpha \sum \frac{t_1 + t_2}{2} N_i S. \quad (81)$$

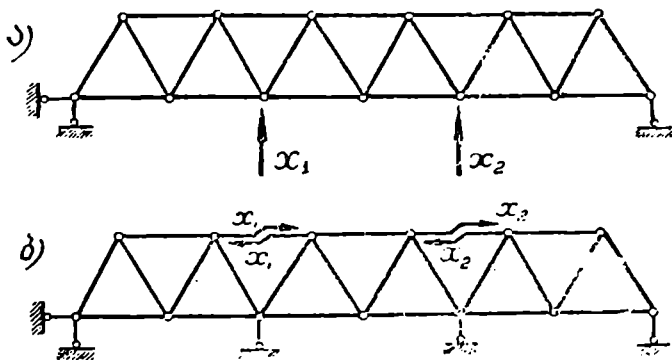
§ 55. სტატიკურად ურკვევი ფერმების ანგარიში ვულფის ტვირთზე.
ძირითადი სისტემის არჩევა

სტატიკურად ურკვევი ფერმის, ისე როგორც ყველა სტატიკურად ურკვევი სისტემის, თავისებურებას შეადგენს ის, რომ ანგარიშის დაწყებამდე საჭიროა ვიცოდეთ ფერმის ელემენტების განივი კვეთის ზომები, რომელთა



ნახ. 274.

წინასწარი დანიშვნა ხდება სხვადასხვა მიახლოებითი ანგარიშის საფუძველზე. ანგარიშის დამთავრების შემდეგ წარმოებს განივი კვეთის ზომების შემოწმება.



ნახ. 275.

ბა სმეტიკეზე და, თუ ის არ დააკმაყოფილებს ამ პირობას, ანგარიში უნდა განმეორდეს.

სტატიკურად ურკვევი ფერმების ანგარიში პრინციპულად არ განსხვავდება ჩარჩოების ანგარიშისაგან და მდგომარეობს შემდეგში:

1) ფერმას ვანთავისუფლებთ ზედმეტი ბმებისაგან, ე. ი. ვირჩევთ ძირითად სისტემას;

2) უქუგდებული ბმების მაგიერ მათ მიმართულებით ვიმოქმედებთ უცნობი ძალებით X_1, X_2, \dots, X_n ;

3) ვწერთ კანონიკურ განტოლებათა სისტემას, რომელიც გამოსახავს იმ აზრს, რომ უქუგდებული ბმების მიმართულებით გადაადგილებათა ჯანი ნულის ტოლია;

4) ვანგარიშობთ კანონიკური განტოლებების ყველა კოეფიციენტს. ამისათვის ძირითად სისტემაზე რიგრიგობით ვიმოქმედებთ ძალებით $X_1=1, X_2=1, \dots, X_n=1$, მოცემული დატვირთვით და ვსაზღვრავთ ძალებს ფერმის ყველა ლეროში;

5) ვწყვეტთ კანონიკურ განტოლებათა სისტემას;

6) ვანგარიშობთ ძალებს სტატიკურად ურკვევი ფერმის ყველა ლეროში ფორმულით

$$N = N_p + N_1 X_1 + \dots + N_n X_n, \quad (82)$$

სადაც N_p — დატვირთვით გამოწვეული ძალვაა ფერმის (ძირითადი სისტემის) ნებისმიერ ლეროში.

როგორც ჩარჩოების ანგარიშის დროს, აქაც განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მივაქციოთ ძირითადი სისტემის არჩევას. ის უნდა იყოს საანგარიშოდ მარტივი, ჰქონდეს რაც შეიძლება მეტი ნულოვანი ლერო და არამთავარი გადაადგილებები იქცეს ნულად. რადგანაც ფერმა უმთავრესად სიმეტრიულია. ამიტომ ძირითადი სისტემა უნდა ავირჩიოთ სიმეტრიულად და განვიყენოთ უცხოობა დაჯგუფების მეთოდი.

მაგალითად 272, ა ნახაზზე ნაჩვენებია უკრი ფერმის საანგარიშოდ ზედმეტ უცნობად შეიძლება მივიღოთ შუა საყრდენი რეაქცია (ნახ. 274, ა) ან ძალვა ფერმის 1—2 ლეროში (ნახ. 274, ბ). მეორე ვარიანტის უპირატესობა პირველთან შედარებით მდგომარეობს იმაში, რომ გარე ძალები ძალებს გამოიწვევს ფერმის იმ ნაწილის ლეროებში, რომელზეც ძალა უშუალოდ მოქმედებს. ეს გაამარტივებს სატვირთო გადაადგილებათა გამოთვლას.

275 ნახაზზე წარმოდგენილია ძირითადი სისტემის ორი ვარიანტი, პირველ შემთხვევაში უცნობებად მიღებულია საყრდენი რეაქციები, მეორეში კი ძალები ფერმის ლეროებში. აქაც უპირატესობა მეორე ვარიანტს ეკუთვნის. პირველ ვარიანტში $X_1=1, X_2=1$ და P ძალისაგან მუშაობს ფერმის ყველა ლერო და გადაადგილებათა გამოთვლაში არავითარ გამარტივებას არ ექნება ადგილი. მეორე ვარიანტში ერთეული ძალებისაგან მუშაობს უფრო ნაკლები ლეროები, ხოლო P ძალისაგან მუშაობს იმ ფერმის ლეროები, რომლებზედაც უშუალოდ ძალა მოქმედებს. ეს მნიშვნელოვნად გაამარტივებს გადაადგილებათა გამოანგარიშებას.

გავარჩიოთ ჯვარედინა ვისოსიანი ფერმა. ზედმეტ უცნობებად მივიღოთ ძალები ირინებში ისე, როგორც ნაჩვენებია 276, ა ნახაზზე. უცნობები ისე უნდა ავირჩიოთ, რომ ძირითადი სისტემა გეომეტრიულად უცვლელი იყოს. თითო პანელში ერთზე მეტი ლერო რომ გადაგვიკვეთა ფერმა გეომეტრიულად ცვლად სისტემად იქცეოდა. ერთეული ძალებისაგან მუშაობს მხოლოდ იმ პანელის ლეროები, რომელზედაც მოქმედებს ეს ძალა. მომუშავე ლეროები აღნიშნულია სქელი ხაზებით (ნახ. 276).

არამთავარი გადაადგილებები

$$\delta_{13} = \delta_{14} = \delta_{15} = \delta_{16} = \delta_{24} = \delta_{25} = \delta_{26} = \delta_{35} = \delta_{36} = \delta_{46} = 0,$$

და კანონიკურ განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1p} = 0;$$

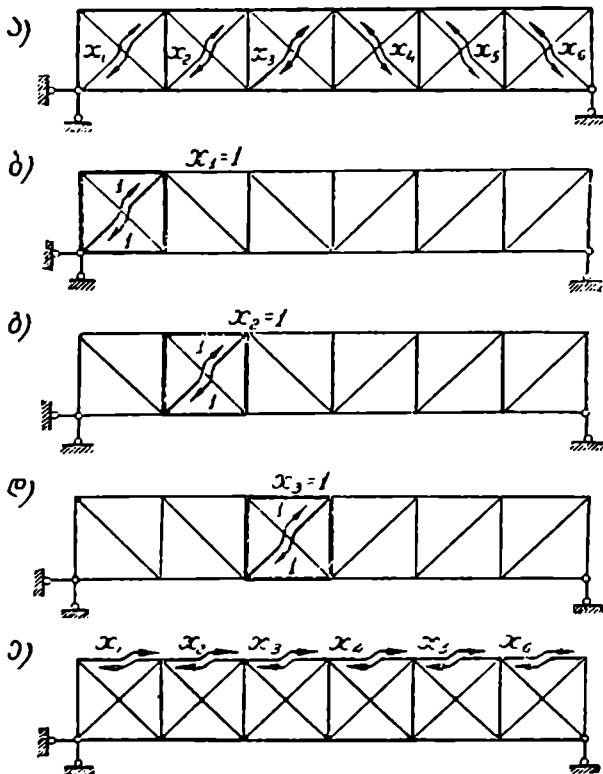
$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2p} = 0;$$

$$X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + X_4 \delta_{34} + \Delta_{3p} = 0;$$

$$X_3 \delta_{43} + X_4 \delta_{44} + X_5 \delta_{45} + \Delta_{4p} = 0;$$

$$X_4 \delta_{54} + X_5 \delta_{55} + X_6 \delta_{56} + \Delta_{5p} = 0;$$

$$X_5 \delta_{65} + X_6 \delta_{66} + \Delta_{6p} = 0.$$



ნახ. 276.

მაშინ კანონიკური განტოლება გაიყოფა ორ დანოუქიდებელ ნაწილად, ერთში შევა სიმეტრიული უცნობები (Z_1, Z_2, Z_3), მეორეში კი — ირიბადსიმეტრიული (Z_4, Z_5, Z_6). უცნობებად შეიძლება მივიღოთ ძალები სარტყლის ღეროებში (ნახ. 276, ე).

მიღებული სამ-წევრა განტოლებათა სისტემის გადაწყვეტა გაუსის ალგორითმით მარტივად ხდება.

აღვილად შევამჩნევთ, რომ არამთავარი გადაადგილებები ერთმანეთის ტოლია (თუ ღეარების განივი კვეთის ფართობი ერთნაირია) და შედგება მხოლოდ ერთი წევრისაგან.

თუ უცნობებს დავაჯგუფებთ სიმეტრიულ და ირიბადსიმეტრიულ უცნობებად, ე. ი. თუ უცნობებად მივიღებთ:

$$Z_1 = X_1 + X_6;$$

$$Z_2 = X_2 + X_5;$$

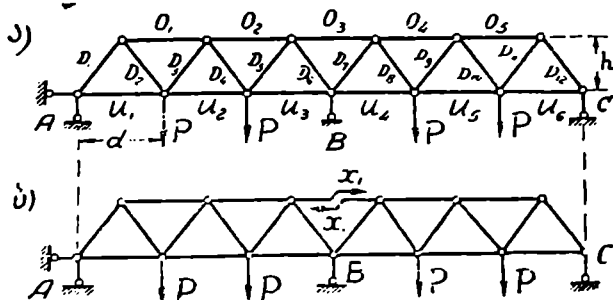
$$Z_3 = X_3 + X_4;$$

$$Z_4 = X_1 - X_6;$$

$$Z_5 = X_2 - X_5;$$

$$Z_6 = X_3 - X_4,$$

უკრ ერთჯერ სტატიკურად ურკვევ ფერმაზე მოქმედებს სიმეტრიული ტვირთი (ნახ. 277, ა). ზედა და ქვედა სარტყლის ღეროების განივი კვეთის ფართობი ერთნაირია და ტოლია F -ის, ირიბანების კი $0,5 F$ -ის. პანელის სიგრძე $d=6$ მ, ფერმის სიმაღლე $h=4$ მ, $P=60$ ტ.



ნახ. 277.

ზედმეტ უცნობად მივიღოთ ძალეა O_3 ღეროში $-X_1$ (ნახ. 277, ბ). კანონიკური განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0.$$

საიდანაც

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}.$$

გადაადგილებანი

$$\delta_{11} = \sum \frac{N_1^2 S}{EF},$$

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{N_1 N_P S}{EF}.$$

ამ კოეფიციენტების გამოსათვლელად ძირითად სისტემაზე ვიმოქმედოთ $X_1=1$ და მოცემული დატვირთვით ცალ-ცალკე და გამოვთვალოთ ძალები ფერმის ყველა ღეროში. ეს ოპერაცია ზეიძლება შესრულდეს ანალიზურად, ან გრაფიკულად—ძალეთა დიაგრამის აგებით. განსახილავი ფერმა მარტივია და ამიტომ ჩვენ ანგარიშს ვაწარმოებთ ანალიზურად.

$X_1=1$ მდგომარეობა ნაჩვენებია 278, ა ნახაზე. სამომენტო წერტილების და დაგეგმილების მეთოდების გამოყენება მოგვეცეს:

$$O_1 = \frac{Ad}{h} = \frac{1}{3} \text{ ტ}; \quad O_2 = \frac{A \cdot 2d}{h} = \frac{2}{3} \text{ ტ}; \quad O_3 = 1 \text{ ტ};$$

$$U_1 = -\frac{Ad}{2h} = -\frac{1}{6} \text{ ტ}; \quad U_2 = -\frac{Ad}{2h} = -\frac{1}{6} \text{ ტ}; \quad U_3 = -\frac{A \cdot 5d}{2h} = -\frac{5}{6} \text{ ტ};$$

$$D_1 = D_3 = D_5 = \frac{A}{\cos \alpha} = \frac{h}{3d} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{18} \text{ ტ.}$$

$$D_2 = D_4 = D_6 = -\frac{5}{18} \text{ ტ.}$$

მარჯვენა ფერმის ღეროებში ძალებს ექნებათ იგივე მნიშვნელობანი. მოცემული დატვირთვის მდგომარეობა მოყვანილია 278, ბ ნახაზზე. ძალების სიდიდე და შემდგომი ანგარიში მოყვანილია მე-7 ცხრილში.

ცხრილი 7

ღეროების №	S	F	N ₁	N _p	$\frac{N_1^2 S}{F}$	$\frac{N_1 N_p S}{F}$	N ₁ · N ₁	N	NS
O ₁	6	F	0,333	-90	0,67	-180	21,5	-68,5	-411,0
O ₂	6		0,667	-90	2,67	-360	43,0	-47,0	-282,0
U ₁	6		-0,0167	45	0,166	-45	-10,75	34,25	205,5
U ₂	6		-0,5	90	1,5	-270	-32,25	57,75	346,5
U ₃	6		-0,833	45	4,166	-225	-53,75	-8,75	-52,5
D ₁	5	0,5 F	0,278	-75	0,772	-208,3	17,91	-57,09	-285,45
D ₂	5		-0,278	75	0,772	-208,3	-17,91	57,09	285,45
D ₃	5		0,278	0	0,772	0	17,91	17,91	89,55
D ₄	5		-0,278	0	0,772	0	-17,91	-17,91	-89,55
D ₅	5		0,278	75	0,772	208,3	17,91	92,91	464,55
D ₆	5		-0,278	-75	0,772	208,3	-17,91	-92,91	-464,55
				Σ	13,804	-1080			
O ₂	6	F	I	0	6,0	0	64,5	64,5	387,0

მე-7 ცხრილში გამოთვლილი სიდიდეები ეკუთვნის მხოლოდ ერთ ფერმას, ამიტომ:

$$\delta_{11} = \sum \frac{N_1^2 S}{EF} = \frac{1}{EF} (2 \cdot 13,804 + 6) = 33,608 \frac{1}{EF},$$

$$\Delta_{1p} = \sum \frac{N_1 N_p S}{EF} = -\frac{1}{EF} 2 \cdot 1080 = -2160 \frac{1}{EF}.$$

გაშასაღამე. გაკვეთილ ღეროში ძალეა

$$X_1 = O_2 = \frac{2160}{33,608} = 64,5 \text{ ტ.}$$

საპოლოო ძალებს ფერმის ღეროებში ვიანგარიშებთ (82) ფორმულის საფუძველზე:

$$N = N_p + N_1 N_1$$

ანგარიში შესრულებულია მე-7 ცხრილში. ცხრილის უკანასკნელ სვეტში მოყვანილი სიდიდეები $N'S$ გვეკრძება ანგარიშის სისწორის შესამოწმებლად.

მუდმივ დატვირთვაზე ანგარიშის შემოწმება შეგვიძლია პროფ. ა. უმანსკის და პროფ. ბ. გორბუნოვის ფორმულით

$$\Sigma N \cdot S = \Sigma (P_x \cdot x + P_y \cdot y) \dots \quad (83)$$

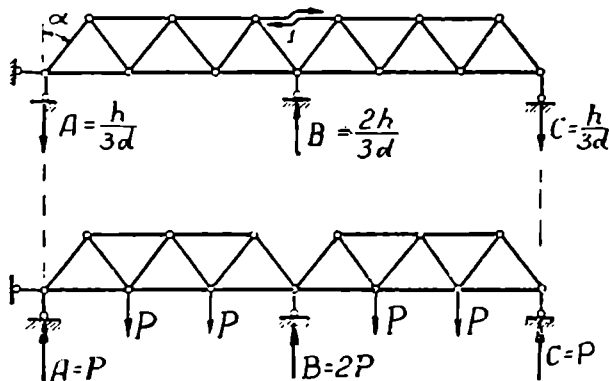
სადაც

N — არის საანგარიშო ძალა ფერმის ღეროში;

S — სათანადო ღეროს სიგრძე;

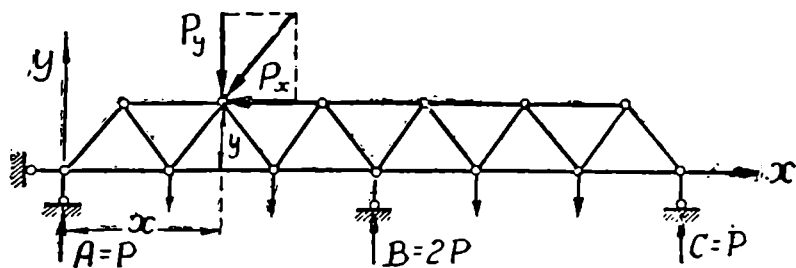
P_x — გარე აქტიური და პასიური ძალების გვერდილი პორიზონტალურ ღერძზე;

P_y — იგივე ვერტიკალურ ღერძზე.



ნახ. 278.

x, y ძალების მოდების წერტილის კოორდინატებია (ნახ. 279). ანგა-



ნახ. 279.

რიში უნდა შევიტანოთ ყველა გარეშე ძალა როგორც აქტიური, ისე პასიური.

ჩვენს შემთხვევაში $\sum (P_r \cdot x + P_{rr}) = 0$ და ამიტომ (83) ფორმულის მარცხენა ნაწილიც ნულის ტოლი უნდა იყოს, ე. ი. $\sum N \cdot S = 0$.

მართლაც

$$\sum N \cdot S = 2(-411 - 282 - 52,5 + 205,5 + 346,5) + 387 = -387 + 387 = 0.$$

მიღებული შედეგი გვიჩვენებს, რომ ფერვის ანგარიში სწორად არის შესრულებული.

§ 57. სტატისტიკურად ურამდენო შემთხვევის ანგარიში მოძრავ ტვირთზე

ფერვების ანგარიში მოძრავ ტვირთზე წარმოებს გავლენის ხაზების საშუალებით. ჯერ უნდა აიგოს ზედმეტი უცნობების გავლენის ხაზები, შემდეგ კი ფერვის ძირითადი ღეროების გავლენის ხაზები.

განვიხილოთ ერთჯერ სტატისტიკურად ურკვევი უკრი ფერვა, რომლის ქვედა სარტყელზე მოძრაობს ერთეული ძალა $P=1$ (ნახ. 280, ა). ზედმეტ უცნობად მივიღოთ შუა საყრდნის რეაქცია (ნახ. 280, ბ), რომლის სიდიდე განისაზღვრება კანონიკურ განტოლებიდან

$$X_1 \delta_{11} + \delta_{1P} = 0,$$

საიდანაც

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}.$$

გადაადგილებათა ურთიერთობის პრინციპის თანახმად $\delta_{1P} = \delta_{P1}$ და, მაშასადამე,

$$X_1 = -\frac{\delta_{P1}}{\delta_{11}} = -\frac{1}{\delta_{11}} \delta_{P1}.$$

მამრავლო $\frac{1}{\delta_{11}}$ წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს და შეგვიძლია განვიხილოთ,

როგორც სამასშტაბო კოეფიციენტი. ამგვარად, X_1 იცვლება δ_{P1} -ის ცვლილების კანონით. δ_{P1} წარმოადგენს $P=1$ ძალის მოდების წერტილის ვერტიკალურ გადაადგილებას გამოწვეულს $X_1=1$ ძალით. რადგან $P=1$ ძალა მოძრავია, ამიტომ δ_{P1} იქნება ცვალებადი და მოგვეცემს იმ კვანძის ვერტიკალურ გადაადგილებას, რომელზედაც მოთავსდება ძალა $P=1$, ე. ი. სატვირთო ხაზის ვერტიკალურ გადაადგილებათა ხაზს.

აქედან ცხადია, რომ ზედმეტი უცნობის გავლენის ხაზის მისაღებად საკმარისია ავაგოთ სატვირთო სარტყლის ჩაღუნვის ხაზი გამოწვეული $X_1=1$ ძალით, და მისი ყველა ორდინატა გავყოთ მუდმივ სიდიდეზე δ_{11} .

წარმოვიდგინოთ, რომ ჩაღუნვის ხაზი უკვე აგებულია (ნახ. 280, გ). ამ ხაზის ორდინატა მე-4 კვანძის ქვეშ მოგვეცემს უშუალოდ δ_{P1} -ს. 280, დ ნახაზე მოცემულია X_1 -ის გავლენის ხაზი.

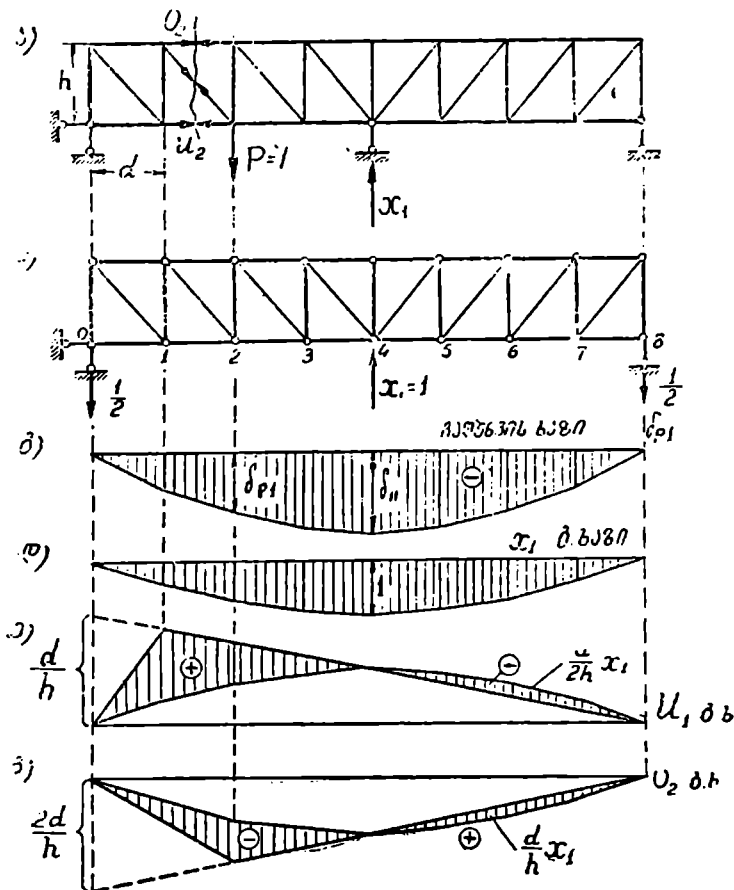
ზედმეტი უცნობის X_1 -ის გავლენის ხაზის აგების შემდეგ ფერვის ნებისმიერი ღეროს ძალვის გავლენის ხაზის აგება უკვე არავითარ სირთულეს არ წარმოადგენს და წარმოებს შემდეგი ფორმულის საფუძველზე:

$$N = N_p + X_1 N_1.$$

მაშასადამე, ერთჯერ სტატისტიკურად ურკვევი სისტემის ნებისმიერი ღე-

როს ძალის გავლენის ხაზი მიიღება ორი გავლენის ხაზის შეჯამებით: ამ ღეროს ძალის გავლენის ხაზის სტატიკურად რკვევად სისტემაში (N_p) და X_1 -ის გავლენის ხაზის გადამრავლებული მუდმივ სიდიდებზე N_1 -ზე.

აგების გასამარტივებლად N_p -ს და $X_1 N_1$ -ის გავლენის ხაზები უნდა ავიღოთ ერთნაირი მასშტაბით და მაშინ ჩვენ შეგვიძლია მათი ორდინატები შევეჯამოთ უშუალოდ. ამ შემთხვევაში ორივე ხაზი გადაიკეთება საყრდენის ქვეშ, რადგან უამური ორდინატა საყრდენის ქვეშ უნდა იყოს ნულის ტოლი. ზე-280, ე, ვ ნახაზე მოცემულია U_2 და O_2 ღეროს გავლენის ხაზები.



ნახ. 280.

§ 58. სტატიკურად ურკვევი ფარგის ანგარიშის მამალითი მოძრავ ტვირთზე ჩვენ ვნახეთ, რომ ზედმეტი უცრობის გავლენის ხაზის აგება შეიძლება შეიცვალოს ჩალუნვის ხაზის აგებით. ახლა გავარჩიოთ თვით ჩალუნვის ხაზის (δ_{P1}) აგების წესი.

ჩალუნვის ხაზის აგება შეიძლება მორ-მაქსველის ფორმულით ანალიზურად და დრეკადი ტვირთების საშუალებით—გრაფიკურად. ორივე მეთოდი გავარჩიოთ კონკრეტულ მაგალითზე. ავიღოთ § 56-ში განხილული უკრო ფერმა, რომლის ძირითადი სისტემა ნაჩვენებია 281, ა ნახაზე.

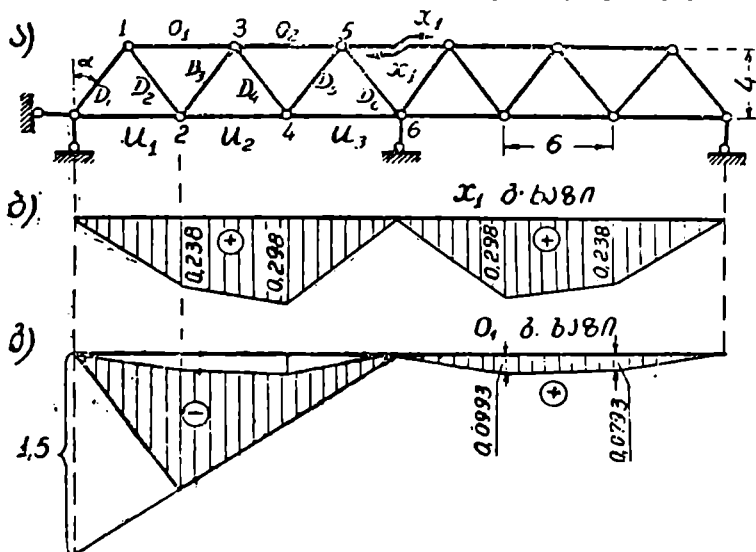
$$X_1 = -\frac{1}{\delta_{11}} \delta_{p1}$$

ანალიზურად δ_{p1} განისაზღვრება ფორმულით

$$\delta_{p1} = \sum \frac{N_p N_1 S}{EF}$$

სადაც N_p არის $P=1$ ძალით გამოწვეული ძალვა ნებისმიერ ღეროში, N_1 კი— $X_1=1$ -საგან გამოწვეული ძალვა იმავე ღეროში.

δ_{p1} ჩვენ უნდა გამოვთვალოთ მოძრავი ერთეული ძალის ($P=1$) ორი მდგომარეობისათვის: ჯერ მოთავსებულია მე-2 კვანძზე შემდეგ კი 4-ზე (სი-



ნახ. 281.

მეტრიის გამო დანარჩენ მდგომარეობას აღარ განვიხილავთ). გამოთვლები მოყვანილია მე-8 ცხრილში. როდესაც ტვირთი მოთავსებულია მარცხენა ფერმაზე, მაშინ მარჯვენა ფერმა არ მუშაობს და ამიტომ ანგარიშს ვაწარმოებთ მხოლოდ მარცხენა ფერმისათვის.

ჩალუნვის ხაზის ორდინატები მე-2 და მე-4 კვანძის ქვეშ იქნება სათანადოდ—8 და—10. თუ ამ სიდიდეებს გავყოფთ $\delta_{11}=33,608$ -ზე (წინასწარ შევკვეცოთ FF -ზე), მივიღებთ:

$$y_2 = 0,238; \quad y_4 = 0,298.$$

X_1 -ის გავლენის ხაზი ნაჩვენებია 281, ბ ნახაზზე. O_1 -ლეროს გავლენის ხაზის მისაღებად უნდა ავაგოთ ამ ლეროს გავლენის ხაზი სტატიკურად რკვევადი ფერმის შემთხვევაში და დაეუმატოთ X_1 -ის გავლენის ხაზი $1/3$ -ჯერ შეცვლილი სიდიდით ($1/3$ არის $X_1=1$ ძალისაგან გამომწვეული ძალვა O_1 ლეროში). O_1 -ის გავლენის ხაზი მოყვანილია 281, გ ნახაზზე. ანალოგიურად აიგება დანარჩენი ლეროების გავლენის ხაზები.

ცხრილი 8

ლერო- ების №	S მ	F მ	N_1 ტ	$N_p \text{ ტ}$		$\frac{N_i N_1 S}{F}$		
				ძალა მოქმედებს კვანძებში				
				2	4	2	1	4
O_1	6	F	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{2}$	-2	-1	
O_2	6		$\frac{2}{3}$	-1	-1	-2	-4	
O_3	6		1	0	0	0	0	
U_1	6		$-\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{4}$	-0,5	-0,25	
U_2	6		$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	-2,25	-2,25	
U_3	6		$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	-1,25	-2,50	
D_1	5	0,5F	$\frac{5}{18}$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{5}{12}$	-2,37	-1,185	
D_2	5		$-\frac{5}{18}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{12}$	-2,37	-1,185	
D_3	5		$\frac{5}{18}$	12	$-\frac{5}{12}$	1,185	-1,185	
D_4	5		$-\frac{5}{18}$	$-\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	1,185	-1,185	
D_5	5		$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{6}$	1,185	2,37	
D_6	5		$-\frac{5}{18}$	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{5}{6}$	1,185	2,37	
Σ						-8	-10	

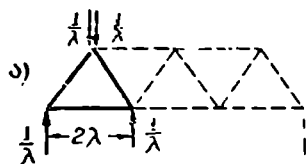
ავაგოთ ქვედა სარტყლის ჩაღუნვის ხაზი δ_{p1} გრაფიკულად და რეკადი ტვირთების საშუალებით.

დრეკადი ტვირთების აგება გარჩეულია § 21-ში. ჩვენ უნდა ავაგოთ $X_1=1$ მუდმივი ძალისაგან გამომწვეული ჩაღუნვის ხაზი. დრეკადი ტვირთების მნიშვნელობანი გამოვთვალოთ ფორმულით (§ 21):

$$W_n = \sum \frac{N_\lambda N_p S}{EF} = \sum \frac{N_\lambda N_1 S}{EF}$$

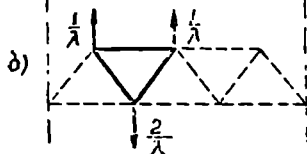
სიდაც $N\lambda$ არის ორი ერთეული წვევილძალით გამოწვეული ძალვა ფერმის ნებისმიერ ღეროში;

განვსაზღვროთ W_1 . ვამოქმედოთ ორი ერთეული წვევილძალა 1 კვანძისათვის (ნახ. 282, ა) და გამოვთვალოთ ძალები მომუშავე ღეროებში. ამ შემთხვევაში მუშაობს მხოლოდ სამი ღერო D_1 , D_2 და U_1 :



$$D_1 = D_2 = -\frac{1}{\lambda \cos \alpha} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} = -\frac{5}{12};$$

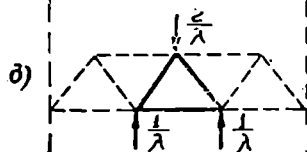
$$U_1 = \frac{1}{h} = \frac{1}{4}.$$



$X_1 = 1$ ძალით გამოწვეული ძალები მოყვანილია მე-8 ცხრილში.

მაშასადამე,

$$W_1 = \sum \frac{N_\lambda N_1 S}{EF} = -\frac{1}{EF} \frac{1}{4} \frac{1}{6} 6 - \frac{1}{2EF} \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} 5 + \frac{1}{EF} \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} 5 = -0,25 \frac{1}{EF}.$$

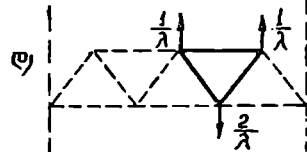


განვსაზღვროთ W_2 . ვამოქმედოთ ორი ერთეული წვევილძალა მე-2 კვანძისათვის (ნახ. 282, ბ) და გამოვთვალოთ ძალები სათანადო ღეროებში:

$$O_1 = -\frac{1}{4} \quad D_2 = D_3 = \frac{5}{12}$$

მაშასადამე,

$$W_2 = -\frac{1}{EF} \frac{1}{3} \frac{1}{4} 6 = -0,5 \frac{1}{EF}.$$



ანალოგიურად ვიპოვიოთ W_3 , W_4 და W_5 -ს (ნახ. 282, გ, დ, ე):

$$W_3 = -\frac{1}{EF} \frac{1}{2} \frac{1}{4} 6 = -0,75 \frac{1}{EF};$$

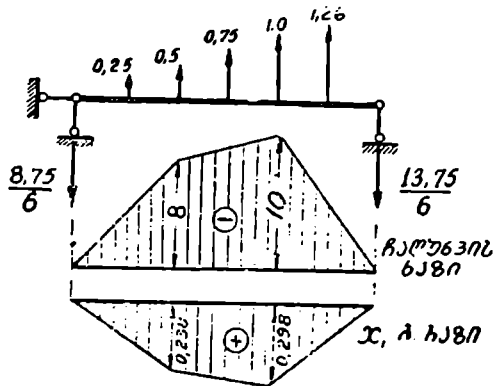
$$W_4 = -\frac{1}{EF} \frac{2}{3} \frac{1}{4} 6 = -1,0 \frac{1}{EF};$$

$$W_5 = -\frac{1}{EF} \frac{5}{6} \frac{1}{4} 6 = -1,0 \frac{1}{EF}.$$

მიღებული ფიქტიური ძალებით უნდა ვამოქმედოთ პირობით ნაშენზე (ჩვენ შემთხვევაში ორ საყრდენზე მდებარე კოქზე) და ავავოთ მლუნავი მომენტის

ეპიურა, რომელიც იქნება საძიებელი ჩაღუნვის ხაზი. რადგანაც დრეკადი ტერითები უარყოფითია, ამიტომ ის უნდა მიემართოს ზევით. (იხ. § 21).

მლენავი მომენტის ეპიურას თუ ავაგებთ გაკვირული ბოჭკოების მხარეს ის დემთხვევა გადაადგილებათა ნამდვილ მიმართულებას (ნახ. 283, ა). X_1 -ის გავლენის ხაზის ორდინატების მისაღებად ჩაღუნვის ხაზის ორდინატები უნდა გავყოთ $\delta_{11} = 33,608$ -ზე (ნახაზზე ნაჩვენებია გავლენის ხაზის მარცხენა ნაწილი). X_1 -ის გავლენის ხაზი იქნება დადებითი (ნახ. 283, ბ).



ნახ. 283.

§ 59. ორჯერ სტატიკურად უკაშვში ფარვის ანგარიში მოძრავ ბჰირათში

მრავალჯერ სტატიკურად ურკვევი სისტემის გავლენის ხაზების აგების წესი პრინციპულად არაფრით განსხვავდება წინა §-ში შესწავლილი წესისაგან.

განვიხილოთ ორჯერ სტატიკურად ურკვევი ფერმა (ნახ. 284, ა). ზედმეტ უცნობებად მივიღოთ საყრდენი რეაქციები (ნახ. 284, ბ).

კანონიკური განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \delta_{1p} = 0;$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \delta_{2p} = 0.$$

გადაადგილებათა ურთიერთობის თეორემის თანახმად $\delta_{1p} = \delta_{p1}$, $\delta_{2p} = \delta_{p2}$ და კანონიკური განტოლებები შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სახით:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = -\delta_{p1};$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} = -\delta_{p2}.$$

ამ განტოლებების გადაწყვეტა დეტერმინანტების საშუალებით მოგვცემს:

$$X_1 = \frac{(-\delta_{p1})\delta_{22} - (-\delta_{p2})\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2},$$

$$X_2 = \frac{\delta_{11}(-\delta_{p2}) - \delta_{21}(-\delta_{p1})}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2},$$

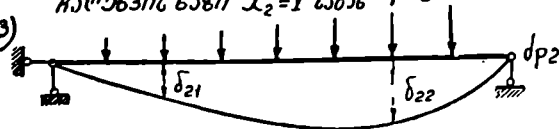
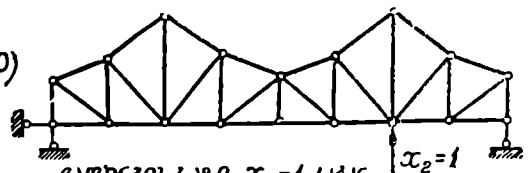
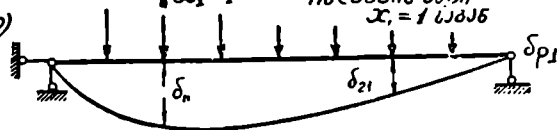
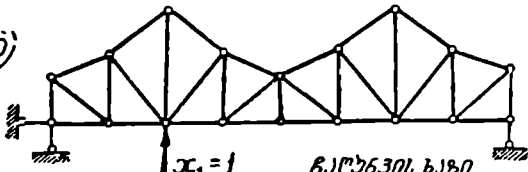
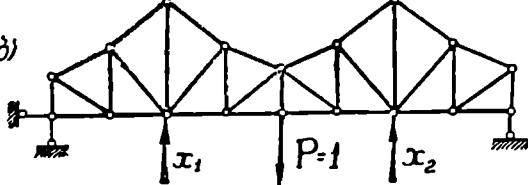
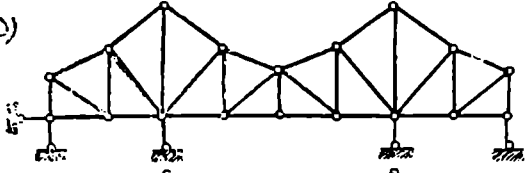
აბ

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \alpha_{11}\delta_{p1} + \alpha_{12}\delta_{p2}; \\ X_2 &= \alpha_{21}\delta_{p1} + \alpha_{22}\delta_{p2}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

სადაც $\alpha_{11} = -\frac{\delta_{22}}{\delta_{11}\delta_{p2} - \delta_{12}^2}$; $\alpha_{12} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{p2} - \delta_{12}^2}$; $\alpha_{22} = -\frac{\delta_{11}}{\delta_{11}\delta_{p2} - \delta_{12}^2}$.

წარმოადგენენ გარკვეულ მუდმივებს, რომლებიც არ არის დამოკიდებული მოძრაიე ძალის მდებარეობაზე:

(ა) განთოლება გვიჩვენებს, რომ უცნობები წრფულად არის დამოკიდებული ჩალუნვის ხაზების (δ_{p1} , δ_{p2}) ორდინატებზე. თუ δ_{p1} და δ_{p2} ჩალუნვის ხაზების ორდინატები ცნობილია, მაშინ X_1 და X_2 ის გველენის ხაზების ორდინატები გამოთვლება უბრალო არითმეტიკული გამონაკარისების საშუალებით.



ნახ. 284.

ამ ძალებით გამოწვეული მუდმივი მომენტის ფიურა პირობით ნაშენში. მოგვეცემს ჩალუნვის ხაზს δ_{p1} -ს (ნახ. 284, დ).

მაშასადამე, ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ ავაგოთ $X_1=1$ და $X_2=1$ -საგან გამოწვეული სატვირთო ხაზის ჩალუნვის ხაზები δ_{p1} და δ_{p2} .

ისე როგორც წინა წ-ში, ჩალუნვის ხაზები შეიძლება აიგოს ანალიზურად ფორმულებით

$$\delta_{p1} = \sum \frac{N_p N_1 S}{EF};$$

$$\delta_{p2} = \sum \frac{N_p N_2 S}{EF};$$

და გრაფიანალიზურად დრეკადი ტვირთების საშუალებით. გავარჩიოთ გრაფიანალიზური წესი. ძირითად სისტემაზე ვიმოქმედოთ ძალით $X_1=1$ (ნახ. 284, გ) და გამოვთვალოთ დრეკადი ტვირთების მნიშვნელობანი ფორმულით

$$W = \sum \frac{N_\lambda N_p S}{EF}.$$

შემდეგ, ძირითად სისტემაზე ვიმოქმედოთ ძალით $X_2=1$ (ნახ. 284, ე) და გამოვიანგარიშოთ დრეკადი ტვირთები ფორმულით

$$W = \sum \frac{N_\lambda N_3 S}{EF}$$

რომლის საშუალებით მივიღებთ ჩალუნეის δ_p , ხაზს (ნახ. 284, ე).

დრეკადი ტვირთების ფორმულებში N_λ , N_1 და N_2 წარმოადგენს სათანადო ორი ვრცელი წვეილძალით, $X_1=1$ და $X_2=1$ ძალებით გამოწვეულ ძალებს ფერძის ნებისმიერ ღეროში. ჩალუნეის ხაზებიდან უშუალოდ განისაზღვრება δ_{11} , δ_{22} და δ_{12} .

X_1 და X_2 -ის გავლენის ხაზები აიგება (*a*) ფორმულის საშუალებით.

ფერძის ნებისმიერი ღეროს ძალების გავლენის ხაზი აიგება ფორმულით

$$N = N_p + X_1 N_1 + X_2 N_2.$$

სამჯერ და მეტჯერ სტატიკურად ურკვევი სისტემის ანგარიში შესრულდება ანალოგიურად.



სტატიკურად ურკვევი თაღების ანგარიში

§ 60. საერთო ცნობები თაღებზე

როგორც სტატიკურად რკვევადი სისტემების შესწავლის დროს აღვნიშნეთ, თალი წარმოადგენს მრუდლერძოვან უძრავ საყრდენებზე მოთავსებულ ნაშენს. საყრდენების უძრაობის გამო ნებისმიერი დატვირთვის დროს წარმოიშეება რეაქციის ჰორიზონტალური მდგენელები. ეს არის თაღოვანი სისტემის ძირითადი დამახასიათებელი თვისება.

თაღოვანი სისტემის უპირატესობა მდგომარეობს იმაში, რომ ის ძირითადად მუშაობს გრძივ მკუმშავ ძალაზე, რაც საშუალებას იძლევა თანაბრად გამოვიყენოთ მასალა თალის მთელ სიგრძეზე.

თალის მუშაობაზე მნიშვნელოვან გავლენას ახდენს თალის ღერძის მოხაზულობა, რომელიც ისე უნდა შეეარჩიოთ, რომ მლუნავი მომენტები თალში იყოს მინიმალური. ამას მივიღებთ მაშინ, თუ თალის ღერძი დაემთხვევა მოცემული დატვირთვისაგან გამოწვეულ წნევის მრუდს. თალის რაციონალური ღერძის შერჩევა წარმოებს ისე, როგორც ეს აღნიშნული იყო §46-ში (ნაწილი 1).

თალში განვითარებულ საანგარიშო ძალებზე გავლენას ახდენს არა მარტო თალის ღერძის მოხაზულობა, არამედ განივი კვეთის ცვლილების კანონი. ამ საკითხების დაწვრილებით შესწავლა ხილების დაგეგმარების კურსის ამოცანას შეადგენს.

თაღების კლასიფიკაცია ხდება მასში მოწყობილი სახსრების რიცხვის მიხედვით და გაიჩნევა სამსახსრიანი, ორსახსრიანი და უსახსრო თაღები. ერთსახსრიან თაღებს პრაქტიკული გამოყენება არა აქვს, რადგან ისინი არ ხასიათდება არავითარი უპირატესობით.

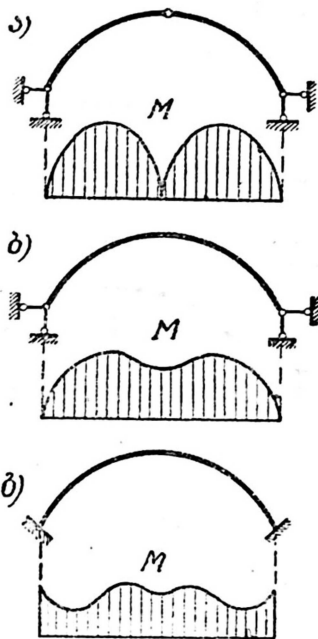
სამსახსრიანი თალი წარმოადგენს სტატიკურად რკვევად სისტემას და ის შესწავლილი იყო კურსის 1 ნაწილში. აქ მლუნავი მომენტის სიდიდე მალის მთელ სიგრძეზე არათანაბარია და მისი მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომელსაც ადგილი აქვს მალის მეოთხედში (ნახ. 285,ა), მეტია ორსახსრიანი და უსახსრო თალის მაქსიმალურ მომენტებზე.

სამსახსრიანი თალის უპირატესობა ორსახსრიან და უსახსრო თაღებთან შედარებით მდგომარეობს იმაში, რომ საყრდენების დაჯლომა და ტემპერატურის ცვლილება სამსახსრიან თალში დამატებით ძალებს არ იწვევს, ამიტომ სამსახსრიან თაღებს ხმარობენ ისეთ გრუნტებზე, სადაც მოსალოდნელად საყრდენების დაჯლომა.

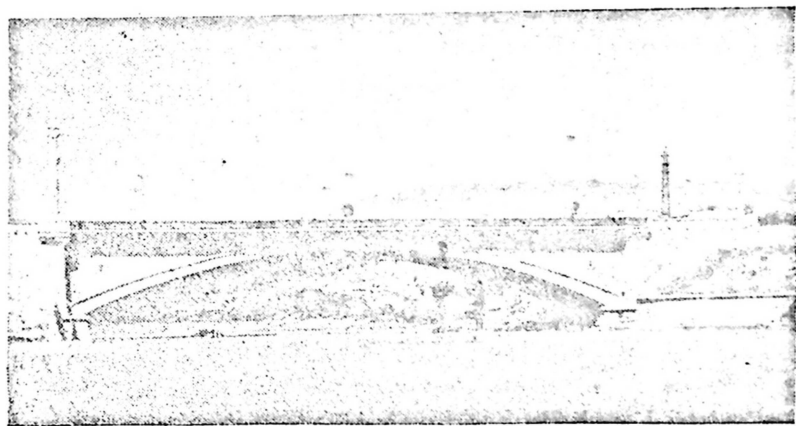
სამსახსრიანი თალის უარყოფითი მხარეა ის, რომ ის ნაკლებად ხისტია, ე. ი. ცალმხრივი დატვირთვა ძნიშვნელოვან დეფორმაციებს იწვევს. ამიტომ სამსახსრიან თალს რკინიგზის ხიდებში არ იყენებენ.

ორსახსრიან თალში მღუნავი მომენტის განაწილება მალის სიგრძეზე უფრო თანაბარია, ვიდრე სამსახსრიან თალში (ნახ. 285, ბ) და მომენტის მაქსიმალური სიდიდე ნაკლებია, ვიდრე სამსახსრიან თალში. საყრდენებს ვერტიკალური გადაადგილება (დაჯდომა) ორსახსრიან თალში დამატებით დაბევს არ იწვევს, ხოლო ჰორიზონტალური გადაადგილება და ტემპერატურის ცვლილება კი იწვევს მნიშვნელოვან დამატებით დაბევს. ამიტომ ორსახსრიან თალებს იყენებენ იმ შემთხვევაშიც, როდესაც მოსალოდნელია საყრდენების ვერტიკალური დაჯდომა.

მღუნავი მომენტის სიდიდის და მისი განაწილების მხრივ ყველაზე კარგ სურათს იძლევა უსახსრო თალი (ნახ. 265. გ). აქ მღუნავი მომენტის სიდიდე მალის მთელ სიგრძეზე დაახლოებით ერთნაირია და ამიტომ უსახსრო თალი უფრო ხისტია. გარდა ამისა, უსახსრო თალის დადებით მხარეს შეადგენს ის, რომ მასში საანგარიშო მღუნავი მომენტი უფრო მცირეა, ვიდრე ორსახსრიან და სამსახსრიან თალში.

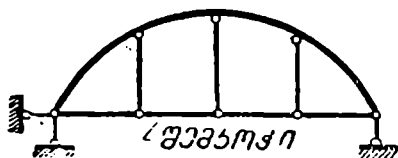


ნახ. 285.



უსახსრო თალის უარყოფითი მხარე ისაა, რომ საყრდენების დაჯდომა და ტემპერატურის ცვლილება დიდ დამატებით დაბევებს იწვევს და ამიტომ მას მხოლოდ ისეთ გრუნტებზე აკეთებენ, სადაც საყრდენების დაჯდომა არ არის მოსალოდნელი.

სახსრებიანი თალების გამოყენებას სულ ასიოდე წლის ისტორიაა—იქვე, მაშინ როდესაც უსახსრო თალების მშენებლობა ცნობილია უძველესი დროიდან. უსახსრო თალებს დიდი გამოყენება აქვს როგორც რკინიგზის, ისე ავტოსაგზაო ხიდებში. უსახსრო თალებია გამოყენებული თბილისის საქალაქო ხიდებში—მდინარე მტკვარზე—მარკისის, ელბაქიდის, ჩელუსკინელების სახელობის და დიდუბის ხიდებში (ნახ. 286). უსახსრო თალებს ხშირად ვხვდებით საწარმოო და სამოქალაქო მშენებლობაშიც.



ნახ. 287.

შემოკიახი თალი (ნახ. 287) საყრდენი რეაქციების მხრივ სტატიკურად რკვევადი კოჭოვანი სისტემაა და ამიტომ მას საყრდენების დაჯდომის არ ეშინია. ასეთ სისტემას უმთავრესად სუსტ გრუნტებზე და მცირე სამშენებლო სიმაღლის დროს აკეთებენ.

ჩვენ აქ შევისწავლით ორსახსრიანი და უსახსრო თალების ანგარიშს.

§ 61. გადაადგილებათა განსაზღვრა თალებში

სწორი ელემენტებისგან შედგენილი ნაშენების შესწავლის დროს ჩვენ დავეუშვით, რომ დაბევები განივ კვეთში ვითარდება სწორი ხაზის კანონით და ამიტომ გადაადგილებათა ფორმულებმა მიიღეს მარტივი სახე. მრუდე ძელებში, როგორც ეს ცნობილია მასალათა გამძლეობიდან, ეს დაშვება არ მართლება და დაბევები ვითარდება მრუდხაზოვანად. თუ ანგარიშს საფუძვლად დავუდებთ ბრტყელი კვეთის ჰიპოტეზას, მივიღებთ გადაადგილების საერთო ფორმულას მრუდე ძელებსათვის

$$\Delta_{ii} = \sum \left(\int \frac{M_i M_k ds}{EJ''} + \int \frac{N_i N_k ds}{EF} + k \int \frac{Q_i Q_k ds}{GF} + \int \frac{M_i N_k ds}{EFr} + \int \frac{N_i M_k ds}{EI'r} \right). \quad (83)$$

მცირე სიმრუდის ძელებში, სადაც სიმრუდის რადიუსი r რამდენჯერმე მეტია კვეთის სიმაღლეზე, ე. ი. თალებში როცა მალი მეტია 10—15 მეტრზე, სიმრუდის გავლენა გადაადგილებებზე უმნიშვნელოა და შეიძლება მხედველობაში არ იყოს მიღებული. მაშინ (83) ფორმულა სწორი ძელებსათვის მიღებული ფორმულის სახეს მიიღებს

$$\Delta_{ii} = \sum \left(\int \frac{M_i M_k ds}{EI} + \int \frac{N_i N_k ds}{EF} + k \int \frac{Q_i Q_k ds}{GF} \right). \quad (84)$$

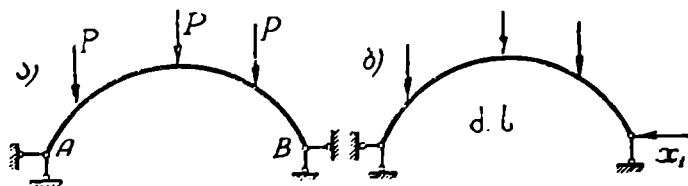
განივი ძალების გავლენა უმნიშვნელოა და უკანასკნელი წევრი შეიძლება უქუვეგლოთ, მაშინ

$$\Delta_{ik} = \sum \left(\int \frac{M_i M_k ds}{EI} + \int \frac{N_i N_k ds}{EF} \right). \quad (85)$$

მაშასადამე, თაღებში გადაადგილებებს გამოვთვლით სწორი ძელებისათვის შიღებული ფორმულებით.

§ 62. ორსახსრიანი თაღის ანგარიში მუდმივ ტვირთზე

ორსახსრიანი თაღი წარმოადგენს ერთჯერ სტატიკურად ურყევ სისტემას (ნახ. 288, ა). ძირითად სისტემად ავირჩიოთ ორ საყრდენზე მდებარე



ნახ. 288.

მრუდე ძელი, ე. ი. ზედმეტ უცნობად მივიღოთ ძალეა პორიზონტალურ საყრდენ ღეროში (განბრჯენი) X_1 (ნახ. 268, ბ).

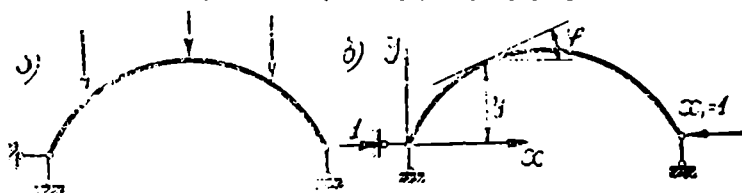
კანონიკური განტოლება დაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0.$$

საიდანაც

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}. \quad (a)$$

განვიხილოთ საერთო შემთხვევა, როცა თაღის ღერძის მოხაზულობა და განივი კვეთის ცვლილების კანონი მალის მთელ სიგრძეზე ნებისმიერია.



ნახ. 289.

გადაადგილებათა გამოსათვლელად უნდა განვიხილოთ ორი მდგომარეობა: მოცემული დატვირთვის (ნახ. 289, ა) და ერთეული ძალის (ნახ. 289, ბ).

$X_1 = 1$ ძალით გამოწვეული მღუნავი მომენტი და გრძივი ძალა თაღის ნებისმიერ კვეთში იქნება (ნახ. 289, ბ):

$$M_1 = -1 \cdot y; \quad N_1 = -1 \cdot \cos \varphi.$$

მოცემული დატვირთვით გამოწვეული მლუნავი მომენტი და გრძივი ძალა იმავე კვეთში იყოს M_p და N_p . მაშინ B საყრდენის ჰორიზონტალური გადაადგილება ძირითად სისტემაში, გამოწვეული $X_1 = ?$ ძალისაგან, იქნება:

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2 ds}{EI} + \int \frac{N_1^2 ds}{EF} = \int \frac{y^2 ds}{EI} + \int \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF}.$$

მოცემული დატვირთვით გამოწვეული B საყრდენის ჰორიზონტალური გადაადგილება ძირითად სისტემაში

$$\Delta_{1p} = \int \frac{M_1 M_p ds}{EI} + \int \frac{N_1 N_p ds}{EF} = - \int \frac{y M_p ds}{EI} - \int \frac{\cos \varphi N_p ds}{EF}.$$

δ_{11} და Δ_{1p} -ის მნიშვნელობებს თუ შევიტანთ (ა) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$X_1 = \frac{\int y M_p \frac{ds}{I} + \int \cos \frac{ds}{F}}{\int y^2 \frac{ds}{I} + \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{F}}. \quad (86)$$

თაღებში, ვერტიკალურად მოქმედი ძალებისაგან გამოწვეული, გრძივი ძალების გავლენა გადაადგილებებზე უმნიშვნელოა (განსაკუთრებით დამრეც თაღებში) და უმეტეს შემთხვევაში მხედველობაში არ მიიღება.

ამ შემთხვევაში განბრჯენი გამოითვლება ფორმულით

$$X_1 = \frac{\int y M_p \frac{ds}{I}}{\int y^2 \frac{ds}{I} + \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{F}} = \frac{1}{1 + \mu} \frac{\int y M_p \frac{ds}{I}}{\int y^2 \frac{ds}{I}}, \quad (87)$$

სადაც

$$\mu = \frac{\int \cos^2 \varphi \frac{ds}{I}}{\int y^2 \frac{ds}{I}}. \quad (88)$$

რადგანაც μ მცირე სიდიდეა, ამიტომ მიახლოებით ანგარიშების დროს შეგვიძლია უქვევადროთ და განბრჯენი გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$X_1 = \frac{\int y M_p \frac{ds}{I}}{\int y^2 \frac{ds}{I}}. \quad (89)$$

მიღებული ფორმულები სამართლიანია ნებისმიერი მოხაზულობის თაღისათვის. ცალკეულ კერძო შემთხვევებში ინტეგრალების ქვეშ უნდა შევიტანოთ თაღის ღერძის განტოლება და კვეთის ცვლილების ფორმულა და გავაინტეგრროთ.

ზოგჯერ თალის ღერძის განტოლება და კვეთის ცვლილების კანონი მოცემულია ისეთი სახით, რომ არ იძლევა ინტეგრირების ამოხსნის საშუალებას. ამას ადგილი აქვს, მაგალითად, ძველი ხიდების გადაანგარიშების ან არქიტექტურული თაღების დროს.

ასეთ შემთხვევებში თალს დავყოფთ ტოლი სიგრძის ელემენტებად და ინტეგრირებას ვცვლით აჯამებით:

$$X_1 = \frac{\sum y M_p \frac{\Delta S}{l}}{\sum y^2 \frac{\Delta S}{l}} = \frac{\sum y M_p \frac{1}{l}}{\sum y^2 \frac{1}{l}}. \quad (90)$$

სიმარტივისათვის ანგარიში წარმოებს ცხრილის სახით (ცხრილი 9)

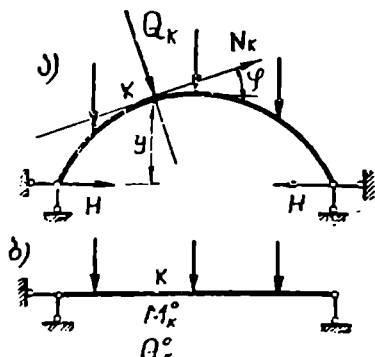
ცხრილი 9

ელემენტი №	y	l	M _p	y ² $\frac{1}{l}$	y M _p $\frac{1}{l}$
1					
2					
				Σ	Σ

$X_1 (= H)$ ის განსაზღვრის შემდეგ ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ მღუნავი მომენტი, გრძივი და განივი ძალა თალის ნებისმიერ კვეთში ისე, როგორც სამსახსრიან თაღში (ნახ. 290, ა):

$$\left. \begin{aligned} M_k &= M^0_k - Py; \\ Q_k &= Q^0_k \cos \varphi - H \sin \varphi; \\ N_k &= -(Q^0_k \sin \varphi + H \cos \varphi); \end{aligned} \right\} (91)$$

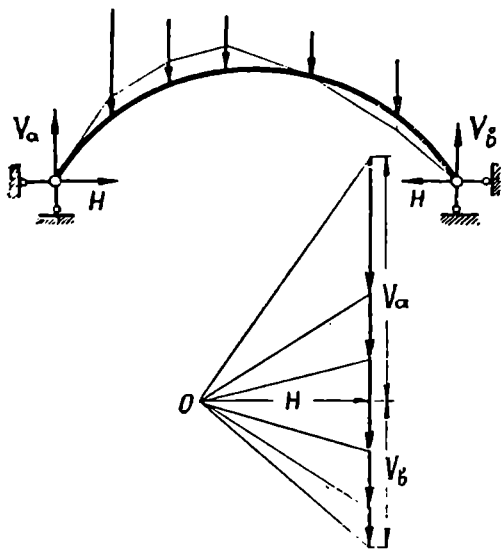
სადაც M^0_k და Q^0_k წარმოადგენს მარტივი, ორ საყრდენზე მდებარე კოქის მღუნავ მომენტს და განივ ძალას (ნახ. 290, ბ). განბჯენის და რეაქციის ვერტიკალური მდგენელების V_a და V_b -ის განსაზღვრის შემდეგ ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ ტოლქმედთა ანუ წნევის მრავალკუთხედი. მოქმედი გარე ძალები და V_a და V_b რეაქციები მოვზომოთ ნებისმიერ მასშტაბში ვერტიკალურად; რეაქციების გაყოფის წერტილიდან პორიზონტალურად მოვზომოთ განბჯენი H და მისი ბოლო წერტილი o მივიღოთ პოლუსად (ნახ. 291, ბ). ამ ძალთა მრავალკუთხედით, რომლის



ნახ. 290.

უკანასკნელი სხივები წარმოადგენენ A და B რეაქციებს, ავავთ თოკის მრავალკუთხედი. თუ თოკის მრავალკუთხედის აგებას დავიწყებთ A საყრდენიდან, ის აუცილებლად გაივლის B საყრდენზე და იქნება ტოლქმედთა ანუ წნევის მრავალკუთხედი.

თანაბრად განაწილებული დატვირთვის შემთხვევაში მივიღებთ წნევის მრუდს. როგორც ვხედავთ, წნევის მრუდის აგება ორსახსრიან თალში წარ-



ნახ. 291.

მოებს ისე, როგორც სამსახსრიანში (იხ. 1 ნაწილი § 48). თალის დრეკადი შეკუმშვის გამო, ორსახსრიანი თალის ღერძის მოხაზულობის ისე შერჩევა, რომ ის დემთხვეს წნევის მრუდს, შეუძლებელია, მაშინ როდესაც ეს შესაძლებელია სამსახსრიან თალში (იხ. 2 ნაწ. § 46).

§ 63. ორსახსრიანი თალის ანგარიში ტემპერატურაზე და საპრდენების დაჯდომაზე

თუ თალზე მოქმედებს არა-თანაბარი ტემპერატურა, მაშინ მისგან გამოწვეული განბჯენი განისაზღვრება განტოლებიდან:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1t} = 0,$$

საიდანაც

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}}.$$

აქ Δ_{1t} არის მოძრავი B საყრდენის (ძირითად სისტემაში) კორიზონტალური გადაადგილება, გამოწვეული ტემპერატურით და გამოითვლება მე-30 ფორმულით (იხ. § 14):

$$\Delta_{1t} = -\alpha(t_1 - t_2) \int M_1 \frac{ds}{d} + \frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2} \int N_1 ds.$$

ამ ფორმულაში თუ შევიტანთ მნიშვნელობებს $M_1 = -y$ და $N_1 = -\cos \varphi$, მივიღებთ:

$$\Delta_{1t} = -\alpha(t_1 - t_2) \int y \frac{ds}{d} - \frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2} \int \cos \varphi ds. \quad (92)$$

თუ თალზე მოქმედებს თანაბარი ტემპერატურა ($t_1 = t_2$) და თუ მივიღებთ $dx = ds \cos \varphi$, მაშინ

$$\Delta_{1t} = -\alpha t_0 \int_0^l dx = -\alpha t_0 l,$$

სადაც t_0 საშუალო ტემპერატურაა.

ნიშანი მინუს გვიჩვენებს, რომ გახურების დროს B წერტილი გადაადგილდება X_1 -ის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ე. ი. გარეთ.

δ_{11} განისაზღვრება წინა პარაგრაფში ჰილბერტი ფორმულით:

$$\delta_{11} = (1 + \mu) \int y^2 \frac{ds}{EI}$$

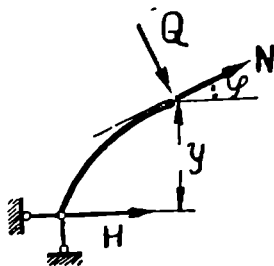
მაშასადამე, ტემპერატურისაგან გამოწვეული განბრუნების

$$X_1 = H = \frac{\alpha t_0 l}{\delta_{11}} = \frac{\alpha t_0 l E}{(1 + \mu) \int y^2 \frac{ds}{I}} \quad (93)$$

გახურების შემთხვევაში ($t_0 > 0$) განბრუნების მიმართული იქნება მალის შიგნით, ხოლო გაცივებისას ($t_0 < 0$) კი მალის გარეთ.

ორსახსრიან თაღში საყრდენის ვერტიკალური დაჯდომა განბრუნებს არ იწვევს, განბრუნებს იწვევს მხოლოდ საყრდენის ჰორიზონტალური გადაადგილება. თუ საყრდენების ურთიერთ დაშორებას ჰორიზონტალური მიმართულებით აღვნიშნავთ Δ -თი, მაშინ მისგან გამოწვეული განბრუნების გამოითვლება ფორმულით:

$$X_1 = H = \frac{\Delta}{\delta_{11}} = \frac{E\Delta}{(1 + \mu) \int y^2 \frac{ds}{I}} \quad (94)$$



ნახ. 292.

ტემპერატურისა და საყრდენების ჰორიზონტალური გადაადგილებით (დაჯდომით) გამოწვეული ძალები გამოითვლება ფორმულებით (ნახ. 292)

$$\left. \begin{aligned} M &= -Hy; \\ Q &= -H \sin \varphi; \\ N &= -H \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

როცა $t_0 < 0$ მაშინ ძალები ნიშანს იცვლის.

§ 64. პარაბოლური ორსახსრიანი თაღის ანგარიში მუდმივ ტვირთზე

თაღის სტატიკური ანგარიშის დაწყებამდე უნდა ავიჩინოთ მისი კვეთის ცვლილების კანონი და თაღის ღერძის განტოლება. კვეთის ცვლილების კანონი ისეთი უნდა იყოს, რომ გავეიადვილოს ინტეგრაციის ამოხსნა და იგი შეესაბამებოდეს შინაგანი ძალების ცვლილების ხასიათს.

კვეთის ცვლილების კანონს თაღებში ხშირად იღებენ ფორმულებით:

1. კვეთი იზრდება ქუსლებიდან კლიტისაკენ:

$$I = I_0 \cos \varphi.$$

აქედან უშუალოდ გამომდინირობს

$$F = F_0 \sqrt{\cos \varphi}.$$

2. კვეთი ნეიტრალბა ქუსლებიდან კლიტისაკენ.

$$I = \frac{I_0}{\cos \varphi},$$

სიღანაც

$$I = \frac{F_0}{\sqrt{\cos \varphi}}$$

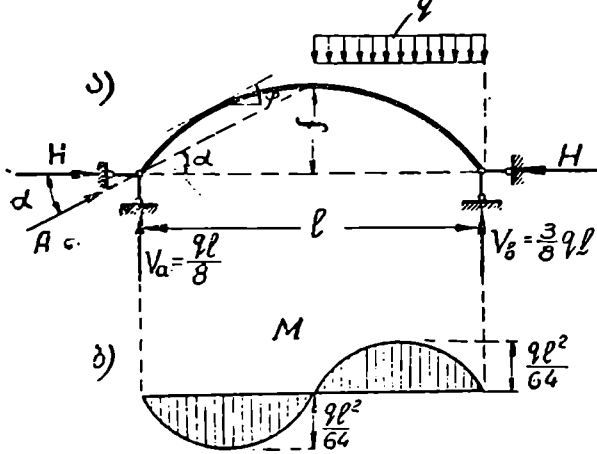
3. თალის კვეთი მუღნიკა ნალის მთელ სიგრძეზე:

$$I = I_0 = \text{const.}$$

I, F წარმოადგენს თალის ინერციის მომენტს და ფართობს ნებისმიერ კვეთში, ხოლო I_0, F_0 კი — კლიტეში.

მოყვანილი ფორმულები თითქმის ერთნაირ გავლენას ახდენენ თალის შინაგანი ძალების განაწილებაზე და ამიტომ თალის ანგარიშის დროს იღებენ იმას, რომელიც უფრო მეტ გამარტივებას იძლევა, კერძოდ, მეორეს.

თალის ღერძის განტოლება ავიღოთ შემდეგი სახით:



ნახ. 293.

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) \quad (96)$$

$$I = \frac{I_0}{\cos \varphi}; \quad ds = \frac{dx}{\cos \varphi} \quad \text{და} \quad \frac{ds}{I} = \frac{dx}{I_0}.$$

წარმოვიდგინოთ, დატვირთულია თალის ნახევარბალი (ნახ. 293). თუ უკუვაგდებთ გრძივი ძალის გავლენას, გვექნება:

$$\delta_{11} = \int y^2 \frac{ds}{EI} = \frac{1}{EI_0} \int_0^l \left[\frac{4f}{l^2} x(l-x) \right]^2 dx = \frac{8}{15} \frac{f^2 l}{EI_0};$$

$$\Delta_{1P} = - \int \frac{y M_P ds}{EI} = - \frac{1}{EI_0} \int_0^l \frac{4f}{l^2} x(l-x) \frac{ql}{8} x dx =$$

$$- \frac{1}{EI_0} \int_0^l \frac{4f}{l^2} x(l-x) \left(\frac{ql}{8} x - \frac{qx^2}{2} \right) dx = - \frac{qf l^3}{30 EI_0}.$$

მიღებულ მნიშვნელობებს თუ შევიტანთ (89) ფორმულაში, მივიღებთ განბრუების სიდიდეს:

$$H = \frac{ql^2}{16f}. \quad (97)$$

რეაქციის ვერტიკალური მდგენელები

$$V_a = \frac{ql}{8}; \quad V_b = \frac{3}{8} ql.$$

როგორც ვხედავთ, თუ გრძივი ძალის გავლენას გადაადგილებებზე წხედველობაში არ მივიღებთ, ორსახსრიანი თალის რეაქციები ემთხვევა სამსახსრიანი თალის რეაქციებს (იხ. 1 ნაწ. § 47).

მაქსიმალურ მღუნავ მომენტს ადგილი აქვს მალის მეოთხედში და ტოლია (ნახ. 293, ბ):

$$M_{max} = \pm \frac{ql^2}{64}.$$

მარცხენა საყრდენი რეაქციის პორიზონტთან დაბრის კუთხის ტანგენსი ტოლია

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{V_a} = \frac{2f}{l}.$$

თალის ღერძის დაბრის კუთხის ტანგენსი მეოთხედში $\left(x = \frac{l}{4}\right)$ ტოლია

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{2f}{l}.$$

მაშასადამე, მეოთხედში თალის ღერძის მხები საყრდენი რეაქციის პარალელურია, ამიტომ აქ გრძივ ძალას აქვს მაქსიმალური მნიშვნელობა:

$$N_{max} = \sqrt{V_a^2 + H^2} = \frac{ql^2}{16f} \sqrt{1 + 4\left(\frac{f}{l}\right)^2} \quad (98)$$

დატვირთულ ნახევართალშიც მაქსიმალურ გრძივ ძალას ადგილი აქვს მეოთხედში და გამოითვლება იმავე ფორმულით. თუ დატვირთულია მთელი მალი, მაშინ

$$H = \frac{ql^2}{8f}. \quad (99)$$

§ 65. ორსახსრიანი თალის ანგარიში მოძრავ ტვირთზე

(გავლენის ხაზების აგება)

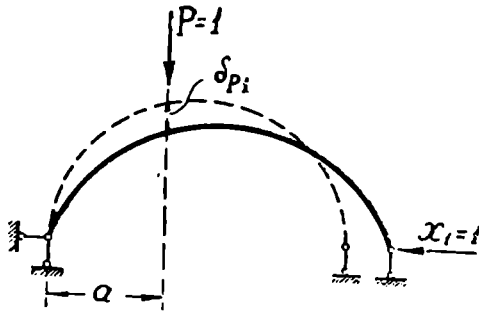
რეაქციების ვერტიკალური მდგენელების გავლენის ხაზები აიგება ისე, როგორც ორსაყრდენზე მდებარე კოქის რეაქციების. განბრუების გავლენის ხაზი აიგება ფორმულით

$$X_1 = H = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{\delta_{P1}}{\delta_{11}}.$$

δ_{P_1} წარმოადგენს X_1 ძალით გამოწვეულ ჩაღუნვის ხაზს ძირითად სისტემაში (ნახ. 294). თუ ჩაღუნვის ხაზის ორდინატებს გავყოფთ δ_{P_1} -ზე, მივიღებთ X_1 -ის გავლენის ხაზის ორდინატებს.

X_1 -ის გავლენის ხაზის აგების შემდეგ (91) ფორმულით მივიღებთ M_k და N_k -ს გავლენის ხაზებს (ნახ. 295).

როგორც ვხედავთ, განბრჯენის გავლენის ხაზი აიგება δ_{P_1} ჩაღუნვის ხაზის საშუალებით. ჩვენ ვნახეთ (§ 58), რომ ჩაღუნვის ხაზის აგება წარმოებს ორი



ნახ. 294.

გზით—ანალიზურად და გრაფიკულად ანალიზურად დრეკადი ტვირთების საშუალებით.

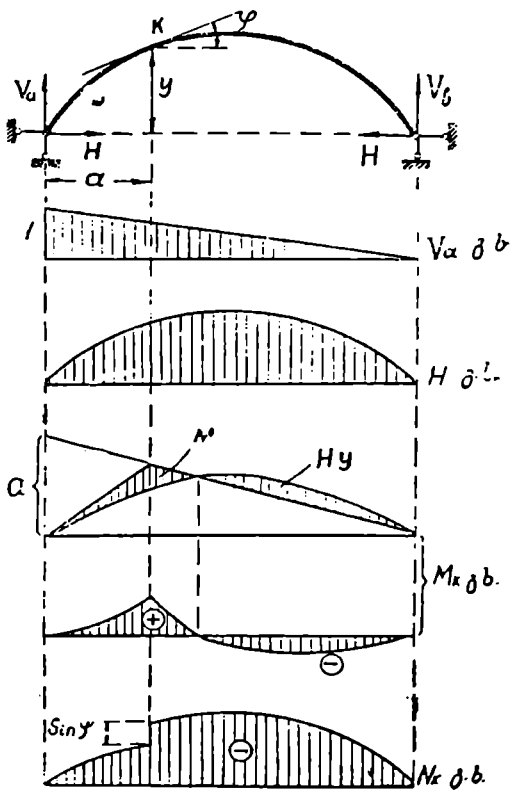
ანალიზური მეთოდის გამოყენება მიზანშეწონილია იმ შემთხვევაში, როდესაც თალის ღერძის განტოლება და კვეთის ცვლილების კანონი საშუალებას იძლევა ადვილად ამოვხსნათ სათანადო ინტეგრალები. დრეკადი ტვირთების მეთოდი კი ამოცანას წყვეტს საერთო სახით ნებისმიერი მოხაზულობის თალისათვის. გავარჩიოთ ორივე მეთოდი.

1 X_1 გავლენის ხაზის აგება ანალიზურად

განვიხილოთ პარაბოლური მოხაზულობის თალი (ფორ. 96), რომლის კვეთის ინერციის მომენტი იცვლება ფორმულით

$$I = \frac{I_0}{\cos \varphi}$$

$$\delta_{P_1} = \int \frac{M_p M_1 ds}{EI}$$



ნახ. 295.

სადაც M_p და M_1 წარმოადგენს სათანადოთ $P=1$ და $X_1=1$ ძალებით გამოწვეულ მღუნავ მომენტს ძირითად სისტემაში (ნახ. 296).

მლუნავი მომენტები თაღში

$$x < a \quad M_p = 1 \frac{b}{l} x; \quad M_1 = -\gamma,$$

$$x > a \quad M_p = 1 \frac{a}{l} x; \quad M_1 = -\gamma.$$

თუ შევიტანთ ამ მნიშვნელობებს δ_{p1} -ის გამოსახულებაში და გავაინტეგრებთ ორ უბანზე, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \delta_{p1} &= -\frac{1}{EI_0} \int_0^a \frac{4f}{l^2} x(l-x) \frac{b}{l} x dx - \frac{1}{EI_0} \int_a^l \frac{4f}{l^2} x(l-x) \frac{a}{l} x dx = \\ &= -\frac{1}{EI_0} \frac{fba^2}{3l^2} (4l-3a) - \frac{1}{EI_0} \frac{fab}{3l^2} (4l-3b). \end{aligned}$$

გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ

$$\delta_{p1} = -\frac{1}{EI_0} \frac{f}{3l^2} a(l-a)(l^2+al-a^2) = -\frac{fl^2}{3EI_0} \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l}\right) \left(1 + \frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}\right).$$

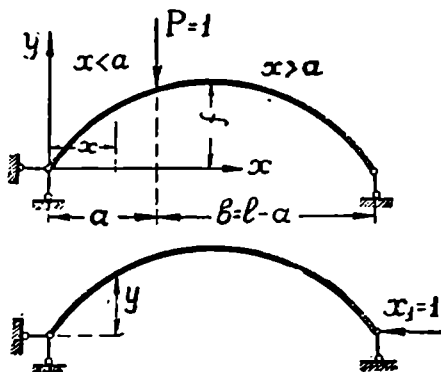
თუ a -ს შივცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობას, მივიღებთ ჩაღუნვის ხაზის ორდინატებს.

X_1 -ის მნიშვნელო

$$\delta_{11} = \frac{8}{15} \frac{f^2 l}{EI_0}. \quad (\text{იხ. § 64})$$

δ_{p1} და δ_{11} -ის მნიშვნელობებს თუ შევიტანთ X_1 -ის გამოსახულებაში და შემოვიღებთ აღნიშვნას $\xi = \frac{a}{l}$, საბოლოოდ

მივიღებთ



ნახ. 296.

$$X_1 = H = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}} = \frac{1}{f} \frac{5}{8} \xi(1-\xi)(1+\xi-\xi^2) \quad (100)$$

აბ

$$H = \frac{l}{f} K, \quad (101)$$

სადაც

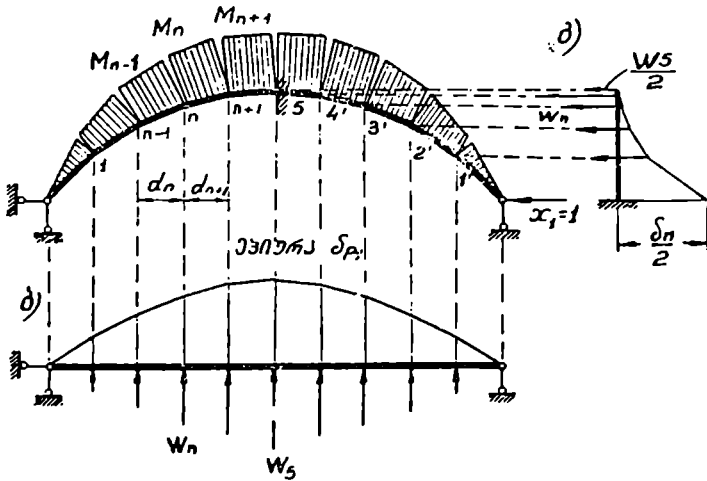
$$K = \frac{5}{8} \xi(1-\xi)(1+\xi-\xi^2)$$

და მისი მნიშვნელობა მოყვანილია მე 10. ცხრილში.

$\xi = \frac{a}{l}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
K	0	0,0611	0,1159	0,1590	0,1855	0,1953

X_1 -ის გავლენის ხაზის აგება დრეკადი ტვირთების საშუალებით დრეკადი ტვირთების გამოთვლა წარმოებს საერთო ფორმულით (იხ. § 20):

$$W_n = \frac{S_n}{6EI_n} (2M_n + M_{n-1}) + \frac{S_{n+1}}{6EI_{n+1}} (2M_n + M_{n+1}). \quad (102)$$



ნახ. 297.

ანგარიშს ვახდენთ შემდეგი თანმიმდევრობით: 1) თალის ლერძს ან თალის მალს ვყოფთ ტოლ მონაკვეთებად; 2) ვაგებთ მლუნავი მომენტის ეპიურას $X_1=1$ ძალისაგან გაკიშული ბოქკოების მხარეს და ვანგარიშობთ ეპიურის ორდინატებს სათანადო კვანძებში (ნახ. 297, ა); 3) არჩეული წერტილებისათვის ვანგარიშობთ დრეკადი ტვირთების მნიშვნელობებს (102) ფორმულით; 4) დრეკადი ტვირთებით ვმოქმედებთ პირობით ნაშენზე და ვაგებთ ფიქტიური მლუნავი მომენტის ეპიურას (ძალებს მივმართავთ ერთეული ძალით გამოწვეული ეპიურის მიმართულებით და ფიქტიურ ეპიურას ვაგებთ გაკიშული ბოქკოების მხარეს), რომელიც იქნება საძიებელი ჩალუნვის ხაზი (ნახ. 297, ბ). $X_1=1$ ძალით გამოწვეული დეფორმაცია სიმეტრიულია (კლიტეში მობრუნების კუთხე ნულის ტოლია) და ამიტომ δ_{11} შეიძლება განისაზღვროს როგორც B წერტილის გაორკეცებული პორობონტალური გადაადგილება კლიტის მიმართ. ამას ადვილად წარმოვიდგენთ, თუ თალს ჩავამაგრებთ კლიტეში და გავანთავისუფლებთ საყრდენებისაგან.

პირობით ნაშენზე—კონსოლზე, რომელიც ქვევით ჩამაგრებულია და ზევით თავისუფალი, ვიშკამდოთ მიღებული დრეკადი ტვირთებით ჰორიზონტალურად და გამოვთვალოთ მლუნავი მომენტი ჩამაგრების ადგილზე; მივიღებთ $\frac{\delta_{11}}{2}$ (ნახ. 297, გ).

ჩალუნვის ხაზის ორდინატებს თუ გავყოფთ δ_{11} -ზე, მივიღებთ X_1 -ის გავლენის ხაზს.

მაგალითი. ავაგოთ პარაბოლური თალის განბრჯენის გავლენის ხაზი დრეკადი ტვირთების საშუალებით.

$$l = 40 \text{ მ}; f = 10 \text{ მ}; \text{ მივიღოთ } l = \frac{l_0}{\cos \varphi}.$$

გადაწყვეტა. თალის მალი დავყოთ 10 ტოლ მონაკვეთად (ნახ. 297) და (102) ფორმულაში შევიტანოთ მნიშვნელობები

$$S_n = -\frac{d_n}{\cos \varphi_n}; \quad S_{n+1} = \frac{d_n}{\cos \varphi_{n+1}};$$

$$M_n = y_n; \quad M_{n-1} = y_{n-1} \quad \text{და} \quad M_{n+1} = y_{n+1};$$

მაშინ დრეკადი ტვირთის ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$W_n = \frac{d_n}{6EI_0} \left(4y_n + y_{n-1} + y_{n+1} \right) = \frac{d_n}{6EI_0} W'_n.$$

დრეკადი ტვირთების ანგარიში მოყვანილია მე-11 ცხრილში.

ცხრილი 11

დანა- ყოფის №			y_{n-1}	y_{n+1}	$4y_n$	W'_n	$M'_n = \delta p_1$	X_1 გ. ხ. ორდინა- ტები
0	0	—		3,6	0	3,6	0	0
1	0,1/	3,6	0	6,4	14,4	20,8	-773,6	0,243
2	0,2/	6,4	3,6	8,4	25,6	37,6	-1464,0	0,460
3	0,3/	8,4	6,4	9,6	33,6	49,6	-2004,0	0,629
4	0,4/	9,6	8,4	10,0	38,4	56,8	-2345,6	0,731
5	0,5/	10,0	9,6	9,6	40,0	59,2	-2460,0	0,773

დრეკადი ტვირთების მიღებული მნიშვნელობებით ვიშკამდოთ ორ საყრდენზე მდებარე კოჭზე და ავაგოთ ფიქტიური მლუნავი მომენტის ეპიურა, რომელიც იქნება δp_1 ჩალუნვის ხაზი (ნახ 297, ბ). ფიქტიური ეპიურა აგებულია ზედა მხარეს, ე. ი. $P=1$ ძალის საწინააღმდეგო მიმართულებით, და უარყოფითია.

მომენტების მნიშვნელობები მოცემულია მე-11 ცხრილში. მოძრავი საყრდენის ჰორიზონტალური გადაადგილების δ_{11} -ის გამოსათვლელად ვსარგებლობთ იმავე დრეკადი ტვირთებით, მხოლოდ ვაბრუნებთ 90° -ით (ნახ.

297, გ). მლუნავი მომენტი ჩამაგრების ადგილზე მოგვცემს $\frac{\delta_{11}}{2}$ -ს, ე. ი.

$$\frac{\delta_{11}}{2} = \frac{d_n}{6EI_0} (29,6 \cdot 10 + 56,8 \cdot 9,6 + 49,6 \cdot 8,4 + 37,6 \cdot 6,4 + 20,8 \cdot 3,6) = 1573 \frac{d_n}{6EI_0}$$

მაშასადამე, $\delta_{11} = 3146 \frac{d_n}{6EI_0}$.

X_1 -ის გავლენის ხაზის ორდინატებს გამოვთვლით ფორმულით:

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}} = \frac{M'_n}{3146}$$

ორდინატები მოყვანილია მე-11 ცხრილში.

X_1 -ის მაქსიმალური ორდინატა ანალიზურად ტოლია (ცხრილი 10).

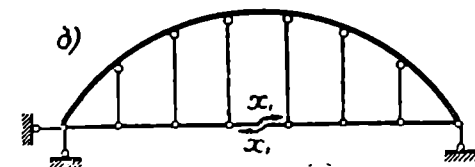
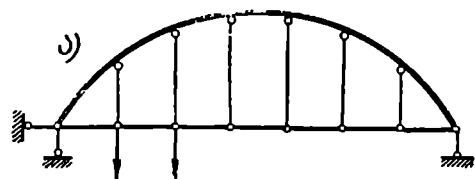
$$X_1 = 0,1953 \frac{l}{f} = 0,782,$$

დრეკადი ტვირთებით კი $X_1 = 0,773$;

განსხვავება შეადგენს დაახლოებით 1 %.

§ 66. ორსახსრიანი შემკობიანი თალის ანგარიში

შემკობიანი თალი იმით განსხვავდება ორსახსრიანი თალისაგან, რომ განბრუნევი გადაეცემა არა საყრდენებს, არამედ თვით შემკოქს, რომელიც A და B სახსრების შემაერთებელ ლეროს წარმოადგენს (ნახ. 298). შემკობიანი



ნახ. 298.

თალს აკეთებენ ქვედასვლის შემთხვევაში და ამიტომ შემკობი-
თალთან დაკავშირებულია საკიდ-
ებით, რომელთა საშუალებითაც
დატვირთვა გადაეცემა თალს. ან-
გარიშის გამართივების მიზნით
გულისხმობენ, რომ საკიდები
შემკოქთან შეერთებულია სახს-
რებით. ამის გამო შემკოქში ვი-
თარდება მხოლოდ გრძივი ძალა.
შემკობიანი თალი წარმოადგენს
კოჭოვან სისტემას და საყრდენი
რეაქციების მხრივ სტატიკურად
რკვევადია. ის არის შინაგანად

ერთჯერ სტატიკურად ურკვევი სისტემა. რადგანაც საკიდები შემკოქთან
მთლიანი სახსრებით არის შეერთებული, ამიტომ განსახილავ სისტემას ეწო-
დება ხისტი თალი მოქნილი შემკოქით.

ზედმეტ უცნობად მივიღოთ ძალვა შემკოქში X_1 . შემკოქის გაკვეთით
მივიღებთ სტატიკურად რკვევად ძირითად სისტემას (ნახ. 298, ბ).

კანონიერი განტოლება დაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0,$$

რომელიც გამოსახავს იმ აზრს, რომ შეშვების გაცვეთილი ბოლოების ურთიერთ გადაადგილება ძირითად სისტემაში ტოლია ნულისა. ძირითად სისტემაზე მოქმედი გარე დატვირთვა საკიდების საშუალებით მთლიანად გადაეცემა თაღს და შეშვოქში ძალებს არ წარმოშობს. მაშასადამე, Δ_{1p} გამოითვლება ისევე, როგორც ორსახსრიან თაღში.

δ_{11} —არის შეშვოქის გაცვეთილი ბოლოების ურთიერთ გადაადგილება, გამოწვეული $X_1 = 1$ ძალით და ორსახსრიან თაღთან განსხვავებით, მის გამოსახულებაში შევა შეშვოქის წაგრძელება

$$\frac{1 \cdot l}{E_1 F_1},$$

სადაც E_1 და F_1 წარმოადგენს შეშვოქის დრეკადობის შოდულს და განივი კვეთის ფართობს.

ანრიგად

$$\delta_{11} = \int y^2 \frac{ds}{EI} + \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \frac{1 \cdot l}{E_1 F_1} \quad (103)$$

და სათანადოდ

$$X_1 = \frac{\Delta_{1p}}{\int y^2 \frac{ds}{EI} + \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \frac{l}{E_1 F_1}}. \quad (104)$$

ეს ფორმულა ორსახსრიანი თაღის განბრჯენისაგან (86) იმით განსხვავდება, რომ აქ მნიშვნელში შედის შეშვოქის დეფორმაცია. (104) ფორმულის მნიშვნელი იზრდება და ცხადია, რომ განბრჯენი შეშვოქიან თაღში ნაკლებია, ვიდრე ორსახსრიან თაღში.

თუ $F_1 = 0$, მაშინ $X_1 = 0$ და თაღი იქცევა კოქად. თუ $F_1 = \infty$, მაშინ მნიშვნელის უკანასკნელი წევრი ნულის ტოლია და შეშვოქიანი თაღის განბრჯენი ორსახსრიანი თაღის განბრჯენის ტოლი იქნება, ე. ი. შეშვოქიანი თაღი გადაიქცევა ორსახსრიან თაღად.

როგორც ვხედავთ, შეშვოქის განივი კვეთის ფართობის შემცირებით შეშვოქში მცირდება ძალვა X_1 . უნდა აღვნიშნოთ, რომ სასრულ ზღვრებში შეშვოქის კვეთის ფართობის ცვლილება უმნიშვნელო გავლენას ახდენს განბრჯენის სიდიდეზე და ამიტომ ანგარიშის დროს შეშვოქის ფართობის წინასწარი შერჩევის სიზუსტე განბრჯენის სიდიდეზე გავლენას არ ახდენს.

განბრჯენის განსაზღვრის შემდეგ ანგარიშობთ საანგარიშო ძალებს თაღში, რომელიც წარმოებს ისე, როგორც ორსახსრიან თაღში.

თუ თაღი და შეშვოქი ერთნაირი მასალისაგანაა გაკეთებული, მაშინ თანაბარი ტემპერატურა განბრჯენს არ წარმოშობს. განბრჯენი წარმოიშვება იმ შემთხვევაში, თუ თაღის და შეშვოქის ტემპერატურის ცვლილება ერთნაირი არაა.

ტემპერატურის ცვლილებით გამოწვეული განბრჯენი გამოითვლება ფორმულით

$$H_t = \frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}}. \quad (105)$$

ტემპერატურის ცვლილება თალის და შემკოვის სისქეზე ჩავთვალოთ თანაბარად.

ტემპერატურით გამოწვეული თალის მალის სიგრძის ცვლილება

$$\Delta l_t = l(\alpha t - \alpha_1 t_1).$$

საბოლოოდ ტემპერატურის აწევით გამოწვეული განბრჯენი

$$H_t = \frac{l(\alpha t - \alpha_1 t_1)}{\delta_{11}} \quad (105)$$

δ_{11} გამოითვლება (103) ფორმულით. α , t და α_1 , t_1 წარმოადგენს თალის და შემკოვის ხაზობრივი გაფართოების კოეფიციენტს და ტემპერატურას.

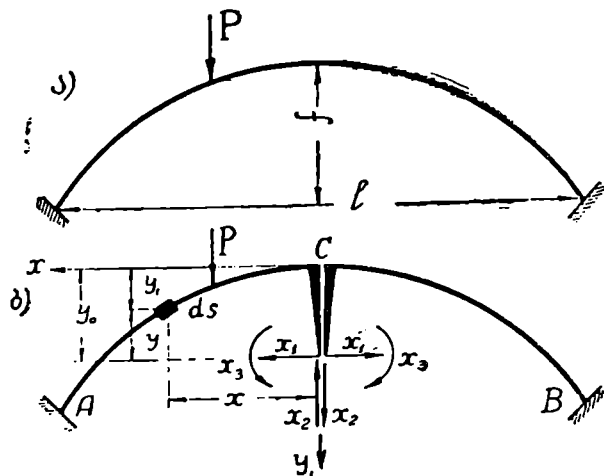
ტემპერატურის დაწვევის შემთხვევაში H_t ნიშანს იცვლის, ე. ი. განბრჯენი მიმართული იქნება გარეთ (თუ $\alpha t > \alpha_1 t_1$ -ზე).

ერთნაირი ტემპერატურის დროს განბრჯენის სიდიდე დამოკიდებულია ხაზობრივი გაფართოების კოეფიციენტების სხვაობაზე.

როგორც აღნიშნული იყო საყრდენების დაჯდომა შემკოვში ან თალში არავითარ დამატებით ძალებს არ იწვევს.

§ 67. უსახსრო თალის ანგარიში ვულფივ ტვირთზე

უსახსრო თალი წარმოადგენს ბოლოებით ხისტად ჩამაგრებულ მრუდ დელს, შეიცავს სამ ზედმეტ ღეროს და არის სამჯერ სტატიკურად ურკვევი სისტემა (ნახ. 299, ა).



ნახ. 299.

ძირითადი სისტემა ისე ავირჩიოთ, რომ მივიღოთ რაც შეიძლება მეტი გამარტივება. შესაძლო ვარიანტებს შორის ყველაზე მოსახერხებელ ძირითად სისტემას მივიღებთ, თუ თალს გავკვეთთ კლიტეზე და უცნობებს გადავიტანთ უსახსროლო სიხისტის მქონე კონსოლზე ღრეკად ცენტრში (იხ. § 31). რადგანაც სისტემა სიმეტრიულია, ამიტომ ღრეკადი ცენტრი

მოთავსდება სიმეტრიის ღერძზე კლიტიდან რაღაც y_0 მანძილზე (ნახ. 299, ბ).

კანონიკური განტოლების კოეფიციენტების საანგარიშოდ ძირითად სისტემაზე ვიმოქმედოთ ერთეული ძალებით— $X_1=1$, $X_2=1$ და $X_3=1$ და გამოვთვალოთ მღუნავი მომენტები და გრძივი ძალები:

$$\begin{aligned} M_1 &= -y; & N_1 &= -\cos\varphi; \\ M_2 &= x; & N_2 &= \sin\varphi; \\ M_3 &= 1; & N_3 &= 0. \end{aligned}$$

ერთეული ეპიურები ნაჩვენებია მე-300 ნახაზზე. M_1 და M_3 ეპიურა სიმეტრიულია, M_2 კი ირიბად-სიმეტრიული, ამიტომ მათი კომბინაცია ეპიურების ურთიერთ ორთოგონალურობის გამო ტოლია ნულსა, ე. ი.

$$\delta_{12} = \delta_{23} = 0.$$

ზისტი კონსოლის სიგრძე ისე შეეარჩიოთ, რომ გადაადგილება δ_{13} იქცეს ნულად:

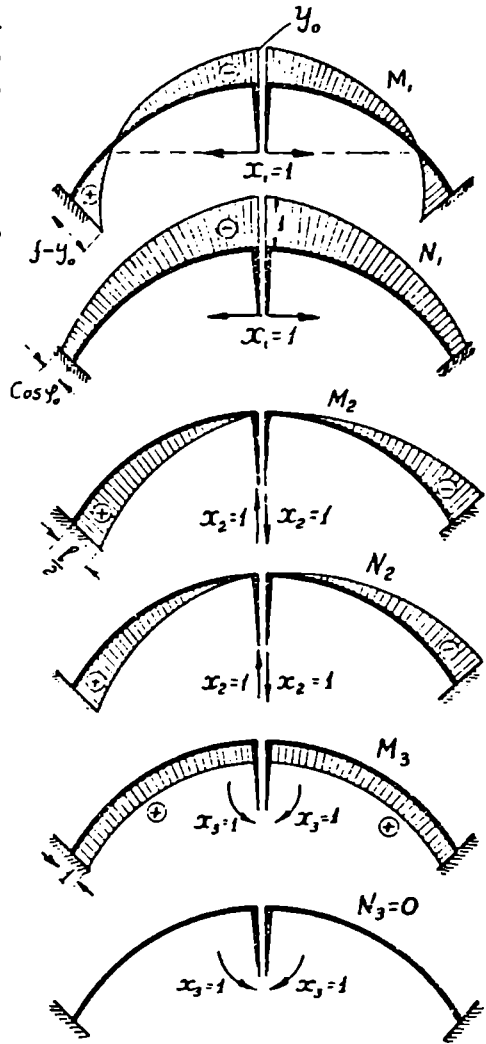
$$\begin{aligned} \delta_{13} &= \int \frac{M_1 M_3 ds}{EI} = - \int_0^s y \frac{ds}{EI} = \\ &= - \int_0^s (y_0 - y_1) \frac{ds}{EI} = 0, \end{aligned}$$

საიდანაც

$$y_0 = \frac{\int_0^s y_1 \frac{ds}{I}}{\int_0^s \frac{ds}{I}}. \quad (106)$$

$\frac{ds}{I}$ სილიდგ პირობით ჩავთვალოთ ფიქტიურ (დრეკად) ძალად, მოვლოთ ds ელემენტის სიმძიმის ცენტრზე და შიგემართოთ პორობონტალურად (იხ. § 31). მაშინ (106) გამოსახულების მრიცხველი მოგვეცემს ფიქტიური ძალების სტატიკური მომენტების ჯამს x ღერძის მიმართ, ხოლო მნიშვნელო კი ფიქტიური ძალების ჯამს,

ე. ი. (106) ფორმულა იძლევა $\frac{ds}{I}$ ძალების სიმძიმის ცენტრის—დრეკადი ცენტრის—მდებარეობას.



ნახ. 300.

თუ (106) ფორმულის პრიციპელსა და მნიშვნელს გადავამრავლებთ ნებისმიერ I_0 ინერციის მომენტზე და გამოვიყენებთ თალის სიმეტრიას, მაშინ დრეკადი ცენტრის მდებარეობა შეიძლება განესაზღვროთ ფორმულით

$$\gamma_0 = \frac{\int_A^C y_1 \frac{I_0}{I} ds}{\int_A^C \frac{I_0}{I} ds} = \frac{\int_A^C y_1 ds'}{\int_A^C ds'}. \quad (107)$$

აქ $ds' = \frac{I_0}{I} ds$ იქნება ფიქტიური დრეკადი ძალა. ნებისმიერი I_0 ინერციის მომენტის შემოტანით ჩვენ საქმე გვექნება ინერციის მომენტების ფარლობასთან და არა მათ აბსოლუტურ მნიშვნელობებთან.

ამგვარად, უცნობების დრეკად ცენტრში გადატანის გამო ყველა არამთავარი გადაადგილება იქცევა ნულად და კანონიკურ განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_2 \delta_{22} + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned} \quad (108)$$

თუ მხედველობაში არ მივიღებთ განივი ძალის გავლენას, მაშინ მთავარი გადაადგილებები გამოითვლება ფორმულებით:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int M_1^2 \frac{ds}{EI} + \int N_1^2 \frac{ds}{EF} = \frac{1}{EI_0} \int y^2 \frac{I_0}{l} ds + \frac{1}{EI_0} \int \cos^2 \varphi \frac{I_0}{F} ds; \\ \delta_{22} &= \int M_2^2 \frac{ds}{EI} + \int N_2^2 \frac{ds}{EF} = \frac{1}{EI_0} \int x^2 \frac{I_0}{l} ds + \frac{1}{EI_0} \int \sin^2 \varphi \frac{I_0}{F} ds; \\ \delta_{33} &= \int M_3^2 \frac{ds}{EI} = \frac{1}{EI_0} \int \frac{I_0}{I} ds. \end{aligned}$$

მოცემული დატვირთვით გამოწვეული მლუნავი მომენტი და გრძივი ძალა ჩავთვალოთ დადებითად და აღვნიშნოთ M_p და N_p -თი, მაშინ დატვირთვით გამოწვეული გადაადგილებები გამოითვლება ფორმულებით:

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \int M_p M_1 \frac{ds}{EI} + \int N_p N_1 \frac{ds}{FF} = -\frac{1}{EI_0} \int M_p y \frac{I_0}{l} ds - \frac{1}{EI_0} \int N_p \cos \varphi \frac{I_0}{F_0} ds; \\ \Delta_{2p} &= \int M_p M_2 \frac{ds}{EI} + \int N_p N_2 \frac{ds}{EF} = \frac{1}{EI_0} \int M_p x \frac{I_0}{l} ds + \frac{1}{EI_0} \int N_p \sin \varphi \frac{I_0}{F} ds; \\ \Delta_{3p} &= \int M_p M_3 \frac{ds}{EI} = \frac{1}{EI_0} \int M_p \frac{I_0}{l} ds. \end{aligned}$$

გადაადგილებათა მიღებულ მნიშვნელობებს თუ შევიტანთ (108) ფორმულებში, შევკვეცავთ EI_0 -ზე და ამოვხსნით უცნობებს, მივიღებთ:

$$X_1 = \frac{\int M_{py} \frac{I_0}{l} ds + \int N_p \cos \varphi \frac{I_0}{F} ds}{\int y^2 \frac{I_0}{l} ds + \int \cos^2 \varphi \frac{I_0}{F} ds} \quad (109)$$

$$X_2 = - \frac{\int M_{px} \frac{I_0}{l} ds + \int N_p \sin \varphi \frac{I_0}{F} ds}{\int x^2 \frac{I_0}{l} ds + \int \sin^2 \varphi \frac{I_0}{F} ds}; \quad (110)$$

$$X_3 = - \frac{\int M_p \frac{I_0}{l} ds}{\int \frac{I_0}{l} ds}. \quad (111)$$

ვერტიკალური ძალებით გამოწვეული გრძივი ძალების გავლენა გადაადგილებებზე უმნიშვნელოა და შეგვიძლია მხედველობაში არ მივიღოთ.

ამ შემთხვევაში ზედმეტი უცნობები განისაზღვრება ფორმულებით

$$X_1 = \frac{\int M_{py} \frac{I_0}{l} ds}{\int y^2 \frac{I_0}{l} ds + \int \cos^2 \varphi \frac{I_0}{F} ds} = \frac{1}{1 + \mu} \frac{\int M_{py} \frac{I_0}{l} ds}{\int y^2 \frac{I_0}{l} ds}; \quad (109')$$

$$X_2 = - \frac{\int M_{px} \frac{I_0}{l} ds}{\int x^2 \frac{I_0}{l} ds}; \quad (110')$$

$$X_3 = - \frac{\int M_p \frac{I_0}{l} ds}{\int \frac{I_0}{l} ds}; \quad (111')$$

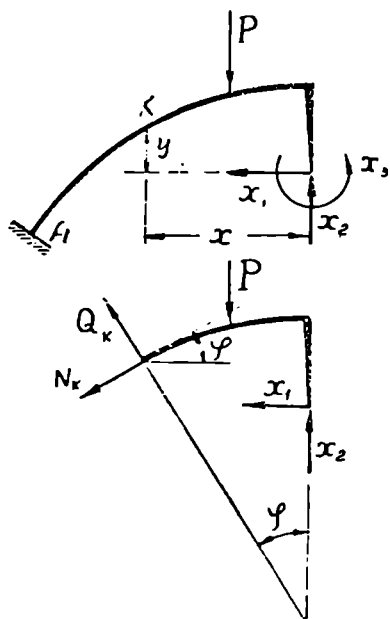
სადაც

$$\mu = \frac{\int \cos^2 \varphi \frac{I_0}{F} ds}{\int y^2 \frac{I_0}{l} ds}. \quad (112)$$

მიღებულ ფორმულებში M_p აიღება დადებითი ნიშნით თუ ის კიმავს ქვედა ბოქოებს; N_p აიღება დადებითი ნიშნით, თუ კიმავს თაღს. მაგალითად, ვერტიკალური დატვირთვის მოქმედების დროს M_p და N_p ყველგან იქნება უარყოფითი.

ღრეკადი ცენტრის მდებარეობა და გადაადგილებები შეიძლება გამოვიანგარიშოთ გრაფიკულადაც, თუ ინტეგრალებს შევცვლით აჯამვით.

X_1, X_2, X_3 ზედმეტი უცნობების განსაზღვრის შემდეგ შინაგანი ძალებების გამოთვლა ნებისმიერ კვეთში არავითარ სირთულეს არ წარმოადგენს. ძირითად სისტემაზე მოვლათ ყველა მოქმედი ძალა და განვიხილოთ ნებისმიერი კვეთი (ნახ. 301), მივიღებთ (ნახაზზე Q_x და N_x აღებულია დადებითი მიმართულებით):



ნახ. 301.

$$X_1 = -\frac{\Delta_1 t}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\Delta_2 t}{\delta_{22}}; \quad X_3 = -\frac{\Delta_3 t}{\delta_{33}}. \quad (114)$$

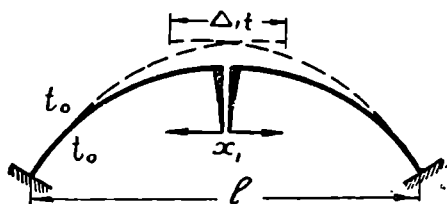
თუ თაღზე მოქმედებს თანაბარი ტემპერატურა, მაშინ თალი მიიღებს სიმეტრიულ დეფორმაციას (ნახ. 302). ამ შემთხვევაში

$$\Delta_{1t} = \alpha t_0 \int N_1 ds,$$

სადაც α ხაზობრივი გაფართოების კოეფიციენტი და t_0 კი ღერძის ტემპერატურა.

$X_2 = 1$ -საგან გამოწვეული გრძივი ძალის ეპიურა ირიბად სიმეტრიულია და ამიტომ $\Delta_{2t} = 0$. რადგან $N_3 = 0$, ამიტომ $\Delta_{3t} = 0$.

მაშასადამე, წარმოიშვება მხოლოდ განბრჯენი X_1 .



ნახ. 302.

$$\Delta_{1t} = \alpha t_0 \int N_1 ds = -\alpha t_0 \int \cos \varphi \frac{dx}{\cos \varphi} = -\alpha t_0 l.$$

ნიშანი მინუსი აღებულია იმიტომ, რომ ტემპერატურა იწვევს თაღის ღერძის გაკიშვას ($t_0 > 0$), ხოლო $X_1 = 1$ კი კუმშვას.

საბოლოოდ მივიღებთ

$$X_1 = H_1 = -\frac{\Delta_1 t}{\delta_{11}} = \frac{\alpha t_0 l E}{(1+\mu) \int y^2 \frac{ds}{l}} \quad (115)$$

როგორც ვხედავთ, თანაბარი ტემპერატურის დროს წარმოიშვება მხოლოდ განბრჯენი X_1 , რომელიც მოდებულია დრეკად ცენტრზე. გახურების შემთხვევაში ($t_0 > 0$) განბრჯენი მიმართულია ისე, როგორც ნაჩვენებია 302-ე ნახაზზე და თაღს შეკუმშავს, გაცივების დროს კი განბრჯენი შეიცვლის მიმართულებას და თაღს გაკიშავს.

ტემპერატურით გამოწვეული მღუნავი მომენტი და გრძივი ძალა გამოითვლება ფორმულებით

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= H_1 y; \\ N_1 &= H_1 \cos \varphi. \end{aligned} \right\} (115)$$

განვიხილოთ საყრდენების დაჯდომა. წარმოვიდგინოთ, რომ თაღის საყრდენმა განიცადა დეფორმაცია, ე. ი. გადაადგილდა ვერტიკალური და ჰორიზონტალური მიმართულებით და მობრუნდა რაღაც კუთხით (ნახ. 303). ძირითად სისტემაში ეს გადაადგილებები გამოიწვევს დრეკადი ცენტრის გადაადგილებას სათანადო უცნობების მიმართულებით. მათი სიდიდე აღვნიშნოთ Δ_{1c} , Δ_{2c} და Δ_{3c} , კანონიკურ განტოლებაში (108) სატივითო წევრების მაგიერ შევიტანოთ ეს გადაადგილებები, მივიღებთ:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1c}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\Delta_{2c}}{\delta_{22}}; \quad X_3 = -\frac{\Delta_{3c}}{\delta_{33}} \quad (117)$$

Δ_{1c} , Δ_{2c} და Δ_{3c} განისაზღვრება მუშაობათა განტოლების (იხ. § 16) საშუალებით.

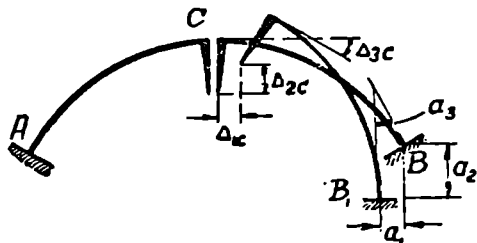
თუ საყრდენი გადაადგილდა მხოლოდ ჰორიზონტალურად. მაშინ

$$X_2 = X_3 = 0 \text{ და } X_1 = -\frac{\Delta_{1c}}{\delta_{11}}.$$

თაღის სიხისტის გაზრდით (117) ფორმულების მნიშვნელობები მცირდება და სათანადოდ უცნობები იზრდება. მაშასადამე, რაც უფრო ხისტია თაღი, მით უფრო დიდი ძალები ჩნდება მასში.

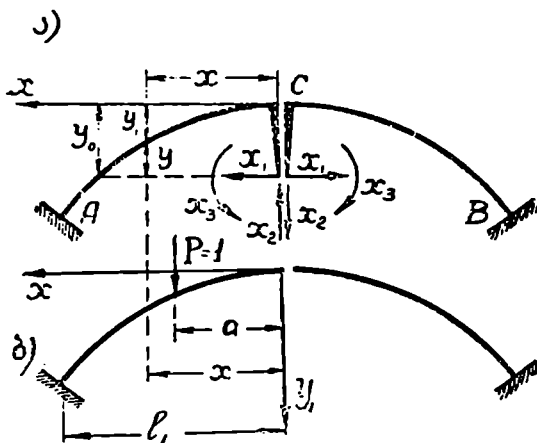
§ 69. პარაბოლური უსახსრო თაღის ანგარიში

1. თაღზე მოქმედებს მოძრავი ერთეული ძალა ($P=1$). რადგანაც თაღის ღერძის განტოლება მოცემულია ალგებრული სახით, ამიტომ გავლენის ხაზებს ავაგებთ გადაადგილებათა უშუალო გაინტეგრების საშუალებით.



ნახ. 303.

პირველად უნდა ავაგოთ ზედმეტი უცნობების გავლენის ხაზები. თალის ღერძის განტოლება მოცემულია შემდეგი სახით (ნახ. 304)



ნახ. 304.

$$y_1 = \frac{f}{l_1^2} x^2. \quad (118)$$

განივი კვეთის ინერციის მომენტი იცვლება კანონით

$$I = \frac{I_0}{\cos \varphi},$$

შივილოთ $ds = \frac{ds}{\cos \varphi},$

მაშინ $\frac{ds}{I} = \frac{dx}{I_0}$

თუ უცნობებს გადავიტანთ სიმძიმის ღრეკალ ცენტრში, გვექნება

$$X_1 = -\frac{\partial_{1P}}{\partial_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\partial_{2P}}{\partial_{22}}; \quad X_3 = -\frac{\partial_{3P}}{\partial_{33}}. \quad (119)$$

ღრეკალი ცენტრის მდებარეობა განისაზღვრება (106) ფორმულით:

$$y_0 = \frac{\int y_1 \frac{ds}{I}}{\int \frac{ds}{I}} = \frac{2 \int_0^{l_1} \frac{f}{l_1^2} x^2 \frac{dx}{I_0}}{2 \int_0^{l_1} \frac{dx}{I_0}} = \frac{f}{3}. \quad (120)$$

განესაზღვროთ ∂_{11} , ∂_{22} და ∂_{33} . თუ მხედველობაში არ მივიღებთ გრძივი ძალის გავლენას, გვექნება

$$\partial_{11} = \int M_1^2 \frac{ds}{EI} = 2 \int_0^{l_1} y^2 \frac{ds}{EI} = \frac{2}{EI_0} \int_0^{l_1} (y_0 - y_1)^2 dx = \frac{2}{EI_0} \int_0^{l_1} \left(\frac{f}{3} - \frac{f}{l_1^2} x^2 \right)^2 dx = \frac{8f^2 l_1}{45EI_0};$$

$$\partial_{22} = \int M_2^2 \frac{ds}{EI} = 2 \int_0^{l_1} x^2 \frac{ds}{EI} = \frac{2}{EI_0} \int_0^{l_1} x^2 dx = \frac{2l_1^3}{3EI_0};$$

$$\partial_{33} = \int M_3^2 \frac{ds}{EI} = 2 \int_0^{l_1} \frac{ds}{EI} = \frac{2}{EI_0} \int_0^{l_1} dx = \frac{2l_1}{EI_0}.$$

ძირითად სისტემაზე ვიმოქმედოთ ერთეული ძალით (ნახ. 304, ბ)-
როცა $x > a$, $M_p = -(x-a)$;

როცა $x < a$, $M_p = 0$.

გრძივი ძალის გავლენის გარეშე მივიღებთ

$$\delta_{1p} = \int M_p M_1 \frac{ds}{EI} = \int_a^{l_1} (x-a) \left(\frac{f}{3} - \frac{f}{l_1^2} x^2 \right) \frac{dx}{EI_0} = -\frac{f}{12EI_0 l_1^2} (l_1^2 - a^2)^2 =$$

$$= -\frac{f l_1^2}{12EI_0} (1 - \xi^2)^2;$$

$$\delta_{2p} = \int M_p M_2 \frac{ds}{EI} = -\int_a^{l_1} (x-a)x \frac{dx}{EI_0} = -\frac{1}{EI_0} \left(\frac{l_1^3}{3} - \frac{a l_1^2}{2} - \frac{a^2}{3} + \frac{a^3}{2} \right) =$$

$$= -\frac{l_1^3}{6EI_0} (2 - 3\xi + \xi^2);$$

$$\delta_{3p} = \int M_p M_3 \frac{ds}{EI} = -\int_a^{l_1} (x-a) \frac{dx}{EI_0} = -\frac{1}{EI_0} \left(\frac{l_1^2}{2} - a l_1 + \frac{a^2}{2} \right) = -\frac{l_1^2}{2EI_0} (1 - \xi)^2.$$

ამ ფორმულებში $\xi = \frac{a}{l_1}$. გადაადგილებათა მიღებულ მნიშვნელობებს, თუ შევიტანთ (119) ფორმულაში, მივიღებთ

$$X_1 = \frac{15}{32} \frac{l_1}{f} (1 - \xi^2)^2 = \frac{l_1}{f} \eta_{\text{B}}; \quad (121)$$

$$X_2 = \frac{1}{4} (2 - 3\xi + \xi^2); \quad (122)$$

$$X_3 = \frac{l_1}{4} (1 - \xi)^2. \quad (123)$$

ეს ფორმულები მიღებულია იმ შემთხვევაში, როდესაც ძალა $P=1$ მოთავსებულია მარცხენა ნახევართაზე: როცა ერთეული ძალა გადავა მარჯვენა ნახევართაზე, მაშინ X_1 და X_3 -ის მნიშვნელობები მეორდება სიმეტრიულად, ხოლო X_2 ირიბადსიმეტრიულია და შეიცვლის ნიშანს.

თუ (121÷123) ფორმულებში ξ -ის მიცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობებს 0-დან 1-მდე, მივიღებთ X_1 , X_2 და X_3 -ის გავლენის ხაზებს.

უცნობების გავლენის ხაზების აგების შემდეგ გადავდივართ შინაგანი ძალების და რეაქციების გავლენის ხაზების აგებაზე.

მღუნავეი მომენტი კლიტეში:

$$M_c = X_3 - X_1 \gamma_0 = \frac{l_1}{4} (1 - \xi)^2 - \frac{15}{32} \frac{l_1}{f} \frac{f}{3} (1 - \xi^2)^2 =$$

$$= l_1 \left[\frac{1}{4} (1 - \xi)^2 - \frac{5}{32} (1 - \xi^2)^2 \right]. \quad (124)$$

თუ აღვნიშნავთ

$$\eta_c = \frac{1}{4} (1-\xi)^2 - \frac{5}{32} (1-\xi^2)^2,$$

მაშინ

$$M_c = l_1 \eta_c. \quad (124')$$

მღუნავი მომენტი ქუსლში.

როდესაც დატვირთულია მარცხენა ნახევართაღი, მაშინ

$$M_A = M_p^0 + X_3 + X_2 l_1 + X_1 \frac{2}{3} f. \quad (125)$$

მოკემული დატვირთვით ($P=1$) გამოწვეული მღუნავი მომენტი ძირითად სისტემაში

$$M_p^0 = -1(l_1 - a) = -l_1(1-\xi).$$

თუ (125) ფორმულაში შევიტანთ სათანადო სიდიდეებს, მივიღებთ

$$\begin{aligned} M_A &= -l_1(1-\xi) + \frac{l_1}{4} (1-\xi)^2 + \frac{l_1}{4} (2-3\xi+\xi^2) + \frac{5l_1}{16} (1-\xi^2)^2 = \\ &= l_1 \left[\frac{1}{4} (1-\xi)^2 + \frac{1}{4} (2-3\xi+\xi^2) + \frac{5}{16} (1-\xi^2)^2 - (1-\xi) \right] \end{aligned} \quad (126)$$

ან

$$M_A = l_1 \eta_A, \quad (126')$$

სადაც

$$\eta_A = \frac{1}{4} (1-\xi)^2 + \frac{1}{4} (2-3\xi+\xi^2) + \frac{5}{16} (1-\xi^2)^2 - (1-\xi).$$

როდესაც ტვირთი მოქმედებს მარჯვენა ნახევართაღზე, მაშინ მღუნავი მომენტი ქუსლში

$$M_A = X_3 + X_2 l_1 + X_1 \frac{2}{3} f = l_1 \left[\frac{1}{4} (1-\xi)^2 + \frac{1}{4} (2-3\xi+\xi^2) + \frac{5}{16} (1-\xi^2)^2 \right], \quad (127)$$

ან

$$M_A = l_1 \eta'_A, \quad (127')$$

სადაც

$$\eta'_A = \frac{1}{4} (1-\xi)^2 + \frac{1}{4} (2-3\xi+\xi^2) + \frac{5}{16} (1-\xi^2)^2.$$

ხაყრდენი რეაქციები

ერთეული ძალა მოქმედებს მარცხენა ნახევართაღზე

$$\left. \begin{aligned} V_a &= 1 - X_2 = \frac{1}{4} (2+3\xi-\xi^2); \\ V_b &= X_2 = \frac{1}{4} (2-3\xi+\xi^2). \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

ერთეული ძალა მოქმედებს მარჯვენა ნახევართაზე (X_2 ნიშანს იცვლის)

$$\left. \begin{aligned} V_a = X_2 &= \frac{1}{4} (2 - 3\xi + \xi^2); \\ V_b = 1 - X_2 &= \frac{1}{4} (2 + 3\xi - \xi^2). \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

განბრჯენის (X_1), მლუნავი მომენტების კლიტეში და მეოთხედში და აგრეთვე რეაქციების გავლენის ხაზების ორდინატები მოყვანილია მე-12 ცხრილში.

ცხრილი 12.

$\xi = \frac{a}{l_1}$	η_H	η_C	η_A	η'_A	V_a	V_b
0,0	0,469	0,0937	0,0625	0,0625	0,500	0,500
0,1	0,459	0,0493	0,0340	0,0835	0,425	0,575
0,2	0,432	0,0160	0,000	0,0960	0,352	0,648
0,3	0,388	-0,0069	-0,0369	0,0995	0,282	0,718
0,4	0,331	-0,0203	-0,0735	0,0946	0,216	0,784
0,5	0,264	-0,0254	-0,1055	0,0720	0,156	0,844
0,6	0,192	-0,0240	-0,1280	0,0640	0,104	0,896
0,7	0,122	-0,0181	-0,1355	0,0430	0,061	0,939
0,8	0,061	-0,0102	-0,1205	0,0225	0,028	0,972
0,9	0,017	-0,0031	-0,0790	0,0065	0,007	0,993
1,0	0,000	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0

გავლენის ხაზები გამოსახულია 305-ე ნახაზზე.

2. თაღის მთელ სიგრძეზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი. თანაბრად განაწილებული ტვირთი წარმოვიდგინოთ უსასრულოდ ბევრ ელემენტარულ qda შეყურსულ ძალებად (ნახ. 306), მაშინ, თუ (121) ფორმულაში ერთეულის მაგიერ შევიტანოთ qda -ს და გავაინტეგრებთ 0-დან l_1 -მდე, მივიღებთ:

$$H = X_1 = 2 \frac{15}{32} \frac{l_1}{f} q \int_0^{l_1} \left(1 - \frac{a^2}{l_1^2}\right)^2 da = \frac{15}{16} \frac{l_1}{f} q \left(a - \frac{2a^3}{3l_1^2} + \frac{a^5}{5l_1^4} \right)_0^{l_1} = \frac{ql_1^2}{2f}.$$

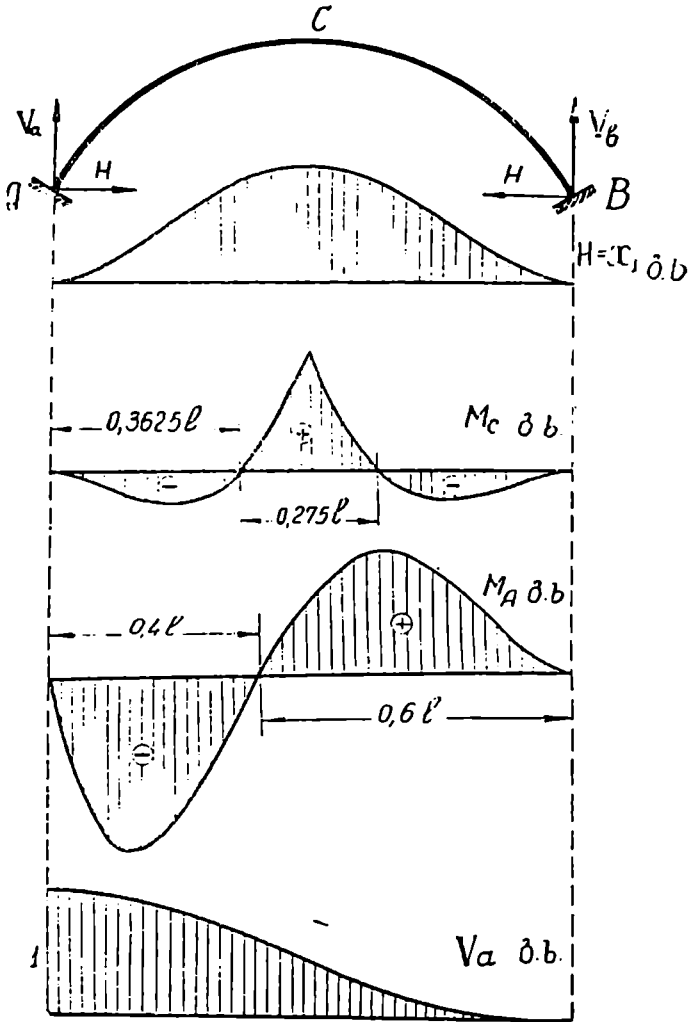
მაშასადამე,

$$H = \frac{ql^2}{8f}. \quad (130)$$

მლუნავი მომენტი კლიტეში (124) ფორმულის საფუძველზე იქნება

$$M_c = 2ql_1 \int_0^{l_1} \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{a}{l_1}\right)^2 - \frac{5}{32} \left(1 - \frac{a}{l_1^2}\right)^2 \right] da = 2ql_1 \left[\frac{1}{4} \left(a - \frac{a^2}{l_1} + \frac{a^3}{3l_1^2} \right) - \frac{5}{32} \left(a - \frac{2a^3}{3l_1^2} + \frac{a^5}{5l_1^4} \right) \right]_0^{l_1} = 2ql_1 \left(\frac{l_1}{12} - \frac{l_1}{12} \right) = 0.$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ ვლუნავი მომენტი ქუსლში და ნებისმიერ კვეთში ტოლია ნულია.



3. თაღის ნახევარმალზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი (ნახ. 307). ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ: განბრუნენ

$$H = X_1 = \frac{15}{32} \frac{l_1}{f} q \int_0^{l_1} \left(1 - \frac{a^2}{l_1^2}\right)^2 da = \frac{ql^2}{16f}, \quad (131)$$

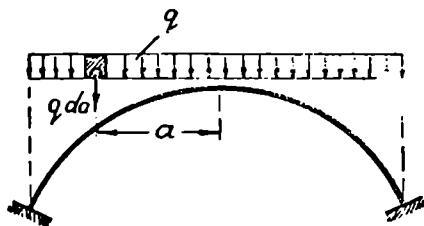
მლუნავე მომენტი კლიტეში

$$M_C = ql_1 \int_0^{l_1} \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{a}{l_1} \right)^2 - \frac{5}{32} \left(1 - \frac{a^2}{l_1^2} \right)^2 \right] da = 0,$$

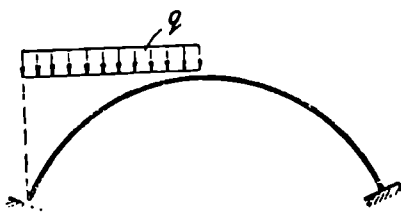
მლუნავე მომენტი ქუსლში

$$M_A = ql_1 \int_0^{l_1} \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{a}{l_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(2 - 3 \frac{a}{l_1} + \frac{a^2}{l_1^2} \right) + \frac{5}{16} \left(1 - \frac{a^2}{l_1^2} \right)^2 - \left(1 - \frac{a}{l_1} \right) \right] da = -\frac{ql^2}{64}.$$

ძლუნავ მომენტს მარჯვენა ქუსლში ექნება იგივე სიდიდე, აღებული დადებითი ნიშნით.



ნახ. 306.



ნახ. 307.

მაშასადამე, მლუნავე მომენტი ქუსლში

$$M = -\frac{ql^2}{64}. \quad (132)$$

საყრდენი რეაქციები

$$\left. \begin{aligned} V_a &= ql_1 - q \int_0^{l_1} \left(2 - 3 \frac{a}{l_1} + \frac{a^2}{l_1^2} \right) da = \frac{13}{32} ql; \\ V_b &= q \int_0^{l_1} \left(2 - 3 \frac{a}{l_1} + \frac{a^2}{l_1^2} \right) da = \frac{3}{32} ql. \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

4. საანგარიშო მლუნავე მომენტების განსაზღვრა. გავლენის ხაზების შემდეგ, ჩვენ უნდა გამოვთვალოთ მაქსიმალური საანგარიშო მლუნავე მომენტი ამა თუ იმ კვეთში.

დადებითი მლუნავე მომენტის მისაღებად უნდა დავტვირთოთ გავლენის ხაზის დადებითი უბანი, უარყოფითი მომენტის მისაღებად კი უარყოფითი უბანი. მაგალითად, თუ გვინდა გამოვთვალოთ მაქსიმალური საანგარიშო

მოშენტი კლიტეში, საჭიროა ავავოთ მისი გავლენის ხაზი (ნახ. 305) და დავტვირთოთ სათანადოდ: დადებითი მლუნავი მოშენტის მისაღებად დადებითი უბანი (სიგრძით $0,275l$) და უარყოფითი მლუნავი მოშენტის მისაღებად კი უარყოფითი უბანი (სიგრძით $2 \cdot 0,3625l$). გავლენის ხაზის დატვირთული უბნის ფართობი გადამრავლებული დატვირთვის ინტენსივობაზე შოგვეცემს საძიებელ მოშენტს.

დადებითი მოშენტი

$$M_c = q\omega = q2l_1 \int_0^{0,275l_1} \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{a}{l_1} \right)^2 - \frac{5}{32} \left(1 - \frac{a^2}{l_1^2} \right) \right] da = 0,0056ql^2.$$

უარყოფითი მოშენტის მისაღებად მთლიანი დატვირთვით გამოწვეულ მლუნავ მოშენტს გამოვაკლოთ დადებითი უბნის დატვირთვით მიღებული მოშენტი

$$M_c = 0 - 0,0056ql^2 = -0,0056ql^2.$$

მაშასადამე, მაქსიმალური მლუნავი მოშენტი კლიტეში:

$$M_{c(max)} = \pm 0,0056ql^2. \quad (134)$$

ქუსლის მაქსიმალური მოშენტის მისაღებად უნდა დავტვირთოთ სათანადოდ გავლენის ხაზის დადებითი და უარყოფითი უბანი (ნახ. 305).

სათანადო ანგარიშის შესრულების შემდეგ გვექნება (M_A -ს ინტეგრალის ზღვრებს ვიღებთ $0,2l_1$ -დან l_1 -მდე):

$$M_A(max) = \pm 0,01718ql^2. \quad (135)$$

§ 70. უსახსრო თაღის გავლენის ხაზების აგება ღრეკადი ტვირთების საშუალებით

წინა პარაგრაფში ჩვენ გავარჩიეთ პარაბოლური თაღის გავლენის ხაზების აგება ანალიზურად. რადგანაც თაღის ღერძის განტოლება მოცემული იყო ალგებრული სახით, ამიტომ გავლენის ხაზების განტოლებებიც მივიღეთ მარტივად ალგებრული სახით.

ნებისმიერი მოხაზულობის თაღისათვის გავლენის ხაზების აგება უნდა ვაწარმოოთ ღრეკადი ტვირთების საშუალებით, რადგან ეს ხერხი სხვა წესებთან შედარებით უფრო მარტივია.

ღრეკადი ტვირთების მეთოდი, რომელიც ჩვენ უკვე გამოვიყენეთ ორსახსრიანი თაღის ანგარიშის დროს, დამყარებულია გადაადგილებათა ურთიერთობის პრინციპზე. თუ ზედმეტი უცნობები გადატანილია სიმძიმის ღრეკად ცენტრში, მაშინ უცნობები განისაზღვრება (119) ფორმულით. გადაადგილებათა ურთიერთობის პრინციპის თანახმად δ_{1p} , δ_{2p} და δ_{3p} შევეცვალოთ სათანადოდ δ_{p1} , δ_{p2} და δ_{p3} -ით, მაშინ გვექნება

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\delta_{p2}}{\delta_{22}}; \quad X_3 = -\frac{\delta_{p3}}{\delta_{33}}. \quad (136)$$

δ_{p1} , δ_{p2} , δ_{p3} წარმოადგენს შესაბამისად $X_1=1$, $X_2=1$ და $X_3=1$ -საგან გამო-

წვეულ ჩაღუნვის ხაზებს ძირითად სისტემაში. ჩაღუნვის ხაზების აგება მარტივად წარმოებს დრეკადი ტვირთების საშუალებით.

ანგარიშს ვიწყებთ დრეკადი ცენტრის კოორდინატის გამოთვლით. როგორც ვიცით, დრეკადი ცენტრის მდებარეობა განისაზღვრება პირობიდან $\delta_{12} = 0$, ე. ი. კონსოლის ბოლო წერტილის გადაადგილება პირობიდან მიმართულებით, ერთეული მომენტისაგან ($X_3 = 1$) გამოწვეული, ნულის ტოლია.

δ_{12} ვიანგარიშოთ დრეკადი ტვირთებით, ე. ი. ფიქტიური მღუნავი მომენტის ეპიურის ორდინატებით (იხ. § 20). ამისათვის ძირითად სისტემაზე ვიმოქმედოთ მომენტით $X_3 = 1$ (ნახ. 308, ა) და განესაზღვროთ მისგან გამოწვეული დრეკადი ტვირთები (38) ფორმულით; მოვდოთ ეს ძალები ფიქტიურ ნაშენზე პირობიდან დაგვიშვებულ (ნახ. 308, ბ) და გამოვთვალოთ მღუნავი მომენტი დრეკადი ცენტრის (0) მიმართ, რომელიც უნდა იყოს ნულის ტოლი:

$\delta_{12} = \sum W_n y_n = \sum W_n (y_0 - y_1) = 0$,
საიდანაც

$$y_0 = \frac{\sum W_n y_1}{\sum W_n}. \quad (137)$$

დრეკადი ცენტრის კოორდინატის მისაღებად დრეკადი ტვირთების მომენტების ჯამი კლიტზე გამავალი პირობიდან დაგვიშვებულ დრეკადი ტვირთების ჯამზე.

დრეკადი ტვირთი გამოითვლება ფორმულით

$$W_n = \frac{S}{6EI_n} (2M_n + M_{n-1}) + \frac{S_{n+1}}{6EI_{n+1}} (2M_n + M_{n+1}). \quad (138)$$

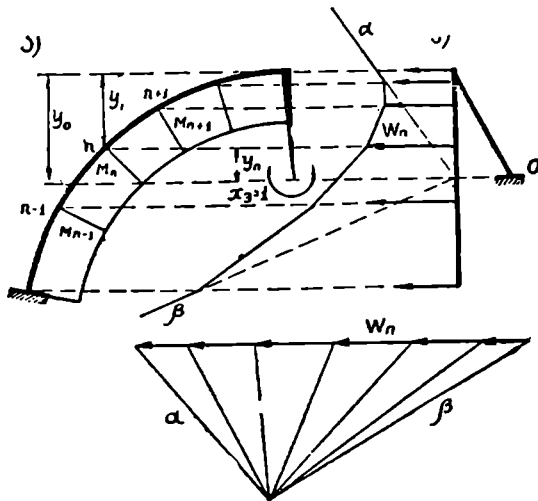
რადგანაც

$$M_{n-1} = M_n = M_{n+1} = 1,$$

ამიტომ

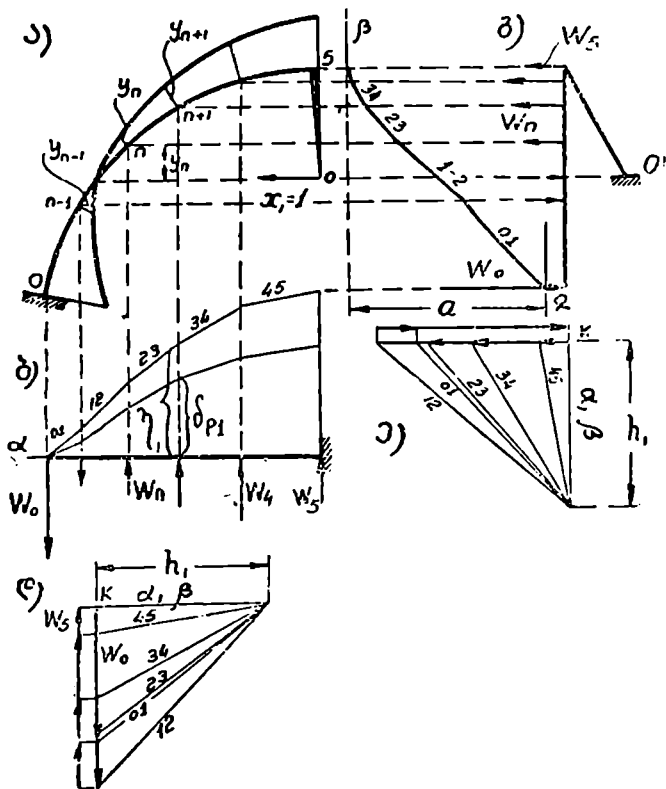
$$W_n = \frac{S_n}{2EI_n} + \frac{S_{n+1}}{2EI_{n+1}}. \quad (139)$$

დრეკადი ცენტრის მდებარეობა განისაზღვრება გრაფიკულადაც: ძალთა და თოკის შრავალკუთხედის საშუალებით (W_n ძალების ტოლქმედმა უნდა გაიაროს დრეკად ცენტრზე).



ნახ. 303

განბჯენის (X_1) გავლენის ხაზის აგება. ძირითად სისტემაზე ვამოქმედოთ $X_1=1$ და ავავოთ მისგან გამოწვეული ჩაღუნვის ხაზი δ_{P1} . თალი დაეყოთ რამდენიმე ნაწილად და გამოვთვალოთ დაყოფის ადგილებზე მლუნაე მომენტის ეპიურის ორდინატები გამოწვეული $X_1=1$ ძალით (ნახ. 309 ა).



ნახ. 309.

დრეკადი ტვირთების საერთო ფორმულაში შევიტანოთ მლუნაე მომენტის ეპიურის ორდინატების მნიშვნელობანი, მაშინ მივიღებთ:

$$W_n = \frac{S}{6EI_n} (2\gamma_n + \gamma_{n-1}) + \frac{S_{n+1}}{6EI_{n+1}} (2\gamma_n + \gamma_{n+1}). \quad (140)$$

ამ ფორმულით გაანგარიშებული დრეკადი ტვირთებით ვიმოქმედოთ ფიქტიურ ნაშენზე, ამ შემთხვევაში ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებულ პორიზონტალურ ძელზე, და ავავოთ ფიქტიური მლუნაე მომენტის ეპიურა, რომელიც იქნება δ_{P1} ჩაღუნვის ხაზი (ნახ. 309, ბ). რადგანაც $X_1=1$ ძალით გამოწვეული დრეკადი ხაზის დახრის კუთხე პორიზონტალ კლიტეში ნულის

ტოლია, ამიტომ ფიქტიური განივი ძალი კლიტეში უნდა იყოს ნულის ტოლი (მობრუნების კუთხე ფიქტიური განივი ძალის პროპორციულია). მაშასადამე, დრეკადი ტვირთების აღგებრული ჯამი ნულის ტოლია

$$\sum_{n=0}^f W_n = 0.$$

ეს პირობა ამოწმებს როგორც დრეკადი ტვირთების ანგარიშს, ისე დრეკადი ცენტრის ვანსაზღვრის სისწორეს.

X_1 -ის მრიცხველის (δ_{p1}) ვანსაზღვრის შემდეგ გადადევნართ მისი მნიშვნულის δ_{11} -ის გამოთვლაზე. δ_{11} წარმოადგენს ხისტი კონსოლების ბოლო წერტილების ურთიერთ დაშორებას $X_1=1$ ძალით გამოწვეულს. თუ განვიხილავთ ნახევართაღს, მაშინ კონსოლის O წერტილის პორიზონტალური გადაადგილება იქნება $\frac{\delta_{11}}{2}$, რომელიც შეიძლება მიღებული იყოს დრეკადი ტვირთების საშუალებით.

რადგანაც, გრძივი ძალების გავლენას დრეკადი ტვირთების სიდიდეზე მხედველობაში არ ვიღებთ, ამიტომ დრეკად ტვირთებს $X_1=1$ ძალით გამოწვეული პორიზონტალური გადაადგილებისათვის ექნებათ ისეთივე მნიშვნელობები, როგორც ვერტიკალური გადაადგილებისათვის.

გამოთვლილი დრეკადი ტვირთებით ვიმოქმედოთ ვერტიკალურ ფიქტიურ კონსოლზე პორიზონტალურად (ნახ. 309, გ) და გავიანგარიშოთ მლუწნავი მომენტი O წერტილის მიმართ, რომელიც იქნება $\frac{\delta_{11}}{2}$. δ_{p1} -ის ორდინატების ფარდობა δ_{11} -ზე მოგვცემს X_1 -ის გავლენის ხაზის ორდინატებს.

X_1 -ის გავლენის ხაზის ორდინატების გრაფიკული ანგარიშისათვის უნდა ავაგოთ ძალთა და თოკის მრავალკუთხედი. რადგანაც დრეკადი ტვირთების ჯამი ნულის ტოლია, ამიტომ ძალთა მრავალკუთხედის დასაწყისი და ბოლო ერთმანეთს უნდა დაემთხვეს x წერტილში.

თოკის მრავალკუთხედის თვისების თანახმად სტატიკური მომენტი ნებისმიერ კვეთში ტოლია თოკის მრავალკუთხედის ორდინატის და საპოლუსო მანძილის ნამრავლის (ნახ. 309, ბ, დ, ე, ი).

$$\delta_{p1} = M_{\theta} = \eta_1 h_1.$$

δ_{11} -ის საპოვნელად პორიზონტალურ დრეკად ძალებზე ავაგოთ (ნახ. 309, ე) ძალთა მრავალკუთხედი (წინა მრავალკუთხედი უცვლელად მოვადრწნოთ 90° -ით) და შემდეგ კი თოკის მრავალკუთხედი. თოკის მრავალკუთხედის α და β გვერდები (ურთიერთ პარალელურებია) დრეკად ცენტრზე გამავალ პორიზონტალურ ღერძზე მოკვეთს α მონაკვეთს, რომლის ნამრავლი საპოლუსო მანძილზე h_1 -ზე მოგვცემს სტატიკურ მომენტს O წერტილის მიმართ,

ე. $\frac{\delta_{11}}{2} - ს.$

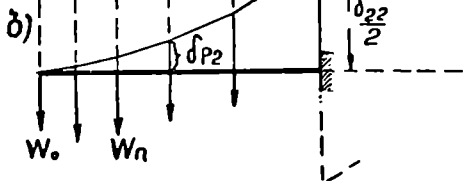
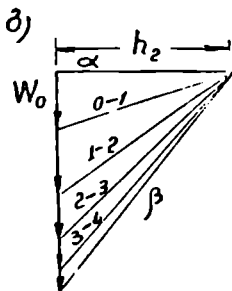
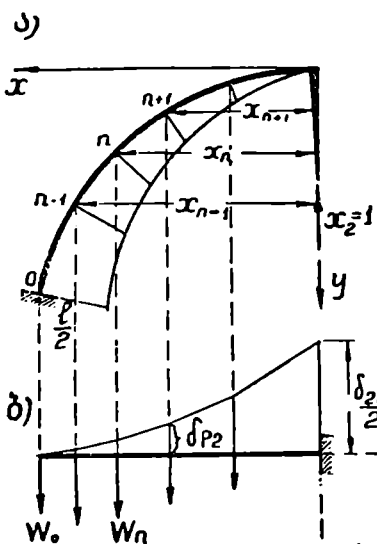
მაშასადამე, $\delta_{11} = 2ah_1$. მოძრავი ერთეული ძალის ნებისმიერი მდგომარეობისას X_1 -ის გ. ხ. (გავლენის ხაზის) ორდინატა გამოითვლება ფორმულით.

$$X_1 = \frac{\eta h_1}{2ah_1} = \frac{\eta_1}{2a}$$

X_2 -ის გავლენის ხაზის აგება. ძირითად სისტემაზე ვიმოქმედოთ $X_2 = 1$ ძალით და ავაგოთ მლუნავი მომენტის ეპიურა (ნახ. 310, ა), რომლის საშუალებითაც გამოვთვალოთ ფიქტიური დრეკადი ტვირთები. დრეკადი ტვირთების ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$W_n = \frac{S}{6EI_n} (2x_n + x_{n-1}) + \frac{S_{n+1}}{6EI_{n+1}} (2x_n + x_{n+1}). \quad (141)$$

ამ ძალებისაგან გამოწვეული მლუნავი მომენტის ეპიურა ფიქტიურ კონ-



ნახ. 310.

სოლზე მოგვეცემს δ_{p2} ჩალუნეის ხაზს (ნახ. 310, ბ), რომელიც თალის მარჯვენა ნაწილზე ნიშანს შეიცვლის (აღნიშნულია წყვეტილი ხაზით). δ_{22} წარმოადგენს $X_2 = 1$ ძალით გამოწვეულ გადაადგილებას თავისივე მიმართულებით და ტოლია δ_{p2} ჩალუნეის ხაზის ორდინატის გაორკეცებული სიდიდის კლიტის შესაბამ კვეთში. δ_{p2} -ის ორდინატების გაყოფით δ_{22} -ზე მივიღებთ X_2 -ის გავლენის ხაზს. X_2 ირიბადისმეტრიულია.

წინა შემთხვევის

ანალოგიურად ანგარიში შეიძლება ვაწარმოოთ გრაფიკულადაც სათანადო ძალთა (ნახ. 310, გ) და თოკის მრავალკუთხედის საშუალებით (უკანასკნელი ნახაზზე არ არის აგებული):

$$X_2 = \frac{\eta_2 h_2}{2bh_2}$$

სადაც η_2 თოკის მრავალკუთხედის ორდინატია, b კი კლიტეში გამავალი y ლერძის მონაკვეთი მიღებული α და β გვერდების გადაკვეთით (თოკის მრავალკუთხედის მაქსიმალური ორდინატა).

X_3 -ის გავლენის ხაზის აგება. ძირითად სისტემაზე ვიმოქმედოთ $X_3 = 1$ ძალით, ავაგოთ მღუნავი მომენტის ეპიურა (ნახ. 311, ა) და გამოვთვალოთ დრეკადი ტვირთები. დრეკადი ტვირთების მნიშვნელობები ჩვენ უკვე გამოვთვალეთ დრეკადი ცენტრის განსაზღვრის დროს. ამ ძალებით ვიმოქმედოთ პორიზონტალურ კონსოლზე და ავაგოთ მღუნავი მომენტის ეპიურა. ეს იქნება \bar{m}_3 ჩალუნვის ხაზი (ნახ. 311, ბ). $\frac{\bar{m}_{32}}{2}$

წარმოადგენს ერთეული ($X_3 = 1$) მომენტით გამოწვეული ნახევარბრუნის მობრუნების კუთხეს კლიტეში და უდრის დრეკადი ტვირთებით გამოწვეულ განივ ძალას კლიტეში.

მაშასადამე, \bar{m}_{33} ტოლია გაორკეცებული ფიქტიური განივი ძალის კლიტეში, ე. ი. ნახევარბრუნისათვის მიღებული დრეკადი ტვირთების გაორკეცებული ჯამის. X_3 -ის გ. ხ. ორდინატებს მივიღებთ, თუ \bar{m}_{32} -ს გავყოფთ \bar{m}_{33} -ზე.

\bar{m}_{33} -ს მისაღებად გრაფიკულად ავაგოთ ძალთა (ნახ. 311, გ) და თოკის მრავალკუთხედი (ეს უქანასკნელი ნახაზზე არ არის ნაჩვენები):

$P = 1$ ძალის ნებისმიერი მდგომარეობისათვის

$$X_3 = \frac{\eta_3 h_3}{2R},$$

სადაც η_3 —თოკის მრავალკუთხედის ორდინატაა, R კი—დრეკადი ტვირთების ჯამი.

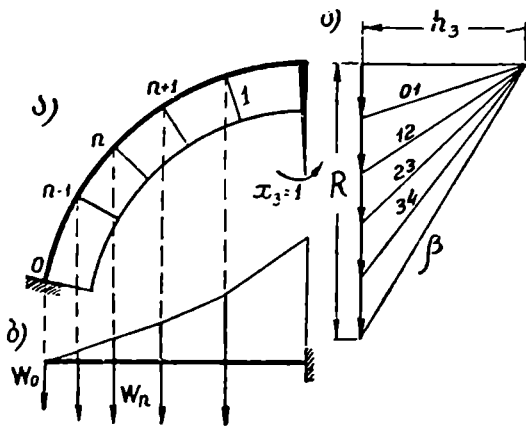
თუ საპოლუსო მანძილად მივიღებთ $h_3 = 2R$, მაშინ

$$X_3 = \frac{\eta_3 \cdot h_3}{h_3} = \eta_3,$$

და თოკის მრავალკუთხედის ორდინატა უშუალოდ მოგვცემს X_3 -ის გ. ხაზის ორდინატას. X_3 -ის გ. ხ. სიმეტრიულია.

η_1 , η_2 და η_3 ორდინატები გაიზომება ნახაზის მასშტაბით, a და b კი—ძალთა მასშტაბით.

ზემოთ გარჩეულ ანგარიშებში დაცულია ნიშნების წესი, რომელიც მიღებული გვექონდა § 20-ში. ეპიურებს (ნამდვილს და ფიქტიურს) ვაგებთ გაკიმული ბოქკოების მხარეს და დრეკად ტვირთებს მივმართავთ ერთეული ძალებით გამოწვეული ნამდვილი ეპიურების მიმართულებით. ასეთნაირად მიღებული ფიქტიური ეპიურა ემთხვევა საძიებელ ჩალუნვის ხაზს \bar{m}_3 -ს. ჩვენ



ნახ. 311.

შემთხვევაში δ_p , ეპიურები აგებულია ზედა მხარეს, ე. ი. მოკმედი $P=1$ ვერტიკალური ძალის საწინააღმდეგო მიმართულებით. მაშასადამე, δ_p ჩაღუნვის ხაზები უარყოფითია და X_1, X_2, X_3 უცნობები კი დადებითი (იხ. ფორ. 136).

უცნობების გ. ხ. აგების შემდეგ შინაგანი ძალების გავლენის ხაზების აგება წარმოებს 113-ე ფორმულის საშუალებით.

§ 71. დრეკადი ტვირთების საშუალებით უსახსრო თალის ანგარიშის ვაგალითი

ავაგოთ პარაბოლური უსახსრო თალის გავლენის ხაზები. მოცემულია: $l=40$ მ; $f=10$ მ; თალის კვეთის ინერციის მომენტის ცვლილების კანონი

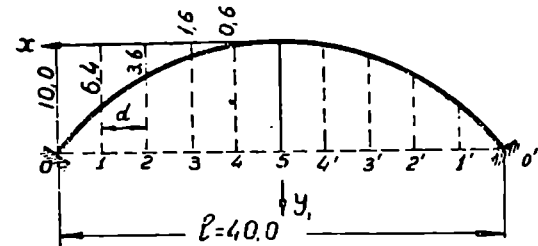
$$I = \frac{I_0}{\cos \varphi}$$

და თალის ღერძის

$$y = \frac{4f}{l^2} x^2 \quad (\text{ნახ. 312}).$$

I_0 არის თალის კვეთის ინერციის მომენტი კლიტეში.

გადაწყვეტა. თალის მალი გავყოთ 10 ტოლ ნაწილად და გამოვთვალოთ თალის ღერძის ორდინატები (ცხრილი 13).



ნახ. 312.

1. სიმძიმის დრეკადი ცენტრის კოორდინატის y_0 -ის განსაზღვრა. დრეკადი ცენტრის კოორდინატი განისაზღვრება ფორმულით:

$$y_0 = \frac{\sum W_n y_1}{\sum W_n}$$

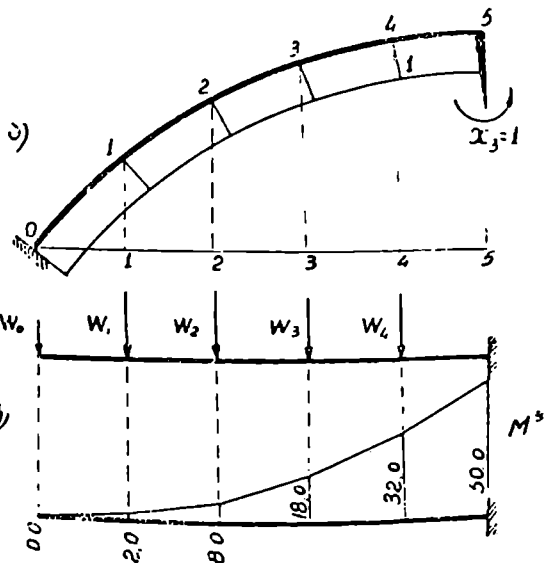
როგორც ვნახეთ, W_n დრეკადი ტვირთების გამოსათვლელად ძირითად სისტემაზე უნდა ვიმოკმედოთ $X_3=1$ -ით და ავაგოთ მღუნავი მომენტის ეპიურა (ნახ. 313, ა), სადაც $M_{n-1} = M_n =$

$$= M_{n+1} = 1; S_n = \frac{d}{\cos \varphi} \quad \text{და}$$

$$\frac{S_n}{I_n} = \frac{S_{n+1}}{I_{n+1}} = \frac{d}{I_0}$$

დრეკადი ტვირთის ფორმულა (138) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$W_n = \frac{d}{EI_0}$$



ნახ. 313.

ანგარიშის გამართებების მიზნით დრეკადი ტვირთები გავადილოთ $\frac{EI_0}{d}$ -ჯერ, მაშინ გვექნება:

$$W'_n = \frac{EI_0}{d} W_n = 1,0.$$

ცხრილი 13

დანაყოფის №		y_1	W'_n	$W'_n y_1$	$\delta_{p_0} = M_1^0$	$X_3 = -\frac{\delta_{p_2}}{\delta_{33}}$
0	20,0	10,0	0,5	5,0	0,0	0,0
1	16,0	6,4	1,0	6,4	- 2,0	0,20
2	12,0	3,6	1,0	3,6	- 8,0	0,80
3	8,0	1,6	1,0	1,6	-18,0	1,80
4	4,0	0,6	1,0	0,6	-32,0	3,20
5	0,0	0,0	0,5	0,0	-50,0	5,00
		$\Sigma=5$	$\Sigma=17,2$			

ნულოვანი და მეხუთე კვეთისათვის

$$W'_n = \frac{EI_0}{d} W_n = 0,5.$$

დრეკადი ტვირთების სიდიდე და სტატიკური მომენტები x ღერძის მიმართ ნახევართალისათვის მოყვანილია მე-13 ცხრილში

2. X_3 გავლენის ხაზის აგება. X_3 გამოითვლება ფორმულით:

$$X_3 = -\frac{\delta_{p_2}}{\delta_{33}}.$$

δ_{p_2} არის ჩალუნვის ხაზი და აიგება $X_3 = 1$ -საგან გამოწვეული დრეკადი ტვირთების საშუალებით. ამ ტვირთებით, რომლებიც ჩვენ უკვე გვაქვს გამოთვლილი, ვიმოქმედოთ ჰორიზონტალურ კოქზე და ავაგოთ ფიქტიურა მლუნავი მომენტის ეპიურა (ნახ. 313, ბ). რადგანაც ძალებს შორის მანძილი მუდმივია, ამიტომ ფიქტიური მლუნავი მომენტის ორდინატების გამოთვლა შეიძლება ვაწარმოოთ ფორმულით

$$M_k^0 = M_{k-1}^0 + d \sum_0^{k-1} W'_n$$

მაგალითად,

$$M_1^0 = W'_0 d$$

$$M_2^0 = W'_0 2d + W'_1 d = W'_0 d + (W'_0 + W'_1) d = M_1^0 + d \sum_0^1 W'_n.$$

ფიქტიური მღუნავი მომენტის ორდინატები (δ_{33} -ის ორდინატები) მოყვანილია მე-13 ცხრილში.

$\frac{\delta_{33}}{2}$ ტოლია ნახევართაზე მოქმედი ფიქტიური ძალების ჯამის.

ნაშასადამე,

$$\delta_{33} = 2 \sum_0^5 W'_i = 2.5 = 10.$$

δ_{33} -ის ორდინატები გავყოთ δ_{33} -ზე, მივიღებთ X_3 -ის გ. ხაზის ორდინატებს (ცხრილი 13). X_3 გ. ხაზი წარმოდგენილია 316-ე ნახაზზე.

3. X_1 გავლენის ხაზის აგება. X_1 გამოითვლება ფორმულით

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}.$$

δ_{p1} წარმოადგენს $X_1 = 1$ ძალით გამოწვეულ ჩაღუნვის ხაზს და მიიღება დრეკადი ტვირთების საშუალებით (ფორ. 140):

$$W_n = \frac{S_n}{6EI_n} (2y_n + y_{n-1}) + \frac{S_{n+1}}{6EI_{n+1}} (2y_n + y_{n+1}) = \frac{d}{6EI_n} (y_{n-1} + 4y_n + y_{n+1}).$$

დრეკადი ტვირთები გავადიდოთ $\frac{6EI_0}{d}$ -ჯერ, მაშინ გვექნება

$$W'_n = \frac{6EI_0}{d} W_n = y_{n-1} + 4y_n + y_{n+1}.$$

0 წერტილისათვის ($S_{n-1} = 0$)

$$W'_0 = \frac{6EI_0}{d} W_0 = 2y_0 + y_1.$$

მე-5 წერტილისათვის ($S_{n+1} = 0$)

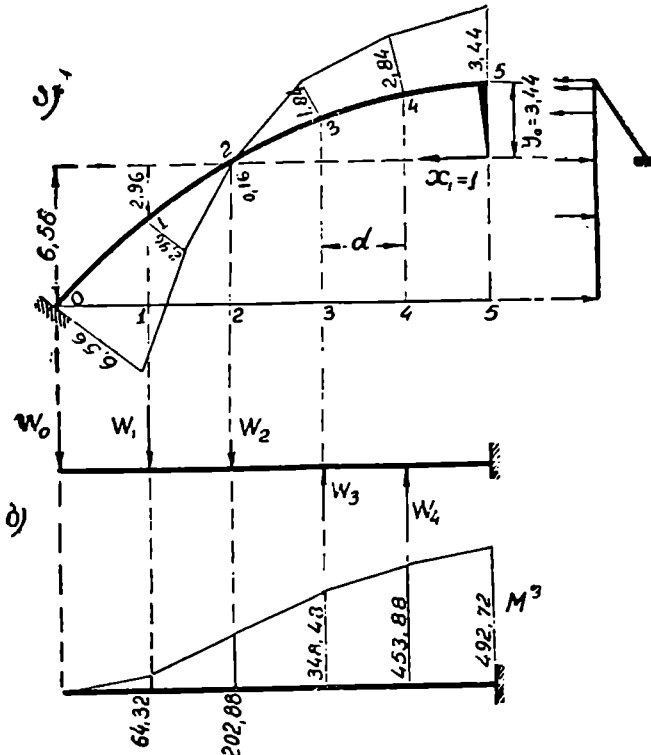
$$W'_5 = \frac{6EI_0}{d} W_5 = 2y_5 + y_4.$$

y_n ორდინატა იზომება დრეკადი ცენტრიდან (ნახ. 314, ა). დრეკადი ტვირთების გამოთვლის დროს ყურადღება უნდა მივაქციოთ y_n -ის ნიშანს. ანგარიში მოყვანილია მე-14 ცხრილში.

ფიქტიურ ნაშენზე დრეკადი ძალები მიმართულია ნამდვილი ეპიურის მხარეს (ნახ. 314, ბ). ჩაღუნვის ხაზის აგებამდე შევამოწმოთ შესრულებული ანგარიში (დრეკადი ტვირთების ჯამი ტოლი უნდა იყოს ნულის):

$$\sum W'_n = 36,41 - 36,40 = 0,01 \approx 0.$$

დანა- ყოფის №	y_n		y_{n+1}	$4y_n$	W'_n	$M_k^0 = \sum_{p=1}^k W'_p$	$W'_n y_n$	$X_1 = -\frac{\sum_{p=1}^k W'_p}{\sum_{p=1}^k y_{p+1}}$
0	-6.56	—	-2.96	-13.12	-16.08	0	105.50	0
1	-2.96	-6.56	-0.16	-11.84	-18.56	-64.32	55.00	0,124
2	-0.16	-2.96	1.84	-0.64	-1.76	-202.88	0.28	0,395
3	1.84	-0.16	2.84	7.37	10.05	-348.48	18.45	0,672
4	2.84	1.84	3.44	11,36	16,64	-453.88	47.22	0,875
5	3.44	2.84	—	6,88	9.72	-492.72	33.42	0,948
							259,87	



ნახ. 314.

ფიქტიური მლუნავი ნომენტის ეპიურის ორდინატები, გამოთვლილი ფორმულით

$$M_k^0 = M_{k-1}^0 + d \sum_0^{k-1} W'_k$$

მოყვანილია მე-14 ცხრილში, თვით ეპიურა კი—314, ბ ნახაზზე.

δ_{11} -ის საპონელად დრეკადი ტვირთები მოვდით ვერტიკალურ ფიქტიურ ნაშენზე პარიზონტალურად და გამოეთვალათ მღუნავი მომენტი დრეკადი ცენტრის მიმართ, მივიღებთ

$$\delta_{11} = 2 \sum_0^5 W'_n \gamma_n = 2 \cdot 259,87 = 519,74.$$

შენიშვნა. მამრავლი $\frac{6EI_0}{d}$ იკვეცება და ამიტომ არსად არ შეგვყავს.

X_1 -ის გავლენის ხაზის ორდინატები მოყვანილია მე-14 ცხრილში, ხოლო თვით გავლენის ხაზი კი 316-ე ნახაზზე.

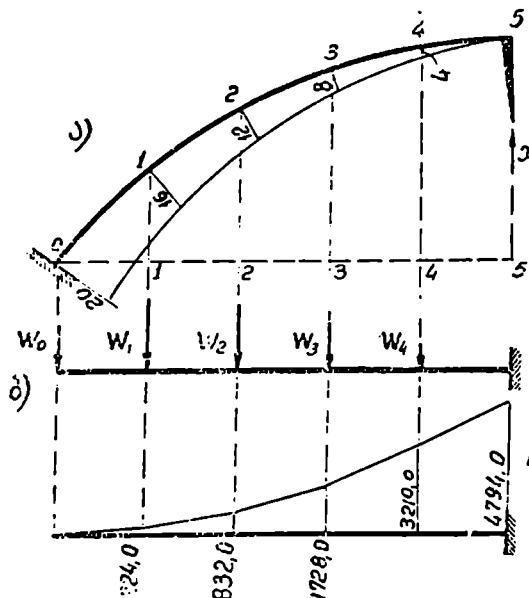
4. X_2 გავლენის ხაზის აგება. X_2 გამოითვლება ფორმულით

$$X_2 = -\frac{\delta_{p_2}}{\delta_{22}}.$$

$X_2 = 1$ ძალით გამოწვეული ჩალუნვის δ_{p_2} ხაზის მისაღებად ავავაოთ ერთეული მღუნავი მომენტის ეპიურა (ნახ. 315, ა).

დრეკადი ტვირთი გამოითვლება ფორმულით (ფორ. 141)

$$W_n = \frac{S_n}{6EI_n} (2x_n + x_{n-1}) + \frac{S_{n+1}}{6EI_{n+1}} (2x_n + x_{n+1}) = \frac{d}{6EI_0} (x_{n-1} + 4x_n + x_{n+1}).$$



ნახ. 315.

ვამარტივების მიზნით, აქაც ანგარიშს ვაწარმოებთ ფორმულით

$$W'_n = \frac{6EI_0}{d} W_n = x_{n-1} + 4x_n + x_{n+1}.$$

გინაპირა წერტილებისათვის გვექნება

$$W'_0 = \frac{6EI_0}{d} W_0 = 2x_0 + x_1;$$

$$W'_5 = \frac{6EI_0}{d} W_1 = 2x_5 + x_4.$$

დანაკითხის №	x_n	x_{n-1}		$4r_n$	W''_n	$M''_n = \delta_{ps}$	$X_2 = -\frac{\delta_{ps}}{\delta_{22}}$
0	20,0	0	16,0	40,0	56,0	0,0	0
1	16,0	20,0	12,0	64,0	96,0	-224,0	0,0234
2	12,0	16,0	8,0	48,0	72,0	-832,0	0,0869
3	8,0	12,0	4,0	32,0	48,0	-1728,0	0,180
4	4,0	8,0	0,0	16,0	24,0	-3210,0	0,335
5	0,0	4,0	—	0,0	4,0	-4794,0	0,500

δ_{22} ტოლია ფიქტიური მაქსიმალური მღუნავი მომენტის გაორკეცებული სიდიდის:

$$\delta_{22} = 2 M''_5 = 2 \cdot 4794,0 = 9588,0$$

X_2 -ის მნიშვნელობები მოყვანილია მე-15 ცხრილში. გავლენის ხაზი კი 316 ე ნახაზე.

ყველა ჩაღუნვის ხაზი δ_p უარყოფითია (ვერტიკალური P ძალის საწინააღმდეგო მიმართულება აქვს) და ამიტომ ყველა უცნობი (X_1, X_2, X_3) დადებითია, ე. ი. აქვთ არჩეული მიმართულება.

ნ. მღუნავი მომენტის, განივი და გრძივი ძალების გავლენის ზაზების აგება.

ძალები თალის ნებისმიერ კვეთში განისაზღვრება 113-ე ფორმულით. კლიტე (ნახ. 316, ა).

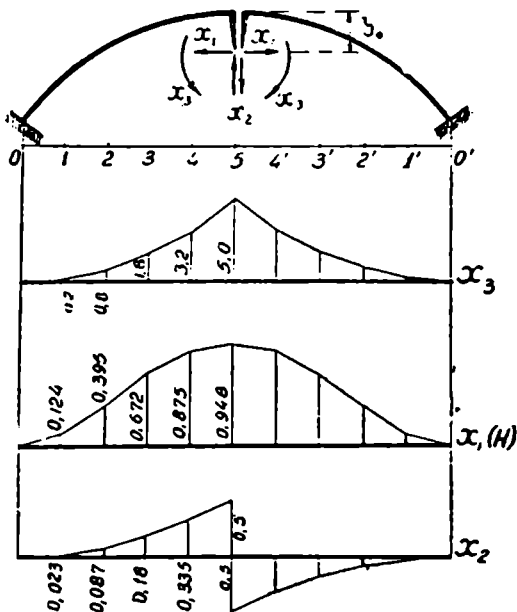
მღუნავი მომენტი

$$M_c = X_3 - X_1 y_0 = X_3 - 3,44 \cdot X_1;$$

გრძივი ძალა
განივი ძალა

$$N_c = -X_1 \text{ (მკუმშავია),}$$

$$Q_c = -X_2.$$



ნახ. 316.

გრძივი და განივი ძალების გავლენის ხაზები უკვე გვაქვს აგებული. M_c გავლენის ხაზის ორდინატები მოყვანილია მე-16 ცხრილში.

ცხრილი 16

დანაყოფის №	X_2	$-3,44 X_1$	M_c
0	0,00	0	0
1	0,20	-0,426	-0,226
2	0,80	-1,358	-0,558
3	1,80	-2,310	-0,510
4	3,20	-3,010	0,190
5	5,00	-3,255	1,745

მეოთხედი

1. მოძრავი ერთეული ძალა მოთავსებულია k კვეთის მარჯვნივ

$$M_k = -1 \left(\frac{l}{4} - a \right) - X_1 y + X_2 \frac{l}{4} + X_3$$

a მანიძილია ერთეული ძალიდან კვეთამდე.

მეოთხედში

$$y_1 = 2,5 \text{ მ და } y = y_0 - y_1 = 3,44 - 2,5 = 0,94 \text{ მ.}$$

საბოლოოდ

$$M_k = -1(10 - a) - 0,94 X_1 + 10 X_2 + X_3$$

თუ ამ ფორმულაში შევიტანთ სათანადო სიდიდეებს, მივიღებთ M_k -ის გ. ხაზის ორდინატებს: 5, 4 და 3 კვეთებში:

$$5 \text{ კვეთი } (a=0) \quad M_k = -10 - 0,94 \cdot 0,948 + 10 \cdot 0,5 + 5 = -0,89;$$

$$4 \quad (a=4 \text{ მ}) \quad M_k = -6 - 0,94 \cdot 0,875 + 10 \cdot 0,335 + 3,2 = -0,272;$$

$$3 \quad \text{„} \quad (a=8 \text{ მ}) \quad M_k = -2 - 0,94 \cdot 0,672 + 10 \cdot 0,18 + 1,8 = 0,968;$$

$$\text{მეოთხედში } (a=10 \text{ მ}) \quad M_k = -0,94 \cdot 0,53 + 10 \cdot 0,135 + 1,3 = 2,152.$$

გრძივი ძალა

$$N_k = -1 \cdot \sin \varphi - X_1 \cos \varphi + X_2 \sin \varphi;$$

განივი ძალა

$$Q_k = 1 \cdot \cos \varphi - X_1 \sin \varphi - X_2 \cos \varphi;$$

მეოთხედში

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{2f}{l} = \frac{1}{2}; \quad \cos \varphi = 0,895; \quad \sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi = 0,447.$$

ნაწასალამე,

$$N_k = -0,447 + 0,447 X_2 - 0,895 X_1;$$

$$Q_k = 0,895 - 0,895 X_2 - 0,447 X_1.$$

2. მოძრავი ერთეული ძალა მოთავსებულია k კვეთის მარცხნივ:

$$M_k = -X_1 y + X_2 \frac{l}{4} + X_3 = -0,94 X_1 + 10 X_2 + X_3$$

თუ შევიტანთ X_1 , X_2 და X_3 სათანადო მნიშვნელობებს, მივიღებთ გავლენის ხაზის ორდინატებს 2, 1 და 0 წერტილებში.

$$2 \text{ კვეთი } M_k = -0,94 \cdot 0,395 - 10 \cdot 0,0869 + 0,8 = 1,298;$$

$$1 \text{ კვეთი } M_k = -0,94 \cdot 0,124 - 10 \cdot 0,0234 + 0,2 = 0,318$$

$$0 \text{ კვეთი } M_k = 0.$$

გრძივი და განივი ძალა

$$N_k = -X_1 \cos \varphi + X_2 \sin \varphi = -0,895 X_1 + 0,447 X_2;$$

$$Q_k = -X_1 \sin \varphi - X_2 \cos \varphi = -0,447 X_1 - 0,895 X_2.$$

3. მოძრავი ერთეული ძალა მოთავსებულია მარჯვენა ნახევარ თალზე.

კვებები

$$M_k = -X_1 y - X_2 \frac{l}{4} + X_3 = -0,94 X_1 - 10 X_2 + X_3$$

$$0 \quad M_k = 0;$$

$$1 \quad M_k = -0,94 \cdot 0,124 - 0,234 + 0,2 = -0,151;$$

$$2 \quad M_k = -0,94 \cdot 0,395 - 0,869 + 0,8 = -0,441;$$

$$3' \quad M_k = -0,94 \cdot 0,672 - 1,8 + 1,8 = -0,632;$$

$$4' \quad M_k = -0,94 \cdot 0,875 - 3,35 + 3,2 = -0,972;$$

$$N_k = -X_1 \cos \varphi - X_2 \cos \varphi = -0,447 X_1 + 0,895 X_2.$$

როცა ძალა მარჯვენა ნახევართალზეა, X_2 ნიშანს იცვლის). X_1 , X_2 და X_3 -ის ორდინატები უნდა ავიღოთ აბსოლუტური სიდიდით, რადგან ნიშნები უორმულეებში უკვე გათვალისწინებულია.

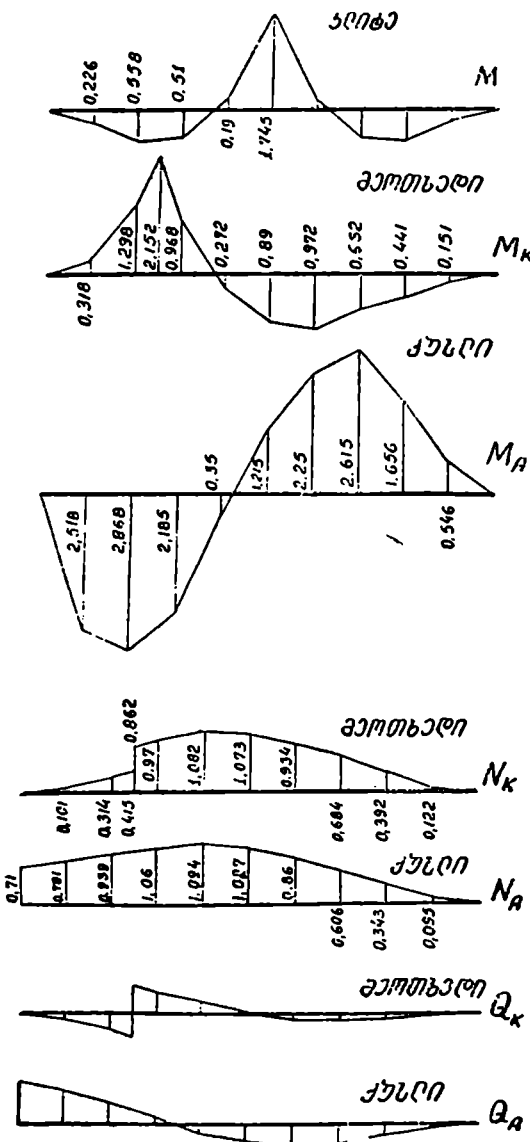
N_k და Q_k -ის გავლენის ხაზების ორდინატები მოყვანილია მე-17 ცხრილში.

ცხრილი 17

დანაკო- ფის №	-0,447	-0,895 X_1	0,447 X_2	N_k	0,895	-0,447 X_1	-0,895 X_2	Q_k
0	—	0	0	0	—	0	0	0
1	—	-0,111	0,0105	-0,101	—	-0,0554	-0,0209	-0,076
2	—	-0,353	0,0388	-0,314	—	-0,1765	-0,0778	-0,254
მეოთხედი	-0,447	-0,475	0,602	{ -0,415 -0,862	0,895	-0,267	-0,1210	{ -0,388 0,507
3	-0,447	-0,603	0,0825	-0,970	0,895	-0,300	-0,1610	0,434
4	-0,447	-0,784	0,1495	-1,082	0,895	-0,391	-0,300	0,204
5	-0,447	-0,850	0,224	-1,073	0,895	-0,424	-0,448	0,023
4'	—	-0,784	-0,1495	-0,934	—	-0,391	0,300	-0,091
3'	—	-0,603	-0,0805	-0,684	—	-0,300	0,161	-0,139
2'	—	-0,353	-0,0388	-0,392	—	-0,1765	0,0778	-0,099
1'	—	-0,111	-0,0105	-0,122	—	-0,0554	0,0209	-0,035
0'	—	0	0	0	—	0	0	0

ქუსლი

1. ერთეულ ჩი ძალა იმყოფება მარცხენა ნახევართა ზე.



$$M_A = -1 \left(\frac{l}{2} - a \right) + X_1(-l-y) + X_2 \frac{l}{2} + X_3 = -1(20-a) + 6,56X_1 + 20X_2 + X_3;$$

$$N_A = -1 \cdot \sin\varphi - X_1 \cos\varphi + X_2 \sin\varphi;$$

$$Q_A = 1 \cdot \cos\varphi - X_1 \sin\varphi - X_2 \cos\varphi.$$

2. ერთეული ძალა იმყოფება მარჯვენა ნახევართა ზე:

$$M_A = 6,56X_1 - 20X_2 + X_3;$$

$$N_A = -X_1 \cos\varphi - X_2 \sin\varphi;$$

$$Q_A = -X_1 \sin\varphi + X_2 \cos\varphi.$$

ქუსლში

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l} = 1,0;$$

$$\sin\varphi = \cos\varphi = 0,71.$$

ქუსლის მღუნავი მომენტის, გრძივი და განივი ძალის გავლენის ხაზის ორდინატები მოყვანილია მე-18 და მე-19 ცხრილში. კლიტის, მეოთხედის და ქუსლის ძალვთა გავლენის ხაზები ნაჩვენებია 317-ე ნახაზზე.

ნახ. 317.

დანაკლ- ვის №	$-\left(\frac{b}{2} - a\right)$	$6,56X_2$	$20X_3$	X_4	M_A
0	0	0	0	0	0
1	-4	0,814	0,466	0,20	-2,518
2	-8	2,594	1,738	0,80	-2,868
3	-12	4,415	3,60	1,80	-2,185
4	-16	5,75	6,70	3,20	-0,35
5	-20	6,215	10,0	5,00	1,215
4'	0	5,75	-6,70	3,20	2,25
3'	0	4,415	-3,60	1,80	2,615
2'	0	2,594	-1,738	0,80	1,656
1'	0	0,814	-0,468	0,20	0,546
0'	0	0	0	0	0

ცხრილი 19

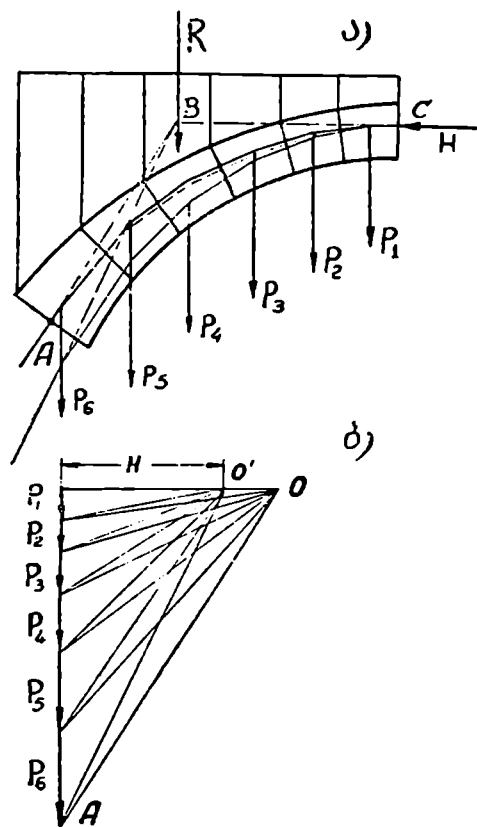
დანაკლ- ვის №	-0,71	$-0,71X_1$	$0,71X_2$	N_A	0,71	$-0,71X_1$	$-0,71X_2$	Q_A
0	-0,71	0	0	-0,71	0,71	0	0	0,71
1	-0,71	-0,088	0,0166	-0,781	0,71	-0,088	-0,0166	0,605
2	-0,71	-0,281	0,0616	-0,939	0,71	-0,281	-0,0616	0,367
3	-0,71	-0,478	0,128	-1,060	0,71	-0,478	-0,128	0,104
4	-0,71	-0,622	0,238	-1,094	0,71	-0,622	-0,238	-0,15
5	-0,71	-0,672	0,355	-1,027	0,71	-0,672	-0,355	-0,317
4'	0	-0,622	-0,238	-0,86	0	-0,622	0,238	-0,384
3'	0	-0,478	-0,128	-0,606	0	-0,478	0,128	-0,35
2'	0	-0,281	-0,0616	-0,343	0	-0,281	0,0616	-0,219
1'	0	-0,088	-0,0166	-0,095	0	-0,088	0,0166	-0,071
0'	0	0	0,0		0	0	0	

§ 72. უსახსრო თალის რაციონალური მოხაზულობა
და წნევის გრადი

თალის ლერძის მოხაზულობა მნიშვნელოვან გავლენას ახდენს ძაბვების სიდიდეზე თალში და მას განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა. თალის ლერძის მოხაზულობის შერჩევის მიზანია მაქსიმალურად შემცირდეს მლუნავი მომენტები. რაც უფრო მეტად მიუახლოვდება თალის ლერძი წნევის გრადუს, მით უფრო ნაკლები იქნება მლუნავი მომენტები.

როდესაც თალის ლერძი დაემთხვევა წნევის გრადუს, მაშინ ნებისმიერ კვეთში მლუნავი მომენტი ნულის ტოლია

და თაღის ასეთი მოხაზულობა ითვლება რაციონალურად. რადგანაც თაღზე მოქმედებს სხედასხვა ტვირთი (მუდმივი, მოძრავი დროებითი ტვირთი, ტემპერატურა და სხვა), ამიტომ მათ შეესაბამება არა ერთი, არამედ რამდენიმე წნევის მრუდი და, მაშასადამე, რამდენიმე რაციონალური მოხაზულობა.



ნახ. 318.

მიმართავენ გრაფიკულ წესს, რომელიც შედარებით მარტივად სწევებს ამოცანას.

თაღს და სათანადოდ მის ზედა ნაშენს ვყოფთ რამდენიმე ნაწილად და ვანგარიშობთ თითოეული ნაწილის წონას. გამარტივების მიზნით ვიპოვოთ თაღის თითოეულ ნაწილის და მასზე მოთავსებული ზედა ნაშენის წონის ტოლქმედი (ნახ. 318, ა). რადგანაც დატვირთვა სიმეტრიულია, ამიტომ საკმარისია ერთ-ერთი ნახევართაღის განხილვა. მოქმედ ძალებზე ავაგოთ ძალთა მრავალკუთხედი ისე, რომ მარჯვენა სხივი იყოს ჰორიზონტალური (ნახ. 318, ბ). თოკის მრავალკუთხედის აგება დაეფუძოთ კლიტის ცენტრიდან. საპოლუსო მანძილი ნებისმიერად ავირჩიეთ (განბრუენი უცნობია) და ამიტომ თოკის მრავალკუთხედი მიიღებს ნებისმიერ მდებარეობას. თოკის მრავალ-

საერთოდ მიღებულია, თაღის ღერძის მოხაზულობა ჩაითვალოს რაციონალურად, თუ ის ემთხვევა მუდმივი ტვირთით გამოწვეულ წნევის მრუდს.

ამ ამოცანის გადაწყვეტა სამსახსრიან თაღში არ ხვდება პრინციპულ სირთულეს, მაშინ როცა უსახსრო თაღში მისი გადაწყვეტა შეუძლებელია. თაღის რაციონალური ღერძის პოვნა საგრძნობლად მარტივდება, თუ თაღს ჩავთვლით უკუმშვად, ე. ი. თუ მხედველობაში არ მივიღებთ გრძივი ძალების გავლენას თაღის შეკუმშვაზე. ამ შემთხვევაში ამოცანა დაიყენება სტატიკურად რკვევადი სამსახსრიანი თაღის წნევის მრუდის აგებაზე.

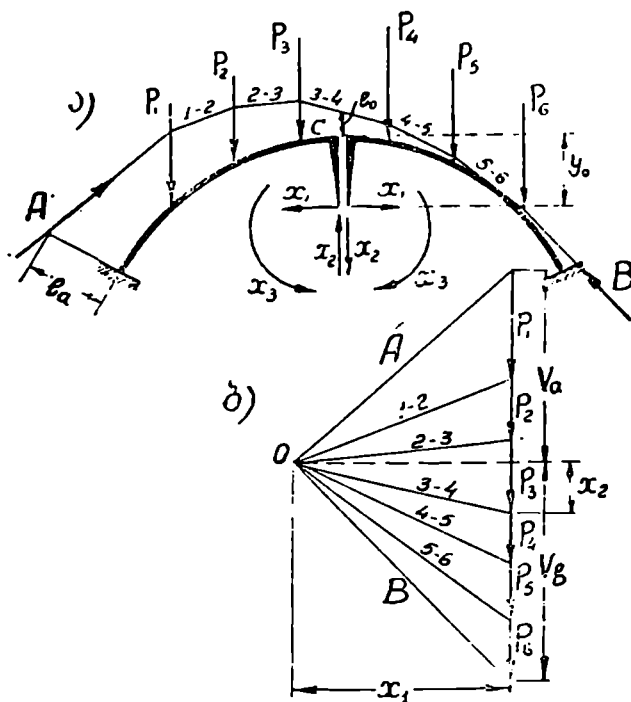
I. წნევის მრუდის აგება გრაფიკულად (თაღის გრაფიკული ანგარიში). საესკიზო დაგეგმარების დროს თაღის მიახლოებითი ანგარიშისათვის ხშირად

კუთხედის განაპირა გვერდების გადაკვეთის B წერტილზე გაივლის მოქმედი ძალების ტოლქმედი. B წერტილი შეეუერთოთ A -ს. AB ხაზი მოგვეყვამს A რეაქციის მიმართულებას (საში ძალა ერთ წერტილში უნდა გადაიკვეთოს).

მიღებული თოკის მრავალკუთხედი არ იქნება წნევის მრავალკუთხედი, რადგან საპოლუსო მანძილი არ უდრის H -ს. ამ მრავალკუთხედის განაპირა AB და BC გვერდები მივიღოთ ახალი ძალთა მრავალკუთხედის უკანასკნელ სხივებად (გაეატაროთ $A'O' \parallel AB$), O' წერტილი კი პოლუსად და ავავოთ ახალი თოკის მრავალკუთხედი. თუ ეს უკანასკნელი არ დაემთხვევა თალის ღერძს, მაშინ მას ვიღებთ თალის ღერძად და აგებას ვიმეორებთ, მანამ წნევის მრავალკუთხედი არ დაემთხვევა თალის ღერძს. თუ დანაყოფების რიცხვს გავზრდით უსასრულოდ, მივიღებთ წნევის მრუდს.

ამის შემდეგ ვანგარიშობთ საანგარიშო ძალებს თალში.

2. წნევის მრუდის აგება გრაფიკულად. ზემოთ ჩვენ გავარჩიეთ წნევის მრუდის აგება იმ შემთხვევისათვის, როდესაც საყრდენი რეაქციები უცნობი



ნახ. 319.

აყო, ე. ი. არ იყო განსაზღვრული ზედმეტი უცნობები.

ახლა გავარჩიოთ ის შემთხვევა, როდესაც განსაზღვრულია ზედმეტი უცნობები X_1, X_2 და X_3 . ვთქვათ, თალზე მოქმედებს არასიმეტრიული ტვირთი (ნახ. 319). რეაქციის ვერტიკალური მდგენელები

$$V_a = P_1 + P_2 + P_3 - X_2 = \sum P_{\text{მაკცხნა}} - X_2;$$

$$V_b = P_4 + P_5 + P_6 + X_2 = \sum P_{\text{მარჯვენა}} + X_2.$$

P_a და X_1 -ის საშუალებით ვიპოვით ძალთა მრავალკუთხედის O პოლუსს, რომლის განაპირა სხივები A და B რეაქციების სიდიდეს და მიმართულებას მოგვცემს (ნახ. 319, ბ).

წნევის მრავალკუთხედი აგება დავიწყოთ კლიტიდან. ამისათვის სპი-
როა ვიკოდეთ ექსცენტრისიტეტი კლიტეში, რომელიც განისაზღვრება იმ
პირობიდან, რომ მლუნავი მომენტი წნევის წერტილზე უნდა იყოს ნულის-
ტოლი

$$X_3 - X_1(\gamma_0 + e_0) = 0,$$

საიდანაც

$$e_0 = \frac{X_3}{X_1} - \gamma_0.$$

ამგვარად, ვიცით რა ექსცენტრისიტეტი კლიტეში e_0 და საწყისი სხივის-
მიმართულება (3—4) ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ თოკის მრავალკუთხედი, რო-
მელიც იქნება წნევის მრავალკუთხედი.

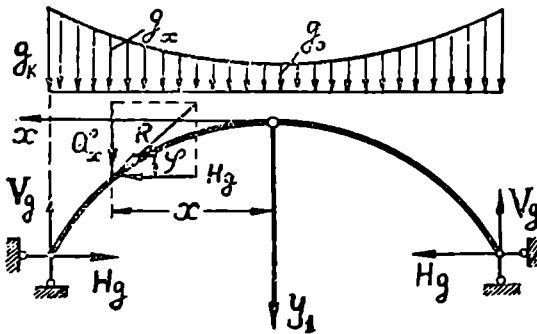
თუ თაღზე სიმეტრიული დატვირთვა მოქმედებს (ამ შემთხვევაში
 $X_2 = 0$), მაშინ საკმარისია ავაგოთ წნევის მრავალკუთხედი თაღის ერთი ნა-
ხევრისათვის.

3. წნევის მრავალკუთხედის აგება ანალიზურად. უსახსრო თაღის
ლერძად ირჩევენ სტატიკურად რკვევადი სამსახსრიანი თაღისათვის მიღებულ

წნევის მრუდს. შემდეგ კი
შეაქვთ სათანადო შესწორე-
ბა ზედმეტი უცნობების სი-
დიდეებში.

გამოვიყვანოთ სამსახ-
სრიანი თაღის წნევის მრუ-
დის განტოლება.

წარმოვიდგინოთ სამ-
სახსრიანი თაღზე მოქმედებს
მთლიანი არათანაბარი და-
ტვირთვა ინტენსივობით
ნებისმიერ კვეთში g_x (ნახ.
320). თუ თაღის ლერძი ემ-



ნახ. 320.

თხვევა წნევის მრუდს, მაშინ კვეთის ცალ მხარეზე მოქმედი ძალების R ტოლ-
ქედია იქნება მრუდის მხები. დაეშალოთ R ვერტიკალურ და ჰორიზონტა-
ლურ მდგენელებად. პირველი იქნება კოკოვანი განივი ძალა Q_x^0 მეორე კი
სამსახსრიანი თაღის განბრჯენი H_g . წნევის მრუდის მხების დახრის კუთხის
ტანგენსი

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q_x^0}{H_g}.$$

პეორე მხრივ თალის ღერძის მხების დახრის კუთხის ტანგენსი

$$i_{g\varphi} = \frac{dy_1}{dx}$$

თუ წნევის მრუდი ემთხვევა თალის ღერძს, მაშინ ცხადია, რომ ორივე შემთხვევაში დახრის კუთხის ტანგენსები ერთნაირია. მაშასადამე,

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{Q^0_x}{Hg}$$

ამ განტოლების გაწარმოება მოგვცემს

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{1}{H_g} \frac{dQ^0_x}{dx}$$

რადგან

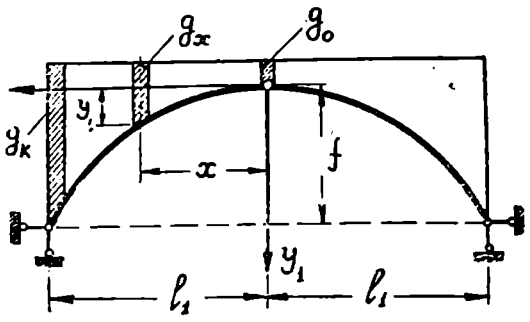
$$\frac{dQ^0_x}{dx} = g_x,$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{g_x}{H_g} \quad (142)$$

ეს არის წნევის მრუდის დიფერენციალური განტოლება და სამართლიანია ნებისმიერი არათანაბარი ვერტიკალური დატვირთვისათვის.

მიღებული დიფერენციალური განტოლება რომ გავაინტეგრირებთ, საჭიროა ვაცოდეთ დატვირთვის განაწილების ხასიათი. მაგალითად, თუ მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი მთელ მალზე, მაშინ (142) განტოლების გადაწყვეტა მოგვცემს კვადრატულ პარაბოლას. სინამდვილეში, მუდმივი ტვირთი, რომელიც შედგება თალისა და თალზედა ნაშენის წონისაგან, ვრცელდება არათანაბრად. სქემატურად იღებენ, რომ ტვირთის ინტენსივობის ნაზრდი თალის ღერძის ორდინატის პროპორციულია



ნახ. 321.

$$g_x = g_0 + \gamma y_1 \quad (143)$$

სადაც γ პროპორციულობის კოეფიციენტია.

ქუსლისათვის გვექნება (ნახ. 321):

$$g_x = g_0 + \gamma f$$

საიდანაც

$$\gamma = \frac{g_x - g_0}{f}.$$

მაშასადამე,

$$g_x = g_0 + \frac{g_x - g_0}{f} \gamma_1,$$

ან

$$g_x = g_0 \left(1 + \frac{m-1}{f} \gamma_1 \right), \quad (144)$$

სადაც g_0 არის ტვირთის ინტენსივობა კლიტეში,
 g_x — იგივე ქუსლში,

$$m = \frac{g_x}{g_0}. \quad (145)$$

(144) ფორმულა წარმოადგენს დატვირთვის ეპიურის განტოლებას. ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ (142) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$\frac{d^2 \gamma_1}{dx^2} = \frac{g_0}{H_g} \left(1 + \frac{m-1}{f} \gamma_1 \right).$$

თუ აბსოლუტური x აბსცისის მაგეგრ შევიტანოთ ფარდობით აბსცისას ξ , ე. ი.

$$\xi = \frac{x}{l_1},$$

მაშინ

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} = \frac{1}{l_1^2},$$

$$\frac{d^2 \gamma_1}{dx^2} = \frac{d^2 \gamma_1}{d\xi^2} \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 = \frac{d^2 \gamma_1}{d\xi^2} \frac{1}{l_1^2}.$$

წნევის მრუდის განტოლება დაიწერება ახალი სახით

$$\frac{d^2 \gamma_1}{d\xi^2} = \frac{g_0 l_1^2}{H_g} \left(1 + \frac{m-1}{f} \gamma_1 \right).$$

აღვნიშნოთ

$$\frac{g_0 l_1^2}{H_g} = A; \quad \frac{g_0 l_1^2}{H_g f} (m-1) = k^2. \quad (146)$$

წნევის მრუდის დიფერენციალური განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{d^2 \gamma_1}{d\xi^2} - k^2 \gamma_1 = A, \quad (146')$$

რომელიც წარმოადგენს მეორე რიგის ხაზობრივ დიფერენციალურ განტოლებას და მისი მთლიანი ამონახსნი დაიწერება შემდეგი სახით

$$\gamma_1 = C_1 e^{k\xi} + C_2 e^{-k\xi} + C_3. \quad (147)$$

მუდმივები განისაზღვრება საწყისი პირობებოდან:

როცა $\xi = 0$, მაშინ 1) $\frac{dy_1}{d\xi} = 0$; 2) $y_1 = 0$.

პირველი პირობა მოგვცემს

$$\frac{dy_1}{d\xi} = k(C_1 e^{k\xi} - C_2 e^{-k\xi}) = k(C_1 - C_2) = 0,$$

საიდანაც

$$C_1 = C_2 = C.$$

(147) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$y_1 = C(e^{k\xi} + e^{-k\xi}) + C_3.$$

y_1 -ის მნიშვნელობა შევტანოთ (146) განტოლებაში, მივიღებთ

$$C_3 = -\frac{A}{k^2} = -\frac{f}{m-1}.$$

მაშასადამე,

$$y_1 = C(e^{k\xi} + e^{-k\xi}) - \frac{f}{m-1}.$$

მეორე საწყისი პირობა ($\xi = 0$, $y_1 = 0$) მოგვცემს

$$C = \frac{f}{2(m-1)}.$$

საბოლოოდ გვექნება

$$y_1 = \frac{f}{m-1} \left(\frac{e^{k\xi} + e^{-k\xi}}{2} - 1 \right). \quad (148)$$

ან, თუ შემოვიტანთ ჰიპერბოლურ კოსინუსს,

$$y_1 = \frac{f}{m-1} (\cosh k\xi - 1). \quad (149)$$

ეს განტოლება დაგწეროთ ქუსლისათვის. მივიღებთ

$$\cosh k = m,$$

საიდანაც

$$k = \operatorname{arc} \cosh m = \ln(m + \sqrt{m^2 - 1}).$$

(149) განტოლება, რომელიც წარმოადგენს მუდმივი ტვირთით გამოწვეული წნევის მრუდის განტოლებას (კატენოიდის განტოლება), ფართოდ გამოიყენება თაღების ანგარიშში. ეს განტოლება საშუალებას იძლევა მარტივად განესაზღვროთ ზედმეტი უცნობები თაღში და შევადგინოთ ცხრილები შინაგანი ძალების საანგარიშოდ. კერძოდ, შტრასნერის ცხრილები, რომლებიც შემდეგში განვითარებული იყო პროფ. ზავრიევის მიერ, შედგენილია ამ განტოლების მიხედვით.

1. თალის გეომეტრიული სიდიდეების ანგარიში

ცხრილებს საფუძვლად უდევს შემდეგი ძირითადი განტოლებები.

ა) თალის ღერძის განტოლება

$$y_1 = \frac{f}{m-1} (\cos hk\xi - 1), \quad (150)$$

სადაც

$$m = \frac{g_k}{g_0}, \quad \xi = \frac{x}{l_1}.$$

g_k —თალის ერთ გრძივ მეტრზე მოსული ტვირთია ქუსლში;

g_0 —იგივე კლიტეში.

თალი დაყოფილია 24 თანასწორ ნაწილად და თითოეული ნაწილისათვის გამოთვლილია თალის ღერძის ორდინატა m -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. ცხრილებში მოცემულია $\frac{y_1}{f}$ სიდიდეები და ამიტომ ორდინატების მისაღებად ცხრილებში მოცემული სიდიდეები უნდა გადავამრავლოთ f -ზე.

ბ) განივი კვეთის ცვლილებების კანონი

$$\frac{I_0}{I_x \cos \varphi_x} = 1 - (1-n)\xi. \quad (151)$$

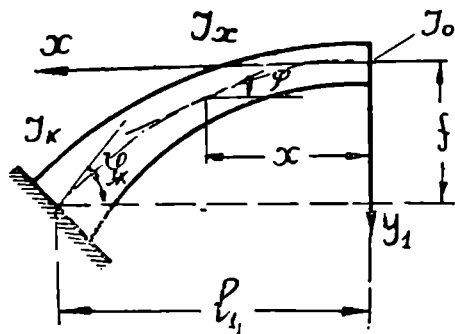
ამ ფორმულას თუ დავწერთ ქუსლისათვის ($\xi = 1$; $I_x = I_k$), მივიღებთ

$$n = \frac{I_0}{I_k \cos \varphi_k}. \quad (152)$$

n წარმოადგენს კვეთის ცვლილების დამახასიათებელ კოეფიციენტს და აიღება დაახლოებით 0,20 ÷ 0,50 ზღვრებში.

თუ თალის განივი კვეთი სწორკუთხოვანია, მაშინ

$$n = \frac{d_0^3}{d_k^3 \cos^3 \varphi_k}, \quad (153)$$



ნახ. 322.

სადაც d_0 და d_k თალის სისქეა სათანადოდ კლიტეში და ქუსლში (ნახ. 322).

(151) და (152) ფორმულებიდან მივიღებთ:

თალის სისქე ნებისმიერ კვეთში

$$d_x = d_0 C \sqrt{1 + \xi^2 \varphi_x}, \quad (154)$$

ქუსლში

$$d_k = \frac{d_0}{\sqrt{n \cos \varphi_k}}. \quad (155)$$

კოეფიციენტი

$$C = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - (1-n)\xi}}$$

და $\xi^2 \varphi_x$ გამოითვლება ცხრილების საშუალებით.

გეომეტრიულ სიდიდეებს ვანგარიშობთ შემდეგი თანმიმდევრობით: ვირჩევთ თალის სისქეს კლიტეში და n -ს; ვანგარიშობთ ξ_x , ξ_0 და m -ს; შემდეგ კი თალის ლერძის ორდინატებს და თალის სისქეს.

2. თალის ანგარიში მუდმივ ტვირთზე

თალზე მოქმედებს სიმეტრიული მთლიანი არათანაბარი ტვირთი ინტენსივობით ნებისმიერ კვეთში

$$q_x = q_0 \left(1 + \frac{m-1}{f} y_1 \right).$$

ძირითადი სისტემა ნაჩვენებია 323-ე ნახაზზე.

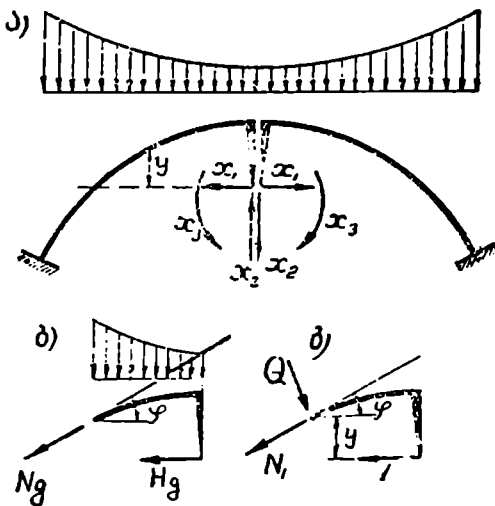
სიმეტრიული დატვირთვის გამო $X_2 = 0$ და დაგვრჩება ორი უცნობი, რომლებიც განისაზღვრება ვანტოლებებით:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}; \quad X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}}$$

თალის ანგარიში შევასრულოთ ორ ეტაპად:

ა). თალი განვიხილოთ უკუშვებადად, ე. ი. გრძივი ძალების გავლენა დეფორმაციაზე არ მივიღოთ მხედველობაში.

გადაადგილებები მიიღებენ შემდეგ სახეს (იხ. § 67)



ნახ. 323.

$$\Delta_{1p} = -\int M_p y \frac{ds}{EI}; \quad \delta_{11} = \int y^2 \frac{ds}{EI}; \quad \Delta_{3p} = \int M_p \frac{ds}{EI}; \quad \delta_{33} = \int \frac{ds}{EI}$$

ამ შემთხვევაში X_2 -ს ექნება ისეთივე მნიშვნელობა, როგორც საერთო ანგარიშის დროს (ფორ. 111)

$$X_3 = \frac{\int M_p \frac{ds}{EI}}{\int \frac{ds}{EI}}$$

X_3 ავიღეთ დადებითი ნიშნით, რადგან M_p უარყოფითია.

განბრჯენი, რომელიც X_1 -საგან განსხვავებით აღნიშნულია H_g -ით, გამოითვლება ფორმულით

$$H_g = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{\int M_p y \frac{ds}{EI}}{\int y^2 \frac{ds}{EI}} \quad (156)$$

და წარმოადგენს სამსახსრიანი თალის განბრჯენს.

რადგანაც თალის ღერძი ემთხვევა წნევის მრუდს, ამიტომ მღუნავი მომენტი ნებისმიერ კვეთში ნულის ტოლია და ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$X_3 = H_g \cdot y_0.$$

მაშასადამე, ანგარიშის ამ ეტაპზე დაგვეკირდება გამოთვალთ მხოლოდ სამსახსრიანი თალის განბრჯენი H_g .

ბ) გამოთვალთ გრძივი ძალის გავლენით თალის ღერძის შეკუმშვით (დრეკადი შეკუმშვით) გამოწვეული უცნობები.

ამ შემთხვევაში $X_3 = 0$ და დაგვეკირდება განესაზღვროთ მხოლოდ განბრჯენი, რომელიც აღნიშნოთ ΔH_g .

$$\Delta H_g \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0.$$

$$\Delta_{1P} = \int N_p N_1 \frac{ds}{EF}.$$

მუდმივი ტვირთით გამოწვეული გრძივი ძალა თალის ნებისმიერ კვეთში (ნახ. 323, ბ)

$$N_p = N_g = -\frac{H_g}{\cos \varphi}.$$

$\Delta H_g = 1$ ძალით გამოწვეული მომენტი და გრძივი ძალა იმავე კვეთში (ნახ. 323, გ)

$$M_1 = -y; \quad N_1 = -1 \cdot \cos \varphi.$$

მაშასადამე,

$$\Delta_{1P} = H_g \int \frac{ds}{EF},$$

$$\delta_{11} = \int y^2 \frac{ds}{EI} + \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF}$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$\Delta H_g = -\frac{H_g \int \frac{ds}{EF}}{\int y^2 \frac{ds}{EI} + \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF}} = -\frac{H_g}{1 + \mu} \frac{\int \frac{ds}{EI}}{\int y^2 \frac{ds}{EI}}, \quad (157)$$

სადაც

$$\mu = \frac{\int \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF}}{\int y^2 \frac{ds}{EI}} \quad (158)$$

თუ აღენიშნავთ

$$\mu_1 = \frac{\int \frac{ds}{EI}}{\int y^2 \frac{ds}{EI}}, \quad (159)$$

მაშინ

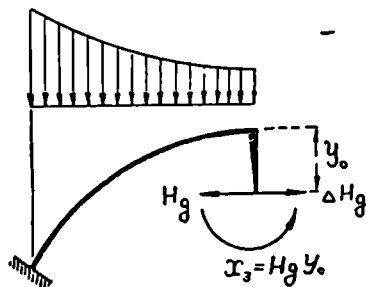
$$\Delta H_g = -\frac{\mu_1^*}{1+\mu} H_g \approx -H_g \mu_1. \quad (160)$$

დამატებითი განბრჯენი მიმართულია ძირითადი განბრჯენის (H_g) საწინააღმდეგო მიმართულებით, ე. ი. თალის გარეთ.

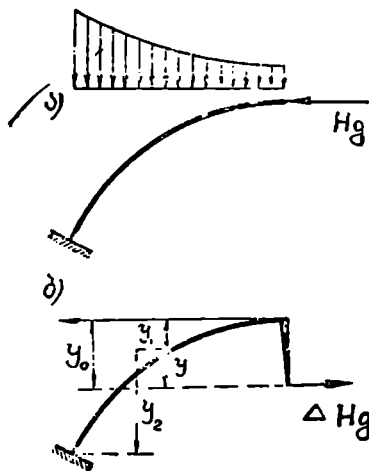
მთლიანი განბრჯენი

$$X_1 = H_g - \Delta H_g. \quad (161)$$

მაშასადამე, ძირითად სისტემაზე მოქმედებს მუდმივი ტვირთი, განბრჯენი $X_1 = H_g - \Delta H_g$ და მომენტი $X_3 = H_g y_0$ (ნახ. 324).



ნახ. 324.



ნახ. 325.

გამარტივების მიზნით ანგარიში გავუთ ორ ნაწილად:

1) ვიანგარიშოთ კონსოლური ძელი, რომლის ღერძიც ემთხვევა წნევის მრუდს, ე. ი. შევასრულოთ სამსახსრიანი თალის ანგარიში (ნახ. 325, ბ). ამ შემთხვევაში $M=0$, $Q=0$,

$$N_g = \frac{H_g}{\cos \varphi}; \quad H_g = \frac{g_0 l^2}{f} \frac{m-1}{k^2}.$$

* N_g -ის გამოთვლის დროს შტრასნერმა დაუშვა შეცდომა. მან მიიღო $N_g = -H_g \cos \varphi$ და ამის გამო μ_1 -ს მაგიერ მიიღო μ . ეს შეცდომა შესწორებულ იქნა პროფ. ზაგრივის მიერ.

2) ვიანგარიშით იგივე კონსოლური ძელი, რომელზეც მოქმედებს თალის ღრეკადი შეკუმშვით გამოწვეული დამატებითი განბრჯენი ΔH_g , ე. ი. სამსახსრიანი თალის ანგარიშში შევიტანოთ შესწორება (ნახ. 325, ბ).

ამ შემთხვევაში ნებისმიერ კვეთში ადგილი ექნება როგორც მლუნავ მომენტს, ისე გრძივ და განივ ძალას: ეს უკანასკნელი, სიმცირის გამო, მხედველობაში არ მიიღება.

მლუნავი მომენტი

$$\Delta M = \Delta H_g \cdot y = \Delta H_g (y_0 - y_1);$$

გრძივი ძალა

$$\Delta N_g = \Delta H_g \cos \varphi.$$

ორივე შემთხვევაში მიღებული შედეგები უნდა შევაჯამოთ.

კოეფიციენტები μ და μ_1 , რომლებიც გარდაქმნის შემდეგ სიილებენ შემდეგ სახეს

$$\mu = \frac{l}{EF_m} \int y y_2 \frac{ds}{EI},$$

$$\mu_1 = \frac{l}{EF_n} \int y y_2 \frac{ds}{EI}$$

განისახლდება ცხრილებით.

საშუალო ფართობები $F_m = \nu F_0$, $F_n = \nu_1 F_0$ და ღრეკადი ცენტრის კოორდინატი y_0 აგრეთვე განისახლდება ცხრილებით.*

3. თალის ანგარიში მოძრავ ტვირთზე

მოძრავ ტვირთზე ანგარიშის მსვლელობა პრინციპულად არაფრით არ განსხვავდება მუდმივ ტვირთზე ანგარიშის მსვლელობისაგან. აქ საჭიროა X_1 , X_2 და X_3 უცნობის გავლენის ხაზების აგება, შემდეგ კი სათანადო კვეთებში მლუნავი მომენტის გრძივი და განივი ძალების გავლენის ხაზების აგება.

საანგარიშო ფორმულებს აქ არ გამოვიყვანთ და გავარჩევთ მხოლოდ ცხრილების გამოყენების წესს.

ცხრილები შედგენილია m და n პარამეტრების მიხედვით. ცხრილების შედგენისას გრძივი ძალის გავლენა (ღრეკადი შეკუმშვა) არ არის მხედველობაში მიღებული და ამიტომ მათი სარკველობის დროს შესწორება უნდა შევიტანოთ.

თუ საანგარიშო m და n არ ეთანადება ცხრილებში მოცემულ მნიშვნელობებს, მაშინ მივმართავთ ინტერპოლაციას.

განბრჯენის გავლენის ხაზის ორდინატების მისაღებად ცხრილებში მოთავსებული სიდიდეები უნდა გადავამრავლოთ $\frac{l}{f(1+\mu)}$ სიდიდეზე.

* ე. ს. ხავრივი. ნაშენთა წინალობა, ნაწილი II.

Проф. Каменцев и Лучинск - Вспаривание арочные мосты, Москва, 1927 г.

მლუნავი მომენტი ნებისმიერ კვეთში გამოითვლება ფორმულით:

$$M_z = M_z^{ab} \div Hy_1,$$

სადაც M_z^{ab} წარმოადგენს მლუნავ მომენტს ნებისმიერ კვეთში დრეკადი შეკუმშვის გავლენის მხედველობაში მიუღებლად და მოცემულია ცხრილებში m და n პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. ორდინატები გამოთვლილია $l=1$ -სთვის და ამიტომ ცხრილში მოცემული სიდიდეები უნდა l -ზე გადავამრავლოთ.

ამგვარად, მთლიანი მლუნავი მომენტის გავლენის ხაზების ასაჯებად, საჭიროა ცხრილში მოყვანილი სიდიდეები გადავამრავლოთ l -ზე და დავემატოთ განბრჯენის გავლენის ხაზის ორდინატები გადამრავლებული y_1 -ზე.

ცხრილები შედგენილია ქუსლის, მეოთხედის და კლიტისათვის. დანარჩენი კვეთებისათვის მლუნავი მომენტის გავლენის ხაზი აიგება ფორმულით:

$$M_x = M_x^1 - Hy_2,$$

სადაც M_x^1 კოპოვანი მლუნავი მომენტია და მისი ორდინატები გამოითვლება ქუსლის ნომენტების საშუალებით.

გ რ ძ ი ვ ი ძ ა ლ ა ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ კ ვ ე თ შ ი გ ა მ ი თ ვ ლ ე ბ ა ფ ო რ მ უ ლ ი თ

$$N_r = -(Q_r^0 \sin \varphi + H \cos \varphi),$$

აქ Q_r^0 კოპოვანი განივი ძალაა.

როდესაც ძალა $P=1$ მოქმედებს განსახილავი კვეთის მარჯვნივ, მაშინ

$$Q_x^0 = V_a,$$

და, როცა ძალა გადავა კვეთის მარცხნივ,

$$Q_x^0 = V_a - 1.$$

V_a საყრდენი რეაქციის გავლენის ხაზის ორდინატები მოცემულია ცხრილში სხვადასხვა n -სათვის.

გ ა ნ ი ვ ი ძ ა ლ ა ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ კ ვ ე თ შ ი

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi - H \sin \varphi$$

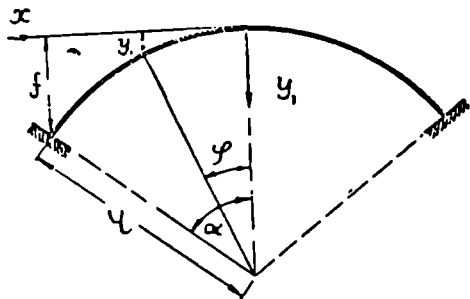
§ 74. წრიული უსახსრო თაღის ანგარიში

განვიხილოთ მუდმივი კვეთის მქონე წრიული თაღი, რომლის განტოლება

მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში შემდეგი სახით (ნახ. 326):

$$y_1 = r(1 - \cos \varphi).$$

ძირითადი სისტემა ნაჩვენებია 327-ე ნახაზზე.



ნახ. 326.

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\Delta_{2P}}{\delta_{22}}; \quad X_3 = -\frac{\Delta_{3P}}{\delta_{33}}$$

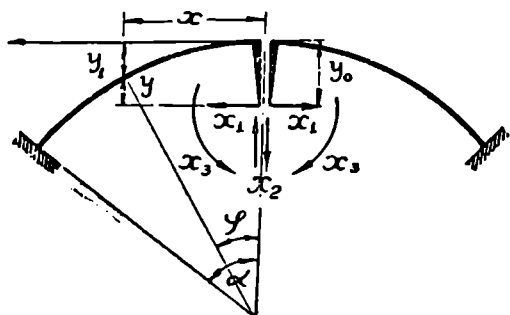
დრეკადი ცენტრის კოორდინატი

$$y_0 = \frac{\int_0^s y_1 ds}{\int_0^s ds} = \frac{\int_0^\alpha r^2(1-\cos\varphi) d\varphi}{\int_0^\alpha r d\varphi} = r \frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha}$$

$\sin\alpha$ გაშვალთ მწკრივად

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \frac{\alpha^9}{9!} \dots$$

და ავიღოთ პირველი ორი წევრი, მაშინ მივიღებთ



ნახ. 327.

$$y_0 \approx r \frac{\alpha^2}{6}. \quad (a)$$

$$f = r(1 - \cos\alpha).$$

$\cos\alpha$ გაშვალთ მწკრივად და ავიღოთ პირველი ორი წევრი:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}.$$

მაშინ
$$f = r \frac{\alpha^2}{2}. \quad (b)$$

(a) და (b) განტოლებების შედარება მოგვცემს

$$y_0 = \frac{f}{3}.$$

ერთეული ძალებით გამოწვეული მღუნავი მომენტი და გრძივი ძალები

$$M_1 = -1 \cdot y = -(y_0 - y_1) = r \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \cos\varphi \right); \quad N_1 = -\cos\varphi;$$

$$M_2 = 1 \cdot x = r \cdot \sin\varphi; \quad N_2 = \sin\varphi;$$

$$M_3 = 1; \quad N_3 = 0.$$

გადაადგილებები მიიღებს შემდეგ გამოსახულებებს:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{2}{EI} \int_0^\alpha r^3 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \cos\varphi \right)^2 d\varphi + \frac{2r}{EF} \int_0^\alpha \cos^2\varphi d\varphi = \\ &= \frac{r^3}{\alpha EI} \left[\alpha^3 + \alpha \sin\alpha \cos\alpha - 2\sin^2\alpha + \frac{I^2}{Fr^2} (\alpha^3 + \alpha \sin\alpha \cos\alpha) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \frac{2}{EI} \int_0^{\alpha} r^2 \sin^2 \varphi r d\varphi + \frac{2}{EF} \int_0^{\alpha} \sin^2 \varphi r d\varphi = \\ &= \frac{r^3}{EI} \left[\alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \frac{l}{Fr^2} (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \right]; \\ \delta_{33} &= \frac{2}{EI} \int_0^{\alpha} ds = \frac{2}{EI} \int_0^{\alpha} r d\varphi = \frac{2r\alpha}{EI}. \end{aligned}$$

მოცემული ტვირთით გამოწვეულ მღუნავ მომენტს და გრძივ ძალას თუ აღნიშნავთ M_p და N_p , მივიღებთ

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EI} \int M_p \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \varphi \right) r^2 d\varphi - \frac{1}{EF} \int N_p \cos \varphi r d\varphi;$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EI} \int M_p r^2 \sin \varphi d\varphi + \frac{1}{EF} \int N_p \sin \varphi r d\varphi;$$

$$\Delta_{3p} = \frac{1}{EI} \int M_p r d\varphi.$$

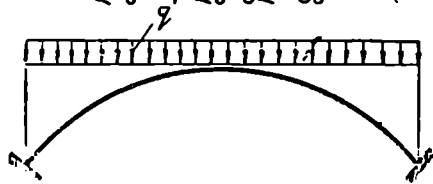
განვიხილოთ დატვირთვის სხვადასხვა შემთხვევა.

1. თალზე მოქმედებს მთლიანი თანაბრად განაწილებული ტვირთი (ნახ. 328). ამ შემთხვევაში

$$M_p = -q \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2}$$

$$N_p = -qr \sin^2 \varphi.$$

თუ შევიტანა ამ გამოსახულებებს წინა ფორმულაში, მივიღებთ



ნახ. 328.

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= -\frac{qr^4}{EI} \int_0^{\alpha} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \varphi \right) \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{2qr^2}{EF} \int_0^{\alpha} \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &= -\frac{qr^4}{6\alpha EI} \left[\sin \alpha (3\alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha - 2\alpha \sin^3 \alpha) + 4 \frac{l}{r^2 F} \alpha \sin^3 \alpha \right]; \end{aligned}$$

$$\Delta_{2p} = 0;$$

$$\Delta_{3p} = -\frac{qr^3}{EI} \int_0^{\alpha} \sin^2 \varphi d\varphi = -\frac{qr^3}{2EI} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha).$$

გადაადგილებათა მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ კანონიკურ განტოლებებში, მივიღებთ უცნობებს X_1 და X_2 ; $X_3 = 0$.

2. თაღზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი ჰორიზონტალურად (ნახ. 329).

$$M_p = -\frac{qy_1^2}{2} = -\frac{qr^2(1-\cos\varphi)^2}{2};$$

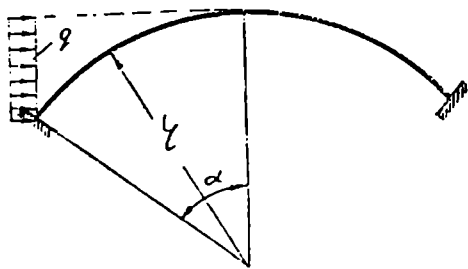
$$N_p = qy_1 \cos\varphi = qr(1-\cos\varphi)\cos\varphi.$$

სატვირთო წერტილები

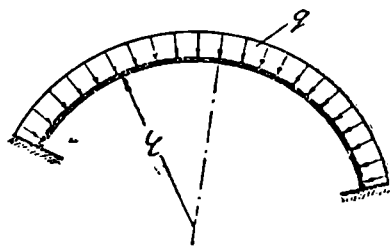
$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= -\frac{qr^4}{2EI} \int_0^\alpha (1-\cos\varphi)^2 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \cos\varphi \right) d\varphi - \frac{qr^3}{EF} \int_0^\alpha (1-\cos\varphi)\cos^2\varphi d\varphi = \\ &= -\frac{qr^4}{12\alpha EI} \left[6\alpha^2 - 3\sin^2\alpha(4-\cos\alpha) + 2\alpha \sin\alpha \cos\alpha(3+\cos\alpha) + \right. \\ &\quad \left. + 2\frac{q\alpha}{r^2 F} (3\alpha + 3\sin\alpha \cos\alpha + 2\sin^2\alpha - 6\sin\alpha) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2p} &= -\frac{qr^4}{2EI} \int_0^\alpha (1-\cos\varphi)^2 \sin\varphi d\varphi + \frac{qr^2}{EF} \int_0^\alpha (1-\cos\varphi)\cos\varphi \sin\varphi d\varphi = \\ &= -\frac{qr^4}{6EI} \left[2\cos\alpha \sin^2\alpha - 8\cos\alpha - 3\sin^2\alpha - \frac{l}{2Fr^2} (3\sin^2\alpha + 2\cos\alpha - 2\cos\alpha \sin^2\alpha) \right]; \end{aligned}$$

$$\Delta_{3p} = \frac{qr^2}{2EI} \int_0^\alpha (1-\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{qr^2}{4EI} (3\alpha - 4\sin\alpha + \sin\alpha \cos\alpha).$$



ნახ. 329.



ნახ. 330.

3. თაღზე მოქმედებს ჰიდროსტატიკური ტვირთი ინტენსივობით q (ნახ. 330). თუ მხედველობაში არ მივიღებთ გრძივი ძალის გავლენას დეფორმაციებზე, მაშინ თალი იმუშავებს მხოლოდ გრძივ ძალაზე და მლუნავი მომენტი და განივი ძალა ნებისმიერ კვეთში ნულის ტოლია, ე. ი. $M=0$; $Q=0$ $N=-qr$.

ჩარჩომების ანგარიში გადაადგილებათა მეთოდით



§ 75. გადაადგილებათა მეთოდის ძირითადი დასაბუთება
და უსწრებების შიგნითა

გადაადგილებათა მეთოდი, ისე როგორც ძალთა მეთოდი, წარმოადგენს სტატიკურად ურკვევი სისტემის ანგარიშის ძირითად მეთოდს და ჩარჩომების ანგარიშში მას საპატიო ადგილი უკავია.

გარე ძალების მოქმედების შედეგად მოცემული სისტემის ზედმეტ ღეროებში ვითარდება ძალები $X_1, X_2, X_3 \dots$ რადგანაც ნაშენის მასალა ღრეკადია, ამიტომ ადგილი აქვს გადაადგილებებსაც. ე. ი. ჩარჩოს ცალკეული კვანძები და ღეროები მიიღებენ ხაზობრივ და კუთხურ დეფორმაციებს. ჩარჩოს საანგარიშო საკმარისია ვიცოდეთ ძალები $X_1, X_2 \dots$ ან კიდევ გადაადგილებები. თუ უცნობებად მივიღებთ ძალებს ზედმეტ ღეროებში ($X_1, X_2 \dots$), მაშინ ანგარიშის მეთოდი იქნება ძალთა მეთოდი და თუ გადაადგილებას — გადაადგილებათა მეთოდი.

პირველ შემთხვევაში ძალების განსაზღვრის შემდეგ ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ გადაადგილებები და ამით ამოცანა მთლიანად გადაწყვეტილი იქნება. მეორე შემთხვევაში, გადაადგილებების საშუალებით ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ შინაგანი ძალები და ამოცანა კვლავ გადაწყვეტილი იქნება.

ამ თავში ჩვენ შევისწავლით ამოცანის გადაწყვეტის მეორე მეთოდს, ე. ი. უცნობებად მივიღებთ გადაადგილებებს. ბევრ შემთხვევაში ეს მნიშვნელოვნად ამარტივებს ამოცანას. გადაადგილებათა მეთოდით ანგარიშის დროს მხედველობაში არ ვიღებთ გრძივი და განივი ძალების გავლენას გადაადგილებებზე, მხედველობაში ვიღებთ მხოლოდ მღუნავი მომენტის გავლენას ისე, როგორც ძალთა მეთოდის დროს.

მეორე ძირითად დაშვებას წარმოადგენს ის, რომ დეფორმირებული ღეროს სიგრძე (ორღის სიგრძე) მიიღება პირველადი სიგრძის ტოლად, ე. ი. მხედველობაში არ მივიღებთ ღეროს ბოლოების ურთიერთ დაახლოებას, გამოწვეულს ღუნვით.

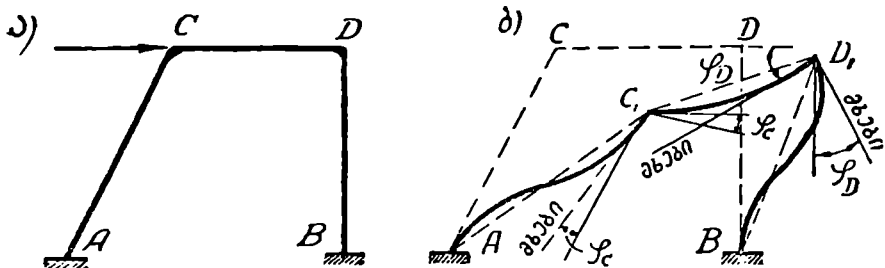
მაშასადამე, მივიღებთ, რომ თითოეული დეფორმირებული ღეროს გეგმილი საწყის მიმართულებაზე ღეროს საწყისი სიგრძის ტოლია.

ებლა გავარჩიოთ, თუ რა სახის გადაადგილებები წარმოიშვება ჩარჩოში, რომელთა ცოდნაც მთლიანად უზრუნველყოფს ჩარჩოს ანგარიშს.

წარმოვიდგინოთ მოცემულ ჩარჩოზე მოქმედებს გარე ძალა P (ნახ. 331, ა). ამ ძალის მოქმედებით ჩარჩო მიიღებს დეფორმაციას, რომლის ხასიათი დამოკიდებულია მასალის ღრეკად თვისებებზე (ნახ. 331, ბ).

როგორც ვხედავთ, ჩარჩოს თითოეული კვანძი (გარდა ხისტად ჩამაგრებული საყრდენებისა) მიიღებს საზოგადოებრივ გადაადგილებას და მობრუნდება რაღაც კუთხით.

მაგალითად, C და D კვანძები მიიღებს C_1 და D_1 მდებარეობას და მობრუნდება სათანადოდ φ_C და φ_D კუთხით. რადგანაც კვანძში შემავალი ღეროები

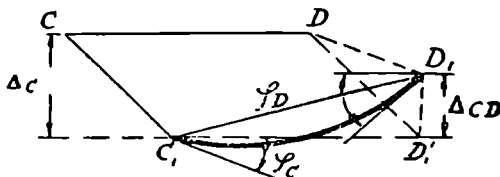


ნახ. 331.

ხისტად არის ერთმანეთთან შეერთებული, ამიტომ ისინი მობრუნდება ერთი და იგივე კუთხით.

აღებულ ღეროში ძალებს იწვევს არა მისი მთლიანი გადაადგილება, არამედ მისი ბოლო წერტილების ურთიერთ გადაადგილება და კვანძების მობრუნება.

მართლაც, CD ღეროს დეფორმირებული მდებარეობა C_1D_1 ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ ოთხი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი გადაადგილების შედეგად. (ნახ. 332).



ნახ. 332.

პირველად ჩავთვალოთ, რომ CD ღერო გადაადგილდა გადატანით თავის პარალელურად და მიიღო C_1D_1' მდებარეობა; შემდეგ D_1' წერტილი C_1 წერტილის დამოუკიდებლად გადაადგილდა Δ_{CD} სიდიდით D_1 წერტილში. გადატანითი გადაადგილების დროს ღერო რჩება სწორხაზოვნად და მასში არავითარი ძალები არ წარმოიშვება. ძალებს წარმოშობს მხოლოდ Δ_{CD} , ე. ი. CD ღეროს ბოლო წერტილების ურთიერთ გადაადგილება. საბოლოო დეფორმირებული მდგომარეობის მისაღებად C_1 კვანძი უნდა მოვებრუნოთ φ_C კუთხით და D_1 კი φ_D კუთხით. თუ განსახილავ ღეროზე გარე ძალა უშუალოდ მოქმედებს, მაშინ ჩამოთვლილ დეფორმაციებს დაემატება ამ ძალით გამოწვეული დეფორმაცია ორი თავით ხისტად ჩამაგრებულ ძელში.

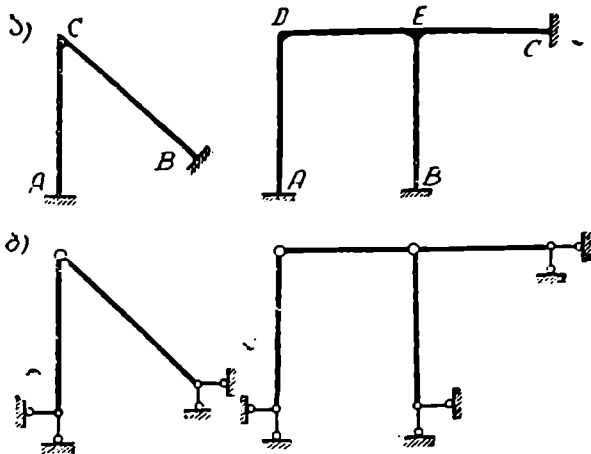
თუ გვეკოდინება ΔCD , φ_C და φ_D , ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ ში-
ნაგანი ძალები ჩარჩოს ღეროებში და ამოცანაც გადაწყვეტილი იქნება.

ამგვარად, უცნობებად ვიღებთ ჩარჩოს დრეკადი კვანძების მობრუნების
კუთხეებს და მათ ურთიერთ ხაზობრივ გადაადგილებებს.

§ 76. კუთხური და ხაზობრივ გადაადგილებათა ხარისხი
(უცნობთა რიცხვის განსაზღვრა)

ზემოთ განხილულ მაგალითში ჩარჩოს კვანძებმა განიცადეს ხაზობრივი
და კუთხური გადაადგილებები. მათი რიცხვი ტოლი იყო სამის. უფრო
ერთულ შემთხვევაში უცნობ გადაადგილებათა რიცხვის უშუალოდ განსაზღვრა
ძნელია, რადგან ცხადი არაა შეუძლია თუ არა ჩარჩოს კვანძებს ხაზობრივი
გადაადგილებების მიღება.

თუ კვანძებს არ შეუძლიათ გადაადგილდეს ხაზობრივად, მაშინ უცნო-
ბებად გვექნება კვანძების მობრუნების კუთხეები, რომელთა რიცხვი ტოლი
იქნება დრეკადი კვანძების რიცხვის და განისაზღვრება მათი უბრალო დათ-
ვლით. მაშასადამე: კუთხური გადაადგილებათა ხარისხი დრეკადი
კვანძების რიცხვის ტოლია. მაგალითად, 333, ა ნახაზე მოყვანილ



ნახ. 333.

ჩარჩოებში ადგილი არა აქვს ხაზობრივ გადაადგილებებს, რადგან მათი სახს-
როვანი სქემები (ნახ. 333, ბ) გეომეტრიულად უცვლელია. პირველ შემთხვე-
ვაში გვექნება ერთი უცნობი C —კვანძის მობრუნების კუთხე, მეორეში კი
ორი უცნობი— D , E , კვანძების მობრუნების კუთხეები.

ეხლა განვიხილოთ ისეთი სისტემები, სადაც ადგილი აქვს ხაზობრივ
გადაადგილებებს და შევისწავლოთ მათი რიცხვის გამოთვლის წესი, ე. ი. ხ ა-
ზობრივ გადაადგილებათა ხარისხი.

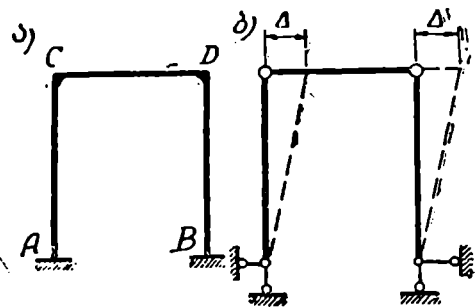
ჩარჩოს კვანძების ხაზობრივი გადაადგილების ხარისხი ტოლია ჩარჩოს
სახსროვანი სქემის გეომეტრიული ცვლადობის ხარისხის და ამიტომ ხაზო-
ბრივ გადაადგილებათა რიცხვის გამოსარკვევად მოცემული სისტემა უნდა

ვაქციოთ გეომეტრიულად ცვლად სახსროვან სისტემადა და გამოვთვალოთ მისი თავისუფლების ხარისხი ფორმულით (იხ. 1 ნაწ. § 8)

$$W = 3 \cdot \Delta - 2 \Pi - C_0,$$

7 - 4 1

სადაც Δ არის ჩარჩოს ღეროების (დისკოების) რიცხვი, Π — სახსრების და C_0 — საყრდენის ღეროების რიცხვი. მაგალითად, განვიხილოთ 334, ა ნახაზზე

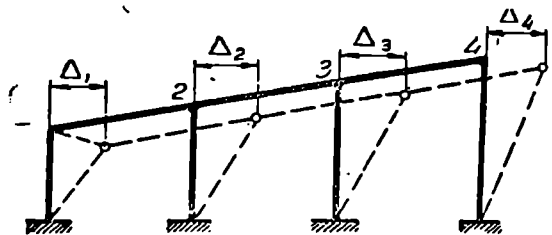


ნახ. 334.

წარმოდგენილი ჩარჩო, რომლის სახსროვანი სქემა და მისი გადაადგილებული მდგომარეობა ნახვენებია 334, ბ ნახაზზე. სახსროვანი ოთხკუთხედის გეომეტრიული ცვლადობის ხარისხი $W=1$ და, მაშასადამე, ხაზობრივი გადაადგილების ხარისხი უდრის 1-ს. როდესაც ჩვენ ვლაპარაკობთ ხაზობრივ გადაადგილებათა რიცხვზე, ჩვენ მხედველობაში გვაქვს დამოუკიდებელი ხაზობრივი გადაადგილებათა რიცხვი.

დავუშვათ, რომ C კვანძი გადაადგილდა Δ_1 -ით (ნახ. 334), მაშინ შეზღუდული D კვანძიც გადაადგილდება Δ_1 -ით (რადგანაც $AC \parallel BD$). C კვანძის გადაადგილება იქნება დამოუკიდებელი, D კვანძის კი დამოკიდებული. 335-ე ნახაზზე ნაჩვენებია სახსროვანი სქემის გადაადგილებული მდგომარეობა; თუ

1 კვანძს მივცემთ Δ_1 გადაადგილებებს, მაშინ 2, 3 და 4 კვანძები გადაადგილდება Δ_2 , Δ_3 და Δ_4 სიდიდით ($\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4$). Δ_1 იქნება დამოუკიდებელი გადაადგილება, Δ_2 , Δ_3 და Δ_4 კი — დამოკიდებული. ამ ჩარჩოს სახსროვან სქემასაც აქვს ერთი თავისუფლების ხარისხი და, მაშასადამე, ხაზობრივ გადაადგილებათა ერთი ხარისხი. აქ სულ გვექნება 5 უცნობი — 4 კუთხური და ერთი ხაზობრივი.



ნახ. 335.

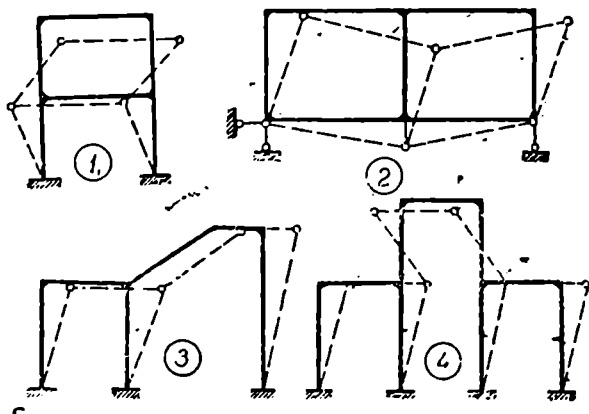
7 - 8 - 12 =

336-ე ნახაზზე მოყვანილ ჩარჩოებზე წყვეტილი ხაზით ნაჩვენებია სახსროვანი სქემების გადაადგილებული მდგომარეობა. 1, 2 და მე-3 სქემებს აქვთ ორ-ორი თავისუფლების ხარისხი და მაშასადამე ორ-ორი ხაზობრივი გადაადგილების ხარისხი, მე-4 სქემას კი სამი თავისუფლების ხარისხი.

პირველ სქემაში გვექნება 6 უცნობი — 4 კუთხური და 2 ხაზობრივი, მეორეში 8 უცნობი — 6 კუთხური და 2 ხაზობრივი, მესამეში 6 უცნობი — 4 კუთხური და 2 ხაზობრივი, მეოთხეში კი 9 უცნობი — 6 კუთხური და 3 ხაზობრივი.

რადგანაც უცნობებზე გადაადგილებები გვაქვს არჩეული ამიტომ ჩვენ

შეგვიძლია ვთქვათ, რომ კინემატიკური ურკვევობის ხარისხი ტოლია დრეკადი კვანძების (არა საყრდენი) რიცხვი პლუს კვანძების დამოუკიდებელი ხაზობრივი გადაადგილებათა რიცხვი.



ნახ. 336.

§ 77. დამოუკიდებელ და დამოკიდებულ გადაადგილებებს შორის კავშირი. გადაადგილებათა ღიახარამა

ზემოთ ჩვენ ვნახეთ, რომ თუ ერთი ღეროს გადაადგილება დამოუკიდებელია, მაშინ დანარჩენებისა იქნება დამოკიდებული. მათ შორის არსებობს ვარკვეული კავშირი. უმარტივეს შემთხვევაში ეს კავშირი უშუალოდ ნახაზიდან გამომდინარეობს.

საერთოდ, მივიღოთ, რომ ჩარჩოს კვანძი გადაადგილდება სათანადო ღეროს პერპენდიკულარულად. ეს დაშვება სამართლიანია, რადგან ჩვენ ვიხილავთ მკირე დრეკად დეფორმაციებს და რკალის სიგრძე შეგვიძლია შევცვალოთ მხების სიგრძით.

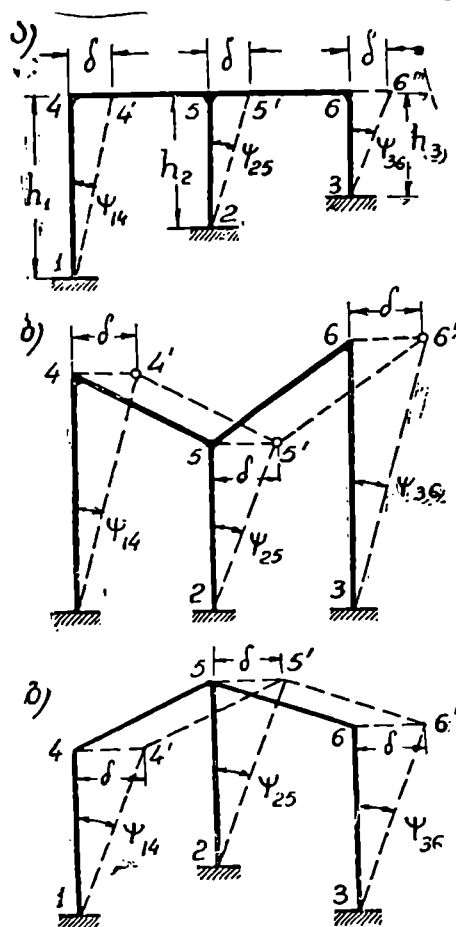
თუ ჩარჩოს დგარები ურთიერთ პარალელურია (ნახ. 337, ა, ბ, გ), მაშინ ერთი რომელიმე კვანძის ბ-თი გადაადგილება დგარის პერპენდიკულარულად გამოიწვევს დანარჩენი კვანძების გადაადგილებას იმავე სიდიდით. რიგეელი გადაადგილება თავის პარალელურად და არ მობრუნდება. მნიშვნელობა არა აქვს პარალელური დგარების სიგრძეს. თუ მე-4 კვანძის გადაადგილება ტოლია ბ-სი, მაშინ დგარების მობრუნების კუთხეებს შორის იქნება შემდეგი დამოკიდებულება:

$$\psi_{11} = \frac{\delta}{h_1}; \quad \psi_{23} = \frac{\delta}{h_2} = \psi_{11} \frac{h_1}{h_2}; \quad \psi_{36} = \frac{\delta}{h_3} = \psi_{11} \frac{h_1}{h_3}.$$

უფრო რთულ შემთხვევებში, როდესაც დგარები არ არის ურთიერთ პარალელური, დამოკიდებული გადაადგილებების სიდიდე და ღეროების მობრუნების კუთხეები განისაზღვრება გადაადგილებათა დიაგრამის საშუალებით.

ბით. ჩვენ შევისწავლოთ გადაადგილებათა პოლარულ. დ. ია გ რ ა მ ის ა გ ე -
ბა, რომელიც ყველაზე მარტივად წყვეტს ამოცანას.

გადაადგილებათა პოლარული დიაგრამის აგება განვიხილოთ კონკრეტულ
მაგალითებზე. წარმოვიდგინოთ გეომეტრიულად ცვლადი $ACDB$ სახსროვანი



ნახ. 337.

სისტემა და ვთქვათ, რომ C კვანძი გადაადგილდა AC ღეროს პერპენდიკულარულად δ სიდიდით (ნახ. 338, ა). განესაზღვროთ ყველა დანარჩენი ღეროს გადაადგილება. ავიღოთ ნებისმიერი O წერტილი ე.წ. პოლუსი და ამ წერტილიდან მოვზომოთ ყველა კვანძის გადაადგილება მოზრუნებული 90° -თ. მოზომილი მონაკვეთების ბოლო წერტილები გამოსახავენ კვანძების ახალ მდებარეობას და ამიტომ მათ (აღნიშნულია მცირე ასოებით a, b, c, d) გამოსახველი წერტილები ეწოდებათ. ყველა უძრავი კვანძის გამოსახველი წერტილი დიაგრამის პოლუსს ემთხვევა (ნახ. 338 ბ). O პოლუსიდან გავატაროთ სხივი $ac \parallel AC$ (გადაადგილების მიმართულების პერპენდიკულარულად) და მოვზომოთ მონაკვეთი $ac = \delta$. შემდეგ, იმავე O წერტილიდან გავატაროთ სხივი $bd \parallel BD$ და C წერტილიდან კი ხაზი $cd \parallel CD$. მათი გადაკვეთის d წერტილი იქნება D კვანძის გამოსახველი. ყველა კვანძის გამოსახველი წერტილების პოვნით ამოცანა გადაწყვეტილია.

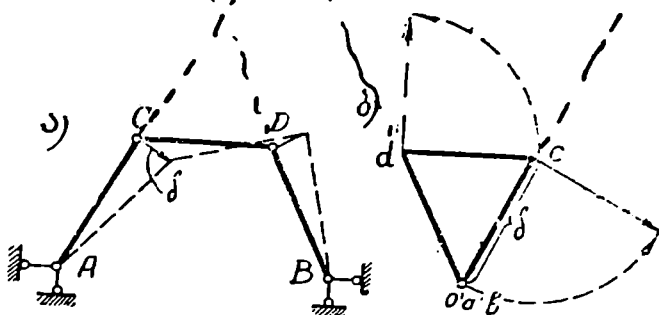
პოლარული დიაგრამის ძირითად თვისებას წარმოადგენს ის, რომ მისი გვერდები სათანადო ღე-

როების პარალელურია და გამოსახავენ მათ გადაადგილებათა სიდიდეებს.

რადგანაც დიაგრამაზე მონაკვეთები მოზომილია გადაადგილებათა მიმართულების პერპენდიკულარულად, ამიტომ მათი ნამდვილი მიმართულების მისაღებად დიაგრამის მონაკვეთები ან თვით დიაგრამა უნდა მოვაბრუნოთ 90° .

მაგალითად, C წერტილის A -ს მიმართ გადაადგილება δ ცნობილია და მიმართულია მარცხნიდან მარჯვნივ. ამ მიმართულების მისაღებად საკმარისია

გადაადგილებათა დიაგრამაზე ca მონაკვეთი მოვებრუნოთ 90° -ით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით (ფარგლის უძრავი ფეხი უნდა დაედოთ იმ წერტილს, რომლის გადაადგილებასაც ვეძებთ). დანარჩენი კვანძების



ნახ. 338.

გადაადგილებათა მიმართულების მისაღებად ყველა მონაკვეთი უნდა მოვებრუნოთ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით. D კვანძის გადაადგილების (C -ს მიმართ) მიმართულების მისაღებად dc მონაკვეთი უნდა მოვებრუნოთ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით 90° (ნახ. 338, ბ). მაშასადამე, D წერტილი C -ს მიმართ ზევით გადაადგილდება (გადაადგილების მიმართულება ნაჩვენებია ისრით).

ღეროს მობრუნება საათის ისრის მიმართულებით ჩვეთვალათ დადებითად, მხოლოდ საწინააღმდეგო მიმართულებით კი—უარყოფითად. განხილულ შემთხვევაში CA და DB ღეროების მობრუნება იქნება დადებითი, ხოლო DC -სი კი უარყოფითი. გადაადგილებათა დიაგრამით განისაზღვრება ღეროების მობრუნების კუთხეებიც.

ნებისმიერი ღეროს მობრუნების კუთხე ტოლია ამ ღეროს გადაადგილების (დიაგრამაზე გამომსახველის) ფარდობის ღეროს სიგრძესთან გადამრავლებული სამასშტაბო k კოეფიციენტზე:

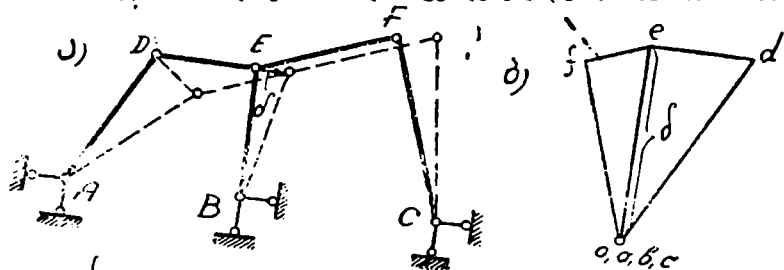
$$\psi_{AO} = k \frac{ac}{AC}; \quad \psi_{BD} = k \frac{bd}{BD}; \quad \psi_{DC} = -k \frac{dc}{DC}.$$

მობრუნების კუთხე იქნება დადებითი, თუ მრიცხველში და მნიშვნელში მოთავსებულ მონაკვეთებს ერთნაირი მიმართულება აქვთ, და უარყოფითი, თუ აქვთ საწინააღმდეგო მიმართულება. მაშასადამე, AC და BD ღერო მობრუნდება საათის ისრის მიმართულებით, ხოლო DC კი მის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

339-ე ნახაზზე გარჩეულია მეორე მაგალითი. ვთქვათ, რომ $ADEFBC$ სახსროვანი გეომეტრიულად ცვლადი სისტემის E წერტილი B -ს მიმართ გადაადგილდა b -თი. O პოლუსიდან, რომელსაც დავმთავა უძრავი A , B და C წერტილები, მოვზომოთ BE -ს პარალელურად z , მივიღებთ E წერტილის გა-

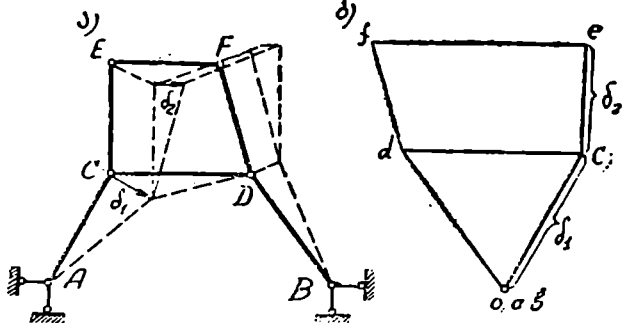
შომსახველს c -ს (ნახ. 339, ბ). e წერტილიდან გავატაროთ $ed \parallel ED$ და a წერტილიდან $ad \parallel AD$, მათი გადაკვეთის d წერტილი იქნება D -ს გამომსახველი. ანალოგიურად მივიღებთ F -ის გამომსახველს f -ს. D და E წერტილები გადაადგილდება მარჯვნივ, ხოლო F კი — ზემოთ (E -ს მიმართ).

გავარჩიოთ ცვლადი სახსროვანი სისტემა, რომელსაც ორი თავისუფლების ხარისხი და, მაშასადამე, ორი დამოუკიდებელი გადაადგილება აქვს (ნახ.



ნახ. 339.

ნახ. 340



ნახ. 340.

340, ა). C წერტილის გადაადგილება AC -ს პერპენდიკულარულად იყოს δ_1 და CE -სი კი δ_2 . ჯერ განვიხილოთ, რომ სისტემაში მიიღო მხოლოდ δ_1 გადაადგილება ($\delta_2 = 0$), შემდეგ კი δ_2 ($\delta_1 = 0$). O პოლუსიდან გავატაროთ AC -ს პარალელური სხივი და მოვზომოთ δ_1 გადაადგილება, მივიღებთ c -ს. c წერტილიდან გავატაროთ $cd \parallel CD$ და b -დან $bd \parallel BD$, მივიღებთ d -ს (ნახ. 340, ბ).

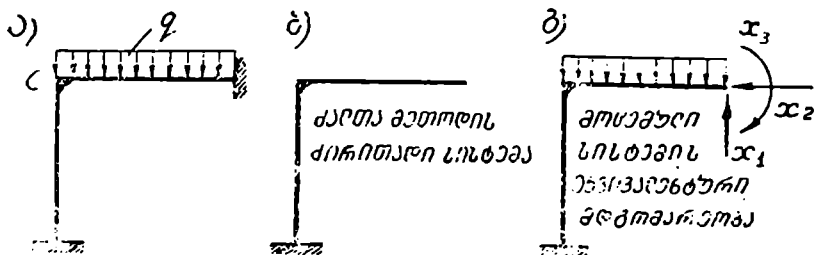
c წერტილიდან მოვზომოთ δ_2 და e წერტილიდან ($ce \parallel CE$) გავატაროთ $ef \parallel EF$ და d წერტილიდან $df \parallel DF$, მივიღებთ f -ს. პოლარული დიაგრამის სათანადო სხივები მობრუნებული 90° -ით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით მოგვეცვს სათანადო წერტილების გადაადგილებებს.

§ 78. გადაადგილებათა მეთოდის ძირითადი სისტემის არჩევა

ჩარჩოს ანგარიშს ვიწყებთ ძირითადი სისტემის არჩევით, ისე როგორც ძალთა მეთოდით ანგარიშის დროს. ძალთა მეთოდის ძირითად სისტემას ვიღებთ ზედმეტი ბმების უკუგდების გზით, გადაადგილებათა მეთოდით ანგა-

რიშის დროს კი პირიქით, შემოგვაქვს დამატებითი ბმები და მოცემულ სტატიკურად ურკვევ სისტემას ვაქცევთ უფრო მეტჯერ ურკვევად.

რადგანაც უცნობებად ვირჩევთ ჩარჩოს კვანძების კუთხურ და ხაზობრივ გადაადგილებებს, ამიტომ დამატებითი ბმები ისეთნაირად შემოვიტანოთ, რომ



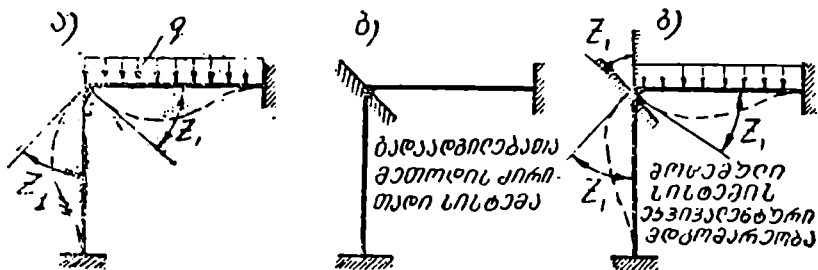
ნახ. 341.

მოცემულ ჩარჩოს კვანძებს მოეუსპოთ შობრუნების და ხაზობრივი გადაადგილების საშუალება. გარდა ამისა, მოცემული ჩარჩო უნდა დაიყოს ცალკეულ ელემენტარულ კოქებად, რომელთა ანგარიში წინასწარ იქნება შესრულებული.

განვიხილოთ მაგალითი (ნახ. 341, ა). უკუვადლოთ ზედნეტი ღეროები, მივიღებთ ძალთა მეთოდის ძირითად სისტემას (ნახ. 341, ბ). უკუგდებულ ბმები შევცვალოთ ძალებით (ნახ. 341, გ).

სისტემა სამჯერ სტატიკურად ურკვევია და ძალთა მეთოდით ანგარიშის დროს დაგვიკირდება შევადგინოთ და გადაეწყვიტოთ სამი განტოლება სამი უცნობით.

მოცემული დატვირთვისაგან C კვანძი შობრუნდება Z_1 კუთხით (ნახ. 342, ა). ხაზობრივ გადაადგილებას კი არ ექნება ადგილი. ამიტომ საკმარისია ერთი ისეთი ბმის შემოტანა, რომელიც C კვანძს მოუსპობს შობრუნების საშუალებას. ამას მივიღებთ თუ C კვანძს ჩავმაგრებთ ხისტად (ნახ. 342, ბ).

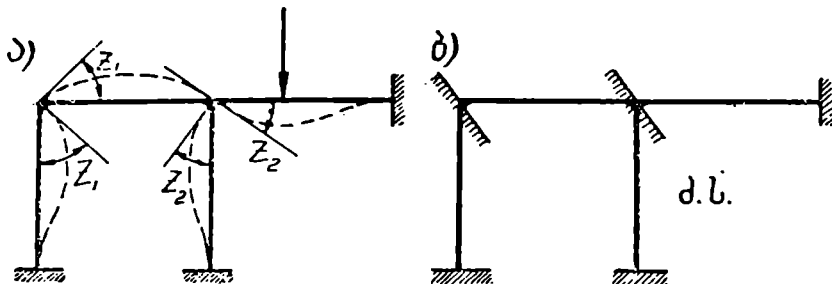


ნახ. 342.

შემოტანილი ხისტი ჩამაგრება საზოგადოდ კვანძს უსპობს მხოლოდ შობრუნების საშუალებას და არ ეწინააღმდეგება მის ხაზობრივ გადაადგილებას.

ამით ის განსხვავდება ჩვეულებრივი ჩამაგრებისაგან. ასეთ ბმებში (ჩამაგრებებში) წარმოიშვება მხოლოდ მომენტი: 342, ბ ნახაზზე წარმოდგენილი სისტემა იქნება გადაადგილებათა მეთოდის ძირითადი სისტემა.

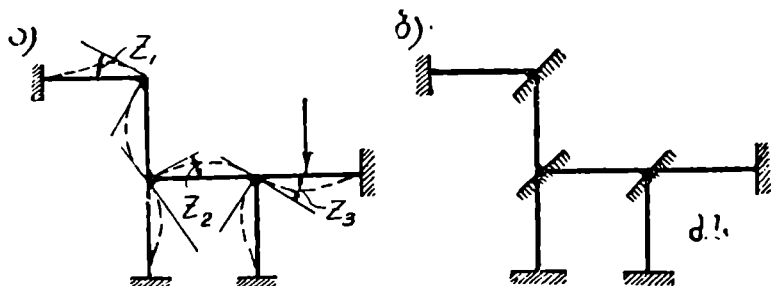
! თუ ჩვენ როგორმე განვსაზღვრავთ C კვანძის მობრუნების Z_1 კუთხეს და ძირითად სისტემაზე ვიმოქმედებთ მით (C კვანძს მოვებრუნებთ Z_1 კუთხით) და მოცემული თანაბრად განაწილებული ტვირთით (ნახ. 342, გ), მაშინ



ნახ. 343.

ძირითად სისტემაში წარმოიშვება იმავე სიდიდის შინაგანი ძალები, რაც მოცემულ სისტემაში და იქნება მისი ეკვივალენტური. მაშასადამე, გადაადგილებათა მეთოდით განხილული ჩარჩოს საანგარიშოდ საკმარისია მხოლოდ ერთი განტოლების შედგენა და გადაწყვეტა, რაც მნიშვნელოვნად ამარტივებს ამოცანას.

343 და 344 ნახაზზე ნაჩვენებ სისტემებში მხოლოდ კუთხურ გადაადგილებებს აქვს ადგილი. მათ მოსასპობად პირველ შემთხვევაში საჭიროა ორი ჩამაგრების შემოტანა, მეორეში კი სამის. მაშასადამე, ჩვენ მოგვიხდება სათა-

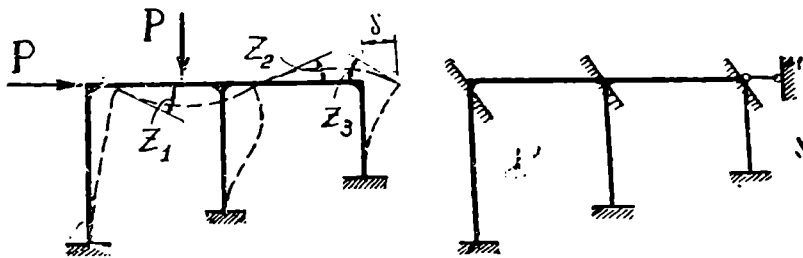


ნახ. 344.

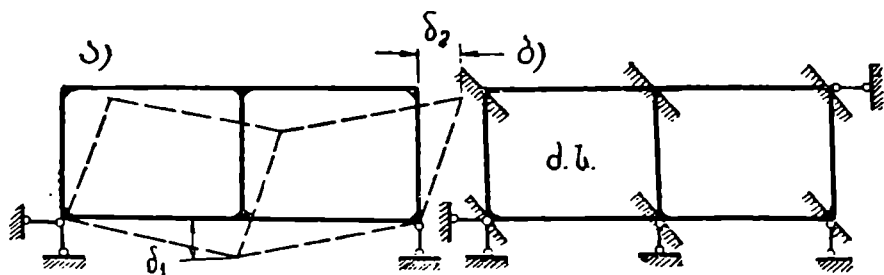
ნაღოდ ორ და სამუცნობიან განტოლებათა სისტემების შედგენა და გადაწყვეტა. ძალთა მეთოდით ამავე ჩარჩოების საანგარიშოდ საჭიროა სათანადოდ 9-და 9-მუცნობიან განტოლებათა სისტემების ამოხსნა.

ახლა განვიხილოთ ისეთი ჩარჩოები, სადაც კვანძები კუთხურ დეფორმაციებთან ერთად განიცდის ხაზობრივ გადაადგილებებსაც. 345 ნახაზზე წარ-

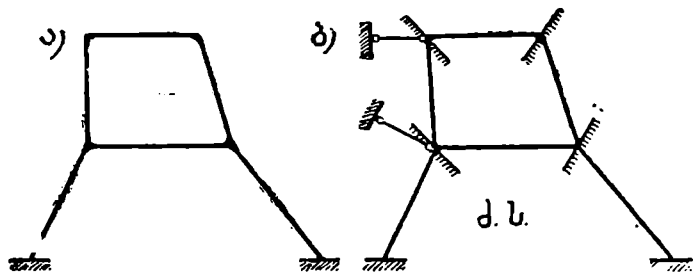
მოდგენილ ჩარჩოში კვანძები მობრუნდება Z_1 , Z_2 და Z_3 კუთხით და გადაადგილდება ხაზობრივად δ -ით. მათ მოსასპობად საჭიროა ოთხი ბმის შემოტანა — სამი ხისტი ჩამაგრების და ერთი პორიზონტალური ღეროსი, რომელიც მოსპობს ხაზობრივ გადაადგილებას.



ნახ. 345.



ნახ. 346.



ნახ. 347.

346 და 347 ნახაზზე მოყვანილ სისტემებში აღგილი აქვს ორ დამოუკიდებელ ხაზობრივ გადაადგილებას და ამიტომ მათ მოსასპობად საჭიროა ორორი ღეროს (ბმის) შემოტანა. უმჯობესია ბმები მოეაწყოს ღეროების პერპენდიკულარულად. სათანადო ძირითადი სისტემები ნაჩვენებია ნახაზზე.

შემოტანილ ღეროებში, რომლებიც კვანძების ხაზობრივ გადა-

ადგილებებს სპობს, წარმოიშვება მხოლოდ გრძივი ძალები (რეაქციები). როგორც ვხედავთ, გადაადგილებათა მეთოდის ძირითადი სისტემის მისაღებად ყველა შუალედი კვანძი უნდა ჩავამაგროთ ხისტად და ხაზობრივი გადაადგილების მოსასპობად შემოვიტანოთ ღეროები.

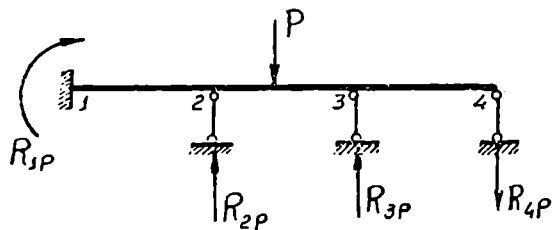
ძირითადი სისტემა იმით განსხვავდება მოცემული სისტემისაგან, რომ შემოტანილ ჩამაგრებებში წარმოიშვება მომენტები და ღეროებში კი ძალები.

ძირითადი სისტემა შედგება ცალკეული სწორხაზოვანი სტატიკურად ურკვევი კოქებისაგან, რომელთა წინასწარი ანგარიში საფუძვლად უდევს გადაადგილებათა მეთოდს. შევისწავლოთ ეს კოქები.

§ 79. სტატიკურად ურკვევი კოქების ჩამატების განსაზღვრა (გადაადგილებათა მეთოდის კოეფიციენტები)

სხვადასხვა ფაქტორით (დატვირთვა, მობრუნების კუთხე, ხაზობრივი გადაადგილება და სხვა) განვითარებულ ძალებს საყრდენ ღეროებში ვუწოდოთ რეაქციები.

რეაქციები აღვნიშნოთ ორი ინდექსით, რომელთაგან პირველი გვიჩვენებს რეაქციის ადგილს და მიმართულებას, მეორე კი რეაქციის გამომწვევ მიზეზს.

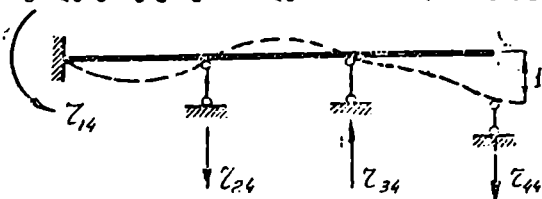


ნახ. 348.

მაგალითად, მოცემული დატვირთვით გამოწვეული რეაქცია i ღეროში იქნება R_{iP} (ნახ. 348). აქ R_{iP} იქნება P ძალით გამოწვეული მომენტი 1 საყრდენზე.

რეაქციები წარმოიშვება საყრდენების გადაადგი-

ლებითაც. მაგალითად, უკრი კოქის მე-4 საყრდენს თუ გადავადგილებთ ერთეული სიდიდით. (ნახ. 349), საყრდენებზე განვითარდება სათანადო რეაქციები. ერთეული გადაადგილებით გამოწვეული რეაქციები აღვნიშნოთ r_{ik} , რომელიც წარჩეიხება ასე— k ღეროს ერთეული გადაადგილებით გამოწვეული რეაქცია i ღეროში.



ნახ. 349.

r_{ik} იქნება საყრდენი ნომენტი. ღეროს გადაადგილებით გამოწვეული რეაქცია ამავე ღეროში აღვნიშნება r_{ii} -ით.

შემდეგში რეაქციების ქვეშ ვიგულისხმებთ არა მარტო ძალებს, არამედ მომენტებსაც (წყვილ ძალებს).

თუ ლეროების გადაადგილებათა ერთ გარკვეულ მიმართულებას ჩვეთვლით დადებითად, მაშინ რეაქციები აიღება დადებითი ნიშნით, თუ მათი მიმართულება ემთხვევა გადაადგილებათა დადებით მიმართულებას, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი აიღება უარყოფითი ნიშნით.

მაგალითად, 2, 3 და 4 ლეროს ვერტიკალურ გადაადგილებას ქვემოთ თუ ჩავთვლით დადებითად, მაშინ r_{11} და r_{21} იქნება დადებითი, ხოლო r_{31} კი — უარყოფითი. საზოგადოდ, რეაქცია r_{ii} ყოველთვის დადებითია.

ისე როგორც გადაადგილებები, რეაქციებიც ხასიათდება ურთიერთობის პრინციპით

$$r_{ik} = r_{ki}. \quad (162)$$

თუ ადგილი აქვს ორ დამოუკიდებელ ერთმანეთის ტოლ (ერთეულ) გადაადგილებას, მაშინ რეაქცია i ლეროში, გამოწვეული k ლეროს ერთეული გადაადგილებით, ტოლია რეაქციის k ლეროში, გამოწვეული i ლეროს ერთეული გადაადგილებით.

გადაადგილებები ხდება სათანადოდ i და k ლეროების მიმართულებით.

ამ თეორემის დამტკიცებაში იქნება ნუშაობათა ურთიერთობის პრინციპის საფუძველზე (ფორმ. 19)

$$T_{ik} = T_{ki}.$$

ავილოთ სტატიკურად ურკვევი კოჭი (ნახ. 350, ა). i ლერო გადავადგილოთ თავისივე მიმართულების ერთეული სიდიდით, ამის შედეგად განვითარებული რეაქციები i და k ლეროში იქნება r_{ii} და r_{ki} (ნახ. 350, ბ). იმავე კოჭის k ლეროს გადაადგილება ერთეული სიდიდით გამოიწვევს რეაქციებს r_{ik} და r_{kk} (ნახ. 350, გ). რეაქციები აღებულია დადებითი ნიშნით. პირველი მდგომარეობის გარე ძალების მუშაობა მეორე მდგომარეობის გადაადგილებებზე ტოლია

$$T_{ik} = r_{ii} \cdot 0 + r_{ki} \cdot 1 = r_{ki};$$

მეორე მდგომარეობის გარე ძალების მუშაობა პირველის გადაადგილებებზე იქნება

$$T_{ki} = r_{ki} \cdot 0 + r_{kk} \cdot 1 = r_{kk}$$

მაშასადამე,

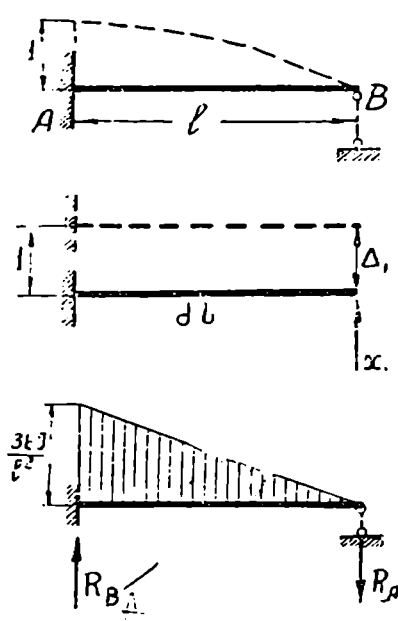
$$r_{ik} = r_{ki}.$$

(163)

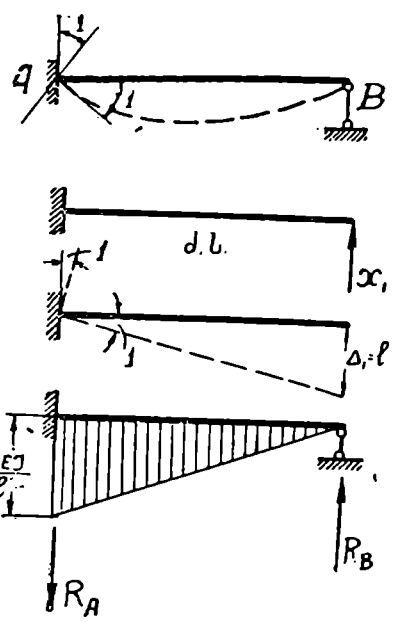
ეს ძირითადი განტოლება საშარტლიანია რეაქციული მომენტების შემთხვევაშიც.

გადავიღეთ თვით რეაქციების განსაზღვრაზე. განვიხილოთ ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამავრებული კოჭი (ნახ. 351). გამოვთვალოთ

საყრდენი რეაქციები და მომენტები A საყრდენის ერთეული გადაადგილებით გამოწვეული. ანგარიში შევასრულოთ ძალთა მეთოდით. ძირითადი სისტემა ნაჩვენებია ნახაზზე.



ნახ. 351.



ნახ. 352.

კანონიკური განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_1 = 0,$$

სადაც Δ_1 წარმოადგენს X_1 ძალის მოდების წერტილის გადაადგილებას, გამოწვეულს A საყრდენის ერთეული გადაადგილებით.

$$\Delta_1 = 1; \quad \delta_{11} = \frac{l^3}{3EI}.$$

კანონიკური განტოლებიდან მივიღებთ

$$X_1 = -\frac{\Delta_1}{\delta_{11}} = -\frac{3EI}{l^2}.$$

მაშასადამე, საყრდენი რეაქციები და საყრდენი მომენტი ტოლია

$$R_B = X_1 = -\frac{3EI}{l^2}; \quad R_A = \frac{3EI}{l^2}; \quad M_A = -\frac{3EI}{l^2}.$$

გამოეთვალათ A საყრდენის ერთეული კუთხით მობრუნებით გამოწვეული საყრდენი რეაქციები და მომენტები (ნახ. 352). გამოიყენოთ იგივე ძირითადი სისტემა

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_1 = 0.$$

კოჭის სქემა და დატვირთვა	მულტივი მომენტის ეპიურები და რეაქციები	ფორმულები
		$R_A = \frac{5}{8} ql; \quad R_B = \frac{1}{8} ql$ $M_A = -\frac{q l^2}{8}$
		$R_A = \frac{Pv}{2}(3-u^2); \quad R_B = \frac{Pu^2}{2}(3-u)$ $M_A = -\frac{Pv}{2}u(1-u^2); \quad M_B = \frac{Pu}{2}u(3-u)$
		$P_A = -R_B = \frac{3EI}{l} = \frac{3i}{l}$ $M_A = \frac{3EI}{l} = 3i$
		$R_A = -R_B = \frac{3EI}{l} = \frac{3i}{l};$ $M_A = \frac{3EI}{l} = \frac{3i}{l}$
<p>თანაბარი ბაზურება</p>		$R_A = -R_B = \frac{3EI \alpha \Delta t}{l \cdot 2d}; \quad M_A = 3EI \frac{\alpha \Delta t}{2d}$ <p>d კვეთის სიმაღლე</p>
		$R_A = R_B = \frac{cl}{2}; \quad M_A = -M_B = -\frac{q l^2}{12}$
		$R_A = u^2(1+2u)P$ $R_B = v^2(1+2v)P$ $M_A = -uv^2PI$ $M_B = u^2vPI$
		$R_A = -R_B = -\frac{6EI}{l} = -\frac{6i}{l}$ $M_A = \frac{4EI}{l} = 4i; \quad M_B = \frac{2EI}{l} = 2i$
		$R_A = -R_B = -\frac{12EI}{l}$ $M_A = M_B = \frac{6EI}{l}$
<p>თანაბარი ბაზურება</p>		$R_A = R_B = 0$ $M_A = -M_B = EI \frac{\alpha \Delta t}{d}$ <p>a კვეთის სიმაღლე</p>

სადაც Δ_1 არის X_1 ძალის მოდების წერტილის გადაადგილება, გამოწვეული A საყრდენის მობრუნებით ერთეული კუთხით და ტოლია

$$\Delta_1 = -1 \cdot l.$$

ნიშანი მინუსი აღებულია იმიტომ, რომ გადაადგილება ხდება X_1 -ის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

კანონიკური განტოლებიდან მივიღებთ:

$$X_1 = -\frac{\Delta_1}{\delta_{11}} = \frac{3EI}{l^2}.$$

მაშასადამე,

$$R_B = \frac{3EI}{l^2}; \quad R_A = -\frac{3EI}{l^2}; \quad M_A = \frac{3EI}{l}.$$

სიმოკლისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$i = \frac{EI}{l}. \quad (164)$$

i -ს სიხისტის კოეფიციენტი ეწოდება.

ჩვენ შეგვიძლია ანალოგიურად ვიანგარიშოთ ორი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებული ძელი. რეაქციების და მომენტების მნიშვნელობები სხვადასხვა შემთხვევისათვის მოყვანილია მე-20 ცხრილში.

§ 50. გადაადგილებათა მეთოდის კანონიკური განტოლებები

ძირითადი სისტემის არჩევის შემდეგ ჩვენ გადავიღებთ კანონიკურ განტოლებათა სისტემის შედგენაზე. განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი (ნახ. 353, ა). ძირითადი სისტემის მისაღებად საკმარისია შემოვიტანოთ ხისტი ჩანაგრება C კვანძში (ნახ. 353, ბ). ძირითადი სისტემა, რომ გახდეს მოცემული სისტემის ეკვივალენტურა, საჭიროა C კვანძი მოვაბრუნოთ Z_1 კუთხით და ვიმოქმედოთ მოცემული ტვირთით (ნახ. 353, გ). ამ ოპერაციების შედეგად შემოტანილი ჩამაგრების ადგილზე წარმოიშვება რეაქციული მომენტები. რადგანაც სინამდვილეში C კვანძში ზრავითარი ჩამაგრება არ არსებობს, ამიტომ მასში განვითარებული რეაქციული მომენტების ჯამი ნულის ტოლი უნდა იყოს.

თუ R_{1P} -ით აღვნიშნავთ მოცემული დატვირთვით გამოწვეულ რეაქციულ მომენტს ჩამაგრების ადგილზე (ნახ. 353, დ) და r_{11} -ით კი—რეაქციულ მომენტს იმავე ჩამაგრებაში, გამოწვეულს მისი ერთეული კუთხით ($Z_1=1$) მობრუნებით (ნახ. 353, ე), მაშინ რეაქციული მომენტის უარყოფა ჩამაგრებაში გამოსახება განტოლებით

$$Z_1 r_{11} + R_{1P} = 0. \quad (165)$$

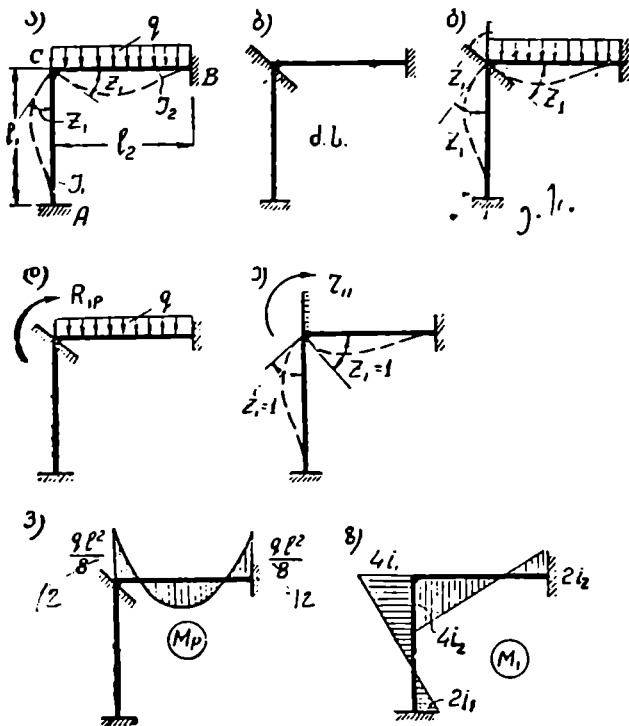
თუ ეს პირობა დაცულია, მაშინ მოცემულ და ძირითად სისტემებს შორის განსხვავება აღარ იქნება.

მიღებული განტოლებიდან განსაზღვრულ Z_1 გადაადგილებით და მოცემული დატვირთვით ვიმოქმედოთ ძირითად სისტემაზე და ავაგოთ საბოლოო მდუნავი მომენტის ეპიურა; ამით ამოცანა გადაწყვეტილი იქნება.

(165) განტოლება წარმოადგენს გადაადგილებათა მეთოდის კანონიკურ განტოლებას. კანონიკური განტოლების კოეფიციენტების რეაქციული მომენტების გამოსათვლელად ავაგოთ მოცემული დატვირთვით (ნახ. 353, ე) და ერთეული მობრუნების კუთხით (ნახ. 353, ზ) გამოწვეული ეპიურები. ეპიურ-

რის ორდინატები განისაზღვრება მე-20 ცხრილის საშუალებით. რეაქციული ძალების ნიშნების გამოსარკვევად მივიღოთ შემდეგი წესი:

ავირჩიოთ კვანძის მობრუნების და ხაზობრივი გადაადგილების ერთი გარკვეული მიმართულება; რეაქციული ძალე ავიღოთ დადებითი ნიშნით, თუ მისი მიმართულება ემთხვევა გადაადგილების მიმართულებას.



ნახ. 353.

მაგალითად, განხილულ შემთხვევაში C კვანძის მობრუნება ემთხვევა სა-ათის ისრის ბრუნვის მიმართულებას. რეაქციული მომენტების მიმართულებები ავირჩიოთ ამ მიმართულებით და R_{1p} -ის გამოსათვლელად განვიხილოთ C კვანძის წონასწორობის პირობა (ნახ. 354, ა):

$$\sum M = R_{1p} + \frac{q l_1^2}{8} = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$R_{1p} = -\frac{q l_1^2}{8}.$$

მავე C კვანძის ამოკვეთა $Z_1 = 1$ მდგომარეობიდან და წონასწორობის განტოლების შედგენა მოგვცემს (ნახ. 354, ბ):

$$\sum M = r_{11} - 4i_1 - 4i_2 = 0$$

აქედან მივიღებთ

$$r_{11} = 4i_1 + 4i_2.$$

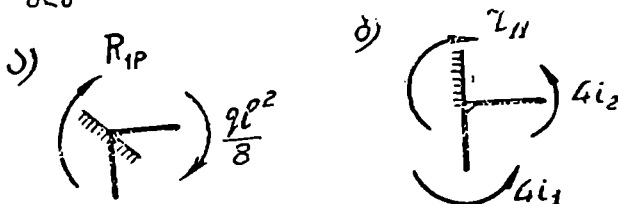
R_{1p} და r_{11} -ის მნიშვნელობებს თუ შევიტანთ კანონიკურ განტოლებაში, მივიღებთ

$$Z_1 = \frac{ql^2}{8(i_1 + i_2)}.$$

ჯამურ ეპიურას მივიღებთ ფორმულით

$$M = M_p + M_1 Z_1.$$

ჩვენ გავარჩიეთ რეაქციული ძალების განსაზღვრის სტატიკური მეთოდი. ხშირად რეაქციული ძალების გამოთვლა მარტივდება, თუ გამოვიყენებთ ეპიურების გადამრავლების წესს. მუშაობათა ურთიერთობის პრინციპის საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ რეაქციული ძალების გამოსათვლელი ზოგადი ფორმულები



ნახ. 354.

$$r_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k ds}{EI}; \quad r_{ii} = \sum \int \frac{M_i^2 ds}{EI} \quad (166)$$

სადაც M_i და M_k წარმოადგენს $Z_i = 1$ და $Z_k = 1$ -საგან გამოწვეულ მომენტებს სტატიკურად ურკვევ ძირითად სისტემაში.

(166) ფორმულა მორის ფორმულის ანალოგიურია და ეპიურების კომბინაცია ხდება ისე, როგორც ძალთა მეთოდის დროს.

ამ ფორმულის გამოყენება მიზანშეწონილია უმთავრესად დახრილი ღვარების შემთხვევაში. ტვირთით გამოწვეული რეაქციები გამოითვლება ფორმულით

$$R_{ip} = \sum \int \frac{M_i M_p^0 ds}{EI}, \quad (167)$$

სადაც M_p^0 წარმოადგენს მოცემული ტვირთით გამოწვეულ მომენტს ზედმეტი და დამატებითი ბმების უკუგდებათ მიღებულ ნებისმიერ სტატიკურად რკვევად სისტემაში.

ზოგადად, როდესაც ჩარჩოში ადგილი აქვს n დამოუკიდებელ გადაადგილებას $-Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$, კანონიკურ განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} + \dots + Z_n r_{1n} + R_{1p} &= 0; \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} + \dots + Z_n r_{2n} + R_{2p} &= 0; \\ Z_1 r_{31} + Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} + \dots + Z_n r_{3n} + R_{3p} &= 0; \\ \vdots & \\ Z_1 r_{n1} + Z_2 r_{n2} + Z_3 r_{n3} + \dots + Z_n r_{nn} + R_{np} &= 0. \end{aligned} \quad (168)$$

განტოლებათა სისტემის თითოეული განტოლება გამოსახავს იმ აზრს, რომ ჯამური რეაქციები შემოტანილ ბმებში, გამოწვეული Z_1, Z_2, \dots, Z_n გადაადგილებებით და P ძალით, ნულის ტოლია.

მაგალითად, პირველ განტოლებაში შედის რეაქციების ჯამი პირველ ბმაში (ჩამაგრებაში), მეორეში—რეაქციების ჯამი მეორე ბმაში და ა. შ.

მთავარ დიაგონალზე მოთავსებულ $r_{11}, r_{22}, \dots, r_{nn}$ კოეფიციენტებს ეწოდებათ მთავარი რეაქციები; $r_{12}, r_{13}, \dots, r_{in}$ კოეფიციენტებს—არამთავარი რეაქციები. თავისუფალ წევრებს— $R_{1p}, R_{2p}, \dots, R_{np}$ ეწოდებათ სატვირთო რეაქციები. მთავარი რეაქციები ყოველთვის დადებითია. არამთავარი და სატვირთო რეაქციები შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი. რეაქციების ურთიერთობის პრინციპი $r_{ik} = r_{ki}$ (ფორ. 163) ამცირებს საანგარიშო კოეფიციენტების რიცხვს. ტემპერატურაზე ანგარიშის დროს სატვირთო რეაქციები უნდა შეიცვალოს ტემპერატურით გამოწვეული $R_{1t}, R_{2t}, \dots, R_{nt}$ რეაქციებით.

კანონიკურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის შემდეგ გადავდივართ მლუნავე მომენტის ჯამური ეპიურის აგებაზე

$$M = M_p + M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + M_3 Z_3 + \dots + M_n Z_n, \quad (169)$$

სადაც $M_p, M_1, M_2, \dots, M_n$ მოცემული დატვირთვით და სათანადო ერთეული გადაადგილებებით ($Z_1=1, Z_2=1, \dots, Z_n=1$) გამოწვეული მომენტებია ძირითად სისტემაში.

მლუნავე მომენტის ჯამური ეპიურის შემოწმება და შემდეგ განივი და გრძივი ძალების ეპიურების აგება ხდება ისე, როგორც ძალთა მეთოდით ანგარიშის დროს (იხ. § 37—38).

✓ გადაადგილებათა ნეთოდით ჩარჩოს ანგარიშს ვაწარმოებთ შემდეგი თანმიმდევრობით:

1. ვირჩევთ ძირითად სისტემას, ე. ი. შემოგვაქვს ხისტი ჩამაგრებები და ღეროები, რომლებიც ჩარჩოს კვანძებს უსპობს კუთხურ და ხაზობრივ გადაადგილებებს;

2. ძირითად სისტემაზე შემოტანილი ბმების მიმართულებით ვიმოქმედებთ უ(ნობი Z_1, Z_2, \dots, Z_n გადაადგილებებით და მოცემული დატვირთვით;

3. ვწერთ გადაადგილებათა მეთოდის კანონიკურ განტოლებებს;

4. ძირითად სისტემაზე რიგრიგობით ვამოქმედებთ ერთეულ გადაადგილებებს $Z_1=1, Z_2=1, \dots, Z_n=1$ და ვაგებთ მათ მიერ გამოწვეულ ეპიურებს ცხრილების საშუალებით. ვაგებთ აგრეთვე მოცემული დატვირთვით გამოწვეულ ეპიურას;

5. ჩარჩოს ცალკეული ამოკვეთილი ნაწილების წონასწორობის განხილვის საფუძველზე ვანგარიშობთ კანონიკური განტოლებების კოეფიციენტებს;

6. ვადგენთ კანონიკურ განტოლებებს რიცხობრივად და ვწყვეტთ მას;

7. ვაგებთ მლუნავე მომენტის ჯამურ ეპიურას (169) ფორმულის საფუძველზე.

როგორც ვხედავთ, გადაადგილებათა მეთოდით ჩარჩოს ანგარიშის მსვლელობა ძალთა მეთოდის ანალოგიურია.

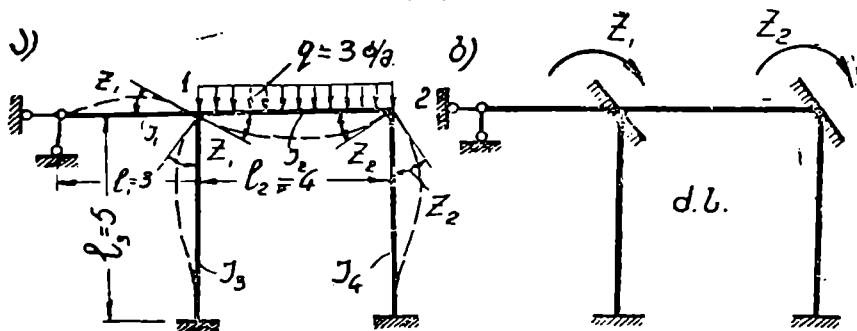
§ 81. ჩარჩოების ანგარიშის მაგალითები გადაადგილებათა მეთოდით

1 მაგალითი. ვიანგარიშით 355, ა ნახაზზე ნაჩვენებია ჩარჩო. ინერციის მომენტები $I_1, I_2=2; I_3=I_4=2$. $q=3$ ტ/მ.

სიხისტის კოეფიციენტები $i_1 = \frac{EI_1}{l_1} = \frac{E}{3}; i_2 = \frac{EI_2}{l_2} = \frac{E}{2}$

$i_3 = i_4 = \frac{EI_3}{l_3} = 0,4 E.$

გადაწყვეტა. ზედმეტ უცნობებად მივიღოთ 1 და 2 კვანძის მობრუნების Z_1 და Z_2 კუთხეები (ხაზობრივ გადაადგილებას ადგილი არა აქვს).



ნახ. 355.

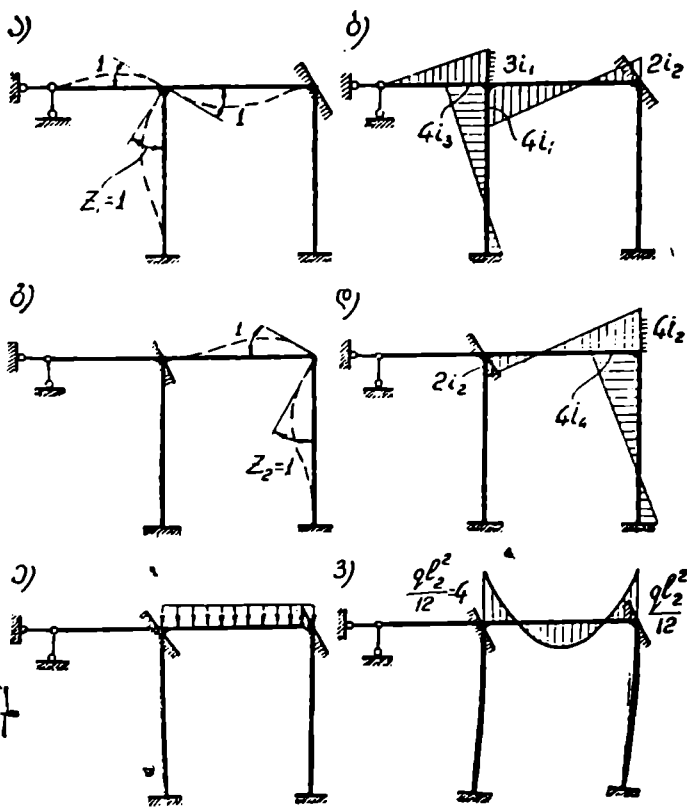
კვანძებს რომ მოუსპოთ მობრუნების საშუალება საჭიროა 1 და 2 კვანძის ტყისტად ჩავამაგროთ. მივიღებთ ძირითად სისტემას (ნახ. 355, ბ). შეპოტანილ ჩამაგრებებში რეაქციული მომენტების უარყოფა გამოისახება კანონიკური განტოლებების საშუალებით

$$\begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + R_{1p} &= 0; \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + R_{2p} &= 0. \end{aligned}$$

პირველი განტოლების პირველი წევრი წარმოადგენს 1 კვანძის Z_1 კუთხით მობრუნებით გამოწვეულ მომენტს ამ კვანძის ჩამაგრებაში, მეორე წევრი მე-2 კვანძის Z_2 კუთხით მობრუნებით გამოწვეულ მომენტს იმავე კვანძში, ხოლო მესამე წევრი კი—მოცემული ტვირთით გამოწვეულ მომენტს იმავე ჩამაგრებაში. მეორე განტოლების წევრები წარმოადგენენ იმავე ფაქტორებით გამოწვეულ მომენტებს მეორე კვანძში. კვანძების მობრუნების მიმართულებები ავირჩიოთ საათის ისრის მიმართულებით. კანონიკური განტოლებების კოეფიციენტების გამოსათვლელად ძირითად სისტემაზე ვამოქმედოთ რიგრიგობით:

1) $Z_1 = 1$, ე. ი. პირველი კვანძი შოვებრუნოთ ერთეული კუთხით და დანარჩენი კვანძები დავტოვოთ უცვლელად (ნახ. 356, ა); ვისარგებლოთ მე-20 ცხრილით და ავაგოთ მღუნავი მომენტის ეპიურა (ნახ. 356, ბ);

2) $Z_2=1$, ე. ი. მეორე კვანძი მოვებრუნოთ ერთეული კუთხით და დანარჩენი კვანძები დავტოვოთ უცვლელად (ნახ. 356, გ); ავავოთ მლუნაეი მომენტის ეპიურა (ნახ. 356, დ);



ნახ. 356.

3) მოცემული ტვირთი (ნახ. 356, ე) და ავავოთ მლუნაეი მომენტის ეპიურა (ნახ. 356, ვ).

$Z_1=1$ -ით გამოწვეული რეაქციული მომენტების გამოსათვლელად ამოვკვეთოთ $Z_1=1$ მდგომარეობიდან 1 და 2 კვანძი (ნახ. 357, ა, ბ) და შევადგინოთ მათი წონასწორობის პირობა, მივიღებთ

$$\sum M_1 = r_{11} - 3i_1 - 4i_2 - 4i_3 = 0,$$

აქედან

$$r_{11} = 3i_1 + 4i_2 + 4i_3 = E + 2E + 1,6E = 4,6E.$$

აქედან

$$\sum M_2 = r_{21} - 2i_2 = 0,$$

$$r_{21} = 2i_2.$$

ამოვკვეთით $Z_2=1$ მდგომარეობიდან 2 და 1 კვანძი (ნახ. 357 გ, დ) და დაეწერათ მათი წონასწორობის პირობა, მივიღებთ

$$\Sigma M_2 = r_{22} - 4i_2 - 4i_4 = 0,$$

აქედან

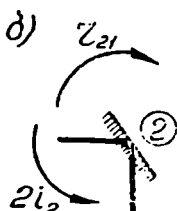
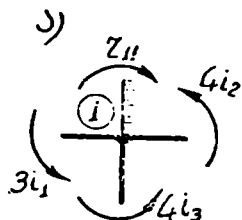
$$r_{22} = 4i_2 + 4i_4 = 2E + 1,6E = 3,6E,$$

$$\Sigma M_1 = r_{12} - 2i_2 = 0,$$

საიდანაც

$$r_{12} = 2i_2 = E.$$

ტვირთით გამოწვეული რეაქციების გამოსათვლელად ამოვკვეთით 1 და 2 კვანძი დატვირთვის მდგომარეობაში (ნახ. 357, ე, ვ) და შევადგინოთ მათი წონასწორობის პირობა, მივიღებთ

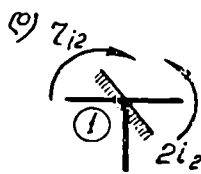
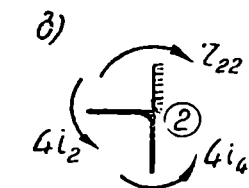


$$\Sigma M_1 = R_{1p} + \frac{ql_2^2}{12} = 0,$$

აქედან

$$R_{1p} = -\frac{ql_2^2}{12} = -4$$

$$\Sigma M_2 = R_{2p} - \frac{ql_2^2}{12} = 0,$$



საიდანაც

$$R_{2p} = 4.$$

კოეფიციენტების მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ კანონიკურ განტოლებებში, მივიღებთ:

$$6,6EZ_1 + EZ_2 - 4 = 0;$$

$$EZ_1 + 3,6EZ_2 + 4 = 0.$$

ამ განტოლებების გადაწყვეტა მოგვცემს

$$Z_1 = \frac{1,18}{E}; \quad Z_2 = -\frac{1,44}{E}.$$

ნახ. 357.

ნიშანი (-) გვიჩვენებს, რომ მე-2 კვანძი მობრუნდება ჩვენ

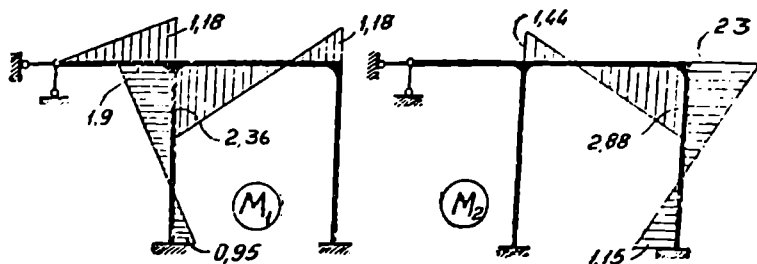
მიერ არჩეული მიმართულების (საათის ისრის) სწრაფიდან.

ერთეული ეპიურის ორდინატები გადავამრავლოთ Z_1 და Z_2 -ის სიდიდებზე (ნახ. 358) და შევაჯამოთ ტვირთით გამოწვეულ ეპიურასთან. მღუნავი მომენტის ჯამური ეპიურა ნაჩვენებია 359 ნახაზზე. განივი და გრძივი ძალების ეპიურები აიგება, ისე როგორც ძალთა მეთოდის დროს.

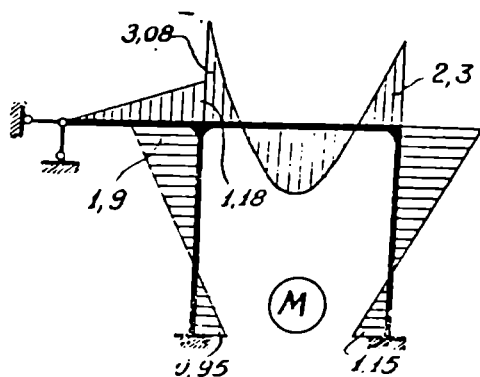
2 მაგალითი. ვიანგარიშით 360 ნახაზზე გამოსახული ჩარჩო. პირობითი ინერციის მომენტები და ელემენტების ზომები ნაჩვენებია ნახაზზე. სიხისტის კოეფიციენტების პირობითი მნიშვნელობები

$$i_1 = \frac{EI}{l} = 1; \quad i_2 = 2; \quad i_3 = 1; \quad i_4 = 2; \quad i_5 = 1; \quad i_6 = 1$$

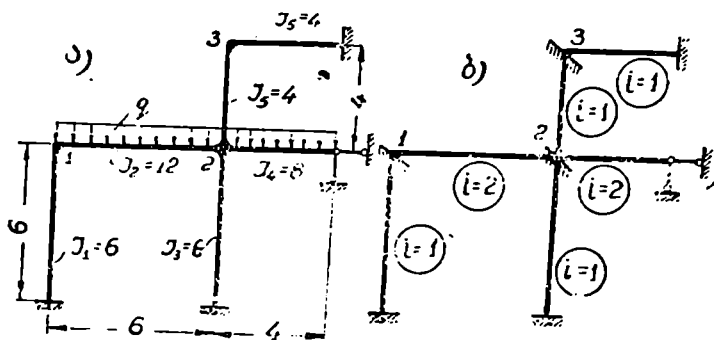
მიყვანილია 360-ე ნახაზზე.



ნახ. 358.



ნახ. 359.



ნახ. 360.

გ ა დ ა წ უ ვ ე ტ ა. რადგანაც ხაზობრივ გადაადგილებებს, ადგილი არა აქვს, ამიტომ ზედმეტ უცნობებად გვექნება 1, მე-2 და მე-3 კვანძების მობრუნების კუთხეები Z_1 , Z_2 და Z_3 . ძირითადი სისტემა ნაჩვენებია 360,ბ ნახაზზე.

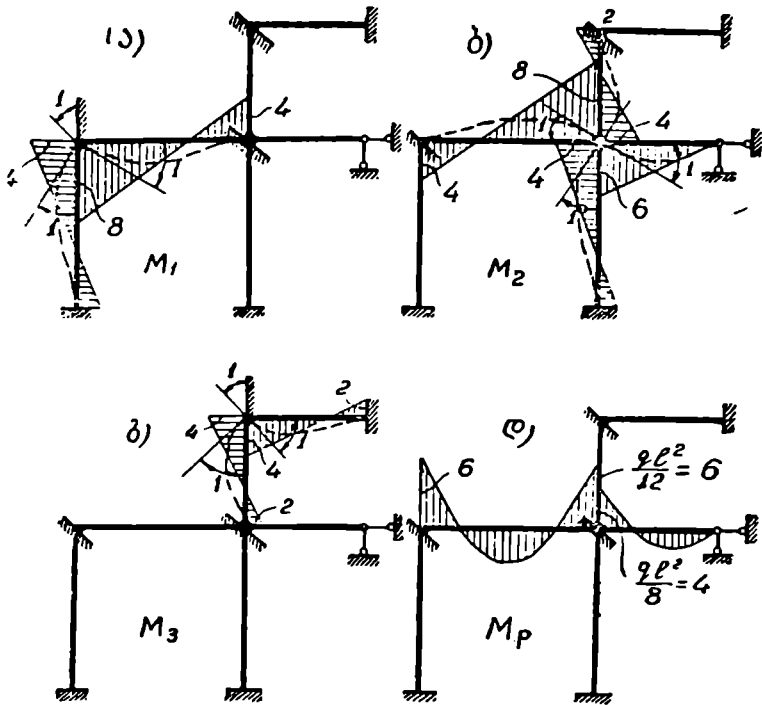
კანონიკურ განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} + R_{1P} = 0;$$

$$Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} + R_{2P} = 0;$$

$$Z_1 r_{31} + Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} + R_{3P} = 0.$$

კანონიკური განტოლების კოეფიციენტების გამოსათვლელად ძირითად სისტემაში კვანძები თანდათანობით მოვებრუნოთ ერთეული კუთხით და ავაგოთ მლუნაფი მომენტის ეპიურები (ნახ. 361, ა, ბ, გ). ავაგოთ აგრეთვე მო-



ნახ. 361.

ცემული ტვირთით გამოწვეული ეპიურა (ნახ. 361, დ). გამოვიყენოთ სტატიკური მეთოდი. $Z_1 = 1$ მდგომარეობიდან (ნახ. 361, ა) პირველი კვანძის ამოკვეთა და მისი წონასწორობის პირობის შედგენა მოგვცემს (ნახ. 362, ა):

$$\Sigma M_1 = r_{11} - 8 - 4 = 0,$$

საიდანაც

$$r_{11} = 12.$$

$Z_2 = 1$ მდგომარეობიდან (ნახ. 361, ბ) ამოკვეთოთ 1, 2 და მე-3 კვანძი (ნახ. 362, ბ, გ, დ) და დაეწეროთ მათი წონასწორობის პირობა, მივიღებთ

$$\Sigma M_1 = r_{12} - 4 = 0;$$

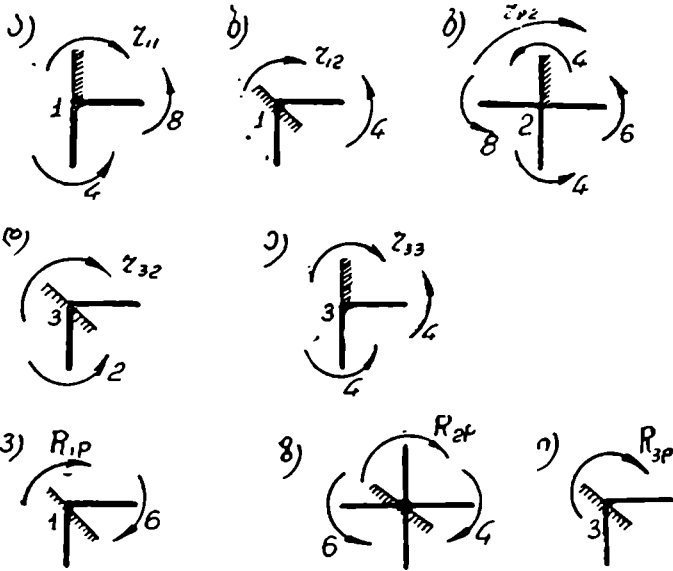
$$\Sigma M_2 = r_{22} - 4 - 6 - 4 - 8 = 0;$$

$$\Sigma M_3 = r_{32} - 2 = 0,$$

აქედან

$$r_{12} = 4; \quad r_{22} = 22; \quad r_{32} = 2.$$

$Z_3 = 1$ მდგომარეობიდან (ნახ. 361, გ) ამოვკვეთოთ მე-3 კვანძი (ნახ. 362, ე), მივიღებთ



ნახ. 362

$$\Sigma M_3 = r_{33} - 4 - 4 = 0,$$

$$r_{33} = 8.$$

$$r_{13} = r_{31} = 0.$$

აქედან

მომენტები

დატვირთვის მდგომარეობიდან ამოვკვეთოთ 1 და მე-2 კვანძი და შევადგინოთ მათი წონასწორობის პირობა (ნახ. 362, ვ, ზ, ა) მივიღებთ

$$\Sigma M_1 = R_{1P} + 6 = 0;$$

$$\Sigma M_2 = R_{2P} + 4 - 6 = 0;$$

$$\Sigma M_3 = R_{3P} = 0.$$

აქედან

$$R_{1P} = -6; \quad R_{2P} = 2; \quad R_{3P} = 0.$$

კოეფიციენტებისა შეტანის შემდეგ კანონიკურ განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$12Z_1 + 4Z_2 - 6 = 0;$$

$$4Z_1 + 22Z_2 + 2Z_3 + 2 = 0;$$

$$2Z_2 + 8Z_3 = 0.$$

განტოლებათა გადაწვევითა მოგვცემს

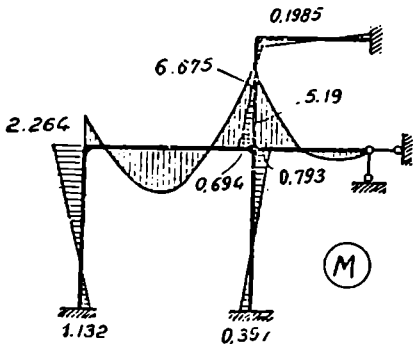
$$Z_1 = 0,566;$$

$$Z_2 = -0,1985;$$

$$Z_3 = 0,0496.$$

M_1 , M_2 და M_3 ეპიურების ორდინატები გადავამრავლოთ Z_1 , Z_2 და Z_3 -ის მნიშვნელობებზე და შევავაშოთ M_p ეპიურასთან, მივიღებთ ჯამურ ეპიურას (ნახ. 363).

განხილულ მაგალითებში ჩარჩოებს შეეძლოთ მიეღოთ მხოლოდ კუთხური გადაადგილებები. ეხლა განვიხილოთ უფრო რთული მაგალითები, სადაც ადგილი ექნება ხაზობრივ გადაადგილებებსაც.



ნახ. 363.

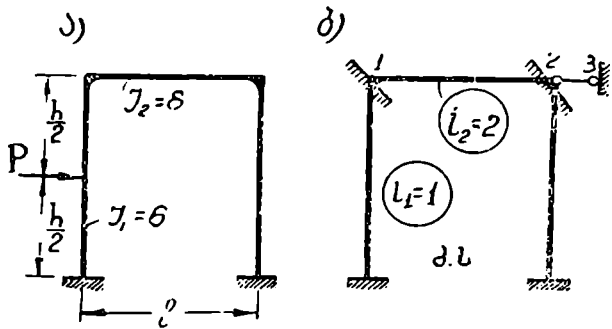
3 მაგალითი. ვინაგარიშით 364-ე ნახაზზე ნაჩვენებია პარალელურდგარებიანი ჩარჩო. $h=6$ მ; $l=4$ მ; $P=8$ ტ; პირობითი სიხისტის კოეფიციენტები $i_1=1$; $i_2=2$.

გადაწვევითა ჩარჩოს კვანძებს შეუძლია შეასრულოს ორი კუთხური და ერთი ხაზობრივი გადაადგილება, ამიტომ მათ მოსასპობად საკუროს სამი ბმის შემოტანა—ორი ხისტი ჩამაგრების და ერთი საყრდენი ლეროსი, რომელიც კვანძებს მოუსპობს ჰორი-

ზონტალური გადაადგილების საშუალებას (ნახ. 364, ბ). უცნობებად მივიღოთ

1 და 2 კვანძის მობრუნების კუთხეები Z_1 , Z_2 და მათი ჰორიზონტალური გადაადგილება Z_3 . კვანძების გადაადგილების დადებით მამართლებად ავირჩიოთ გადაადგილება მარჯვნივ.

დავწეროთ კანონიკური განტოლებები



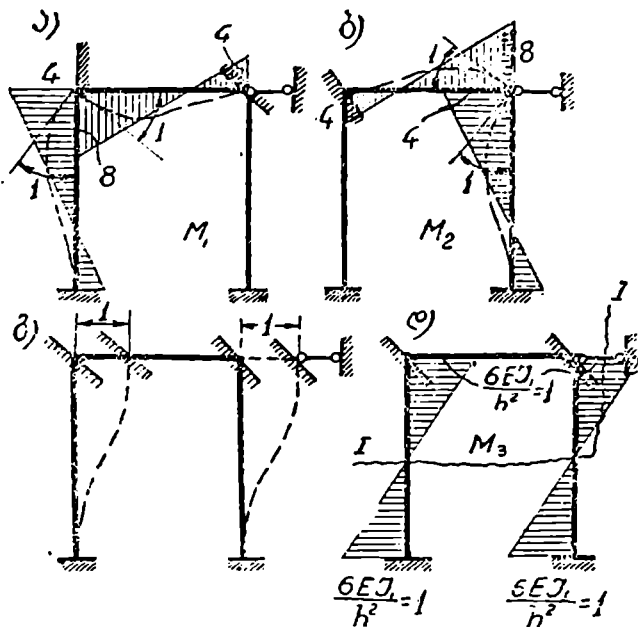
ნახ. 364.

$$Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} + R_{1p} = 0;$$

$$Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} + R_{2p} = 0;$$

$$Z_1 r_{31} + Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} + R_{3p} = 0.$$

პირველი და მეორე განტოლება გამოსახავს რეაქციული მომენტების უარყოფას 1 და 2 ჩამაგრებებში, ხოლო მესამე განტოლება კი—რეაქციის უარყოფას შემოტანილ ჰორიზონტალურ საყრდენ ღეროში. ძირითად სისტემაში რიგრიგობით მოვადბრუნოთ 1 და 2 კვანძი ერთეული კუთხით და ავაგოთ



ნახ. 365.

მღუნავი მომენტის ეპიურები (ნახ. 365, ა, ბ). ამ მდგომარეობათა კვანძების წონასწორობის განხილვა მოგვცემს

$$r_{11} = \frac{4EI_1}{h} + \frac{4EI_2}{l} = 4 + 8 = 12;$$

$$r_{22} = \frac{4EI_1}{h} + \frac{4EI_2}{l} = 12;$$

$$r_{12} = \frac{2EI_2}{l} = 4.$$

ეამოქმედოთ $Z_3 = 1$, ე. ი. კვანძები გადავაადგილოთ ერთეული სიღლით (ნახ. 365, გ). ამ შემთხვევაში ღეროების კვანძები ჩამაგრებულია და არ მობრუნდება. არ მობრუნდება აგრეთვე რიგელიც. ჰორიზონტალური გადაადგილებისაგან გამოწვეული ეპიურა ნაჩვენებია 365, დ ნახაზზე. მოცემული ტვირთისაგან გამოწვეული ეპიურა აგებულია 366-ე ნახაზზე. $Z_3 = 1$ მდგომარეობიდან ამოვკვეთოთ 1 და 2 კვანძი (ნახ. 367, ა), შივილებთ

$$\Sigma M_1 = r_{13} + \frac{6EI_1}{h^2} = 0,$$

აქედან

$$r_{13} = -\frac{6EI_1}{h^2} = -1.$$

ასევე მივიღებთ $r_{23} = -1$.

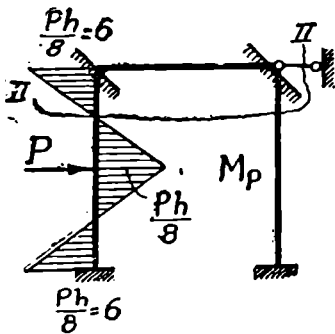
გაეატაროთ I-I კვეთი (ნახ. 365, დ) და შევადგინოთ მოკვეთილი ზედა ნაწილის წონასწორობის პირობა (ნახ. 367, ბ), მივიღებთ

$$\Sigma X = r_{33} - \frac{12EI_1}{h^3} - \frac{12EI_1}{h^3} = 0,$$

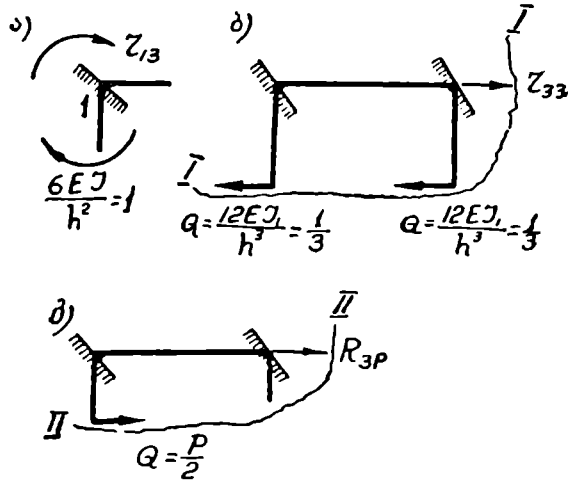
საიდანაც რეაქცია პორიზონტალურ ღეროში

$$r_{33} = \frac{24EI_1}{h^3} = \frac{2}{3}.$$

P ძალით გამოწვეული რეაქციის გამოსათვლელად პორიზონტალურ ღეროში გაეატაროთ II-II კვეთი (ნახ. 366) და განვიხილოთ ზედა ნაწილის წონასწორობის პირობა, მივიღებთ (ნახ. 367, გ)



ნახ. 366.



ნახ. 367.

$$\Sigma X = R_{3P} + \frac{P}{2} = 0,$$

აქედან

$$R_{3P} = -\frac{P}{2} = -4.$$

„ P “ მდგომარეობიდან 1 და მე-2 კვანძის ამოკვეთა და მათი წონასწორობის პირობის შედგენა მოგვცემს

$$R_{1P} = \frac{Ph}{8} = 6,$$

$$R_{2P} = 0.$$

როგორც ვხედავთ, რეაქცია დამატებულ პორიზონტალურ ლეროში ტოლია დგარებში განვითარებული განივი ძალების ჯამის.

კანონიკური განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$12Z_1 + 4Z_2 - Z_3 + 6 = 0;$$

$$4Z_1 + 12Z_2 - Z_3 = 0;$$

$$-Z_1 - Z_2 + \frac{2}{3}Z_3 - 4 = 0.$$

გადაწყვეტის შემდეგ მივიღებთ

$$Z_1 = -0,144; \quad Z_2 = 0,606; \quad Z_3 = 6,7.$$

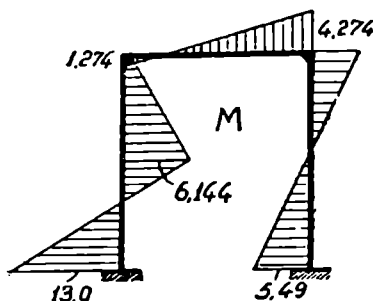
ჯამურ ეპიურას მივიღებთ, თუ შევაჯამებთ Z_1 , Z_2 და Z_3 ძალით გამოწვეულ ეპიურებს, ე. ი.

$$M = M_p + Z_1 M_1 + Z_2 M_2 + Z_3 M_3.$$

ეპიურა წარმოდგენილია 368-ე ნახაზზე. მლუნავი მომენტის ეპიურის შემოწმება და შემდეგ განივი და გრძივი ძალების ეპიურების აგება ხდება ისე, როგორც ძალითა მეთოდის დროს.

4 მაგალითი. ვიანგარიშით დახრილდგარებიანი ჩარჩო (ნახ. 369, ა). სიხისტის კოეფიციენტების პირობითი, მნიშვნელობები

$$i_1 = \frac{EI_1}{l} = \frac{E \cdot 5}{5} = 1; \quad i_2 = \frac{EI_2}{l} = \frac{E \cdot 8}{4} = 2; \quad P = 8 \text{ ტ.}$$



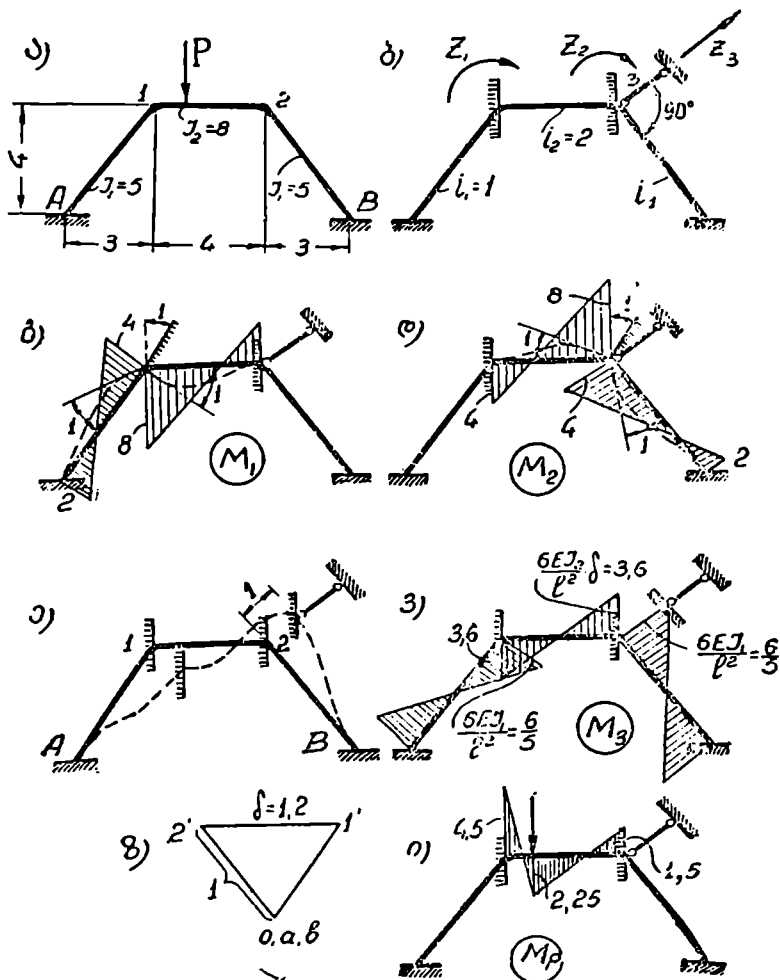
ნახ. 368.

გადაწყვეტა. განსახილავი ჩარჩოს სახსროვან სქემას ერთი თავისუფლების ხარისხი აქვს და ამიტომ ძირითადი სისტემის მისაღებად 1 და მე-2 კვანძი უნდა ჩავამაგროთ ხისტად და დავუმატოთ ერთი (მე-3) საყრდენი ლერო, რომელიც აღებულია B2 დგარის პერპენდიკულარულად (ნახ. 369, ბ).

ნახაზზე ისრებით ნაჩვენებია კუთხეების მობრუნების და მე-3 ლეროს გადაადგილების მიმართულებები. 1 და მე-2 კვანძების ერთეული კუთხით მობრუნებით გამოწვეული მომენტები გამოითვლება უშუალოდ მე-20 ცხრილით და მოცემულია 369, გ, დ ნახაზზე.

ვაშოქმედოთ $Z_3 = 1$, ე. ი. მე-3 საყრდენი გადაავადგილოთ თავისი მიმართულებით ერთეული სიდიდით. ამ შემთხვევაში კვანძები არ მობრუნდება. (ნახ. 369, ე). A1 და 1-2 ლეროს გადაადგილებათა მისაღებად ავაგოთ გადაადგილებათა პოლარული დიაგრამა (იხ. § 77), საიდანაც მივიღებთ, რომ 1 კვანძის გადაადგილება A-ს მიმართ ტოლია ერთეულის, ხოლო 2 კვანძის გადაადგილება 1-ის მიმართ ($1' 2'$) $\delta = -1,2$ -ს (ნახ. 269, ზ), ნიშანი მინუს აღებულია იმიტომ, რომ 1-2 ლერო მობრუნდა საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით. 369, ე ნახაზზე ნაჩვენებია $Z_3 = 1$ -საგან გამოწვეული მლუნავი მომენტის ეპიურა. A1 და B2 ლეროების ეპიურის ორდინატებს

უშუალოდ ავიღებთ მე-20 ცხრილიდან (რადგან მათი გადაადგილება ერთეულის ტოლია). 1—2 ლეროს ეპიურის ორდინატების მისაღებად ცხრილში მოცემული მნიშვნელობები უნდა გადავაშრალოთ ზ.ზე (ნახ. 369, ვ). M_p ეპიურა ნაჩვენებია 369, ი ნახაზზე.

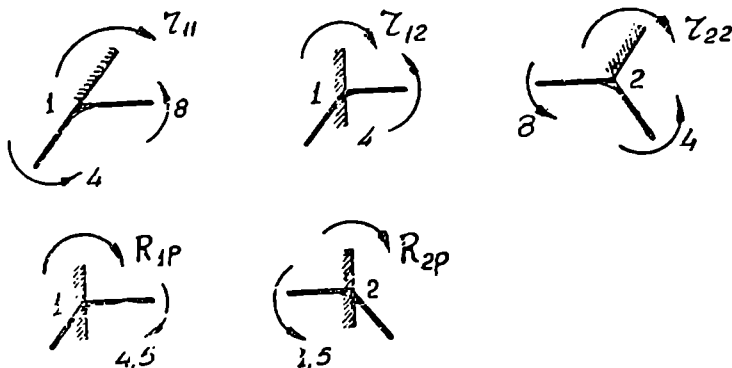


ნახ. 369.

გამოვთვალოთ კანონიკური განტოლების კოეფიციენტები. პირველი და მეორე განტოლების კოეფიციენტები წარმოადგენს რეაქციულ მომენტებს კვანძებში და გამოითვლება სათანადო კვანძების წონასწორობის განხილვით M_1 , M_2 და M_p მდგომარეობაში (ნახ. 370):

$$r_{11}=12; r_{12}=4; r_{22}=12; R_{1P}=-4,5; R_{2P}=1,5.$$

მესამე განტოლების კოეფიციენტები წარმოადგენენ რეაქციებს მე-3 ლეროში გამოწვეულს სათანადო ერთეული გადაადგილებებით და ტვირთისაგან.



ნახ. 370.

განვიხილოთ $Z_1=1$ მდგომარეობა. M_1 ეპიურიდან განვსაზღვროთ განივი ძალები 1-2 და 1A ლეროში:

$$Q_{12}=-3; Q_{1A}=-\frac{6}{5}.$$

ამოკვეთოთ 1 კვანძი (ნახ. 371, ა) და განვიხილოთ მისი წონასწორობის პირობა:

$$N_{12}\cos\alpha - 3\sin\alpha + \frac{6}{5} = 0,$$

აქედან, გრძივი ძალა 1-2 ლეროში

$$N_{12} = 3\operatorname{tg}\alpha - \frac{6}{5\cos\alpha}.$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}; \quad \sin\alpha = \frac{3}{5}.$$

საბოლოოთ მივიღებთ

$$N_{12} = 0,75.$$

იმავე $Z_1=1$ მდგომარეობიდან ამოკვეთოთ მე-2 კვანძი (ნახ. 371, ბ) და მასზე მოქმედი ძალები დავაგეგმილოთ მე-3 ლეროს გასწვრივ, მივიღებთ

$$r_{31} = 0,75\cos\alpha - 3 \cdot \sin\alpha = 0,$$

აქედან

$$r_{31} = 0,75 \frac{4}{5} + 3 \frac{3}{5} = 2,4.$$

განვიხილოთ $Z_2=1$ მდგომარეობა. განვივი ძალები

$$Q_{12}=-3; Q_{1A}=\frac{6}{5}.$$

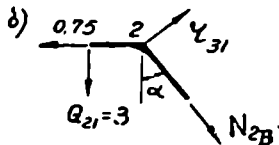
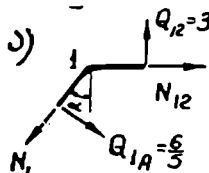
ამოვკვეთოთ 1 კვანძი და მასზე მოქმედი ძალები დავაგეგმილოთ 1.А-ს პერპენდიკულარზე (ნახ. 371, გ), მივიღებთ

$$N_{12} \cos \alpha - 3 \sin \alpha = 0,$$

აქედან

$$N_{12} = 3 \operatorname{tg} \alpha = 2,25.$$

ამოვკვეთოთ მე-2 კვანძი (ნახ. 371, დ) და მასზე მოქმედი ძალები დავაგეგმილოთ მე-3 ღეროს გასწვრივ, მივიღებთ



მოქმედი ძალები დავაგეგმილოთ მე-3 ღეროს გასწვრივ, მივიღებთ

$$r_{32} - 2,25 \cos \alpha - 3 \cdot \sin \alpha + \frac{6}{5} = 0,$$

აქედან

$$r_{32} = 2,4.$$

განვიხილოთ $Z_3 = 1$ მდგომარეობა. ამოვკვეთოთ 1 კვანძი (ნახ. 371, ე) და მასზე მოქმედი ძალები დავაგეგმილოთ 1.А ღეროს მართობ ღერძზე, მივიღებთ

$$N_{12} \cos \alpha - 1,8 \sin \alpha - \frac{12}{25} = 0,$$

საიდანაც

$$N_{12} = 1,95.$$

ამის შემდეგ, იმავე მდგომარეობაში ამოვკვეთოთ მე-2 კვანძი (ნახ. 371, ვ) და მასზე მოქმედი ძალები დავაგეგმილოთ მე-3 ღეროს გასწვრივ, მივიღებთ

$$r_{33} - 1,95 \cos \alpha - \frac{12}{25} - 1,8 \sin \alpha = 0,$$

აქედან

$$r_{33} = 3,12.$$

r_{31} და r_{32} რეაქციების მაგიერ შეიძლება გამოვთვალოთ მომენტები r_{12} და r_{23} ამისათვის ამოვკვეთოთ 1 და 2 კვანძი $Z_3 = 1$ მდგომარეობაში და შევადგინოთ წონასწორობის პირობა, შემდეგი სახით

$$\Sigma M_1 = r_{13} + \frac{6}{5} - 3,6 = 0;$$

$$\Sigma M_2 = r_{23} - 3,6 + \frac{6}{5} = 0,$$

ნახ. 371.

$$r_{12} = r_{23} = 2,4.$$

ეს გზა უფრო მარტივია.

r_{33} -ის გამოსათვლელად უმჯობესია გამოვიყენოთ შორის ფორმულა (ფორ. 166). რადგანაც $Z_2 = 1$ საგან გამოწვეულ ეპიურას ყველა ლეროზე ერთნაირი მოხაზულობა აქვს: ამიტომ ეპიურების კომბინაცია მარტივდება (იხ. მე-3 ცხრილი)

$$r_{33} = \Sigma \int \frac{M_3^2 ds}{EI} = \Sigma \frac{h^2 l}{3 EI},$$

აქ h ეპიურის ორდინატაა საყრდენზე.

მაშასადამე,

$$r_{33} = 2 \frac{1,2^2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{3,6^2 \cdot 4}{3 \cdot 8} = \frac{2,88}{3} + \frac{3,6^2}{6} = 3,12.$$

„P“ მდგომარეობიდან ამოვკვეთთ 1 კვანძი (ნახ. 371, ზ) და მასზე მოქმედი ძალები დაეაგებმილოთ 1-ს დგარის მართობ ლერძზე, მივიღებთ

$$N_{12} \cos \alpha + 6,75 \sin \alpha = 0,$$

საიდანაც გრძივი ძალა 1—2 ლეროში

$$N_{12} = -5,0625.$$

ამის შემდეგ ამოვკვეთთ მე-3 კვანძი (ნახ. 371, ი) და შევადგინოთ წონასწორობის განტოლება, მივიღებთ

$$R_{3p} + 5,0625 \cos \alpha - 1,8 \sin \alpha = 0,$$

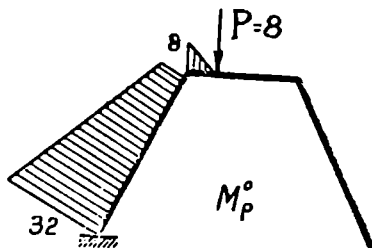
აქედან

$$R_{3p} = -3,3.$$

ტვირთით გამოწვეულ რეაქციებს უფრო მარტივად განესაზღვრავთ, თუ გამოვიყენებთ შორის ფორმულას (ფორ. 167). მაგალითად, გამოთვალოთ

$$R_{3p} = - \Sigma \int \frac{M_3 M_p^0 ds}{EI}.$$

უნდა ავაგოთ ტვირთით გამოწვეული ეპიურა ნებისმიერ სტატიკურად რკვევად სისტემაში M_p^0 (ნახ. 372) და მოვახდინოთ M_p^0 და M_3 (ნახ. 369, ე) ეპიურების კომბინაცია ვერეშჩაგინის წესით:



ნახ. 372.

$$R_{3p} = - \left[- \frac{8 \cdot 1}{2 \cdot 8} \left(1,8 + \frac{2}{3} 1,8 \right) + \frac{1,2 \cdot 5}{2 \cdot 5} \left(8 + \frac{2}{3} 24 \right) - \frac{1,2 \cdot 5}{2 \cdot 5} \left(8 + \frac{1}{3} 2,4 \right) \right] = - (-1,5 + 14,4 - 9,6) = -3,3.$$

ეს ემთხვევა სტატიკურად მიღებულ სიდიდეს. ანალოგიურად ვიპოვით R_{1P} და R_{2P} -ს.

კანონიკური ვანტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$12Z_1 + 4Z_2 + 2,4Z_3 - 4,5 = 0;$$

$$4Z_1 + 12Z_2 + 2,4Z_3 + 1,5 = 0;$$

$$2,4Z_1 + 2,4Z_2 + 3,12Z_3 - 3,3 = 0.$$

გადაწყვეტის შემდეგ მივიღებთ

$$Z_1 = 0,292; \quad Z_2 = -0,458; \quad Z_3 = 1,185.$$

ამის შემდეგ ავაგებთ ჯამურ ეპიურას.

§ 82. სიმეტრიის გამოყენება. უცნობთა დაჯგუფება

სიმეტრიული ნაშენის ანგარიშის დროს გამოყენებული უნდა იყოს მისი სიმეტრია. უცნობები ისე უნდა ავირჩიოთ, რომ დალაგდნ სიმეტრიულ და ირიბადსიმეტრიულ უცნობებად. აქ აღვნიშნავთ, რომ გამარტივების ყველა იმ წესებს, რომლებიც გარჩეული გეკონდა ძალთა მეთოდით ანგარიშის დროს (იხ. §§ 32 — 34):

1. თუ i გადაადგილება სიმეტრიულია და k გადაადგილება ირიბადსიმეტრიული, მაშინ რეაქციული ძალვა $r_{ik} = 0$;

2. ამის გამო მთლიანი კანონიკურ ვანტოლებათა სისტემა გაიყოფა ორ დამოუკიდებელ ნაწილად, პირველში შევა მხოლოდ სიმეტრიული უცნობები, მეორეში კი — ირიბადსიმეტრიული.

3. სიმეტრიულ ნაშენში სიმეტრიული დატვირთვა აქცევს ნულად ირიბადსიმეტრიულ უცნობებს და ირიბადსიმეტრიული დატვირთვა აქცევს ნულად სიმეტრიულ უცნობებს.

სიმეტრიული და ირიბადსიმეტრიული უცნობების მიღება ხდება ძირითადად უცნობთა დაჯგუფების მეთოდით, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ უცნობებად ვირჩევთ არა ცალკეული კვანძების მობრუნების კუთხეებს და გადაადგილებებს, არამედ ჯგუფურ გადაადგილებებს.

განვიხილოთ მაგალითი (ნახ. 373). მობრუნების კუთხეები φ_1 და φ_2 ჩვენ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ორი კუთხის ჯამად და სხვაობად შემდეგი სახით:

$$\varphi_1 = Z_1 + Z_2; \quad \varphi_2 = Z_1 - Z_2,$$

საიდანაც

$$Z_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}; \quad Z_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

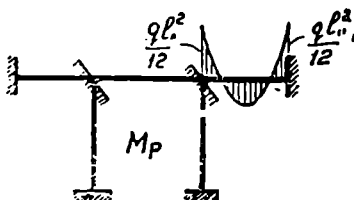
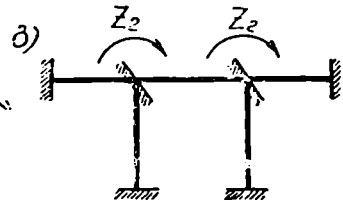
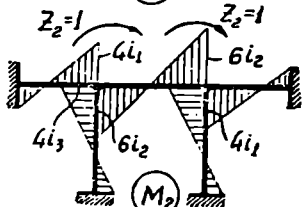
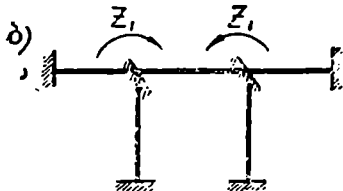
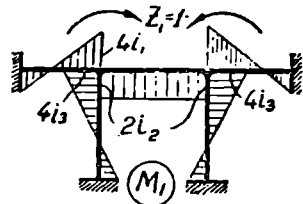
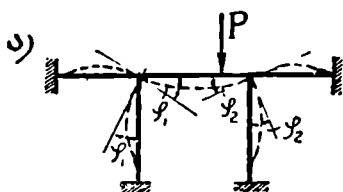
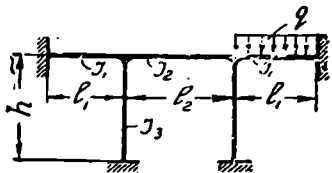
Z_1 წარმოადგენს ორი შუა კვანძის საწინააღმდეგო მიმართულებით ერთდროული მობრუნებით მიღებული კუთხეების ჯამს (ნახ. 373, ბ), ხოლო Z_2 კი იმავე კვანძების ერთი მიმართულებით ერთდროული მობრუნებით მიღებული

კუთხეების ჯამს (ნახ. 373, გ). რადგანაც Z_1 სიმეტრიული გადაადგილებაა და Z_2 კი ირიბადსიმეტრიული, ამიტომ $r_{12}=0$ და კანონიკური განტოლება გაიყოფა ორ დამოუკიდებელ ნაწილად:

$$Z_1 r_{11} + R_{1p} = 0;$$

$$\ddot{Z}_2 r_{22} + R_{2p} = 0.$$

კანონიკური განტოლების კოეფიციენტების საანგარიშოდ ძირითად სისტემაზე უნდა ვიმოქმედოთ $\ddot{Z}_1=1$ ($\varphi_1=1, \varphi_2=1$), ე. ი. ორივე კვანძი უნდა მოვაბრუნოთ ერთდროულად ერთეული კუთხეებით სიმეტრიულად და $Z_2=1$ ($\varphi_1=-1, \varphi_2=1$), ე. ი. ორივე კვანძი უნდა მოვაბრუნოთ ერთდროულად ერთეული კუთხეებით ირიბადსიმეტრიულად, და ავავაგოთ მღუნავი მომენტის ეპიურები.



ნახ. 373.

ნახ. 374.

r_{11} წარმოადგენს ორივე კვანძის ერთდროულად სიმეტრიულად ერთეული მობრუნებით გამოწვეულ რეაქციულ მომენტს ორივე ჩამაგრებაში, r_{22} არის ორივე ჩამაგრების ირიბადსიმეტრიულად ერთეული მობრუნებით გამოწვეული რეაქციული მომენტები ორივე ჩამაგრებაში. ასეთივე აზრი აქვს R_{1p} და R_{2p} -ს. გავარჩიოთ მავალითები.

1 მაგალითი. ზემოთ განხილული ჩარჩოს განაპირა მალზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი (ნახ. 374). $Z_1=1, Z_2=1$ და მოცემული

ტვირთით გამოწვეული ეპიურები ნაჩვენებია 374-ე ნახაზზე. რეაქციული მომენტების ჯამი ორივე ჩამაგრებაში, გამოწვეული $Z_1=1$ მობრუნების კუთხით.

$$r_{11} = 2(4i_1 + 2i_2 + 4i_3).$$

$Z_2=1$ მობრუნების კუთხით გამოწვეული რეაქციული მომენტების ჯამი ორივე შუა ჩამაგრებაში

$$r_{22} = 2(4i_1 + 6i_2 + 4i_3).$$

ტვირთისაგან გამოწვეული რეაქციული მომენტების ჯამი ორივე კვანძში: პირველ შემთხვევაში

$$R_{1p} = -\frac{ql_1^2}{12},$$

მეორე შემთხვევაში

$$R_{2p} = -\frac{ql_1^2}{12}.$$

(რეაქციული მომენტები აიღება დადებითი ნიშნით, თუ შათი მიმართულება. ემთხვევა მობრუნების მიმართულებას.) კანონიკური განტოლებების კოეფიციენტების განსაზღვრის შემდეგ ვანგარიშობთ ჯგუფურ უცნობებს და ვაგებთ ჯამურ ეპიურას ფორმულით

$$M = M_p + Z_1 M_1 + Z_2 M_2.$$

შევალითი. ვიანგარიშობთ, ე.წ. უირიბანო ფერმა, რომლის შუა კვანძზე მოქმედებს ძალა P (ნახ. 375). $l = \text{const}$ და $i = \frac{El}{l} = \text{const}$.

გაღწევა. ძირითადი სისტემა წარმოდგენილია 375, ბ ნახაზზე. განაპირა კვანძების მობრუნების კუთხეები დავაჯგუფოთ სიმეტრიულ და ირიბასიმეტრიულ უცნობებად. დატვირთვის სიმეტრიულობის გამო ირიბასიმეტრიული უცნობები ნულის ტოლია და უნდა განვსაზღვროთ მხოლოდ სიმეტრიული უცნობები. ამიტომ ნახაზზე ნაჩვენებია მხოლოდ სიმეტრიული ეპიურები (ნახ. 376, ა, ბ, გ).

$Z_1=1$ მობრუნების კუთხით გამოწვეული რეაქციული მომენტების ჯამი ორ ზედა განაპირა კვანძში

$$r_{11} = 4i \cdot 4 = 16i.$$

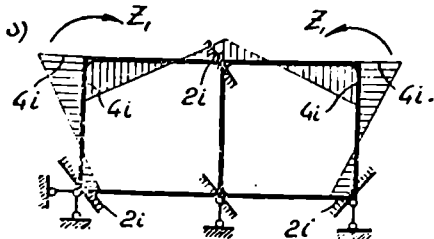
$Z_2=1$ — მობრუნების კუთხით გამოწვეული რეაქციული მომენტების ჯამი ორ ქვედა განაპირა კვანძში

$$r_{22} = 4i \cdot 4 = 16i.$$

$Z_2=1$ მობრუნების კუთხით გამოწვეული მომენტების ჯამი ორ ზედა განაპირა კვანძში:

$$r_{12} = 2i + 2i = 4i.$$

$Z_3=1$ გადაადგილებით გამოწვეული რეაქცია შუა საყრდენ ღეროში (განვიხილოთ ამოკვეთილი I-I ნაწილის წონასწორობის პირობა)



$$r_{33} = \frac{12i}{l} \cdot 4 = \frac{48i}{l}.$$

$Z_3=1$ გადაადგილებით გამოწვეული მომენტები სათანადოდ განაპირა ზედა და განაპირა ქვედა კვანძებში იქნება:

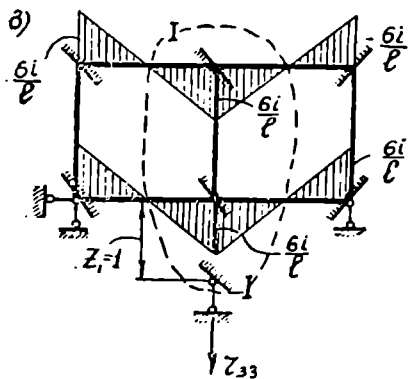
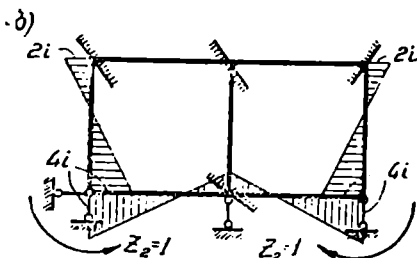
$$r_{13} = -2 \cdot \frac{6i}{l} = -\frac{12i}{l};$$

$$r_{23} = -2 \cdot \frac{6i}{l} = -\frac{12i}{l}.$$

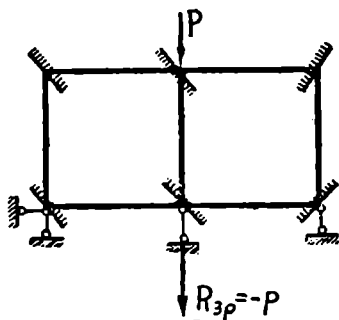
ძირითად სისტემაზე ვიმოქმედოთ მოცემული ტვირთით (ნახ. 377). საყრდენი მომენტები კვანძებში ტოლია ნულის და, მაშასადამე,

$$R_{1P} = 0; R_{2P} = 0.$$

P ძალით გამოწვეული რეაქცია შუა საყრდენ ღეროში $R_{3P} = -P$.



ნახ. 376.



ნახ. 377.

კანონიკური განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$16iZ_1 + 4iZ_2 - \frac{12i}{l}Z_3 = 0;$$

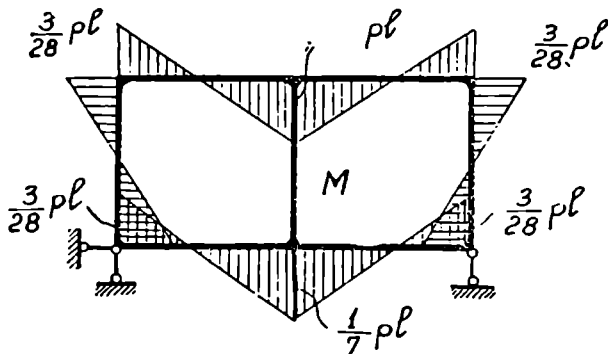
$$4iZ_1 + 16iZ_2 - \frac{12i}{l}Z_3 = 0;$$

$$-\frac{12i}{l} Z_1 - \frac{12i}{l} Z_2 + \frac{48i}{l^2} Z_3 - P = 0.$$

ამ განტოლებათა სისტემის გადაწყვეტა მოგვცემს

$$Z_1 = Z_2 = \frac{Pl}{56i}; \quad Z_3 = \frac{5}{168} \frac{Pl^2}{i}.$$

ერთეული ეპიურები გადაემატა ვალთ Z_1 , Z_2 და Z_3 -ის მნიშვნელობებზე და შევაჯამოთ, მივიღებთ ჯამურ ეპიურას (ნახ. 378).



ნახ. 378.

§ 83. ჩარჩოების ანგარიში ტემპერატურაზე

ტემპერატურის მოქმედება სტატიკურად ურკვევ ჩარჩოში მნიშვნელოვან შინაგან ძალებს იწვევს. ტემპერატურაზე ანგარიში გადაადგილებათა მეთოდით წარმოებს იმავე თანმიმდევრობით, როგორც გარე დატვირთვაზე. განსხვავება მდგომარეობს იმაში, რომ გადაადგილებათა მეთოდის კანონიკურ განტოლებებში ტვირთისაგან გამოწვეული რეაქციული ძალები შემოტანილ ჩამატებებში $R_{1p}, R_{2p}, \dots, R_{np}$ უნდა შევცვალოთ ტემპერატურით გამოწვეული რეაქციული ძალებით $R_{1t}, R_{2t}, \dots, R_{nt}$.

მაშასადამე, კანონიკურ განტოლებათა სისტემა ტემპერატურაზე ანგარიშის დროს მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + \dots + Z_n r_{1n} + R_{1t} &= 0; \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + \dots + Z_n r_{2n} + R_{2t} &= 0; \end{aligned} \quad (170)$$

$$Z_1 r_{n1} + Z_2 r_{n2} + \dots + Z_n r_{nn} + R_{nt} = 0.$$

ტემპერატურით გამოწვეული რეაქციული ძალების R_{it} საპოვნელად საჭიროა განვსაზღვროთ კვანძების გადაადგილებები და მობრუნების კუთხეები, გამოწვეული ტემპერატურით. ამ სიდიდეთა გამპრავლება ერთეული გადაადგილებებით მიღებულ ეპიურების ორდინატებზე (ცხრილი 20) მოგვცემს ტემპერატურით გამოწვეულ ეპიურებს, რომელთა საშუალებით განვსაზღვრავთ საძიებელ რეაქციულ R_{it} ძალებს. გავარჩიოთ ტემპერატურით გამოწვეულ გადაადგილებების და ეპიურების აგების წესი.

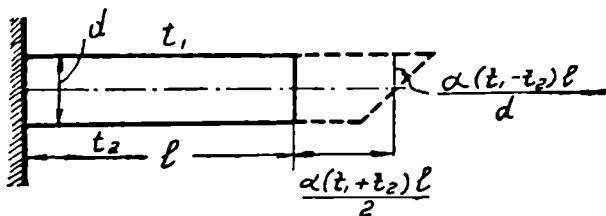
წარმოვიდგინოთ, რომ მუდმივი კვეთის მქონე ძელის ზედა ბოქვებზე მოქმედებს t_1 ტემპერატურა, ქვედაზე კი— t_2 (ნახ. 379). დაუშვათ $t_1 > t_2$ ტემპერატურით გამოწვეული გადაადგილება შედგება ორი ნაწილისაგან (ნახ. 379): ძელის ღერძის წაგრძელებისაგან

$$\delta_1 = \frac{\alpha(t_1 - t_2)l}{2},$$

და კვეთის მობრუნებისაგან

$$\varphi_1 = \frac{\alpha(t_1 - t_2)l}{d}.$$

ჩვენ შეგვიძლია ეს ორი შემთხვევა განვიხილოდ ცალ-ცალკე და მივღებულ შედეგები შევაჯამოთ. პირველ შემთხვევაში ტემპერატურის მოქმედება სი-



ნახ. 379.

მეტრიულია და ძელის ღერძი მიიღებს მხოლოდ წაგრძელებას, მეორე შემთხვევაში კი ტემპერატურის მოქმედება ირიბადსიმეტრიულია და მიიღებს მხოლოდ კუთხურ დეფორმაციას. არათანაბარი გახურებით (ირიბადსიმეტრიული მოქმედება) გამოწვეული მომენტები და რეაქციები აიღება მე-20 ცხრილიდან უშუალოდ, ხოლო თანაბარი გახურებით (სიმეტრიული მოქმედება) გამოწვეული მომენტები და რეაქციები კი—ერთეული გადაადგილებით გამოწვეული სიდიდეების გადამრავლებით კვანძების სათანადო გადაადგილებებზე.

გ ა ნ ვ ი ხ ი ლ ო თ მ ა გ ა ლ ი თ ი (ნახ. 380, ა). t_1 და t_2 ყველა ღეროსათვის ერთი და იგივეა. $l = \text{const}$.

ძირითადი სისტემა ნაჩვენებია 380, ბ ნახაზზე. ანალოგიური სისტემა ჩვენ განვიხილეთ 81 პარაგრაფში და ამიტომ აქ შევჩერდებით მხოლოდ ტემპერატურით გამოწვეული რეაქციული ძალების, ე. ი. კანონიკური განტოლების თავისუფალი წევრების გამოთვლაზე. დანარჩენი კოეფიციენტები გამოითვლება ჩვეულებრივი წესით.

ჯერ განვსაზღვროთ ძელის ღერძების წაგრძელებებით გამოწვეული რეაქციები.

ღერძების წაგრძელება:

0 — 1 ღერძის

$$\Delta_1 = \frac{\alpha(t_1 + t_2)h_1}{2},$$

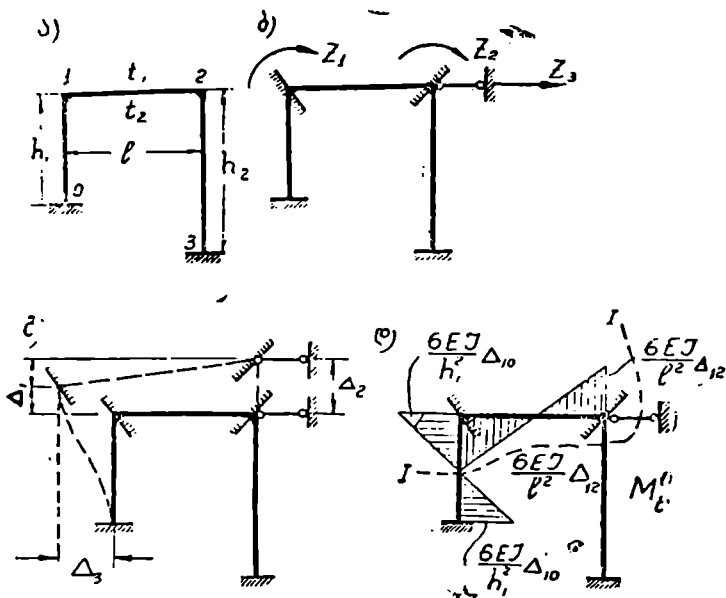
2-3 ღვარის

$$\Delta_2 = \frac{\alpha(t_1 + t_2)h_2}{2}$$

1-2 რიგელის

$$\Delta_3 = \frac{\alpha(t_1 + t_2)l}{2}$$

ტემპერატურით გამოწვეული დეფორმირებული მდგომარეობა ნაჩვენებია 380, გ ნახაზზე.



ნახ. 380.

კვანძების ურთიერთ გადაადგილებები იქნება:

1 კვანძის

$$\Delta_{10} = \Delta_3,$$

$$\Delta_{12} = \Delta_2 - \Delta_1 = -\frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2}(h_2 - h_1);$$

2 კვანძის

$$\Delta_{23} = 0.$$

მღუნავი მომენტის ეპიურის მისაღებად ცხრილში მოყვანილი მნიშვნელობები გადაეყვანება გადაადგილებათა სათანადო სიდიდეებზე (ნახ. 380, დ).

1 და 2 კვანძის ამოკვეთა მოგვცემს (ნახ. 381, ა, ბ):

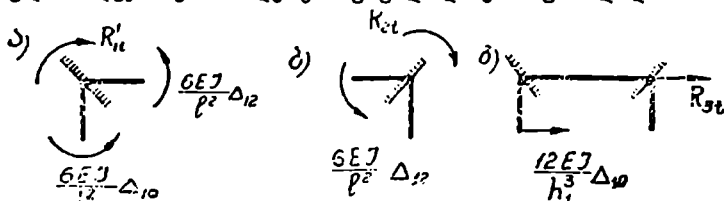
$$R'_{1t} = \frac{6EI}{l^2}\Delta_{12} + \frac{6EI}{h_1^2}\Delta_{10};$$

$$R'_{2t} = \frac{6EI}{l^2}\Delta_{12}.$$

გავატაროთ I—I კვეთი და მოკვეთილ ნაწილზე მოქმედი ძალები დავაგვეგმილოთ ჰორიზონტალურ ლერძზე. (ნახ. 381, გ), მივიღებთ

$$R'_{3t} = -\frac{12EI}{h_1^3} \Delta_{10}.$$

არათანაბარი ტემპერატურით (კვეთების შობრუნებისაგან) გამოწვეული რეაქციული ძალები განისაზღვრება უშუალოდ მე-20 ცხრილიდან. ამ ცხრი-



ნახ. 381.

ლის საფუძველზე მიღებული ეპიურა ნაჩვენებია 382, ა ნახაზზე. ეპიურები აგებულია გაკიმული ბოქოების მხარეს.

ძირითადი სისტემის თითოეული ელემენტი წარმოადგენს ორი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებულ ძელს და მომენტები ყველა ლერძზე ერთნაირია და ტოლია

$$M''_t = \frac{El\alpha(t_1 - t_2)}{d} = \frac{El\alpha \Delta t}{d},$$

კვანძების ამოკვეთა და მათი წონასწორობის პირობის განხილვა მოგვცემს

$$R''_{1t} = 0; \quad R''_{2t} = 0.$$

გავატაროთ I—I კვეთი და მოკვეთილ ზედა ნაწილზე მოქმედი ძალები დავაგვეგმილოთ ჰორიზონტალურ ლერძზე, მივიღებთ

$$R'_{3t} = 0.$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$R_{1t} = R'_{1t}; \quad R_{2t} = R'_{2t} \text{ და } R_{3t} = R'_{3t}.$$

ამ მნიშვნელობებს შეეცანთ კანონიკურ განტოლებებში და განესაზღვრავთ ტემპერატურით გამოწვეულ გადაადგილებებს Z_1, Z_2, Z_3 -ს.

მლუნავი მომენტის საბოლოო ეპიურის მისაღებად ტემპერატურისაგან გამოწვეულ ეპიურას ძირითად სისტემაში უნდა დავუმატოთ Z_1, Z_2 და Z_3 -საგან გამოწვეული ეპიურები, ე. ი.

$$M = M'_t + M''_t + M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + M_3 Z_3.$$

ტემპერატურით გამოწვეული რეაქციული ძალები შეიძლება განისაზღვროს ზოგადი სახით მორის ფორმულითაც

$$R_{1t} = \sum \int \frac{M_i M'_t ds}{EI}, \quad (171)$$

სადაც M_i წარმოადგენს ერთეული გადაადგილებით ($Z_i = 1$) გამოწვეულ მლუნავ მომენტს, M_i კი ტემპერატურით გამოწვეულ მლუნავ მომენტს ძირითად სისტემაში.

დახრილი დგარების შემთხვევაში მიზანშეწონილია ამ ფორმულის გამოყენება.

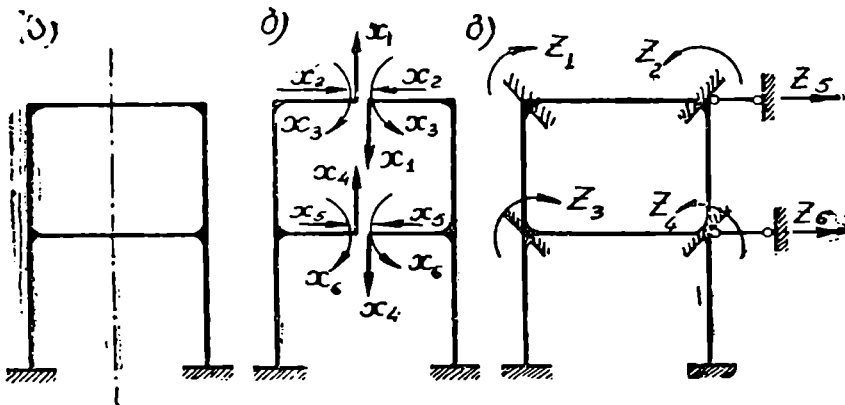
§ 84. კომბინირებული წესი

ხშირად სიმეტრიული ჩარჩოების ანგარიშის დროს უმჯობესია გამოვიყენოთ როგორც ძალთა, ისე გადაადგილებათა მეთოდი. ნებისმიერი დატვირთვა ჩვენ შეგვიძლია დავშალოთ სიმეტრიულ და ირიბადსიმეტრიულ დატვირთვებად და თითოეულ დატვირთვაზე ჩარჩო ვიანგარიშოთ ცალ-ცალკე.

სიმეტრიული დატვირთვის შემთხვევაში გამოვიყენოთ ერთი მეთოდი და ირიბადსიმეტრიულ დატვირთვის შემთხვევაში კი მეორე, ე. ი. გამოვიყენოთ ამოცანის გადაწყვეტის კომბინირებული წესი.

აქ ორივე მეთოდი გამოვიყენება ერთმანეთის დამოუკიდებლად.

მაგალითად, განვიხილოთ ორსართულიანი სიმეტრიული ჩარჩო (ნახ. 383, ა). ძალთა მეთოდის ძირითადი სისტემა მოყვანილია 383, ბ ნახაზზე.



ნახ. 383.

X_1 და X_4 ირიბადსიმეტრიული უცნობებია, X_2 , X_3 , X_5 და X_6 კი — სიმეტრიული. სიმეტრიული დატვირთვის დროს $X_1 = X_4 = 0$, ხოლო ირიბადსიმეტრიული დატვირთვის დროს კი — $X_1 = X_3 = X_6 = X_6 = 0$. მაშასადამე, თუ ირიბად სიმეტრიულ დატვირთვაზე განსახილავ ჩარჩოს ვიანგარიშებთ ძალთა მეთოდით, მაშინ ჩვენ მოგვიხდება მხოლოდ ორი უცნობის X_1 და X_4 ამოხსნა.

გადაადგილებათა მეთოდის ძირითადი სისტემა ნაჩვენებია 383, გ ნახაზზე. სიმეტრიული დატვირთვის შემთხვევაში მარცხენა და მარჯვენა კვანძების მობრუნების კუთხეები ერთმანეთის ტოლია და საწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ, ხოლო მათი ჰორიზონტალური გადაადგილება კი ნულის ტოლია, ე. ი.

$$Z_1 = Z_2; \quad Z_3 = Z_4, \quad Z_5 = Z_6 = 0.$$

მაშასადამე, სიმეტრიული დატვირთვის შემთხვევაში მიზანშეწონილია

გამოვიყენოთ გადაადგილებათა მეთოდი, რადგან გვექნება მხოლოდ 2 უცნობი. ირიბადსიმეტრიული დატვირთვის დროს კვანძების მობრუნების კუთხეები ერთმანეთის ტოლია როგორც სიდიდით, ისე მიმართულებით და კვანძების პორიზონტალური გადაადგილებები არ უდრის ნულს, ე. ი. გვექნება 4 უცნობი.

თითოეული მეთოდის დამახასიათებელ უცნობთა რიცხვი მოყვანილია 21 ცხრილში.

ცხრილი 21

დატვირთვა	ძალთა მეთოდი	გადაადგილებათა მეთოდი	კომბინირებული მეთოდი
სიმეტრიული	4	2	2
ირიბადსიმეტრიული	2	4	2
სულ	6	6	4

როგორც ვხედავთ სიმეტრიული ჩარჩოს ანგარიში კომბინირებული მეთოდით საგრძნობლად მარტივდება. სულ გვექნება $2+2=4$ უცნობი.

§ 85. ძალთა და გადაადგილებათა მეთოდის შედარება

როგორც ძალთა მეთოდს, ისე გადაადგილებათა მეთოდს აქვს თავისი დადებითი და უარყოფითი მხარეები. ზოგიერთ შემთხვევაში მარტივად სწევებს ამოცანას ძალთა მეთოდი, ზოგში კი—გადაადგილებათა მეთოდი. ამიტომ ჩვენ უნდა ვიცოდეთ, თუ რომელ მეთოდს მივცეთ უპირატესობა ამა თუ იმ კონსტრუქციის ანგარიშის დროს. რაც უფრო მეტ ზედმეტ ლეროს შეიცავს კონსტრუქცია, მით უფრო რთულდება ძალთა მეთოდის გამოყენება, სამაგიეროთ ტეხილი კონტური, სადაც ადგილი აქვს კუთხურ და ხაზობრივ გადაადგილებებს, არ ართულებს ძალთა მეთოდით ამოცანის გადაწყვეტას.

გადაადგილებათა მეთოდს, პირიქით, ართულებს არა ზედმეტი ლეროების რიცხვი, არამედ კუთხური და ხაზობრივი გადაადგილებათა რიცხვი.

ამა თუ იმ მეთოდის უპირატესობა უნდა გამოვარკვიოთ ზედმეტი უცნობების რიცხვის გამოთვლის საშუალებით.

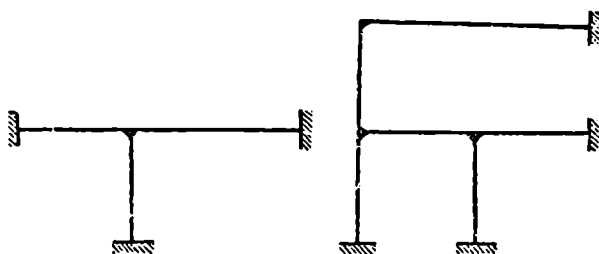
მაგალითად, 384-ე ნახაზზე ნაჩვენები სისტემა უნდა ვიანგარიშოთ ძალთა მეთოდით, რადგან შეიცავს 3 ზედმეტ ლეროს. გადაადგილებათა მეთოდით მისი ანგარიში რთულია, ის შეიცავს 11 კუთხურ და ხაზობრივ გადაადგილებას და მოგვიხდება 11-უცნობიანი 11 განტოლების შედგენა და გადაწყვეტა.



ნახ. 384.

385-ე ნახაზზე წარმოდგენილი სისტემის ანგარიში ძალთა მეთოდით მოითხოვს სათანადოდ 6- და 9-უცნობიანი განტოლებათა სისტემის გადაწყვეტას, მაშინ როცა გადაადგილებათა მეთოდი მოითხოვს პირველი სისტემისათვის 1 და მეორესათვის 3 განტოლების შედგენას და გადაწყვეტას.

თუ ორივე შემთხვევაში უცნობთა რიცხვი ერთნაირია, მაშინ უპირატე-
ლობა ეძლევა გადაადგილებათა მეთოდს, რადგან კანონიკური განტოლებების
კოეფიციენტების გამოთვლა აქ უფრო ნაკლებ ანგარიშს მოითხოვს.



ნახ. 385.

§ 86. ზარიშული მეთოდი

შესაძლებელია, რომ მოცემული სისტემის ერთი ნაწილისათვის ძალთა
მეთოდი იყოს მოსახერხებელი, მეორე ნაწილისათვის კი გადაადგილებათა მე-
თოდი. ამ შემთხვევაში უმჯობესია გამოვიყენოთ ორივე მეთოდი ერთდროუ-
ლად და უცნობებად მივიღოთ როგორც ძალები (X_1, X_2 , და $X_3 \dots$), ისე
გადაადგილებები ($Z_1, Z_2 \dots$). მაშინ ერთ და იმავე კანონიკურ განტოლებაში
ერთდროულად შევა როგორც ძალები, ისე გადაადგილებები. ამოცანის გადა-
წყვეტის ასეთ მეთოდს, რომელიც პროფ. ა. გვოზღევის მიერ არის დამუშავე-
ბული, შეე რ ე უ ლ ი მ ე თ ო დ ი ეწოდება.

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი. 386, ა ნახაზზე წარმოდგენილი
სისტემა 12-ჯერ სტატიკურად ურკვევია და მისი ანგარიში ძალთა მეთოდით
მოითხოვს 12 განტოლების შედგენას, გადაადგილებათა მეთოდით კი — 9 გან-
ტოლების. როგორც ერთი, ისე მეორე მეთოდი საკმარისად რთულად წყვეტს
ამოცანას.

ჩარჩოს ზედა სართული შეიცავს სამ ზედმეტ უცნობს და უმჯობესაა მის-
თვის გამოვიყენოთ ძალთა მეთოდი, რადგან ზედა სართულის ანგარიში გადა-
ადგილებათა მეთოდით მოითხოვს 7 განტოლების შედგენას. ქვედა სართული
9-ჯერ სტატიკურად ურკვევია და მისი ანგარიში ძალთა მეთოდით მოითხოვს
9 განტოლების შედგენას, გადაადგილებათა მეთოდით კი — 2 განტოლების. მა-
შასადამე, ქვედა სართულის საანგარიშოდ მიზანშეწონილია გადაადგილებათა
მეთოდის გამოყენება. თუ გამოვიყენებთ შერეულ მეთოდს, ე. ი. ზედა სარ-
თულზე უცნობებად ავიღებთ ძალებს და ქვედა სართულზე მობრუნების კუთ-
ხეებს, მაშინ მოგვიხდება ჩხოლოდ 5 განტოლების შედგენა.

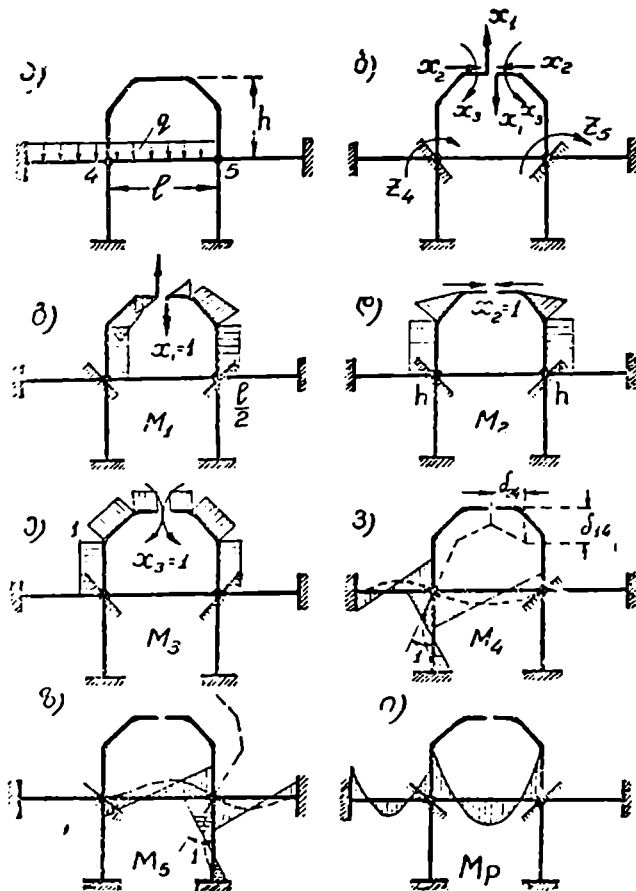
ძირითადი სისტემა ნაჩვენებია 386, ბ ნახაზზე. უცნობებად მიღებულია
ძალები X_1, X_2, X_3 და კვანძების მობრუნების კუთხეები Z_4 და Z_5 . შერეული
მეთოდის კანონიკური განტოლებათა სისტემა დაიწერება შემდეგი სახით

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + Z_4 \delta_{14} + Z_5 \delta_{15} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + Z_4 \delta_{24} + Z_5 \delta_{25} + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + Z_4 \delta_{34} + Z_5 \delta_{35} + \Delta_{3p} &= 0; \end{aligned} \quad (172)$$

$$X_1 r_{41} + X_2 r_{42} + X_3 r_{43} + Z_4 r_{44} + Z_5 r_{45} + R_{4p} = 0;$$

$$X_1 r_{51} + X_2 r_{52} + X_3 r_{53} + Z_4 r_{54} + Z_5 r_{55} + R_{5p} = 0.$$

პირველი სამი განტოლება ძალთა მეთოდის კანონიკური განტოლებებია და გამოსახავს იმ აზრს, რომ გადაადგილებათა ჯამი X_1 , X_2 და X_3 მიზარ-



ნახ. 386.

თულებით ნულის ტოლია. უკანასკნელი ორი განტოლება გადაადგილებათა მეთოდის კანონიკური განტოლებებია და გამოსახავს იმ აზრს, რომ რეაქციული მომენტების ჯამი მე-4 და მე-5 კვანძების ჩამაგრებებში ნულის ტოლია. ერთეული ეპიურები მოყვანილია 386 ნახაზზე.

კანონიკურ განტოლებებში შედის შემდეგი სახის კოეფიციენტები:

1. გადაადგილებები (δ_{11} , δ_{12} , δ_{13} , δ_{22} , ...), გამოწვეული ერთეული ძალებით ($X_1=1$; $X_2=1$, ...);

2. გადაადგილებები ($\delta_{14}, \delta_{15}, \delta_{24}, \delta_{25} \dots$), გამოწვეული ერთეული გადაადგილებებით ($Z_4=1, Z_5=1$);

3. რეაქციული ძალები (r_{44}, r_{55}, r_{45}), გამოწვეული ერთეული გადაადგილებებით ($Z_4=1, Z_5=1$);

4. რეაქციული ძალები ($r_{41}, r_{42}, r_{43} \dots$), გამოწვეული ერთეული ძალებით ($X_1=1, X_2=1, X_3=1$).

პირველი კატეგორიის კოეფიციენტები ძალთა მეთოდის კოეფიციენტებია და გამოითვლება ჩვეულებრივი წესით. მეორე კატეგორიის კოეფიციენტები გამოითვლება გეომეტრიული მოსაზრებებით. მაგალითად, δ_{14} წარმოადგენს გაკვეთილი ბოლოების ურთიერთ დაშორებას ვერტიკალური მიმართულებით, გამოწვეულს $Z_4=1$ -საგან (ნახ. 386, ე).

მესამე კატეგორიის კოეფიციენტები გადაადგილებათა მეთოდის კოეფიციენტებია და მათი ანგარიში წინა §-ში შევისწავლეთ.

მეოთხე კატეგორიის კოეფიციენტები—მომენტები მე-4 და მე-5 ჩამაგრებაში გამოწვეული $X_1=1, X_2=1$ და $X_3=1$ ძალებისაგან გამოითვლება უშუალოდ ნახაზიდან. M_1, M_2 და M_3 ეპიურებიდან ცხადია, რომ

$$r_{41} = \frac{l}{2}; \quad r_{42} = -h; \quad r_{43} = -1;$$

$$r_{51} = \frac{l}{2}; \quad r_{52} = h; \quad r_{53} = 1$$

კოეფიციენტების გამოთვლას ძალიან ამარტივებს რეაქციებსა და გადაადგილებებს შორის არსებული ურთიერთობის მეთოდი. რომელიც აქ დაუმტკიცებლად მოგვყავს:

$$\delta_{ik} = -r_{ki} \quad (173)$$

ეს ფორმულა მიღებული იყო პროფ. ა. გვოზდევის მიერ.
(173) ფორმულის თანახმად

$$\delta_{14} = -r_{41}; \quad \delta_{24} = -r_{42}; \quad \delta_{34} = -r_{43};$$

$$\delta_{15} = -r_{51}; \quad \delta_{25} = -r_{52} \text{ და } \delta_{35} = -r_{53}.$$

მაშასადამე,

$$\delta_{14} = -\frac{l}{2}; \quad \delta_{24} = h; \quad \delta_{34} = 1.$$

და ა. შ.

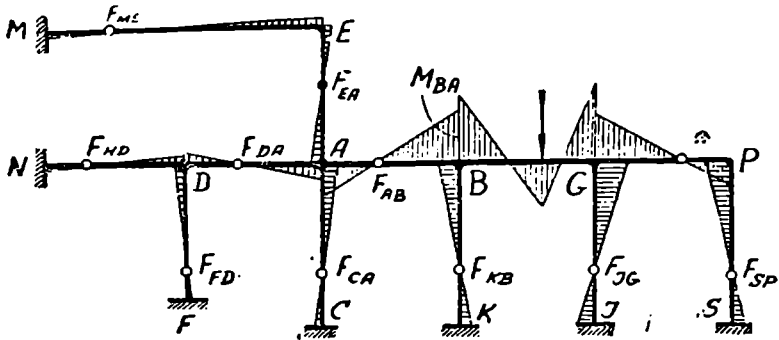
უცნობების განსაზღვრის შემდეგ ჯამური ეპიურის აგება წარმოებს ჩვეულებრივი წესით.

ჩარჩოების ანგარიში სამომენტო ფოკუსების მეთოდით

§ 87. სამომენტო ფოკუსებით ჩარჩოს ანგარიშის სამართო წესი

§ 49-ში ვნახეთ, რომ ფოკუსების მეთოდის გამოყენება უკრ კოქებში ანოცანას მნიშვნელოვნად ამარტივებს. დატვირთავი მალის ნულოვანი წერტილების—ფოკუსების განსაზღვრის შემდეგ ვანგარიშობთ დატვირთული მალის საყრდენ მომენტებს, ბოლოს ამ უკანასკნელის და საფოკუსო ფარდობების საშუალებით ვსაზღვრაჲთ დანარჩენი მალეების საყრდენ მომენტებს. ასეთივე თანმიმდევრობით შეიძლება ვიანგარიშოთ ჩარჩოებიც.

თუ ჩარჩო არ განიცდის ხაზობრივ გადაადგილებას და არ შეიცავს ჩაკეტილ კონტურებს, მაშინ მის ყოველ ელემენტს ექნება ორი ფოკუსი—მარცხენა და მარჯვენა. დატვირთული მალის საყრდენი მომენტი ნაწილდება კვანძში შემავალ ყველა ღეროზე. ამიტომ უნდა გავიგოთ



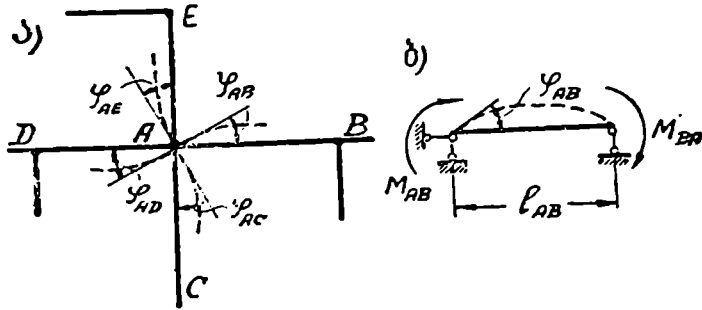
ნახ. 387.

თუ რა ნაწილი გადაეცემა თითოეულ ღეროს. ამას გავიგებთ ე. წ. გამანაწილებელი კოეფიციენტების საშუალებით. ასე მიღებულ მომენტებს თუ გავყოფთ საფოკუსო ფარდობებზე, მივიღებთ მომენტებს ღეროების მეორე ბოლოზე.

387-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ერთი მალის დატვირთვით გამოწვეული მლუნავი მომენტის ეპიურა. მლუნავი მომენტი ღეროში მით უფრო ნაკლებია, რაც უფრო დაშორებულია დატვირთული მალისაგან. თუ ჩვენ გვეკოდინება გამანაწილებელი კოეფიციენტები და საფოკუსო ფარდობები, ჩარჩოს ანგარიში გადაწყვეტილი იქნება. რაც შეეხება დატვირთული მალის საყრდენ მომენტებს, ისინი განისაზღვრება ისე, როგორც უკრი კოქის შემთხვევაში.

А კვანძში შემავალი მომენტების მიმართულებანი ავირჩიოთ M_{AB} მომენტის მიმართულების საწინააღმდეგოდ (ნახ. 388). თუ ანგარიშის შედეგად ისინი აღმოჩნდება დადებითი ნიშნით, მაშინ აღებული მიმართულებანი სწორი ყოფილა.

А კვანძის სიხისტის გამო მასში შემავალი ღეროები მობრუნდება ტოლი კუთხით (ნახ. 389, ა). AB ღეროს A კვეთის მობრუნების კუთხე φ_{AB}



ნახ. 389.

გავუტოლოთ AC ღეროს A კვეთის მობრუნების კუთხეს φ_{AO} -ს. კვეთის მობრუნება საათის ისრის მიმართულებით ავიღოთ დადებითი ნიშნით.

389, ბ ხახაზიდან ცხადია

$$\varphi_{AB} = -\frac{M_{BA} l_{AB}}{6EI_{AB}} + \frac{M_{AB} l_{AB}}{3EI_{AB}}.$$

თუ შევიტანთ M_{AB} -ის აბსოლუტურ მნიშვნელობას (ფორ. 174), მივიღებთ

$$\varphi_{AB} = -\frac{M_{BA}}{6i_{AB}} \left(1 - \frac{2}{K_{AB}}\right).$$

ანალოგიურად მივიღებთ AC ღეროს A კვეთის მობრუნების კუთხეს

$$\varphi_{AO} = -\frac{M_{AC} l_{AO}}{3EI_{AO}} + \frac{M_{CA} l_{AO}}{6EI_{AO}};$$

ამ ფორმულაში თუ შევიტანთ M_{CA} -ის აბსოლუტურ მნიშვნელობას (ფორ. 174), მივიღებთ

$$\varphi_{AO} = -\frac{M_{AC}}{6i_{AO}} \left(2 - \frac{1}{k_{CA}}\right).$$

(175) და (174) ფორმულებიდან ვიპოვიოთ M_{AC} -ს აბსოლიტურ სიდიდეს:

$$M_{AC} = \mu_{BAC} M_{AB} = \mu_{BAC} \frac{M_{BA}}{k_{AB}}.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა φ_{AC} -ს გამოსახულებაში და დაეწეროთ. ტოლობა $\varphi_{AB} = \varphi_{AC}$, მივიღებთ

$$\frac{1}{i_{AB}} \left(1 - \frac{2}{k_{AB}} \right) = \frac{1}{i_{AC} k_{AB}} \left(2 - \frac{1}{k_{OA}} \right) \mu_{BAC}.$$

საიდანაც

$$\mu_{BAC} = \frac{i_{AC} - \frac{k_{AB}-2}{2}}{i_{AB} \frac{1}{k_{CA}}} \quad (177)$$

თუ შევადგენთ ტოლობებს

$$\varphi_{AB} = \varphi_{AD} \quad \text{და} \quad \varphi_{AD} = \varphi_{AE},$$

სრულებით ანალოგიურად მივიღებთ გამანაწილებელ კოეფიციენტებს μ_{BAD} და μ_{BAE} -ს. ამისათვის საკმარისია (177) ფორმულაში ასო C შევცვალოთ სათანადოდ D და E -თი:

$$\mu_{BAD} = \frac{i_{AD} - \frac{k_{AB}-2}{2}}{i_{AB} \frac{1}{k_{DA}}}; \quad (178)$$

$$\mu_{BAE} = \frac{i_{AE} - \frac{k_{AB}-2}{2}}{i_{AB} \frac{1}{k_{EA}}}. \quad (179)$$

თუ ცნობილია საფოკუსო ფარდობები, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ (177—179) ფორმულებით ყველა გამანაწილებელი კოეფიციენტი.

რადგანაც საფოკუსო ფარდობები $k_{ik} > 2$, ამიტომ გამანაწილებელი კოეფიციენტები ყოველთვის დადებითია.

საფოკუსო ფარდობების განსაზღვრა

A კვანძის წონასწორობის პირობა მოგვცემს

$$M_{AO} + M_{AD} + M_{AE} = M_{AB}.$$

ამ განტოლებაში შევიტანოთ მომენტების მნიშვნელობები (175) ფორმულიდან და შევკვეცოთ M_{AB} -ზე, მივიღებთ

$$\mu_{BAC} + \mu_{BAD} + \mu_{BAE} = 1. \quad (180)$$

კვანძში შემავალ ღეროებზე M_{AB} მომენტის გამანაწილებელ კოეფიციენტების ჯამი ერთის ტოლია. თუ (180) ფორმულაში შევიტანთ გამანაწილებელი კოეფიციენტების მნიშვნელობებს, გვექნება

$$\frac{i_{AC}}{i_{AB}} \frac{k_{AB}-2}{2 - \frac{1}{k_{CA}}} + \frac{i_{AD}}{i_{AB}} \frac{k_{AB}-2}{2 - \frac{1}{k_{DA}}} + \frac{i_{AE}}{i_{AB}} \frac{k_{AB}-2}{2 - \frac{1}{k_{EA}}} = 1,$$

საიდანაც ვიპოვიტ საფოკუსო ფარდობას k_{AB} -ს:

$$k_{AB} = 2 + \frac{i_{AB}}{\frac{i_{AC}}{2 - \frac{1}{k_{CA}}} + \frac{i_{AD}}{2 - \frac{1}{k_{DA}}} + \frac{i_{AN}}{2 - \frac{1}{k_{EA}}}}$$

ან ზოგადად

$$k_{AB} = 2 + \frac{i_{AB}}{\sum \frac{i_{AN}}{2 - \frac{1}{k_{NA}}}} \quad (181)$$

ჯამი უნდა გავრცელდეს კვანძში შემაველ ყველა ლეროზე, გარდა AB -სი. N ინდექსით აღნიშნულია კვანძში შემაველი ლეროების მეორე ბოლოები, ეს ინდექსი ღებულობს სათანადოდ C, D და E მნიშვნელობებს.

ჩვენ მივიღეთ AB ლეროს მარცხენა საფოკუსო ფარდობის მნიშვნელობა გამოსახული მარცხენა ლეროების მარცხენა საფოკუსო ფარდობებით. თუ AB ლეროს A კვეთი ხისტად არის ჩამაგრებული (ნახ. 390, ა), მაშინ A კვანძში შემაველი ლეროების სიხისტეები შეგვიძლია მივიღოთ ∞ -ის ტოლად, ე. ი. $i_{AN} = \infty$, მაშასადამე

$$k_{AB} = 2 + \frac{i_{AB}}{\sum \frac{\infty}{2 - \frac{1}{k_{NA}}}} = 2.$$

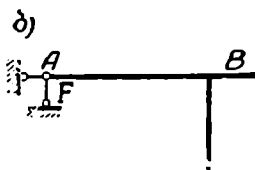
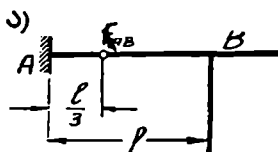
თუ AB ლეროს A კვეთი სახსროვანად არის ჩამაგრებული (ნახ. 390, ბ), მაშინ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ A კვანძში შემაველი ლეროების სიხისტეები ტოლია ნულის, ე. ი. $i_{AN} = 0$, რაც მოგვცემს

$$k_{AB} = 2 + \frac{i_{AB}}{\sum \frac{0}{2 - \frac{1}{k_{NA}}}} = \infty.$$

ამგვარად, ჩარჩოებში საწყის საფოკუსო ფარდობებს აქვთ ისეთივე მნიშვნელობები, როგორც უკრ კოქებში.

დატვირთული მალის საყრდენი მომენტები

რადგან ჩარჩოს თითოეული ლერო კვანძში ღრეკადად არის ჩამაგრებული, ამიტომ ჩარჩოს ლეროს და უკრი კოქის ნებისმიერი მალის მუშაობის ხასიათი ერთნაირია. როგორც ჩარჩოს ლეროების, ისე უკრი კოქის მალის ჩამაგრების

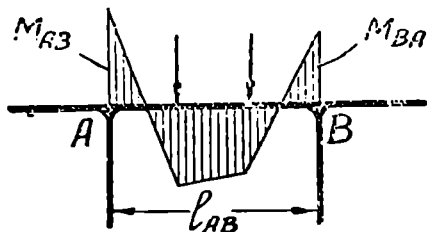


ნახ. 390.

ხარისხი ხასიათდება საფოკუსო ფარდობებით. თუ ეს ფარდობები ცნობილია, მაშინ ჩარჩოს დატვირთული მალის საყრდენი მომენტები განისაზღვრება ისევე, როგორც უკრ კოქში (იხ. § 49).

თუ წარმოვიდგენთ, რომ დატვირთულია ჩარჩოს ნებისმიერი AB ღერო (ნახ. 391), მაშინ (ფორ. 74):

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= -\frac{6}{l_{AB}} \cdot \frac{A_{AB}^0 k_{BA} - B_{AB}^0}{k_{AB} \cdot k_{BA} - 1}; \\ M_{BA} &= -\frac{6}{l_{AB}} \cdot \frac{B_{AB}^0 k_{AB} - A_{AB}^0}{k_{AB} \cdot k_{BA} - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (182)$$



ნახ. 391.

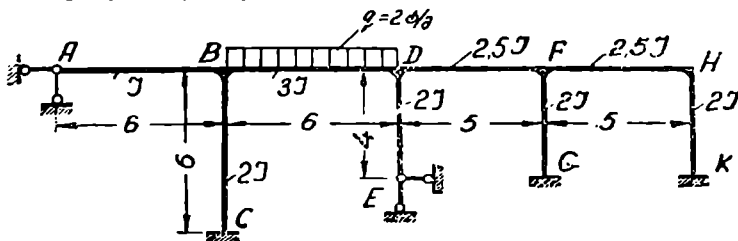
A_{AB}^0 და B_{AB}^0 ფიქტიური რეაქციების მნიშვნელობები ნოცემულია მე-6 ცხრილში (§ 46). თუ დატვირთულია რამდენიმე მალი, მაშინ თითოეულ დატვირთვის ვიხილავთ ცალკე და მიღებულ შედეგებს ვაჯამებთ.

ამ §-ში ჩვენ შევისწავლეთ ისეთი ჩარჩოების ანგარიში, სადაც ადგილი არა აქვს კვანძების ხაზობრივ გადაადგილებას.

კვანძების ხაზობრივი გადაადგილებების გავლენა განხილულია § 89-ში

§ 88. ჩარჩოს ანგარიშის მაგალითი ფოკუსების მეთოდით

ავაგოთ შრავალმალიანი ჩარჩოს მლუნავი მომენტის ეპიურა (ნახ. 392). ღეროების სიგრძეები და ინერციის მომენტები ნაჩვენებია ნახაზზე.



ნახ. 392.

გ ა და წყვეტა. სიხისტის კოეფიციენტები

$$i_{AB} = \frac{EI}{6}; \quad i_{BO} = \frac{EI}{3}; \quad i_{BD} = \frac{EI}{2};$$

$$i_{DE} = i_{DF} = i_{FH} = i_{FG} = i_{BK} = \frac{EI}{2}.$$

საფოკუსო ფარდობები დამოკიდებულია სიხისტის კოეფიციენტების ფარდობებზე და არა მათ აბსოლუტურ მნიშვნელობებზე, ამიტომ გამოთვლე-

ბის გამარტივების მიზნით ყველა კოეფიციენტი გადავმარავლოთ 6-ზე და მივიღოთ $EI=1$, მაშინ სიხისტის ფარდობით კოეფიციენტებს ექნებათ შემდეგი მნიშვნელობები:

$$i_{AB}=1; i_{BC}=2; i_{BD}=3; i_{DE}=i_{DF}=i_{FH}=i_{FG}=i_{HK}=3.$$

საფოკუსო ფარდობები

$$k_{AB}=k_{ED}=\infty; k_{CB}=k_{GF}=k_{KH}=2.$$

(181) ფორმულით თანდათანობით მივიღებთ:

$$k_{BD}=2+\frac{i_{BD}}{\frac{i_{BA}}{2-\frac{1}{k_{AB}}}+\frac{i_{BC}}{2-\frac{1}{k_{CH}}}}=2+\frac{3}{\frac{1}{2-\frac{1}{\infty}}+\frac{2}{2-\frac{1}{2}}}=3,63;$$

$$k_{DF}=2+\frac{i_{DF}}{\frac{i_{DB}}{2-\frac{1}{k_{BD}}}+\frac{i_{DE}}{2-\frac{1}{k_{ED}}}}=2+\frac{3}{\frac{3}{2-\frac{1}{3,63}}+\frac{3}{2-\frac{1}{\infty}}}=3,51;$$

$$k_{FH}=2+\frac{i_{FH}}{\frac{i_{FD}}{2-\frac{1}{k_{DF}}}+\frac{i_{FG}}{2-\frac{1}{k_{GF}}}}=2+\frac{3}{\frac{3}{2-\frac{1}{3,51}}+\frac{3}{2-\frac{1}{2}}}=3,2;$$

$$k_{HK}=2+\frac{i_{HK}}{\frac{i_{HF}}{2-\frac{1}{k_{FH}}}}=2+\frac{3}{2-\frac{1}{3,2}}=3,69;$$

$$k_{HF}=2+\frac{i_{HF}}{\frac{i_{HK}}{2-\frac{1}{k_{KH}}}}=2+\frac{3}{2-\frac{1}{2}}=3,5;$$

$$k_{FD}=2+\frac{i_{FD}}{\frac{i_{FH}}{2-\frac{1}{k_{HF}}}+\frac{i_{FG}}{2-\frac{1}{k_{GF}}}}=2+\frac{3}{\frac{3}{2-\frac{1}{3,5}}+\frac{3}{2-\frac{1}{2}}}=2,82;$$

$$k_{FG}=2+\frac{i_{FG}}{\frac{i_{FH}}{2-\frac{1}{k_{HF}}}+\frac{i_{FD}}{2-\frac{1}{k_{DF}}}}=2+\frac{3}{\frac{3}{2-\frac{1}{3,5}}+\frac{3}{2-\frac{1}{3,51}}}=2,86;$$

$$k_{DB} = 2 + \frac{i_{DB}}{\frac{i_{DE}}{2 - \frac{1}{k_{ED}}} + \frac{i_{DF}}{2 - \frac{1}{k_{FD}}}} = 2 + \frac{3}{\frac{3}{2 - \frac{1}{\infty}} + \frac{3}{2 - \frac{1}{2,82}}} = 2,90;$$

$$k_{DE} = 2 + \frac{i_{DE}}{\frac{i_{DE}}{2 - \frac{1}{k_{FD}}} + \frac{i_{DB}}{2 - \frac{1}{k_{ED}}}} = 2 + \frac{3}{\frac{3}{2 - \frac{1}{3,2}} + \frac{3}{2 - \frac{1}{3,63}}} = 2,85;$$

$$k_{BC} = 2 + \frac{i_{BC}}{\frac{i_{BA}}{2 - \frac{1}{k_{AB}}} + \frac{i_{BD}}{2 - \frac{1}{k_{DB}}}} = 2 + \frac{2}{\frac{1}{2 - \frac{1}{\infty}} + \frac{3}{2 - \frac{1}{2,90}}} = 2,60;$$

$$k_{BA} = 2 + \frac{i_{BA}}{\frac{i_{BC}}{2 - \frac{1}{k_{CB}}} + \frac{i_{BD}}{2 - \frac{1}{k_{DB}}}} = 2 + \frac{1}{\frac{2}{2 - \frac{1}{2}} + \frac{3}{2 - \frac{1}{2,90}}} = 2,32.$$

გამანაწილებელი კოეფიციენტები

$$\mu_{DBA} = \frac{i_{AB}}{i_{BD}} \frac{k_{BD} - 2}{2 - \frac{1}{k_{AB}}} = \frac{1}{3} \frac{3,63 - 2}{2 - \frac{1}{\infty}} = 0,274;$$

$$\mu_{DBC} = \frac{i_{CB}}{i_{BD}} \frac{k_{BD} - 2}{2 - \frac{1}{k_{CB}}} = \frac{2}{3} \frac{1,63}{2 - \frac{1}{2}} = 0,725;$$

$$\mu_{BDE} = \frac{i_{ED}}{i_{DB}} \frac{k_{DB} - 2}{2 - \frac{1}{k_{ED}}} = \frac{3}{3} \frac{2,90 - 2}{2 - \frac{1}{\infty}} = 0,45;$$

$$\mu_{BDF} = \frac{i_{FD}}{i_{DB}} \frac{k_{DB} - 2}{2 - \frac{1}{k_{FD}}} = \frac{3}{3} \frac{0,90}{2 - \frac{1}{2,82}} = 0,55;$$

$$\mu_{DFG} = \frac{i_{GF}}{i_{FD}} \frac{k_{FD} - 2}{2 - \frac{1}{k_{GF}}} = \frac{3}{3} \frac{2,82 - 2}{2 - \frac{1}{2}} = 0,53;$$

$$\mu_{DFH} = \frac{i_{HF}}{i_{FD}} \frac{k_{FD} - 2}{2 - \frac{1}{k_{HF}}} = \frac{3}{3} \frac{0,82}{2 - \frac{1}{3,5}} = 0,47.$$

დატვირთული მალის საყრდენი მომენტები

$$M_{BD} = -\frac{6}{l_{BD}} \frac{A_{DB}^{\text{წ}} k_{DB} - B_{BD}^{\text{წ}}}{k_{BD} k_{DB} - 1};$$

$$M_{DB} = -\frac{6}{l_{BD}} \frac{B_{BD}^{\text{წ}} k_{BD} - A_{DB}^{\text{წ}}}{k_{BD} k_{DB} - 1}.$$

ფიქტიური რეაქციები

$$A_{BD}^{\text{წ}} = B_{BD}^{\text{წ}} = \frac{ql^3}{24} = 18 \text{ ტმ}^2.$$

თუ შევიტანთ საფოკუსო ფარდობების და ფიქტიური რეაქციების მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$M_{BD} = -\frac{18 \cdot 2,9 - 18}{3,63 \cdot 2,9 - 1} = -\frac{34,2}{9,05} = -3,78 \text{ ტმ};$$

$$M_{DB} = -\frac{18 \cdot 3,63 - 18}{3,63 \cdot 2,9 - 1} = -\frac{47,4}{9,05} = -5,22 \text{ ტმ}.$$

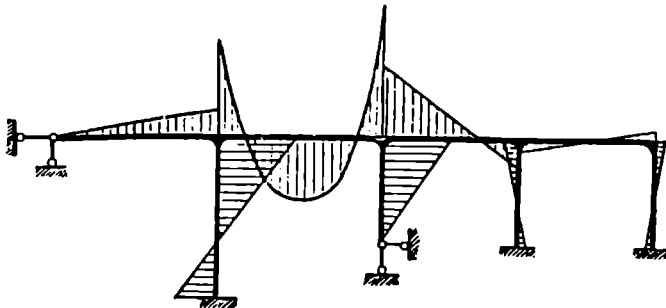
განმანაწილებელი კოეფიციენტების საშუალებით ვიპოვით

$$M_{BA} = M_{BD} \mu_{DBA} = -3,78 \cdot 0,274 = -1,04 \text{ ტმ};$$

$$M_{BC} = M_{BD} \mu_{DBC} = -3,78 \cdot 0,725 = -2,74 \text{ ტმ};$$

$$M_{DF} = M_{DB} \mu_{BDF} = -5,22 \cdot 0,55 = -2,87 \text{ ტმ};$$

$$M_{DE} = M_{DB} \mu_{BDE} = -5,22 \cdot 0,45 = -2,35 \text{ ტმ};$$



6აბ. 393.

$$M_{CB} = -\frac{M_{BC}}{2} = 1,37 \text{ ტმ};$$

$$M_{FD} = -\frac{M_{DF}}{k_{FD}} = \frac{2,87}{2,82} = 1,015 \text{ ტმ};$$

$$M_{FG} = M_{FD} \mu_{DFG} = 1,015 \cdot 0,53 = 0,545 \text{ ტმ};$$

$$M_{FH} = M_{FD} \mu_{DFH} = 1,015 \cdot 0,47 = 0,477 \text{ ტმ};$$

$$M_{BF} = -\frac{M_{FH}}{k_{BF}} = -\frac{0,47}{3,5} = -0,134 \text{ ტმ};$$

$$M_{HK} = M_{BF};$$

$$M_{KH} = -\frac{M_{HK}}{2} = 0,067 \text{ ტმ}.$$

მლუნავი მომენტის ეპიურა ნაჩვენებია 393-ე ნახაზზე.

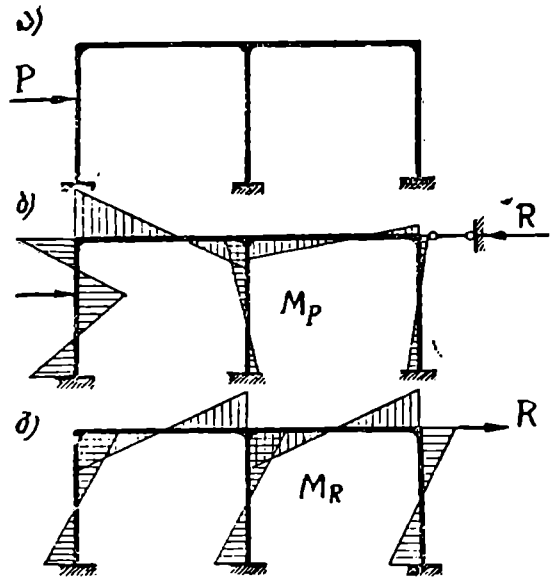
§ 89. ჩარჩოს კვანძების ხაზობრივი გადაადგილების გავლენა

წინა პარაგრაფებში ჩვენ გავარჩიეთ ისეთი ჩარჩოების ანგარიში, რომელთა კვანძებს არ შეუძლია ხაზობრივი გადაადგილება. ესლა განვიხილოთ უფრო ზოგადი შემთხვევა, როცა ადგილი აქვს ჰორიზონტალურ გადაადგილებას (ნახ. 394, ა).

გამოვიყენოთ ძალთა დამოკიდებულების პრინციპი და ჩარჩოს ანგარიში შევასრულოთ შემდეგი თანმიმდევრობით:

1) მოცემულ ჩარჩოს დავემატოთ საყრდენი ღერო და ამით მოვესპოთ ჰორიზონტალური გადაადგილების საშუალება (ნახ. 394, ბ); ამ მდგომარეობაში წინა პარაგრაფის ფორმულებით ავაგოთ მლუნავი მომენტის ეპიურა. ამასთანავე გამოვთვალოთ რეაქცია R დამატებით ღეროში;

2) მოცემულ ჩარჩოზე, დამატებული საყრდენის მაგიერ ვიმოქმედოთ R რეაქციის ტოლი და საწინააღმდეგო R ძალით (ნახ. 394, გ)



ნახ. 394.

და ავაგოთ მლუნავი მომენტის ეპიურა. მიღებული ორი ეპიურის შეჯამება მოგვცემს P ძალით გამოწვეულ ეპიურას მოცემულ ჩარჩოში, რადგან ფიქტიური R რეაქციის გავლენა ისპობა მისი ტოლი და საწინააღმდეგო მიმართულებით მოქმედი ძალის გავლენით.

მაშასადამე,
$$M = M_P + M_R,$$

სადაც M_P წარმოადგენს P ძალით გამოწვეულ მლუნავ მომენტს ჩამაგრებულ ჩარჩოში,

M_R კი $-R$ ძალით გამოწვეულ მომენტს თავისუფალ ჩარჩოში.

M_R ეპიურა იიგება გადაადგილებათა ან სხვა მეთოდით.

ლიტერატურა

1. Проф. Н. М. Рабинович—Строительная механика стержневых систем, II, 1954.
2. Проф. Н. Ш. Прокофьев—Теория сооружений, 1940.
3. Проф. А. В. Дарков и проф. В. И. Кузнецов—Статика сооружений, 1954.
4. Проф. П. В. Урбан—Теория расчета статически неопределенных конструкций, 1937.
5. Проф. С. А. Бернштейн—Основы расчета статически неопределенных систем, 1936.
6. Проф. Б. Н. Жемочкин и Д. П. Пашевский—Статика сооружений, 1950.
7. Проф. С. П. Тимошенко—Статика сооружений, 1930.
8. Проф. П. К. Снитко—Статика сооружений, 1941.
9. Проф. Н. Н. Безухов—Строительная механика, 1933.
10. Проф. Б. Н. Жемочкин—Расчет рам, 1933.
11. Проф. Н. Н. Безухов—Рамные конструкции, 1931.
12. Проф. Н. М. Рабинович—Методы расчета рам, I, II, III, 1934.
13. Проф. Мюллер-Бреслау—Графическая статика сооружений, 1913.
14. Проф. А. А. Уманский—Курс строительной механики самолета, 1948.
15. Проф. А. И. Аствацатуров—Расчет мостовых арок, 1952.
16. პროფ. გ. მ. მუხაძე—ნაშენთა სტატიკა—კოცები, 1935.
17. პროფ. კ. ს. ხავერიევი—ნაგებობათა წინაღობა, II, 1949.
18. პროფ. ა. ი. ასტვაცატუროვი—ნაშენთა სტატიკა, ნაწილი მეორე, 1941.
19. დოქ. კ. ი. ბაცვიკაძე—სტატიკურად ურყვევი სისტემების გაანგარიშება, 1951.
20. Kurt Beyer—Die Statik im Eisenbetonbau, 1933, ბერლინი.
21. I. Pirlet—Kompendium der Statik der Baukonstruktionen, ტომი II, ნაწილი 1 და 2.
22. R. Kirchhoff—Die Statik der Bauwerke, III, 1933, ბერლინი.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

წინასიტყვაობა
შესავალი

3
5

თ ა ვ ი I

ძირითადი თეორემები გადაადგილებებზე დრეკად სისტემებში

1. დეფორმაციები და გადაადგილებები	7
2. ვანზოგადებული ძალები და განზოგადებული გადაადგილებანი	9
3. შესაძლო გადაადგილების პრინციპი დრეკად სისტემებში	13
4. გარე ძალების მუშაობა	17
5. შიგა ძალების მუშაობა. პოტენციალური ენერჯია	21
6. მაგალითები გარე და შიგა ძალების მუშაობაზე და შესაძლო გადაადგილების პრინციპზე	27
7. მუშაობათა ურთიერთობის პრინციპი	31
8. გადაადგილებათა ურთიერთობის პრინციპი	33
9. მაგალითები მუშაობათა და გადაადგილებათა ურთიერთობის პრინციპზე	36
10. გადაადგილებათა ზოგადი ფორმულა ლეროვანი სისტემისათვის—მორის ფორმულა	39
11. მაგალითები გადაადგილებათა განსაზღვრაზე	42
12. გადაადგილებათა გამოთვლა ეპიურების გადამრავლების საშუალებით (ვერეშჩაგინის წესი	48
13. მაგალითები გადაადგილებათა განსაზღვრაზე ეპიურების გადამრავლების საშუალებით	51
14. ტემპერატურის ცვლილებით გამოწვეული გადაადგილებები.	57
15. მაგალითები ტემპერატურულ გადაადგილებებზე	60
16. საყრდენების დაჯდომით (გადაადგილებით) გამოწვეული გადაადგილებების განსაზღვრა	63
17. გადაადგილებათა განსაზღვრა პოტენციალური ენერჯიის საშუალებით (კასტილინოს თეორემა)	66
18. უმცირესი მუშაობის პრინციპი	69
19. გადაადგილების გავლენის ხაზი	70
20. გადაადგილებათა განსაზღვრა დრეკადი ტვირთის საშუალებით	73
21. გადაადგილებათა განსაზღვრა ფერმებში დრეკადი ტვირთების საშუალებით	80
22. სავარჯიშო მაგალითები გადაადგილებათა განსაზღვრაზე	81

თ ა ვ ი II

ხერთო ცნობები სტატიკურად ურკვევი სისტემებზე შესახებ

23. სტატიკური ურკვეობა და მისი ხარისხი. ზედმეტი უცნობები	84
24. სავარჯიშო მაგალითები სტატიკური ურკვევობის ხარისხის გამოთვლაზე	92
25. სტატიკურად ურკვევი სისტემების თავისებურებანი	92
26. ჩარჩოს ცნება	95

სტატეკურად ურკვევი სისტემის ანგარიში საერთო წესი ძალთა მეთოდით

27. ძირითადი სისტემა, კანონიკურ განტოლებათა სისტემა .	97
28. სტატეკურად ურკვევი მარტივი სისტემების ანგარიშის მაგალითები გარე დატვირთვაზე	102
29. მარტივი სისტემების ანგარიშის მაგალითები ტენზორატურის მოქმედებაზე	113
30. სტატეკურად ურკვევი სისტემების ანგარიში საყრდენის გადაადგილებაზე (დაჯდომაზე)	116
31. ჩარხოების ანგარიშის გამარტივება, უსასრულოდ ხისტი კონსოლების გამოყენება	123
32. სიმეტრიის გამოყენება	133
33. უცნობთა დაჯგუფების მეთოდი	136
34. დატვირთვის გარდაქმნა	141
კანონიკურ განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტების შემოწმება	145
36. კანონიკურ განტოლებათა სისტემის გადაწყვეტა გაუსის შემოკლებული ალგორითმით	146
37. მლუნავი მომენტის განივი და გრძივი ძალის ეპიურების აგება სტატეკურად ურკვევი ჩარხოში	150
38. მლუნავი მომენტის ჯამური ეპიურების წმენდა	157
39. სტატეკურად ურკვევი სისტემის ანგარიშის მსვლელობა ძალთა მეთოდით .	160

რთული ჩარხო ანგარიშის მაგალითები

40. მლუნავი მომენტის ეპიურების აგება რთულ, სტატეკურად რკვევად სისტემებში	161
41. ძირითადი სისტემის არჩევის მაგალითები	165
42. რთული ჩარხო ანგარიშის მაგალითები	172
43. საყარჯიშო მაგალითები	194

უკრი კოქების ანგარიში

4. საერთო ცნობები, უკრი კოქების გამოყენება	198
45. ძირითადი სისტემის არჩევა	199
46. უკრი კოქის კანონიკური განტოლება (სამ მომენტთა განტოლება)	200
47. მლუნავი მომენტის, განივი ძალის და საყრდენი რეაქციების განსაზღვრა უკრი კოქებში	204
48. უკრი კოქების ანგარიშის მაგალითები	207
49. უკრი კოქების ანგარიში ფოკუსების მეთოდით .	212
50. გველენის ხაზების აგება უკრი კოქებში	220
51. უკრი კოქის გველენის აგება ჩაღუნვის ხაზის საშუალებით (გველენის ხაზის მოდელი)	224
52. უკრი კოქის ყველაზე არახელსაყრელი დატვირთვა .	227

სტატეკურად ურკვევი ფერმების ანგარიში

53. სტატეკურად ურკვევი ფერმები, მათი სტატეკურად ურკვევობის ხარისხი	229
54. გადაადგილებათა განსაზღვრა ფერმებში	230
55. სტატეკურად ურკვევი ფერმების ანგარიში მუდმივ ტვირთზე, ძირითადი სისტემის არჩევა	232
56. სტატეკურად ურკვევი ფერმის ანგარიშის მაგალითი მუდმივ ტვირთზე	235
57. სტატეკურად ურკვევი ფერმების ანგარიში მოძრავ ტვირთზე	238
58. სტატეკურად ურკვევი ფერმის ანგარიშის მაგალითი მოძრავ ტვირთზე	239
59. ორჯერ სტატეკურად ურკვევი ფერმების ანგარიში მოძრავ ტვირთზე .	243

სტატიკურად ურკვევი თაღების ანგარიში

60. საერთო ცნობები თაღებზე	246
61. გადაადგილებათა განსახლება თაღებში	248
62. ორსახარანი თაღის ანგარიში მუდმივ ტვირთზე	249
63. ორსახარანი თაღის ანგარიში ტემპერატურაზე და საყრდენების დაჯდომაზე	252
64. პარაბოლური ორსახარანი თაღის ანგარიში მუდმივ ტვირთზე	253
65. ორსახარანი თაღის ანგარიში მოძრავ ტვირთზე (გაყენის ხაზების აგება)	255
66. ორსახარანი შემოკლებიანი თაღის ანგარიში	260
67. უსახსრო თაღის ანგარიში მუდმივ ტვირთზე	262
68. უსახსრო თაღის ანგარიში ტემპერატურაზე და საყრდენების დაჯდომაზე	266
69. პარაბოლური უსახსრო თაღის ანგარიში	267
70. უსახსრო თაღის გაყენის ხაზების აგება დრეკადი ტვირთების საშუალებით	274
71. დრეკადი ტვირთების საშუალებით უსახსრო თაღის ანგარიშის მაგალითი	280
72. უსახსრო თაღის რაციონალური მოხაზულობა და წნევის მრუდი	289
73. უსახსრო თაღის ანგარიში ცხრილებით საშუალებით	296
74. წრიული უსახსრო თაღის ანგარიში	301

ჩარჩოების ანგარიში გადაადგილებათა მეთოდით

75. გადაადგილებათა მეთოდის ძირითადი დაშვებები და უცნობების შერჩევა	305
76. კუთხურ და ხაზობრივ გადაადგილებათა ხარისხი (უცნობთა რიცხვის განსახლება)	306
77. დამოუკიდებელ და დამოკიდებულ გადაადგილებებს შორის კავშირი. გადაადგილებათა დიაგრამა	309
78. გადაადგილებათა მეთოდის ძირითადი სისტემის არჩევა	312
79. სტატიკურად ურკვევი კოკების რეაქციების განსახლება (გადაადგილებათა მეთოდის კოეფიციენტები)	316
80. გადაადგილებათა მეთოდის კანონიერი განტოლებები	320
81. ჩარჩოების ანგარიშის მაგალითები გადაადგილებათა მეთოდით	324
82. სიმეტრიის გამოყენება. უცნობთა დაჯგუფება	338
83. ჩარჩოების ანგარიში ტემპერატურაზე	342
84. კომბინირებული წესი	346
85. ძალთა და გადაადგილებათა მეთოდის შედარება	347
86. შერეული მეთოდი	348

ჩარჩოების ანგარიში სამომენტო ფოკუსების მეთოდით

87. სამომენტო ფოკუსებით ჩარჩოს ანგარიშის საერთო წესი	351
88. ჩარჩოს ანგარიშის მაგალითი ფოკუსების მეთოდით	354
89. ჩარჩოს კვანძების ხაზობრივი გადაადგილების გაყენება	360
90. ლიტერატურა	361

რედაქტორი პროფ. ივ. ღ. მონიშვილი

რეცენზენტი დოც. ვ. ა. ვართაპეტოვი

გამომც. რედაქტორი ა. ძაგანია

კორექტორი ნ. თალაკვაძე

ტექნორედაქტორი გ. ჯანელიძე

გამომგები გ. აბღლაძე

№ 04633.

ტირაჟი 1000.

შეკვეთა № 641

გადამცეა ასაწყობად 23/III-56 წ. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 19/VI-56 წ. ანაწყობის ზომა 7×11, ქალაღდის ზომა 70×108, სასტამბო ფურცელთა რაოდენობა 22,87, საღარიცხო ფურცელთა რაოდენობა 22,83.

ფასი 8 მან. 25 კპპ.

საქართველოს სსრ კულტურის სამინისტროს გამომცემლობისა და პოლიგრაფიული მრეწველობის შთაღარი სამმართველოს სტამბა № 2 თბილისი, ფურცელაღის ქ. № 5.

Типография № 2 Главного управления издательств и полиграфической промышленности Министерства культуры Грузинской ССР. Тбилиси, ул. Пугцеладзе, № 5.